FACULTAD DE INGENIERIA U. N. A. M.

Problemario de Modelos de Programación Lineal

ING. FRANCISCO ZEPEDA FLORES

ENERO 1979

PROBLEMARIO DE MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL

C O N T E N I D O

P R E S E N T A C I O N

Presionado por la necesidad de la práctica docente en cuanto a los apuntes de clase para Investigación de Operaciones, particularmente en cuanto a un número suficiente y variado de problemas sobre construcción de modelos en P.L., se edita este problemario como un auxiliar en tal proceso de enseñanza-aprendizaje. Tiene como finalidad encaminar al alumno en la construcción de modelos de Investigación de Operaciones, y de ninguna manera tiene pretensiones teóricas.

En los diferentes problemas escogidos se trató de eliminar la orientación mercantilista y utilitarista, que en nuestro medio tienen los modelos y los conceptos de la I. O., por lo que se incluyen problemas de organización que implican "una orientación social".

El conjunto de problemas es obra de los autores citados en algunos casos, en otros, representan el esfuerzo creativo o bibliográfico de profesores y ayudantes, que a través de los años les ha exigido el proceso de docencia de la cátedra de Investigación de Operaciones. Para todos ellos el reconocimiento merecido.

MODELOS

Introducción.

En la definición de la I.O., y su metodología, se adelantó la idea de que esta disciplina utiliza modelos que representan los problemas, como un medio de auxilio ante la imposibilidad de experimentar con el sistema real, o como una herramienta para conocer la realidad u obtener soluciones de problemas concretos.

Nos proponemos aquí, aclarar el concepto de modelos. sus características y el papel que juega en la solución de problemas de organización, sin pretender establecer o explicar la teoría de modelos, en toda su profundidad y extensión.

Las actitudes frente a las matemáticas, corrientemente son de frustración y falta de entendimiento de sus procedimientos y su metodología. La enseñanza actual de las matemáticas, desde sus niveles primarios hasta los profesionales, favorece la práctica operativa negando el manejo de principios y metodología, lo que produce que el alumno aprenda a operar y resolver relaciones algebráicas, trigonométricas, sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales. etc., pero no llega a captar los principios de las matemáticas. Este enfoque se manifiesta en los alumnos por su poca capacidad de abstracción, la falta de aplicación sistemática del proceso inductivo, teniendo como resultado todo ello la animadversión a las matemáticas, de todo estudiante que le han enseñado técnicas de cálculo, y no la riqueza conceptual de las matemáticas que lo lleve a entenderlas.

Lenguaje.

Partiendo del esfuerzo empírico, que el hombre desde su aparición, aplica para satisfacer sus necesidades elementales, la ciencia va creando lenguajes propios, descubriendo las leyes que rigen los fenómenos naturales, auxiliándose de la experimentación y los conocimientos anteriores.

Dichos lenguajes nos auxilian para entender el conocimiento de cada disciplina, y para utilizarlo en la representación de la realidad, como un medio de comunicación y experimentación de esa realidad.

El hombre inventa lenguajes simbólicos, para poder representar situaciones reales, es decir, para crear modelos de ellas.

Una vez que tenemos representados a los elementos de un conjunto determinado, por

un símbolo, para cada uno de ellos, y conociendo las reglas para combinarlos, disponemos de un lenguaje simbólico que nos auxiliará, en la representación de problemas determinados, a través de modelos que son la conjugación de ese lenguaje.

Ejemplos de lenguajes simbólicos los manejaremos todos los días como medio de comunicación y de investigación. El lenguaje del español, es parte de nosotros mismos; el lenguaje matemático, como ingenieros, se pretende manejarlo con sus instancias de aplicación; los lenguajes de computadora permiten "entender" y utilizar las máquinas electrónicas; los circuitos eléctricos y electrónicos disponen de su lenguaje particular; la Ingeniería Industrial analiza los sistemas productivos bajo un lenguaje que facilita dicho análisis; la Química estudia la composición y transformación de la materia auxiliada de su lenguaje propio; etc.

Sin pretender exhaustividad, se exponen algunas características principales de los lenguajes simbólicos, que son también en general, características de los modelos:

a) Arbitrariedad-Convención.

Los símbolos con que presentamos un elemento son arbitrarios y normados bajo la convención de que tal elemento simbólico hace las veces, o és, "como si fuera" tal elemento real.

Resulta conveniente utilizar símbolos adecuados que nos faciliten la tarea de comprenderlos. También es importante que la relación entre símbolo y elemento representado sea una, por lo menos, durante un proceso completo; causa confusión si un mismo símbolo, en un mismo problema, representa dos o más objetos, originado lo que podemos llamar un problema semántico.

b) Abstracción de la realidad.

Al representar la realidad por elementos que no son esa realidad, hacemos una abstracción, es decir, en una abstracción nos olvidamos de muchos detalles de la realidad y ello nos puede conducir a errores, en la solución de los problemas, pero vemos que aunque nos alejamos de la realidad, el hecho de disponer de una solución del problema abstracto resulta de mucha utilidad para resolver el problema real.

c) Generalidad de los símbolos.

Entre más cosas puedan representar los símbolos son más generales, y en cuanto más abstracto sea un modelo, nos sirve para resolver más diferentes problemas. De aquí que cuando resolvemos un modelo abstracto, estaremos resolviendo una generalidad de problemas, y auxiliándonos a resolver otros problemas semejantes.

d) Operatividad de los símbolos.

La sucesión de símbolos nos formarán una expresión del lenguaje. La regla de formación de expresión y cómo transformarlas, representan la sintáxis del lenguaje,- como por ejemplo, las reglas de transformación de las expresiones algebráicas y - todo lo relativo a ellas, si sólo enseñamos el carácter operativo de los símbolos, estaremos deformando las matemáticas y su uso, restándole la mayor parte de su riqueza.

Esto último es lo predominante en nuestro medio, con respecto a la enseñanza de -- las matemáticas, y se justifica por razones eficientistas que tienen a enajenar al alumno, con cientos y cientos de ejercicios operativos.

Por otro lado en nuestra vida cuando nos enfrentamos a un fenómeno natural, o a un problema específico, después de observarlo, lo tratamos de entender construyendo - una representación del fenómeno (un dibujo por ejemplo) y experimentando con ella analizamos la realidad ante tal o cual cambio, para en último instancia, conocer - cuál es el principio que rige el fenómeno en cuestión. Nos hemos valido de un modelo para entender el fenómeno o sea un modelo es una representación abstracta de la realidad, mediante un lenguaje que utilizamos para conocerla. Pero esta no es la - única forma de hacerlo.

Cuando tenemos un problema y queremos encontrar su solución, dentro del contexto - de metodología científica, tenemos varias formas de buscarla:

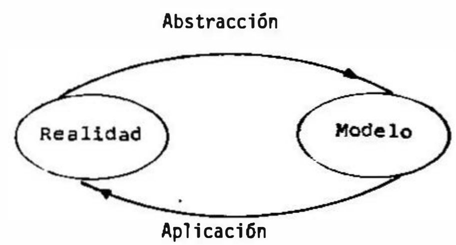
Método directo. Experimentaríamos con los elementos reales, ennumerando los posi-- bles resultados encontrados, al manipular dichos elementos, hasta encontrar la solución buscada.

Simulación. Si en lugar de trabajar con los elementos reales, lo hacemos con representantes de ellos, que simulen ser el elemento real y se comporten como ellos --- mismos, estaremos haciendo una imitación del fenómeno.

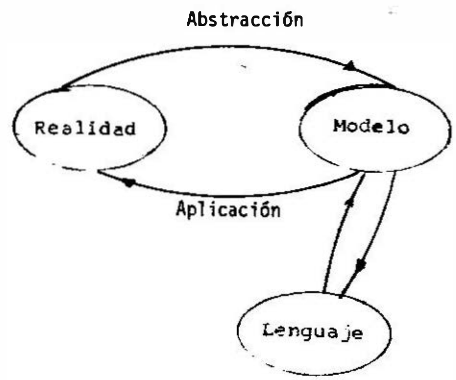
Solución Mental. Se presenta cuando cada elemento real lo substituimos por una --- idea, y en nuestra mente operamos el conjunto de ideas, con el fin de resolver el problema.

Modelos. Por la dificultad misma de trabajar con la realidad, un camino para entender los fenómenos o resolver los problemas, es aquél que utiliza una representación abstracta de la realidad y que permite manipular el problema como si fuera ella misma. Entendido así concepto de modelo, las dos anteriores formas de resolver un problema, tienen en común la utilización de éstos, como auxilio, para conocer la realidad.

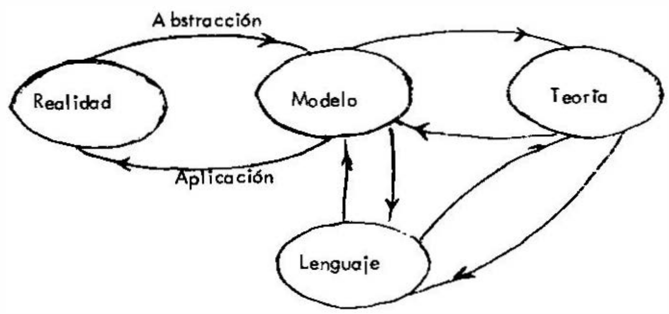
Si el modelo no representa adecuadamente a la realidad, si la simplificamos demasiado y no tomamos características o propiedades importantes de ella. la solución que encontraremos para el modelo, no será una solución para el fenómeno real. Aún en este caso, el modelo nos auxilia a descubrir que las propiedades que no pensabamos importantes, lo son realmente. Un esquema que nos indica esta compleja relación puede ser:



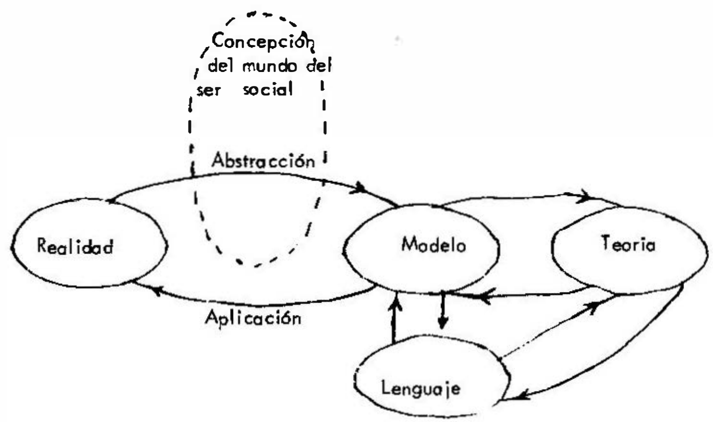
Pero como señalamos, el modelo lo construimos, auxiliados por un lenguaje que posee sus reglas de ordenamiento (sintáxis), y significado de sus expresiones (semántica), que deberemos tomar en cuenta para la construcción del modelo, con lo que nuestro esquema se desarrollará así:



Pero cuando nos enfrentamos a la necesidad de transformar y conocer la naturaleza, un modelo no basta para conocer esa realidad, por lo que la construcción de éste es solo un primer paso que al multiplicarse, van formando una compleja red de modelos, que sólo el desarrollo y estructuración de una teoría, nos puede explicar, -- con lo que el esquema se nos complica:



Pero todavía más, como las abstracciones las puede hacer el hombre gracias a su capacidad de pensar, de tener ideas, y estas ideas son generadas por el ser que se - desenvuelve y vive en un medio ambiente determinado, tanto natural como social, -- que condiciona sus ideas y concepciones, dicho más concretamente, la conciencia -- está determinada por el ser social. Esto implica que las abstracciones realizadas en el proceso esquematizado, se dan en un ser social determinado, cuya concepción del mundo condiciona y orienta el desarrollo de un cierto tipo de interpretaciones o representaciones de la realidad, es decir, condiciona y orienta a las abstracciones señaladas en el esquema:



A pesar de la complejidad que ahora tiene el diagrama, éste es sólo un esquema del proceso de adquisición del conocimiento, que el hombre ha perfeccionado, llevándole a conocer, dominar y transformar su medio ambiente.

Dependiendo de qué tipo de representación se construya, estaremos utilizando diferentes clases de modelos y si queremos hacer una clasificación arbitraria y convencional que pueden ser muchos los criterios, tendríamos la siguiente:

Modelos Icónicos, son los que representan las propiedades principales de la realidad bajo una escala diferente.

Modelos Analógicos, aquí las propiedades se representan mediante símbolos análogos a la realidad, por ejemplo, las redes son análogas a sistemas hidráulicos, eléctricos, productivos, etc.

Modelos Simbólicos, son aquellos que mediante símbolos como letras, números y --- otros, representan las propiedades de los fenómenos reales. Los modelos algebráicos son un ejemplo de ellos, que para nuestro caso, nos interesan en forma particular.

Con respecto a los modelos de optimización, en particular, existe a su vez una -- clasificación general, que permite ubicar a los modelos de programación lineal en el amplio contexto. Ver los esquemas anexos sobre clasificación de modelos de optimización.

Construcción de Modelos de Programación Lineal.

Un problema de programación matemática es un problema de optimización, que puede ser formulado, en términos del siguiente modelo matemático:

Determinar $\underline{X}^{\circ} = \left[X_1^o, X_2^o, \ldots, X_n^o\right]$ para maximizar o minimizar

$$Z = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (1)$$

sujeta a las restricciones:

$$qi\,(X_1, X_2, \ldots, X_n) \gtreqless di \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (2)$$

La expresión (1), es la función objetivo, figura de mérito o función económica. Las expresiones (2), son las restricciones del problema, a las que está sujeta (1).

Si f y qi son funciones convexas, se tendrá un modelo de programación convexa.

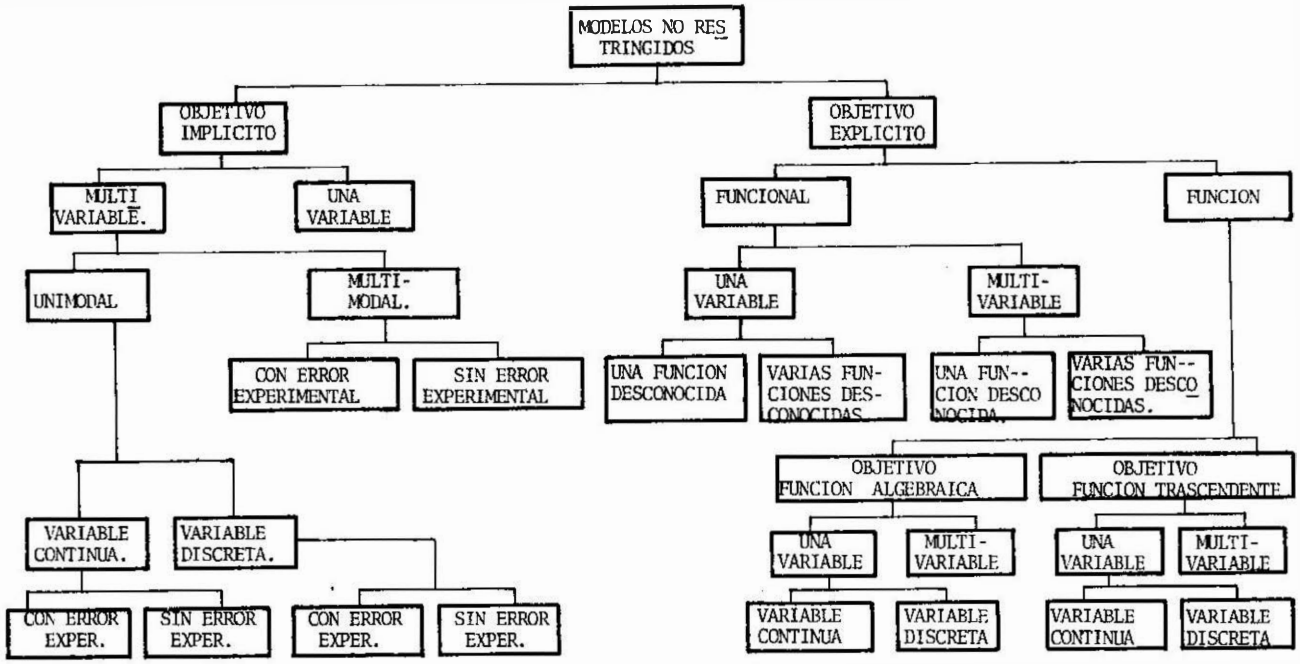


Tabla No. 1

Clasificación de Modelos de Optimización.

Dr. Felipe Ochoa Rosso. 1973. UNAM

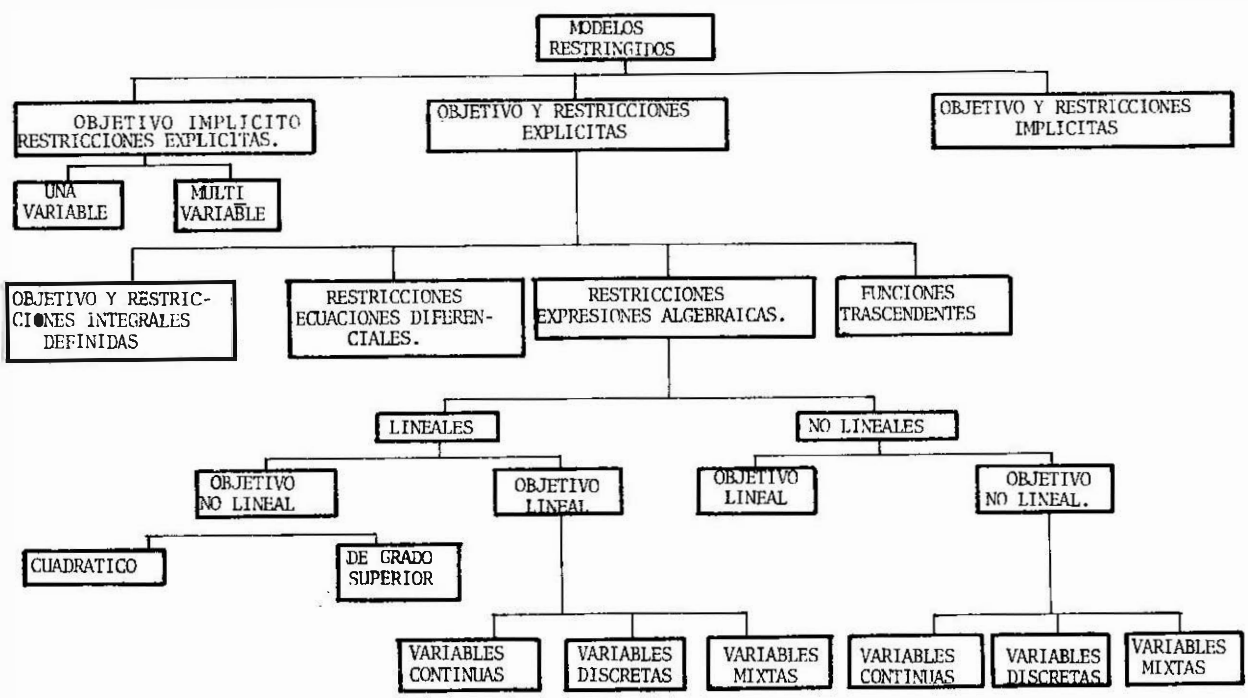


Tabla No. 2

Clasificación de Modelos de Optimización.

Dr. Felipe Ochoa Rosso. 1973. UNAM

Si f es una función cuadrática y q_i es lineal, se tratará de un modelo de programación cuadrática. Si ambas, f y q_i, son lineales, se dice que es un modelo de programación lineal; o sea, un problema de programación matemática, se le denomina de programación lineal cuando:

Dados A, $\underline{c}$ y $\underline{d}$, tratamos de determinar $\underline{X}^0 = \left[X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0\right]$

para max o min $Z = \underline{c}\ \underline{x}$

sujeta a

$$A\,\underline{x} \ \underline{\lessgtr}\ \underline{d}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

donde A es una matriz de coeficientes, que representan la cantidad de insumos por unidad producida.

$\underline{X}$, es un vector columna de n componentes, denominado vector de actividades.

$\underline{d}$, es un vector columna de m componentes, representativo de los requerimientos o disponibilidades.

$\underline{C}$, es un vector renglón de n componentes, que representa el esfuerzo ó el beneficio generado, por la realización de las actividades concretas.

En el transcurso del estudio de las matemáticas se aprende entre otras cosas, los símbolos de la aritmética y del algebra, como los números, símbolos para las operaciones elementales, la igualdad, las variables, etc. También se aprende las reglas operativas con dichos símbolos y el estudiante las utiliza regularmente, aunque en ocasiones no conozca sus relaciones con la realidad. Con la construcción de los modelos a los problemas aquí incluidos, se dará una idea de las aplicaciones de los conceptos, hasta ahora aprendidos.

Como inicio de la presentación de los problemas que contiene este trabajo, a continuación se incluye un problema tipo, para el cual se construye su modelo de programación lineal, detallando los pasos que se van dando, apoyados en los elementos teóricos mencionados en este Problemario.

Ejemplo 1. Dieta:

El comité organizador de un evento internacional deportivo, desea determinar la cantidad de leche, carne, huevos y verduras que debe comer cada deportista diariamente, de tal forma que el costo global por alimentación, de todos los deportistas, sea lo menor posible.

Los médicos dietistas han fijado, que la cantidad de proteínas y calorías, que al menos deben ingerir los deportistas, son respectivamente, 500 gr. y 5000 al día.

Un kilógramo de carne contiene 500 grs. de proteínas y 400 calorías; uno de huevos contiene 250 grs. de proteínas y 200 calorías; un kilo de verduras posee 600 grs. de proteínas y 200 calorías; por último, un litro de leche (supongámoslo equivalente a 1 Kg.) contiene 1000 calorías y 100 grs. de proteínas.

Los proveedores del comité, le han fijado los siguientes precios, a los alimentos mencionados:

1 Kg. de carne	\$ 30.00
1 Kg. de huevos	\$ 10.00
1 Kg. de verduras	\$ 5.00
1 Litro de leche	\$ 3.00

SOLUCION.

La búsqueda de la solución de este problema, fue encomendada a la sección de Investigación de Operaciones, quien la resolvió de la siguiente manera:

I. ¿Cuál es el objetivo que se pretende?

1.- Si impartir el costo alimentriz, a los atletas lo mejor posible?

2.- Alcanzar un máximo de proteínas y calorías?

3.- Satisfacer el gusto gastronómico de los atletas?

4.- Alcanzar una dieta balanceada a un costo mínimo?

II. ¿Cuáles son los datos conocidos?

1.- Qué tipo de alimentos se consumirán?

2.- Conocemos el costo de cada alimento?

3.- La cantidad máxima de alimentos en bodega?

4.- Cantidades máximas de cada alimento que pueden proporcionar los proveedores?

5.- Cada alimento cuántas proteínas y calorías proporciona por unidad?

6.- Para cuántos días es la dieta?

7.- A qué altura sobre el nivel del mar serán consumidos los alimentos?

8.- Qué capacidad de refrigeración tenemos?

9.- Qué número de cocineros se requieren?

10.- Qué número de proteínas y calorías requieren en una dieta balanceada?

11.- Los datos conocidos varían? Sí? en qué rango?

III. ¿Cuáles son los datos no conocidos? (Incógnitas)

De las respuestas, a las preguntas del inciso anterior, definiremos cuáles son nuestras constantes y variables, cuáles conocemos y cuáles no.

En esta parte deberemos identificar cuáles son los datos variables, uno que son el objeto del problema, o sea, aquella información que sólo obtendremos al resolver el modelo.

IV. ¿Qué condiciones nos impone el problema?

1.- Hay un límite en el presupuesto?

2.- Por condiciones de la oferta o de otras características, existe un límite para los recursos necesitados?

3.- Nos fijan un número de calorías por ingerir en la dieta?

4.- El costo es el objetivo? Tiene límites?

5.- Hay distinción entre deportistas?

6.- El peso de los atletas influye en la dieta?

7.- Cuáles condiciones son importantes (relevantes) y cuáles no?

V. ¿Cuáles son los datos variables?

1.- Asigne una notación a cada variable.
2.- Puntualice el rango de variación.
3.- Conocemos los valores de esa variable?
4.- Podemos cambiar esos datos?
5.- Puedo ordenar en tablas, gráficas, cuadros y/o diagramar los datos?

VI. ¿Cuáles son las relaciones entre los datos?

1.- Hay grupos de datos con relaciones?
2.- La relación es lineal?, Probabilística?
3.- La relación es una función conocida?
4.- No existen relaciones?
5.- Puedo obtener función(es) de esas relaciones?
6.- Son únicas?
7.- Puedo comprobar o demostrar las funciones?
8.- Son relevantes las funciones construidas?
9.- Las relaciones cambian con el tiempo?

VII. ¿Qué problemas conozco semejantes a éste?

1.- Se puede construir un modelo general?
2.- Qué gano con un modelo general?
3.- Partes del problema son análogos a problemas semejantes. Podría utilizar un método de solución.
4.- Conozco un problema más general, uno más particular?
5.- Una figura me puede ayudar?

VIII. ¿Me sirve un modelo algebráico, lineal, no lineal, dinámico, estático?

IX. ¿Se puede resolver el problema por partes?

Estas preguntas, unas importantes, otras no y otras clave para la solución del problema, dieron como resultado el siguiente proceso de construcción de un modelo que resultó de Polvio. El siguiente cuadro concentra los datos numéricos del problema.

Contenidos Unitarios Alimentos	Carne	Huevo	Verduras	Leche	Total
Calorías	400	200	200	1000	5000
Proteínas	500	250	600	100	300
Precio	\$ 30.00	\$ 10.00	\$ 5.00	\$ 3.00	

Como la dieta esta integrada por cuatro alimentos, y la cantidad de cada una de ellas se desconoce, las representaremos:

x_1 = Cantidad de kilogramos de carne que intervienen con la dieta.

x_2 = Cantidad de kilogramos de huevos que intervienen con la dieta.

x_3 = Cantidad de kilogramos de verduras que intervienen con la dieta.

x_4 = Cantidad de kilogramos de leche que intervienen con la dieta.

Estas variables nos definen el nivel de actividad, o sea, cuando resolvamos el sistema conoceremos su valor, y por lo tanto, la cantidad con la que intervienen en la dieta.

Concluímos que el objetivo es minimizar una función que represente el costo. Esta función expresa la relación lineal de las sumas de costo por alimento:

o sea, que si Kg. de carne nos cuesta \$ 30.00, x_1 Kgs. costará 30 x_1, así

$30\ x_1$ = costo de la cantidad de carne que interviene en la dieta.

$10\ x_2$ = costo de la cantidad de huevos que intervienen en la dieta.

$5\ x_3$ = costo de la cantidad de verduras que intervienen en la dieta.

$3\ x_4$ = costo de la cantidad de leche que intervienen en la dieta.

Por lo tanto el costo total de la dieta:

$$z = 30\ x_1 + 10\ x_2 + 5\ x_3 + 3\ x_4 \qquad (1)$$

y como tratamos de minimizar este costo, resulta:

$$\min z = 30\ x_1 + 10\ x_2 + 5\ x_3 + 3\ x_4$$

Si no existiera ninguna restricción, obviamente el valor de (1) sería cero, ya que su valor lo pudiéramos hacer tan pequeño como quisiéramos.

Pero sí hemos identificado restricciones en el problema, como por ejemplo, que la cantidad de calorías no puede ser menor que 5000 por cada dieta, o sea procediendo de igual manera que en (1), resulta:

$$400\ x_1 + 200\ x_2 + 200\ x_3 + 1000\ x_4 \leq 5000 \qquad (2)$$

Similar restricción para las proteínas

$$500\ x_1 + 250\ x_2 + 600\ x_3 + 100\ x_4 \leq 300 \qquad (3)$$

Además $(x_1, x_2) \geq 0$

ser congruentes con la realidad.

Las ecuaciones (relaciones funcionales) (1), (2), (3), (4) nos completan un modelo clásico de Programación Lineal, es decir, una función objetivo a optimizar, sujeta a restricciones reales.

Estos modelos se resuelven mediante algoritmos iterativos, que nos conducen al valor de cada incógnita en caso de haber una solución. Antes de entrar en los algoritmos de solución, practiquemos la construcción de otros modelos de P.L., así que tratemos de resumir el proceso de pensamiento que nos lleve al planteamiento anterior.

1.- Observación detallada del problema.
2.- Ordenamiento y clasificación de datos.
3.- Convención de una notación clara y única.
4.- Identificación del objetivo del problema y las preguntas específicas.
5.- Construcción de las funciones que representan las relaciones entre los datos.
6.- Revisión de si el conjunto de funciones (modelo general) son representación adecuada del problema, de tal forma que al resolver el modelo, nos proporcione una solución a nuestro problema real.

P R O B L E M A S

R E S U E L T O S

PROBLEMA 1.

Canada, S.A. es un fabricante de zapatos que desea saber cuánto debe producir de zapatos populares y de lujo, en tal forma que maximice sus utilidades por período considerado, sabiendo que éstas son de \$25.00 y \$55.00 respectivamente.

El par de zapatos populares se llevan en su producción la mitad del tiempo que los de lujo.

La planta de Guadalajara tiene una capacidad de 1500 pares populares por día.

Los proveedores de piel sólo pueden entregar como máximo la suficiente para 900 pares por día y ambas clases necesitan igual cantidad de piel.
La demanda diaria esperada es de 1 300 pares populares y 600 pares de lujo.

Solución:

Llamando x_1 = Número de pares populares a producir por día

x_2 = Número de pares lujo a producir por día

Función objetivo

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 55x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_1 &\leq 1500 \\ x_1 + x_2 &\leq 900 \\ x_1 &\geq 1300 \\ x_2 &\geq 600 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.

La división de televisores de la compañía Phillips, S.A. desea maximizar sus utilidades por la venta de sus aparatos de color y de blanco y negro.

Cada aparato de color proporciona $2,000.00 de utilidad neta; el de blanco y negro $1,250.00 por unidad.

De acuerdo al contrato firmado con el sindicato y a las técnicas de producción, - para cada período de producción se tienen disponibles 500 horas-hombre para producción de partes, 2500 horas-hombre para ensamble y 600 horas-hombre para inspección.

Los proveedores de partes fijan una capacidad máxima de 4000 televisores blanco y negro y 1000 en color por cada unidad de tiempo.

Cada aparato de color requiere: 4 horas-hombre en producción de partes, 5 horas-hombre para ensamble y 3 horas-hombre en inspección.

Los de blanco y negro: 5 horas-hombre en producción de partes, 2 horas-hombre para ensamble y 1 hora-hombre para inspección.

Solución:

Llamando X_1 = Número de aparatos blanco y negro a producir

X_2 = Número de aparatos de color a producir

Función objeto:

$$\text{Max } Z = 1250\, X_1 + 2000\, X_2$$

S.A. (Restricciones)

$$5\, X_1 + 4\, X_2 \leq 5000$$
$$2\, X_1 + 5\, X_2 \leq 2500$$
$$X_1 + 3\, X_2 \leq 600$$
$$0 \leq X_1 \leq 4000$$
$$0 \leq X_2 \leq 1000$$

3.- Una industria produce 2 artículos distintos A y B; la elaboración del Artículo A se lleva $20.00 de mano de obra y el B se lleva $10.00. De materia prima se lleva $10.00 la unidad A y $30.00 la unidad B.

El desgaste de equipo se supone proporcional a la producción y es de $5.00 - por cada unidad de A y un peso por unidad B.

El beneficio por unidad de artículo es $8.00 para A y $5.00 para B. Si sólo se - cuenta con $100,000 para salarios; $180,000 para materia prima y no se quiere que el desgaste de los equipos exceda de $40,000 ¿Cuál es la cantidad que se debe producir de cada artículo para obtener las utilidades más altas posibles?

Solución:

PRODUCTO	MANO DE OBRA	MATERIA PRIMA	DESGASTE	BENEFICIO
A	20	10	5	8
B	10	30	1	5
CAPITAL	100,000	180,000	40,000	

Cantidad de producto = A

Cantidad de producto = B

$\therefore$ La función objeto es:

$$Z = 8A + 5B \quad \text{(maximizar)}$$

Donde:

X_1 = Mano de obra

X_2 = Materia Prima

X_3 = Desgaste

X_4 = Beneficio

Las restricciones son:

$$X_1 \leq 100,000$$
$$X_2 \leq 180,000$$
$$X_3 \leq 40,000$$

y

$$20A + 10B \leq X_1$$
$$10A + 30B \leq X_2$$
$$5A + B \leq X_3$$

Con éstas resolvemos el sistema y encontramos el óptimo.

4 Un tren que va de A a B tiene que pararse por un accidente, durante 45 minutos,- luego reanudando su marcha con una velocidad que es los cinco sextos de lo que -- era antes y llega por eso a B con 75 minutos de retraso. Si el percance hubiera - sucedido a 45 Kms. más cerca de A, el retardo habría sido de 90 minutos. Hállese la velocidad del tren antes del accidente y la distancia del punto de parada hasta B.

Solución:

x : velocidad antes

$5/6x$: velocidad después

y : distancia desde el punto de parada a B

$y/5/6x$: tiempo que habría tardado en recorrerla, sin percance

y/x: tiempo que tardo debido al accidente

$$\frac{y}{5/6x} = \frac{y}{x} + 30 \qquad y = 5/6y + 25x$$

$$x = \frac{y - 5/6y}{25}$$

$$\frac{y+45}{5/6x} = \frac{y+45}{x} + 45 \quad \therefore \quad y + 45 = \frac{5}{6}(y+45) + \frac{225}{6}x$$

$$y + 45 = \frac{5}{6}y + \frac{225}{6} + \frac{225}{6}\left(\frac{y}{150}\right)$$

$$y + 45 = \frac{5}{6}y + \frac{225}{6} + \frac{y}{4}$$

$$y - \frac{5}{6}y - \frac{y}{4} = -45 + \frac{225}{6}$$

$$\frac{12}{12}y - \frac{10}{12}y - \frac{3}{12}y = \frac{-270+225}{6}$$

$$-\frac{1}{12}y = \frac{45}{6}$$

$$y = 90 \text{ Kms.}$$

$$x = \frac{90}{150} = 0.6 \text{ kms/mins.}$$

$$x = 36 \text{ kms/horas}$$

5 Cierto capital está dividido en 3 partes, colocadas a interés simple durante 3 -- años, al 3%, 4% y 5%, respectivamente. Las partes del capital son tales que, al - cabo de 3 años, los intereses de la primera y segunda partes juntas, importan --- \$ 2 790.00; los de primera y tercera \$ 3 300.00, y los de la segunda y tercera -- \$ 3 390.00. ¿Cuáles son las 3 partes y cuál es el capital?

Solución:

Sean x, y, z las partes del capital

$\frac{3.3.x}{100}$; $\frac{4.3.y}{100}$; $\frac{5.3.z}{100}$ son los intereses de las 3 partes durante 3 años.

$$\frac{9x}{100} + \frac{12y}{100} = 2790 \quad \text{ó} \quad 3x + 4y = 93\ 000$$

$$\frac{9x}{100} + \frac{15z}{100} = 3300 \quad \text{ó} \quad 3x + 5z = 110\ 000$$

$$\frac{12y}{100} + \frac{15z}{100} = 3390 \quad \text{ó} \quad 4y + 5z = 113\ 000$$

La solución del sistema de la derecha es:

$$x = 15{,}000 \qquad y = 12\ 000 , \qquad z = 13\ 000$$

Por lo tanto el capital es igual a \$40,000.00

6 Una persona compró cierto número de naranjas. Si por el mismo dinero le hubiesen - dado 56 naranjas más, cada una le hubiera resultado a 1 ¢ menos; pero si le hubiesen dado 24 naranjas menos, le habría salido a 1 ¢ más cada una. ¿Cuántas naran-- jas compró?

Solución:

x = número de naranjas

y = precio de las naranjas

$$(x + 56)\ (y - .01) = xy$$

$$(x - 24)\ (y + .01) = xy$$

$$xy + 56y - .01x - .56 = (x + 56)\ (y - .01)$$

$$xy - 24y + .01x - .24 = (x - 24)\ (y + .01)$$

$$56y + xy - .01x - .56 = xy$$

$$-24y + xy + .01x - .24 = xy$$

$$56y - .01x = .56$$

$$\underline{-24y + .01x = .24}$$

$$32y = .80 \qquad y = .025$$

$$-24\,(.025) + .01x = .24$$

$$-.6 + .01x = .24$$

$$.01x = .24 + .6$$

$$x = \frac{.84}{.01} = 84$$

$$x = 84$$

7 Tres socios forman una compañía. Las sumas aportadas por cada uno son tales que laparte del primero más la mitad de la del segundo, la parte del segundo más el tercio de la del primero, y la parte del tercero más el cuarto de la del primero, son todas iguales a $50,000.00. ¿Cuánto aportó c/u.?.

Solución:

x_1 = suma aportada por el primer socio

x_2 = suma aportada por el segundo socio

x_3 = suma aportada por el tercer socio

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 50{,}000$$

$$\frac{1}{3} x_1 + x_2 = 50{,}000$$

$$\frac{1}{4} x_1 + x_3 = 50{,}000$$

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 50{,}000$$

$$-\frac{1}{6} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = -25{,}000$$

$$\frac{5}{6} x_2 \qquad 25{,}000; \quad x_1 = 30{,}000$$

$$30{,}000 + \frac{1}{2} x_2 = 50{,}000$$

$$\frac{1}{2} x_2 = 20{,}000$$

$$x_2 = 40{,}000$$

$$\frac{1}{4}(30{,}000) + x_3 = 50{,}000$$

$$x_3 = 42{,}500$$

8 Tres personas pueden hacer un trabajo en 3 días; la 1a. y la 2a. juntas lo harían en 16/5 del día, y la 2a. y la 3a. juntas pueden hacerlo en 12 días. ¿En cuántos días lo haría cada persona trabajando sola?

Solución: $X_1 = \frac{\text{días}}{\text{Trabaj}}$ 1^a , $X_2 = \frac{\text{días}}{\text{Trabaj}}$ 2^a, $X_3 = \frac{\text{días}}{\text{Trabaj}}$ 3^a

x_1 = No. de días que emplearía la primera

x_2 = No. de días que emplearía la segunda

x_3 = No. de días que emplearía la tercera.

En un día la primera hace $1/x_1$, la segunda en el mismo tiempo $1/x_2$ y la tercera $1/x_3$. $\frac{1}{X_1} = \frac{\text{Trabaj}}{\text{día}}$ 1^a $\quad \frac{1}{X_1} = \frac{\text{Trabaj}}{\text{día}}$ 2a $\quad \frac{1}{X_3} = \frac{\text{Trabaj}}{\text{día}}$ 3^a

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{16}$$

$$-\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2} = \frac{-1}{12}$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3} = \frac{5}{16} - \frac{1}{12} = \frac{60 - 16}{192} = \frac{11}{48}$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3} = \frac{11}{48}$$

$$1/x_1 + 5/16 - 1/x_1 - 11/48 + 1/x_1 = 1/3$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{3} + \frac{22}{96} - \frac{5}{16} = \frac{32 + 22 - 30}{96} = \frac{24}{96} \therefore \frac{1}{x_1} = \frac{24}{06}; \boxed{x_1 = 4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{16} \qquad \boxed{x_2 = 16}$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{16 - 12}{192} = \frac{4}{192}$$

$$\boxed{x_3 = 48}$$

9 Newton nació en el Siglo XVII y murió en el XVIII. Se quiere saber el año de su nacimiento y el de su muerte, sabiendo que el número formado por los dos últimos dígitos de la fecha de nacimiento, aumentado en 12, es el doble del número formado por los dos últimos dígitos de la fecha de su muerte y este último número, aumentado en 1, es dos tercios del primero.

Solución:

X y Y son los números formados por los dos últimos dígitos de la fecha del nacimiento y de la muerte respectivamente.

$$x + 12 = 2y$$

$$y + 1 = \frac{2}{3}x$$

$$x - 2y = -12 \qquad\qquad x - 2y = -12$$

$$-\frac{2}{3}x + y = -1 \qquad\qquad -\frac{4}{3}x + 2y = -2$$

$$-\frac{1}{3}x = -14 \qquad\qquad x = 42$$

$$y + 1 = \frac{2}{3}(42) \qquad y + 1 = 28 \qquad y = 27$$

10 Una suma ha sido distribuida en partes iguales entre cierto número de personas, si hubiera habido 3 personas más, cada una habría recibido \$1.00 menos; y si hubiese habido 5 personas menos a cada una le habrían tocado \$3.00 más ¿Cuántas personas había y cuánto recibió cada una?

Solución:

x = número de personas
y = número de pesos recibidos por cada una
xy = número de pesos repartidos.

$$(x + 3)\,(y - 1) = xy \qquad -x - 3 + xy + 3y = xy$$

$$(x - 5)\,(y + 3) = xy \qquad 3x - 15 + xy - 5y = xy$$

$$-x + 3y = 3$$

$$3x - 5y = 15$$

$$-3x + 9y = 9$$

$$3x - 5y = 15$$

$$4y = 24 \qquad y = 6$$

$$-x + 18 = 3$$

$$-x = -15 \qquad x = 15$$

11 El Dr. de la Sra. Morales le dió una dieta que reúne los siguientes requisitos alimenticios: al menos 4 mg de vitamina A, al menos 6 mg. de vitamina B y al menos 3 mg. de vitamina D.

Se tienen varios alimentos con distintos contenidos en vitaminas.

	PRODUCTO	COSTO $/ r.	CONTENIDO EN MG. POR GRAMO DE PRODUCTO		
			VITAMINA A	VITAMINA B	VITAMINA D
1	V	$ 40.00	.20	.18	.10
2	W	$ 31.00	.15	.10	.14
3	Y	$ 19.00	.15	.40	.15
4	Z	$ 53.00	.30	.35	.16

La Sra. Morales desea saber cuál es la dieta de mínimo costo.

Las restricciones son:

$A \geq 4$ mg.

$B \geq 6$ mg.

$D \geq 3$ mg.

Donde:

X_1 = cantidad de V $\quad$ X_3 = cantidad de Y

X_2 = cantidad de W $\quad$ X_4 = cantidad de Z

La función objeto a minimizar es:

$$Z = 40\, X_1 + 31\, X_2 + 19\, X_3 + 53\, X_4$$

Las ECS. son:

$$.2X_1 + .15X_2 + .15X_3 + .30X_4 \geq 4$$
$$.18X_1 + .10X_2 + .40X_3 + .35X_4 \geq 6$$
$$.10X_1 + .14X_2 + 15X_3 + .16X_4 \geq 3$$

12 El Complejo Industrial de Ciudad Sahagún encarga a su departamento de Producción de Lámina que minimice el desperdicio de sobrante de lámina que resulta del corte de ésta, para la fabricación de piezas de camión.

Los tamaños necesarios para la carrocería son:

30 cm x 60 cm para puertas

30 cm x 70 cm para techo y cofre

30 cm x 50 cm para salpicaderas

Las cantidades necesarias de cada tamaño de corte son:

10,000 $\quad$ 15,000 $\quad$ y $\quad$ 5,000 por mes respectivamente

Considerando que se tienen disponibles placas de 30x180 cms. los posibles cortes a realizar por cada lámina para obtener el tamaño, se representan en la siguiente tabla:

	CORTES			SOBRANTES
X_1	60	60	60	0
X_2	60	60	50	10
X_3	50	50	60	20
X_4	70	70		40
X_5	70	60	50	10
X_6	70	50	50	0
X_7	50	50	50	30

Función objeto a minimizar es:

$$0X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 40X_4 + 0X_5 + 10X_6 + 30X_7$$

Las restricciones son:

30 x 60 = 10,000

30 x 70 = 15,000

30 x 50 = 5,000

$\therefore$ Las ECS son:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_5 + \quad = 10,000$$
$$2X_4 + X_5 + X_6 = 15,000$$
$$X_2 + 2X_3 + 2X_6 + 3X_7 + X_5 = 5,000$$

13 Se le presentan a una persona 4 proyectos con sus respectivos costos, en un período de 3 años, así como su utilidad total.

Ella requiere maximizar la utilidad total disponiendo de $50,000.00, $24,000.00 y $30,000.00 en cada uno de los años siguientes:

PROYECTO	UTILIDAD TOTAL Miles de $		COSTO Miles $ AÑO 1	COSTO Miles $ AÑO 2	COSTO Miles $ AÑO 3
1	100	$= X_1$	6	14	5
2	90	$= X_2$	2	8	14
3	75	$= X_3$	9	19	18
4	80	$= X_4$	5	2	9
DISPONIBILIDAD			50	24	30

Es necesario saber cuál es el modelo que maximice su utilidad total.

Función objeto a maximizar:

$$Z = 100 X_1 + 90X_2 + 75X_3 + 80X_4$$

LAS RESTRICCIONES SON:

AÑO 1	50,000
AÑO 2	24,000
AÑ 3	30,000

LAS ECS.

$$6X_1 + 2X_2 + 9X_3 + 5X_4 \leq 50$$
$$14X_1 + 8X_2 + 19X_3 + 2X_4 \leq 24$$
$$5X_1 + 14X_2 + 18X_3 + 9X_4 \leq 30 \qquad X_i = 0,1 \quad i = \overline{1,4}$$

14 La Cervecería Cuitláhuac, S.A., desea conocer como distribuye su producto a un costo mínimo de Monterrey, México y Tecate, hacia sus centros de consumo en Culiacán, Torreón, León y Campeche.

La siguiente tabla proporciona los datos de transporte, demanda y disponibilidad.

	CULIACAN	TORREON	LEON	CAMPECHE	CAPACIDAD
MEXICO	10	4	6	4	550
TECATE	8	5	3	3	310
MONTERREY	4	3	4	3	250
DEMANDA	250	300	200	160	

Formular el modelo matemático. En primer término vemos que la demanda ≠ de la oferta ∴.

$$550 + 310 + 250 = 1110$$

$$250 + 300 + 200 + 160 = 910$$

Nuestra tabla de costos es:

CENTRO PRODUCTOR	M E R C A D O S 1	2	3	4	
1	10	4	6	4	550
2	8	5	3	3	310
3	4	3	4	3	250

SE DEFINE Xij = Cantidad a transportar del centro productor i al mercado j. luego la función Z a minimizar es:

$$Z = 10X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 4X_{14} + 8X_{21} + 5X_{22} + 3X_{23} + 3X_{24} + 4X_{31} + 3X_{32} + 4X_{33} + 3X_{34}$$

Con las siguientes restricciones:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 550$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 310$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 250$$

$$10X_{11} + 8X_{21} + 4X_{31} \leq 250$$
$$4X_{12} + 5X_{22} + 3X_{32} \leq 300$$
$$6X_{13} + 3X_{23} + 4X_{33} \leq 200$$
$$4X_{14} + 3X_{24} + 3X_{34} \leq 160$$

$$x_{ij} \geq 0$$

15 Para la elaboración de dos artículos A_1 y A_2 se dispone de dos máquinas M_1 y M_2. Cada unidad de A_1 requiere 0.5 horas de M_1 y 1.5 horas de M_2, mientras que para una unidad de A_2 se requiere 1 hora de M_1 y 1.5 horas de M_2. El total de horas-máquinas disponibles por mes es 150 de M_1 y 300 de M_2. Si el mercado del artículo A_2 queda saturado con 200 unidades por mes y las utilidades obtenidas de las ventas son \$4.00 y \$6.00 por unidad de A_1 y A_2 respectivamente, determinar las cantidades de A_1 y A_2 que deben fabricarse por mes para maximizar la utilidad total.

Solución:

	ARTICULOS		Horas-Máquina
Máquinas	A_1	A_2	Disponible/Mes
M_1	0.5	1	150
M_2	1.5	1.5	300
No. de Arts. por mes.	X_1	X_2	
Máxima venta posible	–	200	
Utilidad/Unidad	\$4	\$6	

La función objetivo es :

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 6X_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 0.5X_1 + X_2 &\leq 150 \\ 1.5X_1 + 1.5X_2 &\leq 300 \\ X_2 &\leq 200 \\ X_1 , X_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

16 Mezclando dos líquidos A_1 y A_2, se desea fabricar un insecticida que contenga por lo menos 50 unidades de S_1, 25 de S_2 y 20 de S_3 por cada 100 litros, donde S_1, S_2 y S_3 son sustancias necesarias para la efectividad del producto. Cada unidad de A_1 contiene una unidad de S_1, 0.4 de S_2 y 0.8 de S_3, mientras que cada unidad de A_2 contiene 0.5 unidades de S_1 y 0.4 de S_2 y 0 de S_3. Si A_1 cuesta \$18 por litro y A_2 cuesta \$10 por litro, determinar las cantidades de A_1 y A_2 que proporcionen el insecticida de costo mínimo.

Solución:

No. de Litros de líquido A_i / 100 litros de insecticida	X_1	X_2	
Líquidos / Sustancias	A_1	A_2	Mínimo de Si por 100 litros
S_1	1	0.5	50
S_2	0.4	0.4	25
S_3	0.8	0	20
Costos/Litros	\$18	\$10	

Función objetivo :

$$\text{Min } Z = 18X_1 + 10X_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 0.8\,X_1 &\geq 20 \\ X_1 + 0.5X_2 &\geq 50 \\ 0.4X_1 + 0.4X_2 &\geq 25 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

17 El gobierno de un país desea construir un sistema de presas para el control de avenidas de un extenso río de cuenca semi-árida. Por razones topográficas los ingenieros han decidido que deben construirse cuatro presas a lo largo del río, en lugares diferentes. Además, para que el sistema de control de avenidas sea efectivo, estiman que las capacidades mínimas de las presas deben ser 5,000; 10,000; 12,000; y 7,000 hectáreas-metro para las presas P1, P2, P3 y P4, respectivamente. El gobierno consideró que la realización del proyecto contribuirá notablemente a un rápido desarrollo agrícola e industrial de la región. Para fomentar este desarrollo y al mismo tiempo recobrar por lo menos parte del costo del proyecto, se planea distribuir la capacidad con propósitos de venta en

agua para irrigación y agua para generación de energía eléctrica. La comisión de técnicos estima que el costo de construcción por hectárea-metro de agua para riego es de $200 y el costo por hectárea-metro de agua para energía eléctrica es de $500 (los mismos costos para las cuatro presas).- Además, tomando en cuenta las posibilidades de desarrollo de los diferentes lugares, se ha establecido que la capacidad total del proyecto en agua para irrigación sea distribuída de la siguiente manera: nada para la presa P1, 20% para la P2, 30% para la P3 y 50% para la P4. Similarmente se establece que la capacidad total en agua para energía eléctrica sea distribuida de la siguiente manera: 40% para P1, 30% para P2, 20% para P3 y 10% para P4. El problema es satisfacer las condiciones establecidas, minimizando el costo total del proyecto.

Solución:

Presas	Distribución de capacidad	X_1 Hectárea-metro para Irrigación	X_2 Hectárea-metro para energía eléctrica	Capacidad Mínima
	P_1	0	$0.4\ X_2$	5 000
	P_2	$0.2\ X_1$	$0.3\ X_2$	10 000
	P_3	$0.3\ X_1$	$0.2\ X_2$	12 000
	P_4	$0.5\ X_1$	$0.1\ X_2$	7 000
Costo por Hectáreas Metro		$200	$500	

Función objetivo: $\text{Min} \quad Z = 200\ X_1 + 500\ X_2$

s.a

$$
\begin{aligned}
0.4\ X_2 &\geq 5\ 000 \\
0.2\ X_1 + 0.3\ X_2 &\geq 10\ 000 \\
0.3\ X_1 + 0.2\ X_2 &\geq 12\ 000 \\
0.5\ X_1 + 0.1\ X_2 &\geq 7\ 000 \\
X_1, \quad X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

18 Un animal debe consumir diariamente, cuando menos 0.4 Kg. de componente A; 0.6 Kg. de componente B; 2 Kg de C y 1.7 Kg. de D.
El alimento M contiene por Kg, 0.1 Kg. de A, nada de B, 0.1 Kg.de C y 0.2 kg.- de C y 0.2 Kg. de D.
El alimento N contiene, por Kg. nada de A, 0.1 Kg. de B, 0.2 Kg. de C y 0.1 Kg. de D.

El alimento M cuesta $10 por Kg. y el alimento N cuesta $4 por Kg. ¿Qué cantidad de los alimentos M y N debemos utilizar diariamente por cabeza para realizar la alimentación menos costosa?

Solución: Sean X_1= Kg. de M a utilizar
X_2= Kg. de N a utilizar

	M (Alimentos)	N	Cantidades Prescritas de componentes
A	0.1	0	0.4
B	0	0.1	0.6
C	0.1	0.2	2.0
D	0.2	0.1	1.7
COSTO	10	4	

f.o. $\text{Min } Z = 10\ X_1 + 4\ X_2$

s.a.

$$
\begin{aligned}
0.1\ X_1 &\geq 0.4 \\
0.1\ X_2 &\geq 0.6 \\
0.1\ X_1 + 0.2\ X_2 &\geq 2 \\
0.2\ X_1 + 0.1\ X_2 &\geq 1.7 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

19 La compañía Mexicana de Aviación tiene 8 aeronaves del tipo 1, 15 del tipo 2, y 12 del tipo 3 disponibles para los vuelos diarios. La capacidad de estas naves es de 45 toneladas para el tipo 1, 7 tons. para el tipo 2 y 4 para el tipo 3.

La compañía despacha sus aeronaves a las ciudades A y B. El tonelaje requerido (en miles de toneladas) son 20 para la ciudad A y 30 para la ciudad B; el tonelaje excedente de la capacidad ofrecida a una ciudad no tiene valor alguno. Una nave sólo puede volar una sola vez al día.

El costo de enviar una nave a la terminal aérea de cada ciudad está dada en la tabla siguiente:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Ciudad A	23	5	1.4
Ciudad B	58	10	3.8

Sean X_1, X_2 y X_3 el número de naves de cada tipo enviadas a la ciudad A, similarmente Y_1, Y_2 y Y_3 el número enviado a la ciudad B.

Formule el modelo de programación Lineal de este problema.

Solución:

$$\text{Min } Z = 23X_1 + 5X_2 + 1.4X_3 + 58Y_1 + 10Y_2 + 3.8Y_3$$

s.a.

$$X_1 + Y_1 \leq 8$$
$$X_2 + Y_2 \leq 15$$
$$X_3 + Y_3 \leq 12$$
$$45X_1 + 7X_2 + 4X_3 = 20$$
$$45Y_1 + 7Y_2 + 4Y_3 = 30$$
$$X_i, Y_i \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3.$$

20 La red de televisión Glassey-Staire desea establecer precios competitivos y rentables del tiempo de los comerciales.

La siguiente es una versión simplificada del problema de los precios. Supongamos que hay tres clasificaciones de la red del tiempo para anuncios: tiempo nocturno, tiempo entre semana y Sábados y Domingos por la tarde - (después de las 6 P.M.). Sean P_1, P_2 y P_3 los precios por minuto de cada una de las categorias anteriores respectivamente.

La red vende grandes bloques de tiempo a K de sus mayores anunciantes, - quienes tienen un efecto significante en la determinación de los precios. La red sabe que los K mayores anunciantes desean comprar un paquete con-- sistente de a_{1k}, a_{2k}, y a_{3k} minutos en las tres categorías de tiempo y desean pag. Ak dólares por este paquete. La red también vende tiempo a anunciantes pequeños y las cantidades vendidas a estos pueden ser M_1, M_2 y M_3 minutos de tiempo nocturno, entre semana y sábados y domingos en la tarde, respectivamente, los precios de dichos tiempos son adecuados en consideración con los de los principales anunciantes K.

Formule el modelo de programación Lineal.

Solución:

$$\text{f.o. Min } Z = \sum_{k=1}^{k} \left[P_1 (a_{1k-m_1}) + P_2 (a_{2k-m_2}) + P_3 (a_{3k-m_3}) \right]$$

s. a.

$$\left.\begin{array}{l} a_{1k-m_1} \geq 0 \\ a_{2k-m_2} \geq 0 \\ a_{3k-m_3} \geq 0 \end{array}\right\} \quad k = \overline{1, K}$$

$$P_1 (a_{1k-m_1}) + P_2 (a_{2k-m_2}) + P_3 (a_{3k-m_3}) \leq Ak$$

$$k = \overline{1, K}$$

$$a_{ik}, M_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$k = \overline{1, K}$$

21 Una fábrica de automóviles y camiones consta de los departamentos que a continuación se enumeran:

1.- Estampado de planchas metálicas

2.- Armado de motores

3.- Montajes de automóviles

4.- Montaje de camiones

El departamento 1 puede estampar por mes, las planchas necesarias para 25,000 - automóviles ó 35,000 camiones, o las correspondientes combinaciones de automóviles y camiones. El departamento 2 puede armar por mes 33,333 motores de automóviles ó 16,667 motores de camión, o las correspondientes combinaciones de motores de automóvil y camión. El departamento 3 puede montar y terminar 22,500 automóviles y 15,000 camiones el departamento 4. Si cada automóvil deja una utilidad de 9000 pesos y cada camión de 7500. Qué cantidad de automóviles y camiones deben producirse, de manera que las utilidades que se obtengan sean las máximas posibles.

Definición de variables:

X_1 = Cantidad de automóviles a producirse

X_2 = Cantidad de camiones a producirse.

Para el Departamento 1.

$$\frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b} = 1 \;;\; X_1 + \frac{a}{b} X_2 = a$$

entonces:

es la misma fórmula
$$\begin{cases} X_1 + \frac{5}{7} X_2 \leq 25{,}000 & \text{para automóviles} \\ X_2 + 1.4\, X_1 \leq 35{,}000 & \text{para camiones} \end{cases}$$

Para el Departamento 2

es la misma fórmula
$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 33{,}333 & \text{para automóviles} \\ X_2 + \frac{1X_1}{2} \leq 16{,}667 & \text{para camiones} \end{cases}$$

Para el modelo pueden usarse las fórmulas, para automóviles ó para camiones.

El modelo de programación lineal es:

f.o. Max $= 9000\, X_1 + 7500\, X_2$

s.a.

Para Automóviles
$$\begin{cases} X_1 + \frac{5}{7} X_2 \leq 25{,}000 \\ X_1 + 2X_2 \leq 33{,}333 \\ X_1 \leq 22{,}500 \\ X_2 \leq 15{,}000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

22 Un industrial desea determinar el programa óptimo para tres mezclas distintas que se hacen con diferentes proporciones de pistaches, avellanas y cacahuates. Las especificaciones de cada una de ellas son: la mezcla 1 debe tener 50% de pistaches como mínimo y 25% de cacahuates cuando más; la libra de esta mezcla se vende a 50 centavos. El segundo tipo debe contener el 25% de pistaches por lo menos y un 50% de cacahuates cuando más, y se vende a 35 centavos la libra. El tercer tipo no tiene especificaciones y se vende a 25 centavos la libra.

Sin embargo, están restringidas las cantidades de materia prima que puede conseguir el industrial, las máximas por período son: 100 libras de pistache, -- 100 libras de cacahuates y 60 libras de avellanas. Cada libra de pistaches le cuesta 65 centavos; la de cacahuates 25 centavos y 35 centavos la de avellanas. Se trata de determinar cuántas libras se deben preparar de cada mezcla, de manera que se obtengan las máximas utilidades.

	M_1	M_2	M_3	M.P.	\$/compra
P	.5	.25	-	100	.65
A	-	-	-	100	.25
C	.25	.50	-	60	.35
\$/venta	.50	.35	.25		

Variables:

Xpi = cantidad de pistaches (lb.) en la mezcla i = 1, 2, 3
Xai = cantidad de avellanas (lb.) en la mezcla i = 1, 2, 3
Xci = cantidad de cacahuates (lb.) en la mezcla i = 1, 2, 3

Xp1 + Xa1 + Xc1 = mezcla tipo 1
Xp2 + Xa2 + Xc2 = mezcla tipo 2
Xp3 + Xa3 + Xc3 = mezcla tipo 3

Modelo:

max Z = 0.50 (Xp1 + Xa1 + Xc1) + 0.35 (Xp2 + Xa2 + Xc2) + 0.25 (Xp3 + Xa3 + Xc3) − 0.65 (Xp1 + Xp2 + Xp3) - 0.25 (Xa1 + Xa2 + Xa3) - 0.35 (Xc1 + Xc2 + Xc3)

s.a.

Xp1 + Xa1 + Xc1 ≤ 0.5 Xp1
Xp1 + Xa1 + Xc1 ≥ 0.25 Xc1 — Mezcla 1

Xp2 + Xa2 + Xc2 ≤ 0.25 Xp2
Xp2 + Xa2 + Xc2 ≥ 0.50 Xc2 — Mezcla 2

Xp1 + Xp2 + Xp3 ≤ 100
Xa1 + Xa2 + Xa3 ≤ 100
Xc1 + Xc2 + Xc3 ≤ 60 — Materia prima

∀ i, ∀ j , Xij ≥ 0

23 Se hace un pedido a una papelería de 800 rollos de papel corrugado de 30 pulgadas, 500 rollos de 45 pulgadas y 1000 de 56 pulgadas de ancho. Si la papelería tiene solamente rollos de 108 pulgadas, de ancho. Cómo deben cortarse los rollos para surtir el pedido con el mínimo de desperdicio de papel?

Se tienen las siguientes alternativas.

A1	30	30	30	d = 18
A2	30	30	45	d = 3
A3	30	56		d = 22
A4	45	45		d = 18
A5	45	56		d = 7

d = desperdicio de papel

Xi = número de veces que se utilizó la alternativa i

A = Rollos de papel corrugado de 30 in. ancho

B = Rollos de papel corrugado de 45 in. ancho

C = Rollos de papel corrugado de 56 in. ancho

Modelo: Min $Z = 18X_1 + 3x_2 + 22X_3 + 18X_4 + 7X_5$

s.a.

$A = 3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 800$

$B = X_2 + 2X_4 + X_5 \geq 500$

$C = X_3 + X_5 \geq 1000$

$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$

24 Un mueblero dispone de dos diferentes tipos de madera: tiene 1,500 pies tabla del tipo A, y 1,000 del tipo B; también dispone de 800 horas-hombre para efectuar el trabajo. La demanda que ha estimado es la siguiente: cuando menos 40 mesas, 130 sillas, 30 escritorios y no más de 10 libreros. Las cantidades de madera A y B y las horas-hombre que requiere la elaboración de cada unidad de artículo, están indicados en el cuadro.

ARTICULO	MADERA A	MADERA B	HORAS HOMBRE	DEMANDA ESTIMADA	UTILIDADES POR UNIDAD
MESA	5	2	3	cuando menos 40	12
SILLA	1	3	2	cuando menos 130	5
ESCRITORIO	9	4	5	cuando menos 30	15
LIBRERO	12	1	10	no más de 10	10
T O T A L :	1500	1000	800		

Simbología de los elementos:

X_1 = cantidad de mesas

X_2 = cantidad de sillas

X_3 = cantidad de escritorios

X_4 = cantidad de libreros

La función objeto será .'.

$Z = 12X_1 + 5X_2 + 15X_3 + 10X_4$ que son las utilidades a maximizar.

Las restricciones son:

$5X_1 + X_2 + 9X_3 + 12X_4 \leq 1500$

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 1000$

$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 \leq 800$

Considerando que:

$X_1 \geq 40$

$X_2 = 130$

$X_3 = 30$

$X_4 \leq 10$

25 La Cincinatty Chemical Company debe producir 10,000 lbs. de una mezcla especial para un cliente. La mezcla se compone de X_1, X_2, X_3; X_1 cuesta \$ 8.00 por lb; X_2 --- \$ 10.00 por lb; y X_3 \$ 11.00 por lb. No puede usarse más de 3000 lbs. de X_1 y por lo menos deberá contener 1500 lb de X_2 y 2000 lb de X_3. Si la compañía desea minimizar sus costos, construya el modelo de programación lineal.

Solución:

X_1 : lb. de componente 1 en la mezcla

X_2 : lb. de componente 2 en la mezcla

X_3 : lb. de componente 3 en la mezcla

Función objetiva: Min $Z = 8X_1 + 10X_2 + 11X_3$

s. a.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10\ 000$$
$$X_1 \leq 3\ 000$$
$$X_2 \geq 1\ 500$$
$$X_3 \geq 2\ 000$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3 \geq 0$$

26 Una industria produce bombones y paletas. La elaboración de un Kg. de bombones se lleva \$ 20.00 de mano de obra y la elaboración de 1 Kg. de paletas se lleva ----- \$ 10.00. De materia prima, el Kg. de bombones se lleva \$ 30.00 y el Kg. de pale-- tas \$ 10.00. La utilidad por Kg. de bombones es de \$ 8.00 y de \$ 5.00 por cada Kg. de paletas. Solamente contamos con \$ 100,000para salarios y \$ 180,000 para las materias primas y deseamos maximizar nuestras utilidades. Construya el modelo de programación lineal.

Solución:

X_1 : Producción de bombones en Kg.

X_2 : Producción de paletas en Kg.

Función objetivo:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 5X_2$$

s. a.

$$20X_1 + 10X_2 \leq 100\ 000$$
$$30X_1 + 10X_2 \leq 180\ 000$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

27 Una compañía petrolera requiere 9 millares, 12 millares y 26 millares de barri- - les/día de gasolina tipo A,B y C respectivamente, contando para ello con dos refinerías M y N. La refinería M produce 100, 300 y 400 bls/día de gasolinas A,B y C- respectivamente. La refinería N produce 200, 100 y 300 bls/día de las gasolinas - A,B y C. respectivamente. Si cada refinería tiene un costo de operación diario de \$200.00 ¿Cuántos días deben operarse en cada refinería para minimizar el costo de operación y satisfacer las demandas?

Solución:

X_1 : días de operación de la refinería M

X_2 : días de operación de la refinería N

Función objetivo:

$$\text{Min } Z = 200\ X_1 + 200\ X_2$$

s. a.

$$100\ X_1 + 200\ X_2 \geq 9\ 000$$
$$300\ X_1 + 100\ X_2 \geq 12\ 000$$
$$400\ X_1 + 300\ X_2 \geq 26\ 000$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

28 Un inversionista tiene dos actividades remunerativas A y B, al principio de cada uno de los siguientes cinco años. Cada dólar invertido en A al principio de un -- año reditúa \$ 1.40 de dólar (una ganancia de \$ 0.40 de dólar) después de 2 años (en un tiempo propio de reinversión). Cada dólar invertido en B al principio de - un año reditúa \$ 1.70 de dólar a los 3 años.

Además, las actividades remunerativas C y D estarán disponibles una vez en el futuro. Cada dólar invertido en C al principio del 2o. año redituará \$ 2.00 de dó-- lar cuatro años más tarde. Cada dólar invertido en D al comenzar el quinto año reditúa \$ 1.30 de dólar un año más tarde.

El inversionista empieza con \$ 10,000 dólares. El desea saber qué plan de inver-- sión será el que maximice la cantidad de dinero que puede acumular al principio - del sexto año en adelante.

Formule el modelo de programación lineal para este problema.

Solución:

Planes de inversión	AÑOS 1	2	3	4	5	6	Capacidad de inversión.	
A	1		1.4				año (1, 2, 3, 4,)	X
B	1			1.7			año (1, 2, 3,)	Y
C		1				2.0	año (2)	W
D					1	1.3	año (5)	Z

función objetivo:

$$\text{Max } Z = 1.4\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 1.7\ (Y_1 + Y_2 + Y_3) + 2\ (W_2) + 1.3\ (Z_5)$$

s. a.

año 1 : $X_1 + Y_1 \leq 10\ 000$

año 2 : $X_2 + Y_2 + W_2 \leq M_1$

año 3 : $X_3 + Y_3 \leq M_2 + 1.4\ X_1$

año 4 : $X_4 \leq M_3 + 1.4X_2 + 1.7Y_1$

año 5 : $Z_5 \leq M_4 + 1.4X_3 + 1.7Y_2$

Donde:

$M_1 = 10{,}000 - (X_1 + Y_1)$

$M_2 = M_1 - (X_2 + Y_2 + W_2)$

$M_3 = M_2 + 1.4X_1 - (X_3 + Y_3)$

$M_4 = M_3 + 1.4X_2 + 1.7Y_1 - X_4$

29 Un barco tiene 3 bodegas: en la proa, en la popa y en el centro, los límites de capacidad son:

	Peso		Volumen
Proa:	2 000 tons.	----	100 000
Centro:	3 000 tons.	----	135 000
Popa:	1 500 tons.	----	30 000

Los siguientes cargamentos se ofrecen; los dueños de los barcos pueden aceptar el total o una porción cualquiera de cada artículo.

Artículos	Cantidad tons.	Volumen por ton.	Ganancia por ton. $
A	6000	60	6
B	4000	50	8
C	2000	25	5

Para preservar el equilibrio del barco, el peso de cada bodega debe ser proporcional a la capacidad en toneladas. ¿Cómo debe distribuirse la carga para hacer máxima la ganancia ?

Solución:

XA_1 = cantidad del artículo A a bodega 1

XA_2 = cantidad del artículo A a bodega 2

XA_3 = cantidad del artículo A a bodega 3

XB_1 = cantidad del artículo B a bodega 1

XB_2 = cantidad del artículo 8 a bodega 2

XB_3 = cantidad del artículo B a bodega 3

XC_1 = cantidad del artículo C a bodega 1

XC_2 = cantidad del artículo C a bodega 2

XC_3 = cantidad del artículo C a bodega 3

f. o.

$$\text{Max } Z = 6(XA_1 + XA_2 + XA_3) + 8(XB_1 + XB_2 + XB_3) + 5(XC_1 + XC_2 + XC_3)$$

s. a.

$XA_1 + XB_1 + XC_1 \leq 2000$ ton

$XA_2 + XB_2 + XC_2 \leq 1500$ ton

$XA_3 + XB_3 + XC_3 \leq 3000$ ton

$XA_1 + XB_1 + XC_1 \leq 100{,}000$

$XA_2 + XB_2 + XC_2 \leq 30{,}000$

$XA_3 + XB_3 + XC_3 \leq 135{,}000$

$XA_1 + XA_2 + XA_3 \leq 6000$

$XB_1 + XB_2 + XB_3 \leq 4000$

$XC_1 + XC_2 + XC_3 \leq 2000$

$$\frac{XA_1 + XB_1 + XC_1}{2000} = \frac{XA_2 + XB_2 + XC_2}{1500} = \frac{XA_3 + XB_3 + XC_3}{300}$$

$$XA_i,\ XB_i,\ XC_i \geq 0 \quad , \forall\ i$$

30 La Compañía Vinícola productora del cognac "HASTA NO VERTE JESUS MIO" desea incrementar las ventas de éste mediante publicidad en televisión, para un número de espectadores lo más grande posible.

Le ofrecen el patrocinio del programa semanal Cómicos y Canciones en el cual se proyectan los comerciales, la actuación de un cómico y un cantante, el tiempo que la Vinícola determine, dentro de un total de 60 minutos semanales.

El mínimo tiempo para comerciales según la Vinícola, debe ser 10 minutos y el reglamento Federal determina un máximo de 20 minutos por cada hora a la semana de proyección al público. Además el tiempo de actuación de los cantantes, debe ser el doble del tiempo de comerciales, aquellos a su vez no pueden cantar más de la mitad del programa.

Se sabe por encuesta realizada que por cada minuto que los cantantes están en pantalla 10,000 personas se suman al público televidente; por cada minuto de cómico 8 000 personas se agregan y en el tiempo de comerciales 5 000 personas se retiran del área del televisor.

El Loco Valdéz (cómico) cobra $ 200.00 por minuto, Rafaela y acompañante (cantante) recibe $ 1 000.00 por minuto. Durante el tiempo de ejecución de los artistas, Televisa, S.A., cobra $500.00 por minuto y durante el tiempo de comerciales cobra $5,000.00

El presupuesto de la Vinícola para este tipo de publicidad es de $250,000.00 mensuales.

¿Cuál es el modelo matemático que representa este problema?

Considerando que:

X_1 = Tiempo de comerciales

X_2 = Tiempo de cómico

X_3 = Tiempo de cantante

El problema se puede ver desde 2 puntos de vista:

a). Maximizar el número de televidentes

b). Minimizar el costo de la televisión

que matemáticamente se pueden representar como:

a). Maximizar:

$$10{,}000X_3 + 8{,}000X_2 - 5{,}000X_1 = Z_1$$

b) Minimizar:

$$5{,}000X_1 + (200 + 500)\,X_2 + (1{,}000 + 500)\,X_3 = Z_2$$

Las restricciones serían:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 60 \text{ minutos}$$

DONDE:

$10 \leq X_1 \leq 20$ minutos

$X_1 \leq 1/2\ X_3$

$X_3 \leq 30$ minutos.

Ya que:

$$(X_1, X_2, X_3) \geq 0$$

.˙. La función objetivo es considerando el segundo punto de vista:

$$5{,}000X_1 + 700X_2 + 1{,}500X_3 = 250{,}00$$

31 El Centro Médico de la Cd. de México tiene programados diversos cursos de Investigación durante las siguientes 5 semanas. Los requisitos de microscopios son:

Cursos	1	2	3	4	5
# de microscopios	8	6	10	18	20

El problema del Director del Centro Médico es que se requieren microscopios diferentes a los que el usa, por lo que tendrá que comprar ese tipo de microscopios; el costo de cada microscopio es de $400 y el costo de mandarlo a mantenimiento bajo servicio urgente para tenerlo listo a las 2 semanas es de $100 por microscopio.

¿Cuál es el modelo que le permite al director cumplir con sus requisitos y además minimizar el costo total?

Solución: Sea X_i = # de microscopios que se compran a la semana i.

Y_i = # de microscopios que se enviaron a mantenimiento semana.

Como se puede ver, sólo se mandan microscopios las 3 primeras semanas, ya que de mandar la 4a. semana no recibiríamos los microscopios a tiempo de utilizarlos y después de los 5 cursos no interesa mandar los microscopios a mantenimiento. Al no tener microscopios de ese tipo, tendremos que ocupar los que se necesitan para la 1er. semana y también para la 2a. ya que los microscopios que se mandan a mantenimiento están disponibles hasta 2 semanas después, por lo tanto $X_1 = 8$ y $X_2 = 6$.

El requisito de los microscopios para la 3a. semana se puede satisfacer mediante nuevos y a que lleguen del mantenimiento .˙.

$$X_3 + Y_1 = 10$$

.˙. $X_4 + Y_2 = 15$; $X_5 + Y_3 = 20$ (4a. y 5a. semana)

Falta registrar los valores de X_1, Y_2, Y_3. $Y_1 \leq 8$ (cuando mucho mandaremos a mantenimiento los 8 que se compran la 1a. semana.)

Para la 2a. semana: $Y_2 \leq 8 - Y_1 + 6 \therefore Y_2 \leq 14 - Y_1$

Para la 3a. semana: $Y_3 \leq 8 + 6 - Y_1 - Y_2 + Y_1 = 14 - Y_2$

$\therefore$ El modelo será:

$$\text{Min } Z = 400(X_1 + X_2 \; X_3 + X_4 + X_5) + 100\,(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

s.a.

$$\begin{aligned} X_3 + Y_1 &= 10 \\ X_4 + Y_2 &= 18 \\ X_5 + Y_3 &= 20 \\ Y_1 &\leq 8 \\ Y_2 + Y_1 &\leq 14 \\ Y_3 + Y_2 &\leq 14 \end{aligned}$$

$X_1 = 8 \quad X_2 = 6 \quad X_3, X_4, X_5 \geq 0 \quad Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

32 La Oficina de Becas y Ayuda Financiera de la Universidad de Toluca, está preparando la asignación de sus becas para el año venidero. Esta oficina ha seleccionado n estudiantes para recibir becas y desea conceder al menos M_i pesos al estudiante i, i=1,2,....., n. La oficina tiene disponibles S diferentes becas proporcionadas por diversas fuentes. La beca j otorga la cantidad de a_j pesos al que la recibe. La oficina puede otorgar varias becas a un estudiante con objeto de proporcionarle al menos M_i pesos pero la oficina no puede reducir la cantidad de cualquier beca concedida por abajo del nivel asignado a_j. Si la oficina no concede la beca j en un año, entonces la cantidad a_j correspondiente gana interés y está disponible para otorgarse en el siguiente año.

Formule un modelo para otorgar becas que maximice la cantidad de dinero que no se distribuye, sujeto a que a cada estudiante se le proporciona la mínima cantidad especificada.

Solución:

Sea

$$X_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si el estudiante i no recibe la beca J.} \\ 1 & \text{si el estudiante i si recibe la beca.} \end{cases}$$

El que una determinada beca esté asignada a un solo estudiante puede expresarse matemáticamente haciendo que la suma de las variables que implican la repartición de la beca entre los n estudiantes sea igual a 1.

$$X_{1j} + X_{2j} + \ldots\ldots + X_{nj} = 1 \qquad J = 1, \ldots\ldots, 5$$

Esta expresión representa una situación deseada debido a que las variables X_{ij} solo pueden tomar el valor de 0 ó 1; por lo tanto, el que la suma sea igual a 1 implica que sólo una de las variables sea igual a 1 y las restantes igual a 0 (o sea la beca j solo se asignó a uno de los n estudiantes).

Por otro lado, la cantidad de dinero que recibe un estudiante i por concepto de que se asigne una o varias de las becas es:

$$A_1 X_{i1} + A_2 X_{i2} + \ldots\ldots + A_s X_{is}$$

Ya que esta cantidad que recibe debe ser al menos M_i, entonces

$$A_1 X_{i1} + A_2 X_{i2} + \ldots + A_s X_{is} \geq Mi \qquad i = 1,2,\ldots n$$

Z = (cantidad disponible para asignar) - (cantidad realmente asignada).

El modelo será: $\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{s} A_j - \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots, 5$$

$$\sum_{j=1}^{s} A_j X_{ij} \geq M_i \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

$$X_{ij} = 0,1$$

33 El Hotel Mayo Caribe tiene programados banquetes durante los siguientes 5 días; los requisitos de manteles por banquete son:

Banquete	1	2	3	4	5
# de manteles	80	60	100	130	200

El problema del administrador es que se requieren manteles diferentes a los que el usa, por lo que tendrá que comprar ese tipo de manteles; el costo de cada mantel es de \$40 y el costo de mandarlo a la lavandería bajo servicio urgente para tenerlo listo a los 2 días es de \$10 por mantel.

¿Cuál es el modelo que le permitirá al administrador cumplir con sus requisitos y además minimizar el costo total?

Solución:

Sea:

X_i = el número de manteles que se compran el día i

Y_i = el número de manteles que se enviaron a la lavandería el día i.

Como se puede ver, solo se mandan manteles los 3 primeros días, ya que de mandar el cuarto día no recibiríamos los manteles a tiempo de utilizarlos y después de los 5 banquetes no interesa tener manteles de ese tipo limpios. Al no tener manteles de ese tipo, tendremos que comprar los que se necesitan para el primer día y también para el segundo ya que los manteles que se mandan a la lavandería están disponibles hasta 2 días después.

$$\therefore\ X_1 = 80 \qquad X_2 = 60$$

el requisito de los 100 manteles para el tercer día, se puede satisfacer mediante nuevos y los que lleguen de la lavandería $\therefore\ X_3 + Y_1 = 100$

$$\therefore\ X_4 + Y_2 = 130 \ \text{ y } \ X_5 + Y_3 = 200 \quad (4^{\circ} \text{ y } 5^{\circ} \text{ día})$$

Falta registrar los valores de Y_1, Y_2, Y_3

$Y_1 \leq 80$ cuando mucho mandaremos a la lavandería los 80 que se compran el primer día.

Para el 2º día: $Y_2 \leq 80 - Y_1 + 60 \ \therefore\ Y_2 \leq 140 - Y_1$

Para el 3er. día: $Y_3 \leq 80 + 60 - Y_1 - Y_2 + Y_1 = 140 - Y_2$

$\therefore$ El modelo será:

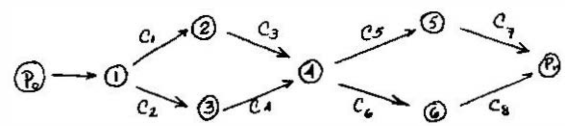
$$\text{Min } Z = 40\,(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) + 10\,(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

s. a.

$$\begin{aligned} X_3 + Y_1 &= 100 \\ X_4 + Y_2 &= 130 \\ X_5 + Y_3 &= 200 \\ Y_1 &\leq 80 \\ Y_2 + Y_1 &\leq 140 \\ Y_3 + Y_2 &\leq 140 \end{aligned}$$

34 Defina el modelo de P. L. para el problema de tener n vértices de una red, con valores de longitud sobre los arcos, y queremos encontrar el camino de mínima longitud entre P_o y P_n (vértice inicial y vértice final).

Solución:



Suponga que entra un flujo unitario (que entra en el nodo 1 y sale por el nodo n.)

P_{ij} nos indicará si el flujo pasa o no pasa por la rama de la red entre el nodo i y el nodo j ($\therefore\ P_{ij}$ = 0 ó 1)

C_n = valores de longitud sobre los arcos.

f. o.

$$\text{Min } Z = C_1 P_{12} + C_2 P_{13} + C_3 P_{24} + C_4 P_{34} + C_5 P_{45} + C_6 P_{46} + C_7 P_{5n} + C_8 P_{6n}$$

s. a.

$P_{12} + P_{13} = 1$	(Nodo 1)
$P_{24} - P_{12} = 0$	(Nodo 2)
$P_{34} - P_{13} = 0$	(Nodo 3)
$P_{45} + P_{46} - P_{24} - P_{34} = 0$	(Nodo 4)
$P_{5n} - P_{45} = 0$	(Nodo 5)
$P_{6n} - P_{46} = 0$	(Nodo 6)
$P_{5n} - P_{6n} = 1$	(Nodo n)

$P_{ij} = 0$ ó 1 $\qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad$ y $\quad J = 2, 3, 4, 5, 6, n$

35 Suponga que una compañía necesita realizar 3 trabajos que requieren diferentes habilidades y entrenamiento. Considere que 3 solicitantes están disponibles para realizar estos trabajos, pero un solicitante no puede realizar más de un trabajo. La compañía puede contratar a los 3 solicitantes con idénticos salarios; sin embargo, debido a sus diferentes habilidades, entrenamiento y experiencia, su valor para la compañía depende del trabajo en que cada solicitante es colocado, a estimación del valor anual de cada solicitante para la compañía si se asigna uno de los 3 distintos trabajos que se da en la siguiente tabla.

TRABAJOS

	1	2	3
1	3	4	7
2	6	7	3
3	8	11	2

Solución:

En cada casillero, el elemento C_{ij} representa el valor de asignación

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al solicitante i se asigna el trabajo } j. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La restricción de cada solicitante i se asigne a algún trabajo está dado por:

$$X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

La restricción de cada trabajo j sea realizado por una sola persona es:

$$X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} = 1 \qquad J = 1, 2, 3$$

El modelo:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} Cij \quad Xij$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^{3} Xij = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = 1 \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

36 Un obrero aceptó trabajar en una hacienda en las siguientes condiciones: por cada

día que trabajara se le darían \$ 5.00 y los alimentos y por cada día que dejara de trabajar, se le descontarían \$ 2.50 por sus alimentos. Al cabo de 30 días recibió \$ 105.00 ¿Cuántos días trabajó?.

Solución:

x = número de días trabajados.

y = número de días no trabajados.

$$5x - 2.5y = 105$$
$$x + y = 30$$
$$\begin{cases} 5x - 2.5y = 105 \\ -5x - 5y = -150 \end{cases}$$
$$- 7.5y = - 45$$
$$y = 6$$

$$x + 6 = 30$$
$$x = 24$$ ✓

37 Tres viajeros han gastado cierta cantidad en un hotel. La suma del gasto del primero con el del segundo es \$ 2 más que el del tercero; el primero y el tercero - han gastado \$ 6 más que el segundo; por último, el segundo y el tercero, han gastado entre los dos \$ 10 más que el primero.

Solución:

x_1 = cantidad gastada por el 1er. viajero

x_2 = cantidad gastada por el 2o. viajero

x_3 = cantidad gastada por el 3er. viajero

$$x_1 + x_2 + 2 = x_3 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = -2$$
$$x_1 + x_3 + 6 = x_2 \qquad x_1 + x_3 - x_2 = -6$$
$$x_2 + x_3 + 10 = x_1 \qquad -x_1 + x_2 + x_3 = -10$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -6 \\ \hline 2x_1 = -8 \\ x_1 = -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -10 \\ \hline 2x_2 = -12 \\ x_2 = -6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -10 \\ \hline 2x_3 = -16 \\ x_3 = -8 \end{array}$$

LIBRO: Hiller - Lieberman

CAPITULO: 5/Linear Programming

38 Una compañía está considerando la compra de jets (para pasajeros) tres tamaños: grandes, medianos y pequeños. Los precios de compra son: \$6'700,000.00, para cada uno de los aviones grandes; \$5'000,000.00 para cada uno de los aviones medianos y \$3'500,000.00 para cada uno de los aviones pequeños. El consejo de directores ha considerado un gasto máximo de \$150'000,000.00 para estas compras. Independientemente de los aviones que se compren, se espera que recorran grandes distancias y vayan completos en cada viaje que hagan.

Se estima que la ganancia anual neta (después de recuperar la inversión) será de \$420,000.00, para los aviones grandes, \$300,000.00 para los aviones medianos y \$230,000.00 para los aviones pequeños.

Se estima que habrá de disponerse de suficientes pilotos entrenados para manejar 30 nuevos aviones. Si solamente se compran aviones pequeños la posibilidad de mantenimiento será para 40; sin embargo, cada avión mediano equivale a 1-1/3 de un pequeño y cada avión grande es equivalente a 1-2/3 de un pequeño, en términos de las posibilidades de mantenimiento.

Toda la información anterior fué obtenida mediante análisis preliminares del problema. Se espera un análisis más detallado utilizando los datos anteriores en una primera aproximación. Los gerentes de la compañía desean saber cuántos aviones de cada tipo habrá que comprar para maximizar las ganancias.

Formule el modelo de programación lineal para este problema (ignore el hecho de que el número de aviones debe ser entero).

LIBRO: Hillier - Lieberman

CAPITULO: 5/Linear Programming

Solución 1.

Si llamamos:

x_1 = número de aviones grandes por comprar

x_2 = número de aviones medianos por comprar

x_3 = número de aviones pequeños por comprar

AVIONES		COSTO	GANANCIA	MANTENIMIENTO
x_1	grandes	\$ 6'700,000.00	\$ 420,000.00	5/3 del pequeño
x_2	medianos	5'500,000.00	300,000.00	4/3 del pequeño
x_3	pequeños	3'500,000.00	230,000.00	40

capital disponible = \$150'000,000.00

suficientes pilotos para manejar 30 nuevos aviones

El modelo de programación lineal es:

$$\text{Max } Z = 0.42\,x_1 + 0.30\,x_2 + 0.23\,x_3$$

$$6.7\,x_1 + 5.0\,x_2 + 3.5\,x_3 \leq 150$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

$$5/3\,x_1 + 4/3\,x_2 + x_3 \leq 40$$

Para $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

NOTA: Las cifras están divididas entre 10^6

LIBRO: Hillier - Lieberman

CAPITULO: 5/Linear Programming

39. Determinada corporación tiene tres ramales de planta, con capacidad de exceso de producción. Las tres plantas tienen capacidad para producir cierto producto y la dirección ha decidido usar alguno de los excesos de capacidad de producción, en esta forma. Otro producto puede ser hecho en tres medidas: grande, mediano y pequeño, cuya utilidad neta rinde \$12.00, \$10.00 y \$9.00, respectivamente. Las plantas 1, 2 y 3 tienen el exceso de hombre y capacidad de equipo para producir 500, 600 y 300 unidades por día, de este producto, respectivamente, sin hacer caso del tamaño o combinación de tamaños implicados. Sin embargo, la cantidad de espacio de almacenaje aprovechable en proceso también impone una limitación en los precios de producción. Las plantas 1, 2 y 3 tienen 9,000, 8,000 y 3,500 pies cuadrados de espacio de almacenaje aprovechable en proceso, para este producto. Cada unidad del tamaño grande, mediano y pequeño producidos por día requieren 20, 15 y 12 pies cuadrados, respectivamente. El pronóstico de venta indica que 600, 800 y 500 uni-

dades de tamaño grande, mediano y pequeño respectivamente, pueden venderse por día.

En orden de mantener una carga de trabajo uniforme entre las plantas y la rentabilidad con alguna flexibilidad, la dirección ha decidido que la producción adicional asignada a cada planta debe ser usada en el mismo porcentaje del exceso de hombre y capacidad de equipo.

La dirección desea saber cuántos de cada uno de los tamaños puede producir por cada una de las plantas para maximizar la ganancia

Formule el modelo de programación lineal para este problema

LIBRO: Hillier - Lieberman

CAPITULO: 5/Linear Programming

Solución .

PLANTA	CAPACIDAD	ALMACENAJE
Plantas con capacidad de exceso de producción, para producir cierto producto (exceso de espacio)	Capacidad de equipo para producir	Capacidad de almacenaje (espacio aprovechable)
1	500 unidades/día	9,000 pies^2
2	600 unidades/día	8,000 pies^2
3	300 unidades/día	3,500 pies^2

PRODUCTOS		GANANCIA	CAPACIDAD DE ALMACENAJE/U	UNIDADES POSIBLES A VENDER
X_g	grandes	\$ 12.00	20 pies^2	600
X_m	medianos	\$ 10.00	15 pies^2	800
X_p	pequeños	\$ 9.00	12 pies^2	500

La producción adicional asignada a cada planta debe ser usada en el mismo porcentaje del exceso de hombre y capacidad de equipo.

X_{1g} Producto grande en la planta 1
X_{2g} producto grande en la planta 2
X_{3g} producto grande en la planta 3
X_{1m} producto mediano en la planta 1
X_{2m} producto mediano en la planta 2
X_{3m} producto mediano en la planta 3
X_{1p} producto pequeño en la planta 1
X_{2p} producto pequeño en la planta 2
X_{3p} producto pequeño en la planta 3

El modelo de programación lineal es:

$$\text{Max } Z = 12(X_{1g} + X_{2g} + X_{3g}) + 10\,(X_{1m} + X_{2m} + X_{3m}) + 9\,(X_{1p} + X_{2p} + X_{3p})$$

s.a.

$$20\,X_{1g} + 15\,X_{1m} + 12\,X_{1p} \leq 9{,}000$$
$$20\,X_{2g} + 15\,X_{2m} + 12\,X_{2p} \leq 8{,}000$$
$$20\,X_{3g} + 15\,X_{3m} + 12\,X_{3p} \leq 3{,}500$$

$$X_{1g} + X_{1m} + X_{1p} \leq 500$$
$$X_{2g} + X_{2m} + X_{2p} \leq 600$$
$$X_{3g} + X_{3m} + X_{3p} \leq 300$$

$$X_{1g} + X_{2g} + X_{3g} \leq 600$$
$$X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} \leq 800$$
$$X_{1p} + X_{2p} + X_{3p} \leq 500$$

$$\frac{X_{1g} + X_{1m} + X_{1p}}{500} = \frac{X_{2g} + X_{2m} + X_{2p}}{600} = \frac{X_{3g} + X_{3m} + X_{3p}}{300}$$

Para $(X_{1g}, X_{1m}, X_{1p}, X_{2g}, X_{2m}, X_{2p}, X_{3g}, X_{3m}, X_{3p}) \geq 0$

P R O B L E M A S

P R O P U E S T O S

III. PROBLEMAS NO RESUELTOS.

1.- Un barco tiene 3 bodegas: en la proa, en la popa y en el centro; los límites de capacidad son:

Proa:	2000 Tons.	100,000 m^3
Centro:	3000 "	135,000 m^3
Popa:	1500 "	30,000 m^3

Los siguientes cargamentos se ofrecen; los dueños de los barcos pueden aceptar el total o una porción cualquiera de cada artículo.

Artículos	Cant. Tons.	Volumen por Tons.	Ganancia por Tons. $
A	6000	60	6
B	4000	50	8
C	2000	25	5

Para preservar el equilibrio del barco, el peso de cada bodega debe ser proporcional a la capacidad en toneladas. ¿Cómo debe distribuirse la carga para hacer máxima la ganancia?

2.- Cierto hacendado dispone de los siguientes recursos para emplearlos en la próxima cosecha $ 70,000 de capital, mil horas tractor, 50 hectáreas de tierra cultivable, tierras que son propias para sembrar maíz, sorgo y frijol; se supone que tiene a su disposición hombres suficientes y sin restricción, y con costos de producción de $ 50.00 la hora del tractor e implementos, mano de obra de $ 5.00 la hora y $ 300.00 por hectárea sembrada, además se supondrá un costo como pena de $ 1.00, por cada peso no invertido, maximizar la ganancia.

	Mano de Obra Hr/Ha	Tractor Hr/Ha	Otros costos $/Ha	Valor de la Cosecha Ha
Maíz	10	20	350	$ 3,000
Sorgo	25	25	400	$ 3,800
Frijol	30	15	1000	$ 4,100

2.a) Con el fin de difundir la cultura, la U.N.A.M., ha determinado los ingresos (ventas y público asistente) de un anuncio sencillo en cada uno de los K medios diferentes. Tiene datos sobre los costos de cada medio y el perfil de la audiencia por día y/o por estación. Suponiendo que los efectos del anuncio fueran auditivos, formúlese el problema de la selección del medio, como un problema de programación lineal. Considérese especialmente los tipos de restricciones que pueden involucrarse.

3.- Una fábrica produce 2 artículos distintos, cajas de cartón y cajas de plástico para refrescos, las primeras llevan $ 15.00 de mano de obra y $ 10.00 las segundas; de materia prima se llevan $ 15.00 las de cartón y $ 25.00 las de plástico, el desgaste del equipo se supone proporcional a la producción y es de -- $ 2.50 por la caja de cartón y $ 1.00 por la de plástico, el beneficio por unidad de artículo es $ 6.00 para la primera y $ 4.00 para las segundas, si solamente se cuenta con $ 50,000.00 para salarios y $ 80,000.00 para materia prima y no se quiere que el desgaste de los equipos exceda de $ 30,000.00, cuál es - la cantidad que se debe producir en cada artículo, para obtener las utilidades más altas posibles.

4.- El Sr. Smith, agiotista dispone de $ 50,000.00 para invertirlos en uno o va--- rios proyectos. Puede hacer uso de ellos en el lapso de 6 años, y quiere sacar el mayor provecho de ellos. Los proyectos de inversión A, B y C se pueden ha-- cer cada año y cada peso invertido en A produce 1.1 un año después (utilidad - 0.10); cada peso invertido en B produce 1.50 dos años después, y para C obtiene 2.00 tres años después. Los proyectos D y E sólo se pueden realizar al inicio del tercer o cuarto año, produciendo 2.50 y 3.70 tres años después respectivamente. ¿Cuál es el plan de inversión que proporciona, al Sr. Smith, la mayor cantidad de efectivo al inicio del séptimo año?.

5.- Se le presentan a una persona 4 proyectos con sus respectivos costos, en un - período de 3 años, así como su utilidad total. Ella requiere maximizar la utilidad total disponiendo de $ 50,000.00, $ 24,000.00 y $ 30,000.00 en cada uno de los años siguientes:

Datos en miles de pesos

Proyecto	Utilidad Total	Costo Año 1	Costo Año 2	Costo Año 3
A	60	5	7	3
B	50	1	4	7
C	35	7	9	9
D	20	3	1	5
Disponibilidad		50	24	30

Es necesario saber cuál es el modelo que maximice su utilidad total.

6.- Pemex mezcla 5 tipos de gasolina cruda, para producir dos clasificaciones de - combustible para automóviles, nova y extra, el número de barriles por día, de cada tipo de gasolina cruda disponible, el octanaje y costo por barril, son -- los siguientes:

Gasolina Cruda		Octanaje	Barril/día	Costo/Barril
Tipo:	1	70	2000	0.8
	2	80	4000	0.9
	3	85	4000	0.95
	4	90	5000	1.15
	5	99	3000	2.0

El combustible nova para motor debe tener un octanaje al menos de 80 y el Extra al menos de 95, lo contratado por la refinería es que sean producidos 8,000 barriles por día, de Extra, a la vez, la refinería puede vender su producto entero de ambas, Extra y Nova por $ 3.75/barril y $ 2.85/Barril, respectivamente.

Algún tipo de gasolina cruda (no mezclada para combustible para motor) teniendo un octanaje de 90 o más, se vende a $ 2.75/Barril y un tipo de octanaje de 85 o menos, se vende a $ 1.25/Barril.

7.- La Compañía chocolatera La Corona, encarga a su departamento de producción que minimice el desperdicio del sobrante, en las tiras de chocolate que resulta en la fabricación de tablillas. Los tamaños de las tablillas para los diferentes precios son:

Tipo 1: 2 cms. x 7 cms.
Tipo 2: 2 cms. x 6 cms.
Tipo 3: 2 cms. x 5 cms.

Las cantidades necesarias de cada tipo son 20,000, 16,000 y 8,000, respectivamente, por mes.

Dado que la maquinaria disponible produce tiras de un solo tamaño (2 cm. x 18 cm.) ¿Cuál es el modelo matemático que representa este problema?

8.- El doctor de la familia (los hijos que Dios me mande), les dió una dieta que - reune los siguientes requisitos alimenticios. Al menos 10mg. de vitamina "A",- al menos 8mg. de vitamina "C" y al menos 5 mg. de vitamina "E". Se tienen va-- rios alimentos con distintos contenidos de vitaminas.

Producto	Costo/Kg	Contenido en Mg. por gramo de Producto Vit. "A"	Vit. "C"	Vit. "E"
Carne	$ 50.00	.10	.2	.18
Pan	$ 48.00	.14	.15	.10
Leche	$ 19.00	.15	.15	.4
Huevos	$ 40.00	.16	.3	.35
Requerimientos		10.00	8.00	5.00

¿Cuál será la dieta de costo mínimo que satisfaga los requisitos señalados?

9.- La Cervecería "Moctezuma", desea conocer como distribuye su producto a un costo mínimo de sus depósitos de Monterrey y Acapulco, de consumo en Guadalajara, Puebla, León, Córdoba.

La siguiente tabla proporciona los datos de costos de transporte, demanda y disponibilidad.

	Guadalajara	Puebla	León	Córdoba	Capacidad
México	10	4	6	4	550
Monterrey	8	5	3	3	310
Acapulco	4	3	4	3	250
Demanda	250	300	200	160	

Formule el modelo matemático que proporciona la política (programa) óptima de transporte.

10.-El "Hotel de México" tiene programados banquetes durante los próximos 5 días - y necesita 80, 60, 100, 130 y 200 manteles para cada día, respectivamente. Por ser manteles especiales el hotel tendrá que comprarlos a un costo de $ 40.00.- La tintorería cobra $ 10.00 por lavar cada mantel en un tiempo de dos días. El problema del administrador es no saber la cantidad de manteles a comprar, - de tal manera que mandándolos lavar el costo total sea mínimo.

11.- La compañía "El Mexicanito" tiene que producir 6,000 unidades para surtir un - pedido. Se quiere programar la producción de tales unidades para que el costo sea mínimo. Se tienen 3 máquinas de capacidades y costos distintos y con los - cuales se pueden producir las unidades requeridas.

Máquinas	1	2	3
Costo de Preparación	4,500	2,000	950
Costo por unidad	15	10	19
Capacidad	3,000	1,500	2,000

¿Cuál será el modelo que resolvería este problema?

12.- Dos diseños de lanchas de velocidad, son hechos en la planta de la Compañía San Remo. El modelo 1 necesita 4 días para construirlo y el modelo 2 toma 7 días.- Existen 30 días por mes disponibles para operaciones de construcción. Se estima que a lo más 5 lanchas de tipo 1 y 4 de tipo 2 pueden venderse por mes. La política de la planta específica que el número de lanchas de tipo 2 que se -- producen deben ser como máximo, de 5 más que el 50% del número de lanchas de tipo 1 producidas.

El departamento más lento en la planta es el Departamento de acabado, el cual puede completar 7 lanchas por mes. Si las lanchas de tipo 2 contribuyen con - $ 1,500, y las del tipo 1 con $1,000 a las ganacias.

¿cuántas de cada tipo deben fabricarse para que la Compañia maximice las contribuciones en la ganancia.?

13.- El Departamento de desarrollo del producto de Moto Islo, S.A., propone la fa-- bricación de carros-motos, Motos Gacela y minimotos, que tendrían una utilidad neta de $ 2,000.00; $ 3,000.00 y $ 1,000.00 respectivamente. Las 2 plantas de- Saltillo, Coahuila tienen una capacidad de producción de 500 y 300 unidades de cualquier clase.

Las plantas solo tienen hectáreas cada una para almacenar los productos que -- unitariamente necesitan $5m^2$ para el carromoto, $3m^2$ para las Gacelas y $1m^2$ para las minimotos. Los pronósticos de ventas indican que al mes se pueden vender - 400 carromotos, 100 Gacela y 300 minimotos.

La producción se realizaría utilizando la actual capacidad de las plantas y en un porcentaje igual.

El Consejo de Administración desea conocer el programa de producción que maximice las ganancias.

14.- Una fábrica de ollas y cafeteras consta de los departamentos que a continua--- ción se ennumeran:

1) Estampado
2) Maquinado
3) Ensamble

El departamento 1, puede estampar 25,000 ollas ó 35,000 cafeteras o las correspondientes combinaciones de ollas y cafeteras el departamento 2 puede maquinar - - - 33,000 ollas ó 16,667 cafeteras o las correspondientes combinaciones de ollas y - cafeteras; el departamento 3 puede ensamblar 22,500 ollas y 15,000 cafeteras, el porcentaje de tiempo de ocupación está dado por la siguiente tabla:

	Estampado	Maquinado	Ensamble
Ollas	0.004	0.003	0.0044
Cafeteras	0.00286	0.006	0.00667

Pero nada más se disponen de 100 horas en cada departamento. ¿Cuáles serían las - cantidades a producir para maximizar las utilidades?

Las ollas dan una utilidad de $ 15.00 y las cafeteras de $ 12.50 cada una.

15.- En una fábrica de productos lácteos, se tienen cuatro departamentos: prensado, mezclado, evaporado y pasteurizado. Se elaboran cuatro diferentes productos A, B, C y D; mediante la utilización unitaria de los departamentos citados según lo muestra la siguiente tabla.

Plantear el modelo de P. L., que maximice la utilidad al producir cierta cantidad de cada uno de los productos mencionados.

	A	B	C	D	Horas Totales Disponibles
Prensado	3	7	4	-	70
Mezclado	-	2	4	5	80
Evaporado	3	4	-	5	90
Pasteurizado	4	6	5	3	100
Utilidad	9	18	14	11	-

16) Supóngase que en el poblado de Tixtla, Gro., la Nacional Financiera pretende hacer inversiones cuantiosas en el cultivo de aguacate, lima reina, mango y zapote prieto.

Se persiguen dos objetivos, uno el de reducir el desempleo rural y otro el de aumentar las exportaciones que vendrán a equilibrar la balanza de pagos de la Nación. Se sabe que la producción promedio de cada árbol está dada en la siguiente tabla:

Tipo de Arbol	Producción (en unidades)	Promedio Anual (en Kg.)	Observación
Aguacate	350	150	Una vez al año
Lima Reina	230	200	" " " "
Mango	150	50	" " " "
Zapote Prieto	400	150	" " " "

El precio promedio en el mercado mundial, a precios de 1974, fué de \$ 10.00 por Kg. de aguacate, \$ 4.00 por Kg. de lima reina, \$ 15.00 por Kg. de mango y \$ 7.00 por Kg. de zapote prieto. Existe una extensión de 250,000 m^2 de tierra de propiedad Federal propicia, para el cultivo de esos productos.

Tipo de Arbol	Extensión Mínima de Cultivo por Arbol.
Aguacate	4 M^2
Lima Reina	5 M^2
Mango	3 M^2
Zapote Prieto	6 M^2

Afortunadamente no existe problema de agua, pues hay varios manantiales dentro de la propiedad, que aseguran la existencia de este preciado líquido, por los próximos 20 años, el costo por sembrar un árbol de aguacate es de \$ 2.00, por árbol de lima reina \$0.50, por árbol de mango \$1.00 y por árbol de zapote prieto \$ 1.50; estos costos ya incluyen la compra del árbol, más su cuidado y mantenimiento. Cada árbol empieza a ser productivo, aproximadamente en 3 años de ser plantado. Cada árbol de aguacate requiere de cuidados equivalentes a 36 horas - hombre/año; por árbol de lima reina 72 horas hombre/año; por árbol de mango 50 horas - hombre/año y por árbol de zapote prieto 10 horas - hombre/año.

La Nacional Financiera pretende hacer una inversión de \$20,000,000.00, pensando exportar toda su producción a partir del tercer año. El desempleo en Tixtla se ha calculado en 500 personas y el Gobierno Federal ha delineado que este proyecto emplee al menos 200 personas en forma contínua; bajo estas circunstancias. ¿Cuántos árboles de aguacate, lima reina, mango y zapote deberán sembrarse, con objeto de maximizar el valor de la futura exportación anual?

17) La Fábrica Nacional de Cerveza tiene plantas ubicadas en el Distrito Federal, Guadalajara, Monterrey, Tijuana y Mérida. La Fábrica Nacional de Latas, una subsidiaria de la Fábrica Nacional de Cerveza, tiene plantas ubicadas en Puebla, Torreón y Celaya. La demanda mensual de latas de cerveza se pronostica en:

Planta de Cerveza	Demanda Mensual de Latas
D.F.	2,000,000
Guadalajara	500,000
Monterrey	400,000
Tijuana	100,000
Mérida	100,000

Las latas de cerveza abiertas retornan a la Fundidora Nacional de Aluminio, en donde se reconvierten en aluminio y de ahí se mandan a la Fábrica de Latas.

La producción máxima mensual de latas es:

Planta de Latas	Capacidad Mensual de Latas
Puebla	1,000,000
Torreón	1,500,000
Celaya	750,000

Los fletes son una función de las distancias que existen entre las plantas productoras de cerveza y las plantas productoras de latas, éstos fletes son:

	Puebla	Torréon	Celaya
D.F.	5	20	15
Guadalajara	20	15	2
Monterrey	25	2	10
Tijuana	75	50	40
Mérida	45	80	60

(Pesos por transportar, 1000 latas)

Bajo estas condiciones ¿qué programa de distribución mensual de latas se debería establecer, a fin de satisfacer la demanda mensual de las fábricas de cerveza, sin exceder la producción mensual y todo a costo mínimo?

(Las unidades del programa de distribución mensual se dan en miles de latas).

18) Se desea saber cuál de los siguientes proyectos industriales nos dá mayores beneficios.

La cantidad a invertir en cada proyecto en un período de 3 años está dada en la siguiente tabla:

Período	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Miles disponibilidades $
1	450	450	760	1050	1275	2175
2	450	300	750	450	1500	2250
3	450	735	600	1200	1275	2460

Y en cada uno de ellos se espera ganancia de 3,450, 4,650, 6000, 8,400, 11,100, respectivamente. ¿Cómo debemos invertir nuestro dinero, para obtener las máximas ganancias?

20) La tienda París Londres está pensando en la instalación de 3 establecimientos, en diferentes partes de la ciudad de México.

Zona	Ganancia	Costos de Inst.	Número de Empleados	Ind. en Mercado (Competencia)
Zona 1	4	0.75	20	1.5
Zona 2	6	1.5	30	1.5
Zona 3	2	2.25	20	0.75
		≤ 40.5	≤ 300	≤ 27

¿En qué zona debe instalar sus tiendas para que la ganacia sea máxima?

21) En un hospital de diabéticos se tiene el siguiente problema alimenticio:

20 enfermos Tipo A - carne sin grasa 3 Kg. por semana

18 enfermos Tipo B - carne con grasa 2 Kg. por semana

1 Kg. de carne de res contiene 20% con grasa.

1 Kg. de carne de puerco contiene 80% con grasa.

En refrigeración tenemos solo capacidad para 100 Kg.

Los precios de la carne por 1 Kg. son los siguientes:

Carne de Res	$ 40.00 Kg.
Carne de puerco	$ 60.00 Kg.

Para tener una dieta al mínimo costo, cuántos kilogramos de carne tenemos que comprar, tomando en cuenta la capacidad de refrigeración.

22) Se tienen 4 refinerías de gran importancia estratégica, localizadas en 4 diferentes Ciudades y las queremos destruir, qué tantos bombarderos de tipo pesado y medio, debemos enviar y cómo deben repartirse en los 4 blancos (A, B, C, D), para maximizar la probabilidad de éxito, teniendo los siguientes datos:

El total de combustible de que se dispone es de 48,000 litros.

Planta	Consumo Comb. B Pesado	Con. Comb. B Medio	Prob. de éxito B Pesado	P. de E. B Medio
A	550	400	0.1	0.08
B	580	420	0.2	0.16
C	640	460	0.15	0.12
D	700	500	0.25	0.2

Y los pilotos de los bombarderos (Pesado y Medio) no deben volar en conjunto - más de 10,000 minutos, para evitar fatiga de vuelo. Suponiendo que los bombarderos de los 2 tipos vuelen en la misma velocidad.

Distancia de la Base al Destino

Destino	En Minutos
A	450
B	480
C	540
D	600

23) Los Estados de Sonora, Sinaloa, y Colima, cuya producción es 1000, 3000 y 500- Ton. respectivamente, son productores de trigo, el cual se tiene que surtir al D.F., Cuernavaca, Tlaxcala, donde tenemos los siguientes requerimientos.

Respectivamente 1 000, 2 500, 1 000 toneladas, la siguiente tabla nos da los - tiempos de transporte por tonelada, del Centro productor al Centro de consumo.

Fuente \ Mercados	1	2	3
1	9	3	4
2	9	5	2
3	5	0	1

Minimizar el tiempo al surtir las demandas.

24) El conocido Bar "La Perdida" desea saber cual debe ser la existencia de botellas en su cantina, después de tormentosa negociación con los vendedores, se llegó a la conclusión de que el precio por botella sería el siguiente:

Bebida	Precio/botella	Condiciones
Tequila	$ 17.00	Pedidos mayores a 5 cajas
Ginebra	$ 30.00	" " 3 "
Ron	$ 24.00	" " 10 "
Whisky	$ 58.00	" " 5 "

Además, el Bar ha tenido éxito en últimas fechas y estamos esperando un incre-- mento del 20% en el consumo por día. Nuestros consumos diarios son los siguientes:

Cañabar mix. de 100 a 350 lts.
Coco ron de 70 a 120 lts.
Banderillas VSOP de 110 a 270 lts.
Pistones de 35 a 45 lts.

Con gran resistencia, hemos logrado del cantinero las recetas de sus místicos - brebajes:

Un litro de Cañabar contiene: 0.7 lts. tequila, 0.15 ginebra y a 0.15 ron.

Un litro de Cocoron contiene 0.95 lts. ron, 0.03 tequila, 0.01 de ginebra y 0.01 de whisky.

Un litro de Banderillas contiene 0.6 whisky, 0.2 de ron y 0.2 ginebra.

Un litro de Pistones contiene 0.25 whisky, 0.25 tequila, 0.25 de ron y 0.25 ginebra.

Nota: Todas las recetas deben ir en este orden para obtener el deseado sabor - agradable.

Si todas las cajas de bebidas tienen un volumen de 0.064 m^3, solo tenemos 10 m^3 de bodegas, en cualquier orden que se acomoden las cajas.

Si es posible formular el modelo de P. L., hágalo.

25) Un avión de carga tiene dos compartimientos, el delantero y el trasero. Los límites de capacidad son:

Compartimiento	Capacidad de peso (lbs)	Capacidad de volumen (ft^3)
Delantero	15,000	10,000
Trasero	25,000	20,000

Los tipos de carga disponible se muestran en la siguiente tabla:

Artículo	Cantidad Disponible (lbs)	Volumen (ft^3/lb)	Ganancia por libra
1	30,000	1	.80
2	20,000	2	1.20

El avión carguero puede aceptar toda o cualquier parte de cada artículo. El peso de la carga en cada compartimiento debe ser proporcional a la capacidad en libras.

El problema a que se enfranta la compañía a la que pertenece el avión carguero, es decidir cuanto de cada artículo debe aceptar, con objeto de maximizar la ganancia total.

AUTOEVALUACION

Supongamos que Inglaterra, Francia y España producen todo el trigo, cebada y avena en el mundo. La demanda mundial para el trigo requiere 125 millones de hectáreas de tierra, dedicadas a la producción del trigo. Similarmente, 60 millones de hectáreas de tierra se necesitan para la cebada y 75 millones de hectáreas para la avena. El total de tierra disponible para estos propósitos en Inglaterra, Francia y España es de 70 millones, 110 millones y 80 millones de hectáreas, respectivamente. El número de horas de trabajo necesitadas en Inglaterra, Francia y España para producir una hectárea de trigo es de 18 horas, 13 horas y 16 horas, respectivamente. El número de horas de trabajo en Inglaterra, Francia y España para producir una hectárea de cebada es de 15, 12 y 12 horas, respectivamente; y para producir una hectárea de avena se necesitan 12, 10 y 16 horas, siguiendo el mismo orden. El costo por hora de traba o para producir trigo es de \$3.00, \$2.40 y \$3.30 en Inglaterra, Francia y España, respectivamente. El costo para producir cebada es de \$2.70, \$3.00 y \$2.80 en Inglaterra, Francia y España, respectivamente. El costo para producir avena es de \$2.30, \$2.50 y \$2.10 siguiendo el mismo orden. El problema es distribuir el uso de la tierra, en cada país, de tal manera que se satisfaga la demanda mundial y se minimice el costo total de trabajo.

Formule este problema como un modelo de programación lineal.

27) UN MODELO LINEAL PARA LA REGION AGRICOLA.

La región que se localiza en el municipio de Yautepec, Morelos, comprende una extensión de 3,125 hectáreas abiertas al cultivo, y sirven como abastecimiento de materia prima al ingenio azucarero Oacalco.

Los agricultores son en total 1,800 ejidatarios y debido a las siguientes razones, la mayoría emplea sus recursos para la producción de tres variedades distintas de caña de azúcar.

a) La reglamentación jurídica respecto a las zonas agrícolas a los ingenios azucareros.

b) El ingenio otorga créditos a los agricultores siempre y cuando produzcan caña de azúcar.

c) El ingenio compra la producción total de la caña de azúcar.

El tener los agricultores asegurada la venta total de su cosecha lo suponen ventajoso, sin embargo, el ingenio tiene su capacidad de molienda anual limitada a 500,000 ton. y es posible que una sobre producción del campo, tenga problemas para que se haga comercializable. Los agricultores tienen experiencia en la producción de frijol, jitomate y arroz, ya que también han sido sembrados pero con fines de autoconsumo más que de mercadeo, aún cuando existen precios de garantía para estos productos.

Las cantidades mensuales de agua disponible son $w_i = 2\ 800\ m^3$, $i=1, \ldots, 12$.

Por otra parte la cantidad de agua que utiliza cada tipo de cultivo por hectárea es s_{ij}, $i=1, \ldots, 12$, $j=1, \ldots, 6$ mensualmente y viene dada en la siguiente tabla:

m^3/ha	Caña 1	Caña 2	Caña 3	Jitomate	Frijol	Arroz
Mes 1	.2637	.2637	.2637	.5274	.3956	2.56
Mes 2				.5274	.3956	2.56
Mes 3	.2637		.2637	1.548		2.56
Mes 4	.2637	.2637	.2637	.5274		2.56
Mes 5	.2637	.2637	.2637	.5274		2.56
Mes 6				.5274	.7912	2.2
Mes 7				.5274	.7912	2.52
Mes 8	.5274	.5274	.5274	.5274		2.6
Mes 9	.2673	.2673	.2673	.5274		2.56
Mes 10	.2673	.2673	.2673	.5274		2.8
Mes 11	.2673			.5274		2.72
Mes 12						

Los rendimientos que se obtienen al sembrar caña de tipo 1, 2 y 3, jitomate, frijol y arroz son 162, 161, 133, 5.4, y 20.4 y 31.7 tons/ha., respectivamente.

Los costos de producción y precios de venta están dados en la siguiente tabla:

	Caña 1	Caña 2	Caña 3	Jitomate	Frijol	Arroz
Costo $/ha.	83	75	80	700	500	600
Precio $/ton.	125	128	120	1000	1200	1100

El gobierno del Edo. desea saber el patrón de producción que optimiza la ganancia de la región durante un año, si para todos los cultivos la cosecha tiene que esperar un año. Formúlese y resuelva el correspondiente problema lineal también, de acuerdo a los resultados obtenidos, proporcione una interpretación del problema dual.

28) Una compañía manufactura un artículo cuya demanda varia de mes a mes. La materia prima y la disponibilidad de mano de obra presentan variaciones estacionales. La información necesaria se presenta a continuación:

MES	COSTO DE MANO DE OBRA ($/ton. de art.) Tiempo normal	Tiempo extra	DISPONIBILIDAD DE MATERIA PRIMA (Ton) (Ton)	DEMANDA DEL ARTICULO (Ton)	PRECIO DE MATERIA PRIMA ($/Ton)
1	40	60	600	400	180
2	40	60	450	700	180
3	40	60	425	600	180
4	60	90	1200	900	250
5	60	90	1300	900	250
6	60	90	1600	900	250
7	60	90	1600	800	250
8	60	90	1500	600	250
9	60	90	1300	800	250
10	40	60	500	1200	300
11	40	60	500	1100	300
12	40	60	500	1400	300

Para producir una unidad de producto se requiere media unidad de materia prima. Durante los meses 10, 11, 12, 1, 2, 3, la compañía puede contratar a lo más una cantidad de mano de obra suficiente para producir 1200 y 600 tons. por mes, durante el tiempo normal y tiempo extra, respectivamente. En los meses 4,5,6, 7,8, 9 estas capacidades de trabajo son 800 y 500 tons., respectivamente. La producción de un mes puede ser vendida en cualquier tiempo del siguiente mes o más tarde. Los costos de almacenaje son de $10 por tonelada de producto almacenado de un mes al próximo. La materia prima no puede ser almacenada, por lo

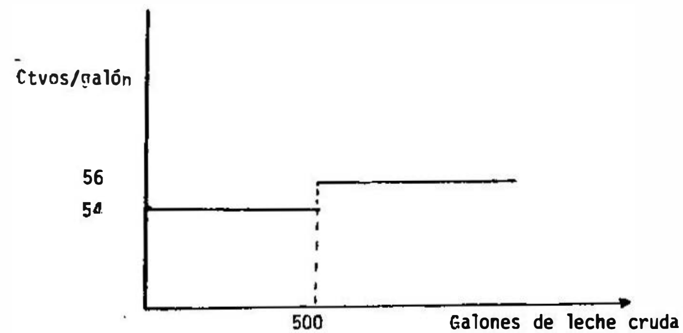
que ésta debe utilizarse en el mismo mes en el que se adquiere. Las operaciones empiezan en el mes 1 con una existencia de 50 ton. del producto. A final del mes 12, la compañía debe tener una existencia de al menos 50 toneladas del producto. Determine esquedulación (programación o planeación) óptima de la producción, a través de la formulación de un modelo de programación lineal. Representelo en la forma:

c	z
A	b

Formule el dual. De una interpretación del problema dual.

29) Los distribuidores de la leche "Feliz" compran la leche cruda de granjeros de dos regiones: A y B, los precios, contenido de grasa y las propiedades de separación de la leche cruda difieren en las 2 regiones. Los distribuidores de leche "Feliz" procesan la leche cruda con el fin de producir crema y leche, con determinadas especificaciones, para después distribuirlas a los consumidores.

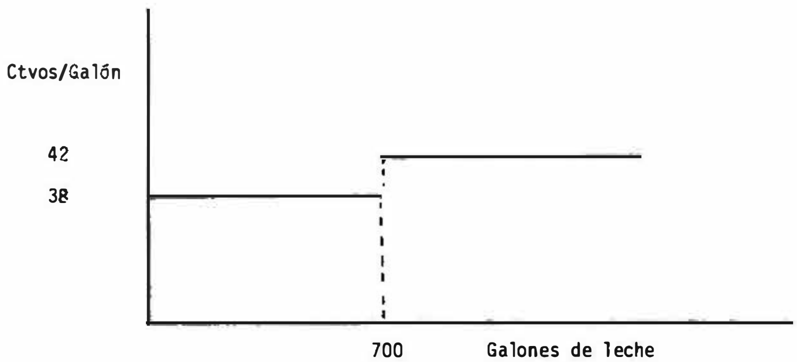
LECHE CRUDA DE LA REGION A. El precio de compra de leche cruda, en la región A, está indicado en el siguiente diagrama:



Por ejemplo, la compra de 700 galones daría un costo de 54 (500) + 56 (200) centavos. No hay límite superior sobre la cantidad que puede ser comprada. La leche cruda de la Región A tiene 25% de grasa, y cuando es separada (a 5 centavos/galón, produce 2 leches, una con 41% de grasa y otra con 12%. Por medio de un diagrama podemos expresar lo anterior, de-la siguiente manera:

El volumen de leche se conserva en todo el proceso de separación.

LECHE CRUDA DE LA REGION B. El precio de compra (como en la región A) se ilustra en el siguiente diagrama:



La leche cruda de la región B, tiene 15% de grasa, y cuando es separada (a 7 centavos/galón), produce 2 leches, una con 43% de grasa y otra con 5%.

PROCESO DE PRODUCCION. Después de que la leche es comprada y llevada a la planta, es mezclada directamente o bien primero es separada y entonces mezclada. El mezclado no cuesta y tiene el propósito de producir crema y leche a las especificaciones debidas. Por ejemplo una parte de leche cruda de la región A puede ser separada y entonces mezclada y la otra parte puede ser mezclada directamente (i.e., sin tener que ser separada).

DEMANDA Y PRECIOS DE VENTA. La demanda y los precios de venta son descritos de la siguiente forma:

	Mínimo porcentaje de grasa requerido	Máximo volumen demandado en galones	Precio de venta en centavos por galón.
Crema	40	250	150
Leche	20	2000	70

Por ejemplo, toda la crema producida debe tener al menos 40% de grasa y se vende a $1.50 por galón, la máxima cantidad que se demanda de esta crema es 250 galones.

30) Resuelva el siguiente problema. La palabra serendipiti fue inventada por el escritor inglés Horace Walpole en un cuento infantil titulado "Los tres principes de Serendip".

Los tres principes de Serendip
Fueron a un viaje corto
Ellos no podrían llevar mucho peso;
Más de 300 libras les hizo pensarlo
Ellos planearon al detalle. Cuando ellos regresaron a Ceilan
Ellos descubrieron que sus provisiones juntamente se habían agotado
Cuán, fué su alegría, cuando el principe Guillermo encontró
Una pila de cocos en la tierra.
"Cada uno nos dará 60 toneladas", dijo el principe Ricardo con una sonrisa.
Cuando él casi se tropieza con una piel de león
"Mira gritó el principe Roberto, con regocijo
Cuando él devisaba más pieles de león bajo un árbol.

"Estas son más valiosas aún-300 monedas cada una
Si justamente pudiéramos llevar todas ellas a la playa".

Cada piel pesaba quince libras y cada coco, cinco
Pero ellos llevaron todo y lo hicieron animados.
El bote de regreso a la isla era muy pequeño
15 pies cúbicos de capacidad de equipaje - eso era todo.

Cada piel de león ocupaba un pie cúbico.
Mientras que ocho cocos tomaban el mismo espacio.

Con cada cosa embarcada ellos salieron hacie el mar
y en el camino calcularon lo que su nueva riqueza podría ser.

"Eureka", gritó el principe Roberto. "Nuestro mérito es tan grande
que no existe otra forma en que podríamos regresar en este estado.

Cualquiera otras pieles o cocos que podríamos haber
Traido nos harían menos ricos. Y ahora yo se que
Escribiré a mi amigo Horace en Inglaterra, porque seguramente
Solamente él puede apreciar nuestra serendipity.

NOTA:

1. Este problema fue tomada de la revista.
   Managemente Science, Vol. II, No. 4 Feb. 1965, p. C-45

2. Este problema es una versión de un problema muy importante llamado el problema de la mochila (Knapsack) que, se presentará en la siguiente tarea.

31) AUTOEVALUACION

Supóngase que el Departamento de Policia ha pronosticado la demanda de ca-- rros patrulla, en la Ciudad de México, para el período que empieza a las 12 del mediodía del 31 de diciembre y termina a las 12 del mediodiía del 1º de enero. Las 24 horas han sido divididas en períodos de 4 horas y la demanda tanto en carros patrulla como en personal motorizado (2 personas por patrulla) están dados a continuación:

Horas del día	Carros Patrulla	Personal motorizado
12-16	300	600
16-20	400	800
20-24	500	1000
24-4	600	1200
4-8	400	800
8-12	200	400

El personal motorizado solo puede trabajar 8 horas consecutivas, y se cuenta con un total de 4000 individuos. Formule un programa lineal que encuentre el mínimo número requerido para satisfacer la demanda en cada 4 horas.