INGENIEROS
U. N. A. M.

APUNTES DE CALCULO VECTORIAL

ING. MARIANO HERNANDEZ

1964

Indice

VECTORES

1. Generalidades.

Si en una recta indefinida tomamos un punto O que representa el número cero, elegimos un módulo o longitud arbitraria que valga una unidad, la cual llevamos a partir de O, en uno y otro sentido, los puntos de división nos representan los números enteros, los positivos en un sentido y los negativos en el sentido contrario. Más aún, todo punto de la recta representa un número, según sea su distancia a O medida con la unidad ya elegida.

Inversamente todo número positivo o negativo ha quedado representado por un punto de la recta que con sus divisiones o referencias equidistantes, toma el aspecto de una escalera o escala; por esta razón, a estos números positivos o negativos, es decir, a los números reales, se les llama escalares, así como a las cantidades y magnitudes que se pueden representar valiéndose de ellos.

Una cantidad de dinero que nos deben o debemos, una temperatura, una longitud, un tiempo, una carga eléctrica son cantidades escalares.

Ahora bien, desde la iniciación en el estudio de la Mecánica y en general, de la Física se tropieza con cantidades que no pueden representarse con escalares, poseen algo mucho más que signo, poseen dirección en el espacio, tales son los vectores. La velocidad y la fuerza nos proporcionan los primeros ejemplos. Y, así, al lado de los números escalares con los cuales sabemos operar y que estudia el Algebra ordinaria, tenemos los vectores con los cuales se crea también una Algebra, el Cálculo Vectorial.

Hay tres clases de vectores: Vectores libres, vectores deslizantes y vectores fijos o ligados.

Los vectores libres quedan definidos por su dirección en el espacio, su tamaño y su sentido, un vector libre puede cambiar de posición conservando su tamaño, su sentido y su dirección y sigue representando el mismo ente geométrico.

Los vectores deslizantes o cursores tienen en cambio, soporte o línea de acción. Dos vectores deslizantes de misma dirección, mismo tamaño e igual sentido son diferentes si no tienen misma línea de acción. El vector deslizante queda pues localizado en una recta indefinida y no tiene más libertad que correrse en ella.

Finalmente los vectores fijos o vectores ligados tienen no sólo línea de acción sino punto de aplicación.

Un vector libre nos servirá para representar V.gr. un par de fuerzas; un vector deslizante nos sirve para representar V.gr. una fuerza que obra sobre un cuerpo rígido y un vector fijo puede representar, por ejemplo, la velocidad de un determinado punto en un cuerpo que se mueve.

Pero desentendiéndose de sus posibles representaciones en la Física, vamos a emprender su estudio elemental desde un punto de vista puramente geométrico.

Nos ocuparemos primero de los vectores libres, aunque accidentalmente podemos forzar el punto de aplicación de algunos de ellos convirtiéndolos en vectores fijos.

El único camino que tenemos para definir un vector es por medio de datos escalares.- Tomemos un sistema de referencia, V.gr. los ejes cartesianos ortogonales izquierdos y sea el vector libre $\overline{AA'}$ que llamaremos con una sola letra $\overline{p}$. (fig. 1).

Los datos escalares que definiendo el vector sean únicamente los indispensables, de tal suerte que cambiando uno de ellos cambia, en general, el vector, se llaman sus coordenadas.

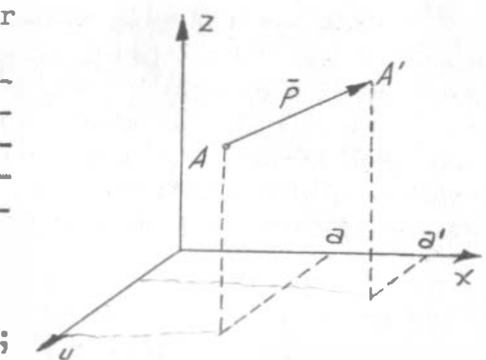

Fig. 1

Para conocer el vector libre $\overline{p}$ tenemos que definir la dirección de una recta en el espacio lo cual se logra por dos ángulos que forme esta dirección respectivamente con dos de los ejes y el tamaño sería otro dato, en total tres con los cuales tenemos definidos el tamaño y la dirección de $\overline{p}$; en cuanto al sentido no requiere un nuevo dato escalar, pues aunque el tamaño o módulo del vector es una cantidad esencialmente positiva, podemos hacer alguna convención por la cual el signo conque diéramos el tamaño nos indicara el sentido, V.gr. según que el vector fuese hacia arriba o hacia abajo. Tres son pues, las coordenadas de un vector libre, por ejemplo, dos de los ángulos que forma con dos ejes y el tamaño. Estudiemos otras más ventajosas.

Desde luego dadas las tres coordenadas del origen A (x,y,z) y las tres del extremo A' (x',y',z') el vector queda evidentemente definido pero no sólo como vector libre sino como vector fijo. Al moverse $\overline{p}$ paralelamente a sí mismo las seis coordenadas cambian siendo el mismo vector libre $\overline{p}$. Veamos qué es lo que no cambia de estas seis coordenadas cuando $\overline{p}$ se mueve en el espacio como vector libre. Proyectemos los puntos A y A' en el eje de las x ortogonalmente en a y a', el segmento aa' es un escalar que se llama la proyección de $\overline{p}$ en el eje Ox, se considera positiva si aa' está en el sentido del eje y negativa en caso contrario; como quiera que $\overline{p}$ tiene definidos su sentido y su dirección si $\overline{p}$ como vector libre no varía, la proyección tampoco variará, pero $aa' = x' - x$. Llamamos X a esta proyección y Y y Z a las proyecciones sobre los otros dos ejes. Se tiene:

$$X = x' - x \; ; \; Y = y' - y \; ; \; Z = z' - z.$$

Digo que las tres proyecciones X, Y, Z definen el vector libre $\bar{p}$. Desde luego el tamaño o módulo de $\bar{p}$ que indicaremos con $|\bar{p}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. La dirección en el espacio de $\bar{p}$ queda definida por los cosenos de los ángulos que esta dirección forma con los ejes, los cuales cosenos llamaremos α, β, γ, que en función de las proyecciones son:

$$\alpha = \frac{X}{|\bar{p}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$(1a) \quad \beta = \frac{Y}{|\bar{p}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\gamma = \frac{Z}{|\bar{p}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Y están ligados por la identidad que se obtiene elevando al cuadrado y sumando: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

En general, las proyecciones ortogonales del vector son sus coordenadas más ventajosas.

Dos vectores son iguales cuando, y solo cuando, sus proyecciones son respectivamente iguales. Toda igualdad entre vectores engendra, pues, tres igualdades entre escalares.

2. Operaciones entre escalares y vectores.

Vamos ahora a definir diversas operaciones que se efectúan entre escalares y vectores.

Para distinguir las letras que representan escalares de los vectores se suelen escribir estas últimas con un tipo de imprenta más grueso, cuando esto no es posible, se le puede poner una flecha arriba, así el vector a es $\vec{a}$. Sin embargo, cuando no hay lugar a confusión puede suprimirse la flecha. Cuando se quiere poner de manifiesto las proyecciones o coordenadas del vector $\bar{a}$, que sean X,Y,Z, se escribe.:

$$\bar{a}\ (X,\ Y,\ Z).$$

Multiplicar un escalar h por un vector $\bar{a}$ (X, Y, Z) es encontrar otro vector $\bar{b}$ que tenga:

1o. Misma dirección que $\bar{a}$.
2o. Su tamaño es igual al valor absoluto de h por el tamaño de $\bar{a}$; $|\bar{b}| = |h|\ |\bar{a}|$
3o. El sentido del producto $\bar{b}$ es igual al de $\bar{a}$ si h es positiva y contrario si h es negativa.

Si las proyecciones ortogonales de $\bar{a}$ son X, Y, Z, o sea $\bar{a}$ (X, Y, Z) digo que las de $\bar{b} = h\ \bar{a}$ son hX, hY, hZ.

Desde luego:

$$|\bar{b}|^2 = h^2\ (X^2 + Y^2 + Z^2) = h^2\ |\bar{a}|^2$$

$$|\bar{b}| = |h|\ |\bar{a}|$$

(Pues el tamaño de un vector es positivo siempre)

Sea α el primer coseno director de $\bar{a}$ y α' el de $\bar{b}$

$$\alpha = \frac{X}{|\bar{a}|} \quad ; \quad \alpha' = \frac{hX}{|h|\ |\bar{a}|} = \pm \alpha$$

Con signo más si $h > 0$ y con signo menos si $h < 0$. Y lo mismo para los otros dos cosenos directores; así pues las direcciones son siempre las mismas y los sentidos son los requeridos por la definición.

Vemos pues que multiplicar por tres un vector es simplemente triplicar su tamaño; multiplicarlo por $1/2$ es tomar la mitad de su tamaño y multiplicarlo por menos uno es cambiarle el sentido.

Claro que el factor escalar puede escribirse antes o después del vector: $h\,\bar{a} = \bar{a}\,h$ pues $hX = Xh$, es decir, este producto es conmutativo.

Cuando hay varios factores escalares se toma el producto de todos ellos.

Si los vectores $\bar{a}$ (X,Y,Z) y $\bar{a}'$ (X',Y',Z') son paralelos, es decir, tienen la misma dirección en el espacio, siempre podremos escribir:

$$\bar{a} = h\ \bar{a}'.$$

en que h es un escalar. Puesto que al tener la misma dirección los cosenos directores son iguales respectivamente, o son iguales y de signo contrario; de cualquier manera:

$$h = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$$

Si $h > 0$ los sentidos son iguales; si $h < 0$, son distintos.

Como quiera que dividir entre tres es multiplicar por $1/3$; en lo que antecede queda definida y estudiada la división de un vector entre un escalar.

3. Suma de vectores.

Por definición la suma o resultante de varios vectores: $\overline{p1} + \overline{p2} + \overline{p3} = \bar{q}$, se obtiene tomando el primer sumando $\overline{p1} = \overline{AB}$ y llevando por el extremo B el origen del segundo sumando $\overline{p2} = \overline{BC}$, por el extremo de éste último el origen del tercero, etc. Y así obtenemos un solo origen libre, el del primer sumando y un solo extremo libre, el del último que nos define la suma $\bar{q}$. (fig. 2).

Sean las proyecciones de $\overline{p1}$ $(X_1, Y1, Z1)$ de $\overline{p2}$ (X_2, Y_2, Z_2) etc., las de $\bar{q}$ (X,Y,Z).

Las coordenadas de $A(x_a, y_a, z_a)$, etc. se tiene:

$$X = x_d - x_a$$

Sumando y restando x_b y x_c :

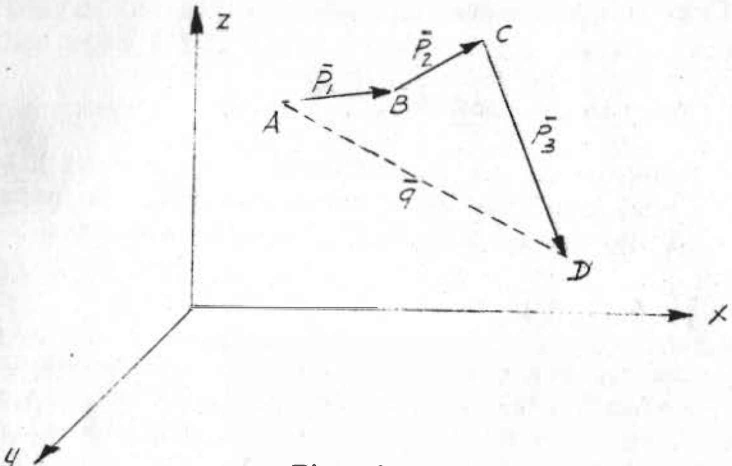

Fig. 2.

$$X = (x_d - x_c) + (x_c - x_b) + (x_b - x_a), \text{ o sea:}$$

$$X = X_3 + X_2 + X_1 = X_1 + X_2 + X_3$$

La proyección de la suma es igual a la suma de las proyecciones de los sumandos.

De aquí deducimos que la suma de vectores así definida es, primero conmutativa y segundo asociativa, por gozar de estas propiedades la suma entre escalares. Así:

(3a) $\overline{p_1} + \overline{p_2} + \overline{p_3} = \overline{p_2} + \overline{p_1} + \overline{p_3} = (\overline{p_2} + \overline{p_1}) + \overline{p_3}$

Pues: $X_1 + X_2 + X_3 = X_2 + X_1 + X_3 = (X_2 + X_1) + X_3$

Del mismo modo, sea h un escalar:

(3b) $h(\overline{p_1} + \overline{p_2} + \overline{p_3}) = h\,\overline{p_1} + h\,\overline{p_2} + h\,\overline{p_3}$

Pues: $h(X_1 + X_2 + X_3) = h\,X_1 + h\,X_2 + h\,X_3$

Lo ual se expresa diciendo que este producto es distributivo con la suma.

4. Diferencia de vectores.

Entre escalares restar de h un número m; h - m, es sumarle a h el producto de m por menos uno. De esta misma manera se define la diferencia de dos vectores:

(4a) $\overline{p_1} - \overline{p_2} = \overline{p_1} + (-1)\overline{p_2} = \overline{S}$

Como quiera que multiplicar $\overline{p}$ por menos uno es cambiar simplemente el sentido de $\overline{p}$, la diferencia entre dos vectores se obtiene sumándole al minuendo el sustraendo cambiado de sentido.

Si de un vector restamos el propio vector $\overline{p} - \overline{p} = 0$ obtenemos el vector nulo, que tiene por proyecciones 0,0, 0; su tamaño es por lo tanto nulo y su dirección queda indeterminada y es indiferente.

Si por el mismo origen llevamos dos vectores $\overrightarrow{OA_1} = \overline{a_1}$; $\overrightarrow{OA_2} = \overline{a_2}$ (fig. 3) sus extremos A_1 y A_2 definen un vector que es justamente su diferencia: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overline{a_2} - \overline{a_1}$

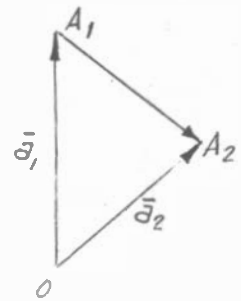

Fig. 3

Pues $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}$;

$\overline{a_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overline{a_2}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overline{a_2} - \overline{a_1}$

Componentes ortogonales de un vector. Vector unitario es el que tiene su tamaño igual a uno. Sea el vector $\overline{p}$ de proyecciones X, Y, Z, o sea: $\overline{p}$ (X, Y, Z). Llevemos el origen de $\overline{p}$ al punto O, origen de los ejes cartesianos ortogonales. Tomemos los tres vectores unitarios: $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ que tengan respectivamente las direcciones y los sentidos de los ejes (fig. 4).

Las componentes ortogonales de $\overline{p}$ según los ejes son los vectores $X\overline{i}$, $Y\overline{j}$, $Z\overline{k}$;

(4b) $\overline{p} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$

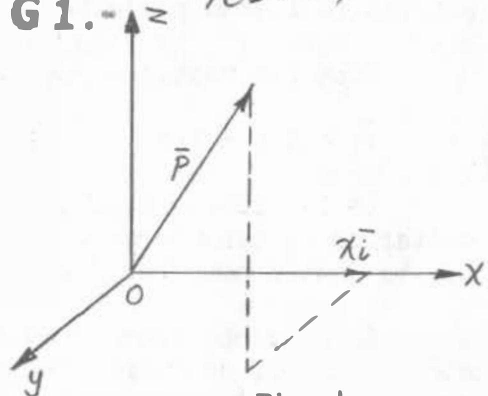

Fig. 4

Puesto que la componente ortogonal de $\overline{p}$, por ejemplo, según el eje Ox, tiene de tamaño la proyección X y su sentido es el del eje si X es positiva y contrario si X es negativa; todas estas condiciones las cumple el vector $X\overline{i}$. E igualmente para los otros dos.

5. Angulo que forman dos vectores.

La ambigüedad del ángulo que forman dos rectas que se cortan, en que se puede tomar el agudo o el obtuso de los dos ángulos suplementarios, la suprimimos en el caso del ángulo que forman las líneas de acción de dos vectores con la siguiente convención: El ángulo que forman dos vectores es el agudo cuando la proyección de uno sobre el otro está en el sentido de este último y es obtuso en caso contrario. Igualmente si se trata de un vector y un eje dirigido o de dos ejes dirigidos.

6. Producto escalar de dos vectores.

Nos hemos ya ocupado del producto de un escalar por un vector, hay otras operaciones entre dos vectores que también se les llama productos porque gozan de algunas de las propiedades que tiene el producto ordinario entre escalares, aunque no de todas. El primero de estos productos es el producto escalar, que recibe este nombre porque el resultado, o sea el producto, es un escalar, algunos autores lo llaman producto interior.

Sean los vectores $\bar{a}_1$, y $\bar{a}_2$, sus proyecciones:

$$\bar{a}_1 = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k \; ; \; \bar{a}_2 = X_2 i + Y_2 j + Z_2 k.$$

(A las letras i,j,k, que reprsentan los vectores unitarios rectangulares, que están ya consagrados para esto, es inútil ponerles flechas).

El producto escalar de $\bar{a}_1$, por $\bar{a}_2$, siguiendo la notación de Gibbs, se representa por un punto: $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$ y es igual al producto de los tamaños por el coseno del ángulo que forman.

(6a) $$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = |\bar{a}_1| \, |\bar{a}_2| \cos (\bar{a}_1 , \bar{a}_2)$$

Llamando cos $(\bar{a}_1 , \bar{a}_2)$ al coseno del ángulo que forman. Ya que los dos primeros factores del segundo miembro son positivos, este coseno le da signo al producto escalar. Así si el ángulo de los dos vectores es agudo el producto escalar es positivo; si es obtuso es negativo y si es recto es nulo. También es nulo este producto si alguno de los factores lo es.

Veamos que acontece si multiplicamos un factor, V.gr. $\bar{a}_1$, por un escalar h:

$$(h\,\bar{a}_1) \cdot \bar{a}_2 = |h|\,|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2| \cos \left[(h\,\bar{a}_1), \bar{a}_2\right]$$

Si h es positiva, cos $\left[(h\,\bar{a}_1), \bar{a}_2\right]$ = cos $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, pues el sentido de $\bar{a}_1$ no se ha alterado, además h = $|h|$, tendremos pues:

$$(h\,\bar{a}_1) \cdot \bar{a}_2 = h\,|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2| \cos (\bar{a}_1, \bar{a}_2)] = h\,\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$$

Si h es negativa, cos $\left[(h\,\bar{a}_1), \bar{a}_2\right.$ = - cos$(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, además h = - $|h|$, nos queda:

$$(h\,\bar{a}_1) \cdot \bar{a}_2 = - |h|\,|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2| \left[-\cos(\bar{a}_1,\bar{a}_2)\right] = h\,\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$$

Si h es nulo, h $\bar{a}$ = 0 y el producto esc lar es nulo.

Así pues, podemos establecer de una manera general que al multiplicar un vector por un escalar, este producto queda multiplicado por el escalar.

Si ahora al otro factor $\bar{a}_2$ lo multiplicamos por otro escalar m, por la misma razón tendremos:

(6b) $$(h\,\bar{a}_1) \cdot (m\,\bar{a}_2) = h\,m\,\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$$

Vvamos ahora a conmutar el orden de los factores, en vez de $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$ calculemos $\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1$. Desde luego el producto de los tamaños ha quedado el mismo: $|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2| = |\bar{a}_2|\,|\bar{a}_1|$ El ángulo ha cambiado de sentido, o si se quiere, ha cambiado de signo, pero como quiera que se trata del coseno que es una función par: cos θ = cos $(-\theta)$, nos queda evidentemente:

(6c) $$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1$$

Lo cual se expresa diciendo que el producto escalar de dos vectores es conmutativo.

De la definición:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = |\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2| \cos (\bar{a}_1 , \bar{a}_2)$$

Valiéndose de las propiedades asociativa y distributiva del producto ordinario entre escalares podemos escribir:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = |\bar{a}_1| \left[|\bar{a}_2| \cos(\bar{a}_1 . \bar{a}_2) \right] = |\bar{a}_2| \left(|\bar{a}_1| \cos (\bar{a}_1 . \bar{a}_2) \right)$$

Los paréntesis rectangulares son las proyecciones de un vector sobre el otro y así, podemos también definir el producto escalar de dos vectores como el tamaño del primero por la proyección del segundo sobre el primero, en que se puede tomar como primer factor a cualquiera de ellos por la propiedad conmutativa de este producto.

Así:

$$(6d) \quad \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = |\bar{a}_1| \, \mathrm{Proy}_{\bar{a}_1} (\bar{a}_2) = |\bar{a}_2| \mathrm{Proy}_{\bar{a}_2} (\bar{a}_1)$$

En el Algebra ordinaria la regla que nos sirve para multiplicar un polinomio por otro se obtiene de la regla correspondiente que nos dice cómo multiplicar un número por una suma.

Así si u, v, t, son escalares:

$$u\ (v + t) = uv + ut$$

Sustituyendo u por una suma y repitiendo el procedimiento obtendremos la regla del producto de dos polinomios, Esta regla se aplica también para el producto escalar de una suma de vectores por otra suma.

Sean, en efecto, los vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ y sea el producto.

$$\bar{a}_1 . (\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4) = |\bar{a}_1| \, \mathrm{Proy}_{\bar{a}_1} (\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4)$$

Atendiéndonos a la definición. Ahora bien, como la proyección de la suma $\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4$ es igual a la suma de las proyecciones, por la dicha definición de lo que es producto escalar, se obtiene:

$$(6e) \quad \bar{a}_1 . (\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4) = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_4$$

Lo cual se expresa diciendo que el producto escalar es distributivo con la suma como el producto ordinario. Si ahora $\bar{a}_1 = \bar{b} + \bar{c}$, substituyendo en el segundo miembro y reiterando la regla anterior, vemos que para multiplicar escalarmente dos sumas de vectores se sigue la misma ley que para el producto de dos polinomios en Algebra.

Con esto obtenemos inmediatamente el producto escalar de dos vectores en función de sus proyecciones ortogonales.

Por la misma definición obtenemos las siguientes igualdades para los vectores unitarios ortogonales i, j, k:

$$(6f) \quad i.i = j.j = k.k = 1 \ ; \ i.j = i.k = j.k = 0$$

Sean los vectores:

$$\bar{a}_1 = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k \quad ; \quad \bar{a}_2 = X_2 i + Y_2 j + Z_2 k$$

$$\bar{a}_1 . \bar{a}_2 = (X_1\, i + Y_1\, j + Z_1\, k) \, . \, (X_2\, i + Y_2\, j + Z_2\, k)$$

En el segundo miembro multiplicamos escalarmente cada sumando del primer factor por cada uno del segundo y sumamos los resultados. Ahora bien $X_1 i . X_2 i = X_1 X_2$, $X_1 i . Y_2 j = 0$ etc. y se obtiene:

$$(6g) \quad \bar{a}_1 . \bar{a}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

Para obtener esta fórmula fundamental por otro camino, llevemos los dos factores $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ al mismo origen O, (fig. 3), los extremos A_1 y A_2 forman el vector A_1A_2 igual a la diferencia $\overrightarrow{A_1A_2} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$. Apliquemos la fórmula que nos da el cuadrado de un lado al triángulo OA_1A_2:

$$|\bar{a}_2 - \bar{a}_1|^2 = |\bar{a}_1|^2 + |\bar{a}_2|^2 - 2 |\bar{a}_1| |\bar{a}_2| \cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

El último término es $-2\overline{a_1}.\overline{a_2}$ y los demás términos los podemos calcular en función de las proyecciones:

$$|\overline{a_2} - \overline{a_1}|^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 \text{ ; etc.}$$

Despejando $\overline{a_1}.\overline{a_2}$ se llega con gran facilidad a la fórmula que demostramos antes por otro camino, si bien más largo pero mucho más ilustrativo para este estudio de los vectores.

Sean respectivamente α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 los cosenos directores de $\overline{a_1}$ y $\overline{a_2}$; en función de ellos queremos el coseno del ángulo de los dos vectores.

(6h) $$\cos(\overline{a_1},\overline{a_2}) = \frac{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\;|\overline{a_2}|}$$

$$\cos(\overline{a_1},\overline{a_2}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{|\overline{a_1}|\;|\overline{a_2}|} ;$$

$$\alpha_1 = \frac{X_1}{|\overline{a_1}|} \text{ , etc.}$$

$$\cos(\overline{a_1},\overline{a_2}) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

Fórmula que podríamos haber escrito desde luego al considerar que los cosenos directores de un vector son las proyecciones del vector unitario del mismo sentido y dirección.

Al multiplicar escalarmente una ecuación entre vectores por un vector, se obtiene la ecuación correspondiente de las proyecciones de los vectores de la ecuación sobre el vector por el cual hemos multiplicado. Por ejemplo sea la ecuación:

$$\overline{p} = m\overline{a_1} + n\overline{a_2}$$

Multiplicando escalarmente por $\overline{b}$

$$\overline{p}.\overline{b} = m\overline{a_1}.\overline{b} + n\overline{a_2}.\overline{b}$$

Reduciendo el valor absoluto de $\overline{b}$ nos queda:

$$\mathrm{Proy}_{\overline{b}}\,(\overline{p}) = m\,\mathrm{Proy}_{\overline{b}}\,(\overline{a_1}) + n\,\mathrm{Proy}_{\overline{b}}\,(\overline{a_2})$$

En particular si $\overline{e}$ es un vector unitario:

(ei) $$\overline{a} \cdot \overline{e} = \mathrm{Proy}_{\overline{e}}\,(\overline{a}) \;;\quad |\overline{e}| = 1$$

La proyección X_1 de $\overline{a_1}$ es $\overline{a_1} \cdot i = X$, y así para los otros dos.

7. Producto Vectorial.

Imaginemos los tres vectores unitarios i, j , k, colocados respectivamente sobre cada uno de los ejes cartesianos rectangulares, Ox, Oy, Oz. Una persona con los pies en O, origen común de los tres vectores, y la cabeza en el extremo del vector k, verá que el vector i se coloca en j girando noventa grados, bien sea, de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, según que los ejes cartesianos dibujados sean izquierdos o derechos; pero de cualquier manera que sea, se conviene, de una vez por todas, que rotación positiva es la que lleva el vector i al vector j girando un cuarto de vuelta, vista esta rotación desde el vector **k**. En esta definición podemos sustituír circularmente los vectores i, j, k; esto es debido a las coincidencias que se puede hacer con ejes, o bien, izquierdos, o bien, derechos, de tal manera que coincidan ejes distintos.

El producto vectorial de dos vectores es, como lo expresa su nombre, otro vector. Según las notaciones de Gibbs se expresa por una cruz. Si los factores son $\overline{a_1}$ y $\overline{a_2}$ y el producto es b , expresaremos:

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = \overline{b}$$

El tamaño de $\bar{b}$ es el área del paralelogramo formado por $\bar{a}_1$, y $\bar{a}_2$, o sea:

(7a) $|\bar{b}| = |\bar{a}_1||\bar{a}_2| \operatorname{sen}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$

Tomemos un mismo punto O como origen de los dos vectores, (fig. 5).

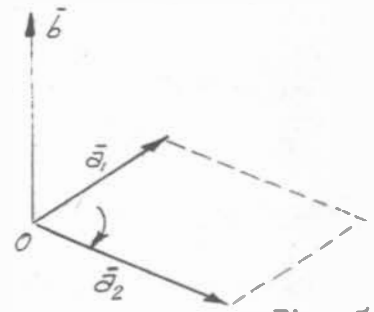

Fig. 5

La dirección del producto vectorial $\bar{b}$ es perpendicular al plano definido por $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$, o sea, es perpendicular a $\bar{a}_1$ y a $\bar{a}_2$. Esta dirección quedará indeterminada en el caso de que $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ sean paralelas, pero observemos que en este caso el tamaño de $\bar{b}$ es nulo y la dirección no interesa. Finalmente el sentido de $\bar{b}$ es tal que si llevamos el primer factor $\bar{a}_1$ en el segundo $\bar{a}_2$ girándolo el menor ángulo posible, esta rotación se vea desde $\bar{b}$ en el sentido positivo.

Desde luego, este producto no es conmutativo pues al cambiar el orden de los factores cambia el sentido o sea el signo, del producto, así:

(7b) $$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = -\bar{a}_2 \times \bar{a}_1$$

Este producto se nulifica cuando alguno de los factores es nulo, o bien, cuando son paralelos, así la ecuación:

$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = 0$ es equivalente a $\bar{a}_1 = m\bar{a}_2$, en que m es un escalar. En particular el producto vectorial de un vector por sí mismo es siempre nulo: $\bar{a} \times \bar{a} = 0$; en cambio para el producto escalar se tiene: $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$, por eso se conviene que $\bar{a}^2$ significa $\bar{a} \cdot \bar{a}$

Igualmente que en el producto escalar, en el producto vectorial, al multiplicar un vector por un escalar, el producto queda multiplicado por ese escalar. Así si:

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{b} \;;\; (m\bar{a}_1) \times \bar{a}_2 = m\bar{b}$$

En efecto, desde luego al multiplicarse el tamaño de $\bar{a}_1$ por $|m|$, el área del paralelogramo ha quedado multiplicada también por $|m|$, luego el tamaño de $\bar{b}$ debe multiplicarse por $|m|$. Si m es positiva ninguno de los sentidos ha cambiado y la fórmula es correcta; si m es negativa, se ha alterado el sentido de $(m\bar{a}_1)$, debe pues cambiar su signo el producto y efectivamente cambia al multiplicar $\bar{b}$ por el escalar negativo m; la fórmula sigue pues siendo correcta. Si al otro factor $\bar{a}_2$ lo multiplicamos por otro escalar n:

(7c) $$(m\bar{a}_1) \times (n\bar{a}_2) = mn\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$$

Por lo demás quitando los paréntesis en el primer miembro, que no son necesarios, a los escalares m y n los podemos colocar en lugares cualesquiera.

Con los vectores unitarios rectangulares i, j, k, y valiéndonos de las definiciones podemos escribir las siguientes igualdades:

(7d) $$i \times i = j \times j = k \times k = 0;\; i \times j = k,\; j \times k = i,$$

$$k \times i = j;\; j \times i = -k;\; k \times j = -i;\; i \times k = -j.$$

Sean las proyecciones de los tres vectores de la igualdad $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{b}$

$$\bar{a}_1 = X_1 i + Y_1 j + Z_1 k,\quad \bar{a}_2 = X_2 i + Y_2 j + Z_2 k;$$

$$\bar{b} = Xi + Yj + Zk$$

El problema que nos proponemos consiste en dadas las proyecciones de los dos factores $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ encontrar las del producto vectorial $\bar{b}$. Desde luego, como $\bar{b}$ es perpendicular a $\bar{a}_1$, y a $\bar{a}_2$, los productos escalares son nulos: $\bar{a}_1 \cdot \bar{b} = \bar{a}_2 \cdot \bar{b} = 0$, así pues:

$$X_1X + Y_1Y + Z_1Z = 0$$
$$X_2Z + Y_2Y + Z_2Z = 0$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones lineales y homogéneas con tres incógnitas.

Los coeficientes forman una matriz rectangular de -- dos renglones por tres columnas; añadamos a esta matriz - un primer renglón formado por tres elementos arbitrarios,- con objeto de hacerla cuadrada y que forme determinante.- Ahora bien, los cofactores de los elementos de ese primer renglón nos dan una primera solución puesto que al multiplicar X_1, Y_1, Z_1, respectivamente por esos cofactores - ajenos y sumar, esta suma es nula por una propiedad ele-- mental de los determinantes; lo mismo con X_2, Y_2, Z_2. Esta primera solución que se suele llamar la solución principal, la llamaremos X', Y', Z' proyecciones de un vector $\bar{b}'$, por lo menos, paralelo a b.

Esta solución es:

(7e)

$$X' = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1$$

$$Y' = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} = Z_1 X_2 - Z_2 X_1$$

$$Z' = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

Comparemos ahora los tamaños de $\bar{b}$ y de $\bar{b}'$.

El de $\bar{b}$ es: $|\bar{b}| = |\bar{a}_1|\ |\bar{a}_2|\ \text{sen}\ (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$.

Elevando al cuadrado

$$|\bar{b}|^2 = \bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{b}^2 = \bar{a}_1^2\ \bar{a}_2^2\ \text{sen}^2\ (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

$$\bar{b}^2 = \bar{a}_1^2\ \bar{a}_2^2\ \left[1 - \cos^2 (\bar{a}_1, \bar{a}_2)\right]$$

$$\bar{b}^2 = \bar{a}_1^2\ \bar{a}_2^2 - (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2)^2$$

$$\bar{b}^2 = (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) - $$
$$- (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)^2$$

El tamaño de $\bar{b}'$ al cuadrado es:

$$\bar{b}'^2 = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2$$

Fácil es identificar estos segundos miembros, así -- pues, $\bar{b}'$ no sólo tiene igual dirección que $\bar{b}$ sino tam-- bién igual tamaño. Hemos llegado a demostrar que el vector buscado.

$$\bar{b} = \pm\ \bar{b}' \quad \text{o sea } X = \pm X' \ ; \ Y = \pm Y' \ ; \ Z = \pm Z'$$

Veamos en un caso particular conocido qué signo co-- rresponde: $i \times j = k$; i (1, 0, 0); j (0, 1, 0). $X' = 0$. $Y' = 0$, $Z' = 1 = Z$; en este caso particular corresponde- el signo más $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ o sea $\bar{b}' = \bar{b}$. Considerando ahora el caso general $\bar{b} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ imaginemos -- que el vector $\bar{a}_1$ varía de una manera continua hasta hacerse igual a i, al mismo tiempo que el vector $\bar{a}_2$ varía también de una manera continua hasta confundirse con j, ha-- brá infinitas maneras de lograr esto sin que ninguno de - los dos vectores ni el producto vectorial se nulifiquen. Este producto vectorial $\bar{b}$ y el vector obtenido $\bar{b}'$ irán variando también evidentemente de una manera continua; -- ahora bien, al final tenemos el caso particular que $b = \bar{b}'$, si al principio se hubiera tenido $\bar{b} = -\bar{b}'$ en un lugar intermedio las ecuaciones $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ hubieran - cambiado bruscamente a $X = -X'$, $Y = -Y'$, $Z = -Z'$ y el- vector $\bar{b}$ hubiera sufrido una discontinuidad, lo cual es absurdo. Así pues en todos los casos $\bar{b} = \bar{b}'$.

Este producto vectorial se representa ventajosamente en forma de determinante.

(7f)

$$\bar{b} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = i(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + j\,(Z_1X_2 - Z_2X_1) + k\,(X_1Y_2 - X_2Y_1)$$

En este determinante los términos se obtienen multiplicando el producto de dos escalares por un vector y la suma es suma vectorial.

Sea ahora el producto vectorial de un vector por una suma:

$$\bar{a}_1 \times (\bar{a}_2 + \bar{a}_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 + X_3 & Y_2 + Y_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}_1 \times (\bar{a}_2 + \bar{a}_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} =$$

(7g) $\bar{a}_1 \times (\bar{a}_2 + \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \times \bar{a}_3$

Así pues, tanto el producto escalar como el vectorial son distributivos con la suma, por esto se llaman productos. Para multiplicar una suma de vectores por otra, tanto escalar como vectorialmente, se procede como en el Algebra ordinaria, aunque teniendo cuidado, en el caso del producto vectorial de no alterar el orden de los factores o, en caso de hacerlo, cambiar el signo.

El producto escalar, como dijimos, se llama también producto interior y, debido a la notación de Gibbs, suele llamarse producto puntual. El producto vectorial se designa también como producto exterior y como producto cruzado. Aparte de las notaciones de Gibbs hay otras y alguna de ellas es contradictoria con las de Gibbs. En efecto, algunos autores italianos indican el producto escalar con una cruz.

Para ninguno de estos productos escalar y vectorial existe la operación inversa que dé un resultado determinado, en otras palabras, no existe la división correspondiente. La única división posible es la de un vector entre un escalar, pues dividir entre el escalar es multiplicar por su inverso.

8. Doble producto escalar.

El resultado de multiplicar escalarmente un producto vectorial por otro vector es un escalar. Este producto se llama mixto o doble producto escalar, los autores de habla inglesa lo llaman impropiamente triple producto escalar, por tratarse de tres factores.

Sean tres vectores $\bar{a}_1$ (X_1, Y_1, Z_1), $\bar{a}_2$ (X_2, Y_2, Z_2) y $\bar{a}_3$ (X_3, Y_3, Z_3). Escribamos el producto mixto:

$$\bar{a}_1 . (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = h$$

En que h es un escalar. Como quiera que si el paréntesis encerrara los dos factores unidos por el punto, la operación no tendría ningún sentido, el paréntesis puede suprimirse y escribir simplemente: $\bar{a}_1 . \bar{a}_2 \times \bar{a}_3$

Tomemos un punto O como origen común de los tres vectores y completemos el paralelepípedo que tenga $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$

y a $\bar{a}_3$ de aristas concurrentes. Sea el vector $\bar{b} = \bar{a}_2 \times \bar{a}_3$ el tamaño de $\bar{b}$ es el área del paralelogramo $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ que es una de las caras del paralelepípedo que podemos tomar como base, el resultado:

$$h = \bar{a}_1 \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \; \text{Proy}_{\bar{b}}(\bar{a}_1)$$

Como $\bar{b}$ es perpendicular a la base, la proyección de $\bar{a}_1$ sobre $\bar{b}$ nos da en valor absoluto la altura del paralelepípedo, así pues, el valor absoluto de h, es el volúmen del paralelepípedo que forman los tres vectores llevados por el mismo punto. Este producto mixto resulta positivo si desde $\bar{a}_1$ se ve de $\bar{a}_2$ hacia $\bar{a}_3$ girando el menor ángulo en sentido positivo y negativo en caso contrario.

Expresemos su valor en función de las proyecciones:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = (iX_1 + jY_1 + kZ_1) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} =$$

(8a)

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Con esta fórmula valuemos ahora

$$\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3$$

Pero $\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3$ pues el producto escalar es conmutativo y así llegamos a la importante fórmula en el Algebra de los vectores:

(8b) $\quad \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3$

En el doble producto escalar se pueden pues intercambiar el punto y la cruz.

Es por esto que este producto se expresa comunmente encerrando los tres factores en un paréntesis, generalmente rectangular:

(8c) $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \times \bar{a}_3 = \left[\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \bar{a}_3 \right]$. Teniendo en cuenta su igualdad con el determinante se comprende fácilmente que podemos alterar el orden de los factores si respetamos su orden cíclico:

(8d) $\left[\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \bar{a}_3 \right] = \left[\bar{a}_2 \; \bar{a}_3 \; \bar{a}_1 \right] = \left[\bar{a}_3 \; \bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \right]$

Cambiando el orden cíclico cambia el signo. Si se multiplican los vectores de este producto mixto por escalares, el resultado queda multiplicado por el producto de dichos escalares. Esta propiedad se deduce de la correspondiente para los productos sencillos escalar y vectorial o bien directamente de la igualdad con el determinante.

La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean paralelos a un plano, o como se expresa más brevemente, para que sean coplanos, al suponer que se llevan por el mismo origen, es que su producto mixto sea nulo. En efecto, al ser nulo el volumen del paralelepípedo su altura es nula y los tres vectores son coplanos. Si alguno o algunos de ellos son nulos la propiedad sigue siendo cierta.

Si dos de los factores en el producto mixto son paralelos, dicho producto es nulo, puesto que el determinante lo es.

9. Doble producto Vectorial.

Sean tres vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, no coplanos y sea $\bar{b}$ otro vector conocido. Digo que siempre existen tres escalares h_1, h_2, h_3 tales que:

(9a) $$\bar{b} = h_1\bar{a}_1 + h_2\bar{a}_2 + h_3\bar{a}_3$$

En efecto, escribiendo las ecuaciones correspondientes de las proyecciones de estos vectores, tendremos tres ecuaciones lineales de las tres incógnitas h_1, h_2, h_3. El determinante de los coeficientes es el doble producto escalar:

$[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3]$ que no es nulo si estos tres vectores no son coplanos, así pues, los valores de h_1, h_2, h_3 existen y están determinados. Podemos decir que estos tres escalares son las coordenadas de $\bar{b}$ tomando como base los vectores.

$$\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3\ .$$

Esto puede verse también geométricamente: Tomemos un punto O como origen de los cuatro vectores y descompongamos $\bar{b}$ según las líneas de acción de los otros tres, llevando por el extremo de $\bar{b}$ planos paralelos a las caras del triedro formado por $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Las componentes de $\bar{b}$ son respectivamente $h_1\bar{a}_1$, $h_2\bar{a}_2$ y $h_3\bar{a}_3$, de donde obtenemos los valores de h_1, h_2 y h_3.

En particular si: $$\bar{b} = h_1\bar{a}_1 + h_2\bar{a}_2$$

Si $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ no son paralelos el vector $\bar{b}$ está en el plano determinado por $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ y para cualquier vector $\bar{b}$ que esté en este plano existen y están determinados los escalares h_1 y h_2.

Sean los tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; formemos el producto vectorial de los dos últimos, cuyo resultado es otro vector, llamémoslo $\bar{d}$ y multipliquemos ahora, también vectorialmente, el primero $\bar{a}$ por $\bar{d}$, así tendremos:

$\bar{a} \times \bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$; $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$. Tal es el doble producto vectorial, sea $\bar{q}$ el resultado:

(9b) $$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{q}$$

Queremos $\bar{q}$ en otra forma. Excluyamos el caso en que $\bar{b}$ y $\bar{c}$ sean paralelos, en cuyo caso $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$ es nulo y por lo tanto, $\bar{q}$ es también nulo. Llevemos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ al mismo origen O. El vector $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$ es perpendicular al plano formado por $\bar{b}$ y $\bar{c}$; el vector $\bar{q}$ es, a su vez, perpendicular a $\bar{d}$, luego está en dicho plano $\bar{b}$, $\bar{c}$ y se puede, según acabamos de ver, expresar por la suma: $h\,\bar{b} + m\,\bar{c}$ en que h y m son dos escalares. Así pues:

(9c) $$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = h\,\bar{b} + m\,\bar{c} = \bar{q}$$

A este resultado podemos llegar de una manera puramente analítica: expresemos al vector $\bar{q}$ tomando como base los vectores $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{b} \times \bar{c}$, lo cual es posible (9a) siempre que $\bar{b}$ y $\bar{c}$ no sean paralelos, así:

(9d) $$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = h\bar{b} + m\bar{c} + t\,(\bar{b} \times \bar{c})$$

Multipliquemos escalarmente por $\bar{b} \times \bar{c}$: el primer -- miembro es nulo pues es un producto mixto con dos facto-- res iguales, igualmente los dos primeros términos del se- gundo miembro son nulos, por la misma razón y nos queda:

$$0 = t\ (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = t\ (\bar{b} \times \bar{c})^2$$

Luego $t = 0$ y nos queda la fórmula (9c). Queremos - ahora encontrar los valores de los escalares m y h. En - la ecuación (9c) multiplicando escalarmente por $\bar{a}$:

(9e) $0 = h\bar{a} \cdot \bar{b} + m\bar{a} \cdot \bar{c}$

$$\frac{h}{\bar{a} \cdot \bar{c}} = \frac{-m}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \mu \quad ; h = \mu\, \bar{a} \cdot \bar{c} \ ; m = -\mu\, \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Nos queda pues:

(9f) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \mu(\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c})$

No nos queda más que encontrar el valor del escalar- μ. Encontremos primero este valor de μ en el caso --- particular en que alguno de los vectores del paréntesis - sea igual a $\bar{a}$.

(9g) $\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{c}) = \mu\ (\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{a} - \bar{a}^2\ \bar{c})$

Multiplicando escalarmente por $\bar{c}$

(9h) $\bar{c} \cdot \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{c}) = \mu\ (\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{a} \cdot \bar{c} - \bar{a}^2\, \bar{c}^2)$

Intercambiando en el primer miembro la cruz y el pun to.

(9i) $\bar{c} \times \bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = \mu \left[(\bar{a} \cdot \bar{c})^2 - \bar{a}^2\ \bar{c}^2 \right]$

Pero $\bar{c} \times \bar{a} = - \bar{a} \times \bar{c}$

(9j) $-(\bar{a} \times \bar{c})^2 = \left[(\bar{a} \cdot \bar{c})^2 - \bar{a}^2\ \bar{c}^2 \right]$

Valuando según las definiciones:

(9k) $- |\bar{a}|^2\ |\bar{c}|^2\ \text{sen}^2 (\bar{a},\bar{c}) = \mu \{ |\bar{a}|^2\ |\bar{c}|^2\ \cos^2(\bar{a},\bar{c}) - |\bar{a}|^2\ |\bar{c}|^2 \cdot |\bar{a}|^2\ |\bar{c}|^2\ \text{sen}^2(\bar{a},\bar{c}) = \mu |\bar{a}|^2\ |\bar{c}|^2 \left[1 - \cos^2 (\bar{a},\bar{c}) \right]$

De donde $\mu = 1$ en este caso particular, cuando menos. Igualmente:

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{c} = - \bar{c} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{c} \times (\bar{c} \times \bar{b}) = \bar{c}.\bar{b}\bar{c} - \bar{c}^2\bar{b}$$

(9l) $(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{b}\bar{c} - \bar{c}^2\ \bar{b}$

Veamos ahora el caso general, la fórmula (9f) es:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \mu(\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c})$$

Multipliquemos escalarmente por $\bar{c}$

(9m) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{c} = \mu\ (\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} \cdot \bar{c} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c}^2)$

En el producto mixto del primer miembro intercambie-- mos la cruz y el punto.

(9n) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{c} = \mu(\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} \cdot \bar{c} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c}^2)$

Aplicando la fórmula (9l)

$$\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{c} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a}\,\bar{c}^2 = \mu\ (\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} \cdot \bar{c} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c}^2)$$

De donde μ es siempre igual a uno y obtenemos la im- portantísima fórmula:

(9o) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c}$

Igualmente

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} = - \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = - \left[\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c} \right]$$

(9p) $(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{b}\bar{c} - \bar{a} \cdot \bar{c}\bar{b}$

Observemos que en las fórmulas (9o) y (9p) el vector que está colocado en el centro de los tres es el que figura en el segundo miembro con coeficiente positivo; esta regla nos sirve para recordarla.

Se comprende fácilmente que este doble producto vectorial está muy lejos de ser asociativo, pues $\bar a \times (\bar b \times \bar c)$ es en general, diferente de $(\bar a \times \bar b) \times \bar c$.

10. Productos de cuatro factores.

Estudiemos primero el producto $(\bar a \times \bar b) \times (\bar c \times \bar d)$, sea $\bar a \times \bar b = \bar f$ así:

$$(\bar a \times \bar b) \times (\bar c \times \bar d) = \bar f \times (\bar c \times \bar d) = \bar f \cdot \bar d \bar c - \bar f \cdot \bar c \bar d$$

(10a) $(\bar a \times \bar b) \times (\bar c \times \bar d) = [\bar a\, \bar b\, \bar d]\, \bar c - [\bar a\, \bar b\, \bar c]\, \bar d$

Si se considera ahora efectuado el producto $\bar c \times \bar d$, se tiene:

(10b) $(\bar a \times \bar b) \times (\bar c \times \bar d) = [\bar a\, \bar c\, \bar d]\, \bar b - [\bar b\, \bar c\, \bar d]\, \bar a$

Estas dos igualdades demuestran que el vector buscado tiene su línea de acción en la intersección de los planos $\bar c$, $\bar d$ y $\bar b$, $\bar a$; igualando los segundos miembros:

$$[\bar a\, \bar b\, \bar d]\, \bar c - [\bar a\, \bar b\, \bar c]\, \bar d = [\bar a\, \bar c\, \bar d]\, \bar b - [\bar b\, \bar c\, \bar d]\, \bar a$$

(10c) $[\bar b\, \bar c\, \bar d]\, \bar a + [\bar c\, \bar a\, \bar d]\, \bar b + [\bar d\, \bar a\, \bar b]\, \bar c + [\bar a\, \bar c\, \bar b]\, \bar d = 0$

Esta fórmula (10c) nos da un vector en función de otros tres no coplanos. Podemos en efecto, despejar, por ejemplo, al vector $\bar a$ con tal que su coeficiente no sea nulo, es decir con tal que $[\bar b\, \bar c\, \bar d] \neq 0$ para lo cual se requiere que los tres vectores $\bar b$, $\bar c$ y $\bar d$ no sean coplanos.

Estudiemos ahora el producto escalar con cuatro factores: $(\bar a \times \bar b) \cdot (\bar c \times \bar d)$. Supongamos efectuando $\bar a \times \bar b = \bar f$ así:

$$(\bar a \times \bar b) \cdot (\bar c \times \bar d) = \bar f \cdot \bar c \times \bar d = \bar f \times \bar c \cdot \bar d$$

$$(\bar a \times \bar b) \cdot (\bar c \times \bar d) = \left[(\bar a \times \bar b) \times \bar c \right] \cdot \bar d$$

$$(\bar a \times \bar b) \cdot (\bar c \times \bar d) = (\bar a \cdot \bar c \bar b - \bar b \cdot \bar c \bar a) \cdot \bar d$$

(10d) $(\bar a \times \bar b) \cdot (\bar c \times \bar d) = \bar a \cdot \bar c \bar b \cdot \bar d - \bar a \cdot \bar d \bar b \cdot \bar c = \begin{vmatrix} \bar a \cdot \bar c & \bar a \cdot \bar d \\ \bar b \cdot \bar c & \bar b \cdot \bar d \end{vmatrix}$

11. Ecuación de la recta.

Vamos ahora a considerar un punto O, fijo en el espacio, que se puede considerar como el origen de las coordenadas cartesianas y una categoría de vectores cuyo origen es O. Esta categoría de vectores fijos en el origen de los ejes se llaman radios vectores o vectores de posición. Cada uno de ellos determina la posición de un punto, su extremo y las coordenadas cartesianas de ese punto son simplemente las proyecciones del vector sobre los ejes. A estos vectores de posición los vamos a designar por $\bar r$.

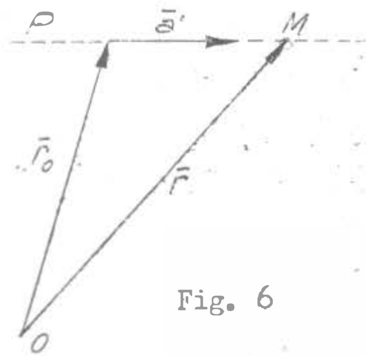

Fig. 6

La recta que pasa por el punto P, (fig. 6) y paralela a un vector $\bar a$ tiene por ecuación paramétrica:

(11a) $\bar r = \bar r_0 + t\bar a$

En que $\overline{OP} = \bar r_0$ y t es el parámetro escalar. Dando a t diversos valores vamos obteniendo para cada uno de ellos un punto en la recta. Llamemos x_0, y_0, z_0 a las coordenadas de P, que son las proyecciones de $\bar r_0$. Y sean x, y, z, las coordenadas corrientes de un punto cualquiera M. de la recta, o sean, las proyecciones de $\bar r$. La ecuación (11a) se desdobla en tres ecuaciones entre escalares:

(11b) $$x = x_0 + a_x t$$

$$y = y_0 + a_y t$$

$$z = z_0 + a_z t$$

En donde a_x, a_y, a_z son las proyecciones del vector $\bar{a}$. Estas tres ecuaciones nos definen paramétricamente a la recta. Eliminando el parámetro t tendremos la recta en forma clásica:

(11c) $$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación (11a) por a eliminamos el parámetro y obtenemos la ecuación de la recta en la forma de Plücker:

(11d) $$\bar{r} \times \bar{a} = \bar{r}_0 \times \bar{a}$$

Llamando $\bar{b} = \bar{r}_0 \times \bar{a}$

(11e) $$\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$$

En que naturalmente los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares. Como quiera que la ecuación (11e) se desdobla en tres ecuaciones entre escalares con las incógnitas x, y, z, podría creerse que esta ecuación (11e) determina $\bar{r}$. Sin embargo, este sistema de tres ecuaciones resulta indeterminado, como es fácil comprobarlo. Más directamente si sustituimos por el valor indeterminado tomado de la ecuación (11a): $\bar{r}_0 + t\bar{a}$ vemos que se verifica la ecuación (11b) que es igual a la (11e). Si esta fórmula (11e) nos determinara el valor de $\bar{r}$ en función de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tendría sentido dividir el primer miembro entre el vector $\bar{a}$, pero vemos que esto no es posible pues está indeterminado. En otras palabras, esta división queda indeterminada.

12. Ecuación del plano.

La ecuación del plano que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, en que $\overline{OP} = \bar{r}_0$ y paralelo a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no paralelos, es, en forma paramétrica:

(12a) $$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a} + u\bar{b}$$

En que t, u son los parámetros escalares. Proyectando tendremos las tres ecuaciones lineales en t, u, que nos dan la ecuación paramétrica del plano. Eliminando estos parámetros se obtendrá la ecuación en forma clásica.

Para eliminar en la ecuación (12a) los parámetros t, u y obtener, como en el caso de la recta, la forma de Plücker, multiplicamos escalarmente por el producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$

(12b) $$\bar{r} \cdot \bar{a} \times \bar{b} = \bar{r}_0 \cdot \bar{a} \times \bar{b}$$

Pues los otros términos desaparecen por tratarse de productos mixtos con dos vectores iguales. Esta ecuación establece la igualdad entre dos escalares, sea α la constante igual al segundo miembro y sea $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. La ecuación nos queda:

(12c) $$\bar{r} \cdot \bar{c} = \alpha$$

El vector $\bar{c}$ como perpendicular a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ es perpendicular al plano. Si queremos la distancia del origen O al plano, hagamos $\bar{r}$ paralela a $\bar{c}$, o sea $\bar{r} = \beta\bar{c}$, sustituyendo en (12c): $\beta\bar{c}^2 = \alpha$; $\beta = \dfrac{\alpha}{\bar{c}^2}$

de donde el $\bar{r}$ buscado perpendicular al plano es:

$$\bar{r} = \frac{\alpha}{\bar{c}^2}\,\bar{c}$$

y en valor absoluto, o sea, la distancia es $\dfrac{|\alpha|}{|\bar{c}|}$

Si $\bar{c}$ es un vector unitario, esta distancia es simplemente el valor absoluto del escalar α .

13. Algunas ecuaciones entre vectores.

Tanto la ecuación (11e) como la (12c) dejan $\bar{r}$ indeterminado pero el sistema de las dos debe, en general, determinar el valor de $\bar{r}$, pues geométricamente se trata de la intersección de una recta y un plano. Sea pues el sistema:

(13a) $\quad \bar{r} \times \bar{a} = \bar{b} \; ; \; \bar{r} \cdot \bar{c} = \alpha$

Se tiene:

$$(\bar{r} \times \bar{a}) \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{r} \cdot \bar{c}\,\bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{c}\,\bar{r} \; ; \; \bar{r} \cdot \bar{c} = \alpha$$

$$\bar{b} \times \bar{c} = \alpha\,\bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{c}\,\bar{r}$$

De donde:

(13b) $$\bar{r} = \frac{\alpha\,\bar{a} + \bar{c} \times \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{c}}$$

Hemos pues encontrado el valor de $\bar{r}$ sin recurrir a las proyecciones. La condición para que $\bar{r}$ exista y esté determinado es que el producto escalar $\bar{a} \cdot \bar{c}$ no sea nulo, en cuyo caso, la recta y el plano son paralelos.

Sea ahora el sistema de las tres ecuaciones entre escalares que nos expresa la intersección de tres planos.

(13c) $\quad \bar{r} \cdot \bar{a}_1 = \alpha_1 \; ; \; \bar{r} \cdot \bar{a}_2 = \alpha_2 \; ; \; \bar{r} \cdot \bar{a}_3 = \alpha_3$

Formemos el producto: $\bar{r} \times (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \bar{r} \cdot \bar{a}_3\bar{a}_2 - \bar{r} \cdot \bar{a}_2\bar{a}_3$

(13d) $\quad \bar{r} \times (\bar{a}_3 \times \bar{a}_3) = \alpha_3\,\bar{a}_2 - \alpha_2\,\bar{a}_3$

Esta ecuación obtenida de las dos primeras del sistema (13c) es la ecuación de la recta intersección de los dos planos. Combinándola con la tercera $\bar{r} \cdot \bar{a}_1 = \alpha_1$, se obtiene un sistema análogo al (13a); aplicando pues la fórmula (13b):

(13e) $$\bar{r} = \frac{\alpha_1 (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) + \alpha_2 (\bar{a}_3 \times \bar{a}_1) + \alpha_3 (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)}{[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]}$$

Los tres vectores que son factores respectivamente de α_1, α_2, α_3 forman lo que se llama el sistema recíproco de $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Llamémoslos $\bar{a}'_1$, $\bar{a}'_2$, $\bar{a}'_3$:

(13f) $$\bar{a}'_1 = \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]} \; ; \; \bar{a}'_2 = \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]} \; ; \; \bar{a}'_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]}$$

Tienen la propiedad de que $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}'_1 = 1$; $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}'_2 = 0$; $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}'_3 = 0$, etc. y juegan un papel importante en el Cálculo Vectorial. Para que existan es necesario y basta que $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ no sean coplanos para que el denominador

$[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]$ no sea nulo.

Si queremos expresar un vector $\bar{a}_4$ en función lineal de otros tres $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, o sea, tomando como base a estos tres, habrá que encontrar los escalares α_1, α_2, α_3 tales que:

(13g) $\quad \bar{a}_4 = \alpha_1\,\bar{a}_1 + \alpha_2\,\bar{a}_2 + \alpha_3\,\bar{a}_3$

Multiplicando escalarmente por el producto $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3$

$$[\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a}_4] = \alpha_1\,[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]; \quad \alpha_1 = \frac{[\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a}_4]}{[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3]}$$

Y análogamente para α_2 y α_3. La solución es posible únicamente si los vectores $\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3$ no son coplanos; tomando el sistema recíproco y multiplicando escalarmente por $\bar a_1'$, como quiera que $\bar a_1' \cdot \bar a_1 = 1$ $\quad \bar a_1' \cdot \bar a_2 = 0$ $\quad \bar a_1' \cdot \bar a_3 = 0$ se obtiene desde luego $\alpha_1 = \bar a_4 \cdot \bar a_1'$ y del mismo modo.

$$\alpha_2 = \bar a_4 \cdot \bar a_2' \; ; \quad \alpha_3 = \bar a_4 \cdot \bar a_3'$$

Si el vector $\bar a_4$ es nulo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Así pues, si tres vectores no son coplanos y se tiene la ecuación:

(13h) $\quad \alpha_1 \bar a_1 + \alpha_2 \bar a_2 + \alpha_3 \bar a_3 = 0$

Los tres escalares son nulos, lo que geométricamente se comprende, pues la suma de dos términos dará un vector situado en el plano de los vectores que no podrá nulificar al tercer término pues ese vector no está en el plano. Se dice entonces que los tres vectores no están ligados linealmente, o bien, que no forman una combinación lineal. Por lo demás el problema importante de expresar un vector valiéndonos de otros tres lo tratamos también en el estudio del producto vectorial con cuatro factores.

Veamos finalmente la ecuación:

(13i) $\quad \bar p + \bar p \cdot \bar a \, \bar b = \bar c$

Desde luego multiplicando vectorialmente por $\bar b$

(13j) $\quad \bar p \times \bar b = \bar c \times \bar b$

Multiplicando ahora la ecuación dada (13i) escalarmente por $\bar a$

(13k) $\quad \bar p \cdot \bar a (1 + \bar b \cdot \bar a) = \bar c \cdot \bar a \; ; \; \bar p \cdot \bar a = \dfrac{\bar c \cdot \bar a}{1 + \bar b \cdot \bar a}$

Estas ecuaciones (13j) y (13k) nos resuelven el problema, pues son análogas a las ecuaciones (13a), cuya solución nos la da la fórmula (13b).

Pero queremos un procedimiento, aunque más largo, mucho más general: Expresemos $\bar p$ tomando como base los vectores conocidos $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, que no serán, en general, coplanos:

(13l) $\quad \bar p = \alpha \bar a + \beta \bar b + \gamma \bar c$

Se trata de encontrar los escalares α, β, γ.

Para esto, sustituímos esta expresión (13l) de $\bar p$ en nuestra ecuación (13i) y se obtiene, todo pasado al primer miembro.

(13m) $\quad \alpha \bar a + (\beta + \bar a^2 \alpha + \bar b \cdot \bar a \, \beta + \bar c \cdot \bar a \, \gamma)\bar b + (\gamma - 1)\bar c = 0$

Según hemos visto los coeficientes escalares de $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, deben ser nulos; igualémoslos, pues, a cero y tenemos tres ecuaciones lineales con las tres incógnitas α, β, γ. Se encuentra:

(13n) $\quad \alpha = 0 \; ; \; \beta = - \dfrac{\bar c \cdot \bar a}{1 + \bar b \cdot \bar a} \; ; \; \gamma = 1$

Así pues:

(13o) $\quad \bar p = \bar c - \dfrac{\bar c \cdot \bar a}{1 + \bar b \cdot \bar a} \, \bar b$

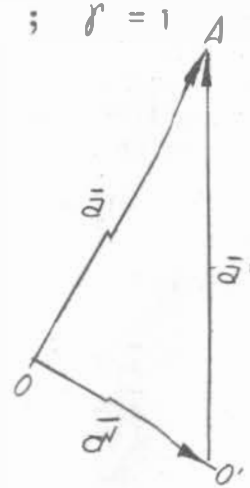

Fig. 7

14. Centros de Gravedad.

Vamos a valernos de vectores de posición pero con dos orígenes distintos, O y O'. A los vectores que tienen por origen O' los-llamaremos con una letra minúscula con acento, V.gr. $\bar{a}'$; a los vectores que tienen por origen O no les pondremos acento. Al vector $\overline{O\,O'}$ lo llamaremos $\bar{d} = \overline{O\,O'}$ (fig. 7)

Cualquier vector $\bar{a}$, $\overrightarrow{OA}$, nos define un punto, su extremo, que designaremos con A mayúscula. Si se quiere que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{a}'$ representen el mismo punto, es decir, que tengan el mismo extremo A se debe tener. (fig. 7)

(14a) $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{d}$; $\bar{a}' = \bar{a} - \bar{d}$

En este caso y solo en este caso los dos vectores deposición $\bar{a}$ y $\bar{a}'$ representan el mismo punto en el espacio. Con n vectores $\bar{a}_i$ y n escalares obtengamos el vector $\bar{p}$ tal que:

(14b) $\sum \alpha_i \, \bar{a}_i = \bar{p}$

Este vector $\bar{p}$ nos definirá un punto P del espacio. Sustituyamos ahora en la ecuación (14b) en vez de los vectores $\bar{a}_i$ los $\bar{a}_i'$ correspondientes, es decir, que definan los mismos puntos A_i. Valiéndonos de la (14a), se tendrá:

(14c) $\sum \alpha_i \, \bar{a}_i' = \bar{s}$; $\sum \alpha_i \, (\bar{a}_i - \bar{d}) = \bar{s}$

El vector $\bar{s}$ definirá otro punto S del espacio. Ahora bien, queremos averiguar que condición deben tener los escalares α_i para que los puntos P y S sean el mismo punto. Debe tenerse (14a):

(14d) $\bar{s} = \bar{p} - \bar{d}$

Sustituyendo en (14c) y teniendo en cuenta la (14b):

$$\sum \alpha_i \, \bar{a}_i - (\sum \alpha_i) \, \bar{d} = \bar{p} - \bar{d}$$

$$(\sum \alpha_i) \, \bar{d} = \bar{d} \; ; \; (\sum \alpha_i - 1) \, \bar{d} = 0$$

Como $\bar{d}$ no es nulo:

(14e) $\sum \alpha_i - 1 = 0$; $\sum \alpha_i = 1$

Observemos que la suma algebraica de todos los coeficientes escalares pasando todo a un solo miembro es nulo.

Más generalmente sean los n vectores $\bar{b}_i$ que representan los n puntos B_i y sea la ecuación:

(14f) $\sum \beta_i \, \bar{b}_i = 0$

. Esta ecuación nos define uno cualquiera de los vectores en función de los n - 1 restantes (todos $\beta_i \neq 0$), o sea, nos define uno cualquiera de los puntos, conocidos los otros. Vamos a sustituir los vectores $\bar{b}_i$ por los correspondientes $\bar{b}_i'$, en otras palabras, vamos a cambiar de O a O' el origen de los vectores y queremos ver cual debe ser la condición de los escalares β_i para que la ecuación (14f) siga siendo cierta; por la fórmula (14a):

$$\sum \beta_i \, \bar{b}_i' = 0 \; ; \; \sum \beta_i \, (\bar{b}_i - \bar{d}) = 0$$

$$\sum \beta_i \, \bar{b}_i - (\sum \beta_i) \, \bar{d} = 0 \; ; \; (\sum \beta_i) \, \bar{d} = 0$$

La condición buscada es pues:

(14g) $\sum \beta_i = 0$

La suma de los coeficientes escalares, debe de ser nula, si esta condición se cumple la ecuación (14f) definirá siempre el mismo punto en función de los n - 1 puntos dados cualquiera que sea el origen común de los vectores.

Fácil es demostrar que si se trata en la ecuación (14f) de tres vectores y se cumple la condición (14g) los tres puntos están en línea recta. Y en el caso de cuatro vectores sus cuatro extremos están en un plano.

Veamos el caso de las tres:

$$\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \beta_3 \bar{b}_3 = 0 \; ; \; \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$$

$$\beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 - (\beta_1 + \beta_2) \, \bar{b}_3 = 0$$

$$\beta_1 (\bar{b}_1 - \bar{b}_3) = \beta_2 (\bar{b}_3 - \bar{b}_2)$$

Como las diferencias $\bar{b}_1 - \bar{b}_3$ y $\bar{b}_3 - \bar{b}_2$ son paralelos los extremos B_1, B_2 y B_3 son colineales.

Consideremos ahora n puntos A_i, sus vectores de posición $\bar{a}_i$. En cada punto existe una masa concentrada m_i. Estas masas pueden ser positivas o negativas pero vamos a convenir que su suma total, que llamaremos, m (sin índice) no es nula, así

$$\Sigma m_i = m \neq 0$$

Encontremos el vector $\bar{a}$ tal que:

$$\Sigma m_i \bar{a}_i = m \bar{a} \quad (14h)$$

Este vector $\bar{a}$ nos fija un punto A, que siguiendo la costumbre vamos a llamar G; A = G; $\bar{a} = \overline{OG}$ que es el centro de gravedad de las masas m.

Si en la ecuación (14h) dividimos entre $m = \Sigma m_i$, la suma de los coeficientes escalares en el primer miembro vale uno, la ecuación queda pues de la forma de la (14b) en que se cumple la condición (14e), por lo tanto, el punto G así determinado será el mismo cualquiera que sea el origen común de los vectores $\bar{a}_i$.

Se trata pues de una propiedad geométrica independiente del sistema de referencia que se haya usado.

Llamando $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, las coordenadas de G, o sea, las proyecciones de $\bar{a}$ y x_i, y_i, z_i las del punto A_i, la ecuación (14h) se desdobla en estas tres:

$$\Sigma m_i x_i = m \bar{x} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{m} \quad (14i)$$

$$\Sigma m_i y_i = m \bar{y} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{m}$$

$$\Sigma m_i z_i = m \bar{z} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\Sigma m_i z_i}{m}$$

15. Vectores deslizantes.

Hemos dicho que un vector libre no tiene línea de acción, aunque ya supuesto en una posición determinada se hable, por comodidad, de la dicha línea de acción de la cual la dirección es lo único que importa, en cambio, un vector deslizante sí tiene línea de acción en la cual puede moverse como única libertad.

Veamos como definimos un vector deslizante o cursor por medio de datos escalares.

Definamos la línea de acción o soporte del vector. Una recta queda definida por dos puntos, pero hay un número infinito de pares de puntos distintos que la definen, podremos escoger arbitrariamente, en general, una de las coordenadas de cada punto, o geométricamente, fijar los puntos donde la recta corte a dos planos paralelos a dos de los ejes. Así pues, de las seis coordenadas de los dos puntos fijamos dos, una en cada punto, y nos quedan cuatro datos escalares para fijar la posición de una recta en el espacio.

Una vez fijado el soporte damos el tamaño; en cuanto el sentido, hemos visto que no requiere un nuevo dato. En total se tienen cinco datos indispensables y suficientes para determinar un vector deslizante, o sea, tiene cinco coordenadas.

En la práctica se da primeramente el vector deslizante como vector libre $\bar{p}$, dando V.gr. sus tres proyecciones, y un punto de su línea de acción por medio de un vec tor de posición $\bar{r}_a$, o sea, las tres coordenadas de un punto A de su línea de cción, proyecciones de $\bar{r}_a$; en total seis, pero, sabemos que hay un dato superabundante pues $\bar{r}_a$ no está determinado, podemos fijar arbitrariamente una de sus proyecciones y forzar así el valor de los otros dos.

Dados $\bar{p}$ y $\bar{r}_a$ la ecuación de la línea de acción en forma paramétrica (11a) es:

$$\bar{r} = \bar{r}_a + t\,\bar{p} \qquad (15a)$$

Con la cual podemos encontrar los puntos que queremos en el soporte del vector.

16. Momento Vectorial

Sea un punto cualquiera del espacio O, que, por comodid d, vamos a tomar como origen de los ejes y sea un vector deslizante $\bar{p} = \overrightarrow{AB}$ (fig. 8) dado por sus proyecciones X, Y, Z y por un punto de su soporte.

$A(x_a, y_a, z_a)$.

El punto y el vector determinan:

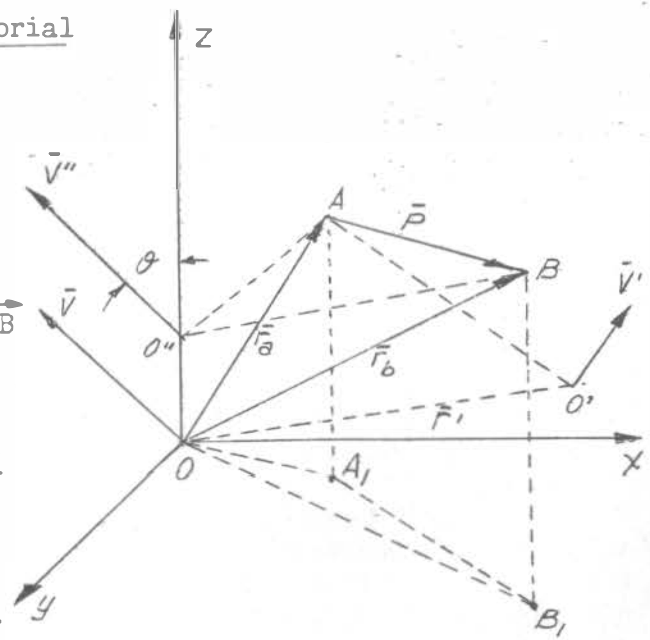

Fig. 8

1o. Un plano, definido por el punto y el soporte del vector.

2o. El área de un triángulo definida igualmente por el punto y por el vector, este triángulo OAB cambiará de forma al deslizarse el vector en su soporte pero el área es invariable.

3o. Un sentido, con el cual se ve el vector $\bar{p} = \overrightarrow{AB}$ desde el punto O.

Se llama momento vectorial o momento lineal del cursor $\bar{p}$ con respecto al punto O, a otro vector $\bar{v}$ que tiene: como origen O ; como dirección, la perpendicular al plano OAB y un sentido tal que desde $\bar{v}$ se vea $\bar{p}$ en el sentido positivo, en el caso de la figura, de izquierda a derecha, pues, hemos dibujado ejes izquierdos. En otras palabras.

$$\bar{v} = \bar{r}_a \times \bar{r}_b \text{ , pero } \bar{r}_b = \bar{r}_a + \bar{p} \text{ así } \bar{v} = \bar{r}_a \times (\bar{r}_a + \bar{p})$$

o sea:

$$\bar{v} = \bar{r}_a \times \bar{p} \qquad (16a)$$

Desde luego se ve que el momento vectorial $\bar{v}$ no es vector deslizante sino vector fijo en O, pues dándole otro origen en su línea de acción el momento vectorial con respecto a este nuevo origen cambiara. En cambio si el cursor $\bar{p}$ se mueve en su línea de acción $\bar{v}$ no varía, por las consideraciones geométricas que antes hicimos, o bien, si en la expresión (16a) sustituímos por $\bar{r}_a$ un punto cualquiera de la linea de cción de $\bar{p}$ tomada de la (15a) nos queda :

$$(\bar{r}_a + \bar{t}_p) \times \bar{p} = \bar{r}_a \times \bar{p}$$

Llamemos L, M, N las proyecciones respectivas de $\bar{v}$ sobre los ejes:

$$\bar{v} = iL + jM + kN = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \qquad (16b)$$

De donde obtenemos L, M, N en función de las coordenadas del cursor $\overline{p}$.

Las tres proyecciones del cursor X, Y, Z y las tres del momento vectorial $\overline{v}$ con respecto al origen de los ejes L, M, N son las coordenadas clásicas de $\overline{p}$. Estos seis escalares están ligados por una identidad pues $\overline{p} \cdot \overline{v} = 0$, o sea $LX + MY + NZ = 0$

(16c) $\quad \overline{p} \cdot \overline{v} = LX + MY + NZ = 0$

Así pues, de los seis podemos, en general, dar cinco arbitrarias, como ya hemos visto. Conociendo estos seis escalares, conocemos $\overline{p}$ como vector libre y conocemos $\overline{v}$ fijo en O. La ecuación de la linea de acción $\overline{p}$ la obtenemos desde luego en la forma de Plücker (11e)

(16d) $\quad \overline{r} \times \overline{p} = \overline{v}$

Para encontrarla en forma paramétrica hallemos un valor particular de $\overline{r}$, para ésto, hagamos el valor de $\overline{r} \cdot \overline{p}$ igual a cualquier escalar dado y se tienen dos ecuaciones en $\overline{r}$ como en las igualdades (13a) y (13b):

Encontremos V.gr. el $\overline{r}$ perpendicular a la recta, así $\overline{r} \cdot \overline{p} = 0$, llamamos $\overline{r}_D$ a este valor particular de $\overline{r}$. Aplicando la fórmula (13b):

(16e) $$\overline{r}_D = \frac{\overline{p} \times \overline{v}}{\overline{p}^2}$$

Y la ecuación paramétrica del soporte del vector es pues:

(16f) $$\overline{r} = \frac{\overline{p} \times \overline{v}}{\overline{p}^2} + t\,\overline{p}$$

Encontremos ahora el momento vectorial del cursor $\overline{p}$ con respecto a un punto cualquiera O' (x', y', z') dado por

el vector de posición $\overline{r}' = \overline{OO'}$. Sea $\overline{v}'$ este momento, se tiene: (fig. 8).

(16g) $\quad \overline{v}' = \overrightarrow{O'A} \times \overline{p} = (\overline{r}_a - \overline{r}') \times \overline{p} = \overline{v} - \overline{r}' \times \overline{p}$

Veamos pues que conociendo las proyecciones de $\overline{p}$ y de $\overline{v}$, y naturalmente, el punto O' con respecto al cual se quiere el momento, conoceremos por la fórmula (16g) dicho momento. Si L', M', N' son las proyecciones de $\overline{v}'$:

(16h)

$$\overline{v}' = iL' + jM' + kN' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a - x' & y_a - y' & z_a - z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

De donde encontramos dichos valores.

17. Momento axial.

Momento axial o momento de un vector deslizante con respecto a un eje es la proyección ortogonal del momento vectorial con respecto a un punto cualquiera del eje, sobre dicho eje.

Sea (fig.8) el cursor $\overline{p}$ y tomemos como eje uno de los ejes coordenados, V.gr. Oz. Se toma un punto cualquiera del eje, O". Se encuentra $\overline{v}''$ momento vectorial de $\overline{p}$ respecto a O". Y se proyecta $\overline{v}''$ sobre el eje Oz. Se trata, pues, de un escalar. Para justificar esta definición tenemos que demostrar que esta proyección es independiente del punto elegido en el eje. Geométricamente (fig. 8).

$$|\overline{v}''| \cos\theta = 2 \text{ área } O''AB \cos\theta = 2 \text{ área } OA_1B_1$$

Y como quiera que todos los puntos del eje se proyectan en O, el resultado será el mismo tomando otro punto cualquiera distinto de O" en el eje.

Las proyecciones de $\bar{v}$, L, M, N son pues los momentos del cursor con respecto de los ejes coordenados, en nuestra figura como O y O" pertenecen al eje $|\bar{v}''|$ cos = N = $\bar{v} \cdot k$ Y en efecto:

$$\bar{v}'' = \overrightarrow{O''A} \times \bar{p} \; ; \; \overrightarrow{OO''} = \lambda k \; ; \; \overrightarrow{O''A} = \bar{r}_a - \lambda k$$

$$\bar{v}'' = (\bar{r}_a - \lambda k) \times \bar{p} = \bar{r}_a \times \bar{p} - \lambda k \times \bar{p}$$

$$\bar{v}'' = \bar{v} - \lambda \bar{k} \times \bar{p}$$

Que directamente se puede obtener aplicando la (16g) Multiplicando escalarmente por k.

$$\bar{v}'' \cdot k = \bar{v} \cdot k$$

Pues $k \times \bar{p} \cdot k$ es nulo. Pero $\bar{v}'' \cdot k$ es la proyección de $\bar{v}''$ en Oz lo mismo que $\bar{v} \cdot k = N$

Las seis coordenadas del cursor son pues sus tres proyecciones y los tres momentos con respecto a los ejes, estos seis escalares están ligados por la identidad (16c), como ya hicimos notar. Conociendo cinco de ellas obtenemos la sexta de la (16c) y con las seis coordenadas conoceremos la proyección del vector sobre cualquier eje y el momento vectorial con respecto a cualquier punto del espacio y, por lo tanto con respecto a cualquier eje.

18. Sistemas de cursores.

Se llama sistema de vectores deslizantes al conjunto de uno o varios vectores. Proyección de un sistema de vectores deslizantes sobre un eje es la suma de las proyecciones de los vectores que lo forman, sobre el eje.

Momento vectorial de un sistema con respecto a un punto es la suma vectorial de los momentos de cada uno de los vectores respecto al punto, vectores todos ellos de mismo origen, igualmente que su resultante o suma.

Un sistema de vectores deslizantes se caracteriza por dos cosas, sus proyecciones sobre los diversos ejes y sus momentos vectoriales con respecto a los diversos puntos del espacio.

Dos sistemas son equivalentes cuando, y solo cuando, tienen la misma proyección sobre cualquier eje y el mismo momento con respecto a cualquier punto.

Sistema nulo o sistema en equilibrio es aquel en que ambos caracteres son nulos para todo eje y todo punto.

19. Sistema de cursores concurrentes.

Sean los cursores $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_i, \ldots \bar{p}_n$ cuyas líneas de acción pasan todas por el mismo punto del espacio A, dado por su vector de posición $\bar{r}_a$, el momento del sistema con respecto al origen O es $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \sum \bar{r}_a \times \bar{p}_i$$

Pero por la propiedad demostrada para el producto vectorial.

$$\bar{v} = \bar{r}_a \times \sum \bar{p}_i$$

Pero $\sum \bar{p}_i = \bar{p}$ es la resultante de los vectores como libres, así:

$$\bar{v} = \bar{r}_a \times \sum \bar{p}_i = \bar{r}_a \times \bar{p} \tag{19a}$$

Tal es el teorema de Varignon generalizado. El vector deslizante $\bar{p}$, que pase por el punto de concurso A de todos los demás, formará pues un sistema equivalente al dado. En efecto, las condiciones de proyección se cumplen evidentemente y las condiciones de momentos se cumplen para O origen de los ejes; pero a cualquier punto podemos tomar como origen. Por lo demás igual hubiera sido tomar directamente un punto cualquiera O' y aplicar la fórmula (16g).

Por lo tanto, dos vectores deslizantes no nulos equivalen a uno solo, cuando, y solo cuando, sus líneas de acción están en el mismo plano, es decir, cuando sus líneas de acción se cortan, sea a distancia finita, sea a distancia infinita; el caso en que se cortan a distancia finita es el que acabamos de ver, estudiemos ahora el otro.

20. Cursores paralelos.

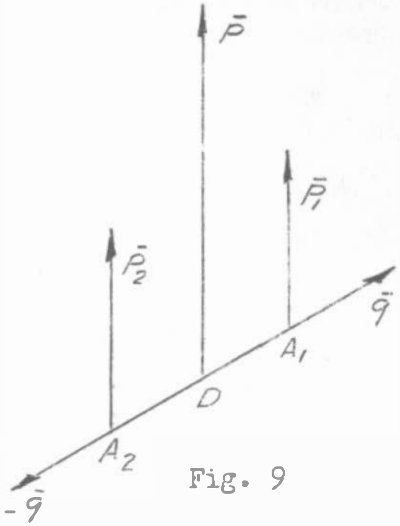

Fig. 9

Sean $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ dos cursores paralelos; A_1 y A_2 dos puntos respectivamente en sus líneas de acción. Si a este sistema añadimos un sistema nulo, el conjunto de los dos sistemas es evidentemente equivalente al primero. Añadamos dos vectores iguales y contrarios, $\bar{q}$ y $-\bar{q}$ que tengan por soporte común la recta $A_1 A_2$ (fig. 9); combinemos este sistema nulo con el primero, sumando $\bar{q}$ con $\bar{p}_1$ y $-\bar{q}$ con $\bar{p}_2$; como quiera que estas dos resultantes parciales se cortan a distancia finita, podemos encontrar su suma $\bar{p}$. Así pues, el sistema de los cursores paralelos $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ es equivalente al sistema $\bar{p}$ de un solo cursor. El cursor $\bar{p}$ como vector libre es la suma vectorial de los cuatro, luego vale $\bar{p}_1 + \bar{p}_2$, tiene pues la dirección de ambos y su tamaño es la suma o diferencia de ellos según que sean del mismo sentido o sentidos contrarios. Si D es el punto donde la resultante $\bar{p}$ corta al segmento A_1A_2, la suma de los momentos del sistema $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, es nulo con respecto a D.

Como la relación DA_1/DA_2 es igual a la relación de las distancias de D a $\bar{p}_1$ y a $\bar{p}_2$, se obtiene que el punto D divide el segmento A_1A_2 en la relación inversa a los tamaños de los vectores $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$. Este punto está dentro de A_1A_2 si los vectores son del mismo sentido y fuera, si son de sentidos contrarios.

Supongamos ahora que conservando como orígenes los puntos A_1 y A_2 los dos vectores cambian su dirección común, el punto D por donde pasa su resultante no cambia, pues la relación de sus tamaños ha permanecido invariable. Tampoco habrá cambiado el tamaño de $\bar{p}$ que seguirá siendo la suma o diferencia de $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$. Si consideramos ahora un tercer vector $\bar{p}_3$ paralelo a $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ y que tenga de origen el punto A_3, al cambiar la dirección común de los tres vectores conservando sus orígenes A_1, A_2, y A_3, la resultante pasará siempre por el mismo punto, puesto que la resultante de los dos primeros pasa siempre por D y no cambia de tamaño, y al componer esta resultante parcial con $\bar{p}_3$, para obtener la resultante total, tendremos el mismo caso estudiado. Y, en general, si se tiene un sistema de vectores paralelos $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_i , \ldots \bar{p}_n$, cuyas líneas de acción pasan por los puntos A_1, ... A_i, ... A_n y conservando estos puntos en sus líneas de acción, todos ellos toman una nueva y misma dirección, la resultante pasa siempre por el mismo punto del espacio G.

Este es el concepto original de centro de gravedad. En efecto, los pesos de las diversas partículas de un cuerpo rígido forman un sistema de cursores paralelos; desorientemos de diversas manera al cuerpo; relativamente a él, es como si todos estos vectores hubieran cambiado su dirección común pasando siempre por los puntos fijos determinados por las partículas del cuerpo; su resultante pasará siempre pues por un punto G, fijo relativamente al cuerpo, su centro de gravedad.

Vamos a procurar identificarlo con el concepto antes estudiado (14h)

Tomemos momentos del sistema antes descrito con respecto a un punto cualquiera O, origen de los vectores de posición $\bar{r}_i$, la suma vectorial de estos momentos es igual al momento de la resultante, que hemos demostrado que en este caso existe:

$$\bar{v} = \sum \bar{r}_i \times \bar{p}_i = \bar{r}_G \times \bar{p} \qquad ; \qquad \sum \bar{p}_i = \bar{p}$$

En que $\bar{G}$ es el vector de posición de un punto G de la resultante.

Como todos los vectores son paralelos vamos a tomar un vector unitario $\bar{e}$ paralelo a todos ellos dandole uno de los dos sentidos. Todo vector $\bar{p}_i$ es igual a $m_i \bar{e}$, en que el escalar m_i es igual, en valor absoluto a $\bar{p}_i$, es positivo si $\bar{p}_i$ tiene el sentido dado a $\bar{e}$ y negativo en caso contrario.

Convengamos que $\sum m_i = m$, no es nula.

Se tiene:

$$\bar{v} = \sum (m_i \bar{r}_i \times \bar{e}) = \bar{r}_G \times \sum m_i \bar{e} = \left[\sum m_i\right] \bar{r}G \times \bar{e}$$

$$\left[\sum m_i \bar{r}_i - m \bar{r}_G\right] \times \bar{e} = 0$$

que este producto vectorial sea nulo indica, o bien, que el primer factor es nulo, o bien, que los vectores son paralelos. (El segundo factor $|\bar{e}| = 1$). Cambiemos arbitrariamente la dirección común de los vectores, $\bar{e}$ cambiará de dirección; luego tenemos que desechar el caso del paralelismo y nos queda:

(20a) $$\sum m_i \bar{r}_i = m \bar{r}G$$

Que es la fórmula (14h)

21. Par de vectores.

Es un sistema de vectores deslizantes formado por dos cursores iguales, paralelos y de distintos sentidos y línea de acción. Sean $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ los dos cursores; A_1 y A_2 dos puntos en las líneas de acción de $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ respectivamente.

Se tiene: $\bar{p}_1 = - \bar{p}_2$

$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0$

La proyección sobre cualquier eje de este sistema es nula.

Sea $\bar{v}$ el momento del sistema con respecto al origen de los ejes O: (fig. 10)

$$\bar{v} = \bar{r}_1 \times \bar{p}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{p}_2 =$$

$$= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{p}_1$$

Pero $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \overrightarrow{A_2 A_1}$

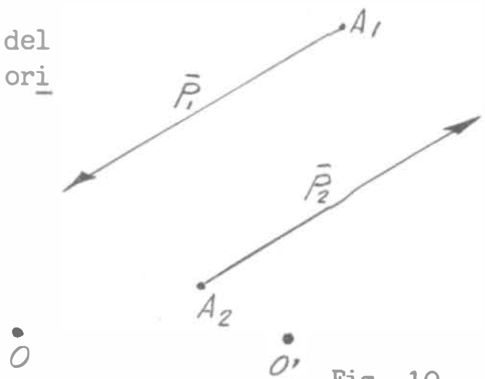

Fig. 10

se tiene pues:

(21a) $$\bar{v} = \overrightarrow{A_2 A_1} \times \bar{p}_1 = \overrightarrow{A_1 A_2} \times \bar{p}_2$$

Encontremos ahora el momento $\bar{v}'$ con respecto a otro punto cualquiera del espacio O':

$$\bar{v}' = \overrightarrow{O'A_1} \times \bar{p}_1 + \overrightarrow{O'A_2} \times \bar{p}_2 = (\overrightarrow{O'A_1} - \overrightarrow{O'A_2}) \times \bar{p}_1$$

Pero $\overrightarrow{O'A_1} - \overrightarrow{O'A_2} = \overrightarrow{A_2A_1}$, así obtenemos:

(21b) $$\bar{v}' = \overrightarrow{A_2A_1} \times \bar{p}_1 = \bar{v}$$

Esta fórmula (21b) nos demuestra que el momento de un par es igual para todos los puntos del espacio, se trata pues de un vector libre no de un vector fijo como en los otros sistemas. Este momento es perpendicular al plano del par, de tamaño igual al módulo común de los vectores por su distancia y de sentido tal que desde $\bar{v}$ se vea el par en sentido positivo.

Un par de vectores deslizantes tiene, pues, las libertades de un vector libre, su plano lo podemos mover paralelamente a sí mismo, podemos desorientar ambos vectores en su plano, podemos separarlos o juntarlos, conservando el producto de uno de ellos por la distancia constante; en todos estos casos obtenemos sistemas equivalentes, puesto que, el par cualquiera que sea no tiene proyecciones y su momento igual para todos los puntos del espacio, se conserva.

Evidentemente el sistema equivalente de dos o más pares es un par, su momento es la suma vectorial de los de cada par.

22. Par de transporte.

Sea un sistema constituido por un solo cursor $\bar{p}$; A, un punto de su linea de acción; sea B otro punto fuera de ella (fig. 11). Con origen B llevo dos vectores iguales y contrarios $\bar{q} = \bar{p}$; $-\bar{q} = -\bar{p}$ que constituyen un sistema nulo. El sistema $\bar{p}$ es pues equivalente al formado por los tres vectores. Pero $\bar{p}$ y $-\bar{q}$ forman un par y los vectores $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son iguales (como vectores libres).

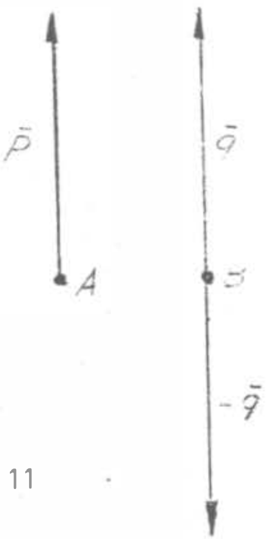

Fig. 11

Hemos logrado pues mover un cursor paralelamente a sí mismo, sacándolo de su línea de acción, con tal de introducir el par de transporte, sin alterar el sistema. Enseguida, si conviene, podemos desorientar el par, sacarlo de su plano, combinarlo con otros pares, etc.

23. Sistema general.

Sea un sistema cualquiera de vectores deslizantes o cursores y sea $\bar{p}_i$ uno de ellos, con el punto Ai, dado en su soporte. Se llama, muy impropiamente resultante general del sistema a la suma de los vectores que lo componen considerados como libres, llamémosla $\bar{p}$, así:

(23a) $$\bar{p} = \Sigma \bar{p}_i$$

Hay que tener bien entendido que solo excepcionalmente un sistema de vectores deslizantes en el espacio es equivalente a un solo vector. Lo que se llama resultante general se refiere pues a la suma de los vectores $\bar{p}i$ como vectores libres.

Sean las proyecciones de $\bar{p}i(X_i, Y_i, Z_i)$, y las de $\bar{p}$ (X, Y, Z)

(23b) $$X = \Sigma X_i \; ; \quad Y = \Sigma Y_i \; ; \quad Z = \Sigma Z_i$$

Sean $\bar{v}_i$ y $\bar{v}_i'$ los momentos de $\bar{p}i$ con respecto al origen O de los ejes y con respecto a un punto cualquiera O'; respectivamente (16g):

(23c) $$\bar{v}_i = \bar{r}_i \times \bar{p}_i \quad ; \quad \bar{v}_i' = \bar{v}_i - \bar{r}' \times \bar{p}_i$$

Sus proyecciones las llamaremos:

(23d) $$\bar{v}_i \; (L_i, M_i, N_i) \; ; \quad \bar{v}_i' \; (L_i', M_i', N_i')$$

Calculemos ahora estos dos momentos para el sistema:

$$\bar{v} = \Sigma \bar{v}_i \; ; \quad \bar{v}' = \Sigma \bar{v}_i'$$

$$\bar{v} = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{p}_i \; ; \bar{v}' = \Sigma \bar{v}_i - \Sigma (\bar{r}' \times \bar{p}_i)$$

(23e) $$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{r}' \times \bar{p}$$

Esta fórmula nos muestra que conociendo la resultante general $\bar{p}$ y el momento con respecto al origen de los ejes O, (o con respecto a un punto dado) se conoce el momento con respecto a cualquier punto O' del espacio. Conociendo pues estos dos vectores $\bar{p}$ y $\bar{v}$ conoceremos el sistema, puesto que la proyección del sistema sobre un eje cualquiera la encontramos proyectando simplemente $\bar{p}$, el momento vectorial, con respecto a cualquier punto O', lo encontramos por la fórmula (23e) y, como dijimos, estos son los dos caracteres o condiciones de un sistema de cur sores proyecciones y momentos:

Dos sistemas son pues equivalentes cuando, y solo cuando, tienen misma resultante general y mismo momento con respecto a un punto que, por comodidad, tomamos como el origen de los ejes. Un sistema queda pues determinado por seis escalares, las proyecciones de $\bar{p}$, $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$, $Z = \sum Z_i$ y las de $\bar{v}$, $L = \sum L_i$, $M = \sum M_i$, $N = \sum N_i$. Estas son pues, las seis coordenadas del sistema que no están ligadas por ninguna identidad, como en el caso del solo cursor.

Observemos que L, M y N son los momentos del sistema con respecto a los ejes coordenados. Se trata pues de tres condiciones de proyección y tres de momentos axiales. Si el sistema es nulo sus seis coordenadas son nulas.

De la fórmula (23c) obtenemos las proyecciones de $\bar{v}'$ (L', M', N'), así:

(23f) $$L' = L + Yz' - Zy'$$

Para M' y N' permutamos circularmente.

En la fórmula (23e) vemos que el momento con respecto a O' es igual al momento con respecto al origen O, menos, con respecto también al origen O, de un vector que pasara por O' igual a la resultante general $\bar{p}$.

De la simple inspección de la ecuación (23e) no es difícil que ocurra multiplicar escalarmente por $\bar{p}$, con objeto de hacer desaparecer de ella a $\bar{r}'$ y obtener una relación en donde no intervenga la posición de O'; en cambio, observando las ecuaciones (23f) es mucho más difícil que ocurra la operación equivalente; aquí vemos, de paso, las ventajas del cálculo vectorial. Efectuando esta operación:

(23g) $$\bar{v}' \cdot \bar{p} = \bar{v} \cdot \bar{p} \; ; \quad \text{Proy}_{\bar{p}}\,(\bar{v}') = \text{Proy}_{\bar{p}}\,(\bar{v})$$

O sea, la proyección del momento sobre la resultante general es igual para todos los puntos del espacio. De lo anterior se deduce que los momentos serán mínimos cuando sean paralelos a la resultante general $\bar{p}$. Encontremos el lugar geométrico de los puntos en que esto sucede, que $\bar{v}'$ es paralelo a $\bar{p}$, sea $\bar{r}''$ (x'', y'', z'') los radios vectores de estos puntos, se tendrá pues que las proyecciones de $\bar{v} - \bar{r}'' \times p$ son proporcionales a las proyecciones de $\bar{p}$, o sea:

(23h) $$\frac{L + Yz'' - Zy''}{X} = \frac{M + Zx'' - Xz''}{Y} = \frac{N + Xy'' - Yx''}{Z}$$

Ecuaciones lineales en las variables x'', y'', z'', luego se trata de una línea recta que se llama "eje central" del sistema.

El eje central del sistema es paralelo a la resultante general. Para demostrarlo supongamos un sistema de valores x''_1, y''_1 z''_1 que resuelva las ecuaciones y verificamos con ellas que el nuevo sistema: $x''_2 = x''_1 + cX$; $y''_2 = y''_1 + cY$; $z''_2 = z''_1 + cZ$, también resuelve las ecuaciones.

Obtengamos en forma vectorial la ecuación del eje central. En la ecuación (23d) si $\bar{v}'$ es paralelo a $\bar{p}$ se trata de los puntos cuyo lugar geométrico queremos encontrar, a los radios vectores de ellos los llamaremos $\bar{r}''$.

Multiplicando la (23e) vectorialmente por $\bar{p}$, sabiendo que $\bar{v}' \times \bar{p} = 0$, ya que estos vectores son paralelos:

(23i) $$0 = \bar{v} \times \bar{p} - (\bar{r}'' \times \bar{p}) \times \bar{p} = \bar{v} \times \bar{p} - \bar{r}''.\bar{p}\,\bar{p} + \bar{p}^2\,\bar{r}''$$

Multiplicando de nuevo vectorialmente por $\bar{p}$, con objeto de eliminar el segundo término del último miembro se obtiene:

(23j) $$\bar{r}'' \times \bar{p} = \bar{v} - \frac{\bar{p} \cdot \bar{v}}{\bar{p}^2}\,\bar{p}$$

... es la ecuación de la recta, eje central del sistema, que desde luego vemos que es paralela a la resultante general $\bar{p}$. El vector $\bar{r}''$ perpendicular a la recta lo obtenemos haciendo $\bar{r}'' \cdot \bar{p} = 0$ que con la (23j) da (13a) - (13b):

$$\text{(23k)} \qquad \bar{r}'_p = \frac{\bar{p} \times \bar{v}}{\bar{p}^2}$$

Si llamamos m a la proyección de $\bar{v}$ sobre $\bar{p}$, igual a la $\bar{v}'$ sobre $\bar{p}$, y designamos por $\bar{e}$ el vector unitario igual a $\dfrac{\bar{p}}{|\bar{p}|}$, la fórmula (23j) nos queda:

$$\text{(23l)} \qquad \bar{r}'' \times \bar{p} = \bar{v} - m\,\bar{e} \; ; \; m = \frac{\bar{p} \cdot \bar{v}}{|\bar{p}|} \; ; \; \bar{e} = \frac{\bar{p}}{|\bar{p}|}$$

Sea de nuevo un punto cualquiera del espacio O' dado por $\bar{r}'$, su momento $\bar{v}'$ está dado por la ecuación (23e). Despejemos $\bar{v}$ de esta ecuación (23e) e igualándolo al $\bar{v}$ despejado de la (23l) se obtiene:

$$\text{(23m)} \qquad \bar{v}' = (\bar{r}'' - \bar{r}') \times \bar{p} + m\,\bar{e}$$

Sea O un punto del eje central, $\bar{r}'' = \overrightarrow{OO}$; $\bar{r}' = \overrightarrow{OO'}$

así $\bar{r}'' - \bar{r}' = \overrightarrow{O'O}$ de donde:

$$\text{(23n)} \qquad \bar{v}' = \overrightarrow{O'O} \times \bar{p} + m\,\bar{e}$$

Ecuación que nos muestra que el momento del sistema con respecto a un punto cualquiera es igual al momento de un cursor igual a la resultante general que tenga por línea de acción al eje central más un vector, igual para todos los puntos del espacio, paralelo a la resultante general. Así pues, un sistema cualquiera de cursores es equivalente a un cursor igual a la resultante general alojada en el eje central más un par situado en un plano perpendicular a dicha resultante general, este par nos lo da la componente $m\,\bar{e}$, igual para todos los puntos del espacio. En efecto, logramos demostrar que la igualdad de los momentos se cumple y evidentemente la igualdad de proyecciones sobre un eje cualquiera se cumple también pues el par no da proyecciones.

Estudiemos ahora brevemente los sistemas de vectores deslizantes desde un punto de vista puramente geométrico. Partimos de la ley del paralelogramo: un cursor puede descomponerse en dos cuyas líneas de acción se corten en un punto de la línea de acción del cursor dado y que estén además estos tres soportes en el mismo plano. Inversamente dos cursores concurrentes o paralelos tienen resultante y, en general, un sistema de cursores concurrente equivale a uno solo que pasa por el punto común; análogamente, un sistema de cursores paralelos tiene resultante de misma dirección.

Un cursor puede moverse paralelamente con tal de introducir el par de transporte, el cual se maneja con las libertades ya estudiadas. Dos o más pares equivalen a un solo par.

24. Descomposición en tres.

Un cursor puede descomponerse en tres cuyas líneas de acción se corten en un punto de la línea de acción del cursor dado y que formen un triedro, es decir, que estas tres rectas no estén en un plano. Sea O un punto del soporte del cursor $\bar{p}$ y sean las rectas OA_1, OA_2, OA_3 no coplanos. Una de ellas, V.gr. OA_1, y $\bar{p}$ determinan un plano que corta al determinado por las otras dos en una recta que pasa por O, sea OB esta recta. Descomponemos $\bar{p}$ según OA_1 y OB, y a esta última componente en OA_2 y OA_3. Este problema además de posible es determinado, esto último se ve proyectando sobre un eje perpendicular a alguna de las caras del triedro.

Un sistema de cursores puede descomponerse en tres que pasen respectivamente por tres puntos dados no colinea [illegible] es la ecuación de la recta, eje central del sistema, que desde luego vemos que es paralela a la resultante general $\bar{p}$. El vector $\bar{r}''$ perpendicular a la recta lo obtenemos haciendo $\bar{r}'' \cdot \bar{p} = 0$ que con la (23j) da (13a) y (13b):

$$(23k) \qquad \bar{r}'_p = \frac{\bar{p} \times \bar{v}}{\bar{p}^2}$$

Si llamamos m a la proyección de $\bar{v}$ sobre $\bar{p}$, igual a la $\bar{v}'$ sobre $\bar{p}$, y designamos por $\bar{e}$ el vector unitario igual a $\frac{\bar{p}}{\bar{p}}$, la fórmula (23j) nos queda:

$$(23l) \quad \bar{r}'' \times \bar{p} = \bar{v} - m\,\bar{e} \; ; \; m = \frac{\bar{p} \cdot \bar{v}}{|\bar{p}|} \; ; \; \bar{e} = \frac{\bar{p}}{|\bar{p}|}$$

Sea de nuevo un punto cualquiera del espacio O' dado por $\bar{r}'$, su momento $\bar{v}'$ está dado por la ecuación (23e). Despejemos $\bar{v}$ de esta ecuación (23e) e igualándolo al $\bar{v}$ despejado de la (23l) se obtiene:

$$(23m) \qquad v' = (\bar{r}'' - \bar{r}') \times \bar{p} + m\,\bar{e}$$

Sea C un punto del eje central, $\bar{r}'' = \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{OO'}$

así $\bar{r}'' - \bar{r}' = \overrightarrow{O'C}$ de donde:

$$(23n) \qquad \bar{v}' = \overrightarrow{O'C} \times \bar{p} + m\,\bar{e}$$

Ecuación que nos muestra que el momento del sistema con respecto a un punto cualquiera es igual al momento de un cursor igual a la resultante general que tenga por línea de acción al eje central más un vector, igual para todos los puntos del espacio, paralelo a la resultante general. Así pues, un sistema cualquiera de cursores es equivalente a un cursor igual a la resultante general alojada en el eje central más un par situado en un plano perpendi-

Tiene aplicaciones, aún para la Geometría, el hecho sencillo de que las líneas de acción de tres cursores que formen un sistema nulo, son necesariamente concurrentes, pues la resultante de dos de ellos tiene que tener misma línea de acción que el tercero.

27. Descomposición según un plano y una recta.

Un sistema de cursores puede descomponerse en uno que esté en un plano dado y en otro que sea paralelo a una recta dada, con tal que esta dirección de recta no sea paralela al plano.

Corramos, en efecto, el primer cursor del sistema, $\bar{p}_1$ hasta que su origen A_1 esté en el plano; por A_1 llevemos una recta A_1L con la dirección dada. El plano determinado por A_1L y $\bar{p}_1$ corta al plano dado en una recta A B. y al cursor $\bar{p}_1$ lo descomponemos según A_1L y AB.

Esto mismo lo hacemos con todos los cursores del sistema y al final tendremos un sistema parcial de cursores coplanos que tiene resultante y otro de cursores paralelos que también tiene resultante con la dirección común de ellos. Si alguno de los cursores del sistema dado es paralelo al plano, se descompone previamente en dos que no lo sean. El problema es pues siempre posible, además es determinado. Esto último se ve proyectando primeramente sobre un eje perpendicular al plano, el cursor paralelo a la recta, llamémoslo $\bar{q}$ que corta al plano en el punto C, queda determinado como vector libre. Tomemos ahora momentos axiales con respecto a dos ejes que pasen por C y que estén en el plano, estos momentos axiales son nulos pues el momento de un cursor con respecto a un eje coplano con él es nulo. Así pues $\bar{q}$ tiene un punto forzado C. Tomando ahora el momento con respecto al punto C y nuevas condiciones de proyección veremos que el vector que está en el plano está también determinado.

Podemos tomar la dirección de la recta perpendicular al plano y obtenemos que un sistema de cursores es equivalente a dos, uno que esté en un plano dado y otro que le - sea perpendicular, observemos que en este caso las compo-- nentes parciales según el plano son las proyecciones orto- gonales de los cursores en dicho plano.

28. Eje central.

Queremos ahora que la resultante de los cursores co-- planos degeneren en un par; como estos cursores son las pro yecciones ortogonales de los que forman el sistema, su re- sultante es la proyección ortogonal de la resultante gene- ral en el plano, no tendremos pues sino elegir el plano -- perpendicular a dicha resultante general del sistema. Y - así tendremos la descomposición clásica: Todo sistema de - vectores deslizantes se puede descomponer en un solo vec-- tor y un par situado en un plano perpendicular. La línea- de acción del vector se llama eje central del sistema y es igual a lo que se llama resultante general, o sea, a la su ma de los vectores como vectores libres. Si solo cursor - tiene cinco coordenadas, el par, que es un vector libre -- del cual se da la dirección tendrá una sola. Un sistema - de cursores queda pues definido por seis escalares, como - ya habíamos estudiado.

29. Derivada vectorial.

Que un vector sea función de uno o varios escalares- significa que dado el valor particular del escalar o del - sistema de escalares, conozcamos el vector. Pero un vector queda determinado por sus coordenadas escalares, las cuales tendrán que ser funciones de la variable o variables dadas, así pues, este concepto no ofrece ninguna dificultad.

Sea el vector $\bar{p}$ función uniforme del escalar t, lo- cual se indica escribiendo $\bar{p}$ (t). Hagamos variar t de- una manera continua entre dos valores: t y t + Δ t. Si el extremo de $\bar{p}$ recorre en el espacio una curva continua, se dice que $\bar{p}$ es función continua de t (fig. 12).

Si $\bar{p}\ (t) = \overrightarrow{OM}$ y

$\bar{p}\ (t + \Delta t) = \overrightarrow{OM'}$ el incre- mento de la función es el - vector:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta\bar{p}$$

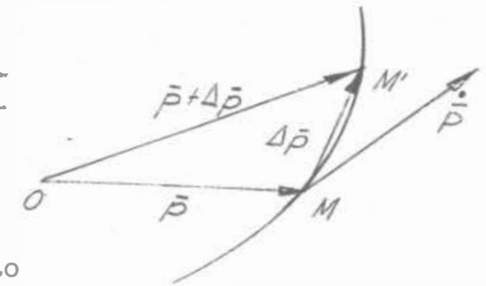

Fig. 12

Dividamos el incremento de la función, o sea, el vec tor $\Delta\bar{p} = \overline{MM'}$ entre el esca lar Δt, incremento de la variable; el resultado es un -- vector.

Hagamos tender a cero este último incremento, el pun- to M' se acercará indefinidamente al punto M, la dirección de $\overline{MM'}$ en el límite es tangente a la curva descrita por el extremo del vector; el módulo del vector:

$$\lim \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t}$$ es el elemento de trayectoria ds = $\overset{\frown}{MM'}$ entre

dt; si el límite de esta relación existe $\bar{p}$ admite deriva da que designaremos $\dot{\bar{p}}$.

$$(29a) \qquad \dot{\bar{p}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \frac{d\,\bar{p}}{d\,t}$$

La derivada de un vector función de un escalar presen ta pues, una analogía completa con la derivada de un esca lar función de otro escalar.

Sean X, Y, Z las proyecciones de $\bar{p}$ (t), así pues, -- los escalares X, Y, Z son funciones de t. Supongámoslas- derivables. Se tiene:

$$\bar{p} = iX + jY + kZ$$

Demos a t un incremento Δ t y restamos:

$$\Delta\bar{p} = i\Delta X + j\Delta Y + k\Delta Z$$

Dividiendo entre Δ t y tomando límites:

(29b) $$\dot{\bar{p}} = i\dot{X} + j\dot{Y} + k\dot{Z}$$

Lo cual se expresa brevemente diciendo que la proyección de la derivada es igual a la derivada de la proyección es decir, la proyección de $\dot{\bar{p}}$ es la derivada de X.

La derivada $\dot{\bar{p}}$ es otra función de t que, a su vez, puede admitir derivada que se designa por $\ddot{\bar{p}}$. Aplicando la fórmula (29b):

(29c) $$\ddot{\bar{p}} = i\ddot{X} + j\ddot{Y} + k\ddot{Z}$$

Este vector $\ddot{\bar{p}}$ es la segunda derivada de $\bar{p}$ y así podemos continuar con las demás derivadas sucesivas.

30. Derivadas de sumas y productos.

Para derivar las diversas expresiones entre vectores y escalares o entre solos vectores, podemos valernos de la igualdad (29b), pero es mejor proceder directamente siguiendo las operaciones de la derivación:

Sea V.gr., el producto escalar $\bar{p} \cdot \bar{q}$ de dos vectores derivables funciones de t. Sea $\bar{p} \cdot \bar{q}$ igual al escalar u se tiene:

$$u = \bar{p} \cdot \bar{q}$$

$$u + \Delta u = (\bar{p} + \Delta \bar{p}) \cdot (\bar{q} + \Delta \bar{q})$$

$$\Delta u = \bar{p} \cdot \Delta \bar{q} + \Delta \bar{p} \cdot \bar{q} + \Delta \bar{p} \cdot \Delta \bar{q}$$

Dividiendo entre Δ t y tomando límites:

$$\dot{u} = \dot{\bar{p}} \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}}$$

Usando para indicar la derivada, la D de Cauchy:

(30a) $$D(\bar{p} \cdot \bar{q}) = \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} + \bar{q} \cdot \dot{\bar{p}}$$

Que es la misma fórmula que si se tratara del producto de dos escalares, ya que el mecanismo de las operaciones es idéntico.

El mismo camino nos conduce para el producto vectorial.

(30b) $$D(\bar{p} \times \bar{q}) = \bar{p} \times \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{p}} \times \bar{q}$$

Teniendo cuidado de conservar el orden de los factores en este caso.

Para una suma.

(30c) $$D(\bar{p} + \bar{q} + \bar{s}) = \dot{\bar{p}} + \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{s}}$$

Si m es un escalar función de t

(30d) $$D(m\,\bar{p}) = \dot{m}\,\bar{p} + m\,\dot{\bar{p}}$$

Fórmula que incluye el caso en que m ó $\bar{p}$ sean constantes.

De la (30 b) y (30d) tendremos:

(30e) $$D(m\,\bar{p} \times \bar{q}) = \dot{m}\,\bar{p} \times \bar{q} + m\,\dot{\bar{p}} \times \bar{q} + m\,\bar{p} \times \dot{\bar{q}}$$

Igualmente si $\bar{v}$ es otro vector $\bar{v}$ (t).

(30f) $$D\left[\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{v}\right] = \left[\dot{\bar{p}}\,\bar{q}\,\bar{v}\right] + \left[\bar{p}\,\dot{\bar{q}}\,\bar{v}\right] + \left[\bar{p}\,\bar{q}\,\dot{\bar{v}}\right]$$

La completa analogía de estas fórmulas con las correspondientes cuando se trata de simples escalares proviene de la propiedad de los productos escalares y vectoriales de ser distributivos con la suma, sin embargo en este último hay que conservar el orden de los factores.

Si el módulo de $\bar{p}$ se conserva constante $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}^2$ es constante, su derivada es nula así:

$$D(\bar{p} \cdot \bar{p}) = 2\,\bar{p} \cdot \dot{\bar{p}} = 0 \qquad \bar{p} \cdot \dot{\bar{p}} = 0$$

Luego la derivada $\dot{\bar{p}}$ es normal a la función $\bar{p}$, lo cual se ve desde luego puesto que el extremo de $\bar{p}$ des-- cribe una curva esférica.

31. Función de función

Sea el vector $\bar{p}$ función del escalar s que, a su- vez, es función de t. Se quiere la derivada de $\bar{p}$ con - respecto a t. Si para un incremento de t, Δt correspon de Δs y para este último corresponde $\Delta \bar{p}$, escribamos - la identidad:

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta s} \; \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Tomando límites llegamos a la misma regla que existe cuando se trata de escalares.

$$\text{(31a)} \qquad \frac{d\,\bar{p}}{d\,t} = \frac{d\,\bar{p}}{d\,s} \; \frac{d\,s}{d\,t}$$

Veamos finalmente la derivada del tamaño de un vector $\bar{p}$. Se tiene:

$$|\bar{p}|^2 = \bar{p} \cdot \bar{p}$$

$$2\,|\bar{p}|\; D\,|\bar{p}| = 2\,\bar{p} \cdot \dot{\bar{p}}$$

$$\text{(31b)} \qquad D\,|\bar{p}| = \frac{\bar{p} \cdot \dot{\bar{p}}}{|\bar{p}|}$$

32. Plano osculador.

Sea una curva en el espacio y M un punto fijo en ella.

Tomemos otros dos puntos de la curva, M_1, y M_2. Estos -- tres puntos determinan, en general, un plano.

Acerquemos M_1 y M_2 a M de cualquier manera, pero de- tal suerte que nunca sean coincidentes; para cada una de- las posiciones de estos dos puntos se tendrá una posición del plano.

Se llama plano osculador de la curva en el punto al- límite de las posiciones del plano M M_1 M_2 suponiendo, -- claro está, que esa posición límite exita independiente-- mente de la manera como los puntos distintos M_1 y M_2 se -- acerquen a M indefinidamente.

El plano osculador es, pues, el que más se adapta a - la curva en el punto considerado. Se define, a menudo -- este plano osculador como el plano determinado por tres - puntos consecutivos de la curva o bien, por dos tangentes consecutivas, definición, si se quiere muy incorrecta, pe ro que ayuda a la intuición geométrica. También podemos- definir el plano osculador como el límite de las posicio- nes del plano que contiene a la tangente en M y se conser va paralelo a la tangente de otro punto, cuando este otro punto se acerca indefinidamente al primero.

Si una curva es plana, su plano es el osculador para todos sus puntos.

La variación en la orientación del plano osculador al pasar del punto M a otro cercano mide el alabéo o torsión de la curva. De hecho la torsión es el límite de la rela ción del ángulo de desorientación de este plano entre la- distancia entre los dos puntos, cuando ésta tiende a cero.

La perpendicular en M a la tangente situada en el -- plano osculador se llama normal principal y la perpendicu lar a ambos, o sea, al plano osculador en M se llama bi-- normal.

33. Curvatura.

Sea O el origen de los vectores de posición $\bar{r}$, sea una curva en el espacio y Q un punto de referencia en ella. (fig. 13).

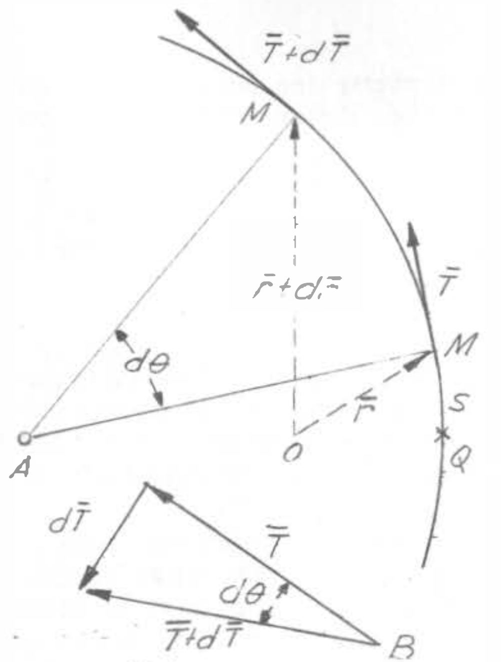

Fig. 13

El vector $\bar{r} = \overline{OM}$ es evidentemente función continua de la longitud del arco QM = s, que vamos a tomar como variable independiente.

La derivada de $\bar{r}$ es un vector unitario pues $d\,\bar{r} = \overline{MM'}$ y el valor absoluto de $d\,\bar{r}$ es ds. Es además tangente a la curva en M; la designaremos con $\bar{T}$ y se llama la tangente unitaria:

$$(33a)\qquad \dot{\bar{r}} = \frac{d\,\bar{r}}{d\,s} = \bar{T}\ ; \quad \bar{T}\cdot\bar{T} = 1$$

La derivada de $\bar{T}$ es perpendicular a $\bar{T}$, por ser $\bar{T}$ de tamaño constante y como vimos derivando a $\bar{T}\cdot\bar{T}$ nos resulta que $\dot{\bar{T}}\cdot\bar{T} = 0$. Por M y M' tracemos las normales principales que, si proyectamos todo sobre el plano osculador en M, se cruzarán en A. La tangente en M' es $\bar{T} + d\,\bar{T}$. Por un punto cualquiera B tracemos los vectores $\bar{T}$ y $\bar{T} + d\,\bar{T}$ el tamaño de $d\,\bar{T}$ es igual al ángulo $d\theta$ formado por las dos tangentes e igual al que forman las dos normales principales, pues $\bar{T}$ es un vector unitario.:

$$d\,\theta = |d\bar{T}|\ /\ |\bar{T}| = |d\bar{T}|$$

En cuanto a la dirección de $d\,\bar{T}$ hemos visto que es normal a $\bar{T}$ y estará además en el plano osculador de M, pues está en un plano definido por $\bar{T}$ y paralelo a la tangente $\bar{T} + d\,\bar{T}$ de un punto infinitamente cercano, por lo demás y sin atender a definiciones anteriores, ésta es la definición analítica del plano osculador, el plano que pasa por M, definido por los vectores $\bar{T}$ y $\dot{\bar{T}} = \dfrac{d\,\bar{T}}{d\,s}$. Ya que $d\,\bar{T}$ es perpendicular a $\bar{T}$ y está en el plano osculador, su línea de acción al aplicarlo en M es la normal principal.

Sea $\bar{N}$ un vector unitario en el sentido y la dirección de $d\,\bar{T}$, así $d\,\bar{T} = |d\,\bar{T}|\ \bar{N}$ se tiene:

$$\dot{\bar{T}} = \frac{d\,\bar{T}}{d\,s} = \frac{|d\,\bar{T}|}{d\,s}\bar{N} = \frac{d\,\theta}{d\,s}\ \bar{N}$$

Pero $\dfrac{d\,s}{d\,\theta} = AM = \rho$, el radio de curvatura de curva dada en M, su inverso $1/\rho$ es la curvatura, así pues:

$$(33b)\qquad \dot{\bar{T}} = \frac{d\,\bar{T}}{d\,s} = \frac{1}{\rho}\ \bar{N}$$

Fórmula que se utiliza en la Cinemática.

Al vector unitario $\bar{N}$ sobre la normal principal se le llama la normal unitaria.

Para completar este estudio introduzcamos un vector $\bar{B}$ también unitario perpendicular a $\bar{T}$ y a $\bar{N}$, o sea al plano osculador y tal que $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$. Este vector $\bar{B}$ está pues sobre la binormal y se llama a la binormal unitaria. Estos tres vectores formarían pues, un triedro trirectángulo de vectores unitarios y tendremos:

(33c) $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$; $\bar{T} = \bar{N} \times \bar{B}$; $\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T}$

(Si de la primera queremos obtener formalmente, v.gr. la segunda, multiplicamos vectorialmente por $\bar{N}$

$$\bar{N} \times \bar{B} = \bar{N} \times (\bar{T} \times \bar{N}) = \bar{N}^2\, \bar{T} - \bar{T} . \bar{N}\bar{N} = \bar{T} \quad \text{pues}$$

$\bar{N}^2 = 1$ y $\bar{T} . \bar{N} . 0$)

Pretendemos obtener las derivadas de estos tres vectores en función de los propios vectores. Ya la ecuación (33b) nos da la derivada de $\bar{T}$. Obtengamos la de $\bar{B}$.

Derivando los productos escalares se encuentra:

(33d) $\bar{B} . \bar{B} = 1$; $\bar{B} . \dot{\bar{B}} = 0$; $\bar{N} . \bar{B} = 0$; $\bar{N} . \dot{\bar{B}} = - \dot{\bar{N}} . \bar{B}$

y las otras ecuaciones análogas. Tenemos pues una ecuación en $\dot{\bar{B}}$; $\dot{\bar{B}}.\bar{B} = 0$, obtengamos ahora un producto vectorial para aplicar la fórmula que nos da el valor del vector conociendo ambos productos (13b):

Derivando $\bar{B}$ en la (33c):

$$\dot{\bar{B}} = \dot{\bar{T}} \times \bar{N} + \bar{T} \times \dot{\bar{N}}$$

Pero $\dot{\bar{T}} \times \bar{N} = 0$ de la (33b), así:

$$\dot{\bar{B}} = \bar{T} \times \dot{\bar{N}}$$

Multiplicando vectorialmente por $\bar{B}$:

$$\dot{\bar{B}} \times \bar{B} = (\bar{T} \times \dot{\bar{N}}) \times \bar{B} = \bar{T} . \bar{B}\dot{\bar{N}} - \dot{\bar{N}} . \bar{B}\bar{T} = - \dot{\bar{N}} . \bar{B}\bar{T}$$

(33e) $\dot{\bar{B}} \times \bar{B} = - \dot{\bar{N}} . \bar{B}\bar{T}$, $\dot{\bar{B}} . \bar{B} = 0$

(La segunda de la (33d). De estas dos ecuaciones obtenemos el valor de $\dot{\bar{B}}$ con las fórmulas (13a) y (13b):

(33f) $\dot{\bar{B}} = - \dot{\bar{N}} . \bar{B}\bar{B} \times \bar{T}$; $\dot{\bar{B}} = - \dot{\bar{N}} . \bar{B}\,\bar{N} = \dfrac{d\bar{B}}{ds}$

Como la variable independiente es aquí el arco, la derivada de la binormal unitaria $\bar{B}$ nos mide la desorientación del plano osculador relativamente al arco recorrido por el punto. El tamaño de esta derivada nos mide pues el menor o mayor alabeo o torsión de la curva.

Este tamaño es el valor absoluto de $\dot{\bar{N}}$. B, y en general a $\dot{N}$. $\dot{\bar{B}}$, teniendo en cuenta el signo, se le llama simplemente la torsión de la curva. A su inverso que es una longitud, se la denomina el radio de torsión, designándolo por τ se tiene:

(33g) $$\dot{\bar{B}} = - \frac{1}{\tau}\, \bar{N}$$

En cuanto a la dirección de $\dot{\bar{B}}$ obsérvese el hecho notable de que es paralelo a la normal, no tiene pues componente según la tangente $\bar{T}$.

Para obtener la derivada de $\bar{N}$ se efectúan cálculos análogos y se obtiene, recordando que $\dot{\bar{B}} . \bar{N} = - \bar{B}. \dot{\bar{N}}$ y que $\dot{\bar{T}} . \bar{N} = 1/\rho$ (33b) y (33d):

(33h) $$\dot{\bar{N}} = - \frac{1}{\rho}\, \bar{T} + \frac{1}{\tau}\, \bar{B}$$

Las fórmulas (33b), (33g) y (33h) se llaman de Frenet-Serret.

34. Derivadas de i, j, k.

Consideremos a los tres vectores i, j, k funciones derivables de una misma variable escalar. Pretendemos obtener algunas relaciones entre sus derivadas que llamaremos:

i', j', k'.

Como quiera que estos tres vectores que vamos a derivar se conservan siempre unitarios y mutuamente perpendiculares, se tendrá:

(34a) $$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

De donde:

(34b) $$i \cdot i' = j \cdot j' = k \cdot k' = 0$$

$$i' \cdot j = - j' \cdot i$$

$$j' \cdot k = - j \cdot k'$$

$$k' \cdot i = - k \cdot i'$$

Proyectemos i' sobre los valores iniciales i, j, k, y sean α, β, γ las proyecciones respectivas, así:

$$i' = \alpha i + \beta j + \gamma k$$

Multiplicando escalarmente por i obtenemos, $\alpha = 0$; por j, $\beta = i' \cdot j$; por k, $\gamma = i' \cdot k$; nos queda pues:

$$i' = 0 + i' \cdot j \, j + i' \cdot k \, k$$

Si procedemos en igual forma con j' y k' y tenemos en cuenta las tres últimas igualdades (34b):

(34c) $$i' = 0 + i' \cdot j \, j + i' \cdot k \, k$$

$$j' = - i' \cdot j \, i + 0 + j' \cdot k \, k$$

$$k' = - i' \cdot k \, i - j' \cdot k \, j + 0$$

Los coeficientes forman una matriz anti-simétrica, a saber: los elementos de la diagonal principal son nulos y

los que están colocados simétricamente con respecto a ella son iguales y de signo contrario.

Llamemos:

$$\omega_z = i' \cdot j \quad ; \quad \omega_y = - i' \cdot k \quad ; \quad \omega_x = j' \cdot k$$

De (34c) nos queda:

(34d) $$i' = 0 + \omega_z j - \omega_y k$$

$$j' = - \omega_z i + 0 + \omega_x k$$

$$k' = \omega_y i - \omega_x j + 0$$

Consideremos ahora el vector:

$$\bar{\omega} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

que suele llamarse el vector de Darboux.

Si queremos derivar un vector cualquiera:

$$\bar{p} = x i + y j + z k$$

en que los escalares x, y, z, son constantes, se tendrá:

$$\bar{p}' = x i' + y j' + z k'$$

Expresemos $\bar{p}'$ en función de los valores iniciales i, j, k, por medio de las ecuaciones (34d).

$$\bar{p}' = (\omega_y z - \omega_z y) i + (\omega_z x - \omega_x z) j + (\omega_x y - \omega_y x) k$$

(34e) $$\bar{p}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{p}$$

Fórmula muy útil en la cinemática.

(Como problema :

Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es nulo).

35. Problemas.

A continuación se proponen algunos problemas. El lector puede completar esta lista de problemas y ampliar estas nociones de Cálculo Vectorial en las siguientes obras:

Vector Analysis - por J. G. Goffin - (J. Wiley)
Vector and Tensor Analysis - por L. Brand - (J. W.).
Vector and Tensor Analysis - por H. Lass - (McGraw - Hill)

1) Encontrar el ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ (3, 4, 4); $\bar{b}$ (-1, 0, 6)

2) Encontrar un vector perpendicular a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ del problema 1 y de tamaño igual a 4. Cuantas soluciones hay?

3) Valiéndose del producto escalar de dos vectores unitarios horizontales obtener la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos.

4) Dada la igualdad $(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}$ encontrar la relación entre los segmentos CA/CB.

5) Valiéndose de los tres vectores unitarios, $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$, $\overrightarrow{OC} = \bar{c}$ encontrar la fórmula de trigonometría Esférica que nos da el coseno de uno de los ángulos planos. Indicación: interprétese y desarróllese $(\bar{a} \times \bar{b}) . (\bar{a} \times \bar{c})$.

6) Escríbase un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, x, y, z. Obténgase la ecuación vectorial equivalente y resuélvase esta última.

7) Dadas las ecuaciones de dos rectas en la forma de Plücker encontrar la condición para que se corten.

8) Encontrar en forma paramétrica y en la de Plücker la ecuación del plano que pase por tres puntos dados.

9) Encontrar el sistema de ecuaciones equivalente a la ecuación de la recta $\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$ y estudiar la condición de indeterminación.

10) Despejar $\bar{p}$ de la ecuación:

$$a_1 \cdot \bar{p}\bar{c}_1 + \bar{a}_2 \cdot \bar{p}\bar{c}_2 + \bar{a}_3 \cdot \bar{p}\bar{c}_3 = \bar{q}$$

Indicación: Valerse de los vectores recíprocos.

11) Los puntos A_i son los vértices de un polígono regular. Demostrar que, cualquiera que sea el punto O, la resultante de la suma $\Sigma\, \overline{OA_i}$ pasa siempre por el mismo punto.

12) Valiéndose de que en los vértices A, B, C de un triángulo se tienen concentradas respectivamente las masas α, β, γ demostrar el teorema de Ceva. Encontrar otras relaciones entre los diversos segmentos.

13) Encontrar las coordenadas de los puntos en donde el cursor $\overline{AB}$(2, 3, 4), A(1, -1, 5) corta al plano xy.

14) Encontrar el momento del cursor dado en el problema 13 con respecto al eje BC, B(0, 7, 6), C(-3, 0, 5). ¿Cómo se puede comprobar el resultado?

15) El volumen del tetraedro determinado por los cursores $\overline{AB} = \bar{p}_1$ y $\overline{CD} = \bar{p}_2$ es proporcional a $\overline{AC} \times \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2$. Demostrar que este volumen es el mismo para otros dos cursores que formen un sistema equivalente.

Indicación. Encuéntrese el producto escalar del momento con respecto al origen en la resultante general.

16) Valiéndose de un sistema de cursores coplanos demostrar que las mediatrices de un triángulo son concurrentes.

Indicación. Obsérvese que la resultante de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ pasa por el centro del segmento $\overline{CB}$.

17) Como en el número anterior demostrar los teoremas de la concurrencia de las bisectrices.

18) Como en el número 16 demostrar el teorema de los pies de las bisectrices.

19) La figura A B C D es un cuadrilátero plano . prolonguemos AB y DC hasta que se corten en E, igualmente AD y BC hasta que se corten en F. Las diagonales de este cuadrilátero completo son AC, DB y EF. Demostrar que sus puntos medios son colineales. (Este teorema es debido a Gauss).

Indicación: considérese el sistema de cursores

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$

20) En el cuadrilátero completo del problema anterior, demostrar que las bisectrices de los ángulos exteriores en A y C por una parte, en D y B por otra, y en E y F, se cortan en tres puntos colineales.

21) Dados $\bar a = 2i - j + 2k$; $\bar b = -i + 8j - 4k$
$\bar c = 6i - 2j - 3k$ Encontrar:
a) Las longitudes; b) $\bar a . \bar b$; $\bar a \times \bar c$; c) La proyección de $\bar b$ sobre $\bar c$; d) El ángulo entre $\bar a$ y $\bar b$; e) Los productos $\bar a . \bar b \times \bar c$ y $\bar a \times (\bar b \times \bar c)$

22) Probar que: $\bar a \times (\bar b \times \bar c) + \bar b \times (\bar c \times \bar a) + \bar c \times (\bar a \times \bar b) = 0$

23) Probar que: $(\bar a \times \bar b) . (\bar c \times \bar d) + (\bar b \times \bar c) . (\bar a \times \bar d) + (\bar c \times \bar a) . (\bar b \times \bar d) = 0$

24) Si el plano determinado por $\bar a$ y $\bar b$ es perpendicular al plano determinado por $\bar c$ y $\bar d$, mostrar que $(\bar a \times \bar b) . (\bar c \times \bar d) = 0$

25) Demostrar que el volumen del tetraedro cuyos lados concurrentes son $\bar a + \bar b$, $\bar b + \bar c$ y $\bar c + \bar d$ es doble del volumen del tetraedro cuyos lados concurrentes son $\bar a$, $\bar b$ y $\bar c$.

26) Qué conclusión geométrica saca Ud. de la ecuación $\bar a . \bar b = \bar a . \bar c$?

27) Encontrar el vector unitario perpendicular a los vectores $i - 2j + 3k$ y $4i + j - 3k$.

28) Encontrar el vector unitario paralelo al plano $i+j-2k$ y $3i - 2j + k$ y perpendicular a $2i + 2j - k$.

29) Si cuatro vectores $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ y $\bar d$ son coplanos mostrar que $(\bar a \times \bar b) \times (\bar c \times \bar d) = 0$ ¿ La recíproca será cierta?

30) Dados los seis escalares cualesquiera α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 probar la desigualdad

$$(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2 \leq (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^3)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)$$

que es un caso-particular de la desigualdad que suele llamarse de Cauchy:

$$\Sigma(\alpha_i\beta_i)^2 \leq (\Sigma\alpha_i^2)(\Sigma\beta_i^2)$$

¿Cuál es el caso de la igualdad?

31) Sean A, B y C tres puntos cualesquiera y $\bar a$, $\bar b$ y $\bar c$ los tres vectores de posición. Demostrar que el vector $\bar q = \bar a \times \bar b + \bar b \times \bar c + \bar c \times \bar a$ es perpendicular al --

32) Obtener la ecuación del plano definido por los tres - puntos A, B y C. Llame $\bar{a} = \overline{OA}$, etc.

33) Encontrar la ecuación de la recta definida por los puntos A y B, en forma paramétrica y en forma de Plücker.

34) Encontrar la ecuación de la recta definida por los dos planos $\bar{r}\cdot\bar{c} = \gamma$; $\bar{r}\cdot\bar{c}' = \gamma'$

35) Calcular la distancia entre los dos planos $\bar{r}\cdot\bar{c} = \delta$; $\bar{r}\cdot\bar{a} =$ en que $\bar{c}$ y $\bar{a}$ son paralelos.

36) Calcular la distancia del punto **P** al plano $\bar{r}\cdot\bar{c} = \delta$

37) Obtener' la condición, por lo pronto necesaria, para -- que se corten las rectas $\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$; $\bar{r}' \times \bar{a}' = \bar{b}'$

38) Obtener la ecuación del plano que pase por la recta -- $\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$ y paralelo al vector $\bar{p}$

39) Dadas las dos rectas $\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$ y $\bar{r}' \times \bar{a}' = \bar{b}'$ encontrar su distancia.

40) Encontrar la ecuación del plano definido por el punto- **P** y por la recta $\bar{r} \times \bar{a} = \bar{b}$

41) Si $\bar{p} = \bar{a} \cos \theta t + \bar{b} \operatorname{sen} \theta t$ en que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son cons-- tantes, demostrar que $\bar{p} \times \dot{\bar{p}}$ y que $\ddot{\bar{p}} + \theta^2 \bar{p} = 0$

42) Encontrar las derivadas de $\bar{p} \times \dot{\bar{p}}$: $\bar{p}\cdot\dot{\bar{p}} \times \ddot{\bar{p}}$; $\bar{p}\times(\dot{\bar{p}}\times\ddot{\bar{p}})$

43) ¿Cuál es el ángulo entre las tangentes a la curva --- $x = t$; $y = t2$. $z = t3$ en los puntos $t = 1$ y $t = -1$?

44) Encontrar la ecuación del plano osculador a la c rva $x = t^4$; $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto x_o, y_o, z_o en - que $t = t_o$.