Guia de Estudio para presentar Examen Extraordinario de

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

GUIA DE ESTUDIO PARA PRESENTAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

PROPOSITO DE LA GUIA

Este material tiene por objeto orientar a los estudiantes que desean prepararse para presentar examen extraordinario de la asignatura Algebra y Geometría Analítica.

La guía está destinada a los alumnos que ya han cursado la asignatura y que poseen ciertos conocimientos sobre la materia. LA GUIA NO PRETENDE SUSTITUIR A LOS CURSOS REGULARES, sino mejorar la preparación que el estudiante haya adquirido en ellos.

ESTRUCTURA DE LA GUIA

De cada tema del programa vigente de la asignatura se seleccionaron los conceptos fundamentales agrupándolos en bloques.

Cada uno de estos bloques contiene una *Lista de conceptos* con sus respectivas referencias para localizarlos en los textos base, que son:

- Swokowsky Earl W.
  ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALITICA
  Grupo Editorial Iberoamérica
  1a. Edición en español, México 1983.

- Solar Eduardo y Speziale Leda.
  APUNTES DE ALGEBRA (1a. PARTE)
  Facultad de Ingeniería, UNAM.
  1a. Edición, México 1983.

- Solís Rodolfo, Nolasco Jesús y Victoria Angel.
  APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA
  Facultad de Ingeniería, UNAM.
  1a. Edición, México 1981.

Estos textos deberán tenerse a la mano al utilizar la guía.

En cada uno de los bloques se presentan, además, algunos *ejemplos* que ilustran la aplicación de los conceptos.

Al término de cada tema se plantea un conjunto de *problemas propuestos*, para que el estudiante los resuelva y adquiera con ello la práctica necesaria en el manejo de los conceptos del tema.

Al final de la guía aparecen los resultados de algunos problemas propuestos, a fin de que el estudiante pueda compararlos con las respuestas que obtuvo.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUIA

1. Lea cuidadosamente la lista de conceptos que integran el primer bloque de cada tema y estudie secuencialmente cada uno de ellos en los textos base, poniendo especial cuidado en aquellos conceptos que no haya comprendido o adquirido en su preparación anterior.

2. Analice detenidamente los procedimientos que se siguieron para obtener la solución en los ejemplos, cerciorándose que ha comprendido claramente los razonamientos expuestos; esto puede lograrse reproduciendo el proceso de solución sin recurrir al texto.

3. Estudie los conceptos y los ejemplos del siguiente bloque, con las mismas indicaciones de los dos pasos anteriores.

4. Resuelva los problemas propuestos que se plantean al final de cada tema; en caso de que tenga dificultad, deberá estudiar nuevamente los conceptos del bloque e intentar una vez más resolver dichos problemas.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si el estudiante no logra comprender algún concepto o no consigue resolver un problema, se le sugiere CONSULTAR A LOS ASESORES DE LA ASIGNATURA, quienes podrán orientarle al respecto.

SE REQUIEREN SESENTA HORAS DE TRABAJO, aproximadamente, para realizar las actividades que se proponen en esta guía, recomendándose distribuirlas en un periodo de tres a seis semanas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS TRES SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La elaboración de este trabajo estuvo a cargo de los señores profesores:

ING. CARLOS VENEGAS ESPINOZA

ING. PABLO GARCIA Y COLOME

ING. GONZALO LOPEZ DE HARO

ING. ESTEBAN AMBRIZ REYES

quienes contaron con la asesoría pedagógica de la licenciada IRMA HINOJOSA FELIX, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad.

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

MARZO DE 1984

I NUMEROS REALES

Este tema comprende tres bloques. Se sugiere estudiar los aspectos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

I.2 NUMEROS NATURALES. INDUCCION MATEMATICA

Referencias: Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica; Earl W. Swokowsky, páginas 466 a la 472

Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 6 a la 19 y 82 a la 88 (omitir demostraciones, excepto las de las páginas 13 y 14)

Ejemplo 1

Demostrar por inducción matemática la validez de la siguiente expresión para todo número natural n.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Solución:

a) Primeramente se verifica que la expresión sea válida para $n = 1$, lo que es equivalente a tomar de la ecuación el primer sumando del miembro de la izquierda y sustituir en el segundo miembro el valor $n = 1$, es decir:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la expresión es válida para $n = 1$

b) Para establecer la hipótesis de que la expresión es válida para $n = k$, se puede escribir:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right) \quad \ldots (1)$$

c) Para $n = k + 1$, la expresión original quedaría:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right) \quad \ldots (2)$$

Ahora es necesario demostrar que esta última igualdad es verdadera, a partir de la expresión (1).

Sumando a ambos miembros de (1) el siguiente término en el desarrollo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{k+1}} \quad \ldots (3)$$

se observa que los primeros miembros de (2) y (3) son iguales. Bastará entonces efectuar algunas transformaciones algebraicas al segundo miembro de (3), para ver si coincide con el de (2). Así:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{3^k}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3^k}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3^k}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3^k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3^k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$$

que es igual al segundo miembro de la expresión (2), por lo que ésta es verdadera. Con lo que se concluye que la proposición original es válida.

Ejemplo 2

Demostrar por inducción matemática que $3^{2n}+7$ es divisible entre 8, $\forall n \in N$.

Solución:

a) Se verifica para $n = 1$

$3^{2(1)}+7 = 16$, que es divisible entre 8

Por lo tanto, la expresión es válida para $n = 1$

b) Para establecer la hipótesis de que la expresión es válida para $n = k$ se escribe:

$\therefore\ 3^{2k}+7$ es divisible entre 8.

c) Para $n = k+1$

$$3^{2(k+1)}+7 = 3^{2k+2}+7 =$$
$$= 3^2\, 3^{2k}+7 =$$
$$= (9)(3)^{2k}+7 =$$
$$= (8+1)(3)^{2k}+7 =$$
$$= 8(3)^{2k}+(3^{2k}+7)$$

De esta última expresión, es evidente que el primer sumando es divisible entre 8; el segundo también es divisible entre 8, por la hipótesis establecida en el paso b.

... válida $\forall n \in N$.

SEGUNDO BLOQUE

I.1 CONJUNTOS

Referencia: Algebra Moderna, Frank Ayres Jr., páginas 1 a la 5

I.3 NUMEROS ENTEROS

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 21 a la 37 (omitir demostraciones)

I.4 NUMEROS RACIONALES

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 39 a la 59 (omitir demostraciones)

I.5 NUMEROS REALES

Referencia: Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica; Earl W. Swokowsky, páginas 3 a la 9

Ejemplo 3

Sea N el conjunto de los números naturales, Z el de los enteros y $C = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.

Calcular:

a) $N' - [C' \cup (N \cap Z)]$

b) $(N' \cap C') \cup (Z' \cap C')$

c) $(N \cup C) - (N \cup Z)'$

Solución:

Se considera como conjunto universo al conjunto de los números enteros, o sea:

$$U = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

a) $N' - [C' \cup (N \cap Z)] = N' - (C' \cup N)$

$= N' - (N \cup N) =$

$= N' - N = N' = C$

$= \{\dots -3, -2, -1, 0\}$

b) $(N' \cap C') \cup (Z' \cap C') = (C \cap C') \cup (\phi \cap C')$

$= \phi \cup \phi = \phi$

c) $(N \cup C) - (N \cup Z)' = Z - Z' =$

$= Z - \phi = Z = U =$

$= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

TERCER BLOQUE

I.6 DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Referencia: Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica; Earl W. Swokowsky, páginas 11 a la 13 y 82 a la 96

Ejemplo 4

Encontrar los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\frac{x + 2}{3 - x} > 2, \text{ con } x \neq 3$$

Solución:

Se resta en primer término 2 a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{x + 2}{3 - x} - 2 > 0$$

ahora se obtiene el común denominador:

$$\frac{x + 2 - 6 + 2x}{3 - x} > 0$$

$$\frac{3x - 4}{3 - x} > 0 \qquad \dots (1)$$

Se tiene una fracción en el primer miembro, que debe ser positiva, lo cual es posible si el numerador y el denominador son ambos positivos o ambos negativos.

Al analizar el caso en que ambos son positivos, es posible plantear el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \qquad -x > -3 \;;\; -x > 3$$

despejando la x queda:

$$\begin{cases} x > 4/3 \\ x < 3 \end{cases}$$

es decir:

$$4/3 < x < 3$$

En la segunda posibilidad, que corresponde al caso en donde el numerador y el denominador del primer miembro de la desigualdad (1) son ambos negativos, se tiene:

$$\begin{cases} 3x - 4 < 0 \\ 3 - x < 0 \end{cases}$$

de donde:

$$x < 4/3 \quad ; \quad x > 3$$

Se observa que este último sistema es incompatible, puesto que no existe ningún valor de x que satisfaga simultáneamente a las dos desigualdades.

Por lo tanto, la única opción válida es la del primer sistema planteado, por lo que la solución de la desigualdad original es:

$$4/3 < x \leq 3$$

Ejemplo 5

Resolver la siguiente desigualdad:

$$|3x - 1| > 2x + 5$$

Solución:

Se deben analizar dos posibilidades en relación con el término (3x - 1).

Si (3x - 1) es positivo, entonces $|3x - 1| = 3x - 1$, con lo cual:

$$3x - 1 > 2x + 5$$

de donde:

$$3x - 6 > 2x$$

$$x - 6 > 0$$

$$x > 6$$

La otra posibilidad es que (3x - 1) sea negativo. Si esto sucede, puede escribirse:

$$3x - 1 < -(2x + 5)$$

es decir:

$$3x - 1 < -2x - 5$$

$$5x < -4$$

$$x < -\frac{4}{5}$$

por lo tanto, es posible escribir:

$$x \in \left[(-\infty, -\tfrac{4}{5}) \cup (6, \infty)\right]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demostrar por inducción matemática:

a) $\frac{1}{(2)(5)} + \frac{1}{(5)(8)} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$

b) $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{4}{2^{n-1}} = 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

2. Demostrar que dados dos números reales positivos a y b, tales que $a < b$, se cumple que $a^n < b^n$, $\forall\, m \in N$

3. Indicar con V o F si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

   a) El conjunto de los números reales es cerrado respecto a la resta. [V]

   b) En el conjunto de los números naturales existe elemento idéntico para la suma. [ ]

   c) Dados dos números racionales cualesquiera q_1 y q_2, tales que $q_1 < q_2$, siempre es posible encontrar un número racional q_3 mayor que q_1 y menor que q_2. [ ] V

   d) El número $\sqrt{2}$ puede expresarse como un decimal periódico. [ ] F

   e) El conjunto formado por la intersección de los racionales y los irracionales es el de los números reales. [ ] F

4. Resolver las siguientes desigualdades:

   a) $\frac{1}{3x-5} > 0$

   b) $6x + 27 < 2x + 9$

   c) $\frac{2x-5}{3} - 1 > 3 - x$

   d) $x + \frac{1}{x} \geq 2$; $(x \neq 0)$

   e) $\frac{7}{x} < 5$; $(x \neq 0)$

   f) $|3 - 2x| < 1$

   g) $\frac{2}{|x-1|} \leq 1$

II NUMEROS COMPLEJOS

Este tema comprende un bloque. Se sugiere estudiar los aspectos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

II.1 FORMA BINÓMICA

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale. páginas 91 a la 102

II.2 FORMA POLAR

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 104 a la 117

II.3 FORMA DE EULER

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 119 a la 12[illegible]

Ejemplo 1

Calcular los valores de w que satisfacen a la ecuación:

$$z_3^6\, z_4\, w^3 = \frac{\bar{z}_1 + z_2}{i^4}$$

en donde:

$z_1 = 2 - i$, $z_2 = \text{cis } 180°$, $z_3 = e^{3/4\, \pi i}$ y $z_4 = \sqrt{8}\ \text{cis } 135°$

Solución:

De la ecuación dada se despeja a w^3:

$$w^3 = \frac{\bar{z}_1 + z_2}{i^4\, z_3^6\, z_4} \qquad \ldots (1)$$

por facilidad conviene efectuar la adición indicada en el dividendo del segundo miembro de (1), para lo cual se requiere transformar el número z_2 a la forma binómica:

$$z_2 = \cos 180° + i \text{ sen } 180° = -1 + 0i = -1$$

y:

$$\bar{z}_1 + z_2 = (2 + i) - 1 = 1 + i = \sqrt{2}\ \text{cis } 45° \qquad \ldots (2)$$

Ahora se obtiene el resultado del divisor del segundo miembro de (1).

$$i^4 = (\text{cis } 90°)^4 = \text{cis } 360° = \text{cis } 0° = 1$$

$$z_3^6 = (e^{3/4\, \pi i})^6 = e^{18/4\, \pi i} = e^{9/2\, \pi i} = \text{cis } 90°$$

$$i^4\, z_3^6\, z_4 = \sqrt{8}\ \text{cis}(90° + 135°) = \sqrt{8}\ \text{cis } 225° \qquad \ldots (3)$$

al sustituir los números dados por las expresiones (2) y (3) en la ecuación (1), se tiene:

$$w^3 = \frac{\sqrt{2}\ \text{cis } 45°}{2\sqrt{2}\ \text{cis } 225°} = \frac{1}{2}\ \text{cis}(45° - 225°) = \frac{1}{2}\text{cis }(-180°) = \frac{1}{2}\ \text{cis } 180°$$

si la expresión anterior se eleva a $\frac{1}{3}$, se tiene:

$$w = \left(\frac{1}{2} \text{ cis } 180°\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \text{ cis } \frac{180° + k(360°)}{3}$$

los valores de w se obtendrán, dando a k los valores sucesivos de 0, 1 y 2.

Así:

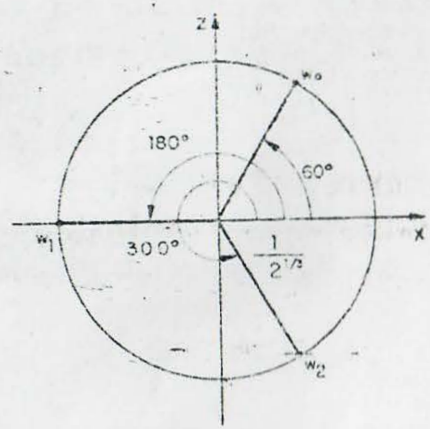
Para $k = 0$, $w_0 = \frac{1}{2^{1/3}} \text{ cis } 60°$

Para $k = 1$, $w_1 = \frac{1}{2^{1/3}} \text{ cis } \frac{180° + 360°}{3} = \frac{1}{2^{1/3}} \text{ cis } 180°$

Para $k = 2$, $w_2 = \frac{1}{2^{1/3}} \text{ cis } \frac{180° + 720°}{3} = \frac{1}{2^{1/3}} \text{ cis } 300°$

Estas tres raíces están colocadas equidistantemente en la circunferencia de radio:

$$r = \frac{1}{2^{1/3}}$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obtener los valores de x.y y que satisfacen a la ecuación:

$$3i(x\,e^{yi}) = (-3 + 3i)^2 - 3 + 15i$$

2. Determinar el valor de z que satisface la siguiente ecuación:

$$z^{1/4}(2 \text{ cis } 270°\ e^{\pi i}) = \frac{4\,e^{-\pi/2\,i}}{2 \text{ cis } 270°} - z^{1/4}(-6 + 4 \text{ cis } 90°)$$

3. Obtener las raíces de la ecuación:

$$x^4 + e^{\pi i} - 15 = 0$$

y representarlas en el diagrama de Argand.

III POLINOMIOS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los aspectos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

III.1 OPERACIONES CON POLINOMIOS

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 129 a la 132 y 134 a la 136

III.2 DIVISION DE POLINOMIOS. DIVISION SINTETICA

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 146 a la 154

Ejemplo 1

Obtener el polinomio:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot s(x)$$

si:

$$g(x) = x^3 - 3x + 3$$

$$h(x) = x + 3x^2 - 1$$

$$s(x) = x^4 + 2$$

Solución:

Aplicando la propiedad distributiva del producto de polinomios sobre la suma:

$$f(x) = g(x)\,[h(x) + s(x)]$$

y como:

$$h(x) + s(x) = x^4 + 3x^2 + x + 1$$

entonces:

$$f(x) = (x^3 - 3x + 3)(x^4 + 3x^2 + x + 1)$$

$$f(x) = x^7 + 3x^5 + x^4 + x^3 - 3x^5 - 9x^3 - 3x^2 - 3x +$$

$$+ 3x^4 + 9x^2 + 3x + 3$$

por lo que:

$$f(x) = x^7 + 4x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 3$$

Ejemplo 2

Determinar los valores de a y b de tal forma que el polinomio:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 9x - 36$$

sea divisible entre:

$$(x + 3) \; ; \; (x - 4)$$

Solución:

A partir del teorema del residuo se tiene:

$$f(-3) = (-3)^4 + a(-3)^3 + b(-3)^2 + 9(-3) - 36 = 0$$

$$f(-3) = 81 - 27a + 9b - 27 - 36 = 0$$

$$f(-3) = -27a + 9b + 18 = 0$$

análogamente:

$$f(4) = (4)^4 + a(4)^3 + b(4)^2 + 9(4) - 36 = 0$$

$$f(4) = 256 + 64a + 16b + 36 - 36 = 0$$

$$f(4) = 64a + 16b + 256 = 0$$

Si se resuelve el sistema formado por (1) y (2):

$$-27a + 9b = -18 \quad \ldots (1)$$

$$64a + 16b = -256 \quad \ldots (2)$$

de (1):

$$b = \frac{-18 + 27a}{9} = -2 + 3a$$

sustituyendo en (2):

$$64a + 16(-2 + 3a) = -256$$

de donde:

$$a = \frac{-224}{112} = -2$$

sustituyendo en (1):

$$b = -2 + 3(-2) = -2 - 6 = -8$$

por lo tanto los valores pedidos son:

$$a = -2 \quad \text{y} \quad b = -8$$

SEGUNDO BLOQUE

III.3 TECNICAS ELEMENTALES PARA OBTENER RAICES

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 164 a la 188

Ejemplo 3

Obtener todas las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^8 - 18x^7 - x^6 + 18x^5 - 16x^4 + 288x^3 + 16x^2 - 288x$$

si $f(-2i) = 0$ y $p(x)$ es divisible entre el polinomio $h(x) = x^2 - 4$.

Solución:

Puesto que $p(x)$ es de grado 8, tiene exactamente ocho raíces.

Ahora bien, como:

$$p(x) = x(x^7 - 18x^6 - x^5 + 18x^4 - 16x^3 + 288x^2 + 16x - 288)$$

entonces $\alpha_1 = 0$ es una de las raíces de $p(x)$.

Ya que $f(-2i) = 0$, por el teorema del factor se obtiene que $\alpha_2 = -2i$ es otra raíz y como los coeficientes de $p(x)$ son números reales, entonces, $\alpha_3 = 2i$ también es raíz.

Asimismo, como $p(x)$ es divisible entre $h(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, entonces $\alpha_4 = -2$ y $\alpha_5 = 2$ son raíces de $p(x)$.

De lo anterior, y haciendo uso del teorema del factor se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{p(x)}{x(x - 2i)(x + 2i)(x + 2)(x - 2)} = q(x)$$

donde $q(x)$ es el polinomio reducido.

Entonces, la búsqueda de las tres raíces faltantes de $p(x)$ se restringirá a determinar las raíces de $q(x)$.

Si se efectúan los productos se obtiene:

$$q(x) = \frac{x^8 - 18x^7 - x^6 + 18x^5 - 16x^4 + 288x^3 + 16x^2 - 288x}{x^5 - 16x}$$

y al realizar el cociente mediante la división común entre polinomios, se tiene:

$$q(x) = x^3 - 18x^2 - x + 18$$

Ahora bien, aplicando la regla de los signos de Descartes a $q(x)$ se tiene que:

$$q(x) = x^3 - 18x^2 - x + 18 \quad \therefore \quad q(x) \text{ tiene 2 ó 0 raíces reales positivas}$$

$q(-x) = -x^3 - 18x^2 + x + 18$ $\therefore$ $q(x)$ tiene una raíz real negativa

Por lo tanto las alternativas en cuanto al número y tipo de raíces de $q(x)$ son:

	1a.	2a.
Raíces reales positivas	2	0
Raíces reales negativas	1	1
Raíces complejas	0	2
Total	3	3

Para las posibles raíces racionales de $q(x)$ se tiene que:

$a_0 = 18$ y sus factores son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$a_n = 1$ y sus factores son ± 1

por lo que si $q(x)$ tiene raíces racionales, éstas deberán ser alguno de los siguientes números:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$$

como $q(x)$ tiene necesariamente una raíz negativa, se restringirá la búsqueda a dicha raíz.

Aplicando la división sintética con -1:

	1	-18	-1	18
-1		-1	19	-18
	1	-19	18	$\boxed{0}$

por lo que $\alpha_6 = -1$ es una raíz de $q(x)$ y en consecuencia de $p(x)$.

Del tercer renglón de la división sintética se tiene que el nuevo polinomio reducido es:

$$q_1(x) = x^2 - 19x + 18$$

y sus raíces son:

$$\alpha_{7,8} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4(1)(18)}}{2} = \frac{19 \pm 17}{2}$$

Por lo tanto:

$$\alpha_7 = 1 \quad y \quad \alpha_8 = 18$$

son las otras dos raíces de $q(x)$ y con ello se han obtenido todas las raíces de $p(x)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $m(x) = x^5 - x^3 + 3x + 5$ y $n(x) = x^2 + 7$, determinar dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$, de tal manera que:

$$m(x) = q(x)\,n(x) + r(x)$$

2. Sea el polinomio:

$$f(x) = 2x^7 - 5x^6 - Bx^5 - 8x^3 + 5x^2$$

a) Determinar el valor de B, si:

$$f(-i) = 0$$

b) Obtener todas las raíces de $f(x)$.

IV SUCESIONES Y SERIES

Este tema comprende tres bloques. Se sugiere estudiar los aspectos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

IV.1 SUCESIONES. LIMITE Y CONVERGENCIA. SUCESIONES MONOTONAS Y ACOTADAS

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 191 a la 206

IV.2 SERIES. CONVERGENCIA, PROPIEDADES Y ALGEBRA. SERIE GEOMETRICA

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 208 a la 239

Ejemplo 1

Sea la sucesión:

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

calcular su límite y decir si es convergente o divergente.

Solución:

Se calcula el límite de la sucesión y se tiene:

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$$

para eliminar esta indeterminación se obtienen primero logaritmos naturales en ambos miembros:

$$\ln a = \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y por propiedades de límites:

$$\ln a = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

de donde:

$$\ln a = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Si se sustituye n por ∞ se tendrá $\frac{0}{0}$ que es una indeterminación, en la cual se puede aplicar la Regla de L'Hopital para eliminarla:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

por lo que:

$$\ln a = 1$$

si se aplica la función exponencial en ambos miembros, se tiene que:

$$a = e^1$$

$$a = e$$

Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

se dice que la sucesión en estudio es convergente, ya que su límite existe y equivale al número e.

Ejemplo 2

Investigar si la siguiente serie es convergente y en caso de serlo determinar su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4^{n-1}} + \frac{8}{n(n+1)}\right]$$

Solución:

El término enésimo de la serie consta de dos sumandos y se puede analizar cada uno por separado de acuerdo a las propiedades y al álgebra de las series. Si los dos sumandos representan series convergentes, entonces la suma equivaldrá a una serie convergente.

Así, la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$$

es una serie geométrica cuya razón es $r = \frac{1}{4}$ que es menor que 1, por lo cual es convergente y su suma es:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

por otro lado, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)}$$

equivale por propiedades, a:

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

analizando el término enésimo, se observa que puede ser escrito como:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

El desarrollo de esta serie hasta el término enésimo, da como resultado la suma parcial S_n, es decir:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

que equivale a:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

Si se obtiene el límite de la suma parcial enésima S_n y éste existe, la serie es convergente y su suma S es el valor del límite.

Así:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

y de acuerdo al álgebra de las series, la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

corresponde a una serie convergente y su suma es:

$$S = 8 \times 1 = 8$$

por lo tanto, se concluye que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4^{n-1}} + \frac{8}{n(n+1)}\right]$$

es convergente y su suma equivale a:

$$S = 4 + 8$$

$$S = 12$$

SEGUNDO BLOQUE

> IV.3 SERIES DE TERMINOS POSITIVOS. DIFERENTES CRITERIOS. SERIE p
>
> Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 241 a la 255
>
> IV.4 SERIES DE SIGNOS ALTERNADOS. CRITERIO DE LEIBNIZ. CONVERGENCIAS ABSOLUTA Y CONDICIONAL.
>
> Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 257 a la 265

Ejemplo 3

Sea la serie de términos positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2} + 5}$$

a) Determinar su convergencia o divergencia a través del criterio del cociente y en el caso de que este método no proporcione información, utilizar el criterio de comparación para estudiar su carácter.

b) Si se considera la serie con signos alternados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n^{3/2} + 5}$$

decir si es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Solución:

a) Aplicando el criterio del cociente se obtiene:

$$a_n = \frac{1}{2n^{3/2} + 5}\ ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^{3/2} + 5}$$

luego:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{2(n+1)^{3/2} + 5}}{\dfrac{1}{2n^{3/2} + 5}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{3/2} + 5}{2(n+1)^{3/2} + 5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

aplicando la Regla de L'Hopital se obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^{1/2}}{3(n+1)^{1/2}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2}$$

$$= 1$$

Como el valor numérico del límite es uno, este método no define el carácter de la serie, por lo que se utilizará el criterio de comparación. La expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

se observa que es una serie p con $p = \frac{3}{2} > 1$ por lo cual es convergente.

Por otra parte:

$$\frac{1}{2n^{3/2}} > \frac{1}{2n^{3/2} + 5}$$

ya que:

$$2n^{3/2} + 5 > 2n^{3/2}$$

y:

$$5 > 0$$

Por lo tanto, se dice que la serie p definida *domina* a la serie en estudio y se concluye que ésta es convergente.

b) Se tiene la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n^{3/2} + 5}$$

aplicando el criterio de Leibniz:

1. $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in N$

puesto que si se estudia la función:

$$f(x) = \frac{1}{2x^{3/2} + 5}$$

su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{3x^{1/2}}{(2x^{3/2}+5)^2}$$

y es negativa para $x \geq 1$ por lo cual la función es decreciente en ese intervalo.

2. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^{3/2}+5} = 0$$

Entonces se concluye que la serie de términos con signos alternados es convergente, y como la considerada con términos positivos también fue convergente, se dice que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n^{3/2}+5}$$

es absolutamente convergente.

TERCER BLOQUE

IV.5 SERIES DE POTENCIAS

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 267 a la 277

IV.6 DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

Referencia: Algebra (1a. parte); Eduardo Solar y Leda Speziale, páginas 277 a la 289

Ejemplo 4

Determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n+1}$$

determinar su radio e intervalo de convergencia.

Solución:

Si se aplica el criterio del cociente al valor absoluto del término enésimo se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(x-2)^n}{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{(n+2)(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\left|x-2\right|$$

$$= (1)\left|x-2\right|$$

$$= \left|x-2\right|$$

De acuerdo a este criterio, la serie es absolutamente convergente si $|x-2| < 1$, esto es, si $-1 < x-2 < 1$ ó bien si $1 < x < 3$.

Por otro lado, la serie es divergente si $|x-2| > 1$, lo que equivale a escribir $x-2 < -1$ ó $x-2 > 1$, es decir $x < 1$ ó $x > 3$.

Si $|x-2| = 1$, es decir, para $x = 1$ y $x = 3$ no hay información por lo que se estudian por separado. Así:

para $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

que es la serie armónica divergente.

para $x = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

que es la serie armónica alternada convergente.

Por lo tanto se concluye que la serie de potencias estudiada tiene como intervalo de convergencia a $(1, 3]$ y su radio de convergencia es 1.

Ejemplo 5

Encontrar la serie de Maclaurin para representar a la función e^x; verificar que es válida para todo valor real de x y aproximar la integral a tres cifras decimales de exactitud.

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$$

Solución:

La serie de Maclaurin está dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

y para la función $f(x) = e^x$:

$$f(x) = e^x \;;\quad f'(x) = e^x \;;\quad f''(x) = e^x \;;\ \ldots$$

$$f(0) = 1 \;;\quad f'(0) = 1 \;;\quad f''(0) = 1 \;;\ \ldots$$

entonces:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

aplicando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0\,|x| = 0 < 1$$

como $0 < 1$, se verifica que la serie representa a e^x para todos los reales.

Sustituyendo x por $-x^2$ se tiene la serie:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

por lo que:

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1/2}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots\right)dx\ ,$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3(2)^3} + \frac{1}{2!\cdot 5(2)^5} - \frac{1}{3!\cdot 7(2)^7} + \ldots$$

$$\doteq 0.5 - 0.041666 + 0.003125 - 0.00019$$

si se utilizan los primeros tres términos se tiene que:

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx \doteq 0.46146\ ,$$

y como el cuarto término equivale a 0.00019 en valor absoluto, el valor de la integral es exacto en sus primeras tres cifras decimales.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Probar que las sucesiones

   a) $\left|\dfrac{n}{n+1}\right|$ y b) $\left|\dfrac{e^n}{n(n-1)}\right|$

   son monótonas creciente y decreciente respectivamente, y calcular sus límites para determinar su convergencia o divergencia.

2. Investigar si las siguientes series son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-4}$

3. Encontrar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{\ln(n+2)}$$

4. Encontrar la serie de Maclaurin para representar a la función $f(x) = \operatorname{senh} x$, a partir de la serie que define a e^x para todo valor real de x.

(V) ALGEBRA VECTORIAL

Este tema comprende los bloques. Se sugiere estudiar los conceptos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

V.1 VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 7 a la 13

V.2 OPERACIONES CON VECTORES

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 14 a la 19

Ejemplo 1

El punto A(1, 2, 3) tiene como simétricos al punto B con respecto al origen y al punto C con respecto al plano XY. Obtener un vector $\bar{F}$ paralelo al vector $(\overline{AB} + 3/4\ \overline{BC})$ con módulo igual a $\sqrt{149}$.

Solución:

Los puntos simétricos de A son $B(-1, -2, -3)$ y $C(1, 2, -3)$.

El vector $\bar{r}$ es paralelo al vector unitario:

$$\frac{\overline{AB} + \frac{3}{4}\,\overline{BC}}{\left|\overline{AB} + \frac{3}{4}\,\overline{BC}\right|}$$

el cual se obtiene

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (-1, -2, -3) - (1, 2, 3) = (-2, -4, -6)$$

$$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b} = (1, 2, -3) - (-1, -2, -3) = (2, 4, 0)$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ son los vectores de posición de los puntos A, B, C respectivamente.

$$\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{BC} = (-2, -4, -6) + \frac{3}{4}(2, 4, 0) = (-2, -4, -6) + \left(\frac{3}{2}, 3, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -6\right)$$

$$\frac{\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{BC}}{\left|\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{BC}\right|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -1, -6\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + (-6)^2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -1, -6\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{144}{4}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -1, -6\right)}{\frac{\sqrt{149}}{2}}$$

$$\bar{r} = \sqrt{149}\left(\frac{-1}{\sqrt{149}}, \frac{-2}{\sqrt{149}}, \frac{-12}{\sqrt{149}}\right) = (-1, -2, -12)$$

SEGUNDO BLOQUE

V.3	PRODUCTO ESCALAR
	Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 20 a la 27
V.4	PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES
	Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 27 a la 35

Ejemplo 2

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores del espacio euclidiano tridimensional. Si $\bar{a}$ es igual a la componente vectorial del vector $\bar{q} = (10, -2, 0)$ sobre el vector $\bar{r} = (3, 0, -1)$, el módulo de $\bar{b}$ es $\sqrt{3}$ y dos de sus ángulos directores son $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$. Determinar si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos.

Solución:

Los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos si su producto vectorial es igual al vector nulo:

$$\bar{a} = \text{comp. vect}_{\bar{r}}\,\bar{q} = \frac{\bar{q}\cdot\bar{r}}{|\bar{r}|}\,\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{(10, -2, 0)\cdot(3, 0, -1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}\;\frac{(3, 0, -1)}{\sqrt{10}}$$

$$\bar{a} = \frac{30}{10}(3, 0, -1) = (9, 0, -3)$$

La dirección del vector $\bar{b}$ está dada por el vector unitario $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, por lo cual:

$$\bar{b} = \sqrt{3}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Para conocer el $\cos\gamma$ se aplica la expresión:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 30° - \cos^2 60° = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{4}{4}} = 0$$

entonces:

$$\bar{b} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i - \frac{9}{2}\,j + \frac{9\sqrt{3}}{2}\,k \neq 0$$

por lo tanto, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son paralelos.

Ejemplo 2

Los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares al vector $\bar{c}$, y el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es 45°; si además se sabe que $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ y $|\bar{c}| = 2$; obtener el volumen del paralelepípedo cuyas aristas concurrentes son $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

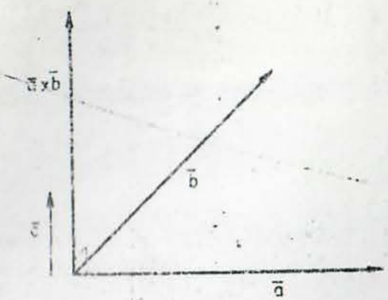
Solución:

El volumen del paralelepípedo está dado por el producto mixto $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, el cual, de acuerdo con la definición de producto escalar se expresa como:

$$\overline{(\bar{a}\times\bar{b})}\cdot\bar{c} = |\bar{a}\times\bar{b}|\,|\bar{c}|\cos\theta \qquad \ldots (A)$$

en donde θ es el ángulo que forman los vectores $\overline{(\bar{a}\times\bar{b})}$ y $\bar{c}$.

Como $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares a $\bar{c}$, entonces $\bar{c}$ es paralelo al vector $(\bar{a}\times\bar{b})$, como se puede apreciar en la siguiente figura:



El ángulo entre los vectores $\overline{(\bar{a} \times \bar{b})}$ y $\bar{c}$ es cero, es decir $\theta = 0°$ y $\cos 0° = 1$

Al sustituir este último valor en la expresión A se obtiene:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}|\,|\bar{c}| \qquad \ldots (B)$$

como el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es 45°, se tiene:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \text{ sen } 45°$$

al sustituir en la expresión B se obtiene el producto mixto buscado:

$$V = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \text{ (sen } 45°) \; |\bar{c}|$$

$$V = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 3 \times 4 \; \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \frac{24}{\sqrt{2}} \; u^3$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los vértices de un triángulo son los puntos A(4, 1, 3), B(2, 0, 2) y C(1, y, 4); si los lados $|\overline{AC}|$ y $|\overline{BC}|$ son iguales, determinar la coordenada "y" del punto C.

2. El segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$ tiene como cosenos directores $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20}}$ y $\cos \gamma = \frac{-2}{\sqrt{20}}$; si la distancia entre P_1 y P_2 es $\sqrt{20}$ y las coordenadas de P_1 son (1, -3, 2), obtener las coordenadas del punto P_2.

3. Determinar el área del triángulo definido por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, si la componente vectorial del vector $\bar{a} = (a_1, 1, 0)$ sobre el vector $\bar{b}$ es el vector $\bar{v} = (1, 3, \sqrt{6})$ y además $|\bar{b}| = 4$.

4. Investigar si los puntos $P_1(3, 2, 5)$, $P_2(5, 1, 3)$, $P_3(2, 1, 3)$ y $P_4(4, 0, 1)$ son coplanares o no.

   En caso afirmativo, calcular el volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y P_5 (5, 5, 7).

   En caso negativo calcular el área del triángulo P_1 P_2 P_4.

VI LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VI.1 LA RECTA

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica; páginas 36 a la 50 (omitir demostraciones)

VI.2 EL PLANO

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica; páginas 50 a la 68 (omitir demostraciones)

Ejemplo 1

a) Encontrar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que contiene a los puntos:

   A(2, -1, 4) y B(3, -3, 0)

b) Investigar si el punto (7, -11, -2) pertenece a la recta.

c) Determinar la distancia del origen a la recta.

d) Calcular el ángulo que forma la recta con el eje Y.

Solución:

a) En primer término se determinan las componentes del vector $\bar{u}$, paralelo a la recta:

$$\bar{u} = \overline{AB} = [(3, -3, 0) - (2, -1, 4)] = (1, -2, -4)$$

La ecuación vectorial queda:

$$\bar{p} = (2, -1, 4) + t(1, -2, -4) =$$

$$= (2, -1, 4) + (t, -2t, -4t) = (2 + t, -1 - 2t, 4 - 4t)$$

por lo tanto:

$$\bar{p} = (2 + t, -1 - 2t, 4 - 4t)$$

Las ecuaciones paramétricas pueden escribirse como:

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 - 2t$$

$$z = 4 - 4t$$

Al despejar t de estas ecuaciones:

$$t = x - 2 \; ; \qquad t = \frac{y+1}{-2} \; ; \qquad t = \frac{z-4}{-4}$$

igualando se obtiene la forma simétrica de las ecuaciones de la recta:

$$x - 2 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{-4}$$

b) Para investigar si el punto (7, - 11, 2) pertenece a la recta, basta con verificar si las coordenadas del punto satisfacen las ecuaciones de dicha recta.

$$7 - 2 = \frac{-11+1}{-2} \neq \frac{2-4}{-4}$$

Por lo tanto, el punto no está contenido en la recta.

c) La distancia entre el punto y la recta está dada por:

$$d = \frac{|[(0,\ 0,\ 0) - (2,\ -1,\ 4)] \times (1,\ -2,\ -4)|}{|(1,\ -2,\ -4)|} =$$

$$= \frac{|(-2,\ 1,\ -4) \times (1,\ -2,\ -4)|}{|(1,\ -2,\ -4)|}$$

Al desarrollar el producto vectorial del numerador queda:

$$d = \frac{|(-12,\ -12,\ 3)|}{|(1,\ -2,\ -4)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + (3)^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{144 + 144 + 9}}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \frac{\sqrt{297}}{\sqrt{21}}$$

por lo tanto:

$$d = \sqrt{\frac{297}{21}} \qquad \frac{99}{7}$$

d) El ángulo entre la recta y el eje Y es igual al ángulo entre el vector $\bar{u}$ paralelo a la recta y un vector paralelo al eje; por ejemplo, el vector unitario j.

Entonces:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{u} \cdot j}{|\bar{u}|\,|j|} =$$

$$= \text{ang cos } \frac{(1,\ -2,\ -4) \cdot (0,\ 1,\ 0)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2}\ \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \text{ang cos } \frac{-2}{\sqrt{21}\ \sqrt{1}}$$

por lo tanto:

$$\theta = \text{ang cos } -\frac{2}{\sqrt{21}}$$

Ejemplo 2

Para el plano mostrado en la figura:

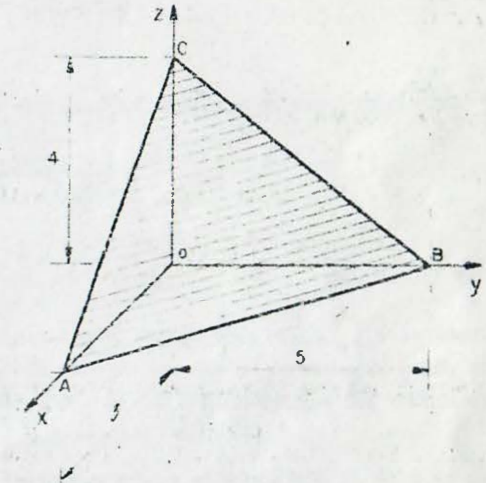
a) Determinar su ecuación cartesiana.

b) Calcular la distancia al punto P(0, -2, 3).

c) Obtener el valor del ángulo que forma con el plano coordenado XZ.

d) Determinar el valor que debe tener c, para que el punto P(5, -1, c) pertenezca al plano.

e) Demostrar que es perpendicular al plano de ecuación $-3x + 5y - 27 = 0$.



Solución:

a) El plano contiene a los puntos A, B y C, cuyas coordenadas son:

A(3, 0, 0) ; B(0, 5, 0) ; C(0, 0, 4)

Al tener como origen al punto A, se determinan las componentes de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (0,\ 5,\ 0) - (3,\ 0,\ 0) = (-3,\ 5,\ 0)$$

$$\overline{AC} = (0,\ 0,\ 4) - (3,\ 0,\ 0) = (-3,\ 0,\ 4)$$

Para obtener un vector $\bar{N}$, normal al plano, se efectúa el producto vectorial $\overline{AB} \times \overline{AC}$:

$$\bar{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20i + 12j + 15k$$

entonces la ecuación cartesiana del plano puede escribirse como:

$$20(x - 3) + 12(y - 0) + 15(z - 0) = 0$$

por lo tanto:

$$20x + 12y + 15z - 60 = 0$$

b) La distancia entre el plano y el punto está dada por:

$$d = \frac{[(0,\ -2,\ 3) - (3,\ 0,\ 0)]\cdot(20,\ 12,\ 15)}{\sqrt{20^2 + 12^2 + 15^2}} =$$

$$= \frac{(-3,\ -2,\ 3)\cdot(20,\ 12,\ 15)}{\sqrt{400 + 144 + 225}} =$$

$$= \frac{-60 - 24 + 45}{\sqrt{769}} = -\frac{39}{\sqrt{769}}$$

aplicando valor absoluto: $d = \frac{39}{\sqrt{769}}$

c) El ángulo que forma con el plano coordenado XZ es igual al ángulo entre los vectores normales a estos planos.

$$\cos\theta = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\,|\bar{N}_2|} = \frac{(20,\ 12,\ 15)\cdot(0,\ 1,\ 0)}{\sqrt{20^2 + 12^2 + 15^2}\ \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{769}\ \sqrt{1}} = \frac{12}{\sqrt{769}}$$

por lo tanto:

$$\theta = \text{ang cos}\ \frac{12}{\sqrt{769}}$$

d) Al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano:

$20(5) + 12(-1) + 15(c) - 60 = 0$

$100 - 12 + 15c - 60 = 0$

$28 - 15c = 0$

por lo tanto: $c = \frac{28}{15}$

e) El producto escalar entre los vectores normales a los planos es:

$(20,\ 12,\ 15)\cdot(-3,\ 5,\ 0) = (20)(-3) + (12)(5) = 0$

por lo tanto; sí son perpendiculares.

SEGUNDO BLOQUE

VI.3 RELACIONES ENTRE PLANOS Y RECTAS

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica; páginas 69 a la 72 (omitir demostraciones)

Ejemplo 3

Encontrar la ecuación cartesiana del plano definido por las rectas:

$$L_1: \quad 3 - x = -\frac{y-2}{\frac{3}{2}} = 4z$$

4z = t

z = 1/4

ANEXO

$$L_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

Solución:

En primer término se expresan ambas rectas en forma simétrica:

$$L_1: \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

$$L_2: \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{\frac{1}{2}}$$

La primera recta es paralela al vector $\left(-1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ y la segunda al vector $\left(-2,\ -3,\ \frac{1}{2}\right)$. Se observa que las componentes de ambos vectores son proporcionales entre sí, lo que indica que las dos rectas son paralelas.

El punto $A(3,\ 2,\ 0)$ pertenece a L_1 y el punto $B(2,\ 3,\ 0)$ a la recta L_2. Las componentes del segmento dirigido $\overline{AB}$ son:

$$\overline{AB} = (-1,\ 1,\ 0)$$

las componentes del vector normal al plano pueden determinarse al efectuar el producto vectorial del segmento dirigido $\overline{AB}$ por el vector $\bar{u}$ paralelo a las rectas.

$$\overline{AB} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + 5k$$

entonces, la ecuación del plano queda:

$$\frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(y-2) + 5(z-0) = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - 1 + 5z = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 5z - \frac{5}{2} = 0$$

$$x + y + 10z - 5 = 0$$

Ejemplo 4

Hallar las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los planos:

$$2x + 5y - 7z + 1 = 0$$

$$3x - 2y + 4z - 2 = 0$$

Solución:

La dirección de la recta de intersección estará dada por el producto vectorial de las normales a ambos planos:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6i - 29j - 19k$$

El problema es determinar un punto de la recta; para ello, basta con fijar un valor a alguna de las coordenadas en las ecuaciones de ambos planos y resolver por ecuaciones simultáneas el sistema. Si $z = 0$

$$2x + 5y + 1 = 0$$

$$3x - 2y - 2 = 0$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$x = \frac{8}{19}, \qquad y = -\frac{7}{19}$$

por lo tanto las ecuaciones simétricas de la recta son:

$$\frac{x - \frac{8}{19}}{6} = \frac{y + \frac{7}{19}}{-29} = \frac{z}{-19}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta:

$$2 - x = 2y + 1 = z$$

2. Hallar la distancia del punto $P(-1, 2, 3)$ a la recta de ecuaciones:

$$\frac{x - 7}{6} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z}{3}$$

3. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos:

$A(2, 1, 3)$ $\qquad$ $B(-1, 0, 2)$ $\qquad$ $C(4, -2, 1)$

4. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos:

$$2x - 3y + 4z - 1 = 0$$

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

5. Hallar el ángulo que forman la recta $\frac{x + 2}{3} = -y = \frac{z - 4}{2}$ y el plano $2x + 3y - z + 11 = 0$ y encontrar las coordenadas del punto de intersección.

6. Determinar la ecuación del plano definido por las rectas:

$$L_1 : \frac{x - 1}{2} = y - 4 = 2z - 10 \qquad L_2 : \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

VII. ECUACIONES PARAMETRICAS Y ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

Este tema comprende un bloque. Se sugiere estudiar los conceptos teóricos en las referencias indicadas, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

VII.1 ECUACIONES DE CURVAS PLANAS. ECUACION VECTORIAL. ECUACIONES PARAMETRICAS

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 73 a la 76

VII.2 ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

Referencia: Apuntes de Geometría Analítica, páginas 80 a la 83, 88 a la 90 y 92 a la 94

Ejemplo 1

Hallar la ecuación cartesiana de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = \cosh t \qquad\qquad 0 \leq t \leq \ln 3$$

$$y = \operatorname{senh} t$$

Solución:

Para eliminar el parámetro t, se aplican las siguientes identidades:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad y \qquad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

con lo cual las ecuaciones paramétricas originales se pueden expresar:

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad ; \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

elevando al cuadrado ambas ecuaciones y restándolas, se obtiene la expresión:

$$x^2 - y^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4}$$

esto es:

$$x^2 - y^2 = \frac{4}{4} = 1$$

de donde:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Para que esta ecuación represente a la curva original, habrá que determinar las restricciones para las variables x y y.

De las ecuaciones originales, se tiene:

para $t = 0$ $$x = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

para $t = \ln 3$ $$x = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{e^{\ln 3}}{2} + \frac{1}{2e^{\ln 3}}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{5}{3}$$

por lo que:

$$1 \leq x \leq \frac{5}{3}$$

De igual manera:

para $t = 0$ $$y = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

para $t = \ln 3$ $$y = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{e^{\ln 3}}{2} - \frac{1}{2e^{\ln 3}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

por lo que:

$$0 \leq y \leq \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana de la curva es:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{con} \quad 1 \leq x \leq \frac{5}{3}, \quad 0 \leq y \leq \frac{4}{3}$$

Se debe observar que con sólo restringir a una de las variables, automáticamente queda también establecida la restricción para la otra variable.

Ejemplo 2

Discutir la ecuación polar de la curva $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$.

Solución:

a) Intersecciones

Con el eje polar

si $\theta = 0$; $r = 2$

si $\theta = \pi$; $r = 2$

y en general para $\theta = n\pi$, $n \in N$, $r = 2$

Con el eje copolar

si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 6$

y en general para:

$$\theta = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi$$

donde:

$n \in N$ y $r = 6$

si $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = -2$

y en general para:

$$\theta = \left(\frac{3}{2} + 2n\right)\pi$$

donde:

$n \in N$ y $r = -2$

Con el polo

Si en la ecuación se sustituye $r = 0$, se tiene:

$$0 = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta \implies \theta = \text{ang sen } -\frac{1}{2}$$

Por lo que:

$r = 0$

para:

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \ \frac{11}{6}\pi, \ \frac{19}{6}\pi, \ \frac{23}{6}\pi, \ \ldots$$

que resultan ser los valores para los cuales la curva pasa por el polo.

b) Simetrías.

Con respecto al eje polar

Si se cambia θ por $(-\theta)$, se tiene:

$$r = 2 + 4 \operatorname{sen}(-\theta) = 2 - 4 \operatorname{sen} \theta ,$$

la ecuación original se altera, por lo que la curva no es simétrica respecto al eje polar.

Con respecto al eje copolar

Si se cambia θ por $(\pi - \theta)$, se tiene:

$$r = 2 + 4\ \mathrm{sen}\ (\pi - \theta) = 2 + 4\ [\mathrm{sen}\ \pi \cos\theta - \mathrm{sen}\ \theta \cos \pi]$$

$$= 2 + 4\ \mathrm{sen}\ \theta$$

la ecuación original no se altera, por lo que la curva es simétrica respecto al eje copolar.

Con respecto al polo

Si se cambia θ por $(\pi + \theta)$, se tiene:

$$r = 2 + 4\ \mathrm{sen}\ (\pi + \theta) = 2 + 4\ [\mathrm{sen}\ \pi \cos\theta + \mathrm{sen}\ \theta \cos \pi]$$

$$= 2 - 4\ \mathrm{sen}\ \theta$$

la ecuación original se altera, por lo que la curva no es simétrica respecto al polo.

c) Extensión

Como la ecuación de la curva es $r = 2 + 4\ \mathrm{sen}\ \theta$, el valor de r, depende de los valores que tome la función seno, y puesto que los valores de esta función están dentro del intervalo $[-1, 1]$, el valor de r será finito para cualquier valor θ, por lo cual se concluye que la curva es cerrada.

d) Cálculo de coordenadas de algunos puntos de la curva.

Como la curva es simétrica con respecto al eje copolar, sólo es necesario calcular las coordenadas de algunos puntos del semiplano derecho, con lo cual quedan definidos los puntos simétricos correspondientes del semiplano izquierdo.

Sustituyendo en la ecuación original los valores de θ se obtiene la siguiente tabulación:

θ	r
$\frac{\pi}{6}$	4
$\frac{\pi}{4}$	$2 + 2\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$2 + 2\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$2 - 2\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$2 - 2\sqrt{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	0

Los puntos simétricos con respecto al eje copolar de los puntos que aparecen en la tabla anterior son:

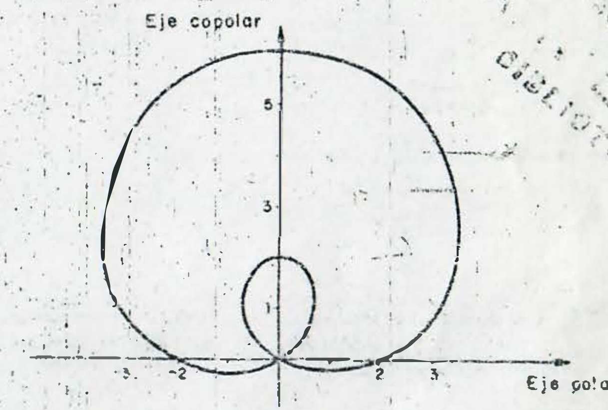
$$(4, \tfrac{5}{6}\pi),\ (2 + 2\sqrt{2}, \tfrac{3}{4}\pi),\ (2 + 2\sqrt{3}, \tfrac{2}{3}\pi),\ (2 - 2\sqrt{3}, -\tfrac{2}{3}\pi),$$

$$(2 - 2\sqrt{2}, -\tfrac{3}{4}\pi) \quad \text{y} \quad (0, -\tfrac{5}{6}\pi) \quad \text{respectivamente.}$$

Asimismo en el inciso (a) se calcularon otros puntos de la curva:

$$(2, 0),\ (2, \pi),\ (6, \tfrac{\pi}{2}),\ (-2, \tfrac{3}{2}\pi),\ (0, \tfrac{7}{6}\pi)$$

e) Representación gráfica de la curva.



f) Transformación de la ecuación polar, a coordenadas cartesianas.

Se parte de la ecuación original:

$$r = 2 + 4\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Al multiplicar en ambos miembros por r se obtiene:

$$r^2 = 2r + 4r\ \mathrm{sen}\ \theta$$

transformando:

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 4y$$

de donde:

$$(x^2 + y^2 - 4y)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

que resulta ser la ecuación cartesiana.

Ejemplo 3

Para la cónica cuya ecuación polar es:

$$r = \frac{6}{3 + 2\ \mathrm{sen}\ \theta}$$

a) Obtener su excentricidad.

b) Identificar de que curva se trata.

c) Indicar la posición de su eje focal.

d) Determinar la ecuación de su directriz.

e) Obtener las coordenadas de sus vértices.

Solución:

a) Para expresar la ecuación en una de las formas conocidas, se divide el numerador y el denominador entre 3, obteniéndose así:

$$r = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

por lo que $\varepsilon = \frac{2}{3}$ es el valor de la excentricidad.

b) Como $\varepsilon < 1$ la cónica es una elipse.

c) Ya que la ecuación de la curva es de la forma:

$$r = \frac{\varepsilon P}{1 + \varepsilon\operatorname{sen}\theta} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)3}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

su eje focal es coincidente con el eje polar, y por lo tanto sus vértices se encuentran en él.

d) Del inciso anterior se deduce que la directriz es paralela al eje polar y se encuentra a una distancia $P = 3$ del polo, por lo que su ecuación es:

$$r = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta}$$

e) Al sustituir en la ecuación original los valores de $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$ se concluye que los vértices de la ecuación son:

$$V_1\left(\frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } V_2\left(6, \frac{3}{2}\pi\right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dada la ecuación vectorial:

$$\bar{r} = (\theta - \operatorname{sen}\theta)\bar{i} + (1 - \cos\theta)\bar{j}$$

a) Obtener las ecuaciones paramétricas.

b) Obtener la ecuación cartesiana.

c) Graficar la curva.

olar de la curva $r = \theta + \operatorname{sen}\theta$.

3. Para la cónica cuya ecuación polar es:

$$r = \frac{4}{2 - 3\cos\theta}$$

a) Determinar su excentricidad.

b) Identificar la curva.

c) Obtener la ecuación de su directriz.

RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA I

3. a) V , b) F , c) V , d) F , e) F

4. a) $x > \frac{5}{3}$, b) $x < -\frac{9}{2}$, c) $x > \frac{17}{5}$,

   d) $x > 0$, e) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{5}, \infty\right)$

   f) $1 < x < 2$; g) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

TEMA II

1. $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

2. $z = \frac{1}{324}$ cis 180°

3. $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$, $x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$,

   $x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$, $x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

TEMA III

1. $g(x) = x^3 - 8x$, $r(x) = 59x + 5$

2. a) $B = 6$

   b) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = -1$,

   $\alpha_5 = 1/2$, $\alpha_6 = 1 + \sqrt{6}$, $\alpha_7 = 1 - \sqrt{6}$

TEMA IV

1. a) Convergente b) Divergente

2. a) Divergente b) Cond. convergente

3. $r = \frac{1}{2}$, intervalo de convergencia $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. $\operatorname{sen h} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

TEMA V

1. $C(1, 3, 4)$, 2. $P_2(5, -3, 0)$

3. $A = 24.82\ u^2$, 4. $V = 2\ u^3$

TEMA VI

1. $\frac{x}{-1} = 3y = z$, 2. $d = 7$

3. $-x - 8y + 11z - 23 = 0$

4. $x = -5t - 1$
   $y = 6t - 1$
   $z = 7t$

5. $\theta = \text{ang sen } \frac{1}{14}$; $P = (-11, 3, -2)$

6. $5x - 17y + 14z - 7 = 0$

TEMA VII

1. a) $x = \theta - \text{sen } \theta$, $y = 1 - \cos \theta$

   b) $x = \text{ang cos } (1 - y) - \sqrt{2y - y^2}$

3. a) $\frac{3}{2}$

   b) Como $\mathcal{E} > 1$, se trata de una hipérbola

   c) $r = -\frac{\frac{4}{3}}{\cos \theta}$