
1. Fundamentos del método

Para comprender la propagación de las ondas, debemos de tener las bases de la teoría de mecánica del medio continuo, así como también los principios de física de las ondas. En este capítulo se introduce en una forma breve los conceptos de esfuerzos y deformaciones, ecuaciones constitutivas, las ecuaciones de onda elástica tanto para S como P.

1.1 Esfuerzos y deformaciones

El esfuerzo es una forma de medir la intensidad de la fuerza ya sea en la frontera o en el interior del cuerpo. Hay dos tipos de fuerza: unas que actúan sobre los elementos del volumen y se distribuyen uniformemente, i.e. con la misma magnitud y dirección, llamadas fuerza de cuerpo, sus dimensiones pueden ser fuerza por unidad de masa o fuerza por unidad de volumen; las otras actúan sobre una superficie llamadas fuerzas superficiales y sus dimensiones son fuerza por unidad de área. Un ejemplo de las primeras es la gravedad mientras que de la segunda es una fuerza de contacto.

Si consideramos un cuerpo con un volumen V , con una superficie S . el cuerpo está sometido a fuerzas de cuerpo que afectan al material dentro del volumen y a fuerzas superficiales, por cuerpos externos. Si las fuerzas superficiales en cada elemento de la superficie dS cuyo vector unitario es hacia afuera \hat{n} , se puede definir el vector tracción, T , como el límite de la fuerza superficial por unidad de área en cualquier punto conforme el área se vuelva infinitesimal.

$$T(\hat{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{F}{dS} \quad 1.1$$

El vector tracción tiene la misma orientación que la fuerza y está en función de la normal de la superficie debido a la orientación de ésta. En un elemento de volumen existen nueve términos que describen las fuerzas superficiales conocido como tensor de esfuerzos, los tres renglones son los tres vectores de tracción, por lo que:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \\ T^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & T_2^{(1)} & T_3^{(1)} \\ T_1^{(2)} & T_2^{(2)} & T_3^{(2)} \\ T_1^{(3)} & T_2^{(3)} & T_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad 1.2$$

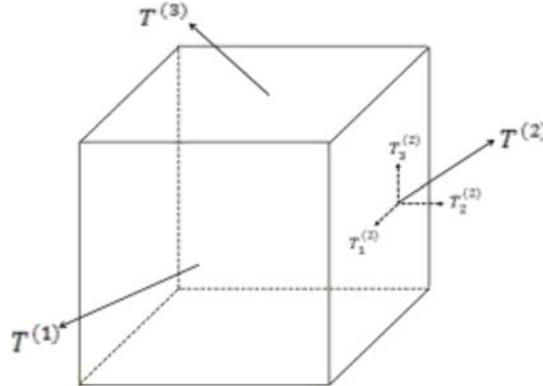


Figura 1.1.1 Vectores de tracción actuando en un elemento de volumen (Tomada de Stein & Wysession, 2003).

Si la normal no estuviera en los ejes de las coordenadas la tracción, figura 1.1.1, se relacionaría con el tensor de esfuerzos y el vector normal, debido al equilibrio de las fuerzas, Teorema Cauchy, como:

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \quad 1.3$$

La diagonal del tensor de esfuerzos se le conoce como esfuerzos normales, mientras que los demás son los esfuerzos cizallantes. Una propiedad importante del tensor de esfuerzos, debida a la ley de conservación angular i.e. equilibrio de torque, es que es simétrico es decir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad 1.4$$

Si el esfuerzo se aplica a un material que no es rígido, los puntos dentro de éste se moverán con respecto a otro por lo que se deforma el cuerpo. Si tomamos en cuenta un el movimiento de un punto de un cuerpo podemos expresar su desplazamiento relativo con respecto a otro punto, δu_i , en los siguientes términos:

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = (e_{ij} + \omega_{ij}) \delta x_j \quad 1.5$$

Teniendo dos términos uno de ellos, i.e. ω_{ij} , corresponde a una rotación del cuerpo rígido sin tener una deformación, este término se puede expresar en un tensor antisimétrico donde su diagonal es cero y sólo hay tres componentes independientes ya que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

El otro término, i.e. e_{ij} , es el tensor de deformación que describe la deformación resultante de un movimiento diferencial dentro de un cuerpo. Este tensor puede ser escrito en términos de los ejes x, y, z y en los componentes del vector de desplazamiento de la siguiente forma:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad 1.6$$

Las componentes de tensor de deformaciones son adimensionales. Los componentes de la diagonal muestran desplazamientos en las direcciones de los ejes, mientras que los triángulos de la matriz describen los cambios de desplazamiento con respecto a otra dirección. La suma de la diagonal indica los cambios en volumen y se le conoce como dilatación, θ :

$$\theta = e_{ii} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad 1.7$$

La deformación es muy pequeña. Otra forma de expresar la deformación es:

$$\text{Deformación} = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Longitud de onda}} \quad 1.8$$

Para las ondas de cuerpo el desplazamiento es aproximadamente de 10 micras, mientras la longitud de onda es de 10 km por lo que:

$$\text{Deformación} = \frac{10^{-5}[\text{m}]}{10^4[\text{m}]} = 10^{-9} \quad 1.9$$

1.2 Ecuaciones constitutivas

Matemáticamente estas ecuaciones describen la relación de las ecuaciones cinemáticas, térmica y mecánicas, físicamente definen varios materiales ideales que sirven como modelos de comportamiento de materiales reales. Entre las ecuaciones constitutivas se encuentran:

- Sólido linealmente elástico.
- Fluido linealmente viscoso.
- Ecuación de la relación esfuerzo-deformación plástica.
- Operador diferencial linealmente viscoelástico.
- Integral linealmente viscoelástico.

Sin embargo la ecuación constitutiva en la que se enfoca esta tesis es a la primera donde se refiere, al modelo linealmente elástico.

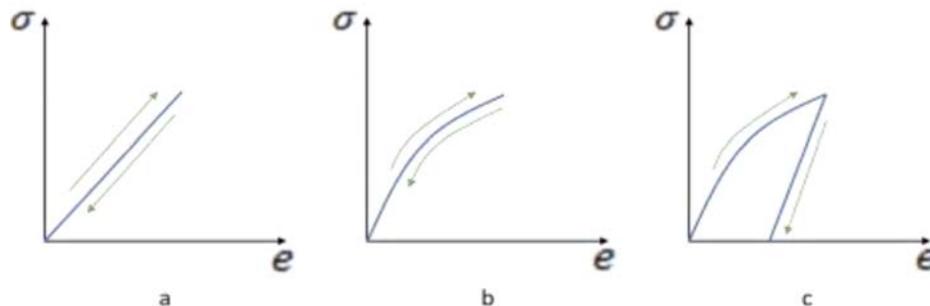


Figura 1.2.1 Gráfica de deformación vs esfuerzo uniaxiales cuando se le aplica el esfuerzo y después de que se aplica el esfuerzo. Las graficas tienen el siguiente comportamiento a) linealmente elástico, b) no-linealmente elástico e c) inelástico.

El comportamiento elástico se caracteriza por tener las siguientes condiciones:

- i. Cuando el esfuerzo es la única función de la deformación.
- ii. Cuando el material recupera totalmente su forma “natural” después de remover las fuerzas que fueron aplicadas.

Por lo que la ecuación constitutiva linealmente elástica es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad 1.10$$

También conocida como la *ley generalizada de Hooke*, donde C_{ijkl} son las constantes elásticas, las cuales tienen $3^4=81$ componentes, sin embargo debido a la simetría de ambos tensores, tanto esfuerzos como deformaciones, es decir:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jimk} \quad 1.11$$

Por lo que se reduce a 36 componentes, la ecuación 1.10, asumiendo la ecuación 1.11, se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad 1.12$$

Donde:

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21},$$

Basado en este modelo se pueden distinguir dos tipos de medios:

1. Medio isotrópico, i.e. que se mantienen las mismas propiedades s en todas las direcciones, la ecuación constitutiva queda en función de las *constantes de Lamé*, λ y μ :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad 1.13$$

Las constantes elásticas quedan de la siguiente manera:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}) \quad 1.14 \text{ a}$$

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad 1.14 \text{ b}$$

La constante de lamé μ también conocida como coeficiente de rigidez, siempre es positiva ya que físicamente describe la respuesta a un esfuerzo cizallante, es decir al cambio de forma del cuerpo. Un material que no permita esfuerzos cizallantes se le conoce como fluido perfecto, dry water, aunque ningún fluido real se comporta como un fluido perfecto se puede considerar al océano como uno de estos fluidos. La otra constante de lamé λ , puede interpretarse con el módulo de bulk o conocido también como incompresibilidad, que se define como el coeficiente entre la presión aplicada y el cambio fraccional del volumen:

$$K = -\frac{dP}{d\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad 1.15$$

Otras 2 relaciones importantes que se obtienen en un estado de esfuerzo llamado tensión uniaxial. La primera es el coeficiente Poisson, ν , que se define como la relación entre la contracción de los dos ejes con el eje de extensión en la cual la tensión es aplicada:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 1.16$$

La segunda es el módulo de Young, E , que es la relación entre esfuerzo tensorial con la deformación resultante de la extensión:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad 1.17$$

En sismología se suele hacer otra simplificación que se le conoce como sólido de Poisson donde $\lambda = \mu$. Las dimensiones de λ , μ , E , y K tiene dimensiones de esfuerzo fuerza/longitud al cuadrado, como pueden ser GPa o dyn/cm².

2. Medio anisotrópico, se le conoce a cualquier material que necesite más de las 2 constantes de Lamé, es decir que las propiedades del material van a ser diferentes dependiendo de la dirección.

Para el caso más general de anisotropía es la triclinica donde tiene 21 constantes elásticas independientes, debido a la simetría de la matriz $C_{ij} = C_{ji}$, es decir:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad 1.18$$

Este tipo de anisotropía aún no se puede medir en campo.

A pesar de no tener las mismas propiedades en todas las direcciones puede tener alguna simetría ya sea de eje, i.e. se rota sobre un eje, o de plano, i.e. se refleja sobre un plano. Supongamos que tiene un plano de simetría xy, es decir un cuerpo monoclinico, lo que la matriz de transformación será:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 1.19a$$

Quedando el esfuerzo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad 1.19b \end{aligned}$$

Igualando y comparando el esfuerzo de la matriz de constantes elásticas, i.e. $\sigma_1 = \sigma'_1$, del caso general, σ_1 , con el del un plano de simetría, σ'_1 , donde:

$$\sigma_1 = C_{11}e_1 + C_{12}e_2 + C_{13}e_3 + C_{14}e_4 + C_{15}e_5 + C_{16}e_6 \quad 1.20 \text{ a}$$

$$\sigma'_1 = C_{11}e_1 + C_{12}e_2 + C_{13}e_3 + C_{14}e_4 + C_{15}e_5 + C_{16}e_6 \quad 1.20 \text{ b}$$

Para que sean iguales debe de ser $C_{14}=C_{15} = 0$, siguiendo con el mismo paso para los demás esfuerzos, i.e. $\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha$, se reduce de 36 a 20 constantes diferentes de cero y al ser simétrico ($C_{ij} = C_{ji}$) se reduce a 13 constantes es decir:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 1.21$$

Si el plano yz también es un plano de simetría, además del plano xy, el tensor de constantes elásticas se reducen a 12 diferentes de cero pero como es simétrico ($C_{ij} = C_{ji}$) quedan sólo 9, quedando:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 1.22$$

Si también el plano xz es un plano de simetría no hay más reducciones. Si el material posee los tres planos perpendiculares de simetría se le conoce como un material ortorrómbico, e.g. simetría de un ladrillo, que es el caso más común en geofísica e.g. una secuencia de capas delgadas, o una lutita, conteniendo a un juego de fracturas verticales, o una formación isotrópica con un solo juego de fracturas verticales no circulares. Para llegar a ser un material isotrópico con el eje de simetría rotando el eje x 90° , luego rotando el eje z 90° y finalmente rotando el eje z 45° . En este caso a lo mejor no

podamos medir 9 módulos, sin embargo sólo algunos de los módulos afectan de manera importante los datos que se adquieren, por lo que sólo tendríamos que conocer la combinación de éstas y no los módulos, como tal.

Otro tipo de anisotropía, muy común en la tierra, es la anisotropía radial o también se le denomina como: isotropía transversal, simetría polar o simetría cilíndrica. Ocurre cuando se tiene un eje de simetría, e.g. en un material de capas apiladas, cada capa es isotrópica pero las propiedades varían entre capas. Supongamos que nuestro modelo es como sucede en la tierra que en dirección z es la anisotropía, figura 1.2.3a.

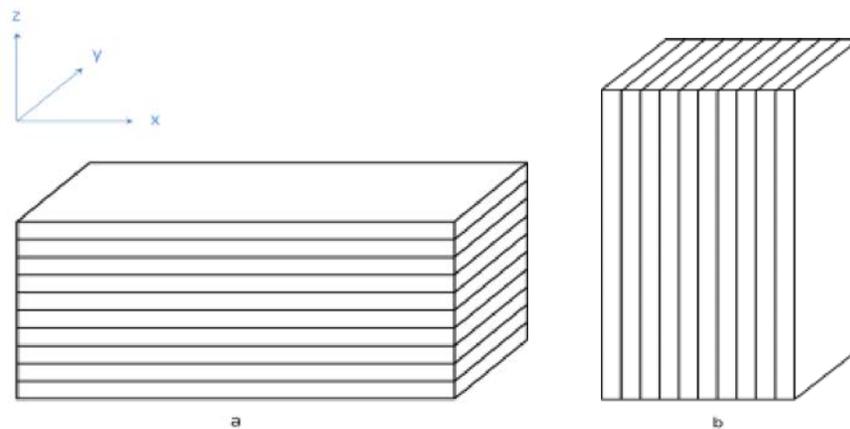


Figura 1.2.2 Modelo de anisotropía radial a) VTI, Transversalmente isotrópico con eje de simetría Vertical (Transversely Isotropic with Vertical axis) b) HTI, Transversalmente Isotrópico con eje de simetría Horizontal (Transversely Isotropic with Horizontal axis).

Este tipo de anisotropía (VTI) puede ser caracterizado por 5 coeficientes elásticos independientes quedando C_{ij}

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & (C_{11} - 2C_{66}) & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ (C_{11} - 2C_{66}) & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 1.23$$

Comparando la ecuación 1.23 con la ecuación 1.14 de un medio isotrópica difieren tanto el coeficiente C_{33} de C_{11} ó de C_{44} con C_{66} debido a que la dirección z, es diferente tanto en la dirección x como en la dirección y.

Tomando en cuenta que una onda se propaga en dirección x y haciendo una analogía con el caso isotópico, ecuación 1.14, C_{11} corresponde a $\lambda + 2\mu$ en dirección x, C_{66} corresponde a μ en dirección y y C_{44} corresponde a μ en dirección z. Ahora suponiendo que la onda se propaga en dirección z, i.e. el eje de simetría, C_{33} correspondería $\lambda + 2\mu$ en dirección z y C_{13} sería λ .

Si el eje de simetría fuera en dirección x es decir HTI (Horizontal Transversely Isotropic), figura 1.2.2 b, haciendo la analogía con el eje de simetría en x, la matriz de las constes elásticas quedaría (Rüger, 1997):

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} & (C_{33} - 2C_{44}) & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & (C_{33} - 2C_{44}) & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 1.24$$

1.3 Ecuación de la onda elástica P y S

El principio de la conservación del momento lineal nos lleva a la ecuación de movimiento. Es decir según la Segunda Ley de Newton nos dice que dado un sistema de referencia inercial, la variación instantánea del momento lineal, \vec{p} , de un cuerpo es igual a la fuerza resultante, \vec{F} , que actúa sobre él:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_i)}{dt} = m\vec{a}_i \quad 1.25$$

Que en su forma integral se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{v}_i dm \quad 1.26$$

Si el cuerpo está sometido a fuerzas tanto de cuerpo como de superficie, la fuerza quedaría:

$$\vec{F}_i = \iiint_V f_i dm + \iint_S T_i dS \quad 1.27$$

Usando el teorema de Cauchy, ecuación 1.3, podemos pasar de los tensores a los esfuerzos y con el teorema de Gauss, pasar de una integral de superficie a una de volumen:

$$\iint_S T_i dS = \iint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_V \sigma_{ij,j} dV \quad 1.28$$

Sabemos que la densidad se define como:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad 1.29$$

Sustituyendo la ecuación 1.29 y 1.28 en la ecuación 1.27 al igual que la ecuación 1.29 en la ecuación 1.26 la fuerza se puede expresar:

$$\vec{F}_i = \iiint_V (\rho f_i + \sigma_{ij,j}) dV = \rho f_i + \sigma_{ij,j} \quad 1.30 \text{ a}$$

$$\vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{v}_i dV = \rho \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \quad 1.30 \text{ b}$$

Igualando las ecuaciones 1.30 a y 1.30 b nos da la ecuación de movimiento

$$\rho f_i + \sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_i}{\partial t^2} \quad 1.31$$

Esta ecuación es válida para cuerpos elásticos, viscoelásticos, líquidos, etc. Combinando la ecuación de movimiento, que relaciona esfuerzos con desplazamientos, con la ecuación constitutiva, que a su vez relaciona esfuerzo con deformación. Para un medio isotrópico la ecuación de onda linealmente elástica, despreciando fuerzas externas i.e. ecuación homogénea, queda de la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \vec{u}_i \quad 1.32$$

La ecuación 1.32 representa dos tipos de movimiento:

1. Dilatación, tomando la divergencia de la ecuación de onda:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \vec{u}_i = (\lambda + \mu) \nabla^2 \theta + \mu \nabla^2 \nabla \cdot \vec{u}_i \quad 1.33 \text{ a}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta \quad 1.33 \text{ b}$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta \quad 1.33 \text{ c}$$

La ecuación anterior es la ecuación escalar, donde α es la velocidad de la onda P

2. Rotación, ahora tomando el rotacional de la ecuación de onda:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \vec{u}_i = (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla \theta + \mu \nabla^2 \nabla \times \vec{u}_i \quad 1.34 \text{ a}$$

$$\nabla^2 \Omega = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega \quad 1.34 \text{ b}$$

Donde $\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}_i$ y β es la velocidad de la onda S.

La solución de la ecuación de onda, conocida como onda plana armónica se escribe:

$$\vec{u} = \vec{A} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad 1.35$$

Donde $\vec{k} = |\vec{k}| \hat{k}$ es el vector de onda o vector de número de onda. Esta solución describe un plano de onda, perpendicular a la dirección de propagación, propagándose arbitrariamente en una dirección dada por el vector de onda, el vector de onda describe dos características importantes de la propagación de onda, su magnitud da la frecuencia espacial y su dirección da la dirección de propagación de onda.

Otra solución de la ecuación de onda escalar en tres dimensiones nos da frentes de ondas esféricas. Para obtenerlo, se expresa el potencial escalar y su Laplaciano en coordenadas esféricas. La onda esféricamente simétrica satisface la ecuación homogénea.

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad 1.36$$

Donde el radio es el espacio variable más que el vector de posición r . Para resolver la ecuación se sustituye la ecuación 1.36 y obtener 1.37.

$$\theta(r, t) = \frac{\xi(r, t)}{r} \quad 1.37$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad 1.38$$

La ecuación 1.37 es la ecuación escalar en una dimensión por lo que cualquier función de la forma $\xi=f(r\pm vt)$ satisface la ecuación 1.37 cuando $r \neq 0$, donde el signo negativo representa una onda divergente hacia afuera de la fuente en el origen con la amplitud decayendo, con el signo positivo es una onda esférica que regresa al origen donde su amplitud va aumentando.

1.4 Ondas sísmicas

El desplazamiento puede separarse en dos potenciales, el escalar ecuación 1.33 c que corresponde a la onda P y el potencial vectorial ecuación 1.34 b que corresponde a la onda S. Para entender el comportamiento del desplazamiento, se considera una onda plana propagándose en la dirección z . El potencial escalar armónico la onda P satisface:

$$\varphi(z, t) = A \exp(i(\omega t - kz)) \quad 1.39$$

Por lo que el desplazamiento resultante es el gradiente:

$$u(z, t) = \nabla \varphi(z, t) = (0, 0, -ik) A \exp(i(\omega t - kz)) \quad 1.40$$

La única componente que no es cero es en la dirección de la propagación. La dilatación

$$\nabla \cdot u(z, t) = -k^2 A \exp(i(\omega t - kz)) \quad 1.41$$

es diferente de cero, y hay cambio de volumen, por lo que la onda P generado por el potencial escalar es una onda compresiva que es un ejemplo de una onda longitudinal ya que el campo de desplazamiento varía en dirección de la propagación. Mientras que la onda S, descrita por el potencial vectorial:

$$\mathbf{Y}(z, t) = (A_x, A_y, A_z)\exp(i(\omega t - kz)) \quad 1.42$$

el campo de desplazamiento resultante está dado por el rotacional

$$\mathbf{u}(z, t) = \nabla \times \mathbf{Y}(z, t) = (ikA_x, -ikA_y, 0)\exp(i(\omega t - kz)) \quad 1.43$$

Por lo que el único desplazamiento asociado a la onda S es perpendicular a la dirección de la propagación de la onda, la onda S no causa ningún cambio de volumen ya que la dilatación, θ , $\nabla \cdot \mathbf{u}(z, t)$ es cero. La onda S es un ejemplo de una onda transversal ya que el campo de desplazamiento varía con un ángulo recto a la propagación de ondas.

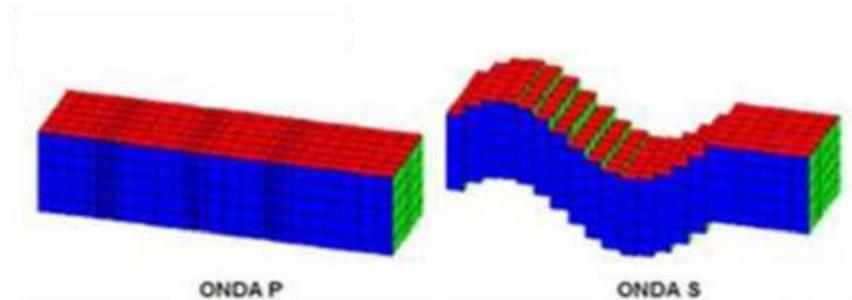


Figura 1.4.1 Esquema de la propagación de la onda P y de la onda S

Dado que sólo A_x y A_y contribuyen al desplazamiento, la onda S tiene dos componentes de polarización independientes. La polarización de la onda S se define como SV para la onda de cizalla con el desplazamiento en la vertical en el plano xz y SH para la onda polarizada horizontalmente en la dirección y, paralela a la superficie de la tierra, figura 1.4.2. Las ondas P y SV están acopladas una con la otra cuando interactúan con fronteras horizontales, mientras que la onda SH permanece separada.

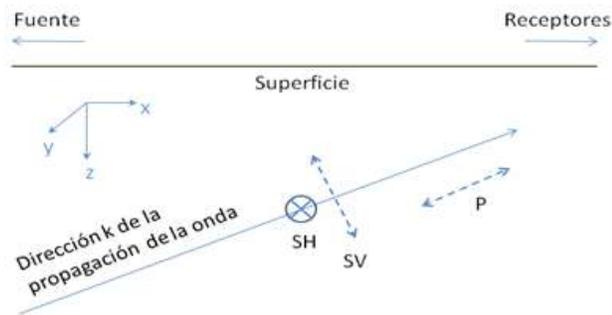


Figura 1.4.2 Esquema del desplazamiento de las ondas P y S (Modificada de Stein & Wysession, 2003)

Para el estudio de las diferentes ondas en los registros sísmicos, usan una componente vertical y dos horizontales, radial y transversal; la radial es aquella donde la dirección del vector es fuente receptor y la transversal está a 90° de esta dirección. Debido a estas características de las componentes, las ondas P se aprecian en la componente vertical, las fases de la onda SV en la componente radial y la fase de la onda SH en la componente transversal. Por medio de los hodogramas se puede determinar la polarización, la dirección de rotación de las ondas y su forma, se obtiene graficando dos componentes de la partícula en movimiento en una ventana de tiempo.

Otro tipo de ondas son las ondas superficiales conocidas como onda Love y ondas Rayleigh. Las primeras se generan por ondas SH que quedan atrapadas cerca de la superficie, las segundas es una combinación de las ondas P y las ondas SV, figura 1.4.3.

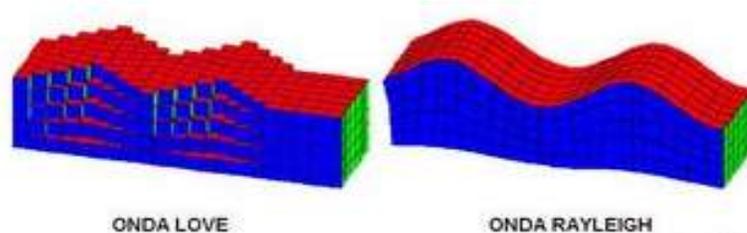


Figura 1.4.3 Esquema de la propagación de la onda de Love y la onda de Rayleigh.

Las ondas Rayleigh son retrógradas hasta $1/5$ su longitud de onda donde se empiezan a hacer prógradas, su movimiento es de forma elíptica, usualmente de gran amplitud, baja frecuencia (menos

de 12Hz), su velocidad en un sólido de Poisson i.e. $\lambda=\mu$, es de 0.92 veces la velocidad de la onda S. La onda Love son ondas dispersivas es decir, a diferentes frecuencias tiene distintas velocidades.

1.5 Atenuación

Las ondas sísmicas pueden reducir su amplitud debido a diferentes procesos como son la reflexión y transmisión de las ondas en interfases discretas, divergencia esférica, scattering, multipathing y anelasticidad. Los primeros son procesos elásticos sin embargo el último, llamado también atenuación intrínseca, involucra la conversión de energía sísmica a calor.

En el momento que hay ondas que se reflejan y se transmiten de una onda incidente, por la ley de la conservación de la energía la suma de la amplitud de la onda transmitida y reflejada dará la amplitud de la onda incidente por lo que al reflejarse y transmitirse muchas veces la amplitud va decayendo.

La divergencia esférica es el efecto del cambio de amplitudes conforme el frente de onda viaje a través de la medio, por lo que la energía por unidad del frente de onda varia con la expansión o contracción del frente de onda. Para ondas de cuerpo la energía por unidad del frente de onda decae a $1/r^2$ y su amplitud decrece $1/r$, donde r es el radio del frente de onda.

Multipathing es un proceso en donde las ondas sísmicas se enfocan y desenfocan con las variaciones laterales de la velocidad, cuando esto ocurre, las ondas que llegan a los receptores puede ser vistas como que han tomado otros “caminos” en vez del camino directo y por eso muestrearon una trayectoria más larga.

El scattering va a depender de la relación de la heterogeneidad del medio con la longitud de la onda así como también de la distancia que ha viajado la onda en el medio. Cuando la heterogeneidad es más grande que la longitud de onda, se considera que la onda tiene otro camino que es distorsionado multipathing; cuando la heterogeneidad es similar a la longitud de onda se piensa en scattering; y cuando la longitud de onda es mayor que la heterogeneidad, las heterogeneidades son parte del medio que la onda puede describir. La difracción puede verse como un comportamiento intermedio entre multipathing y el scattering.

Con respecto a la atenuación intrínseca si el movimiento no estuviera amortiguado el movimiento continuaría infinitamente, sin embargo no es el caso de la realidad, llega un momento en que para la oscilación, este tipo de atenuación convierte movimiento en calor y produce deformaciones permanentes. El amortiguamiento es proporcional a la velocidad de la masa y opuesto a su movimiento. Por lo que la ecuación de movimiento quedaría:

$$m \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \gamma m \frac{du(t)}{dt} + ku(t) = 0 \quad 1.44$$

Donde γ es el factor de amortiguamiento, sin embargo el factor Q o factor de calidad es más utilizado en la literatura, si este factor fuera infinito, no habría atenuación alguna y se define como:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad 1.45$$

Donde $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^2$ conocida como frecuencia característica, k expresa la constante de restauración de un cuerpo y m es la masa. Por lo que la ecuación 1.44 queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad 1.46$$

La ecuación diferencial 1.46 describe una oscilación armónica amortiguada, que puede ser resulta asumiendo que el desplazamiento es la parte real de un exponencial complejo:

$$u(t) = A_0 e^{it(a+ib)} \quad 1.47$$

Sustituyendo 1.47 en 1.46 y resolviendo la ecuación diferencial, la parte real es la solución del desplazamiento armónico:

$$u(t) = A_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t) \quad 1.48$$

Se pueden ver claramente dos términos, la oscilación armónica dada por el coseno y el decaimiento dado por el exponente negativo. La relación entre la presión y la temperatura conforme a la atenuación es la siguiente: la atenuación aumenta conforme aumenta la temperatura y disminuye conforme disminuye la presión.