

CA-17-02



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**XXVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA SÍSMICA
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**

**MÓDULO I: ANÁLISIS DINÁMICO Y ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS
SUJETAS A SISMO**

Del 1 al 6 de julio de 2002

Dr Octavio A Rascón Chávez
Profesor
Facultad de Ingeniería, UNAM
Director General
Instituto Mexicano del Transporte

ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Dr Octavio A Rascón Chávez*

1.- INTRODUCCIÓN

Cuando ocurre un sismo en una localidad, éste excita a las estructuras que ahí se ubican y las hace vibrar. Las características del movimiento de cada estructura dependen tanto de las propiedades geométricas como de los materiales de que estén construidas; asimismo, se relaciona estrechamente con la evolución de los desplazamientos del terreno durante el temblor en el lugar donde éstas se desplantan.

Por tanto, para calcular los desplazamientos que sufre una estructura durante un temblor, es necesario **"modelar"** su geometría, así como el comportamiento de los materiales, de los componentes estructurales y de las conexiones entre ellos. Asimismo, se requiere contar con información acerca del movimiento del terreno, en términos de **"acelerogramas"**, que son registros de aceleraciones versus tiempo (Figs 1.1 y 1.2) o de los **"espectros de respuesta"** (respuestas máximas versus periodos naturales de las estructuras) que se calculan con los acelerogramas, como se verá más adelante.

Por otra parte, si bien se reconoce que todas las estructuras de edificios están conformadas por vigas, columnas, losas y muros que son de naturaleza **"continua"**, en la práctica profesional se acostumbra simplificar su topología mediante la formulación de modelos reológicos que idealizan su comportamiento, produciendo sistemas discontinuos o **"discretos"** como se ejemplifica a continuación, con lo cual se simplifican considerablemente los procesos de análisis que se realizan para calcular el comportamiento dinámico de las estructuras.

En estos apuntes se presenta un resumen de los aspectos conceptuales básicos del comportamiento dinámico de estructuras idealizadas con un solo **"grado de libertad"**, cuando son excitadas por sismos y fuerzas dinámicas externas. En la exposición oral que se da en la clase se amplían y comentan muchos de los conceptos.

* Director General del Instituto Mexicano del Transporte y Profesor en la División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería. UNAM

Definición

Grado de libertad es el número de coordenadas generalizadas (desplazamientos o giros) que se requiera para ubicar la posición de un sistema vibratorio en cualquier instante.

Ejemplos

1. Estructura de un nivel, simétrico en masas y rigideces laterales, para análisis dinámico en una dirección horizontal. Si se considera razonable suponer que la masa (o piso) se puede concentrar en el nivel superior (azotea), y que los movimientos verticales se pueden despreciar por ser muy pequeños, la estructura se puede idealizar o modelar como si fuese un sistema vibratorio de **un grado de libertad**, en que la coordenada generalizada es el desplazamiento x , como se ilustra en la figura 1.a.
2. Estructura de un piso con asimetría en masas y/o rigideces en dos direcciones ortogonales. En este caso el sistema es de **tres grados de libertad**, dos de traslación con coordenadas generalizadas x y z , y uno de rotación torcional con coordenada angular θ , como se muestra en la figura 1.3.
3. Estructura de n pisos con simetrías en masas y rigideces en todos ellos, para análisis dinámico en una dirección. Si se considera razonable suponer que el peso de la estructura se concentra en los niveles de piso, entonces se puede idealizar (modelar) como un sistema de " **n grados de libertad**", todos en traslación, como se ilustra en la figura 1.4. Por otra parte, si hubiese excentricidades de masas o rigideces, entonces cada nivel tendría 3 grados de libertad y el sistema $3n$.
4. Estructura continua en masas y rigideces, como vigas, losas o chimeneas. La estructura tiene un número infinito de grados de libertad, pero se puede "**discretizar**" considerando que las masas se "**concentran**" en cierto número de puntos (Figs 1.5^a y 1.5^b).

2. SISTEMAS ESTRUCTURALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

Se define a un sistema de un grado de libertad a la estructura discreta más simple representada mediante el concepto de la partícula, según se muestra en la Fig 2.1(a). En dicha figura, la masa de la estructura (m) se considera concentrada en un punto, que se mueve en una sola dirección (medida mediante la función desplazamiento $u(t)$), y se encuentra sometida a las fuerzas elásticas o restauradoras, f_r , a las fuerzas disipadoras o amortiguadoras, f_a , a las fuerzas externas o excitadoras, f_e , y desde luego a las fuerzas de inercia, f_i , como se indica en la Fig 2.1(b).

De acuerdo con la mecánica estructural, las fuerzas que actúan en el sistema de un grado de libertad, en el contexto lineal, se pueden cuantificar mediante las siguientes expresiones:

$$\text{Fuerza restauradora} = f_r = ku(t) \quad (2.1)$$

Donde k es el coeficiente de rigidez del sistema de un grado de libertad

$$\text{Fuerza amortiguadora} = f_a = c \frac{d}{dt}u(t) \quad (2.2)$$

Donde c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema de un grado de libertad

$$\text{Fuerza de inercia} = f_i = -m \frac{d^2}{dt^2}u(t) \quad (2.3)$$

$$\text{Fuerza externa} = f_e = p(t) \quad (2.4)$$

dónde:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \text{velocidad del sistema de un grado de libertad} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = \text{aceleración del sistema de un grado de libertad} \quad (2.6)$$

2.1 Ecuaciones de equilibrio dinámico

De acuerdo con la mecánica estructural, la ecuación de equilibrio del sistema de un grado de libertad de la Fig 2.1(b) se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$f_r + f_o + f_i + f_e = 0 \quad (2.7)$$

Al sustituir las ec 2.1 a 2.4 en la ec 2.7 se obtiene la siguiente expresión

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(t) + c \frac{d}{dt} u(t) + ku(t) = f_e = p(t) \quad (2.8)$$

que es la representación formal de las leyes de la mecánica newtoniana para la estructura que representa al sistema de un grado de libertad, denominadas también, ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema de un grado de libertad. Tales ecuaciones corresponden, desde el punto de vista matemático, a un problema de valores iniciales: para su solución se necesitan establecer las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t) \Big|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) \Big|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

Cuando la fuerza externa del sistema de un grado de libertad se debe a la acción de un sismo, la Ec 2.4 se expresa de la siguiente manera:

$$f_e = p(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad (2.11)$$

donde

$$\ddot{u}_g(t) = \frac{d^2}{dt^2} u_g(t) = \text{aceleración del terreno} \quad (2.12)$$

Al sustituir la Ec 2.11 en la Ec 2.8, se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema lineal de un grado de libertad sometido a la acción de un sismo, y resulta ser:

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(t) + c \frac{d}{dt} u(t) + ku(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad (2.13)$$

que puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{c}{m} \frac{d}{dt} u(t) + \frac{k}{m} u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (2.14)$$

En la ec 2.14 se acostumbra definir los siguientes conceptos:

$$2h = \frac{c}{m} \quad (2.15)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \text{cuadrado de la frecuencia circular natural del sistema} \quad (2.16)$$

Al sustituir las ec 2.15 y 2.16 en la ec 2.14, se obtiene la forma usual de las ecuaciones de equilibrio del sistema de un grado de libertad sujeto a un sismo, y resulta ser:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2h \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (2.17)$$

2.2 Vibración libre

Se dice que un sistema de un grado de libertad está sometido a un régimen de vibración libre cuando la fuerza externa es nula. De acuerdo con la ec 2.11, esta condición se indica como:

$$f_c = p(t) = -m \ddot{u}_g(t) = 0 \quad (2.18)$$

Al sustituir la ec 2.18 en la ec 2.17, se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico para el problema de vibración libre, y resulta ser:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2h \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (2.19)$$

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, la solución general de la ecuación diferencial dada por la ec 2.19 se puede escribir como:

$$u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.20)$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial (ec 2.19), es decir:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.21)$$

cuyas raíces resultan ser:

$$\lambda_1 = -h + i\omega_a \quad (2.22)$$

$$\lambda_2 = -h - i\omega_a \quad (2.23)$$

donde:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \text{frecuencia circular natural amortiguada del sistema} \quad (2.24)$$

Al sustituir las ec 2.22 a 2.24 en la ec 2.20, y al utilizar la fórmula de Euler, se obtiene la solución de la ecuación diferencial (ec 2.19).

$$u(t) = e^{-ht} (C_1 \text{sen } \omega_a t + C_2 \text{cos } \omega_a t) \quad (2.25)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen al hacer que la solución dada por la ec 2.25 satisfaga las condiciones de iniciales (ec 2.9 y ec 2.10) y resultan ser:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_0 + hu_0}{\omega_a} \quad (2.26)$$

$$C_2 = u_0 \quad (2.27)$$

Al sustituir las ec 2.26 y 2.27 en la ec 2.25, y al reordenar términos, se obtiene la siguiente solución de la ecuación de equilibrio dinámico para el problema de vibración libre:

$$u(t) = A e^{-ht} \cos(\omega_a t - \theta) \quad (2.28)$$

donde las nuevas constantes de integración, A y θ , resultan ser:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (2.29)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \quad (2.30)$$

En la Fig 2.2 se muestra la representación gráfica de la ec 2.28, en donde se destacan los siguientes conceptos:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \text{periodo natural amortiguado} \quad (2.31)$$

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{2\pi} = \text{frecuencia natural amortiguada} \quad (2.32)$$

2.3 Caso límite de la vibración libre

Para el caso en que se presente la siguiente condición:

$$h = \omega_0 \zeta \quad (2.33)$$

al sustituir la ec 2.33 en las ec 2.24 a la ec 2.27 se obtienen las expresiones siguientes:

$$\omega_a = 0 \quad (2.34)$$

$$C_1 = \infty \quad (2.35)$$

$$C_2 = u_0 \quad (2.27)$$

$$u(t) = u_0 e^{-\omega_0 t} \quad (2.36)$$

En la Fig 2.3 se muestra la representación gráfica de la ec 2.36, en donde se puede observar que no representa a un movimiento de vibración. Por tanto, para el caso definido por la ec 2.33, el amortiguamiento correspondiente al sistema de un grado de libertad se le conoce como amortiguamiento crítico, cuyo coeficiente de amortiguamiento crítico, c_{cr} , se obtiene de las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.33, es decir:

$$2\omega_0 = \frac{c_{cr}}{m} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.37)$$

por lo que el coeficiente de amortiguamiento crítico, c_{cr} , resulta ser:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (2.38)$$

De acuerdo con las ec 2.15 y 2.16, la definición de la fracción del amortiguamiento crítico, ζ , se puede expresar de la siguiente manera:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{2hm}{2\sqrt{km}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{h}{\omega_0} \quad (2.39)$$

de donde el parámetro, h , de la definición dada por la ec 2.15 se puede expresar, también, mediante la siguiente ecuación

$$h = \omega_0 \zeta \quad (2.40)$$

La frecuencia natural amortiguada, ω_a , del sistema de un grado de libertad se puede expresar como:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 \zeta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \approx \omega_0 \quad (2.41)$$

y la solución de la ecuación de equilibrio dinámico para el problema de vibración libre, dada por la ec 2.28 se puede representar como:

$$u(t) = Ae^{-\omega_n t} \cos(\omega_a t - \theta) \quad (2.42)$$

El valor de la fracción del amortiguamiento crítico usualmente se encuentra en el rango: $0 < \zeta < 0.1$. Para el caso $\zeta = 0.1$, $\omega_a = 0.995\omega_0$, lo que indica que en el rango indicado ambas frecuencias prácticamente son iguales, según se indica en la ec 2.41.

2.4 Determinación experimental de la fracción del amortiguamiento crítico, ζ

Desde el punto de vista teórico, se define como decremento logarítmico, L , al logaritmo natural del cociente de dos amplitudes consecutivas del movimiento de vibración libre. De acuerdo con el inciso 2.2, L se puede expresar como:

$$L = \ln \frac{u(t)}{u(t+T_a)} = \ln \frac{Ae^{-\omega_0 \zeta t} \cos(\omega_a t - \theta)}{Ae^{-\omega_0 \zeta (t+T_a)} \cos[\omega_a (t+T_a) - \theta]} = \ln \frac{Ae^{-\omega_0 \zeta t} \cos(\omega_a t - \theta)}{Ae^{-\omega_0 \zeta t} e^{-\omega_0 \zeta T_a} \cos[\omega_a t - \theta + 2\pi]} \quad (2.43)a$$

que también se puede escribir como:

$$L = \ln e^{\omega_0 \zeta T_a} = \omega_0 \zeta T_a = \omega_0 \zeta \frac{2\pi}{\omega_a} = \omega_0 \zeta \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi \zeta \quad (2.43)b$$

Desde el punto de vista experimental, la vibración libre se provoca con la aplicación de alguna o ambas de las condiciones de frontera especificadas mediante las ec 2.9 y 2.10. Para el caso de que se registren las aceleraciones del movimiento de vibración libre amortiguado, en la Fig 2.4 se muestra, de manera, esquemática este proceso. Y de acuerdo con la ec 2.43b se puede escribir que:

$$\zeta \approx \frac{L}{2\pi} \quad (2.44)$$

2.5 Ejemplo de problemas de vibración libre

A la estructura mostrada en la Fig 2.5 se le aplica una fuerza horizontal de $f_r = 20000 \text{ kgf}$ en su masa, y le provoca un desplazamiento estático horizontal, $u(t=0) = 0.2 \text{ cm}$. Al liberar la fuerza aplicada se genera un movimiento de vibración libre, con un periodo $T_a = 0.2 \text{ s}$ y la amplitud del segundo ciclo, $u(t=0+T_a) = 0.14 \text{ cm}$. Calcular:

2.5.1 La rigidez, k , de la estructura

De acuerdo con la ec 2.1 se puede escribir que:

$$k = \frac{f_r}{u(t)} = \frac{20000 \text{ (kgf)}}{0.2 \text{ (cm)}} = 100000 \frac{\text{(kgf)}}{\text{(cm)}} \quad (2.45)$$

2.5.2 El peso, W , de la estructura

La ec 2.31, de acuerdo con las ec 3.16 y 2.41, se puede escribir como:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{gk}} \quad (2.46)$$

de donde el peso de la estructura, W , resulta ser:

$$W = \frac{T_a^2}{4\pi^2} gk = \frac{(0.2 \text{ s})^2}{4(3.1416)^2} (981 \text{ cm/s}^2)(100,000 \text{ kgf/cm}) = 99,396 \text{ kgf} \quad (2.47)$$

2.5.3 Las frecuencias naturales amortiguadas, ω_a y f_a , del sistema

De acuerdo con la ec 2.31, la frecuencia natural amortiguada, ω_a , del sistema se puede expresar como:

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2(3.1416)}{0.2} = 31.46 \text{ rad/s} \quad (2.48)$$

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{1}{0.2 \text{ s}} = 5.0 \text{ cps} = 5.0 \text{ Hz} \quad (2.49)$$

2.5.4 Cuantificar el decremento logarítmico, L , la fracción del amortiguamiento crítico, ζ y los coeficientes de amortiguamiento viscoso del sistema, c_{cr} y c .

De acuerdo con la ec 2.43^a se tiene que:

$$L = \ln \frac{u(0)}{u(0+T_a)} = \ln \frac{0.20}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357 \quad (2.50)$$

Con base en la ec 2.44 resulta que:

$$\zeta \approx \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 = 5.68 \% \quad (2.51)$$

De acuerdo con la ec 2.38 se tiene que:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{100,000(\text{kgf/cm}) \times 99,396(\text{kgf})/981(\text{cm/s}^2)} = 6.366 (\text{kgf})(\text{s})/\text{cm} \quad (2.52)$$

De acuerdo con la ec 2.39 se tiene que:

$$c = \zeta c_{cr} = 0.0568 \times 6.366 = 362 (\text{kgf})(\text{s})/\text{cm} \quad (2.53)$$

2.6 Vibración forzada

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, la solución general de las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema de un grado de libertad, ec 2.8, se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (2.54)$$

donde, $u_h(t)$, denominada solución homogénea, es la solución de la ecuación diferencial para el caso en que la fuerza excitadora es nula ($f_c = p(t) = 0$), es decir, la solución para el caso de vibración libre, dada por la ec 2.25, que al tomar en cuenta la ec 2.33 se puede escribir como:

$$u_h(t) = e^{-\omega_d t} (C_1 \text{sen } \omega_d t + C_2 \text{cos } \omega_d t) \quad (2.55)$$

y, $u_p(t)$, denominada solución particular, es una función que satisface la ecuación diferencial (ec 2.8).

Entonces, la solución general de las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema de un grado de libertad se puede expresar, al tomar en cuenta las ec 2.54 y 2.55, de la siguiente manera:

$$u(t) = e^{-\omega_d t} (C_1 \text{sen} \omega_d t + C_2 \text{cos} \omega_d t) + u_p(t) \quad (2.56)$$

donde las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen al hacer que la solución dada por la ec 2.56 satisfaga las condiciones iniciales (ec 2.9 y ec 2.10), que se describen a continuación:

$$u(t)|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

2.6.1 Vibración forzada sin amortiguamiento debida a una función escalón infinita

La Fig 2.6 muestra la fuerza excitadora función escalón infinita. Puesto que el amortiguamiento es nulo, se tiene que:

$$\zeta = c = 0 \quad (2.57)$$

$$\omega_d = \omega_0 \quad (2.58)$$

y las ecuaciones de equilibrio dinámico resultan ser:

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(t) + ku(t) = p_0 \quad (2.59)$$

Al observar la ec 2.59 se puede establecer que la solución particular, $u_p(t)$, resulta ser:

$$u_p(t) = \frac{P_0}{k} \quad (2.60)$$

Al sustituir las ec 2.57 y 2.58 en la ec 2.56, se obtiene la siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 \text{sen } \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{P_0}{k} \quad (2.61)$$

Al considerar nulas las condiciones iniciales, las ec 2.9 y 2.10), que se escriben como:

$$u(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.62)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = 0 \quad (2.63)$$

Al hacer que la ec 2.61 satisfaga las condiciones iniciales dadas por las ec 2.62 y 2.63, las constantes de integración resultan ser:

$$C_1 = 0 \quad (2.64)$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{k} \quad (2.65)$$

Al sustituir las ec 2.63 y 2.64 en la ec 2.61 se obtiene que

$$u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (2.66)$$

En la vibración forzada se acostumbra denominar como factor de amplificación dinámica, B , al cociente de la respuesta dinámica entre la respuesta estática, es decir:

$$B = \frac{u(t)}{u_{est}} = \frac{\frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t)}{\frac{P_0}{k}} = (1 - \cos \omega_0 t) \quad (2.67)$$

$$B_{max} = 2 \quad \forall t = T/2, 3T/2, \dots \quad (2.68)$$

En la Fig 2.7 se muestra la variación del factor de amplificación dinámica de la ec 2.67.

2.6.2 *Vibración forzada sin amortiguamiento debida a una función escalón finita*

La Fig 2.8 muestra la fuerza excitadora función escalón finita. Este problema tiene las dos etapas siguientes:

2.6.2.1 Vibración forzada $0 \leq t \leq t_0$

En esta región, la solución de las ecuaciones de equilibrio corresponden a las del inciso anterior. (inciso 2.6.1), es decir:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (2.69)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{\omega_0 P_0}{k} \text{sen} \omega_0 t \quad (2.70)$$

2.6.2.2 Vibración libre $t > t_0$

En esta región, la solución de las ecuaciones de equilibrio es la correspondiente a las de vibración libre, es decir:

$$u(t) = C_1 \text{sen} \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \quad (2.71)$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t)|_{t=t_0} = u_0 = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t_0) \quad (2.72)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=t_0} = \dot{u}_0 = \frac{\omega_0 P_0}{k} \text{sen } \omega_0 t_0 \quad (2.73)$$

Las constantes de integración, de acuerdo con las ec 2.26, 2.27, 2.72 y 2.73, resultan ser:

$$C_1 = \frac{P_0}{k} \text{sen } \omega_0 t_0 \quad (2.74)$$

$$C_2 = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t_0) \quad (2.75)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{P_0}{k} \sqrt{\text{sen}^2 \omega_0 t_0 + (1 - \cos \omega_0 t_0)^2} = \frac{P_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega_0 t_0)} \quad (2.76)$$

$$A = \frac{P_0}{k} \left(2 \text{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 \right) \quad (2.77)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen } \omega_0 t_0}{1 - \cos \omega_0 t_0} \right) \quad (2.78)$$

$$u(t') = A \cos(\omega_0 t' - \theta) = \frac{P_0}{k} \left(2 \text{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 \right) \cos(\omega_0 t' - \theta) \quad (2.79)$$

donde:

$$t' = t - t_0 \quad (2.80)$$

El factor de amplificación dinámica, B , resulta ser:

$$B = \frac{u(t')}{u_{est}} = \frac{\frac{P_0}{k} \left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 \right) \cos(\omega_0 t' - \theta)}{\frac{P_0}{k}} = \left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 \right) \cos(\omega_0 t' - \theta) \quad (2.81)$$

$$B_{\max} = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi t_0}{T} \quad (2.82)$$

donde:

$$\omega_0 T = 2\pi \quad (2.83)$$

$$B_{\max} = 2 \text{ cuando } \frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2} \quad (2.84)$$

En la Fig 2.9 se muestra la representación gráfica de B_{\max}

2.6.3 Vibración forzada debido a un impulso

Si en la función escalón del inciso anterior se tiene la siguiente condición:

$$\text{si } \frac{t_0}{T} \ll 1 \text{ entonces } \operatorname{sen} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi t_0}{T} \quad (2.85)$$

y de acuerdo con la ec 2.79 se puede escribir:

$$u_{\max}(t') = \max \left(\frac{P_0}{k} \left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega_0 t_0 \right) \cos(\omega_0 t' - \theta) \right) \quad (2.86)$$

$$u_{\text{máx}}(t') = \frac{2p_0 \pi t_0}{k T} = \frac{2p_0 \omega_0 t_0}{\frac{mk}{m} 2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega_0} = \frac{I}{m\omega_0} \quad (2.87)$$

donde:

$$\text{Impulso} = I = p_0 t_0 = \text{Área bajo la excitación} \quad (2.88)$$

Si la función impulso es arbitraria, como se muestra en la Fig 2.10, el Impulso, I , se cuantifica como se indica a continuación:

$$\text{Impulso} = I = \int_0^{\infty} p(t) dt \quad (2.89)$$

De acuerdo con la representación de la segunda ley de Newton en términos del impulso, I , y la cantidad de movimiento, $m \frac{d}{dt} u(t)$, se puede escribir la siguiente expresión:

$$I = m \frac{d}{dt} u(t) \quad (2.90)$$

La velocidad que le imprime el impulso, I , al sistema de un grado de libertad que queda vibrando libremente, es la velocidad inicial dada por la siguiente expresión

$$\dot{u}_0 = \left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = \frac{I}{m} \quad (2.91)$$

2.6.4 Vibración libre debido a un impulso

La magnitud del desplazamiento que un impulso, I , le provoca al sistema de un grado de libertad es despreciable, es decir:

$$u_0 = u(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.92)$$

A continuación se describen los casos amortiguados y no amortiguados.

2.6.4.1 Vibración libre con amortiguamiento

De acuerdo con las ec 2.25 y 2.33, la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico resulta ser:

$$u(t') = e^{-\omega_b t'} (C_1 \text{sen } \omega_a t' + C_2 \text{cos } \omega_a t') \quad (2.93)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen al hacer que la solución dada por la ec 2.92 satisfaga las condiciones de iniciales (ec 2.9 y ec 2.10) y resultan ser:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_0 + hu_0}{\omega_a} = \frac{\frac{I}{m} + 0}{\omega_a} = \frac{I}{m\omega_a} \quad (2.94)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.95)$$

Al sustituir las ec 2.94 y 2.95 en la ec 2.93 se obtiene que:

$$u(t') = \frac{I}{m\omega_a} e^{-\omega_b t'} \text{sen } \omega_a t' \quad (2.93)$$

2.6.4.2 Vibración libre sin amortiguamiento

En este caso se tienen las siguientes condiciones:

$$\zeta = c = 0 \quad (2.94)$$

$$\omega_a = \omega_0 \quad (2.95)$$

Al sustituir las ec 2.94 y 2.95 en la ec 2.93 se obtiene que:

$$u(t') = \frac{I}{m\omega_0} \text{sen}\omega_0 t' \quad (2.96)$$

2.6.5 Vibración debido a una fuerza arbitraria

En la Fig 2.11 se muestra la fuerza excitadora arbitraria. La fuerza aplicada en un tiempo, $t = \tau$, para una diferencial, $d\tau \ll T$, le provoca un incremento instantáneo en la velocidad de la masa igual a:

$$\dot{u}_0 = \frac{d}{dt} u(\tau) = \frac{p(\tau)d\tau}{m} \quad (2.97)$$

y un incremento instantáneo nulo en el desplazamiento inicial, es decir:

$$u_0 = u(\tau) = 0 \quad (2.98)$$

De acuerdo con las ec 2.25 y 2.33, la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico para el tiempo, $t - \tau$, resulta ser:

$$u_r(t) = e^{-\omega_0 \zeta (t-\tau)} [C_1 \text{sen} \omega_a (t-\tau) + C_2 \text{cos} \omega_a (t-\tau)] \quad \forall t \geq \tau \quad (2.99)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen al hacer que la solución dada por la ec 2.99 satisfaga las condiciones de iniciales (ec 2.97 y ec 2.98) y resultan ser:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_0 + h u_0}{\omega_a} = \frac{\frac{p(\tau) d\tau}{m} + 0}{\omega_a} = \frac{p(\tau) d\tau}{m \omega_a} \quad (2.100)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.101)$$

Al sustituir las ec 2.100 y 2.101 en la ec 2.99 se obtiene que:

$$u_r(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{m \omega_a} \text{sen} \omega_a (t-\tau) e^{-\omega_0 \zeta (t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \quad (2.102)$$

Puesto que el sistema es lineal, es posible superponer los efectos ocasionados por los impulsos aplicados en cada, τ , que hayan ocurrido antes del instante de interés, t , lo que conduce a obtener la solución particular del sistema, y resulta ser:

$$u_p(t) = \int_{\sigma} u_r(\tau) d\tau = \frac{1}{m \omega_a} \int_{\sigma} p(\tau) e^{-\omega_0 \zeta (t-\tau)} \text{sen} \omega_a (t-\tau) d\tau \quad \forall t \geq \tau \quad (2.103)$$

A la ec 2.103 se le conoce con el nombre de integral de Duhamel. De acuerdo con la ec 2.54, la solución general de sistema lineal de un grado de libertad resulta ser, al tomar en cuenta la solución particular dada por la ec 2.28:

$$u(t) = Ae^{-\omega_0 t} \cos(\omega_a t - \theta) + \frac{1}{m\omega_a} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-\omega_0(t-\tau)} \text{sen } \omega_a(t-\tau) d\tau \quad \forall t \geq \tau \quad (2.104)$$

Las constantes de integración, A , θ , se determinan de acuerdo con las ec 2.29 y 2.30 con base en los valores de las constantes, C_1 y C_2 , que se obtienen al hacer que la solución dada por la ec 2.102 satisfaga las condiciones iniciales (ec 2.9 y ec 2.10), que se describen a continuación:

$$u(t)|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

2.6.6 Vibración debido a una fuerza excitadora senoidal de duración indefinida

La fuerza excitadora senoidal de duración indefinida se representa mediante la siguiente expresión:

$$p(t) = p_0 \text{sen } \Omega t \quad (2.105)$$

donde:

$$p_0 = \text{Magnitud de la fuerza} \quad (2.106)$$

$$\Omega = \text{Frecuencia circular de excitación} \quad (2.107)$$

Al sustituir la ec 2.103 en la ecuación de equilibrio dinámico dada por la ec 2.17 se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2\omega_0 \zeta \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \text{sen } \Omega t \quad (2.17) \quad (2.108)$$

sometida a las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t)\Big|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt}u(t)\Big|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

2.6.6.1 Obtención de la solución particular para sistemas amortiguados

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, la solución particular, $u_p(t)$, de la ec 2.106 es de la forma siguiente:

$$u_p(t) = C_3 \text{sen}\Omega t + C_4 \text{cos}\Omega t \quad (2.109)$$

Al sustituir la ec 2.109 y sus correspondientes derivadas en la ec 2.108, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(-\Omega^2 C_3 - 2\omega_0 \Omega \zeta C_4 + \omega_0^2 C_3\right) \text{sen}\Omega t + \left(-\Omega^2 C_4 + 2\omega_0 \Omega \zeta C_3 + \omega_0^2 C_4\right) \text{cos}\Omega t = \frac{P_0}{m} \text{sen}\Omega t \quad (2.110)$$

Para que se cumpla la ec 2.110, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\left(-\Omega^2 + \omega_0^2\right) C_3 - 2\omega_0 \Omega \zeta C_4 = \frac{P_0}{m} \quad (2.111)$$

$$2\omega_0 \Omega \zeta C_3 + \left(-\Omega^2 + \omega_0^2\right) C_4 = 0 \quad (2.112)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes valores de los coeficientes, C_3 y C_4

$$C_3 = \frac{\frac{P_0}{m} (\Omega^2 - \omega_0^2)}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega_0 \Omega \zeta)^2 \right]} \quad (2.113)$$

$$C_4 = \frac{-\frac{P_0}{m} (2\omega_0 \Omega \zeta)}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega_0 \Omega \zeta)^2 \right]} \quad (2.114)$$

Al sustituir las ec 2.113 y 2.114 en la ec 2.109, se obtiene la siguiente expresión:

$$u_p(t) = \frac{\frac{P_0}{m}}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega_0 \Omega \zeta)^2 \right]} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \text{sen} \Omega t - 2\omega_0 \Omega \zeta \text{cos} \Omega t \right] \quad (2.115)$$

que puede escribirse como:

$$u_p(t) = \frac{\frac{P_0}{m}}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega_0 \Omega \zeta)^2 \right]^{1/2}} \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2.116)$$

que también puede escribirse como:

$$u_p(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}} \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2.117)$$

donde:

$$\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{C_4}{C_3} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \right) \quad (2.118)$$

2.6.6.2 Obtención de la solución particular para sistemas no amortiguados

En este caso se tiene que:

$$\zeta = 0 \quad (2.119)$$

$$\omega_o = \omega_0 \quad (2.120)$$

Al sustituir las ec 2.119 y 2.120 en las ec 2.117 y 2.118 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$u_p(t) = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{sen}\Omega t = \frac{\frac{P_0}{k}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \text{sen}\Omega t \quad (2.121)$$

donde:

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{C_4}{C_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}\right) = 0 \quad (2.122)$$

2.6.6.3 Obtención de la solución general para sistemas no amortiguados

Al sustituir las ec 2.119 a la 2.121 en la ec 2.56 se obtienen la expresión de las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 \text{sen}\omega t + C_2 \cos\omega t + \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{sen}\Omega t \quad (2.123)$$

sometida a las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t)|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

Al hacer que la ec 2.123 satisfaga las ec 2.19 y 2.10 se obtienen los siguientes valores para las constantes, C_1 y C_2 .

$$C_1 = -\frac{\frac{p_0}{m} \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (2.124)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.125)$$

Al sustituir las ec 2.124 y 2.125 en la ec 2.123 se obtiene la siguiente expresión:

$$u(t) = \frac{\frac{p_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\text{sen}\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \text{sen}\omega_0 t \right) = \frac{\frac{p_0}{m\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)} \left(\text{sen}\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \text{sen}\omega_0 t \right) \quad (2.126)$$

En la Fig 2.12 se muestra la representación de la ec 2.126

2.6.6.4 Excitación armónica en la base de la estructura

Si la sollicitación del apoyo de la estructura corresponde a una sollicitación armónica como la mostrada en la siguiente ecuación:

$$u_g(t) = a \text{sen}\Omega t \quad (2.127)$$

Entonces la aceleración del terreno resulta ser:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_g(t) = -a\Omega^2 \text{sen}\Omega t \quad (2.128)$$

Al sustituir en la ec 2.117 el término, $\frac{P_0}{m}$, por la cantidad, $-a\Omega^2$, se obtiene la siguiente expresión:

$$u_p(t) = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}} a \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2.129)$$

Al cuantificar el factor de amplificación dinámica de desplazamientos, B_d , se obtiene la expresión siguiente:

$$B_d = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.130)$$

En la Fig 2.13 se muestra representación gráfica de la ec 2.130

2.6.6.5 El fenómeno de resonancia

Se define al fenómeno de resonancia cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema, es decir, cuando se cumple la condición dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 1 \quad (2.131)$$

Al sustituir la ec 2.131 en la ec 2.129 se obtiene la siguiente expresión:

$$u_p(t) = \frac{1}{2\zeta} a \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad (2.132)$$

$$(B_d)_{res} = \frac{1}{2\zeta} \quad (2.133)$$

La respuesta máxima ocurre cuando:

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.134)$$

$$(B_d)_{max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.135)$$

Se observa que si: $\zeta = 0$, entonces $(B_d)_{max} = \infty$

Al establecer la solución de las ecuaciones de movimiento del sistema para el caso de resonancia, $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, se necesita la solución particular, $u_p(t)$, para tal Caso. La ec 2.117 se transforma en:

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta} \cos \omega_0 t \quad (2.136)$$

Al sustituir las ec 2.136 en la ec 2.56 se obtiene la expresión de las correspondientes ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema:

$$u(t) = e^{-\omega_0 \zeta t} (C_1 \text{sen} \omega_0 t + C_2 \text{cos} \omega_0 t) - \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta} \cos \omega_0 t \quad (2.137)$$

sometida a las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t)|_{t=0} = u_0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u(t) \right|_{t=0} = \dot{u}_0 \quad (2.10)$$

Al hacer que la ec 2.123 satisfaga las ec 2.19 y 2.10 se obtienen los siguientes valores para las constantes, C_1 y C_2 .

$$C_1 = \frac{p_0}{k} \frac{\omega_0}{2\omega_a} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.138)$$

$$C_2 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta} \quad (2.139)$$

Al sustituir las ec 2.138 y 2.139 en la ec 2.137 se obtiene la siguiente expresión:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta} \left[e^{-\omega_0 t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_a t + \cos \omega_a t \right) - \cos \omega_0 t \right] \quad (2.140)$$

Para el caso de amortiguamiento pequeño, ($\zeta \rightarrow 0$), la ec 2.140 se puede escribir como:

$$\frac{u(t)}{\frac{p_0}{k}} = \frac{1}{2\zeta} (e^{-\omega_0 t} - 1) \cos \omega_0 t \quad (2.141)$$

En la Fig 2.14 se muestra la variación de la ec 2.141

Al obtener el límite de la ec 2.141 para, ($\zeta = 0$), al aplicar la regla de L' Hospital se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{u(t)}{\frac{p_0}{k}} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad (2.142)$$

En la Fig 2.15 se muestra la variación de la ec 2.142, donde se puede observar que la respuesta tiende a infinito gradualmente.

2.7 Características dinámicas de los dispositivos para registrar sismos

Si la aceleración de la base de un instrumento, $\frac{d^2}{dt^2}u_g(t)$, es armónica, dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{dt^2}u_g(t) = a \operatorname{sen} \Omega t \quad (2.143)$$

Al comparar las ecuaciones 2.128 y 2.143 se puede establecer que el factor de amplificación dinámica de desplazamientos, \bar{B}_d , se obtiene de la ec 2.130 y resulta ser:

$$\bar{B}_d = \frac{\frac{1}{\omega_o^2}}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_o^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_o} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{B_d}{\omega_o^2} \quad (2.144)$$

En la Fig 2.13 se muestra el factor de amplificación dinámica de desplazamientos, B_d , y en ella se observa que para $\zeta = 0.7$, se tiene que $B_d = 1$, en el rango $0 \leq \frac{\Omega}{\omega_o} \leq 0.6$, se

concluye que **el desplazamiento de la masa de un sistema es proporcional a la aceleración de su base**, si se tiene un amortiguamiento del 70% y si las excitaciones que se tratan de registrar tienen frecuencias inferiores al 60% de la frecuencia natural del sistema. Si esto se cumple el dispositivo de medición resulta ser un **acelerómetro**.

En ingeniería sísmica, la máxima frecuencia de interés es del orden de 10 cps ($T=0.1s$), por lo que los acelerómetros tienen frecuencias naturales de 16 cps a 20 cps.

Si la excitación del suelo está dada por la ec 2.127, es decir:

$$u_g(t) = a \operatorname{sen} \Omega t \quad (2.127)$$

la aceleración del terreno está dada por la ec 2.128, es decir:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_g(t) = -a\Omega^2 \text{sen}\Omega t \quad (2.128)$$

entonces, el factor de amplificación dinámica de desplazamientos, B_d , resulta ser el de la ec 2.129, y sus valores están dados por la siguiente ecuación:

$$B_d = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_o^2}}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_o^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_o} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.145)$$

Su representación gráfica se muestra en la Fig 2.16, en donde se observa que si $\zeta = 0.5$ y $\Omega > \omega_o$, **el desplazamiento de la masa es proporcional al del suelo**, si esto se cumple, el dispositivo de medición resulta ser un **desplazómetro**, también conocido como **sismómetro**.

2.8 Determinación experimental del amortiguamiento mediante pruebas de vibración forzada

Si se determina experimentalmente el factor de amplificación dinámica de desplazamientos, B_d , mediante una serie de pruebas de vibración forzada con fuerzas armónicas, se puede determinar la fracción del amortiguamiento crítico, ζ , mediante el método conocido con el nombre del ancho de banda de la mitad de potencia. Se basa en determinar las frecuencias que corresponden al valor de la rms (raíz cuadrada del valor medio cuadrático) de la amplitud de la resonancia, el cual vale: $(B_d)_{max} / \sqrt{2}$.

Sean, β_1 y β_2 , las correspondientes relaciones de frecuencias y, de acuerdo con la expresión de B_d se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_o}{2(B_d)_{max}} = \frac{\rho_o}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (2.146)$$

Al resolver la ec 2.146 se obtiene que:

$$\beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \quad (2.147)$$

Al despreciar el término cuadrático (ζ^2) del radical de la ec 2.147, se puede escribir que:

$$\beta_1^2 \approx 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad (2.148)$$

$$\beta_2^2 \approx 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad (2.149)$$

cuyas raíces resultan ser:

$$\beta_1 \approx 1 - \zeta - \zeta^2 \quad (2.150)$$

$$\beta_2 \approx 1 + \zeta - \zeta^2 \quad (2.151)$$

De acuerdo con las ecs 2.150 y 2.151, resulta que:

$$\beta_2 - \beta_1 \approx 2\zeta \quad (2.152)$$

por lo que la fracción del amortiguamiento crítico, ζ , se puede estimar mediante:

$$\zeta \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad (2.153)$$

En la Fig 2.17 se ejemplifica este método.

2.9 Vibración debida a la acción de un sismo

La ecuación de equilibrio ante la acción de un sismo se presenta en la ec 2.17. Al tomar en cuenta la ec 2.40, se puede escribir como:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 2\omega_0 \zeta \frac{d}{dt}u(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (2.154)$$

La integración de la ec 2.154 en el intervalo, $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$, donde Δt representa el tamaño del paso o intervalo de integración, se hace con las siguientes condiciones iniciales:

$$u(t) \Big|_{t=t_i} = u_i \quad (2.155)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) \Big|_{t=t_i} = \dot{u}_i \quad (2.156)$$

2.9.1 Solución general para acelerogramas representados con variación lineal en cada paso de integración.

En la Fig 2.18 se muestra un registro típico de la aceleración en un terreno duro debido a un sismo. Si se selecciona el paso de integración de tal manera que la variación de la aceleración del terreno se pueda representar como una variación lineal, entonces, su ecuación se puede expresar como:

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_g(t_i) + \overline{\ddot{u}_g}(t) \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.157)$$

En la Ec 2.157 se define lo siguiente:

$$\overline{\ddot{u}_g}(t) = p(t - t_i) \quad (2.158)$$

donde:

$$p = \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} = \frac{\ddot{u}_g(t_i + \Delta t) - \ddot{u}_g(t_i)}{\Delta t} = \frac{\ddot{u}_{g,f} - \ddot{u}_{g,i}}{\Delta t} \quad (2.159)$$

Al sustituir la ec 2.158 en la ec 2.157 se obtiene que:

$$u_g^-(t) = u_{g_i} + p(t - t_i) \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.160)$$

Al sustituir la ec 2.160 en la ec 2.154 se obtiene la ecuación de equilibrio de un sistema lineal de un grado de libertad, sometida a la acción de un sismo representado por un acelerograma con variación lineal en el paso de integración, y resulta ser:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2\omega_0 \zeta \frac{d}{dt} u(t) + \omega_0^2 u(t) = -u_{g_i} - p(t - t_i) \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.161)$$

La solución general de la ecuación de movimiento (ec 2.161) está dada por la ec 2.56, es decir:

$$u(t) = e^{-\omega_0 \zeta t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) + u_p(t) \quad (2.56)$$

Al observar la ec 2.161, la solución particular de la ec 2.56, $u_p(t)$, resulta ser de la forma siguiente:

$$u_p(t) = C_3 + C_4 t \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.162)$$

Al sustituir la ec 2.162 en la ec 2.161 se obtiene:

$$0 + 2\omega_0 \zeta C_4 + \omega_0^2 (C_3 + C_4 t) = -u_{g_i} - p(t - t_i) \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.163)$$

Al hacer que se cumpla la ec 2.163 se establecen las siguientes ecuaciones:

$$\omega_0^2 C_3 + 2\omega_0 \zeta C_4 = -u_{g_i} + p t_i \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.164)$$

$$\omega_0^2 C_4 = -p \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.165)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado por las ec 2.164 y 2.165 se obtiene:

$$C_3 = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} + p t_i \right) \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.166)$$

$$C_4 = -\frac{1}{\omega_0^2} p \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.167)$$

Al sustituir las ec 2.166 y 2.167 en la ec 2.162 se obtiene:

$$u_p(t) = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} + p t_i \right) - \frac{1}{\omega_0^2} p t \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.168)$$

Al sustituir la ec 2.168 en la ec 2.56 se obtiene que:

$$u(t) = e^{-\omega_0 \zeta} (C_1 \sin \omega_a t + C_2 \cos \omega_a t) + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} + p t_i \right) - \frac{1}{\omega_0^2} p t \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.169)$$

Al derivar respecto al tiempo la ec 2.169 se obtiene la expresión de la velocidad.

$$\dot{u}(t) = e^{-\omega_0 \zeta} C_1 (\omega_a \cos \omega_a t - \omega_0 \zeta \sin \omega_a t) - e^{-\omega_0 \zeta} C_2 (\omega_a \sin \omega_a t + \omega_0 \zeta \cos \omega_a t) - \frac{1}{\omega_0^2} p \quad \forall t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (2.170)$$

Al hacer que las ec 2.169 y 2.170 satisfagan las condiciones iniciales dadas por las ec 2.155 y 2.156 se obtienen las siguientes expresiones:

$$u(t)_{t=t_i} = u_i = e^{-\omega_0 \zeta} (C_1 \sin \omega_a t_i + C_2 \cos \omega_a t_i) + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} \right) \quad (2.171)$$

$$\dot{u}(t)_{t=t_i} = \dot{u}_i = e^{-\omega_0 \zeta} C_1 (\omega_a \cos \omega_a t_i - \omega_0 \zeta \sin \omega_a t_i) - e^{-\omega_0 \zeta} C_2 (\omega_a \sin \omega_a t_i + \omega_0 \zeta \cos \omega_a t_i) - \frac{1}{\omega_0^2} p \quad (2.172)$$

Las ec 2.171 y 2.172 se pueden escribir como:

$$C_1 \operatorname{sen} \omega_a t_1 + C_2 \cos \omega_a t_1 = u_1 e^{\omega_0 \tau_1} + \frac{e^{\omega_0 \tau_1}}{\omega_0^2} \left(u_{g1} - \frac{2}{\omega_0} p \zeta \right) \quad (2.173)$$

$$C_1 (\omega_a \cos \omega_a t_1 - \omega_0 \zeta \operatorname{sen} \omega_a t_1) - C_2 (\omega_a \operatorname{sen} \omega_a t_1 + \omega_0 \zeta \cos \omega_a t_1) = e^{\omega_0 \tau_1} \left(\dot{u}_1 + \frac{p}{\omega_0^2} \right) \quad (2.174)$$

La solución del sistema de ecuaciones algebraicas dadas por las ec 2.174 y 2.175 resultan ser:

$$C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta} \quad (2.175)$$

$$C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta} \quad (2.176)$$

donde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \omega_a t_1 & \cos \omega_a t_1 \\ \omega_a \cos \omega_a t_1 - \omega_0 \zeta \operatorname{sen} \omega_a t_1 & -\omega_a \operatorname{sen} \omega_a t_1 - \omega_0 \zeta \cos \omega_a t_1 \end{vmatrix} = -\omega_a \quad (2.177)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_1 &= e^{\omega_0 \tau_1} \begin{vmatrix} u_1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(u_{g1} - \frac{2}{\omega_0} p \zeta \right) & \cos \omega_a t_1 \\ \dot{u}_1 + \frac{p}{\omega_0^2} & -\omega_a \operatorname{sen} \omega_a t_1 - \omega_0 \zeta \cos \omega_a t_1 \end{vmatrix} \\ &= e^{\omega_0 \tau_1} \left\{ \left[\frac{2 p \zeta}{\omega_0^2} \frac{\omega_a}{\omega_0} - \omega_a \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \operatorname{sen} \omega_a t_1 - \left[\omega_0 \zeta \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \dot{u}_1 + \frac{p}{\omega_0^2} (1 - 2 \zeta^2) \right] \cos \omega_a t_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\Delta C_1 = e^{\omega_0 \tau_1} \begin{vmatrix} \text{sen } \omega_a t_1 & u_1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(u_{g1} - \frac{2}{\omega_0} p \zeta \right) \\ \omega_a \cos \omega_a t_1 - \omega_0 \zeta \text{sen } \omega_a t_1 & \dot{u}_1 + \frac{p}{\omega_0^2} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\omega_0 \tau_1} \left\{ \left[\frac{2p\zeta}{\omega_0^2} \frac{\omega_a}{\omega_0} - \omega_a \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \cos \omega_a t_1 + \left[\omega_0 \zeta \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \dot{u}_1 + \frac{p}{\omega_0^2} (1 - 2\zeta^2) \right] \text{sen } \omega_a t_1 \right\} \quad (2.179)$$

Al sustituir las ec 2.177, 2.178 y 2.179 en las correspondientes ec 2.72 y 2.73 se obtienen las siguientes expresiones:

$$\bar{C}_1 = e^{\omega_0 \tau_1} C_1 = e^{\omega_0 \tau_1} \frac{\Delta C_1}{\Delta} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{2p\zeta}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0} - \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \text{sen } \omega_a t_1 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_a} \zeta \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \frac{\dot{u}_1}{\omega_a} + \frac{p}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_a} (1 - 2\zeta^2) \right] \cos \omega_a t_1 \right\} \quad (2.180)$$

$$\bar{C}_2 = e^{\omega_0 \tau_1} C_2 = e^{\omega_0 \tau_1} \frac{\Delta C_2}{\Delta} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{2p\zeta}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0} - \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \cos \omega_a t_1 + \left[\frac{\omega_0}{\omega_a} \zeta \left(u_1 + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \frac{\dot{u}_1}{\omega_a} + \frac{p}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_a} (1 - 2\zeta^2) \right] \text{sen } \omega_a t_1 \right\} \quad (2.181)$$

Al cuantificar las ec 2.169 y 2.170 al final del paso de integración, se obtiene que:

$$u(t_1 + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta (t_1 + \Delta t)} \left\{ \left[C_1 \text{sen } \omega_a (t_1 + \Delta t) + C_2 \cos \omega_a (t_1 + \Delta t) \right] + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g1} + p \Delta t \right) \right\} \quad (2.182)$$

$$\dot{u}(t_1 + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta (t_1 + \Delta t)} \left\{ C_1 \left[\omega_a \cos \omega_a (t_1 + \Delta t) - \omega_0 \zeta \text{sen } \omega_a (t_1 + \Delta t) \right] - e^{-\omega_0 \zeta (t_1 + \Delta t)} C_2 \left[\omega_a \text{sen } \omega_a (t_1 + \Delta t) + \omega_0 \zeta \cos \omega_a (t_1 + \Delta t) \right] - \frac{1}{\omega_0^2} p \right\} \quad (2.183)$$

Puesto que:

$$e^{-\omega_0 \zeta(t+\Delta t)} = e^{-\omega_0 \zeta} e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \quad (2.184)$$

Al sustituir las ec 2.180, 2.181 y 2.184 en las ec 2.182 y 2.183 se obtienen las siguientes expresiones:

$$u(t_i + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \left\{ [\bar{C}_1 \sin \omega_d(t_i + \Delta t) + \bar{C}_2 \cos \omega_d(t_i + \Delta t)] + \frac{e^{-\omega_0 \zeta t_i}}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} + p \Delta t \right) \right\} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_i + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} & \bar{C}_1 [\omega_d \cos \omega_d(t_i + \Delta t) - \omega_0 \zeta \sin \omega_d(t_i + \Delta t)] \\ & - e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \bar{C}_2 [\omega_d \sin \omega_d(t_i + \Delta t) + \omega_0 \zeta \cos \omega_d(t_i + \Delta t)] - \frac{1}{\omega_0^2} p \end{aligned} \quad (2.186)$$

Al cuantificar la ecuación de equilibrio dinámico dada por la ec 2.161 al final del paso de integración, se obtiene la siguiente expresión:

$$u(t_i + \Delta t) + 2\omega_0 \zeta \dot{u}(t_i + \Delta t) + \omega_0^2 u(t_i + \Delta t) = -u_{g_i}(t_i + \Delta t) \quad (2.187)$$

Al usar las ecuaciones 2.185, 2.186 y 2.187 se puede cuantificar la aceleración al final del paso de integración mediante la expresión siguiente:

$$\ddot{u}(t_i + \Delta t) = -2\omega_0 \zeta \dot{u}(t_i + \Delta t) - \omega_0^2 u(t_i + \Delta t) - u_{g_i}(t_i + \Delta t) \quad (2.188)$$

2.9.2 Resumen del algoritmo de la solución cerrada para acelerogramas con variación lineal en el paso de integración.

A continuación se resume la secuencia de cálculo para la integración de la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema lineal de un grado de libertad, sometido a la acción de un sismo representado por su acelerograma, considerando variación lineal en el paso de integración:

- a) Definir los datos del sistema lineal de un grado de libertad:

Datos del sistema: k, ζ, m

b) Cuantificar las propiedades dinámicas del sistema:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \text{cuadrado de la frecuencia circular natural del sistema} \quad (2.16)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \text{periodo natural de vibración} \quad (2.31)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 \zeta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \approx \omega_0 \quad (2.41)$$

Seleccionar $\Delta t < \frac{T_0}{10}$ y calcular $e^{-\omega_0 \Delta t}$

c) Para el inicio de cada paso de integración, t_i , cuantificar:

$$u(t)_{t=t_i} = u_i \quad (2.155)$$

$$\frac{d}{dt}u(t)_{t=t_i} = \dot{u}_i \quad (2.156)$$

$$p = \frac{\Delta u_g}{\Delta t_a} = \frac{u_g(t_i + \Delta t) - u_g(t_i)}{\Delta t} = \frac{u_{g'} - u_{g1}}{\Delta t} \quad (2.159)$$

$$\bar{C}_1 = \left\{ \left[\frac{2p\zeta}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0} \left(u_i + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \text{sen} \omega_a t_i - \left[\frac{\omega_0}{\omega_a} \zeta \left(u_i + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \frac{u_i}{\omega_a} + \frac{p}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_a} (1 - 2\zeta^2) \right] \text{cos} \omega_a t_i \right\} \quad (2.180)$$

$$\bar{C}_2 = \left\{ \left[\frac{2p\zeta}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0} \left(u_i + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) \right] \text{cos} \omega_a t_i + \left[\frac{\omega_0}{\omega_a} \zeta \left(u_i + \frac{u_{g1}}{\omega_0^2} \right) + \frac{u_i}{\omega_a} + \frac{p}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_a} (1 - 2\zeta^2) \right] \text{sen} \omega_a t_i \right\} \quad (2.181)$$

d) Para el final de cada paso de integración, $t_f = t_i + \Delta t$, cuantificar:

$$u(t_i + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \left\{ [\bar{C}_1 \text{sen} \omega_a(t_i + \Delta t) + \bar{C}_2 \text{cos} \omega_a(t_i + \Delta t)] + \frac{e^{-\omega_0 \zeta t_i}}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0} p \zeta - u_{g_i} + p \Delta t \right) \right\} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_i + \Delta t) = e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \bar{C}_1 [\omega_a \text{cos} \omega_a(t_i + \Delta t) - \omega_0 \zeta \text{sen} \omega_a(t_i + \Delta t)] \\ - e^{-\omega_0 \zeta \Delta t} \bar{C}_2 [\omega_a \text{sen} \omega_a(t_i + \Delta t) + \omega_0 \zeta \text{cos} \omega_a(t_i + \Delta t)] - \frac{1}{\omega_0^2} p \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$u(t_i + \Delta t) = -2\omega_0 \zeta \dot{u}(t_i + \Delta t) - \omega_0^2 u(t_i + \Delta t) - u_{g_i}(t_i + \Delta t) \quad (2.188)$$

2.9.3 Solución numérica mediante el método β de Newmark

Newmark considera que si la aceleración relativa del sistema lineal de un grado de libertad tiene una variación lineal en el intervalo de integración, $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$, y al suponer que se conocen los valores de la respuesta dinámica al inicio de cada paso

$\left[u(t)_{t=t_i} = u_i, \frac{d}{dt} u(t)_{t=t_i} = \dot{u}_i \text{ y } \frac{d^2}{dt^2} u(t)_{t=t_i} = u_i \right]$, por integración directa se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t)_{t=t_i+\Delta t} = u_{i+\Delta t} \quad (2.189)$$

$$\dot{u}_{i+\Delta t} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (u_i + u_{i+\Delta t}) \quad (2.190)$$

$$u_{i+\Delta t} = u_i + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6} (2u_i + u_{i+\Delta t}) \quad (2.191)$$

De acuerdo con su experiencia numérica Newmark propuso las siguientes aproximaciones para las ecuaciones 2.190 y 2.191

$$\dot{u}_{i,+\Delta t} = \dot{u}_i + (1-\gamma) \Delta t \ddot{u}_i + \gamma \Delta t \ddot{u}_{i,+\Delta t} \quad (2.192)$$

$$u_{i,+\Delta t} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{i,+\Delta t} \quad (2.193)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método (para $\beta = \frac{1}{4}$, el método es incondicionalmente estable) y el parámetro γ está relacionado con la estabilidad y la convergencia del método debido a la aproximación matemática que se induce (para $\gamma = \frac{1}{2}$, no existe aproximación matemática). Para el caso en que $\beta = \frac{1}{6}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$, las ecuaciones del método β de Newmark coinciden con las respectivas ecuaciones 2.190 y 2.191

Al cuantificar la ecuación de equilibrio dinámico, dada por la ec 2.161, al final del paso de integración, se obtiene la siguiente expresión:

$$u_{i,+\Delta t} + 2\omega_0 \zeta u_{i,+\Delta t} + \omega_0^2 u_{i,+\Delta t} = -u_g(t_i + \Delta t) \quad (2.194)$$

y la expresión de la aceleración al final del paso de integración y resulta ser:

$$\ddot{u}_{i,+\Delta t} = 2\omega_0 \zeta \dot{u}_{i,+\Delta t} - \omega_0^2 u_{i,+\Delta t} - \ddot{u}_g(t_i + \Delta t) \quad (2.195)$$

Al sustituir las ec 2.192 y 2.193 en la ec 2.195 se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{i,+\Delta t} = & -\omega_0^2 \dot{u}_i - (2\omega_0 \zeta + \omega_0^2 \Delta t) \dot{u}_i - \left[2\omega_0 \zeta (1-\gamma) \Delta t + \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \right] \ddot{u}_i \\ & - (2\omega_0 \zeta \gamma \Delta t + \omega_0^2 \beta \Delta t^2) \ddot{u}_{i,+\Delta t} - \ddot{u}_g(t_i + \Delta t) \end{aligned} \quad (2.196)$$

que puede escribirse como:

$$u_{t_i + \Delta t} = \frac{\left\{ \omega_0^2 u_i + (2\omega_0 \zeta + \omega_0^2 \Delta t) \dot{u}_i + \left[2\omega_0 \zeta (1 - \gamma) \Delta t + \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \right] u_i + u_g(t_i - \Delta t) \right\}}{(1 + 2\omega_0 \zeta \gamma \Delta t + \omega_0^2 \beta \Delta t^2)} \quad (2.197)$$

2.9.4 Resumen del algoritmo del método β de Newmark

- a) Definir datos del sistema las propiedades del sistema lineal de un grado de libertad:

datos del sistema: k, ζ, m

- b) Cuantificar las propiedades dinámicas del sistema:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \text{cuadrado de la frecuencia circular natural del sistema} \quad (2.16)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \text{periodo natural de vibración} \quad (2.31)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \approx \omega_0 \quad (2.41)$$

Establecer valores para $\Delta t < \frac{T_0}{10}, \beta$ y γ

c) Calcular: $a_0 = 1 + 2\omega_0 \zeta \gamma \Delta t + \omega_0^2 \beta \Delta t^2$ (2.198a)

$$a_1 = \omega_0^2 / a_0 \quad (2.198b)$$

$$a_2 = (2\omega_0 \zeta + \omega_0^2 \Delta t) / a_0 \quad (2.198c)$$

$$a_3 = \left[2\omega_0 \zeta (1 - \gamma) \Delta t + \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \right] / a_0 \quad (2.198d)$$

$$a_4 = 1 / a_0 \quad (2.198e)$$

$$a_5 = (1 - \gamma) \Delta t \quad (2.198f)$$

$$a_6 = \gamma \Delta t \quad (2.198g)$$

$$a_7 = \Delta t \quad (2.198h)$$

$$a_8 = \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \quad (2.198i)$$

$$a_9 = \beta \Delta t^2 \quad (2.198j)$$

d) Para el inicio de cada paso de integración, t_i , cuantificar:

$$u(t)|_{t=t_i} = u_i \quad (2.155)$$

$$\frac{d}{dt} u(t)|_{t=t_i} = \dot{u}_i \quad (2.156)$$

e) Para el final de cada paso de integración, $t_f = t_i + \Delta t$, cuantificar:

$$u_{i+\Delta t} = -a_1 u_i - a_2 \dot{u}_i - a_3 u_i - a_4 u_f(t_i + \Delta t) \quad (2.199)$$

$$\dot{u}_{i+\Delta t} = \dot{u}_i + a_5 u_i + a_6 u_{i+\Delta t} \quad (2.200)$$

$$u_{i+\Delta t} = u_i + a_7 \dot{u}_i + a_8 u_i + a_9 u_{i+\Delta t} \quad (2.201)$$

2.9.5 Espectros de respuesta estructural

Cuando la fuerza excitadora corresponde a un sismo, su expresión está dada por la ec 2.11, y de acuerdo con la ec 2.104, la integración de las ecuaciones de equilibrio cuando, actúa un sismo, está dada por:

$$u(t) = Ae^{-\omega_o \zeta t} \cos(\omega_a t - \theta) - \frac{1}{\omega_a} \int_{-\infty}^t u_g(\tau) e^{-\omega_o \zeta (t-\tau)} \text{sen} \omega_a (t-\tau) d\tau \quad \forall t \geq \tau \quad (2.202)$$

De la observación de la ec 2.202 se concluye que el desplazamiento relativo, $u(t)$, es función del tiempo, t , de la fracción del amortiguamiento crítico, ζ , y la frecuencia circular natural, ω_o (o del periodo natural de vibración $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$), es decir:

$$u(t) = f(t, \omega_o, \zeta) \quad (2.203)$$

Se establece el siguiente procedimiento para cuantificar la ec 2.203:

- Se fija un valor de ζ , por ejemplo: $\zeta = 0$
- Se le asignan valores a ω_o , por ejemplo: ω_{o1} , ω_{o2} , ω_{o3} , etc, hasta cubrir un intervalo de interés
- Para cada caso se cuantifica la ec 2.203, y se obtiene:

$$u_1(t) = f_1(t, \omega_{o1}) = f_1(t) \quad (2.204)1$$

$$u_2(t) = f_2(t, \omega_{o2}) = f_2(t) \quad (2.204)2$$

$$u_3(t) = f_3(t, \omega_{o3}) = f_3(t) \quad (2.204)3$$

- Se definen las siguientes cantidades:

$$D_1 = \text{máx} |f_1(t)| = D(\omega_{o1}, \zeta) \quad (2.205)1$$

$$D_2 = \text{máx} |f_2(t)| = D(\omega_{o2}, \zeta) \quad (2.205)2$$

$$D_3 = \text{máx} |f_3(t)| = D(\omega_{o3}, \zeta) \quad (2.205)3$$

- e) Se construye una gráfica, como la Fig 2.19, con los valores dados por las ec 2.205, en donde el eje de las abscisas corresponde a ω_{0i} , y el eje de las ordenadas corresponde a las cantidades D_i . A esta gráfica se le denomina **espectro de respuesta de desplazamientos** para $\zeta = 0$.
- f) Se repite el proceso al fijar otros valores de ζ , por ejemplo: $\zeta = 0.02, 0.05, 0.10, 0.20$, etc, y se obtienen los espectros de respuesta de desplazamientos correspondientes
- g) De manera análoga se pueden obtener los espectros para otros tipos de respuesta, tales como: **velocidad relativa, aceleración absoluta**, etc, que son, respectivamente:

$$V = \max | \dot{u}(t) |_{\zeta, \omega_0} \quad (2.206)$$

$$A = \max | \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) |_{\zeta, \omega_0} \quad (2.207)$$

2.9.6 Pseudo espectros

Estadísticamente se han encontrado las siguientes relaciones:

$$S_v = \omega_0 D \approx V \quad (2.208)$$

$$S_A = \omega_0^2 D \approx A \approx \omega_0 V \quad (2.209)$$

A S_v se le llama **pseudo espectro de velocidades** y a S_A , **pseudo espectro de aceleraciones**.

De la ec 2.208 se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\log D = \log V - \log \omega_0 = \log V + \log T - \log 2\pi \quad (2.210)$$

De la ec 2.209, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\log A = \log V + \log \omega_0 = \log V - \log T + \log 2\pi \quad (2.211)$$

Las ecuaciones 2.210 y 2.211 corresponden a líneas rectas en papel logarítmico. La ec 2.210 con pendiente igual a -1 , y la ec 2.211 con pendiente igual a $+1$, si se usa a la frecuencia circular natural de vibración, ω_0 , como variable independiente. Si se usa como variable independiente al periodo natural de vibración, T , la ec 2.210 tiene pendiente igual a $+1$, mientras que la ec 2.211 pendiente igual a -1 . En la Fig 2.20 se muestran los espectros de respuesta en este formato, para el acelerograma de la Fig 2.18.

FIGURAS

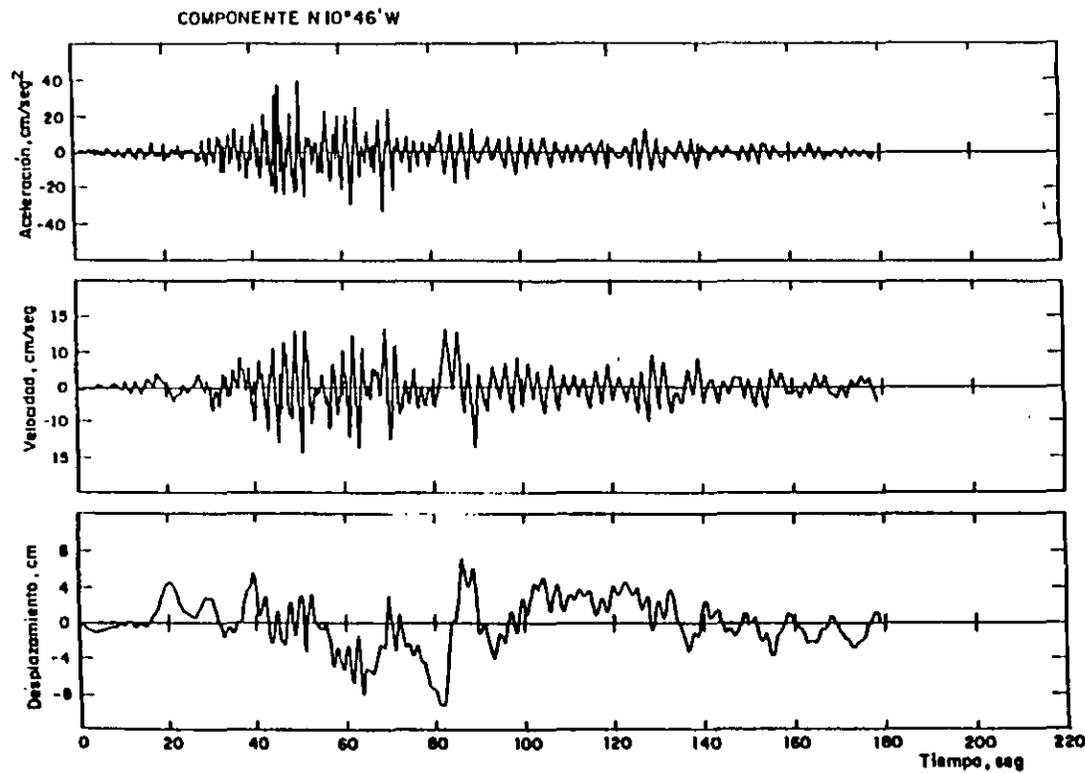


Fig 1.1 Movimiento del terreno. Alameda Central, 19 de mayo de 1962

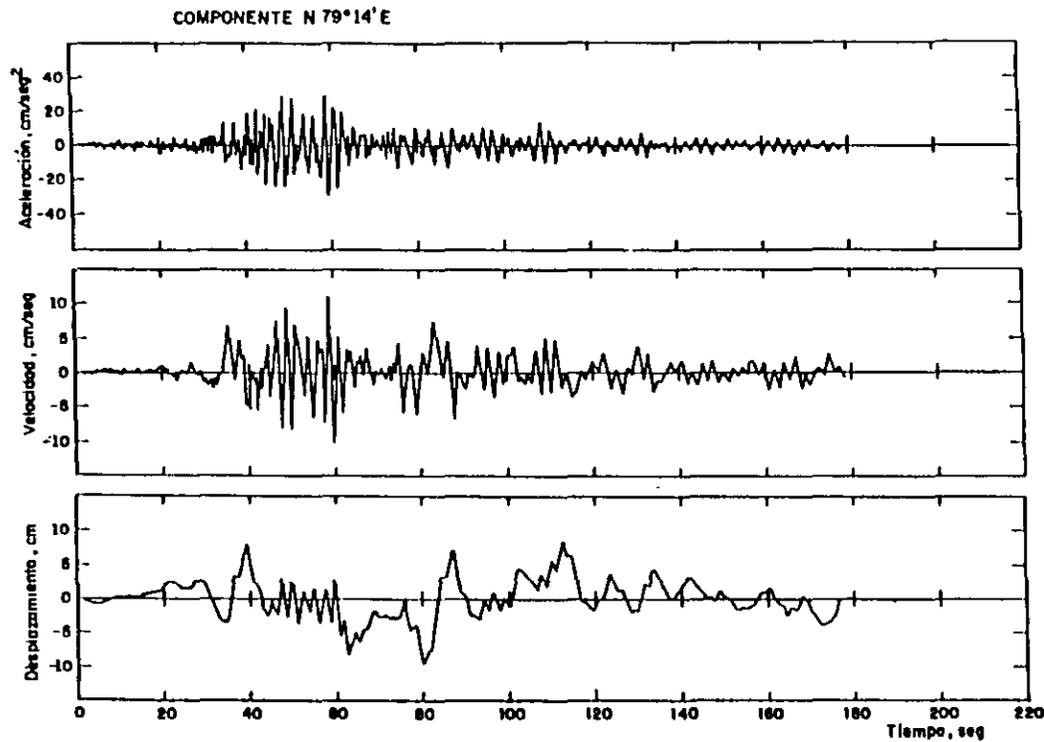


Fig 1.2 Movimiento del terreno. Alameda Central, 19 de mayo de 1962

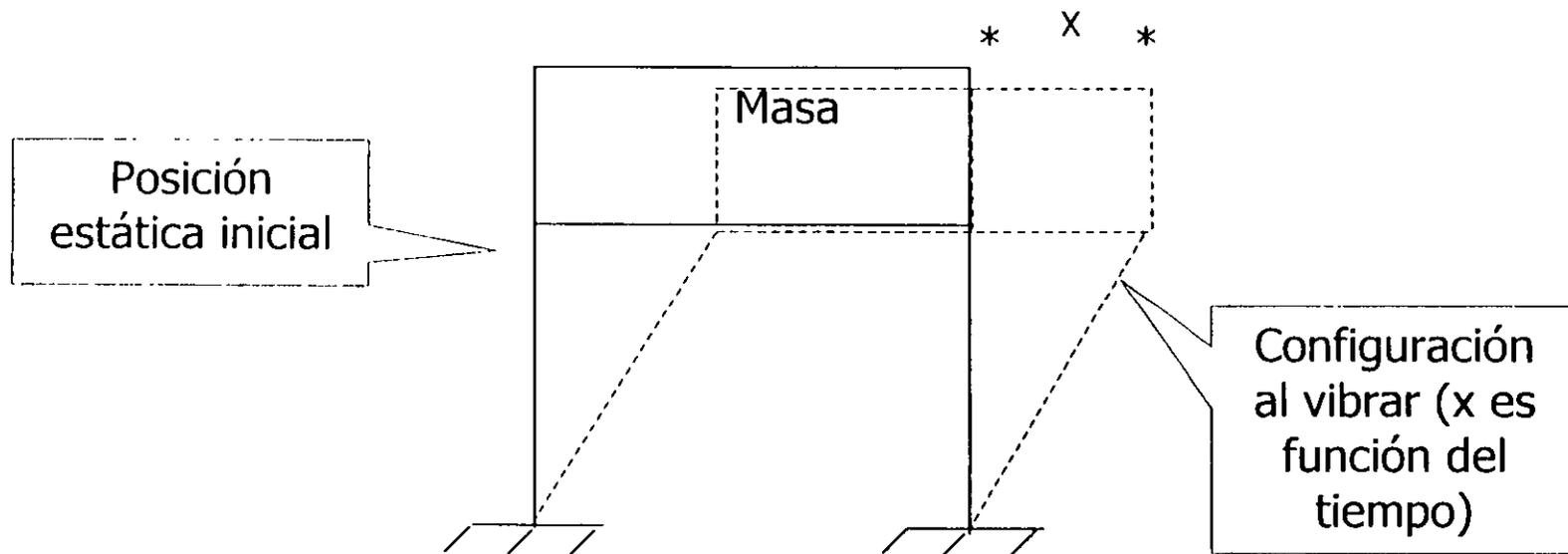


Fig. 1.a Sistema de un grado de libertad

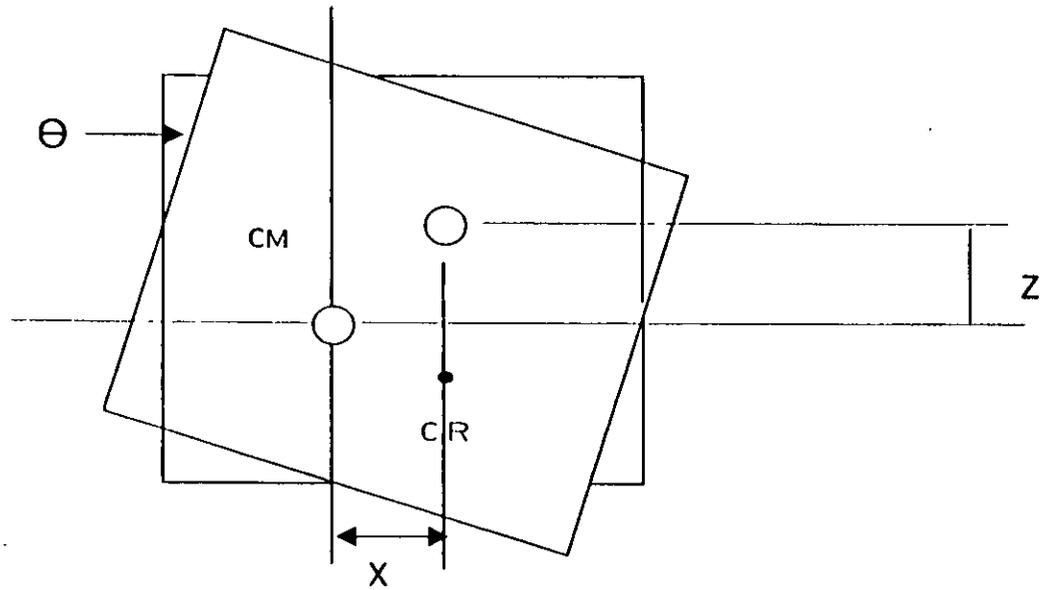


Fig. 1.3 Sistema de tres grados de libertad

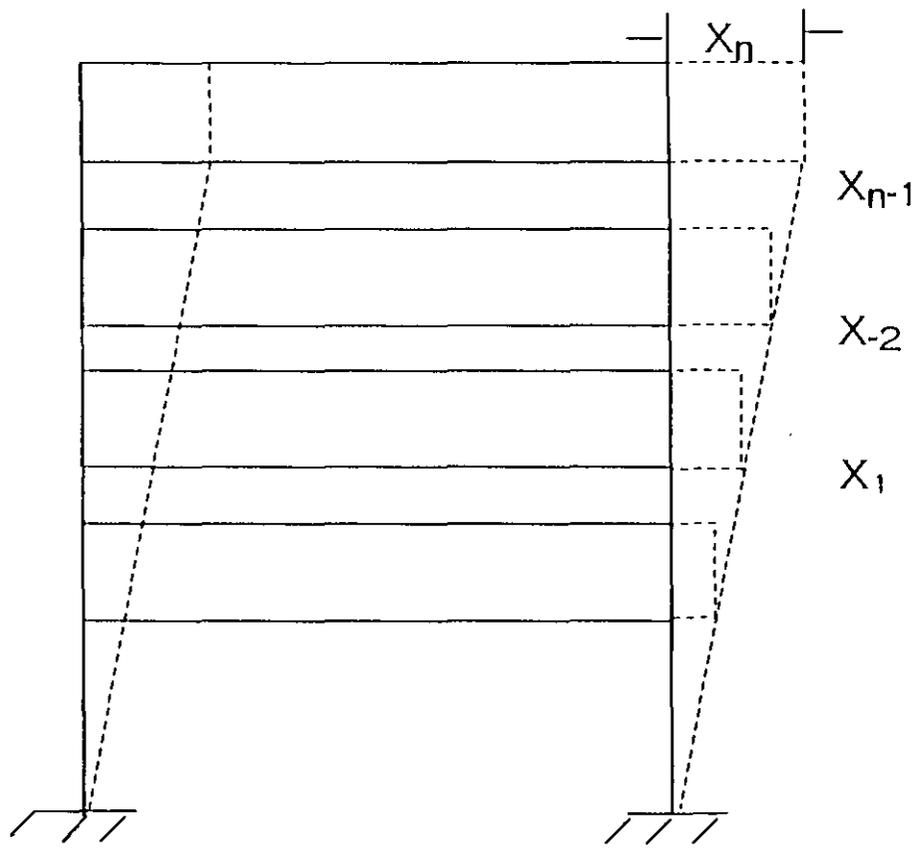


Fig. 1.4 Sistema de n grados de libertad

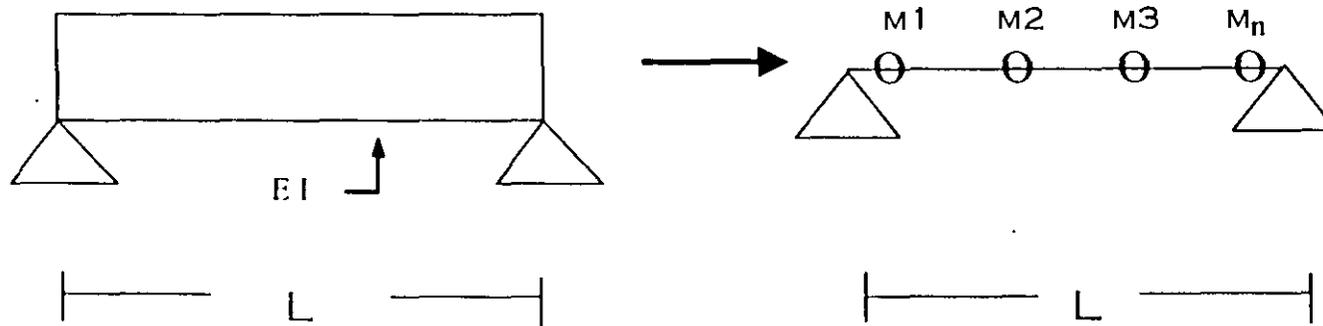


Fig. 1.5a **Viga simplemente apoyada**

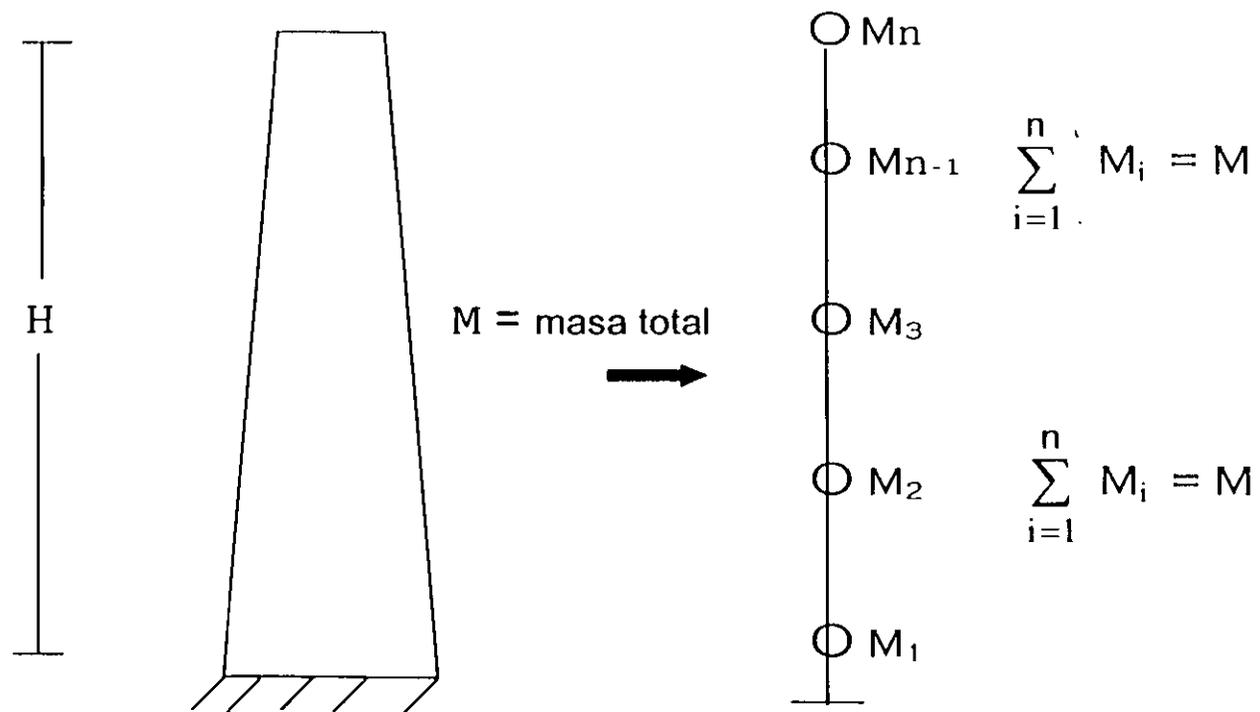


Fig. 1.5b Chimenea

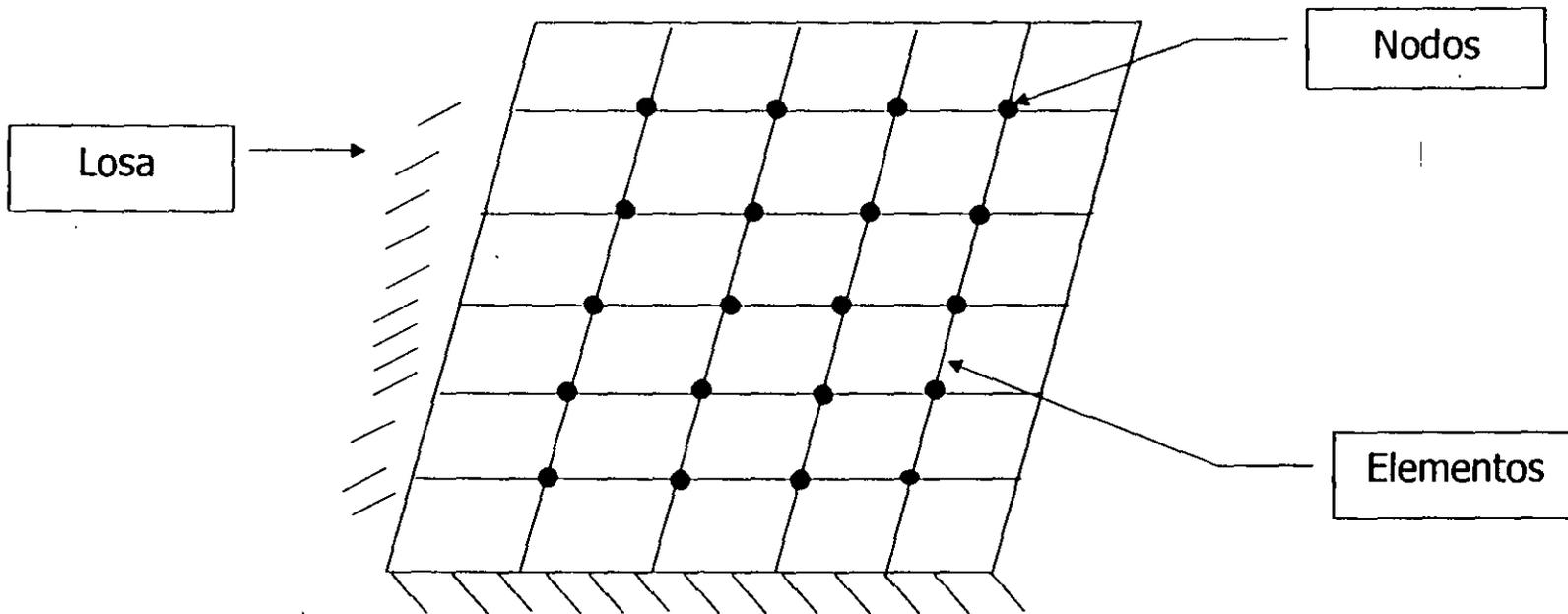
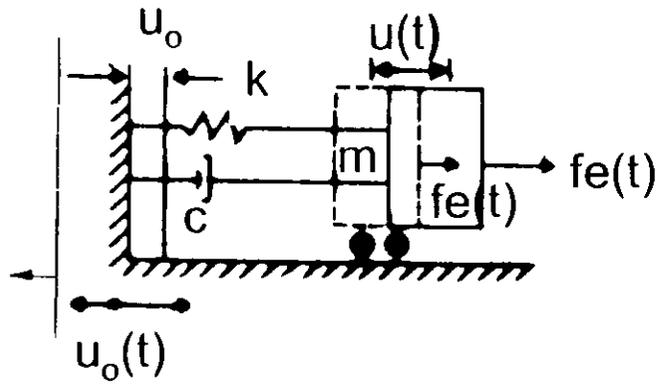
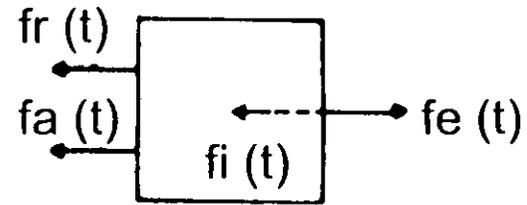


Fig. 1.6 Losa modelada con elementos finitos



(a)



(b) (diagrama de cuerpo libre)

Fig 2.1 Sistema de un grado de libertad

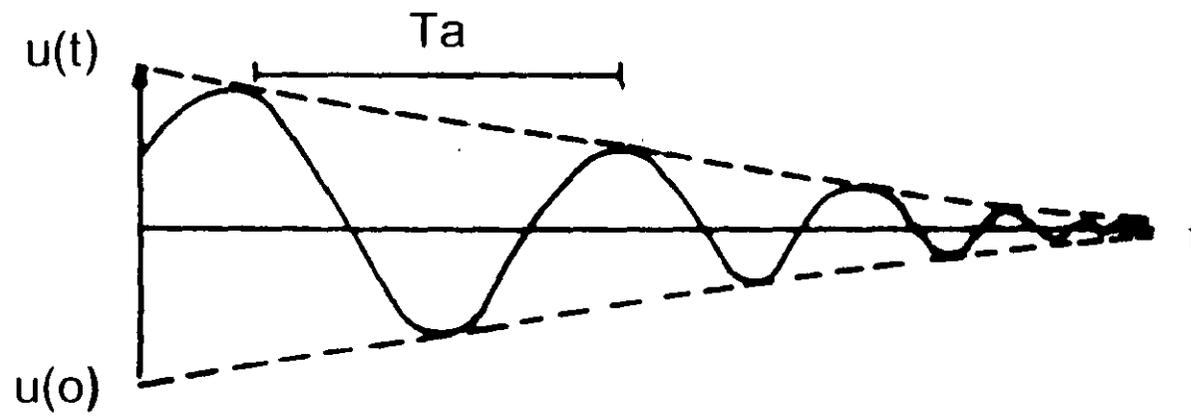


Fig 2.2 Vibración libre amortiguada

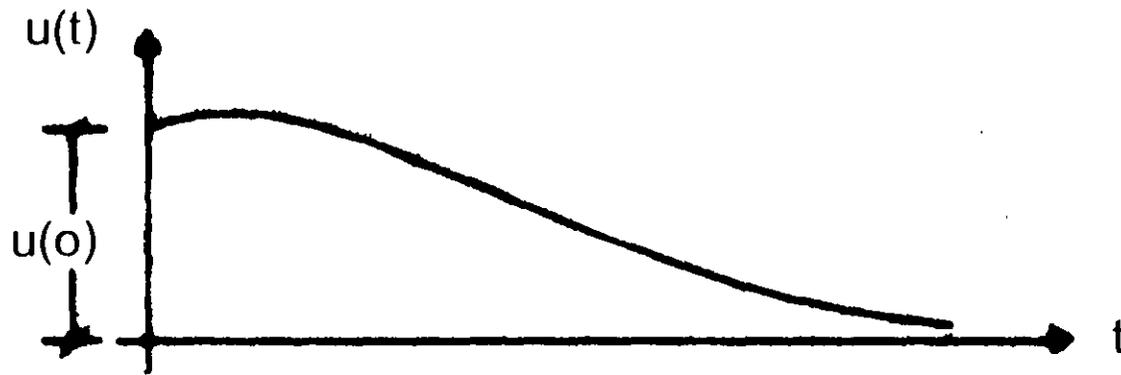


Fig 2.3 Caso límite de vibración libre

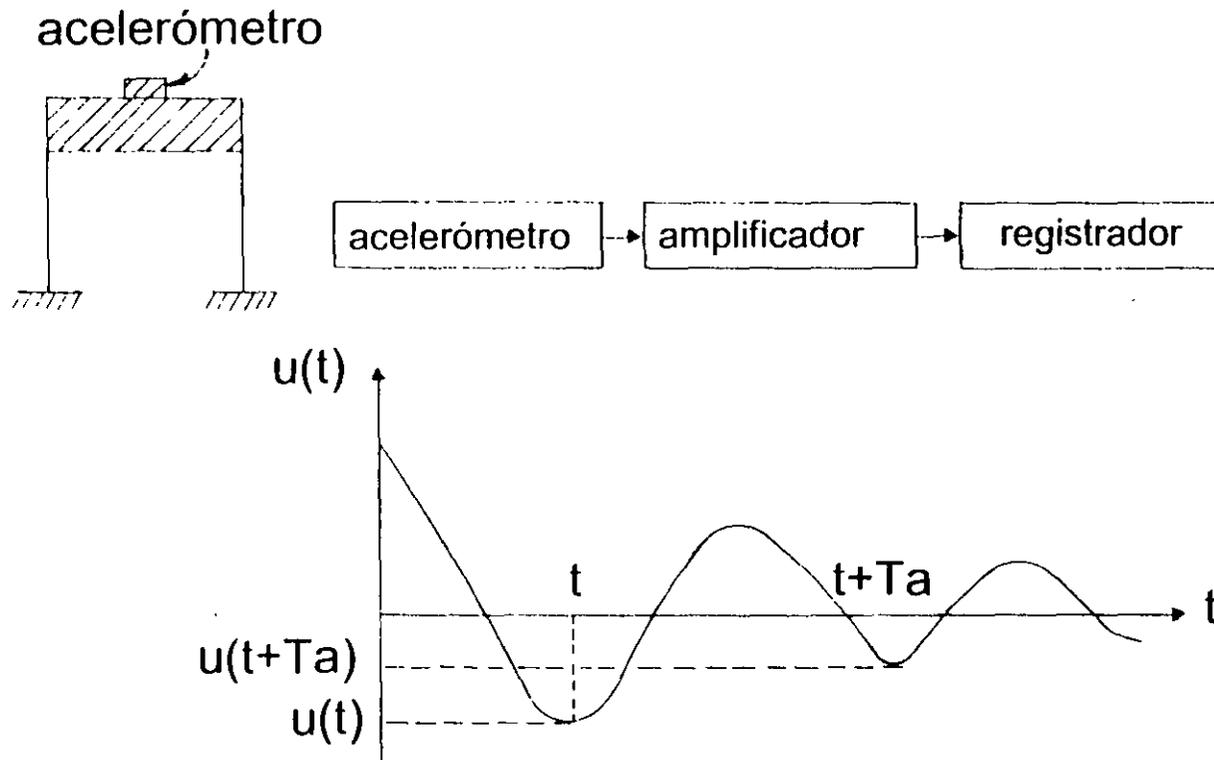


Fig 2.4 Determinación experimental del amortiguamiento

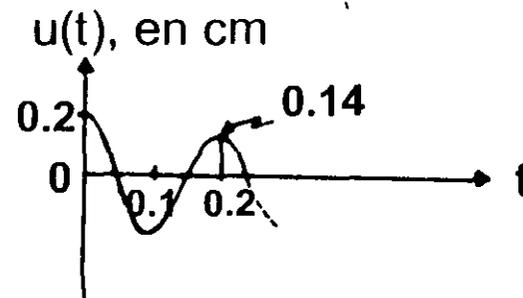
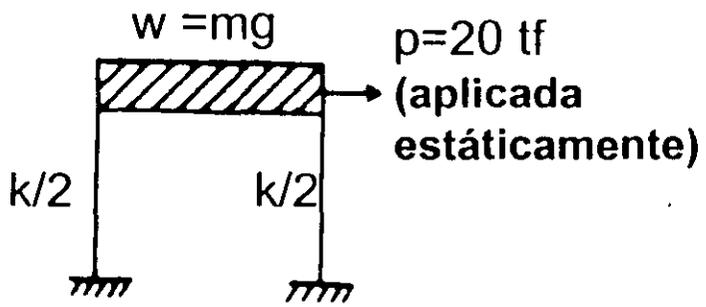


Fig 2.5 Ejemplo de vibración libre

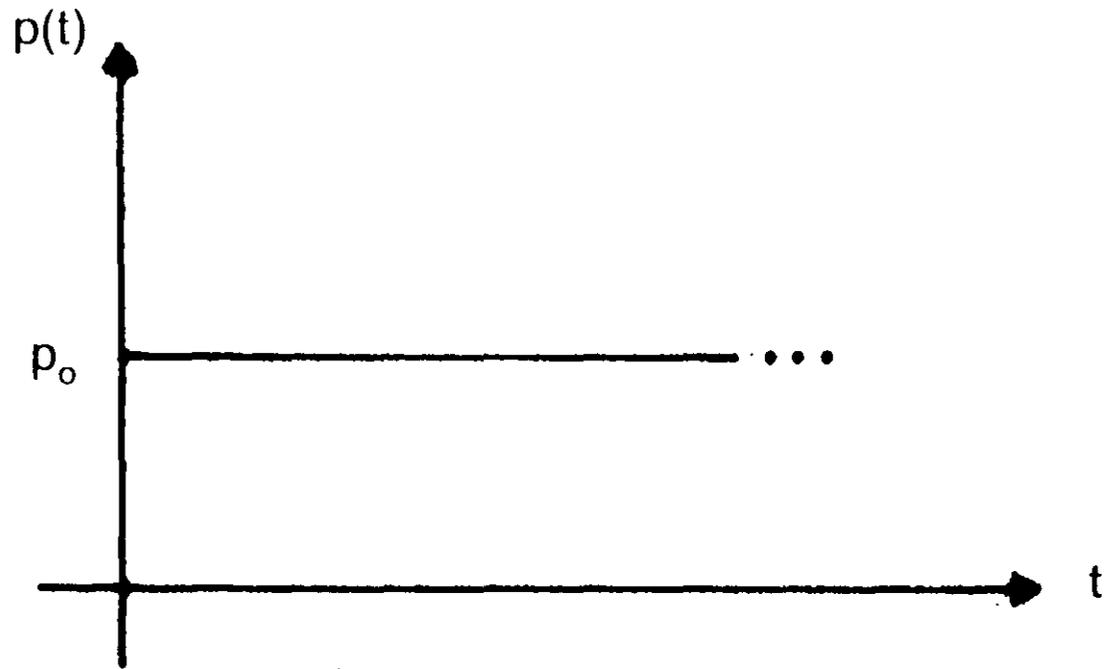
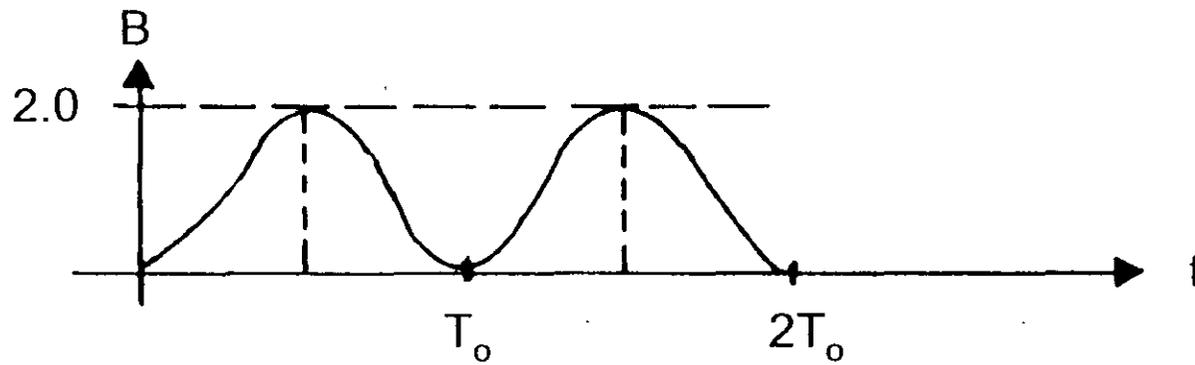


Fig 2.6 Excitación debida a una función escalón infinita



**Fig 2.7 Factor de amplificación dinámica
para el inciso 2.6.1**

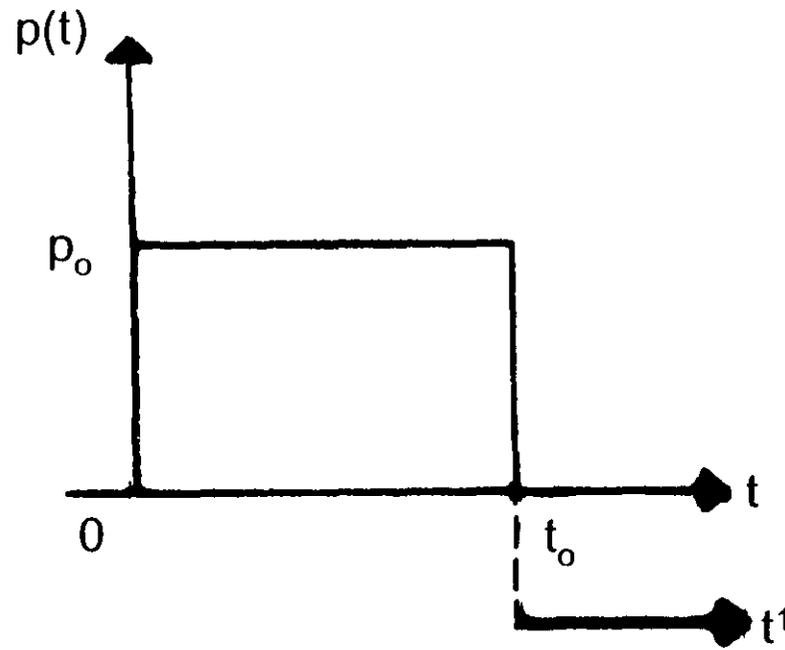


Fig 2.8 Excitación debida a una función escalón finita

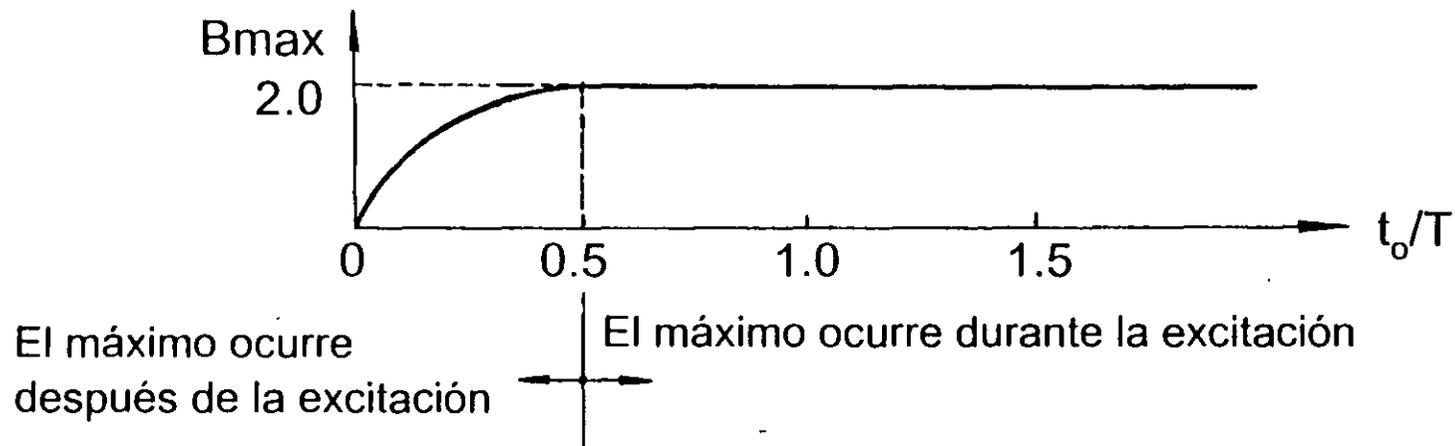


Fig 2.9 Factor de amplificación dinámica para el inciso 2.6.2

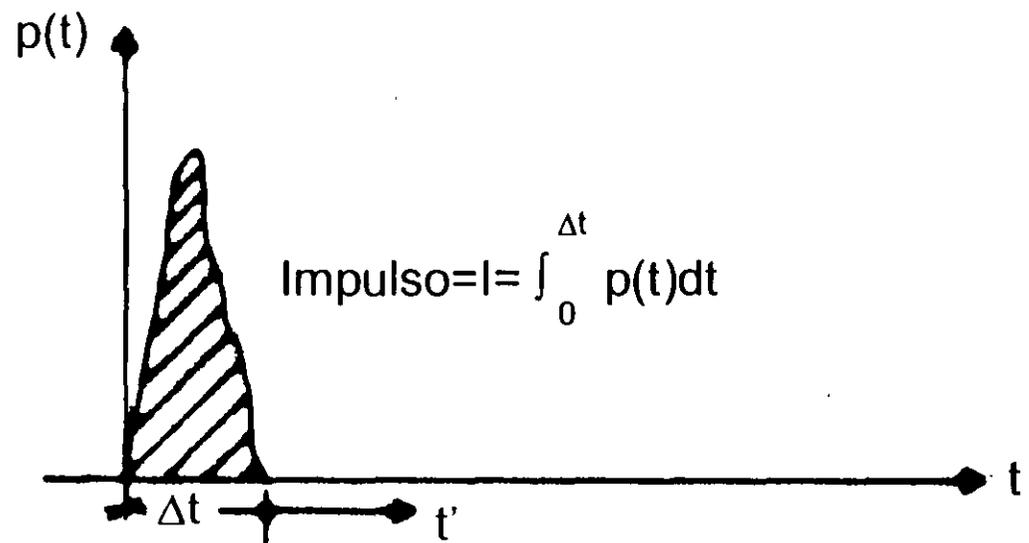


Fig 2.10 Excitación debida a un impulso arbitrario

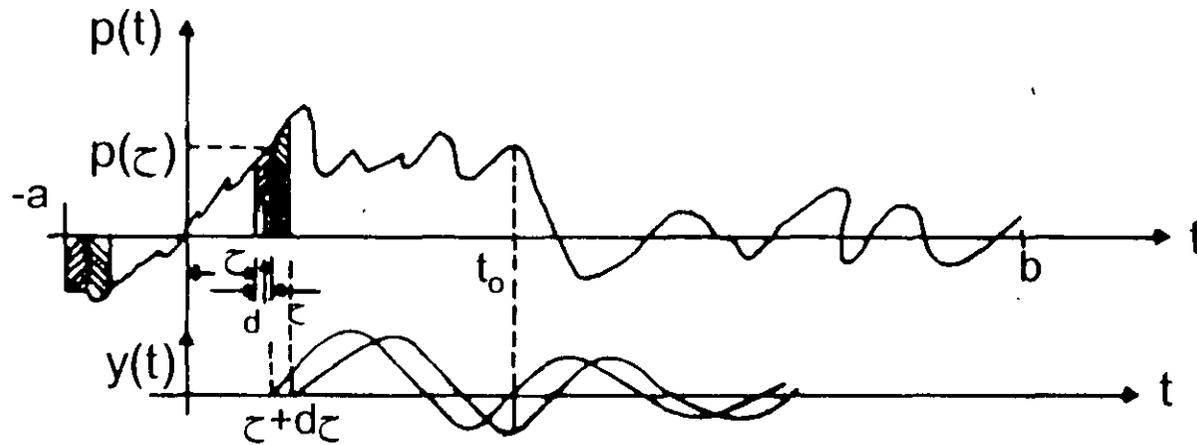


Fig 2.11 Excitación debida a una fuerza arbitraria

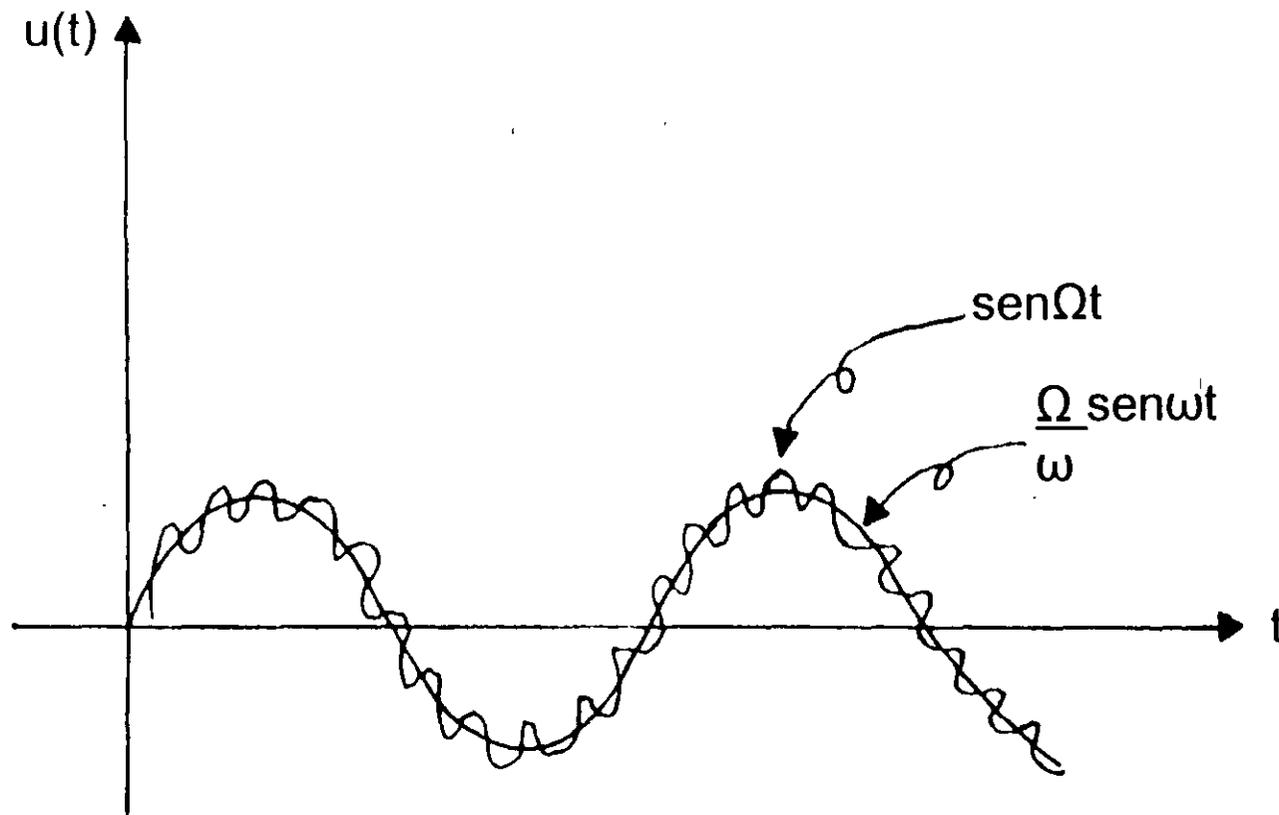


Fig 2.12 Respuesta del sistema del inciso 2.6.6.3

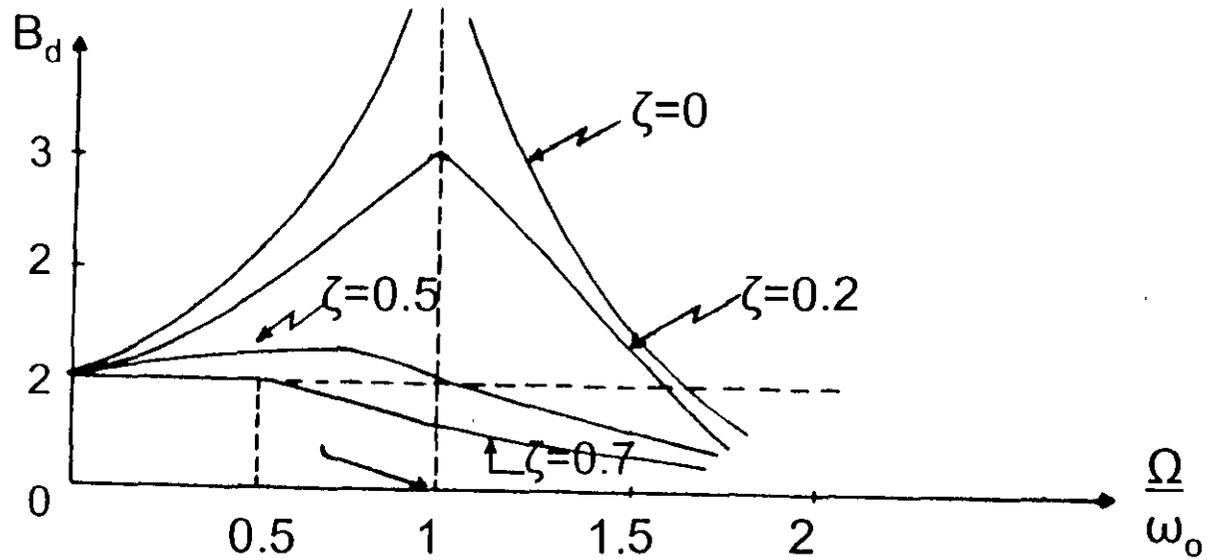


Fig 2.13 Factor de ampliación dinámica para el sistema del inciso 2.6.6.4

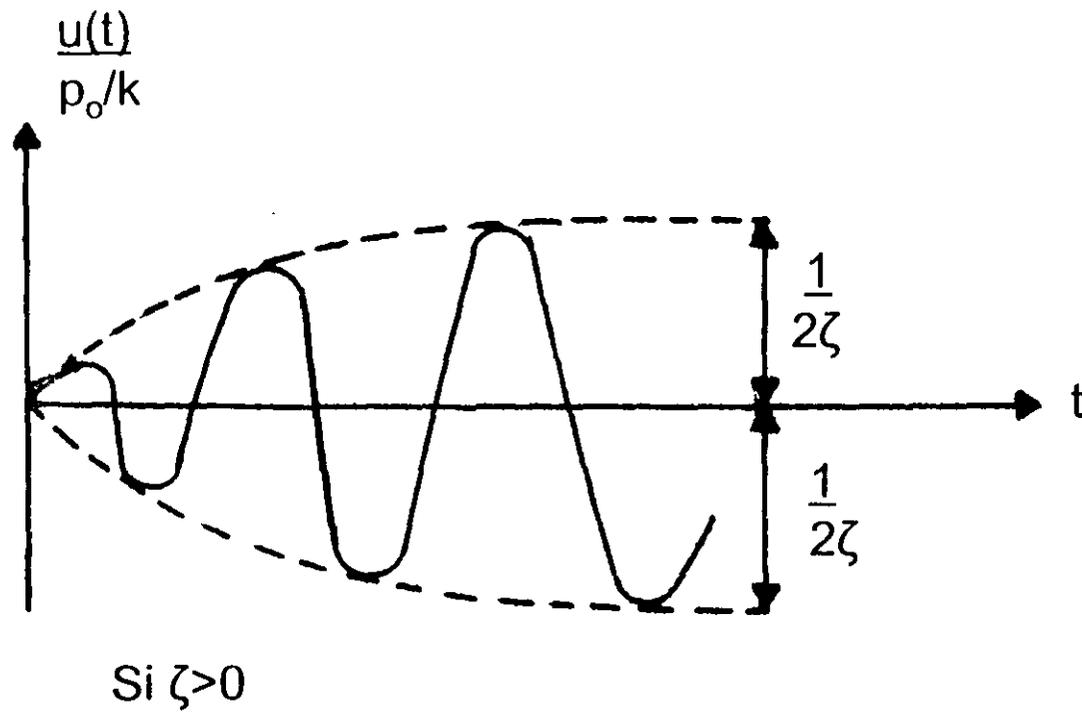


Fig 2.14 El fenómeno de resonancia para amortiguamiento pequeño

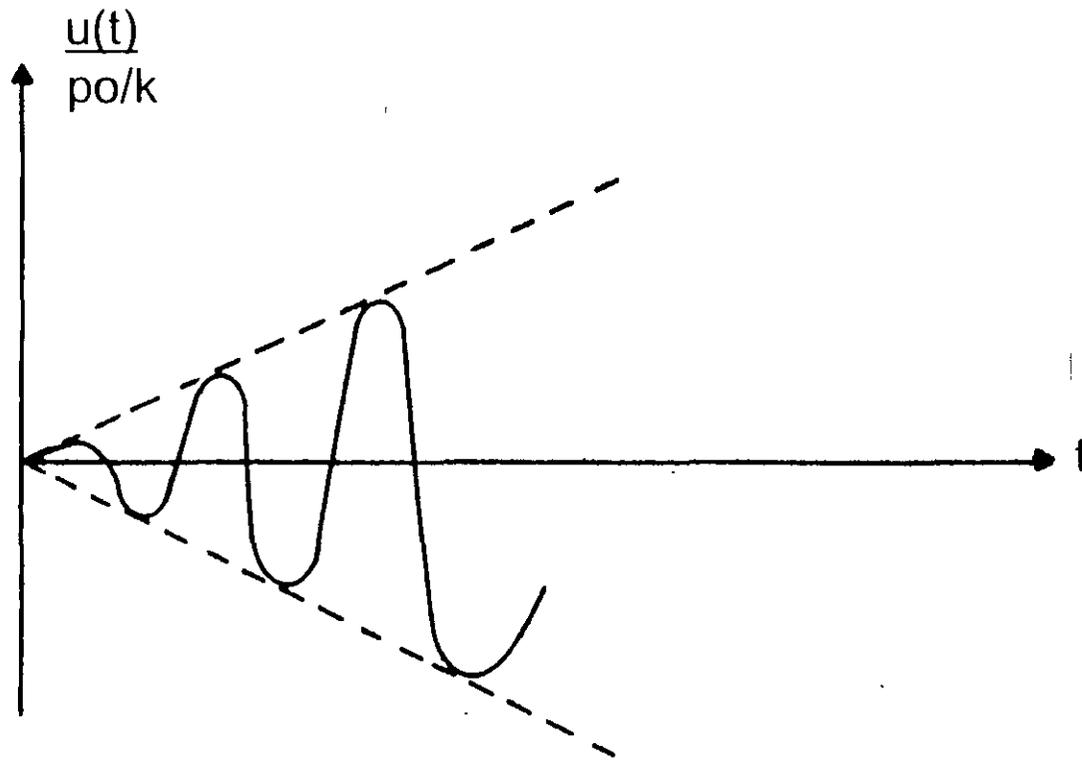


Fig 2.15 El fenómeno de resonancia para amortiguamiento nulo

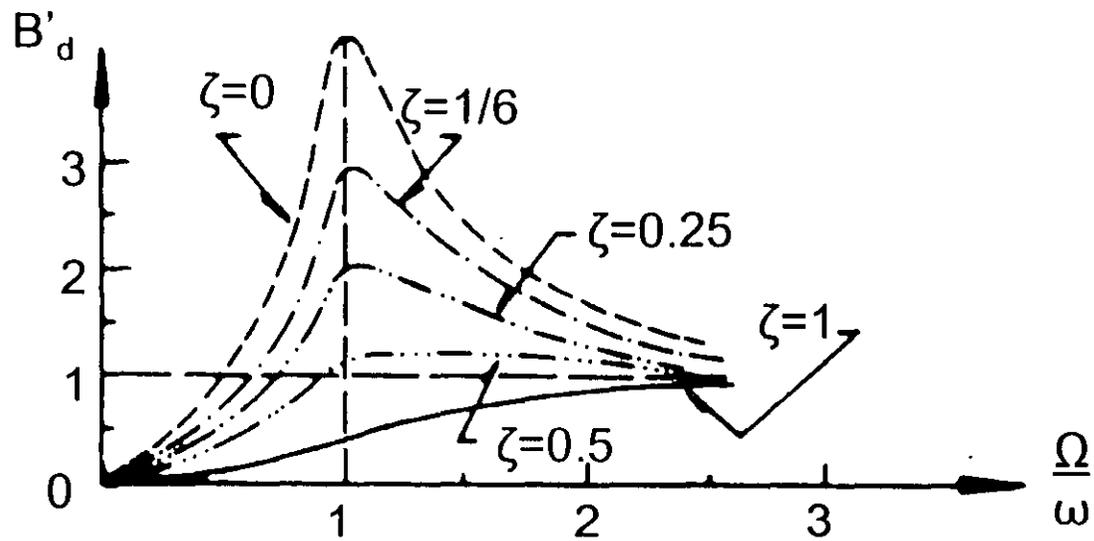


Fig 2.16 Factor de amplificación dinámica para una excitación armónica en la base

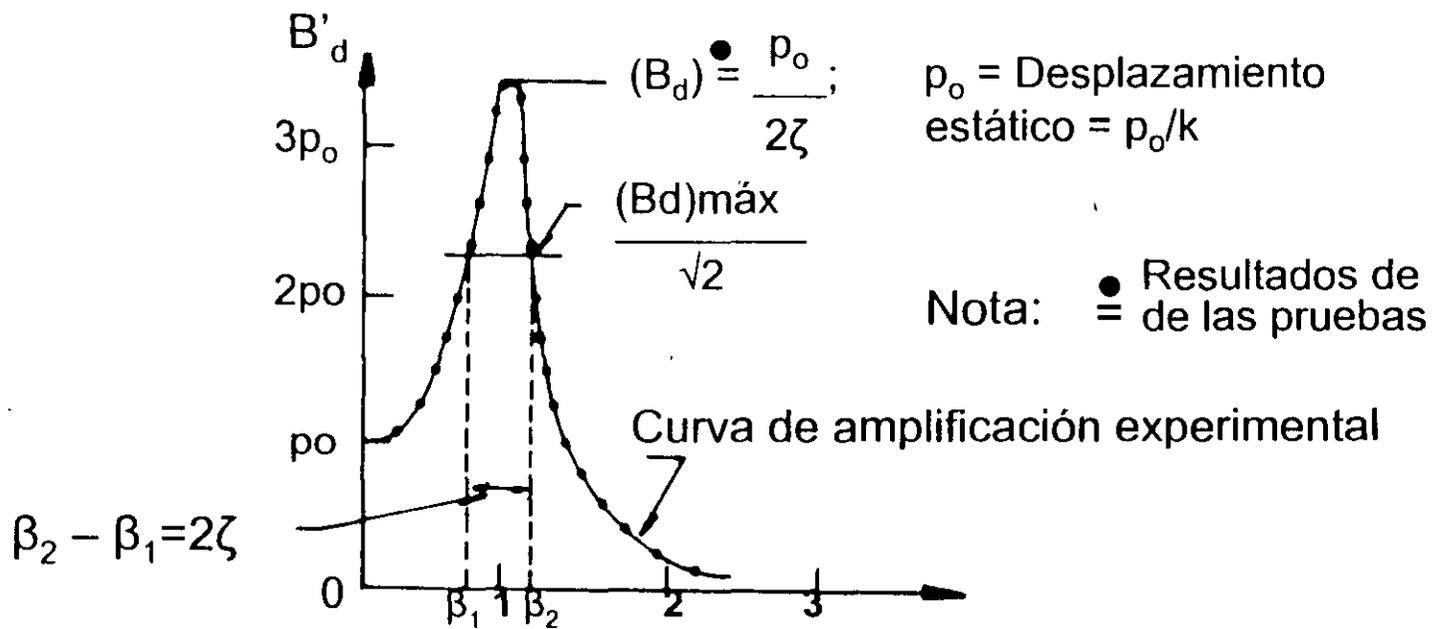


Fig 2.17 Determinación experimental del amortiguamiento crítico (inciso 2.8)

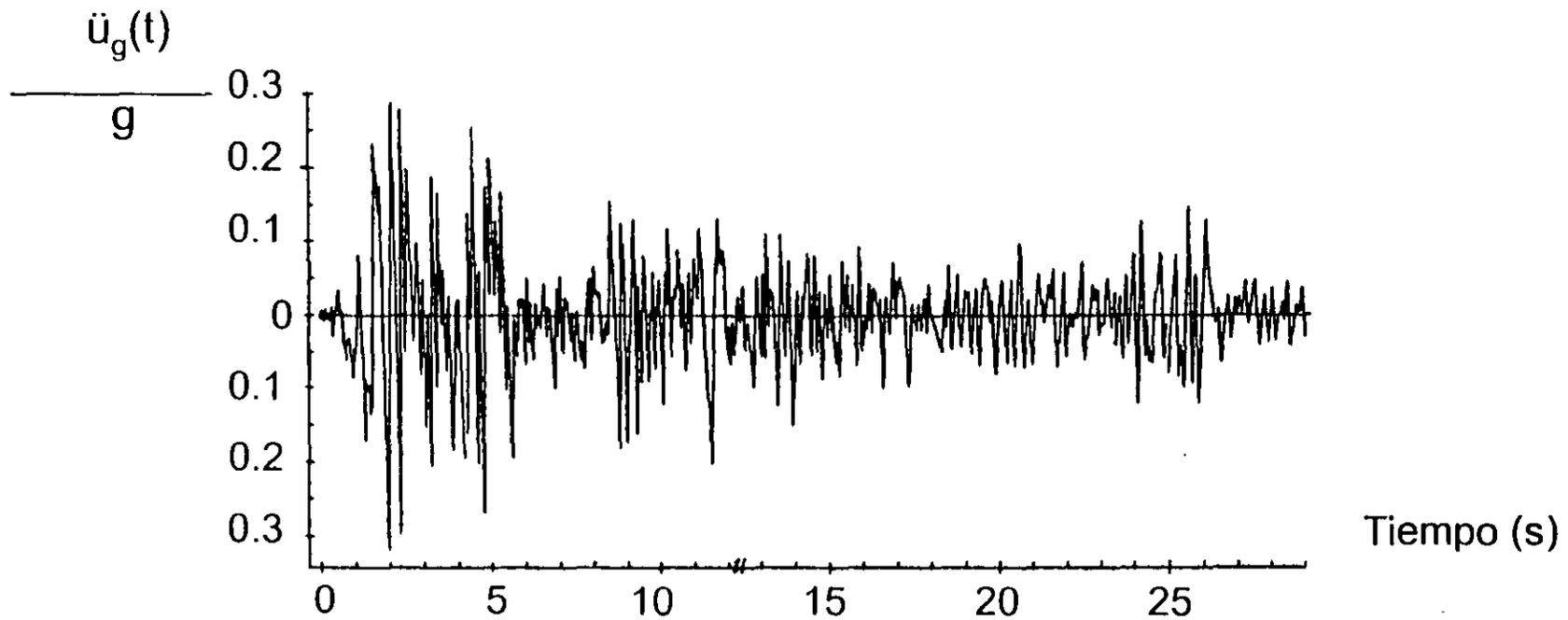


Fig 2.18 Componente NS del acelerograma del sismo El Centro, mayo 18 de 1940

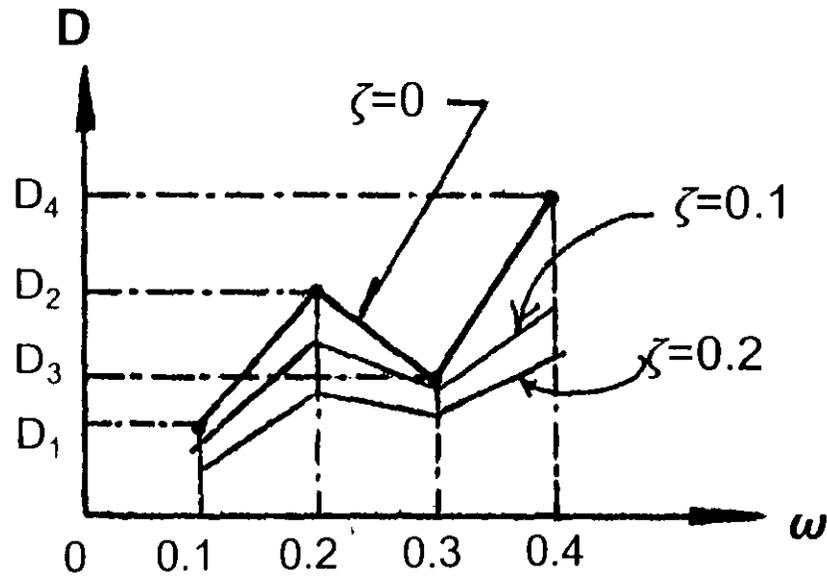


Fig 2.19 Espectro de respuesta de desplazamientos

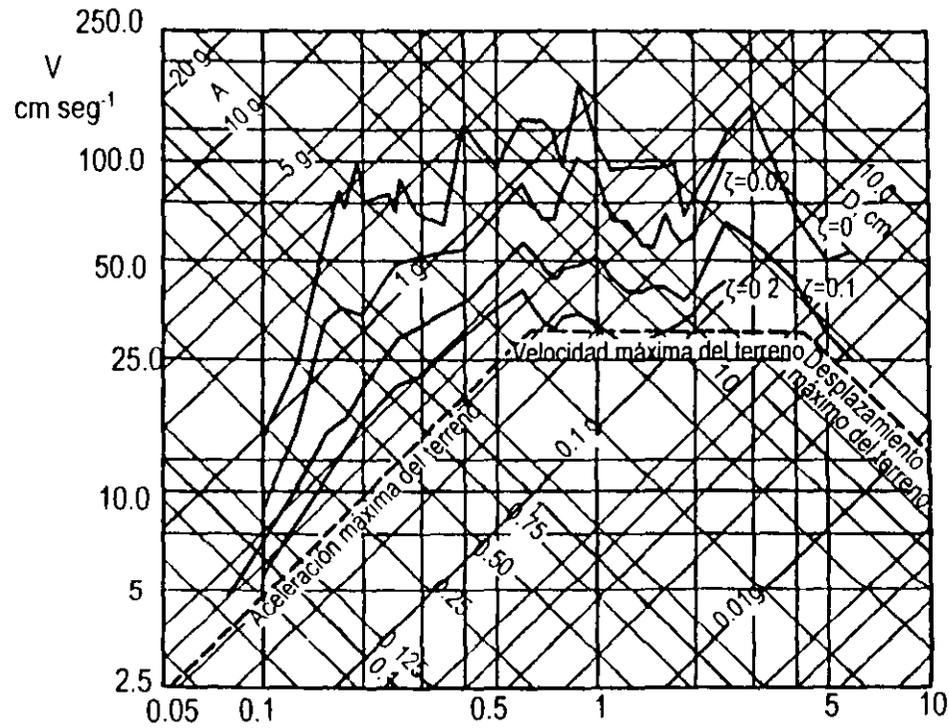


Fig 2.20 Espectros de respuesta del sismo El Centro, mayo 18 de 1940



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

**XXVII CURSO INTERNACIONAL DE
INGENIERÍA SÍSMICA**

**MODULO I
CA 017**

**ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE
ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**

TEMA

**ANEXO 1
SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD**

**EXPOSITOR: DR. OCTAVIO A. RASCÓN CHÁVEZ
PALACIO DE MINERÍA
JULIO DEL 2002**

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

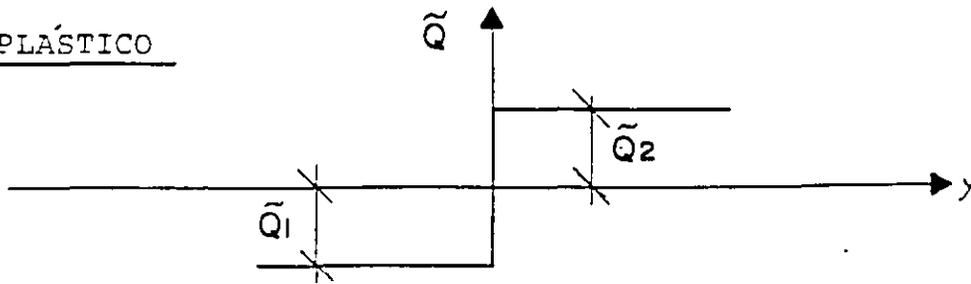
ECUACIÓN DE MOVIMIENTO:

$$m\ddot{x} + \tilde{Q}(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $\tilde{Q}(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

1. RÍGIDO-PLÁSTICO

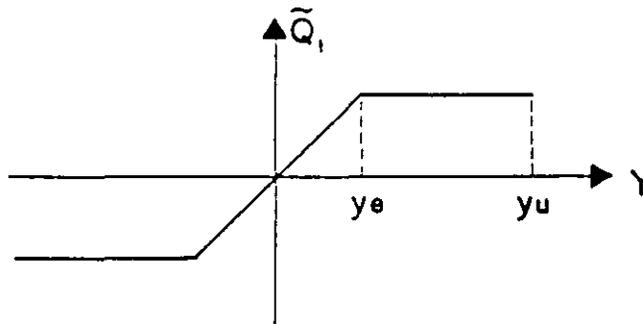


$$\tilde{Q} = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } y < 0$$

$$\tilde{Q} = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } y > 0 \quad \text{EN DONDE } C = \text{CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO}$$

MODELO EN EL ANÁLISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

2. ELASTO-PLÁSTICO



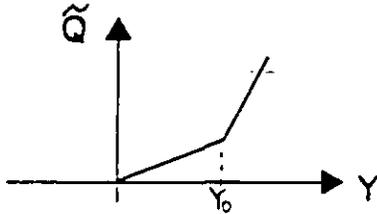
$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_1(y) + C\dot{y}$$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DÚCTILES.

FACTOR DE DUCTILIDAD $= \nu = y_u / y_e$

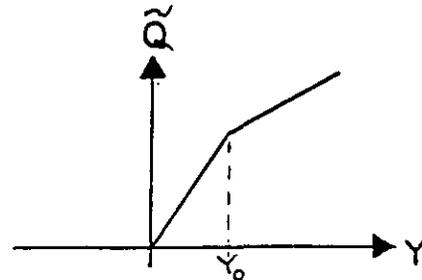
y_u = DESPLAZAMIENTO MÁXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEAL



CON ENDURECIMIENTO

SE USA COMO MODELO PARA ANÁLISIS DE PUNTES COLGANTES

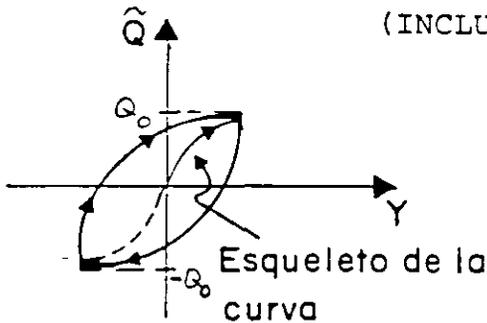


CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS QUE SE DEGRADAN POR AGRIETAMIENTO (MUROS DE MAMPOSTERÍA, POR EJEM).

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$$\frac{\tilde{Q} - Q_0}{2} = Q_1 \left(\frac{y - y_0}{2} \right)$$

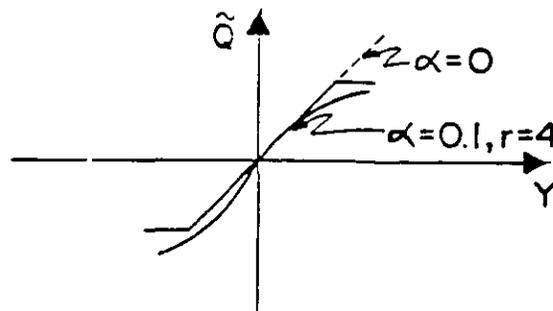
Q_0 = FUERZA EN $y = y_0$

y_0 = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (y CAMBIÓ DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

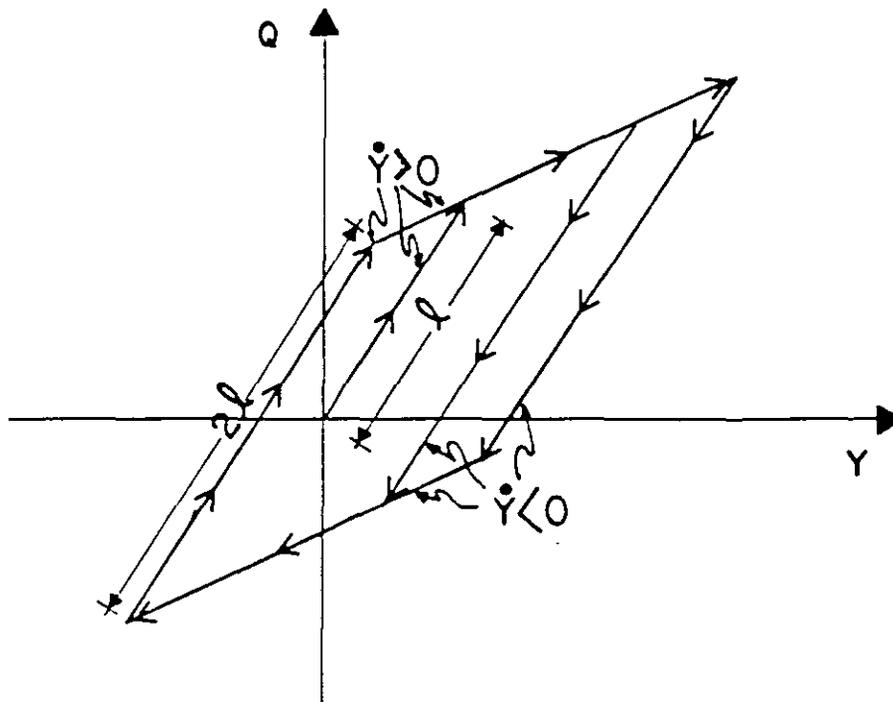
$$\frac{y}{y_1} = \frac{\tilde{Q}}{Q_1} + \alpha \left(\frac{\tilde{Q}}{Q_1} \right)^r \quad \underline{\underline{\text{(MODELO RAMBER - OSGOOD)}}$$

DONDE y_1 , Q_1 , α y r SON CONSTANTES POSITIVAS



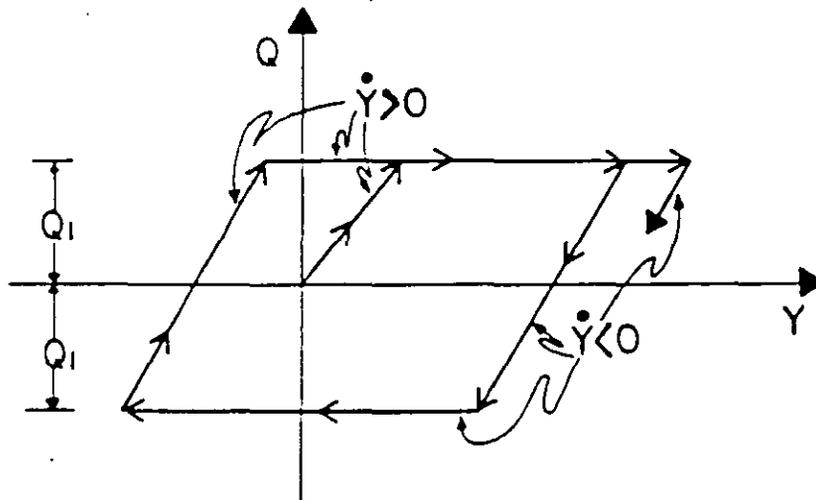
EJEMPLO:

CASO BILINEAL



EJEMPLO

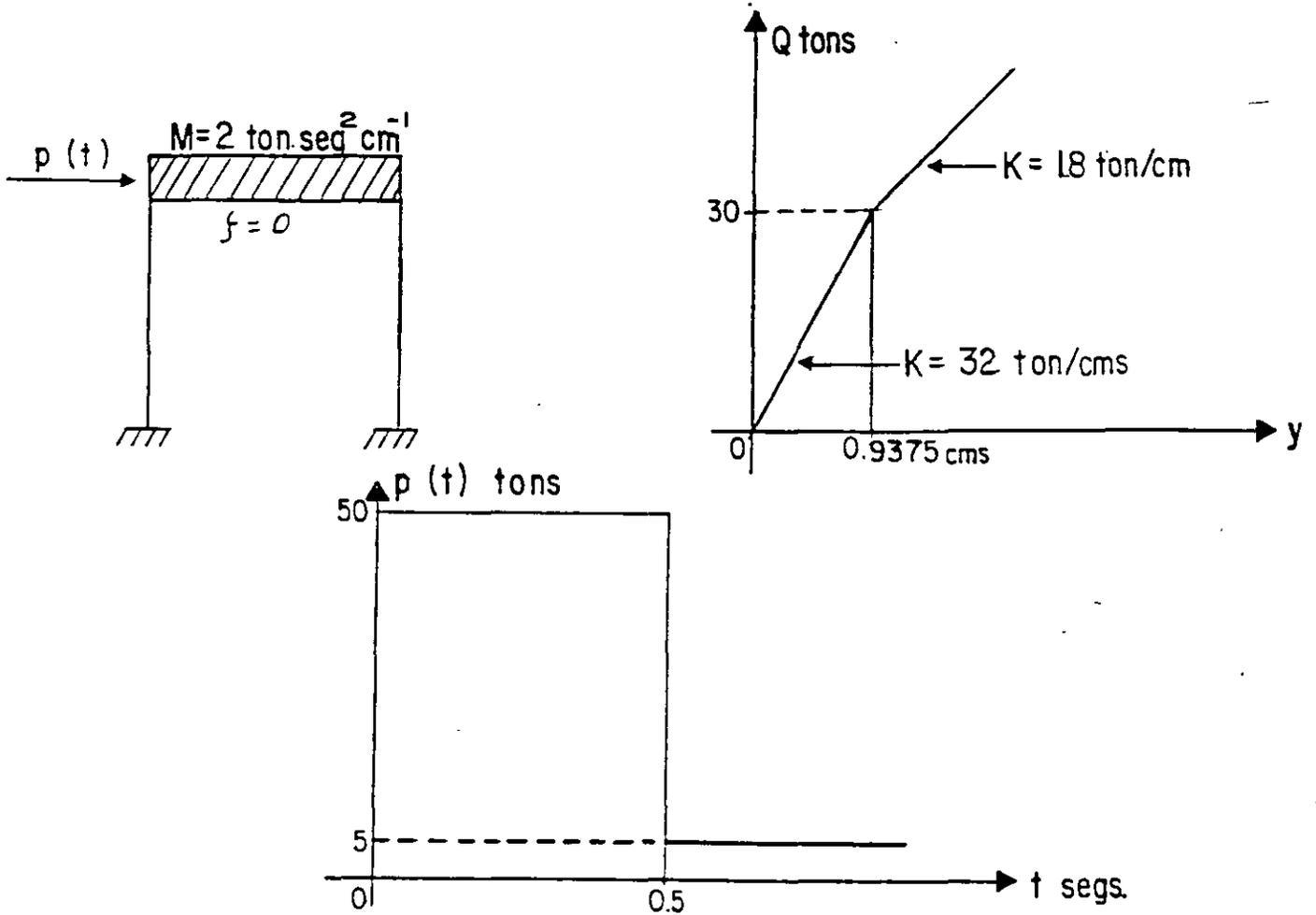
CASO ELASTOPLÁSTICO



MÉTODO DE NEWMARK

PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO B
DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO



ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10$ SEG. Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR:

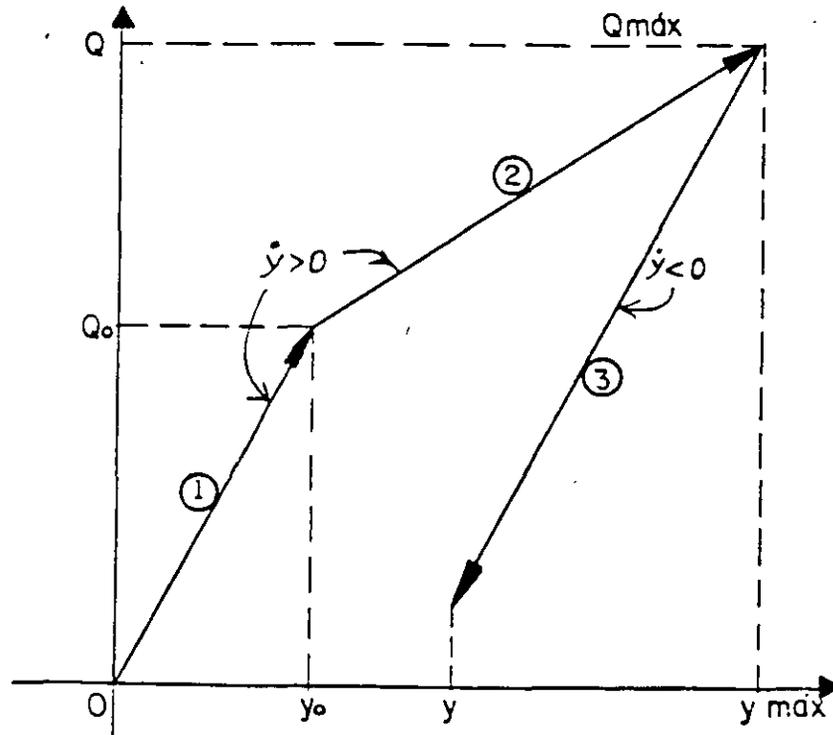
$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}) \quad (II)$$

$$y_{i+1} = y_i + \dot{y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}) \quad (III)$$

EL PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO ES COMO SIGUE:

- | | | | |
|------|--|------------------|-----------------------|
| { | SE ASUME | \ddot{y}_{i+1} | |
| | SE CALCULA | \dot{y}_{i+1} | CON LA ECUACIÓN (II) |
| | SE CALCULA | y_{i+1} | CON LA ECUACIÓN (III) |
| | SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE \ddot{y}_{i+1} CON LA ECUACIÓN (I), | | |
| ETC. | | | |

PARA LA FUNCIÓN DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



1. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO , $Q = 32 Y$ TONS
2. CAMBIO DE RIGIDEZ , $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$ TON
3. DESCARGA , $Q = Q_{máx} - 32 (Y_{máx} - Y)$ TONS

ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{máx} - Y) \leq 2Y_0$

$$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30.0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t=0, \quad \ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad y = 0; \quad \dot{y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0.10, \quad y_i = \dot{y}_i = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_i = 25$$

1er. CICLO

SEA $\ddot{y}_{i+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20}(20 + 25) = 2.25$$

$$y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167 < 0.9375$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134 \neq 20$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = (25 + 23.134)/2 = 2.407$$

$$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219 < 0.9375$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050 \neq 23.134$$

3er. CICLO

.

.

.

4o. CICLO

$$\ddot{y}_{i+1} = 23.052$$

$$\dot{y}_{i+1} = (25+23.052)/2 = 2.4026$$

$$y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175 < 0.9375$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ ETC.}$$

LOS CÁLCULOS BÁSICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	P TONS	\ddot{y} CM SEG ⁻²	\dot{y} CM SEG ⁻¹	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.9854370.9375	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50 ⁻	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
		-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
0.50+	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
		-31.301	0.87147	3.02641	67.600
0.7278	5.00	-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
		-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

cambio de Q a Q

cambio de signo de \dot{y}
cambio de Q a Q

En $t=0.5 + \text{SEG}$, $\Delta \ddot{y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	P	\ddot{Y}	\dot{Y}	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-24.308	-4.94242	2.59474	53.617
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

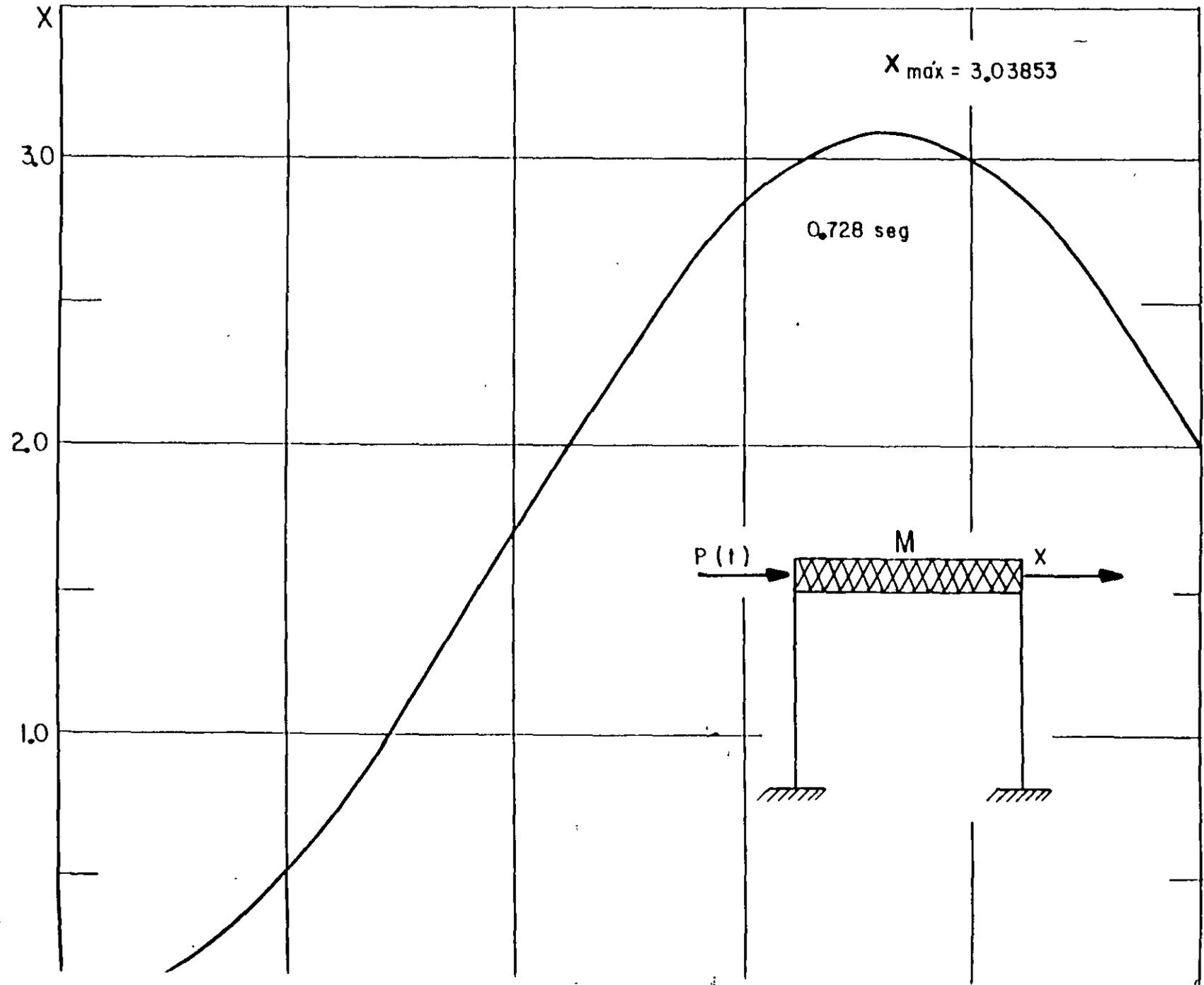
EN ESTOS CÁLCULOS SE INTRODUJO $t = 0.50^-$ Y 0.50^+ , PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA $P(t)$ DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACIÓN DEL SISTEMA \ddot{Y} . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN \dot{Y} Y Y. EL TIEMPO $t = 0.7273$ SEG, SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q, PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRÓ SOBRE LA BASE DE APROXIMAR \dot{Y} A CERO, OBTENIÉNDOSE $Y_{MAX}=3.03853$ CMS Y $Q_{MAX} = 67.818$ TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

t Seg.	\ddot{Y} (supuesta) Cm Seg ⁻²	P Ton	Y Cm.	Q Ton	\ddot{Y} (calculado) Cm Seg ⁻²	\dot{Y} Cm Seg ⁻¹	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 ⁻	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 ⁺	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q _{máx} , Y _{máx.} <i>reversa de carga</i>
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

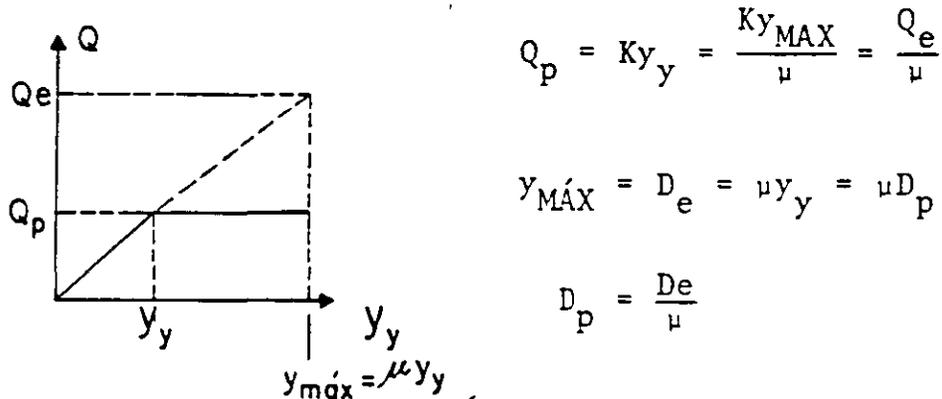
RESPUESTA MÁXIMA

$$\begin{cases} Y \text{ máx} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q \text{ máx} = 67.818 \text{ tons} \end{cases}$$

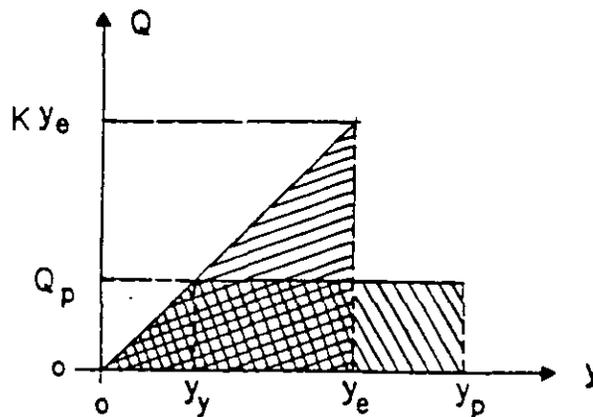


CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLÁSTICOS A PARTIR DEL ELÁSTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO DEL SISTEMA ELÁSTICO Y EL ELASTOPLÁSTICO DE IGUAL PERIODO:



2. CRITERIO DE IGUAL ENERGÍA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

$$y_{y_M\acute{A}X} = D_p = \frac{y_e]_{MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad Y \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

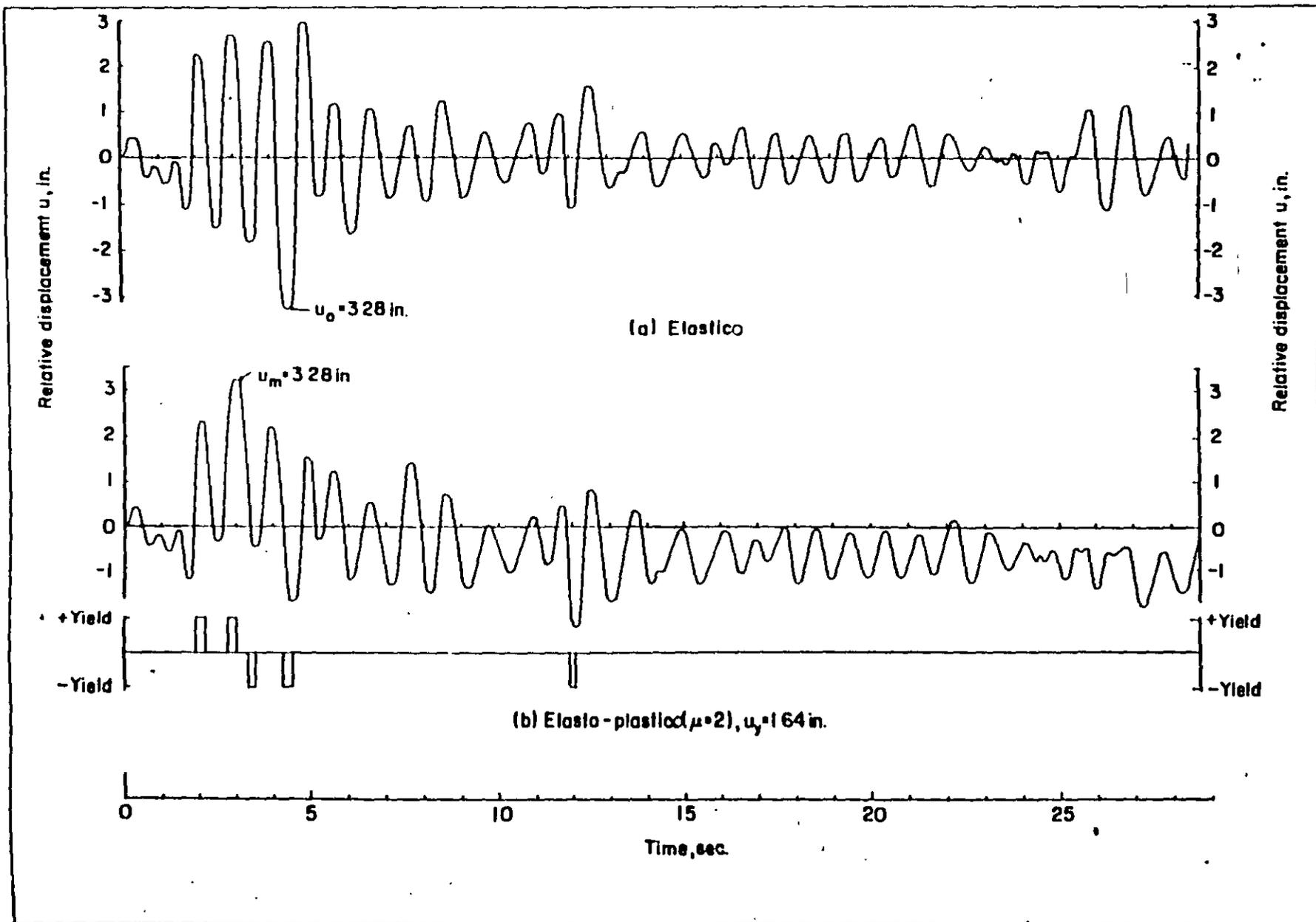
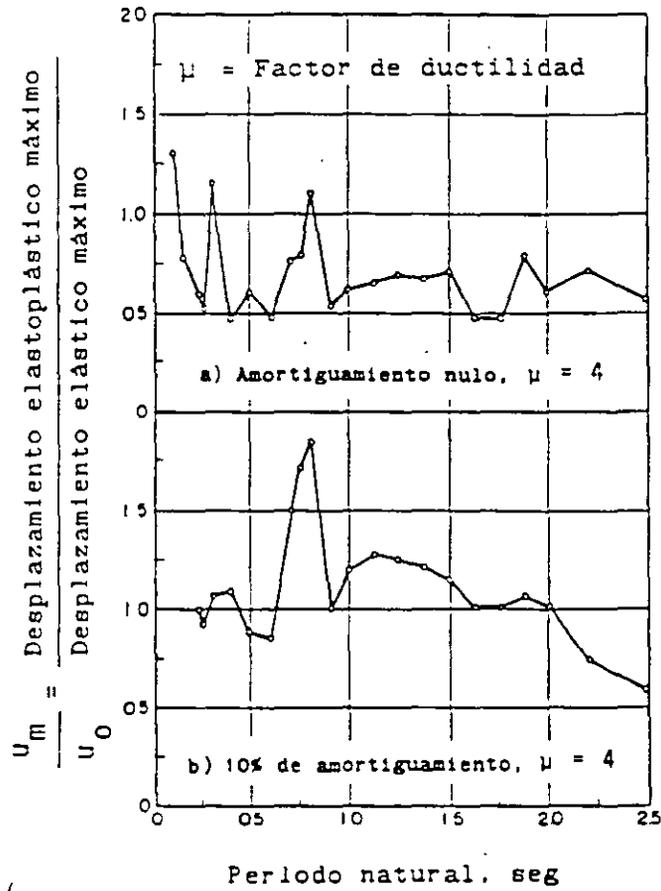
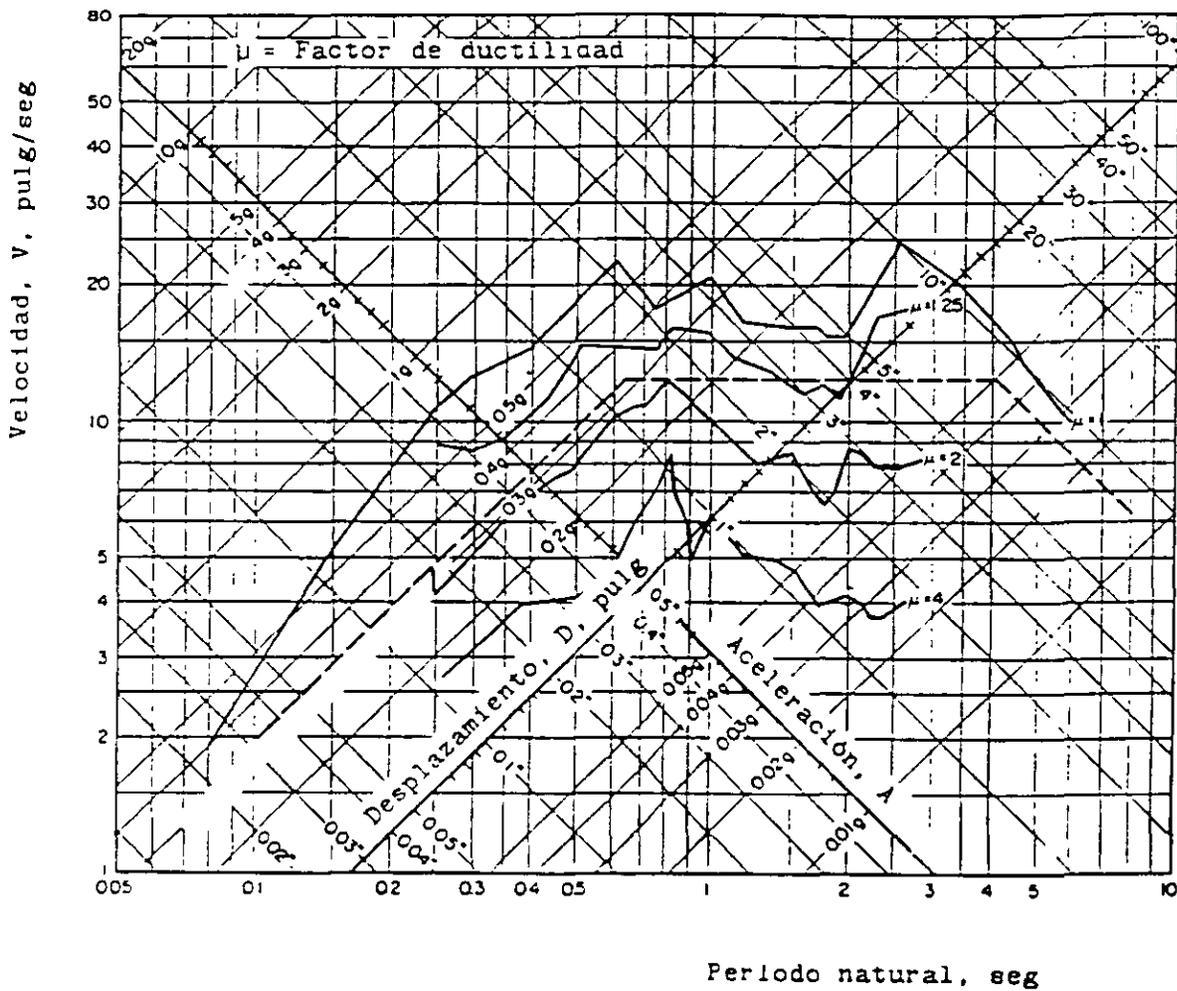


Fig. 1-4. Response of a system with $T=1.0$ second, $\beta=0.10$; 1940 El Centro, Calif., earthquake, N-S component.

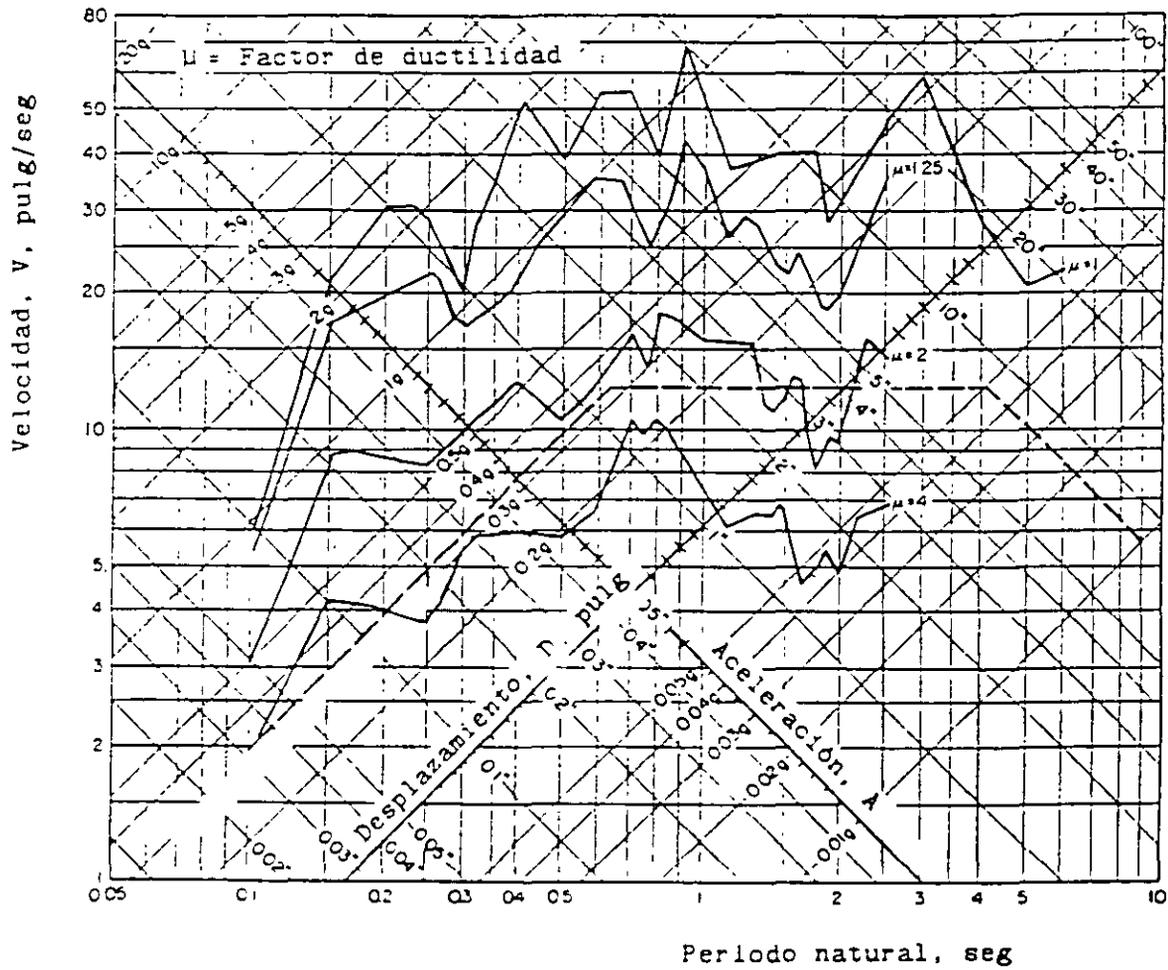
Respuesta de un sistema con $T=1.05$, $f=0.10$, ante el sismo del centro, Calif., componente N-S (según Blume, Newmark y Corning. "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", 1961)



Comparación de la respuesta máxima de un sistema elastoplástico y uno elástico. Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.



Espectro de respuesta de un sistema elastoplástico con amortiguamiento nulo (parte elástica). Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.



Espectro de respuesta de un sistema elastoplástico con 10% de amortiguamiento (parte elástica). Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**XXVII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM**

**MÓDULO I: ANÁLISIS DINÁMICO Y ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS
SUJETAS A SISMO**

Del 1 al 6 de julio de 2002

ANEXO 2

M en I Ramón Cervantes Beltrán

Profesor
Facultad de Ingeniería, UNAM

Coordinador de Desarrollo Tecnológico
Instituto Mexicano del Transporte

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas del Curso Internacional de Ingeniería Sísmica que cada año organiza la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, UNAM, es la cuantificación de las fuerzas que un sismo de diseño le ocasiona a un edificio, de acuerdo con los métodos que recomienda algún código que refleje las experiencias del comportamiento de tales edificaciones ante la ocurrencia sistemática de dichos fenómenos naturales de magnitudes significativas, como es el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal vigente (RCDF).

El hablar de edificios implica una geometría muy especial (trabes, columnas, muros, losas, etc) construida con determinados materiales (concreto, acero, mampostería, etc) que durante su vida útil va a estar sometida a una serie de solicitaciones que tiene que resistir, entre las que se cuenta las debidas a los sismos. Durante el desarrollo de la tecnología que conduce a construir edificaciones seguras y económicas, el ingeniero ha desarrollado una serie de métodos que involucran los conceptos señalados (geometría, material y cargas), que en conjunto conducen al concepto de estructura; y ,desde luego, que el concepto de cargas, a medida que se define con mayor precisión se tiene que relacionar cada vez mas con los otros dos (geometría y material).

El tratar de cuantificar a uno (fuerzas) de los tres conceptos que definen a las estructuras (geometría, material y fuerzas) independientemente de los modelos estructurales del cual forman parte, es prácticamente imposible sin involucrar hipótesis simplificadoras que necesariamente deben conducir a resultados conservadores.

Los métodos basados en hipótesis simplificadoras y modelos estructurales simplificados se utilizaron con mucha frecuencia cuando la herramienta para operarlos consistía únicamente, en calculadora, papel y lápiz. Todavía existen algunos métodos y modelos que aún se utilizan tanto con las herramientas originales como con las computadoras. Es necesario aclarar que la programación de estos métodos es menos integral que los que se desarrollaron para ser utilizados con una computadora.

En este tema se presentan los conceptos que permiten aplicar los métodos que el RCDF recomienda para la cuantificación de las fuerzas que un sismo de diseño le ocasiona a un edificio, a fin de determinar los elementos mecánicos y cinemáticos que dicho sismo de diseño provoca y poder así determinar los estados límites de falla y de servicio que el mismo RCDF establece para lograr un diseño racional de dichas edificaciones.

2. MODELACIÓN ESTRUCTURAL DE LAS EDIFICACIONES

De acuerdo con el análisis estructural, que es la teoría que involucra a los conceptos de geometría, material y cargas con las leyes de la mecánica newtoniana, se pueden construir modelos que son extraordinariamente simples o bien extraordinariamente refinados, según la herramienta de trabajo (calculadora, computadora, etc) de que se disponga para su manejo. Desde luego que los modelos refinados (grandes geometrías, fuerzas dinámicas, no linealidad geométrica, no linealidad del material, etc.) implican, necesariamente, el uso de la computadora.

Art 189 del RCDF establece que: Las fuerzas internas (elementos mecánicos) y las deformaciones (elementos cinemáticos) producidas por las acciones se determinarán mediante un análisis estructural realizado con un método reconocido que tome en cuenta las propiedades de los materiales ante el tipo de cargas que se consideren".

Las normas técnicas complementarias (NTC) para diseño y construcción de estructuras de concreto y de estructuras metálicas del RCDF, establecen que dichas estructuras se pueden analizar con métodos que supongan un comportamiento elástico, lineal.

Con base en lo anterior el RCDF permite utilizar el modelo mas simple del análisis estructural: Material elástico lineal (material de Hooke), desplazamientos pequeños (tensor de deformaciones infinitesimales), que es un modelo matemático lineal basado en la teoría de la elasticidad lineal y la teoría de la mecánica de materiales.

2.1 Representación esquemática

A fin de tener una referencia de los elementos que definen a un edificio, en la Fig 2.1 se representa, de manera esquemática, a los siguientes elementos.

2.1.1 Elementos de la superestructura

De acuerdo con la Fig 2.1 los elementos que conforman a la superestructura son aquéllos que sobresalen del suelo en el que se apoya el edificio, y son:

- a) Trabes (elementos barra tridimensionales contenidos en planos horizontales denominadas losas).
- b) Columnas (elementos barras tridimensionales contenidos en planos verticales).
- c) muros (elementos sólidos tridimensionales contenidos en uno solo o en varios planos verticales).
- d) Losas (Elementos tridimensionales contenidos en planos horizontales, idealizados ya como diafragmas flexibles o bien como diafragmas rígidos).

Los elementos de la superestructura se construyen con materiales especificados y controlados por el ingeniero.

2.1.2 Elementos del suelo

El soporte de la estructura lo constituye el suelo, material de dos fase (fase sólida, denominada esqueleto, y fase fluida, generalmente agua y gas) construido de manera natural, por lo que el ingeniero ha desarrollado la tecnología apropiada para su modelación.

2.1.3 Elementos de la cimentación

Los elementos de la cimentación se construyen con materiales especificados y controlados por el ingeniero y pueden ser los siguientes.

- a) Contratraves (elementos barra tridimensionales contenidos en planos horizontales denominadas losas de cimentación, trabes de liga, etc.).
- b) Zapatas aisladas o corridas (losas y contratraves).
- c) Muros verticales contenidos en planos verticales.
- d) Losas y cascarones (elementos tridimensionales contenidos en una superficie).
- e) Pilas y pilotes.

2.2 Elementos estructurales

Con base en los elementos estructurales de las edificaciones indicados de manera esquemática en la sección 2.1, en esta sección se resumen los conceptos formales de tales elementos estructurales en relación con su participación en la construcción de las

ecuaciones de equilibrio de la edificación.

El método mas versátil y poderoso para formular, resolver y manejar las ecuaciones de equilibrio de las estructuras, es el método de las rigideces o de los desplazamientos (para los elementos barras, asociados a las estructuras esqueléticas o marcos) y el método del elemento finito en su formulación de los desplazamientos (para los elementos sólidos bidimensionales, placas planas y cascarones de las estructuras denominadas continuas). La versatilidad y poderío de los métodos anteriores están asociados a su adecuación al uso de las computadoras.

Las ecuaciones de equilibrio de los elementos estructurales se establecen en términos de los puntos nodales que se requieren para definir su geometría. A los puntos nodales de cada elemento finito le corresponden diferentes grados de libertad (número de componentes de desplazamiento lineales y angulares).

Para el caso de fuerzas estáticas, las ecuaciones de equilibrio de cada elemento estructural se puede escribir, de manera general, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{f}^e &= \bar{f}'' + \bar{k}\bar{u} \\ &= \bar{f}'' + \bar{f}^u\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde los vectores y la matriz de la ecuación anterior están asociados a los elementos mecánicos y cinemáticos de los puntos nodales del elemento estructural, y los nombres mas comunes que reciben son los siguientes.

$$\begin{aligned}\bar{f}^e &= \text{Vector de fuerzas equilibrantes} \\ \bar{f}'' &= \text{Vector de fuerzas de empotramiento} \\ \bar{f}^u &= \bar{k}\bar{u} = \text{Vector de fuerzas de desplazamiento} \\ \bar{k} &= \text{Matriz de rigideces} \\ \bar{u} &= \text{Vector de desplazamientos}\end{aligned}\tag{2.2}$$

En las Ec 2.1 y 2.2 la magnitud y el número de los componentes de los vectores y de la matriz dependen del número de puntos nodales y de sus correspondientes grados de libertad que definen al elemento estructural.

2.2.1 Elementos barra

Son elementos tridimensionales para representar a trabes, columnas, contratraves, pilas y pilotes (Fig 2.2). Geométricamente bastan dos puntos nodales que definen un eje (casi

siempre recto) y sus secciones transversales (casi siempre constantes y, por tanto, con una basta). Sus ecuaciones de equilibrio se obtienen con base en la teoría de la mecánica de materiales y para su integración no se requiere del método del elemento finito (MEF), para las barras de eje recto y sección constante. A cada punto nodal se le consideran seis grados de libertad, tres lineales y tres angulares. Se presentan caso particulares como son las barras planas con tres grados de libertad por nudo (dos lineales y un angular), las barras de retícula de entrepiso con tres grados de libertad por nudo (uno lineal y dos angulares), las barras de armaduras (barras axiales o barras doblemente articuladas) con tres (tridimensionales) y dos (bidimensionales) grados de libertad por nudo (que son desplazamientos lineales, ya que los angulares son linealmente dependientes por corresponder a articulaciones). En general, los vectores tienen seis componentes.

2.2.2 Elementos sólidos bidimensionales (muros planos)

Son elementos tridimensionales que únicamente pueden soportar cargas y desplazamientos contenidos en su superficie media (plana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales) o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. A cada punto nodal normalmente se le asignan dos componentes de desplazamiento lineal. Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

2.2.3 Elementos placas planas (losas)

Son elementos tridimensionales que generalmente se utilizan para soportar cargas transversales a su superficie media (plana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales) o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. A cada punto nodal normalmente se le asignan tres componentes de desplazamiento (uno lineal y angulares). Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

2.2.4 Elementos cascarones (muros tridimensionales)

Son elementos tridimensionales que generalmente se utilizan para soportar tanto cargas transversales a su superficie media (losa) como cargas contenidas en su superficie (membrana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales)

o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. Además de los tres componentes de desplazamiento correspondientes a los elementos losas se le adicionan los tres desplazamientos del elemento membrana (dos lineales contenidos en su superficie y uno angular normal a su superficie). Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

2.2.5 Diafragmas flexibles

Los diafragmas son elementos planos (en los edificios) que unen a varios elementos estructurales que los obliga a desplazarse en conjunto, como si fuera una membrana. Desde luego que existen desplazamientos relativos entre los elementos unidos por el diafragma. A cada punto nodal de los elementos estructurales contenido en el diafragma le corresponden dos desplazamientos lineales y un angular, que desde luego son independientes para cada punto nodal (Fig 2.2). Los diafragmas flexibles se modelan mediante el elemento finito cascarón del inciso 2.2.4.

2.2.6 Diafragmas rígidos

Cuando los desplazamientos relativos entre los elementos unidos por el diafragma (descrito en el inciso 2.2.5) son pequeños y se pueden considerar nulos, se dice que el diafragma es rígido y, por tanto, los desplazamientos de los puntos nodales contenidos en el diafragma son linealmente dependientes de los tres desplazamientos del diafragma (dos lineales y un angular). Desde luego que el número de desplazamientos independientes del diafragma rígido (únicamente tres, Fig 2.2)) resulta ser mucho menor que el correspondiente a los del diafragma flexible (seis por el número de puntos nodales contenidos en dicho diafragma).

2.3 Modelos estructurales

Con el ensamble de los elementos estructurales descritos en el inciso 2.2 se puede construir una gran variedad de modelos estructurales que se pueden utilizar en el análisis estructural de los edificios. Independientemente de los elementos estructurales que participan en su ensamble, las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales sometidos a cargas estáticas resultan ser.

$$R U = F \quad (2.3)$$

Los vectores y la matriz de los modelos estructurales dados por la Ec 2.3 se denominan. El número de componentes de los vectores de la estructura (Ec 2.4) es igual al número de

$$\begin{aligned} U &= \text{Vector de desplazamientos de la estructura (desconocido)} \\ F &= \text{Vector de fuerzas de la estructura (conocido)} \\ R &= \text{Matriz de rigideces de la estructura (conocida)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

componentes de desplazamiento (lineales y angulares) desconocidos, linealmente independientes, de los puntos nodales de la estructura (grados de libertad de la estructura). Los modelos estructurales mas comunes se describen a continuación.

2.3.1 Marcos tridimensionales

Es un modelo estructural formado exclusivamente con los elementos barras barra descritos en el inciso 2.2.1. Necesariamente debe contener barras tridimensionales, pero también pueden existir combinaciones de barras planas, barras de retícula de entrepiso y barras axiales.

2.3.2 Muros tridimensionales

Este modelo se construye con el ensamble de elementos sólidos bidimensionales (inciso 2.2.2), elementos placas planas (inciso 2.2.3) y elementos cascarones (inciso 2.2.4), según el tipo de carga que actúa en sus respectivas regiones.

2.3.3 Muromarcos tridimensionales

El modelo de muromarcos tridimensionales es una combinación de los modelos marcos tridimensionales y muros tridimensionales.

2.3.4 Marcos planos

Este modelo es un caso particular de los marcos tridimensionales y se obtiene mediante el ensamble de barras planas, por lo que su geometría y cargas están contenidas en un plano.

2.3.5 Muros planos

Este modelo es un caso particular de los muros tridimensionales y se obtiene mediante el ensamble de elementos sólidos bidimensionales, por lo que su geometría y cargas están contenidas en un plano.

2.3.6 Muromarcos planos

El modelo de muromarcos planos es una combinación de los modelos marcos planos y muros planos.

2.3.7 Rigideces de entrepiso (resortes)

Este modelo estructural únicamente sirve para simplificar el análisis de marcos planos ante fuerzas horizontales. Con algunas hipótesis simplificadoras se hace extensivo a muros planos y a muromarcos planos.

Como se muestra en la Fig 2.3, la estructura plana original (marco, muro o muromarco) se reemplaza por una estructura a base de resortes. La constante del resorte, denominada rigidez de entrepiso, se cuantifica de acuerdo con la siguiente expresión.

$$k_i = \frac{V_i}{\Delta u_i} = \text{Rigidez de entrepiso} \quad (2.5)$$

Los elementos de la Ec 2.5 se muestran en la Fig 2.8 y se definen como.

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= \text{Desplazamiento relativo del } i\text{-ésimo entrepiso} = u_i - u_{i-1} \\ u_i &= \text{Desplazamiento horizontal del } i\text{-ésimo nivel} \\ u_{i-1} &= \text{Desplazamiento horizontal del } (i-1)\text{-ésimo nivel} \\ V_i &= \text{Fuerza cortante del } i\text{-ésimo entrepiso} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desde luego que en la Ec 2.5 no se conocen los desplazamientos horizontales de los niveles y para cuantificar los valores de las rigideces de entrepiso se hacen hipótesis respecto a los desplazamientos angulares y fuerzas cortantes en los entrepisos y niveles adyacentes (como es el caso de las fórmulas de Wilbur).

Por supuesto que las rigideces de entrepiso se pueden cuantificar mediante el uso de la computadora al estimar las fuerzas horizontales que actúan en las estructuras planas, pero resulta mucho menos eficiente que utilizar los métodos de análisis que existen y que fueron diseñados para ser manejados por una computadora.

2.4 Modelos estructurales para el análisis de edificios ante fuerzas sísmicas

Un concepto básico para cuantificar las fuerzas sísmicas en las edificaciones es el modelo estructural utilizado. En este inciso se describen, de manera esquemática, los modelos estructurales que se utilizan en el análisis sísmico de las edificaciones.

2.4.1 Marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas flexibles

El modelo estructural del edificio se forma con los modelos estructurales correspondientes a marcos y muromarcos tridimensionales (incisos 2.3.1 y 2.3.3) unidos mediante un diafragma flexible (inciso 2.6), según se muestra en la Fig 2.4.

El número de ecuaciones de equilibrio está asociado a los componentes de desplazamiento (lineales y angulares) linealmente independientes de los puntos nodales del edificio, que aún para edificios relativamente pequeños resulta ser un número grande comparado con otros modelos. Este modelo puede provocar problemas de aproximación debido a que la modelación de la rigidez en el plano del diafragma resulta ser muy grande.

Desde luego que este modelo estructural únicamente se puede manejar con una computadora y se construye al utilizar los programas de propósitos generales basados en

el MEF (NISA, SAP2000, etc).

2.4.2 Marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas rígidos

Algunos programas de propósitos generales basados en el MEF (SAP2000) contemplan la posibilidad de hacer que puntos nodales contenidos en un diafragma sean linealmente dependientes respecto a un punto (centro de masas). Esto obliga a que cada diafragma tenga tres grados de libertad, lo que reduce significativamente el número de ecuaciones que genera el modelo del inciso anterior (inciso 2.4.1) y elimina los problemas de aproximación debido a las rigideces grandes en el plano del diafragma.

2.4.3 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas rígidos (ETABS)

Existen programas de computadora de propósitos especiales (La sigla ETABS se refiere a: Extended Three dimensional Analysis of Building System) en los que se toma en cuenta las particularidades de los elementos que conforman a un edificio (muros, trabes, columnas, juntas, diafragma rígido).

La construcción de este modelo se basa en considerar a los marcos y muromarcos tridimensionales como una subestructura, según se observa en la Fig 2.5. De las ecuaciones de equilibrio de los marcos y muromarcos tridimensionales se condensan las ecuaciones de los grados de libertad que no están asociados a los tres desplazamientos del diafragma rígido, mediante una triangulación parcial. El número de ecuaciones de equilibrio de este modelo es igual a tres veces el número de diafragmas rígidos, que es mucho menor que el modelo descrito en el inciso 2.4.1 y también menor que el del inciso 2.4.2 en caso de existir muros en el edificio.

Al considerar varias subestructuras unidas con el diafragma rígido, existen elementos que forman parte de dos o más subestructuras que, desde luego, se proporcionan desplazamientos independientes, a menos que se establezca un criterio que reduzca este problema característico de este modelo. Otra forma de evitar este problema es considerar una sola subestructura que resulta del tamaño del edificio.

2.4.4 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos planos unidos con diafragmas rígidos (TABS)

Este modelo corresponde a la versión original del modelo anterior (inciso 2.4.3) en donde se utilizan como subestructuras a las estructuras planas (marcos, muros y muromarcos), como se muestra en la Fig 2.6. La sigla TABS se refiere a: Three dimensional Analysis of Building System.

En este modelo siempre existe la incompatibilidad de los desplazamientos en los elementos comunes de las estructuras planas, a menos que se establezca un criterio que reduzca este problema.

3. PARÁMETROS QUE DEFINEN LA MAGNITUD DE LAS FUERZAS SÍSMICAS

A continuación se resumen los parámetros que el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF) considera para cuantificar la magnitud de las fuerzas que un sismo de diseño ocasiona a una estructura.

3.1 Uso de las edificaciones

De acuerdo con el RCDF se tiene que:

Art 174. Para los efectos de este Título (VI, Seguridad estructural de las construcciones) las construcciones se clasifican en los siguientes grupos:

I. GRUPO A. Construcciones cuya falla estructural podría causar:

La pérdida de un número elevado de vidas, o

Pérdidas económicas o culturales excepcionalmente altas, o

Que constituyen un peligro significativo por contener sustancias tóxicas o explosivas,

Así como construcciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana como:

Hospitales y escuelas,
Estadios,
Templos,
Salas de espectáculos y hoteles que tengan salas de reunión que pueden
alojar mas de 200 personas;
Gasolinerías,
Depósitos de sustancias inflamables o tóxicas,
Terminales de transporte,
Estaciones de bomberos,
Subestaciones eléctricas y centrales telefónicas y de telecomunicaciones,
Archivos y registros públicos de especial importancia a juicio del DDF,
Museos,
Monumentos y
Locales que alojen equipo especialmente costoso

II. GRUPO B. Construcciones comunes destinadas a:

Vivienda,
Oficinas y locales comerciales,
Hoteles y
Construcciones comerciales e industriales no incluidas en el grupo A, las que
se subdividen en:

a) SUBGRUPO B1. Construcciones de más de 30 m de altura o con más
de 6,000 m² de área total construida, ubicadas
en las zonas I y II según se define en el artículo
175, y
Construcciones de más de 15 m de altura o
3,000 m² de área total construida, en zona III,
y

b) SUBGRUPO B2. Las demás de este grupo.

3.2 Coeficiente sísmico

De acuerdo con el RCDF se tiene:

Art 206. El coeficiente sísmico, c , es el cociente de la fuerza cortante horizontal que
debe considerarse que actúa en la base de la construcción por efecto del
sismo (V_0) entre el peso de ésta sobre dicho nivel (W_0).

Con este fin se tomará como base de la estructura el nivel a partir del cual
sus desplazamientos con respecto al terreno circundante comienzan a ser
significativos. Para calcular el peso total se tendrán en cuenta las cargas
muertas y vivas que correspondan según los capítulos IV Y V de este Título

(VI).

El coeficiente sísmico para las construcciones clasificadas como grupo B en el artículo 174 se tomarán los siguientes valores:

Zona No.	Coeficiente sísmico (c)
I	0.16
II	0.32
III	0.40

A menos que se emplee el método simplificado de análisis en cuyo caso se aplicarán los coeficientes que fijan las NTC, y a excepción de las zonas especiales en las que dichas NTC especifiquen otros valores de **c**.

Para las estructuras del Grupo A se incrementará el coeficiente sísmico en 50 por ciento.

De acuerdo con lo anterior se puede escribir

$$c = \frac{V_0}{W_0} = \text{Coeficiente sísmico}$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n_{\text{niv}}} F_i = \text{Fuerza cortante en la base}$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^{n_{\text{niv}}} w_i = \text{Peso de la construcción} \quad (3.1)$$

F_i = Fuerza sísmica en el *i*ésimo nivel

w_i = Peso de la construcción en el *i*ésimo nivel

3.3 Zonificación sísmica

De acuerdo con el RCDF se tiene

Art 175. Para fines de estas disposiciones, el DF se considera dividido en las zonas I, II y III, dependiendo del tipo de suelo. Las características de cada zona y los procedimientos para definir la zona que corresponde a cada predio se fijan en el capítulo VII (Diseño de cimentaciones) de este Título (VI. Seguridad estructural de las construcciones).

Art 219. Para fines de este Título (VI) el DF se divide en tres zonas con las siguientes características generales:

Zona I. LOMAS, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o incrustados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. En esta zona, es frecuente la presencia de oquedades en rocas y de cavernas y túneles excavados en suelos para explotar minas de arena.

Zona II. TRANSICIÓN, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de éstas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros, y

Zona III. LACUSTRE, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme a muy dura y de espesores variables de centímetros a varios metros.
Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

La zona a que corresponda un predio se determinará a partir de las investigaciones que se realicen en el subsuelo del predio objeto de estudio, tal y como lo establecen las NTC. En caso de construcciones ligeras o medianas, cuyas características se definirán en dichas normas (NTC para cimentaciones) podrá determinarse la zona mediante el mapa incluido en las mismas (ver Fig 1 NTC para cimentaciones), si el predio está dentro de la porción zonificada; los predios ubicados a menos de 200 m de las fronteras entre dos de las zonas antes descritas se supondrán ubicados en la más desfavorable.

Art 220. La investigación del subsuelo del sitio mediante exploración de campo y pruebas de laboratorio debe ser suficiente para definir de manera confiable:

Los parámetros de diseño de la cimentación.

La variación de los mismos en la planta del predio.

Los procedimientos de construcción.

Además deberá ser tal que permita definir:

- I. En la **zona I** a que se refiere el artículo 219 del RCDF, si existen en ubicaciones de interés materiales sueltos superficiales, grietas, oquedades naturales o galerías de minas, y en caso afirmativo su apropiado tratamiento, y.

- II. En las **zonas II y III** del artículo mencionado en la fracción anterior, la existencia de restos arqueológicos, cimentaciones antiguas, grietas, variaciones fuertes de estratigrafía, historia de carga del predio o cualquier otro factor que pueda originar asentamientos diferenciales de importancia, de modo que todo ello pueda tomarse en cuenta en el diseño.

Las NTC para cimentaciones en su capítulo 2 (Investigaciones del subsuelo) establecen en la tabla I los requisitos mínimos para la investigación del subsuelo para las construcciones ligeras o medianas de poca extensión y con excavaciones someras, y para las construcciones pesadas, extensas o con excavaciones profundas.

Las NTC para sismo en su capítulo 3 (Espectros para diseño sísmico) establecen que el coeficiente, c , que se obtiene del Art 206 del RCDF salvo en la parte sombreada de la **zona II** (ver Fig. 3.1 de dichas NTC) toma los siguientes valores:

$c = 0.4$ para las estructuras del grupo B, y

$c = 0.6$ para las estructuras del grupo A.

3.4 Condiciones de regularidad

De acuerdo con las NTC para el diseño por sismo, en su capítulo 6, para que una estructura pueda considerarse regular debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. Su planta es sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes.
2. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5.
3. La relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5.
4. En la planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o la saliente.
5. En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.
6. No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren de posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 por ciento del área de la planta.
7. El peso de cada nivel, que incluye la carga viva que debe considerarse para diseño

sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho peso.

8. Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70 por ciento de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.
9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas ortogonales y por trabes o losas planas.
10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del entrepiso inmediatamente inferior.
11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente, e_s , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

NOTA: En el capítulo 4 (Reducción de fuerzas sísmicas) de las NTC para diseño por sismo (inciso 4.4.2 de estas notas) se especifica que: "**... En el diseño sísmico de las estructuras que no satisfacen las condiciones de regularidad que fija la sección 6 de estas normas, se multiplicará por 0.8 el valor de Q '.**"

3.5 Factor de comportamiento sísmico

De acuerdo con el RCDF se tiene que

Art 207. Cuando se aplique el método estático o un método dinámico para análisis sísmico, podrán reducirse con fines de diseño las fuerzas sísmicas calculadas, empleando para ello los criterios que las NTC, en función de las características estructurales y del terreno. Los desplazamientos calculados de acuerdo con estos métodos, empleando las fuerzas sísmicas reducidas, deben multiplicarse por el factor de comportamiento sísmico que marquen dichas Normas.

Los coeficientes que especifiquen las NTC para la aplicación del método simplificado de análisis tomarán en cuenta todas las reducciones que procedan por los conceptos mencionados. Por ello las fuerzas sísmicas calculadas por este método no deben sufrir reducciones adicionales.

De acuerdo con las NTC para sismo del RCDF en su capítulo 5, los valores de los factores del comportamiento sísmico, Q , se especifican a continuación:

I. Se usará $Q=4$ cuando se cumplan los requisitos siguientes:

1. La resistencia en todos los entrepisos es suministrada exclusivamente:
Por marcos no contraventeados de acero o concreto reforzado, o bien
Por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado en los que en cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, cuando menos 50 por ciento de la fuerza sísmica actuante.
 2. Si hay muros ligados a la estructura en la forma especificada en el caso I del artículo 204 del RCDF, éstos se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante fuerzas laterales sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, y los marcos, sean o no contraventeados, y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80 por ciento de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería.
 3. El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 35 por ciento del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del Reglamento.
 4. Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen con los requisitos que fijan las normas técnicas complementarias correspondientes para marcos y muros dúctiles.
 5. Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas técnicas complementarias correspondientes.
- II. Se adoptará **Q=3** cuando se satisfacen las condiciones 2,4 y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejan de satisfacerse las condiciones 1 ó 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada:
Por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas,
Por marcos rígidos de acero,
Por marcos de concreto reforzado,
Por muros de concreto reforzado,
Por combinaciones de muros de concreto reforzado y por marcos o por diafragmas de madera contrachapada.
Las estructuras con losas planas deberán cumplir los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.
- III. Se usará **Q=2** cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada
Por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado,
Por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventeados o no,
Por muros o columnas de concreto reforzado,
que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o
Por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dalas

columnas o trabes de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas técnicas complementarias respectivas, o diafragmas contruidos con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará $Q=2$ cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado, con la excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

- IV. Se usará $Q=1.5$ cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos
Por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas técnicas complementarias respectivas,
o
Por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y III, o por marcos y armaduras de madera.
- V. Se usará $Q=1$ en estructuras cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre, a satisfacción del Departamento del Distrito Federal, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de Q que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección.

El factor Q puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de ésta en dichas direcciones.

3.5.1 Condiciones para marcos dúctiles de concreto

Con base en los puntos I.4 y II del inciso 3.5, se reproduce el Capítulo 5, Marcos dúctiles, de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF.

3.5.1.1 Requisitos generales

Los requisitos de este capítulo se aplican a marcos colados en el lugar, diseñados por sismo con un factor de comportamiento sísmico, $Q=4$. También se aplican a los marcos de estructuras coladas en el lugar diseñadas con $Q=4$, formadas por marcos y muros de concreto reforzado que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o marcos y contravientos que cumplan con el inciso 4.6 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), en las que la fuerza cortante resistida por los marcos sea, al menos, el 50 por ciento de la total y, así mismo, a los marcos de estructuras coladas en el lugar, diseñadas con $Q=3$ y formadas por marcos y

muros o contravientos que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o marcos y contravientos que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o el inciso 4.6 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), en las que la fuerza cortante resistida por los marcos sea menor que el 50 por ciento de la total. En todos los casos anteriores, los requisitos se aplican también a los elementos estructurales de la cimentación.

Sea que la estructura esté formada sólo de marcos o de marcos y muros o contravientos, ningún marco se debe diseñar para resistir una fuerza cortante horizontal menor que el 25 por ciento de la que le correspondería si trabajara aislado del resto de la estructura.

La resistencia especificada del concreto, f_c , no debe ser menor de 200 kgf/cm².

Las barras de refuerzo deben ser corrugadas de grado no mayor que el 42 y deben cumplir con los requisitos de las normas NOM-B6. Además, las barras longitudinales de vigas y columnas deben tener fluencia definida, bajo un esfuerzo que no exceda al esfuerzo de fluencia especificado en más de 1300 kgf/cm², y su resistencia real debe ser, al menos, igual a 1.25 veces su esfuerzo real de fluencia.

Se deben aplicar las disposiciones de estas normas (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF) que no se modifiquen en este capítulo.

3.5.1.2 Miembros a flexión

Los requisitos de este inciso se aplican a miembros principales que trabajan esencialmente a flexión. Se incluyen vigas y aquellas columnas con cargas axiales pequeñas, tales que.

$$P_u \leq 0.1 A_g f_c \quad (3.2)$$

3.5.1.2.1 Requisitos geométricos

- a) El claro libre no debe ser menor que cuatro veces el peralte efectivo.
- b) En sistemas de viga y losa monolítica, la relación entre la separación de apoyos que eviten el pandeo lateral y el ancho de la viga no debe exceder de 30.
- c) La relación entre el peralte y ancho no debe ser mayor que 3.
- d) El ancho de la viga no debe ser menor de 25 cm, ni debe exceder al ancho de las columnas a las que llega.

- e) El eje de la viga no debe separarse horizontalmente del eje de la columna mas de un décimo de la dimensión transversal de la columna normal a la viga.

3.5.1.2.2 Refuerzo longitudinal

En toda sección se debe disponer de refuerzo tanto en el lecho inferior como en el superior. En cada lecho el área de refuerzo no debe ser menor que.

$$0.7 \sqrt{f_c} \frac{bd}{f_s} \quad (3.3)$$

y debe constar, al menos, por dos barras corridas de 12.7 mm de diámetro (No 4). El área de acero a tensión no debe exceder del 75 por ciento de la correspondiente a la falla balanceada de la sección.

El momento resistente positivo en la unión con un nudo no debe ser menor que la mitad del momento resistente negativo que se suministre en esa sección. En ninguna sección a lo largo del miembro el momento resistente negativo, ni el resistente positivo, deben ser menores que la cuarta parte del máximo momento resistente que se tenga en los extremos.

En las barras para flexión se permiten traslapes solo si en la longitud del traslape se suministra refuerzo transversal de confinamiento (refuerzo helicoidal o estribos cerrados); el paso o la separación de este refuerzo no debe ser mayor que 0.25 d, ni que 10 cm. Las uniones por traslapes no se permiten en los casos siguientes:

- Dentro de los nudos
- En una distancia de dos veces el peralte del miembro, medida desde el paño del nudo, y
- En aquellas zonas donde el análisis indique que se forman articulaciones plásticas.

Con el refuerzo longitudinal pueden formarse paquetes de dos barras cada uno.

Se permiten uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, que cumplan con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), a condición de que en toda sección de unión, cuando mucho, se unan barras alternadas y que las uniones de barras adyacentes no disten entre sí menos de 60 cm en la dirección longitudinal del miembro.

3.5.1.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

Se deben suministrar estribos cerrados de, al menos, 7.9 mm de diámetro (No 2.5) que cumplan con los requisitos de los párrafos que siguen, en las zonas siguientes:

- En cada extremo del miembro sobre una distancia de dos peraltes medida a partir

- del paño del nudo, y
- b) En la porción del elemento que se halle a una distancia igual a dos peraltes ($2h$) de toda sección donde se suponga, o el análisis lo indique, que se va a formar una articulación plástica (si la articulación se forma en una sección intermedia, los dos peraltes se deben tomar a cada lado de la sección).

El primer estribo se debe colocar a no más de 5 cm de la cara del miembro de apoyo. La separación de los estribos no debe exceder los valores siguientes:

- a) 0.25 d
b) Ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más delgada
c) 24 veces el diámetro de la barra del estribo
d) 30 cm

Los estribos a que se refiere esta sección deben ser cerrados, de una pieza, y deben rematar en una esquina con dobleces de 135 grados, seguidos de tramos rectos de no menos de 10 diámetros de largo. En cada esquina del estribo debe quedar, al menos, una barra longitudinal. Los radios de doblez deben cumplir con los requisitos del inciso 3.8 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF). La localización del remate del estribo debe alternarse uno a otro.

En las zonas definidas en el primer párrafo de esta sección, las barras longitudinales de la periferia deben tener soporte lateral que cumpla con el inciso 3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF).

Fuera de las zonas definidas en el primer párrafo de esta sección, la separación de los estribos no debe ser mayor que $0.5d$ a todo lo largo. En toda la viga la separación de estribos no debe ser mayor que la requerida por fuerza cortante.

3.5.1.2.4 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos que trabajan principalmente a flexión se deben dimensionar de manera que no se presente falla por cortante antes que puedan formarse las articulaciones plásticas en sus extremos. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro entre caras de apoyo; se debe suponer que en los extremos actúan momentos del mismo sentido valuados con las propiedades del elemento en esas secciones, sin factores de reducción, y con el esfuerzo en el acero de tensión, al menos, igual a $1.25 f_y$. A lo largo del miembro deben actuar las cargas correspondientes multiplicadas por el factor de carga.

Como opción, pueden dimensionarse con base en la fuerza cortante de diseño obtenida del análisis, si el factor de resistencia F_R , se le asigna un valor de 0.6, en lugar de 0.8.

El refuerzo para fuerza cortante debe estar formado por estribos verticales cerrados de una pieza, de diámetro no menor de 7.9 mm (No 2.5), rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3.

3.5.1.3 Miembros a flexocompresión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros en los que la carga axial de diseño sea tal que.

$$P_u > 0.1 A_g f_c \quad (3.4)$$

3.5.1.3.1 Requisitos geométricos

- a) La dimensión transversal mínima no debe ser menor que 30 cm.
- b) El área A_g , debe cumplir con la condición.

$$A_g \geq \frac{P_u}{0.5 f_c} \quad (3.5)$$

- c) La relación entre la menor dimensión transversal y la dimensión transversal perpendicular no debe ser menor que 0.4.
- d) La relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no debe exceder de 15.

3.5.1.3.2 Resistencia mínima a flexión

Las resistencias a flexión de las columnas en un nudo deben satisfacer la siguiente condición.

$$\Sigma M_c \geq 1.5 \Sigma M_g \quad (3.6)$$

ΣM_c = Suma de los momentos resistentes de diseño de las columnas que llegan a ese nudo, referidas al centro del nudo

ΣM_g = Suma de los momentos resistentes de diseño de las vigas que llegan al nudo, referidas al centro de éste

Las sumas anteriores deben realizarse de modo que los momentos de las columnas se opongan a los de las vigas. La condición debe cumplirse para los dos sentidos en que puede actuar el sismo.

Al calcular la carga axial de diseño para la cual se valúe el momento resistente, M_e , de una columna, la fracción de dicha carga debida al sismo se debe tomar igual al doble de la calculada, cuando esto conduzca a un momento resistente menor. En tal caso, la

columna se debe dimensionar al tomar en cuenta el incremento de carga mencionada. El factor de resistencia por flexocompresión se debe tomar igual a 0.8.

Como opción, las columnas pueden dimensionarse con los momentos y fuerzas axiales de diseño obtenidos del análisis, si el factor de resistencia por flexocompresión se le asigna el valor de 0.6.

3.5.1.3.3 Refuerzo longitudinal

La cuantía del refuerzo longitudinal, p , debe satisfacer la siguiente condición.

$$0.01 \leq p \leq 0.04 \quad (3.7)$$

Solo se deben formar paquetes de dos barras.

El traspase de barras longitudinales solo se permite en la mitad del elemento; estos traspases deben cumplir con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF). Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos que cumplan con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), pueden usarse en cualquier localización con tal de que en una misma sección cuando mas se unan barras alternadas y que las uniones de barras adyacentes no disten entre si menos de 60 cm en la dirección longitudinal del miembro.

El refuerzo longitudinal debe cumplir con las disposiciones del inciso 3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF) que no se modifican en este inciso.

3.5.1.3.4 Refuerzo transversal

Debe cumplirse con los requisitos del inciso 3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF) y los del inciso siguiente (inciso 3.5.1.3.5), y con los requisitos mínimos que aquí se establecen. No debe ser de grado mayor que el 42.

Se debe suministrar el refuerzo transversal mínimo que se especifica enseguida en ambos extremos de la columna, en una longitud no menor que.

- a) La mayor dimensión transversal de ésta
- b) Un sexto de su altura libre
- c) 60 cm

En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, y debe continuarse dentro de la cimentación, al menos, una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra mas gruesa (en los nudos se debe cumplir con los requisitos del inciso 3.5.1.4 que se indican posteriormente).

- a) En columnas de núcleo circular, la cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal o de estribos circulares, P_s , debe cumplir con la siguiente relación.

$$p_s \geq 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y} \quad (3.8)$$

$$p_s \geq 0.12 \frac{f_c}{f_y}$$

- b) En columnas de núcleo rectangular, la suma de las áreas de estribos y grapas, A_{sh} , en cada dirección de la sección de la columna debe cumplir con la relación.

$$A_{sh} \geq 0.3 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y} s h_c \quad (3.9)$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f_c}{f_y} s h_c$$

donde:

A_c = Área transversal del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo transversal

A_g = Área transversal de la columna

f_y = Esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal

h_c = dimensión del núcleo, normal al refuerzo de área A_{sh} .

s = Separación del refuerzo transversal

Este refuerzo transversal debe estar formado por estribos de una pieza, sencillos o sobrepuestos, de diámetro no menor que 9.5 mm (No 3) y rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3. Puede complementarse con grapas del mismo diámetro que los estribos, espaciados igual que éstos a lo largo del miembro. Cada extremo de una grapa debe abrazar a una barra longitudinal de la periferia con dobléz de 135 grados, seguido de un tramo recto de, al menos, 10 diámetros de la grapa.

La separación del refuerzo transversal no debe exceder de la cuarta parte de la menor dimensión transversal del elemento, ni de 10 cm.

La distancia centro a centro, transversal al eje del miembro, entre ramas de estribos sobrepuestos no debe ser mayor de 45 cm, y entre grapas y ramas de estribos

sobrepuestos no debe ser mayor de 25 cm. Si el refuerzo consta de estribos sencillos, la mayor dimensión de éstos no debe exceder de 45 cm.

En el resto de la columna el refuerzo transversal debe cumplir con los requisitos del inciso 3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF).

3.5.1.3.5 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos a flexocompresión se deben dimensionar de manera que no fallen por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones plásticas en las vigas. Para ello la fuerza cortante de diseño se debe obtener del equilibrio del elemento en su altura libre al suponer en cada extremo un momento igual a la mitad de $1.5\Sigma M_g$ (definida en la sección 3.5.1.3.2. En el extremo inferior de columnas de planta baja se debe usar el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente. En el extremo superior de columnas del último entrepiso se debe usar $1.5\Sigma M_g$.

Cuando las columnas se dimensionen por flexocompresión con el procedimiento optativo incluido en el inciso 3.5.1.3.2, el dimensionamiento por fuerza cortante se debe realizar a partir de la fuerza de diseño obtenida del análisis, y utilizar un factor de resistencia igual a 0.5.

En elementos a flexocompresión en que la fuerza axial de diseño, incluyendo los efectos del sismo, sea menor que $A_g f_c / 20$, al calcular el refuerzo para fuerza cortante, si la fuerza cortante de diseño causada por el sismo es igual o mayor que la mitad de la fuerza cortante de diseño calculada según los párrafos anteriores, se puede despreciar la contribución del concreto V_c .

El refuerzo para fuerza cortante debe estar formado por estribos cerrados, de una pieza, rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3, o por hélices continuas, ambos de diámetros no menor que 9.5 mm (No 3) y de grado no mayor que el 42.

3.5.1.4 Uniones viga-columna

3.5.1.4.1 Requisitos generales

Las fuerzas que intervienen en el dimensionamiento por fuerza cortante de la unión se deben determinar al suponer que el esfuerzo de tensión en las barras longitudinales de las vigas que llegan a la unión es $1.25 f_y$.

El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

En los planos estructurales deben incluirse dibujos, acotados y a escala, del refuerzo en las uniones viga-columna.

Una unión viga-columna o nudo se define como aquella parte de la columna comprendida en el peralte de las vigas que llegan a ella.

3.5.1.4.2 Refuerzo transversal

En un nudo debe suministrarse el refuerzo transversal mínimo especificado en el inciso 3.5.1.3.4. Si el nudo está confinado por cuatro trabes que llegan a él y el ancho de cada una es, al menos, igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

3.5.1.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Se debe admitir revisar la resistencia del nudo a fuerza cortante en cada dirección principal de la sección en forma independiente. La fuerza cortante se debe calcular en un plano horizontal a media altura del nudo.

En nudos confinados como se dice en el inciso 3.5.1.4.2, la resistencia de diseño a fuerza cortante se debe tomar igual a

$$5.5 F_R \leq \bar{f}_c b_e h \quad (3.11)$$

En otros nudos se debe tomar igual a.

$$4.5 F_R \leq \bar{f}_c b_e h \quad (3.12)$$

b_e es el ancho efectivo del nudo

h es la dimensión transversal de la columna en la dirección de la fuerza.

El ancho b_e debe tomar igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero no mayor que el ancho de la o las vigas mas h .

3.5.1.4.4 Anclaje del refuerzo

Toda barra de refuerzo longitudinal de vigas que termine en un nudo debe prolongarse hasta la cara lejana del núcleo de la columna y rematarse con un doblez a 90 grados, seguido de un tramo recto no menor de 12 diámetros. La sección crítica para revisar el anclaje de estas barras debe ser el plano externo del núcleo de la columna. La revisión se debe efectuar de acuerdo con la sección 3.1.1c (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), donde es suficiente usar una longitud de desarrollo del 90 por ciento de la allí determinada.

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectos a través de un nudo deben seleccionarse de modo que cumplan las relaciones siguientes:

$$h(\text{columna})/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20 \quad (3.13)$$

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de columna}) \geq 20$$

donde $h(\text{columna})$ es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas.

Si en la columna superior del nudo se cumple que:

$$\frac{P_u}{A_g f_c} \geq 0.3 \quad (3.14)$$

se puede tomar la relación siguiente:

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de columna}) \geq 15 \quad (3.15)$$

La relación dada por la Ec 3.15 también es suficiente cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50 por ciento de la fuerza lateral total.

3.5.1.5 Sistemas losa plana-columnas para resistir sismo

Si la altura de la estructura no excede de 20 m y, además, existen al menos tres crujeías en cada dirección o jay trabes de borde, para el diseño por sismo se puede usar $Q=3$; también puede aplicarse este valor cuando el sistema se combine con muros de concreto reforzado que cumplan con 4.5.2, incluyendo el inciso b de esa sección (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF), y que resistan no menos del 75 por ciento de la fuerza lateral. Cuando no se satisfagan las condiciones anteriores, se debe usar $Q=2$. Con relación a los valores de Q , debe cumplirse, además, con los correspondientes incisos anteriores (que es el Cap 5 de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF). En todos los casos se deben respetar las disposiciones siguientes:

- I Las columnas deben cumplir con los requisitos de 3.5.1.3 para columnas de marcos dúctiles, excepto en lo referente al dimensionamiento por flexocompresión, el cual sólo se debe realizar mediante el procedimiento optativo que se establece en el inciso 3.5.1.3.2.

II Las uniones losa-columna deben cumplir con los requisitos de 3.5.1.4 para uniones viga-columna, con las salvedades que siguen:

No es necesaria la revisión de la resistencia del nudo a fuerza cortante, sino basta cumplir con el refuerzo transversal prescrito en 3.5.1.4.2 para nudos confinados.

Los requisitos de anclaje de 3.5.1.4.4 se deben aplicar al refuerzo de la losa que pase por el núcleo de una columna. Los diámetros de las barras de la losa y columnas que pasen rectas a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$h(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20 \quad (3.16)$$

$$h(\text{losa})/d_b(\text{barras de columna}) \geq 15$$

donde $h(\text{columna})$ es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.

3.5.2 Condiciones para estructuras dúctiles de acero

Con base en los puntos I.4 y II del inciso 3.5, se reproduce el Capítulo 11, Estructuras dúctiles, de las NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF.

3.5.2.1 Alcance

En este capítulo se indican los requisitos que deben cumplirse para que puedan adoptarse valores del factor de comportamiento sísmico Q iguales a 4.0 o 3.0.

3.5.2.2 Marcos dúctiles

3.5.2.2.1 Requisitos generales

Se indican aquí los requisitos que debe satisfacer un marco rígido de acero estructural para ser considerado un marco dúctil. Estos requisitos se aplican a marcos rígidos diseñados con un factor de comportamiento sísmico Q igual a 4.0 o a 3.0, que formen parte de sistemas estructurales que cumplan las condiciones enunciadas en el capítulo 5, partes I y II, de las NTC para diseño por sismo, necesarias para utilizar ese valor del factor de comportamiento sísmico.

Tanto en los casos en que la estructura está formada sólo por marcos como por aquellos en que está compuesta por marcos y muros o contravientos, cada uno de los marcos se debe diseñar para resistir, como mínimo, fuerzas horizontales iguales a 25 por ciento de

las que le corresponderían si trabajase aislado del resto de la estructura.

La gráfica esfuerzo de tensión-deformación del acero empleado debe tener una zona de cedencia, de deformación creciente bajo esfuerzo prácticamente constante, correspondiente a un alargamiento máximo no menor de uno por ciento, seguida de un endurecimiento por deformación. El alargamiento correspondiente a la ruptura no debe ser menor de 20 por ciento.

3.5.2.2 Miembros en flexión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros principales que trabajan esencialmente en flexión. Se incluyen vigas y columnas con cargas axiales pequeñas, tales que P_u no exceda de $P_y/10$.

3.5.2.2.1 Requisitos geométricos

Todas las vigas deben ser de sección transversal I o rectangular hueca, excepto en los casos cubiertos en el inciso 3.5.2.2.5.

El claro libre de las vigas no debe ser menor que cinco veces el peralte de su sección transversal, ni el ancho de sus patines mayor que el ancho del patín o el peralte del alma de la columna con la que se conecten.

El eje de las vigas no debe separarse horizontalmente del eje de las columnas más de un décimo de la dimensión transversal de la columna normal a la viga.

Las secciones transversales de las vigas deben ser tipo 1, de manera que han de satisfacer los requisitos geométricos que se indican en los incisos 2.3.1 y 2.3.2 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF). Sin embargo, se permite que la relación ancho/grueso del alma llegue hasta $5300/\sqrt{F_y}$, 12 si en las zonas de formación de articulaciones plásticas se toman las medidas necesarias (refuerzo del alma mediante atiesadores transversales o placas adosadas a ella, soldadas adecuadamente) para impedir que el pandeo local se presente antes de la formación del mecanismo de colapso.

Además, las secciones transversales deben tener dos ejes de simetría, una vertical, en el plano en que actúan las cargas gravitacionales, y otro horizontal. Cuando se utilicen cubreplacas en los patines para aumentar la resistencia del perfil, deben conservarse los dos ejes de simetría.

Si las vigas están formadas por placas soldadas, la soldadura entre almas y patines debe ser continua en toda la longitud de la viga, y en las zonas de formación de articulaciones plásticas debe ser capaz de desarrollar la resistencia total en cortante de las almas.

Cuando se empleen vigas de resistencia variable, ya sea por adición de cubreplacas en algunas zonas o porque su peralte varíe a lo largo del claro, el momento resistente nunca

debe ser menor, en ninguna sección, que la cuarta parte del momento resistente máximo, que se tendrá en los extremos.

En estructuras soldadas deben evitarse los agujeros, siempre que sea posible, en las zonas de formación de articulaciones plásticas. En estructuras atornilladas o remachadas, los agujeros que sean necesarios en la parte del perfil que trabaje en tensión se deben punzar a un diámetro menor y se agrandan después, hasta darles el diámetro completo, con un taladro o un escarificador. Este mismo procedimiento se debe seguir en estructuras soldadas, si se requieren agujeros para montaje o con algún otro objeto. Para los fines de los dos párrafos anteriores, las zonas de formación de articulaciones plásticas se consideran de longitud igual a un peralte, en los extremos de las vigas, y a dos peraltes, medidos uno a cada lado de la sección en la que aparece, en teoría, la articulación plástica, en zonas intermedias.

En aceros cuyo esfuerzo mínimo especificado de ruptura en tensión, F_u , es menor 1.5 veces el esfuerzo de fluencia mínimo garantizado, F_y , no se debe permitir la formación de articulaciones plásticas en zonas en que se haya reducido el área de los patines, ya sea por agujeros para tornillos o por cualquier otra causa.

No se deben hacer empalmes de ningún tipo, en las vigas propiamente dicha o en sus cubreplacas, en zonas de formación de articulaciones plásticas.

3.5.2.2.2 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos que trabajan principalmente en flexión se deben dimensionar de manera que no se presenten fallas por cortante antes de que se formen las articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro entre las secciones en que se forman las articulaciones plásticas, en las que se supone que actúan momentos del mismo sentido y de magnitudes iguales a los momentos plásticos resistentes del elemento en esas secciones, sin factores de reducción, y evaluados al tomar el esfuerzo de fluencia del material igual a $1.25 F_y$. Al plantear la ecuación de equilibrio para calcular la fuerza cortante se deben tener en cuenta las cargas transversales que obran sobre el miembro, multiplicadas por el factor de carga.

Como una opción se permite hacer el dimensionamiento al tomar como base las fuerzas cortantes de diseño obtenidas en el análisis, pero utilizar un factor de resistencia F_R igual a 0.7, en lugar del valor de 0.9 especificado en el artículo 3.3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF).

Las articulaciones plásticas se forman, en la mayoría de los casos, en los extremos de los elementos que trabajan en flexión. Sin embargo, hay ocasiones frecuentes en las vigas de los niveles superiores de los edificios, en que una de ellas se forma en la zona central del miembro. Cuando esto suceda, la fuerza cortante debe evaluarse al tener en cuenta la

posición real de la articulación plástica.

3.5.2.2.3 Contraventeo lateral

Deben soportarse lateralmente todas las secciones transversales de las vigas en las que puedan formarse articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso. Además, la distancia entre cada una de estas secciones y la siguiente sección soportada lateralmente no debe ser mayor que la dada a continuación.

$$L_p = 1250 \frac{r_y}{\sqrt{F_y}} \quad (3.17)$$

Este requisito se aplica a un solo lado de la articulación plástica cuando ésta se forma en un extremo de la viga, y en ambos lados cuando aparece en una sección intermedia. La expresión anterior es válida para vigas de sección transversal I o H, flexionadas alrededor de su eje de mayor momento de inercia.

En zonas que se conservan en el intervalo elástico al formarse el mecanismo de colapso, la separación entre puntos no soportados lateralmente puede ser mayor que la indicada en el párrafo anterior, pero no debe exceder el valor de L_p , calculado de acuerdo con el inciso 3.3.2.2 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF).

Los elementos de contraventeo deben proporcionar soporte lateral, directo o indirecto, a los dos patines de las vigas. Cuando el sistema de piso proporcione soporte lateral al patín superior, el desplazamiento lateral del patín inferior puede evitarse por medio de atiesadores verticales de rigidez adecuada, soldados a los dos patines y al alma de la viga.

3.5.2.2.3 Miembros en flexocompresión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros que trabajan en flexocompresión, en los que la carga axial de diseño, P_u , es mayor que $P_u/10$. La mayoría de estos miembros son columnas, pero pueden ser de algún otro tipo; por ejemplo, vigas que forman parte de crujías contraventeadas de marcos rígidos han de diseñarse, en general, como elementos flexocomprimidos.

3.5.2.2.3.1 Requisitos geométricos

Si la Sección transversal es rectangular hueca, la relación de la mayor a la menor de sus dimensiones exteriores no debe exceder de 2 y la dimensión menor debe ser mayor o igual a 20 cm.

Si la sección transversal es H, el ancho de los patines no debe ser mayor que el peralte total, la relación peralte-ancho del patín no debe exceder de 1.5, y el ancho de los patines debe ser mayor o igual a 20 cm.

La relación de esbeltez máxima de las columnas no debe exceder de 60.

3.5.2.2.3.2 Resistencia mínima en flexión

La resistencia en flexión de las columnas que concurren a un nudo deben satisfacer la condición dada por la Ec 5.8.5 del inciso 5.8.5 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF), con las excepciones que se indican en este inciso.

Como una opción, se permite hacer el dimensionamiento al tomar como base los elementos mecánicos de diseño obtenidos en el análisis, y reducir el factor de resistencia F_R utilizado en flexocompresión de 0.9 a 0.7.

3.5.2.2.3.3 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos flexocomprimidos se deben dimensionar de manera que no fallen prematuramente por fuerza cortante. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro, al considerar su longitud igual a la altura libre y suponer que en sus extremos obran momentos del mismo sentido y de magnitud igual a los momentos máximos resistentes de las columnas en el plano de estudio, que valen $Z_c(F_{yc}-f_a)$. El significado de las literales que aparecen en esta expresión se explica con referencia a la Ec 5.8.5 del inciso 5.8.5 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF).

Cuando las columnas se dimensionen por flexocompresión con el procedimiento optativo del inciso 3.5.2.2.3.2, la revisión por fuerza cortante se debe realizar con la fuerza de diseño obtenida en el análisis y utilizar un factor de resistencia de 0.7.

3.5.2.2.4 Uniones viga-columna

Las uniones viga-columna deben satisfacer las recomendaciones de la sección 5.8 "Conexiones rígidas entre vigas y columnas" (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF), con las modificaciones pertinentes cuando las columnas sean de sección transversal rectangular hueca.

3.5.2.2.4.1 Contraventeo

Si en alguna junta de un marco dúctil no llegan vigas al alma de la columna, por ningún lado de ésta, o si el peralte de la viga o vigas que llegan por alma es apreciablemente menor que el de las que se apoyan en los patines de la columna, éstos deben ser soportados lateralmente al nivel de los patines inferiores de las vigas.

3.5.2.2.4.2 Vigas de alma abierta (armaduras)

En esta sección se indican los requisitos especiales que deben satisfacerse cuando se

desea emplear vigas de alma abierta (armaduras) en marcos dúctiles. Deben cumplirse, además, todas las condiciones aplicables de este capítulo.

Las armaduras pueden utilizarse como miembros horizontales en marcos dúctiles, si se diseñan de manera que la suma de las resistencias en flexión ante fuerzas sísmicas de las dos armaduras que concurren en cada nudo intermedio sea igual o mayor 1.25 veces la suma de las resistencias en flexión ante fuerzas sísmicas de las columnas que llegan al nudo. En nudos extremos, el requisito anterior debe ser satisfecho por la única armadura que forma parte de ellos.

Además, deben cumplirse las condiciones siguientes:

- a) Los elementos de las armaduras que trabajan en compresión o en flexocompresión, sean cuerdas, diagonales o montantes, se deben diseñar con un factor de resistencia, F_R , igual a 0.7. Al determinar cuales elementos trabajan en compresión o en flexocompresión deben tomarse en cuenta los dos sentidos en que actúa el sismo de diseño.
- b) Las conexiones entre las cuerdas de las armaduras y las columnas deben ser capaces de desarrollar la resistencia correspondiente al flujo plástico de las cuerdas.
- c) En edificios de más de un piso, el esfuerzo en las columnas producido por las fuerzas axiales de diseño no deben ser mayores de $0.30 F_y$, y la relación de esbeltez máxima de las columnas no debe exceder de 60.

3.6 Espectros para diseño sísmico

De acuerdo con las NTC para diseño por sismo, cuando se aplique el análisis dinámico modal que especifica la sección 9 de sus normas, se adoptan las siguientes hipótesis para el análisis de la estructura:

La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico, a , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} \left(1 + 3 \frac{T}{T_a} \right) c & \forall T < T_a \\
 a &= c & \forall T_a \leq T \leq T_b \\
 a &= \left(\frac{T_b}{T} \right) c & \forall T > T_b
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

T es el período natural de interés; T , T_a , y T_b están expresados en segundos; c es el coeficiente sísmico, y r un exponente que depende de la zona en que se halla la estructura, y se especifica en la tabla 3.1 de las NTC para diseño por sismo, reproducida a continuación.

El coeficiente sísmico c se obtiene del Art 206 del RCDF, salvo que la parte sombreada de la zona II de la Fig 3.1 de las NTC para diseño por sismo (NTC-sismo) se debe tomar $c = 0.4$ para las estructuras del grupo B, y $c = 0.6$ para las del grupo A.

Tabla 3.1 Valores de c, T_a, T_b, y r				
Zona	c	$T_a(s)$	$T_b(s)$	r
I	0.16	0.2	0.6	1/2
II*	0.32	0.3	1.5	2/3
III+	0.40	0.6	3.9	1

Notas: **Coficiente sísmico para construcciones del Grupo B**
 * **No sombreada (Fig 3.1, NTC-sismo)**
 + **Y parte sombreada de zona II (Fig 3.1, NTC-sismo)**

4. FUERZAS SÍMICAS

En este capítulo se describen los métodos que considera el RCDF para cuantificar las fuerzas que se deben considerar en el diseño de una edificación para soportar los efectos de un sismo.

4.1 Análisis dinámico

De acuerdo con las NTC para diseño por sismo, toda estructura puede analizarse mediante un método dinámico. Se aceptan como métodos de análisis dinámico:

- a) El modal (modal espectral)
- b) El paso a paso de respuestas a sismos específicos

A fin de explicar los métodos para analizar las estructuras ante cargas dinámicas, se presentan los siguientes desarrollos:

4.1.1 Ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones

Las ecuaciones de equilibrio dinámico de los modelos estructurales lineales para edificaciones se pueden expresar como:

$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \bar{C} \frac{d}{dt} u(t) + \bar{K}u(t) = F(t) \quad (4.1)$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) \Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = \text{vector de velocidades conocido} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{u}(t) \Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0 = \text{vector de desplazamientos conocido} \quad (4.2b)$$

donde, para la edificación en particular, se definen los siguientes conceptos.

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \text{Matriz de masas} \\ \tilde{C} &= \text{Matriz de amortiguamientos} \\ \tilde{K} &= \text{Matriz de rigideces} \\ \mathbf{u}(t) &= \text{vector de desplazamientos} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) &= \text{vector de velocidades} \\ \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t) &= \text{vector de aceleraciones} \\ \mathbf{F}(t) &= \text{vector de cargas} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En el caso de fuerzas sísmicas, el vector de cargas se puede expresar en términos del vector de aceleraciones del terreno (acelerograma), $u_g(t)$, de acuerdo con la expresión siguiente:

$$\mathbf{F} = -\tilde{M} \tilde{\Gamma} u_g(t) \quad (4.4)$$

donde

$$\tilde{\Gamma}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] = \text{vector con componentes unitarias} \quad (4.5)$$

4.1.2 Métodos directos de integración paso a paso

Los métodos que actualmente se utilizan para integrar paso a paso las ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones se agrupan en:

- a) métodos directos
- b) métodos de superposición modal

El método directo que mas se utiliza es el denominado método β de Newmark. Este

método se basa en la aproximación lineal de la aceleración en el tamaño del paso de integración, según se muestra en la Fig 4.1.

De acuerdo con la hipótesis de la aceleración lineal, los elementos de las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) al final del paso de integración se pueden escribir como.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} &= \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} \\ \frac{d}{dt} u_{t-\Delta t} &= \frac{d}{dt} u_t + \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} + \frac{d^2}{dt^2} u_t \right) \\ u_{t-\Delta t} &= u_t + \Delta t \frac{d}{dt} u_t + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \left(\frac{d}{dt} u_{t-\Delta t} + 2 \frac{d}{dt} u_t \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La aproximación de Newmark consiste en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_{t-\Delta t} &= \frac{d}{dt} u_t + (1-\gamma) \Delta t \frac{d^2}{dt^2} u_t + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} = \bar{a} + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} \\ u_{t-\Delta t} &= u_t + \Delta t \frac{d}{dt} u_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} u_t + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} = \bar{b} + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} u_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d}{dt} u_t + (1-\gamma) \Delta t \frac{d^2}{dt^2} u_t \\ \bar{b} &= u_t + \Delta t \frac{d}{dt} u_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} u_t \end{aligned} \quad (4.8)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método (para $\beta = 1/4$, el método es incondicionalmente estable) y el parámetro γ se relaciona con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático que puede inducirse (para $\gamma = 1/2$, no se presenta el amortiguamiento matemático). Para el caso en que $\beta = 1/6$ y $\gamma = 1/2$, las Ec 4.7 se reducen a las correspondientes Ec 4.6.

Al evaluar las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) al final del paso de integración (en $t = t + \Delta t$) y al sustituir en la ecuación resultante a las Ec 4.7 se obtiene la siguiente ecuación.

$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} u_{t+\Delta t} + \bar{C} \left(\bar{a} + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} u_{t+\Delta t} \right) + \bar{K} \left(\bar{b} + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} u_{t+\Delta t} \right) = \bar{F}_{t+\Delta t} \quad (4.9)$$

La Ec 4.9 puede escribirse como:

$$\bar{K}^* \frac{d^2}{dt^2} u_{t+\Delta t} = \bar{p} \quad (4.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{K}^* &= \bar{M} + \gamma \Delta t \bar{C} + \beta (\Delta t)^2 \bar{K} \\ \bar{p} &= \bar{F}_{t+\Delta t} - \bar{C} \bar{a} - \bar{K} \bar{b} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La Ec 4.10 permite cuantificar la aceleración al final del paso es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, simétricas, de coeficientes constantes, si el paso de integración se conserva constante durante el proceso de integración.

En la dinámica estructural se acostumbra cuantificar a la matriz de amortiguamientos de la estructura de acuerdo con el criterio de Rayleigh, expresado mediante la siguiente ecuación.

$$\bar{C} = \alpha \bar{M} + \mu \bar{K} \quad (4.12)$$

Al sustituir la Ec 4.12 en las Ec 4.11 se obtiene.

$$\begin{aligned} \bar{K}^* &= (1 - \alpha \gamma \Delta t) \bar{M} + (\gamma \mu \Delta t + \beta (\Delta t)^2) \bar{K} \\ \bar{p} &= \bar{F}_{t+\Delta t} - \alpha \bar{M} \bar{a} - \bar{K} (\mu \bar{a} + \bar{b}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

El algoritmo del método de integración paso a paso del método β de Newmark, resumido por las Ec 4.10 y 4.13, necesariamente se debe llevar a cabo en una computadora debido al número de operaciones que involucra.

4.1.3 Método directo paso a paso de superposición modal

Otra forma de integrar paso a paso las ecuaciones de equilibrio dinámico de las estructuras (Ec 4.1) es mediante la solución del problema de eigenvalores, según se indica a continuación.

4.1.3.1 Solución del problema de valores característicos (eigenvalores) de las ecuaciones de equilibrio dinámico

Este caso corresponde a un problema de vibraciones libres no amortiguadas, cuyas ecuaciones resultan ser.

$$\tilde{M} \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \tilde{K}u(t) = \tilde{0} \quad (4.14)$$

En las vibraciones libres el movimiento es armónico, es decir.

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = -\omega^2 u(t) \quad (4.15)$$

y las ecuaciones de vibración libre resultan ser

$$\tilde{K}u = \omega^2 \tilde{M}u \quad (4.16)$$

que es el clásico problema de eigenvalores usualmente expresado como:

$$\tilde{A}x = \lambda \tilde{B}x \quad (4.17)$$

Varios son los métodos que existen para resolver el problema de eigenvalores. Los utilizados con las computadoras, entre otros, se pueden nombrar a

- . El método de Jacobi
- . El método de la iteración del subespacio

Cuando se emplean calculadoras de escritorio para los modelos estructurales mas simples (rigideces de entrepiso y masas con movimientos unidireccionales) se utilizan los siguientes métodos:

- . El método de Stodolla-Vianello-Newmark
- . El método de Holzer

4.1.3.2 Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico

La transformación que permite desacoplar las ecuaciones de equilibrio dinámico se puede expresar como.

$$a = \bar{R}y \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{aligned} y &= \text{vector del nuevo sistema coordenado} \\ \bar{R} &= [\bar{r}^1 \quad \bar{r}^2 \quad \bar{r}^3 \quad \dots \quad \bar{r}^n] = \text{Matriz modal} \\ \bar{r}^n &= n\text{-ésimo eigenvector} \end{aligned} \quad (4.19)$$

De acuerdo con la transformación de coordenadas anterior (Ec 4.18) las expresiones de los vectores de velocidad y de aceleración resultan ser:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(t) &= \bar{R} \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} a(t) &= \bar{R} \frac{d^2}{dt^2} y(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

De acuerdo con las Ec 4.18 y 4.20 las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) en el sistema de referencia transformado se expresan como:

$$\bar{M}\bar{R} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \bar{C}\bar{R} \frac{d}{dt} y(t) + \bar{R}\bar{R}y(t) = F(t) \quad (4.21)$$

Al premultiplicar la Ec 4.21 por la transpuesta de la matriz modal se obtiene la siguiente expresión.

$$\bar{R}^T \bar{M}\bar{R} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \bar{R}^T \bar{C}\bar{R} \frac{d}{dt} y(t) + \bar{R}^T \bar{R}\bar{R}y(t) = \bar{R}^T F(t) \quad (4.22)$$

Al definir los siguientes conceptos

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= \mathbf{R}^T \bar{M} \mathbf{R} = \text{Matriz de masas transformada} \\
\bar{C} &= \mathbf{R}^T \bar{C} \mathbf{R} = \text{Matriz de amortiguamientos transformada} \\
\bar{K} &= \mathbf{R}^T \bar{K} \mathbf{R} = \text{Matriz de rigideces transformada} \\
\bar{F}(t) &= \mathbf{R}^T \mathbf{F}(t) = \text{vector de cargas transformado}
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

De acuerdo con la propiedad de ortogonalidad de los eigenvectores respecto a las matrices de masas y de rigideces, la matriz de masas transformada y la matriz de rigideces transformada resultan ser matrices diagonales. Si la matriz de amortiguamientos se selecciona de tal manera que también la matriz de amortiguamientos transformada sea una matriz diagonal, las ecuaciones de equilibrio dinámico transformadas (Ec 4.22) se pueden escribir como.

$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{y}(t) + \bar{C} \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) + \bar{K} \mathbf{y}(t) = \bar{F}(t)
\tag{4.24}$$

y resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado, cuya ecuación i-ésima se puede escribir como:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} y_i(t) + c_i \frac{d}{dt} y_i(t) + k_i y_i(t) = f_i(t)
\tag{4.25}$$

La Ec 4.25 representa la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad. Por lo anterior se puede decir que un sistema de N grados de libertad se transforma en N sistemas de un grado de libertad. Los coeficientes de las ecuaciones de un grado de libertad resultan ser:

$$m_i = \sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2
\tag{4.26}$$

$$c_i = 2 \omega_i \zeta_i m_i
\tag{4.27}$$

$$k_i = \omega_i^2 m_i
\tag{4.28}$$

$$f_i^* = - \frac{\sum_{k=1}^N m_k r_k^i}{\sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2} \frac{d^2}{dt^2} u_g(t) = - c_i \frac{d^2}{dt^2} u_g(t) \quad (4.29)$$

en donde:

$$\begin{aligned} m_k &= \text{masa asociada al grado de libertad } k \text{ - ésimos} \\ r_k^i &= \text{componente } k \text{ - ésimos del } i \text{ - ésimos eigenvector (modo)} \\ \omega_i &= \text{frecuencia natural de vibración del } i \text{ - ésimos modo} \\ \zeta_i &= \text{fracción del amortiguamiento crítico del } i \text{ - ésimos modo} \\ c_i &= \frac{\sum_{k=1}^N m_k r_k^i}{\sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2} = \text{coeficiente de participación del } i \text{ - ésimos modo} \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.1.3.3 Integración paso a paso de las ecuaciones de movimiento desacopladas

Como las ecuaciones de movimiento desacopladas (Ec 4.25) corresponden a las de un grado de libertad, los métodos de integración son los tradicionales.

- Exacto, para el caso de aproximar la función $f_i^*(t)$ en tramos seccionalmente continuos con una variación lineal (que es lo usual).
- Aproximado, mediante un método numérico como el método β de Newmark-Wilson.

El paso de integración se define en el inciso 4.1.2

4.1.3.4 Cuantificación de la respuesta de la estructura

De acuerdo con el inciso anterior para el tiempo de integración considerado se cuantifican, para cada paso de integración, los siguientes vectores.

$\bar{y}(t)$ = vector de desplazamientos transformado

$$\frac{d}{dt} \bar{y}(t) = \text{vector de velocidades transformado} \quad (4.31)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{y}(t) = \text{vector de aceleraciones transformado}$$

Al sustituir las Ec 4.31 en las Ec 4.18 y 4.20 se obtiene la respuesta de la estructura representada por los vectores de desplazamiento relativo, de velocidad relativa, y de aceleración relativa, es decir.

$$\begin{aligned} u(t) &= \bar{R} \bar{y}(t) \\ \frac{d}{dt} u(t) &= \bar{R} \frac{d}{dt} \bar{y}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} u(t) &= \bar{R} \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.1.3.4 Obtención de los elementos mecánicos y cinemáticos de la estructura debidos al sismo

Conocida la historia del vector de desplazamientos de la estructura (según se indica en el inciso anterior) se puede determinar la historia de los elementos mecánicos y cinemáticos en los puntos que se requieran de la estructura.

4.1.4 Método de la respuesta espectral

Este método corresponde al denominado análisis en las NTC para diseño por sismo. Su secuencia se resume a continuación.

4.1.4.1 Solución del problema de valores característicos (eigenvalores) de las ecuaciones de equilibrio dinámico

El procedimiento es el mismo que el descrito en el inciso 4.1.3.1 del método directo de superposición modal.

4.1.4.2 Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico

El procedimiento es el mismo que el descrito en el inciso 4.1.3.2 del método directo de superposición modal.

4.1.4.3 Obtención de la respuesta espectral de cada una de las ecuaciones de equilibrio desacopladas

De acuerdo con el RCDF se calcula mediante la siguiente expresión.

$$y'_{\max} = c_i \frac{A_i}{\omega_i} \quad (4.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} y'_{\max} &= \text{respuesta espectral de desplazamientos transformados del modo } i \text{ -ésimo} \\ \omega_i &= \text{Frecuencia natural de vibración del modo } i \text{ -ésimo} \\ A_i &= \text{Ordenada del espectro de aceleraciones para el periodo } T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \\ c_i &= \text{Coeficiente de participación del modo } i \text{ -ésimo} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.1.4.4 Cuantificación de los vectores de respuesta máximos de la estructura para cada modo

De acuerdo con la Ec 4.32a, el vector de desplazamientos máximo de la estructura, correspondiente al modo i -ésimo, u'_{\max} , resulta ser:

$$u'_{\max} = \bar{\Gamma}' y'_{\max} \quad (4.35)$$

donde:

$$\bar{\Gamma}' = \text{Eigenvector asociado al modo } i \text{ -ésimo} \quad (4.36)$$

De acuerdo con la Ec 4.36, a cada modo de la estructura le corresponde un vector de desplazamientos máximo. Con base en la formulación de las ecuaciones de equilibrio de las estructuras, a cada vector de desplazamientos le corresponden un conjunto de elementos mecánicos y cinemáticos (fuerzas normales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes, momentos de volteo, desplazamientos relativos, etc.)

4.1.4.5 Obtención de la respuesta total de la estructura

Una vez conocidos los elementos mecánicos y cinemáticos (fuerzas normales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes, momentos de volteo, desplazamientos relativos, etc) asociadas a cada modo, representado por S_i , para obtener la respuesta de la estructura, representada por S , se procede como se indica a continuación.

4.1.4.5.1 Método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (4.37)$$

4.1.4.5.2 Método de la combinación cuadrática completa (CQC)

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N S_i \rho_{ij} S_j} \quad (4.38)$$

donde:

$$\rho_{ij} = \frac{8 \zeta_i \zeta_j \omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4 \zeta_i \zeta_j \omega_i \omega_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2} \quad (4.39)$$

ζ_i Valor del amortiguamiento crítico del modo i -ésimo (que se supone constante para todos los modos)

ω_i frecuencia natural de vibración del modo i -ésimo

4.2 Análisis estático

Las NTC para Diseño por Sismo del RCDF proponen un método relativamente simple para cuantificar las fuerzas horizontales que un sismo de diseño ocasiona a una edificación cuya altura no exceda de 60 m.

4.2.1 Distribución de las aceleraciones horizontales

De acuerdo con el inciso 8.1 de las NTC para Diseño por Sismo del RCDF, la hipótesis sobre la distribución de aceleraciones en las masas de las edificaciones se muestra en la Fig 4.2. Para la masa del nivel i -ésimo, la fuerza que la distribución de aceleraciones le ocasiona a la masa se puede escribir como.

$$F_i = m_i u_i = \frac{W_i}{g} u_i \quad (4.40)$$

donde se definen los componentes respectivos.

F_i = Fuerza horizontal del nivel i-ésimo

m_i = masa del nivel i-ésimo

W_i = $m_i g$ = peso del nivel i-ésimo

\ddot{u}_i = aceleración del nivel i-ésimo

(4.41)

De acuerdo con la Fig 4.2, la expresión de la aceleración de la masa i-ésima resulta ser.

$$u_i = \frac{h_i}{h_n} u_n \quad (4.42)$$

Al sustituir la Ec 4.42 en la Ec 4.40 se obtiene.

$$F_i = \frac{u_n}{gh_n} W_i h_i \quad (4.43)$$

4.2.2 Fuerzas sísmicas horizontales

De acuerdo con la definición de fuerza cortante basal, se puede expresar la siguiente ecuación.

$$V_n = \sum_{i=1}^n F_i = \frac{u_n}{gh_n} \left(\sum_{i=1}^n W_i h_i \right) \quad (4.44)$$

Al considerar la definición de coeficiente sísmico, c , se puede escribir la siguiente

expresión.

$$c = \frac{V_0}{W_0} = \frac{u_n \left(\sum_{i=1}^N W_i h_i \right)}{g h_n \sum_{i=1}^N W_i} \quad (4.45)$$

Con base en la Ec 4.45 se obtiene la expresión siguiente.

$$\frac{u_n}{g h_n} = c \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} \quad (4.46)$$

Al sustituir la Ec 4.46 en la Ec 4.43, la expresión de la fuerza sísmica estática se puede expresar como.

$$F_i = c \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} W_i h_i \quad (4.47)$$

4.2.3 Estimación del período fundamental de la estructura

Las NTC para diseño por sismo del RCDF recomienda una expresión para estimar el período de vibración del primer modo, T_1 , de acuerdo con la modelación estructural a base de rigideces de entrepiso, según se indica a continuación.

a) Los datos de partida se muestran en la Fig 4.3 y son.

$$\begin{aligned} k_i &= \text{Rigideces del entrepiso } i - \text{ésimo} \\ W_i &= \text{Pesos del nivel } i - \text{ésimo} \end{aligned} \quad (4.48)$$

b) Cuantificación de las fuerzas sísmicas, F_i , de cada nivel de acuerdo con la Ec 4.47.

- c) Cuantificación de las fuerzas cortantes, V_i , de cada entrepiso.

$$V_i = \sum_{k=1}^N F_k \quad (4.49)$$

- d) Obtención de los desplazamientos, Δu_i , asociados a las fuerzas cortantes de entrepiso.

$$\Delta u_i = \frac{V_i}{k_i} \quad (4.50)$$

- e) Obtención de los desplazamientos, x_i , que provocan las fuerzas sísmicas, con base en la Ec 4.50.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_i &= x_{i-1} + \Delta u_i \quad \forall i = 2 \dots N \end{aligned} \quad (4.51)$$

- f) Obtención de las aceleraciones armónicas correspondientes a los desplazamientos del inciso anterior (inciso e), asociados a la frecuencia natural de vibración, ω_1 .

$$x_i = \omega_1^2 x_i \quad (4.52)$$

- g) obtención de las fuerzas dinámicas asociadas a las aceleraciones armónicas del inciso anterior (inciso f).

$$F_{ar} = m_i x_i = \frac{W_i x_i}{g} \omega_1^2 \quad (4.53)$$

- h) Cuantificación de los trabajos que realizan las fuerzas F_i (Ec 4.47) y F_{ar} (Ec. 4.53) debido a los desplazamientos x_i (Ec 4.51).

i)

$$\begin{aligned} W_{F_i} &= \sum_{i=1}^N F_i x_i \\ W_{F_{ar}} &= \frac{\omega_1^2}{g} \sum_{i=1}^N W_i x_i^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

- i) Obtención de la frecuencia natural de vibración T_1 , al igualar los trabajos dados por las Ec 4.54.

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{\sum_{i=1}^N W_i x_i^2} \quad (4.55)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N W_i x_i^2}{g \sum_{i=1}^N F_i x_i}}$$

4.2.4 Reducción de las fuerzas cortantes estáticas

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que las fuerzas sísmicas descritas en el inciso 4.2.2, obtenidas con la Ec 4.55, pueden adoptarse valores los menores que se indica a continuación.

- a) El período fundamental de vibración se obtiene con la Ec 4.55.
- b) Si $T_1 \leq T_b$ el valor del coeficiente sísmico, c , en la Ec 4.47 se sustituye por el valor de la ordenada del espectro de aceleraciones, a , dado por la Ec 3.38, y resulta ser.

$$F_i = a \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} W_i h_i \quad (4.56)$$

- c) Si $T_1 > T_b$ las fuerzas sísmicas se cuantifican con las expresiones siguientes.

$$F_i = a W_i (k_1 h_i + k_2 h_i^2) \quad \forall a \geq \frac{c}{4} \quad (4.57)$$

donde:

$$\begin{aligned}
k_1 &= q \left[1 - r(1 - q) \right] \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} \\
k_2 &= 1.5rq(1 - q) \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i^2} \\
q &= \left(\frac{T_b}{T_1} \right)^r
\end{aligned} \tag{4.58}$$

4.3 Método simplificado

Las NTC para diseño por sismo establece el cumplimiento simultáneo de las siguientes condiciones para que sea aplicable el denominado método simplificado de análisis.

4.3.1 Consideraciones generales

- I. En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí mediante losas monolíticas u otros sistemas de piso suficientemente resistentes y rígidos al corte. Dichos muros tendrán distribución sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales y deben satisfacer las condiciones que establecen las NTC correspondientes. Es admisible cierta asimetría en la distribución de los muros cuando existan en todos los pisos dos muros de cargas perimetrales paralelos, cada uno con longitud al menos igual a la mitad de la dimensión mayor en planta del edificio. Los muros a que se refiere este párrafo pueden ser de mampostería, concreto reforzado o madera; en este último caso deben estar arriostrados con diagonales.
- II. La relación entre longitud y ancho de la planta del edificio no excede de 2.0 a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación longitud a anchura satisfaga esta restricción y cada tramo resista según el criterio que se indica en la tabla 7.1 de las NTC para diseño por sismo.
- III. La relación entre la altura y la relación mínima de la base del edificio no excede a 1.5 y la altura del edificio no es mayor de 13 m.

4.3.2 Consideraciones específicas

Para aplicar este método se hace caso omiso de los desplazamientos horizontales,

torsiones y momentos de volteo.

Se debe verificar únicamente que en cada piso la suma de las resistencias al corte de los muros de carga, proyectados en la dirección en que se considera la aceleración, sea cuando menos igual a la fuerza cortante total que obre en dicho piso, calculada según se especifica en el inciso 4.2.2.

Los coeficientes sísmicos que se deben emplear se indican en la tabla 7.1 de las NTC para diseño por sismo, correspondientes a las construcciones del grupo B. Para las construcciones del grupo A dichos coeficientes se deben multiplicar por 1.5.

Tabla 7.1 Coeficientes sísmicos reducidos para el método simplificado, correspondiente a estructuras del grupo B (NTC para diseño por sismo RCDF).						
ZONA	MUROS DE PIEZAS MACISAS O DIAFRAGMAS DE MADERA CONTRACHAPEADA			MUROS DE PIEZAS HUECAS O DIAFRAGMAS DE DUELAS DE MADERA*		
	ALTURA DE LA CONSTRUCCIÓN (m)					
	H<4	4≤H≤7	7<H≤13	4<H	4≤H≤7	7<H≤13
I	0.07	0.08	0.08	0.10	0.11	0.11
IIyIII	0.13	0.16	0.19	0.15	0.19	0.23

* Diafragmas de duelas de madera inclinadas o sistemas de muros formados por duelas de madera verticales u horizontales arriostradas con elementos de madera maciza.

4.3.3 Consideraciones de las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería

En el inciso 4.1.3 de las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería se establece lo siguiente.

El análisis para la determinación de los efectos de las cargas laterales debidas a sismo se hace con base en las rigideces relativas de los distintos muros. Estas se determinan tomando en cuenta las deformaciones de cortante y de flexión. Para estas últimas se considera la sección transversal agrietada del muro cuando la relación de carga vertical a momento flexionante es tal que se presentan tensiones verticales. Se debe tomar en cuenta la restricción que impone a la rotación de los muros la rigidez de los sistemas de piso y techo y la de los dinteles.

Es admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro es proporcional a su área transversal, ignorar los efectos de torsión y de momento de volteo.

La contribución a la resistencia a fuerzas cortantes de los muros cuya relación de altura de entrepiso, H , a longitud, L , es mayor que 1.33 se debe reducir al multiplicar la resistencia por el coeficiente $(1.33 L/H)^2$.

4.4 Reducción de fuerzas sísmicas

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que las fuerzas sísmicas descritas en los incisos 4.1 y 4.2 se pueden reducir al dividirlos entre el factor reductor Q' .

4.4.1 Estructuras regulares

Para las estructuras que satisfacen las condiciones de regularidad indicadas en el inciso 4.2.4, Q' se obtiene con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} Q' &= Q && \text{si } T \text{ se desconoce} \\ Q' &= Q && \forall T \geq T_a \\ Q' &= 1 + \frac{T}{T_a} (Q - 1) && \forall T < T_a \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde:

- T es igual al período fundamental de vibración (inciso 4.2.3) cuando se emplee el método estático (inciso 4.2.2) e igual al período de natural de vibración del modo que se considere cuando se emplee el método de análisis modal (inciso 4.1.4).
- T_a es un período característico del espectro de diseño utilizado (inciso 4.2.6).
- Los desplazamientos de diseño sísmico se obtienen al multiplicar por el factor de comportamiento sísmico, Q , a los desplazamientos obtenidos con las fuerzas sísmicas reducidas.
- Cuando se adopten dispositivos especiales capaces de disipar energía por amortiguamiento o comportamiento inelástico, se pueden emplear criterios de diseño sísmico que difieran de los aquí especificados, pero congruentes con ellos, con la aceptación del DDF.

4.4.2 Estructuras irregulares

Para las estructuras que no satisfacen las condiciones de regularidad indicadas en el

inciso 4.2.4, Q' se obtiene con las expresiones del inciso anterior (Ec 4.59) multiplicado por 0.8.

4.5 Efectos de torsión

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que para fines de diseño, el momento torsionante se debe tomar por lo menos igual a la fuerza cortante de entrepiso multiplicada por la excentricidad que para cada marco o muro resulte mas desfavorable de ls siguientes

$$\begin{aligned} e_d &= 1.5e_s + 0.1b \\ e_d &= e_s - 0.1b \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde:

e_s = Excentricidad torsional de rigideces calculada del entrepiso, igual a la distancia entre el centro de torsión del nivel correspondiente y la fuerza cortante en dicho nivel.

b = Dimensión de la planta que se considera, medida en la dirección de e_s .

La excentricidad de diseño, e_d , en cada sentido no se debe tomar menor que la mitad del máximo valor de la excentricidad calculada, e_s , para los entresijos que se hallen abajo del que se considera, ni se debe tomar el momento torsionante de ese entrepiso menor que la mitad del máximo calculado para los entresijos que están arriba del considerado.

4.6 Efectos de segundo orden

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que se deben tomar en cuenta explícitamente en el análisis los efectos de segundo orden, esto es, los momentos y cortantes adicionales provocados por las cargas verticales al obrar en la estructura desplazada lateralmente, en toda estructura en que la diferencia en desplazamientos laterales entre dos niveles consecutivos, Δu_i , dividida entre la diferencia de altura correspondientes, h_i , es tal que:

$$\frac{\Delta u_i}{h_i} > 0.08 \frac{V_i}{W_i} \quad (4.62)$$

donde:

V = Fuerza cortante en el entrepiso considerado

W = Peso de la construcción encima del entrepiso, que incluye cargas muertas y vivas

4.7 Efectos bidireccionales

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que los efectos de ambos componentes horizontales del movimiento del terreno se deben combinar al tomar en cada dirección en que se analice la estructura, el 100 por ciento de los efectos del componente que obra en esa dirección y el 30 por ciento de los efectos del que obra perpendicularmente a ella, con los signos que para cada concepto resulten mas desfavorables.

Calificación

100
100
100

5. FUERZAS SÍSMICAS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES RESISTENTES DE LAS EDIFICACIONES

El concepto de fuerzas sísmicas en elementos estructurales resistentes de una edificación es la manera de especificar la magnitud de las fuerzas sísmicas que actúan en cada uno de los elementos estructurales resistentes en los métodos que utilizan simplificaciones estructurales para cuantificar las fuerzas sísmicas.

5.1 En los modelos estructurales donde se utilizan las ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones

En los modelos estructurales que formulan las ecuaciones de equilibrio a través del concepto de subestructuras unidas a un diafragma (nivel), rígido o no, la información que se maneja de manera sistemática es el equilibrio de cada uno de los elementos estructurales que la forman. Entonces, el concepto de fuerzas sísmicas en los elementos estructurales es transparente ya que se cuenta con la información integral de cada uno de los elementos estructurales de la edificación, al establecer las ecuaciones de equilibrio.

5.2 En los modelos estructurales donde se utiliza el concepto de rigidez de entrepiso

El modelo donde se emplea el concepto de rigidez de entrepiso es el modelo mas simple donde se utiliza el concepto de diafragma rígido. Es un modelo en extinción ya que los modelos a que hace referencia el inciso 5.1 son mas generales. Se presenta porque el RCDF hace referencia a algunos conceptos que utiliza. Se basa en las siguientes hipótesis:

- a) Se considera el equilibrio en un solo diafragma (nivel) rígido en donde la carga que actúa es la fuerza cortante en el entrepiso correspondiente, localizada en su centro de masas.
- b) Las fuerzas que resisten a la fuerza cortante las proporcionan las rigideces de entrepiso (resortes) del entrepiso correspondiente que definen el centro de torsión (o de rigideces).
- c) Las rigideces de entrepiso las forman los marcos (o muromarcos) planos, sensiblemente paralelos en dos direcciones ortogonales.
- d) En los desarrollos que siguen se considera que el edificio tiene una distribución de rigideces regular en elevación. Es decir, que las columnas de un diafragma (nivel) únicamente están unidas con niveles consecutivos.

En la Fig 5.1 se muestra la idealización del modelo estructural descrito en los incisos anteriores.

5.2.1 Centro de rigideces (de torsión) del entrepiso

Debido a que los elementos resistentes de un entrepiso se representan mediante las rigideces del mismo, se define como centro de rigidez (o de torsión) al punto en donde al actuar las fuerzas cortantes únicamente provocan desplazamientos lineales.

5.2.1.1 Fuerzas cortantes directas en los resortes paralelos al eje y de referencia

Con base en la Fig 5.2, la fuerza que soporta cada resorte (rigidez de entrepiso) paralelo al eje y resulta ser

$$V_n^d = k_n \cdot v \quad (5.1)$$

De acuerdo con la condición de equilibrio de fuerzas paralelas al eje y se puede escribir como.

$$V_s = \sum_{n=1}^N V_n^d = V \sum_{n=1}^N k_n \quad (5.2)$$

Con base en las Ec 5.1 y 5.2 se obtienen las siguientes expresiones.

$$v = \frac{V_y}{\sum_{j=1}^{N_X} k_{jx}} \quad (5.3)$$

$$V_{jx}^d = \frac{k_{jx}}{\sum_{j=1}^{N_X} k_{jx}} V_y \quad (5.4)$$

5.2.1.2 Fuerzas cortantes directas en los resortes paralelos al eje x de referencia

Al seguir un razonamiento similar al inciso 5.2.1.1 y utilizar la Fig 5.3 se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$V_{ix}^d = k_{ix} u \quad (5.5)$$

$$V_x = \sum_{i=1}^{N_X} V_{ix}^d = u \sum_{i=1}^{N_X} k_{ix} \quad (5.6)$$

$$u = \frac{V_x}{\sum_{i=1}^{N_X} k_{ix}} \quad (5.7)$$

$$V_{ix}^d = \frac{k_{ix}}{\sum_{i=1}^{N_X} k_{ix}} V_x \quad (5.8)$$

5.2.1.3 Coordenadas del centro de torsión

Se denomina centro de torsión (CT) o centro de rigideces (CR) al punto localizado sobre el diafragma rígido donde al actuar la fuerza cortante correspondiente únicamente le provoca desplazamientos lineales.

Al aplicar la definición de CT a la fuerza cortante paralela al eje y, al establecer el equilibrio de momentos resulta.

$$x_i V_x = \sum_{j=1}^{N_X} x_j V_{jx}^d = \sum_{j=1}^{N_X} x_j \frac{k_{jx}}{\sum_{j=1}^{N_X} k_{jx}} V_x = \frac{\sum_{j=1}^{N_X} x_j k_{jx}}{\sum_{j=1}^{N_X} k_{jx}} V_x \quad (5.9)$$

De acuerdo con la Ec 5.9 se obtiene la expresión de la abscisa del centro de torsión.

$$x_t = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} x_j k_{jy}}{\sum_{j=1}^{N_x} k_{jy}} \quad (5.10)$$

Al aplicar la definición de CT a la fuerza cortante paralela al eje x, se obtiene la siguiente expresión de la ordenada del centro de torsión.

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_y} y_i k_{ix}}{\sum_{i=1}^{N_y} k_{ix}} \quad (5.11)$$

5.2.2 Excentricidades

Las fuerzas sísmicas asociadas a los diafragmas rígidos actúan en el punto denominado centro de masas (CM) y no en el centro de torsión, que pueden ser diferentes. A las distancias paralelas a la dirección de las fuerzas cortantes se les denominan excentricidades.

5.2.2.1 Excentricidades calculadas

Las excentricidades correspondientes a las dos fuerzas cortantes ortogonales se pueden escribir como.

$$e_{xv} = x_m - x_t \quad (5.12)a$$

donde:

$$\begin{aligned} e_{xv} &= \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_x \\ x_m &= \text{Abscisa del centro de masas} \\ x_t &= \text{Abscisa del centro de torsión} \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$e_{yv} = y_m - y_t \quad (5.13)a$$

donde:

$$\begin{aligned}
 e_{s_y} &= \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_x \\
 y_m &= \text{Ordenada del centro de masas} \\
 y_t &= \text{Ordenada del centro de torsión}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}b$$

5.2.2.2 Excentricidades de diseño

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que a cada excentricidad calculada se le debe asociar dos excentricidades de diseño, según se indica a continuación.

a) Excentricidades asociadas a la fuerza cortante V_y .

$$\begin{aligned}
 e_{d_x} &= 1.5 e_{s_x} + 0.1 b_x \\
 e_{d_x} &= e_{s_x} - 0.1 b_x
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

donde:

b_x es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de e_{s_x} (perpendicular a la fuerza cortante V_y).

b) Excentricidades asociadas a la fuerza cortante V_x .

$$\begin{aligned}
 e_{d_y} &= 1.5 e_{s_y} + 0.1 b_y \\
 e_{d_y} &= e_{s_y} - 0.1 b_y
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

donde:

b_y es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de e_{s_y} (perpendicular a la fuerza cortante V_x).

5.2.3 Fuerzas cortantes debidas a la torsión

De acuerdo con el inciso 5.2.2 para efectos de diseño se deben considerar los efectos de un momento torsionante, M , cuantificado con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 M &= M_{t_x} = e_{d_x} V_y \\
 &= M_{t_y} = e_{d_y} V_x
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Con base en la Fig 5.4 se puede afirmar que el momento torsionante se equilibra con las fuerzas cortantes que provoca en todos los resortes. El movimiento de cuerpo rígido que el par torsionante le provoca al diafragma rígido se mide mediante el desplazamiento angular (giro), θ .

Los correspondientes desplazamientos lineales en los resortes paralelos a cada uno de los ejes de referencia resultan ser, al considerar que el desplazamiento angular θ es pequeño, de tal manera que el seno y la tangente del mismo se pueda aproximar por el valor del ángulo:

$$\begin{aligned} u_i &= \theta \bar{y}_i \\ v_j &= \theta \bar{x}_j \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_i \\ \bar{y}_j &= y_j - y_i \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las fuerzas cortantes debidas al par torsionante resultan ser.

$$\begin{aligned} V_{ix}^i &= k_{ix} u_i = \theta k_{ix} \bar{y}_i \\ V_{jy}^j &= k_{jy} v_j = \theta k_{jy} \bar{x}_j \end{aligned} \quad (5.19)$$

Al establecer el equilibrio de pares respecto al centro de torsión se obtiene que.

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{N_x} V_{ix}^i y_i + \sum_{j=1}^{N_y} V_{jy}^j x_j \\ &= \theta \left[\sum_{i=1}^{N_x} k_{ix} y_i^2 + \sum_{j=1}^{N_y} k_{jy} x_j^2 \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

De las Ec 5.20 se obtiene el valor del desplazamiento angular (giro) de cuerpo rígido.

$$\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{N_x} k_{ix} y_i^2 + \sum_{j=1}^{N_y} k_{jy} x_j^2} \quad (5.21)$$

Al sustituir la Ec 5.21 en las Ec 5.19 se obtienen las expresiones de las fuerzas cortantes que el momento torsionante ocasiona a los resortes (rigideces de entrepiso).

$$V_{ix}^i = \frac{k_{ix} y_i}{\sum_{i=1}^{N_x} k_{ix} y_i^2 + \sum_{j=1}^{N_y} k_{jy} x_j^2} M \quad (5.22)$$

$$V_{jN}^t = \frac{k_{jN} \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{iN} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jN} \bar{x}_j^2} M \quad (5.23)$$

5.2.4 Fuerzas cortantes de diseño en los resortes (rigideces de entrepiso)

Con base en los desarrollos de los incisos anteriores, la fuerza cortante que cada resorte (rigidez de entrepiso) soporta es la suma de la fuerza cortante directa mas la fuerza cortante debida a la torsión, como se expresa a continuación.

$$\begin{aligned} V_{iN} &= V_{iN}^d + V_{iN}^t \\ V_{jN} &= V_{jN}^d + V_{jN}^t \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para cuantificar la Ec 5.24a se hace uso de ls Ec 5.8 y 5.22, mientras que para la Ec 5.24b se utilizan las Ec 5.4 y 5.23.

5.3 En el método simplificado

En este método se hace caso omiso del efecto de torsión, por lo que únicamente se consideran las fuerzas cortantes directas.

Las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería establecen que es admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro es proporcional a su área transversal

6. EJEMPLOS DESARROLLADOS PASO A PASO

En este capítulo se presentan los ejemplos que permiten aplicar los conceptos descritos en este curso. Los ejemplos, por tratar de aplicar paso a paso los aspectos operativos de los métodos, corresponden únicamente a métodos que se pueden desarrollar sin un número exagerado de operaciones, de tal manera que se pueden llevar a cabo con calculadora, lápiz y papel.

6.1 Edificación utilizada

En la Fig 6.1 se muestra la planta y elevación de un edificio de interés social que sirve de base para llevar a cabo los ejemplos de aplicación. Las particularidades del edificio se indican a continuación.

6.1.1 Uso de las edificaciones

Con base en el inciso 3.1, el uso de la edificación es vivienda, por lo que le corresponde el Grupo B.

Por tratarse de una edificación de $667 \text{ m}^2 < 6000 \text{ m}^2$, con una altura de $12.5 \text{ m} < 30 \text{ m}$, se ubica en el subgrupo B2.

6.1.2 Zonificación sísmica

La edificación se localiza en la zona I.

6.1.3 Coeficiente sísmico

De acuerdo con el inciso 3.2, y los datos especificados en los incisos 6.1.1 y 6.1.2, el coeficiente sísmico que le corresponde a la edificación es $c = 0.16$.

6.1.4 Condiciones de regularidad

Con base en los datos de la edificación (Fig 6.1) se obtienen los siguientes parámetros en relación con el inciso 3.4, a fin de definir el coeficiente de reducción de las fuerzas sísmicas, Q' .

- a) Planta sensiblemente simétrica respecto a dos ejes ortogonales (respecto a masas y elementos resistentes).
- b) Altura/dimensión menor en planta = $12.5/8.4 = 1.49 < 2.5$.
- c) Largo/ancho = $15.9/8.4 = 1.9 < 2.5$.
- d) De acuerdo con la tabla 6.1 la relación entre los pesos de los niveles superior a inferior es igual a uno, con excepción del quinto nivel (último) que es igual a 0.88.
- e) Todos los pisos tienen la misma área, igual a 133.56 m^2 .
- f) En relación con los conceptos de rigidez al corte y excentricidades se discuten en los incisos correspondientes.

6.1.5 Factor de comportamiento sísmico

La resistencia a las fuerzas laterales se suministra por:

- a) muros de mampostería de piezas huecas.
- b) confinadas en toda la altura.
- c) de 15 cm de espesor.
- d) resistencia al esfuerzo cortante de 2.5 kgf/cm^2 .

Con base en el inciso 3.5, el factor de comportamiento asociado a las dos direcciones ortogonales resultan ser.

$$Q_x = 1.5$$

$$Q_y = 1.5$$

6.1.6 Espectro de diseño

Con base en el inciso 3.6 y la tabla 3.1 de la NTC para diseño por sismo, los parámetros del espectro de respuesta de diseño en la zona I junto con el coeficiente sísmico especificado en el inciso 6.1.3, resultan ser.

$$T_a = 0.2 \text{ s}$$

$$T_b = 0.6 \text{ s}$$

$$r = 1/2$$

6.2 Análisis estático

De acuerdo con el inciso 4.2.2 las fuerzas horizontales que un sismo de diseño ocasiona a una edificación están dadas por la Ec 4.39, reproducida a continuación.

$$F_i = c \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} W_i h_i \quad (4.39)$$

En este método no es necesario hacer uso de un modelo estructural para el edificio, excepto si se desea estimar el período fundamental del mismo.

6.2.1 Fuerzas cortantes

Con base en los datos de la geometría y pesos del edificio, así como los datos especificados en el inciso 6.1, los elementos de la Ec 4.39 se resumen en la tabla 6.1.

Tabla 6.1 Fuerzas sísmicas (método estático)					
Nivel	W_i (tf)	h_i (m)	$W_i h_i$ (tfm)	F_i (tf)	V_i (tf)
5	91.2	12.5	1140.0	24.73	24.73
4	104.0	10.9	1040.0	22.57	47.30
3	104.0	7.5	780.0	16.92	64.22
2	104.0	5.0	520.0	11.28	75.50
1	104.0	2.5	260.0	5.64	81.14
Σ	507.2		3740.0		

De acuerdo con los valores de las columnas 2 y 4 de la tabla 6.1 se puede cuantificar el siguiente coeficiente.

$$c \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} = 0.16 * \frac{507.2}{3740.0} = 0.0217 \quad (6.1)$$

6.2.2 Estimación del periodo fundamental de vibración

De acuerdo con el inciso 4.2.3 la estimación del periodo fundamental se obtiene mediante la Ec 4.47b, reproducida a continuación.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N W_i x_i^2}{g \sum_{i=1}^N F_i x_i}} \quad (4.47b)$$

Los valores especificados en las tablas 6.1, 6.5 y 6.6 sirven de base para la cuantificación de la Ec 4.47b.

6.2.2.1 En la dirección del eje x

Las operaciones numéricas para determinar los elementos de la Ec 4.47b se resumen en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Estimación del periodo fundamental, T_{1x}, en la dirección del eje x					
Nivel	k_{ix} (tf/cm)	Δu_{ix} (m)	x_i (m)	$F_i x_i$ (tfm)	$W_i x_i^2$ (tfm²)
5	203.65	0.00121	0.00531	0.13132	0.00257
4	372.46	0.00127	0.00410	0.09254	0.00175
3	528.42	0.00122	0.00283	0.04788	0.00083
2	749.62	0.00101	0.00161	0.01816	0.00027
1	1363.69	0.00060	0.00060	0.00338	0.00004
Σ				0.29328	0.00546

Al sustituir los valores de las columnas 5 y 6 de la tabla 6.2 en la Ec 4.47b resulta.

$$T_{1x} = 6.28 \sqrt{\frac{0.00546}{9.81 * 0.29328}} = 0.2736 \text{ s} \quad (6.2)$$

6.2.2.2 En la dirección del eje y

Las operaciones numéricas para determinar los elementos de la Ec 4.47b se resumen en la tabla 6.3.

Tabla 6.3 Estimación del período fundamental, T_{1y}, en la dirección del eje y					
Nivel	k_{iy} (tf/cm)	Δu_{iy} (m)	x_i (m)	$F_i x_i$ (tfm)	$W_i x_i^2$ (tfm²)
5	65.93	0.0037	0.0159	0.3932	0.0231
4	121.28	0.0039	0.0122	0.2754	0.0155
3	173.85	0.0037	0.0083	0.1404	0.0072
2	253.15	0.0030	0.0046	0.0519	0.0022
1	515.28	0.0016	0.0016	0.0091	0.0003
Σ				0.8699	0.0483

Al sustituir los valores de las columnas 5 y 6 de la tabla 6.3 en la Ec 4.47b resulta.

$$T_{1x} = 6.28 \sqrt{\frac{0.0483}{9.81 * 0.8699}} = 0.4724 \text{ s} \quad (6.3)$$

6.2.3 Factores reductores de las fuerzas sísmicas

De acuerdo con el inciso 4.3 los factores reductores de las fuerzas sísmicas resultan ser.

6.2.3.1 Factor reductor para fuerzas paralelas al eje x

Al comparar el período fundamental T_{1x} con el valor de T_a resulta.

$$T_{1x} = 0.2736 > T_a = 0.2$$

donde :

$$Q_x = Q_y = 1.5$$
(6.4)

Al comparar el período fundamental T_{1y} con el valor de T_a resulta.

$$T_{1y} = 0.4724 > T_a = 0.2$$

donde :

$$Q_x = Q_y = 1.5$$
(6.5)

6.2.4 Fuerzas sísmicas reducidas

Al dividir las fuerzas sísmicas estáticas de la tabla 6.1 entre los correspondientes factores reductores dados por las Ec 6.4 y 6.5 se obtienen las fuerzas sísmicas reducidas de la tabla 6.4.

Tabla 6.4 Fuerzas sísmicas estáticas sin reducir y reducidas						
Nivel	F_i (tf)	V_i (tf)	F_{ixr} (tf)	V_{ixr} (tf)	F_{iyr} (tf)	V_{iyr} (tf)
5	24.73	24.73	16.48	16.48	16.48	16.48
4	22.57	47.30	15.05	31.53	15.05	31.53
3	16.92	64.22	11.28	42.81	11.28	42.81
2	11.28	75.50	7.52	50.33	7.52	50.33
1	5.64	81.14	3.76	54.09	3.76	54.09

6.2.5 Reducción de las fuerzas cortantes con base en el período fundamental de vibración

De acuerdo con el inciso 4.2.4 existe la posibilidad de reducir las fuerzas sísmicas de la tabla 6.4, con base en el valor de los períodos fundamentales de vibración.

6.2.5.1 En la dirección del eje x

Al ubicar el período fundamental en el espectro de diseño sísmico se tiene que.

$$T_a = 0.2 < T_{1x} = 0.2736 < T_b = 0.6 \quad (6.6)$$

De acuerdo con la Ec 6.6 se concluye que no deben reducirse las fuerzas estáticas en la dirección del eje x de la tabla 6.4.

6.2.5.2 En la dirección del eje y

Al ubicar el período fundamental en el espectro de diseño sísmico se tiene que.

$$T_a = 0.2 < T_{1y} = 0.4724 < T_b = 0.6 \quad (6.7)$$

De acuerdo con la Ec 6.7 se concluye que no deben reducirse las fuerzas estáticas en la dirección del eje y de la tabla 6.4.

6.3 Método dinámico (análisis modal espectral)

Este método se describe en el inciso 4.1.4 y su aplicación implica un modelo estructural para el edificio.

6.3.1 Modelo estructural del edificio

En este ejemplo se utiliza el modelo estructural descrito en el inciso 2.4.5, construido a base de subestructuras formadas con rigideces de entrepiso (resortes) unidas con diafragmas rígidos. Este modelo no es el recomendable, pero se utiliza porque permite ejemplificar algunos conceptos del RCDF y el número de operaciones que se tienen que realizar resultan ser mucho menor que el de los modelos donde se utiliza una computadora.

El modelo estructural del edificio se construye mediante subestructuras planas formados por muros planos, construidos con mampostería. La definición de los muros planos se hace en las dos direcciones ortogonales en que están orientados los ejes de la planta del edificio. Los 9 ejes letra (muros 1-x, 2-x, 3-x, 4-x, 5-x, 6-x, 7-x, 8-x y 9-x) y los 3 ejes número (muros 1-y, 2-y y 3-y).

En las Fig 6.2 y 6.3 se muestran las idealizaciones de los muros planos mediante rigideces de entrepiso, y en la Fig 6.4 se representan los dos modelos estructurales del edificio asociados a las dos direcciones ortogonales. Cada estructura unidimensional tiene 5 grados de libertad.

Las rigideces de entrepiso de los muros planos se determinaron con el método del elemento finito, al considerar que actúa un sistema de fuerzas horizontales igual al que

proporciona el método estático (inciso 6.2). Los valores que resultan se muestran en las Fig 6.2 y 6.3, así como en las tablas 6.5 y 6.6.

6.3.2 Solución del problema de valores característicos

Las formas modales (eigenvectores) y las correspondientes frecuencias naturales de vibración (eigenvalores), según el inciso 4.1.3.1, se pueden obtener con métodos que utilicen calculadoras o computadoras. En este ejemplo el problema de valores característicos se resolvió al utilizar el método matricial de Jacobi. Las matrices de rigideces y de masas para cada modelo unidimensional se construyen como se indica en las Ec 6.8 y 6.9.

Entrepiso	1-x	2-x	3-x	4-x	5-x
1	310.45	127.57	97.53	97.53	97.53
2	194.45	60.92	47.74	47.74	47.74
3	144.19	41.07	31.58	31.58	31.58
4	104.88	28.21	21.25	21.25	21.25
5	59.04	15.06	11.09	11.09	11.09

Entrepiso	6-x	7-x	8-x	9-x	Σ
1	97.53	97.53	127.57	310.45	1363.69
2	47.74	47.74	60.92	194.45	749.62
3	31.58	31.58	41.07	144.19	528.42
4	21.25	21.25	28.21	104.88	372.46
5	11.09	11.09	15.06	59.04	203.65

Tabla 6.6 Rigideces de entrepiso de los muros paralelos al eje y (tf/cm)				
Nivel	1-y	2-y	3-y	Σ
1	249.88	114.32	151.08	515.28
2	125.33	53.84	73.98	253.15
3	87.23	35.96	50.66	173.85
4	63.14	25.12	33.02	121.28
5	33.86	13.04	19.03	65.93

6.3.2.1 Matriz de rigideces de los modelos unidimensionales

Al establecer las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales mostrados en las Fig 6.4 se obtiene la siguiente matriz de rigideces.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

6.3.2.2 Matriz de masas de los modelos unidimensionales

Al establecer las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales mostrados en las Fig 6.4 se obtiene la siguiente matriz de masas (concentradas).

$$\bar{M} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

6.3.2.3 Eigenvalores y eigenvectores

Al sustituir los valores de la tabla 6.1, 6.5 y 6.6 en las ecuaciones 6.8 y 6.9, para cada uno

de los modelos estructurales asociados a las dos direcciones ortogonales, y resolver los correspondiente problemas de valores característicos, se obtienen los eigenvectores (formas modales) mostradas en la Fig 6.5.

Los valores de los períodos, frecuencias naturales de vibración y valores característicos correspondientes a los eigenvectores de la Fig 6.5 se se presentan en la tabla 6.7

Tabla 6.7 Períodos y frecuencias naturales de vibración de los modelos estructurales del edificio						
Mo do	Modelo estructural, eje y			Modelo estructural, eje x		
	T_{iy} (s)	ω_{iy} (rad/s)	ω_{iy}^2 (rad/s) ²	T_{ix} (s)	ω_{ix} (rad/s)	ω_{ix}^2 (rad/s) ²
1	.4719	13.31	177.28	.2735	22.97	527.77
2	.2006	31.32	981.06	.1158	54.26	2944.03
3	.1302	48.26	2328.83	.0752	83.55	6981.10
4	.0945	66.49	4420.75	.0548	114.66	13146.15
5	.0676	92.95	8639.06	.0401	156.69	24551.10

6.3.3 Respuesta espectral de desplazamientos de cada modo para el modelo estructural paralelo a eje y

Con base en los incisos 4.1.4.3 y 4.1.4.4 la respuesta espectral desplazamientos de cada modo se obtiene con las Ec 4.25 y 4.27, y de acuerdo con el inciso 4.1.3.3 el coeficiente de participación se obtiene con la Ec 4.22e, que se reproducen a continuación.

$$c_i = \frac{\sum_{r=1}^n m_r r_i}{\sum_{r=1}^n m_r (r_i)^2} \quad (4.22e)$$

$$y_{m,i} = c_i \frac{A_i}{\omega_i^2} \quad (4.25)$$

$$u_{m,i} = r_i y_{m,i} \quad (4.27)$$

6.3.3.1 Primer modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.8. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.8 Respuesta espectral de desplazamientos: Primer modo					
Nivel k-ésimo	m_k tfs ² /cm	r_k^1	$m_k r_k^1$ tfs ² /cm	$m_k (r_k^1)^2$ tfs ² /cm	$u_{k\text{máx}}^1$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.1127
2	0.106	2.9613	0.3139	0.9295	0.3337
3	0.106	5.4973	0.5827	3.2034	0.6195
4	0.106	8.2805	0.8777	7.2681	0.9332
5	0.093	11.0399	1.0267	11.3348	1.2442
Σ			2.9070	22.8418	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 1, que resulta ser.

$$c_1 = \frac{2.9070}{22.8418} = 0.1273 \quad (6.10)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del primer modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$T_s = 0.2 < T_1 = 0.4719 < T_b = 0.6 \quad (6.11)$$

$$A_1 = a_g = c_g = 0.16 * 981 = 156.96 \text{ cm/s}^2$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el primer modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m1}^1 = c_1 \frac{A_1}{\omega_1^2} = 0.1273 \frac{156.96}{177.28} = 0.1127 \text{ cm} \quad (6.12)$$

La sexta columna de la tabla 6.8 es la expresión de la Ec 4.27.

6.3.3.2 Segundo modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.9. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.9 Respuesta espectral de desplazamientos: Segundo modo					
Nivel k-ésimo	m_k tfs ² /cm	r_k^2	$m_k r_k^2$ tfs ² /cm	$m_k (r_k^2)^2$ tfs ² /cm	$U_{k\text{máx}}^2$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0208
2	0.106	2.6245	0.2782	0.7301	0.0546
3	0.106	3.4198	0.3625	1.2397	0.0711
4	0.106	1.6282	0.1724	0.2803	0.0339
5	0.093	-4.2387	-0.3942	1.6709	-0.0882
Σ			0.5249	4.0270	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 2, que resulta ser.

$$c_2 = \frac{0.5249}{4.0270} = 0.1303 \quad (6.13)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del segundo modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$T_1 = 0.2 < T_2 = 0.2006 < T_b = 0.6 \quad (6.14)$$

$$A_2 = a_g = c_g = 0.16 * 981 = 156.96 \text{ cm/s}^2$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el segundo modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m2}^2 = c_2 \frac{A_2}{\omega_2^2} = 0.1303 \frac{156.96}{981.06} = 0.0208 \text{ cm} \quad (6.15)$$

La sexta columna de la tabla 6.9 es la expresión de la Ec 4.27.

6.3.3.3 Tercer modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.10. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.10 Respuesta espectral de desplazamientos: Tercer modo					
Nivel k-ésimo	m_k tfs ² /cm	r_k^3	$m_k r_k^3$ tfs ² /cm	$m_k (r_k^3)^2$ tfs ² /cm	$u_{k\text{máx}}^3$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0074
2	0.106	2.0606	0.2184	0.4501	0.0152
3	0.106	0.6797	0.0720	0.0490	0.0050
4	0.106	-2.6831	-0.2844	0.7631	-0.0197
5	0.093	1.1754	0.1073	0.1285	0.0086
Σ			0.2213	1.4967	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 3, que resulta ser.

$$c_3 = \frac{0.2213}{1.4967} = 0.1479 \quad (6.16)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del tercer modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$\begin{aligned} T_3 &= 0.1302 < T_s = 0.2 \\ A_3 &= ag = g \left(1 - 3 \frac{T_3}{T_s}\right) \frac{c}{4} \quad (6.17) \\ &= 981 \left(1 - 3 \frac{0.1302}{0.2}\right) \frac{0.16}{4} = 115.88 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el tercer modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m3}^3 = c_3 \frac{A_3}{\omega_3^2} = 0.2213 \frac{115.88}{2328.83} = 0.0110 \text{ cm} \quad (6.18)$$

La sexta columna de la tabla 6.10 es la expresión de la Ec 4.27.

6.3.3.4 Cuarto modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.11. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.11 Respuesta espectral de desplazamientos: Cuarto modo					
Nivel k-ésimo	m_k tfs ² /cm	r_k^4	$m_k r_k^4$ tfs ² /cm	$m_k (r_k^4)^2$ tfs ² /cm	$U_{kmáx}^4$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0039
2	0.106	1.1851	0.1256	0.1489	0.0046
3	0.106	-1.7383	-0.1843	0.3203	-0.0068
4	0.106	0.7849	0.0832	0.0653	0.0031
5	0.093	-0.1501	-0.0140	0.0021	-0.0006
Σ			0.1165	0.6426	-

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 4, que resulta ser.

$$c_4 = \frac{0.1165}{0.6426} = 0.1813 \quad (6.19)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del cuarto modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$\begin{aligned} T_d &= 0.0945 < T_s = 0.2 \\ A_4 &= ag = g \left(1 + 3 \frac{T_s}{T_d}\right)^{\frac{c}{4}} \\ &= 981 \left(1 + 3 \frac{0.0945}{0.2}\right)^{\frac{0.16}{4}} = 94.86 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el cuarto modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m4}^4 = c_4 \frac{A_4}{\omega_4^2} = 0.1813 \frac{94.86}{4420.75} = 0.00389 \text{ cm} \quad (6.21)$$

La sexta columna de la tabla 6.11 es la expresión de la Ec 4.27.

6.3.3.5 Quinto modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.12. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.12 Respuesta espectral de desplazamientos: Quinto modo					
Nivel k-ésimo	m_k tfs ² /cm	r_k^5	$m_k r_k^5$ tfs ² /cm	$m_k (r_k^5)^2$ tfs ² /cm	$u_{k\text{máx}}^5$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0038
2	0.106	-0.5787	-0.0613	0.0355	-0.0022
3	0.106	0.1678	0.0178	0.0030	0.0006
4	0.106	-0.0282	-0.0030	0.0001	-0.0001
5	0.093	0.0025	-0.0002	0.0000	0.0000
Σ			0.0597	0.1446	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 5, que resulta ser.

$$c_5 = \frac{0.0577}{0.1446} = 0.4129 \quad (6.22)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del quinto modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.0676 < T_u = 0.2 \\ A_5 &= ag = g \left(1 - 3 \frac{T_1}{T_u}\right)^c \\ &= 981 \left(1 - 3 \frac{0.0676}{0.2}\right)^{0.16} = 79.03 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el quinto modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m5}^2 = c_5 \frac{A_5}{\omega_5^2} = 0.4129 \frac{79.03}{8639.06} = 0.003777 \text{ cm} \quad (6.24)$$

La sexta columna de la tabla 6.12 es la expresión de la Ec 4.27.

6.3.4 Respuesta espectral de fuerzas cortantes de cada modo para el modelo estructural paralelo al eje y

Con base en la respuesta espectral de desplazamientos de cada modo (cuantificados en la columna 6 de las tablas 6.8 a 6.12, que se repiten en la columna 2 de las tablas 6.13 a 6.17) se pueden cuantificar las fuerzas cortantes correspondientes, al utilizar los conceptos relacionados con la definición de rigidez de entrepiso (Ec 2.5 y 2.6), reproducidos en la forma en que se utilizan.

$$V_k = k_k \Delta u_k \quad (2.5)$$

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \quad (2.6)$$

Los valores de las rigideces de entrepiso para el modelo estructural paralelo al eje y se muestran en la columna 2 de la tabla 6.2 o bien en la columna 12 de la tabla 6.5, y se repiten sistemáticamente en la columna 3 de las tablas 6.13 a 6.17.

En la revisión del cumplimiento de las condiciones de regularidad del edificio respecto a la rigidez al corte (inciso 3.4), la relación de rigideces entre el primer y segundo entrepisos es igual a 2.035. Aunque excede del 100 por ciento (103.5), se considera que la rigidez del primer entrepiso está sobrevaluada por la condición de frontera de empotramiento. Por tanto, el edificio es regular y los factores reductores Q' no sufren reducciones adicionales.

6.3.4.1 Primer modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.13.

Tabla 6.13 Respuesta espectral de cortantes: Primer modo					
Nivel/ Entrepiso	$u_{k\text{máx}}^1$ cm	k_{ky} tf/cm	$\Delta u_{k\text{máx}}^1$ cm	$V_{k\text{máx}}^1$ tf	$V_{k\text{máxr}}^1$ tf
1	0.1127	515.28	0.1127	58.12	38.75
2	0.3337	253.15	0.2210	55.95	37.30
3	0.6195	173.85	0.2858	49.68	33.12
4	0.9332	121.28	0.3137	38.05	25.37
5	1.2442	65.93	0.3110	20.50	13.67

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductor Q'_{1v} , que resulta ser.

$$T_{1y} = 0.4719 > T_a = 0.2$$

$$Q_{1y} = Q_y = 1.500$$
(6.25)

6.3.4.2 Segundo modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.14.

Tabla 6.14 Respuesta espectral de cortantes: Segundo modo					
Nivel/ Entrepiso	$u_{km\acute{a}x}^2$ Cm	k_{ky} tf/cm	$\Delta u_{km\acute{a}x}^2$ cm	$V_{km\acute{a}x}^2$ Tf	$V_{km\acute{a}xr}^2$ tf
1	0.0208	515.28	0.0208	10.72	7.15
2	0.0546	253.15	0.0338	8.56	5.71
3	0.0711	173.85	0.0165	2.87	1.91
4	0.0339	121.28	-0.0372	-4.51	-3.01
5	-0.0882	65.93	-0.1221	-8.05	-5.37

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductor Q'_{2y} , que resulta ser.

$$T_{2y} = 0.2006 > T_a = 0.2$$

$$Q_{2y} = Q_y = 1.500$$
(6.26)

6.3.4.3 Tercer modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.15.

Tabla 6.15 Respuesta espectral de cortantes: Tercer modo					
Nivel/ Entrepiso	$u_{km\acute{a}x}^3$ cm	k_{ky} tf/cm	$\Delta u_{km\acute{a}x}^3$ cm	$V_{km\acute{a}x}^3$ Tf	$V_{km\acute{a}xr}^3$ tf
1	0.0074	515.28	0.0074	3.81	2.87
2	0.0152	253.15	0.0078	1.97	1.49
3	0.0050	173.85	-0.0102	-1.77	-1.33
4	-0.0197	121.28	-0.0247	-3.00	-2.26
5	0.0086	65.93	0.0283	1.87	1.41

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductor Q'_{3y} , que resulta ser.

$$T_{3y} = 0.1302 < T_s = 0.2$$

$$Q'_{3y} = 1 + \frac{T_{3y}}{T_s} (Q_y - 1) = 1.326 \quad (6.27)$$

6.3.4.4 Cuarto modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.16.

Tabla 6.16 Respuesta espectral de cortantes: Cuarto modo					
Nivel/ Entrepiso	$u_{km\acute{a}x}^4$ cm	k_{ky} t/cm	$\Delta u_{km\acute{a}x}^4$ cm	$V_{km\acute{a}x}^4$ T	$V_{km\acute{a}xr}^4$ tf
1	0.0039	515.28	0.0039	2.00	1.62
2	0.0046	253.15	0.0007	0.18	0.15
3	-0.0068	173.85	-0.0114	-1.98	-1.60
4	0.0031	121.28	0.0099	1.20	0.97
5	-0.0006	65.93	-0.0037	-0.24	-0.19

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductor Q'_{4y} , que resulta ser.

$$T_{4y} = 0.0945 < T_s = 0.2$$

$$Q'_{4y} = 1 + \frac{T_{4y}}{T_s} (Q_y - 1) = 1.236 \quad (6.28)$$

6.3.4.5 Quinto modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.17.

Tabla 6.17 Respuesta espectral de cortantes: Quinto modo

Nivel/ Entrepiso	$u_{k\text{m}\acute{a}x}^5$ cm	k_{ky} tf/cm	$\Delta u_{k\text{m}\acute{a}x}^5$ cm	$V_{k\text{m}\acute{a}x}^5$ tf	$V_{k\text{m}\acute{a}x r}^5$ tf
1	0.0038	515.28	0.0038	1.94	1.66
2	-0.0022	253.15	-0.0060	-1.52	-1.3
3	0.0006	173.85	0.0028	0.49	0.42
4	-0.0001	121.28	-0.0007	-0.08	-0.07
5	0.0000	65.93	0.0001	0.01	0.01

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductor Q'_{5y} , que resulta ser.

$$T_{5y} = 0.0676 < T_s = 0.2$$

$$Q'_{5y} = 1 - \frac{T_{5y}}{T_s} (Q_s - 1) = 1.169 \quad (6.29)$$

6.3.5 Respuesta total para el modelo estructural paralelo al eje y

Conocidos los elementos cinemáticos (inciso 6.3.3) y los elementos mecánicos (inciso 6.2.4) del modelo estructural en estudio para cada modo de vibración, se procede a determinar la respuesta total de dicho modelo estructural.

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen que debe incluirse el efecto de todos los modos naturales de vibración con período mayor o igual a 0.4 s, pero en ningún caso se pueden considerar menos que los tres primeros modos de traslación en cada dirección de análisis.

Las NTC para diseño por sismo del RCDF recomienda utilizar el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS), para calcular la respuesta total, siempre que los períodos de los modos naturales en cuestión difieran al menos 10% entre si, que es el caso. el método SRSS se indica mediante la Ec 4.29, que se reproduce a continuación.

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2} \quad (4.29)$$

6.3.5.1 Respuesta total de desplazamientos

En la tabla 6.18 se resumen las operaciones indicadas por la Ec 4.29 para los vectores de desplazamientos máximos de cada modo mostrados en la columna 6 de las tablas 6.8 a 6.12. En la columna 2 se muestra la combinación de un solo modo (el primero), en la columna 3 la combinación de los dos primeros, y así sucesivamente.

El primer elemento de cada casillero representa el componente de desplazamiento total mientras que el segundo elemento representa el cociente de ese desplazamiento entre el desplazamiento total obtenido con la combinación de todos los modos del modelo estructural, dados por la columna 6.

Tabla 6.18 Respuesta total de desplazamientos (cm)					
Nivel	1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos
1	0.1127 0.98	0.1146 0.99	0.1148 1.00	0.1149 1.00	0.1150 1.00
2	0.3337 0.97	0.3381 1.00	0.3385 1.00	0.3385 1.00	0.3385 1.00
3	0.6195 0.99	0.6236 1.00	0.6236 1.00	0.6236 1.00	0.6236 1.00
4	0.9332 1.00	0.9338 1.00	0.9349 1.00	0.9340 1.00	0.9340 1.00
5	1.2442 1.00	1.2473 1.00	1.2474 1.00	1.2474 1.00	1.2474 1.00

6.3.5.2 Respuesta total de fuerzas cortantes

En la tabla 6.19 se resumen las operaciones indicadas por la Ec 4.29 para los vectores de fuerzas cortantes máximos de cada modo mostrados en la columna 6 de las tablas 6.13 a 6.17. El ordenamiento de esta tabla es enteramente similar al de la tabla 6.18.

Tabla 6.19 Respuesta total de fuerzas cortantes (tf)						V _i Escala
Entrepi	1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos	
1	37.75 0.98	38.42 0.99	38.53 1.00	38.56 1.00	38.60 1.00	43.28
2	37.30 0.99	37.73 1.00	37.76 1.00	37.76 1.00	37.79 1.00	42.37
3	33.12 0.99	33.18 1.00	33.20 1.00	33.24 1.00	33.24 1.00	37.27
4	25.37 1.00	25.55 1.00	25.65 1.00	25.67 1.00	25.67 1.00	28.78
5	13.67 0.93	14.69 0.99	14.75 1.00	14.76 1.00	14.56 1.00	16.55

6.3.5.3 Revisión por cortante basal

Las NTC para diseño por sismo del RCDF establecen, que si con el método de análisis dinámico que se haya aplicado se encuentra que, en la dirección que se considera, la fuerza cortante basal calculada, V_0 , debe ser tal que debe cumplir con la siguiente condición.

$$V_0 \geq 0.8a \frac{W_0}{Q} = (0.8)(0.16) \frac{507.2}{1.5} = 43.28 \text{ tf} \quad (6.30)$$

En caso de no cumplirse la condición anterior, Las fuerzas de diseño y los desplazamientos laterales correspondientes se deben incrementar en la proporción para que el cortante basal calculado, V_0 , cumpla con la igualdad.

De acuerdo con la tabla 6.19, el cortante basal que proporciona el método dinámico es, $V_0 = 38.60 \text{ t}$, por lo que las fuerzas cortantes que proporciona el método dinámico (columna 6 de la tabla 6.19) se deben multiplicar por el coeficiente, $43.28/38.6 = 1.12$. El escalamiento se indica en la columna 7 de la tabla 6.19.

6.3.6 Comparación de las fuerzas cortantes obtenidas con los métodos estático y dinámico

A fin de tener una idea comparativa de los valores de las fuerzas cortantes que cada método proporciona se construye la tabla 6.20 donde se establecen tales comparaciones.

Tabla 6.20 Comparación de fuerzas cortantes sísmicas

Entrepiso	V_{est} (tf)	V_{din} (tf)	V_{est}/V_{din}
1	54.09	43.28	1.25
2	50.33	42.37	1.19
3	42.81	37.27	1.29
4	31.53	28.78	1.10
5	16.48	16.55	1.00

6.4 Fuerzas sísmicas en los elementos estructurales de la edificación

6.4.1 Resumen de las ecuaciones utilizadas

En el inciso 5.2 se presenta el procedimiento para cuantificar las fuerzas sísmicas para el modelo estructural que utiliza el concepto de rigideces de entrepiso. Las ecuaciones que se utilizan se reproducen a continuación.

6.4.1.1 Coordenadas del centro de torsión

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_j k_{ij}}{\sum_{j=1}^n k_{ij}} \quad (5.10)$$

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_j k_{ij}}{\sum_{j=1}^n k_{ij}} \quad (5.11)$$

6.4.1.2 Fuerzas cortantes directas

$$V_{ij}^d = \frac{k_{ij}}{\sum_{j=1}^n k_{ij}} V_i \quad (5.4)$$

$$V_{ij}^c = \frac{k_{ij}}{\sum_{j=1}^n k_{ij}} V_i \quad (5.8)$$

6.4.1.3 Excentricidades calculadas

$$e_{sx} = |x_m - x_t| \quad (5.12)a$$

donde:

$$\begin{aligned} e_{sx} &= \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_y \\ x_m &= \text{Abcisa del centro de masas} \\ x_t &= \text{Abcisa del centro de torsión} \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$e_{sy} = |y_m - y_t| \quad (5.13)a$$

donde:

$$\begin{aligned} e_{sy} &= \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_x \\ y_m &= \text{Ordenada del centro de masas} \\ y_t &= \text{Ordenada del centro de torsión} \end{aligned} \quad (5.13)b$$

6.4.1.4 Excentricidades de diseño

$$\begin{aligned} e_{dx} &= 1.5 e_{sx} + 0.1 b_x \\ e_{dy} &= e_{sy} - 0.1 b_x \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde:

b_x es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de e_{sx} (perpendicular a la fuerza cortante V_y).

b) Excentricidades asociadas a la fuerza cortante V_x .

$$\begin{aligned} e_{dx} &= 1.5 e_{sx} + 0.1 b_x \\ e_{dy} &= e_{sy} - 0.1 b_x \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde:

b_y es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de e_{sy} (perpendicular a la fuerza cortante V_x).

6.4.1.5 Fuerzas cortantes debidas a la torsión

$$\begin{aligned} M &= M_{1x} = e_{dx} V_y \\ &= M_{1y} = e_{dy} V_x \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$V_{ix}^i = \frac{k_{ix} \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jx} \bar{x}_j^2} M \quad (5.22)$$

$$V_{jx}^i = \frac{k_{jx} \bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jx} \bar{x}_j^2} M \quad (5.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_c \\ \bar{y}_j &= y_j - y_c \end{aligned} \quad (5.18)$$

6.4.1.6 Fuerzas cortantes de diseño en los resortes (rigideces de entrepiso)

$$\begin{aligned} V_{ix} &= V_{ix}^d + V_{ix}^i \\ V_{jx} &= V_{jx}^d + V_{jx}^i \end{aligned} \quad (5.24)$$

Las fuerzas cortantes que se utilizan son las obtenidas con el método estático, ya que con el método dinámico se obtuvieron para el modelo estructural paralelo a la dirección del eje y.

6.4.2 Diafragma del nivel 1

En la Fig 6.6 se muestra la geometría del diafragma del nivel 1 así como la distribución de las rigideces de entrepiso que llegan a dicho nivel y la posición del centro de masas. Con base en dicha figura y las ecuaciones resumidas del capítulo 5 se construyen las tablas 6.21 y 6.22

Con base en la tabla 6.21 y la Ec 5.11 se obtiene el siguiente valor de la ordenada del centro de torsión.

$$y_{tc} = \frac{1084134}{136369} = 7.95 \text{ m} \quad (6.31)$$

Con los elementos de la tabla 6.21, la fuerza cortante correspondiente y la Ec 5.8 se obtienen los elementos de la columna 2 de la tabla 6.21a.

Los elementos de la columna 3 de la tabla 6.21a se obtiene mediante la Ec 6.31 y la tabla 6.21.

Tabla 6.21 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje x

Eje i-x	y_i (m)	k_{ix} (tf/m)	$y_i k_{ix}$ (tf)
1-x	0.00	31045.00	0.00
2-x	2.85	12757.00	36357.00
3-x	4.20	9753.00	40963.00
4-x	6.60	9753.00	64370.00
5-x	7.95	9753.00	77536.00
6-x	9.30	9753.00	90703.00
7-x	11.70	9753.00	114110.00
8-x	13.05	12757.00	166479.00
9-x	15.90	31045.00	493616.00
Σ		136369.00	1084134.00

Tabla 6.21a Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje x (cont)

Eje i-x	V_{ix}^d (t)	y_i (m)	$\bar{y}_i k_{ix}$ (t)	$\bar{y}_i^2 k_{ix}$ (tm)
1-x	12.31	-7.95	-246808.0	1962121.0
2-x	5.06	-5.10	-65061.0	331810.0
3-x	3.87	-3.75	-36574.0	137152.0
4-x	3.87	-1.35	-13167.0	17775.0
5-x	3.87	0.00	0.0	0.0
6-x	3.87	1.35	13167.0	17775.0
7-x	3.87	3.75	36574.0	137152.0
8-x	5.06	5.10	65061.0	331810.0
9-x	12.31	7.95	246808.0	1962121.0
Σ	54.09			4897715.0

A fin de cuantificar la abscisa del centro de torsión y las demás elementos de las restantes ecuaciones del capítulo 5 se construye la tabla 6.22, con base en la Fig 6.6

Con base en la tabla 6.22 y la Ec 5.10 se obtiene el siguiente valor de la abscisa del centro de torsión.

$$x_{it} = \frac{174921}{51528} = 3.40 \text{ m} \quad (6.32)$$

Con los elementos de la tabla 6.22, la fuerza cortante correspondiente y la Ec 5.4 se obtienen los elementos de la columna 2 de la tabla 6.22a.

Los elementos de la columna 3 de la tabla 6.22a se obtiene mediante la Ec 6.32 y la tabla 6.22

Tabla 6.22 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y			
Eje j-y	x_j (m)	k_{jy} (tf/m)	$x_j k_{jy}$ (tf)
1-y	0.00	24988.0	0.0
2-y	4.20	11432.0	48014.0
3-y	8.40	15108.0	126907.0
Σ		51528.0	174921.0

Tabla 6.22a Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y (cont)				
Eje j-y	V_{it}^0 (tf)	x_{it} (m)	$x_{it} \cdot k_{jy}$ (tf)	$x_{it}^2 \cdot k_{jy}$ (tfm)
1-y	26.23	-3.40	-84459.0	288861.0
2-y	12.00	0.80	9146.0	7316.0
3-y	15.86	5.00	75540.0	377700.0
Σ	54.09			673877.0

De acuerdo con las coordenadas del dentro de masas especificado en la Fig 6.6 y las Ec 6.31 y 6.32 se obtienen los siguientes valores de las excentricidades calculadas, de

acuerdo con las Ec 5.12 y 5.13.

$$\begin{aligned} e_{1sx} &= |x_{1m} - x_{1l}| = |4.20 - 3.40| = 0.80 \text{ m} \\ e_{1sy} &= |y_{1m} - y_{1l}| = |7.95 - 7.95| = 0.00 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Con base en las Ec 6.33, 5.14 y 5.15 se obtienen las excentricidades de diseño correspondientes.

$$\begin{aligned} e_{1dx} &= 1.5e_{1sx} + 0.1b_x = 1.5(0.8) + 0.1(8.4) = 2.04 \text{ m} \\ e_{1dx} &= e_{1sx} - 0.1b_x = 0.8 - 0.1(8.4) = -0.04 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} e_{1dy} &= 1.5e_{1sy} + 0.1b_y = 1.5(0.0) + 0.1(15.9) = 1.59 \text{ m} \\ e_{1dy} &= e_{1sy} - 0.1b_y = 0.0 - 0.1(15.9) = -1.59 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Con base en las Ec 6.34, 6.35 y 5.16 se obtiene el momento torsionante que las fuerzas sísmicas le ocasionan al diafragma rígido del nivel 1.

$$\begin{aligned} M_{11y} &= e_{1dx} V_{1y} = 2.04(54.09) = 110.34 \text{ tm} \\ &= e_{1ax} V_{1y} = 0.04(54.09) = 2.20 \text{ tm} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} M_{11x} &= e_{1dy} V_{1x} = 1.59(54.09) = 86.00 \text{ tm} \\ &= e_{1dy} V_{1x} = 1.59(54.09) = 86.00 \text{ tm} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Las NTC para diseño por sismo, en su inciso 8.6, establece que de los dos momentos torsionantes de diseño en cada dirección (Ec 6.36 y 6.37) se debe tomar para cada marco o muro el que resulte mas desfavorable. Para cuantificar las fuerzas cortantes debidas a la torsión se utilizan las Ec 5.22 y 5.23, que de acuerdo con las tablas 6.21a y 6.22a y las Ec 6.36 y 6.37 resultan ser.

$$\begin{aligned} V_{11x}^t &= \frac{\sum_{i=1}^n k_{ix} y_i}{\sum_{i=1}^n k_{ix} y_i^2 + \sum_{i=1}^n k_{iy} x_i^2} M_{11x} = \frac{110.34}{4897715 + 673877} k_{ix} \bar{y}_i \\ &= 0.000019804 k_{ix} \bar{y}_i \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} V_{11y}^t &= \frac{\sum_{i=1}^n k_{iy} x_i}{\sum_{i=1}^n k_{ix} y_i^2 + \sum_{i=1}^n k_{iy} x_i^2} M_{11y} = 0.000019804 k_{iy} \bar{x}_i \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$V_{ix}^{\alpha} = \frac{k_{ix} \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jx} \bar{x}_j^2} M_{1ix} = \frac{86.00}{4897715 + 673877} k_{ix} \bar{y}_i \quad (6.40)$$

$$= 0.0000154354 k_{ix} \bar{y}_i$$

$$V_{ij}^{\alpha} = \frac{k_{jx} \bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jx} \bar{x}_j^2} M_{1ix} = 0.0000154354 k_{jx} \bar{x}_j \quad (6.41)$$

En la Fig 6.7 se presentan las fuerzas cortantes, cuando el sismo de diseño actúa en uno de sus sentidos, dadas por las Ec 6.38 a 6.41 al utilizar los valores de la columna 7 de las tablas 6.21 y 6.22. Tales valores se presentan en las columnas 9 a 12 de las tablas 6.21 y 6.22, en donde se incluyen los dos sentidos en que puede actuar el sismo de diseño.

Las tablas 6.21b y 6.22b se cuantifican de acuerdo con las Ec 5.24, de tal manera que se obtenga la fuerza cortante mayor.

Tabla 6.21b Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje x (cont)					
Eje i-x	V_{ix}^{α} 1 (tf)	$-V_{ix}^{\alpha}$ 2 (tf)	V_{ix}^{α} 3 (tf)	$-V_{ix}^{\alpha}$ 4 (tf)	V_{ix}^{α} 5 (tf)
1-x	-4.89	4.89	3.81	-3.81	17.20
2-x	-1.29	1.29	1.00	-1.00	6.35
3-x	-0.72	0.72	0.56	-0.56	4.59
4-x	-0.26	0.26	0.20	-0.20	4.13
5-x	0.00	0.00	0.00	0.00	3.87
6-x	0.26	-0.26	-0.20	0.20	4.13
7-x	0.72	-0.72	-0.56	0.56	4.59
8-x	1.29	-1.29	-1.00	1.00	6.35
9-x	4.89	-4.89	-3.81	3.81	17.20
Σ					

Tabla 6.22b Fuerzas sismicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y (cont)

Eje j-y	V_{ij}^N (tf)	$-V_{ij}^N$ (tf)	V_{ij}^S (tf)	$-V_{ij}^S$ (tf)	V_{ij} (tf)
1-y	-1.67	1.67	1.30	-1.30	27.90
2-y	0.18	-0.18	-0.14	0.14	12.18
3-y	1.50	-1.50	-1.17	1.17	17.36
Σ					

7. FIGURAS

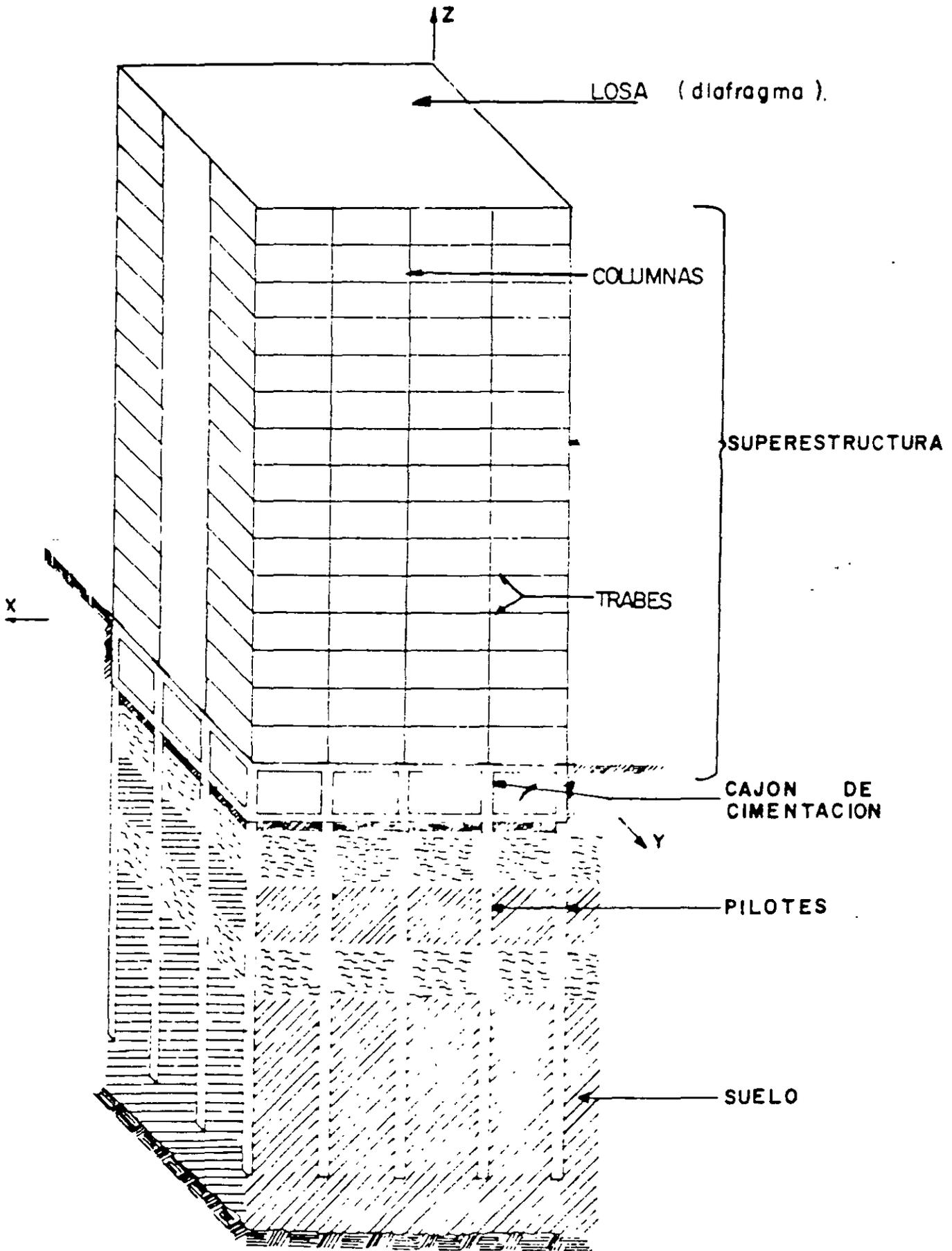


FIG 2.1 Representación esquemática de una edificación

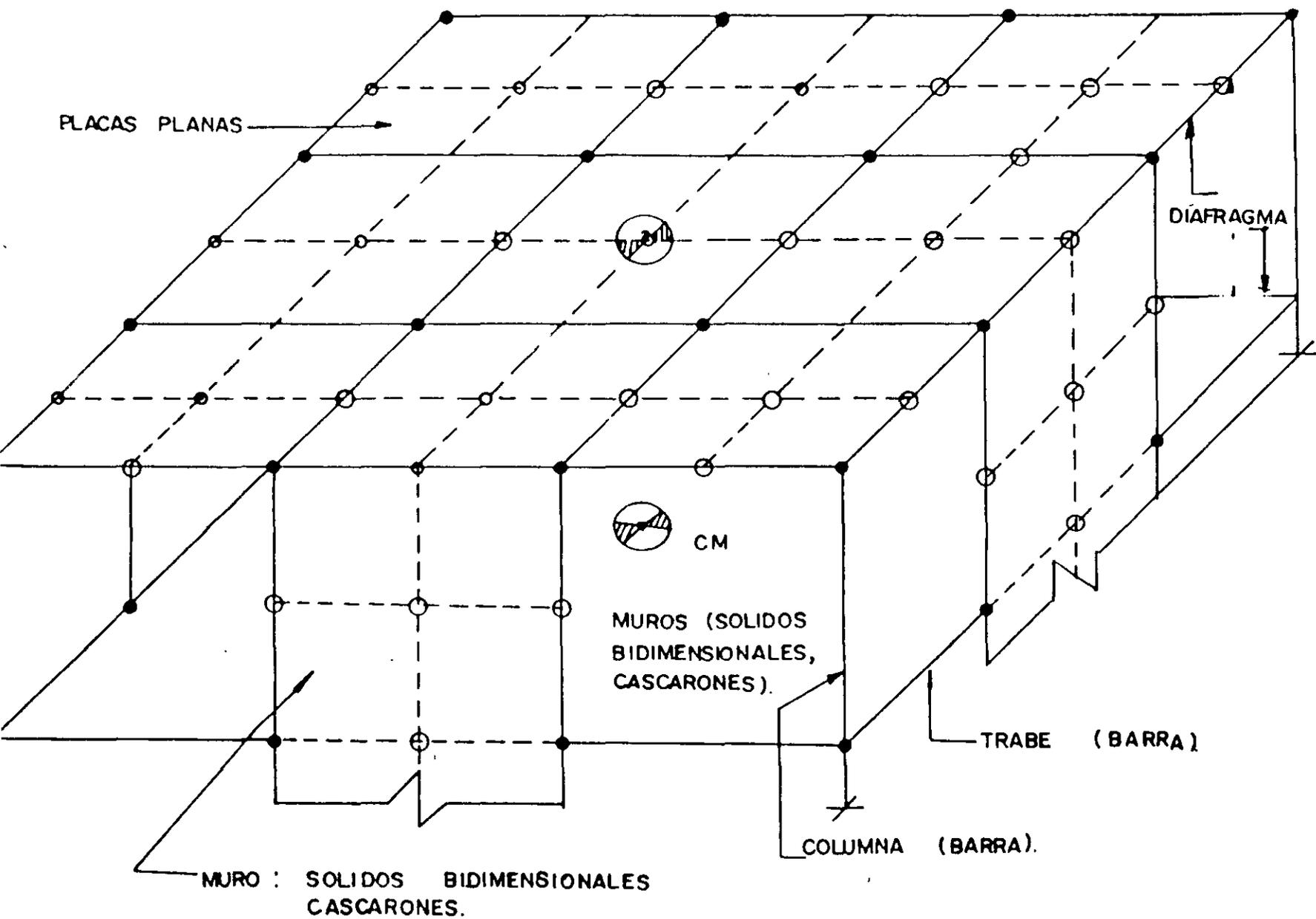


FIG 2.2 ELEMENTOS ESTRUCTURAL DE UNA EDIFICACION.

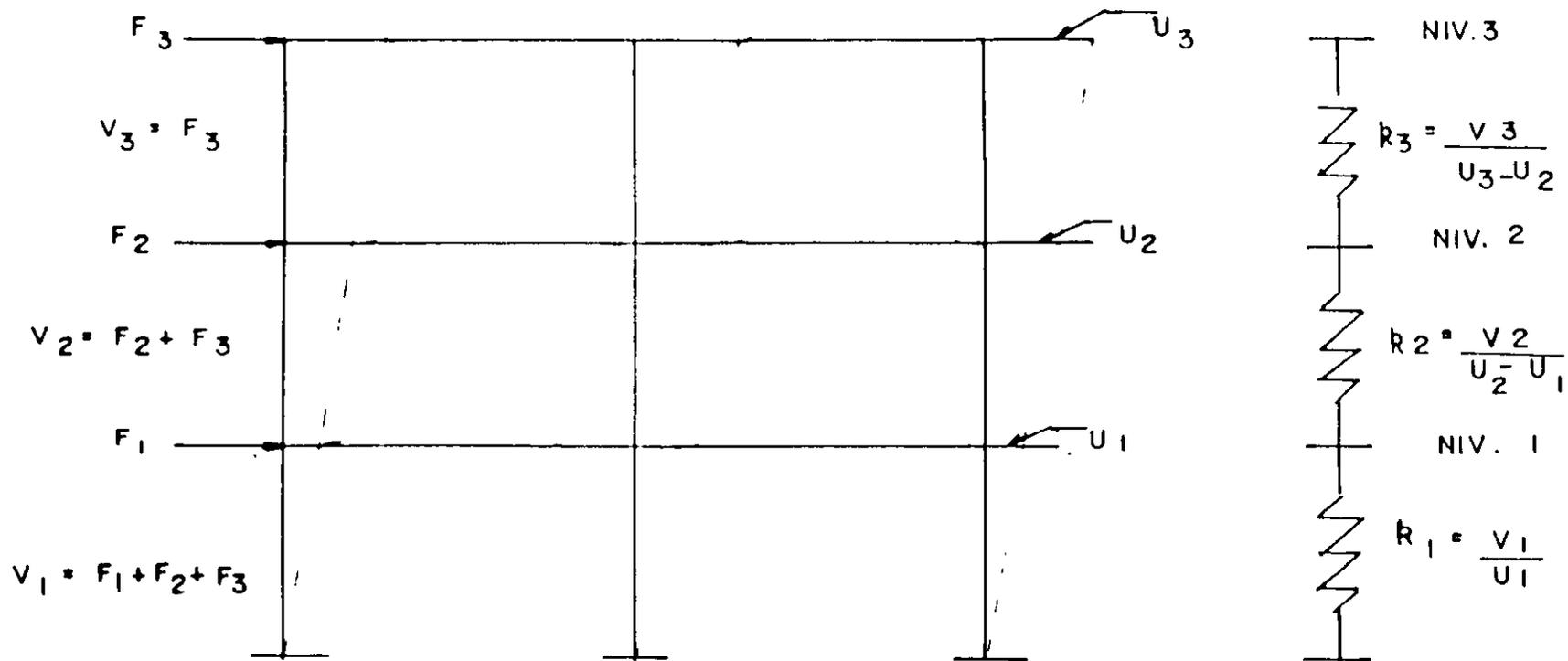


FIG 2.3 IDEALIZACION DE MARCOS PLANOS MEDIANTE RIGIDECES DE ENTREPISO.

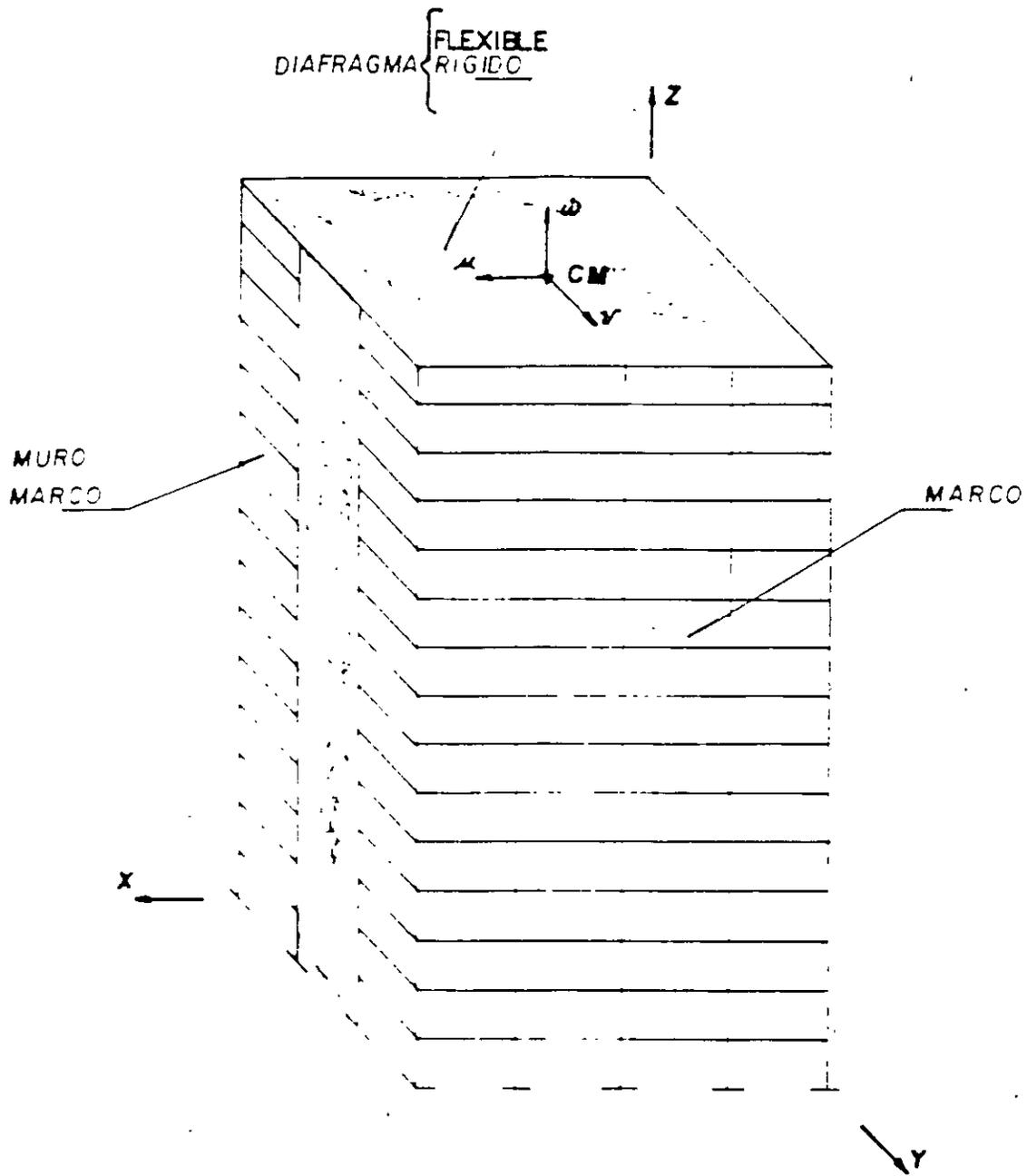


FIG 24 Muros y Muromarcos Tridimensionales
unidos con diafragmas

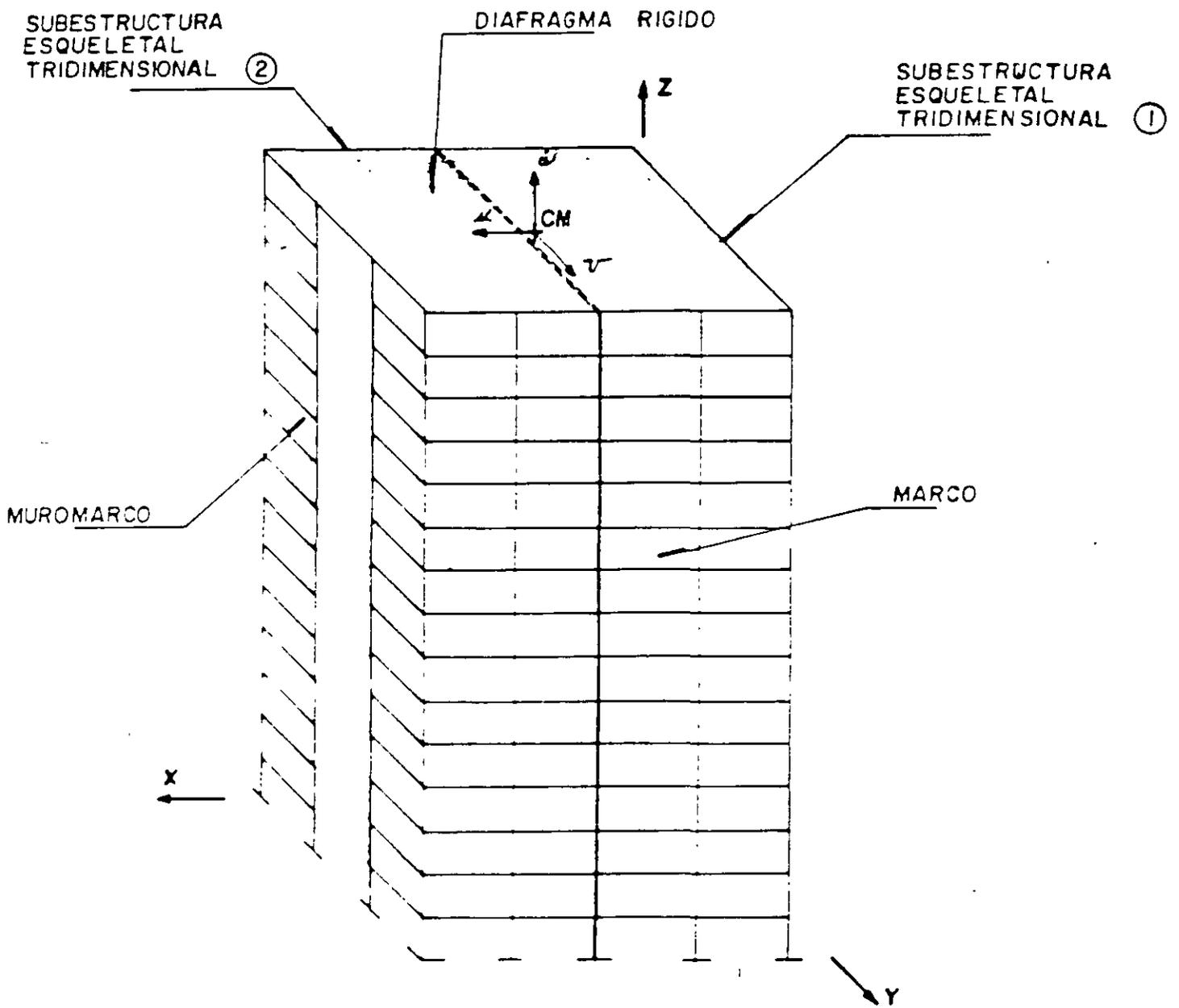


FIG 2 5 Subestructuras formadas con marcos y muremarcos tridimensionales unidos con diafragmas rígidos

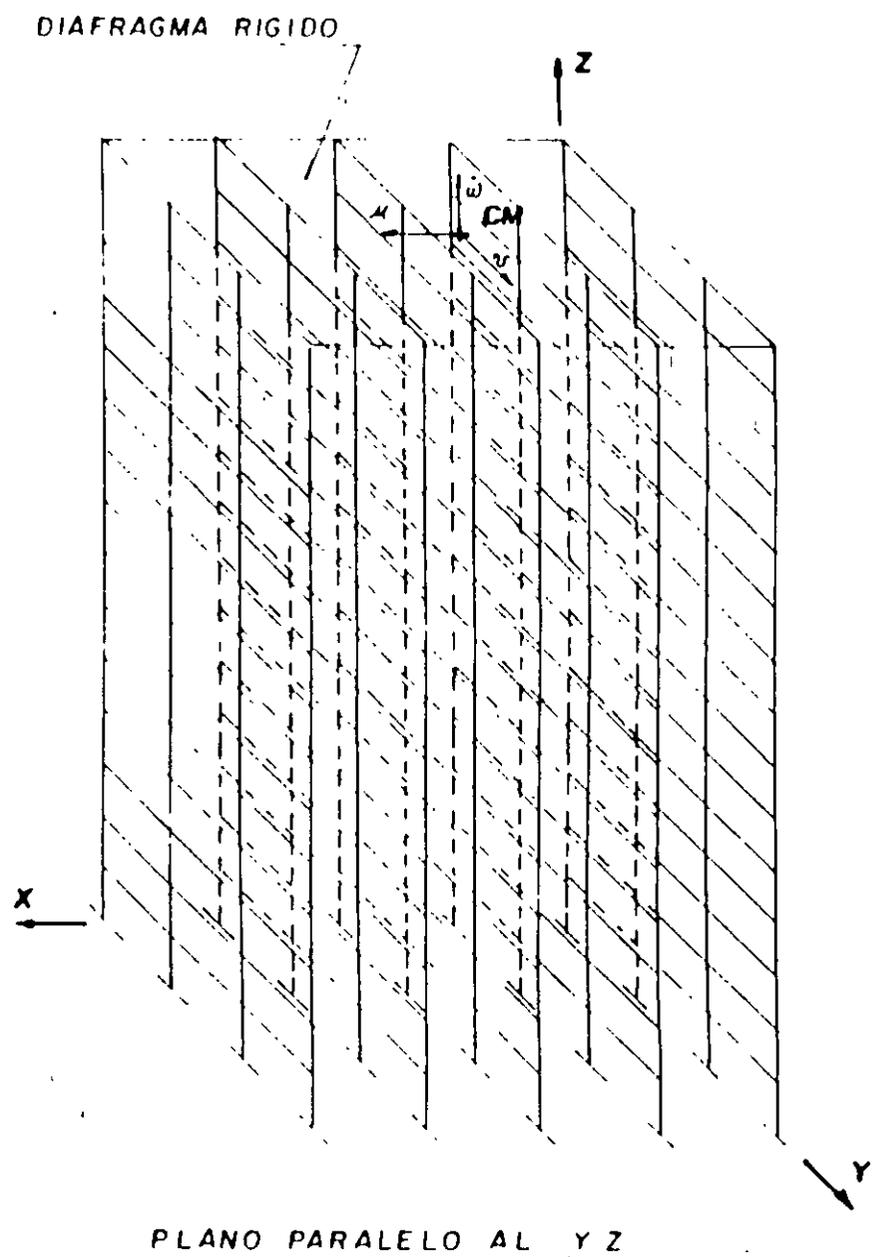
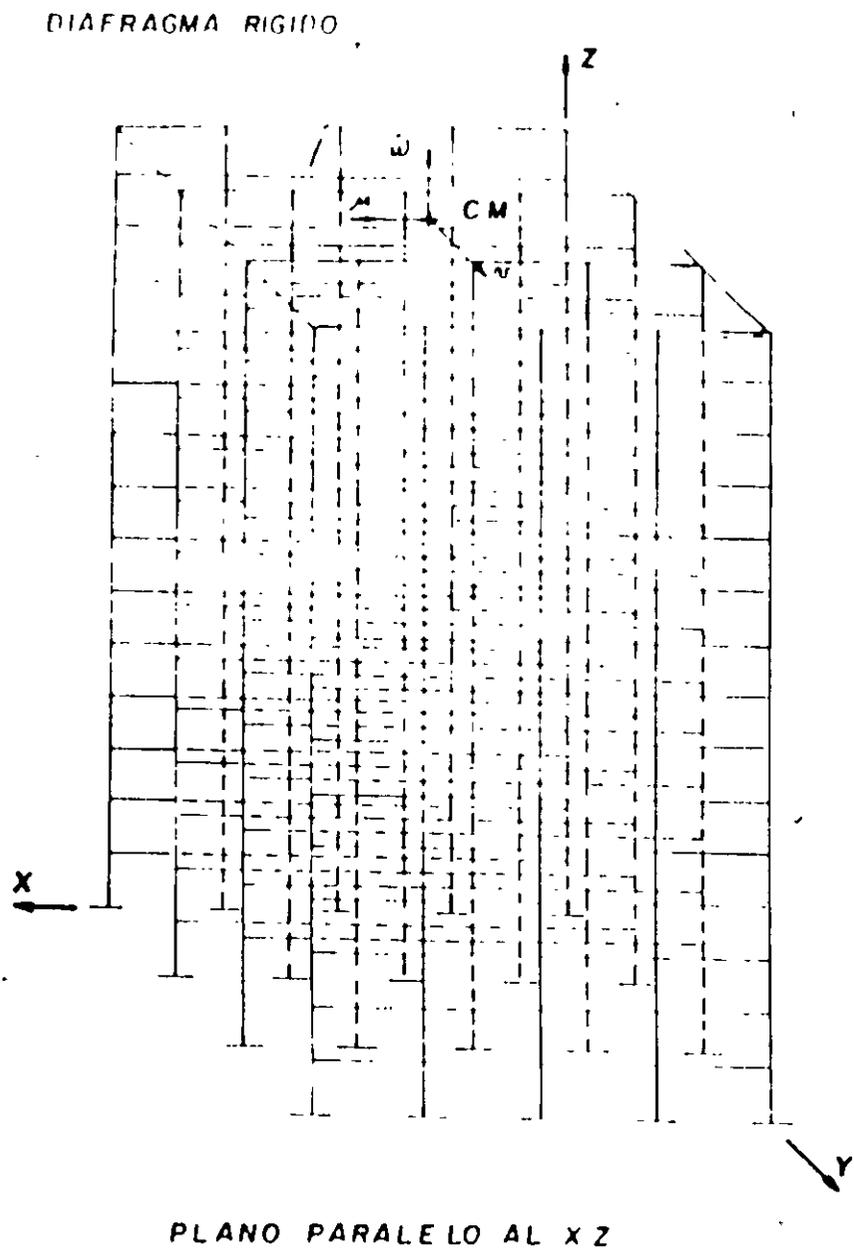


FIG 2.6 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos planos unidos con diafragmas rigidos

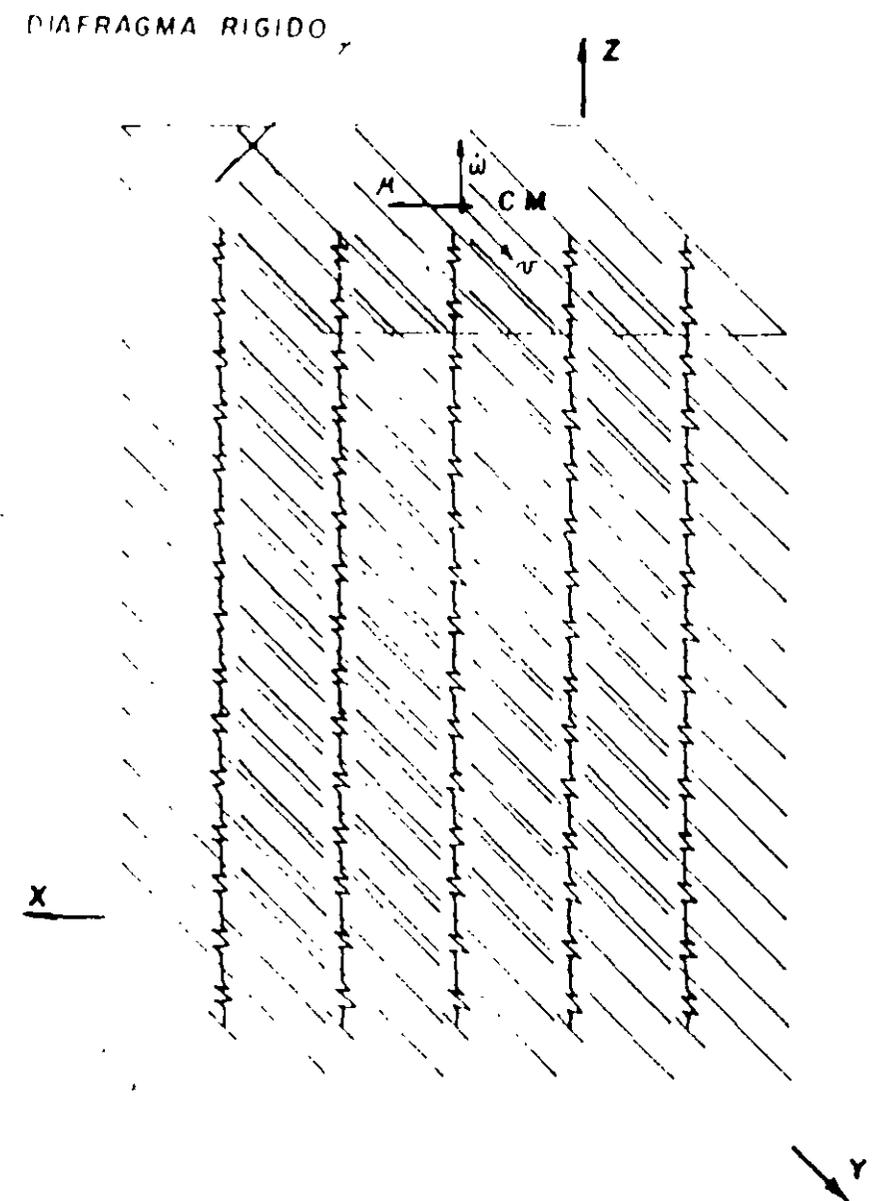
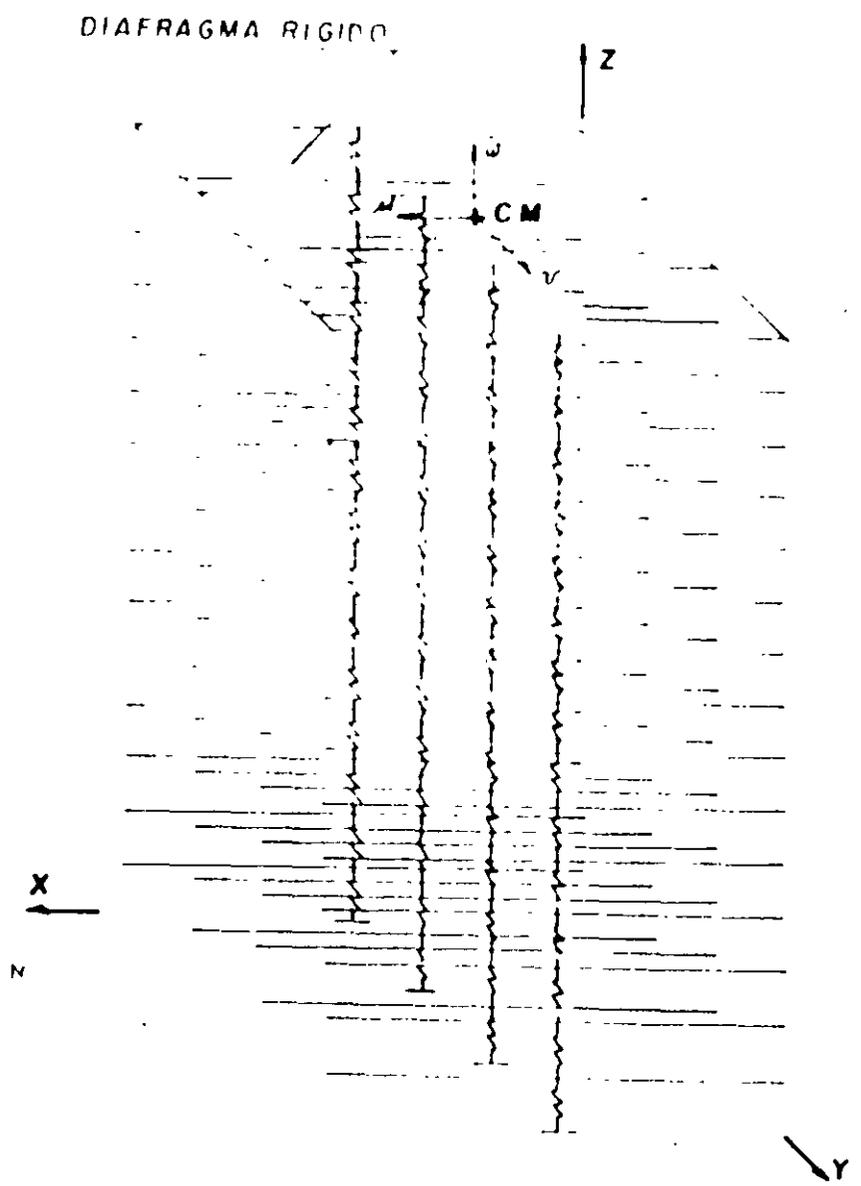


FIG 2.7 Rígideces de entrepiso (resortes) unidas con diafragmas rígidos

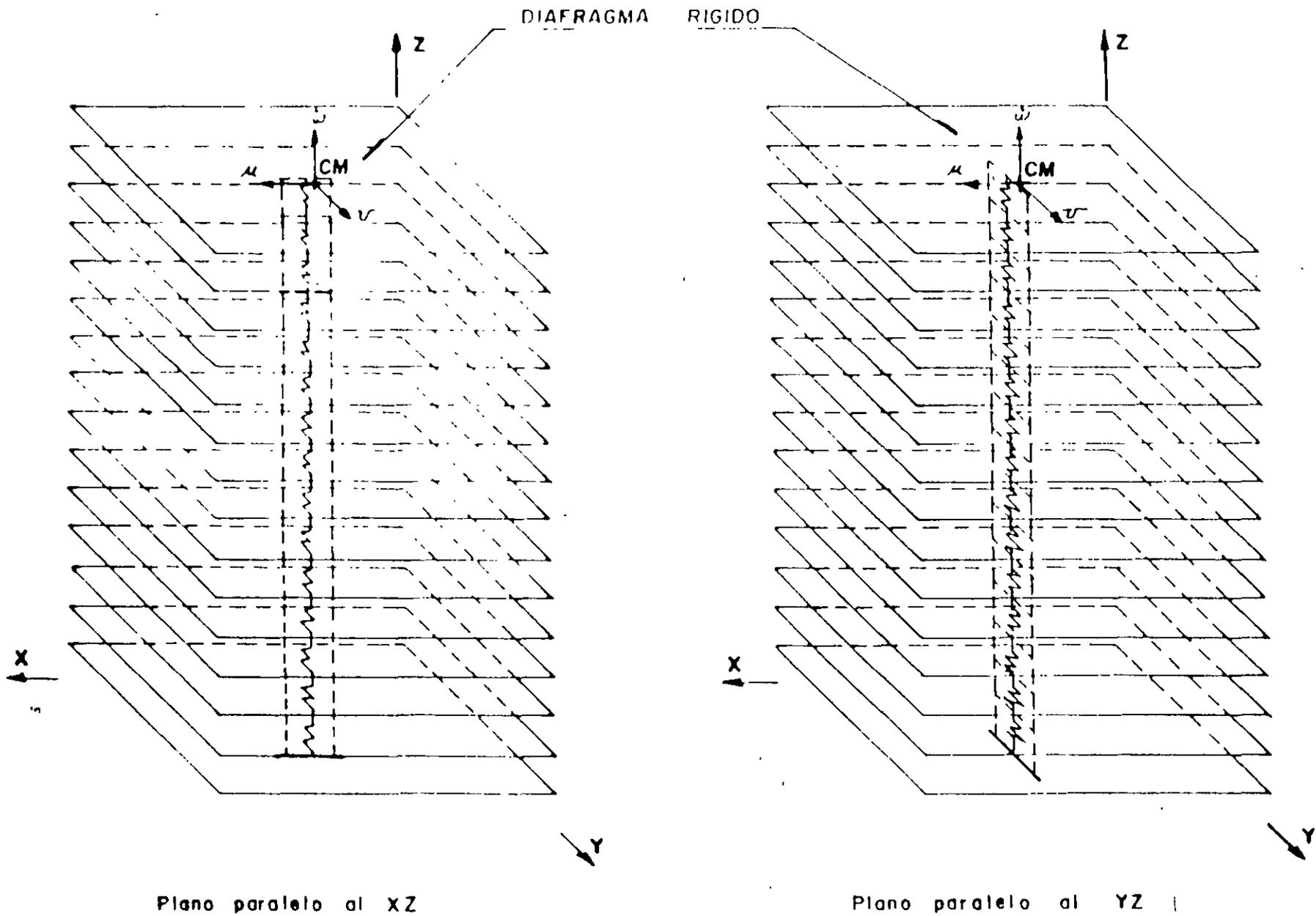


FIG 2.8 MODELOS UNIDIRECCIONALES INDEPENDIENTES FORMADOS CON LAS RIGIDECES DE ENTREPISO.

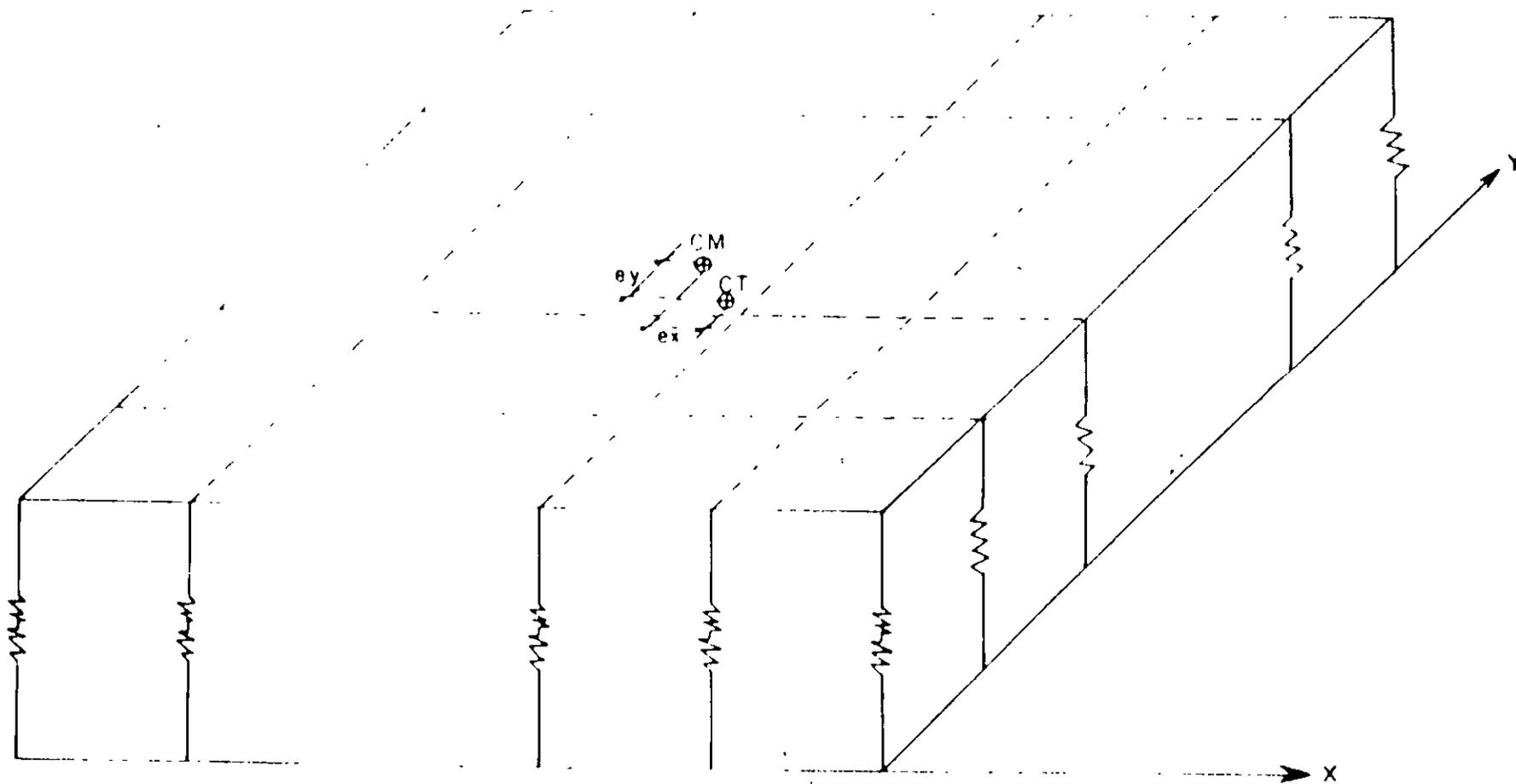
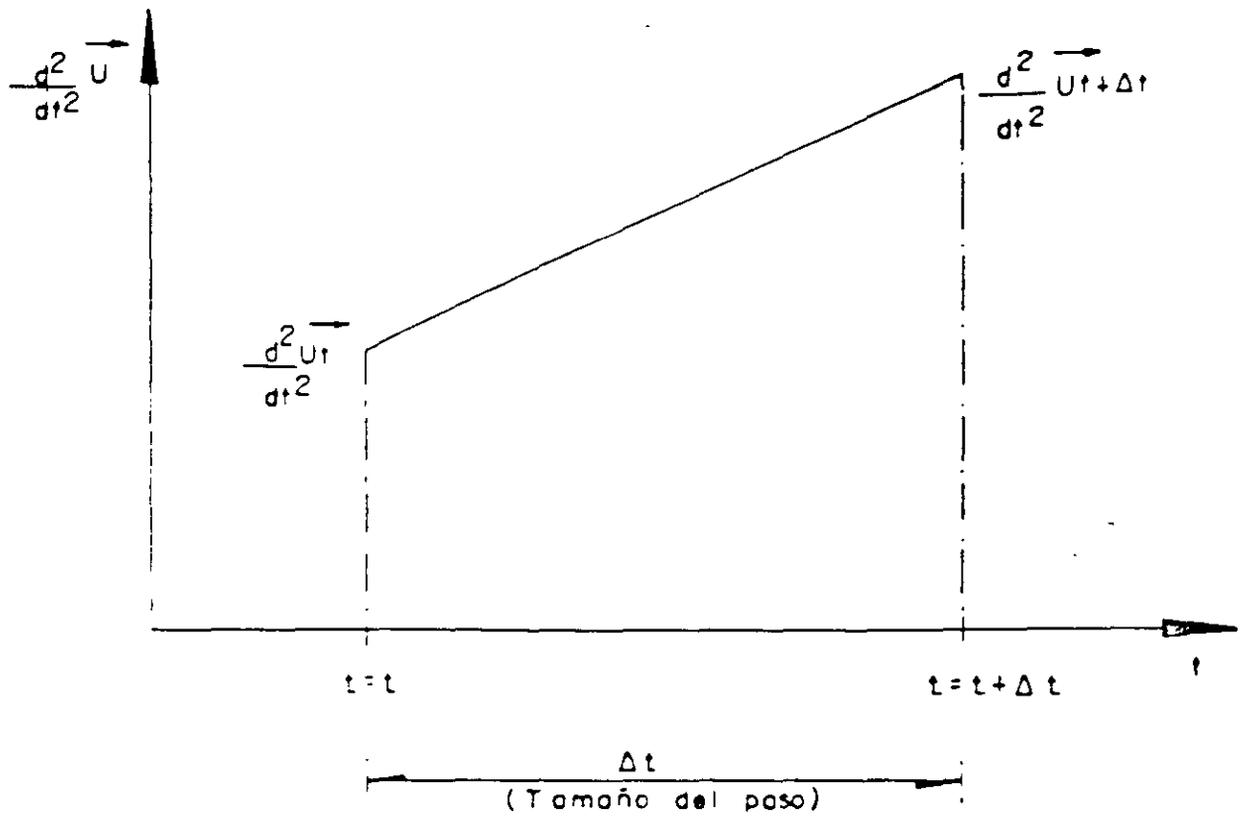


FIG 2.9 DIAFRAGMA RIGIDO UNIDO SOPORTADO LATERALMENTE POR LAS RIGIDECEDES DE ENTREPISO QUE LE SUBYACEN.



Valores conocidos al inicio del paso : $\frac{d \vec{U}_t}{dt}$
 $\frac{d^2 \vec{U}_t}{dt^2}$

Valores por conocer al final del paso : $\frac{d \vec{U}_{t+\Delta t}}{dt}$
 $\frac{d^2 \vec{U}_{t+\Delta t}}{dt^2}$

FIG 4.1 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración, Δt .

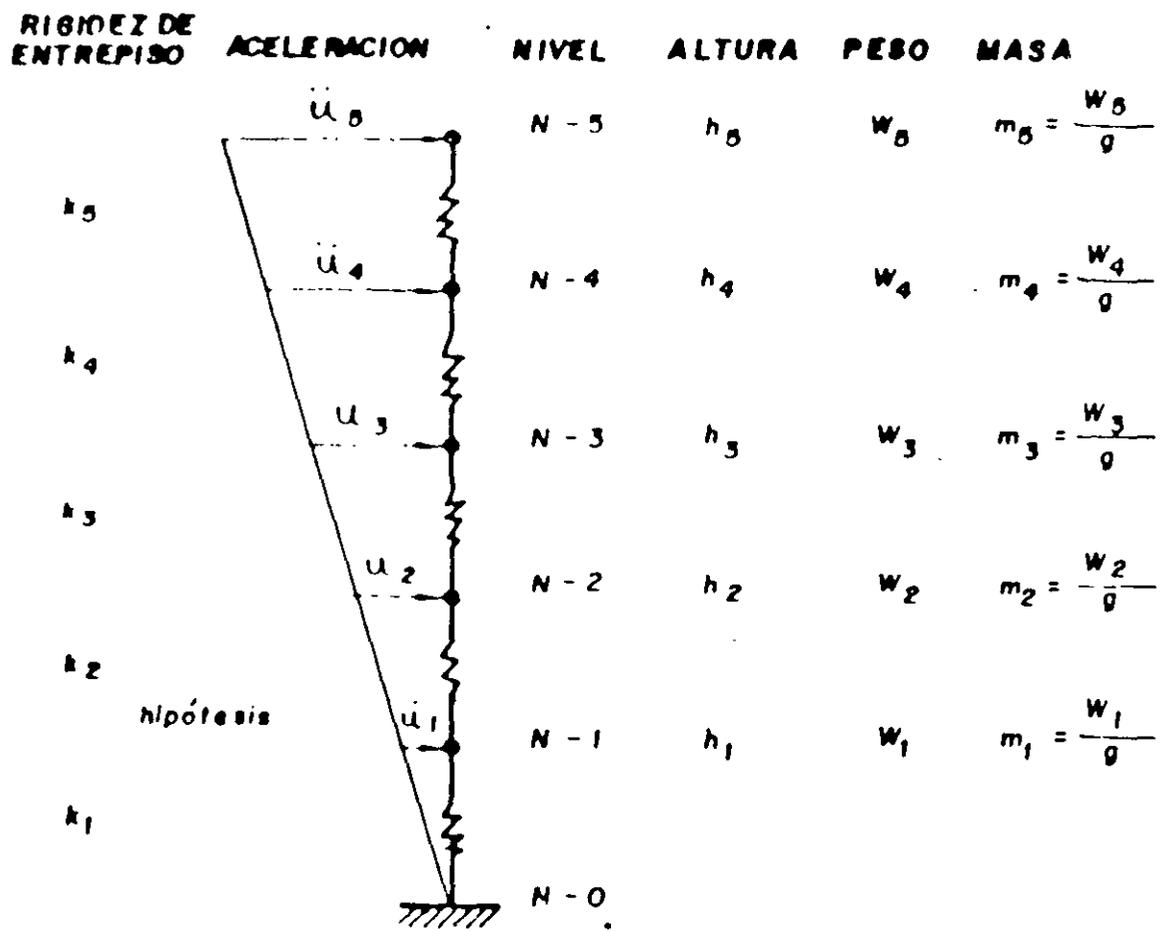


FIG 4.2 Distribución de Aceleraciones en el análisis estát

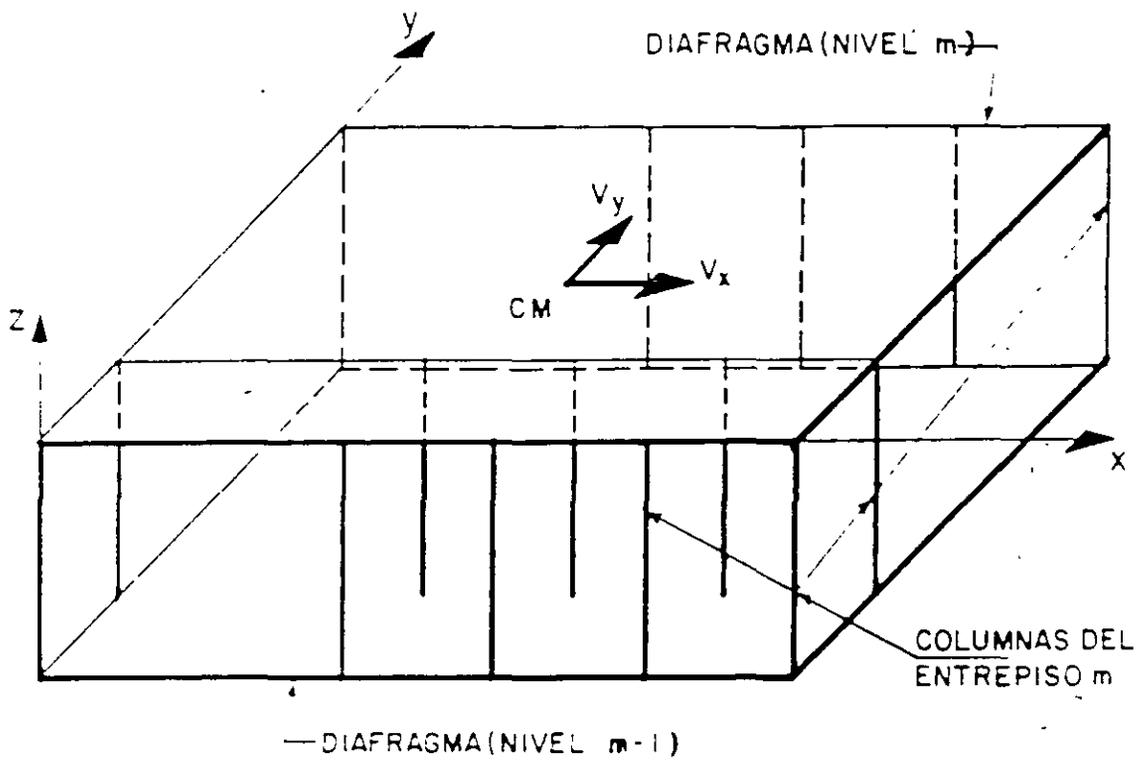


FIG 5 1 REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL MODELO ESTRUCTURAL CON RIGIDEZES DE ENTREPISO.

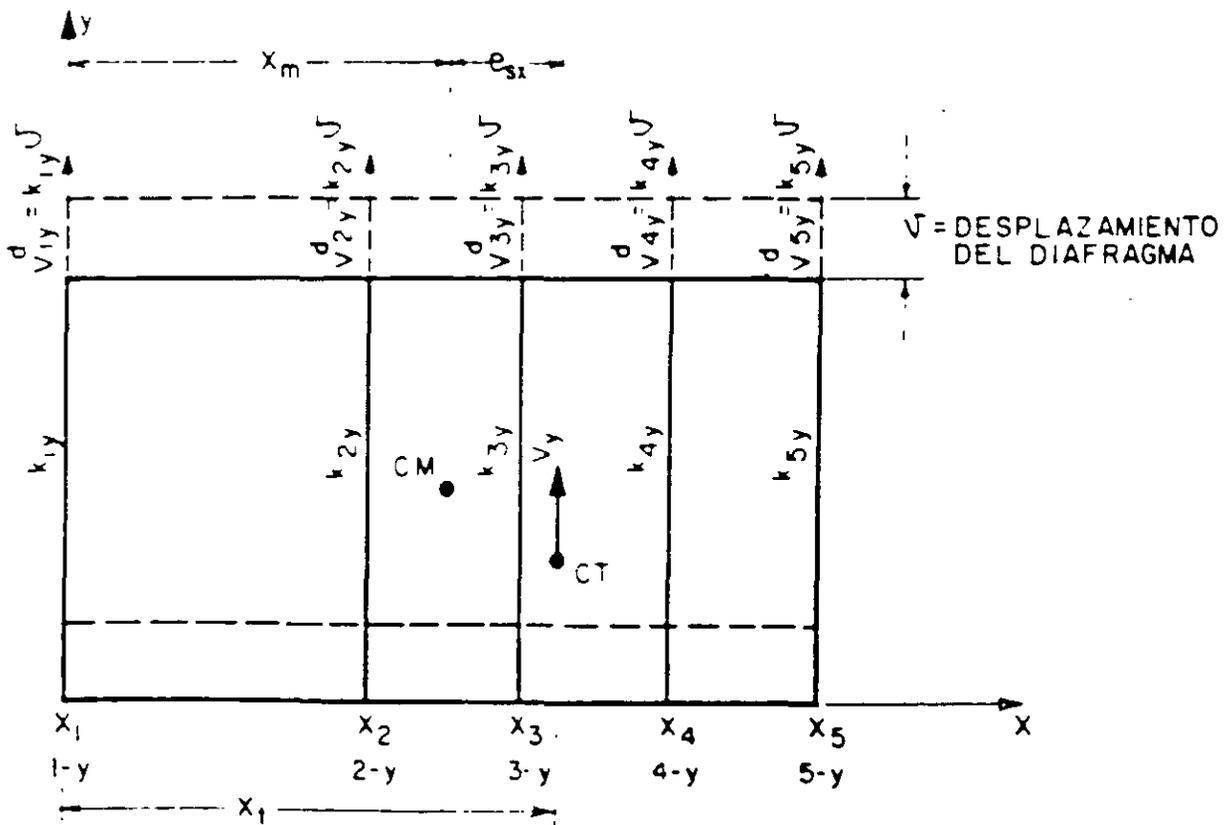


FIG 5 2 FUERZAS CORTANTES DIRECTAS, V_{iy}^d , PARALELAS AL EJE y.

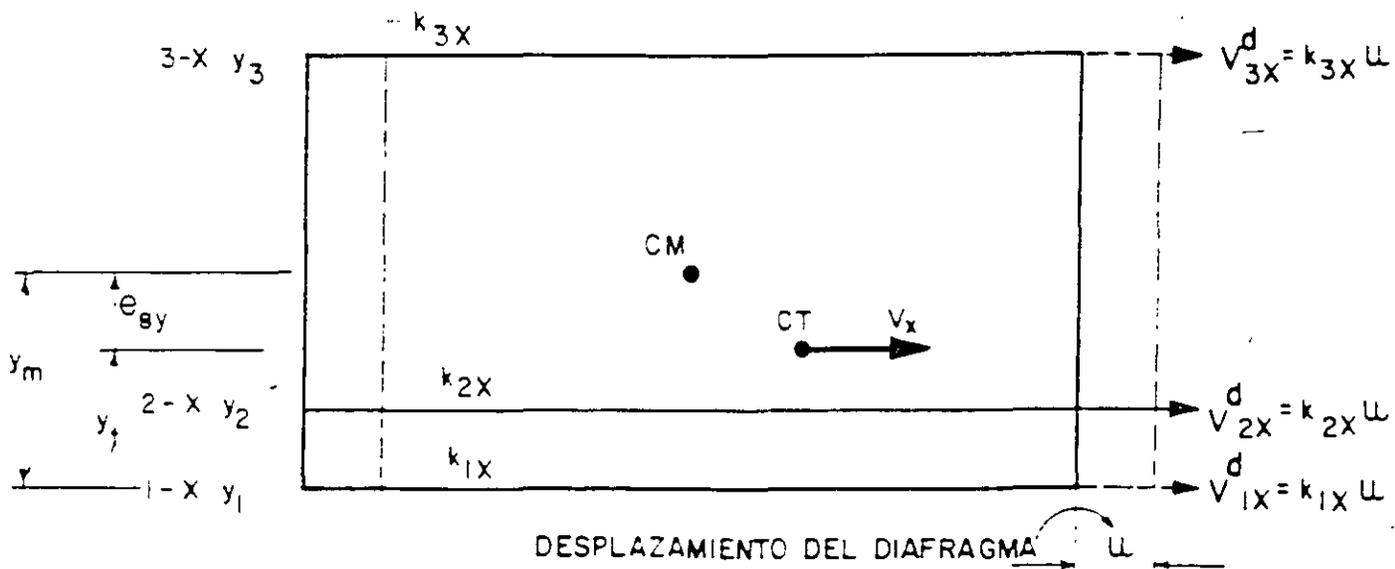


FIG. 5.3 FUERZAS CORTANTES DIRECTAS, V_{1X}^d , PARALELAS AL EJE X.

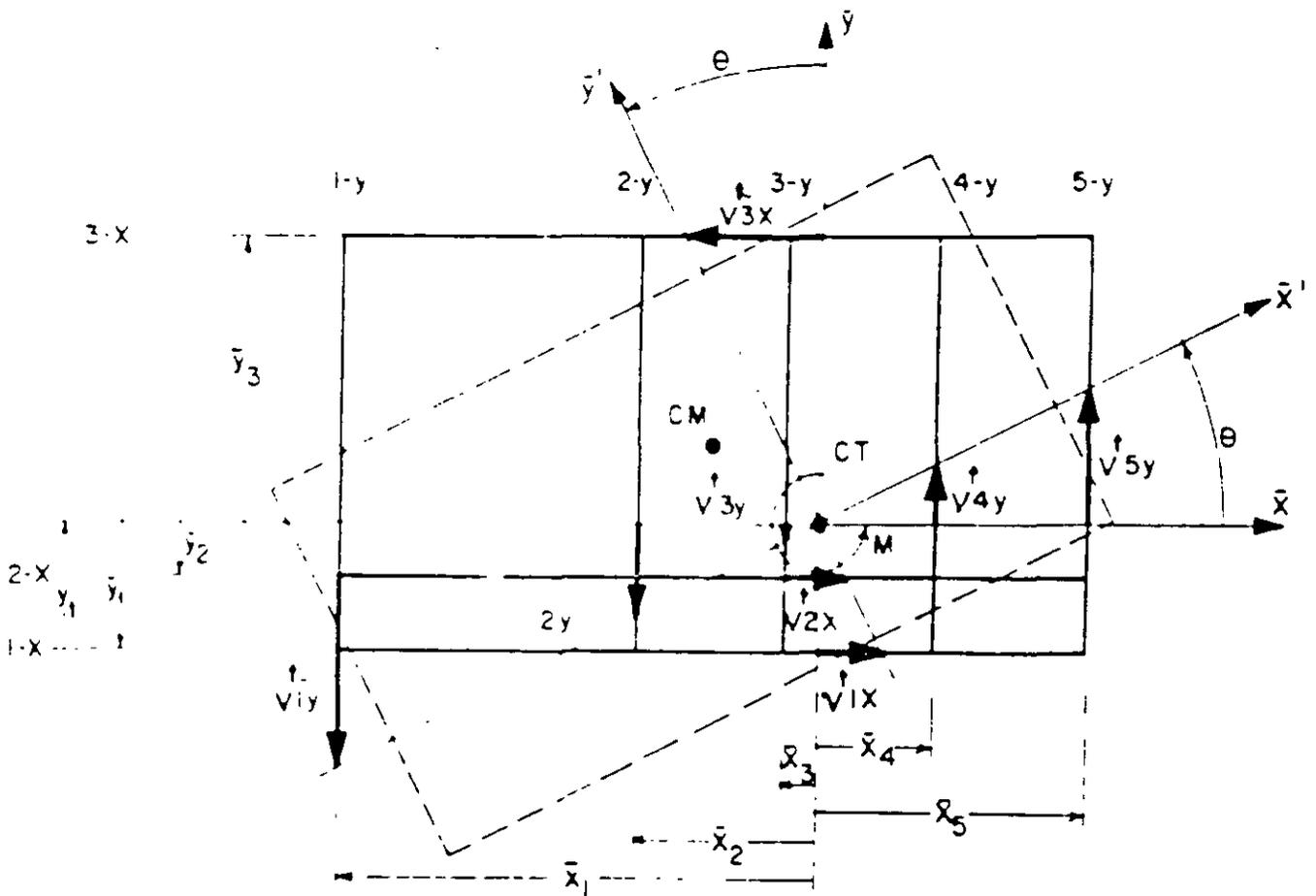


FIG 5 4 FUERZAS CORTANTES DE TORSION, V_{1X}^t Y V_{jy}^t .

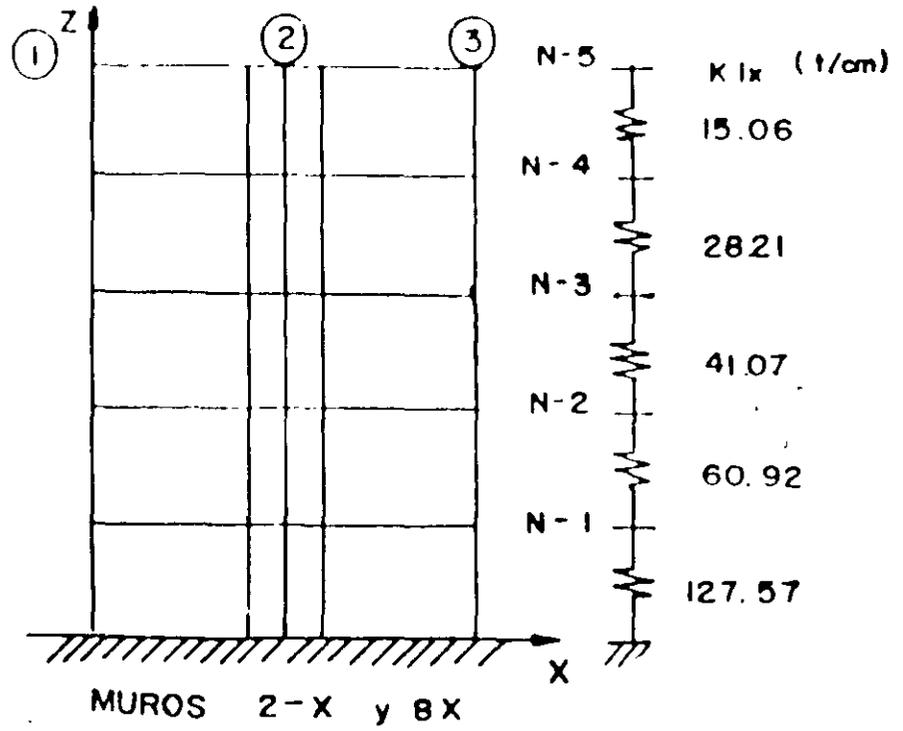
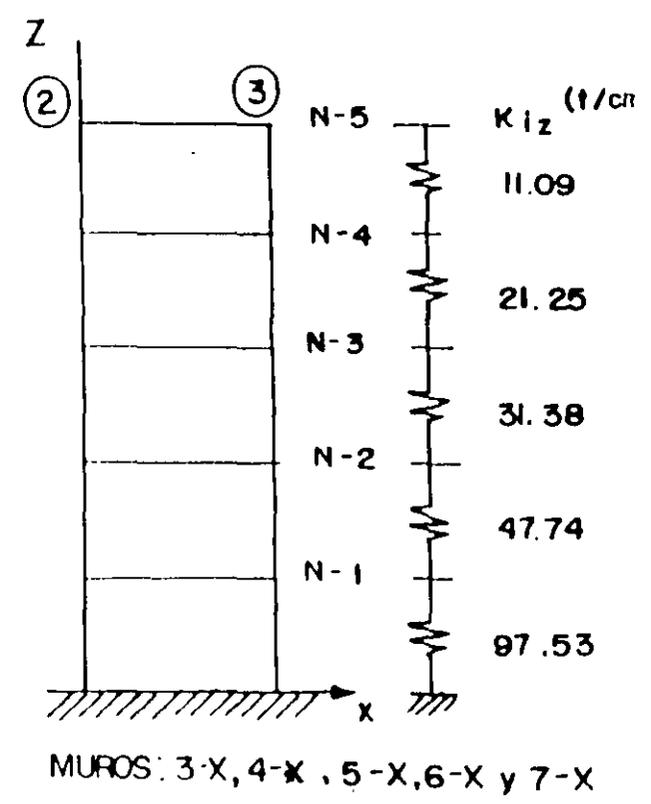
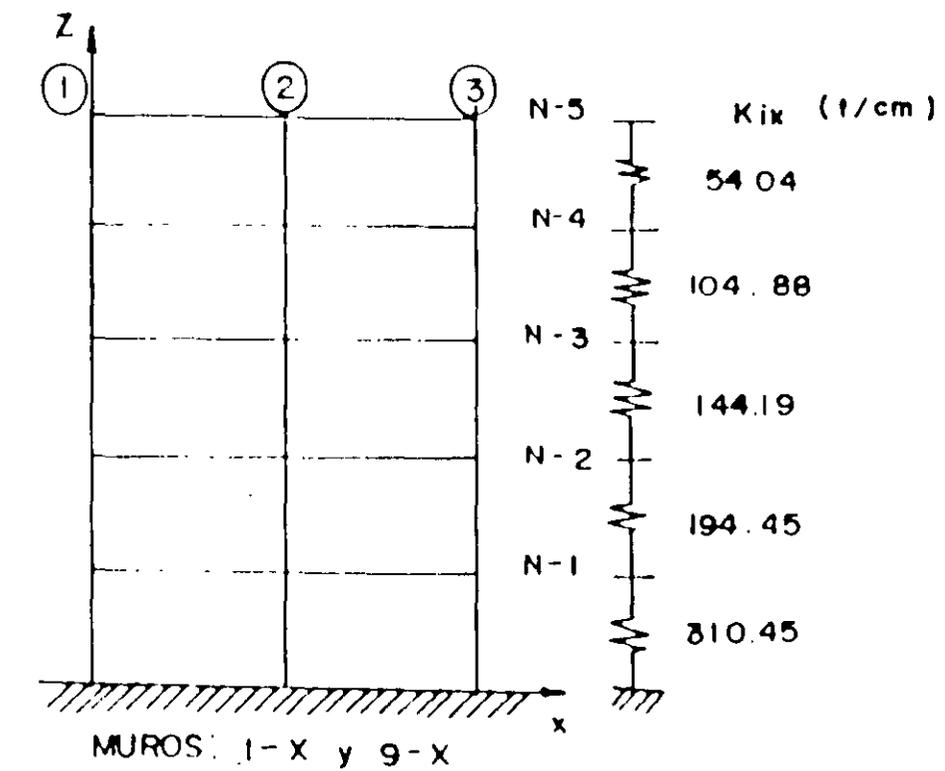


FIG 62 REPRESENTACION ESQUEMATICA MEDIANTE RIGIDECEZ DE ENTREPISO DE LOS MUROS PARALELOS AL PLANO X Z.

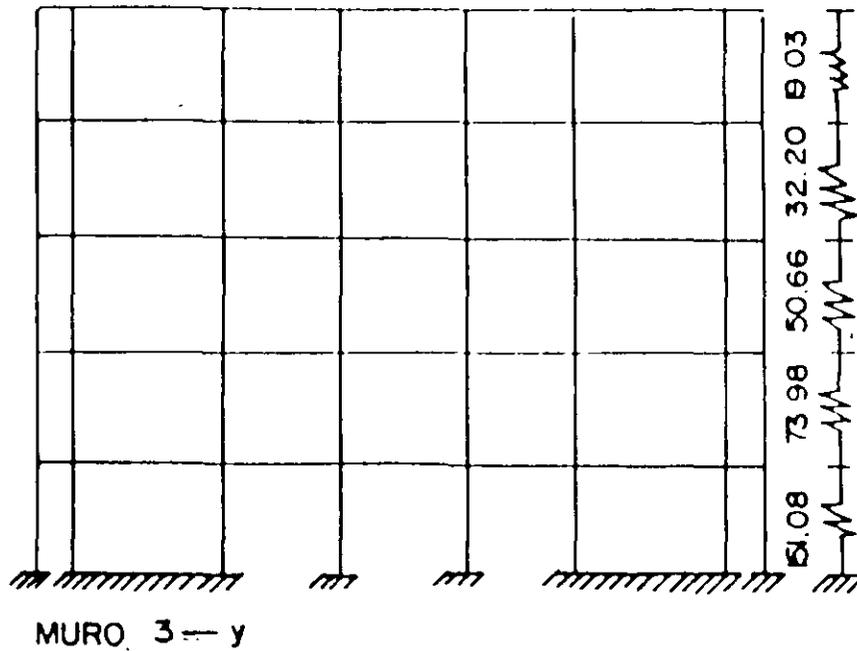
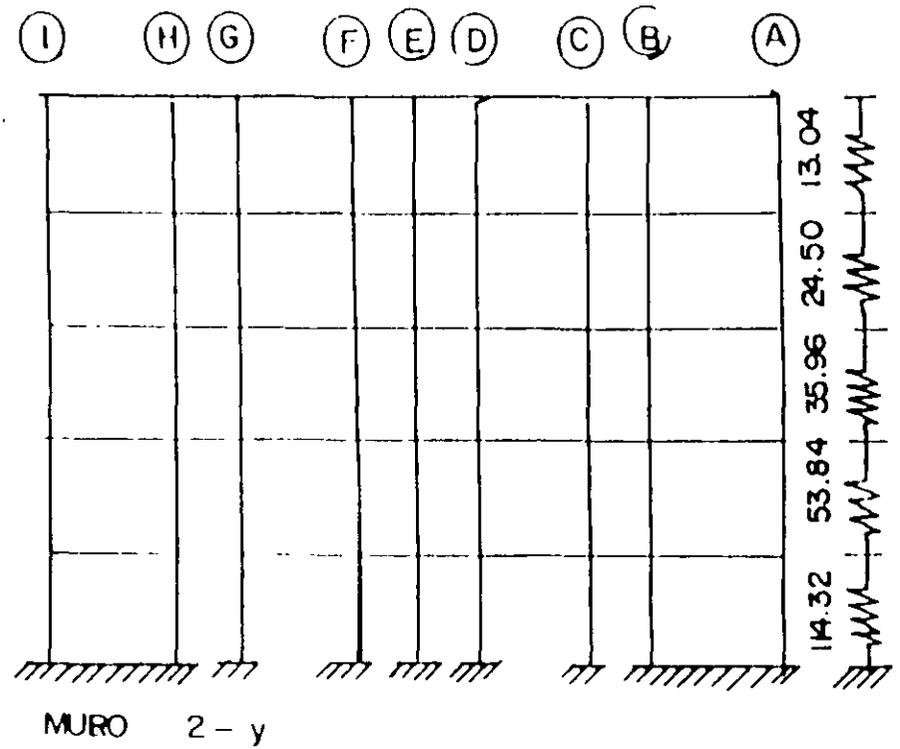
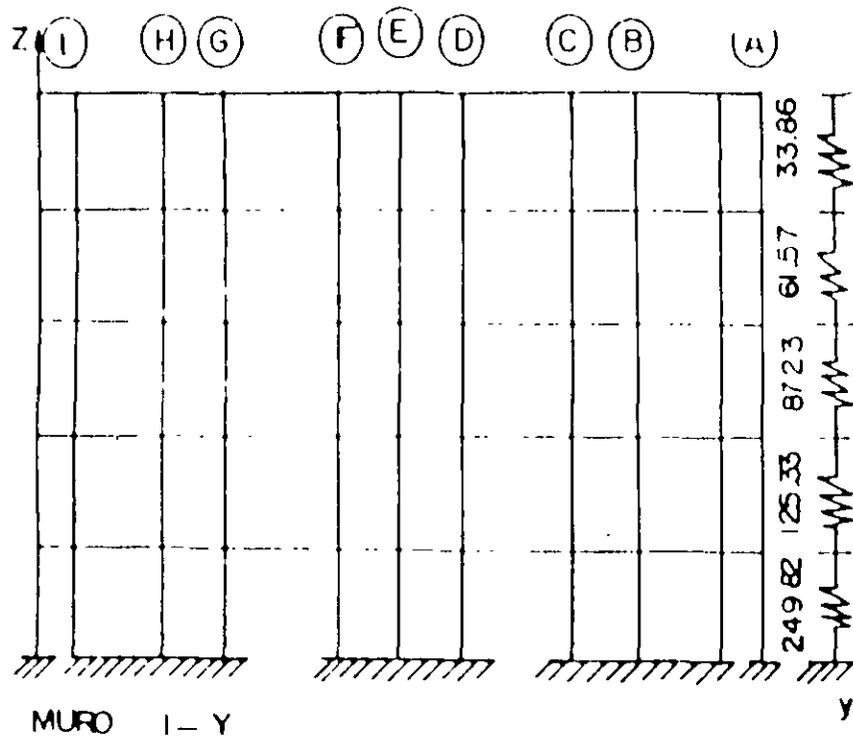
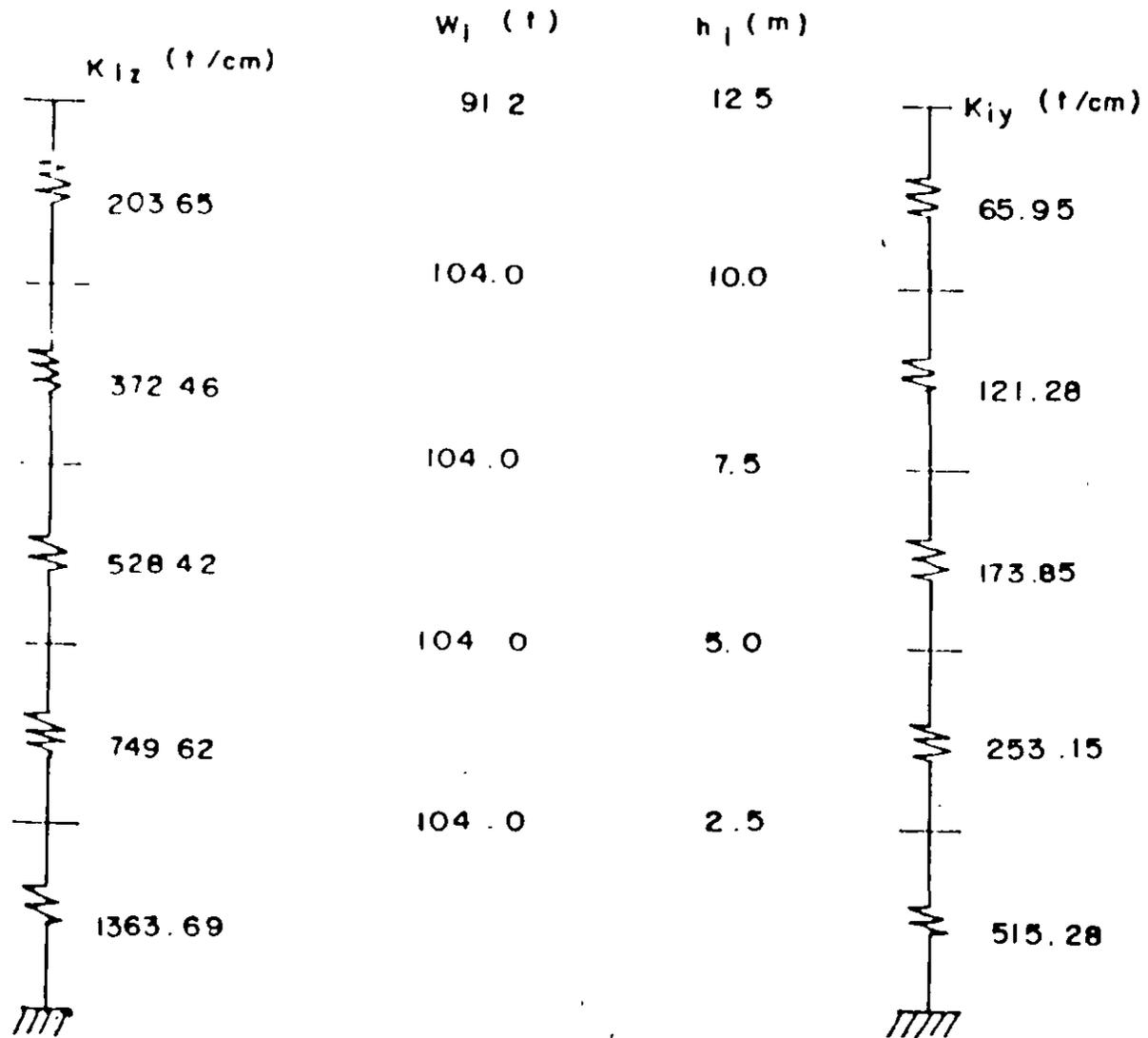


FIG 6.3 REPRESENTACION ESQUEMATICA MEDIANTE RIGIDEZES DE ENTREPISO DE LOS MUROS PARALELOS AL PLANO y z.

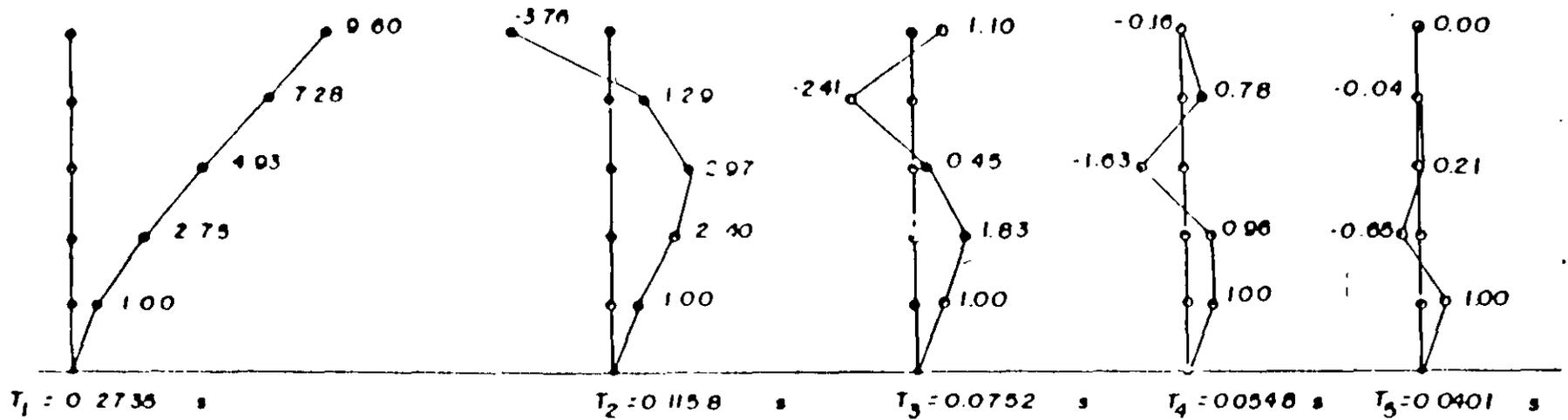


a) PARALELO AL EJE X

b) PARALELO AL EJE Y

FIG 6.4 MODELOS ESTRUCTURALES UNIDIMENSIONALES DEL EDIFICIO A BASE DE RIGIDEZ DE ENTREPISO.

FORMAS NODALES DE LOS MUROS : DIRECCION X



FORMAS NODALES DE LOS MUROS : DIRECCION Y

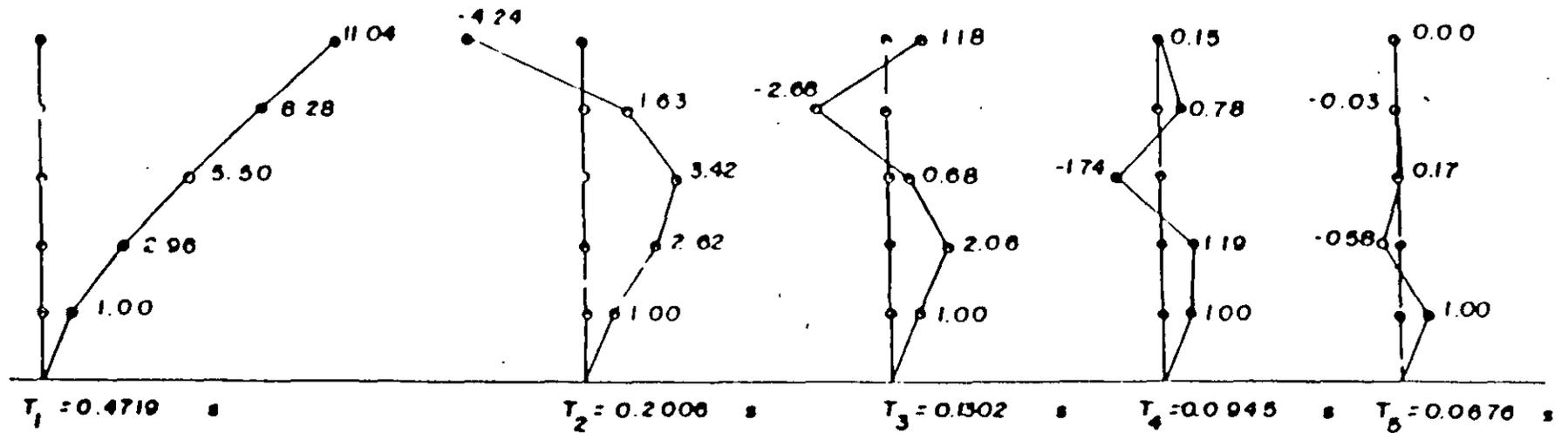


FIG 6.5 FORMAS MODALES (EIGENVECTORES) DE LOS MODELOS ESTRUCTURALES UNIDIMENSIONALES DEL EDIFICIO.

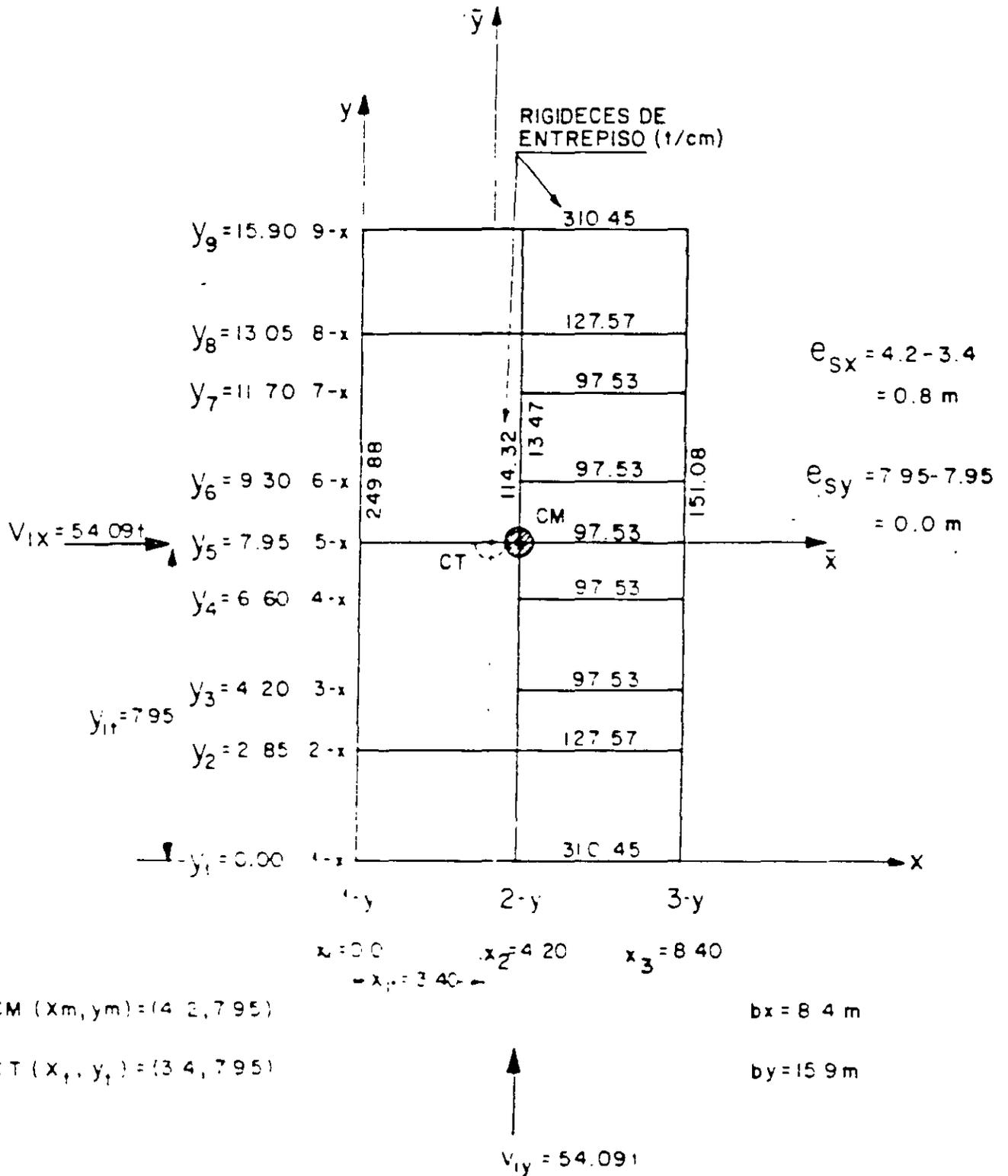
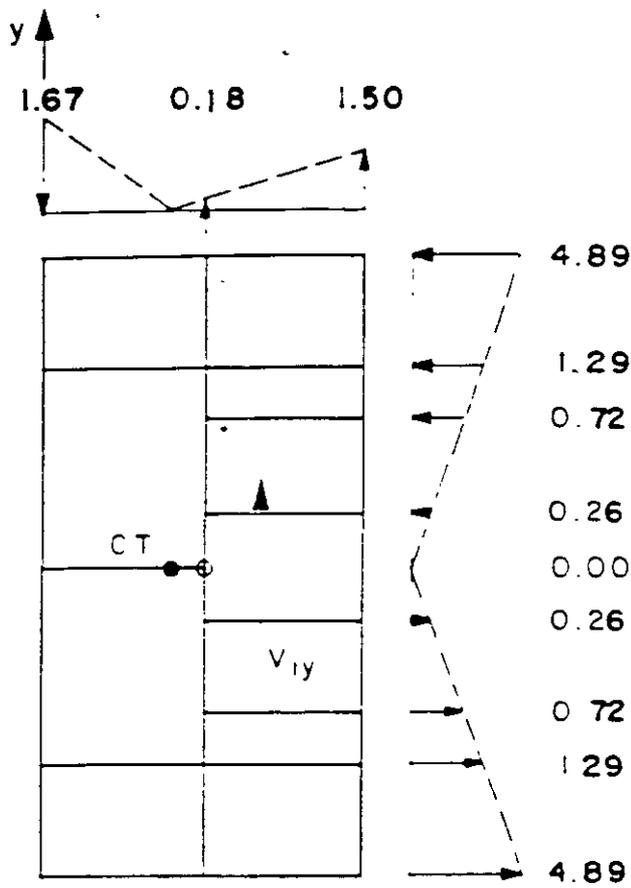
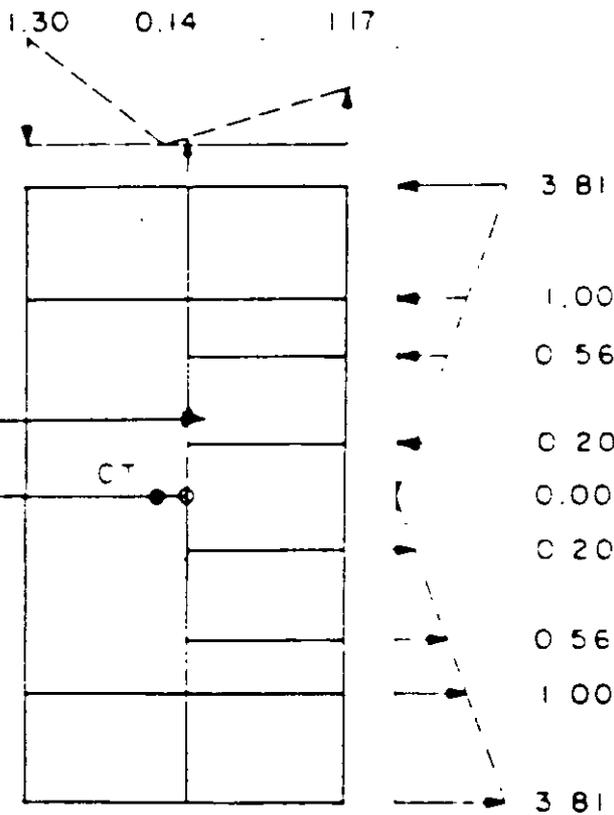


FIG 6.6 DISTRIBUCION DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO QUE LLEGAN AL NIVEL I



a) MOMENTO TORSIONANTE IGUAL A 110.34 tm.



b) MOMENTO TORSIONANTE IGUAL A 86.00 tm

FIG 6.7 FUERZAS CORTANTES DEBIDAS A LA TORSION EN EL NIVEL 1.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

**XXVII CURSO INTERNACIONAL DE
INGENIERÍA SÍSMICA**

**MODULO I
CA 017**

**ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE
ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**

TEMA

**ANEXO 3
ANÁLISIS SÍSMICO DE SISTEMAS DISCRETOS DE
VARIOS GRADOS DE LIBERTAD**

**EXPOSITOR: M. EN I. JOSÉ LUIS TRIGOS SUÁREZ
PALACIO DE MINERÍA
JULIO DEL 2002**

C O N T E N I D O

A. EQUILIBRIO DINÁMICO.

B. SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

1. Excitación sísmica del terreno
2. Vibración libre
 - a. Sistemas no amortiguados.
 - b. Sistemas amortiguados.
3. Respuesta a cargas de impulso
4. Respuesta a carga general dinámica
5. Respuesta sísmica de estructuras elásticas.
 - a. Historia de respuesta.
 - b. Espectro de respuesta.
6. Coordenadas generalizadas
 - a. Funciones de desplazamiento y propiedades generalizadas.
 - b. Método de Rayleigh.
 - c. Análisis en el tiempo.
 - d. Análisis de la respuesta espectral.

C. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

1. Modos de vibrar y frecuencias.
2. Ecuaciones de movimiento en coordenadas normales.
 - a. Análisis de la respuesta sísmica.
 - b. Análisis de la respuesta espectral.
3. Combinaciones modales.
4. Valuación de fuerzas sísmicas.
 - a. Análisis estático.
 - b. Método simplificado de análisis.
 - c. Análisis sísmico dinámico modal.
 - (1). Análisis sísmico dinámico modal espectral.
 - (2). Análisis paso a paso.

D. REFERENCIAS.

A. EQUILIBRIO DINÁMICO.

La ecuación básica que expresa el equilibrio estático para sistemas de un grado de libertad, empleada en el método de análisis estructural de 'desplazamientos' o 'rigideces' tiene la forma:

$$p = k v \quad (1.1)$$

donde p es la fuerza externa aplicada, k es la rigidez de la estructura y v es el desplazamiento resultante. Si la fuerza aplicada estáticamente se reemplaza por una fuerza dinámica dependiente del tiempo $p(t)$, la ecuación de equilibrio estático se convierte en una de equilibrio dinámico y es:

$$p(t) = m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) \quad (1.2)$$

donde el punto representa el orden de diferenciación con respecto al tiempo. La comparación de las dos ecuaciones anteriores muestra dos cambios significativos, los cuales distinguen el problema estático del dinámico. En primer lugar la carga aplicada y la respuesta resultante ahora son función del tiempo, y por tanto la ecuación 1.2 debe satisfacerse para cada instante durante el lapso de estudio. Por esta razón usualmente se refiere a esta ecuación como ecuación de movimiento. En segundo lugar la dependencia del desplazamiento con respecto al tiempo genera dos fuerzas adicionales que interactúan con la carga aplicada y que han sido sumadas al lado derecho de la igualdad.

La ecuación de movimiento es consecuencia de la segunda ley de Newton, la cual establece que una partícula sobre la cual obra una fuerza se mueve de forma tal que la rapidez de variación de su momento lineal (angular) es igual a la fuerza (torque) aplicada:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right) \quad (1.3)$$

donde la rapidez de variación del desplazamiento con respecto al tiempo, dv/dt , es la velocidad, y el momento está dado por el producto de la masa y la velocidad. Recordando que la masa es igual al peso dividido entre la aceleración de la gravedad. Si la masa es constante, la ecuación 1.3 se convierte en:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right) = m \ddot{v}(t) \quad (1.4)$$

la cual establece que la fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración. De acuerdo con el principio de D'Alambert, la masa desarrolla una fuerza de inercia que es proporcional a la aceleración y de sentido opuesto. Por tanto el primer término del miembro derecho de la ecuación 1.2 se llama fuerza de inercia.

La existencia de fuerzas disipadoras o de amortiguamiento se infiere de la observación de que las oscilaciones en una estructura tienden a disminuir con el tiempo una vez que la fuerza excitadora cesa. Estas fuerzas se representan mediante fuerzas de amortiguamiento viscoso, proporcionales a la velocidad, con una constante de proporcionalidad conocida como coeficiente de amortiguamiento. El segundo miembro del lado derecho de la ecuación 1.2 se conoce como fuerza de amortiguamiento. Las fuerzas de inercia son las más significativas de las dos y son una primera distinción entre los análisis dinámicos y los estáticos. Cabe señalar que todas las estructuras están sujetas a cargas debidas a la gravedad tales como el peso propio (carga muerta) y el de los ocupantes (carga viva) además del movimiento de la base. En un sistema elastico, el principio de superposición es aplicable, de manera que las respuestas a cargas dinámicas y estáticas pueden considerarse por separado y luego combinarlas para obtener la respuesta estructural completa. Sin embargo si el comportamiento estructural no es lineal, la respuesta se convierte en dependiente del mecanismo de cargas y las cargas debidas a la gravedad deben considerarse conjuntamente con los movimientos dinámicos.

Bajo fuertes movimientos sísmicos, la estructura desarrollará un comportamiento más semejante al no lineal; el cual puede deberse a comportamiento no lineal de los materiales y/o no linealidades geométricas. El comportamiento no lineal del material se presenta cuando los esfuerzos en ciertas regiones críticas de la estructura exceden el límite elástico del material. La ecuación de equilibrio dinámico para este caso tiene la forma general:

$$p(t) = m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k(t) v(t) \quad (1.5)$$

donde la rigidez k es función de las propiedades geométricas y del comportamiento de los materiales, que a su vez pueden serlo del tiempo. La no linealidad geométrica es causada por las cargas debidas a la gravedad actuando en posiciones deformadas de la estructura. Si el desplazamiento lateral es pequeño, éste efecto, conocido como P-delta, puede ser ignorado. Sin embargo, si los desplazamientos se vuelven mayores, este efecto debe tomarse en cuenta.

Para definir las fuerzas de inercia por completo, sería necesario considerar la aceleración de cada partícula de masa de la estructura y los correspondientes desplazamientos. Tal solución sería prohibitiva por el tiempo requerido para su solución. El procedimiento de análisis puede ser simplificado si la masa de la estructura considerarse concentrada en un número finito de puntos y la respuesta dinámica de la estructura puede ser representada en términos de este limitado número de componentes del desplazamiento. El número de componentes del desplazamiento requeridos para especificar la posición de los puntos en la masa se conoce como número de grados de libertad. El número de grados de libertad requeridos para obtener una solución adecuada depende de la complejidad del sistema estructural. Para algunas estructuras un solo grado de libertad puede ser suficiente, mientras que para otras pueden requerirse varios cientos o miles.

B. SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

La estructura más simple que puede considerarse en un análisis dinámico es una estructura de un nivel en la que el único grado de libertad es la translación lateral del nivel del techo, como se muestra en la figura 1.1.a. En esta idealización se han hecho tres hipótesis fundamentales. Primera: la masa se supone concentrada en el nivel del techo; segunda: se idealiza al sistema de piso como rígido en su plano; y tercera: son despreciables las deformaciones axiales en las columnas. De las hipótesis anteriores se concluye que la rigidez lateral es proporcionada por los elementos verticales como son columnas, muros y contravientos ubicados entre el techo y la base. La aplicación de estas hipótesis da como resultado una estructura discretizada como se muestra en la figura 1.1.b con una fuerza dependiente del tiempo aplicada en el nivel del techo. La rigidez total k es la suma de las rigideces de los elementos del nivel.

Las fuerzas actuando sobre la masa de la estructura se muestran en la figura 1.1.c. Al sumar las anteriores fuerzas se obtiene la ecuación de equilibrio siguiente, la cual debe satisfacerse en todo instante de tiempo:

$$f_i(t) + f_d(t) + f_s(t) = p(t) \quad (1.6)$$

donde:

$f_i(t)$ - fuerza de inercia

$f_d(t)$ - fuerza de amortiguamiento (disipadora)

$f_s(t)$ - fuerza elástica restauradora

$p(t)$ - fuerza externa aplicada, dependiente del tiempo

Rescribiendo la ecuación 1.6 en términos de los parámetros involucrados:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (1.7)$$

Se observa que las fuerzas de amortiguamiento y la de los elementos resistentes dependen de la velocidad y desplazamientos relativos, respectivamente, entre los extremos de estos elementos, mientras que la fuerza de inercia depende de la aceleración total de la masa. La aceleración total de la masa puede expresarse como:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{a}_s(t) - \ddot{v}(t) \quad (1.8)$$

donde

$v(t)$ = aceleración de la masa relativa a la base

$a_s(t)$ = aceleración de la base

En este caso, se ha supuesto que la base está fija y sin movimiento, y por tanto la ecuación 1.7 para una fuerza dependiente del tiempo queda de la forma:

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + k v = p(t) \quad (1.9)$$

7. Excitación sísmica del terreno

Cuando una estructura de un nivel, como la de la figura 1.1.c, se somete a excitación sísmica del terreno, no se aplican fuerzas externas a nivel del techo. En lugar de esto, el sistema experimenta una aceleración de la base. La ecuación de equilibrio dinámico queda de la forma:

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \quad (1.10)$$

Al substituir los parámetros físicos para $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ en la ecuación 1.10 la ecuación de equilibrio dinámico resulta:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = 0 \quad (1.11)$$

Esta ecuación puede ser rescrita en la forma de la ecuación 1.9 si se substituye la ecuación 1.8 en la 1.11 y reorganizando términos se tiene:

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p_e(t) \quad (1.12)$$

donde

$p_e(t)$ = fuerza efectiva dependiente del tiempo = $m a_s(t)$

Por tanto la ecuación de movimiento de una estructura sujeta a movimiento en la base es similar a la de una estructura sujeta a una fuerza dependiente del tiempo, si el movimiento de la base se representa como una fuerza efectiva dependiente del tiempo, e igual al producto de la masa y la aceleración del terreno.

2. Vibración libre

La vibración libre se presenta cuando una estructura oscila por la acción de fuerzas inherentes a la estructura sin la presencia de fuerzas externas dependientes del tiempo o movimientos del terreno. Estas fuerzas inherentes pueden ser resultado de una velocidad y/o un desplazamiento iniciales que tiene la estructura al inicio de la etapa de vibración libre, como condiciones iniciales.

a. Sistemas no amortiguados.

La ecuación de movimiento para sistemas de un grado de libertad sin amortiguamiento y en vibración libre es:

$$m \ddot{v}(t) - k v(t) = 0 \quad (1.13)$$

la cual puede ser rescrita como:

$$\ddot{v}(t) - \omega^2 v(t) = 0 \quad (1.14)$$

donde $\omega^2 = k/m$. Esta ecuación tiene la solución general:

$$v(t) = A \operatorname{sen} \omega t - B \cos \omega t \quad (1.15)$$

donde las constantes de integración dependen de las condiciones iniciales:

$$v(t=0) = v(0) = v_c = \text{desplazamiento inicial}$$

$$\dot{v}(t=0) = \dot{v}(0) = \dot{v}_c = \text{velocidad inicial}$$

Al aplicar las condiciones iniciales, la solución queda de la forma:

$$v(t) = \frac{\dot{v}_c}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - v_c \cos \omega t \quad (1.16)$$

Varios conceptos importantes del movimiento oscilatorio se desprenden de este resultado. La amplitud de vibración es constante, por lo que la vibración en teoría continuaría indefinidamente con el tiempo. Esto no es físicamente posible, debido a que la vibración libre tiende a disminuir con el tiempo, introduciendo el concepto de amortiguamiento. El tiempo que le toma a un punto sobre la curva para completar un ciclo y regresar a su posición original se conoce como periodo de vibración T . La cantidad ω es la frecuencia circular de vibración y se expresa en radianes por segundo. La frecuencia de vibración f se define como el recíproco del periodo y se establece en ciclos por segundo o hertz. Las anteriores propiedades dependen solo de la masa y de la rigidez de la estructura, y se relacionan como sigue:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{f} \quad (1.17)$$

Se observa en la expresión anterior que si dos estructuras tienen igual rigidez, la que tenga mayor masa tendrá el mayor periodo de vibración y la menor frecuencia. Por otra parte, si dos estructuras tienen igual masa, la que tenga mayor rigidez tendrá el menor periodo de vibración y la mayor frecuencia.

b. Sistemas amortiguados.

En una estructura sujeta a vibración libre bajo la acción de fuerzas la amplitud de vibración tiende a disminuir con el tiempo y eventualmente el movimiento decrece y cesa. Este decremento con el tiempo se debe a la acción de las fuerzas de amortiguamiento viscoso las cuales pueden idealizarse como proporcionales a la velocidad. La ecuación de movimiento para esta condición tiene la forma.

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = 0 \quad (1.18)$$

esta ecuación tiene, para las condiciones iniciales v_c y \dot{v}_c , la solución general:

$$v(t) = e^{-\phi \omega t} \left(\left[\dot{v}_c + v_c \phi \omega \right] \frac{\operatorname{sen} \omega_c t}{\omega_c} + v_c \cos \omega_c t \right) \quad (1.19)$$

donde:

$$\phi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 m \omega} = \text{porcentaje del amortiguamiento con respecto al crítico}$$

y

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \phi^2} = \text{frecuencia circular amortiguada}$$

El amortiguamiento del oscilador se expresa como porcentaje de amortiguamiento, donde el amortiguamiento crítico se define como $2 m \omega$ y es la menor cantidad de amortiguamiento que permitiría al oscilador desplazado regresar a su posición original sin oscilación alguna. Para la mayor parte de las estructuras, la cantidad de amortiguamiento viscoso en el sistema varía entre 3 por ciento y 15 por ciento del crítico. Si se substituye el valor de 20 por ciento, 0.20, en la expresión anterior para la frecuencia circular amortiguada se obtiene $\omega_d = 0.98 \omega$. Dado que los dos valores son casi iguales para valores de amortiguamiento encontrados normalmente en sistemas estructurales, en la práctica la frecuencia circular no amortiguada se emplea en lugar de la frecuencia circular amortiguada.

3. Respuesta a cargas de impulso

- Con objeto de desarrollar un método de evaluación de la respuesta estructural de un sistema sujeto a una carga dinámica cualquiera, es conveniente considerar primero la respuesta de la estructura a una carga de impulso de corta duración como se muestra en la figura 1.2.a. Si la duración, Δt , del pulso $p(\tau)$, aplicado en el tiempo τ es relativamente corta con respecto al periodo fundamental de vibración de la estructura, T , entonces los efectos del impulso pueden considerarse como un cambio incremental de la velocidad. Empleando las relaciones del principio del impulso y cantidad de movimiento:

$$p(\tau) \Delta t = m \Delta v(\tau) \tag{1.20}$$

se obtiene, como velocidad inicial equivalente:

$$\Delta v(\tau) = \frac{1}{m} p(\tau) \Delta t$$

Luego de la aplicación del impulso, el sistema se comporta con movimiento en vibración libre y su respuesta está dada por la ecuación 1.16. Aplicando las condiciones iniciales al comienzo de la fase de vibración libre,

$$v(t) = \frac{1}{m \omega} \int p(\tau) \operatorname{sen} \omega(t - \tau) d\tau \tag{1.21}$$

Para un sistema con amortiguamiento, la respuesta de vibración libre está dada por la ecuación 1.19. Sustituyendo las condiciones iniciales, de manera semejante al caso anterior, se tiene para sistemas amortiguados:

$$v(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int p(\tau) e^{-\phi \omega(t - \tau)} \operatorname{sen} \omega_d(t - \tau) d\tau \tag{1.22}$$

4. Respuesta a carga general dinámica

El desarrollo anterior de la respuesta dinámica a una carga de impulso de corta duración puede fácilmente extenderse al caso de sistemas sujetos a una historia arbitraria de cargas. Cualquier historia arbitraria de cargas puede descomponerse en una serie de impulsos de corta duración como se muestra en la figura 1.2.b. Considérese uno de estos impulsos que termina en el tiempo τ después de iniciada la historia de cargas y con una duración $d\tau$. La

amplitud de este pulso diferencial es $p(\tau) d\tau$, y produce una respuesta diferencial que está dada por la expresión:

$$d v(\tau) = \frac{p(\tau) \operatorname{sen} \omega t' d\tau}{m \omega} \quad (1.23)$$

La variable tiempo t' representa la fase de vibración libre que sigue al impulso y puede expresarse como:

$$t' = t - \tau \quad (1.24)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación 1.23 resulta:

$$d v(\tau) = \frac{p(\tau) \operatorname{sen} \omega (t - \tau) d\tau}{m \omega} \quad (1.25)$$

La repuesta total puede obtenerse sumando las respuestas de los impulsos diferenciales en toda la historia de carga. Al integrar la ecuación 1.25, el desplazamiento total para sistemas sin amortiguamiento es:

$$v(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen} \omega (t - \tau) d\tau \quad (1.26)$$

la cual se conoce como integral de Duhamel. Al considerar sistemas amortiguados, la respuesta diferencial está dada por la ecuación 1.22 y la integral de Duhamel queda:

$$v(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\Phi \omega (t - \tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (1.27)$$

5. Respuesta sísmica de estructuras elásticas.

a. Historia de respuesta.

La respuesta a carga debida a sismo puede obtenerse directamente de la integral de Duhamel si la fuerza dependiente del tiempo $p(t)$ se reemplaza con la fuerza efectiva dependiente del tiempo $p_e(t)$, la cual es el producto de la masa y la aceleración del terreno, $p_e(t) = m d_s(t)$. Realizando las sustituciones anteriores en la ecuación 1.27 se obtiene la siguiente expresión para el desplazamiento:

$$v(t) = \frac{I_s(t)}{\omega} \quad (1.28)$$

donde el parámetro $I_s(t)$ representa la integración, con unidades de velocidad y está definida como:

$$I_s(t) = \int_0^t d_s(\tau) e^{-\Phi \omega (t - \tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (1.29)$$

El desplazamiento de la estructura en cualquier instante puede obtenerse empleando la ecuación 1.28. Es conveniente expresar las fuerzas que se presentan en la estructura durante un sismo en términos de las fuerzas efectivas de inercia, la fuerza de inercia es el producto de la masa y la aceleración total. Empleando la ecuación 1.11, la aceleración total puede expresarse como:

$$b(t) = \frac{c}{m} \dot{v}(t) + \frac{k}{m} v(t) \quad (1.30)$$

Si el término de amortiguamiento puede ser despreciado ya que su contribución a la ecuación de equilibrio es pequeña, la aceleración total es aproximadamente:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 v(t) \quad (1.31)$$

La fuerza sísmica efectiva está dada entonces por:

$$Q(t) = m \omega^2 v(t) \quad (1.32)$$

La expresión anterior da el valor del cortante en la base de una estructura de un nivel en un instante cualquiera de la historia del sismo en cuestión. El momento de volteo actuando en la base de la estructura puede calcularse multiplicando la fuerza de inercia por la altura de la estructura:

$$M(t) = h m \omega^2 v(t) \quad (1.33)$$

b. Espectro de respuesta.

El cálculo de desplazamientos y fuerzas en cada instante, t , durante la historia de un temblor puede requerir un esfuerzo computacional considerable, aún para estructuras sencillas. Como se mencionó anteriormente, para muchos problemas prácticos y especialmente en diseño estructural, solo se requieren los valores máximos de la respuesta. El valor máximo del desplazamiento, calculado conforme la ecuación 1.28, se denomina desplazamiento espectral:

$$S_d = v(t)_{\max} \quad (1.34)$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones 1.32 y 1.33 da como resultado las expresiones del cortante en la base máximo y momento de volteo máximo de un sistema de un grado de libertad:

$$Q_{\max} = m \omega^2 S_d \quad (1.35)$$

$$M_{\max} = n m \omega^2 S_d \quad (1.36)$$

Un examen de la ecuación 1.28 muestra que la velocidad máxima puede calcularse aproximadamente multiplicando el desplazamiento espectral por la frecuencia circular. El parámetro así definido se conoce como pseudovelocidad espectral y se expresa como:

$$S_v = \omega S_d \quad (1.37)$$

De manera similar, la ecuación 1.31 indica que la aceleración total puede calcularse aproximadamente como el producto del desplazamiento espectral y el cuadrado de la frecuencia circular. Este producto se conoce como pseudoaceleración espectral y se expresa como:

$$S_{\ddot{u}} = \omega^2 S_d \quad (1.38)$$

Una gráfica de los parámetros espectrales contra la frecuencia o el periodo constituye el espectro de respuesta para ese parámetro.

6. Coordenadas generalizadas

Hasta ahora solo se han considerado estructuras de un nivel que pueden ser idealizadas como sistemas de un grado de libertad. El análisis de la mayoría de los sistemas estructurales requiere de una idealización más complicada aún si la respuesta puede representarse en términos de un solo grado de libertad. El método de coordenadas generalizadas permite representar la respuesta de sistemas estructurales más complejos en términos de una sola coordenada dependiente del tiempo, conocida como coordenada generalizada.

Los desplazamientos de la estructura se relacionan con la coordenada generalizada como:

$$v(x, t) = \phi(x) Y(t) \quad (1.39)$$

donde $Y(t)$ es la coordenada generalizada y $\phi(x)$ es una función espacial de forma que relaciona los grados de libertad de la estructura, $v(x, t)$, con la coordenada generalizada. Para un sistema de un grado de libertad generalizado, es necesario representar las fuerzas de amortiguamiento y restitutivas en términos de la velocidad relativa y desplazamiento relativo entre los extremos del elemento:

$$\Delta \dot{v}(x, t) = \Delta \phi(x) \dot{Y}(t) \quad (1.40)$$

$$\Delta v(x, t) = \Delta \phi(x) Y(t) \quad (1.41)$$

La mayoría de las estructuras puede idealizarse como un voladizo vertical, lo cual limita el número de funciones de desplazamiento que pueden emplearse para representar el desplazamiento horizontal. Una vez que la función de desplazamiento es seleccionada, la estructura es obligada a deformarse de esta forma. Lo anterior implica que la función de desplazamiento debe ser seleccionada cuidadosamente para obtener una buena aproximación de las propiedades dinámicas y de la respuesta del sistema.

a. Funciones de desplazamiento y propiedades generalizadas.

La formulación de la ecuación de movimiento en términos de una coordenada generalizada se restringirá a sistemas que consisten de masas concentradas y elementos discretos. La resistencia lateral está dada por los elementos discretos y sus fuerzas son proporcionales a los desplazamientos relativos entre los extremos del elemento. Las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a las velocidades relativas entre los extremos del elemento discretizado. La ecuación de equilibrio dinámico está dada por la ecuación 1.6, la cual representa un sistema de fuerzas en equilibrio en todo momento. El principio del trabajo virtual en la forma de desplazamientos establece que "si a un sistema de fuerzas en equilibrio se les aplica un desplazamiento virtual consistente con las condiciones de frontera, entonces el trabajo realizado es igual a cero".

Aplicando este principio a la ecuación 1.6, se tiene una ecuación del trabajo virtual de la forma:

$$f_1(t) \delta v - f_2(t) \Delta v - f_3(t) \Delta v - p(t) \delta v = 0 \quad (1.42)$$

donde se sobreentiende que $v = v(x, t)$ y que los desplazamientos virtuales aplicados a la fuerza de amortiguamiento y elástica de restitución son desplazamientos relativos virtuales. El desplazamiento virtual puede expresarse como:

$$\delta v(x, t) = \phi(x) \delta Y(t) \quad (1.43)$$

y el desplazamiento relativo virtual como.

$$\delta \Delta v(x, t) = \Delta \phi(x) \delta Y(t) \quad (1.44)$$

donde:

$$\Delta v(x, t) = \phi(x) Y(t) - \phi(x) Y(t) = \Delta \phi(x) Y(t)$$

Las fuerzas de inercia, amortiguamiento y restauradoras pueden expresarse como:

$$f_1(t) = m \dot{v}(t) = m \phi \dot{Y}(t)$$

$$f_2(t) = c \Delta v(t) = c \Delta \phi \dot{Y}(t) \quad (1.45)$$

$$f_s(t) = k \Delta v(t) = k \Delta \phi Y(t)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.43, 1.44 y 1.45 en la 1.42 se obtiene la siguiente ecuación de movimiento en términos de la coordenada generalizada:

$$m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = p^*(t) \quad (1.46)$$

donde m^* , c^* , k^* y p^* se conocen como parámetros generalizados y se definen como:

$$m^* = \sum m_i \phi_i^2$$

$$c^* = \sum c_i \Delta \phi_i^2 \quad (1.47)$$

$$k^* = \sum k_i \Delta \phi_i^2$$

$$p^* = \sum p_i \phi_i$$

Para una aceleración de la base función del tiempo la fuerza generalizada se transforma en:

$$p^* = d_s \ddot{u} \quad (1.48)$$

donde:

$$d_s = \sum m_i \phi_i = \text{factor de participación} \quad (1.49)$$

Es conveniente expresar al amortiguamiento generalizado en términos del amortiguamiento crítico de la manera que sigue:

$$c^* = \sum c_i \Delta \phi_i^2 = 2 \phi m^* \omega \quad (1.50)$$

donde ω representa la frecuencia circular del sistema generalizado y dado por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (1.51)$$

El efecto del método de coordenadas generalizadas consiste en transformar un sistema dinámico de múltiples grados de libertad en un sistema equivalente de un grado de libertad en términos de una coordenada generalizada. Esta transformación se muestra esquemáticamente en la figura 1.3. El grado en que la respuesta del sistema transformado represente al sistema original dependerá de que tanto se aproxime la forma deflectada supuesta a la real. Una vez obtenida la respuesta dinámica en términos de la coordenada generalizada, la ecuación 1.39 puede emplearse para determinar los desplazamientos en la estructura, y estos a su vez para calcular las fuerzas en los miembros estructurales. En principio, cualquier función que represente las características deformadas generales de la estructura y satisfaga las condiciones de apoyo podría servir. Sin embargo, cualquier forma deformada distinta de la de la configuración natural de vibración requerirá de restricciones externas adicionales para mantener el equilibrio. Estas restricciones adicionales tienden a rigidizar el sistema y por lo tanto a incrementar la frecuencia calculada. La configuración real no tendrá restricciones adicionales y por lo tanto tendrá la menor frecuencia de vibración.

b. Método de Rayleigh.

El método de Rayleigh se emplea para analizar sistemas vibratorios empleando la ley de la conservación de la energía. Se emplea para calcular con mucha precisión la frecuencia natural de un estructura. Además de estimar el periodo

fundamental el procedimiento puede emplearse para estimar la función de forma $\phi(x)$.

En un sistema elástico no amortiguado, la energía potencial máxima puede expresarse en términos del trabajo externo realizado por las fuerzas aplicadas. En términos de una coordenada generalizada esta expresión puede escribirse como

$$(EP)_{\max} = \frac{Y}{2} \sum p_i \phi_i = \frac{p^* Y}{2} \quad (1.52)$$

Similarmente, la energía cinética máxima puede expresarse en términos de la coordenada generalizada como:

$$(EC)_{\max} = \frac{\omega^2 Y^2}{2} \sum m_i \phi_i^2 = \frac{\omega^2 Y^2 m^*}{2} \quad (1.53)$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la energía para un sistema elástico no amortiguado, estas dos cantidades deben ser iguales entre si e iguales a la energía total del sistema. Igualando las ecuaciones 1.52 y 1.53 se obtiene la siguiente expresión para la frecuencia circular:

$$\omega = \sqrt{p^* / m^* Y} \quad (1.54)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación 1.17 para el periodo resulta en:

$$T = 2\pi \sqrt{m^* Y / p^*} \quad (1.55)$$

Multiplicando el numerador y denominador del radical por Y , y empleando la ecuación 1.39 se obtiene la expresión para el periodo fundamental:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum \kappa v_i^2}{g \sum p_i v_i}} \quad (1.56)$$

Las fuerzas que deben aplicarse lateralmente para obtener la forma deflectada $\phi(x)$ o el desplazamiento $v(x)$ son las fuerzas de inercia. Si se asume una variación lineal de la aceleración con la altura de un edificio, se tiene una distribución de las fuerzas de inercia en forma de triángulo invertido. Las deflecciones resultantes pueden usarse directamente en la ecuación 1.56 para estimar el periodo de vibración o pueden normalizarse en términos de la coordenada generalizada para obtener la función espacial de forma a emplear en el método de coordenada generalizada.

c. Análisis en el tiempo.

Substituyendo los parámetros generalizados de las ecuaciones 1.47 y 1.48 en la solución de la integral de Duhamel, ecuación 1.27, se obtiene la solución para el desplazamiento:

$$v(x, t) = \frac{\Phi(x) \omega V(t)}{\pi^* \omega} \quad (1.57)$$

Empleando la ecuación 1.31, la fuerza de inercia en cualquier posición x sobre la base puede calcularse como:

$$q(x, t) = m(x) v(x, t) = m(x) \omega v(x, t) \quad (1.58)$$

la que, empleando la ecuación 1.57, se convierte en:

$$q(x, t) = \frac{m(x) \Phi(x) \omega V(t)}{m^*} \quad (1.59)$$

El cortante en la base se obtiene sumando las fuerzas de inercia distribuidas en la altura H de la estructura:

$$Q(t) = \int q(x, t) dx = \frac{\xi \Omega^2}{m} \omega V(t) \quad (1.60)$$

Las relaciones anteriores pueden emplearse para calcular los desplazamientos y fuerzas en un sistema generalizado de un grado de libertad en cualquier instante.

d. Análisis de la respuesta espectral.

El valor máximo de la velocidad dado por la ecuación 1.29, se define como la pseudovelocidad espectral, S_{pv} , que se relaciona con el desplazamiento espectral, S_p , mediante la ecuación 1.37. Al substituir este valor en la ecuación 1.57 se tiene la expresión para el desplazamiento máximo en términos del desplazamiento espectral:

$$v(x)_{max} = \frac{\Phi(x) \xi S_p}{m} \quad (1.61)$$

Las fuerzas en el sistema pueden calcularse de las fuerzas de inercia, y pueden expresarse como:

$$q(x)_{max} = m(x) \ddot{v}(x)_{max} = m(x) \omega^2 v(x)_{max} \quad (1.62)$$

Rescribiendo este resultado en términos de la pseudo aceleración espectral, S_{pa} , se tiene

$$q(x)_{max} = \frac{\Phi(x) m(x) \xi S_{pa}}{m} \quad (1.63)$$

De considerable interés es la determinación del cortante basal. Este parámetro es clave para determinar las fuerzas sísmicas de diseño en la mayoría de los reglamentos. El cortante en la base Q , de la expresión anterior, sumando las fuerzas de inercia y empleando la ecuación 1.49:

$$Q(x)_{max} = \frac{\xi \cdot S_{pa}}{m} \quad (1.64)$$

Es de interés expresar el cortante basal en términos del peso efectivo, definido como

$$W'' = \frac{\sum n \Phi_i}{\sum n \Phi} \quad (1.65)$$

Por lo que la expresión del cortante basal máximo queda de la forma

$$Q_{max} = W'' S_{pa} \xi \quad (1.66)$$

Esta es similar a la ecuación básica empleada en los reglamentos, la cual tiene la forma

$$Q_{max} = C W \quad (1.67)$$

La fuerza sísmica efectiva puede determinarse distribuyendo el cortante en la base en la altura de la estructura. Esta distribución depende de la forma de la función de desplazamiento y tiene la forma

$$q = Q_{max} \frac{m \Phi}{\sum} \quad (1.68)$$

Y el momento de volteo como la suma de los productos de las fuerzas de inercia y sus alturas a la base respectiva:

$$M_c = \sum h_i q \quad (1.69)$$

C. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

En muchos sistemas estructurales no es posible modelar la respuesta dinámica en términos de una sola coordenada del desplazamiento. Estos sistemas requieren un cierto número de coordenadas independientes de desplazamiento para describir el movimiento de las masas en cualquier instante.

Con objeto de simplificar el problema normalmente se supone para edificios que la masa de la estructura está concentrada en el centro de masa de cada nivel individual. Esto da por resultado una matriz diagonal de propiedades de masa. También conviene desarrollar la matriz de rigideces en función de las matrices de rigideces individuales de los elementos de cada nivel. La más sencilla idealización para un edificio de varios niveles se basa en las siguientes hipótesis: (i) el sistema de piso es rígido en su plano; (ii) las vigas son rígidas con respecto a las columnas y (iii) las columnas son flexibles en la dirección horizontal pero rígidas en la vertical. Si se emplean estas hipótesis, el edificio se idealiza con tres grados de libertad para cada nivel: un grado de libertad traslacional en cada una de dos direcciones ortogonales, y una rotación alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de masa. Si el sistema anterior se reduce al plano, este tendrá un grado de libertad traslacional en cada nivel. Ver figuras 1.3.a. y 1.3.b.

1. Modos de vibrar y frecuencias.

La ecuación de movimiento para un sistema de varios grados de libertad sin amortiguamiento puede escribirse en forma matricial como:

$$[M] \ddot{v}(t) + [K] v(t) = \{0\} \quad (1.70)$$

Dado que el movimiento de un sistema en vibración libre es armónico, el vector desplazamiento puede representarse como:

$$v(t) = v \sin \omega t \quad (1.71)$$

Diferenciando dos veces con respecto al tiempo se tiene:

$$\ddot{v}(t) = -\omega^2 v(t) \quad (1.72)$$

Substituyendo las ecuaciones 1.71 y 1.72 en la 1.70 se obtiene la ecuación de valores característicos:

$$([K] - \omega^2 [M]) v(t) = \{0\} \quad (1.73)$$

En virtud de tener un conjunto de ecuaciones de equilibrio homogéneas el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igual a cero:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (1.74)$$

De donde se obtiene un polinomio de grado N . Las N raíces del polinomio representan las frecuencias de los N modos de vibrar. El modo que tiene la menor frecuencia (mayor periodo) se conoce como primer modo o modo fundamental. Una vez conocidas las frecuencias, se substituyen una a la vez en la ecuación de equilibrio 1.73, la cual puede ser resuelta para las amplitudes de movimiento de cada componente del desplazamiento del modo particular de vibración.

2. Ecuaciones de movimiento en coordenadas normales.

El teorema de los trabajos recíprocos de Betti, puede emplearse para desarrollar dos propiedades de ortogonalidad de los modos de vibrar que simplifican significativamente las ecuaciones de movimiento. La primera de éstas establece que los modos de vibrar son ortogonales con respecto a la matriz de masas y se expresa en forma matricial como

$$\{\phi_m\}^T [M] \{\phi_m\} = \{0\} \quad (m = n) \quad (1.75)$$

Empleando las ecuaciones 1.73 y 1.75, la segunda propiedad puede expresarse en términos de la matriz de rigideces como:

$$\{\phi_m\}^T [K] \{\phi_m\} = \{0\} \quad (m = n) \quad (1.76)$$

la cual establece que los modos de vibrar son ortogonales con respecto a la matriz de rigideces. Además se supone que los modos de vibrar son también ortogonales con respecto a la matriz de amortiguamiento:

$$\{\phi_m\}^T [C] \{\phi_m\} = \{0\} \quad (m = n) \quad (1.77)$$

Dado que cualquier sistema de varios grados de libertad teniendo N grados de libertad tiene a su vez N modos de vibrar independientes, es posible expresar la forma deformada de la estructura en términos de las amplitudes de estos modos tratándolos como coordenadas generalizadas (en ocasiones llamada coordenadas normales). Dado que el desplazamiento de un sitio particular, $v_i(t)$, puede obtenerse sumando la contribución de cada modo se tiene:

$$v_i(t) = \sum_{r=1}^n \phi_{r,i} q_r(t) \quad (1.78)$$

De manera similar, el vector de desplazamientos puede expresarse como:

$$\{v(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\phi_r\} q_r(t) = [\Phi] \{q(t)\} \quad (1.79)$$

Es conveniente escribir las ecuaciones de movimiento de manera matricial como

$$[M] \{\ddot{v}(t)\} + [C] \{\dot{v}(t)\} + [K] \{v(t)\} = \{P(t)\} \quad (1.80)$$

la cual es similar a la ecuación para un sistema de un grado de libertad, ecuación 1.9. Las diferencias se deben a que la masa, amortiguamiento y rigidez se representan ahora por matrices que representan los diferentes grados de libertad, adicionales, y la aceleración, la velocidad, el desplazamiento, y las cargas aplicadas, por vectores que contienen los grados de libertad adicionales. La ecuación de movimiento puede expresarse en términos de las coordenadas normales, $q(t)$; substituyendo la ecuación 1.79 y sus derivadas en la ecuación 1.80 da como resultado:

$$[M] \{\Phi\} \ddot{q}(t) + [C] \{\Phi\} \dot{q}(t) + [A] \{\Phi\} q(t) = \{P(t)\} \quad (1.81)$$

Multiplicando la ecuación anterior por la traspuesta de cualquier vector modal, ϕ_n , se tiene:

$$\phi_n^T [M] \{\Phi\} \ddot{q}(t) + \phi_n^T [C] \{\Phi\} \dot{q}(t) + \phi_n^T [A] \{\Phi\} q(t) = \phi_n^T \{P(t)\} \quad (1.82)$$

Empleando las condiciones de ortogonalidad de las ecuaciones 1.75 a 1.77, el conjunto de ecuaciones se reduce a una ecuación de movimiento similar a la de un sistema de un grado de libertad, en términos de las propiedades generalizadas para el enésimo modo de vibrar y de la coordenada normal $q_n(t)$. Así:

$$M_n^* \ddot{q}_n(t) + C_n^* \dot{q}_n(t) + A_n^* q_n(t) = P_n^*(t) \quad (1.83)$$

donde las propiedades generalizadas para el enésimo modo de vibrar son:

$$M_n^* = \phi_n^T [M] \phi_n$$

$$C_n^* = \phi_n^T [C] \phi_n = 2 \phi_n^T \omega_n M_n^* \quad (1.84)$$

$$K_n^* = \{\phi_n\}^T [K] \{\phi_n\} = \omega_n^2 M_n^*$$

$$P_n^* = \{\phi_n\}^T \{P(t)\}$$

Las relaciones anteriores pueden emplearse para simplificar aún más la ecuación de movimiento a la forma

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n^*(t)}{M_n^*} \quad (1.85)$$

Debe notarse que las expresiones para las propiedades generalizadas de cualquier modo son equivalentes a las definidas previamente para el sistema generalizado de un grado de libertad. Por tanto el uso de los modos normales transforma un sistema de N grados de libertad en N sistemas generalizados de un grado de libertad; ver figuras 1.3.c. y 1.3.d. La solución completa del sistema se obtiene por superposición de las soluciones modales independientes. El empleo de este método implica un ahorro significativo en tiempo, ya que en la mayoría de los casos no es necesario emplear los N modos de respuesta para representar con adecuada precisión la respuesta de la estructura. En la mayor parte de las estructuras los primeros modos son los de mayor contribución en la respuesta modal. Por tanto, la respuesta puede obtenerse con suficiente precisión en términos de un número limitado de respuestas modales.

a. Análisis de la respuesta sísmica. Como en el caso de los sistemas de un grado de libertad, para el análisis sísmico la fuerza dependiente del tiempo debe reemplazarse por la carga efectiva, la que está dada por el producto de la masa en cada nivel, M_i , y la aceleración del terreno $\ddot{d}_g(t)$. El vector de cargas efectivas se obtiene como el producto de la matriz de masas y la aceleración del terreno:

$$P_e(t) = [M] \{\Gamma\} \ddot{d}_g(t) \quad (1.86)$$

donde $\{\Gamma\}$ es un vector de coeficientes de influencia, del que la componente i representa la aceleración de la coordenada i debida a una aceleración unitaria en la base. Para el modelo estructural en el que los grados de libertad están representados por los desplazamientos horizontales de los niveles, el vector $\{\Gamma\}$ es igual a un vector con elementos unidad, dado que para una aceleración unitaria de la base en la dirección horizontal todos los grados de libertad tienen una aceleración horizontal unitaria. Empleando la ecuación 1.82, la carga efectiva generalizada para el n -ésimo modo es

$$P_n^*(t) = \underline{\alpha}_n \ddot{d}_g(t) \quad (1.87)$$

donde $\underline{\alpha}_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\Gamma\}$.

Sustituyendo la ecuación 1.87 en la 1.85 se obtiene la expresión para la respuesta sísmica del n -ésimo modo de un sistema de varios grados de libertad:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \underline{\alpha}_n \ddot{d}_g(t) / M_n^* \quad (1.88)$$

De manera similar a la empleada para el sistema de un grado de libertad, la respuesta de este modo para cualquier instante t puede obtenerse empleando la integral de Duhamel, así:

$$q_n(t) = \frac{\underline{\alpha}_n I_{vn}(t)}{M_n^* \omega_n} \quad (1.89)$$

donde $I_{vn}(t)$ representa la integral:

$$I_n(t) = \int_0^t \ddot{d}_s(\tau) e^{-\Phi_n \omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (1.90)$$

El desplazamiento completo de la estructura para cualquier instante t se obtiene por la superposición de las contribuciones individuales de cada modo; empleando la ecuación 1.79:

$$\{v(t)\} = \sum_{n=1}^N \{\Phi_n\} q_n(t) = [\Phi] \{q(t)\} \quad (1.91)$$

Las fuerzas sísmicas resultantes pueden expresarse en términos de la aceleración efectiva, la cual para cada modo está dada por el producto de la frecuencia circular y la amplitud del desplazamiento de la coordenada generalizada:

$$q_{ne}(t) = \omega_n^2 q_n(t) = \frac{\xi_n \omega_n I_n(t)}{M_n^*} \quad (1.92)$$

La aceleración correspondiente al enésimo modo esta dada por:

$$\{v_{ne}(t)\} = \{\Phi_n\} q_{ne}(t) \quad (1.93)$$

y las correspondientes fuerzas sísmicas efectivas:

$$\{f_n(t)\} = \{M\} \{v_{ne}(t)\} = \{M\} \{\Phi_n\} \omega_n^2 \xi_n I_n(t) / M_n^* \quad (1.94)$$

La fuerza sísmica total se obtiene sumando las fuerzas modales individuales:

$$F(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) = \{M\} \{\Phi\} \omega^2 q(t) \quad (1.95)$$

El cortante en la base se obtiene sumando las fuerzas sísmicas en toda la altura de la estructura:

$$V_b(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) = \{1\}^T \{f_n(t)\} = M_e \omega_n^2 I_n(t) \quad (1.96)$$

donde $M_e = \xi_n^2 \cdot M_n^*$ es la masa efectiva del enésimo modo.

La suma de las masas efectivas para cada modo es igual a la masa total de la estructura. Lo anterior permite determinar el número de respuestas modales necesario para calcular adecuadamente la respuesta estructural completa. Si la respuesta total ha de ser representada por un número finito de modos y la suma de sus correspondientes masas modales es mayor que un porcentaje predefinido de la masa total, el número de modos considerado en el análisis es adecuado. Si este no es el caso, deben considerarse modos adicionales. El cortante en la base para el enésimo modo, ecuación 1.96, puede expresarse en terminos de el peso efectivo, W_{en} , como:

$$V_b(t) = \frac{W_{en}}{g} \omega_n^2 I_n(t) \quad (1.97)$$

donde

$$W_{en} = \frac{\sum_{i=1}^N W_i \Phi_{in}^2}{\sum_{i=1}^N W_i \Phi_{in}} \quad (1.98)$$

El cortante en la base puede distribuirse en la altura del edificio de manera similar a la ecuación 1.68, con las fuerzas

sísmicas modales expresadas como

$$\{ f_n(t) \} = \frac{[M] \{ \Phi_n \} V_n(t)}{\xi_n} \quad (1.99)$$

b. Análisis de la respuesta espectral.

Las ecuaciones anteriores para la respuesta de cualquier modo de vibración son exactamente equivalentes a las expresiones desarrolladas para el sistema generalizado de un grado de libertad. Por tanto, la respuesta máxima de cualquier modo puede obtenerse de manera similar. Por analogía con las ecuaciones 1.28 y 1.37 el desplazamiento modal máximo puede escribirse como:

$$q_n(t)_{max} = \frac{f_n(t)_{max}}{\omega_n} = S_{c_n} \quad (1.100)$$

Haciendo esta sustitución en la ecuación 1.89 se obtiene

$$q_{n_{max}} = \xi_n S_{c_n} M_n^* \quad (1.101)$$

La distribución de los desplazamientos modales en la estructura puede obtenerse multiplicando esta expresión por el vector modal

$$\{ V_n \}_{max} = \{ \Phi_n \} q_{n_{max}} = \frac{\{ \Phi_n \} \xi_n S_{c_n}}{M_n^*} \quad (1.102)$$

Las fuerzas sísmicas efectivas máximas pueden calcularse a partir de las aceleraciones modales dadas por la ecuación 1.94

$$\{ f_n \}_{max} = \frac{[M] \{ \Phi_n \} \xi_n S_{c_n}}{M_n^*} \quad (1.103)$$

Sumando estas fuerzas en la altura de la estructura se obtiene la siguiente expresión para el cortante máximo debido al *n*-ésimo modo:

$$V_{n_{max}} = \xi_n S_{c_n} M_n^* \quad (1.104)$$

la cual puede expresarse en términos del peso efectivo como

$$V_{n_{max}} = W_n S_{c_n} \xi \quad (1.105)$$

donde W_n se define en la ecuación 1.98

Finalmente, el momento de volteo en la base del edificio para el *n*-ésimo modo puede determinarse como

$$M_n = \{ h \} M_n \{ \Phi_n \} \xi_n S_{c_n} M_n^* \quad (1.106)$$

donde $\{ h \}$ es un vector fila de las alturas de cada entrepiso, por encima de la base.

3. Combinaciones modales.

Empleando el análisis de la respuesta espectral en un sistema de varios grados de libertad, la respuesta modal máxima se obtiene con el conjunto de modos que se seleccionaron para representar la respuesta espectral. La cuestión ahora es como combinar estas respuestas modales máximas para estimar de la mejor manera la respuesta total. Las

ecuaciones de la respuesta modal como la 1.91 y 1.95 dan resultados precisos en tanto que sean evaluadas en el tiempo. En el análisis espectral, el tiempo ha sido substituido por la respuesta modal máxima. Las respuestas máximas de cada modo no necesariamente ocurren al mismo tiempo; por tanto se deben combinar de manera que las respuestas combinadas se aproximen lo suficiente a la respuesta total máxima.

Una combinación que se ha empleado es tomar la suma de los valores absolutos de las respuestas modales (SVA). Esta combinación puede expresarse como:

$$R_{SVA} = \sum_{n=1}^N |R_n| \quad (1.107)$$

Dado que esta combinación supone que los máximos ocurren al mismo tiempo y con el mismo signo, se tiene un límite superior de la respuesta muy conservador para diseño.

Un estimador más razonable, basado en la teoría de las probabilidades, puede obtenerse empleando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RCSC); se expresa como:

$$R_{RCSC} = \sqrt{\sum_{n=1}^N R_n^2} \quad (1.108)$$

Este método ha mostrado dar buena aproximación para sistemas estructurales con frecuencias poco parecidas entre sí, o remotamente acopladas. Esto es:

$$\left| \frac{w - w_j}{w} \right| \leq 0.10$$

Para sistemas estrechamente acoplados, se ha propuesto el criterio de la combinación cuadrática completa (CCC) que permite incrementar la precisión en la evaluación de la respuesta de ciertos sistemas estructurales. La combinación cuadrática completa se expresa como:

$$R_{CCC} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i R_j} \quad (1.109)$$

donde para amortiguamientos modales constantes, $\varphi_i = \varphi_j \forall i, j$:

$$R = \frac{\delta \varphi \omega \lambda \lambda^2}{\lambda^2 + 2\varphi \lambda + \lambda^2} \quad (1.110)$$

$$\lambda = \omega \omega$$

$$\varphi = \zeta_1 \zeta_2$$

El empleo del método RCSC para sistemas en dos dimensiones y el método de CCC para sistemas en dos o tres dimensiones da buenas aproximaciones a la respuesta sísmica de sistemas elásticos sin requerir de un análisis completo de la historia de cargas.

4. Valuación de fuerzas sísmicas.

Una manera de comparar los efectos de los sismos es empleando espectros de respuesta, los cuales muestran las características de los sismos en función de sus efectos (desplazamiento, velocidad, aceleración) sobre las estructuras.

Es evidente que durante la vida útil de una estructura, más de una vez estará sujeta a la acción de sismos. Si interesan los espectros para obtener las aceleraciones máximas, conviene considerar no sólo el espectro de respuesta de un solo sismo, sino los de todos aquellos que pudieran tener efecto sobre la estructura. Para cubrir esta posibilidad se utilizan Espectros de Diseño que en combinación con algún método de análisis sísmico proporciona las fuerzas sísmicas de diseño o revisión de la estructura.

Los diferentes métodos para determinar las fuerzas sísmicas que actúan en la estructura se especifican en el artículo 203 del RCDF93, en función de las características especificadas en la sección 2 de las NTC's de Sismo.

a. Análisis estático.

El análisis sísmico estático es aplicable a edificios cuya altura no excede 60 m. Para efectuar el análisis se procede de la manera siguiente :

- Se considera que las fuerzas de inercia a diferentes niveles de la estructura forman un conjunto de fuerzas horizontales actuando sobre cada uno de los puntos donde se suponen concentradas las masas, incluyendo apéndices.
- Cada una de las fuerzas se considera igual al peso de la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente proporcional a la altura de la masa en cuestión sobre el desplante (o nivel a partir del cual las deformaciones estructurales son apreciables).

La forma como se especifica el cálculo de fuerzas horizontales expresa en forma algebraica la variación lineal de aceleraciones, de magnitud ajustada para que la fuerza cortante en la base sea igual a:

$$\frac{C}{D} W$$

La aplicación de los párrafos anteriores conduce a que la fuerza horizontal, F_n , aplicada en el centro del nivel n está dada por la expresión:

$$F_n = C_s \frac{\sum W_i h_i}{\sum W_i h_n} W_n h_n \quad (1.111)$$

donde:

C_s Coeficiente sísmico de diseño, art. 206, RCDF93 y sección 3, NTC's de Sismo.

$$C_s = C / D$$

W_i Peso del nivel i .

h_i Altura del nivel i sobre el desplante.

Puede demostrarse que el análisis estático es un caso particular del análisis dinámico; en efecto, a partir de la ecuación 1.88 se tiene

$$q_n \ddot{x} + 2 \phi_n \omega_n \dot{q}_n + q_n = \ddot{d}_n(t) M_n$$

La amplitud modal máxima está dada por la expresión 1.101:

$$q_{\max n} = \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{M_n^*} = \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{\omega_n^2 M_n^*}$$

Para el primer modo:

$$q_{\max 1} = \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{\omega_1^2 M_1^*}$$

El vector de desplazamientos máximos de la estructura, para ese modo, es:

$$D_{\max 1} = \Phi_1 q_{\max 1}$$

El vector de fuerzas de inercia correspondiente resulta:

$$F_{\max 1} = K D_{\max 1} = K \Phi_1 \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{\omega_1^2 M_1^*} = M \Phi_1 \omega_1^2 \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{\omega_1^2 M_1^*} = M \Phi_1 \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{M_1^*}$$

El vector de fuerzas cortantes respectivas es:

$$V_{\max 1} = J^T F_{\max 1} = J^T M \Phi_1 \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{M_1^*} = \sum_i \xi_i \frac{W_i C}{M_1^*} S_{D_i}$$

de donde:

$$\frac{V_{\max 1}}{\sum_i \xi_i} = \frac{\sum_i \xi_i S_{D_i}}{M_1^*}$$

así, el vector de fuerzas de inercia es:

$$F_{\max 1} = M \Phi_1 \frac{V_{\max 1}}{\sum_i \xi_i}$$

por lo que la fuerza de inercia en la masa j es:

$$F_j = m_j \Phi_j \frac{V_{\max 1}}{\sum_i \xi_i} = \frac{W_j C}{\sum_i \frac{W_i C}{S_i}} \Phi_j$$

Como se mencionó en I.B.6.a. se requiere conocer la forma deformada de la estructura para conocer las fuerzas que se generan, en este método se supone que la configuración deformada correspondiente al primer modo es lineal, así:

$$\Phi = \frac{r}{H}$$

y la fuerza de inercia en la masa j es:

$$F_j = W_j \frac{r}{H} \frac{W_j C}{\sum_i \frac{W_i C}{H}}$$

$$F_j = C \frac{W_j}{\sum_i W_i} W_j r$$

La expresión anterior es equivalente a la de la ecuación 1.111

Los aspectos sobresalientes del método estático son los siguientes:

- Solo se considera el modo fundamental.
- La configuración aproximada de este modo es lineal; $\phi_{1j} = h_j / H$
- La masa equivalente del primer modo es 'igual' al total de la estructura (Carga Muerta + Carga Viva Máxima)
- Se emplea la ordenada espectral máxima 'C' del espectro de diseño, independientemente del periodo estructural.

b. Método simplificado de análisis.

Este tipo de análisis es aplicable a estructuras que cumplan simultáneamente los siguientes requisitos:

- En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí por un sistema de piso suficientemente rígido y resistente al corte.
- La relación entre longitud y ancho en planta es menor que 2.0
- La relación entre la altura y el ancho de la base no excede de 1.5 y la altura del edificio es menor que 13 m.

La razón de las limitaciones anteriores obedece al buen comportamiento sísmico que en general han tenido las estructuras que cumplen con estos requisitos. Con este método sólo se necesita verificar que la resistencia al corte en cada dirección es suficiente; no es necesario calcular la distribución de elementos mecánicos en los distintos muros que formen la construcción, tampoco se hace necesario verificar desplazamientos, torsiones y momentos de volteo.

Los coeficientes de diseño para obtener las fuerzas cortantes en cada nivel se presentan en las NTC's de Sismo. Estos se obtuvieron de acuerdo con el método estático, aplicando la reducción que allí se permite en función del valor de Q y del periodo fundamental de vibración del inmueble. Se tomó $Q = 1$ ó 1.5 según el tipo de muros. El periodo fundamental se estimó en función de la altura y del tipo de suelo de cimentación. Los coeficientes para edificios en las zonas II y III resultaron muy próximos entre sí, así que se adoptó su promedio para ambas zonas a fin de simplificar las tablas (Instituto de Ingeniería, UNAM, comentarios a las NTC's de Sismo).

c. Análisis sísmico dinámico modal.

Conforme con las NTC's de Sismo toda estructura puede analizarse con un método dinámico, pero con carácter obligatorio aquellas cuya altura exceda 60 m. Los métodos aceptados de análisis dinámico son el análisis sísmico dinámico modal espectral, ASDME y el cálculo paso a paso de respuesta a temblores específicos.

(1). Análisis sísmico dinámico modal espectral.

Este método es de aplicación general cuando se requiere determinar la respuesta lineal de estructuras de varios grados de libertad; se basa en el hecho de que la respuesta total es la superposición de las respuestas de los diferentes modos naturales de vibración.

De acuerdo con las NTC's de Sismo en este método de análisis debe incluirse el efecto de todos los modos naturales de vibración con periodo mayor o igual a 0.4 seg y es obligatorio considerar los tres primeros modos de translación en cada dirección de análisis.

Una vez que se han determinado los modos de vibrar de la estructura, es necesario combinarlos para conocer su comportamiento ante una excitación dinámica específica, tomando en cuenta la contribución de cada modo. La respuesta final será la combinación de las respuestas independientes de cada uno de los modos, multiplicadas por un factor, denominado coeficiente de participación, ec. 1.88, que al desarrollarla, se convierte en la siguiente expresión:

$$C_r = \frac{M_n^*}{M_n^*} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i \Phi_{in}}{\sum_{i=1}^r m_i \Phi_{in}^2} \quad (1.112)$$

donde:

- m_i Masa del nivel i .
- Φ_{in} Amplitud del modo n para la masa i .
- n Número de niveles, grados de libertad.

Con este coeficiente de participación se calculan las respuestas modales y se combinan como se establece en las NTC's de Sismo, para calcular las respuestas totales con las expresiones 1.108 o 1.109:

$$R_{RSC} = \sqrt{\sum_{n=1}^A R_n^2}$$

$$R_{CCC} = \sqrt{\sum_{n=1}^A \sum_{i=1}^A R_i p_{ij} R_j}$$

para sistemas remotamente acoplados y estrechamente acoplados, respectivamente; esto es, que los periodos de los modos naturales en cuestión difieran al menos 10% entre sí, o no. La fuerza cortante basal calculada con este método no debe ser menor que 80% de la que corresponde al análisis estático.

(2). Análisis paso a paso.

Para aplicar este método las NTC's de Sismo exigen que se usen por lo menos cuatro movimientos representativos. Con esto se pretende evitar que se adopten diseños que puedan resultar inseguros porque la estructura en cuestión sea poco sensible a las características detalladas de un temblor particular, pero responda en condiciones más desventajosas ante otro, que difiera en los detalles, pero que sea representativo de la misma intensidad, duración y contenido de frecuencia que el primero.

En general no se aplica para fines de diseño, por los tiempos de computadora requeridos, sino más bien para fines de revisión del comportamiento de edificios que han sido sometidos a sismos intensos y han tenido o no daños importantes.

En este método se puede suponer comportamiento elástico de la estructura o bien comportamiento no lineal, según diversas idealizaciones.

Al igual que en el método anterior, la fuerza cortante basal calculada con este método no deberá ser menor que 80 por ciento de la que predice el análisis estático.

D. REFERENCIAS.

1. Biggs, J.M., "Introduction to Structural Dynamics", Mc Graw Hill, 1964.
2. Hurty W. C. y Rubinstein M. F., "Dynamics of Structures", Prentice Hall, 1964.
3. Newmark, N. M. y Rosenblueth E., "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall, 1971.
4. Timoshenko, S., Young, D. H. y Weaver, W. "Vibration Problems in Engineering", John Wiley, 1974.
5. Clough, R. W. y Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw Hill, 1993.
6. Craig, R. R., "Structural Dynamics: An introduction to Computer Methods", John Wiley, 1981.
7. Capra, A. y Davidovici, D., "Calcul Dynamique des Structures en zone sismique", Eyrolles, 1982.
8. Tuma, J. J. y Cheng, F. Y., "Dynamic Structural Analysis", Mc Graw Hill Schaum's, 1983.
9. Kiseliov, V. A., "Mecánica de Construcción", Mir, 1983.
10. Paz, M., "Structural Dynamics: Theory & Computation", 2a. Ed. Van Nostrand, 1997.
11. Dowrick, D. J., "Earthquake Resistant Design: A Manual for Engineers and Architects", 2a. Ed., John Willey, 1986.
12. Anónimo, "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Julio 14, 1993; Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, Agosto 2, 1993.
13. Anónimo, "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo", Febrero 24, 1995; Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, Febrero 27, 1995.
14. Grupo Ingeniería Integral, S. A., "Manual de Análisis Sísmico de Edificios", DDF - PNUD - Habitat, 1988.
15. Rioboó, S. A., "Manual para la Estructuración de Edificios", DDF - PNUD - Habitat, 1988.
16. Naeim, F., "The seismic Design Handbook", Van Nostrand, 1989.
17. Zacek, M., "Construire Parasismique", Editions Parentheses, 1996.

EJEMPLOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

Datos

905
12
15
4
13

208.4

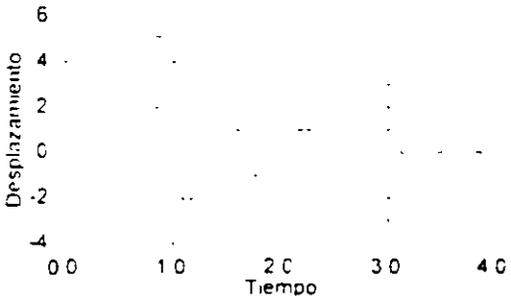
VIBRACION SUBAMORTIGUADA



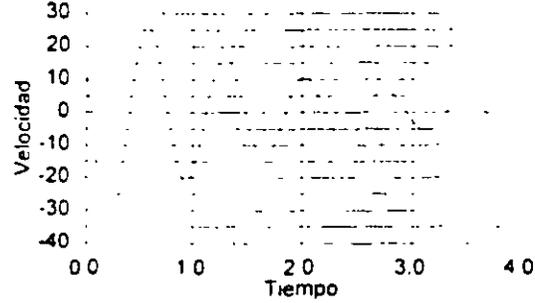
0
4

$$\begin{aligned}
 d(t) &= 0.625 \left[4.000 \cos(8.662t) - 1.7895 \sin(8.662t) \right] \\
 \dot{d}(t) &= 0.625 \left[-13 \cos(8.662t) - 35.77 \sin(8.662t) \right] \\
 \ddot{d}(t) &= 0.625 \left[317.9167 \cos(8.662t) - 90.25 \sin(8.662t) \right]
 \end{aligned}$$

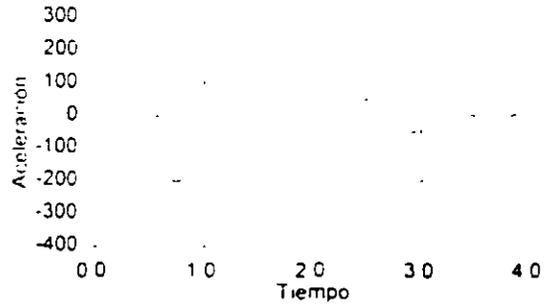
DESPLAZAMIENTO
VLCA



VELOCIDAD
VLCA



ACELERACIÓN
VLCA



EJEMPLOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

Datos

905	
0.71	
Desplazamiento Inicial	2
Velocidad Inicial	20

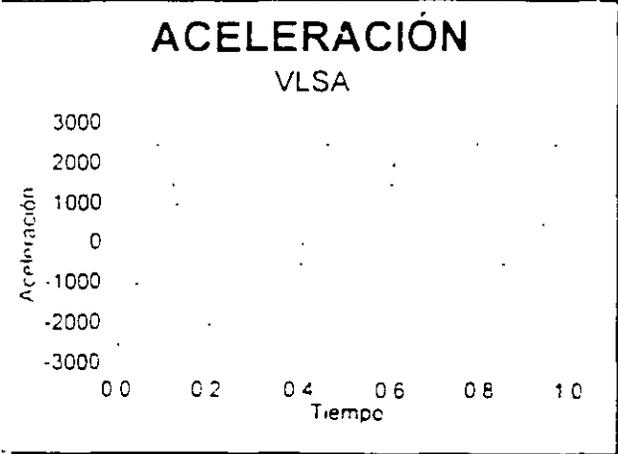
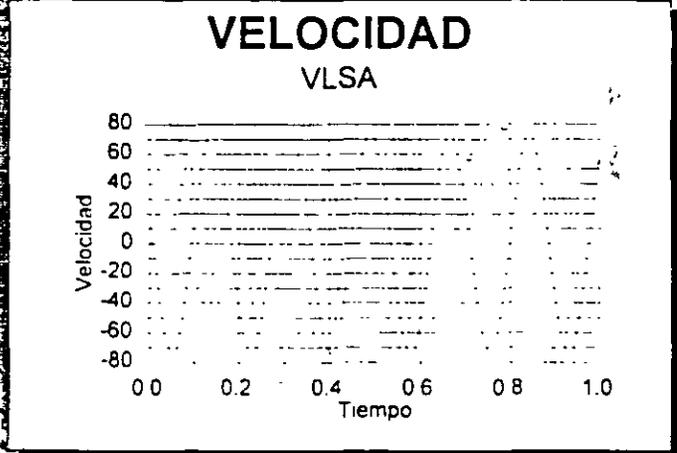
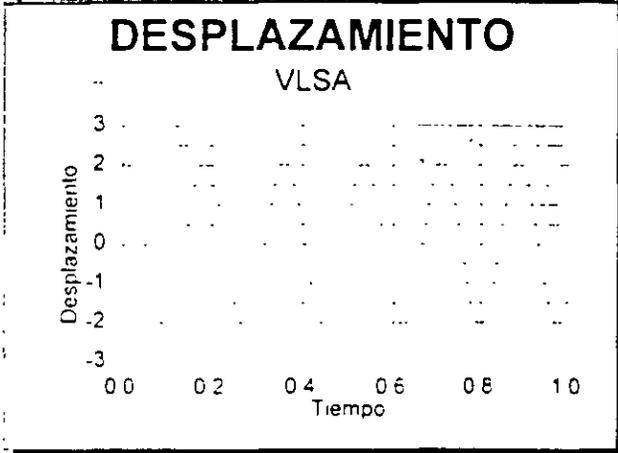
35.702
5.682
0.176

Inicial	0
Fin Intervalo Gráfica	1

$$d(t) = 0.560 \cdot \sin(35.702 \cdot t) + 2.000 \cdot \cos(35.702 \cdot t)$$

$$d'(t) = 20.000 \cdot \cos(35.702 \cdot t) - 71.404 \cdot \sin(35.702 \cdot t)$$

$$d''(t) = 714.044 \cdot \sin(35.702 \cdot t) - 2549.296 \cdot \cos(35.702 \cdot t)$$



EJEMPLOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO

VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO

Datos

m	905
ω	0.71

$p(t) = p_0 \cdot \sin(\omega t)$	
p_0	1
ω	0.71

destacado	0.00110497
AD	1.00039564

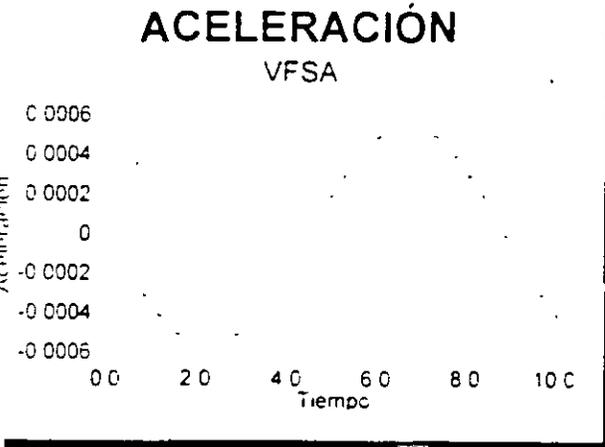
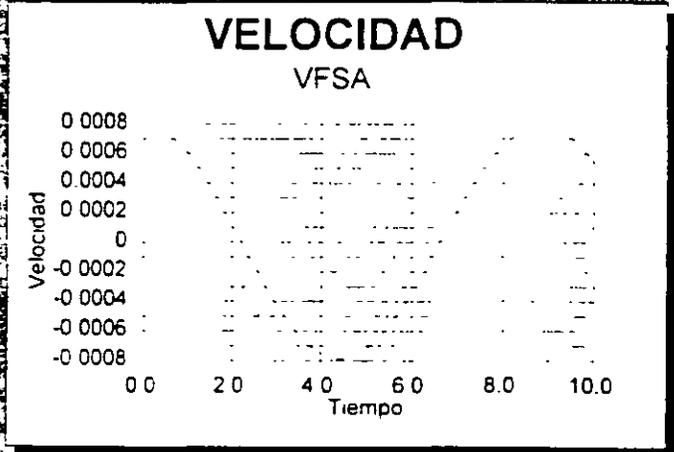
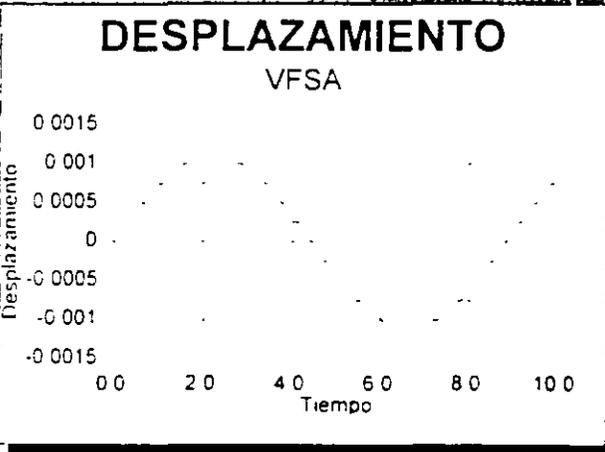
ω_n	0.5702
ζ	0.682
ω_d	0.176

Inicio Intervalo Gráfica	0
Fin Intervalo Gráfica	10

$$d(t) = 0.001 \cdot \sin(0.710 \cdot t)$$

$$d'(t) = 0.001 \cdot \cos(0.710 \cdot t)$$

$$d''(t) = -0.001 \cdot \sin(0.710 \cdot t)$$



77



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

**XXVII CURSO INTERNACIONAL DE
INGENIERÍA SÍSMICA**

**MODULO I
CA 017**

**ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE
ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**

TEMA

**ANEXO 4
MÉTODO DE STODOLA – VIANELLO - NEWMARK**

**EXPOSITOR: M. EN I. JOSÉ LUIS TRIGOS SUÁREZ
PALACIO DE MINERÍA
JULIO DEL 2002**

MÉTODO DE STODOLA - VIANELLO - NEWMARK.

Este método, en adelante denominado simplemente como método de Newmark, converge al primer modo de vibrar.

Procedimiento:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura: ϕ^s_1, ϕ^s_{1n} .
2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a ϕ^s_1 dejando ω^2 como factor común ya que no se conoce:

$$F_{1n} = m \omega^2 \phi^s_{1n}$$

3. Valuar la fuerza cortante en la estructura

$$V_1 = \sum_{l=n}^i F_{l1n} \quad (\text{función de } \omega^2)$$

4. Calcular los desplazamientos correspondientes:

$$\delta_{1n} = V_{1n} / k_n = \sum m_n \phi^s_{1n} \quad (\text{función de } \omega^2)$$

5. Obtener la configuración calculada ϕ^c - como la suma acumulativa de los incrementos de deformación de abajo hacia arriba:

$$\phi^c_{1c} = \sum_{l=n}^i \delta_{1n}$$

6. Normalizar:

$$\hat{\phi}^c = \frac{\phi^c_{1n}}{\phi^c_{11}}$$

7. Comparar:

$$\hat{\phi}^i = \phi^s$$

con un error de:

$$\epsilon_s = \left[\frac{\phi^s_{1n} - \hat{\phi}^c_{1n}}{\phi^s_{1n}} \right] \leq \text{Tolerancia } V_1$$

si no se cumple, repetir el proceso desde el paso 1, haciendo: $\phi^s = \hat{\phi}^c$

Aplicación del método de Newmark al cálculo de los modos superiores

Para calcular el segundo modo de vibrar con este método, se tiene que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo: $a_1\phi_{11}$, para lo cual es necesario conocer ϕ_{11} y a_1 . ϕ_{11} se calcula con el procedimiento ya conocido; para conocer a_1 se recurre a la propiedad de ortogonalidad de los modos.

$$\phi^{\text{supuesto}}_s = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots + a_1\phi_1 + \dots + a_r\phi_r + a_s\phi_s + \dots + a_N\phi_N$$

Premultiplicando por $\phi_r^T M$:

$$\phi_r^T M \phi^{\text{supuesto}}_s = a_1 \phi_r^T M \phi_1 + a_2 \phi_r^T M \phi_2 + \dots + a_1 \phi_r^T M \phi_1 + \dots + a_r \phi_r^T M \phi_r + a_s \phi_r^T M \phi_s + \dots + a_N \phi_r^T M \phi_N$$

Aplicando la condición de ortogonalidad:

$$\phi_r^T M \phi^{\text{supuesto}}_s = a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \dots + a_1 \times 0 + \dots + a_r \times 0 + a_s \times 0 + \dots + a_N \times 0$$

Se desconoce a_s :

$$a_s = \frac{\phi_r^T M \phi_s}{\phi_r^T M \phi_r}$$

Por ejemplo, para el 2do modo:

conocidos ϕ_1, ω_1

$$r = 1 ; s = 2$$

$$a_1 = \frac{\phi_1^T M \phi_2}{\phi_1^T M \phi_1}$$

$$\phi^2_1 = \phi^1_2 - a_1\phi_1$$

Para el tercer modo:

conocidos: ϕ_1, ω_1

ϕ_2, ω_2

$$r = 1 ; s = 3$$

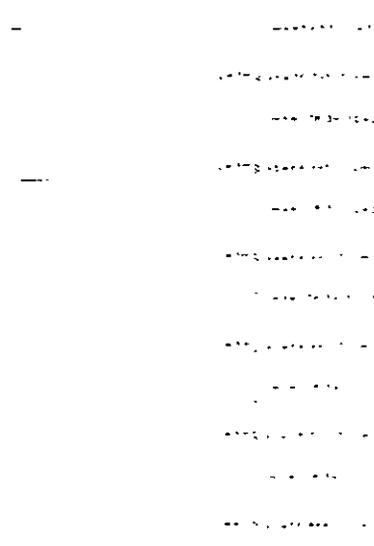
$$a_1 = \frac{\phi_1^T M \phi_3}{\phi_1^T M \phi_1}$$

$$r = 2 ; s = 3$$

$$a_2 = \frac{\phi_2^T M \phi_3}{\phi_2^T M \phi_2}$$

$$\phi^3_3 = \phi^1_3 - a_1\phi_1 - a_2\phi_2$$

EJEMPLO 1. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente:



Solución:

Antes de proceder a realizar la tabulación para seguir los pasos del método, conviene uniformizar a un mismo valor las masas y las rigideces.

En este caso se uniformará A.

$$m = 178.39 \times 10^{-3} \text{ (ton}_j\text{seg}^{-2}\text{) / cm}$$

$$k = 64.995 \text{ ton}_j\text{/ cm}$$

El modelo matemático simplificado resulta:

Cálculo del primer modo de vibrar

1^{ra} iteración

N	E	m	k	ϕ^s_1	f_1/ω^2	γ^s/ω^2	δ/ω^2	ϕ^c/ω^2	ϕ^c_1
6		0.334 m		3940	1.316 m			54.577 m/k	3349
	6		0.566 k			1.316 m	2.325 m/k		
5		m		3824	3.824 m			52.252 m/k	3207
	5		k			5.140 m	5.140 m/k		
4		m		3412	3.412 m			47.112 m/k	2891
	4		k			8.552 m	8.552 m/k		
3		m		2765	2.765 m			38.560 m/k	2366
	3		k			11.317 m	11.317 m/k		
2		m		1941	1.941 m			27.243 m/k	1672
	2		1.211 k			13.258 m	10.948 m/k		
1		m		1000	m			16.295 m/k	1000
	1		0.875 k			14.258 m	16.295 m/k		
								0	

$$k = 64.995 \text{ ton/cm}$$

$$m = 178.39 \times 10^3 \text{ ton}\cdot\text{seg}^2/\text{cm}$$

2^{da} iteración

N	E	m	k	ϕ^s	f_1/ω^2	ζ^c/ω^2	δ/ω^2	ϕ^c/ω^2	ϕ^c
6		0.334 m		3349	1.119 m			46.403 m/k	3313
	6		0.566 k			1.119 m	1.977 m/k		
5		m		3207	3.207 m			44.426 m/k	3172
	5		k			4.326 m	4.326 m/k		
4		m		2891	2.891 m			40.100 m/k	2863
	4		k			7.217 m	7.217 m/k		
3		m		2366	2.366 m			32.883 m/k	2348
	3		k			9.583 m	9.583 m/k		
2		m		1672	1.672 m			23.300 m/k	1664
	2		1.211 k			11.255 m	9.294 m/k		
1		m		1000	m			14.006 m/k	1000
	1		0.875 k			12.225 m	14.006 m/k		
								0	

3^{ra} iteración

N	E	m	k	ϕ^s_1	f_1/ω^2	λ^2/ω^2	δ/ω^2	ϕ^e/ω^2	ϕ^c_1
6		0.334 m		3313	1.107 m			45.968 m/k	3309
	6		0.566 k			1.107 m	1.956 m/k		
5		m		3172	3.172 m			44.012 m/k	3169
	5		k			4.279 m	4.279 m/k		
4		m		2863	2.863 m			39.733 m/k	2861
	4		k			7.142 m	7.142 m/k		
3		m		2348	2.348 m			32.591 m/k	2346
	3		k			9.490 m	9.490 m/k		
2		m		1664	1.664 m			23.101 m/k	1663
	2		1.211 k			11.154 m	9.211 m/k		
1		m		1000	m			13.890 m/k	1000
	1		0.875 k			12.154 m	13.890 m/k		
								0	

4^{ta} iteración

N	E	m	k	ϕ_1^s	f_1 / ω^2	z_1 / ω^2	δ / ω^2	ϕ^c / ω^2	ϕ_1^c
6		0.334 m		3309	1.105 m			45.923 m/k	3309
	6		0.566 k			1.105 m	1.952 m/k		
5		m		3169	3.169 m			43.971 m/k	3168
	5		k			4.274 m	4.274 m/k		
4		m		2861	2.861 m			39.697 m/k	2860
	4		k			7.135 m	7.135 m/k		
3		m		2346	2.346 m			32.562 m/k	2346
	3		k			9.481 m	9.481 m/k		
2		m		1663	1.663 m			23.081 m/k	1663
	2		1.211 k			11.144 m	9.202 m/k		
1		m		1000	m			13.879 m/k	1000
	1		0.875 k			12.144 m	13.879 m/k		
								0	

$$\omega_1^2 = (0.439 / 6) (k / m) = 0.072 \times 64.995 / 178.39 \times 10^3 = 26.658 \text{ rad} / \text{seg}^2$$

$$\omega_1 = 5.163 \text{ rad} / \text{seg}$$

$$T_1 = 2 / \omega_1 = 2 / 5.163 = 2.217 \text{ seg}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.663 \\ 2.346 \\ 2.860 \\ 3.168 \\ 3.309 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2. Para la estructura representada por el modelo matemático del Ejemplo 1, calcular la configuración modal del segundo y tercer modo y sus respectivas frecuencias naturales y periodos asociados al segundo y tercer modo de vibrar

Cálculo del segundo modo de vibrar:

N	E	m	k	Φ_1	Φ_2	$a_1 \Phi_1$	$a_2 \cdot a_1 \Phi_1$	f / ω^2	l / ω^2	δ / ω^2	Φ^e / ω^2	Φ^c
6		0.334 m		3309	-1377	109	-13879	-0.4636m			-2.5980m/k	-14387
	6		0.566 k						-0.4636m	-0.8191m/k		
5		m		3168	-1093	104	-11034	-1.034m			-1.7789m/k	-9581
	5		k						-1.5670m	-1.5671m/k		
4		m		2860	-127	94	-1364	-0.1364m			-0.2110m/k	-1173
	4		k						-1.7034m	-1.7034m/k		
3		m		2346	915	77	9073	0.9073m			1.4915m/k	8259
	3		k						-0.7961m	-0.7961m/k		
2		m		1663	1385	55	13795	1.3795m			2.2876m/k	12668
	2		1.211 k						0.5834m	0.4818m/k		
1		m		1000	1000	33	967	0.9967m			1.8058m/k	1000
	1		0.875 k						1.5801m	1.8058m/k		
											0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{1i} \phi_{2i}}{\sum m_i (\phi_{1i})^2}$$

$$a_1 = \frac{0.102}{31.142} = 0.0033$$

2^{da} iteración

N	E	m	k	ϕ_1	ϕ_2	$a_1 \phi_1$	$a_2 \cdot a_1 \phi_1$	f / ω^2	$f \cdot l / \omega^2$	δ / ω^2	ϕ^c / ω^2	$\phi^c \cdot c_1$
6		0.334 m		3309	-14387	-2	-14385	-0.4805m			-2.5053m/k	-14513
	6		0.566 k						-0.4805m	-0.8489m/k		
5		m		3168	-9851	-2	-9849	-0.9849m			-1.6564m/k	-9595
	5		k						-1.4654m	-1.4654m/k		
4		m		2860	-1173	-2	-1171	-0.1171m			-0.1910m/k	-1106
	4		k						-1.5825m	-1.5825m/k		
3		m		2346	8259	-2	8261	0.8261m			1.3915m/k	8061
	3		k						-0.7564m	-0.7564m/k		
2		m		1663	12668	-1	12669	1.2669m			2.1479m/k	12442
	2		1.211 k						0.5105m	0.4216m/k		
1		m		1000	1000	-1	10001	1.0001m			1.7263m/k	10000
	1		0.875 k						1.5105m	1.7263m/k		
											0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{1i} \phi_{2i}}{\sum m_i (\phi_{1i})^2}$$

$$a_1 = \frac{-0.0021}{31.1422} = -0.0001$$

$$\omega_2^2 = (3.5457 / 6) (k / m) = 0.5910 \times 64.995 / 178.39 \times 10^3 = 215.308 \text{ rad} / \text{seg}^2$$

$$\omega_2 = 14.673 \text{ rad} / \text{seg}$$

$$T_2 = 2 / \omega_2 = 2 / 14.673 = 0.428 \text{ seg}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.244 \\ 0.806 \\ -0.111 \\ -0.960 \\ -1.451 \end{bmatrix}$$

Cálculo del tercer modo de vibrar

N	E	m	k	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$a_1\phi_1$	$a_2\phi_2$	ϕ_3	f/ω^2	δ/ω^2	δ/ω^2	ϕ^2/ω^2	ϕ^2
5		0.334 m		3309	-1451	12731	168	-192	12755	0.4260m			1.0907m/k	14713
6			0.566 k								0.4260m	0.7527m/k		
5		m		3168	-960	6893	160	-123	6856	0.6856m			0.3380m/k	4503
5			k								1.116m	1.1116m/k		
4		m		2869	-111	-11880	145	-15	-12010	-1.2010m			-0.7736m/k	-10436
4			k								-0.0894m	0.0894m/k		
3		m		2346	806	-10385	119	107	-10611	-1.0611m			-0.6842m/k	-9230
3			k								1.1505m	1.1505m/k		
2		m		1663	1244	8424	84	165	8175	0.8175m			0.4663m/k	6290
2			1.211 k								-0.3330m	0.2750m/k		
1		m		1000	1000	10000	51	133	9816	0.9816m			0.7413m/k	10000
1			0.875 k								0.6486m	0.7413m/k		
													0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{i1} \phi_{31}}{\sum m_i (\phi_{i1})^2} = \frac{0.1577}{31.1422} = 0.0051$$

$$a_2 = \frac{\sum m_i \phi_{i2} \phi_{31}}{\sum m_i (\phi_{i2})^2} = \frac{0.0641}{4.8343} = 0.0133$$

2^{da} iteración

N	E	m	k	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$a_1\phi_1$	$a_2\phi_2$	ϕ_3	f/ω^2	l/ω^2	δ/ω^2	ϕ'/ω^2	ϕ''_1
6		0.334 m		3309	-1451	14713	-55	-27	14795	0.4942m			1.1273m/k	15873
	6		0.566 k								0.4942m	0.8731m/k		
5		m		3168	-960	4503	-52	-18	4573	0.4573m			0.2542m/k	3579
	5		k								0.9515m	0.8515m/k		
4		m		2862	-111	-10436	-47	-2	-10387	-1.0387m			-0.6973m/k	-9818
	4		k								-0.0872m	0.0872m/k		
3		m		2346	806	-9230	-39	15	-9206	-0.9206m			-0.6101m/k	-8591
	3		k								-1.0078m	1.0078m/k		
2		m		1663	1244	6290	-27	23	6294	0.6294m			0.3977m/k	5600
	2		1.211 k								-0.3784m	0.3125m/k		
1		m		1000	1000	10000	-17	19	998	0.9998m			0.7102m/k	10000
	1		0.875 k								0.6214m	0.7102m/k		
													0	

$$a_1 = \frac{\sum m_i \phi_{i1} \phi_{31}}{\sum m_i (\phi_{i1})^2} = \frac{-0.0514}{31.1422} = -0.0017$$

$$a_2 = \frac{\sum m_i \phi_{i2} \phi_{31}}{\sum m_i (\phi_{i2})^2} = \frac{0.0090}{4.8343} = 0.0019$$

3^{er} iteración

N	E	m	k	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$a_1\phi_1$	$a_2\phi_2$	ϕ_3	f/ω^2	l^2/ω^2	δ/ω^2	ϕ^e/ω^2	ϕ^c
6		0.334 m		3309	-1451	15873	-4	-1	15878	0.5303m			1.1534m/k	16586
	6		0.566 k								0.5303m	0.9369m/k		
5		m		3168	-960	3579	-4	-1	3584	0.3584m			0.2165m/k	3113
	5		k								0.8887m	0.8887m/k		
4		m		2860	-111	9818	-4	0	-9814	-0.9814m			-0.6722m/k	-9666
	4		k								-0.0927m	0.0927m/k		
3		m		2346	806	8591	-3	1	-8589	-0.8589m			-0.5795m/k	-8333
	3		k								-0.9516m	0.9516m/k		
2		m		1663	1244	5600	-2	1	5601	0.5601m			0.3721m/k	5351
	2		1.211 k								-0.3915m	0.3233m/k		
1		m		1000	1000	10000	-1	1	10000	m			0.6954m/k	10000
	1		0.875 k								0.6085m	0.6954m/k		
													0	

$$a_1 = \frac{\sum m_1 \phi_{11} \phi_{31}}{\sum m_1 (\phi_{11})^2} = \frac{-0.0040}{31.1422} = -0.0001$$

$$\omega_3^2 = (8.9154 / 6) (k / m) = 1.4859 \times 64.995 / 178.39 \times 10^3 = 541.376 \text{ rad} / \text{seg}^2$$

$$\omega_3 = 23.267 \text{ rad} / \text{seg}$$

$$T_3 = 2 / \omega_3 = 2 / 23.267 = 0.270 \text{ seg}$$

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.5351 \\ -0.8333 \\ -0.9666 \\ 0.3113 \\ 1.6586 \end{bmatrix}$$

METODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CALCULO
DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

ENRIQUE DEL VALLE C*

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueve en movimiento armónico simple definido por $X=X_0 \cos wt$ o $X=X_0 \sin wt$ donde X_0 define la amplitud y w la frecuencia circular del movimiento.

La aceleración estará dada entonces por $\dot{X}=-w^2 X_0 \cos wt$ ó $\ddot{X}=-w^2 X_0 \sin wt=-w^2 X$ y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán $F_i = m\ddot{X} = -mw^2 X$.

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por $F_e=R\Delta X$, donde R es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos: $R = V/\Delta X$, para $\Delta X=1$.

Vemos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de X y de w^2 únicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia w (o período T) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

*Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado, Fac. de Ingeniería UNAM

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, con
siste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura:
 X_i supuesta
2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración $F_i = -mw^2 X_i$, dejando w^2 como factor común cuyo valor no conocemos.
3. Valuar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio: $V_i = \sum_{j=1}^i F_j$ (función de w^2)
4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta X_i = \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{función de } w^2).$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{i \text{ calc}} = \sum_{j=1}^n \Delta X_j = \text{coef. } w^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por w^2 para cada masa.

6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta, y el factor de proporcionalidad será w^2 . Esto es, para cada masa podremos calcular.

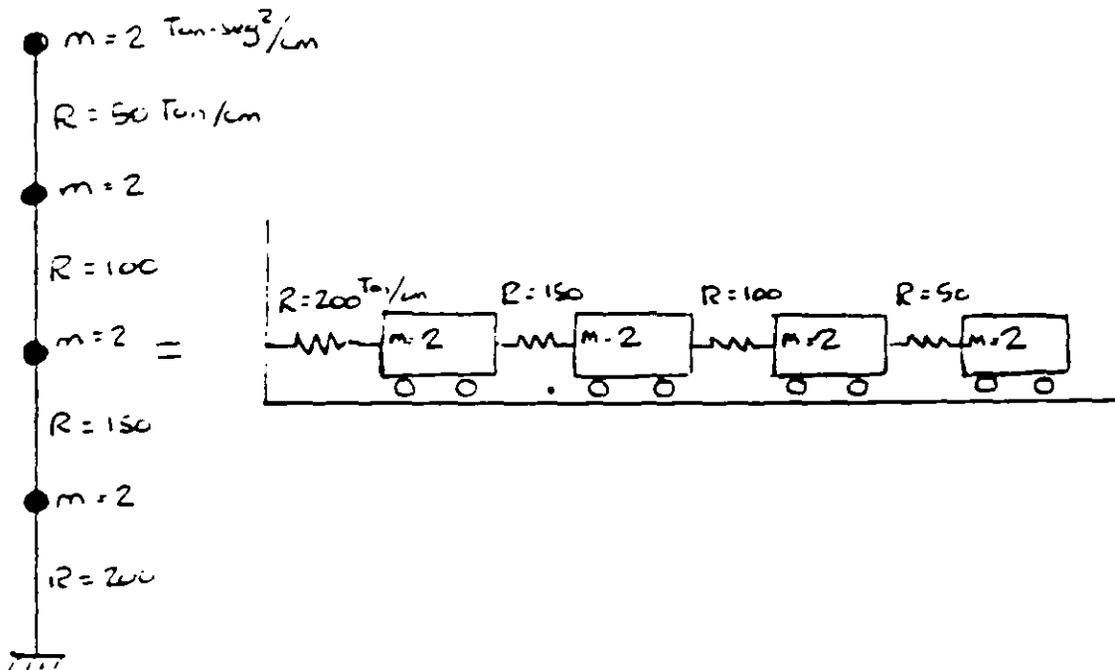
$$w^2 = \frac{X_{\text{supuesta}}}{\text{Coef. de } X_{\text{calc.}}}$$

En general, los valores de w^2 calculados para cada masa, no serán iguales en el primer ciclo, pero el

método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de w^2 obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que esté presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo.

Nivel	$\frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$ m	$\frac{\text{ton}}{\text{cm}}$ R	cm* X_{sup}	$F_i = m w^2 X$	V	$\Delta X = \frac{V}{R}$	X_{calc}	** w^2	*** X_{sup}
4	2	50	4	$8w^2$	$8w^2$	$0.16w^2$	$0.52w^2$	$7.692 = \frac{4}{0.52}$	5.2
3	2	100	3	$6w^2$	$14w^2$	$0.14w^2$	$0.36w^2$	$8.333 = \frac{3}{0.36}$	3.6
2	2	150	2	$4w^2$	$18w^2$	$0.12w^2$	$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
1	2	200	1	$2w^2$	$20w^2$	$0.1w^2$	$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
0							0		

Nótese que los valores R, V y ΔX están defasados, pues corresponden al entrepiso.

* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, el método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

** Nótese que en este caso, el valor de w^2 estará comprendido entre

$$7.692 \frac{1}{\text{seg}^2} \quad \text{y} \quad 10 \frac{1}{\text{seg}^2}$$

*** En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo

que la deformación del primer nivel, sea unitaria, esto es, dividiendo la configuración calculada entre $0.1w^2$ en cada nivel.

2o. Ciclo

Nivel	m	R	X_{sup}	F_i	V	ΔX	X	w^2	X_{sup}
4	2	50	5.2	$10.4w^2$	$10.4w^2$	$0.208w^2$	$0.651w^2$	7.988	5.425
3	2	100	3.6	$7.2w^2$	$17.6w^2$	$0.176w^2$	$0.443w^2$	8.126	3.692
2	2	150	2.2	$4.4w^2$	$22w^2$	$0.147w^2$	$0.267w^2$	8.240	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24w^2$	$0.120w^2$	$0.120w^2$	8.333	1.0
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de w^2 se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	X_1
4	2	50	5.425	$10.85w^2$	$10.85w^2$	$0.2170w^2$	$0.6739w^2$	8.050	5.461
3	2	100	3.692	$7.384w^2$	$18.234w^2$	$0.1823w^2$	$0.4569w^2$	8.081	3.703
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.684w^2$	$0.1512w^2$	$0.2746w^2$	8.103	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24.684w^2$	$0.1234w^2$	$0.1234w^2$	8.104	1.00
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Nivel	m	R	X _{sup}	P	V	ΔX	X _{calc}	w ²	Xi
4	2	50	5.461	10.922w ²	10.922w ²	0.2184w ²	0.6775w ²	8.061	5.468
3	2	100	3.703	7.406w ²	18.328w ²	0.1833w ²	0.4591w ²	8.066	3.705
2	2	150	2.225	4.45w ²	22.778w ²	0.1519w ²	0.2758w ²	8.067	2.226
1	2	200	1.00	2.00w ²	24.778w ²	0.1239w ²	0.1239w ²	8.071	1.00
0		Σ	12.389			Σ=	1.5363w ²	8.064*	

*El valor final de w² lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de X_{sup} entre la suma de coeficientes de X_{calc}. Esto es más preciso que promediar los valores de w² de cada nivel.

$$w = \sqrt{8.064} = 2.8397; \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta, estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

$X_{\text{sup}} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4}$, donde X_{i1} a X_{i4} son las configuraciones modales y C_i son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo: $C_1 X_{i1}$, para lo cual necesitamos conocer X_{i1} y C_1 . X_{i1} la calculamos como se indicó antes y C_1 lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que $\int \rho_m X_{in} X_{im} = 0$ si $n \neq m$, donde X_{in} y X_{im} son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de X_{sup} por r_{i1} y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos:

$$\sum_i m_i X_{i1} X_{sup} = C_1 \sum_i m_i X_{i1}^2 + C_2 \sum_i m_i X_{i1} X_{i2} + C_3 \sum_i m_i X_{i1} X_{i3} + \dots$$

donde los términos que multiplican a C_2 , C_3 , etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{\sum_i m_i X_{i1} X_{sup}}{\sum_i m_i X_{i1}^2}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo n .

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de C_1 con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo $C_1 X_{i1}$, lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se parezca al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación C_1 y C_2 , correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella sea el tercero y el método converja a este modo.

Esto es:

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

$$C_1 = \frac{\sum m X_{i1} X_{i3sup}}{\sum m X_{i1}^2} ; \quad C_2 = \frac{\sum m X_{i2} X_{i3sup}}{\sum m X_{i2}^2}$$

$$\bar{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose no basta con una sola limpieza. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de w^2 . Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirve como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calcularemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

Ni- val	n	R	X_{i1}	mX_{i1}^2	mX_{i1}^2	X_{i2sup}	$mX_{i1}X_{i2sup}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{i2}	$F_{i2} = \frac{mX_{i2}^2}{mX_{i2}^2}$	v	ΔX	X Calc.
4	2	50	5.468	10.936	59.798	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	-2.108v ²	-2.108v ²	-0.0422v ²	-0.0334v ²
3	2	100	3.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	-0.072v ²	-2.180v ²	-0.0218v ²	0.0088v ²
2	2	150	2.226	4.452	9.910	2.0	9.910	-0.022	1.978	3.956v ²	1.776v ²	0.0118v ²	0.0306v ²
1	2	200	1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	1.980v ²	3.756v ²	0.0108v ²	0.0188v ²
0					$\Sigma = 99.162$		$\Sigma = 0.974$						

DATOS

$$C_1 = \frac{0.974}{99.162} = 0.00982$$

*La configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la

i vel.	$m\bar{x}_{i1}^{calc}$	$-C_{i1}x_{i1}$	\bar{x}_{i2}^{calc}	w^2	x_{i2}^{sup**}	$m\bar{x}_{i2}^{sup}w^2$	v	ΔX	x
4	$-0.3653w^2$	$+0.00696w^2$	$-0.02644w^2$	39.86	-1.3042	$-2.6084w^2$	$-2.6084w^2$	$-0.05217w^2$	-0.0314
3	$0.0052w^2$	$0.00472w^2$	$0.01352w^2$	-2.60	0.6669	$1.3338w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	0.0207
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01250w^2$	0.0335
1	$0.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.02007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.02002w^2$	0.0200
Σ	$-0.1263w^2$								

$$C_1 = \frac{-0.1263w^2}{99.162} = -0.0012736w^2$$

** Normalizando con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

Ni vel	$m\bar{x}_{i1}^{calc}$	$-C_{i1}x_{i1}$	\bar{x}_{i2}^{calc}	w^{2****}	\bar{x}_{i2}^{sup}	$m\bar{x}_{i2}^{sup}w^2$	v	ΔX
4	$-0.34339w^2$	$+0.000012w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5520	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000008w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0492w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14923w^2$	$+0.000005w^2$	$0.033525w^2$	49.20	1.6577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$$\Sigma = -0.00021w^2$$

$$\bar{x} = 2.1231$$

$$\bar{x} || 5.2271$$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.162} = -0.0000021177w^2$$

*** Nótese que el intervalo de w^2 queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre las dos últimas masas. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Nivel	X_{calc}	$mX_{i1}X_{\text{calc}}$	$-C_1X_{i1}$	\bar{X}_{calc}	**** w^2	$\bar{X}_{1\text{sup}}$
4	$-0.03623w^2$	$-0.39621w^2$	+0.000023	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	+0.000015	$0.025865w^2$	39.72	1.206
2	$0.03634w^2$	$0.16179w^2$	+0.000009	$0.036349w^2$	45.61	1.695
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	+0.000004	$0.021234w^2$	46.62	0.99
0	0	$\Sigma -0.00041w^2$		$\Sigma = 0.047241w^2$	prom. 43.70 44.94	

$$\bar{w} = 0.119655w^2 \quad 43.68$$

$$C_i = \frac{-0.00041w^2}{99.162} = -0.0000041w^2 \quad (\text{vals. abs})$$

****El intervalo de variación de w^2 se ha reducido a $39.72 - 46.62$ (dif. = 6.9) y los ajustes en la curva son menores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de w^2 y X_{i1} . Nótese que para estimar un valor de w^2 procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de \bar{X}_{sup} y de los coeficientes de \bar{X}_{calc} tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de w^2 se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Newmark para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que esté sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

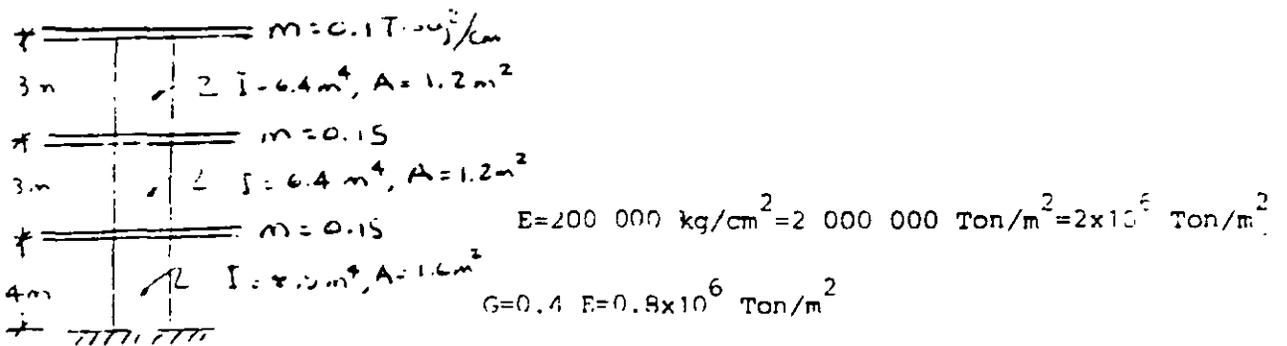
Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI, y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión $\Delta X_{v_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$, donde ΔX_{v_i} es el incremento de deformación por cortante entre dos niveles consecutivos, V_i , h_i y A_i son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área

efectiva de cortante entre esos mismos niveles y G es el módulo de elasticidad al cortante del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia $F_i = m_i w^2 X_i$ asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre EI (habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de M/EI nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de $\Delta X = V/R$ del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de w^2 y de donde podremos despejar este valor y en caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de I y A son los indicados en la figura siguiente:



Nivel	$\frac{E \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}^2 \cdot \text{m}}$	$\frac{m}{\text{m}}$	$\frac{\text{Ton} \cdot \text{m}^2}{EI}$	$\frac{\text{m}^2}{A}$	$\frac{\text{Ton}}{GA}$	$\frac{\text{m}}{h}$	$\frac{\text{cm}}{\text{sup}}$	$\frac{\text{m} \times \text{sup}}{\text{sup}^2}$	$\frac{\text{Ton}}{V}$	$\frac{\Delta M = Vh}{M}$	$\frac{\text{Ton} \cdot \text{m}}{M}$	$\frac{1/\text{m}}{\frac{M}{EI}}$
3	0.10	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	5.0	$0.50 w^2$	$0.5 w^2$	$1.5 w^2$	0	0
2	0.15	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	2.5	$0.38 w^2$	$0.88 w^2$	$2.64 w^2$	$1.5 w^2$	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$
1	0.15	8.5	17.0×10^6	1.6	1.20×10^6	4	1	$0.15 w^2$	$1.03 w^2$	$4.12 w^2$	$4.14 w^2$	$0.3234 \times 10^{-6} w^2$ $0.2435 \times 10^{-6} w^2$
0											$8.26 w^2$	$0.4859 \times 10^{-6} w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

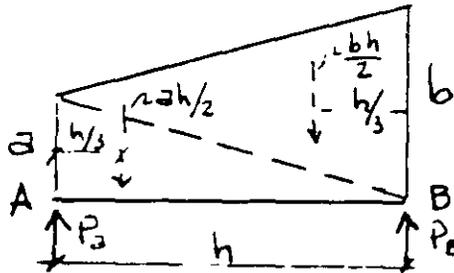
Para el nivel 3

$$F_{eq} = \frac{1}{3} (2 \times 0 + 0.1172 \times 10^{-6} w^2) = 0.0586 \times 10^{-6} w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)

i-el	P_{eq}^*	V_{eq}^{**}	$\Delta M = V_{eq} h = \Delta X$	ΔX_v^{****}	ΔX_{tot}^m	X_{cal}^m
3	$0.0586 \times 10^{-6} w^2$	$2.2369 \times 10^{-6} w^2$	$6.7107 \times 10^{-6} w^2$	$1.5625 \times 10^{-6} w^2$	$8.2732 \times 10^{-6} w^2$	$23.0052 \times 10^{-6} w^2$
2	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$	$1.8408 \times 10^{-6} w^2$	$5.5224 \times 10^{-6} w^2$	$2.75 \times 10^{-6} w^2$	$8.2724 \times 10^{-6} w^2$	$14.732 \times 10^{-6} w^2$
1	$0.2789 \times 10^{-6} w^2$	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$	$3.2408 \times 10^{-6} w^2$	$3.2188 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$
0	$0.3820 \times 10^{-6} w^2$					0
	$0.6486 \times 10^{-6} w^2$					
	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$					

$1/seg^2$ w^2 ****	X_{sup}
2173.42	3.56
1696.99	2.28
1548.08	1.0



* Para obtener cargas concentradas equivalentes al diagrama de M/EI se puede usar la fórmula siguiente:

$$P_a = \frac{h}{6} (2a+b); P_b = \frac{h}{6} (2b+a)$$

donde h es la distancia entre dos puntos A y B con ordenadas de M/EI iguales a a y b respectivamente. La variación de M/EI entre A y B es lineal, por lo que esta expresión se obtiene considerando dos triángulos con alturas a y b respectivamente y base h . P_a y P_b son las concentraciones correspondientes en los puntos A y B. (Ref. 2).

** Recuérdese que el empotramiento de la viga conjugada es el extremo superior, por lo que empieza de abajo hacia arriba el cálculo.

***Obsérvese que en el primer entrepiso la deformación por cortante es prácticamente igual a la de flexión por lo que despreciarla conduciría a errores muy grandes. Al ir aumentando la altura de la estructura la deformación por cortante va reduciendo su importancia en comparación con la de flexión y puede llegar a ser despreciable. En este caso la deformación por cortante en el tercer entrepiso es 23% de la debida a flexión.

**** Debe tenerse cuidado con las unidades al valuar w^2 pues es fácil equivocarse, obsérvese que X_{sup} está en cm y X calc resulta en metros.

Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de w^2 . Holzer procede exactamente al revés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa). El método tiene las siguientes etapas:

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de w^2 .
2. Obtener los valores de mw_{sup}^2 para cada masa.
3. Suponer la deformación del primer nivel: X_1 ; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer ΔX_1 .

4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (Primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso:

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si} \quad \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w^2 \text{sup } X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es:

$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso

$$\Delta X_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

8. Sumando X_2 a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ y podemos repetir los pasos 5 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de w^2 relativamente cercano

al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza constante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de w^2 supuesto en la intersección con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para w^2 seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de w^2 que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de w^2 empleando el cociente de Crandall siguiente:

$$\bar{w}^2 = w^2 \frac{\sum V \Delta X}{\sum F X}$$

donde \bar{w}^2 es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de entre piso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Newmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación $w_2^2 \doteq 9w_1^2$; $w_3^2 \doteq 25w_1^2$, etc.

(Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Newmark, suponiendo

$$w_2^2 \doteq 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{\text{seg}}^2$$

Usaremos la tabulación siguiente:

Ni- vel	m	R	mw_{sup}^2	ΔX	X^*	F	V	
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dif = 260.7
3	2	100	144	-1.417	-0.044	- 6.3	-141.7	
2	2	150	144	0.373	1.373	-197.7	56	
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200	

$w_{\text{sup}}^2 = 72$

*Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de w_{sup}^2 de $50 \text{ m}^2/\text{seg}^2$, tendremos

Ni- vel	m	R	mw_{sup}^2	ΔX	X	F	V
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	Dif. 66.7 -166.7
3	2	100	100	-0.667	1.00	100	-66.7
2	2	150	100	0.667	1.667	166.7	100
1	2	200	100	1.00	1.0	100	200

Trazando la gráfica w_{sup}^2 -diferencias encontramos:

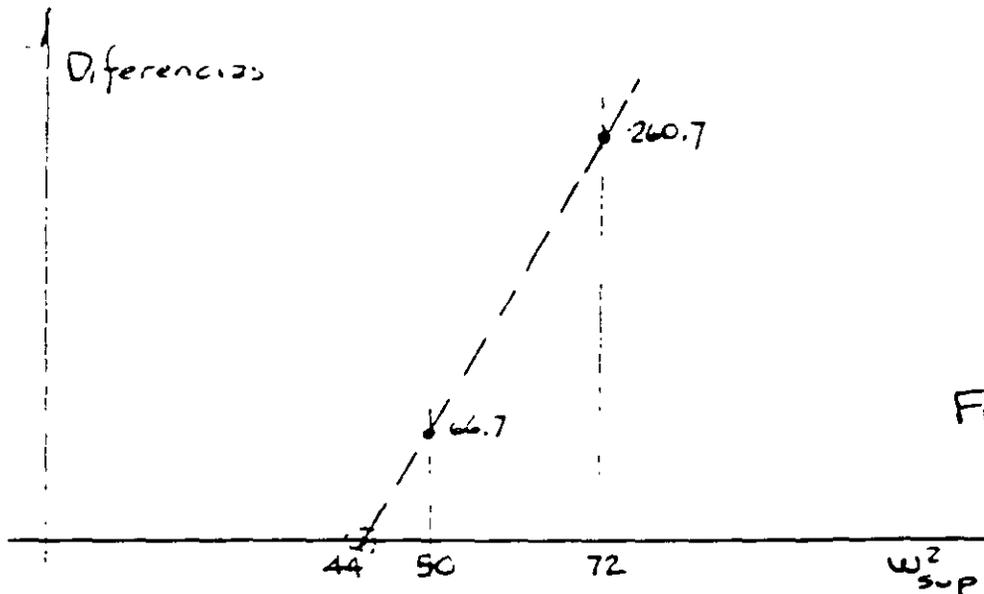


Fig 1.

que el valor de w^2 que hace cero las diferencias es aproximadamen-
te 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos
que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamen-
te a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos
suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces $w^2 = 44$

Ni- vel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	FX	VΔX
4	2	50	88	-3.174	-1.844	-162.27	Dif.=3.57 -158.7	299.23	503.71
3	2	100	88	-0.417	1.33	117	- 41.7	155.61	17.39
2	2	150	88	0.747	1.747	153.7	112	268.51	83.66
1	2	200	88	1.0	1.0	88	200	88	200
0								<u>Σ811.35</u>	<u>804.76</u>

$$w^2 = 44 \frac{804.76}{811.35} = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

Usando $w_{sup}^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2$

Ni- vel	m	P	mw^2	ΔX	X	F	V
4	2	50	87.28	-3.159	-1.809	-157.89	Dif. = 0.05 -157.94
3	2	100	87.28	-0.401	1.350	117.83	- 40.11
2	2	150	87.28	0.751	1.751	152.83	112.72
1	2	200	87.28	1.0	1.0	87.28	200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que:

$$w_2^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2, w_2 = 6.606 \text{ 1/seg. } T_2 = 0.951 \text{ seg}$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor que w^2 podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

Comentarios adicionales

En los métodos presentados para las estructuras a base de marcos rígidos se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que esté hecha la estructura y de la carga viva que se considere para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guarden las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, trabes y columnas.

Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se vea sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiera la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} \quad ; \quad \text{para } \Delta X=1, \quad R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").

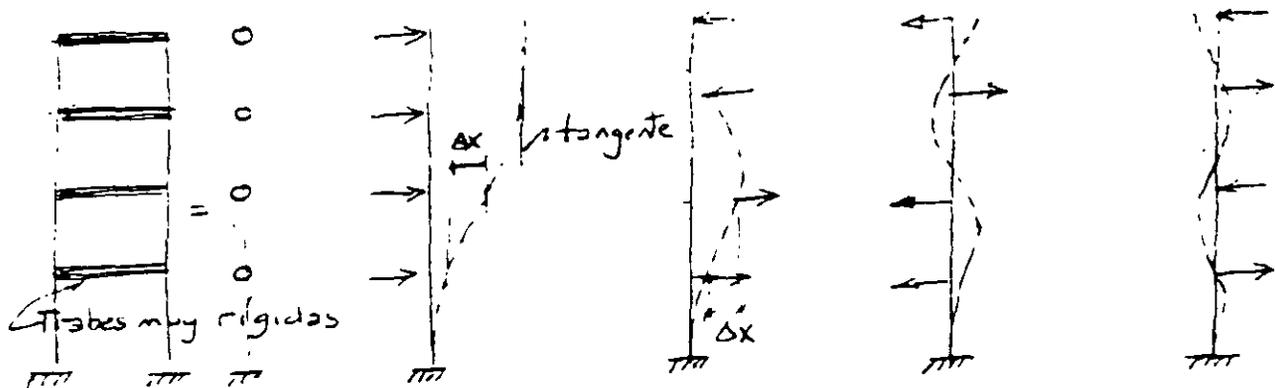
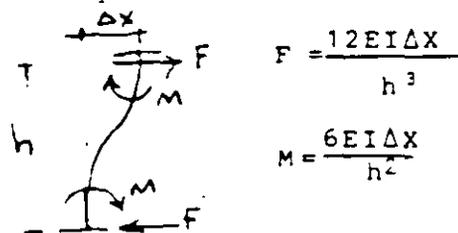


Fig. 2

Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deber ser nulos, lo que se logra si las traveses son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.



$$F = \frac{12EI\Delta x}{h^3}$$

$$M = \frac{6EI\Delta x}{h^2}$$

Fig. 3

En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las traveses ($K=I/l$) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de traveses infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizonal

tales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

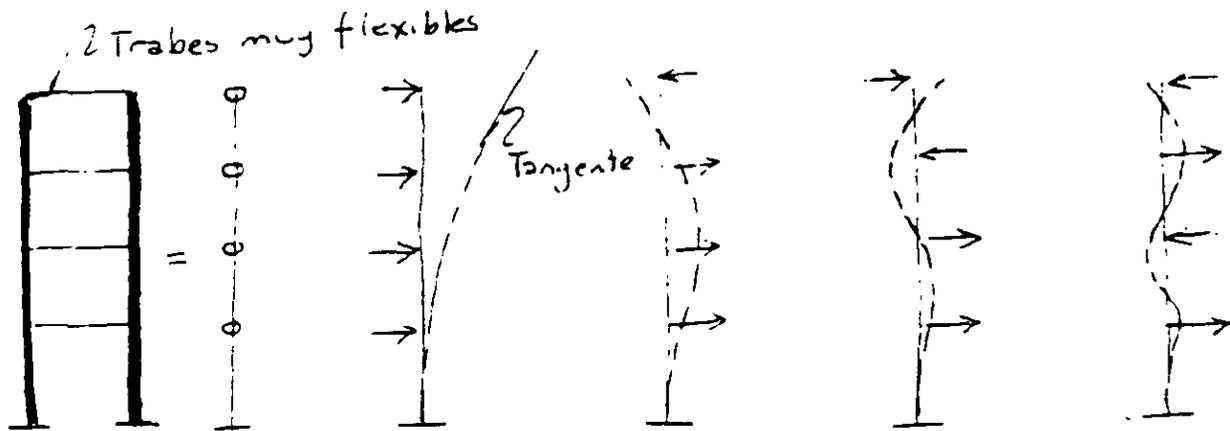
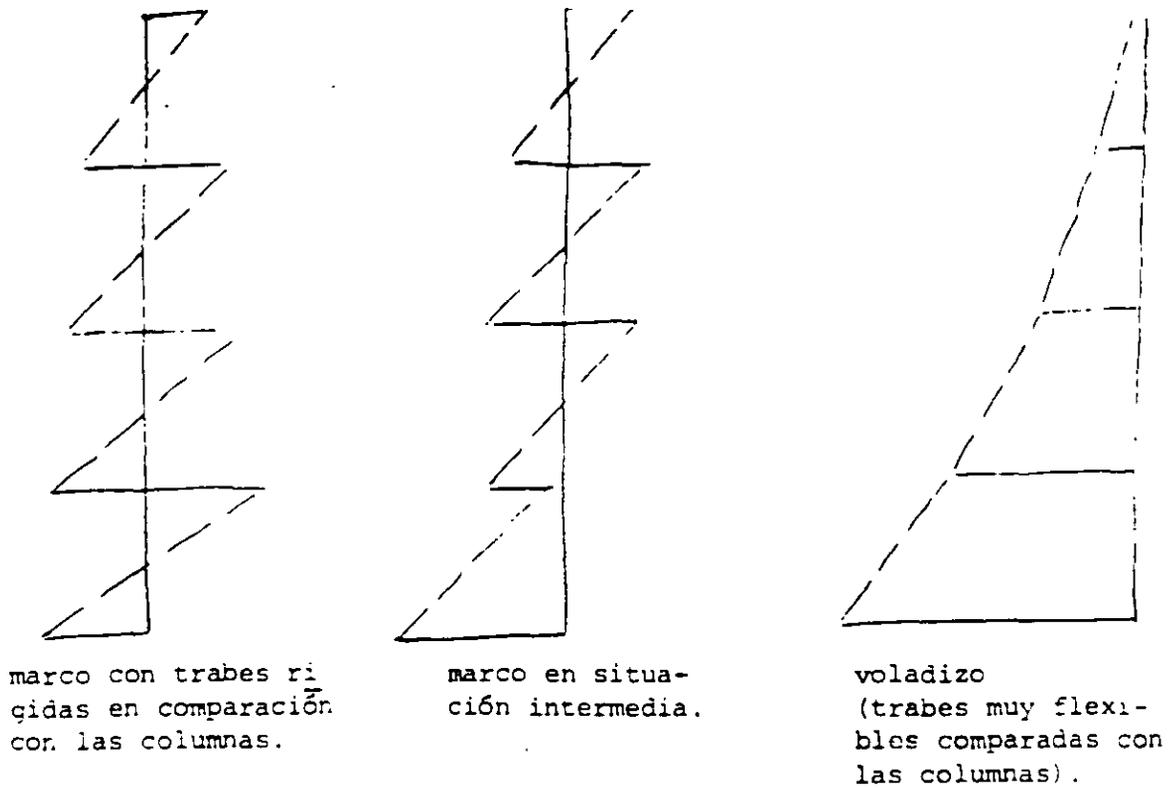


Fig 4

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituidas por marcos rígidos formados por travesaños y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en travesaños y columnas sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura.



Momentos flexionantes en columnas. Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación puede ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.

Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un índice de rotación nodal, que define como:

$$r = \frac{\sum (I/l)_{\text{traves}}}{\sum (I/l)_{\text{cols}}}$$

y se puede calcular en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí $\sum (I/l)_{\text{traves}}$ es la suma de rigideces relativas de las traves de un cierto nivel y $\sum (I/l)_{\text{cols}}$ es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las traves antes mencionadas.

Blume encontró que si $\rho > 0.10$ hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de ρ menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de ρ entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valuar ρ en distintos niveles.

Efectos de deformación axial de las columnas

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Cuando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la crujía o crujías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión, calculando sus periodos como se indicó en el método Stodola-Vianello-Newmark.

Cuando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1. Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

REFERENCIA 1

Blume, John., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings", Proceedings ASCE, Structural Division, February 1968.

REFERENCIA 2

Codden, William G., "Numerical Analysis of Beam and Column Structures", Prentice Hall.

Jose Luis Trigos
Jun 1983

SUPER-ETABS

An Enhanced Version of
the ETABS Program

A Report to the
National Science Foundation

JGB J. G. BOUWKAMP, INC.
ENGINEERING CONSULTANTS

NST, NDF, NTF, NLD, NAT, NFR, NSD, KODE(3), ICHEK, GRAY, BHED, IEM

1. CONTROL INFORMATION CARD (715, 1X, 411, F10.0, 6A5)

(715, 1X, 411, F10.0, 6A5) ** = 6)

Columns	Note*	Entry
1 - 5		Number of stories in the complete building (not including the footing line).
6 - 10	(1)	Number of frames with different properties or different vertical loading.
11 - 15	(1)	Total number of frame or shear wall elements in the structure.
16 - 20	(2)	Total number of load conditions.
21 - 25 ⁺		Analysis type code (See Fig. B1):
	(3)	EQ.0; Static loads only.
		EQ.1; Mode shapes and frequencies only.
	(56)	EQ.-1; Input and/or generation of approximate mode shapes and periods plus static analysis using lateral force cases (A and B) for the solution of the gross response quantities.
		EQ.2; Static load analysis plus modeshapes and frequencies.
		EQ.3; Lateral earthquake response spectrum analysis for the solution of individual frame displacements and member forces in addition to analysis type 2, above.
	(58)	EQ.4; Lateral earthquake time history response analysis for the solution of individual frame displacements and member forces in addition to analysis type 2, above.
		EQ.5; This option is not available for use.
	(56)	EQ.6; Lateral earthquake response spectrum analysis for the solution of the gross response quantities.
	(56)	EQ.-6 Input and/or generation of approximate mode shapes and periods plus lateral earthquake response spectrum analysis for the gross response quantities.

IMPORTANT NOTATIONS :

* See Section 8 for notes.

+ Indicates new data for SUPEP-ETABS enhancement.

** Indicates altered data provided for newer computer versions

Columns	Note	Entry
		EQ.7; Both analysis types 3 and 6, above.
	(56)	EQ.8; Lateral earthquake time history response analysis for solution of the gross response quantities.
	(56)	EQ.-8; Input and/or generation of approximate mode shapes and periods plus lateral earthquake time history response analysis for the gross building response quantities.
		EQ.9; Both analysis types 4 and 8, above.
26 - 30	(4) NFO	Number of frequencies to be calculated (NFO).
31 - 35	(5) NSD	Allowable story degrees of freedom: EQ.0; X, Y translations + story rotations. EQ.1; X translation only (for symmetrical buildings only). EQ.2; Y translation only (for symmetrical buildings only).
36		Blank
37+	KODG(1)	Lateral load case A force generation code (see LATERAL FORCE GENERATION CARDS): EQ.0; No force generation. EQ.1; Generate forces in X direction. EQ.2; Generate forces in Y direction. EQ.3; Generate forces in both X and Y directions.
38+	KODG(2)	Lateral load case B force generation code.
39+	(52) KODG(3)	Element stress ratio calculation code (see FRAME DATA): EQ.0; No stress ratios calculated. EQ.1; Stress ratios calculated for column, beam and diagonal brace elements.
40+	ICHECK	Execution code: EQ.0; Full Execution EQ.1; Data check.
41 - 50+	(51)	Acceleration of gravity for use in calculation of P-Δ effects.
51 - 80		Building identification information to be printed with the output.

31-74 **

2A. STORY DATA - Prepare two (2) cards per story level; data is entered in sequence from top to bottom of the structure.

First Card (A5,I5,7F10.0) (1X,AA,5X,7F10.0/8F10.0)

Columns	Note	Entry (or four) **
1 - 5		Five characters to be used for level identification.
2 - 5		
6 - 10		Blank
11 - 20		Story height [distance from the floor (or roof) level to the floor (or foundation) level below].
21 - 30	(6)	Translational mass.
31 - 40	(6)	Rotational mass moment of inertia about a vertical axis through the center of mass.
41 - 50	(7)	X-distance to the center of mass measured from the reference point.
51 - 60	(7)	Y-distance to the center of mass measured from the reference point.
61 - 70	(8)	External story stiffness in the X-direction.
71 - 80	(8)	External story stiffness in the Y-direction.

Second Card (8F10.0)

1 - 10	(48)	F_{xA} ; load for lateral load case A.
11 - 20	(48)	F_{yA} ; load for lateral load case A.
21 - 30		X_A ; X-ordinate at the point of load application for load case A (see Figure B2).
31 - 40		Y_A ; Y-ordinate at the point of load application for load case A (see Figure B2).
41 - 50	(48)	F_{xB} ; load for lateral load case B.
51 - 60	(48)	F_{yB} ; load for lateral load case B.
61 - 70		X_B ; X-ordinate at the point of load application for load case B (see Figure B2).
71 - 80		Y_B ; Y-ordinate at the point of load application for load case B (see Figure B2).

2B. LATERAL FORCE GENERATION

UBC and/or ATC type lateral force generation are available. See Part A for description of force generation procedures. No cards required if force generation not requested; otherwise, input one card for each lateral load case for which force generation is requested (see CONTROL INFORMATION CARD, columns 37-38). If force generation requested for both load cases A and B, then first card is for case A. Format according to a or b below, depending upon type.

a. UBC Force Generation (I5,5X,7F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5 ⁺		Punch 1 to indicate UBC force generation.
6 - 10		Blank
11 - 20 ⁺	(49)	Fundamental period value.
21 - 30 ⁺	(49)	Acceleration of gravity.
31 - 40 ⁺	(49)	Z coefficient.
41 - 50 ⁺	(49)	I coefficient.
51 - 60 ⁺	(49)	K coefficient.
61 - 70 ⁺	(49,50)	C coefficient.
71 - 80 ⁺	(49,50)	S coefficient.

b. ATC Force Generation (I5,5X,3F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5 ⁺		Punch 2 to indicate ATC force generation.
5 - 10 ⁺		Blank
11 - 20 ⁺	(49)	Fundamental period value.
21 - 30 ⁺	(49)	Acceleration of gravity.
31 - 40 ⁺	(49)	C _s seismic coefficient.

3. APPROXIMATE ANALYSIS DATA

For analysis types -1, -6, and -8, replace FRAME DATA and FRAME LOCATION CARDS with the following data. See Part A for description of mode shape generation procedures.

a. Period and Mode Shape Generation Cards

First Card (I5,5X,7F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5 ⁺		Mode shape generation code:
	(57,59)	EQ.0; Empirical rule generation.
	(59)	EQ.1; Shear beam rule generation.
		EQ.2; Mode shapes input.
6 - 10		Blank
11 - 20 ⁺	(59)	First period value
21 - 30 ⁺		Second period value
.		.
.		.
71 - 80 ⁺		Seventh period value

Additional Period Cards (8F10.0)

s many cards as required to define NFQ periods (see CONTROL INFORMATION CARD, Columns 26-30).

Columns	Note	Entry
1 - 10 ⁺		Eighth period value
11 - 20 ⁺		.
.		.
.		.
71 - 80 ⁺		.

b. Mode Shape Cards (2I5,3F10.0)

Required only if mode shape generation code equals 2 (see section 3a above, Columns 1-5). Modes are input in the same order corresponding to the periods (see section 3a above). The program will order the periods and mode shapes in descending order according to period value. The mode shapes are mass normalized within the program; therefore, any relative magnitude can be used to define the shapes. Each mode shape is input starting from the top to the bottom of the structure. For story levels omitted, a straight line interpolation is performed using the modal component values of the closest floor levels above and below the omitted floor that have modal components defined. For each mode shape, the top floor level and the first floor level modal components

must be input.

Columns	Note	Entry
1 - 5 ⁺		Mode number
6 - 10 ⁺		Floor level
11 - 20 ⁺		X translational modal component
21 - 30 ⁺		Y translational modal component
31 - 40 ⁺		Rotational modal component

4. FRAME DATA - One set of data must be entered for each different frame. Frames with different locations but identical properties and vertical loading need be entered only once.

M, NS, NC, NB, NCP, NBP, NFEF, NPAN, NTEU, FHED

- a. Frame Control Card (9I5,7A5) (9I5.7A4)^{Y*}

Columns	Note	Entry
1 - 5	(9) M	Frame identification number.
6 - 10	(10) NS	Number of levels above foundation for this frame.
11 - 15	(11) NC	Number of vertical column lines in frame.
16 - 20	NB	Number of bays in frame.
21 - 25	(12) NCP	Number of sets of different column properties.
26 - 30	(13) NBP	Number of sets of different beam (girder) properties.
31 - 35	(14) NFEF	Number of sets of different fixed end moments and shears to be applied as vertical loads to beams (girders).
36 - 40	(15) NPAN	Number of infill shear panels in this frame.
41 - 45	(16) NTEU	Number of bracing elements in this frame.
46 - 80		Label to be used to identify this frame type.

46-73^{Y*}

b. Vertical Column Line Coordinates (I5,2F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5	(17)	Column line identification number.
6 - 15	(18)	x-distance to column line from frame reference point.
16 - 25		y-distance to column line from frame reference point.

c. Column Property Cards

One column property set must be supplied for each different column in this frame.

First Card (I5,F15.0,F10.0,2F5.0,3F10.0,2F5.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5	(19)	Identification number for this column property set.
6 - 20		Modulus of elasticity, E.
21 - 30		Axial area, A.
31 - 35	(24)	Shear area associated with shear forces in major axis direction, MAJ. SA.
36 - 40	(24)	Shear area associated with shear forces in minor axis direction, MIN SA.
41 - 50	(23)	Torsional inertia.
51 - 60		Flexural inertia for bending in the major axis direction, MAJ. I.
61 - 70		Flexural inertia for bending in the minor axis direction, MIN I.
71 - 75	(20)	Rigid zone depth at top of column (for both axes), DT (see Figure B3).
76 - 80	(21)	Rigid zone depth at bottom of column, DB (see Figure B3).

Second Card (5F10.0)

Omit if stress ratio calculation not requested (see CONTROL INFORMATION CARD, Column 39).

Columns	Note	Entry
1 - 10 ⁺	(53)	Allowable axial stress.
11 - 20 ⁺	(53)	Allowable major axis bending stress.
21 - 30 ⁺	(53)	Allowable minor axis bending stress.
31 - 40 ⁺	(53)	Major axis section modulus.
41 - 50 ⁺	(53)	Minor axis section modulus.

Handwritten notes:
21-30+ (53) ...
31-40+ (53) ...
41-50+ (53) ...

d. Beam Property Cards

One beam property set must be supplied in this section for each different beam in the frame; skip this input if the frame has only one column line, or no bays.

First Card (15,F15.0,F10.0,F5.0,2F10.0,5P5.0)

Columns	Note	Entry
1 - 5	(22)	Identification number for this beam property set.
6 - 20		Modulus of elasticity, E.
21 - 25	(24)	Shear area, SA.
26 - 35	(23)	Torsional inertia.
36 - 45		Flexural inertia, I.
46 - 50		K _{II} - stiffness factor (e.g. 4). See Figure B4.
51 - 55		K _{JJ} - stiffness factor (e.g. 4). See Figure B4.
56 - 60		K _{IJ} - stiffness factor (e.g. 2). See Figure B4.
61 - 65	(25)	Rigid zone at end I, wI.
66 - 70		Rigid zone at end J, wJ.

Second Card (2F10.0)

Omit if stress ratio calculation not requested (see CONTROL INFORMATION CARD, Column 39).

Columns	Note	Entry
1 - 10 ⁺	(53)	Allowable bending stress.
11 - 20 ⁺	(53)	Section modulus.

e. Fixed-End Beam Loads (2I5,5F10.0)

One card must be supplied for each different type of vertical beam loading; omit if this is a single column line frame.

Columns	Note	Entry
1 - 5	(26)	Identification number for this vertical loading set.
6 - 10		Input code: EQ.0; Fixed-end forces are applied at the column faces. EQ.1; Fixed-end forces are applied at the column center-lines.
11 - 20	(27)	Fixed-end reaction, M_1 (see Figure B5).
21 - 30		Fixed-end reaction, V_1 (see Figure B5).
31 - 40		Fixed-end reaction, M_2 (see Figure B5).
41 - 50		Fixed-end reaction, V_2 (see Figure B5).
51 - 60	(28)	Uniform force per unit length, w , acting downward to be added to fixed-end reactions.

f. Beam Cards (8I5)

One card per girder must be input from top to bottom and from bay to bay in the frame (unless the data generation option is used). See Figure B6(c) for sign convention of member forces.

Columns	Note	Entry
1 - 5		Bay identification number for this beam.
6 - 10	(29)	Column line number at end I.
11 - 15		Column line number at end J.
16 - 20	(30)	Beam property set identification number for this girder.

21 - 25	(31)	Number of beams in sequence below to be generated having the same properties and vertical loading as this beam.
26 - 30	(32)	Vertical loading set identification number for vertical load case I.
31 - 35		Vertical loading set identification number for vertical load case II.
36 - 40		Vertical loading set identification number for vertical load case III.

g. Column Cards (4I5)

One card per column must be input from top to bottom and from column line to column line of the frame (unless the data generation option is used). See Figure B6(a) for sign convention of member forces.

Columns	Note	Entry
1 - 5		Column line identification number for this column.
6 - 10	(33)	Column property set identification number.
11 - 15	(34)	Column line number defining direction of major axis.
16 - 20	(35)	Number of columns in sequence below to be generated having the same properties as this column member.

h. Panel Element Cards (3I5,5F10.0)

Enter one card per panel in any order; no generation is allowed. See Figure B6(b) for sign convention of member forces.

Columns	Note	Entry
1 - 5	(36)	Level identification number at the top of this panel.
6 - 10		Column line number at the I side of this panel.
11 - 15		Column line number at the J side of this panel.
16 - 25		Modulus of elasticity, E.
26 - 35		Gross sectional area, A.
36 - 45	(45)	Moment of inertia, I.
46 - 55		Effective shear area, A_v .
56 - 65		Shear modulus, G.

i. Bracing Element Cards (3I5,3F10.0)

Enter one card per brace in order; no generation is allowed. See Figure B6(d) for sign convention of member forces.

Columns	Note	Entry
1 - 5		Level identification number at the top of this brace.
6 - 10		Column line number at the upper end of this brace.
11 - 15		Column line number at the lower end of this brace.
16 - 25		Modulus of elasticity, E.
26 - 35		Cross-sectional area, A.
36 - 45 [†]	(53)	Allowable axial stress. Omit if stress ratio calculation not requested (see CONTROL INFORMATION CARD, Column 39).

5. FRAME LOCATION CARDS (2I5,4F10.0,4A5) (2I5,3F10.0,4A5) ^{††}

One card must be entered in this section for each frame (or single column) in the building; the total number of frame locations to be read is controlled by the entry in card columns 11-15 of the CONTROL INFORMATION CARD.

Columns	Note	Entry
1 - 5	(37)	Frame identification number.
6 - 10	(38)	Force calculation code: EQ.0; Frame forces will be calculated and printed. EQ.1; Frame forces will not be calculated.
11 - 20	(39)	Distance, X_1 (see Figure B7).
21 - 30		Distance, Y_1 (see Figure B7).
31 - 40	(40)	Angle ϕ between the frame x axis and structure (Global) X axis (counter-clockwise X to x). See Figure B7.
41 - 60		Information to be printed with the output which will identify this particular frame.

d1-56 ^{††}

6A. EARTHQUAKE ACCELERATION SPECTRUM CARDS

These data cards are required if the analysis type code is set equal to three (3), six (6), seven (7), or minus six (-6); see CONTROL INFORMATION CARD, Columns 21-25.

a. Control Card (2I5,2F10.0,2F5.0,5I1,7A5) (2I5,2F10.0,2F5.0,5I1,7A4) ⁴⁴

Columns	Note	Entry
1 - 5		Number of period cards to define response spectrum (see section b below).
6 - 10		The number of modes, in sequence, starting with the lowest, to be printed separately.
11 - 20		Acceleration, units/sec/sec.
21 - 30	(41)	Direction of earthquake input, θ , in degrees and decimals (0.000). See Figure B8.
31 - 35 ⁺	(46)	Damping ratio (modal damping/critical damping) to be used in the calculation of the double sum (DSC) and complete quadratic combination (CQC) modal cross-correlation coefficient matrices.
36 - 40 ⁺	(46)	Earthquake strong motion duration used for the calculation of the DSC modal cross-correlation coefficient matrix. Default to value of 1.0E+03.
41 ⁺	(42)	Output code for <u>SRSS</u> of modal gross building responses (for analysis types 6, 7, and -6). EQ.0; Response values not printed. EQ.1; Response values printed.
42 ⁺	(42,54)	Output code for <u>DSC</u> of modal responses (for analysis types 3, 6, 7, and -6). See note 54 regarding use of code in type 3 analysis.
43 ⁺	(42,54)	Output code for <u>CQC</u> of modal responses (for analysis types 3, 6, 7, and -6). See note 54 regarding use of code in type 3 analysis.
44 ⁺	(42)	Output code for <u>absolute sum</u> of modal gross building responses (for analysis types 6, 7, and -6).
45 ⁺		Analysis types 6, 7, and -6 gross building response direction output code: EQ.0; Response quantities are calculated and printed with respect to global structural coordinate system (X,Y). EQ.1; Response quantities are calculated and printed with respect to coordinate system (R,S) defined by direction of earthquake input (see Figure B8).

EQ.2; Response quantities are calculated and printed with respect to both (X,Y) and (R,S) coordinate systems.

46 - 80 User information to be printed with output.

46 - 73
b. Period Cards (2F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 10		Period entered in increasing numerical sequence.
11 - 20		Spectrum acceleration.

6B. TIME HISTORY CARDS

These data cards are required only if the analysis type code was set to four (4), eight (8), nine (9), or minus eight (-8); see CONTROL INFORMATION CARD, Columns 21-25.

a. Control Card (2I5,3F10.0,5I1,7A5) (2I5,3F10.0,5I1,7A.4) ^{tw}

Columns	Note	Entry
1 - 5 ⁺		Number of acceleration values (NPC). Two different input formats are available (see section c below).
6 - 10	(44)	Number of time steps to be used in the analysis.
11 - 20		Scale factor for accelerations.
21 - 30	(41)	Direction of earthquake input, θ . See Figure B8.
31 - 40		Time increment, Δt , for response evaluation (see Columns 6-10 above)
41 ⁺	(47)	Output code for time history print of story <u>deflections</u> (for analysis types 8, 9, and -8). EQ.0; Response values not printed. EQ.1; Response values printed at time increments Δt (see Columns 31-40, above).
42 ⁺	(47)	Output code for time history print of story <u>drifts</u> (for analysis types 8, 9, and -8).
43 ⁺	(47)	Output code for time history print of cumulative story <u>shears</u> (for analysis types 8, 9, and -8).
44 ⁺	(47)	Output code for time history print of cumulative story <u>overturning moments</u> (for analysis types 8, 9, and -8).
45 ⁺		Analysis types 8, 9, and -8 gross building response

direction output code:

EQ.0; Response quantities are calculated and printed with respect to global structural coordinate system (X,Y).

EQ.1; Response quantities are calculated and printed with respect to coordinate system (R,S) defined by direction of earthquake input (see Figure B8).

EQ.2; Response quantities are calculated and printed with respect to both (X,Y) and (R,S) coordinate systems.

46-80 User information to be printed with output.

b. Damping Cards (I5,F10.2)

One card must be supplied for each frequency in the analysis (See Note 4).

Columns	Note	Entry
1 - 5	(4)	Mode number (in ascending order).
6 - 15		Damping ratio: Modal Damping/Critical Damping.

c. Ground Motion Acceleration Data

Two formats for input of ground acceleration data are available. The format used is dependent upon the sign of NPC (see card a, columns 1-5, above).

If NPC.GT.0 then:

One card must be supplied for each time increment, at which ground acceleration is specified in increasing time order. The time span must be greater than the number of time steps multiplied by Δt .

Time and Acceleration Cards (2F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 10		Time
11 - 20		Ground acceleration

If NPC.LT.0 then:

The ground acceleration points are input at equal time intervals. The number of acceleration points input is equal to NPC. The time span must be greater than the number of time steps multiplied by Δt .

Acceleration Time Interval Card (F10.0)

Columns	Note	Entry
1 - 10 ⁺		Time interval between acceleration input points.

Acceleration Cards (8F9.0)

As many cards as necessary to define NPC acceleration values.

Columns	Note	Entry
1 - 9 ⁺		
10 - 18 ⁺		Ground accelerations
64 - 72 ⁺		

7. LOAD CASE DEFINITION CARDS (5F10.0,4P5.0,P10.0)

Load cases for the complete building are defined as a combination of vertical conditions (I, II and III), lateral loading conditions (A and B), and earthquake spectrum or time history loadings. One card must be entered in this section for each different building load case; the total number of building load cases is controlled by the entry in card columns 16-20 of the CONTROL INFORMATION CARD. Omit this data if the analysis type code is set equal to one (1); six (6); eight (8); minus one (-1); minus six (-6); or, minus eight (-8). See note 56.

Columns	Note	Entry
1 - 10		Multiplier or vertical load case I.
11 - 20		Multiplier for vertical load case II.
21 - 30		Multiplier for vertical load case III.
31 - 40		Multiplier for lateral load case A.
41 - 50		Multiplier for lateral load case B.
51 - 55	(42)	Multiplier for spectrum 1 loading - SRSS modal combination.
56 - 60	(42)	Multiplier for spectrum 2 loading - Absolute Sum modal combination.
61 - 65 ⁺	(42,55)	Multiplier for spectrum 3 loading - DSM modal combination.
66 - 70 ⁺	(42,55)	Multiplier for spectrum 4 loading - CQC modal combination.
71 - 80	(43)	Multiplier for time history earthquake response.

8. NOTES

- (1) Input data for frames with identical properties and vertical loading are given only once—see Section 5, FRAME LOCATION CARDS.
- (2) Load conditions are defined as combinations of the seven (7) basic load cases—see Section 7, LOAD CASE DEFINITION CARDS.
- (3) Mass properties of the structure are not required for analysis type "0".
- (4) The number of frequencies must be less than the number of stories times the number of degrees of freedom per story.
- (5) For symmetrical buildings, the capacity and speed of solution of the program is improved if the story rotation is set to zero; i.e., "1" or "2" in card column 35.
- (6) The translational mass has units of force divided by acceleration (W/g). The rotational mass moment of inertia is not required if the allowable story degrees of freedom do not include rotation. Mass properties need not be supplied if this data case is for static loading only.
- (7) The location of the center of mass (X_m, Y_m) need not be given if this data case is for static loads only.
- (8) The external story stiffnesses act on lines through the center of mass. These stiffnesses can be used to represent restraints (or braces) at the story level or can be used to represent soil stiffness below the ground level.
- (9) Frame identification numbers must be entered in numerical sequence, beginning with number one (1). This frame may be located (repeated) at different positions in the structure.
- (10) If a frame does not extend the full height of the building, then only those story levels actually existing in the frame are input below.
- (11) An isolated shear wall is a single column line frame. For this case all data pertaining to beams (girders) is meaningless and must be omitted in the data input section to follow below.
- (12) Column properties may be referenced to any number of columns in the frame.
- (13) The number of beam property sets controls the number of cards to be read in Section 4.d, below.
- (14) If no vertical static loads act on the structure, then omit this number, and skip Section 4.e, below.
- (15) If no panel elements are included in this frame, then omit this entry, and skip Section 4.h, below.
- (16) If no bracing elements are included in this frame then omit this entry, and skip Section 4.i, below.

- (17) One card must be included for each column line in the frame. For frames with a single column line a second column line should be specified to define the major axis for column properties entered in Section 4.g.
- (18) Coordinates of column lines are measured from the frame (local) axis.
- (19) Property set identification numbers must be in increasing numerical sequence beginning with one (1).
- (20) The rigid zone depth is used to reduce the effective length of the column about both axes.
- (21) Usually zero unless beam extends above floor level.
- (22) Property set identification numbers must be input in increasing numerical sequence beginning with one (1).
- (23) Torsional inertias may be omitted.
- (24) Shearing deformations are ignored if shear areas are zero.
- (25) The beam rigid zone lengths are used to reduce the effective length of the beam (girder).
- (26) Load set numbers must be input in sequence.
- (27) Reactions act on the beam ends and are positive as shown in Figure B5.
- (28) Additional fixed-end forces due to the uniform load, w , are calculated using:
- $$M = wL^2/12; \quad V = wL/2$$
- and are added to any specified fixed-end reactions. The forces due to w are exact only for prismatic beams.
- (29) Position of I and J ends defines local coordinate axes with local "y" positive from I to J and local "z" positive vertically upwards. A right hand screw rule sign convention applies.
- (30) Beams with zero (0) stiffness (missing girders) may be input as having a property set number of zero; if the beam has finite stiffness, the set number must reference an existing property set defined previously in Section 4.d, above.
- (31) The generation option can only be used to define girders within the current bay; a new bay must be started with a new beam card.
- (32) The vertical loading sets defined in Section 4.e, above, are applied to the girders via the references in card columns 11-25. Three (3) independent vertical load distributions (I, II, and III) are allowed, and these distributions are combined with the lateral load case (A and B) and the earthquake analysis to form load cases for the complete building; see Section 7, below.

- (33) Missing columns may be input as having a property set number of zero (0); if the column has finite stiffness, then the set number referenced must correspond to one of the property sets defined previously in Section 4.c, above.
- (34) Defines direction on local "y" axis and local "z" axis is in the vertical plane with positive upwards. A right hand screw rule convention applies.
- (35) Generation is allowed only within the current column line; begin a new column line with a new column card.
- (36) The foundation line is defined as level zero, and the roof level number is equal to the total number of stories in the building.
- (37) Frame identification numbers may be repeated, but location cards must be input in frame identification number sequence.
- (38) A frame force calculation code of one (1) will suppress output for the frame.
- (39) Distance from structure (Global) axis to origin of frame (local) axis.
- (40) Angle is input in degrees and decimal fractions; e.g. 36 12' entered as 36.2.
- (41) The angle ϕ is measured positively clockwise between the global Y-direction and the line of action of the earthquake direction; see Figure B8.
- (42) Four different response spectrum modal combination methods are available. See discussion in Part A regarding situations where the DSM or CQC methods should be used.
- (43) Multipliers should be specified either for response spectrum analysis or for time history analysis as specified in Section 1, CONTROL INFORMATION CARD as only one of these analysis types may be performed in a single program execution.
- (44) The total time span of the computed response is equal to the number of time steps multiplied by the time increment Δt . Output is given at each time step. Since explicit integration is used in computing the response, numerical instability problems are never encountered and the time increment may be any desired sampling value.
- (45) A zero (0) value for the moment of inertia selects the pure shear deformation panel model. The pure shear panel uses the gross sectional area, not the effective shear area, to calculate stiffness and stress values.
- (46) The DSC and CQC matrices are used for combining the individual modal responses to estimate the total response. If DSC and/or CQC of modal responses are not requested, leave this entry blank.
- (47) Envelope values of maximum and minimum response values, and

the associated times of occurrence are always printed when using analysis types 8 or 9.

- (48) If force generation requested, then the generated forces replace any entries in these columns.
- (49) No default value.
- (50) The user must ensure that values of C, S, C*S are within code specified limits.
- (51) No default value, if zero then geometric stiffness (P- Δ) effects not included in stiffness and response calculation.
- (52) See Part A for description of stress ratio equation.
- (53) No default value. If less than or equal to zero (blank), stress ratios will not be calculated for members with this property set.
- (54) If DSC and/or CQC is required for type 3 analysis, enter the value one (1) in the appropriate columns. When blank or zero, the DSC and/or CQC element response calculations are skipped and are not available for use in load case definition (see LOAD CASE DEFINITION CARDS), whereas the SRSS and ABS element responses may be calculated irrespective of their output codes. The purpose of this key is to omit unnecessary internal DSC and/or CQC calculations when these combination types are not used. Note, for type seven (7) analysis, if DSC/CQC element response is requested, the CSC/CQC gross response must also be output.
- (55) If DSC and/or CQC is requested, then the appropriate key must be set in the EARTHQUAKE ACCELERATION SPECTRUM CARDS (Control Card, Columns 42-43).
- (56) The gross response quantities from lateral static and dynamic analyses cannot be combined to form new load cases. The results from each lateral static and/or dynamic analysis are output separately.
- (57) Note that when using the empirical rule to automatically generate mode shapes in approximate analysis, irregularities in higher mode shapes may result if a large number of modes is included in the analysis. The user should use only that number of modes which insures that the smallest internodal distance (h) of the highest mode (NFQ) will be greater than the typical story height for the building.
- (58) In analysis type 4, only peak envelope member response values are printed.
- (59) For 3-D approximate analysis, the order of mode generation is as follows: first X translational, first Y translational, first torsional, second X translational, second Y translational, second torsional, etc. Therefore, period values must be input according to this pattern. Also, in 3-D mode generation, the number of modes NFQ must be a multiple of three (3).

Analysis Type	Periods and Mode Shapes		Macro (Gross) Building Response			Detailed (Elements) Building Response			
	Eigen Solution	Approx.	Static	Response Spectrum	Time History	Static	Response Spectrum	Time Hist. (Envelopes)	Time History
0			X			X			
1	X		X						
-1		X	X						
2	X		X			X			
3	X		X			X	X		
4	X		X			X		X	
5									
6	X		X	X					
-6		X	X	X					
7	X		X	X		X	X		
8	X		X		X				
-8		X	X		X				
9	X		X		X	X		X	

9. FIGURES

Figure B1: Analysis Types

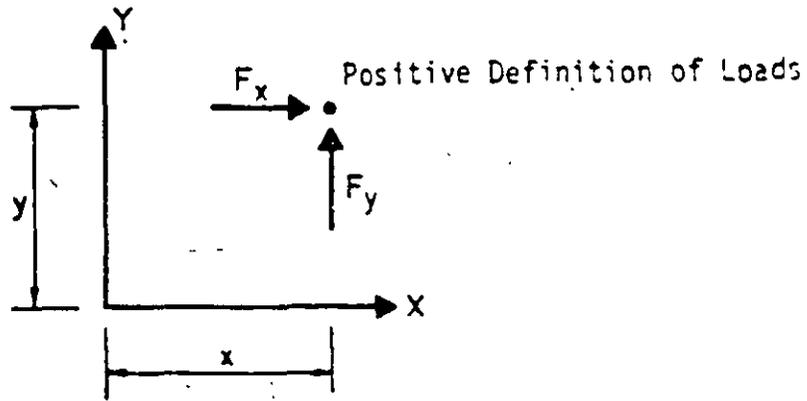


Figure B2: Definition of Positive Loads

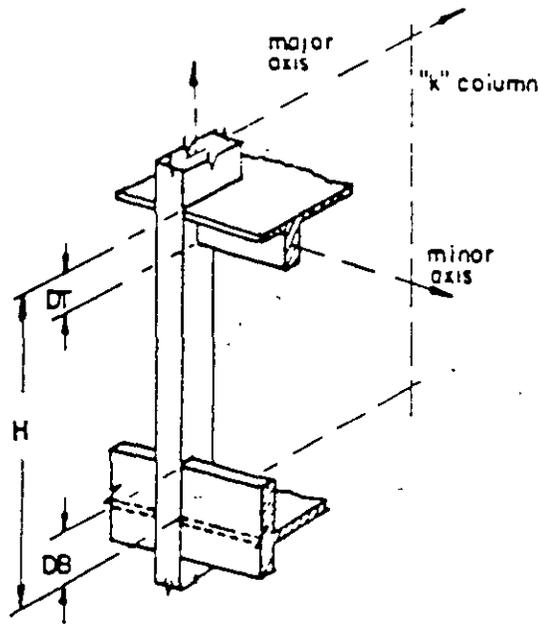


Figure B3: Column Geometry

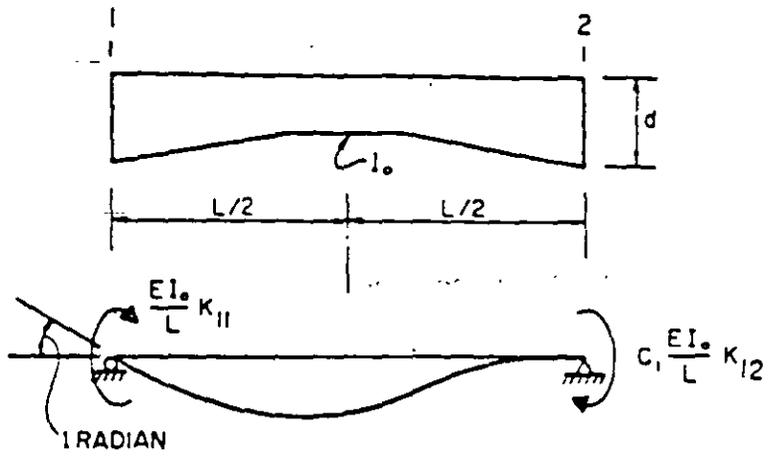


Figure B4: Beam Stiffness Factors

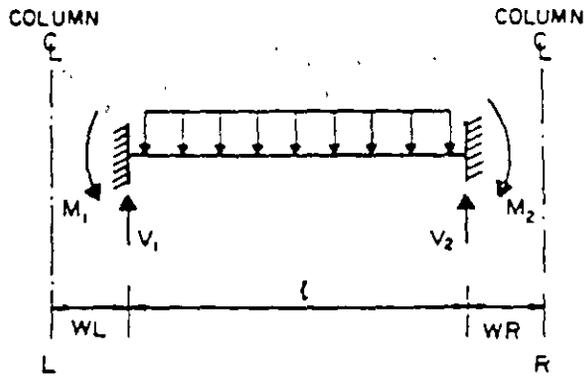


Figure B5: Beam Fixed End Forces

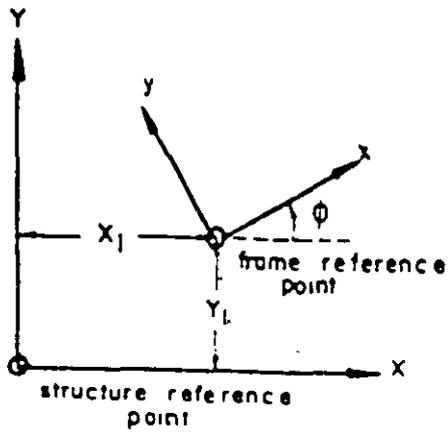


Figure B7: Frame Location Procedure

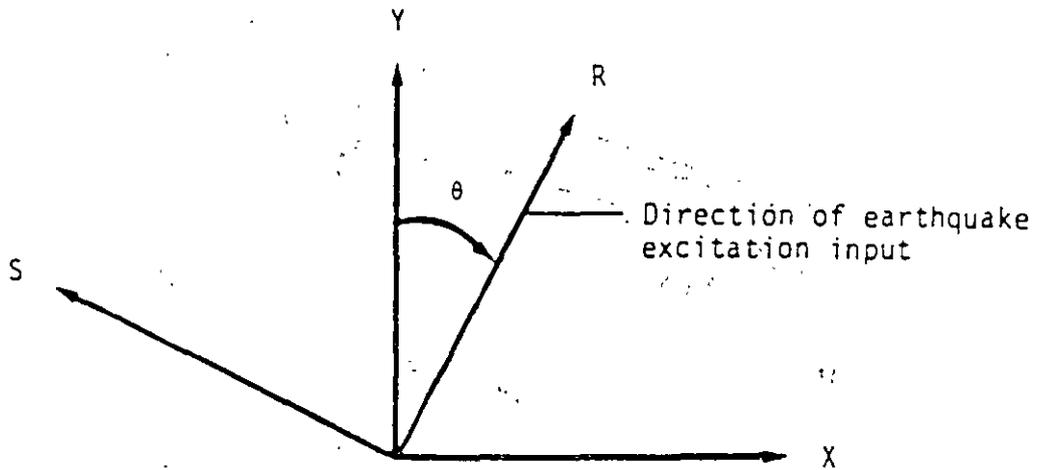


Figure B8: Orientation of (R,S) Coordinate System with respect to Global (X,Y) Coordinate System.

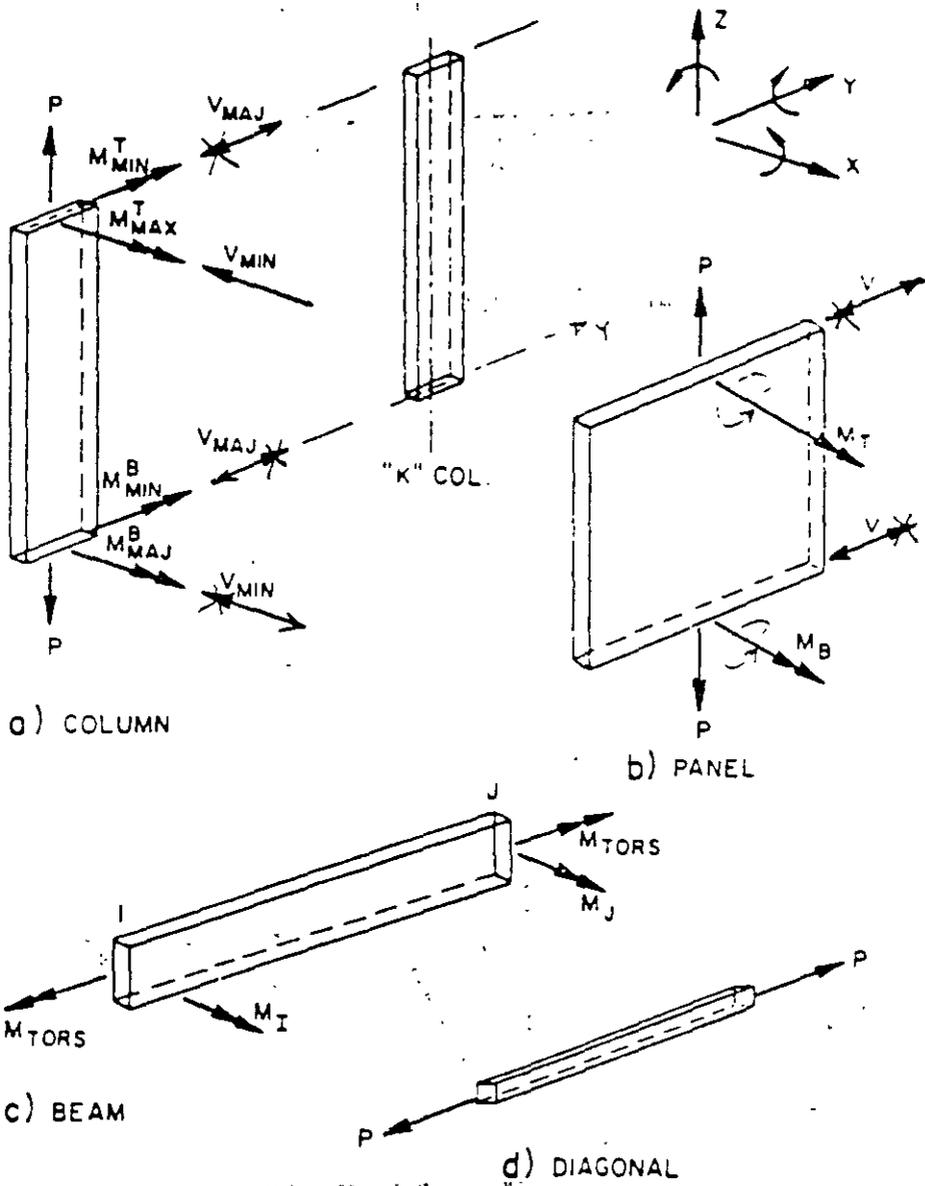


Figure B6: Sign Convention for Member Forces