Problemario de Métodos Numéricos

Cap. VI

CAPITULO VI

En el presente capítulo se siguen las normas y características indicadas en la introducción del tema Análisis Combinatorio y Teoría del Binomio (Capítulo I del problemario), por lo que aquí no se repiten.

Este capítulo posee 95 problemas, los cuales están clasificados en cinco rubros, que son:

1) Derivación
2) Integración
3) Interpolación
4) Mezcla de derivación, integración e interpolación
5) Preguntas conceptuales

Dadas las características intrínsecas de los temas, la cantidad de problemas de aplicación es grande, aunque en la gran mayoría de los casos sean simplificaciones de problemas más cercanos a la realidad.

Se reitera a los usuarios que será bienvenida cualquier aportación o comentarios acerca del PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS, y se les pide hacerlos llegar a la coordinación o asesoría de Métodos Numéricos o al cubículo D-8 en la División de Ciencias Básicas.

Se agradece a Martha Ruth Trujillo Pineda, Alejandro Gómez Moctezuma y Roberto Hernández Guzmán su gran participación en la elaboración del presente capítulo.

Atentamente

M. en I. Horacio Sandoval Rodríguez

Problemario Métodos Numéricos
Martha R. Pineda Trujillo
Horacio Sandoval

1

1) Con los siete puntos indicados obtener la primera derivada mediante $f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1})$ $\forall i+1$

x	f(x)	f'(x)
0	0	—
1	-1	-1.5
2	-3	-1.3
3	-3.6	0.4
4	-2.2	1.8
5	0	1.1
6	0	—

Para $x=1$

$$f' = \frac{1}{2(1)}\{-3-0\} = -1.5$$

Para $x=2$

$$f' = \frac{1}{2(1)}\{-3.6+1\} = -1.3$$

Para $x=3$

$$f' = \frac{1}{2(1)}\{-2.2+3\} = 0.4$$

Para $x=4$

$$f' = \frac{1}{2(1)}\{0+3.6\} = 1.8$$

Para $x=5$

$$f' = \frac{1}{2(1)}\{0-(-2.2)\} = 1.1$$

No se define la derivada para $x=0$ y $x=6$ con el esquema dado.

Procedimientos Numéricos

M. Ma. D. Pineda T.

Horario Sabatino

2) A partir de un polinomio de Newton de 2º grado obtenga una fórmula de la primera derivada en $x=x_2$.

Sea $\quad f(x) = y_0 + k\,\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

aplicando la regla de la cadena y derivando respecto a k en primer lugar y después multiplicando por la derivada de k respecto a x se tiene

$$k = \frac{x-x_0}{h} \qquad \therefore \quad \frac{dk}{dh} = \frac{1}{h}$$

y $\qquad \Delta y_0 = y_1 - y_0 \quad ; \quad \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dk}\cdot\frac{dk}{dx} = \left[\Delta y + \frac{2k-1}{2}\,\Delta^2 y_0\right]\cdot\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{2h}\left[2y_1 - 2y_0 + (2k-1)(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2h}\left[y_0(-2+2k-1) + y_1(2-4k+2) + y_2(2k-1)\right]$$

considerando $x=x_2 \;\therefore\; x_2 = x_0 + 2h$ y $k = \frac{x_0+2h-x_0}{h} = 2$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{2h}\left[y_0 - 4y_1 + 3y_2\right] = \frac{1}{2h}\left[f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i\right]$$

Siendo una formula de diferencias hacia atrás.

3) Dada la función $f(x) = 3xe^x - \cos x$ determinar una aproximación de la segunda derivada de la función en el punto 1.30 con $h = 0.1$ y $h = 0.01$ a partir de los datos dados a continuación.

X	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
f(x)	11.59056	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

a).- Para $h = 0.1$ y usando

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right]$$

$\frac{1.30 - 1.20}{.1}$ = 1

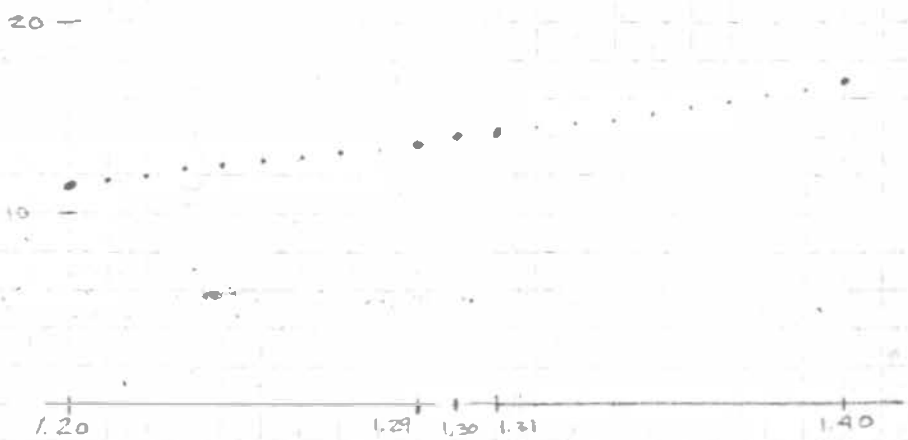
$$y'' = \frac{1}{0.01}\left\{11.59006 - 2(14.04276) + 16.86187\right\}$$

$$\boxed{y'' = 36.641}$$

b).- Para $h = 0.01$

$$y'' = \frac{1}{0.0001}\left\{13.78176 - 2(14.04276) + 14.30741\right\}$$

$$\boxed{y'' = 36.500}$$



[illegible] Numéricos

[illegible] Sánchez

4) Calcular la primera y segunda derivadas de la función definida por la tabla siguiente en los valores indicados

a) Primera derivada para x = 2, 4, 6;

c) Segunda derivada para x = 3 y 5

x	f(x)
2	[illegible]036
3	2.[illegible]
4	2.[illegible]08
5	3.[illegible]
6	3.5553

$f'(2) = \frac{1}{2h}[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}] = \frac{1}{2}[-3(1.09[illegible]) + 4(2.[illegible]) - (2.[illegible])]$

$= 1.1560$

$f'(4) = \frac{1}{2h}[-f_{i-1} + f_{i+1}] = \frac{1}{2}[-2.0[illegible] + 3.[illegible]] = 0.5[illegible]$

$f'(6) = \frac{1}{2h}[f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i] = \frac{1}{2}[2.[illegible] - 4(3.1[illegible]) + 3(3.5553)] = 0.3308$

$f''(3) = \frac{1}{h^2}[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}] = \frac{1}{1}[1.0986 - 2(2.0794) + (2.[illegible])] = 0.3521$

$f''(5) = \frac{1}{h^2}[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}] = \frac{1}{1}[(2.[illegible]) - 2(3.[illegible]) + 3.5553] = -0.[illegible]$

En cualquiera de los cinco casos anteriores pueden usarse otros esquemas de derivación.

Se recomienda que cuando sea posible se empleen fórmulas de diferencias centrales.

Problemario Métodos Numéricos
Martha R. Pineda T.
Horacio Sandoval

5

5) Calcular $\frac{dy}{dx}$ usando el esquema $f_i' = \frac{1}{2h}(-f_{i-1} - 0f_i + f_{i+1})$ para los puntos dados en la siguiente tabla, o sea $x = 0, 1, 2, 3$ y 4

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	—
1	-5	-2.5
2	-5	2.5
3	0	7.5
4	10	—

Para $x = 1$

$$f_1' = \frac{1}{2}(-0-5) = -2.5$$

Para $x = 2$

$$f_2' = \frac{1}{2}(-(-5)+0) = 2.5$$

Para $x = 3$

$$f_3' = \frac{1}{2}(-(-5)+10) = 7.5$$

Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ usando el esquema $f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$ para los mismos puntos que en el ejercicio previo.

Para $x = 1$

$$f_1'' = \frac{1}{(1)^2}\{0 - 2(-5) - 5\} = 5$$

Para $x = 2$

$$f_2'' = \frac{1}{(1)^2}\{-5 - 2(-5) + 0\} = 5$$

Para $x = 3$

$$f_3'' = \frac{1}{(1)^2}\{-5 - 2(0) + 10\} = 5$$

X	f(x)	f''(x)
0	0	—
1	-5	5
2	-5	5
3	0	5
4	10	—

En ambos casos no se define la derivada para $x=0$ y $x=4$.

Problemas Métodos Numéricos
Martha C. Pineda T.
Horacio Sandoval

6) Calcular $\frac{dy}{dx}$ usando el esquema $f_i' = \frac{1}{2h}(-f_{i-1} + 0f_i + f_{i+1})$ para los puntos dados o sea $x = 0, 1, 2, 3$ y 4

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	—
1	-1.25	0
2	0	5/2
3	3.75	5
4	10	—

Para $x=1$

$f_1' = \frac{1}{2}(-0+0) = 0$

Para $x=2$

$f_2' = \frac{1}{2}[-(-1.25)+3.75] = 5/2$

Para $x=3$

$f_3' = \frac{1}{2}[-0+10] = 5$

Con el esquema indicado no se definen los valores f_0' y f_4'

Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ usando el esquema $f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$ para los puntos dados en $x = 0, 1, 2, 3$ y 4.

x	$f(x)$	$f''(x)$
0	0	—
1	-1.25	2.5
2	0	2.5
3	3.75	2.5
4	10	—

Para $x=1$

$f_1'' = \{0 - 2(-1.25) + 0\} = 2.5$

Para $x=2$

$f_2'' = \{-1.25 - 2(0) + 3.75\} = 2.5$

Para $x=3$

$f_3'' = \{0 - 2(3.75) + 10\} = 2.5$

Con el esquema indicado no se definen los valores f_0'' y f_4''

7

7) [illegible] los [illegible] de la Vel (v) [illegible] que [illegible] al llegar [illegible] (t). [illegible] para los instantes $t = 15$, $t = 20$ seg [illegible]

5	3.6[illegible]3
[illegible]	4.[illegible]
[illegible]	[illegible]
20	2.[illegible]
25	2.[illegible]412
30	1.[illegible]42

$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ $r = 5$

a) Para $t = 15$ seg [illegible]

$$\frac{15-10}{5} = 1$$

$$\cancel{\frac{15-5}{5} = 2}$$

$a = \frac{1}{6h}$ [illegible]

$\boxed{a = -0.1[illegible]4 \ m/s^2}$

b) Para $t = 20$ seg

$a = \frac{1}{30}$ [illegible]

$\boxed{a = -0.[illegible]4}$

[illegible] R. Trujillo Paz Horario [illegible]

5) La siguiente tabla muestra la posición de un proyectil en los instantes marcados. Calcular a) La velocidad del proyectil para $t = \pi,\ \pi/2$ y $\pi/4$

b) La aceleración del proyectil para $t = 3\pi/4$ y $\pi/2$

$t(s)$	$x(m)$
π	0.106
$3\pi/4$	0.238
$\pi/2$	0.397
$\pi/4$	0.604
0	1.000

Invirtiendo la tabla para tener valores crecientes de t se tiene

t (seg)	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
x (m)	1.000	0.604	0.397	0.238	0.106

$\therefore h = \frac{\pi}{4}$

$$v_{\pi/4} = \frac{1}{2h}\left[-f_{i-1} + f_{i+1}\right] = \frac{4}{2\pi}\left[-1.000 + 0.397\right] = -0.3839 \text{ m/seg}$$

$$v_{\pi/2} = \frac{1}{2h}\left[-f_{i-1} + f_{i+1}\right] = \frac{4}{2\pi}\left[-0.604 + 0.238\right] = -0.2330 \text{ m/seg}$$

$$v_{\pi} = \frac{1}{2h}\left[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}\right] = \frac{4}{2\pi}\left[3(0.106) - 4(0.238) + (0.397)\right] = -0.1509 \text{ m/seg}$$

$$a_{3\pi/4} = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right] = \frac{16}{\pi^2}\left[0.397 - 2(0.238) + 0.106\right] = 0.0438 \text{ m/seg}^2$$

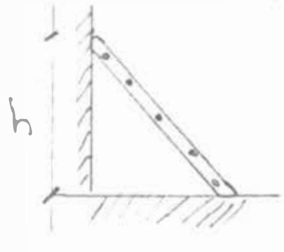
$$a_{\pi/2} = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right] = \frac{16}{\pi^2}\left[0.604 - 2(0.397) + 0.238\right] = 0.0778 \text{ m/seg}^2$$

En las aceleraciones y en las dos primeras velocidades se usó diferencias centrales, en la tercera velocidad se usó diferencias hacia atrás.

En todos los casos se apoya la derivación en polinomios de 2º grado.

9) Una escalera se encuentra apoyada como se muestra en la figura. En el tiempo cero empieza a resbalar disminuyendo la altura del extremo superior, basandose en la siguiente tabla calcular la velocidad y la aceleración del extremo superior cuando $t=4$ y $t=8$ seg.

t(s)	h(m)
0	15
2	13
4	9
6	5
8	2
10	0



Para $t=4$ seg

$$v_i = \frac{1}{2h}(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}) = \frac{1}{2\cdot 2}\left[-3(9)+4(5)-(2)\right] = -\frac{9}{4} = -2.25\ m/seg$$

$$a_i = \frac{1}{h^2}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}) = \frac{1}{2^2}\left[(9)-2(5)+(2)\right] = \frac{1}{4} = 0.25\ m/seg^2$$

Para $t = 8$ seg

$$v_i = \frac{1}{2h}(3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) = \frac{1}{2\cdot 2}\left[3(2)-4(5)+(9)\right] = \frac{-5}{4} = -1.25\ m/s$$

$$a_i = \frac{1}{h^2}\left[-f_i + 2f_{i-1} - f_{i-2}\right] = \frac{1}{2^2}\left[-(2)+2(5)-(9)\right] = \frac{-1}{4} = -0.25\ m/s^2$$

En este ejemplo se usaron diferencias hacia adelante en $t=4$ seg y diferencias hacia atrás en $t=8$ seg.

Un pistón se mueve registrando los siguientes valores de velocidad en diferentes tiempos

t(seg)	1	1.57	2.14	2.71	3.28
v(m/s)	0.84	1	0.34	0.42	-0.14

¿Cuál es el valor de la aceleración para $t = 1.57$m?

$$a = v'(1.57) = \frac{1}{6(0.57)}\left(-2(0.34) - 3 + 6(0.84) - 0.42\right)$$

$$\boxed{a(1.57) = -0.0175\ m/s^2}$$

Martha E. Trujillo P.
Horacio Sandoval

10) Dados los datos de la siguiente tabla calcular la primera derivada apoyados en polinomios de 1º, 2º, 3º y 4º para los puntos $x=-0.3$ y $x=0.0$

x	$f(x)$
-0.3	2.473
-0.2	1.992
-0.1	1.499
0.0	1.000
0.1	0.501
0.2	0.008
0.3	0.473

• Para $x=-0.3$ se tiene

$$f'(-0.3)=\frac{1}{h}\left[f_{i+1}-f_i\right]=\frac{1}{0.1}\left[1.992-2.473\right]=-4.810 \quad P_1(x)$$

$$f'(-0.3)=\frac{1}{2h}\left[-3f_i+4f_{i+1}-f_{i+2}\right]=\frac{1}{0.2}\left[-3(2.473)+4(1.992)-(1.499)\right]=-4.750 \quad P_2(x)$$

$$f'(-0.3)=\frac{1}{6h}\left[-11f_i+18f_{i+1}-9f_{i+2}+2f_{i+3}\right]=\frac{1}{0.6}\left[-11(2.473)+18(1.992)-9(1.499)+2(1.000)\right]=-4.730 \quad P_3(x)$$

$$f'(-0.3)=\frac{1}{12h}\left[-25f_i+48f_{i+1}-36f_{i+2}+16f_{i+3}-3f_{i+4}\right]=\frac{1}{1.2}\left[-25(2.473)+48(1.992)-36(1.499)+16(1.000)-3(0.50\ldots\right.$$

$$=-4.730 \quad P_4(x)$$

Para $x=0$ se tiene.

$$f'(0.0)=\frac{1}{2h}\left[-f_{i-1}+0f_i+f_{i+1}\right]=\frac{1}{0.2}\left[-1.499+0.501\right]=-4.990 \quad P_1(x)$$

$$f'(0.0)=\frac{1}{6h}\left[-2f_{i-1}-3f_i+6f_{i+1}-f_{i+2}\right]=\frac{1}{0.6}\left[-2(1.499)-3(1.0)+6(0.501)-(0.008)\right]=-5.000 \quad P_3(x)$$

$$f'(0.0)=\frac{1}{12h}\left[f_{i-2}-8f_{i-1}+0f_i+8f_{i+1}-f_{i+2}\right]=\frac{1}{1.2}\left[(1.992)-8(1.499)+8(0.501)-(0.008)\right]=-5.000 \quad P_3(x)$$

$$f'(0.0)=\frac{1}{12h}\left[-3f_{i-1}-10f_i+18f_{i+1}-6f_{i+2}+f_{i+3}\right]=\frac{1}{1.2}\left[-3(1.499)-10(1.0)+18(0.501)-6(0.008)+(0.473)\right]$$

$$=-4.212 \quad P_4(x)$$

Para $x=0.3$ se usaron diferencias hacia adelante y para $x=0.0$ se trató de usar diferencias centrales. La variación en la pendiente para ambos puntos consiste en que la función "aproximada" o ajustada es diferente en cada caso.

11) Calcular la primera y segunda derivadas de la función definida por la siguiente tabla para los valores $x = -0.4, 0.2$ y 0.6

x	y
0.6	0.4573
0.4	0.6827
0.2	0.9720
0.0	1.3333
-0.2	1.7747
-0.4	2.3040
-0.6	2.9293

Reordenando la tabla tenemos:

x	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
y	2.9293	2.3040	1.7747	1.3333	0.9720	0.6827	0.4573

Para la 1ª Derivada

$$y'(-0.4) = \frac{1}{2h}\left(-f_{i-1} + f_{i+1}\right) = \frac{1}{2(0.2)}\left[-2.9293 + 1.7747\right] = -2.8865$$

$$y'(0.2) = \frac{1}{2(0.2)}\left[-1.3333 + 0.6827\right] = -1.6265$$

$$y'(0.6) = \frac{1}{2h}\left[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}\right] = \frac{1}{2(0.2)}\left[3(0.4573) - 4(0.6827) + 0.9720\right] = -0.76725$$

Para la 2ª Derivada

$$y''(-0.4) = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right] = \frac{1}{(0.2)^2}\left[\overset{y_1}{2.9293} - 2(2.3040) + 1.7747\right] = 2.4000$$

$$y''(0.2) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[1.3333 - 2(0.9720) + 0.6827\right] = 1.8000$$

$$y''(0.6) = \frac{1}{h^2}\left[2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right]$$

$$= \frac{1}{(0.2)^2}\left[2(\overset{y_0}{0.4573}) - 5(\overset{y_1}{0.6827}) + 4(\overset{y_2}{0.9720}) - \overset{y_3}{1.3333}\right] = 1.3950$$

Para $x=0.6$ en la primera derivada se intercambian los índices en la vecindad del punto de $i+k$ a $i-k$ y también se cambian los signos del coeficiente. En la segunda derivada por ser de orden par sólo se intercambian los índices y los signos de los coeficientes permanecen igual.

12) Dada la función $f(x) = 2^x \cos x$ calcule numéricamente $f'(1.05)$ con la fórmula que se ajuste mejor a los datos que se dan a continuación 12

x	1.00	1.04	1.06	1.10
$f(x)$	1.0306	1.0409	1.0193	0.9725

Calculando $f(x)$ en el punto requerido y en la vecindad se tiene

x	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08
$f(x)$	1.0613	1.0513	1.0409	1.0302	1.0193	1.0080	0.9964
Δ	-0.0100	-0.0104	-0.0107	-0.0109	-0.0113	-0.0116	
Δ^2	-0.0004	-0.0003	-0.0002	-0.0004	-0.0003		
Δ^3	0.0001	0.0001	-0.0002	0.0001			
Δ^4	0.0000	-0.0003	0.0003				

Se aprecia en la tabla de diferencias que Δ tiene un valor más o menos constante, y que Δ^2 da valores muy pequeños y casi iguales. En Δ^3 la igualdad es total, menos en un valor. En Δ^4 los valores empiezan a crecer, pero siguen siendo pequeños en comparación de Δ. Aceptando que existe error, se puede considerar como bueno un polinomio de 2º grado. Obviamente será mejor uno de 3º, y aún superior uno de 4º, etc, pero considerando los valores de la tabla y la aproximación requerida [illegible] los errores serán sensiblemente parecidos y los valores de $f'(1.05)$ también.

Tomando un esquema de diferencias para adelante basado en un polinomio de 2º grado se tiene

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right)$$

$$f'(1.5) = \frac{1}{2(0.01)}\left[-3(1.0302) + 4(1.0193) - 1.0080\right] = -1.0700$$

Con diferencias hacia atrás

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}\right] = \frac{1}{2(0.01)}\left[3(1.0302) - 4(1.0409) + (1.0513)\right] = -1.0850$$

El valor "real" es $f'(1.05) = -1.0519$.

Respuestas Métodos Numéricos
Martín E. Trujillo P.
Horacio Sandoval R.

13) Los Datos de la tabla nos indican la energía interna de una sustancia (u) al aumentar la entropía (s). Si se define a la temperatura como a la derivada de la energía interna con respecto a la entropía a volumen cte. calcular: $T(-0.6)$, $T(-0.4)$, $T(-0.2)$ y $T(-0.1)$

s	u
−0.6	0.6081
−0.5	0.5303
−0.4	0.5050
−0.3	0.5251
−0.2	0.5961
−0.1	0.7389
0	1
1	1.4777

$F(s) = a$
$u' = t$

$$\frac{du}{ds} = T$$

Usando $f_i' = \frac{1}{6h}\left[-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}\right]$

Para $T(-0.6)$

$$u' = \frac{1}{6(0.1)}\left(-11(0.6081) + 18(0.5303) - 9(0.505) + 2(0.5251)\right)$$

$$\boxed{y'(-0.6) = -1.0641667}$$

Para $T(-0.4)$ y $f_i' = \frac{1}{6h}\left[-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}\right]$

$$y' = \frac{1}{0.6}\left(-2(0.5303) - 3(0.505) + 6(0.5251) - 0.5961\right) = \boxed{-0.0351667}$$

Para $T(-0.2)$

$$y' = \frac{1}{0.6}\left(-2(0.5251) - 3(0.5961) + 6(0.7389) - 1\right) = \boxed{0.9915}$$

Para $T(-0.1)$

$$y' = \frac{1}{0.6}\left(-2(0.5961) - 3(0.7389) + 6(1) - 1(1.4777)\right) = \boxed{1.35566}$$

Para $T(-0.6)$ fue necesario emplear una aproximación de diferencias hacia adelante. En todos los casos se usó un polinomio de tercer orden.

Rubén R. Trujillo [illegible] Sandoval

19) Un submarino enemigo dispara un proyectil y por medio del radar se detecta que a los 2 seg ha recorrido 4 metros, debido al choque con el agua. A los 4 segs deja el agua y ha recorrido 56 metros. A los 6, 8 y 10 segs ha recorrido 204, 496 y 980 metros respectivamente.

Se requiere conocer su velocidad y aceleración en el momento de dejar el agua y a los 10 segs de haberse disparado.

Tabulando los datos se tiene

t (seg)	0	2	4	6	8	10
d (m)	0	4	56	204	496	980

Como se solicita la velocidad instantánea en t=4 y en este punto se unen dos medios diferentes (agua y aire) la mejor opción es emplear igual número de datos para ..., que éstos se encuentran a ambos lados ..., es decir, se aplica en la ... centrales

$$v(4) = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right) = \frac{1}{2\cdot 2}\left[-4 + 204\right] = 50 \text{ m/seg}.$$

$$a(4) = \frac{1}{h^2}\left(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right) = \frac{1}{2^2}\left[4 - 2(56) + 204\right] = 24 \text{ m/seg}^2$$

Para t=10 sólo pueden aplicarse fórmulas de diferencias hacia atrás

$$v(10) = \frac{1}{6h}\left[11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}\right] = \frac{1}{6\cdot 2}\left[11(980) - 18(496) + 9(204) - 2(56)\right]$$

$$= 298 \text{ m/seg}$$

$$a(10) = \frac{1}{h^2}\left[2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right] = \frac{1}{2^2}\left[2(980) - 5(496) + 4(204) - (56)\right]$$

$$= 60 \text{ m/seg}^2$$

Hay que recordar que al obtener la ecuación de diferencias hacia atrás a partir de su equivalente de diferencias hacia adelante, los coeficientes cambian de signo si se trata de derivadas impares (1ª, 3ª etc.) y se mantienen los mismos signos si se trata de derivadas pares (2ª, 4ª, etc).

Martha R. Trujillo P.
Horacio Santander R.

15)

Para la función definida por la siguiente tabla:

x	$y=f(x)$ $=(x)^{x^2}$
0.2	0.938
0.4	0.864
0.6	0.832
0.8	0.867
1.0	1.000
1.2	1.300

Calcular:

a) La primera derivada en el punto $x=0.2$ utilizando fórmulas de derivación limitadas a primeras, segundas y terceras diferencias

$$y_1' = \frac{1}{h}\left(-1 \quad 1\right)$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}\left(-3 \quad 4 \quad -1\right)$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}\left(-11 \quad 8 \quad -9 \quad 2\right)$$

$$y_1' = \frac{1}{0.2}\left(-0.938+0.864\right) = -0.370$$

$$y_2' = \frac{1}{0.4}\left\{-3(-0.938)+4(0.864)-(0.832)\right\}$$

$$= -0.475$$

$$y_3' = \frac{1}{1.2}\left\{-11(-0.938)+3(0.864)-9(0.832) + 2(0.867)\right\}$$

$$= -0.133$$

b) Calcular la segunda derivada en el punto $x=0.6$ utilizando fórmulas limitadas a terceras diferencias.

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left(2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}\right)$$

$$= \frac{1}{0.2^2}\left[2(0.832)-5(0.867)+4(1.000)-(1.300)\right] = 0.7250$$

$$ó \quad f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} + 0 f_{i+2}\right]$$

$$= \frac{1}{0.2^2}\left[0.864 - 2(0.832) + 0.867\right] = 1.675$$

c).- Comparar los resultados obtenidos en los incisos anteriores al derivar directamente la función:

$$f(x) = (x)^{x^2}$$

$$f'(x) = x^2(x)^{(x^2-1)} + 2x(x)^{x^2}\ln x$$

$$\underline{\underline{f'(0.2) = -0.416}}$$

$$f''(x) = x^2\left[(x^2-1)(x)^{(x^2-2)} + 2x(x)^{(x^2-1)}\ln x\right] + 2x(x)^{(x^2-1)} + 2(x)^{x^2}\ln x + 2x(x)^{x^2} + 2x\ln x\left[x^2(x)^{(x^2-1)} + 2x(x)^{x^2}\ln x\right]$$

$$\underline{\underline{f''(0.6) = 1.646}}$$

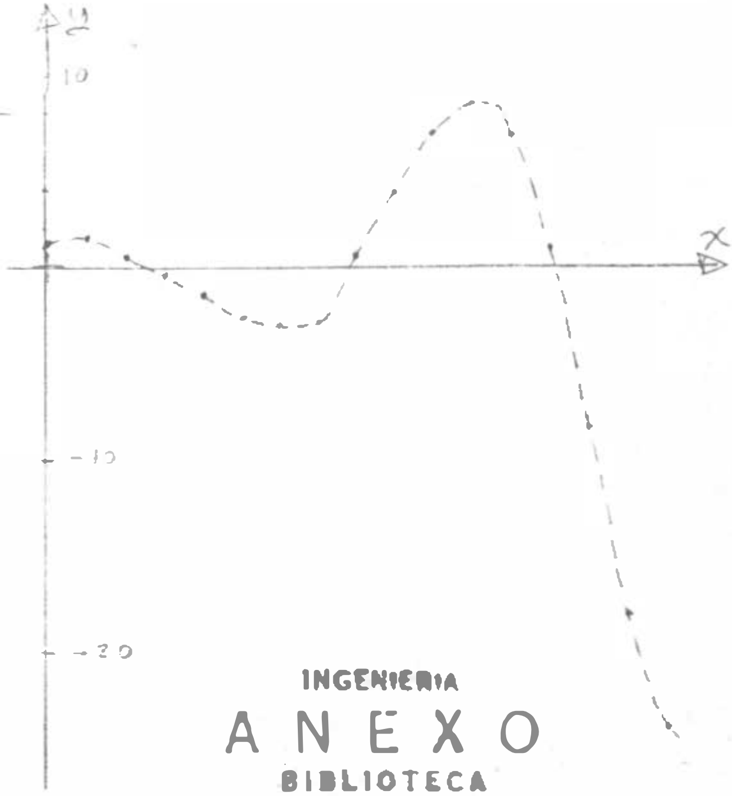
1ª Derivada.	-0.416	vs	-0.370	Difs. hacia adelante.
			-0.425	
			-0.433	
2º Derivada.	1.646	vs.	0.7250	Difs. hacia adelante
			1.[illegible]	± Difs centrales

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

16)

a).- Muestrear $y = e^x \cos 3x$ desde $x=0$ hasta $x=\pi$ cada 0.2 y dibujar

X	y
0.0	1
0.2	1.00806
0.4	0.54057
0.6	-0.41398
0.8	-1.64109
1.0	-2.69107
1.2	-2.97734
1.4	-1.988105
1.6	0.43338
1.8	3.839[illegible]6
2.0	7.09475
2.2	8.57586
2.4	6.70596
2.6	0.72644
2.8	-8.53951
3.0	-18.30054
$3.2 \cong \pi$	-24.75688



b).- Calcular la 1er derivada por las ecs. $f_i' = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i)$ y $f_i' = \frac{1}{12h}(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2})$ y compararla con la derivada real

$$y = e^x \cos 3x$$

$$y' = -3e^x \operatorname{sen} 3x + e^x \cos 3x$$

$$f_i' = \frac{1}{0.2}(f_{i+1} - f_i) = 5(f_{i+1} - f_i)$$

$$f_i' = \frac{1}{12(0.2)}(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2})$$

$$= \frac{1}{2.4}(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2})$$

Procesamiento Métodos Numéricos
Martha R. Trujillo P.
Horacio Sandoval R.

X	y'	f_i' por (3.2.7)	f_i' por (3.2.14)
0.0	1	0.0403	—
0.2	-1.06097	-2.33745	—
0.4	-3.63074	-4.77275	-3.63967
0.6	-5.73732	-6.13555	-5.73039
0.8	-6.15091	-5.2499	-6.124504
1.0	-3.34129	-1.43135	-3.79828
1.2	1.43021	4.046175	1.472254
1.4	8.61513	12.107425	8.647929
1.6	15.23549	17.0314	15.22917
1.8	17.86452	16.27545	17.872914
2.0	13.2886	7.40555	13.173758
2.2	0.14086	-9.3495	0.0012083
2.4	-19.54025	-27.8976	-19.65045
2.6	-39.60593	-46.32275	-39.61973
2.8	-50.70025	-47.80515	-50.51375
3.0	-43.1334	-29.2817	—
3.2	-11.32625	—	—

Se observa que la fórmula 1ª es menos aproximada que la segunda, a causa de que usa una fórmula más compleja.

c).. Calcular la 2ª derivada por la ec. 3.2.18:

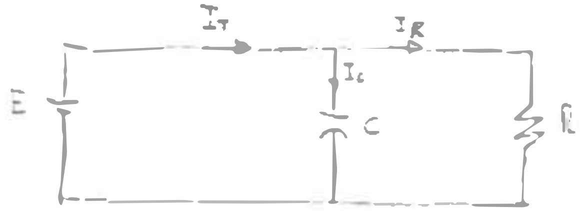
3.2.18 : $f_i'' = \frac{1}{h^2}\left(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right) = \frac{1}{(0.2)^2}\left(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right)$, donde tabulando tenemos que:

X	f_i'' por 3.2.18
0.0	—
0.2	-11.33875
0.4	-12.1765
0.6	-6.819
0.8	4.42325
1.0	19.37275
1.2	31.38762
1.4	35.30625
1.6	24.319375

X	f_i'' por 3.2.18
1.8	-3.77975
2.0	-44.3195
2.2	-83.77525
2.4	-102.7405
2.6	-82.16075
2.8	-12.377
3.0	77.61725
3.2	—

17)

Para el circuito eléctrico siguiente:



La corriente total está dada por

$$I_T = I_c + I_R = C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$$

C = Capacitancia = 0.22 Faradios
R = Resistencia = 33 Ω
V = voltaje
t = tiempo.

Conociendo los siguientes datos

t (s)	1	1.5	2	2.5
V (V)	20	45	90	120

Encuentre la corriente total (I_T) en cada instante de tiempo dado

Como C, V y R son datos, lo único que falta calcular en cada instante de tiempo es $\frac{dV}{dt}$

* Cuando t = 1 seg.

Usando fórmulas de interpolación hacia adelante a 2° orden.

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] \qquad h = 0.5$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2(0.5)}\left[-3(20) + 4(45) - 90\right] = 30$$

$$I_{T_{t=1seg}} = 0.22(30) + \frac{20}{33} = \boxed{7.2060 \text{ Amperes}}$$

Martha R. Trujillo P.
Horacio Sandoval R.

* Cuando $t = 1.5$ seg

$h = 0.5$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2(0.5)}\left[-20 + 90\right] = 70$$

$$I_{T\,t=1.5seg} = 0.22(70) + \frac{45}{33} = \boxed{16.7636 \text{ Ampers}}$$

* Cuando $t = 2$ seg

$h = 0.5$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2(0.5)}\left[-45 + 100\right] = 55$$

$$I_{T\,t=2seg} = 0.22(55) + \frac{90}{33} = \boxed{14.8272 \text{ Ampers}}$$

* Cuando $t = 2.5$ seg.

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\left[y_0 - 4y_1 + 3y_2\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2(0.5)}\left[-45 + 4(90) - 3(100)\right] = 15$$

$$I_{T\,t=2.5seg} = 0.22(15) + \frac{100}{33} = \boxed{6.3303 \text{ Ampers}}$$

15)

Para el circuito eléctrico siguiente

El voltaje (E) esta dado por la siguiente ecuación

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri \qquad \text{donde}$$

L = inductancia
L = 0.98 henries
R = resistencia
R = 0.2 [illegible]
i = corriente
t = tiempo

Supóngase que medimos la corriente para varios valores de t y obtenemos

t(s)	1	1.01	1.02	1.03	1.04
i(A)	3.1	3.13	3.15	3.18	3.2[illegible]

Encuentre el voltaje para cada instante de tiempo dado

Solución: Ya que L, R e i estan definidos para cada instante de tiempo, basta con calcular $\frac{di}{dt}$ utilizando las fórmulas de derivación numerica

* Cuando t = 1 seg.
Utilizando interpolación de 2° orden:

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) \qquad h = 0.01$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2(0.01)}\left(-3(3.1) + 4(3.13) - (3.15)\right) = 3.5$$

$$E = L\,{}^{di}/_{dt} + Ri:$$

$$E_{t=1seg} = 0.98(3.5) + 0.2(3.1) = \boxed{4.05\text{ V}}$$

[illegible]
[illegible] Trujillo P.
Horacio Sandoval R

* Cuando $t = 1.01$ seg $\qquad h = 0.01$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2(0.01)}\left[-3.1 + 3.15\right] = 2.5$$

$$E_{t=1.01\,seg} = 0.98(2.5) + 0.2(3.13) = \boxed{3.076\ V}$$

* Cuando $t = 1.02$ seg

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2(0.01)}\left[-3.13 + 3.18\right] = 2.5$$

$$E_{t=1.02\,seg} = 0.98(2.5) + 0.2(3.15) = \boxed{3.081}$$

* Cuando $t = 1.03$ seg.

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2(0.01)}\left[-3.15 + 3.24\right] = 4.5$$

$$E_{t=1.03\,seg} = 0.98(4.5) + 0.2(3.18) = \boxed{5.046\ V}$$

* Cuando $t = 1.04$ seg.

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\left[y_0 - 4y_1 + 3y_2\right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2(0.01)}\left[3.15 - 4(3.18) + 3(3.24)\right] = 7.5$$

$$E_{t=1.04\,seg} = 0.98(7.5) + 0.2(3.24) = \boxed{7.998\ V}$$

19) Se lanza un cohete al espacio y se observa que cuando ha recorrido 200 Km horizontalmente su altura es de 60 Km, cuando ha recorrido 400 Km su altura es de 90 Km, a los 600 Km su altura es 100 Km y a los 800 Km sigue 100. de altura. Cuando el cohete ha recorrido 600 Km horizontalmente suelta un proyectil, ¿qué dirección lleva éste?

La dirección del proyectil coincide con la tangente a la trayectoria del cohete en el punto para el que $x = 600$ Km. La pendiente de esta tangente está dada por la primera derivada de la función tabular que define la trayectoria en $x = 600$. La función tabular es:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
	0	0			
			60		
$i-2$	200	60		−30	
			30		10
$i-1$	400	90		−20	
			10		10
i	600	100		−10	
			0		
$i+1$	800	100			

Δy:

$a_0 = y_1 - y_0 = 60 - 0 = 60$
$a_1 = y_2 - y_1 = 90 - 60 = 30$
$a_2 = y_3 - y_2 = 100 - 90 = 10$
$a_3 = y_4 - y_3 = 100 - 100 = 0$

$\Delta^2 y$:

$b_0 = a_1 - a_0 = 30 - 60 = -30$
$b_1 = a_2 - a_1 = 10 - 30 = -20$
$b_2 = a_3 - a_2 = 0 - 10 = -10$

$\Delta^3 y$:

$c_0 = b_1 - b_0 = -20 - (-30) = 10$
$c_1 = b_2 - b_1 = -10 - (-20) = 10$

De la tabla de diferencias se ve que las terceras son constantes por lo que los datos corresponden exactamente con un polinomio de grado 3. Luego, una fórmula de derivación numérica que incluya hasta la tercera diferencia dará la solución exacta al problema. Observando las fórmulas de derivación obtenidas para una interpolación de grado 3, se desprende que una ec. aplicable es:

$$f_i' = \frac{1}{6h}\left(f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}\right) = \tan \alpha$$

$$f_i'(600) = \frac{1}{6(200)}\left\{1(60) - 6(90) + 3(100) + 2(100)\right\} = 0.01667$$

$\therefore \alpha = \tan^{-1} 0.01667 = 0.955°$
$= 0°57'19''$

20)

Calcular $\frac{dy}{dx}$ usando el esquema $f_i' = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1})$ para los 6 puntos dados; tambien calcular su segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ usando $f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$ para los mismos puntos.

X	Y	i	f_i'	f_i''
0	0	0		
1	1	1	1	-1
2	1	2	0	-1
3	0	3	-1	2/3
4	-1/3	4	-1/3	2/3
5	0	5	1/3	

$$f_i' = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1})$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$$

$h = 1$

1° Calculamos la 1ª derivada.

* Cuando $X=0$ $i=0$ y f' no esta definida con este esquema.
* Cuando $X=1, i=1$ $\quad f_1' = \frac{1}{1}(1-0) = \boxed{1}$
* Cuando $X=2, i=2$ $\quad f_2' = \frac{1}{1}(1-1) = \boxed{0}$
* Cuando $X=3; i=3$ $\quad f_3' = \frac{1}{1}(0-1) = \boxed{-1}$
* Cuando $X=4, i=4$ $\quad f_4' = \frac{1}{1}(-1/3-0) = \boxed{-\frac{1}{3}}$
- Cuando $X=5; i=5$ $\quad f_5' = \frac{1}{1}(0-(-1/3)) = \boxed{\frac{1}{3}}$

Cuando $x=4$ $i=4$
$f''_4 = \frac{1}{(1)^2}(0-2(-1/3)+0) = \frac{2}{3}$

f''_5 no esta definida con el esquema

2° Calculamos la 2ª derivada.

* Cuando $X=0, i=0$ $\quad f_0''$ no esta definido con el esquema.
* Cuando $X=1, i=1$ $\quad f_1'' = \frac{1}{(1)^2}(0-2(1)+1) = -1$
* Cuando $X=2; i=2$ $\quad f_2'' = \frac{1}{(1)^2}(1-2(1)+0) = -1$

* Cuando $x=3$; $i=3$ $\quad f_3'' = \frac{1}{(1)^2}\left(1 - 2(0) + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

* Cuando $x=4$, $i=4$ $\quad f_4'' = \frac{1}{(1)^2}\left(0 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$

* Cuando $x=5$, $i=5$ $\quad f_5''$ no esta definida con el esquema.

[illegible] MÉTODOS NUMÉRICOS
[illegible] R. Trujillo P.
Horacio Sandoval R

21) Dadas las siguientes posiciones de una partícula, calcular su historia de velocidades cada segundo. Usar el esquema de derivación $f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1})$

X, [seg]	0	1	2	3	4
Y, [m]	3	-2	5	1	7
i	0	1	2	3	4

$$V = \frac{d_{posición}}{dt}$$

Para $i=0$ $\quad f_0' = \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1})$. Por esta fórmula no está definida.

Para $i=1$ $\quad f_1' = \frac{1}{2h}(f_2 - f_0) = \frac{1}{2(1)}(5-3) = 1 \ m/s$

Para $i=2$ $\quad f_2' = \frac{1}{2h}(f_3 - f_1) = \frac{1}{2(1)}(1-(-2)) = \frac{3}{2} \ m/s$

Para $i=3$ $\quad f_3' = \frac{1}{2h}(f_4 - f_2) = \frac{1}{2(1)}(7-5) = 1 \ m/s$

Para $i=4$. $f_4' = \frac{1}{2h}(f_5 - f_3) \Rightarrow$ Por esta fórmula no está definida.

Problemario Métodos Numéricos
Alejandro Gómez Moctezuma
Horacio Sandoval R

1) Utilizando los esquemas de Simpson adecuados, estime el área bajo la curva definida por los siguientes puntos (0, 0), (2, 2), (4, −1), (6, −3), (8, 0), (10, 4), (12, 6), (14, 10)

Tabulando los valores:

n'	n	x	f(x)
	0	0	0
	1	2	2
	2	4	−1
	3	6	−3
0	4	8	0
1	5	10	4
2	6	12	6
3	7	14	10

$h=2$

Utilizando:
1° Simpson 1/3 para $h=4$
2° Simpson 3/8 para $h'=3$

$$S_{1/3} = \frac{h}{3}\left[y_0+y_n+2\sum \text{ordenadas pares} + 4\sum \text{resto de ordenadas}\right]$$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}h\left[y_0+y_n+2\sum \text{ordenadas múltiplos de 3} + 3\sum \text{resto de ordenadas}\right]$$

$$S_{1/3} = \frac{2}{3}\left[0+0+2(-1)+4(2-3)\right] = -4$$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}(2)\left[0+10+3(4+6)\right] = 30$$

Area bajo la curva $= 30-4 = \boxed{26}$

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

2) La siguiente tabla nos muestra los puntos de la gráfica fuerza contra distancia que se obtuvo al estirar un resorte desde 10 cm hasta 20 cm. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza al estirar el resorte

X (m)	F (kg)	n
0	0	0
0.025	3	1
0.05	6	2
0.075	9	3
0.10	12	4

$f(x) = \text{Fuerza} = kX$

$$\text{Trabajo} = \int_0^{0.10} \text{Fuerza} = \int f(x)$$

Utilizamos $S_{1/3}$ $h = 0.025$

$$S_{1/3} = \frac{0.025}{3}\left[0 + 12 + 2(6) + 4(3+9)\right] = \boxed{0.6 \text{ unidades de trabajo}}$$

3) Usar las formulas de Simpson para calcular la siguiente integral

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad n=4$$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$h = \frac{2-1}{4} = 1/4 = 0.25$

Nota: Los valores de X estan en radianes.

n	X	f(X)
0	1	0.8415
1	1.25	0.7592
2	1.5	0.6650
3	1.75	0.5623
4	2	0.4546

Utilizando $S_{1/3}$

$$S_{1/3} = \frac{0.25}{3}\left[0.8415 + 0.4546 + 2(0.6650) + 4(0.7592 + 0.5623)\right]$$

$$\boxed{S_{1/3} = 0.6593}$$

Programación Métodos Numéricos
Alejandro Gómez M.
[illegible] Sandoval R.

30

1) Resolver utilizando las fórmulas de Simpson la siguiente integral

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx, \quad \text{con} \quad n=6$$

$f(x) = e^{-x^2}$ $h = 2/6 = 1/3$

n	x	f(x)
0	0	1
1	.33	0.8968
2	0.66	0.6469
3	1	0.2679 ✓
4	1.33	0.1705
5	1.66	0.0636
6	2	0.0183

Utilizando $S_{3/8}$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)\left[1 + 0.0183 + 2(0.2679) + 3(0.8968 + 0.6469 + 0.1705 + 0.0636)\right]$$

$$\boxed{S_{3/8} = 0.8360}$$

$-(0.1089)$

$F(x)$

$n=6$ [0.8820814]

PROBLEMARIO MÉTODOS NUMÉRICOS

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

31

5) Resolver la siguiente integral, utilizar un método de integración numérica.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

Utilizando $n = 4$ $\qquad h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

Utilizando. $S\,1/3 = \frac{1}{3} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas pares} + 4 \sum \text{resto ordenadas} \right]$

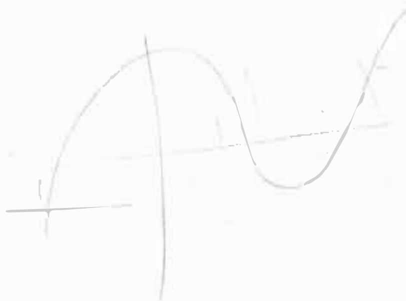
n	x	f(x)
0	0	1 y_0
1	0.5	0.9428
2	1	0.7071
3	1.5	0.4781
4	2	0.3333 y_n

0.5 $\qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.125}}$

$dx\,(1+x^3)^{-1/2}$ $\qquad$ 1.1180

$$S_{1/3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 + 0.3333 + 2(0.7071) + 4(0.9428 + 0.4781)\right]$$

$$\boxed{S_{\frac{1}{3}} = 1.4052}$$



$\frac{1}{(1+x^3)^{1/2}} =$

1.06066

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

6) La siguiente tabla muestra el comportamiento de cierta máquina térmica en la cual se comprime cierto gas desde 100 pulg³ hasta 40 pulg³.
Halle el trabajo hecho por esta máquina.

- Recuerde que el trabajo hecho es el area bajo la curva definida con los puntos de la tabla

Nota: 1 pie = 12 pulg.

	V (pulg³)	P (lb/pulg²)
0	40	288.5349
1	60	163.56
2	80	109.3262
3	100	80

Utilizando simpson de 3/8 $\quad h = 20$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}(20)\left[288.5399 + 80 + 3(109.3262 + 163.56)\right]$$

$$S_{3/8} = 3903.93375 \ lb$$

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

7) Determine el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\text{sen}\,x + \cos x + 2}$$

proponiendo cuando menos diez intervalos igualmente espaciados.

$$f(x) = \frac{1}{\text{sen}\,x + \cos x + 2}$$

Tomando 10 intervalos: $h = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi = 0.2\pi$

Tabulando: Utilizando Simpson 1/3

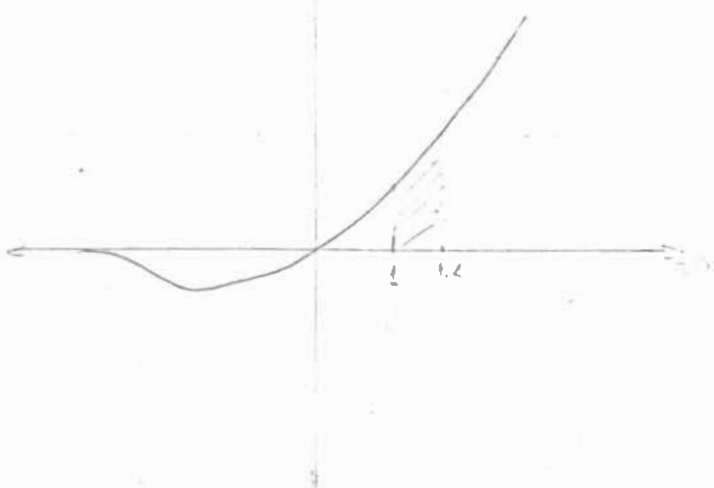
$$S_{1/3} = \frac{h}{3}\left[Y_0 + Y_n + 2\Sigma \text{ ordenadas pares} + 4\Sigma \text{ resto de ordenadas}\right]$$

n	x	f(x)
0	0	0.3333
1	0.2π	0.2944
2	0.4π	0.3067
3	0.6π	0.3785
4	0.8π	0.5622
5	1π	1
6	1.2π	1.6578
7	1.4π	1.3515
8	1.6π	0.7364
9	1.8π	0.4502
10	2π	0.3333

$$S_{1/3} = \frac{0.2\pi}{3}\left[0.3333 + 0.3333 + 2(0.3067 + 0.5622 + 1.6578 + 0.7364) + 4(0.2944 + 0.3785 + 1 + 1.3515 + 0.4502)\right]$$

$$\boxed{S_{1/3} = 4.1733}$$

8) Calcule numéricamente la integral. $\int_1^{1.4} x\,2^x\,dx$; con un orden de error de 10^{-3}



$f(x) = x\,2^x$

n	X	f(x)
0	1	2
1	1.1	2.357901613
2	1.2	2.756376052
3	1.3	3.200975475
4	1.4	3.69462215

$h = 0.1$

$S_{1/3} = A_{1/3} = \frac{h}{3}\left[Y_0 + Y_n + 2\Sigma \text{ ordenadas pares} + 4\Sigma \text{ ordenadas impares} \right]$

$S_{1/3} = \frac{0.1}{3}\left[2 + 3.69462215 + 2(2.756376052) + 4(2.357901613 + 3.200975475) \right]$

$S_{1/3} = 1.1147960$

Estimación del orden de error $h^3 = 0.1^3 = 0.001$

$\therefore \boxed{\int_1^{1.4} x\,2^x\,dx = 1.11479605 \pm 0.001}$

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

9) Encuentre la siguiente integral definida para $n=2$ y $n=4$ utilizando la fórmula Trapecial.

$$\int_0^{.8} \cosh x^2 \, dx$$

Tenemos que: $\cosh x = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x}$

$$f(x) = \cosh x^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

a) Para $n=2$ $\quad h = 0.8/2 = 0.4$

n	x	f(x)
0	0	1
1	0.4	1.0128
2	0.8	1.2119

$$A_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\Sigma^{\text{resto}}\text{ ordenadas} \right]$$

$$A_T = \frac{0.4}{2}\left[1 + 1.2119 + 2(1.0128) \right] = \boxed{0.8475}$$

b) Para $n=4$ $\quad h = 0.8/4 = 0.2$

h	x	f(x)
0	0	1
1	0.2	1.0008
2	0.4	1.0128
3	0.6	1.0655
4	0.8	1.2119

$$A_T = \frac{0.2}{2}\left[1 + 1.2119 + 2(1.0008 + 1.0128 + 1.0655) \right] = \boxed{0.83701}$$

10) Utilizando la fórmula trapezoidal resolver la siguiente integral definida, utilizar $n = 8$,

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

$A_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\Sigma \text{ resto ordenadas}\right]$

$n = 8 \qquad h = 2/8 = 0.25$

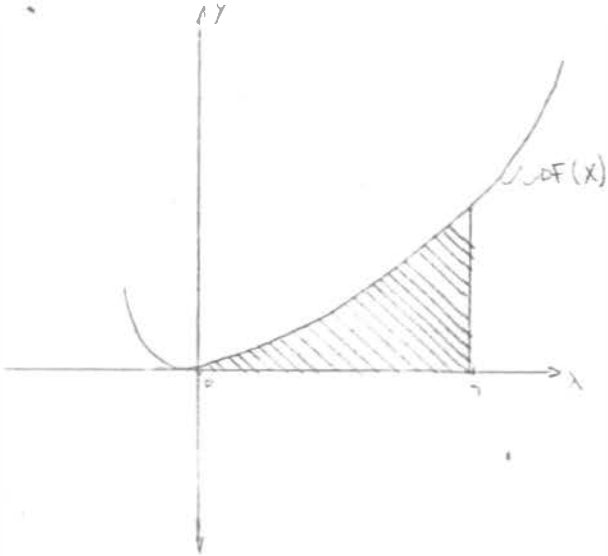
n	x	f(x)
0	0	0
1	0.25	0.4961
2	0.5	0.9682
3	0.75	1.3905
4	1	1.7321
5	1.25	1.9516
6	1.5	1.9843
7	1.75	1.6944
8	2	0

$$A_T = \frac{\frac{2}{8}}{2}\left[0 + 0 + 2\left[0.4961 + 0.9682 + 1.3905 + 1.7321 + 1.9516 + 1.9843 + 1.6944\right]\right]$$

$$\boxed{A_T = 2.5543}$$

11) Valúe la siguiente integral por medio de las fórmulas de Simpson de 1/3 y 3/8: $\int_0^7 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx$; determine el error y compruebe resultado.

$f(x) = x^2 (9x+5)^{-1/2}$



n	n	X	f(x)
	0	0	0
	1	1	0.2673
	2	2	0.8341
	3	3	1.5910
0	4	4	2.4988
1		5	3.5355
2		6	4.6868
3		7	5.9421

$$\int_0^7 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx = \int_0^4 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx + \int_4^7 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx.$$

$$\int_0^4 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{3}\left[0 + 2.4988 + 2(0.8341) + 4(0.2673 + 1.5910)\right] = 3.8667$$

$$\int_4^7 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx = \frac{3}{3}(1)\left[2.4988 + 5.9421 + 3(3.5355 + 4.6868)\right] = 12.4154$$

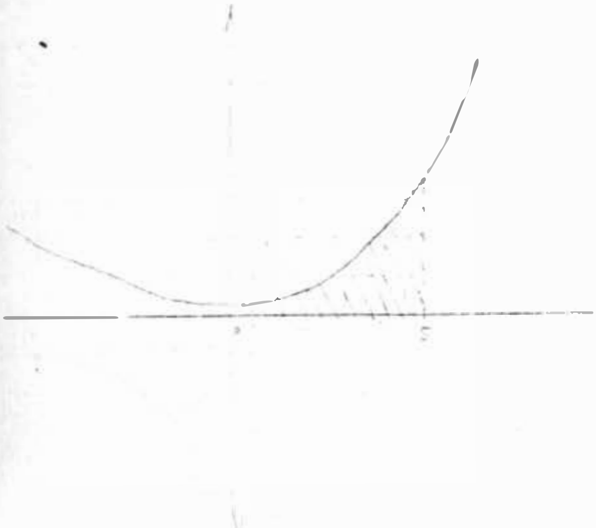
$$\therefore \int_0^7 x^2 (9x+5)^{-1/2}\,dx = 3.8667 + 12.4154 = 16.2821$$

Estimación del orden del error: $h^5 = 1^5 = 1$

$$\therefore \int_0^7 x^2 (9X+5)^{-1/2}\,dx = \boxed{16.2821 \pm 1}$$

PRESEMINARIO METODOS NUMERICOS
Alejandro Gómez M.
Genaro Sandoval R.

12) Calcule numéricamente $\int_0^5 (2^x - x)\,dx$ con $h=1$
y tratando de minimizar el error



$f(x) = 2^x - x$

n	x	f(x)
0	0	1
1	1	1
2	2	2
3	3	5
4	4	12
5	5	27

$$\int_0^5 (2^x - x)\,dx = \int_0^3 (2^x - x)\,dx + \int_3^5 (2^x - x)\,dx$$

$$\int_0^3 (2^x - x)\,dx = \frac{3}{3}\left(1 + 5 + 3(1+2)\right) = 5.625$$ Simpson 3/8

$$\int_3^5 (2^x - x)\,dx = \frac{1}{3}\left[5 + 27 + 4(12)\right] = 26.666666\overline{6}$$ Simpson 1/3

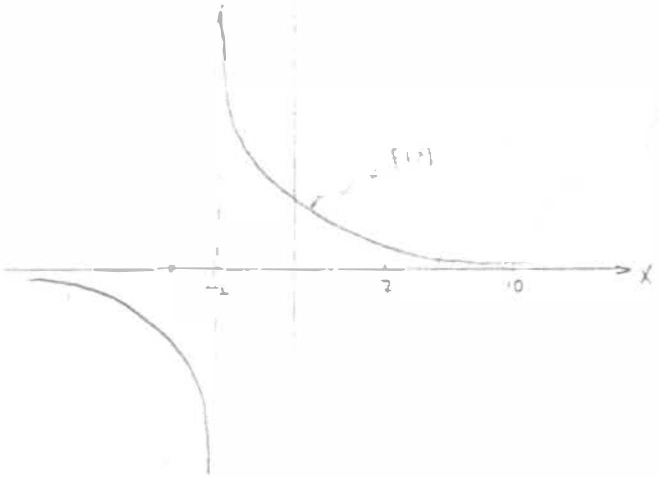
$$\therefore \int_0^5 (2x - x)\,dx = 5.625 + 26.66\overline{6} = \boxed{32.291666\overline{6}\ u^2}$$

13) Calcular el valor de la integral $\int_{2}^{10} \frac{dx}{1+x}$ usando:

a) $S_{1/3}$ b) $S_{3/8}$ c) Trapecio

Δx

$f(x) = \frac{1}{1+x}$



$$\int_{2}^{10} \frac{dx}{1+x}$$

a) $S_{1/3}$, para poder aplicar esta formula n tiene que ser par.

n	X	F(X)
0	2	$0.333\bar{3}$
1	3	0.25
2	[illegible]	0.2
3	[illegible]	$0.166\bar{6}$
4	[illegible]	0.142857143
5	7	0.125
6	8	$0.\overline{111}$
7	[illegible]	0.1
8	10	$0.09\overline{090}$

$h = 1$

$$S_{1/3} = \frac{1}{3}\left[0.3\bar{3} + 0.090\bar{9} + 2(0.2 + 0.142857143 + 0.\overline{11}) + 4(0.25 + .1\bar{6} + 0.125 + 0.1)\right]$$

$$\boxed{S_{1/3} = 1.2996152}$$

b) $S_{3/8}$ n tiene que ser múltiplo de 3

$$\frac{10-2}{3} = 2.666\bar{6} = h$$

Valor real - 1.2993

Alejandro García M.
Horacio Sandoval R.

n	x	f(x)
0	2	$0.33\bar{3}$
1	$4.66\bar{6}$	0.17647058
2	$7.33\bar{3}$	0.12
3	10	$0.09\overline{09}$

$h = 2.66\bar{6}$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}(2.66\bar{6})\left[0.33\bar{3} + 0.09\overline{09} + 3(0.17647058 + 0.12)\right]$$

$$\boxed{S_{3/8} = 1.313654137}$$

c) Trapecio.

Tomando $h = 1$

$$A_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\,\Sigma \text{ resto ordenadas}\right]$$

$$A_T = \frac{1}{2}\left[0.\overline{33} + 0.09\overline{09} + 2(0.25 + 0.2 + 0.16\bar{6} + 0.142857143 + 0.125 + 0.\overline{11} + 0.1\right]$$

$$\boxed{A_T = 1.307756133}$$

De otra forma también se puede hacer tomando $n = 1$

n	x	f(x)
0	2	0.333
1	10	0.0909

$h = 8$

$$A_T = \frac{8}{2}\left[0.\overline{333} + 0.09\overline{09}\right] = \boxed{1.[illegible]}$$

Pero el resultado es más exacto tomando $h = 1$ que $h = 8$.

14) Encuentre la siguiente integral definida para $n=2$, $n=4$ y $n=6$ utilizando la fórmula trapecial.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

$$A_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{resto ordenadas} \right]$$

a) $n=2$ $\qquad h = \pi/2$

n	x	f(x)
0	0	0
1	$\pi/2$	1
2	π	0

$$A_T = \frac{\pi/2}{2}\left[0+0+2(1)\right] = \boxed{\pi/2} = \boxed{1.5708}$$

b) $n=4$ $\qquad h = \pi/4$

n	x	f(x)
0	0	0
1	$\pi/4$	0.3536
2	$\pi/2$	1
3	$3\pi/4$	0.3536
4	π	0

$$A_T = \frac{\pi/4}{2}\left[0+0+2\left[0.3536+1+0.3536\right]\right]$$

$$\boxed{A_T = 1.3408}$$

c) $n=6$ $\qquad h = \pi/6$

n	x	f(x)
0	0	0
1	$\pi/6$	0.125
2	$\pi/3$	0.6495
3	$\pi/2$	1
4	$2\pi/3$	0.645
5	$5\pi/6$	0.125
6	π	0

$$A_T = \frac{\pi/6}{2}\left[0+0+2(0.125+0.6495+1+0.6495+0.125)\right]$$

$$\boxed{A_T = 1.33465}$$

7
8
9
10
11

15) Un vehículo se desplaza entre las ciudades A y B las cuales se encuentran a una distancia de 312 Km entre sí. La siguiente tabla muestra la velocidad del vehículo desde el momento que partió de la ciudad A hacia la ciudad B

Tiempo (Hrs)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Velocidad (Kms/Hr)	85	100	120	100	95	90

Determine si al cabo de dos y media horas, el vehículo llega a la ciudad B. En caso de no haber llegado, determine el número de kilómetros que le faltan por recorrer.

$$v = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad x = \int v\,dt$$

$$\therefore\ x = \int_0^{2.5} v\,dt = \int_0^{1.5} v\,dt + \int_{1.5}^{2.5} v\,dt \quad ; \text{ Simp } 3/8 + \text{ Simp } 1/3$$

$$\int_0^{1.5} v\,dt = \frac{3}{8}(0.5)\left[85 + 100 + 3(100 + 120)\right] = 158.4375 \text{ Km}$$

$$\int_{1.5}^{2.5} v\,dt = \frac{0.5}{3}\left[100 + 90 + 4(95)\right] = 95 \text{ Km}$$

$$\int_0^{2.5} v\,dt = 158.4375 + 95 \text{ Km} = 253.4375 \text{ Km}$$

Distancia total a recorrer = 312 Km

Número de Km aún por recorrer = 312 Km − 253.4375 k = $\boxed{58.5625 \text{ Km}}$

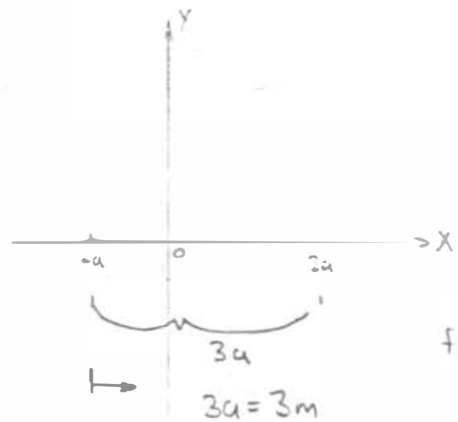
Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

16)

Una partícula sobre el eje X es atraída por una fuerza hacia el origen, la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{KX}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad [\text{Newton}]$$

Hallar el trabajo hecho por la fuerza si mueve a la partícula de una distancia $-a$ del origen a una distancia $2a$.
Utilice la fórmula de integración de Simpson de 3/8 si $a = 1$ m y $K = 1$. Recordando que $W = \int F\,dx$



$a = 1$ m
$K = 1$

$$F = \frac{kX}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Sustituyendo $a = 1$ m, $K = 1$

$$f(x) = F = \frac{X}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

Donde X es la distancia.

Tabulando:

$h = 1$

n	x	f(x)
0	0	0
1	1	0.3536
2	2	0.1789
3	3	0.0949

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}(1)\left[0 + 0.0949 + 3(0.3536 + 0.1789)\right]$$

$$\boxed{S_{\frac{3}{8}} = 0.9549} \text{ Joules}$$

17) Resuelva la siguiente integral definida utilizando.

a) Fórmula Trapecial para n=10
b) Combinando Simpson 1/3 - 3/8 para n=10
c) Compare resultados entre a) y b)

$$\int_0^1 (e^x + x^2 + 4)\, dx$$

Primero formamos la Tabla a utilizar:

$$h = 1/10 = 0.1$$

n'	n	X	F(x)
	0	0	5
	1	0.1	5.1152
	2	0.2	5.2614
	3	0.3	5.4399
	4	0.4	5.6518
	5	0.5	5.8987
0	6	0.6	6.1821
1	7	0.7	6.5038
2	8	0.8	6.8655
3	9	0.9	7.2696
4	10	1	7.7183

a) $A_T = \frac{0.1}{2}\Big[5 + 7.7183 + 2\big[5.1152 + 5.2614 + 5.4399 + 5.6518 + 5.8987 + 6.1821 + 6.5038 + 6.8655 + 7.2696\big]\Big]$

$$\boxed{A_T = 6.0548}$$

b) $\int_0^1 (e^x + x^2 + 4)\,dx = \int_0^{0.6} (e^x + x^2 + 4)\,dx + \int_{0.6}^1 (e^x + x^2 + 4)\,dx = S_{3/8} + S_{1/3}$

$\int_0^{0.6} (e^x + x^2 + 4)\,dx = S_{3/8}\ n=6 = \frac{3}{8}(0.1)\Big[5 + 6.1821 + 2(5.4399) + 3(5.1152 + 5.2614 + 5.6518 + 5.8987)\Big]$

$= 3.2941$

$\int_{0.6}^1 (e^x + x^2 + 4)\,dx = S_{1/3}\ n=4 = \frac{0.1}{3}\Big[6.1821 + 7.7183 + 2(6.8655) + 4(6.5038 + 7.2696)\Big]$

$= 2.7575$

$$\therefore \int_0^1 (e^x + x^2 + 4)\, dx = 3.2941 + 2.7575 = \boxed{6.0516}$$

c).- Por fórmula Trapecial $A_T = 6.0548$
Combinación fórmulas Simpson $S = 6.0516$

La diferencia no es mucha, esto es debido a que el incremento "h" fué muy pequeño (0.1) y "n" lo suficientemente grande (10), esto ayuda a que usando cualquiera de las fórmulas tengamos una buena aproximación al valor exacto.

Entre más chiquito sea h y más grande n la aproximación es mejor.

15)

Usando el esquema de Simpson que corresponda, estime el área bajo la curva dada por los siguientes puntos

	0	1	2	3	4	5	6	
X	5	10	15	20	25	30	35	40
y	1	3	5	7	5	6	4	2
n	0	1	2	3	4	5	6	7
n'					1	2	3	4

$h = 5$

$$S_{1/3} = \frac{1}{3} h \left[Y_0 + Y_n + 2 \sum \text{ordenadas pares} + 4 \sum \text{ordenadas impares} \right] \quad ; \; n = \text{par}$$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8} h \left[Y_0 + Y_n + 2 \sum \text{ordenadas múltiplos de 3} + 3 \sum \text{ordenadas restantes} \right] \quad ; \; n \Rightarrow \text{múltiplo de 3}$$

$$I = \int_5^{20} f(x)\,dx + \int_{20}^{40} f(x)\,dx \Rightarrow \text{Simpson } 3/8 + \text{Simpson } 1/3$$

$$S_{3/8\; n=3} = \frac{3}{8}(5)\left[1 + 7 + 3(3+5)\right] = 60$$

$$S_{1/3}\; n' = 4 = \frac{5}{3}\left[7 + 2 + 2(6) + 4(5+4)\right] = 95$$

$$I = 60 + 95 = \boxed{155}$$

$S_{1/3} = \frac{5}{3}\left[1 + 5 + 2(5) + 3(3+7)\right]$

$\frac{3}{8}(5)\left[5 + 2 + 2(\right.$

1.9) Mezclando los 2 esquemas de Simpson calcule el área bajo la curva dada por los puntos.

x	5	10	15	20	25	30	35	40
x_i	1	3	5	7	5	6	4	4
n	0	1	2	3	4			
n'					0	1	2	3

1/3 $\qquad h = 5$

$$I = S_{\frac{1}{3}}\ n=4 + S_{\frac{3}{8}}\ n'=3$$

$$S_{\frac{1}{3}}\ n=4 = \frac{1}{3}(5)\left[1 + 5 + 2(5) + 4(3+7)\right] = 93.33$$

$$S_{\frac{3}{8}}\ n'=3 = \frac{3}{8}(5)\left[5 + 4 + 3(6+4)\right] = 73.125$$

$$I = 93.33 + 73.125 = \boxed{166.455}$$

30) Calcular $\int_0^3 f(x)\,dx$, siendo $f(x)$ los puntos dados en la tabla, mediante el o los esquemas de agrupados de Simpson

i	n	x	f(x)
	0	0	0
	1	1	1
	2	2	1
0	3	3	0
1		4	$-1/3$
2		5	0

$h = 1$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}h\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = S_{\frac{3}{8}} + S_{\frac{1}{3}}$$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}(1)\left[0 + 0 + 3(1+1)\right] = \frac{18}{8} = 2.25\ u^2$$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left[0 + 0 + 4\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{4}{9} = -0.44\bar{4}\ u^2$$

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx = 2.25 - 0.444 = \boxed{1.80\bar{5}5\ u^2}$$

21) Calcular el área bajo la curva definida por los puntos de la tabla. Utilizar los métodos de integración que considere adecuados. Trabaje con 4 decimales.

x	$f(x)$
-0.01	0.2000
0.09	1.2654
0.19	1.2860
0.29	1.5175
0.35	1.9859
0.41	2.5541
0.47	3.1072
0.57	3.5339
0.67	2.8299
0.75	1.3919
0.83	0.0036

Dado que los datos no se encuentran igualmente espaciados, se resolverá el problema por secciones de acuerdo con el método que se pueda emplear, y al último se sumarán las áreas parciales obtenidas.

De -0.01 a 0.29 se usará S 3/8 con $h=0.10$
De 0.29 a 0.47 se usará S 3/8 con $h=0.06$
De 0.47 a 0.67 se usará S 1/3 con $h=0.10$
De 0.67 a 0.83 se usará S 1/3 con $h=0.08$

$$\int_{-0.01}^{0.29} f(x)\,dx \doteq \frac{3h}{8}\left[f_i+3f_{i+1}+3f_{i+2}+f_{i+3}\right]$$

$$= \frac{3(0.10)}{8}\left[0.2+3(1.2654)+3(1.2860)+1.5175\right] = 0.3526$$

$$\int_{0.29}^{0.47} f(x)\,dx \doteq \frac{3(0.06)}{8}\left[1.5175+3(1.9859)+3(2.5541)+3.1072\right] = 0.9112$$

$$\int_{0.47}^{0.67} f(x)\,dx \doteq \frac{h}{3}\left[f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right] = \frac{0.10}{3}\left[3.1072+4(3.5387)+2.8299\right]=0.6691$$

$$\int_{0.67}^{0.83} f(x)\,dx \doteq \frac{0.08}{3}\left[2.8299+4(1.3719)-0.0035\right] = 0.2219$$

$$\therefore \int_{-0.01}^{0.83} f(x)\,dx = 1.6[illegible]55\ u^2$$

La estimación del error para Simpson 1/3 y Simpson 3/8 es de orden h^5 en ambos casos por lo que mezclar ambos

Horacio Sandoval R.
Alejandro Gómez M.

es consistente. Entonces, la diferencia que resta en la aproximación del área en cada sección se debe al valor del incremento h, que varía de 0.06 a 0.10, y la estimación del error variará de $(0.06)^5 = 7.9 \times 10^{-7}$ a $(0.10)^5 = 10^{-5}$, y considerando que se calculó al uso de cuatro decimales, entonces el error por redondeo y el cometido al integrar con diferentes valores de h, son consistentes y la mezcla de segmentos e intervalos es válida.

Integrando las mismas secciones mediante el trapecio se tiene:

$$\int_{-0.01}^{0.29} f(x)\,dx \doteq \frac{0.10}{2}\left[0.2 + 1.5475 + 2(1.2654 + 1.2860)\right] = 0.3425$$

$$\int_{0.29}^{0.47} f(x)\,dx \doteq \frac{0.06}{2}\left[1.5475 + 3.1072 + 2(1.9859 + 2.5541)\right] = 0.4120$$

$$\int_{0.47}^{0.67} f(x)\,dx \doteq \frac{0.10}{2}\left[3.1072 + 2.8299 + 2(3.5389)\right] = 0.6507$$

$$\int_{0.67}^{0.83} f(x)\,dx = \frac{0.08}{2}\left[2.8299 + 0.0036 + 2(1.3719)\right] = 0.2231$$

$$\therefore \int_{-0.01}^{0.83} f(x)\,dx = 1.6283\ u^2$$

y la diferencia de las dos aproximaciones será $|1.6555 - 1.6283| = 0.0272$, lo que resulta en el 1.6 ó 1.7% de error relativo.

Otra alternativa de solución puede ser la interpolación de una serie de puntos que tengan espaciamiento constante, aceptando que los puntos inventados mediante interpolación, ya tienen error.

22) Calcular el area bajo la curva definida por los puntos de la siguiente tabla. Di el valor exacto, y las aproximaciones obtenidas por integración rectangular, trapecial, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

x	$f(x)$
-4	-101
-3	-50
-2	-21
-1	-8
0	-5
1	-6
2	-5

Para obtener el valor exacto se requiere conocer la función. Aceptando que es una función polinomial y como hay 7 puntos, solo podrá darse el valor exacto si estos puntos son generados por un polinomio de grado 6 o menor. Para saber el grado del polinomio se construirá la tabla de diferencias.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
	-4	-101			
			51		
	-3	-50		-22	
			29		6
	-2	-21		-16	
			13		6
	-1	-8		-10	
			3		6
	0	-5		-4	
			-1		6
	1	-6		2	
			+1		
	2	-5			

Dado que las terceras diferencias son iguales, las cuartas serán nulas, y por tanto los puntos corresponden a un polinomio de grado 3.

Por facilidad para calcular k se considera $x_0 = -1$, y de la tabla se tiene $h = 1$

$$\therefore \quad k = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x+1}{1} = x+1$$

y la expresión general será

$$y = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0$$

$$= -8 + k\cdot(3) + \frac{k(k-1)}{2}\cdot(-4) + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}(6)$$

$$= -8 + 3k - 2k^2 + 2k + k^3 - 3k^2 + 2k = k^3 - 5k^2 + 7k - 8$$

$$= (x+1)^3 - 5(x+1)^2 + 7(x+1) - 8$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5x^2 - 10x - 5 + 7x + 7 - 8 = x^3 - 2x^2 - 5$$

$$y = x^3 - 2x^2 - 5$$

y el valor exacto será: $A = \int_{-4}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 5x\right]_{-4}^{2}$

$$= \frac{1}{4}(16 - 256) - \frac{2}{3}(8 + 64) - 5(2+4) = -60 - 48 - 30$$

∴ Area exacta = −138 u^2

Cálculo numérico del área

i) Rectangular

$$A = h \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i = 1(-101-50-21-8-5-6-5) = -196\ u^2$$

ii) Trapecial

$$A = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right] = \frac{1}{2}\left[-101-5+2(-50-21-8-5-6)\right] = 143\ u^2$$

iii) Simpson 1/3

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,\dots}^{n-2} y_i\right] = \frac{1}{3}\left[-101-5+4(-50-8-6)+2(-21-5)\right]$$
$$= \frac{1}{3}(-106-256-52) = -138\ u^2$$

iv) Simpson 3/8

$$A = \frac{3h}{8}\left[y_0 + y_n + 3\sum_{i=1,2,4,5,\dots}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=3,6,\dots}^{n-3} y_i\right] = \frac{3\cdot 1}{8}\left[-101-5+3(-50-21-5-6)+2(-8)\right]$$
$$= \frac{3}{8}(-106-246-16) = -138\ u^2$$

Para este ejercicio se ve que el error absoluto y relativo es

i) $E_a = |-138+196| = 58\ u^2$ $\qquad E_r = \frac{58}{138} = 42\%$

ii) $E_a = |-138+143| = 5\ u^2$ $\qquad E_r = \frac{5}{138} = 4\%$

iii) $E_a = |138-138| = 0\ u^2$ $\qquad E_r = 0\%$

iv) $E_a = |-138-138| = 0\ u^2$ $\qquad E_r = 0\%$

Se ve que tanto Simpson 1/3 como Simpson 3/8 dan el valor exacto, con Simpson 3/8 es un resultado esperado ya que el ajuste implícito en la integración es de un polinomio de tercer grado.
Con Simpson 1/3, el resultado sorprende un poco, porque se está integrando con parábolas de 2º grado.

Una justificación se encuentra al recordar que los errores de los dos esquemas de Simpson son muy parecidos, y otra es que los errores cometidos en las tres aplicaciones de Simpson 1/3 se cancelan.

Para aclarar esta situación [illegible]

[illegible] Cáceres
Alejandro Gómez M.
Alfonso Sandoval R.

tenemos la siguiente tabla:

x	y
-3	-50
-2	-21
-1	-8
0	-5
1	-6
2	-5
3	+4

Repitiendo el proceso se tiene

$$\int_{-3}^{3} P_3(x)\,dx = \int_{-3}^{3} (x^3-2x^2-5)\,dx = -66 \ u^2$$ que es el área exacta.

i) Rectangular $A = -91 \ u^2$

ii) Trapecial $A = \frac{1}{2}\left[-50+4+2(-21-8-5-6-5)\right] = -68 \ u^2$

iii) Simpson 1/3 $A = \frac{1}{3}\left[-50+4+4(-21-5-5)+2(-8-6)\right] = -67.333 \ u^2$

iv) Simpson 3/8 $A = \frac{3}{8}\left[-50+4+3(-21-8-6-5)+2(-5)\right] = -66 \ u^2$

y los errores serán

i) $E_a = |-66+91| = 25 \ u^2$ $\quad E_r = \frac{25}{66} = 38\%$

ii) $E_a = |-66+68| = 2 \ u^2$ $\quad E_r = \frac{2}{66} = 3\%$

iii) $E_a = |-66-67.333| = 1.333 \ u^2$ $\quad E_r = \frac{1.333}{66} = 2\%$

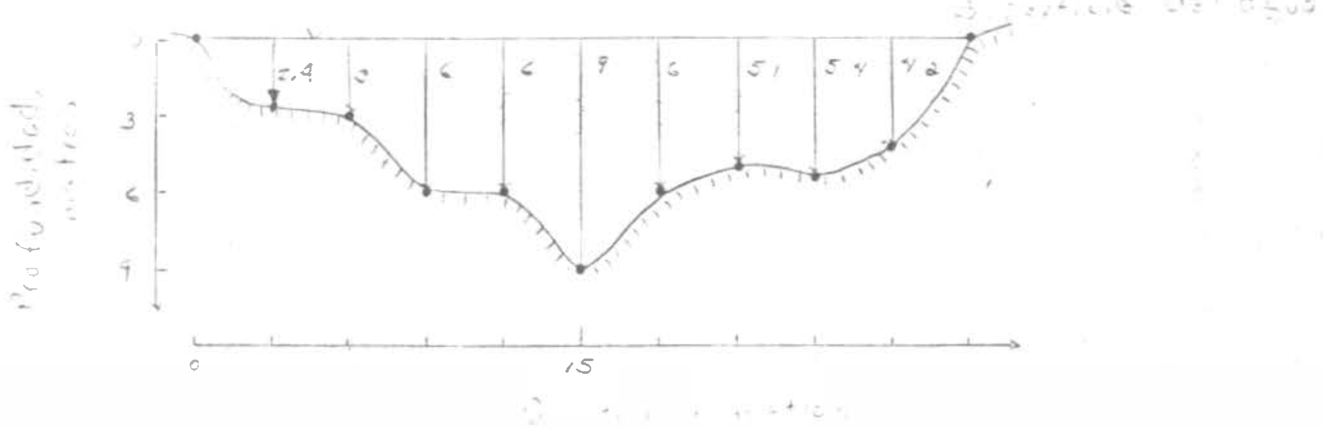
iv) $E_a = |-66+66| = 0 \ u^2$ $\quad E_r = 0\%$

En esta tabla, como en una anterior, sólo aparece un error en Simpson 1/3, el cual es pequeño. Aquí los errores cometidos al aproximar un polinomio de 3er grado con otro de 2º grado (uno por cada aplicación) no se compensaron.

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

23)

Para cálculos relativos a la ingeniería de recursos de agua, que incluye la predicción de inundaciones y el diseño de reservorios, se requieren cálculos de área transversal (CA). A menos que se disponga de dispositivos de sondeo electrónico en la obtención de perfiles continuos del fondo del canal, el ingeniero debe confiar en las mediciones discretas de la profundidad a calcular. En la figura mostrada se ilustra una sección transversal de un canal común. Los puntos representan posiciones en donde se ancló el bote y se tomaron lecturas de la profundidad. Calcular el área transversal a partir de estos datos utilizando la regla trapezoidal y Simpson 1/3.



i	x	y	i
0	0	0	0
1	3	2.4	1
2	6	3	2
3	9	6	3
4	12	6	4
5	15	9	5
6	18	6	6
7	21	5.1	7
8	24	5.4	8
9	27	4.2	9
10	30	0	10

$$A_T = A_{Trapecio} + A_{S\,1/3} + A_{Trapecio}$$

Aplicando reiteradamente la fórmula trapecial se tiene:

Alejandro Gómez G.
Horacio Sandoval

$$A = h\left[\tfrac{1}{2}(f_0+f_n)+\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] \qquad \text{con } h=3 \text{ m} \quad y \quad n=10$$

$$= 3\left[\tfrac{1}{2}(0+0)+(2.4+3+6+6+7+6+5.1+5.4+4.2)\right] = 3(47.1) = 141.3 \text{ m}^2$$

$$\therefore \int_0^{30} f(x)\,dx \doteq 141.3 \text{ m}^2$$

Como el número de intervalos es par se puede aplicar 5 veces el esquema de Simpson 1/3, con lo que se tiene

$$\int_0^{30} f(x)\,dx \doteq \frac{h}{3}\left[f_0+f_n+4\sum_{i=1}^{n-1} f_i+2\sum_{i=2}^{n-2} f_i\right]$$

$$= \frac{3}{3}\left[f_0+f_{10}+4\sum_{i=1}^{9} f_i+2\sum_{i=2}^{8} f_i\right]$$

$$= 1\cdot\left[0+0+4(2.4+6+7+5.1+4.2)+2(3+6+6+5.4)\right]$$

$$= 4(26.7)+2(20.4) = 147.6 \text{ m}^2$$

$$\therefore A = \int_0^{30} f(x)\,dx = 147.6 \text{ m}^2$$

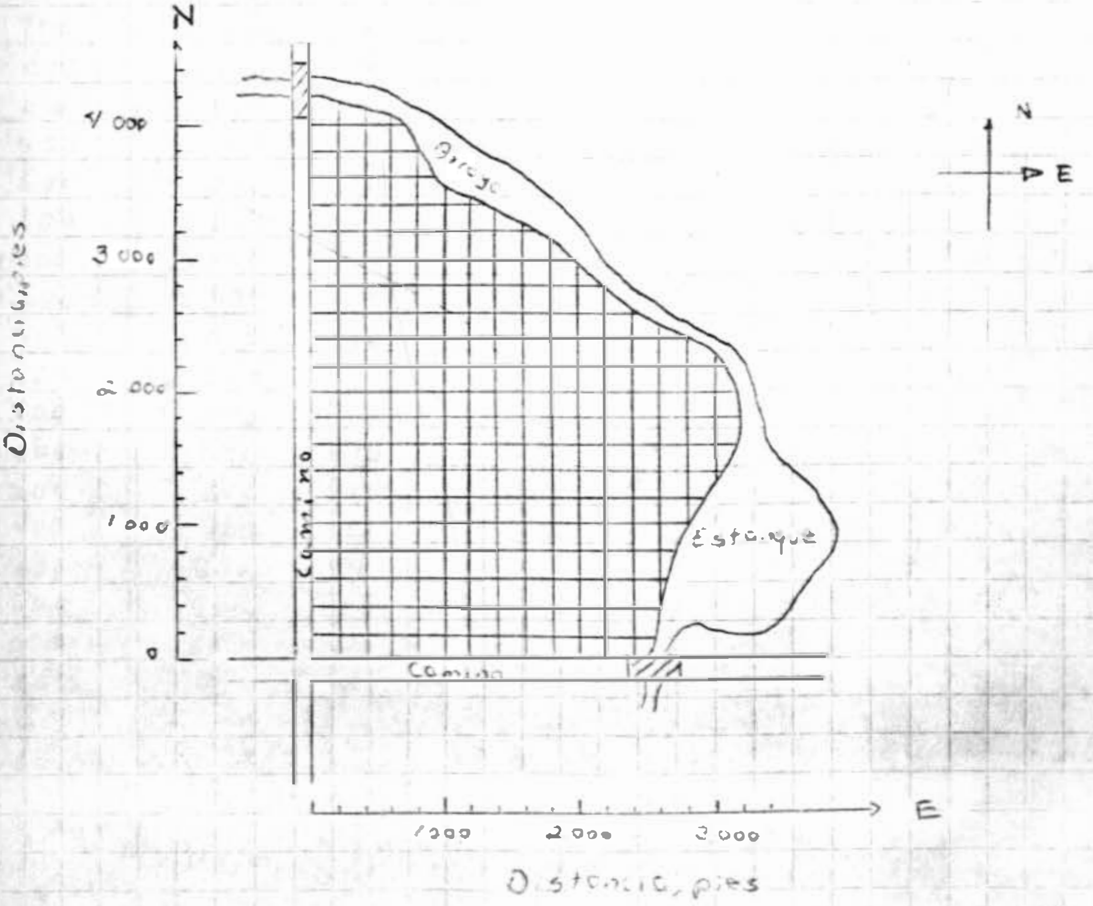
$$\left|A_{Trap} - A_{Sim\,1/3}\right| = \left|141.3-146.6\right| = 5.3 \text{ m}^2$$

La diferencia entre ambos valores es alrededor de 4% que relativamente no es muy fuerte, sin embargo siempre será recomendable Simpson 1/3 sobre integración trapecial.

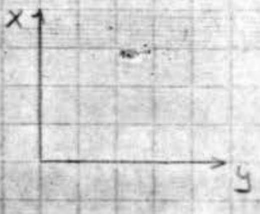
Alejandro Gómez M.
Heraclio Sandoval R.

24)

Durante una investigación de campo es necesario calcular el área del predio mostrado en la siguiente figura. Utilícense las reglas de Simpson para determinar el área.



Si se consideran las coordenadas correspondiendo x al Este y y al Norte, tal como aparece en la figura para los valores 2600 pies al este y mayores, se tienen dos distancias en la dirección norte, o sea, la función no es monovaluada. Esto se puede evitar considerando como abscisas las distancias medidas hacia el norte (N es x) y como ordenadas las medidas hacia el este (E es y), y los ejes quedan



Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

Distancia en pies

x	y	i
0	2450	0
200	2500	1
400	2500	2
600	2550	3
800	2700	4
1 000	2 800	5
1 200	3 000	6
1 400	3 100	7
1 600	3 200	8
1 800	3 200	9
2000	3 100	10
2 200	2 950	11
2 400	2 600	12
2 600	2 300	13
2 800	2 100	14
3 000	1 850	15
3 200	1 600	16
3 400	1 100	17
3 600	950	18
3 800	900	19
4 000	6 00	20
4 200	0	21

Del intervalo $x=0$ a $x=3600$ se utilizará la regla de Simpson 1/3

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum y_{par} + 4\sum y_{impar}\right]$$

$h = 200$

$$\int_0^{3600} f(x)\,dx = \frac{200}{3}\left[2450 + 950 + 2(2500 + 2700 + 3000 + 3200 + 3100 + 2600 + 2100 + 1600) + 4(2500 + 2550 + 2800 + 3100 + 3200 + 2950 + 2300 + 1850 + 1100)\right]$$

$$= \frac{200}{3}(2450 + 950 + 41\,600 + 89\,400)$$

$$= 8\,960\,000 \text{ pies}^2$$

- Del intervalo $x = 3600$ a $x = 4200$ se utilizará la regla de Simpson 3/8.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \doteq \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden múltiplo}\\ \text{de 3}\end{matrix} + 3 \sum \begin{matrix}\text{resto de las}\\ \text{ordenadas}\end{matrix} \right]$$

$$\int_{3600}^{4200} f(x)\,dx = \frac{3}{8}(200)\,[950 + 0 + 3(900 + 600)] = \underline{\underline{408\ 750 \text{ pies}^2}}$$

$$\text{Area del campo} \doteq 8\,960\,000 + 408\,750 = \underline{\underline{9\,368\,750 \text{ pies}^2}}$$

Resolviendo el problema utilizando sólo Simpson 3/8

$$\int_{0}^{4200} f(x)\,dx = \frac{3}{8}(200)\Big[2450 + 0 + 2(2550 + 3000 + 3000 + 2600 + 1850 + 950) + 3(2500 + 2500 + 2700 + 2800 + 3100 + 3200 + 3100 + 2950 + 2300 + 2100 + 1600 + 1100 + 900 + 600)\Big]$$

$$= \frac{600}{8}[2450 + 0 + 28\,300 + 94\,350]$$

$$\text{Area del campo} = \underline{\underline{9\,382\,500 \text{ pies}^2}}$$

$$\%\ \text{error} = \left| \frac{9\,382\,500 - 9\,368\,750}{9\,382\,500} \right| \times 100$$

$$\underline{\underline{\%\ \text{error} = 0.15}}$$

Por lo tanto el resultado 9 368 750 o 9 382 500 pies² son altamente parecidos, y de acuerdo a la figura, muy cercanos a la realidad.

25) Sea la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$ elegir los puntos de muestreo de integración para que el error de la integral sea menor del 5%. Comentar resultados.

1° Calculamos el valor exacto de la integral para tomarlo de referencia:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x \Big]_0^{\pi} = \frac{1}{5}(-1^5 - 1^5) - \frac{1}{3}(-1^3 - 1^3)$$

$$= -2/5 - (-2/3) = -2/5 + 2/3 = \frac{-6+10}{15} = 4/15 = 0.2666\overline{6}$$

El 5% de 0.2666 es $0.0133\overline{3}$

∴ La integral I debe de estar en el intervalo $0.253\overline{3} \leq I \leq 2.799\overline{9}$

$f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$

Sean las Tablas:

Tabla 1

$n=2$, $h=\pi/2$, 3 puntos	$n=4$, $h=\pi/4$, 5 puntos	$n=8$, $h=\pi/8$, 9 puntos	$n=16$, $h=\pi/16$, 17 puntos	X	$f(X)$
0	0	0	0	0	0
			1	$\pi/16$	0.007193
		1	2	$2\pi/16$	0.047835
			3	$3\pi/16$	0.118552
	1	2	4	$4\pi/16$	0.176777
			5	$5\pi/16$	0.177426
		3	6	$6\pi/16$	0.115485
			7	$7\pi/16$	0.035908
1	2	4	8	$8\pi/16$	0
			9	$9\pi/16$	0.035903
		5	10	$10\pi/16$	0.115485
			11	$11\pi/16$	0.177426
	3	6	12	$12\pi/16$	0.176777
			13	$13\pi/16$	0.118552
		7	14	$14\pi/16$	0.047835
			15	$15\pi/16$	0.007143
2	4	8	16	π	0

Tabla 2

$n=2$, $h=\pi/2$, 3 puntos	$n=5$, $h=\pi/5$, 6 puntos	$n=10$, $h=\pi/10$, 11 puntos	X	$f(x)$
0	0	0	0	0
		1	$\pi/10$	0.026691
	1	2	$2\pi/10$	0.132919
		3	$3\pi/10$	0.182941
	2	4	$4\pi/10$	0.032145
1		5	$5\pi/10$	0
	3	6	$6\pi/10$	0.082145
		7	$7\pi/10$	0.182941
	4	8	$8\pi/10$	0.132914
		9	$9\pi/10$	0.026691
2	5	10	π	0

Iniciando con rectangulo en tabla 1

$I = \frac{\pi}{16}(1.358252) = 0.266692$ $\therefore$ Cumple (17 puntos)

$I = \pi/8\,(0.680194) = 0.267112$ $\therefore$ Cumple (9 puntos)

$I = \pi/4\,(0.353554) = 0.277681$ $\therefore$ Cumple (5 puntos)

$I = \pi/2\,(0) = 0$ $\therefore$ Falla (3 puntos).

Simpson 1/3 tabla 1

$I = \frac{1}{3}\,\pi/16\,(4.072620) = 0.266552$ $\therefore$ Cumple (17 puntos)
$I = 1/3\,\pi/8\,(2.013659) = 0.263584$ $\therefore$ Cumple (9 puntos.)
$I = \frac{1}{3}\,\pi/4\,(1.414216) = 0.370241$ $\therefore$ Falla (2 puntos)

Trapecio Tabla 1

$I = \pi/16\left[\frac{0+0}{2} + 1.358252\right] = 0.266692$ $\therefore$ Cumple (17 puntos)
$I = \pi/8\left[\frac{0+0}{2} + 0.680194\right] = 0.267112$ $\therefore$ Cumple (9 puntos)
$I = \pi/4\left[\frac{0+0}{2} + 0.353559\right] = 0.277681$ $\therefore$ Cumple (5 puntos)
$I = \pi/2\,(0) = 0$ $\therefore$ Falla (3 puntos)

Rectangulo Tabla 2

$I = \pi/10\,(0.849382) = 0.266841$ $\therefore$ Cumple (11 puntos)
$I = \pi/5\,(0.430118) = 0.270251$ $\therefore$ Cumple (6 puntos)

Simpson 1/3 Tabla 2

$I = \frac{1}{3}\,\pi/10\,(2.537292) = 0.265705$ $\therefore$ Cumple (11 puntos)
$I = 1/3\,(0) = 0$ $\therefore$ Falla (3 puntos.)

Vemos que entre menos puntos tomemos la integral es menos exacta e incluso llega a tener un error grande (falla) y viceversa

Tampoco es necesario tomar muchos puntos ya que tomando una cantidad "moderada" de puntos tenemos un resultado "aceptable"

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

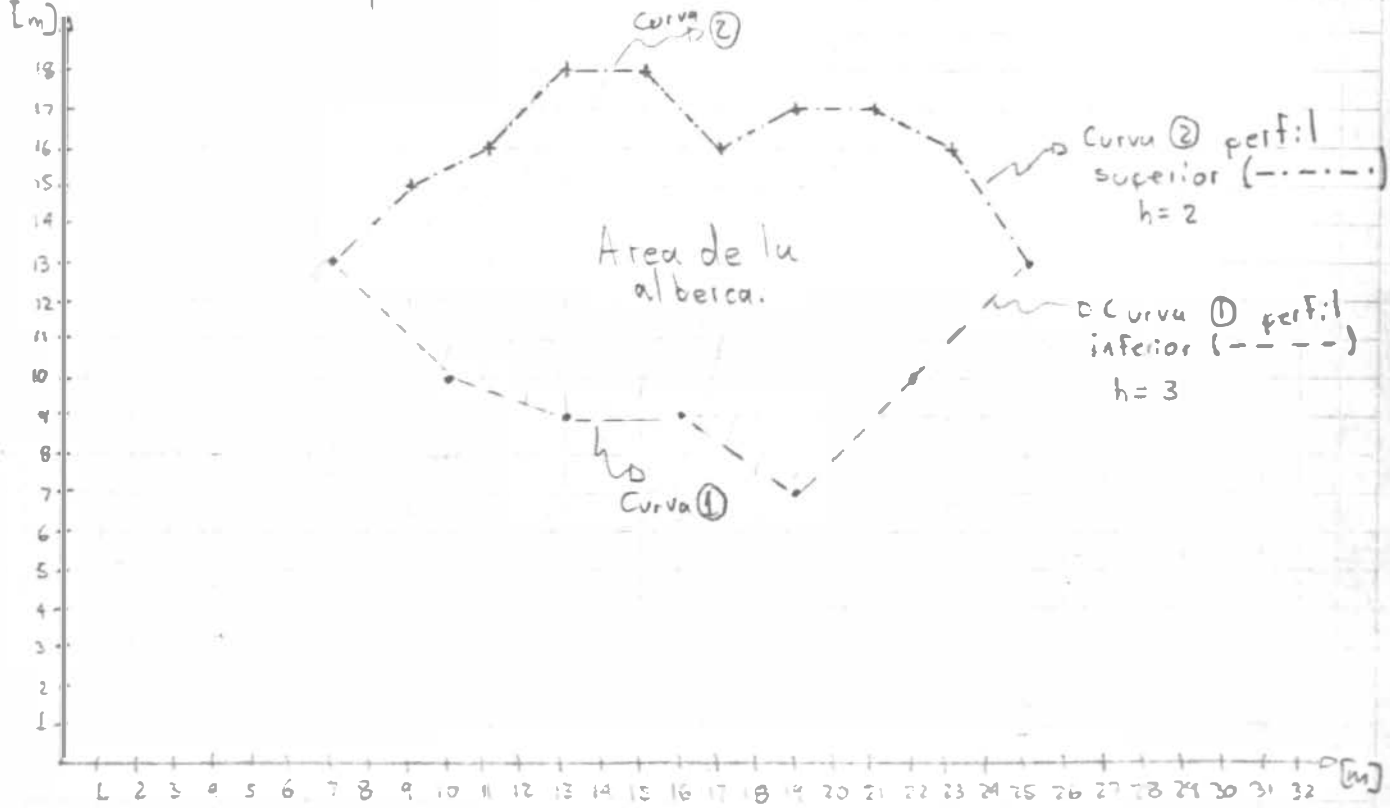
26) El perfil de una alberca de 1.50m de profundidad está dado por los siguientes puntos (coordenadas en metros):

(10,10), (13,9), (16,9), (19,7), (22,10), (25,13), (23,16), (21,17)
(19,17), (17,16), (15,18), (13,18), (11,16), (9,15), (7,13)

Calcular el volumen de la alberca mediante Simpson 1/3 ó/y Simpson 3/8

Volumen = (Area)(profundidad)

Graficando el perfil:



Nos damos cuenta que el área que realmente ocupa la alberca es el area (integral definida) bajo la curva ②, menos el area (integral definida) bajo la curva ①, es decir,

Area total = Area bajo el perfil superior − Area bajo perfil inferior

* Calculando el área para el perfil inferior.

Tabulándolo:

n	0	1	2	3	4	5	6
X	7	10	13	16	19	22	25
y	13	10	9	9	7	10	13

[$\Delta x = 3$]

Problemario Métodos Numéricos
Alejandro Gómez M.
Homero Sandoval R.

Utilizamos $S_{1/3} = \frac{h}{3}\left[Y_0+Y_n+2\sum \text{ordenadas pares} + 4\sum \text{resto de las ordenadas}\right]$

$h=3$

$S_{\frac{1}{3}} = \frac{3}{3}\left[13+13+2(9+7)+4(10+9+10)\right] = 174\,m^2$

* Cálculo del área del perfil superior:

Tabulándolo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
y	13	15	16	18	18	16	17	17	16	13

$h=2$

Utilizamos $S_{3/8} = \frac{3}{8}h\left[Y_0+Y_n+2\sum \text{ordenadas múltiplo de } 3 + 3\sum \text{resto de ordenadas}\right]$

$S_{3/8} = \frac{3}{8}(2)\left[13+13+2(18+17)+3(15+16+18+16+17+16)\right]$

$S_{3/8} = 292.5\,m^2$

Area total $= 292.5\,m^2 - 174\,m^2 = 118.5\,m^2$

Volumen $= 1.6\,m(118.5)\,m^2 = \boxed{189.6\,m^3}$

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

27)

El gasto en una tubería está dado por las siguientes lecturas.

n	0	1	2	3	4	5	6
Tiempo [min]	20	21.5	23	24.5	26	27.5	29
Gasto [m^3/min]	0	10	5	15	5	10	0

a) Estime mediante Simpson 1/3 el volumen que fluyó por la tubería en los nueve minutos de lectura

b) Repita la estimación con Simpson 3/8

c) Indique que resultado recomendaría. Indique el por qué de su elección

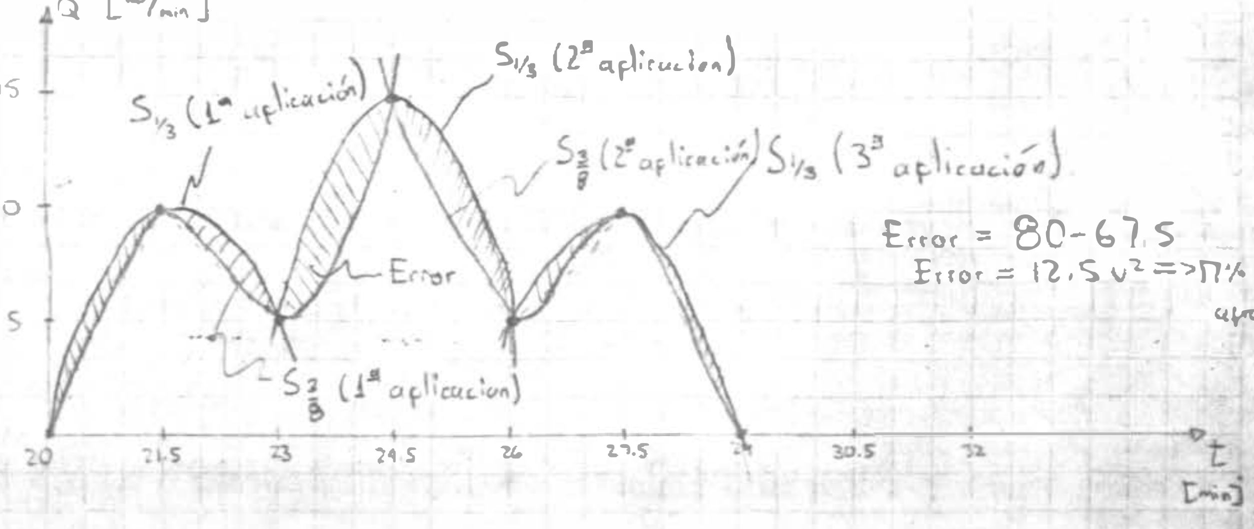
a) $h = 1.5$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{1.5}{3}\left[0+0+2(5+5)+4(10+15+10)\right] = \boxed{80\ m^3}$$

b) $h = 1.5$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8}(1.5)\left[0+0+2(15)+3(10+5+5+10)\right] = \boxed{67.5\ m^3}$$

c) A falta de mayor información y considerando todos los datos con igual importancia, es indiferente selecionar cualquier resultado. Tal vez lo recomendable fuera el promedio, pero esto solo tiene justificación estadística $\left[\frac{1}{2}(80+67.5) = 73.75 m^3\right]$



Error = 80-67.5
Error = 12.5 u^2 => 17% apro

28)

El zoológico de Australia [illegible] donó a México 3 canguros, se sabe que estos animales requieren de 140 m² de área para su hábitat, localizado en el zoológico de Chapultepec en México, D.F. Se dispone de un mapa del espacio que ocuparán dentro del zoológico pero no se tiene medio alguno para calcularlo directamente utilizando métodos de integración. Determine el área disponible y diga si es suficiente para los requerimientos de hábitat de estos animales.

estableciendo un sistema de coordenadas (x,y)

x	y
0	12
1	12.8
2	13
3	13
4	12.9
5	12
6	11.8
7	11.7
8	11.8
9	11.9
10	11.3
11	10

x	y
11.2	9
11.2	8
11.1	7
11.05	6
11.0	5
11.1	3
11.7	2.5
12	2
12.5	1
12	0

Para el intervalo $y=0$ a $x=8$ se usará Simpson $1/3$ y de 8 a 11 se usará Simpson $3/8$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \doteq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,..}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,..}^{n-2} y_i\right] \qquad \text{con } h=1$$

$$\therefore \int_0^8 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[12 + 11.8 + 4(12.8 + 13 + 12 + 11.7) + 2(13 + 12.9 + 11.8)\right]$$

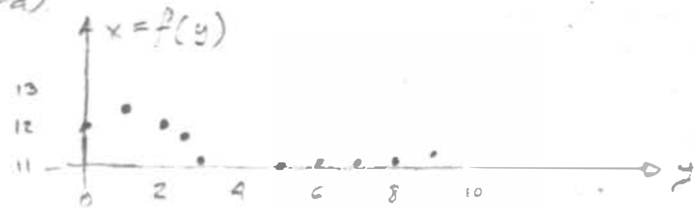
$$= \frac{1}{3}(23.8 + 198.0 + 75.4) = \frac{297.2}{3} = 99.067 \ m^2$$

$$\int_8^{11} f(x)\,dx = \frac{3 \cdot h}{8}\left[f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right] = \frac{3 \cdot 1}{8}\left[11.8 + 3(11.9) + 3(11.3) + 10\right]$$

$$= \frac{3}{8}(91.4) = \frac{274.2}{8} = 34.275 \ m^2$$

$$\therefore \int_0^{11} f(x)\,dx = 99.067 + 34.275 = 133.342 \ m^2$$

Para conocer el área cuyos valores son mayores de $x=11.0$ se tiene que la función $y=f(x)$ es multivaluada, por tanto se hará un cambio para obtener $x=f(y)$, o sea que geométricamente las barras de integración serán verticales (según la figura)



Las nuevas abscisas y están espaciadas a intervalo variable, y existe el punto $y=2.5$, $x=11.7$ que "puede considerarse" como sobrante y para $y=4$ no hay valor de x, o sea falta ese punto.

El problema puede resolverse de diferentes maneras, aquí se se interpolará el valor correspondiente a $y=4$ y el punto $y=2.5$, $x=11.7$ de tal manera que todos los valores de y estén igualmente espaciados. El punto a eliminar no es ni máximo, ni mínimo por lo que el error cometido al ignorarlo será pequeño.

En cuanto al punto a interpolar se hará ajustando una línea recta de $y=3$ a $y=5$. Dada la distribución de los puntos es de esperarse que esta hipótesis no genere errores apreciables. Usando Lagrange

$$x_{y=4} = (11.1)\frac{4-5}{3-5} + (11.0)\frac{4-3}{5-3} = 5.55 + 5.50 = 11.050 m$$

Por tanto la nueva tabla es

y	$x = f(y)$	$x' = f(y) - 11$
0	12	1.0
1	12.5	1.5
2	12	1.0
3	11.1	0.1
4	11.05	0.05
5	11.0	0.0
6	11.05	0.05
7	11.1	0.1
8	11.2	0.2
9	11.3	0.3
10	11.0	0.0

Debe considerarse que como en la primer parte se integró el área de $x=0$ a $x=11.0$, ahora la integración debe ser de $x=11.0$ hacia valores superiores, por tanto es recomendable generar una columna x' con los valores ya corregidos.

Usando Simpson 1/3 para integrar de $y=0$ a $y=10$ se tiene

$$\int_0^{10} f(y)\,dy = \frac{h}{3}\left[x'_0 + x'_{10} + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{9} x'_i + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{8} x'_i\right] \qquad \text{con } h=1$$

$$= \frac{1}{3}\left[1.0 + 0.0 + 4(1.5 + 0.1 + 0.0 + 0.1 + 0.3) + 2(1.0 + 0.05 + 0.05 + 0.2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[1.0 + 8 + 2.6\right] = 1.467 \text{ m}^2$$

Por tanto el área total será

$$A_T = 133.342 + 1.467 = \underline{134.809 \text{ m}^2} < 140 \text{ m}^2$$

Por lo que no se dispone del área solicitada para el habitat de los 3 canguros.

Problemario Métodos Numéricos
Roberto Hernández Guzmán
Horacio Sandoval R.

1)

Dados los puntos

	x	y	
x_1	0	0	y_1
x_2	3	0	y_2
x_3	4	10	y_3
	1	-5	
	2	-5	

Interpolar con Lagrange $P_2(x)$ para los valores $x=1$ y $x=2$

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

$$P_2(1) = \frac{(1-3)(1-4)}{(0-3)(0-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-4)}{(3-0)(3-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-3)}{(4-0)(4-3)}(10)$$

$$P_2(1) = 0 + 0 + \frac{(-20)}{4} = -5 \qquad \underline{\underline{P_2(x=1) = -5}}$$

$$P_2(2) = \frac{(2-3)(2-4)}{(0-3)(0-4)}(0) + \frac{(2-0)(2-4)}{(3-0)(3-4)}(0) + \frac{(2-0)(2-3)}{(4-0)(4-3)}(10)$$

$$P_2(2) = 0 + 0 - \frac{20}{4} = -5 \qquad \underline{\underline{P_2(x=2) = -5}}$$

2)

Determine una raíz de la siguiente función tabular

x	1	3	16
y	-2	-1	2

Invirtiendo la tabla

	y	x	
y_1	-2	1	x_1
y_2	-1	3	x_2
y_3	+2	16	x_3

Interpolando con Lagrange para $y=0$,

$$x = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1 + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2 + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3$$

$$x = \frac{(0+1)(0-2)}{(-2+1)(-2-2)}(1) + \frac{(0+2)(0-2)}{(-1+2)(-1-2)}(3) + \frac{(0-2)(0+1)}{(2+2)(2+1)}(16)$$

$$x = \frac{-2}{4} + \frac{12}{3} + \frac{32}{12}$$

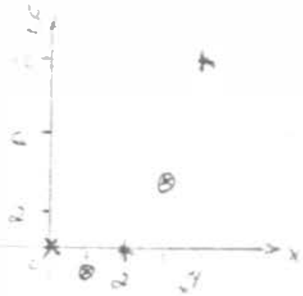
$$\underline{\underline{x = 6.1666667}}$$

3)

Dados los puntos $(0,0), (2, 0), (4, 10)$ interpolar con Lagrange $P_2(x)$ para los valores $x=1$ y $x=3$

69

	x	y	
x_1	0	0	y_1
x_2	2	0	y_2
x_3	4	10	y_3



$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

$$P_2(1) = \frac{(1-2)(1-4)}{(0-2)(0-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-4)}{(2-0)(2-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-2)}{(4-0)(4-2)}(10)$$

$$P_2(1) = 0 + 0 + \left(\frac{-10}{8}\right) = -\frac{5}{4}$$

$$\underline{\underline{P_2(1) = -1.25}}$$

$$P_2(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(0-2)(0-4)}(0) + \frac{(3-0)(3-4)}{(2-0)(2-4)}(0) + \frac{(3-0)(3-2)}{(4-0)(4-2)}(10)$$

$$P_2(3) = 0 + 0 + \left(\frac{30}{8}\right) = \frac{15}{4}$$

$$\underline{\underline{P_2(3) = 3.75}}$$

4) Dados [illegible] puntos cuyas [illegible] son [illegible] (2,1), [illegible] (5,0), obtener las correspondientes a $x=1$ y $x=4$ mediante interpolación con polinomios de segundo orden

a) $x =$ Usando el método de Lagrange

	X	$f(x)$	
x_1	0	0	y_0
x_2	2	1	y_1
x_3	3	0	y_2
	5	0	

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

$$y = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)}(0) + \frac{(1-0)(1-3)}{(2-0)(2-3)}(1) + \frac{(1-0)(1-2)}{(3-0)(3-2)}(0)$$

$$y = \frac{-2}{2(-1)} \qquad \underline{\underline{y = 1 \quad \therefore \quad P(1,1)}}$$

b) $x = 4$

	X	$f(x)$	
	0	0	
x_1	2	1	y_1
x_2	3	0	y_2
x_3	5	0	y_3

$$y = \frac{(4-3)(4-5)}{(2-3)(2-5)}(1) + \frac{(4-2)(4-5)}{(3-2)(3-5)}(0) + \frac{(4-2)(4-3)}{(5-2)(5-3)}(0)$$

$$y = \frac{-1}{3} \qquad \underline{\underline{y = -\frac{1}{3} \qquad P(4, -1/3)}}$$

5)

Calcular el [illegible]

	x	y	
x_1	[illegible]	3	y_1
x_2	[illegible]	[illegible]	y_2
x_3	[illegible]	[illegible]	y_3
x_4	[illegible]	[illegible]	y_4

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\,y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\,y_3 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\,y_4$$

a) $x = 5.6$

$$y = \frac{(5.6-4)(5.6-6)(5.6-9)}{(1-4)(1-6)(1-9)}(3) + \frac{(5.6-1)(5.6-6)(5.6-9)}{(4-1)(4-6)(4-9)}(12) + \frac{(5.6-1)(5.6-4)(5.6-9)}{(6-1)(6-4)(6-9)}($$

$$+ \frac{(5.6-1)(5.6-4)(5.6-6)}{(9-1)(9-4)(9-6)}(21)$$

$$y = \frac{6.528}{-120} + \frac{75.072}{30} + \frac{-450.432}{-30} + \frac{-61.824}{120}$$

$$\underline{\underline{y = 16.947}}$$

b) $x = 7.8$

$$y = \frac{(7.8-4)(7.8-6)(7.8-9)}{(1-4)(1-6)(1-9)}(3) + \frac{(7.8-1)(7.8-6)(7.8-9)}{(4-1)(4-6)(4-9)}(12) + \frac{(7.8-1)(7.8-4)(7.8-9)}{(6-1)(6-4)(6-9)}($$

$$+ \frac{(7.8-1)(7.8-4)(7.8-6)}{(9-1)(9-4)(9-6)}(21)$$

$$y = \frac{-24.624}{-120} + \frac{-176.256}{30} + \frac{-558.144}{-30} + \frac{976.752}{120}$$

$$\underline{\underline{y = 21.074}}$$

Problemario Métodos Numéricos
Roberto Hernández G
Horacio Sandoval R

6) Obtener los valores de y para $x=3$ y $x=6$ respectivamente para la función tabulada en la siguiente tabla:

	x	$f(x)$	
x_0	0	5	y_0
x_1	1	7	y_1
x_2	2	9	y_2
x_3	5	15	y_3
	7	19	

Usando un polinomio de tercer grado y apoyado en los primeros cuatro puntos.

Método de Lagrange:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3$$

Para $x=3$ se tiene:

$$y(3) = \frac{(3-1)(3-2)(3-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}(5) + \frac{(3-0)(3-2)(3-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)}(7) +$$

$$\frac{(3-0)(3-1)(3-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)}(9) + \frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}(15)$$

$$y(3) = 2 - 10.5 + 18 + 1.5 \qquad \underline{\underline{y(3) = 11}}$$

Para $x=6$ se tiene:

$$y(6) = \frac{(6-1)(6-2)(6-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}(5) + \frac{(6-0)(6-2)(6-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)}(7) +$$

$$+ \frac{(6-0)(6-1)(6-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)}(9) + \frac{(6-0)(6-1)(6-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}(15$$

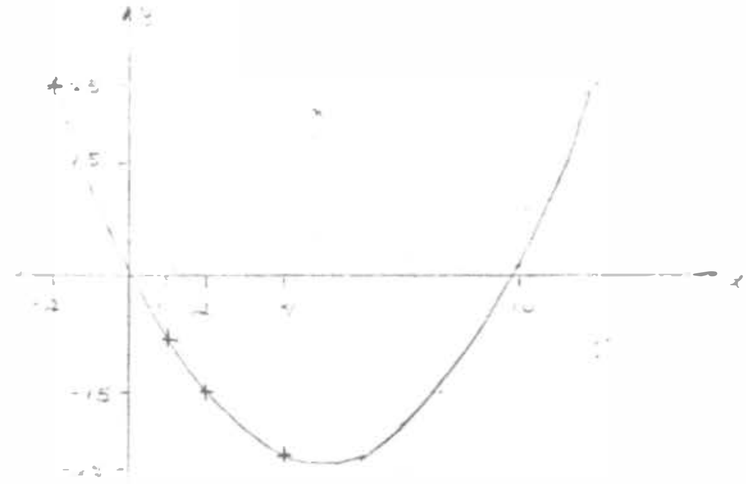
$$y(6) = -10 + 42 - 45 + 30 \qquad \underline{\underline{y(6) = 17}}$$

Para $x=6$, se ha extrapolado la función ya que las abscisas de apoyo son de 0 a 5. Es mejor apoyarse en los últimos cuatro puntos.

7)

Determinar el polinomio correspondiente a la función tabular dada para dos cifras decimales

	x	y	
x_1	-2	25	y_1
x_2	1	-8	y_2
x_3	2	-15	y_3
x_4	4	-23	y_4



Fórmula de interpolación de Lagrange

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4$$

Sustituyendo valores

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{\underset{-3}{(-2-1)}\underset{-4}{(-2-2)}\underset{-6}{(-2-4)}}25 + \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)}(-8) + \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)}(-15) +$$

$$+ \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)}(-23)$$

$$y = -0.35(x^3-7x^2+14x-8) - 0.89(x^3-4x^2-4x+16) + 1.88(x^3-3x^2-6x+8)$$

$$-0.64(x^3-x^2-4x+4)$$

$x^3\ (-0.35 - 0.89 + 1.88 - 0.64) = 0x^3$

$x^2\ (-0.35(-7) - 0.89(-4) + 1.88(-3) + 0.64) = 1.01x^2$

$x\ (-0.35(14) - 0.89(-4) + 1.88(-6) + 0.64(4)) = -10.06x$

$-8(-0.35) - 0.89(16) + 1.88(8) - 0.64(-4) = 1.04$

$$\underline{\underline{y = 1.01x^2 - 10.06x + 1.04 = 0}} \Rightarrow \underline{\underline{y = x^2 - 10x + 1}}$$

PROBLEMARIO MÉTODOS NUMÉRICOS
Roberto Hernández G.
Horacio Sandoval R.

8)

Calcular el polinomio correspondiente a la función que se presenta a continuación en forma tabular

	x	y	
x_1	-5	0	y_1
x_2	-2	15	y_2
x_3	1	18	y_3
x_4	4	15	y_4

Empleando todos los puntos.

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\,y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\,y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\,y_4$$

$$y = \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(-5+2)(-5-1)(-5-4)}(0) + \frac{(x+5)(x-1)(x-4)}{(-2+5)(-2-1)(-2-4)}(15) +$$

$$\frac{(x+5)(x+2)(x-4)}{(1+5)(1+2)(1-4)}(18) + \frac{(x+5)(x+2)(x-1)}{(4+5)(4+2)(4-1)}(15)$$

$$y = 0.28\,(x^3-21x+20) - 0.33(x^3+3x^2-18x-40) + 0.09(x^3+6x^2+3x-10)$$

$x^3\,(0.28-0.33+0.09) = 0.04\,x^3$ coef. de x^3

$x^2\,(-0.33(3)+0.09(6)) = -0.44\,x^2$ " " x^2

$x\,(0.28(-21)-0.33(-18)+0.09(3)) = 0.44\,x$ " " x^1

$0.28(20) - 0.33(-40) + 0.09(-10) = 17.96$ " " x^0

Por tanto

$$\underline{\underline{0.04\,x^3 - 0.44\,x^2 + 0.44\,x + 17.96 = 0}}$$

9) Dada la siguiente tabla de puntos, encuentre el valor [illegible] $x = 2.5$ utilizando Lagrange. Compare las respuestas con la solución exacta ($y = 1.498$)

	x_i	y_i	
x_1	0	1	y_1
x_2	1	1.204	y_2
x_3	2	1.837	y_3
x_4	3	0.423	y_4
x_5	4	-3.027	y_5

Lagrange

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)}y_4 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}y_5$$

$$y = \frac{(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)}(1) + \frac{(2.5-0)(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)}(1.204) +$$

$$+ \frac{(2.5-0)(2.5-1)(2.5-3)(2.5-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)}(1.837) + \frac{(2.5-0)(2.5-1)(2.5-2)(2.5-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}(0.423) +$$

$$+ \frac{(2.5-0)(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}(-3.027)$$

$$y = \frac{0.5625}{24} + \frac{1.1334}{-6} + \frac{5.1666}{4} + \frac{-1.18969}{-6} + \frac{2.8378}{24}$$

$$y = 1.4427$$

Resultado exacto $y = 1.498$

$$\% e = \left| \frac{1.498 - 1.4427}{1.498} \right| \times 100$$

$$\% e = 3.69$$

Obtenga un valor de y correspondiente a x = 4.5 usando interpolación de Lagr

Compare el resultado con la respuesta exacta, si esta es 5.456

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	2	3.5	4	5	5.5
y	2.827	3.623	4.573	5.720	5.998
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)}y_4 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}y_5$$

$$= \frac{(4.5-3.5)(4.5-4)(4.5-5)(4.5-5.5)}{(2-3.5)(2-4)(2-5)(2-5.5)}(2.827) + \frac{(4.5-2)(4.5-4)(4.5-5)(4.5-5.5)}{(3.5-2)(3.5-4)(3.5-5)(3.5-5.5)}(3.623)$$

$$+ \frac{(4.5-2)(4.5-3.5)(4.5-5)(4.5-5.5)}{(4-2)(4-3.5)(4-5)(4-5.5)}(4.573) + \frac{(4.5-2)(4.5-3.5)(4.5-4)(4.5-5.5)}{(5-2)(5-3.5)(5-4)(5-5.5)}(5.92$$

$$+ \frac{(4.5-2)(4.5-3.5)(4.5-4)(4.5-5)}{(5.5-2)(5.5-3.5)(5.5-4)(5.5-5)}(5.998)$$

$$= \frac{0.707}{31.5} + \frac{2.264}{-2.25} + \frac{5.716}{1.5} + \frac{-7.4}{-2.25} + \frac{-3.749}{5.25}$$

$$= 5.402$$

$$e_{rel} = \left| \frac{5.456 - 5.402}{5.456} \right| \times 100$$

$$e_{rel} = 0.991$$

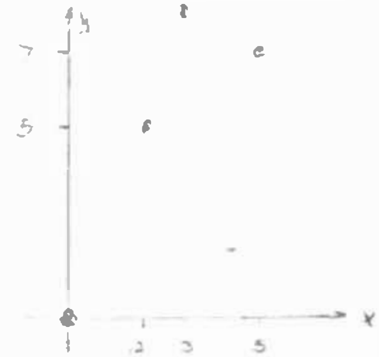
11) [illegible] 7

[illegible] se muestra en la tabla [illegible] correspondientes a $t = 2.5$ seg y $t = 4$ seg

	t (seg)	h (cm)	
x_1	0	0	y_1
x_2	2	5	y_2
x_3	3	8	y_3
x_4	5	7	y_4

$t = x$

$h = y$



$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 +$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4$$

$$y = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{(0 - 2)(0 - 3)(0 - 5)}(0) + \frac{(x - 0)(x - 3)(x - 5)}{(2 - 0)(2 - 3)(2 - 5)}(5) + \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 5)}{(3 - 0)(3 - 2)(3 - 5)}(8) +$$

$$+ \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)}{(5 - 0)(5 - 2)(5 - 3)}(7)$$

$$y = 0.834(x^3 - 8x^2 + 15x) - 1.334(x^3 - 7x^2 + 10x) + 0.234(x^3 - 5x^2 + 6x)$$

$$y = (0.834 - 1.334 + 0.234)x^3 + (0.834(-8) - 1.334(-7) + 0.234(-5))x^2 +$$

$$+ (0.834(15) - 1.334(10) + 0.234(6))x$$

$$y = -0.266x^3 + 1.496x^2 + 0.574x$$

(a) $F(2.5) = -0.266(2.5)^3 + 1.496(2.5)^2 + 0.574(2.5)$

$$\underline{\underline{F(2.5) = 6.629 \text{ m}}}$$

b) $F(4) = -0.266(4)^3 + 1.496(4)^2 + 0.574(4)$

$$\underline{\underline{F(4) = 9.208 \text{ m}}}$$

12) Encuentre [illegible] interpolación de Lagrange una x que proporcione una y = 7.386 [illegible] en la tabla siguiente:

x	y
0.2	-2.619
1.0	3.000
1.3	4.425
2.2	8.177

7.386

[illegible] la tabla (Intercambiando columnas):

	y	x	
x_1	-2.619	0.20	y_1
x_2	3	1	y_2
x_3	4.425	1.30	y_3
x_4	8.177	2.20	y_4

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y = \frac{(7.386-3)(7.386-4.425)(7.386-8.177)}{(-2.619-3)(-2.619-4.425)(-2.619-8.177)}(0.20) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-4.425)(7.386-8.177)}{(3+2.619)(3-4.425)(3-8.177)}(1) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-3)(7.386-8.177)}{(4.425+2.619)(4.425-3)(4.425-8.177)}(1.3) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-3)(7.386-4.425)}{(8.177+2.619)(8.177-3)(8.177-4.425)}(2.2)$$

$$y = \frac{(4.386)(2.961)(-0.791)(0.20)}{(-5.619)(-7.044)(-10.796)} + \frac{(10)(2.961)(-0.791)(1)}{(5.619)(-1.425)(-5.17)} +$$

$$+ \frac{(10)(4.386)(-0.791)(1.3)}{(7.044)(1.425)(-3.752)} + \frac{(10)(4.386)(2.961)(2.2)}{(10.796)(5.177)(3.752)}$$

$$y = \frac{-2.055}{-427.31} + \frac{-23.42}{41.4} + \frac{-45.1}{-37.64} + \frac{285.8}{209.703}$$

$$\underline{\underline{y = 2.0008}} \quad \therefore \quad x = 2.0008$$

13)

a) Haciendo una interpolación lineal, calcular $f(x) = e^x$ para $x = 1.2$ si $f(1) = 2.7183$ y $f(1.4) = 4.0552$, ¿cuál es el error?

Interpolación de Newton

x	$f(x) = e^x$	ΔY_0
1	2.7183	
		1.3369
1.4	4.0552	

$x_0 = 1,\ y_0 = 2.7183,\ \Delta Y_0 = 1.3369,\ h = 0.4,\ x_K = 1.2$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{1.2 - 1}{0.4} = 0.5$$

$$y_K = Y_0 + K \Delta Y_0$$

$$y_{0.5} = 2.7183 + 0.5(1.3369)$$

$$y_{0.5} = 3.3867 \qquad \underline{\underline{f(1.2) \doteq 3.3867}}$$

$$\%\,Error = \left| \frac{e^{1.2} - 3.3867}{e^{1.2}} \right| \times 100$$

$$\%\,Error = \left| \frac{3.3201 - 3.3867}{3.3201} \right| \times 100$$

$$\underline{\underline{Error = 2.0067\,\%}} \qquad \underline{\underline{E_{real} = 0.0666}}$$

b) Del problema anterior calcular f(x) para el mismo valor de x haciendo una interpolación de segundo orden si f(1) = 2.7183, f(1.4) = 4.0552 y f(1.8) = 6.0496. Calcular el error y comparar el resultado con el de interpolación lineal

$f(x) = e^x$
$f(1.2) = ?$

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
1	2.7183		
		1.3369	
1.4	4.0552		0.6575
		1.9944	
1.8	6.0496		

$x_0 = 1,\ y_0 = 2.7183,\ \Delta y_0 = 1.3369,\ \Delta^2 y_0 = 0.6575,\ h = 0.4$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{1.2 - 1}{0.4} = 0.5$$

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$y_{0.5} = 2.7183 + 0.5(1.3369) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2!}(0.6575)$$

$$y_{0.5} = 2.7183 + 0.6685 - 0.0822$$

$$y_{0.5} = 3.3046$$

$$\%e = \left|\frac{e^{1.2} - 3.3046}{e^{1.2}}\right| \times 100$$

$$\%e = \left|\frac{3.3201 - 3.3046}{3.3201}\right| \times 100$$

Error = 0.47%

$E_{Total} = 0.0155$

El error de interpolación lineal es cuatro veces el error del polinomio de 2º grado.

(1)

siguiente tabla nos muestra las diferentes velocidades de un automovil. Calcule la velocidad para t = 3.5 seg, t = 6 seg, t = 11 seg

		t (seg)	V m/seg	
x_0	x_0	0	25	y_0
x_1	x_1	5	60.5	y_1
x_2	x_2	7	82.1	y_2
x_3	x_3	10	95.6	y_3
x_4	x_4	12	105	y_4

$$y = \sum_{i=0}^{i=n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i$$

$$y = \frac{(x-5)(x-7)(x-10)(x-12)}{(0-5)(0-7)(0-10)(0-12)}(25) + \frac{(x-0)(x-7)(x-10)(x-12)}{(5-0)(5-7)(5-10)(5-12)}(60.5) +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-12)}{(7-0)(7-5)(7-10)(7-12)}(82.1) + \frac{(x-0)(x-5)(x-7)(x-12)}{(10-0)(10-5)(10-7)(10-12)}(95.6) +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-5)(x-7)(x-10)}{(12-0)(12-5)(12-7)(12-10)}(105)$$

$$y = \frac{25}{4200}(x^4 - 34x^3 + 419x^2 - 2210x + 4200) +$$

$$- \frac{60.5}{350}(x^4 - 29x^3 + 274x^2 - 840x) +$$

$$+ \frac{82.1}{210}(x^4 - 27x^3 + 230x^2 - 600x) +$$

$$- \frac{95.6}{300}(x^4 - 24x^3 + 179x^2 - 420x) +$$

$$+ \frac{105}{840}(x^4 - 22x^3 + 155x^2 - 350x)$$

$$y = (0.006 - 0.173 + 0.391 - 0.319 + 0.125)x^4$$

$$+ (-0.202 + 5.013 - 10.556 + 7.648 - 2.75)x^3$$

$$+ (2.494 - 47.363 + 89.919 - 57.041 + 19.375)x^2$$

$$+ (-13.155 + 145.2 - 234.571 + 133.840 - 43.75)x + 25$$

[illegible]
Roberto Hernández G.
Alonso Sandoval R.

El polinomio es:

$$y = 0.030x^4 - 0.847x^3 + 7.384x^2 - 12.436x + 25$$

a) t = 3.5 seg.

$$F(3.5) = 0.030(3.5)^4 - 0.847(3.5)^3 + 7.384(3.5)^2 - 12.436(3.5) + 25$$

$$\underline{\underline{F(3.5) = 40.115}}$$

b) t = 6 seg.

$$F(6) = 0.030(6)^4 - 0.847(6)^3 + 7.384(6)^2 - 12.436(6) + 25$$

$$\underline{\underline{F(6) = 72.136}}$$

c) t = 11.0 seg.

$$F(11) = 0.030(11)^4 - 0.847(11)^3 + 7.384(11)^2 - 12.436(11) + 25$$

$$\underline{\underline{F(11) = 93.541}}$$

73) [illegible]

[illegible] $f(x) = -10.85$

Dado la siguiente tabla [illegible]

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-2	0	1	4	5
$f(x)$	-12	-2	0	66	128
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

) $x = 1.5$

$$y = \left(\sum_{i=0}^{n} \prod \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i$$

$$y = \frac{(1.5-0)(1.5-1)(1.5-4)(1.5-5)}{(-2-0)(-2-1)(-2-4)(-2-5)}(-12) + \frac{(1.5+2)(1.5-1)(1.5-4)(1.5-5)}{(0+2)(0-1)(0-4)(0-5)}(-2) +$$

$$+ \frac{(1.5+2)(1.5-0)(1.5-4)(1.5-5)}{(1+2)(1-0)(1-4)(1-5)}(0) + \frac{(1.5+2)(1.5-0)(1.5-1)(1.5-5)}{(4+2)(4-0)(4-1)(4-5)}(66) +$$

$$+ \frac{(1.5+2)(1.5-0)(1.5-1)(1.5-4)}{(5+2)(5-0)(5-1)(5-4)}(128)$$

$$y = \frac{-78.75}{252} + \frac{-30.625}{-40} + 0 + -\frac{606.375}{-72} + \frac{-360}{140}$$

$$\underline{\underline{y = 6.3036}}$$

) $f(x) = -10.85$ Invirtiendo la tabla.

$f(x)$	-2	0	1	4	5
x	-12	-2	0	66	128

$$y = \frac{(-10.85+2)(-10.85-0)(-10.85-66)(-10.85-128)}{(-12+2)(-12-0)(-12-66)(-12-128)}(-2) +$$

$$+ \frac{(-10.85+12)(-10.85-0)(-10.85-66)(-10.85-128)}{(-2+12)(-2-0)(-2-66)(-2-128)}(0) +$$

$$+ \frac{(-10.85+12)(-10.85+2)(-10.85-66)(-10.85-128)}{(0+12)(0+2)(0-66)(0-128)}(1) +$$

$$+ \frac{(-10.85+12)(-10.85+2)(-10.85-0)(-10.85-128)}{(66+12)(66+2)(66-0)(66-128)}(4) +$$

$$+ \frac{(-10.85+12)(-10.85+2)(-10.85-0)(-10.85-66)}{(128+12)(128+2)(128-0)(128-66)}(5)$$

$$y = -1.917 + 0 + (-0.536) + 0.003 + (-0.0002) = -2.4503$$

16)

Encontrar el grado del polinomio que pueda representar al conjunto de valores de la siguiente tabla

x	-4	-2	0	2	4
y	-4.333	2.333	1	7.667	38.333

X	Y	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$	$\Delta^3 Y_0$
-4	-4.333			
		6.667		
-2	2.333		-8	
		-1.333		16.000
0	1		8	
		6.667		16.000
2	7.667		23.999	
		30.666		
4	38.333			

constantes, por lo tanto el polinomio es de tercer grado

Roberto Hernández G.
Horacio Sandoval R.

De la tabla siguiente aplicando el método de interpolación de Newton obtener:

a) El valor de y para x = 1
b) El valor de y para x = 3.5
c) El valor de y para x = -4.5
d) El polinomio que define la función

x	y	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$	$\Delta^3 Y_0$
-4	-4.333			
		6.6667		
-2	2.333		-8	
		-1.333		16.0
0	1		8	
		6.667		16.0
2	7.667		23.999	
		30.666		
4	38.333			

a) $x_0 = -2,\ y_0 = 2.333,\ h = 2;\ \Delta Y_0 = -1.333;\ \Delta^2 Y_0 = 8;\ \Delta^3 Y_0 = 16$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h} = \frac{-1-(-2)}{2} = 0.5$$

$$y_K = y_0 + K\Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 Y_0$$

$$y_{0.5} = 2.333 + 0.5(-1.333) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(8) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(16)$$

$$y_{0.5} = 2.333 - 0.6665 - 1 + 1$$

$$\underline{\underline{y_{0.5} = 1.6665}}$$

b) El valor de y para $x = 3.53$

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
4	38.333			
		-30.666		
2	7.667		23.999	
		-6.667		-16
0	1		8	
		1.333		-16
-2	2.333		-8	
		-6.333		
-4	-4.333			

$x_0 = 4$, $y_0 = 38.333$; $\Delta y_0 = -30.666$, $\Delta^2 y_0 = 23.999$, $\Delta^3 y_0 = -16$; $h = 2$

$$k = \frac{x_0 - x_k}{h} = \frac{4 - 3.53}{2} = 0.235$$

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_{0.235} = 38.333 + 0.235(-30.666) + \frac{0.235(0.235-1)}{2!}(23.999) + \frac{0.235(0.235-1)(0.235-2)}{3!}($$

$$y_{0.235} = 38.333 - 7.207 - 2.157 - 0.846$$

$$\underline{\underline{y_{0.235} = 28.123}}$$

Rubicel Hernández G.
Horacio Sandoval R.

c) El valor de y para x = -4.5 Completando la tabla con los valores subrayados

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
-6	<u>-35</u>			
		<u>30.667</u>		
-4	-4.333		<u>-24</u>	
		6.6667		<u>16.0</u>
-2	2.333		-8	
		-1.333		16.0
0	1		8	
		6.667		16.0
2	7.667		23.99	
		30.666		
4	38.333			

$x_0 = -6,\ y_0 = -35\ ;\ \Delta y_0 = 30.667\ ;\ \Delta^2 y_0 = -24\ ,\ \Delta^3 y_0 = 16\ ;\ h = 2$

$$K = \frac{X_K - x_0}{h} = \frac{-4.5 - (-6)}{2} = 0.75$$

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_{0.75} = -35 + 0.75(30.667) + \frac{0.75(0.75-1)}{2!}(-24) + \frac{0.75(0.75-1)(0.75-2)}{3!}(16)$$

$$y_{0.75} = -35 + 23 + 2.25 + 0.625$$

$$\underline{\underline{y_{0.75} = -9.125}}$$

Rubén Hernández G.
Teresa Sandoval R.

d) El polinomio que define la función

Utilizando los valores del inciso c

$x_0 = -2,\ y_0 = 2.333;\ \Delta y_0 = -1.333,\ \Delta^2 y_0 = 8;\ \Delta^3 y_0 = 16,\ h = 2$

$$K = \frac{x_K - x_0}{2} = \frac{x-(-2)}{2}$$

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_K = 2.333 + \left(\frac{x+2}{2}\right)(-1.333) + \frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+2}{2}-1\right)}{2!}(8) + \frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+2}{2}-1\right)\left(\frac{x+2}{2}-2\right)}{3!}(16)$$

$$y_K = 2.333 - 0.667x - 1.333 + 4\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{16}{6}\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

$$y_K = 2.333 - 0.667x - 1.333 + x(x+2) + \frac{1}{3}(x^2-4)(x)$$

$$y_K = 1 - 0.667x + x^2 + 2x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$$

$$y_K = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$$

Para los siguientes tabla obtener los valores del desplazamiento para los tiempos

a) t = 7.5 seg

b) t = [illegible] seg

c) t = 27.3 seg

Utilice la formula de interpolacion de Newton

t (tiempo en seg)	0	5	10	15	20	25	30
s (distancia en m)	0	0.5	7	27	68	137.5	243

a) t = 7.5 seg

t / x	s / y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0	0			
		0.5		
5	0.5		6	
		6.5		7.5
10	7		13.5	
		20		7.5
15	27		21	
		41		7.5
20	68		28.5	
		69.5		7.5
25	137.5		36	
		105.5		
30	243			

$x_0 = 5,\ y_0 = 0.5,\ \Delta y_0 = 6.5;\ \Delta^2 y_0 = 13.5,\ \Delta^3 y_0 = 7.5,\ h = 5$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{7.5 - 5}{5} = 0.5$$

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_{0.5} = 0.5 + 0.5(6.5) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(13.5) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(7.5)$$

$$y_{0.5} = 0.5 + 3.25 - 1.6875 + 0.46875$$

$$\underline{\underline{y_{0.5} = 2.53125}}$$

$t = 1$ seg

[illegible]

Completando la tabla con los valores [illegible]

x	y	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$	$\Delta^3 Y_0$
-5	-2.0			
		2.0		
0	0.0		-1.5	
		0.5		7.5
5	0.5		6.0	
		6.5		7.5
10	7		13.5	
		20		
15	27			

$X_0 = -5$, $Y_0 = -2$, $\Delta Y_0 = 2$, $\Delta^2 Y_0 = -1.5$, $\Delta^3 Y_0 = 7.5$, $h = 5$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h} = \frac{-1+5}{5} = 0.8$$

$$Y_K = Y_0 + K\Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 Y_0$$

$$Y_K = -2 + 0.8(2) + \frac{0.8(0.8-1)}{2!}(-1.5) + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)}{3!}(7.5)$$

$$Y_K = -2 + 1.6 + 0.12 + 0.24$$

$$\underline{\underline{Y_{0.8} = -0.04 \approx 0}}$$

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0	0			
		0.5		
5	6.5		6	
		6.5		7.5
10	7		13.5	
		20		7.5
15	27		21	
		41		7.5
20	68		28.5	
		69.5		7.5
25	137.5		36	
		105.5		7.5
30	243		43.5	
				7.5
35	—	—		

$x_0 = 25,\ y_0 = 137.5,\ \Delta y_0 = 105.5,\ \Delta^2 y_0 = 43.5,\ \Delta^3 y_0 = 7.5,\ h = 5$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{28.3 - 25}{5} = 0.66$$

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y_{0.66} = 137.5 + 0.66(105.5) + \frac{0.66(0.66-1)}{2!}(43.5) + \frac{(0.66)(0.66-1)(0.66-2)}{3!}(7.5)$$

$$y_{0.66} = 137.5 + 69.63 - 4.8807 + 0.37587$$

$$y_{0.66} = 202.62517$$

Problemario Métodos Numéricos
Roberto Hernández G.
Ignacio Sandoval R.

18)

En la siguiente tabla se tienen los datos del peso y altura de varios individuos de diferentes edades. Calcular el peso de cada individuo para las siguientes alturas: h = 1.84 m, h = 1.72 m y h = 1.76 m

h (altura en m)	1.73	1.75	1.77	1.79	1.81	1.83
W (peso en Kg)	72.21	72.26	72.30	72.32	72.36	72.38

a) h = 1.84 m

h	w	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
1.73	72.21					
		0.05				
1.75	72.26		-0.01			
		0.04		-0.01		
1.77	72.30		-0.02		0.05	
		0.02		0.04		-0.13
1.79	72.32		0.02		-0.08	
		0.04		-0.04		
1.81	72.36		-0.02			
		0.02				
1.83	72.38		0			
		0.02				
1.85						
			0			

Completando la tabla con los valores sombreados

$x_0 = 1.83$, $y_0 = 72.38$, $\Delta y_0 = 0.02$, $\Delta^2 y_0 = 0$, $h = 0.02$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{1.84 - 1.83}{0.02} = 0.5$$

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + K\frac{(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$y_{0.5} = 72.38 + 0.5(0.02) + 0$$

$$\underline{\underline{y_{0.5} = 72.39 \text{ (Kg)}}}$$

De la tabla se tiene que las diferencias de orden 3, 4 y 5 son crecientes, no obstante se acepta la aproximación y por tanto el error cometido al considerar que $\Delta^2 y_0 = 0$, ya que al sustituir los valores en la serie de Taylor estos se dividirán entre 3!, 4! y 5!, lo cual disminuye su aportación.

Recuperación Métodos Numéricos
Roberto Hernández G
Horacio Sandoval R

1) $h = 1.72$ m

Completando la tabla con los valores necesarios y aceptando la aproximación indicada en el enunciado.

x	w	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$
1.71	72.16		
		0.05	
1.73	72.21		0
		0.05	
1.75	72.25		- 0.01
		0.04	
1.77	72.30		

$x_0 = 1.71$, $y_0 = 72.16$, $\Delta Y_0 = 0.05$, $h = 0.02$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h} = \frac{1.72 - 1.71}{0.02} = 0.5$$

$$y_K = y_0 + K \Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!} \Delta^2 Y_0$$

$$y_{0.5} = 72.16 + 0.5(0.05) + 0$$

$$\underline{\underline{y_{0.5} = 72.185 \text{ (Kg)}}}$$

c) h = 1.76 m

h	W	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$
1.73	72.21		
		0.05	
1.75	72.26		-0.01
		0.04	
1.77	72.30		0.02
		0.02	
1.79	72.32		

$x_0 = 1.75$, $y_0 = 72.26$, $\Delta Y_0 = 0.04$, $\Delta^2 Y_0 = 0$ (aproximando a 1-10) ; $h = 0.02$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{1.76 - 1.75}{0.02} = 0.5$$

$$y_K = y_0 + K\,\Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 Y_0$$

$$y_{0.5} = 72.26 + 0.5(0.04) + 0$$

$$\underline{\underline{y_{0.5} = 72.28 \ (Kg)}}$$

... diferentes velocidades ... cuando

a) v = 0.6 m/s b) v = 1.3 m/s, c) v = 2.5 m/s

Roberto Hernández G.
Horacio Sandoval R.

V (m/seg)	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4
E (joules)	0.145	0.327	0.581	0.908	1.308

V	E	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
0.8	0.145		
		0.182	
1.2	0.327		0.072
		0.254	
1.6	0.581		0.073
		0.327	
2.0	0.908		0.073
		0.400	
2.4	1.308		

aproximando a cero $\Delta^3 y_0$

a) v = 0.6 m/s

Completando la tabla

	V	E	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
a)	0.4	0.036		
			0.109	
	0.8	0.145		0.073
			0.182	
b)	1.2	0.327		0.072
			0.254	
	1.6	0.581		0.073
			0.327	
	2.0	0.908		0.073
			0.400	
	2.4	1.308		

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$x_0 = 0.4,\ y_0 = 0.036,\ \Delta y_0 = 0.109;\ \Delta^2 y_0 = 0.073$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h} = \frac{0.6 - 0.4}{0.4} = 0.5$$

[illegible]
Roberto Hernández G.
[illegible] Sandoval R.

$y_{0.5} = 0.036 + 0.5(0.109) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(0.073)$

$y_{0.5} = 0.036 + 0.0545 + 0.009125$

$y_{0.5} = 0.081$

b) $v = 1.3$ m/s

$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

$x_0 = 1.2$, $y_0 = 0.327$, $\Delta y_0 = 0.254$, $\Delta^2 y_0 = 0.073$

$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{1.3 - 1.2}{0.4} = 0.25$

$y_{0.25} = 0.327 + 0.25(0.254) + \frac{0.25(0.25-1)}{2!}(0.073)$

$y_{0.25} = 0.327 + 0.064 - 0.007$

$y_{0.25} = 0.3837$

c) $v = 2.5$ m/s   Invirtiendo la tabla

V	E	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
2.4	1.308		
		-0.4	
2.0	0.905		0.073
		-0.327	
1.6	0.581		0.073
		-0.254	
1.2	0.327		0.072
		-0.132	
0.8	0.145		

$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

$x_0 = 2.4$, $y_0 = 1.308$, $\Delta y_0 = -0.4$, $\Delta^2 y_0 = 0.073$

$k = \frac{x_0 - x_k}{h} = \frac{2.4 - 2.5}{0.4} = -0.25$

... Hernández S.
... Sandoval R.

$$y_{-0.25} = 1.308 - 0.25(-0.4) + \frac{(-0.25)(-0.25-1)}{2!}(0.073)$$

$$y_{-0.25} = 1.308 + 0.1 + 0.011$$

$$\underline{\underline{y_{-0.25} = 1.4194}}$$

(20)

[illegible]

altura de la [illegible] semana

a) a los 10 días

b) a los [illegible] días

c) a los [illegible] días

Semana	1	2	3	4	5	6
altura (m)	0.75	1.2	1.75	2.5	3.45	4.7

	Semana	Altura	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
a)	1	0.75				
			0.45			
	2	1.2		0.1		
b)			0.55		0.1	
	3	1.75		0.2		-0.1
			0.75		0.0	
	4	2.5		0.2		0.1
			0.95		0.1	
	5	3.45		0.3		
			1.25			
	6	4.7				

$$y_K = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)(K-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h}$$

a) $x_K = \frac{10}{7} = 1.43$; $x_0 = 1$, $y_0 = 0.75$; $\Delta y_0 = 0.45$; $\Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 = 0.1$, $\Delta^4 y_0 = -0.1$

$$K = \frac{1.43 - 1}{1} \quad 0.43$$

$$y_{0.43} = 0.75 + 0.43(0.45) + \frac{(0.43)(0.43-1)}{2}(0.1) + \frac{0.43(0.43-1)(0.43-2)}{6}(0.1) + \frac{0.43(0.43-1)(0.43-2)(0.43-3)}{24}(-0.1)$$

$$y_{0.43} = 0.75 + 0.1935 - 0.0123 + 0.0064 + 0.0041$$

$$\underline{\underline{10 \text{ días} \quad y = 0.9418 \text{ m}}}$$

b) $y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0$

$x_k = \frac{20}{7} = 2.86$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1.20$; $\Delta y_0 = 0.55$; $\Delta^2 y_0 = 0.2$; $\Delta^3 y_0 = 0$; $\Delta^4 y_0 = 0.1$

$K = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{2.86 - 2}{1} = 0.86$

$y_{0.86} = 1.20 + 0.86(0.55) + \frac{0.86(0.86-1)}{2!}(0.2) + \frac{0.86(0.86-1)(0.86-2)}{3!}(0) +$

$+ \frac{0.86(0.86-1)(0.86-2)(0.86-3)}{4!}(0.1)$

$y_{0.86} = 1.20 + 0.4730 - 0.0120 + 0 - 0.0012 = 1.6597$

20 días $y = 1.6597$ m

c) $x_k = \frac{30}{7} = 4.29$ Invirtiendo la tabla.

$y_k = y_0 + K\Delta y_0 + \frac{K(K-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{(K)(K-1)(K-2)(K-3)}{4!}\Delta^4$

Semana	Altura	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
6	4.70				
		-1.25			
5	3.45		0.3		
		-0.95		-0.1	
4	2.50		0.2		0.1
		-0.75		0.0	
3	1.75		0.2		-0.1
		-0.55		-0.1	
2	1.20		0.1		
		-0.45			
1	0.75				

$\therefore x_0 = 5$, $y_0 = 3.45$, $\Delta y_0 = -0.95$; $\Delta^2 y_0 = 0.2$; $\Delta^3 y_0 = 0.0$; $\Delta^4 y_0 = -0.1$

$K = \frac{x_0 - x_k}{h} = \frac{5 - 4.29}{1} = 0.71$

$$y_{0.71} = 3.45 + 0.71(-0.95) + \frac{0.71(0.71-1)}{2!}(0.2) + \frac{0.71(0.71-1)(0.71-2)}{3!}(0.0)$$

$$+ \frac{0.71(0.71-1)(0.71-2)(0.71-3)}{4!}(-0.1)$$

$$y_{0.71} = 3.45 - 0.6745 - 0.0206 + 0 + 0.0025 = 2.7574$$

30 días $\underline{\underline{y = 2.7574 \text{ m}}}$

Procedimientos Numéricos Numéricos
Roberto Hernández E.
Honorio Sandoval R.

21)

Aplicando la interpolación de Newton, calcular de la siguiente función tabulada

x	y
-3	-51
-1	-11
1	-11
3	-3
5	61

a) El valor de y para x=0.5

x	f(x)	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
-3	-51			
		+40		
-1	-11		-40	
		0		+48
1	-11		8	
		8		48
3	-3		56	
		64		
5	61			

$$F(0.5) \doteq y_K = y_0 + \binom{K}{1}\Delta y_0 + \binom{K}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{K}{3}\Delta^3 y_0$$

$$x_0 = -1,\ y_0 = -11,\ \Delta y_0 = 0,\ \Delta^2 y_0 = 8,\ \Delta^3 y_0 = 48,\ h = 2$$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{(0.5+1)}{2} = 0.75$$

$$y_K = -11 + \binom{0.75}{1} 0 + \binom{0.75}{2} 8 + \binom{0.75}{3} 48$$

$$y_K = -11 + 0 + \frac{0.75(0.75-1)}{2!}(8) + \frac{0.75(0.75-1)(0.75-2)}{3!}(48)$$

$$y_{0.75} = -9.875 \qquad \underline{\underline{F(0.5) = -9.875}}$$

b) El valor de y para x =

Invirtiendo la tabla

x	$f(x)$	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
5	61			
		-64		
3	-3		56	
		-8		-48
1	-11		8	
		0		-48
-1	-11		-40	
		-40		
-3	-51			

$$F(4) \doteq y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0$$

$x_0 = 5,\ y_0 = 61,\ \Delta y_0 = -64,\ \Delta^2 y_0 = 56,\ \Delta^3 y_0 = -48,\ h = 2$

$$K = \frac{x_0 - x_K}{h} \quad \frac{5-4}{2} = +0.5$$

$$y_{0.5} = 61 + 0.5(-64) + \frac{0.5(+0.5-1)}{2!}(56) + \frac{0.5(+0.5-1)(+0.5-2)}{3!}(-48)$$

$y_{0.5} = 61 - 32 - 7 - 3 = 19$

$y_{0.5} = 19 \qquad \underline{\underline{F(4) = 19}}$

c) El valor de y para x = -3.4

x	$f(x)$	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
-5	-179			
		128		
-3	-51		-88	
		40		48
-1	-11		-40	
		0		48
1	-11		8	
		8		48
3	-3		56	
		64		
5	61			

$$F(-3.4) = y_K = y_0 + \binom{K}{1}\Delta y_0 + \binom{K}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{K}{3}\Delta^3 y_0$$

$x_0 = -5,\ y_0 = -179,\ \Delta y_0 = 128;\ \Delta^2 y_0 = -88,\ \Delta^3 y_0 = 48;\ h = 2$

$$K = \frac{x_K - x_0}{h} = \frac{-3.4 + 5}{2} = 0.8$$

Problemario Métodos Numéricos

Roberto Hernández G. 10

Horacio Sandoval R.

$$y_{0.8} = -179 + 0.8(128) + \frac{0.8(0.8-1)(-88)}{2!} + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)}{3!}(48)$$

$$y_{0.8} = -179 + 102.4 + 7.04 + 1.536$$

$$y_{0.8} = -68.024 \qquad \underline{\underline{F(-3.4) = -68.024}}$$

c) El polinomio al cual corresponde la función tabulada.

$x_0 = -1,\ y_0 = -11,\ \Delta y_0 = 0,\ \Delta^2 y_0 = 8;\ \Delta^3 y_0 = 48;\ h = 2$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{x+1}{2}$$

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0$$

$$y_k = -11 + \left(\frac{x+1}{2}\right)(0) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{2!}(8) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)\left(\frac{x+1}{2} - 2\right)}{3!}(48)$$

$$y_k = -11 + 0 + 4\left(\frac{x}{2} + 0.5\right)\left(\frac{x}{2} - 0.5\right) + 8\left(\frac{x}{2} + 0.5\right)\left(\frac{x}{2} - 0.5\right)\left(\frac{x}{2} - 1.5\right)$$

$$y_k = -11 + 4\left(\frac{x^2}{4} - 0.25\right) + 8\left(\frac{x^2}{4} - 0.25\right)\left(\frac{x}{2} - 1.5\right)$$

$$y_k = -11 + x^2 - 1 + (2x^2 - 2)\left(\frac{x}{2} - 1.5\right)$$

$$y_k = x^2 - 12 + (x^3 - 3x^2 - x + 3)$$

$$y_k = x^3 - 2x^2 - x - 9$$

$$\therefore \underline{\underline{p(x) = x^3 - 2x^2 - x - 9}}$$

22) Dados los puntos (0,10), (4,0), (6,0), (10,0) encuentre:

a) el valor de y para $x=5$ con un polinomio de 1er grado

b) " " " " " " " dos polinomios de 2º grado

c) " " " " " " " un polinomio de 3er grado.

a) Interpolando linealmente entre (4,0) y (6,0)

$$P_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right]$$

como el polinomio es de 1er grado se tiene que $n=2$

$$y(5) = \sum_{j=1}^{2} y_j \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{2} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right] = 0\,\frac{5-6}{4-6} + 0\,\frac{5-4}{6-4} = 0.0$$

b) Con un polinomio de 2º grado con (0,10), (4,0) y (6,0)

$$y(5) = 10\,\frac{(5-4)(5-6)}{(0-4)(0-6)} + 0\,\frac{(5-0)(5-6)}{(4-0)(4-6)} + 0\,\frac{(5-0)(5-4)}{(6-0)(6-4)} = 10\,\frac{1\cdot(-1)}{+24} = -0.417$$

Ahora con los puntos (4,0), (6,0) y (10,0) se tiene

$$y(5) = 0\,\frac{(5-6)(5-10)}{(4-6)(4-10)} + 0\,\frac{(5-4)(5-10)}{(6-4)(6-10)} + 0\,\frac{(5-4)(5-6)}{(10-4)(10-6)} = 0.0$$

c) Con un polinomio de 3er grado

$$y(5) = 10\,\frac{(5-4)(5-6)(5-10)}{(0-4)(0-6)(0-10)} + 0\,\frac{(5-0)(5-6)(5-10)}{(4-0)(4-6)(4-10)} + 0\,\frac{(5-0)(5-4)(5-10)}{(6-0)(6-4)(6-10)} + 0\,\frac{(5-0)(5-4)(5-6)}{(10-0)(10-4)(10-6)}$$

$$= 10\,\frac{1(-1)(-5)}{-240} + 0 + 0 - 0 = -0.208$$

Se observa que desde la elección del grado del polinomio, que es cuando se ajusta la curva o polinomio interpolante, ya se está influyendo en el resultado. Para el caso de $P_2(x)$ con el mismo grado del polinomio se tienen dos resultados diferentes, y para el 3er grado el resultado es diferente a los anteriores. La elección del valor correcto para $y(5)$ no depende del método numérico, ya que todos los resultados lo son, por tanto aplicar la "receta" a ciegas no resuelve el problema. Es necesario saber qué significan los datos o qué fenómeno corresponde. Por ejemplo, si fueran los números que existen en una comunidad, no se pueden aceptar los valores negativos.

23) Dados los puntos (0,0), (2,1), (3,0), (5,0) usando el método de Lagrange de 2º orden interpole las ordenadas para X=1 y X=4.

X	0	2	3	5
Y	0	1	0	0

* Para $X=1$

$$Y_{x=1} = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)}(0) + \frac{(1-0)(1-3)}{(2-0)(2-3)}(1) + \frac{(1-0)(1-2)}{(3-0)(3-2)}(0)$$

$$y_{x=1} = \frac{1(-2)}{2(-1)}(1) = \boxed{1}$$

* Para $X=4$

$$Y_{x=4} = \frac{(4-3)(4-5)}{(2-3)(2-5)}(1) + \frac{(4-2)(4-5)}{(3-2)(3-5)}(0) + \frac{(4-2)(4-3)}{(5-2)(5-3)}(0)$$

$$Y_{x=4} = \frac{(1)(-1)}{(-1)(-3)} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

24)
Usando Lagrange de 3° orden interpole para $x=5$ y $x=8$

x	0	2	7	10
y	-3	0	4	0

* Para $x=5$

$$y_{x=5} = \frac{(5-2)(5-7)(5-10)}{(0-2)(0-7)(0-10)}(-3) + \frac{(5-0)(5-7)(5-10)}{(2-0)(2-7)(2-10)}(0)$$

$$+ \frac{(5-0)(5-2)(5-10)}{(7-0)(7-2)(7-10)}(4) + \frac{(5-0)(5-2)(5-7)}{(10-0)(10-2)(10-7)}(0)$$

$$y_{x=5} = \frac{(3)(-2)(-5)}{(-2)(-7)(-10)}(-3) + \frac{(5)(3)(-5)}{(7)(5)(-3)}(4) = 0.6428 + 2.8571$$

$$\boxed{y_{x=5} = 3.4999}$$

* Para $x=8$

$$y_{x=8} = \frac{(8-2)(8-7)(8-10)}{(0-2)(0-7)(0-10)}(-3) + \frac{(8-0)(8-7)(8-10)}{(2-0)(2-7)(2-10)}(0)$$

$$+ \frac{(8-0)(8-2)(8-10)}{(7-0)(7-2)(7-10)}(4) + \frac{(8-0)(8-2)(8-7)}{(10-0)(10-2)(10-7)}(0)$$

$$y_{x=8} = \frac{(6)(1)(-2)}{(-2)(-7)(-10)}(-3) + \frac{8(6)(-2)}{7(5)(-3)}4 = -0.2571 + 3.6571 = 3.4$$

$$\boxed{y_{x=8} = 3.4}$$

Roberto Hernández G.
Horacio Sandoval R.

25) Usando Lagrange de tercer orden interpole para $x=5$ y $x=8$

x	0	2	7	10
y	0	2	-2	0

* Para $x=5$

$$Y_{x=5} = \frac{(5-2)(5-7)(5-10)}{(0-2)(0-7)(0-10)}(0) + \frac{(5-0)(5-7)(5-10)}{(2-0)(2-7)(2-10)}(2)$$

$$+ \frac{(5-0)(5-2)(5-10)}{(7-0)(7-2)(7-10)}(-2) + \frac{(5-0)(5-2)(5-7)}{(10-0)(10-2)(10-7)}(0)$$

$$= \frac{(5)(-2)(-5)}{(2)(-5)(-8)}(2) + \frac{(5)(3)(-5)}{(7)(5)(-3)}(-2) = 1.25 - 1.4285 = -0.1785$$

$$\boxed{Y_{x=5} = -0.1785}$$

* Para $x=8$

$$Y_{x=8} = \frac{(8-2)(8-7)(8-10)}{(0-2)(0-7)(0-10)}(0) + \frac{(8-0)(8-7)(8-10)}{(2-0)(2-7)(2-10)}(2)$$

$$+ \frac{(8-0)(8-2)(8-10)}{(7-0)(7-2)(7-10)}(-2) + \frac{(8-0)(8-2)(8-7)}{(10-0)(10-2)(10-7)}(0)$$

$$Y_{x=8} = \frac{8(+1)(-2)}{(2)(-5)(-8)}(2) + \frac{(8)(6)(-2)}{7(5)(-3)}(-2) = -0.4 - 1.8285 = -2.2285$$

$$\boxed{Y_{x=8} = -2.2285}$$

Roberto Herrera [illegible] G.
Horacio Sandoval R.

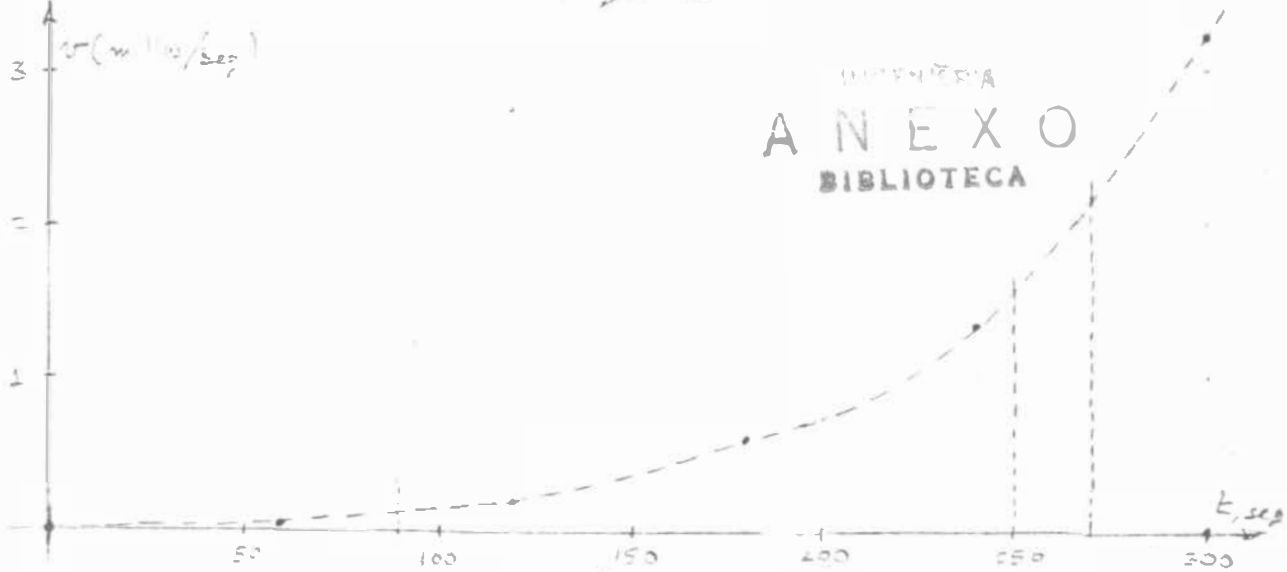
26) En la siguiente tabla se tienen lecturas de velocidad de un cohete dispensado verticalmente desde la superficie del mar.

Tiempo (seg)	0	60	120	180	240	300
Velocidad $\left(\frac{millas}{seg}\right)$	0	0.0824	0.2147	0.6502	1.3151	3.2229

a) Dibuje los datos, y a través de la curva estime la velocidad que posee a los 90, 250 y 270 seg.

b) Calcule la velocidad del cohete para los mismos instantes mediante interpolación de Lagrange.

a)



De la figura se tiene:

$v_{90} \doteq 0.12$ millas/seg
$v_{250} \doteq 1.60$ "
$v_{270} \doteq 2.15$ "

b) Dado que la función tiene un comportamiento exponencial aproximadamente, si se usa interpolación lineal se cometen errores que pueden ser apreciables.
Por tanto, para $t = 90$ se usará un polinomio de 2º y 3er grado para analizar la diferencia, y este nos dirá el grado a emplear para $t = 250$ y $t = 270$.

$$P_n(x) = y = \sum_{j=0}^{n} y_j \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right].$$

$$P_2(x=90) = y = 0\,\frac{(90-60)(90-120)}{(0-60)(0-120)} + 0.0824\,\frac{(90-0)(90-120)}{(60-0)(60-120)} + 0.2147\,\frac{(90-0)(90-60)}{(120-0)(120-60)}$$

$$= 0 + 0.0824\,\frac{-2700}{-3600} + 0.2147\,\frac{2700}{7200} = 0.0618 + 0.0805 = 0.1423$$

[illegible]
[illegible] S.
[illegible] E.

[illegible] polinomio de tercer grado

$$P_3(x=90)=y=0\cdot\frac{(90-60)(90-120)(90-180)}{(0-60)(0-120)(0-180)}+0.0824\,\frac{(90-0)(90-120)(90-180)}{(60-0)(60-120)(60-180)}+$$

$$+0.2147\,\frac{(90-0)(90-60)(90-180)}{(120-0)(120-60)(120-180)}+0.6502\,\frac{(90-0)(90-60)(90-120)}{(180-0)(180-60)(180-120)}$$

$$=0+0.0824\,\frac{243000}{432000}+0.2147\,\frac{-243000}{-432000}+0.6502\,\frac{-81000}{1296000}$$

$$=0+0.0464+0.1208-0.0406=0.1265 \text{ millas/seg}$$

De acuerdo con el comportamiento mostrado en la figura, parece más apropiado este último valor, por tanto se usará un polinomio de 3er grado para $t=250$ y 270.

$$P_3(x=250)=y=0.2147\,\frac{(250-180)(250-240)(250-300)}{(120-180)(120-240)(120-300)}+0.6502\,\frac{(250-120)(250-240)(250-300)}{(180-120)(180-240)(180-300)}+$$

$$+1.3851\,\frac{(250-120)(250-180)(250-300)}{(240-120)(240-180)(240-300)}+3.2229\,\frac{(250-120)(250-180)(250-240)}{(300-120)(300-180)(300-240)}$$

$$=0.2147\,\frac{-35000}{-1296000}+0.6502\,\frac{-65000}{432000}+1.3851\,\frac{-455000}{-432000}+3.2229\,\frac{91000}{1296000}$$

$$=0.0058-0.0978+1.4589+0.2263=1.593 \text{ millas/seg}$$

$$P_3(x=270)=y=0.2147\,\frac{(270-180)(270-240)(270-300)}{(120-180)(120-240)(120-300)}+0.6502\,\frac{(270-120)(270-240)(270-300)}{(180-120)(180-240)(180-300)}+$$

$$+1.3851\,\frac{(270-120)(270-180)(270-300)}{(240-120)(240-180)(240-300)}+3.2229\,\frac{(270-120)(270-180)(270-240)}{(300-120)(300-180)(300-240)}$$

$$=0.2147\,\frac{-81000}{-1296000}+0.6502\,\frac{-135000}{432000}+1.3851\,\frac{-405000}{-432000}+3.2229\,\frac{405000}{1,296,000}$$

$$=0.0134-0.2032+1.2985+1.0072=2.1159 \text{ millas/seg.}$$

Comparación:

t	F medida	$P_3(x)$
90	0.12	0.1265
250	1.60	1.5931
270	2.15	2.1159

Programación Métodos Numéricos
Martha E. Trujillo P.
[illegible] R. 110

1) Los Datos contenidos en la siguiente tabla fueron tomados de un [illegible] desde que despegó hasta que llegó a un lugar estable en la atmósfera

Tiempo (seg)	0	1	4	6
Velocidad (millas/seg)	2	3	18	38

a).. Encontrar el valor de la velocidad para $t = 2, 3, 5$ seg mediante el uso de la anterior tabla por interpolación de Lagrange

$$v(2\,seg) = \frac{(2-1)(2-4)(2-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}\,2 + \frac{(2-0)(2-4)(2-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}\,3 + \frac{(2-0)(2-1)(2-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}\,18$$

$$+ \frac{(2-0)(2-1)(2-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}\,38$$

$v(2seg) = 6$ millas/seg

$$v(3\,seg) = \frac{(3-1)(3-4)(3-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}\,2 + \frac{(3-0)(3-4)(3-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}\,3 + \frac{(3-0)(3-1)(3-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}\,18$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}\,38$$

$v(3seg) = 19.6$ millas/seg

$$v(5\,seg) = \frac{(5-1)(5-4)(5-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}\,2 + \frac{(5-0)(5-4)(5-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}\,3 + \frac{(5-0)(5-1)(5-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}\,18$$

$$+ \frac{(5-0)(5-1)(5-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}\,38$$

$v(5seg) = 29$ millas/seg

b).- Calcule con los datos obtenidos y la [illegible] la aceleración que se tiene cada segundo usando el esquema

$f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_i)$

t = 0 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(3-2) = 0.5$

t = 1 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(6-3) = 1.5$

t = 2 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(19.6-6) = 6.8$

t = 3 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(18-19.6) = -0.8$

t = 4 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(29-18) = 5.5$

t = 5 seg

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(38-29) = 4.5$

Para t = 6 seg usamos

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(f_i - f_{i-1})$

$f_i' = \frac{1}{2(1)}(38-29) = 4.5$

c). Calcule mediante la formula trapecial I_T la distancia recorrida en cada segundo y la distancia total a los 6 segundos

$I = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$

$I_1 = \frac{1}{2}(2+3) = 2.5$ millas de $t=0$ a $t=1$

$I_2 = \frac{1}{2}(3+6) = 4.5$ millas de $t=1$ a $t=2$

$I_3 = \frac{1}{2}(6+19.6) = 12.8$ millas de $t=2$ a $t=3$

$I_4 = \frac{1}{2}(19.6+18) = 18.8$ millas de $t=3$ a $t=4$

$I_5 = \frac{1}{2}(18+29) = 23.5$ millas de $t=4$ a $t=5$

$I_6 = \frac{1}{2}(29+38) = 33.5$ millas de $t=5$ a $t=6$

$\therefore\ I_T = 2.5+4.5+12.8+18.8+23.5+33.5 = 95.6$ millas

2) Dados los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 3), (5, 0), (6, 0), calcular

a) Las coordenadas correspondientes a X=3 y X=4 con un polinomio de 4º grado usando el método de Lagrange.

b) Los siete puntos anteriores (5 dados y 2 calculados) definen una función, calcular el área bajo la curva de esta función mediante Simpson 1/3

c) Calcular la misma área con Simpson 3/8

a) Tenemos:

x_i	0	1	2	5	6
y_i	0	1	3	0	0

* Para X=3

$$y_{x=3} = \frac{(3-1)(3-2)(3-5)(3-6)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(3-0)(3-2)(3-5)(3-6)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-6)}(1)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-5)(3-6)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)}(3) + \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-6)}(0)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)}(0) = \frac{3(2)(-2)(-3)}{(2)(1)(-3)(-4)}(3) + \frac{3(1)(-2)(-3)}{(1)(-1)(-4)(-5)}(1)$$

$$y_{x=3} = 4.5 - 0.9 = \boxed{3.6}$$

* Para X=4

$$y_{x=4} = \frac{(4-1)(4-2)(4-5)(4-6)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(4-0)(4-2)(4-5)(4-6)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-6)}(1)$$

$$+ \frac{(4-0)(4-1)(4-5)(4-6)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)}(3) + \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-6)}(0)$$

$$+ \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)}(0) = \frac{4(2)(-1)(-2)}{(1)(-1)(-4)(-5)}(1) + \frac{4(3)(-1)(-2)}{2(1)(-3)(-4)}(3)$$

$$y_{x=4} = -0.8 + 3 = \boxed{2.2}$$

Quedando la Tabla:

X_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0	1	3	3.6	2.2	0	0
n	0	1	2	3	4	5	6

b) Area - Simpson $\frac{1}{3}$ $\qquad h = 1$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \begin{smallmatrix}\text{ordenadas}\\ \text{múltiplos de}\\ 2\end{smallmatrix} + 4 \sum \text{resto de ordenadas} \right] \quad ; \; n = \text{par}$$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left[0 + 0 + 2(3 + 2.2) + 4(1 + 3.6 + 0) \right] = \boxed{9.6 \; u^2}$$

c. Area - Simpson $\frac{3}{8}$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \begin{smallmatrix}\text{ordenadas}\\ \text{múltiplo de}\\ 3\end{smallmatrix} + 3 \sum \begin{smallmatrix}\text{ordenadas}\\ \text{restantes}\end{smallmatrix} \right]$$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} (1) \left[0 + 0 + 2(3.6) + 3(1 + 3 + 2.2 + 0) \right] = \boxed{9.675 \; u^2}$$

Departamento de Métodos Numéricos

Ribeiro Hernández G.

Hernández Santiago R.

3)

a) Dados los puntos (0,0), (1,-2), (4,3), (5,0), (6,0) calcule las ordenadas correspondientes a $x=2$ y $x=3$ con $P_4(x)$ aplicando el método de Lagrange.

b) Con los 7 puntos anteriores (5 dados y 2 calculados) obtenga la 1ª derivada de cada punto mediante

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[f_{i+1} - f_{i-1}\right]$$

c) Obtenga el área bajo la curva definida por los 7 puntos, utilizando Simpson 3/8

a) Tenemos la siguiente tabla:

x_i	0	1	4	5	6
y_i	0	-2	3	0	0

* Para $x=2$

$$y_{x=2} = \frac{(2-1)(2-4)(2-5)(2-6)}{(0-1)(0-4)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(2-0)(2-4)(2-5)(2-6)}{(1-0)(1-4)(1-5)(1-6)}(-2)$$

$$+ \frac{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)}{(4-0)(4-1)(4-5)(4-6)}(3) + \frac{(2-0)(2-1)(2-4)(2-6)}{(5-0)(5-1)(5-4)(5-6)}(0)$$

$$+ \frac{(2-0)(2-1)(2-4)(2-5)}{(6-0)(6-1)(6-4)(6-5)}(0) = \frac{2(-2)(-3)(-4)}{1(-3)(-4)(-5)}(-2) + \frac{(2)(1)(-3)(-4)}{4(3)(-1)(-2)}(3)$$

$$y_{x=2} = -1.6 + 3 = \boxed{1.4}$$

* Para $x=3$

$$y_{x=3} = \frac{(3-1)(3-4)(3-5)(3-6)}{(0-1)(0-4)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(3-0)(3-4)(3-5)(3-6)}{(1-0)(1-4)(1-5)(1-6)}(-2)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-5)(3-6)}{(4-0)(4-1)(4-5)(4-6)}(3) + \frac{(3-0)(3-1)(3-4)(3-6)}{(5-0)(5-1)(5-4)(5-6)}(0)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-4)(3-5)}{(6-0)(6-1)(6-4)(6-5)}(0)$$

$$y_{x=3} = \frac{3(-1)(-2)(-3)}{1(-3)(-4)(-5)}(-2) + \frac{3(2)(-2)(-3)}{(4)(3)(-1)(-2)}(3) = -0.6 + 4.5 = 3.9$$

$$y_{x=3} = \boxed{3.9}$$

Quedando la Tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0	-2	1.4	3.9	3	0	0

c) 1° Derivada de cada punto

$$F_i' = \frac{1}{2h}\left[f_{i+1} - f_{i-1}\right]$$

$h = 1$

* Para $x = 0$

$F_0' \Rightarrow$ No esta definida con este esquema.

* Para $x = 1$

$$F_1' = \frac{1}{2(1)}\left[1.4 - 0\right] = \boxed{0.7}$$

* Para $x = 2$

$$F_2' = \frac{1}{2(1)}\left[3.9 - (-2)\right] = \boxed{2.95}$$

* Para $x = 3$

$$F_3' = \frac{1}{2(1)}\left[3 - 1.4\right] = \boxed{0.8}$$

* Para $x = 4$

$$F_4' = \frac{1}{2(1)}\left[0 - 3.9\right] = \boxed{-1.95}$$

* Para $x = 5$

$$F_5' = \frac{1}{2(1)}\left[0 - 3\right] = \frac{-3}{2} = \boxed{-1.5}$$

* Para $x = 6$

$F_6' \Rightarrow$ No esta definida con este esquema de derivación.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	==
1	-2	0.7
2	1.4	2.95
3	3.9	0.8
4	3	-1.95
5	0	-1.5
6	0	==

c) Integral

* Utilizando Simpson 1/3

- $S_{1/3} = \frac{1}{3} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas pares} + 4 \sum \text{ordenadas impares} \right]$

$$S_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1)\left[0 + 0 + 2(1.4+3) + 4(-2+3.9+0)\right] = \boxed{5.466\overline{6}\,u}$$

* Utilizando Simpson $\frac{3}{8}$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas múltiplos de 3} + 3 \sum \text{resto de ordenadas} \right]$$

$$S_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}(1)\left[0 + 0 + 2(3.9) + 3(-2+1.4+3+0)\right] = \boxed{5.625\,u^2}$$

4) El módulo lunar del programa Apolo de la NASA, inicia el alunizaje a 15,000 mts de altitud sobre la superficie de la luna.
La siguiente tabla muestra la velocidad vertical de dicho módulo, con respecto al momento en que inició el alunizaje.

t en min	V(t) en m/s
1.0	-30
2.0	-70
3.0	-80
4.0	-45
5.0	-15

a) Determinar la velocidad de la nave a los 100 segundos
b) Determinar la aceleración inicial. (t=0)
c) Determinar a qué altura sobre la superficie lunar se encuentra el módulo en t= 5 min

a) Velocidad a los 100 segundos (Interpolación de Newton).
Tabulando:

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	$\Delta^4 Y$
t en seg	V(t)	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$
100seg → 60	-30	-40	30	15	-65
120	-70	-10	45	-50	
180	-80	35	-5		
240	-45	30			
300	-15				

$X_0 = 60, \quad Y_0 = -30, \quad \Delta Y_0 = -40 \quad \Delta^2 Y_0 = 30 \quad \Delta^3 Y_0 = 15 \quad \Delta^4 Y_0 = -65$
$X_K = 100 \qquad h = 60$

$$K = \frac{X_K - X_0}{h} = \frac{100-60}{60} = \frac{4}{6} = 0.6666 = \frac{2}{3}$$

$$Y_K = -30 + \frac{2}{3}(-40) + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)(30)}{2(1)} + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)(15)}{(3)(2)(1)} + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-3\right)(-65)}{4\times 3\times 2\times 1}$$

$Y_K = -30 - 26.6666 + (-3.3333) + 0.7407 + 1.3724$
$Y_K = -57.3868$

$$\boxed{V_{100\,seg} = -57.3868\ m/s}$$

b) Aceleración inicial $(t=0)$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$a_0 = \left.\frac{dV}{dt}\right]_{t=0}$$

t_{min}	V m/s
0	0
1	-30
2	-70
3	-80
4	-95
5	-15

Utilizando formulas limitadas a interpolación de 2º orden.

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right) = \frac{1}{2(1)}\left[-3(0) + 4(-30) + (-70)\right]$$

$$a_{0\,t=0} = -95 \text{ m/s}^2$$

c) Altura en tiempo = 5 min
$h_{t=5\,min}$

en $t=0$, $h = 15{,}000$ m
$V=0$

$$V = \frac{dh}{dt} \Rightarrow dh = V\,dt \qquad h = \int V\,dt$$

n	x t_{min}	y $V(t)$ m/s
0	0	0
1	1	-30
2	2	-70
3	3	-80
4	4	-95
5	5	-15

Utilizando formula trapecial

$$A_t = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\,\Sigma \text{ resto ordenadas}\right]$$

$h = 1$

$$A_t = \frac{1}{2}\left[0 - 15 + 2(-30 - 70 - 30 - 95)\right]$$

$A_t = -232.5$ m distancia recorrida en 5 min

Altura sobre la superficie lunar $= 15{,}000\text{m} - 232.5\text{m} = \boxed{14{,}767.5\text{ m}}$

5) Dada la tabla siguiente:

x_i	0	0.8	1.2	1.6	2
y_i	0	1.597	3.094	4.951	6.7318

a) Determinar la ordenada cuando $x = 0.4$. Utilizar el método de Lagrange de 3° orden.

b) Estos puntos definen una función; obtener el área bajo la curva de esta función.

c) Obtener la derivada en cada punto, utilizar los esquemas apropiados limitándose a una interpolación de 2° orden.

a) $$Y_{x=0.4} = \frac{(0.4-0.8)(0.4-1.2)(0.4-1.6)}{(0-0.8)(0-1.2)(0-1.6)}(0) + \frac{(0.4-0)(0.4-1.2)(0.4-1.6)}{(0.8-0)(0.8-1.2)(0.8-1.6)}(1.597)$$

$$+ \frac{(0.4-0)(0.4-0.8)(0.4-1.6)}{(1.2-0)(1.2-0.8)(1.2-1.6)}(3.094) + \frac{(0.4-0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)}{(1.6-0)(1.6-0.8)(1.6-1.2)}(4.951)$$

$$Y_{x=0.4} = \cancel{\frac{(-0.4)(-.8)(-1.2)}{(-0.8)(-1.2)(-1.6)}(0)} + \frac{(0.4)(-0.8)(-1.2)}{(0.8)(-0.4)(-0.8)}(1.597)$$

$$+ \frac{(0.4)(-0.4)(-1.2)}{(1.2)(0.4)(-0.4)}(3.094) + \frac{(0.4)(-0.4)(-0.8)}{(1.6)(0.8)(0.4)}(4.951)$$

$$y_{x=0.4} = 2.3955 - 3.094 + 1.23775 = \boxed{0.5392}$$

Obtenemos la tabla siguiente:

X_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
Y_i	0	0.5392	1.597	3.094	4.951	6.7318
n'	0	1	2	3		
n''				0	1	2

n=5

b) Como $n = 5$ utilizamos: $I = S_{\frac{3}{8}} + S_{\frac{1}{3}}$ $h = 0.4$

$$I = \frac{3}{8}(0.4)\left[0 + 3.094 + 3(0.5392 + 1.597)\right] + \frac{1}{3}(0.4)\left[3.094 + 6.7318 + 4(4.951)\right]$$

$$I = 0.8516 + 3.95064 = \boxed{4.80224}$$

Martha R. Trujillo P.
Horacio Sandoval R.

c) Las fórmulas que podemos utilizar son:

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right) \qquad h = 0.4$$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right)$$

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\left(y_0 - 4y_1 + 3y_2\right)$$

* Cuando $x=0$

$$y'_{x=0} = \frac{1}{2(0.4)}\left(-3(0) + 4(0.5342) - (1.597)\right) = \boxed{0.69975}$$

* Cuando $x=0.4$

$$y'_{x=0.4} = \frac{1}{2(0.4)}\left(-0 + 1.597\right) = \boxed{1.99625}$$

* Cuando $x=0.8$

$$y'_{x=0.8} = \frac{1}{2(0.4)}\left(-0.5342 + 3.092\right) = \boxed{3.191}$$

* Cuando $x=1.2$

$$y'_{x=1.2} = \frac{1}{2(0.4)}\left(-1.597 + 4.951\right) = \boxed{4.1925}$$

* Cuando $x=1.6$

$$y'_{x=1.6} = \frac{1}{2(0.4)}\left(-3.094 + 6.7318\right) = \boxed{4.54725}$$

* Cuando $x=2$ No está la derivada definida con estos esquemas.

Alejandro Gómez M., Homero Sandoval R.

6) Dados los puntos [illegible] calcular los [illegible] correspondientes a $x=3$ y $x=4$ [illegible] siguiendo el método de Lagrange

	x	y	
x_1	0	0	y_1
x_2	1	-1	y_2
x_3	2	-3	y_3
x_4	5	0	y_4
x_5	6	0	y_5

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)}y_4 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}y_5$$

$$P_4(3) = \frac{(3-1)(3-2)(3-5)(3-6)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(3-0)(3-2)(3-5)(3-6)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-6)}(-1) + \frac{(3-0)(3-1)(3-5)(3-6)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)}(-3)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-6)}(0) + \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)}(0)$$

$$P_4(3) = 0 + \left(\frac{-18}{-20}\right) + \left(\frac{-108}{24}\right) + 0 + 0 = \frac{9}{10} - \frac{9}{2} = \frac{-36}{10} = -\frac{18}{5}$$

$$\underline{\underline{P_4(3) = -3.6}}$$

$$P_4(4) = \frac{(4-1)(4-2)(4-5)(4-6)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-6)}(0) + \frac{(4-0)(4-2)(4-5)(4-6)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-6)}(-1) + \frac{(4-0)(4-1)(4-5)(4-6)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-6)}(-3)$$

$$+ \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-6)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-6)}(0) + \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-5)}{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)}(0)$$

$$P_4(4) = 0 + \left(\frac{-16}{-20}\right) + \left(\frac{-72}{24}\right) + 0 + 0 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}$$

$$\underline{\underline{P_4(4) = -2.2}}$$

Calcular el área bajo ...

Simpson 1/3

$$I = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

$h = 1$

x	y
0	0
1	-1
2	-3
3	-3.6
4	-2.2
5	0
6	0

$$I_{0-2} = \frac{1}{3}\left[0 + 4(-1) + (-3)\right] = \frac{1}{3}(-7)$$

$$I_{2-4} = \frac{1}{3}\left[-3 + 4(-3.6) + (-2.2)\right] = \frac{1}{3}(-19.6)$$

$$I_{4-6} = \frac{1}{3}\left[-2.2 + 4(0) + 0\right] = \frac{1}{3}(-2.2)$$

$$A_T = I_{0-2} + I_{2-4} + I_{4-6} = \frac{1}{3}(-7) + \frac{1}{3}(-19.6) + \frac{1}{3}(-2.2)$$

$$A_T = \frac{1}{3}(-7 - 19.6 - 2.2) = \frac{1}{3}(-28.8)$$

$$\underline{\underline{A_T = -9.60\,u^2}}$$

Calcular la misma área empleando Simpson 3/8

$$I = \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

$h = 1$

$$I_{0-3} = \frac{3}{8}\left[0 + 3(-1) + 3(-3) + (-3.6)\right] = \frac{3}{8}(-15.6)$$

$$I_{3-6} = \frac{3}{8}\left[-3.6 + 3(-2.2) + 3(0) + 0\right] = \frac{3}{8}(-10.2)$$

$$A_T = I_{0-3} + I_{3-6} = \frac{3}{8}(-15.6) + \frac{3}{8}(-10.2)$$

$$A_T = \frac{3}{8}(-15.6 - 10.2) = \frac{3}{8}(-25.8)$$

$$\underline{\underline{A_T = -9.675\,u^2}}$$

Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

7)

Un tren que viaja en una vía recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Tiempo (seg)	0	10	15	25
Distancia (m)	0	20	50	140

a) Encuentre la distancia recorrida en $t = 5$ seg y $t = 20$ seg

b) Encuentre la velocidad en cada instante de tiempo incluyendo $t = 5$ seg y $t = 20$ seg

a) Utilizando la fórmula de interpolación de Lagrange de 3er orden

* Para $t = 5$ seg

$$D_{t=5seg} = \frac{(5-10)(5-15)(5-25)}{(0-10)(0-15)(0-25)}(0) + \frac{(5-0)(5-15)(5-25)}{(10-0)(10-15)(10-25)}(20)$$

$$+ \frac{(5-0)(5-10)(5-25)}{(15-0)(15-10)(15-25)}(50) + \frac{(5-0)(5-10)(5-15)}{(25-0)(25-10)(25-15)}(140)$$

$$D_{t=5seg} = 0 + \frac{5(-10)(-20)}{10(-5)(-15)}(20) + \frac{(5)(-5)(-20)}{15(5)(-10)}(50) + \frac{5(-5)(-10)}{(25)(15)(10)}140$$

$$D_{t=5seg} = 0 + 26.66 - 33.33 + 9.333 = \boxed{2.666}$$

* Para $t = 20$ seg

$$D_{t=20seg} = \frac{(20-10)(20-15)(20-25)}{(0-10)(0-15)(0-25)}(0) + \frac{(20-0)(20-15)(20-25)}{(10-0)(10-15)(10-25)}(20)$$

$$+ \frac{(20-0)(20-10)(20-25)}{(15-0)(15-10)(15-25)}(50) + \frac{(20-0)(20-10)(20-15)}{(25-0)(25-10)(25-15)}(140)$$

$$D_{t=20seg} = \frac{(20)(5)(-5)}{10(-5)(-15)}(20) + \frac{(20)(10)(-5)}{15(5)(-10)}(50) + \frac{20(10)(5)}{25(15)(10)}(140)$$

$$D_{t=20seg} = -13.333 + 66.666 + 37.333 = \boxed{90.666\ m}$$

La nueva tabla es:

t (seg)	0	5	10	15	20	25
D (m)	0	2.666	20	50	90.666	140

b) Velocidad en cada instante

Sabemos que $V = \frac{d\,Distancia}{d\,tiempo}$ ∴ Basta obtener la derivada en cada punto.

*Utilizaremos fórmulas limitadas a una interpolación de 2º orden

* Para $t=0$

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[-3(0) + 4(2.66) - 20\right] = \boxed{-0.936\ m/s}$$

* Para $t = 5$ seg

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[-0 + 20\right] = \boxed{2\ m/s}$$

* Para $t = 10$ seg

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[-2.666 + 50\right] = \boxed{4.7334\ m/s}$$

* Para $t = 15$ seg

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[-20 + 90.666\right] = \boxed{7.0666\ m/s}$$

* Para $t = 20$ seg

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[-50 + 140\right] = \boxed{9\ m/s}$$

* Para $t = 25$ seg

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\left[y_0 - 4y_1 + 3y_2\right]$$

$$V = \frac{1}{2(5)}\left[50 - 4(90.666) + 3(140)\right] = \boxed{10.7336\ m/s}$$

5) Sean los puntos muestrales de un vehículo dados en la siguiente tabla

t, en horas	0	2	4	6	8	10
v(t), en km/hr	0	20	50	80	80	20
	Punto A				Punto B	

a) Calcule la distancia recorrida mediante el o los esquemas de Simpson adecuados

$$S_{1/3} = \frac{h}{3}\left[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right] \qquad S_{3/8} = \left[f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right]$$

b) Si el vehículo necesita recorrer la distancia que existe entre los puntos A y B que es de 500 km, indique donde se encuentra para t = 10 hs. Si aún no llega, ya llegó o ya pasó, y por cuánto.

a) Aplicando $S_{1/3}$ de 0 a 4 hs y $S_{3/8}$ de 4 a 10 hs, con h = 2

$$D_1 = \frac{2}{3}\left[0 + 4(20) + 50\right] + \frac{3\cdot 2}{8}\left[50 + 3(80) + 3(80) + 20\right] =$$

$$= 86.666 + 412.500 = 499.166 \text{ Km}$$

ó Aplicando $S_{3/8}$ de 0 a 6 y $S_{1/3}$ de 6 a 10, con h = 2 hs

$$D_2 = \frac{3\cdot 2}{8}\left[0 + 3(20) + 3(50) + 80\right] + \frac{2}{3}\left[80 + 4(80) + 20\right] =$$

$$= 217.500 + 280.000 = 497.500 \text{ Km}$$

b) En ambos casos aún no se alcanza el punto B, y dependiendo del esquema usado le falta

$$500 - D_1 = 500 - 499.166 = 0.834 \text{ Km}$$

ó $$500 - D_2 = 500 - 497.500 = 2.500 \text{ Km}$$

c) Considerando los mismos datos, indique en qué intervalo de dos horas se tiene el máximo valor (absoluto) de la aceleración. Indique cuánto es. Use el esquema $f_i' = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i)$

De 0 a 2 hs $\quad f_i' = \frac{1}{2}(20-0) = 10 \text{ km/h}^2$

de 2 a 4 hs $\quad f_i' = \frac{1}{2}(50-20) = 15 \text{ km/h}^2$

de 4 a 6 hs $\quad f_i' = \frac{1}{2}(80-50) = 15 \text{ km/h}^2$

... Moreno
Roberto Hernández C.
Horacio Sánchez R.

de 6 a 8 hs $f_i' = \frac{1}{2}(80-80) = 0 \; km/h^2$

de 8 a 10 hs $f_i' = \frac{1}{2}(20-80) = -30 \; km/h^2$

La máxima aceleración para un intervalo de 2 horas se tiene de 8 a 10 hs, es negativa y resulta $-30 \; km/h^2$

d) Considerando los mismos datos indique en que intervalo de 4 horas se tiene la aceleración máxima (en valor absoluto). Use el esquema $f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1})$

de 0 a 4 hs $f_i' = \frac{1}{2 \cdot 2}(50-0) = 12.5 \; km/h^2$

de 2 a 6 hs $f_i' = \frac{1}{4}(80-20) = 15 \; km/h^2$

de 4 a 8 hs $f_i' = \frac{1}{4}(80-50) = 7.5 \; km/h^2$

de 6 a 10 hs $f_i' = \frac{1}{4}(20-80) = -15 \; km/h^2$

La máxima aceleración para un intervalo de 4 horas se tiene de $t = 2$ a 6 hs y de $t = 6$ a 10 hs.

Aceleración de 2 a 6 horas $= +15 \; km/hr^2$

Aceleración de 6 a 10 horas $= -15 \; km/hr^2$

9)

Roberto Hernández G.
Horacio Santos [illegible]

Dados los puntos (0,0) [illegible]

a) Interpole a través de un polinomio $P_2(x)$ obtenido por el método de Lagrange las ordenadas [illegible]

b) Calcule la primera derivada usando el esquema $f_i' = \frac{1}{2h}(-f_{i-1} + f_{i+1})$ usando los 5 puntos indicados (3 datos + 2 calculados)

c) Calcule la segunda derivada por el esquema $f_i'' = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$ para los cinco puntos indicados

d) Calcule el área bajo la curva definida por los 5 puntos indicados con [illegible] Indique cuál usará

X	y
$x_1 = 0$	$0 = y_1$
$x_2 = 3$	$0 = y_2$
$x_3 = 4$	$10 = y_3$

a) $$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3$$

$$y_{(x=1)} = \frac{(1-3)(1-4)}{(0-3)(0-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-4)}{(3-0)(3-4)}(0) + \frac{(1-0)(1-3)}{(4-0)(4-3)}(10)$$

$$y_{(x=1)} = 0 + 0 + \left(\frac{-2(10)}{4}\right) = \frac{-20}{4}$$

$$\underline{\underline{y_{(x=1)} = -5}}$$

$$y_{(x=2)} = \frac{(2-3)(2-4)}{(0-3)(0-4)}(0) + \frac{(2-0)(2-4)}{(3-0)(3-4)}(0) + \frac{(2-0)(2-3)}{(4-0)(4-3)}(10)$$

$$y_{(x=2)} = 0 + 0 - \frac{-20}{4} = -5$$

$$\underline{\underline{y_{(x=2)} = -5}}$$

b)

x	y	y'
0	0	
1	-5	-2.5
2	-5	2.5
3	0	7.5
4	10	

$f_i' = \frac{1}{2h}(-f_{i-1} + f_{i+1})$

$h = 1$

$$y_1' = \frac{1}{2}(-0 + -5)) = -\frac{5}{2} \qquad \underline{\underline{y_1' = -2.5}}$$

$$y_2' = \frac{1}{2}(-(-5)+0) = \frac{5}{2} \qquad \underline{\underline{y_2' = 2.5}}$$

$$y_3' = \frac{1}{2}(-(-5)+10) = \frac{15}{2} \qquad \underline{\underline{y_3' = 7.5}}$$

[illegible]
Roberto Hernández G.
Horacio Sandoval R.

c) $y_i'' = \frac{1}{h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right)$

x	y	y''
0	0	
1	-5	5
2	-5	5
3	0	5
4	10	

h = 1

$y_1'' = \frac{1}{1}\left[\,0 - 2(-5) + (-5)\right] = 5 \qquad \underline{\underline{y_1'' = 5}}$

$y_2'' = \frac{1}{1}\left[-5 - 2(-5) + 0\right] = 5 \qquad \underline{\underline{y_2'' = 5}}$

$y_3'' = \frac{1}{1}\left[-5 - 2(0) + 10\right] = 5 \qquad \underline{\underline{y_3'' = 5}}$

d) • Fórmula trapecial

$A_T \doteq \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{resto de las ordenadas}\right]$, h = 1 para este problema

x	y	
0	0	y_0
1	-5	
2	-5	
3	0	
4	10	y_n

$A_T = \frac{1}{2}\left[0 + 10 + 2(-5 - 5 + 0)\right]$

$A_T = \frac{1}{2}(-10) \qquad \underline{\underline{A_T = -5\,u^2}}$

• Por Simpson 1/3 [illegible]

x	y	
0	0	y_0
1	-5	
2	-5	
3	0	
4	10	y_n

$A_T \doteq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{ordenadas de orden par} + 4\sum \text{ordenadas de orden impar}\right]$

$A_T = \frac{1}{3}\left[0 + 10 + 2(-5 + 0) + 4(-5)\right]$

$A_T \doteq \frac{1}{3}(-20)$

$\underline{\underline{A_T \doteq -6.67\,u^2}}$

Simpson 3/8

$$A_T \approx \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas de orden múltiplo de 3} + 3 \sum \text{resto de ordenadas} \right]$$

Trapecial

$$A_T \doteq \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum \text{resto de las ordenadas} \right]$$

x	y
0	0
1	-5
2	-5
3	0
4	10

Simpson 3/8 (x = 0 a 3)

Trapecial (x = 3 a 4)

$$A_1 = \frac{3}{8}(1)\left[0 + 0 + 2(0) + 3(-5-5)\right] = \frac{3}{8}(-30) = -\frac{90}{8} \text{ u}^2$$

$$A_2 \doteq \frac{1}{2}\left[0 + 10\right] \doteq 5 \text{ u}^2$$

$$A_T \doteq -\frac{90}{8} + 5 = -\frac{50}{8} \text{ u}^2$$

$$A_T = -6.25 \text{ u}^2$$

10) Sean los puntos de la siguiente tabla las lecturas de velocidad de un vehículo en una etapa de frenado. Calcule la distancia en la que alcanza el reposo, partiendo del punto correspondiente a t=0

t(seg)	0	4	8	12	16	20
v(m/seg)	120	110	80	60	40	0

$h = 4$

a) - Use el o los esquemas de Simpson adecuados

$$S_{1/3} = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) \qquad S_{3/8} = \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

Para t=0 a 8 seg

$$S_{1/3} = \frac{4}{3}\left(120 + 4(110) + 80\right) = 853.33\ m$$

Para t=8 a 20 seg

$$S_{3/8} = \frac{3(4)}{8}\left[80 + 3(60) + 3(40) + 0\right]$$

$$= 570\ m$$

Para t=0 a 12 seg

$$S_{3/8} = \frac{3(4)}{8}\left(120 + 3(110) + 3(80) + 60\right)$$

$$= 1125$$

Para t=12 a 20 seg

$$S_{1/3} = \frac{(4)}{3}\left[60 + 4(40) + 0\right]$$

$$= 293.33\ m$$

∴ La distancia en la que alcanza el reposo es:

$$S_{1/3} + S_{3/8} = 853.33 + 570 = 1423.33\ [m]$$

o bien:

$$S_{3/8} + S_{1/3} = 1125 + 293.33 = 1418.33\ [m]$$

PROBLEMARIO MÉTODOS NUMÉRICOS
Merlin R. Trujillo P.
Herrera Sandoval R.

b).- Use el esquema trapecial $I_1 = \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right)$

Tenemos que $h = 4$

Para $t=0$

$I = \frac{4}{2}(120+110) = 460$ m

Para $t=4$

$I = \frac{4}{2}(110+80) = 380$ m

Para $t=8$

$I = \frac{4}{2}(80+60) = 280$ m

Para $t=12$

$I = \frac{4}{2}(60+40) = 200$ m

Para $t=16$

$I = \frac{4}{2}(40+0) = 80$ m

$\therefore\ I_T = 460+380+280+200+80$

$I_T = 1400$ m

Considerando los datos del problema anterior, indique

c).- En que intervalo de 4 segundos se tiene la máxima aceleración (val. absoluto) usando el esquema $f_i' = \frac{1}{h}\left(f_{i+1} - f_i\right)$. Proporcione dicha aceleración.

d).- En que intervalo de 8 segundos se tiene la máxima aceleración (en val. absoluto) usando el esquema $f_i' = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right)$. Proporcione dicha aceleración.

c).- $f_i' = \frac{1}{h}\left(f_{i+1} - f_i\right)$

$h = 4$

De 0-4

$f_i = \frac{1}{4}(110-120) = -2.5$ m/seg²

De 4-8

$f_i = \frac{1}{4}(80-110) = -7.5$ m/seg²

De 8-12

$f_i = \frac{1}{4}(60-80) = -5$ m/seg²

De 12-16

$f_i = \frac{1}{4}(40-60) = -5$ m/seg²

De 16-20

$f_i = \frac{1}{4}(0-40) = -10$ m/seg²

$\therefore$ De 16-20 se tiene la máxima aceleración y es $= |-10|$ m/seg²

d) $f_i' = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right)$

De 0 a 8 seg $\qquad a = \frac{1}{2(4)}(80 - 120) = -5\ m/seg^2$

De 4 a 12 seg $\qquad a = \frac{1}{2(4)}(60 - 110) = -6.25\ m/seg^2$

De 8 a 16 seg $\qquad a = \frac{1}{2(4)}(40 - 80) = -5\ m/seg^2$

De 12 a 20 seg $\qquad a = \frac{1}{2(4)}(0 - 60) = -7.5\ m/seg^2$

∴ La máxima aceleración se tiene de 12 a 20 seg, es negativa y vale $-7.5\ m/seg^2$

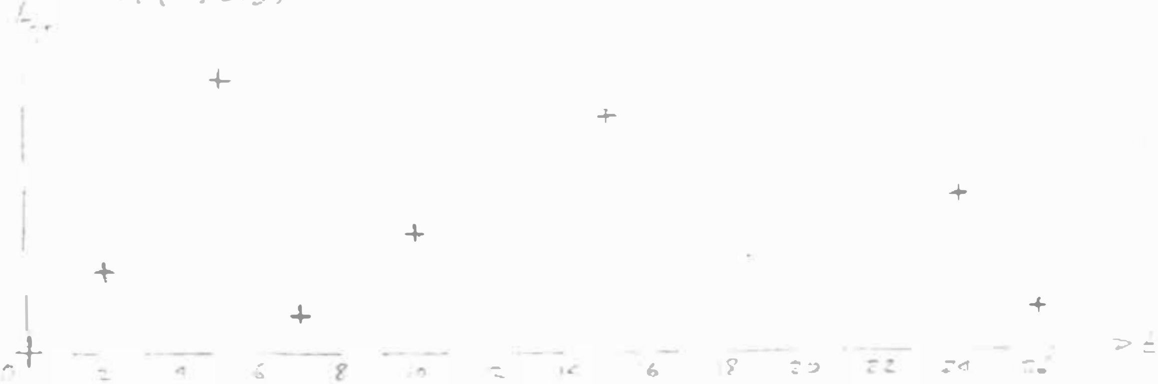
11) Dados los 7 puntos (t_i, v_i) que corresponden a lecturas instantáneas de la velocidad de una partícula que parte del reposo $(t_0 = v_0 = a_0 = 0)$ calcular:

a) La historia de velocidades a $\Delta t = 2$ seg mediante un polinomio de 1er orden y otro de 3er orden. Comparar las gráficas obtenidas

b) La historia de desplazamientos a $\Delta t = 2$ seg y el desplazamiento final (para $t = 26$ seg). Usar los datos de interpolación lineal con integración trapecial

c) La historia de aceleraciones a $\Delta t = 2$ seg. Usar diferencias hacia atrás y los datos de interpolación lineal

t_i (seg)	2	5	7	10	15	24	26
v_i (m/seg)	2	7	1	3	6	4	1



a. Interpolación de Lagrange de 3er orden. Tomando los 4 primeros puntos $x = 2, 5, 7, 10$

$$P_3(x) = \sum_{j=1}^{4} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{4} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} y_j \quad \text{para } x = t,\ y = v$$

$x = t$ $\quad$ $y = v$

$x_1 = 2$ $\quad$ $2 = t_1$
$x_2 = 5$ $\quad$ $5 = t_2$
$x_3 = 7$ $\quad$ $7 = t_3$
$x_4 = 10$ $\quad$ $10 = t_4$

$$\mathbb{P}_3(4) = \frac{(4-5)(4-7)(4-10)}{(2-5)(2-7)(2-10)}(2) + \frac{(4-2)(4-7)(4-10)}{(5-2)(5-7)(5-10)}(7) + \frac{(4-2)(4-5)(4-10)}{(7-2)(7-5)(7-10)}(1) +$$

$$+ \frac{(4-2)(4-5)(4-7)}{(10-2)(10-5)(10-7)}(3)$$

$$\mathbb{P}_3(4) = 0.3 + 8.4 - 0.4 + 0.15 \qquad \boxed{\mathbb{P}_3(4) = 8.45}$$

$$\mathbb{P}_3(6) = \frac{(6-5)(6-7)(6-10)}{(2-5)(2-7)(2-10)}(2) + \frac{(6-2)(6-7)(6-10)}{(5-2)(5-7)(5-10)}(7) + \frac{(6-2)(6-5)(6-10)}{(7-2)(7-5)(7-10)}(1) +$$

$$+ \frac{(6-2)(6-5)(6-7)}{(10-2)(10-5)(10-7)}(3)$$

$$\mathbb{P}_3(6) = -0.0667 + 3.7333 + 0.5333 - 0.1 \qquad \boxed{\mathbb{P}_3(6) = 4.1}$$

$$\mathbb{P}_3(8) = \frac{(8-5)(8-7)(8-10)}{(2-5)(2-7)(2-10)}(2) + \frac{(8-2)(8-7)(8-10)}{(5-2)(5-7)(5-10)}(7) + \frac{(8-2)(8-5)(8-10)}{(7-2)(7-5)(7-10)}(1) +$$

$$+ \frac{(8-2)(8-5)(8-7)}{(10-2)(10-5)(10-7)}(3)$$

$$\mathbb{P}_3(8) = 0.1 - 2.8 + 1.2 + 0.45 \qquad \boxed{\mathbb{P}_3(8) = -1.05}$$

* Segundo polinomio con los puntos $x = 10, 15, 24$ y 26

$$\mathbb{P}_3(x) = \sum_{i=4}^{7} \prod_{\substack{j=4 \\ j\neq i}}^{7} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i \qquad x = 12, 14, 16, 18, 20, 22$$

x = t	y = v
10	3
15	6
24	4
26	1

$$\mathbb{P}_3(12) = \frac{(12-15)(12-24)(12-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(12-10)(12-24)(12-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(12-10)(12-15)(12-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(12-10)(12-15)(12-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$\mathbb{P}_3(12) = 1.35 + 4.0727 - 1.3333 + 0.2045 \qquad \boxed{\mathbb{P}_3(12) = 4.2939}$$

$$P_3(14) = \frac{(14-15)(14-24)(14-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(14-10)(14-24)(14-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(14-10)(14-15)(14-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(14-10)(14-15)(14-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$P_3(14) = 0.3214 + 5.8182 - 0.7619 + 0.1136 \qquad \underline{\underline{P_3(14) = 5.4913}}$$

$$P_3(16) = \frac{(16-15)(16-24)(16-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(16-10)(16-24)(16-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(16-10)(16-15)(16-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(16-10)(16-15)(16-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$P_3(16) = -0.2143 + 5.8182 + 0.9524 - 0.1364 \qquad \underline{\underline{P_3(16) = 6.4199}}$$

$$P_3(18) = \frac{(18-15)(18-24)(18-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(18-10)(18-24)(18-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(18-10)(18-15)(18-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(18-10)(18-15)(18-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$P_3(18) = -0.3857 + 4.6545 + 3.0476 - 0.4091 \qquad \underline{\underline{P_3(18) = 6.9074}}$$

$$P_3(20) = \frac{(20-15)(20-24)(20-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(20-10)(20-24)(20-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(20-10)(20-15)(20-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(20-10)(20-15)(20-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$P_3(20) = -0.3214 + 2.9091 + 4.7619 - 0.5682 \qquad \underline{\underline{P_3(20) = 6.7814}}$$

$$P_3(22) = \frac{(22-15)(22-24)(22-26)}{(10-15)(10-24)(10-26)}(3) + \frac{(22-10)(22-24)(22-26)}{(15-10)(15-24)(15-26)}(6) +$$

$$+ \frac{(22-10)(22-15)(22-26)}{(24-10)(24-15)(24-26)}(4) + \frac{(22-10)(22-15)(22-24)}{(26-10)(26-15)(26-24)}(1)$$

$$P_3(22) = -0.15 + 1.1636 + 5.3333 - 0.4773 \qquad \underline{\underline{P_3(22) = 5.8697}}$$

La nueva tabla es

t, (s)	2	4	5	6	7	8	10	12	14	15	16
v, (m/s)	2	5.45	7	4.1	1	-1.05	3	4.2835	5.4913	6	6.4199

[illegible]
Alejandro Gómez M.
Horacio Sandoval R.

t (s)	18	20	22	24	26
V (m/s)	6.9074	6.7814	5.6697	7	1

Interpolación lineal

Se hará un procedimiento similar tomando dos rectas consecutivas y provocando a su vez puntos que no estaban definidos. La fórmula general es:

$$\mathbb{P}_1(x) = \sum_{j=1}^{2} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}\, y_j$$

$x = t$	$y = V$
2	2
5	7

$x = 4$

$$\mathbb{P}_1(4) = \frac{(4-5)}{(2-5)}(2) + \frac{(4-2)}{(5-2)}(7) = 0.6667 + 4.6667 \qquad \mathbb{P}_1(4) = 5.3333$$

$x = t$	$y = V$
5	7
7	1

$x = 6$

$$\mathbb{P}_1(6) = \frac{(6-7)}{(5-7)}(7) + \frac{(6-5)}{(7-5)}(1) = 3.5 + 0.5 \qquad \mathbb{P}_1(6) = 4$$

$x = t$	$y = V$
7	1
10	3

$x = 8$

$$\mathbb{P}_1(8) = \frac{(8-10)}{(7-10)}(1) + \frac{(8-7)}{(10-7)}(3) = 0.6667 + 1 \qquad \mathbb{P}_1(8) = 1.6667$$

$x = t$	$y = V$
10	3
15	6

$x = 12, 14$

$$\mathbb{P}_1(12) = \frac{(12-15)}{(10-15)}(3) + \frac{(12-10)}{(15-10)}(6) = 1.8 + 2.4 \qquad \mathbb{P}_1(12) = 4.2$$

$$\mathbb{P}_1(14) = \frac{(14-15)}{(10-15)}(3) + \frac{(14-10)}{(15-10)}(6) = 0.6 + 4.8 \qquad \mathbb{P}_1(14) = 5.4$$

Horacio Sandoval R.

x = t	y = v
15	6
24	4

$x = 16, 18, 20, 22$

$\mathbb{P}_1(16) = \frac{(16-24)}{(15-24)}(6) + \frac{(16-15)}{(24-15)}(4) = 5.3333 + 0.4444$ $\qquad \underline{\mathbb{P}_1(16) = 5.7778}$

$\mathbb{P}_1(18) = \frac{(18-24)}{(15-24)}(6) + \frac{(18-15)}{(24-15)}(4) = 4 + 1.3333$ $\qquad \underline{\mathbb{P}_1(18) = 5.3333}$

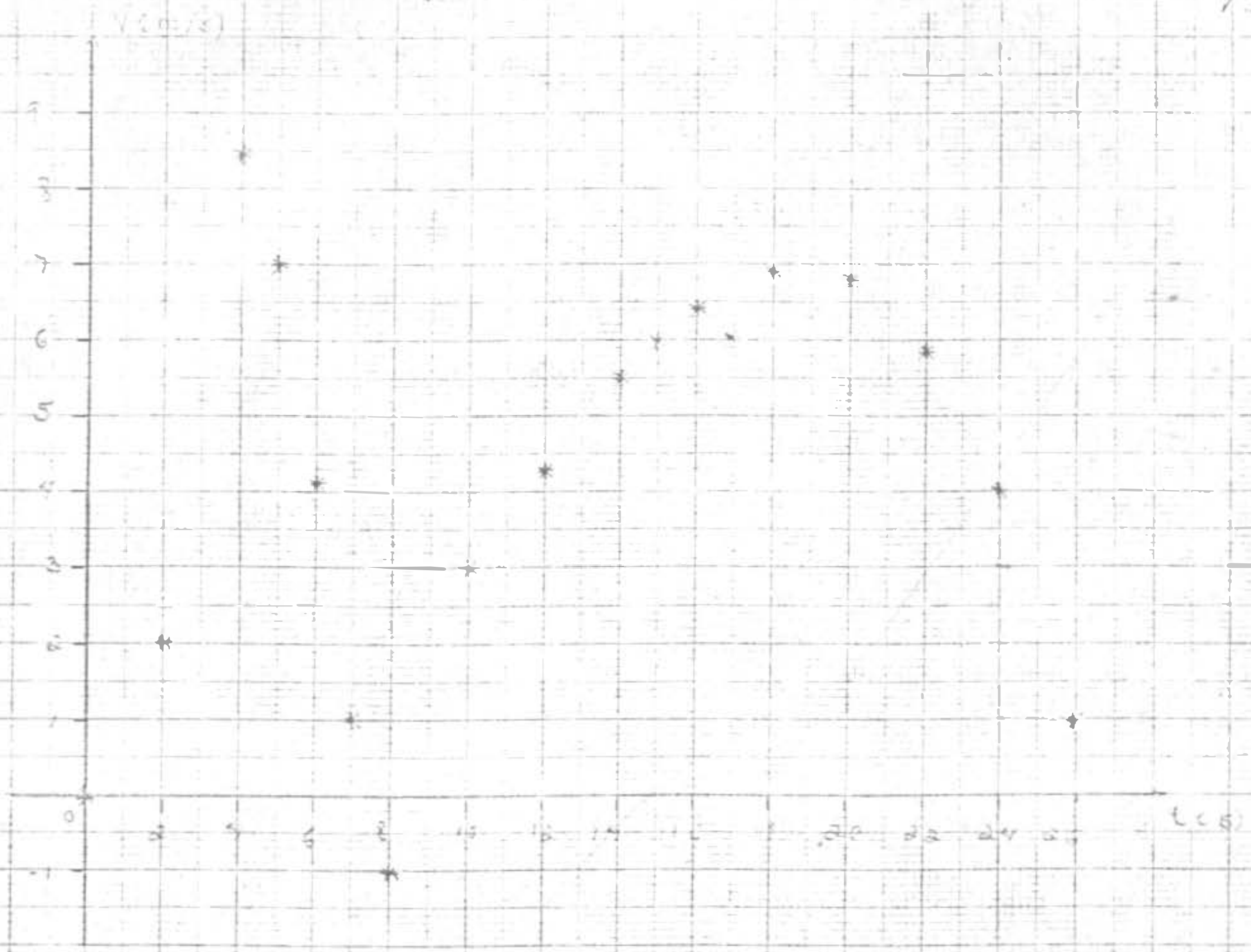
$\mathbb{P}_1(20) = \frac{(20-24)}{(15-24)}(6) + \frac{(20-15)}{(24-15)}(4) = 2.6667 + 2.2222$ $\qquad \underline{\mathbb{P}_1(20) = 4.8889}$

$\mathbb{P}_1(22) = \frac{(22-24)}{(15-24)}(6) + \frac{(22-15)}{(24-15)}(4) = 1.3333 + 3.1111$ $\qquad \underline{\mathbb{P}_1(22) = 4.4444}$

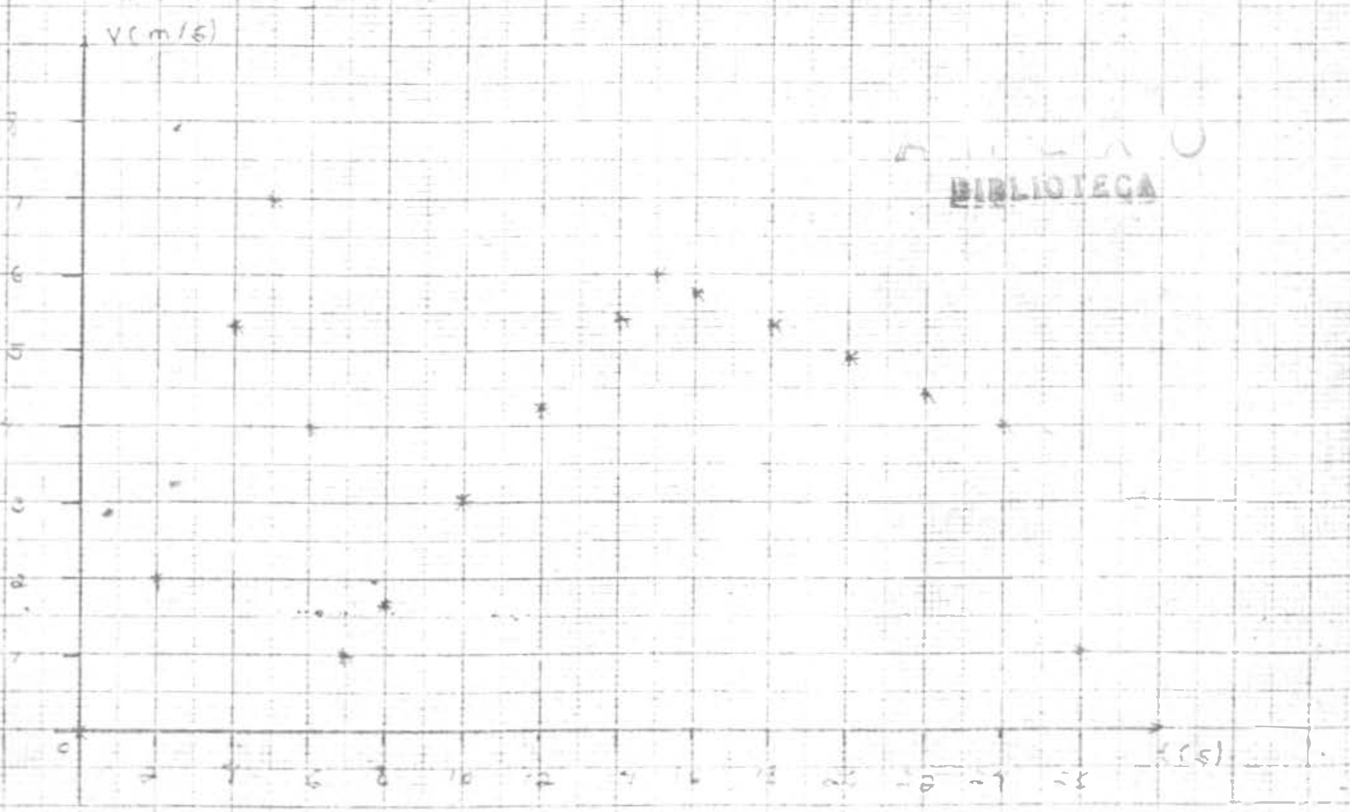
La nueva tabla es:

t (s)	v (m/s)
2	2
4	5.3333
5	7
6	4
7	1
8	1.6667
10	3
12	4.2
14	5.4
15	6
16	5.7778
18	5.3333
20	4.8889
22	4.4444
24	4
26	1

Si se observan ambas gráficas, puede notarse que la gráfica 1 se apega más a la realidad debido a que en la gráfica 2 existen cambios muy bruscos en la velocidad, sin embargo la gráfica 1 muestra cambios muy notables como en (8, 1.05)



Interpolación lineal Gráfica 2



Para obtener el desplazamiento para cada punto, es necesario integrar por intervalos, y el desplazamiento total será igual a la suma de los intervalos

Fórmula Trapezoidal

$$S = \text{desplazamiento} = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{resto de las ordenadas}\right]$$

t (s)	V (m/s)
2	2
4	5.3333
5	7
6	4
7	1
8	1.6667
10	3
12	4.2
14	5.4
15	6
16	5.7778
18	5.3333
20	4.[illegible]
22	4.4444
24	4
26	1

$h = 2$

Intervalos

- De 0 a 2 (se incluye el punto 0,0)

$$S = \frac{2}{2}(0+2) = 2$$

- De 2 a 4

$$S = \frac{2}{2}(2+5.3333) = 7.3333$$

- De 4 a 6

$$S = \frac{2}{2}(5.3333+4) = 9.3333$$

- De 6 a 8

$$S = \frac{2}{2}(4+1.6667) = 5.6667$$

- De 8 a 10

$$S = \frac{2}{2}(1.6667+3) = 4.6667$$

- De 10 a 12

$$S = \frac{2}{2}(3+4.2) = 7.2$$

- De 12 a 14

$$S = \frac{2}{2}(4.2+5.4) = 9.6$$

- De 14 a 16

$$S = \frac{2}{2}(5.4+5.7778) = 11.1778$$

- De 16 a 18

$$S = \frac{2}{2}(5.7778 + 5.3333) = 11.1111$$

- De 18 a 20

$$S = \frac{2}{2}(5.3333 + 4.8889) = 10.2222$$

- De 20 a 22

$$S = \frac{2}{2}(4.8889 + 4.4444) = 9.3333$$

- De 22 a 24

$$S = \frac{2}{2}(4.4444 + 4) = 8.4444$$

- De 24 a 26

$$S = \frac{2}{2}(4 + 1) = 5$$

La tabla de desplazamiento es.

t (s)	S (m)
2	2
4	9.3333
6	18.6666
8	24.3333
10	29
12	3[illegible].2
14	45.8
16	56.9778
18	68.0889
20	78.3111
22	87.6444
24	96.[illegible]888
26	101.0888

∴ Desplazamiento total = S = 101.0888 m

[illegible] En la tabla de [illegible] el [illegible] más [illegible]
esquema más sencillo de [illegible]

$\frac{dv}{dt} = a$

$$f'_i = \frac{1}{h}\left(f_i - f_{i-1}\right) \quad ; \; h = 2$$

t (s)	v (m/s)
2	2
4	5.3333
5	7
6	4
7	1
8	1.6667
10	3
12	4.2
14	5.4
15	6
16	5.7778
18	5.3333
20	[illegible]
22	[illegible]
24	4
26	1

- Para $t = 2$ [illegible]

$$f' = \frac{1}{2}(2 - 0) = 1$$

- Para $t = 4$

$$f' = \frac{1}{2}(5.3333 - 2) = 1.6667$$

- Para $t = 6$

$$f' = \frac{1}{2}(4 - 5.3333) = -0.6667$$

- Para $t = 8$

$$f' = \frac{1}{2}(1.6667 - 4) = -1.1667$$

- Para $t = 10$

$$f' = \frac{1}{2}(3 - 1.6667) = 0.6667$$

- Para $t = 12$

$$f' = \frac{1}{2}(4.2 - 3) = 0.6$$

- Para $t = 14$

$$f' = \frac{1}{2}(5.4 - 4.2) = 0.6$$

- Para $t = 16$

$$f' = \frac{1}{2}(5.7778 - 5.4) = 0.1889$$

Seminario, Métodos Numéricos 14
Alejandro Gómez M.
Hernán Sandoval R.

- Para $t = 18$

$$f' = \frac{1}{2}(5.3333 - 5.7778) = -0.2223$$

- Para $t = 20$

$$f' = \frac{1}{2}(4.8889 - 5.3333) = -0.2222$$

- Para $t = 22$

$$f' = \frac{1}{2}(4.4444 - 4.8889) = -0.2223$$

- Para $t = 24$

$$f' = \frac{1}{2}(4 - 4.4444) = -0.2222$$

- Para $t = 26$

$$f' = \frac{1}{2}(1 - 4) = -1.5$$

∴ La tabla de aceleración es:

t (s)	a (m/s)
2	1
4	1.6667
6	-0.6667
8	-1.1667
10	0.6667
12	0.6
14	0.6
16	0.1819
18	-0.2223
20	-0.2222
22	-0.2223
24	-0.2222
26	-1.5

(2)

Gonzalo Hernández S. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] [[illegible] 5] [illegible]

[illegible] $x = 0.5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-0.6	0.224			
		0.156		
-0.5	0.380		0.040	
		0.196		0.50[illegible]
-0.4	0.576		0.0[illegible]	
		0.257		0.014
-0.3	0.833		0.060	
		0.317		0.0[illegible]
-0.2	1.150		0.072	
		[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]		0.07[illegible]	
		[illegible]		0.0[illegible]7
0	2.000		0.079	
		0.540		0.004
0.1	2.540		0.08[illegible]	
		0.[illegible]		0.003
0.2	3.1[illegible]		0.0[illegible]	
		0.714		0.0[illegible]7
0.3	3.877		0.[illegible]	
		0.827		[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	
		[illegible]		[illegible]
[illegible]	8.[illegible]		[illegible]	
		[illegible]		
[illegible]	[illegible]			

[illegible] Como el valor que se desea interpolar [illegible] de la tabla, podemos [illegible]

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0.6	6.656			
		-1.031		
0.5	5.625		0.112	
		-0.921		-0.016
0.4	4.704		0.094	
		-0.827		0.014
0.3	3.877		0.108	
		-0.7[illegible]		
0.2	3.160			

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}, \quad x_0 = 0.6, \; y_0 = 6.656, \; \Delta y_0 = -1.031; \; \Delta^2 y_0 = 0.110; \; \Delta^3 y_0 = -0.016$$

$$h = -0.1 \qquad k = \frac{0.55 - 0.6}{-0.1} = +0.5$$

$$y_{-0.5} = 6.656 + 0.5(-1.031) + \frac{(+0.5)(+0.5-1)}{2!}(0.110) + \frac{(+0.5)(+0.5-1)(+0.5-2)}{3!}(-0.016)$$

$$y_{-0.5} = 6.656 - 0.5155 - 0.01375 - 0.001$$

$$\underline{y_{-0.5} = 6.12575}$$

x para y = 0.3982

Como los valores [illegible] de [illegible] entonces se tomará una parte de la tabla y se usará el método de Lagrange [illegible] de 3er orden [illegible]

x	y	
0.224	-0.6	y_1
0.380	-0.5	y_2
0.576	-0.4	y_3
0.833	-0.3	y_4

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4$$

$$y = \frac{(0.3982-0.380)(0.3982-0.576)(0.3982-0.833)}{(0.224-0.380)(0.224-0.576)(0.224-0.833)}(-0.6) + \frac{(0.3982-0.224)(0.3982-0.576)(0.3982-0.833)}{(0.380-0.224)(0.380-0.576)(0.380-0.833)}(-0.5) + \frac{(0.3982-0.224)(0.3982-0.380)(0.3982-0.833)}{(0.576-0.224)(0.576-0.380)(0.576-0.833)}(-0.4) + \frac{(0.3982-0.224)(0.3982-0.380)(0.3982-0.576)}{(0.833-0.224)(0.833-0.380)(0.833-0.576)}(-0.3)$$

$y = 0.0252 - 0.4861 - 0.0311 + 0.0241 = 0.4896$

Para $x = -0.4896$ $y = 0.29$[illegible]

$[0, 0.5]$

Dividiendo el intervalo:

$[0, 0.5] = [0, 0.3] + [0.3, 0.5]$

$[0, 0.3]$ por Simpson 3/8 y $[0.3, 0.5]$ por Simpson 1/3

Simpson 3/8

$$A_T = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix} \right]$$

Simpson 1/3

$$A_T = \frac{3}{8}h\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas}\\ \text{múltiplo de 3}\end{matrix} + 3\sum \begin{matrix}\text{restantes}\\ \text{ordenadas}\end{matrix} \right]$$

x	y	i	i
0	2	0	
0.1	2.540	1	
0.2	3.168	2	
0.3	3.887	3	0
0.4	4.704		1
0.5	5.625		2

$h = 0.1$

$$A_{S\,3/8} = \frac{3}{8}(0.1)\left[2 + 3.887 + 2(0) + 3(2.540 + 3.168)\right]$$

$$A_{S\,3/8} = \frac{0.3}{8}(23.011) = 0.8629$$

$A_{S\,3/8} = 0.8629\ u^2$

$$A_{S\,1/3} = \frac{0.1}{3}\left[3.887 + 5.625 + 2(0) + 4(4.704)\right]$$

$$A_{S\,1/3} = \frac{0.1}{3}(28.328) = 0.9443$$

$A_{S\,1/3} = 0.9443\ u^2$

$A_T = A_{S\,3/8} + A_{S\,1/3} = 0.8629 + 0.9443 = 1.8072\ u^2$

$A_T = 1.8072\ u^2$

b) [-0.6, 0.6]

Por Simpson 3/8

$$A_T = \frac{3}{8}h\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{ordenadas múltiplo de 3} + 3\sum \text{resto de las ordenadas} \right]$$

x	y	i
-0.6	0.224	0
-0.5	0.380	1
-0.4	0.570	2
-0.3	0.833	3
-0.2	1.150	4
-0.1	1.539	5
0	2.000	6
0.1	2.540	7
0.2	3.168	8
0.3	3.887	9
0.4	4.704	10
0.5	5.625	[illegible]
0.6	6.656	[illegible]

$h = 0.1$

$$A_T = \frac{3}{8}(0.1)\left[0.224 + 6.656 + 2(0.833 + 2.000 + 3.887) + 3(0.380 + 0.570 + 1.150 + 1.539 + 2.540 + 3.168 + 4.704 + 5.625)\right]$$

$$A_T = \frac{3}{8}(0.1)(0.224 + 6.656 + 13.44 + 57.028)$$

$$A_T = \frac{3}{8}(0.1)(79.348)$$

$$\underline{\underline{A_T = 2.9756\ u^2}}$$

c) 2ª derivada de la ... [illegible]

x	y
0.1	2.540
0.2	3.168
0.3	3.887
0.4	4.704

$$y'' = \frac{1}{h^2}\{0 \quad 1 \quad -2 \quad 1\} \qquad h = 0.1,\ x = 0.3$$

$$y' = \frac{1}{(0.1)^2}\left\{0(2.54) + 3.168 - 2(3.887) + 4.704\right\}$$

$$y' = \frac{0.0980}{(0.1)^2} \qquad \underline{\underline{y' = 9.800}}$$

$$y''' = \frac{1}{h^3} \left| -1 \quad 3 \quad \underline{\underline{-3}} \quad 1 \right|$$

x	y
0.1	2.54
0.2	3.168
0.3	3.887
0.4	4.704

$h = 0.1$

$x = 0.3$

$$y''' = \frac{1}{(0.1)^3} \left| -2.54 + 3(3.168) - 3(3.887) + 4.704 \right|$$

$$y''' = \frac{0.0070}{(0.1)^3}$$

$$\underline{\underline{y''' = 7}}$$

$$y''' = \frac{1}{h^3} \left| -1 \quad 3 \quad \underline{\underline{-3}} \quad 1 \right|$$

x	y
0.3	3.887
0.4	4.704
0.5	5.625
0.6	6.656

$h = 0.1$

$x = 0.5$

$$y''' = \frac{1}{(0.1)^3} \left| -3.887 + 3(4.704) - 3(5.625) + 6.656 \right|$$

$$y''' = \frac{0.006}{(0.1)^3}$$

$$\underline{\underline{y''' = 6}}$$

Procedimientos Métodos Numéricos
Martha R. Trujillo P.
Horacio Sandoval R.

13) Dentro de la cabina de mando de un convoy del metro de la ciudad de México se tomaron lecturas de velocidad y tiempo en el tramo de la estación "salida" a la estación "Llegada" empezando a contar el tiempo desde el momento en que avanzó el convoy. Dichas lecturas fueron las siguientes:

V(t), en Km/hr	0	14.4	61.2	32.8	90.0	36.4	90.4	79.2	61.8	0.0
t, en seg	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135

El convoy quedó completamente inmóvil en la estación "Llegada" a los dos minutos quince segundos

a).- Determinar la distancia que existe entre las dos estaciones mencionadas

b).- Determinar la velocidad del convoy a los cien segundos en Km/hr

c).- Determinar la aceleración del convoy a los quince segundos

a).- Mediante Simpson $S_{3/8}$, tenemos que:

$$d_{v-c} = \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

$$f_{i+3} \quad 3f_{i+4} \quad 3f_{i+5} \quad f_{i+6}$$

$$f_{i+6} \quad 3f_{i+7} \quad 3f_{i+8} \quad f_{i+9}$$

$$d_{v-c} = \frac{3h}{8}\left[f_i + 3\left(f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+4} + f_{i+5} + f_{i+7} + f_{i+8}\right) + 2\left(f_{i+3} + f_{i+6}\right) + f_{i+9}\right]$$

$$= \frac{3(15)}{8}\left[0 + 3(14.4 + 61.2 + 90.0 + 36.4 + 79.2 + 14.8) + 2(32.8 + 90.4) + 0\right]$$

$$= \frac{45}{8}\left[1534.4\right]$$

$$d_{v-c} = 8631 \text{ Km}$$

b).- Interpolando por Lagrange para $t = 100$ seg

$$t(100\,seg) = 36.4\,\frac{(100-90)(100-100)(100-120)}{(75-90)(75-105)(75-120)} +$$

[illegible]

$$= 90.4\,\frac{(100-75)(100-105)(100-120)}{(90-75)(90-105)(90-120)} + 99.2\,\frac{(100-75)(100-90)(100-120)}{(105-75)(105-90)(105-120)} +$$

$$+ \; 64.2\,\frac{(100-75)(100-90)(100-105)}{(120-75)(120-90)(120-105)} = 92.4148$$

∴ La velocidad a los 100 seg es 92.4148 Km/seg

c.- Mediante derivacion de diferencias centrales tenemos que:

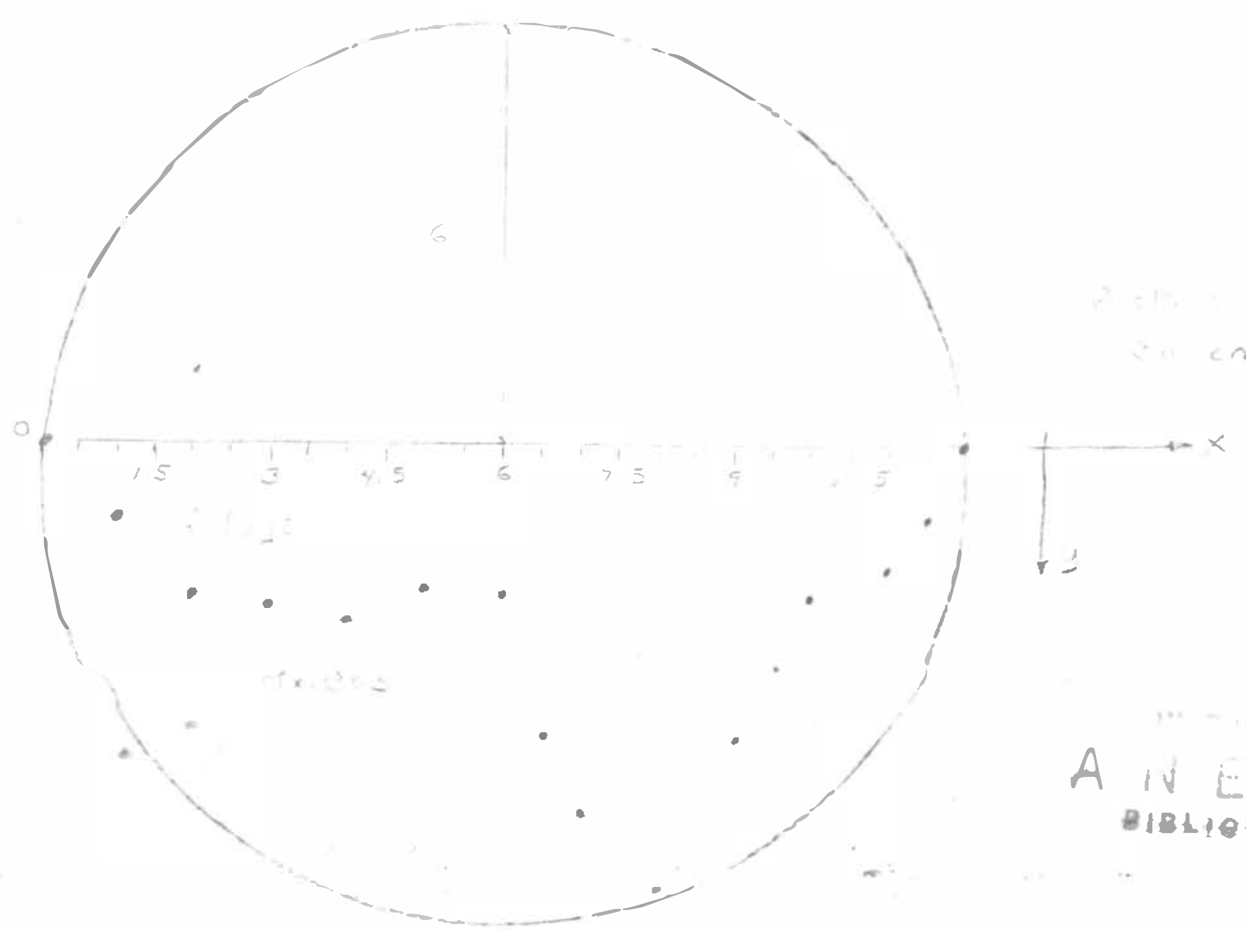
$$f' = \frac{1}{2h}\left(-f_{i-1} + f_{i+1}\right)$$

$$a_{15\,seg} = \frac{1}{2(15)}\left(0+61.2\right) = 2.04 \ Km/seg^2$$

[illegible] Alumnos [illegible]
[illegible] Soria M.
[illegible] Soria I. P.

14)

En [illegible] cuenta con un sistema [illegible] de las cuales tiene una longitud de [illegible] [illegible] un [illegible] ejes [illegible] tubería [illegible] a su cruz. Si [illegible] el [illegible] de la tubería. Calcular [illegible] Q [illegible] perfil. En el presente problema se considera 12 mm = 1/2 pulgada



[illegible]

[illegible] 1.

x (mm)	y (mm)
0	0
1	1
2	2
3	2.1
4	2.3
5	1.9
6	2
6.5	4
7	5
8	6
9	4
9.5	3
10	2
[illegible]	2
[illegible]	[illegible]
12	0

De la figura se ve que el área de [illegible] [illegible] está [illegible], por lo que se puede calcular directamente.

$$A_s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (\ldots)^2}{2} = 0.9\ldots5\ \text{cm}^2 = 94.25\ \text{mm}^2$$

Se usarán las [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

de 0 a 6 Simpson 1/3 con $h = 1.0$ mm

de 6 a 7 Simpson 1/3 con $h = 0.5$ mm

de 7 a 9 Simpson 1/3 con $h = 1.0$ mm

de 9 a 10 Simpson 1/3 con $h = 0.5$ mm

de [illegible] a 12 Simpson 1/3 con $h = 0.5$ mm

$$\int_0^6 y\,dx = \frac{h}{3}\left[\ldots\right]$$

$$= \frac{1.0}{3}\left[0 + 2 + 4(\ldots + 2 + 1.9) + 2(2 + 2.3)\right] = 10.\ldots0\ \text{mm}^2$$

$$\int_6^7 y\,dx = \frac{0.5}{3}\left[2 + 4(4) + 5\right] = 3.83\ \text{mm}^2$$

$$\int_7^9 y\,dx = \frac{1.0}{3}\left[5 + 4(6) + \ldots\right] = 11.00\ \text{mm}^2$$

$$\int_9^{10} y\,dx = \frac{0.5}{3}\left[4 + 4(3) + 2\right] = 3.33$$

$$\int^{12} y\,dx = \frac{0.5}{3}\left[\ldots + 4(\ldots) + 0\right] = 0.95\ \text{mm}^2$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 10 [illegible]

si se desea usar Simpson 1/3 o Simpson 3/8 se requiere [illegible] [illegible] 2 o 3 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] tanto al [illegible] de 10 [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Aquí se [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] [illegible] [illegible] aquí se [illegible] dos

[illegible] Integral mediante [illegible] [illegible] [illegible] se acepta un comportamiento [illegible] del orden h^3

2) Inventar un valor de y para x=10.5 mediante algún esquema de extrapolación. Claro está que si la extrapolación es lineal se llega a la [illegible]

Se usa la 2ª alternativa [illegible] a través de Lagrange de 3er orden con x=9.5, 10, 11, 11.5, para calcular la ordenada de x=10.5

$$P_n(x)=y(x=10.5)=\sum_{j=1}^{n} y_j\left[\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right]=\sum_{j=1}^{4} y_j\left[\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{10.5-x_i}{x_j-x_i}\right]$$

$$=3\,\frac{(10.5-10)(10.5-11)(10.5-11.5)}{(9.5-10)(9.5-11)(9.5-11.5)}+2\,\frac{(10.5-9.5)(10.5-11)(10.5-11.5)}{[illegible]}$$

$$+1.7\,\frac{(10.5-9.5)(10.5-10)(10.5-11.5)}{(11-9.5)(11-10)(11-11.5)}+1.0\,\frac{(10.5-9.5)(10.5-10)(10.5-11)}{(11.5-9.5)(11.5-10)(11.5-11)}$$

$$=3\,\frac{0.25}{-1.50}-2\,\frac{0.50}{0.75}+1.7\,\frac{-0.50}{-0.75}-[illegible]\,\frac{0.25}{1.50}$$

$$=-0.5[illegible]+1.33+1.13-0.17=1.79\ m$$

$$\int_{10}^{11} z\,dx=\frac{[illegible]}{[illegible]}\left[[illegible]\right]=1.[illegible]$$

$$\therefore A_{INFER}=\int z\,dx=3.83+11.0[illegible]+2.33+1.8+0.75=19.92\ m^2$$

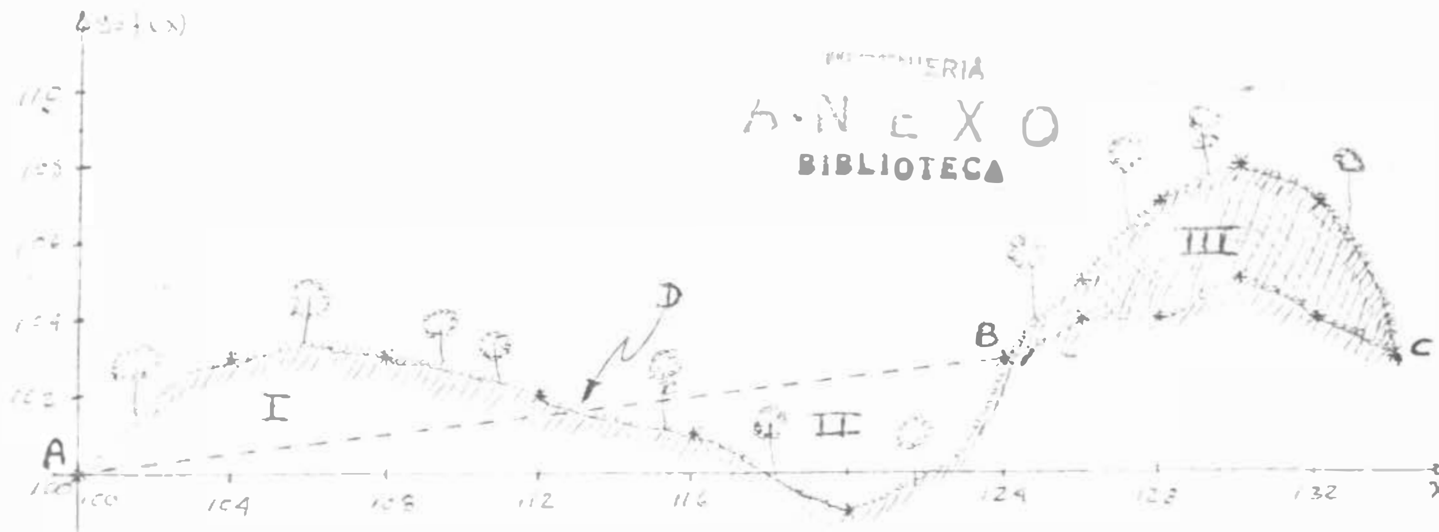
$$A_{[illegible]}=9[illegible]-19.[illegible]=114.[illegible]\ m^2$$

Por tanto el [illegible] Q [illegible]

$$Q=A_{[illegible]}[illegible]=1.[illegible]=[illegible]\frac{m^3}{seg}$$

Nota: La [illegible] [illegible] fue $\frac{[illegible]}{[illegible]}=[illegible]\frac{cm}{seg}$

15) Se desea explotar un yacimiento de mineral cuyos contornos se indican en la siguiente figura.



El equipo de topografía entrega los siguientes datos

Del punto A al punto B

x	y	
100	100	← A
104	103	
108	103	
112	102	
116	101	
120	99	
124	103	← B

Del punto B al punto C

Envolvente Superior x	Envolvente Superior y		Envolvente Inferior x	Envolvente Inferior y
124	103	← B →	124	103
126	105		126	104
128	107		128	104
130	108		130	105
132	107		132	104
134	103	← C →	134	103

a) Se requiere trazar un camino de ancho constante de [illegible] metros, del punto A al B, recto.
b) Se necesitan conocer los volúmenes de corte (I) y de relleno (II)
c) Se necesita calcular el volumen del mineral a explotar (III) si el ancho del yacimiento es constante de 15 metros.

Use Simpson 1/3 y Simpson 3/8 donde sea posible aplicarlos.

Primero es necesario conocer las coordenadas del punto D que separa los volúmenes de corte (I) y de relleno (II). Para ello se considera que el perfil del terreno entre los puntos (112,102) y (116,101) es recto. La intersección de esta recta con la recta rasante del camino que va de A a E, es el punto D buscado.

(112,102) (116,101) [illegible] (100,[illegible]) (124,[illegible])

$y - 102 = \frac{-1}{4}(x - 112)$ $y - [illegible] = \frac{2}{24}(x - 100)$

$4y + x - 520 = 0$ $8y - x - [illegible] = 0$

Resolviendo ambas ecuaciones para encontrar la [illegible]

$x = 520 - 4y$, subst. en la recta AE

$8y - (520 - 4y) - [illegible] = 0$

[illegible] $y = [illegible]$; [illegible]

subst. $x = 520 - 4(101.6[illegible]) = 113.3333$ ∴ D (113.3333, 101.6[illegible])

El volumen de corte comprende de $x = 100$ a $x = 113.3333$ y el de relleno de $x = 113.3333$ a $x = 12[illegible]$

Aplicando Simpson [illegible] para [illegible] de corte [illegible]

$\int^{113} [illegible] = \frac{h}{3}[illegible]$

$= [illegible]$ 12 [illegible]

a este valor hay que [illegible] el camino [illegible] la rectángulo correspondiente a [illegible]

$8y - x - [illegible] = 0$; $y = \frac{[illegible] + x}{8} = [illegible]$

Sabiendo que el camino es [illegible] se obtiene el valor exacto, con [illegible]

$\int^{112} [illegible](x)\,dx = \frac{h}{2}[illegible] = \frac{[illegible]}{2}[illegible] = 120[illegible]$

∴ [illegible] $= [illegible]$ 230 − 1209 = 21[illegible]

Solo falta el área del triángulo

[illegible]

donde α (112, [illegible])
β (112, [illegible])
ε (113,3333, 101,1667)

Área $= \frac{b \cdot h}{2} =$ [illegible] $= 0,3333$ [illegible]

∴ Área total de corte $= 21 \times 0,3333 =$ [illegible]

y el volumen total de corte [illegible]

Para calcular el [illegible]

$\int f(x)\,dx =$ [illegible] $= 800\ m^2$

y el [illegible] (segunda) [illegible]

$y_{116} = \frac{303 - x}{3} = \frac{303 - 116}{3} = 102$ [illegible]

[illegible]

y el área de corte [illegible] $= 20\ m^2$

[illegible]

donde γ (116, 102)
δ ([illegible])
ε (113,3333, [illegible])

[illegible]

∴ Área total de [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$+ \frac{3.5}{2}\left[\right.$ [illegible] $\left.\right]$

$=$ [illegible]

[illegible] Hernández
[illegible] S.
[illegible] Sandoval R.

Envolvente Superior

$$\int_{124}^{128} f(x)\,dx + \int_{123}^{3?} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left[103 + 4(103) + 104\right] +$$

$$+ \frac{3\cdot 2}{8}\left[104 + 3(105) + 3(104) + 103\right]$$

$$= 5.3333 + 1035.50 = 1,040.8333\ m^2$$

∴ El área del [illegible] será

$$1,061.25 - 1040.8333 = 20.4167\ m^2$$

y el volumen del [illegible] será $20.4167 \times 25 = 510.4167\ m^3$

Por tanto los [illegible] [illegible] son ahora tres:

I	[illegible]	1?9.3333 m^3
II	Segundo	149.3333 m^3
III	[illegible]	510.4167 m^3

[illegible]

Explique razonando en que consisten las fórmulas de derivación de
a) Diferencias hacia atrás y hacia adelante
b) Secundarias hacia adelante y hacia atrás.
c) Diferencias centrales
d) La forma de conversión hacia el lado opuesto
e) En que casos se aplican y como estimaría el error cometido

a) - Son aquellas fórmulas que emplean como pivote el punto inicial (o final) y algunos puntos de adelante (o atrás) o ya sea que empleen solo puntos a la derecha de x_i (diferencias hacia adelante) o bien que empleen solo puntos a la izquierda de x_i (diferencias hacia atrás)

b).- Son aquellas en que cuando se tienen expresiones en las que el elemento i-ésimo, para el cual se esta calculando la derivada no esta ni en el centro ni en un extremo

c) Cuando la expresión para calcular la derivada considera el mismo número de términos a la derecha que a la izquierda, se tiene "Diferencias centrales".

d).- Esto se obtiene mediante el cambio de signo de todos los coeficientes y de [illegible]

e).- Como estimación del error se acostumbra usar solamente el primer término, despreciando los demás.
Las diferencias hacia adelante (o hacia atrás) se aplican cuando es importante la derivada en el punto inicial (o final). En los otros casos que no están en los extremos es mejor usar las diferencias centrales.

Explique cual es la función que se ajusta a los datos discretos al aplicar:
a).- Integración Rectangular
b).- " Trapecial
c).- " Simpson 1/3
d).- " Simpson 3/8
e).- Y que relación debe existir entre las abscisas de dichos datos

a).- Se ajusta la recta horizontal $y=f_i$
b).- Recta inclinada.
c).- Parábola de 2º grado
d).- Parábola de 3er grado
e).- En simpson es necesario que $\Delta x = cte$ en trapecio y rectángulo es útil pero no necesario.

(*) [illegible]

Procedimientos Numéricos [illegible]
Alejandro [illegible]
[illegible] /R

1) Explique en qué consiste:
a) El proceso de interpolación
b).- Interpolación a mano alzada
c).- Interpolación lineal
d).- Interpolación de Lagrange
e) Los métodos locales de interpolación

a) - Cuando una función está dada por un conjunto de datos x_i, $f(x_i)$, en ocasiones es necesario conocer el valor de la función para cierto valor de la variable independiente X^*, donde X^* no coincide con alguno de los valores dados, entonces debe "estimarse" el valor de $f(X^*)$ tomando en cuenta los datos existentes.
La estimación es necesaria porque no se conoce el comportamiento de la función entre dos muestras consecutivas. Si X^* está contenido entre los valores mínimo y máximo de las X_i, la generación del nuevo valor de $f(x)$ es lo que se conoce como INTERPOLACION
b).- Es cuando se realiza un ajuste gráfico hecho a pulso y por tanto es de poca aproximación
c).- Es cuando se considera que el comportamiento de la función entre dos muestras consecutivas es una LINEA RECTA y valuar para las abscisas requeridas.
d) - Es aquella interpolación que puede usarse cuando los puntos están espaciados a intervalo variable, es decir, $h \neq cte$
e) - Son aquellos que sólo emplean información localizada en la vecindad del punto por generar.

4) Dada la posición en diferentes instantes (ver tabla) de una partícula, indique cómo obtendría la aceleración de la misma cada medio segundo. (No haga cálculos)

tiempo	0	0.1	0.7	1.4	2.17	2.25	5.4	6.2	7.1
posición	5	7	2	-1	-2	2	5	8	-9

1er Paso: Interpolar con cualquier método a las abscisas solicitadas 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, ...

2º Paso: Aplicar una fórmula para la segunda derivada directamente o

2º Paso: Aplicar dos veces una fórmula de primera derivada.

13) [illegible] 7.

Encuentre [illegible] x que proporcione una y = 7.386 [illegible] en la tabla siguiente:

x	y
0.2	-2.619
1.0	3.000
1.3	4.425
	7.386
2.2	8.177

Volteando la tabla (Intercambiando columnas):

	y	x	
x_1	-2.619	0.20	y_1
x_2	3	1	y_2
x_3	4.425	1.30	y_3
x_4	8.177	2.20	y_4

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\,y_2 +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\,y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y = \frac{(7.386-3)(7.386-4.425)(7.386-8.177)}{(-2.619-3)(-2.619-4.425)(-2.619-8.177)}(0.20) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-4.425)(7.386-8.177)}{(3+2.619)(3-4.425)(3-8.177)}(1) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-3)(7.386-8.177)}{(4.425+2.619)(4.425-3)(4.425-8.177)}(1.3) +$$

$$+ \frac{(7.386+2.619)(7.386-3)(7.386-4.425)}{(8.177+2.619)(8.177-3)(8.177-4.425)}(2.2)$$

$$y = \frac{(4.386)(2.961)(-0.791)(0.20)}{(-5.619)(-7.044)(-10.796)} + \frac{(10)(2.961)(-0.791)(1)}{(5.619)(-1.425)(-5.177)} +$$

$$+ \frac{(10)(4.386)(-0.791)(1.3)}{(7.04)(1.425)(-3.752)} + \frac{(10)(4.386)(2.961)(2.2)}{(10.796)(5.177)(3.752)}$$

$$y = \frac{-2.055}{-427.31} + \frac{-23.42}{41.4} + \frac{-45.1}{-37.64} + \frac{285.8}{209.703}$$

$$\underline{\underline{y = 2.0008}} \quad \therefore \quad x = 2.0008$$