FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

..:: Mecánica e Industrial

# CURSOS ABIERTOS

# DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LA INGENIERÍA

MÓDULO I CA-483 ÁLGEBRA LINEAL
TEMA: APUNTES GENERALES.

EXPOSITOR: M. I. ABEL VALDÉS RAMÍREZ
15 DE OCTUBRE AL 05 DE NOVIEMBRE DE 2005
PALACIO DE MINERIA

FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

..:: Mecánica e Industrial

# CURSOS ABIERTOS
# DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LA INGENIERÍA

## MÓDULO I
## CA 483 ÁLGEBRA LINEAL

### APUNTES GENERALES

1. Álgebra lineal Métodos analíticos.
2. Álgebra de matrices.
3. Cálculo de determinantes.
4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

EXPOSITOR: M. I. ABEL VALDÉS RAMÍREZ
15 DE OCTUBRE AL 05 DE NOVIEMBRE DE 2005
PALACIO DE MINERIA

## Ecuaciones lineales

**Definición.** Una ecuación lineal tiene la forma.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

Solución de una ecuación lineal.

Sea la ecuación lineal $a_{11}x_1 = b_1$ definida en $\Re$ entonces $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ es un punto.

Sea la ecuación lineal $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ definida en $\Re^2$ entonces $\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}} \end{cases}$

es una recta.

Sea la ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ definida en $\Re^3$ entonces

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3 + \frac{b_1}{a_{12}} \\ x_3 = -\frac{a_{11}}{a_{13}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{13}}x_2 + \frac{b_1}{a_{13}} \end{cases}$$

es un plano.

Para una ecuación lineal donde $n \geq 4$ se tiene un hiperplano y la solución será semejante a las encontradas arriba, note que para resolver una ecuación lineal se despeja la primera ó la segunda ó la tercer incógnita... etcétera.

## Sistema de ecuaciones lineales.

**Definición.** Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se define como.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m12}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

### Forma matricial de un sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow A_{mn}\, X_{n1} = B_{m1}$$

Donde $A_{mn}$ es la matriz de coeficientes de m renglones y n columnas

$X_{n1}$ es la matriz de incógnitas, de n renglones y una columna, y

$B_{m1}$ es la matriz de términos independientes, de m renglones y una columna.

Definición. Una matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones lineales, se define como.

$$[A\ B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

## Método de eliminación de Gauss-Jordán.

Este método permite resolver los sistemas de ecuaciones lineales utilizando solamente los coeficientes del sistema, como "la radiografía del sistema", desarrollando la siguiente transformación.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{mn} & d_m \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & e_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & e_m \end{array}\right]$$

Donde la primera matriz aumentada representa el sistema de ecuaciones lineales original, la segunda matriz representa un sistema equivalente, llamada matriz triangular superior, más simple, en la cual se conoce el valor de la última de las incógnitas y finalmente en la última matriz, la matriz de coeficientes se transforma en la matriz identidad, representando el sistema equivalente.

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n &= e_1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \ldots + x_n &= e_2 \\ &\vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + x_n &= e_m \end{aligned}$$

La forma de lograr estas transformaciones se hace por medio de las operaciones elementales por renglón (OPE), que no es más que el método de suma y resta, únicamente usando los coeficientes numéricos.

1.- multiplicación de un renglón por una constante $K$ diferente de cero.

2.- intercambio de renglones.

3.- suma algebraica de 2 renglones cualesquiera.

El método de eliminación de Gauss-Jordan se puede implementar de la siguiente manera usando las OPE.

1.- Se divide el primer renglón para hacer igual a 1 el coeficiente de $x_1$ en la primer ecuación.

2.- Se eliminan los términos de $x_1$ de la segunda y tercera ecuaciones.

3.- Se repite la operación de división para hacer igual a 1 el coeficiente de $x_2$, usándose como pivote para eliminar $x_2$ de la segunda y tercera ecuación

4.- Se divide para hacer igual a 1 el coeficiente de $x_3$ usándose para eliminar $x_3$ de la primera y segunda ecuación.

Deberá notar que el método se explica para un sistema de $3\times3$, sin embargo se extiende fácilmente para sistemas de orden superior, también el pivote se usa para eliminar hacia abajo, escalonando la matriz, y después hacia arriba, el método descrito anteriormente tiene propósitos computacionales.

**Formas Escalonadas Reducidas.**

1.- Todos los renglones con ceros aparecen en la parte baja de la matriz

2.- el primer número diferente de cero es 1 , empezando por la izquierda.

3.- Si dos renglones sucesivos no consisten únicamente de ceros entonces el primer 1 en el renglón inferior está más a la derecha que el primer 1 del renglón superior.

4.- Cualquier columna que contenga al primer 1 de un renglón tendrá ceros en los demás lugares.

Por ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La eliminación de Gauss-Jordan consiste en reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida y después llegar a la matriz inversa, mientras que la eliminación Gaussiana consiste en reducir a la forma escalonada reducida , estableciendo un sistema equivalente y después usar sustituciones hacia atrás en este sistema.

**Sistema Homogéneo**

**Definición.** Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es aquel en el que todos los términos independientes son nulos. Un sistema homogéneo siempre es consistente puesto que admite la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ó bien puede tener un número infinito de soluciones.

## Álgebra de Matrices

**Definición.** Una matriz $A$ de orden $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números distribuidos en $m$ renglones y $n$ columnas.

$$A = renglones \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{columnas} \right. \Rightarrow A = (a_{ij})$$

**Igualdad de matrices.** Si $A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \Rightarrow A = B \Leftrightarrow (a_{ij}) = (b_{ij})$

**Suma de matrices:** Sí $A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \Rightarrow A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

**Multiplicación por un escalar.** Sí $K \in \Re \Rightarrow KA = (Ka_{ij})$

**Multiplicación entre matrices.** El producto matricial no se hace elemento a elemento, la definición es diferente. Entonces, se tiene lo siguiente.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden mp, cuyo i-ésimo renglón se denota por $a_i$ sea $B = (b_{ij})$ una matriz de orden pn cuya j-ésima columna se denota por $b_j$ entonces el producto será una matriz $C = (c_{ij})$ de orden mn donde $C = AB = (a_i b_j)$

El producto se obtiene al multiplicar el renglón i de la matriz $A = (a_{ij})$ con la columna j de la matriz $B = (b_{ij})$, esta multiplicación será el producto punto entre vectores.

## Matrices especiales

**Potencia de matrices.** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada entonces

$$A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ veces}}$$

**Matriz Inversa.** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada entonces existe una matriz $A^{-1}$ llamada la inversa de A. de tal manera que.

$A$ no es singular y $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

**Matriz triangular superior.** Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$

**Matriz triangular inferior** . Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$

**Matriz diagonal.** Es una matriz cuadrada donde $a_{ii} \neq 0$ al menos para algún valor.

**Matriz escalar.** Es una matriz cuadrada donde $a_{ii} = K \quad K \in \Re$ .

**Matriz identidad.** Es una matriz cuadrada donde $a_{ii} = 1$

**Matrices permutables o conmutativas.** Si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas entonces

$$AB = BA$$

**Matrices antipermutables o anticonmutativas.** Si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas entonces.

$$AB = -BA$$

**Matriz periódica.** Es un matriz cuadrada de manera que $A^{K+1} = A$

**Matriz idempotente.** Es una matriz cuadrada de manera que $A^2 = A$

**Matriz nilpotente.** Es una matriz cuadrada de manera que $A^P = 0$

**Matriz involutiva.** Es una matriz cuadrada de manera que. $A^2 = I$

**Matriz transpuesta.** Es una matriz cualquiera en donde $A = (a_{ij})$ tiene un matriz transpuesta $A^T = (a_{ji})$, es decir se intercambian renglones por columnas ó columnas por renglones.

**Matriz simétrica.** Es una matriz cuadrada de manera que $A^T = A$

**Matriz antisimétrica.** Es un matriz cuadrada de manera que $A^T = -A$

### Propiedades de las Matrices.

Para la suma

$1.- A + B = B + A$ *conmutativa*

$2.- A + (B + C) = (A + B) + C$ *Asociativa*

$3.- K(A + B) = KA + KB \quad K \in \Re$ *Distributiva*

$4.- \exists\, 0 \Rightarrow A + 0 = A$ *Elemento identidad*

$5.- \exists -A \Rightarrow A + (-A) = 0$ *Elemento simétrico*

Para la inversa.

$1.- \quad (A^{-1})^{-1} = A$

$2.- \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$3.- \quad (KA)^{-1} = \frac{1}{K} A^{-1} \quad K \in \Re$

Para la transpuesta.

$1.- \quad (A^T)^T = A$

$2.- \quad A^T + B^T = (A + B)^T$

$3.- \quad (KA)^T = KA^T \quad K \in \Re$

$4.- \quad (AB)^T = B^T A^T$

Para la multiplicación.

$1.- \quad AB \neq BA$ *Anticonmutativa*

$2.- \quad A(BC) = (AB)C$ *Asociativa*

$3.- \quad A(B + C) = AB + AC$ *Distributiva*

$4.- \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B, \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \alpha, \beta \in \Re$

### Determinantes.

Definición. Un determinante se define como: $F : A_{nn} \to \Re$ una función con dominio las matrices cuadradas e imagen un número real, entonces para un determinante de orden 2 ó de orden 3 se tiene.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{12}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

### Cálculo por Cofactores

Definición. Se llama menor del elemento $a_{ij}$ de un determinante de orden $n$ al determinante de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir en el determinante original el renglón $i$ y la columna $j$, denominándose como $m_{ij}$

**Ejemplo**. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se tienen los siguientes menores.

$$m_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad m_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdots m_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdots m_{31}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdots m_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdots$$

Definición se llama cofactor del elemento $a_{ij}$ al determinante $(-1)^{i+j} m_{ij}$ representado por $C_{ij}$

**Ejemplo** de la matriz.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se tienen los siguientes cofactores.

$$C_{11}=m_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{12}=-m_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdots C_{22}=m_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdots C_{31}=m_{31}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdots$$

$$C_{33}=m_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdots$$

**Definición**. El valor de un determinante se obtiene efectuando la suma de los productos de los elementos de uno cualquiera de sus renglones ó columnas por sus cofactores correspondientes.

**Ejemplo** de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se tiene el cálculo del determinante.

**Primer renglón**

$$Det\ A=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2(-16)-4(-26)+6(-11)=6$$

**Segunda columna**

$$Det\ A=a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}=-4\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-4(-26)+5(-22)-(-12)=6$$

**Tercera columna**

$$Det\ A=a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}=6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=6(-11)-6(-10)-2(-6)=6$$

**Propiedades de Determinantes.**

Sea $A_n$ una matriz cuadrada de orden $n$, entonces.

1.- Si una matriz $B_n$ se obtiene de intercambiar dos renglones o columnas de $A_n$ entonces.

$$Det\ B_n = -Det\ A_n$$

2.- Si $B_n$ se obtiene de multiplicar por un número real $K$ cada elemento de un renglón o columna de $A_n$ entonces

$$Det\ B_n = K\ Det\ A_n$$

El determinante de $B$ es $K$ veces el determinante de $A$.

3.- Sí $B_n$ se obtiene de sumarle a cualquier renglón o columna de $A_n$ $K$ veces otro de sus renglones o columnas en donde $K$ es un número real, entonces.

$$Det\ B_n = Det\ A_n$$

4.-Determinante nulo. El determinante se anulará en cualquiera de los siguientes casos.

Cuando un renglón ó columna esté cubierto con ceros

Cuando dos renglones ó columnas sean iguales

Cuando dos renglones ó columnas sean múltiplos entre sí

5.- Propiedades adicionales

$$Det\ A_n = Det\ A_n^T$$

$$Det\ KA_n = K^n Det\ A_n$$

$$Det\ A_n B_n = Det\ A_n\ Det\ B_n$$

$$Det\ A_n^{-1} = \frac{1}{Det\ A_n}$$

Ejemplos lustrativos

Conocido el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$

**Cambio de primera y segunda columna.**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

**Cambio de primer y tercer renglón.**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

**Cambio de primera y tercera columna**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

**Veáse el primer renglón**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6) = 3$$

**Veáse el tercer renglón**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3(6) = 18$$

**Veáse la primer columna**

$$det\ B = \begin{vmatrix} 2e^x & 4 & 6 \\ 4e^x & 5 & 6 \\ 3e^x & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6e^x$$

**Simplificación de un determinante**

$$Det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2R_1 + R_2 \Rightarrow Det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \\ -2C_1 + C_2 \Rightarrow Det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 6 \\ \left.\begin{matrix} -2R_1 + R_2 \\ -\frac{3}{2} R_1 + R_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 6 \end{cases}$$

**Determinantes nulos por el detalle marcado**

$$\begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ \uparrow 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \rightarrow 2 & 4 & 6 \\ \rightarrow 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \rightarrow 3 & 1 & -2 \\ \rightarrow 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \downarrow 2 & 4 & \downarrow 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

## El método de la inversa y la regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver por medio de la matriz inversa de la siguiente manera, como $AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \therefore X = A^{-1}B$, de esta manera.

$$X = A^{-1}B$$
$$= \frac{Cof\ A^T}{Det\ A} B$$

Sí

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow Cof\ A^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&-5\\0&-1&2&5\\0&0&4&4\\0&0&0&0\end{array}\right]\ \frac{1}{4}R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&-5\\0&-1&2&5\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\ \begin{array}{c}-2R_3+R_2\\3R_3+R_1\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-2\\0&-1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$2R_2+R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&-1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right] -R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right] \therefore (x,y,z)=(4,-3,1)$$

***Problema 3.*** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x_1+2x_2-3x_3+2x_4=-1$$
$$-x_1-2x_2+2x_3-5x_4=1$$
$$2x_1+4x_2-5x_3+7x_4=-2$$

***Respuesta***

Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&2&-1\\-1&-2&2&-5&1\\2&4&-5&7&-2\end{array}\right]\ \begin{array}{c}R_1+R_2\\-2R_1+R3\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&2&-1\\0&0&-1&-3&0\\0&0&1&3&0\end{array}\right] R_2+R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&2&-1\\0&0&-1&-3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right] -R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&2&-1\\0&0&1&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

De la matriz escalonada se tiene el sistema equivalente.

$$x_1+2x_2-3x_3+2x_4=-1$$
$$x_3+3x_4=0$$

De la ecuación 2. $x_3=-3x_4$

De la ecuación 1.

$$\begin{aligned}x_1&=-1-2x_2+3x_3-2x_4\\&=-1-2x_2+3(-3x_4)-2x_4 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-1-2x_2-11x_4,x_2,-3x_4,x_4)\\&=-1-2x_2-11x_4\end{aligned}$$

Algunas soluciones serán.

$S_1:\quad x_2=x_4=0 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-1,0,0,0)$

$S_2:\quad x_2=1, x_4=1 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-14,1,-3,1)$

$S_1:\quad x_2=-1, x_4=0 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,0,0)$

$\vdots$

***Problema 4*** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$2x_1+3x_2+x_3=2$$
$$2x_1-x_2+x_3=1$$
$$4x_1-2x_2+2x_3=4$$

***Respuesta.***

Usando eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right] -2R_2+R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Al escribir el sistema equivalente, se observa que en la tercer ecuación no existe ningún valor de las incógnitas que permita resolverla $0 \neq 2!$ por lo tanto no tiene solución el sistema.

__*Problema 5.*__ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

__*Respuesta*__

Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] R_1 - R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3R_1+R_2 \\ -2R_1+R_4 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -R_2+R_3 \\ -R_2+R_4 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

De la ecuación 1 $x_1 = -x_3$

De la ecuación 2

$$\begin{aligned} x_2 &= 6 + x_3 - x_4 \\ &= 6 + x_3 - 3 \\ &= 3 + x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, 3 + x_3, x_3, 3)$

Algunas soluciones.

$S_1: \quad x_3 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,3,0,3)$

$S_2: \quad x_3 = 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1,4,1,3)$

$S_3: \quad x_3 = -1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,2,-1,3)$

$\vdots$

***Problema 6.*** Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determine para que valores de $K$ el sistema es:
a) Inconsistente
b) Consistente determinado
c) Consistente indeterminado

$$\text{Sistema } \underline{6.1} \qquad \begin{aligned} 2x - y - Kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2y &= k \end{aligned}$$

<u>***Respuesta***</u>

Usando el mètodo de eliminación de gauss-jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -K & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & K \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -K & 0 \\ -1 & 2 & 0 & K \end{array}\right] \begin{matrix} -2R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4-K & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1+K \end{array}\right]$$

$$-R_2 + R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4-K & -2 \\ 0 & 0 & K-6 & K+3 \end{array}\right]$$

Por lo tanto si $K = 6$ el sistema es inconsistente. Si $K \neq 6$ el sistema es consistente determinado, el sistema seria consistente indeterminado si $K - 6 = K + 3$, pero $-6 \neq 3$ por lo que jamás puede ser indeterminado.

$$\text{Sistema } \underline{6.2} \qquad \begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \\ x + y + Kz &= 1 \end{aligned}$$

<u>**Respuesta**</u>

Usando el determinante de la matriz de coeficientes, se tiene.

$$\Delta = \begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{vmatrix} = K^3 + 1 + 1 - K - K - K = K^3 - 3K + 2$$

Resolviendo la ecuación de tercer grado, se tiene $P(K) = K^3 - 3K + 2 = 0$

Usando división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr|rrrr|rrr} & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \quad 1 & & 1 & 1 & -2 \quad 1 & & 1 & 2 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$P(K) = (K-1)^2(K+2) = 0 \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_2 = 1 \\ K_3 = 2 \end{cases}$$

Entonces el sistema tendrá solución única, es decir es consistente determinado cuando $K \neq 1, -2$, veamos que sucede para cada valor de $K$.

Con $K = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ Consistente indeterminado, es un plano}$$

con $K = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

El sistema es inconsistente, no tiene solución.

***Problema 7***.- Obtener la inversa de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

***Respuesta***

Usando operaciones elementales por renglón.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] 2R_1 + R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] -3R_2 + R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}R_1 \\ -R_2 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ó bien, usando la definición a través de la matriz adjunta.

$$A^{-1} = \frac{Cof\ A^T}{Det\ A}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow Cof\ A^T = \begin{bmatrix} |5| & -|-3| \\ -|-4| & |2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-3) \times (-4) = -2 \therefore A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

***Problema 8.-*** Obtener la inversa de la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

***Respuesta***

Usando la definición.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow Cof\ A^T = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cof\ A^T = \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Mientras que el determinante es.

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -20+24+72-90-12+32 = 6 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Comprobación.

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***Problema 9.*** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, utilizando la matriz inversa.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 16 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

***Respuesta.***

Tomando en cuenta el resultado anterior, se tiene.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -256+280-18 \\ 416-440+36 \\ -176+200-18 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una ventaja de utilizar la matriz inversa es que se pueden resolver muchos sistemas con entradas diferentes como:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|l} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16 & 0 & 4 & -3 & -1 & 4 & 0 & \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 20 & 1 & 10 & 2 & -1 & 3 & 1 & \cdots \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 5 & \end{array}$$

Encontrando el resultado simplemente, realizando la multiplicación entre matrices.

***Problema 10.*** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

***Respuesta.***

Cálculo de los determinantes.

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+4-0+1-0 = 6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0+0+6-0 = 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+12+0-0-0 = 12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-6+0-0+0-0 = -6$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{Det\ A} = \frac{6}{6} = 1 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{Det\ A} = \frac{12}{6} = 2 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{Det\ A} = \frac{-6}{6} = -1$$

***Problema 11.*** Resuelva el determinante usando las propiedades.

***Respuesta***

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ 2R_1 + R_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5R_2 + R_3 \\ -4R_2 + R_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 15 \end{vmatrix} -4R_3 + R_4$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)(1)(-1)(-13) = 26$$

*Problema 12* Resuelva el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

Respuesta. Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{3}R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \end{array}\right] 4R_2 + R_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Del sistema equivalente.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Se concluye la solución trivial. $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$

*Problema 13*.- Resuelva el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

$$2x + 6y + z = 0$$
$$x + 3y = 0$$
$$-x - 3y + 4z = 0$$

*Respuesta.*

Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] -4R_2 + R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Del sistema equivalente.

$$x + 3y = 0$$
$$z = 0$$

Se concluye aparte de la solución trivial. $(x, y, z) = (0,0,0)$ las siguientes soluciones.

De la ecuación 1 $x = -3y \Rightarrow (x, y, z) = (-3y, y, 0)$

Por lo que.

$S_1: \quad y = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (-3, 1, 0)$

$S_2: \quad y = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (-6, 2, 0)$

$S_3: \quad y = -1 \Rightarrow (x, y, z) = (3, -1, 0)$

$\vdots$

*Problema 14.* Resuelva las siguientes operaciones con matrices.
Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ -5 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

*14.1* Determinar los productos $(AB)C \quad A(BC)$, verificando que son iguales.
Respuesta.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -4 & -11\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)C=\begin{bmatrix}-7 & -4 & -11\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ -5 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39 & 2 & -81\\ -42 & -6 & 70\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ -5 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24 & -7 & 24\\ -21 & -3 & 35\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(BC)=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-24 & -7 & 24\\ -21 & -3 & 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39 & 2 & -81\\ -42 & -6 & 70\end{bmatrix}$$

*14.2*. Mostrar que $AB = BA$ dadas las matrices.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 23\end{bmatrix}$$

Respuesta.

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Sean las matrices.

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 7\\ 0 & 3 & a_{23}\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 0\\ b_{31} & 1 & 3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -3 & 0 & c_{23}\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

*14.3* Encuentre. $a_{23}$, $b_{31}$, $c_{23}$ que verifiquen la igualdad. $A+3B=2C$
Respuesta. Sustituyendo las matrices, se tiene.

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & 7\\ 0 & 3 & a_{23}\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 0\\ b_{31} & 1 & 3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -3 & 0 & c_{23}\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5-3 & -2+6 & 7-9\\ 0-6 & 3-3 & a_{23}+0\\ 2+3b_{31} & -1+3 & -3+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ -6 & 0 & 2c_{23}\\ 10 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{23}=2c_{23} \quad 2+3b_{31}=10 \quad \therefore (a_{23},b_{31},c_{23})=(2c_{23},\frac{8}{3},c_{23})$$

Problema 15.- Encuentre la inversa de la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

Usando el método de eliminación de *Gauss-Jordan*, escribiendo en el lado derecho el producto de las matrices elementales obtenidas.

**Respuesta.**

$$-5R_1+R_3\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{4}R_3\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow E_1A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$-3R_3+R_2\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow E_2A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-R_3+R_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow E_3A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{15}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}R_2\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 2 & 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow E_4A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{15}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-R_2+R_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow E_5A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow E_6A=\begin{bmatrix}\frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo que se tiene la matriz inversa.

$$E_6 = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & -4 & -1 \\ -15 & 4 & 3 \\ 10 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$