PROBLEMARIO DE METODOS NUMERICOS

El presente problemario o banco de problemas es una recopilación de ejercicios usados en clase, exámenes y tareas de la asignatura de Métodos Numéricos y tiene por objetivo primordial apoyar a los estudiantes que cursan la materia y a los profesores que la imparten, así como a cualquier persona interesada en el tema.

Se decidió que esta primera presentación fuera manuscrita por varias razones entre otras el volumen del trabajo (en el primer capítulo se muestran 159 ejercicios), la posibilidad real de que existan algunos errores y la dificultad tipográfica de los desarrollos y símbolos matemáticos.

El usuario encontrará que muchos ejercicios son parecidos entre sí, se aceptó esta repetitividad para que los maestros puedan preparar dos o más exámenes con el mismo grado de dificultad, o para que los alumnos analicen un problema y sin ver la solución intenten resolver los siguientes, no obstante, en etapas futuras se hará una depuración de ejercicios.

El problemario se presenta por capítulos separados, que es como se ha ido elaborando, además de que reunirlo en un solo volumen de varios cientos de hojas y problemas sería muy engorroso de manejar.

En cada capítulo se trata de cubrir todos los temas y métodos del programa vigente mediante una presentación accesible, por ejemplo en este primer capítulo de Análisis Combinatorio y Teoría del Binomio se inicia con diagramas de árbol y se termina con preguntas conceptuales de todos los temas (ordenaciones, combinaciones, etc). Así mismo se trató de ordenar los problemas de cada inciso en grado de dificultad creciente, pudiéndose seleccionar los primeros para examen y los últimos para tarea.

En todos los ejercicios se prefirió incluir una solución detallada a correr el riesgo de oscurecer la solución por saltar pasos en el desarrollo.

Este material fue recopilado de diversas fuentes, tales como tareas, exámenes y ejercicios desarrollados en clase, así como problemas inventados o sacados de diferentes apuntes o libros. Se trató de que la labor realizada en semestres previos, tanto por alumnos como maestros, no se desperdiciara, y que por el contrario se use como base para elevar el nivel de la asignatura al permitir a los profesores seleccionar y sobre todo inventar nuevos problemas con mayor grado de dificultad o incluir aplicaciones más concretas en algún campo de la carrera.

Obviamente la principal característica del Problemario de Métodos Numéricos es ser perfectible, lo cual puede hacerse en muchas direcciones, tales como: a) continuar la recopilación de ejercicios; b) modificar y corregir los problemas; c) mejorar la presentación y disponibilidad; d) promover su divulgación y uso; e) agregar nuevos enfoques, métodos o comentarios; f) incorporar una clasificación didáctica que incluya tiempos esperados de solución, grado de dificultad, herramientas o antecedentes necesarios, uso recomendado de los problemas para exposición en clase, exámenes o tareas, etc.; g) adición de problemas en los que sea necesario obtener el modelo matemático, partiendo de una situación más cercana a la realidad y no solamente de la ecuación abstracta, sin contenido; etc.

Los siguientes capítulos del Problemario, se pondrán a la disposición de los usuarios, en cuanto estén disponibles.
Se agradece sinceramente a todos los alumnos y profesores que han colaborado en cualquier forma para la realización del presente trabajo, sin cuya ayuda no se hubiera podido concretar.

A los usuarios del problemario se les pide la cooperación en dos formas. Una, no destruyendo el presente material y dos, haciendo llegar todas sus aportaciones y comentarios a la coordinación de Métodos Numéricos o personalmente a Horacio Sandoval en el cubículo D-7 de la División de Ciencias Básicas.

Atentamente

M. en I. Horacio Sandoval Rodríguez

CAPITULO I.

Horacio Sandoval.

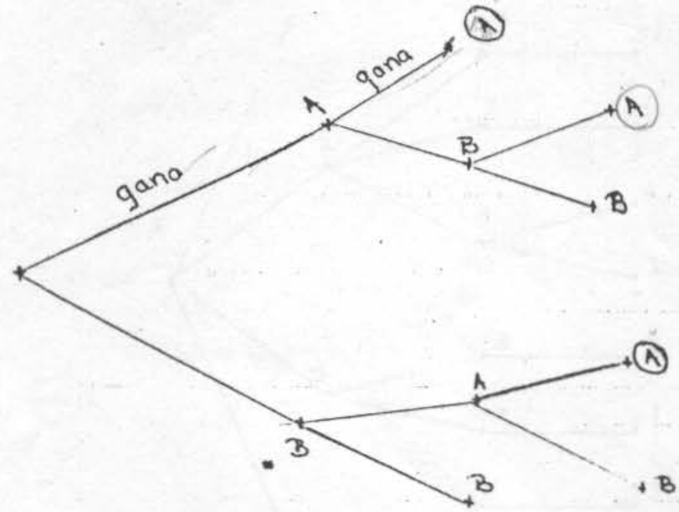
ANALISIS COMBINATORIO Y TEOREMA DEL BINOMIO.

Tema	Número de Problemas
Diagramas de árbol.	10
Ordenaciones y Permutaciones	20
Ordenaciones con Repetición	5
Permutaciones con grupos de elementos repetidos	10
Permutaciones Circulares	3
Ordenaciones (de diferentes tipos)	5
Combinaciones	25
Combinaciones con repetición	1
Ordenaciones y Combinaciones Mezcladas	10
Números Combinatorios	17
Binomio de Newton (Evaluar y simplificar...)	11
Binomio de Newton (localizar el coeficiente...)	27
Binomio de Newton (Interés compuesto, mensualidades,...)	9
Preguntas Conceptuales (Temas diversos)	6

$\Sigma = 159$

DIAGRAMAS DE ARBOL.

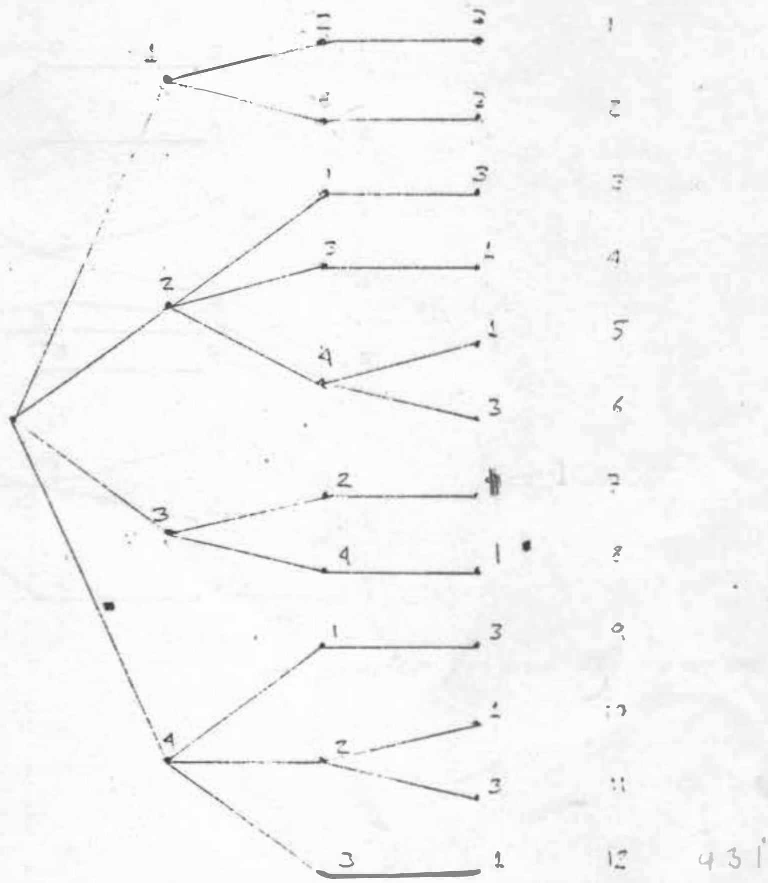
1.- Los jugadores A y B participan en un torneo de tenis que consta de tres partidos como máximo. El primero que gane dos juegos seguidos gana el torneo. ¿De cuántas formas distintas puede ganar A?



∴

A puede ganar de 3 formas distintas.

2.a) Mediante un diagrama de árbol determinar cuántos números impares de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, sin repetir ningún dígito.



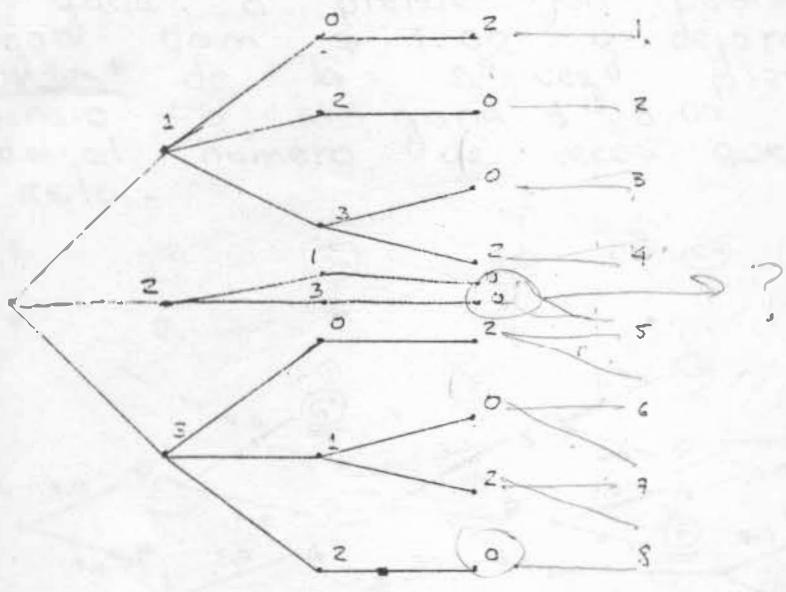
b) Calcule cuántos números pares de 3 cifras se pueden generar con el mismo conjunto de dígitos. (mediante análisis)

c d u

- para las unidades sólo hay 2 alternativas (2 y 4)
- para las centenas con el 2 en unidades hay 3 alternativas y 2 alternativas para las decenas.
- para cuando el 4 está en unidades, también resultan 3 alternativas en las centenas y dos en las decenas.
- En total se tiene $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ números

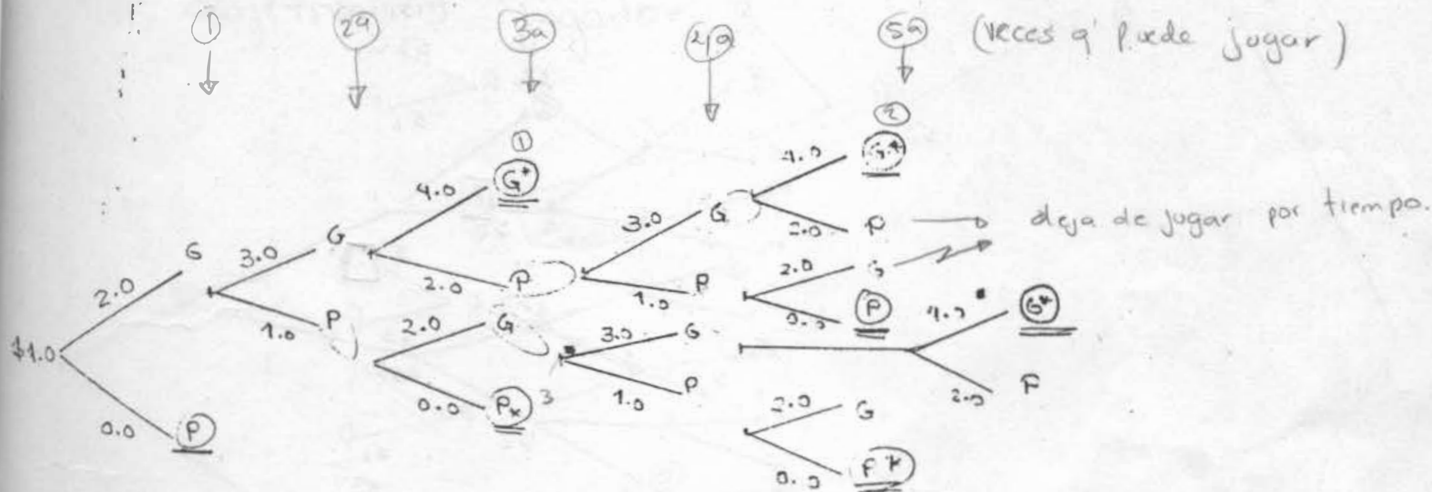
Otro camino puede ser por simetría con el inciso a), que resultan 12 números

3.- Mediante un diagrama de árbol determine cuantos números pares de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2 y 3 sin repetir ningún dígito. El número 012 se considera como un número de dos cifras, o sea 012 = 12.



Se pueden formar 10 números pares

4).- Una persona tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces a lo sumo. En cada juego gana ó pierde un peso. Empieza a jugar con $ 1.00 y dejará de jugar si antes* de que la 5° vez pierde todo su dinero o, si gana $ 3.00 (tenga $4.00).
Hallar el número de veces que puede ocurrir esto.



∴

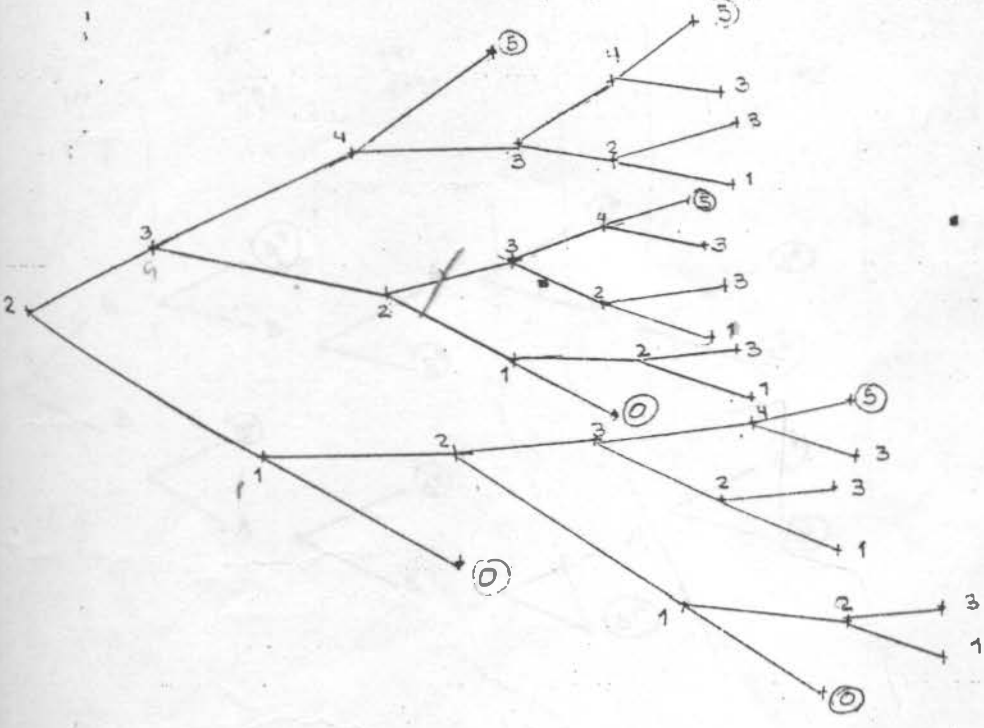
1)a ganar tiene 3 posibles formas.

2)a perder 4 formas.

∴ Puede ocurrir en 4+3=7 formas que gane 3.00 o que pierda 1.00.

* o en su quinta vez

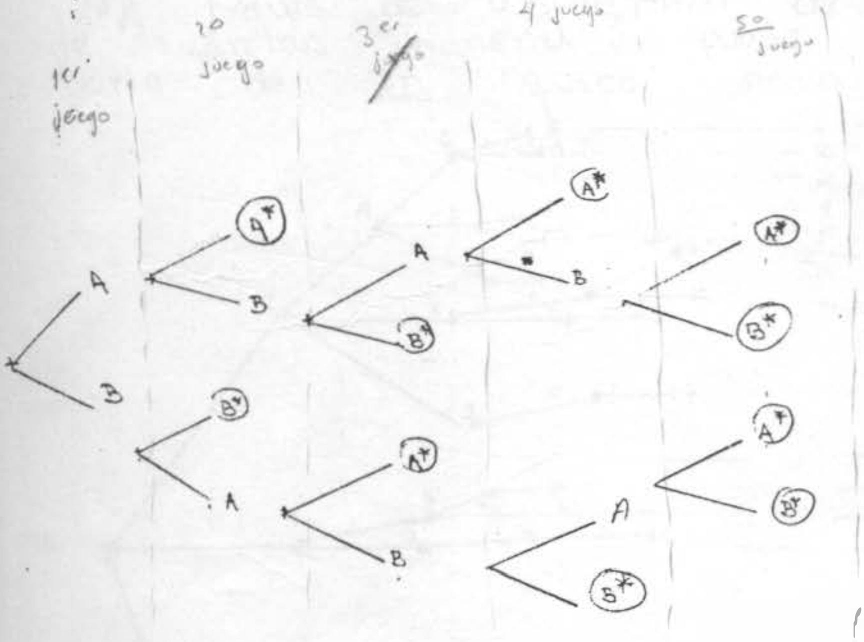
5.- Una persona puede jugar hasta 5 volados, apuesta un peso en cada volado y comienza con dos pesos. Deja de jugar cuando pierde todo o gana tres pesos llegando a 5 pesos.
Por medio de un diagrama de árbol determine de cuantas maneras puede lograr su objetivo el jugador?



Hay 4 formas en que llegue a 5 pesos y 3 en que pierda todo,

∴ Existen 7 maneras de lograr el objetivo.

6.-
A y B intervienen en un partido de Tenis el primero que gane dos juegos seguidos ó que complete tres victorias gana el torneo. ¿De cuántas formas distintas puede ganar A? El torneo consta de 5 juegos.



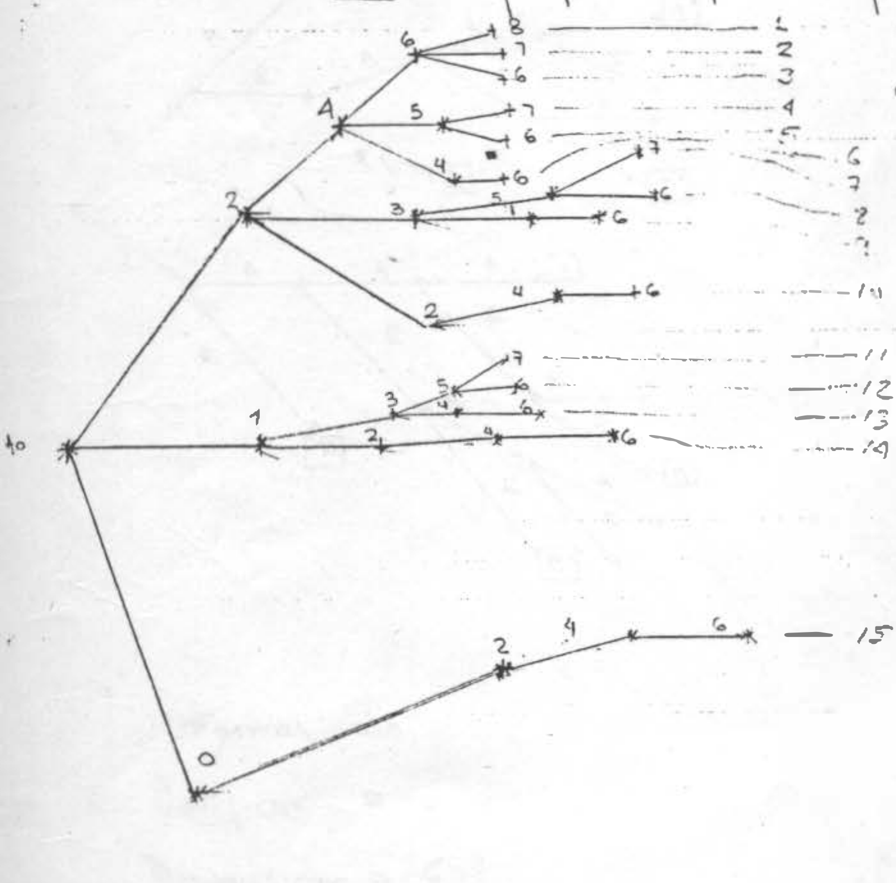
Existen 10 formas diferentes de terminar el torneo.

Y 5 de ganar A, y 5 de ganar B

7. En un torneo de futbol; hay 5 equipos. Todos juegan entre sí un solo partido. Los puntos se asignan de la siguiente manera:

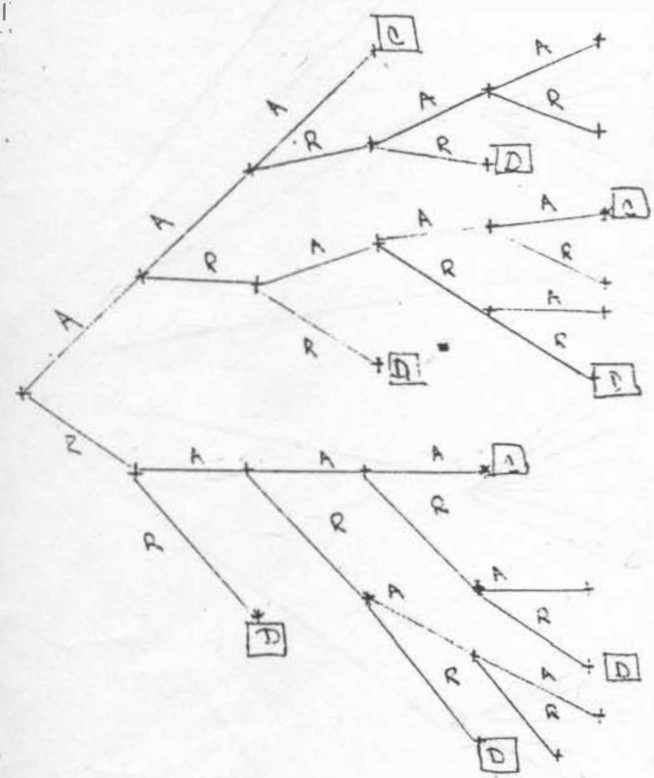
2 ptos. Juego ganado
1 pto. Juego empatado
0 ptos. Juego perdido.

Para calificar a la siguiente ronda los equipos deben lograr 6 puntos, o más
A través de diagrama de árbol calcule de cuántas maneras puede darse la trayectoria de un equipo para que califique?



Hay 15 trayectorias en total

8.- Mediante un diagrama de árbol indique de cuántas maneras puede quedar a) calificado ó b) descalificado un atleta que debe presentar 5 pruebas! Si con dos pruebas consecutivas que repruebe queda descalificado y con 3 pruebas consecutivas que apruebe califica.

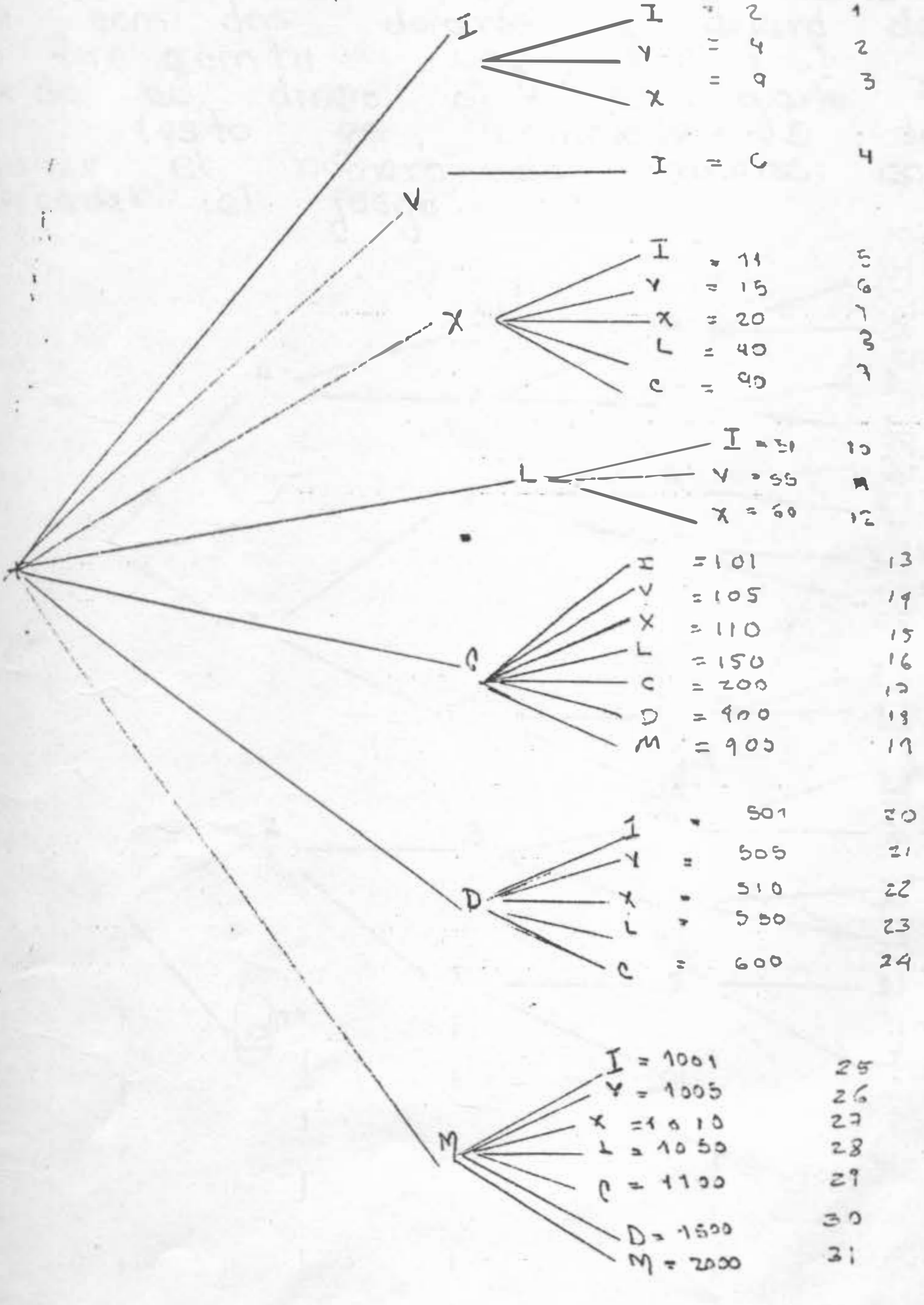


∴ Formas de

Calificar = 3

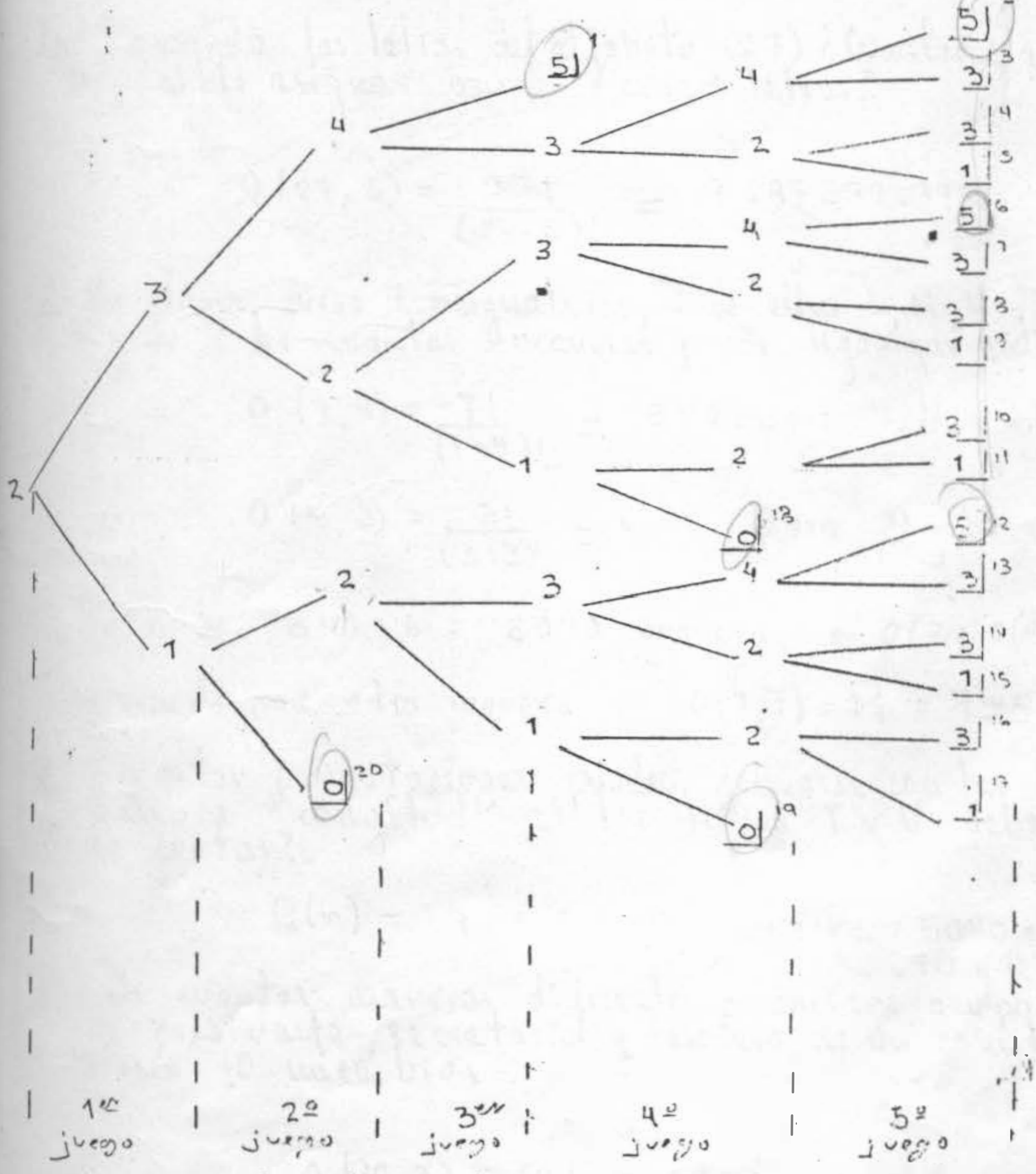
Descalificar = 6

9.- Calcular mediante un diagrama de árbol los números de dos cifras validos en numeración romana (del I al M)



31 números validos en total.

10.- Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta 5 veces. Gana o pierde un dolar en cada juego. El hombre empieza con dos dolares y dejará de jugar a la quinta vez, o si pierde todo su dinero ó si gana tres dolares (esto es; complete 5 dolares). Hallar el número de maneras como puede suceder el juego.



20 Maneras

Ordenaciones y Permutaciones simples.

1º En una gran tienda de descuento, se asigna una clave alfabética de cinco letras a todos los artículos de inventario. Se acostumbra no utilizar dos veces la misma letra en una clave. ¿Cuántas claves diferentes es posible asignar?

$O(26,5) = 7{,}893{,}600$ (si existen 26 letras en el alfabeto.

$O(27,5) = 9{,}687{,}600$ (si existen 27 letras en el alfabeto)

~~1aº Tomando las letras del alfabeto. (27) ¿Cuántas claves diferentes es posible asignar con cinco letras?~~

$$\cancel{O(27,5) = \frac{27!}{(27-5)!} = 9.687.599.999}$$

2º Un alumno cursa 7 asignaturas, 4 de ellas L, M, V y las otras 3 M y J. ¿De cuántas maneras puede organizar su horario?

$$O(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = 840 \quad \text{para L, M, y V.}$$

$$O(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = 6 \quad \text{para M y J.}$$

Total es $840 \cdot 6 = 5040$ manera ó $O(7,3)\,O(4,4) = \frac{7!}{4!}\,4! = 5040$

Resolviendo por otra manera $O(7,7) = P_7 = 7! = 5040$ maneras.

3º ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra "longitud" si las letras T y U deben permutarse juntas?

$$P_n(n) = 7! = 5{,}040 \qquad P_7 \cdot P_2 = 5040 \cdot 2 = 10{,}080 \text{ permutaciones.}$$

(TU y UT)

4º ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser ocupados los cargos de presidente, secretario y tesorero de un comité que tiene 10 miembros?

$$O(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \text{ formas.}$$

5: ¿De cuantas maneras se pueden acomodar en un librero 5 libros de Métodos Numéricos, 3 de Computación, 7 de algebra y 2 de Inglés, y de tal forma que todos los del mismo tomo queden juntos?

$P_4 \cdot P_5 \cdot P_3 \cdot P_7 \cdot P_2 = 24 \times 120 \times 6 \times 5040 \times 2 = 174,182,400.$

5: ¿De cuantas maneras diferentes se pueden acomodar 3 libros de física, 5 de matemáticas y 4 de química.

12 4
4!

a) Si solamente los de química pueden quedar juntos?

$P_4 P_5 P_3 P_1 = 4!\,5!\,3!\,1! = 24 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 1 = 720.$ maneras ← Error

b) Si todos pueden quedar revueltos?

$P_{12} = 12! = 477,001,600$ maneras

c) Si los de la mismo especialidad deben quedar juntos?

$P = 3!\,3!\,5!\,4! = 103,680$ maneras

6: Un alumno cursa 6 materias diariamente, entre ellas están Francés e Inglés. ¿De cuantas maneras puede formar su horario si

a) No debe recibir los dos idiomas, uno acontinuación del otro?

$P_6 - P_5 P_2 = 6! - 5!\,2! = 480$ formas

b) Si los idiomas deben estar en la primera y última hora.

$P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$ formas.

7: ¿Cuantos números pares de 6 cifras se pueden formar con las ~~letras~~ cifras 1, 2, 3, ... y 6 si no se aceptan que se repitan?

$O(3,1)$ (Para la 6ª cifra) $\cdot\, O(5,5) =$

$$\frac{3!}{(3-1)!} \cdot \frac{5!}{0!} = 3 \cdot 5! = 360 \text{ números}$$

8: Si importa el orden y no se permite la repetición ¿Cuántos arreglos diferentes de siete letras pueden formarse con las letras de la palabra "comreina" de tal manera que:

comreiUA
comreina
comroina
comreina

a) la primera letra sea siempre vocal

$$O(3,1)\cdot P_6 = \frac{3!}{2!}\cdot 6! = 2,160 \text{ arreglos}$$

b) la tercera y sexta letra sean siempre consonantes.

$$O(4,2)\cdot P_5 = \frac{4!}{2!}\cdot 5! = 1440$$

c) No haya restricciones

$$P_7 = 7! = 5040 \text{ palabras.}$$

9º a) Cuantos números de 6 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si estas no se pueden repetir?

$$O(6,6) = P_6 = 6! = 720 \text{ números}$$

9º b) ¿Cuantos números de seis cifras y que sean multiplos de 5 se pueden formar con las 6 cifras indicadas; si estas no se pueden repetir?

$$P_5 \cdot P_1 = 5!\cdot 1! = 120 \text{ números}$$

10º ¿Cuántos números diferentes de seis cifras pueden generarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 y 8 ; si el 4 y 8 siempre deben estar juntos y no se acepta repetición?

$$P_5 \cdot P_2 = 5!\cdot 2! = 240$$

11º: ¿Cuantos números diferentes de 6 cifras mayores de 600,000 pueden obtenerse con los digitos 2, 3, 4, 5, 6 y 7 si

a) No se acepta repetición

$$P_2 \cdot P_5 = 2\cdot 120 = 240 \text{ Números}$$

b) Si se acepta repetición

$$P_2 \cdot PR(6,5) = 15,552 \text{ Números}$$

12ª ¿Cuántos números pares se pueden formar con los dígitos 1, 3, 4, 5, 6, y 7 tomados todos ellos sin repetición y que sean mayores de 500,000.?

Si en las unidades está el 4; $O(1,1)\,O(3,1)\,P_4 = 72$

Si en las unidades está el 6; $O(1,1)\,O(2,1)\,P_4 = \underline{48}$

$d_1 \; d_2 \; d_3 \; d_4 \; d_5 \; d_6$ $\quad P_5 \cdot P_1$ $\quad$ 120 # en total

1 2 3 4 5 4

13ª Sean los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, y 9
Considerando que los dígitos no se pueden repetir:

a) Cuantos números de tres dígitos se pueden formar?

$6 \times 5 \times 4 = 120$ # diferentes $= O(6,3)$

b) Cuantos números de tres dígitos son menores de 513?

$3 \times 5 \times 4 = \underline{60}$ # diferentes < 513 ó $O(3,1)\,O(5,2) = \underline{\underline{60}}$

c) Cuantos de los números del inciso b son pares?

$(1 \times 4 \times 2) + (1 \times 4 \times 3) + (1 \times 4 \times 2) = \underline{28}$ # pares < 513

2 4 3 4 5
6

14ª ¿Cuántos números de 3 cifras (entre 100 y 450) pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 si cada dígito puede usarse una vez?

$O(3,1)\,O(5,2) + O(1,1)\,O(4,1)\,O(4,1) = \frac{3!}{2!}\,\frac{5!}{3!} + \frac{1!}{0!}\,\frac{4!}{3!}\,\frac{4!}{3!} = 60 + 16 = 76$ números

$O_4, \; P_6$

14b- ¿Cuantos de ellos son mayores de 250?

$O(1,1)\,O(1,1)\,O(3,1) + O(3,1)\,O(5,2) = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 20 = 63$ números

$O_{6}{}_{3} = P_3$

15- ¿Cuántos números diferentes de 6 cifras mayores de 700,000. pueden obtenerse con los dígitos 2, 4, 5, 6, 7 y 8, si no se acepta repetición?

$P_2 \cdot P_5 = 2!\,5! = 2 \cdot 120 = 240$

16º ¿Cuántos Números diferentes de ocho cifras pueden generarse con los dígitos 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si los dígitos impares siempre deben estar juntos y no se permite la repetición?

$$P_6 \cdot P_3 = 6! \cdot 3! = 4320 \text{ números}$$

17º ¿Cuántos números pares de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 7, 9, 0?

Fijando el 5º lugar para el cero P_1 restan 4 lugares (r=4) para cinco posibles selecciones

$$P_1 \cdot O(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} \cdot 1! = 120 \text{ sin reemplazo.}$$

18º ¿Cuántos números menores de 3000 se pueden generar tomando n cifras de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 si no se acepta la repetición para

a) n=3 Todas las de 3 cifras posibles $O(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$

b) n=4 $P_2 \cdot O(6,3) = 2! \cdot \frac{6!}{3!} = 60.$

19º ¿Cuántos números pares de 5 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si no se acepta repetición?

$$O(4,1) \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96 \quad \text{ó}$$

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Ordenaciones y Permutaciones

20. Una compañía de aviación cuenta con el siguiente equipo para cubrir sus rutas: 3 aviones tipo A y 4 aviones tipo B.
Se desea dar servicio diario a las ciudades de: Acapulco, Mazatlán, Mérida, Mexicali, Veracruz y Villahermosa.
Tomando en cuenta que las aviones tipo A, solo pueden ser usados para dar servicio a las cuatro primeras ciudades de la lista y que los de tipo B pueden cubrir cualquier ruta $= 6$. ¿De cuántas formas diferentes se pueden programar los vuelos en un día?

3 aviones tipo A — solo a 4 ciudades   a, b, c
4 aviones tipo B — a todas las ciudades (6)   A, B, C, D

Como son 7 aviones y 6 ciudades, sobrará un avión en todos los programas diarios, el cual puede ser del tipo A o B.

Si sobra un avión del tipo A se tiene

$$\overset{A}{O}(4,2)\cdot \overset{B}{O}(4,4) = \frac{4!}{2!}\cdot\frac{4!}{0!} = 12\cdot 24 = 288 \text{ formas}$$

Si sobra un avión del tipo B se tiene

$$\overset{A}{O}(4,3)\cdot \overset{B}{O}(3,3) = \frac{4!}{1!}\cdot\frac{3!}{0!} = 24\cdot 6 = 144 \text{ formas}$$

y en total por la regla de la suma se tiene

$$288 + 144 = 432 \text{ formas de vuelo diarias.}$$

Ordenaciones con Repetición

1: ¿Cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, y 6, si estos pueden repetirse

$$OR(n,r) = n^r = 6^4 = 1,296 \quad si \quad n=6 \quad r=4$$

2: ¿Cuantos números mayores de 1000 pueden formarse con los digitos 2, 3, 4, 5, y 3: se acepta que estos se repitan para

a) $n=3$
No hay número de tres cifras mayor a 1000

b) $n=4$
Cualquier ordenación sera mayor a 1000 $\therefore OR(4,4) = 256$

3: ¿Cuantos números de seis cifras pueden formarse si todas las cifras de estos numeros son los impares 1, 3, 5, 7, 9?

$$OR(5,6) = 5^6 = 15,625 \text{ números}$$

4: ¿Cuantos mensajes se pueden enviar con 4 tipos diferentes de banderas en una asta, si se dispone de cuatro de cada una de ellas

a) Si los mensajes deben ser con 4 banderas? $OR(4,4) = 4^4 = 256$ mensajes

b) Si se pueden enviar mensajes con 2 ó 3 banderas, tambien?

$$OR(4,4) + OR(4,3) + OR(4,2) = 4^4 + 4^3 + 4^2 = 336 \text{ mensajes.}$$

5: ¿Cuantos números menores de 3000 se pueden generar tomando n cifras con los digitos 1, 2, 3, 4, 5, y 6 si estas pueden repetirse cuando:

a) $n=3$ $\quad OR(6,3) = 216$ números

b) $n=4$ $\quad OR(6,2) \cdot OR(6,3) = 432$ números

c) $n=3$ y pares $\quad OR(6,2)\,O(3,1) = 108$ números

d) $n=4$ y pares $\quad O(2,1)\,OR(6,2)\,O(3,1) = 216$ números

Permutaciones con grupos de elementos repetidos.

1º ¿De cuántas formas diferentes pueden arreglarse tres focos rojos 4 amarillos, y 2 azules en una serie navideña que contiene 9 portafocos?

$$P(9,3,4,2) = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

2º ¿De cuántas formas se pueden alojar 7 científicos en ~~dos~~ un cuarto triple y en dos cuartos dobles en un hotel?

$$P(7,3,2,2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

3º ¿De cuántas formas se pueden alojar 10 científicos en dos cuartos triples y en dos cuartos dobles en un hotel?

$$P(10,3,3,2,2) = \frac{10!}{3!\,3!\,2!\,2!} = 25200$$

4º Calcule el número de ordenaciones que se pueden formar con 7 banderas, si tres son rojas, dos son azules y dos son verdes.

$$P(7,3,2,2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3!}} = 210 \text{ ordenaciones}$$

5a ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra "UNIVERSIDAD"?

$$P(11,2,2) = \frac{11!}{2!\,2!} = 9{,}979{,}200 \text{ formas}$$

5b ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las vocales de la misma palabra? U I I I A

$$P(5,2) = \frac{5!}{2!} = 60$$

5c ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las consonantes de la misma palabra? N V R S D D

$$P(6,2) = \frac{6!}{2!} = 360$$

6a). ¿Cuantas ordenaciones se pueden formar con la palabra METODOS?
Permutaciones con grupos de elementos iguales
$n = 7 \quad q_1 = 2$

$$P(7,2) = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2{,}520$$

6b. ¿Cuantas de estas inician con vocal.

Para, el 1er elemento, Cuando es E $\quad P(6,2) = \frac{6!}{2!} = 360$
Cuando es O $\quad P6 = 6! = 720$

1080 palabras.

6c. ¿Cuantas de estas inician con consonante?

$$C(4,1)\,P(6,2) = 4 \cdot 360 = 1440 \text{ palabras.}$$

7. ¿De cuántas maneras puede contestar un estudiante un examen de ocho preguntas a las que hay que responder "falso" o "verdadero" si

a) Contesta la mitad de las preguntas como verdaderas y la otra mitad como falsas.

$$P(8,4,4) = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

b) Contesta de manera que nunca da dos respuestas consecutivas iguales?

$C(2,1)\,C(6,6)$ ó $C(2,1)\,C(3,3)\,C(3,3)$
$2 \cdot 1 = 2 \qquad 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ formas

8. ¿Cuantas permutaciones diferentes pueden formarse con las letras de las palabras CASCADA y ABRACADABRA?

$$P(7,2,3) = \frac{7!}{2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 420 \text{ permutaciones}$$

$$P(11,5,2,2) = \frac{11!}{5!\,2!\,2!} = 83{,}160 \text{ permutaciones}$$

9: a) Hallar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra GEOLOGIA tomadas toda a la vez.

$$P(8,2,2) = \frac{8!}{2!\,2!} = 10{,}080 \text{ palabras.}$$

b) ¿Cuántas de estas palabras tendrán G al principio y A al final?

$$P(6,2) = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ palabras.}$$

10: ¿Cuántos números pares pueden formarse con los 9 dígitos 1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 9 si los múltiplos de tres deben estar juntos?

a) Cuando la última cifra es 2 u 8

$$P(6,2,2) \cdot P_3 \cdot P_2 = 2{,}160 \text{ números}$$

b) Cuando la última cifra es 6

$$P(6,2,2) \cdot P_2 = 360 \text{ números}$$

Por la regla de la suma $2160 + 360 = 2{,}520$ números

1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 9

3 6 9 2o8

Permutaciones Circulares

1: a) De cuantas maneras pueden sentarse en una fila 3 Americanos, 4 Franceses, 4 Daneses y 2 italianos de modo que los de una misma nacionalidad se sienten juntos?

$n = 4 \quad n_1 = 3, \; n_2 = 4 = n_3, \; n_4 = 2$

$P_4 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_4 \cdot P_2 = 4!\,3!\,4!\,4!\,2! = 165,888$ formas.

b) Si se sientan en una mesa circular.

$P_c(4) \cdot P_{Am} \cdot P_{Fr} \cdot P_{Dan} \cdot P_{It} = 6 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 2 = 41,472$ formas

2: En una fiesta hay 6 personas (3 hombres y 3 mujeres) y una mesa redonda con 6

a) De cuantas maneras se pueden acomodar sin restricciones

$Pc(6) = P(6-1) = P_5 = 5! = 120$ formas.

b) Si los 3 hombres y las 3 mujeres deben estar juntos.

$P_c(2) P_3 P_3 = P_1 P_3 P_3 = 1!\,3!\,3! = 6 \cdot 6 = 36.$

c) Si en ningun caso deben estar juntas 2 mujeres?

$P_c(2) P_3 = P_1 P_3 = 1 \cdot 6 = 6$

13. Sea el "Team-back" de un equipo de Futbol americano.

a) ¿De cuantas maneras pueden colocarse los once jugadores?

$$PC(11) = P(10) = 10! = 3,628,800 \text{ formas}$$

b) ¿Si es necesario que el centro y el core back esten juntos?

$$P_2\,PC(10) = P_2\,P_9 = 2 \cdot 362\,880 = 725\,760 \text{ formas.}$$

c) ¿Si los dos receptores profundos no deben estar juntos?

$$PC(11) - P_2\,PC(10) = P_{10} - P_2\,P_9 = 10! - 2\cdot 9! = 9!(10-2) = 2,903,040 \text{ formas}$$

d) ¿Si el centro y el core-back deben estar juntos y los dos receptores profundos deben estar separados?

$$PC(10)\,P_2 - PC(9)\,P_2 = P_9\,P_2 - P_8\,P_2 = 2!(9!-8!) = 2!\,8!\,(9-1) = 645,120 \text{ formas}$$

e) ¿Si existen 6 jugadores de línea y deben estar juntos, 2 receptores y deben estar juntos, y por último el centro y el Core-back deben estar juntos?

$$PC(4)\,P_6\,P_2\,P_2 = P_3\,P_6\,P_2\,P_2 = 3!\,6!\,2!\,2! = 6\cdot 720\cdot 2\cdot 2 = 17,280 \text{ formas}$$

f) ¿Si se tienen las mismas condiciones que el inciso e, pero dentro de los 6 jugadores de línea, los tres del lado derecho y los tres del lado izquierdo deben estar juntos entre sí?

$$PC(4)\,P_2\,P_2\,P_2\,P_3\,P_3 = P_3^3\,P_2^3 = (3!)^3(2!)^3 = 6^3\cdot 2^3 = 1,728 \text{ formas}$$

g) ¿Si el core-back y los tres hombres que lo protegen (centro y 2 lineros) deben estar juntos, los 4 linieros restantes deben estar juntos, y los 3 jugadores restantes también deben estar juntos?

$$PC(3)\,P_4\,P_4\,P_3 = P_2\,P_4\,P_4\,P_3 = 2!\,4!\,4!\,3! = 2\cdot 24^2\cdot 6 = 6,912 \text{ formas}$$

Ordenaciones (de diferentes tipos)

1. a.- ¿Cuántas ordenaciones sin repeticion pueden obtenerse con las consonantes de la palabra Computadora, tomados en grupos de cuatro?

$$O(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = \underline{\underline{360}}$$

1. b).- ¿Cuántas permutaciones se pueden obtener con las consonantes de la misma palabra?

$$P_n = O(n,n) = n! = 6! = \underline{\underline{720}}.$$

1. c).- ¿Cuántas ordenaciones con repetición de las mismas consonantes?

$$OR(n,r) = n^r = 6^4 = \underline{\underline{1296}}.$$

1. d.-) ¿Cuántas permutaciones con repeticióm pueden formarse con las mismas consonantes?

$$PR_n = n^n = 6^6 = \underline{\underline{46,656}}.$$

2.a. ¿Cuántos números enteros diferentes de 6 cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9, sin repetirlos?

$O(10,6) = \frac{10!}{4!} = 151,200$ números.

2.b. ¿Sin repetir ningún número y con cualquier dígito impar en el primer lugar?

$O(5,1)\,O(9,5) = \frac{5!}{4!} \cdot \frac{9!}{4!} = 75,600$ números

2.c. ¿Sin repetir ningún ~~número~~ dígito y que los ~~cifras~~ números sean impares?

$O(9,5)\,O(5,1) = 75,600$ números.

2.d. ¿El primer dígito no puede ser cero o par, y los demás dígitos pueden repetirse.

$O(5,1) \cdot OR(10,5) = \frac{5!}{4!}\, 10^5 = 500,000$ números

3.a. ¿Cuántas ordenaciones sin repetición pueden obtenerse con las consonantes de la palabra "combinatorio" tomadas en grupos de cuatro?

C, M, B, N, T, R $\therefore n = 6,\ r = 4$

$O(n,r) = O(6,4) = \frac{6!}{2!} = 360$ ordenaciones

3.b. ¿Cuántas permutaciones sin repetición se obtienen con las vocales de la misma palabra?

O, I, A, O, I, O $\quad n = 6,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2$

$P(n, r_1, r_2) = \frac{n!}{r_1!\, r_2!} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$ permutaciones.

3.c ¿Cuántas ordenaciones con repetición de las consonantes de la misma palabra tomadas en grupos de cuatro?

$OR(n,r) = OR(6,4) = n^r = 6^4 = 1296$ ordenaciones.

3.d ¿Cuántas permutaciones de todas las letras de la misma palabra, sin repetir las letras?

$n = 12 \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 2$

$P(12,3,2) = \frac{12!}{3!\,2!} = 39,916,800$ permutaciones.

4.- Cierta Ciudad de la República en el que hay 800,000 vehiculos registrados está considerando modificar las placas de permiso para circular a fin de que contengan 6 simbolos, siendo las 4 primeros letras y los últimos dos números. ¿ Es posible realizar esto?
Si: a) No se permite repetir ningún símbolo.
b).- Solo se puede repetir las letras y se consideran sólo 5 dígitos.
c).- Solo se pueden repetir los números y se consideran 10 letras.
d).- Se pueden repetir tanto números como letras y se 10 letras y 5 dígitos.

a).-
$$O(27,4)\cdot O(10,2) = \left(\frac{27!}{23!}\right)\left(\frac{10!}{8!}\right) =$$
$$= \left(\frac{1.0888869 \times 10^{28}}{2.5852016 \times 10^{22}}\right)\left(\frac{3628800}{40320}\right) = (421200)(90)$$
$$= \underline{37,908,000}$$ ∴ Si es posible ya que 37,908,000 > 800,000

b).- $OR(27,4)\cdot O(5,2) = 27^4 \cdot \left(\frac{5!}{3!}\right) = (531441)(20)$

$= 10,628,820$ ∴ Si es posible.

c).- $OR(10,2)\cdot O(10,4) = 10^2 \cdot \left(\frac{10!}{6!}\right) = 100(5040)$

$= 504,000$ ∴ No es posible, ya que 504,000 < 800,000

d).- $OR(10,4)\cdot OR(5,2) = 10^4 \cdot 5^2 = 10.000(25) =$

$\underline{250,000}$

∴ No es posible

5.- a) ¿Cuántas ordenaciones sin repetición pueden obtenerse con las vocales y consonantes de la palabra "Combinatorio" tomados en grupos de cuatro?

$$O(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = \underline{\underline{360\ P|\text{vocal}}}$$

b).- ¿Cuántas permutaciones sin repeticiom se obtienen con las vocales y consonantes de la misma palabra?

$$O(n,n) = P_n = n! = 6! = \underline{\underline{720}}\ (\text{vocales})$$

$$P(n, r_1, r_2) = P(6, 3, 2) = \frac{6!}{3!\cdot 2!} = \underline{\underline{60\ (\text{consonantes})}}$$

c).- ¿Cuántas ordenaciones con repetición de las vocales y consonantes de la misma palabra todas en grupos de cuatro?

$$OR\ (n,r) = n^r = 3^4 = \underline{\underline{81\ \text{vocales}}}.$$

$$OR\ (n,r) = n^r = 6^4 = \underline{\underline{1296\ \text{consonantes}}}$$

..//

Combinaciones

1º Ocho hombres y mujeres igualmente calificadas solicitan dos trabajos. Debido a que las dos nuevas empleadas deberan trabajar juntas, sus personalidades deben ser compatibles. Para lograr esto, el gerente de personal ha aplicado una prueba y debe comparar las calificaciones para c/posibilidad. ¿Cuantas comparaciones deberá realizar?

8 hombres y mujeres 2 trabajos

$$\therefore C(8,2) = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{40320}{2 \times 720} = 28 \text{ comparaciones}$$

2º En un torneo de ajedrez hay 7 participantes y c/u de ellos deberá enfrentarse tres veces con todos los demás, ¿Cuántas partidas tendrá el torneo en total?

$$3 \cdot C(7,2) = \frac{3 \cdot 7!}{2!\,5!} = 63 \text{ partidas}$$

3º ¿De cuántas maneras puede llegar una mano de bridge de 13 cartas, si la baraja cuenta con 52 cartas?

$$C(52,13) = \frac{52 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot \cancel{39!}}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{39!}} = 6.350135 6 \times 10^{11} \text{ maneras}$$

4º En una escuela hay 20 alumnos y 4 maestras, ¿De cuántas formas se puede formar una representación si esta consta de 4 personas, siendo dos maestras y dos alumnos?

$$C(20,2) \cdot C(4,2) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2!\,18!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!\,\cancel{2!}} = 1,140 \text{ formas.}$$

5º Un grupo de alumnos debe ser examinado en física y Matemáticas por un jurado de 3 profesores en c/materia ¿De cuántas formas se pueden formar ~~los~~ jurados si hay 8 profesores de física y 6 de matemáticas? ambos

$$C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!\,5!} = 56 \text{ para física}$$

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}} = 20 \text{ para matemáticas.}$$

$$\therefore T = C(8,3) \cdot C(6,3) = 56 \cdot 20 = 1120 \text{ formas para las 2 materias}$$

6.- Se tiene 7 Rusos y 4 americanos y se desean integrar un comite de 6 personas. ¿De cuántas maneras puede formarse si

a) Debe haber 2 americanos?

$C(4,2)\cdot C(7,4) = \dfrac{4!}{2!\,2!}\,\dfrac{7!}{4!\,3!} = 210$ maneras

b) Debe haber 3 americanos como mínimo?

Puede ser 3 americanos y 3 rusos: $C(4,3)\,C(7,3) = 140$

4 americanos y 2 rusos: $C(4,4)\,C(7,2) = 21$

$\therefore$ $140 + 21 = 161$ formas

7.- Considerese que un alumno puede inscribirse desde 1 hasta 4 materias de un total de 15 asignaturas disponibles ¿Cuántos tipos de tiras de materias pueden generarse?

$n = 15 \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad Tot = C(15,1) + C(15,2) + C(15,3) + C(15,4) =$

$Tot = 15 + 105 + 455 + 1265 = 1740$ tiras de materias

8.- ¿De cuántas formas puede seleccionarse una representación laboral de 5 o más obreros, si $\exists$ 7 disponibles?

$n = 7, \; r = 5, 6, 7$

$C(7,5) + C(7,6) + C(7,7) = 21 + 7 + 1 = 29$ formas

9.- ¿De cuántas maneras puede un profesor escoger a uno o más estudiantes de 6 elegidos?

$C(6,1) + C(6,2) + C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6)$

$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

ó

$2^n - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

10: ¿De cuántas formas puede seleccionarse un grupo de 3 ó más obreros, si sólo ∃ 7 posibilidades?

$$c(7,3)+c(7,4)+c(7,5)+c(7,6)+c(7,7)$$

$$35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99$$

11: Un cliente en una galería sólo puede comprar hasta 4 (pinturas) cuadros de una exposición de 8. ¿De cuántas maneras puede hacer su compra?

$c(8,1)+c(8,2)+c(8,3)+c(8,4) = 162$ compras distintas.

12: En un campeonato de futbol ∃ 16 equipos. C/equipo juega contra todos los demás en una sola ocasión. Los ocho mejores califican y juegan nuevamente entre sí en una ocasión. Los cuatro mejores de esta ronda y vuelven a jugar entre sí una sola ocasión y por último los dos mejores juegan la final. ¿Cuántos partidos se efectuaron en todo el torneo?

$$c(16,2)+c(8,2)+c(4,2)+c(2,2) = \frac{16!}{2!(16-2)!} + \frac{8!}{2!(8-2)!} + \frac{4!}{2!(4-2)!} + 1$$

155 partidos.

13: En un pelotón hay 3 sargentos y 30 soldados. ¿De cuántas formas se puede escoger a un sargento y a 3 soldados para patrullar?

$$c(3,1)\cdot c(30,3) = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{30!}{3!(30-3)!} = 12{,}180$$

14: Un gobierno extranjero concede a la embajada Mexicana 5 becas. ¿De cuántas formas se pueden otorgar entre los 16 mejores alumnos (8 hombres y 8 mujeres) si son 3 becas para mujeres y 2 para hombres?

$$c(8,3)\,c(8,2) = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!} = 56\cdot 28 = 1{,}568$$

15.- El departamento de personal de una empresa exige que los candidatos a conductores presenten tres exámenes, uno de habilidad y destreza al conducir, otro de educación vial y el tercero de antecedentes escolares. Para c/ prueba existen 5, 7, y 4 examinadores respectivamente y se requiere de la presencia de 3, 2 y 1, peritos o profesores en c/ prueba. ¿Cuántos jurados se pueden presentar sin que se repita el grupo de examinadores?

$$C(5,3) \cdot C(7,2) \cdot C(4,1) = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{4!}{1!\,3!} = 840 \text{ jurados}$$

16.- El gerente de una compañía pequeña desea determinar el # de formas en las que puede asignar trabajadores al primer turno. Dispone de 15 trabajadores que pueden operar el equipo de producción, de 8 que pueden ser personal de mantenimiento y de 4 que pueden ser supervisores. Si el turno requiere de 6 operadores, 2 personas de mantenimiento y 1 supervisor. ¿De cuántas formas diferentes puede asignarse personal al primer turno?

$$C(15,6) \cdot C(8,2) \cdot C(4,1) = \frac{15!}{6!\,9!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{4!}{1!\,3!} = 560560 \text{ formas}$$

17.- En un centro de rehabilitación hay 4 grupos de niños con las sig. edades:

Grupo A	4	niños	menores de 3 años
Grupo B	7	"	de 4 a 7 años
Grupo C	5	"	de 8 a 11 años
Grupo D	2	"	de 12 a 15 años

a) ¿De cuántas formas se pueden agrupar 7 niños de tal manera que 1 sea del grupo A, 2 del C y 4 del B?

$$C(4,1) \cdot C(5,2) \cdot C(7,4) = 4 \cdot \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{7!}{4!\,3!} = 1400 \text{ maneras.}$$

b) ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 4 niños mayores de 8 años?

$n = 5+2 \quad \therefore \quad C(7,4) = 35$ maneras.

c) ¿De cuántas maneras puede integrarse una representación con un niño de c/grupo?

$$C(4,1) \cdot C(7,1) \cdot C(5,1) \cdot C(2,1) = 280 \text{ maneras.}$$

18.- En un pelotón hay 2 tenientes 3 sargentos y 20 soldados, ¿De cuántas maneras se puede formar una patrulla para cierta actividad?
La patrulla consta de un teniente, un sargento y dos o tres soldados.

$$\underset{\text{Ten.}}{C(2,1)} \cdot \underset{\text{Sarg.}}{C(3,1)} \cdot \underset{\text{Soldados}}{[C(20,2)+C(20,3)]} = \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{3!}{1!\,2!} \cdot \left[\frac{20!}{2!\,18!} + \frac{20!}{3!\,17!}\right]$$

$\therefore$ 7,980 patrullas

19.- Una planta armadora de la Chrysler fabrica 6 tipos de vehículos (Dart, Volare, Magnum, New Yorker, Phantom y Pick-up). Usa seis colores diferentes (rojo, negro, blanco, azul, gris y verde).

a) ¿Cuantas variantes en total fabrica si todas los vehículos pueden llevar hasta dos colores?

$$\underset{\text{coches}}{C(6,1)} \cdot [\underset{\text{1 color}}{C(6,1)} + \underset{\text{2 colores}}{C(6,2)}] = 126 \text{ variantes}$$

b) Si los automóviles familiares (Dart, Volare) pueden tener hasta 3 colores, los deportivos y de trabajo (Phantom, Magnum y Pick-up) pueden tener hasta 2 colores y el de lujo (New Yorker) tiene un solo color, indique cuantos vehículos diferentes pueden producirse.

Familiares $= C(2,1)[C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)] = 82$
Deportivos y de trabajo $C(3,1)[C(6,1)+C(6,2)] = 63$
Lujo $C(1,1)[C(6,1)] = 6$

total $= 82 + 63 + 6 = 151$ vehículos.

20.- Un equipo de trabajo consta de 15 personas, de las cuales 6 son ingenieros. Hallar el # de brigadas de 4 personas que se pueden formar de manera que en c/brigada exista por lo menos un ingeniero.

$$C(6,1)\cdot C(9,3) + C(6,2)\cdot C(9,2) + C(6,3)\cdot C(9,1) + C(6,4)$$

$$504 + 540 + 180 + 15 = 1,239 \text{ brigadas.}$$

ó

$$C(15,4) - C(9,4) = \frac{15!}{4!\,11!} - \frac{9!}{4!\,5!} = 1365 - 126 = 1239 \text{ brigadas.}$$

21.- En un grupo de 50 alumnos (30 hombres y 20 mujeres) se necesita formar una representación de los mismos para platicar con las autoridades.
Las autoridades aceptan platicar con la comisión si esta posee de 4 a 6 alumnos de los cuales 2 ó 3 deben ser mujeres. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formular?

$n=4 \quad C(20,2)C(30,2) + C(20,3)C(30,1)$
$n=5 \quad C(20,2)C(30,3) + C(20,3)C(30,2)$
$n=6 \quad C(20,2)C(30,4) + C(20,3)C(30,3) \quad \therefore$

$T = C(20,2)[C(30,2)+C(30,3)+C(30,4)] + C(20,3)[C(30,1)+C(30,2)+C(30,3)]$

$T = 190(435+4060+27405) + 1140(30+435+4060) = 11,219,500$

$T = 11\ 219\ 500$ Comisiones

22.- En un destacamento del ejército existen 5 sargentos, 8 cabos y 10 soldados rasos. ¿De cuántas formas puede integrarse una patrulla que debe tener 2 sargentos, 3 ó 4 cabos y el resto de soldados? de 8 a 10 elementos.

$n=8 \quad C(5,2)[C(8,3)\cdot C(10,3)+C(8,4)C(10,2)]$
$n=9 \quad C(5,2)[C(8,3)\cdot C(10,4)+C(8,4)C(10,3)]$
$n=10 \quad C(5,2)[C(8,3)\cdot C(10,5)+C(8,4)C(10,4)] \quad \therefore$

$C(5,2)\{C(8,3)[C(10,3)+C(10,4)+C(10,5)] + C(8,4)[C(10,2)+C(10,3)+C(10,4)]\}$

$10\{56(120+210+252)+70(45+120+210)\} = 10\{32,592+26,250\}$

580,842 posibilidades para formar la patrulla.

23.- hay 10 puntos A, B, C, ... en un plano sin haber 3 puntos colineales
a) ¿Cuántas lineas rectas forman los puntos.

$C(10,2) = \dfrac{10!}{(10-2)!\,2!} = 45$

b) ¿Cuántas lineas rectas no pasan por A o B?
Se descuentan A y B y nos quedan 8 ; $C(8,2) = \dfrac{8!}{2!\,6!} = 28$

c) ¿Cuantos triángulos determinan los puntos? $C(10,3) = \dfrac{10!}{3!\,7!} = 120$

d) ¿Cuantos triángulos de estos se forman con el punto A?
$120 - \underbrace{C(9,3)}_{\text{triangulos que no pasan por A}} = 36$

e) ¿Cuantos triángulos contienen el lado AB?
Se restan 8 puntos para formar triangulos $C(2,2)\cdot C(8,1) = 8$

14: En una fiesta ∃ 5 licores diferentes (Tequila, Brandy, Ron, Vodka, Whisky) y 4 refrescos diferentes (Agua mineral, cola, toronja, guianzona). Los vasos se llenan con cualquiera de ellos. Indica cuantos tipos pueden prepararse si:

a) Suaves (1 parte de cualquier licor y 4 del mismo refresco)

$c(5,1)\cdot c(4,1) = 5\cdot 4 = 20$ bebidas

b) Regulares. (2 partes de cualquier licor y 3 del mismo refresco)

$c(5,1)\cdot c(4,1) = 5\cdot 4 = 20$ bebidas.

c) Campechanas suaves. (1 parte de licor, 2 partes de un refresco y 2 de otro refresco.)

$c(5,1)\cdot c(4,2) = 5\cdot 6 = 30$ bebidas ó $P(5,2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$

d) Campechanas fuertes (1 parte de un licor, 1 parte de otro licor, 2 partes de un refresco, 1 parte de otro refresco).

$c(5,2)\cdot c(4,2) = 10\cdot 6 = 60$ bebidas

e) De engaño (1 parte de Cola y 4 partes de otro refresco).

$c(1,1)\cdot c(3,1) = 1\cdot 3 = 3$ bebidas.

f) Mortales. (~~1 parte de 3 licores diferentes~~ 3 partes de licor diferente cada una y 2 partes de cualquiera refresco.)

$c(5,3)\, c(4,1) = 10\cdot 4 = 40$ bebidas

g) libres (1 a 5 partes de cualquier licor o cualquier refresco.)

$n = m_1 + m_2 = 5+4 = 9$

$c(9,1)+c(9,2)+c(9,3)+c(9,4)+c(9,5) = 9+36+84+126+126$

381 bebidas

el juego de poker ∃ diferentes manos de 5 cartas, calcular de cuantas se puede presentar c/u de ellas. Se usa una baraja de 52 (13 figuras o # y 4 colores o palos sin comodines).

mano cualquiera, con o sin pares, tercias, etc.

$c(52,5) = \frac{52!}{5!\,47!} = 2\,598{,}960$ juegos ó manos diferentes

Un par (2 cartas del mismo # y tres cartas de # ≠ entre si y ≠ del par).

$c(13,4)\,c(4,2)\,c(4,1)^3$ = ~~274, 5[illegible]0 juegos de par~~ $= 274{,}560$ 1 098, 240 mayores de Poker

c) Dos pares (1 par de cartas de un #, otro par de otro # y una quinta carta de # ≠ al de los pares).

$c(13,3)\,c(4,2)^2\,c(4,1) = 41{,}184$ juegos de "dos pares"

d) Tercia (3 cartas del mismo # y 2 cartas de # ≠ al de la tercia y ≠ entre si).

$c(13,3)\,c(4,3)\,c(4,2)^2 = 18{,}304$ juegos de tercia

e) Color (5 cartas del mismo color o palo sin que esten en secuencia # consecutiva).

$[c(13,5) - c(8,1)\,c(4,4)]\,c(4,1) = 5116$ juegos de color

f) Full (tercia de un mismo # y un par de otro número).

$c(13,2)\,c(4,3)\,c(4,2) = 1872$ juegos de Full

g) Poker. (4 cartas del mismo # y una carta de otro #).

$c(13,2)\,c(4,4)\,c(4,1) = 312$ juegos de Poker

h) Escalera. (5 cartas del mismo color, y con # consecutivos, menos la combinación 10, J, Q, R, A   10, 11, 12, 13, 1).

$c(8,1)\,c(4,4)\,c(4,1) = 32$ juegos de escalera.

i) Flor imperial (5 cartas del mismo color con la combinación 10, J, Q, R, A)

$c(5,5)\cdot c(4,1) = 4$ juegos de Flor imperial

Nota: Es erroneo el calculo de b) como $c(13,1)\,c(4,2)\,c(12,3)\,c(4,1)^3$, errores similares pueden cometerse en c) d) f) y g).

Combinaciones con Repetición

a) ¿Cuantas combinaciones se pueden obtener con las cinco vocales tomadas en grupos de tres?

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

b) ¿Cuantas combinaciones con repetición pueden obtenerse con las cinco vocales tomadas en grupos de tres?

$$CR(n,r) = C(n+r-1,r) = C(5+3-1,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35.$$

c) ¿Cuantas combinaciones con repetición pueden obtenerse con las cinco vocales tomadas en grupos de dos?

$$CR(n,r) = C(5+2-1,2) = C(6,2) = \frac{6!}{2!\,4!} = 15.$$

Ordenaciones y Combinaciones mezcladas.

1° a) ¿Cuántas ordenaciones con repetición se pueden generar con todas las vocales de la palabra "Aurelio"?

$n = 5 \quad r = n = 5$

$OR(5,5) = n^r = 5^5 = 3125$ ordenaciones.

b) ¿Y cuántas combinaciones con repetición con las mismas vocales?

$CR(n,r) = C(n+r-1, r) = C(5+5-1, 5) = 126$ combinaciones

2° a) ¿Cuántas combinaciones pueden formarse con todas las vocales de la palabra "NEUROSIS" si estas no pueden repetirse?

$C(4,4) = 1$ combinación

b) ¿Cuántas combinaciones de 4 letras pueden formarse con las mismas vocales si estas pueden repetirse?

$CR(4,4) = CR(n+r-1, r) = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$ combinaciones.

c) ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la misma palabra?

$P(8,2) = 20,160$ permut. u ordenaciones

3° a) ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra "GUADALAJARA"?

$P(11,5) = 11!/5! = 332,640.$ ordenaciones

b) ¿Cuántas combinaciones se pueden formar con todas las consonantes de la misma palabra?

$C(5,5) = 1$ combinación

c) ¿Cuántas ordenaciones pueden formarse con las mismas consonantes, si se acepta la repetición

$OR(5,5) = 5^5 = 3125$ combinaciones.

4º a) ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra "DEPARTAMENTAL"?

$$P(13,2,3,2) = \frac{13!}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 259{,}459{,}200 \text{ ordenaciones.}$$

b) ¿Cuántas ordenaciones de 3 letras pueden formarse con las vocales de esta palabra, si estas pueden repetirse?
E, A, A, E, A   E, A

~~$PR(5,3) = 5^3 = 125$ s/repetición~~ $OR(2,3) = 2^3 = 8$ ~~sin~~ con repetición

c) ¿Cuántas combinaciones de 3 letras pueden formarse con todas las consonantes diferentes de la misma palabra?
D, P, R, T, M, N, L.

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!\,4!} = 35 \text{ combinaciones.}$$

5º a) Si un sistema coordenado solo puede recorrerse por lineas verticales y horizontales para valores enteros tanto de "x" como "y" ¿cuántos caminos diferentes pueden recorrerse para pasar del A(-2,-1) al B(4,2) si todos los caminos tienen 9 unidades de longitud?

$$C(9,6) = C(9,6) = \frac{9!}{6!\,3!} = 84 \text{ formas o caminos}$$

Si un sistema coordenado solo puede recorrerse por lineas verticales y horizontales para valores enteros de "x" y "y" ¿cuántos caminos diferentes ~~X~~ existen para pasar del punto A(-2,2) al B(3,-3) si:

b) Todos los caminos tienen 10 unidades de longitud?

$$c(10,5) = 252 \text{ formas o caminos}$$

c) ¿Cuántos caminos de 9 unidades de longitud? 0 caminos

d) En un sistema coordenado enteros tridimensional un punto móvil puede desplazarse unicamente por valores de x, y y z. El punto de partida es x=0, y=0, z=0 y el de llegada es x=4, y=3, z=2. ¿Cuántas trayectorias diferentes de 9 unidades de longitud, pueden recorrerse?

$$P(n, q_x, q_y, q_z) = P(9,4,3,2) = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260 \text{ trayectorias}$$

Esta solución se deriva a través del triangulo de Pascal para el caso de dos dimensiones y se extrapola a la fórmula recién indicada para tres dimensiones, y la extrapolación puede continuar a más dimensiones.

6: Un alumno cursa 7 asignaturas cuatro de ellas los días L, Mi V y las otras tres los Ma y J. Dos de ellas, por ejemplo Métodos Numéricos y Algebra lineal, debe recibirlas una después de otra y el mismo día ¿De cuántas maneras puede organizar su horario sin importar el orden de las materias?

i) $P_2\, C(5,2)\, P_3 P_3$ para las L M V con las 2 materias indicadas
$C(5,4)\, P_2 P_2$ para las M J con las 2 " "
$\therefore$ la suma de $LMV + MJ = 720 + 480 = 1200$ horarios

ii) $P_6 P_2$ para todas las posibilidades considerando las 7 materias juntas.
$P_2\, C(5,3)\, P_2$, para cuando las dos materias son la primera de un día y la última del anterior.
$\therefore\ P_6 P_2 - P_2\, C(5,2)\, P_2 = 1440 - 240 = 1200$ horarios

7º Se tienen 6 equipos de futbol y tres estadios. ¿De cuántas formas se pueden ocupar los tres estadios si:

a) Importa los equipos y el estadio donde se efectúan los partidos.

$$C(6,2)\, C(4,2)\, C(2,2) = \frac{6!}{\cancel{4}!\,2!}\ \frac{\cancel{4}!}{2!\,2!}\ \frac{\cancel{2}!}{\cancel{2}!\,0!} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 120 \text{ formas}$$

b) No importa el estadio donde se efectúan los partidos.

$$\frac{C(6,2)\ C(4,2)\ C(2,2)}{P_3} = \frac{120}{3!} = 20 \text{ formas.}$$

8º ¿De cuántas maneras se pueden formar 3 parejas de un conjunto de 6 personas disponibles?

a) Si importa el orden de las parejas

1ª pareja 2ª P. 3ª P.

$$C(6,2)\cdot C(4,2)\,C(2,2) = \frac{6!}{2!4!}\,\frac{4!}{2!2!}\cdot 1 = 5! = 120 \text{ maneras o ternas de parejas.}$$

b) Si no importa el orden de las parejas

$$\frac{C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{P_3} = \frac{120}{6} = 20 \text{ maneras}$$

9º) Sea un conjunto de dos extranjeros (A, B) y de 4 nacionalidades (a, b, c, d). ¿De cuántas maneras se pueden formar dos grupos de 3 personas c/u, con un extranjero y 2 nacionales por grupo?

$$C(2,1)\,C(4,2)\cdot C(1,1)\,C(2,2) = 2\cdot 6\cdot 1\cdot 1 = 12 \text{ formas.}$$

Nota: Analizando los grupos formados se tiene

α		β	
1) A a b	7) B a b	1) B c d	A c d (7
2) A a c	8) B a c	2) B b d	A b d (8
3) A a d	9) B a d	3) B b c	A b c (9
4) A b c	10) B b c	4) B a d	A a d (10
5) A b d	11) B b d	5) B a c	A a c (11
6) A c d	12 B c d	6) B a b	A a b (12

- Si se considera el orden de los 2 grupos (α y β), la solución anterior es correcta

- Si no importa el orden de los grupos, las alternativas disminuyen y se tiene que $1=12$, $2=11$; etc. lo que se puede calcular como

$$\frac{C(2,1)\;C(4,2)\;C(1,1)\;C(2,2)}{P_2} = \frac{12}{2} = 6$$

El denominador P_2 obedece a que en el numerador "de facto" se da un orden entre grupos y este orden no debe existir y se elimina con el denominador indicado.

19: a) ¿Cuántas palabras de 5 letras que contengan 3 consonantes y 2 vocales pueden formarse con las 26 letras del alfabeto (5 de ellas son vocales)?

$C(21,3)\cdot C(5,2)\cdot P_5 = 1{,}596{,}000$ palabras. ó

$O(5,2)\,O(21,3)\,\frac{O(3,2)}{P_2} = 1{,}596{,}000$ palabras.

b) ¿Cuántas palabras de 5 letras cualesquiera empiezan con "a" y tienen "b"?

$O(25,4) - O(24,4) = 48{,}576$ palabras ó

$O(1,1)\cdot O(4,1)\,O(24,3) = 48{,}576$ palabras. ó

$C(24,3)\cdot P_4 = 48{,}576$ palabras.

c) ¿Cuántas palabras de 5 letras cualesquiera, contienen las letras "a" "b" y "c"?

$C(23,2)\,C(3,3)\cdot P_5 = \frac{23!}{2!\,21!}\cdot\frac{3!}{3!\,0!}\cdot 5! = 30{,}360$ palabras.

ó

Ordenaciones de todas las letras en grupos de 5 $O(26,5)$
menos: Ordenaciones de 5 letras donde ∄ "a", "b" o "c" $O(23,5)$

Ordenaciones de 5 letras con solo una de las indicadas $O(23,4)\,O(5,1)\,O(3,1)$ que corresponde a la selección de las restantes, la posición de la letra y la selección de la letra.

Ordenaciones cuando solo hay 2 letras de las indicadas $O(23,3)\,O(3,2)\,\frac{O(5,2)}{P_2}$ que corresponden a la selección de las 23 letras restantes, la selección de 2 letras de las 3 indicadas, la colocación de las dos letras en 5 posiciones posibles y la eliminación del orden de las dos letras considerando en $O(5,2)$ y en $O(3,2)$ por duplicado.

Por tanto,

$O(26,5) - O(23,4)\,O(5,1)\,O(3,1) - O(23,5) - O(23,3)\,O(3,2)\,\frac{O(5,2)}{P_2} = 30{,}360$ palabras.

d) ¿Cuántas palabras con 3 consonantes y dos vocales empiezan con "a" y tienen "b"?

$O(1,1)\cdot O(4,1)\,O(20,2)\,O(1,1)\,P_4/P_2 = 18{,}240$ palabras ó $C(4,1)\,C(20,2)\,P_4 = 18\,240$

ó $O(20,2)\,O(4,1)\,O(4,1)\cdot P(3,2) = 18\,240$ palabras.

e) ¿Cuántas palabras con 3 consonantes y 2 vocales, contienen las letras "a", "b" y "c"? $C(4,1)\,C(19,1)\cdot P_5 = 9{,}120$ palabras

NUMEROS COMBINATORIOS

1.- Indique las cuatro propiedades de los números combinatorios

a).- Si $r = 0$, se tiene $\dfrac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = 1$; $\forall n$ entero y positivo

b).- Si $r = n$; $\dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$

c).- $\dbinom{n}{r} = \dbinom{n}{n-r}$; $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!} =$

$= \dbinom{n}{n-r}$ [Combinaciones Complementarias]

d).- $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$

2.- Hallar el valor de r si: $360 \cdot C(n,r) = 3 \cdot V(n,r)$

$$360 \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$360 = 3 \cdot r! \quad \therefore \quad r! = 120 \Rightarrow \underline{\underline{r = 5}}$$

3.- Calcule el valor de n si $\dbinom{n}{2} = 28$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 28 = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\,(n-2)!}$$

$$\underline{\underline{n(n-1) = 56}} \Rightarrow \underline{\underline{8\cdot 7 = 56}} \Rightarrow \underline{\underline{n = 8}}.$$

$8(8-1)$

$8(7)\ 56 = 56$

4.- HALLAR EL VALOR DE r SI:

$$\frac{120}{O(n,r)} = \frac{1}{C(n,r)}$$

$$120 \cdot \frac{\cancel{n!}}{r!\,\cancel{(n-r)!}} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \therefore \quad \underline{\underline{120 = r!}} \Rightarrow \underline{\underline{r = 5}}$$

5.- Calcule el valor de n si: $\binom{n}{2} = 21$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{2!\,\cancel{(n-2)!}} = 21 \;;\; n\,(n-1) = \underline{\underline{42}}$$

$$7 \cdot 6 = 42 \quad \therefore \quad \underline{\underline{n = 7}}$$

6.- PARA QUE VALOR DE N SE CUMPLE:

$$3C\,(n+1\,,3) = 7C\,(n,2)$$

$$\frac{3\,(n+1)\,!}{3!\,(n+1-3)!} = \frac{7n!}{2!\,(n-2)!} \Rightarrow \cancel{2!}\,\cancel{3}\cdot(n+1)\,!\,\cancel{(n-2)!} = 7\cdot n!\,\cancel{3!}\,\cancel{(n-2)!}$$

$$(n+1)\,n! = 7\cdot n!$$

$$n+1 = 7$$

$$n = 6$$

Comprobación

$$3C\,(6+1,3) = 7C\,(6,2)$$

$$\frac{\cancel{3}\cdot 7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6!}{2!\;4!}$$

$$\therefore \; 7! = 7!$$

7.- DETERMINE EL VALOR DE n QUE SATISFACE LA ECUACIÓN:

$$6C(n+1,3) = 2CR(n,2) = 2C(n+2-1,2)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{6\,(n+1)!}{3!\,(n-2)!} = \frac{2\,(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$$

$$\cancel{(n-2)}! = (n-1)! = (n-1)\cancel{(n-2)}!$$

$$1 = n-1$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{n=2}}$$

Comprobación

$$6C(3,3) = 6\cdot 1 = 6 = 2CR(2,2) = 2\cdot C(3,2) = 2\cdot 6 = 6$$

8.- Calcule n si: $O(n+1,3) = O(n,4)$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{(n+1)\,\cancel{n!}}{(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-4)!}}$$

$$(n+1) = (n-2)(n-3) = n^2-5n+6$$

$$n^2-6n+5=0$$

$$n = \frac{6 \pm \sqrt{36-5\cdot 4\cdot 1}}{2} = \frac{6\pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

Si $n=1$; $O(n,4)$ no existen

$\therefore \; n=5 \;\Rightarrow\; O(6,3) = O(5,4)$

$$\frac{6!}{3!} = \frac{5!}{1!} \quad \therefore \quad \underline{\underline{120 = 120}}$$

9.- Demuestre que: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!} = \frac{(n-1)!}{r(r-1)!\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}\right] = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left[\frac{(n-\cancel{r})+\cancel{r}}{r(n-r)}\right] = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

10.- a) Desarrollar y Simplificar ($K \geq n$)

$$\frac{P_{K+1}}{C(K-1, n-1)\, P_{K-n}} = \frac{(K+1)!\;(K-1-n+1)!}{(K-1)!\;(K-n)!} = \frac{(K+1)(K)\,\cancel{(K-1)!}\;\cancel{(K-n)!}}{\cancel{(K-1)!}\;\cancel{(K-n)!}}$$

$$= K(K+1)$$

b) Evaluar y comprobarla para $K=5$

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \binom{n}{n-r}$$

11.- Demostrar que $\dfrac{1}{C(n,1)} + \dfrac{1}{C(n,2)} = \dfrac{1}{n-1}$

$$\binom{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{n\cdot(n-1)!} + \frac{\cancel{(n-2)!}}{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}$$

$$= \frac{(n-1)+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}.$$

12.- Encuentre el coeficiente de x^n en la exponsion del binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ expresado como número combinatorio).

$a = x^2$, $b = x^{-3}$ $\Rightarrow$ aun el enesimo termino será $C_n^r \, (x^2)^{n-r} \, (x^{-3})^r$

$$= C_n^r \, x^{2n-5r} \; ; \quad 2n - 5r = n \Rightarrow r = \frac{n}{5}$$

$\therefore$ $C_n^{n/5}$ es el coeficiente de x^n.

y existirá si n es múltiplo de 5.

.14

13.- Encuentre el valor de n que satisface la ecuación $C(n,3) = 10\, C(n,5)$

$$C(n,3) = \frac{n!}{(n-3)!} = 10\left[\frac{n!}{5!\,(n-5)!}\right]$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}\left[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\right]$$

$$(n-3)(n-4) = 12$$

$$n^2 - 7n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{n = 7}}$$

14.- Hallar el valor de n si $C(n,5) = 18 \cdot C(n-2,4)$

$$18 \cdot C(n-2,4)$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 18 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-6)!}$$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{(n-5)\cancel{(n-6)}!} = \frac{18 \cdot \cancel{(n-2)}!}{(n-6)!}$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 18(n-5)$$

$$n^2 - 19n + 90 = 0$$

$$n = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$$

$n = 9$ satisface la ec. original

$n = 10$ no satisface la ec. original.

$\therefore$ $n = 9$ es la solución.

15.- Determina el valor de n si:
CR (n, 3) = 5C (n, 3).

$CR(n,3) = C(n+3-1, 3) = C(2+2, 3) = 5C(n,3)$

$$\frac{(n+2)!}{3!\,(n+2-3)!} = \frac{5\cdot n!}{3!\,(n-3)!}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{5\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$(n+2)(n+1) = 5(n-1)(n-2)$

$n^2 + 3n + 2 = 5(n^2 - 3n + 2)$

$4n^2 - 18n + 8 = 0$

$\therefore$

$$n = \frac{+18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 4\cdot 8}}{2\cdot 4} = \frac{18 \pm \sqrt{196}}{8} = \frac{18 \pm 14}{14}$$

$n_1 = \frac{38}{8} = 4$

$\therefore$ $\underline{n = 4 \text{ es la solución}}$

$n_2 = \frac{4}{8} = 1/2$

$CR(4,3) = C(4+3-1, 3) = C(6,3) =$

$$= \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$$

$$5C(4,3) = \frac{5\cdot 4!}{3!\,1!} = 5\cdot 4 = 20$$

Calcule el valor de n si $C\binom{n}{3} = 120$

$$\frac{n!}{3!\,(n-3)!} = 120 = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{6\cdot\cancel{(n-3)!}} =$$

$\therefore$ $n(n-1)(n-2) = 720$

probando
$5\cdot 6\cdot 7 = 210$
$6\cdot 7\cdot 8 = 336$
$7\cdot 8\cdot 9 = 504$
$8\cdot 9\cdot 10 = 720$ $\therefore$ $n = 10$

16.- Demostrar que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$n=0$

$$2^0 = 1 \rightarrow \binom{0}{0} \triangleq 1$$

$n=1$

$$2^1 = 2 \rightarrow \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1+1 = 2$$

$n=K$

$$2^K \rightarrow \binom{K}{0} + \binom{K}{1} + \cdots + \binom{K}{K}$$

$n=K+1$

$$2^{K+1} = (2^K)\cdot 2 \rightarrow \binom{K+1}{0} + \binom{K+1}{1} + \cdots + \binom{K+1}{K+1}$$

$$\binom{K+1}{0} = \binom{K}{0}$$

$$\binom{K+1}{1} = \binom{K}{0} + \binom{K}{1}$$

$$\binom{K+1}{2} = \binom{K}{1} + \binom{K}{2}$$

$$\binom{K+1}{K} = \binom{K}{K-1} + \binom{K}{K}$$

$$\binom{K+1}{K+1} = \binom{K}{K}$$

Sumando 2° Miembro:

$$2\left[\binom{K}{0} + \binom{K}{1} + \cdots + \binom{K}{K}\right] = 2\cdot 2^K = 2^{K+1}$$

Solución 2.-

Sea:

$(a+b)^n$ donde $a = 1$ y $b = 1$

$\therefore (1+1)^n = 2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} \cdot 1^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$

17.- Para que valor de n es ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$.

${}_nP_4 = n(n-1) \cdots (n-4+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$

${}_{n+1}P_3 = \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)\,n!}{(n-2)!}$

$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{(n+1)\,n!}{(n-2)!}$; $\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = n+1$; $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n+1$

$(n-2)(n-3) = n+1$. $n^2 - 5n + 6 - n - 1 = 0$; $n^2 - 6n + 5 = 0$

$\Rightarrow n_1 = 5$; $n_2 = 1$

$\frac{5!}{1!} = \frac{6!}{3!}$; $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$\therefore$ $\underline{\underline{n = 5}}$

BINOMIO DE NEWTON
[Evaluar y simplificar $A = (\quad)^n$]

1.- Calcular y Simplificar : $A = (1-i)^4$

$$A = (1-i)^4 = \binom{4}{0}\cdot 1 + \binom{4}{1}(-i) + \binom{4}{2}(-i)^2 + \binom{4}{3}(-i)^3 + \binom{4}{4}(-i)^4 =$$

$$= \underline{1 - 4i - 6 + 4i - 1 = -4}$$

2.- Calcular y Simplificar.

a).- $$(1+i)^6 = \sum_{r=0}^{6} \binom{6}{r} 1^{6-r} i^r = \sum_{r=0}^{6} \binom{6}{r} i^r =$$

$$\binom{6}{0} i^0 + \binom{6}{1} i + \binom{6}{2} i^2 + \binom{6}{3} i^3 + \binom{6}{4} i^4 + \binom{6}{5} i^5 + \binom{6}{6} i^6 =$$

$$= \underline{1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i}$$

3.- Calcular $(2i-1)^4$ si $i = \sqrt{-1}$

a).- $$\binom{4}{0}(2i)^4 + \binom{4}{1}(2i)^3(-1) + \binom{4}{2}(2i)^2(-1)^2 + \binom{4}{3}(2i)(-1)^3 + \binom{4}{4}(-i)^4$$

$$1\cdot 16 + 4\cdot 8(i)(-1) + 6(-4)\cdot 1 + 4(2i)(-1) + 1\cdot 1$$

$$= 16 + 32i - 24 - 8i + 1$$

$$= \underline{-7 + 24i}$$

b).- Calcular $\left(2 - \frac{1}{i}\right)^4$ si $i = \sqrt{-1}$

$$\left(2 - \frac{1}{i}\right)^4 = \left(2 - \frac{1}{i}\frac{i}{i}\right)^4 = (2+i)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 i + \binom{4}{2}2^2 i^2 + \binom{4}{3}2i^3 + \binom{4}{4}i^4$$

$$= 1\cdot 16 + 4\cdot 8i - 6\cdot 4\cdot 1 + 4\cdot 2\,(-i) + 1\cdot 1$$

$$= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = \boxed{-7 + 24i.}$$

c) Calcular y simplificar $(1+i\sqrt{3})^6$

$$(1+i\sqrt{3})^6 = \sum_{r=0}^{6}\binom{6}{r}1^{6-r}(i\sqrt{3})^r = \sum_{r=0}^{6}\binom{6}{r}(i\sqrt{3})^r = \binom{6}{0} + \binom{6}{1}i\sqrt{3} + \binom{6}{2}(i\sqrt{3})^2 + \binom{6}{3}(i\sqrt{3})^3 +$$

$$+ \binom{6}{4}(i\sqrt{3})^4 + \binom{6}{5}(i\sqrt{3})^5 + \binom{6}{6}(i\sqrt{3})^6 = 1 + 6i\sqrt{3} - 45 - 60i\sqrt{3} + 135 + 54i\sqrt{3} - 27 = \underline{64}$$

4.- Demostrar que $(2i-1)^4 = \left(2-\frac{1}{i}\right)^4$

$\left(2-\frac{1}{i}\right)^4 = (2+i)^4 = i^4(2+i)^4 = (2i+i^2)^4 = (2i-1)^4 =$

$= \underline{\underline{-7+24i}}$

5.- Calcular $(1-2i)^4$ si $i=\sqrt{-1}$

$\binom{4}{0} 1 + \binom{4}{1}(-2i) + \binom{4}{2}(-2i)^2 + \binom{4}{3}(-2i)^3 + \binom{4}{4}(-2i)^4$

$1 - 8i - 6 \cdot 4 + 4 \cdot 8i + 1 \cdot 16 - 1 =$

$= \underline{\underline{1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i}}$

6.- Desarrollar y simplificar $(x-\sqrt{2}\,i)^4 - (x+\sqrt{2}\,i)^4 = H$

$H = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-\sqrt{2}\,i) + \binom{4}{2}x^2(-\sqrt{2}\,i)^2 + \binom{4}{3}x(\sqrt{2}\,i)^3 + \binom{4}{4}(-\sqrt{2}\,i)^4 -$
$(x-\sqrt{2}\,i)^4$

por simetría se duplican los términos positivos (r par) y se cancelan los términos negativos (r impar).

$\therefore H = 2[x^4 + 6x^2(-2) + 4] = 2(x^4 - 12x^2 + 4)$

7.- Hallar el valor de:

$$H = \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^7 + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^7$$

$$H = 2\left[a^7 + 21a^5(a^2-1) + 35a^3(a^2-1)^2 + 7a(a^2-1)^3\right]$$

$$H = 2a\ [64a^6 - 112a^4 + 56a^2 - 7)$$

$$= 128a^7 - 224a^5 + 11a^3 - 14a$$

8.- Obtener los cuatro primeros términos del desarrollo de $(m+n)^{2/3}$

$$(m+n)^{2/3} = m^{2/3} + \frac{2}{3}m^{-1/3}n + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)m^{-4/3}n^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)m^{-7/3}n^3 \ldots$$

$$(m+n)^{2/3} = m^{2/3} + \frac{2}{3}m^{-1/3}n - \frac{1}{9}m^{-4/3}n^2 + \frac{4}{81}m^{-7/3}n^3 - \ldots$$

9.- GENERALIZACIÓN DE LA FORMULA DEL BINOMIO (CON EXPONENTE NEGATIVO Ó FRACCIONARIO).

La fórmula general para desarrollar el binomio $(a+b)^n$ se aplica tambien al caso en que el exponente es fraccionario o negativo siempre que se tenga que $a > b$.

En estos dos casos o sea cuando el exponente es fraccionario o negativo, el desarrollo tiene un número ilimitado de términos.

10. Calcular, mediante el desarrollo del binomio, los cuatro primeros términos del desarrollo $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = 1^{1/2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right) 1\cdot(-x) + \frac{1}{2!}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right) 1^{-5/2} x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right) 1^{-7/2}(-x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \cdots$$

que es el desarrollo general:

$$(1+a)^{1/m} = 1 + \frac{1}{m}a + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-1\right)a^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)a^3 + \cdots$$

11. Obtener la raiz $\sqrt[3]{39}$ con cuatro cifras decimales.

$$\sqrt[3]{39} = \sqrt[3]{27+12} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{12}{27}\right)} = 3\sqrt[3]{1+\frac{4}{9}} = 3\left(1+\frac{4}{9}\right)^{3}$$

$$= 3\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{16}{81}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{9}\right)\left(\frac{64}{729}\right) + \cdots\right]$$

$$= 3(1 + 0.1481 - 0.0219 + 0.0054 - \cdots) = 3.3948\ldots$$

1.- Hallar el coeficiente de x en $\left(x+\frac{2}{x}\right)^9$

$a = x$; $b = 2x^{-1}$; $n = 9$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^9 = \sum_{r=1}^{9} C_9^r (x)^{9-r}(2x^{-1})^r$; $x^{9-r}2^r x^{-r} = 2^r x^{9-2r}$

$9-2r = 1 \Rightarrow r = 4$; $C_9^4\, 2^4 x = 2016x$ en donde

$\underline{C_9^4 = 126}$

$\frac{9!}{4!\,5!}\cdot 16 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!}\cdot 16 = 2016$

2.- Aplicando el teorema del binomio, determine el coeficiente de x^6 resultado de la expansión del binomio dado como:

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

$\sum_{r=0}^{12}\binom{12}{r}(x^2)^{12-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r \Rightarrow \sum_{r=0}^{12}\binom{12}{r}x^{24-2r}x^{-r} =$

$= \sum_{r=0}^{12}\binom{12}{r}x^{24-3r}$

Como se requiere que el exponente de la variable x sea 6 entonces:

$24-3r = 6 \Rightarrow r = 6 \;\therefore\; \binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} = 924$

el coeficiente $x^6 = \underline{924}$

3.- Calcular el coeficiente de y^{15} en caso de que exista en el desarrollo $(-2-3y^3)^{10}$

$\binom{10}{r}(-2)^{10-r}(-3y^3)^r \;\therefore\; 3r = 15 \Rightarrow \underline{\underline{r = 5}}$

$\binom{10}{5}(-2)^5(-3y^3)^5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\,5!}\cdot(-32)(-243)y^{15} =$

$= 252\cdot 32\cdot 243\,y^{15}$

$\therefore \binom{10}{5}(-2)^5(-3y^3)^5 = \underline{\underline{1,959,552\,y^{15}}}$

4.- Hallar el décimo sumando del desarrollo de: $\left(\frac{1}{x} + x\right)^{12}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} a^{n-i} b^{i} = \sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} (x)^{n-i} \left(\frac{1}{x}\right)^{i}$$

si $i = 9$ entonces.

$$\binom{12}{9} (x)^{12-9} \left(\frac{1}{x}\right)^{9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 9!} x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^9 = \underline{220 x^{-6}}$$

5.- Determine el coeficiente de x^6 en la expansión de: $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$; $\binom{12}{r} (x^2)^{12-r} (x^{-1})^r \Rightarrow$

$$2(12-r) - r = 6$$
$$24 - 3r = 6$$
$$18 = 3r \quad \therefore \quad \underline{\underline{r = 6}}$$

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{6!}} = 924$$

6.- Calcular el coeficiente de a^{12} en caso de que exista el desarrollo $(-3 + 5a^6)^{10}$

$$\binom{10}{r} (-3)^{10-r} (5a^6)^r \quad \therefore \quad 6r = 12 \Rightarrow r = 2.$$

$$\binom{10}{2} (-3)^8 (5a^6)^2 = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{8!}} (-3)^8 (25a^{12}) = \underline{7,381,125a^{12}}$$

7.- Calcular el coeficiente de b^{18} en caso de que exista al desarrollar $(4-3b^3)^{10}$

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{10}{r} 4^{(10-r)} (-3b^3)^r \therefore 3r = 18 \Rightarrow \underline{\underline{r=6}}$$

$$\binom{10}{6} 4^4 \cdot (-3b^3)^6 = \frac{10!}{6!\,4!} \cdot 256 \cdot 729 b^{18} = 210\ 256 \cdot 729 b^{18}$$

$$= 39{,}191{,}040 b^{18}$$

8.- Calcular el coeficiente de z^{10} en el desarrollo de $(-3+2z^2)^{13}$ en caso de que éste termino exista.

$$\binom{13}{r} (-3)^{13-r} (2z^2)^r = \binom{13}{5} (-3)^8 (2z^2)^5 = \frac{13!}{5!\,8!} \cdot 6561 \cdot 32 z^{10}$$

$$= 2.70208 \times 10^{08} z^{10}$$

$$\text{Si: } 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

9.- Hallar el 14^{avo}. termino del desarrollo de $(3-a)^{15}$.

$$r = 13 \quad ; \quad (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$\text{termino } 14 \Rightarrow \binom{15}{13} 3^{15-13} (-a)^{13} = \frac{15!}{3!\,2!} 3^2 (-a^{13}) =$$

$$= -945 a^{13}$$

10.- Encuentre el término que contiene x^8 en el desarrollo de: $(2x^2 - \frac{1}{2} y^3)^8 = P$

$$P = \sum_{r=n}^{8} \binom{8}{r} \underbrace{(2x^2)^{8-r}}_{2^{8-r} \cdot x^{16-2r}} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)(y^3) \right]^r \quad \therefore \quad 16 - 2r = 8$$

$$\Rightarrow \underline{r = 4}$$

$$\therefore \binom{8}{4} (2x^2)^4 \left(-\tfrac{1}{2} y^3\right)^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16x^8 \cdot \frac{1}{16} y^{12} =$$

$$= \underline{70x^8 y^{12}}$$

11.- De los sumandos del desarrollo de: $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ calcule el sumando que es independiente de x.

$$\binom{n}{r} (2x)^{n-r} (-x)^r \quad \therefore \quad (n-r) - r = 0 \quad \Rightarrow \underline{r = 5}$$
$$10 - 2r = 0$$

$$\binom{10}{5} (2x)^5 (-x^{-1})^5 = \frac{10!}{5!\,5!} 2^5 x^5 (-1) x^{-5} = -252 \cdot 32 =$$

$$= \underline{-8064}$$

12.- Hallar el término independiente (constante) de la expansión del binomio dado como $(x^2 + 1/x)^{12}$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{K=0}^{12} \binom{12}{K} (x^2)^K \left(\frac{1}{x}\right)^{12-K} = \sum_{K=0}^{12} \binom{12}{K} x^{3K-12}.$$

$$3K - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 4 \quad \therefore \quad \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495.$$

13.- Determinar el coeficiente del elemento x^2 en el desarrollo del binomio dado como: $\left(x+\frac{2}{x^3}\right)^{10}$

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^{10} C_{10}^r x^{10-r}\left(\frac{2}{x^3}\right)^r;$$

$$x^{10-r}\left(\frac{2}{x^3}\right)^r = x^{10-4r}2^r; \quad 10-4r=2 \Rightarrow r=2$$

$$\therefore C_{10}^2 x^{10-8} 2^2 = \frac{10!}{8!\,2!}\cdot 4x^2 =$$

$\underline{180x^2}$

14.- Indicar y Calcular en caso de que exista el término independiente de x en el desarrollo $\left(xy-\frac{y}{x}\right)^{10}$.

$$\left(xy-\frac{y}{x}\right)^{10} = \sum \binom{10}{r}(xy)^{n-r}(-yx^{-1})^r = \binom{10}{r}x^{n-r}x^{-r}\left(y^{n-r}(-y)^r\right)$$

$$n-r-r=0$$
$$n-2r=0 \quad \therefore \quad \underline{r=5}$$

$$\binom{10}{5}x^5x^{-5}y^5(-y)^5 = \frac{10!}{5!\,5!}(-1)y^{10} = \underline{-252y^{10}}$$

ó $\left(xy-\frac{y}{x}\right)^{10} = y^{10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$, etc.

15.- De los $(n+1)$ sumandos del desarrollo $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)^{10}$; escriba el sumando que posee el mayor coeficiente en valor absoluto.

$r=5$ por simetría

$$\binom{10}{5}\left(\frac{a^2}{b}\right)^{10-5}\left(-\frac{b^2}{a}\right)^5 = \frac{10!}{5!\,5!}(a^2b^{-1})^5(-b^2a^{-1})^5 =$$

$$= \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot5!}\cdot a^{10}b^{-5}b^{10}a^{-5}$$

$$\therefore \binom{10}{5}(a^2b^{-1})^5(-b^2a^{-1})^5 = \underline{-252a^5b^5}$$

16.- Si el desarrollo de $(a+b)^n$ posee $(n+1)$ sumandos; indique solamente el valor del sexto sumando de:

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)^{12}$$

$$\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{12}{5}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{12-5}\left(\frac{y^2}{x}\right)^5 = \frac{12!}{5!\,(12-5)!}\left(\frac{x^2}{y}\right)^7\left(\frac{y^2}{x}\right)^5 =$$

$$= \frac{12!}{5!\,7!}\,\frac{x^{14}}{y^7}\,\frac{y^{10}}{x^5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,x^9y^3 = \underline{\underline{729x^9y^3}}$$

17.- Si el desarrollo de $(a+b)^n$ posee $(n+1)$ sumandos indique el valor del sumando séptimo de:

$$\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^3}\right)^{15}$$

Séptimo sumando $\Rightarrow r=6$

$$\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{15}{6}\left(\frac{x}{y^2}\right)^{15-6}\left(\frac{y}{x^3}\right)^6 = \frac{15!}{6!\,(15-6)!}\left(\frac{x}{y^2}\right)^9\left(\frac{y}{x^3}\right)^6 =$$

$$= \frac{15!}{6!\,9!}\,\frac{x^9}{y^{18}}\,\frac{y^6}{x^{18}} = 455\,x^{-9}y^{-12}$$

18.- Calcular el término independiente si existe del desarrollo:

$$\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20} = \sum_{r=0}^{20}\left(\sqrt[3]{t}\right)^{n-r}\left(\frac{1}{t}\right)\binom{20}{r}$$

$$\frac{n-r}{3}-r=0 \;;\quad n-r=3r \;\therefore\; r=\frac{n}{4}=\frac{20}{4}=\underline{\underline{5}}$$

$$\binom{20}{5}\sqrt[3]{t}^{\,15}\,t^{-5} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot \cancel{15!}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{15!}} = 15,504$$

19.- Hallar el 5° término de:

$$\left(\frac{x^{3/2}}{a^{1/2}}-\frac{y^{5/2}}{b^{3/2}}\right)^8 = \binom{8}{4}\left(\frac{x^{3/2}}{a^{1/2}}\right)^4\left(-\frac{y^{5/2}}{b^{3/2}}\right)^4$$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{x^6y^{10}}{a^2\,b^6} = 70\,\frac{x^6y^{10}}{a^2\,b^6}$$

20.- De los términos del desarrollo de:

$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ calcule si existe el sumando que es independiente de x.

$\binom{n}{r}(2x)^{n-r}(-x^{-1/2})^r = \binom{n}{r} 2^{n-r} x^{n-r-1/2 r}(-1)^r$

$\therefore\ n - r - \frac{1}{2}r = 0$

$n = \frac{3}{2}r \therefore r = \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$

$\therefore \binom{12}{8}(2x)^{12-8}(-x^{-1/2})^8 = \frac{12!}{8!\,4!} 2^4 x^4 (-1)^8 x^{-4}$

$= 495\cdot 16\, x^4 x^{-4} = \underline{7920}$

21.-

Obtenga el término independiente del desarrollo de:

$\left(2xi - \frac{3}{x}\right)^6$ donde $i = \sqrt{-1}$

$\left(2xi - \frac{3}{x}\right)^6 = \sum_{r=0}^{6} \binom{6}{r}(2xi)^{n-r}(-3x^{-1})^r$

$(2i)^{n-r} x^{n-r}(-3)^r (x^{-1})^r = (2i)^{n-r}(-3)^r (x^{n-r-r})$

$\therefore\ n - 2r = 6 - 2r = 0 \therefore r = 3$

$\binom{6}{3}(2i)^3(-3)^3 x^{6-3-3} = \frac{6!}{3!\,3!} 8i^3(-27)x^0 = 20\cdot 8(-i)(-27)$

$= 4320i$

22.- Calcular la parte real del término independiente de x en el desarrollo.

$$P = \left(2x + 3i - \frac{1}{x}\right)^6 \quad \text{donde } i = \sqrt{-1}$$

$$\left(2x + 3i - \frac{1}{x}\right)^6 = \left[\left(2x - \frac{1}{x}\right) + (3i)\right]^6 = \sum_{r=0}^{6} \binom{n}{r}\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{n-r}(3i)^r$$

$$= \left(2x - \frac{1}{x}\right)^{n-r} = (2x - x^{-1})^{n-r} = \sum_{s=0}^{n-r} (2x)^{n-r-s}(-x^{-1})^s \binom{n-r}{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-r} 2^{n-r-s}(x)^{n-r-s}(-1)^s (x)^{-s}\binom{n-r}{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s\, 2^{n-r-s}\, x^{n-r-s-s} \cdot \binom{n-r}{s}$$

$$\therefore \quad n - r - 2s = 0$$

$$s = \frac{n-r}{2} = \frac{6-r}{2}$$

Existiran varios terminos que aportan, o participan en la parte real del termino independiente y serán

$$\begin{aligned} r &= 0 & s &= \tfrac{6-0}{2} = 3 \\ r &= 2 & s &= \tfrac{6-2}{2} = 2 \\ r &= 4 & s &= \tfrac{6-4}{2} = 1 \\ r &= 6 & s &= \tfrac{6-6}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$P = \sum_{r=0}^{6} \binom{n}{r}(2x - x^{-1})^{n-r}(3i)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{6} \binom{n}{r}\left[\sum_{s=0}^{n-r} \binom{n-r}{s}(-1)^s\, 2^{n-r-s}\, x^{n-r-2s}\right](3i)^r$$

para $r=0$ y $s=3$

$$\binom{6}{0}\left[\binom{6}{3}(-1)^3\, 2^{6-0-3}\, x^{6-0-2\cdot 3}\right](3i)^0 = 1\left[\frac{6!}{3!\,3!}(-1)(8)\,x^0\right]\cdot 1 = -\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8 = -160$$

1.- Continuación.

para $r = 2$ y $S = 2$

$$\binom{6}{2}\left[\binom{4}{2}(-1)^2 2^{6-2-2} x^{6-2-2\cdot 2}\right](3i)^2 =$$

$$= \frac{6!}{2!\,4!}\left[\frac{4!}{2!\,2!}\cdot 1\cdot 4\cdot x^0\right]9i^2 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5}{2\cdot 1}\left[\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 1}\cdot 4\right](-9) =$$

$$= 15\cdot 24\cdot(-9) = -3240$$

para $r = 4$ y $S = 1$

$$\binom{6}{4}\left[\binom{2}{1}(-1)^1 2^{6-4-1} x^{6-4-2\cdot 1}\right](3i)^4 = \frac{6!}{4!\,2!}\left[\frac{2!}{1!\,1!}(-1)\cdot 2\cdot x^0\right]81i^4 =$$

$$= 15\,[2(-1)(2)(1)]+81 = -4860$$

para $r = 6$ y $S = 0$

$$\binom{6}{6}\left[\binom{0}{0}(-1)^0 2^{6-6-0} x^{6-6-2\cdot 0}\right](3i)^6 = 1\cdot[1\cdot(1)\cdot 1\cdot x^0]\,729i^6$$

$$= \underline{-729}$$

∴ el coef. de x^0, independiente de x es igual a:

$$-160 - 3240 - 4860 - 724 = \underline{-8989}$$

23.- INDIQUE O AGRUPE EL Ó LOS TÉRMINOS QUE CONTIENEN Y y^3 EN EL DESARROLLO:

$$P=(w+2x-2y+3z)^{10}$$

Si: $h=(w+2x+3z) \Rightarrow P=(h-2y)^{10}=\binom{10}{r}h^{10-r}(-2y)^r$

como debe ser y^3 $\therefore$ $r=3$

$$\binom{10}{3}h^{10-3}(-2y)^3=\frac{10!}{3!\,7!}h^7(-2y)^3=$$

$$= 120\,(-8)\,h^7y^3=-960\,(w+2x+3z)^7\cdot y^3.$$

24.- INDIQUE Y CALCULE EL MÁXIMO FACTOR COMÚN DE TODOS LOS TERMINOS QUE CONTIENEN x^6 AL DESARROLLAR LA EXPRESIÓN:

$$(w+2x+y-z)^9$$

haciendo $w+y-z=a \Rightarrow (a+2y)^9=$

$$=\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}a^{9-i}\,2x^{i}$$

Si se desea que $x^6 \Rightarrow i=6$ $\therefore$

$$\binom{9}{6}a^{9-6}(2x^6)=\frac{9!}{6!\,3!}a^3\,2^6\,x^6=$$

$$=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{3\cdot2\cdot1\cdot6!}\cdot2^6a^3x^6=$$

$$=5376\,(w+y-z)^3x^6.$$

25.a Indique el coeficiente que contiene al x^{22} mediante el binomio de Newton de la expresión:

$$P = (1 - 2x + 3x^2 - x^4 - x^5)^5.$$

$$I = [(1-2x+3x^2-x^4)-x^5]^5 = \binom{5}{0}(1-2x+3x^2-x^4)^5 +$$
$$+ \binom{5}{1}(1-2x+3x^2-x^4)^4(-x^5)^1 + \binom{5}{2}(1-2x+3x^2-x^4)^3(-x^5)^2$$
$$+ \binom{5}{3}(1-2x+3x^2-x^4)^2(-x^5)^3 + \binom{5}{4}(1-2x+3x^2-x^4)^1(-x^5)^4 +$$
$$+ \binom{5}{5}(-x^5)^5$$ $\therefore$ los términos que aportan un x^{22} son:

$$\binom{5}{2}(-x^4)^3(-x^5)^2 = \frac{5!}{2!\,3!}(-x^{12})(x^{10}) = -10x^{22}$$

$$\binom{5}{4}(3x^2)(-x^5)^4 = \frac{5!}{4!\,1!}(3x^2)(x^{20}) = 15x^{22}$$

$$\therefore -10 + 15 = \underline{+5} \text{ coef.}$$

$$\underline{+5x^{22}}$$

b.- Y el coeficiente de x^{23}
Del desarrollo I; se tiene que el único que puede generar x^{23} es el sumando:

$$\binom{5}{3}(1-2x+3x^2-x^4)^2(-x^5)^3$$

$$\therefore \frac{5!}{3!\,2!}(1 + \ldots + x^8)(-x^{15}) = -10x^{23}$$

En el sumando $\binom{5}{4}(1-2x+3x^2-x^4)^1(-x^5)^4$

pero no aparece $\underline{x^{23}}$

$\therefore$ Se tiene -10^{23}

26.- Indique cual es el coeficiente de x^{34} en el desarrollo de:

$$P = (1-2x+3x^2-x^4-x^5)^8$$

Haciendo $a = 1-2x+3x^2$; $b = -x^4-x^5$ se tiene que los exponentes máximos para $r = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 no llegan a 34; por tanto se ignoran; para $r = 6, 7$ y 8 se tiene

$\binom{8}{6}(1-2x+3x^2)^2(-x^4-x^5)^6 \Rightarrow \binom{8}{6}(3x^2)(-x^5)^6$ es el único que alcanza el exponente buscado.

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot \cancel{6}!}\, 9x^4 \cdot x^{30} = 252\, x^{34}$$

$\binom{8}{7}(1-2x+3x^2)(-x^4-x^5)^7 \Rightarrow$ Se requieren; del binomio $(\ )^7$, los exponentes 34, 33, y 32, los cuales corresponden a los sumandos $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{5}$ y $\binom{7}{6}$ ∴

$$\binom{8}{7}\left\{1\cdot\binom{7}{6}(-x^4)^1(-x^5)^6 - 2x\binom{7}{5}(-x^4)^2(-x^5)^5 + 3x^2\binom{7}{4}(-x^4)^3(-x^5)^4\right\}$$

$$= 8\left\{1\cdot 7(-x^4)\,x^{30} - 2x\,\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2!\cdot 1!\cdot 5!}\,x^8(-x^{25}) + 3x^2\,\frac{7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}\,(-x^{12})x^{20}\right\}$$

$$= 8\left[-7x^{34} + 42x^{34} - 105x^{34}\right]$$

$$= 8x^{34}(42-112) = 8x^{34}(-70) = -560x^{34}.$$

$\binom{8}{8}(-x^4-x^5)^8 \Rightarrow$ De este desarrollo el único sumando que posee x^{34} es para $r = 2$.

$$\binom{8}{8}\left\{\binom{8}{2}(-x^4)^6(-x^5)^2\right\} = 1\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!}\,x^{24}x^{10} = 28x^{34}$$

Resumiendo las participaciones se tiene

$$252x^{34} - 560x^{34} + 28x^{34} = \underline{\underline{-280x^{34}}}$$

27.a) Indique cuál ó cuales terminos contienen a c^5 mediante el Binomio de Newton la expresión:

$$P(a+b+c+d)^{10}.$$

Sea $h = a+b+d$; $P(h+c)^{10}$; $r = 5$.

$$\binom{10}{5} h^{10-5} c^5 = \frac{10!}{5!\,5!} h^5 c^5 = \frac{10!}{5!\,5!} (a+b+d)^5 \cdot c^5$$

$$= 252\,(a+b+d)^5 c^5.$$

b.-) En el desarrollo $P = (a+b+c+d)^{10}$. indique el ó los términos que contienen a : $a^5 b^5$

$$((a+b)+(c+d))^{10} = \sum_{r=0}^{10} (a+b)^{10-r} (c+d)^r \binom{10}{r}$$

$$(a+b)^{10-r} = \sum_{s=0}^{10-r} a^{10-r-s} b^s \binom{10-r}{s}$$

dado que se busca $a^5 b^5$; se tienen las ecuaciones de los exponentes.

$$\left.\begin{array}{l} 10 - r - s = 5 \\ y \quad S = 5 \end{array}\right\} \therefore\ r = 0$$

$$P = \sum_{r=0}^{10} \binom{10}{r} (a+b)^{10-r} (c+d)^r = \sum_{r=0}^{10} \left[\sum_{s=0}^{10-r} a^{10-r-s} b^s \binom{10-r}{s}\right](c+d)^r \binom{10}{r}$$

Sustituyendo $r=0$; $S=5$ se tiene el término

$$\binom{10}{0} \cdot \binom{10-0}{5} a^{10-0-5} b^5 (c+d)^0$$

$$1 \cdot \frac{10!}{5!\,5!} a^5 b^5 \cdot 1 = \underline{\underline{252\, a^5 b^5}}$$

c).- Localizar y evaluar exactamente el coeficiente del término que posee el producto $a^2b^3c^3d^2$

$$P=[(a+d)+(b+c)]^{10}=\sum_{r=0}^{10}\binom{10}{r}(a+d)^{10-r}(b+c)^{r}$$

de ésta expresión se tiene que $10-r=4$ (suma exponentes de a y d) y $r=6$ (suma de exponentes de b y c). Por tanto a^2b^2 se tiene:

$$\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{0}a^{4-s}d^{s} \quad \text{y se sabe que } s=2$$

$$\binom{4}{2}a^{4-2}d^{2}=\frac{4!}{2!\,2!}a^2d^2$$

y para b^3c^3 se tiene $\sum_{t=0}^{6}\binom{6}{0}b^{6-t}c^{t}$ y se sabe que $t=3$

$$\binom{6}{3}b^{6-3}c^{3}=\frac{6!}{3!\,3!}b^3c^3.$$

por tanto se tienen:

$$ti=\frac{10!}{6!\,4!}\left[\frac{4!}{2!\,2!}a^2d^2\frac{6!}{3!\,3!}b^3c^3\right]=\frac{10!}{2\cdot2\cdot6\cdot6}a^2b^3c^3d^2=$$

$$=\frac{3,628\,800}{144}a^2b^3c^3d^2.$$

$$ti=\underline{25,200a^2b^3c^3d^2}$$

d).- IGUAL PARA EL PRODUCTO $ab^2c^4d^3$

$$P[(a+b)+(c+d)]^{10}=\sum_{r=0}^{10}\binom{10}{r}(a+b)^{10-r}(c+d)^{r}$$

$10-r=3$
$r=7$ $\quad\therefore (a+b)^{10-r}=(a+b)^3=\sum_{s=0}^{3}\binom{3}{s}a^{3-s}b^{s}$

$\therefore s=2 \Rightarrow \binom{3}{2}a^{3-2}b^2$

$$\therefore (c+d)^7=\sum_{t=0}^{7}c^{7-t}d^{t}$$

$\therefore t=3 \Rightarrow \binom{7}{3}c^{7-3}d^{3}$

$$\therefore ti=\binom{10}{7}\left[\binom{3}{2}ab^2\binom{7}{3}c^4d^3\right]=\frac{10!}{7\cdot3!}\left[\frac{3!}{2!\,1!}\frac{7!}{3!\,4!}ab^2c^4d^3\right]$$

$$= \frac{10!}{1!\,.2!\,3!\,4!} ab^2c^4d^3 = \frac{3.628\,800}{288} ab^2c^4d^3 =$$

$$= \underline{\underline{12,600\, ab^2c^4d^3}}$$

e).- Igual para el producto $a^s b^t c^u d^v$ dondo s, t, u, v son enteros no negativos y $s+t+u+v = 10$

$$ti = \frac{10!}{s!\,t!\,u!\,v!} a^s b^t c^u d^v$$

f.- Igual para el producto $a^s b^t c^u d^v$ en el desarrollo de: $(a+b+c+d)^n$

$$ti = \frac{n!}{s!\,t!\,u!\,v!} a^s b^t c^u d^v$$

donde:

$$\underline{\underline{s+t+u+v = n}}$$

g).- Sea el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$; localizar el sumando con el término: $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$; dondo $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$

$$Ti = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

1.- Calcule el interés compuesto generado en tres meses por un millón de pesos; si el banco paga el 60% de interés anual:

$V_f = 10^6 (1 + 0.053)^3 = 10^6 \cdot 1,157,625 = \underline{1,157,625.^{00}}$

2.- Indique el total de los intereses devengados después de 6 meses; por un depósito de \$ 1,000,000 al 90% anual; capitalizable mensualmente.

$i_a = 90\% \Rightarrow i_m = \frac{.90}{12} = .075$; $nf = P_0 (1 + i)^n$

$nf = P_0 (1+i)^n = 1,000,000 (1 + 0.75)^6$

$nf = 1.000.000 \ (1,543,301,53)$

$nf = 1,543,301.53$

$\therefore$

$I_t = \underline{543,301.53}$

3.- Hallar el pago mensual que debe efectuarse al comprar un bien cuyo costo inicial es de \$ 5,000,000.⁰⁰ con el interés anual de 0.72 si los pagos mensuales deben ser iguales y solo hay 36 pagos. El periodo de capitalizacion es de 3 meses.

Pago mensual $= \underline{356,311.3912}$

1.- Calcular el capital final P y el monto de los intereses o descuento D, Dados $V = 1,000,000.-$
$i = 0.72$ anual
$n = 3$ años.

a) Intereses simple

$P = 10^6 (1 + 0.72)^3 = 10^6 \cdot 5.088448 = 5,088,448$

$D = P - V = 5,088,448 - 1,000,000 = 4,088,448$

b) Intereses compuesto anualmente

$P = 10^6 (1 + 0.72)^3 = 10^6 \cdot 5.088449 = 5,088,448$

$D = P - V = 5,088,448 - 1,000,000 = 4,088,448$

c).- Interés compuesto mensualmente.

$P = 10^6 (1 + 0.06)^{36} = 10^6 \cdot 8.147252 = 8,147,252$

$D = \underline{7,147,252}$

d) Encuentre la diferencia de intereses ocasionados por la variación del periodo de capitalización

$D = C - b = 7,147,252 - 4,088,448 = \underline{3,058,804}$

Por el periodo de Capital.

5.- Hallar el pago mensual que debe efectuarse al comprar un bien cuyo costo es de 5,000,000 pesos con interés anual de 0.72; si los pagos deben ser 36 y de montos iguales. El periodo de capitalización es semestral. Indicar cuanto es el pago total.

$$[[[[[5\cdot 10^6(1+i)-6m](1+i)-6m](1+i)-6m](1+i)-6m\ (1+i)-6m]\ (1+i)-6m]=0$$

$$(((((5\cdot 10^6(1.36)-6m)1.36-6m)\ 1.36-6m)\ 1.36-6m)\ 1.36-6m)\ 1.36-6m)=0$$

$$5\cdot 10^6(1.36-6m)\ 1.36-6m$$
$$5\cdot 10^6(1.36^2-1.36\cdot 6m)-6m \qquad \underline{\underline{M=6m}}$$
$$(1.36^3-1.36^2\cdot 6m-1.36\cdot 6m-6m)$$

Si:

$$5\cdot 10^6(1.36^6)=M(1.36^5+1.36^4+1.36^3+1.36^2+1.36+1)$$

$$M=\frac{5\cdot 10^6(1.36^6)}{1.36^5+1.36^4+1.36^3+1.36^2+1.36+1}=\frac{31,637,594.44}{14.798,663,58}=2137,868.35$$

$$\therefore\ 356,311.391,2=\frac{M}{6}=m=\text{mensualidad constante}$$

$$\text{Pago Total}=\underline{\underline{12,827,210.08}}$$

6.- Igual a 5 con: Costo = 10,000,000.
Interes 108 % anual
Número de pagos = 30
Capitalización semestral

$$m=1,017,467.^{00};\ M=6\cdot m=6,104,803.37$$

$$\text{Pago total}=30,524,017.84$$

$$\frac{\text{Pago total}}{\text{Valor Inicial}}=\frac{30,524,017.84}{10,000,000.00}=305.24\%$$

7.- a) Hallar el pago mensual que debe efectuarse al comprar un auto de 8,000,000 con interés anual de 96%, 30 mensualidades iguales sin enganche. El periodo de capitalización es semestral.

b).- Cuánto es el dinero pagado en total.
c).- Cuánto es el interés total pagado.
d).- Cuál es la relación del interés total pagado, respecto al valor inicial del vehículo.
e).- Comente los resultados obtenidos

$$M = \frac{8\cdot10^6\ (1.48)^5}{1.48^4 + 1.48^3 + 1.48^2 + 1.48^1 + 1} = \frac{8\times10^6\times 7.10037..}{12.7100446}$$

$$= 4{,}469{,}423.46.$$

a) $= m = \frac{M}{6} = 744{,}903.91$ \$ /mes

b).- Pago total $= 744{,}903.91 \times 30 = 22{,}347{,}117.31.$

c).- Interés Total $= 22{,}347{,}117.31 - 8{,}000{,}000.^{00} = 14{,}347{,}117.31$

d).- $\frac{\text{Interés total}}{\text{Valor inicial}} = \frac{14{,}347{,}117.31}{8{,}000{,}000.^{00}} = 1.7934 = 179.34\%$.

e).- Abierta.

8.- Hallar el valor actual y el descuento de una suma dada, pagada a interés simple y que vence en una fecha dada.

P - Suma dada o pagada.
V - Valor Actual.
D - Descuento (Racional ó Matemático).
r - Interés Anual.
n - Número de Años.

$$P = V(1+nr) \quad \therefore \quad V = \frac{P}{(1+nr)}$$

D = P - V = Conjunto de intereses Generados.

$$= P - \frac{P}{1+nr} = P\left(\frac{1+nr-1}{1+nr}\right) = \frac{Pnr}{1+nr}$$

9.a Hallar el pago mensual que debe efectuarse al comprar un auto cuyo costo es de 4,000,000; si el interés anual de 90% y las mensualidades deben ser 30 y de igual monto.
El período de capitalización es semestral

0 $[[[[V_i (1+i) - 6M] (1+i) - 6M] (1+i) - 6M] (1+i) - 6M] (1+i) - 6M]$

$= V_i (1+i)^2 - 6M (1+i) - 6M$

$= V_i (1+i)^3 - 6M (1+i)^2 - 6M (1+i) - 6M.$

$= V_i (1+i)^4 - 6M (1+i)^3 - 6M (1+i)^2 - 6M (1+i)^1 - 6M$

$= V_i (1+i)^5 - 6M (1+i)^4 - 6M (1+i)^3 - 6M (1+i)^2 - 6M (1+1) - 6M$

$$V_i (1+i)^5 = 6M [(1+i)^4 + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)^1 + (1+i)^0]$$

$\therefore$

$$M = \frac{V_i (1+i)^5}{6 [(1+i)^4 + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)^1 + (1+i)^0]} =$$

$$= \frac{4,000,000 (1+0.45)^5}{6 [1.45^4 + 1.45^3 + 1.45^2 + 1.45^1]}$$

$$= \frac{25,638,936.25}{6 (12.022)} = \frac{25,638,936.25}{72.130} = 355,455.591 \text{ Pesos/Mes}$$

b).- Cuánto es el dinero pagado en total.

10,663,677.73

PREGUNTAS CONCEPTUALES

1.- EXPLIQUE O ENUNCIE:
a).- El principio fundamental del conteo.
b).- La regla de la suma.
c).- La regla del producto.

a).- Determina de cuántas maneras se puede colocar un conjunto de elementos sujeto a ciertas restricciones.

b).- Si un evento puede realizarse de "m" maneras y otro evento independiente del primero se puede realizar de "n" maneras entonces existen m+n alternativas de que ocurra una cualesquiera de los dos eventos.

c).- Si un evento puede ocurrir de "m" formas diversas e independientes de éste otro evento puede ocurrir de "n" formas diferentes; entonces existen m x n formas distintas en que pueden ocurrir los dos eventos.

2.- EXPLIQUE QUE SON:
a).- ORDENACIONES
b).- PERMUTACIONES.
c).- COMBINACIONES.

a.-) Es el número de formas en que se pueden colocar "n" objetos tomados en grupos de r, considerando el orden entre ellos. $1 \leq r \leq n$.

b).- Son ~~Permutaciones~~ Ordenaciones cuando $n = r$, y reciben el nombre de Permutaciones.

c).- Es el número de formas en que se pueden colocar "n" objetos tomados de r en r. No importa el orden de los r elementos tomados.

3.- INDIQUE QUE ES EL DIAGRAMA DE ARBOL Y TRES DE SUS CARACTERISTICAS.
- Es una representación grafica de la realización de un conjunto de eventos que obliga una secuencia determinada.
Sus características son:
a).- Existe al menos un nodo inicial.
b).- Pueden existir uno ó más nodos terminales.
c).- Cada rama parte y termina en un nodo.
d).- No es práctico para sistemas con muchas alternativas.
e).- A cada nodo llega solo una rama; y pueden salir una ó más de él; excepto los nodos extremos.

4.- Defina y Explique en que consiste:
a).- La regla del producto.
b).- Los diagramas de árbol
c).- La relación entre ellos; en caso de que exista.

a).- Si un evento puede ocurrir de n maneras y otro evento, independiente del primero puede ocurrir de m maneras; ambos pueden ocurrir de m x n maneras.
Se aplica cuando existe la conjugación ó conjunción de dos ó más eventos independientes.
b).- Son una ayuda gráfica para evaluar el número de maneras en que pueden realizarse dos o más eventos simples sujetos a diversas restricciones.
Se define un nodo inicial que puede o no corresponder al primer evento; de ahí se derivan tantas ramas como alternativas tenga el siguiente evento y de estos nodos se vuelven a derivar tantas ramas por nodo como alternativas posee el evento subsecuente, etc. Las restricciones limitan la longitud de las trayectorias.
c).- Si existe relación entre ambos conceptos, y se da cuando un nodo se deriva en otros que de manera de alternativas ó trayectorias se está multiplicando; o sea la aplicación de la regla del producto.

5.- INDIQUE TODAS LAS ESTRUCTURAS COMBINATORIAS QUE PUEDEN USARSE EN UN PROBLEMA SI:

a).- IMPORTA EL ORDEN DE LOS ELEMENTOS SELECCIONADOS.
b).- NO IMPORTA EL ORDEN DE LOS ELEMENTOS SELECCIONADOS.
c).- SI IMPORTA EL ORDEN Y LOS ELEMENTOS POR SELECCIONAR PUEDEN REPETIRSE.
d).- NO IMPORTA EL ORDEN Y LOS ELEMENTOS POR SELECCIONAR PUEDEN REPETIRSE.
e).- SI IMPORTA EL ORDEN Y ALGUNOS DE LOS ELEMENTOS POR SELECCIONAR SON IGUALES.
f).- IMPORTA EL ORDEN Y LOS ELEMENTOS SELECCIONADOS TIENEN UNA DISTRIBUCIÓN CIRCULAR.

\+ a) ORDENACIONES $O(n,r) = n!/(n-r)!$
PERMUTACIONES $P_n = n!$
ORDENACIONES CON REPETICIÓN $OR(n,r) = n^r$
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN $PR_n = n^n$
PERMUTACIONES CON GRUPOS DE ELEMENTOS IGUALES
$P(n, q_1, q_2, \ldots q_t) = \dfrac{n!}{q_1!\, q_2! \ldots q_t}$
PERMUTACIONES Circulares
$PC(n) = (n-1)!$

b).- COMBINACIONES $C(n,r) = n!/r!(n-r)!$
COMBINACIONES CON REPETICIÓN $CR(n,r) = C(n+r-1)\,r)$

c).- ORDENACIONES CON REPETICIÓN.
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

d).- COMBINACIONES CON REPETICIÓN

e).- PERMUTACIONES CON GRUPOS DE ELEMENTOS IGUALES.

f).- PERMUTACIONES CIRCULARES.

6.- SEA UN MONTO DE P PESOS QUE SE DEPOSITA EN EL BANCO EN INTERÉS COMPUESTO A 3 MESES, CON UNA TASA DE INTERÉS MENSUAL DEL 3%.

EL MONTO TOTAL AL FINAL DE LOS 3 MESES ESTÁ DADO POR:

$$T = P(1+i)^3 = P\left[\sum_{r=0}^{3} 1^{3-r} i^r\right] = P\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}i+\binom{3}{2}i^2+\binom{3}{3}i^3\right]$$

INDIQUE EL SIGNIFICADO DE CADA UNO DE LOS SUMANDOS

$P\binom{3}{0}$ — ES EL CONCEPTO INICIAL.

$P\binom{3}{1}i$ - ES EL INTERÉS SIMPLE POR TRES MESES.

$P\binom{3}{2}i^2$ - ES EL INTERÉS SIMPLE DE 2 MESES DEL INTERÉS OBTENIDO EN EL 1er MES; MÁS EL INTERÉS SIMPLE DEL INTERÉS OBTENIDO DEL 2° MES.

$P\binom{3}{3}i^3$ - ES EL INTERÉS DEL INTERÉS DEL INTERÉS OBTENIDO EL 1er MES.