



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONTROL ADAPTABLE DE ORIENTACIÓN DE SATÉLITES
BASADO EN EL ANÁLISIS DE CONTRACCIÓN**

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:
PÉREZ VÁZQUEZ MARCO ANTONIO**

**TUTOR
DR. YU TANG XU**

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE, 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez
Secretario: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl
Vocal: Dr. Yu Tang Xu
1er. Suplente: Dr. Marcos Ángel González Olvera
2o. Suplente: Dr. Luis A. Alvarez Icaza Longoria

La tesis se realizó en la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Yu Tang Xu

Agradecimientos

A mis pilares principales, *Bertha Vázquez Solano* y *Juan Antonio Pérez Hernández*, que siempre me han animado por medio de su inigualable fortaleza y continuo apoyo para superar cualquier reto; porque me han dado su amor incondicional, porque me han guiado con sus sabias palabras de aliento cuando las he necesitado y son mi ejemplo a seguir.

A mi compañera de aventuras y de vida, *María del Carmen Gutiérrez Jaramillo* porque siempre me ha apoyado en todas las decisiones y momentos importantes de mi vida, y no podía faltar en ésta.

Al *Dr. Yu Tang Xu* por ser pieza clave durante mi formación de posgrado, por complementar mis conocimientos y orientarme siempre no solamente en el aspecto académico si no también por darme excelentes consejos de vida. Así también a mis grandes amigos de posgrado por los grandiosos aportes que tuvieron dentro de mi formación.

A la *Universidad Nacional Autónoma de México* por brindarme todos los medios y herramientas necesarias para alcanzar todos mis objetivos académicos. Finalmente al CONACyT por la beca que me otorgó con número *710643* durante mis estancia en éste posgrado ya que sin su ayuda no podría haberla concluido.

Abstract

A solution to the problem of spacecraft tracking a desired attitude using the contraction analysis is given in this thesis. First, an ideal state feedback controller, assuming the knowledge of inertial matrix and the total angular momentum, is devised and ensured to be contracting. Then the adaptive control law is designed in a certainly equivalence fashion substituting the controller parameter vector by its estimate. The overall system is shown to be contracting under a *sufficient excitation* condition, which is a strictly weaker condition than the *persistent excitation* required for most adaptive control schemes.

Resumen

En este trabajo se desarrolla una solución al problema de seguimiento de orientación de un satélite usando la teoría de contracción. Primero, se presenta un controlador por realimentación de estados ideal y se asegura que sea contrayente, asumiendo el conocimiento de la matriz inercial y el momento angular total. Posteriormente se diseña la ley de control adaptable sustituyendo el vector de parámetros reales por su equivalente estimado de una manera similar al principio de equivalencia cierta para sistemas lineales.

La principal contribución de esta tesis es el diseño de un controlador adaptable para seguimiento de orientación por realimentación de estados que alcanza convergencia exponencial casi-global usando análisis de contracción. Esta aproximación permite un simple y transparente análisis y diseño, comparado con las teorías de Lyapunov y pasividad empleadas en trabajos de la bibliografía consultada. Además, se alcanza convergencia exponencial en los errores de seguimiento, superando la naturaleza asintótica de algunos resultados previos.

El sistema bajo la ley de control diseñada, muestra que es contrayente bajo una condición suficientemente excitante, la cual es estrictamente más débil que la condición de excitación persistente requerida para la mayoría de los esquemas de control adaptable.

Índice general

Índice de figuras	3
Índice de tablas	5
1. Introducción	7
1.1. Motivación y estado del arte	8
1.2. Objetivos	9
1.3. Metodología	9
1.4. Estructura de la tesis	10
2. Preliminares Teóricas	11
2.1. Teoría de contracción	11
2.1.1. Contracción	11
2.1.2. Contracción Parcial	13
2.1.3. Contracción de sistemas particulares	13
2.2. Cinemática y dinámica del satélite	16
2.2.1. Orientación de un cuerpo rígido	16
2.2.2. Matrices de rotación	17
2.2.3. Cuaternión unitario	17
2.2.4. Operador antisimétrico	19
2.2.5. Ecuación cinemática	19
2.2.6. Ecuación dinámica	20
2.2.7. Parametrización lineal de la planta	21
2.3. Condición de excitación persistente (PE) y suficientemente excitante (SE)	22
2.4. Estabilidad asintótica casi-global	22
3. Control ideal para seguimiento de orientación	23
3.1. Diseño del controlador ideal	23
3.2. Simulación del controlador	27
4. Controlador adaptable	31
4.1. Parametrización del controlador ideal	32
4.2. Diseño del control adaptable	32

ÍNDICE GENERAL

4.3. Simulación del controlador	36
5. Conclusiones y trabajos futuros	47
Bibliografía	51

Índice de figuras

2.1. Marco de referencia inercial I y marco de referencia del satélite B	16
3.1. Trayectoria deseada: orientación q_d , velocidad \dot{q}_d y aceleración \ddot{q}_d en términos de cuaterniones.	28
3.2. Velocidad angular deseada y su derivada: ω_d y $\dot{\omega}_d$	28
3.3. Cuaternión de posición q , velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador ideal.	29
3.4. Eroses de seguimiento \tilde{q} y $\tilde{\omega}$ del controlador ideal.	30
4.1. Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	37
4.2. Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	38
4.3. Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	38
4.4. Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	39
4.5. Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	39
4.6. Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y Error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	40
4.7. Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	40
4.8. Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	41
4.9. Trayectoria deseada (regulación): orientación q_d , velocidad \dot{q}_d y aceleración \ddot{q}_d en términos de cuaterniones ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	41

ÍNDICE DE FIGURAS

4.10. Velocidad angular deseada y su derivada: ω_d y $\dot{\omega}_d$ ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	42
4.11. Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable propuesto para el caso de regulación ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	42
4.12. Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto (regulación) ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	43
4.13. Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ con el controlador adaptable para el caso de regulación ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).	43
4.14. Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).	44
4.15. Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).	45
4.16. Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable propuesto con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).	45

Índice de tablas

3.1. Parámetros para la simulación del controlador ideal.	29
4.1. Parámetros para la simulación del controlador adaptable.	36

Capítulo 1

Introducción

Controlar la orientación de un sistema es un importante objetivo en vehículos espaciales, submarinos y terrestres, así como en sistemas industriales. Por ejemplo, aplicaciones de satélites en particular (satélites de vigilancia y comunicación), requieren un posicionamiento preciso de su orientación, a menudo en ventanas de tiempo muy pequeñas [1].

En las últimas décadas, el uso de satélites artificiales se ha convertido en una parte fundamental para el desarrollo de la humanidad debido a que existe un gran número de aplicaciones técnicas que van desde su uso para telecomunicaciones hasta sistemas de posicionamiento terrestre. En la mayoría de estas aplicaciones es crucial la orientación exacta para tomar fotografías, establecer comunicación con la estación terrestre o comunicarse con otros satélites, por lo que es de vital importancia controlar su posición global y su orientación. Una vez que un satélite se encuentra en órbita, es necesario controlarlo desde tierra y moverlo, ya sea para ajustar su órbita, evitar que colisione con la basura espacial o por requerimientos especiales de una misión, como apuntar a una antena u orientar de modo especial un sensor. Dependiendo de la misión, se puede requerir el seguimiento de orientación en lugar de la regulación [2].

El responsable del control de orientación del satélite para llevar a cabo su misión y adquirir datos es el subsistema conocido como Sistema de Control de Orientación (ACS), el cual estabiliza al satélite y lo orienta a un punto específico durante la misión a pesar de las perturbaciones externas que actúan sobre él.

En la actualidad con el desarrollo de nuevas tecnologías, al incremento en los requerimientos de la carga útil y la tendencia mundial en el desarrollo de microsátélites, es necesario desarrollar sistemas de control de orientación cada vez más precisos y que permitan realizar las maniobras con un mínimo consumo de energía y a un costo razonable.

1.1. Motivación y estado del arte

La ecuación de movimiento de un satélite tiene una estructura muy similar a la ecuación de movimiento de un robot manipulador. Esto lo hace interesante para investigar si los esquemas de control adaptable para robots basados en la parametrización lineal de la ecuación de movimiento pueden ser aplicados al control de orientación adaptable de satélites. El espacio de configuración de un robot manipulador tipo serie puede ser descrito por las coordenadas articulares, mientras que la configuración espacial que describe la orientación de un satélite rígido es el conjunto de matrices ortonormales cuyo determinante es uno, es decir, matrices de rotación que pertenecen al grupo especial ortogonal $SO(3)$. Este espacio de configuración puede presentar algunas dificultades para el desarrollo de controladores u observadores ya que no existe parametrización de 3 parámetros que sea global y sin singularidades.

Aunque existen resultados fuertes en este espacio [3], es preferible trabajar con una parametrización que presente cualidades más deseadas [4, 5, 6].

En el caso de satélites, el problema se vuelve más complicado debido a las incertidumbres en las propiedades de masa e inercia del satélite derivadas del consumo de combustible, variaciones en la carga, despliegue de accesorios, entre otras. Sumado a esto, es muy común que en la implementación de los algoritmos de control diseñados no se disponga de información acerca de la matriz de inercia ni de los momentos angulares totales del satélite por lo que contar con un algoritmo para identificación paramétrica sería una herramienta de gran utilidad.

Se han presentado varias soluciones al problema de control de orientación en la literatura. En [4, 5, 6, 7] se desarrollan esquemas de regulación y seguimiento, donde se consideran modelos generales de satélites, pero se enfocan en un único tipo de actuador.

En [5], los autores presentan herramientas de pasividad para alcanzar regulación usando diferentes parametrizaciones. La estructura de estos algoritmos es parecida al control PD para robots manipuladores. En [7], con la representación de cuaternión se toma ventaja de las cualidades pasivas del sistema para obtener regulación sin mediciones de velocidad.

Por medio de la inclusión de la cinemática dentro de la dinámica de la orientación, [4] estudia el control adaptable de orientación en el contexto de sistemas Hamiltonianos. Sin embargo, este esquema es local debido a la parametrización mínima de la orientación. En [6], se desarrolla un control adaptable basado en pasividad y el problema de seguimiento es analizado. El esquema propuesto, basado en cuaterniones, es análogo al algoritmo Slotine-Li [8] usado en robótica, pero la convergencia de los parámetros estimados no es clara.

Paralelamente en [9], se presenta un algoritmo de adaptación promediado para control de robots basado en pasividad. En éste se muestra que el algoritmo propuesto es capaz de alcanzar convergencia paramétrica bajo una condición de *excitación suficiente*, la cual es una condición estrictamente más débil que la condición de *excitación persistente* requerida por la mayoría de los esquemas de control adaptables.

En esta tesis se desarrolla un controlador adaptable de orientación para regulación

y seguimiento utilizando como herramienta principal la teoría de contracción. Se usan cuaterniones unitarios como parametrización y se consideran las ruedas de reacción como principales de actuadores, utilizados actualmente en la mayoría de satélites. Se revisita el algoritmo dado en [9] comúnmente utilizado en control de robots manipuladores, y se lleva el problema al caso de satélites, resolviendolo desde un punto de vista de análisis de contracción.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un esquema de control adaptable basado en análisis de contracción capaz de lidiar con incertidumbre en los valores de momento angular total y momento de inercia, y que permita llevar la orientación del satélite a una trayectoria deseada variable en el tiempo iniciando desde cualquier punto inicial.

Como objetivo secundario tenemos que establecer las condiciones bajo las cuales se obtiene convergencia en los parámetros estimados ya que, una vez lograda, podremos usar el algoritmo de control para fines de identificación paramétrica.

Asimismo, se busca aplicar los algoritmos obtenidos a un ejemplo numérico para verificar el desempeño por medio de simulaciones numéricas.

1.3. Metodología

La metodología que se emplea en esta investigación es el análisis de contracción recientemente desarrollado en [10, 11], como un análisis no lineal y herramienta de diseño. La contracción es una forma incremental de estabilidad [12] que estudia la convergencia en términos de la proximidad entre la evolución de trayectorias en un sistema no lineal. Un concepto particular en el análisis de contracción es la contracción parcial introducida en [11]. En virtud de tal concepto, una paso clave en diseños adaptables basados en contracción es encontrar un sistema virtual que tenga como soluciones particulares las trayectorias del sistema deseado y el actual. La contracción del sistema virtual implica que las trayectorias del sistema actual, inicializadas en la región de contracción, convergen exponencialmente a aquellas del sistema deseado.

En la investigación se busca resolver el problema de manera secuencial, es decir, primero se trata de resolver el problema de seguimiento por realimentación de estados asumiendo que los parámetros son conocidos. Posteriormente, se resuelve el problema de adaptación restringiendo las posibilidades del problema, es decir, asumiendo los parámetros del sistema como desconocidos.

1.4. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en 5 capítulos. Al principio se encuentra el Capítulo 2 donde se introducen conceptos y definiciones necesarios para el estudio de sistemas dinámicos con la teoría de contracción. Además se presentan las preliminares teóricas como la estructura de sistemas de orientación de cuerpo rígido, ecuaciones cinemáticas y dinámicas, cuaterniones y la parametrización de la planta, necesarias para desarrollar el algoritmo de control.

En el Capítulo 3 se diseña un controlador ideal de orientación por realimentación de estados basado en el análisis de contracción, asumiendo el conocimiento de la matriz de inercia y el momento angular total. Se muestran simulaciones para demostrar el desempeño del controlador.

Posteriormente, en el Capítulo 4 se desarrolla una ley de control adaptable por medio de la sustitución del vector de parámetros por su estimado de una manera similar al principio de equivalencia cierta para sistemas lineales. El sistema de control bajo la ley de control adaptable, se muestra que es contrayente bajo una condición suficientemente excitante, la cual es estrictamente una condición más débil que la de excitación persistente comúnmente requerida en la mayoría de esquemas de control adaptable. Se considera el algoritmo de adaptación tipo gradiente como caso particular del algoritmo propuesto en este trabajo. Las simulaciones muestran el desempeño del controlador ante una trayectoria deseada que no cumple con la condición de excitación persistente.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan algunos comentarios a manera de conclusiones y los posibles direcciones hacia donde se dirige la presente investigación.

Capítulo 2

Preliminares Teóricas

A continuación se muestra un breve resumen de las herramientas del análisis de contracción útiles para el diseño del controlador de seguimiento por realimentación de estados.

2.1. Teoría de contracción

El análisis de contracción [10], [11] se ha desarrollado recientemente como un análisis no lineal y herramienta de diseño (ver [31], [32], [33]). La contracción es una forma incremental de estabilidad [12], la cual estudia la convergencia en términos de la proximidad entre las trayectorias de un sistema no lineal.

Inspirado por mecánica de fluidos, intuitivamente el análisis de contracción está basado en una vista ligeramente diferente de lo que es el concepto de estabilidad. Como es sabido, generalmente la estabilidad es relativa a un movimiento nominal o a un punto de equilibrio.

El análisis de contracción está motivado por la idea elemental de que hablar de estabilidad no requiere conocer el movimiento nominal, así pues un sistema es estable en alguna región si el comportamiento final del sistema es independiente de las condiciones iniciales.

2.1.1. Contracción

El análisis de contracción es un análisis diferencial, en contraparte al análisis por Lyapunov a través de función integral implícita. Para evitar ambigüedad, a este concepto de estabilidad se le denomina simplemente *convergencia*.

A continuación se presentan algunos resultados y definiciones fundamentales del análisis de contracción que serán de gran utilidad para el diseño de la ley de control adaptable.

Definición 2.1 (*Región de contracción [10]*) :

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y f es un campo vectorial en \mathbb{R}^n . Considere además la transformación de coordenadas

$$z = \Theta(x, t)x, \quad (2.2)$$

donde $\Theta(x, t)$ es una función cuadrada, uniformemente invertible. La distancia infinitesimal del sistema transformado está dada por

$$\delta z^T \delta z = \delta x^T \Theta^T(x, t) \Theta(x, t) \delta x \triangleq \delta x^T \mathbb{M} \delta x,$$

donde $\mathbb{M} = \Theta^T(x, t) \Theta(x, t)$ induce una métrica simétrica continuamente diferenciable.

La región dentro del espacio de estados donde la parte simétrica del Jacobiano generalizado del sistema $\mathbb{F} := \left(\Theta(x, t) + \Theta(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1}(x, t)$ es uniformemente negativa definida, i.e.,

$$\mathbb{F}_s = \frac{1}{2}(\mathbb{F} + \mathbb{F}^T) \leq -\lambda I < 0, \quad \forall x, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.3)$$

es la región de contracción, donde $\lambda > 0$ es una constante. I denota, de aquí en adelante, una matriz identidad, cuya dimensión se define apropiadamente.

△

Teorema 2.1 (*Análisis de Contracción Generalizado [10]*) : Bajo la condición (2.3), el sistema no lineal (2.2) es contrayente con tasa de contracción λ . Esto implica convergencia exponencial de todas las trayectorias cercanas a una sola trayectoria desde cualquier condición inicial en una bola de radio constante centrada alrededor de esta trayectoria y contenida todo el tiempo en la región de contracción. Esto también se cumple para el sistema original (2.1). Si la región de contracción es el espacio de estados

completo, el resultado es global.

Δ

Un concepto particular en el análisis de contracción es la *contracción parcial* introducido en [11]. En virtud de tal concepto, un paso clave en el diseño basado en contracción es encontrar un sistema *virtual* el cual tiene como soluciones particulares las trayectorias del sistema deseado y las del sistema actual. La contracción del sistema virtual implica que las trayectorias del sistema actual, inicializadas en la región de contracción, convergen exponencialmente a las trayectorias del sistema deseado.

2.1.2. Contracción Parcial

Teorema 2.2 (*Contracción Parcial [11]*) : Considere el siguiente sistema auxiliar, conocido como sistema virtual

$$\dot{\xi} = f(\xi, x, t), \quad (2.4)$$

asociado con el sistema no lineal (2.1) expresado como

$$\dot{x} = f(x, x, t). \quad (2.5)$$

Suponga que el sistema virtual (2.4) es contrayente en ξ , $\forall x$, $\forall t \geq t_0$. Entonces, si el sistema virtual (2.4) verifica una propiedad suave específica, entonces todas las trayectorias del sistema original (2.5) verifican la misma trayectoria exponencialmente. El sistema (2.1) se dice que es parcialmente contrayente.

Δ

Note que la selección del sistema virtual no es arbitraria. El sistema virtual se construye del tal manera que una solución particular de ξ sea el sistema de interés original y otra solución verifique la propiedad específica buscada.

2.1.3. Contracción de sistemas particulares

Finalmente, se presentan dos resultados para sistemas con estructura particular muy útiles en el diseño de controladores y observadores por análisis de contracción.

Lema 2.1 (*Contracción de Sistemas Jerárquicos [10]*) : Considere dos sistemas posi-

2. PRELIMINARES TEÓRICAS

blemente de dimensiones diferentes

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Considere la evolución en el tiempo del desplazamiento infinitesimal $[\delta x_1^T \ \delta x_2^T]^T$, ordenado como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}.$$

Si en alguna región del espacio de estados $F_1 := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ y $F_2 := \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ son uniformemente negativos definidos, y $F_{21} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ es acotado, entonces el sistema total (2.6) será contrayente en esa región.

El siguiente teorema es útil para sistemas con estructura semicontrayente.

Teorema 2.3 (Sistema semicontrayente) Considere el sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, t) \\ f_2(x_1, x_2, t) \end{bmatrix}.\tag{2.7}$$

Y sea la parte simétrica de la matriz jacobiana dada por

$$J_s(x) = \begin{bmatrix} F_1s(x_1, x_2, t) & 0 \\ 0 & F_2s(x_1, x_2, t) \end{bmatrix},\tag{2.8}$$

donde $F_1s := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_s$, $F_2s := \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_s$, con $(\cdot)_s$ denota la parte simétrica de (\cdot) , y asuma que $(\partial f_1/\partial x_2) = -(\partial f_2/\partial x_1)^T$.

Suponga que

$$F_1s(x_1, x_2, t) \leq -\lambda_1 I, \quad \lambda_1 > 0,\tag{2.9}$$

$$F_2s(x_2, x_2, t) \leq -\lambda_2 I, \quad \lambda_2 \geq 0.\tag{2.10}$$

Entonces:

- 1) Si $\lambda_2 > 0$, el sistema (2.7) es contrayente y sus trayectorias convergen exponencialmente una a la otra.
- 2) Si $\lambda_2 \geq 0$, el sistema (2.7) es semi contrayente y las trayectorias de x_1 convergen asintóticamente una a la otra mientras que δx_2 se mantiene acotada.

Demostración: La prueba es similar a la prueba del Teorema 8 en [13]. Considere la primera variación del sistema (2.7) dada por

$$\delta \dot{x} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\delta x, \quad (2.11)$$

y sea la longitud media cuadrática

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta x^T \delta x = \delta x^T J_s(x) \delta x \quad (2.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{1s} & 0 \\ 0 & F_{2s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\leq -\lambda_1 \delta x_1^T \delta x_1 - \lambda_2 \delta x_2^T \delta x_2. \quad (2.14)$$

Note que la expresión de (2.12) es análoga a la derivada de una función de Lyapunov por lo que de acuerdo a las nociones de energía de la teoría de Lyapunov y de acuerdo a la definición de λ_1 y λ_2 , obtenemos dos resultados principales.

En el caso que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces la dinámica del sistema (2.7) es contrayente, *i.e.* $\delta x \rightarrow 0$ exponencialmente.

Por otro lado, si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 \geq 0$, el sistema (2.7) es semicontrayente ya que el análisis de sus longitud cuadrática conlleva una matriz Jacobiana negativa semidefinida, esto es

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 \delta x_1^T \delta x_1 \leq 0. \quad (2.15)$$

Por lo que aplicando el lema de Barbalat δx es acotado y δx_1 tiende a cero asintóticamente.

△

El conocimiento de la planta para el diseño del controlador es muy importante por lo que a continuación se presentan algunos conceptos e ideas básicas para el entendimiento del satélite.

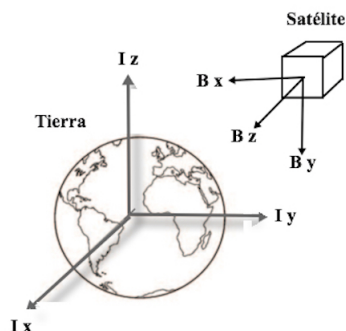


Figura 2.1: Marco de referencia inercial I y marco de referencia del satélite B .

2.2. Cinemática y dinámica del satélite

La ecuación de movimiento para un satélite tiene una estructura similar a la ecuación de movimiento para un robot manipulador. Esto lo hace interesante para investigar si los esquemas de control adaptable de robots basados en parametrización lineal de la ecuación de movimiento puede ser aplicado al control adaptable de orientación en satélites [6].

La configuración espacial de un robot manipulador tipo serie puede ser descrito por las coordenadas de sus uniones, mientras que la configuración espacial que describe la orientación de un satélite rígido es el grupo ortogonal especial $SO(3)$ el cual no tiene representación de tres parámetros que sea global y sin singularidades [3]. Debido a esta diferencia formal, pueden presentarse problemas cuando aplicamos técnicas de control adaptable conocidas en la literatura para robots al control de orientación de satélites rígidos.

2.2.1. Orientación de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido está completamente descrito en el espacio por su *posición* y su *orientación* con respecto a un marco de referencia o inercial. Ya que el satélite puede ser visto como un cuerpo rígido, de aquí en adelante asumiremos esta consideración.

Para definir la orientación de un cuerpo rígido se necesitan dos marcos de referencia: el marco de referencia inercial I y el marco de referencia en el cuerpo B , fijado en su centro de masa.

Asumiendo que cada marco de referencia está definido por tres vectores ortogonales unitarios ordenados de acuerdo a la regla de la mano derecha, la orientación de un cuerpo rígido, como una transformación lineal, está representada por una matriz de 3×3 que transforma un vector dado en el marco de referencia en el cuerpo a el marco de referencia inercial. Los tres vectores columna de la matriz representan los tres vectores ortogonales unitarios base del marco de referencia inercial vistos desde el marco de referencia en el cuerpo. La matriz resultante, referida como matriz de rotación, representa

la orientación física del cuerpo rígido.

2.2.2. Matrices de rotación

El conjunto de todas las matrices de rotación es el grupo ortogonal especial de rotaciones rígidas en \mathbb{R}^3 , que es denotado por $SO(3)$.

Sea $x \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario. Sus coordenadas en los marcos de referencia I y B son x^I y x^b , respectivamente. La relación entre ambos está definida por la matriz de rotación:

$$x^I = {}^I R_b x^b = R x^b, \quad (2.16)$$

donde $R = {}^I R_b$ es la matriz de rotación del satélite con respecto al sistema inercial (ver Figura 2.1). De acuerdo con las propiedades del grupo $SO(3)$ se puede obtener fácilmente el mapeo inverso, del marco de referencia inercial al marco de referencia en el satélite:

$$x^b = {}^b R_I x^I = ({}^I R_b)^T x^I = R^T x^I \quad (2.17)$$

Generalmente, la orientación de un cuerpo respecto a un marco de referencia inercial está completamente determinada por la matriz de rotación R , por lo que comúnmente ésta es la salida a controlar en problemas de control de orientación.

Una matriz de rotación tiene nueve elementos, pero está sujeta a la restricción de ortonormalidad, esto significa que existen solo tres elementos independientes. Un reto de trabajar en $SO(3)$ es hacer cumplir la restricción de ortonormalidad. Se puede usar un número menor de elementos para parametrizar la matriz de rotación, pero cualquier representación mínima de tres elementos introducirá singularidades, como es el caso con ángulos de Euler, por lo que una representación mínima no es siempre la más recomendable. Una ventaja de utilizar tres elementos es que el Jacobiano que mapea la velocidad angular con la evolución temporal de la parametrización es invertible en la región de validez de la cinemática, lo que permite desarrollos de controladores análogos a los utilizados en robots manipuladores [4].

Los cuaterniones unitarios, o parámetros de Euler, brindan una representación sin singularidades usando cuatro elementos y una restricción. Esta representación es popular en control de orientación debido a sus propiedades [5].

2.2.3. Cuaternión unitario

El cuaternión se define mediante un elemento escalar y un elemento vectorial:

$$q = [q_0 \quad q_v^T]^T, \quad q_0 \in \mathbb{R}, \quad q_v \in \mathbb{R}^3, \quad (2.18)$$

que satisface la restricción en su norma (o condición de normalización)

$$\|q\|_2^2 = q_0^2 + q_v^T q_v = 1. \quad (2.19)$$

2. PRELIMINARES TEÓRICAS

Cuando trabajamos con cuaterniones cumplir la restricción de la norma es más simple que cumplir la restricción de ortonormalidad. Además el cuaternión tiene la ventaja de que preserva la posibilidad de rotaciones sucesivas como en matrices de rotación.

La matriz de rotación puede calcularse en términos del cuaternión mediante el uso de la fórmula de Rodrigues [1]:

$$R(q) = (q_0^2 - q_v^T q_v)I + 2(q_v q_v^T - q_0 S(q_v)). \quad (2.20)$$

Es importante notar que ambos cuaterniones q y $-q$ corresponden a la misma matriz de rotación, por lo que representan la misma orientación. Esta redundancia hace que obtener el cuaternión de la matriz de rotación sea una tarea muy demandante, sin embargo en [14] se presenta un método más sencillo.

A continuación se definen algunos conceptos del álgebra de cuaterniones útiles para el desarrollo del controlador de orientación.

La norma de un cuaternión está dada por:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_v^T q_v} \quad (2.21)$$

Como se menciona anteriormente, para la representación de orientación se usan cuaterniones unitarios por lo que todos tienen norma unitaria.

Para normalizar un cuaternion, es decir, transformarlo en un cuaternion unitario, se tiene que dividir por su norma:

$$\|q\| = \frac{q}{|q|} \quad (2.22)$$

El conjugado de un cuaternión tiene la parte vectorial cambiada de signo:

$$q^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_v \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Para obtener el cuaternión inverso, su conjugado es normalizado:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|} \quad (2.24)$$

Para todos los cuaterniones unitarios, el inverso es igual a el conjugado ya que tienen norma unitaria.

El producto de dos cuaterniones Q y P está definido por:

$$Q \otimes P = S = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \cdot p_0 - q_v \circ p_v \\ q_0 \cdot p_v + p_0 \cdot q_v + q_v \times p_v \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde \circ es el producto punto de vectores q_v y p_v y \otimes es su producto cruz [15].

Una propiedad importante del cuaternión de rotación inverso es la siguiente relación con la matriz de rotación:

$$R(q^{-1}) = R^{-1}(q) = R^T(q) \quad (2.26)$$

2.2.4. Operador antisimétrico

El operador vectorial aparece comúnmente cuando se trabaja con ecuaciones de velocidad y aceleración para sistemas de dos o más variables por lo que a continuación se define el operador antisimétrico $S(\cdot)$ el cual hace más simple el manejo del producto cruz entre vectores transformandolo en un producto simple de matrices. A continuación se define el operador antisimétrico y se presentan algunas propiedades útiles retomadas de [16] para el manejo del operador antisimétrico $S(\cdot)$.

Definición 2.2 (*Operador Antisimétrico*) Sea $u \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario, es decir, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, el operador antisimétrico $S(u)$ se define como:

$$S(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Teorema 2.4 (*Propiedades del Operador Antisimétrico*) Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^3$, el operador antisimétrico $S(\cdot)$ verifica las siguientes propiedades:

$$S(u)v = u \times v \quad (2.28)$$

$$S(u)v = -S(v)u \quad (2.29)$$

$$S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.30)$$

$$S(u)S(v)w = -S(v)S(w)u - S(w)S(u)v \quad (2.31)$$

$$S(u) = R^T S(Ru)R, \quad R \in SO(3) \quad (2.32)$$

$$S(u)S(v) = -u^T v I_3 + v u^T \quad (2.33)$$

$$\|S(u)\|_2 = \|u\|_2 \quad (2.34)$$

Las respectivas pruebas se pueden encontrar en [16].

2.2.5. Ecuación cinemática

Cuando el satélite con marco de referencia \mathbf{B} rota con velocidad angular ω alrededor del marco inercial \mathbf{I} entonces se puede decir que la matriz de rotación es una función

del tiempo, $R = R(t)$. Así pues, la cinemática del satélite está dada por la evolución temporal de la matriz de rotación [17]

$$\dot{R} = RS(\omega), \quad (2.35)$$

recordando que $R = {}_bR^I$ es la matriz de rotación que mapea del marco de referencia en el satélite a coordenadas inerciales, $\omega = \omega^b$ es la velocidad angular del satélite medido en coordenadas del satélite y $S(\cdot)$ está definido anteriormente.

Por otro lado la cinemática también se puede expresar en términos de la parametrización

$$\dot{q} = \frac{1}{2}J(q)\omega, \quad (2.36)$$

donde $J(q)$ es conocido como el Jacobiano de la cinemática, definido por

$$J(q) = \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I + S(q_v) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Algunas propiedades útiles de este Jacobiano se presentan en el siguiente lema retomado de [18].

Lema 2.2 (*Propiedades de la matriz Jacobiana de la cinemática*) Para toda $x, y \in \mathbb{R}^4$ el Jacobiano verifica las siguientes propiedades:

- A1.** $J^T(x)J(x) = \|x\|_2^2 I_3,$
- A2.** $J^T(x)y = 0 \Leftrightarrow y = kx, \quad k \in \mathbb{R},$
- A3.** $J(\alpha x + \beta y) = \alpha J(x) + \beta J(y) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- A4.** $J^T(x)y = -J^T(y)x,$
- A5.** $\|J(x)\|_2 = \|x\|_2,$
- A6.** $\frac{d}{dt}(J(x)) = J(\dot{x}).$

Demostración: Las pruebas de estas propiedades se encuentran en el anexo de este trabajo.

2.2.6. Ecuación dinámica

El movimiento del satélite puede ser impulsado de dos maneras: pares externos, como cohetes o propulsores, o pares internos generados por dispositivos de intercambio o almacenamiento de momentum angular, como ruedas de reacción o giroscopios de control. La dinámica de la orientación para un satélite está dada por [2]:

$$M\dot{\omega} = S(h)\omega + \tau, \quad (2.38)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

es la matriz de inercia constante simétrica positiva definida, $\tau(t) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de torques de control, y $h \in \mathbb{R}^3$ es el momento angular total del satélite, todos expresados en coordenadas del satélite.

En este trabajo se consideran ruedas de reacción como actuadores principales por lo que $h = R^T h^I$, con $h^I = [h_1^I \ h_2^I \ h_3^I]^T$ como el momento angular total expresado en coordenadas inerciales [6]. La matriz de inercia en coordenadas del satélite es constante, es decir, que se conoce su norma en todo momento. El vector de momento angular total en coordenadas inerciales es constante también.

2.2.7. Parametrización lineal de la planta

Ya que la dinámica de la orientación del satélite (2.38) pertenece a dinámicas de sistemas Lagrangianos, es posible obtener una parametrización lineal de la manera

$$\tau = M\dot{\omega} + S(\omega)h = Y(q, \omega, \dot{\omega})\theta, \quad (2.40)$$

donde $Y(q, \omega, \dot{\omega}) \in \mathbf{R}^{3 \times n_\theta}$ es el regresor, y $\theta \in \mathbf{R}^{n_\theta}$ es el vector de parámetros de dimensión n_θ .

Específicamente,

$$Y(q, \omega, \dot{\omega}) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 & \dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_3 & 0 & 0 & 0 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & \dot{\omega}_1 & 0 & \dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_3 & 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & \dot{\omega}_1 & 0 & \dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

$$\theta = [m_{11} \ m_{12} \ m_{13} \ m_{22} \ m_{23} \ m_{33} \ h_1^I \ h_2^I \ h_3^I]^T,$$

donde los elementos $p_{i,j}$ provienen del término $S(\omega)R^T(q) = P(\omega, q) := [p_{ij}]$.

Note que el regresor (2.40) depende de la derivada de la velocidad angular $\dot{\omega}$, la cual no es medible en aplicaciones reales. Sin embargo, la dependencia de $\dot{\omega}$ puede eliminarse por medio de un filtrado como se muestra a continuación.

Considere

$$\tau_f = F(s)\tau, \quad (2.41)$$

que es la versión filtrada de τ donde

$$F(s) = \frac{\lambda_F}{s + \lambda_F}, \quad \lambda_F > 0, \quad (2.42)$$

es un filtro lineal de primer orden con $s := d/dt$ denotando el operador derivada. Por lo que

$$\tau_f = Y_f(q, \omega)\theta, \quad (2.43)$$

con $Y_f(q, \omega)$ como el regresor filtrado

$$Y_f(q, \omega) = F(s)Y(q, \omega, \dot{\omega}). \quad (2.44)$$

2.3. Condición de excitación persistente (PE) y suficientemente excitante (SE)

Considere el regresor de la dinámica del sistema (2.38) de la forma (2.40). Se establece entonces la siguiente definición.

Definición 2.3 (Condición PE y SE [9]) *El regresor (acotado) $Y(q, \omega, \dot{\omega})$ se dice que es de excitación persistente (PE) si para algún t_2 , $\alpha_2 \geq 0$ y para todo $t \geq 0$*

$$\int_t^{t+t_2} Y^T(\tau)Y(\tau)d\tau \geq \alpha_2 I, \quad (2.45)$$

es suficientemente excitante (SE), si para algún t_2 , $\alpha_2 \geq 0$

$$\int_0^{t_2} Y^T(\tau)Y(\tau)d\tau \geq \alpha_2 I, \quad (2.46)$$

donde $Y(\tau) = Y(q(t), \omega(t), \dot{\omega}(t))$.

△

Como se indica en [9], la condición PE implica la condición SE, pero lo contrario no es cierto, ya que mientras PE exige que el regresor sea excitante en una ventana de tiempo móvil para todo tiempo, la SE se satisface con un regresor excitante en una ventana de tiempo para algún momento.

La condición (2.45) es crucial en cualquier esquema adaptable donde la convergencia de los parámetros es uno de los objetivos.

2.4. Estabilidad asintótica casi-global

Una definición que será de gran utilidad dentro del diseño del controlador es el concepto de *estabilidad asintótica casi-global* que se presenta a continuación.

Definición 2.4 (*Estabilidad casi-global asintótica [19]*) *Un punto de equilibrio x^* de un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ (es decir $f(x^*) = 0$) se dice asintótica y casi globalmente estable si es asintóticamente estable para cualquier condición inicial $x(0)$ excepto para un conjunto finito y conocido de condiciones iniciales.*

△

Capítulo 3

Control ideal para seguimiento de orientación

El objetivo de este trabajo es llevar la orientación de un satélite a una trayectoria deseada variante en el tiempo que inicia desde cualquier condición inicial. La trayectoria deseada, en este trabajo, está dada por el cuaternión deseado q_d y su derivada \dot{q}_d , los cuales se asume que son uniformemente continuos. El objetivo de seguimiento se cumple cuando $q \rightarrow q_d$, $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ en tanto $t \rightarrow \infty$.

En este capítulo se desarrolla un esquema de control de seguimiento de orientación asumiendo que se cuenta con el conocimiento de la matriz de inercia y de los momentos angulares totales. La teoría de contracción es utilizada como herramienta principal para el desarrollo de estos diseños.

3.1. Diseño del controlador ideal

Es de particular interés la elección de los errores de seguimiento, y en consecuencia, las variables compuestas. Para la definición del error nos basamos en el trabajo [4] donde operan con una definición del error de orientación más convencional:

$$q_e = q - q_d. \quad (3.1)$$

La ventaja de esta representación es que su manejo resulta ser más simple. En particular si $q \rightarrow q_d$, q_e tiende a cero, se garantiza que la orientación del satélite sea la misma que la trayectoria deseada evitando el *fenómeno de desplegado* (*unwinding*) en el que, de manera sencilla, el satélite desperdicia esfuerzo de control para llegar a la misma orientación. Este fenómeno es análogo al problema de equilibrar un péndulo, el sistema puede dar un giro de 360 grados cuando un movimiento menor en sentido contrario resultaría suficiente.

Cuando la trayectoria deseada se prescribe con q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d , entonces ω_d y $\dot{\omega}_d$ pueden obtenerse fuera de línea con un cálculo algebraico. De acuerdo con esto, en adelante se

3. CONTROL IDEAL PARA SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN

supone que la trayectoria deseada está acotada por:

$$\begin{aligned}\|q_d\| &= 1 \\ \|\dot{q}_d\| &= c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \|\ddot{q}_d\| &= c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}^+\end{aligned}\tag{3.2}$$

Se define la trayectoria deseada y sus respectivas derivadas q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d . Estos valores pueden estar en dos formulaciones comunes: a través de una matriz de rotación (R_d , \dot{R}_d , \ddot{R}_d) ó a través de la representación eje-ángulo de Euler.

En el presente trabajo se eligió esta última representación, debido a que se puede elegir un eje arbitrario en el espacio de tal manera que si lo dejamos fijo, nos enfocáramos tan solo al ángulo necesario para obtener la trayectoria deseada. De manera física, el eje que fijamos k_d representa el radio de la órbita medido desde el centro de la Tierra hasta el satélite, de tal manera que

$$q_d = [q_{d_0} \quad q_{d_v}^T]^T\tag{3.3}$$

con

$$q_{d_0} = \cos\left(\frac{\phi_d}{2}\right), \quad q_{d_v} = k_d \sin\left(\frac{\phi_d}{2}\right).\tag{3.4}$$

donde ϕ_d representa un giro alrededor del eje k_d . Para obtener \dot{q}_d y \ddot{q}_d se debe derivar tantas veces como sea necesario la expresión (3.3).

Además, la velocidad angular deseada, ω_d , está definida por:

$$\dot{q}_d = \frac{1}{2}J(q)\omega_d + \Lambda(q - q_d).\tag{3.5}$$

Por simplicidad, $\Lambda = \lambda_c I$ con $\lambda_c > 0$.

La ley de control por realimentación de estados se propone como:

$$\tau = M\dot{\omega}_d - S(h)\omega_d - K_c(\omega - \omega_d),\tag{3.6}$$

donde $K_c = K_c^T > 0$ es la ganancia del controlador. La velocidad angular deseada ω_d , de acuerdo con (3.5) y a la propiedad **A1** del *Lema 2.2*, está dada por

$$\omega_d = 2J^T(q)\left(\dot{q}_d - \lambda_c(q - q_d)\right).\tag{3.7}$$

Esta se puede simplificar aún más por la Propiedad **A2** del *Lema 2.2* como

$$\omega_d = 2J^T(q)(\dot{q}_d + \lambda_c q_d).\tag{3.8}$$

Usando esta expresión, $\dot{\omega}_d$ se calcula como

$$\dot{\omega}_d = 2J^T(q)(\ddot{q}_d + \lambda_c \dot{q}_d) - \Delta\omega,\tag{3.9}$$

donde Δ está definida por

$$\Delta = \Delta(q, q_d, \dot{q}_d) := \left(J^T(\dot{q}_d) + \lambda_c J^T(q_d) \right) J(q). \quad (3.10)$$

Note que Δ es una función acotada tan grande como \dot{q}_d esté acotada (q y q_d siempre lo son). Ya que este perfil es parte de la trayectoria preescrita, para una aplicación dada, la suposición siempre se cumple. Además $J(q)$ también es acotada puesto que para la construcción de la matriz Jacobiana se utilizan siempre cuaterniones que a su vez, por tratarse de movimientos rotatorios, son unitarios.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (*Convergencia exponencial casi-global:*) *La ley de control definida por (3.6), (3.5), y (3.9), en lazo cerrado con el sistema (2.36), (2.38) lleva $[q^T \ \dot{q}^T]^T$ a $[q_d^T \ \dot{q}_d^T]^T$ exponencialmente desde cualquier condición inicial, excepto en $[q^T(0) \ \dot{q}^T(0)]^T = [-q_d^T(0) \ 0]^T$.*

Demostración: Para casi cualquier punto, excepto los establecidos anteriormente, considere la ley de control (3.5) y (3.6) la cual puede reordenarse de la siguiente manera:

$$M\dot{\omega}_d = S(h)\omega_d + K_c(\omega - \omega_d) + \tau, \quad (3.11)$$

$$\dot{q}_d = \frac{1}{2}J(q)\omega_d + \lambda_c(q - q_d). \quad (3.12)$$

De acuerdo con la forma del controlador, la dinámica de orientación (2.38) y la cinemática (2.36), sugieren un sistema virtual de la forma

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(h)\xi_1 + K_c(\omega - \xi_1) + \tau, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2}J(q)\xi_1 + \lambda_c(q - \xi_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde es importante notar que $\xi = [\xi_1^T \ \xi_2^T]^T$ tiene dos soluciones conocidas para condiciones iniciales dadas: $[w^T \ q^T]^T$ y $[w_d^T \ q_d^T]^T$, las cuales corresponden a la planta (dinámica y cinemática de orientación) y al controlador, respectivamente.

Ahora, para el análisis de la dinámicas desarrollamos el desplazamiento infinitesimal dado por

$$M\delta\dot{\xi}_1 = S(h)\delta\xi_1 - K_c\delta\xi_1, \quad (3.14)$$

$$\delta\dot{\xi}_2 = \frac{1}{2}J(q)\delta\xi_1 - \lambda_c\delta\xi_2. \quad (3.15)$$

3. CONTROL IDEAL PARA SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN

Reordenando la dinámica podemos escribir el desplazamiento infinitesimal por

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\dot{\xi}_1 \\ \delta\dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S(h) - K_c & 0 \\ \frac{1}{2}J(q) & -\lambda_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi_1 \\ \delta\xi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Así, la evolución de su longitud cuadrática bajo la métrica $\mathbb{M} := \text{diag}\{M, I\}$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbb{M} \delta\xi) &= \delta\xi_1^T M \delta\dot{\xi}_1 + \delta\xi_2^T \delta\dot{\xi}_2 \\ &= -\delta\xi_1^T K_c \delta\xi_1 - \lambda_c \delta\xi_2^T \delta\xi_2 + \delta\xi_2^T \frac{1}{2} J^T(q) \delta\xi_1 \\ &= -\delta\xi^T \underbrace{\begin{bmatrix} K_c & 0 \\ -\frac{1}{2}J(q) & \lambda_c I \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \delta\xi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como se puede observar, el sistema tiene una configuración jerárquica. Recordando que ambos términos K_c y λ_c son definidos positivos por diseño, las dinámicas de ξ_1 y ξ_2 son contrayentes con tasa de contracción $\lambda_{\min}\{K_c\}/\lambda_{\max}\{M\}$ y λ_c , respectivamente. Debido a que el término $-\frac{1}{2}J(q)$ es acotado, el sistema virtual total es contrayente con velocidad de contracción $\min\{\lambda_{\min}\{K_c\}/\lambda_{\max}\{M\}, \lambda_c\}$, implicando que las soluciones particulares convergen exponencialmente una a la otra. Esto quiere decir que $\omega \rightarrow \omega_d$ y $q \rightarrow q_d$ exponencialmente. Además, nos permite ver que de

$$\dot{q} - \dot{q}_d = \frac{1}{2} J(q) \{(\omega - \omega_d) - \lambda_c(q - q_d)\} \quad (3.18)$$

$\dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ exponencialmente, alcanzando el objetivo de seguimiento.

Sin embargo, podemos notar que cuando la condición inicial es el equilibrio opuesto, es decir, el punto dado por $[q^T(0) \dot{q}^T(0)]^T = [-q_d^T(0) 0]^T$, resulta que

$$\omega_d(0) = 2J^T(q(0)) \{-2\lambda_c q(0)\} = \omega(0) = 0. \quad (3.19)$$

Así cuando la ley de control es aplicada, el efecto de la acción de control, $K_c(\omega - \omega_d)$ es nulificada. Si se lleva a cabo el mismo análisis de contracción en tal punto, la matriz Jacobiana \mathbf{J} en (3.17) resultará negativa semidefinida lo que significa que el sistema no es contrayente en este punto. El sistema permanecerá indefinidamente en este simple punto hasta que una perturbación lo aleje de él.

△

Debido a que $\dot{\omega} \rightarrow \dot{\omega}_d$ exponencialmente, se puede observar que $\omega \rightarrow \omega_d$ y $q \rightarrow q_d$ exponencialmente. Por lo que únicamente $\omega \rightarrow \omega_d$ y $q \rightarrow q_d$ se establecerá para el resto del trabajo.

Por otro lado, como ya se mencionó, la trayectoria deseada puede originarse de dos formulaciones comunes: matrices de rotación y representación eje-ángulo de Euler. Dada una matriz de rotación, existen dos cuaterniones y dos parametrizaciones eje-ángulo.

Ambas pueden ser elegidas para obtener la trayectoria en términos de cuaterniones pero es prudente seleccionar la condición inicial más cercana del sistema. Esto puede verificarse fácilmente a través de la parte escalar del cuaternión del error definido en [5].

Es importante mencionar que el resultado *casi-global* es muy común en las formulaciones con cuaterniones. Una ley de control continua no puede ser convergente globalmente para una parametrización no mínima. El término usado es *estabilidad casi-global*, esto significa que es global excepto para un conjunto finito bien definido de puntos en el espacio de estado.

Una simple manera de entender el resultado semi-global es desde el punto de vista del equilibrio. El sistema tiene dos puntos de equilibrio definidos por $q = q_d, \omega = 0$ y $q = -q_d, \omega = 0$. En ambas instancias, la entrada de control es anulada. Esta multiplicidad es la causa del resultado semi-global. El primero es un punto de equilibrio estable, mientras que el último es inestable. Si el sistema en el segundo punto de equilibrio es sujeto a una perturbación arbitrariamente pequeña este se moverá hacia el punto de equilibrio estable bajo una acción de control.

3.2. Simulación del controlador

Para ilustrar el desempeño del control ideal, se llevaron a cabo simulaciones numéricas. La dinámica del satélite es la misma que la utilizada en [6]. El satélite tiene un momento angular total $h^I = [1 \ -1 \ 0]$ y la matriz de inercia es

$$M = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

El desempeño del controlador se verificó mediante una trayectoria deseada definida por un ángulo ϕ_d y un vector k_d idénticos a los descritos en [4] donde el eje de rotación $k_d = (1/\sqrt{3}) [1 \ 1 \ 1]^T$ se fijó en el marco de referencia inercial.

La trayectoria deseada para la orientación se muestra en la Fig. 3.1 mientras que la velocidad angular deseada y su derivada en las Fig. 3.2. Como se puede observar la trayectoria emula un barrido al principio y un caso de regulación en una posición fija.

Los valores de los parámetros de diseño se trataron de proponer tan cercanos a los dados en el trabajo [6] para así poder hacer una buena comparación y verificar su correcto funcionamiento, por lo que en la Tabla 3.1 se muestran los parámetros de diseños y sus respectivos valores. Las condiciones iniciales obtenidas fueron calculadas a través de

$$\omega(0) = M^{-1}R^T(q(0))h^I, \quad \dot{q}(0) = \frac{1}{2}J(q(0))w(0). \quad (3.21)$$

En la Fig. 3.3, podemos notar como la trayectoria actual se acerca mucho a la deseada mientras que la velocidad angular tan solo tiene la forma de la trayectoria deseada en algunos tramos sin embargo, cuando el tiempo aumenta los valores tienden

3. CONTROL IDEAL PARA SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN

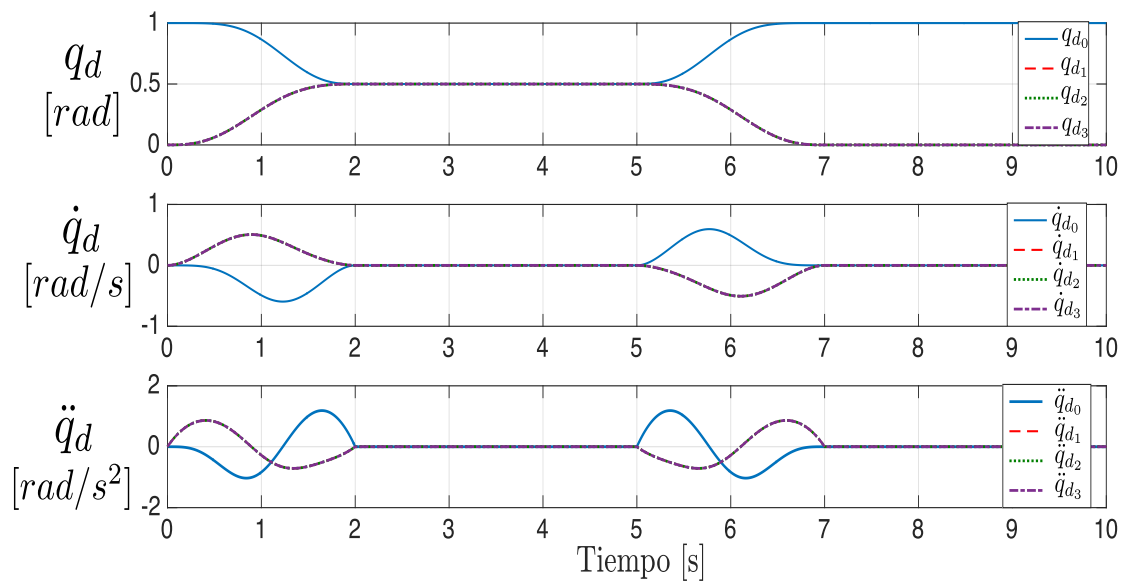


Figura 3.1: Trayectoria deseada: orientación q_d , velocidad \dot{q}_d y aceleración \ddot{q}_d en términos de cuaterniones.

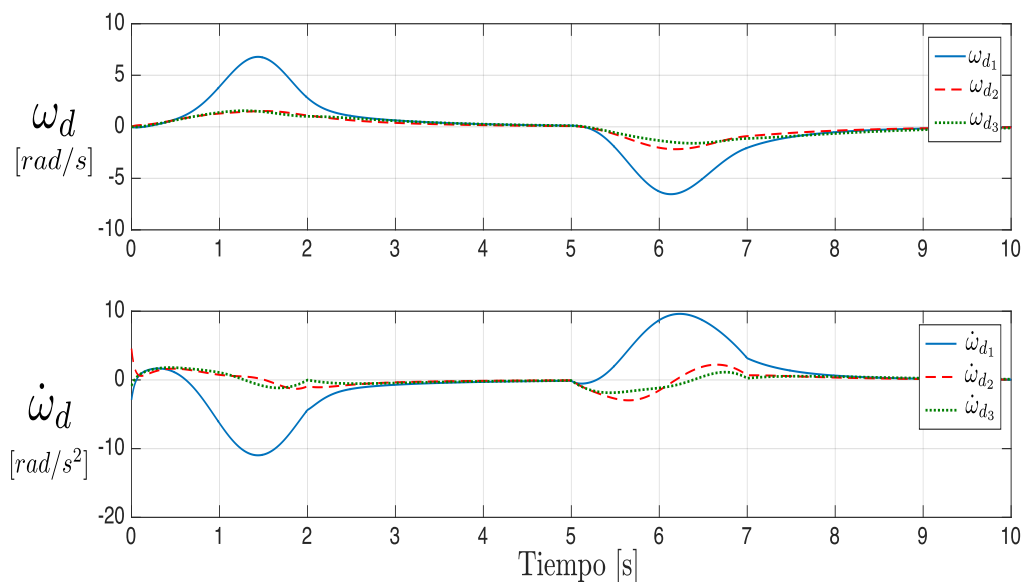


Figura 3.2: Velocidad angular deseada y su derivada: ω_d y $\dot{\omega}_d$.

Parámetro	Valor
K_c	$25I$
λ_c	25
$q(0)$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
$\omega(0)$	$[0.2 \ -0.142 \ 0]^T$
$\phi_d(0)$	0
$\omega_d(0)$	0

Tabla 3.1: Parámetros para la simulación del controlador ideal.

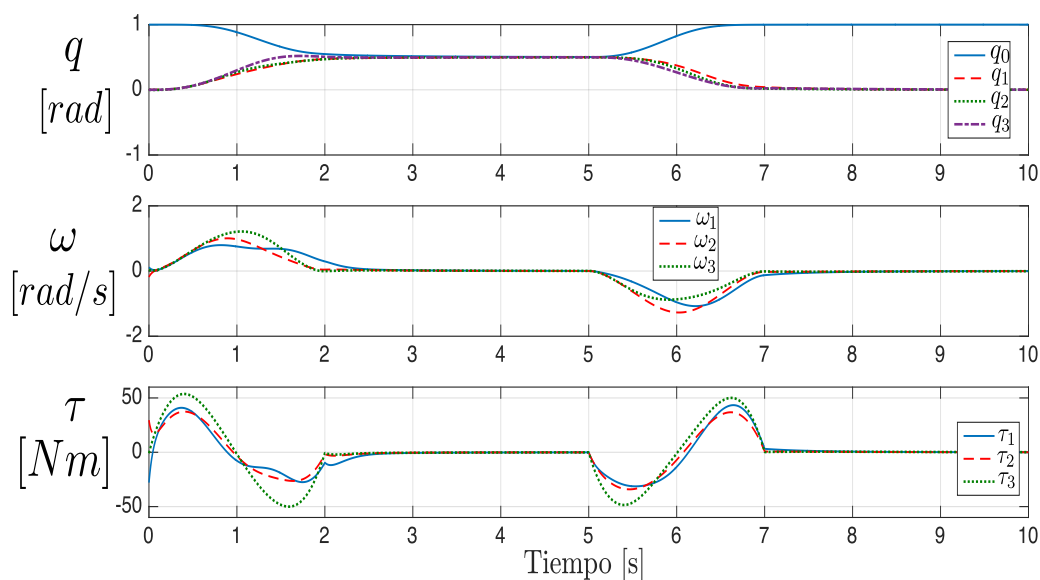


Figura 3.3: Cuaternión de posición q , velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador ideal.

a los deseados. Es importante mencionar que los valores de los esfuerzos de control alcanzan valores muy grandes debido a que el tiempo de la trayectoria es muy pequeño, así entre más alto el valor de las ganancias del controlador y los valores altos de la matriz de inercia implican un mayor esfuerzo de control. Sin embargo, en la implementación del controlador no se tendría algún problema con los actuadores puesto que actualmente existe la tecnología para conseguir valores de torque que van desde 0.1 a 250 $[N \cdot m]$.

Se puede observar en la Fig. 3.4 que los errores de seguimiento son muy pequeños y se alcanza un valor de cero exponencialmente, razón por la que podemos confiar en que los resultados son los esperados, sin embargo, no hay que dejar de lado el hecho de que aún no se sustituyen los parámetros estimados por lo que el objetivo de control no se ha cumplido por completo.

En el siguiente capítulo se trata la problemática de las incertidumbres paráme-

3. CONTROL IDEAL PARA SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN

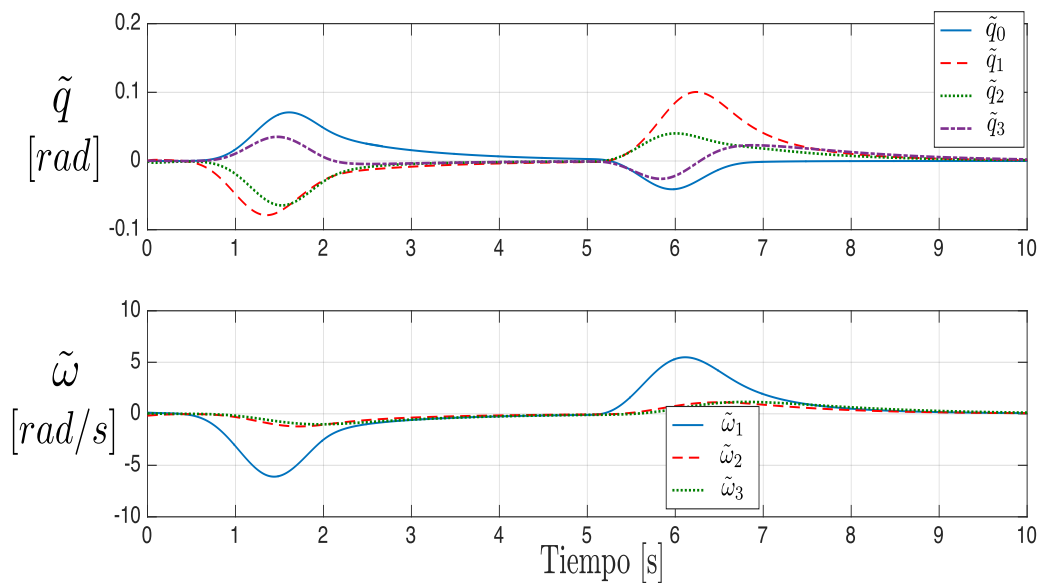


Figura 3.4: Eroses de seguimiento \tilde{q} y $\tilde{\omega}$ del controlador ideal.

tricas sin dejar tener en cuenta el resultado obtenido en el diseño ideal. Aunque los requerimientos de convergencia paramétrica exigen algunas condiciones un tanto más estrictas, el controlador diseñado deberá ser capaz de alcanzar esta convergencia en los parámetros sin contar con restricciones en la señal de entrada.

Capítulo 4

Controlador adaptable

A lo largo de los años, se han presentado varios controladores adaptables de seguimiento de orientación para diferentes clases de satélites usando diferentes parametrizaciones. En [4] los autores proponen una aproximación basada en pasividad usando ángulos de Euler. El controlador resultante asegura convergencia asintótica a la trayectoria deseada. Sin embargo, debido a la parametrización de orientación utilizada, el resultado es local, es decir que solamente se puede utilizar la mitad del espacio tridimensional. Además, las ecuaciones cinemáticas y dinámicas fueron introducidas en una ecuación más compleja, muy parecida a la usada en control de robots manipuladores. Las limitaciones de este esquema son rectificadas en [6] donde se emplea una parametrización diferente, cuaterniones de rotación. El resultado es también asintótico, aunque es casi-global en el sentido definido en [5]. El presente trabajo toma como punto de partida la parametrización lineal utilizada en [6] para satélites, mientras que los datos de simulaciones están basados en los de [4]. Por otro lado, para resolver el problema de convergencia paramétrica, se revisó el algoritmo de adaptación desarrollado para robots en [9] y se adaptó para el caso de satélites.

La principal contribución de esta tesis es el diseño de un controlador adaptable de seguimiento de orientación por realimentación de estados capaz de lidiar con incertidumbre paramétrica que alcanza convergencia exponencial casi-global usando análisis de contracción. Esta aproximación permite un simple y transparente análisis y diseño, comparado con las teorías de Lyapunov y pasividad empleadas en trabajos de la bibliografía consultada. La relación entre las ganancias del controlador y el desempeño deseado del sistema total está claramente definido, como lo notamos en las simulaciones del controlador ideal, haciendo el proceso de sintonización mucho más fácil. Además, se alcanza convergencia exponencial, superando la naturaleza asintótica de algunos resultados previos.

En este capítulo se utiliza el marco de contracción para diseñar un controlador adaptable para seguimiento de orientación. Basados en el diseño del controlador ideal del capítulo anterior, se sustituyen los parámetros que asumimos conocidos por sus estimados de manera similar al principio de equivalencia cierta para sistemas lineales. Se establecen también las condiciones bajo las cuales se alcanza convergencia paramétrica sin dejar de tener en cuenta los objetivos de seguimiento del esquema de control total.

4.1. Parametrización del controlador ideal

Como se mostró en el Capítulo 2, la dinámica de la planta puede ser parametrizada como en (2.40), de manera similar un paso muy importante para el diseño del esquema adaptable es parametrizar la ley de control ideal (3.6), de acuerdo con las ecuaciones dinámicas de orientación (2.40), se tiene que

$$\tau = -K_c(w - w_d) + Y(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)\theta. \quad (4.1)$$

Por lo tanto, la ley de adaptación es obtenida recurriendo al principio de equivalencia cierta substituyendo θ por sus estimados $\hat{\theta}$

$$\tau = -K_c(w - w_d) + Y(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)\hat{\theta}. \quad (4.2)$$

De aquí en adelante el argumento del regresor será omitido para simplificar la notación.

Para desarrollos futuros del controlador la ecuación (4.2) puede reordenarse de la manera

$$\hat{M}\dot{\omega}_d = -S(\omega_d)R^T\hat{h}^I + \tau + K_c(\omega - \omega_d), \quad (4.3)$$

ó en términos del error parametrico $\tilde{\theta}$, esta ecuación se puede escribir como

$$M\dot{\omega}_d = S(R^T h^I)\omega_d + \tau + K_c(\omega - \omega_d) - Y\tilde{\theta}. \quad (4.4)$$

En el diseño del controlador adaptable se utiliza la forma de (4.4) para una mejor visualización del sistema virtual.

4.2. Diseño del control adaptable

La idea principal de esta tesis es lograr un esquema de control capaz de alcanzar convergencia en el error de seguimiento a pesar de tener incertidumbre en parámetros de inercia y momento angular total; además, se utiliza el análisis de contracción como herramienta de diseño principal.

Recientemente el análisis de contracción ha sido utilizado en varios trabajos, desde esquemas generales de control adaptable para un tipo de sistemas no lineales [27], hasta el diseño de observadores [29] y controladores de orientación para pequeños satélites [18].

El antecedente inmediato de la presente investigación es el trabajo desarrollado en [18] que presenta un tipo de controladores desarrollados por medio del análisis de contracción capaces de alcanzar convergencia en el error de seguimiento sin la necesidad de mediciones de velocidad angular. Sin embargo, una desventaja principal es que aún se necesita conocer los valores exactos de inercia y momento angular, ya que alguna variación de estos parámetros podría ser fatal para los resultados obtenidos.

Por lo tanto, la tesis aquí desarrollada parte del diseño del controlador de [18] que nombramos *controlador ideal* ya que suponemos que contamos con valores de los

parámetros de inercia y momento angular. El reto y principal aportación de la investigación es transformar el controlador ideal para que sea capaz de lidiar con incertidumbre paramétrica y que no pierda sus propiedades de estabilidad.

Explotando las propiedades de pasividad en los satélites [6], nos permite tener una gran flexibilidad en la elección del algoritmo de adaptación.

A pesar de que se puede utilizar prácticamente cualquier algoritmo de adaptación que cumpla con la propiedad de pasividad, se retoma el algoritmo de [9] el cual idealmente se emplea para control de robots manipuladores. Debido a que usa información pasada y al efecto del factor de ponderación, el algoritmo es capaz de obtener un error de seguimiento muy suave además de convergencia paramétrica bajo una condición de excitación más débil que la de excitación persistente.

De tal manera que el vector de parámetros estimados es actualizado por el siguiente algoritmo de adaptación modificado para la dinámica del satélite

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\delta_a \gamma_a g(t) - \gamma_a Y^T(w - w_d), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (4.5)$$

$$\dot{g}(t) = -[\lambda_f I + \delta_a Z(t)]g(t) + \gamma_a Y_f \epsilon(t) - \gamma_a Z(t)Y^T(w - w_d), \quad g(0) = 0, \quad (4.6)$$

$$\dot{Z}(t) = -\lambda_f Z(t) + \gamma_a Y_f^T Y_f, \quad Z(0) = 0, \quad (4.7)$$

donde γ_a y δ_a son constantes positivas (ganancias), mientras que $\lambda_f \geq 0$ es el factor de olvido, y su adecuada elección será aclarada posteriormente.

El error de predicción ϵ es definido como

$$\epsilon \triangleq \hat{\tau}_f - \tau_f, \quad (4.8)$$

y

$$\hat{\tau}_f = Y_f(x, \omega)\hat{\theta}, \quad (4.9)$$

donde Y_f está dado en (2.44).

Teorema 4.1 (*Controlador adaptable*) *Considere la ley de control adaptable (4.2) con el algoritmo de adaptación (4.5)-(4.7), donde se cumple que*

$$Z(t) = \gamma_a \int_0^t e^{-\lambda_f(t-\tau)} Y_f^T(\tau) Y_f(\tau) d\tau \geq \lambda_z I, \quad \forall t \geq T > 0, \quad (4.10)$$

donde $Y_f(t) = Y_f(x(t), \omega(t))$.

Entonces para cualquier condición inicial, excepto $\begin{bmatrix} q^T(0) & \dot{q}^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -q_d^T(0) & 0 \end{bmatrix}^T$,

- 1) Si $\lambda_z > 0$, i.e., $Y_f(t)$ es suficientemente excitante, entonces $[\omega^T \ q^T \ \hat{\theta}^T]^T \rightarrow [\omega_d^T \ q_d^T \ \theta^T]^T$ exponencialmente para todo $t \geq 0$.
- 2) Si $\lambda_z \geq 0$, entonces $[\omega^T \ q^T]^T \rightarrow [\omega_d^T \ q_d^T]^T$ asintóticamente, y $\hat{\theta}$ es acotado para todo $t \geq 0$.

Demostración: Como se mostró en [9], el algoritmo de adaptación (4.5)-(4.7) puede ser escrito de la siguiente manera

$$\gamma_a^{-1} \dot{\hat{\theta}} = -Y^T(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)(\omega - \omega_d) + \delta_a Z(t)(\theta - \hat{\theta}). \quad (4.11)$$

Ahora considere el sistema virtual

$$M \dot{\xi}_1 = S(h)\xi_1 + K_c(\omega - \xi_1) + Y(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)(\theta - \xi_3) + \tau, \quad (4.12)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{1}{2} J(q)\xi_1 + \lambda_c(q - \xi_2), \quad (4.13)$$

$$\gamma_a^{-1} \dot{\xi}_3 = -Y^T(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)(\omega - \xi_1) + \delta_a Z(t)(\theta - \xi_3), \quad (4.14)$$

que puede ser reordenado como

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_a^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{\xi}_1 \\ \delta \dot{\xi}_2 \\ \delta \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S(h)\xi_1 + K_c(\omega - \xi_1) + Y(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)(\theta - \xi_3) + \tau \\ \frac{1}{2} J(q)\xi_1 + \lambda_c(q - \xi_2) \\ -Y^T(q, \omega_d, \dot{\omega}_d)(\omega - \xi_1) - \delta_a Z(t)(\theta - \xi_3) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Note nuevamente que $[\xi_1^T \ \xi_2^T \ \xi_3^T]^T$ en el sistema virtual tiene $[\omega^T \ q^T \ \theta_d^T]^T$ y $[\omega_d^T \ q_d^T \ \hat{\theta}^T]^T$ como dos soluciones particulares, donde $\dot{\theta}_d = 0$, $\theta_d(0) = \theta$, *i.e.*, $\theta_d(t) = \theta \ \forall t \geq 0$.

Para analizar su propiedad de contracción, considere la dinámica del desplazamiento virtual dado por

$$M \delta \dot{\xi}_1 = S(h)\delta \xi_1 - K_c \delta \xi_1 - Y \delta \xi_3, \quad (4.16)$$

$$\delta \dot{\xi}_2 = \frac{1}{2} J(q)\delta \xi_1 - \lambda_c \delta \xi_2, \quad (4.17)$$

$$\gamma_a^{-1} \delta \dot{\xi}_3 = Y^T \delta \xi_1 - \delta_a Z(t)\delta \xi_3, \quad (4.18)$$

que de igual forma puede ser rescrito como

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_a^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{\xi}_1 \\ \delta \dot{\xi}_2 \\ \delta \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S(h) - K_c & 0 & -Y \\ \frac{1}{2} J(q) & -\lambda_c I & 0 \\ Y^T & 0 & \delta_a Z(T) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta \xi_1 \\ \delta \xi_2 \\ \delta \xi_3 \end{pmatrix}}_{\delta \xi_a}. \quad (4.19)$$

Y sea $\delta \xi_a := [\delta \xi_1^T \ \delta \xi_2^T \ \delta \xi_3^T]^T$. La evolución temporal de su longitud cuadrática bajo

la métrica $\mathbb{M}_a := \text{diag}\{M, I, \gamma_a^{-1}\}$ es

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta \xi_a^T \mathbb{M}_a \delta \xi_a) \\
 &= \delta \xi_a^T \mathbb{M}_a \dot{\delta \xi}_a, \\
 &= -\delta \xi_a^T \begin{bmatrix} K_c & 0 & Y \\ -\frac{1}{2} J(q) & \lambda_c I & 0 \\ -Y^T & 0 & \delta_a Z(t) \end{bmatrix} \delta \xi_a, \\
 &= -\delta \xi_a^T \begin{bmatrix} \mathbf{J} & Y \\ -Y^T & \delta_a Z(t) \end{bmatrix} \delta \xi_a, \\
 &= -\delta \xi^T \mathbf{J} \delta \xi - \delta_a \delta \xi_3^T Z(t) \delta \xi_3, \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

donde $\delta \xi$ y $\mathbf{J} \leq -\min\{\lambda_{\min} K_c / \lambda_{\max} M, \lambda_c\} I$ son definidas en (3.17).

Si $\lambda_z > 0$ el sistema virtual (4.16)-(4.18) es contrayente, es decir, $\delta \xi_a \rightarrow 0$ exponencialmente. Por otro lado, si $\lambda_z \geq 0$ el sistema virtual (4.12)-(4.14) es semi-contrayente ya que el análisis de su longitud cuadrática media conlleva una matriz Jacobiana negativa semidefinida. Por lo que $\delta \xi$ tiende a cero asintóticamente mientras $\delta \xi_3$ permanezca acotado. Este resultado permite que $[\omega^T \ q^T]^T \rightarrow [\omega_d^T \ q_d^T]^T$ asintóticamente, y $\hat{\theta}$ sea acotado para todo $t \geq 0$ ya que el vector paramétrico verdadero θ es constante. Δ

La condición PE sobre el regresor es requerido para la mayoría de los algoritmos adaptables existentes para su convergencia. Recordemos que, como se dijo antes, la condición de SE es estrictamente más débil que la condición PE; un regresor que cumple la condición PE siempre satisface la condición SE, mientras que el inverso no es verdad para algunas combinaciones de los parámetros de diseño. El *Teorema 4.1* retoma los resultados de convergencia exponencial de [9] desde el punto de vista del análisis de contracción.

Para $\lambda_f > 0$ la condición (4.10) es equivalente a (2.45). Por otro lado, para $\lambda_f = 0$ la condición (4.10) es SE. Ya que $Z(t)$ es continua en λ_f , la condición (4.10) tiende a ser SE para un λ_f muy pequeño. Por lo tanto, uno puede elegir λ_f basado en la trayectoria deseada tal que la condición (4.10) se cumpla.

Note que el algoritmo de adaptación (4.5)-(4.7) incluye el algoritmo gradiente estándar como un caso especial. Sea $\delta_a = \gamma_a \equiv 0$, entonces en (4.7) y (4.7) $Z(t) = 0$, $g(t) = 0$ y

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma_a Y^T (\omega - \omega_d). \tag{4.21}$$

el cual es el algoritmo gradiente estándar basado en el error de seguimiento de velocidad angular. En la sección de simulaciones se lleva a cabo un caso para demostrar el desempeño de ambos algoritmos de adaptación.

Parámetro	Valor
K_c	$25I$
λ_c	25
$q(0)$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
$\omega(0)$	$[0.2 \ -0.142 \ 0]^T$
$\phi_d(0)$	0
$\omega_d(0)$	0
λ_F	2
δ_a	2
γ_a	1
λ_f	0.1

Tabla 4.1: Parámetros para la simulación del controlador adaptable.

4.3. Simulación del controlador

Como en el caso del controlador ideal, se desarrollaron simulaciones numéricas para verificar el desempeño del controlador para el caso de seguimiento donde se retoma la trayectoria deseada mostrada en las Figs. 3.1-3.2. La idea de la trayectoria deseada es comparar los resultados del trabajo [6] mostrando que se obtiene convergencia en el error de seguimiento y adicionalmente se alcanza convergencia paramétrica. Las condiciones y datos son los mismos utilizados para la simulación del controlador ideal. Aunque los nuevos valores de los parámetros del algoritmo de simulación y de datos iniciales usados para la simulación se muestran en la Tabla 4.1. Ninguna información inicial es asumida acerca de la matriz inercial, y por lo tanto $\hat{\theta}(0) = 0$.

Como se mencionó anteriormente, un caso particular del algoritmo de adaptación propuesto en [9] y retomado para este trabajo, definiendo $\delta_a = \gamma_a \equiv 0$ obtenemos el algoritmo de adaptación gradiente estándar comúnmente usado en algunos trabajos previos.

A manera de comparación, se realizaron simulaciones tratando de emular las mismas condiciones y datos ya que el resultado se asemeja al resultado presentado en [6] en cuanto al algoritmo tipo gradiente de adaptación utilizado, sin embargo, en dicho artículo no se muestra explícitamente el comportamiento de los parámetros estimados ni las entradas de control, lo que claramente muestra una ventaja de implementación del trabajo propuesto en ésta tesis. Por lo tanto en la Fig. 4.1 se puede notar como es el comportamiento de la orientación q , la velocidad angular ω y las entradas de control τ para el algoritmo tipo gradiente estándar como caso especial del esquema de control propuesto.

En la Fig. 4.2 se muestran los errores de seguimiento para el algoritmo gradiente que de igual forma son muy cercanos a los obtenidos anteriormente con el algoritmo de adaptación propuesto en esta tesis. Sin embargo, una diferencia muy marcada está en la convergencia de los parámetros estimados a los reales, ya que como la trayectoria

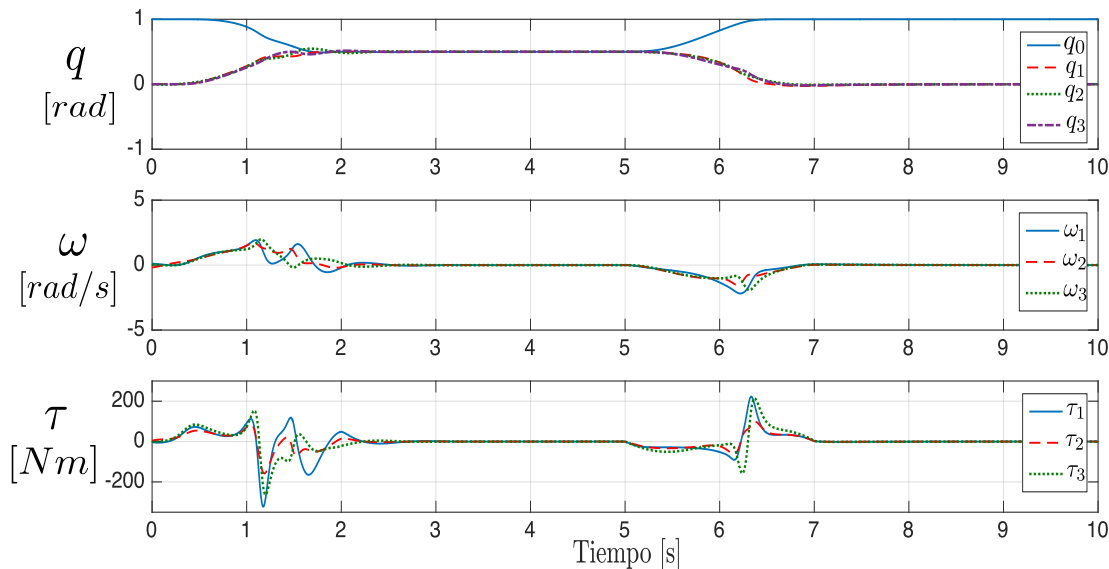


Figura 4.1: Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

deseada no cumple con la condición PE con el algoritmo tipo gradiente no es posible obtener convergencia paramétrica (ver Fig. 4.3); este resultado se puede notar de manera más simple en la Fig. 4.4, donde notamos que las desviaciones paramétrica no están acotadas ni muestran alguna tendencia.

Los resultados de la simulación para la orientación, velocidad angular y entrada de control del controlador adaptable propuesto se muestran en la Fig. 4.5. Podemos notar nuevamente que los esfuerzos de control son muy elevados, esto es debido al poco tiempo de respuesta y a la cantidad de parámetros a estimar.

Los errores de seguimiento de orientación \tilde{q} y de velocidad angular $\tilde{\omega}$ se presentan en la Fig. 4.6, en donde podemos notar como las desviaciones convergen de manera asintótica a cero debido a que la trayectoria deseada no cumple con la condición PE, resultado que era el esperado según el *Teorema 4.2*.

Para comprobar la convergencia en la Fig. 4.7 se puede observar como los parámetros estimados alcanzan sus valores verdaderos asintóticamente, además para una mejor visualización la Fig. 4.8 muestra las desviaciones de los parámetros estimados respecto a los reales. Podemos observar que los resultados del error de seguimiento con el algoritmo gradiente estándar son muy parecidos a los obtenidos con el algoritmo de adaptación propuesto sin embargo, la diferencia radica en la tendencia de los parámetros estimados pues con el algoritmo propuesto existe convergencia paramétrica a pesar de no existen condiciones de excitación persistente.

Una manera de comprobar el desempeño del controlador propuesto es mediante una trayectoria que tenga como objetivo regulación por lo que se propuso la trayectoria

4. CONTROLADOR ADAPTABLE

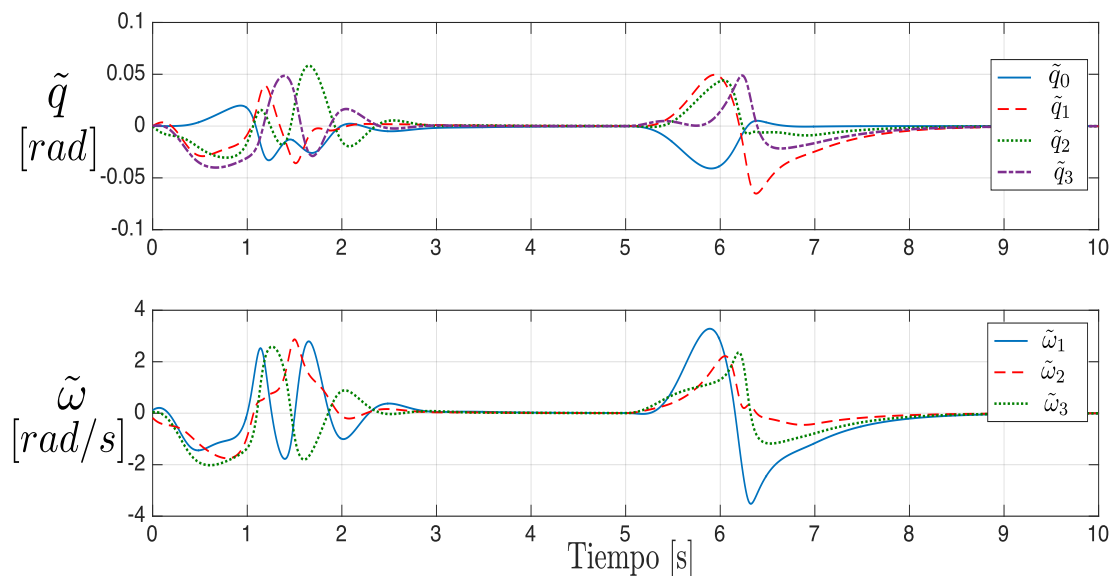


Figura 4.2: Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

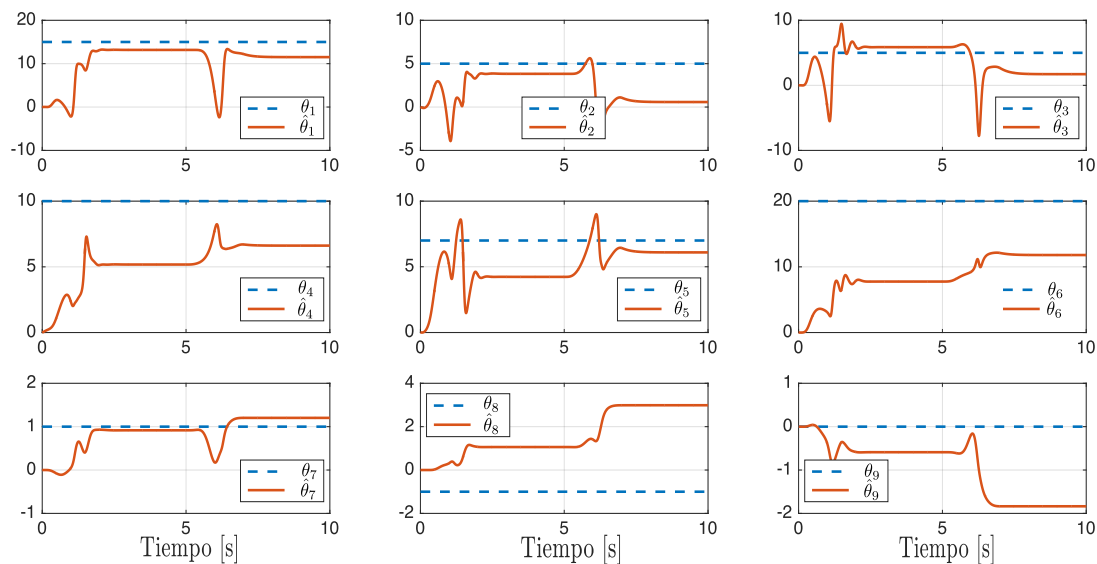


Figura 4.3: Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

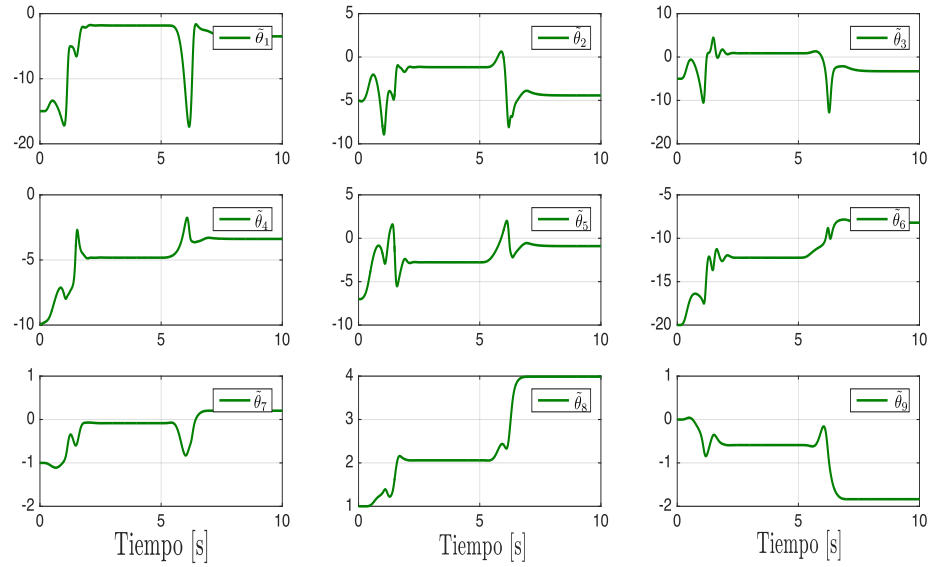


Figura 4.4: Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable con el algoritmo de adaptación gradiente estándar ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

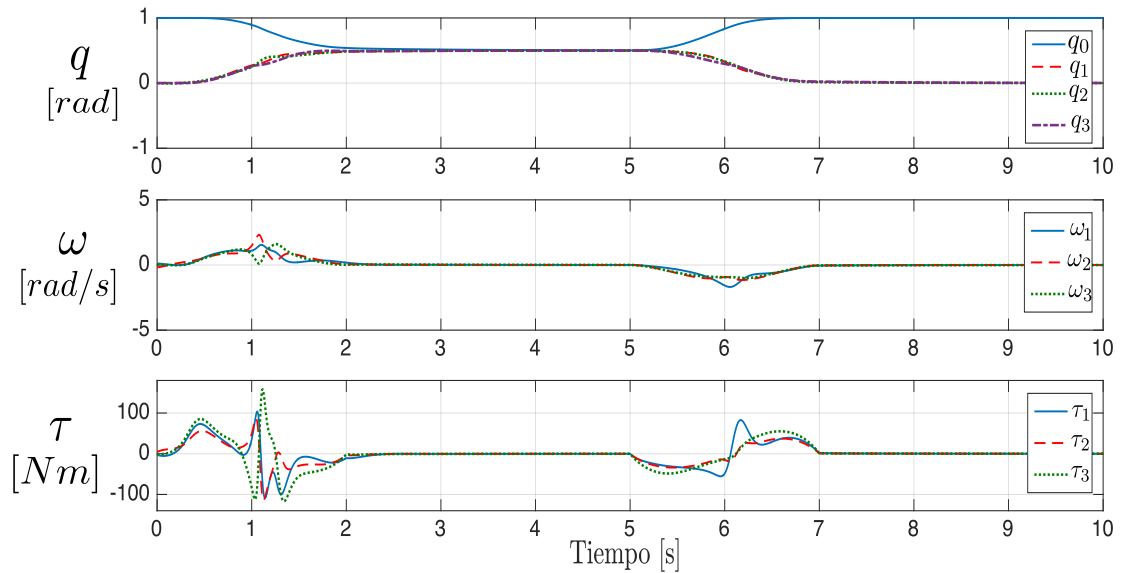


Figura 4.5: Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

4. CONTROLADOR ADAPTABLE

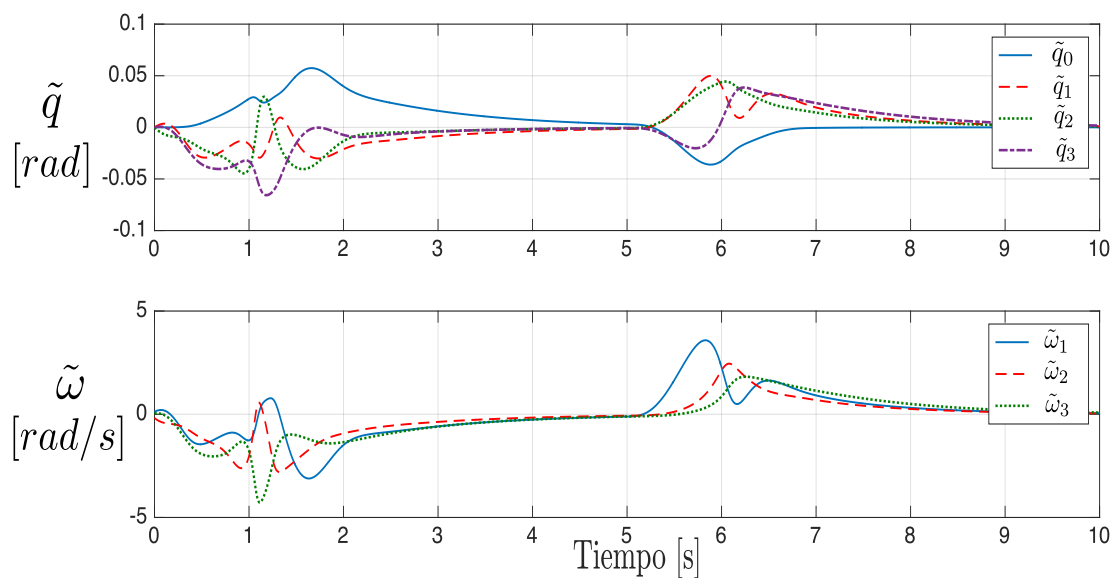


Figura 4.6: Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y Error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

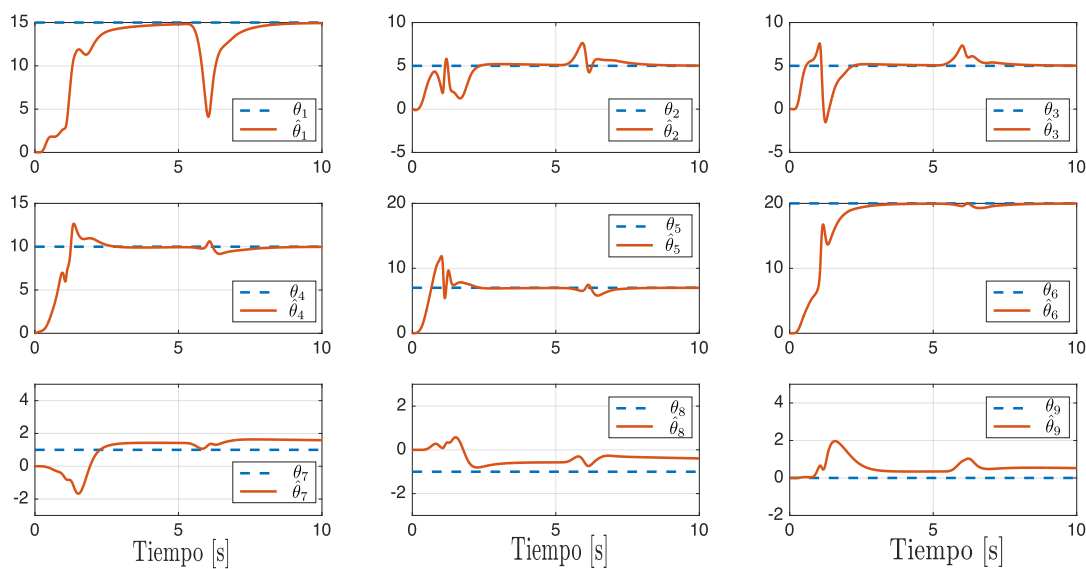


Figura 4.7: Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

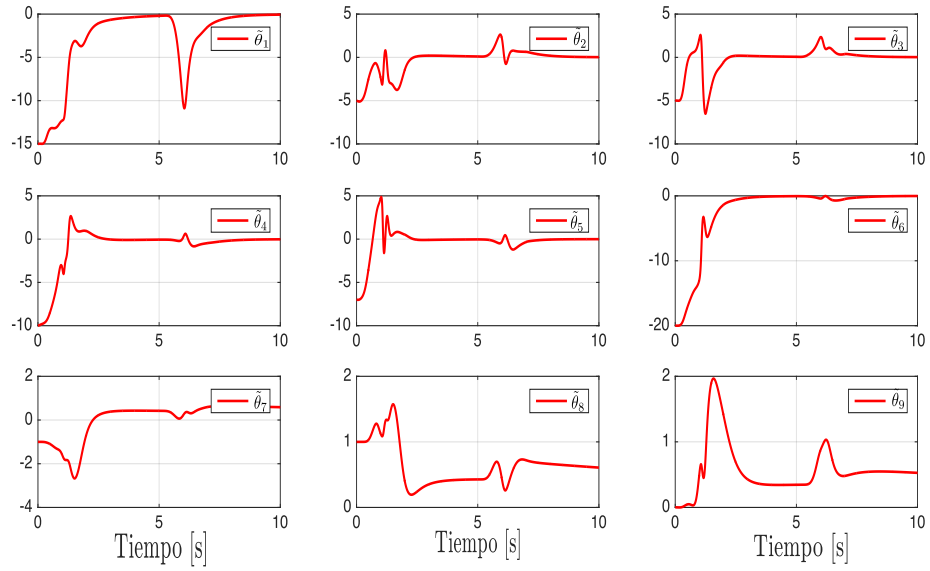


Figura 4.8: Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable propuesto ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

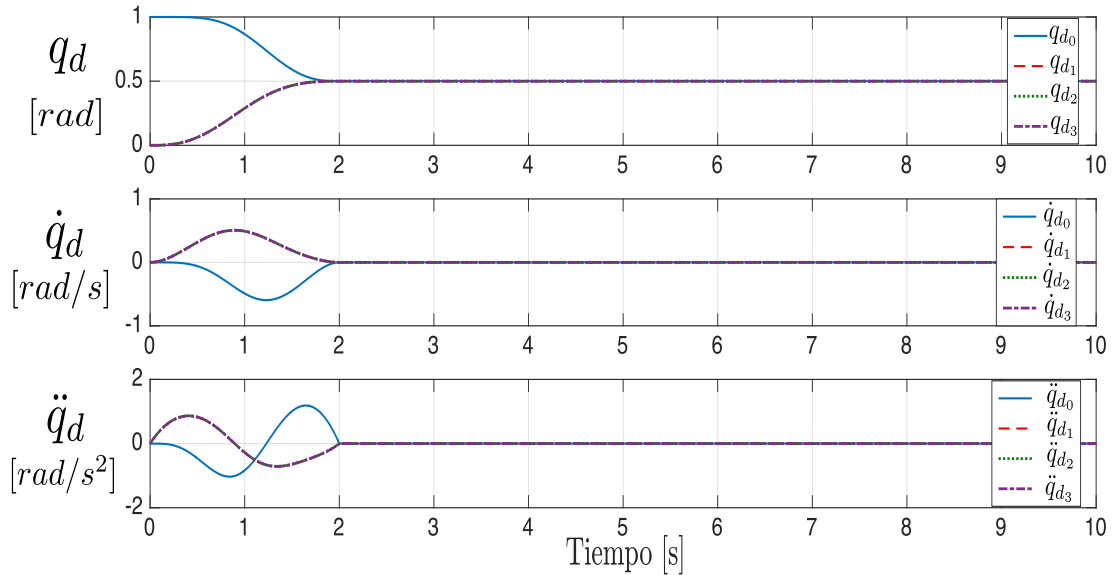


Figura 4.9: Trayectoria deseada (regulación): orientación q_d , velocidad \dot{q}_d y aceleración \ddot{q}_d en términos de cuaterniones ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

4. CONTROLADOR ADAPTABLE

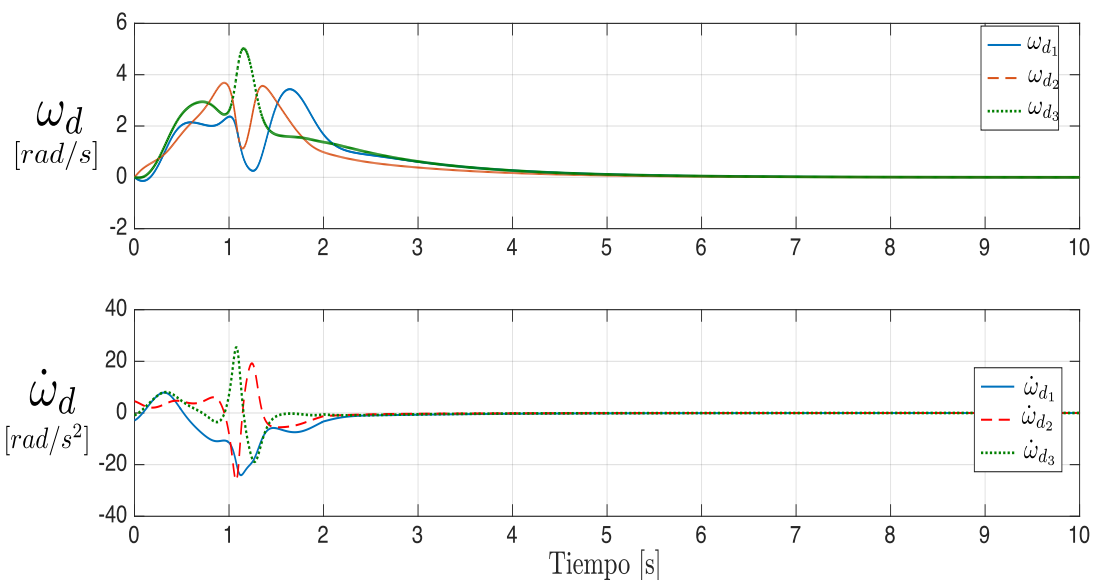


Figura 4.10: Velocidad angular deseada y su derivada: ω_d y $\dot{\omega}_d$ ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

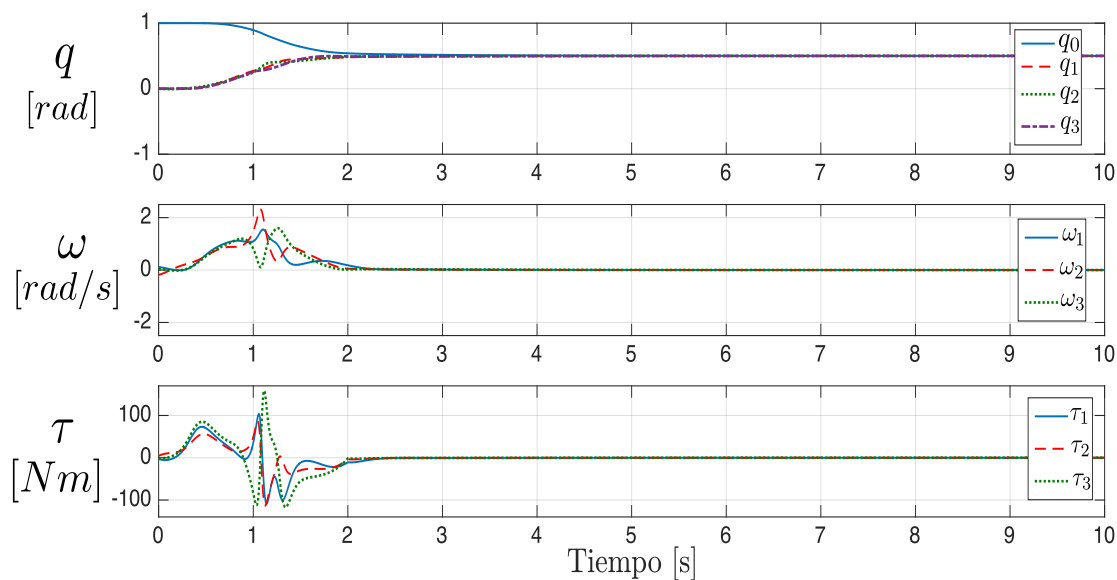


Figura 4.11: Orientación q , Velocidad angular ω y esfuerzo de control τ del controlador adaptable propuesto para el caso de regulación ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

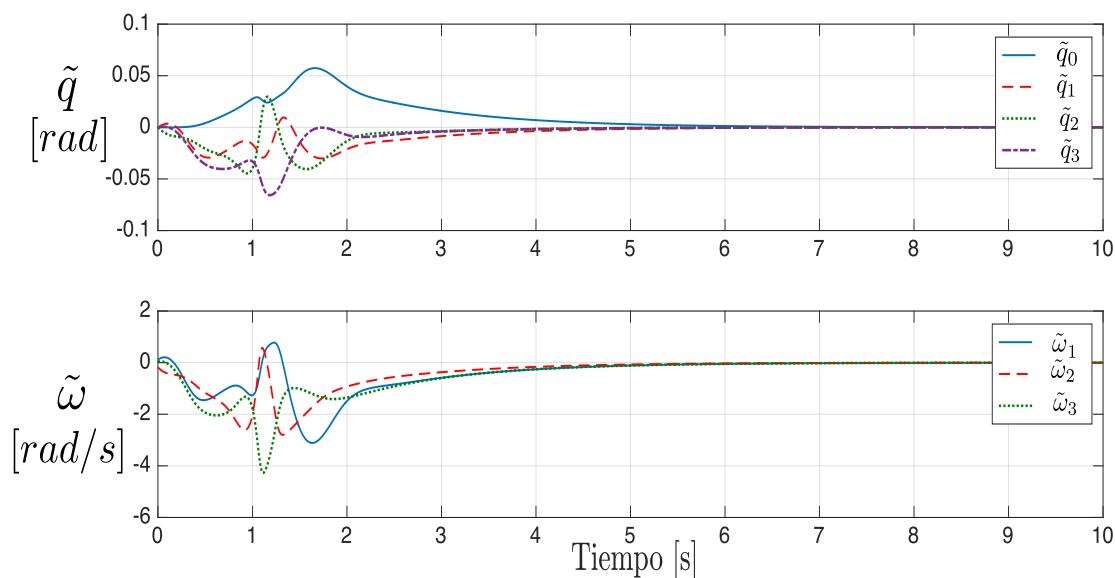


Figura 4.12: Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto (regulación) ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

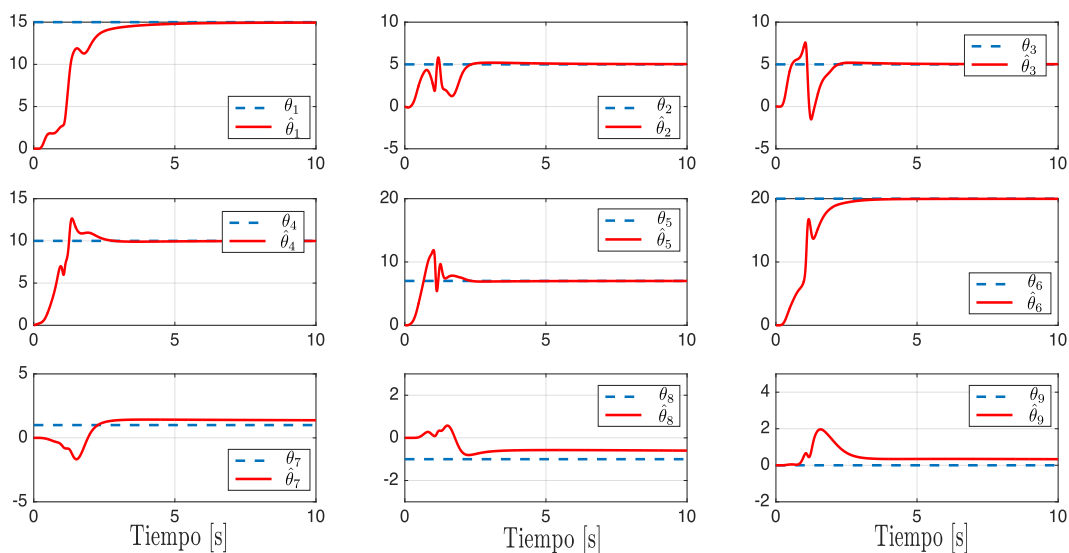


Figura 4.13: Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ con el controlador adaptable para el caso de regulación ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$).

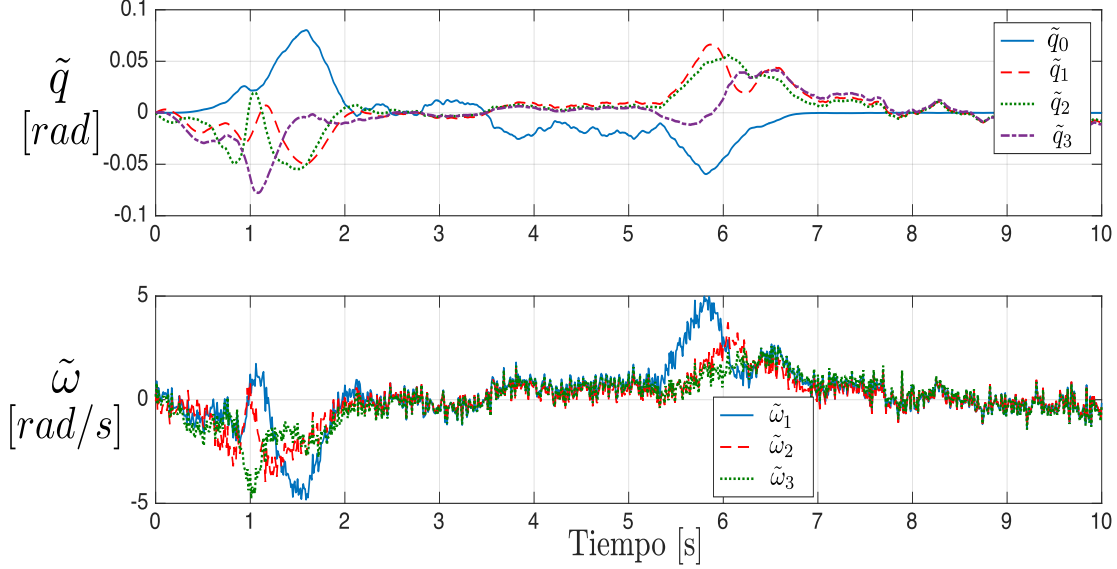


Figura 4.14: Error de seguimiento de orientación \tilde{q} y error de seguimiento de velocidad angular $\tilde{\omega}$ para el controlador adaptable propuesto con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).

mostrada en las Figs. 4.9 - 4.10 la cual contempla una aceleración con duración de dos segundos hasta los 120 grados iniciando del reposo. La posición q , la velocidad angular ω y el esfuerzo de control se muestran en la Fig. 4.11. El desempeño se califica por el error de $\tilde{q} = q - q_d$ y $\tilde{\omega} = \omega - \omega_d$ por lo que la Fig. 4.12 muestra los resultados obtenidos para el caso de regulación. Por otro lado, podemos notar la principal diferencia con respecto a los otros algoritmos de control puesto que con el objetivo de regulación, que claramente no cumple con la condición de excitación persistente, alcanzamos convergencia paramétrica (ver Fig. 4.13). Es evidente que si el desempeño de nuestra ley de control alcanza convergencia paramétrica aún cuando la trayectoria deseada no cumple con la condición PE, entonces si la trayectoria cumple PE, esto implica la convergencia de los parámetros estimados a los verdaderos, como se demostró en el Teorema 4.1.

Para que un algoritmo de control tenga un valor práctico debe tener cierta robustez, así la calidad de estimación paramétrica en el algoritmo de adaptación depende de:

- El nivel de excitación persistente de las señales
- La velocidad de variación paramétrica
- El nivel de incertidumbres no paramétricas (ruido de medición y perturbaciones)

El nivel de excitación persistente en las señales, para nuestro caso las trayectorias deseadas, se decide por la tarea de control o el diseño del experimento. Por lo que como ya se mostró en el controlador propuesto, la convergencia de los parámetros es independiente de la elección de la trayectoria deseada y se comprueba robustez ante esta

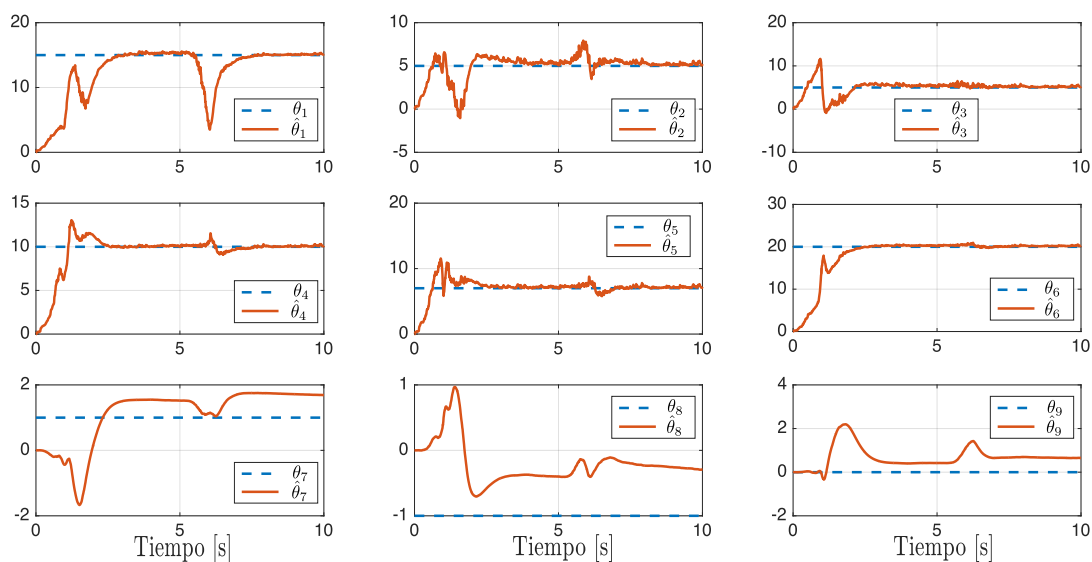


Figura 4.15: Convergencia del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el controlador adaptable con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).

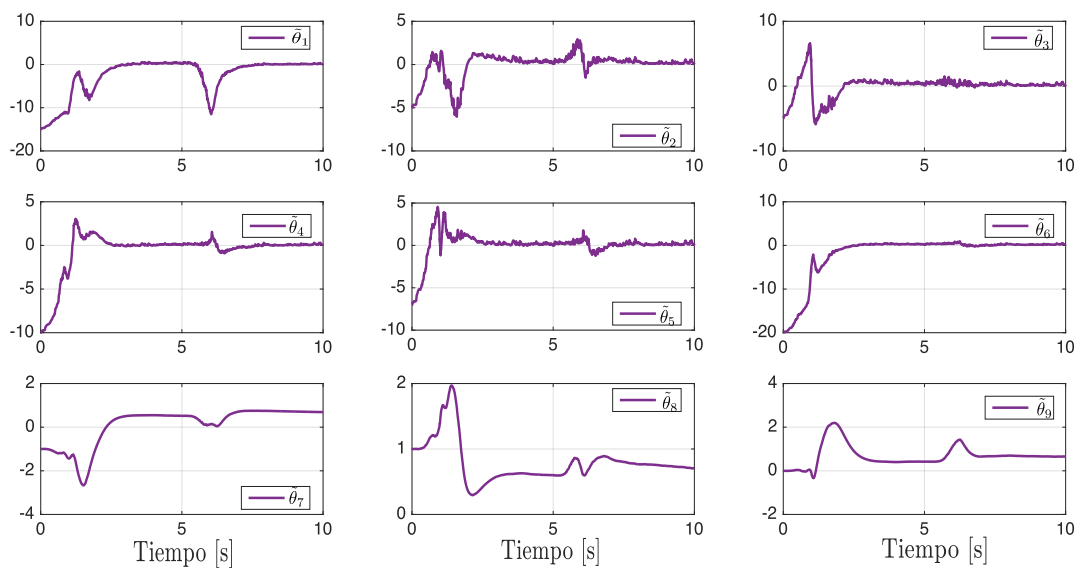


Figura 4.16: Desviación del vector paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ para el controlador adaptable propuesto con ruido de medición ($K_c = 25I$, $\lambda_c = 25$, $\lambda_F = 2$, $\delta_a = 2$, $\gamma_a = 1$, $\lambda_f = 0.1$, $\sigma = 0.1$).

situación. Debido a que se planteó desde el principio que la variación de los parámetros es lenta, de tal manera que se consideren constantes, la robustez ante la velocidad de variación paramétrica no se contempla en este trabajo.

Como ejercicio adicional y para hacer notar el valor práctico por medio de su robustez ante mediciones ruidosas, se realizó una simulación considerando un ruido blanco en mediciones de ω con magnitud de $\sigma = 0.1$. Los resultados los podemos ver en las Figs. 4.14, 4.15 y 4.16. Es notable que los resultados no se alejan de los obtenidos sin mediciones de ruido por lo que podemos demostrar robustez ante ésta situación.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

El principal problema desarrollado en este trabajo es el control de orientación de satélites (que puede modelarse como un cuerpo rígido) cuando en el modelo se presentan incertidumbres en parámetros como la matriz de inercias o el momento angular total. La metodología presentada a lo largo del trabajo busca resolver de manera secuencial el problema pues primero se trata de obtener un controlador de orientación por retroalimentación de estados basados en análisis de contracción para que una vez estemos familiarizados con el uso de las herramientas de contracción, posteriormente sustituimos los parámetros reales por los estimados recurriendo al principio de equivalencia cierta. De esta manera resolvemos el problema en bloques, primero resolveremos la parte del seguimiento sin preocuparnos por la parte adaptable y finalmente resolvemos el problema como un todo, basándonos en el controlador obtenido anteriormente. Como herramienta fundamental se empleó la teoría de contracción, misma que permitió el diseño fragmentado de este trabajo.

Se eligió como parametrización de la orientación el cuaternión, ya que carece de singularidades y su restricción de norma es más simple que la ortonormalidad de la matriz de rotación. La validez de esta parametrización se verifica en las simulaciones. Por otro lado, la ambigüedad de signo del cuaternión nos impide obtener un resultado global y único, aunque la manipulación matemática de este es más sencilla principalmente por la cantidad de operaciones y el ahorro en la capacidad de cálculos. Asimismo, la definición del error de orientación $\tilde{q} = q - q_d$, aunque es poco común, nos permitió evitar el fenómeno de desplegado obteniendo un resultado en \mathbb{R}^4 .

Como una parte principal para el desarrollo del controlador, fue la parametrización lineal de la dinámica de la planta y del controlador ideal pues gracias a esta fue posible el diseño del controlador adaptable.

La teoría de contracción demostró ser una herramienta útil para el diseño fragmentado de sistema de control complejos. Además, permite obtener resultado fuertes de estabilidad exponencial de una manera transparente, comparado con otros métodos más complejos.

Se obtuvieron resultados de convergencia paramétrica a pesar de que la trayectoria deseada no cumpliera con la condición de PE, es decir, únicamente cumpliendo la condición SE que, como se aclaró anteriormente, es una condición más débil. Gracias a

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

este resultado se cuenta con un algoritmo capaz de realizar identificación paramétrica librándonos de condiciones restrictivas impuestas sobre las trayectorias deseadas. La utilidad de este algoritmo se presenta en la implementación de los esquemas de control ya que a menudo se realizan sobre plataformas que emulan la microgravedad del espacio.

Futuros planes para esta investigación incluyen la eliminación de la necesidad para mediciones de velocidad angular y mantener los mismos resultados de estabilidad y convergencia en los parámetros, es decir, la idea de un controlador adaptable de orientación de satélites por realimentación de salida basado en el análisis de contracción es muy posible.

Apéndices

Prueba de Lema 2.2

Las Propiedades **A1** y **A2** son ampliamente conocidas y pueden ser encontradas en [2], ambos son comúnmente usados en formulaciones de orientación. En particular si x y y son cuaterniones unitarios de rotación, **A1** se convierte en $J^T(x)J(x) = I$ y **A2** se simplifica a $J^T(x)y = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

Las Propiedades que siguen no son muy utilizadas comúnmente en problemas de orientación. La Propiedad **A3** muestra que el operador $J(x)$ es lineal y puede ser fácilmente verificado por sustitución.

La Propiedad **A4** es similar a la propiedad encontrada en la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas en robot manipuladores. Esto puede ser verificado por sustitución

$$\begin{aligned} J^T(x)y &= -y_0x_v + x_0y_v - S(x_v)y_v, \\ -J^T(y)x &= x_0y_v - y_0x_v + S(y_v)x_v. \end{aligned}$$

Ambas expresiones son idénticas ya que $S(s)b = -S(b)a, \forall a, b \in \mathbb{R}^3$, una propiedad inherente derivada del producto cruz.

La Propiedad **A5** muestra que la matriz $J(x)$ es acotada por su argumento, una consecuencia de la Propiedad **A1**. En particular, si x es un cuaternión de rotación, $\|J(x)\|_2 = 1$. Finalmente, la Propiedad **A6** provee una manera fácil de manejar derivadas. Esta es verificada debido a que la derivada de una matriz es obtenida por cada uno de sus elementos y $J(x)$ presenta elementos únicamente elementos del vector x .

Bibliografía

- [1] P. C. Hughes, *Spacecraft attitude dynamics*. Courier Corporation, 2012. 7, 18
- [2] F. L. Markley and J. L. Crassidis, *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*, vol. 33. Springer, 2014. 7, 20, 49
- [3] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal, and N. H. McClamroch, “Rigid-body attitude control,” *IEEE Control Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 30–51, 2011. 8, 16
- [4] J.-E. Slotine and M. Di Benedetto, “Hamiltonian adaptive control of spacecraft,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 7, pp. 848–852, 1990. 8, 17, 23, 27, 31
- [5] J.-Y. Wen and K. Kreutz-Delgado, “The attitude control problem,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 36, no. 10, pp. 1148–1162, 1991. 8, 17, 27, 31
- [6] O. Egeland and J.-M. Godhavn, “Passivity-based adaptive attitude control of a rigid spacecraft,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 4, pp. 842–846, 1994. 8, 16, 21, 27, 31, 33, 36
- [7] F. Lizarralde and J. T. Wen, “Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach,” *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 468–472, 1996. 8
- [8] J.-J. Slotine and L. Weiping, “Adaptive manipulator control: A case study,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 33, no. 11, pp. 995–1003, 1988. 8
- [9] Y. Tang and M. A. Arteaga, “Adaptive control of robot manipulators based on passivity,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1871–1875, 1994. 8, 9, 22, 31, 33, 34, 35, 36
- [10] W. Lohmiller and J.-J. E. Slotine, “On contraction analysis for non-linear systems,” *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 683–696, 1998. 9, 11, 12, 13
- [11] W. Wang and J.-J. E. Slotine, “On partial contraction analysis for coupled non-linear oscillators,” *Biological cybernetics*, vol. 92, no. 1, pp. 38–53, 2005. 9, 11, 13

BIBLIOGRAFÍA

- [12] A. V. Pavlov, N. Wouw, and H. Nijmeijer, *Uniform output regulation of nonlinear systems: a convergent dynamics approach*. Springer Science & Business Media, 2006. 9, 11
- [13] S.-J. Chung and J.-J. E. Slotine, “Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, no. 3, pp. 686–700, 2009. 15
- [14] A. R. Klumpp, “Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix,” *Journal of spacecraft and rockets*, vol. 13, no. 12, pp. 754–755, 1976. 18
- [15] M. D. Shuster, “A survey of attitude representations,” *Navigation*, vol. 8, no. 9, pp. 439–517, 1993. 19
- [16] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot modeling and control*, vol. 3. wiley New York, 2006. 19
- [17] P. Crouch, “Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 4, pp. 321–331, 1984. 20
- [18] J. C. Hernandez, “Contraction based attitude control for satellites,” 2016. 20, 32
- [19] M. Lovera and A. Astolfi, “Spacecraft attitude control using magnetic actuators,” *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp. 1405–1414, 2004. 22
- [20] G. Meyer, “On the use of euler’s theorem on rotations for the synthesis of attitude control systems,” 1966.
- [21] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] M. R. Akella, “Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback,” *Systems & Control Letters*, vol. 42, no. 4, pp. 321–326, 2001.
- [23] J. Thienel and R. M. Sanner, “A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 11, pp. 2011–2015, 2003.
- [24] H. Wong, M. S. de Queiroz, and V. Kapila, “Adaptive tracking control using synthesized velocity from attitude measurements,” *Automatica*, vol. 37, no. 6, pp. 947–953, 2001.
- [25] S. Salcudean, “A globally convergent angular velocity observer for rigid body motion,” *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 12, pp. 1493–1497, 1991.

- [26] J. Ahmed, V. T. Coppola, and D. S. Bernstein, “Adaptive asymptotic tracking of spacecraft attitude motion with inertia matrix identification,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 21, no. 5, pp. 684–691, 1998.
- [27] A. Flores-Perez, I. Grave, and Y. Tang, “Contraction based adaptive control for a class of nonlinearly parameterized systems,” in *American Control Conference (ACC), 2013*, pp. 2649–2654, IEEE, 2013. 32
- [28] A. Flores-Pérez, I. Grave, and Y. Tang, “Contraction based adaptive control for a class of nonlinearly parameterized systems,” in *2013 American Control Conference*, pp. 2649–2654, June 2013.
- [29] C.-M. Rafael, T. Yu, S.-G. Saúl, and J. Haibo, “Contraction based angular velocity observer for small satellites,” in *Aerospace Conference, 2016 IEEE*, pp. 1–10, IEEE, 2016. 32
- [30] B. Costic, D. Dawson, M. De Queiroz, and V. Kapila, “Quaternion-based adaptive attitude tracking controller without velocity measurements,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 6, pp. 1214–1222, 2001.
- [31] J. Jouffroy and J.-J. Slotine, “Methodological remarks on contraction theory,” in *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 2537–2543, IEEE, 2004. 11
- [32] E. D. Sontag, M. Margaliot, and T. Tuller, “On three generalizations of contraction,” in *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, pp. 1539–1544, 2014. 11
- [33] F. Forni and R. Sepulchre, “A differential lyapunov framework for contraction analysis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 3, 2014. 11