



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL– HIDRÁULICA

**GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS DE PARED CON COMPORTAMIENTO  
VISCOELÁSTICO**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:  
**DAVID PANIAGUA LOVERA**

TUTOR PRINCIPAL:  
**DR. RAFAEL BERNARDO CARMONA PAREDES, INSTITUTO DE INGENIERÍA**

México, Cd. Mx. Ciudad Universitaria, Noviembre 2017

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Ayala Milián Amado Gustavo  
Secretario: Dr. Berezowsky Verduzco Moisés  
Vocal: Dr. Carmona Paredes Rafael Bernardo  
1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Escalante Sandoval Carlos A.  
2<sup>d o.</sup> Suplente: Dr. Aragón Hernández José Luis

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. RAFAEL B. CARMONA PAREDES



---

**FIRMA**

*A mis padres y hermanos*



# Reconocimientos

---

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Rafael B. Carmona Paredes por el gran apoyo que ha sido para mí durante mi estancia bajo su tutela, ya que siempre ha invertido su tiempo, conocimiento, experiencia y comentarios para mejorar el contenido de este trabajo. A la M. en C. Libia G. Carmona Paredes por sus acertadas contribuciones. Al M. en I. Eduardo A. Rodal Canales y M. en I. Enrique Autrique (Policonductos S.A. de C.V.) por facilitarme los datos experimentales, los cuales fueron fundamentales para la calibración del modelo. Al Dr. Gustavo Ayala por su continuo consejo. A Cesar Paniagua Lovera, que continuamente ha colaborado conmigo dandome un enfoque diferente de todo lo que hago.

Le agradezco a los miembros de mi jurado por el tiempo utilizado en revisar y enriquecer el contenido de este trabajo.

Reconozco y agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado por medio de su programa de becas. Así mismo al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme desarrollar mis actividades dentro de sus instalaciones.



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

David Paniagua Lovera. México, Ciudad de México, noviembre de 2017





# Resumen

---

Nuevos materiales derivados del petróleo han generado beneficios importantes en diversos campos de la industria y de la ingeniería. En sistemas de abastecimiento y distribución de agua potable, como en redes de drenaje, estos nuevos materiales han aportado ventajas en costos de manufactura e instalación, durabilidad y mitigación de riesgos a la salud.

Esta tesis trata sobre el análisis de transitorios hidráulicos en tuberías de agua a presión construidas con tubos de polietileno de alta densidad, resina tipo 4710. Este tipo de tuberías, con alta capacidad de deformación, tienen mecanismos con mayor disipación de energía que los tubos de pared rígida (acero, concreto y otros materiales).

Por lo tanto, para respaldar los criterios de diseño de tuberías de presión con tuberías de polietileno de alta densidad, este trabajo presenta el desarrollo de una metodología práctica, pero suficientemente robusta, capaz de estimar adecuadamente el comportamiento transitorio causado por interrupciones abruptas del flujo del agua.

El análisis se aborda en dos líneas principales. Primero, se propone un modelo constitutivo para el material de la tubería, más simple que los modelos reportados en la literatura técnica, y se incorpora en el modelo numérico de golpe de ariete siguiendo el esquema del Método de las Características.

En segundo lugar, comparando los resultados numéricos con mediciones experimentales y con base en la información de las propiedades físicas de la resina de la tubería, se proponen fórmulas empíricas para calcular los valores numéricos de los parámetros requeridos por el modelo de cálculo propuesto para transitorios hidráulicos en tuberías de polietileno de alta densidad.



# Abstract

---

New materials derived from petroleum have brought important benefits in various fields of industry and engineering. In potable water supply and distribution systems, as well as in drainage networks, these new materials have provided advantages in manufacturing and installation costs, durability, and health risk mitigation.

This thesis deals with the analysis of hydraulic transients in pressure water pipes constructed with high density polyethylene pipes, resin type 4710. These pipes, with high deformation capacity, have mechanisms with greater energy dissipation than rigid wall pipes (steel, concrete and other materials).

Therefore, in order to support design criteria for pressure pipelines with high density polyethylene pipes, this paper presents the development of a practical methodology, but sufficiently robust, capable of adequately estimating the transient behaviour caused by abrupt interruptions of the water flow.

The analysis is addressed in two main ways. First, a constitutive model for the pipe material, simpler than the models reported in the technical literature, is proposed and incorporated in the numerical water hammer model, following the scheme of Method of Characteristics (MOC).

Secondly, by comparing the numerical results with the experimental measurements and based on the information on the physical properties of the polymer resin, empirical formulas are proposed to calculate the numerical values of the parameters required by the proposed hydraulic transient model.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Definición del problema . . . . .	1
1.2. Objetivo general . . . . .	3
1.3. Objetivos específicos . . . . .	3
1.4. Motivación . . . . .	4
1.5. Hipótesis y limitaciones . . . . .	5
1.6. Esbozo del trabajo . . . . .	5
<b>2. Antecedentes</b>	<b>7</b>
2.1. Reseña histórica . . . . .	7
2.2. Revisión bibliográfica . . . . .	9
<b>3. Marco teórico</b>	<b>11</b>
3.1. Definición de golpe de ariete . . . . .	11
3.2. Modelos viscoelásticos . . . . .	14
3.2.1. Modelo de Kelvin-Voigt . . . . .	17
3.2.2. Modelo de Maxwell . . . . .	20
3.2.3. Modelo de sólido lineal estándar . . . . .	23
3.3. Ecuación de continuidad . . . . .	28
3.4. Ecuación dinámica . . . . .	33
3.5. Método de las características . . . . .	36
3.6. Método de las diferencias finitas . . . . .	38
3.7. Cálculo de las condiciones iniciales a flujo estacionario . . . . .	42
<b>4. Calibración del modelo y metodología propuesta de análisis</b>	<b>45</b>
4.1. Calibración del modelo . . . . .	45
4.1.1. Instalación de pruebas . . . . .	45
4.1.2. Ajuste de parámetros . . . . .	45
4.1.3. Obtención de curvas para la estimación de parámetros del modelo	52

## ÍNDICE GENERAL

---

4.1.4. Criterio de Chauvenet y descarte de pruebas . . . . .	54
4.2. Metodología de cálculo propuesta . . . . .	59
<b>5. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>6. Trabajos futuros</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

## Índice de figuras

---

1.1. Adición de aditivo anti-UV al PEAD (Recuperado de [1]). . . . .	2
1.2. Proceso de fabricación de tubos de PEAD (Recuperado de [1]). . . . .	2
1.3. Simulación numérica del golpe de ariete utilizando modelo elástico y tubería no deformable. . . . .	4
2.1. Modelo de Kelvin-Voigt modificado y generalizado. . . . .	9
3.1. Etapas del golpe de ariete. . . . .	13
3.2. Curva tiempo-deformación de un ensayo a fluencia y recuperación con esfuerzo superior al de cedencia. . . . .	15
3.3. Curva tiempo-deformación de un ensayo a fluencia y recuperación con esfuerzo inferior al de cedencia. . . . .	16
3.4. Resultados de prueba a relajación. . . . .	16
3.5. Modelo de Kelvin-Voigt. . . . .	17
3.6. Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de Kelvin-Voigt. . . . .	18
3.7. Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de Kelvin-Voigt. . . . .	19
3.8. Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de Kelvin-Voigt. . . . .	19
3.9. Modelo de Maxwell. . . . .	20
3.10. Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de Maxwell. . . . .	22
3.11. Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de Maxwell. . . . .	22
3.12. Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de Maxwell. . . . .	23
3.13. Modelo de sólido lineal estándar. . . . .	24
3.14. Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de sólido lineal estándar. . . . .	25
3.15. Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de sólido lineal estándar. . . . .	26
3.16. Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de sólido lineal estándar. . . . .	26
3.17. Volumen de control y sus condiciones hidráulicas en 2 instantes consecutivos. . . . .	28
3.18. Volumen de control y sus fuerzas aplicadas. . . . .	33
3.19. Malla empleada para la representación gráfica del método de las características. . . . .	38
3.20. Líneas características y sus puntos intervinientes en el esquema explícito. . . . .	38

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.1. Instalación de pruebas. . . . .	46
4.2. Comparación experimental y numérica en el sensor 4. . . . .	48
4.3. Comparación experimental y numérica en el sensor 3. . . . .	48
4.4. Comparación experimental y numérica en el sensor 2. . . . .	49
4.5. Comparación experimental y numérica en el sensor 1. . . . .	49
4.6. Dispersión de puntos RD-a. . . . .	53
4.7. Curva de amortiguamiento. . . . .	54
4.8. Función de densidad de probabilidad de la variable estandarizada $z$ y sus rangos de aceptación o rechazo. . . . .	55
4.9. Función de distribución de probabilidad acumulada de la variable estandarizada $z$ y sus rangos de aceptación o rechazo. . . . .	55
4.10. Comparación entre la función de probabilidad acumulada normal y empírica del error en $\eta$ . . . . .	58



## Índice de tablas

---

4.1. Distancia entre transistores. . . . .	46
4.2. Resumen de las condiciones experimentales de prueba. . . . .	50
4.3. Resumen de resultados de la calibración . . . . .	51
4.4. Valores críticos para el criterio de Chauvenet. . . . .	56
4.5. Tabla de resultados de la tercera prueba de Chauvenet . . . . .	57



# Introducción

---

## 1.1. Definición del problema

En el modelado de conducciones de agua a presión para el estudio de transitorios hidráulicos, el método de cálculo es seleccionado normalmente a partir de la calidad que se desee de los resultados y su dificultad de aplicación, ya que entre más refinado sea dicho modelo, más información se necesita del sistema a analizar.

Algunas de las soluciones más sencillas y tradicionales a la problemática de la estimación de golpe de ariete para el caso elástico son: ecuación de Joukowsky para el cálculo de presiones máximas y mínimas cerca del órgano de control para cierre rápido, las cadenas de Allievi que permiten conocer la sobrepresión en distintos instantes para maniobras lentas cerca del órgano de control, ecuaciones de Angus para el cálculo de las presiones en puntos a lo largo de toda la conducción, entre otras. El más importante en las últimas décadas es el método de las características, el cual permite dar un tratamiento numérico sencillo a las ecuaciones que definen el transitorio hidráulico en tuberías, además de su versatilidad para modelar cambios de tubería, dispositivos de control y alivio como son: válvulas de regulación y no retorno, torres de oscilación, cámaras de aire, tanques unidireccionales, válvulas de admisión y expulsión de aire, etc.

Las soluciones anteriores permitían estimar los efectos producidos por una maniobra en el órgano de control para la gran mayoría de los sistemas a presión en la práctica de la ingeniería hidráulica. No obstante, el desarrollo en materia de materiales dio lugar a nuevos compuestos que se presentaron como la solución a problemáticas comunes de las tuberías en los sistemas de distribución de agua potable, tal es el caso del polietileno de alta densidad (PEAD), el cual ha ido aumentando su tendencia de uso desde hace 30 años.

El PEAD es un derivado del petróleo [1] que se obtiene de la separación del gas natural etano  $C_2H_6$ , en proporciones entre el 2 y 6 %. Del etano por medio de desintre-

## 1. INTRODUCCIÓN

---

gación térmica se sustrae gas etileno  $C_2H_4$  que pasará a un reactor de polimerización resultando un polvo, el cual es aglutinado, extruido y sometido a corte, para finalmente tener una presentación de pequeños cilindros casi circulares de polietileno de alta densidad, estos cilindros son utilizados en diversos artículos, tal es el caso de las tuberías de PEAD a las cuales, además, se le añaden un aditivo anti-UV (ver figura 1.1)



**Figura 1.1:** Adición de aditivo anti-UV al PEAD (Recuperado de [1]).

El PEAD para tuberías que trabajan a presión tiene un grado específico definido por características como: densidad ( $\gamma = 945kg/m^3$ ) e índice de fluidez ( $IF = 0.11gr/10min$  a  $190^\circ C$  y empuje de  $2.16kg$ ).

El proceso de fabricación (ver figura 1.2) consta de fundir la resina a  $210^\circ C$  y a través de un dado moldear el tubo por extrusión, se enfría en tanques al vacío y atmosféricos para finalmente ser cortado a la medida deseada, generalmente dada por límites de los camiones que transportan los tubos.



**Figura 1.2:** Proceso de fabricación de tubos de PEAD (Recuperado de [1]).

La preferencia del PEAD ante los materiales tradicionales como el PVC, acero, hierro fundido, y demás en conducciones de agua potable radica en ventajas como alta resistencia a la corrosión, facilidad de manejo e instalación, calidad en sus uniones por

termofusión con herramientas simples y estandarizadas, flexibilidad y resistencia a ataques biológicos de microorganismos como hongos y bacterias.

Existe una gran diversidad de tipos de PEAD dependiendo de sus características [16], en el caso de México, el PEAD utilizado actualmente es el fabricado con la resina tipo 4710. El significado del primer dígito en la clasificación de tipo está asociado a la densidad de la resina de acuerdo a las normas ASTM D3350, siendo el 4 la densidad más alta; el segundo dígito indica su resistencia al agrietamiento y su propagación, los grados comerciales son el 6 y 7, siendo 7 el más alto en resistencia; el tercer y cuarto dígito se leen combinados y valoran el esfuerzo hidrostático de diseño en múltiplos de  $100psi$ , en este caso sería  $1000psi$ .

Las especificaciones más importantes de este material son los módulos de elasticidad a largo y corto plazo, los cuales se utilizan para evaluar los esfuerzos de oposición elásticamente cuando la carga se aplica instantáneamente o prevalece un periodo largo de tiempo. La problemática radica en que estos materiales no se comportan de manera puramente elástica, por lo que los efectos que produce un transitorio hidráulico con los esquemas de cálculo tradicionales no pueden ser evaluados.

## 1.2. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo de tesis es proponer y validar una metodología que permita conocer de forma lo más precisa posible el fenómeno ondulatorio del agua durante un transitorio hidráulico en tuberías deformables con comportamiento viscoelástico, así como caracterizar el material de acuerdo con parámetros físicos conocidos o disponibles para el ingeniero calculista.

## 1.3. Objetivos específicos

Las metas necesarias para lograr los objetivos previamente mencionados son las siguientes:

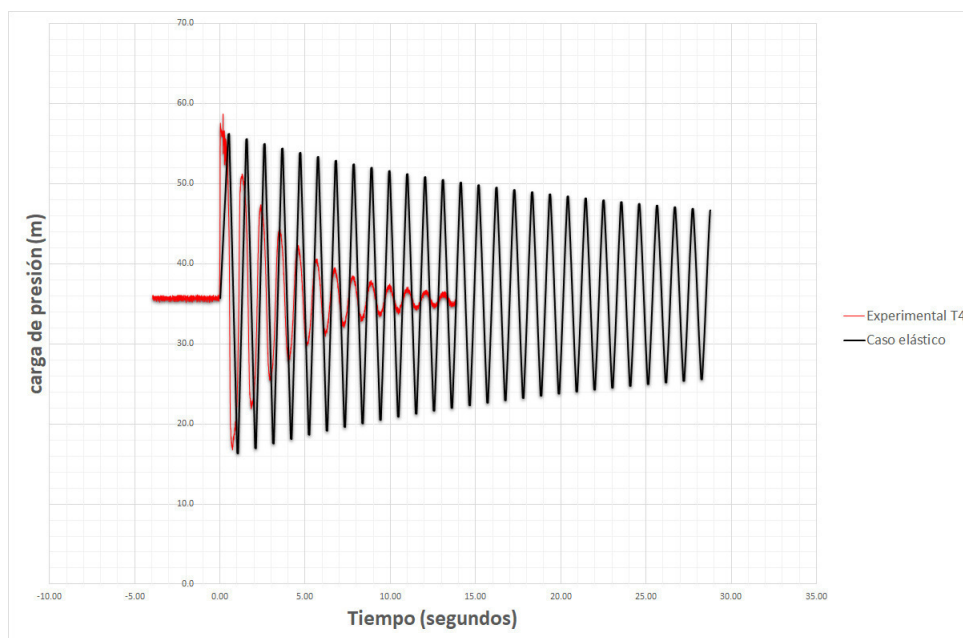
- Incluir el efecto por pequeñas deformaciones de la tubería al modelo de golpe de ariete.
- Considerar el comportamiento viscoelástico, el cual cobra una gran importancia en tiempo de disipación del fenómeno transitorio así como en la amplitud de las crestas y valles en las funciones carga de presión-tiempo y gasto-tiempo.

- Relacionar los parámetros del modelo constitutivo del sólido con las características físicas conocidas del sistema que se desee analizar.

### 1.4. Motivación

Si bien, los métodos convencionales de análisis de transitorios hidráulicos han mostrado su efectividad a través del tiempo en un gran número de sistemas, estos están planteados para tuberías con comportamiento elástico, lo cual no es el caso del sistemas de conducción más actuales construidos con polietileno de alta densidad (PEAD), por lo que en miras de reproducir correctamente los resultados observados en la realidad de forma numérica se ha desarrollado el presente trabajo.

La principal limitación de los modelos convencionales es la tubería rígida no deformable, lo que da a lugar que el único mecanismo de disipación de energía sea el rozamiento del fluido con las paredes de la tubería. A continuación, en la figura 1.3 se compara la historia de presiones durante un transitorio hidráulico (Prueba 01\_130514) haciendo uso del esquema numérico tradicional de golpe de ariete con el método de las características, contra medidas experimentales.



**Figura 1.3:** Simulación numérica del golpe de ariete utilizando modelo elástico y tubería no deformable.

De este análisis numérico se puede concluir que el periodo es estimado correctamente por el método convencional, sin embargo el tiempo de duración del transitorio y la

amortiguación no corresponden con lo registrado experimentalmente. Esto indica que la deformación es relativamente baja, lo suficiente para considerar constante la celeridad (debido a que depende directamente del diámetro), no obstante, esta deformación disipa la mayor cantidad de energía en el transitorio hidráulico.

## 1.5. Hipótesis y limitaciones

- En esta tesis se estima el efecto por fricción de igual forma que en un estado de flujo permanente.
- Se considera un modelo unidimensional para definir el comportamiento del material, por lo que hablando en términos del fenómeno en el sólido, un tramo de cálculo en la tubería es independiente de sus tramos adyacentes (no hay transmisión de esfuerzos por medio del sólido entre tramos).
- Este modelo no funciona para transitorios hidráulicos con deformaciones radiales que afecten la pendiente de las líneas características.
- Se considera que la tubería no se desplaza o vibra por efecto de trenes de ondas que se produce durante el transitorio hidráulico.
- Este modelo ha sido calibrado únicamente con tuberías de polietileno de alta densidad constituidas de resina tipo 4710.

## 1.6. Esbozo del trabajo

El presente trabajo de tesis está desarrollado en 6 capítulos. En este primer capítulo se realiza una breve explicación de las características técnicas generales del polietileno de alta densidad, una comparación entre el modelo convencional elástico de golpe de ariete y mediciones reales, las cuales nos indican que no es aceptable el uso de los esquemas convencionales para el análisis de transitorio. Además se delimitan los objetivos, alcances y limitaciones seguidos en toda la extensión del escrito. El segundo capítulo corresponde a una breve reseña histórica de los trabajos más importantes en el tema de golpe de ariete y la revisión bibliográfica de los trabajos más apegados al tema en cuestión. El tercero contiene la definición de los conceptos más relevantes del fenómeno

## 1. INTRODUCCIÓN

---

transitorio en tuberías, los modelos constitutivos unidimensionales de sólido más convencionales, así como el utilizado en el presente estudio para el correcto desarrollo de las ecuaciones diferenciales parciales que definen el problema (ecuación de continuidad y dinámica) y finalmente la solución numérica propuesta para el caso de conducciones de pared con comportamiento viscoelástico. El cuarto capítulo muestra los resultados numéricos obtenidos en 37 pruebas de laboratorio experimentales, las cuales hicieron posible relacionar los parámetros del modelo numérico con las características físicas de la conducción a analizar. En el quinto capítulo se particulariza en las conclusiones obtenidas del análisis de los resultados del capítulo 4. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan algunas sugerencias de trabajos futuros.



# Antecedentes

---

## 2.1. Reseña histórica

El panorama histórico en torno al golpe de ariete es muy amplio y como todo fenómeno físico ha sido estudiado a lo largo de los años intentando conocerlo más a detalle. En el caso de la ingeniería, tiene el fin de apoyar el desarrollo de herramientas de cálculo para lograr su correcta estimación para el diseño de estructuras civiles.

Han existido diversos ingenieros, científicos e investigadores los que han realizado aportaciones al tema en cuestión [13]. A continuación se presentan algunos de los personajes con más aportaciones en el campo y sus respectivas contribuciones:

- Helmholtz (1848) demostró que la velocidad de propagación o celeridad de una onda de sonido en el seno de un fluido compresible contenido en una tubería era función del módulo de elasticidad del material de dicha tubería.
- D.J. Korteweg (1848) obtuvo una ecuación para estimar la celeridad en el experimento de Helmholtz.
- Machaud (1878), en Lausana, Suiza, publicó en su obra *Coups de Bélier dans les Conduites. Etude des moyens employés pour atténuer les effets* un análisis matemático del golpe de ariete donde considera el agua como una columna elástica contenida en una tubería rígida.
- Joukowsky (1897) demostró que la celeridad de una onda de agua, al igual que la de sonido, estaba en función del módulo de elasticidad.
- Joukowsky (1898) publicó en las memorias de la Academia Imperial de San Petersburgo las ecuaciones para estimar los efectos del golpe de ariete, dichas ecuaciones son consideradas como la primera gran aportación a la teoría del golpe de ariete [13].

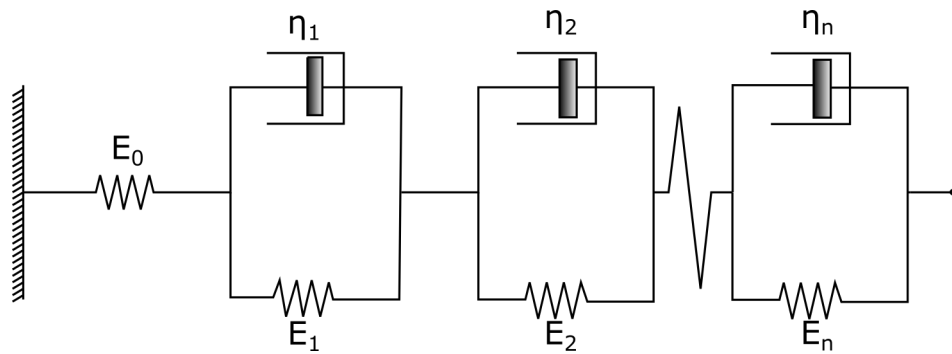
## 2. ANTECEDENTES

---

- Allievi (1913) publicó su obra *Teoría del golpe d'ariete*, editada en las actas del Colegio de Ingenieros y Arquitectos de Italia, dicha obra incluyó simplificaciones al modelo matemático que representa el fenómeno, las cuales no afectan en gran medida la calidad de los resultados. Con esto logró estimar la presión generada por el cambio de energía cinética a energía de presión. Algunos autores, como Jeager [10], mencionan que gran parte del mérito del trabajo de Allievi radicaba en que no solamente mostraba una solución al problema, sino que también lo presentaba con gran claridad y elegancia matemática.
- Othmar Schnyder (1929) desarrolló su método gráfico el cual le daba solución al problema de golpe de ariete en bombas.
- Othmar Schnyder (1932) publicó un escrito donde expone su método anteriormente mencionado pero para sistema de tuberías, incluidos los sistemas que alimentan turbinas.
- Louis Bergeron (1937) además de que había realizado el mismo método gráfico que Schnyder de forma paralela, demostró que este método gráfico pensado para el análisis de golpe de ariete tenía aplicación en otros campos disciplinarios como en la teoría de la elasticidad y problemas eléctricos. Después de su fallecimiento se publicó su libro llamado *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*.
- H. Favre (1938) estudió el golpe de ariete en tuberías con variaciones graduales de diámetro en el eje longitudinal de la conducción y lo publicó en su obra *Theorie des coups de bélier dans les conduites á caractéristiques linéairment variables le long de l'axe*. Otra obra importante de Favre fue *Cours de mécanique*, donde explica detalladamente la solución de Riemann para la integración de las ecuaciones que describen el golpe de ariete.
- Gray (1953), tras el surgimiento de los análisis hechos por computadora, introdujo el uso del método de las características para la solución numérica del *Theorie des coups de bélier dans les conduites á caractéristiques linéairment variables le long de l'axe* fenómeno del golpe de ariete.
- Streeter (1967) y Chaudry (1979), en sus libros *Hydraulic Transients* y *Applied Hydraulic Transients*, exponen de forma muy completa los fenómenos transitorios en hidráulica con sus respectivos métodos de cálculo.

## 2.2. Revisión bibliográfica

De acuerdo con la revisión de la literatura que trata el golpe de ariete en tuberías con comportamiento viscoelástico, el modelo constitutivo de material empleado es el modelo de Kelvin-Voigt modificado (incluyendo un resorte al inicio para dar una respuesta instantánea al modelo) y generalizado (para describir los fenómenos de la deformación a diferentes etapas) el cual, hablando numéricamente, al ser incorporado a la ecuación de continuidad ha arrojado excelentes resultados muy apegados a las mediciones realizadas por investigadores como Covas et al. [7], Carmona et al. [5], Weinerowska-Bords [21], Soares et al. [19], etc. La eficiencia de la incorporación del modelo de Kelvin-Voigt modificado y generalizado a las ecuaciones anteriormente mencionadas radica en que es capaz de describir el comportamiento del material a corto y a largo plazo en diferentes etapas (fluencia, relajación y recuperación), por lo que matemáticamente lo hace muy apto.



**Figura 2.1:** Modelo de Kelvin-Voigt modificado y generalizado.

Sin embargo, este modelo viscoelástico, en golpe de ariete, tiene algunas debilidades muy importantes que no pueden ser ignoradas, la primera radica en definir el número de elementos de Kelvin-Voigt de los que estará conformado el modelo generalizado, debido a que la estimación de los parámetros  $(2n + 1)$  dependerá directamente de dicho número [21], esto lleva al problema de la equifinalidad. Aunado a esto, este problema se complica más por el hecho de que el modelo viscoelástico es simplemente una expresión matemática que intenta reproducir correctamente los fenómenos internos que suceden en el material al aplicarle un historial de cargas, pero que no está fundamentada en dichos fenómenos [21]. Por otro lado, diversos trabajos en el tema, por ejemplo [5] y [7], llegan a la conclusión de que se alcanza la mejor aproximación incluyendo de 4 a 5 elementos Kelvin-Voigt al modelo generalizado. A pesar de haber definido el número de elementos Kelvin-Voigt, se tiene una segunda debilidad la cual consiste en la obtención de los parámetros del modelo, existen diversos caminos que podrían ser viables para este objetivo [19]. Uno radica en realizar pruebas mecánicas al material [7], el problema

## 2. ANTECEDENTES

---

es que las pruebas mecánicas no dan valores concluyentes [5], esto se explica porque se miden los fenómenos en escalas de tiempo diferentes a las de un transitorio hidráulico y el segundo camino consiste en la calibración de los parámetros mediante las pruebas a flujo transitorio, estas arrojan parámetros que dan un excelente apego numérico a los datos recabados experimentalmente del modelo físico, su gran problema cae en que no se ha logrado encontrar una relación entre los parámetros del modelo numérico y las características físicas de la conducción a analizar [5]. Mencionado lo anterior, podemos decir que la metodología propuesta hasta ahora no es lo suficientemente general para poder realizar un análisis de golpe de ariete en tuberías de pared viscoelástica de forma práctica y generalizada.

El problema de golpe de ariete en PEAD no solamente se enfrenta a la correcta descripción matemática del comportamiento del material ante una serie de cargas, sino que existen diversos fenómenos que difícilmente pueden ser contemplados. El primero es que las perturbaciones de sobre y subpresión causadas al cambiar las condiciones de flujo no solamente ocasionan perturbaciones en el fluido, sino que al generar una excitación en el sólido, iniciará el viaje de nuevos trenes de ondas en el sólido, por lo que se tendrá un efecto dispersivo [7] de los trenes de onda originalmente causados, además del efecto disipativo. El segundo fenómeno importante es el efecto denominado como fricción no estacionaria, este consiste en alterar principalmente el factor de fricción en la ecuación de momentum debido a los efectos locales y convectivos causados por los cambios bruscos en las condiciones del flujo [18], sin embargo, algunos autores [15] indican que el amortiguamiento mecánico tiene más importancia que la disipación de energía por fricción no estacionaria en tuberías con periodo corto y por el otro lado, los efectos por fricción no estacionaria toman importancia en tuberías con periodo largo, que bien puede ser un indicador para proceder en la calibración, no obstante lleva a la complicación de poder evaluar en qué porcentaje actúan estos fenómenos, debido a que ambos se ven reflejados como disipadores de energía en el transitorio hidráulico y es difícil delimitarlos [21]. Un tercer reto es la inclusión al modelo de variables físicas y temporales como es la temperatura y la historia de cargas que ha sufrido el material a lo largo de su vida en servicio [8], ya que éstas podrían tener un efecto acumulativo en el material que está expuesto a deformaciones considerables durante cada transitorio hidráulico que sufre. Finalmente, se tiene el problema de extender la metodología a diferentes polímeros existentes en el mercado debido a que su comportamiento mecánico está relacionado directamente con composición química [19].

## Marco teórico

---

### 3.1. Definición de golpe de ariete

El golpe de ariete puede definirse como un estado de flujo no permanente, transitorio, el cual tiene lugar entre un estado de flujo establecido y otro [3]. El cambio entre el primer y segundo estado de flujo se debe a una o varias alteraciones en las condiciones de frontera de la conducción en estudio, por ejemplo, el cierre o apertura de una válvula en los extremos aguas arriba o aguas abajo, el cambio de carga al inicio o al final de la tubería, etc. Esto perturba al flujo causando trenes de onda [10] que viajan del extremo donde se originaron hacia el otro extremo donde se reflejan y regresarán a su punto de origen cíclicamente hasta alcanzar un nuevo estado en equilibrio.

Con el fin de ilustrar de mejor forma tomaremos, como ejemplo el caso mostrado en la figura 3.1. Este sistema está formado por una tubería de un cierto diámetro, un tanque de carga fija en su extremo aguas arriba y una válvula, inicialmente abierta, en su extremo aguas abajo. Cabe mencionar que para esquematizar de una forma más sencilla el fenómeno se aceptan las siguientes suposiciones:

1) No existe oposición al flujo por efectos de fricción: Esto implica que la carga de presión en el tanque se conserva a lo largo de toda conducción antes de que inicie la maniobra que dará lugar al golpe de ariete.

2) El material se conserva en su etapa elástica: considerando esto se tendrá que no habrá ninguna atenuación (amortiguación) del fenómeno por el comportamiento del sólido que contiene al fluido, además conservará sus propiedades por lo que siempre habrá un único estado de deformación para un esfuerzo determinado.

a) En la figura 3.1a se observa el sistema inmediatamente después del cierre total de la válvula, debido a esta maniobra se induce que la velocidad sea igual a cero en ese extremo, lo cual, provoca un cambio de carga de velocidad a carga de presión por lo que

### 3. MARCO TEÓRICO

---

la tubería, al estar sometida a un esfuerzo mayor al inicial, se deformará aumentando su diámetro, con esto podemos decir que en esta primera etapa inició el viaje de una onda de sobrepresión  $+\Delta h$  y flujo cero. Durante todas las etapas, mientras la onda no pase por el algún punto, éste conservará sus condiciones de carga y gasto.

b) En la figura 3.1b podemos percatarnos que la onda iniciada en la etapa anterior ha terminado su recorrido dejando sus condiciones de carga y velocidad.

c) En esta tercera etapa (figura 3.1c) la onda ya ha sido reflejada, debido a que el embalse tiene una carga constante e impondrá su condición en la onda, es decir, que ahora viajará como una onda de subpresión  $-\Delta h$  y la tubería al tener un nuevo estado de deformaciones (disminuyendo sus dimensiones) y por continuidad obliga al fluido a salir de la conducción en dirección al embalse con velocidad  $V_i$ .

d) La cuarta etapa ilustrada en la figura 3.1d muestra que el viaje de la onda de subpresión ha terminado su recorrido y ha dejado sus condiciones anteriormente descritas.

e) En la quinta etapa (figura 3.1e) la onda ha sido nuevamente reflejada en la válvula, la cual impone una condición de flujo cero, por lo que viajará en dirección hacia el embalse. Con esta condición y permaneciendo como onda de subpresión la tubería disminuirá su diámetro nuevamente.

f) En esta sexta etapa (figura 3.1f), al igual que en la segunda y cuarta etapa, se ha terminado un tercer recorrido por la tubería dejando sus condiciones a lo largo de la misma.

g) La figura 3.1g, muestra la séptima etapa, donde la onda se ha reflejado en el embalse con sentido hacia la válvula y como onda a sobrepresión, debido al principio de continuidad y al nuevo estado de deformación de la tubería el agua fluye del embalse a la tubería con velocidad  $V_i$ .

h) En la octava etapa mostrada en la figura 3.1h se muestra que la tubería ha terminado otro recorrido, el sistema está en las condiciones con las que se inició el fenómeno transitorio. En esta descripción que corresponde a un sistema conservativo en el que no hay pérdidas de energía por fricción y por deformación, el ciclo se repetiría de forma indefinida.

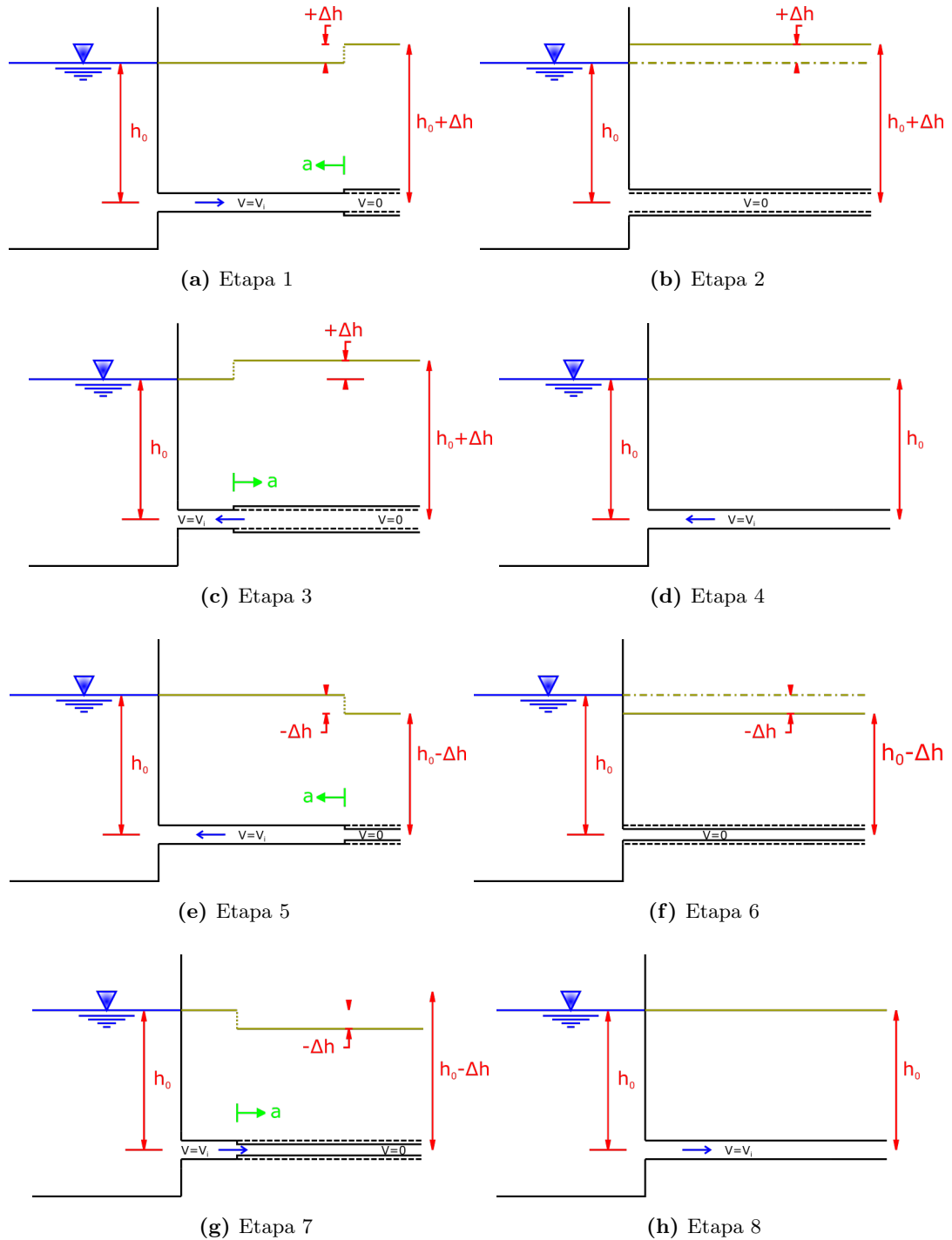


Figura 3.1: Etapas del golpe de ariete.

Sin embargo, en un sistema hidráulico con movimiento siempre existirán pérdidas de energía las cuales actuarán como disipador energético y harán posible que se alcance otro estado de equilibrio, que para el ejemplo anterior sería la condición estática, donde todos los puntos tengan la misma carga que el tanque.

## 3.2. Modelos viscoelásticos

Tanto los modelos elásticos como aquellos que involucran efectos plásticos de los materiales, comúnmente se tratan sin hacer intervenir la variable tiempo, es decir que se realizan comparaciones entre estados iniciales y finales sin especificar qué pasó entre uno y otro. Esto se debe a que en estos materiales se pasa de una configuración de equilibrio a otra relativamente rápido y, además, es prácticamente irrelevante si esto ocurrió en mucho o poco tiempo.

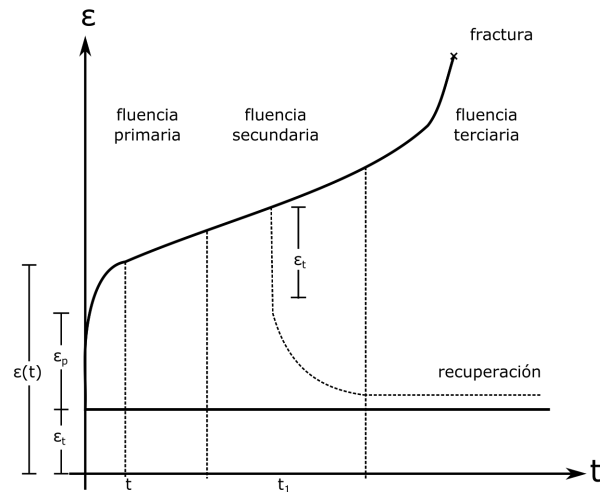
Existe una cantidad muy grande de materiales que encajan dentro de lo mencionado anteriormente; sin embargo, hay algunos que no se les puede calificar como elásticos o plásticos, pero tampoco se les puede ubicar propiamente como un fluido, sin embargo, fluyen a lo largo del tiempo de forma muy similar a un líquido. En estos materiales no es posible hablar de una configuración inicial y final debido a que cada estado por el que pasan es dependiente de las condiciones iniciales y de frontera en cada paso de tiempo [11]. Por otro lado, estos cuerpos tienden a recuperar su configuración inicial cuando desaparecen los agentes físicos externos que actúan sobre ellos. A este tipo de material se le clasifica como *viscoelásticos*, algunos ejemplos de ellos son los metales a temperaturas altas, hules sintéticos, polímeros, concreto reforzado a relajación térmica [9], etc.

Existen diversos experimentos para definir el comportamiento a diferentes condiciones de carga, uno de los más representativos es el de fluencia (a esfuerzo constante). Este consiste en la aplicación de una carga uniaxial repentina a una probeta con galgas extensométricas adheridas en las cuales se observa la evolución de la deformación en el tiempo, es fundamental tener especial cuidado en el tiempo de aplicación de la carga y el mantenerla con la menor cantidad de fluctuaciones para que este ensayo sea representativo. De este experimento se obtienen curvas como la que se muestra en la figura 3.2 en la cual se pueden observar diversos efectos como la deformación elástica  $\varepsilon_t$ , deformación plástica  $\varepsilon_p$ , etapas de fluencia (primaria, secundaria y terciaria), recuperación y fractura.

La deformación inicial es causada por el cambio repentino entre el estado de esfuerzo cero y el de esfuerzo constante. Esta deformación inicial estará formada con la deformación elástica y una deformación plástica (siempre y cuando el esfuerzo aplicado sea mayor al esfuerzo de cedencia). Posteriormente, la curva tiempo-deformación se separa del eje de las ordenadas en el punto de fluencia (creeping point), cabe señalar que es un punto de difícil identificación en el ensayo debido a que el cambio de pendiente vertical



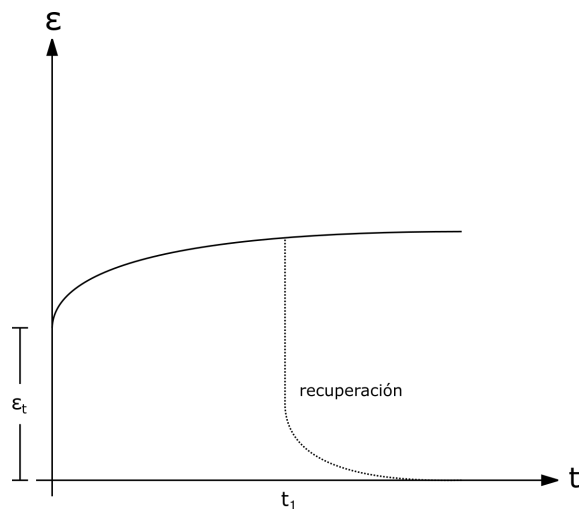
a una suave no siempre es sencillo de distinguir. Ya identificado el punto de fluencia, a partir de él inicia la fluencia primaria la cual se caracteriza por un cambio continuo en su pendiente, la cual va decreciendo hasta llegar a la fluencia secundaria donde se tiene una pendiente constante, cuyo valor es el mínimo de toda la curva, y finalmente se llega a una fluencia terciaria que puede identificarse por un constante incremento en la pendiente de la curva tiempo-deformación debido a que la probeta empieza a presentar estrangulamientos, lo que se traduce en secciones transversales más angostas y esfuerzos más grandes que la llevan a la fractura. Puede observarse que la deformación en cualquier punto es la suma de la deformación elástica, plástica y por fluencia.



**Figura 3.2:** Curva tiempo-deformación de un ensayo a fluencia y recuperación con esfuerzo superior al de cedencia.

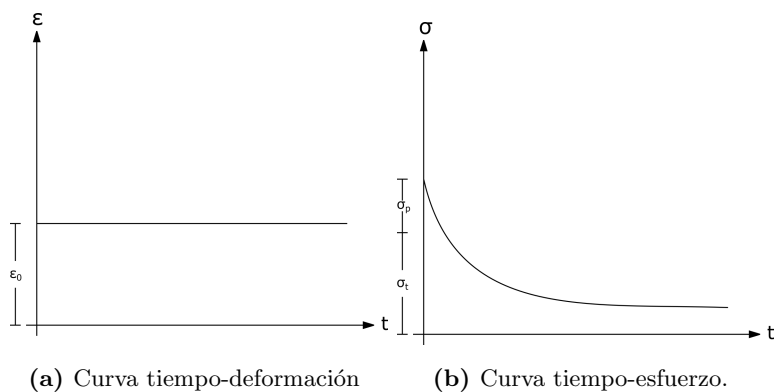
La figura 3.2, además de mostrar el ensayo a fluencia, ilustra la prueba a recuperación, la cual consiste en retirar prácticamente de forma instantánea la carga a la probeta en un tiempo  $t_1$  y medir las deformaciones en la probeta. Puede observarse que además de desaparecer la deformación elástica  $\epsilon_t$ , también se pierde una parte de la deformación por fluencia y tenderá asintóticamente a un valor de deformación dado dependiendo de la magnitud de la deformación plástica y de fluencia que se tuviera antes de retirar la carga. Si no se alcanzó el esfuerzo de cedencia durante el ensayo, no habrá deformación plástica y el cuerpo recuperará prácticamente su forma original (fig. 3.3).

Otro ensayo que puede dar más información sobre el comportamiento del material es la prueba a relajación, la cual se ilustra en la figura 3.4. Esta consiste en someter a la probeta a una deformación fija y observar la relajación de los esfuerzos como resultado del nuevo equilibrio de las moléculas que lo componen. Para esta prueba es necesario



**Figura 3.3:** Curva tiempo-deformación de un ensayo a fluencia y recuperación con esfuerzo inferior al de cedencia.

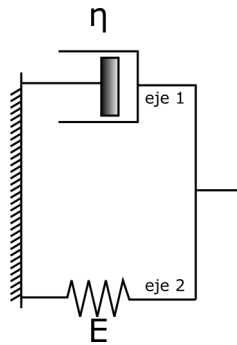
aplicar un esfuerzo mayor al de cedencia del material como se observa en la figura 3.4a), donde se somete a la probeta a una deformación repentina  $\epsilon_0$  que se mantiene durante un tiempo indefinido, esto provoca un esfuerzo elástico  $\sigma_t$  y un esfuerzo plástico  $\sigma_p$  que conforme ocurre el reacomodo de los corpúsculos que constituyen ese material los esfuerzos se van relajando hasta alcanzar una constante, lo que quiere decir que se ha finalizado dicho reacomodo.



**Figura 3.4:** Resultados de prueba a relajación.

### 3.2.1. Modelo de Kelvin-Voigt

El modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt es el más común de todos. Este se compone de un elemento elástico y uno viscoso los cuales trabajan en ejes 1 y 2 (indicados en la figura 3.5 y con subíndices en las ecuaciones), es decir en paralelo. Este modelo se caracteriza por:



**Figura 3.5:** Modelo de Kelvin-Voigt.

- Aditividad de tensiones:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.1a)$$

- Igualdad de deformaciones

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (3.1b)$$

Por otro lado, en cada uno de los ejes se cumplen diferentes leyes constitutivas las cuales son:

- Eje 1 (ley viscosa):

$$\sigma_1 = \eta \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad (3.2a)$$

- Eje 2 (ley elástica)

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 \quad (3.2b)$$

El modelo de comportamiento dinámico se obtiene como se muestra a continuación.

### 3. MARCO TEÓRICO

---

Derivando la ecuación 3.1b se observa que el cambio en la deformación en cualquier eje es igual al cambio de la deformación en todo el elemento.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (3.3a)$$

Sustituyendo 3.3a en 3.2a, 3.1b en 3.2b y realizando la aditividad de deformaciones.

$$\sigma_1 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.3b)$$

$$\sigma_2 = E\varepsilon \quad (3.3c)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.3d)$$

Dividiendo 3.3d entre  $\eta$  obtenemos la ecuación diferencial de primer orden que define el comportamiento del modelo de Kelvin-Voigt.

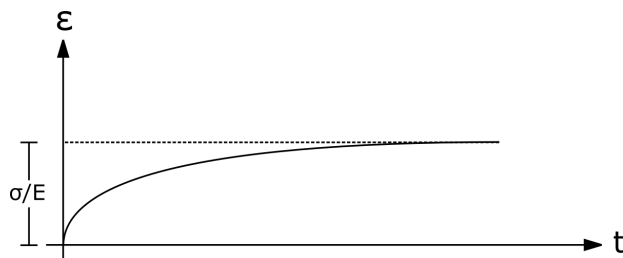
$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{E}{\eta}\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.3e)$$

Ya obtenida la ecuación diferencial que describe el modelo en cuestión es importante identificar su comportamiento a diferentes situaciones y así poder reconocer sus debilidades y fortalezas.

#### Comportamiento a fluencia

Resolviendo la ecuación 3.3e para esfuerzo constante ( $\sigma = \sigma_{cte}$ ) se obtiene que la deformación se comporta de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{cte}}{E} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right] \quad (3.4a)$$



**Figura 3.6:** Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de Kelvin-Voigt.

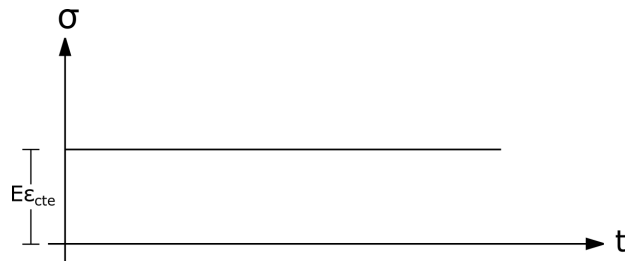
De la figura 3.6 es posible concluir que el modelo de Kelvin-Voigt explica adecuadamente la deformación por fluencia a lo largo del tiempo, sin embargo no la deformación

instantánea que se causa por la aplicación repentina de esfuerzo al material.

### Comportamiento a relajación

Al resolver la ecuación 3.3e para deformación constante ( $\varepsilon = \varepsilon_{cte}$ ), se obtiene que el esfuerzo se comporta de acuerdo con:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_{cte} \quad (3.5a)$$



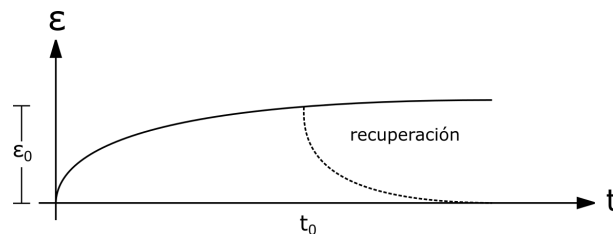
**Figura 3.7:** Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de Kelvin-Voigt.

Este resultado indica que el modelo de Kelvin-Voigt no es capaz de representar la atenuación de los esfuerzos internos causados por el reordenamiento de los corpúsculos que componen el material al buscar una nueva configuración de equilibrio [4].

### Comportamiento a recuperación

Para observar la recuperación de un material, se retira la carga repentinamente en un tiempo  $t_0$  al que le corresponde una deformación  $\varepsilon_0$ , por lo que la ecuación 3.3 con estas consideraciones se obtiene:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \quad (3.6a)$$

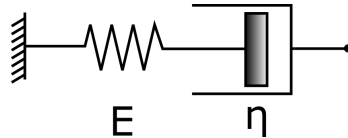


**Figura 3.8:** Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de Kelvin-Voigt.

La figura 3.8 muestra que en el instante donde se retiran los esfuerzos inicia una reducción gradual en la deformación definida por una función exponencial (ecuación 3.6) la cual tiende al valor de deformación cero, es decir a su estado inicial, este comportamiento se parece al observado en la realidad cuando no se tienen deformaciones plásticas.

#### 3.2.2. Modelo de Maxwell

Otro de los modelos clásicos en la teoría de la viscoelasticidad lineal es el modelo de Maxwell (figura 3.9) el cual está compuesto de un elemento elástico (indicado con subíndice 1) y uno viscoso (subíndice 2) los cuales trabajan en un mismo eje, es decir en serie. Las ecuaciones fundamentales que tiene que cumplir este modelo son:



**Figura 3.9:** Modelo de Maxwell.

- Igualdad de tensiones:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (3.7a)$$

- Aditividad de deformaciones

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.7b)$$

Las leyes constitutivas del elemento elástico y viscoso se conservan al igual que en las ecuaciones de Kelvin-Voigt.

- Ley elástica

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (3.8a)$$

- Ley viscosa:

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (3.8b)$$

$$(3.8c)$$

Debido a que las ecuaciones 3.7a,b y 3.8a,b describen los fenómenos de la parte elástica y viscosa por separado, es necesario operarlas para obtener el comportamiento del conjunto completo.

Despejando  $\varepsilon_1$  de la ecuación 3.8a y derivando con respecto al tiempo.

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} \quad (3.9a)$$

De la ley viscosa (ecuación 3.8b), se despeja la derivada de la deformación del amortiguador con respecto al tiempo.

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (3.9b)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.9a,b en la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 3.7b y haciendo uso de la igualdad de tensiones supuesta para este modelo (ecuación 3.7a) resulta:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.9c)$$

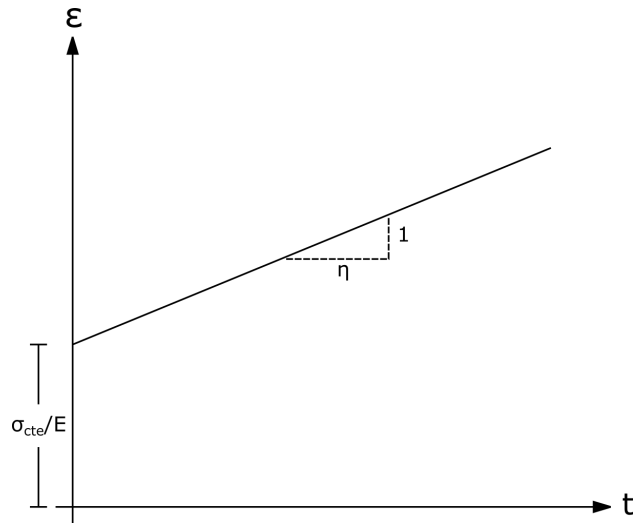
Al igual que en el caso del elemento de Kelvin-Voigt, el modelo de Maxwell está matemáticamente descrito por una ecuación diferencial lineal de primer orden. A continuación se ilustrará el comportamiento del modelo bajo diferentes condiciones.

### Comportamiento a fluencia

Producto de resolver la ecuación 3.9c para un esfuerzo constante ( $\sigma = \sigma_{cte}$ ) y considerando que la deformación inicial es elástica debido a la aplicación repentina del esfuerzo, se obtiene:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{cte}}{E} + \frac{\sigma_{cte}}{\eta} t \quad (3.10a)$$

Si bien, este modelo permite incorporar una respuesta instantánea, lo cual se apega a la realidad, la deformación por fluencia varía linealmente con el inverso de la viscosidad  $\eta$  y no tiene un estado de equilibrio final, por lo que no modela correctamente el comportamiento esperado.

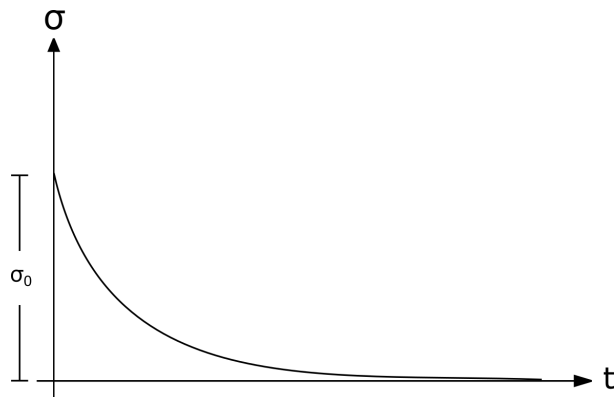


**Figura 3.10:** Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de Maxwell.

### Comportamiento a relajación

Resolviendo la ecuación 3.10a para deformación constante ( $\varepsilon = \varepsilon_{cte}$ ), la función de esfuerzo está definida como:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.11a)$$



**Figura 3.11:** Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de Maxwell.

Donde el esfuerzo inicial aplicado al elemento de Maxwell que causa la deformación que se mantendrá constante está indicado con un subíndice 0.

Este modelo representa el comportamiento a relajación de manera exponencial decreciente definida en la ecuación 3.11a y la figura 3.11. En este caso, el modelo se

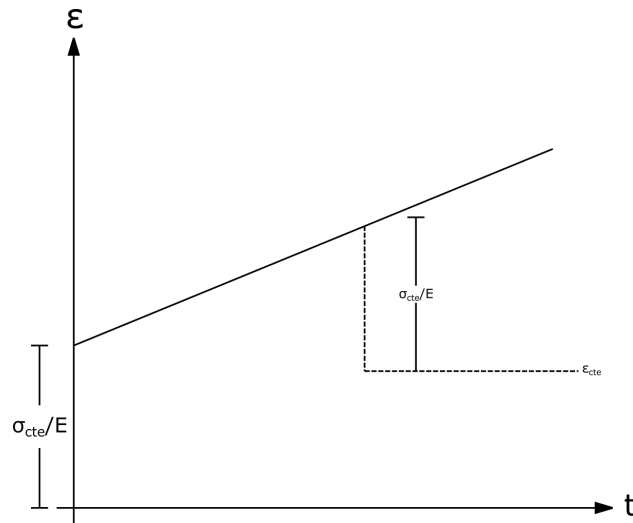


asemeja al comportamiento observado en la realidad.

### Comportamiento a recuperación

Resolviendo la ecuación 3.10a con esfuerzo aplicado  $\sigma$  igual a 0 se obtiene:

$$\varepsilon(t) = cte \quad (3.12a)$$



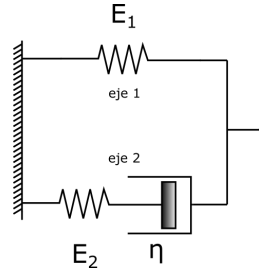
**Figura 3.12:** Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de Maxwell.

Podemos observar a través de la figura 3.12 y la ecuación 3.12a que el elemento presenta una deformación instantánea al retirarle la carga y se mantiene solamente la que se acumuló por fluencia, es decir que el elemento elástico regresa a su estado original inmediatamente después de retirar la carga y el elemento viscoso queda desplazado, por lo que se puede deducir que el elemento no representa adecuadamente la recuperación.

### 3.2.3. Modelo de sólido lineal estándar

Los modelos viscoelásticos sencillos vistos en los subcapítulos 3.2.2 y 3.2.1 no son adecuados para dar una representación matemática completa a los materiales reales [14], sin embargo, son la base de otros más complejos que ofrecen mayor versatilidad para representar de mejor forma los fenómenos que ocurren en el material cuando se someten a diferentes condiciones de carga.

A partir de la necesidad de explicar los fenómenos de fluencia, relajación y recuperación de manera más asertiva con el menor número de parámetros posible, nace el modelo de sólido lineal estándar (figura 3.13), el cual recibe su nombre debido a que la ecuación diferencial que representa su comportamiento es lineal.



**Figura 3.13:** Modelo de sólido lineal estándar.

Las ecuaciones fundamentales que debe seguir el modelo son:

En el eje 2:

- Aditividad de deformaciones

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{R2} + \varepsilon_{A2} \quad (3.13a)$$

- Igualdad de tensiones

$$\sigma_2 = \sigma_{R2} = \sigma_{A2} \quad (3.13b)$$

Además la deformación en el eje 1 y 2 debe ser la misma y la suma de los esfuerzos en el eje 1 y 2 es igual al esfuerzo de todo el elemento, por lo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (3.13c)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.13d)$$

Derivando 3.13a con respecto al tiempo, considerando que  $\frac{dE_2}{dt} = 0$  y expresandola en términos de  $\sigma_2$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (3.13e)$$

Derivando la ley elástica para el eje 1 con respecto al tiempo, considerando que  $\frac{dE_1}{dt} = 0$  resulta:

$$E_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} \quad (3.13f)$$

Reescribiendo la ecuación 3.13e e introduciendo la igualdad de deformaciones en ambos ejes descrita en la ecuación 3.13c:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (3.13g)$$

Sumando la ecuación 3.13f en ambos miembros dividida entre  $E_2$ , la ley elástica que rige al eje 1 dividida entre  $\eta$  y considerando nuevamente la igualdad de deformaciones en ambos ejes:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta} + \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta} \quad (3.13h)$$

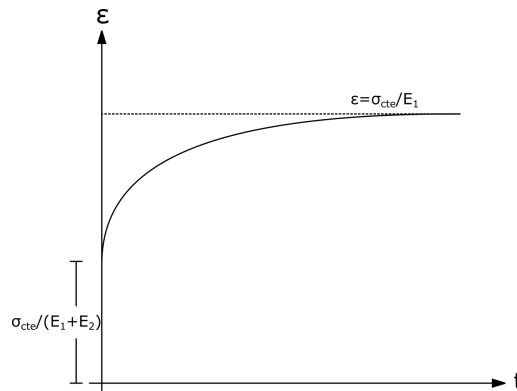
Agrupando términos semejantes y desarrollando se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \sigma = (E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon \quad (3.13i)$$

### Comportamiento a fluencia

Resolviendo la ecuación 3.13i para un esfuerzo constante ( $\sigma = \sigma_{cte}$ ) considerando que debido a que la carga se aplica de forma instantánea en  $t = 0$ , el amortiguador no permitirá deformaciones, esto implica que el esfuerzo será resistido repentinamente por los elementos elásticos dando lugar a una deformación igual a  $\frac{\sigma_{cte}}{(E_1 + E_2)}$  que, a medida de que la carga aplicada se mantenga, tenderá a aumentar hasta alcanzar un valor de equilibrio.  $\frac{\sigma_{cte}}{(E_1)}$ .

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{cte}}{E_1} - \frac{\sigma_{cte} E_2}{E_1 (E_1 + E_2)} \left[ e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta (E_1 + E_2)} t} \right] \quad (3.14a)$$

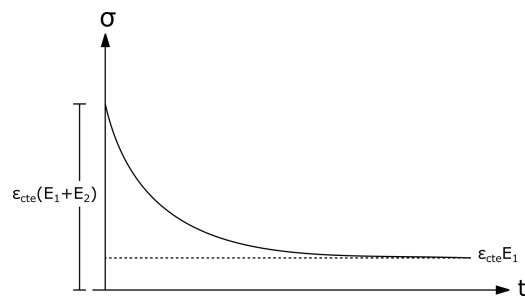


**Figura 3.14:** Curva tiempo-deformación a fluencia del modelo de sólido lineal estándar.

### Comportamiento a relajación

Como resultado de resolver la ecuación 3.13i para deformación constante e instantánea se obtiene:

$$\sigma(t) = \varepsilon_{cte} \left[ E_1 + E_2 e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \right] \quad (3.15a)$$



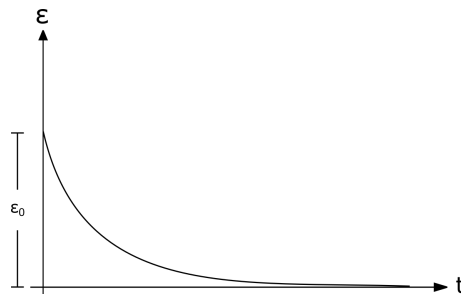
**Figura 3.15:** Curva tiempo-esfuerzo a relajación del modelo de sólido lineal estándar.

La figura 3.15 muestra que este modelo constitutivo de material tiene la ventaja y posibilidad de describir la relajación en los esfuerzos internos al condicionar su deformación, lo cual se presenta en la realidad en diversos materiales.

### Comportamiento a recuperación

A consecuencia de retirar el esfuerzo aplicado en un instante dado, la deformación del elemento se comportará de acuerdo a la expresión:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}\right) t} \quad (3.16a)$$

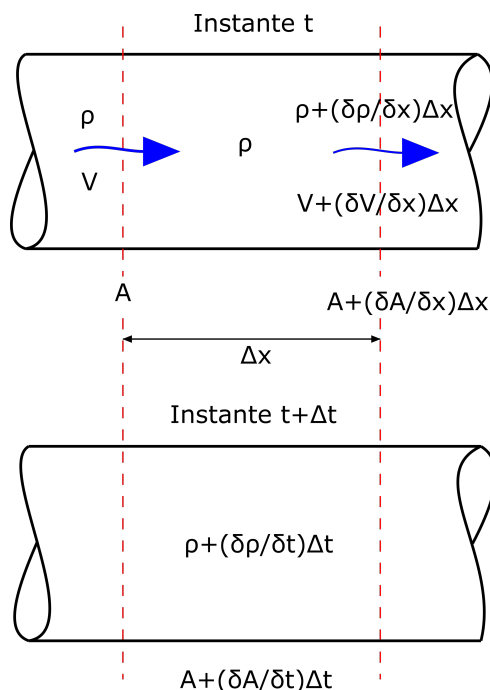


**Figura 3.16:** Curva tiempo-deformación a recuperación del modelo de sólido lineal estándar.

De acuerdo con la figura 3.16, este modelo tiene la capacidad de regresar a su estado no deformado, lo cual se asemeja bastante a la realidad cuando el esfuerzo aplicado al material no supera al de cedencia, es decir que no considera deformaciones plásticas.

### 3.3. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es obtenida a través de la aplicación del principio de conservación de masa a un volumen de control en dos instantes de tiempo. En la figura 3.17 puede observarse que en un instante  $t$ , la sección de entrada cuenta con ciertas condiciones en las características hidráulicas en el fluido  $\rho$  y  $V$ , que en la sección de salida presenta cambios debido a su paso por el volumen de control. Estos cambios están descritos por los términos en derivadas parciales, el primer factor indica la tasa de cambio de la velocidad  $V$  o densidad  $\rho$  con respecto a la posición y el segundo la distancia recorrida  $\Delta x$  de entrada a salida en el volumen de análisis. Por otra parte, en un instante consecutivo  $t + \Delta t$  (donde  $\Delta t$  es la diferencia en tiempo entre instantes de análisis), a causa de la diferencia entre las características de velocidad y densidad en la entrada y salida del volumen de control, se causa un cambio en la densidad asociado a la acumulación o pérdida de masa de fluido y un cambio en las dimensiones de la sección de tubo ya que al almacenarse flujo en el volumen de control este se verá forzado a ceder y deformarse para lograr alojar esta masa acumulada, en caso contrario la sección de tubo se relajará y recuperará sus dimensiones originales. Los cambios en la velocidad y densidad entre los instantes de tiempo están representados a través de los términos en derivadas parciales con respecto al tiempo y multiplicados por un intervalo de tiempo.



**Figura 3.17:** Volumen de control y sus condiciones hidráulicas en 2 instantes consecutivos.

Haciendo uso del principio de conservación de masa tenemos la expresión 3.17a en la cual se puede identificar: el primer término del miembro izquierdo como la entrada

de masa, el segundo como la salida de la misma y la diferencia de estos será la cantidad de masa acumulada durante un intervalo  $\Delta t$ .

$$[\rho AV \Delta t] - \left[ \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \right) \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right) \right] \Delta t = \text{masa} - \text{acumulada} \quad (3.17a)$$

Donde:  $\text{masa} - \text{acumulada} = \left[ \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t \right) - \rho A \right] \Delta x$

Dividiendo ambos miembros entre el producto de  $\Delta t$  por  $\Delta x$ , igualando a cero y considerando que los valores de  $\Delta t$  y  $\Delta x$  tiendan a cero se obtiene:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + AV \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.17b)$$

Agrupando derivadas con respecto al tiempo y al espacio.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho AV) = 0 \quad (3.17c)$$

Dividiendo la ecuación 3.17b entre  $\rho A$  y agrupando de acuerdo a los términos  $\rho$ ,  $A$  y  $V$ .

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.17d)$$

Si consideramos que  $V = \frac{dx}{dt}$  debido a que estamos hablando del flujo dentro del volumen de control podemos observar que se tienen dentro los paréntesis los términos necesarios para completar derivadas totales debido a que  $\rho$  y  $A$  son funciones de la posición  $x$  y el tiempo  $t$  por lo que podemos darle la siguiente presentación a la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.17e)$$

Es fundamental definir el comportamiento del fluido, para esto también se hace uso del principio de conservación de masa como se muestra a continuación:

La masa contenida en el volumen de control es igual a:

$$m = \rho V \quad (3.18a)$$

### 3. MARCO TEÓRICO

---

Derivando la masa con respecto a la presión:

$$\frac{dm}{dp} = \rho \frac{dV}{dp} + V \frac{d\rho}{dp} \quad (3.18b)$$

El cambio de la masa con respecto a la presión es obligado que sea cero debido a que el fluido puede comprimirse o expandirse, pero no disminuir ni aumentar por efecto de la presión. De igualar a cero la derivada de la masa con respecto a la presión y ordenar los términos asociados a la densidad en un miembro de la ecuación, del otro los términos volumétricos y finalmente igualar ambos a una constante  $K$  (nombrado en la literatura como módulo de compresibilidad volumétrica [20]) se obtiene:

$$\frac{dp}{d\rho/\rho} = -\frac{dp}{dV/V} = K \quad (3.18c)$$

Reescribiendo la ecuación de manera conveniente para desarrollos posteriores:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (3.18d)$$

Otro rubro fundamental a definir son las relaciones geométricas que se seguirán, ya que estas son las que se relacionarán con el modelo constitutivo del material definido en el subcapítulo 3.2.3, ecuación 3.13.

La sección de paso es circular por lo que su área es igual a:

$$A = \pi R^2 \quad (3.19a)$$

Derivando el área con respecto al tiempo y dividiendo sobre el área se tiene:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} \frac{dR}{dt} \quad (3.19b)$$

Simplificando el miembro derecho:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (3.19c)$$

Recordando que  $\frac{dR}{R} = d\epsilon$ :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.19d)$$



Además de la relación obtenida en la ecuación 3.19d, es necesario definir la tasa de cambio del diámetro con respecto al tiempo. Desarrollando el miembro izquierdo en función del diámetro se tiene:

$$\frac{1}{\frac{\pi D^2}{4}} \left( 2\pi \frac{D}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{dD}{dt} = 2 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.19e)$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$\frac{dD}{dt} = D \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.19f)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.18d y 3.19d en 3.17e:

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} + 2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20a)$$

Despejando la derivada de la deformación radial con respecto al tiempo en la ecuación 3.13i, sustituyendo el esfuerzo transversal en una tubería de pared delgada  $\sigma = \frac{pD}{2e}$  y haciendo uso de la relación geométrica definida en la ecuación 3.19f:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{1}{2e} \left( pD \frac{d\varepsilon}{dt} + D \frac{dp}{dt} + \frac{E_2}{\eta} pD \right) - \frac{E_1 E_2 \varepsilon}{\eta}}{E_1 + E_2} \quad (3.20b)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{1}{2e} \left( D \frac{dp}{dt} + \frac{E_2}{\eta} pD \right) - \frac{E_1 E_2 \varepsilon}{\eta}}{E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e}} \quad (3.20c)$$

Sustituyendo 3.20c en 3.20a:

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} + 2 \left[ \frac{\frac{1}{2e} \left( D \frac{dp}{dt} + \frac{E_2}{\eta} pD \right) - \frac{E_1 E_2 \varepsilon}{\eta}}{E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e}} \right] + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20d)$$

Agrupando términos:

$$\left[ \frac{1}{K} + \frac{D}{e \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} \right] \frac{dp}{dt} + \frac{\frac{pD E_2}{\eta}}{\left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right) e} - \frac{2 E_1 E_2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20e)$$

### 3. MARCO TEÓRICO

---

Haciendo álgebra sobre la ecuación 3.20e puede escribirse como:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{pD\rho a^2 E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 \rho a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20f)$$

Donde el parámetro  $a^2$  es el cuadrado de la velocidad de propagación del transitorio hidráulico como se mostrará en el subcapítulo 3.5 y es igual a:

$$a^2 = \left[ \frac{Ke \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)}{\rho e \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right) + KD} \right] \quad (3.20g)$$

Haciendo uso del concepto de derivada total, se sustituirá el primer término de la ecuación 3.20f a su igualdad en derivadas parciales  $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$  y debido a que el planteamiento se desarrolló en el volumen de control  $\frac{\partial x}{\partial t} = V$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{pD\rho a^2 E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 \rho a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20h)$$

Es posible demostrar que  $V \frac{dp}{dx} \ll \frac{dp}{dt}$  por un factor de  $\frac{V}{a}$  a través de relacionar la ecuación de continuidad y dinámica en función de las ondas que viajan en sentido positivo y negativo por lo que la ecuación de la continuidad se simplifica como:

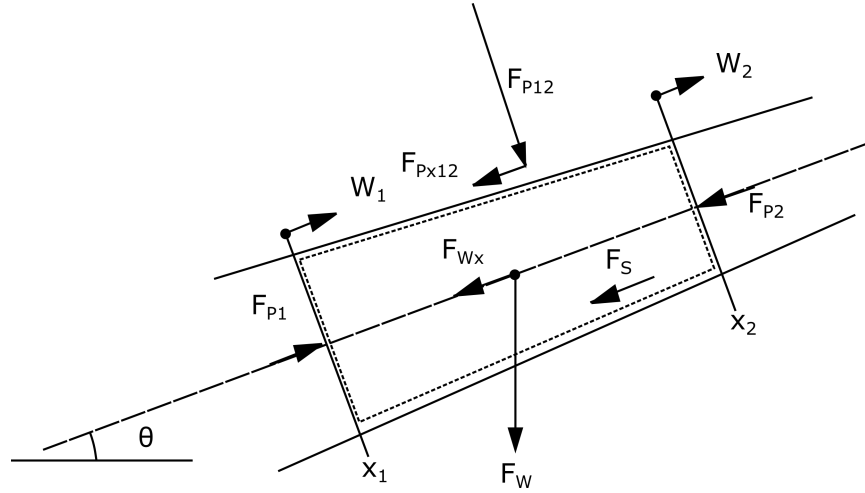
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{pD\rho a^2 E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 \rho a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{pD}{2e} \right)} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20i)$$

Sustituyendo  $P = \rho g (H - z)$ , considerando que  $\frac{dz}{dt}, \frac{d\rho}{dt} = 0$  y dividiendo entre  $\rho$ :

$$g \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\gamma D a^2 (H - z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.20j)$$

### 3.4. Ecuación dinámica

De acuerdo con la literatura [6], la ecuación dinámica se obtiene a través de la conservación de ímpetu  $\vec{M}$ , es decir, con la segunda ley de Newton. Considérese el volumen de control ilustrado en la figura 3.18 el cual tiene una velocidad del flujo en la entrada  $V_1$  y una de salida  $V_2$ , además, debido a las contracciones y expansiones que la tubería sufre en el eje axial causadas por la aplicación de los esfuerzos se tiene un cambio en la posición de las secciones transversales  $x_1$  y  $x_2$  con sus respectivas velocidades de sección  $W_1$  y  $W_2$ . El volumen finito de control está sujeto a las fuerzas de presión aplicadas en las secciones transversales ( $F_{P1}$  y  $F_{P2}$ ) y en las del eje radial  $F_{P12}$ , fuerzas de cuerpo  $F_w$ , y fuerzas cortantes o de superficie  $F_S$ .



**Figura 3.18:** Volumen de control y sus fuerzas aplicadas.

De acuerdo a la segunda ley de Newton podemos definir la suma de las fuerzas  $F$  como el cambio en la cantidad de movimiento del volumen en cuestión.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (3.21a)$$

Desarrollando para el eje axial tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} V \rho dV + [\rho A [V - W] V]_2 - [\rho A [V - W] V]_1 = \sum F_x \quad (3.21b)$$

El primer término está asociado al cambio de la cantidad de movimiento de la masa contenida en el volumen de control en un instante  $t$ , el segundo y tercero al cambio de la cantidad de movimiento causada por el fluido entrante y saliente en las secciones transversales 1 y 2.

### 3. MARCO TEÓRICO

---

Desarrollando la expresión 3.21b, aplicando la regla de Leibnitz y observando que  $dx_1/dt = W_1$ ;  $dx_2/dt = W_2$  resulta:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho AV dx + (\rho AVW)_2 - (\rho AVW)_1 + [\rho A (V - W) V]_2 - [\rho A (V - W) V]_1 = \sum F_x \quad (3.21c)$$

Haciendo uso del teorema del valor medio y dividiendo entre  $\Delta x$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho AV) + \frac{(\rho AV^2)_2 - (\rho AV^2)_1}{\Delta x} = \frac{\sum F_x}{\Delta x} \quad (3.21d)$$

El término en el numerador del miembro derecho en la ecuación 3.21d es la suma de todas las fuerzas actuantes en volumen de control las cuales son:

- Fuerzas de presión en las secciones transversales 1 y 2.

$$F_{P1} = p_1 A_1 \quad (3.22a)$$

$$F_{P2} = p_2 A_2 \quad (3.22b)$$

- Fuerza de presión en los lados convergentes (componente en el eje de flujo).

$$F_{Px12} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (A_1 - A_2) \quad (3.22c)$$

- Fuerza de cuerpo producto de la componente de peso en el eje de flujo.

$$F_{wx} = \rho g A (x_2 - x_1) \sin\theta \quad (3.22d)$$

- Fuerza tangenciales sobre pared interna del tubo.

$$F_S = \tau_0 \pi D (x_2 - x_1) \quad (3.22e)$$

Sumando las fuerzas actuantes considerando la dirección de flujo como positiva y dividiendo entre  $\Delta x$  ( $\Delta x = x_2 - x_1$ ).

$$\frac{\sum F_x}{\Delta x} = \frac{(p_1 - p_2)(A_1 + A_2)}{2\Delta x} - \rho g A \sin\theta - \tau_0 \pi D \quad (3.22f)$$

Igualando las ecuaciones 3.21d y 3.22f, realizando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  e igualando con cero.

$$\frac{\partial (\rho AV)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho AV^2)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \sin\theta + \tau_0 \pi D = 0 \quad (3.23a)$$

Cuantificamos las fuerzas cortantes como en flujo estacionario con la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$\tau_0 = \frac{1}{8}\rho fV |V| \quad (3.23b)$$

Nótese que no se colocó  $V^2$  debido a que no le daría el significado físico correcto en caso de que el flujo vaya en dirección contraria, es decir, de dejarse como el cuadrado de la velocidad, la fuerza de fricción con flujo inverso al propuesto en el esquema sería una fuerza en sentido del flujo.

Sustituyendo la ecuación 3.23b en 3.23a y desarrollando las dos primeras derivadas parciales de la ecuación 3.23a.

$$V \left[ \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} \right] + \rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \sin\theta + \frac{\rho A f V |V|}{2D} = 0 \quad (3.23c)$$

El término entre corchetes de acuerdo a la ecuación de continuidad 3.17c es igual a cero por lo que la ecuación dinámica queda como:

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \sin\theta + \frac{\rho A f V |V|}{2D} = 0 \quad (3.23d)$$

Dividiendo entre  $\rho A$ , reemplazando  $p = \rho g (H - z)$  y recordando que  $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\theta$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (3.23e)$$

Una de las consideraciones más utilizadas en la modelación del golpe de ariete es que el efecto de aceleración local es mucho más grande en comparación con los de aceleración convectiva, es decir que  $V \frac{\partial V}{\partial x} \ll \frac{\partial V}{\partial t}$ , esto es debido a que el término convectivo es aproximadamente  $\frac{V}{a}$  veces más pequeño que el local, hipótesis que es cierta cuando predominan las ondas que viajan en uno de los 2 sentidos en un punto para cierto instante de tiempo, dicha situación es la más convencional por lo que de la ecuación 3.23e resultaría:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (3.23f)$$

### 3.5. Método de las características

Con el objetivo de tratar las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de continuidad y dinámica para su posterior integración numérica recurrimos al método de las características cuyo objetivo es el de transformar dichas ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias a través de combinarlas linealmente:

Recordando las ecuaciones dinámica y de continuidad:

$$L_1 : \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (3.24a)$$

$$L_2 : g \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\gamma Da^2 (H-z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.24b)$$

Combinando linealmente las ecuaciones 3.24a y 3.24b,:

$$L = L_1 + \lambda L_2 \quad (3.24c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} + \\ & \lambda \left[ g \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\gamma Da^2 (H-z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 a^2 \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.24d)$$

Agrupando términos en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g\lambda \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{fV|V|}{2D} + \frac{\lambda \gamma Da^2 (H-z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} - \\ & \frac{2E_1 E_2 a^2 \varepsilon \lambda}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H-z)D}{2e} \right)} = 0 \end{aligned} \quad (3.24e)$$

Sabiendo que  $H = H(x, t)$ ,  $V = V(x, t)$ , los términos entre corchetes pueden sustituirse por derivadas totales, es decir que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \lambda a^2 \quad (3.24f)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{\lambda} \quad (3.24g)$$

De las ecuaciones 3.24f y 3.24g:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda a^2 = \frac{1}{\lambda} \quad (3.24h)$$

Despejando  $\lambda$ , donde  $a$  representa la velocidad de propagación de una onda debido a que el planteamiento se realizó en el plano  $x - t$ :

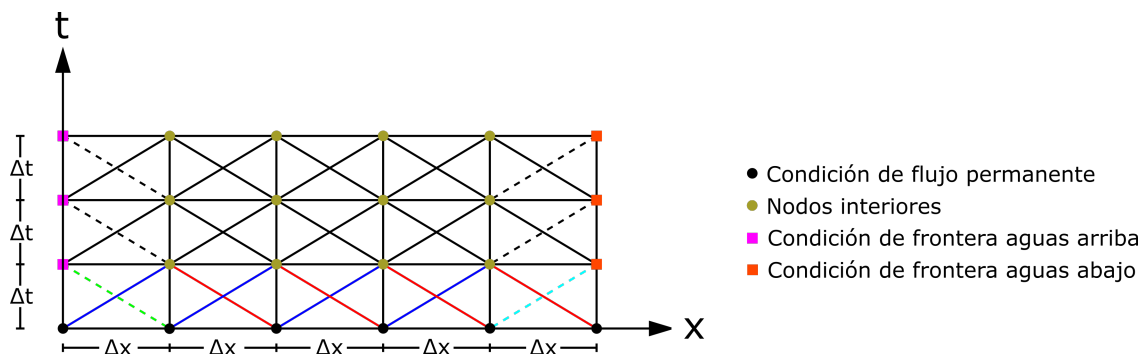
$$\lambda = \pm \frac{1}{a} \quad (3.24i)$$

Sustituyendo las derivadas totales definidas en las ecuaciones 3.24f y 3.24g en 3.24e y los valores obtenidos para  $\lambda$  en 3.24i:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} + \frac{\gamma Da (H - z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 a \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} = 0 \quad (3.24j)$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} - \frac{\gamma Da (H - z) E_2}{e\eta \left( E_1 + E_2 + \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} + \frac{2E_1 E_2 a \varepsilon}{\eta \left( E_1 + E_2 - \frac{\gamma (H - z) D}{2e} \right)} = 0 \quad (3.24k)$$

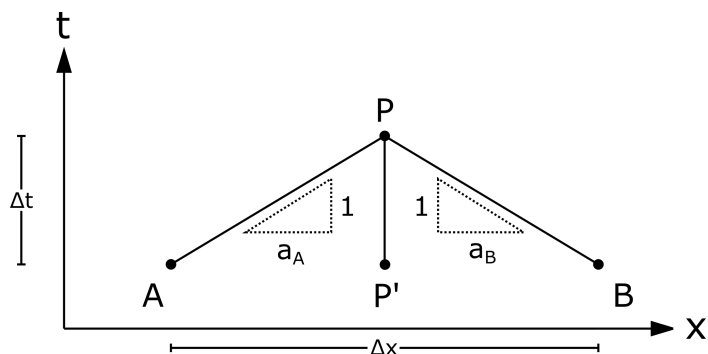
Es posible representar de manera gráfica el fenómeno físico a través del plano  $x - t$  mostrado en la figura 3.19. Puede observarse que cuando las ordenadas  $t$  son iguales a cero, se tiene una condición de flujo permanente en la conducción, por lo que las características de esos nodos son conocidas y calculadas como se describe en el subcapítulo 3.7, mientras que los nodos interiores dependerán directamente de las características hidráulicas de sus nodos adyacentes en un instante anterior. En el caso de los nodos que se encuentran en las fronteras se tendrá una característica hidráulica ( $V$  o  $H$ ) condicionada y las variables hidráulicas del nodo adyacente con el que cuente, en el instante anterior, serán las que definan la variable no condicionada faltante.



**Figura 3.19:** Malla empleada para la representación gráfica del método de las características.

### 3.6. Método de las diferencias finitas

El método convencional utilizado para la integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas en el subcapítulo 3.5 (ecuaciones 3.24j y 3.24k) es el método de las diferencias finitas de forma explícita, el cual consiste en transformar las ecuaciones diferenciales en un sistema algebraico a través de sustituir los diferenciales por incrementos y diferencias como se muestra a continuación:



**Figura 3.20:** Líneas características y sus puntos intervinientes en el esquema explícito.

- Para la línea característica con pendiente positiva (ecuación 3.24j)

$$dV = V_P - V_A \tag{3.25a}$$



$$dH = H_P - H_A \quad (3.25b)$$

$$dt = \Delta t \quad (3.25c)$$

$$a = a_A \quad (3.25d)$$

$$V = V_A \quad (3.25e)$$

$$H = H_A \quad (3.25f)$$

$$D = D_A \quad (3.25g)$$

$$z = z_A \quad (3.25h)$$

- Para la línea característica con pendiente negativa (ecuación 3.24k)

$$dV = V_P - V_B \quad (3.25i)$$

$$dH = H_P - H_B \quad (3.25j)$$

$$dt = \Delta t \quad (3.25k)$$

$$a = a_B \quad (3.25l)$$

### 3. MARCO TEÓRICO

---

$$V = V_B \quad (3.25m)$$

$$H = H_B \quad (3.25n)$$

$$D = D_B \quad (3.25ñ)$$

$$z = z_B \quad (3.25o)$$

Sustituyendo los cambios de variable del esquema explícito mostrados en las ecuaciones 3.25 en las ecs.3.24j y 3.24k.

$$(V_P - V_A) + \frac{g}{a_A} (H_P - H_A) + F_A = 0 \quad (3.26a)$$

$$(V_P - V_B) - \frac{g}{a_B} (H_P - H_B) + F_B = 0 \quad (3.26b)$$

Donde los términos  $F_A$  y  $F_B$  están asociados al efecto disipativo por fricción estacionaria y amortiguamiento por deformación en la tubería, un aspecto importante a contrastar es que la elección del esquema explícito en diferencias finitas ha hecho posible evaluarlas muy fácilmente con las condiciones de flujo de los puntos  $A$  y  $B$  a diferencia de un esquema implícito que posiblemente tengan un costo computacional mayor. Dichos términos son iguales a:

$$F_A = \frac{f_A \Delta t V_A |V_A|}{2D_A} + \frac{\gamma E_2 \Delta t D_A a_A (H_A - z_A)}{e \eta \left( E_2 + E_1 - \frac{\gamma D_A (H_A - z_A)}{2e} \right)} - \frac{2E_1 E_2 \Delta t a_A \varepsilon_A}{\eta \left( E_2 + E_1 - \frac{\gamma D_A (H_A - z_A)}{2e} \right)} \quad (3.26c)$$

$$F_B = \frac{f_B \Delta t V_B |V_B|}{2D_B} - \frac{\gamma E_2 \Delta t D_B a_B (H_B - z_B)}{e \eta \left( E_2 + E_1 - \frac{\gamma D_B (H_B - z_B)}{2e} \right)} + \frac{2E_1 E_2 \Delta t a_B \varepsilon_B}{\eta \left( E_2 + E_1 - \frac{\gamma D_B (H_B - z_B)}{2e} \right)} \quad (3.26d)$$

A partir del tratamiento algebraico de las ecuaciones 3.26a y 3.26b es posible obtener las variables hidráulicas en el punto  $P$  en los nodos interiores:

$$H_P = \frac{V_A - V_B - F_A + F_B}{g} + \frac{H_A}{a_A} + \frac{H_B}{a_B} \quad (3.26e)$$

$$V_P = V_B + \frac{g}{a_B} (H_P - H_B) - F_B \quad (3.26f)$$

En caso de conocerse la carga en la frontera aguas arriba en todos los instantes implica que la velocidad  $V_P$  podrá calcularse con la ecuación 3.26f. Por otra parte, en la frontera aguas abajo es conocida la velocidad en todos los instantes debido a las condiciones del experimento descritas en el subcapítulo 4.1.1, por lo que la carga piezométrica se obtendrá de la ecuación 3.26a y será igual a:

$$H_P = \frac{(V_A - V_P - F_A) a_A}{g} + H_A \quad (3.26g)$$

Debido a que el estado de la geometría en cada paso de tiempo es necesario para la obtención de los términos  $F_A$  y  $F_B$ , es fundamental actualizar la geometría a través de la solución numérica en diferencias finitas explícitas de la ecuación 3.13i, esto se logra a través de sustituir los diferenciales por diferencias entre pasos como se muestra a continuación:

$$d\varepsilon = \varepsilon_P - \varepsilon_{P'} \quad (3.27a)$$

$$\sigma = \frac{PD}{2e} \quad (3.27b)$$

$$P = \gamma (H_P - z_{P'}) \quad (3.27c)$$

$$dP = \gamma (H_P - H_{P'}) \quad (3.27d)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{P'} \quad (3.27e)$$

$$D = D_{P'} \quad (3.27f)$$

Reescribiendo la ecuación 3.13i en diferencias, despejando la deformación  $\varepsilon_P$  y considerando que  $z_P = z_{P'} = z$ :

$$\varepsilon_P = \frac{\frac{D_{P'}}{2e} \left[ \left( \frac{\gamma(H_P - H_{P'})}{\Delta t} \right) + \left( \frac{E_2 \gamma(H_{P'} - z)}{\eta} \right) \right] - \frac{E_1 E_2 \varepsilon_{P'}}{\eta}}{E_1 + E_2 - \frac{\gamma(H_{P'} - z) D_{P'}}{2e}} \Delta t + \varepsilon_{P'} \quad (3.27g)$$

Donde el diámetro será:

$$D_P = D_{int} (1 + \varepsilon_P) \quad (3.27h)$$

### 3.7. Cálculo de las condiciones iniciales a flujo estacionario

El estado de flujo en condiciones de flujo permanente es obtenido a partir del planteamiento de la ecuación de la energía entre los puntos donde se calcularán las variables hidráulicas y geométricas para el flujo transitorio. Debe entenderse que para que sea posible un estado de flujo permanente es estrictamente necesario que la tubería haya alcanzado un estado de equilibrio entre los esfuerzos internos del material y los causados por el fluido a presión contenido dentro de la tubería. La relación entre la presión y la deformación es obtenida como se muestra a continuación:

El flujo permanente implica que los cambios de la deformación y esfuerzo con respecto al tiempo sean nulos, por lo que de la ecuación 3.13i podemos inferir:

$$\sigma = E_1 \varepsilon \quad (3.28a)$$

Suponiendo que el esfuerzo se distribuye uniformemente en todo el espesor y colocando a la deformación en términos del diámetro:

$$\frac{\gamma(H - z) D}{2e} = E_1 \frac{D - D_{int}}{D_{int}} \quad \sigma = E_1 \varepsilon \quad (3.28b)$$

Despejando al diámetro  $D$ :

$$D = \frac{D_{int}}{1 - \frac{\gamma(H - z) D_{int}}{2e E_1}} \quad (3.28c)$$

Aplicando la ecuación de la energía entre 2 puntos de cálculo y cuantificando las pérdidas por fricción con la expresión de Darcy-Weisbach (donde el subíndice *prom* indica que las variables deben evaluarse como el promedio en la sección A y B) se tiene:

$$H_A + \frac{V_A^2}{2g} - \frac{f\Delta x}{D_{prom}} \frac{V_{prom}^2}{2g} = H_B + \frac{V_B^2}{2g} \quad (3.29a)$$

Despejando  $H_B$  y expresando cada uno de los términos en función del diámetro y caudal:

$$H_B = H_A + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_A^4} - \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_B^4} - \frac{8f\Delta x Q^2}{\pi^2 g D_{prom}^5} \quad (3.29b)$$

### ***Método estándar por pasos***

Podemos percatarnos que es necesario satisfacer simultáneamente las ecuaciones 3.28c y 3.28b, en la literatura existe una gran cantidad de métodos numéricos que permiten resolverlas, en este trabajo se optó por el método estándar por pasos que consiste en la predicción y corrección de la variable buscada, que para este caso será el diámetro promedio de las secciones *A* y *B*. A continuación se describirá el algoritmo a seguir para las condiciones de nuestro caso particular (carga conocida en la frontera aguas arriba), sin embargo, con las modificaciones pertinentes, es aplicable para otros casos.

- Ecuaciones del método

$$H_B = H_A + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_A^4} - \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_B^4} - \frac{8f\Delta x Q^2}{\pi^2 g D_{prom}^5} \quad (3.30a)$$

$$D_B = \frac{D_{int}}{1 - \frac{\gamma(H-z)D_{int}}{2eE_1}} \quad (3.30b)$$

$$D_B = 2D_{prom} - D_A \quad (3.30c)$$

$$D_{prom} = \frac{D_A + D_B}{2} \quad (3.30d)$$

- Algoritmo

### 3. MARCO TEÓRICO

---

- 1.-Se inicia el cálculo conociendo todas las características hidráulicas y geométricas de la sección aguas arriba ( $A$ ) y se buscan las de su sección contigua aguas abajo ( $B$ ).
- 2.-Se propone un diámetro promedio, por ejemplo  $D_{prom} = D_A$ .
- 3.-Se calcula un diámetro  $D_B$  con la ecuación 3.30c.
- 4.-Se calcula  $H_B$  (ecuación 3.30a) con el diámetro  $D_B$  obtenido en el paso 3.
- 5.-Se calcula un nuevo valor de  $D_B$  con ecuación 3.30b y el  $H_B$  obtenido en el paso 4.
- 6.-Se comparan los diámetros  $D_B$  obtenidos en el punto 3 y 5. En caso de ser iguales, se termina el análisis de ese tramo de cálculo y se continua con el siguiente, tomando ahora como características hidráulicas aguas arriba las del punto recién obtenidas. En caso de no ser iguales, con el  $D_B$  obtenido en el punto 5, se calcula un diámetro  $D_{prom}$  con la ecuación 3.30d el cual se utilizará como propuesta para reiniciar el algoritmo en el punto 2.

# Calibración del modelo y metodología propuesta de análisis

---

## 4.1. Calibración del modelo

### 4.1.1. Instalación de pruebas

La instalación donde se llevaron a cabo las pruebas a flujo transitorio está ubicada en San Luis Potosí, en el laboratorio de la empresa **Policonductos S.A. de C.V.** El modelo físico está conformado por una tubería de polietileno de alta densidad (PEAD) tipo 4710 donde la longitud del tramo de estudio se fue adaptando para realizar pruebas en 60, 113, 150 y 300 metros. El modelo es alimentado por medio de bombas centrífugas de 15 HP [5], con lo cual se pueden realizar una serie de combinaciones carga de presión-gasto muy variadas y se pueden alcanzar cargas de presión al inicio de la conducción de hasta 90 m.c.a. o caudales de hasta 20 l/s. El control de las condiciones de frontera del modelo se logra a través de un tanque hidroneumático al inicio de la conducción (lo cual permite simular una condición de frontera lo más cercana posible a la carga constante) y válvulas de cierre automático inmediatamente aguas abajo del equipo hidroneumático y al final del tramo de estudio. La medición de las presiones en la tubería se realizó a través de sensores localizados como se muestra en la figura 4.1 a una cierta distancia (a,b,c,d). A continuación, en la tabla 4.1, se presentan las distancias entre sensores en cada tipo de prueba. Con cualquier longitud de tramo de prueba se tendrá un sensor a 1/3, 2/3 y al final de la tubería.

### 4.1.2. Ajuste de parámetros

El ajuste de los parámetros se realizó mediante una comparación visual de las mediciones tomadas con los sensores y la solución numérica planteada en el capítulo 3. El motivo de la comparación visual se debe a la diferencia existente entre el paso de inte-

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---

Longitud de prueba [m]	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]
60	2.6	17.3	19.9	19.9
113	2.6	35	37.5	37.6
150	2.6	47.3	49.9	49.9
300	2.6	97.3	99.9	99.9

Tabla 4.1: Distancia entre transistores.

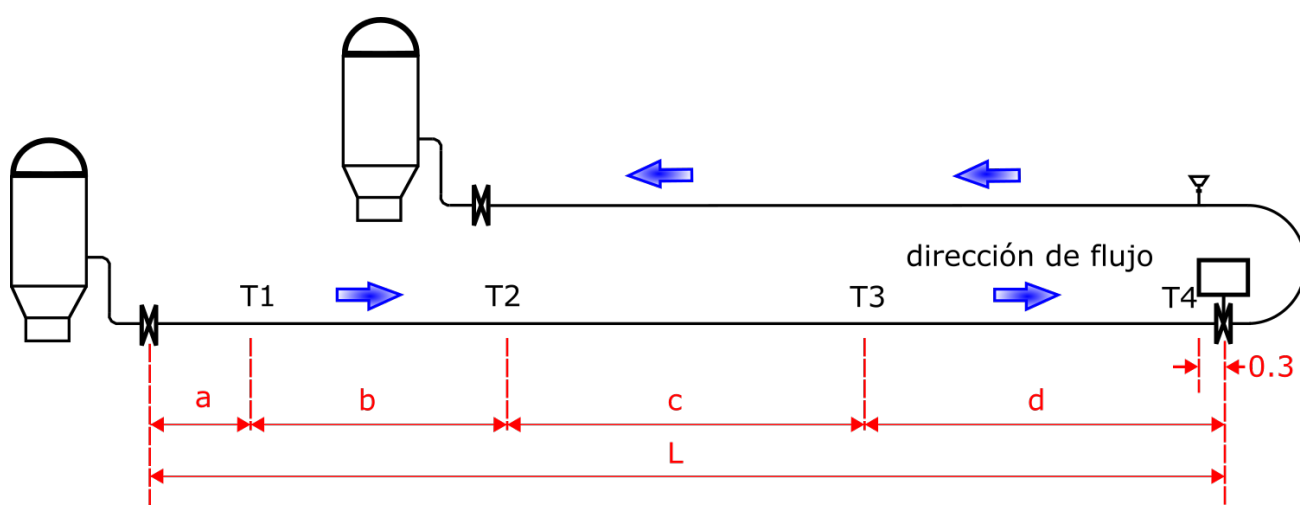


Figura 4.1: Instalación de pruebas.

gración  $\Delta t$  en el modelo numérico (el cual depende directamente del diámetro, espesor, número de puntos de cálculo y los parámetros del modelo viscoelástico  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$ ) y el intervalo de tiempo en las mediciones tomadas en laboratorio (a cada 0.02 segundos) por lo cual no era posible una comparación directa en los valores de presión medidos y calculados con el modelo numérico.

El experimento consistió en que partiendo de una condición de flujo establecido se interrumpía el flujo por medio de una válvula automática al final de la conducción en 0.2 segundos, causando un golpe de ariete. Esta condición de cierre se representó en el modelo numérico a través de una variación lineal decreciente en la velocidad.

A continuación se presenta el procedimiento con el cual se ajustó el modelo numérico a cada una de las pruebas de laboratorio. Para este fin se utilizará como ejemplo una de las 37 pruebas realizadas bajo las siguientes características:



- Longitud de tramo de 60 metros
- Diámetro interior de 0.1088 metros
- Diámetro exterior de 0.1149 metros
- Espesor de 3.048 milímetros
- Caudal de 8.8 litros por segundo
- Relación espesor-diámetro exterior de 37.69
- Carga en la frontera aguas arriba de 36.22 metros

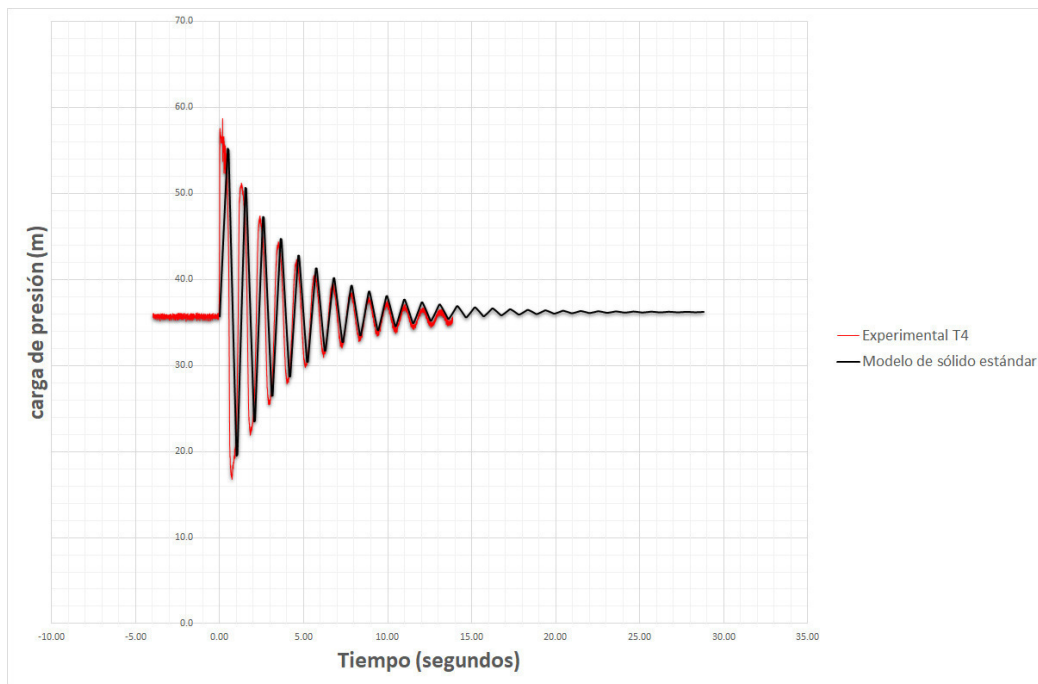
Primero es necesario lograr igualar el periodo del tren de ondas de presión del modelo numérico con el experimental para ajustar la celeridad. De acuerdo con la ecuación 3.20g, la celeridad es función del módulo de elasticidad volumétrico del agua, diámetro interior de la tubería, espesor, y los módulos de elasticidad del modelo de sólido estándar ( $E_1, E_2$ ). De todos estos valores, los únicos que no podemos determinar con las características físicas del sistema hidráulico son  $E_1$  y  $E_2$ . Por un lado,  $E_1$  fue obtenido a través de los datos de fabricante [17], el cual nombra como módulo de elasticidad a largo plazo cuyo valor es  $32000psi$  ( $220.60 MPa$ ) para el polietileno de alta densidad tipo 4710, por lo que solamente restó asignar el valor correcto a  $E_2$ , el cual para este caso resultó de  $1700 MPa$ .

Finalmente, se ajustó el término asociado al efecto viscoelástico del material igualando las crestas y los valles de lo numérico y lo observado. Para esto se tomó en cuenta que para  $\eta \rightarrow \infty$  el modelo se comportara muy similar al caso elástico, por lo que el único efecto que disipará las ondas de presión será la fricción del fluido con las paredes del tubo y en caso contrario habrá una gran disipación de energía por deformación. A continuación, en la figura 4.2 se muestra la carga de presión medida (azul) donde está localizado el cuarto sensor con su respectiva solución con el modelo numérico (amarillo) con un valor de  $\eta = 3060 MPa \cdot s$ .

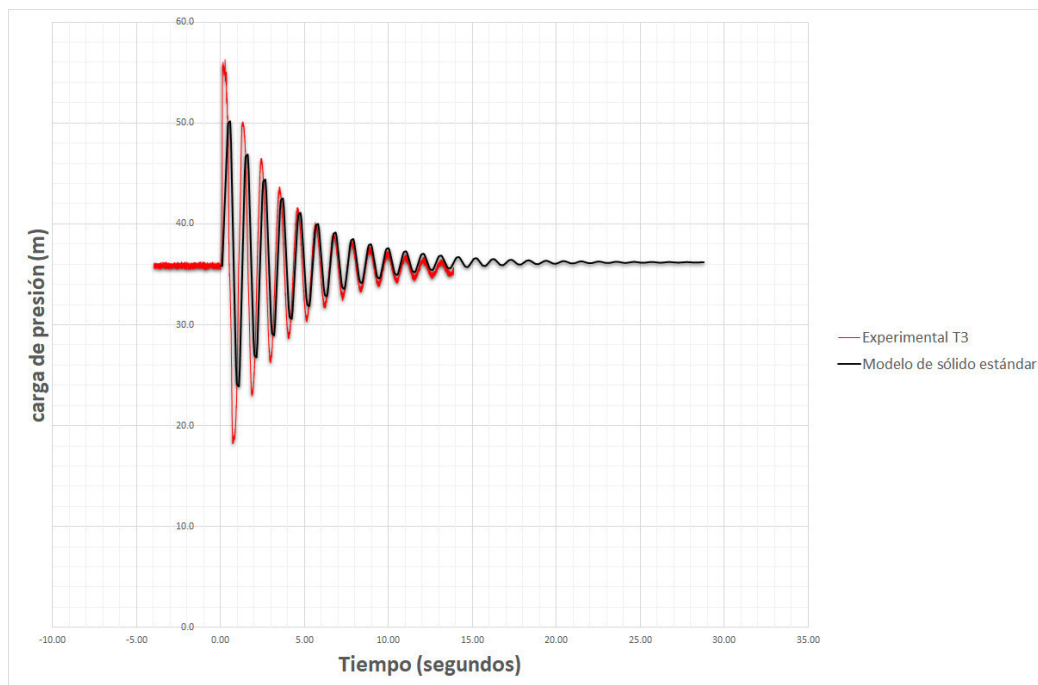
En la figura 4.2 se puede observar que a pesar de ser un modelo simplificado como se menciono en el capítulo 3, el cálculo numérico representa adecuadamente las presiones transitorias en la sección donde se genera la maniobra que causa el fenómeno transitorio. A medida que nos alejamos del nodo donde se generó la maniobra, el modelo numérico pierde cierto parecido con el registro del modelo físico (ver figuras), sin embargo, predice bien el tiempo en el que se disipa el fenómeno transitorio en todos los puntos y los valores extremos más importantes (punto donde inició el transitorio hidráulico) por lo que el modelo es funcional y práctico.

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---



**Figura 4.2:** Comparación experimental y numérica en el sensor 4.



**Figura 4.3:** Comparación experimental y numérica en el sensor 3.

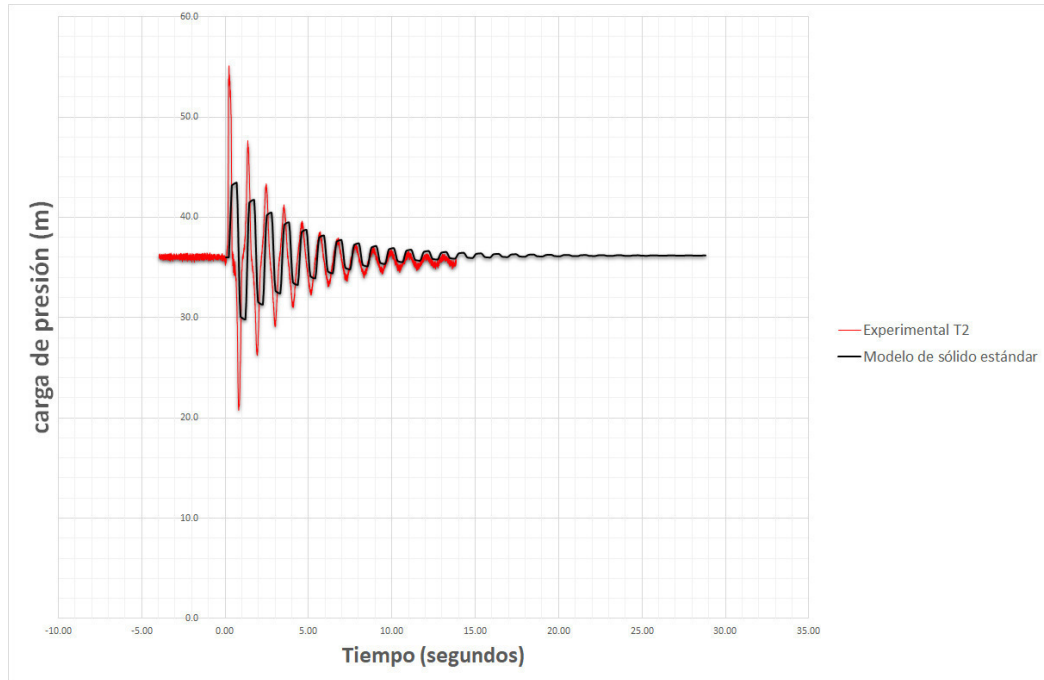


Figura 4.4: Comparación experimental y numérica en el sensor 2.

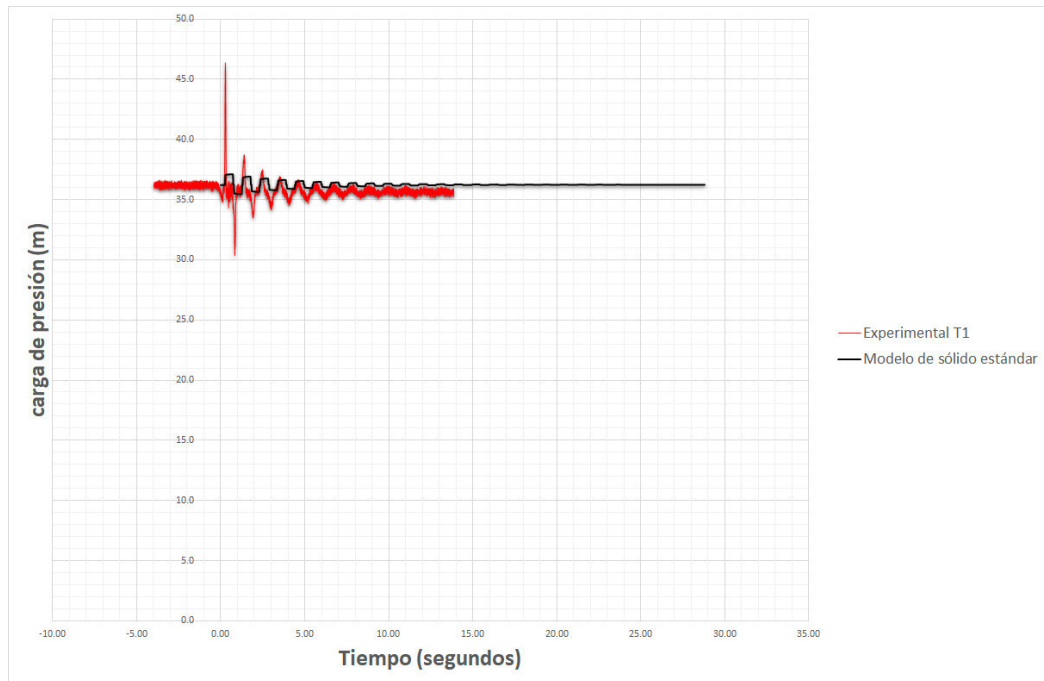


Figura 4.5: Comparación experimental y numérica en el sensor 1.

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

Ya ilustrado el procedimiento para la obtención de los parámetros que reproducen el registro experimental, en la tabla 4.2 presentamos las características y condiciones más relevantes de las 37 pruebas realizadas y en la tabla 4.3 los resultados de la calibración del modelo numérico.

**Tabla 4.2:** Resumen de las condiciones experimentales de prueba.

Prueba	Q [l/s]	L [m]	$H_0$ [m]	$D_{ext}$ [m]	$D_{int}$ [m]	e [m]	RD
03_270514	9.40	60.00	61.14	0.11450	0.0929	0.0108	10.61
04_280514	10.00	60.00	79.36	0.11458	0.0875	0.0136	8.45
05_060514	6.40	60.00	73.87	0.11379	0.0808	0.0165	6.89
05_270514	10.70	60.00	80.57	0.11450	0.0929	0.0108	10.61
06_280514	10.30	60.00	87.64	0.11458	0.0875	0.0136	8.45
07_060514	6.00	60.00	89.49	0.11379	0.0808	0.0165	6.89
03_200614	5.80	150.00	85.92	0.05984	0.0524	0.0037	16.03
06_200614	6.80	150.00	81.69	0.05984	0.0524	0.0037	16.03
03_210614	5.50	300.00	85.00	0.05984	0.0524	0.0037	16.03
08_210614	6.80	300.00	79.49	0.05984	0.0524	0.0037	16.03
13_020414	5.00	113.00	59.69	0.11379	0.0808	0.0165	6.89
15_020414	7.00	113.00	76.39	0.11379	0.0808	0.0165	6.89
16_020414	7.10	113.00	77.71	0.11379	0.0808	0.0165	6.89
02_070514	7.40	60.00	40.67	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
03_070514	7.40	60.00	40.73	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
04_070514	9.00	60.00	57.01	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
05_070514	9.00	60.00	59.10	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
06_070514	11.20	60.00	74.42	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
07_070514	11.20	60.00	75.57	0.11478	0.0959	0.0094	12.18
01_130514	8.80	60.00	36.22	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
02_130514	8.80	60.00	36.54	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
03_130514	11.40	60.00	38.85	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
04_130514	11.40	60.00	38.77	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
05_130514	14.70	60.00	32.73	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
06_130514	14.70	60.00	32.68	0.11488	0.1088	0.0030	37.69
07_130514	13.60	60.00	61.46	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
08_130514	13.60	60.00	61.69	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
09_130514	15.70	60.00	60.42	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
10_130514	15.70	60.00	60.76	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
11_130514	16.90	60.00	60.91	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
12_130514	16.90	60.00	60.94	0.11473	0.1038	0.0055	21.01
13_130514	15.70	60.00	54.23	0.1149	0.1071	0.0039	29.38
14_130514	15.70	60.00	53.80	0.1149	0.1071	0.0039	29.38
15_130514	17.60	60.00	50.01	0.1149	0.1071	0.0039	29.38
16_130514	17.60	60.00	50.47	0.1149	0.1071	0.0039	29.38

Continuación en la siguiente página

Tabla 4.2 – continuación de la página anterior

Prueba	Q [l/s]	L [m]	$H_0$ [m]	$D_{ext}$ [m]	$D_{int}$ [m]	e [m]	RD
17_130514	11.70	60.00	35.51	0.1149	0.1071	0.0039	29.38
18_130514	11.70	60.00	36.54	0.11494	0.1071	0.0039	29.38

Tabla 4.3: Resumen de resultados de la calibración

Prueba	L [m]	RD	a [m/s]	T [s]	$E_2$ [Pa]	$\eta$ [Pa·s]
03_270514	60.00	10.61	438.93	0.2734	1600000000.00	1920000000.00
04_280514	60.00	8.45	484.83	0.2475	1480000000.00	1850000000.00
05_060514	60.00	6.89	538.77	0.2227	1420000000.00	1562000000.00
05_270514	60.00	10.61	440.02	0.2727	1610000000.00	1771000000.00
06_280514	60.00	8.45	486.09	0.2469	1490000000.00	1788000000.00
07_060514	60.00	6.89	538.77	0.2227	1420000000.00	1562000000.00
03_200614	150.00	16.03	311.03	0.9645	1200000000.00	2400000000.00
06_200614	150.00	16.03	311.03	0.9645	1200000000.00	2160000000.00
03_210614	300.00	16.03	311.03	1.9291	1200000000.00	4200000000.00
08_210614	300.00	16.03	311.03	1.9291	1200000000.00	4000000000.00
13_020414	113.00	6.89	524.25	0.4311	1320000000.00	2500000000.00
15_020414	113.00	6.89	524.25	0.4311	1320000000.00	2500000000.00
16_020414	113.00	6.89	524.25	0.4311	1320000000.00	2500000000.00
02_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
03_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
04_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
05_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
06_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
07_070514	60.00	12.18	416.53	0.2881	1700000000.00	2380000000.00
01_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	3060000000.00
02_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	3060000000.00
03_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	2805000000.00
04_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	2805000000.00
05_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	2805000000.00
06_130514	60.00	37.69	229.14	0.5237	1700000000.00	2805000001.00
07_130514	60.00	21.01	310.68	0.3863	1700000000.00	2380000000.00
08_130514	60.00	21.01	314.51	0.3815	1750000000.00	2625000000.00
09_130514	60.00	21.01	312.22	0.3843	1720000000.00	2408000000.00
10_130514	60.00	21.01	312.98	0.3834	1730000000.00	2595000000.00
11_130514	60.00	21.01	312.98	0.3834	1730000000.00	2422000000.00
12_130514	60.00	21.01	312.98	0.3834	1730000000.00	2335500000.00
13_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1650000000.00	2508000000.00

Continuación en la siguiente página

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---

**Tabla 4.3 – continuación de la página anterior**

Prueba	L [m]	RD	a [m/s]	T [s]	$E_2$ [Pa]	$\eta$ [Pa·s]
14_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1650000000.00	2508000000.00
15_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1650000000.00	2557500000.00
16_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1620000000.00	2511000000.00
17_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1620000000.00	2754000000.00
18_130514	60.00	29.38	257.33	0.4663	1650000000.00	2805000000.00

#### 4.1.3. Obtención de curvas para la estimación de parámetros del modelo

Para dar un carácter práctico a los resultados obtenidos con los 37 experimentos, es fundamental relacionar las características físicas del sistema (espesor, diámetro interior y exterior, longitud, RD, etc.) con las que cuenta el proyectista con los parámetros del modelo ( $E_2$  y  $\eta$ ). Observando su comportamiento y tendencia ante las variables más significativas en cada parámetro.

#### Curva de celeridad y obtención del parámetro $E_2$

Trabajos antecedentes al presente [[1], [2]] sugieren que la celeridad con la cual viajan los trenes de onda durante un transitorio hidráulico está directamente relacionada con la relación diámetro exterior-espesor ( $RD$ ), según la expresión:

$$RD = \frac{D_{ext}}{e} \quad (4.1a)$$

Donde  $e$  es el espesor y  $D_{ext}$  es el diámetro exterior.

La figura 4.6 muestra gráficamente la relación entre la celeridad y  $RD$ . La tendencia en el comportamiento es de carácter potencial como lo indica un ajuste por mínimos cuadrados sobre los puntos obtenidos de la tabla 4.3 para los que se obtuvo la siguiente relación:

$$a = 1423.6RD^{-0.503} \quad (4.2a)$$

Donde el coeficiente de determinación obtenido fue  $R^2 = 0.9917$ , por lo que se concluyó que el  $RD$  es el parámetro indicado a relacionar con la celeridad.

$$(4.2b)$$

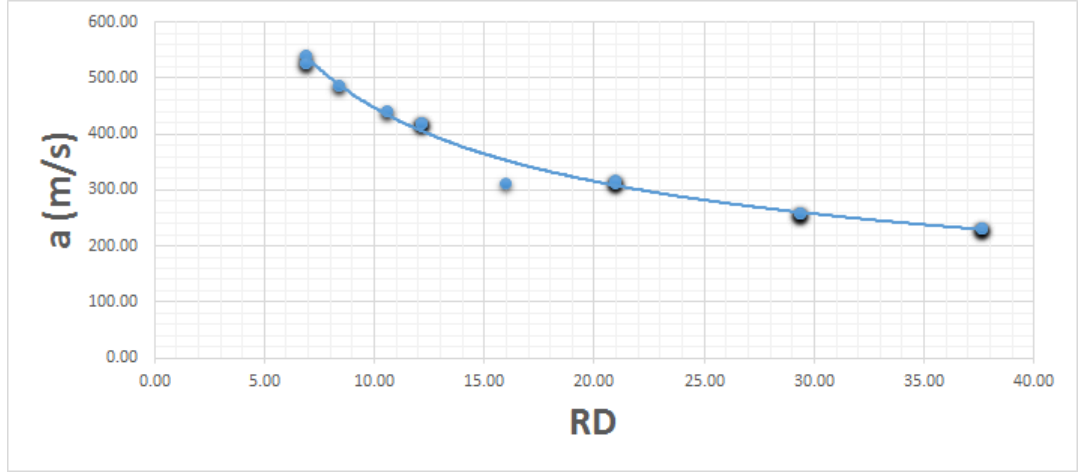


Figura 4.6: Dispersión de puntos RD-a.

Además de la celeridad, un parámetro indispensable para el modelo numérico es el módulo de elasticidad de la rama de Maxwell en el modelo de sólido lineal estándar ( $E_2$ ) debido a que este interviene directamente en la respuesta de la deformación a corto plazo. Partiendo que la celeridad ya es conocida a partir del RD, de la ecuación 3.19g se despeja  $E_2$ .

$$E_2 = \frac{a^2 \rho e \left[ \left( E_1 - \frac{pD}{2e} \right) + KD \right] - Ke \left( E_1 - \frac{pD}{2e} \right)}{ke - a^2 \rho e} \quad (4.3a)$$

### Curva de amortiguamiento y obtención del parámetro $\eta$

El parámetro asociado a la capacidad de disipación de energía por deformación es la viscosidad del amortiguador de la rama de Maxwell en el modelo de sólido lineal estándar, el cual, entre más viscoso sea, más se asemejará al comportamiento elástico. Pensando que una onda disipará más energía por deformación entre más largo sea su tiempo de recorrido en la conducción, en la figura 4.7 se muestra la distribución de puntos de la variable  $\frac{E_2}{T\eta}$  en  $[1/s^2]$  en función del periodo  $T = \frac{2L}{a}$  en  $[s]$ . Esta distribución muestra claramente que ambas variables se relacionan a través de una ecuación potencial de manera similar a la curva RD-a, por lo que al ajustarla minimizando la suma del error cuadrático para los datos de la tabla 4.3 se obtuvo:

$$\frac{E_2}{T\eta} = 0.4151T^{-1.4955} \quad (4.4a)$$

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---

Donde el coeficiente de determinación obtenido fue  $R^2 = 0.9832$ . Despejando  $\eta$  debido a que se puede conocer con la celeridad, el periodo y  $E_2$  con las características físicas de la conducción:

$$\eta = 2.4091E_2T^{0.4955} \quad (4.4b)$$

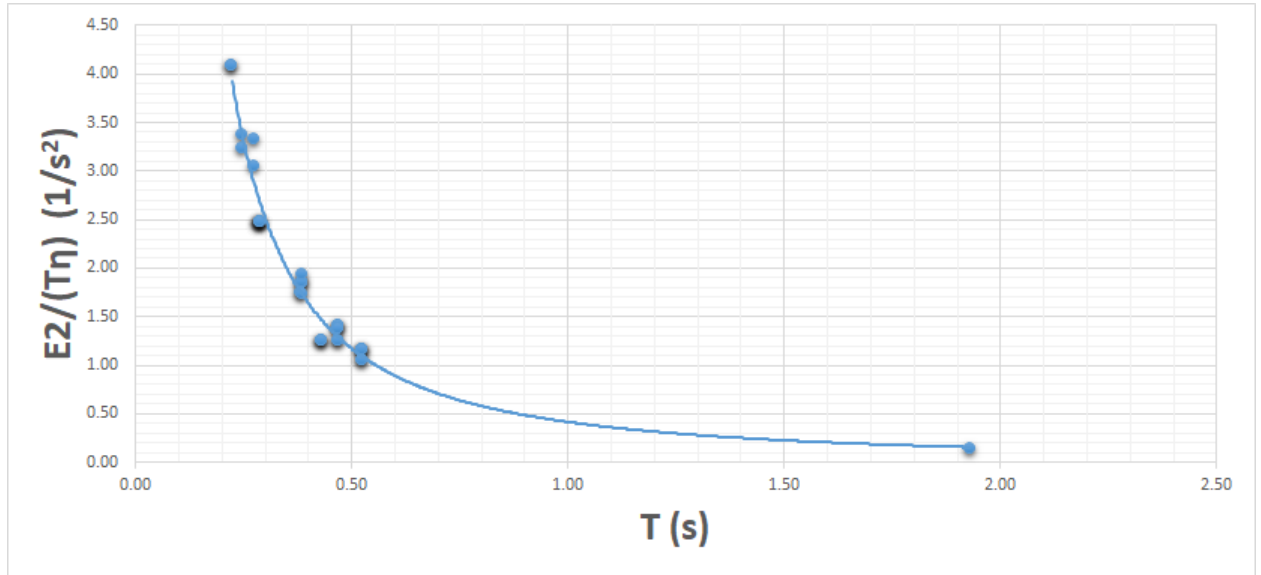


Figura 4.7: Curva de amortiguamiento.

##### 4.1.4. Criterio de Chauvenet y descarte de pruebas

Como en cualquier experimento, siempre existirá incertidumbre tanto en la metodología empleada para plantear y asegurar las optimas condiciones experimentales, como en la recaudación e interpretación de mediciones, por lo que es necesario detectar las pruebas que no cumplen estar dentro de cierto margen de aceptación. Uno de los criterios más aceptados en literatura es el de Chauvenet [12]. Este especifica que alguna lectura o medición puede rechazarse si ésta no se encuentra dentro de la intervalo  $(-z^*, z^*)$ , donde  $z^*$  es una valor límite de la variable  $z$  y ésta se ajusta a una distribución normal, además de ser estándar (media  $\bar{z} = 0$ , curtosis  $k = 3$  y desviación estándar  $S_z = 1$ ).

La condición a cumplir para definir los valores límites de la variable  $z^*$  es:

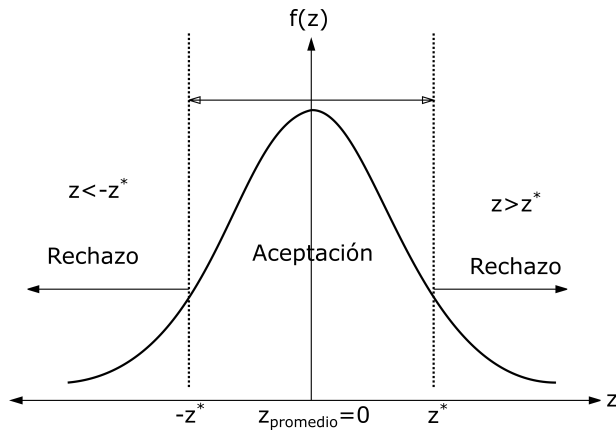
$$\int_{-z^*}^{z^*} f(z) = 1 - \frac{1}{2N} \quad (4.5a)$$



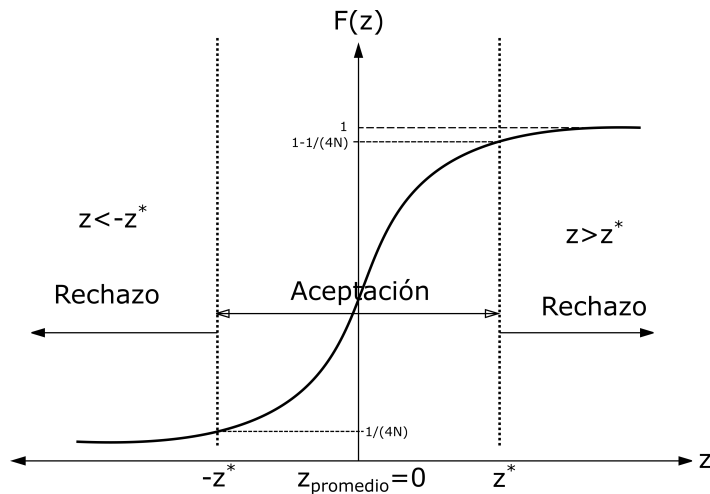
Donde  $N$  es el número de datos recabados en la experimentación. Dicha condición nos lleva la conclusión de que la función de probabilidad acumulada  $F(z)$  en los valores límite debe ser:

$$F(-z^*) = \frac{1}{4N} \quad (4.5b)$$

$$F(z^*) = 1 - \frac{1}{4N} \quad (4.5c)$$



**Figura 4.8:** Función de densidad de probabilidad de la variable estandarizada  $z$  y sus rangos de aceptación o rechazo.



**Figura 4.9:** Función de distribución de probabilidad acumulada de la variable estandarizada  $z$  y sus rangos de aceptación o rechazo.

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---

##### Rechazo de datos

Debido a que la estimación de  $\eta$  depende directamente de la celeridad, la variable estandarizada para el descarte de datos, en este caso, es el *error normalizado* de los valores  $\eta$  obtenidos a través de la calibración y con la ecuación potencial ajustada por mínimos cuadrados de la variable  $\frac{E_2}{T\eta}$  en función del periodo  $T$ , debe considerarse que el criterio de rechazo se aplicará únicamente por la cola derecha, ya que la cola izquierda representa los datos con menor error y no sería conveniente su rechazo. El criterio de Chauvenet se puede usar múltiples veces hasta satisfacer que todos los datos se encuentren en el rango de aceptación. Ya que para el descarte de datos es necesario contar con los valores límite y las probabilidades acumuladas son conocidas, si aplicamos en ambos miembros el inverso de la función de probabilidad acumulada  $F^{-1}$  en la ecuación 4.5c y evaluamos en diferentes valores de  $N$  se obtiene los siguientes resultados:

$N$	$1 - 1/(4N)$	$z^*$
3	0.9167	1.383
4	0.9375	1.543
5	0.9500	1.645
6	0.9583	1.732
7	0.9643	1.803
10	0.9750	1.96
15	0.9833	2.128
25	0.9900	2.326
50	0.9950	2.576
100	0.9975	2.807
300	0.9992	3.144
500	0.9995	3.291
1000	0.9998	3.418

**Tabla 4.4:** Valores críticos para el criterio de Chauvenet.

Cabe aclarar que las curvas  $RD - a$  y  $T - \frac{E_2}{T\eta}$  reportadas en este subcapítulo sólo consideran los puntos que fueron aceptados tras aplicar el criterio de Chauvenet en 3 ocasiones. A continuación, en la tabla 4.5 se presentan los resultados y las pruebas

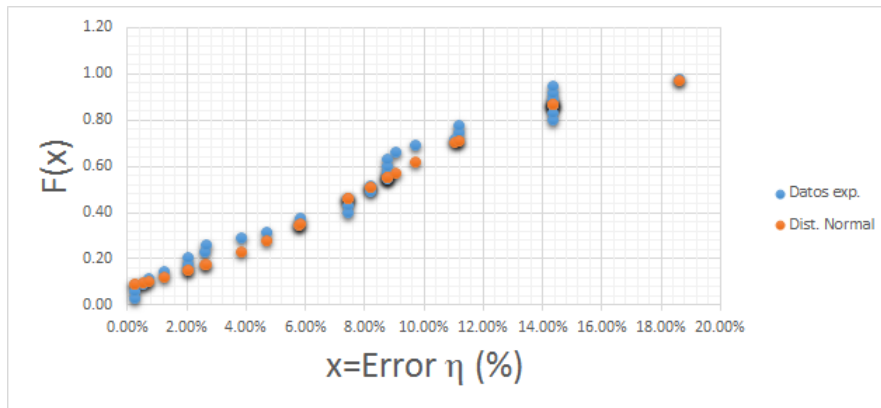
aceptadas y en la figura 4.10 se muestra la comparación entre la función normal de probabilidad acumulada y la probabilidad acumulada de las mediciones con el fin de ilustrar que la muestra de datos cumple con las hipótesis planteadas para la prueba de Chauvenet.

**Tabla 4.5:** Tabla de resultados de la tercera prueba de Chauvenet

Prueba	Error $\eta$ [%]	N	$F(z) = N/(N + 1)$	$F(z)_{NORMAL}$	$z$
01_130514	0.27	1	0.03	0.09	1.49
02_130514	0.27	2	0.06	0.09	1.49
18_130514	0.56	3	0.09	0.09	1.44
06_280514	0.72	4	0.11	0.10	1.41
17_130514	1.28	5	0.14	0.12	1.29
11_130514	2.08	6	0.17	0.15	1.13
03_270514	2.08	7	0.20	0.15	1.13
04_280514	2.65	8	0.23	0.17	1.02
09_130514	2.67	9	0.26	0.17	1.02
07_130514	3.88	10	0.29	0.23	0.78
10_130514	4.73	11	0.31	0.28	0.61
08_130514	5.82	12	0.34	0.35	0.39
12_130514	5.86	13	0.37	0.35	0.38
13_020414	7.48	14	0.40	0.46	0.06
15_020414	7.48	15	0.43	0.46	0.06
16_020414	7.48	16	0.46	0.46	0.06
05_060514	8.21	17	0.49	0.51	0.09
07_060514	8.21	18	0.51	0.51	0.09
06_130514	8.79	19	0.54	0.55	0.20
03_130514	8.79	20	0.57	0.55	0.20
04_130514	8.79	21	0.60	0.55	0.20
05_130514	8.79	22	0.63	0.55	0.20
15_130514	9.06	23	0.66	0.57	0.26
05_270514	9.73	24	0.69	0.61	0.39
16_130514	11.08	25	0.71	0.70	0.66
13_130514	11.22	26	0.74	0.71	0.69
14_130514	11.22	27	0.77	0.71	0.69
02_070514	14.36	28	0.80	0.86	1.32
03_070514	14.36	29	0.83	0.86	1.32
04_070514	14.36	30	0.86	0.86	1.32
05_070514	14.36	31	0.89	0.86	1.32
06_070514	14.36	32	0.91	0.86	1.32
07_070514	14.36	33	0.94	0.86	1.32
03_210614	18.64	34	0.97	0.97	2.17

#### 4. CALIBRACIÓN DEL MODELO Y METODOLOGÍA PROPUESTA DE ANÁLISIS

---



**Figura 4.10:** Comparación entre la función de probabilidad acumulada normal y empírica del error en  $\eta$ .

Interpolando en la tabla 4.4 con  $N = 34$  encontramos que el valor crítico por la cola derecha es de  $z_{critico} = 2.37$ , el cual resulta ser mayor al máximo ( $z_{max} = 2.17$ ) registrado en la tabla 4.5 por lo que ninguna medición se rechazaría en la tercera aplicación del criterio de Chauvenet.

## 4.2. Metodología de cálculo propuesta

En los capítulos anteriores se han desarrollado los planteamientos necesarios para la solución numérica del golpe de ariete en tuberías con comportamiento viscoelástico, con el fin de resumir y aclarar la metodología, a continuación se presenta un algoritmo para el cálculo ordenado.

- Calcular las condiciones iniciales del flujo permanente ( $H$ ,  $V$  y  $\varepsilon$ ) en cada punto de cálculo a través del algoritmo planteado en el subcapítulo 3.7.
- Estimar el valor de la celeridad  $a$  para la malla (utilizando el valor del  $RD$  previamente calculado) con la ecuación 4.1a y el periodo  $T$ .
- Calcular el módulo de elasticidad de la rama de Maxwell  $E_2$  del modelo de sólido lineal estándar utilizando la ecuación 4.3. Nota: utilizar la presión promedio de todos los nodos en este cálculo.
- Con ayuda de la ecuación 4.4b, calcular el valor del parámetro  $\eta$  asociado al amortiguamiento.
- Obtener un  $\Delta x$  a partir del número de puntos y un paso de integración  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ .
- Cálculo del flujo transitorio con las ecuaciones 3.26 dependiendo de la naturaleza del punto (en frontera o interior).



## Conclusiones

---

En este trabajo de tesis se comparó la solución numérica de golpe de ariete en tuberías de material viscoelástico con 37 pruebas de laboratorio. Entre las observaciones y conclusiones mas destacadas están:

- Los resultados que se reportan en esta tesis se aplican exclusivamente a tuberías de polietileno de alta densidad tipo 4710.
- El cambio en el diámetro por efectos de las presiones aplicadas a la tubería durante el transitorio no repercute significativamente en los valores de la celeridad, por lo que se puede utilizar la malla convencional utilizando la celeridad estimada con la ecuación 4.2a, la cual está en función de la relación espesor-diámetro ( $RD$ ).
- La metodología propuesta permite la estimación de los parámetros necesarios para modelar ( $a$ ,  $E_2$  y  $\eta$ ) únicamente con las características físicas del tramo de análisis, sin la necesidad de mediciones o experimentos previos del sistema.
- La respuesta numérica obtenida aguas arriba del órgano de control (sensor 4) muestra una excelente aproximación en los 37 casos, sin embargo, en los otros 3 puntos de medición (figuras 4.3, 4.4 y 4.5) se presenta una subestimación de los picos en la historia de presiones de la solución numérica. A pesar de este inconveniente, el método es capaz de reproducir con excelentes resultados la respuesta mas desfavorable y estimar el tiempo de duración del transitorio hidráulico de manera muy aproximada.

Los inconvenientes de aproximación en los sensores más lejanos al órgano de control se deben a 2 fenómenos principales no considerados en el modelo numérico: el primero está asociado a la representación del material, ya que en la formulación de la ecuación de continuidad se incluye el modelo constitutivo unidimensional de sólido lineal estándar bajo la hipótesis de que no se transmiten esfuerzos entre una sección y sus secciones contiguas por la diferencia de diámetros y esfuerzos. El segundo es la propagación de trenes de onda que viajan en la tubería inducidos principalmente por las

## 5. CONCLUSIONES

---

primeras perturbaciones causadas por la maniobra en el órgano de control, ya que en las figuras anteriormente citadas, puede observarse que los picos de presión medidos, en las primeras oscilaciones, se presentan mas rápidamente que los calculados, además de la diferencia en magnitudes previamente mencionada.



## Trabajos futuros

---

De acuerdo con los resultados reportados en los capítulos anteriores y con el fin de lograr una metodología más robusta para el cálculo de transitorios hidráulicos, a continuación se mencionarán algunas de propuestas:

- Extender esta metodología a otros materiales con comportamiento viscoelástico, especialmente PEAD.
- Lograr la interacción estructural entre secciones contiguas a través de un modelo constitutivo de sólido en 2D.
- Introducir al modelo constitutivo de sólido efectos de plasticidad con el fin de reproducir transitorios donde se somete a la tubería a presiones muy por encima del rango convencional de trabajo, como el caso de separación de columna.
- Proponer e implementar una cuantificación de pérdidas de energía por efectos convectivos y locales causados por el cambio brusco en las condiciones de flujo (modelo de turbulencia).
- Explorar el uso de otros métodos numéricos aprovechando sus bondades para el estudio de los principales fenómenos presentes y no considerados en el sólido.



## Bibliografía

---

- [1] Autrique, R. and Rodal, E. (2010). Golpe de ariete en tuberías de polietileno de alta densidad para conducción de agua potable. *Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, XXIV.
- [2] Autrique, R. and Rodal, E. (2014). Medición experimental de celeridades de ondas de presión en tuberías de polietileno de alta densidad. *Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, XXVI.
- [3] Cafaggi, A., Rodal, E., and Sánchez, A. (2016). *Sistemas de bombeo*. UNAM, México.
- [4] Callister, W. (2005). *Fundamentals of materials science and engineering : an introduction*. Wiley, New York, USA.
- [5] Carmona, L., Autrique, R., and Rodal, E. (2014). Comparación del transitorio hidráulico medido en tuberías de polietileno de alta densidad con resultados numéricos. *Congreso Nacional de Hidráulica*, XXIII.
- [6] Chaudry, M. H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer, USA.
- [7] Covas, D., Stoianov, I., Mano, J. F., Ramos, H., Graham, N., and Maksimovic, C. (2005). The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. part ii—model development, calibration and verification. *Journal of Hydraulic Research*.
- [8] Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N., and Maksimovic, C. (2004). The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. part i—experimental analysis and creep characterization. *Journal of Hydraulic Research*.
- [9] Creus, G. (1989). Representación de materiales viscoelásticos con aplicación a estructuras de hormigón. parte 1: viscoelasticidad lineal. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 5.
- [10] Gardea, H. (1992). *Aprovechamientos hidroeléctricos y de bombeo*. Trillas, México.
- [11] Heberlein, F. V. (2011). *Mecánica de los cuerpos deformables*. Facultad de Ciencias, UNAM.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] Holman, J. (1997). *Métodos experimentales para ingenieros*. McGraw-Hill, México.
- [13] Mancebo, U. (1994). *Teoría del golpe de ariete y sus aplicaciones en ingeniería hidráulica*. Limusa, México.
- [14] Mase, G. (1977). *Mecánica del medio continuo*. McGraw Hill, México.
- [15] Meibner, E. and Franke, P. (1991). Influence of pipe material on the damping of waterhammer oscillations. *Journal of Hydraulic Research*.
- [16] Plastic-Pipe-Institute (2008). *Handbook of polyethylene pipe*. USA.
- [17] Polypipe (2009). *Design and engineering guide for polyethylene piping*. Code 09/08, USA.
- [18] Ramos, H., Covas, D., Borga, A., and Loureiro, D. (2004). Water hammer in pressurized polyethylene pipes:conceptual model and experimental analysis. *Urban Water Journal*.
- [19] Soares, A., Covas, D., and Reis, L. (2008). Analysis of pvc pipe-wall viscoelasticity during water hammer. *Journal of Hydraulic Engineering*.
- [20] Sotelo, G. (2011). *Hidráulica general, Volumen 1 fundamentos*. Limusa, México.
- [21] Weinerowska-Bords, K. (2006). Viscoelastic model of waterhammer in single pipeline – problems and questions. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 53.