UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS.

MECÁNICA DE MATERIALES I.

CUADERNO 2 “VIGAS ISOSTÁTICAS”.

OSCAR M. GONZÁLEZ CUEVAS.

I N D I C E

NOTA PRELIMINAR

En estos apuntes se pretende cubrir el material que se enseña en los cursos de Mecánica de Materiales I y II de la carrera de Ingeniero Civil en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

Se ha procurado combinar la teoría con las aplicaciones prácticas y se ha puesto énfasis en los aspectos de Mecánica de Materiales de más interés para el ingeniero civil. Así los conceptos fundamentales de la Mecánica de Materiales se deducen a partir del estudio del comportamiento de los elementos estructurales usuales. Estos conceptos se aplican entonces al dimensionamiento de estos elementos en los materiales más comunes (acero, concreto reforzado, mampostería, madera).

En el desarrollo de los apuntes se tuvo presente que al finalizar el curso el alumno debe ser capaz de dimensionar estructuras isostáticas sencillas, conocidas las cargas que actúan sobre ellas.

Se han incluido ejemplos resueltos y comentados que ilustran y aclaran los conceptos expuestos en el texto. Al final de la mayoría de las secciones se hacen sugerencias sobre lecturas complementarias. Estas se han escogido por la claridad de la exposición, procurando que estén a un nivel fácilmente accesible para el lector.

Se ha reducido a un mínimo el material meramente informativo o descriptivo, que se hace obsoleto rápidamente y que no contribuye a la formación del estudiante.

Los apuntes han sido preporados par un grupo de profesores de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. y editados por los profesores Francisco Robles F. V. y Oscar M. González Cuevas, quienes desarrollaron, además, algunos de los temas. Parte del material está basado en los "Complementos de Mecánica de Materiales" publicados por la Facultad en años recientes.

Los apuntes se publicarán en varios fascículos, en lugar de un solo volumen, con el fin de facilitar las modificaciones que la experiencia indique convenga hacer en ediciones futuras. El presente fascículo incluye los siguientes temas: "Teoría de vigas", "Vigas de madera", "Vigas de concreto reforzado y losas armadas en un sentido". No se ha incluido una sección sobre vigas de acero porque un aspecto esencial de su dimensionamiento es la consideración del efecto de la tendencia al pandeo lateral, tema que se estudia posteriormente.

1. TEORIA DE VIGAS

Oscar M. González Cuevas
Francisco Robles
Carlos Javier Mendoza

1.1 INTRODUCCION

Las vigas son elementos estructurales cuya función primordial es resistir cargas perpendiculares a su eje longitudinal. Las acciones internas más importantes que producen estas cargas son momentos flexionantes y fuerzas cortantes, aunque las vigas pueden estar sometidas también a momentos torsionantes y fuerzas normales.

Por lo común, una de las dimensiones de las vigas, su longitud, es mucho mayor que sus otras dos dimensiones, su ancho y su peralte. En algunas ocasiones, el peralte es de dimensión comparable con la longitud, y las vigas reciben el nombre de vigas de gran peralte o vigas diafragma. El estudio de este último tipo de vigas no se incluye en estos apuntes.

En la mayoría de las estructuras de ingeniería civil, las vigas se usan para soportar cubiertas y losas de entrepisos o azoteas. Las cargas se transmiten a las vigas a través de las losas, y las vigas las transmiten a su vez, a las columnas o muros. Las vigas se emplean también para soportar maquinaria, equipo o grúas viajeras; en puentes; en cimentaciones; etc. Unicamente se estudian aquí vigas isostáticas.

El efecto de los momentos flexionantes sobre las vigas se estudia en la sección

denominada "Teoría de Flexión". Se analizan en dicha sección tanto la resistencia como las deformaciones de vigas sometidas únicamente a flexión simétrica. En la siguiente sección se presentan métodos para determinar la resistencia de vigas a fuerza cortante, sin considerar el efecto combinado de esta acción con el de otras acciones. Se estudia en forma simplista la flexión simétrica. Después se hace un estudio del efecto combinado de momento flexionante y fuerza cortante.

Los concepto básicos presentados en estas secciones se utilizan en las secciones siguientes para estudiar el dimensionamiento de vigas de madera y concreto. Las vigas de acero, que presentan problemas especiales debidos al efecto de pandeo, se estudian en otro capítulo.

1.2 TEORIA DE FLEXION

1.2.1 Conceptos introductorios

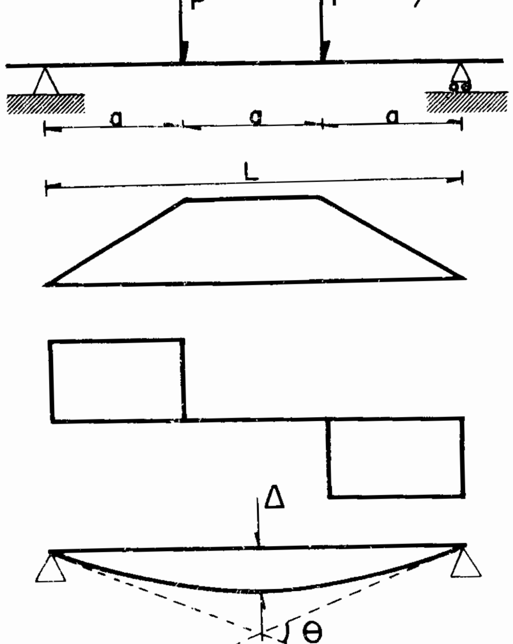
El comportamiento en flexión de elementos estructurales se ha estudiado experimentalmente ensayando especímenes simplemente apoyados y sujetas a dos cargas concentradas, generalmente en los tercios del claro (fig 1.1-a). Como puede verse en los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes mostrados en las figs 1.1-b y 1.1-c, el claro central de este tipo de espécimen se encuentra bajo la acción de momento flexionante únicamente.

Se acostumbra medir en los ensayes la carga que se va aplicando a los especímenes, P, la deflexión en el centro del claro, Δ, y en otras secciones de la viga, y, en ocasiones, la rotación que experimenta la viga entre sus dos extremos, θ, (fig 1.1-d). Conocida la carga aplicada, P, y la distancia entre los apoyos y los puntos de aplicación de carga, a, puede calcularse el valor del momento en la zona central, M, correspondiente a diferentes valores de P. Con los datos obtenidos en los ensayes, o sea, con los valores de P, M, Δ y θ, se trazan diagramas carga-deflexión (P-Δ) y momento-rotación (M-θ), los cuales representan el comportamiento

del espécimen de ensaye. En la fig 1.2 se presentan ejemplos de estos diagramas.

El conocimiento de los diagramas carga-deflexión y momento-rotación es importante para fines de diseño estructural, ya que indican la carga o el momento flexionante que pueden resistir estos elementos y las deflexiones y rotaciones correspondientes a diferentes valores de la carga aplicada.

Los diagramas carga-deflexión y momento-rotación pueden obtenerse experimentalmente para casi cualquier tipo de elemento estructural. Sin embargo, esto no resulta práctico por lo laborioso y caro que sería efectuar ensayes en todos los casos en que se fuesen a diseñar elementos a flexión. Por lo tanto, se han desarrollado métodos para calcular analíticamente los diagramas, haciendo ciertas hipótesis sencillas y suponiendo conocidas ciertas características de los materiales con que se fabrican los elementos. En las secciones siguientes de este capítulo se describen estos métodos.



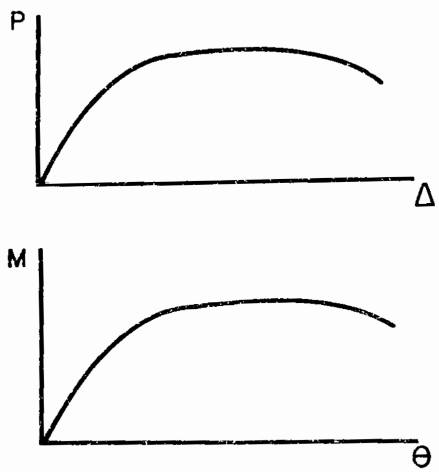
a) Espécimen de ensaye a flexión

b) Diagrama de momentos flexionantes

c) Diagrama de fuerzas cortantes

d) Deformaciones

Fig. 1.1 Ensaye de flexión típico



a) Carga-deflexión

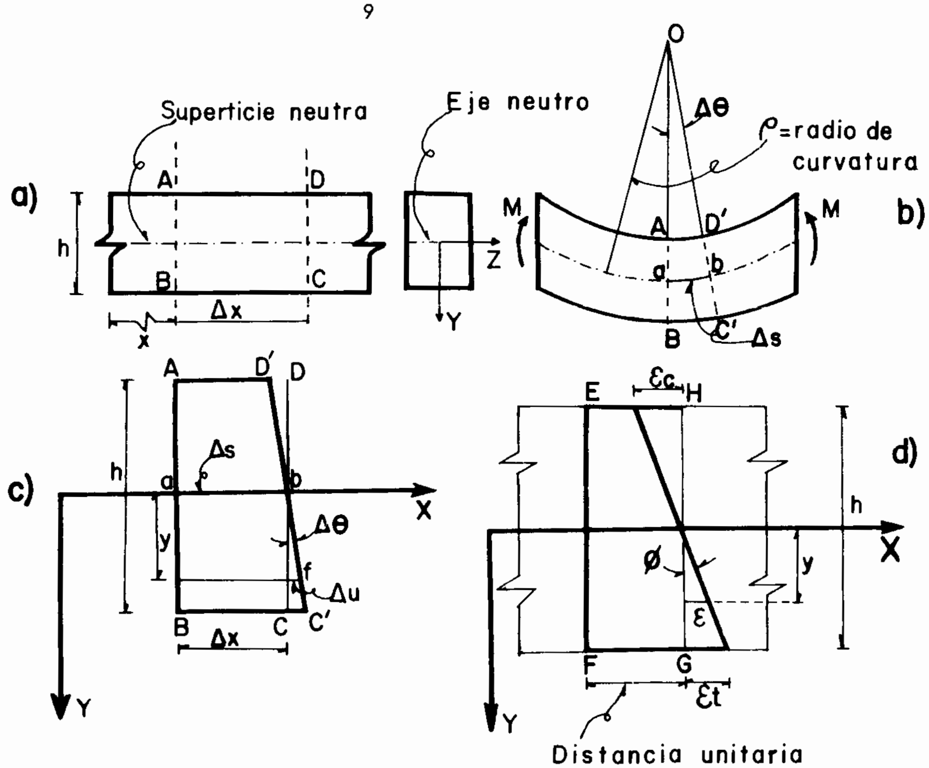
b) Momento-rotación

Fig. 1.2 Diagramas típicos obtenidos en ensayes de flexión

1.2.2 Deformaciones unitarias, rotaciones y curvaturas

En esta sección se introducen conceptos que se usan posteriormente para calcular diagramas carga-deflexión y momento-rotación. Para ello se analiza el mecanismo de deformación de una viga sujeta a flexión pura y a partir de este mecanismo se obtienen importantes relaciones entre deformaciones unitarias, curvaturas y rotaciones.

Considérese que en la zona central del espécimen de ensaye de la fig 1.1 se hacen dos cortes en las secciones A-B y C-D (fig 1.3-a), distantes entre sí una longitud Δx. Antes de aplicar las cargas P, el eje longitudinal de la viga es recto, como se muestra en la fig 1.3-b, en la que se ve que las fibras de la zona superior de la viga se acortan, o sea, sufren deformaciones de compresión, y las fibras de la zona inferior se alargan, o sea, sufren deformaciones de tensión. Existen algunas fibras que, como puede apreciarse en la figura, no se acortan ni se alargan; es decir, no sufren deformaciones. La superficie en que están contenidas estas fibras que no se deforman se llama <u>superficie neutra</u> y su intersección con una sección transversal de la viga se llama el <u>eje neutro</u> de esa sección.



$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \qquad (1.1)$$

$$\phi = \frac{1}{y}\,\frac{\Delta u}{\Delta s} \qquad (1.4)$$

$$\phi = \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \qquad (1.2)$$

$$\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{y}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{y}\,\frac{du}{dx} \qquad (1.5)$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta u}{y} \qquad (1.3)$$

$$\phi = \frac{\varepsilon}{y} \qquad (1.6)$$

Fig 1.3. Deformaciones en la zona central Del espécimen de la fig 1.1.

En la fig 1.3-b se ha señalado la posición que ocupan en la viga deformada las secciones transversales A-B y C-C. Se puede ver que estas secciones, que originalmente eran paralelas, forman ahora un ángulo $\Delta\theta$ que es la rotación relativa entre las dos secciones. Por conveniencia, se ha elegido la sección A-B como aquella que permanece en un plano vertical al deformarse la viga. La nueva posición de los puntos D y C se ha indicado con índice (D' y C').

Es importante observar en las figs 1.3-b y 1.3-c que las secciones A-B y D-C se han trazado como líneas rectas después de la deformación de la viga. Esto se ha hecho aceptando una hipótesis usual en la teoría de flexión de vigas, la cual establece que las secciones que son planas antes de la deformación continúan siendo planas después de la deformación. Esta hipótesis fue formulada por Navier a principios del siglo XIX y se conoce con el nombre de <u>hipótesis de las secciones planas</u>. Ha sido confirmada experimentalmente para materiales usuales.

En la fig 1.3-c se muestra el segmento de viga ABC'D' en forma amplificada y se muestra también la posición de la sección C'-D' antes de la deformación de la viga -- (C-D). En esta figura se ha señalado con Δu la deformación que sufre una fibra cualquiera situada a una distancia y del eje neutro. Si se divide esta deformación Δu entre la separación original entre las dos secciones, Δx , se obtiene la <u>deformación unitaria</u> promedio de la fibra considerada.

Si la separación Δx se hace tender a cero y se toman límites, la deformación unitaria de una sección de la viga (fig 1.3-d) se puede expresar como

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \qquad (1.1)$$

Puesto que las deformaciones Δu son mayores cuanto más alejados del eje - neutro se encuentren las fibras longitudinales de la viga, las deformaciones unitarias máximas se alcanzan en las caras superior e inferior de la viga. Las deformaciones unitarias, ε , pueden interpretarse físicamente como los acortamientos y alargamientos que sufren las fibras entre dos secciones separadas entre sí una distancia unitaria (fig 1.3-d). Las unidades de estos acortamientos y alargamientos son las mismas unidades de la separación unitaria entre las dos secciones. Las deformaciones unitarias, ε, son adimensionales puesta que son el cociente de dos longitudes, como indica la ecuación (1.1).

Si se divide la ratación relativa de las secciones A-B y C-D entre su separación, Δs, se obtiene lo rotación promedio por unidad de longitud, que recibe el nombre de curvatura y se representa con la letra ϕ .

$$\phi = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \qquad (1.2)$$

Δs es la longitud del arco, a la altura del eje neutro, comprendido entre las secciones A B y C' D' de la viga deformada. En este inciso la curvatura se considera con valor absoluto.

El recíproco de la curvatura recibe el nombre de radio de curvatura, ρ. Como $\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}$, su significado físico es el mastrado en la fig 1.3-b. En la sección 1.2.4 se demuestra que la curvatura y el radio de curvatura son constantes si el momento flexionante es constante y si no varían las características geométricas y mecánicas de la viga a lo largo de su eje.

Por semejanza entre los triángulos aOb (fig 1.3-b) y CbC' (fig 1.3-c), el ángulo CbC' es igual al ángulo $\Delta\theta$.

Ahora bién, de la fig (1.3-c) se deduce que

$$\Delta\theta = \frac{\Delta u}{y} \qquad (1.3)$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2).

$$\phi = \frac{1}{y}\frac{\Delta u}{\Delta s} \qquad (1.4)$$

Puesto que las deformaciones verticales de la viga son pequeñas, el arco es prácticamente igual a la cuerda y por lo tanta Δs es prácticamente igual a Δx,

y puede sustituir en la ecuación (1.4). Si se hace esta sustitución y la separación Δx se hace tender a cero, la curvatura en una sección transversal, queda expresada par la ecuación:

$$\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{y}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{y}\frac{du}{dx} \qquad (1.5)$$

Pero camo se ve en la ecuación (1.1) el término du/dx es la deformación unitaria ε. Sustituyendo en la ecuación (1.5) se obtiene

$$\phi = \frac{\varepsilon}{y} \quad ; \quad \varepsilon = \phi y \qquad (1.6)$$

Esta ecuación indica que la curvatura de una sección es igual a la deformación unitaria de una fibra cualquiera, ε, dividida entre la distancia de la fibra al eje neutro, y. La curvatura, ϕ , se puede interpretar físicamente como la rotación entre dos secciones separados entre sí una distancia unitaria (fig 1.3-d). Sus unidades son $(L)^{-1}$ puesta que es el cociente de una cantidad adimensional (ε) entre una longitud (y). En cambio, las rotaciones son adimensionales - (radianes) puesto que son el cociente de dos longitudes como puede verse en la ecuación (1.3).

La ecuación 1.6 muestra que las deformaciones unitarias longitudinales, ε, son directamente proporcionadas a la curvatura y a la distancia y del eje neutro.

Con la convención de ejes adoptada, para fibras situadas debajo del eje neutra la distancia y es positiva y la deformación unitaria es positiva (tensión). Para fibras situadas arriba del eje neutro se invierten los signos

1.2.3 Esfuerzos en vigas de materiales elásticos y lineales. Fórmula de la escuadría

Considérese una viga de material lineal y elástico (fig 1.4-a), de sección transversal cualquiera, pero simétrica respecto al eje vertical (fig 1.4-b), y supóngase que por efecto de un momento flexionante, M, la viga se deforma de tal manera que la fibra superior sufre una deformación unitaria de compresión, ε_c , y la fibra inferior, una deformación unitaria de tensión, ε_t . Si se admite la hipótesis de las secciones planas, mencionada anteriormente, el diagrama de deformaciones unitarias en una sección transversal será lineal, como se muestra en la fig 1.4-c. El eje neutro está localizado a distancias c_1 y c_2 de las caras superior e inferior de la viga, respectivamente. El diagrama de esfuerzos resulta también lineal como se muestra en la fig 1.4-d, puesto que existe una relación lineal entre deformaciones unitarias y esfuerzos, según lo indica la curva esfuerzo-deformación del material (fig 1.4-a). El esfuerzo en una fibra cualquiera es $f = E\varepsilon$, siendo ε la deformación unitaria correspondiente a esa fibra. Siguiendo las convenciones de signo del inciso anterior, los esfuerzos de tensión son positivos y los de compresión, negativos.

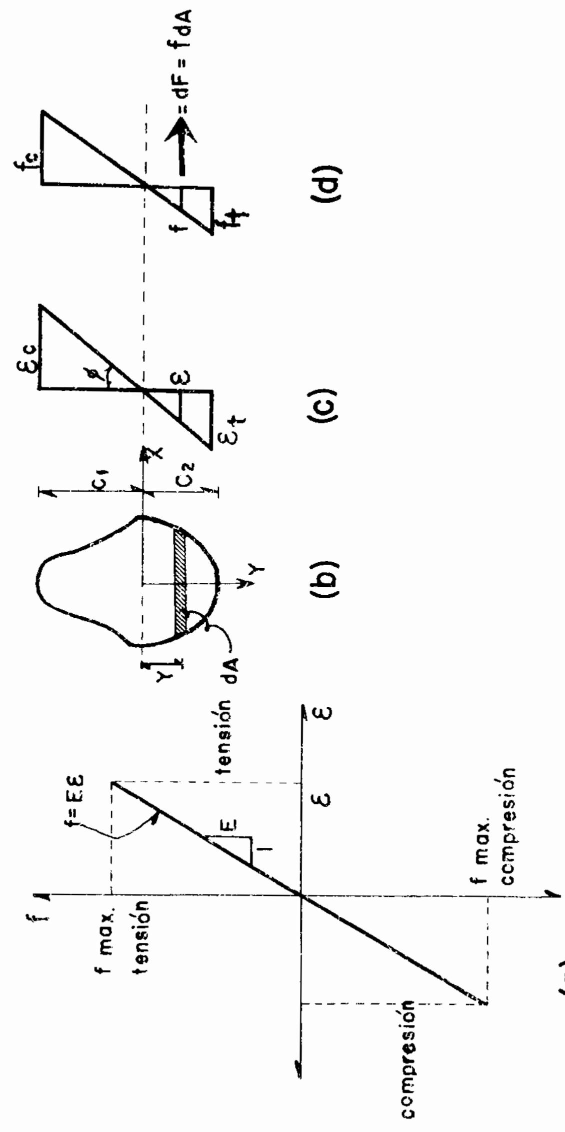


Fig 1.4. Relaciones esfuerzo-deformación en una sección de material elástico

La fuerza de compresión o tensión, dF, en una franja diferencial cualquiera situada a una distancia y del eje neutro, como la indicada en la fig 1.4-b, es igual al producto del área de la franja, dA, por el esfuerzo al nivel de la franja, f. Por lo tanto,

$$dF = f\,dA = E \cdot \varepsilon \cdot dA \qquad (1.7)$$

La suma de las fuerzas de compresión y de tensión en la sección transversal se puede encontrar integrando la ecuación (1.7) entre los límites $y = -c_1$ y $y = c_2$:

$$C + T = \int_{-c_1}^{c_2} E \cdot \varepsilon \cdot dA$$

Para que la sección esté en equilibrio, la fuerza de compresión, C, debe ser igual y de signo contrario a la de tensión, T. Por lo tanto, la integral debe ser igual a cero:

$$\int_{-c_1}^{c_2} E \cdot \varepsilon \cdot dA = 0$$

Esta integral se puede escribir también en la siguiente forma:

$$\int_{-c_1}^{c_2} E \frac{\varepsilon}{y}\, y\,dA = 0$$

El término ε/y es constante ya que por triángulos semejantes en la fig. 1.4-c se obtiene:

$$\frac{\varepsilon}{y} = \frac{\varepsilon_c}{c_1} = \frac{\varepsilon_t}{c_2} = \text{constante}$$

Sacando los términos constantes del integrando:

$$E \frac{\varepsilon}{y} \int_{-c_1}^{c_2} y\,dA = 0$$

Para que se cumpla esta ecuación, la integral debe ser nula puesto que los términos constantes no lo son. Por lo tanto,

$$\int_{-c_1}^{c_2} y\,dA = 0 \qquad (1.8)$$

Esta integral representa el momento estático o momento de primer orden de la sección transversal respecto al eje neutro e indica que dicho momento es nulo. Para que se cumpla esta condición, el eje neutro debe coincidir con el eje centroidal de la sección, ya que el momento estático de un área sólo es nulo respecto a su eje centroidal.

Una vez conocida la posición del eje neutro, puede calcularse el momento resistente de la sección tomando momentos de las fuerzas dF respecto al eje neutro:

$$M = \int_{-c_1}^{c_2} y\,dF = \int_{-c_1}^{c_2} y\,f\,dA = \int_{-c_1}^{c_2} y\,E\,\varepsilon\,dA = \int_{-c_1}^{c_2} E \frac{\varepsilon}{y}\, y^2\,dA$$

Puesto que el término ε/y es constante, según se demostró anteriormente, esta integral se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = \frac{E\varepsilon}{y} \int_{-c_1}^{c_2} y^2\,dA = \frac{f}{y} I \qquad (1.9)$$

donde I representa el momento de inercia o momento de segundo orden de la sección transversal del elemento respecto a su eje centroidal, que es igual precisamente a

$$\int_{-c_1}^{c_2} y^2\,dA$$

El momento máximo que puede resistir una sección transversal se obtiene cuando el esfuerzo f en la fibra más alejada del eje neutro es igual al esfuerzo máximo, f_{max}, que resiste el material en un ensaye de tensión o compresión uniaxial (fig 1.4-a). Por lo tanto,

$$M_{max} = \frac{(f_{max})_{compr}}{c_1} I \qquad (1.10)$$

ó

$$M_{max} = \frac{(f_{max})_{tens}}{c_2} I \qquad (1.11)$$

Estas ecuaciones indican que la resistencia del elemento puede alcanzarse de dos maneras. Si el término $(f_{max})_{compr} / c_1$ es menor que el término $(f_{max})_{tens} / c_2$, la falla ocurre en compresión, y, en caso contrario, la falla ocurre en tensión. Las ecuaciones 1.10 y 1.11 se conocen con el nombre de fórmulas de flexión o fórmulas de la escuadría.

La ecuación (1.9) se utiliza también para encontrar el esfuerzo en cualquier punto a que se encuentra sujeto al material cuando se conoce el momento flexionante que actúa sobre un elemento. Despejando el término f de dicha ecuación:

$$f = \frac{M}{I} y \qquad (1.12)$$

Como el esfuerzo máximo es el que se presenta en la fibra más alejada del eje neutro, se puede encontrar dicho esfuerzo sustituyendo el término y por el término c que representa la distancia del eje neutro a la fibra más alejada.

Se obtiene:

$$f = \frac{M}{I} c \qquad (1.13\text{-a})$$

El término I/c es constante para una sección transversal dada. Se representa usualmente con la letra S y se conoce con el nombre de módulo de sección. La ecuación (1.13-a) puede escribirse por lo tanto:

$$f = \frac{M}{S} \qquad (1.13\text{-b})$$

Si la sección no es simétrica con respecto al eje neutro, existirá un módulo de sección para cada cara, como sucede en el ejemplo 1.3.

El momento M que aparece en las ecuaciones anteriores es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga, y, de acuerdo con la convención de ejes, la distancia y es positiva hacia abajo (fig 1.5 y Apéndice B).

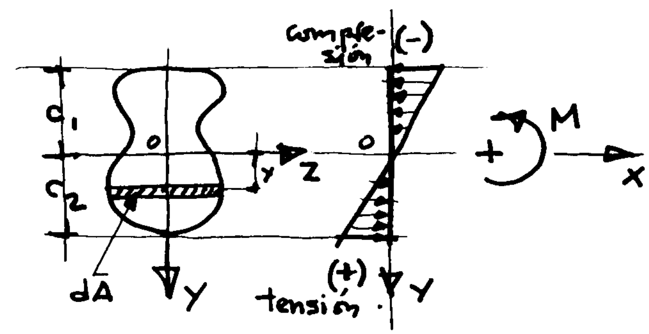


Fig 1.5 Convención de signos.

La curvatura de la sección transversal, según se ha visto anteriormente, es (fig 1.4-c):

$$\phi = \frac{\varepsilon}{y} \qquad (1.6)$$

Puesto que para un material elástico, $\varepsilon = f/E$,

$$\phi = \frac{f}{Ey}$$

Según la ecuación 1.12 :

$$\frac{f}{y} = \frac{M}{I}$$

Por lo tanto, la curvatura puede calcularse con la siguiente ecuación:

$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| \qquad (1.14)$$

Como se indicó anteriormente, no se establecerá por el momento convención respecto al signo de la curvatura, considerándose únicamente su valor absoluto.

El diagrama momento-curvatura para un elemento de material elástico será, por lo tanto, como el que se muestra en la fig 1.6.

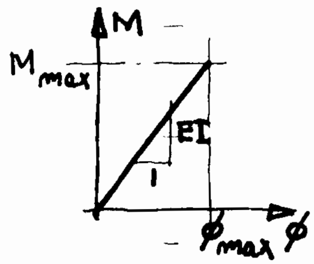


Fig 1.6 Diagrama M-ϕ para el caso de materiales li-neales y elásticos

En los ejemplos 1.1 a 1.4 se presentan diversas aplicaciones de la fórmula de la escuadría y del módulo de sección. En algunos casos se ilustra el cálculo de curvaturas. Los datos de los ejemplos se han formulado de manera que resulta evidente dónde los esfuerzos son de tensión y dónde de compresión.

Ejemplo 1.1.- Se trata en este ejemplo de determinar el momento máximo que puede resistir una sección de un material homogéneo y elástico, conocidas las características geométricas de la sección y las relaciones esfuerzo-deformación del acero. El material considerado tiene resistencias diferentes según se trate de esfuerzos de tensión y compresión. Es necesario, entonces, calcular el momento resistente correspondiente a cada una de las dos formas de falla posibles. Regirá el valor menor. La curvatura determinada es la que corresponde a este valor. Como

la sección es asimétrica y el momento de inercia utilizado en la fórmula de la escuadría es el centroidal, fue necesario determinar primero la posición del eje neutro y calcular entonces el momento de inercia correspondiente a este eje, lo que se hizo recurriendo al teorema de los ejes paralelos.

Ejemplo 1.2.- Este ejemplo es uno de revisión en que se pide encontrar los esfuerzos máximos que un sistema de fuerzas dado produce en una viga de sección conocida. También se pide la curvatura en la sección de momento máximo. La sección de momento máximo se localiza fácilmente con la ayuda del diagrama de cortante, ya que los máximos se presentan donde los cortantes son nulos. Los cálculos para la obtención de los diagramas de fuerza cortante y momento se basan en la aplicación de principios elementales de estática y no se han incluido aquí. Las consideraciones sobre el momento de inercia hechas en el ejemplo 1.1 son también aplicables aquí.

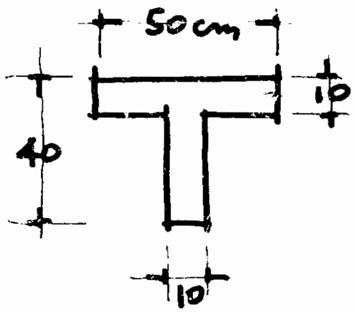
Ejemplo 1.3.- Muchas veces es útil emplear la fórmula de la - - - - escuadría en función del módulo de sección. En este ejemplo se ilustra el cálculo de los módulos de sección de una sección triangular y su aplicación al cálculo de esfuerzos.

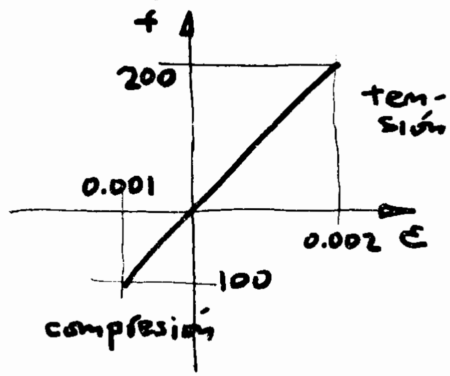
Ejemplo 1.4.- Este es también un ejemplo de revisión, como el ejemplo 1.2, aunque el planteo es diferente. Se trata aquí de determinar la carga uniforme que puede soportar una viga de sección conocida sin que se excedan unos esfuerzos de tensión y compresión dados. En el ejemplo se supone que los esfuerzos admisibles de tensión y compresión son iguales. Como en el ejemplo 1.2, las ecuaciones donde se presentan los momentos máximos se determinaron con la ayuda de los diagramas de fuerza cortante.

Vigas de sección compuesta de materiales no homogéneos. (Ver pág 34 Bis)

EJEMPLO (1.1) CALCULO MOMENTO RESISTENTE Y CURVATURA DE UNA SECCION T POR MEDIO DE LA FORMULA DE LA ESCUADRIA

DATOS





Material lineal y elástico

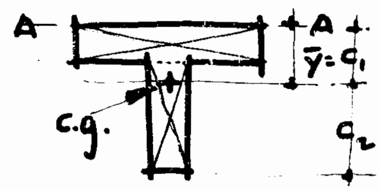
Se pide:

a) Determinar el momento máximo que puede resistir la sección dada sin que se excedan los esfuerzos indicados. (Considerar que el momento se aplica de manera que la fibra superior es la comprimida.)

b) Determinar la curvatura correspondiente al momento calculado en a).

EJEMPLO (1.1) (Continuación) 2

Posición del eje neutro



$$\Sigma M_{AA} = A\bar{y} = 50\times10\times5 + 30\times10\times25$$

$$\bar{y} = \frac{50\times10\times5 + 30\times10\times25}{50\times10 + 30\times10}$$

$$\bar{y} = \underline{12.5}\ \text{cm}$$

Momento de inercia centroidal

$$I = \frac{50\times10^3}{12} + 500\,(12.5-5)^2 + \frac{10\times30^3}{12} + 300\,(25-12.5)^2$$

$$I = \underline{\underline{102\,570}}\ \text{cm}^4$$

Momentos resistentes en tensión y compresión

En tensión: (Ec 1.11)

$$M_t = \frac{(f_{max})_{tens}}{c_2}\, I = \frac{200\times102\,570}{27.5}$$

$$= 745\,000\ \text{kg-cm}$$

EJEMPLO 1.1 (Continuación) 3

En compresión : (Ec 1.10)

$$M_c = \frac{(f_{max})_{comp} I}{c_1} = \frac{100 \times 102\,570}{12.5}$$

$$= 820\,000 \text{ kg-cm}$$

$M_t < M_c$ ∴ el momento máximo que puede resistir la sección es

$$\boxed{M_{max} = 745\,000 \text{ kg-cm}}$$

Curvatura

$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| \qquad \text{(Ec 1.14)}$$

$$E = \frac{f}{\epsilon} = \frac{100}{0.001} = 100\,000 \frac{Kg}{cm^2}$$

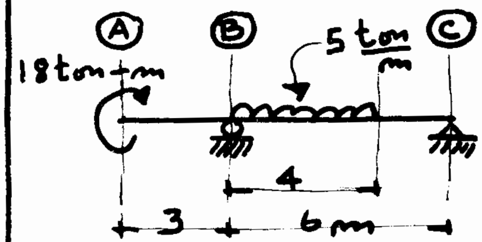
$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| = \left| \frac{7.45 \times 10^5 \text{ Kg-cm}}{10^5 \frac{Kg}{cm^2} \times 1.0257 \times 10^5 \text{ cm}^4} \right|$$

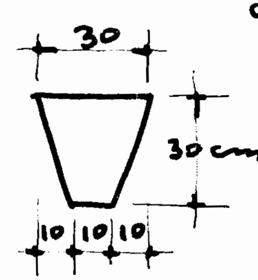
$$\boxed{\phi = \left| 7.27 \times 10^{-5} \right|}$$

EJEMPLO 1.2 CALCULO DE ESFUERZOS NORMALES DEBIDOS A FLEXION EN UNA VIGA DE SECCION TRAPECIAL 1

DATOS

$E = 1\,500\,000 \frac{Kg}{cm^2}$





Se pide :

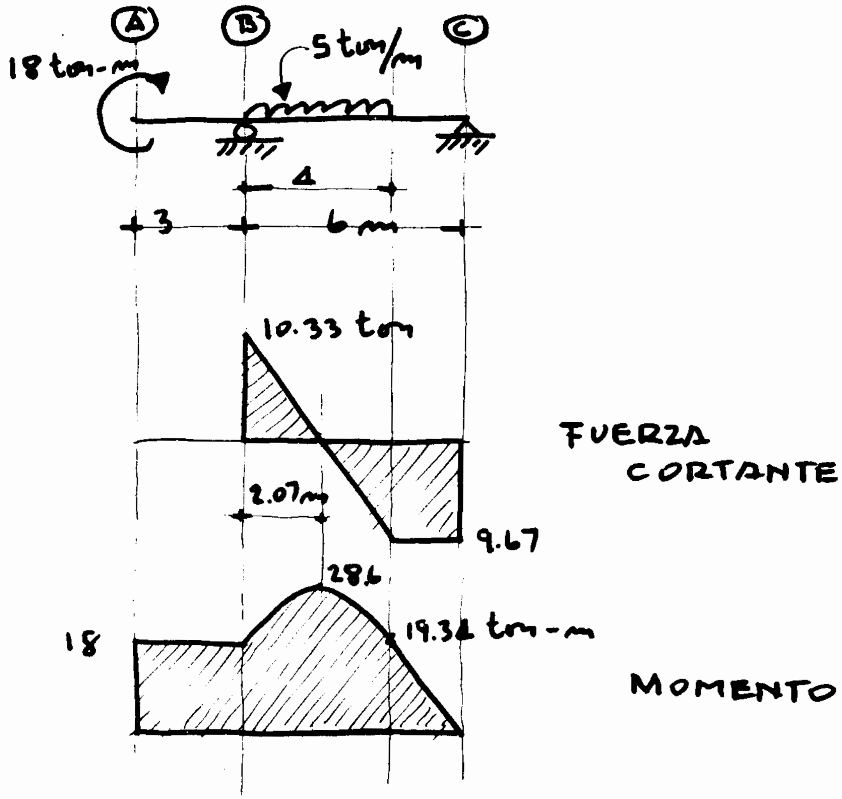
a) Determinar los diagramas de fuerza cortante y de momento de la viga.

b) Calcular los esfuerzos en las fibras superior e inferior en la sección donde el momento sea máximo.

c) Calcular la curvatura en la sección de momento máximo.

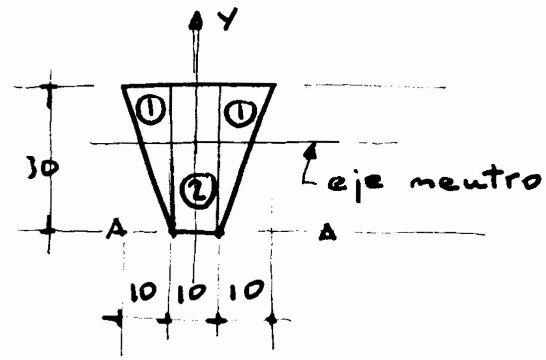
EJEMPLO 1.2 (Continuación) 2

DIAGRAMAS



EJEMPLO 1.2 (Continuación) 3

MOMENTO DE INERCIA



Posición eje neutro

Tomando momentos con respecto al eje A-A:

Parte	A	y'	Ay'
1	10 x 30 = 300	20	6000
2	10 x 30 = 300	15	4500
	600 cm²		10 500 cm³

$$\bar{y} = \frac{10\,500}{600} = 17.5 \text{ cm}$$

EJEMPLO 1.2 (Continuación) 4

Cálculo del momento de inercia

Parte	$y'-\bar{y}$	$A(y'-\bar{y})^2$	I_o
1	2.5	1875	$\frac{1}{36}\times 20\times 30^3 = 15\,000$
2	-2.5	1875	$\frac{1}{12}\times 10\times 30^3 = 22\,500$
		3750	37 500

$$I = 3750 + 37500 = \underline{\underline{41\,250\ \text{cm}^4}}$$

CALCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{M}{I}\,y$$

Fibra superior:

$$f_s = \frac{28.6\times10^5\times 12.5}{41\,250} = \underline{\underline{866\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}} \quad \text{(compresión)}$$

Fibra inferior:

$$f_i = \frac{28.6\times10^5\times 17.5}{41\,250} = \underline{\underline{1215\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}} \quad \text{(tensión)}$$

EJEMPLO 1.2 (Continuación) 5

CURVATURA

$$\phi = \left|\frac{M}{EI}\right|$$

$$= \left|\frac{28.6\times10^5\ \text{kg-cm}}{1.5\times10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\times 41.25\times10^3\ \text{cm}^4}\right|$$

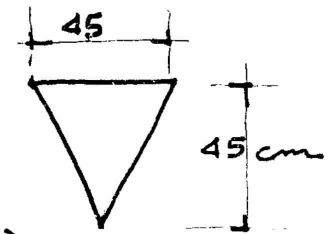
$$\phi = \left|\underline{\underline{0.463\times10^{-4}\ \text{cm}^{-1}}}\right|$$

EJEMPLO 1.3 MODULOS DE SECCION DE UNA SECCION TRIANGULAR 1

DATOS

$M = 20$ ton-m

(fibra superior en compresión)



Se pide:

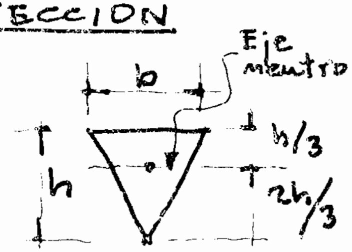
A) Encontrar expresiones generales para los módulos de sección.

B) A partir de las expresiones obtenidas en A, calcular los esfuerzos producidos en la sección dada por $M = 20$ ton-m.

A) MODULOS DE SECCION

$$S = \frac{I}{c}$$

$$I_A = \frac{bh^3}{36}$$



EJEMPLO 1.3 (Continuación) 2

Para la fibra superior:

$$S_s = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12}$$

Para la fibra inferior:

$$S_i = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^2}{24}$$

B) CALCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{M}{S}$$

Para la fibra superior:

$$S_s = \frac{bh^2}{12} = \frac{45 \times 45^2}{12} = 7560 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 1.3 (Continuación)

$$f_s = \frac{M}{S_s} = \frac{20 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{7560 \text{ cm}^3} = \underline{\underline{264}} \text{ kg/cm}^2$$

(Compresión)

Para la fibra inferior:

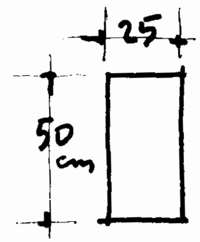
$$S_i = \frac{bh^2}{24} = \frac{45 \times 45^2}{24} = 3780 \text{ cm}^3$$

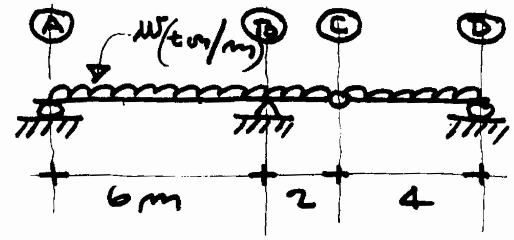
$$f_i = \frac{M}{S_i} = \frac{20 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{3780 \text{ cm}^3} = \underline{\underline{528}} \text{ kg/cm}^2$$

(Tensión)

EJEMPLO 1.4 CALCULO DE LA CARGA UNIFORME QUE PUEDE SOPORTAR UNA VIGA

DATOS





Esfuerzo admisible en tensión y compresión:

$$f = 150 \text{ kg/cm}^2$$

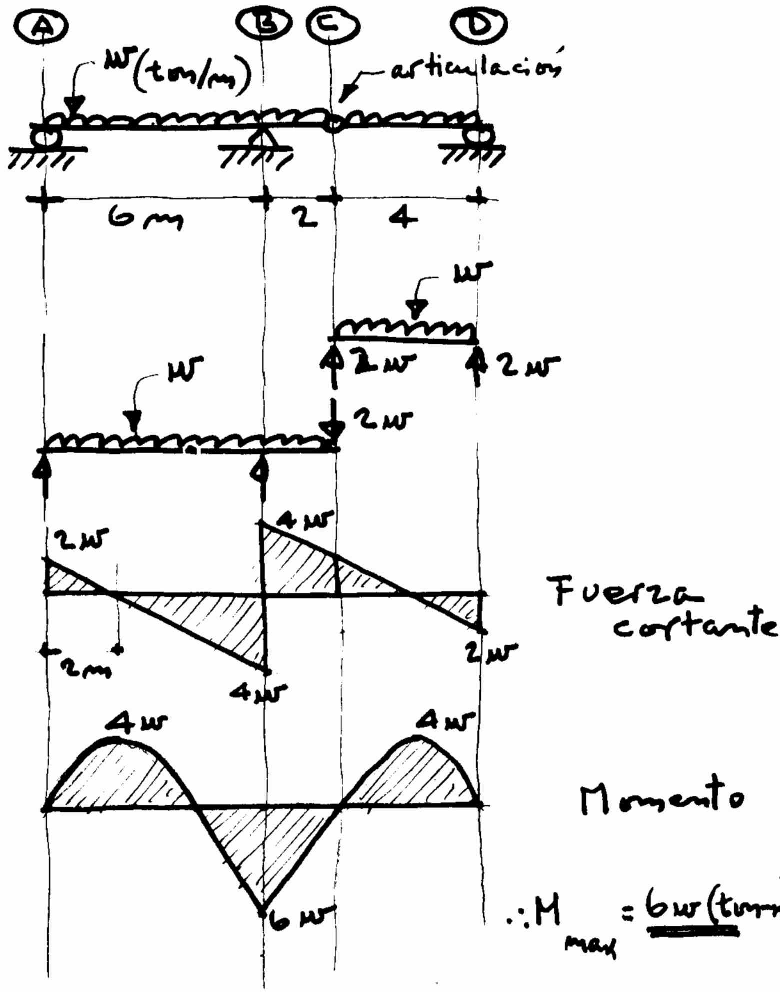
Se pide: Encontrar la carga w que puede soportar la viga sin que se exceda el esfuerzo dado.

DIAGRAMAS DE MOMENTO Y FUERZA CORTANTE

(Ver siguiente hoja.)

EJEMPLO 1.A (Continuación) 2

DIAGRAMAS DE MOMENTO Y FUERZA CORTANTE



$$\therefore M_{max} = \underline{6w \text{ (ton-m)}}$$

EJEMPLO 1.A (Continuación) 3

MOMENTO QUE RESISTE LA SECCION PARA $f = 150\ kg/cm^2$

$$M_R = fS$$

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{25 \times 50^2}{6} = 10400\ cm^3$$

$$M_R = 150 \times 10\,400 = \underline{1\,560\,000}\ kg\text{-}cm$$

$$M_R = \underline{15.6}\ ton\text{-}m$$

CALCULO DE w

$$M_{max} = M_R$$

$$6w = 15.6$$

$$\boxed{w = 2.6\ \frac{ton}{m}}$$

Vigas de sección compuesta de materiales no homogéneos

A veces se utilizan materiales no homogéneos para formar lo que suele llamarse vigas de sección compuesta. Así puede combinarse la madera con el acero o el acero con el concreto. En la fig 1.6 bis se muestran algunas secciones compuestas típicas. En todas ellas debe lograrse que las superficies de contacto entre materiales distintos no presentan deslizamientos relativos.

Las secciones compuestas de materiales elásticos sometidos a flexión pueden analizarse con base en los principios fundamentales expuestos en las secciones anteriores. En ellos se basa el método de la sección transformada, que se expone en la sección 3.3 en relación con la investigación de esfuerzos en vigas de concreto reforzado, el tipo de sección compuesta más común. En los ejemplos 3.3 y 3.4 se ilustra la aplicación del método a vigas de esta clase.

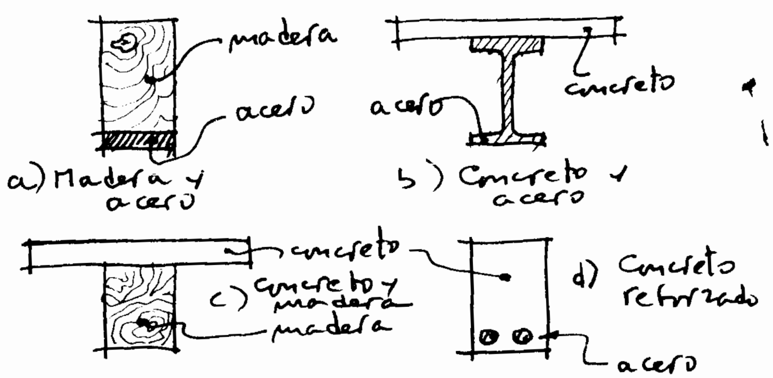


Fig 1.6 bis.- Ejemplos de secciones compuestas

1.2.4 Flexión en vigas de materiales no lineales

Supóngase que en el ensaye a flexión de un elemento como el mostrado en la fig 1.1 se miden en un instante dado la carga aplicada, P, la deformación unitaria en la fibra superior, ε_c , y la deformación unitaria en la fibra inferior, ε_t .(Existen instrumentos de laboratorio, tanto mecánicos como eléctricos, diseñados especialmente para medir deformaciones unitarias.) A partir de estos datos pueden calcularse el momento flexionante aplicado al elemento en la zona central, M = Pa (fig 1.1) y la curvatura de una sección transversal situada en dicha zona, $\phi = (\varepsilon_c + \varepsilon_t)/h$ - (fig 1.3). Si se repite el procedimiento para otras valores de la carga aplicada, se obtienen varios valores de M y ϕ, los cuales definen una gráfica como la mostrada en la fig 1.7, que recibe el nombre de diagrama momento-curvatura. Cada punto del diagrama corresponde a distintos valores de las deformaciones ε_c y ε_t, lo cual se ha indicado con los diagramas de deformaciones unitarias mostrados en la figura.

Los diagramas momento-curvatura son importantes porque sirven para obtener diagramas momento-rotación y carga-deflexión, los cuales se utilizan en el diseño de elementos, como se mencionó en la sección 1.2.1 - . Además, un diagrama de este tipo indica cuál es el momento máximo que puede resistir la sección transversal de un elemento, como se ve en la fig 1.7. A continuación se presentan métodos para obtener diagramas momento-curvatura cuando se conocen los diagramas esfuerzo-deformación del material obtenidos en ensayes de tensión o compresión axial.

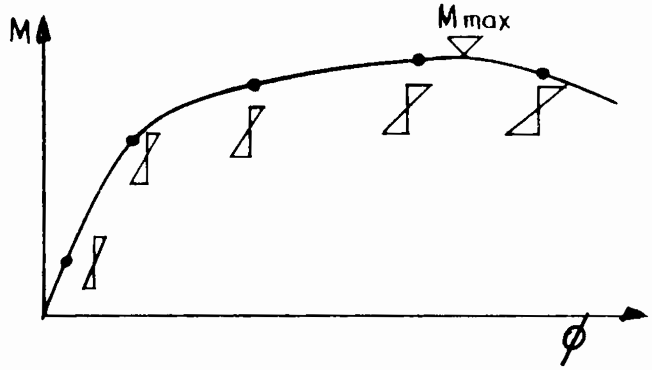


Fig 1.7 Diagrama momento-curvatura

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de obtener el diagrama momento-curvatura de un elemento de sección rectangular, de 10 cm de ancho y 20 cm de altura, fabricado con un material cuya gráfica esfuerzo-deformación se muestra en la fig 1.8. Un procedimiento para obtener el diagrama M-ϕ es el siguiente.

a) Supóngase un valor de la deformación unitaria en la fibra superior, ε_c, (fig 1.3-d) que esté comprendido en el rango de valores de la fig 1.8. Para fines de ilustración, supóngase que se eligió el valor ε_{c1} = 0.003 mostrado en la fig 1.9-a.

b) Supóngase un valor de la profundidad del eje neutro, c_1. En este ejmplo se eligió c_1 = 7.5 cm, como se muestra en la fig 1.9-a.

c) Calcúlese, por triángulos semejantes o gráficamente, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de cada una de las franjas en que se ha dividido la sección transversal (fig 1.9-a). Esto puede hacerse a partir de los valores de ε_{c1} y c_1, y de la distancia desde el centroide de la franja a la cara superior de la viga. Por ejemplo, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de la franja inferior es:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}\,\frac{12.5-0.5\times 1.25}{7.5} = \frac{0.003\times 11.9}{7.5} = 0.00476$$

valor mostrado en la fig. 1.9-a.

Generalmente, es suficiente dividir en cinco o seis franjas la zona de compresión, y en otro tanto, la zona de tensión.

d) Para cada valor de las deformaciones unitarias de la fig 1.9-a, determínese el esfuerzo correspondiente en el diagrama esfuerzo-deformación del material mostrado en la fig 1.8. Los esfuerzos correspondientes se muestran en la fig 1.9-c. Por ejemplo, a la deformación de 0.00476 calculada en el inciso anterior, corresponde un esfuerzo de 310 kg/cm^2 en la gráfica de la fig 1.8. Como puede verse, determinan un diagrama de esfuerzos cuya forma es semejante a la del diagrama de la fig 1.8

e) Calcúlense las fuerzas de compresión mostradas en la fig 1.9-d. Cada una de estas fuerzas es igual al esfuerzo promedio en la franja multiplicado por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal de la viga. Por ejemplo, la fuerza correspondiente a la tercera franja de la fig 1.9-d se calculó de la siguiente manera :

$$\frac{320\times 1.25\times 10}{1000} = 4.0 \text{ ton}$$

f) Calcúlense las fuerzas C y T, fig 1.9-d, que son las resultantes de las fuerzas de compresión y tensión de todas las franjas.

g) Compárense entre si las fuerzas C y T. Si son iguales, la sección transversal de la viga está en equilibrio de fuerzas horizontales, y se pasa a calcular el momento flexionante como se describe en el párrafo (h). Si no son iguales, como en el caso de la fig. 1.9, la sección transversal no está en equilibrio. Debe suponerse un nuevo valor de la profundidad del eje neutro, c_1, y repetir el procedimiento desde el párrafo (b) cuantas veces sea necesario hasta que las fuerzas C y T sean iguales o, más correctamente, hasta que la diferencia entre las fuerzas C y T sea muy pequeña (menor del 5% del valor de la menor de las fuerzas, aproximadamente). En la fig 1.10 se muestra otro tanteo del mismo problema en el cual la diferencia entre las fuerzas C y T es suficientemente pequeña.

h) Cuando la sección transversal esté en equilibrio, se calcula el momento flexionante, multiplicando cada una de las fuerzas de compresión y tensión en las franjas de la fig 1.10-d por su distancia al eje geométrico de la viga. Este cálculo se muestra en las figs 1.10-e y 1.10-f.

i) Una vez que se haya encontrado la profundidad del eje neutro para la cual está en equilibrio la sección transversal de la viga, calcúlese la curvatura de la sección, ϕ, dividiendo la deformación unitaria, ε_c, supuesta en el párrafo (a), entre la profundidad del eje neutro correspondiente al equilibrio, c_1. Por ejemplo, para el caso de la fig 1.10, la curvatura de la sección transversal es:

$$\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$$

El momento obtenido en la etapa (h) y la curvatura obtenida en la etapa (i) definen un punto del diagrama momento-curvatura de la fig 1.7. Pueden obtenerse otros puntos suponiendo otros valores de ε_c en la etapa (a) del procedimiento descrito anteriormente, hasta tener un número suficiente para definir la forma del diagrama M - ϕ.

En la fig 1.11 se muestra el diagrama momento curvatura obtenido de la manera anterior para la sección de 10 x 20 cm y el material con la gráfica esfuerzo - deformación de la fig 1.8. Se muestran también los estados de deformaciones para los puntos con los que se definió el diagrama. El momento flexionante resistente de

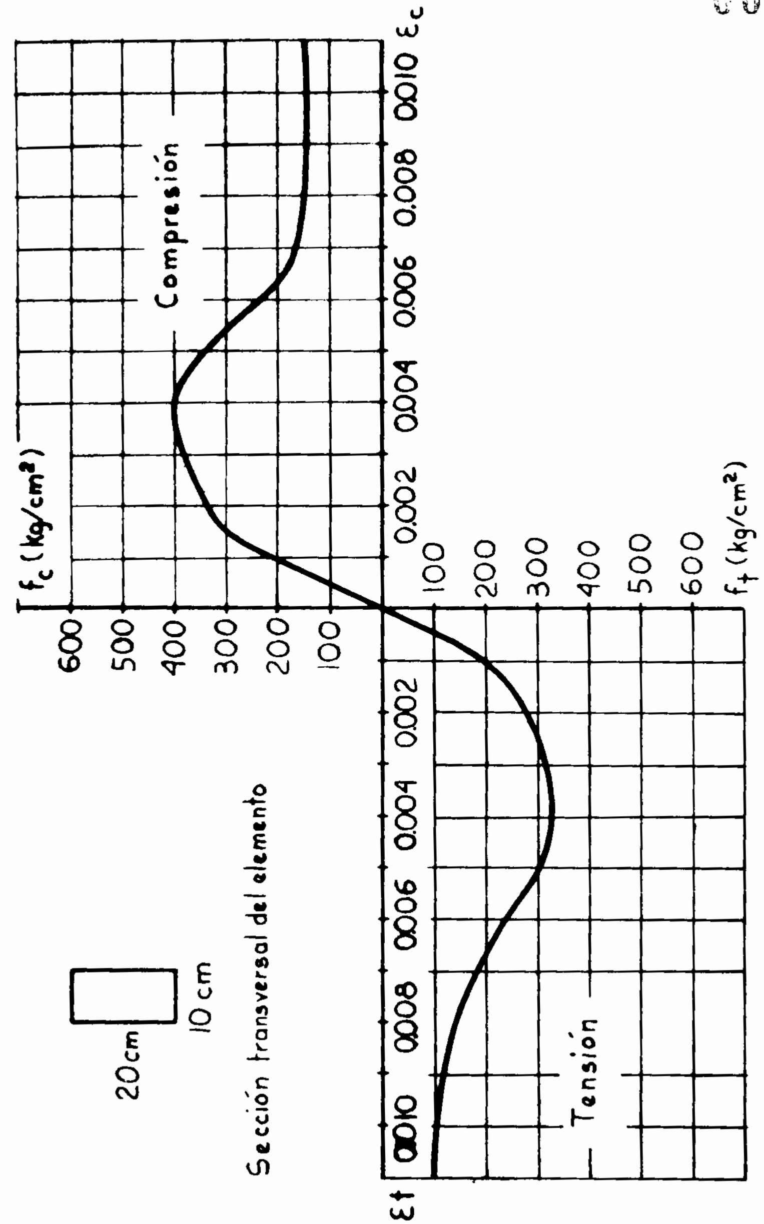


Fig 1.8 Curva esfuerzo - deformación supuesta en el ejemplo

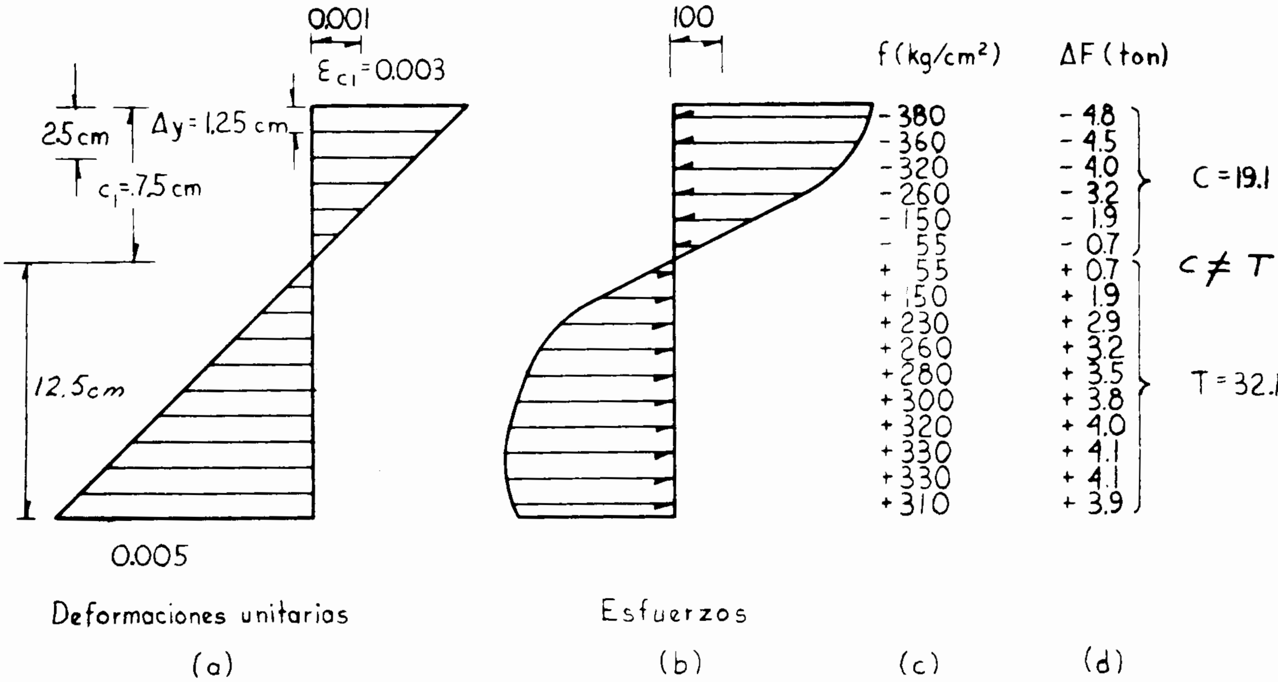
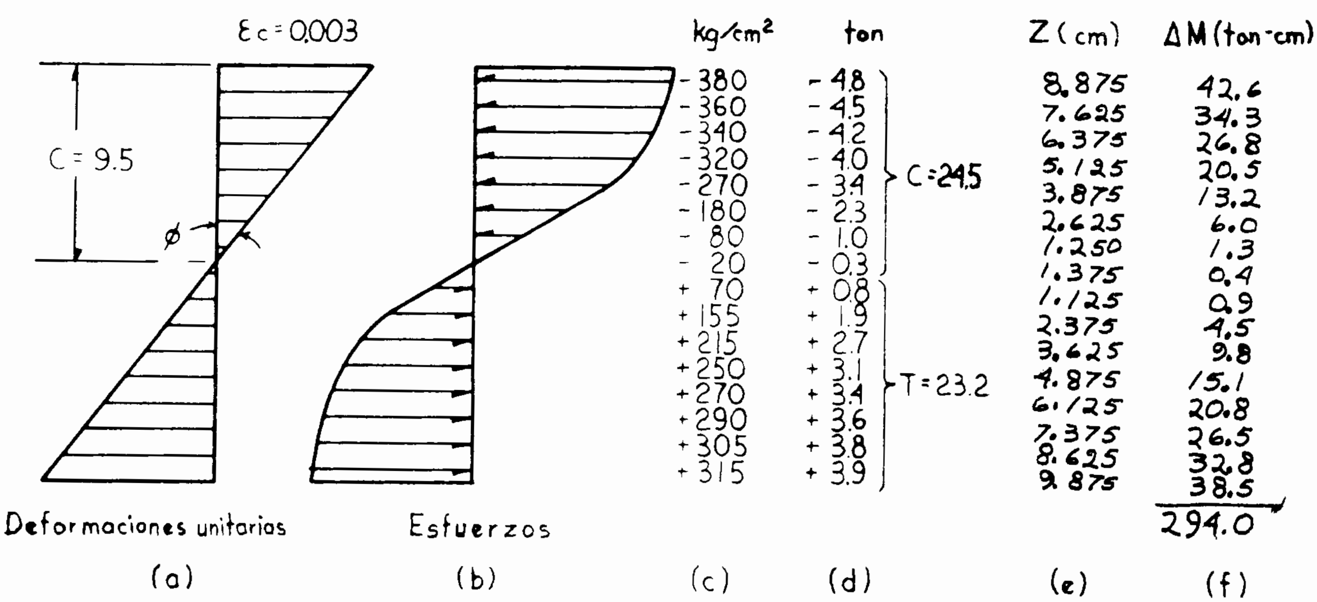


Fig 1.9 Obtención de las fuerzas de compresión y tensión a partir de un diagrama de deformacion unitarias



M = 294.0 ton-cm

$$\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$$

Fig 1.10 Obtención del momento y la curvatura a partir de un diagrama de defor-

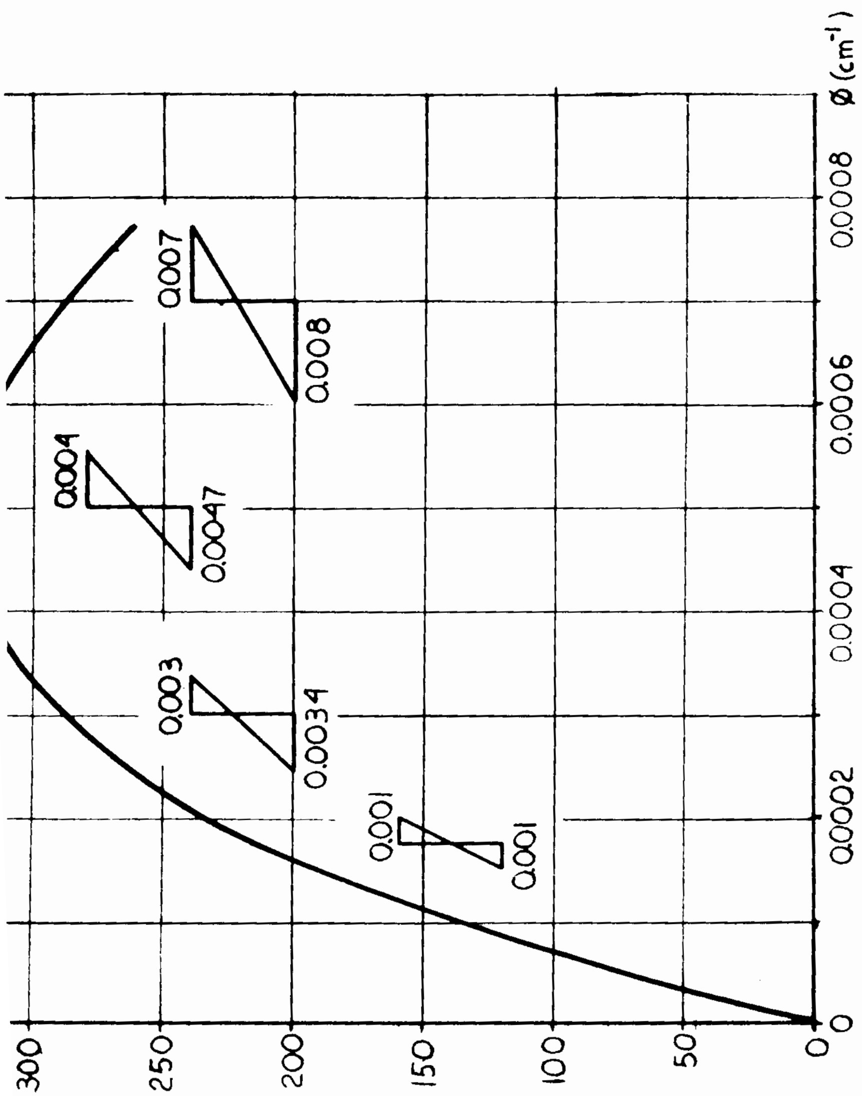


Fig 1.11 Diagrama M - Ø

la sección transversal es de 3.3 ton-m

Pueden presentarse los tres siguientes casos de diagramas momento-curvatura:

a) El diagrama momento-curvatura presenta una rama descendente y un punto de momento máximo al inicarse esta rama. Este es el caso de la fig 1.11 y se presenta esquemáticamente en la fig 1.12-a.

b) Se alcanza la deformación unitaria máxima en compresión del material sin que se presente una rama descendente y sin que se alcance la deformación máxima en tensión del material. En este caso, el diagrama momento-curvatura y la distribución de deformaciones unitarias al alcanzarse la resistencio son como los mostrados en la fig 1.12-b.

c) Se alcanza la deformación unitaria máxima en tensión sin que se presente la rama descendente del diagrama M - ø y sin que se alcance la deformación unitaria máxima en compresión. Este caso se ilustra en la fig 1.12-c.

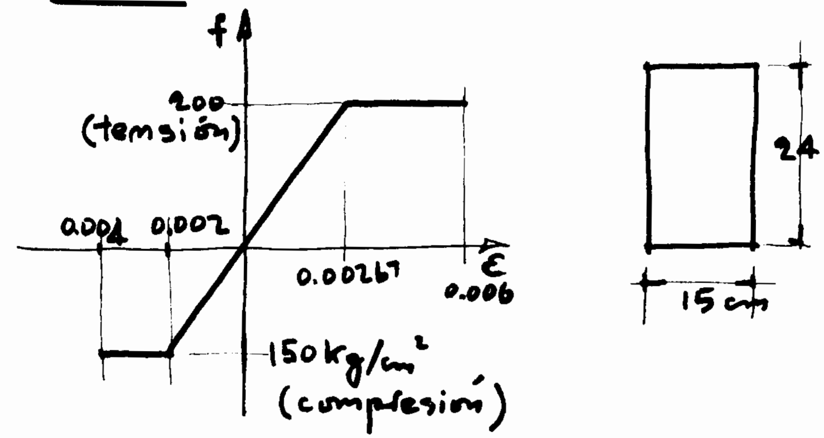
El procedimiento numérico descrito en esta sección resulta sumamente laborioso para efectuarlo sin ayuda de computadora, ya que cada punto del diagrama requiere una serie de tanteos hasta lograr el equilibrio de la sección transversal. Sin embargo es relativamente sencillo escribir un programa de computadora para desarrollar los cálculos, y el procedimiento tiene la ventaja de ser completamente general y aplicable cualquiera que sea la gráfica esfuerzo deformación del material. También puede generalizarse fácilmente a secciones no rectangulares. En este caso, cada una de las fuerzas parciales de compresión y tensión se obtiene multiplicando el esfuerzo promedio en la franja por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal al nivel del centroide de la franja considerada.

Cuando la gráfica esfuerzo-deformación se puede definir por medio de una ecuación sencilla, es posible seguir un procedimiento analítico para determinar el momento que puede soportar una sección. Esto fue lo que se hizo en el inciso anterior con el caso particular de materiales de comportamiento lineal y elástico. Se dedujo en esta sección la fórmula de la escuadría, que relaciona el momento que actúa en una sección con sus características geométricas y los esfuerzos generados en ella por el momento dado. En el ejemplo 1.5 se presenta otro caso particular, el de un material elasto-plástico.

Ejemplo 1.5.- El material dado exhibe un comportamiento elasto-plástico tanto en compresión como en tensión. Sin embargo el esfuerzo y la deformación unitaria correspondientes a la rotura son distintos. Evidentemente rige la compresión. Dada la simetría de la sección y dado que los modulos de elasticidad en compresión y en tensión son iguales, el eje neutro queda a la mitad del peralte de la sección. El diagrama de deformaciones unitarias será, entonces, el mostrado en el croquis y de él y del diagrama de esfuerzo-deformación se deduce la variación de esfuerzos indicada. El momento se obtiene por estática y la curvatura, a partir de la ecuación (1.6).

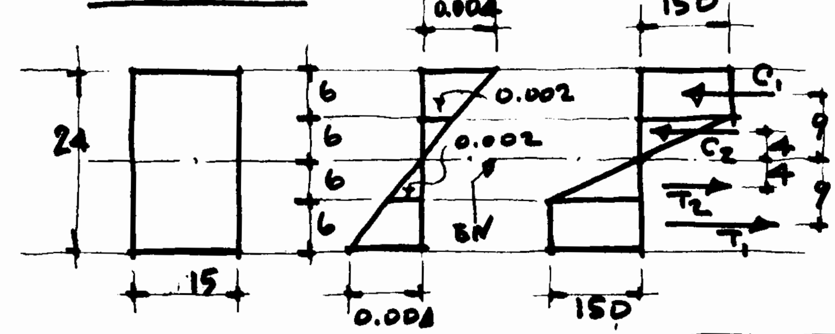
EJEMPLO 1.5 MOMENTO RESISTENTE Y CURVATURA DE UN MATERIAL ELASTO-PLASTICO

DATOS



Se pide: Determinar el momento resistente y la curvatura correspondiente de la sección mostrada.

SOLUCION



EJEMPLO 1.3 (Continuación) 2

Fuerzas internas

$C_1 = T_1 = 150 \times 15 \times 6 = 13\,500 \text{ kg}$

$C_2 = T_2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 15 \times 6 = 6\,750 \text{ kg}$

Momento

$M = 2 \times 9 \times 13\,500 + 2 \times 4 \times 6\,750$

$M = \underline{\underline{297\,000 \text{ kg-cm}}}$

Curvatura

$$\phi = \frac{\varepsilon_c}{c_c} = \frac{0.004}{12 \text{ cm}} = \underline{\underline{0.00033 \text{ cm}^{-1}}}$$

1.2.5. Diagramas momento-rotación y carga-deflexion

En esta sección se presenta el uos de diagramas momento-curvatura, cuya obtención se describió en la sección anterior, para calcular analíticamente diagramas momento-rotación y carga-deflexión.

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de determinar el diagrama momento-rotación de una viga libremente apoyada como la mostrada en la fig 1.13. La sección transversal de la viga es constante en todo el claro, por lo que el diagrama momento-curvatura es el mismo para cualquier sección transversal.

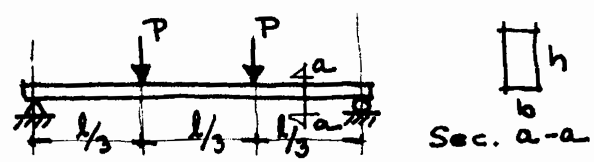


Fig. 1.13 Viga rectangular libremente apoyada, con dos cargas concentradas

Más adelante se indica cómo puede generalizarse el procedimiento para vigas cuya sección transversal varía a lo largo del claro. En la fig 1.14 se muestra el diagrama momento-curvatura que se usará para calcular los diagramas M-θ y P -Δ.

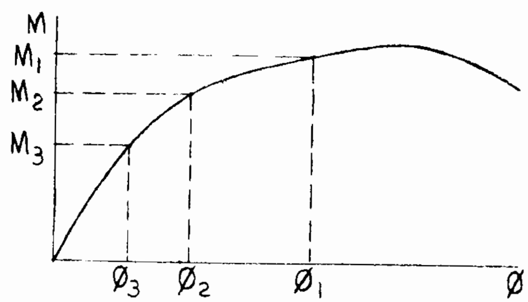


Fig 1.14 Diagrama momento-curvatura de la viga de la fig 1.13

Considérese ahora que el valor de la carga P es tal que el momento flexionante en la zona central tiene un valor M_1, como se muestra en la fig 1.15b. En el diagrama M-θ de la fig 1.14 se ve que la curvatura correspondiente a este momento es ϕ_1. Por lo tanto, si se traza un diagrama que muestre la distribución de curvaturas a lo largo de la viga, se tendrá una curvatura constante en esta zona (fig 1.15-c). Para obtener el diagrama de distribución de curvaturas en secciones situadas fuera de la zona central de la viga, se puede proceder de la siguiente manera. Se determina el momento en varias secciones de la viga. (Por ejemplo, en la sección 2.2 (fig 1.15-b), se tendrá un momento M_2.) Después se encuentra la curvatura correspondiente a este momento en el diagrama momento-curvatura de la fig 1.14, la cual se traza como ordenada del diagrama de distribución de curvaturas de la fig 1.15-c. Repitiendo el procedimiento para otras secciones, par ejemplo la sección 3-3 de la fig 1.15-b, se obtiene un número suficiente de puntos para definir

el diagrama de la fig 1.15-c. Una vez determinado el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo de la viga, el siguiente problema es determinar las rotaciones y deflexiones. Este problema puede resolverse por integración o por medio de los teoremas conocidos con el nombre de teoremas área-momento. En las secciones siguientes se describen estos métodos.

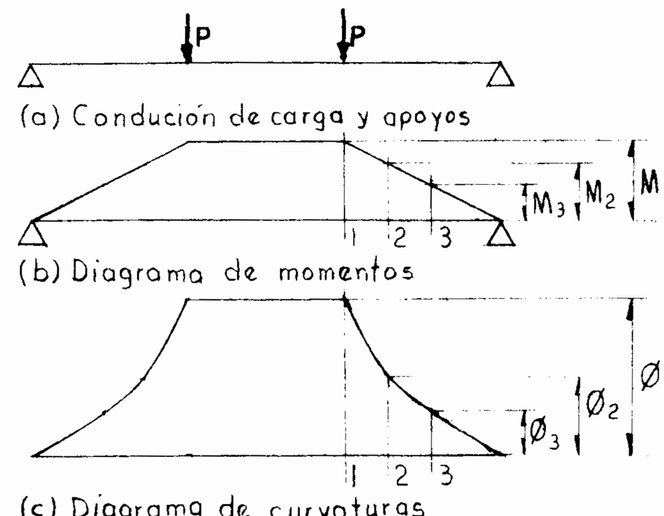


Fig 1.15 Determinación del diagrama de curvatura a lo largo de una viga

1.2.5.1 Cálculo de pendientes y deflexiones por integración. Ecuación de la elástica y relaciones fundamentales de la teoría de flexión

En los textos elementales de cálculo diferencial se demuestra que el recíproco de la curvatura, que se conoce con el nombre de radio de curvatura, ρ, de una curva cualquiera, se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{1}{\phi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (1.15)$$

El término dy/dx en la ecuación anterior es la pendiente de la curva. Debido a que en el caso de vigas las pendientes son pequeñas, el valor de $(dy/dx)^2$ es despreciable, y el numerador de la ecuación anterior se puede considerar igual a la unidad. Por lo tanto,

$$\phi = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1.16)$$

A partir de esta ecuación se pueden obtener las pendientes de la viga deformada, dy/dx, y las deflexiones, y, por integración. Integrando una vez se obtiene las pendientes

$$\frac{dy}{dx} = \int \phi dx + C_3 \qquad (1.17)$$

e integrando dos veces se obtienen las deflexiones

$$y = \iint \phi dx^2 + C_3 x + C_4 \qquad (1.18)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración que se determinan de las condiciones de borde de la viga como se muestra en los ejemplos.

Una vez conocidas las pendientes dy/dx, puede calcularse la rotación entre dos secciones cualesquiera como la diferencia de pendientes entre dichas secciones. Por ejemplo, la rotación total entre los dos extremos de una viga (fig 1.1) es la diferencia de las pendientes en los extremos. En adelante, la rotación entre dos secciones cualesquiera a y b se denominará $\Delta\theta_{ab}$, y la rotación entre una sección cualesquiera a y una sección que permanece en un plano vertical se denominará θ_a. El valor de θ_a será, por consiguiente, igual a la pendiente en la sección a. El procedimiento de determinación de rotaciones y de flexiones descrito es práctico únicamente cuando la curvatura ϕ se puede expresar matemáticamente por medio de una ecuación sencilla, como en el caso de materiales elásticos en los que $\phi = |M/EI|$ (ec 1.14). Sustituyendo este valor de ϕ en la ecuación 1.16 se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left|\frac{M}{EI}\right| \qquad (1.19)$$

La ecuación 1.14 se obtuvo en la sección 1.2.3 en términos del valor absoluto de la curvatura ya que no se hizo ninguna consideración sobre el signo de la curvatura. Es conveniente definir ahora dicho signo. De acuerdo con la convención de ejes adoptada, o sea, el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia abajo, una

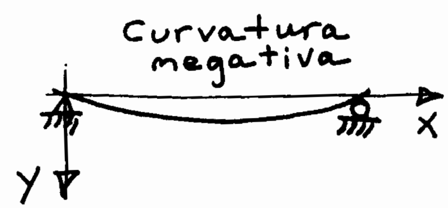


Fig 1.16 Convención de signos para curvatura

viga deformada como en la fig 1.16 con la concavidad hacia arriba tiene curvatura negativa ya que la pendiente de la curva disminuye al avanzar en la dirección positiva del eje X. Ahora bien, el momento flexionante asociado a una deformación como la mostrada en la fig 1.16 es positivo, ya que produce acortamientos en las fibras superiores y alargamientos en las fibras inferiores (fig 1.5). Por lo tanto, a un momento positivo corresponde una curvatura negativa y las ecs 1.14 y 1.19 quedan en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi = -\frac{M}{EI} \qquad (1.20)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de <u>ecuación de la elástica,</u> ya que la forma de la viga deformada recibe el nombre de elástica cuando el material es elástico y lineal.

Sustituyendo el valor de $\phi = -M/EI$ en las ecuaciones 1.17 y 1.18 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI}\,dx + C_3 \qquad (1.21)$$

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = -\iint \frac{M}{EI}\,dx^2 + C_3x + C_4 \qquad (1.22)$$

Las ecuaciones 1.21 y 1.22 indican que las pendientes y las deflexiones pueden obtenerse mediante un proceso de integración a partir de los momentos. Los momentos, a su vez, pueden obtenerse, también por integración, a partir de las cargas. En efecto, según se estudio en los cursos de Mecánica Analítica, existen las siguientes relaciones entre carga aplicada, w, fuerza cortante, V, y momento flexionante, M:

$$V = \frac{dM}{dx} \qquad (1.23)$$

$$w = -\frac{dV}{dx} \qquad (1.24)$$

La convención de signos para fuerza cortante que se utiliza aquí consiste en considerar que en las vigas la fuerza cortante es positiva cuando las fuerzas cortantes que actuan en los extremos de un tramo producen un giro en el sentido de las manecillas del reloj (Apéndice B). Por lo tanto la ecuación 1.24 tiene signo negativo, porque, de acuerdo con la convención de signos para cortantes, para una carga hacia abajo, que es positiva, la fuerza cortante disminuye al aumentar x.

Derivando la ecuación 1.23 y sustituyendo en la 1.24 resulta

$$w = -\frac{d^2M}{dx^2} \qquad (1.25)$$

Según estas ecuaciones, la fuerza cortante y el momento flexionante se pueden obtener por integración de las ecuaciones 1.24 y 1.25 de la siguiente manera:

$$V = -\int w\,dx + C_1 \qquad (1.26)$$

$$M = -\iint w\,dx^2 + C_1x + C_2 \qquad (1.27)$$

Las constantes C_1 y C_2 son diferentes de las constantes C_3 y C_4, y se obtienen también de las condiciones de borde como se muestra en los ejemplos.

En la fig 1.17 se resumen las ecuaciones obtenidas en esta sección, rela

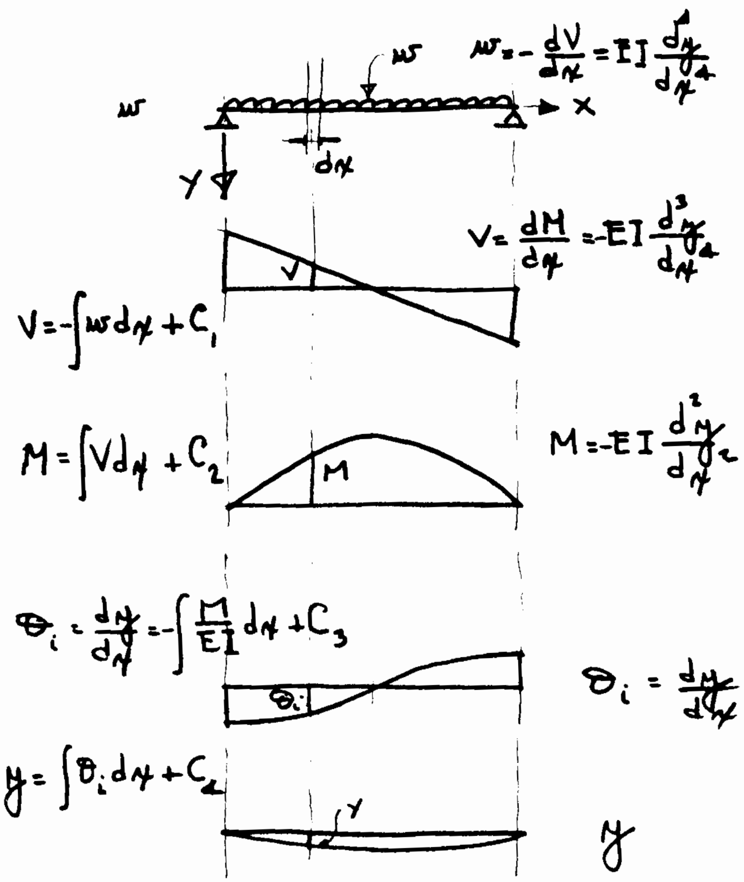


Fig 1.17 Relaciones entre carga, fuerza cortante, momento flexionante, pendiente y deflexión para una viga de material homogéneo y elástico.

cionándolas con una viga homogénea y elástica libremente apoyada. En el lado izquierdo de la figura se muestra la forma en que puede obtenerse la fuerza cortante V, por integración de la carga, w (ec 1.26); el momento, M, por integración de la fuerza cortante, V; la pendiente dy/dx, que según la notación adoptada puede expresarse como θ_i, por integración de las curvaturas M/EI; y la deflexión, y, por integración de las pendientes. En el lado derecho de la figura se muestra, de abajo hacia arriba, la forma de obtener la pendiente, θ_i, el momento, M, la fuerza cortante, V, y la carga, W, por derivación sucesiva. Las relaciones del lado derecho se obtienen por derivación de las relaciones del lado izquierdo.

En el Ejemplo 1.6 se muestra la obtención de las pendientes y de las deflexiones de una viga por integración. En este ejemplo, el momento M se calculó de la manera convencional, pero pudo obtenerse también por integración usando las ecuaciones 1.26 y 1.27. Esto se ilustra en el ejemplo 1.7.

1.2.5.2 <u>Cálculo de pendientes y deflexiones mediante el principio de la viga conjugada</u>

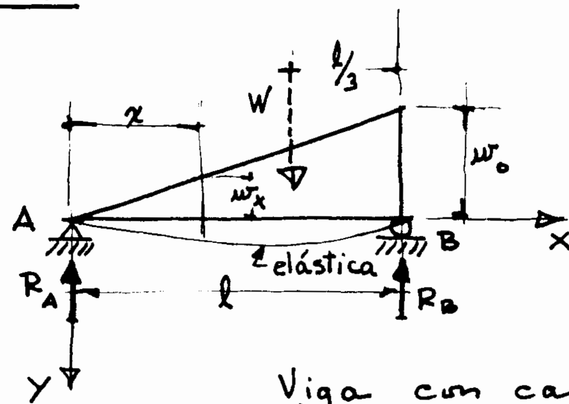
Si se comparan las ecuaciones 1.21 y 1.22 con las ecuaciones 1.26 y 1.27 se puede establecer una similitud entre el cálculo de pendientes y el cálculo de fuerzas cortantes, y entre el cálculo de deflexiones y el cálculo de momentos flexionantes. En efecto, si la carga w se sustituye por el valor de M/EI, o por el valor absoluto de las curvaturas ϕ para el caso general de vigas de comportamiento no lineal, y las condiciones de borde de la viga se transforman para que las constantes C_1 y C_2 resulten iguales a las constantes C_3 y C_4, el cálculo de pendientes y deflexiones se transforma en un cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Esta transformación se conoce con el nombre de <u>principio de la viga conjugada</u> y se puede expresar de la siguiente manera:

"Si se obtiene el diagrama de curvaturas, o de valores absolutos de M/EI para vigas de comportamiento lineal, y se considera que las curvaturas son cargas, las fuerzas cortantes obtenidas son en realidad las pendientes de la viga, y los momen

EJEMPLO 1.6 CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES POR INTEGRACION, A PARTIR DE LA ECUACION DE MOMENTO

1

DATOS



Viga con carga triangular, sección constante y módulo elástico E.

Se pide: Obtener expresiones, por integración, para determinar:

a) La pendiente en cualquier sección

b) La deflexión en cualquier sección

c) La deflexión máxima

EJEMPLO 1.6 (Continuación)

2

SOLUCION

Ecuación general de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \text{Ec } (1.20)$$

Obtención de la ecuación de momento

$$W = \frac{1}{2} w_o \ell$$

$$R_A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} w_o \ell\right) = \frac{1}{6} w_o \ell$$

$$w_x = \frac{x}{\ell} w_o$$

$$M = R_A x - \frac{1}{2} w_x x \left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\boxed{M = \frac{1}{6} w_o \ell x - \frac{1}{6} \frac{w_o}{\ell} x^3} \qquad (a)$$

Obtención de expresiones para cálculo de pendientes y deflexiones

(A la hoja siguiente)

Obtención de expresiones para cálculo de pendientes y deflexiones

Sustituyendo (a) en la ec (1.20) e integrando dos veces:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0 l}{6}x + \frac{w_0}{6l}x^3$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{w_0}{24 l}x^4 + C_3$$

$$EI\,y = -\frac{w_0 l x^3}{36} + \frac{w_0}{120 l}x^5 + C_3 x + C_4$$

Cálculo de constantes:

Si $x = 0$, $y = 0$ $\therefore$ $C_4 = 0$

Si $x = l$, $y = 0$

$$0 = -\frac{w_0 l^4}{36} + \frac{w_0}{120 l}l^5 + C_3 l$$

$$\therefore\ C_3 = +\frac{7 w_0 l^3}{360}$$

Sustituyendo los valores de las constantes, se obtiene:

a) Para cálculo de pendientes:

$$\boxed{EI\frac{dy}{dx} = +\frac{w_0 x^4}{24 l} - \frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{7 w_0 l^3}{360}}$$

b) Para cálculo de deflexiones:

$$\boxed{EI\,y = +\frac{w_0 x^5}{120 l} - \frac{w_0 l x^3}{36} + \frac{7 w_0 l^3}{360}x}$$

c) Cálculo de la flecha máxima

La flecha es máxima cuando

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de la pendiente:

$$0 = \frac{w_0 x^4}{24 l} - \frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{7 w_0 l^3}{360}$$

EJEMPLO 1.6 (Continuación) 5

Simplificando y haciendo $x^2 = x_1$:

$$15 x_1^2 - 30 l^2 x_1 + 7 l^4 = 0$$

$$x_1 = 0.27 l^2$$

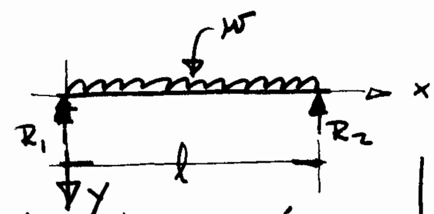
$$x = 0.52 l$$

Sustituyendo en la ecuación de la deflexión:

$$y_{max} = \frac{1}{EI}\left[+\frac{w_0}{120 l}(0.52l)^5 - \frac{w_0}{36}(0.52l)^3 + \frac{7 w_0 l^3}{360}(0.52l)\right]$$

$$\boxed{y_{max} = + \frac{0.0065\, w_0 l^4}{EI}}$$

EJEMPLO 1.7 DETERMINACION DE FUERZAS CORTANTES, MOMENTOS, PENDIENTES Y DEFLEXIONES, POR INTEGRACIONES SUCESIVAS A PARTIR DE LA FUNCION DE CARGA 1



Viga de sección constante, con módulo elástico E, sujeta a carga uniforme.

Encontrar:

a) Los diagramas y las ecuaciones para V, M, θ y δ

b) La deflexión máxima

c) Pendiente de la curva en el apoyo izquierdo

$$f(x) = +w$$

Obtención de ecuaciones

$$V = -\int f(x)\,dx + C_1$$

$$V = -\int w\,dx + C_1$$

$$\boxed{V = -wx + C_1}$$

(1) Ecuación de la fuerza cortante

$$M = \int V\,dx + C_2$$

$$M = \int(-wx + C_1)\,dx + C_2$$

$$\boxed{M = -\frac{wx^2}{2} + C_1 x + C_2}$$

(2) Ecuación del momento

EJEMPLO 1.7 (Continuación) 2

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI}\,dx + C_3$$

$$\theta = -\int \frac{1}{EI}\left(-\frac{wx^2}{2} + C_1x + C_2\right)dx + C_3$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^2}{6} - \frac{C_1x^2}{2} - C_2x\right) + C_3} \quad (3)$$

Ecuación de la pendiente

$$y = \int \theta\,dx + C_4$$

$$y = \int\left[\frac{1}{EI}\left(\frac{wx^3}{6} - \frac{C_1x^2}{2} - C_2x\right) + C_3\right]dx + C_4$$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^4}{24} - \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_2x^2}{2}\right) + C_3x + C_4} \quad (4)$$

Ecuación de la deflexión (elástica)

Cálculo de constantes

Para $x = 0$

$$V = \frac{wl}{2}$$

EJEMPLO 1.7 (Continuación) 3

De (1):

$$\frac{wl}{2} = 0 + C_1 \quad ; \quad \boxed{C_1 = \frac{wl}{2}}$$

$M = 0$

De (2):

$$0 = 0 + 0 + C_2 \quad ; \quad \boxed{C_2 = 0}$$

$y = 0$

De (4):

$$0 = \frac{1}{EI}l^4(0 - 0 - 0) + 0 + C_4$$

$$\boxed{C_4 = 0}$$

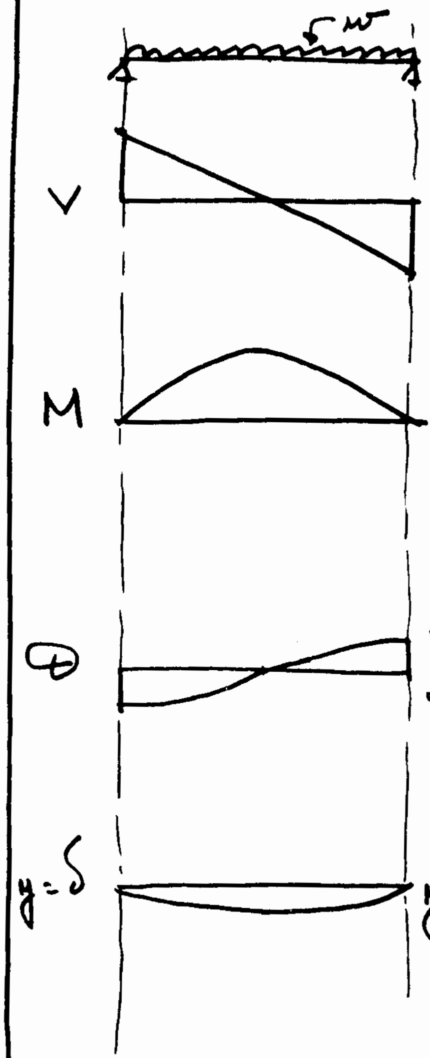
Para $x = l$

$y = 0$

$$0 = \frac{1}{EI}\left(+\frac{wl^4}{24} - \frac{wl}{2}\frac{l^3}{6}\right) + C_3 l + 0$$

$$C_3 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{wl^3}{24} + \frac{wl^3}{12}\right) \quad \boxed{C_3 = +\frac{wl^3}{24EI}}$$

Ecuaciones y diagramas



$$V = -wx + C_1$$

$$V = -wx + \frac{wl}{2}$$

$$V = w\left(-x + \frac{l}{2}\right)$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wl}{2}x + 0$$

$$M = w\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{l}{2}x\right)$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(+\frac{wx^3}{6} - \frac{C_1 x^2}{2} - (C_2 x)\right) + C_3$$

$$\theta = \frac{w}{EI}\left(+\frac{x^3}{6} - \frac{l}{4}x^2 - 0\right) + \frac{wl^3}{24EI}$$

$$\theta = \frac{w}{EI}\left(+\frac{x^3}{6} - \frac{l}{4}x^2 + \frac{l^3}{24}\right)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(+\frac{wx^4}{24} - \frac{C_1 x^3}{6} - \frac{C_2 x^2}{2}\right) + C_3 x + C_4$$

$$y = \frac{w}{EI}\left(+\frac{x^4}{24} - \frac{l}{2}\frac{x^3}{6} + 0\right) + \frac{wl^3 x}{24EI} + 0$$

$$y = \frac{w}{EI}\left(+\frac{x^4}{24} - \frac{l}{12}x^3 + \frac{l^3}{24}x\right)$$

Flecha máxima

La flecha es máxima para $x = \frac{l}{2}$

$$y = \frac{w}{EI}\left(+\frac{x^4}{24} - \frac{l}{12}x^3 + \frac{l^3}{24}x\right)$$

$$y_{max} = \frac{w}{EI}\left(+\frac{l^4}{16\times 24} - \frac{l^4}{8\times 12} + \frac{l^4}{2\times 24}\right)$$

$$= \frac{w}{EI}\left(\frac{+l^4 - 4l^4 + 8l^4}{384}\right)$$

$$\boxed{y_{max} = +\frac{5wl^4}{384EI}}$$

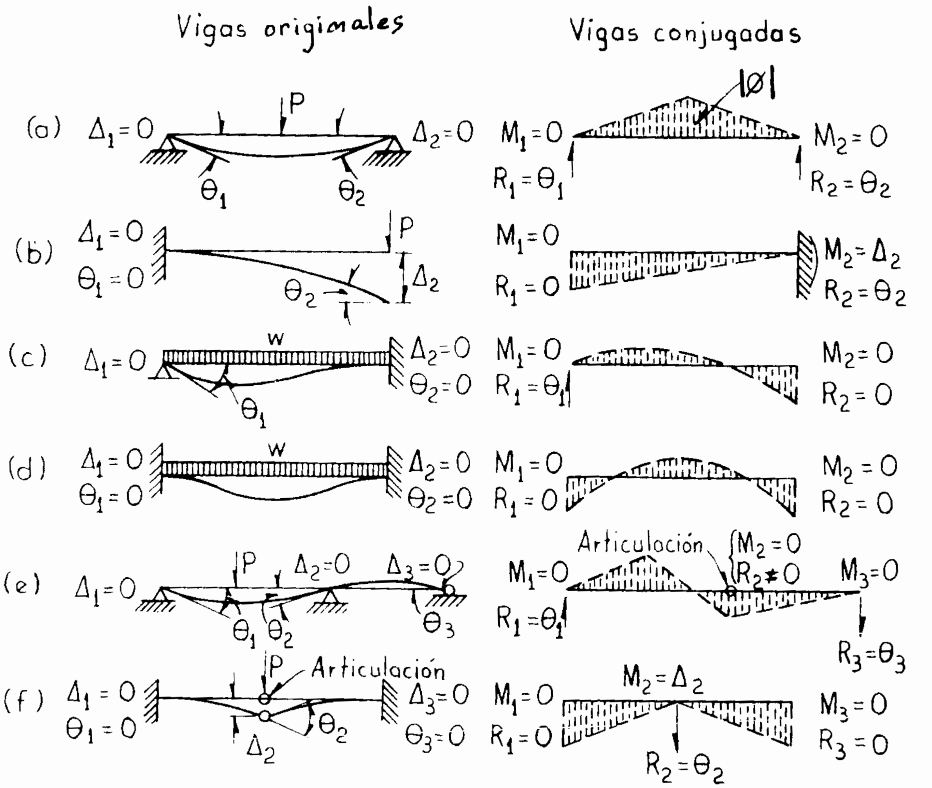
Pendiente de la curva en el apoyo izquierdo

$$\theta_1 = \frac{w}{EI}\left(0 + 0 + \frac{l^3}{24}\right)$$

$$\boxed{\theta_1 = +\frac{wl^3}{24EI}}$$

tos flexionantes son en realidad las deflexiones de la viga. La viga cargada con el diagrama de curvaturas recibe el nombre de viga conjugada".

Para que las constantes C_1 y C_2 se transformen en las constantes C_3 y C_4, es necesario, por lo general, modificar las condiciones de apoyo de la viga original. En la fig 1.18, cuyo uso se ilustra en el ejemplo 1,8, se muestran las condi



ig. 1.18 Vigas conjugadas correspondientes a diversas vigas reales

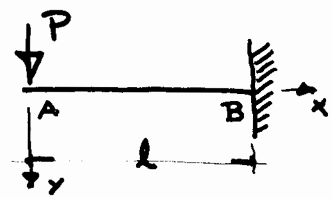
ciones de apoyo de las vigas conjugadas para diferentes condiciones de apoyo de las vigas originales. Las condiciones de apoyo de las vigas conjugadas se obtienen por inspección de las deflexiones y pendientes en los extremos de las vigas originales. Por ejemplo, en el voladizo del caso (b), el extremo de la viga conjugada debe ser un extremo libre ya que al ser nulas la deflexión y la pendiente en la viga original, no pueden existir ni momento ni fuerza cortante en la viga conjugada. Por otra parte, el extremo derecho de la viga conjugada debe tener tanto momento como fuerza cortante ya que en la viga original existen deflexión y pendiente en dicho extremo. Por lo tanto, el extremo derecho es un empotramiento en la viga conjugada.

En el ejemplo 1.8 se aplica el método de la viga conjugada a la determinación de la flecha en el extremo de un voladizo. Las condiciones de apoyo que deben considerarse en la viga conjugada pueden apreciarse en la fig 1.18. De acuerdo con las convenciones de signos que se han estado utilizando, el momento de la viga real es negativo, la carga que actúa sobre la viga conjugada es negativa y el momento producido por ésta será positivo ya que origina compresiones en la fibra superior y tensiones en la fibra inferior. Por lo tanto, las deflexiones, que son iguales a los momentos de la viga conjugada, serán también positivas, es decir hacia abajo.

EJEMPLO 1.8 CALCULO DE LA DEFLEXION EN EL EXTREMO DE UN VOLADIZO POR EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA

DATOS

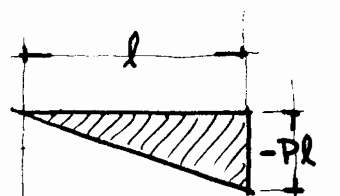
Material homogéneo y elástico. Momento de inercia constante igual a I.



Se pide: Encontrar la deflexión en el extremo del voladizo por el método de la viga conjugada.

SOLUCION:

Diagrama de momentos de la viga real



Viga conjugada (Ver fig 1.18)

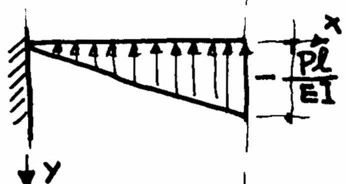
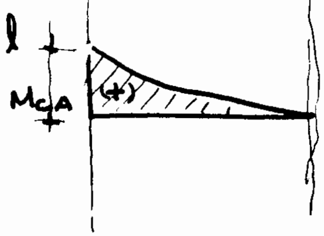


Diagrama de momentos de la viga conjugada

Momento en A: $M_{CA} = \left(\frac{1}{2}\frac{P\ell}{EI}\right)\frac{2}{3}\ell$



Deflexión

$$\boxed{y = M_{CA} = \frac{1}{3}\frac{P\ell^3}{EI}}$$

1.2.5.3 Cálculo de pendientes y deflexiones por los teoremas área-momento*

Supóngase que la distribución de curvaturas a lo largo de una viga sigue una ley cualquiera como la mostrada en la fig 1.19-a y considérese un segmento de viga de longitud, dx, en el que la curvatura tiene el valor ϕ. De acuerdo con la ecuación (1.2) la rotación $\Delta\theta$ entre dos secciones de una vigo separadas una distancia Δx se puede calcular con la ecuación

$$\Delta\theta = \phi\Delta s$$

Tomando límites cuando Δx tiende a cero y considerando que la longitud del arco Δs es prácticamente igual a la longitud de la cuerda Δx, por ser las deformaciones pequeñas, se obtiene

$$d\theta = \phi dx \qquad (1.28)$$

El término ϕdx representa el área rayada de la fig 1.19-a. Si se desea calcular la rotación entre dos secciones cualesquiera A-A y B-B (fig 1.19-a), basta integrar la ecuación (1.28) entre las secciones A-A y B-B,

$$\theta_{AB} = \int_0^\ell \phi dx \qquad (1.29)$$

Esta integral representa el área del diagrama de distribución de curvaturas entre las secciones consideradas.

La ecuación (1.29) es la expresión matemática del primer teorema área-momento, que establece que: La rotación entre dos secciones de una viga es igual al área del diagrama de curvaturas entre las secciones consideradas.

La integración de la ecuación (1.29) resulta práctica cuando la distribu-

*Estos teoremas se conocen también con el nombre de teoremo de Mahr o teoremas de Greene, por haber sido desarrollados independientemente en la misma época por los Profesores Otto Mohr y Charles E. Greene.

ción de curvaturas se puede representar con una expresión matemática sencilla o cuando dicha distribución es constante, por ejemplo, en los materiales de comportamiento elástico lineal. Si no es así, resulta conveniente un procedimiento numérico que consiste en dividir el diagrama de distribución de curvaturas en segmentos de longitud finita Δx (fig 1.20-a) y calcular el área por integración numérica, o sea,

$$\theta_{AB} = \sum_{i=1}^{m} \phi_i \, \Delta x \tag{1.30}$$

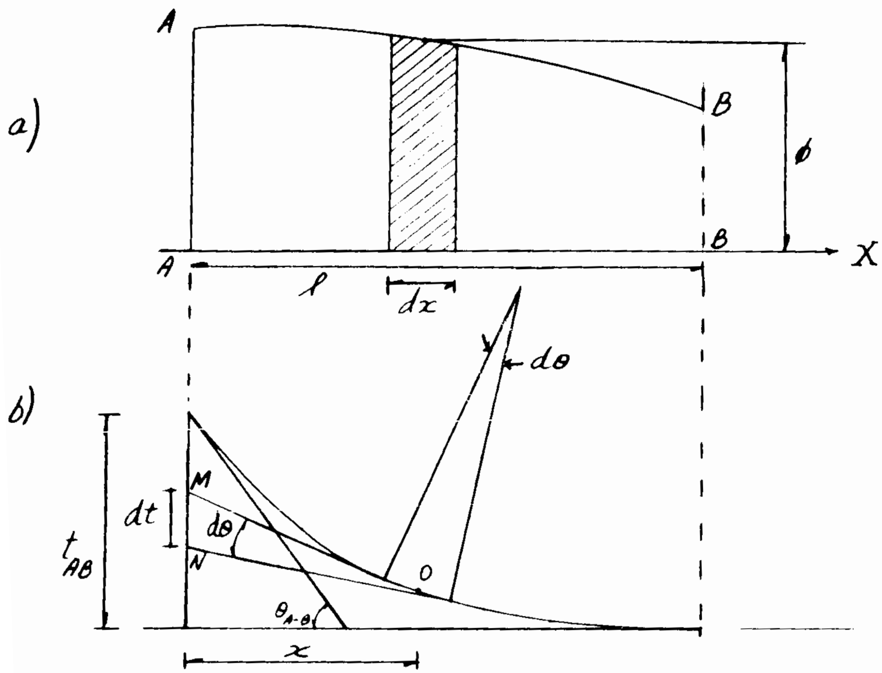


Fig 1.19 Relaciones entre curvatura, rotación y desplazamiento lineal.

En este caso las rotaciones se concentran en los puntos centrales de cada intervalo como se muestra en la fig 1.20-c.

El segundo teorema área-momento permite calcular el desplazamiento lineal de una sección de la viga respecto a otra sección. Si se multiplica el ángulo $d\theta$ por la distancia del segmento dx a la sección A-A, se obtiene el desplazamiento dt, fig 1.19-b, entre los extremos del segmento diferencial,

$$dt = x \, d\theta \tag{1.31}$$

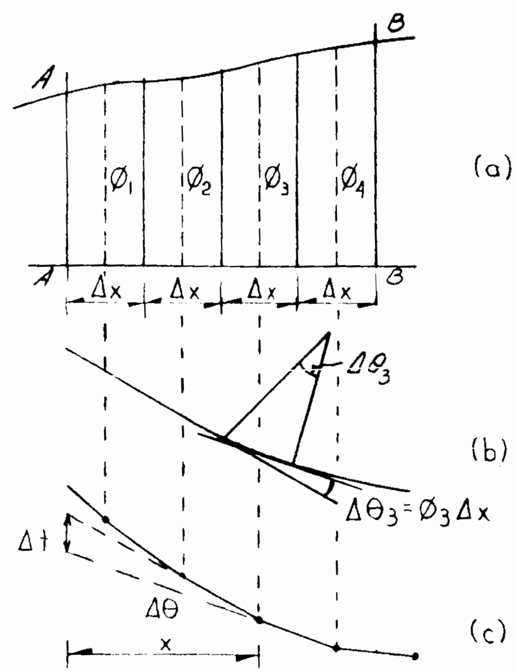


Fig 1.20 Discretización del diagrama de curvaturas

Esta ecuación es válida únicamente para desplazamientos pequeños ya que se considera que el triángulo MNO es rectángulo, a pesar de que en rigor no lo es. Las deformaciones y curvaturas de elementos reales son lo suficientemente pequeñas para aceptar esta simplificación.

Sustituyendo el valor de $d\theta$ dado por la ecuación (1.28),

$$dt = x \phi dx \qquad (1.32)$$

El desplazamiento diferencial dt es producido únicamente por las curvaturas del segmento dx. El desplazamiento producido por el diagrama total de curvaturas entre las secciones A-A y B-B es:

$$t_{AB} = \int_0^{\ell} x \phi dx \qquad (1.33)$$

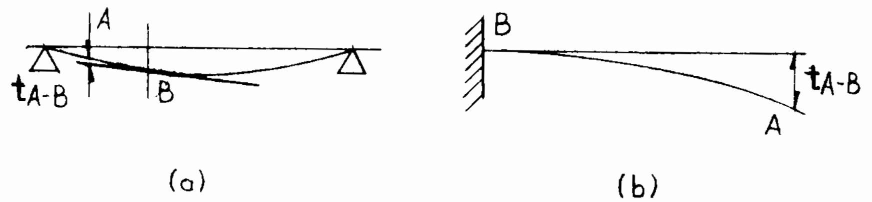


Fig 1.21 Desplazamiento lineal

Esta integral es la expresión matemática del segundo teorema área-momento que establece que: El desplazamiento lineal de un punto del eje de una viga con respecto a la tangente que pasa por otro punto es igual al momento de primer orden del área del diagrama de curvaturas comprendido entre los dos puntos con respecto al primer punto. Obsérvese que no siempre el desplazamiento lineal es igual a la deflexión o flecha de la viga. Por ejemplo, el desplazamiento t_{AB} del punto A con respecto a la tangente que pasa por B en la fig 1.21-a no es la deflexión del punto, mientras que en la fig 1.21-b sí lo es, por ser horizontal la tangente al punto B. En los ejemplos se indica cómo pueden calcularse las deflexiones a partir de los desplazamientos lineales cuando no son iguales ambas cantidades.

El cálculo de desplazamientos también puede hacerse por el procedimiento numérico descrito para el caso de rotaciones (fig 1.20). La integral de la ecuación 1.33 se sustituye por

$$t_{AB} = \sum_{i=1}^{m} x_i \phi_i \Delta x \qquad (1.34)$$

En la aplicación de los teoremas de área-momento se requieren las áreas y los momentos de primer orden. Para facilitar los cálculos correspondientes, se presentan en el apéndice A las áreas y centroides de los diagramas de curvatura más comunes.

Convención de signos. Los teoremas área-momento permiten obtener la rotación de una sección respecto a otra y el desplazamiento lineal de una sección respecto a la tangente que pasa por otra sección. Es conveniente establecer y observar cuidadosamente el signo tanto de la rotación como del desplazamiento lineal. Siguiendo las convenciones de la sección 1.2.2, se establecen los siguientes criterios.

Las curvaturas, ϕ, de una sección transversal dada se consideran con el signo contrario al del momento flexionante en dicha sección. Puede haber, por lo tanto, curvaturas positivas (cuando la viga deformada es cóncava vista por abajo) y negativas (cuando la viga deformada es cóncava vista por arriba) — — — —

como se indica en la fig 1.22-a. El punto en que la curvatura cambia de signo corresponde, por lo tanto, al punto de momento flexionante nulo; dicho punto recibe el nombre de punto de inflexión.

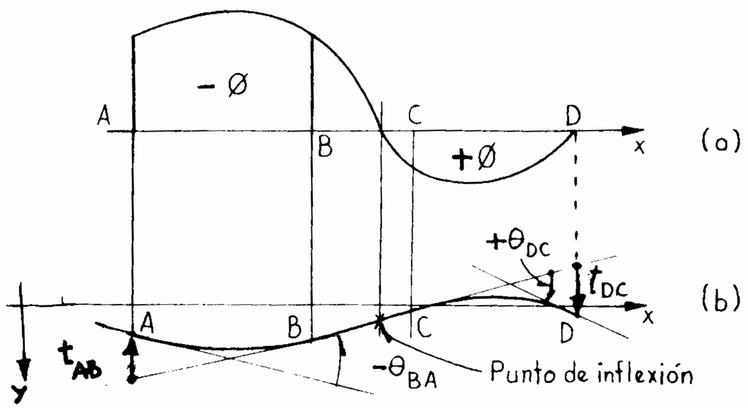


Fig 1.22 Convención de signos

La rotación relativa de una sección B con respecto a una sección A, que se representa como $\theta_{BA'}$ es negativa si el ángulo medido de la tangente en A, a la tangente en B tiene el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, tal como el ángulo θ_{BA} de la fig 1.22-b. La rotación relativa es positiva en caso contrario, como la rotación θ_{DC} mostrada en la fig 1.22-b.

El desplazamiento lineal de un punto A respecto a la tangente que pasa por otro punto B, $t_{AB'}$ es negativo si el punto A queda arriba de la tangente que pasa por el punto B, como el desplazamiento lineal t_{AB} de la fig 1.22-b y es positivo en caso contrario, como el desplazamiento t_{DC} de la misma figura.

Generalización a vigas de sección variable

En la sección anterior se ha supuesto que el diagrama momento-curvatura es el mismo para todas las secciones transversales de la viga, por lo que se ha podido obtener la distribución de curvaturas a lo largo del elemento directamente del diagrama de momento flexionante y del diagrama momento-curvatura.

En vigas de sección variable, sucede que no todas las secciones transversales de la viga tienen el mismo diagrama momento-curvatura. Por ejemplo, en la viga de la fig 1.23-a, las secciones transversales comprendidas entre B-B y B'-B' tienen el diagrama momento-curvatura mostrado en la fig 1.24-a, mientras que las secciones comprendidas entre A-A y B-B y entre A'-A' y B'-B', tienen el diagrama momento-curvatura mostrado en la fig 1.24-b. En este caso, las curvaturas correspondientes a los momentos mostrados en la fig 1.23-b se localizan en el diagrama M-ϕ de la fig 1.24-a para las secciones comprendidas entre B-B y B'-B', y en el diagrama M-ϕ de la fig 1.24-b para las secciones comprendidas entre A-A y B-B, y entre B'-B' y A'-A'. De esta manera se obtiene la distribución de curvaturas mostrada en la fig 1.23-c. Obsérvese que en las secciones B-B y B'-B', en que la sección transversal cambia bruscamente, se tienen dos curvaturas; una de ellas corresponde al diagrama M-ϕ de la fig 1.24-a y la otra el diagrama M-ϕ de la fig 1.24-b.

Una vez obtenido el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo de la viga, pueden obtenerse las rotaciones y deflexiones aplicando los teoremas área-momento de la misma manera que en el caso de vigas de sección constante. Únicamente hay que observar que el proceso de integración se debe hacer por zonas en que la curvatura sea función continua. Por ejemplo, en el caso de la fig 1.23 no se puede integrar a lo largo de toda la viga sino que es necesario hacerlo entre las secciones A-A y B-B, después entre las secciones B-B y C-C, (y) así sucesivamente.

En los ejemplos 1.9, 1.10 y 1.11 se ilustra la aplicación de los teoremas área-momento.

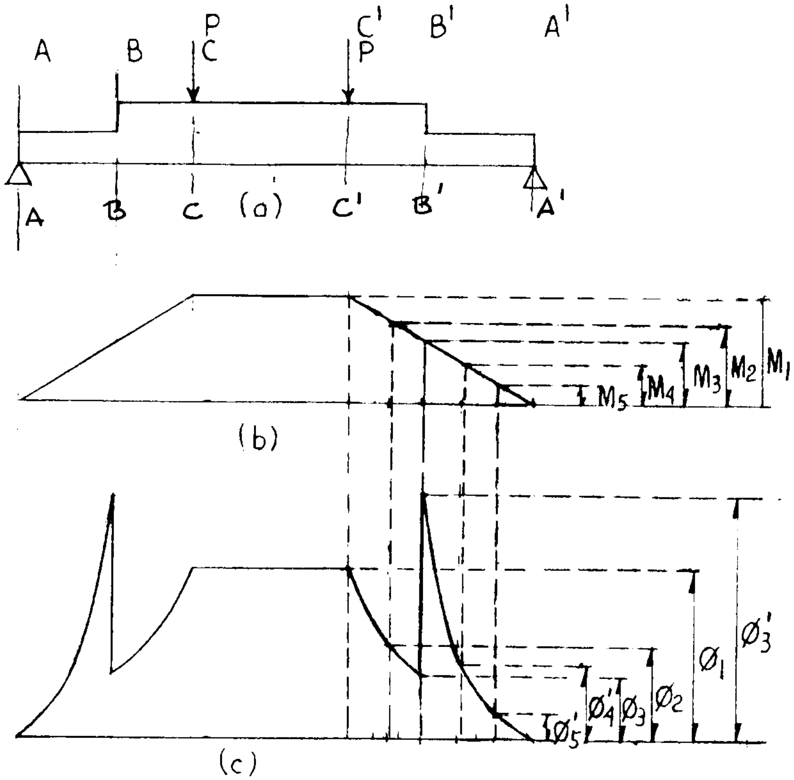


Fig 1.23 Diagrama de curvaturasen viga de sección variable

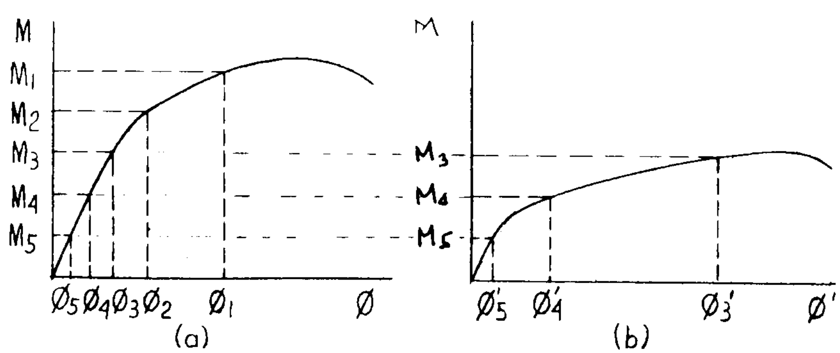


Fig 1.24 Diagramas M-Ø

Ejemplo 1.9.- En este ejemplo se desea calcular la pendiente que tiene en el apoyo A el eje deformado de la viga, así como la deflexión que alcanza ésta al centro del claro. Sabiendo que el diagrama de momento flexionante para una viga libremente apoyada y con carga uniformemente distribuida es una parábola con el valor máximo de $\frac{w\ell^2}{8}$, se puede determinar el diagrama de curvaturas, el cual por definición es igual el momento flexionante, con signo negativo, dividido entre la rigidez, EI. Debido a la simetría de la viga, la tangente al eje deformado de la misma al centro del claro resulta horizontal. Conocida la pendiente en el punto B, se puede conocer la pendiente en cualquier otro punto de la viga empleando la expresión $\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$, siendo B un punto situado a la derecha del punto A. Como el área del diagrama de curvaturas es negativa, por el primer teorema área-momento, el incremento θ_{BA} resulta negativo. El signo encontrado concuerda con el sentido del giro de la pendiente en A a la pendiente en B, que es contrario a las manecillas del reloj. De la expresión antes señalada se obtiene que la pendiente en A es positiva, siendo el valor de ésta $\frac{w\ell^3}{24EI}$.

La deflexión al centro del claro se puede encontrar aplicando el segundo teorema área-momento. La desviación tangencial de A respecto a B, t_{AB}, en este caso resulta igual a la deflexión de la viga, BB', e igual al área de la mitad de la parábola $\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{w\ell}{8EI}\cdot\frac{\ell}{2}\right)$, multiplicada por la distancia del centroide de esta área a la vertical que pasa por A $\left(\frac{5}{8}\frac{\ell}{2}\right)$.

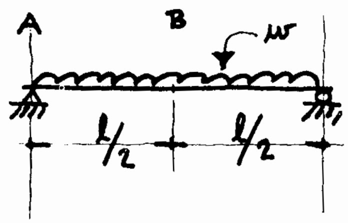
Como se puede observar, la desviación tangencial resulta negativa, lo cual concuerda con lo indicado en el diagrama.

Ejemplo 1.10.- Con este ejemplo se ilustra la aplicación de los teoremas área-momento a vigas de sección variable. Debido a que el diagrama de curvaturas es igual al de momento, con signo negativo, dividido entre EI, y siendo I variable a lo largo de la viga, el diagrama de curvaturas tendrá variaciones bruscas al cambiar I de valor.

En el problema se pide encontrar el giro, o cambio de pendiente, del eje deformado de

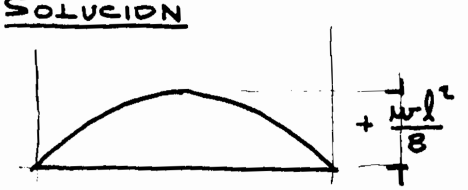
EJEMPLO 1.9 CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES EN UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORME POR AREA-MOMENTO 1

DATOS

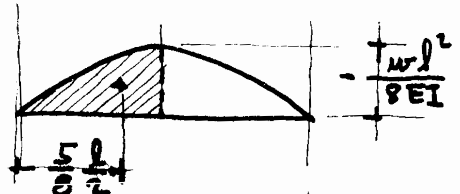


Se pide: Encontrar la pendiente en A y la deflexión en B.

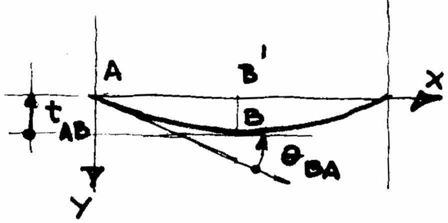
SOLUCION



Momento flexionante



Curvaturas



Deflexiones y pendientes

EJEMPLO 1.9 (Continuación) 2

Deflexiones y pendientes (cont.)

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$$

$$0 = \theta_A + \left(-\frac{wl^2}{8EI}\times\frac{2}{3}\,\frac{l}{2}\right)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{wl^3}{24EI}}$$

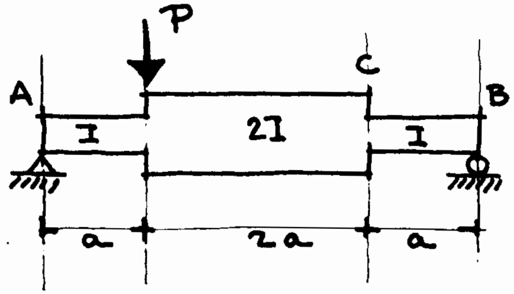
$$BB' = t_{AB} = \left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{wl^2}{8EI}\right)\frac{5}{8}\,\frac{l}{2}$$

$$\boxed{BB' = -\frac{5}{384}\,\frac{wl^4}{EI}}$$

G- 604025

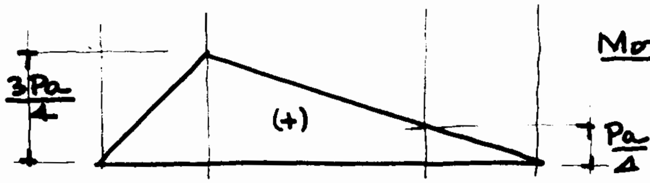
EJEMPLO 1.10 CALCULO DE GIROS Y DEFLEXIONES MAXIMAS EN UNA VIGA CON MOMENTO DE INERCIA VARIABLE POR LOS TEOREMAS DE AREA-MOMENTO 1

DATOS

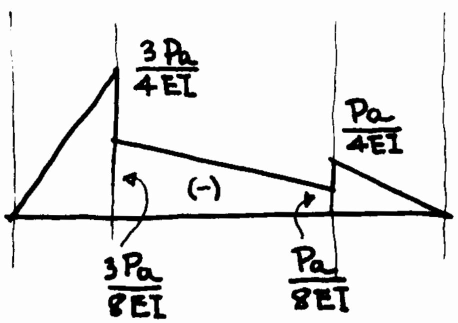


Se pide: Determinar el giro de C respecto a A y la deflexión máxima de la viga.

SOLUCION

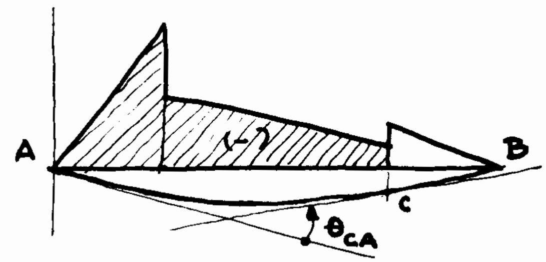


Momento flexionante



Curvaturas

EJEMPLO 1.10 (Continuación) 2

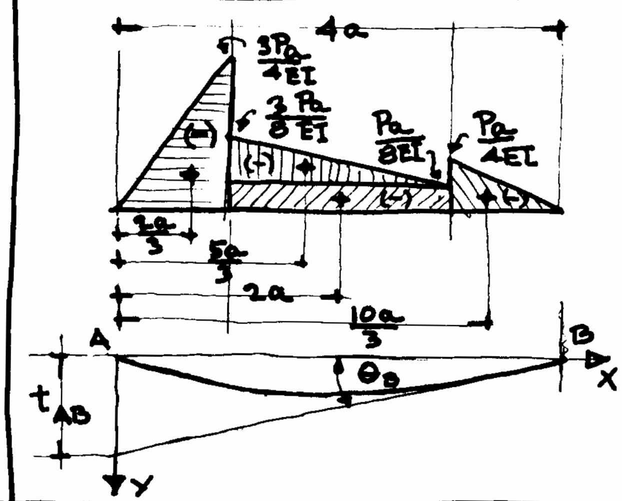


Giro

$$\theta_{CA} = -\frac{1}{2} \times \frac{3Pa}{4EI} \times a - \frac{\frac{3Pa}{8EI} + \frac{Pa}{8EI}}{2} \times 2a$$

$$\boxed{\theta_{CA} = -\frac{7}{8}\frac{Pa^2}{EI}}$$

Deflexión maxima



Cálculo de t_{AB} y θ_B

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{4a}$$

$$t_{AB} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3Pa}{4EI}\right)\times a \times \frac{2a}{3} + \left(\frac{-Pa}{8EI}\right)\times 2a \times 2a + \frac{1}{2}\times\left(\frac{-2Pa}{8EI}\right)\times 2a \times \frac{5a}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{4EI}\right)\times a \times \frac{10a}{3}$$

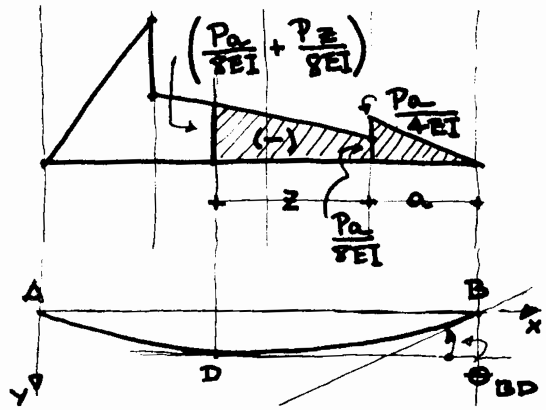
$$\boxed{t_{AB} = \frac{-19Pa^3}{12EI}}$$

$$\boxed{\theta_B = \frac{-19Pa^2}{48EI}}$$

Determinación de la posición de la sección donde la tangente es horizontal

(En la hoja siguiente.)

Determinación de la posición de la sección donde la tangente es horizontal



Debe cumplirse:

$$\theta_{BD} = \theta_B$$

$$\theta_{BD} = -\frac{\frac{Pa}{8EI} + \frac{Pz}{8EI} + \frac{Pa}{8EI}}{2}\, z + \frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{4EI}\right)a$$

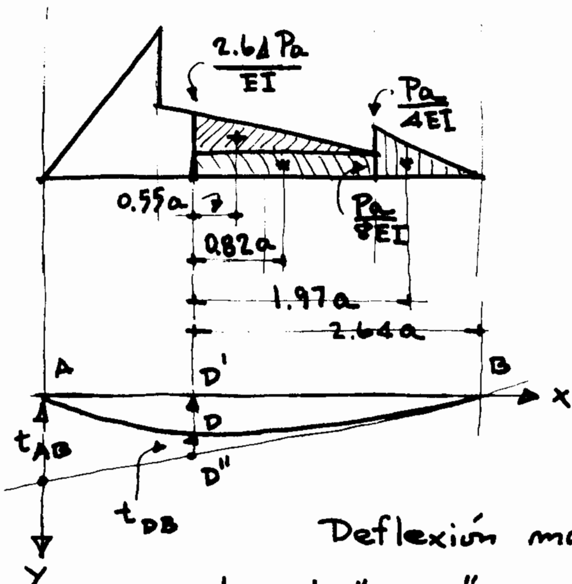
$$\frac{-19Pa^2}{48EI} = -\frac{\frac{Pa}{8EI} + \frac{Pz}{8EI} + \frac{Pa}{8EI}}{2}\, z + \frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{4EI}\right)a$$

$$3z^2 + 6az - 13a^2 = 0$$

$$\boxed{z = 1.64a}$$

EJEMPLO 1.10 (Continuación) 5

Cálculo de la deflexión máxima



Deflexión máxima = DD'

$$DD' = D'D'' - DD''$$

$$D'D'' = \frac{t_{AB} \times 2.64a}{4a} = -\frac{19}{12}\frac{Pa^3}{EI} \times \frac{2.64a}{4a} = -1.045\frac{Pa^3}{EI}$$

$$DD'' = t_{DB}$$

(sigue en la hoja siguiente)

EJEMPLO 1.10 (Continuación) 6

$$t_{DB} = \frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{4EI}\right)\times a \times 1.97a + \left(\frac{-Pa}{8EI}\right)\times 1.64a \times 0.82a + \frac{1}{2}\left(-\frac{1.64a}{8EI}\right)\times 1.64a \times 0.55a = -0.506\frac{Pa^3}{EI}$$

$$DD' = 1.045\frac{Pa^3}{EI} - 0.506\frac{Pa^3}{EI}$$

$$\boxed{\text{Deflexión máxima} = \frac{0.539Pa^3}{EI}}$$

la viga al pasar del punto A al C. Por el primer teorema area-momento, este giro es igual al área del diagrama de curvatura comprendida entre las dos secciones, $-\frac{7}{8}\frac{Pa^2}{EI}$. El signo negativo de este giro concuerda con el sentido marcado en el diagrama, contrario a las manecillas del reloj, al girar la tangente en A a la tangente en C.

La flecha máxima se presenta donde la pendiente al eje deformado es nula. Para determinar su localización es necesario conocer la pendiente en un punto cualquiera de la viga. En el ejempla se escogió el apoyo B cuya pendiente será $\theta_B = \frac{t_{AB}}{4a} = -\frac{19\,Pa^2}{48EI}$. El signo negativo de la pendiente concuerda con la dirección de los ejes. Suponiendo que la flecha máxima se presenta en el punto D, la pendiente en este punto, θ_D, debe ser igual a cero y la relación $\theta_B = \theta_D + \theta_{BD}$ también debe cumplirse. Siendo $\theta_D = 0$, luego $\theta_B = \theta_{BD}$. Pero θ_{BD}, por el primer teorema area-momento, será igual al área del diagrama de curvatura comprendido entre D y B, por lo que para determinar la posición de la flecha máxima es necesario determinar el valor de z que hace el área del diagrama de curvatura igual al giro en B, resultando z = 1.64 a.

La deflexión máxima será igual a la distancia DD', la cual puede obtenerse restando a la distancia D'D" el valor DD" que es la desviación tangencial t_{DB}. La distancia D'D" puede encontrarse por triángulos semejantes ya que la desviación tangencial t_{AB} se conoce.

La desviación tangencial t_{DB} se encuentra aplicando el segundo teorema area-momento resultando igual a $-0.506\frac{Pa^3}{EI}$; el signo negativo concuerda con el sentido de la desviación tangencial encontrada. La deflexión máxima resulta ser igual a $0.539\frac{Pa^3}{EI}$. Esta deflexión se dedujo de consideraciones geométricas, por lo que no se tomó en cuenta el signo negativo de las desviaciones tangenciales.

Ejemplo 1.11.- Con este ejemplo se ilustra la forma de calcular las pendientes y las deflexiones de una viga, cuando el eje deformado de la misma presenta doble curvatura. El diagrama de curvaturas se encuentra dividiendo el valor de los momentos, con signos cambiados, entre EI. Cuando la curvatura es positiva, el eje deformado debe ser cóncavo visto por abajo, mientras que cuando es negativa, debe ser cóncavo visto por arriba; donde la curvatura es nula habrá un punto de inflexión.

Tomando en cuenta los criterios antes expuestos se puede suponer un eje deformado como el correspondiente a la primera hipótesis de configuración. La deflexión en A se puede estimar como A A'= A A" - A' A". El valor de A' A" se puede determinar si se conoce la desviación tangencial t_{CB}, la cual se puede calcular aplicando el segundo teorema área-momento, resultando igual a $-\frac{405}{EI}$. El signo negativo de esta desviación tangencial indica que debe estar en dirección contraria a la del eje Y, por lo que la configuración del eje deformado supuesta no es correcta. Para hacer coincidir el signo negativo con la dirección de la desviación tangencial es necesario adoptar una configuración como la mostrada en la segunda hipótesis. En este caso la deflexión del punto A resulta ser A A' = A' A" + A A". El valor de A'A" se determina por triángulos semejantes, una vez conocido el valor de t_{CB}. A A" resulta ser la desviación tangencial t_{AB}, la cual se encuentra aplicando el segundo teorema área-momento. El signo positivo de esta desviación tangencial concuerda con la dirección encontrada que es la misma que la del eje Y. Sumando los valores se encuentra que la deflexión en A es igual a $\frac{160}{EI}$ y sabiendo que EI es igual para esta viga a 2239 t-m^2 la flecha resulta de 7 cm.

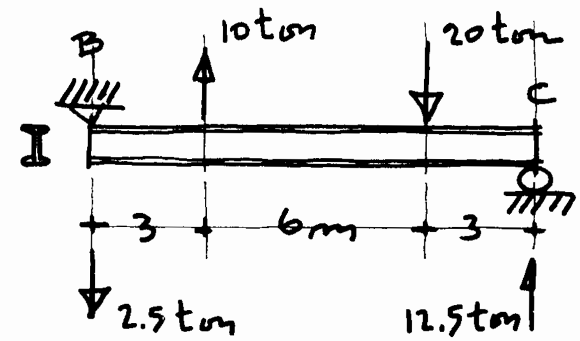
La pendiente en A se puede encontrar si se conoce la pendiente en cualquier otro punto de la viga, aplicando la ecuación $\theta_A = \theta_B + \theta_{AB}$. Para esta viga la pendiente es 1.25° respecto a la horizontal.

Para calcular la flecha máxima se necesita determinar primero el lugar donde la pendiente es nula. Esto puede hacerse partiendo de la ecuación $\theta_D = \theta_A + \theta_{DA}$, donde $\theta_D = 0$, θ_A es un valor ya conocido y θ_{DA} se expresa en función de x, la distancia desde el punto de inflexión a la sección buscada, donde la pendiente es **nula.** Resulta una ecuación de segundo grado en x, cuya solución es 3.61 m.

El cálculo de la deflexión se efectúa teniendo en cuenta que la deflexión máxima será igual a la desviación tangencial t_{BD}, ya que la tangente que pasa por D es horizontal.

EJEMPLO 1.11 CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES DE UNA VIGA SOMETIDA A DOS CARGAS CONCENTRADAS, POR AREA-MOMENTO

DATOS



$E = 2\times10^6$ Kg/cm^2

Viga I-12", pesad...

$I = 11194$ cm^4

$EI = 2\times10^6 \times 1.1194\times10^4$ kg-cm^2

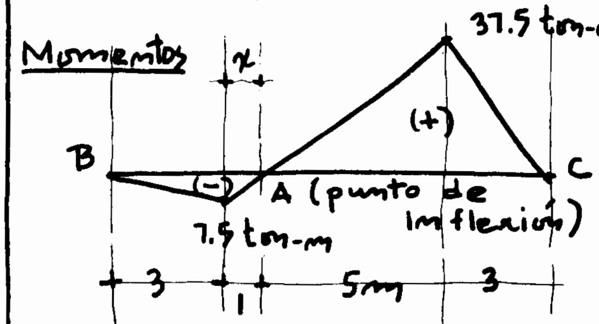
$= 2239$ ton-m^2

Se pide: a) Encontrar la pendiente y la deflexión en el punto de inflexión.

b) Encontrar la deflexión máxima.

SOLUCION

Momentos

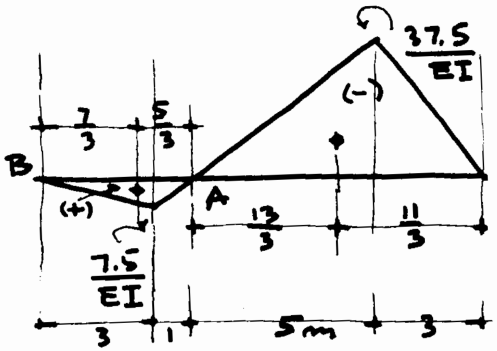


Cálculo de x:

$$\frac{x}{7.5} = \frac{6}{7.5+37.5}$$

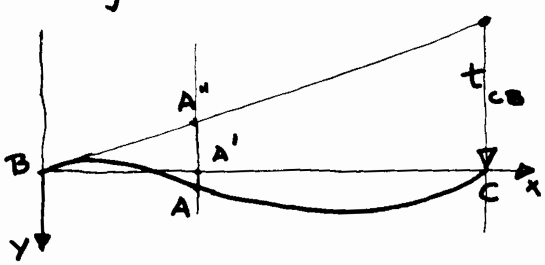
$$x = \underline{\underline{1\ m}}$$

EJEMPLO (1.11) (Continuación) 2



Curvaturas

Cálculo de la flecha y la desviación tangencial en A



1ª hipótesis

Flecha en A = AA'

$$AA' = AA'' - A'A''$$

$$\frac{A'A''}{4} = \frac{t_{CB}}{12} \quad ; \quad A'A'' = \frac{t_{CB}}{3}$$

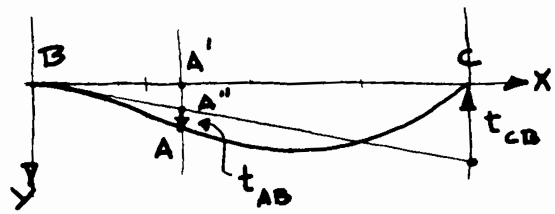
$$t_{CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7.5}{EI} \times 4 \times \left(8 + \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-37.5}{EI}\right) \times 8 \times \frac{11}{3}$$

$$t_{CB} = -\frac{405}{EI}$$

(sigue)

EJEMPLO (1.11) (Continuación) 3

La desviación tangencial resultó de sentido contrario al supuesto, por lo que debe ensayarse otra configuración.



2ª hipótesis

Flecha en A = A'A'' + A''A

$$AA'' = t_{AB} = \frac{7.5}{EI} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{EI}$$

$$A'A'' = \frac{405}{EI}$$ (Ver cálculo 1ª hipótesis.)

$$\text{Flecha en A} = \frac{405}{3EI} + \frac{25}{EI} = \frac{160}{EI}$$

$$= \frac{160}{2239} = 0.07\ m$$

$$\boxed{\text{Flecha en A} = 0.07\,m}$$

EJEMPLO 1.11 (Continuación) 4

Pendiente en B:

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{12} = \frac{405}{EI \cdot 12} = \frac{33.75}{EI}$$

Pendiente en A:

$$\theta_A = \theta_B + \theta_{AB} = \frac{33.75}{EI} + \frac{7.5}{EI} \times \frac{4}{2}$$

$$= \frac{48.75}{EI} = \frac{48.75}{2239}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_A &= 0.0218 \text{ radianes} \\ &= 1.25^\circ \end{aligned}}$$

Cálculo de la deflexión máxima

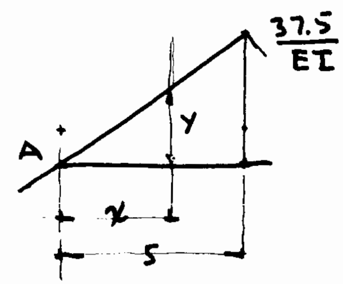
Posición de la sección donde la pendiente es nula

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{DA}$$

$$\theta_D = 0$$

$$\theta_A = \frac{48.75}{EI}$$

EJEMPLO 1.11 (Continuación) 5

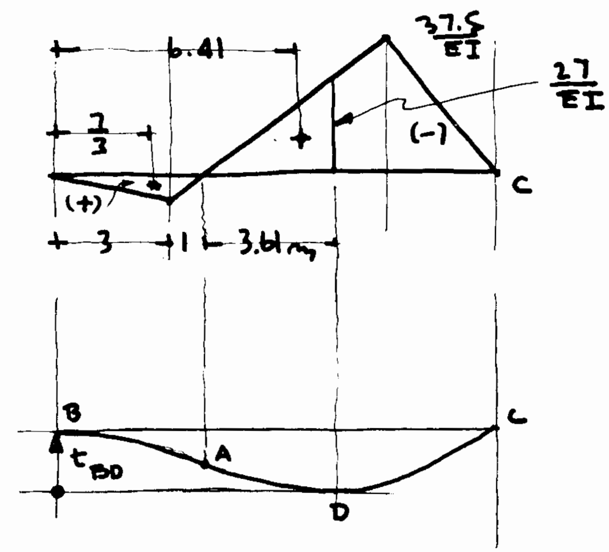


$$y = \frac{37.5}{5EI}x = \frac{7.5x}{EI}$$

$$\theta_{DA} = -\frac{7.5x \cdot x}{EI \times 2}$$

$$0 = \frac{48.75}{EI} - \frac{7.5x^2}{2EI} \; ; \; x = \underline{\underline{3.61 \text{ m}}}$$

Cálculo flecha máxima:



(sigue)

EJEMPLO (1.1) (Continuación) 6

$$t_{BD} = \frac{1}{2} \times \frac{7.5}{EI} \times 4 \times \frac{7}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{27}{EI} \times 3.61 \times 6.41$$

$$= \frac{35}{EI} - \frac{312}{EI} = -\frac{277}{EI} = -\frac{277}{2239}$$

$$\boxed{\text{Flecha maxima} = 0.124\ m}$$

1.3 TEORIA DE FUERZA CORTANTE

1.3.1 Conceptos introductorios

En esta sección se estudia el efecto de la fuerza cortante sobre vigas. En estos elementos estructurales, los esfuerzos producidos por la fuerza cortante, llamados esfuerzos cortantes, se presentan casi siempre acompañados por los esfuerzos normales producidos por el momento flexionante. La combinación de esfuerzos cortantes y esfuerzos normales causa condiciones críticas de esfuerzos, que se estudian en la sección 1.5. En esta sección se analiza únicamente el efecto de los esfuerzos cortantes, sin considerar su interacción con esfuerzos normales. Generalmente se acostumbra dimensionar las vigas sin considerar dicha interacción, que suele ser poco significativa.

Existen elementos estructurales como los remaches, tornillos, pernos, etc, en los que actúan únicamente esfuerzos cortantes, o en los que los esfuerzos normales son despreciables. Estos esfuerzos cortantes se denominan directos y se estudian en la sección 1.3.2.

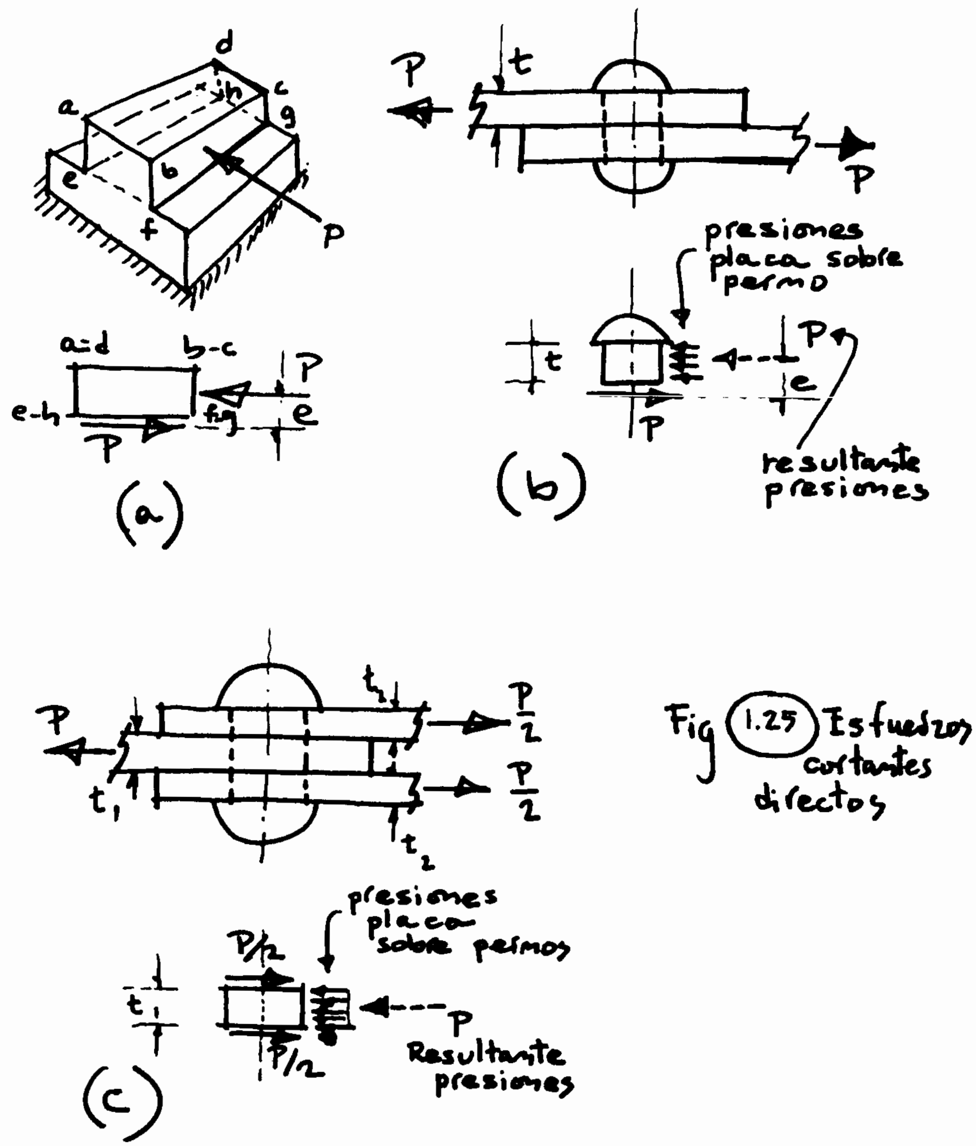


Fig 1.25 Esfuerzos cortantes directos

1.3.2 Esfuerzos cortantes directos

Son muy frecuentes los casos en que las fuerzas cortantes se transmiten de una parte de un cuerpo a otra, ya sea directamente o a través de pernos o remaches como se muestra en la fig 1.25. Para determinar los esfuerzos que se presentan en los planos de transmisión, se pueden hacer secciones en los planos de contacto y analizar el equilibrio del cuerpo libre resultante. En algunos casos, como el a y el b, el hecho de que las fuerzas no sean colineales conduce a la presencia de un momento no equilibrado Pe, suficientemente pequeño para ser despreciado.

En todos los casos, las fuerzas son transmitidas a través de las superficies del elemento que mantiene unidas a las piezas. Suponiendo que los esfuerzos que actúan en los planos de corte se distribuyen uniformemente, se puede obtener el valor de los esfuerzos por medio de la expresión

$$v = \frac{P}{A} \qquad (1.35)$$

en la que v, es el esfuerzo cortante. P es la fuerza total que actúa paralelamente y a través del corte y A es el área de la sección transversal del elemento cortado.

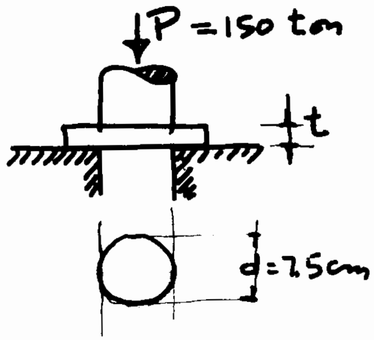
Nótese que en el caso de la fig 1.25-c, hay dos secciones del perno que resisten la fuerza cortante, por lo que cada sección resistirá la mitad de la fuerza cortante total.

En los ejemplos 1.12 y 1.13 se ilustra el dimensionamiento de elementos en que el esfuerzo cortante directo puede ser crítico.

EJEMPLO 1.12 DIMENSIONAMIENTO DE UNA PLACA SUJETA A ESFUERZO CORTANTE DIRECTO

1

DATOS

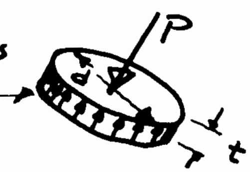


Esfuerzo cortante que puede resistir el material de la placa:

$\tau = 3000 \frac{kg}{cm^2}$

Se pide: Encontrar el espesor t necesario para que no se exceda el esfuerzo τ dado

SOLUCION



$$P = t \cdot \pi \cdot d \cdot \tau$$

$$t = \frac{P}{\pi \cdot d \cdot \tau} = \frac{150\,000\ kg}{\pi\,(7.5\ cm)\left(3000 \frac{kg}{cm^2}\right)}$$

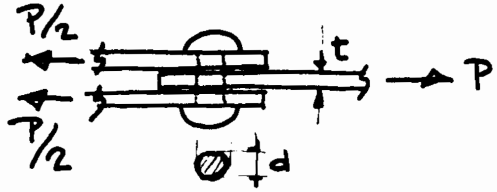
$$\boxed{t = 2.1\ cm}$$

EJEMPLO 1.13 DIMENSIONAMIENTO DE UN PERNO SUJETO A ESFUERZO CORTANTE DIRECTO

1

DATOS

$P = 6000\ kg$

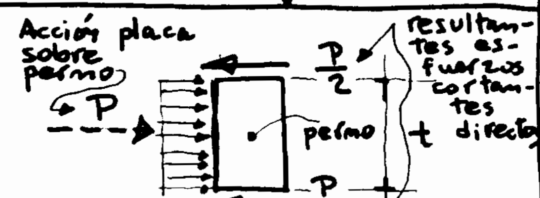


Esfuerzo cortante directo admisible:

$\tau = 700\ kg/cm^2$

Se pide: Encontrar el diámetro del perno requerido para que el esfuerzo cortante directo no exceda $700\ kg/cm^2$

SOLUCION



$$\tau = \frac{\frac{P}{2}}{A}$$

$$A = \frac{P/2}{\tau} = \frac{3000}{700} = 4.3\ cm^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$d^2 = \frac{4 \times A}{\pi}\ ; \quad d = \sqrt{\frac{4 \times 4.3}{\pi}}$$

$$\boxed{d = 2.3\ cm}$$

Ejemplo 1.12.- La placa que se desea dimensionar está colocada sobre un agujero de diámetro ligeramente mayor que el de la pieza cilíndrica a través de la cual se aplica la carga P. La pieza cilíndrica tenderá a perforar la placa originando esfuerzos cortantes directos en ésta. La superficie en que actuan éstos esfuerzos será igual al espesor de la placa por la circunferencia de la pieza cilíndrica.

El espesor requerido se determina considerando el equilibrio del cuerpo libre mostrado en la hoja de cálculo del ejemplo.

Ejemplo 1.13.- El ejemplo se refiere a un detalle de unión de placas típico en estructuras de acero.

La fuerza P se transmite de la placa de la derecha a las de la izquierda a través de un perno. La placa de la derecha ejercerá una acción cortante o de cizalleo sobre le perno en secciones a los lados de la placa. Se trata de determinar el diámetro que debe tener el perno para que no se exceda el esfuerzo cortante directo permisible v. Esto puede hacerse estudiando el equilibrio del tramo de perno mostrado en la hoja de cálculo.

1.3.3 Efectos de la fuerza cortante en vigas

Cuando una viga se flexiona debido a la acción de cargas externas, existen en la sección transversal de la viga tanto momentos flexionantes, M, como fuerza cortante, V, excepto en situaciones especiales como la mostrada en la fig 1.1. - Cuando existe fuerza cortante, la diferencia entre los momentos flexionantes correspondiente a --

dos secciones adyacentes, separadas una distancia dx, será igual a Vdx, por lo que si no existe cortante en las secciones estudiadas no habrá ningún cambio en el momento flexionante.

Para comprender mejor la relación antes mencionada, en la fig 1.26 se presentan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante correspondientes a una viga simplemente apoyada con dos cargas concentradas iguales y equidistantes de los apoyos. En dos secciones contiguas como la A y la B donde no existe fuerza cortante, el momento flexionante permanece constante, en tanto que en las secciones C y D cercanas al apoyo, en las cuales sí existe fuerza cortante, se observa un cambio en el momento flexionante.

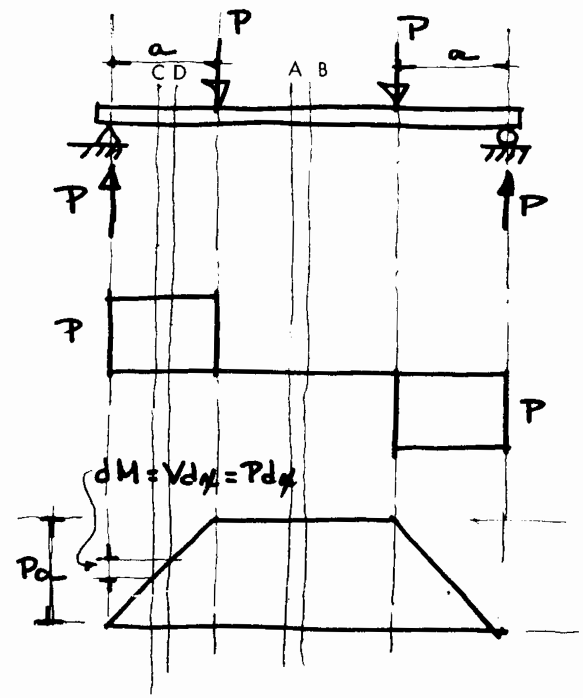


Fig 1.26 Relación entre fuerza cortante y momento flexionante para la condición de carga mostrada

Para ilustrar el efecto de la fuerza cortante, en donde el momento flexionante cambia de una sección a otra, considérese un segmenta de viga de sección rectangular (fig 1.27). En los extremos de esta sección se han dibujado bloques que representan la distribución de esfuerzos originados por el momento flexionante. Considerando que el esfuerzo máximo de la sección de la derecha es superior al de la izquierda y que las dos secciones transversales son iguales, el momento de la derecha debe ser superior al de la izquierda.

Si el segmento de viga antes mencionado está en equilibrio, cualquier parte de él, también lo estará. Por consiguiente, si se separa la porción situada encima del eje neutro de la de abajo, las ecuaciones de equilibrio deben satisfacerse en cualquiera de las dos partes.

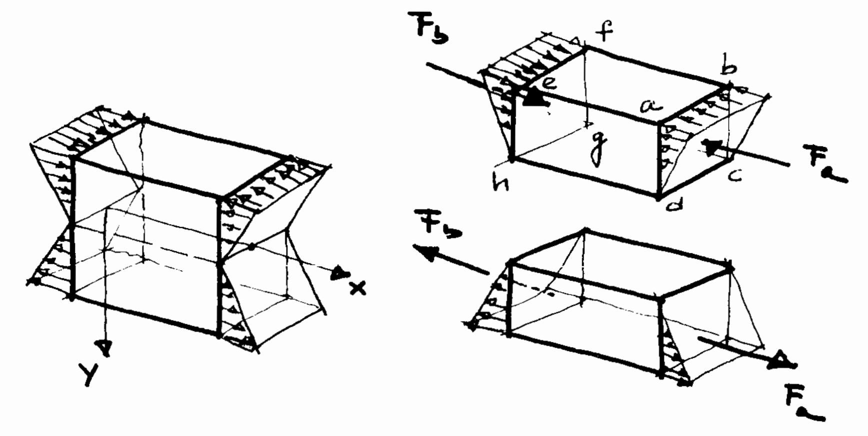


Fig 1.27 Fuerza cortante en planos horizontales

En cuanto a las fuerzas cortantes verticales, V, que na se ilustran en el bloque de esfuerzos, se observa que resultan iguales para dos secciones adyacentes, como la C y D(fig 1.26), por lo que la condición de $\Sigma F_y = 0$, se cumple.

Si se considera la condición $\Sigma F_x = 0$, se observa lo siguiente: la resultante de los esfuerzos de compresión que actúan en el área abcd es la fuerza Fa, y la de los esfuerzos que actúan en el área efgh, es F_b. Como los esfuerzos de la derecha se han supuesto mayores que los de la izquierda $F_a > F_b$, para que cualquier parte de la sección de la viga esté en equilibrio, es necesario que la diferencia de fuerzas, $F_a - F_b$, sea tomada por algún elemento resistente. Si se considera que la parte superior está unida a la inferior por medio de un perno, la fuerza resultante la tomará este perno, y el esfuerzo originado estará distribuido en la sección transversal del mismo. Si se considera que la sección completa está formada originalmente por una sola pieza, la fuerza resultante la estará tomando la sección cdgh de unión entre las dos porciones.

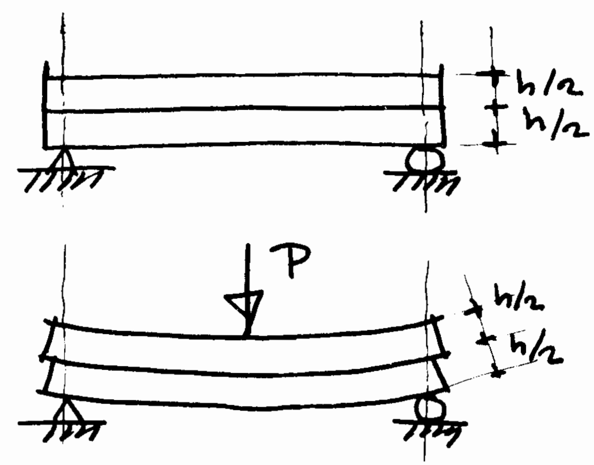


Fig 1.28 Flexión de dos vigas sobrepuestas

La presencia de las fuerzas cortantes horizontales en una viga puede demostrarse fácilmente por medio del siguiente experimento. Se toman dos piezas iguales de sección rectangular, de peralte igual a $h/_2$ y se colocan una encima de la otra, sobre unos apoyos que reproduzcan la condición de una viga simplemente apoyada, como se muestra en la fig 1.28. Se aplica entonces una carga concentrada P. Si no hay fricción entre las dos piezas, la flexión de las dos ocurre independientemente. Cada una de ellas tendrá esfuerzos de compresión en la parte superior y de tensión en la parte inferior, y las fibras longitudinales inferiores de la pieza superior deslizarán respecto a las fibras superiores de la pieza inferior.

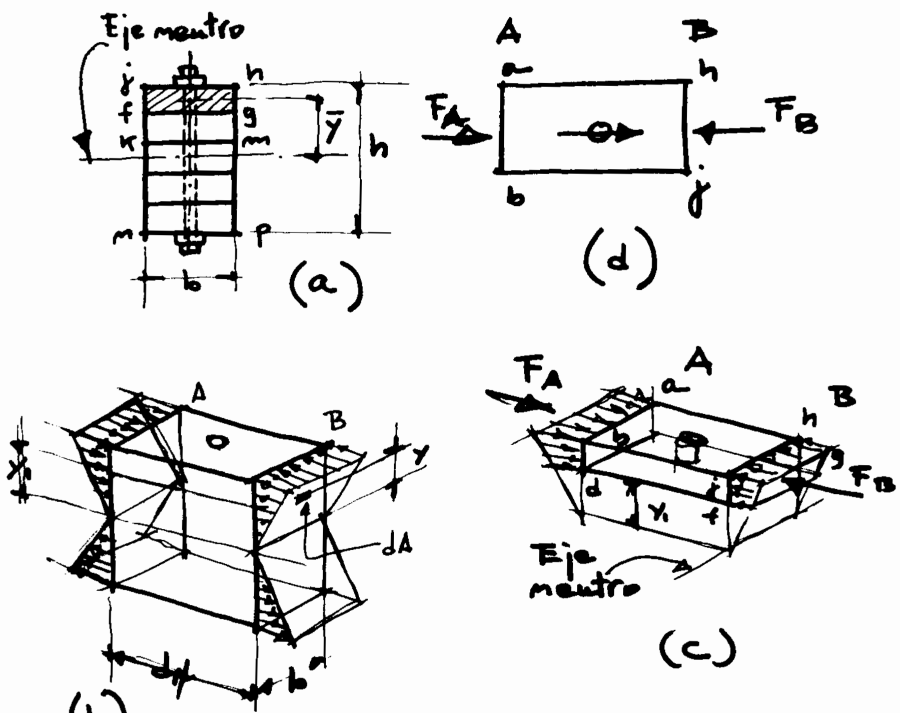


Fig 1.29 Determinación del flujo de cortante en una viga.

Si en lugar de las dos piezas se tiene una sola de peralte h, habrá una fuerza cortante a lo largo del plano neutro de tal magnitud que restrinja el deslizamiento de una parte respecto a la otra. Debido a esta restricción al deslizamiento, la pieza de peralte h será más rígida y más resistente que la formada por dos piezas de peralte igual a $h/_2$.

1.3.4. Flujo de cortante

Considérese una viga fabricada de varias placas como se muestra en la fig 1.29-a Para hacer que estas placas trabajen como una sola viga, se unen por medio de pernos, separados a una distancia conveniente. Un elemento de esta viga, aislado por medio de dos secciones paralelas perpendiculares al eje de la misma (fig 1.29-b), está sujeto a momentos flexionantes M_A en A y M_B en B. Debido a estos momentos, se desarrollan esfuerzos longitudinales en dichas secciones, los cuales actúan normales a la sección.

Estos esfuerzos varían linealmente desde cero en el eje neutro y en cualquier punto situado a una distancia y del eje neutro tendrán un valor de $\frac{M_B}{I}y$ en B y de $\frac{M_A}{I}y$ en A.

Si se toma la placa superior de la sección de la viga antes mencionada, cuya fibra más cercana al eje neutro está a una distancia y_1, se pueden determinar las fuerzas perpendiculares que están actuando en los extremos A y B de este elemento, multiplicando los esfuerzos por el área en que actúan. En el extremo B, la fuerza que actúa en un área diferencial dA situada a una distancia y del eje neutro, será igual a $(\frac{M_B}{I}y)$ dA y la fuerza total que actúa sobre el área fghj es la integral de la fuerza elemental sobre esta área. Se tiene, entonces

$$F_B = \int_{área} \frac{M_B}{I} y\, dA = \frac{M_B}{I} \int_{área} y\, dA = \frac{M_B}{I} Q$$

donde $Q = \int_{área} y\, dA = A_{fghj} \cdot \bar{y}$, M_B e I son constantes en toda la sección, y $\bar{y}$ es la distancia del eje neutro al centroide del área. La integral que define Q es el momento de primer orden o estático del área fghj respecto al eje neutro, que por definición, es igual al área por la distancia del centroide de esta área al eje neutro.

Siguiendo un razonamiento semejante, se obtiene que la fuerza que actua en el extremo A del elemento es:

$$F_A = \frac{M_A}{I}\int_{\text{área abde}} y\,dA = \frac{M_A Q}{I}$$

Si los momentos en A y B fueran iguales, la fuerza F_A sería igual a la F_B y los pernos que mantienen unidas las placas no desempeñarían ninguna función ya que la fuerza cortante resultante sería nula. Pero, si M_A es diferente de M_B, lo que sucede cuando existen fuerzas cortantes en dos secciones adyacentes, entonces F_A es diferente de F_B y la fuerza resultante R tiene que ser tomada por los pernos que mantienen unidas las placas.

Si M_A es diferente de M_B y la sección A está a una distancia dx de la sección B, los momentos flexionantes en dos secciones adyacentes difieren por una cantidad infinitesimal. Así, si el momento flexionante en A es M_A, el momento en B será $M_B = M_A + dM$, y las fuerzas F_A y F_B diferirán por una cantidad diferencial:

$$dF = F_b - F_a = \left(\frac{M_A + dM}{I}\right)Q - \left(\frac{M_A Q}{I}\right) = dM\frac{Q}{I} \qquad (1.36)$$

En lugar de trabajar con una fuerza en una longitud dx, es más significativa encontrar el valor de dicha fuerza en una longitud unitaria. Esto se puede lograr dividiendo dF entre dx. La cantidad $\frac{dF}{dx}$ se designa con la letra q y se llama <u>flujo de cortante</u>. Es igual a la fuerza cortante que se presenta por unidad de longitud y se puede calcular de la siguiente forma:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{I}\,\frac{Q}{dx} = \frac{dM}{dx}\,\frac{Q}{I} = \frac{VQ}{I} \qquad (1.37)$$

ya que $dM/dx = V$. La ecuación $dM/dx = V$ se había presentado en la sección 1.2.5.1.

En la expresión (1.37) I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro de la misma, V es la fuerza cortante que actúa en la sección investigada y Q es el momento de primer orden de la parte de la sección transversal situada encima del nivel considerado con respecto al eje neutro de la viga. Se puede demostrar que se obtiene el mismo valor de Q si se calcula el momento de primer orden de la parte de la sección transversal debajo del nivel considerado.

Ya que la fuerza cortante, V, está dada en kg, el momento de primer orden, Q, en cm^3 y el momento de inercia, I, en cm^4, el flujo de cortante, q, estará dado en kg/cm, o sea, como se estableció anteriormente, será igual a una fuerza por unidad de longitud.

<u>Ejemplo 1.14.- Flujo de cortante</u>

En este ejemplo se ilustra el efecto de la fuerza cortante (flujo de cortante) que se presenta en los planos de unión de los elementos de una viga que tienden a deslizar entre sí. También se ilustra la forma de calcular la distancia a que se deben de colocar los clavos en la zona de fuerza cortante máxima a lo largo del eje de la viga, para evitar este deslizamiento y hacer que toda la sección trabaje como una unidad.

Para determinar la separación a que se requiere colocar los clavos en la zona de fuerza cortante máxima es necesario conocer el valor del flujo de cortante $q = \frac{VQ}{I}$ en el plano de unión de las secciones consideradas.

Para determinar el valor de la fuerza cortante máxima es necesario determinar primero el valor de la reacciones y después construir el diagrama de fuerza cortante. En el ejemplo, la fuerza cortante máxima resultó de 1 350 kg, y se presenta en el tramo 1-2 de la viga.

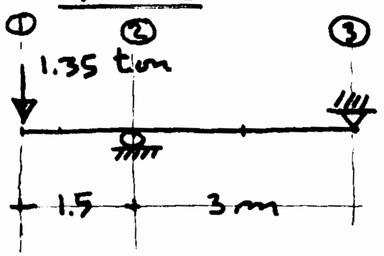
El momento de inercia I será el de toda la sección respecto al eje neutro, el cual, por simetría, se encuentra a la mitad de la altura de la sección.

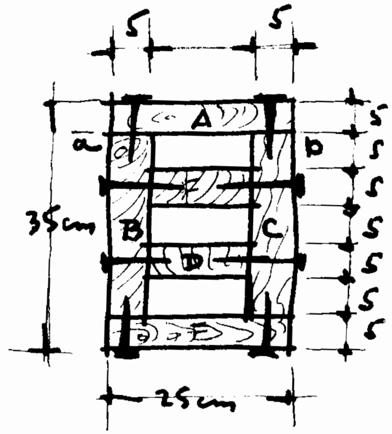
El valor del momento de primer orden, Q, depende del nivel al cual se desee determinar el valor de flujo de cortante, q. Para la unión de la sección A con las secciones B y C, Q es el valor del momento de primer orden de la zona A situada arriba del plano de unión de esta zona con las secciones B y C (plano a-b), respecto al eje neutro y resulta de 1 875cm^3.

El valor del flujo de cortante al nivel ab es por lo tanto igual a 34.3 kg/cm, y esta es

EJEMPLO 1.14 — 1
FLUJO DE CORTANTE

DATOS



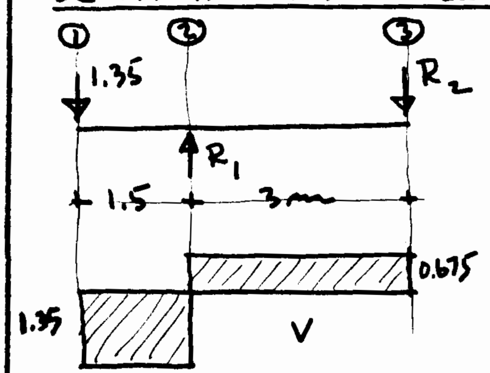


Resistencia de los clavos a fuerza cortante : 40 kg

Se pide la separación a que deben colocarse los clavos.

SOLUCION

Determinación fuerza cortante máxima



$\Sigma M_2 = 0$

$1.5 \times 1.35 = 3 \times R_2$

$R_2 = 0.675$ ton

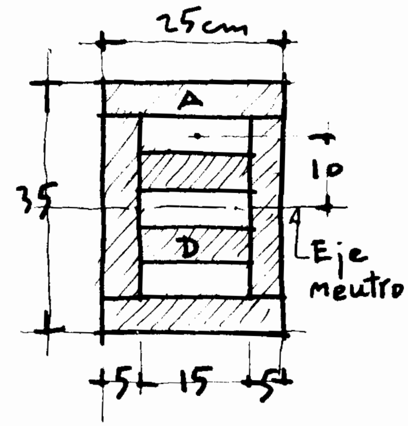
$\Sigma M_3 = 0$

$4.5 \times 1.35 = 3 \times R_1$

$R_1 = 2.025$ ton

EJEMPLO 1.14 (Continuación) — 2

Determinación del momento de inercia y del momento de primer orden (momento estático)



$$I = \frac{1}{12}\times 25\times 35^3 - 2\left(\frac{1}{12}\times 15\times 5^3 + 5\times 15\times 10^2\right) - \frac{1}{12}\times 15\times 5^3 \doteq 73\,800\ \text{cm}^4$$

$$Q_A = 5\times 25\times 15 = 1875\ \text{cm}^3$$

$$Q_D = 5\times 15\times 5 = 375\ \text{cm}^3$$

Flujo de cortante

$$q_A = \frac{V_{máx}\, Q_A}{I} = \frac{1350\times 1875}{73\,800} = 34.3\ \text{kg/cm}$$

$$q_D = \frac{V_{máx}\, Q_D}{I} = \frac{1350\times 375}{73\,800} = 6.86\ \text{kg/cm}$$

EJEMPLO (1.14) (Continuación) 3

Separación de clavos

$$S_A = \frac{40\times 2}{q_A} = \frac{40\times 2}{34.3} = \underline{\underline{2.3\ cm}}$$

$$S_D = \frac{40\times 2}{q_D} = \frac{40\times 2}{6.86} = \underline{\underline{11.6\ cm}}$$

la fuerza que se presenta por unidad de longitud. La separación a la que se debe colocar los clavos depende de su resistencia y del número que se coloque. Siendo en este caso 40 kg la resistencia a cortante de los clavos y dos los clavos que se colocan en cada sección, la separación de estos resulta igual a 2.3 cm.

En los planos verticales de unión de la pieza D con la B y la C, se presenta una fuerza cortante por unidad de longitud, q, cuyo valor depende del momento de primer orden de la zona D, el cual es igual a 375 cm^3. El valor de q en estas caras verticales resulta de 6.86 kg/cm. Ya que la resistencia al cortante de cada clavo, es de 40 kg y ya que están colocados por parejas, se tiene una resistencia al cortante de 80 Kg por lo que la separación de cada par de clavos es de 11.6 cm.

Las otras piezas, por simetría, requieren las mismas separaciones. En el tramo 2-3 de la viga, donde el valor de la fuerza cortante, V, es la mitad del valor para el tramo 1-2, la separación de los clavos es el doble de la encontrada para el tramo 1-2.

1.3.5 Esfuerzos cortantes

Al determinar el valor del flujo de cortante, q, se estableció que cuando el momento flexionante varía entre dos secciones transversales adyacentes separadas una distancia

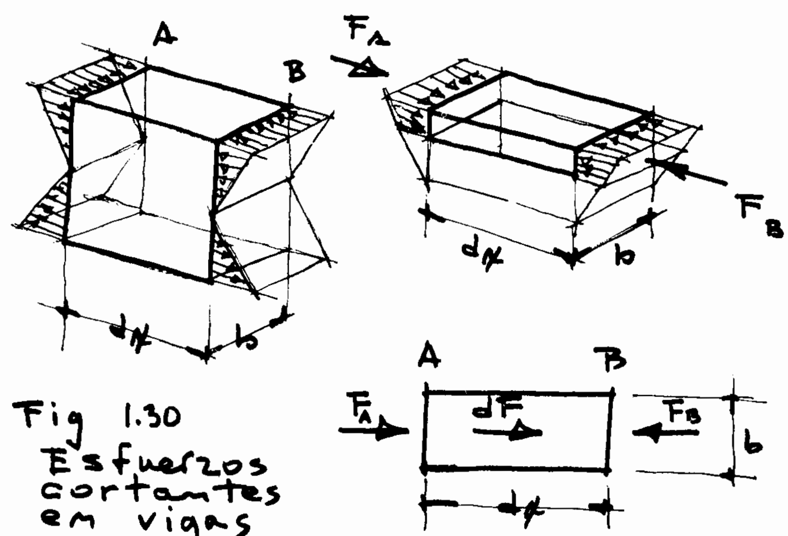


Fig 1.30 Esfuerzos cortantes en vigas

dx (fig 1. 30) en un corte paralelo al plano se presenta una fuerza cortante dF cuyo valor se puede determinar como

$$dF = F_B - F_A = dM\,\frac{Q}{I} \qquad (1.36)$$

Se analiza a continuación la obtención de esfuerzos cortantes en una sección rectangular de ancho b. Si se divide el valor de la fuerza dF entre el área en que se encuentra aplicada, $b\,dy$, se obtendrá el valor del esfuerzo cortante en el plano horizontal,

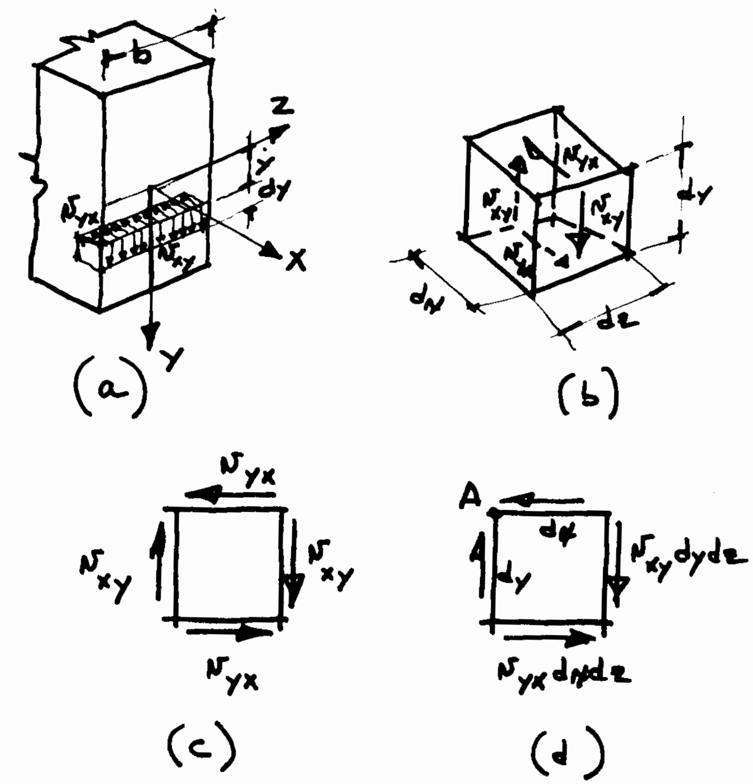


Fig 1.31 Equivalencia de los esfuerzos τ_{yx} y τ_{xy}

siendo este valor igual a

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{b\,dy} = \frac{dM}{dy}\,\frac{Q}{Ib} = \frac{VQ}{Ib} \qquad (1.38)$$

en la que V, es la fuerza cortante que actúa en la sección transversal, Q el momento de primer orden (estático) del área situada encima del nivel considerado, I el momento de inercia de toda la sección transversal y b el ancho de la sección transversal. El valor del esfuerzo cortante también puede expresarse como

$$\tau_{yx} = \frac{VQ}{I} \times \frac{1}{b} = \frac{q}{b} \qquad (1.39)$$

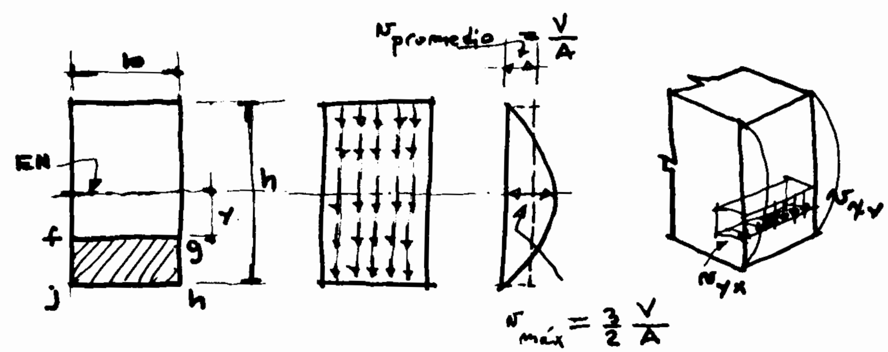


Fig 1.32 Variación de los esfuerzos cortantes en el peralte de una viga de sección rectangular

siendo q el flujo de cortante.

Se puede demostrar que los esfuerzos en planos horizontales v_{yx} van siempre acompañados de esfuerzos en planos verticales v_{xy} y que en cualquier punto ambos esfuerzos son de la misma magnitud.

Para demostrar la igualdad en valor absoluto de v_{yx} y v_{xy} considérense sus efectos sobre un elemento diferencial cualquiera que se separe de una viga (fig 1.31). En la fig 1.31-b se presenta una perspectiva de este elemento y en la fig 1.31-c un corte del mismo.

Para el equilibrio horizontal del elemento, el esfuerzo cortante v_{yx} en la cara inferior requiere otro igual y de sentido contrario en la cara supe-- rior y las fuerzas a que dan lugar estos esfuerzos (fig 1.31-d) forman un par que necesita otro igual pero de sentido contrario para conseguir el equilibrio de momentos. Las fuerzas de este par equilibrante dan origen al esfuerzo cortante v_{xy} en las caras verticales del elemento, como se observa en la fig 1.31-c. Tomando momentos respecto a un eje que pasa por A se obtiene

$$\left(v_{yx}\, dx\, dz\right) dy - \left(v_{xy}\, dy\, dz\right) dx = 0$$

Dividiendo entre dxdydz resulta $v_{yx} = v_{xy}$. Observando los signos de v_{yx} y v_{xy} en la fig 131 se ve que son de signo contrario, por lo que en rigor, $v_{yx} = -v_{xy}$. Siendo iguales los esfuer- zos cortantes en ambos planos, los subíndices se vuelven innecesarios, pudiéndose represen- tar estos esfuerzos simplemente por v.

La variación de los esfuerzos, v, en el peralte de la viga, calculados con la ecuación (1.38), es parabólica según se demuestra a continuación. El momento de primer orden Q del área fghj de la fig 1.32 con respecto al eje neutro es:

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right)$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)\frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right] \qquad (1.40)$$

Sustituyendo este valor de Q en la ecuación 1.38 y eliminando los subíndices del esfuerzo v:

$$v = \frac{V\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]}{2I} \qquad (1.41)$$

Esta ecuación indica que, para un valor dada de V y de I, el valor del esfuerzo en un plano situado a una distancia y del eje neutro es función de y^2, por lo que en la altura del peralte la distribución es parabólica como se muestra en la fig 1.32.

El valor máximo del esfuerzo cortante se obtiene cuando y es igual a cero en la ecuación 1.41. Dicho valor es

$$v_{máx} = \frac{V\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2I} \qquad (1.42)$$

Ya que I es igual a $bh^3/12$, el valor de v_{max} es:

$$v_{máx} = \frac{3}{2}\,\frac{V}{bh} \qquad (1.43)$$

y ya que bh es el área de la sección transversal,

$$v_{máx} = \frac{3}{2}\,\frac{V}{A} \qquad (1.44)$$

o sea, que el esfuerzo máximo es una y media veces el esfuerzo promedio.

La ecuación 1.38 es válida únicamente en forma rigurosa para secciones rectangulares. En secciones I, T y circulares, tiene limitaciones. Sin embargo, permite calcular los esfuerzos cortantes máximos, por lo que suele aplicarse también a dichas secciones. (Véase. S. P. - Timoshenko y J. M. Grere, "Mechanics of Materials", secciones 5.3 y 5.4).

Ejemplo 1.15 En este ejemplo se ilustra la determinación de los esfuerzos cortantes a lo largo del eje en varios niveles de la sección de la viga mostrada en la figura, la cual es de sección T.

El valor del esfuerzo cortante se puede determinar con la expresión para los esfuerzos cortantes $v = \frac{VQ}{I_b}$ (ecuación 1.38).

En esta expresión el valor de V es el de la fuerza cortante que actúa en la sección A-A de la viga, la cual se puede encontrar con el diagrama de fuerzas cortantes, resultando V = 25000 kg.

El momento de inercia de toda la sección con respecto al eje neutro resultó de 10 300 cm^4.

El momento de primer orden, Q, depende del nivel considerado. Para los diferentes niveles elegidos se tendrán los valores indicados en la figura.

En las secciones consideradas el ancho b varía teniendo los siguientes valores:

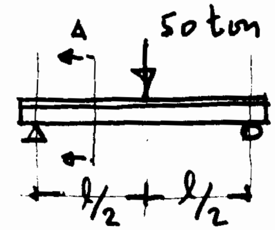
$$b_{1-1} = 18 \text{ cm}$$
$$b_{2-2} = 18 \text{ cm}$$
$$b_{2-2} = 2 \text{ cm}$$
$$b_{3-3} = 2 \text{ cm}$$
$$b_{4-4} = 2 \text{ cm}$$

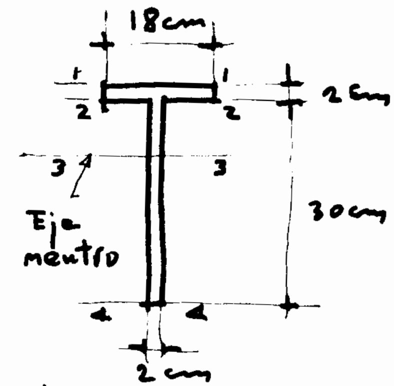
Como se puede observar, en el nivel 2-2 existen dos valores de b diferentes: 18 cm para un nivel ligeramente arriba del plano de unión del patín con el alma, y 2 cm para otro ligeramente abajo. Siendo el valor de $q = \frac{VQ}{I}$ el mismo para ambos casos, el valor de $v = \frac{q}{b}$ será mayor donde b sea menor, presentándose en esta sección un cambio brusco en el valor del esfuerzo cortante. Los esfuerzos cortantes calculados con la ecuación 1.38 en este nivel no son rigurosamente correctos, ya que dichos esfuerzos son nulos en el borde inferior del patín por ser un borde libre.

Para los diferentes niveles considerados se tienen los valores de v indicados en la figura.

EJEMPLO 1.15
ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

DATOS

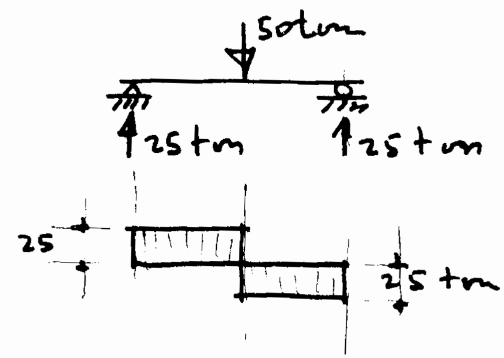




Encontrar los esfuerzos cortantes en los niveles indicados. Determinar la variación de esfuerzos cortantes en el patín.

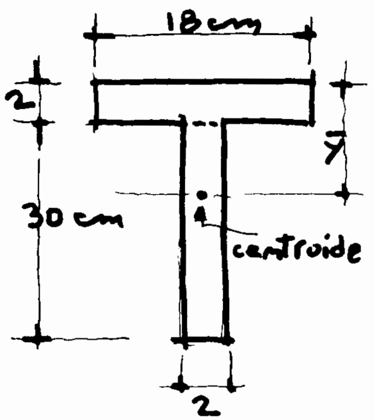
SOLUCION

Fuerza cortante en la viga



EJEMPLO 1.15 (Continuación) 2

Centroide y momento de inercia centroidal



Tomando momentos con respecto al lecho superior del patín:

$$\bar{y} = \frac{18\times2\times1+30\times2\times17}{18\times2+30\times2}$$

$$= \underline{\underline{11\,cm}}$$

$$I = \frac{1}{12}\,18\times2^3+18\times2\times10^2+\frac{1}{12}\,2\times30^3+$$

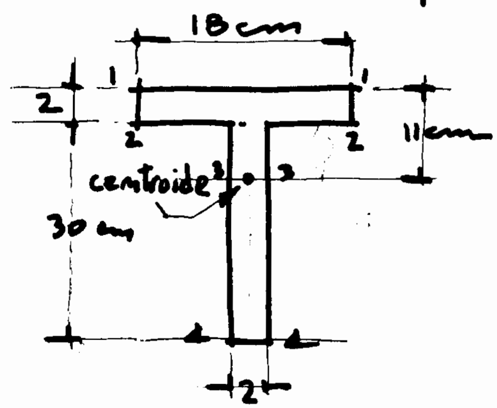
$$+\ 30\times2\times6^2 = \underline{10300\,cm^4}$$

Momentos de primer orden (Q)

(En la hoja siguiente.)

EJEMPLO 1.15 (Continuación) 3

Momentos de primer orden (Q)



$$Q_{1-1} = \underline{\underline{0}}$$

$$Q_{2-2} = 18\times2\times10 = \underline{\underline{360}}\ cm^3$$

$$Q_{3-3} = 18\times2\times10+9\times2\times4.5 = \underline{\underline{441}}\,cm^3$$

$$Q_{4-4} = \underline{\underline{0}}$$

Esfuerzos cortantes el alma:

(Ver hoja siguiente)

EJEMPLO 1.15 (Continuación) 4

Esfuerzos cortantes en el alma

$$\tau_{1-1} = \frac{VQ_{1-1}}{Ib_{1-1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\tau_{2-2} = \frac{VQ_{2-2}}{Ib_{2-2}} = \frac{25000 \times 360}{10300 \times 18} = \underline{\underline{48.5}}\ kg/cm^2$$

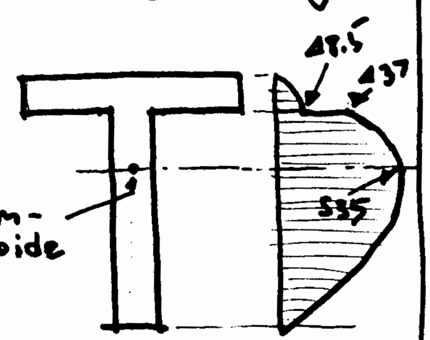
(a un nivel ligeramente arriba del plano de unión)

$$\tau_{2-2} = \frac{VQ_{2-2}}{Ib_{2-2}} = \frac{25000 \times 360}{10300 \times 2} = \underline{\underline{437}}\ kg/cm^2$$

(a un nivel ligeramente abajo del plano de unión)

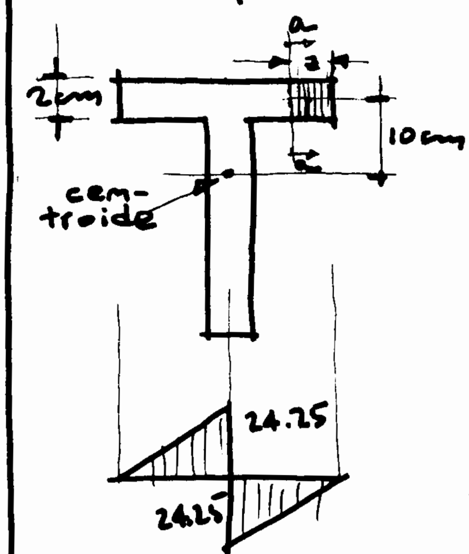
$$\tau_{3-3} = \frac{VQ_{3-3}}{Ib_{3-3}} = \frac{25000 \times 441}{10300 \times 2} = \underline{\underline{535}}\ kg/cm^2$$

$$\tau_{4-4} = \frac{VQ_{4-4}}{Ib_{4-4}} = \underline{\underline{0}}$$



EJEMPLO 1.15 (Continuación) 5

Esfuerzos cortantes en el patín



$$Q_z = 2z \cdot 10 = 20z$$

$$Q_{máx} = 2 \times 9 \times 10 = 180\ cm^3$$

$$\tau_{máx} = \frac{25000}{10300} \times \frac{180}{2} = \underline{\underline{24.25}}\ kg/cm^2$$

El esfuerzo cortante en una sección rectangular tiene una distribución parabólica. Por lo tanto al variar v de un valor cero en el nivel 1-1, a un valor de 48.5 kg/cm^2 en el nivel 2-2, el esfuerzo cortante también tendrá una distribución parabólica. Lo mismo sucederá al variar el esfuerzo cortante del nivel 2-2 al 3-3 y de éste al 4-4.

La distribución del esfuerzo cortante a lo largo del eje vertical de la sección será por lo tanto la indicada en la figura.

Si se analiza la fórmula para determinar el esfuerzo cortante

$$v = \frac{VQ}{Ib} \qquad (1.38)$$

se observa que para una sección dada de la viga los valores v e I son constantes, en tanto que los valores de Q y b variarán de acuerdo con el nivel considerado. El valor máximo de v se presenta en el nivel donde la relación Q/b sea máxima.

El valor de Q es máximo al nivel del eje neutro, pero el valor de b puede no ser mínimo a ese mismo nivel por lo que el valor de $v_{máx}$ no necesariamente se presenta al nivel del eje neutro.

La distribución del esfuerzo cortante a lo largo del patín se puede determinar en forma semejante, haciendo cortes verticales a lo largo del mismo, como el corte a-a indicado en la figura. En la fórmula del esfuerzo cortante tanto v como I y b son constantes por lo que el valor del esfuerzo cortante variará conforme varíe el valor de Q = A y (respecto al eje neutro). En este caso la distancia y permanece constante a lo largo de todo el patín e igual a 10 cm.

El área, A, por su parte varía únicamente con la distancia del extremo del patín a la sección considerada, por lo que Q varía linealmente del extremo del patín al eje vertical de la sección. En la otra mitad del patín se tiene una variación similar pero los esfuerzos son de sentido contrario.

El esfuerzo cortante máximo en el patín es por lo tanto de 24.25 kg/cm^2. En este cálculo se despreció el espesor del alma.

1.3.6 Centro de cortante

En cualquier sección de una viga, como se dijo anteriormente, siempre que se tenga un momento flexionante variable, existirá esfuerzo cortante.

Estos esfuerzos, al actuar sobre sus respectivas áreas, dan lugar a una fuerza cortante interna o resistente cuya resultante deberá ser igual, opuesta y colineal con la fuerza cortante exterior. Si esto no ocurre, la fuerza cortante interna y la fuerza externa producen un momento torsionante en la viga.

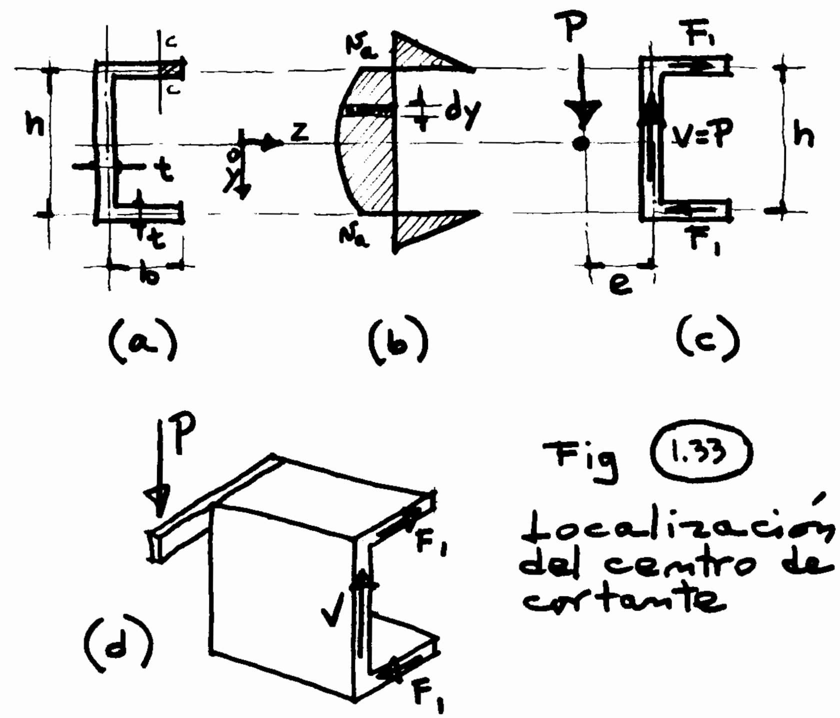


Fig 1.33 Localización del centro de cortante

Para que no exista momento torsionante se requiere que la resultante de las fuerzas cortantes exteriores pase por el llamado <u>centro de cortante</u> o también <u>centro de torsión</u>. El centro de cortante es un punto de la sección transversal por el que debe de pasar el plano que contiene las fuerzas exteriores que producen la flexión, para que la viga se flexione sin torsión.

Para ilustrar la determinación de la posición del centro de cortante, considérese una viga de sección canal (fig 1.33).Se supone que las paredes de esta sección canal son lo suficientemente delgadas para que todos los cálculos puedan basarse en la hipótesis de que el área está concentrada en la línea media del espesor. La flexión de esta canal se presenta alrededor de su eje horizontal y aunque esta sección transversal no tiene un eje vertical de simetría, se supone que los esfuerzos de flexión pueden calcularse con la fórmula de la escuadría. Suponiendo además que en esta canal actúa una fuerza cortante vertical, el momento flexionante variará de una sección a otra a lo largo de la viga. Haciendo un corte arbitrario cc, los valores de q y τ pueden encontrarse en la forma usual. A lo largo de los patines horizontales de esta canal, estas cantidades variarán linealmente desde un valor cero en el extremo libre del patín. A lo largo del alma, la variación de q y τ es parabólica.

La variación de estas cantidades se muestra en la fig 1.33-b dibujadas a lo largo de la línea central de la sección. El esfuerzo cortante promedio $\tau_a/2$ multiplicada por el área del patín da una fuerza $F_1 = (\tau_a/2)\, bt$ y la suma de los esfuerzos cortantes verticales sobre el área del alma es la fuerza cortante

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau t \, dy$$

Estas fuerzas están representadas en la sección transversal de la fig 1.33-c y dan lugar a una fuerza vertical V y a un par $F_1 \cdot h$. El par tenderá a torcer la sección alrededor de su eje longitudinal.

Para evitar el giro y así conservar válida la distribución de los esfuerzos de flexión supuesta inicialmente, es necesario aplicar una fuerza externa, P, de forma tal que equilibre el par interno $F_1 \cdot h$. Para mantener esta fuerza en equilibrio, una fuerza igual y opuesta se debe desarrollar en el alma.

Suponiendo que el plano en el cual se debe aplicar la fuerza P para eliminar la torsión de la canal, se encuentra a una distancia e del eje del alma, para equilibrar la torsión de la canal es necesario que

$$F_1 h = Pe \qquad (1.45)$$

y por lo tanto

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{\frac{1}{2}\tau_a bth}{P} = \frac{bth}{2P}\,\frac{VQ}{It} = \frac{bth}{2P}\,\frac{Vbt(h/2)}{It}$$

$$e = \frac{b^2h^2t}{4I} \qquad (1.46)$$

Nótese que la distancia e es una propiedad de la geometría de la sección y es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada P, así como de su localización a lo largo de la viga.

Una investigación similar puede efectuarse para localizar el plano en el cual deben aplicarse las fuerzas horizontales para equilibrar la torsión de la canal. En virtud de la simetría puede verse que este plano coincide con el plano neutro del primer caso. La intersección de estos dos planos mutuamente perpendiculares con el plano de la sección transversal, define un punto llamado <u>centro de cortante</u>.

Para cualquier sección transversal con un eje de simetría, el centro de cortante estará localizado sobre dicho eje. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de cortante coincidirá con el centroide de la sección.

Para secciones asimétricas de paredes gruesas, la localización exacta del centro de cortante es difícil de obtener. Si el espesor de la pared es pequeño, como se ha supuesto para la sección analizada anteriormente, el procedimiento es relativamente sencillo.

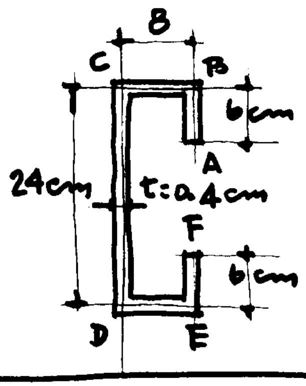
El método usual consiste en determinar las fuerzas cortantes, tales como la F_1 y V antes mencionadas, y luego encontrar la localización de la fuerza externa necesaria para mantener esas fuerzas un equilibrio.

<u>Ejemplo 1.9</u>.- En este ejemplo se presenta la forma de calcular la posición de cortante de una sec-

EJEMPLO 1.16 — 1

CENTRO DE CORTANTE

DATOS



$V = 2560$ kg

Localizar el centro de cortante

SOLUCION

Momento de inercia y momentos de primer orden

$$I = 2\left(\frac{1}{12}\times 0.4\times 6^3 + 0.4\times 6\times 9^2\right) + 2\left(\frac{1}{12}\times 8\times 0.4^3 + 8\times 0.4\times 12^2\right) + \frac{1}{12}\,0.4\times 24^3 = \underline{\underline{1786\ cm^3}}$$

$$Q_A = \underline{\underline{0}}$$

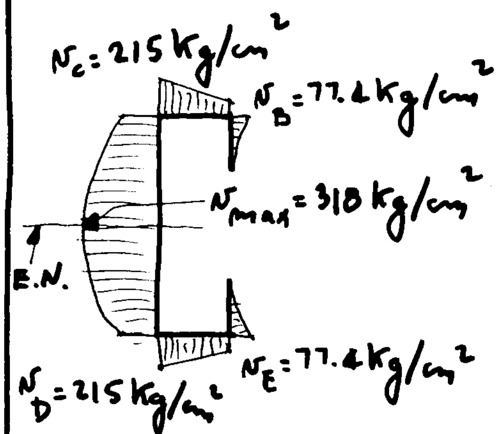
$$Q_B = 0.4\times 6\times 9 = \underline{\underline{21.6}}\ cm^3$$

EJEMPLO 1.16 (Continuación) — 2

$$Q_C = 21.6 + 8\times 0.4\times 12 = \underline{\underline{60\ cm^3}}$$

$$Q_{eje\ neutro} = 60 + 12\times 0.4\times 6 = \underline{\underline{88.8\ cm^3}}$$

Esfuerzos cortantes



$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau = \frac{2560\,Q}{1786\times 0.4} = 3.58\,Q$$

$$\tau_A = \underline{\underline{0}}$$

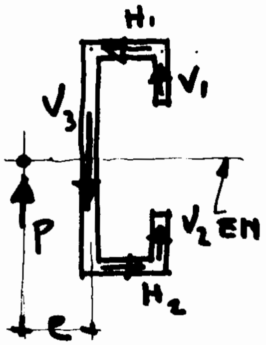
$$\tau_B = 3.58\times 21.6 = \underline{\underline{77.4}}\ kg/cm^2$$

$$\tau_C = 3.58\times 60 = \underline{\underline{215}}\ kg/cm^2$$

$$\tau_{eje\ neutro} = 3.58\times 88.8 = \underline{\underline{318}}\ kg/cm^2$$

EJEMPLO 1.16 (Continuación) 3

Determinación de las fuerzas y centro de cortante



$$V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \times 6 \times 77.4 \times 0.4$$
$$= \underline{\underline{62}}\ kg$$

$$V_3 = 24 \times 0.4 \times 215 + \frac{2}{3} \times (318-215) \times 24 \times 0.4 =$$
$$= \underline{\underline{2724}}\ kg$$

$$H_1 = H_2 = \left(\frac{215+77.4}{2}\right) 0.4 \times 8$$
$$= \underline{467.8}\ kg$$

$$P = V_3 - V_1 - V_2 = 2724 - 62 - 62$$
$$= \underline{\underline{2600}}\ kg \doteq 2560$$

$$Pe = H_1 \times 24 + (V_1 + V_2) 8 =$$
$$= 467.8 \times 24 + 124 \times 8 = 12192\ kg\text{-}cm$$

$$e = \frac{12192}{2600} = \underline{\underline{4.7\ cm}}$$

ción como la mostrada en la figura.

Como la sección tiene un eje de simetría, el centro de cortante quedará sobre dicho eje, e decir, el plano de aplicación de las cargas horizontales coincidirá con el eje de simetría horizontal. Para la localización del centro de cortante sobre el eje antes mencionado, es necesario conocer el valor de las fuerzas que actúan en la sección y para determinar éstas, se necesita determinar primero los esfuerzos cortantes en A, B, C, D, E, y F, así como a la altura del eje neutro.

Para encontrar el valor de los esfuerzos, conocido el valor de la fuerza cortante, se determina el valor del momento de inercia respecto al eje neutro, resultando igual a 1786 cm^4. Como el espesor de las paredes de la sección es constante, la única variable será el momento de primer orden, cuyos valores se presentan en la hoja de cálculo.

En la otra mitad de la sección, por simetría, se obtienen valores iguales.

Para el cálculo de las fuerzas que actúan en cada elemento de la sección, hay que tomar en cuenta las distribuciones de los esfuerzos encontrados e integrarlos sobre sus áreas respectivas, es decir, encontrar los volúmenes correspondientes.

La suma de las fuerzas verticales deberá ser igual a la fuerza cortante, e igual y de sentido contrario a la fuerza equilibrante

$$P = V_3 - V_1 - V_2 = 2724 - 62 - 62 = 2600\ kg \doteq 2560\ Kg.$$

La pequeña diferencia obtenida en la carga se debe a que tanto el patín superior como el inferior, toman una fuerza cortante vertical, suficientemente pequeña para ser despreciada.

Tomando momentos respecto a la intersección del eje del alma y el eje neutro se tendrá que la posición del centro de cortante se encuentra a 4.7 cm del eje vertical del alma de la sección.

1.3.7 Deformación por cortante

Las fuerzas cortantes producen una deformación tangencial o distorsión, de la misma manera que las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales, pero con una diferencia fundamental. Un elemento sometido a tensión experimenta un alargamiento, mientras que un elemento sometido a una fuerza cortante no varía la longitud de sus lados, sino que únicamente cambia de forma, de rectángulo a paralelogramo, como se observa en la fig 1.34.

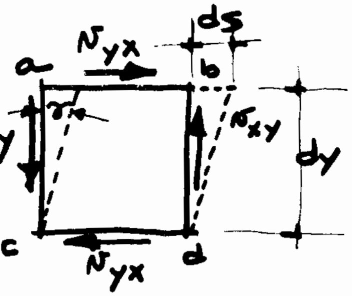


Fig 1.34
Deformación tangencial

ngulo en el punto c, igual a $\pi/2$ antes de la deformación, se reduce a $\pi/2 - \gamma$ siendo el pequeño ángulo mostrado en la figura. Al mismo tiempo el ángulo en el punto a se in- nenta a $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ es una medida de la distorsión del elemento debida al cor e y es llamada deformación por cortante. En la figura se puede observar que la tangente ángulo γ es igual al deslizamiento horizontal que presenta el extremo superior del elemen on respecto al inferior, dividido entre la altura del elemento

$$\tan \gamma = \frac{ds}{dy} \qquad (1.47)$$

debido a que γ es siempre muy pequeña, se puede considerar que la tangente es igual ngulo, resultando

$$\gamma = \frac{ds}{dy} \qquad (1.48)$$

yando un material sometido a cortante puro y midiendo los deformaciones se puede obtener rimentalmente el diagrama esfuerzo-deformación para ese material. Este diagrama es muy - ar al de un ensaye de tensión del mismo material, pudiéndose determinar el límite de pro- ionalidad, el límite de fluencia y el esfuerzo máximo producidos por la fuerza cortante. Los rimentos muestran que para metales dúctiles, incluyendo el acero estructural, el esfuerzo - uencia τ_y debido al cortante está comprendido entre 0.5 y 0.6 veces el esfuerzo de fluen debido a carga axial , f_y. Por lo tanto, la ley de Hooke por cortante puede establecerse

$$\tau = G\gamma$$

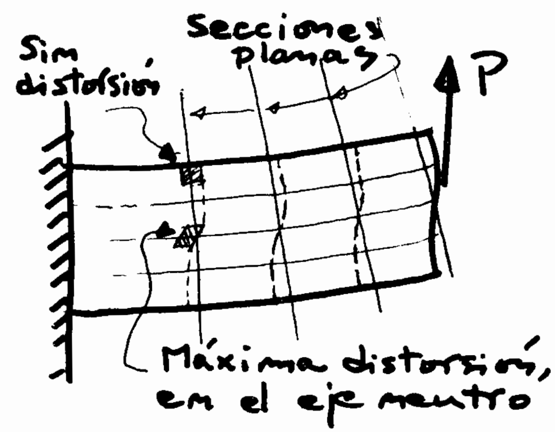
e G es el módulo de elásticidad por cortante, también llamado módulo de rigidez transver

is ecuaciones (1.47) y (1.48) se puede establecer la relación entre la deformación ncial y el esfuerzo cortante por medio de la ecuación

$$ds = \frac{\tau\, dy}{G} \qquad (1.49)$$

En el caso de vigas, las máximas distorsiones por cortante se presentan donde el cortante es máximo y no hay distorsión donde el esfuerzo cortante es nulo (fig 1.35). Estas distorsiones alabean la sección, inicialmente plana, a través de toda la viga por lo que se contradice la hipótesis básica de la flexión elástica de que las secciones planas se conservan planas después de la deformación. Sin embargo, por la teoría de la elasticidad se puede demostrar que las distorsiones por cortante de las secciones planas son despreciables y las expresiones encontradas para la teoría de vigas perfectamente aplicables si la longitud del miembro es cuando menos dos o tres veces mayor que el peralte total del mismo. Esta conclusión es de gran importancia, ya que implica que la existencia de una fuerza cortante en una sección no invalida las expresiones para esfuerzos flexionantes en materiales elásticos.

Fig 1.35
Efecto del esfuerzo cortante en vigas



1.4 FLEXION ASIMETRICA

En la sección 1.2.3 se estableció que la fórmula de la escuadría — — sólo puede aplicarse cuando el material es de comportamiento lineal y cuando la sección transversal del elemento es simétrica respecto al plano de carga. En secciones asimétricas respecto al plano de carga, pero simétricas respecto a un eje perpendicular al plano de cargas, existe flexión sin torsión únicamente si el plano de cargas posa por el centro de torsión de la sección transversal, como se ilustró en la fig 1.33 para el caso de una canal. Si el plano de cargas no pasa por el centro de torsión, la sección se encuentra sometida a momento torsionante, adicionalmente a la flexión y a la fuerza cortante.

Otro caso de flexión asimétrica, es el de secciones con dos ejes de simetría pero sometidas a cargas inclinadas respecto a dichos ejes, como se muestra en la fig 1.36-a. Este problema se resuelve descomponiendo la fuerza aplicada en dos componentes que actúen en cada uno de los ejes de simetría (figs 1.36-b y 1.36-c), aplicando la fórmula de la escuadría para cada una de las dos componentes y sumando los efectos. Haciendo esto, se obtiene que el esfuerzo en un punto cualquiera de la sección transversal con coordenados y, z, es:

$$f = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} \qquad (1.50)$$

donde M_y y M_z son los momentos flexionantes alrededor de los ejes Y y Z, respectivamente, e I_y e I_z son los momentos de inercia alrededor de dichos ejes. El segundo sumando del segundo miembro representa el efecto de la carga de la fig 1.36-b y el primer sumando, el efecto de la carga de la fig 1.36-c. Si M es el momento producido por la carga P, el momento M_z es igual a $M\cos\theta$ y el momento M_y es igual a $M\,\mathrm{sen}\theta$. Por lo tanto, la ec (1.50) se puede escribir también en la forma

$$f = \frac{(M\,\mathrm{sen}\,\theta)z}{I_y} + \frac{(M\cos\theta)y}{I_z} \qquad (1.51)$$

Se puede demostrar que la inclinación del eje neutro (fig 1.36-a) queda determinada por la ecuación

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad (1.52)$$

Para secciones asimétricas, pueden aplicarse las ecuaciones 1.50 y 1.51, sustituyendo los ejes de simetría por los ejes principales de la sección, es decir, por aquellos ejes alrededor de los cuales es nulo el producto de inercia de la sección. Esto se ilustra en la fig 1.37 para el caso de una sección Z. La carga P debe descomponerse en sus componentes sobre los ejes Y y Z que en este caso son los ejes principales de la sección. Los esfuerzos pueden determinarse después con las ecs (1.50) ó (1.51). La demostración de que las ecs (1.50) y (1.51) son aplicables a secciones asimétricas cuando los ejes Y y Z son los ejes principales pueden encontrarse en los textos de Resistencia de Materiales.

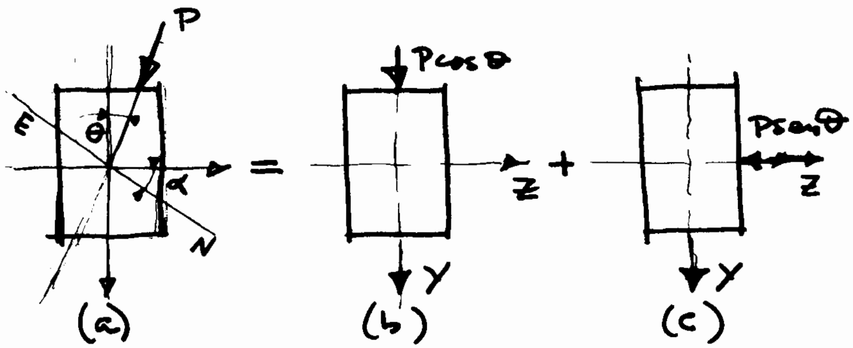


Fig (1.36) Sección simétrica con carga inclinada respecto a los ejes de simetría

Las deflexiones debidas a los momentos M_y y M_z pueden calcularse por medio de los procedimientos expuestos en los secciones 1.26, 1.27 y 1.28. Las deflexiones así calculadas se encontrarán en los planos en que actúan los momentos flexionantes correspondientes. Pueden superponerse quedando la deflexión resultante en un plano perpendicular al eje neutro.

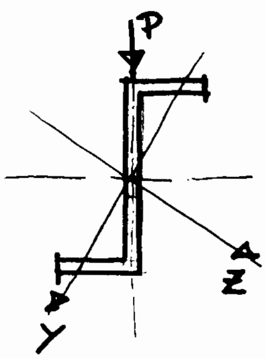


Fig (1.37) Sección asimétrica con carga inclinada respecto a los ejes principales

Ejemplo 1.17.- Se trata de encontrar los esfuerzos producidos en la sección de empotramiento de un voladizo por una carga concentrado inclinada aplicada en el extremo, así como la orientación del eje neutro correspondiente. La carga está contenida en el plano YZ.

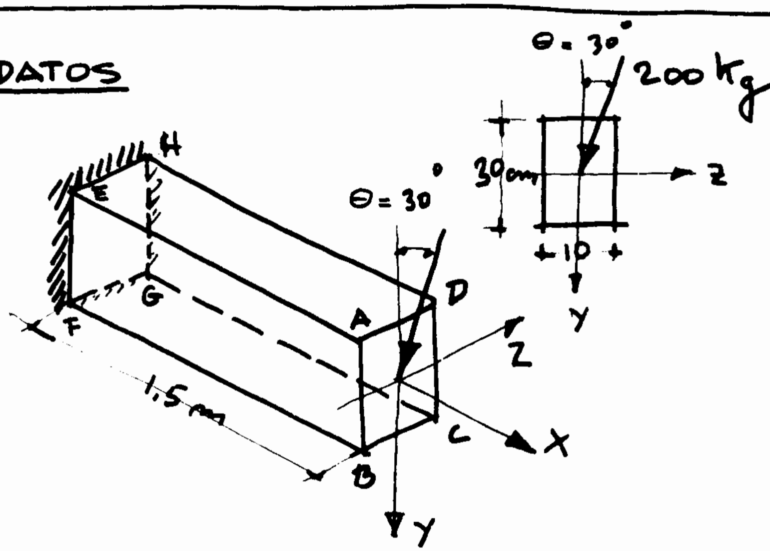
Los esfuerzos en las cuatro esquinas de la sección de empotramiento se calcularon con la ecuación (1.51). Se obtuvo primero el valor absoluto del momento producido por la carga concentrada y, en seguido, las componentes de este momento con respecto a los ejes Y y Z. Al sustituir estos valores deben utilizarse los signos correctos de los momentos. La convención de signos para el momento — M_z = Mcos θ es la expuesta en la sección 1.2.3 para la flexión producida por fuerzas contenidos en el plano XY. De acuerdo con esta convención el signo correcto de M_z es negativo. Estableciendo una convención semejante para la otra componente de flexión, M_y = Msen θ, se comprueba que el signo correcto es positivo. En caso de duda pueden deducirse los signos correctos de los esfuerzos haciendo caso omiso de las convenciones de signos, tanto para ordenadas como para momentos, y analizando el comportamiento físico de la viga. De este análisis se deduce fácilmente de qué lado producen tensiones o compresiones las dos componentes de momento .

El ángulo α entre el eje neutro y el eje Z se determinó primero por medio de la ecuación (1.52) y después definiendo dos puntos de esfuerzo nulo. Los puntos de esfuerzo nulo pueden localizarse fácilmente a partir de consideraciones geométricas. Un examen de los esfuerzos determinados para las cuatro esquinas de lo sección indica que existirán puntos de esfuerzo nulo en los lados EH y FG ya que los esfuerzos en los extremos de cado lado son de signo contrario. La posición de estos puntos de esfuerzo nulo puede determinarse por semejanza de triángulos.

EJEMPLO (1.17) VIGA EN VOLADIZO SUJETA A FLEXION BIAXIAL

1

DATOS



Se pide: Encontrar los esfuerzos en los puntos E, F, G y H, y determinar la orientación del eje neutro.

SOLUCION

$$f = \frac{M \operatorname{sen}\theta}{I_y} z + \frac{M \cos\theta}{I_z} y \qquad Ec\,(1.51)$$

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad Ec\,(1.52)$$

EJEMPLO (1.17) (Continuación)

2

Momentos flexionantes

$$|M| = |150\text{ cm} \times 200\text{ kg}| = |30\,000|\text{ kg-cm}$$

$$M_y = M\operatorname{sen}\theta = +30\,000 \times 0.5 = +15\,000\text{ kg-cm}$$

$$M_z = M\cos\theta = -30\,000 \times 0.867 = -26\,000\text{ kg-cm}$$

Momentos de inercia

$$I_y = \frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 = 2500\text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \times 10 \times 30^3 = 22\,500\text{ cm}^4$$

Constantes para cálculo de esfuerzos

$$+\frac{M\operatorname{sen}\theta}{I_y} = +\frac{15\,000}{2500} = +6$$

$$-\frac{M\cos\theta}{I_z} = -\frac{26\,000}{22\,500} = -1.155$$

EJEMPLO 1.17 (Continuación) 3

Tabla de cálculo de esfuerzos

Punto	z	y	$\frac{(M\sin\theta)z}{I_y}$	$\frac{(M\cos\theta)y}{I_z}$	f
E	−5	−15	−30	+17	−13
F	−5	+15	−30	−17	−47
G	+5	+15	+30	−17	+13
H	+5	−15	+30	+17	+47

Cálculo del ángulo α entre el eje z y el eje neutro

A) Aplicando la ec (1.52)

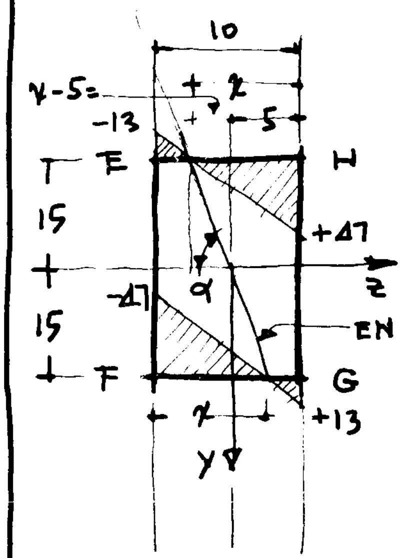
$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$$= \frac{22500}{2500} \times 0{,}577 = 5.18$$

$$\boxed{\alpha = 79{,}1^\circ}$$

EJEMPLO 1.17 (Continuación) 4

B) Determinando dos puntos de esfuerzo nulo



$$x = 10\,\frac{47}{47+13} = 7.9$$

$$x - 5 = 7.9 - 5 = 2.9$$

$$\tan\alpha = \frac{15}{2.9} = 5.18$$

$$\boxed{\alpha = 79.1^\circ}$$

1.5 ESFUERZOS COMBINADOS

1.5.1 Conceptos introductorios

En las secciones anteriores se han estudiado exclusivamente estados simples de esfuerzos, es decir, se han analizado secciones sometidas a un solo tipo de esfuerzo. Por ejemplo, en la sección 3.3 del Cuaderno 1 de los apuntes de Mecánica de Materiales se estudió una sección perpendicular al eje de una barra sometida a esfuerzos normales de tensión o compresión uniformes en toda la sección. En la sección 1.2 del Cuaderno 2 se analizó el estado de esfuerzos en una viga bajo la acción exclusiva de momento flexionante y se encontró que en una sección transversal de dicha viga actúan esfuerzos normales únicamente, que son de compresión, de un lado del eje neutro, y de tensión del otro lado. Y, por último, en la sección 1.3, se estudió el efecto de los esfuerzos cortantes en varias secciones de una viga suponiendo que eran los únicos esfuerzos a considerar.

En muchas ocasiones es suficiente, para fines de diseño estructural, considerar por separado el efecto de los distintos tipos de esfuerzo. Por ejemplo, las

vigas suelen dimensionarse para flexión y para fuerza cortante por separado, sin considerar la acción combinada de ambas. Sin embargo, en algunos casos el efecto combinado de los esfuerzos normales y de los esfuerzos cortantes es más desfavorable que el de cada uno en forma aislada y es necesario entonces considerarlos en conjunto.

En esta sección se estudian dos casos sencillos de esfuerzos combinados. Uno es el que se presenta en elementos sometidos a cargas axiales cuando se analizan secciones transversales que no son perpendiculares al eje longitudinal del elemento, como la sección p-q en la fig 1.38. Se verá más adelante que en una seccion como la mencionada existen esfuerzos normales y esfuerzos cortantes combinados y que su magnitud depende del ángulo de inclinación de la sección.

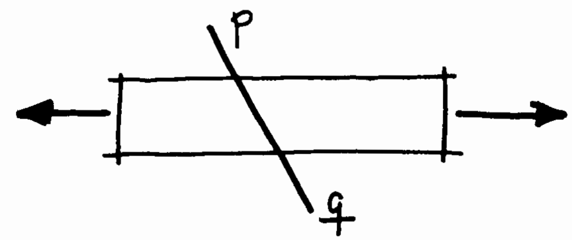


Fig 1.38 Sección inclinada en una barra sometida a carga axial

El otro caso que se estudia en esta sección es el del efecto combinado del momento flexionante y de la fuerza cortante en una viga. Un elemento cualquiera A de una viga bajo la acción de flexión y cortante (fig 1.39) está sometido a esfuerzos normales f producidos por la flexión y a esfuerzos cortantes v producidos por la fuerza cortante, como se indica en la fig 1.39-b. Se verá posteriormente que la acción combinada de estos esfuerzos produce, en algunos puntos de la viga y en secciones inclinadas respecto al eje longitudinal de la viga, esfuerzos normales mayores que los esfuerzos f mostrados en la fig 1.39-b.

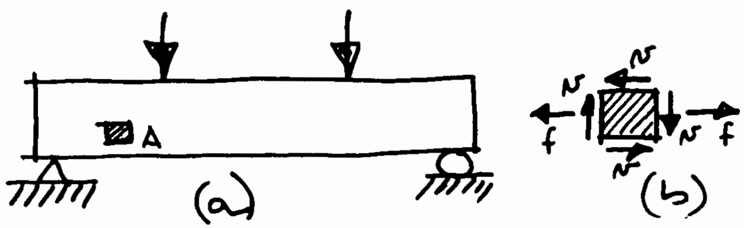


Fig 1.39 Esfuerzos en un elemento de una viga sometido a momento flexionante y fuerza cortante

Existen estados de esfuerzos combinados más complicados que los mencionados anteriormente. Por ejemplo en la fig 1.40-a se muestra un elemento sometido a esfuerzos normales en dos direcciones y a esfuerzos cortantes simultáneamente, y, en la fig 1.40-b, un elemento con esfuerzos normales en tres direcciones y esfuerzos cortantes. Estos estados de esfuerzos no se estudian en estos apuntes, pero pueden analizarse generalizando el método que se indica para el estado de

esfuerzos del elemento de la fig 1.39-b. El lector interesado puede consultar algún texto de Teoría de la Elasticidad o de Mecánica del Medio Continuo. Cuando el elemento se considera en un plano y no existen esfuerzos normales en dirección perpendicular al plano del elemento, como en las figs. 1.39-b y 1.40-a, el estado de esfuerzos se denomina <u>estado plano de esfuerzos</u>.

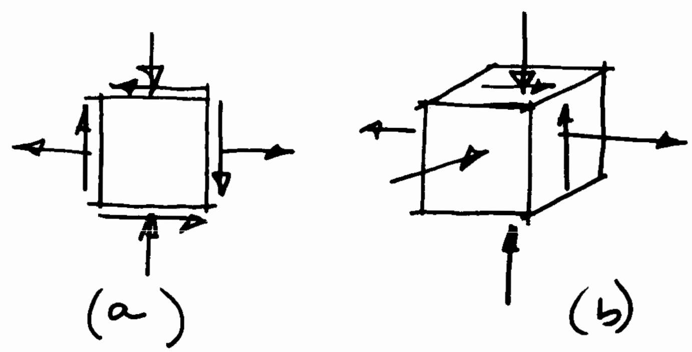


Fig 1.40 Estados de esfuerzos combinados

1.5.2 Esfuerzos en planos inclinados de una barra sujeta a carga axial

Se ha visto anteriormente que si se hace un corte normal al eje longitudinal de una barra sujeta a carga axial (fig 1.39-a), se obtiene un estado de esfuerzos uniforme cuya magnitud puede calcularse con la ecuación

$$f_x = \frac{P}{A} \tag{1.53}$$

donde f_x es el esfuerzo paralelo al eje de la barra (equivalente a f en la ec 3.1 del cuaderno 1 de Apuntes de Mecánica de Materiales), P es la carga axial y A es el área de la sección transversal (fig 1.41-b).* Si el corte se hace de tal manera que no sea perpendicular al eje longitudinal de la pieza, como el corte p-q de la fig 1.41-a, el estado de esfuerzos en la sección transversal es el indicado en la fig 1.41-c. Debido a que las deformaciones unitarias son iguales en cualquier punto de la barra, los esfuerzos en la sección p-q tiene que ser también iguales. La resultante de los esfuerzos en la sección p-q es la fuerza S indicada en la fig 1.41-d, la cual, por equilibrio del tramo de la barra situado a la izquierda del corte p-q, tiene que ser de la misma magnitud y colineal con la fuerza P. La fuerza S puede descomponerse en dos fuerzas N y V, perpendicular y paralela respectivamente a la sección p-q (fig 1.41-d). Teniendo en cuenta que S=P, las fuerzas N y V tienen los siguientes valores:

$$N = P \cos\theta \quad , \qquad V = P \operatorname{sen}\theta \ ,$$

donde θ es el ángulo que forma la perpendicular a la sección p-q con la horizontal. El área de la sección p-q en la cual actúan las fuerzas N y V es:

$$A' = \frac{A}{\cos\theta}$$

Denominando f_θ al esfuerzo normal que produce la fuerza N, y v_θ al esfuerzo tangencial que produce la fuerza V, ambos sobre el área A', la magnitud de estos esfuerzos puede calcularse con las siguientes ecuaciones:

* Obsérvese que en esta sección (Fig 1.41) el eje Y se considera positivo hacia arriba mientras que, anteriormente, se supuso positivo hacia abajo. Esto se hace para que exista congruencia con las convenciones de ejes y signos que se establecen en esta sección y en la sección 1.5.3.

$$f_\theta = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = f_x \cos^2\theta \tag{1.54}$$

$$v_\theta = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = f_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.55}$$

Las ecuaciones 1.54 y 1.55 permiten calcular los esfuerzos normal y tan-

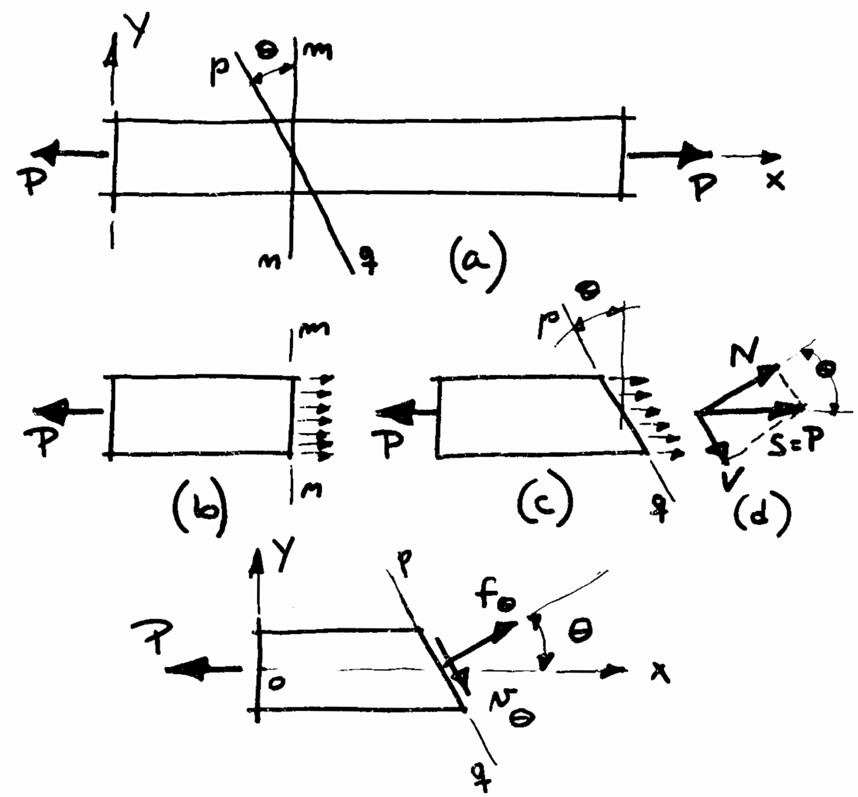


Fig 1.41 Esfuerzos en un plano inclinado de una barra sometida a tensión axial

gencial en cualquier sección de una barra. Obsérvese que cuando $\theta = 0°$ o sea, en una sección normal al eje longitudinal de la barra, $f_\theta = f_x$ y $v_\theta = 0$, lo cual coincide con el estado de esfuerzos estudiado en el Cuaderno 1 de Apuntes de Mecánica de Materiales para elementos sometidos a cargas axiales.

Antes de aplicar las ecuaciones 1.54 y 1.55 para determinar el estado de esfuerzos en un elemento cualquiera de la barra, se establecerá la convención de signos que se usa en esta sección. Los esfuerzos normales se consideran positivos cuando producen tensiones y negativos cuando producen compresiones en un elemento (figs 1.42-a y 1.42-b). Los esfuerzos cortantes se consideran positivos cuando indican un giro en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj alrededor del elemento, y negativos en caso contrario (figs 1.42-c y 1.42-d). El ángulo θ se mide siempre a partir del eje X y se considera positivo cuando se mide en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj (fig 1.42-e).

Para determinar el estado de esfuerzos en un elemento A, con una orientación cualquiera, de una barra sujeta a tensión (fig 1.43-a) se aplican las ecuaciones 1.54 y 1.55 a las cuatro caras del elemento (fig 1.43-b) como se presenta a continuación.

La cara a-b tiene la misma inclinación θ que el corte p-q de la fig 1.41; por lo tanto, los esfuerzos en dicha cara son:

$$f_{a-b} = f_x \cos^2 \theta \qquad (1.56)$$

$$v_{a-b} = f_x \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad (1.57)$$

La perpendicular a la cara b-c forma un ángulo $(\theta + \pi/2)$ con el eje X. Para encontrar los esfuerzos en esta cara se sustituye $(\theta + \pi/2)$ por θ en las ecuaciones 1.54 y 1.55 y se obtiene

$$f_{bc} = f_x \cos^2(\theta + \pi/2) = f_x \operatorname{sen}^2\theta \qquad (1.58)$$

$$v_{bc} = f_x \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)\cos(\theta + \pi/2) = -f_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad (1.59)$$

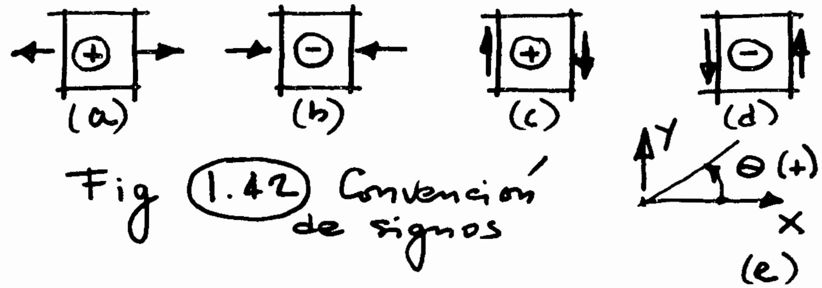


Fig 1.42 Convención de signos

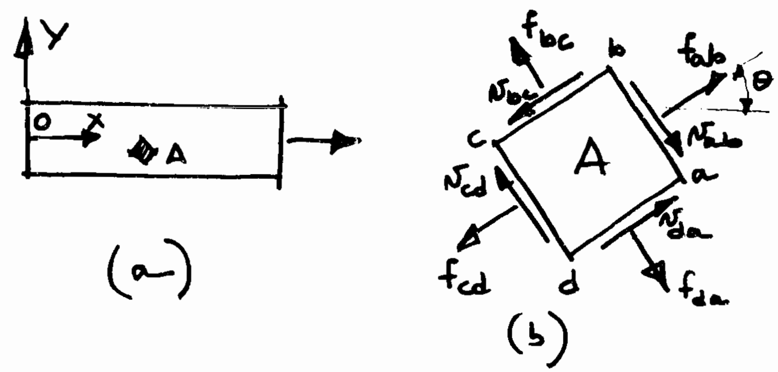


Fig 1.43 Esfuerzos en un elemento cualquiera sujeto a tensión

En la cara c-d los esfuerzos tienen que ser iguales y de sentido contrario a los esfuerzos en la cara a-b, por equilibrio del elemento. Esto puede corroborarse, sustituyendo un ángulo igual a $(\pi + \theta)$ en las ecuaciones 1.54 y 1.55, con lo que se obtiene:

$$f_{c\text{-}d} = f_x \cos^2(\pi + \theta) = f_x \cos^2\theta \qquad (1.60)$$

$$v_{c\text{-}d} = f_x \operatorname{sen}(\pi + \theta)\cos(\pi + \theta) = f_x \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (1.61)$$

De la misma manera pueden calcularse los esfuerzos en la cara d-a, los cuales resultan iguales y de sentido contrario a los esfuerzos en la cara b-c.

Algunas conclusiones importantes que se derivan de las ecuaciones 1.54 y 1.55, así como del análisis de esfuerzos en el elemento A de la fig 1.43, son las siguientes:

a) El esfuerzo normal f_θ alcanza su valor máximo cuando el ángulo θ es nulo, ya que en este caso $\cos\theta = 1$, y

$$f_{max} = f_x \qquad (1.62)$$

Esto indica que el esfuerzo normal es máximo en una cara perpendicular al eje longitudinal del elemento. Los esfuerzos en esta cara son iguales a los calculados para elementos sometidos a cargas axiales en la sección 3.3 del Cuaderno 1 de Apuntes de Mecánica de Materiales.

b) Cuando $\theta = 0°$, o sea, en las caras perpendiculares del eje del miembro,

$$v_\theta = 0 \qquad (1.63)$$

como se deduce de la ecuación 1.55. Esto indica que en las caras de esfuerzo normal máximo no existen esfuerzos cortantes.

c) El valor máximo del esfuerzo cortante se presenta cuando $\theta = 45°$, y vale

$$v_{max} = \frac{f_x}{2} \qquad (1.64)$$

d) Según se deduce de los esfuerzos cortantes encontrados en las caras a-b y b-c del elemento A,

$$v_{ab} = -\, v_{bc} \qquad (1.65)$$

O sea, que los esfuerzos cortantes son iguales y de signo contrario en dos caras perpendiculares de un elemento. Esto coincide con lo encontrado para un elemento sujeto a esfuerzos cortantes puros (sección 1.3.5).

Las tres primeras conclusiones son válidas únicamente para un elemento sometido a una carga axial mientras que la cuarta conclusión es general para cualquier estado de esfuerzos.

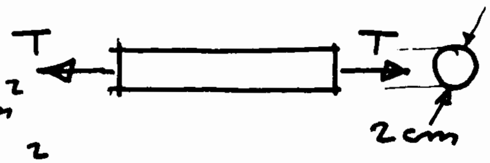
Ejemplo 1.18 .- Se pide calcular la resistencia a tensión de una barra cuando se conocen el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que puede resistir el material. Primero se calcula la resistencia suponiendo que la falla ocurre al alcanzarse el esfuerzo normal resistente de 3 000 kg/cm^2. La ecuación 1.62 indica que el esfuerzo normal máximo se presenta en una sección perpendicular al eje longitudinal de la barra. Por lo tanto, la resistencia resulta igual al esfuerzo normal resistente por el área de dicha sección. Bajo esta hipótesis se obtuvo una resistencia de 9.42 ton. Después se calcula la resistencia suponiendo que la falla ocurre al alcanzarse el esfuerzo cortante resistente de 1 000 kg/cm^2. El esfuerzo cortante máximo, según la ecuación 1.64, se presenta en un plano inclinado a 45° res-

EJEMPLO 1.18 CALCULO DE LA RESISTENCIA DE UNA BARRA SOMETIDA A UNA CARGA AXIAL DE TENSION — 1

DATOS

$f_r = 3000\ kg/cm^2$

$v_r = 1000\ kg/cm^2$



Se pide: Calcular la resistencia a tensión axial de una barra circular de 2 cm de diámetro si el material de la misma puede resistir un esfuerzo normal de 3000 kg/cm² y un esfuerzo cortante de 1000 kg/cm².

SOLUCION

a) Resistencia de la barra suponiendo que falla porque se alcanza el esfuerzo normal resistente

$$f_{max} = f_\theta \ (\text{para } \theta = 0°) = f_x \quad (Ec\ 1.62)$$

si $f_{max} = 3000\ kg/cm^2$:

$$T = Af_x = \frac{\pi \times 2^2}{4} \times 3000 = \underline{\underline{9420}}\ kg/cm^2$$

EJEMPLO 1.18 (Continuación) — 2

b) Resistencia de la barra suponiendo que falla porque se alcanza el esfuerzo cortante resistente

$$v_{max} = \frac{f_x}{2} \ (\text{para } \theta = 45°) \quad (Ec.\ 1.64)$$

Si $v_{max} = 1000\ kg/cm^2$

$$f_x = 2\,v_{max} = 2000\ kg/cm^2$$

$$T = Af_x = \frac{\pi \times 2^2}{4} \times 2000 = 6280\ kg < 9420\ kg$$

∴ La barra falla por cortante a una carga

$$\boxed{T = 6.28\ ton}$$

pecto al eje longitudinol y vale $f_x/2$. Si el esfuerzo cortante resistente es 1 000 kg/cm^2, el esfuerzo normal en dirección paralela al eje longitudinal, f_x, es por lo tanto de 2 000 kg/cm^2, y la resistencia de la barra es igual a este esfuerzo por el área de una sección transversal perpendicular al eje longitudinal. La resistencia obtenida de esta manera resultó de 6.25 ton, lo cual indica que la barra falla porque se alcanza la resistencia a esfuerzo cortante del material antes de alcanzarse la resistencia a esfuerzo normal.

1.5.3 Esfuerzos en un elemento de una viga sometida a momento flexionante y fuerza cortante. Esfuerzos principales

Se mencionó en la sección 1.5.1 que en un elemento de una viga sometida a momento flexionante y fuerza cortante actúan simultáneamente esfuerzos normales, f, y esfuerzos cortantes, v (fig 1.39-b). Los primeros pueden calcularse con la fórmula de la escuadría y los segundos con la ecuación (1.38). El elemento A de la fig 1.39 tiene sus caras paralelas y perpendiculares al eje longitudinal de la viga; solamente cuando se cumple esta condición son aplicables la fórmula de la escuadría y la ecuación (1.38). En esta sección se estudia la manera de calcular los esfuerzos en planos inclinados respecto al eje longitudinal de la viga.

En la fig 1.44-a se ha reproducido el elemento A de la fig 1.39 y se ha señalado un plano inclinado p-q cuya perpendicular forma un ángulo θ con el eje X. La convención usada para los dos subíndices de los esfuerzos cortantes, v, es la siguiente. El primer subíndice indica el plano en el que actúa el esfuerzo, y el segundo, el eje paralelo al esfuerzo. Por ejemplo, el esfuerzo cortante v_{xy} actúa en el plano X, o sea, en un plano perpendicular al eje X, y es paralelo al eje Y. La convención de signos usada en esta sección difiere de la usada en secciones anteriores y se ha incorporado porque es la convención usual en Teoría de la Elasticidad. Al igual que en la sección 1.52 el eje Y se ha marcado positivo hacia arriba mientras que en secciones anteriores se había considerado pasitivo hacia abajo. Los esfuerzos cortantes v_{xy}

se consideran positivos cuando tienen el mismo sentido que el eje indicado por el segundo subíndice. Para los esfuerzos cortantes v_θ (fig 1.44-b) se sigue la misma convención anterior que consiste en considerarlos positivos cuando indican un giro alrededor del elemento en el sentido del movimiento de las manecillas de un reloj. Los esfuerzos normales son positivos cuando son de tensión y negativos cuandó son de compresión.

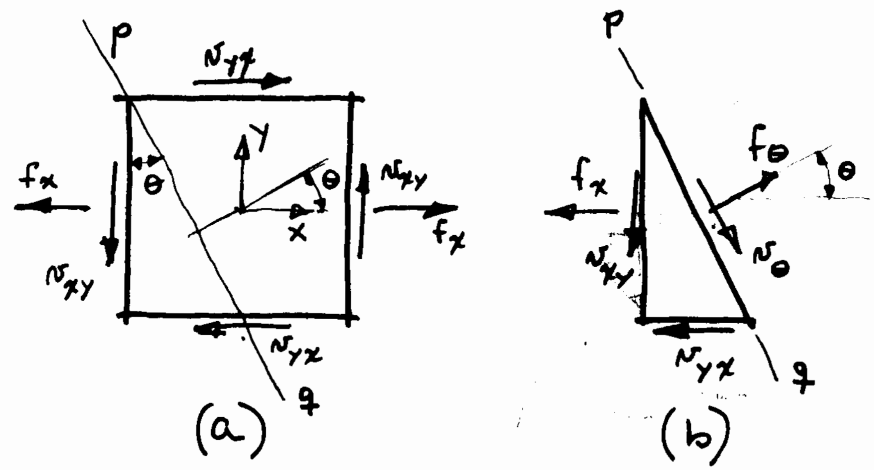


Fig 1.44 Esfuerzos en un plano inclinado de un elemento sometido a esfuerzos normales y cortantes

Para calcular los esfuerzos f_θ y v_θ en el plano p-q considérese el equilibrio del elemento triangular mostrado en la fig 1.44-b. Si se denomina A el área de la cara X, o sea, de la cara en que actúa el esfuerzo f_x, el área de la cara Y es A tan θ y el área de la cara inclinada es A sec θ. Si se considera que las fuerzas en cada cara son iguales a los esfuerzos por las áreas correspondientes y se establece el equilibrio de fuerzas en dirección del esfuerzo f_θ se obtiene la siguiente ecuación:

$$f_\theta A \sec\theta - f_x A \cos\theta - v_{xy} A \operatorname{sen}\theta - v_{yx} A \tan\theta \cos\theta = 0$$

Despejando f_θ, eliminando el factor A y tomondo en cuenta que $v_{xy} = v_{yx}$, se obtiene

$$f_\theta = f_x \frac{\cos\theta}{\sec\theta} + v_{xy}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sec\theta} + \frac{\tan\theta\cos\theta}{\sec\theta}\right)$$

Y, aplicando relaciones trigonométricas conocidas:

$$f_\theta = f_x \cos^2\theta + 2\, v_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (1.66\text{-a})$$

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en dirección del esfuerzo v_θ y siguiendo el mismo procedimiento anterior se obtiene:

$$v_\theta = f_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta + v_{xy}\left(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right) \qquad (1.66\text{-b})$$

Las ecuaciones 1.66 también suelen escribirse en la siguiente forma equivalente:

$$f_\theta = \frac{f_x}{2} + \frac{1}{2} f_x \cos 2\theta + v_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (1.67\text{-a})$$

$$v_\theta = \frac{1}{2} f_x \operatorname{sen} 2\theta - v_{xy} \cos 2\theta \qquad (1.67\text{-b})$$

Utilizando las ecuaciones 1.66 o 1.67 pueden encontrarse los esfuerzos normales y cortantes en cualquier plano inclinado. Conviene determinar la inclinación del plano en el que dichos esfuerzos alcanzan su valor máximo y la magnitud de esos esfuerzos. Para encontrar el plano de esfuerzo normal máximo, o sea, el valor de θ para el cual f_θ es máximo, se deriva la ecuación 1.67-a y se iguala a cero, con lo que se obtiene:

$$\frac{df_\theta}{d\theta} = -f_x \operatorname{sen} 2\theta + 2 v_{xy} \cos 2\theta = 0$$

de donde,

$$\tan 2\theta = \frac{2 v_{xy}}{f_x} \qquad (1.68)$$

Hay dos valores de 2θ que satisfacen la ecuación 1.68 y que difieren entre sí 180°. Uno de estos valores está entre o y 180°, y el otro, entre 180° y 360°. Los valores correspondientes de θ están entre 0 y 90°, y entre 90° y 180°, y difieren entre sí 90° . Para uno de estos dos valores de θ el esfuerzo normal es máximo y para el otro valor es mínimo. Estos esfuerzos máximo y mínimo reciben el nombre de esfuerzos principales y se presentan en planos perpendiculares ya que los dos valores de θ difieren en 90°.

Para encontrar la magnitud de los esfuerzos principales se pueden obtener los valores de cos 2θ y sen 2θ a partir de la ecuación 1.68 y sustituirlos en la ecuación 1.67-a. Se obtiene:

$$f_1 = \frac{f_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \qquad (1.69\text{-a})$$

$$f_2 = \frac{f_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \qquad (1.69\text{-b})$$

donde f_1 y f_2 representan el esfuerzo normal máximo y mínimo, respectivamente. Si se sustituyen los valores de cos 2θ y sen 2θ obtenidos de la ecuación 1.68 en la ecuación 1.67-b, se obtiene un valor nulo de v_θ. Esto indica que en los planos en que actúan los esfuerzos principales el esfuerzo cortante es cero.

De manera semejante se puede obtener la inclinación del plano en que el esfuerzo cortante alcanza su valor máximo y la magnitud de este esfuerzo. Los resultados son los siguientes:

$$\cot 2\theta = -\frac{2 v_{xy}}{f_x} \qquad (1.70)$$

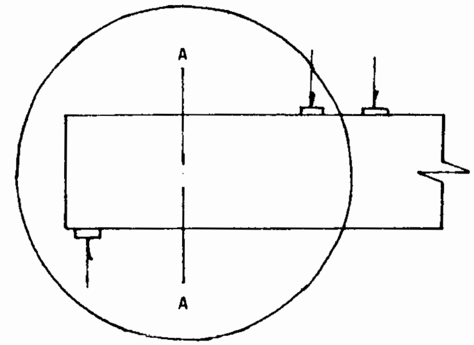
$$v_{max} = \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \qquad (1.71\text{-a})$$

La ecuación 1.71-a también se puede escribir en la forma

$$v_{max} = \frac{f_1 - f_2}{2} \qquad (1.71\text{-b})$$

En la fig 1.45 se muestra en forma esquemática la variación del esfuerzo principal máximo, o sea, el de tensión, en una sección transversal de una viga rectangular. También se indica la variación de los esfuerzos normales f_x producidos por la flexión y de los esfuerzos cortantes v_{xy} producidos por la fuerza cortante. Se aprecia en la figura, que en algunas regiones el esfuerzo principal es mayor que el esfuerzo normal producido por la flexión, aunque el máximo valor del esfuerzo principal coincide con el esfuerzo máximo por flexión en el lecho inferior de la viga.

Los esfuerzos principales pueden determinarse por el mismo procedimiento de equilibrio usado en esta sección para los estados de esfuerzos mostrados en la fig 1.40. Las ecuaciones obtenidas en esta sección para el cálculo de esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos, así como los correspondientes a los estados de esfuerzos de la fig 1.40, pueden representarse gráficamente por el llamado Círculo de Mohr que simplifica los cálculos numéricos necesarios.



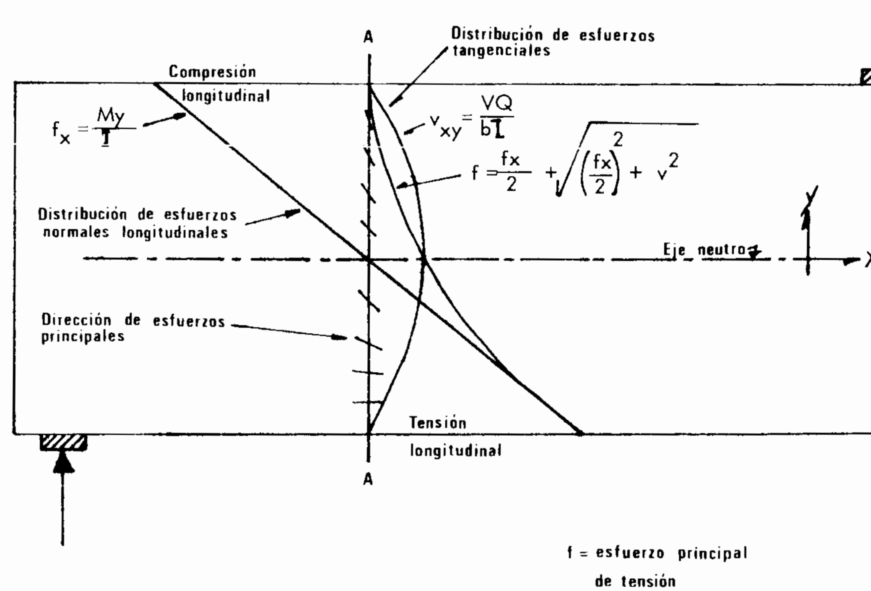


FIG 1.45 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN UNA SECCION DE UNA VIGA.

Ejemplo 1.19.- En este ejemplo se ilustra el cálculo de los esfuerzos principales y de los esfuerzos cortantes máximos en un punto de una viga en voladizo. Se calcularon primero los esfuerzos normales, f_x, con la fórmula de la escuadría, y los esfuerzos cortantes, v_{xy}, con la ecuación (1.38). Con los esfuerzos calculados de esta manera, se representó el estado de esfuerzos en el punto en cuestión (punto a). Este estado es como el mostrado en la fig 1.44-a y consiste en esfuerzos normales en las caras X y esfuerzos cortantes en las cuatro caras del elemento. Los esfuerzos normales calculados con la fórmula de la escuadría resultaron de compresión y por lo tanto son negativos; el esfuerzo cortante en la cara X del elemento, o sea la cara del lado derecho, es hacia abajo, y por lo tanto el esfuerzo cortante v_{xy} es negativo ya que en esta sección se sigue la convención de considerar que los esfuerzos cortantes son negativos cuando tienen sentido contrario a la dirección positiva del eje del segundo subíndice. Obsérvese que para el cálculo de esfuerzos normales se consideró el eje Y hacia abajo, mientras que se toma para arriba en el análisis de esfuerzos principales.

Se calculó después la inclinación del plano de esfuerzos principales, o sea, del plano p-q de la fig 1.44. Se mencionó anteriormente que la ecuación 1.68, con la que se calcula dicha inclinación, tiene dos soluciones las cuales representan dos planos perpendiculares entre sí. Estos dos planos se muestran en el ejemplo; las zonas rayadas equivalen a los elementos triangulares de la fig 1.44-b sobre los cuales se calcularon los esfuerzos principales.

El cálculo de la magnitud de los esfuerzos principales se hizo con las ecuaciones (1.69). Con estas ecuaciones se obtienen dos valores; uno representa el esfuerzo máximo de compresión y el otro, el de tensión. Para determinar en cuál de los dos planos establecidos anteriormente actúa el esfuerzo de compresión y en cuál el de tensión, se analizó el equilibrio de cada uno de los dos elementos triangulares. Para esto, se representaron sobre las caras horizontal y vertical los esfuerzos normales y cortantes correspondientes al estado de esfuerzos en el punto a, y se determinó, a partir del equilibrio del elemento, el signo que debía tener el esfuerzo normal sobre el plano inclinado.

Esta determinación también se hizo con un procedimiento alternativo que consisten en aplicar las ecuaciones (1.66-a) o (1.67-a), que sirven para calcular los esfuerzos principales. Los valores de los esfuerzos normales f_θ calculados con estas ecuación deben coincidir con los valores de los esfuerzos principales f_1 y f_2, lo cual sirve de comprobación, y además se obtiene en cuál de los dos planos de esfuerzos principales actúa el esfuerzo de compresión y en cuál el de tensión.

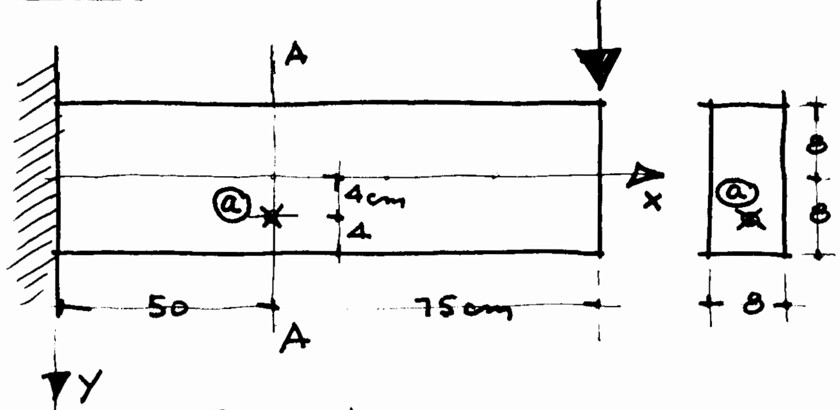
Una vez determinadas las magnitudes y la orientación de los esfuerzos principales en el punto a, los resultados obtenidos se presentan gráficamente.

A continuación se calcularon los esfuerzos cortantes máximos con la ecuación (1.71-b) y la inclinación del plano correspondiente con la ecuación (1.70). Esta última proporciona dos valores que corresponden a dos planos perpendiculares entre sí. Estos planos se han representado gráficamente en el ejemplo junto con los elementos triangulares correspondientes. Como el signo del esfuerzo cortante máximo calculada con la ecuación 1.71-b resultó positivo, los esfuerzos cortantes tienen un sentido tal que producen un giro en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj tal como se indica en el elemento triangular de la izquierda. En el plano perpendicular, las esfuerzos son negativos y por lo tanto el sentido del giro es contrario al movimiento de las agujas del reloj, como se indica en el elemento triangular de la derecha.

Finalmente se calcularon los esfuerzos normales, f_θ, en los planos de esfuerzos cortantes máximos. Esto se hizo con la ecuación (1.67-a). Al final del ejemplo se muestra gráficamente el estado de esfuerzos cortantes máximos. En las caras de estos elementos actúan, por lo tanto, los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales f_θ calculados para los planos de esfuerzos cortantes máximos.

EJEMPLO 1.19 CALCULO DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS EN UN PUNTO DE UNA VIGA EN VOLADIZO

DATOS



Se pide:

a) Calcular la magnitud y dirección de los esfuerzos principales en el punto @.

b) Calcular los esfuerzos cortantes máximos, su orientación y los esfuerzos normales correspondientes.

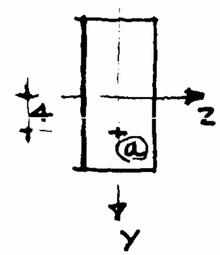
EJEMPLO 1.19 (Continuación)

CALCULO DE ESFUERZOS NORMALES, f_x

$$f_x = \frac{M}{I}\,y$$

$$M_{A\text{-}A} = -1\,\text{ton} \times 0.75\,\text{m} = -0.75\,\text{tn-m}$$
$$= -75\,000\ \text{kg-cm}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \times 16^3}{12} = 2730\ \text{cm}^4$$



$$f_x = -\frac{75\,000 \times 4}{2730} = -110\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

El signo negativo indica que los esfuerzos son de compresión.

CALCULO DE ESFUERZOS CORTANTES, v_{xy}

$$v_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

$$V = 1\ \text{ton} = 1000\ \text{kg}$$

$$Q = 8 \times 4 \times 6 = 192\ \text{cm}^3$$

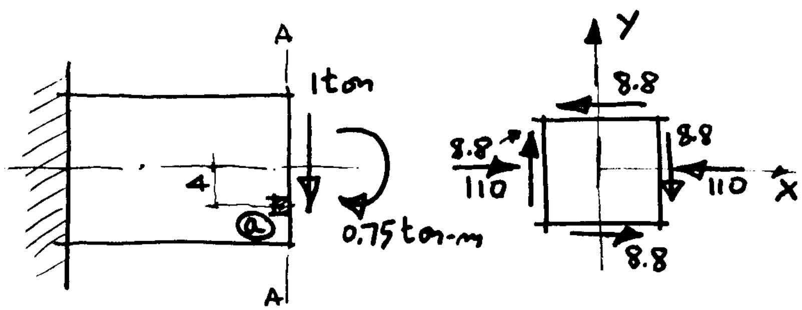
EJEMPLO 1.19 (Continuación) 3

$$I = 2730 \text{ cm}^4$$

$$b = 8 \text{ cm}$$

$$N_{xy} = \frac{1000 \times 192}{2730 \times 8} = 8.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

ESTADO DE ESFUERZOS EN EL PUNTO a



Esfuerzos normales negativos porque son de compresión.

Esfuerzos cortantes negativos porque en la cara X (perpendicular al eje X) el esfuerzo tiene sentido contrario al sentido positivo del eje Y.

EJEMPLO 1.19 (Continuación) 4

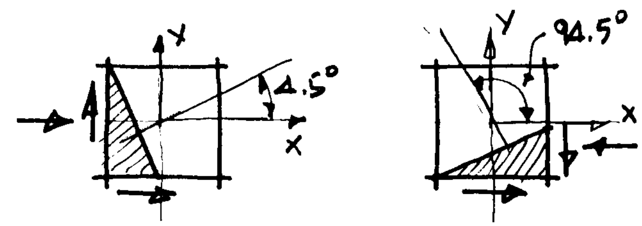
CALCULO DE ESFUERZOS PRINCIPALES

$$\tan 2\theta = \frac{2N_{xy}}{f_x} \qquad \text{(Ec 1.68)}$$

$$\tan 2\theta = \frac{-2 \times 8.8}{-110} = 0.16$$

$$2\theta = 9.1^\circ \text{ ó } 189.1^\circ$$

$$\theta = 4.5^\circ \text{ ó } 94.5^\circ$$



$$f_1 = \frac{f_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \qquad \text{(Ec 1.69-a)}$$

$$f_1 = -\frac{110}{2} + \sqrt{\left(-\frac{110}{2}\right)^2 + (-8.8)^2}$$

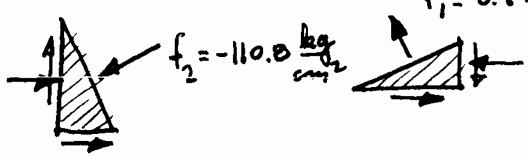
$$f_1 = -55 + \sqrt{3112.4} = -55 + 55.8 = 0.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

EJEMPLO 1.19 (Continuación) 5

$$f_2 = \frac{f_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \qquad (\text{Ec } 1.69\text{-b})$$

$$f_2 = -55 - \sqrt{3112.4} = -55 - 55.8 = -110.8 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

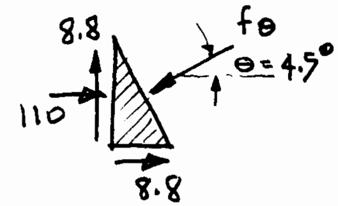
Estableciendo el equilibrio de los elementos diferenciales triangulares se determina en qué plano actúa f_1 y en qué plano f_2:



También se puede determinar en qué plano actúa f_1 y en qué plano f_2 por medio de las ecuaciones 1.66-a o 1.67-b. Aplicando la segunda para el plano correspondiente a $\theta = 4.5°$, se tiene:

(Sigue en hoja siguiente.)

EJEMPLO 1.19 (Continuación)



$$2\theta = 9°$$

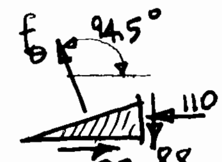
$$f_\theta = \frac{f_x}{2} + \frac{1}{2} f_x \cos 2\theta + v_{xy} \text{ sen}$$

$$f_\theta = -\frac{110}{2} + \frac{1}{2}(-110)(0.987) - 8.8 \times 0.$$

$$f_\theta = -55 - 54.4 - 1.4 = -\underline{\underline{110.}}$$

Este valor coincide con f luego en el plano correspondiente a $\theta = 4.5°$ actúa el esfuerzo principal de compresión.

Aplicando la ec 1.67-a al plano correspondiente a $\theta = 94.5°$



$$2\theta = 189°$$

$$f_\theta = -\frac{110}{2} + \frac{1}{2}(-110)\cos 189° - 8.8 \text{ sen}$$

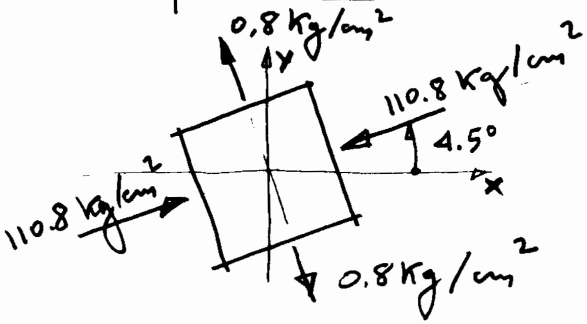
$$f_\theta = -55 + (-55)(-0{,}987) - 8.8 \times 0.1$$

$$f_\theta = -55 + 54.4 + 1.4 = \underline{\underline{+0.8}} \text{ kg/}$$

Este valor coincide con f_1, luego en el plano correspondiente a $\theta = 94.5°$ actúa el esfuerzo principal de tensión.

EJEMPLO 1.19 (Continuación) 7

Representación gráfica de los esfuerzos principales en el punto a



CALCULO DE ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS

$$v_{max} = \frac{f_1 - f_2}{2} \qquad \text{(Ec 1.71-b)}$$

$$v_{max} = \frac{0.8 + 110.8}{2} = 55.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

(Sigue en hoja siguiente)

EJEMPLO 1.19 (Continuación) 8

Inclinación del plano de esfuerzo cortante máximo:

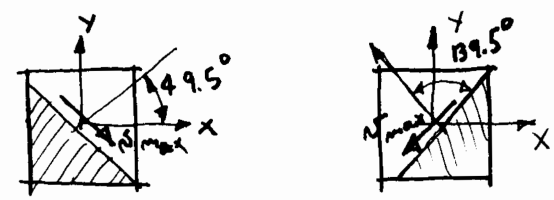
$$\cot 2\theta = -\frac{2 v_{xy}}{f_x} \qquad \text{(Ec 1.70)}$$

$$\cot 2\theta = -\frac{2(-8.8)}{-110} = -0.16$$

$$2\theta = 99° \ \text{ó} \ 279°$$

$$\theta = 49.5° \ \text{ó} \ 139.5°$$

Como el signo de v_{max} es positivo, el sentido de los esfuerzos es tal que produce un giro en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj:



EJEMPLO 1.19 (Continuación) 9

Los esfuerzos normales en los planos de esfuerzos cortantes máximos se pueden obtener con las ecuaciones 166-a o 167-a. Aplicando la segunda:

$$f_{\theta} = \frac{f_x}{2} + \frac{1}{2} f_x \cos 2\theta + v_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

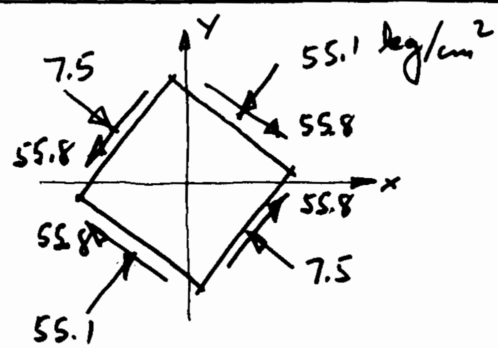
$$f_{\theta_1} = -\frac{110}{2} - \frac{110}{2} \cos 99^\circ - 8.8 \operatorname{sen} 99^\circ$$

$$f_{\theta_1} = -55 + 8.6 - 8.7 = -55.1$$

$$f_{\theta_2} = -55 - \frac{110}{2} \cos 139.5^\circ - 8.8 \operatorname{sen} 139.5$$

$$f_{\theta_2} = -55 + 41.8 + 5.7 = -7.5$$

Estado de esfuerzos correspondiente a la condición de esfuerzos cortantes máximos



REFERENCIAS

TEORIA DE FLEXION (incluyendo flexión asimétrica)

1.1 J. N. Cernica, "Resistencia de materiales" (secciones 3.4, 3.7, 3.8, 3.13, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5), CECSA, México, 1968.

1.2 E. P. Popov, "Introduction to mechanics of solids" (secciones 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.10, 8.3, 11.1, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.8, 11.14, 11.15), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.

1.3 F. L. Singer, "Resistencia de materiales" (secciones 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 13.9, 14.3), Harper and Row, Nueva York, 1971.

1.4 S. P. Timoshenko y J. M. Gere, "Mechanics of materials" (secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1972.

TEORIA DE FUERZA CORTANTE

1.1 J. N. Cernica, "Mechanics..."(secciones 3.5, 3.6).

1.2 E. P. Popov, "Introduction..." (secciones 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7).

1.3 F. L. Singer, "Resistencia..." (secciones 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 13.8).

1.4 S. P. Timoshenko y Gere, "Mechanics ..." (secciones 5.3, 5.4, 5.5).

ESFUERZOS COMBINADOS

1.1 J. N. Cernica, "Mechanics..." (sección 3.11)

1.2 E. P. Popov, "Introduction ..." (secciones 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 10.1, 10.2, 10.3).

1.3 F. L. Singer, "Resistencia..." (secciones 9.4, 9.5, 9.6).

1.4 S.P. Timoshenko y Gere, "Mechanics..." (secciones 5.6,).

2. VIGAS DE MADERA

Francisco Robles

2.1 INTRODUCCION

Debido a la estructura y propiedades mecánicas particulares de la madera, las vigas de este material se labran de manera que las fibras queden orientadas en sentido normal a la dirección de las fuerz as transversales que deberán soportar; es decir las fibras deben quedar paralelas al eje longitudinal de la viga. En estas condiciones la madera resiste acciones flexionantes con gran eficiencia, ya que la relación entre su rigidez en flexión y su peso es alta.

Se considerarán aquí únicamente vigas de madera maciza ordinaria. Pueden también aprovecharse materiales industrializados como la madera contrachapada o triplay, o la madera laminada.

2.2 COMPORTAMIENTO

El comportamiento de la madera bajo fuerzas o acciones transversales se estudia en ensayes efectuados con probetas de sección pequeña, como las descritas en la sección 3.9.4, de la ref 2.1 o sobre vigas a escala natural.

2.2.1 Flexión

En flexión, el comportamiento de la madera es prácticamente elástico hasta niveles de carga relativamente altos.

Una viga de madera sometida a una carga transversal creciente exhibe distribuciones de esfuerzos semejantes a los mostrados en la fig 2.1 para una viga simétrica. Se aprecia que para una carga baja el eje neutro queda al centro y la distribución de esfuerzos es lineal. A medida que la carga se va aproximando a la que produce la falla la distribución de esfuerzos deja de ser lineal y la profundidad del eje neutro aumenta. Este comportamiento se debe a las diferencias en las gráficas esfuerzo-deformación de la madera sujeta a tensión o a compresión (fig 3.4.3 de la ref 2.1). Por regla general las fallas por flexión se inician con el aplastamiento de las fibras de compresión a la que sigue la rotura de las fibras en

tensión.

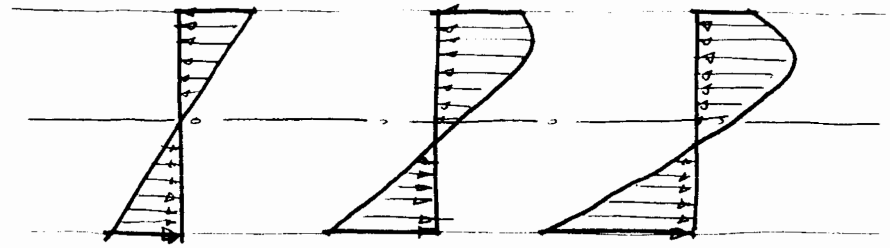


Fig 2.1 Variación de las distribuciones de esfuerzos en vigas de madera sometidas a carga creciente

Influyen en la resistencia a flexión de las vigas de madera, además de los factores mencionados en la sección 3.9.3 de la ref 2.1, el peralte y la forma. En condiciones iguales, la resistencia a flexión tiende a disminuir con el peralte. También puede ser significativa la forma de la sección. Los reglamentos tienen en cuenta la influencia de estos factores sea en la forma de recomendar esfuerzos permisibles o sea introduciendo determinados coeficientes correctivos.

2.2.2 Fuerza cortante

Aunque el momento suele regir el dimensionamiento de vigas de madera, pueden existir condiciones de carga en que sea crítica la fuerza cortante.

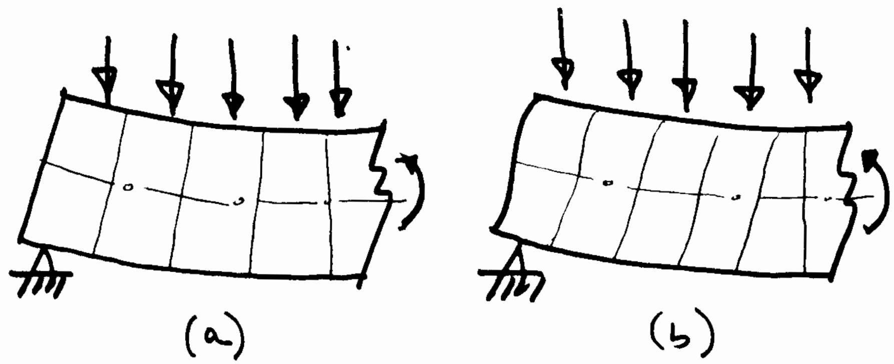
Como se indicó en la sección 1.3.5, en un elemento sujeto a cargas transversales, la fuerza cortante produce esfuerzos cortantes en planos perpendiculares y paralelos al eje del elemento. La madera tiene considerable resistencia a esfuerzos cortantes normales a las fibras. Sin embargo su resistencia a esfuerzos paralelos a las fibras es baja: del orden de 10 a 15% de la resistencia a tensión longitudinal. Puesto que las vigas suelen labrarse de manera que las fibras quedan orientadas en sentido paralelo a su eje longitudinal, cuando la fuerza cortante resulta crítica, provoca fallas en planos horizontales debidas a esfuerzos cortantes horizontales o "rasantes". Jamás se registran fallas en planos normales al eje.

2.2.3 Deflexión

Suele aceptarse que la deflexión de vigas de madera puede predecirse por medio de las expresiones que proporciona la Mecánica de Materiales para el cálculo de las deflexiones debidas a flexión. Esto implica; a) que se considera válida la hipótesis de que las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión y, b) que la deformación debida a cortante es despreciable (fig 2.2). Esto no es rigurosamente cierto en vigas de madera debido a la escasa resistencia a esfuerzos rasantes de la madera que hace que las secciones se curven bajo el efecto de las acciones transversales, lo que produce deformación por cortante - - (fig 2.2-b). Sin embargo los errores que resultan son pequeños, de manera que se justifica el empleo de las fórmulas usuales para la determinación de deflexiones por flexión.

Los módulos de elasticidad para cálculo de deflexiones se determinan a partir de ensayes de flexión.

Al estudiar las deformaciones de estructuras de madera debe tenerse en cuenta que las vigas, cuando quedan sometidas a cargas que actúan durante largo tiempo, adquieren deformaciones adicionales que pueden ser del mismo orden que las que resultan de un cálculo elástico. Esto no significa que el módulo de elasticidad cambia con el tiempo. Por el contrario permanece constante, lo que puede comprobarse ensayando vigas que han estado cargadas durante largo tiempo: el módulo que resulta es el mismo que el obtenido antes de la aplicación de la carga.



Hipótesis de secciones planas

Condición real: las secciones planas se vuelven curvas bajo la acción de las cargas

Fig 2.2 Flexión en vigas de madera

2.2.4 Pandeo lateral

Las vigas sin soportes laterales en la cara de compresión tienden a deformarse lateralmente, pudiendo esta tendencia a pandeo provocar la falla a cargas menores que las correspondientes a la falla de flexión.

El pandeo lateral es una función de la relación entre la longitud entre apoyos laterales y el ancho del lado comprimido. En una sección posterior de estos apuntes se proponen métodos para el análisis de los efectos del pandeo lateral en vigas.

Para el caso particular de vigas de madera véanse recomendaciones como las de la AITC (ref 2.2) o de la SOP (ref 2.3). En la presente sección se considerará que la restricción lateral de la cara de compresión es adecuada de manera que puede despreciarse la inestabilidad lateral, lo que suele ser el caso en muchas situaciones prácticas. Por ejemplo es evidente que las vigas que soportan un sistema de piso de tabla rígidamente unidas a las vigas tendrán su cara de compresión restringida al pandeo. Suele considerarse también que cuando la relación de peralte a ancho es inferior a dos el pandeo no es significativo. Los reglamentos suelen dar recomendaciones empíricas sobre las condiciones que deben existir para poder despreciar los efectos de inestabilidad.

2.2.5 Efectos de acciones normales a las fibras

En la sección 3.9.3 de la ref 2.1 se indicó que la resistencia de la madera a esfuerzos de compresión normales a la madera es muy baja. En vigas este tipo de esfuerzos puede ser significativo en los apoyos y bajo las cargas concentradas (fig 2.3).

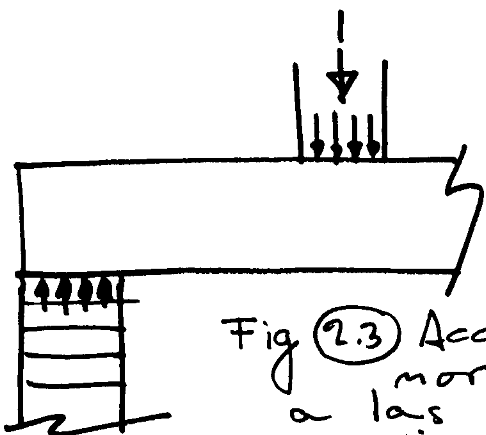


Fig 2.3 Acciones normales a las fibras en vigas de madera

2.3 DIMENSIONAMIENTO

El dimensionamiento de vigas de madera comprende los siguientes aspectos principales.

a) Resistencia a la flexión

b) Resistencia a la fuerza cortante

c) Resistencia a las acciones normales a las fibras debidas a las reacciones o cargas concentradas normales

d) Deflexión

El criterio de dimensionamiento que se propone es el de esfuerzos permisibles o de esfuerzos de trabajo, que es el más usual en estructuras de madera.

Para las escuadrías o secciones más comunes, véase la pag 130 de la ref 2.1.

2.3.1 Dimensionamiento por flexión

Se supone un comportamiento elástico, por lo que es aplicable la fórmula de la escuadría:

$$f = \frac{M}{I} c \qquad (1.13\text{-a})$$

En la tabla 2.1 se presentan valores típicos de esfuerzos permisibles en flexión tomados de la ref 2.3. Para las condiciones en que son aplicables véase la pag 130 de la ref 2.1 y la ref 2.3. La ref 2.3 da coeficientes de corrección para los casos en que no se cumplen estas condiciones.

El Reglamento del D.D.F. (ref 2.4) da esfuerzos permisibles en función de la densidad aparente de la madera seca. Si no se cuenta con la información sobre densidad, recomienda un esfuerzo conservador de 60 kg/cm^2 para maderas clasificadas como de primera, según las normas de la Dirección General de Normas de la Secretaría de Industria y Comercio.

TABLA 2.1.- ESFUERZOS PERMISIBLES Y MODULOS DE ELASTICIDAD DE ALGUNAS MADERAS (Unidades: kg/cm^2)

Especie	Calidad	Flexión	Cortante paralelo a la fibra	Compresión normal a a la fibra	Módulo elasticidad
Pino blanco, pino lacio	1a 2a	80 60	6 6	18 18	85 000
Pino prieto, pino real, cedro	1a 2a	90 70	8 8	20 20	90 000
Encino	1a 2a	120 90	10 10	25 25	100 000
Zapotillo	1a 2a	110 95	10 10	25 25	110 000

2.3.2 Dimensionamiento por fuerza cortante

Como en el caso de la flexión, se acepta la hipótesis de un comportamiento elástico, por lo que es aplicable la fórmula

$$v = \frac{VQ}{Ib} \qquad (1.38)$$

que, para secciones rectangulares, se convierte en

$$v = \frac{3}{2}\,\frac{V}{bh} \qquad (1.43)$$

Para el significado de los símbolos véase el inciso 1.3.5. En la tabla 2.1 se muestran algunos valores típicos recomendados por SOP (ref 2.3). El valor recomendado por el Reglamento del D.D.F. para el caso en que no se cuente con información sobre la densidad de la madera es 10 kg/cm^2. (Son aplicables las mismas observaciones generales que las hechas para flexión.)

2.3.3 Dimensionamiento par acciones normales a las fibras

Los esfuerzos de compresión producidos por cargas que actúan normalmente a la fibra se obtienen dividiendo la carga entre el área en que está aplicada. Algunos esfuerzos permisibles recomendados por SOP se consignan en la tabla 2.1. El valor dado por el Reglamento del D.D.F. para cuando no se conocen la densidad aparente es 7 kg/cm^2.

(Son aplicables las mismas observaciones generales que las hechas para flexión.)

2.3.4 Revisión de deflexión

Como se indicó en la sección 2.2.3, las deflexiones se calculan con las fórmulas elásticas usuales correspondientes a las condiciones particulares de carga y apoyo. Se usa el momento de inercia real de la sección.

Cuando las cargas actúan durante largo tiempo debe tenerse en cuenta que las deflexiones calculadas en la forma indicada pueden llegar a duplicarse.

En la tabla 2.1 se dan valores típicos de módulos de elasticidad recomendados por SOP. El valor conservador dado por el Reglamento del D.D.F. para el caso en que no se cuente con información adecuada es 79 000 kg/cm^2.

2.4 VIGAS DE MADERA FORMADAS POR VARIOS ELEMENTOS

Las características de los árboles de los que se obtienen las escuadrías imponen limitaciones de tamaño y forma. Es posible obviar estas limitaciones formando secciones compuestas de varias escuadrías como las mostradas en la fig 2.4. Los diversos tipos de elementos se unen por medio de clavos, tornillos, pernos o pegamentos. Estos medios de unión deben ser capaces de transmitir las fuerzas rasantes originadas por la flexión. La magnitud de las fuerzas rasantes puede determinarse por medio de los procedimientos espuestos en la sección 1.3.4.

En los cálculos de flexión deben considerarse los factores de forma que recomiendan los reglamentos.

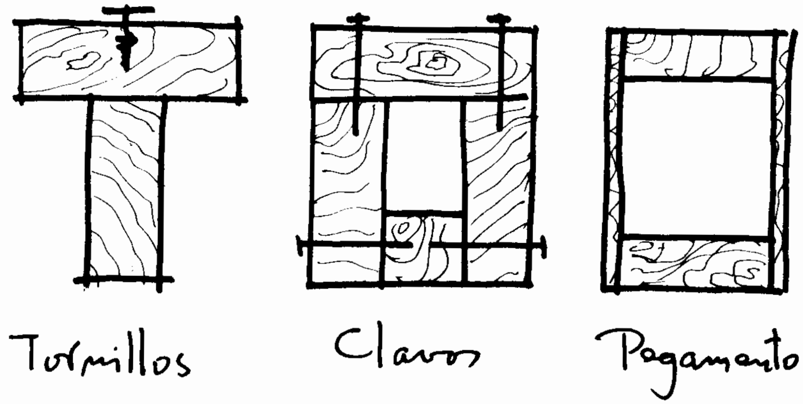


Fig 2.4 Secciones de vigas de madera compuestas de varios elementos

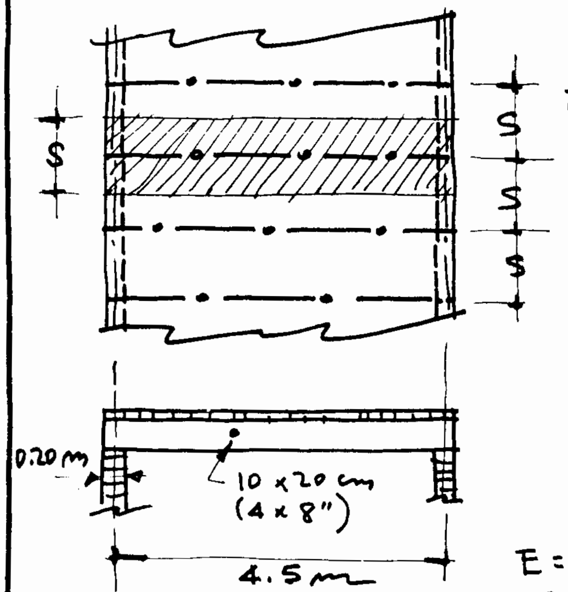
Ejemplo 2.1.- No existe mucha diversidad en las escuadrías comerciales disponibles. Por lo tanto es frecuente el problema que se plantea en este ejemplo en que las dimensiones de la sección son datos y se trata de encontrar la separación máxima posible con la sección dada. La estructura en estudio es un sistema de piso formado por vigas de madera que se apoyan sobre muros de mampostería y soportan un piso de tabla o tablón. Se considera que el tablón tiene una resistencia adecuada.

La solución del problema consiste en determinar las separaciones posibles según cuatro condiciones: flexión, fuerza cortante, acciones normales y flecha.

Se escoge la separación más pequeña, que evidentemente será la crítica.

EJEMPLO 2.1 DIMENSIONAMIENTO DE LAS VIGAS DE UN SISTEMA DE PISO DE MADERA 1

DATOS



Carga viva + + carga muerta = $= 0.4 \text{ ton/m}^2$

Esfuerzo permisible en flexión: $f = 60 \text{ kg/cm}^2$

Esfuerzo cortante permisible: $v = 8 \text{ kg/cm}^2$

Esfuerzo normal a las fibras permisible: $n = 7 \text{ kg/cm}^2$

$E = 79\,000 \text{ kg/cm}^2$

$\delta_{max} = 1.5 \text{ cm}$

Se pide: La separacion s de las vigas

SOLUCION

(hoja siguiente)

EJEMPLO 2.1 (Continuación) 2

SOLUCIÓN

Separación por flexión

$$f = \frac{M}{S}$$

$$M = \frac{1}{8} w l^2 \quad ; \quad w = 0.4s$$

(s = separación en m)

$$M = \frac{1}{8}(0.4s)\,4.5^2$$

$$= 1.01(s) \text{ ton-m} = 1.01(s) \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$S = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \times 400}{6} = 667 \text{ cm}^3$$

$$60 = \frac{1.01(s)\,10^5}{667}$$

$$s = \frac{60 \times 667}{1.01 \times 10^5} = 0.40 \text{ m}$$

$$s = 40 \text{ cm}$$

EJEMPLO 2.1 (Continuación) 3

Separación por cortante

$$v = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}$$

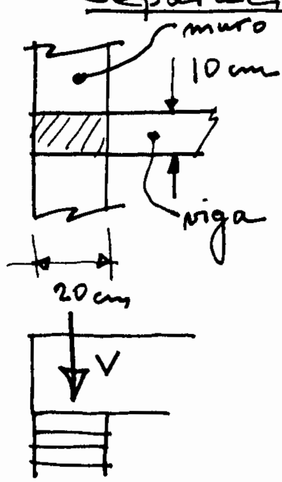
$$V = \frac{wl}{2} = \frac{0.4(s)\times 4.50}{2} = 0.9(s)\ \text{ton}$$

$$= \underline{\underline{900(s)\ \text{kg}}}$$

$$8 = \frac{(1.5)(900)(s)}{(10)(20)}$$

$$s = \frac{(8)(200)}{(1.5)(900)} = 1.18\ \text{m} = \underline{\underline{118\ \text{cm}}}$$

Separación por compresión normal



$$m = \frac{V}{(10)(20)}$$

$$7 = \frac{(900)(s)}{(10)(20)}$$

$$s = \frac{(7)(10)(20)}{900} = 1.56\ \text{m}$$

$$s = \underline{\underline{156\ \text{cm}}}$$

EJEMPLO 2.1 (Continuación) 4

Separación por flecha

$$\delta = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}$$

$$w = 0.4(s)\ \text{ton/m} = \underline{\underline{4(s)\ \text{kg/cm}}}$$

(s en m)

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}\times 10\times 20^3 = \underline{\underline{6670\ \text{cm}^4}}$$

$$1.5 = \frac{(5)(4)(s)(450)^4}{(384)(79000)(6670)}$$

$$s = \frac{(1.5)(384)(79000)(6670)}{(5)(4)(450)^4} = 0.37\ \text{m}$$

$$s = \underline{\underline{37\ \text{cm}}}$$

Rige la separación por flecha:

$$\therefore \boxed{s = 37\ \text{cm}}$$

R E F E R E N C I A S

2.1.- F. Robles, O. M. González Cuevas, J.L. Trigos S., editores, "Apuntes de Mecánica de Materiales, Cuaderno 1", Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1973.

2.2. American Institute of Timber, Construction, "Timber Construction Manual", John Wiley and Sons, Nueva York, 1966.

2.3. "Especificaciones para estructuras de Madera", Secretaría de Obras Públicas, México 1968.

2.4. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", México 1966.

2.5 R. J. Hoyle, Jr., "Wood Technology in the Design of Structures", Mountain Press Publishing Co., Missoula, Montana, 1973.

2.6. H. J. Hansen, "Diseño moderno de estructuras de maderas", CECSA, México 1969.

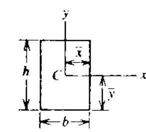
2.7. G. Gurfinkel, "Wood Engineering", Southern Forest Products Association, New Orleans, Louisiana, 1973.

APENDICE A

Propiedades de las secciones planas.

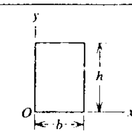
Notación:

$\bar{x}$, $\bar{y}$ = distancia al centroide C
A = área
Ix, Iy = momentos de inercia respecto a los ejes x, y
Ixy = producto de inercia respecto a los ejes x, y
J = Ix + Iy = momento polar de inercia
I_{BB} = momento de inercia respecto al eje B-B

1. 

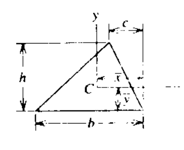
Rectángulo. (Origen de ejes en el centroide)

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}$$
$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2. 

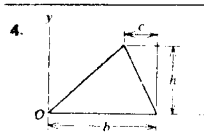
Rectángulo. (Origen de ejes en una esquina)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3}$$
$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad J = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

3. 

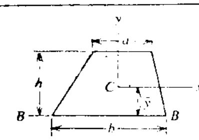
Triángulo. (Origen de ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b + c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$
$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad J = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

4. 

Triángulo. (Origen de ejes en un vértice)

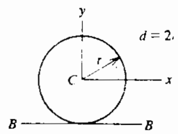
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad J = \frac{bh}{12}(h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

5. 

Trapecio. (Origen de ejes en el centroide)

$$A = \frac{h(a + b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$$
$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)} \qquad I_{BB} = \frac{h^3(3a + b)}{12}$$

6. **Círculo.** (Origen de ejes en el centro)

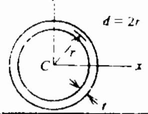


$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

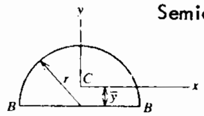
7. **Anillo circular.** (Origen de ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para los casos en que t sea pequeño



$$A = 2\pi r t = \pi d t \qquad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8. **Semicírculo.** (Origen de ejes en el centroide)

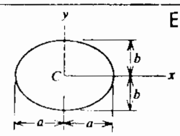


$$A = \frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098 r^4 \qquad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

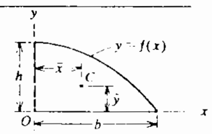
9. **Elipse.** (Origen de ejes en el centroide)



$$A = \pi a b \qquad I_x = \frac{\pi a b^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi b a^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad J = \frac{\pi a b}{4}(b^2 + a^2)$$

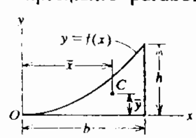
10. **Parábola**



$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

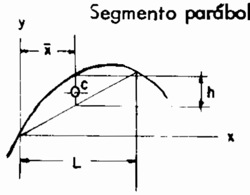
11. **Complemento parábolico.** (Origen de ejes en el vértice.)



$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

12. **Segmento parábolico.** (Origen en el extremo del - segmento.)



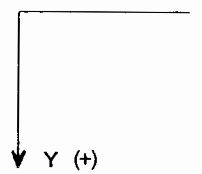
$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

$$A = \frac{2}{3} h L$$

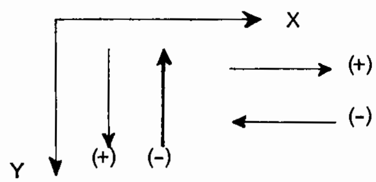
A-3

Convenciones

a) Ejes

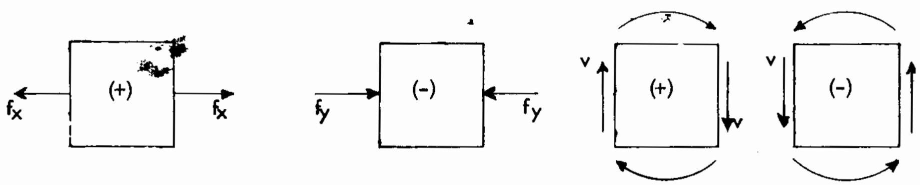


b) Cargas

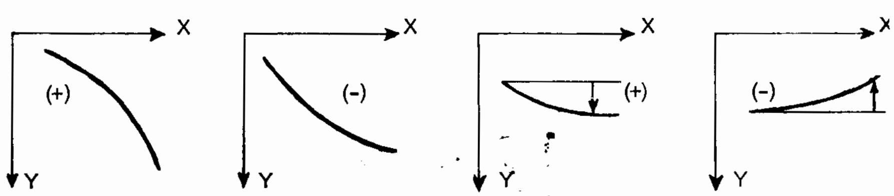


c) Carga Axial, Fuerza Cortante y Momento Flexionante.

d) Esfuerzos normales y Cortantes.



e) Pendientes y Deflexiones.

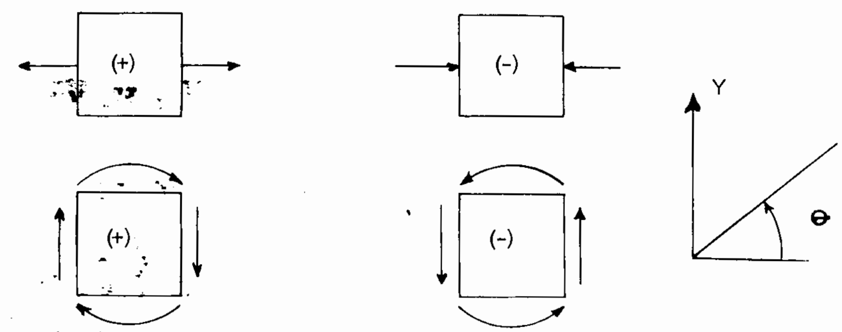


A-4

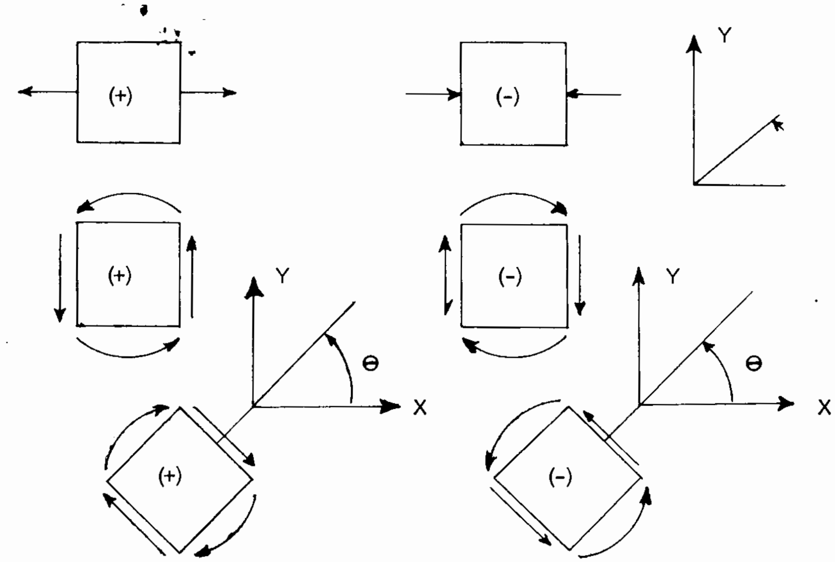
APENDICE B

(Continuación)

f) Esfuerzos en planos inclinados en miembros con cargas axiales



g) Esfuerzos Principales en Vigas



604025