



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“OPTIMIZACIÓN  
ESTRUCTURAL EVOLUTIVA:**

**Diseño de Cavidades Internas en  
Elementos Planos”**

**T E S I S**

Que para obtener el grado de:

Ingeniero Mecánico

Presenta:

David Lozano Trejo

Director de Tesis:

Dr. Fernando Velázquez Villegas



Ciudad Universitaria

Enero de 2010.



# Índice

<i>Prefacio</i> .....	7
<i>Introducción</i> .....	8

## ***Capítulo 1 ESTADO DEL ARTE O MARCO TEÓRICO.***

1.1 Introducción .....	12
1.2 Descripción de los diferentes Métodos de Diseño .....	14
1.2.1 Métodos Tradicionales .....	14
1.2.2 Inteligencia Artificial .....	15
1.2.3 Métodos que emplean Técnicas de la Inteligencia Artificial .....	17
1.2.3.a Optimización Estructural Evolutiva (ESO) .....	18
1.3 Comparación entre las Metodologías de Diseño .....	22

## ***Capítulo 2 DETALLES DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA.***

2.1 Introducción .....	24
2.2 Diseño Optimo Estructural .....	25
2.2.1 Metodología .....	25
2.3 Características Generales del Método de Optimización de Forma .....	26
2.4 Modelado de Geometrías mediante Curvas Paramétricas .....	29
2.4.1 Definición de Modelado Geométrico .....	29
2.4.2 Definición de Curvas Paramétricas .....	30



2.4.2.a	Curvas Bezier .....	31
2.4.2.b	Curvas B-Spline .....	31
2.4.2.c	Curvas NURBS .....	33
2.5	Análisis por Elementos Finitos .....	34
2.6	Descripción Detallada del Método de Optimización de Forma .....	34
2.6.1	Método de Optimización de Forma .....	37

***Capítulo 3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.***

3.1	Introducción .....	44
3.2	Conceptos Fundamentales de Elasticidad .....	46
3.2.1	Esfuerzo Plano .....	46
3.2.2	Deformación Plana .....	47
3.3	Relación del Análisis de Sólidos Elásticos con el FEA .....	48
3.3.1	Formulación de las Ecuaciones de Elemento Finito mediante el Método de Galerkin .....	49
3.3.2	Ecuaciones de Elemento en 2D .....	53
3.3.3	Matriz de Rigidez y Vectores de carga para un Elemento Triangular .....	55
3.3.4	Solución del sistema .....	58

***Capítulo 4 IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA.***

4.1	Introducción .....	60
4.2	Algoritmo de Optimización .....	61
4.3	Modelado mediante curvas B-Spline .....	62



4.3.1	Funciones de base .....	64
4.3.2	Curvas B-Spline Cerradas .....	66
4.4	Aplicación de FEA como herramienta de solución .....	67
4.4.1	Propuesta de un Mallador Adaptativo en 2D .....	67
4.4.1.a	Definición de Malla .....	67
4.4.1.b	Triangulación de Delaunay .....	68
4.4.1.c	Generación de una Nube de Puntos sobre un Dominio en 2D .....	70
4.4.1.d	Generación del Mallado Adaptativo mediante Triangulación de Delaunay .....	73
4.4.1.e	Casos de Aplicación del Mallador .....	74
4.4.2	Implementación de FEA .....	76
4.5	Optimización de Forma .....	79

**Capítulo 5**    ***APLICACIÓN DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA A LOS  
CASOS DE ESTUDIO.***

5.1	Introducción .....	84
5.2	Esfuerzo Plano .....	86
5.2.1	Caso de Estudio 1 .....	86
5.2.2	Caso de Estudio 2 .....	90
5.2.3	Caso de Estudio 3 .....	94
5.3	Deformación Plana .....	98
5.3.1	Caso de Estudio 1 .....	98



5.3.2 Caso de Estudio 2 .....	102
5.3 Resultados .....	106
<i>Conclusiones</i> .....	107
<i>Bibliografía</i> .....	109
<i>Anexos</i> .....	113



# Prefacio

La optimización estructural es aquella que busca nuevas soluciones e incluso mejorará las existentes de manera que, bajo ciertos criterios resulten ser las mejores. En este sentido la optimización de formas es un campo de investigación, que busca integrar y desarrollar metodologías que permitan encontrar nuevos y mejores diseños estructurales, basados en la modificación de la forma, es decir, la obtención de diseños con menor concentración de esfuerzos, entre otros criterios, y que a su vez se construyan con la menor cantidad de material.

El propósito del presente trabajo es implementar una metodología de diseño, basada en reglas evolutivas, para obtener la optimización estructural de forma de algunas piezas mecánicas, tales como placas, placas con cavidades internas, bridas, etc., logrando reducir el volumen en la estructura. Integrando para ello las grandes ventajas que ofrecen las técnicas evolutivas, como lo es la Optimización Estructural Evolutiva (ESO por sus siglas en ingles) y las facilidades que brindan las herramientas de Diseño Asistido por Computadora (CAD por sus siglas en ingles), como los son: el modelado geométrico mediante curvas paramétricas del tipo B-Spline y el Análisis por Elementos Finitos (FEA por sus siglas en ingles). Finalmente presentar una herramienta útil para los ingenieros de diseño, y su aplicación mediante algunos ejemplos.

La optimización de forma en este trabajo, se puede observar en el cambio gradual de la forma de la cavidad que tenga una estructura. La intención primordial es obtener la mejor forma de la cavidad que cumpla con las restricciones de cada problema presentado o caso de estudio.

La estructura general de este trabajo nos muestra cinco capítulos, donde se realiza una síntesis del entorno de la ingeniería mecánica actual y su relación con la optimización, detalles de la metodología de optimización implementada, aplicación a algunos problemas, así como los objetivos y alcances de este trabajo.

Además se observa variación en el método de optimización de forma desarrollado por el Dr. Fernando Velázquez, quien en su tesis doctoral [45], utiliza una malla homogénea durante el proceso de optimización. Aquí se muestra la aplicación de un mallador adaptativo, basado en las características del modelado geométrico, lo que provocará una mayor aproximación a la solución final durante la optimización de forma.

En el primero de ellos se hace una breve descripción de la metodología de diseño tradicional, además de la metodología de diseño en donde interviene la inteligencia artificial. Así como un comparativo entre dichas metodologías.

En el segundo se describen las características generales del método de optimización de forma [45], tomando como herramienta de modelado: curvas paramétricas y de análisis: el método de los elementos finitos.

En el tercero se hace alusión a los conceptos fundamentales de elasticidad (esfuerzo y deformación), así como su relación con el FEA.

En el cuarto se profundiza en la implementación del algoritmo de optimización, realizando una descripción de las etapas que conforman al método de optimización de forma, así como la propuesta de un mallador adaptativo en 2 dimensiones desarrollado específicamente para este trabajo.

En el quinto se muestran los resultados obtenidos por el algoritmo de optimización, mediante una serie de imágenes y gráficos, en la aplicación de los casos de estudio, en 2 dimensiones, para análisis de esfuerzo o deformación, según es el caso, además de realizar una discusión breve de los mismos.

Finalmente se dan las conclusiones sobre el trabajo realizado, así como los pasos o líneas abiertas para continuar con este trabajo de investigación sobre optimización estructural.



# Introducción

*“Lo que sabemos es una gota de agua;  
lo que ignoramos es el océano.”*

Isaac Newton

A lo largo de la historia el hombre ha llevado a cabo la “optimización” dentro de sus sistemas, con el fin de crear estructuras, mecanismos, ensambles y subensambles, al igual que diferentes componentes mecánicos, capaces de mejorar el funcionamiento de dicho sistema.

Sin embargo, los métodos modernos de optimización tienen su origen desde los tiempos de la Segunda Guerra Mundial. Desde los años 40, el término optimización ha sido también conocido como programación matemática. En aquella época el término programación no hacía referencia a un programa computacional sino a la logística militar. En la actualidad la optimización es un proceso que tiene grandes aplicaciones en prácticamente cualquier área, con lo cual se logra una mejora de procesos y por tanto reducción de costos, tiempos, etc., todo ello debido a su definición:

*“La optimización es un proceso a través del cual se busca obtener o determinar la mejor solución posible, de entre un grupo de resultados, que a su vez satisface las restricciones que presenta el sistema al cual se aplica.”[18]*

Matemáticamente, la optimización significa:

*“La búsqueda del máximo o mínimo de una función objetivo.” [3]*

Por tanto, en ingeniería, tiene más sentido describir la optimización como el cálculo de uno o varios objetivos, por ejemplo: el peso, el esfuerzo, el costo, la geometría, las frecuencias naturales, la temperatura, etc., que dependen de variables conocidas: las cotas, las cargas, las restricciones, los materiales, los requisitos de fabricación, etc. Sin embargo, los ingenieros de diseño pocas veces conocen todos estos datos en las fases iniciales del proceso de diseño.

Antes de la aplicación de las técnicas de optimización al diseño, y aún en la actualidad, el proceso de diseño requiere fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, quien debe utilizarla en casi todas las etapas del proceso. Recientemente esta forma de pensar ha cambiado debido a la importancia que ha tomado el campo de la optimización en diseño. Ya que el área de diseño juega un papel muy importante dentro de la mecánica, para poder obtener resultados vanguardistas, se han desarrollado infinidad de análisis, métodos y técnicas con sus respectivas ventajas y limitaciones.

En general, el diseño en Ingeniería es un proceso *iterativo*, que se modifica continuamente hasta cumplir un criterio aceptable de calidad definido por: el factor de seguridad, costo, eficiencia, estética, etc. Durante la última década, los ingenieros de diseño han aprendido a utilizar y a confiar en herramientas de ingeniería asistida por ordenador (CAE) como: el análisis por elementos finitos (FEA), la dinámica de fluidos computacional (CFD), la simulación del movimiento, etc., como ayudas importantes para producir mejores diseños con más rapidez.

El problema de diseño óptimo se entiende como: *aquel que plantea determinar el valor de una serie de variables de manera que se minimice el valor de una función objetivo, a la vez que se cumplen una serie de restricciones impuestas [44].*



A menudo los ingenieros tienen que enfrentarse a problemas de optimización multiobjetivo. Sin embargo, este tipo de problemas pueden demandar más recursos de los que hay disponibles de manera cotidiana. Si el ingeniero de diseño puede ajustar la definición de su problema a un solo objetivo (o a un objetivo cada vez), el proceso de optimización se convierte en algo más sencillo. En la mayoría de los casos, los ingenieros que trabajan con respuestas estructurales tienen como objetivo la minimización del peso. En las aplicaciones de flujo, los objetivos más habituales consisten en minimizar la caída de la presión y la energía turbulenta o en maximizar la velocidad.

Hay varios tipos de problemas dentro de la ingeniería. Desde hace varias décadas, se han realizado estudios en el campo de optimización estructural. El desarrollo de metodologías eficientes para encontrar estructuras óptimas es muy importante, debido a que facilitaría resolver problemas complejos en áreas como: la arquitectura, la ingeniería civil y mecánica. En problemas de optimización de dimensiones, las variables de diseño son las dimensiones de los elementos estructurales (secciones, espesores, etc.). En problemas de optimización de forma, las variables de diseño definen la forma de la pieza. Entonces la definición de optimización estructural es:

*“La optimización estructural es una fusión en las áreas de ingeniería, matemáticas, ciencia y tecnología, que tiene la meta de llevar a cabo la mejor función de una estructura, como puede ser un puente, un vehículo espacial o simplemente un elemento mecánico.”[48]*

Existen varios métodos que pueden ser usados satisfactoriamente para determinar el óptimo de un grupo de variables de diseño, lo cual ofrece un óptimo estructural. Estos pueden ser agrupados en dos grandes categorías: Métodos basados en gradientes y Métodos heurísticos. En cuanto a la manera de abordar estos problemas hay dos grandes enfoques: por programación matemática, o mediante técnicas evolutivas.

Esto provee un panorama relativamente más cómodo para un ingeniero de diseño que necesite aplicar el diseño óptimo de forma al diseño de perfiles estructurales. Todos estos problemas de ingeniería se resuelven realizando una simulación por computadora. Para lograr una buena aproximación a la solución durante una simulación que involucre mecánica de sólidos, el punto fundamental es obtener una discretización de las geometrías, tal que las representen eficaz y fielmente. En general el proceso de optimización de un diseño en su forma estructural se resume como se muestra en la figura I. 1.

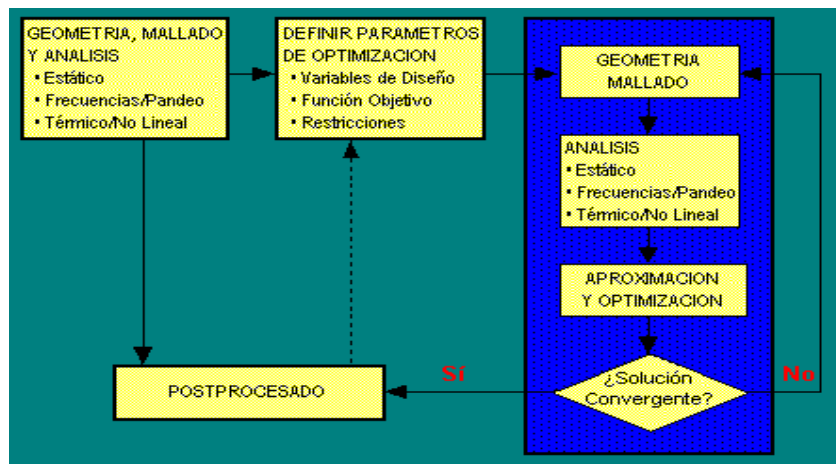


Fig. I.1. Proceso de optimización estructural.

El desarrollo de componentes mecánicos incluye normalmente secciones no uniformes que dan lugar al incremento en el nivel de esfuerzo de dichos componentes. Es posible entonces calcular la distribución de estos esfuerzos de forma analítica o mediante diferentes métodos, entre los cuales destaca el de Elementos Finitos, y permite analizar un diseño y realizar una mejora en zonas de concentración de esfuerzo.





En la actualidad, los problemas de esfuerzo y deformación se resuelven por medio de métodos numéricos. Otros problemas que se resuelven con métodos numéricos son: flujo alrededor de automóviles, trenes, aviones, y en general cualquier medio de transporte, estructuras sometidas a: temperatura, deformaciones iniciales, preesfuerzos, etc., todo ello mediante análisis: estáticos, modales, de pandeo, torsión, axisimétricos, etc.

En el diseño de componentes mecánicos, se analizan aspectos funcionales, se dimensionan y realizan cálculos de esfuerzo debido a las cargas que soportan. Es por ello que los sistemas computacionales proporcionan al ingeniero de diseño hoy en día, una gran herramienta para analizar componentes de manera rápida y eficaz, antes de que estos sean producidos. En la figura I.2 se muestra un ejemplo de optimización estructural de un componente mecánico.

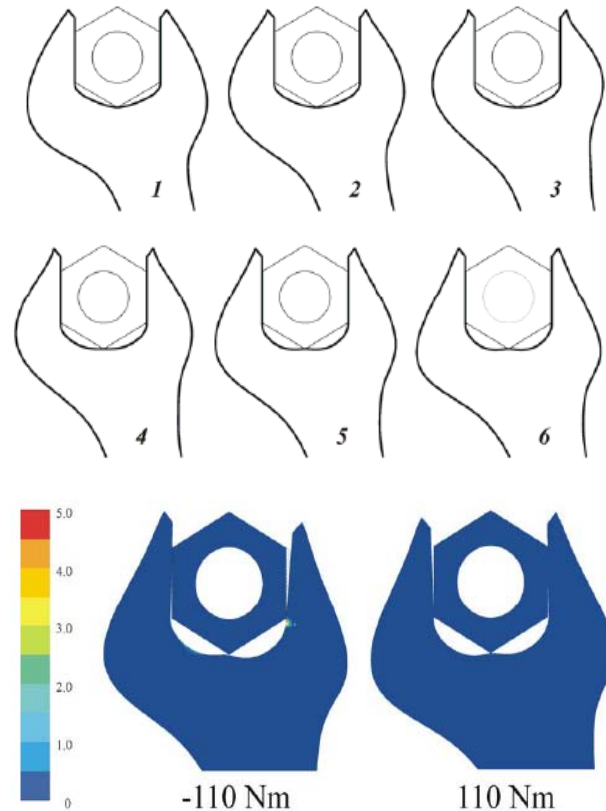


Fig. I.2. Ejemplo de Optimización Estructural de forma [5].

La optimización de un diseño incrementa el valor de un producto mejorando su rendimiento en su entorno operativo a menor costo de producción, mediante la reducción de la cantidad de material utilizado para su fabricación. Al utilizar la optimización, el ingeniero de diseño incrementará los conocimientos sobre el comportamiento de su producto y mejorará el diseño, mientras compara los datos nuevos, con los obtenidos de análisis realizados previamente.



---

## **OBJETIVOS.**

- ◆ Aplicar el Diseño Óptimo Estructural (DOPE) [45, 46, 7], en particular la optimización estructural de forma, basada en reglas evolutivas (inteligencia artificial), a un problema típico de la Mecánica de Sólidos Elásticos como lo es: el análisis bidimensional de estructuras o elementos con cavidades a través del análisis de esfuerzo plano o deformación plana.
- ◆ Obtener un algoritmo de programación capaz de dar solución el Diseño Mecánico de elementos con cavidades a través de la implementación de un criterio de Diseño, basado en la relación entre el nivel de esfuerzo máximo de la estructura y el esfuerzo de fluencia del material utilizado.
- ◆ Obtener la distribución de esfuerzos en elementos con cavidades, mediante la utilización del Análisis por Elementos Finitos (FEA), como herramienta de solución para este tipo de problemas.
- ◆ Modificar únicamente la cavidad de la estructura o elemento, para llevar a cabo la optimización de forma.
- ◆ Realizar una comparación de resultados de esfuerzo, antes y después de la optimización estructural.

## **HIPÓTESIS.**

El Análisis por Elementos Finitos (FEA), por sus siglas en ingles, es una herramienta muy eficiente, a través de la cual se puede obtener la distribución de esfuerzo, al interior de una estructura, sometida a un número de restricciones.

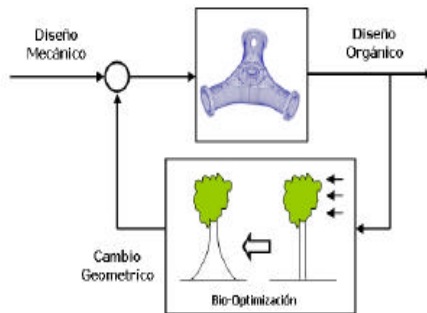
Dicho método es aplicable para problemas bidimensionales, de esfuerzo plano o deformación plana. Para lograr la optimización de forma de estructuras con cavidades internas, el FEA es necesario para poder introducir un parámetro de modificación, que estará basado en la relación entre el valor máximo del esfuerzo de von Mises de la estructura y el valor de esfuerzo en puntos pertenecientes a la curva que modela el perfil de la cavidad.

Al realizar el modelado geométrico del perfil que tendrá la cavidad, a través de una curva paramétrica, se tienen puntos que son modificables, los cuales se desplazan dependiendo del valor del parámetro de modificación. El desplazamiento contendrá información de puntos aledaños, que afectarán en la dirección de dicho desplazamiento.

El desplazamiento de puntos, provocará la modificación de la curva del perfil de la cavidad, mostrando con ello una nueva curva del perfil, una mejor distribución de esfuerzo en la estructura, aunado a la reducción de volumen y con esto la optimización de forma de la cavidad.



## CAPÍTULO 1



# Estado Del Arte o Marco Teórico.

*“Lo que hace sabio al hombre no es saber mucho, sino saber lo que le es más útil.”*

Thomas Fuller, M.D.

### 1.1 INTRODUCCIÓN.

Los procesos de diseño son realizados por la experiencia e intuición del diseñador, quien debe utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño, en vez de una aplicación intensiva de la teoría de optimización. El método que se emplea es el siguiente: el ingeniero define un diseño inicial cuyo comportamiento es analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se pueden deducir los cambios a realizar para mejorar dicho diseño. Se finaliza el proceso cuando se considera que el diseño es lo suficientemente bueno. Tal método mostrado en la figura 1.1, presenta el inconveniente de que las modificaciones dependen totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas, pero no las mejores, además con un alto precio en tiempo por parte del diseñador.



Fig. 1.1. Proceso de diseño [20].

Esta forma de diseño se está intentando cambiar, debido a la importancia que ha tomado el campo de la optimización, ya que mediante su aplicación se logran reducir costos y tiempo en los procesos de diseño realizados por los ingenieros. El propósito de aplicar los conceptos de diseño óptimo a la ingeniería estructural es el de obtener una solución a un problema de ingeniería que cumpla con todas las cargas y restricciones dadas, y que su vez resulte



ser la mejor en cuanto a uno o varios criterios de diseño previamente establecidos. Con este planteamiento quedan expuestas las tres características fundamentales del problema: las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones.

El desarrollo del diseño óptimo estructural ha sido posible gracias al desarrollo de nuevos métodos numéricos, al uso de nuevas y poderosas técnicas de optimización, y finalmente al desarrollo de computadoras cada vez más potentes y veloces, capaces de realizar miles de cálculos en tiempos relativamente cortos.

### **Optimización Estructural.**

Por la complejidad en las matemáticas, el tema de optimización estructural fue más de interés académico en los últimos 20 años. Fue comenzado por un gran número de analistas estructurales, quienes llegaron a la mejora en algoritmos usados para la optimización del diseño, donde un número importante de variables y restricciones, tienen que ser manipuladas necesariamente para la solución de un problema. Cada vez hay más y más actividades de investigación dirigidas hacia la realización de estos desarrollos y hacerlos disponibles, fáciles, confiables, de bajo costo y sobretodo comprensibles para ingenieros, científicos, etc.

Los parámetros de diseño clásicos buscan métodos para volverse más eficientes debido a mejoras en algoritmos usados en la búsqueda de sistemas (Vanderplaats 1984), esta clase de métodos son agrupados y llamados de criterio óptimo (Rozvany 1989). Métodos más recientes son: optimización estructural evolutiva (Xie 1992), homogeneización (Bendsoe 1995), crecimiento biológico (Matheck 1997), optimización estructural de forma (Annicchiario 2001), etc. Estos métodos son probados para tener éxito en la generación de topologías óptimas para estructuras continuas, para tratar la densidad de elementos como una variable de diseño.

La optimización estructural busca diseños de estructuras que minimicen una función objetivo. Esta minimización se hace frente a un juego de variables de diseño y teniendo en cuenta restricciones a cumplir, tales como valores máximos de tensiones o deformaciones. Existen tres tipos de optimización.

**Optimización Dimensional.** En los problemas de optimización de dimensiones las variables de diseño son las dimensiones de los elementos estructurales (secciones, espesores, etc.).

**Optimización Topológica.** En problemas de optimización topológica, no solamente se modifican dimensiones o posición de puntos característicos, sino también la existencia o no de elementos estructurales. Por ejemplo en la optimización topológica de una estructura reticulada se obtiene como respuesta cuales barras deben constituir la estructura, y sus dimensiones. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de optimización topológica.

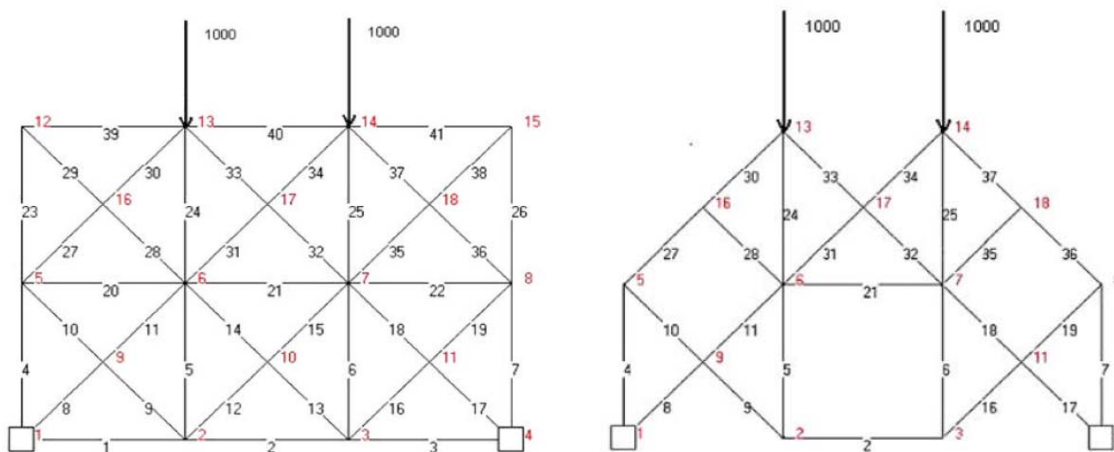


Fig. 1.2. Optimización Estructural Topológica [44].



**Optimización de Forma.** En problemas de optimización de forma, las variables de diseño definen la forma de la pieza, consisten en variar algunos contornos del modelo a ser diseñado a fin de mejorar su comportamiento mecánico como por ejemplo reducir altas concentraciones de esfuerzos que normalmente aparecen en las esquinas de las piezas o en aquellas zonas donde ocurren cambios bruscos en la forma de la sección, las reducciones de peso, modificaciones de forma en su totalidad, etc., como se observa en la figura 1.3.

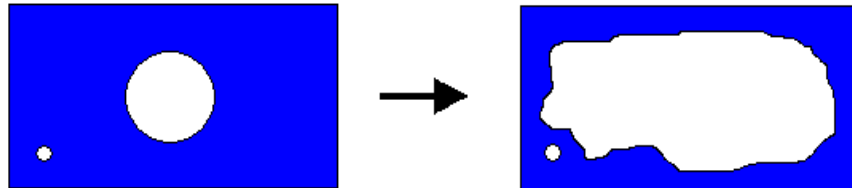


Fig. 1.3. Optimización Estructural de Forma.

A fin de resolver el problema de optimización de forma, éste puede ser dividido en tres etapas principalmente. En primer lugar, es necesario definir los modelos geométrico y analítico de la pieza a estudiar. En segundo lugar, se encuentra el estudio de sensibilidades para obtener la solución al problema planteado, y finalmente, la solución óptima del problema se obtiene a través de la selección de la técnica de optimización que permita hacerlo de la forma más efectiva posible.

Existen dos grandes enfoques para solucionar el problema de optimización: por programación matemática, o mediante reglas evolutivas. En el primero, se busca el diseño óptimo mediante un problema de minimización de la función objetivo, teniendo en cuenta sus derivadas con respecto a las variables de diseño. El segundo busca el diseño óptimo mediante la minimización o maximización de una función objetivo, a través de la búsqueda de la mejor respuesta dentro de un número de posibles respuestas que tienen la posibilidad de ser combinadas de manera progresiva e iterativa y con ello converger en una respuesta óptima al problema.

## 1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS DIFERENTES MÉTODOS DE DISEÑO.

### 1.2.1. Métodos Tradicionales.

Los métodos de diseño llamados “Tradicionales” son todos aquellos en los cuales la experiencia del diseñador, que los emplea, es fundamental durante y en cada una de las etapas que lleve el diseño, desde su parte de idealización hasta su fase de fabricación; entre las herramientas más conocidas para dar solución al problema de diseño se encuentran métodos tales como: QFD, Matriz de Decisión, Triz, Cartas Morfológicas, entre otros, algunos de los cuales se describen de manera breve más adelante (ver anexo I).

La mayoría de las técnicas que existen, incluyendo todas las técnicas clásicas, utilizan una alteración del “razonamiento habitual” por un procedimiento propio de cada técnica. Para la generación de ideas no se requiere ser un experto en el tema sobre el que se razona, aunque en el proceso de resolución de un problema hay fases de análisis de las ideas aportadas y de construcción de la solución, que deben ser realizadas por especialistas.

En general la metodología de diseño se puede resumir en la siguiente serie de pasos a seguir, cada uno con algunos de sus respectivos procesos intermedios:



<b>1. IDENTIFICACIÓN DE LA NECESIDAD</b>	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA OBJETIVOS Y ALCANCES BUSQUEDA DE INFORMACIÓN LISTA DE REQUERIMIENTOS LISTA DE ESPECIFICACIONES
<b>2. DISEÑO CONCEPTUAL</b>	SISTEMAS FUNCIONALES GENERACIÓN DE ALTERNATIVAS EVALUACIÓN Y SELECCIÓN
<b>3. DISEÑO DE DETALLE</b>	MEMORIA DE CÁLCULO DIBUJOS A DETALLE PROPUESTA A DETALLE
<b>4. FABRICACIÓN DEL PROTOTIPO</b>	PRUEBAS DE FUNCIONAMIENTO DOCUMENTACIÓN

*La identificación de la necesidad* es el punto medular de la metodología de diseño, ya que si los problemas no son bien comprendidos y por tanto definidos, se puede llegar a una solución que no satisfaga los requerimientos y especificaciones, lo cual provocará un mayor número de aplicaciones de las herramientas cualesquiera que se utilicen para dar solución al problema que se tenga.

*El diseño conceptual y de detalle* son puntos dentro de la metodología de diseño, etapas en las cuales se descartan las ideas reales de las irreales, es decir se pasan las ideas a un terreno en el que se puedan llevar a cabo, mediante comparaciones, cálculos, etc. , siempre con la premisa de cumplir con la idea principal: satisfacer la necesidad.

Por último la *fabricación del prototipo* o producto final, es donde el diseñador observa todo el trabajo realizado, es decir la construcción de manera tangible de la solución, que trabaja y cumple con las condiciones impuestas para ello.

Esta metodología se puede realizar de manera iterativa, con el único fin de ir mejorando el proceso o ciertos requerimientos en cualquiera de las etapas de diseño; a este paso se le conoce como Reingeniería. Algunas de las herramientas de diseño más comunes se muestran en el Anexo 1, cada una de ellas se puede utilizar durante e incluso algunas en cada una de las etapas de diseño.

## **1. 2. 2 INTELIGENCIA ARTIFICIAL.**

Dentro del ámbito de la ingeniería, la Inteligencia Artificial es una de las áreas que causa mayor expectación, incluso dentro de la sociedad en general, debido a que la búsqueda para comprender los mecanismos de la inteligencia ha sido la piedra filosofal del trabajo de muchos científicos por muchos años y lo sigue siendo. Dentro de las áreas de la Inteligencia Artificial lo que más ha atraído, es el aprendizaje de máquinas, resultando vital el proceso de emular comportamientos inteligentes. Que un sistema pueda mejorar su comportamiento sobre la base de la experiencia que recoge al efectuar una tarea repetitiva y que además, tenga una noción de lo que es un error y que pueda evitarlo, resulta apasionante [46].

Un concepto básico dentro de este campo es el comportamiento emergente. El comportamiento emergente aparece cuando se puede generar un sistema complejo a partir de reglas sencillas. Para que se dé este comportamiento se



requiere que el sistema en cuestión sea iterativo, es decir, que el mismo proceso se repita de forma continua y además que las ecuaciones matemáticas que definen el comportamiento de cada paso sean no lineales [46].

Los investigadores en inteligencia artificial se concentran principalmente en los sistemas expertos, la resolución de problemas, el control automático, las bases de datos inteligentes y la ingeniería del software (diseños de entornos de programación inteligente). Otros investigadores están trabajando en el reto del reconocimiento de patrones donde se espera un rápido progreso en este campo que abarca la comprensión y la síntesis del habla, el proceso de imágenes y la visión artificial. La investigación fundamental se da sobre la representación del conocimiento, la conceptualización cognoscitiva y la comprensión del lenguaje natural. Uno de los principales objetivos de los investigadores en inteligencia artificial es la reproducción automática del razonamiento humano.

### **Antecedentes.**

El primer período de la inteligencia artificial, llamado sub-simbólico, data de aproximadamente 1950 a 1965. Este período utilizó representaciones numéricas (o sub-simbólicas) del conocimiento. Aunque la mayor parte de los libros de inteligencia artificial enfatizan el trabajo realizado por Rosenblatt y Widrow con redes neuronales durante este período, la realidad es que otra importante escuela sub-simbólica data también de la misma época y estos son los algoritmos evolutivos.

La escuela clásica dentro de la Inteligencia Artificial, utiliza representaciones simbólicas basadas en un número finito de premisas y de reglas para la manipulación de símbolos. El período simbólico se considera aproximadamente entre 1962 y 1975, seguido por un período dominado por los sistemas basados en el conocimiento de 1976 a 1988. Sin embargo, en este segundo período las representaciones simbólicas (por ejemplo, redes semánticas, lógica de predicados, etc.) siguieron siendo parte central de dichos sistemas.

La programación lógica tiene sus orígenes más cercanos en los trabajos de J. A. Robinson, que propone en 1965 una regla de inferencia a la que llama resolución, mediante la cual la demostración de un teorema puede ser llevada a cabo de manera automática. La resolución es una regla que se aplica sobre cierto tipo de fórmulas del cálculo de predicados de primer orden, llamadas cláusulas y la demostración de teoremas bajo esta regla de inferencia se lleva a cabo por reducción al absurdo. Otros trabajos importantes de esa época que influyeron en la programación lógica, fueron los de Loveland, Kowalski y Green, que diseñan un probador de teoremas que extrae de una prueba, el valor de las variables para las cuales el teorema es válido. Estos mecanismos de prueba fueron trabajados con mucho entusiasmo durante una época, pero, por su ineficiencia, fueron relegados hasta el nacimiento de Prolog, que surge en 1971 en la Universidad de Marsella, Francia.

Actualmente, empieza a extender sus áreas de investigación en diversas direcciones y trata de integrar diferentes métodos en sistemas a gran escala, tratando de explotar al máximo las ventajas de cada esquema. La programación lógica ha despertado un creciente interés que va mucho más allá del campo de la Inteligencia Artificial y sus aplicaciones. Los japoneses, con sus proyectos de máquinas de la quinta generación, dieron un gran impulso a este paradigma de programación. Una variedad de aplicaciones comenzó a ser identificada como difícil para implantarse con el uso de sistemas de datos relacionales. Estas nuevas aplicaciones incluyen diseño asistido por computadora, ingeniería de software, gestión y administración de procesos (CAD, CAE, CASE y CAM), sistemas basados en conocimiento (sistemas expertos y "shell" para sistemas expertos).

### **Características de la Inteligencia Artificial.**

Una característica fundamental que distingue a los métodos de Inteligencia Artificial de los métodos tradicionales es el uso de símbolos no matemáticos, aunque no es suficiente para distinguirlo completamente. La secuencia de pasos seguidos por un programa es influenciado por el problema particular que se presente. El programa especifica como encontrar la secuencia de pasos necesarios para resolver un problema dado (programa declarativo). En contraste con los programas que no son de Inteligencia Artificial, que siguen un algoritmo definido,



que especifica, explícitamente, cómo encontrar las variables de salida para cualquier variable dada de entrada (programa de procedimiento)[46].

El razonamiento basado en el conocimiento, implica que estos programas incorporan factores y relaciones del mundo real y del ámbito del conocimiento en que ellos operan. Al contrario de los programas para propósito específico, como los de contabilidad y cálculos científicos; los programas de Inteligencia Artificial pueden distinguir entre el programa de razonamiento y base de conocimientos, dándole la capacidad de explicar discrepancias entre ellas.

La inteligencia artificial incluye varios campos de desarrollo tales como: la robótica, usada principalmente en el campo industrial; comprensión de lenguajes y traducción; visión en máquinas que distinguen formas y que se usan en líneas de ensamblaje; reconocimiento de palabras y aprendizaje de máquinas; sistemas computacionales expertos, etc. Tales tareas reducen costos, reducen riesgos en la manipulación humana en áreas peligrosas, mejoran el desempeño de elementos expertos, y mejoran el control de calidad sobre todo en el ámbito comercial.

### **1. 2. 3 MÉTODOS QUE EMPLEAN TÉCNICAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL.**

Los métodos de diseño que emplean la inteligencia artificial son todos aquellos en los que el uso de programación matemática, es la herramienta principal. Se le llama inteligencia artificial:

*“Al proceso que realiza un algoritmo computacional, que es capaz de realizar o “tomar una decisión” durante un proceso heurístico, el cual es un proceso que intenta reproducir actividades realizadas por la naturaleza, todo ello a través de un número de parámetros o criterios modificables dentro de este y que al final generan una respuesta propia del algoritmo.” [8]*

Este tipo de métodos han incorporado reglas que al ir incrementándolas tienen la habilidad de aprender a partir de la experiencia. Sin embargo, estos métodos son más bien soporte o apoyo más que reemplazos para los humanos expertos, además de una herramienta que ayuda en la toma de decisiones. Se puede distinguir entonces las técnicas de programación y las heurísticas. Dentro de estas técnicas las más usuales son: optimización estructural evolutiva (ESO), algoritmos genéticos (GA), optimización estructural bidireccional evolutiva (BESO), la simulación de recocido (SA), crecimiento biológico (SKO) etc.

Un programa computacional en el que se utiliza inteligencia artificial, resuelve problemas en un dominio especializado que ordinariamente requiere experiencia humana. Para realizar tareas de aparente inteligencia, un sistema recurre a dos componentes: una interfaz, y un programa computacional.

1. **Interfaz**, es aquel mediante la cual el diseñador introduce la información requerida del problema para su solución, al programa computacional.
2. **Programa computacional**, es aquel que ejecuta el proceso de hacer inferencias, interpreta y evalúa los hechos en la base de conocimiento para proveer una respuesta al diseñador.

La base es una estructura de reglas conectadas que aplica experiencias humanas, con frecuencia intuitivas, en la solución de problemas. Los resultados de estos pasos son traducidos en una llamada producción de reglas, de la forma: si la condición “X” es verdadera sigue, si no la acción “Y” sigue.

Dado que cada condición que puede ser encontrada puede ser descrita por una regla, los sistemas de inteligencia artificial basados en reglas, no pueden manejar eventos no anticipados, pero pueden evolucionar con el uso, y permanece limitado a un estrecho dominio de problemas, además emplea una base que consiste de descripciones estructuradas de situaciones, de problemas del mundo real y de decisiones actualmente hechas por expertos. El





software requerido para este tipo de sistemas se ha ido complicando con el tiempo ya que su desarrollo demanda tiempo, un buen equipo de programadores y un buen producto final.

### **Métodos de Optimización.**

Como ya se ha mencionado anteriormente, existen varios métodos que pueden ser usados satisfactoriamente para determinar el óptimo de un grupo de variables de diseño. Estos pueden ser agrupados en dos categorías: Métodos basados en gradientes y Métodos heurísticos.

1. **Métodos basados en Gradientes:** son aquellos que hacen uso de cálculos y de las derivadas de una función objetivo, además de las restricciones para buscar determinar el óptimo, de un grupo de variables de diseño que pueden proveer un valor mínimo o un máximo para una función específica. Se asume que la solución existe, es decir que en el problema y la función objetivo debe haber continuidad (debe haber un medio continuo), ya que es el principio básico para poder encontrar un gradiente.

- ✦ Optimización sin restricción.
- ✦ Optimización restringida.
- ✦ Método de los Multiplicadores de Lagrange.
- ✦ Condiciones de Kuhn-Tucker.
- ✦ Programación Lineal (LP).
- ✦ Programación Lineal Integral (ILP).
- ✦ Programación Secuencial Lineal (SLP).
- ✦ Programación Secuencial No Lineal (NLP).
- ✦ Métodos de Homogeneización.
- ✦ Teoría de distribución Óptima.
- ✦ Optimización de Forma.

2. **Métodos basados en la heurística:** son aquellos que son desarrollados de cualquier idea intuitiva dentro del problema, o de argumentos convincentes de metodologías de optimización basados en la observación de la naturaleza, es decir que estos métodos se basan en simples reglas y sentido común, derivado de la emulación de procesos que suceden a diario en la naturaleza, pero no garantizan encontrar una solución óptima, sin embargo en principio determinan la mejor solución obtenida dentro del tiempo permitido.

- ✦ Simulación de Recocido (SA).
- ✦ Algoritmos Genéticos (GA).
- ✦ Optimización de Forma Asistida por Computadora (CAO).

En el Anexo 2, se muestran y describen algunos métodos de optimización utilizados en la actualidad en el campo estructural.

#### **1. 2. 3. a. Optimización Estructural Evolutiva (ESO).**

Es una técnica relativamente nueva desde 1992, aunque este método se encuentra disponible en la literatura desde 1982. Xie y Steven (1997) desarrollaron esta técnica a la que bautizaron Optimización Estructural Evolutiva (Evolutionary Structural Optimization), lo que busca es realizar el trabajo: fácil, efectivo y comprensible para un rango grande en situaciones de ingeniería. La optimización estructural evolutiva (ESO) es un método numérico de optimización que se integra al análisis por elementos finitos (FEA). Dicho método de optimización es un acercamiento intuitivo al óptimo. ESO es una combinación de métodos: heurístico y pendiente, se acerca a la



optimización estructural basándose en las distribuciones de esfuerzo en una estructura, obteniendo el óptimo deseado quitando el material esforzado más bajo de la misma.

Algunos de los principales personajes que comenzaron a interactuar en el área de optimización topológica de armaduras, fueron Cagan y Mitchell (1993), en la figura 1.4 se muestra parte de lo realizado por ellos (un ejemplo muy común en la literatura de optimización), en donde sometieron una barra a una fuerza en la parte central y dos apoyos en sus extremos. En este caso, ellos aplicaron recocido simulado (Simulated Annealing) obteniendo buenos resultados como un inicio con el cual dieron inicio formal al ESO.

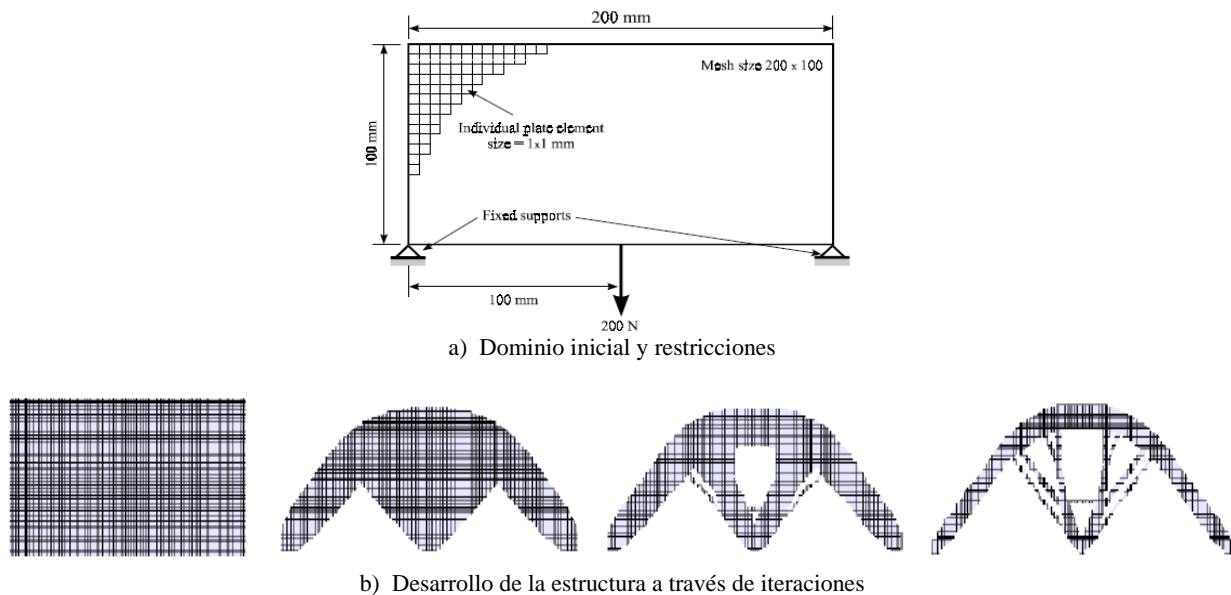


Fig. 1.4. Estructura de Mitchell [48].

La definición formal de ESO es:

*“ESO es basado en el simple concepto de remover lentamente el material ineficiente de una estructura, la forma resultante de esta, evoluciona o se desarrolla hacia la óptima.”*[48]

El método es capaz de resolver de manera confiable, muchos problemas de tamaño, forma y topología de una estructura, a demás de ser fácil de entender y trabajar. ESO ofrece un nuevo enfoque de optimización estructural, el cual supera más de los problemas asociados que las técnicas tradicionales. Las restricciones de la optimización del método puede ser basada en:

- ⊕ Esfuerzos
- ⊕ Desplazamientos
- ⊕ Frecuencias
- ⊕ Cargas, etc.

Todo ello inmersos en uno o varios medios, con lo cual el concepto de ESO es aplicable a todos estos problemas. Los aspectos importantes de la optimización estructural son:

- ⊕ Tamaño, forma, optimización topológica.
- ⊕ Distintos criterios de optimización en diferentes partes de la estructura.
- ⊕ Medio total de cargas generales múltiples.



- ✦ Medio total de soportes
- ✦ Medio total de materiales
- ✦ Totalidad de formas estructurales en 2D y 3D.
- ✦ Optimización a través líneas estáticas, dinámicas y estabilidad, todo de manera simultanea.
- ✦ Optimización con materiales y geometrías no lineales.

El proceso de optimización estructural se da tradicionalmente, siguiendo una vía paramétrica, donde la forma y la topología de una estructura, son definidas por un grupo de parámetros. Los parámetros son ajustados en orden para conseguir algunos objetivos, como son un volumen mínimo, reducir los concentradores de esfuerzos, etc., pero sin violar ninguna restricción. En general el proceso evolutivo requiere de dos parámetros: el primero es una *tasa de rechazo* ( $RR_0$ ) y la segunda es una *tasa evolutiva* (ER).

Esta tarea es difícil de lograr y los sucesos límites se hacen realizando técnicas de programación matemática desde hace 30 años, una de ellas es el análisis por elementos finitos (FEA) (ver capítulo 2 sección 2.5). FEA es una técnica computacional que modela una estructura o un continuo como un ensamble de pequeñas partes (elementos). Cada elemento es de geometría simple (triángulos o cuadriláteros) y por lo tanto es fácil de analizar.

El procedimiento del FEA genera muchas ecuaciones algebraicas, las cuales son resueltas en una computadora digital. FEA procede como un método de análisis de esfuerzos. Hoy en día tiene grandes aplicaciones en muchas ramas de la ingeniería, incluidas la transferencia de calor, mecánica de fluidos y campos electro-magnéticos, etc.

Remoción de material basado en un nivel de Esfuerzos:

1. La estructura se malla finamente.
2. Se aplican cargas y condiciones de frontera.
3. Se analizan los esfuerzos usando un programa de elementos finitos.
4. Se eliminan elementos del modelo de elementos finitos.

Se eliminan haciendo una comparación entre el esfuerzo en cada punto y el esfuerzo total de la estructura, a través del criterio de esfuerzos de Von Mises:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2} \quad \dots \quad (1.1)$$

En cada fin de análisis de elemento finito, todos los elementos que satisfacen la condición son borrados del modelo:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{\max}} < RR_i \quad \text{Donde: } RR_i: \text{ tasa de rechazo } \dots \quad (1.2)$$

El ciclo del análisis y remoción de elementos se repite utilizando algún valor de tasa de rechazo (RR) hasta alcanzar un estado estable. En esta fase una tasa evolutiva (ER) es introducida y añadida a la tasa de rechazo:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, n. \quad \dots \quad (1.3)$$

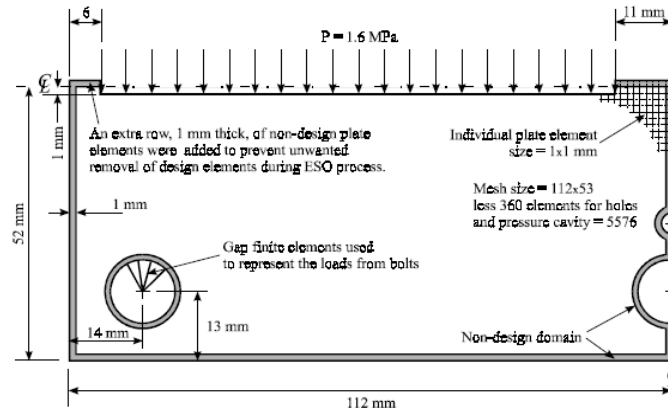
Con este incremento de la tasa de rechazo el ciclo del análisis por elemento finito y elemento removido toma lugar otra vez hasta que un nuevo estado estable es alcanzado. Valores típicos para un inicio son:  $RR_0 = 1\%$  y  $ER = 1\%$ . El proceso evolutivo continúa hasta lograr el óptimo deseado.

Como se puede observar el ESO es un proceso iterativo y por ello el uso de la computadora se convierte en una herramienta muy útil, al momento de resolver los complejos sistemas de ecuaciones, presentados por el problema;

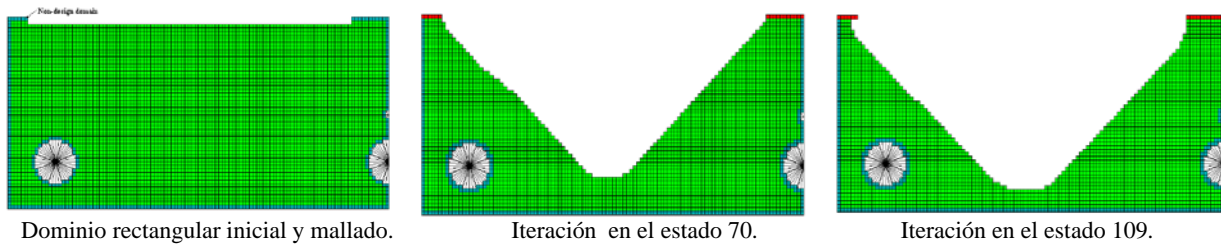


aunque en la actualidad el tiempo que dure este proceso dependerá únicamente de la complejidad del problema, así como del tipo de solución que se necesite.

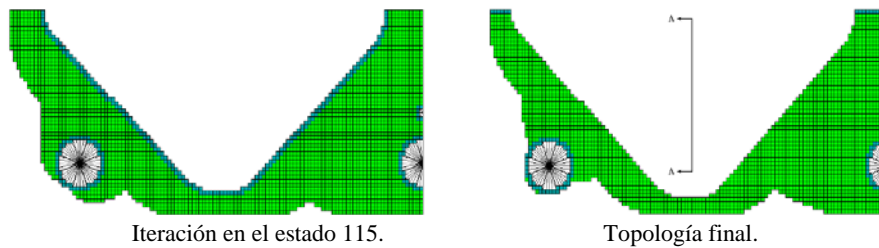
En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de aplicación de esta técnica, para obtener una nueva topología de un intercambiador de calor; aquí se muestran las dimensiones y restricciones del problema, además se aprovecha la simetría del intercambiador y el problema se reduce a tan solo a un cuarto de geometría [30].



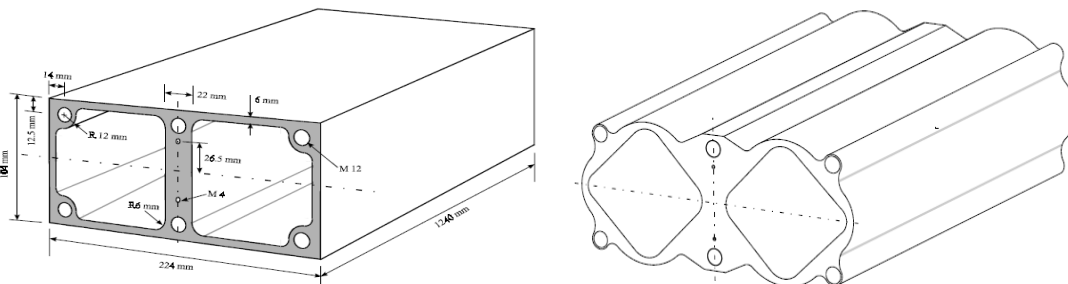
Dominio y Restricciones del problema.



Dominio rectangular inicial y mallado.



a)



b)

Fig. 1.5. a) Evolución del dominio inicial y su topología final, b) Geometría Inicial del intercambiador y el cambio en su geometría mediante la Optimización Estructural Evolutiva (ESO) [30].



### 1.3 COMPARACIÓN ENTRE LAS METODOLOGÍAS DE DISEÑO.

En general se ha visto que los métodos tradicionales tienen que ver en demasía con la experiencia del diseñador, por lo que se intenta obtener una aplicación capaz de “sustituir” todo lo que conlleva el proceso de de diseño, más no al diseñador, es proporcionarle a este una herramienta sencilla para la solución de problemas, bajo criterios definidos por el propio diseñador, tales como: definir el problema, definir las funciones objetivo, decidir si es posible de manufacturar, etc. Las responsabilidades de un diseñador en el proceso de toma de decisiones durante el diseño son muchas, pero principalmente [44]:

- ✦ Definir las especificaciones del problema.
- ✦ Elegir criterios de diseño adecuados.
- ✦ Modelar y evaluar.
- ✦ Realizar cálculos empleando técnicas como FEA.
- ✦ Interpretar y evaluar los resultados del FEA.
- ✦ Elegir la mejor de las soluciones e incluso proponer mejoras.

La última actividad en la lista, elegir la mejor solución y mejorarla, depende fuertemente de la experiencia del diseñador, por lo que no es simple. Además, el diseñador no dispone de los parámetros o la capacidad suficiente para asegurar que la última propuesta de solución que obtenga sea la óptima, ya que le es físicamente imposible evaluar el espectro completo de posibles soluciones.

Desde hace varias décadas, se han realizado estudios en el campo de optimización estructural. El desarrollo de metodologías eficientes para encontrar estructuras óptimas es muy importante, debido a que facilitaría resolver problemas complejos en áreas como la arquitectura, la ingeniería civil y la mecánica. Es por ello que se tienen algunas ventajas y desventajas, que permiten tomar una decisión para implementar una metodología de diseño en particular, las cuales se muestran a continuación:

Ventajas de utilizar técnicas de inteligencia artificial.

- ✦ El diseñador define los criterios de inicio, tal y como sucede con los métodos tradicionales.
- ✦ El rango de parámetros para la solución del problema es mucho mayor que en cualquier método tradicional.
- ✦ Las metodologías que involucran técnicas de inteligencia artificial son capaces de abarcar un número mayor de posibilidades de solución en un lapso relativamente más corto, siempre cumpliendo con los criterios establecidos.
- ✦ El diseñador puede, aun con las técnicas convencionales o tradicionales, ser capaz de dar solución , más no el mejor, a un problema analizando un número finito de posibles respuestas en un tiempo largo, y con técnicas de inteligencia artificial este tiempo se podría ser reducido.
- ✦ Proporciona una solución máxima (óptima), dentro de un máximo de posibles respuestas o soluciones para un problema en particular.

Desventajas

- ✦ Los necesitan tener conocimientos básicos de programación.
- ✦ Es más sencillo de aplicar metodologías tradicionales a problemas relativamente fáciles.



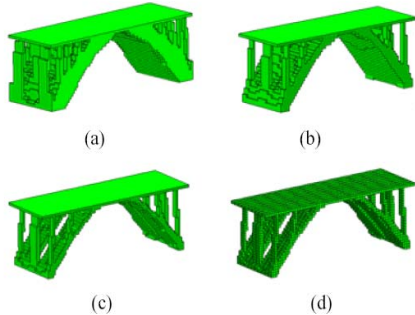
Dentro de los métodos que involucran técnicas de optimización, el método de optimización de forma utilizado en este trabajo, será aquel que tenga relación con el ESO (Optimización Estructural Evolutiva), debido a:

- ✦ Los criterios de diseño tienen que ver directamente con el nivel de esfuerzos de la estructura.
- ✦ La facilidad de programación de un algoritmo computacional, para este tipo de optimización.
- ✦ Permite introducir varios criterios de optimización en distintas zonas de la estructura de manera simultánea.
- ✦ Permite la modificación de la frontera, mediante tasas de evolutivas, para lograr la optimización de forma.
- ✦ Permite obtener la solución óptima basada en el Análisis por Elementos Finitos.

En el capítulo posterior se define la metodología de optimización de forma, así como los detalles de la misma, para lograr el desarrollo de una herramienta de diseño de optimización estructural, además de definir algunos de los conceptos más sobresalientes de dicha metodología.



## CAPÍTULO 2



# *Detalles del Método de Optimización de Forma.*

*“Pensar es el trabajo más arduo que existe, lo que explica que haya tan pocas personas que se dediquen a ello.”*

Henry Ford.

### 2.1 INTRODUCCIÓN.

Desde la aparición de la computadora, se han realizado grandes esfuerzos para que tenga una aplicación en diseño estructural. La fase del proceso de diseño más favorecida ha sido el análisis. Así, desde la década de los cincuenta se han realizado programas cada vez más generales y eficientes, hasta llegar a los programas de Elementos Finitos actuales, capaces de analizar la respuesta de estructuras de gran tamaño y complejidad.

En la metodología habitual del diseño estructural, y debido en gran parte a las limitaciones de tiempo, cuando el diseñador se enfrenta a un determinado problema, suele dedicar la mayor parte de su tiempo a analizar una posible solución al problema, comprobando el cumplimiento de la normativa aplicable al caso, en vez de estudiar diversas alternativas de solución al problema. Este procedimiento, que puede ser adecuado para un ingeniero experimentado, puede ser muy peligroso en manos de otro con poca experiencia [19].

Las técnicas de optimización, utilizadas en un entorno de continuo avance en la potencia de los ordenadores y en las capacidades gráficas de los mismos, pueden ser unas herramientas muy eficaces para visualizar una serie de diseños alternativos que resuelven el problema, cumpliendo las condiciones de diseño del mismo de una forma "óptima".

La optimización heurística debe considerarse como un conjunto de técnicas de optimización que han sido usadas para optimizar complejas funciones como alternativa a los métodos clásicos donde, por diferentes razones, era difícil encontrar el óptimo. En las técnicas clásicas (analíticas o numéricas) las razones que imposibilitan obtener el óptimo son, por ejemplo, la presencia de óptimos locales, el tiempo necesario para obtener una solución, la no convergencia de los algoritmos, etc.

Las técnicas heurísticas han sido usadas principalmente en problemas de optimización combinatoria donde las variables sobre las que hay que decidir tienen valores enteros o discretos, de ahí que el espacio de búsqueda en el caso bidimensional podemos imaginarlo como una malla limitada en dos dimensiones, donde cada intersección (nodo) indicaría una posible solución del problema. Si las variables que intervienen son de tipo real, es posible siempre discretizar el espacio de búsqueda, con lo cual pasamos a un espacio discreto y estamos en las condiciones



anteriores. Si se requiere mayor precisión será preciso discretizar con más puntos con lo que se amplía el número de posibles soluciones y el tiempo para encontrar el óptimo aumenta.

## 2.2 DISEÑO ÓPTIMO ESTRUCTURAL.

### 2.2.1. Metodología.

La optimización de sistemas estructurales puede definirse como el desarrollo y aplicación de técnicas de computadora, interactivas o automáticas, para mejorar los diseños. Se pretende obtener los diseños de costo mínimo que cumplan todas las condiciones de diseño [42].

La introducción de técnicas de optimización en el diseño estructural se hace necesaria a la vista de las ventajas que ofrece, entre ellas el ahorro de tiempo a los diseñadores, permitiéndoles mayor dedicación a fases más creativas del diseño, y la posibilidad de considerar especificaciones, cada vez más numerosas y difíciles de cumplir, que se exigen a las estructuras actuales.

Tradicionalmente, el diseño estructural se realiza siguiendo un proceso iterativo. Este método, presenta el inconveniente de que las modificaciones dependen de la experiencia del diseñador, obteniéndose soluciones que no son las mejores y además, con un alto costo de tiempo. Al mismo tiempo se han realizado intentos para automatizar el proceso de diseño, realizando la fase de síntesis mediante el empleo de técnicas de optimización. Para conseguir una resolución del problema más económica en tiempo empleado, pudiéndose practicar un mayor número de soluciones de forma que el resultado se acerque al óptimo, se ha intentado formular el problema de forma que fuese apto para resolverse automáticamente. Así, se formó el proceso de diseño hasta el esquema mostrado en la figura 2.1, Diseño optimo estructural.

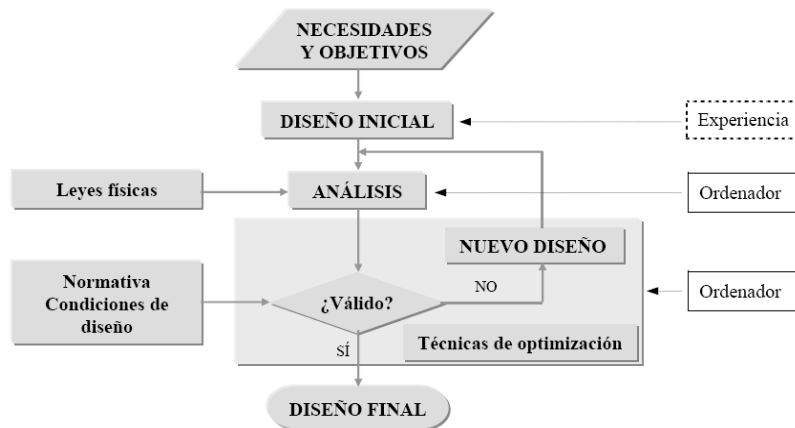


Fig. 2.1. Diagrama de flujo de la metodología de Diseño Optimo Estructural [20].

Un paso previo a la tarea de diseño es el de definir una idealización del objeto a diseñar, a fin de obtener un modelo que incluya un número finito de los aspectos más importantes del diseño y sea más sencillo de manejar que el objeto real. Tal proceso de idealización debe realizarlo el diseñador, utilizando para ello la experiencia adquirida en diseños precedentes. Sin embargo, lejos de encontrarse desasistido en tal labor, el diseñador cuenta con una serie de pautas establecidas y generalizadas que no puede rechazar arbitrariamente generadas tras cada iteración.





### **Formulación y Resolución del problema de Diseño Óptimo Estructural.**

El objetivo del diseño óptimo de estructuras es obtener el mejor diseño, es decir, un conjunto de valores de las *variables de diseño*, que haga mínima una *función objetivo* y cumpla una serie de *restricciones* que dependen de las variables [15].

Las *variables de diseño* de una estructura pueden ser:

- ◆ Propiedades geométricas (áreas, espesores, momentos de inercia, etc.).
- ◆ Topología de la estructura (nodos y conexiones de los elementos),
- ◆ Propiedades del material de la estructura, etc.

El tipo de optimización a realizar dependerá del tipo de variables que se consideren para la solución del problema. Tradicionalmente se ha buscado el diseñar las estructuras de peso mínimo, lo que ha conducido a que la *función objetivo* más habitual sea el peso de la estructura. Sin embargo, en otras aplicaciones el peso no es el factor determinante y se recurre al empleo de otras funciones objetivo, tales como la fiabilidad, la rigidez, el esfuerzo, etc. Las *restricciones* son condiciones que debe cumplir el diseño para que pueda ser considerado válido. En general el problema de diseño óptimo se puede formular como:

Encontrar el vector de variables de diseño  $x$  tal que:

$$\begin{aligned} &\text{minimice: } f(x) \\ &\text{sujeto a: } h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m_i \\ &g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m_d \\ &x_i \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Donde  $x$  es el vector *n-dimensional* de variables de diseño,  $f(x)$  es la función objetivo,  $h_j(x)$  es la restricción de diseño de igualdad  $j$ ,  $g_j(x)$  es la restricción de diseño de desigualdad  $j$ ,  $m_i$  es el número de restricciones de igualdad,  $m_d$  es el número de restricciones de desigualdad,  $n$  es el número de variables,  $x_i^I$  es el límite inferior de la variable  $i$  y  $x_i^S$  es el límite superior de la variable  $i$  [7].

El problema planteado de esta manera se puede resolver, mediante diferentes métodos como: Programación Matemática, Algoritmos genéticos, Criterios de optimización, etc.

### **2.3 CARACTERIZTICAS GENERALES DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA.**

La metodología de diseño óptimo, particularmente enfocado a la optimización de forma de elementos mecánicos propuesta en este trabajo, trata de ser una herramienta útil para los ingenieros de diseño y con ello ahorrarles tiempo pero sobretodo proporcionarles una aplicación con la cual puedan analizar un número mayor de posibles soluciones dentro de un número finito presentado por otras metodologías tradicionales.

El método presentado contiene estrategias de inteligencia artificial, es decir estrategias heurísticas, las cuales provocan una convergencia entre las distintas posibles soluciones, lo que se puede observar como una “Evolución” hacia la solución óptima, de una manera lenta y gradual, basado en parámetros cambiantes durante esta evolución estructural, permitiendo así una adaptación de la geometría que da respuesta a las condiciones en que se encuentra sometido algún modelo, obteniendo con esto una estructura que responde de la mejor manera, conforme avanza el tiempo y se cumple un criterio de impuesto por el diseñador.



Uno de los principios básicos presentados en el método de optimización de forma, es el modelado de geometrías mediante curvas paramétricas, las cuales se definen a partir de segmentos. Las propiedades de este tipo de curvas (ver sección 2.4.2 de este capítulo) proporcionan contornos suaves al momento de modificar la geometría de las estructuras, y esto evita en gran medida, que al llevarse a cabo estos cambios geométricos, no aparezcan aristas que actúen como concentradores de esfuerzos o simplemente con sesgos demasiado grandes, lo cual no es deseable.

El otro es el FEA, que en la actualidad es una herramienta muy popular en el diseño de elementos mecánicos desde un aspecto estructural. Esta técnica es la base para dar solución al problema de optimización en este trabajo, al proporcionar un nivel de esfuerzos de una estructura, que el algoritmo modificará a través del cumplimiento de un criterio de optimización basado en esfuerzo. A continuación se describe brevemente el desarrollo del método propuesto, el cual cumple con algunas características esenciales, de las técnicas de optimización.

El modelado geométrico mediante curvas paramétricas proporciona un modelado, lo más aproximado a la geometría real, mediante un número finito de puntos en 2D.

- ✦ El modelado geométrico paramétrico provee una curva que se ajusta de manera suave, a los puntos que interpola, con esto los cambios bruscos en dirección de la curva no se presentan. Este tipo de curvas nos lleva a evitar la aparición de ciertas zonas en el contorno de la curva que se puedan llegar a convertir en concentradores de esfuerzos.
- ✦ Al modificar la posición de cualquiera de los puntos que definen a una curva paramétrica, esta ajusta de manera automática los segmentos generados con el fin de no perder la suavidad en la misma.
- ✦ El ajuste de una curva paramétrica durante el cambio de posición de un punto, se lleva a cabo tan solo en una región de los segmentos que definen a la curva, mientras que los demás se mantienen sin cambio alguno.
- ✦ Los puntos que pueden sufrir el cambio de posición se denominan puntos de control, estos puntos son las variables de diseño que se tomarán en cuenta para realizar la optimización del modelo geométrico a analizar.

El FEA se utiliza para obtener un análisis estructural de esfuerzos de la geometría a optimizar.

- ✦ La discretización del dominio o estructura modelada, se realiza mediante una malla de elementos finitos triangulares de tres nodos y seis grados de libertad (2 GDL por nodo).
- ✦ El tamaño promedio de los elementos es igual al promedio de la distancia entre los puntos que definen el perfil de la geometría.
- ✦ Los puntos que definen la intersección entre los elementos triangulares, se denominan nodos. Los nodos que se encuentran sobre el perfil que pertenecen al contorno de la estructura modelada, son asociados a los puntos de control de la curva paramétrica.
- ✦ El esfuerzo de von Mises se calcula en cada uno de los elementos triangulares de la malla, y además en cada nodo generado durante la discretización., para cada caso de carga impuesto al modelo.

La geometría se optimiza mediante la modificación gradual de la frontera con base en el nivel de esfuerzos que presenta el modelo.



## Detalles del Método de Optimización de Forma

- ✦ El nivel de esfuerzos calculado en cada nodo perteneciente al perfil, se calcula haciendo una comparación entre el esfuerzo de von Misses en cada uno de estos, contra el máximo presentado en el modelo.
- ✦ Con esto se detectan regiones con un alto o bajo nivel de esfuerzo en el modelo.
- ✦ En cada nodo perteneciente a dichas regiones, esta asociado a un conjunto de puntos de control, con lo que al realizar la modificación de uno de estos nodos implica cambiar la posición de los puntos de control relacionados con estos. Entonces para cada punto de control se define un vector de desplazamiento, mediante las direcciones de los vectores perpendiculares y el nivel de esfuerzo asociados a cada punto.

Este procedimiento se lleva a cabo de una manera iterativa, hasta que ya no se pueden obtener mejoras en el modelo, es decir que se ha encontrado la estructura óptima a las condiciones dadas. En la figura 2.2 se muestra de manera general un diagrama de flujo, correspondiente a la metodología de optimización de forma en este trabajo, bajo las premisas dadas por la metodología del diseño óptimo estructural en combinación con el análisis por elementos finitos.

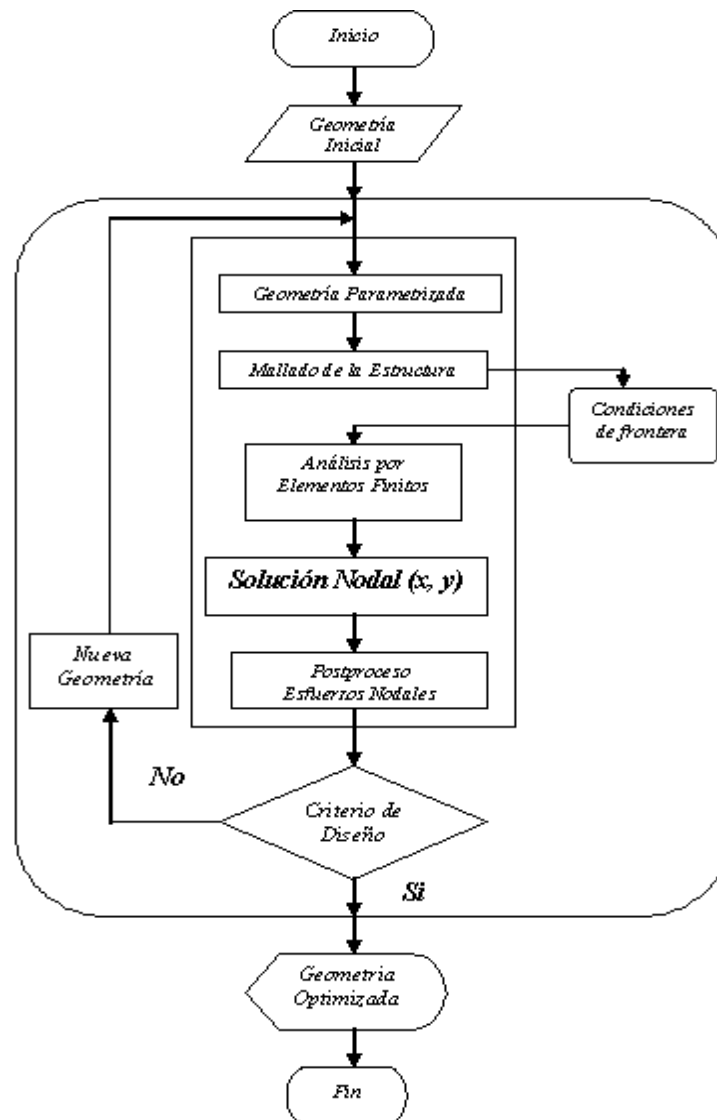


Fig. 2.2. Diagrama de flujo de la metodología de optimización.



Más adelante en este capítulo (sección 2.6) se proporciona una descripción más detallada del método de optimización de forma. Es importante destacar entonces algunas de las características principales de cada uno de los puntos básicos que definen dicho método de optimización (modelado geométrico y método de los elementos finitos), además de realizar la elección de un método de modelado paramétrico.

### 2.4 MODELADO DE GEOMETRÍAS MEDIANTE CURVAS PARAMÉTRICAS.

#### 2.4.1. Definición de Modelado Geométrico.

El modelado geométrico es una herramienta sumamente usada en muchos campos, ciencia e ingeniería, cinematografía, robótica, etc., con el fin de realizar simulaciones, visualizaciones de fenómenos de cualquier tipo y con ello ahorrar tiempo además de reducir costos en pruebas de laboratorio, todo generado desde una computadora.

*“El modelado geométrico se puede definir como: una representación matemática de una geometría real, en un dominio bi o tridimensional, a través de curvas conocidas, tales como líneas, parábolas, hipérbolas, etc., mediante un algoritmo computacional.” [38]*

La idea general para crear un modelado, es pasar de un concepto geométrico a un concepto computacional, y para ello se siguen los siguientes pasos:

1. **Convertir la geometría en términos algebraicos**, es decir buscar una representación algebraica de algún objeto con el fin de poder manipular esta representación por computadora, la cual generalmente no es única, por ejemplo un objeto circular puede tener una forma algebraica en 2D de manera implícita:  $x^2 + y^2 = r^2$  o paramétrica:  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ . Teniendo en cuenta que entre mayor sea la complejidad del objeto a modelar, mayor será la complejidad de la representación matemática.
2. **Convertir los términos algebraicos a un algoritmo de solución**, es decir que la forma algebraica que modela un objeto, se debe escribir como un algoritmo de solución con el fin de poder modificar algunos parámetros, por ejemplo si la ecuación es  $x^2 + y^2 = r^2$  se escribe como  $x^2 + y^2 = r^2$ . La manipulación de parámetros ( $x$  o  $y$ ) se puede realizar mediante:

**Forma simbólica**, en donde se obtiene un valor simbólico como solución, por ejemplo  $x = y + 2$ .

**Forma numérica**, donde se utilizan valores racionales para representar la solución y ser más exactos, por ejemplo  $x = (y^{3/5} + 67)^3$ .

**La aproximación**, donde se utilizan métodos numéricos para obtener una solución numérica aproximada, por ejemplo 0.999999.

3. **Convertir el algoritmo computacional en un programa**, es decir nuestro algoritmo de solución escribirlo en algún lenguaje de programación como C, C++, java, etc. para poderlo solucionar rápidamente, sobre todo en el caso que se utilice métodos numéricos para llegar a una solución.

Para lograr tener una buena aproximación de modelado de un objeto geométrico mediante curvas, es necesario tener un conocimiento sobre las curvas básicas y sus todas sus posibles representaciones (implícita, paramétrica, etc.) en dos y tres dimensiones.



#### 2. 4. 2. Definición de Curvas Paramétricas.

*El modelado paramétrico es el modelado de objetos geométricos a través de la utilización de curvas que son fácilmente representadas mediante el uso de uno o varios parámetros, como por ejemplo: una magnitud, ángulo, tiempo, etc., estas curvas son comúnmente conocidas como Curvas Paramétricas. [38]*

Las curvas paramétricas en general representan curvas cónicas tales como: líneas rectas, las curvas cónicas, etc. Algunas de las técnicas más comunes y que cumplen con los criterios de parametricidad son:

1. Curvas de Bézier
2. Curvas B-Splines y
3. Curvas NURBS (Non Uniform Racional B-Splines).

Cada una de ellas con ventajas comunes tales como:

- ✦ La generación de la curva es a partir de un grupo de puntos de control, los cuales pueden proponer una curva que siga la tendencia de estos puntos de control.
- ✦ Se pueden cambiar las posiciones de cualquiera de los puntos de control, además de otras características con el fin de ir modificando la forma de la curva. A esto se le conoce como criterio de Localidad, en donde no es necesario modificar la ecuación de la curva, sino únicamente los puntos de control de esta.
- ✦ Permiten eliminar o agregar puntos de control sin cambiar la forma de la curva de manera brusca, con lo que se tiene mas libertad de revisar punto por punto sin que los demás se vean afectados por esta adición de puntos.
- ✦ Permiten unir segmentos de una curva, a otra para poder complementarla.

La fabricación de las coordenadas homogéneas introducen la forma racional, las curvas de Bézier y B-Splines son generalizaciones de las curvas de Bézier racionales y B-Splines Racionales Non-uniformes, o NURBS. Obviamente, las curvas de Bézier racionales son más poderosas que las curvas de Bézier. De manera semejante, NURBS son más poderosas que las B-Splines. La relación entre estos cuatro tipos de representaciones de la curva se muestra en la figura 2.3.

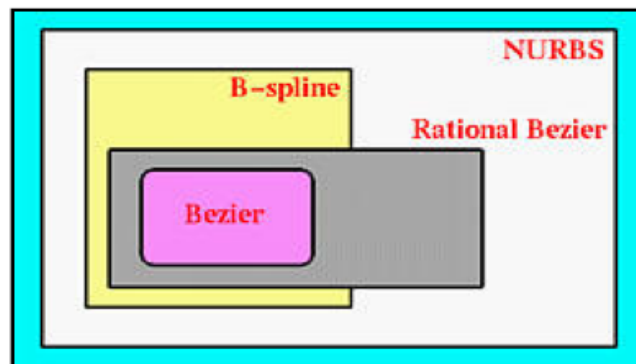


Fig. 2.3. La relación entre 4 tipos de representaciones de una curva paramétrica [39].



### 2. 4. 2. a. Curvas de Bézier.

Las curvas de Bézier eran descubiertas en los años cincuenta, simultáneamente por dos matemáticos franceses (Paul de Faget de Casteljaou y Pierre Bézier) trabajando en forma independiente llegaron a resultados similares descubriendo así las hoy conocidas curvas de Bézier. El descubrimiento de estas curvas fue de tal trascendencia que su uso en el diseño se adoptó a nivel mundial. Posteriormente se mejoran los resultados obtenidos con las curvas de Bézier al descubrirse su generalización: las curvas de B-Splines (nombre corto para Basis Splines).

Sin embargo, se ha adoptado una versión moderna desarrollado por C. del Patán, M. Cox y L. Mansfield a finales de los años 70s. Ambas curvas las Bézier y B-Splines son curvas paramétricas polinómicas. Las formas paramétricas polinómicas no pueden representar algunas curvas simples con gran precisión debido a su definición.

Este tipo de curvas son las más fáciles de implementar mediante un algoritmo de programación, pero tiene problemas de aproximación a la curva que se esta diseñando, debido a que para encontrar una curva adecuada a un perfil, se tienen que unir dos o mas curvas Beziér, lo cual aumenta el numero de puntos de control y un problema de continuidad en los puntos de unión. En la figura 2.4 se muestran dos ejemplos de curvas Beziér.

Definición.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u) P_i \quad \dots \quad (2.1)$$

$$B_{n,i}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad \dots \quad (2.2)$$

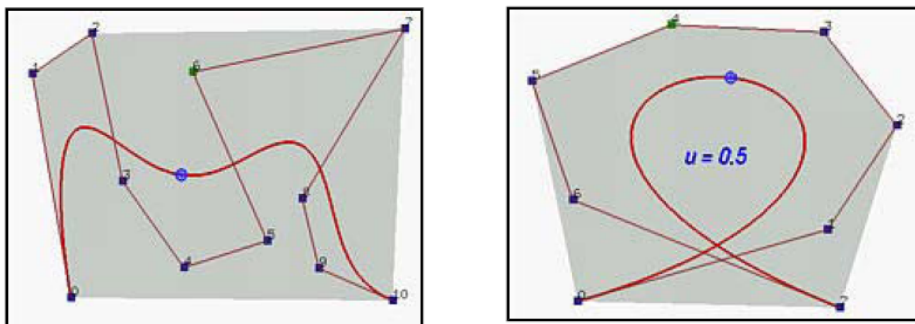


Fig. 2.4. Ejemplos de curvas Beziér [39].

### 2. 4. 2. b. Curvas B-Spline.

En general, las curvas fueron empleadas para diseñar durante siglos; la mayoría de estas curvas eran círculos, pero algunas fueron de “forma libre”. El empleo de estas curvas parte desde el diseño de naves hasta llegar a la arquitectura. Cuando las curvas tuvieron que ser dibujadas exactamente, la herramienta comúnmente usada fue una herramienta mecánica llamado *Spline*, tira de madera a la que se le daba cierta forma y para mantener esa forma se utilizaban pesas de metal conocidas como *ducks* [25]. La contraparte matemática de un Spline mecánico es una *curva Spline* definida en forma paramétrica y que al igual que un Spline mecánico se utilizó para diseñar.

Alrededor de los años sesenta, C. de Boor empezó a trabajar para los laboratorios de investigación de la General Motors usando en este trabajo los B-Spline para efectuar representaciones geométricas. Más tarde se vuelve uno de los más arduos propulsores de los B-Spline en la teoría de aproximación. La evaluación recursiva de las curvas B-Spline se debe a él y en la actualidad se conoce como el algoritmo de de Boor. Gracias a esta evaluación recursiva



los B-Spline se convierten en una herramienta viable, ya que antes de su descubrimiento las B-Spline se definieron usando un tedioso método de diferencias divididas que era muy inestable.

Para diseñar una curva de B-Spline, se necesita un grupo de puntos de control, un grupo de knots y un grupo de coeficientes, uno por cada punto de control, para que todos los segmentos de la curva juntos satisfagan con certeza la condición de continuidad. El cálculo de los coeficientes es quizás el paso más complejo porque ellos deben asegurar ciertas condiciones de continuidad.

Con estas curvas se pueden mover los puntos de control para modificar la forma de la curva, de igual manera como se realiza con las curvas Beziér, pero además se puede modificar las subdivisiones de una curva de una manera más sencilla, lo cual permite un alto grado de libertad para el diseño de una curva. Un knot es punto que subdivide un intervalo cerrado de una curva cuyo dominio esta entre [0,1], como se observa en la figura 2.5.

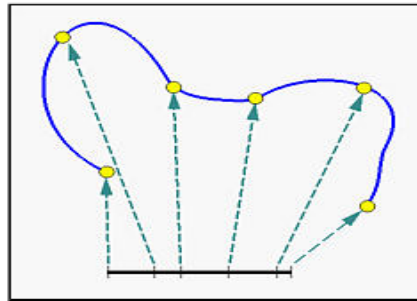


Fig. 2.5. Puntos de subdivisión de una curva (knots) [39].

Definición:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad \dots \quad (2.3)$$

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad \dots \quad (2.4)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Propiedades principales:

1.  $N_{i,p}(u)$  es un polinomio como función de  $u$ , de grado  $p$ .

Es un polinomio de grado  $p$ , donde el valor de  $p$  se encuentra entre 1 y el número de nodos-1 y  $u$  es el knot asociado a este, entre mayor sea el grado del polinomio ( $p$  más grande), la curva producida por estas funciones será más cóncava.

2. **No-negatividad:** Para todo  $i, p$  y  $u$ ,  $N_{i,p}(u)$  es diferente de cero.
3. **El Apoyo local,**  $N_{i,p}(u)$  es distinto de cero en  $[u_i, u_{i+p+1})$ .
4. **En cualquier segmento  $[u_i, u_{i+p+1})$ , a lo más el  $p+1$  de las funciones base de grado  $p$  son distintos de cero, denominados:**  $N_{i-p,p}(u)$ ,  $N_{i-p+1,p}(u)$ ,  $N_{i-p+2,p}(u)$ , ..., y  $N_{i,p}(u)$ .



- 5. **La partición de Unidad:** La suma de todas las funciones base, de grado  $p$  distintas de cero en el segmento  $[u_i, u_{i+p+1})$  es 1:

Esta propiedad es sumamente importante ya que además de mostrar que  $N_{i-p}(u)$ ,  $N_{i-p+1}(u)$ ,  $N_{i-p+2}(u), \dots$ , y  $N_{i,p}(u)$  es diferente de cero en  $[u_i, u_{i+1})$  y su suma es la unidad, aquí podemos observar el porcentaje que cada uno de estos coeficientes aporta en el segmento  $[u_i, u_{i+1})$ , y con ello ver la influencia de los knots a la hora de mover los puntos de control.

- 6. **Si el número de Knots es  $m+1$ , el grado de las funciones base es  $p$ , y el número de las funciones base es  $n+1$ , entonces  $m = n + p + 1$ :**

Esto no es difícil de ver. Permita  $N_{n,p}(u)$  sea el último grado la  $p$  base función. Es non-ceros adelante  $[u_n, u_{n+p+1})$ . Desde que es la última función de la base, los  $u_{n+p+1}$  deben ser los último nudo  $u_m$ . Por consiguiente, nosotros tenemos  $u_{n+p+1} = u_m$  y  $n + p + 1 = m$ . En el resumen, dado  $m$  y  $p$ , permiten que  $n = m - p - 1$  y el grado  $p$  las funciones de la base son  $N_{0,p}(u)$ ,  $N_{1,p}(u)$ ,  $N_{2,p}(u), \dots$ , y  $N_{n,p}(u)$ .

- 7. **La función base  $N_{i,p}(u)$  compone una curva polinómica de grado  $p$  con unirlos con puntos de los Knots en  $[u_i, u_{i+p+1})$ .**

El ejemplo mostrado en la página anterior ilustra bien esta propiedad. Por ejemplo,  $N_{0,2}(u)$ , que es diferente de cero adelante  $[0,3)$ , se construye de tres parábolas definidas adelante  $[0,1)$ ,  $[1,2)$  y  $[2,3)$ . Ellos se conectan juntos a los knots 2 y 3.

- 8. **En un Knot de multiplicidad  $k$ , la función base  $N_{i,p}(u)$  es de continuidad  $C_{p-k}$ :**

Por consiguiente, la multiplicidad creciente disminuye el nivel de continuidad, y el grado creciente la continuidad de aumentos. El antedicho el grado dos función de la base  $N_{0,2}(u)$  es  $C1$  continuo a los knots 2 y 3, desde que ellos son los knots simples ( $k = 1$ ).

**2. 4. 2. c. Curvas NURBS.**

Las curvas NURBS o Non Uniform Rational Basis Spline, son curvas que involucran un cociente de sumas de knot multiplicados por los puntos de control. Este tipo de cociente necesita de una mayor atención respecto a los problemas de continuidad que acarrea su manejo, aunado a la continuidad de cada suma.

Definición:

$$C(u) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i \quad \dots \quad (2.5)$$

Una de las ventajas más notorias que proporciona este tipo de curvas es que se puede realizar una representación más fiel de curvas tales como: círculos elipses, etc., teniendo una mejor convexidad en las curvas, lo cual es más complejo con las curvas B-Spline.

De la definición si el todos los pesos o  $w_i$  son iguales a 1, entonces esta ecuación se reduce a la de una B-Spline, debido a su forma convencional. Además se puede decir que las curvas B-Spline son un caso particular de las curvas NURBS.





## **2.5 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS (FEA).**

El análisis por elementos finitos es uno de los métodos numéricos para la obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Este es especialmente poderoso cuando se trata con condiciones de frontera definidas por geometrías complejas que son comunes en aplicaciones prácticas. Otros métodos numéricos como son: diferencias finitas y elementos frontera, deben ser competitivos o igualmente superiores al método del elemento finito, solo para ciertas clases de problemas. Es por esta versatilidad manejable en dominios arbitrarios y disponibilidad de sofisticados software de elemento finito, que en las últimas décadas, el método de los elementos finitos ha comenzado a ser el método preferido para la solución de muchos problemas prácticos [5].

### **Metodología General del FEA.**

La aplicación del método de los elementos finitos a un problema dado involucra los siguientes seis pasos:

1. Discretización del dominio de solución en una malla de elementos finitos.
2. Desarrollo de las ecuaciones de los elementos.
3. Ensamble de las ecuaciones de los elementos.
4. Introducción de las condiciones de frontera.
5. Solución nodal de las variables.
6. Postproceso o relación de las cantidades para cada elemento.

En el Anexo 3 muestra una descripción de manera general, cada uno de los pasos antes mencionados, así como algunas de sus características más representativas.

## **2.6 DESCRIPCIÓN DETALLADA DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA.**

En resumen el algoritmo de optimización de forma es el siguiente:

1. La geometría del modelo se define mediante curvas B-Spline, indicándose entonces las restricciones así como los casos de carga aplicados al modelo.
2. Se realiza el cálculo del esfuerzo de von Mises en cada uno de los nodos por medio del FEA.
3. Se modifica la frontera de la geometría con base en un proceso de remoción y/o adición de material, definido por el nivel de esfuerzo de cada uno de los nodos que se encuentren en la frontera. La remoción se lleva a cabo en los nodos que presenten un bajo nivel de esfuerzos, aplicando vectores de desplazamiento en dirección interior sobre los puntos de control asociados a dichos nodos. Por otra parte la adición de material se aplica a aquellos nodos cuyo nivel de esfuerzos sea alto o cuyo esfuerzo de von Mises sea mayor al esfuerzo de cedencia del material. En este caso, la dirección del desplazamiento de los puntos de control es exterior, tal y como se observa en la figura 2.6.
4. Los puntos 2 y 3 se repiten hasta que no es posible mejorar el modelo.

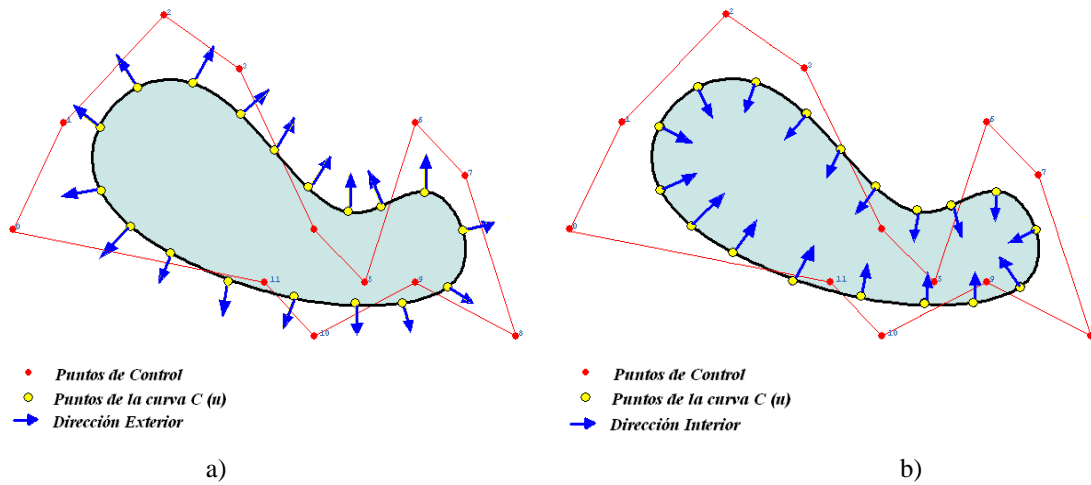


Fig. 2.6. Dirección del desplazamiento de los nodos basado en un nivel de esfuerzo: a) bajo y b) alto.

### Definición de la geometría.

El dominio de diseño se define con base en un conjunto de puntos que indican la geometría inicial del modelo, en particular estos puntos son  $C(u_i)$ , aquellos puntos que están sobre la curva y son definidos al evaluar la curva B-Spline o  $C(u)$  en un valor de parámetro  $u_i$ . Un conjunto de restricciones de desplazamiento o condiciones de frontera y un conjunto de casos de carga que pueden estar compuestos por fuerzas puntuales, distribuidas o de cuerpo.

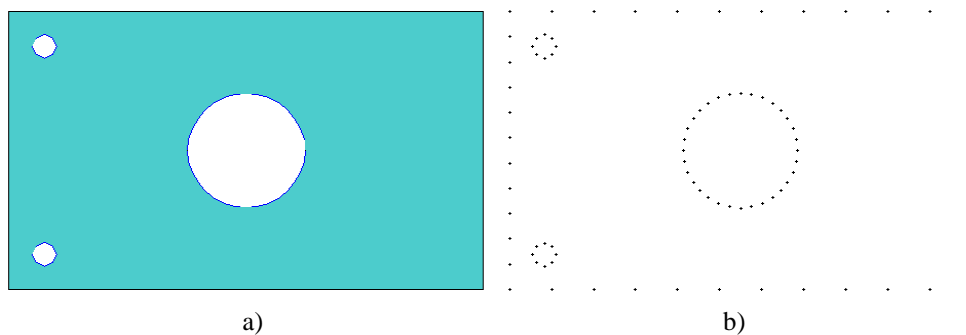
La frontera de la geometría se genera interpolando con curvas B-Spline de grado  $n$  entre los puntos, donde para este trabajo el grado de la curva es tres ( $n = p = 3$ ); de esta forma se asegura que la geometría del modelo no presente cambios abruptos de dirección durante el proceso de optimización. Se pueden identificar tres tipos de curvas en el contorno modelado

**Curvas libres:** cuyos puntos pueden ser modificables sin restricción por lo que presentan regiones a optimizar,

**Curvas o líneas de simetría:** las cuales solo pueden cambiar su longitud a lo largo de la simetría y por ultimo

**Curvas o líneas fijas:** las cuales pueden contener las condiciones de frontera o simplemente no deben ser alteradas por alguna especificación de diseño.

En la figura 2.7 se muestra un ejemplo de geometría modelada mediante curvas B-Spline (Circulo), y sus zonas o regiones mencionadas anteriormente.



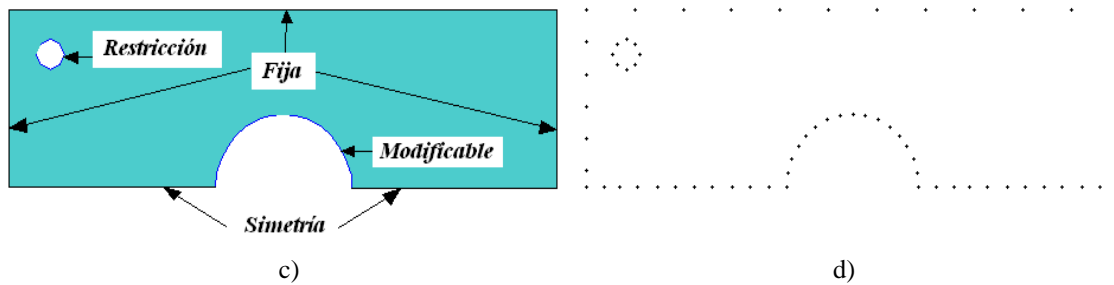


Fig. 2.7. a) Dominio de inicial de diseño, b) Puntos que definen el dominio, c) Regiones encontradas en el dominio y d) Nodos del contorno de la malla de elementos finitos.

### **Aplicación de FEA.**

Es una herramienta que permite calcular los desplazamientos de los nodos que constituyen una malla de elementos, bajo un conjunto de condiciones de frontera o restricciones y un sistema de cargas aplicado. Con base en las relaciones existentes entre desplazamientos y deformaciones, se calcula el estado de deformaciones en cada uno de los elementos finitos y a su vez el estado de esfuerzos de estos.

El estado de esfuerzos en cada nodo de la malla es el valor promedio del esfuerzo de los elementos conectados por el nodo. El esfuerzo de von Mises se calcula en los nodos y este valor es el empleado para determinar el estado de esfuerzos nodal y localizar con ello, aquellas regiones susceptibles a ser modificadas en cada iteración del proceso de optimización.

### **Modificación de la Frontera.**

La optimización de forma se realiza mediante los cambios graduales de la frontera del modelo. Estos cambios se realizan solamente en las regiones modeladas por curvas paramétricas y que son susceptibles a ser modificadas, es decir como se mencionó anteriormente curvas libres. Como en otros métodos de optimización, los cambios en la forma de la geometría, son el resultado de un proceso de remoción o adición de material en la frontera del modelo.

Para realizar la modificación de la frontera, se cambia la posición de los puntos de dicha frontera, es decir modificar la posición de los puntos de las curvas B-Spline, desplazando los puntos de control  $P_i$  que las definen (como se observó en la sección 2.4.2 de este capítulo).

Mientras que en métodos como el ESO la remoción o adición del material se lleva a cabo de manera literal agregando o retirando elementos de la geometría, lo que genera fronteras escalonadas y rugosas, en el método descrito en este trabajo, se lleva a cabo aplicando desplazamientos pequeños (basados en un nivel de esfuerzo) sobre los puntos que definen la frontera y que muestren un nivel de esfuerzos indicado como bajo o alto. Para ello es entonces necesario conocer las zonas o regiones susceptibles de ser modificadas.

### **Regiones o Zonas Modificables.**

Los modelos que se encuentran sometidos a un sistema de carga, tendrán una región o zona modificable, en donde los nodos de esta región cumplan con alguna de las siguientes condiciones:



$$\sigma_i \leq TR * \sigma_R \quad \dots \quad (2.6)$$

$$\sigma_i \geq TA * \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_i \geq \sigma_y \quad \dots \quad (2.7)$$

Donde  $\sigma_i$  es el esfuerzo de von Misses del  $i$ -ésimo nodo,  $\sigma_R$  es el esfuerzo de referencia, por ejemplo el máximo de la estructura,  $\sigma_y$  es el esfuerzo de cedencia del material, TA es la Tasa de Adición de material y TR es la Tasa de Remoción de material. Estos dos últimos parámetros pueden ser llamados parámetros de evolución. Todos los nodos que definan la frontera de la región, que cumplan con la condición (2.6) son candidatos a ser modificados simulando una remoción de material, es decir que encontrará zonas sub-esforzadas, mientras que los que cumplan con la condición (2.7) simularan una adición de material o zonas sobre-esforzadas.

Los valores de TA y TR se actualizan cada vez que se alcanza un estado permanente durante el proceso de optimización, y es el estado en el cual ya no es posible mejorar el modelo, lo cual se traduce como la nula modificación o movimiento de los nodos de la frontera, en otras palabras es un máximo local. Las actualizaciones de los valores de TA y TR se realizan de la forma siguiente:

$$TR_{j+1} = TR_j + TER \quad \dots \quad (2.8)$$

$$TA_{j+1} = TA_j + TEA \quad \dots \quad (2.9)$$

Donde  $j$  es el  $j$ -ésimo estado permanente, TEA es Tasa Evolutiva de Adición de material y TER es Tasa Evolutiva de Remoción de material. Los valores adecuados de los parámetros TA, TR, TEA y TER son indicativos de cada proceso de optimización, ya que son sensibles a la geometría tamaño de malla, etc.

### **2. 6. 1. METODO DE OPTIMIZACIÓN DE FORMA.**

De manera general, los distintos métodos de optimización estructural o diseño óptimo estructural trabajan sobre la base del movimiento de la frontera, lo hacen desplazando puntos que se encuentran sobre la misma, en una dirección perpendicular. Algunos de estos métodos, que han mostrado grandes resultados, aplican desplazamientos sobre todos los puntos susceptibles de cambio, mientras que otros métodos trabajan sólo sobre aquellos puntos de máxima susceptibilidad. El problema común de estos métodos es que al tomar en cuenta la dirección perpendicular a la frontera en el punto a desplazar, no consideran que puedan existir puntos vecinos también susceptibles de ser modificados.

El método de optimización de forma en este trabajo, utiliza la información de la vecindad de los puntos a modificar aprovechando las propiedades de las curvas B-Spline. En primer lugar, la posición de un punto  $C(u_i)$  en una curva B-Spline es dependiente de la posición de los puntos de control de acuerdo con (2.3). Sin embargo, en realidad lo es solo de  $P + 1$  puntos. Entonces los puntos de control que determinan la posición de  $C(u_i)$  son:  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$  y  $P_{i+2}$ , tal y como se muestra en la figura 2.8.

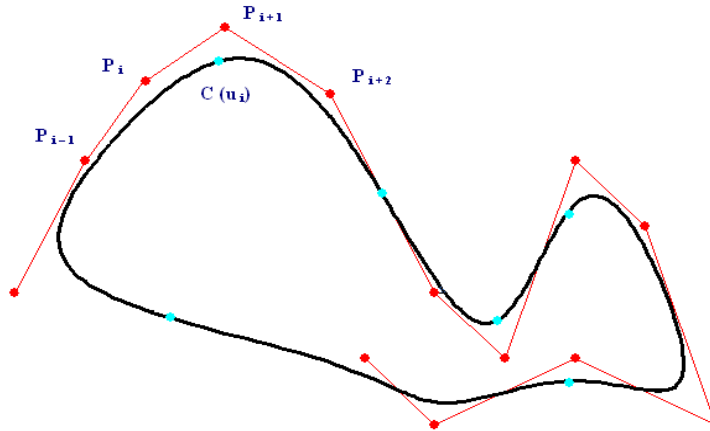


Fig. 2.8. La posición del punto  $C(u_i)$  de una curva B-Spline, depende de los puntos de control:  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$  y  $P_{i+2}$

Lo anterior puede apreciarse al estudiar el sistema, que no es más que el desarrollo de (2.3):

$$\begin{bmatrix} C(u_1) \\ C(u_2) \\ C(u_3) \\ \vdots \\ C(u_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(u_1) \cdot P_1 & N_{2,p}(u_1) \cdot P_2 & N_{3,p}(u_1) \cdot P_3 & N_{4,p}(u_1) \cdot P_4 & \dots & 0 \\ 0 & N_{2,p}(u_2) \cdot P_2 & N_{3,p}(u_2) \cdot P_3 & N_{4,p}(u_2) \cdot P_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_{3,p}(u_3) \cdot P_3 & N_{4,p}(u_3) \cdot P_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{m,p}(u_m) \cdot P_m \end{bmatrix} \dots \quad (2.10)$$

Donde  $u_i$  es el parámetro,  $N_i$  son las funciones de base o de interpolación, entre los puntos conocidos de la curva,  $P_i$  son los puntos de control que definen la curva (o frontera),  $p$  es el grado de las funciones de base y  $m$  número de knots. En (2.10) se muestra la relación entre puntos de la curva, y el producto punto entre los puntos de control y las funciones de interpolación correspondientes a una curva B-Spline de grado  $p$ .

Una de las propiedades de las curvas B-Spline más importante es que, para todo punto  $C(u_i)$  de la curva, la suma de las funciones de interpolación de manera horizontal del sistema (2.10), cumplen con:

$$N_{i-1,p}(u_i) + N_{i,p}(u_i) + N_{i+1,p}(u_i) + N_{i+2,p}(u_i) + \dots + N_{i+p-1,p}(u_i) = 1 \quad \dots \quad (2.11)$$

Esto se puede entender como si los puntos de control  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ ,  $P_{i+2}$ , ...,  $P_{i+p-1}$ , contribuyeran con porcentajes  $N_{i-1}$ ,  $N_i$ ,  $N_{i+1}$ ,  $N_{i+2}$ , ...,  $N_{i+p-1}$ , respectivamente en la posición de un punto  $C(u_i)$  de la curva B-Spline.

Entonces un punto de control  $P_i$ , afecta en porcentajes  $N_i(u_{i-p+1})$ ,  $N_i(u_{i-p+2})$ , ...,  $N_i(u_i)$ ,  $N_i(u_{i+1})$ , la posición de los puntos  $C(u_{i-p+1})$ ,  $C(u_{i-p+2})$ , ...,  $C(u_i)$ ,  $C(u_{i+1})$ , respectivamente como se muestra en la figura 2.9 y además notando que en general la suma de las funciones de interpolación en forma vertical del sistema (2.10) cumplen con:

$$N_{i,p}(u_{i-p+1}) + N_{i,p}(u_{i-p+2}) + \dots + N_{i,p}(u_i) + N_{i,p}(u_{i+1}) \neq 1 \quad \dots \quad (2.12)$$

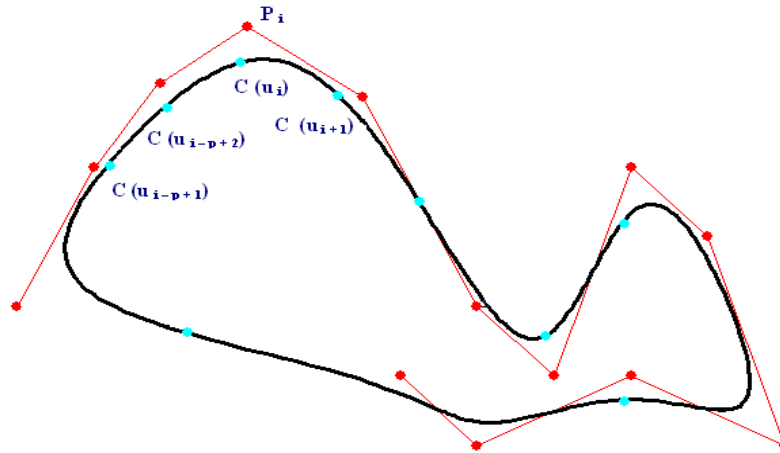


Fig. 2.9. El punto de control  $P_i$  ejerce influencia solo sobre los puntos de control  $C(u_{i-p+1})$ ,  $C(u_{i-p+2})$ , ...,  $C(u_i)$ ,  $C(u_{i+1})$  de una curva B-Spline.

Si se desea modificar el punto  $C(u_i)$  de una curva B-Spline mediante un desplazamiento  $D_i$ , los puntos de control  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ ,  $P_{i+2}$ , ...,  $P_{i+p-1}$ , deben ser afectados por desplazamientos  $d_{i-1}$ ,  $d_i$ ,  $d_{i+1}$ ,  $d_{i+2}$ , ...,  $d_{i+p-1}$  respectivamente. Si se debe cambiar la posición de  $C(u_i)$  y  $C(u_{i+1})$  con desplazamientos  $D_i$  y  $D_{i+1}$ , entonces los desplazamientos a calcular serán  $d_{i-1,i}$ ,  $d_{i,i}$ ,  $d_{i+1,i}$ ,  $d_{i+2,i}$ , ...,  $d_{i+p-1,i}$  y  $d_{i-1,i+1}$ ,  $d_{i,i+1}$ ,  $d_{i+1,i+1}$ ,  $d_{i+2,i+1}$ , ...,  $d_{i+p-1,i+1}$ , los cuales son arbitrarios e independientes entre si, como se muestra en la figura 2.10.

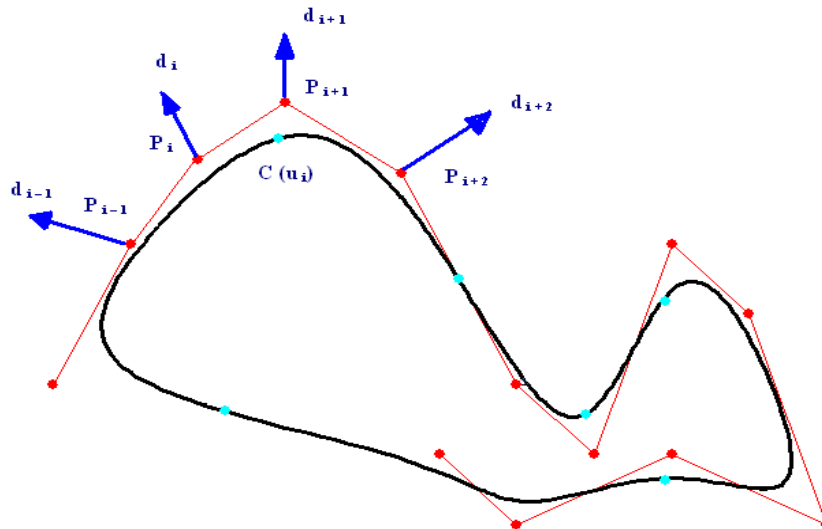


Fig. 2.10. El punto de control  $P_i$  ejerce influencia solo sobre los puntos de control  $C(u_{i-p+1})$ ,  $C(u_{i-p+2})$ , ...,  $C(u_i)$ ,  $C(u_{i+1})$  de una curva B-Spline.

Conjuntos similares de vectores de desplazamiento se generan para cada uno de los puntos de la curva, donde el primer subíndice corresponde al punto de control sobre el cual se deben aplicar y el segundo al punto sobre la curva para el cual fue generado, así para un punto  $P_i$  se obtiene el conjunto:

$$d_{i,i-p+1}, d_{i,i-p+2}, \dots, d_{i,i}, d_{i,i+1} \dots \quad (2.13)$$



**Calculo de la Dirección y Magnitud de los Desplazamientos.**

Para obtener la dirección de los desplazamientos de los puntos de control, solo se toman en cuenta los puntos  $C(u)$ , en regiones modificables que cumplan con las condiciones (2.6) ó (2.7). Así para cada punto  $C(u_i)$  se calcula un vector de desplazamiento  $D_i$ . Sí  $\vec{n}_i$  es el vector unitario normal exterior a la frontera en el punto  $C(u_i)$ , la dirección del vector  $D_i$  y su magnitud son calculados como:

Si cumple con (2.6):

$$\vec{D}_i = -\vec{n}_i \quad \dots \quad (2.14)$$

$$|\vec{D}_i| = \text{Absoluto} \left[ \frac{\sigma_i - (TR * \sigma_R)}{(TR * \sigma_R)} \right] \quad \dots \quad (2.15)$$

ó si cumple con (2.7):

$$\vec{D}_i = \vec{n}_i \quad \dots \quad (2.16)$$

$$|\vec{D}_i| = \text{Absoluto} \left[ \frac{\sigma_i - (TA * \sigma_R)}{(TA * \sigma_R)} \right] \quad \dots \quad (2.17)$$

Esto implica que en regiones de bajo nivel de esfuerzo se remueva material, mientras que en las que presentan alto nivel de esfuerzo se adicione material, tal y como sucede en la mayoría de los métodos de optimización estructural.

La definición paramétrica de las curvas B-Spline, provoca que a cada punto de control se le asigne un intervalo de parámetros, los cuales tienen una relación directa con los puntos de control, es decir para un punto de control, este tiene  $p + 1$  parámetros asignados. Debido a ello cuando uno de los puntos de control es desplazado, la curva únicamente se desplaza en un intervalo definido. Esto se muestra en la figura 2.11:

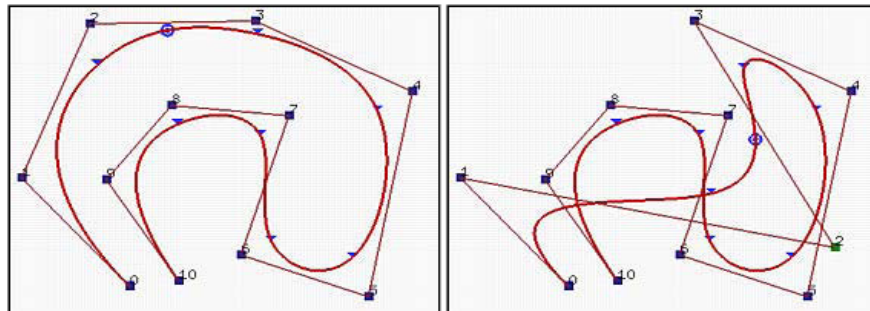


Fig. 2.11. Desplazamiento de un punto de control y el cambio en la curva debido a este desplazamiento [39].

Los vectores  $D_{i-p+1}, D_{i-p+2}, \dots, D_i, D_{i+1}$ , son la base para calcular el vector de desplazamiento  $d_i$  de cada punto de control  $P_i$ . Para desplazar cada  $P_i$  deben tomarse en cuenta los cambios de posición de los puntos de la curva  $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i), C(u_{i+1})$ , es decir  $D_{i-p+1}, D_{i-p+2}, \dots, D_i, D_{i+1}$ .

Pero a su vez a estos puntos les corresponde por la influencia de  $P_i$  en sus posiciones, los valores de  $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1})$ , los cuales representan el porcentaje de participación del punto  $P_i$  en la posición de cada uno de los puntos mencionados de la curva. Dicho de otra forma, si el punto  $P_i$  debe desplazarse, el vector



de desplazamiento  $d_i$  debe tomar en cuenta la participación del punto de control sobre los correspondientes puntos de la curva.

El procedimiento en este trabajo para el cálculo del vector de desplazamiento  $d_i$  emplea los valores de interpolación de la curva  $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1})$ , como factores de ponderación para combinar los vectores  $D_{i-p+1}, D_{i-p+2}, \dots, D_i, D_{i+1}$ , de acuerdo con:

$$\vec{d}_i^t = \sum_{k=p}^1 [N(u_{i+k}) * \vec{D}_{i+k}] \quad \dots \quad (2.18)$$

Donde  $d_i^t$  es la suma vectorial ponderada de los desplazamientos de los puntos sobre la frontera que están asociados al punto de control  $P_i$ , como se observa en la figura 2.12.

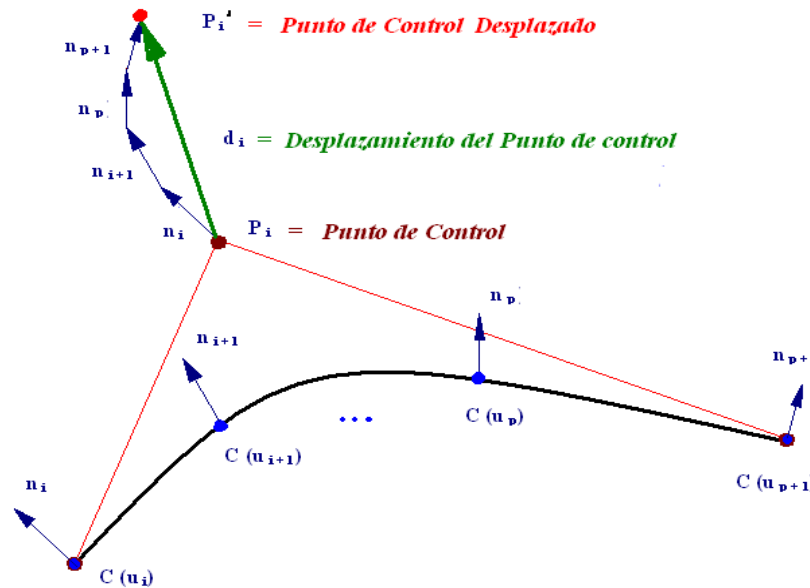


Fig. 2.12. Desplazamiento de un punto de control.

Este cálculo es necesario para determinar la dirección del desplazamiento del punto de control  $P_i$  de forma que tome en cuenta, en cierta medida, la dirección del desplazamiento de los puntos sobre la frontera, como:

$$\vec{d}_i = \frac{\vec{d}_i^t}{|\vec{d}_i^t|} \quad \dots \quad (2.19)$$

Si  $m$  es número de puntos sobre la frontera y  $q$  es el subíndice del parámetro  $u$  de la función de interpolación que cumple con  $\text{Max}(N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1}))$  entonces el cálculo de la magnitud de  $d_i$ , se obtiene como:

$$|\vec{d}_i^t| = \frac{|\vec{D}_q|}{\text{Max}(|\vec{D}_1|, |\vec{D}_2|, \dots, |\vec{D}_m|)} * e_{size} * fm \quad \dots \quad (2.20)$$





Es decir la magnitud del desplazamiento del punto de control  $P_i$  es igual al valor normalizado del desplazamiento del punto sobre el cual tiene mayor influencia es decir  $C(u_q)$ , multiplicado por un tamaño de malla ( $e_{size}$ ) y un factor de modificación ( $fm$ ). La idea principal de esta forma de calcular el vector  $d_i$  es que el cálculo de la dirección utiliza la información de la vecindad de los puntos en la frontera y no solo la de un punto aislado, además el cálculo de la magnitud favorece el desplazamiento de los puntos más afectados por el punto de control.

### **Criterio de Paro.**

En los métodos de optimización existen diferentes criterios de paro, los cuales dependen del objetivo de la optimización. En este trabajo se utiliza un criterio basado en la homogeneidad del nivel de esfuerzos de la estructura medido en cada iteración. El nivel de esfuerzos de toda la estructura se calculo como:

$$N\sigma = \sum_{e=1}^{ne} (\sigma_e - \sigma_r)^2 \quad \dots \quad (2.21)$$

Donde  $N\sigma$  es el nivel de esfuerzo,  $n_e$  son el número total de elementos,  $\sigma_e$  es el esfuerzo de von Misses de cada elemento y  $\sigma_r$  es el esfuerzo Máximo de la estructura. Así el criterio de paro es:

$$cp = Absoluto \left[ \frac{N\sigma_{t+1} - N\sigma_t}{N\sigma_t} \right] \leq 10^{-5} \quad \dots \quad (2.22)$$

Por lo tanto si durante la optimización, para la iteración  $t + 1$  se satisface (2.22), el proceso se detiene. Con esto se asegura que el nivel de esfuerzo en la estructura es homogéneo en el orden de  $10^{-5}$ .

### **Índice de Desempeño.**

El espectro de problemas que pueden plantearse es ilimitado por lo que resulta imposible encontrar una solución estándar para cada uno de ellos. Es por ello que es necesaria una medida que cuantifique que tan bueno y que tan cercano a un resultado óptimo es el modelo generado con cualquier método de optimización empleado para la solución de un problema. El concepto de índice de desempeño no es particular de los métodos de optimización, puede ser comparado con el concepto ampliamente usado de eficiencia [30, 45]. Engloba las características de la solución y es adimensional.

Dado que el método de optimización se basa en el nivel de esfuerzos, el índice de desempeño  $PI$  se calcula como una medida del efecto sufrido por la estructura y la causa que lo provoca, es decir es una relación entre el estado de esfuerzos de la estructura y el sistema de cargas aplicado. El índice entonces se calcula como:

$$PI = \frac{1}{F * L} * \sum_{e=1}^{ne} (\sigma_e * v_e) \quad \dots \quad (2.23)$$

Donde  $PI$  es el índice de desempeño,  $F$  es la resultante del sistema de fuerzas aplicado,  $L$  es la longitud nominal de la estructura,  $\sigma_e$  es el esfuerzo de von Misses de cada elemento y  $v_e$  es el volumen de cada elemento. Una característica fundamental del  $PI$ , es que, durante el proceso de optimización, mientras una estructura evoluciona hacia la óptima construida por una geometría continua, el valor de  $PI$  se decrementa. La geometría continua es aquella que no presenta huecos o cavidades importantes.



## *Detalles del Método de Optimización de Forma*

---

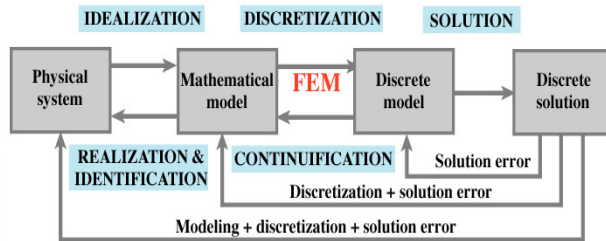
En general cuando la geometría deja de ser continua, el valor de PI se eleva abruptamente. Dado que en este trabajo solo se optimiza una cavidad al interior de una estructura, modificando la frontera, este efecto ocurrirá cuando, durante el proceso de optimización, la frontera presente concavidades de consideración o grandes regiones de curvatura elevada.

Esta metodología de optimización de forma, cumple con los puntos necesarios, para ser una herramienta sumamente accesible para poder ser aplicada por los ingenieros de diseño con el fin de reducirles el tiempo en sus diseños. En el capítulo siguiente se muestran los conceptos básicos de elasticidad y su relación con el FEA, con el fin de utilizar dichos conceptos y realizar análisis de esfuerzo plano y deformación plana.



## CAPÍTULO 3

# Conceptos Fundamentales.



“Todo lo que no sucede por accidente o coincidencia, sucede por diseño”.

Jan Bensen

### 3.1 INTRODUCCIÓN.

El problema de determinar esfuerzos y deformaciones en sólidos elásticos sujetos a: un sistema de cargas (internas o externas), cambios de temperatura, fuerzas de cuerpo que se encuentran distribuidas en el volumen, donde las fuerzas inerciales y su propio peso actúan, etc., es considerado, en la actualidad un campo sumamente estudiado, para dar solución a problemas prácticos, como se observa en la figura 3.1.

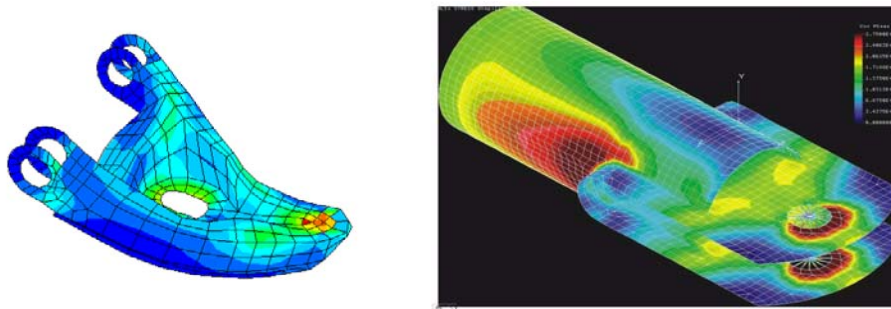


Fig. 3.1. Ejemplos de sólidos elásticos sometidos a cargas y/o cambios de temperatura.

En principio algunas situaciones de análisis de esfuerzos pueden ser manipulados por una formulación general de elemento finito. Sin embargo el costo computacional es muy alto, por la necesidad de evaluar en tres dimensiones volumen e integrales de superficie por cada elemento generado por dicha metodología. Con más de tres grados de libertad en cada nodo, el sistema resultante de las ecuaciones del elemento finito puede ser muy largo, requiriendo computadoras con hardware y software especializado para su solución.

Sin embargo en la actualidad debido a la complejidad presentada en los componentes, es deseable introducir simplificaciones en orden, para reducir el tamaño del problema y con ello todavía tener soluciones razonablemente precisas y con ello reducir tiempos además los antes mencionados costos computacionales.



Algunas de estas simplificaciones son:

- ✦ Los problemas de deformación axial, suponen que los cuerpos son muy largos y delgados, además cargados en una dirección axial solamente. La suposición clave es que  $\sigma$  en la dirección de cualquiera de los ejes coordenados, es la única componente de esfuerzo distinta de cero y esto reduce el problema a solamente una ecuación diferencial en términos de desplazamiento  $u$  y resulta una entonces una simple formulación de elemento finito. La formulación claramente es efectiva para estructuras de tipo armadura.
- ✦ La formulación para vigas es otra formulación especializada, se basa en suposiciones en componentes de deformación que reducen el problema a una simple ecuación diferencial.
- ✦ El esfuerzo plano y deformación plana representan el siguiente nivel de aproximación al comportamiento en un intento por reducir el problema de análisis a formas más manejables.

Es muy importante entender con claridad todas las aproximaciones introducidas en una formulación particular para con ello poder llegar a determinar las ventajas que proporciona la elección de alguna de ellas. Entonces la responsabilidad en el análisis para reconocer cuando una simplificación del modelo es apropiada se vuelve fundamental. Como una regla general, es bueno en la práctica comenzar con simplificar un modelo y gradualmente mover hacia más modelos sofisticados. En muchas situaciones de análisis de esfuerzo, esto es posible al crear armaduras, vigas y modelos de alambre para predecir sobretodo el comportamiento de la estructura.

En este trabajo la simplificación utilizada será la proveniente de esfuerzo plano o deformación plana, dependiendo del problema planteado. Un modelo de esfuerzo plano o deformación plana puede ser empleado, para analizar la estructura total o solamente para áreas críticas. Los resultados de un modelo de bajo orden debido a las simplificaciones aplicadas, son obtenidos definiendo apropiadamente cargas y condiciones de frontera para aislar porciones de una estructura, además de tener una precisión muy buena.

Todo esto supone que se tiene una solución exacta del modelo matemático. Como la solución del modelo matemático representa el esfuerzo verdadero y deformación, la estructura depende de la conveniencia de las suposiciones inherentes en el modelo. Esto es un punto importante para realizar cuando se interpretan resultados producidos por algún software comercial de elemento finito. Un porcentaje de error cercano a cero en esfuerzo, no debe diferenciar mucho usando una formulación de esfuerzo plano al analizar una situación física, al igual que si se aplican las mismas condiciones al modelo en tres dimensiones.

En la figura 3.2, se muestra el análisis de una pieza, mediante la simplificación a un análisis de esfuerzo plano, y se realiza una comparación entre los resultados obtenidos aplicando las mismas condiciones tanto a un modelo tridimensional, así como a la simplificación.

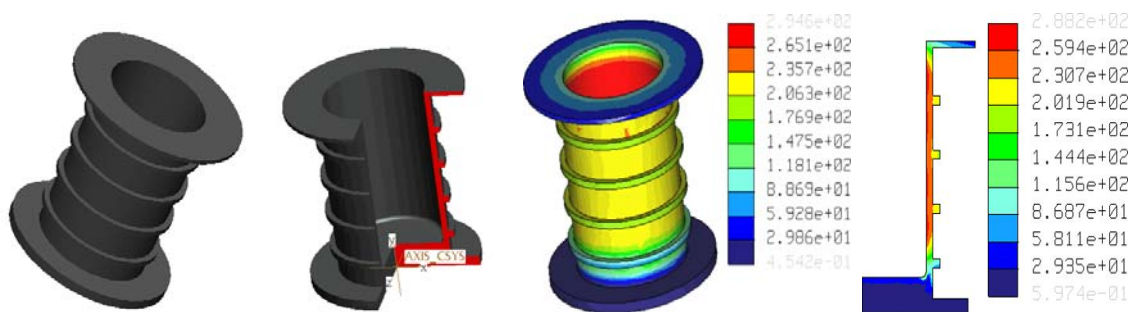


Fig. 3.2. Análisis estructural de una pieza, mediante la simplificación a un análisis de esfuerzo plano.



### 3.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ELASTICIDAD.

#### 3.2.1. Esfuerzo Plano.

Considerando un cuerpo donde su espesor es mucho menor en una dirección, en comparación con las otras dos, se supone que el espesor en esta en la dirección  $z$ , en este caso, el cuerpo parte del plano  $XY$ , como se muestra en la figura 3.3. La situación que debe considerarse es un problema de esfuerzo plano, si todas las fuerzas aplicadas actúan en el plano  $XY$  como se observa en la figura, se puede simplificar únicamente al análisis a una cara en un corte transversal en dicho plano. Bajo estas circunstancias en general es razonable suponer que las siguientes componentes de *esfuerzo* son cero:  $(\sigma_z \tau_{yz} \tau_{zx})$

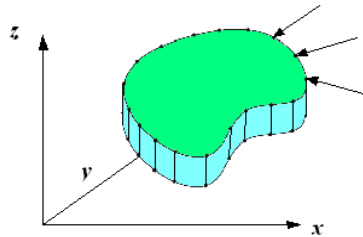


Fig. 3.3. Un sólido de espesor delgado sujeto a cargas en un plano adecuado para un modelo de esfuerzo plano.

Sustituyendo los componentes de esfuerzos-cero en la relación inversa de esfuerzo-deformación (ver anexo 4, (A4.56)) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} \\ \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \frac{\tau_{xy}}{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots (3.1)$$

Esta relación (3.1) simplificando términos, puede entonces ser escrita de la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \dots (3.2)$$



$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}; \quad \gamma_{zy} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0;$$

Invirtiendo (3.2) se obtiene la expresión de esfuerzo plano como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.3)$$

### 3.2.2. Deformación Plana.

Considerando un cuerpo que es mucho más largo en una dirección en comparación con las otras dos direcciones. Suponiendo que la longitud en la dirección z y considerando una rebanada unitaria (espesor h=1) del cuerpo partiendo del plano XY como se muestra en la figura 3.4. La situación que debe considerar un problema de deformación plana si todas las fuerzas actúan en el plano XY. Bajo estas circunstancias en general es razonable suponer que las siguientes componentes de *deformación* son cero: ( $\varepsilon_z$   $\gamma_{yz}$   $\gamma_{zx}$ )

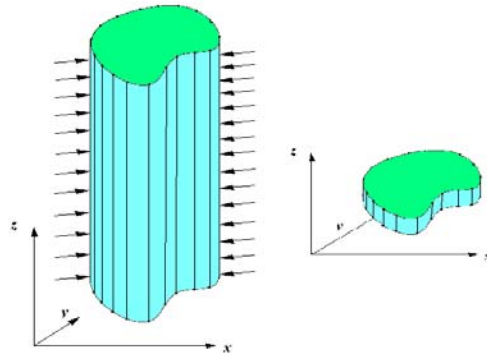


Fig. 3.4. Un sólido largo y una rebanada unitaria para un modelo de deformación plana.

Sustituyendo estas componentes de deformación-cero en la relación de esfuerzo-deformación (ver anexo 4, (A4.52)) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)\epsilon_x - \nu\epsilon_y \\ (1-\nu)\epsilon_y - \nu\epsilon_x \\ \nu(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \frac{(1-2\nu)\gamma_{xy}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.4)$$

Esta relación (3.4) simplificando términos puede entonces ser escrita de la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.5)$$

$$\sigma_z = -\frac{E\nu(\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \tau_{zy} = 0; \quad \tau_{zx} = 0;$$

Invirtiendo (3.5) se obtiene la expresión de deformación plana como:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

### 3.3 RELACIÓN DEL ANÁLISIS DE SÓLIDOS ELÁSTICOS CON EL FEA.

La solución exacta para el tipo de problemas en dos o tres dimensiones es rara, una de las ventajas del elemento finito es que es muy fácil de extender los conceptos fundamentales de un problema en una dimensión a otro de dimensión superior. La única complicación es que requiere de una integración y diferenciación con cierta dificultad, pero esto son cálculos relacionados con el problema y tienen notación que identifica los conceptos del elemento finito. El concepto básico del elemento finito es ilustrado con referencia a la Ecuación diferencial parcial definida en una región arbitraria, en dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + pu + q = 0 \quad \dots \quad (3.7)$$



Donde  $K_x(x, y)$ ,  $K_y(x, y)$ ,  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$  son funciones definidas sobre el área (A) y la solución desconocida esta dada por  $u(x, y)$ . Esta ecuación es reconocida como una generalización del problema unidimensional con valores en la frontera y algunos de los ejemplos más comunes de aplicación en ingeniería de dicha ecuación son: Flujo de calor en estado estable, variación del flujo de un fluido, torsión en secciones planas, así como esfuerzo y deformación planas, etc.

La ecuación diferencial (3.7) es de segundo orden y por lo tanto, las condiciones que se involucran en el sistema se denominan condiciones de frontera. Estas condiciones de frontera se dividen en dos como se menciona en el anexo 3: *Condiciones de Frontera Esenciales (Ce)* y *Condiciones de Frontera Naturales (Cn)*. El área del dominio de solución es denotada como A y esta condicionada por la curva C. las condiciones son definidas en términos de una coordenada  $c$  que corre a lo largo de la frontera y que tiene un vector normal unitario a la superficie ( $n$ ), tal y como se muestra en la figura 3.5.

El vector normal tiene componentes  $(x, y)$  y son denotadas por  $n_x$  y  $n_y$ :

$$n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad |n| = \sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2} = 1 \quad \dots \quad (3.8)$$

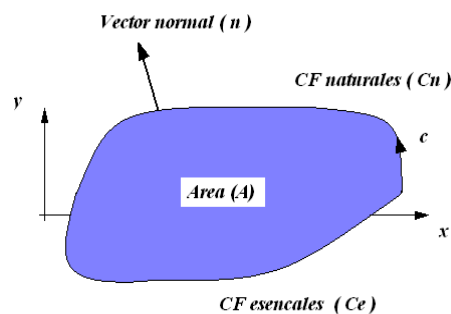


Fig. 3.5. Dominio de solución en 2 Dimensiones.

### 3.3.1. Formulación de las Ecuaciones de Elemento Finito mediante el Método de Galerkin.

La solución del dominio es discretizada en elementos con una forma particular. Por simplicidad de notación se supone que A y C refieren a un elemento como área y contorno respectivamente. Los pasos a seguir en general son:

1. Construir la formulación débil.
2. Aplicar las funciones de ponderación y expresar la integral para obtener la medida del error residual.
3. Identificar las condiciones de frontera esenciales y las naturales
4. Construir una solución válida supuesta.
5. Resolver para los parámetros desconocidos para determinar las funciones de ponderación.
6. Solucionar la aproximación.

Entonces, en la forma de elemento finito las funciones de ponderación son las funciones de interpolación  $N_i$  usadas para definir la solución propuesta para un elemento finito. Los pesos residuales para problemas de valores en la frontera en dos dimensiones aplicados a (3.7) son:





$$\iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + pu + q \right) N_i dA = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \quad (3.9)$$

Utilizando el teorema de Green-Gauss (3.68) en los primeros dos términos en los pesos residuales se tienen:

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) N_i dA = \int_C k_x \frac{\partial u}{\partial x} N_i n_x dC - \iint k_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dA \quad \dots \quad (3.10)$$

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) N_i dA = \int_C k_y \frac{\partial u}{\partial y} N_i n_y dC - \iint k_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dA \quad \dots \quad (3.11)$$

De este modo las funciones de ponderación son:

$$\int_C \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_i dC + \iint_A \left( -k_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - k_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + puN_i + qN_i \right) dA = 0 \quad \dots \quad (3.12)$$

Separando las integrales de frontera, en dos partes una donde se especifican las condiciones de frontera esenciales ( $C_e$ ) y otra donde se especifican las condiciones de frontera naturales ( $C_n$ ) y sustituyendo las condiciones en (3.12), se tiene:

$$\int_{C_e} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_i dC + \int_{C_n} (\alpha u + \beta) N_i dC + \iint_A \left( -k_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - k_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + puN_i + qN_i \right) dA = 0 \quad \dots \quad (3.13)$$

Se requiere entonces suponer una solución que satisfaga las condiciones de frontera esenciales, por lo tanto una solución supuesta es la llamada forma débil dados problemas con valores en la frontera, y será:

$$\int_{C_n} (\alpha u + \beta) N_i dC + \iint_A \left( -k_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - k_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + puN_i + qN_i \right) dA = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \quad (3.14)$$

La solución supuesta para un elemento se escribe como:

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & \dots & N_n(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \equiv N^T d \quad \dots \quad (3.15)$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \equiv B_x^T d \quad \dots \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \equiv B_y^T d$$

Donde  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , son las soluciones desconocidas en los nodos que conforman el elemento. La solución supuesta debe entonces estar en función de las coordenadas de la frontera  $c$  de la siguiente forma:

$$u(c) = (N_1(c) \quad N_2(c) \quad \dots \quad N_n(c)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \equiv N_C^T d \quad \dots \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en la forma débil (3.14) se tiene:

$$\int_{C_n} (\alpha N_i N_C^T d + \beta N_i) dC + \iint_A \left( -k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} B_x^T d - k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} B_y^T d + p N_i N^T d + q N_i \right) dA = 0 \quad \dots \quad (3.18)$$

Escribiendo todas las ecuaciones, con  $N_i, i=1,2,\dots, n$ , en una matriz se tiene:

$$\int_{C_n} \alpha \begin{pmatrix} N_1(c) \\ N_2(c) \\ \vdots \\ N_n(c) \end{pmatrix} N_C^T d + \beta \begin{pmatrix} N_1(c) \\ N_2(c) \\ \vdots \\ N_n(c) \end{pmatrix} dC +$$

$$+ \iint_A \left( -k_x \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix} B_x^T d - k_y \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{pmatrix} B_y^T d + p \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} N^T d + q \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} \right) dA = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.19)$$

6

$$\int_{C_n} (\alpha N_C N_C^T d + \beta N_C) dC + \iint_A (-k_x B_x B_x^T d - k_y B_y B_y^T d + p N N^T d + q N) dA = 0 \quad \dots \quad (3.20)$$



Reacomodando términos de acuerdo a las cantidades que involucran a  $d$ , y pasándolos al lado derecho, se tiene la ecuación de los elementos de la siguiente manera:

$$\left( - \int_{C_n} \alpha N_c N_c^T dC + \iint_A (k_x B_x B_x^T + k_y B_y B_y^T + pNN^T) dA \right) d = \int_{C_n} \beta N_c dC + \iint_A qN dA \quad \dots \quad (3.21)$$

Los primeros dos términos dentro de la integral de área pueden ser colocados en una forma matricial:

$$k_x B_x B_x^T + k_y B_y B_y^T = (B_x \quad B_y) \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x^T \\ B_y^T \end{pmatrix} \equiv BCB^T \quad \dots \quad (3.22)$$

Donde

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.21), se obtienen las ecuaciones de elemento finito como sigue:

$$\left( - \int_{C_n} \alpha N_c N_c^T dC + \iint_A (BCB^T - pNN^T) dA \right) d = \int_{C_n} \beta N_c dC + \iint_A qN dA \quad \dots \quad (3.24)$$

Definiendo matrices de  $n \times n$

$$k_k = \iint_A BCB^T dA \quad k_p = - \iint_A pNN^T dA \quad k_\alpha = - \int_{C_n} \alpha N_c N_c^T dC \quad \dots \quad (3.25)$$

Definiendo vectores de  $n \times 1$

$$r_q = \iint_A qN dA \quad r_\beta = \int_{C_n} \beta N_c dC \quad \dots \quad (3.26)$$

Por lo tanto las ecuaciones de elemento son:

$$\boxed{(k_k + k_p + k_\alpha) d = r_q + r_\beta} \quad \dots \quad (3.27)$$

Las cantidades  $k_\alpha$  y  $k_\beta$ , son el resultado de aplicar condiciones de frontera que afectan solamente a los elementos que tienen condiciones especificadas como condiciones de frontera naturales (NBC).



### 3.3.2. Ecuaciones de Elemento en 2D.

Un típico elemento es el triángulo simple o de tres nodos. El error introducido en la geometría del modelo son aquellos resultantes, de aproximar las fronteras de la curva por líneas, representando lados del elemento triangular. Estos errores pueden ser reducidos por el incremento del número de elementos. Las formulas de forma están disponibles por la evaluación integral cerrada dentro del dominio triangular.

La evaluación de las integrales en la frontera son pequeñas en comparación con los dominios rectangulares. Las ecuaciones se pueden desarrollar para elementos triangular de tres nodos o también de un orden superior, pero por facilidad de programación se utilizarán elementos de tres nodos. Un elemento de este tipo se muestra en la figura 3.6, sus coordenadas nodales están dadas por  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , además de las direcciones de los vectores normales  $n$  y las coordenadas de la frontera  $c$ , son mostradas para cada uno de sus lados.

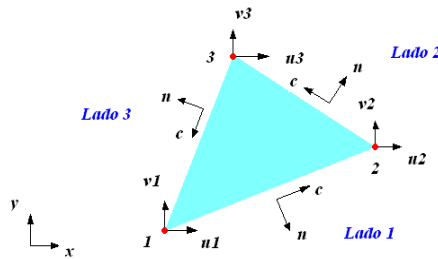


Fig. 3.6. Elemento triangular de tres nodos y sus GDL [5].

El origen de las coordenadas de frontera  $c$  es el primer nodo de cada lado. De este modo para un lado dado  $c$  va de 0 a la longitud del otro lado. Asumiendo las variables de solución en las tres esquinas como los grados de libertad nodales, se tiene un total de seis grados de libertad  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$  y  $v_3$ . Por simplicidad en la integración, se asume que cualquier fuerza aplicada en un cuerpo o superficie es constante en el elemento.

Las funciones de interpolación para un elemento triangular de tres nodos se muestra en la suposición de la solución de elemento finito que se necesita se da en la forma siguiente:

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \equiv N^T d \quad \dots (3.28)$$

Donde  $N_1, N_2$  y  $N_3$ , son las funciones de forma. Si ponemos (3.28) en función de las coordenadas de frontera  $c$  se tiene:

$$u(c) = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = N_c^T d \quad \dots (3.29)$$



Un polinomio lineal completo en dos dimensiones tiene tres términos y así una solución de elemento finito, para un solo elemento. Se puede entonces realizar el procedimiento para una dimensión por facilidad y entonces extrapolarlo para dos o tres dimensiones, el desarrollo presentado se realiza para un triángulo con un solo grado de libertad por nodo. El polinomio se muestra en el siguiente polinomio:

u(x, y) = (c\_0 + c\_1x + c\_2y) = (1 x y) \* (c\_0, c\_1, c\_2)^T ... (3.30)

Los coeficientes c\_0, c\_1 y c\_2, pueden ser expresados en términos de los grados de libertad nodales, evaluando el polinomio para los nodos del elemento triangular como sigue:

(u\_1, u\_2, u\_3)^T = (1 x\_1 y\_1, 1 x\_2 y\_2, 1 x\_3 y\_3) \* (c\_0, c\_1, c\_2)^T ... (3.31)

Invirtiendo la matriz (3.31), dado que es un sistema lineal, se obtiene de esta manera el valor de los coeficientes c:

(c\_0, c\_1, c\_2)^T = 1/(2A) \* (f\_1 f\_2 f\_3, b\_1 b\_2 b\_3, c\_1 c\_2 c\_3) \* (u\_1, u\_2, u\_3)^T ... (3.32)

Donde A es el área de un triángulo, los valores de f, b y c, están dados en función de las coordenadas de los nodos como sigue:

f\_1 = x\_2y\_3 - x\_3y\_2; f\_2 = x\_3y\_1 - x\_1y\_3; f\_3 = x\_1y\_2 - x\_2y\_1;
b\_1 = y\_2 - y\_3; b\_2 = y\_3 - y\_1; b\_3 = y\_1 - y\_2;
c\_1 = x\_3 - x\_2; c\_2 = x\_1 - x\_3; c\_3 = x\_2 - x\_1; ... (3.33)

A = 1/2 \* (-x\_2y\_1 + x\_3y\_1 + x\_1y\_2 - x\_3y\_2 - x\_1y\_3 + x\_2y\_3) = 1/2 \* (f\_1 + f\_2 + f\_3) ... (3.34)

Estas cantidades son geométricas, es decir que su valor numérico dependerá directamente de las características físicas de cada elemento triangular. Sustituyendo los valores correspondientes de A, f, b y c en los coeficientes, en (3.32), y posteriormente sustituyendo en (3.30) se tiene:

u(x, y) = (1 x y) \* 1/(2A) \* (f\_1 f\_2 f\_3, b\_1 b\_2 b\_3, c\_1 c\_2 c\_3) \* (u\_1, u\_2, u\_3)^T ... (3.35)

Teniendo la suposición de solución de elemento finito (3.38), entonces podemos sustituir los valores de las expresiones (A, f, b, c) en (3.35), desarrollando y simplificando se obtienen las funciones de forma para el caso unidimensional, tal y como se muestra:



$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2A}(x_3(y - y_2) + x(y_2 - y_3) + x_2(-y + y_3)) = \frac{1}{2A}(xb_1 + yc_1 + f_1) \\
 N_2 &= \frac{1}{2A}(x_3(-y + y_1) + x_1(y - y_3) + x(-y_1 + y_3)) = \frac{1}{2A}(xb_2 + yc_2 + f_2) \\
 N_3 &= \frac{1}{2A}(x_2(y - y_1) + x(y_1 - y_2) + x_1(-y + y_2)) = \frac{1}{2A}(xb_3 + yc_3 + f_3)
 \end{aligned} \quad \dots \quad (3.36)$$

Cada función de interpolación  $N_i$  es 1 en el  $i$ -ésimo nodo y 0 en cada uno de los otros nodos. Las fronteras son definidas por los tres lados del elemento. Para cada lado la solución es lineal tal y como lo demuestran los valores de las funciones de interpolación.

Para el caso de análisis de esfuerzo plano y deformación plana, por diferenciación del desplazamiento, la matriz de deformación-desplazamiento B puede ser establecida como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \equiv B^T d \quad \dots \quad (3.37)$$

Las ecuaciones de elemento

$$kd = r_q + r_b \quad \dots \quad (3.38)$$

### 3.3.3. Matriz de Rigidez y Vectores de carga para un Elemento Triangular.

Sustituyendo las soluciones supuestas y obteniendo sus integraciones, matrices y vectores necesarios para cada elemento, las ecuaciones pueden entonces ser escritas de manera sencilla. Para el caso en dos dimensiones, por simplicidad de integración, se asume que  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , son constantes dentro de los elementos.

Las variables en ambos casos, la formulación de esfuerzo plano y deformación plana son los desplazamientos  $u$  y  $v$ . En cada formulación el esfuerzo y deformación son determinados directamente de las componentes de estos desplazamientos. La diferencia en las dos formulaciones es que usan una ligera diferencia en la ecuación constitutiva. Por consiguiente ambas formulaciones pueden ser manipuladas esencialmente en la formulación de



elemento finito. Para un problema de esfuerzo plano en el modelo es espesor es denotado como  $h$ , suponiendo que es una rebanada unitaria, para un problema de deformación plana  $h=1$ .

Para un problema plano, suponiendo un espesor constante en un elemento, la integral de volumen se reduce a una integral de área  $A$  y la integral de superficie se reduce a una integral de línea sobre los lados del elemento  $C$ . las cargas aplicadas y fuerzas de cuerpo tienen componentes solamente en el plano  $XY$ . Ninguno de los términos en la matriz  $B$  es una función de  $x$  o  $y$ , la integración obtenida de la matriz de los elementos es trivial. La matriz de rigidez esta dada entonces por:

$$k = h \iint_A BCB^T dA = hABCB^T \quad \dots \quad (3.39)$$

Donde  $C$  es una matriz constitutiva apropiada:

Esfuerzo Plano  $C = \frac{E}{1 + \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.40)$

Deformación Plana  $C = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.41)$

Vector de cargas equivalentes para fuerzas de cuerpo es:

$$r_b = h \iint_A N \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} h \iint_A N_1 b_x dA \\ h \iint_A N_1 b_y dA \\ h \iint_A N_2 b_x dA \\ h \iint_A N_2 b_y dA \\ h \iint_A N_3 b_x dA \\ h \iint_A N_3 b_y dA \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.42)$$

Integrando para un triangulo, asumiendo las fuerzas de cuerpo constantes en el elemento, el resultado de la integración será:

$$r_b = \frac{hA}{3} (b_x \quad b_y \quad b_x \quad b_y \quad b_x \quad b_y)^T \quad \dots \quad (3.43)$$

El vector de carga para cargas distribuidas, aplicadas a lo largo de uno o más lados del elemento, esta dado por:



$$r_q = h \int_C N_C \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} dC \quad \dots \quad (3.44)$$

Generalmente, las fuerzas de superficie aplicadas son conocidas en términos de componentes que están en dirección normal y tangencial a la superficie. Denotando las componentes normal y tangencial de la carga aplicada en  $q_n$  y  $q_t$ , con referencia a la figura 3.7, estas fuerzas pueden ser relacionadas a las componentes en las direcciones coordenadas como:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3.45)$$

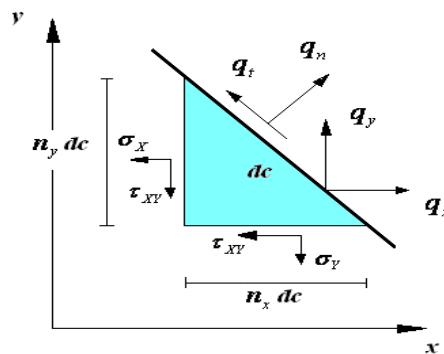


Fig. 3.7. Equilibrio de un elemento diferencial en la frontera [5].

Donde  $n_x$  y  $n_y$  son las componentes del vector normal unitario  $n$  en la frontera donde se aplican las fuerzas. La frontera del elemento se define por los tres lados. Para cada lado la solución es lineal en términos de las coordenadas  $C$  y los grados de libertad en los nodos que forman el elemento.

Para el **lado 1**.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-c - L_{12}}{L_{12}} & 0 & \frac{c}{L_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c - L_{12}}{L_{12}} & 0 & \frac{c}{L_{12}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \equiv N_C^T d \quad 0 \leq C \leq L_{12} \quad \dots \quad (3.46)$$

Donde  $L_{12}$  es la longitud del lado uno y es definida como:

$$L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \dots \quad (3.47)$$

Las componentes del vector normal unitario en el lado puede ser calculado como:

$$\boxed{n_x = \frac{(y_2 - y_1)}{L_{12}} \quad n_y = -\frac{(x_2 - x_1)}{L_{12}}} \quad \dots \quad (3.48)$$





Para obtener el vector de carga aplicado en el lado 1-2 del elemento, se resuelve la integral de (3.44) y se tiene:

$$r_q = h \int_C N_C \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} dC = \frac{hL_{12}}{2} (q_x \quad q_y \quad q_x \quad q_y \quad 0 \quad 0)^T \quad \dots \quad (3.49)$$

En términos de las componentes normal y tangencial:

$$r_q = \frac{hL_{12}}{2} (n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t \quad n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t \quad 0 \quad 0)^T \quad \dots \quad (3.50)$$

Procediendo de manera similar, el vector de cargas equivalente para presiones normales y tangenciales en el lado 2 y el lado 3 pueden ser escritas como sigue:

Para el lado 2.

$$r_q = \frac{hL_{23}}{2} (0 \quad 0 \quad n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t \quad n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t)^T \quad \dots \quad (3.51)$$

$$L_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad \dots \quad (3.52)$$

$$n_x = \frac{(y_3 - y_2)}{L_{23}} \quad n_y = -\frac{(x_3 - x_2)}{L_{23}} \quad \dots \quad (3.53)$$

Para el lado 3.

$$r_q = \frac{hL_{31}}{2} (n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t \quad 0 \quad 0 \quad n_x q_n - n_y q_t \quad n_y q_n + n_x q_t)^T \quad \dots \quad (3.54)$$

$$L_{31} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \quad \dots \quad (3.55)$$

$$n_x = \frac{(y_1 - y_3)}{L_{31}} \quad n_y = -\frac{(x_1 - x_3)}{L_{31}} \quad \dots \quad (3.56)$$

### 3.3.4. Solución del sistema.

Con la obtención de las matrices de rigidez, así como de los vectores de carga para cada elemento, se puede proceder a realizar un ensamble de estos, dentro de una matriz llamada Matriz de Ensamble Global, así como también de los vectores de carga, dentro de un vector denominado Vector de Cargas Global. Posteriormente se añaden las condiciones de frontera, con el fin de reducir las dimensiones de cada una de los elementos involucrados en el sistema global, como son: la matriz de ensamble global, el vector de cargas global y el vector de



desplazamientos global, como se muestra en (3.37). Dicho sistema puede resolverse de manera lineal (ver anexo 3), como:

$$d = K^{-1}R \quad \dots \quad (3.57)$$

El cálculo de (3.38) proporciona la solución nodal del sistema. Obtenido el vector de soluciones nodales  $d$ , se puede realizar el cálculo de cantidades que se requieren saber, en un análisis por elementos finitos como lo son: las deformaciones y el esfuerzo de Von Misses.

La deformación por elemento se obtiene valuando (3.37) utilizando los valores geométricos (3.33 y 3.34). El valor del esfuerzo por elemento se obtiene utilizando el valor de deformación calculado en (3.37) mediante un producto punto, como se muestra:

$$\sigma = C \varepsilon \quad \dots \quad (3.58)$$

Se puede ver claramente en (3.58) que el valor de la matriz  $C$ , depende directamente de si el análisis que se está realizando es de esfuerzo plano o deformación plana (3.40 o 3.41).

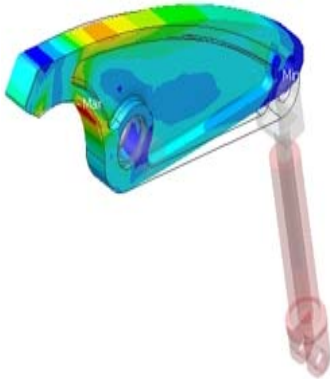
El valor del esfuerzo de Von Misses para cada elemento por lo tanto también depende del tipo de análisis, esfuerzo plano o deformación plana, y entonces se calcula como:

$$\sigma_{vm_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (-\sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2)} \quad \dots \quad (3.59)$$

Con la obtención de valores de esfuerzo de von Misses mediante (3.59), es la base de la metodología de optimización propuesta en este trabajo, con los valores de de esfuerzo de von Misses para cada elemento, se puede entonces graficar los valores de dichos esfuerzos y obtener una distribución en la estructura analizada. En el capítulo siguiente se muestra la implementación del algoritmo que da solución al problema de optimización de forma, tomando como base el esfuerzo de von Misses.



## CAPÍTULO 4



# *Implementación del Método de Optimización de forma.*

*La sabiduría del hombre es como las aguas,  
Que algunas bajan del cielo y otras brotan de la tierra.*

Francis Bacon

### 4.1 INTRODUCCIÓN.

En los últimos años la mayor parte de los desarrollos de solución, se han concentrado en el empleo de los métodos como son: Diferencias Finitas (FDM), Volúmenes Finitos (FVM), Elementos Frontera (BEM), y Elementos Finitos (FEM). Una de las ventajas principales de utilizar el método de elementos finitos, es su capacidad para manejar geometrías complejas y permitir refinamiento local de la malla en regiones del modelo que lo necesiten; en particular, en los lugares en donde existan radios de curvatura pequeños [5].

Ejemplos de este tipo de problemas son: carrocerías de automóviles, trenes, aviones, y en general cualquier medio de transporte, pero además en el caso de estructuras sometidas a fuerzas de viento, edificios, torres de enfriamiento, tanques etc., así como también estructuras sometidas a altas temperaturas como ollas de acero líquido, hornos, etc.; y en general elementos mecánicos. Todos estos problemas de ingeniería se resuelven realizando una simulación por computadora, la cual consiste en una aproximación a una prueba como por ejemplo: un túnel de viento o agua con un perfil a escala, elementos sometidos a cargas dinámicas o estáticas, etc., todo ello con sus respectivas condiciones de frontera, con las cuales poder definir el problema.

Para lograr una buena aproximación a la solución durante una simulación que involucre mecánica de fractura, el punto fundamental es obtener una discretización de las geometrías, tal que las representen eficaz y fielmente. Para modelar las geometrías de los perfiles, es muy común el uso de técnicas paramétricas, las cuales logran una excelente aproximación a la geometría real, mediante la modificación de puntos controlados libremente por el diseñador.

Uno de los métodos más utilizados en la generación automática de mallas es la técnica denominada triangulación de Delaunay. La triangulación Delaunay define un método de conectar un conjunto arbitrario de puntos de tal manera que forman un conjunto topológicamente válido de triángulos que no se intersecan, como se observa en la figura 4.1.

En general el refinamiento de la malla en zonas específicas ayuda a esta tarea. Lo más común en estos casos es el uso de elementos finitos triangulares, aunque también pueden ser cuadrangulares, hexagonales, etc. Sin embargo, el uso de elementos de mayor complejidad implica elevar la complejidad del modelado y mallado de la geometría.

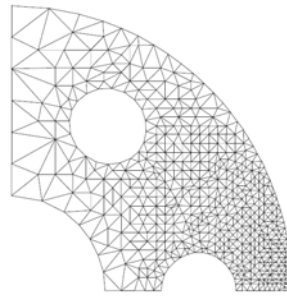


Fig. 4.1. Mallado de una estructura con cavidades internas [37].

Al obtener una malla con muy buena definición permite entonces, realizar el desarrollo de un algoritmo capaz de resolver un sistema de ecuaciones mediante FEA, para posteriormente introducir un criterio, para comenzar a modificar la estructura, es decir a “optimizarla”; en donde el criterio podrá ser un parámetro modificable de la estructura como por ejemplo: la altura, el peso, el volumen, el esfuerzo, etc.

### 4.2 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN.

El algoritmo de optimización conlleva una serie de etapas a seguir (ver capítulo 2 sección 2.3), en las cuales destacan tres puntos:

1. Modelado Geométrico.
2. Análisis por Elementos Finitos.
3. Criterio de Optimización.

Como se muestra en la figura 4.2, cada uno de los puntos antes mencionados será detallado para entender el mejor el funcionamiento de la metodología de diseño. El modelado geométrico es realizado mediante curvas B-Spline, ya que permite obtener información de puntos vecinos. En este trabajo se plantea el desarrollo de un mallador para estructuras en dos dimensiones, que será utilizado para durante al análisis por elementos finitos, como un requisito para tener una mejor aproximación a la solución del sistema. Obteniendo los esfuerzos provenientes de FEA, se procede entonces a realizar la optimización tomando como base dichos valores, así como la información de los puntos vecinos.

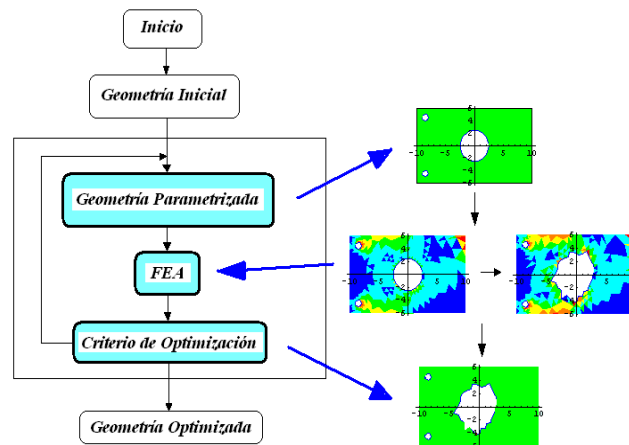


Fig. 4.2. Algoritmo de solución para la optimización de forma.



### 4.3 MODELADO GEOMÉTRICO MEDIANTE CURVAS PARAMÉTRICAS B-SPLINE.

Como se observo en el capítulo 2 sección 2.4, las curvas paramétricas ofrecen grandes ventajas. Para la implementación del modelado geométrico, mediante curvas paramétricas, en este trabajo se ha tomado la decisión de utilizar las curvas B-Spline, debido a:

1. Sus propiedades.
2. La adaptación de la curva ante posibles movimientos de uno de sus puntos de control.
3. La facilidad de programación.

Todo ello con el fin de lograr obtener modificaciones de las fronteras de nuestro modelo, sin cambios bruscos de geometría sufridos durante la optimización de forma. Partiendo de las propiedades de las curvas B-Spline, se necesita tener un número de puntos denominados puntos de control, como se observa en la figura 4.3, la figura que forman dichos puntos se le denomina polígono de control; a través de los cuales la curva B-Spline va a tratar de ajustarse a los puntos de control de una manera suave sin generar cambios bruscos en la curva.

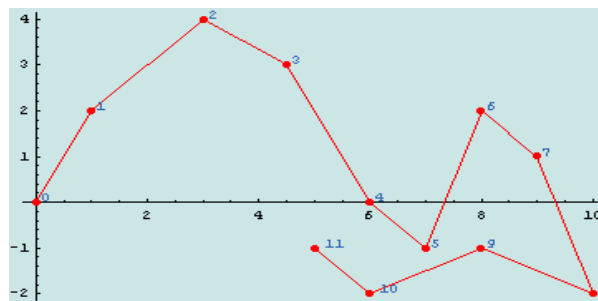


Fig. 4.3. Polígono de control.

En la figura 4.4 se muestra la diferencia entre las curvas de Bezier y las B-Spline, tomando como base los puntos de control de la figura anterior, se puede observar que la curva B-Spline tiende a aproximarse mejor a dichos puntos debido a su definición y a que es una curva dividida por segmentos paramétricos, los cuales permiten una mejor adaptación al polígono de control.

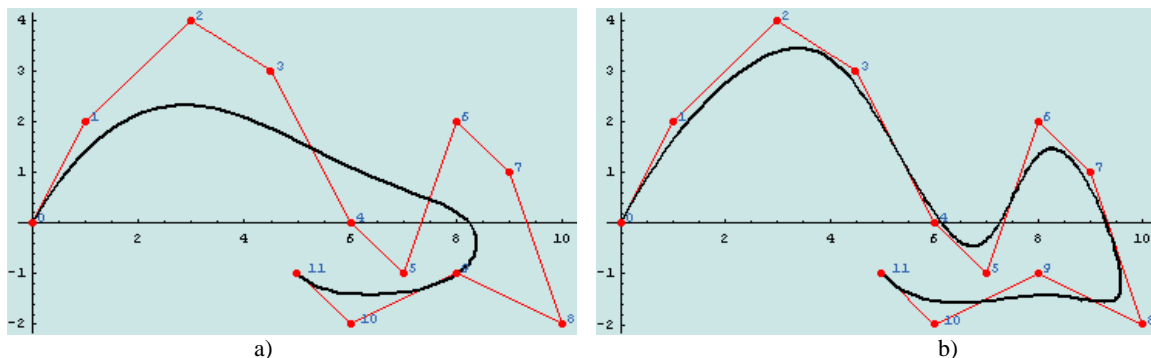


Fig. 4.4. a) Curva de Beziér y b) Curva B-Spline.

En general para construir una curva B-Spline se necesita conocer:

1. El número de Knots, es decir de intervalos o segmentos en que se dividirá la curva.
2. Las funciones base en cada uno de dichos intervalos.



Para conocer los knots que se involucraran en la construcción de una curva B-Spline se necesita conocer el parámetro  $t$ , para con ello conocer la longitud que tendrá cada intervalo. Para esto existen tres métodos: espaciado uniforme, longitud de cuerda y centrípeto. Cada uno de estos métodos tiene características muy similares, en la figura 4.5 se muestra la diferencia entre cada uno de ellos aplicados a un grupo de puntos de control:

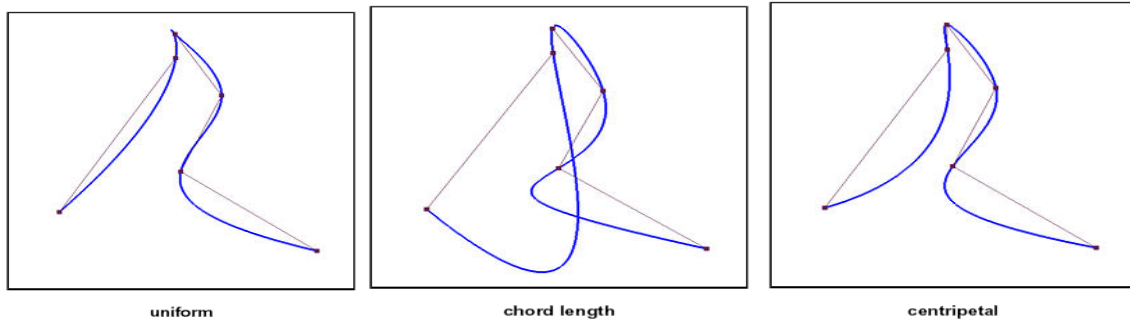


Fig. 4.5. Diferencias entre los métodos de parametrización [39].

Para este trabajo se tomó la decisión de utilizar el Método Centrípeto, debido a que, como lo muestra la figura anterior, este método provoca un mejor ajuste y suavidad a una curva determinada sin una concavidad excesiva ni una rigidez como lo muestran el método de longitud de cuerda y el método de espaciado uniforme respectivamente.

**Método Centrípeto.**

Suponiendo un numero de puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , se debe seleccionar un valor positivo de una potencia “ $a$ ”, usualmente su valor es de  $\frac{1}{2}$ . La longitud entre los puntos del polígono de control son medidos como:

$$L = \sum_{i=1}^n |P_i - P_{i-1}|^a \dots \quad (4.1)$$

La relación de distancia entre un punto  $P_0$  y  $P_1$  del polígono de control es:

$$L_k = \frac{\sum_{i=1}^n |P_i - P_{i-1}|^a}{L} \dots \quad (4.2)$$

Por consiguiente,  $L_0=0, L_1, \dots, L_n=1$ , la división se encuentra en el intervalo  $[0,1]$  acorde a la longitud de los puntos del polígono bajo las nuevas distancias medidas. Por lo tanto los parámetros  $t$  son:

$$t_0 = 0 \quad t_k = L_k \quad t_n = 1 \quad \dots \quad (4.3)$$

**Vector de Knots.**

Obteniendo los parámetros  $t$ , se puede generar un vector de knots. Suponiendo que se tienen  $n + 1$  parámetros  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Para una curva B-Spline de grado  $p$  se necesitan  $m+1$  knots, donde  $m = n + p + 1$ . Si la curva es restringida, los primeros  $p + 1$  y los últimos  $p + 1$  son 0 y 1 respectivamente. Para los knots  $n-p$  restantes, se puede tener un espaciado acorde a las condiciones.



$$\begin{aligned}
 u_0 &= u_1 = \dots = u_p = 0 \\
 u_{j+p} &= \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} t_i \quad j=1, 2, \dots, n-p \\
 u_{m-p} &= u_{m-p+1} = \dots = u_m = 1 \quad \dots \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Donde  $u$  son los knots,  $n$  es el número de puntos de control,  $m$  es el número de knots para construir la B-Spline y  $p$  es el grado de las funciones de base. El vector de knots entonces está dado por:

$$U = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad u_{j+p} \quad \dots \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad \dots \quad (4.5)$$

Si  $u$  aparece  $k$  veces, se dice que  $u_i$  es un knot múltiple o que tiene multiplicidad  $k$ . Esto tiene que ver directamente con el valor de  $p$  en las funciones de base. Si  $p = 5$ , la multiplicidad será 5, es decir que en el vector de knots  $U$  los primeros cinco términos serán 0 y los últimos 5 serán 1. Los knots pueden ser considerados como puntos de división que subdividen el intervalo  $[u_0, u_m]$  o  $[0, 1]$ , a donde cada subdivisión se les denomina segmentos de knots.

La multiplicidad de un knot tiene dos implicaciones importantes en las funciones de base:

1. Cada knot de multiplicidad  $k$  reduce en  $k-1$  las funciones de base diferentes de cero.
2. En cada knot interno de multiplicidad  $k$ , el número de funciones de base diferentes de cero son  $p - k + 1$ , donde  $p$  es el grado de las funciones de base.

#### 4.3.1. Funciones de Base.

Para definir correctamente una curva B-Spline se necesita conocer un parámetro más, el grado de las funciones base ( $p$ ). Al aumentar el grado  $p$  de las funciones, aumenta la suavidad de la curva B-Spline y con ello la complejidad de solución de la curva, así como un mayor tiempo de ejecución de la misma. La definición de las funciones de base de grado  $p$  se define en una forma recursiva, como se observó en el capítulo 2 sección 4.4.2, (2.4). La construcción de las funciones de base de forma recursiva se muestra en la figura 4.6:

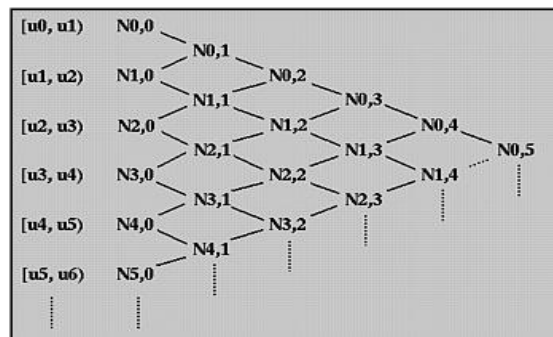


Fig. 4.6. Generación recursiva de las funciones de base de una curva B-Spline de grado  $p$  [39].

En la figura 4.7 se observa como afecta el aumento del grado de la B-Spline en un conjunto de puntos de control dados, siempre con la condición de que el grado  $p$  será menor que el número de puntos de control,  $p = n - 1$ .

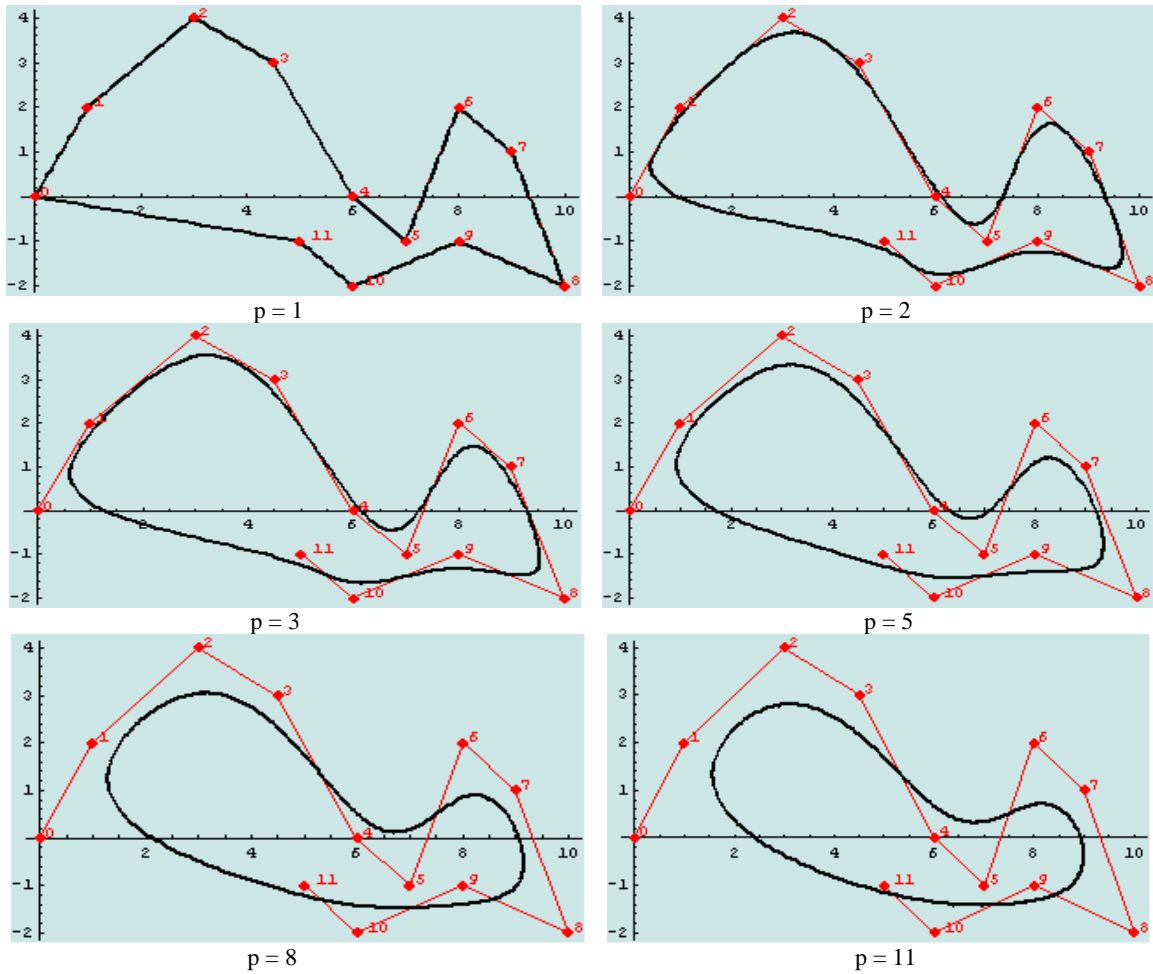


Fig. 4.7. Impacto del grado  $p$  en las funciones de base de una curva B-Spline.

La definición de una B-Spline (ver capítulo 2 sección 2.4.2.b.), esta dada por el producto punto de las funciones de base de grado  $p$  ( $N_{i,p}$ ) y los puntos de control ( $P_i$ ), valuados en  $u$ , es el knot. Existen entonces dos tipos de curva B-Spline, tal y como se observa en la figura 4.8: Abierta y Cerrada.

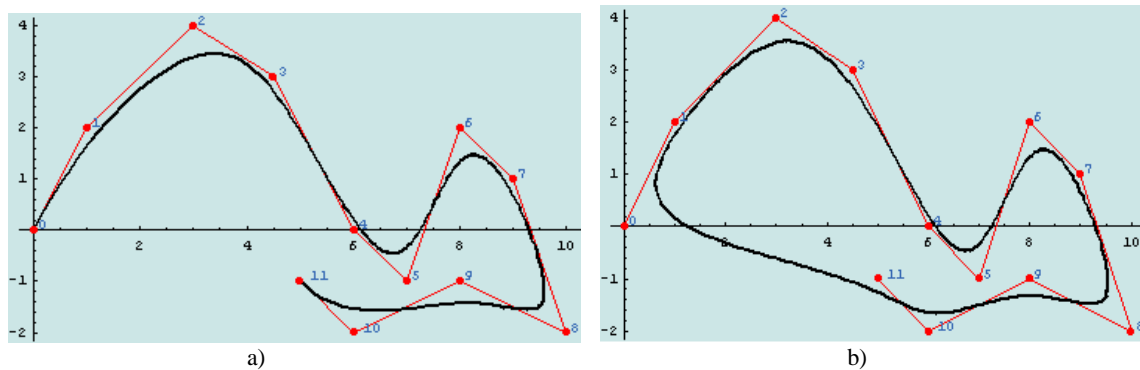


Fig. 4.8. a) Curva B-Spline Abierta y b) Curva B-Spline cerrada.





Para este trabajo se también se tomó la decisión de realizar el modelado, mediante curvas B-Spline cerradas de grado  $p = 3$ , ya que todos los perfiles que se utilizan son curvas cerradas, y además no se necesita de realizar la unión de varias curvas para lograr el perfil deseado, lo cual llevaría un mayor tiempo tanto de ejecución del programa como el aumento en los cálculos para realizarlo.

**4.3.2. Curvas B-Spline Cerradas.**

Suponiendo una curva B-Spline  $C(u)$  de grado  $p$ , definida por  $n + 1$  puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . El número de knots como  $m + 1$ , donde  $m = n + p + 1$ , la curva cerrada se construye de la siguiente manera: Se diseña una secuencia de knots uniformes.

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{m}, u_2 = \frac{2}{m}, \dots, u_m = 1 \quad \dots \quad (4.6)$$

Hacer coincidir el primer  $P_0$  y el último  $P_n$  punto de control. Es decir hacer coincidir el  $P_0 = P_{n-p+1}$ ,  $P_1 = P_{n-p+2}$ ,  $P_2 = P_{n-p+3}$ , y de igual manera los knots ( $u$ ) como se observa en la figura 4.9.

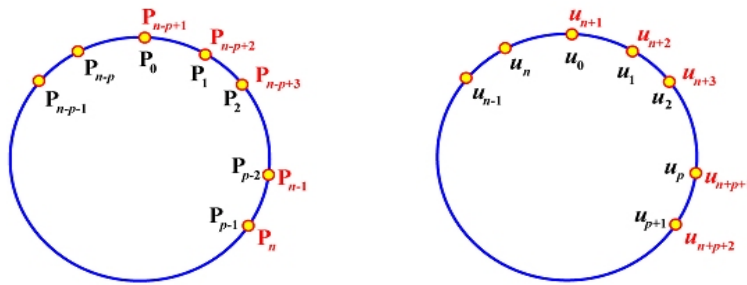


Fig. 4.8. Puntos y knots coincidentes en una curva B-Spline Cerrada [39].

El factor del cual depende el número sobre el que se harán las coincidencias de puntos de control, será el grado  $p$  de las funciones de base, dado que  $p = 3$ , el primer punto de control es igual al antepenúltimo punto, el segundo será igual al penúltimo y el tercer punto de control será igual al ultimo punto de control, como se muestra en la figura 4.9.

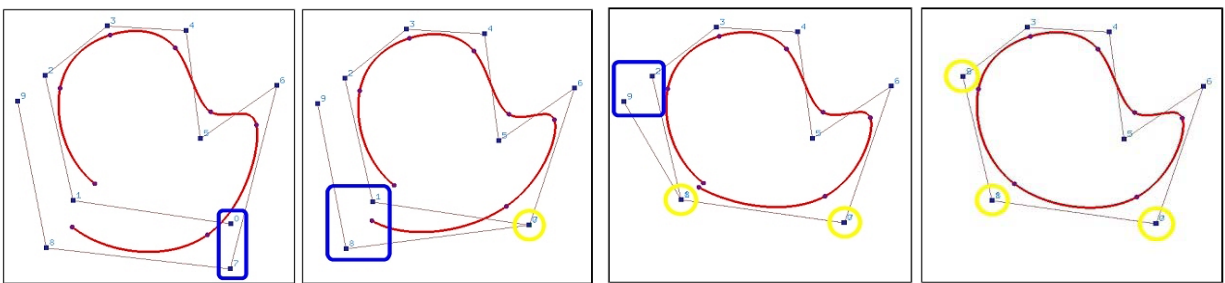


Fig. 4.9. Puntos coincidentes para lograr una curva B-Spline Cerrada de grado  $p$  [39].

De esta manera los knots se traslapan igual que los puntos de control, en secuencia semejante. Con esto al programar las ecuaciones antes mencionadas para encontrar el parámetro  $t$ , y posteriormente lograr encontrar los knots, partiendo de un grupo de puntos de control, se llega a poder modelar, para nuestro caso, perfiles cerrados. En la



figura 4.10 se muestran algunos de los perfiles obtenidos después de la programación de los parámetros necesarios para las curvas B-Spline cerradas, así como sus tiempos de ejecución.

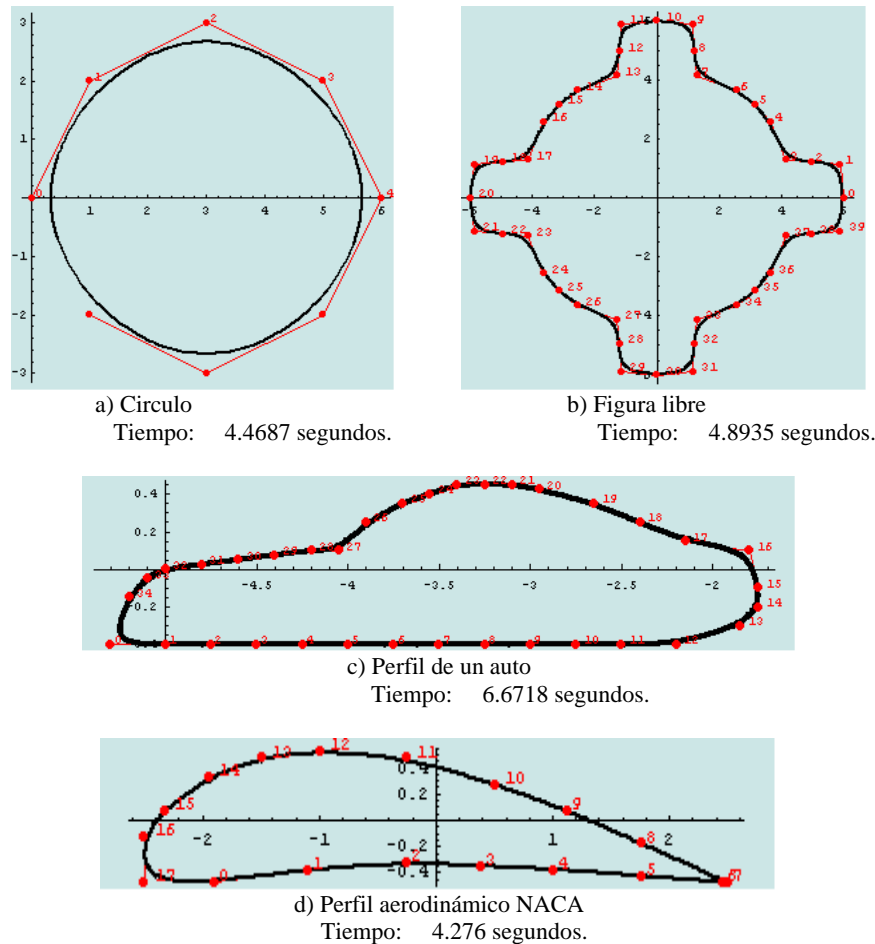


Fig. 4.10. Cuatro ejemplos de aplicación, del modelado geométrico mediante curvas B-Spline de grado 3.

## 4.4 APLICACIÓN DE FEA COMO HERRAMIENTA DE SOLUCIÓN.

### 4.4.1. Propuesta de Mallador en 2D.

A continuación se presenta una propuesta de un mallador de estructuras en 2 dimensiones, el cual se adapta a la forma o geometría de la estructura modelada, que fue desarrollado específicamente para este trabajo, sus propiedades de adaptación nos proporcionarían una buena herramienta durante el análisis por elementos finitos.

#### 4.4.1. a. Definición de Malla (Mallado).

Se le denomina Mallado a la discretización (división) del volumen de cálculo (dominio) en pequeños volúmenes geométricos (subdominios). Mallar es un procedimiento complejo, en el que se deben valorar numerosos aspectos como son: sensibilidad de malla, calidad, geometría, etc. La validez de una malla depende de numerosos parámetros como: calidad, relación de tamaños, ángulos, disposición de elementos, refinamientos locales, etc.



Las mallas se generan mediante programas, denominados malladores, que transforman la geometría inicial en una “retícula” de nodos en el plano o el espacio, en los que se resuelven las ecuaciones de la Mecánica de Sólidos, Fluidos, Transferencia de calor, etc. La característica principal de la generación de una malla o mallado de una estructura o del medio alrededor de esta, es que condiciona los resultados obtenidos, por lo que se requiere de una malla aceptable (a criterio del diseñador) como paso previo y primordial a cualquier tipo de simulación [36].

El mallado esta formado por elementos, los cuales discretizan el dominio de trabajo y que pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc. La técnica más comúnmente utilizada para la generación de mallas es la denominada Triangulación de Delaunay, técnica que produce elementos triangulares, los cuales por definición son más sencillos de manipular que los elementos con mayor numero de vértices, es por ello que los sistemas comerciales tales como: Ansys, Abacus, Algor, Cosmos, etc., manejan este tipo de técnica, además de proporcionar una mejor aproximación al dominio real por el acomodo que se le puede dar a los elementos, lo que a su vez permite realizar un remallado en zonas críticas. Existen dos tipos de generación de malla, mallado uniforme y no uniforme.

1. **Mallado Estructurado** (uniforme). Es aquel mallado que al ser generado lleva una secuencia de acomodo de los elementos, de manera consecutiva.
2. **Mallado No Estructurado** (no uniforme). Es aquel mallado que al ser generado no lleva una secuencia de uniforme acomodo de los elementos es decir no lleva una dirección constante, sino que se forma de manera aleatoria.

Estos tipos de mallado en general al hacer el mallado más fino (refinado de malla o remallado), es decir un mallado más pequeño, haciendo que los elementos sean más pequeños, permiten una mejor aproximación al objeto geométrico o perfil a analizar, todo esto lo podemos observar más claramente en la figura 4.11.

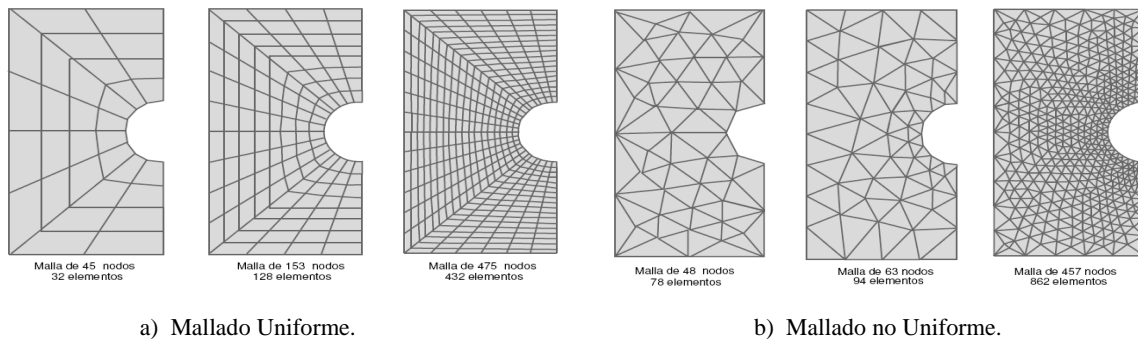


Fig. 4.11. Tipos de Mallado y fases de refinado de malla: a) Estructurado y b) No Estructurado [37].

#### 4. 4. 1. b. Triangulación de Delaunay.

Dado un conjunto de puntos  $\{P_i\}$ , se define el *polígono de Voronoi*  $V_j$  como:

$$V_j = \left\{ p: \left\| p - P_j \right\| \leq \left\| p - P_i \right\|, \forall i \neq j \right\} \quad \dots \quad (4.7)$$

En otras palabras,  $V_j$  es la región del espacio cuyos puntos están más cerca de  $P_j$ , que de cualquier otro punto del conjunto. El conjunto de todos los polígonos de Voronoi es también conocido como *diagrama de Dirichlet*. De la definición resulta claro que un lado del polígono de Voronoi debe estar a igual distancia de dos puntos del conjunto  $\{P_i\}$ , siendo un segmento de la recta bisectriz de dichos puntos. Si se unen todos los pares de puntos cuyas bisectrices tienen algún segmento que es frontera de un polígono de Voronoi, el resultado es una triangulación del



convexo que contiene a todos los puntos. Esta triangulación, figura dual del diagrama de Dirichlet, es conocida como la *triangulación Delaunay* del conjunto de puntos  $\{P_i\}$  [39]. En la figura 4.12 se muestra un conjunto de puntos en el plano, junto con su diagrama de Dirichlet y triangulación de Delaunay asociados.

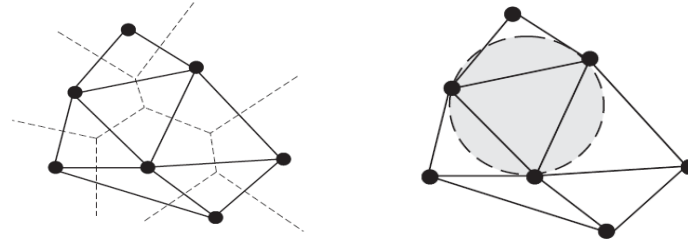


Fig. 4.12. Conjunto de puntos en el plano, Diagrama de Dirichlet y Triangulación de Delaunay [23].

Frecuentemente se define la triangulación Delaunay de un conjunto de puntos como aquella en la cual ningún punto cae en el círculo circunscrito a cualquier triángulo (Entiéndase por círculo circunscrito a aquél delimitado por la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo) [2]. Ambas definiciones son equivalentes. En efecto, en el caso genérico, a cada vértice  $C$  del diagrama de Dirichlet concurren tres lados, por lo tanto, tres polígonos de Voronoi. Los vértices del diagrama de Dirichlet son, por lo tanto, los centros de los círculos circunscritos a cada triángulo Delaunay asociado. Ningún otro punto  $D$  puede caer dentro del círculo circunscrito, ya que en ese caso, el punto  $C$  pertenecería al polígono de Voronoi correspondiente a  $D$ , y no sería vértice del diagrama de Dirichlet (ver Figura 4.13).

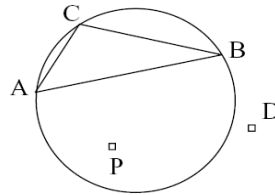


Fig. 4.13. Triangulación de Delaunay en un círculo circunscrito [23].

Una propiedad importante de la triangulación Delaunay en dos dimensiones es que, dados 4 puntos tales que formen un cuadrilátero convexo, la triangulación Delaunay divide al cuadrilátero en dos triángulos tales que el mínimo ángulo es máximo. En otras palabras, la división del cuadrilátero por la otra diagonal daría una triangulación con un ángulo mínimo menor. Esta condición implica que la triangulación Delaunay es óptima en el sentido de producir la triangulación con mayor ángulo mínimo (ver figura 4.14).

La condición de maximizar el ángulo mínimo es entonces equivalente a la de minimizar el radio de la circunferencia circunscrita, que, en este caso es equivalente a la condición Delaunay. Si la mínima distancia entre dos puntos  $AB$  del cuadrilátero corresponde a una diagonal, tanto la condición de maximizar el ángulo mínimo como la condición Delaunay definen la triangulación  $ABC, ADB$ .

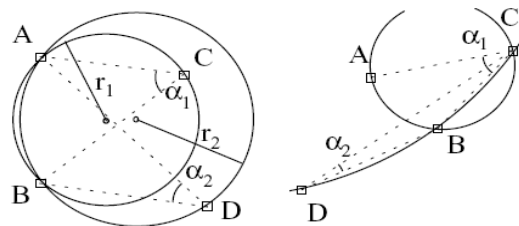


Fig. 4.14. Ángulo mínimo de las 2 posibles triangulaciones de 4 puntos [23].



Para la aplicación de la técnica de triangulación de Delaunay a la construcción de mallas de elementos finitos se necesitan dos procedimientos. En primer lugar, debe contarse con un método independiente para la generación de puntos sobre el dominio, que constituyen el único dato necesario para generar la Triangulación de Delaunay. Por otra parte, el conjunto de aristas que constituyen la discretización de la frontera del dominio, que pueden no estar incluidas en la triangulación de Delaunay, siendo necesaria una modificación de la malla en la zona de la frontera, como se observa en la figura 4.15.

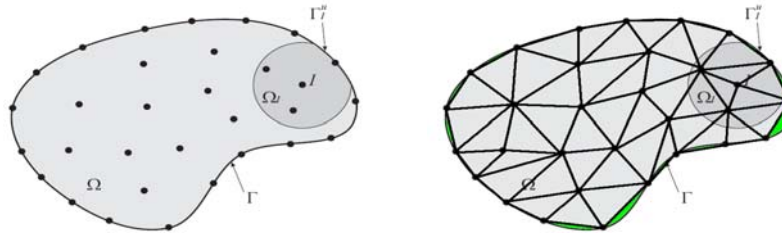
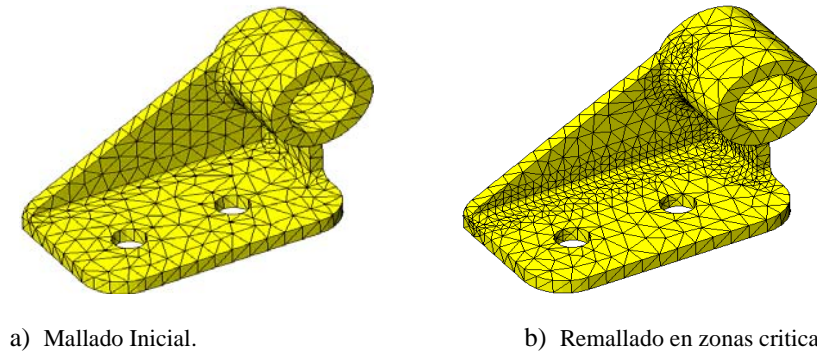


Fig. 4.15. Nube de puntos de un dominio bidimensional y la malla generada a partir de dicha nube [23].

A este tipo de modificaciones se le conoce como remallado, en donde después de aplicar la Triangulación, existen zonas en las cuales es necesario, un mallado más fino sin la necesidad de modificar toda la malla, esto se realiza en zonas en donde la triangulación no es tan efectiva o no tiene una buena definición o aproximación a la geometría real, pero también se utiliza en zonas en donde el diseñador crea que existe riesgo o posibilidad de fractura, como se puede observar en la figura 4.16.



a) Mallado Inicial.

b) Remallado en zonas criticas

Fig. 4.16. Tipos de Mallado y fases de refinado de malla [23].

#### 4. 4. 1. c. Generación de una nube de puntos sobre un dominio en 2D.

Partiendo del modelado paramétrico de un objeto geométrico mediante curvas B-Spline, tal como se vio en la sección 4.3 de este capítulo, se muestra la generación de un mallado adaptativo para un dominio bidimensional, mediante la implementación de un algoritmo computacional, que para este caso, se utilizó el paquete comercial MATHEMATICA 5.2 versión estudiantil, para su realización, de manera que su costo computacional no supere el costo de la etapa de triangulación automática.

El algoritmo propuesto toma como punto de partida la figura generada por el modelado paramétrico que representa la geometría del perfil, después se procede a la generación de puntos en el interior del dominio, a los que se aplica la técnica de triangulación de Delaunay, y por ultimo se procede a la discretización ahora de la frontera, que para nuestro problema son las dimensiones de una estructura con cavidades internas. Para discretizar el dominio se necesita crear una nube de puntos mediante un algoritmo de generación de puntos que debe cumplir un par de condiciones básicas:



1. Describir en forma adecuada la geometría y
2. Permitir una variación suave de la densidad de puntos en distintas zonas del dominio computacional.

Partiendo de la segmentación de la geometría (perfil), la cual para nuestro caso de aplicación es modelada mediante curvas B-Splines. Esta parametrización permite modelar curvas (por medio de segmentos) de una manera más suave, solo elevando el grado de los segmentos que integran la curva, aproximándose así a una geometría real, sin generar esquinas o picos durante el modelado (ver capítulo 2 sección 2.5).

El modelado paramétrico nos permite construir una curva a partir de segmento de curvas de un cierto grado (en este trabajo el grado para dichas curvas es 3). Estos segmentos tienen un punto inicial (A) y un punto final (B). A partir de conocimiento de estos puntos, se puede generar una línea imaginaria que los conecta como se observa (de manera exagerada) en la figura 4.17, donde los puntos en rojo son los puntos de inicio y final de cada segmento de curva paramétrica, esta aproximación mediante líneas rectas son las bases para generar la nube de puntos.

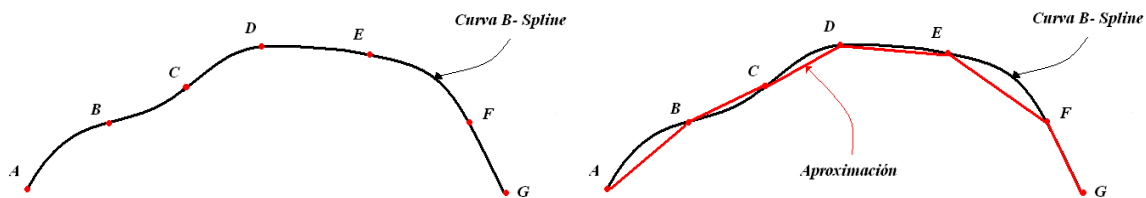


Fig. 4.17. Aproximación a una curva B-Spline mediante líneas rectas.

El número de puntos que definen a cada uno de los segmentos de recta creados, son tantos como se aproximen a la geometría real, es decir no hay un número mínimo o máximo de puntos de control definidos para determinar un objeto geométrico, lo que implica que entre mayor sea el número de puntos de control que se utilicen en la definición o modelado paramétrico del perfil, se tendrá una cantidad mas grande de segmentos de curva de tercer grado y existirá una mejor aproximación al perfil real.

El segmento de recta generado puede ser subdividido en un número de pequeños subsegmentos, tantos como se requiera y lo permita la geometría del perfil, con lo cual se logra obtener un refinado de malla, de manera implícita, aceptable cercano a las zonas de interés, es decir en donde existan cambios bruscos en la geometría. Esto permite realizar al mismo tiempo una generación de malla del perfil y su refinamiento. Con esto se logra distinguir entre 5 tipos de mallado para este trabajo, donde con el primero será del tipo grueso (cero subdivisiones por segmento de recta generado) y el quinto será el fino (con 5 subdivisiones por segmento de recta dado), como se observa en la figura 4.18 (puntos en azul).

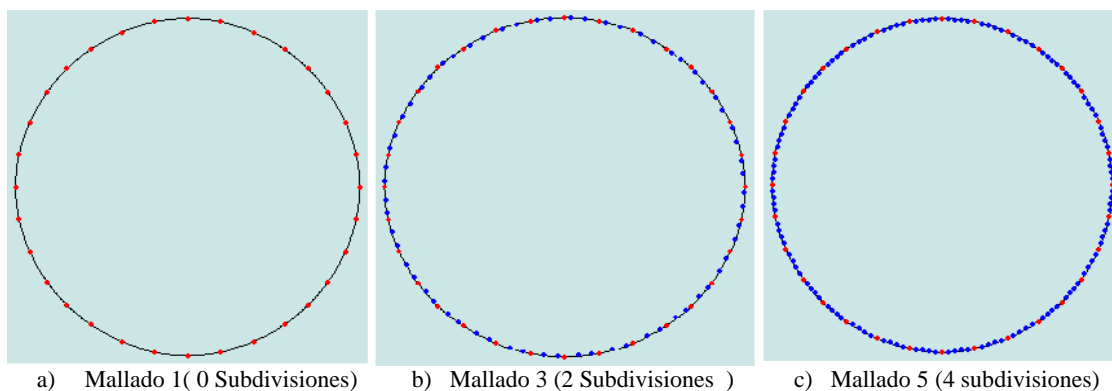


Fig. 4.18. Subdivisiones por tipo de mallado.



Esto nos permite cumplir con las condiciones básicas para la generación de puntos y aplicar la triangulación de Delaunay. Para generar la nube de puntos alrededor del perfil, se localizan las coordenadas del punto medio de cada uno de los segmentos de recta generados, que unen a cada uno de los puntos inicial y final de los segmentos de curva que forman el perfil, y que son definidos como:

$$PM_{AB} = \frac{A_{(x,y)} + B_{(x,y)}}{2} \quad \dots (4.8)$$

Donde  $PM_{AB}$  es el Punto medio del segmento de recta AB. Posteriormente este punto medio obtenido se multiplica por un factor  $r$ , donde  $r > 1$  debido a que es factor de ampliación, para que el punto sea escalado una cierta distancia (aproximadamente la distancia del segmento de recta) para con ello generar triángulos equiláteros además de producir un mallado lo más homogéneo posible:

$$NuevoPM = PM_{AB} * r \quad \dots (4.9)$$

Donde NuevoPM es el Nuevo punto medio y  $r$  es el Factor de escala. Al obtener el nuevo punto medio NuevoPM ya escalado, se realiza el mismo procedimiento. Ahora el segmento de recta AB, serán las coordenadas de inicio y de final de cada segmento que se genera tomando como punto inicial uno de los nuevos puntos medios y como punto final el siguiente nuevo punto medio. Esto se realiza de manera iterativa a través de una rutina de programación. Con esto se obtiene una nube de puntos, que refleja una expansión puntual, lo cual se observará como un “refinamiento” de malla en zonas cercanas al perfil modelado, lo cual nos dará una mejor aproximación en la solución final, esta expansión es un parámetro que se puede modificar dando un numero finito de iteraciones, donde para este trabajo su valor es de 500. Esta descripción se puede observar en la figura 4.19, donde se muestra esta expansión o “refinamiento”.

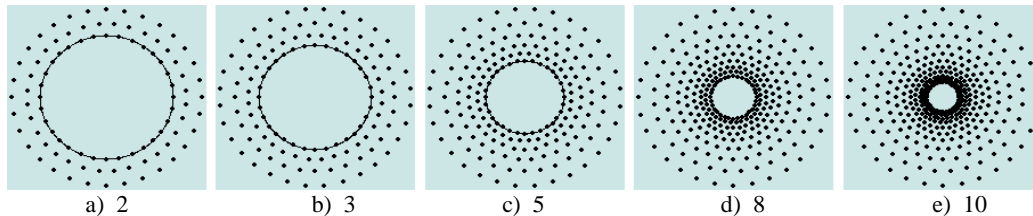


Fig. 4.19. Iteraciones para la generación de la nube de puntos.

Con lo anterior se demuestra la adaptatividad del algoritmo para generar puntos alrededor de perfiles específicos, además de permitir observar una cavidad con la misma geometría de nuestro perfil, dentro del dominio computacional, el cual es cuadrangular. Conociendo las dimensiones de la estructura, podemos utilizarlas para delimitar nuestro dominio computacional, logrando con esto dar frontera a la expansión generada por la nube de puntos. En la figura 4.20 se muestra la nube de puntos, la cual esta delimitada por el dominio cuadrangular.

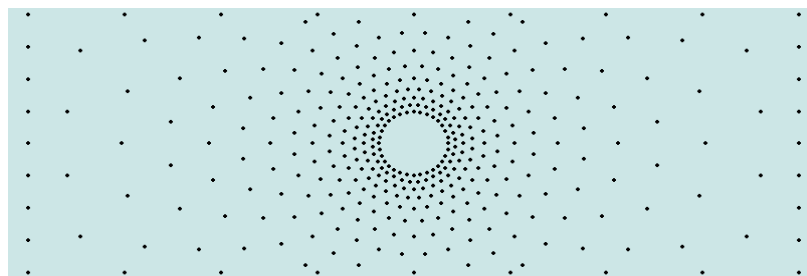


Fig. 4.20. Nube de puntos generada por el algoritmo descrito, restringido por un dominio cuadrangular.



**4. 4. 1. d. Generación de un mallado adaptativo mediante Triangulación de Delaunay.**

Cuando se aplica la triangulación de Delaunay a la nube de puntos (triangulación generada a través de una función contenida en el paquete MATHEMATICA 5.2), esta presenta triángulos al interior de la estructura, y si estamos modelando estructuras con cavidades, estos no nos sirven. Por ello para eliminarlos se realiza una rutina computacional, la cual provoca el suprimir dichos triángulos no deseados y con por tanto obtener una cavidad dentro de nuestro dominio computacional, con la forma del perfil que se requiera analizar.

La base para esta eliminación es aplicar la triangulación de Delaunay a toda la nube de puntos, con lo que se pueden ver los triángulos que se deben eliminar. Posteriormente se calculan las coordenadas de cada uno de los centroides pertenecientes a cada triángulo. Dado que los elementos generados son triángulos se puede aprovechar una de sus propiedades: el baricentro de cualquier triángulo es igual al centroide del mismo, tal y como se muestra en la figura 4.21.

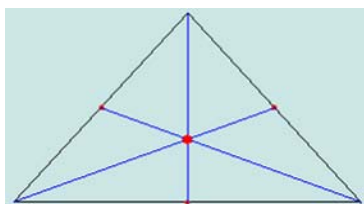


Fig. 4.21. Cálculo del centroide o baricentro de uno de los triángulos (elementos).

De esta manera conocen los centroides de todos los elementos triangulares generados. Conociendo los nodos que pertenecen a los segmentos que modelan el perfil de la cavidad, se puede conocer los elementos que tienen como vértices a estos nodos, con esto reducimos el sistema a solo los elementos que se quieren eliminar y tan solo los externos generados alrededor del modelo del perfil. Teniendo este sistema de elementos reducido y el conocimiento de sus respectivos centroides, se realiza una comparación entre las coordenadas de los centroides que están al interior de los segmentos de curva que modelan el perfil y los externos a este, con el fin de poder eliminarlos, entonces la comparación se realiza mediante la siguiente condición:

$$(X_{CEN}, Y_{CEN})_{INT} < (X_{CEN}, Y_{CEN})_{EXT} = \textit{Elemento} \quad \dots \quad (4.10)$$

Es decir si las coordenadas del centroide se encuentran situadas al interior del límite, en este caso el límite son los puntos que forman la curva que modelan el perfil, se obtiene el número del elemento que contiene dicho centroide, y posteriormente se elimina este elemento del arreglo general, quedando únicamente los triángulos externos a la curva del perfil como se muestra en la figura 4.22.

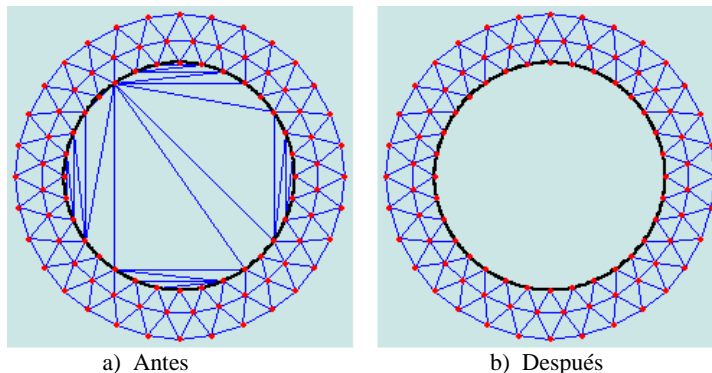


Fig. 4.22. Eliminación de triángulos internos generados durante la Triangulación de Delaunay.





En la figura 4.23, se muestran 2 casos de aplicación de la triangulación y el algoritmo descrito para borrar los triángulos internos al perfil, en el primer caso para el perfil descrito en la figura 4.19, y el segundo para un perfil cuadrangular.

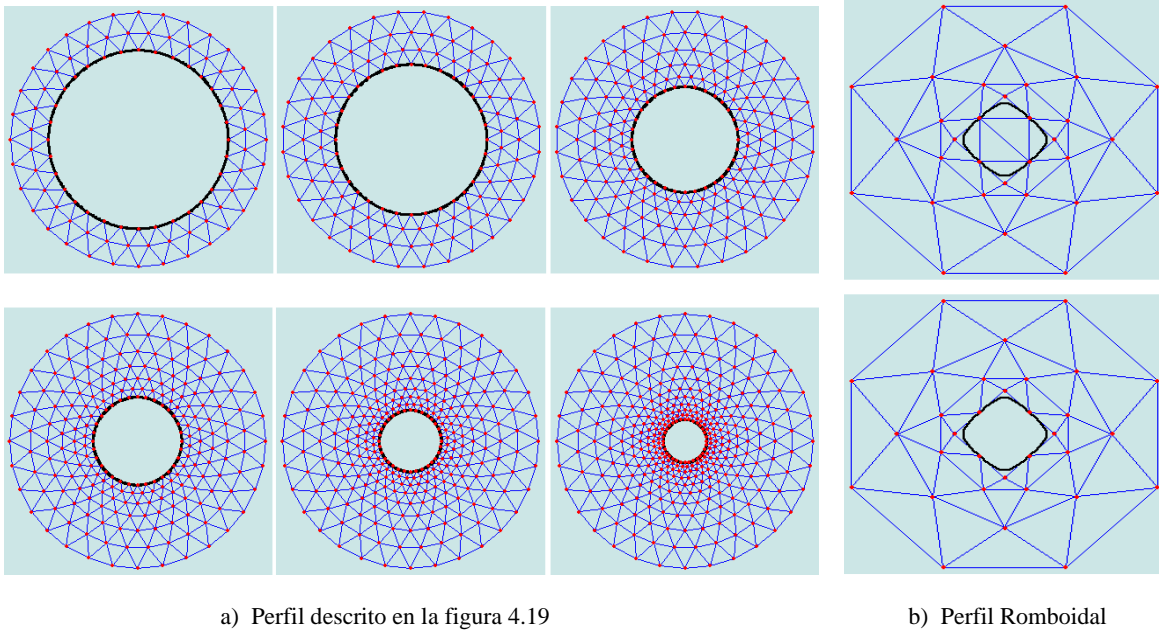


Fig. 4.23. Casos de aplicación del algoritmo de eliminación de triángulos internos generados durante la Triangulación de Delaunay.

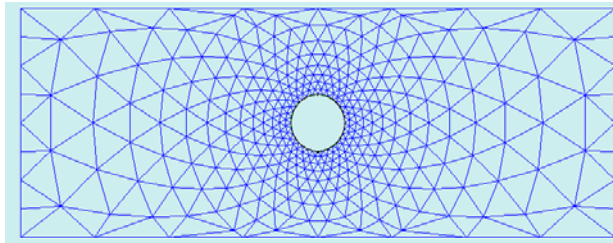
Gracias a la generación de la nube de puntos o nodos en forma de explosivo, mediante un factor de escala que podemos modificar, se observa que los triángulos obtenidos por la aplicación de la técnica de la triangulación de Delaunay, estos son elementos que no tienen un sesgo importante, ya que se intenta que sean equiláteros, lo que permite:

1. Tener una adaptación del mallado o malla al perfil que se requiere.
2. Tener un sesgo en los triángulos muy pequeño, con lo cual se tendrá una reducción en la estimación del error de aproximación durante la solución de FEA, sin problemas de convergencia.

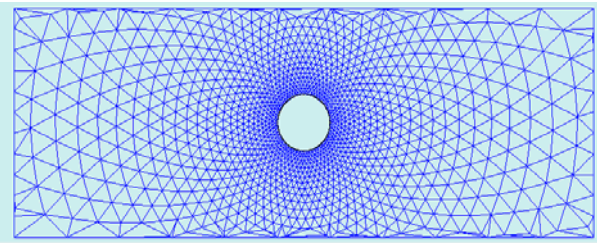
#### 4. 4. 1. e. Casos de Aplicación del mallador.

Como se puede apreciar, en todos los casos el algoritmo fue capaz de adaptar la malla de forma que cada una de las geometrías es modelada con elevada precisión, aun cuando la geometría tuviera ciertas zonas con ciertos cambios bruscos en la misma. Además podemos observar que el tipo de mallado obtenido por el algoritmo es un mallado denominado estructurado u homogéneo ya que trata de crear triángulos con un sesgo muy pequeño y con ello aproximarse a los triángulos equiláteros.

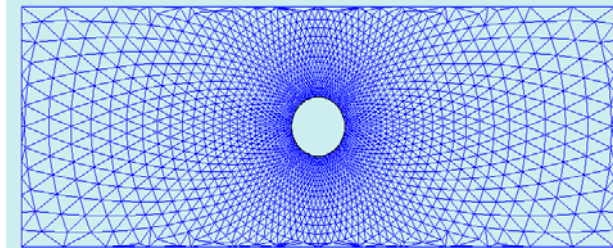
En la figura 4.24 se muestran las mallas correspondientes a cada uno de los 5 tipos que puede generar el algoritmo, en este caso la geometría utilizada es un círculo. Para cada una de las mallas se presentan los datos más significativos como son número de nodos, elementos y tiempo de ejecución.



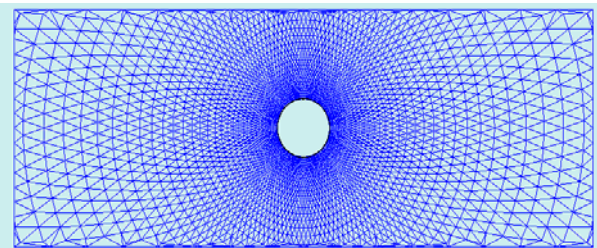
a) Mallado 1: 386 nodos, 722 elementos.  
Tiempo: 4.016 segundos.



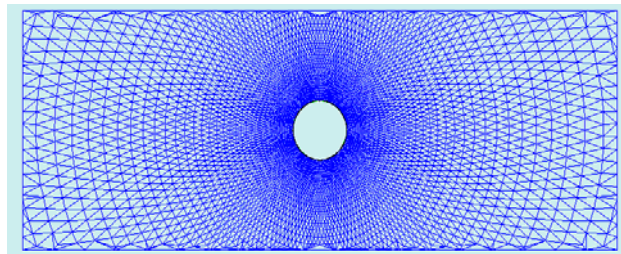
b) Mallado 2: 1355 nodos, 2642 elementos.  
Tiempo: 20.328 segundos.



c) Mallado 3: 2210 nodos, 4334 elementos.  
Tiempo: 39.734 segundos.



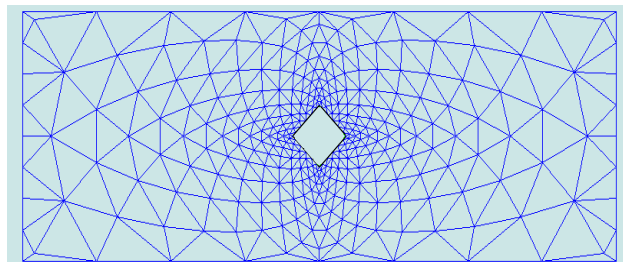
d) Mallado 4: 3264 nodos, 6429 elementos.  
Tiempo: 67.125 segundos.



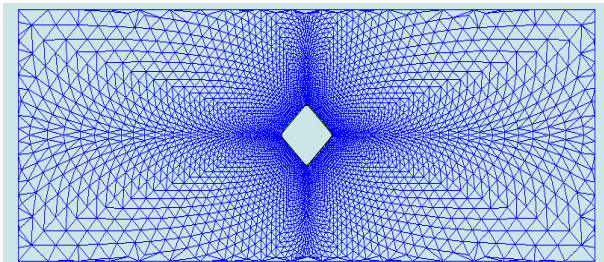
e) Mallado 5: 4589 nodos, 9061 elementos.  
Tiempo: 108.241 segundos

Fig. 4.24. Mallas generadas para un círculo.

En la figura 4.25, se muestran otros casos de aplicación; las mallas correspondientes a tres geometrías: un rombo, un hexágono y un auto. Para cada uno de ellos se presentan dos mallas, una de ellas gruesa y la otra fina, además de algunos de sus datos más importantes.



Mallado 1: 330 nodos, 610 elementos.  
Tiempo: 3.36 segundos.



Mallado 5: 3835 nodos, 7554 elementos.  
Tiempo: 93.937 segundos.

a) Un Rombo

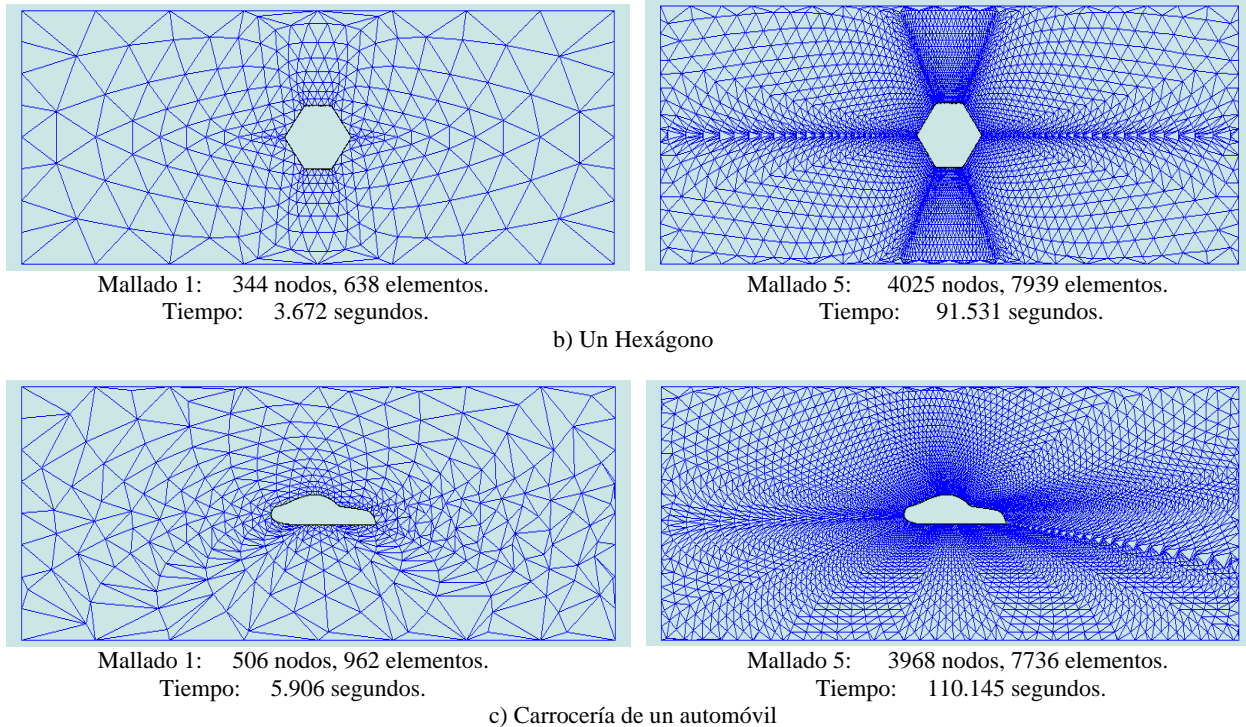


Fig. 4.25. Tres ejemplos de aplicación, mallado: grueso (1) y fino (5).

En el caso de las mallas gruesas el tiempo de procesamiento necesario fue apenas de 5.906 segundos para el perfil del automóvil, mientras que en mallas finas el tiempo se incrementó a 110.145 segundos. Aunque el tiempo se eleva bastante, en sentido práctico no es excesivo ni limitante durante el análisis por elementos finitos.

#### 4. 4. 2. Implementación de FEA.

Para lograr obtener una solución mediante el análisis por elementos finitos, de un problema con un sistema de cargas y restricciones aplicadas, se implementó una rutina de programación. Dicha rutina o algoritmo de programación fue realizado utilizando las ecuaciones que fueron desarrolladas en el capítulo 3, para esfuerzo plano y deformación plana, así como para elementos finitos bidimensionales triangulares con dos grados de libertad por nodo.

La solución se da de manera nodal para cada una de las variables, que en este trabajo son dos  $u$  y  $v$ , por nodo, debido a que es un análisis bidimensional. El postproceso es indicativo para después de llegar a la solución nodal, obtener cantidades tales como son: el esfuerzo y la deformación por elemento, para posteriormente encontrar los valores pero ahora en los nodos, además de con ello tener un gráfico de distribución de dichas cantidades. Siguiendo la metodología del FEA (ver capítulo 2 sección 2.5), se define la rutina de programación aquí presentada mediante un ejemplo sencillo de aplicación y mostrando los resultados obtenidos.

El problema se muestra en la figura 4.26, es una estructura hueca sometida a una fuerza distribuida ( $F = -110$  N) y restringida en dos de sus lados. Utilizando tanto el modelado geométrico como la propuesta de mallador adaptativo, desarrollados en las secciones 4.2.3 y 4.2.4 respectivamente de este capítulo, y generados para este trabajo, se obtiene lo mostrado en la figura 4.27:

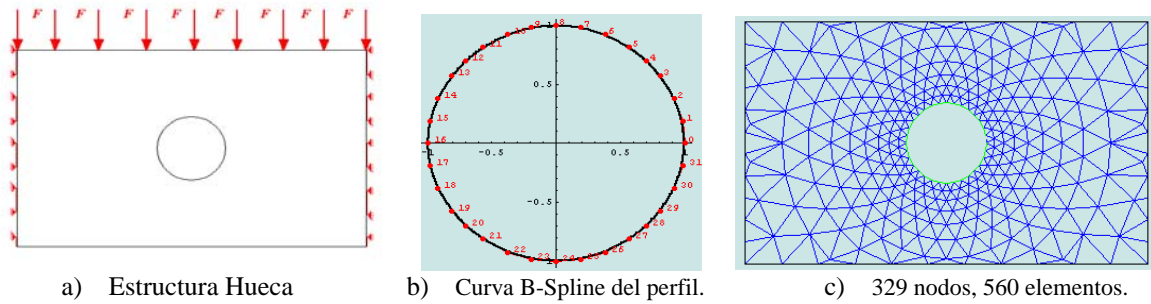


Fig. 4.26. a) Estructura a analizar, b) Modelado del Perfil circular, c) Mallado de la estructura.

Las ecuaciones obtenidas en el desarrollo del capítulo 3, para un elemento triangular, junto a las funciones de interpolación dadas por  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  (ver capítulo 3 sección 3.3.2), se pide calcular entonces la matriz B, necesaria para obtener la matriz de Rigidez para cada elemento, además de introducir la matriz C dependiendo del tipo de análisis, como se muestra:

$$k = hABC B^T \quad \dots \quad (3.39)$$

$$C = \frac{E}{1 + \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.40)$$

Esfuerzo Plano

$$C = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.41)$$

Deformación Plana

Para realizar el ensamble de las ecuaciones de cada uno de los elementos generados, se necesita saber tanto el número de nodos así como el número de elementos generados durante el mallado (ver sección 4.4.1 de este capítulo). Para este ejemplo particular el número de nodos es de 329 y el de elementos es de 560. Con estos valores se generan las conectividades entre elementos mediante la relación:

$$Conectividad = (2 * (i - 1), 2 * i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \quad (4.11)$$

La conectividad va a permitir localizar a cada nodo y elemento en una posición dentro de la matriz de ensamble global, así como en el vector de ensamble llamado vector de cargas global, estos inicializados en cero. Esta matriz de ensamble global es una matriz cuadrada de dimensiones  $n \times n$ , donde:

$$n = 2 * \text{Número total de Nodos} \quad \dots \quad (4.12)$$

Debido a que cada nodo tiene 2 GDL. Entonces entre más nodos existan, mayor será la dimensión de dicha matriz de ensamble, esto provoca un gran consumo de recursos de memoria RAM, es por ello que se utiliza una función del programa MATHEMATICA 5.2, que permite utilizar de una matriz de  $n \times n$ , únicamente los valores diferentes de cero, lo cual permite el manejo de matrices con mayor facilidad y menor consumo de memoria. De esta manera se procede al ensamble.

Al introducir las condiciones de frontera, que en este ejemplo de aplicación, en dos de sus lados esta totalmente fijo, esto se traduce como que los nodos existentes en alguna de sus paredes o lados, el valor de  $u$  y  $v$  en cada uno de dichos nodos será de cero. Obteniendo entonces los nodos con dichas restricciones o condiciones de frontera, se procede a reducir entonces la matriz de ensamble global y el vector de cargas global (ver anexo 3).



## Implementación del Método de Optimización de Forma

En este ejemplo la matriz de ensamble global será después de la reducción de  $656 \times 656$  y el vector de carga global será de  $656 \times 1$ . Después del ensamble y de introducir las condiciones de frontera, se procede a obtener la solución nodal de las variables. Partiendo del sistema general (ver capítulo 3 sección 3.3.2):

$$k_{n \times n} d_{n \times 1} = (r_q + r_b)_{n \times 1} \quad \dots \quad (3.38)$$

Para solucionar el sistema, se utiliza el método de solución lineal; del sistema anterior se despeja, vector de desplazamientos “d”. La reducción del sistema implica que al invertir la matriz de ensamble global tenga solución. De esta manera se obtiene el valor de los desplazamientos nodales o solución nodal, a este vector que se forma se le tienen que añadir los valores generados por las condiciones de frontera, que en este caso particular son cero, y que fueron retirados al reducir el sistema, en las posiciones que les corresponda.

$$d = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n]^T \quad n = \text{num. Total de nodos} \quad \dots \quad (4.13)$$

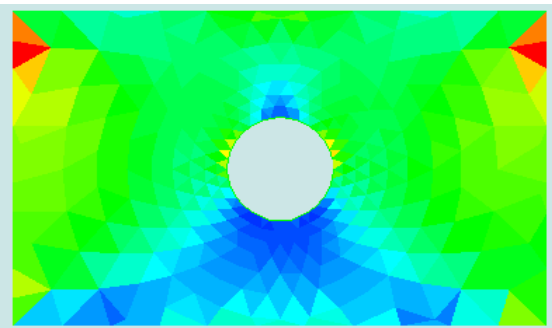
Con el vector de soluciones nodales “d”, se procede a realizar entonces el cálculo de cantidades necesarias para la aplicación del método de optimización como lo son: deformaciones, esfuerzo de Von Misses, etc.

El cálculo del esfuerzo por elemento se obtiene aplicando el producto punto a la matriz C (su valor depende si es esfuerzo plano o deformación plana) y a las deformaciones obtenidas (3.58). El valor del esfuerzo de von Misses para cada elemento se calcula como (ver capítulo 3 sección 3.3.4):

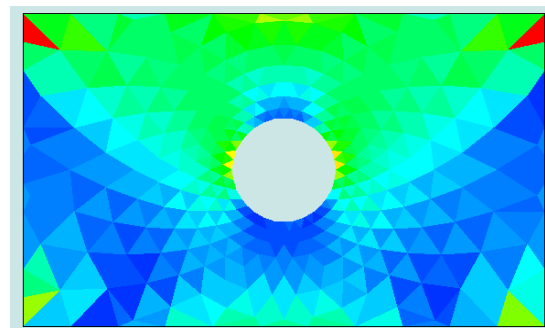
$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (-\sigma_1)^2 + 6(\tau_{xy})^2} \quad \dots \quad (3.59)$$

Obteniendo los valores de de esfuerzo de von Misses para cada elemento, se implemento una rutina de programación pequeña, para graficar los valores de dichos esfuerzos. Se obtiene el valor máximo y el mínimo de esfuerzo. Conociendo estos dos valores, se calcula una escala de colores que estará dividida en 4 segmentos: Azul  $\rightarrow$  Cyan, Cyan  $\rightarrow$  Verde, Verde  $\rightarrow$  Amarillo y Amarillo  $\rightarrow$  Rojo, en esta escala el rojo corresponde al valor máximo de esfuerzo y el color azul al mínimo valor. Cada uno de de dichos intervalos a su vez estará dividido por 10 subintervalos, los cuales serán asignados dependiendo del valor de esfuerzo de cada elemento.

Esto provocara una degradación de colores que proporcionará una mejor apreciación de la distribución de esfuerzo en la estructura analizada. En la figura 4.29, se muestra el resultado para el ejemplo dado de la figura 4.26, aquí se observa tanto el valor de esfuerzo máximo, así como el tiempo total de ejecución de todo el algoritmo de solución, realizado para un análisis de esfuerzo plano y otro para un análisis de deformación plana.



a) Esfuerzo Máximo: 286.985 [MPa].  
Tiempo: 25.9531 segundos.



b) Esfuerzo Máximo: 116.864 [MPa].  
Tiempo: 30.0435 segundos.

Fig. 4.29. Gráficos de distribución de esfuerzo: a) Esfuerzo Plano y b) Deformación plana.



En la figura 4.30 se muestran diferencias entre los tipos de mallado aplicados en la solución de un ejemplo, utilizado en el capítulo siguiente y se observarán los resultados de optimización para dicho ejemplo, resultados producidos gracias al mallador adaptativo generado para este trabajo, con los cuales se observa, que entre mas fina sea la malla la definición de la distribución de esfuerzo será lo más próxima a la real.

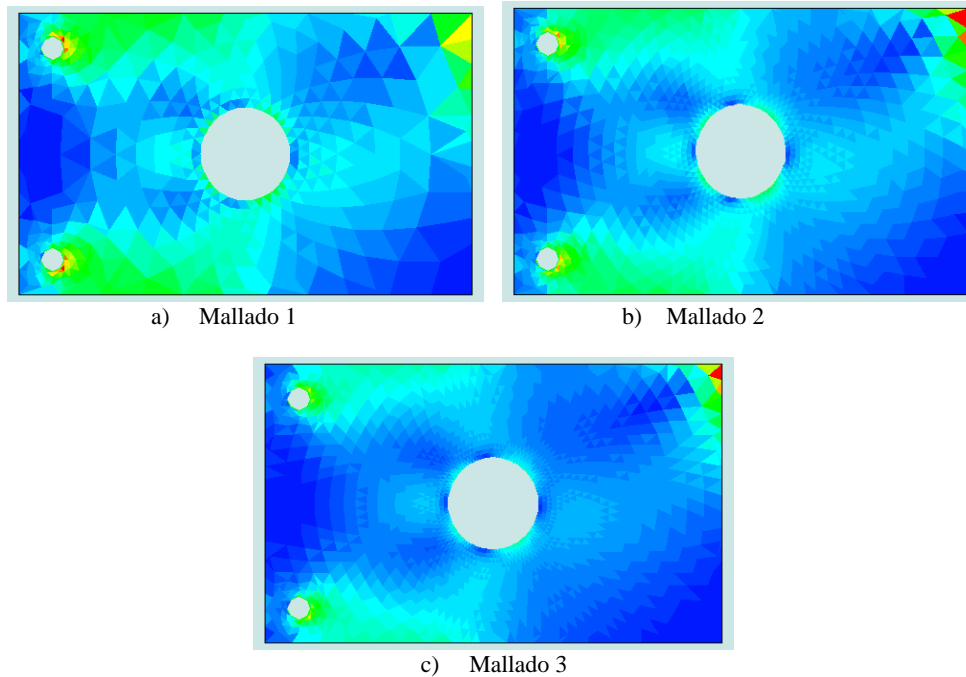


Fig. 4.30. Gráficos de distribución de esfuerzo según el mallado generado en el algoritmo.

#### 4.5 OPTIMIZACIÓN DE FORMA.

En el método de optimización descrito (ver capítulo 2 sección 2.6), es regla general que en cada iteración sea modificada la posición de varios puntos de la frontera. El cambio de posición esta relacionado directamente con el nivel de esfuerzos de dichos puntos a través de:

$$\sigma_i \leq TR * \sigma_R \quad \dots (2.6)$$

$$\sigma_i \geq TA * \sigma_R \quad \dots (2.7)$$

Dichos cambios deben llevarse a cabo desplazando los puntos de control de la curva B-Spline, cuyo cálculo no es trivial. Para el ejercicio mostrado, las tasas tanto de adición TA, de rechazo TR, así como el factor de modificación fm fueron calibrados de manera que el movimiento de las vectores fuera adecuado y coincidiera con la distribución de esfuerzo, y son: TR = 0.45, TA = 0.99 y fm = 0.01.

Para lograr el desplazamiento, se calculan los vectores de los puntos de control que forman el perfil (en este ejemplo es un círculo), de forma que se asegure que la magnitud de los desplazamientos no genere distorsiones indeseables y además de que la dirección de los mismos considere la información de la vecindad de cada punto. Partiendo de que se conoce la distribución de esfuerzo en la estructura, como se muestra en la figura 4.29, para un análisis de esfuerzo plano; también se conoce, por lo tanto, el esfuerzo de Von Misses en cada uno de los elementos.



Se puede entonces, obtener el valor de esfuerzo en cada uno de los nodos. Este valor de esfuerzo nodal es la base para generar el desplazamiento de los puntos de control, ya que cada nodo que cumpla con alguna de las condiciones establecidas (2.6) o (2.7), de manera automática se convierte en un nodo candidato a ser desplazado. Aquellos valores que no cumplan con dichas condiciones se mantienen igual, es decir que no cambiarán de posición.

El esfuerzo nodal se obtiene como un valor promedio de esfuerzo de los elementos con los cuales está en contacto, es decir, si el nodo 1 es vértice de los elementos (I, II, III, IV y V), entonces al nodo 1 le afecta el valor de esfuerzo de cada elemento a su alrededor, además del área de cada uno de estos elementos, como se muestra en la figura 4.31.

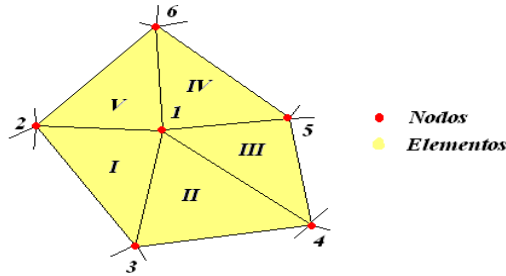


Fig. 4.31. Afectación nodal de los elementos sobre el nodo 1.

Así el cálculo del esfuerzo nodal es calculado como:

$$\sigma_{NODAL} = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i * \sigma_{vm_i})}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \dots \quad (4.14)$$

Donde  $\sigma_{NODAL}$  es el esfuerzo en cada nodo,  $A_i$  es Área de cada elemento y  $\sigma_{vm_i}$  es el esfuerzo de von Mises de cada elemento. Ahora se necesita conocer el vector normal a cada uno de los puntos  $C(u_i)$  de la curva B-Spline que define la cavidad en la estructura, para ello se utiliza la derivación de una curva B-Spline, (ver capítulo 2 sección 2.4.2.b):

$$\frac{d}{du} C(u) = C'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \left( \frac{p * (P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad \dots \quad (4.15)$$

Dado que  $C(u_i)$  es una curva paramétrica, su derivada proporciona las derivadas de cada componente, es decir:

$$\frac{d}{du} C(u) = \frac{d}{du} (x(u), y(u)) = \left( \frac{d}{du} x(u), \frac{d}{du} y(u) \right) \quad \dots \quad (4.16)$$

Dada una recta parametrizada, su derivada se puede expresar como:

$$t(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) = \left( \frac{d}{du} y(u), -\frac{d}{du} x(u) \right) \quad \dots \quad (4.17)$$

Con esto se puede obtener entonces el vector normal unitario a cada punto  $C(u_i)$  de una curva B-Spline como:



$$\hat{n}(u) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{du} y(u)\right)^2 + \left(-\frac{d}{du} x(u)\right)^2}} * \left( \frac{d}{du} y(u), -\frac{d}{du} x(u) \right) \quad \dots \quad (4.18)$$

En la figura 4.32 se muestran los vectores normales unitarios, obtenidos para cada punto C (u<sub>i</sub>) del perfil de la cavidad dada.

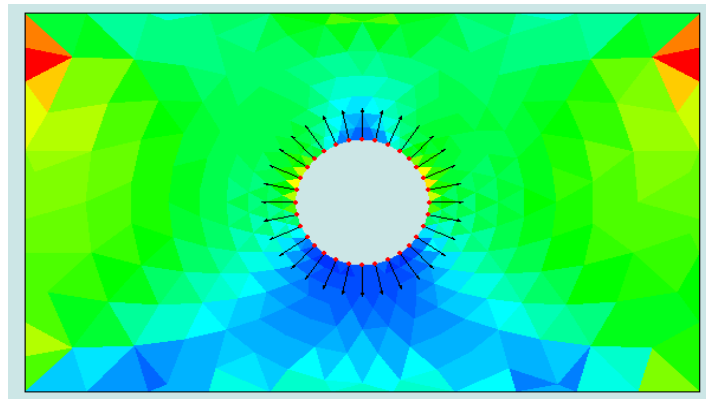


Fig. 4.32. Vectores normales unitarios a cada punto C (u<sub>i</sub>) de la curva B-Spline (rojo)

Con los vectores normales unitarios calculados, se puede obtener la dirección de cada uno de ellos, así como su magnitud, dependiendo de la condición con que cumplan. Para obtener el cálculo de dirección del desplazamiento de cada punto de control, se utilizan los vectores normales unitarios, su dirección y magnitud, así como las funciones de base o interpolación de la curva B-Spline, que funcionarán como porcentajes de afectación sobre cada punto de control (ver capítulo 2 sección 2.6). Con dichos valores se puede calcular el vector de desplazamiento de cada uno de los puntos de control, que va a tomar en cuenta la información de sus puntos vecinos como:

$$\vec{d}_i = \frac{\vec{d}'_i}{|\vec{d}'_i|} \quad \dots \quad (2.19)$$

Para obtener la magnitud de dicho vector de desplazamiento, se necesita saber cual es la función de interpolación que como porcentaje afecta más a un punto C (u) de una curva B-Spline y por lo tanto a su vector normal unitario que se le asigna. Además de un factor de modificación el cual proporcionará la velocidad con la cual se dará la optimización, así como de un tamaño de malla (ver capítulo 2 sección 2.6).

$$|\vec{d}'_i| = \frac{|\vec{D}_q|}{\text{Max}(|\vec{D}_1|, |\vec{D}_2|, \dots, |\vec{D}_m|)} * e_{size} * fm \quad \dots \quad (2.20)$$

El factor de malla es calculado como el promedio de las distancias generadas entre punto y punto de control, de la siguiente manera:





$$e_{size} = \frac{\sum_{i=1}^n (Dist_i)}{n} \quad \dots \quad (4.19)$$

Donde  $e_{size}$  es el tamaño de malla,  $Dist_i$  es la distancia generada entre punto y punto de control y  $n$  es el número de distancias generadas. En la figura 4.33 se observa el resultado, para el ejemplo de análisis de esfuerzo plano de la figura 4.26, se observa la dirección en la cual se moverán los puntos de control e irán deformando la malla.

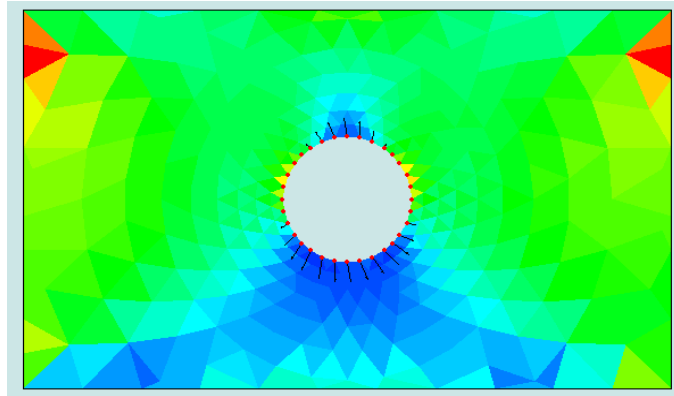
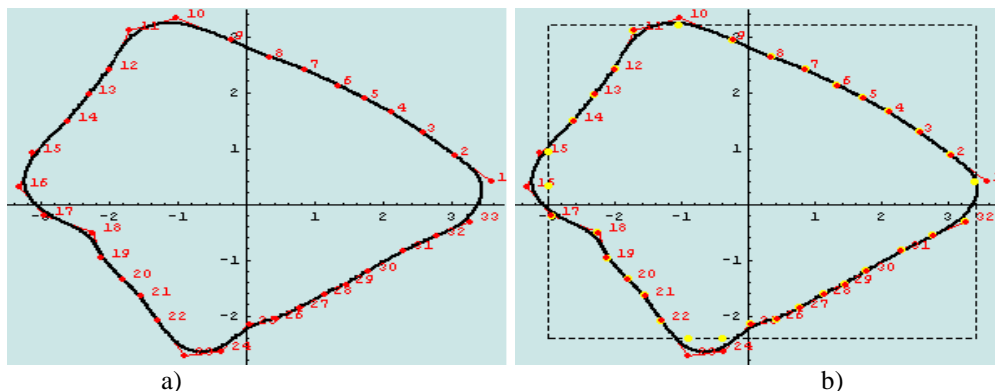


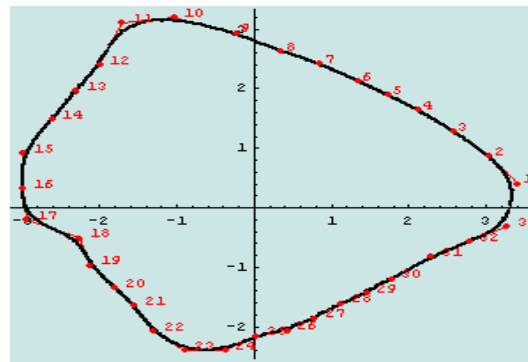
Fig. 4.33. Dirección del desplazamiento de los puntos de control.

Aquí se pueden observar los puntos que son desplazados así como su dirección, la cual indica el rechazo de material dependiendo del nivel de esfuerzo en las zonas mostradas, en este ejemplo en la zona de menor esfuerzo, tal y como lo indica el ESO.

Estos desplazamientos se darán de manera recursiva tras cada iteración, hasta que se cumpla con un criterio de paro, (ver capítulo 2 sección 2.6), el cual tiene que ver directamente con el nivel de esfuerzo de la estructura en análisis, y que no exceda el límite impuesto, el cual es un espesor de pared. Para que los nodos de control ( $P_i$ ), cumplan con la restricción de espesor de pared, se verifica la siguiente:

Si las coordenadas de los nodos de control, son superiores a las del límite de pared impuesto, estos tomaran en la coordenada que les corresponda,  $x$  o  $y$  el valor del límite, si no los puntos se mantendrán sin modificación. En la figura 4.33, se observa: a) la curva original, b) el límite de pared impuesto (líneas punteadas), y los puntos de control (color amarillo) que sobrepasaron dicho espesor y su nueva posición y c) la nueva curva, generada bajo la restricción de pared.





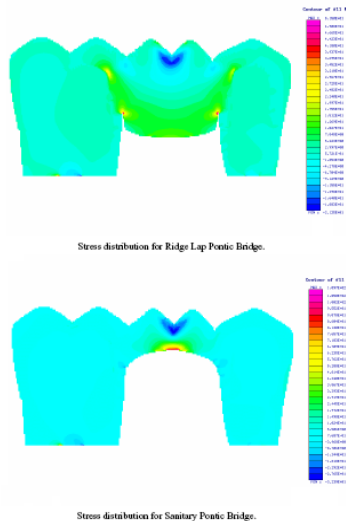
c)

Fig. 4.34. Curva Restringida por un espesor de pared.

En el capítulo siguiente se muestra una breve discusión sobre los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo descrito, en la aplicación de distintos casos de estudio, en los cuales se involucra tanto el análisis de esfuerzo plano, así como el de deformación plana, además de una revisión a los gráficos obtenidos por dicho algoritmo.



## CAPÍTULO 5



# Aplicación del Método de Optimización de Forma a los Casos de Estudio.

*“¿Por qué esta magnífica tecnología científica, que ahorra trabajo y nos hace la vida más fácil, nos aporta tan poca felicidad? La respuesta es está, simplemente: porque aún no hemos aprendido a usarla con tino.”*

Albert Einstein.

### 5.1 INTRODUCCIÓN.

El diseño de componentes mecánicos incluye normalmente secciones transversales no uniformes, que junto con las inclusiones y defectos dentro de los materiales dan lugar a un incremento en el valor de esfuerzo. Es posible predecir la distribución de estos esfuerzos de forma analítica o mediante diferentes métodos, entre los cuales se encuentra el FEA, lo que permite realizar diseños, optimizando zonas de concentración de esfuerzo. En la actualidad muchos de estos problemas, pueden ser resueltos mediante la correcta aplicación de una reducción del sistema, a una forma mucho más simple. Las reducciones más comunes son el esfuerzo plano y la deformación plana [30].

En la práctica de diseño de componentes mecánicos se analizan los aspectos funcionales, se dimensiona y se calculan los esfuerzos debidos a las cargas que soportaran. Además se analizan los aspectos del proceso de manufactura que influyen directamente con la forma última del producto. Debido al requerimiento de respuesta rápida que los mercados exigen, el ingeniero de diseño hoy en día utiliza sistemas computacionales que le permiten analizar eficaz y rápidamente las posibles zonas críticas que presenten las piezas antes que estas sean producidas. Resulta deseable entonces que las piezas sean mejoradas bajo criterios de minimización de esfuerzos y poder así garantizar la vida útil del componente.

El diseño del diámetro de tuberías, también se ha analizado mediante técnicas evolutivas. La determinación de los diámetros de las tuberías en el diseño, de menor costo por ejemplo: de una red de distribución de agua es un problema con múltiples óptimos locales, cuyo espacio de solución posee regiones no factibles. El algoritmo de optimización llamado recocido simulado (AS) es un método que ha sido utilizado para hacer búsquedas en el espacio de soluciones del problema, mejorando el desempeño de otros métodos.



## *Aplicación del Método de Optimización de Forma a los Casos de Estudio*

Otros problemas en los que se ha intentado introducir técnicas evolutivas en el análisis, se da en el área médica. Las placas de sujeción para injertos, como puede ser: en la columna vertebral, en el fémur, en la cadera, etc., se busca que estén bajo un estado mecánico íntimo al hueso, ya que esto promueve una estabilidad más grande y durabilidad de la placa y se reduce entonces el número de cirugías necesarias durante la vida del paciente.

Otro ejemplo es el hormigón. Las placas alveolares pre-tensadas están entre los productos más avanzados en la industria del hormigón prefabricado, en especial en lo que se refiere a su alta calidad y bajo consumo de materiales. Son generalmente, el tipo de forjados prefabricados más utilizados. Esto se debe a la selección de la altura y capacidad, a su superficie inferior lisa y a su rendimiento estructural.

Las placas alveolares tienen cavidades longitudinales, como se observa en la figura 5.1, cuyo principal propósito es reducir el peso de los forjados. Estas se utilizan sobre todo en edificios de grandes luces, como edificios de oficinas, hospitales, colegios, centros comerciales, edificios de apartamentos y en las casas por su conveniente precio y su rápida construcción. Las placas alveolares no tienen o no necesitan ningún refuerzo transversal.



Fig. 5.1. Hormigón pre-tensado, Placas Alveolares.

Este trabajo presenta un método de optimización de forma, para elementos con cavidades, ampliamente utilizadas en el diseño de máquinas. Se analiza la geometría bajo condiciones de tensión y/o compresión, por medio de FEA y se encuentra la forma óptima de la cavidad, para una distribución uniforme de esfuerzos, utilizando criterios evolutivos, basados en adición o rechazo de material, como se observa en la figura 5.2, mejorando el factor de concentración de esfuerzos, en algunos de los casos, así como la disminución de material para una posible fabricación.

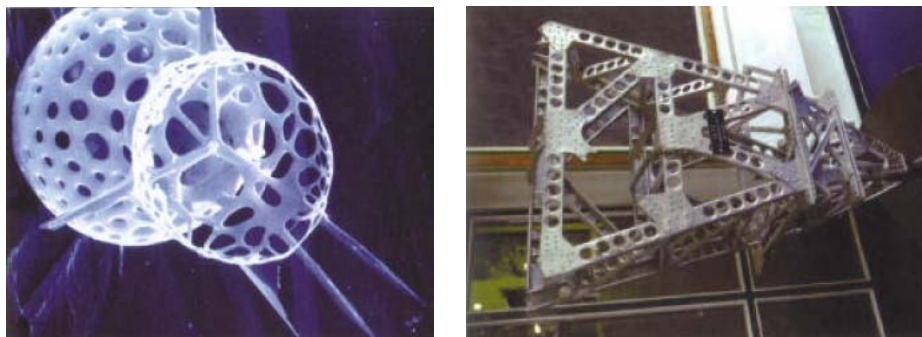


Fig. 5.2. Casos de optimización evolutiva, basados en criterios de rechazo o adición [32].

A continuación se muestran los casos de estudio, divididos en dos secciones, los dos primeros casos realizados con un análisis de esfuerzo plano y los siguientes dos con un análisis de deformación plana. En los casos antes mencionados, el objetivo se centra en obtener la estructura óptima, manteniendo el sistema de cargas y restricciones, basado en el mallador adaptativo desarrollado para este trabajo.



Para todos los casos de estudio, el parámetro a considerar como función objetivo, es la reducción máxima de material, cumpliendo con un factor de seguridad basado en la relación entre el esfuerzo máximo calculado de la estructura y el esfuerzo de fluencia del material utilizado.

## 5.2 ESFUERZO PLANO.

### 5.2.1. Caso de Estudio 1.

Se aplica una fuerza uniformemente repartida de 110 [N] en el lado derecho de una placa de Acero comercial (ASTM A36), con dimensiones de 12x8 [cm], y un espesor de 2.54 [cm], con una cavidad central circular de diámetro 4 [cm], que se encuentra sujeta en su lado izquierdo. En la figura 5.3 se muestra dicho sistema. Se pretende obtener la estructura óptima que cumpla con el criterio de diseño, factor de seguridad  $F_s \leq 2$ .

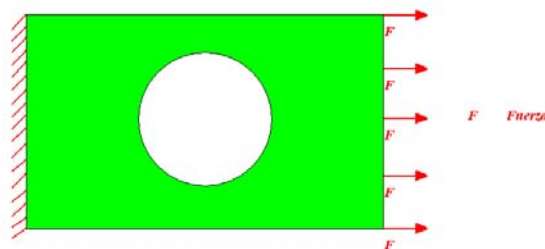


Fig. 5.3. Caso I, sistema de cargas y restricciones.

En la figura 5.4 se observa el mallado generado para esta estructura y la distribución de esfuerzos al interior de la misma, obtenidos mediante la aplicación del algoritmo de solución desarrollado para este trabajo.

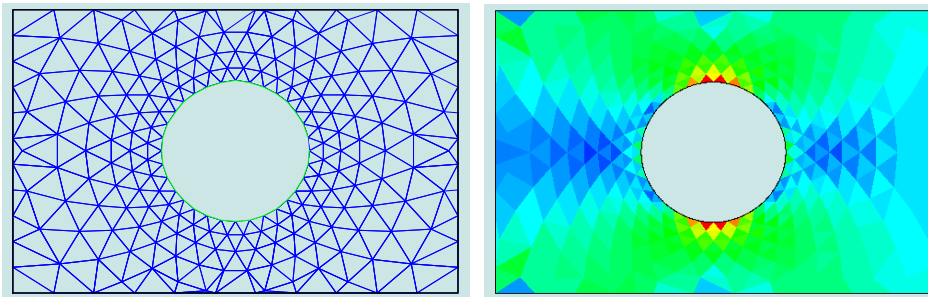


Fig. 5.4. Mallado y Distribución de esfuerzo para el caso de estudio 1.

Los parámetros de optimización utilizados (ver capítulo 2, sección 2.6) para este caso particular son:

$$TR = 0.9; \quad TA = 0.99; \quad TER = 0.001; \quad TEA = 0.0001; \quad \text{Tamaño del elemento} = 0.02.$$

En la figura 5.5, se muestra el historial de evolución de la estructura y la optimización de forma de la cavidad central, además de la distribución de esfuerzo de la misma, lograda en cada iteración.

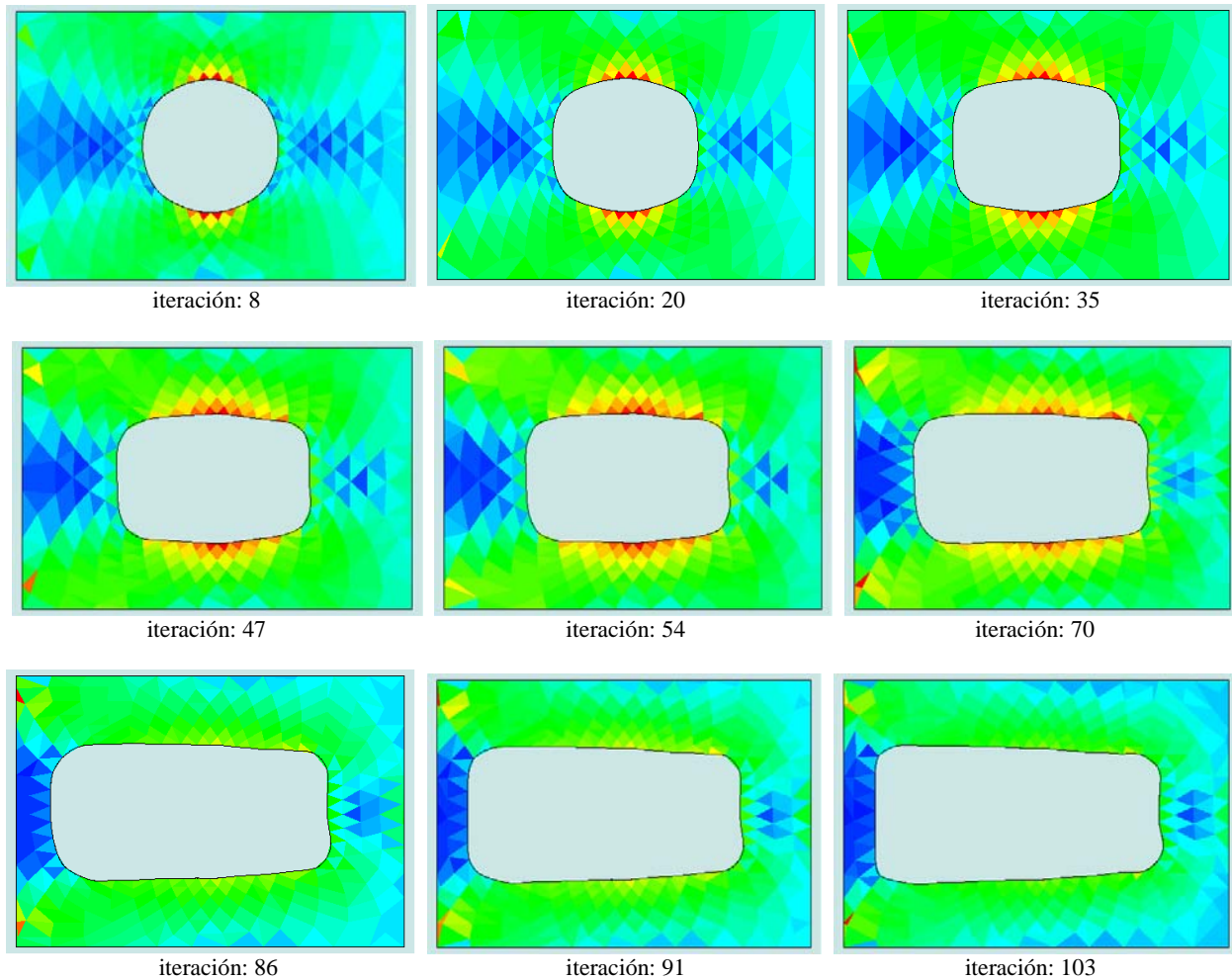


Fig. 5.5. Historial de evolución de la estructura del caso de estudio 1.

En la figura anterior se muestra la tendencia a retirar zonas ineficientes (color azul oscuro), para con ello ir mejorando la distribución de esfuerzo dentro de la estructura, hasta llegar a un límite, es decir un espesor de pared, como se ve en las iteraciones 91 y 103, del lado izquierdo. Dicho espesor de pared es de 1 [cm] por cada uno de sus cuatro lados.

También se observa como el mallador adaptativo va siguiendo el modelo del perfil tras cada iteración, sin provocar grandes sesgos durante la generación de triángulos para la solución de FEA.

En la figura 5.6, se grafican los valores obtenidos durante la optimización: esfuerzo, esfuerzo promedio, volumen e índice de desempeño, por iteración. Aquí se puede ver que el paro del algoritmo se da para la iteración 103, de acuerdo al criterio de paro establecido (ver capítulo 2 sección 2.6).

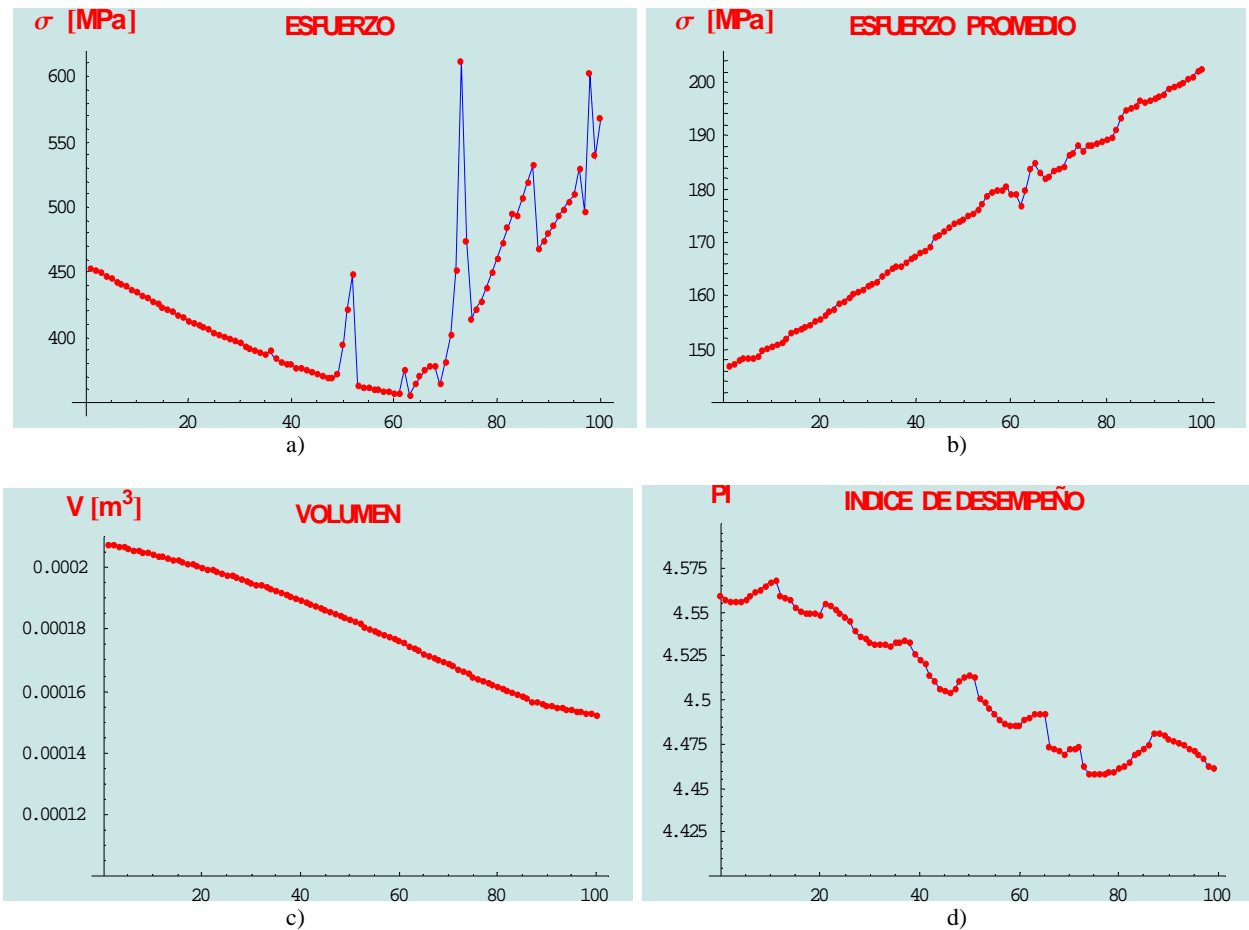


Fig. 5.6. Gráficos de: a) Esfuerzo, b) Esfuerzo Promedio, c) Volumen e d) Índice de desempeño, contra el número de iteraciones.

En la grafica del índice de desempeño (PI), se puede ver, que no hay grandes variaciones en las concavidades generadas durante la evolución de la cavidad, debido a que solo se esta haciendo un alargamiento en el perfil del cavidad, ya que los saltos no son tan grandes en la grafica. Se puede entonces decir que hasta encontrar el último valor de PI, la evolución de la estructura tras cada iteración, proporciona una estructura continua. Además se puede ver, que existen mínimos locales de PI, cada uno de los cuales representa un estado estable que alcanza la estructura durante su evolución.

Para este caso de estudio, la optimización de forma de la estructura se alcanza en la iteración 93, para las condiciones dadas, a pesar de que el paro se da en la iteración 103. Donde al valor del factor de seguridad en dicha iteración (93) es de  $F_s = 1.9929$ , y cumple entonces con el criterio de diseño impuesto para este caso. Ya que se tienen varios estados estables y cumplen con el criterio de diseño, la iteración 93 cumple además con la función objetivo.

En el grafico de volumen se puede ver como va teniendo una disminución gradual, en cada iteración, esto es debido a que la técnica aquí presentada es una derivación del ESO (ver capítulo 1), así como el aumento en el valor de esfuerzo de la estructura, también como se observa en su grafico.

En la figura 5.7 se muestran el aumento de las tasas de rechazo y de adición tras cada iteración. En dicha grafica se puede ver que los elementos que sean menores a un 90 % serán eliminados, en un inicio, este valor se ira actualizando cada que la estructura, durante la evolución, ya no pueda retirar más material.



## Aplicación del Método de Optimización de Forma a los Casos de Estudio

De esta manera al final del ciclo evolutivo, la tasa de rechazo se encontrara en 93.5 %. El valor de inicio de la tasa de rechazo, dependerá de la zona que contenga elementos con bajo nivel de esfuerzo. Así de igual manera para la tasa de adición.

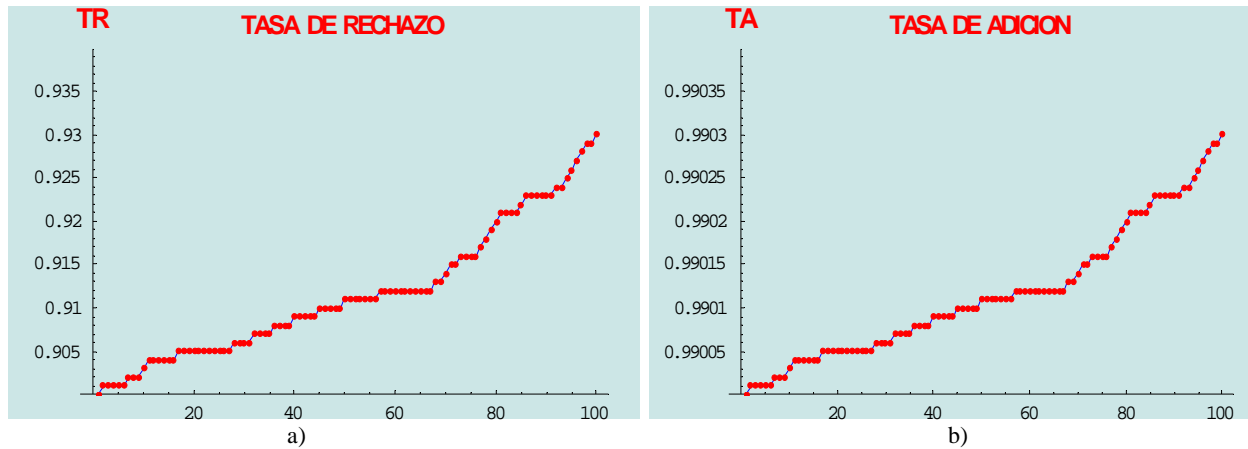


Fig. 5.7. Gráficos de: a) Tasa de Rechazo y b) Tasa de Adición, contra el número de iteraciones.

En la figura 5.8, se realiza una comparación entre la distribución de esfuerzo de la estructura inicial y la estructura optimizada, obtenida en la iteración 93. Se puede observar, que existe una mejora en la distribución de esfuerzo, así como una diferencia apreciable de volumen final. También se observa que la curva que modela el perfil de la cavidad, no tiene distorsiones importantes, durante la evolución. En la comparación del número de nodos y elementos se muestra claramente, que el algoritmo de optimización elimina elementos ineficientes de la estructura.

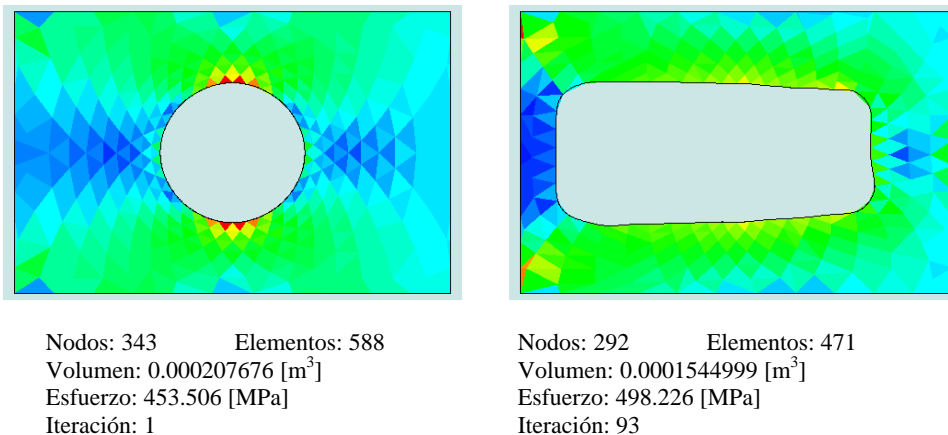


Fig. 5.8. Geometría del perfil: Inicial y Optimizado.

Para este caso de estudio el aumento de esfuerzo fue de 9.86092 % y la disminución de volumen de 25.6059 %. El tiempo total de la optimización de forma fue de 5 hrs. 56 min.





### 5. 2. 2. Caso de Estudio 2.

Se aplica una fuerza puntual de 110 [N] a una placa de Aluminio comercial de dimensiones 22x12 [cm] de un espesor de 2.54 [cm], en el extremo superior derecho. Dicha placa tiene una cavidad central circular de diámetro 4 [cm], que se encuentra sujeta en uno de sus lados, particularmente en dos barrenos, situados del lado izquierdo. En la figura 5.9 se muestra dicho sistema. Se pretende obtener la estructura óptima que cumpla con el criterio de diseño, factor de seguridad  $F_s \leq 1.3$ .

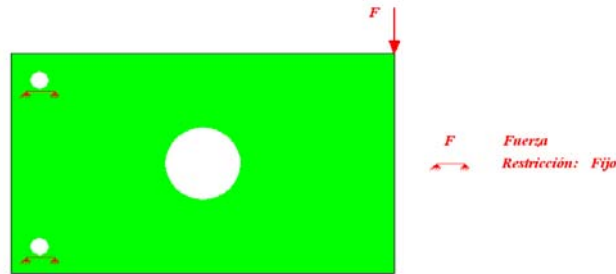


Fig. 5.9. Caso de estudio 2, sistema de cargas y restricciones.

En la figura 5.10 se observa el mallado generado para esta estructura y la distribución de esfuerzos al interior de la misma, obtenidos mediante la aplicación del algoritmo de solución desarrollado para este trabajo (ver capítulo 4).

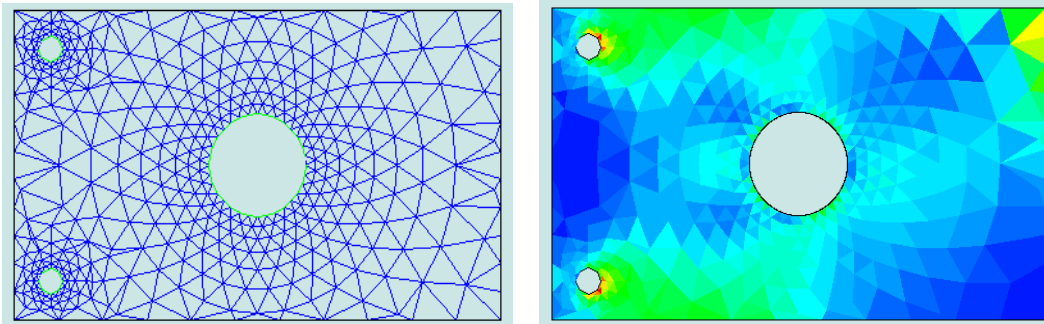
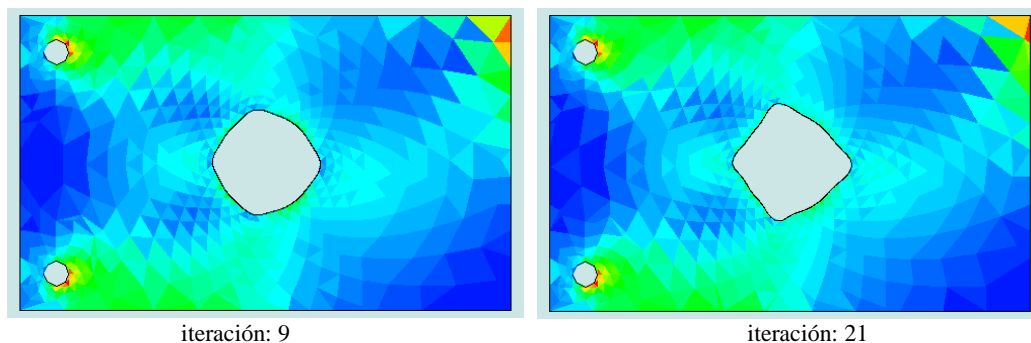


Fig. 5.10. Mallado y Distribución de esfuerzo para el caso de estudio 2.

Los parámetros utilizados (ver capítulo 2, sección 2.6) para este caso particular son:

$$TR = 0.6; \quad TA = 0.99; \quad TER = 0.02; \quad TEA = 0.0001; \quad \text{Tamaño del elemento} = 0.03.$$

En la figura 5.11, se muestra el historial de evolución de la estructura y la optimización de forma de la cavidad central, además de la distribución de esfuerzo de la misma, en cada iteración.



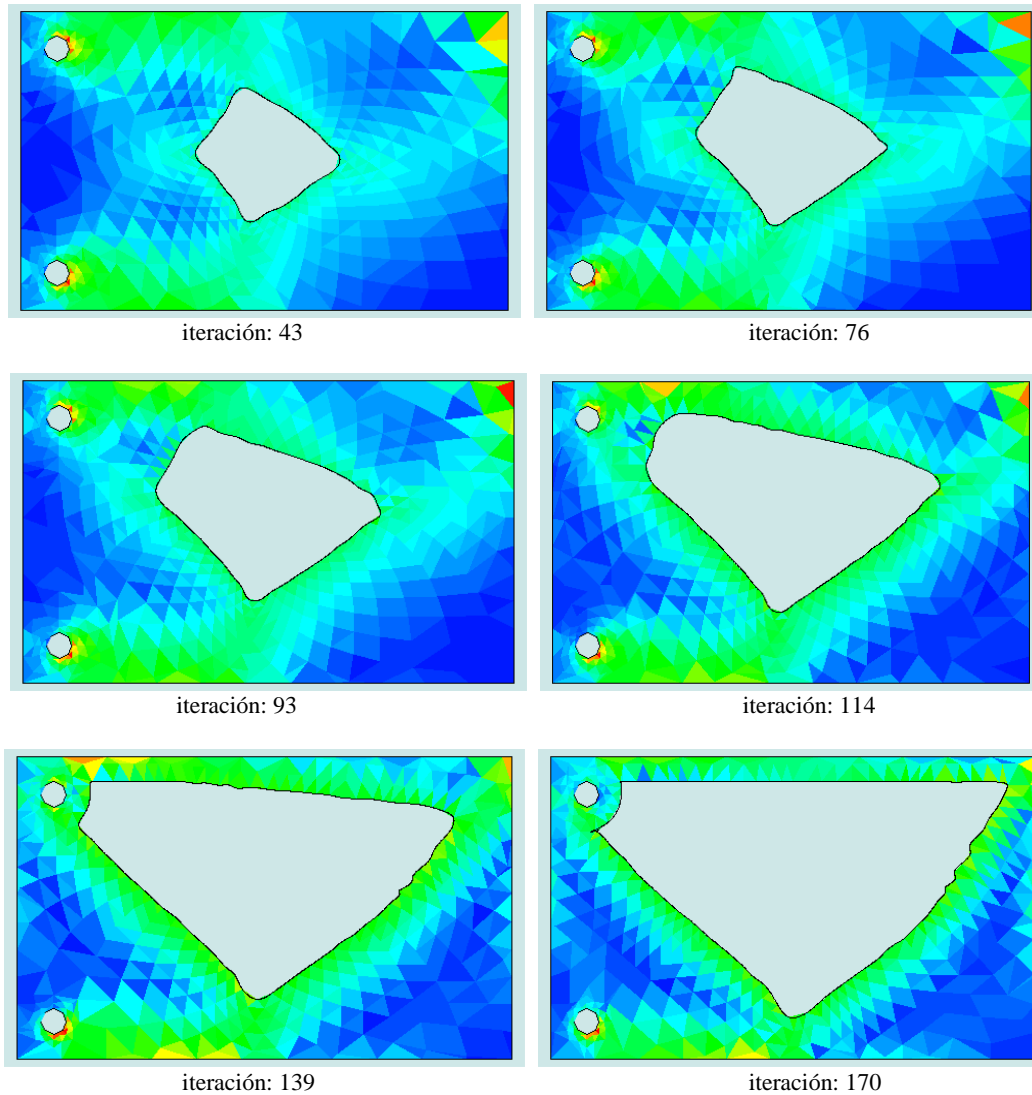


Fig. 5.11. Historial de evolución de la estructura.

En la figura anterior se muestra la tendencia a retirar zonas ineficientes (color azul oscuro), para con ello ir mejorando la distribución de esfuerzo dentro de la estructura, hasta llegar a un límite, es decir un espesor de pared, como se ve en la iteración 139 y 170, del lado izquierdo y superior. Dicho espesor de pared es de 1 [cm] en sus cuatro lados, y en los barrenos es de 1 [cm], con el fin de no interferir con dichos barrenos.

También se observa como el mallador adaptativo va siguiendo el modelo del perfil tras cada iteración, sin provocar grandes sesgos durante la generación de triángulos, además de mantener un tamaño de malla tras cada iteración añadiendo puntos donde sea necesario.

En la figura 5.12, se grafican los valores obtenidos durante la optimización: esfuerzo, esfuerzo promedio, volumen e índice de desempeño, por iteración. Aquí se puede ver que el paro del algoritmo se da para la iteración 170, de acuerdo al criterio de paro establecido (ver capítulo 2 sección 2.6).

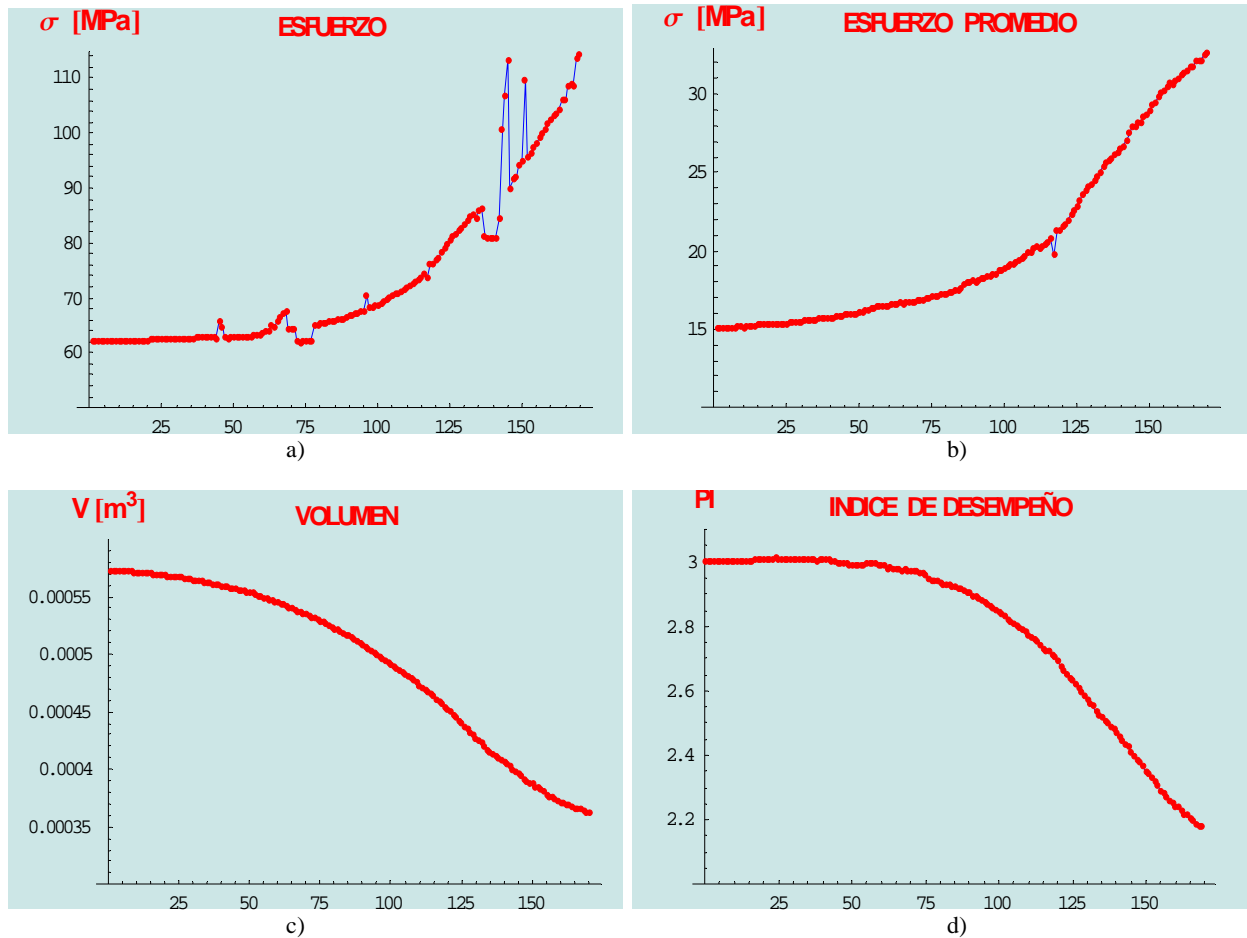


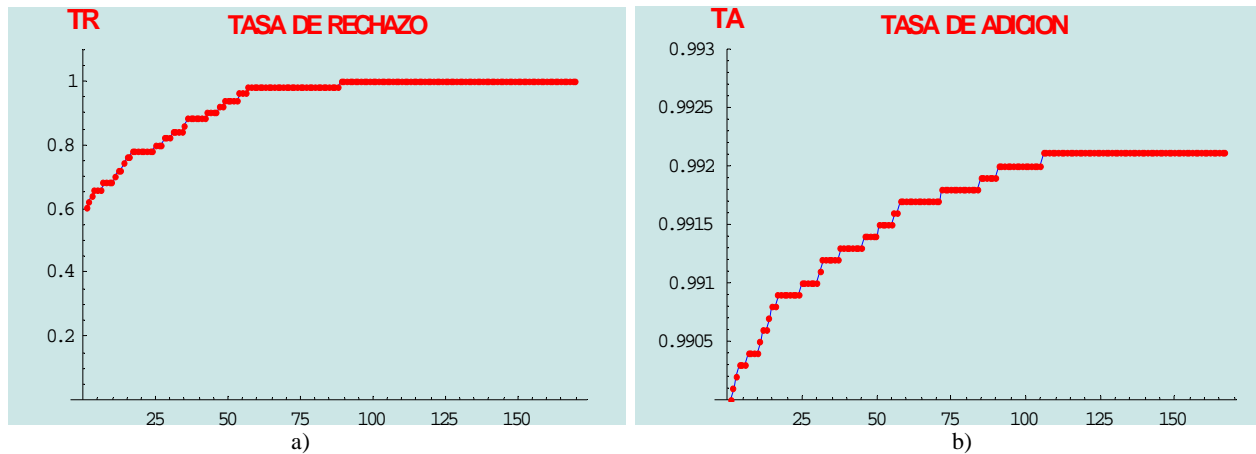
Fig. 5.12. Gráficos de: a) Esfuerzo, b) Esfuerzo Promedio, c) Volumen e d) Índice de desempeño, contra el número de iteraciones.

En la grafica del índice de desempeño (PI), se puede ver, que no hay variaciones entre los mínimos locales y el mínimo absoluto, generado durante la evolución de la cavidad. Se puede entonces decir que hasta encontrar el último valor de PI, la evolución de la estructura tras cada iteración, proporciona una estructura continua. Además se puede ver, que el mínimo absoluto de PI, representa el estado estable que alcanza la estructura durante su evolución.

Para este caso de estudio, la optimización estructural de forma se alcanza en la iteración 170, coincidente con la iteración en la que se detiene el algoritmo. Donde al valor del factor de seguridad es de  $F_s = 1.2707$ , y cumple entonces con el criterio de diseño impuesto y la función objetivo, para este caso.

En la figura 5.13 se muestran el aumento de las tasas de rechazo y de adición tras cada iteración. En dicha grafica se puede ver que los elementos que sean menores a un 60 % serán eliminados, en un inicio, este valor se ira actualizando cada que la estructura, durante la evolución, ya no pueda retirar más material.

De esta manera al final del ciclo evolutivo, la tasa de rechazo se encontrara en 82 %. El valor de inicio de la tasa de rechazo, dependerá de la zona que contenga elementos con bajo nivel de esfuerzo. Así de igual manera para la tasa de adición.



En la figura 5.14, se realiza una comparación entre la distribución de esfuerzo de la estructura inicial y la estructura optimizada, obtenida en la iteración 170. Se puede observar, que existe una mejora en la distribución de esfuerzo, reduciendo esfuerzo en las áreas de apoyo (barrenos), donde esta sujeto, así como una diferencia apreciable de volumen final, lo cual se busca.

En dicha figura también se observa que la curva que modela el perfil de la cavidad, no tiene distorsiones importantes, durante la evolución, debido a que el algoritmo de solución contempla esto, durante el desplazamiento de los puntos de control, al guardar información de los puntos vecinos al que se modificará. En la comparación del número de nodos y elementos se muestra claramente, que el algoritmo de solución elimina elementos ineficientes de la estructura.

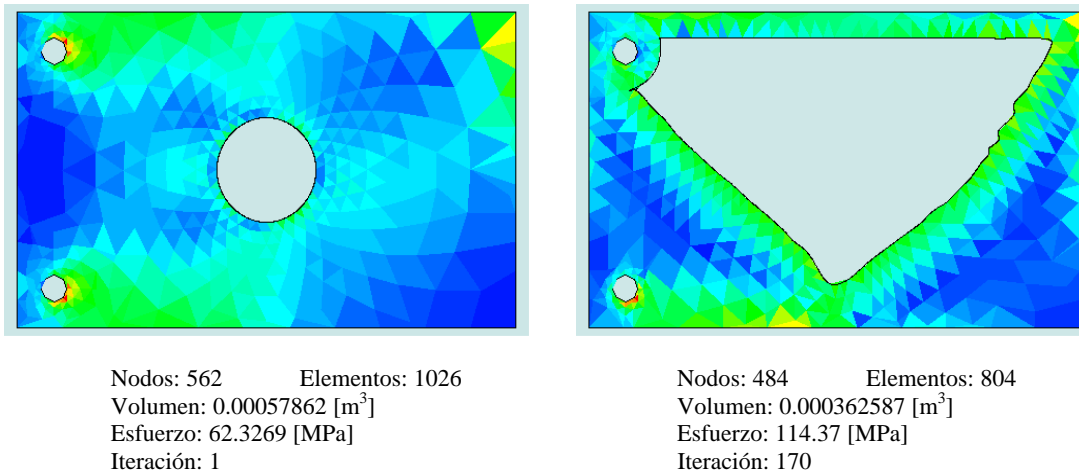


Fig. 5.14. Geometría del perfil: Inicial y Final

Para este caso de estudio la reducción de volumen fue de 36.7694 % y un aumento de esfuerzo de 83.5181 %. El tiempo total de solución del algoritmo fue de 14 hrs. 36min.



5. 2. 3. Caso de Estudio 3.

Se aplica una fuerza puntual de 110 [N] a una placa de Aluminio comercial de dimensiones 22x12 [cm] de un espesor de 2.54 [cm], en el extremo superior derecho. Dicha placa tiene una cavidad central circular de diámetro 4 [cm], que se encuentra sujeta en uno de sus lados, particularmente en dos barrenos, situados del lado izquierdo. En la figura 5.15 se muestra dicho sistema. Se pretende obtener la estructura óptima que cumpla con el criterio de diseño, factor de seguridad  $F_s \leq 2$ .

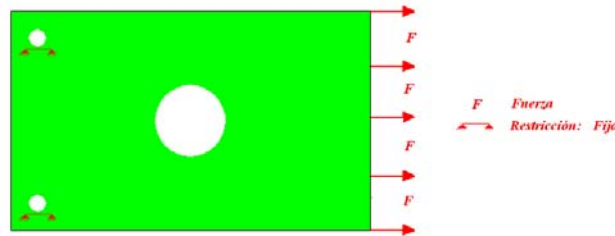


Fig. 5.15. Caso de estudio 3, sistema de cargas y restricciones.

En la figura 5.16 se observa el mallado generado para esta estructura y la distribución de esfuerzos al interior de la misma, obtenidos mediante la aplicación del algoritmo de solución desarrollado para este trabajo (ver capítulo 4).

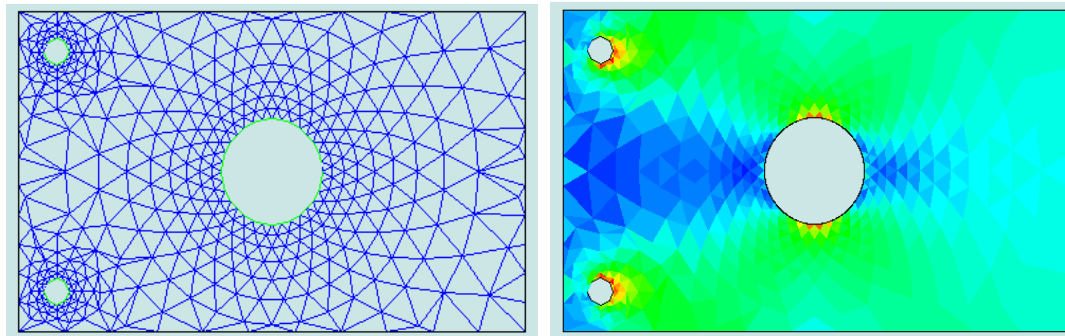
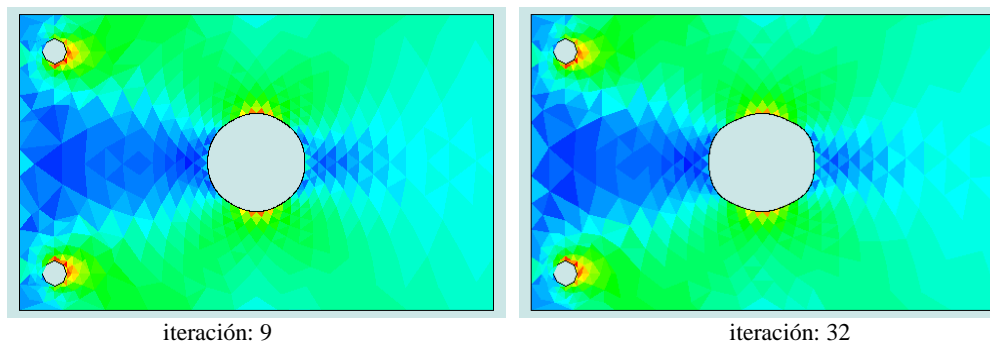


Fig. 5.16. Mallado y Distribución de esfuerzo para el caso de estudio 3.

Los parámetros utilizados (ver capítulo 2, sección 2.6) para este caso particular son:

$$TR = 0.6; \quad TA = 0.99; \quad TER = 0.02; \quad TEA = 0.0001; \quad \text{Tamaño del elemento} = 0.03.$$

En la figura 5.17, se muestra el historial de evolución de la estructura y la optimización de forma de la cavidad central, además de la distribución de esfuerzo de la misma, en cada iteración.



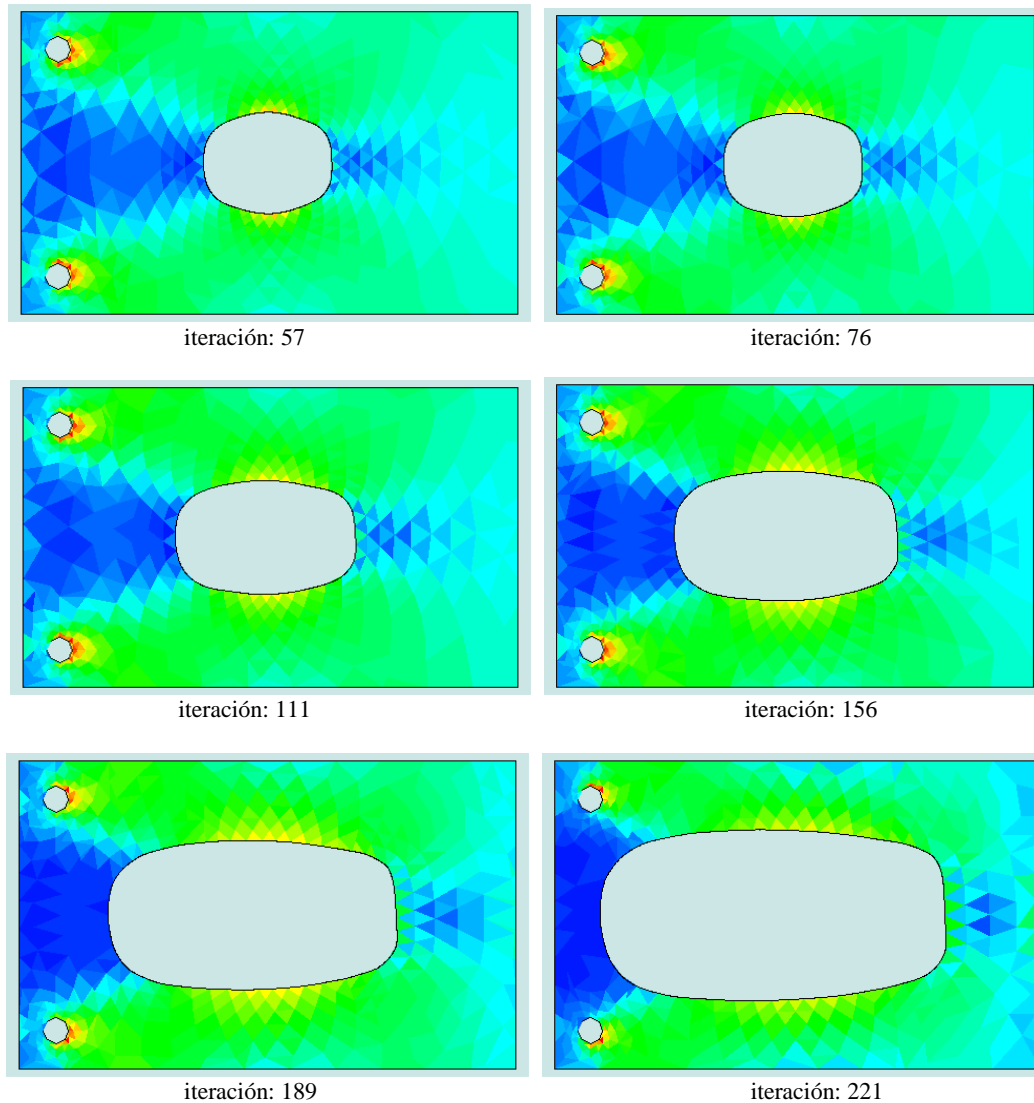


Fig. 5.17. Historial de evolución de la estructura.

En la figura anterior se muestra la tendencia a retirar zonas ineficientes (color azul oscuro), para con ello ir mejorando la distribución de esfuerzo dentro de la estructura. También se observa como el mallado adaptativo va siguiendo el modelo del perfil tras cada iteración, sin provocar grandes sesgos durante la generación de triángulos, además de mantener un tamaño de malla tras cada iteración añadiendo puntos donde sea necesario.

En la figura 5.18, se grafican los valores obtenidos durante la optimización: esfuerzo, esfuerzo promedio, volumen e índice de desempeño, por iteración. Aquí se puede ver que el paro del algoritmo se da para la iteración 221, de acuerdo al criterio de paro establecido (ver capítulo 2 sección 2.6).

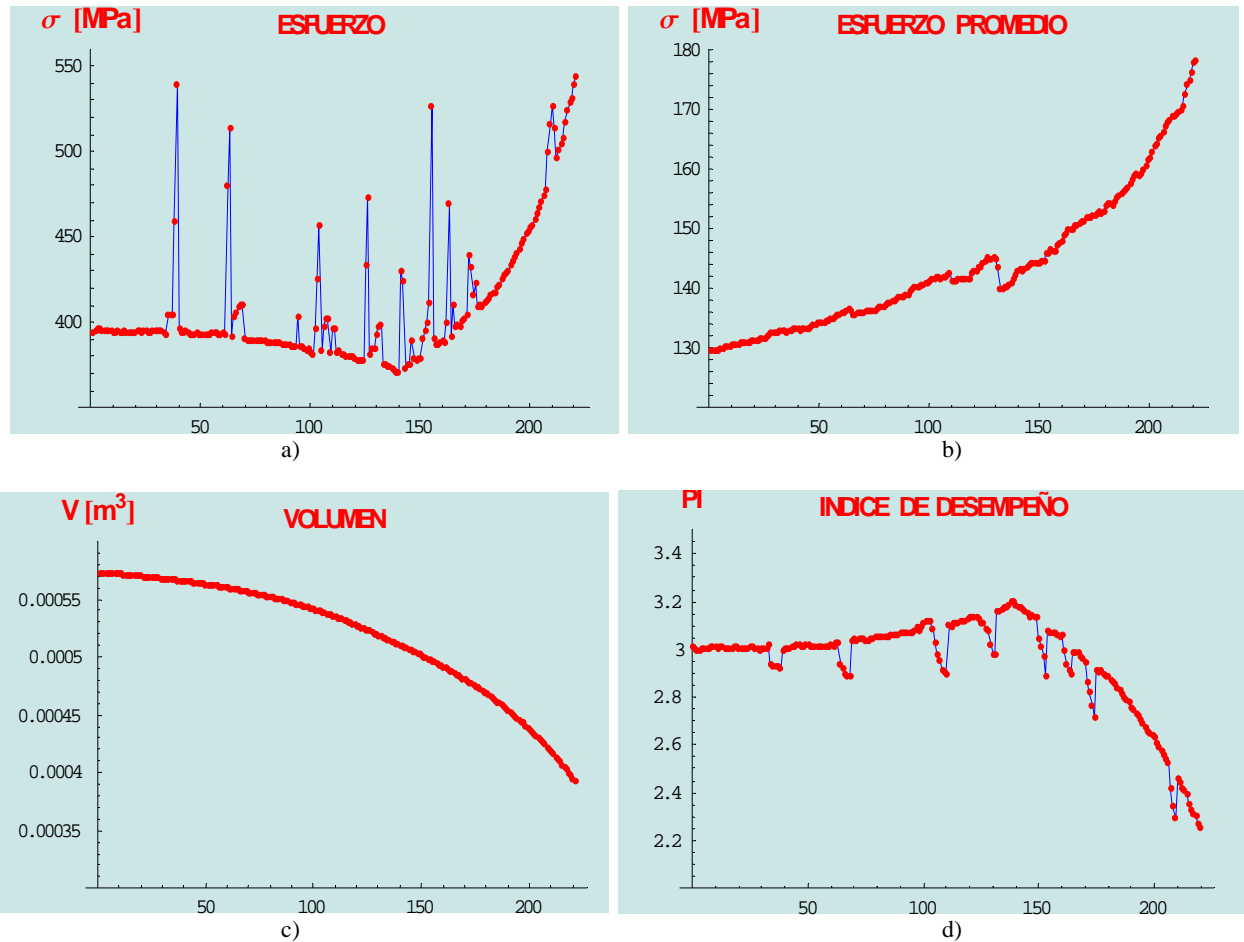


Fig. 5.18. Gráficos de: a) Esfuerzo, b) Esfuerzo Promedio, c) Volumen e d) Índice de desempeño, contra el número de iteraciones.

En la grafica del índice de desempeño (PI), se puede ver, que hay variación en la concavidad generada, durante la evolución de la cavidad, al cambiar de dirección la grafica de PI. Cada mínimo existente en PI representa un estado estable que alcanza la estructura.

Para este caso de estudio, la optimización de forma de la estructura se alcanza en la iteración 207, para las condiciones dadas, a pesar de que el paro se da en la iteración 221. Donde al valor del factor de seguridad en dicha iteración (207) es de  $F_s = 1.9114$ , y cumple entonces con el criterio de diseño impuesto para este caso. Ya que se tienen varios estados estables y cumplen con el criterio de diseño, la iteración 207 cumple además con la función objetivo.

En la figura 5.19 se muestran el aumento de las tasas de rechazo y de adición tras cada iteración. En dicha grafica se puede ver que los elementos que sean menores a un 60 % serán eliminados, en un inicio, este valor se ira actualizando cada que la estructura, durante la evolución, ya no pueda retirar más material.

De esta manera al final del ciclo evolutivo, la tasa de rechazo se encontrara en 100 %. El valor de inicio de la tasa de rechazo, dependerá de la zona que contenga elementos con bajo nivel de esfuerzo. Así de igual manera para la tasa de adición.

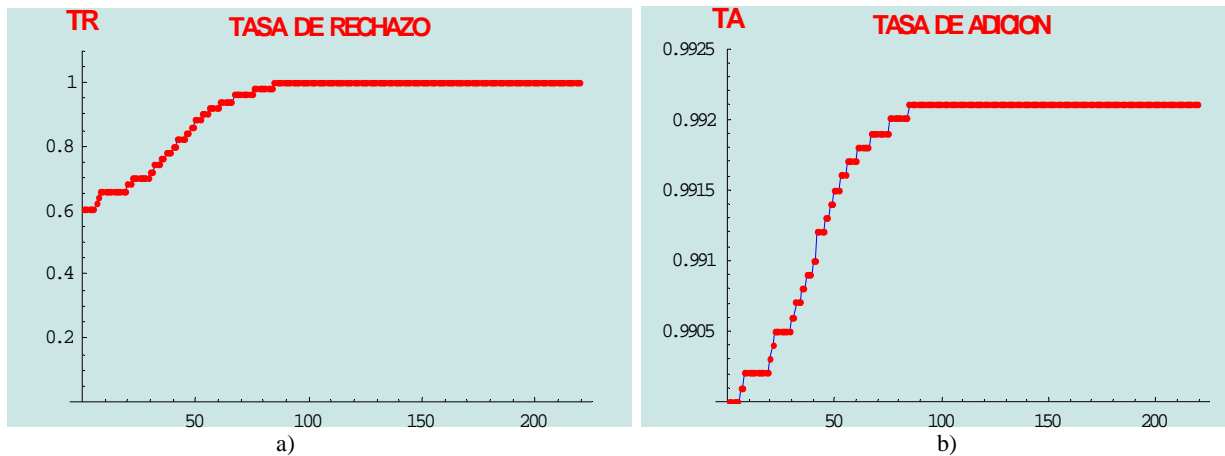


Fig. 5.19. Gráficos de: a) Tasa de Rechazo y b) Tasa de Adición, contra el número de iteraciones.

En la figura 5.20, se realiza una comparación entre la distribución de esfuerzo de la estructura inicial y la estructura optimizada, obtenida en la iteración 207. Se puede observar, que existe una mejora en la distribución de esfuerzo, reduciendo esfuerzo en las áreas de apoyo (barrenos), donde esta sujeto, así como una diferencia apreciable de volumen final, lo cual se busca.

En dicha figura también se observa que la curva que modela el perfil de la cavidad, no tiene distorsiones importantes, durante la evolución, debido a que el algoritmo de solución contempla esto, durante el desplazamiento de los puntos de control, al guardar información de los puntos vecinos al que se modificará. En la comparación del número de nodos y elementos se muestra claramente, que el algoritmo de solución elimina elementos ineficientes de la estructura.

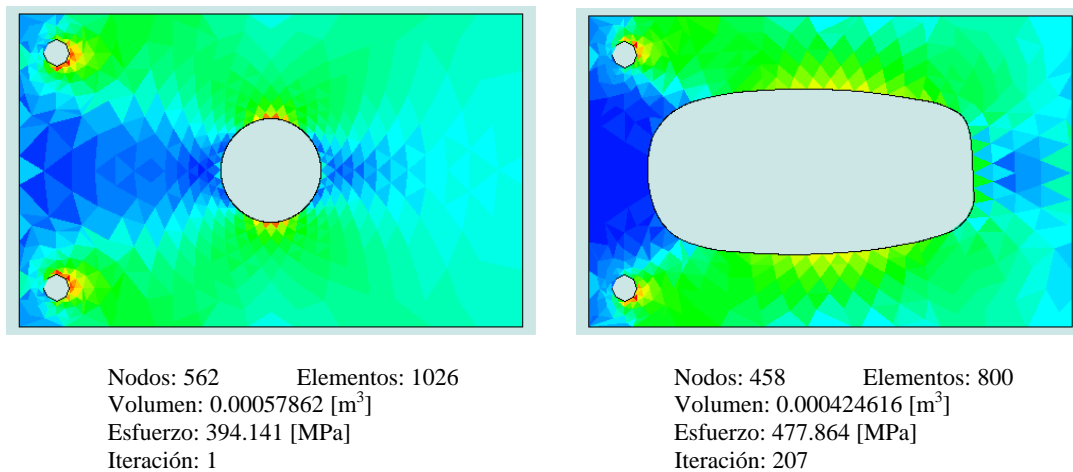


Fig. 5.20. Geometría del perfil: Inicial y Final

Para este caso de estudio la reducción de volumen fue de 25.9522 % y un aumento de esfuerzo de 21.245 %. El tiempo total de solución del algoritmo fue de 12 hrs. 41min.





### 5.3 DEFORMACIÓN PLANA.

#### 5.3.1. Caso de Estudio 1.

Se aplica una fuerza de presión de 110 [MPa] a tubo circular de Acero comercial (ASTM A36), en toda su región interior. Con un diámetro exterior de 4 [cm], una región interior rectangular de 2 [cm] por lado y una longitud de 60 [cm], para el análisis se toma una rodaja de dicha estructura de espesor 2.54 [cm]. Se encuentra sujeta en todo su perímetro externo. En la figura 5.21 se muestra dicho sistema. Se pretende obtener la estructura óptima que cumpla con el criterio de diseño, factor de seguridad  $F_s \leq 2$ .

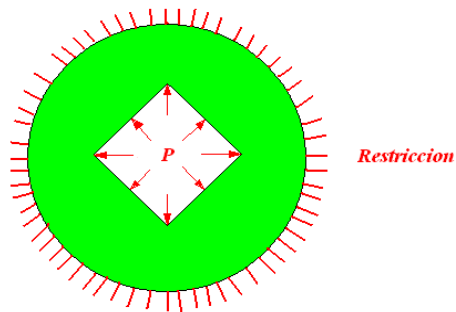


Fig. 5.21. Caso de estudio 1, sistema de cargas y restricciones.

En la figura 5.22 se observa el mallado generado para esta estructura y la distribución de esfuerzos al interior de la misma, al aplicar el algoritmo de solución.

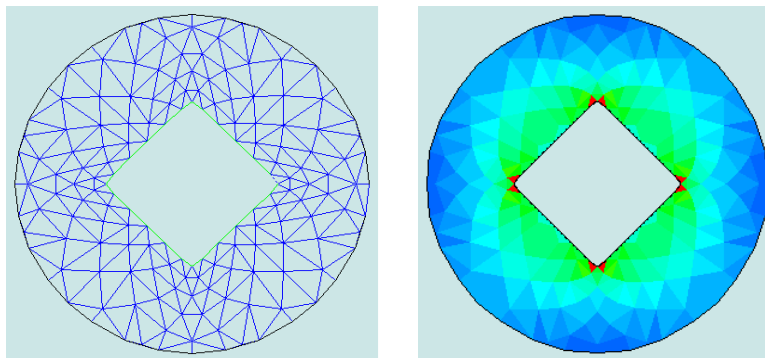


Fig. 5.22. Mallado y Distribución de esfuerzo para el caso de estudio 1.

Los parámetros utilizados para este caso particular son:

$$TR = 0.6; \quad TA = 0.9; \quad TER = 0.01; \quad TEA = 0.00; \quad \text{Tamaño del elemento} = 0.01.$$

En la figura 5.23, se muestra el historial de evolución de la estructura y la optimización de forma del perfil central además de la distribución de esfuerzo de la misma.

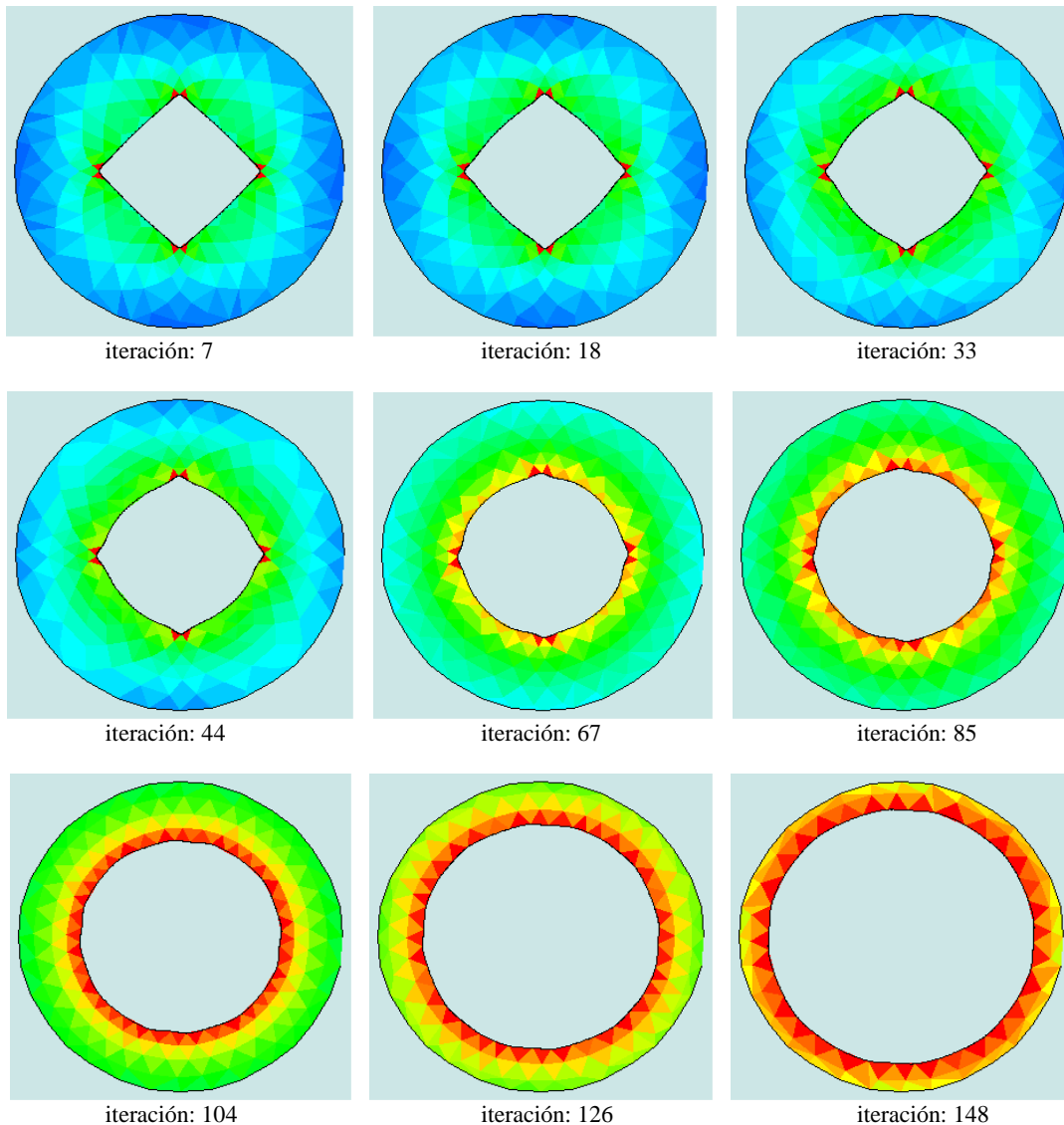


Fig. 5.23. Historial de evolución de la estructura.

En la figura anterior se muestra la tendencia a retirar zonas ineficientes (color azul oscuro), para con ello ir mejorando la distribución de esfuerzo dentro de la estructura, hasta llegar a un límite, es decir un espesor de pared, como se ve en la iteración 148. Dicho espesor de pared es de 3 [cm] de diámetro interno. También se observa como el mallador adaptativo va siguiendo el modelo del perfil tras cada iteración, sin provocar grandes sesgos durante la generación de triángulos y deteniéndose justo en el espesor de pared o límite de 3 [cm].

En la figura 5.24, se grafican los valores obtenidos durante la optimización: esfuerzo, esfuerzo promedio, volumen e índice de desempeño, por iteración. Aquí se puede ver que el paro del algoritmo se da para la iteración 148, de acuerdo al criterio establecido (ver capítulo 2 sección 2.6).

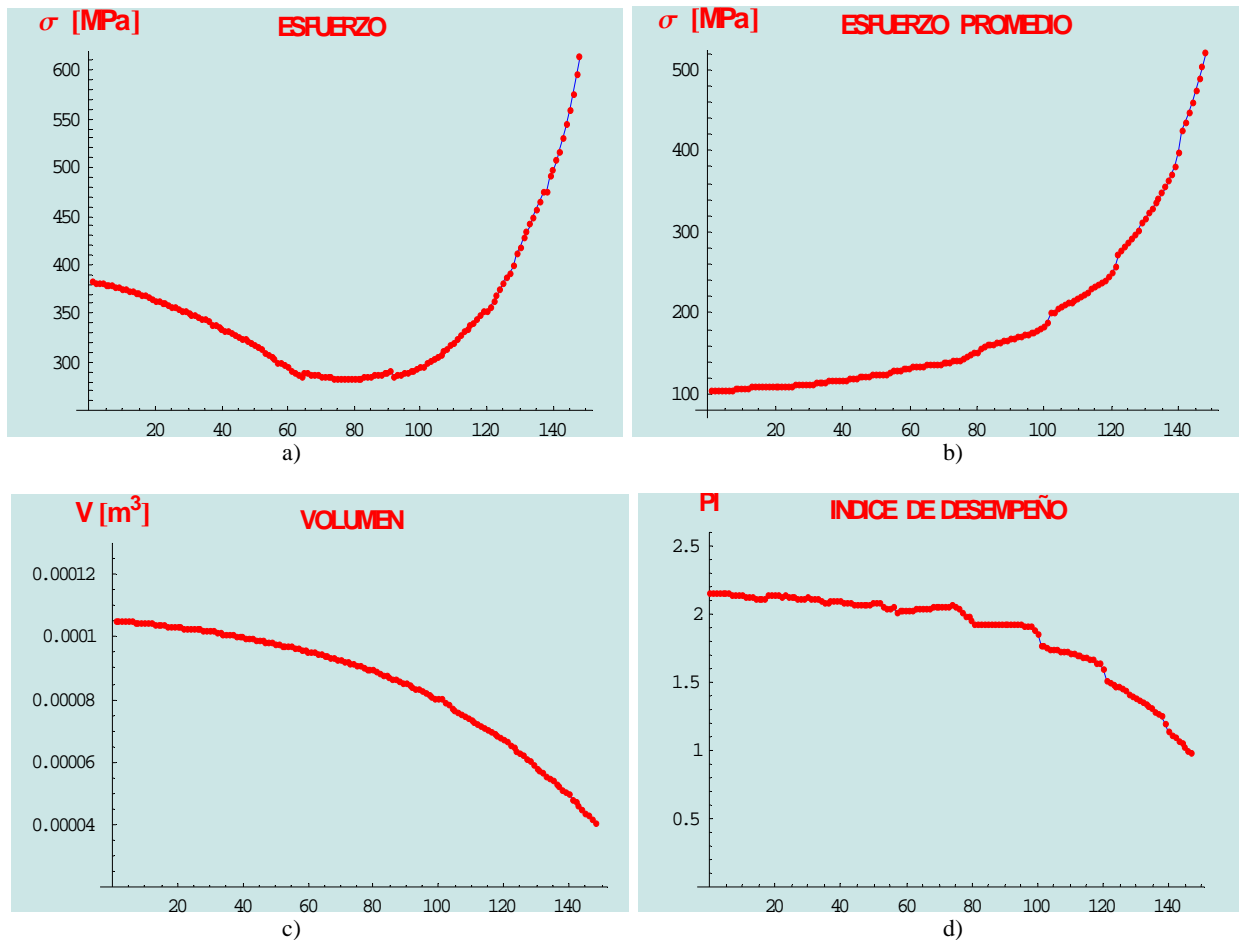


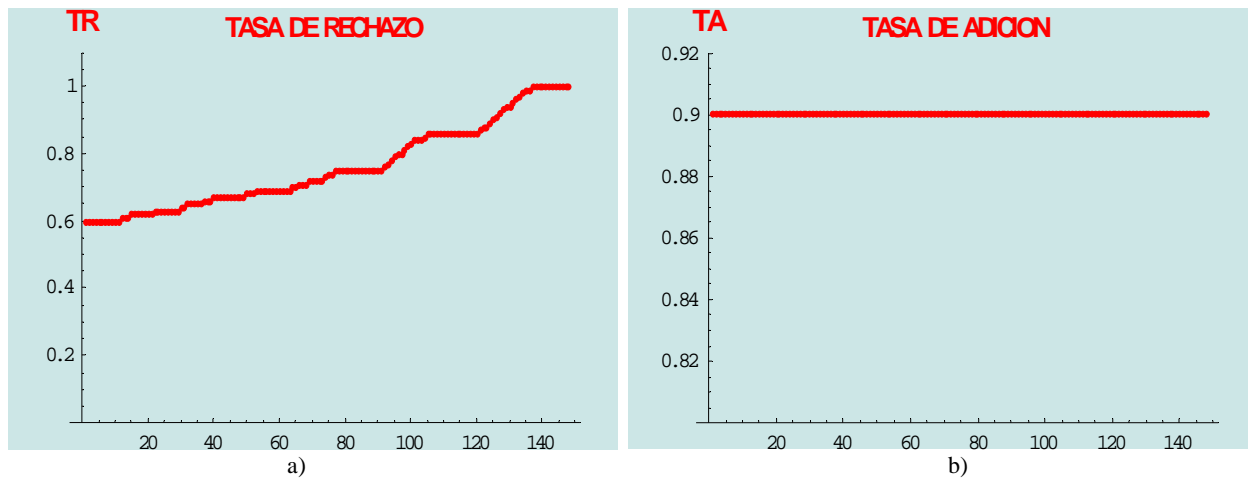
Fig. 5.24. Gráficos de: a) Esfuerzo, b) Esfuerzo Promedio, c) Volumen e d) Índice de desempeño, contra el número de iteraciones.

En la grafica del índice de desempeño (PI), se puede ver, que no hay grandes variaciones en las concavidades generadas durante la evolución de la cavidad. Además se puede ver, que existen mínimos locales de PI, cada uno de los cuales representa un estado estable que alcanza la estructura durante su evolución.

Para este caso de estudio, la optimización de forma de la estructura se alcanza en la iteración 140, para las condiciones dadas, a pesar de que el paro se da en la iteración 148. Donde al valor del factor de seguridad en dicha iteración (140) es de  $F_s = 1.9929$ , y cumple entonces con el criterio de diseño impuesto para este caso. Ya que se tienen varios estados estables y cumplen con el criterio de diseño, la iteración 140 cumple además con la función objetivo.

En la figura 5.25 se muestran el aumento de las tasas de rechazo y de adición tras cada iteración. En dicha grafica se puede ver que los elementos que sean menores a un 60 % serán eliminados, en un inicio, este valor se ira actualizando cada que la estructura, durante la evolución, ya no pueda retirar más material.

De esta manera al final de la evolución, la tasa de rechazo se encontrara en 100 %. El valor de inicio de la tasa de rechazo, dependerá de la zona que contenga elementos con bajo nivel de esfuerzo. Así de igual manera para la tasa de adición, que en este caso se mantendrá fija.



En la figura 5.26, se realiza una comparación entre la distribución de esfuerzo de la estructura inicial y la estructura optimizada, obtenida en la iteración 140. Se puede observar, que existe una mejora en la distribución de esfuerzo, en la estructura final, eliminando áreas ineficientes.

En dicha figura también se observa que la curva que modela el perfil de la cavidad, no tiene distorsiones importantes, durante la evolución. Se logra con esto, una optimización en la forma de dicha cavidad. En la comparación del número de nodos y elementos se muestra claramente, la disminución elementos ineficientes de la estructura.

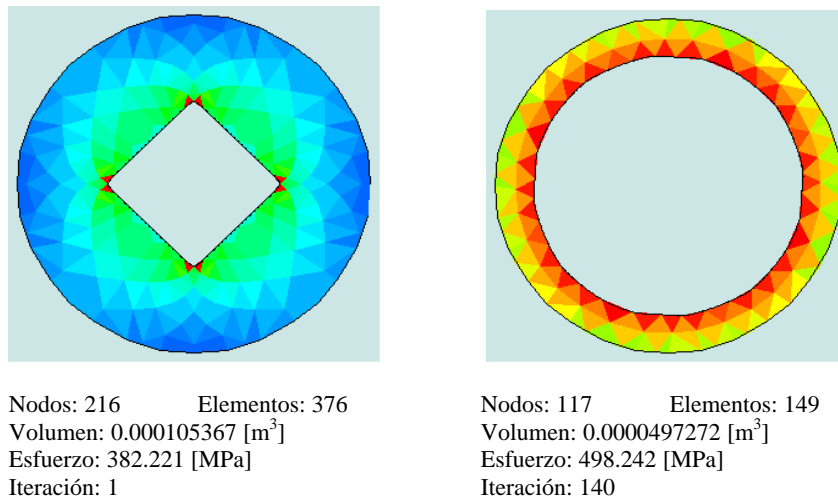


Fig. 5.26. Geometría del perfil: Inicial y Final

En este caso el aumento de esfuerzo fue de 30.3545 % y reducción de volumen de 52.8085 %. El tiempo total de solución del algoritmo fue de 2 hrs. 28 min.

Con este caso de estudio se demuestra el correcto funcionamiento del algoritmo de optimización de forma, al pasar de un perfil cuadrangular a uno circular, tal y como sucede con otras técnicas, que demuestran esto mismo (Annicchiarico).



**5. 3. 2. Caso de Estudio 2.**

Se aplica una fuerza de presión de 110 [MPa] a una estructura circular de Acero comercial (ASTM A36), en toda su región interior. Con un diámetro exterior de 5 [cm], una región interior circular de diámetro 2 [cm] y una longitud de 10[cm], para el análisis se toma una rodaja de dicha estructura de espesor de 2.54 [cm]. Se encuentra sujeta en los tres barrenos. En la figura 5.28 se muestra dicho sistema. Se pretende obtener la estructura óptima que cumpla con el criterio de diseño, factor de seguridad  $F_s \leq 1.3$ .

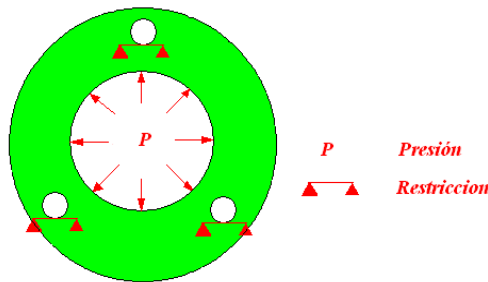


Fig. 5.28. Caso de estudio 2, sistema de cargas y restricciones.

En la figura 5.29 se observa el mallado generado para esta estructura y la distribución de esfuerzos al interior de la misma, al aplicar el algoritmo de solución.

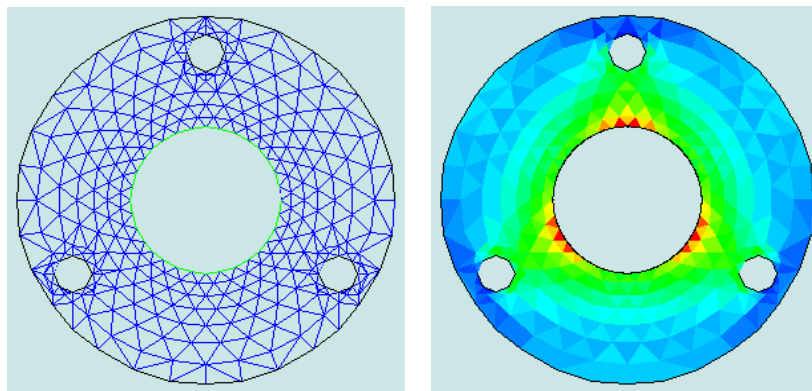


Fig. 5.29. Mallado y Distribución de esfuerzo para el caso de estudio I.

Los parámetros utilizados para este caso particular son:

$$TR = 0.6; \quad TA = 0.99; \quad TER = 0.001; \quad TEA = 0.00001; \quad \text{Tamaño del elemento} = 0.01.$$

En la figura 5.30, se muestra el historial de evolución de la estructura y la optimización de forma del perfil central además de la distribución de esfuerzo de la misma.

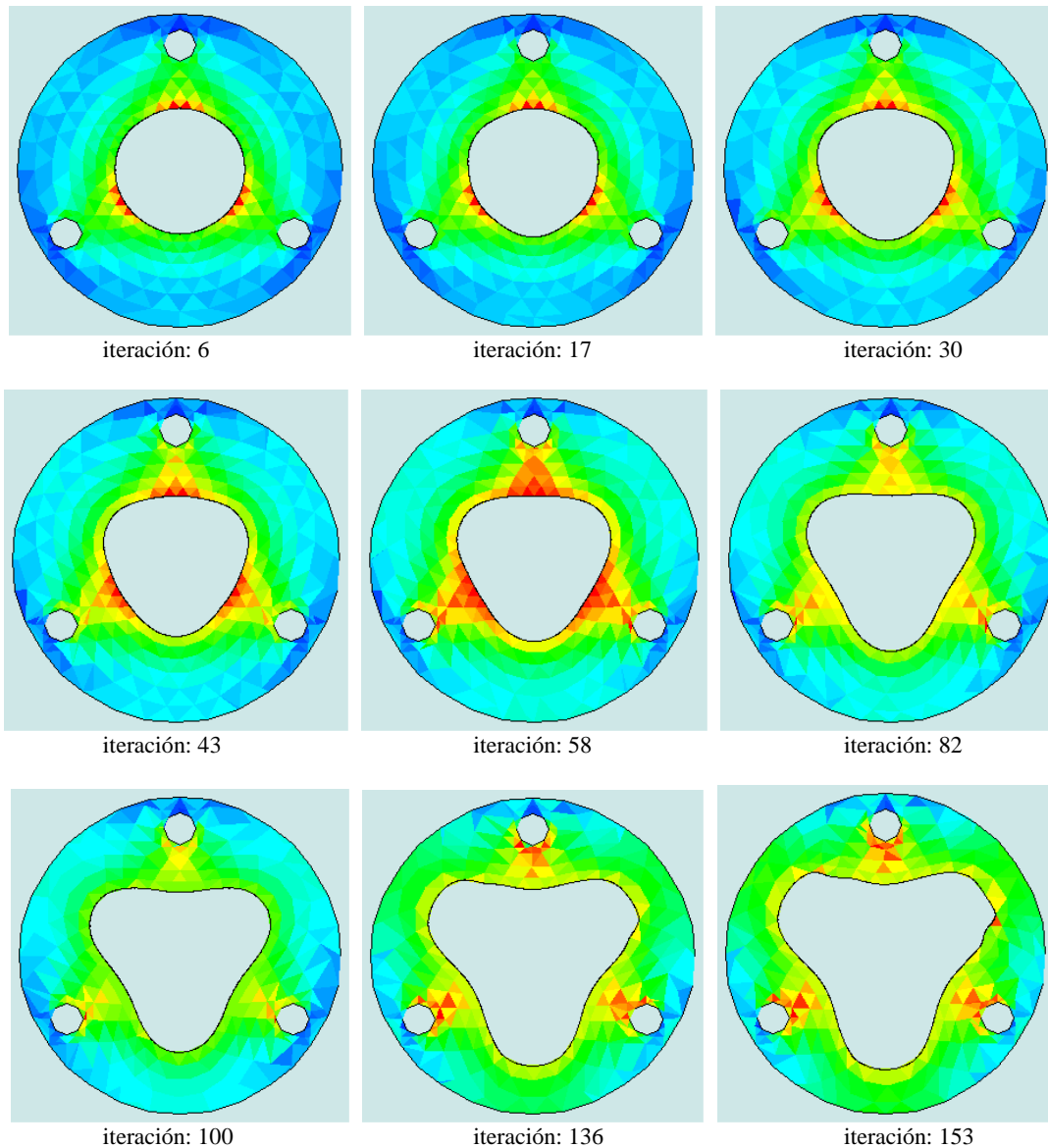


Fig. 5.30. Historial de evolución de la estructura.

En la figura anterior se muestra la tendencia a retirar zonas ineficientes (color azul oscuro), para con ello ir mejorando la distribución de esfuerzo dentro de la estructura, hasta llegar a un límite, es decir un espesor de pared, como se ve en la iteración 153. Dicho espesor de pared es de 4.5 [cm] de diámetro interno. También se observa como el mallador adaptativo va siguiendo el modelo del perfil tras cada iteración, sin provocar grandes sesgos durante la generación de triángulos y deteniéndose justo en el espesor de pared o límite de 4.5 [cm].

En la figura 5.31, se grafican los valores obtenidos durante la optimización: esfuerzo, esfuerzo promedio, volumen e índice de desempeño, por iteración. Aquí se puede ver que el paro del algoritmo se da para la iteración 153, de acuerdo al criterio establecido (ver capítulo 2 sección 2.6).

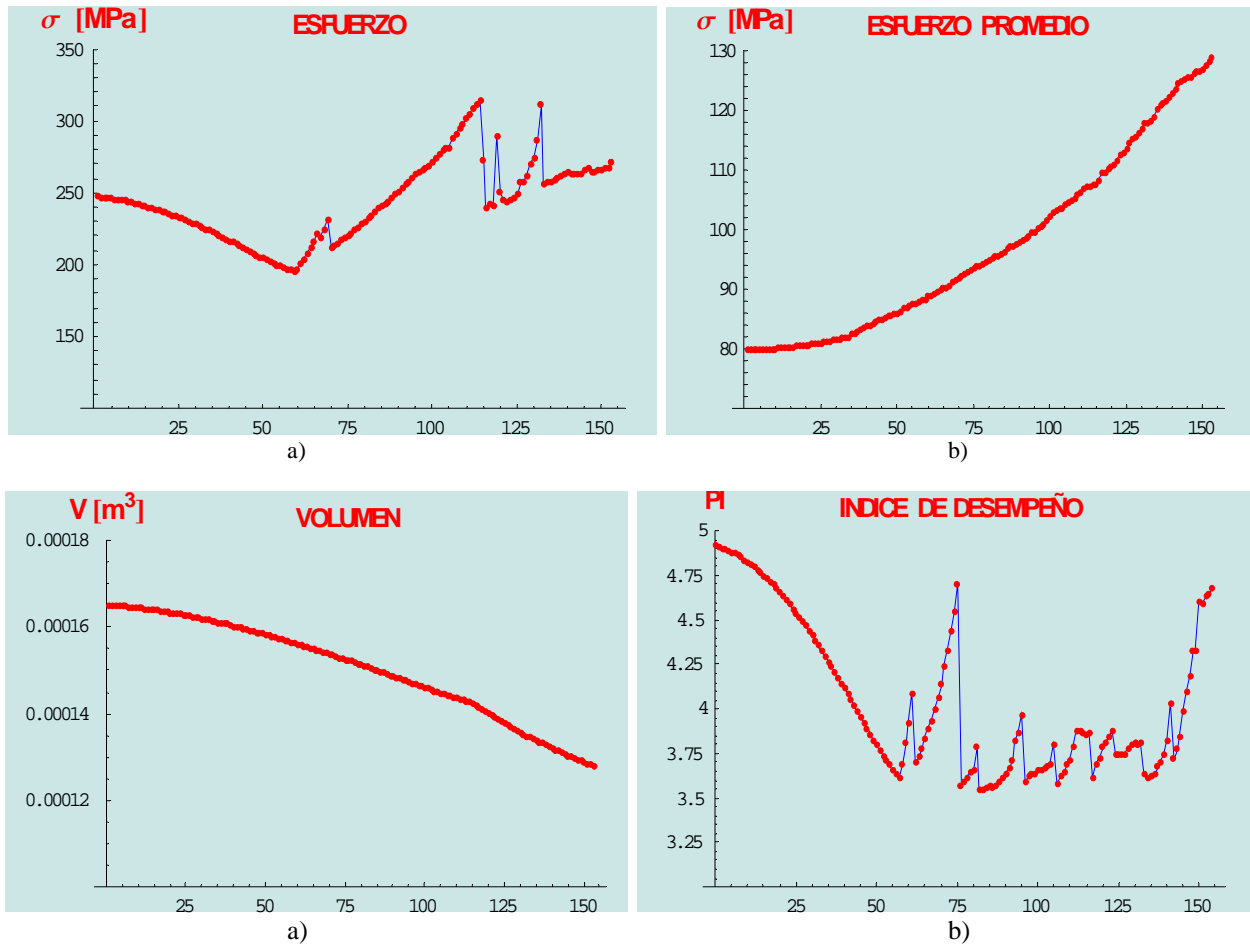


Fig. 5.31. Gráficos de: a) Esfuerzo, b) Esfuerzo Promedio, c) Volumen e d) Índice de desempeño, contra el número de iteraciones.

En la grafica del índice de desempeño (PI), se puede ver, que hay variaciones en las concavidades generadas durante la evolución de la cavidad. Además se puede ver, que existen mínimos locales de PI, cada uno de los cuales representa un estado estable que alcanza la estructura durante su evolución.

Para este caso de estudio, la optimización de forma de la estructura se alcanza en la iteración 131, para las condiciones dadas, a pesar de que el paro se da en la iteración 153. Donde al valor del factor de seguridad en dicha iteración (131) es de  $F_s = 1.2441$ , y cumple entonces con el criterio de diseño impuesto para este caso. Ya que se tienen varios estados estables y cumplen con el criterio de diseño, la iteración 131 cumple además con la función objetivo.

En la figura 5.32 se muestran el aumento de las tasas de rechazo y de adición tras cada iteración. En dicha grafica se puede ver que los elementos que sean menores a un 60 % serán eliminados, en un inicio, este valor se ira actualizando hasta que ya no pueda retirar más material. De esta manera al final, la tasa de rechazo se encontrara en 100 %. El valor de inicio de la tasa de rechazo, dependerá de la zona que contenga elementos con bajo nivel de esfuerzo. Así de igual manera para la tasa de adición, que para este ejemplo se mantendrá fija.

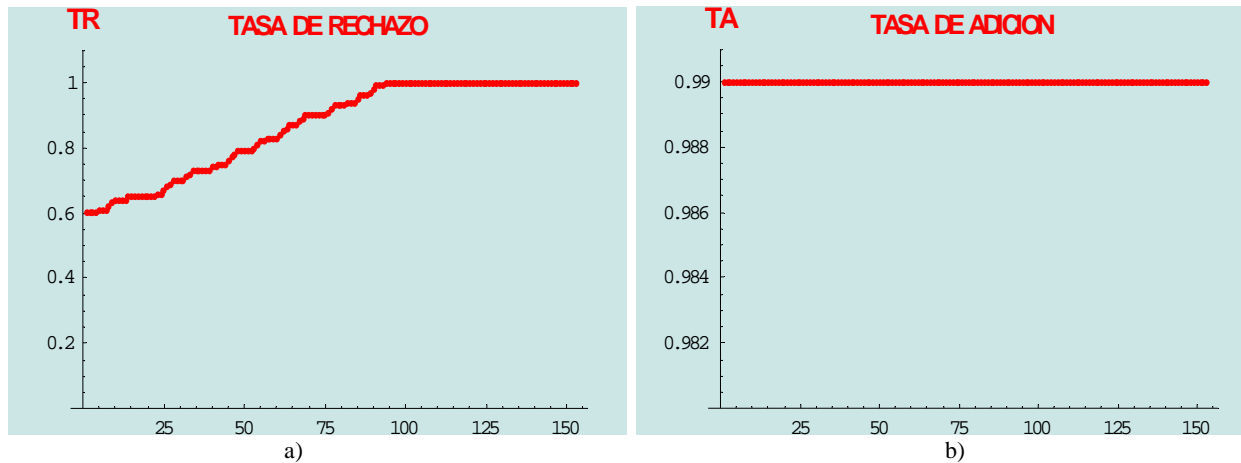


Fig. 5.32. Gráficos de: a) Tasa de Rechazo y b) Tasa de Adición, contra el número de iteraciones.

En la figura 5.33, se realiza una comparación entre la distribución de esfuerzo de la estructura inicial y la estructura optimizada, obtenida en la iteración 131. Se puede observar, que existe una mejora en la distribución de esfuerzo, así como una diferencia apreciable de volumen final.

En dicha figura también se observa que la curva que modela el perfil de la cavidad, no tiene distorsiones importantes, durante la evolución. Se logra con esto una optimización en la forma de dicha cavidad. En la comparación del número de nodos y elementos se muestra claramente, tanto el aumento de esfuerzo como la reducción de volumen.

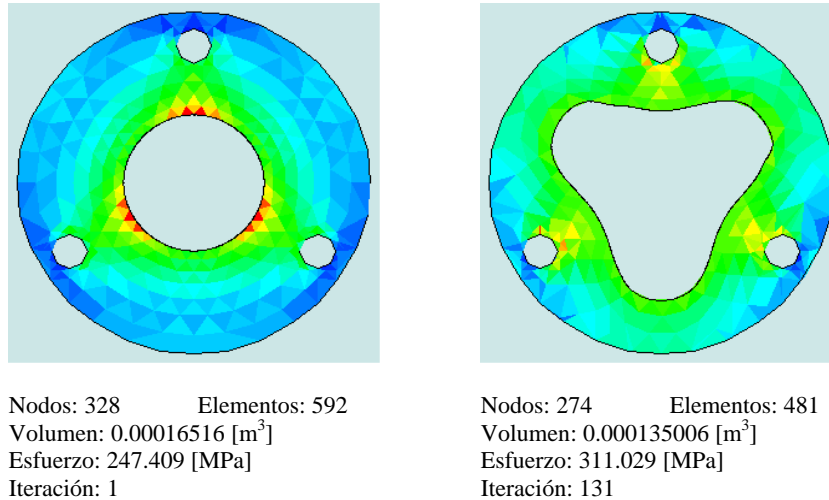


Fig. 5.33. Geometría del perfil: Inicial y Optimizado.

En este caso, el aumento de esfuerzo fue de 25.7145 % y la reducción de volumen de 18.2574 %. El tiempo total de solución del algoritmo fue de 9 hrs. 35 min.

Con este caso de estudio podemos ver que el algoritmo de optimización de forma, es capaz de dar solución, a problemas que pueden ser resueltos, con otro tipo de análisis, como puede ser: el análisis axisimétrico, etc.





### **Resultados.**

En las figuras que muestran el historial de evolución de la estructura, para cada caso particular, se muestra como el mallador se va adecuando o adaptando a las condiciones tras cada iteración. Con esto se puede decir que el mallador tiene una muy buena respuesta, al seguir la curva modelada por B-Splines, logrando una mejor aproximación a la solución de la optimización estructural de forma.

Se puede observar que las tasas de rechazo y adición, son parámetros que el diseñador puede calibrar, de acuerdo a la rapidez de evolución de la estructura, así como también las tasas evolutivas de rechazo y adición, además del factor de tamaño, para poder encontrar las zonas en las cuales se tiene que comenzar a desplazar la frontera para dar comienzo a la optimización.

El índice de desempeño PI, es un valor equivalente a la eficiencia en un sistema, es por ello que al encontrar mínimos relativos o locales, presentados en su gráfica para cada caso particular, es indicativo de que se ha encontrado un estado estable y con ello un óptimo estructural local de dicho sistema.

Durante el proceso de optimización, se presentan en algunos casos, concavidades de consideración o grandes regiones de curvatura elevada, y es aquí donde el valor del esfuerzo se eleva abruptamente. Esto es de esperarse ya que en general las grandes concavidades actúan como concentradores de esfuerzo. Aunque después de cada pico, el sistema se estabiliza.

Las pruebas fueron realizadas en una computadora con las siguientes características: Windows XP, Procesador AMD Sempron 1.80 Ghz., 512 MB RAM, y además del paquete comercial: MATEHEMATICA 5.2 Versión estudiantil.



# Conclusiones

*“Para las personas creyentes, Dios esta al principio.  
Para los científicos está al final de todas sus reflexiones”*

Max Planck

En este trabajo se presentó una metodología de optimización basada en la integración de reglas evolutivas, modelado paramétrico mediante curvas B-Splines y al análisis por elementos finitos, en la optimización estructural de forma de elementos mecánicos, con cavidades, bajo parámetros modificables numéricamente, satisfaciendo los objetivos trazados al inicio.

El algoritmo de optimización, a pesar de mostrar una “inteligencia artificial”, es un soporte o apoyo más que reemplazo para los ingenieros de diseño expertos, para ayudar en la toma de decisiones. Es una herramienta que permite obtener la solución óptima de un problema de diseño, cuyo desempeño no depende de la experiencia del diseñador, como en una metodología tradicional de diseño.

El mallador desarrollado para este trabajo, demostró manejar eficientemente regiones con aristas de radio de curvatura pequeño (aprox. 0.5 veces el tamaño promedio del elemento), lo cual es complicado, así como mantener un tamaño promedio de elementos (valor que depende de cada geometría particular de la cavidad), y con ello tener una convergencia en la solución, así como su capacidad para adaptarse aun a diferentes niveles de fineza de una malla, lo cual dependerá directamente de la necesidad de la aproximación de la solución. En el caso de las mallas finas el tiempo de procesamiento se incrementó alrededor de un 40%. Aunque el tiempo se eleva bastante, en sentido práctico no es excesivo ni limitante durante el FEA.

El introducir un mallador adaptativo durante el FEA, permitió gracias a su capacidad para adaptarse a diferentes contornos, provocados tras cada iteración durante la optimización, una mejor aproximación o convergencia a la forma óptima de la cavidad, sin generar distorsiones, como pudiera suceder cuando se intenta aproximar a una geometría en un mallado homogéneo.

En todos los casos de estudio presentados en este trabajo, se demuestra que la distribución de esfuerzo en cada una de ellos, se vuelve homogéneo conforme el proceso de optimización avanza. Lo cual es de esperarse ya que al eliminar zonas con elementos ineficientes de una estructura, se eleva considerablemente el nivel de esfuerzo en ella, es decir que con la optimización se lleva a una estructura al límite, bajo un sistema de cargas y restricciones particulares.

Se logró reducir el volumen y con ello el peso de los elementos, de manera considerable en todos los casos de estudio, por arriba del 25 % de reducción del valor inicial, pensando en una posible fabricación de las mismas, además de cumplir con un criterio de diseño impuesto a cada uno de los elementos en análisis.

El tiempo total de optimización obtenido tras un cierto número de iteraciones, no es excesivo ya que depende de la complejidad de la geometría de la cavidad, aunque puede ser mejorado, al modificar parámetros como las tasas de adición, rechazo, etc., así como parámetros involucrados en la generación del mallador adaptativo.



**TRABAJOS FUTUROS.**

- ✦ Mejora de los tiempos de ejecución de los cálculos por iteración del algoritmo, depurando las funciones realizadas para este trabajo, así como la utilización de una computadora con más recursos de hardware y software.
- ✦ Obtención de la solución de un mallador adaptativo, para un sistema Tridimensional.
- ✦ Introducir parámetros de manufactura al algoritmo actual de solución.
- ✦ Implementación de un algoritmo capaz de lograr la optimización de forma tanto de una cavidad, así como también de la forma externa o dominio, al mismo tiempo.
- ✦ Implementación de un algoritmo, capaz de lograr la optimización de forma de un sistema tridimensional.
- ✦ Realización de un análisis, posterior a la optimización, desde el punto de vista de procesos de manufactura, para verificar la factibilidad de fabricación de una estructura óptima.



# Bibliografía

- [ 1 ]. **ABBOTT, M. B.**, “*Computational Fluid Dynamics, An Introduction for Engineers*”, 1ª ed., Ed. Longman Scientific & Technical, USA 1989, pp. 17-377.
- [ 2 ]. **ALCAIDE, JORGE, ARTACHO, MIGUEL A.**, “*Diseño de Producto, Métodos y Técnicas*”, 2ª ed., Ed. Alfaomega, México 2004, pp. 19-141.
- [ 3 ]. **ANNICCHIARICO, WILLIAM**, “*Un esquema general para la Optimización Estructural de Formas mediante Algoritmos Genéticos y Elementos de Diseño Geométrico*”, Resumen de Tesis, Universidad Central de Venezuela, Octubre 2000, pp. 226-234.
- [ 4 ]. **ANNICCHIARICO, WILLIAM**, “*Una Metodología para la Optimización Estructural de Formas usando Principios Evolutivos*”, IMME Boletín Técnico, Vol. 45, No. 1, Venezuela 2007, pp. 2-19.
- [ 5 ]. **BATTAGLIA, LAURA, CARDONA ALBERTO**, “*Aplicación de métodos de optimización de Forma en el Diseño Estructural*”, Revista Mecánica Computacional, Vol. XXI, Argentina 2002, pp. 2804-2823.
- [ 6 ]. **BHATTI, M. ASGHAR**, “*Fundamental Finite Element Analysis and Applications*”, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Inc., USA 2005, pp. 3-675.
- [ 7 ]. **CAÑAVATE, FERNANDO**, “*Aplicación de curvas al Diseño Óptimo de Formas*”, Universidad de Murcia, Cartagena, Colombia 2004, pp. 1-12.
- [ 8 ]. **CHANDRUPATLA, T. R.**, “*Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*”, 2ª ed., Ed. Prentice Hall, USA 1997, pp. 1-322.
- [ 9 ]. **COELLO, CARLOS**, “*La Computación Evolutiva en el Contexto de la Inteligencia Artificial*”, 1ª ed., Ed. LANIA, A.C., México 1996, pp. 3-150.
- [ 10 ]. **DIETER, GEORGE**, “*Engineering Design*”, 3ª ed., Ed. Mc Graw Hill, USA 2001, pp. 8 - 123.
- [ 11 ]. **FAIRES, VIRGIL M.**, “*Diseño de Elementos de Máquinas*”, 4a ed., Ed. Limusa, México, 1998, pp. 478 – 589.
- [ 12 ]. **GRESHO, P. M.**, “*Incompressible Flow and the Finite Element Method, Vol. 2: Laminar Flow*”, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Ltd., England 1999, pp. 447-937.
- [ 13 ]. **GOLDBERG, DAVID E.**, “*Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*”, 1ª ed., Ed. Addison-Wesley Publishing Company Inc., EUA 1989, pp. 1-145.
- [ 14 ]. **HUANG, X., XIE Y. M.**, “*A new Algorithm for Bi-Directional Evolutionary Structural optimization*”, Journal SME International Journal, 2006, Vol. 49, No. 4, pp. 1091-1100.
- [ 15 ]. **JENSEN, C. H.**, “*Dibujo y diseño en Ingeniería*”, 2a ed., Ed. Mc Graw Hill, México, 1984, pp. 387 – 423.



- [ 16 ]. **KOZA, JOHN R.**, “*Genetic Programming: On the Programing of Computers by Jeans of Natural Selection*”, 6ª ed., Ed. MIT, USA 1998, pp. 17-120.
- [ 17 ]. **LÖHNAR, RAINALD**, “*Applied CFD Techniques, An Introduction based on Finite Element Methods*”, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Ltd., USA 2001, pp. 1-291.
- [ 18 ]. **LOZANO T., DAVID, VELAZQUEZ V., FERNANDO, ZEPEDA S., ANTONIO**, “*Propuesta de Mallador Adaptativo para el Modelado de Perfiles en Flujos Incompresibles*”, XIV Congreso Anual de SOMIM, Septiembre 2008, pp. 1-8.
- [ 19 ]. **MARTINEZ, P., MARTI, P.**, “*Algoritmo de Crecimiento para el Diseño Optimo de Topología y Geometría de Estructuras Articuladas*”, Revista Métodos Numéricos en Ingeniería, España 2002, pp. 1-15.
- [ 20 ]. **MARTINEZ, PEDRO**, “*Diseño Optimo Simultaneo de Topología y Geometría de Estructuras Articuladas mediante Técnicas Evolutivas*”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, Julio 2003, pp. 37-241.
- [ 21 ]. **MONTERO, GUSTAVO, MONTENEGRO, RAFAEL**, “*Generación automática de mallas de tetraedros adaptadas a orografías irregulares*”, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo Diseño e Ingeniería, Año 2003, Vol. 19, No. 2, pp. 127-144.
- [ 22 ]. **MU K., STELLATELLI A.**, “*Optimización Estructural en el reemplazo de acero por ADI en Elementos sometidos a Fatiga de Contacto*”, IV Coloquio de Fractura y Fatiga, Agosto 2000, pp. 429-435.
- [ 23 ]. **MUÑOZ G., ANTONIO, GONZÁLEZ C., PEDRO**, “*Métodos libres de malla para Ecuaciones Diferenciales*”, Reporte Técnico, Coordinación de Ciencias Computacionales del INAOE, México 2003, pp. 1-24.
- [ 24 ]. **NECMETTIN, KAYA**, “*Optimal design of an automotive diaphragm spring with high fatigue resistance*”, Journal of Vehicle Design, 2006, Vol. 40, No. 2, pp. 126-143.
- [ 25 ]. **NORTON, ROBERT L.**, “*Diseño de Máquinas*”, 2a ed., Ed. Prentice Hall, México, 1999, pp. 703 - 809.
- [ 26 ]. **PALUZNY, M., PRAUTZSCH, H.**, “*Bezier and B-Splines Methods*”, 2ª ed., Ed. Springer, Berlin 2005, pp. 59-98.
- [ 27 ]. **POZRIKIDIS, C.**, “*Numerical Computation in Science and Engineering*”, 2ª ed., Ed. Oxford University Press., EUA 1998, pp. 1-221.
- [ 28 ]. **PROOS, KAAREL**, “*Evolutionary Structural Optimization as a Robust and Reliable Design Toon*”, Thesis Doctoral, University of Sydney Australia, March 2002, pp. 7-218.
- [ 29 ]. **QUEIZAN, ANGEL, SONZOGNI, VICTORIO**, “*Algoritmo de punto Interior para Optimización Estructural*”, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Noviembre 2006, Vol. XXV, pp. 1553-1563.
- [ 30 ]. **QUERIN, OSVALDO M.**, “*Evolutionary Structural Optimization*”, Thesis Doctoral, University of Sydney Australia, April 1997, pp. 15-246.



- [ 31 ]. **RAMIREZ C., FRANCISCO, ORTIZ M., UBALDO**, “*Diseño Óptimo de elementos Mecánicos usando Algoritmos de Crecimiento Biológico*”, Boletín de Ingenierías, Enero-Marzo 2004, Vol. VI, No. 22.
- [ 32 ]. **RAMIREZ C., FRANCISCO, LOPEZ G., EUGENIO**, “*Optimización Geométrica con criterio de Crecimiento Biológico para la Reducción de Concentración de Esfuerzos en Placas con Perforaciones Transversales*”, XI Congreso Anual de SOMIM, Septiembre 2005.
- [ 33 ]. **RODRÍGUEZ C., WILSON, PALLARES M., MYRIAM**, “*Modelación de flujo de aire alrededor de Automóviles para la determinación de fuerzas Drag y Lift por medio de Elementos Finitos*”, Revista Con-Ciencias, Mayo-Junio 2005, Vol. VIII, número 16, pp. 1-12.
- [ 34 ]. **ROGALSKY, T., DERKSEN, R.W., ROCABIYIK, S.**, “*Differential Evolution in Aerodynamic Optimization*”, Journal of aircraft, 2006, pp. 1-8.
- [ 35 ]. **SANCHEZ, GERMAN, MATEUS, SANDRA**, “*Construcción de Mallas Triangulares no Estructuradas*”, Avances en Sistemas Informáticos, Medellín Colombia 2004, Vol. 1, No. 2, pp. 33-39.
- [ 36 ]. **SCHENK, OLAF, HILLMANN, MATTHIAS**, “*Optimal Design of Metal Forming die Surfaces with Evolutive Strategies*”, Journal Computers and Structures, Agosto 2004, Vol. 82, No. 21, pp. 1695-1705.
- [ 37 ]. **SERRATE, JOSEP, HUERTA, ANTONIO**, “*Generación Automática de Mallas no Estructuradas*”, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo Diseño e Ingeniería, Año 2002, Vol. 18, No. 1, pp. 19-23.
- [ 38 ]. **SHACKELFORD, JAMES F.**, “*Introducción a la Ciencia de materiales para Ingenieros*”, 5a ed., Ed. Prentice Hall, México, 1999, pp. 643 – 782.
- [ 39 ]. **SHENE, C. K.**, “*Introduction to Computing with Geometric notes*”, Michigan Technological University, USA 2007, pp. 43-105.
- [ 40 ]. **SHEWCHUK, JONATHAN**, “*Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulation*”, Carnegie Mellon University of Pittsburgh, 2004, pp. 1-10.
- [ 41 ]. **SHIGLEY, JOSEPH E.**, “*Diseño en Ingeniería Mecánica*”, 4a ed., Ed. Mc Graw Hill, México, 1993, pp. 595 - 707.
- [ 42 ]. **TOVAR, CAROLINA, CERROLAZA, MIGUEL**, “*Diseño y Análisis por Elementos Finitos de Placas para Fijación Interna de Fracturas*”, Revista Métodos Numéricos en Ingeniería, España 2002, pp. 1-14.
- [ 43 ]. **ULRICH, K. T., EPPINGER, S. D.**, “*Product Design and Development*”, 3ª ed., Ed. Mc Graw Hill, USA 2004, pp. 12-149.
- [ 44 ]. **VELAZQUEZ, FERNANDO, SANTILLAN, SAUL**, “*Diseño Óptimo Evolutivo*”, Revista Ingeniería, Investigación y Tecnología, Julio-Septiembre 2006, Vol. VII, número 3, pp. 139-150.
- [ 45 ]. **VELAZQUEZ, FERNANDO**, “*Optimización Estructural Evolutiva*”, Tesis Doctoral, UNAM, Octubre 2009, pp. 1-90.
- [ 46 ]. **WINSTON, PATRICK H.**, “*Inteligencia Artificial*”, 3ª ed., Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1999, pp. 183-192.



- [ 47 ]. **WOON, S. Y., QUERIN, O. M.**, “*Structural application of a Shape Optimization Method based on Genetic Algorithm*”, Springer-Verlag, Australia 2001, Structural Optimization 22, pp 57-64.
- [ 48 ]. **XIE, Y. M., STEVEN, G. P.**, “*Evolutionary Structural Optimization*”, 1<sup>a</sup> ed., Ed. Springer, Great Britain 1997, pp. 1-40.
- [ 49 ]. **YOUNG, V., QUERIN, OSVALDO M., STEVEN, G. P.**, “*3D and Multiple Load Case Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO)*”, Springer-Verlag, Australia 1999, Structural Optimization 18, pp 183-192.
- [ 50 ]. **ZHENXING, Y., JIANHUA, R.**, “*A Topology Optimization Method of Three-Dimensional Continuum Structures*”, VI Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Brazil 2005, pp. 1-11.
- [ 51 ]. **ZHIMING, GAO, YICHEN, MA**, “*Shape Optimization for Stokes flow*”, Science Direct, Applied Numerical Mathematics, No. 58, 2008, pp. 827-844.
- [ 52 ]. **ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L.**, “*The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis*”, 5<sup>a</sup> ed., Ed. Butterworth-Heinemann, USA 2000, pp. 1-627.
- [ 53 ]. **ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L.**, “*The Finite Element Method, Vol. 2: Solid Elastics*”, 5<sup>a</sup> ed., Ed. Butterworth-Heinemann, USA 2000, pp. 1-498.



# Anexos

## ANEXO 1.

### A1. 1. Lluvia de Ideas (BRAINSTORMING).

El brainstorming es probablemente el método más conocido y empleado en la generación de ideas. Fue desarrollado por Alex Osborn en los años 50, y quien lo define como:

*“Técnica por medio de la cual un grupo intenta encontrar solución a un problema determinado mediante la acumulación de todas las ideas proporcionadas de modo espontáneo por sus integrantes”.* [2]

El término “Tormenta de ideas” se ha convertido en una expresión común para definir el pensamiento creativo. La base de la tormenta de ideas es una generación de ideas en un ambiente de grupo bajo el principio de la suspensión del juicio o la crítica. Este principio ha sido probado ser muy efectivo por los investigadores científicos tanto a escala individual como de grupo. La fase de generación se separa de la etapa de juicio o crítica de las ideas. La tormenta de ideas es un proceso que funciona mejor siguiendo las siguientes reglas:

1. Tener el problema claro y bien definido.
2. Asignar a alguien para que se encargue de escribir las ideas en medida que se produzcan.
3. Respetar lo siguiente:
  - ✦ Suspender el juicio o crítica.
  - ✦ Toda idea es aceptada y registrada.
  - ✦ Construir ideas por todos.

La tormenta de ideas es una practica tradicional para hacer pensamiento creativo deliberadamente, lo que ha traído como consecuencia que las personas creen que solamente se puede pensar creativamente cuando se esta en grupo. El propósito del método es que los comentarios de otras personas actúen como estímulos de sus propias ideas en una especie de reacción en cadena.

### A1. 2. Despliegue de la Función Calidad (QFD).

El QFD se desarrolló en el Japón hacia el final de la década de 1960, coincidentemente con la introducción de productos japoneses originales. Desde sus inicios fue considerada parte del herramental de la gestión total de la calidad y fue diseñada específicamente para la creación de nuevas aplicaciones y productos. Hacia 1972, en el Astillero de Kobe de Mitsubishi Heavy Industries, con Shigeru Mizuno y Yasushi Furukawa trabajando como consultores externos, se desarrolló la matriz de la calidad, que sistematizaba la relación entre las necesidades de los clientes y las características de calidad incorporadas en los productos. La matriz de la calidad constituye hoy el núcleo del QFD.

QFD son las siglas que corresponden a la expresión inglesa de “*Quality Function Deployment*” traducida normalmente como “Despliegue de la Función de Calidad”. Se trata de un sistema organizado para diseñar o rediseñar productos, con dos objetivos fundamentales:





1. Asegurar que el producto va a responder a las necesidades y expectativas de los clientes.
2. Acortar el periodo de tiempo que va desde la concepción del producto (o de las modificaciones a realizar) hasta su lanzamiento.

El primer objetivo responde a la clásica definición de Calidad “satisfacer las necesidades y expectativas de los clientes”. El QFD propone una metodología que ayuda a conocer cuáles son esas necesidades y a traducirlas en una lista de aspectos técnicos medibles en los que conviene concentrar los esfuerzos. El segundo se refiere a aumentar las posibilidades de acertar a la primera en el diseño del producto.

En 1975, la Sociedad Japonesa de Control de Calidad (JSQC) estableció un comité de estudio del QFD para formular su metodología, y en 1987, publicó un estudio sobre las aplicaciones del QFD. Al cabo de unos diez años desde su origen, el concepto del QFD se consolidó y fue adoptado por grupos industriales como Toyota. Por ser una herramienta de aplicación general, pronto se vio su utilidad en organizaciones de electrónica, artefactos para el hogar, caucho sintético y en el sector de los servicios, se expandió a los EEUU, donde fue incorporado por Digital Equipment Corporation, Ford Motor Company, Hewlett-Packard y otras organizaciones.

La idea del QFD es que el diseño debe reflejar los gustos y deseos de los clientes más que el potencial tecnológico o las preferencias de los ingenieros de diseño. En los últimos años ha aumentado la gama de aplicaciones del QFD. Se ha utilizado en el planeamiento estratégico tanto en operaciones de manufactura como de servicios, en organizaciones grandes y pequeñas. Se ha aplicado a la comprensión de fenómenos organizacionales y a la mejora de servicios en el sector público y en la educación. Algunos modelos del QFD emplean enfoques que contemplan el impacto ambiental de los diseños.

### Estructura del QFD

Se trata de decidir los valores que deben tomar las características técnicas (medibles) del producto, en la figura A1.1, se observa la esquematización de la estructura del QFD, tomando en consideración:

- ◆ Las demandas del cliente, atendiendo también a la importancia que otorga a cada una de ellas.
- ◆ Lo que ofrece la competencia, en esos aspectos que el cliente demanda.
- ◆ El plan que se propone la organización, de acuerdo con su estrategia general o con la imagen de marca que pretende.
- ◆ Las características técnicas del producto.
- ◆ Las relaciones que existen entre las características técnicas y las demandas del cliente, así como de las características técnicas entre sí.

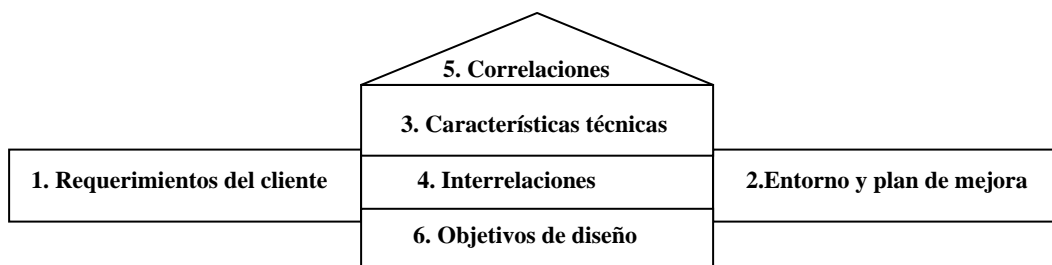


Fig. A1.1. Estructura general del QFD.

En la figura A1.2, se muestra un ejemplo de aplicación de QFD, a un problema real.

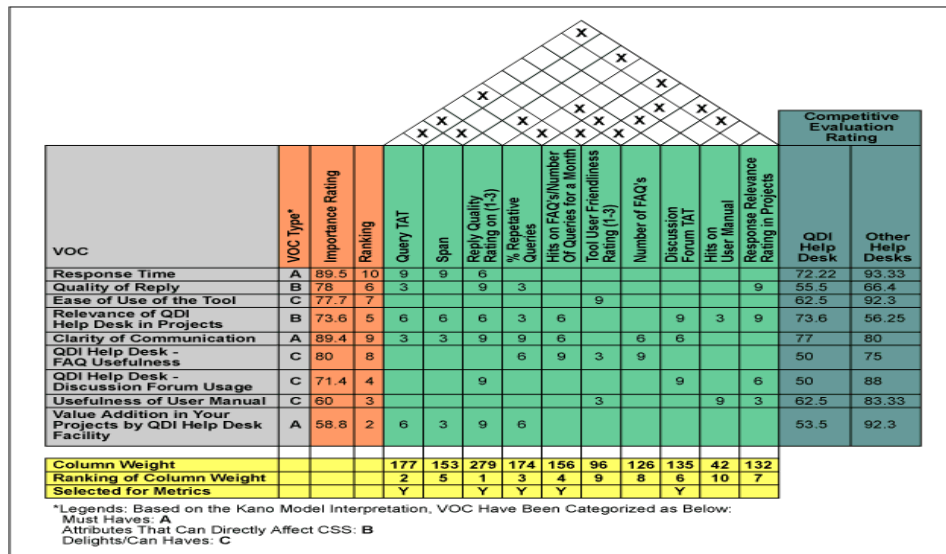


Fig. A1.2. Ejemplo de aplicación de QFD.

### A1. 3. Resolución Inventiva de Problemas (TRIZ).

La expresión TRIZ proviene de la palabra rusa “ТРИЗ”, que es el acrónimo de “Teoría de Resolución de Problemas Inventivos”. Aunque TRIZ se ha generalizado ampliamente en todo el mundo, en algunas publicaciones americanas, se puede encontrar la palabra TIPS (Theory Inventive Problem Solving). El creador del método TRIZ fue Genrich Altshuller, un ingeniero ruso que desarrolló la teoría a través del análisis de un millón y medio de patentes de invención a 1990, año en el que logró reconocimiento internacional. Se percató de que a pesar de que los inventos que analizó resolvían problemas diferentes en campos también muy diferentes, las soluciones aplicadas podían obtenerse a partir de un conjunto relativamente reducido de ideas básicas o principios de invención.

Altshuller entre 1961 y 1979 escribió libros básicos, exponiendo el método en forma ordenada e introduciendo el nombre TRIZ en el texto “La creatividad como una ciencia exacta”. El método ha sido aplicado casi exclusivamente a la resolución de problemas técnicos o tecnológicos, pero dado el inmenso número de estos problemas, hoy es la técnica de creatividad más utilizada por empresas y universidades.

*TRIZ es un método sistemático para incrementar la creatividad técnica, basado en el estudio de los modelos de evolución de patentes y en otros tipos de soluciones a problemas [43].* Sorprende por la rapidez y calidad de los resultados obtenidos, donde gracias a ellos se han realizado avances importantes además de resolver problemas de extrema dificultad en las industrias y ciencias básicas; las aplicaciones principales se dan en las empresas y en la investigación, donde se utiliza para la resolución de problemas de estrategia, gestión o tecnología

La creatividad técnica es el conjunto de procedimientos de “razonamiento creativo” que tienen por objeto resolver problemas con soluciones innovadoras. El apelativo técnica se añade a la palabra creatividad para diferenciarla de la creatividad artística y excluir de su alcance cualquier aspecto relacionado con el arte, aunque si puede manejar criterios de ergonomía o estética. Puede utilizarse para casi cualquier cosa

El razonamiento creativo es una forma modificada de razonar que persigue la obtención de ideas de baja probabilidad, novedosas e innovadoras, que no serían accesibles de otra forma. Las diferentes formas que existen para provocar este tipo de razonamiento especial son las técnicas de creatividad.



### Problemas Inventivos.

Un problema inventivo es donde la solución causa otros problemas. Si la solución cae dentro de nuestra experiencia o campo, tales como la ingeniería mecánica, el número de prueba y error será algo menor, pero no deja de ser un método irracional. Si la solución no se alcanza, el ingeniero debe buscar más allá de su experiencia y conocimiento, es decir deberá incursionar en otros campos, como la química o electrónica. Luego el número de pruebas crecerá dependiendo de lo bien que pueda manejar las herramientas psicológicas, intuición y la creatividad. Un problema adicional es que estas herramientas psicológicas tales como la experiencia y la intuición, son difíciles de transmitir a otra persona dentro de una organización. Esto se dirige a lo que se llama inercia psicológica, donde las soluciones consideradas están dentro de la propia experiencia de uno y no buscar en tecnologías alternativas para desarrollar nuevos conceptos de solución.

### Condiciones del Triz.

- ✦ Ser un procedimiento sistemático paso a paso.
- ✦ Ser una guía a través de amplios espacios de solución para dirigir los pasos a la solución ideal.
- ✦ Ser repetible y confiable y no dependiente de las herramientas psicológicas.
- ✦ Debe permitir el acceso al cuerpo del conocimiento inventivo.
- ✦ Debe permitir agregar elementos al cuerpo de conocimiento inventivo.
- ✦ Ser lo suficientemente amigable para los diseñadores siguiendo la aproximación general para la resolución de los problemas inventivos.

Existen dos tipos de problemas que el ser humano debe enfrentar:

1. Soluciones previamente conocidas.
2. Soluciones desconocidas.

Aquellas con soluciones conocidas usualmente pueden ser resueltas con informaciones obtenidas de los textos técnicos y publicaciones especializadas, asimismo las consultas a los especialistas del campo en cuestión. Estas soluciones siguen un patrón de resolución de problemas, tal como se muestra en la siguiente figura A1.3:

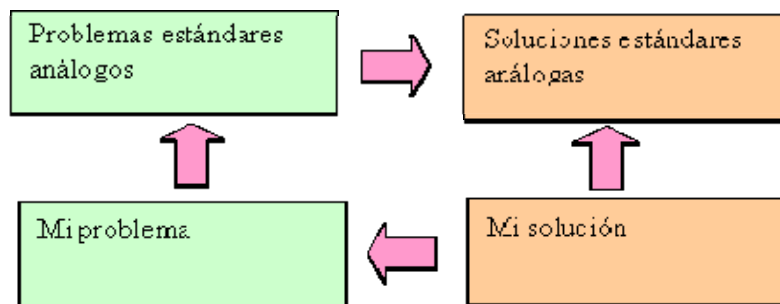


Fig. A1.3. Aquí, el problema particular es elevado hacia un problema estándar de naturaleza análogo o similar.

El TRIZ, tiene una extensa base teórica con algunos postulados. Los tres principales de ellos son:

**Primer Postulado:** “La mayoría de los sistemas hechos por el hombre evolucionan siguiendo pautas predeterminadas, en vez de modo aleatorio. Estas pautas se pueden conocer a través del estudio de la evolución de varios sistemas y el conocimiento adquirido y se las puede utilizar para acelerar la evolución de otros sistemas”.

**Segundo Postulado:** “La mayoría de los sistemas técnicos que existen tienen recursos redundantes, es decir, tienen mas recursos de los necesarios para realizar las funciones para las que fueron concebidos. Como consecuencia, casi



todos los sistemas pueden realizar su función de forma más efectiva o realizar funciones adicionales, sin necesidad de ser modificados”.

**Tercer postulado:** “Se pueden encontrar formas comunes de resolver problemas o de mejorar un sistema, basadas en las etapas de evolución predeterminadas, mediante el análisis histórico de las invenciones. Esto permite que el conocimiento para la innovación pueda ser recogidos y transferidos”.

Ejemplo: Supongamos que necesitamos diseñar un dispositivo rotatorio cuya salida es 100 rpm, a partir de un motor eléctrico de CA 2300 rpm. El problema estándar análogo es como reducir la velocidad del motor. La solución estándar análoga es un reductor de velocidad o caja de transmisión a engranaje, luego este reductor será diseñado con apropiadas dimensiones, peso, torque, etc.

Si deseamos reducir el costo de una pieza metálica estampada, lo mejoramos reduciendo el espesor de la chapa, pero como resultado se resiente su resistencia mecánica. Para alcanzar una solución ideal se deben eliminar las soluciones de compromiso o trade off, es decir eliminar totalmente las causas.

#### **A1. 4. Matriz de Decisión.**

El principio de cualquier método de evaluación es permitir que los principios de diseño se vean claramente y puedan ser manejados. El método de toma de decisión fue desarrollado en 1981. Utiliza directamente el eje vertical de la matriz para expresar los criterios de selección y el horizontal para expresar las distintas alternativas. Este permite alternar el pensamiento divergente (análisis) y el convergente (síntesis), ya que es alternativamente un método de generación de soluciones y otro de selección de las mismas. Una característica esencial es la comparación de cada alternativa con una solución referencia. Una solución referencia es aquella que se considera la mejor, es decir, aquella que más probablemente cumpla con las restricciones de las especificaciones de diseño del modo más efectivo.

La matriz de decisión hace más difícil que la gente pueda imponer sus ideas por motivos no razonados, el punto de vista variable, junto con los necesarios intentos por eliminar las características negativas de una solución aparente menos aceptable en comparación con la solución de referencia, produce la aparición de nuevas soluciones. Como método es iterativo, las continuas iteraciones expanden y contraen la matriz hasta el punto en el que se alcanza la convergencia en el mejor diseño.

La siguiente secuencia es la que se lleva a cabo durante la aplicación de la matriz de decisión para la solución de un problema:

1. Establecer un número de soluciones posibles.
2. Establecer una matriz de comparación y evaluación de conceptos, de modo que se compare las distintas soluciones generadas frente a los criterios de evaluación.
3. Los criterios de evaluación deben estar basados en lo requerimientos descritos en las especificaciones, deben ser claros y entendibles, se les debe agregar un porcentaje, el cual los pondrá en un nivel de importancia durante la evaluación.
4. Al comparar cada solución frente a cada uno de los criterios de evaluación se pondrá en esa casilla un valor comprendido entre 0 y 10, por ejemplo: 0 es malo, 5 es regular y 10 es excelente.
5. Al final ese valor se multiplica por el porcentaje asignado al criterio y se suman todas las casillas de los criterios aplicados a una solución particular. Este último valor total nos dará la mejor solución propuesta para el sistema o subsistema a resolver.



A continuación en la tabla A1.1 se muestra un ejemplo de aplicación de la matriz de decisión. Con base en la generación de alternativas, se muestra la selección de las mejores soluciones basados en algunos criterios de diseño, por medio de una matriz de decisión, que es utilizada para resolver el sistema de posicionamiento de una maquina desgranadora de maíz.

<i>Sistema</i>	<i>Tipo de solución</i>
<b>POSICIÓN</b>	*-. Corredera con seguro
	**-. Corredera con cola de Milano
	***-. Corredera con Ranura tipo T
	****-. Corredera tipo Cajón, con rodamientos

#### MATRIZ DE DECISIÓN

	<b>Materiales 0.14</b>	<b>Costo 0.22</b>	<b>Durabilidad 0.12</b>	<b>Mantenimiento 0.14</b>	<b>Seguridad 0.24</b>	<b>Dimensiones 0.12</b>	<b>Fácil uso 0.12</b>	<b>Total</b>
*	9	9	8	9	9	8	9	<b>8.70</b>
**	9	7	8	8	9	8	9	8.08
***	9	7	7	7	9	8	9	7.76
****	9	9	7	9	9	8	9	8.42

La mejor solución es: una *corredera con seguro* en cada uno de los puntos de corte de maíz.

Tabla A1.1. Matriz de decisión para un sistema de posicionamiento de una desgranadora de maíz.

#### A1. 5. Matriz Morfológica.

Este método de generación de alternativas fue desarrollado por Zwicky, se basa en la combinación de soluciones a las subfunciones del producto para obtener una gran cantidad de alternativas. Una vez definidas las funciones y subfunciones que debe realizar el producto, es conveniente realizar una exploración exhaustiva de las posibles opciones de solución que están disponibles para lograr el desempeño del producto deseado.

En las matrices morfológicas se hace un arreglo matricial, que tiene en un eje coordinado las funciones o subfunciones a cumplir por el producto y en el otro eje todas las posibles formas de cumplir con esta función. Las formas de cumplir esta función se dibujan de manera muy sencilla, con lo cual se obtiene un número determinado de soluciones a cada función o subfunción. Se analiza la compatibilidad entre las diferentes formas de cumplir el objetivo mediante reuniones de análisis, donde se busca la compatibilidad entre las diferentes funciones. La representación icónica es lo más sencillo y define los principios básicos de operación que en ocasiones no son compatibles entre sí. Para que esto no ocurra, se busca establecer esta compatibilidad de manera gráfica, uniendo aquellos principios que sean compatibles mediante líneas de colores. Cuando no hay compatibilidad para coordinar los principios básicos de operación, se desecha la solución que surge de esta combinación.

Otro filtro es la imposibilidad de cumplir las especificaciones que se han definido, ya sea por el principio de operación o por el rendimiento esperado de la solución propuesta. Hay que tener mucho cuidado en no descalificar soluciones, a menos que se tengan razonamientos objetivos y cuantificables, que puedan sustentar una decisión de esta naturaleza. La siguiente secuencia es la que se lleva a cabo durante la aplicación de la matriz morfológica para la solución de un problema:



1. Establecer un número de soluciones posibles.
2. Establecer una matriz de comparación y evaluación de conceptos, de modo que se compare las distintas soluciones generadas frente a los criterios de evaluación.
3. Incorporar bocetos relativos a cada solución, de manera que se tenga siempre presente cual es cada una.
4. Se busca establecer compatibilidad de manera gráfica, uniendo aquellos principios que sean compatibles mediante líneas de colores.

Un ejemplo de esta metodología se muestra en la figura A1.4 en donde se aplica para el diseño de una cuchara eléctrica.

Functions / Solution Principles	Eccentric Moveable Weight	Direct Translation	Electrical			
Transform Energy						
Transmit to Utensil	Gripteeth	Friction Pad	Direct Attachment	Magnetic Field		
Position Utensil	Pre-position	Taper	Eccentric Weight	Track (Fixed)	Relative Rotation	
Lock Position (Hard Locks)	Clamp	Friction	Magnets			
Reorientation (Soft Locks)	Spokes	Rotational Metal	Electro-magnetic	Roller Pin	Screw	

Fig. A1.4. Matriz Morfológica para la solución de un diseño de cuchara eléctrica.



## ANEXO 2.

### A2.1. Optimización Bidireccional Estructural Evolutiva (BESO).

El método de ESO descrito anteriormente ha demostrado ser exitoso obteniendo soluciones óptimas en los problemas estructurales y este éxito es debido al crecimiento lento de la estructura por ciclo. Cuando toma varios días obtener la solución un problema de ESO en una poderosa PC, el costo computacional se vuelve entonces una condición sumamente significativa. Así, Querin en 1997 desarrolló una manera más eficaz de realizar una optimización estructural evolutiva. La nueva técnica desarrollada era Optimización Bidireccional Estructural Evolutiva (BESO), el método donde la estructura física inicial contuvo el número mínimo de elementos necesario para soportar toda la carga en un problema de una viga en cantiliber.

El BESO se define como:

*“la adición de material donde la estructura se encuentra sobre-esforzada y quitando el material donde la estructura se encuentra en un nivel bajo de esfuerzo de manera simultánea, en un proceso iterativo hasta que se logra una estructura óptima”.* [49]

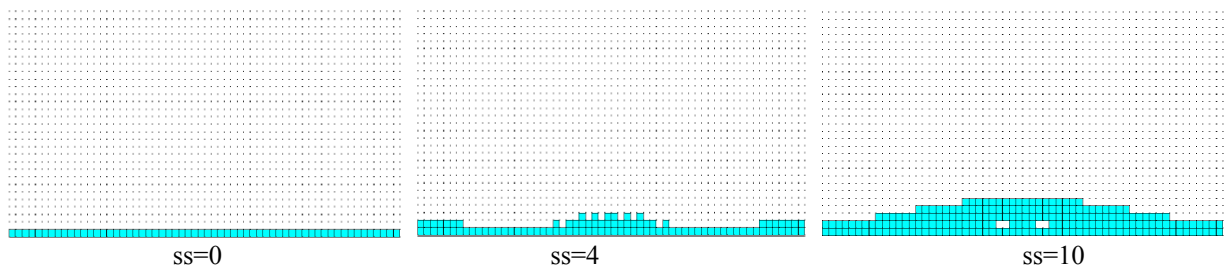
En el BESO, los elementos de la estructura pueden agregarse o quitarse de esta. La suma y procesos del levantamiento son el AESO y métodos de ESO respectivamente. Sin embargo, cuando se combinan ambos métodos, alguno debe gobernar, las ecuaciones que manejan ambos métodos necesitan ser modificadas para que el método de BESO trabaje propiamente. La metodología implementada para este método es muy semejante a la del ESO, solo que se introduce una condición adicional para que se eliminen elementos innecesarios y se añadan en lugares en donde se necesite, mediante el cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$\sigma_e \leq RR * \sigma_{VM \max} \quad \dots \quad (A2.1)$$

$$\sigma_e \leq IR * \sigma_{VM \max} \quad \dots \quad (A2.2)$$

Donde RR es la tasa de rechazo  $RR_{i+1} = RR_i + ER * SS + RR_i * ON \quad \dots \quad (A2.3)$

IR es la tasa de inserción, SS es el número de iteraciones durante el proceso de optimización y ON es el número de oscilaciones durante el proceso. En la figura A2.1 se muestra un ejemplo de la aplicación del BESO, para obtener la estructura de Mitchell, su desarrollo después de 47 iteraciones ss y al final el nivel de esfuerzos generados en la estructura final.



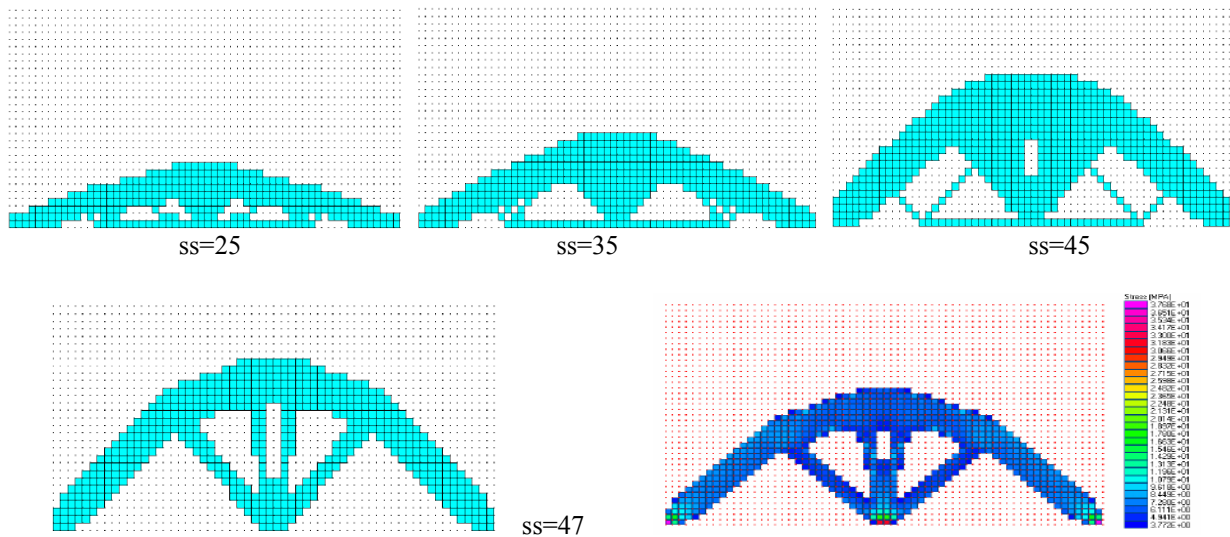


Fig. A2.1. Evolución iterativa de una Estructura de Mitchell y nivel de esfuerzos mediante la Optimización Bi-direccional Estructural Evolutiva (BESO) [49].

## A2. 2. Algoritmos Genéticos (GA).

Es otro de los métodos de optimización estructural más comunes en la práctica, debido a su gran poder para encontrar el máximo valor dentro de un número valores máximos, los cuales se adaptan perfectamente a las restricciones impuestas por un problema.

*El algoritmo genético es un algoritmo de búsqueda basado en los mecanismos de selección natural y genética natural. Estos combinan sobrevivencia del más apto entre un grupo estructurado con una estructura que aún intercambia información aleatoriamente para formar un algoritmo de búsqueda con algunos de los estilos innovadores de búsqueda humana. [12]*

En cada generación, un nuevo grupo de criaturas artificiales (cadenas) son creadas usando bits y piezas del más apto al más viejo; una ocasional parte nueva es probada para una buena medida. El algoritmo genético no es un simple camino aleatorio. Estos aprovechan eficazmente la información histórica para especular una nueva búsqueda de puntos con un mejor rendimiento esperado.

Los algoritmos genéticos fueron desarrollados por John Holland (estudiante y profesor de la Universidad de Michigan). La meta de sus búsquedas fueron dobles: a) Explicar el abstracto y riguroso proceso de adaptación de los sistemas naturales y b) el diseño de sistemas artificiales que conservan los importantes mecanismos de los sistemas naturales. Este enfoque da ventaja para importantes descubrimientos en ambos sistemas científicos: naturales y artificiales. El tema central de búsqueda de un algoritmo genético fue la solidez, el balance entre la eficiencia y la eficacia necesaria para sobrevivencia en muchos y diferentes entornos. Las implicaciones de solidez para sistemas artificiales son múltiples. Si el sistema artificial puede ser más sólido, los rediseños costosos pueden ser reducidos o eliminados. Si altos niveles de adaptaciones pueden ser conseguidos, existen sistemas que pueden realizar muchas funciones y mejor.

Los métodos basados en cálculos fueron analizados profundamente. Estos se subdividen en dos clases principales: directos e indirectos. Los métodos indirectos buscan extremos locales por solución, usualmente en el grupo no lineal de ecuaciones resultantes del arreglo, el gradiente de la función objetivo es igual a cero. Los métodos directos buscan óptimos locales por rayado de la función y movimiento en una dirección relativa al gradiente local. Primero, ambos métodos son locales en alcance; estos buscan el mejor el óptimo en una vecindad de puntos. Segundo los métodos



dependen de la existencia de derivadas. Los GA son un ejemplo de procedimientos de búsqueda que eligen al azar como herramienta guía, una exploración de búsqueda de un parámetro en un código del espacio. Usando el azar escogiendo una herramienta en un proceso de búsqueda dirigido parece extraño al principio, pero contiene muchos ejemplos.

### Optimización Estructural vía Algoritmos Genéticos.

Un área de interés común es la optimización estructural. La aplicación de los GA a fuertes problemas de optimización estructural donde más técnicas estándar son inapropiadas por el problema de tamaño, multimodalidad, u otras dificultades comunes bajo investigación en el área de materiales compuestos. El objetivo en estos problemas es minimizar el peso de la estructura sujeta a un máximo y mínimo esfuerzo restringido en cada miembro de la armadura en cuestión (Annicchiarico). En la figura A2.2, se muestra un ejemplo de optimización mediante la aplicación de GA, se tiene el problema definido y sus restricciones, además parte del proceso iterativo, para posteriormente hacer una comparación de esfuerzos entre pieza original y la pieza optimizada.

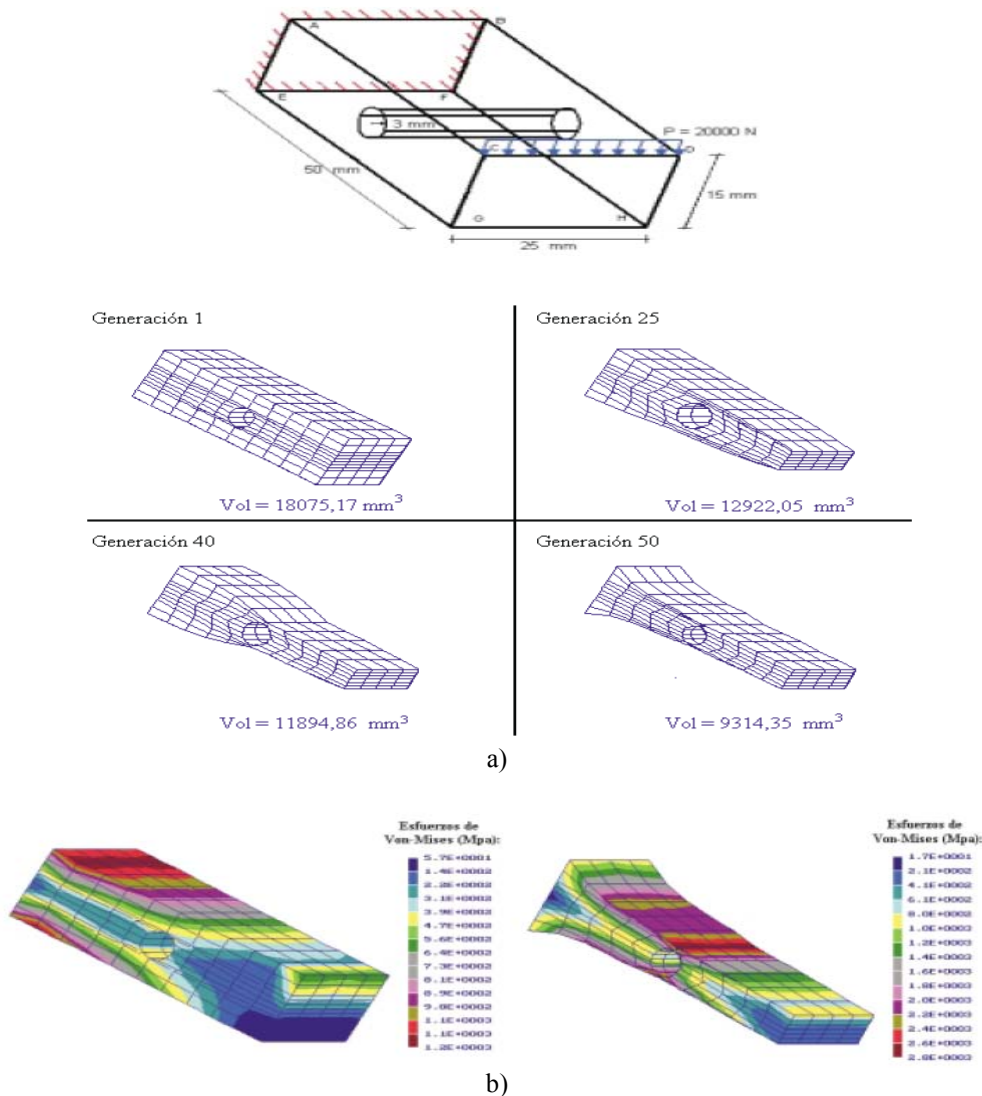


Fig. A2.2. a) Restricciones iniciales e iteraciones de evolución y b) Optimización de forma mediante la técnica denominada Algoritmos Genéticos (GA) [3].



## ANEXO 3.

A continuación se realiza una descripción breve de la metodología general del FEM:

### 1. Discretización del Dominio a través de Elementos Finitos.

El análisis por elementos finitos depende de un número de elementos y el arreglo de estos para definir el modelo. La exactitud de la solución mejora cuando se incrementa el número de elementos, lo cual involucra un requerimiento computacional que es incrementado rápidamente debido a ello. La mayor concentración de elementos en ciertas regiones que son producidos por la discretización de un modelo en elementos finitos, provoca tener una mejor aproximación en la solución del modelo. Para lograr una buena discretización se deben considerar los siguientes conceptos:

1. **Geometría física del dominio.** Bastantes elementos deben ser usados en el modelo del dominio para tener una buena exactitud en la solución. Cuando un dominio curvo se discretiza usando elementos finitos con lados rectos, se debe usar un número razonable de elementos; de otra manera estos generarán una discrepancia entre la geometría original y la discretización por elementos finitos.
2. **Exactitud deseada.** Generalmente, usando más elementos se produce mayor exactitud en la solución.
3. **Formulación de elementos.** Algunos elementos producen mayor exactitud que otros, es por ello que debe escogerse los más adecuados para llevar a cabo la discretización.
4. **Características especiales de la solución.** Las regiones sobre las cuales la solución cambia rápidamente, en general requieren un gran número de elementos para capturar la exactitud, para con ellos tener altos gradientes en la solución. El resultado de esos gradientes en el modelo, es usado para guiar el proceso de refinamiento de malla en esas regiones.
5. **Interacción de elementos.** Los elementos son unidos por nodos. La solución a estos nodos son las variables primarias en el proceder del elemento finito. Esto es importante para crear mallas con elementos adyacentes, que son conectados siempre de esquina a esquina.
6. **Simetría.** En muchos problemas prácticos, el dominio y las condiciones de frontera son simétricas, entonces se puede especificar simetría en el modelo y en la solución. La importancia de reconocer la simetría es debido a que es una ventaja el reducir el tamaño del modelo y con ello el sistema de ecuaciones a resolver.

El número y disposición de los elementos debe ser lo bastante buena para aproximar la geometría, cargas y otras características físicas del problema. Es posible seleccionar regiones en donde la solución cambia rápidamente antes del refinamiento e indicar en cuales se debe de llevar a cabo dicho proceso. Para ver la convergencia de la solución, se puede seleccionar un punto en el modelo y monitorear la solución de este. La solución debe comenzar a estabilizarse después de usar un número de elementos en el modelo que tenga un nivel razonable. En la figura A3.1, se muestra un mallado con elementos triangulares y rectangulares.

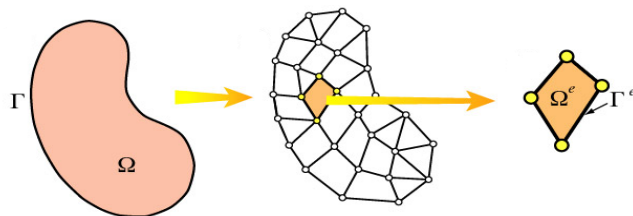


Fig. A3.1. Ejemplo de discretización de un modelo, en elementos cuadrangulares y triangulares.

## 2. Ecuaciones de los Elementos.

Cada situación de análisis que es descrita en términos de una o más ecuaciones diferenciales requiere de un apropiado grupo de ecuaciones de elementos. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones gobernantes, varios elementos con diferentes formas y características pueden ser considerados para una aplicación. Es por ello que escoger un elemento apropiado para una aplicación se vuelve vital y con ello poder entender mejor la aproximación que esta tendrá durante el cálculo final.

La solución del elemento propuesta se escribe en términos de variables seleccionadas en puntos denominados *Nodos*. Las variables en los nodos son generalmente referidas como los *Grados de Libertad*, una terminología que fue desarrollada para el método por ingenieros de estructuras, como se puede observar en la figura A3.2:

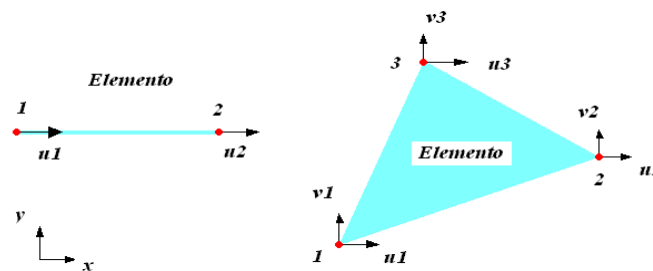


Fig. A3.2. Tipos de Elementos Finitos en 1D y 2D, además de sus respectivos grados de libertad en cada nodo [5].

La geometría de un elemento depende del tipo de la ecuación diferencial gobernante. Para problemas unidimensionales, esta tiene una ecuación diferencial ordinaria, y el elemento es una línea recta o curva. Para problemas gobernados en dos dimensiones, con 2 ecuaciones diferenciales parciales, los elementos usualmente son triángulos o cuadriláteros. En problemas en tridimensionales se requieren tetraedros o elementos con paredes solidadas. Todo esto se muestra en la figura A3.3.

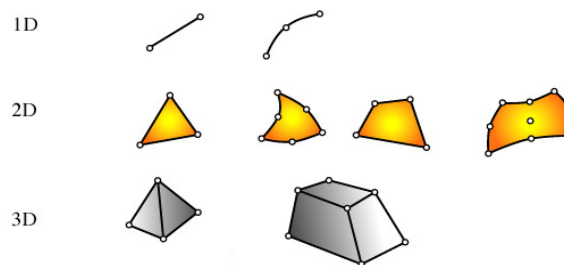


Fig. A3.3. Tipos de Elementos Finitos en 1D, 2D y 3D [5].

Las ecuaciones de los elementos expresan una relación entre los parámetros físicos en las ecuaciones diferenciales y los grados de libertad en los nodos. Esto provoca que en un algoritmo de solución, la ecuación del elemento sea fácilmente programable dando las coordenadas de los nodos, además de otros parámetros físicos, se pueda obtener entonces una ecuación de elemento con valores numéricos.

El número de ecuaciones de algunos elementos puede ser muy largo es por ello que se utiliza una notación matricial. La programación se organiza en dos fases: en la primera, la matriz del elemento se desarrolla para un elemento característico que represente a todos los demás elementos del modelo discretizado, sin utilizar los valores actuales de cada elemento lo cual nos llevara a una forma simbólica. En la segunda fase se utiliza la formula general o simbólica



del elemento representativo, para generar entonces las matrices de todos los elementos obteniendo valores específicos para cada matriz.

### 3. Ensamble de las Ecuaciones de los Elementos.

La discretización en elementos finitos divide el dominio de solución o estructura en elementos simples. Para cada elemento las ecuaciones de elemento finito pueden ser escritas o sustituidas por valores numéricos en las formulas para cada tipo de elementos. El principal concepto en el proceso de ensamble es que un nodo común entre varios elementos, su solución nodal es igual para cada elemento dividido por dicho nodo. De este modo contribuye al grado de libertad de todos los elementos adyacentes que deben ser añadidos de manera conjunta. En general se puede identificar una serie de pasos a seguir para ensamblar elementos:

- ✦ Asignar un número distinto a cada nodo perteneciente a cada elemento.
- ✦ Identificar los nodos de cada elemento, lo cual dará un vector de posición dentro de la matriz global.
- ✦ Para el primer renglón, la localización tendrá en el renglón índice al primer nodo y en cada columna se indica la posición de cada uno de los nodos. Para el segundo renglón, la localización tendrá en el renglón índice al segundo nodo y en cada columna se indica la posición de cada uno de los nodos. Para el tercer renglón, la localización tendrá en el renglón índice al tercer nodo y en cada columna se indica la posición de cada uno de los nodos.
- ✦ Obtener una matriz global de  $n \times n$ , donde  $n$  será equivalente al número de nodos que se tenga en el dominio discretizado y multiplicado por el número de grados de libertad que se tenga en cada nodo.
- ✦ Se sustituye cada posición del vector de posición, en la posición de la matriz global, cada uno de sus valores correspondientes a cada uno de los elementos. Posteriormente se suman o se restan los valores que coincidan en la posición de la matriz global.

### 4. Condiciones de Frontera.

Una variedad de condiciones de frontera están especificadas para distintos problemas. Para problemas de armaduras, algunos nodos están localizados en los soportes, los desplazamientos en esos nodos deben ser cero. Para problemas de flujo de calor las condiciones deben satisfacerse a lo largo de las fronteras especificando temperatura, convección, aislamiento o flujo de calor. Para problemas de análisis de esfuerzos, aplicación de cargas en una cara mientras existen soportes fijos, etc.

Las condiciones que se involucran en el sistema se denominan condiciones de frontera. En el FEA, algunas de las condiciones de frontera son incorporadas directamente en las ecuaciones de los elementos. A estas condiciones se les conoce como: *Condiciones de Frontera Esenciales* ( $C_e$ ). Las condiciones que no son incorporadas directamente en las ecuaciones de los elementos, se les conoce como: *Condiciones de Frontera Naturales* ( $C_n$ ).

$$\begin{array}{ll} C_{FEsenciales} & C_e = u(x, y) \\ C_{FNaturales} & C_n = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad \dots \quad (A3.1) \end{array}$$

En el ensamble el proceso se asume que los grados de libertad (GDL) son desconocidos. Sin embargo debido a las condiciones de frontera esenciales algunos de estos grados de libertad deben tener un valor de cero u otro valor especificado. Por lo tanto, la introducción de las condiciones de frontera esenciales, involucran la sustitución de los valores en el vector de variables nodales. Al introducir estas condiciones de frontera, provoca que el sistema global, es decir el ensamble global, se vea reducido de acuerdo a los valores que se conozcan en las condiciones. Si se



conocen los nodos en los cuales se tiene el valor de condición de frontera en ese mismo numero se vera reducido el sistema global.

### 5. Solución Nodal de las variables.

La solución del sistema global es una solución nodal, debido a que se obtiene la solución por cada nodo, dependiendo de los grados de libertad de cada uno de ellos. Existen varios métodos de solución del sistema de ensamble global como son:

1. Solución Lineal de ecuaciones.
2. Solución usando la descomposición de Choleski.
3. Solución utilizando el método de Gradiente Conjugado.
4. Solución utilizando Multiplicadores de Lagrange.
5. Solución utilizando Función de penalización.

Cada uno de estos métodos de solución se utiliza dependiendo de la complejidad del sistema analizado. El más común y utilizado es la solución lineal de ecuaciones, por su sencillez tanto de aplicación como de programación. Utilizando la solución lineal, aplicando una matriz inversa al vector d:

$$d = K^{-1}R \quad \dots \quad (A3.2)$$

La solución nodal global estará dada, introduciendo los valores conocidos de los grados de libertad, al vector de solución "d".

### 6. Postproceso o relación de las cantidades para cada elemento.

El postproceso se refiere, a la obtención de cantidades particulares como lo son: el esfuerzo y la deformación, particularmente su distribución en el modelo de análisis. Estas cantidades se obtienen a partir de la solución nodal, y se calculan para cada elemento generado tras la discretización del modelo.

#### Propiedades de Materiales.

ACERO ASTM A36 (comercial)

E = 210 GPa  
Esf. Fluencia = 250 MPa  
Conductividad térmica = 0.43 W/m<sup>2</sup>-c°  
Coeficiente de expansión térmica = 12 \*10<sup>-6</sup> mm/mm/c°  
Densidad = 7850 Kg/m<sup>3</sup>

ALUMINIO (comercial)

E = 72 GPa  
Esf. Fluencia= 90 MPa  
Conductividad térmica = 0.21 W/m<sup>2</sup>-c°  
Coeficiente de expansión térmica = 23 \*10<sup>-6</sup> mm/mm/c°  
Densidad = 2700 Kg/m<sup>3</sup>

**ANEXO 4.****A4.1. Esfuerzo.**

Las fuerzas internas son producidas en un cuerpo cuando esta sujeto a cargas externas. Esas fuerzas internas son caracterizadas en términos de esfuerzos. El esfuerzo en un punto P es definido pasando la sección de un plano a través de un punto y considerando fuerza por unidad de área en un elemento diferencial. Denotando el área de este elemento diferencial como  $\Delta A$  y la fuerza como  $\Delta F$ , el vector de esfuerzo en el punto P del plano del cual su vector normal es  $n$ , se escribe como:

$$t_n(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.1})$$

El esfuerzo normal y de corte son escritos considerando las componentes de la fuerza en las direcciones del plano, normal ( $\Delta F_n$ ) y tangencial ( $\Delta F_t$ ) como sigue:

$$\text{Esfuerzo Normal:} \quad \sigma_n(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.2})$$

$$\text{Esfuerzo de Corte:} \quad \tau_n(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.3})$$

La definición de esfuerzo esta íntimamente ligada a la sección del plano que esta caracterizado en términos del vector normal "n". Ya que un número infinito de planos pueden pasar por un punto P dado, el estado de esfuerzo en el punto será claramente el estado en la sección del plano considerado. La usual práctica es definir el esfuerzo en términos de planos normales quienes están a lo largo de las direcciones coordenadas. Así en un sistema coordenado los esfuerzos en un plano normal son por ejemplo, a lo largo del eje X (plano YZ):

$$\text{Esfuerzo Normal:} \quad \sigma_x(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.4})$$

$$\text{Esfuerzo de Corte:} \quad \tau_x(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.5})$$

El esfuerzo de corte o esfuerzo cortante es expresado en términos de las dos componentes de fuerza en el plano en las direcciones Y y Z:

$$\text{Componentes del Esfuerzo Cortante:} \quad \tau_{xy}(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.6})$$

$$\tau_{xy}(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad \dots \quad (\text{A4.7})$$

Similarmente se puede definir los esfuerzos en planos normales quienes están a lo largo del eje Y (plano XZ) y a lo largo del eje Z (plano XY). Las componentes del estado de esfuerzos en un punto P pueden ser descritas en términos de nueve componentes de esfuerzo:

$$\text{Vector de esfuerzos en el plano con un normal a lo largo del eje X:} \quad t_x = (\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz})^T \quad \dots \quad (\text{A4.8})$$

$$\text{Vector de esfuerzos en el plano con un normal a lo largo del eje Y:} \quad t_y = (\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz})^T \quad \dots \quad (\text{A4.9})$$

$$\text{Vector de esfuerzos en el plano con un normal a lo largo del eje Z:} \quad t_z = (\tau_{zy} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z)^T \quad \dots \quad (\text{A4.10})$$



Estas componentes de esfuerzos se pueden ver en la figura A4.1 en un elemento diferencial, aquí se observa que en las tres caras escondidas, los vectores normales van en dirección opuesta a las mostradas en la figura.

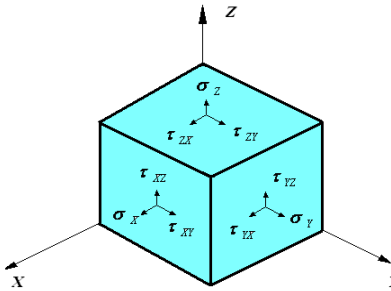


Fig. A4.1. Estado de esfuerzos en un elemento cúbico diferencial.

Escribiendo los vectores de esfuerzo en forma matricial, se denomina Tensor de Esfuerzos, con 9 variables de esfuerzo, y se define como:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.11)$$

Usando la condición de equilibrio de momentos, podemos observar que las componentes del esfuerzo cortante son iguales:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \dots \quad (A4.12)$$

Así el tensor S de esfuerzos, es un tensor simétrico y donde hay únicamente 6 componentes de esfuerzo para resolver. En la formulación de elemento finito, esto es conveniente para tener un arreglo de las 6 componentes de esfuerzo, en un vector de la siguiente forma:

$$\sigma = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx})^T \quad \dots \quad (A4.13)$$

**Esfuerzos en un plano inclinado.**

Es posible relacionar esfuerzos en cualquier plano inclinado, al igual que los planos normales a los ejes coordenados. La dirección esta relacionada, considerando un trozo infinitesimal, como se muestra en la figura A4.2. El vector de esfuerzos en tres planos verticales es:  $-t_x, -t_y, -t_z$ .

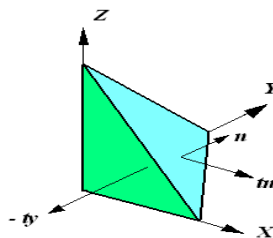


Fig. A4.2. Vectores involucrados en un plano inclinado.



El vector de esfuerzos en un plano inclinado con un vector normal unitario  $n = (n_x \ n_y \ n_z)^T$  esta denotado por  $t_n$ . Si el área del plano inclinado es  $dA$ , entonces los vectores perpendiculares al área geométrica en los ejes coordenados son respectivamente:  $n_x \ dA$ ,  $n_y \ dA$  y  $n_z \ dA$ . El equilibrio de fuerzas en el tetraedro esta dado por:

$$t_n \ dA = t_x \ n_x \ dA + t_y \ n_y \ dA + t_z \ n_z \ dA \quad \dots \quad (A4.14)$$

ó

$$t_n = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} n_y + \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} n_z = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.15)$$

Así el vector de esfuerzos en un plano inclinado puede ser obtenido multiplicando el tensor de esfuerzos  $S$  por el vector normal para el plano:

$$t_n = S n \quad \dots \quad (A4.16)$$

Este resultado es importante porque muestra las seis componentes de esfuerzo, que determinan el estado de esfuerzos con respecto a algún plano pasante a través de un punto y por lo tanto:

$$\sigma_n = t_n^T n \equiv n^T t_n \quad \dots \quad (A4.17)$$

Finalmente usando la suma vectorial el esfuerzo cortante en el plano puede ser escrita como:

$$\tau_n = \sqrt{t_n^T t_n - \sigma_n^2} \quad \dots \quad (A4.18)$$

#### ***Fuerzas superficiales aplicadas.***

Las relaciones entre las componentes de esfuerzo en un plano perpendicular a los ejes coordenados y actuando en un plano inclinado fue derivada de una consideración arbitraria localizada en el tetraedro. Si el tetraedro es tomado cerca de la frontera de un sólido donde el plano inclinado esta a lo largo de la frontera, entonces las componentes de este vector  $t_n$  en el plano inclinado, debe ser igual a las fuerzas aplicadas en la frontera. Denotando las componentes de fuerza aplicada en la frontera como  $q_x$ ,  $q_y$ , y  $q_z$ , las fuerzas superficiales aplicadas son relacionadas mediante:

$$q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \quad \dots \quad (A4.19)$$

$$q_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \quad \dots \quad (A4.20)$$

$$q_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \quad \dots \quad (A4.21)$$

#### ***Direcciones principales y Esfuerzos principales.***

Las direcciones principales están en dirección del vector normal unitario para el plano donde no hay esfuerzo cortante y así el esfuerzo normal es máximo. Los términos fuera de la diagonal principal en el tensor de esfuerzos  $S$  son esfuerzos cortantes, los que están en la diagonal principal del tensor siguen la dirección de los planos principales y son los esfuerzos principales. Así los esfuerzos y direcciones principales pueden ser determinados resolviendo el siguiente problema de Eigenvalores:

$$(S - \sigma I) n_p = 0 \quad \dots \quad (A4.22)$$





Donde  $\sigma$  es un esfuerzo principal,  $I$  es una matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $n_p$  es un vector normal al plano principal. Los eigenvalores son determinados por un determinante  $\text{Det}(S - \sigma I)$ , para cada eigenvalor le corresponde un eigenvector y es determinado resolviendo la ecuación de arriba para  $n_p$ . Los esfuerzos principales son ordenados acorde a sus valores algebraicos: Máximo:  $\sigma_1$ , Intermedio:  $\sigma_2$  y Mínimo:  $\sigma_3$ . Esto puede verse en el máximo esfuerzo cortante en algún plano dado:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \dots \quad (\text{A4.23})$$

Donde  $\sigma_1$  es el esfuerzo principal máximo,  $\sigma_3$  es el esfuerzo principal mínimo y  $\tau_{\max}$  actúa en un plano inclinado a  $45^\circ$  en las direcciones de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ .

#### A4.2. Criterios de Falla.

El esfuerzo ultimo y de cedencia en ingeniería de materiales son determinados mediante exámenes a probetas cargadas en una dirección. El uso de esta información general para sólidos tridimensionales, se puede convertir el estado de esfuerzos tridimensional en un valor equivalente que representa los esfuerzos de falla de un cuerpo. Los tres criterios de esfuerzos de falla más comúnmente usados son: criterio de Tresca, criterio de Von Mises y criterio Mohr. A continuación se hace una breve descripción de cada uno de estos criterios mencionados.

##### Criterio de Tresca.

El criterio de esfuerzo cortante máximo es mejor conocido como criterio de Tresca. Acorde a este criterio, la falla del material ocurre cuando el máximo esfuerzo cortante en algún plano en el material, alcanza el valor de esfuerzo cortante determinado en una prueba de tensión uniaxial. El esfuerzo cortante máximo en un plano esta dado por:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \dots \quad (\text{A4.24})$$

Donde  $\sigma_1$  es el esfuerzo principal máximo y  $\sigma_3$  es el esfuerzo principal mínimo. En una prueba uniaxial  $\sigma_1$  es el esfuerzo axial aplicado y  $\sigma_3 = 0$ ; por lo tanto el máximo esfuerzo cortante es  $\sigma_f / 2$ , donde  $\sigma_f$  es el esfuerzo de falla del material en una prueba uniaxial. Así acorde al criterio de falla del cortante máximo, el esfuerzo de falla ocurre cuando:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_f}{2} \quad \dots \quad (\text{A4.25})$$

Usando este criterio el factor de seguridad se define como:

$$\text{Factor de Seguridad} = \frac{\sigma_f / 2}{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad \dots \quad (\text{A4.26})$$

##### Criterio de von Mises.

Este criterio es el más comúnmente utilizado como criterio de falla en metales. Este asume que el esfuerzo de falla ocurre cuando el valor del esfuerzo cortante es igual al esfuerzo cortante octaédrico en cedencia en una prueba de tensión uniaxial. Un plano octaédrico es un plano que tiene ángulos iguales en dirección con el esfuerzo



principal. El esfuerzo cortante en un plano octaédrico es conocido como el esfuerzo cortante octaédrico. Usando la transformación de esfuerzos para un plano inclinado, se puede observar un plano octaédrico; los esfuerzos son:

$$\sigma_{Oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \dots \quad (A4.27)$$

$$\tau_{Oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \dots \quad (A4.28)$$

El esfuerzo cortante octaédrico se puede expresar en términos de las componentes de esfuerzo normal y cortante del tensor de esfuerzos, como:

$$\tau_{Oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2)} \quad \dots \quad (A4.29)$$

Usando esta ecuación, el esfuerzo cortante octaédrico en una prueba de tensión uniaxial es:

$$\tau_{OctUni} = \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_f^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad \dots \quad (A4.30)$$

Así organizando el criterio de von Misses, el esfuerzo de falla ocurre cuando:

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad \dots \quad (A4.31)$$

ó

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2)} = \sigma_f \quad \dots \quad (A4.32)$$

La cantidad de la izquierda es usualmente referida como el *esfuerzo efectivo de von Misses* y puede ser denotado como  $\sigma_E$ :

$$\sigma_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2)} \quad \dots \quad (A4.33)$$

Usando este criterio el factor de seguridad se define como:

$$\text{Factor de Seguridad} = \frac{\sigma_f}{\sigma_E} \quad \dots \quad (A4.34)$$

### Criterio de Mohr.

En materiales frágiles la falla en pruebas de tensión y compresión son distintas. Acorde al criterio de Mohr, la falla de un material frágil es precedida cuando:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tf}} - \frac{\sigma_3}{\sigma_{cf}} = 1 \quad \dots \quad (A4.35)$$



Donde  $\sigma_1$  es el esfuerzo principal máximo,  $\sigma_3$  es el esfuerzo principal mínimo,  $\sigma_{tf}$  es el esfuerzo de falla en una prueba de tensión uniaxial y  $\sigma_{cf}$  es el esfuerzo de falla en una prueba de compresión uniaxial. Los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  deben tener su propio signo, así los esfuerzos  $\sigma_{tf}$  y  $\sigma_{cf}$  deben ser siempre positivos dentro de (A4.35). Usado este criterio el factor de seguridad se define como:

$$\text{Factor de Seguridad} = \frac{1}{(\sigma_1 / \sigma_{tf}) - (\sigma_3 / \sigma_{cf})} \quad \dots \quad (\text{A4.36})$$

### A4.3. Deformación.

Cuando un cuerpo es sometido bajo condiciones de carga, un punto originalmente  $(x, y, z)$ , se desplaza a  $(x + u, y + v, z + w)$ . Los cambios  $(u, v, z)$  son las componentes de desplazamiento en las direcciones coordenadas y son asociadas a un vector de desplazamiento  $(u, v, z)^T$ . Los desplazamientos de un punto no indican la deformación actual de un sólido, pueden indicar el simple movimiento de cuerpo rígido del sólido. La característica de deformación en un sólido, es que puede considerar un cubo infinitesimal en la configuración original y determinar los cambios de forma y tamaño en la posición desplazada. Los cambios en tamaño son caracterizados por cambios en las longitudes de los lados del cubo. Los cambios de forma son determinados por consideración de los cambios en el ángulo entre la intersección de dos líneas de originalmente  $90^\circ$ .

Los cambios en longitud, consideran un segmento de línea diferencial  $AB$ , paralelo al eje  $x$  respecto al sistema de referencia original. Después desplazando la línea, se mueve a una posición indicada  $A'B'$ , como se muestra en la figura A4.3. Los desplazamientos del punto  $A$  es  $u$  y para  $B$  es  $u + du$ . Asumiendo que el punto  $A$  es  $(x, y, z)$  y que la línea  $AB$  es paralela al eje  $x$ , el punto  $B$  es  $(x + dx, y, z)$ . Debido a los desplazamientos, las coordenadas del punto  $A'$  es  $(x + u, y + v, z + w)$  y las de  $B'$  son  $(x + dx + u + du, y + v + dv, z + w + dw)$ . De esta forma las longitudes deformadas pueden ser calculadas como:

$$L_{AB} = dx$$

$$L_{A'B'} = \sqrt{dv^2 + dw^2 + (-du - dx)^2} \quad \dots \quad (\text{A4.37})$$

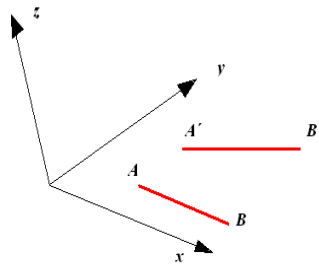


Fig. A4.3. Deformación de un segmento de línea diferencial originalmente paralelo al eje  $x$ .

La línea  $AB$  es paralela al eje  $x$ , los incrementos en desplazamiento son función solamente de  $x$  y por tanto se tiene:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad \dots \quad (\text{A4.38})$$

Sustituyendo estas expresiones (A4.38), en la longitud deformada  $L_{A'B'}$  (A4.37) puede ser escrita como:



$$L_{A'B'} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial x} dx - dx\right)^2} \quad \dots \quad (A4.39)$$

ó

$$L_{A'B'} = dx \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \quad \dots \quad (A4.40)$$

La deformación normal en la dirección x esta definida como un cambio de longitud de la línea AB dividida por la longitud original:

$$\varepsilon_x = \frac{L_{A'B'} - L_{AB}}{L_{AB}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad \dots \quad (A4.41)$$

Esta es una expresión exacta. Para simplificar, se asumen desplazamientos pequeños y que las derivadas de estos desplazamientos es mucho más pequeño que al compararlo con 1. Esto se observa como:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \ll \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad \dots \quad (A4.42)$$

Despreciando los dos primeros términos y conservando el signo del radical, se tiene:

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots \quad (A4.43)$$

Procediendo de una manera similar, con líneas paralelas a los ejes Y y Z, la deformación normal en dichas direcciones puede escribirse como sigue:

$$\varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots \quad (A4.44)$$

El cálculo de la deformación normal cambia con las longitudes de un cubo diferencial. Los cambios en los ángulos, los cuales originalmente están a 90°, se calculan en términos de las deformaciones cortantes. Considerando dos líneas AB y AC, originalmente parten del plano X-Y, conociendo a 90° un punto A. Después del desplazamiento, las líneas se mueven a A'B' y A'C', como se muestra en la figura 3.6.

El punto A en (x, y, z) es desplazado al punto A' en (x + u, y + v, z). Para determinar los cambios en los ángulos solamente se tiene que asumir que los desplazamientos son pequeños e ignorar los cambios en longitud. Por lo tanto el punto B' movido hacia arriba por el incremento del desplazamiento dv relativo al punto A' y al punto C' movido a la derecha por du, como se muestra en la figura A4.4. El cambio total del ángulo esta dado por:

$$\text{Cambio de Angulo} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad \dots \quad (A4.45)$$

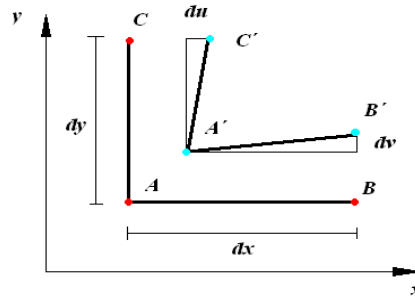


Fig. A4.4. Cambio en el ángulo entre dos segmentos diferenciales de línea en el plano XY.

A lo largo de AB,  $dy = dz = 0$ , y por consiguiente:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \dots \quad (A4.46)$$

De manera similar a lo largo de AC,  $dx = dz = 0$ , y por lo tanto:

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \dots \quad (A4.47)$$

Usando estas expresiones y definiendo el cambio del ángulo como la deformación cortante se tiene:

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad \dots \quad (A4.48)$$

Procediendo de manera similar tomando líneas en los planos Y-Z y Z-X, las deformaciones cortantes son definidas como:

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \quad \gamma_{zx} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \quad \dots \quad (A4.49)$$

El vector completo de relación deformación-desplazamiento se escribe como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.50)$$



#### A4.4 Ecuaciones Constitutivas.

Los esfuerzos y deformaciones son relacionados mediante ecuaciones constitutivas. La forma simple de las ecuaciones constitutivas son las de elasticidad lineal, las cuales son una generalización de la ley de Hooke. Asumiendo esfuerzos que son proporcionales a las deformaciones, la forma lineal más general de las ecuaciones constitutivas es:

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.51)$$

$$\boxed{\sigma = C \varepsilon} \quad \dots \quad (A4.52)$$

Los 36 coeficientes  $C_{ij}$  son llamados constantes elásticas y deben ser definidas para cada material. Varias suposiciones son introducidas para reducir el número de constantes elásticas en la ecuación constitutiva. La suposición universal en dicha ecuación es decir que la matriz  $C$  es simétrica. Con esto el número de constantes se reduce a 21, este número puede ser reducido debido a las propiedades del material que es simétrico en algunos planos conocidos.

Si las propiedades del material son simétricas sobre el plano  $XY$ , entonces se puede observar que la matriz  $C$  se forma con 13 constantes como se muestra:

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.53)$$

Si las propiedades del material son simétricas sobre los tres planos coordenados, el número de constantes se reduce a 9 y el material es entonces llamado **ORTOTROPICO**. La madera es un ejemplo común de este tipo de materiales. La ecuación constitutiva para un material ortotrópico se expresa de la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.54)$$



Finalmente si las propiedades del material es simétrico sobre todos los planos, el material es llamado **ISOTROPICO** y solo dos constantes se necesitan para definir completamente la ecuación constitutiva. Estas constantes son identificadas como E, módulo de Young o de elasticidad, y  $\nu$  relación de Poisson. La ecuación para un material isotrópico se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad \dots \quad (A4.55)$$

En forma inversa la relación se puede escribir como:

$$\boxed{\varepsilon = D\sigma} \quad \dots \quad (3.56)$$

Para un material isotrópico:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (A4.57)$$

Donde G es conocido como el módulo cortante y se relaciona con E y  $\nu$  de la forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots \quad (A4.58)$$

Para un material ortotrópico:



$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \dots \quad (A4.59)$$

Donde  $E_x$  es el módulo de Young en la dirección x,  $\nu_{xy}$  es la relación de Poisson relacionando a  $\epsilon_x$  con  $\sigma_y/E_y$ , etc.

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x} \quad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x} \quad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y} \quad \dots \quad (A4.60)$$

La matriz D es simétrica y por lo tanto la ecuación constitutiva da una relación entre esfuerzo y deformación en un punto. Si la ecuación constitutiva no cambia de un punto a otro en el material, entonces el material se conoce como **HOMOGENEO**. En la práctica en problemas de elasticidad lineal se considera al material como homogéneo e isotrópico o en otras palabras SELHI (Sólido Elástico Lineal Homogéneo e Isotrópico).

#### Ecuaciones de equilibrio de esfuerzos.

Si un cuerpo esta en equilibrio, en una zona arbitraria del cuerpo debe también estar en equilibrio. La superficie S de una parte aislada de un sólido esta sujeta a un vector de esfuerzos:

$$t_n = (t_{nx} \quad t_{ny} \quad t_{nz})^T \quad \dots \quad (A4.61)$$

El vector normal a la superficie es:

$$n = (n_x \quad n_y \quad n_z)^T \quad \dots \quad (A4.62)$$

Las fuerzas de cuerpo son distribuidas en el volumen V de la parte:

$$b = (b_x \quad b_y \quad b_z)^T \quad \dots \quad (A4.63)$$

El equilibrio de la parte aislada requiere que:

$$\iint_S t_{nx} dS + \iiint_V b_x dV = 0 \quad \dots \quad (A4.64)$$

$$\iint_S t_{ny} dS + \iiint_V b_y dV = 0 \quad \dots \quad (A4.65)$$





$$\iint_S t_{nz} dS + \iiint_V b_z dV = 0 \quad \dots \quad (A4.66)$$

Donde  $t_{nx}$  es igual que ec. (3.19), la ecuación puede escribirse como:

$$\iint_S \sigma_x n_x dS + \iint_S \tau_{xy} n_y dS + \iint_S \tau_{xz} n_z dS + \iiint_V b_x dV = 0 \quad \dots \quad (A4.67)$$

Utilizando el teorema de la divergencia para convertir una integral de superficie a integral de volumen, el cual es un caso especial del teorema de Green-Gauss (integración por partes):

$$\iiint_V f \frac{\partial g}{\partial x} dV = \iint_S f g n_x dS - \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} g dV \quad \dots \quad (A4.68)$$

Si  $g=1$ , entonces  $\delta g / \delta x = 0$  y se tiene:

$$0 = \iint_S f n_x dS - \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dV \Rightarrow \iint_S f n_x dS = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dV \quad \dots \quad (A4.69)$$

Similarmente:

$$\iint_S f n_y dS = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dV \quad \iint_S f n_z dS = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dV \quad \dots \quad (A4.70)$$

Usando el teorema de la divergencia, la integral de superficie puede escribirse en términos de volumen como:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + b_x \right) dV = 0 \quad \dots \quad (A4.71)$$

Entonces para una región arbitraria, el integrando debe ser cero; y procediendo de la misma manera para las otras dos ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes, en términos de esfuerzo:

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + b_x = 0$	$\dots \quad (A4.72)$
$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + b_y = 0$	
$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + b_z = 0$	