Problemario

METODOS NUMERICOS

V

Sandov
H.

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS

CAPITULO V. Fórmula de Taylor con residuo.

En este capítulo, al igual que en los anteriores, se siguen las normas y lineamientos detallados en la Introducción del Tema de Análisis Combinatorio y Teoría del Binomio (Capítulo I del problemario) por lo que aquí no se enuncian.

El presente capítulo consta de 40 problemas con niveles de dificultad muy diversos.

Se incluyen desarrollos en el origen (Serie de Mc Laurin) y fuera del mismo (Serie de Taylor).

Se hace especial énfasis en la propiedad de Integración del Polinomio de Taylor y en algunos casos de convergencia lenta se comparan los resultados con la integral obtenida numéricamente. También se ilustra la aplicación del producto y substitución de Series de Taylor (cuando esto es válido) como un camino más rápido de obtener la serie de la función compuesta. Por último se incluye un ejemplo de Taylor con dos dimensiones o variables.

Se agradece al Ing. Ricardo Ferat su colaboración en el presente capítulo.

Se reitera la petición para que los usuarios del problemario aporten comentarios, señalen errores, generen nuevos problemas, etc., los cuales serán bien recibidos. Los pueden entregar en la coordinación o asesoría de Métodos Numéricos, y al cubículo D-7 de la División de Ciencias Básicas.

A t e n t a m e n t e

$x^7(x^9+x^6+x^3+1)$

9876543

$x^{11}+x^8+x^5+x^2$

M. en I. Horacio Sandoval Rodríguez

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS

Horacio Santana

CAPITULO V. FORMULA DE TAYLOR CON RESIDUO

V.1 POLINOMIOS DE TAYLOR GENERADOS POR UNA FUNCIÓN

1.- OBTENER $T_3 [\text{Sen } x, \pi/2]$

$f(x) = \text{Sen } x$ $\qquad f(\pi/2) = \text{Sen } \pi/2 = 1$

$f'(x) = \text{Cos } x$ $\qquad f'(\pi/2) = \text{Cos } \pi/2 = 0$

$f''(x) = -\text{Sen } x$ $\qquad f''(\pi/2) = -\text{Sen } \pi/2 = -1$

$f'''(x) = -\text{Cos } x$ $\qquad f'''(\pi/2) = -\text{Cos } \pi/2 = 0$

$$T_3[\text{Sen } x, \pi/2] = \frac{(x-\pi/2)^0}{0!} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\pi/2)^1}{1!} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(x-\pi/2)^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1}(1) + \frac{x-\pi/2}{1}(0) + \frac{(x-\pi/2)^2}{2}(-1) +$$

$$+ \frac{(x-\pi/2)^3}{6}(0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{8}$$

$$T_3[\text{Sen } x, \pi/2] = 1 - x^2/2 + \pi x/2 - \pi^2/8$$

2.- OBTENER $T_3 [\cos x, \pi/2]$

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$

$f'(x) = -\text{Sen } x$ $\qquad f'(\pi/2) = -\text{Sen } \pi/2 = -1$

$f''(x) = -\text{Cos } x$ $\qquad f''(\pi/2) = -\text{Cos } \pi/2 = 0$

$f'''(x) = \text{Sen } x$ $\qquad f'''(\pi/2) = \text{Sen } \pi/2 = 1$

$$T_3[\cos x, \pi/2] = \frac{(x-\pi/2)^0}{0!} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\pi/2)^1}{1!} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(x-\pi/2)^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1}(0) + \frac{x-\pi/2}{1}(-1) + \frac{(x-\pi/2)^2}{2}(0)$$

$$+ \frac{(x-\pi/2)^3}{6}(1) = -x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3\pi x^2}{2} + \frac{3\pi^2 x}{4} - \frac{\pi^3}{8}\right)$$

$$T_3[\cos x, \pi/2] = -x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3\pi x^2}{2} + \frac{3\pi^2 x}{4} - \frac{\pi^3}{8}\right)$$

3.- Obtener el desarrollo de McLaurin hasta 6º orden de Cos x.

$T_6\,[\cos x; 0]$

$f(x) = \cos x$	evaluando en $x=0$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\operatorname{Sen} x$	✓	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	✓	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \operatorname{Sen} x$	✓	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	✓	$f^{IV}(0) = 1$
$f^{V}(x) = -\operatorname{Sen} x$	✓	$f^{V}(0) = 0$
$f^{VI}(x) = -\cos x$	✓	$f^{VI}(0) = -1$

$$T_6[\cos x; 0] = \sum_{k=0}^{6} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

como $a=0$ se tiene

$$= \sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

substituyendo

$$= \frac{x^0}{0!}(1) + \frac{x^1}{1!}(0) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + \frac{x^5}{5!}(0) + \frac{x^6}{6!}(-1)$$

$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!}$$

$$T_6[\cos x; 0] = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

4. a) Obtener el polinomio de Taylor siguiente $T_6[\tan x; 0]$

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \sec^2 x$

$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x$

$f'''(x) = 2\sec^2 x\,(\sec^2 x + 2\tan^2 x)$

$f^{IV}(x) = 16\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x$

$f^{V}(x) = 8\sec^2 x\,(2\sec^4 x + 11\sec^2 x \tan^2 x + \tan^4 x)$

$f^{VI}(x) = 16\sec^2 x \tan x\,(17\sec^4 x + 24\sec^2 x \tan^2 x + 1)$

Evaluando en $x=0$ se tiene

$f(0)=0$ $\quad f''(0)=0 \quad f^{IV}(0)=0 \quad f^{VI}(0)=0$

$f'(0)=1 \quad f'''(0)=2 \quad f^{V}(0)=16$

$$\therefore\ T_6[\tan x; 0] = \frac{x^0}{0!}(0) + \frac{x^1}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(0) + \frac{x^5}{5!}(16) + \frac{x^6}{6!}(0)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

Como la función $\tan x$ es impar solo aparecen potencias impares en su desarrollo de Taylor

b) Evaluar $f(x)$, T_1, T_3 y T_5 para $x = 0.0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.2$ y 1.5

Del inciso a) se tiene

$f(x) = \tan x$

$T_1[\tan x; 0] = x$

$T_3[\tan x; 0] = x + \frac{x^3}{3}$

$T_5[\tan x; 0] = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

por lo tanto

$x \Rightarrow$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(x)$	0.309336	0.684137	1.260158	2.572152	14.101420
$T_1[\ ]$	0.300000	0.600000	0.900000	1.200000	1.500000
$T_3[\ ]$	0.309000	0.672000	1.143000	1.776000	2.625000
$T_5[\ ]$	0.309324	0.682384	1.221732	2.107776	3.637500

c) obtener los errores absolutos y relativos cometidos al aproximar $f(x) = \tan x$ con T_1, T_3 y T_5 en $x = 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ y 1.5.

Errores Absolutos $= |\text{aprox} - \text{valor real}|$

	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$T_1[\ ]$	0.009336	0.084137	0.360158	1.372152	13.601420
$T_3[\ ]$	0.000336	0.012137	0.117958	0.796152	11.476420
$T_5[\ ]$	0.000012	0.001753	0.038426	0.464376	10.463920

$$\text{Errores Relativos} = \frac{\text{Error Absoluto}}{\text{Valor Real}} \times 100$$

	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$T_1[\ ]$	3.018	12.298	28.580	53.346	96.454
$T_3[\ ]$	0.109	1.779	9.297	30.953	81.385
$T_5[\ ]$	0.004	0.256	3.049	18.054	74.205

Los errores relativos están dados en porcentajes.

Como $\tan x$ es discontinua para $x = \pm \pi/2$, la serie es convergente a la función para $x < |\pi/2|$

8.- OBTENER $T_6 [\text{ARC TAN } x ; 0]$

$$f(x) = \text{ARC TAN } x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{(1+x^2)^4} \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-24x^5 + 24x}{(1+x^2)^5} \qquad f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = \frac{120x^6 - 120x^4 - 216x^2 + 24}{(1+x^2)^6} \qquad f^{V}(0) = 24$$

$$f^{VI}(x) = \frac{-720x^7 + 1680x^5 + 1680x^3 - 720x}{(1+x^2)^7} \qquad f^{VI}(0) = 0$$

$$T_6[\text{ARC TAN } x; 0] = \frac{(x-0)^0}{0!} f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) +$$

$$+ \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(-2) + \frac{(x-0)^4}{4!} f^{IV}(0) + \frac{(x-0)^5}{5!} f^{V}(24) +$$

$$+ \frac{(x-0)^6}{6!} f^{VI}(0) = x - \frac{2x^3}{6} + \frac{24x^5}{120}$$

$$T_6[\text{ARC TAN } x; 0] = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5$$

4F OBTENER $T_6 [\ln(1-x), 0]$

$f(x) = \ln(1-x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = (x-1)^{-1}$ $\quad f'(0) = -1$

$f''(x) = (-1)(x-1)^{-2}$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(x-1)^{-3}$ $\quad f'''(0) = -2$

$f^{IV}(x) = (-6)(x-1)^{-4}$ $\quad f^{IV}(0) = -6$

$f^{V}(x) = 24(x-1)^{-5}$ $\quad f^{V}(0) = -24$

$f^{VI}(x) = -120(x-1)^{-6}$ $\quad f^{VI}(0) = -120$

$$T_6[\ln(1-x),0] = \cancel{\frac{(x-0)^0}{0!}} f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + $$

$$+ \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) + \frac{(x-0)^4}{4!} f^{IV}(0) + \frac{(x-0)^5}{5!} f^{V}(0) + $$

$$+ \frac{(x-0)^6}{6!} f^{VI}(0) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - $$

$$- \tfrac{1}{6}x^6$$

$$T_6[\ln(1-x), 0] = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6$$

7. Obtener el polinomio de Taylor de $f(x) = [\ln \cos x ; 0]$

$f(x) = \ln \cos x$

$\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -(\tan x)$

$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$

$f''(x) = -\sec^2 x = -((\cos x)^{-2}$

$f'''(x) = 2((\cos x)^{-3}(-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} x \cos^{-3} x$

$f^{IV}(x) = -2[\operatorname{sen} x(-3\cos^{-4} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos^{-3} x \cos x]$

$= -2[3\operatorname{sen}^2 x \cos^{-4} x + \cos^{-2} x]$

$f^{V}(x) = -6[\operatorname{sen}^2 x(-4\cos^{-5} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos^{-4} x(2\operatorname{sen} x \cos x)] -$

$-2[-2\cos^{-3} x(-\operatorname{sen} x)]$

$= -24\operatorname{sen}^3 x \cos^{-5} x - 12\operatorname{sen} x \cos^{-3} x - 4\operatorname{sen} x \cos^{-3} x$

$= -24\operatorname{sen}^3 x \cos^{-5} x - 16\operatorname{sen} x \cos^{-3} x$

$f^{VI}(x) = -24[\operatorname{sen}^3 x(-5\cos^{-6} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos^{-5} x(3\operatorname{sen}^2 x \cos x)] -$

$-16[\operatorname{sen} x(-3\cos^{-4} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos^{-3} x(\cos x)]$

$= -120\operatorname{sen}^4 x \cos^{-6} x - 72\operatorname{sen}^2 x \cos^{-4} x - 48\operatorname{sen}^2 x \cos^{-4} x - 16\cos^{-2} x$

$= -120\operatorname{sen}^4 x \cos^{-6} x - 120\operatorname{sen}^2 x \cos^{-4} x - 16\cos^{-2} x$

$f(0) = 0$ $\quad f^{V}(0) = 0$

$f'(0) = 0$ $\quad f^{VI}(0) = -16$

$f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0$

$f^{IV}(0) = -2$

$$T_6[\ln\cos x; 0] = \frac{x^0}{0!}\cdot 0 + \frac{x}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(-2) + \frac{x^5}{5!}(0) + \frac{x^6}{6!}(-1\ldots$$

$$\underline{T_6[\ln\cos x; 0] = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}}$$

Como $\ln(\cos x)$ es discontinua en $\pm\pi/2$, la serie converge a la función para $x < |\pi/2|$

$\sqrt{1+x}$

5) OBTENER $T_3[(1+x)^{1/2}, 0]$

$\sqrt{}$

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^{1/2}} \qquad f'(0) = 1/2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \qquad f''(0) = -1/4$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \qquad f'''(0) = 3/8$$

$$T_3[(1+x)^{1/2}, 0] = \frac{(x-0)^0}{0!} f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) +$$

$$+ \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) = 1 + 1/2\, X - 1/8\, X^2 + 3/48\, X^3$$

$$T_3[(1+x)^{1/2}, 0] = 1 + 1/2\, X - 1/8\, X^2 + 3/48\, X^3$$

6) OBTENER $T_n[(2-x)^{-1}, 1]$ $\qquad \frac{1}{2-x}$

$$f(x) = (2-x)^{-1} \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = (2-x)^{-2} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = 2(2-x)^{-3} \qquad f''(1) = 2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^n(x) = n!(2-x)^{-(n+1)} \qquad f^n(1) = n!$$

$$T_n[(2-x)^{-1}, 1] = \frac{(x-1)^0}{0!} f(1) + \frac{(x-1)^1}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(1)$$

$$+ \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} f^n(1) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n$$

$$T_n[(2-x)^{-1}, 1] = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (x-1)^i$$

10. Obtener $T_n[(1+x)^{1/2}; 2]$

$$P(x) = T_n\left[(1+x)^{1/2}; 2\right]$$

$$= f(2) + \frac{(x-2)}{1!}f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) + \dots$$

$f(x) = (1+x)^{1/2}$ $\qquad f(2) = \sqrt{3}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $\qquad f'(2) = 1/2\sqrt{3}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ $\qquad f''(2) = -1/4(\sqrt{3})^3$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$ $\qquad f'''(2) = 3/8(\sqrt{3})^5$

$$\therefore P(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-2) - \frac{1}{4(\sqrt{3})^3}(x-2)^2 + \frac{3}{8(\sqrt{3})^5}(x-2)^3$$

V-2 PROPIEDADES DE DERIVACION Y LINEALIDAD DEL OPERADOR DE TAYLOR.

1. Aplique e indique las propiedades del operador de Taylor para obtener $T_3\left[\frac{d}{dx}(\operatorname{Sen}3X+3\cos 3X);0\right]$

Solución: Usando $T_3\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]=\frac{d}{dx}T_4[f(x)]$ y la propiedad de linealidad.

$$T_4[\operatorname{Sen}3X+3\cos 3X;0]=T_4[\operatorname{Sen}3X;0]+3T_4[\cos 3X;0]$$

$f_1(x)=\operatorname{Sen}3X$	$f_1(0)=0$	$f_2(x)=\cos 3X$	$f_2(0)=1$
$f_1'(x)=3\cos 3X$	$f_1'(0)=3$	$f_2'(x)=-3\operatorname{Sen}3X$	$f_2'(0)=0$
$f_1''(x)=-9\operatorname{Sen}3X$	$f_1''(0)=0$	$f_2''(x)=-9\cos 3X$	$f_2''(0)=-9$
$f_1'''(x)=-27\cos 3X$	$f_1'''(0)=-27$	$f_2'''(x)=27\operatorname{Sen}3X$	$f_2'''(0)=0$
$f_1^{IV}(x)=81\operatorname{Sen}3X$	$f^{IV}(0)=0$	$f_2^{IV}(x)=81\cos 3X$	$f_2^{IV}(0)=81$

$$\therefore\ T_4[f(x);0]=\frac{x^0}{0!}\cdot 0+\frac{x^1}{1!}\cdot 3+\frac{x^2}{2!}\cdot 0+\frac{x^3}{3!}(-27)+\frac{x^4}{4!}\cdot 0+3\left[\frac{x^0}{0!}\cdot 1+\frac{x^1}{1!}\cdot 0+\frac{x^2}{2!}(-9)+\frac{x^3}{3!}\cdot 0+\frac{x^4}{4!}\cdot 81\right]$$

$$=3X-\frac{9}{2}x^3+3-\frac{27}{2}x^2+\frac{81}{8}x^4=3+3X-\frac{27}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{8}x^4$$

$$y\ \frac{d}{dx}T_4[f(x);0]=3-27X-27x^2+\frac{27}{2}x^3$$

2º Método.

Sabiendo que $\operatorname{Sen}u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots$ y $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots$

haciendo $u=3x$ y sobstituyendo.

$$f(x)=(3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}+3\left[1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}\right]$$

$$=3X-\frac{9}{2}x^3+\frac{81}{40}x^5+3-\frac{27}{2}x^2+\frac{81}{8}x^4=3+3X-\frac{27}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+\frac{81}{8}x^4+\frac{81}{40}x^5$$

que es la misma serie obtenida en el proceso anterior.

2. Aplicando las propiedades de Taylor, encuentre

$T_3\left[\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}+\frac{2}{1-x}\right);0\right]$ sabiendo que $T\left[\frac{1}{1-x};0\right]=1+x+x^2+x^3+\ldots$

Por las propiedades de derivación y linealidad se tiene

$$T_3\left[\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}+\frac{2}{1-x}\right);0\right]=\frac{d}{dx}T_4\left[e^{-x^2};0\right]+2\frac{d}{dx}T_4\left[\frac{1}{1-x};0\right]$$

Sea

$f(x)=e^{-x^2}$	$f(0)=1$
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$	$f'(0)=0$
$f''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$	$f''(0)=-2$
$f'''(x)=e^{-x^2}(-8x^3+12x)$	$f'''(0)=0$
$f^{IV}(x)=e^{-x^2}(16x^4-48x^2+12)$	$f^{IV}(0)=12$
$f^{V}(x)=e^{-x^2}(-32x^5+160x^3-120x)$	$f^{V}(0)=0$
$f^{VI}(x)=e^{-x^2}(64x^6-480x^4+720x^2-120)$	$f^{VI}(0)=-120$

Las derivadas 5ª y 6ª no son necesarias en esta parte del problema.

$$\therefore T_4\left[e^{-x^2};0\right]=\frac{x^0}{0!}\cdot 1+\frac{x^1}{1!}\cdot 0+\frac{x^2}{2!}(-2)+\frac{x^3}{3!}0+\frac{x^4}{4!}\cdot 12=1-x^2+\frac{x^4}{2}$$

$$\therefore T_3\left[\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}+\frac{2}{1-x}\right);0\right]=\frac{d}{dx}\left[1-x^2+\frac{x^4}{2}+2+2x+2x^2+2x^3+2x^4\right]$$

$$=-2x+2x^3+2+4x+6x^2+8x^3=\underline{\underline{2+2x+6x^2+10x^3}}$$

2º Método.

Sabiendo que $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots$, haciendo $u=-x^2$ y substituyendo

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}=1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}$$

que coincide con el desarrollo anterior.

Para mayor información de esta propiedad consultar

Sokolnikoff y Redheffer
"Mathematics of Physics and Modern Engineering"
Ed. Mc Graw Hill Kogakusha, LTD. 1958

V-2 Continuación.-

3.- Aplique e indique las propiedades del operador para obtener:

$$T_3 \frac{d}{dx}[\cos 2x + 3e^{4x}; 0]$$

$$T_3 \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} T_4[f(x)]$$

$$T_4[\cos 2x] = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$T_4[e^{4x}] = 1 = (4x) + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^4}{4!} =$$

$$= 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^4$$

$$3T_4[e^{4x}] = 3 + 12x + 24x^2 + 3\text{[illegible]} + 32x^4$$

$$T_4[f(x)] = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 3 + \text{[illegible]} + 24x^2 + 32x^3 + 32x^4$$

T_4 $$= 4 + 12x + 22x^2 + \text{[illegible]}^3 + \frac{98}{3}x^4$$

$$\frac{d}{dx}[T_4(f(x))] = 12 + \text{[illegible]} + 99x^2 + \underbrace{\frac{392}{3}}_{130.67} x^3 = T_3\frac{d}{dx}[\cdots + \cdots]$$

4.- Aplicando las propiedades del operador de Taylor determine:

$$T_3\left[\frac{d}{dx}(3\cos x^2 + 2e^x)_0\right]$$

$$T_3\left[\frac{d}{dx}(3\cos x^2 + 2e^x); 0\right] = 3\frac{d}{dx}T_4[\cos x^2; 0] + 2\frac{d}{dx}[e^x; 0]$$

Sea $f(x) = \cos^2 x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -2\cos x \operatorname{Sen} x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -2(\cos^2 x - \operatorname{Sen}^2 x)$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 4 \operatorname{Sen} x \cos x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 4(\cos^2 x - \operatorname{Sen}^2 x)$ $\qquad f^{IV}(0) = -4$

$$\therefore\ T_4[\cos x^2; 0] = \frac{x^0}{0!}\cdot 1 + \frac{x^1}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot 2 + \frac{x^3}{3!}\cdot 0 + \frac{x^4}{4!}(-4) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{6}$$

$$\therefore\ T_3\left[\frac{d}{dx}(3\cos x^2 + 2e^x); 0\right] = 3\frac{d}{dx}\left(1 + x^2 - \frac{x^4}{6}\right) + 2\frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= 3\left(2x - \frac{2}{3}x^3\right) + 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) = 6x - 2x^3 + 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$= 2 + 8x + x^2 - \frac{5}{3}x^3$$

En este ejemplo no se aplica el 2º método de los ejemplos anteriores.

5. Usando las propiedades del operador de Taylor obtenga $T_3\left[\frac{d}{dx}(\cos 3x + 3e^{3x}); 0\right]$

$$T_3\left[\frac{d}{dx}(\cos 3x + 3e^{3x}); 0\right] = \frac{d}{dx} T_4[\cos 3x; 0] + 3\frac{d}{dx} T_4[e^{3x}; 0]$$

Dado que $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}$ y $u = 3x$

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4$$

y que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!}$ y $u = 3x$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{6} + \frac{(3x)^4}{24} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4$$

$$\therefore T_3[f(x); 0] = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4\right) + 3\frac{d}{dx}\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4\right)$$

$$= -9x + \frac{27}{2}x^3 + 3\left(3 + 9x + \frac{27}{2}x^2 + \frac{27}{2}x^3\right)$$

$$= -9x + \frac{27}{2}x^3 + 9 + 27x + \frac{81}{2}x^2 + \frac{81}{2}x^3$$

$$= 9 + 18x + \frac{81}{2}x^2 + 54x^3$$

Propiedad de linealidad del operador de Taylor.

6. Obtenga $T_3[\operatorname{senh} x; 0]$ sabiendo que $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$T_3\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right] = \frac{1}{2} T_3\, e^x - \frac{1}{2} T_3\, e^{-x}$$

$f(x) = e^x \quad f(0) = 1 \qquad f(x) = e^{-x} \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1 \qquad f'(x) = -e^{-x} \quad f'(0) = -1$

$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1 \qquad f''(x) = e^{-x} \quad f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1 \qquad f'''(x) = -e^{-x} \quad f'''(0) = -1$

$$\therefore\ T_3[\operatorname{senh} x; 0] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^0}{0!}\cdot 1 + \frac{x^1}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 1 + \frac{x^3}{3!}\cdot 1 - \frac{x^0}{0!}\cdot 1 - \frac{x^1}{1!}(-1) - \frac{x^2}{2!}\cdot 1 - \frac{x^3}{3!}(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} - \cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!}\right]$$

$$= x + \frac{x^3}{3!}$$

V-3

V-4 Propiedad de Integración del Operador de Taylor.

1.- Usando la expansión en serie de Taylor con los primeros tres términos, calcule la integral definida

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \Rightarrow \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 1.433$$

2.- Usando la expansión en Series de Taylor con los primeros cuatro términos calcule la integral definida

$$\int_0^{0.7} e^{x^2}\,dx \qquad z = x^2$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}$$

$$\therefore\ e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \quad \therefore \int_0^{0.7}\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\right)dx$$

$$= \left. x + \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42}\,\right]_0^{0.7}$$

error

$$= 0.7 + \frac{0.7^3}{3} + \frac{(0.7)^5}{10} + \frac{(0.7)^7}{42}$$

$$= 0.7 + \frac{0.343}{3} + \frac{0.16807}{10} + \frac{0.0823543}{42} = 0.8331011$$

3.- Usando los primeros 3 sumandos de la Serie de Taylor calcule:

$$\int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-0.1}^{0.1}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{25}\right]_{-0.1}^{0.1} = 0.1 - \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{10} + 0.1 -$$

$$- \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{10} = 2 \times 0.09966766$$

$$= 0.19933533\ u^2 \qquad \frac{x^5}{5}$$

Horacio Sandoval R.

4. Usando los primeros tres sumandos de la serie de Taylor calcular

$$\int_{-0.1}^{0} e^{2x^2}dx$$

Sea $f(x)= e^{2x^2}$ $\qquad f(0)=1$

$f'(x)= 4x e^{2x^2}$ $\qquad f'(0)=0$

$f''(x)= (16x^2+4)e^{2x^2}$ $\qquad f''(0)=4$

$$T_2[e^{2x^2};0] = \frac{x^0}{0!}\cdot 1 + \frac{x^1}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot 4 = 1+\frac{x^2}{2} \qquad 1+2x^2$$

$$\therefore \int_{-0.1}^{0} e^{2x^2}dx \doteq \int_{-0.1}^{0}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)dx = x+\frac{x^3}{6}\Big]_{-0.1}^{0} = +0.1-\frac{(-0.1)^3}{6} = 0.1+\frac{0.001}{6}$$

$$= 0.100{,}166\ u^2.$$

5. Usando los primeros tres sumandos de la serie de Taylor calcular

$$\int_{-0.2}^{0} e^{3x^2}dX$$

Sea $f(x)= e^{3x^2}$ $\qquad f(x)=1$

$f'(x)= 6x e^{3x^2}$ $\qquad f'(0)=0$

$f''(x) = (36x^2+6)e^{3x^2}$ $\qquad f''(0)=6$

$$T_2[e^{3x^2};0] = \frac{x^0}{0!}\cdot 1 + \frac{x^1}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot 6 = 1+3x^2$$

$$\therefore \int_{-0.2}^{0} e^{3x^2}dx \doteq \int_{-0.2}^{0}(1+3x^2)dx = \left[x+\frac{3x^3}{3}\right]_{-0.2}^{0} = \left[0-(-0.2)+0-(-0.2)^3\right]$$

$$= 0.2+0.008 = 0.208\ u^2$$

Propiedad del producto de funciones para el operador de Taylor

Valúe $\int_{0.0}^{0.4} 2\,\text{sen}\,2x\cos 2x\,dx$ a través de series de Taylor, limitando los desarrollos hasta x^3.

$$T[2\,\text{sen}\,2x\cos 2x;0] = 2\{T[\text{sen}\,2x,0]\cdot T[\cos 2x;0]\}$$

$$= 2\left\{\left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!}\right]\cdot\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!}\right]\right\}$$

$$= 2\left[2x - \frac{(2x)^3}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{3!\,2!}\right]$$

$$= 2\left[2x - \frac{16x^3}{3} + \frac{8}{3}x^5\right]$$

$$\therefore 2\int_0^{0.4}\left(2x - \frac{16}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^5\right)dx = 2\left[2\frac{x^2}{2} - \frac{16}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{8}{3}\frac{x^6}{6}\right]_0^{0.4}$$

$$= 2\left(x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{9}x^6\right)_0^{0.4}$$

$$= 2(0.16 - 0.03413 + 0.0018204)$$

$$= 2(0.1276)$$

$$= 0.25537\,\mu^2$$

V·9 Estimación del Error en la Aproximación de Taylor.

1.- Error de la aproximación con Taylor.

Considerando la aproximación de Taylor para $e^{\text{sen}x}$ en $x=0$, valúe el error cometido en $x=0.5$, si la aproximación sólo considera los primeros 3 sumandos de la serie.

$$e^{\text{sen}\,x} = 1 + x + x^2/2$$

$$e^{\text{sen}\,0.5} = e^{0.479} = 1.61515 \sim 1 + 0.5 + 0.5^2/2 = 1 + 0.5 + 0.125 = 1.625$$

$$\text{Error} = |1.625 - 1.61515| = 0.00985$$

Por desarrollo -

$f(x) = e^{\text{sen}x}$ $\qquad f(0)=1$

$f'(x) = e^{\text{sen}x}\cos x$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x) = e^{\text{sen}x}(-\text{sen}\,x) + \cos^2 x\, e^{\text{sen}x} = e^{\text{sen}x}[\cos^2 x - \text{sen}\,x]$ $\qquad f''(0)=1$

$f'''(x) = e^{\text{sen}x}[-2\cos x\,\text{sen}\,x - \cos x] + [\cos^2 x - \text{sen}\,x]\,e^{\text{sen}x}\cos x$

$= e^{\text{sen}x}[-2\cos x\,\text{sen}\,x - \cos x + \cos^3 x - \text{sen}\,x\cos x]$

$= e^{\text{sen}x}[\cos^3 x - \cos x - 3\,\text{sen}\,x\cos x]$ $\qquad f'''(0)=0$

$$f(x) = \frac{(x-0)}{0!}\cdot f(0) + \frac{(x-0)}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f'' + \frac{x^3}{3!} f''' + \cdots$$

$$= 1\cdot 1 + x\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 1 + \frac{x^3}{3!}\cdot 0$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$f(0.5) = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} = 1.625$ Que es el resultado anterior

$$e^{\text{sen}x} = e^{\text{sen}\,0.5} = e^{0.479425} = 1.615$$

Aprovechando método de la Exponencial de funciones seno.

$$f(x) = 1 + \text{sen}\,x + \frac{\text{sen}^2 x}{2!}$$

$$= 1 + 0.479425 + \frac{(0.479)^2}{2}$$

$= 1.59435$ vs. 1.61515 $\therefore$ Error $= |1.61515 - 1.59435| = 0.02080$

Por tener aproximación en dos series.

2- Igual para $x = 0.8$

$$e^{\text{sen}\,0.8} = e^{0.71738} = 2.0491 \sim 1 + (0.7173) + \frac{(0.71732)^2}{2} = 1.97466$$

$$\text{Error} = |2.0491 - 1.97466| = 0.07435$$

$$e_r = \frac{0.07435}{2.0491} = 3.62835\%$$

V-9 Estimación del error en la Aproximación de Taylor

3.- Usando los primeros 3 términos T_2 de la expansión en serie de Taylor Calcular la integral definida

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}dx$$ y estime el error correspondiente.

$$T_2\left[e^{-x^3}\right] = 1 + (-x^3) + \frac{(-x^3)^2}{2!} = 1 - x^3 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3!}x^9$$

$$\int_0^1 \left(1 - x^3 + \frac{1}{2}x^6\right)dx = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{14}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} = \frac{23}{28} = 0.8214\ u^2$$

$$\varepsilon_I = \int_0^1 \frac{1}{6}x^9 dx = \frac{1}{60}x^{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{60} = 0.016\ u^2$$ de error estimado.

4.- Calcular $A = \int_0^2 e^{-x^2}dx$ con un error igual o menor a un milésimo.

Sea: $T\int_0^2\left[e^{-x^2}\right]$; Partiendo de $T\left[e^x\right] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

y sustituyendo $x = -x^2$

$$T\left[\int_0^2 e^{-x^2}\right] = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \frac{(-x^2)^5}{5!} + \frac{(-x^2)^6}{6!} +$$
$$+ \frac{(-x^2)^7}{7!} + \frac{(-x^2)^8}{8!} + \frac{(-x^2)^9}{9!} + \frac{(-x^2)^{10}}{10!} + \dots$$

$$T\left[\int_0^2 e^{-x^2}\right] = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{24} - \frac{x^7}{120} + \frac{x^8}{720} - \frac{x^9}{5040} + \frac{x^{10}}{40320} - \frac{x^{11}}{362880} + \frac{x^{12}}{3628800} \dots$$

Teniendo la Serie y aplicando en $\int_0^2 e^{-x^2}dx$

$$= \int_0^2 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{24} - \frac{x^7}{120} + \frac{x^8}{720} - \frac{x^9}{5040} + \frac{x^{10}}{40320} - \frac{x^{11}}{362880} + \frac{x^{12}}{3628800}\right]dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^6}{36} + \frac{x^7}{168} - \frac{x^8}{960} + \frac{x^9}{648} - \frac{x^{10}}{50400} + \frac{x^{11}}{443520} - \frac{x^{12}}{4354560} + \frac{x^{13}}{47174400}\right]_0^2 =$$

$$= 2 - \frac{8}{3} + \frac{32}{10} - \frac{64}{36} + \frac{128}{168} - \frac{256}{960} + \frac{512}{648} - \frac{1024}{50400} + \frac{2048}{443520} - \frac{4096}{4354560} + \frac{8192}{47174400} =$$

$$= 2 - 2.66 + 3.2 - 1.77 + 0.761 - 0.2666 + 0.790 - 0.02031 + 0.00461 -$$
$$- 0.009462 + 0.00017365 = 2.0933$$

$\therefore \int_0^2 e^{-x^2} = 2.0933$

El último término, de 0.00017365 es menor que el error seleccionado, por tanto no es necesario extender la serie mas allá.

5. Determine el valor de la integral $I=\int_2^4 (e^{-x}+2x^3)dx$ a través del operador de Taylor (de 3er orden). Estime el error cometido.

$$f(x)=e^{-x}+2x^3 \qquad f(3)=0.04979+54=54.04979$$
$$f'(x)=-e^{-x}+6x^2 \qquad f'(3)=-0.04979+54=53.95021$$
$$f''(x)=e^{-x}+12x \qquad f''(3)=0.04979+36=36.04979$$
$$f'''(x)=-e^{-x}+12 \qquad f'''(3)=-0.04979+12=11.95021$$

y obteniendo la 4ª derivada para estimar el error

$$f^{IV}(x)=e^{x} \qquad f^{IV}(3)=0.04979$$

Observe que para minimizar el error se ajusta el polinomio de Taylor en el punto central del intervalo.

$$T_3[f(x);3]=\frac{(x-3)^0}{0!}54.04979+\frac{(x-3)^1}{1!}53.95021+\frac{(x-3)^2}{2!}36.04979+\frac{(x-3)^3}{3!}11.95021$$
$$=54.04979+(53.95021x-161.85063)+(18.02490x^2-108.14937x+162.22406)$$
$$+(1.99170x^3-17.92532x^2+53.77595x-53.77595)$$
$$=0.64728-0.42321x+0.09958x^2-1.99170x^3$$

$$\therefore\ I=\int_2^4 (0.64783-0.42321x+0.09953x^2+1.99170x^3)dx$$
$$=\left[0.64728x-0.211605x^2+0.033193x^3+0.497925x^4\right]_2^4$$
$$=1.294560-2.539260+1.792422+119.502000=\underline{\underline{120.049722\ u^2}}$$

Para estimar el error se tiene

$$\varepsilon \doteq \int_2^4 \frac{(x-3)^4}{4!}0.04979\,dx=\frac{0.04979}{24}\int_2^4 (x^4-12x^3+54x^2-108x+81)\,dx$$
$$\doteq \frac{0.04979}{24}\left[\frac{x^5}{5}-3x^4+18x^3-54x^2+81x\right]_2^4$$
$$\doteq \frac{0.04979}{24}\left[\frac{992}{5}-3(240)+18(56)-54(12)+81(2)\right]$$
$$\doteq \frac{0.04979}{24}(198.4-720+1008-648+162)=\frac{0.04979\times 0.4}{24}=\underline{\underline{0.000830\ u^2}}$$

y la estimación del error relativo será $\varepsilon_{rel}=\frac{|0.000830|}{120.049722}=0.000007$
$$=\underline{\underline{0.0007\%}}$$

(Valor "real" $\doteq 120.117059\ u^2$)

V-10 MEZCLA DE PROPIEDADES DEL OPERADOR DE TAYLOR

1. Encuentre $\int_0^1 \left(\operatorname{Sen} 3x + \frac{6}{1-x}\right) dx$ a través de series de Taylor, limitando los desarrollos hasta x^3. Estime el error cometido.

Dato: $T\left[\frac{1}{1-x};0\right] = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$T\left[\operatorname{Sen} 3x + \frac{6}{1-x};0\right] = T[\operatorname{Sen} 3x;0] + 6\,T\left[\frac{1}{1-x};0\right]$$

Dado que $\operatorname{Sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \cdots$ y con $u = 3x$

$$\operatorname{Sen} 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} = 3x - \frac{9}{2}x^3$$

$$\therefore\ T[f(x);0] = 3x - \frac{9}{2}x^3 + 6(1 + x + x^2 + x^3) = 6 + 9x + 6x^2 + \frac{3}{2}x^3$$

$$\int_0^1 T[f(x);0]\,dx = \int_0^1 \left(6 + 9x + 6x^2 + \frac{3}{2}x^3\right) dx = \left[6x + \frac{9}{2}x^2 + 2x^3 + \frac{3}{8}x^4\right]_0^1$$

$$= 6 + 4.5 + 2.0 + 0.375 = 12.875\ u^2$$

Empleando el término en x^4 para estimar el error se tiene solamente

$$E_x = \int_0^1 6x^4\,dx = \left[\frac{6}{5}x^5\right]_0^1 = 1.2\ u^2.$$

El Seno no posee término en x^4.

$$E_{rel} = \frac{|1.2|}{12.875} = 0.0932 = 9.32\%$$

Analizando la aportación de la siguiente potencia (x^5) se tiene

$$\text{Incremento} = \int_0^1 \left(\frac{3x^5}{5!} + 6x^5\right) dx = \left[\frac{3}{6!}x^6 + x^5\right]_0^1 = 0.00417 + 1.0$$

$$= 1.00417\ u^2$$

Se observa que el error estimado por x^4 no se altera sensiblemente al no existir componente de x^4 en el desarrollo del Seno.

2. Calcular el operador de Taylor de 3er grado para $a=0$ de la función $f(x)=(1+x)^{3/2}$ y determinar la integral $\int_0^{0.1}(1+x)^{3/2}dx$.

Estimar el error cometido en la integral.

$$f(x) = (1+x)^{3/2} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2} \qquad f'(0)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-1/2} \qquad f''(0)=\frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8}(1+x)^{-3/2} \qquad f'''(0)=-\frac{3}{8}$$

para estimar el error.

$$f^{IV}(x) = \frac{9}{16}(1+x)^{-5/2} \qquad f^{IV}(0)=\frac{9}{16}$$

$$T_3\left[(1+x)^{3/2};0\right] = \frac{x^0}{0!}\cdot 1 + \frac{x^1}{1!}\cdot\frac{3}{2} + \frac{x^2}{2!}\,\frac{3}{4} + \frac{x^3}{3!}\left(-\frac{3}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$$

$$\therefore \int_0^{0.1}(1+x)^{3/2}dx = \int_0^{0.1}\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\right)dx = \left[x+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{64}x^4\right]_0^{0.1}$$

$$= 0.1 + \frac{3}{4}0.01 + \frac{1}{8}0.001 - \frac{1}{64}0.0001 = 0.10762344 \ u^2$$

Estimando el error

$$\mathcal{E}_I = \int_0^{0.1}\frac{x^4}{4!}\left(\frac{9}{16}\right)dx = \frac{3}{128}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{0.1} = \frac{3}{640}(0.1)^5 = 0.0046875(10^{-5})$$

$$= 4.6875\times 10^{-8} \ u^2$$

Horacio Sandoval R.

26

3. Calcular $\int_0^1 f(x)dx$ usando un operador de Taylor de 3er grado. Estimar el error cometido. $f(x)=(1+x)^{1/2}$

$f(x)=(1+x)^{1/2}$ $\qquad f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $\qquad f'(0)=1/2$

$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ $\qquad f''(0)=-1/4$

$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$ $\qquad f'''(0)=3/8$

para estimar el error se deriva una vez mas.

$f^{IV}(x)=\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$ $\qquad f^{IV}(0)=15/16$

$$\therefore T_3[f(x);0]=\sum_{k=0}^{3}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(0)=\frac{x^0}{0!}\cdot 1+\frac{x^1}{1!}(1/2)+\frac{x^2}{2!}(-\tfrac{1}{4})+\frac{x^3}{3!}(\tfrac{3}{8})$$

$$=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx \doteq \int_0^1 (1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3)dx=\left[x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{64}\right]_0^1$$

$$=1+0.250-0.041667+0.015625=1.223958\ u^2$$

y la estimación del error será:

$$E_x=\int_0^1\frac{x^4}{4!}\left(\frac{15}{16}\right)dx=\frac{15}{128}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=0.039063\ u^2$$

$$E_{rel}=\left|\frac{0.039063}{1.223958}\right|=0.0319=3.19\%$$

4. Calcular el operador de Taylor de 4º grado de la función $f(t) = \operatorname{Sen} t + e^{-t}$ y determinar el error cometido en el cálculo de la integral $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$.

Se sabe que $\operatorname{Sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$

y $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} - \dots$

$\therefore \quad T_4[\operatorname{Sen} t + e^{-t}] = \cancel{t} - \frac{t^3}{3!} + 1 - \cancel{t} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24}$

Integrando.

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24}\right) dt$$

$$= \left[t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{120}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= [1.57080 + 0.64596 - 0.50734 + 0.07969] = 1.78911\ u^2$$

Para estimar el error cometido, se tiene.

$$\varepsilon_I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{t^5}{5!} - \frac{t^5}{5!}\right) dt = 0$$

Dado que la suma de las potencias quintas de ambas series se cancelan y la estimación del error es cero, lo cual es falso, se considera la siguiente potencia, o sea t^6

$$\therefore \quad \varepsilon_I = \int_0^{\pi/2} \frac{t^6}{6!}\,dt = \left[\frac{t^7}{7!}\right]_0^{\pi/2} = \frac{(\pi/2)^7}{5040} = \frac{23.59601}{5040} = 0.00468$$

En esta 6ª potencia solo existe la aportación de e^{-t}.

$$\varepsilon_{rel} = \frac{0.00468}{1.78911} = 0.00262 = 0.262\%.$$

5. Aplicando las propiedades de la Serie de Taylor encuentre

$$I=\int_{-3}^{-1} 3e^{-2x^2}dx$$

Existen dos alternativas de resolver este problema
1) Apoyar la expansión en $x=0$ y tomar mas términos de la serie para lograr la aproximación deseada y
2) Apoyar la expansión en el punto medio del intervalo o en alguno de los extremos para que la aproximación del polinomio de Taylor tenga poco error en el extremo opuesto.

Empleando la segunda opción se tiene:

$$f(x) = 3e^{-2x^2} \qquad f(-2) = 0.001006$$

$$f'(x) = -12xe^{-2x^2} \qquad f'(-2) = 0.008051$$

$$f''(x) = 48x^2e^{-2x^2} - 12e^{-2x^2} = 12e^{-2x^2}(4x^2-1) \qquad f''(-2) = 0.060383$$

$$f'''(x) = -192x^3e^{-2x^2} + 144xe^{-2x^2} = 48xe^{-2x^2}(-4x^2+3) \qquad f'''(-2) = 0.418657$$

$$T[f(x);-2] = \frac{(x+2)^0}{0!}0.001006 + \frac{(x+2)^1}{1!}0.008051 + \frac{(x+2)^2}{2!}0.060383 + \frac{(x+2)^3}{3!}0.418657$$

$$= 0.001006 + 0.008051x + 0.016102 + 0.030192x^2 + 0.120767x + 0.120767 +$$

$$+ 0.069776x^3 + 0.418657x^2 + 0.837315x + 0.558210$$

$$= 0.696085 + 0.966133x + 0.448849x^2 + 0.069776x^3$$

$$\therefore \int_{-3}^{-1} f(x)dx = \int_{-3}^{-1}(0.696085 + 0.966133x + 0.448849x^2 + 0.069776x^3)dx$$

$$= \left[0.696085x + 0.483065x^2 + 0.149616x^3 + 0.017444x^4\right]_{-3}^{-1}$$

$$= 0.696085(2) + 0.483065(-8) + 0.149616(26) + 0.017444(-80) = \underline{\underline{0.022146\,u^2}}$$

Usando $f^{IV}(x) = 48e^{-2x^2}[16x^4 - 24x^2 + 3]$ $\qquad f^{IV}(-2) = 2.624660$

$$\Delta_I = \int_{-3}^{-1}\frac{(x+2)^4}{4!}(2.624660)dx = 0.109351\int_{-3}^{-1}(x+2)^4dx = 0.109361(0.4)$$

$$= \underline{0.043744} \text{ unidades}^2$$

por tanto $I = 0.022146 + 0.043744 = \underline{\underline{0.065890\,u^2}}$

Usando $f^{V}(x) = 192e^{-2x^2}[-16x^5 + 40x^3 - 15x]$ $\qquad f^{V}(-2) = 14.298759$

$$\Delta_I = \int_{-3}^{-1}\frac{(x+2)^5}{5!}14.298759\,dx = 0.119156\int_{-3}^{-1}(x+2)^5dx = 0.119156(0.0) = \underline{0.0}$$

por tanto $I = 0.065890 + 0.0 = \underline{\underline{0.065890}}\ u^2$

Usando $f^{VI}(x) = 192 e^{-2x^2}\left[64x^6 - 96x^4 + 126x^2 - 15\right]$ $\qquad f^{VI}(-2) = 196.382506$

$$\Delta_I = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+2)^6}{6!} 196.382506\, dx = 0.272753 \int_{-3}^{-1} (x+2)^6 dx = 0.272753\left(\tfrac{2}{7}\right) = \underline{0.077930}\ u^2$$

por tanto $I = 0.065890 + 0.077930 = \underline{\underline{0.143820}}$ unidades^2

Usando $f^{VII}(x) = 1536 e^{-2x^2}(-32x^7 + 96x^5 - 111x^3 + 39x)$ $\qquad f^{VII}(-2) = \underline{\underline{945.006274}}$

$$\Delta_I = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+2)^7}{7!}(945.006274)\, dx = 0.187501 \int_{-3}^{-1} (x+2)^7 dx = 0.187501(0.0) = \underline{\underline{0.0}}\ u^2$$

por tanto $I = 0.143820 + 0.0 = \underline{\underline{0.143820}}\ u^2$

Usando $f^{VIII}(x) = 1536 e^{-2x^2}(128x^8 - 608x^6 + 924x^4 - 489x^2 + 39)$

$$f^{VIII}(-2) = -13{,}288.32382$$

$$\Delta_I = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+2)^8}{8!}(-13{,}288.32382)\, dx = -0.329572 \int_{-3}^{-1} (x+2)^8 dx = -0.329572\left(\tfrac{2}{9}\right)$$

$$= \underline{-0.073238}\ u^2$$

por tanto $I = 0.143820 - 0.073238 = \underline{\underline{0.070582}}\ u^2.$

Observe que la serie tiene convergencia muy lenta, además de que los términos que se agregan tienen signos alternantes (0.043, 0.00, 0.077, 0.00, -0.073, etc), la convergencia será más fuerte cuando el factorial del denominador de la serie de Taylor sea dominante en los siguientes sumandos.

Aplicando Integración numérica (Simpson 1/3 con $h = 0.25$) se tiene que $I = 0.085722678\ u^2. = 0.0857\ u^2?$

6. Obtener $T_2[\,Sen(e^{sen x}) : 0\,]$ y $\int_0^1 Sen(e^{sen x})dx$.

$$f(x) = Sen(e^{sen x})$$

$$f'(x) = Cos(e^{sen x})\, e^{sen x} Cos\,x$$

$$f''(x) = Cos(e^{sen x})\, e^{sen x}[Cos^2x - Sen\,x] - Sen(e^{sen x})\, e^{2 sen x} Cos^2 x$$

valuando en $x=0$

$$f(0) = 0.84147 \qquad f'(x) = 0.54030 \qquad f''(x) = -0.30117$$

$$T_2[\,f(x); 0\,] = \frac{x^0}{0!}0.54147 + \frac{x^1}{1!}0.54050 + \frac{x^2}{2}(-0.30117)$$

$$= 0.84147 + 0.54050x - 0.15058x^2$$

$$I = \int_0^1 (0.84147 + 0.54050x - 0.15053x^2)\,dx$$

$$= \left[0.54147x + 0.27025x^2 - 0.05019x^3\right]_0^1$$

$$= 0.84147 + 0.27025 - 0.05019 = 1.06153\ u^2$$

El valor ideal para desarrollar el polinomio de Taylor es $x=a=0.5$, sin embargo para simplificar el ejemplo se usó $x=0$.

V-10 Continuación.-

7.- El departamento de producción de la compañía ALFA ha determinado que el pronóstico de ventas de uno de sus productos en el mercado se comporta de acuerdo a la siguiente función:

$$f(t) = 10^6 \ln \left| \tfrac{1}{2} + t \right| \text{ [pesos]}$$

donde la variable t representa el tiempo en años. Determinar:

a) El polinomio de Taylor de grado quinto de la función, en el entorno del punto $a = \frac{1}{2}$ año.

$$P_5(t) = 10^6 \left[f(1/2) + (t - 1/2) f'(1/2) + \frac{(t-1/2)^2}{2!} f''(1/2) + \right.$$
$$\left. + \frac{(t-1/2)^3}{3!} f'''(1/2) + \frac{(t-1/2)^4}{4!} f^{IV}(1/2) + \frac{(t-1/2)^5}{5!} f^{V}(1/2) \right]$$

$f(t) = \ln \lvert 1/2 + t \rvert$	$f(1/2) = 0$
$f'(t) = (1/2 + t)^{-1}$	$f'(1/2) = 1$
$f''(t) = -(1/2 + t)^{-2}$	$f''(1/2) = -1$
$f'''(t) = 2(1/2 + t)^{-3}$	$f'''(1/2) = 2$
$f^{IV}(t) = -6(1/2 + t)^{-4}$	$f^{IV}(1/2) = -6$
$f^{V}(t) = 24(1/2 + t)^{-5}$	$f^{V}(1/2) = 24$

$$P_5(t) = \left[-1/2 + t - \frac{(t-1/2)^2}{2} + \frac{(t-1/2)^3}{3} - \frac{(t-1/2)^4}{4} + \frac{(t-1/2)^5}{5} \right] 10^6$$

b) Las ventas para $t = 9$ meses, utilizando la función $f(t)$

9 meses $= 0.75$

$f(0.75) = (\ln |1.25|)(10^6) = 223\,143.5513$

c) Las ventas para $t = 9$ meses, utilizando el polinomio de Taylor del inciso (a)

$P_5(0.75) = 223{,}177.0833$

V-10 Continuación -

8.- Una partícula dentro de un fluido describe una trayectoria dada por la función:

$$f(t) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t + \cos \tfrac{1}{2} t$$

Obtener:

a) El polinomio de Taylor de séptimo grado que representa a la función $f(t)$ en el entorno del punto $a=0$

$f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$f(0) = 0$
$f'(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} t$	$f'(0) = \frac{1}{2}$
$f''(t) = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$f''(0) = 0$
$f'''(t) = -\frac{1}{8} \cos \frac{1}{2} t$	$f'''(0) = -\frac{1}{8}$
$f^{IV}(t) = \frac{1}{16} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$f^{IV}(0) = 0$
$f^{V}(t) = \frac{1}{32} \cos \frac{1}{2} t$	$f^{V}(0) = \frac{1}{32}$
$f^{VI}(t) = -\frac{1}{64} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$f^{VI}(0) = 0$
$f^{VII}(t) = -\frac{1}{128} \cos \frac{1}{2} t$	$f^{VII}(0) = -\frac{1}{128}$
$g(t) = \cos \frac{1}{2} t$	$g(0) = 1$
$g'(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$g'(0) = 0$
$g''(t) = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} t$	$g''(0) = -\frac{1}{4}$
$g'''(t) = \frac{1}{8} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$g'''(0) = 0$
$g^{IV}(t) = \frac{1}{16} \cos \frac{1}{2} t$	$g^{IV}(0) = \frac{1}{16}$
$g^{V}(t) = -\frac{1}{32} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$g^{V}(0) = 0$
$g^{VI}(t) = -\frac{1}{64} \cos \frac{1}{2} t$	$g^{VI}(0) = -\frac{1}{64}$
$g^{VII}(t) = \frac{1}{128} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$	$g^{VII}(0) = 0$

$$T_7 [\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t] = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{IV}(0) +$$

$$+ \frac{x^5}{5!} f^{V}(0) + \frac{x^6}{6!} f^{VI}(0) + \frac{x^7}{7!} f^{VII}(0)$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{48} x^3 + \frac{1}{3840} x^5 - \frac{1}{645120} x^7$$

$$T_7 [\cos \tfrac{1}{2} t] = g_0 + x g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(0) + \frac{x^3}{3!} g'''(0) + \frac{x^4}{4!} g^{IV}(0) +$$

$$+ \frac{x^5}{5!} g^{V}(0) + \frac{x^6}{6!} g^{VI}(0) + \frac{x^7}{7!} g^{VII}(0) = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} - \frac{x^6}{46080}$$

$$\therefore P_7(t) = 1 + \tfrac{1}{2} x - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{[illegible]} + \frac{x^4}{[illegible]} + \frac{x^5}{[illegible]} - \frac{x^6}{46080} - \frac{x^7}{645120}$$

b) El Polinomio de Taylor de 6° grado que representa la velocidad de la Partícula

$$V(t) = P_6(t) - \frac{d}{dt} P_7(t) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{96} + \frac{x^4}{[illegible]} - \frac{[illegible]}{7680} - \frac{x^6}{92160}$$

Cont. problema 9.

resolviendo los integrales:

$$\int_1^2 e^{x^2}dx = 0.3678794 - 0.3678795 + 0.1226313 + 0.0613133 - 0.0731324 + 0.0040872 + 0.0134305 - 0.0042335 + 0.0074533 + 0.0010868 - 0.0002556 - 0.0001496 + 0.0000357$$

$$= 0.1322669\, u^2$$

$$\therefore \int_1^2 e^{-x^2}dx = 0.1322669 \quad u^2$$

El valor obtenido por Simpson 1/3 con $h=0.125$ es

$I = 0.13525427 6. \quad u^2$

V-11 Polinomios de Taylor de Funciones con dos o más variables.

1.- Obtener T_3 $[f(x,y); 1, \pi/2]$ donde

$$f(x,y) = xy^2 + \operatorname{Sen} xy$$

$f = xy^2 + \operatorname{Sen} xy$	$\pi^2/4 + 1$
$f_x = y^2 + y \cos xy$	$\pi^2/4$
$f_y = 2xy + x \cos xy$	π
$f_{xx} = -y^2 \operatorname{Sen} xy$	$-\pi^2/4$
$f_{xy} = 2y - xy \operatorname{Sen} xy + \cos xy$	$\pi/2$
$f_{yy} = 2x - x^2 \operatorname{Sen} xy$	1
$f_{xxx} = -y^3 \cos xy$	0
$f_{xxy} = -y^2 x \cos xy - 2y \operatorname{Sen} xy$	$-\pi$
$f_{yyx} = 2 - x^2 y \cos xy - 2x \operatorname{Sen} xy$	0
$f_{yyy} = -x^3 \cos xy$	0

$$f(x,y) = \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right) + (x-1)\frac{\pi^2}{4} + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)\pi + \frac{(x-1)^2}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\,2(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2(1) + \frac{1}{6}(x-1)^3(0) + \frac{3}{6}(x-1)^2\left(y-\frac{\pi}{2}\right)(-\pi) +$$

$$+ \frac{3}{6}(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2(0) + \frac{1}{6}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^3(0)$$

$$f(x,y) = 1 - \frac{\pi^2}{4}x - \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi^2}{8}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 3\frac{\pi}{2}xy - \frac{\pi}{2}x^2 y$$

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS
Honorio Sandoval

39
gultim

V-12 Preguntas conceptuales o de opción múltiple.

Indique en qué caso existe, y en cuáles no, el desarrollo en Serie de Taylor ó de McLaurin

	Existe	No Existe
$T\{\operatorname{sen} x\,;\ \pi\}$	(x)	( )
$T\{\operatorname{Tan} x\,;\ \pi/2\}$	( )	(x)
$T\{e^x\,;\ -e\}$	(x)	( )
$T\{\ln x\,;\ e\}$	(x)	( )
$T\{\frac{1}{5+x}\,;\ -5\}$	( )	(x)
$T\{\log_{10}\,;\ 0\}$	( )	(x)
$T\{\frac{e^x}{x+1}\,;\ -1\}$	( )	(x)

FACULTAD DE INGENIERIA
ESTE LIBRO NO SALE
DE LA BIBLIOTECA
"Mtro. Enrique Rivero Borrell"