UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES DE INGENIERÍA DE PRODUCCIÓN.

3ª.EDICIÓN.

ING. ROBERTO R.B. HOLANDA.

INDICE

PRESENTACION

En reuniones realizadas entre los profesores de la materia de Ingeniería de Producción de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., se discutieron las ventajas de la publicación de apuntes que sirvieran como una guia para los alumnos que cursen la materia regularmente o se inscriban en la enseñanza abierta. La publicación de este trabajo es una tentativa para la realización de este objetivo.

Estos apuntes no están todavía completos y los temas que no están incluídos serán desarrollados y publicados en el transcurso de los próximos semestres.

Esperamos que esta publicación sea de utilidad para los profesores y alumnos de la materia de Ingeniería de Producción y ayude a uniformizar la cátedra.

Febrero de 1978.
Ing. R.R.B. Holanda

I -INTRODUCCION A LA ADMINISTRACION DE LA PRODUCCION

1. Definición de la Administración de la Producción (o Dirección de la Producción): ésta se refiere a la toma de decisiones relacionadas con los procesos de producción, de modo que los bienes o servicios resultantes se produzcan de acuerdo con las especificaciones, las cantidades y fechas de demanda requeridas y a un costo mínimo.
2. La Administración de la Producción nació con la Revolución Industrial (siglo XVIII) y se caracterizó, en aquella época, por el aumento y desarrollo de las actividades de planeación y control, concentrándose principalmente en la planeación y control de la ejecución de tareas u operaciones industriales. Esto representó la aplicación del método científico a la producción.
3. En 1776 Adam Smith propuso la división del trabajo y presentó las siguientes ventajas:

   a) Desarrollo de una habilidad o pericia cuando el obrero se concentra en la ejecución de una sola tarea.
   b) El ahorro deltiempo que se pierde al pasar de una actividad a otra.
   c) La invención de máquinas herramientas cuya necesidad se haría evidente debido a la especialización.

   Babbage, otro científico de esta época, analizó las ideas de Smith y acrecentó una ventaja:

   d) La separación de operaciones que requieren habilidades diferentes.
4. A partir de 1900, Taylor empezó el estudio sistemático de la producción y debido a él, la Administración de la Producción tuvo un avance extraordinario. La preocupación inicial de Taylor fue pasar parte del poder de decisión de los obreros para los "administradores de la producción". Anteriormente, los obreros determinaban cómo producir una determinada pieza o producto, con base únicamente en su experiencia anterior y en su habilidad. De ellos dependían el tiempo para la ejecución de la operación o actividad y los métodos de trabajo. Además, los obreros tenían la costumbre de esconder su habilidad y experiencia como secretos de su profesión. Taylor cambió completamente esta filosofía y empezó a medir el trabajo. Para él, una actividad cualquiera requiere un tiempo, métodos de trabajo y habilidades que pueden ser científicamente determinados y que no dependen del obrero que la está ejecutando. Y además, los obreros pueden y deben ser entrenados para realizar estos tiempos, métodos y habilidades.
5. Uno de los principales problemas surgidos con la aplicación de las ideas de Taylor fue la variación de las actividades. Los tiempos tomados para cualquier tipo de actividad presentaban una variación relativamente grande debido a los siguientes factores:

   a) Variación de la velocidad de trabajo del operador. Cambios de métodos.
   b) Variación del contenido de la operación.
   c) Errores cometidos en la lectura de los cronómetros.
   d) Otros factores no directamente relacionados con la actividad.

   NOTA: La variación debido a la velocidad de trabajo del operador puede ser eliminada (por lo menos teóricamente) a través de la evaluación y corrección de dicha velocidad. Sin embargo, al hacerse esto, un nuevo elemento de variación sera introducido, el cual es el siguiente:

   e) Errores cometidos en la evaluación de la velocidad de trabajo del operador.

6. El concepto inicial de Taylor era muy rígido (se determinaba el tiempo de la operación) y sus seguidores tuvieron muchos problemas con les variaciones arriba mencionadas. Un tiempo estándar fijo, en muchos casos no resolvía el problema. El problema creado por dichas variaciones solamente fue resuelto cuando surgió la Teoría de las Probabilidades y la Estadística.

7. Otro problema existente en esta época era que un gran número de variables tenían que ser tomadas en consideración y no se disponía de los métodos adecuados para hacerlo. Se sabía de la necesidad de métodos matemáticos, pero éstos todavía no havían sido desarrollados. Finalmente, después de la segunda Guerra Mundial, aparecieron los métodos de la Investigacíon de Operaciones, los cuales permiten solucionar problemas con un gran número de variables.

8. La existencia de la Teoría de las Probabilidades, de la Estadística y de los métodos de la Investigación de Operaciones resolvieron solo en parte el problema del gran número de variables, puesto que algunos modelos matemáticos, si fueran resueltos manualmente, exigirían un tiempo extremadamente largo. Fue entonces que surgieron las computadoras digitales.

9. Con el surgimiento de las computadoras fue posible también desarrollar las técnicas de simulación, es decir: el gran número de variables del sistema productivo podían ser metidas en la computadora y ésta "simulaba" el funcionamiento del sistema. Los resultados de esta técnica son excepcionales: la evaluación de proyectos o decisiones puede ser realizada sin el altísimo costo correspondiente a la implantación de la decisión en la práctica.

10. En un futuro no muy lejano, las operaciones globales de las empresas podrán ser simuladas y esto obviamente causará un cambio radical en la Administración de la Producción.

11. La computadora también ha sido utilizada para controlar máquinas herramientas o procesos industriales (éstos principalmente en la industria química). Las máquinas controladas numéricamente pueden ser programadas y todo lo que se tiene que hacer para la ejecución de una determinada pieza u operación, es meter en la máquina la materia prima y las tarjetas del programa. El tiempo de preparación de las máquinas es, por lo tanto, radicalmente reducido. Sin embargo, estas máquinas son todavía muy caras, principalmente las que son capaces de ejecutar formas continuas según una ecuación matemática.

12. Uno de los últimos desarrollos de la Administración de la Producción fue en el campo de la Ingeniería Humana. Los siguientes aspectos son analizados: luz, temperatura, humedad, ruído, diseño de sillas de trabajo, esfuerzo físico, etc. También otros aspectos como enriquecimiento del trabajo y ampliación del trabajo están siendo analizados, principalmente en los países desarrollados, donde los obreros tienen un gran poder a través de sus sindicatos.

FASES DEL PROCESO PRODUCTIVO

13. Los sistemas productivos presentan 4 fases principales: diseño del sistema, planeación, ejecución y control. Veamos inicialmente los problemas que tienen que ser analizados para un efectivo diseño del sistema:

DISEÑO DEL SISTEMA

14. Inicialmente definamos eficiencia de un sistema productivo. En muchos casos el volumen de producción/hombre-hora es directamente relacionado con la eficiencia del sistema y por lo tanto una economía con elevado volumen de producción/hombre-hora es considerada como eficiente, mientras que una con baja producción/h.h. es considerada como deficiente. Sin embargo, vale la pena resaltar que la baja producción/h.h. en las economías subdesarrolladas se debe al bajo nivel de automación y esto es consecuencia principalmente del hecho de que la mano de obra es muy barata en dichas economías. Los sistemas con bajo volumen de producción/h.h. pueden ser igualmente eficientes si tomamos como medida de eficiencia los costos finales de los productos o servicios.

Por lo tanto, los sistemas automatizados solamente pueden ser considerados como más eficientes si la definición de eficiencia está directamente relacionada con el volumen de producción/h.h., puesto que aunque el nivel de automación de dichos sistemas sea mayor, sus costos finales podrán ser mayores, iguales o menores que los costos correspondientes a los sistemas con un menor grado de automación.

El diseño del sistema tiene que ser llevado a cabo tomándose en consideración todos estos factores, de modo a obtenerse un costo mínimo o una producción máxima/h.h. según las condiciones lo requieran. Como hemos dicho anteriormente, el costo mínimo será obtenido en las economías desarrolladas a través de mucha automación y en las economías subdesarrolladas a través de poca automación.

15. Otro aspecto que vale la pena resaltar es que en una economía subdesarrollada, la solución para aumentar el volumen de producción de una unidad industrial puede no ser la automación y si un simple aumento de la capacidad productiva, manteniéndose las mismas características productivas del sistema (por ejemplo: la relación entre el costo de depreciación de la maquinaria y el costo de la mano de obra directa).

16. Un sistema que utiliza mucha mano de obra es generalmente más flexible, en cuanto al volumen de producción y a la diversificación, que los sistemas automatizados, cuyas máquinas son especializadas en unos pocos productos y además se requiere un volumen de producción fijo mínimo para permitir una depreciación adecuada.

PLANEACION, EJECUCION Y CONTROL

17. Después de diseñado el sistema, su eficiencia dependerá exclusivamente de las actividades de:

a) Planeación
b) Ejecución
c) Control

Y para que todas estas actividades puedan ser llevadas a cabo eficientemente se necesitará:

d) Un eficiente sistema de información.

18. Las decisiones óptimas tomadas en estas 4 áreas en cuanto a cambios de demanda, nivel de los inventarios, programas de producción, calidad, innovaciones de productos o maquinarias, etc, dependerá básicamente de los objetivos de la empresa. Ejemplos: (a) Cuando hay mucha competencia, el mejor sistema de planeación probablemente será aquél que permita una minimización de los costos. Sin embargo, si hay excasez, el mejor sistema será aquél que proporcione el máximo volumen de producción, aunque esto implique una ligera elevación de los costos. (b) Si los objetivos son minimizar la rotación del personal y no perder ningún cliente, la solución podrá ser mantener un elevado nivel de inventarios o subcontratar cuando la demanda sea alta. Sin embargo, si el objetivo es alta rotación y un mínimo de inventarios, la solución sería la contratación/despidos de obreros y la subcontratación de otros fabricantes.

19. Veamos ahora algun decisiones relacionadas con cada una de las fases de los sistemas productivos:

a) Decisiones a largo plazo relacionadas con el diseño del sistema:

- Selección de equipo y procesos
- Diseño de los productos
- Planeación de tareas
- Localización del sistema
- Localización de instalaciones

b) Decisiones relacionadas con la fase de planeación:

- Programación de la producción
- Determinación de los tamaños óptimos de los lotes de fabricación y de los inventarios
- Plan de mantenimiento preventivo.

c) Decisiones relacionadas con la fase de ejecución:

- Todos los detalles que no pueden ser tomados en consideración en la fase de planeación (ejemplo: distribución del trabajo entre ayudantes).
- Política a ser empleada en cuanto al control de los obreros
- Inicio propiamente dicho del proceso de fabricación.

d) Decisiones relacionadas con la fase de control:

- Control de producción
- Control de inventarios
- Control de calidad
- Control de la productividad del personal y de la maquinaria
- Control de costos
- Mantenimiento correctivo.

e) Decisiones relacionadas con el diseño del sistema de información:

- Que información será necesaria para planear, ejecutar y controlar.
- Que periodicidad y a quien debe de ser dirigida.
- Que precisión.

CARACTERISTICAS ACTUALES DE LA DIRECCION DE LA PRODUCCION

20. Antiguamente los conocimientos adquiridos en la práctica eran enseñados en las universidades. Ahora (y en el futuro), la teoría se ha desarrollado tanto que ésta es enseñada en las universidades y al mismo tiempo conduce a nuevas prácticas.

21. Otro aspecto importante es que, a pesar de la existencia de técnicas bastante diferentes y en algunos casos bastante sofisticadas, los principios y objetivos de la Administración de la Producción pueden ser igualmente aplicados a empresas grandes, pequeñas o medianas. Veamos un ejemplo del uso de técnicas diferentes: en una gran empresa una sofisticada computadora podrá ser utilizada para simular todo o una parte del proceso productivo y consecuentemente optimizar el nivel de los inventarios, secuencias de fabricación, mezcla de productos, etc. En una empresa pequeña, para lograr los mismos objetivos, probablemente sólo métodos manuales o gráficos serán empleados. Obviamente, una empresa pequeña no podrá rentar una computadora sofisticada para simular su proceso productivo, sin embargo esto no debe ser considerado como una desventaja para las empresas pequeñas puesto que, antes que nada, debido al bajo nivel de complejidad con que operan estas empresas, difícilmente se justificaría la utilización de una computadora.

CARACTERISTICAS ACTUALES DE LA SOCIEDAD INDUSTRIAL

22. Las características actuales de la sociedad industrial son las siguientes:

a) Mayor automatización (menos mano de obra directa).
b) Decisiones sustituídas por reglas automáticas.
c) Sistemas o máquinas controladas númericamente o por computadoras.
d) Mayor diversificación de productos. Productos de vida más corta.
e) Actividades de los sistemas productivos más enfocadas a satisfacer los gustos y necesidades de los clientes.
f) Mayor aplicación de técnicas que permitan una mayor satisfacción por parte de los obreros y empleados (Ergonomía, enriquecimiento del trabajo, administración por objetivos, administración participativa, etc). g) Cambios de tecnología más frecuentes.

Aunque los sistemas actuales están cada dia más automatizados, debe resaltarse que todavía hay que diseñar el sistema, definir los equipos que serán controlados automáticamente y diseñar un eficiente sistema de información.

23. Vale la pena discutir un poco más el problema de la diversificación de productos. Esta diversificación generalmente requiere un mayor número de máquinas diferentes y por lo tanto, con el aumento del número de productos diferentes y también del número de máquinas, el número de soluciones alternativas para la fabricación de los productos aumenta de una forma increíble y consecuentemente las actividades de planeación y control de la producción resultan complicadísimas. Tomemos el ejemplo que se menciona en el capítulo final de estos apuntes: si tenemos 2 productos y 2 máquinas disponibles y si cada producto requiere de una operación en cada máquina, el número total de secuencias diferentes para la fabricación de dichos productos sería igual a 4. Si, por otro lado, tuviéramos 6 productos y 5 máquinas, el número de secuencias diferentes ya sería igual a 293,000,000,000,000.

TIPOS DE SISTEMAS PRODUCTIVOS

24. Hay básicamente 2 tipos de sistemas productivos:

a) Sistemas de producción en masa (sistemas continuos).
b) Sistemas intermitentes.

Los sistemas continuos son aquéllos en los cuales las instalaciones, los productos y los flujos de los productos son estándares. Estos sistemas en la práctica están representados por las líneas de ensamble y de producción, operaciones químicas de flujo continuo, etc. Las principales características de estos sistemas son:

a) Poca diversificación. Productos que son requeridos por la sociedad en grandes cantidades.
b) Insumos estandarizados.
c) Mucha automatización debido a la estandarización.
d) Máquinas generalmente distribuídas en línea, Layout por producto.
e) Instalaciones no flexibles.
f) Debido a la automatización, la inversión en maquinaria y equipo es bastante elevada en relación a la inversión total, y por lo tanto este tipo de sistema solo es conveniente para productos de vida larga o que presentan cambios de diseño que pueden ser fácilmente introducidos en las líneas de producción o ensamble.

g) Planeación y Control de la Producción sencilla debido al reducido número de variables: hay pocos productos y además las líneas de producción pueden ser consideradas como una sola máquina (una sola variable).
h) Es de gran importancia la actividad "balanceo de líneas".
i) Sistema de transporte automatizado y no flexible.
j) Pocos inventarios entre una operación y otra.
k) Hay inventarios de productos terminados debido a la vida de los productos y a la estandarización.
l) Costos unitarios de producción más bajos.
m) Sistema de distribución de etapas múltiples (mayoristas y minoristas).
n) El mantenimiento preventivo es muy importante puesto que cuando se para una máquina, generalmente se para toda una línea.
o) Tiempos de fabricación más cortos.

EJEMPLOS: Fabrica de coches, fábrica de refrescos y cervezas, oficinas con una gran cantidad de trabajos del mismo tipo, etc,

25. Los sistemas intermitentes son aquéllos cuyas instalaciones deben ser suficientemente flexibles para manejar una amplia variedad de productos. Sus principales características son:

a) Mucha diversificación. En general se fabrican productos no requeridos en grandes cantidades por la sociedad.
b) Una gran variedad de insumos.
c) Distribución de las máquinas bastante compleja, ya que cada producto requiere una secuencia diferente de operaciones. Layout por proceso.
d) Instalaciones flexibles.
e) Planeación y control de la producción bastante compleja debido al elevado número de variables.
f) Costo de la mano de obra directa más elevado que en el caso del sistema continuo.
g) Poca automatización.
h) Transporte bastante flexible para adaptarse a los diferentes tipos y tamaños de los productos.
i) Mayores inventarios entre una operación y otra.
j) Tiempos de fabricación mayores.
k) Mano de obra directa más calificada.
l) Podrá existir inventarios de productos terminados o no. Esto dependerá del tipo de sistema intermitente (véase el punto 27).

26. La parte del sistema de producción en masa que se encarga exclusivamente de la distribución de los productos, es decir, los mayoristas y minoristas, son considerados como sistemas "productivos" aparte y son llamados sistemas de inventario puro.

27. Los sistemas intermitentes cuyos productos tienen una vida relativamente larga, pueden fabricar éstos en corridas de producción que se repiten un determinado número de veces al año. Debido a estas características, este tipo de sistema puede mantener inventarios de productos terminados y son llamados <u>sistemas intermitentes cerrados</u>. Ejemplo: Empresas que fabrican piezas o refacciones para coches.

Aquellos sistemas intermitentes que reciben órdenes directamente de los clientes y son forzados a fabricar sus productos según las diversas especificaciones de éstos, no pueden mantener inventarios de productos terminados y son llamados <u>sistemas intermitentes abiertos</u>. Ejemplos: Fabricantes de acojinamientos, taller mecánico, hospitales, etc.

28. Hay un tipo especial de sistema intermitente abierto que merece ser analizado separadamente: son los grandes proyectos, como por ejemplo la construcción de edificios, la organización de olipiadas, la fabricación de grandes calderas, la construcción de plantas industriales, etc. Este tipo de sistema requiere de técnicas especiales de planeación como son PERT, CPM y Ruta Crítica y su principal característica son los largos tiempos de fabricación o realización.

29. Para terminar esta introducción, vale la pena hacer un resumen de los varios tipos diferentes de sistemas productivos:

<u>Sistemas de producción en masa</u>:

a) Fábricas de producción en masa.
b) Sistemas de inventario puro (mayoristas, minoristas, etc).

<u>Sistemas intermitentes</u>:

a) Sistemas intermitentes cerrados.
b) Sistemas intermitentes abiertos.
c) Grandes proyectos.

<u>Sistemas que poseen inventarios de productos terminados</u>:

a) Fábricas de producción en masa.
b) Sistemas de inventario puro.
c) Sistemas intermitentes cerrados.

<u>Sistemas que no poseen inventarios de productos terminados</u>:

a) Sistemas intermitentes abiertos.
b) Grandes proyectos.

II -PRONOSTICOS DE DEMANDA

INTRODUCCION

1. Definición: Pronóstico es una previsión para cualquier actividad futura. Se puede hacer previsiones sobre la aceptación de un nuevo producto, sobre la demanda futura o sobre otras condiciones que pueden afectar la planeación de la producción. A continuación damos algunos ejemplos de áreas de actividad de la Empresa que dependen directamente de los pronósticos de ventas:

   - Volumen de producción
   - Nivel de los inventarios
   - Presupuestos
   - Política de Precios
   - Desarrollo del producto
   - Ampliación de la planta
   - Etc.

   Por lo tanto, para una planeación adecuada de las diversas áreas de actividad de cualquier Empresa, es indispensable la realización de pronósticos de ventas.

2. Hay algunas personas que dicen lo siguiente: "los pronósticos son como el clima de Inglaterra:solamente son verdaderos para las próximas 6 horas". En otras palabras, los pronósticos siempre presentan cierto porcentaje de error y por lo tanto su objetivo no debe ser prever exactamente el volumen de ventas y si prever el volumen de ventas con un error mínimo y evaluar este error.

3. Actualmente, los pronósticos de demanda son casi siempre hechos por personas que han recibido entrenamiento en la aplicación de técnicas especiales. La utilización de estas técnicas no elimina los errores, pero puede reducir su magnitud. Las técnicas son solo herramientas y es por lo tanto, indispensable que en la elaboración de los pronósticos se tomen en consideración las condiciones internas y externas a la Empresa. Por ejemplo:

   a) Si las ventas de las calculadoras mecánicas en los últimos años han aumentado de un 10% anual y si en los próximos años seguramente serán introducidas en el mercado las calculadoras eletrónicas, sería un error grave no considerar este hecho y pronosticar que esta tasa de crecimiento se mantendría en el futuro.

   b) Sería igualmente errado no considerar el cambio de presidente en México para pronosticar las ventas de maquinarias para la industria, puesto que durante el año anterior al cambio, las inversiones del sector industrial disminuyen mucho.

   c) Analogamente, las ventas de algodón a las fábricas de colchones fueron radicalmente afectadas por la introducción del hule espuma.

   d) Finalmente, sería también un error no considerar la introducción del Renault 5 para predecir las ventas de la VW en el año de 1976 y en los siguientes años.

4. Otros tipos de información como tendencia de los gustos de los consumidores, desarrollo económico del pais, nivel de los salarios, devaluación de la moneda, etc también deben ser tomados en consideración. En algunos casos, información sobre otras industrias similares puede ser disponible. Obviamente, también se deberá tener en cuenta la introducción o la promoción de los productos de la propia Empresa.

5. En muchos casos, para reducir el grado de incertidumbre de los pronósticos, también pueden ser llevadas a cabo investigaciones de mercado, sin embargo aun asi se debe tener en cuenta que:

   a) La opinión de los consumidores puede cambiar de un dia al otro.

   b) Lo que el consumidor piensa puede ser diferente de lo que él realmente hace.

   c) La opinión de los consumidores puede ser cambiada a través de promociones, propaganda, etc.

6. Los minoristas o mayoristas también pueden ser entrevistados durante la elaboración del pronóstico y éstos son generalmente más objetivos que los vendedores de la propia Empresa. Sin embargo, ellos no disponen ni de motivación, ni de tiempo, ni de las técnicas para hacerlo y por lo tanto sus estimaciones deben ser utilizadas solamente para pronósticos a corto plazo. Por otro lado, también es importante señalar que en la elaboración del pronóstico se deberá tomar en consideración el mayor número posible de opiniones, para compensar el pesimismo y el optimismo individuales de las personas que participan en dicha elaboración.

7. La complejidad de los pronósticos para productos existentes, productos que reemplazan productos existentes y para productos nuevos, es bastante diferente. En el caso de productos existentes, la información de años o meses anteriores podrá ser usada para predecir la demanda futura. Aun en el caso de productos que reemplazan otros, la información correspondiente a los productos reemplazados podrá ser también utilizada, si éstos son similares a los nuevos productos introducidos en el mercado. Finalmente, en el caso de productos realmente nuevos y totalmente diferentes de los productos existentes, el volumen de información disponible es extremadamente limitado y consecuentemente es dificil la elaboración de un pronóstico realista. Por esto, muchas veces se lleva a cabo una introducción preliminar de los productos para evaluar su aceptación y esta introducción podrá confirmar o rechazar la introducción definitiva del producto. También es importante resaltar que para la introducción de productos nuevos y diferentes, las investigaciones de mercado son particularmente útiles. Estas pueden analizar entre otros factores:

   - Localización del consumidor potencial.
   - Profesión y salario del consumidor potencial.
   - Precios aceptables
   - Calidad requerida
   - Condiciones generales del mercado.
   - Etc.

METODOS PARA LA ELABORACION DE LOS PRONOSTICOS

8. Antes de describir los principales métodos para la elaboración de pronósticos, es indispensable analizar los diversos tipos de variación que presentan las ventas mensuales o anuales de las Empresas. Estas variaciones pueden ser:

   a) Variaciones estacionales: son aquellas variaciones que existen debido al cambio de estaciones y que se repiten anualmente. Por ejemplo, siempre hay un aumento de las ventas de ropas de frio durante el invierno. No es muy dificil predecir este tipo de variación.

b) Variaciones cíclicas: son aquellas variaciones que no dependen de las estaciones del año y si de factores como decisiones tomadas por los competidores, condiciones generales de la economía, etc. Estas variaciones son muchísimo más difíciles de predecir y generalmente lo que se puede hacer es simplemente estimar las variaciones cíclicas de los años o meses anteriores para, con base en estas estimaciones, evaluar el error que probablemente se cometerá en la elaboración del pronóstico.

c) Variaciones aleatorias: son aquellas variaciones que ni son estacionales ni cíclicas y si dependen de otros factores desconocidos. Por definición, no pueden predecirse las variaciones aleatorias.

METODO GRAFICO

9. El método gráfico es el más sencillo y rápido y la dificultad de su realización dependerá del número de factores tomados en consideración. Por ejemplo, podemos tomas en cuenta todos los tipos de variación o solamente las variaciones estacionales. A continuación damos un ejemplo en el cual todos los tipos de variación son tomados en cuenta.

Supongamos que las ventas de una Empresa "X" fueron las que se muestran en la Figura 1. La primera etapa del método gráfico consta del ajuste de una línea recta a los puntos de la gráfica. Este ajuste deberá ser manual y su adecuación dependerá obviamente de la habilidad de la persona que lo ejecuta. Una vez que se tenga determinado esta línea recta, que representará la tendencia de las ventas anuales de la Empresa, el pronóstico de ventas para el año siguiente puede ser facilmente calculado. En nuestro caso, la gráfica nos indica que las ventas del próximo año serán de aproximadamente \$ 650,000.00.

Si no hay ninguna razón especial para que la tasa de crecimiento anual de las ventas no sea constante, podemos suponer que la variación de dicha tasa se debe a las variaciones cíclicas y aleatorias. Por lo tanto, podemos estimar estas variaciones si determinamos la diferencia media entre las ventas reales de la Empresa y las ventas indicadas por la línea recta. Por ejemplo, para el año 1973 las ventas de la Empresa fueron de \$ 420,000 y las ventas indicadas por la línea recta son de \$ 380,000. Por lo tanto, existe una diferencia de \$ 40,000 que corresponde al 10% de las ventas indicadas por la línea recta. Si calculamos todas estas diferencias, podremos observar que la diferencia media es de un 9.5% y que las diferencias pueden ser positivas o negativas. Si suponemos que

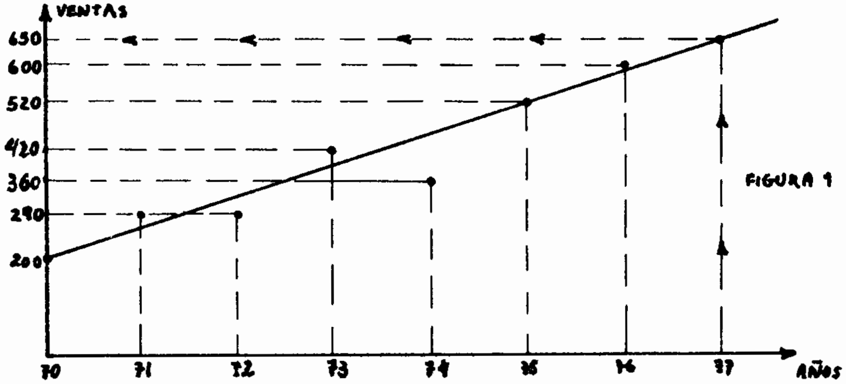


FIGURA 1

las condiciones generales del mercado y del pais serán bastante favorables en el año de 1977, podemos entonces deducir que las ventas para este año serán de \$ 650,000 x 1.095 = \$ 711,750.

Finalmente, vamos a suponer también que necesitamos las ventas para el primer trimestre de 1977. En este caso, tendríamos que analizar el comportamiento de las ventas mensuales de los años anteriores y determinar el porcentaje medio que corresponde a los primeros trimestres de cada año. Vamos a suponer que las ventas del primer semestre son generalmente un 20% de las ventas anuales. Por lo tanto, las ventas para el primer trimestre de 1977 serán: \$ 711,750 x 0.20 = \$ 142,350.

10. Una importante etapa en la elaboración de un diagnóstico es la elección del método a utilizar. Para ello, es importante determinar previamente la precisión, el costo y el tiempo requeridos para la elaboración del mismo. Por ejemplo, si se requiere de una precisión de ±20%, el método gráfico sería probablemente el más adecuado. La segunda etapa es la elección de la información en la cual se va a basar el pronóstico. Es importante, en esta etapa, checar si la información disponible no está distorsionada por eventos que no volverán a ocurrir. Por ejemplo, la Empresa podrá deducir que las ventas de algunos de los años anteriores fueron seriamente afectadas por un pésimo sistema de publicidad y que este error seguramente no volverá a ser cometido. Y por lo tanto, en la elaboración del pronóstico para los próximos años, la Empresa tendrá que tener en cuenta este hecho.

METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

11. Siempre que los datos sugieren una recta para su representación, el método de los mínimos cuadrados podrá ser utilizado para la elaboración de un pronóstico. Este método consta de la determinación de la línea recta que mejor se ajusta a los puntos, es decir, la línea para la cual la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos de la gráfica, es mínima. Como sabemos, la ecuación de cualquier línea recta es como la que sigue:

$$Y = a + bX$$

El sistema de ecuaciones que proporciona los valores de "a" y "b" para la línea de los mínimos cuadrados, es el siguiente:

$$\sum Y = Na + b\sum X$$
$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

donde "X" y "Y" son las dos variables del problema, y "N" el n° de puntos.

A continuación damos un ejemplo de como utilizar el método de los mínimos cuadrados:

Supongamos que las ventas de una dada empresa fueron las que se muestran en el cuadro siguiente:

Año	1973	1974	1975	1976	1977
Ventas(\$)	108,000	119,000	110,000	122,000	130,000

En este caso la variable "X" será el año y la variable "Y" será el volumen de ventas de la empresa (en pesos). Inicialmente, tenemos que escoger un origen para la variable "X". Esta podrá ser el año zero o cualquer otro año. Si escogemos la origen 1973, la variable "X" tendrá entonces los siguientes valores: 0, 1, 2, 3 y 4, es decir, (1973-1973), (1974-1973), (1975-1973), (1976-1973) y (1977-1973).

Si observamos el sistema de ecuaciones citado anteriormente, deducimos que necesitamos calcular ΣY, ΣX, ΣXY y ΣX^2. Es conveniente realizar estos cálculos como se muestra en el cuadro a continuación:

Año	Y	X	X^2	XY
1973	108	0	0	0
1974	119	1	1	119
1975	110	2	4	220
1976	122	3	9	366
1977	130	4	16	520
TOTAL	589	10	30	1225

ORIGEN = 1973

Sustituyendo los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$589 = 5a + 10b$$

$$1225 = 10a + 30b$$

Y "a" y "b" pueden entonces ser facilmente calculados:

$$a = 108.4$$

$$b = 4.7$$

Por lo tanto, la línea recta de los mínimos cuadrados es la siguiente:

$$Y = 108.4 + 4.7X$$

Utilizando esta ecuación podemos entonces determinar las ventas para cualquiera de los próximos años, es decir, 1973, 1974, etc. Para el año 1978, la variable "X" tendrá el valor (1978-1973), es decir, X = 5. Por lo tanto, las ventas para este año serán:

$$Y = 108.4 + 4.7 \times 5 = 131.9$$

Es decir, las ventas en el año de 1978 serán de $ 131,900.00.

Los resultados serán exactamente los mismos si escogemos cualquier otra origen. Por ejemplo, escojamos la origen 1975:

Año	Y	X	X^2	XY
1973	108	-2	4	-216
1974	119	-1	1	-119
1975	110	0	0	0
1976	122	1	1	122
1977	130	2	4	260
TOTAL	589	0	10	47

ORIGEN = 1975

Sustituyendo los valores en el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$589 = 5a$$

$$47 = 10b$$

Los nuevos valores de "a" y "b" son:

$$a = 117.8$$

$$b = 4.7$$

Y por lo tanto, las ventas para el año de 1978 serán:

$$Y = 117.8 + 4.7 \times 3 = 131.9.$$

Como se puede observar, el resultado es idéntico.

12. El método de los mínimos cuadrados sirve únicamente para determinar la ecuación de la línea recta. La Empresa tendrá que decidir, por lo tanto, si solamente utilizará dicha ecuación para pronosticar el futuro o si también valdrá la pena tomar en consideración las variaciones cíclicas y aleatorias.

METODO DE LA CURVA EXPONENCIAL

13. Este método consta del ajuste de una curva exponencial a los puntos. La forma de la ecuación de la curva es como sigue:

$$Y = ab^X$$

Como se indica en las Figuras 2 y 3, el ajustar una curva exponenciel a los puntos es equivalente al ajustar una línea recta a estos mismos datos, pero marcándose en el eje vertical el "log Y" en vez de "Y". Esto es consecuencia del hecho de que si tomamos el logarítmo de "Y" en la ecuación de la curva exponencial, resulta lo siguiente:

$$\text{Log } Y = \text{Log } (ab^X) = \text{Log } a + \text{Log } b.X$$

Si ponemos log a = A y log b = B , tenemos:

$$\log Y = A + BX$$

que es obviamente la ecuación de una recta.

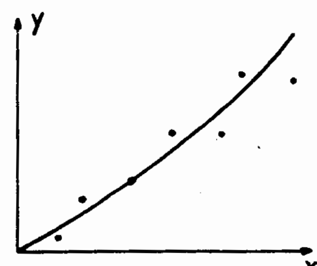


FIGURA 2

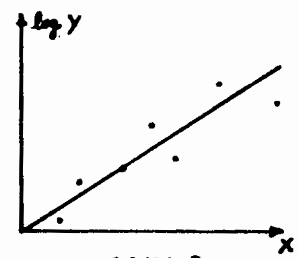


FIGURA 3

Y ahora, por lo tanto, podemos marcar "X" en el eje horizontal y "log Y" en el eje vertical, y ajustar una recta a los puntos utilizando el método de los mínimos cuadrados. Si observamos la ecuación logY = A + BX, podemos deducir que el sistema de ecuaciones para calcular "A" y "B" es el siguiente:

$$\Sigma \log Y = NA + B\Sigma X$$

$$\Sigma X\log Y = A\Sigma X + B\Sigma X^2$$

Para calcular "A" y "B" necesitamos calcular $\Sigma \log Y$, ΣX, $\Sigma X\log Y$ y ΣX^2. Estos cálculos se presentan en el cuadro a continuación:

Año	Y	X	X^2	logY	X.logY
1973	108	-2	4	2.0334	-4.0668
1974	119	-1	1	2.0755	-2.0755
1975	110	0	0	2.0414	0
1976	122	1	1	2.0864	2.0864
1977	130	2	4	2.1139	4.2278
TOTAL	-	0	10	10.3506	0.1719

ORIGEN =1975

Sustituyendo los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$10.3506 = 5A$$

$$0.1719 = 10B$$

Y por lo tanto, los valores de "A" y "B" son:

$$A = 2.0701$$

$$B = 0.0172$$

Como sabemos que $A = \log a$ y $B = \log b$, entonces "a" y "b" ya pueden ser calculados:

$$\log a = 2.0701 \Rightarrow a = 117.5$$

$$\log b = 0.0172 \Rightarrow b = 1.0405$$

Y por lo tanto la ecuación final de la curva exponencial será la siguiente:

$$Y = 117.5 \times 1.0405^{x}$$

El valor $b = 1.0405$ significa que existe una tasa anual de crecimiento igual a 4.05%.

Finalmente, si queremos pronosticar las ventas para el año de 1978, el valor de la variable "X" será 3 (=1978-1975) y el valor de las ventas será:

$$Y = 117.5 \times 1.0405^{(3)} = 132.3$$

Esto quiere decir que las ventas para el año de 1978 serán de .... $ 132,300.00.

También podemos comparar los valores de las ventas reales de la Empresa, con las ventas proporcionadas por la recta de los mínimos cuadrados y por la ecuación exponencial. Esta comparación se muestra en el cuadro a continuación:

Año	Valor Real	$Y = 117.8 + 4.7X$	$Y = 117.5 \times 1.0405^{x}$	X
1973	108	108.4	108.5	-2
1974	119	113.1	112.9	-1
1975	110	117.8	117.5	0
1976	122	122.5	122.3	1
1977	130	127.2	127.2	2
1978	-	131.9	132.3	3

PRONOSTICOS DE VENTAS POR MES, TRIMESTRE O SEMESTRE

14. En (9) hemos visto un método muy sencillo para determinar las ventas del primer trimestre del año de 78. Ahora volvemos a analizar este método con más detalles.

Utilizaremos los mismos datos que fueron presentados en (11), (12) y (13). Supongamos que las ventas por trimestre de los años de 73, 74, 75, 76 y 77 fueron las que se muestran en el cuadro a continuación:

Año	T_1	T_2	T_3	T_4	ANUAL
1973	19	37	30	22	108
1974	28	42	31	18	119
1975	27	36	28	19	110
1976	30	43	29	20	122
1977	32	44	32	22	130
TOTAL	136	202	150	101	589
%	23.1	34.3	25.5	17.1	100

Podemos observar que el cuadro también proporciona el porcentaje correspondiente a cada trimestre, respecto al volumen de ventas total de los 5 años.

Determinemos ahora las ventas de cada trimestre de 1978, y para esto utilizaremos el pronóstico anual para dicho año que fue calculado mediante la utilización del método de mínimos cuadrados.

Los pronósticos por trimestres serán:

$$P_1 = 23.1\% \times 131.9 = 30.47$$

$$P_2 = 34.3\% \times 131.9 = 45.24$$

$$P_3 = 25.5\% \times 131.9 = 33.63$$

$$P_4 = 17.1\% \times 131.9 = 22.55$$

TOTAL 131.89

Obviamente, otra forma de pronosticar las ventas trimestrales, sería aplicar el método de mínimos cuadrados a los datos correspondientes a cada trimestre. Este método presentaría la ventaja de que se tendría más en cuenta un aumento o disminución consistente de los porcentajes correspondientes a cada semestre.

METODO DE ATENUACION EXPONENCIAL PONDERADA

15. En el método de atenuación exponencial pondereda se pueden usar las dos fórmulas que se muestran a continuación:

Fórmula 1 : $P_n = P_{n-1} + \alpha(D_{n-1} - P_{n-1})$

Fórmula 2 : $P_n = P_{n-1} + \alpha(D_n - P_{n-1})$

donde: P_n = pronóstico para el período "n".

P_{n-1} = pronóstico para el período (n-1).

α= constante de atenuación.

D_n = demanda real del período "n".

D_{n-1} = demanda real del período (n-1).

La fórmula 1 proporciona directamente un pronóstico para el período "n" si son conocidos la demanda real y el pronóstico atenuado del período anterior, es decir, del período (n-1).

La fórmula 2, sin embargo, solamente podrá ser utilizada para calcular un pronóstico atenuado para el período "n", si ya se conoce de antemano la demanda real del período "n". En otras palabras, si disponemos de los datos correspondientes al período (n-1), no podremos pronosticar las ventas del período "n". Para pronosticar las ventas del futuro, esta fórmula tiene que ser usada conjuntamente con otras que proporcionan la tendencia exponencialmente atenuada. Por lo tanto, este método es un poco más laborioso y debido a esto nos concentraremos en el estudio del método que utiliza la fórmula 1. Las personas que tengan el interés de conocer el otro método, podrán encontrarlo en la referencia N^o 2 de la bibliografía que se encuentra al final de estos apuntes.

Volviendo a considerar la fórmula 1, podemos observar que el pronóstico atenuado es igual al pronóstico atenuado del período anterior más una fracción α de la deferencia entre el pronóstico atenuado del período anterior y la demanda real también del período anterior.

Las dos primeras etapas a llevar a cabo serán la elección de la constante de atenuación y del número de períodos pasados a considerar. Supongamos que "n" sea el número de períodos a considerar. La constante α está generalmente entre 0.1 y 0.3. Como podremos observar más adelante, si queremos dar una mayor importancia relativa a la información de los últimos períodos, α deberá ser grande, es decir, deberá estar cerca del valor 0.3.

Para el cálculo del pronóstico P_n necesitamos el valor de P_{n-1}; para el cálculo de P_{n-1}, necesitamos conocer P_{n-2}; etc. Por lo tanto no será posible calcular P_o puesto que desconocemos (o no existe) P_{-1}. Consecuentemente, la tercera etapa a realizar es la elección de un pronóstico atenuado inicial P_o; generalmente se considera que éste sea igual a la demanda del período anterior al primero período considerado, es decir, igual a la demanda D_o.

La fórmula $P_n = P_{n-1} + \alpha(D_{n-1} - P_{n-1})$ no es tan sencilla como parece, puesto que el valor de P_{n-1} depende de P_{n-2}; el valor de P_{n-2}, por su vez, depende de P_{n-3}; etc. Por lo tanto, para el cálculo de P_n necesitamos cambiar la fórmula, de modo que P_n pueda ser calculado en función de los valores de las demandas de los diversos períodos y del pronóstico inicial. Para deducir este nueva fórmula, supongamos que P_o es el pronóstico inicial (igual a la demanda D_o) y que P_i y D_i son los pronósticos y las demandas reales, respectivamente. Tenemos entonces:

$$P_1 = \alpha D_o + (1-\alpha)P_o$$

$$P_2 = \alpha D_1 + (1-\alpha)P_1$$

$$= \alpha D_1 + (1-\alpha)\left[\alpha D_o + (1-\alpha)P_o\right]$$

$$= \alpha D_1 + \alpha(1-\alpha)D_o + (1-\alpha)^2 P_o$$

$$P_3 = \alpha D_2 + (1-\alpha)P_2$$

$$= \alpha D_2 + (1-\alpha)\left[\alpha D_1 + \alpha(1-\alpha)D_o + (1-\alpha)^2 P_o\right]$$

$$= \alpha D_2 + \alpha(1-\alpha)D_1 + \alpha(1-\alpha)^2 D_o + (1-\alpha)^3 P_o$$

$$\vdots$$

$$P_n = \alpha D_{n-1} + \alpha(1-\alpha)D_{n-2} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{n-3} \ldots\ldots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} D_o + (1-\alpha)^n P_o$$

Veamos un ejemplo de aplicación de esta nueva fórmula. Utilizamos los siguientes datos:

Año	1973	1974	1975	1976	1977
Ventas	108	119	110	122	130
Observaciones	D_o,P_o	D_1	D_2	D_3	D_4

Utilizando la nueva fórmula, el cálculo del pronóstico para el año de 1978, es decir, el pronóstico P_5, será realizado como sigue:

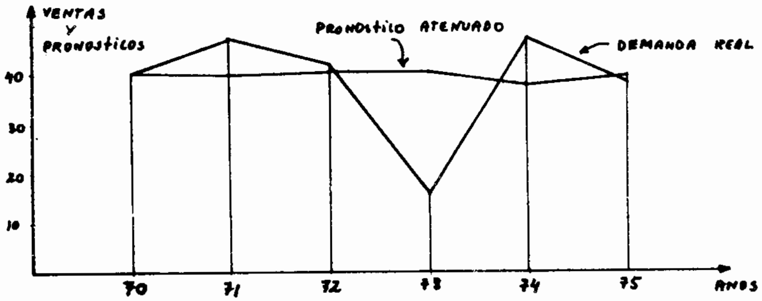
$$P_5 = (0.2)\times 130 + (0.2)(0.8)\times 122 + (0.2)(0.8)^2\times 110 + (0.2)(0.8)^3\times 119 +$$
$$+ (0.2)(0.8)^4\times 108 + (0.8)^5\times 108$$

$$P_5 = \$\ 116{,}030.00$$

En seguida damos otro ejemplo en el cual calculamos los pronósticos para todos los períodos:

AÑO	DEMANDA	PRONOSTICO	CALCULO DEL PRONOSTICO	
1970	40	40.0	-	
1971	47	40.0	0.1 x 40 + 0.9 x 40.0	
1972	42	40.7	0.1 x 47 + 0.9 x 40.0	
1973	16	40.8	0.1 x 42 + 0.9 x 40.7	$\alpha = 0.1$
1974	47	38.3	0.1 x 16 + 0.9 x 40.8	
1975	38	39.2	0.1 x 47 + 0.9 x 38.3	

También presentamos una gráfica que muestra la demanda real y los pronósticos. Es importante resaltar que la variación de los pronósticos es muchísimo menor que la variación de las demandas reales y esto se debe a la "atenuación" del método utilizado.



COEFICIENTE DE CORRELACION

16. Si es posible representar la variación de una variable Y en función de una variable X, a través de una línea recta, decimos que existe entre las dos variables una correlación lineal. Esta correlación puede ser más o menos precisa, dependiendo del error que se comete al representar dicha variación a través de la línea recta. La precisión de la correlación lineal puede ser evaluada determinándose el coeficiente de correlación:

$$C.C. = \frac{N\sum XY - (\sum X)\cdot(\sum Y)}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

El coeficiente de correlación estará siempre entre -1 y 1. Si la representación de la variación a través de la línea recta es exacta (Figuras 4 y 5) el coeficiente será igual a -1 o 1, dependiendo de la inclinación de la recta, es decir, si la función es creciente o decreciente. Si el coeficiente resulta muy bajo (0.2 o 0.3, por ejemplo), esto quiere decir que la variación estudiada no deberá ser representada a través de una línea recta (Figura 6). Si el coeficiente resulta muy elevado (pero todavía menor que 1 en valor absoluto), esto significa que

no existe una correlación lineal perfecta, sin embargo la variación puede ser precisamente representada a través de la línea recta.(Figura 7).

Supongamos que hemos deducido que existe una correlación lineal entre 2 variables (C.C. igual a 0.8, por ejemplo).¿Como podemos estar seguros de que esta correlación no existe por pura casualidad? Para resolver este problema utilizamos tablas como la que se muestra a continuación:

N° de puntos	Probabilidad 95%	Probabilidad 99%
10	0.632	0.765
12	0.576	0.708
14	0.532	0.661
⋮		
200	0.139	0.182
400	0.098	0.128
1000	0.062	0.081

Esta tabla nos proporciona la siguiente información: por jemplo, si hay 200 puntos en la gráfica, el coeficiente de correlación tiene que ser mayor de 0.139 para que haya una probabilidad de 95% de que la correlación no existe por pura casualidad. Al mismo tiempo, si el C.C. es mayor de 0.182, hay una probabilidad de 99% de que la correlación no existe por casualidad.

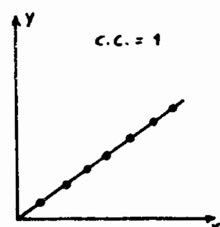


FIGURA 4

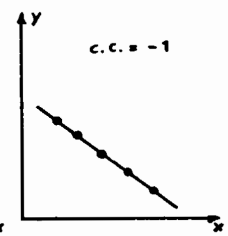


FIGURA 5

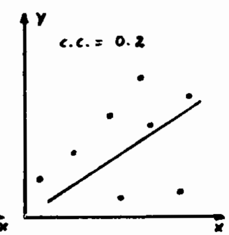


FIGURA 6

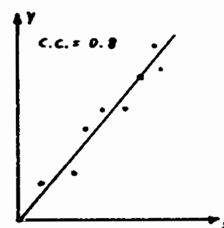


FIGURA 7

BIBLIOGRAFIA

1. RIGGS, J.L.
"Production Systems: Planning, Analysis and Control.

2. BUFFA, E.S.
"Sistemas de Producción-inventario: Planeación y Control".

III - INVENTARIOS

La función básica de los inventarios, sean éstos de materias primas, material semi-procesado o productos terminados, es mantener relativamente independientes las siguientes actividades:

a) Compra de materias primas
b) Producción
c) Ventas

Los inventarios actúan como resortes según se muestra a continuación:

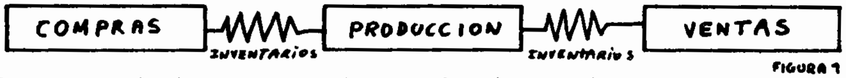


FIGURA 1

Como se puede observar, los inventarios de materias primas son necesarios para separar "Producción" de "Compras" y los inventarios de productos terminados sirven para separar "Producción" de "Ventas".

Otro tipo de inventario es el de material semi-procesado. Este podrá ser de dos tipos:

a) Es el inventario inevitable que resulta del hecho que la fabricación de cualquier producto tarda un dado número de unidades de tiempo (horas, dias, meses, etc) y durante este tiempo el material estará almacenado en la planta y pasando por las diversas etapas del proceso productivo.

b) Es el inventario de piezas o material semi-procesado que muchas veces es conveniente fabricar y almacenar en pequeños almacenes (separados o no del almacén principal) o entre los puestos de trabajo (por ejemplo en las líneas de producción) para que el flujo de materiales no sufra nunca problemas de continuidad. Estos inventarios son partucularmente útiles:

- Cuando no es económico fabricar ciertas piezas cada vez que se produce un dado producto.
- Cuando una misma pieza es utilizada en la fabricación de varios productos diferentes.
- Para eliminar problemas debido a la variación de la duración de las operaciones en las líneas de producción o de ensamble.

Los costos que generalmente son considerados en el estudio de los inventarios son los siguientes:

a) <u>Costos de preparación</u>

Estos son los costos de preparación de las máquinas para la fabricación de un dado lote de productos o los costos de "preparación" de los pedidos de compra de materiales.

El costo de preparación de las máquinas <u>no depende</u> del número de productos del lote de fabricación, y , analogamente, el costo de preparación de un pedido de compra de materiales no depende del número de productos a comprar o del tamaño del pedido. En otras palabras, los costos totales de preparación de las máquinas y de los pedidos (durante un dado período) son proporcionales al número de lotes producidos y al número de pedidos realizados, respectivamente.

Generalmente no es facil calcular estos <u>costos fijos</u> por lote de fabricación o por pedido. En lo que se refiere al costo de preparación de los

pedidos (también llamados costos de requisición), es importante señalar que no se debe simplemente dividir el costo total de la "sección de preparación de pedidos"(correspondiente a un dado período) entre el número de pedidos preparados en este mismo período, puesto que gran parte de los costos de dicha "sección" <u>no dependen</u> del número de pedidos realizados, sino que son <u>fijos por período</u>. Por lo tanto, hemos que tener mucho cuidado para identificar aquellos costos en los cuales se incurren únicamente cuando se lleva a cabo la preparación de un nuevo pedido.

Algunos costos relativos a la realización de un pedido son los siguientes:

a) Costo de la realización del pedido propiamente dicho.
b) Costo para seguir los trámites necesarios hasta que el mismo llegue al cliente.
c) Costo relacionado con la entrega de los materiales (transporte, trámites de entrega, inspección, etc)
d) Costo relacionado con el transporte del material recibido hasta los almacenes de la empresa.
e) Etc.

Vale la pena señalar que, dependiendo del caso, algunos de estos costos pueden ser fijos o variables según el tamaño del pedido. Por ejemplo, el costo de inspección podrá ser proporcional al número de productos o unidades del pedido.

En lo que se refiere a los costos de preparación de las máquinas, más o menos los mismos tipos de problemas existen, es decir, no es facil identificar los elementos de costos que unicamente dependen del número de lotes fabricados en un dado período. Vale la pena resaltar que no solamente los costos de la preparación propiamente dicha varían según el número de lotes fabricados. Por ejemplo, si el número de lotes es grande, la planeación y el control de la producción serán generalmente mas complejos y consecuentemente parte de los costos correspondientes a esta actividad dependerá del número de lotes fabricados. Sin embargo no es facil determinar que porcentaje de éstos depende del número de lotes y que porcentaje es fijo por período.

b) <u>Costos de producción</u>

Estos deben incluir los costos de todas las etapas del proceso productivo, desde la recepción de materias primas hasta la introducción del producto en el almacén de productos terminados. En otras palabras, estos costos representan la inversión total de capital para la producción de una unidad (materias primas, mano de obra directa e indirecta, planeación y control de la producción, etc).

c) <u>Costos de almacenamiento</u>

Estos costos incluyen los costos en que se incurren en los almacenes propiamende dichos y que generalmente dependen del número de productos almacenados. Ejemplos:

- Sueldos y salarios del personal que controla los inventarios (vale la pena señalar que estos costos pueden ser fijos por período).
- Seguros, robos, obsolescencia y depreciación.
- Luz, calefacción o refrigeración
- Realización de inventarios.

La mayoría de estos costos son proporcionales al nivel de los inventa rios. Sin embargo, como hemos dicho anteriormente, los costos de sueldos y salarios pueden tener poca relación con el nivel de los inventarios y hasta pueden ser proporcionales al número de pedidos de materiales recibidos por el almacén. En estos casos estos costos podrían ser considerados como parte de los costos de preparación.

d) Costo del faltante

Son los costos relativos a la falta de materias primas o a la falta de productos terminados cuando éstes son solicitados por los clientes. En lo que se refiere a la falta de materias primas, ésto podrá causar el paro de, por ejemplo, una línea de producción o ensamble o podrá obligar al departamento de planeación a la no utilización de las secuencias de fabricación mas adecuadas.

En cuanto al costo de la falta de productos terminados, éste deberá incluir los costos correspondientes a las ventas perdidas por la empresa debido a la no existencia en el inventario del producto solicitado por el cliente.

e) Costo del capital

Estos corresponden a los costos del capital invertido en los inventarios. En algunos casos podemos considerar que el costo del capital es igual a su rentabilidad, si éste fuera invertido en otras actividades de la empresa. Este costo no deberá ser inferior a los intereses anuales ofrecidos por bancos y financieras.

1. INVENTARIOS DE MATERIAS PRIMAS

En lo que se refiere a los inventarios de materias primas, el problema básico a resolver es el siguiente:

- Cuando comprar materias primas,
- Qúe cantidad comprar,

de manera que la suma de los costos correspondientes a la compra de éstas y a los inventarios resultantes sea mínima. Si por un lado es conveniente tener grandes cantidades de materias primas para nunca correr el riesgo de que éstas se agoten, por otro lado esta política conduce a un aumento excesivo de los costos relativos al capital invertido en los inventarios y de los costos de almacenaje. También se podrá pensar en un número mayor de pedidos menores para mantener siempre los almacenes con las materias primas requeridas, pero con un nivel de inventarios más reducido, puesto que los pedidos serían frecuentes pero pequeños. El resultado de esta última política sería la disminución de los costos relativos a los inventarios y el aumento de los costos de preparación de los pedidos.

Por lo tanto, existe un número óptimo de pedidos y consecuentemente un tamaño óptimo, que conducirá a una minimización de la suma de todos los elementos de costos.

Podríamos representar gráficamente las dos políticas de compra analizadas como se muestra a continuación:

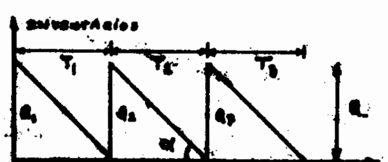


FIGURA 2

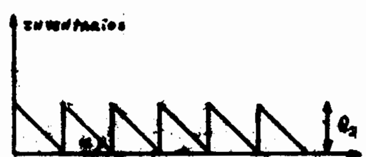


FIGURA 3

Es de señalar que las cantidades pedidas no tienen que ser iguales, es decir, $Q_1 \neq Q_2 \neq \ldots \neq Q_n$ y que los períodos de agotamiento pueden no ser iguales, es decir, $T_1 \neq T_2 \neq \ldots \neq T_n$. Además la tasa de demanda puede ser desconocida.

PRIMER MODELO DE INVENTARIOS (materias primas)

Para analizar el problema de los inventarios es conveniente empezar con algunos modelos teóricos sencillos, en los cuales podrán ser incluidos posteriormente otras variables.

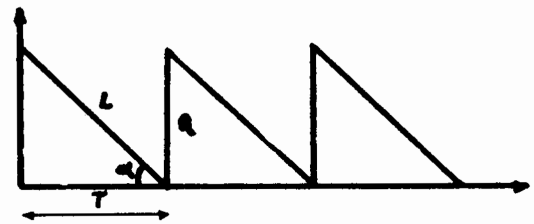
El modelo más elemental requiere las siguientes suposiciones:

a) La rapidez con que se agota la materia prima (tasa de demanda) es conocida, es decir, se conoce el grado α de la línea "L" (ver Figura 4).

b) Los pedidos serán siempre de una misma cantidad "Q". Por lo tanto, el tiempo "T" durante el cual se agota la materia prima, será siempre el mismo (ver figure 4).

c) El nuevo pedido de materias primas llegará exactamente cuando el inventario de éstas se agote (ver Figura 4). Por lo tanto, se supondrá que nunca habrá faltas de materias primas.

FIGURA 4



d) El costo de preparación de los pedidos será considerado constante. En otras palabras, el costo total de un dado período será proporcional al número de pedidos realizados.

e) Los costos de almacenamiento y el costo del capital invertido en los inventarios, serán proporcionales al nivel de éstos. La suma del costo de almacenamiento y dél costo del capital será llamada costo de mantener.

Con base en estes suposiciones podemos ahora diseñar nuestro primer modelo para estudir el problema de la optimización de los inventarios:

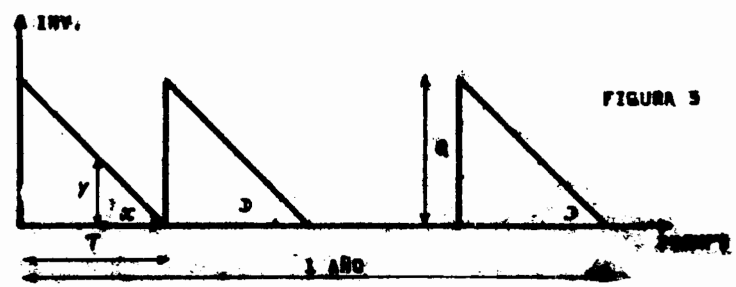


FIGURA 5

En los modelos de inventarios que estudiaremos utilizaremos siempre la siguiente notación:

- **CTI** Costo total incremental.
- **CTI_o** Costo total incremental óptimo (mínimo).
- Q Tamaño del lote **o pedido.**
- Q_o Cantidad óptima del pedido **o del lote.**
- **D** Demanda anual **o tasa anual de demanda.**
- C_m Costo del inventario por unidad por año **(costo de mantener).**
- C_p Costo de preparación por pedido.
- Q_r Punto de **reorden.**
- T_e Tiempo de entrega.
- I_c Inventario de protección **o de contingencia.**
- I Nivel del inventario.
- **d Tasa de demanda o demanda media semanal.**

Considerando nuestro primer modelo, determinemos inicialmente el inventario medio durante el período "T", el cual también será el inventario medio anual:

$$y/x = Q/T \Rightarrow y = x.Q/T$$

$$\frac{\int_0^t x \cdot \frac{Q}{T} \cdot dx}{T} = \frac{\left[\frac{Q}{T} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^T}{T} = \frac{\frac{Q \cdot T^2}{2T}}{T} = \frac{Q \cdot T}{2T} = \frac{Q}{2}$$

Es importante observar que el inventario medio anual no depende de la tasa de demanda, o sea, de "D" y es siempre igual a Q/2. Por ejemplo, en los casos de las figuras 6 y 7, el inventario medio anual es el mismo. Sin embargo, los costos de preparación de un **período dado** serían mayores en el caso de la figura 7.

Puesto que el costo de **mantener** es directamente proporcional al nivel de **éste**, su representación gráfica será **como se indica** en la figura 8:

FIGURA 6

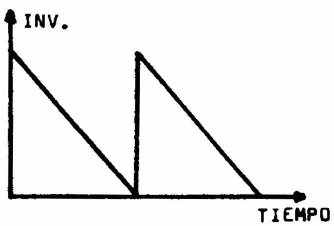


FIGURA 7

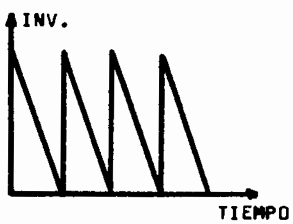
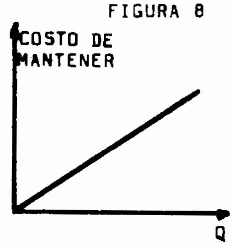


FIGURA 8



Y el costo anual de **mantener** será:

$$C_m \cdot \frac{Q}{2}$$

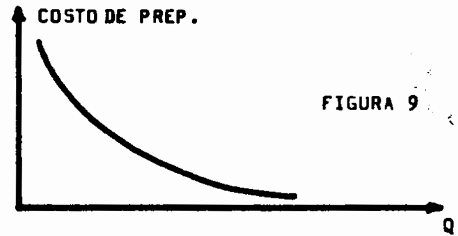
El número de pedidos por año puede ser calculado como sigue:

$$N = \frac{D}{Q}$$

Y por lo tanto, si C_p es el costo de preparación de cada pedido, el costo anual de preparación será:

$$C_p \cdot \frac{D}{Q}$$

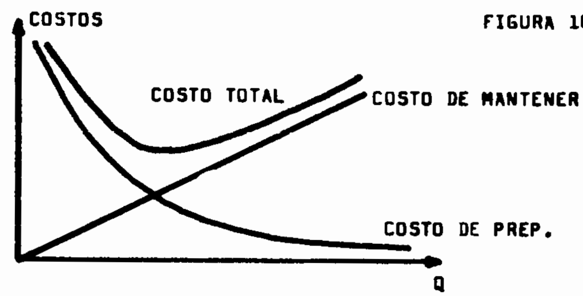
La representación gráfica del costo anual de preparación según la cantidad del pedido "Q" es la siguiente:



Finalmente el costo total anual incremental será:

$$CTI = \frac{C_m \cdot Q}{2} + \frac{C_p \cdot D}{Q} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Y la representación gráfica de la variación del costo total incremental anual según el tamaño del pedido será:



El tamaño de pedido Q_o que conduce a un costo total incremental mínimo puede entonces ser obtenido a través de una simple derivación:

$$\frac{d\,(CTI)}{dQ} = \frac{C_m}{2} - \frac{C_p \cdot D}{Q^2}$$

Igualando a cero tenemos:

$$\frac{C_m}{2} - \frac{C_p \cdot D}{Q_o^2} = 0$$

Y por lo tanto:

$$Q_o = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / C_m}$$

El costo incremental mínimo anual puede entonces ser calculado substituyendo el valor de Q_o en la ecuación (1):

$$CTI_o = C_m \cdot \frac{Q_o}{2} + \frac{D}{Q_o} \cdot C_p$$

$$= C_m \cdot 1/2 \cdot \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / C_m} + D \cdot C_p / \sqrt{C_m / 2 \cdot C_p \cdot D}$$

$$= \sqrt{\frac{C_m^2 \cdot 2 \cdot C_p \cdot D}{4 \cdot C_m}} + \sqrt{\frac{D^2 \cdot C_p^2 \cdot C_m}{2 \cdot C_p \cdot D}}$$

$$= \sqrt{\frac{C_m \cdot C_p \cdot D}{2}} + \sqrt{\frac{C_m \cdot C_p \cdot D}{2}} = 2\sqrt{\frac{C_m \cdot C_p \cdot D}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot C_m \cdot C_p \cdot D}{2}} = \sqrt{2 \cdot C_m \cdot C_p \cdot D}$$

Por lo tanto, el costo incremental mínimo anual (CTI_o) es:

$$CTI_o = \sqrt{2 \cdot C_m \cdot C_p \cdot D}$$

El número óptimo de pedidos será:

$$N_o = \frac{D}{Q_o}$$

Finalmente, el tiempo de agotamiento de la cantidad Q_o será:

$$T_o = \frac{Q_o}{D} = \frac{1}{N_o} \text{ años.}$$

Veamos ahora un ejemplo numérico:

D = 250 unidades por año. C_p = \$ 10 por pedido.

C_m = \$ 0.5 por unidad por año.

El tamaño óptimo del pedido será:

$$Q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 250}{0.5}} = \sqrt{10{,}000} = 100 \text{ unidades.}$$

El costo mínimo anual, el número óptimo de pedidos y el tiempo de agotamiento son, respectivamente:

$$CTI_o = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0.5 \cdot 250} = \$\,50 \text{ (por año)}$$

$$N_o = 250 / 100 = 2.5 \text{ pedidos por año.}$$

$$T_o = 1 / 2.5 = 0.4 \text{ años} = 146 \text{ días (tiempo entre dos pedidos consecutivos)}$$

SEGUNDO MODELO

En este segundo modelo vamos a suponer que el pedido de materias primas llega a la empresa "T_2" unidades de tiempo después que el inventario se agote y que el costo del faltante es C_f por producto y por unidad de tiempo. En otras palabras, si hay un "inventario negativo" de "n" unidades durante un período de tiempo "T_2", el costo del faltante correspondiente será:

$$C_f \cdot n \cdot T_2$$

La representación gráfica del segundo modelo es la siguiente:

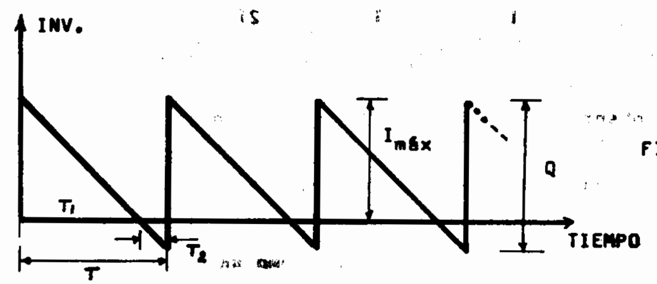


FIGURA 11

Durante el período T_1 el costo de mantener será:

$$C_m \cdot I_{máx} \cdot T_1 / 2 = C_m \cdot I_{máx}^2 / 2 \cdot D$$

ya que $T_1 = I_{máx} / D$.

El inventario negativo medio será $(Q - I_{máx}) / 2$ y por lo tanto el costo del faltante durante el período T_2 será:

$$C_f \cdot T_2 \cdot (Q - I_{máx}) / 2 = C_f \cdot (Q - I_{máx})^2 / 2 \cdot D$$

puesto que $T_2 = \dfrac{Q - I_{máx}}{D}$

Por lo tanto, el costo correspondiente a un ciclo $T = T_2 + T_1$ será:

$$C_p + C_m \frac{I^2_{máx}}{2D} + C_f \frac{(Q - I_{máx})^2}{2D}$$

Y finalmente el costo incremental total anual será obtenido multiplicándose el costo correspondiente al período T (un ciclo) por el número de ciclos en el año (igual a D / Q):

$$CTI = C_p \frac{D}{Q} + C_m \frac{I^2_{máx}}{2Q} + C_f \frac{(Q - I_{máx})^2}{2Q}$$

Los valores de "$I_{máx}$" y "Q" que conducen a costos mínimos incrementales anuales pueden entonces ser obtenidos mediante el cálculo de las derivadas parciales en relación a estas dos variables. Esta derivación conducirá al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial (CTI)}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial (CTI)}{\partial I_{máx}} = 0$$

de donde se sacan los siguientes valores óptimos:

$$Q_o = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / C_m} \sqrt{\frac{C_f + C_m}{C_f}}$$

$$I_{máx_o} = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / C_m} \sqrt{\frac{C_f}{C_f + C_m}}$$

$$TIC_o = \sqrt{2 \cdot C_m \cdot C_p \cdot D} \sqrt{\frac{C_f}{C_f + C_m}}$$

Vale la pena observar que si $C_f \longrightarrow \infty$ el término $(C_f + C_m) / C_f$ tiende a 1 y por lo tanto la ecuación se queda idéntica a la del primer modelo. En otras palabras, no admitir la falta de materias primas es la misma cosa que considerar el costo del faltante igual a infinito.

Por otro lado, si el costo del faltante es cero, Q_o es infinito y $I_{máx_o} = 0$ y esto quiere decir que los pedidos de materias deberían ser siempre realizados después de requeridos por el Depto. de Producción. Sería el caso, por ejemplo, de pedidos de materias primas que serían siempre diferentes de las anteriores y por lo tanto sería imposible mantener inventarios de éstas.

A continuación presentamos un ejemplo numérico de este segundo modelo:

C_f = \$ 1.00 por unidad por año. C_p = \$ 10.00

D = 250 unidades por año. C_m = \$ 0.50 por unidad por año.

$$Q_o = \sqrt{100 \times \frac{0.50 + 1.00}{1.00}} = 122.5 \text{ unidades}$$

$$CTI_o = \sqrt{50 \times \frac{1.00}{0.50 + 1.00}} = \$\ 40.83 \text{ por año}$$

$$I_{máx_o} = \sqrt{100 \times \frac{1.00}{0.50 + 1.00}} = 81.65 \text{ unidades}$$

2. MODELOS PARA DESCUENTOS POR CANTIDAD

Cuando el precio de la materia prima cambia según la cantidad comprada, el método para la determinación de la cantidad óptima Q_o es un poco más laborioso pero no es complejo. Veamos un ejemplo en el cual el costo de la materia prima es K_1 si la cantidad comprada es menor o igual a "B" y K_2 si la cantidad comprada es mayor que "B".

En éstos casos tenemos que utilizar otra fórmula para el cálculo del costo total anual en función de la cantidad de cada pedido. Esta fórmula incluye el costo de la materia prima y es la siguiente:

$$CTI = C_p \frac{D}{Q} + K \cdot D + K \frac{Q}{2} \cdot F_m$$

donde,

K = costo unitario o precio del artículo

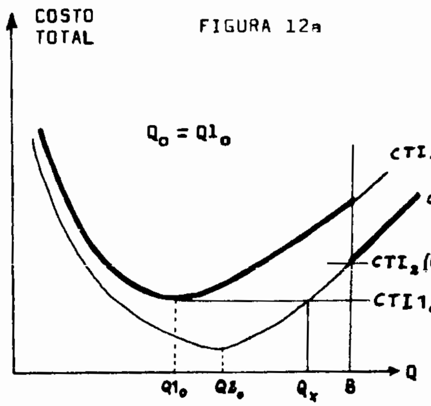
F_m = costo de mantener el inventario como una fracción del valor del mismo

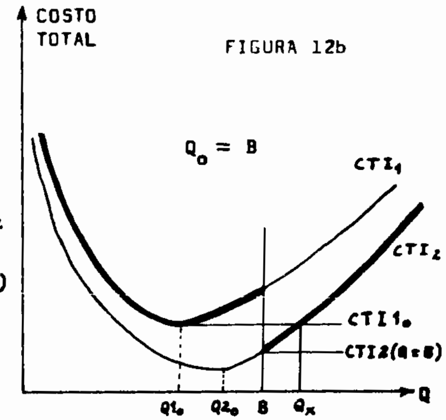
Siguiendo el procedimiento anterior , diferenciamos la ecuación del costo total respecto a "Q" y se iguala el resultado a cero. Se obtienen las siguientes fórmulas:

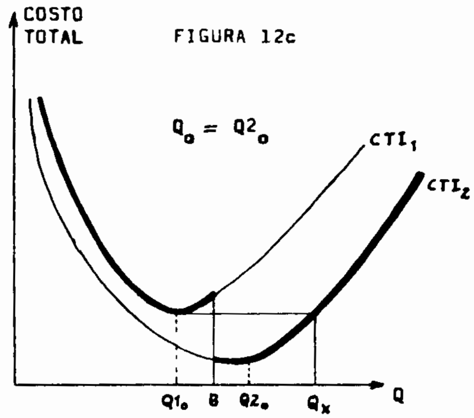
$$Q_o = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / K \cdot F_m}$$

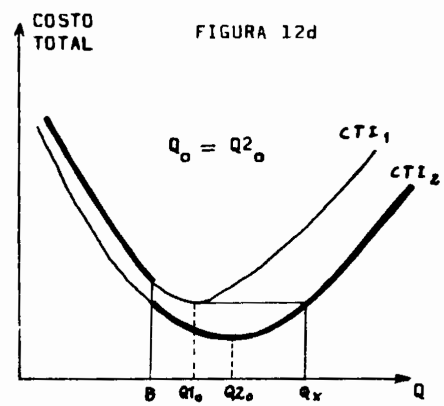
$$CTI_o = \sqrt{2 . C_p\ K \cdot F_m \cdot D} + K \cdot D$$

Para entender mejor la solución analítica de éste tipo de problema, será conveniente, inicialmente, resolverlo gráficamente (véanse las Figuras 12a, 12b, 12c y 12d.



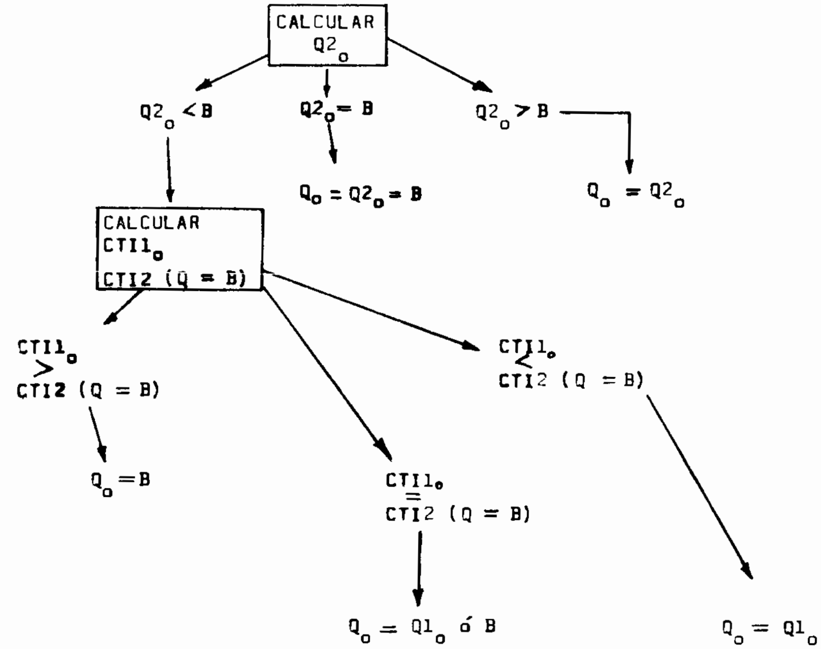






En el caso de la figura 12b, podemos observar que la cantidad que conduce a costos anuales mínimos es $Q_o = B$; Y en el caso de la figura **12a, la cantidad** óptima es $Q = Q1_o$; etc.

Analíticamente, la mejor forma de resolver el problema es como sigue:



Ejemplo numérico:

$B = 250$ unidades	$D = 500$ unidades por año	$C_p = \$ 10$
$F_m = 20\%$	$K_1 = \$ 1.00$	$K_2 = \$ 0.90$

Siguiendo el procedimiento descrito en **esta página**, tenemos inicialmente que calcular $Q2_o$:

$$Q2_o = 236$$

Puesto que $Q2_o = 236 < B$, tenemos que calcular $CTI1_o$ y $CTI2\ (Q = B)$:

$$CTI1_o = \sqrt{2.C_p.D.K_1.F_m} + K_1.D$$

$$CTI1_o = \sqrt{2 \times 10 \times 0.20 \times 1 \times 500} + 1.00 \times 500$$

$$CTI1_o = \sqrt{2000} + 500 = 45 + 500 = 545$$

$$CTI2\ (Q = B) = C_p \frac{D}{B} + K_2 \cdot D + K_2 \frac{B}{2} \cdot F_m$$

$$CTI2\ (Q = B) = 10 \ .\ 500 / 250 + 0.90 \times 500 + \frac{0.90 \times 250 \times 0.20}{2}$$

$$CTI2\ (Q = B) = 20 + 450 + 22.5 = 492.50$$

Puesto que $CTI1_o > CTI2\ (Q = B)$, podemos entonces deducir que la cantidad Q_o que conducirá a costos mínimos anuales es igual a B, es decir,

$$Q_o = B = 250$$

3. CANTIDAD OPTIMA PARA MATERIALES FABRICADOS EN LA PROPIA EMPRESA O PRODUCTOS TERMINADOS

Los modelos representativos de los inventarios de materiales o productos terminados son semejantes a los modelos estudiados anteriormente. La diferencia básica es que los productos terminados o materiales son fabricados en la planta al mismo tiempo que éstos van siendo consumidos por la propia planta o por los clientes. Consecuentemente, existe una tasa de crecimiento del inventario que es igual a la tasa de producción menos la tasa de demanda (véanse las figuras 13 y 14).

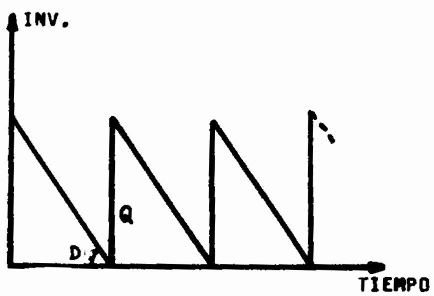


FIGURA 13: Materia prima comprada a un proveedor externo.

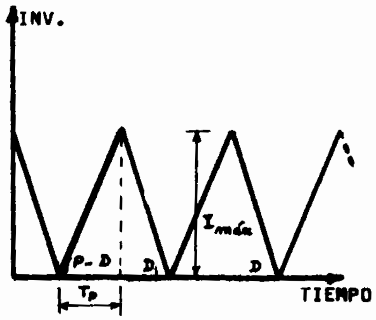


FIGURA 14: Materia prima o producto terminado fabricado en la propia empresa.
"P" = Producción anual.
"D" = Demanda anual.

Si analizamos la figura 14, podemos observar que el inventario crece con una tasa igual a (P - D), durante un período "T_p" y consecuentemente el inventario medio durante dicho período será:

$$\frac{I_{máx}}{2} = \frac{T_p\ (P - D)}{2}$$

Considerando que "Q" unidades son producidas a una tasa de producción "p" durante el período "T_p", tenemos entonces:

$$Q = P \cdot T_p \Rightarrow T_p = Q / P$$

Substituyendo en la fórmula anterior tenemos:

$$I_{med.} = \frac{(P - D)}{2} \cdot \frac{Q}{P} = (1 - D/P) \cdot \frac{Q}{2}$$

Considerando ahora que el costo de preparación es C_p, que el costo de mantener es C_m y que la demanda anual es "D", podemos entonces escribir la fórmula para el cálculo del costo total anual:

$$CTI = C_p \cdot \frac{D}{Q} + C_m\ (1 - D/P) \cdot \frac{Q}{2}$$

Derivando respecto a "Q" e igualando a cero tenemos:

$$\frac{d(CTI)}{dQ} = - C_p \cdot D / Q_o^2 + C_m\ (1 - D/P) \cdot 1/2 = 0$$

$$C_m\ (1 - D/P) = 2 \cdot C_p \cdot D / Q_o^2$$

$$Q_o^2 = 2 \cdot C_p \cdot D / C_m\ (1 - D/P)$$

$$Q_o = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot D / C_m\ (1 - D/P)}$$

Substituyendo este valor en la ecuación del costo total anual, tenemos:

$$CTI_o = \sqrt{2 \cdot C_p \cdot C_m \cdot D\ (1 - D/P)}$$

El número óptimo de lotes será:

$$N_o = D / Q_o$$

y el período de tiempo entre la fabricación de dos lotes consecutivos será:

$$T_o = Q_o / D = 1 / N_o \ \text{años.}$$

Ejemplo numérico:

$P = 10{,}000$ unidades por año.

$D = 5{,}000$ unidades por año.

$C_p = \$\ 10$.

$C_m = 0.20$ pesos/unidad/año.

$$Q_o = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 5000}{0.2 \times (1-5000/10000)}} = \sqrt{1000000} = 1,000$$

$Q_o = 1,000$ unidades

El costo mínimo anual será:

$$CTI_o = \sqrt{2 \times 10 \times 0.2 \times 5000\ (1 - 5000/10000)}$$

$$CTI_o = \sqrt{10000}$$

$CTI_o = \$\ 100$ (por año).

El número de lotes por año será:

$N_o = D\ /\ Q_o = 5000\ /1000 = 5$ **lotes al año.**

Finalmente, el período de tiempo entre dos lotes consecutivos será:

$T_o = Q_o\ /\ D = 1\ /\ N_o = 1000\ /5000 = 1/5$ años $= 2.4$ meses.

6. DETERMINACION DE LOS LOTES OPTIMOS CUANDO LA EMPRESA FABRICA VARIOS PRODUCTOS DIFERENTES EN UN SOLO EQUIPO

Cuando una empresa utiliza el mismo equipo para la fabricación de los lotes de varios productos diferentes, ni siempre es posible calcular los lotes óptimos usándose la ecuación

$$Q_o = \sqrt{2\ .\ C_p\ .\ D\ /\ C_m(1 - D/P)}$$

Esto se debe al hecho que obtendríamos lotes óptimos Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_n, sin embargo no sería posible su fabricación puesto que antes que terminara la fabricación de todos los lotes, es decir, antes que se completara un ciclo completo, los inventarios de algunos artículos ya estarían agotados. En este caso será necesario fabricar lotes **diferentes de los lotes "óptimos"** proporcionados por la fórmula $Q_o = \sqrt{2D.C_p/C_m(1-D/P)}$ para que entonces sea posible terminar el ciclo de fabricación de los lotes antes que se agotara cualquiera de los inventarios de los diferentes artículos.

A continuación, deducimos una fórmula que proporciona el número óptimo de ciclos por año y con base en este valor los lotes óptimos de cada artículo podrán ser determinados mediante la fórmula

$$(Q_i)_o = D_i\ /\ n_o$$

Donde,

$(Q_i)_o$ = lote óptimo para el artículo "i".

D_i = demanda anual del producto "i".

n_o = número óptimo de ciclos por año.

Supongamos ahora que "n" es el número de ciclos por año y que a cada uno de los "m" productos corresponden los siguientes datos:

D_i = demanda anual

P_i = producción anual (normal)

$(C_m)_i$ = costo de **mantener**

$(C_p)_i$ = costo de preparación

El nivel del inventario de cada producto variará como se indica en la figura 15:

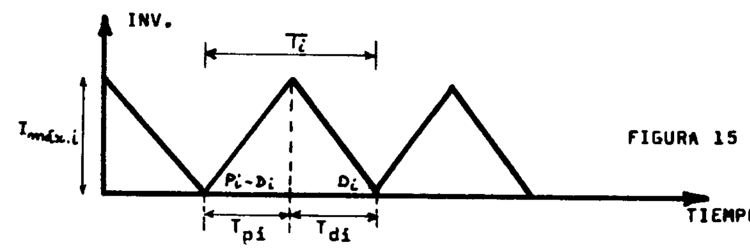


FIGURA 15

y durante el tiempo T_{di} los lotes de los otros productos serán fabricados. El inventario medio para el producto "i" puede ser calculado a través de la fórmula:

$$(I_{med})_i=(1 - D_i / P_i) \cdot Q_i/2$$

Puesto que $Q_i = D_i/n$, tenemos:

$$(I_{med})_i=(1 - D_i / P_i) \cdot D_i /2n$$

Consecuentemente, el costo anual de **mantener** será:

$$(1 - D_i/P_i) \cdot D_i/2n \cdot (C_m)_i$$

Y el costo anual de **mantener** para todos los productos será:

$$\sum_{i=1}^{m} (1 - D_i/P_i) \cdot D_i/2n \cdot (C_m)_i$$

Como hay "n" ciclos por año (para todos los productos), el costo anual de preparación será:

$$n \cdot \sum_{i=1}^{m} (C_p)_i$$

Finalmente, el costo total anual será:

$$CTI = n \cdot \sum (C_p)_i + 1/2n \cdot \sum (C_m)_i \cdot D_i \cdot (1 - D_i/P_i)$$

Derivando respecto a "n" e igualando a cero tenemos:

$$\frac{d(CTI)}{dn} = \sum (C_p)_i - \frac{\sum (C_m)_i \cdot D_i \, (1 - D_i/P_i)}{2n_o^2} = 0$$

$$\sum (C_o)_i = \frac{\sum (C_m)_i \cdot D_i \, (1 - D_i/P_i)}{2n_o^2}$$

Y por lo tanto:

$$n_o = \sqrt{\frac{\sum (C_m)_i \cdot D_i \, (1 - D_i/P_i)}{2 \cdot \sum (C_p)_i}}$$

El costo total anual será:

$$(CTI)_o = \sqrt{2 \cdot \sum (C_p)_i \cdot \sum (C_m)_i \cdot D_i \, (1 - D_i/P_i)}$$

Como hemos podido observar, este método parte del presupuesto de que si es posible realizar un número "n" de ciclos de fabricación al año y que para cada uno de los "m" productos ocurrirá lo que se muestra en la Figura 15, donde:

$I_{máxi}$ = inventario máximo.

T_{pi} = período de tiempo durante el cual hay producción y consumo del producto (se fabrica la cantidad $Q_{oi} = D_i/n$).

T_{di} = Período de tiempo durante el cual solo hay consumo (durante este tiempo se fabrican los demás productos).

T_i = Tiempo total para que se agote la cantidad Q_{oi}.

Sin embargo, como se verá, este método ni siempre es aplicable. Si suponemos que el tiempo de preparación de las máquinas para el producto "i" es T_{mi}, el <u>ciclo de fabricación</u>, es decir, el período total de tiempo entre dos corridas de producción del producto "i", será:

$$\text{CICLO DE FABRICACION} = \sum (T_{pi} + T_{mi})$$

Si ahora observamos la Figura 16, podemos facilmente deducir que para cualquier producto "i", el período de tiempo T_i tiene que ser mayor o igual a $\sum(T_{pi} + T_{mi})$, es decir:

$$\sum (T_{pi} + T_{mi}) \leq T_i$$

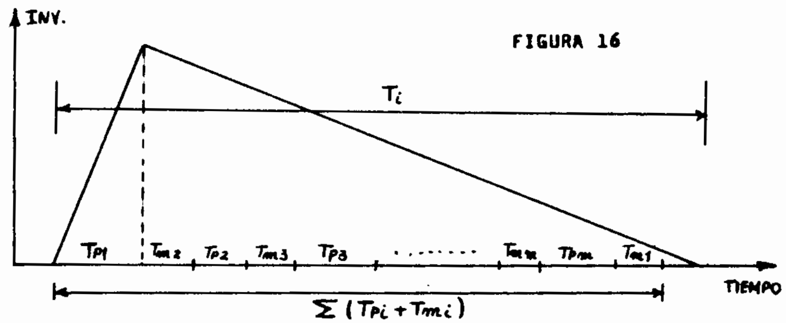


FIGURA 16

Si utilizamos la fórmula $Q_{oi} = D_i/n$ para calcular las corridas de cada producto, los períodos "T_i" de todos los productos serán idénticos e iguales a :

$$T_i = \frac{Q_{oi}}{D_i} = 1/n \text{ años.}$$

Por lo tanto, la realización de "n" ciclos al año solamente será posible cuando:

$$\sum (T_{pi} + T_{mi}) \leqslant 1/n$$

Si suponemos que los "T_{mi}" son muy pequeños en relación a los "T_{pi}", podemos entonces escribir:

$$\sum T_{pi} < 1/n$$

Como $T_{pi} = Q_{oi}/P_i = D_i/n \times 1/P_i$, tenemos:

$$\sum \frac{D_i}{n} \times \frac{1}{P_i} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum \frac{D_i}{P_i} < \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{D_i}{P_i} < 1$$

Esta última ecuación muestra claramente que la posibilidad o imposibilidad de la aplicación de este método NO DEPENDE del valor de "n". En otras palabras, si $\sum D_i/P_i < 1$, la fabricación de los productos será posible para CUALQUIER VALOR de "n". Sin embargo, solo un valor de "n" conduce a costos mínimos y éste será dado por la fórmula

$$n_o = \sqrt{\frac{\sum C_{mi} \times D_i \times (1 - D_i/P_i)}{2 \sum C_{pi}}}$$

Por otro lado, si $\sum D_i/P_i > 1$, el problema será imposible para cualquer valor de "n".

A continuación presentamos un ejemplo, para el cual no es posible la realización de "n" ciclos al año, para cualquier valor de "n".

Producto	D_i	P_i	C_{mi}	C_{pi}
1	40,000	200,000	0.10	40.00
2	16,000	25,000	0.20	25.00
3	5,000	12,500	0.15	35.00

Para este ejemplo, tenemos:

$$\sum D_i/P_i = 40{,}000/200{,}000 + 16{,}000/25{,}000 + 5{,}000/12{,}500 = 1.24 > 1,$$

lo que muestra que no será posible la aplicación del método.

<u>Comprobación</u>:

El número óptimo de ciclos al año es:

$$n_o = \sqrt{\frac{\sum D_i \times C_{mi} \times (1 - D_i/P_i)}{2 \sum C_{pi}}} = 4.9$$

Las cantidades Q_{oi} serán:

$$Q_{o1} = 8163 \;; \quad Q_{o2} = 3265 \;; \quad Q_{o3} = 1020 \;.$$

El tiempo de agotamiento de estas cantidades, será:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 1/n_o = 0.204 \text{ años},$$

es decir, 51 días, si consideramos 250 días laborables al año.

Los tiempos para fabricar las cantidades Q_{oi}, serán:

$$T_{p1} = 8163 \times 250/200{,}000 = 10.2 \text{ días}$$

$$T_{p2} = 3265 \times 250/25{,}000 = 32.6 \text{ días}$$

$$T_{p3} = 1020 \times 250/12{,}500 = 20.4 \text{ días.}$$

Finalmente, el ciclo de fabricación será:

$$C.F. = 10.2 + 32.6 + 20.4 = 63.2 \text{ días.}$$

Puesto que, el ciclo de fabricación (= 63.2 días) es mayor que el tiempo de agotamiento de los productos (= 51 días), la fabricación de estos productos sin que ocurra la falta de existencias, será imposible.

Bibliografía:

E. S. BUFFA - Sistemas de Produccion-Inventario: Planeación y Control.

IV. SISTEMAS DE ADMINISTRACION DE INVENTARIOS (materias primas)

En los modelos formulados anteriormente para la optimización de los inve[tarios, hemos supuesto que:

a) Los pedidos de materias primas o los lotes de productos terminados siempre llegan exactamente cuando el inventario de éstos se agotan.

b) La tasa de demanda de los productos terminados y de las materias primas es constante y se puede predecirla.

En la vida real, sin embargo, estas suposiciones casi nunca son verdaderas. Por ejemplo, los proveedores ni siempre cumplen los plazos de entrega de las materias primas y esto obviamente podrá causar un agotamiento del inventario de éstas antes de la llegada de los pedidos. Análogamente si la tasa de ventas de los productos terminados es mayor que la tasa pr vista, el inventario de éstos se agotará antes que los primeros producto de los lotes fabricados lleguen al almacén.

Debido a estos hechos, es siempre necesario mantener inventarios de seguridad (o de contingencia) para reducir la posibilidad de una eventual fa ta de materias primas o productos terminados. El nivel del inventario de seguridad dependerá básicamente del cumplimiento de los plazos de entrega por parte de los proveedores, de la magnitud de las variaciones de l demanda y del riesgo de agotamiento que quiere correr la empresa.

Obviamente, como mayor sea el inventario de contingencia, menor será el riesgo de agotamiento de las existencias y consecuentemente menores será los costos relativos a la falta de dichas existencias. Al mismo tiempo, como mayor sea el inventario de contingencia, mayor será el costo del in ventario propiamente dicho (costo de almacenaje y costo del capital inve tido). Por lo tanto, el problema que tenemos que resolver es la determin ción del nivel óptimo de los inventarios de contingencia, el cual minimi rá la suma de los costos del inventario y de los costos relativos a la f ta de existencias.

En la figura 17 se muestra un modelo para el estudio de los inventarios de materias primas y que incluye inventarios de contingencia. Como se pu observar, el inventario de contingencia es simplemente la diferencia ent el número de unidades usadas a un nivel máximo de demanda "$d_{máx}$" y a un vel igual a la demanda media "d", durante el tiempo de entrega T_e. In cialmente supondremos que T_e es constante. Por lo tanto, el inventari de contingencia se determina así:

$I_c = (d_{máx} - d)_{T_e}$; es decir, $(d_{máx} - d)$ durante el tiempo de entrega T_e.

Como ejemplo, supongamos que la variación de la demanda presenta la distribución que se muestra en la próxima página (durante el período T_e).

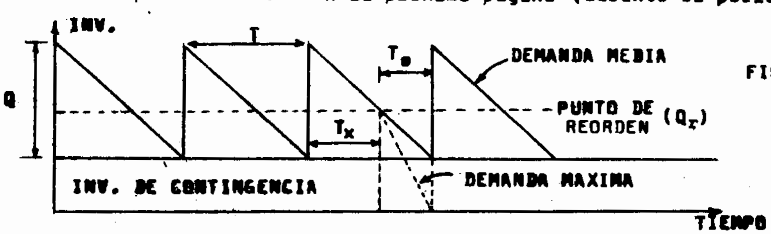


FIGURA 17

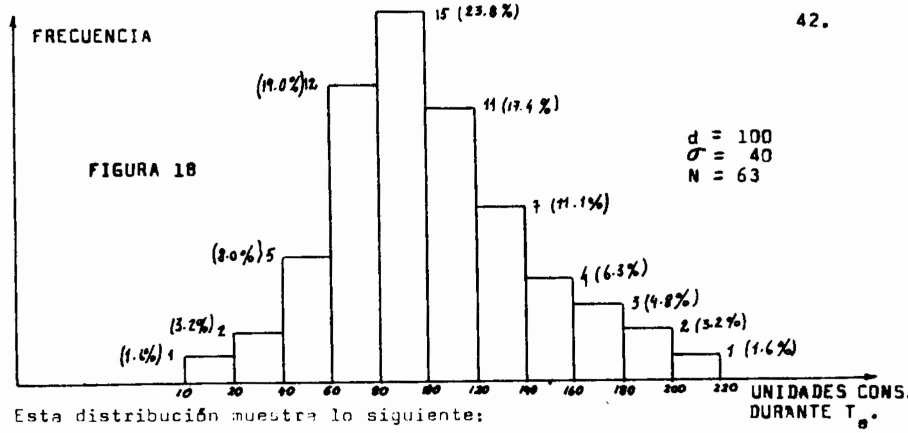


FIGURA 18

Esta distribución muestra lo siguiente:

DEMANDA	PROBABILIDAD DE QUE LA DEMANDA REAL SEA MAYOR QUE ESTE VALOR
220	0.0%
200	1.6%
180	4.8%
160	9.6%
140	15.9%

Por lo tanto, si la empresa desea correr un riesgo máximo de 9.6% de que se agoten las existencias, la demanda máxima a considerar ($d_{máx}$) será igual a 160 unidades durante T_e, y el inventario de contingencia será:

$$I_c = (d_{máx} - d)_{T_e} = 160 - 100 = 60.$$

Para los demás niveles de la demanda máxima, tenemos:

DEMANDA ($d_{máx}$)	PROBAB. DE AGOTAMIENTO	INVENT. DE CONTINGENCIA	VALOR DEL INV. DE CONTINGENCIA	COSTO DEL I.CONT AL 20% ANUAL
220	0.0%	120	12,000	2,400
200	1.6%	100	10,000	2,000
180	4.8%	80	8,000	1,600
160	9.6%	60	6,000	1,200

NOTA: Hemos supuesto que el producto cuesta $ 100.00

Supongamos ahora que la empresa ha determinado los costos correspondientes a la falta de existencias según el nivel de los inventarios de contingencia. Los costos totales para cada inventario de contingencia será entonces:

INVENTARIO DE CONTINGENCIA	COSTO DEL INV. CONT.	COSTO DE LA FALTA DE EXISTENCIAS	COSTO TOTAL
120	2,400	--	2,400
100	2,000	300	2,300
80	1,600	1,000	2,600
60	1,200	2,000	3,200

Y la gráfica representativa de estos costos sería la siguiente:

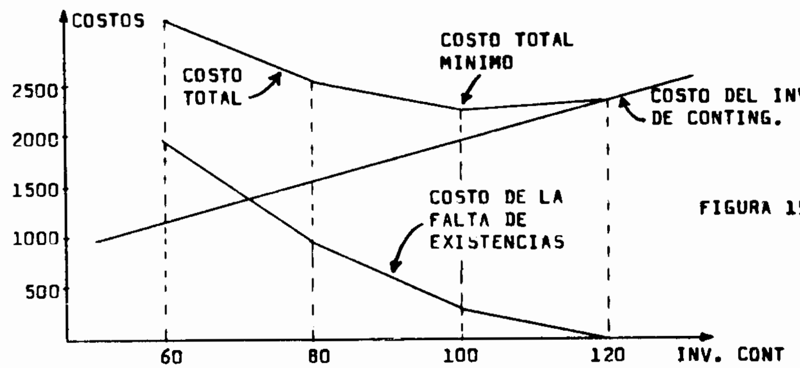


FIGURA 19

Podemos observar en el cuadro y en la gráfica, que el costo total mínimo corresponde a un inventario de contingencia igual a 100 unidades. El costo total para este inventario de contingencia es $ 2,300.00.

SISTEMAS DE REORDEN DE PUNTO FIJO Y SISTEMAS DE REORDEN A TIEMPO FIJO

En los modelos de inventarios discutidos en las páginas anteriores, hemos supuesto que (véase la Figura 17):

a) El tiempo de entrega del proveedor es constante e igual a T_e y siempre se hace un pedido T_x unidades de tiempo después de la llegada del pedido anterior.
b) Cuando se lleva a cabo el pedido de los artículos, el nivel de los inventarios es siempre igual a Q_r (punto de reorden).

A continuación damos un ejemplo en el cual la tasa de demanda es variable y el plazo de entrega es constante y mostramos las varias alternativas para la realización de los pedidos. En algunos modelos más complicados podemos considerar que la tasa de demanda y el plazo de entrega varían simultáneamente.

Como puede observarse en la Figura 20, cuando la tasa de demanda no es fija, al terminarse el período T_x el nivel de los inventarios podrá ser mayor o menor que Q_r, es decir, podrá ser igual a $Q1_r$ ó $Q2_r$, respectivamente. Análogamente, el nivel de los inventarios podrá llegar al valor Q_r antes o después de las T_x unidades de tiempo.

Debido a esto, la empresa podrá adoptar dos tipos de sistemas de inventarios:

a) Si se hace un pedido igual a Q_o siempre que el inventario llegue al nivel Q_r, independientemente del tiempo necesario para que esto ocurra, el sistema de inventarios es llamado SISTEMA DE PUNTO FIJO DE REORDEN.

b) Si se hace un pedido Q_x (variable), cada T_r unidades de tiempo, de modo que el inventario en la mano y sobre pedido resulte igual a un determinado nivel "M", el sistema de inventarios adoptado es llamado SISTEMA DE CICLO FIJO DE REORDEN. A continuación definiremos que es "inventario en la mano y sobre pedido" y cómo debemos determinar el nivel "M".

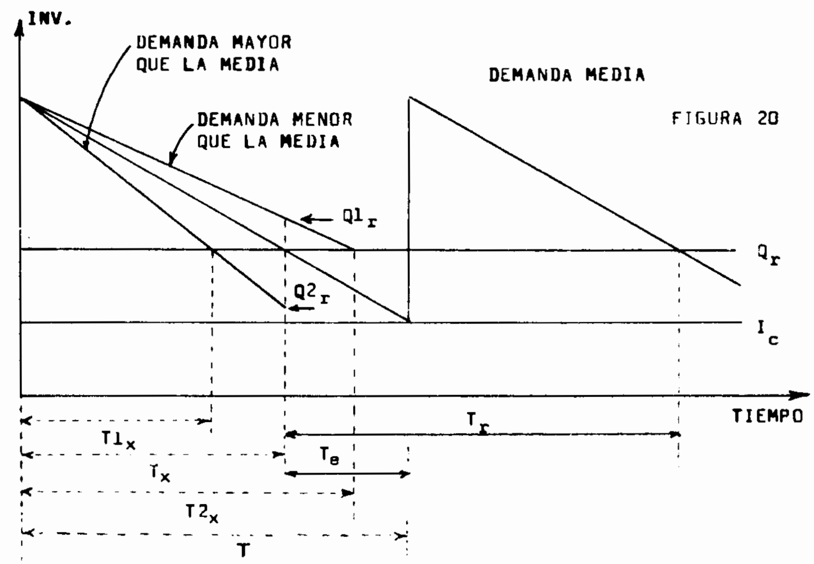
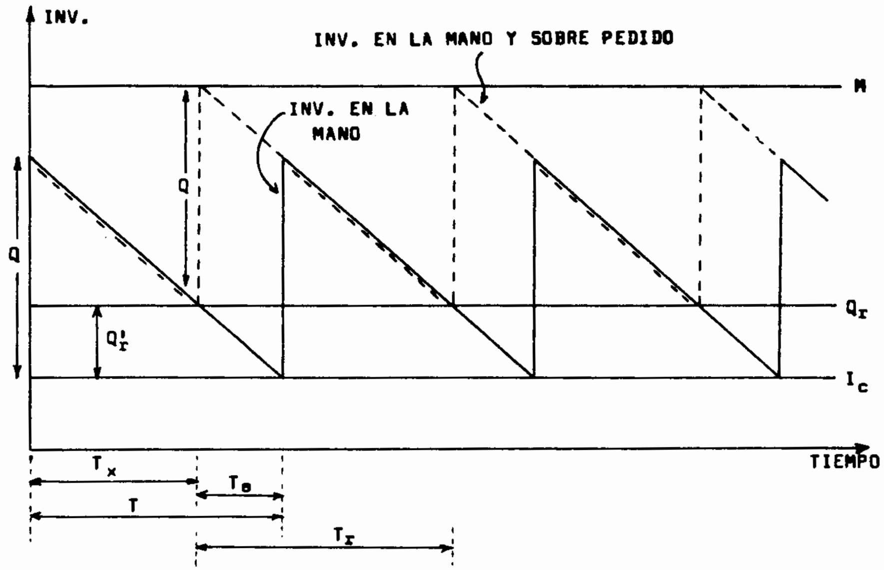


FIGURA 20

Inicialmente analizaremos el caso para el cual el plazo de entrega del proveedor es constante y menor que T_r. La Figura 21 muestra cómo se determina la línea representativa del inventario en la mano y sobre pedido, el cual es simplemente la suma de las existencias de la empresa más la cantidad ya pedida al proveedor. Obsérvese que para no complicar la gráfica de la Figura 21, hemos considerado la demanda constante, sin embargo ésta podrá obviamente ser variable.

FIGURA 21



En la Figura 21 podemos observar lo siguiente:

a) El inventario en la mano (existencias) está representado por la línea continua.

b) El inventario en la mano y sobre pedido está representado por la línea discontinua.

c) El nivel "M" es el nivel máximo del inventario en la mano y sobre pedido.

d) Cuando llega la cantidad pedida, la línea del inventario en la mano y la línea del inventario en la mano y sobre pedido resultan idénticas.

e) Puesto que $T_e < T_r$ nunca hay más de un pedido pendiente. (*)

f) Si la demanda media es "d", entonces $Q'_r = d.T_e$ y $Q_r = Q'_r + I_c = d.T_e + I_c$.

g) El inventario máximo en la mano y sobre pedido será:

$$M = Q_r + Q = I_c + d.T_e + d.T_r = I_c + d\ (T_r + T_e)$$

h) El período de tiempo entre la <u>realización</u> de dos pedidos consecutivos es igual al período de tiempo entre la <u>llegada</u> de dos pedidos consecutivos únicamente cuando "d" y T_e son constantes. En la práctica esto raramente ocurre. El período de tiempo entre la realización de dos pedidos consecutivos es llamado <u>período de revisión</u> (T_r).

(*) Si T_e es variable no se puede afirmar esto.

i) También cuando "d" y T_e son constantes, hacer un pedido T_x unidades de tiempo después de la llegada del pedido anterior, es lo mismo que pedir cada T_r unidades de tiempo.

Hecho éste análisis, podemos entonces describir el procedimiento para la utilización de los sistemas de ciclo fijo y de punto fijo:

<u>Sistema de punto fijo</u>:

a) Determinar la cantidad óptima Q_o.

b) Determinar $Q_r = d.T_e + I_c$

c) Pedir la cantidad Q_o siempre que el nivel del inventario llegue a Q_r (punto de reorden).

<u>Sistema de ciclo fijo</u>:

a) Determinar el período de revisión. Si queremos que el pedido medio anual sea aproximadamente igual a Q_o, el período de revisión tendrá que ser igual a T_o.

b) Determinar $M = I_c + d\ (T_r + T_e)$

c) Checar las existencias cada T_r unidades de tiempo. Si suponemos que "I" son las existencias y "O" son los pedidos pendientes, debemos entonces pedir una cantidad $Q = M - I - O$.(*)

En el caso de un plazo de entrega T_e mayor que el período T_r, el procedimiento para ambos sistemas sería idéntico, sin embargo los valores de "M" y "Q_r", como se muestra en la Figura 22, serían:

$Q_r = I_c + d\ (T_e - T_r)$ y $M = I_c + d\ (T_r + T_e)$.

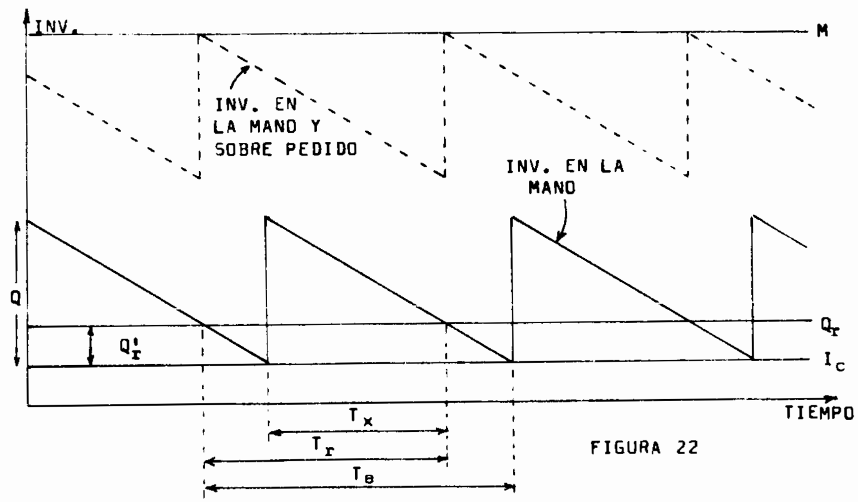


FIGURA 22

En las próximas páginas presentamos un ejemplo numérico.

(*) Si T_e es constante y menor que T_r, "O" será siempre igual a cero.

Ejemplo numérico de sistemas de punto fijo y ciclo fijo

En una empresa dada se calcularon los siguientes datos:

- Costo de mantener: **20% al año.**
- Costo de preparación: $ 20.00
- Demanda semanal media: 120 unid./semana
- Precio de la materia prima: $ 50.00
- Inventario de contingencia óptimo: 100 unidades
- Plazo de entrega del proveedor: 1 semana
- No. de dias laborables al año: 250 (50 semanas de 5 dias).

Determinar:

a) Todo lo que sea necesario para que la empresa pueda utilizar un sistema de punto fijo que conduzca a costos mínimos.

b) El costo anual de la política del apartado a).

c) Todo lo que sea necesario para que la empresa pueda utilizar un sistema de ciclo fijo que conduzca a un pedido medio anual aproximadamente igual a Q_o.

d) El costo anual del sistema del apartado c).

e) El inventario máximo en la mano y sobre pedido para un período de revisión de 2 semanas.

f) El costo anual que corresponde a un período de revisión de 2 semanas.

SOLUCION:

Inicialmente calculamos el costo de mantener en pesos por unidad por año y la demanda anual:

$$C_m = 20\% \times 50.00 = 10.00.$$

$$D = 120 \times 50 = 6{,}000 \text{ unidades al año.}$$

a) La cantidad óptima será:

$$Q_o = \sqrt{2 \times 20 \times 6{,}000/10} = 155 \text{ unidades}$$

El valor de T_o es:

$$T_o = Q_o/D = 155/6{,}000 \text{ años} = 155 \times 250/6{,}000 \text{ dias}$$

$$T_o = 6.5 \text{ dias}$$

Por lo tanto, $T_o = 6.5$ dias y $T_e = 5$ dias, o sea $T_e < T_o = T_r$.

Finalmente, el punto de reorden será dado por:

$$Q_r = d.T_e + I_c = 120 \times 1 + 100$$

$$Q_r = 220 \text{ unidades.}$$

Esta información es suficiente para la utilización del sistema de punto fijo: siempre que el nivel del inventario llegue a $Q_r = 220$ unidades, la empresa hará un pedido de $Q_o = 155$ unidades.

b) El costo anual será dado por:

$$CTI = \text{Inv. medio} \times C_m + \text{No. de pedidos} \times C_p$$

$$CTI = I_{med.} \times C_m + N_o \times C_p$$

El inventario medio será:

$$I_{med.} = I_c + Q_o/2 = 100 + 155/2$$

$$I_{med.} = 177.5 \text{ unidades}$$

$$N_o = D/Q_o = 6{,}000/155$$

$$N_o = 39 \text{ pedidos al año}$$

Por lo tanto:

$$CTI = 177.5 \times 10 + 39 \times 20$$

$$CTI = \$ \, 2{,}555.00$$

c) El período de revisión que conduce a un pedido medio anual aproximadamente igual a Q_o, es T_o, o sea 6.5 dias. Tomemos 7 dias. Para la utilización del sistema de ciclo fijo es suficiente determinar el valor de M:

$$M = I_c + d(T_o + T_e)$$

$$M = 100 + 120(7 + 5)/5$$

$$M = 388 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, cada 7 dias la empresa checará sus existencias "I" y pedirá la diferencia Q = 388 - I - O.

d) El inventario medio será:

$$I_{med.} = I_c + d.T_o/2 = 100 \quad \frac{(120 \div 5) \times 7}{2}$$

$$I_{med.} = 184$$

El número de pedidos al año que corresponde a un período de revisión de 7 dias será:

$$N = D/d.T_o = 6{,}000/(120 \div 5).7$$

$$N = 36$$

Por lo tanto, el costo anual correspondiente será:

$$CTI = 184 \times 10 + 36 \times 20$$

$$CTI = \$\ 2,560.00$$

Obsérvese que este costo es ligeramente mayor que el costo del apartado b), ya que hemos adoptado un período de revisión de 7 días en vez de 6.5 días, que es el óptimo.

e) Puesto que en este caso $T_e = 1$ semana y $T_r = 2$ semanas, entonces $T_e < T_r$. El inventario máximo en la mano y sobre pedido será:

$$M = I_c + d\ (\ T_r + T_e\ )$$

$$M = 100 + 120\ (\ 2 + 1\ )$$

$$M = 460 \text{ unidades.}$$

f) El inventario medio correspondiente será:

$$I_{med.} = I_c + d.T_r/2 = 100 + 120 \times 2/2$$

$$I_{med.} = 220 \text{ unidades}$$

El número de pedidos al año será:

$$N = D/d.T_r = 6,000/120 \times 2 = 25$$

Por lo tanto:

$$CTI = 220 \times 10 + 25 \times 20$$

$$CTI = \$\ 2,700.00$$

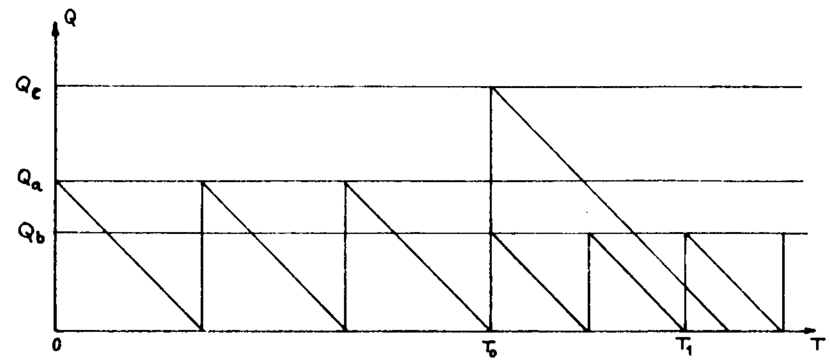
Bibliografía:

E. S. BUFFA - Sistemas de Producción-Inventario: Planeación y Control

V- MODELOS ESPECIALES DE INVENTARIOS (*)

1. Modelo para el Caso de Aumento de Precio durante el período analizado.

Este modelo se utiliza cuando un proveedor nos avisa sobre un próximo aumento en el precio de su producto. Este tipo de modelo no es repetitivo (a excepción de que durante el período analizado haya varios aumentos de precio), es decir, las condiciones del sistema no son permanentes.



El procedimiento básico será considerar el período de tiempo $(T_1 - T_o)$ y comparar el costo de no tomar ventaja del cambio de precio, o sea, seguir con el mismo sistema, contra el costo de comprar justo antes del aumento una cantidad mayor.

Utilizaremos la siguiente notación:

C_m = Costo de mantener por unidad por año.

C_p = Costo de preparación.

(*) Por el Ing. Pascual Alaniz C.

K_1 = Precio actual de la unidad

K_2 = Precio nuevo = $k_1 + U$

U = Diferencia entre precios

F_m = Costo de mantener en términos de porcentaje

D = Demanda anual

Costo Total de Tomar Ventaja

Toma ventaja sería comprar una cantidad Q_c bastante grande antes del cambio de precio con los siguientes costos:

Costo de comprar = $Q_c \times K_1$

Costo de mantener = $\dfrac{Q_c K_1 F_m}{2} \times (T_1 - T_o) = \dfrac{Q_c K_1 F_m}{2} \cdot \dfrac{Q_c}{D}$

Ya que de la figura se ve que $(T_1 - T_o) = \dfrac{Q_c}{D}$.

Costo de preparación = C_p

Debe resaltarse que el período que se analiza es sólo mientras dura el pedido Q_c. El costo total sería entonces:

$$C_t = Q_c \times K_1 + \frac{Q_c K_1 F_m}{2} \cdot \frac{Q_c}{D} + C_p = Q_c \times K_1 + \frac{Q_c^2 K_1 F_m}{2D} + C_p$$

Costo total de no tomar ventajas

Para el mismo período $(T_1 - T_0)$, no tomar ventaja sería sólo cambiar el nivel de inventario a un nivel óptimo, utilizando el modelo clásico. La cantidad a pedir sería:

$$Q_b = \sqrt{\frac{Z \times D \times C_p}{K_2 F_m}} = \sqrt{\frac{2 . D . C_p}{(K_1 + U) F_m}}$$

Los costos serían:

Costo de comprar = $(K_1 + U)\, Q_c$

Ya que el período es el mismo y la cantidad de unidades utilizadas sería también Q_c.

Costo de mantener = $\dfrac{Q_b (K_1 + U) . F_m}{2} \cdot \dfrac{Q_c}{D}$

Costo de pedir = $\dfrac{Q_c}{Q_b} \cdot C_p$

El Costo total sería:

$$C_t' = (K_1 + U)\, Q_c + \frac{Q_b (K_1 + U) F_m}{2} \cdot \frac{Q_c}{D} + \frac{Q_c}{Q_b} \cdot C_p$$

Si llamamos "G" a la diferencia de costos, tenemos:

$G = C_t' - C_t$

y sustituyendo sus valores y el valor de Q_b :

$$G = Q_c\, U + \frac{2 . C_p (K_1 + U) F_m}{D} - \frac{Q_c^2 . K_1 F_m}{2D} - C_p$$

Derivando con respecto a Q_c, igualando a 0 y despejando Q_c, tenemos:

$$Q_{co} = \sqrt{\frac{2 . D . C_p}{(K_1 + U) F_m}}\; \frac{K_1 + U}{K_1} + \frac{U . D}{K_1 . F_m} = \sqrt{\frac{2 . D . C_p . K_2}{K_1^2 . F_m}} + \frac{U . D}{K_1 . F_m}$$

$$Q_{co} = \frac{Q_b . K_2}{K_1} + \frac{U . D}{K_1 . F_m}$$

que es el lote que maximiza el ahorro por tomar ventaja del cambio de precio, siendo:

$$G_o = \frac{U}{K_1}\left[\frac{UD}{2F_m} + Q_b\, (K_1 + U) + C_p\right] = \frac{U}{K_1}\left[\frac{UD}{2F_m} + Q_b\, K_2 + C_p\right]$$

Veamos un ejemplo numérico :

El precio de compra de un artículo hasta el 31 de diciembre de 1977 es de \$0.31 /lb. y el artículo es usado a razón de 450 lb/mes. El costo de mantener es de 20%/año y el costo de preparación es de \$5.10/pedido.

¿ Qué cantidad hay que pedir el 31 /XII/77 si el precio cambia a \$0.34/lb. el día 1o./I/78?

$$Q_{co} = \frac{0.03 \times 5400}{0.31 \times 0.20} + \sqrt{\frac{2 \times 5400 \times 5.10 \times 0.34}{(0.31)^2 \times 0.20}} = 3{,}600$$

$$G_o = \$\ 69.30$$

2. Modelo con Demanda Creciente Conocida

Las características de este modelo de inventarios son los siguientes:

a) El sistema opera durante el período T_t unidades de tiempo.

b) Durante este período T_t existe una demanda total de "D " unidades.

c) La tasa de demanda cambia linealmente con el tiempo "T", o sea:

$$d = a\,T \text{ ---------- } \quad (1)$$

La constante "a" puede ser determinada de:

$$D = \int_0^{T_t} d.dT = \int_0^{T_t} a\,T.dt = \left(\frac{aT^2}{2}\right)_0^{T_t} = \frac{aT_t^2}{2} \ldots . \quad (2)$$

$$D = \frac{aT_t^2}{2} \quad \therefore \quad a = \frac{2D}{T_t^2}$$

$$\therefore \quad d = \frac{2D}{T_t^2} . t \text{ ------- } (3)$$

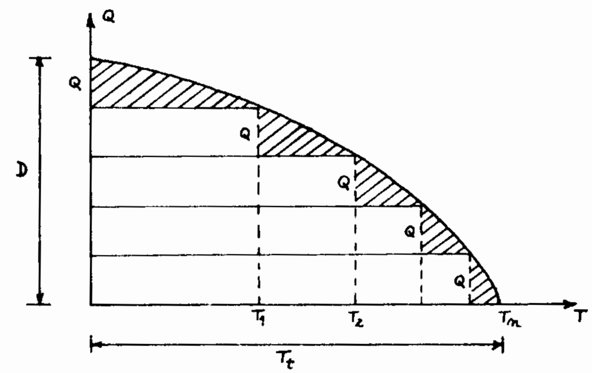
d) Los costos relevantes son el costo de mantener C_m y el costo de preparación C_p. No se permiten faltantes.

Veamos el procedimiento para determinar la cantidad óptima Q_o.

Sea "N" el número de pedidos hechos durante el período T_t. Entonces:

$$Q = \frac{D}{N} \text{ ------ } (4)$$

Para encontrar el número promedio de piezas en inventario durante el período T_t, véase la figura:



El total en inventario I_t durante el período T_t es la parte hachurada:

$$I_t = \frac{2}{3}\ D.T_t - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\ .Q.\ (T_i - T_{i-1}) \text{ ------- } (5)$$

donde 2/3 $D.T_t$ es el área de la parábola.

Una expresión de T_i se puede obtener así: durante el período $(T_{i-1} - T_i)$ la demanda total es:

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} d.\,dT = Q$$

De las ecuaciones (3) y (4) tenemos:

$$\frac{D}{N} = \int_{T_{i=1}}^{T_i} d.dT$$

$$\frac{D}{N} = \int_{T_{i=1}}^{t_i} \frac{2D}{T_t^2} \; T\, dT = \left[\frac{2D}{T_t^2} \cdot \frac{T^2}{2}\right]_{T_{i-1}}^{T_i} = \left[\frac{D \cdot T^2}{T_t^2}\right]_{T_{i-1}}^{T_i}$$

$$\frac{D}{N} = \frac{D}{T_t^2}\left[T_i^2 - T_{i-1}^2\right] \text{ - - - - - - - } (6)$$

$$T_i^2 - T_{i-1}^2 = \frac{T_t^2}{N} \text{ - - - - - - - } (7)$$

Como $T_o = 0$, se puede derivar una expresión general para T_i por inducción matemática:

$$T_i^2 = \frac{T_t^2}{N} + T_{i-1}^2$$

Para T_1 : $T_1^2 = \frac{T_t^2}{N} + T_o^2$

$$T_1^2 = \frac{T_t^2}{N}$$

Para T_2 : $T_2^2 = \frac{T_t^2}{N} + T_1^2$

$$T_2^2 = \frac{T_t^2}{N} + \frac{T_t^2}{N}$$

$$T_2^2 = 2\,\frac{T_t^2}{N}$$

Se supone que esta expresión es válida para "i", es decir:

$$T_i^2 = i \,.\, \frac{T_t^2}{N}$$

y se demuestra que es válida para (i+1):

$$T_{i+1}^2 = \frac{T_t^2}{N} + T_i^2$$

$$T_{i+1}^2 = \frac{T_t^2}{N} + \frac{i\, T_t^2}{N}$$

$$T_{i+1}^2 = (i+1) \,.\, \frac{T_t}{N}$$

$$T_{i+1} = T_t \sqrt{\frac{i+1}{N}}$$

se demuestra pues que:

$$T_i = T_t \,.\, i/N \text{ - - - - - } (8)$$

De las ecuaciones (2), (4), (5) y (8) tenemos:

$$I_{med} = \frac{I_t}{T_t}$$

$$I_{med} = \frac{1}{T_t}\left[\frac{2}{3} \,.\, D.T_t - \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \,.\, Q \,.\, (T_i - T_{i-1})\right]$$

$$= \frac{1}{T_t}\left[\frac{2}{3} \,.\, D.T_t - \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \,.\, \frac{D}{N}\left(T_t\sqrt{\frac{i}{N}} - T_t\sqrt{\frac{i-1}{N}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3} \,.\, D - \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \,.\, \frac{D}{N} \cdot \left(\sqrt{\frac{i}{N}} - \sqrt{\frac{i-1}{N}}\right)$$

$$= D \,.\left[\frac{2}{3} - \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \,.\, \frac{1}{N}\left(\sqrt{\frac{i}{N}} - \sqrt{\frac{i-1}{N}}\right)\right]$$

$$= D \,.\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \left(\sqrt{\frac{i}{N}} - \sqrt{\frac{i-1}{N}}\right)\right]$$

$$= \frac{D}{N}\left[\frac{2N}{3} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right]$$

$$= \frac{D}{N}\left[\frac{2}{3} \,.\, N - \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}\right]$$

$$= \frac{D}{N}\; h\,(N)$$

en donde $h(N) = \frac{2N}{3} - \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$

Demostración numérica de que:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \left[\sqrt{i} - \sqrt{i-1} \right] = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots \sqrt{N-1}$$

Sea N=5, entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{5-1} (N-i) (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) \text{ es igual a:}$$

$i = 1 \Rightarrow (5-1)(\sqrt{1} - \sqrt{0}) = 4\sqrt{1}$

$i = 2 \Rightarrow (5-2)(\sqrt{2} - \sqrt{1}) = 3(\sqrt{2} - \sqrt{1})$

$i = 3 \Rightarrow (5-3)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$i = 4 \Rightarrow (5-4)(\sqrt{4} - \sqrt{3}) = 1(\sqrt{4} - \sqrt{3})$

Sumando tenemos:

$$\sum_{i=1}^{5-1} = 4\sqrt{1} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{1} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\sqrt{4} - 1\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} \qquad \therefore \text{ LQQD.}$$

Veamos ahora los valores de la función h(N):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40
h(N)	0.667	0.626	0.606	0.594	0.585	0.578	0.573	0.568	0.565	0.562	0.544	0.537	0.532

Finalmente, la ecuación del costo total que corresponde a "N" períodos es:

$$CTI(N) = \frac{C_m \cdot D \cdot h(N)}{N} + \frac{C_p \, N}{T_t}$$

Como "N" es discreto se usa para su cálculo la siguiente función:

$$(N_o - 1) \leq \frac{C_m \cdot D \cdot T_t}{C_p} \leq F(N_o)$$

en donde $F(N) = \frac{N(N+1)}{(N+1)\, h(N) - N \cdot h(N+1)}$

Ejemplo numérico:

Existe un contrato para la entrega de 7200 partes en un período de 3 años a un ritmo creciente linealmente. El costo de mantener en inventario es de \$ 0.56 por unidad por año, y el costo de preparación es de \$ 42.00. Encontrar Q_o, N_o y CTI (N_o).

$$\frac{C_m \cdot D \cdot T_t}{C_p} = \frac{0.56 \times 7200 \times 3}{42.00} = 288$$

$F_{12} = 268.5$

$F_{13} = 313.2$

$\therefore \; N_o = 13$

Por la ecuación (4) se tiene que:

$$Q_o = \frac{7200}{13} = 554 \text{ unidades}$$

El costo anual será entonces:

$$CTI(N_o) = \frac{C_m \cdot D \cdot h(N_o)}{N_o} + \frac{C_p \cdot N_o}{T_t} = \$\, 354.00 / \text{año.}$$

3. Modelo con Varios Productos y Restricción de Superficie o Dinero.

Como ejemplo para este sistema de inventarios, utilizaremos el modelo clásico con control sobre los costos de mantener y de faltante. El costo que corresponde a un dado inventario máximo I_m (*), sin considerar el costo de preparación, es:

(*) Hemos utilizado hasta ahora la abreviación $I_{máx}$, sin embargo para este modelo nos conviene una notación más sencilla.

$$C(I_m) = \frac{C_m\ I_m^2}{2Q} + \frac{C_f\ (\quad - I_m)^2}{2Q}$$

donde $C(I_m)$ es el costo que corresponde al inventario máximo I_m.

Cuando aplicamos esta fórmula a "n" diferentes productos, tenemos:

$$C(I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} + \ldots + I_{mn}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{mi}\ I_{mi}^2 + C_{fi}\ (\ \ _i - I_{mi})^2}{2Q_i}$$

Respecto a las restricciones, suponiendo que sean de superficie o de dinero (queriendo decir con esta última que no se desea tener en existencia más de una cierta cantidad de dinero invertido), los fórmulas que las representarían son:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{mi} \cdot a_i \leq A$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_{mi} \cdot K_i \leq E$$

donde:

a_i = área o superficie que ocupa la unidad del producto "i".

A = área total disponible

K_i= dinero o precio unitario del producto i.

E = Cantidad máxima que se desea tener invertida en inventarios (existencia máxima en \$).

Las fórmulas a las que se llega aquí serán del tipo general, para cuando existe una restricción de este tipo, ya que las fórmulas también podrían utilizarse para restricción de volumen, etc.

Para los casos en que existan más de una restricción, se deberá desarrollar el modelo por medio del método de los multiplicadores de Lagrange (Matemáticas III), que es el método que se utilizó para este modelo.

El procedimiento es el siguiente:

Se sabe que el nivel máximo óptimo individual (para cada uno de los productos) es:

$$(I^*_{mi})_o = \frac{_i \cdot C_{fi}}{C_{mi} + C_{fi}}$$

donde el asterisco indica que el inventario máximo óptimo es individual y que puede no ser factible.

El primer paso es ver si estos niveles óptimos no violan la restriccion. Si no la viola entonces:

$$(I_{mi})_o = (I^*_{mi})_o$$

donde $(I_{mi})_o$ son los inventarios máximos factibles.

Cuando existen dos o más restricciones, se checa cada una de ellas llamándose a las que si se violan restricciones activas, las cuales entran a formar parte del modelo.

Para el caso que estamos tratando en que sólo existe una restricción, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{mi} \times r_i \leq R$$

donde: R = restricción total

r_i = restricción unitaria del producto "i".

Si ésta se viola al usar $(I^*_{mi})_o$ utilizamos multiplicadores de lagrange haciendo:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{mi} \times r_i - R = 0$$

e integrándola a una nueva función "F" a optimizar:

$$F(I_{m1}, I_{m2}, \ldots I_{mn}) = C(I_{m1} + I_{m2} + \ldots I_{mn}) + g\left(\sum_{i=1}^{n} I_{mi} \times r_i - R\right)$$

donde "g" es el multiplicador de Lagrange. Se deriva a "F" con respecto a cada una de las variables y se igualan las derivadas a cero, quedando así un sistema de(n+1) ecuaciones con (n+1) incógnitas:

$$\frac{\partial F}{\partial I_{m1}} = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial I_{m2}} = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial I_{m3}} = 0 \; ; \; \ldots \; ; \; \frac{\partial F}{\partial I_{mn}} = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial g} = 0$$

de donde al despejar "g" obtenemos al multiplicador óptimo:

$$g_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_{fi} \times x_i \times Q_i}{C_{mi} + C_{fi}} - R}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i)^2 \times Q_i}{C_{mi} + C_{fi}}}$$

y los niveles máximos óptimos serán:

$$(I_{mi})_o = Q_i \left(\frac{C_{fi} - g_o \cdot x_i}{C_{mi} + C_{fi}} \right)$$

donde Q_i es dato.

Ejemplo numérico:

Hay 5 productos y el espacio total aprovechable es de 3,000 m^2 :

Producto "i"	1	2	3	4	5
Q_i	200	100	500	80	1000
C_{mi}	2	1	4	5	1
C_{fi}	50	40	20	30	10
a_i	5	3	9	12	0.2

Solución:

Producto	$(I^*_{mi})_o$	a_i	$(I^*_{mi})_o \times a_i$
1	192.3	5	961.5
2	97.5	3	292.7
3	416.7	9	3750.00
4	68.57	12	822.85
5	909.0	0.2	181.8
	TOTAL		5,908.83

Por lo tanto se viola la restricción A = 3,000 m^2.

$$5,908.83 > A.$$

tilizando las ecuaciones, tenemos:

$g_o = 1.47$

$(I_{m1})_o = 165$

$(I_{m2})_o = 87$

$(I_{m3})_o = 142$

$(I_{m4})_o = 29$

$(I_{m5})_o = 883$

y finalmente:

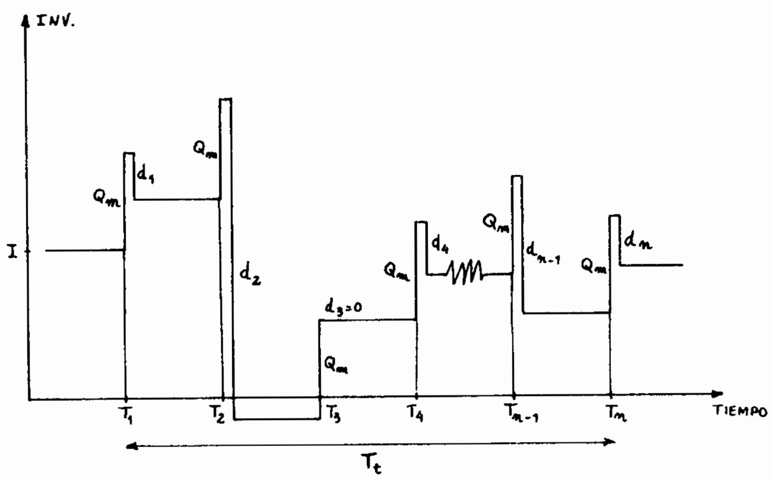
$$\sum_{i=1}^{5} (I_{mi})_o \times a_i = 2866 < 3,000 = A.$$

4. Modelo para Demanda Variable Conocida.

Para este sistema de inventarios existen N períodos iguales "T", en un período total T_t. La demanda d_i ocurre al principio de cada período programado T_i. Los valores de las demandas d_i no son necesariamente iguales. Una Q_m constante y programada se suma al inventario al inicio de cada período programado. El tamaño del lote Q_m es igual a la demanda promedio:

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{N}$$

La única variable sujeta a control en este sistema es "I", nivel de inventarios al principio de cada período T_t, por lo tanto existe un costo de mantener en inventario y también un costo de faltante con las fluctuaciones del sistema.



Tenemos:

I_i = Cantidad en inventario para período "i"

$I_i = I_o + i \times Q_m - \sum_{j=1}^{i} d_j \qquad i = 1,2,\ldots, n$

Definamos las siguientes variables:

$R'_i = \sum_{j=1}^{i} d_j - i \times Q_m$

$R'_n = 0$

$R_i = R'_i$, de tal forma que:

$$R_i \leq R_{i+1} \leq R_{i+2} \ldots \quad [i = 1,2,\ldots, n]$$

El procedimiento para determinar el valor óptimo de "I" es el siguiente:

a) Calculamos $n \frac{C_f}{C_m + C_f}$ y determinamos el valor del número entero "m" de tal forma que:

$$m \geq n \frac{C_f}{C_m + C_f}$$

b) El valor óptimo de "I" será entonces dado por:

$$R_m \leq I_o \leq R_{m+1}$$

Finalmente, el costo mínimo que corresponde a este valor de I_o, será :

$$CTI_o = (C_f + C_m)\left(m \times I_o - \sum_{j=1}^{m} R_j\right) - C_f \times n \times I_o + C_m \sum_{j=1}^{n} R_j$$

Ejemplo numérico:

La demanda semanal de un producto es la siguiente:

Dia	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Cantidad	14 lb	9 lb	17 lb	2 lb	0 lb	19 lb	9 lb

El costo de mantener es de $ 0.20 por lb. por día y el costo del faltante es de $0.50 por lb. por día.

Encontrar el nivel de inventario al principio de la semana que minimice el costo.

Solución:

$R_1' = 14 - 10 = 4$

$R_2' = 14 + 9 - 2\ (10) = 3$

$R_3' = 14 + 9 + 17 - 3(10) = 10$

$R_4' = 14 + 9 + 17 + 2 - 4(10) = 2$

$R_5' = 14 + 9 + 17 + 2 + 0 - 5(10) = -8$

$R_6' = 14 + 9 + 17 + 2 + 0 + 19 - 6(10) = 1$

$R_7' = 14 + 9 + 17 + 2 + 0 + 19 + 9 - 7(10) = 0$

Ordenándolas para obtener los R_i, tenemos:

$R_1 = -8$

$R_2 = 0$

$R_3 = 1$

$R_4 = 2$

$R_5 = 3$

$R_6 = 4$

$R_7 = 10$

El valor de "m" será:

$$n \frac{C_f}{C_f + C_m} = 7 \frac{0.5}{0.7} = 5$$

$m = 5$

Por lo tanto:

$$R_m \leq I_o \leq R_{m+1}$$

$$R_5 \leq I_o \leq R_6$$

$$3 \leq I_o \leq 4$$

El costo mínimo será dado por (considerando $I_o = 3$):

$$CTI_o = (0.50 + 0.20)\ (5 \times 3 - \sum_{i=1}^{5} R_i) - 0.50 \times 7 \times 3 + 0.20 \times \sum_{i=1}^{7} R_i$$

$CTI_o = 0.70\ (15 - (-12)) - 10.5 + 0.20 \times 12$

$CTI_o = 11.9 - 10.5 + 2.4$

$CTI_o = \$\ 3.80$

VI - PLANEACION AGREGADA

1. Hay básicamente 3 tipos de planeación en cuanto al plazo:

   a) Planeación a corto plazo. Este tipo de planeación puede ser diaria, semanal o mensual. La planeación a corto plazo de la fabricación propiamente dicha es generalmente llamada de programación y ésta consta principalmente de la determinación de las secuencias de fabricación y de la determinación de las máquinas y/o obreros para cada operación o producto. En otras palabras, este tipo de planeación es la respuesta a las siguientes preguntas:

   -¿Cuándo?
   -¿En qué máquinas
   -¿En qué secuencia?
   -¿Quien?

   En todas las otras áreas de actividad de las empresas, también existe la planeación a corto plazo. En el área de mantenimiento, por ejemplo, la planeación a corto plazo consta de la elaboración de los planes de mantenimiento preventivo para la próxima semana o mes.

   b) Planeación a mediano plazo. Este tipo de planeación es generalmente realizado para los próximos 1-3 años, y consta por ejemplo, de la determinación de la mezcla óptima de productos, la selección del mercado y de los clientes, la determinación del nivel de producción y de los inventarios, etc.

   Llamamos planeación agregada a la planeación a mediano plazo que se concentra en el análisis de los siguientes aspectos:

   - Nivel de producción
   - Nivel de los inventarios
   - Tiempo extra
   - Sub-contratación
   - Contratacción y despidos de obreros.

   c) Planeación a largo plazo. Este tipo de planeación consta del análisis y determinación de soluciones técnicamente adecuadas, para los próximos 4-10 años, en cuanto a los siguientes aspectos:

   - Localización de la planta
   - Innovaciones de productos y/o maquinaria
   - Aumento de la capacidad productiva
   - Etc.

   Si la empresa está en proceso de expansión, este tipo de planeación siempre conduce a nuevas inversiones (activos, investigaciones, etc).

2. Los sistemas productivos deben ser considerados como un conjunto de sub-sistemas, los cuales tienen interferencias unos sobre los otros. Consecuentemente, los sistemas de planeación, y en particular los sistemas de planeación agregada, deben tomar en consideración esta interdependencia de los varios sub-sistemas. Como ejemplos de sub-sistemas tenemos los siguientes:

   a) Producción propiamente dicha (secuencias, lotes de fabricación, etc)
   b) Inventarios (qué productos y qué niveles)
   c) Personal (cantidad de obreros, contratación, despidos, etc)
   d) Ventas (qué plazos, qué inventarios de productos terminados, etc)

   e) Compras (qué proveedores, qué plazos, tamaño de los pedidos, etc)
   f) Finanzas (qué capital debe ser invertido en inventarios, capital de trabajo, contratación o despidos de obreros, etc).
   g) Clientes (qué plazos y qué calidad exigen, cómo se portan, etc)

3. Ejemplos de interdependencia:

   a) Ventas desea niveles elevados de inventarios para poder satisfacer, con rapidez, a cualquier pedido de sus clientes o a un aumento de la demanda. Sin embargo, esta política podrá causar un aumento exagerado del capital invertido en inventarios y esto obviamente afectará la planeación de la distribución de recursos realizada por el Depto de Finanzas.

   b) Para satisfacer a los clientes, Ventas podrá exigir de Producción plazos de fabricación demasiado cortos, lo que conducirá a un sistema de planeación de la producción ineficiente.

   c) Los clientes podrán solicitar cambios frecuentes de diseño, lo que hará imposible la existencia de inventarios.

   d) Para reducir los costos de fabricación, Producción podrá requerir de máquinas más modernas, las cuales conducirán a inversiones adicionales de capital que no podrán ser realizadas por Finanzas.

   e) Para reducir los costos de preparación de las máquinas, Producción podrá decidir fabricar siempre grandes lotes, lo que conducirá a un aumento del nivel de los inventarios y podrá también afectar los plazos de entrega de los pedidos.

4. Como podremos observar más adelante, los modelos de Planeación Agregada consideran solo algunas de estas interdependencias y, en particular, ayudan a contestar las siguientes preguntas:

   a) ¿Hasta que punto deberán los inventarios absorber las fluctuaciones del volumen de ventas?

   b) ¿Hasta que punto deberán dichas fluctuaciones ser absorbidas a través de una variación del personal directo contratado?

   c) ¿Cuando se deben utilizar tiempo extra y/o turnos extras para absorber las fluctuaciones de las ventas?

   d) ¿Cuando se debe subcontratar la fabricación total o parcial de algunos productos para satisfacer a un aumento de la demanda?

   e) ¿En qué casos se debe mantener el nivel de producción más o menos constante, asi como un bajo nivel de inventarios, y a propósito perder algunos clientes cuando la demanda sea elevada?

   f) ¿En que casos se debe dejar que aumente el número de pedidos pendientes y se deben dilatar los plazos de entrega, para absorber las fluctuaciones de la demanda?

   g) ¿En que casos se deben fabricar productos de variación estacional desfasada para compensar las fluctuaciones de la demanda de cada producto?

5. De una forma deneral, ninguna de estas políticas es la mejor. La solución óptima es siempre una combinación de dos o más de estas políticas. En otras palabras, cada una de estas alternativas reduce unos elementos de los costos y aumenta otros, y consecuentemente la suma de todos los ele-

mentos solamente podrá ser minimizada a través de la aplicación simultanea de algunas o todas estas políticas.

EJEMPLO ELEMENTAL DE PLANEACION AGREGADA

6. Supongamos que para una Empresa dada, los volúmenes de ventas pronosticados y los inventarios mínimos requeridos al final de cada mes, son los que se muestran en el cuadro a continuación:

MES	VOLUMENES REQUERIDOS MENSUAL	VOLUMENES REQUERIDOS ACUMULADO	DIAS LABORALES MENSUAL	DIAS LABORALES ACUMULADO	INVENT. MINIMOS
Diciembre	-	-	-	-	300
Enero	700	700	22	22	300
Febrero	900	1600	18	40	340
Marzo	1100	2700	22	62	375
Abril	900	3600	21	83	340
Mayo	650	4250	22	105	290
Junio	600	4850	21	126	275
Julio	550	5400	21	147	265
Agosto	400	5800	13	160	230
Septiembre	400	6200	20	180	230
Octubre	300	6500	23	203	195
Noviembre	300	6800	21	224	195
Diciembre	400	7200	20	244	230

Además, tenemos la siguiente información:

a) El volumen normal de producción de la planta es de 30 unidades por dia y con tiempo extra puede llegar a un máximo de 36 unid./dia.

b) El costo de mantener es de $ 240.00 por unidad por año.

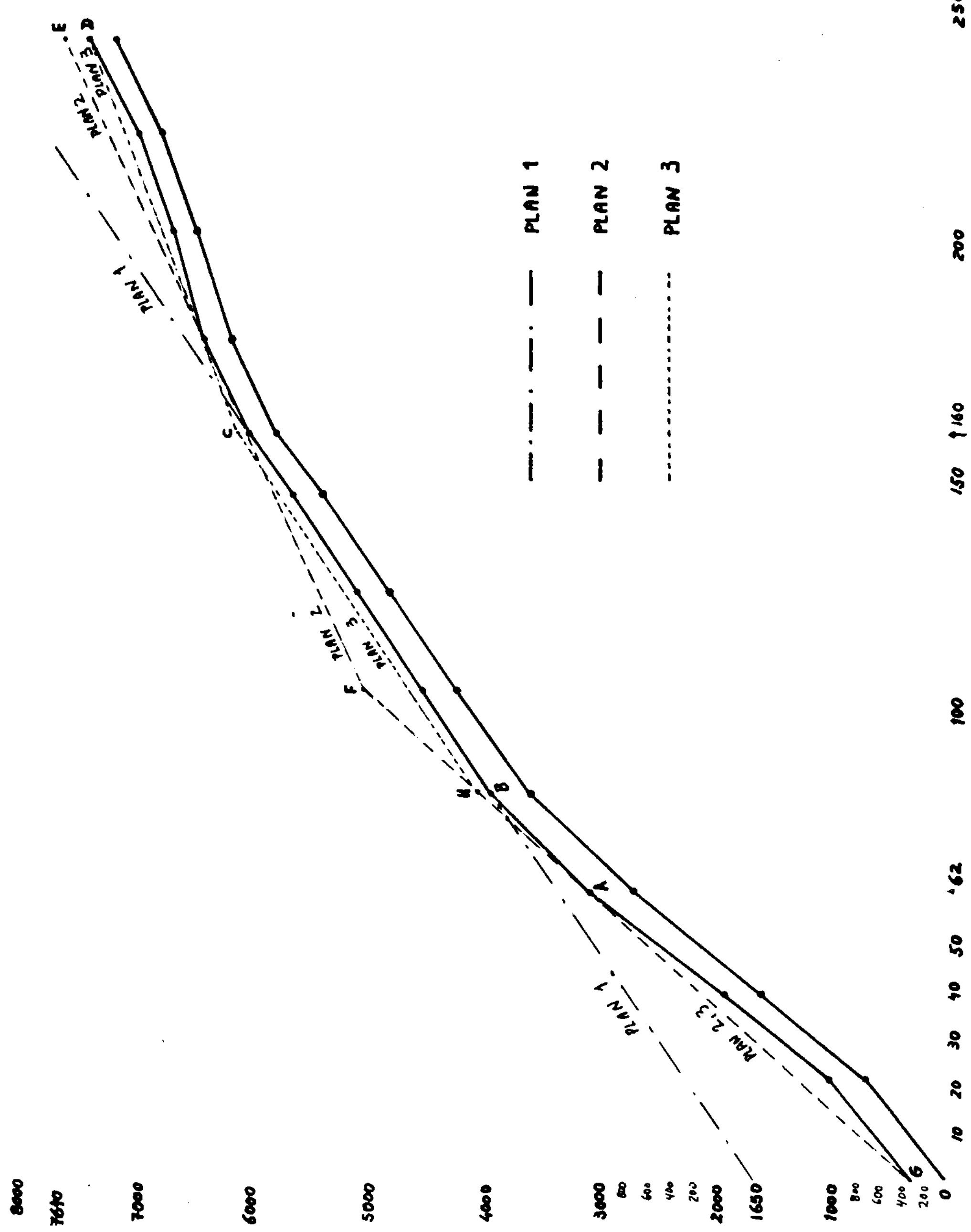
c) Un cambio del nivel de producción de 1 unidad/dia conduce a un costo adicional de contratación y entrenamiento o de despidos igual a $ 2,000.00

d) Las unidades producidas con tiempo extra cuestan $ 20.00 más.

e) Las unidades producidas a través de subcontratación cuestan $ 25.00 más.

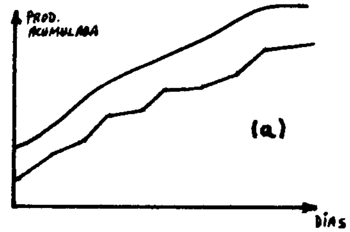
f) Al terminar el mes de diciembre del año anterior, el inventario era de 300 unidades y la planta estaba trabajando a su nivel normal de producción, o sea, 30 unidades/dia.

7. A continuación mostramos la gráfica representativa de los volúmenes de venta acumulados y de los inventarios mínimos requeridos:

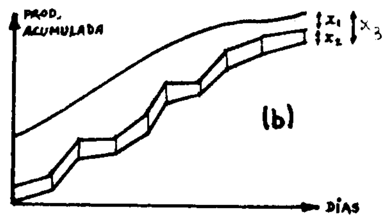


8. Antes de continuar, será conveniente que hagamos algunos ejercicios sobre el tipo de gráfica que hemos presentado en la página anterior:

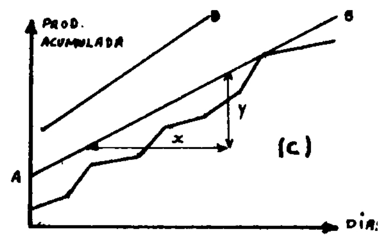
a) Cualquier línea diseñada por encima de la línea representativa de los volúmenes de **ventas** y de los inventarios mínimos requeridos, representará una solución para el problema de planeación agregada.



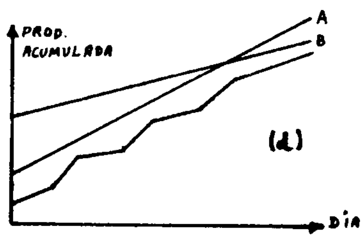
b) El inicio de la línea muestra el inventario inicial requerido para que la solución sea posible. Las distancias entre los puntos finales indican el inventario final total (x_3), que es la suma del inventario mínimo (x_2) y del inventario extra innecesario.(x_1).



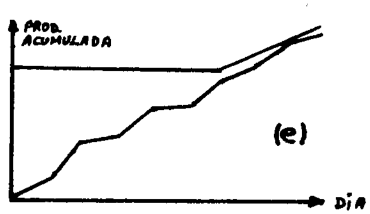
c) Una línea recta (ejemplo, AB) representa una tasa de producción constante. La producción normal puede ser representada por una determinada inclinación "D". Cualquier línea paralela a la dirección "D" representará una solución en la cual la tasa de producción será normal. La tasa de producción representado por cualquier línea recta puede ser calculado dividiéndose "y" (número de productos producidos en un dado período) entre "x" (número de dias).



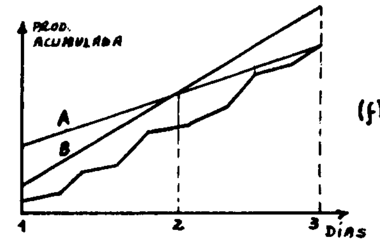
d) Una línea con mayor inclinación representa una tasa de producción mayor. Por ejemplo, la tasa de "A" es mayor que la tasa de "B". Es importante señalar que el inventario inicial de "B" compensa su menor tasa de producción.



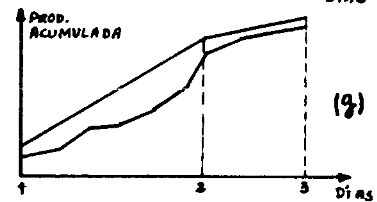
e) Una líneá horizontal significa que durante el período no habrá producción y por lo tanto se necesita un inventario inicial muy grande para que la solución sea factible.



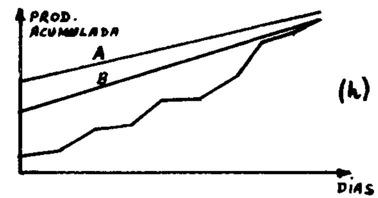
f) Cuando una línea está por encima de otra, esto significa que durante el período considerado los inventarios del plan representado por la línea de arriba son mayores que los inventarios del plan que correspobde a la línea de abajo. Entre los puntos "1" y "2", el plan "A" conduce a mayores inventarios y entre "2" y "3" el plan "B" conduce a mayores inventarios.



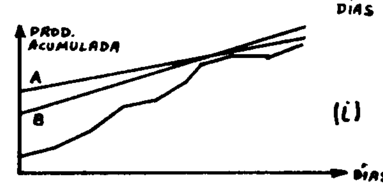
g) Un cambio en el grado de la línea representa un cambio de la tasa de producción. La tasa entre "1" y "2" es mayor que entre "2" y "3".



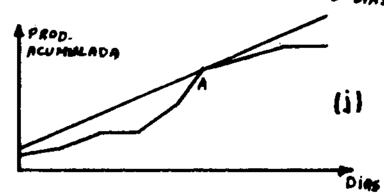
h) Una línea que está siempre arriba de otra conduce a un inventario anual promedio mayor.



i) Cuando dos líneas se cruzan no se puede decir cual plan conduce o un inventario promedio anual mayor. Para saberlo, tendríamos que calcular los inventarios correspondientes a los dos planes.



j) Si la línea representativa de una solución pasa por un punto de la línea representativa de los volúmenes requeridos y inventarios mínimos, esto significa que en este punto el inventario resultante del plan propuesto es igual al inventario mínimo. Por ejemplo, el inventario resultante en "A" es igual al inventario mínimo requerido.



9. Volviendo al problema de la Empresa "X", analizaremos 3 soluciones alternativas: PLAN 1 , PLAN 2 y PLAN 3.

PLAN 1

La línea representativa del PLAN 1 pasa por los puntos "B" y "C" de la gráfica y representa una tasa de producción diaria fija durante todo el año. Para que esta solución sea factible, se necesita un inventario inicial de 1650 unidades (este valor es sacado de la gráfica).

Puesto que la línea pasa por el punto "B", su grado (tasa de producción) puede ser calculado como sigue:

$$T.P. = \frac{\text{diferencia vertical}}{\text{diferencia horizontal}} = \frac{3,940 - 1650}{83 - 0} = 27.6$$

Puesto que necesitamos un valor exacto para la tasa de producción diaria, éste deberá ser mayor de 27.6 y nunca menor, porque si no los inventarios resultantes serían menores que los inventarios mínimos requeridos. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{T.P.} = 28 \text{ unidades/dia}}$$

A continuación presentamos un cuadro que proporciona el programa anual de producción si se adopta el PLAN 1:

Mes	Producción requerida	Inventario resultante	Dias	Producción diaria	Producción mensual	Inv. min.
Diciembre	-	1650	--	--	--	--
Enero	700	1566	22	28	616	300
Febrero	900	1170	18	28	504	340
Marzo	1100	686	22	28	616	375
Abril	900	374	21	28	588	340
Mayo	650	340	22	28	616	290
Junio	600	328	21	28	588	275
Julio	550	366	21	28	588	265
Agosto	400	330	13	28	364	230
Septiembre	400	490	20	28	560	230
Octubre	300	834	23	28	644	195
Noviembre	300	1122	21	28	588	195
Diciembre	400	1282	20	28	560	230
TOTAL	7200	---	244	--	6832	--

Por lo tanto, los costos de esta solución (PLAN 1) serán los siguientes:

a) Costo debido a cambios del nivel de producción:

Producción inicial: 30 unid./dia
Producción del plan: 28 unid./dia

Diferencia: 2 unidades

Costo= 2 unid. x \$ 2,000/unid.

$$\boxed{\text{Costo} = \$\ 4,000.00}$$

b) Costo del inventario:

El costo de mantener el inventario será igual al inventario medio anual multiplicado por el costo de mantener, que en este caso es \$ 240.00 por unidad por año.

El inventario medio anual puede ser estimado calculándose el promedio aritmético de la columna correspondiente al inventario resultante (véase el cuadro de la página anterior). Otra manera más precisa sería la siguiente:

El inventario medio de cada mes es la semi-suma de los inventarios final e inicial. Por ejemplo, para el mes de enero tenemos:

Inv. Inicial: 1650
Inv. Final: 1566

Inv. medio (1650 + 1566)/2 = 1608

Para los doce meses tenemos:

MES	I.I.	I.F.	I.M.	DIAS	I.M. x DIAS
Enero	1650	1566	1608	22	35,376
Febrero	1566	1170	1368	18	24,624
Marzo	1170	686	928	22	20,416
Abril	686	374	530	21	11,130
Mayo	374	340	357	22	7,854
Junio	340	328	334	21	7,014
Julio	328	366	347	21	7,287
Agosto	366	330	348	13	4,524
Septiembre	330	490	410	20	8,200
Octubre	490	834	662	23	15,226
Noviembre	834	1122	978	21	20,538
Diciembre	1122	1282	1202	20	24,040
TOTAL	--	--	--	244	186,229

I.I.= Inv. Inicial
I.F.= Inv. Final
I.M.= Inv. Medio

Finalmente, el inventario medio anual será la media ponderada de los inventarios medios mensuales y los pesos serán los dias laborables de cada mes. Por lo tanto tenemos:

Inv. medio anual = 186,229 ÷ 244 = 763

Y el costo de mantener dicho inventario será:

Costo anual = 763 unid. x \$ 240 = \$ 183,120.00

$$\boxed{\text{Costo anual} = \$\ 183,120.00}$$

c) Costo del tiempo extra:

(No se trabajará tiempo extra)

d) Costo de la subcontratación:

(No habrá subcontratación)

9. Segunda solución alternativa (PLAN 2)

Como se puede observar en la gráfica, esta solución presenta dos tasas de producción diferentes: una entre los puntos "G" y "A" y otra entre los puntos "F" y "E". Sugerimos este cambio en la tasa de producción, para que podamos seguir más de cerca las fluctuaciones de las ventas, reduciendo así el inventario medio anual.

La tasa de producción entre los puntos "G" y "A" es la siguiente:

$$T.P. = \frac{\text{Diferencia vertical}}{\text{Diferencia horizontal}} = \frac{3075 - 300}{62 - 0} = 44.7$$

Por lo tanto:

$\boxed{T.P. = 45 \text{ unid./dia.}}$

Analogamente, la tasa de producción entre "F" y "E" puede ser calculada como sigue:

$$T.P. = \frac{\text{Diferencia vertical}}{\text{Diferencia horizontal}} = \frac{2600}{139} = 18.7$$

Y por lo tanto adoptaremos la siguiente tasa:

$\boxed{T.P. = 19 \text{ unid./dia.}}$

Finalmente, el programa de producción resultante si se adopta el PLAN 2 será el siguiente:

Mes	Prod. req.	Inv. res.	Dias	Prod.normal		Prod. extra		Prod. sub.		Total
				Tasa	Total	Tasa	Total	Tasa	Total	
Diciembre	---	300	--	--	---	-	---	-	---	---
Enero	700	590	22	30	660	6	132	9	198	990
Febrero	900	500	18	30	540	6	108	9	162	810
Marzo	1100	390	22	30	660	6	132	9	198	990
Abril	900	435	21	30	630	6	126	9	189	945
Mayo	650	775	22	30	660	6	132	9	198	990
Junio	600	574	21	19	399	-	---	-	---	399
Julio	550	423	21	19	399	-	---	-	---	399
Agosto	400	270	13	19	247	-	---	-	---	247
Septiembre	400	250	20	19	380	-	---	-	---	380
Octubre	300	387	23	19	437	-	---	-	---	437
Noviembre	300	496	21	19	399	-	---	-	---	399
Diciembre	400	466	20	19	380	-	---	-	---	380
TOTAL	7200	-	244	--	5791	-	630	-	945	7366

Consecuentemente, los costos de esta solución alternativa son los siguientes:

a) Costo debido a cambios de la tasa de producción:

Producción entre "G" y "F" (normal) = 30 unid./dia

Producción entre "F" y "E" = 19 unid./dia

Diferencia = 11 unidades

Costo = 11 x \$ 2,000

$\boxed{\text{Costo } \$\ 22{,}000.00}$

b) Costo del inventario:

Inventario medio = 458 unid.

Costo anual = 458 unid. x \$ 240/unid.

$\boxed{\text{Costo anual} = \$\ 109{,}920.00}$

c) Costo del tiempo extra:

Unid. producidas con tiempo extra = 630

Costo = 630 unid. x \$ 20/unid.

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 12{,}600.00}$

d) Costo de la subcontratación:

Unid. producidas a través de subcontratación = 945

Costo = 945 unid. x \$ 25/unid.

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 23{,}625.00}$

10. Tercera solución alternativa (PLAN 3)

Esta solución presenta 3 tasas de producción diferentes durante el periodo de planeación. La primera tasa ya fue calculada para el PLAN 2 y es igual a 45 unid./dia.

La segunda tasa es la siguiente (entre el 83^{o} dia y el 160^{o} dia):

$$T.P. = \frac{6160 - 4040}{160 - 83} = \frac{2120}{77}$$

$\boxed{T.P. \quad 28 \text{ unid./dia}}$

Finalmente, la tercera tasa será (entre el 160^{o} dia y el 244^{o} dia):

$$T.P. = \frac{7430 - 6160}{244 - 160} = \frac{1270}{84} = 15.1$$

Por lo tanto:

$\boxed{T.P. = 16 \text{ unid./dia}}$

Observación: En este caso será conveniente utilizar también el valor ... T.P. = 15 unid./dia, puesto que las otras dos tasas son mayores que los valores calculados y consecuentemente, aunque utilizemos el valor T.P. = 15 para la última tasa, los inventarios resultantes serán todavía mayores que los inventarios mínimos.

El programa de producción que resultaría con la aplicación del PLAN 3, es el siguiente:

	Prod. req.	Inv. res.	Dias	Prod. normal Tasa	Prod. normal Total	Prod. extra Tasa	Prod. extra Total	Prod. sub. Tasa	Prod. sub. Total	Total
Diciembre	---	300	--	--	---	-	---	-	---	---
Enero	700	590	22	30	660	6	132	9	198	990
Febrero	900	500	18	30	540	6	108	9	162	810
Marzo	1100	390	22	30	660	6	132	9	198	990
Abril	900	435	21	30	630	6	126	9	189	945
Mayo	650	401	22	28	616	-	---	-	---	616
Junio	600	389	21	28	588	-	---	-	---	588
Julio	550	427	21	28	588	-	---	-	---	588
Agosto	400	391	13	28	364	-	---	-	---	364
Septiembre	400	311	20	16	320	-	---	-	---	320
Octubre	300	379	23	16	368	-	---	-	---	368
Noviembre	300	415	21	16	336	-	---	-	---	336
Diciembre	400	335	20	16	320	-	---	-	---	320
TOTAL	7200	--	244	--	5990	-	498	-	747	7235

Y los costos resultantes serán:

a) Costo debido a cambios en la tasa de producción:

Primer cambio:

Producción entre "G" y "H" (normal) = 30 unid./dia

Producción entre "H" y "C" = 28 unid./dia

Diferencia = 2 unidades

Costo = 2 x $ 2,000

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 4,000.00}$

Segundo cambio:

Producción entre "H" y "C" = 28 unid./dia

Producción entre "C" y "D" = 16 unid./dia

Diferencia = 12 unidades

Costo = 12 x $ 2,000

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 24,000.00}$

Costo total de los cambios:

Costo total = $ 24,000 + $ 4,000

$\boxed{\text{Costo total} = \$\ 28,000.00}$

b) Costo del inventario:

Inventario medio = 413

Costo = 413 x $ 240

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 99,120.00}$

c) Costo del tiempo extra:

Unidades producidas con tiempo extra: 498

Costo 498 x $ 20

$\boxed{\text{Costo}\ \ \$\ 9,960.00}$

d) Costo de la subcontratación:

Unidades producidas a través de subcontratación: 747

Costo = 747 x $ 25

$\boxed{\text{Costo} = \$\ 18,675.00}$

t. COMPARACION ENTRE LOS 3 PLANES

Finalmente, presentamos un resumen de los costos resultantes de cada una de las soluciones alternativas estudiadas. Para que sea posible una comparación entre los costos adicionales debido a cada PLAN, será necesario restar de los costos del inventario obtenidos, los costos correspondientes a los inventarios mínimos:

Promedio de los inventarios mínimos: 276

Costo de los inventarios mínimos: 276 x $ 240 = $ 66,240

Costos adicionales correspondientes a los 3 planes:

PLAN 1: $ 183,120 - 66,240 = $ 116,880

PLAN 2: $ 109,920 - 66,240 = $ 43,680

PLAN 3: $ 99,120 - 66,240 = $ 32,880

COSTOS	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3
Inventarios	116,880	43,680	32,880
Cambios T.P.	4,000	22,000	28,000
Tiempo extra	---	12,600	9,960
Subcontratación	---	23,000	18,675
TOTAL	120,880	101,280	89,515

Por lo tanto, la mejor solución es el PLAN 3 con un costo adicional total de $ 89,515.00.

VII - BALANCEO DE LINEAS

La situación más elemental de balanceamiento de línea, y sin embargo la que se encuentra por todas partes, es donde varios operarios, cada uno llevando a cabo operaciones consecutivas, trabajan como una sola unidad. En tal situación, es obvio que la tasa de producción a través de la línea depende del operador más lento. Por ejemplo, tenemos una línea de cinco operadores ensamblando montaduras de caucho, antes del proceso de curación. Las asignaciones específicas de trabajo podrían ser del modo siguiente: Operador 1: 0.52 minutos; Operador 2: 0.48 minutos; Operador 3: 0.65 minutos; Operador 4: 0.41 minutos; Operador 5: 0.55 minutos. El Operador número 3 establece el ritmo como se muestra a continuación:

Operario	Minutos Estándar para ejecutar la operación (M.E.)	Tiempo de espera basado en el operario más lento	Minutos Asignados (M.A.)
1	0.52	0.13	0.65
2	0.48	0.17	0.65
3	0.65	--	0.65
4	0.41	0.24	0.65
5	0.55	0.10	0.65
	2.61		3.25

La eficiencia de esta línea puede calcularse como la relación entre el total de minutos estándares y el total de minutos asignados, o sea:

$$E = \frac{\sum_{1}^{5} M.E.}{\sum_{1}^{5} M.A.} \times 100 = \frac{2.61}{3.25} \times 100 = 80\%$$

en donde:

E = Eficiencia

M.E. = Minutos estándar por operación

M.A. = Minutos asignados por operación

Es evidente que una situación parecida, en la vida real, proporcionaría ahorros muy significativos, ya que si pudiéramos ahorrar 0.10 minutos en el caso del operador 3, los ahorros netos por ciclo no serían 0.10 minutos, sino 0.10 x 5, o sea, 0.50 minutos.

También es importante señalar que sólo en circunstancias excepcionales puede una línea estar perfectamente balanceada, esto es, cuando los minutos estándar para ejecutar las operaciones fueran idénticos para todos los operadores.

El total de minutos asignados para producir una unidad será igual a la suma de los minutos estándar requeridos por el recíproco de la eficiencia, es decir:

$$\sum M.A. = \sum M.E. \times 1/E$$

Es pues evidente que el número de operarios requeridos es igual a la tasa requerida de producción, por el total de minutos asignados:

$$N = P \times \sum M.A.$$

donde:

N = Número de hombres requeridos en la línea

P = Tasa de producción deseada (en unidades por minuto)

Por ejemplo, supongamos que tenemos un nuevo diseño para el que debemos establecer una línea de ensamble. Hay ocho distintas operaciones que ejecutar y la línea tiene que producir 700 unidades por día. Las ocho operaciones involucran los siguientes minutos estándares, basados en datos estándares ya existentes: Operación 1: 1.25 minutos; Operación 2: 1.38 minutos; Operación 3: 2.58 minutos; Operación 4: 3.84 minutos; Operación 5: 1.27 minutos; Operación 6: 1.29 minutos; Operación 7: 2.48 minutos; Operación 8: 1.28 minutos. El analista desea planear esta línea de ensamble del modo más económico.

El primer paso consistirá en encontrar el número de operarios necesario para cada una de las operaciones.

Puesto que se requieren 700 unidades por día, será necesario producir cada unidad en 0.685 minutos (480/700). Podemos encontrar cuántos operarios se necesitarán para cada operación, dividiendo los minutos estándares de cada operación entre el número de minutos que se necesitan para producir una unidad. Por ejemplo, el número de operarios para la Operación 1 es: 1.25 ÷ 0.685 = 1.82 = 2. Para las demás operaciones, tenemos:

Operación	Minutos Estándar	Minutos estándar entre minutos por unidad	No. de Operarios
1	1.25	1.82	2
2	1.38	2.01	2
3	2.58	3.77	4
4	3.84	5.62	6
5	1.27	1.86	2
6	1.29	1.89	2
7	2.48	3.62	4
8	1.28	1.87	2
Total	15.37		24

Para determinar cuál operación es la más lenta, dividimos los minutos estándares para cada una de las operaciones, entre el número corres -

pondiente de operarios:

Operación	Minutos estándar entre No. de operarios		Operación	Minutos estándar entre No. de operarios	
1	1.25/2	0.625	5	1.27/2	0.635
2	1.38/2	0.690	6	1.29/2	0.645
3	2.58/4	0.645	7	2.48/4	0.620
4	3.84/6	0.640	8	1.28/2	0.640

La Operación 2 determinará la producción de la línea que, en este cas será:

$$\frac{2 \text{ hombres} \times 60 \text{ min.}}{1.38 \text{ minutos estan.}} = 87 \text{ piezas por hora o } 696/\text{dia.}$$

La eficiencia de esta línea podrá ser calculada de la siguiente maner

Hemos visto que $N = P \times \sum M.A. = P \times \sum M.E./E$. Despejando la eficiencia, tenemos:

$$E = P \times \sum M.E./N$$

Sustituyendo, tenemos:

$$E = \frac{700}{480} \cdot 15.37 / 24 = 0.9339$$

$$E = 93.4\%$$

Finalmente, vale la pena resaltar que si la tasa de producción de la línea, es decir 696 piezas por dia, resultara inadecuada, tendríamos que aumentar la tasa de producción de la Operación 2 , lo que puede lograrse así:

1. Haciendo que uno o los dos operarios trabajen tiempo extra para acumular piezas en la estación de trabajo.

2. Utilizando los servicios de un tercer hombre (a tiempo parcial), en la estación de trabajo de la Operación 2.

3. Asignando algo del trabajo de la Operación 2 a la Operación 1, o a la Operación 3. Será preferible asignárselo a la Operación 1.

4. Mejorando el método de la Operación 2, para disminuir el ciclo de la operación.

Balanceo de líneas: el método de Kilbridge y Wester (*)

El procedimiento del método de Kilbridge y Wester se puede describir mejor mediante un ejemplo como él que define el diagrama de precedencia de la Figura 7.1., que resume los requerimientos tecnológicos de la secuencia. Los números dentro de los círculos representan las operaciones y los números pequeños que se ven fuera de los círculos, los tiempos de las operaciones en centésimas de minuto.

En la columna I del diagrama anotamos todas las operaciones de trabajo que no necesitan seguir a otras operaciones. Las operaciones que sigan inmediatamente se anotan en las columnas II, III, etc, observando las relaciones de precedencia. Adviértase que todas las operaciones se encuentran situadas hacia la izquierda, tan lejos como lo permiten las restricciones de secuencia. La suma de todos los tiempos de las operaciones es 552, y teóricamente se puede obtener un balance perfecto con un tiempo de ciclo de c = 552/3 = 184, o sea 3 estaciones. Describiremos el procedimiento suponiendo que el objetivo es balancear la línea perfectamente con tres estaciones y un tiempo de ciclo de 184.

En el Cuadro 7.1. hemos resumido la Figura 7.1. en una forma tabular más útil. La información nueva más importante del Cuadro 5.1. se encuentra en la columna (C), que resume la flexibilidad de asignación de las operaciones a las columnas del diagrama de precedencia. Por ejemplo, para el caso de la operación 39, la observación II, ..., XI significa que ésta podría moverse a la derecha, a cualquiera de las columnas del diagrama de precedencia hasta la columna XI, sin cambiar la precedencia básica de las relaciones. Esta flexibilidad para mover las operaciones horizontalmente será útil en el procedimiento que sigue. Advertimos que algunas tareas aparecen en la columna (B) del Cuadro 5.1. con alguna notación. Por ejemplo, la operación No. 3 aparece con la notación (w. 5, 9). Con esto se quiere decir que la operación en cuestión puede moverse horizontalmente por el diagrama de precedencia, sólo si las tareas asociadas se mueven delante de ella. Por lo tanto, la operación 3 se puede mover a la derecha solamente si las tareas 5 y 9 se mueven delante de ella.

Otros datos importantes del Cuadro 7.1. son las duraciones de las operaciones por columnas del diagrama de precedencia original que aparecen en la columna (E) y las sumas de tiempos acumulados que aparecen en la columna (F). Dada toda esta información, procedemos como sigue:

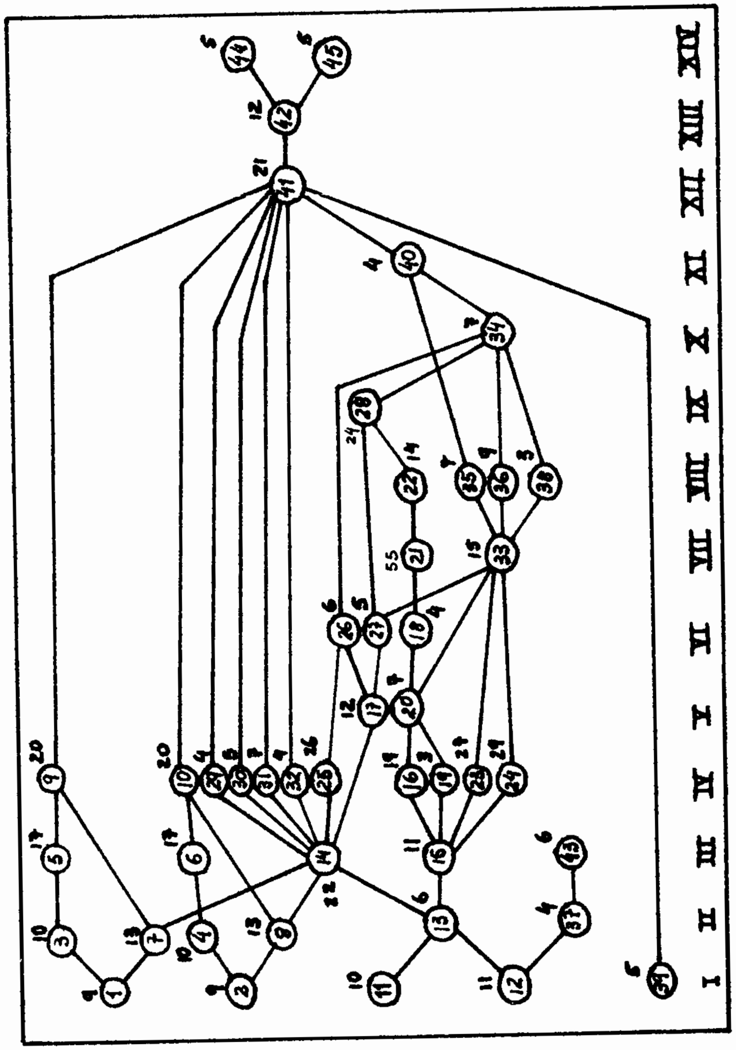
Paso 1. Dado que c = 184, examinemos la columna (F) del Cuadro 7.1. para encontrar la suma acumulada que más se aproxime a 184. La suma acumulada de la columna III, de 173, se aproxima. Los tiempos de las operaciones de las columnas I, II y III no satisfacen las necesidades de la estación 1 por sólo 184 - 173 = 11 unidades de tiempo.

Paso 2. Examinamos los tiempos de las operaciones de la columna IV . ¿Hay alguna combinación de tiempos de las operaciones que sume exactamente 11? Sí, las operaciones 31 y 32 tienen tiempos de 7 y 4, respectivamente.

Paso 3. Movemos las operaciones 31 y 32 a la parte superior de la lista de operaciones de la columna IV, asignándolas así a la estación 1.

(*) Tomado de Kilbridge y Wester, "A Heuristic Method of Assembly Line Balancing", Industrial Engineering, vol. 12, No. 4, 1961.

FIGURA 7.1.
Diagrama de precedencia para las operaciones. Tomado de Kilbridge y Wester, "A Heuristic Method of Assembly Line Balancing", Industrial Engineering, Vol. 12, No. 4, 1961.



Ahora todas las operaciones de las columnas I, II y III, más las operaciones 31 y 32 de la columna IV, están asignadas a la estación 1. El estado de la solución aparece en el Cuadro 7.2..

Paso 4. Examinamos la columna (F) del Cuadro 7.2. para encontrar la suma acumulada que más se aproxime a 2 x 184 = 368. La suma acumulada de la columna VI es 371.

Paso 5. Examinamos la lista de operaciones no asignadas (columnas V y VI y parte de la columna IV) que se pueden mover horizontalmente hasta la columna VI o a cualquer otra más allá de ésta. Son las operaciones 9, 10, 29, 30, 25(w. 26), 23, 24 y 26.

Paso 6. ¿Hay alguna combinación de tiempos de las operaciones mencionadas que totalice 371 - 368 = 3? No.

Paso 7. Aumentamos el número de la columna del paso 4 y repetimos el procedimiento. La suma acumulada de la columna VII es 441.

Paso 8. Examinamos la lista de operaciones no asignadas (columnas V, VI y VII y parte de la columna IV) que se pueden mover horizontalmente hasta la columna VII o a cualquer otra más allá de ésta. Son las operaciones 9, 10, 29, 30, 25(w. 26), 26 y 33 (w. 35, 36, 38).

Paso 9. ¿Hay alguna combinación de tiempos de las operaciones movibles que totalice 441 - 368 = 73? No.

Paso 10. Aumentamos el número de columna del paso 7 y repetimos el procedimiento. La suma acumulada de la columna VIII es 474.

Paso 11. Examinamos la lista de las operaciones no asignadas (columnas V, VI, VII y VIII y parte de la columna IV) que se pueden mover horizontalmente hasta la columna VIII o a cualquer otra más allá de ésta. Son las operaciones 9, 10, 29, 30, 25(w. 26), 26, 33(w. 35, 36, 38), 35, 36 y 38.

Paso 12. ¿Hay alguna combinación de tiempos de las operaciones movibles que totalice 474 - 368 = 106; o a la inversa, dado que el tiempo total de las operaciones del cojunto movible suma 115, ¿ hay alguna combinación en el conjunto movible que totalice 115 - 106 = 9 y que pueda ser conservada en la estación 2? Sí la hay: los tiempos de las operaciones 29 y 30 son 4 + 5 = 9 y el resto de estas operaciones movibles tiene un tiempo total de 106.

Paso 13. Movemos las operaciones 9, 10, 25(w. 26) y 33 (w. 35, 36, 38) más allá de la columna VIII. La estación 2 se compone ahora de las operaciones de las columnas IV (sin incluir 31 y 32), V, VI, VII y de la operación 22 de la columna VIII.

Paso 14. La estación 3 se compondrá de las operaciones restantes no asignadas cuyos tiempos suman también 184. La asignación final aparece en el Cuadro 7.3 y en el diagrama de precedencia de la Figura 7.2.

El procedimiento de 14 pasos que acabamos de describir no es general, sino específico de la explicación de este ejemplo. Kilbridge y Wester ofrecen las siguientes generalizaciones y sugestiones como auxiliares en la aplicación de su método heurístico:

1. Se utiliza la permutabilidad entre columnas para facilitar la selección de operaciones de la duración deseada para un agrupamiento óptimo de las estaciones de trabajo. La movilidad lateral ayuda a colocar las operaciones en las estaciones de la línea de ensamble, para que

CUADRO 7.1.
Representación tabular del diagrama de precedencia de la Figura 5.1.

(A) Número de columna del diagrama	(B) Número de identificación de la operación	(C) Observaciones	(D) Duración de las operaciones t_i	(E) Suma de las duraciones	(F) Suma de los tiempos acumulados
I	1		9		
	2		9		
	11		10		
	12		11		
	39	II, ..., XI	5	44	44
II	3(w. 5,9)	III, ..., IX	10		
	7		13		
	4(w.6,10)	III, ..., IX	10		
	8		13		
	13		6		
	37(w. 43)	III, ..., XIII	4	56	100
III	5(w. 9)	IV, ..., X	17		
	6(w. 10)	IV, ..., X	17		
	14		22		
	15		11		
	43	IV, ..., XIV	6	73	173
IV	9	V, ..., XI	20		
	10	V, ..., XI	20		
	29	V, ..., XI	4		
	30	V, ..., XI	5		
	31	V, ..., XI	7		
	32	V, ..., XI	4		
	25(w. 26)	V, ..., VIII	26		
	16		19		
	19		3		
	23	V, VI	27		
	24	V, VI	29	164	337
V	17		12		
	20		7	19	356
VI	26	VII, ..., IX	6		
	27		5		
	18		4	15	371
VII	21		55		
	33(w.35,36,38)	VIII	15	70	441
VIII	22		14		
	35	IX, X	7		
	36	IX	9		
	38	IX	3	33	474
IX	28		24	24	498
X	34		7	7	505
XI	40		4	4	509
XII	41		21	21	530
XIII	42		12	12	542
XIV	44		5		
	45		5	10	552

Fuente: Kilbridge y Wester, "A Heuristic Method of Assembly Line Balancing", Industrial Engineering, Vol. 12, No. 4, 1961.

CUADRO 7.2.
Cuadro .1. modificado tras de la asignación de operaciones a la estación 1, únicamente.

(A) Número de columna del diagrama	(B) Número de identificación de la operación	(C) Observaciones	(D) Duración de las operaciones t_i'	(E) Suma de las duraciones	(F) Suma de los tiempos acumulados
I	1		9		
	2		9		
	11		10		
	12		11		
	39		5		
II	3		10		
	7		13		
	4	ESTACION 1.	10		
	8		13		
	13		6		
	37		4		
III	5		17		
	6		17		
	14		22		
	15		11		
	43		6		
IV	31		7		
	32		4	184	184
	9	V, ..., XI	20		
	10	V, ..., XI	20		
	29	V, ..., XI	4		
	30	V, ..., XI	5		
	25(w. 26)	V, ..., VIII	26		
	16		19		
	19		3		
	23	V, VI	27		
	24	V, VI	29	153	337
V	17		12		
	20		7	19	356
VI	26	VII, ..., IX	6		
	27		5		
	18		4	15	371
VII	21		55		
	33(w.35,36,38)	VIII	15	70	441
VIII	22		14		
	35	IX, X	7		
	36	IX	9		
	38	IX	3	33	474
IX	28		24	24	498
X	34		7	7	505
XI	40		4	4	509
XII	41		21	21	530
XIII	42		12	12	542
XIV	44		5		
	45		5	10	552

CUADRO 7.3.
Cuadro .2. modificado tras la asignación de las operaciones a las tres estaciones.

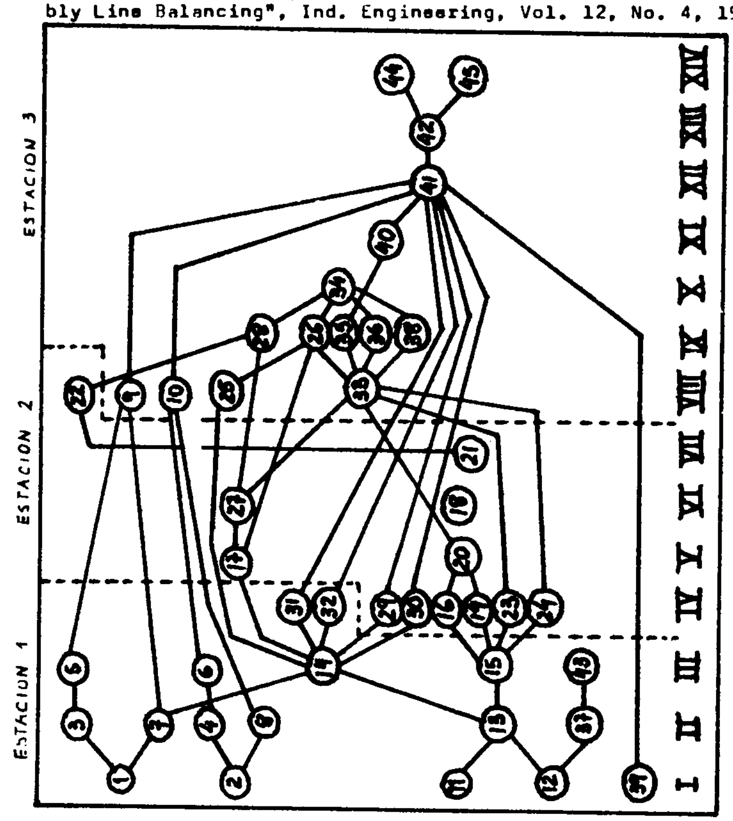
(A) Número de columna del diagrama	(B) Número de identificación de la operación	(C) Observaciones	(D) Duración de las operaciones t_i	(E) Suma de las duraciones	(F) Suma de los tiempos acumulados
I	1		9		
	2		9		
	11		10		
	12		11		
	39		5		
II	3		10		
	7		13		
	4		10		
	8		13		
	13	ESTACION 1	6		
	37		4		
III	5		17		
	6		17		
	14		22		
	15		11		
	43		6		
IV	31		7		
	32		4	184	184
	29		4		
	30		5		
	16		19		
	19		3		
	23	ESTACION 2	27		
	24		29		
V	17		12		
	20		7		
VI	27		5		
	18		4		
VII	21		55		
VIII	22		14	184	368
	9		20		
	10		20		
	25		26		
	33		15		
IX	28		24		
	26		6		
	35		7		
	36	ESTACION 3	9		
	38		3		
X	34		7		
XI	40		4		
XII	41		21		
XIII	42		12		
XIV	44		5		
	45		5	184	552

puedan ser utilizadas donde sirvan mejor a la solución del agrupamiento.

2. Generalmente las soluciones no son únicas. Las operaciones asignadas a una estación se pueden permutar generalmente dentro de la columna. Esto da al supervisor de línea cierta flexibilidad para alterar la secuencia de las operaciones, sin perturbar el balance óptimo.

3. Si es posible, hay que disponer primero de las operaciones de larga duración. Por lo tanto, si se puede escoger entre la asignación de una operación de duración 20, por ejemplo, y la asignación de dos operaciones de duración 10 cada una, asígnese primero la operación de mayor duración. Los elementos de menor duración se guardan para mayor facilidad de manipulación al final de la línea.

FIGURA 7.2.
Diagrama de precedencia equilibrado con tres estaciones.
Tomado de Kilbridge y Wester, "A Heuristic Method of Assembly Line Balancing", Ind. Engineering, Vol. 12, No. 4, 1961.



VIII-PROGRAMACION DE SISTEMAS PRODUCTIVOS

INTRODUCCION

La programación de los sistemas productivos es un campo donde hay problemas intrigantes así como soluciones muy interesantes. El tema no ha recibido hasta hoy la atención que merece y el material que ha sido publicado es generalmente parte de trabajos que se dedican principalmente a otros temas.

Los problemas de programación son en general extremadamente complejos , principalmente cuando se trata de un sistema intermitente. Sin embargo, ya han sido desarrolladas soluciones para algunos tipos de problemas. El objetivo principal de estos apuntes es analizar el problema de programación de la producción de una forma general y discutir más detalladamente aquellos problemas para los cuales ya hay una solución.

Los métodos a discutirse pueden ser aplicados a cualquier sistema productivo, continuo o intermitente, de bienes o de servicios. No analizaremos , por lo tanto, aquellas técnicas que solamente pueden ser aplicadas a un determinado tipo de sistema productivo, como son: Balanceo de Líneas --- (sólo aplicable a sistemas continuas) y Ruta Crítica (sólo aplicable a los grandes proyectos).

1. LOS PROBLEMAS DE SECUENCIACION

Los problemas de secuenciación son muy frecuentes y tenemos que resolverlos, por ejemplo, cuando necesitamos fabricar varios productos en una máquina dada, meter varios programas en una computadora, o atender a varios clientes en un banco.

Es evidente que los problemas de secuenciación siempre son "resueltos", ya que las empresas fabrican sus productos, los programas de computadora son procesados, etc.. Sin embargo, las soluciones generalmente son obtenidos sin un riguroso estudio que garantice que éstos son realmente los más adecuadas.

Frecuentemente los productos o clientes son procesados en la medida que van llegando al sistema y esta "regla de secuenciación" se llama FIFO (first in, first out). Esta regla es aplicable, por ejemplo, para resolver el problema de un banco o de un supermercado, sin embargo, no hay ninguna razón para que creamos que también debe ser aplicada a otros problemas, como por --- ejemplo la fabricación de un determinado número de productos en una planta manufacturera.

Como se verá a continuación, secuencias diferentes generalmente conducen a resultados radicalmente diferentes y consecuentemente, para la determinación de la secuencia ideal de procesamiento, deben definirse precisamente los resultados requeridos.

Vale la pena resaltar que nunca podemos dejar de resolver el problema, ya que de una forma o de otra, tendremos que adoptar una secuencia dada. El problema es, por lo tanto, definir que resultados queremos lograr y que se--cuencia permitirá la realización de éstos.

1.1 Problemas de secuenciación Pura

Inicialmente vale la pena señalar que generalmente se consideran secuenciación y programación como dos problemas diferentes: el primero consta de la determinación de la mejor secuencia para el procesamiento de "n" operaciones en una máquina; y el segundo consta de la determinación simultánea de la secuencia ideal de procesamiento de "n" operaciones en "m" máquinas. En éstos apuntes no haremos esta distinción y utilizaremos los términos se---cuenciación y programación como sinónimos.

En varias situaciones un cambio de secuencia puede afectar no solamente los productos o clientes a procesar, sino también las condiciones en las cuales este procesamiento se llevará a cabo. Por ejemplo, si no utilizamos la regla FIFO en un banco, podemos perder varios clientes y por lo tanto, la deci--sión de utilizar una regla diferente, conducirá no solamente a una secuencia de procesamiento diferente, sino también a un número más reducido de clientes. En otras situaciones, hasta las condiciones del sistema podrán cambiar.

Si nosotros suponemos que el trabajo y las condiciones en que se realizará éste, no dependen de la secuencia adoptada, entonces decimos que el problema es de secuenciación pura. Por ejemplo, si tenemos "n" operaciones Op_1, Op_2 ... Op_n cuyos tiempos de realización son T_1, T_2 ... T_n respectivamente, y si sabemos que las operaciones propiamente dichas y sus respectivos tiempos serán exactamente los mismos para cualquier secuencia adoptada y que las máquinas estarán siempre disponibles, entonces el pro---blema a resolver es de secuenciación pura. El ejemplo clásico de programación donde los tiempos de preparación de las máquinas dependen de la se--cuencia de procesamiento utilizada, no es evidentemente un problema de secuenciación pura.

1.2 Definición del problema de programación

En los problemas de programación sólo nos preocupamos con lo que podemos hacer con las operaciones y no con lo que son realmente estas operaciones. La definición precisa del problema requiere el conocimiento de los valores de los siguiente variables:

a) Número de máquinas de la planta ("m")

b) Número de productos cuya fabricación tenemos que programar ("n") (*).

(*) Como veremos más adelante este dato solamente tiene sentido cuando se trata de un problema estático.

c) Número de operaciones de cada producto ("K")

d) El tiempo para la realización de las operaciones de cada producto, es decir, el tiempo de procesamiento de cada operación ("T_p").

e) El tiempo en el cual cada uno de los productos está listo para ser procesado, es decir, el tiempo en el cual el producto llega al sistema ("T_1").

f) El tiempo en el cual la fabricación del producto tendrá que ser terminado, es decir, el tiempo de entrega ("T_e").

g) El tiempo de preparación de las máquinas para la realización de cada operación. En estos apuntes supondremos que el tiempo de preparación no depende de la secuencia y que "T_p" ya incluye dicho tiempo.

Ejemplo: Supongamos que para el producto "i" las variables descritas anteriormente presentan los siguientes valores:

T_{1i} = 0 días; T_{pi} = 5 días ; T_{ei} = 7 días

Estos datos indican que en el instante $T_{1i} = 0$ podemos empezar a procesar un producto cuyo tiempo de procesamiento total es 5 días y cuya plazo de entrega es 7 días. Si este producto tiene "Ki" operaciones, entonces podemos escribir:

$$T_{pi} = \sum_{j=1}^{Ki} T_{pij}$$

Debemos resaltar que si hay cualquier espera entre una operación y otra, el

producto no será terminado en T_{pi} unidades de tiempo. Si la espera total del producto "i" es "Ei", llamamos tiempo de fabricación a la suma:

$$T_{fi} = T_{pi} + E_i$$

Además de los valores de las variables mencionadas, necesitaremos la siguiente información:

a) En que secuencia las operaciones de cada producto deberán realizarse.

b) La máquina en la cual cada operación deberá ser realizada.

c) El objetivo que se persigue.

Para la resolución de problemas de programación también es necesario establecer algunas restricciones en cuanto al funcionamiento del sistema productivo. En estos apuntes, las restricciones serán las siguientes:

a) Las máquinas estarán siempre disponibles.

b) Las operaciones no pueden ser divididas o combinadas con otras.

c) Cada operación sólo podrá ser realizada en una de las máquinas de la planta.

d) Una vez que se empiece la realización de una operación en una máquina dada, ésta tendrá que ser terminada antes del procesamiento, en esta misma máquina, de cualquier otra operación.

e) El tiempo de preparación de las máquinas no depende de la secuencia de fabricación y este tiempo ya estará incluído en el tiempo de procesamiento de cada operación (T_p).

1.3 Clasificación de los problemas de programación.

Si consideramos toda la información requerida para la definición de los problemas de programación, podemos clasificarlos inicialmente de la siguiente forma:

a) **Problemas estáticos:** son aquéllos en los cuales todos los productos están listos para ser procesados simultáneamente. En estos casos conoceremos el número "n" de productos a fabricar.

b) **Problemas dinámicos:** son aquéllos en los cuales hay un flujo contínuo de productos, que llegan al sistema obedeciendo una determinada distribución probabilística.

Por otro lado, considerando la secuencia según la cual las máquinas son utilizadas para realizar las operaciones de cada producto, los sistemas productivos pueden clasificarse como sigue:

a) **Sistema en secuencia fija:** son aquéllos en los cuales los productos siguen siempre la misma secuencia, es decir, pasan por la máquina 1, después por la 2, etc., hasta que pasan por la máquina "m"

b) **Sistemas de secuencia variable:** son aquéllos en los cuales cada producto requiere una secuencia diferente, en lo que se refiere a la utilización de las máquinas. Por ejemplo, en una planta de 3 máquinas, un producto podrá requerir la secuencia Maq. 1 $\rightarrow$ Maq. 2 $\rightarrow$ Maq. 3 y otro producto la secuencia Maq 2 $\rightarrow$ Maq. 1 $\rightarrow$ Maq. 3.

Debido a las diferentes características que pueden presentar los problemas de programación, será conveniente utilizar una notación del tipo A/B/C/D, donde cada parámetro indicará lo siguiente:

A.- Indica si el problema es estático o dinámico; si el problema es dinámico, "A" representará la distribución probabilística de los tiempos de llegada. Si el problema es estático, "A" representará simplemente el número de productos a fabricar. Por ejemplo, si tenemos que programar la fabricación de "n" productos, entonces $A = n$.

B.- Indica el número de máquinas de la planta. Por lo tanto, si hay "m" máquinas, entonces $B = m$.

C.- Indica si el sistema productivo es de secuencia fija o variable. Si la secuencia es fija, $C = F$, si la secuencia es variable, entonces $C = V$.

D.- Indica el objetivo que se persigue. Por ejemplo, si el objetivo es minimizar el inventario medio en proceso, entonces $D = \bar{I}_p$.

Un ejemplo completo de esta notación sería $20/2/F/\bar{I}_p$ que significa lo siguiente: programar la fabricación de "20" productos, en una planta que posee "2" máquinas y presenta una secuencia fija de fabricación, de modo que se minimice el inventario en proceso medio.

1.4 Objetivos de los programas de producción.

En las secciones anteriores hemos visto que para definir un problema de programación necesitamos establecer el objetivo que se persigue. Este podrá ser cualquiera de los siguientes (o más de uno simultáneamente):

a) Minimizar el tiempo medio de fabricación,

b) Minimizar el inventario medio en proceso,

c) Minimizar el número medio de productos o clientes pendientes.

d) Satisfacer a un mayor número posible de clientes.

e) Satisfacer a los clientes que pagan mejor o compran mayor volumen.

f) Minimizar las pérdidas de materia prima.

g) Minimizar el tiempo de fabricación máximo, es decir el tiempo total para terminar la fabricación de un determinado número de productos.

h) Maximizar la utilización de la maquinaria y/o mano de obra,

i) Minimizar el retraso medio,

j) Minimizar el retraso máximo,

k) Etc., Etc.

Es importante observar la interdependencia o contradicción que existe entre estos objetivos. Por ejemplo:

Si minimizamos el tiempo de fabricación máximo, estamos al mismo tiempo maximizado la utilización de las máquinas;

- Si minimizamos el tiempo medio de fabricación, estaremos también minimizando el número medio de productos pendientes;

- Si maximizamos la utilización de las máquinas, probablemente no minimizaremos el inventario medio en proceso.

- Si minimizamos el tiempo medio de fabricación, probablemente no minimizaremos el retraso máximo.

Los dos últimos ejemplos reforzan la importancia de la definición clara y precisa del objetivo que se persigue, ya que los objetivos pueden ser mutuamente excluyentes y en este caso su realización requerirá sistemas de programación diferentes.

1.5 Costos Relacionados con la Programación de la Producción.

Hay tres tipos principales de costos que son directamente afectados por las decisiones tomadas en el campo de la programación de la producción y que están relacionados con:

a) El inventario en proceso,

b) La utilización de maquinaria y/o mano de obra,

c) La entrega retrasada de los productos.

De una forma general, se puede reducir el costo del inventario en proceso mediante la aplicación de reglas sencillas de programación. Aunque en la --

mayoría de los casos no sea posible minimizar el inventario en proceso y el tiempo medio de fábricación simultáneamente, la reducción de éste generalmente conduce a una reducción de dicho inventario. En algunos casos especiales, la reducción del tiempo medio de fabricación también puede dar a la empresa un mayor fuerza competitiva.

Los costos que dependen del nivel de utilización de la maquinaria y mano de obra están evidentemente relacionados con la eficiencia del programa de producción, ya que de éste dependerá el tiempo de inactividad de la maquinaria y mano de obra. Si el nivel de utilización es bajo, ésto podrá llevar a la necesidad de trabajar tiempo extra o turnos adicionales, lo que representará también un aumento de los costos. Para algunos problemas especiales ya existen sistemas de programación que permiten una maximización de la utilización, sin embargo generalmente es más difícil aumentar dicha utilización que reducir el inventario medio en proceso.

En varias situaciones y especialmente cuando se trata de grandes proyectos, los costos relacionados con entregas atrazadas pueden ser fácilmente identificados y calculados. Por ejemplo, la empresa podrá tener que pagar "x" pesos por día de retraso en la entrega de un proyecto dado. En los demás sistemas productivos, estos costos no son fácilmente calculables, ya que dependen de la insatisfacción de los clientes y ésta es muy difícil de cuantificar. Sin embargo es importante tener en mente que estos costos existen y que en varias situaciones pueden ser más importantes que los costos relacionados con el inventario en proceso o la utilización de la maquinaria y mano de obra.

2.- PROGRAMACION DE LA FABRICACION DE "N" PRODUCTOS EN "UNA" MAQUINA.

2.1. Introducción.

En este capítulo analizaremos el caso especial de la programación de "n" productos que requieren una sola operación en la única máquina que tiene la planta. Utilizando la notación descrita anteriormente, es decir A/B/C/D, y suponiendo que el objetivo que se persigue fuera minimizar el inventorio medio en proceso, la descripción del problema sería: $n/1/F/\bar{I}_p$

Supondremos que las restricciones descritas en la pág. 94 se aplican a este problema, y utilizaremos la siguiente notación:

m = número de máquinas = 1

n = número de productos

K = número de operaciones de cada producto = 1

T_l = tiempo de llegada de los productos = 0

T_{pi} = tiempo de procesamiento de las operaciones de cada producto.

T_{ei} = tiempo de entrega de los productos.

E_i = espera del producto "i" antes de que empiece su procesamiento.

T_{fi} = tiempo de fabricación del producto, es decir, $(T_{pi} + E_i)$.

Hay razones prácticas y teóricas para que estudiemos inicialmente este problema de programación. Entre éstos podemos citar:

a) Este es el problema más sencillo de programación y consecuentemente podrá ser fácilmente entendido.

b) El problema podrá ser utilizado para mostrar los diferentes resultados que pueden ser obtenidos mediante la utilización de sistemas (reglas) diferentes de programación.

c) Las soluciones obtenidas nos ayudan a entender y encontrar soluciones aproximadas o óptimas para los problemas más complejos.

d) Finalmente, el análisis de este problema nos sirve para evaluar la complejidad de los problemas generales de programación.

También debe resaltarse que este tipo de problema no es tan teórico como pueda parecer. Es verdad que muy raramente encontramos una planta que tenga sólo una máquina y productos que requieran una sola operación, sin embargo, al mismo tiempo, algunas empresas pueden tener una máquina que represente una fase tan importante del proceso productivo que el sistema de programación debería ser diseñado como si existiera solamente esta máquina. En la industria de procesamiento (por ejemplo, detergentes), no es muy raro encontrar una planta que funcione de una forma integrada como si fuera una sola máquina. Finalmente, en los sistemas continuos, podemos tener el problema de programar la producción de una línea de ensamble que también funciona de una forma integrada como si fuera una sola máquina.

2.2. Programación de acuerdo a los tiempos de procesamiento.

Ya hemos citado anteriormente la regla de programación FIFO, que programa los productos o clientes según la fecha o tiempo de llegada de éstos al sistema. Existen muchas otras reglas de programación y entre éstas podemos mencionar:

a) Dar prioridad a los productos de tiempo de procesamiento más corto.

b) Dar prioridad a los productos de mayor volumen.

c) Dar prioridad a los productos de los clientes que pagan de contado.

d) Dar prioridad a los productos de menor plazo de entrega.

e) Dar prioridad, para una máquina específica, a aquellos productos cuya cantidad de trabajo pendiente sea menor.

Estas reglas son llamadas reglas heurísticas de programación y en la mayoría absoluta de los problemas de programación no es posible obtener una solución óptima mediante la - aplicación de cualquiera de éllas. Sin embargo, podemos obtener soluciones bastante - buenas que nos permiten lograr parcialmente los objetivos que se persiguen.

En esta sección estudiaremos la primera de estas reglas, es decir, la regla que da prioridad a los productos de tiempo de procesamiento más corto. Nos referiremos a esta regla a través de la abreviación TPMC.

Supongamos que tenemos los siguientes productos y que todos requieren una sola operación en la única máquina que tiene la planta. También supondremos que todos los productos están disponibles para ser procesados simultáneamente:

PRODUCTOS	TIEMPO DE PROCESAMIENTO (T_{pi})
A	10 h
B	20 h
C	13 h
D	16 h
E	8 h

Se puede demostrar que si se da prioridad a los productos de tiempo de procesamiento más corto, se minimizará el tiempo de fabricación medio y el número medio de productos pendientes en el sistema. Además, si el volumen físico de los productos (lotes o pedidos) es proporcional al tiempo de procesamiento, también el inventario medio en proceso será minimizado. La secuencia de fabricación que resulta de la aplicación de la regla TPMC sería la siguiente:

PRODUCTO	TIEMPO DE PROCESAMIENTO (T_{pi})	TIEMPO DE FABRICACION (T_{fi})
E	8h	8h
A	10h	18h
C	13h	31h
D	16h	47h
B	20h	67h

Podemos observar que, el tiempo total de fabricación es igual al tiempo de fabricación del último producto procesado y éste será siempre igual a 67h. El tiempo de fabricación medio, sin embargo, depende directamente de la secuencia de fabricación y en el caso de la secuencia E → A → C → D → B, éste será igual a: $(8 + 18 + 31 + 47 + 67)/5 = 34.2$ h.

Hay un total de 5! secuencias diferentes, sin embargo no existe ninguna otra secuencia que permita obtener un tiempo de fabricación medio menor, o que pueda, en las condiciones citadas, reducir más el inventario medio en proceso y el número medio de productos pendientes en la planta. Veamos la secuencia inversa:

PRODUCTO	TIEMPO DE PROCESAMIENTO (T_{pi})	TIEMPO DE FABRICACION (T_{fi})
B	20h	20h
D	16h	36h
C	13h	49h
A	10h	59h
E	8h	67h

La secuencia sería la TPML (tiempo de procesamiento más largo) y el tiempo de fabricación medio que le corresponde sería: $(20 + 36 + 49 + 59 + 67)/5 = 46.2$h. También se puede demostrar que ninguna otra secuencia conduce a un tiempo medio de fabricación mayor.

Por lo tanto, de este rápido análisis que hemos hecho, podemos sacar la siguiente conclusión: Si queremos programar la fabricación de "n" productos en "una" máquina y si el volumen físico de los productos es proporcional a su tiempo de procesamiento, entonces la aplicación de la regla TPMC conduce a los siguientes resultados:

a) Se minimiza el tiempo medio de fabricación.

b) Se minimiza el número medio de productos pendientes en el sistema.

c) Se minimiza el inventario medio en proceso.

Si el volumen físico de los productos (V_i) no es proporcional a su tiempo de procesamiento, entonces la regla que minimiza el inventario medio en proceso será aquélla que da prioridad a los productos cuyo índice V_i/T_{pi} sea mayor.

Veamos un ejemplo:

PRODUCTO	T_{pi}	V_i (M^3)	V_i/T_{pi}
A	1h	2.0	2.0
B	7h	10.5	1.5
C	4h	5.0	1.25
D	6h	14.4	2.4
E	5h	2.5	0.5
F	3h	12.0	4.0

La secuencia que minimiza el inventario en proceso será:

PRODUCTO	T_{pi}	V_i (M^3)	V_i/T_{pi}
F	3h	12.0	4.0
D	6h	14.0	2.4
A	1h	2.0	2.0
B	7h	10.5	1.5
C	4h	5.0	1.25
E	5h	2.5	0.5
TOTAL	26h	46.4	-

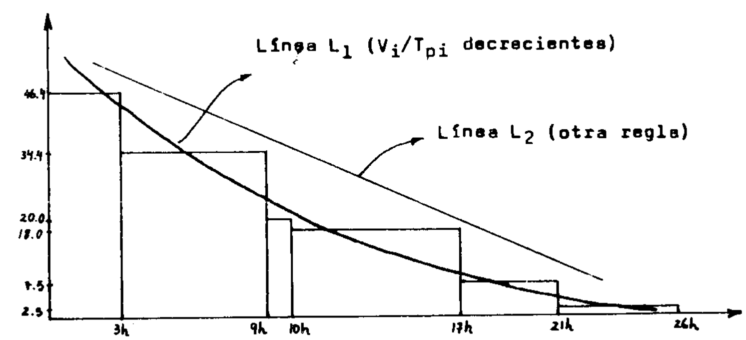
Si observamos este cuadro veremos que mientras no se termina el producto "F", el inventario en proceso es $46.4m^3$. Después de 3h el inventario se reduce a $46.4 - 12.0 = 34.4m^3$, y permanecerá a este nivel hasta que terminemos el producto "D", es decir, durante los próximos 6h, y asi sucesivamente.

Podemos entonces construir el siguiente cuadro:

NIVEL DEL INVENTARIO	TIEMPO DURANTE EL CUAL EL INV. PERMANECE A ESTE NIVEL	TIEMPO x INV.
46.4	3h	139.2
34.4	6h	206.4
20.0	1h	20.0
18.0	7h	126.0
7.5	4h	30.0
2.5	5h	12.5
T O T A L E S	26h	534.1

El inventario en proceso medio será la siguiente media ponderada: $I_{p\ medio} = 534.1/26 = 20.5\ m^3$.

La representación gráfica de la variación del inventario en proceso será:



Se puede observar que si se da prioridad a los productos cuyo índice V_i/T_{pi} es mayor, la tasa de disminución del inventario en proceso será máxima cuando se empieza la fabricación y mínima cuando se está terminando el último producto. Esto garantiza que el inventario medio en proceso será mínimo. Cualquier otra regla de programación conducirá a una línea que estaría por encima de la línea L_1 de la figura (por ejemplo, la línea L_2) y consecuentemente el inventario medio sería mayor.

2.3. Programación de acuerdo al tiempo de entrega

Uno de los objetivos más importantes de los sistemas productivos es cumplir con los plazos de entrega previamente establecidos conjuntamente por la empresa y los clientes. Para estudiar este tipo de problema será necesario definir las siguientes variables:

a) Diferencial de entrega: Es la diferencia entre el tiempo de fabricación y el tiempo de entrega requerido por el cliente.

b) Adelanto: Es la diferencia entre el tiempo de fabricación y el tiempo de entrega, cuando esta diferencia es negativa.

c) Retraso: Es la diferencia entre el tiempo de fabricación y el tiempo de entrega, cuando esta diferencia es positiva.

Un resultado realmente sorprendente y que puede ser fácilmente demostrado, es que la regla TPMC, aunque no tome en consideración los tiempos de entrega de los productos, también minimiza el promedio de los diferenciales de entrega. Sin embargo, esta regla no garantiza la minimización de las siguientes variables:

a) Retraso máximo

b) Retraso medio

c) Número de productos retrasados.

Si queremos minimizar el retraso máximo, tendremos que utilizar la regla que da prioridad a los productos de tiempo de entrega más corto, es decir, fecha de entrega más próxima. Nos referiremos a esta regla a través de la abreviación TEMC.

Otra regla que en muchos casos prácticos conduce a mejores resultados que la regla TEMC, es la que da prioridad a los productos cuyas diferencias "tiempo de entrega-tiempo de procesamiento", sean menores. Esta diferencia puede ser llamada tiempo de holgura por lo que utilizaremos para esta regla la abreviación THMC (tiempo de holgura más corto).

A continuación presentamos un ejemplo donde se aplican las reglas TPMC, TEMC y THMC, y donde se puede observar que la regla TPMC minimiza el tiempo de fabricación medio y el diferencial de entrega medio, y la regla TEMC minimiza el retraso máximo.

El ejemplo consta de la fabricación de 4 productos en la única máquina que tiene una planta dada, y los tiempos de procesamiento y plazos de entrega se muestran en el cuadro siguiente:

Productos	Tiempo de Procesamiento (dias) (A)	Tiempo de Entrega (dias) (B)	Tiempo de Holgura (dias) (B - A)
A	1.0	6.0	5.0
B	2.5	3.0	0.5
C	4.5	5.5	1.0
D	4.0	7.0	3.0

Los resultados de la aplicación de cada una de las reglas son:

Regla TPMC (tiempo de procesamiento más corto).

Productos	Tiempo de Procesamiento (dias)	Tiempo de Entrega (dias)	Tiempo de Fabricación (dias)	Dif. de Entrega (+) Retraso (-) Adelanto (dias)
A	1.0	6.0	1.0	-5.0
B	2.5	3.0	3.5	+0.5
D	4.0	7.0	7.5	+0.5
C	4.5	5.5	12.0	+6.5

Resultados: Tiempo de fabricación medio: 6.0 dias
Diferencial de entrega medio: 0.62 dias.
Adelanto medio: 5.0 dias (sólo un producto).
Retraso medio: 2.5 dias.
Número de productos retrasados: 3
Retraso máximo: 6.5 dias.

Regla TEMC (tiempo de entrega más corto).

Productos	Tiempo de Procesamiento (dias)	Tiempo de Entrega (dias)	Tiempo de Fabricación (dias)	Dif. de Entrega (+) Retraso (-) Adelanto (dias)
B	2.5	3.0	2.5	-0.5
C	4.5	5.5	7.0	+1.5
A	1.0	6.0	8.0	+2.0
D	4.0	7.0	12.0	+5.0

Resultados: Tiempo de fabricación medio: 7.4 dias.
Diferencial de entrega medio: 2.0 dias.
Adelanto medio: 0.5 dias (sólo un producto).
Retraso medio: 2.8 dias.
Número de productos retrasados: 3
Retraso máximo: 5.0 dias.

Sistema THMC (tiempo de holgura más corto).

Productos	Tiempo de Procesamiento (dias)	Tiempo de Entrega (dias)	Tiempo de Fabricación (dias)	Dif de Entrega (+) Retraso (-) Adelanto (dias)
B	2.5	3.0	2.5	-0.5
C	4.5	5.5	7.0	+1.5
D	4.0	7.0	11.0	+4.0
A	1.0	6.0	12.0	+6.0

Resultados: Tiempo de fabricación medio: 8.1 dias.
Diferencial de entrega medio: 2.8 dias.
Adelanto medio: 0.5 dias (sólo un prodúcto)
Retraso medio: 3.8 dias
Número de productos retrasados: 3
Retraso máximo: 6 dias.

Los resultados de estos cuadros son bastante interesantes. Inicialmente podemos observar que la regla TPMC minimiza el tiempo de

fabricación medio(6 dias) y el diferencial de entrega medio (0.75 dias). A su vez, la regla TEMC minimiza el retraso máximo (5 dias). También debe resaltarse que la regla TPMC, aunque no tome en consideración el tiempo de entrega de los productos, es superior o igual a las demás reglas en lo que se refiere a todos los factores analizados, excepto el último factor (retraso máximo). Los tiempos de entrega no son muy lógicos, ya que algunos de los productos de mayor tiempo de procesamiento presentan tiempos de entrega relativamente cortos y vice versa. Obviamente que esto va en contra de las reglas que no tienen en consideración los tiempos de entrega, sin embargo, aún así, la regla TPMC presenta resultados mejores o iguales a los de las otras reglas. Esto muestra, de cierta forma, la complejidad de los problemas de programación.

Obviamente, los resultados presentados en estos cuadros no pueden ser generalizados, puesto que dependen de los valores de los tiempos de procesamiento y de los tiempos de entrega, y por lo tanto, solamente son válidos para este ejemplo específico. Sin embargo, hay una conclusión importante que deriva de estos resultados: siempre que el problema de programación sea determinar la secuencia de fabricación de un número dado de productos de modo a:

a) Reducir el diferencial de entrega medio,
b) Reducir el retraso medio,
c) Reducir el tiempo de fabricación medio y
d) Reducir el número de productos retrasados,

se deben aplicar y evaluar los resultados de reglas que tomen en consideración los plazos de entrega de los productos; sin embargo será de fundamental importancia evaluar también los resultados de la regla TPMC, ya que ésta podrá ser la regla que proporcione los mejores resultados. También debe señalarse que no es conveniente aplicar la regla TPMC cuando el objetivo sea minimizar el retraso máximo.

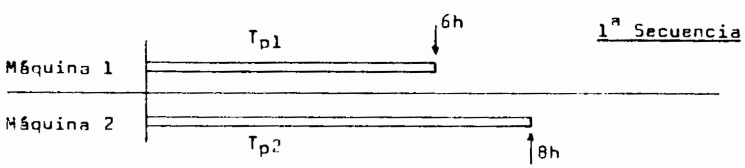
2.4 Aplicación de la regla TPMC cuando la información es incompleta

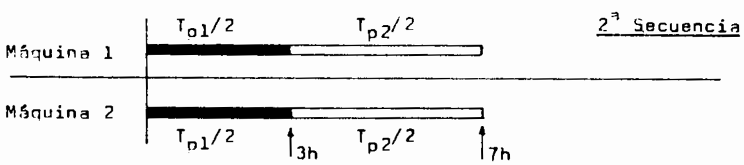
En los ejemplos anteriores hemos supuesto que se conocían de antemano los tiempos de procesamiento de los diversos productos. Sin embargo, en varias situaciones los tiempos de procesamiento no son conocidos o simplemente tenemos una estimación de éstos y consecuentemente, sus valores exactos solamente serán conocidos después que se termine la fabricación de los productos.

Supongamos que no conocemos los tiempos de procesamiento de algunos productos y que $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n$ son estimaciones de éstos. Si existe una correlación entre los tiempos de procesamiento y las estimaciones, y fabricamos los productos en la secuencia indicada, estaremos aplicando correctamente la regla TPMC. En otras palabras, para que la regla TPMC sea aplicada correctamente, no es necesario que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sean estimaciones precisas de $T_{p1}, T_{p2}, \ldots T_{pn}$, sino que exista una correlación directa entre los T_{pi} y los X_i. Por ejemplo, se el estimador consistentemente comete errores para más en las estimaciones de los tiempos de procesamiento, aún asi la regla TPMC será aplicada correctamente. Obviamente, si los valores de los T_{pi} son prácticamente iguales, la probabilidad de que utilizemos la secuencia inadecuada será mucho mayor.

2.5. Programación de la fabricación de "n" productos en "m" máquinas idénticas.

En esta Sección consideraremos el caso especial de una planta que en vez de tener una sola máquina, posee "m" máquinas idénticas, entre las cuales podremos repartir el trabajo total requerido oara la fabricación de cada producto. Por ejemplo, supongamos que tenemos 2 máquinas y 2 productos cuyos tiempos de procesamiento son $T_{p1} = 6h$ y $T_{p2} = 8h$, respectivamente, y que el trabajo que requiere cada producto puede ser repartido entre las dos máquinas. Se podría programar la fabricación de las siguientes maneras:





Si adoptamos la 1ª secuencia, el tiempo de fabricación medio será: $\bar{T}_f = (T_{f1} + T_{f2})/2 = (6h + 8h)/2 = 7h$. Y para la segunda secuencia tenemos: $\bar{T}_f = (3h + 7h)/2 = 5h$.

Podemos observar que se puede reducir considerablemente el tiempo de fabricación medio simplemente repartiéndose la cantidad de trabajo de cada producto entre las 2 máquinas de la planta.

El ejemplo analizado es bastante sencillo, sin embargo este principio tiene una aplicación general, es decir, en cualquier planta de "m" máquinas, si m' de éstas son idénticas, siempre se podrá reducir el tiempo de fabricación medio repartiéndose el contenido de trabajo de cada producto entre estas m' máquinas idénticas.

3. PROGRAMACION DE LOS SISTEMAS PRODUCTIVOS DE SECUENCIA FIJA

Otro problema especial de programación es aquél donde los productos requieren siempre la misma secuencia en lo que se refiere a la utilización de las máquinas. En otras palabras, el sistema productivo es de secuencia fija.

Un ejemplo típico de este tipo de sistema son las líneas de producción o ensamble. Sin embargo, para que un sistema productivo sea considerado como de secuencia fija, no es necesario que los productos tengan que pasar por todas las máquinas o puestos de trabajo y que tarden lo mismo en cada uno de éstos, sino que presenten un flujo de dirección uniforme.

3.1. El método de Johnson

En 1954 Johnson presentó un algoritmo que permite resolver el problema $n/2/F/T_{f\ máx.}$, es decir, "programar la fabricación de "n" productos en las 2 máquinas de un sistema de secuencia fija, de modo que se minimice el tiempo de fabricación máximo". Vale la pena recordar que cuando minimizamos el tiempo de fabricación máximo, estaremos al mismo tiempo maximizando la utilización de las máquinas.

Para la presentación de este método utilizaremos la siguiente notación:

A_i = operación del producto "i" en la primera máquina.
B_i = operación del producto "i" en la segunda máquina.
T_{fi} = tiempo de fabricación del producto "i".

El método de Johnson consta de la siguiente regla de programación:

"El producto "i" deberá preceder al producto "j", siempre que .... $\min (A_i, B_j) < \min (A_j, B_i)$".

Veamos un ejemplo:

Producto	A_i	B_i
a	6h	3h
b	0h	2h
c	5h	4h
d	8h	6h
e	2h	1h

Consideremos inicialmente los productos "a" y "c":

$$a \begin{cases} A_i = 6h \\ B_i = 3h \end{cases} \qquad c \begin{cases} A_j = 5h \\ B_j = 4h \end{cases}$$

$$\min (6h,\ 4h) = 4h > \min (5h,\ 3h) = 3h$$

Puesto que $\min (A_i, B_j)$ no es menor que $\min (A_j, B_i)$, el producto "a" no debe preceder al producto "c".

Comparemos ahora los productos "a" y "d":

$$a \begin{cases} A_i = 6h \\ B_i = 3h \end{cases} \qquad d \begin{cases} A_j = 8h \\ B_j = 6h \end{cases}$$

$$\min (6h,\ 6h) = 6h > \min (8h,\ 3h) = 3h$$

Por lo tanto, el producto "a" tampoco deberá preceder al producto "d".

En cuanto a los productos "a" y "e", tenemos:

$$a \begin{cases} A_i \quad 6h \\ B_i \quad 3h \end{cases} \qquad e \begin{cases} A_j \quad 2h \\ B_j \quad 1h \end{cases}$$

$$\min (6h,\ 1h) = 1h < \min (2h,\ 3h) = 2h$$

Por lo tanto, el producto "a" deberá preceder al producto "e".

Hasta ahora tenemos los siguientes resultados: "a" deberá ser procesado después de "c" y "d", y antes de "e". Si recordamos que el producto "b" no requiere procesamiento en la máquina 1, hay sólo dos secuencias de procesamiento en dicha máquina que obedecen a estas restricciones:

$$c \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow e$$

$$d \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow e$$

Necesitamos, por lo tanto, comparar los productos "c" y "d":

$$c \begin{cases} A_i = 5h \\ B_i = 4h \end{cases} \qquad d \begin{cases} A_j = 8h \\ B_j = 6h \end{cases}$$

$$\min\,(5h,\ 6h) = 5h > \min\,(8h,\ 4h) = 4h$$

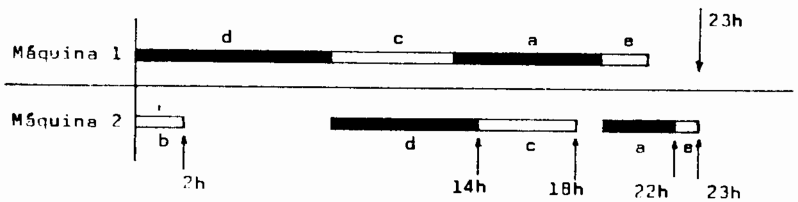
Por lo tanto, el producto "c" no deberá preceder al producto "d".

La solución final del problema será entonces procesar los productos en la máquina 1 siguiendo la secuencia

$$d \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow e$$

y procesar los productos en la máquina 2 luego que éstos salgan de la máquina 1. A continuación presentamos esta solución mediante una gráfica de Gantt:

<u>Método de Johnson</u>



Puede observarse que el tiempo de fabricación máximo corresponde al producto "e" y es igual a 23h. Como hemos dicho anteriormente, ninguna otra regla de programación conducirá a un tiempo máximo de fabricación menor que 23h.

De la gráfica también podemos sacar los tiempos de fabricación de los demás productos:

Producto	T_{fi}
a	22h
b	2h
c	18h
d	14h
e	23h

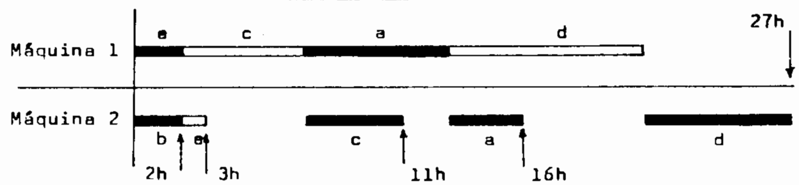
Finalmente, el tiempo de fabricación medio será:

$$\bar{T}_f = (22h + 2h + 18h + 14h + 23h)/5 = 15.8h$$

3.2. <u>Minimización del tiempo medio de fabricación en una planta de 2 máquinas $(n/2/F/\bar{T}_f)$.</u>

La minimización del tiempo de fabricación medio en una planta con sólo dos máquinas ya es un problema bastante complicado, para el cual hasta hoy no se encontró ninguna solución. El algoritmo de Johnson no es bueno en cuanto a la realización de este objetivo. En el ejemplo anterior, este método condujo a un tiempo de fabricación medio igual a 15.8h, mientras que, como se puede observar en la gráfica que se muestra a continuación, la regla TPMC conduce a un tiempo de fabricación medio igual a 11.8h. Sin embargo, la utilización de las máquinas es mucho menor cuando se aplica la regla TPMC.

<u>Regla TPMC</u>



Tiempo de fabricación medio = (2h + 3h + 11h + 16h + 27h)/5 = 11.8h

Estos resultados muestran una vez más la importancia de una definición previa del objetivo que se persigue. Si el objetivo fuera maximizar la utilización de las máquinas, el método de Johnson sería el más adecuado. Si el objetivo fuera minimizar el tiempo de fabricación medio, debería aplicarse la regla TPMC.

3.3. <u>Minimización del tiempo de fabricación máximo en una planta con 3 máquinas $(n/3/F/T_{f\ máx})$.</u>

En su trabajo de fecha 1954, Johnson también propuso una solución aproximada para este tipo de problema. La regla de programación propuesta por él es la siguiente:

"El producto "i" deberá preceder al producto "j" si .... $\min\,(A_i + B_i,\ B_j + C_j) < \min\,(A_j + B_j,\ B_i + C_i)$".

Donde:

A_i = operación del producto "i" en la primera máquina.
B_i = operación del producto "i" en la segunda máquina.
C_i = operación del producto "i" en la tercera máquina.

Veamos un ejemplo:

Productos	A_i	B_i	C_i
a	1h	2h	9h
b	5h	9h	7h
c	7h	6h	8h
d	8h	9h	9h

Productos "a" y "b":

min (1h + 2h, 9h + 7h) = 3h < min (5h + 9h, 2h + 9h) = 11h

El producto "a" deberá preceder a "b".

Productos "a" y "c":

min (1h + 2h, 6h + 8h) = 3h < min (7h + 6h, 2h + 9h) 11h

El producto "a" deberá preceder a "c".

Productos "a" y "d":

min (1h + 2h, 9h + 9h) = 3h < min (8h + 9h, 2h + 9h) = 11h

El producto "a" deberá preceder a "d".

Productos "b" y "c":

min (5h + 9h, 6h + 8h) = 14h > min (7h + 6h, 9h + 7h) = 13h

El producto "c" deberá preceder a "b".

Productos "b" y "d":

min (5h + 9h, 9h + 9h) = 14h < min (8h + 9h, 9h + 7h) = 16h

El producto "b" deberá preceder al producto "d".

La secuencia final deberá ser entonces:

$$a \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow d$$

A continuación presentamos en forma gráfica esta solución, asi como la solución óptima. Se puede observar que el tiempo de fabricación máximo que corresponde al método de Johnson ($T_{f\ máx}$=41h) es ligeramente mayor que el tiempo de fabricación máximo óptimo (39h). La única diferencia entre las dos secuencias es que la posición de los productos "b" y "c" está invertida, es decir, las dos secuencias son a, b, c, d y a, c, b, d, respectivamente.
Los resultados experimentales sugieren que en varias situaciones, cuando el método de Johnson no conduce a la solución óptima, ésta podrá ser obtenida mediante una simple inversión de la posición de dos productos.

Este rápido análisis muestra que el método de Johnson no conduce siempre a una solución óptima, sin embargo su aplicación conduce a soluciones bastante buenas, con una probabilidad relativamente alta.

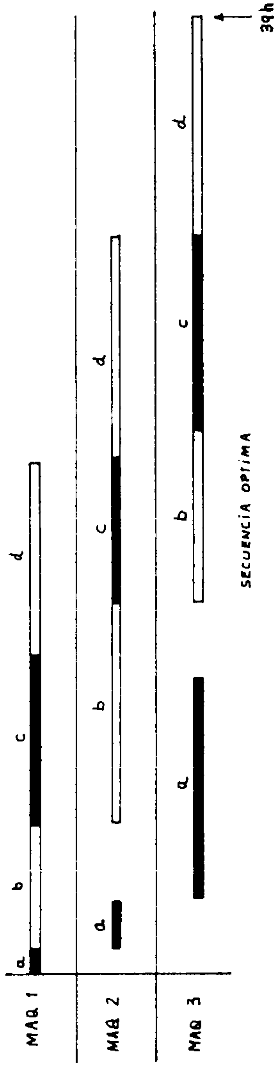
3.4. Programación de la fabricación de "n" productos en "m" máquinas

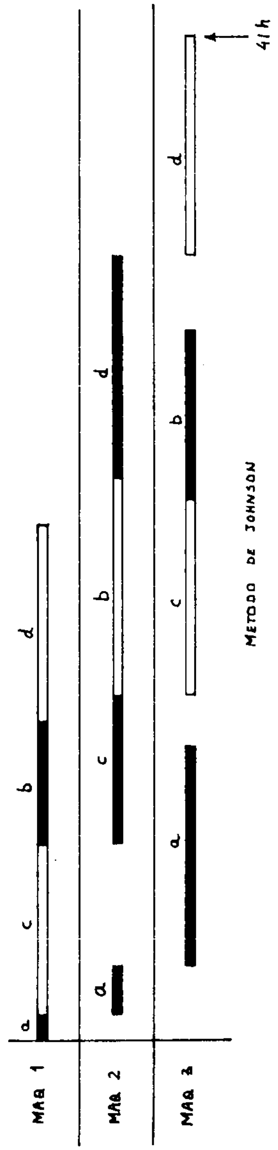
3.4.1. El método de Ichiro Nabeshima

En 1960 Ichiro Nabeshima propuso un algoritmo para la resolución del problema $n/m/F/T_{f\ máx.}$, el cual es en realidad una generalización del algoritmo de Johnson. El método de Ichiro sólo es aplicable cuando:

$$\min OP_j \geqslant \max OP_{j+1} \qquad \text{donde} \quad j + 1 \leqslant m - 1.$$

donde: OP_j es el conjunto que incluye todas las operaciones que requieren procesamiento en la máquina "j".
OP_{j+1} es el conjunto de operaciones que requieren procesamiento en la máquina "j+1".





Por ejemplo, el método no sería aplicable al problema que se describe a continuación, ya que algunas de las C_i son mayores que la B_i más corta (7h).

Producto	A_i	B_i	C_i	D_i
a	10h	9h	8h	8h
b	11h	7h	4h	2h
c	15h	10h	5h	4h
d	17h	8h	9h	6h

A_i = operaciones en la primera máquina
B_i = " segunda "
C_i = " tercera "
D_i = " cuarta "

La regla de programación propuesta por Ichiro consiste de lo siguiente:

"El producto "i" deberá preceder al producto "j" siempre que

$$\min \left[\sum_{t=1}^{m-1} OP_{i\,t} , \; \sum_{t=2}^{m} OP_{j\,t} \right] < \min \left[\sum_{t=1}^{m-1} OP_{j\,t} , \; \sum_{t=2}^{m} OP_{i\,t} \right]\text{"},$$

donde t = 1, 2, 3, ... m, indica la máquina que corresponde a cada operación.

Veamos un ejemplo:

Producto	A_i	B_i	C_i	D_i
a	10h	9h	7h	4h
b	11h	7h	4h	1h
c	15h	10h	5h	2h

Podemos observar que la más corta de las A_i es mayor que todas las B_i; la más corta de las B_i es mayor que todas las C_i; etc. Por lo tanto, el método de Ichiro podrá ser aplicado.

Consideremos inicialmente los productos "a" y "b" y apliquemos la regla de programación:

$$\min(10 + 9 + 7\ ,\ 7 + 4 + 1) = 12 < \min(11 + 7 + 4\ ,\ 9 + 7 + 4) = 20$$

Como se cumpla la desigualdad, entonces el producto "a" deberá preceder al producto "b".

En cuanto a los productos "a" y "c", tenemos:

$$\min(10 + 9 + 7,\ 10 + 5 + 2) = 17 < \min(15 + 10 + 5,\ 9 + 7 + 4) = 20$$

Por lo tanto, el producto "a" deberá preceder al producto "c".

Finalmente, comparemos "b" y "c":

$$\min(11 + 7 + 4,\ 10 + 5 + 2) = 17 > \min(15 + 10 + 5,\ 7 + 4 + 1) = 12$$

El producto "c" deberá preceder al producto "b" y por lo tanto la secuencia óptima sería:

$$a \longrightarrow c \longrightarrow b$$

Puede observarse que para m = 3, el método de Ichiro resulta idéntico a la regla de programación de Johnson para el caso de 3 máquinas (Sección 3.3). Esto explica porque el método de Johnson ni siempre conduce a una solución óptima. En otras palabras, cuando se cumple la condición

$$\min OP_j \geqslant \max OP_{j+1}$$

la regla de Johnson conduce a una solución óptima y cuando esta condición no se cumple, la solución obtenida podrá ser buena, pero probablemente no será óptima.

3.4.2. Demás problemas con "n" productos y "m" máquinas

En la Sección anterior hemos presentado una solución para el problema $n/m/F/T_{f\ máx}$. Los demás problemas de programación donde hay "n" productos y "m" máquinas no han sido resueltos hasta hoy. Al mismo tiempo, el número de secuencias posibles es tan grande que en la mayoría de los casos el problema no es computable.

Debido a estas razones, la técnica de simulación ha sido frecuentemente utilizada en varios trabajos de investigación para evaluar la eficiencia de diferentes reglas de programación. Sin embargo, los resultados obtenidos generalmente no revelan ni la superioridad de alguna regla en especial, ni si dichas reglas conducen a resultados diferentes cuando son aplicadas a sistemas de secuencia fija y a sistemas de secuencia variable, respectivamente. Sólo hay un resultado que parece ser verdadero para todos los tipos de sistemas productivos: la regla TPMC generalmente reduce el tiempo de fabricación medio. En el próximo capítulo discutiremos con más detalles los resultados generales de las investigaciones realizadas en este campo.

4. PROGRAMACION DE LOS SISTEMAS PRODUCTIVOS DE SECUENCIA VARIABLE

La programación de los sistemas productivos de secuencia variable es un desafío fascinante. Aunque sea muy facil definirlo o presentarlo, la obtención de soluciones óptimas es una tarea de grandísima complejidad.

En este tipo de problema, cada operación requiere tres números "i", "j" y "k" para su identificación:

"i": indica el número del producto al cual pertenece la operación.
"j": indica la secuencia en que las operaciones de un producto dado deben realizarse.
"k": indica la máquina donde la operación debe realizarse.

Por ejemplo, la operación $OP_{2,3,2}$ pertenece al producto 2, será la 3ª operación a realizarse cuando se procese dicho producto y su realización se llevará a cabo en la máquina 2.

4.1. Programación de la fabricación de "n" productos en "dos" máquinas.

En 1956 Jackson desarrolló un algoritmo que permite resolver el problema $n/2/V/T_{f\ máx.}$, es decir, "programar la fabricación de "n" productos en las 2 máquinas de un sistema productivo de secuencia variable, de modo que se minimice el tiempo máximo de fabricación".

Para aplicar el método de Jackson necesitamos inicialmente dividir los productos en 4 grupos, como sigue:

Grupo A: Productos que requieren una sola operación a realizarse en la máquina 1.
Grupo B: Productos que requieren una sola operación a realizarse en la máquina 2.
Grupo AB: Productos que necesitan procesarse primero en la máquina 1 y después en la máquina 2.
Grupo BA: Productos que necesitan procesarse primero en la máquina 2 y después en la máquina 1.

En seguida, utilizando el método de Johnson, determinamos separadamente la secuencia de procesamiento de los productos de los grupos AB y BA, respectivamente. Las secuencias de los grupos "A" y "B" no afectarán el tiempo de fabricación máximo, de modo que podremos adoptar cualquier secuencia para estos grupos. La secuencia que minimiza el tiempo máximo de fabricación será obtenida combinándose los grupos A, B, AB y BA de la siguiente manera (respetando obviamente las secuencias ya determinatas para cada grupo):

Máquina 1: AB $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ BA

Máquina 2: BA $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ AB

4.2. Generación de programas de producción

La mayoría de los métodos utilizados para "resolver" los problemas de programación para los cuales todavía no hay soluciones óptimas, requiere la generación de un determinado número de programas de producción y su posterior evaluación. Todos estos métodos tienen lo siguiente en común: se selecciona una operación dada y se le asigna el inicio de su realización en una determinada máquina. La secuencia según la cual las operaciones serán seleccionadas dependerá obviamente de la regla de programación utilizada. En otras palabras, cada regla generará programas de producción diferentes.

Cuando aplicamos cualquier regla de programación, podemos generar programas utilizando dos procedimientos diferentes: procedimiento <u>con ajuste</u> y procedimiento <u>sin ajuste</u>. Cuando se utiliza un procedimiento sin ajuste, no se podrá cambiar el inicio de una operación que ya fue asignada. Cuando se utiliza un procedimiento con ajuste, el inicio de las operaciones ya asignadas podrán cambiarse para acomodar otras operaciones.

Es evidente que el procedimiento con ajuste es mucho más laborioso, sin embargo podrá generar programas de producción más eficientes. La mayoría absoluta de los programas de computadora para la generación y evaluación de programas de producción, utiliza el procedimiento sin ajuste, ya que es muy difícil determinar una "regla de ajuste" que sea realmente eficiente. Por otro lado, cuando se elaboran programas de producción manualmente, utilizando gráficas como la de Gantt, frecuentemente se aplica un procedimiento con ajuste. Es evidente que la solución ideal sería un programa de computadora que llevara a cabo un procedimiento con ajuste. Sin embargo, es extrema damente difícil que una computadora reproduzca el proceso mental utilizado por el ser humano para llevar a cabo un procedimiento con ajuste.

Un concepto que es importante entender cuando se están generando programas de producción, es el concepto de conjunto de operaciones programables (S_o). A este conjunto pertenecen todas aquellas operaciones cuyas operaciones precedentes ya fueron asignadas. En el caso de un problema n/m, (S_o) consiste inicialmente de "n" operaciones, es decir, la primera operación de cada uno de los "n" productos. Si para cualquier producto podemos empezar su procesamiento realizando dos o más operaciones simultáneamente, entonces el conjunto (S_o) contendrá inicialmente más de "n" operaciones. Si recordamos el concepto de procedimiento sin ajuste, podemos entonces afirmar que cuando se utilize este procedimiento las operaciones nunca podrán regresar a (S_o) una vez que hayan sido asignadas.

Hay dos formas principales de clasificar las operaciones del conjunto (S_o):

a) Por producto: en este caso tendríamos "n" subconjuntos (S_p) que consistirían de las operaciones programables de cada producto.
b) Por máquina: en este caso tendríamos "m" subconjuntos (S_m) que consistirían de las operaciones programables de cada máquina.

De una forma general, podemos decir entonces que la generación de programas de producción consiste de la aplicación de una regla que nos permita determinar en que secuencia las operaciones de los diversos conjuntos (S_m) serán procesadas en las máquinas correspondientes. Debe resaltarse que, por lo menos teóricamente, para cualquier programa de producción es posible determinar una regla de programación capaz de generarlo y vice versa.

Si nosotros definimos de alguna manera un problema de programación, por ejemplo $20/5/V/\overline{T}_f$, y aplicamos una determinada regla de programación, manualmente o mediante una computadora, estaremos utilizando la técnica de simulación. Esta técnica es extremadamente útil para la resolución de los problemas de programación, ya que podemos aplicar varias reglas diferentes y evaluar la eficiencia relativa de cada una de ellas antes de su eventual implantación en la práctica. De hecho,

éste es actualmente el procedimiento más utilizado en las investigaciones sobre la programación de la producción, ya que para la mayoría de los problemas no se ha determinado todavía las reglas que conducen a soluciones óptimas.

En los capítulos anteriores hemos discutido algunas reglas de programación, que son las siguientes:

TPMC - Dar prioridad a los productos cuyos tiempos de procesamiento sean menores.
FIFO - Dar prioridad a los productos que llegan primero al sistema.
TEMC - Dar prioridad a los productos de tiempo de entrega más corto.
THMC - Dar prioridad a los productos cuyos tiempos de holgura sean menores.

Otras reglas de programación que han sido evaluadas en los diversos trabajos de investigación son:

a) Dar prioridad a las operaciones más cortas. Obsérvese que esta regla es ligeramente diferente de la regla TPMC, ya que la operación más corta de un determinado conjunto (S_m) ni siempre pertenece al producto de menor tiempo de procesamiento. Debido a la similitud que existe entre estas dos reglas, utilizaremos la abreviación $TPMC_1$ para la que da prioridad a los productos de menor tiempo de procesamiento y la abreviación $TPMC_2$ para la que da prioridad a las operaciones más cortas.

b) Dar prioridad a los productos cuya cantidad total de trabajo pendiente sea menor. Esta regla conduce a resultados más o menos semejantes a los de las reglas $TPMC_1$ y $TPMC_2$ y la llamaremos $TPMC_3$.

c) Dar prioridad a los productos cuyo número de operaciones pendientes sea menor ($TPMC_4$).

d) Dar prioridad a los productos cuya cantidad total de trabajo pendiente sea mayor (CTPM).

e) Dar prioridad a los productos cuyo número de operaciones pendientes sea mayor (NOPM).

La eficiencia de estas reglas ha sido comparada , principalmente en lo que se refiere a la reducción del tiempo de fabricación medio y del tiempo de fabricación máximo. En cuanto a la reducción del tiempo de fabricación medio, las reglas $TPMC_1$, $TPMC_2$, $TPMC_3$ y $TPMC_4$ generalmente conducen a mejores resultados. Debe recordarse que cuando reducimos el tiempo de fabricación medio, estamos al mismo tiempo reduciendo el número medio de productos pendientes en la planta y el inventario en proceso medio. Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar reglas específicas que reduzcan todavía más dicho inventario.

En cuanto a la reducción del tiempo de fabricación máximo, las reglas CTPM y NOPM generalmente conducen a mejores resultados.

Finalmente, la regla TEMC conduce a buenos resultados cuando el objetivo es reducir el retraso máximo.

Es evidente que estos resultados no son suficientes para que los diversos sistemas productivos puedan resolver sus complejos problemas de programación de la producción. Sin embargo, creemos que éstos son un punto de partida del cual podrán salir soluciones relativamente buenas que ayuden a los hombres de empresa a enfrentar las presiones de la actual sociedad industrial. El campo está abierto a las investigaciones y esperamos que en un futuro no muy lejano se encuentren más y más soluciones óptimas para los diferentes tipos de problemas.

BIBLIOGRAFIA

1. R. W. CONWAY, W. L. MAXWELL y L. W. MILLER
   "Theory of Scheduling"
   Addison - Wesley Publishing Company, 1967.

2. S. M. JOHNSON
   "Optimal Two- and Three-Stage Production Schedules With Set-up Time Included"
   Nav. Res. Log. Quart. 1, No. 1, Marzo 1954.

3. J. R. JACKSON
   "An Extension of Johnson's Results on Job-lot Scheduling"
   Nav. Res. Log. Quart. 3, No. 3, Septiembre, 1956.

4. ICHIRO NABESHIMA
   "The Order of "n" Items Processed on "m" Machines"
   The Metropolitan Hiroo School, 8ª Reunión, Noviembre, 1960.

IX- PROBLEMAS TIPO DE INGENIERIA DE PRODUCCION

A - PRONOSTICOS

1. En un determinado departamento de Control de Calidad se registraron los siguientes datos:

N° de piezas	30	35	40	45	50	100
Tiempo de Inspección (min)	4.5	4.6	6.0	6.2	6.5	?

   a) Calcular el tiempo medio para inspeccionar una pieza y, utilizando este dato, calcular el tiempo para inspeccionar 100 piezas.

   b) Utilizando el método de mínimos cuadrados, calcular el tiempo para inspeccionar las 100 piezas.

   c) Graficar las rectas representativas de los métodos a) y b) y discutir las ventajas del método de mínimos cuadrados.

   d) Calcular el coeficiente de correlación.

2. Los datos correspondientes a las ventas de los últimos 5 años, de la Empresa "X", son los siguientes:

Año	73	74	75	76	77
Ventas	\$ 290	\$ 350	\$ 410	\$ 510	\$ 610

   a) Determinar la tasa media de crecimiento de las ventas y, utilizando este dato, hacer un pronóstico para el año de ... 1978.

   b) Utilizando el método de mínimos cuadrados, pronosticar las ventas de 1978.

   c) Utilizando el método de ajuste exponencial, hacer un pronóstico para 1978.

   d) Discutir las ventajas y desventajas de cada método.

3. Considerando los datos que se muestran a continuación, hacer un pronóstico para los 4 trimestres de 1978:

Año	T_1	T_2	T_3	T_4
73	19	37	30	22
74	28	42	31	18
75	27	36	28	19
76	30	43	29	20
77	32	44	32	22

4. Considerando los datos de se muestran a continuación, hacer un pronóstico para el año de 1978, utilizando el método de atenuación exponencial ponderada con un $\alpha = 0.1$. Hacer otro pronóstico con un $\alpha = 0.3$ y explicar la diferencia entre los dos pronósticos.

Años	73	74	75	76	77
Ventas	108	119	110	130	150

B- INVENTARIOS

5. Considerando el modelo clásico de inventarios sin faltantes, mostrar algebraicamente que cuando se pide siempre la cantidad óptima Q_o, el costo de preparación anual resulta igual al costo de mantener anual.

6. En una empresa dada se calcularon los siguientes datos:

   - Valor promedio del inventario de una determinada materia prima durante el año de 1977: \$ 5,000.00
   - Costo anual de almacenaje en 1977: \$ 250.00
   - Costo de seguros que correspondió al año de 1977: \$ 100.00
   - Costo de preparación de cada pedido en 1977: \$ 20.00
   - Demanda anual estimada para el año de 1978: 10,000 unidades

- Costo del capital estimado para 1978: 25%/año

- Precio de la materia prima en 1978: \$ 50.00/unidad.

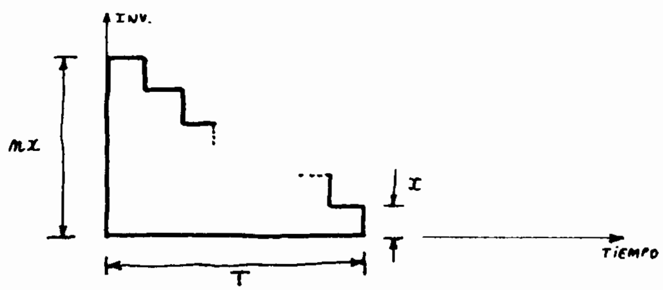
Suponiendo que los costos de seguros y de almacenaje sean proporcionales al nivel medio del inventario y que los datos correspondientes a 1977 pueden ser utilizados para estimar los costos de 1978, determinar:

a) La mejor política de compra de esta materia prima en el año de 1978 (Q_o, N_o y T_o).

b) El costo anual mínimo.

c) ¿Qué ocurriría con los valores de Q_o y CTI_o en 1978, si el costo de almacenaje no dependiera ni del nivel del inventario, ni del número de pedidos realizados?

7. En una determinada empresa el nivel del inventario disminuye según se muestra en la figura. Calcular el inventario medio durante el período "T".



Observación: La suma de los términos $n + (n - 1) + \ldots + 1$ es igual a $n(n + 1)/2$.

8. La empresa Tlaloc S.A. compra su materia prima a un proveedor que tiene la siguiente política de ventas:

- Si el pedido es menor que 1,000 unidades, el precio de la materia prima es de \$ 1.20/unidad.

- Si el pedido es mayor o igual a 1,000, el precio es de \$ 1.00.

Considerando que:

- El costo de preparación es \$ 15.00.

- El costo de mantener es 20%/año.

- La demanda anual es de 5,000 unidades.

Calcular el tamaño óptimo del pedido.

9. Una determinada empresa compra "D" unidades anualmente a un proveedor cuyo precio de los pedidos se calcula como sigue:

Precio del pedido = $X + Q \cdot K$

Donde: X = Monto fijo que el proveedor cobra por cada pedido y que no depende de la cantidad comprada.

Q = cantidad comprada.

K = Monto cobrado por cada unidad comprada, además del monto fijo "X".

Por ejemplo, si la empresa compra 500 unidades, el precio que tendría que pagar por dicho pedido sería: $X + 500 \times K$.

Considerando que el costo de mantener en términos de porcentaje es F_m y el costo de preparación es C_p, deducir una fórmula para el cálculo de Q_o.

10. La empresa Copilco S.A. no tiene almacén propio y lo que paga anualmente de renta es proporcional al nivel máximo del inventario. En otras palabras, el costo anual de renta puede ser calculado mediante la fórmula $C_r \times I_{máx}$, donde:

C_r = costo anual de renta por unidad del inventario máximo.

$I_{máx}$ = inventario máximo.

Considerando que el costo de mantener (sin incluir la renta) es C_m y el costo de preparación es C_p, deducir una fórmula que permita calcular la cantidad óptima Q_o.

11. Los datos referentes a una materia prima dada son los siguientes:

- Costo de mantener: \$ 2.00 /unid./año.

- Costo de preparación: \$ 20.00

- Costo del faltante: \$ 15.00/unid./año

- Demanda anual: 10,000 unidades.

Determinar:

a) La cantidad óptima si no se permite la falta de existencias.

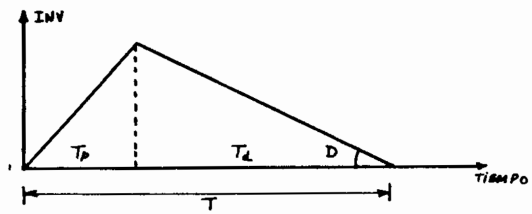
b) El costo anual de mantener y el costo anual de preparación que corresponden a la política del apartado a).

c) La cantidad óptima cuando se permite la falta de existencias.

d) El inventario máximo que resulta de la aplicación de la política del apartado c).

e) El costo anual de mantener, el costo anual de preparación y el costo anual de la falta que corresponden a la política del apartado c). Comparar estos costos con los del apartado b).

12. Consideremos el modelo que se muestra a continuación:



Durante el período T_p hay producción y consumo, y durante el período T_d sólo hay consumo. Si dividimos la cantidad "Q" (fabricada durante el período T_p) entre la demanda anual "D", ¿ el resultado será T_p, T_d o T? Explicar.

13. Los datos referentes a un artículo aparecen a continuación:

- costo de preparación : $ 8.00
- Costo de mantener: $ 0.15/unid./año.
- Demanda anual (250 días laborables): 10,000 unidades

Si se considera un consumo constante, ¿ cuál será el número de unidades que se deben producir diariamente para que el lote óptimo de producción sea igual al doble del tamaño óptimo de pedido, si la empresa compra dicho artículo en vez de fabricarlo? Considerar que el costo para preparar un pedido es igual al costo para preparar la fabricación de un lote.

14. Los datos referentes a un producto dado son los siguientes:

- Costo de preparación de las máquinas por lote: $ 15.00.
- Costo de programación de la producción por lote: $ 5.00.
- Costo del capital: $ 25% al año.
- Demanda anual: 15,000 unidades.
- Capacidad de producción del equipo: 20,000 unidades/año.
- Costo unitario del producto: $ 10.00.

Determinar:

a) El lote óptimo.

b) El costo de preparación anual y el costo de mantener anual si se fabrica siempre el lote óptimo.

c) El costo anual si se fabrica siempre una cantidad igual a 1,500 unidades.

15. Un gerente de producción desea optimizar el número de corridas para la fabricación de 3 productos que utilizan el mismo equipo. Los productos tienen las siguientes características:

Demanda Anual	Capacidad de Prod. anual	C_{mi}	C_{pi}
50,000	250,000	0.20	50.00
30,000	60,000	0.30	30.00
10,000	40,000	0.25	35.00

Determinar:

a) Si es posible fabricar las cantidades óptimas calculadas separadamente mediante la fórmula:

$$Q_{oi} = \sqrt{2 \cdot D_i \cdot C_{pi} / C_{mi} \ (1 - D_i/P_i)}$$

b) Si no es posible aplicar el método descrito en a), checar si se puede aplicar el método que consta de la determinación del número óptimo de ciclos al año, sin determinar el valor de dicho número de ciclos.

c) Si es posible aplicar el método del apartado b), determinar entonces n_o, Q_{o1}, Q_{o2} y Q_{o3}, y confirmar si realmente es posible fabricar dichas cantidades.

16. En una empresa dada se calcularon los siguientes datos:

- Costo de mantener: 20% al año.
- Costo de preparación: $ 20.00.
- Demanda semanal media: 120 unid./semana.
- Precio de la materia prima: $ 50.00/unidad.
- Inventario de contingencia óptimo: 100 unidades.
- Plazo de entrega del proveedor: 1 semana.
- No. de dias hábiles al año: 250 (50 semanas de 5 dias).

Determinar:

a) Todo lo que sea necesario para que la empresa puede utilizar un sistema de punto fijo que conduzca a costos mínimos.

b) El costo anual de la política del apartado a).

c) Todo lo que sea necesario para que la empresa pueda utilizar un sistema de ciclo fijo que conduzca a un pedido medio anual aproximadamente igual a la cantidad óptima que se obtendría si la demanda fuera constante.

d) El costo anual del sistema del apartado c).

e) El inventario máximo en la mano y sobre pedido para un período de revisión de 2 semanas.

f) El costo anual que corresponde a un período de revisión de 2 semanas

17. La demanda de cilindros para gas doméstico tiene una distribución normal con una media de 120 unid./semana y una desviación estándar de 14. El plazo de entrega del proveedor es constante e igual a 6 dias. Sabiéndose que el costo de preparación es de $ 20.00 y el costo de mantener es de $ 1.00/unid./año, determinar:

a) La cantidad óptima a ordenar.

b) El punto de reorden para un nivel de servicio del 95%.

Considérese que el año tiene 365 dias hábiles.

C -<u>PLANEACION AGREGADA</u>

18. Considerando el ejemplo de Planeación Agregada de la primera parte de los apuntes de Ing. de Producción, calcular el costo total que corresponde al plan que conduce siempre a inventarios mínimos.

D -<u>BALANCEO DE LINEAS</u>

19. Los tiempos que corresponden a 5 operaciones de ensamble consecutivas son los siguientes (en minutos):

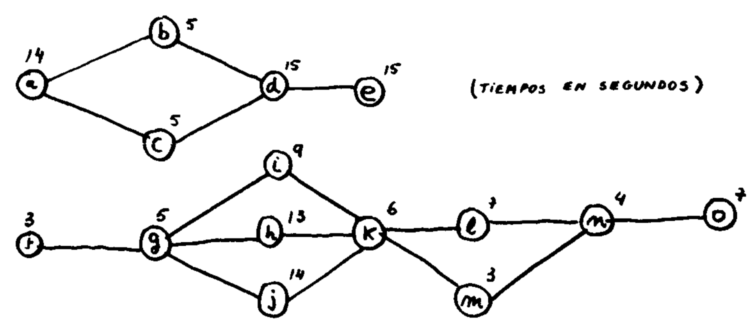
Operación	Tiempo
1	1.04
2	0.96
3	1.30
4	0.82
5	1.10

Si la tasa de producción requerida es de 700 unidades por dia, determinar (considérese un dia de 8 horas):

a) El número de obreros que deberán trabajar en cada estación.

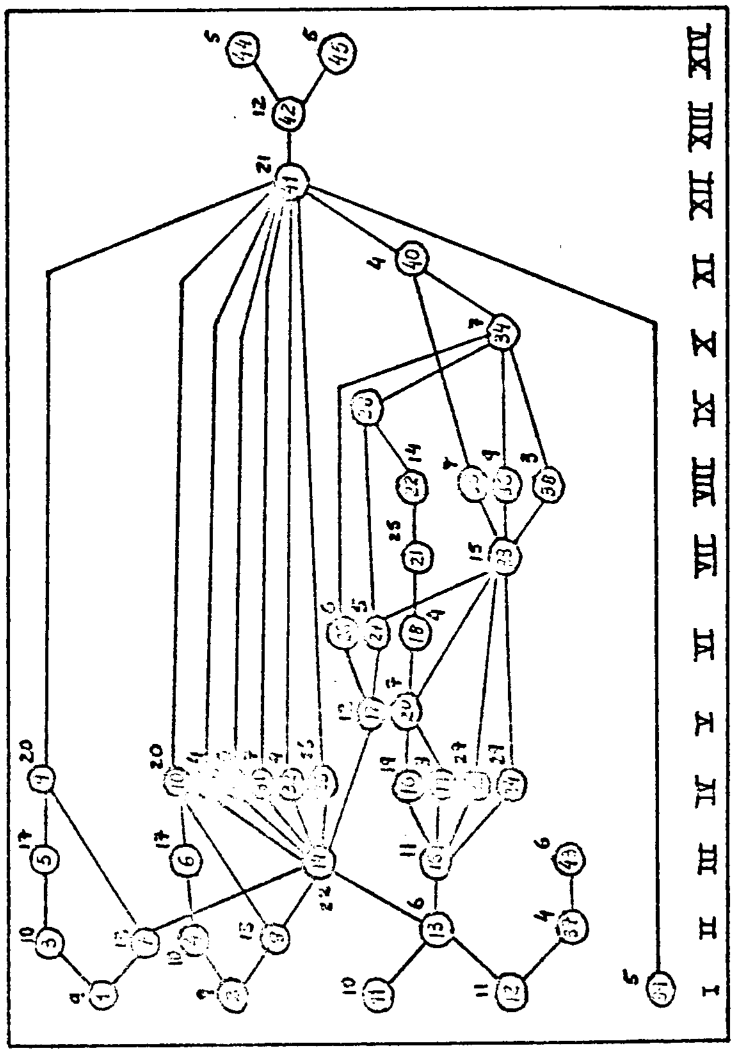
b) La eficiencia de la línea.

20. Teniendo en cuenta la red de operaciones que se muestra a continuación, balancear una línea de producción que permita obtener 112 productos por hora y medir la eficiencia de la línea propuesta.



21. Considerando la red de operaciones que se muestra en la próxima página, balancear una línea con un tiempo de ciclo igual a 92 segundos, utilizando el método de Kilbridge y Wester. (Obs.: se puede lograr un balance perfecto).

Diagrama de precedencia para las operaciones. Tomado de Kilbridge y Wester, "A Heuristic Method of Assembly Line Balancing", Industrial Engineering, Vol. 12, No. 4, 1961.



E - PROGRAMACION DE LA PRODUCCION

22. En algunas agencias Volkswagen existe un servicio expres para la realización de reparaciones menores, mientras los clientes esperan. Por ejemplo, realizan reparaciones como cambio de aceite, cambio de bujías o platinos, ajuste de frenos, instalación de accesorios, etc.

    En lo que se refiere a la programación de la producción, ¿ cuáles son las ventajas de esta política para los clientes y para la VW?

23. Supongamos que 4 técnicos llegan a una empresa dada al mismo tiempo y que van a realizar 4 pruebas diferentes en un mismo equipo. Los tiempos de cada prueba son los siguientes:

Técnico	Prueba	Tiempo
A	Pa	4.0h
B	Pb	3.0h
C	Pc	1.0h
D	Pd	2.5h

La empresa paga $ 50.00 por hora a los técnicos y las pruebas pueden ser realizadas en cualquier secuencia. Considerando que cada técnico se va de la empresa luego que termine su prueba y que solamente se les pagará el tiempo que permannezcan en la empresa, encontrar la secuencia que conduce a un costo total mínimo y calcular dicho costo.

24. Necesitamos fabricar 15 productos cuyas características son las siguientes:

Producto	Tiempo de Procesam. (horas)	Volumen Físico (M^3)	Producto	Tiempo de Procesam. (horas)	Volumen Físico (M^3)
A	12	6	I	6	2
B	8	5	J	16	6
C	13	7	K	11	5
D	10	8	L	12	7
E	15	10	M	7	4
F	20	12	N	6	5
G	5	2	O	20	4
H	1	1			

Encontrar la secuencia que minimiza el inventario en proceso medio y calcular dicho inventario.

25. Necesitamos fabricar 5 productos cuyas características son las siguientes:

Producto	A_i	B_i
a	7h	2h
b	5h	9h
c	1h	4h
d	3h	2h
e	3h	1h

A_i=operación en la máquina 1.

B_i=operación en la máquina 2.

Utilizando el método de Johnson, determinar la secuencia que minimiza el tiempo de fabricación máximo.

26. Las características de 4 productos son las siguientes:

Producto	A_i	B_i	C_i	D_i
a	10h	9h	7h	4h
b	11h	7h	4h	1h
c	15h	10h	5h	2h
d	17h	8h	6h	3h

Utilizando el método de Ichiro Nabeshima, determinar la secuencia que minimiza el tiempo de fabricación máximo. Considérese que:

A_i = operación en la primera máquina.
B_i = " segunda "
C_i = " tercera "
D_i = " cuarta "