PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS

Capítulo II. Aproximación numérica y errores

En el presente capítulo se siguen las normas y características indicadas en la Introducción del tema Análisis Combinatorio y Teorema del binomio. (Capítulo I del problemario), por lo que aquí no se enuncian.

Este capítulo posee muy pocos problemas, tan solo 20, por lo que se reitera la petición a todos los usuarios o interesados en el tema a que aporten nuevos problemas o variantes, las cuales serán bien recibidas. Así mismo se reitera la solicitud de no destruir o mutilar el presente material.

Se agradece a los alumnos que han informado de errores detectados en el Capitulo I. Es de esperarse que en este segundo tema y en los siguientes, el número de errores disminuya, y sobre todo mejore sensiblemente la presentación.

Favor de hacer llegar las aportaciones y comentarios en la Coordinación de Métodos Numéricos, en la asesoría de la asignatura o en el cubículo D-7 de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería.

Se agradece a Leticia Franco y Jorge Cisneros su valiosa colaboración en el problemario en general y en el presente capítulo en particular.

A t e n t a m e n t e

M. I. Horacio Sandoval Rodríguez

PROBLEMARIO METODOS NUMERIC
Leticia Franco, Jorge Cisneros.
Horacio Sandoval.

APROXIMACIÓN NUMÉRICA

	# PROBLEMAS
* ERROR RELATIVO Y ABSOLUTO (PROPAGACION).	11
* ERROR POR REDONDEO.	3
- ERRORES MEZCLADOS.	2
- CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.	1
* PREGUNTAS CONCEPTUALES.	3
TOTAL =	20

Problemario de Métodos Numéricos
Lehua Franco H., Jorge E. Cisneros,
Horacio Sandoval

ERROR RELATIVO Y ABSOLUTO (PROPAGACIÓN)

1) Suponga que podemos expresar dos valores exactos como:

$X_1 = \bar{X}_1 \pm \varepsilon_1$; $X_2 = \bar{X}_2 \pm \varepsilon_2$, donde $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, ε_1 y ε_2 son los valores aproximados y los valores máximos del error ABSOLUTO X_1 y X_2 respectivamente.

Demuestre que el máximo valor para el ERROR ABSOLUTO de la sustracción $X_1 - X_2$, está dado por la suma de los máximos valores de los errores absolutos de X_1 y X_2

$$(\bar{X}_1 - \varepsilon_1) - (\bar{X}_2 + \varepsilon_2) \leq X_1 - X_2 \leq (\bar{X}_1 + \varepsilon_1) - (\bar{X}_2 - \varepsilon_2)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq X_1 - X_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq (X_1 - X_2) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq +(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\therefore \left|(X_1 - X_2) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right| \leq \left|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right|$$

2) En un terreno irregular de 4 lados, las mediciones con cinta de 0.1 m de resolución fueron 12.4, 13.1, 8.2, 4.5 metros. Calcule el máximo ERROR ABSOLUTO y RELATIVO que se puede cometer al determinar el perímetro.

$$e_a = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.20\,m$$

$$e_r = \frac{0.20}{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4} = \frac{0.20}{12.4 + 13.1 + 8.2 + 4.5}$$

$$= \frac{0.20}{38.20} = 0.005236 = 0.52\%$$

3) Sea un lote irregular de 4 lados; para el cálculo de su superficie se requiere, además de los ángulos, la longitud de los lados, o sea el perímetro; si las distancias medidas de los lados fueron 196, 75.1, 72 y 75.5 mts. Indique el mayor ERROR ABSOLUTO y RELATIVO que se puede cometer al calcular su perímetro.

$$e_{x+y} = e_x + e_y = 0.5 + 0.05 + 0.5 + 0.05 = 1.10\text{ mts.}$$

$$e_r = \frac{e_a}{\text{Aprox.}} = \frac{1.10}{196 + 75.1 + 72 + 75.5} = \frac{1.10}{418.6}$$

$$e_r = 0.00262780 = 0.26\%$$

4) En una cisterna se almacenó agua durante 25 minutos con un gasto de 120 lts./min.. Calcule a) los litros almacenados si el reloj sólo marca minutos y el medidor del gasto solo tiene marcas cada 10 lts/min y b) los errores máximos cometidos, tanto ABSOLUTO como RELATIVO.

$$V = Q \cdot t = (120)(25) = 3{,}000 \text{ lts.}$$

$e_Q = \pm 5$ lts/min.

$e_t = \pm 0.5$ min. considerando positivos los errores.

$$e_V = e_Q \cdot \bar{t} + e_t \cdot \bar{Q}$$

$$= (5)(25) + (0.5)(120)$$

$$= 125 + 60 = 185 \text{ lts.} \Rightarrow e_{vol} = \pm 185 \text{ lts}$$ error absoluto máximo

$$e_{rel} = \frac{|\pm 185|}{3000} = 0.0616667 = 6.1667\ \%$$

5) Para calcular el volúmen de una esfera se sabe que su radio es de 91 mm, donde la resolución de este valor está redondeado a milímetros. Calcular el volúmen máximo que puede llegar a tener una esfera, su ERROR ABSOLUTO en mm^3 y su ERROR RELATIVO.

$$V_{máx} = (4/3)\pi r^3 = (4/3)\cdot\pi\,(91+0.5)^3 = 4/3\pi\cdot(766060.875)$$

$$= 3{,}208{,}868.289 \text{ mm}^3$$ (Volumen máximo)

$$V_{nom} = (4/3)\pi r^3 = 4/3\pi(91)^3 = 3{,}156{,}550.823 \text{ mm}^3$$ (Volumen Nominal)

$$e_{av} = 3{,}208{,}868.291 - 3{,}156{,}550.825$$

$$= 52{,}317.466 \text{ mm}^3$$ (Error absoluto del volumen)

$$\frac{e_{av}}{V_{nom}} = \frac{52{,}317.466}{3{,}156{,}550.823}$$

$$= 0.016574251$$

$$= 1.6574\ \%$$ (Error relativo)

6) Dos lecturas x_1 y x_2 poseen un error máximo $\pm e_1$ y $\pm e_2$ respectivamente. Obtenga las expresiones exactas para la cota máxima de los errores absolutos y relativo de $y = x_1 \cdot x_2$

$$y_{ex} = (x_1 \pm e_1)(x_2 \pm e_2) \quad \text{considerando el error positivo.}$$

$$= x_1 x_2 + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2$$

$$y_{ap} = x_1 \cdot x_2$$

$$\therefore \; e_a = |\cancel{x_1 x_2} + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2 - \cancel{x_1 x_2}|$$

$$= x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2$$

$$e_r = \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2}{x_1 x_2} \doteq \frac{x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_1 e_2}{(x_1 + e_1)(x_2 + e_2)}$$

7) En la evaluación de la ecuación $f(x) = e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ (con una máquina de 7 dígitos de capacidad que trunca y no usa notación exponencial) para los valores $x = 10$ y $x = 0.2$, indique a) cuántos términos de la serie pueden emplearse como máximo; b) el error relativo y el error absoluto en cada caso.

$* e^{0.2} = 1.221402758$ y $** e^{10} = 22,026.46579$ (Valores "exactos")

$$* e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24} + \frac{0.00032}{120} + \frac{0.000064}{720} +$$

$$+ \frac{0.0000128}{5040} + \frac{0.0000025}{40320} + \frac{0.0000005}{362880} + \frac{0.0000001}{3628800} + 0 + 0 + \dots$$ (por el numerador)

$$= 1 + 0.2 + 0.02 + 0.0013333 + 0.0000666 + 0.0000026 + 0.00000089$$

↳ No se usan, la capacidad de la máquina se rebasa

$$= 1.2214025 \quad \text{(6 términos de la serie)}$$

$$e_{abs} = |1.2214025 - 1.221402758| = 0.000000258$$ (se usan más dígitos)

$$e_{rel} = \frac{0.000000258}{1.221402758} = 0.000000211 \doteq 0.0000211\ \%$$ (" " " ")

$$** e^{10} = 1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24} + \frac{100000}{120} + \frac{1000000}{720}$$ (No se acepta el siguiente numerador)

$$= 1 + 10 + 50 + 166.6666 + 416.6666 + 833.3333 + 1388.888$$

$$= 644.3332 + 833.3333 + 1388.888$$

$$= 1477.6665 + 1,388.888$$

$$= 2866.554 \quad \text{(7 términos de la serie)}$$

$$e_{abs} = |2866.554 - 22,026.46579| = 19,159.91179$$

$$e_{rel} = \frac{19,159.91179}{22,026.46576} = 0.869858 = 86.9858\ \%$$

8) Sea un vitral elíptico que tiene de semieje mayor una longitud de 1.23 m. y de semieje menor 0.92 m.
MEDIDOS con cinta métrica de 0.01 m. de Resolución. Suponer que se calcula el área con una máquina ficticia de 3 cifras.

a) Calcular el área del cristal por colocar.
b) Calcular el error absoluto, máximo posible del área, que se puede cometer.
c) Calcular el máximo error relativo del área.
d) Indicar y comentar los errores cometidos.

a) $A = \pi a b$
donde:

$a = 1.23$ m.
$b = 0.92$ m.

$\therefore \quad A = (3.14)(1.23)(0.92) = 3.5482 \doteq 3.54\,m^2$

b) $e_{ab} = (1.23)(0.005) + (0.92)(0.005) = 6.15\times10^{-3} + 4.60\times10^{-3} = 1.07\times10^{-2}$

$a\cdot b = (1.23)(0.92) = 1.1316 = 1.13$

$e_{\pi\cdot ab} = (3.14)(0.0107) + (1.13)(0.00159) = 3.35\times10^{-2} + 1.79\times10^{-3} = 3.53\times10^{-2}$

considerando $e_\pi = 0.00159$

c) $(e_{\pi\cdot ab})_{rel} = \dfrac{e_A}{A} = \dfrac{3.53\times10^{-2}}{3.54} = 0.00999 = 0.999\%$

d)
- ERROR POR REDONDEO DE 0.005 EN LAS MEDIDAS DE a y b, QUE ES ERROR INHERENTE POR VENIR EN LOS DATOS.
- ERROR POR TRUNCAMIENTO AL MANEJAR EL VALOR DE $\pi = 0.00$
- PROPAGACION DEL ERROR AL MULTIPLICAR $a\cdot b$.
- ERROR DE REDONDEO EN EL PRODUCTO $a\cdot b$, y $\pi\cdot(a\cdot b)$
- PROPAGACION DEL ERROR AL MULTIPLICAR $\pi\cdot(a\cdot b)$

9) La expansión en serie de Mc. Laurin para el cos x es:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Iniciando con el primer término, cos x = 1, agréguense los términos uno a uno para estimar $\cos(\pi/3)$, evaluando los sumandos con una aproximación de 5 cifras. Agréguense términos hasta que el valor absoluto del error aproximado sea menor a ~~0.05~~ la resolución de la máquina ficticia de 5 cifras se sabe que:

$\cos(\pi/3) = 0.5$ (Valor exacto).

1ª Estimación es: $\cos x = 1$

2ª Estimación: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$; para $x = \pi/3 = 1.0472$

$$\cos(\pi/3) = 1 - \frac{(\pi/3)^2}{2!} = 0.45169 \text{ (redondeando)}$$

$$e_r = \frac{|0.5 - 0.45169|}{0.5} \times 100\% = \frac{0.04832}{0.5} \times 100\%$$

$e_r = 9.664\%$ (considerando el valor real de 0.5)

$$e_{aprox} = \frac{|0.5 - 0.45169|}{0.45169} \times 100\% = 0.10695 = 10.695\%$$

3ª Estimación: $\cos(\pi/3) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$$= 0.45169 + \frac{(1.0472)^4}{4!} = 0.45169 + \frac{1.2026}{24}$$

$$\cos(\pi/3) = 0.45169 + 0.050108 = 0.50180$$

$$e_r = \frac{|0.5 - 0.50180|}{0.5} = \frac{0.00180}{0.5} = 0.0036$$

$e_r = 0.36\%$

$$e_{aprox} = \frac{|0.5 - 0.50180|}{0.50180} = \frac{0.00180}{0.50180} = 0.0035871$$

$e_{aprox} = 0.3587\%$

4ª Estimación :
$$\cos(\pi/3) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$
$$= 0.50180 - \frac{(1.0472)^6}{6!} = 0.50180 - \frac{1.3188}{720}$$
$$\cos(\pi/3) = 0.50180 - 0.0018317 = 0.49997$$
$$e_r = \frac{|0.5 - 0.49997|}{0.5} = \frac{0.00003}{0.5} = 0.00006$$
$$e_r = 0.006\%$$
$$e_{aprox} = \frac{|0.5 - 0.49997|}{0.49997} = \frac{0.00003}{0.49997} = 0.0000600004$$
$$e_{aprox} = 0.006\%$$

5ª Estimación :
$$\cos(\pi/3) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$
$$= 0.49997 + \frac{(1.0472)^8}{8!} = 0.49997 + \frac{1.4462}{40320}$$
$$= 0.49997 + 0.000035869 = 0.50001$$
$$e_r = \frac{|0.5 - 0.50001|}{0.5} = \frac{0.00001}{0.5} = 0.00002$$
$$e_r = 0.002\%$$
$$e_{aprox} = \frac{|0.5 - 0.50001|}{0.50001} = \frac{0.00001}{0.50001} = 0.00002$$
$$e_{aprox} = 0.002\%$$

6ª Estimación :
$$\cos(\pi/3) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$
$$= 0.50001 - \frac{(1.0472)^{10}}{10!} = 0.50001 - \frac{1.5860}{3.6288\times10^6}$$
$$= 0.50001 - 0.00000 = 0.50001$$

Observaciones:

1. Se acepta que la máquina ficticia usa notación exponen-

cial y tiene capacidad de 5 cifras.

2. Se compara el error ~~[illegible]~~ relativo al usar como referencia el valor exacto o la aproximación.

3. En caso de no conocer el coseno del ángulo deseado el error relativo y el error absoluto podría estimarse con la última aproximación en lugar del valor 0.5, como se muestra a continuación

1a Estimación. $\cos X = 1.0$

2a Estimación $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} = 1 - \frac{(1.0472)^2}{2} = 0.45169$

$e_{abs} = |1.0 - 0.45169| = 0.54831$

$e_{rel} = \frac{0.54831}{0.45169} = 1.2139 = 121.39\%$

Se toma el valor último como el mejor aproximado al valor real

3a Estimación $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} = 0.45169 + \frac{1.20221}{24} = 0.45169 + 0.050092$

$= 0.50178$

$e_{abs} = |0.45169 - 0.50178| = 0.050092$

$e_{rel} = \frac{0.050092}{0.50178} = 0.099829 = 9.98\%$

4a Estimación $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} - \frac{X^6}{720} = 0.50178 - \frac{1.3188}{720} = 0.50178 - 0.00183$

$= 0.49995$

$e_{abs} = |0.50178 - 0.49995| = 0.0018316$

$e_{rel} = \frac{0.0018316}{0.49995} = 0.0036635 = 0.366\%$

5a Estimación $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} - \frac{X^6}{720} + \frac{X^8}{40320} = 0.49995 + \frac{1.4462}{40320}$

$= 0.49995 + 0.0000358 = 0.49999$

$e_{abs} = |0.49995 - 0.49999| = 0.00004$

$e_{rel} = \frac{0.00004}{0.49999} = 0.00008 = 0.008\%$

El término de la 6a estimación será $\frac{X^{10}}{3,628,800}$, que es menor a la resolución de la máquina de 5 cifras.

10) En una carrera de autos se registró que la velocidad sostenida por un auto en 1 hora, fué de 120 Km/hora. Calcule el error máximo (RELATIVO) cometido al determinar la distancia recorrida en ese lapso, si la aproximación del reloj es de un minuto y del velocímetro es de 10 Km/hr.

10

$t = 1m \qquad V = \frac{d}{t}$

$e_v = 5 \text{ Km/hr.}$

$e_t = \frac{1}{60} \times (0.5)\,hr = \frac{1}{120}\,hr.$

$d = v \cdot t$

$e_d = e_v \cdot \bar{t} + e_t \cdot \bar{v}$

$= (5)(1) + \frac{1}{120}(120)$

$e_d = 6 \text{ Km.}$

$e_{rel} = \frac{e_d}{\bar{d}} = \frac{6\,Km}{1 \cdot 120} = 0.05 = 5\%$

$e_{rel.v} = \frac{5}{120} = 0.04166667$

$e_{rel.t} = \frac{1/120}{1} = 0.00833333$

$\therefore\ e_{rel.dis} = e_{rel.v} + e_{rel.t}$

$= 0.04166667 + 0.00833333$

$e_{rel.dis} = 0.05 = 5\%$

11) Calcular el error considerado que:

$$|e_{y_{MAX}}| = (3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4)\cdot 5\cdot 10^{-t} \quad \text{si:}$$

$t = 4$ (4 digitos disponibles).

$$|e_{y_{MAX}}| = (3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4)\cdot 5\cdot 10^{-4}$$

$X_1 = 0.2897 \times 10^0$
$X_2 = 0.7259 \times 10^1$
$X_3 = 0.2162 \times 10^3$
$X_4 = 0.5291 \times 10^4$

En orden ascendente de X_1 a X_4 y después en orden descendente, de X_4 a X_1. Compararlos

a) $$|e_{y_{MAX}}| = \left[3(1) + 3(0.7259\times10^1) + 2(0.2162\times10^3) + 0.5291\times10^4\right] 5\cdot 10^{-4}$$

$= 2.8642889$ EN FORMA ASCENDENTE.

b) $$|e_{y_{MAX}}| = (3X_4 + 3X_3 + 2X_2 + X_1)\cdot 5\cdot 10^{-4}$$

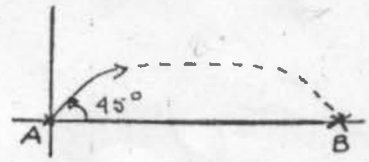
$$= \left[3(0.5291\times10^4) + 3(0.2162\times10^3) + 2(0.7259\times10^1) + 1\right]\cdot 5\cdot 10^{-4}$$

$= 8.2620259$ EN FORMA DESCENDENTE.

LA COMPARACION ENTRE AMBOS RESULTADOS VIENE A CONFIRMAR QUE EL ORDEN EN QUE SE SUMEN LOS NÚMEROS VA SER UN FACTOR DETERMINANTE EN EL ERROR A OBTENER, PUDIENDOSE COMO EN ESTE CASO TENER ERRORES DE GRAN MAGNITUD.

2) Un proyectíl es lanzado del punto A con una cierta velocidad. El tiempo que tarda en llegar al punto B es de 20 seg.
Calcular la velocidad inicial con que fue lanzado dicho proyectil, y la distancia recorrida, considerando solo ERROR DE REDONDEO SIMÉTRICO al medir el tiempo.

$$d_{hor} = V_i t \quad \text{———} \quad (1)$$
$$d_{vert} = V_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{———} \quad (2)$$



De (2)

$$0 = V_i (20) - \frac{1}{2} (9.81)(20)^2$$

$$0 = V_i (20) - 1962$$

$$V_i = 98.1 \ m/seg.$$

De (1)

$$\Rightarrow V_{hor} = V_{vert}.$$

$$\therefore d_{hor} = (98.1)(20) = 1962 \ m.$$

Considerando Error de Redondeo Simétrico en el tiempo
$t = 20.5$ seg.

De (2)

$$\Delta t = 0.5 \text{ seg.}$$

$$0 = V_i (20.5) - \frac{1}{2} (9.81)(20.5)^2$$

$$0 = V_i (20.5) - 2061.32625$$

$$V_i = 100.5525 \ m/seg.$$

De (1)

$$d_{hor} = (100.5525)(20.5) = 2061.32625 \ m$$

$$e_{abs_V} = |98.1 - 100.5525| = 2.45251 \ m/seg$$

$$e_{rel_v} = \frac{2.45251}{98.1} \times 100\,\% = 2.5\,\%$$

$$e_{abs.dis} = |1962 - 2061.32625| = 99.32625 \text{ m}$$

$$e_{rel.dis} = \frac{99.32625}{1962} \times 100\,\% = 5.0625\,\%$$

$d_{hor} = V_i t$ $\quad t$

$d_{ver} = V_i t + \frac{1}{2} g t^2$

$d_{ver} = V_i(20) + (\frac{1}{2})(9.8)(20)^2$

$V_i = 98.1$

$V_{hor} = V_{ver}$

$d_{hor} = (98.1)(20) = 1962$

$t = 20.5$

$d_{hor} = V_i(20.5) + \frac{1}{2}(9.8)(20.5)^2$

$V_i = 20110.5$

3) Dada $f(x) = 6x^2 - 3x + 0.1448$, valúe la función en $x = 3.7910$, suponiendo que se trabaja con 4 cifras decimales de aproximación y que existe REDONDEO en cada operación, cálcule el error absoluto y el relativo.

$$f(3.7910) = 6(3.7910)^2 - 3(3.7910) + 0.1448$$
$$= 6(14.371681) - 11.3730 + 0.1448$$
$$= 86.2302 - 11.3730 + 0.1448$$
$$= 75.0020 \quad \text{CON 4 DECIMALES Y REDONDEO}$$

$$f(3.7910) = 75.001886 \quad \text{SIN REDONDEO O TRUNCAMIENTO}$$

$$\therefore \quad e_a = |75.0020 - 75.001886|$$
$$= 0.000114$$

$$e_r = \frac{0.000114}{75.0020} = 0.000001520$$

$$= 0.000152\ \%$$

11

4

ERRORES MEZCLADOS.

(1) Calcular el error absoluto y relativo al evaluar la función;

$$y = \frac{1}{x - 0.6665} \quad ; \quad si \quad x = \frac{2}{3}$$

y a) La máquina trunca el valor de x a la 4ª cifra significativa.

b) La máquina redondea el valor de x a la 4ª cifra significativa.

c) Truncamiento de $x = 0.6666$

Valor Exacto:

$$y = \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{6665}{10000}} = \frac{30,000}{20,000 - 19,995} = \frac{30,000}{5} = \cancel{16,000}\ 6,000$$

Valor "Exacto" con Calculadora: (se usaron 3 calculadoras diferentes)

$y_{ab} \doteq 6,000.0000024$

$y_r \doteq 6,000.00024$ ✓

$y_{ro} \doteq 5,999.998800$

b) Redondeo de $x = 0.6667$

$$y = \frac{1}{0.6667 - 0.6665} = \frac{1}{0.0002} = 5,000$$

c) Truncamiento de $x = 0.6666$

$$y = \frac{1}{0.6666 - 0.6665} = \frac{1}{0.0001} = 10,000$$

$$E = \begin{cases} e_{a(1)} = |5,000 - 6,000| = 1000 \\ e_{r(1)} = \frac{1000}{6000} = 0.1667 = 16.67\% \end{cases}$$

$$T \begin{cases} e_{a(2)} = |10,000 - 6,000| = 4000 \\ e_{r(2)} = \frac{4000}{6000} = 0.6667 = 66.67\% \end{cases}$$

E = REDONDEO

T = TRUNCAMIENTO

2) Sea $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 0.1488$
Evalue $f(x)$ para $x = 3.791$ usando 4 dígitos.

a) Aplicando REDONDEO calcule el valor de $f(x)$, el error absoluto y el error relativo.

b) Aplicando TRUNCAMIENTO calcule el valor de $f(x)$, el error absoluto y el error relativo.

a)
$$\begin{aligned} f(3.791) &= 2(3.791)^3 + 6(3.791)^2 - 3(3.791) + 0.1488 \\ &= 2(54.48304274) + 6(14.371681) - 11.373 + 0.1488 \\ &= 2(54.48) + 6(14.37) - 11.37 + 0.1488 \\ &= 109.0 + 86.22 - 11.37 + 0.1488 \\ &= 183.9988 \doteq 184.0 \end{aligned}$$

$f(3.791)$ 'exacto' $= 183.9719713$

$$e_a = |\hat{f} - f| = 0.02802871$$

$$e_r = \frac{0.02802871}{184} = 0.00015233 = 0.015233\ \%$$

b)
$$\begin{aligned} f(3.791) &= 2(3.791)^3 + 6(3.791)^2 - 3(3.791) + 0.1488 \\ &= 2(54.48) + 6(14.37) - 11.37 + 0.1488 \\ &= 108.96 + 86.22 - 11.37 + 0.1488 \\ &= 183.8988 = 183.8 \end{aligned}$$

$$e_a = |\hat{f} - f| = |183.8 - 183.9719713| = 0.1719713$$

$$e_r = \frac{0.1719713}{183.8} = 0.000935644 = 0.0935644\ \%$$

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS
Leticia Franco M., Jorge E. Cisneros
Horacio Sandoval R

CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

1) ANALIZAR Y COMENTAR LA CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD DE LAS SECUENCIAS:

a) $A_n = \frac{145}{12} A_{n-1} - A_{n-2}$ QUE OBEDECE A $A_n = \frac{1}{12^n}$

b) $A_n = \frac{101}{10} A_{n-1} - A_{n-2}$ QUE OBEDECE A $A_n = \frac{1}{10^n}$.

HACER 25 ITERACIONES COMO MÍNIMO SI ES CON CALCULADORA PROGRAMABLE, Y 100 ITERACIONES COMO MÍNIMO SI ES CON COMPUTADORA, USAR TODA LA CAPACIDAD DE LA MÁQUINA QUE EMPLEEN.

Calculando en una microcomputadora Casio con el programa:

```
5  DIM  Y(25)
10 FOR  I=0  TO  25
20 Y(I) = [(145/12 * Y(I-1) - Y(I-2)]
30 PRINT  Y(I)
40 NEXT I
50 END.
```

SOLUCION

a) $A_n = \frac{145}{12} A_{n-1} - A_{n-2}$ QUE OBEDECE A $A_n = \frac{1}{12^n}$

n	$\overline{P_n}$ (aproximación)	P_n(real)	Δ (DIFERENCIA)
0	1.	1	0
1	0.083333332	0.083333333	1.24×10^{-9}
2	0.00694443	0.006944444	1.4563×10^{-8}
3	5.78529×10^{-4}	5.787037×10^{-4}	1.747376×10^{-7}
4	4.612846×10^{-5}	4.822531×10^{-5}	2.09685×10^{-6}
5	-2.114342×10^{-5}	4.018776×10^{-6}	2.51622×10^{-5}
6	-3.016115×10^{-4}	3.34898×10^{-7}	3.019464×10^{-4}
7	-0.003623329	2.790816×10^{-8}	0.003623356
8	-0.043480276	2.32568×10^{-9}	0.043480278
9	-0.521763344	1.938067×10^{-10}	0.0521763334
10	-6.26116001	1.615056×10^{-11}	6.26116001
11	-75.13392012	1.34588×10^{-12}	75.13392012

n	$\overline{P}_n$	P_n real	Δ (DIFERENCIA)
12	-901.6070415	1.121567×10^{-13}	901.6070415
13	-10819.2845	9.346388×10^{-15}	10819.2845
14	-129831.414	7.788657×10^{-16}	129831.414
15	-1557976.968	6.490547×10^{-17}	1557976.968
16	-18695723.61	5.408789×10^{-18}	18695723.61
17	-224348683.3	4.507324×10^{-19}	224348683.3
18	-2692184200	3.756104×10^{-20}	2692184200
19	-3.230621×10^{10}	3.130086×10^{-21}	3.230621×10^{10}
20	-3.876745×10^{11}	2.608405×10^{-22}	3.876745×10^{11}
21	-4.652094×10^{12}	2.173671×10^{-23}	4.652094×10^{12}
22	-5.582513×10^{13}	1.811393×10^{-24}	5.582513×10^{13}
23	-6.699016×10^{14}	1.509494×10^{-25}	6.699016×10^{14}
24	-8.038819×10^{15}	1.257912×10^{-26}	8.038819×10^{15}
25	-9.646583×10^{16}	1.04826×10^{-27}	9.646583×10^{16}

- Se observa que el error comienza a partir de $n = 1$.
- El error va creciendo cada vez más conforme $n > 1$.
- El valor de $P_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- Para $n = 0$, $\Delta = 0$
- A partir de $n = 6$, Δ = un valor negativo

b) $A_n = \frac{101}{10} A_{n-1} - A_{n-2}$ QUE OBEDECE A $A_n = \frac{1}{10^n}$

n	$\overline{P}_n = P_n$ (real)
0	1
1	0.1
2	0.01
3	0.001
4	0.0001
5	0.00001
6	0.000001
7	0.0000001
8	0.00000001
9	0.0000000001
10	0.00000000001
11	1×10^{-11}
12	1×10^{-12}
13	1×10^{-13}
14	1×10^{-14}
15	1×10^{-15}
16	1×10^{-6}

n	$\overline{P}_n = P_n(\text{real})$
17	1×10^{-17}
18	1×10^{-18}
19	1×10^{-19}
20	1×10^{-20}
21	1×10^{-21}
22	1×10^{-22}
23	1×10^{-23}
24	1×10^{-24}
25	1×10^{-25}

$\overline{P_n} = P_{n\,(\text{real})} \quad \therefore \quad \Delta = 0$

- Δ (Diferencia) = 0.
- P_n = Preal.
- Proceso Estable
- Cuando $n \to \infty$; $P_n \Rightarrow 0$

Este resultado obedece a que la calculadora o computadora usada emplea base 10.

El mismo resultado se obtiene al calcularse mediante una computadora con base 2 en la expresión

$$A_n = \frac{5}{2} A_{n-1} - A_{n-2}$$

donde no aparecerá error alguno. En cambio para la expresión

$$A_n = \frac{101}{10} A_{n-1} - A_{n-2}$$

el error será muy grande, similar al mostrado en el inciso a.

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS
Leticia Franco M, Jorge E. Cisneros, Horacio Sandoval R.

PREGUNTAS CONCEPTUALES

1) DEFINA EN QUÉ CONSISTE

a) ERROR ABSOLUTO.
b) ERROR RELATIVO.
c) ERROR INHERENTE.
d) ERROR POR TRUNCAMIENTO.
e) ERROR POR REDONDEO.
f) PROPAGACIÓN DEL ERROR.

a) **ERROR ABSOLUTO.-** Es la diferencia entre el valor exacto y una aproximación al valor exacto, si llamamos

x = Valor Exacto.
$\bar{x}$ = Aproximación al valor exacto.
e_a = ERROR ABSOLUTO.

$$e_a = |x - \bar{x}|$$

b) **ERROR RELATIVO.-** Es el cociente del error absoluto entre la aproximación; y se calcula con la siguiente formula:

$$e_r = \frac{e_a}{\bar{x}} = \frac{|x-\bar{x}|}{\bar{x}}$$

c) **ERROR INHERENTE.-** Son los que existen en la información o datos, y son ajenos al procesamiento numérico. También llamados ~~los~~ PROPIOS DE LOS DATOS, se tienen en la incertidumbre de las medidas realizadas y se presentan por ejemplo en mediciones de carátulas graduadas o bien en las impresiciones de los datos estadísticos, de lecturas transmitidas en experimentos, en laboratorios o en el campo.

d) **ERROR POR TRUNCAMIENTO.-** Son aquellos que se presentan en los cálculos cuando útilizamos series en las aproximaciones, dado que estas series tienen un número infinito de términos, siempre truncamos para representarlas con un número finito de términos.

e) ERROR DE REDONDEO.– Son aquellos que se deben a la imposibilidad de manejar todos los dígitos en operaciones aritméticas principalmente en la división o en la multiplicación, se ha tomado como criterio generalizado que cuando la cifra siguiente al número de cifras que se desea representar sea 5 o mayor que 5, se suma una unidad; en caso de que sea menor que 5 se representa tal y como esa cantidad.

f) PROPAGACION DEL ERROR.– Cuando se efectúan operaciones de números que poseen error; el resultado se ve afectado por esos errores, además de los errores por redondeo.

2) DEFINA EN QUÉ CONSISTE

a) LA ESTABILIDAD DE UN PROCESO NUMÉRICO.
b) LA CONVERGENCIA DE UN PROCESO NUMÉRICO.

a) LA ESTABILIDAD DE UN PROCESO NUMÉRICO.– Se tiene cuando al dar pequeñas variaciones a la entrada se provocan pequeñas variaciones en la salida y por tanto pequeños incrementos (±) en el error.

b) LA CONVERGENCIA DE UN PROCESO NUMÉRICO.– Es cuando para un número suficientemente grande de iteraciones el error ó decrece ó se estabiliza.

3) EXPLIQUE BREVEMENTE LOS CONCEPTOS DE:

a) CONVERGENCIA. b) ESTABILIDAD.

a) CONVERGENCIA.– Cuando en un proceso numérico el resultado se acerca cada vez más a un valor, se dice que el proceso converge, para lo cual las diferencias de la iteración n con $n-1$ y $n-1$ con $n-2$ deben ser menores en valores absolutos.

$$| x_n - x_{n-1} | < | x_{n-1} - x_{n-2} |.$$

PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS
Leticia Francoll, Jorge E. Cisneros,
Horacio Sandoval R

24

y ilim.

b) ESTABILIDAD.— Cuando a un incremento pequeño de entrada, corresponden pequeños incrementos en la salida, se dice que el proceso es estable.