



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO

TEMA:
CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CONCRETO
Y DEL ACERO

EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003

CAPÍTULO 2

Características generales del concreto y del acero

2.1 Introducción./ 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple./ 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido./ 2.4 Fatiga./ 2.5 Módulos elásticos./ 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura./ 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo.

2.1 Introducción

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla, en proporciones determinadas, de cemento, agregados y agua. El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo. Algunas veces se añaden ciertas sustancias, llamadas aditivos o adicionantes, que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El concreto simple, sin refuerzo, es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir tensiones, se emplea refuerzo de acero, generalmente en forma de barras, colocado en las zonas donde se prevé que se desarrollarán tensiones bajo las acciones de servicio. El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto.

El uso del refuerzo no está limitado a la finalidad anterior. También se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al con-

creto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación de concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama *concreto reforzado*.

El concreto presforzado es una modalidad del concreto reforzado, en la que se crea un estado de esfuerzos de compresión en el concreto antes de la aplicación de las acciones. De este modo, los esfuerzos de tensión producidos por las acciones quedan contrarrestados o reducidos. La manera más común de presforzar consiste en tensar el acero de refuerzo y anclarlo en los extremos del elemento.

Para dimensionar estructuras de concreto reforzado es necesario utilizar métodos que permitan combinar el concreto simple y el acero, de tal manera que se aprovechen, en forma racional y económica, las características especiales de cada uno de ellos. Esto implica el conocimiento de estas características; en las páginas siguientes se describirán algunas de las más importantes.

Existen otras características del concreto, tales como su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a la abrasión, a la intemperie, etc., que no se tratarán, ya que no es necesario su conocimiento detallado para establecer métodos de dimensionamiento. El lector puede consultar a este respecto algún texto de tecnología del concreto, como los de Neville [2.2, 2.19], el de Troxell, Davis y Kelly [2.1] o el de Orchard [2.3], recomendados al final de este capítulo.

2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple

Se ha indicado que el objeto principal del estudio del comportamiento del concreto es la obtención de las relaciones acción-respuesta del material, bajo la gama total de sollicitaciones a que puede quedar sujeto. Estas características acción-respuesta pueden describirse claramente mediante curvas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados bajo distintas condiciones.

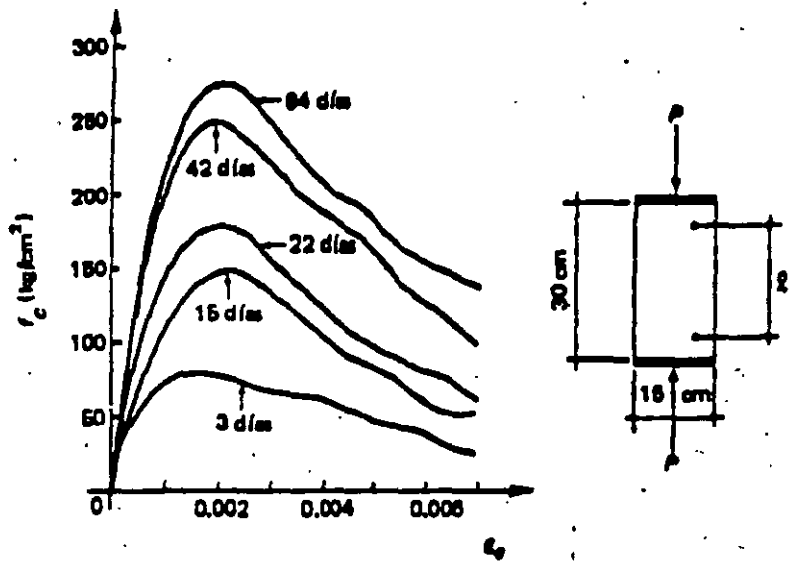


Figura 2.5 Efecto de la edad al ensayar en la resistencia.

EFFECTO DE LA RELACIÓN AGUA/CEMENTO

La resistencia del concreto depende de la relación agua/cemento: a mayor relación agua/cemento, menor resistencia. En la figura 2.5 se presentan curvas esfuerzo-deformación, correspondientes a distintas relaciones.

Puede observarse en las figuras 2.3 y 2.5 que la forma de la curva esfuerzo-deformación depende de la resistencia. Para resistencias bajas, la pendiente de la rama descendente es muy suave. Para resistencias altas, la curva es muy pronun-

ciada en su parte superior, y la rama descendente es más corta. También se nota que la pendiente de la tangente inicial a la curva aumenta a medida que crece la resistencia.

EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA

La figura 2.6 muestra resultados de ensayos de cilindros realizados a distintas velocidades de carga. En este tipo de ensayos se aplicó la carga a una velocidad constante y se midió el tiempo necesario para alcanzar la resistencia.

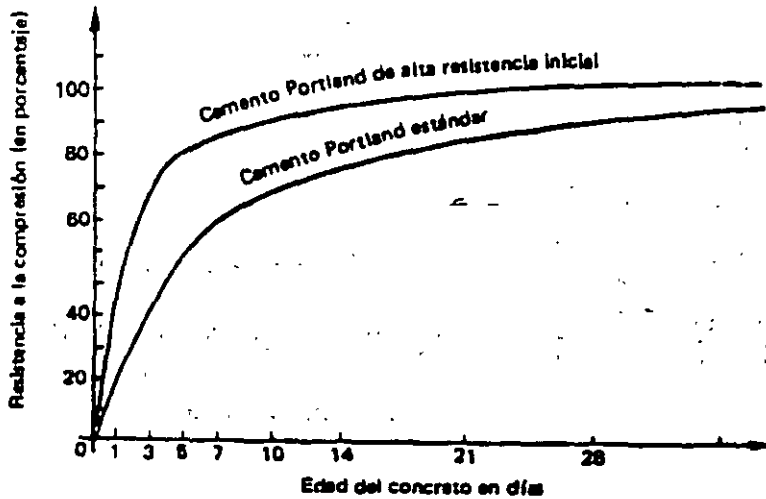


Figura 2.4 Variación de la resistencia con la edad.

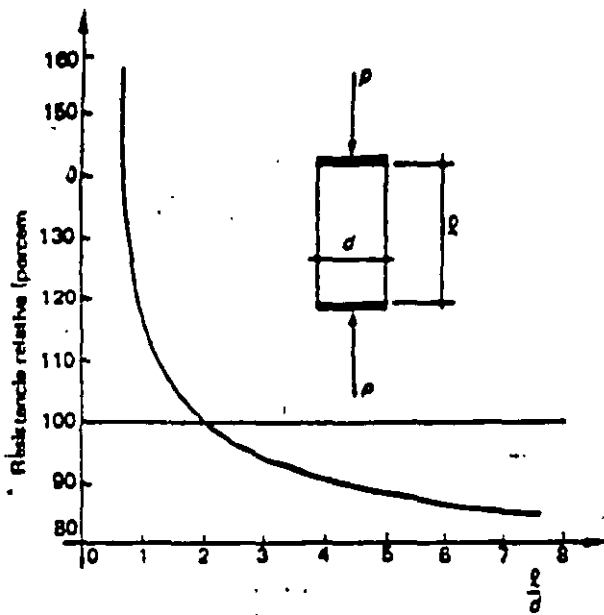


Figura 2.8 Efecto de la relación de esbeltez.

EFFECTO DE LA ESBELTEZ Y DEL TAMAÑO DEL ESPÉCIMEN

El efecto de la relación de esbeltez sobre la resistencia a la compresión de un prisma se muestra de manera cualitativa en la figura 2.8, en la que arbitrariamente se ha tomado como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos. Como medida de la esbeltez se toma la relación entre la longitud, medida en dirección de la carga, y el lado menor de un prisma, o el diámetro de un cilindro.

Para esbelteces mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente, para esbelteces de seis o más. Por el contrario, para especímenes de esbelteces menores que dos, la resistencia aumenta indefinidamente, y en teoría sería infinita para un espécimen de altura nula.

En especímenes geoméricamente semejantes pero de distinto tamaño, la resistencia disminuye, dentro de ciertos límites, mientras mayor sea el espécimen. Esto es debido a que en materiales frágiles, como el concreto, la probabilidad de que existan zonas de resistencia baja aumenta con el tamaño del espécimen. La fi-

gura 2.9 muestra el efecto del tamaño de un cilindro en su resistencia a la compresión.

2.2.2 Compresión triaxial

Los ensayos efectuados en cilindros de concreto bajo compresión triaxial muestran que la resistencia y la deformación unitaria correspondiente crecen al aumentar la presión lateral de confinamiento. En estos ensayos, el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando el espécimen de aceite a cierta presión y aplicando una carga axial hasta la falla mediante dispositivos como el ilustrado esquemáticamente en la figura 2.10 (a).

En la figura 2.10 (b) se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de los ensayos realizados por Brandtzaeg [2.6]. Corresponden a distintas presiones de confinamiento lateral, desde 38 hasta 286 kg/cm². Se puede observar que el incremento de la resistencia es función directa del incremento de la presión de confinamiento. Con presiones de confinamiento adecuadas pueden obtenerse resistencias de más de 1000 kg/cm².

El efecto de la presión lateral sobre la resistencia se ilustra en la figura 2.10 (c), donde se presenta una gráfica del esfuerzo axial, f_1 , necesario para producir la falla del cilindro, contra la presión lateral, f_2 . Los resultados obtenidos de los ensayos pueden representarse, aproximadamente, por medio de la expresión

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2 \quad (2.1)$$

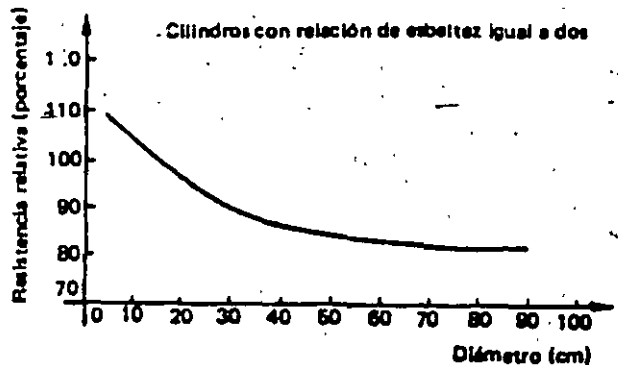


Figura 2.9 Efecto del tamaño.

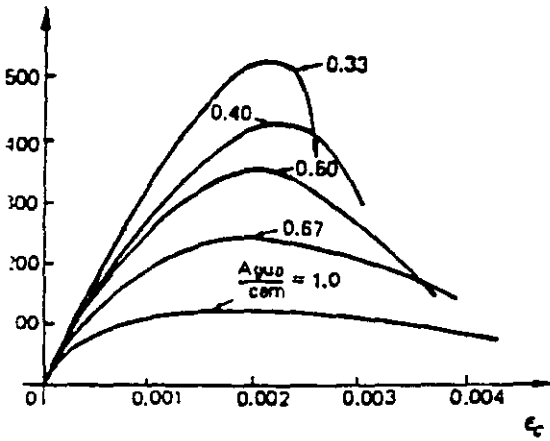


Figura 2.5 Efecto de la relación agua/cemento.

Se puede observar que la resistencia de un cilindro en el que la carga máxima se alcanza en milésimas de segundo es aproximadamente un 10 por ciento mayor que la de uno que alcanzó la carga máxima en 66 segundos. Por otra parte, para un cilindro en que la carga máxima se alcanza en 69 minutos, la resistencia disminuye aproximadamente en un 10 por ciento. En ensayos a velocidad de carga constante, las ramas descendentes de las curvas esfuerzo-deformación no son muy extendidas, debido

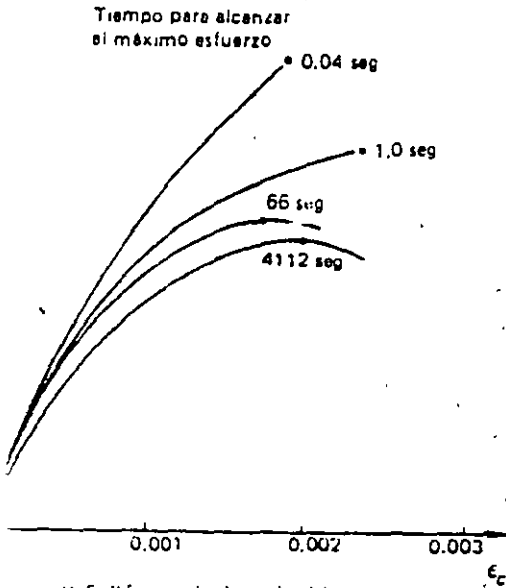


Figura 2.6 Efecto de la velocidad de carga (Matano [2.4]).

a que las características de las máquinas de ensayo hacen que el colapso ocurra súbitamente, una vez que se alcanza la carga máxima.

En la figura se muestra que las pendientes de las tangentes iniciales a las curvas crecen al aumentar la velocidad. No es posible determinar en todos los casos la rama descendente. Al igual que en otros tipos de ensayo, las deformaciones correspondientes a las cargas máximas son del orden de 0.002.

EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

La figura 2.7 muestra curvas obtenidas ensayando cilindros a distintas velocidades de deformación, desde una milésima de deformación unitaria por minuto, hasta una milésima por cien días. En esta figura, $f_c(0.001)$ representa la resistencia obtenida cuando la velocidad de deformación unitaria en el ensayo es de 0.001 por minuto. Como puede apreciarse, esta variable tiene un efecto notable sobre las características de la curva esfuerzo-deformación, especialmente sobre la carga máxima. Si la velocidad de deformación es muy grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave. La deformación unitaria correspondiente a la carga máxima sigue siendo del orden de 0.002. Puede observarse que la resistencia disminuye muy poco con incrementos importantes en la duración del ensayo.

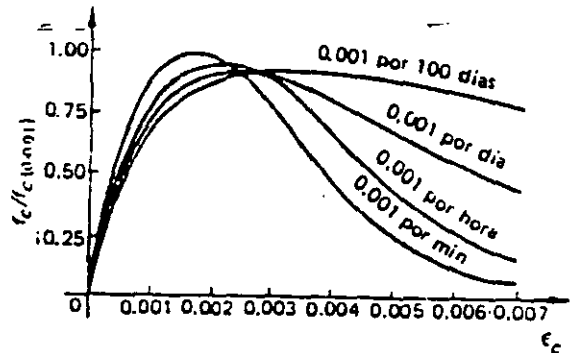


Figura 2.7 Efecto de la velocidad de deformación (Rüsch [2.5]).

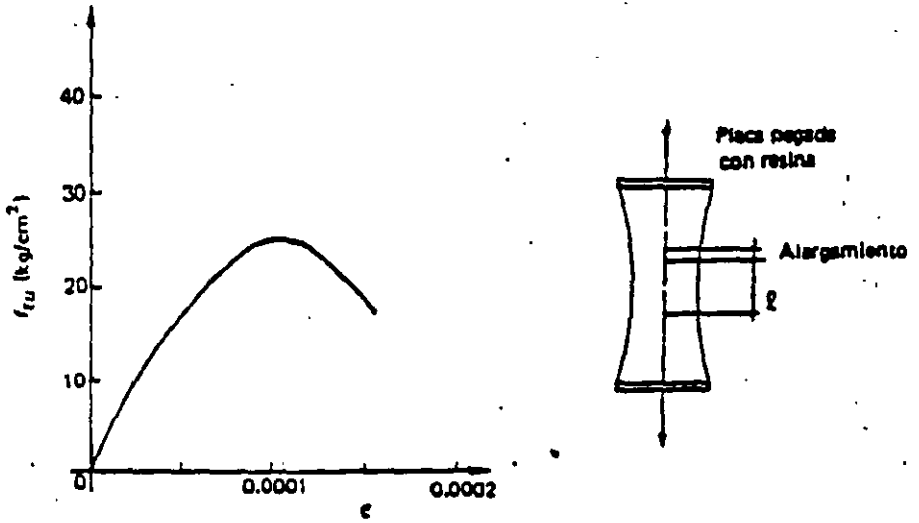


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación en tensión uniaxial.

muestra en la figura 2.12 (a). La carga se aplica a través de un material relativamente suave, como triplay o corcho. Si el material fuera perfectamente elástico, se originarían esfuerzos de tensión uniformemente distribuidos en la mayor parte del plano diametral de carga, como se muestra en la figura 2.12 (b).

La resistencia en tensión se calcula con la fórmula:

$$(f_{tb})_{\max} = \frac{2P}{\pi \cdot d \cdot l} \quad (2.2)$$

deducida de la teoría de la elasticidad. (Véase, por ejemplo, la referencia 2.9.)

En la expresión (2.2):

- P = carga máxima
- d = diámetro del espécimen
- l = longitud del espécimen

En realidad, el concreto no es elástico y, además, la resistencia en tensión que se mide no es la resistencia en tensión uniaxial como la

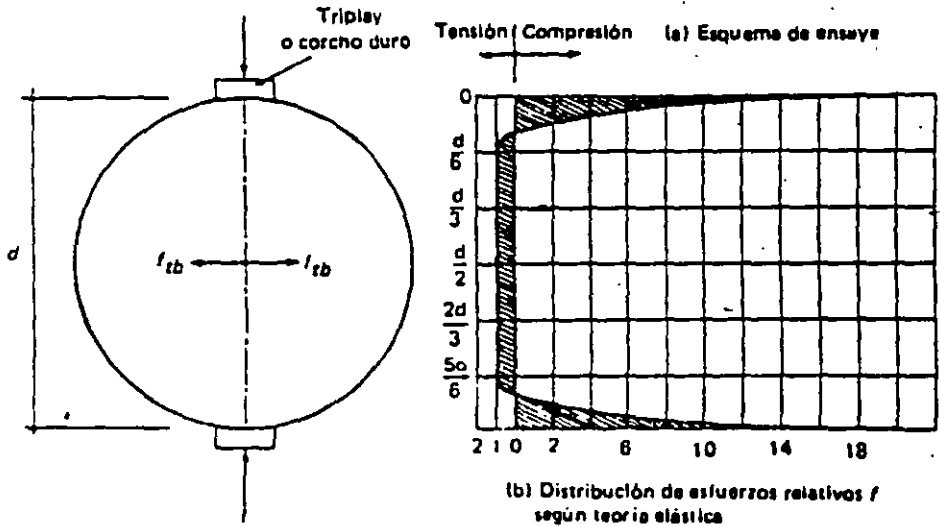


Figura 2.12 Distribución de esfuerzos y tipo de carga en tensión indirecta.

que se obtendría en el ensaye mostrado en la figura 2.11. Sin embargo, lo que se pretende es tener una medida de la resistencia del concreto a la tensión por medio de un ensaye fácil y reproducible por muchos operadores en distintas regiones. Esto se logra satisfactoriamente con el ensaye brasileño.

Para concretos fabricados con agregados de Santa Fe (ciudad de México), la relación entre la resistencia a la compresión de un cilindro y su resistencia a la tensión, obtenida del ensaye brasileño, está dada por la expresión

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = 6 \text{ kg/cm}^2 + 0.06 f'_c \quad (2.3)$$

válida para

$$150 \text{ kg/cm}^2 \leq f'_c \leq 450 \text{ kg/cm}^2$$

donde

$(f_{tb})_{\text{máx}}$ = resistencia en tensión del ensaye brasileño.

f'_c = resistencia a la compresión simple de un cilindro de...
15 X 30 cm.

Esta expresión es solamente aproximada y se presenta para dar una idea de los órdenes de magnitud relativos. Para valores bajos de f'_c , la resistencia en tensión es del orden de $0.10 f'_c$, mientras que para valores altos disminuye a $0.07 f'_c$.

El conocimiento de la resistencia a la tensión del concreto es importante para el diseño en tensión diagonal y para otros tipos de comportamiento, en donde la tensión es el fenómeno predominante.

2.2.4 Flexión

Para algunas aplicaciones, tales como pavimentos de concreto, es necesario conocer aproximadamente la resistencia a la flexión del concreto simple. Esta se determina frecuentemente ensayando un prisma de concreto li-

brememente apoyado, sujeto a una o dos cargas concentradas. La falla es brusca, con una grieta única que fractura el espécimen.

El esfuerzo teórico de tensión en la fibra inferior correspondiente a la rotura se calcula mediante la expresión

$$f_r = \frac{Mc}{I} \quad (2.4)$$

en la que f_r es el módulo de rotura, M es el momento flexionante correspondiente a la carga máxima aplicada, c es el medio peralte, e I es el momento de inercia de la sección transversal del prisma.

Al aplicar la expresión (2.4) se supone que el concreto es elástico hasta la rotura, hipótesis que, como se ha indicado, no es correcta para toda la escala de carga.

Esta prueba proporciona una medida de la resistencia del concreto a flexión, o más bien, a la tensión debida a flexión. Normalmente, el módulo de rotura es mayor que la resistencia a la tensión obtenida del ensaye brasileño.

Se ha observado que el esfuerzo máximo de rotura en flexión depende, entre otras variables, de la resistencia a la compresión, de la relación peralte a claro y de las condiciones de curado. Debido a que la medición de deformaciones es difícil de realizar, no existen muchos datos experimentales sobre las características esfuerzo-deformación de prismas sujetos a flexión simple.

El módulo de rotura como medida de la resistencia a la tensión, tiene varias desventajas. La principal es que el punto de tensión máxima se presenta en la superficie externa del espécimen, que está sujeta en forma importante a esfuerzos de contracción originados por cambios en el ambiente. Por esta razón, la dispersión de datos de ensayes de módulo de rotura es mayor que la dispersión obtenida en el ensaye brasileño, la que a su vez es mayor que la dispersión de datos de pruebas en compresión. Es difícil establecer relaciones generales entre los valores de f_r y f'_c , ya que la relación depende del tipo de concreto.

2.2.5 Otras condiciones de esfuerzos

La determinación de la resistencia del concreto simple a un estado de esfuerzo cortante puro no tiene mucha importancia práctica, porque dicho estado implica siempre la presencia de tensiones principales de la misma magnitud que el esfuerzo cortante, las cuales originan la falla cuando el elemento podría aún soportar esfuerzos cortantes mayores. Algunos procedimientos indirectos indican que la resistencia al esfuerzo cortante es del orden del 20 por ciento de la resistencia a la compresión.

También se han realizado ensayos en concreto simple sujetando especímenes de diversos tipos a otras combinaciones de esfuerzos. Entre éstos cabe mencionar los ensayos efectuados por McHenry [2.10], utilizando cilindros huecos sujetos a una presión interior y a una carga axial longitudinal, en los que se provoca un estado combinado de esfuerzos de tensión y compresión; los llevados a cabo por Bresler [2.11], sometiendo cilindros a combinaciones de esfuerzos de torsión y compresión axial, y los de Kupfer, Hilsdorf y Rüsck [2.12] en placas y prismas cargados a través de dispositivos especiales, para evitar alteraciones de los estados de esfuerzos estudiados.

2.2.6 Criterio de falla

A pesar de los estudios que se han realizado no se tiene todavía una teoría de falla sencilla y que permita predecir con precisión aceptable la resistencia del concreto simple. Se ha intentado hacer adaptaciones, entre otras, de las teorías de Mohr, de Coulomb, de esfuerzos cortantes y de deformaciones limitativas. K. Newman y J. Newman han utilizado con buenos resultados criterios de falla basados en teorías energéticas, las cuales parecen ser las más adecuadas para el caso del concreto [2.13]. En la referencia 2.14 se presenta un resumen de los estudios efectuados para determinar la resistencia del concreto a estados combinados de esfuerzos y las distintas teorías de falla que se han propuesto hasta la fecha.

2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido

2.3.1 Conceptos generales

Quando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aun cuando no se incrementa la carga.

Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La figura 2.13 muestra una curva típica de deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación y en el horizontal, el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño, el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente el 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen, se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la figura 2.13, la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido representa las deformaciones que

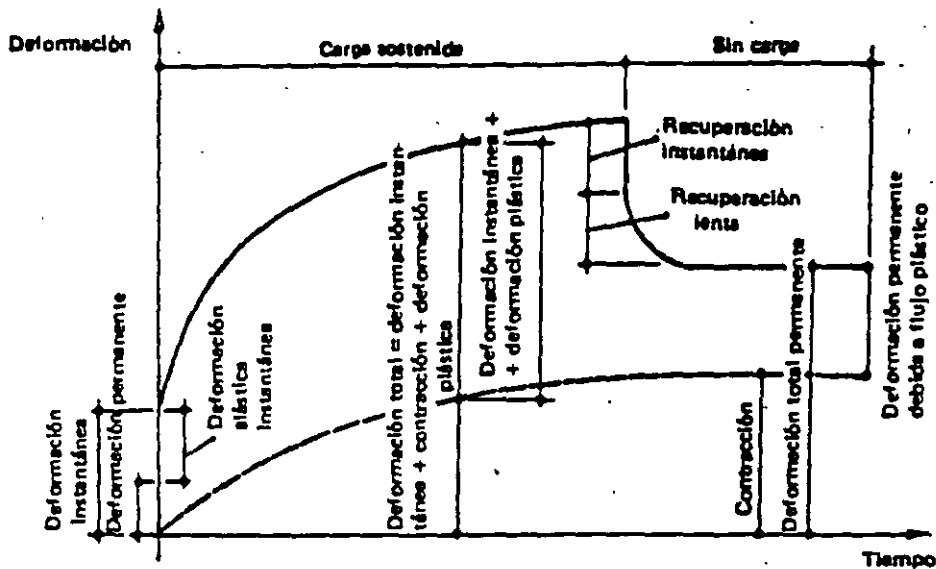


Figura 2.13 Curva típica deformación-tiempo, bajo condiciones ambientales constantes.

produce el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción.

Para efectos de diseño estructural, no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas; en muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total, incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales de dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

2.3.2 Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando e hidrata el cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambientales especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que

otro de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en ambiente húmedo se contraerá menos que en ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento, la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que otra pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen en general en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente, la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

2.3.3 Flujo plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de una carga. Las teorías que

se han desarrollado para explicarlo son complejas y caen fuera del alcance de este texto. Puede consultarse a este respecto la referencia 2.15. Se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un reajuste interno de las partículas que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50% de la resistencia. Para niveles mayores la relación ya no es proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante.

En la figura 2.13 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que, para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan a las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla y la humedad ambiente.

Es interesante mencionar que, como el flujo plástico aumenta con el nivel de carga, este fenómeno tiende a aliviar las zonas de máximo esfuerzo y, por lo tanto, a uniformar los esfuerzos en un elemento.

2.3.4 Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. En la figura 2.14 se muestra el efecto de la permanencia de una carga según los ensayos de Rüsçh [2.5]. En el eje horizontal se representan deformaciones unitarias, y en el eje vertical valores relativos, f_c/f'_c , de los esfuerzos aplicados con respecto a la resistencia en una prueba de corta duración (20 minutos aproximadamente).

Se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de especímenes sujetos a distintas velocidades de deformación, con lo que se produjeron fallas a diferentes edades. La línea de trazo continuo corresponde a un espécimen en el que la falla se produjo en 20 minutos. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo.

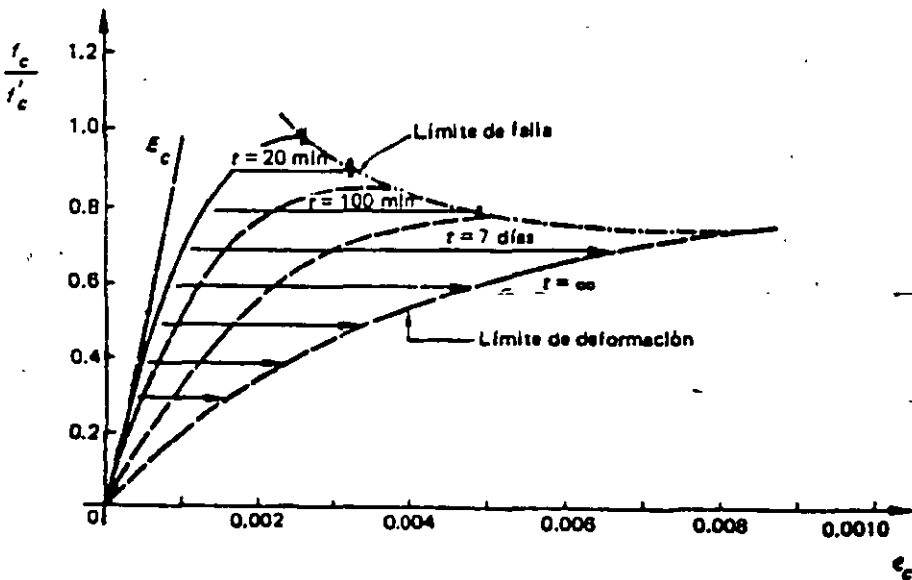


Figura 2.14 Efecto de la permanencia de la carga (Rüsçh) [2.5].

gente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de cargas de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos elásticos menores que los correspondientes a las definiciones mencionadas anteriormente.

El módulo secante se usa en ensayos de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM [2.17] recomienda la pendiente de la línea que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.0005 y al 40 por ciento de la carga máxima.

Se ha observado que, después de varios ciclos de carga y descarga a esfuerzos relativamente pequeños, la relación esfuerzo-deformación tiende a convertirse en una relación prácticamente lineal. Como es difícil determinar el módulo tangente inicial de una manera reproducible, se recurre a veces a aplicaciones previas de carga y descarga, con objeto de rectificar la curva esfuerzo-deformación, y se considera la pendiente de la curva así obtenida como el módulo de elasticidad. El método para determinar el módulo tangente en esta forma se describe con detalle en la referencia 2.17. El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico. Se han propuesto varias expresiones para predecir el módulo de elasticidad a partir de estas variables. Por ejemplo, el Reglamento ACI presenta la ecuación

$$E_c = w^{1.5} \frac{4270}{15100} \sqrt{f'_c} \quad (2.5)$$

donde E_c es el módulo de elasticidad en kg/cm^2 , w es el peso volumétrico del concreto en ton/m^3 y f'_c es la resistencia del concreto en kg/cm^2 . El Reglamento del D.F., propone la ecuación

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (2.6)$$

que es aplicable únicamente a concretos fabricados con agregados típicos de la ciudad de México. Estas ecuaciones dan únicamente valores aproximados, porque existen otras varia-

bles importantes, como el tipo de agregado. Las diferencias entre los valores reales y los calculados con estas ecuaciones pueden ser muy grandes. Cuando se requieren estimaciones de cierta precisión, conviene determinar el módulo de elasticidad del concreto usado en particular.

En algunos análisis elásticos se suelen emplear G , el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y μ , el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20. Con frecuencia se supone μ igual a 0.18.

2.6 Deformaciones por cambios de temperatura

El concreto está sometido a cambios volumétricos por temperatura. Se han determinado algunos coeficientes térmicos que oscilan entre 0.000007 y 0.000011 de deformación unitaria por grado centígrado de cambio de temperatura. Los valores anteriores corresponden a concreto de peso volumétrico normal (del orden de 2.2 ton/m^3). Para concretos fabricados con agregados ligeros, los coeficientes pueden ser muy distintos de los mencionados.

2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. En las figuras 2.15 y 2.16 se muestran curvas de ambos tipos de acero, típicas de barras europeas.

Los diámetros usuales de las barras producidas en México, varían de $\frac{1}{4}$ pulg a $1\frac{1}{2}$ pulg. (Algunos productores han fabricado barras corrugadas de $\frac{3}{16}$ pulg, $\frac{3}{32}$ pulg y $\frac{3}{16}$ pulg.) En otros países se usan diámetros aun mayores. Todas las barras, con excepción del alambrión de $\frac{1}{4}$ pulg, que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie, para mejorar

Se muestran además dos envolventes: la inferior, llamada *límite de deformación* y la superior, *límite de falla*. La primera muestra las deformaciones máximas que se obtienen al aplicar indefinidamente distintos porcentajes de la resistencia, inferiores a un cierto valor crítico. La segunda envolvente indica las deformaciones a la falla, correspondientes a porcentajes de carga superiores al valor crítico. La intersección entre estas dos envolventes indica, teóricamente, el porcentaje de la resistencia por debajo del cual el espécimen puede soportar la carga indefinidamente.

En la figura puede observarse que si se carga un espécimen al 80 por ciento de su resistencia de corta duración, se producirá la falla eventualmente a una deformación del orden de 0.0055. En cambio, si se le sujeta solamente al 40 por ciento de su resistencia de corta duración, el espécimen sufrirá una deformación del orden de 0.0025 después de un tiempo muy largo y mantendrá su carga indefinidamente.

Se puede decir, con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomár indefinidamente, sin fallar, cargas hasta del 60 por ciento de su capacidad. Cargas mayores que el 70-80 por ciento, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.

2.4 Fatiga

Se han hecho diversos estudios sobre elementos de concreto sujetos a repeticiones de carga. Cuando un elemento falla después de un número muy grande de repeticiones de carga, se dice que ha fallado por *fatiga*. Este tipo de sollicitación tiene importancia práctica, ya que elementos como vigas de puente, durmientes de ferrocarril o cimentaciones de maquinaria están sujetos a muchas repeticiones de carga.

Se mencionó anteriormente que un elemento de concreto en compresión no puede soportar indefinidamente fracciones de su resistencia estática mayores que un 70 por ciento. Cuando a un elemento de concreto se le aplican

compresiones del orden de la mitad de su resistencia estática, falla después de aproximadamente diez millones de repeticiones de carga. Se ha encontrado también que si la carga se aplica intercalando periodos de reposo, el número de ciclos necesario para producir la falla aumenta considerablemente.

Los estudios experimentales se han hecho aplicando los ciclos de carga y descarga a velocidades bastante más rápidas que las que se presentan en la práctica y, por lo tanto, sus resultados en general son conservadores.

Se puede estimar que el concreto simple en compresión, toma diez millones o más de repeticiones de carga al 50 por ciento de su resistencia estática. En flexión, el mismo número de aplicaciones puede alcanzarse con ciclos de carga y descarga con valor máximo del orden de 35-50 por ciento de su resistencia estática. Se han hecho estudios limitados de fatiga en torsión, que tienen un interés práctico menor.

Para ciertos materiales, como el acero, se ha encontrado que, aplicando ciclos de carga y descarga y llevando el esfuerzo máximo hasta un cierto valor, existe un límite de este esfuerzo por debajo del cual se puede soportar un número indefinido de ciclos. En concreto, se han llevado los ensayos hasta 10 millones de aplicaciones de carga, sin que se haya comprobado la existencia de límites semejantes. En las referencias 2.16 y 2.18 se trata ampliamente el tema de fatiga en el concreto.

2.5 Módulos elásticos

Para estimar deformaciones debidas a cargas de corta duración, donde se puede admitir un comportamiento elástico sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación mostradas, resulta obvio que el concepto convencional de módulo de elasticidad no tiene sentido en concreto. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tan-

Tabla 2.1 Diámetros, pesos, áreas, y perímetros de barras.

Barra Núm.	Diámetro		Peso kg/m	Área cm ²	Perímetro cm
	pulg	mm			
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	3/4	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

OBSERVACIONES

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a la norma de la Secretaría de Comercio, NOM B6-1974. Según esta norma, el diámetro nominal y el área de una barra corresponden a los que tendría una barra lisa, sin corrugaciones, del mismo peso por metro lineal; todas las barras, con excepción de la No. 2, están corrugadas.

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las barras laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2 300 hasta 4 200 kg/cm². El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia de 4 000 a 6 000 kg/cm². En la figura 2.17 se representa la gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México. En los países escandinavos se usan varillas con límites de fluencia hasta de 9 000 kg/cm².

Una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en refuerzos con detalles soldados es la soldabilidad. La soldadura de aceros trabajados en frío debe hacerse con cuidado. Otra propiedad importante es la facilidad de doblado, que es una medida indirecta de ductilidad y un índice de su trabajabilidad.

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por alambres lisos unidos por puntos de

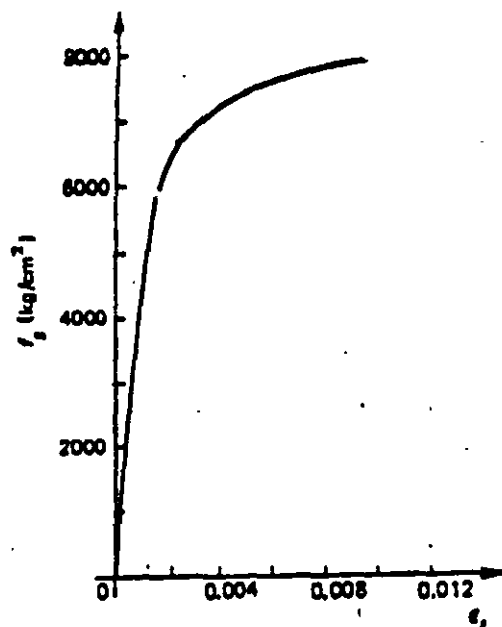


Figura 2.17 Gráfica esfuerzo-deformación de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido, de fabricación nacional.

soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con refuerzos de fluencia del orden de 5 000 kg/cm². El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm y los diámetros de 2 a 7 mm, aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos, se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial, para mejorar la adherencia.

El acero que se emplea en estructuras prefabricadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia última varía entre 14 000 y 22 000 kg/cm² y su límite de fluencia, definido por un esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12 000 y 19 000 kg/cm².

Como ilustración, en la figura 2.18 se presentan, atendiendo al grado de calidad, algunas curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero, y dos curvas esfuerzo-deformación para concreto con una resistencia de 250 kg/cm², correspondientes a cargas de corta y larga duración.

El módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco. De la compa-

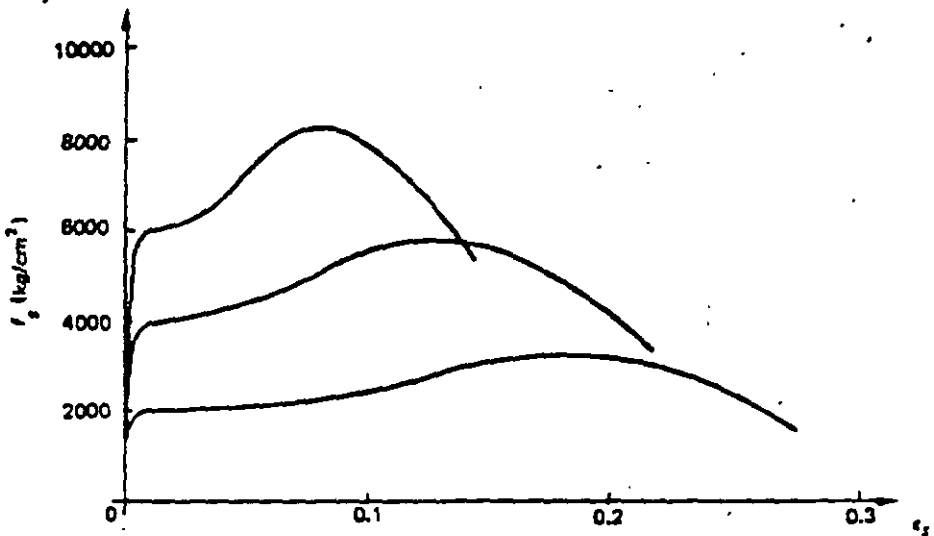


Figura 2.15 Curvas esfuerzo-deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo de fabricación europea.

su adherencia al concreto. La tabla 2.1 proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como la nomenclatura para identificarlas.

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Este límite se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de barras laminadas en caliente,

como se ve en la figura 2.15. El acero trabajado en frío no tiene un límite de fluencia bien definido (figura 2.16). En este caso, el límite de fluencia suele definirse trazando una paralela a la parte recta de la curva esfuerzo-deformación desde un valor de la deformación unitaria de 0.002; la intersección de esta paralela con la curva define el límite de fluencia.

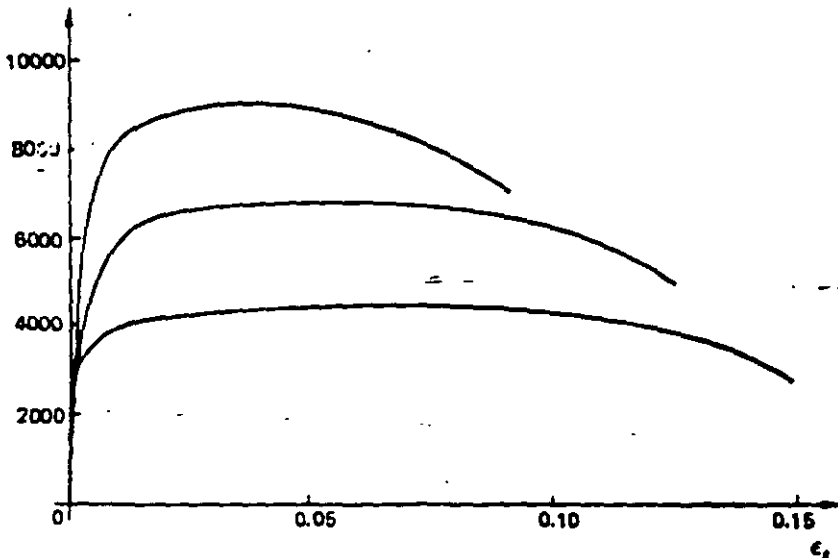


Figura 2.16 Curvas esfuerzo-deformación de acero trabajados en frío para barras de refuerzo de fabricación europea.

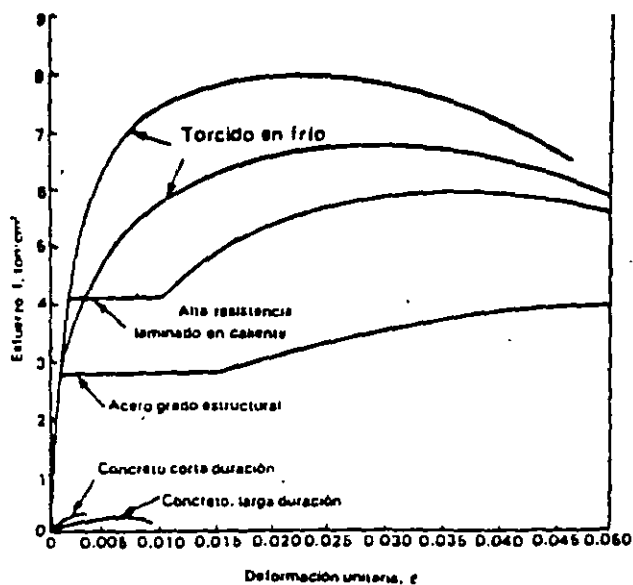


Figura 2.18 Curvas comparativas para acero y concreto

ración de las curvas del acero y del concreto, se puede inferir que si ambos trabajan en un

elemento de concreto reforzado sujeto a compresión axial, el colapso del conjunto estará regido por la deformación del concreto que, bajo cargas de larga duración, puede ser hasta de 0.010 ó 0.012. Para esta deformación, el acero tendría apenas una deformación del orden correspondiente a su límite de fluencia.

Las características de adherencia de los distintos aceros, y su influencia en el diseño, se presentarán en el capítulo de Adherencia. Para lograr el trabajo en conjunto debe tenerse una adherencia suficiente entre concreto y acero obtenida ya sea mecánicamente o por medio de la adhesión entre el concreto y el acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión es difícil de determinar en el caso de barras, debido a efectos de esbeltez.

Referencias

- 2.1 Troxell, G. E., H. E. Davis y J. W. Kelly. *Composition and Properties of Concrete*, segunda edición. Nueva York, McGraw Hill, 1968.
- 2.2 Neville, A. M. *Properties of Concrete*, tercera edición. Londres, Pitman, 1981.
- 2.3 Orchard, D. F. *Concrete Technology* (3 volúmenes). Nueva York, Halsted Press. Vol. 1, 1973; Vol. 2; 1973, Vol. 3, 1976.
- 2.4 Hatano, T. y H. Tsutsumi. *Dynamical Compressive Deformation and Failure of Concrete under Earthquake Load*. Informe No. C 5904 del Laboratorio Técnico del Instituto Central de Investigaciones de la Industria Eléctrica, Tokio, septiembre 1968. Véase también el Informe No. C 5906, por T. Hatano, Tokio, marzo 1960.
- 2.5 Rüsck, H. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, julio 1960.
- 2.6 Richart, F. E., A. Brandtzaeg y R. L. Brown. "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses". *Bulletin No. 185*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, noviembre 1928.
- 2.7 Lobo B. Carneiro, F. L. "Concrete Tensile Strength". *Boletín RILEM No. 13*, marzo 1953.
- 2.8 Akazawa, T. "Tension Test Method for Concrete". *Boletín RILEM No. 16*, noviembre 1953.
- 2.9 Timoshenko, S. P. y J. N. Goodier. *Teoría de la elasticidad*. Bilbao, URMO, 1968.
- 2.10 McHenry, D. y J. Karni. "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, abril 1958.
- 2.11 Bresler, B., y K. S. Pister. "Strength of Concrete under Combined Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, septiembre 1958.
- 2.12 Kupfer, H., H. K. Hilsdorf y H. Rüsck. "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, agosto 1969.
- 2.13 Newman, K. y J. B. Newman. "Failure Theory and Design Criteria for Plain Concrete". En la Memoria del *International Conference of Structure, Solid Mechanics and Engineering Design and Civil Engineering Materials*. Southampton, 1969.
- 2.14 Jordá, R. *Resistencia del concreto a esfuerzos combinados*, tesis profesional. Puebla, México, Universidad Autónoma de Puebla, 1970.

- 2.15 _____. *Symposium on Creep of Concrete (SP-9)*. Detroit, American Concrete Institute, 1964.
- 2.16 Lloyd, J. P., J. L. Lott y C. E. Kesler. "Fatigue of Concrete". *Bulletin No. 499*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1968.
- 2.17 _____. *Standard Method of Test for Static Young's Modulus of Elasticity and Poissons Ratio in Compression of Cylindrical Concrete Specimens (ASTM C 469-65)*. Filadelfia, American Society for Testing and Materials, 1965.
- 2.18 Shah, S. P., editor. *Fatigue of Concrete Structures (SP 75)*. Detroit, American Concrete Institute, 1982.
- 2.19 Neville, A. M. *Tecnología del concreto (2 volúmenes)*. México, D. F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS CONCRETOS
FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CONCRETOS FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL

Carlos Javier Mendoza Escobedo (I)

RESUMEN

Se determinan las propiedades mecánicas de los concretos fabricados con agregados típicos del Distrito Federal y se establecen expresiones que permiten determinar las variaciones de las resistencias a compresión y tensión, del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson, del módulo de rigidez por cortante, de la contracción por secado y de la deformación diferida, a través del tiempo. Se dan recomendaciones para obtener concretos con un mejor comportamiento en cuanto a estas propiedades.

INTRODUCCION

Los materiales pétreos empleados tradicionalmente en la ciudad de México para la fabricación de concreto, tienen características físicas que difieren de las especificadas en las normas relativas. Entre las discrepancias más notorias se pueden mencionar el peso específico, la absorción y el contenido de polvos. Lo anterior ha hecho que las propiedades de los concretos fabricados con estos agregados difieran de las alcanzadas en los concretos comunes.

Se ha observado que estos concretos, bajo condiciones de trabajo, presentan deformaciones y agrietamiento mayores que los usuales, haciéndose evidente, por estas y otras causas, la diferencia entre el comportamiento de los concretos característicos del Distrito Federal y los comunes.

PROPIEDADES MECANICAS

Materiales componentes. En este trabajo se incluyen los resultados alcanzados con gravas y arenas andesíticas, comunes en el D.F. Se estudian dos tipos de arenas, cuya diferencia básica estriba en el contenido de polvos (material más fino que la malla 200).

Tanto las gravas como las arenas tienen peso específico bajo y absorción alta, lo que hace que los concretos fabricados con estos materiales sean muy deformables, a corto y a largo plazos.

En la fabricación de los concretos se empleó cemento Portland tipo I y no se usó aditivo alguno.

Concreto en estado fresco. Con los materiales antes descritos se hicieron proporcionamientos para resistencias nominales de 200, 300 y 400 kg/cm². En todos los casos se usó un factor de sobrediseño de 50 kg/cm². En las mezclas con resistencias nominales de 200 y 300 kg/cm² se buscó un revenimiento de 10 cm y para la de 400 kg/cm², uno de 5 cm. Una de las mezclas de 300 kg/cm² tuvo revenimiento teórico de 12 cm, para cubrir los casos de concretos con características

(I) Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

adecuadas para ser transportado por medio de bombas.

Resistencia a compresión. Las edades de prueba fueron 7, 28, 90, 360 y 1825 días; cada resultado representa el promedio del ensaye de tres especímenes compactados. En la fig 1 se plantea la correlación que permite predecir la resistencia a compresión a cualquier edad en función de la alcanzada a los 28 días. Cabe mencionar que los incrementos de resistencia con la edad fueron mayores en aquellos concretos con menos polvo. La expresión sugerida resulta ser:

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ en kg/cm}^2$$

Resistencia a tensión. Se hicieron especímenes cilíndricos para ensayarlos a tensión por medio de la prueba indirecta, así como vigas para determinar el módulo de rotura. Las expresiones que correlacionan las resistencias a tensión y compresión resultan ser:

Tensión indirecta, fig 2 ; por flexión, fig 3

$$f_t = 1.47 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2 \quad f_f = 1.81 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad se obtuvo a partir de las gráficas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados a compresión. Se usó el criterio de módulo secante. Por cada mezcla de concreto estudiada se hicieron tres ensayos, siendo los valores reportados el promedio alcanzado en estas determinaciones. La expresión propuesta para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión es, fig 4

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Relación de Poisson. Esta se obtuvo del ensaye a 28 días de especímenes cilíndricos de concreto de diferentes resistencias. En la fig 5 se observa que la relación de Poisson varía con la resistencia y que se puede relacionar con ésta con la expresión

$$\mu = 0.22 + 0.00026 f'_c$$

habiendo alcanzado un valor medio de 0.30, superior al intervalo usual recomendado para el concreto (0.15 - 0.20).

Módulo de rigidez por cortante. Con los valores de módulos de elasticidad y relación de Poisson conocidos, se pueden estimar el módulo de rigidez por cortante. Para los concretos de agregados andesíticos resultó ser

$$G = 3300 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Deformación unitaria (ϵ_0) correspondiente al esfuerzo máximo. El valor de esta deformación también se ve afectado por el nivel de resistencia que se alcance en el concreto, por lo que se puede correlacionar con ella con la expresión siguiente, fig 6

$$\epsilon_0 = 0.003 + 2.8 \times 10^{-6} f'_c$$

Los resultados de los ensayos condujeron a un valor medio de esta deformación ($\bar{\epsilon}_0$)

igual a 0.0044.

La curva esfuerzo-deformación del concreto bajo cargas de compresión, puede representarse en forma adecuada con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c}{\epsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}, \text{ en kg/cm}^2$$

Contracción por secado. La rapidez con que se presenta la contracción de los concretos andesíticos, varía de acuerdo con el contenido de polvos que se tenga en los materiales componentes, sin embargo, la contracción última se puede estimar del mismo orden para los dos casos e igual $(\epsilon_{CS})_U = 0.001$, para los proporcionamientos usuales y las condiciones ambientes de la ciudad de México, fig 7. Las expresiones que permiten estimar el valor de la contracción para una edad cualquiera se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$(\epsilon_{CB})_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.001$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$(\epsilon_{CB})_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.001$$

en ambos casos t debe expresarse en días.

Deformación diferida. Esta deformación se estimó en función del coeficiente de deformación diferida (C_t), el cual es igual $C_t = \frac{\epsilon_t - \epsilon_i}{\epsilon_i}$, siendo ϵ_t , la deformación unitaria alcanzada en un tiempo t y ϵ_i , la deformación unitaria inicial al aplicar el esfuerzo de compresión, igual a 40 por ciento del esfuerzo máximo.

El valor del coeficiente último (C_U), estimado para un tiempo infinito, para los proporcionamientos usuales y para las condiciones ambientes de la ciudad de México, variarán de acuerdo con el contenido de polvos observados en los materiales componentes, fig 8. Las expresiones encontradas para calcular el valor de este coeficiente para un tiempo cualquiera t, en días, se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \times 4$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \times 2.5$$

Contracción por secado en condición estándar. Tomando en cuenta los coeficientes determinados con los resultados de los ensayos y las modificaciones en la contracción última para ponerla en condición estándar, se recomienda emplear las siguientes expresiones para la estimación de la contracción por secado a cualquier edad:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.0013$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.0013$$

En estas expresiones el valor de t se debe tomar como el número de días después de la suspensión del curado húmedo y el valor de la contracción determinada se debe afectar por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del concreto de que se trate y las condiciones del medio ambiente, fig 9.

Deformación diferida última en condición estándar. Entre las variables que mayor influencia tuvieron en los valores de los coeficientes de deformación diferida última están la edad a la que se aplica la carga, la humedad relativa, y el revenimiento, los cuales incrementaron los valores alcanzados en los ensayos.

El coeficiente de deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} 5.65$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} 3.12$$

Al igual que en la contracción por secado los coeficientes calculados para la deformación diferida, deberán ser afectados por los factores de corrección para tomar en cuenta las características particulares de los concretos empleados y las condiciones del medio ambiente en que se encuentran, fig 9.

CONCLUSIONES

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción, como los andesíticos, en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Dadas las discrepancias encontradas entre las expresiones usuales y las

determinadas en este estudio para estimar la resistencia del concreto así como sus deformaciones a corto y largo plazos, se requiere modificar los parámetros usados convencionalmente en los diseños estructurales para obtener mejor concordancia entre el comportamiento estimado en el diseño y el alcanzado en las estructuras reales.

3. La contracción por secado registrada fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas y al revenimiento de las mezclas utilizadas.
4. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos incrementa notoriamente al coeficiente de la deformación diferida. Este coeficiente también aumentará en forma apreciable al incrementarse el revenimiento del concreto.

RECOMENDACIONES

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por secado, porque hay mayor restricción a estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conducirá a menores consumos de agua lo que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

La resistencia a tensión por flexión del concreto es usual valorarla como $2\sqrt{f'_c}$ (ACI 318, RDF), sin embargo, los resultados de los ensayos efectuados con los concretos andesíticos dan resistencias a la tensión ligeramente menores, por lo que se sugiere tomar en cuenta esta discrepancia empleando la expresión propuesta.

En relación con el módulo de elasticidad estático, las expresiones propuestas por los diferentes reglamentos de construcción (ACI 318, RDF) sobrestiman los valores alcanzados con los concretos andesíticos, por lo que se recomienda emplear la expresión propuesta en este trabajo para predecir las deformaciones a corto plazo de las estructuras hechas con este material.

Al igual que los otros parámetros la relación de Poisson y el módulo de rigidez por cortante determinados para el concreto andesítico, difieren de los valores usualmente empleados, por lo que para estimar mejor el comportamiento de estos concretos conviene emplear los valores sugeridos.

La deformación correspondiente al esfuerzo máximo es usual considerarla igual a 0.003, sin embargo, el resultado de los ensayos indican que esta deformación alcanza un valor promedio de 0.0044.

En relación con las deformaciones a largo plazo, tanto las originadas por la contracción como por la deformación diferida, pueden estimarse con buena precisión con los coeficientes determinados de los resultados de los ensayos, sin requerirse de correcciones por características del material y medio ambiente del Distrito Federal, dado que los concretos empleados son característicos de los usuales en el área metropolitana de la ciudad de México, y las condiciones de curado representan también las usuales en esta área.

Cuando las características del concreto y las condiciones del medio ambiente varían, haciendo no aplicables directamente los resultados de los ensayos, se recomienda emplear los valores sugeridos para características y condiciones estándar y hacer todas las correcciones necesarias para adecuar los coeficientes a las circunstancias de cada caso en particular, de acuerdo con los factores de corrección indicados en la fig 9.

Como las deformaciones y agrietamientos alcanzados a largo plazo en los concretos característicos del D.F. son mucho mayores que los esperados usualmente, se deben tomar en el diseño las precauciones necesarias para restringir estos efectos con el acero de refuerzo u otros medios adecuados.

REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J. "Estudio de las propiedades a largo plazo de los concretos en el Distrito Federal" Informe elaborado para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano, enero 1984
2. Neville, A.M. "Properties of Concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
3. ACI Committee 209 "Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures", ACI Publication SP-27.

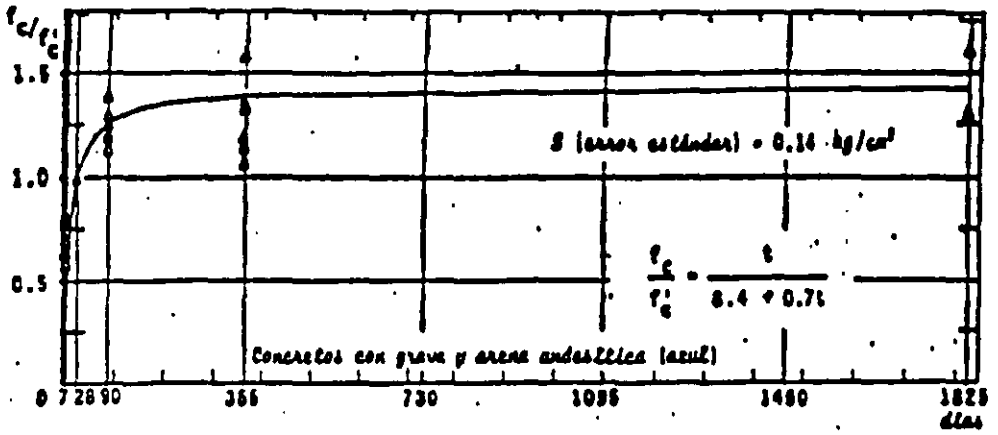


Fig. 1 Variación de la resistencia a compresión con el tiempo

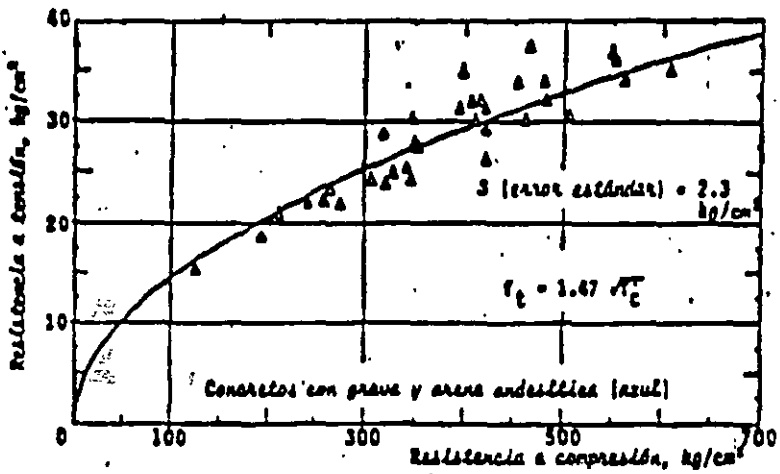


Fig. 2 Resistencia a tensión por compresión diametral

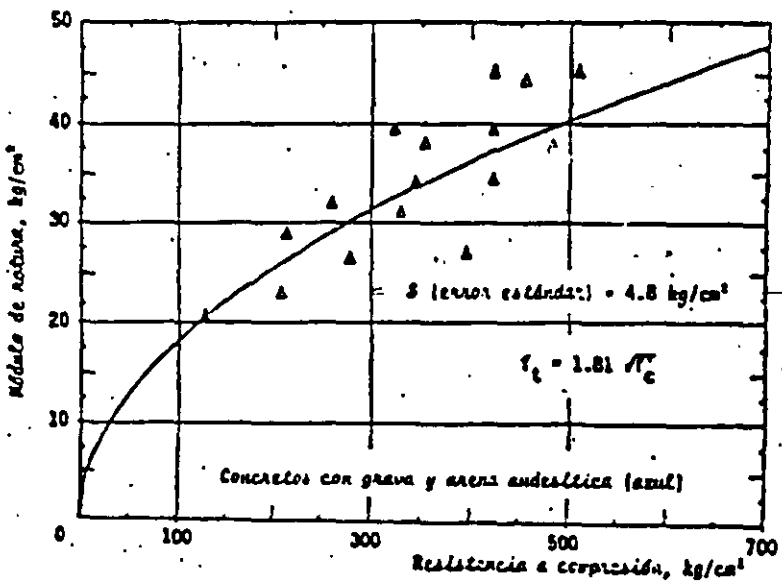


Fig. 3 Resistencia a tensión por flexión

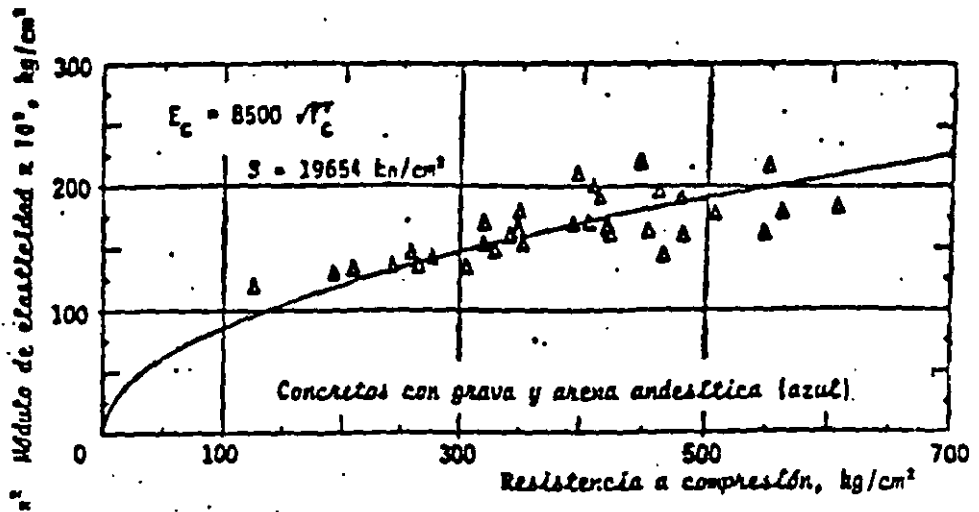


Fig 4 Módulo de elasticidad

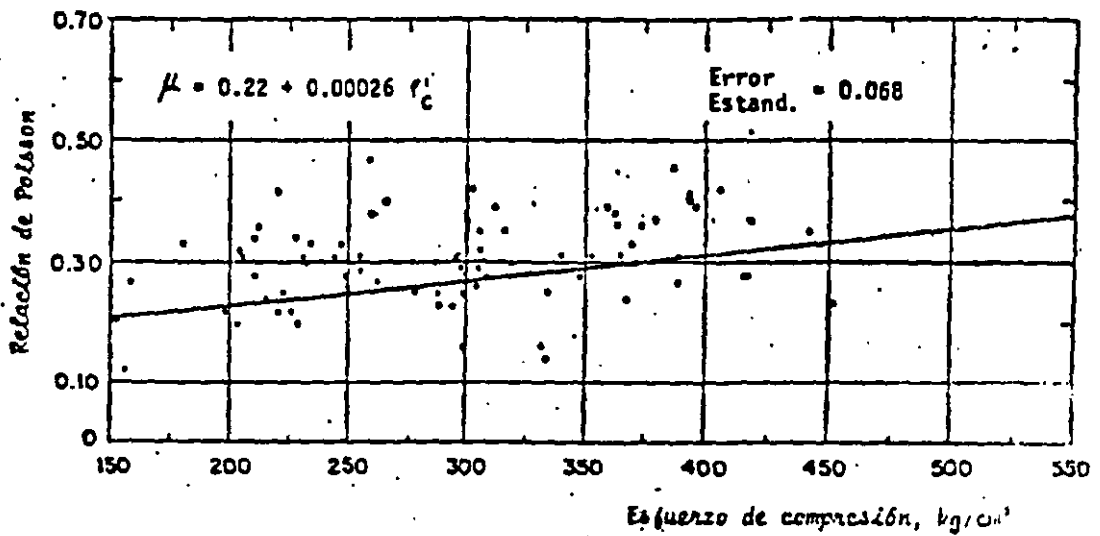
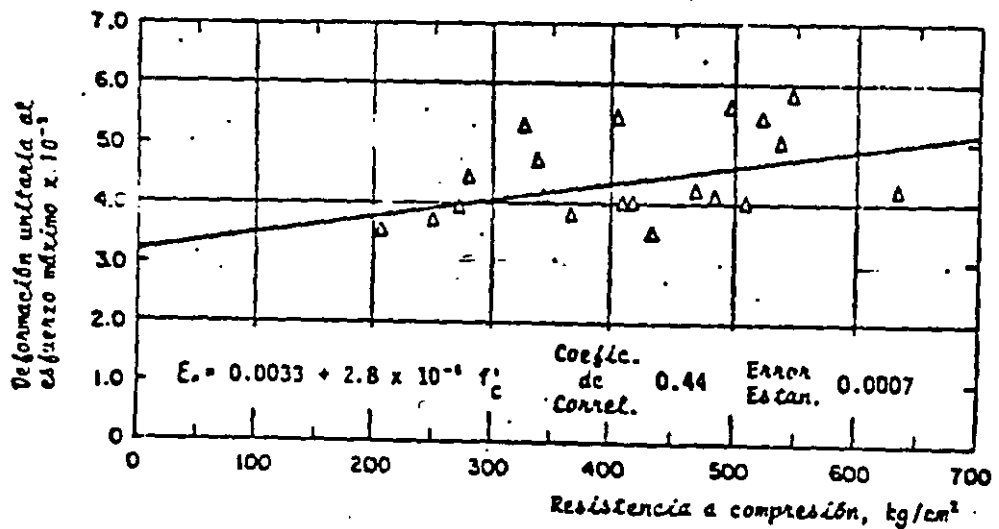
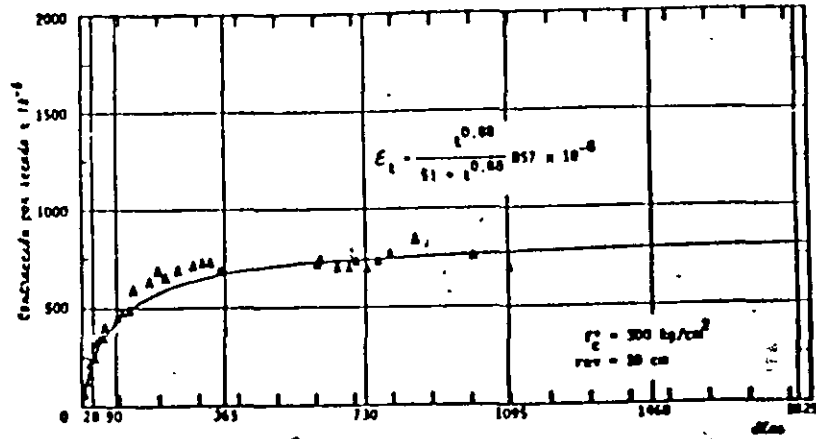


Fig 5 Relación de Poisson para concretos andesíticos

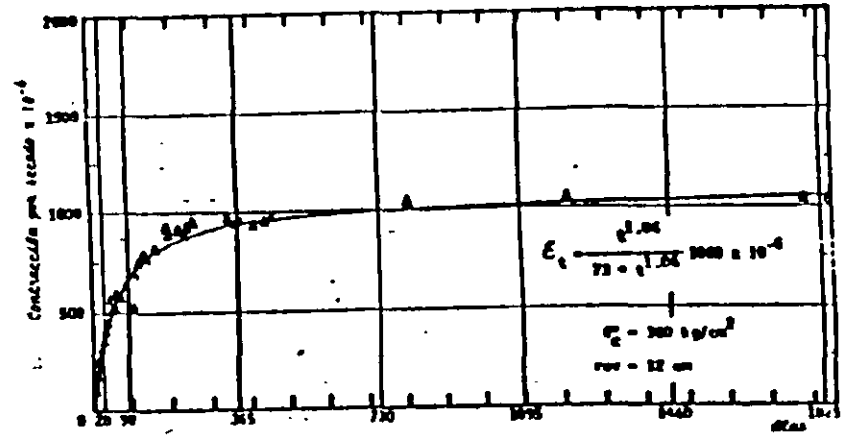


a) Concretos andesíticos

Fig 6 Relación entre deformación unitaria al esfuerzo máximo y resistencia a compresión

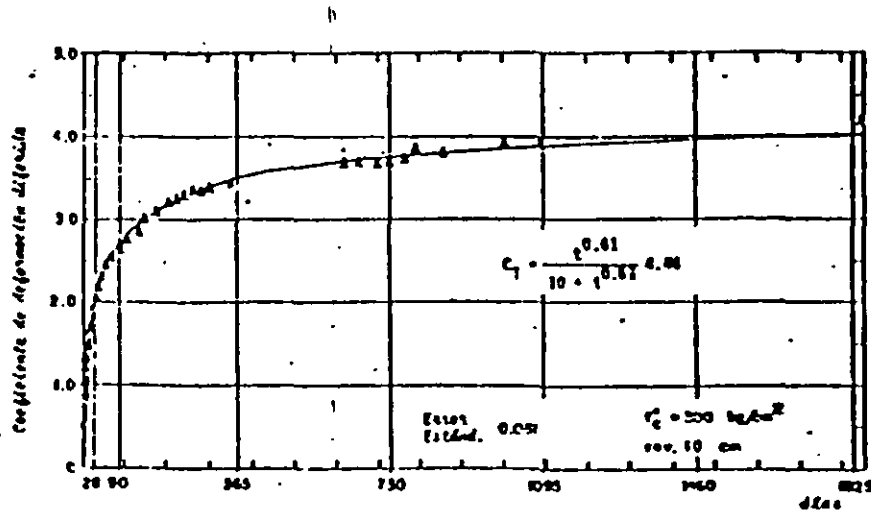


a) Concretos andesíticos con exceso de polvos

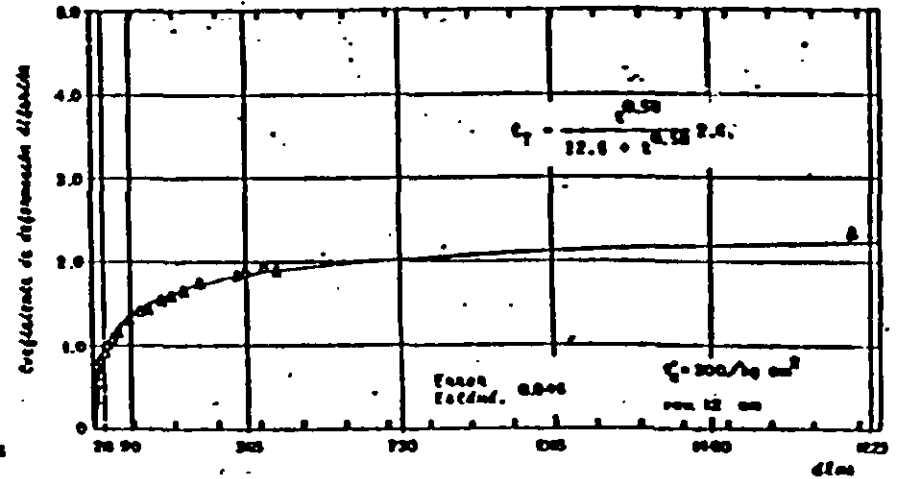


b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 7 Contracción por secado



a) Concretos andesíticos con exceso de polvos



b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 8 Deformación diferida

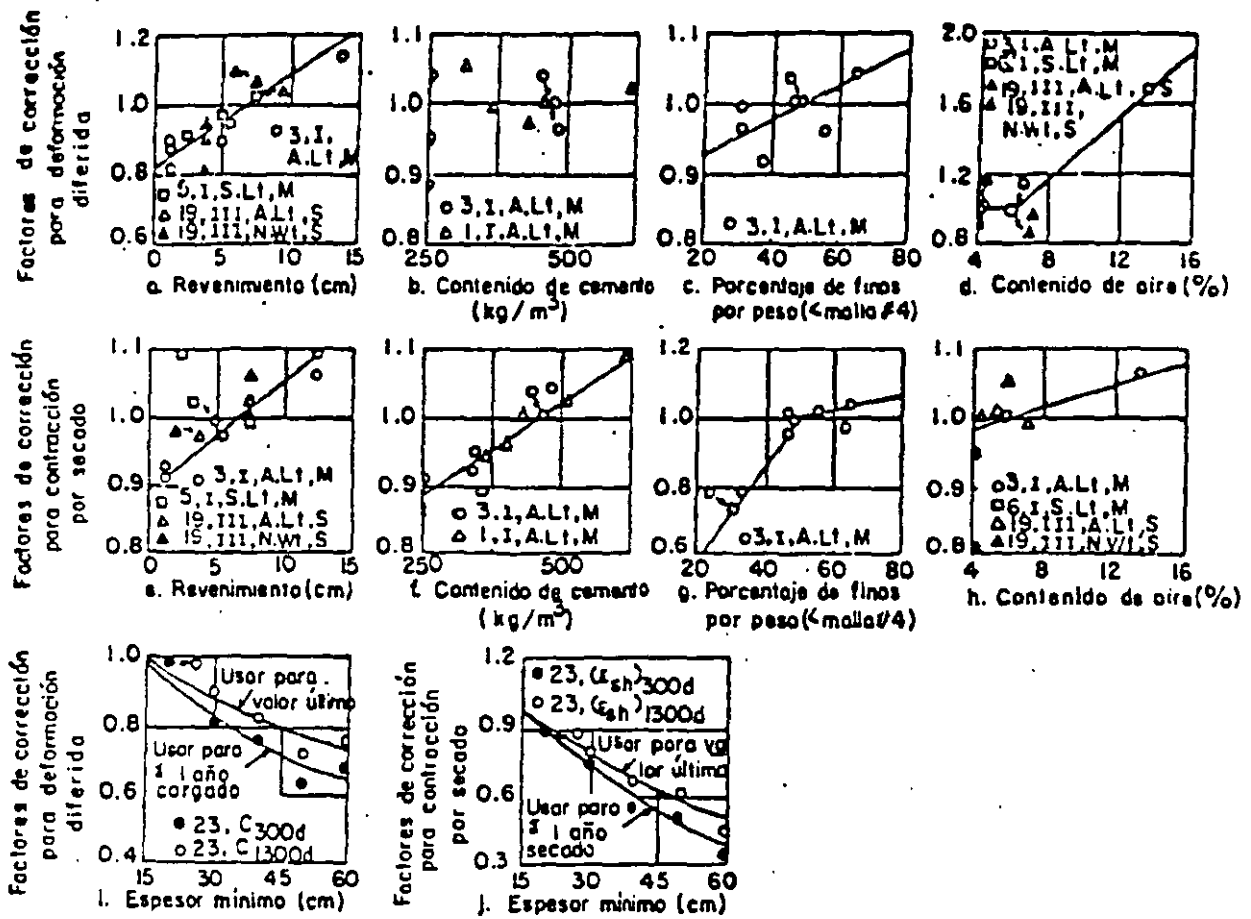


Fig 9 Factores de corrección nominales para deformación diferida y contracción por secado para los parámetros mostrados. I, III - Tipo de cemento; N.Wt, S. Lt, A.Lt - peso del concreto; M, S - curado húmedo y a vapor (ref 3)



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS DE LOS
CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL DISTRITO
FEDERAL**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL D.F.

Ing. Carlos Javier Mendoza*
Ing. Manuel Mena Ferrer**

RESUMEN

Se analiza el efecto que tienen las partículas más finas de las arenas andesíticas y las características intrínsecas de las gravas calizas y andesíticas, disponibles en la ciudad de México, sobre las propiedades de los concretos en los estados fresco y endurecido. Además, se dan recomendaciones para mejorar las propiedades de estos concretos.

SUMMARY

The effects of the finest part of andesitic sands and of the intrinsic characteristics of limestones and andesitic gravels, available in Mexico City, in the properties of fresh and hardened concrete are analyzed. Also, recommendations for improving the properties of these concretes are given.

* Subdirector, Instituto de Ingeniería, UNAM
** Asesor en tecnología del concreto

Los concretos utilizados comúnmente en la Ciudad de México presentan ciertas deficiencias, originadas en algunos casos por la calidad de los materiales componentes y en otros por las prácticas constructivas empleadas. Entre las deficiencias más notorias se pueden señalar las siguientes:

a) La deficiente calidad de los agregados empleados propicia que los concretos tengan propiedades inadecuadas como bajo módulo de elasticidad, elevados cambios volumétricos por secado y excesivas deformaciones diferidas bajo cargas sostenidas (flujo plástico)¹. Asimismo, la tendencia al empleo de mezclas demasiado fluidas ocasiona sangrado excesivo en el concreto recién colocado y produce mayor contracción por secado en el concreto endurecido. Por todo ello, las estructuras de concreto son propensas a presentar agrietamientos por elevados cambios volumétricos, excesivas deformaciones a corto y largo plazo y escasa rigidez ante cargas laterales.

b) El empleo de cemento portland-puzolana en la fabricación de concreto propicia una adquisición de resistencia más lenta que la obtenida con otros tipos de cemento portland (I y III), lo cual es incompatible con la práctica usual de pronto descimbrado de las estructuras, en particular de los sistemas de pisos para edificios, y dar lugar a flechas excesivas y agrietamientos inaceptables.

c) Las pruebas de control de calidad realizadas por diferentes laboratorios² indican que, con relativa frecuencia los concretos no cumplen con los requisitos de calidad especificados y que la proporción de mezclas con resistencias inferiores a la especificada llega a cerca de un 30%, sobre todo para algunos valores de f_c . Lo anterior ocasiona que los factores de seguridad de un número importante de elementos estructurales sean inferiores a los considerados en los reglamentos.

Los problemas anteriores tienden a agudizarse con los llamados concretos "bombeables", cuando se usan mezclas

tos y proporciones excesivas de arena.

Por todo lo mencionado se opina que las características y propiedades del concreto que se ha utilizado normalmente en la Ciudad de México no son las más favorables para su empleo con fines estructurales, lo cual ha hecho pensar en la necesidad de introducir mejoras sustanciales, tanto en los materiales componentes como en el control de calidad y en las prácticas constructivas, sobre todo para aquellas aplicaciones con mayor requerimiento estructural.

Con el propósito de evaluar los efectos de ciertos cambios que en lo relativo a la calidad de los agregados pueden realizarse, se diseñó un programa

que se llevó a cabo simultáneamente en tres diferentes laboratorios independientes de la Ciudad de México. En este trabajo se analizan los resultados obtenidos.

MATERIALES EMPLEADOS

Para mejorar las propiedades de los concretos que se utilizan en las construcciones del Distrito Federal, se pueden considerar dos modificaciones principales en los agregados:

- a) Emplear gravas de mejor calidad que las actuales de andesita y basalto escoriáceo.
- b) Reducir el contenido de finos indeseables ($< 74\mu$) en las arenas, y comprobar que los aceptados no tengan

TABLA 1. PROPIEDADES FISICAS DE LAS GRAVAS

GRAVAS CONCEPTOS	ANDESITICA		CALIZA TRITURADA		NORMA ASTM C-33
	5-10 mm	10-20 mm	5-10 mm	10-20 mm	
1. Material más fino que la malla No. 200,	1.60	0.40	0.67	0.75	1 máx.
2. Densidad	2.42	2.41	2.63	2.63	
3. Absorción,	4.54	4.19	0.82	0.68	
4. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en	9.8	14.7	8.0	7.4	12 máx.
5. Abrasión en Máquina Los Angeles, pérdida en	23.8	27.1	17.5	14.9	50 máx.
6. Coeficiente volumétrico:					
Por tamaños	0.34	0.37	0.13	0.22	
Grava total		0.36		0.19	
7. Pesos volumétricos:					
Suelto, kg/m^3	1256	1266	1366	1348	
Varillado, kg/m^3	1354	1370	1517	1528	

TABLA 2. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LAS ARENAS

CONCEPTOS	IDENTIFICACION (% FINOS)	ARENAS ANDESITICAS				ARENA DE RE- FEREN- CIA (1.1)	NORMA ASTM C-33
		(7.7)	(9.9)	(16.7)	(19.3)		
1. Módulo de finura	3.44	3.00	2.60	2.97	2.78	2.80	2.3-3.1
2. Material más fino que la malla No. 200, %	1.8	7.7	9.9	16.7	19.3	1.1	5 máx.
3. Densidad	2.40	2.28	2.40	2.37	2.30	2.31	
4. Absorción, %	5.85	5.87	4.38	4.94	7.93	5.12	
5. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en %	5.67	10.54				5.82	10 máx.
6. Pesos volumétricos:							
Suelto, kg/m ³	1396	1392	1443	1440	1450	1386	
Varillado, kg/m ³	1531	1590	1690	1635	1624	1524	
7. Materia orgánica, color respecto al límite	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	
8. Equivalente de arena, %	82.9	66.0	59.3	65.4	52.1	84.5	
9. Límites de consistencia:							
Límite líquido, %	17.2	23.1	19.0	21.1	22.3	15.6	
Límite plástico, %	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Índice plástico	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Contracción lineal, %	0.0	2.10	0.0	1.95	1.85	0.0	

* Arena andesítica lavada

propiedades plásticas.

Para cuantificar qué tanto pueden influir estas modificaciones en las propiedades del concreto, se realizó un estudio comparativo que incluyó mezclas con dos tipos de grava (andesítica natural y caliza triturada), cinco arenas andesíticas con diferentes contenidos de finos y una arena de referencia, no andesítica, que cumplió con los requisitos físicos de la norma ASTM C33.³

En cuanto al cemento, se optó por emplear cemento portland tipo I como único material cementante y no usar aditivos en la preparación de las mezclas.

Cemento

Las pruebas físicas y químicas efectuadas al cemento portland tipo I empleado indicaron que cumple ampliamente con los requisitos especificados en la norma ASTM C150⁴. Sin embargo, cabe señalar que resultó ser menos fino de lo que suelen ser los cementos del mismo tipo.

Agregados

a) **GRAVAS**

Las gravas tanto andesíticas como calizas se dividieron en dos fracciones: de 5 a 10 mm y de 10 a 20 mm. Estas fracciones se combinaron en proporción de 35 y 65%, respectivamente, para integrar el agregado grueso

empleado.

Las propiedades físicas de estas gravas se presentan en la tabla 1. Los valores ahí mostrados son el promedio de las pruebas efectuadas en los tres laboratorios que participaron en el estudio.

Los resultados de las pruebas de densidad y absorción muestran una diferencia importante entre las gravas andesíticas y calizas, en favor de las segundas. Si se admite que estas propiedades pueden ser un buen índice del grado de deformabilidad de las rocas que las constituyen, debe esperarse que los concretos hechos

TABLA 3. MEZCLAS DE CONCRETO DE PRUEBA

Materiales	Mezclas No. (consumo promedio, kg/m ³)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cemento	300	296	297	297	303	300	295	294	298
Arena andesítica (finos): 1.8				770					
7.7					742				
9.9	775					774			
16.7		755					752		
19.3			736					761	
Arena de referencia									740
Grava andesítica	952	938	940						
Grava caliza				1024	1044	1034	1018	1014	1027
Agua	179	187	190	183	176	183	193	194	177
Agua/cemento	0.60	0.63	0.65	0.62	0.58	0.61	0.63	0.68	0.59

con la grava caliza resulten mucho menos deformables.

b) ARENAS

Se utilizaron cinco arenas andesíticas cuyos contenidos de finos menores que la malla 200 variaron entre 1.8 y 19.3%. Cuatro de estas arenas procedieron de otros tantos bancos (depósitos piroclásticos) de la región. La arena andesítica con 1.8% de finos se obtuvo por lavado. A manera de referencia se empleó una arena no andesítica con un contenido de finos de 1.1%.

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas efectuadas a estas arenas. Conviene notar que, además de las pruebas físicas que son usuales, se efectuaron otras dos determinaciones: el equivalente de arena y los límites de consistencia. Esto se hizo con el fin de buscar un medio que permitiera evaluar las propiedades plásticas de los finos de estas arenas.

Las especificaciones de calidad para agregados por lo regular aceptan un máximo de 5% de partículas más finas que la malla 200 (74 μ) en arenas para concretos de uso general, no expuestos a la abrasión. Todas las arenas andesíticas que se utilizan en los concretos del Distrito Federal ex-

ceden por mucho este límite, pues sus contenidos de finos suelen fluctuar entre cerca del 10 y algo más del 20%. Debido a las dificultades que existen para reducir estos finos a valores aceptables, se ha vuelto costumbre tolerarlos sin mayor trámite, aduciendo que se trata de finos inertes que no afectan la calidad del concreto; sin embargo, la experiencia ha demostrado que esto no siempre es así, pues hay arenas contaminadas con finos plásticos (limos y arcillas) que sí son dañinos para el concreto.

Como es usual, todas estas arenas andesíticas exhibieron densidades relativamente bajas y altas absorciones. Conviene observar que, en este aspecto, la arena de referencia no presentó mejores características.

PROGRAMA DE PRUEBAS

El programa incluyó nueve mezclas de concreto en las que se mantuvieron constantes las siguientes características:

- a) Cemento: portland tipo
- b) Tamaño máximo de grava: 20 mm
- c) Granulometría de la grava: 35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm
- d) Consumo de cemento: 300 \pm 5 kg/m³
- e) Proporción de arena en los agrega-

- dos: 45% en volumen absoluto
- f) Revenimiento del concreto: 10 = cm

Los consumos de materiales por metro cúbico de concreto, así como la relación agua/cemento de cada mezcla se presentan en la tabla 3.

Pruebas realizadas

A todas las mezclas de concreto se efectuaron las mismas pruebas. Los ensayos de ensaye fueron preferentemente los de las normas oficiales mexicanas (NOM) y, en su defecto, los de ASTM. Las pruebas que se practican al concreto fresco fueron: revenimiento, peso volumétrico, contenido de (método gravimétrico) y agua de grado. Al concreto endurecido se hicieron las siguientes determinaciones: resistencia a compresión y módulo de elasticidad a 28 días, y contracción secado con 28 días en agua y 28 al aire. Los resultados de estos ensayos se presentan en las tablas 4 y 5.

CARACTERISTICAS DE LOS CONCRETOS

El objetivo del estudio consistió en verificar la influencia que ejercen los contenidos de finos de las arenas y las características de las gravas sobre las propiedades de los concretos ensayados. Tomando en cuenta que en este estudio la cantidad de finos totales en el

reto resultó proporcional a los contenidos de las arenas, como se muestra en la figura 1, las referencias se hacen a la función de los finos de las arenas para facilitar la identificación de las mezclas.

Concretos en estado fresco

En la tabla 4 se presentan los resultados promedio de los ensayos efectuados en los tres laboratorios a los concretos en estado fresco. Como se puede observar, las mezclas estudiadas tuvieron revenimientos que variaron entre 9 y 10.5 cm; todos ellos quedaron en el intervalo de 10 ± 1 cm propuestos para el estudio.

Dado que el revenimiento se mantuvo constante, el parámetro que se puede considerar para juzgar la influen-

cia del contenido de finos resulta ser el consumo de agua por volumen unitario de concreto. A este respecto, en la figura 2 se observa que, independientemente del tipo de grava empleada, el consumo de agua se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta un 10%, y después de este valor, dicho consumo se incrementó en forma gradual hasta ser 8% mayor para contenidos de finos de 19% en la arena.

Por otro lado, si se comparan los 180 Kg de agua por metro cúbico de concreto requeridos en este caso, contra los 200 que estima el ACI 211.1¹ para un tamaño máximo de agregado de 20 mm, en mezclas sin aire incluido y revenimientos entre 8 y 10 cm, resulta que las mezclas en estudio necesitaron

10% menos de agua. Esta disminución se debió muy probablemente a la finura del cemento, que por ser más grueso de lo usual requirió menos agua para producir el revenimiento previsto.

En relación con el peso volumétrico de los concretos estudiados, en la tabla 4 y la figura 3 se observa que para contenidos de finos de hasta 10% el peso volumétrico se mantuvo constante y que éste disminuyó a medida que aumentaron los finos en las arenas más allá de ese valor. Asimismo se puede ver que existe una diferencia de alrededor de 80 kg/m³ entre los concretos fabricados con grava caliza y los hechos con andesita, a favor de la primera.

Dada la diferencia tan clara en cuanto a peso volumétrico de estos dos ti-

TABLA 4. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO FRESCO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Revenimiento, cm	10.5	9.5	10.0	9.5	9.0	10.5	10.0	9.0	9.5
Peso volumétrico, kg/m ³	2207	2176	2165	2274	2270	2291	2258	2263	2242
Vacos, %	0.6	1.1	1.3	1.3	0.3	0.5	0.9	0.7	1.7
Agua de sangrado, %	3.3	2.4	1.7	3.0	1.8	3.1	1.7	1.3	3.0

TABLA 5. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO ENDURECIDO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Resistencia a compresión a 28 días (f'_c), kg/cm ²	283	266	242	279	283	289	282	242	273
Módulo de elasticidad a 28 días (E_c), kg/cm ²	157318	140369	138284	282350	279042	286094	259474	254460	274566
Relación E_c/f'_c	9352	8607	8809	16904	16587	16829	1545	16357	16617
Constricción por secado, 28 días en agua y 28 días en aire, 10^{-6}	533	733	759	337	443	332	403	448	308

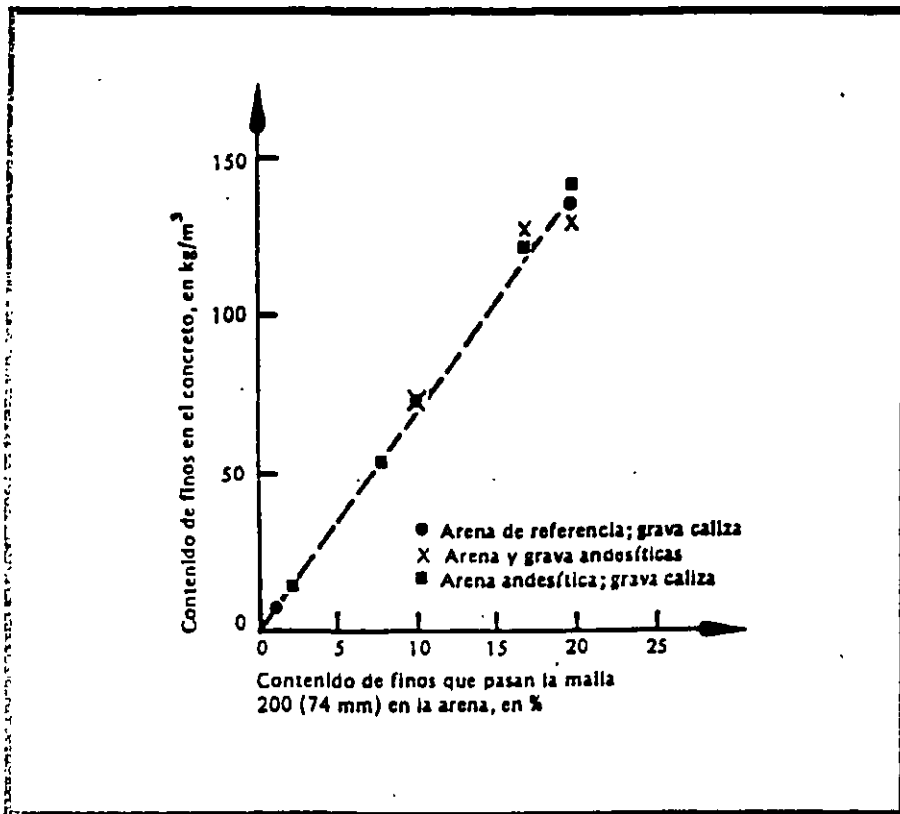


Fig. 1. Proporcionalidad entre los contenidos de finos de la arena y del concreto.

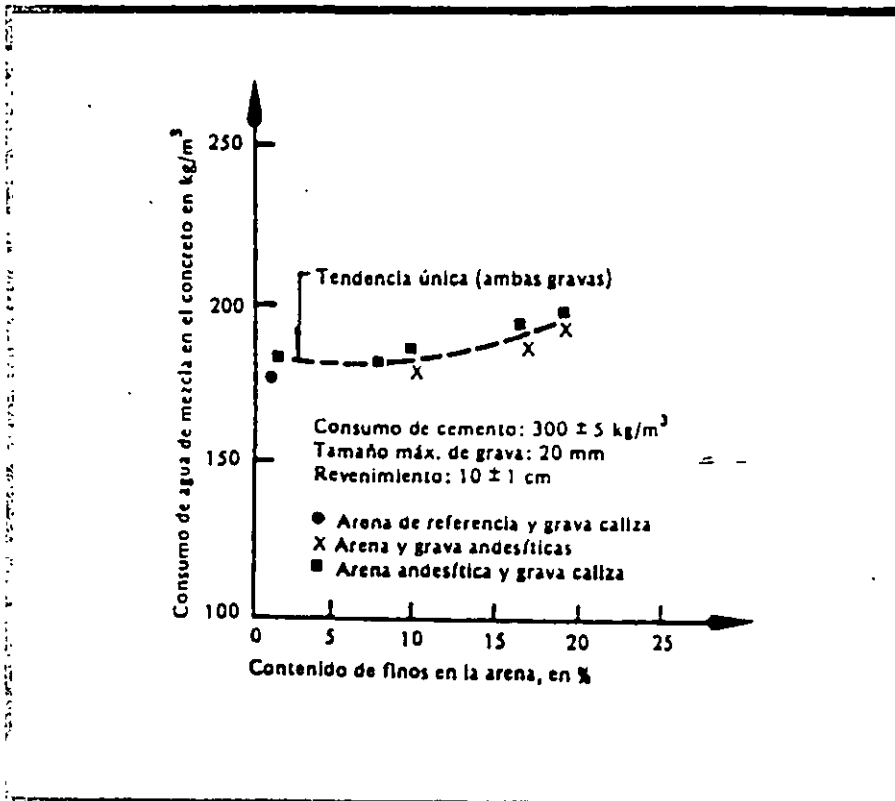


Fig. 2. Relación entre el contenido de finos de la arena y el consumo de agua de mezcla en el concreto.

pos de concreto y tomando en cuenta la simplicidad de la prueba, se puede sugerir su ejecución en obra como una primera medida para discriminar entre los dos tipos de concreto. Un valor razonable que se puede considerar como frontera entre los dos tipos de concreto es 2250 kg/m^3 .

El contenido de vacíos de las mezclas estudiadas (figura 4), establecido en función de los volúmenes absolutos de los materiales componentes, parece tener un comportamiento independiente del tipo de agregado grueso y del contenido de finos en la arena. Los valores obtenidos resultan ser inferiores a los usualmente estimados para este tipo de mezclas (2%).

En relación con el agua de sangrado, en la figura 5 se puede observar que las mezclas estudiadas siguen una sola tendencia, independientemente del tipo de grava utilizada, y que para contenidos de finos de hasta 10% el sangrado resulta constante y cercano al 3%. Para contenidos finos en la arena mayores que 10% el sangrado disminuye a valores cercanos al 1.5% para porcentajes de finos de 19%.

Cabe señalar el comportamiento discrepante de la mezcla fabricada con arena con 7.7% de finos, la cual tuvo un sangrado de tan sólo 1.8%. Esta situación se atribuye a que no obstante que la arena tiene relativamente pocos finos, parte de ellos tienen características plásticas, lo que les permite retener mejor el agua.

Los resultados anteriores representan una contradicción, ya que por una parte es deseable limitar el porcentaje de finos en la arena y por otra es conveniente al mismo tiempo tener el mínimo de sangrado posible. Aparentemente la consistencia de la mezcla (revenimiento) tiene una influencia más significativa e importante en cuanto al sangrado; pero dado que las mezclas estudiadas tuvieron un revenimiento poco variable (9 a 10.5 cm), la influencia del mismo no quedó totalmente definida. Sin embargo, en la figura 6 se muestra una relación entre el sangrado y el revenimiento. Aunque ésta varió en un intervalo muy reducido, la figura parece sugerir que sería adecuado limita-

grado a valores inferiores al 3.5%.

en estado endurecido
 propiedades determinadas a los
 concretos en estado endurecido se pre-
 entan en la tabla 5. Estas propiedades
 las resistencia a la compresión y el
 dulo de elasticidad del concreto a
 días de edad, y la contracción por
 ado después de 28 días de curado
 agua a 23°C y 28 días de secado al
 a 23°C y 50% de humedad relati-

n cuanto a la resistencia a la com-
 presión, dado que los consumos de ce-
 nto y los revenimientos de todas las
 cías fueron prácticamente constan-
 los resultados alcanzados se pue-
 comparar en forma directa; así, en
 gura 7 se puede ver que los tipos
 grava estudiadas y los diferentes
 tenidos de finos en la arena no tu-
 on influencia en la resistencia a la
 presión hasta para contenidos de
 s del 10%, en tanto que para por-
 tajes mayores a la resistencia a la
 presión decreció hasta una reduc-
 ón del 15% para arenas con
 5% de finos. Cabe hacer notar que el
 concreto fabricado con la arena consi-
 rada como de referencia siguió la
 ma tendencia general observada en
 concretos con arenas andesíticas.

Otra forma de tomar en cuenta el
 cto de los finos de la arena en la re-
 lencia a la compresión del concreto
 a través de la eficiencia del cemen-
 to entendida ésta como la relación co-
 mo de cemento/resistencia a la com-
 presión (figura 8).

En esta figura se puede ver que para
 contenidos de finos en las arenas me-
 nores que el 10%, la relación antes men-
 onada se mantuvo constante en un
 tor de 1.06, en tanto que este valor
 incrementó a 1.23 cuando los finos
 de la arena llegaron a ser del orden del
 16%, lo que equivale a tener un incre-
 mento del 16% en el consumo de ce-
 mento para igualdad de resistencias.

En relación con el módulo de elasti-
 dad, en la figura 9 se puede observar
 la influencia que tuvo el tipo de
 grava que se empleó en la fabricación
 del concreto. Se encontraron diferen-

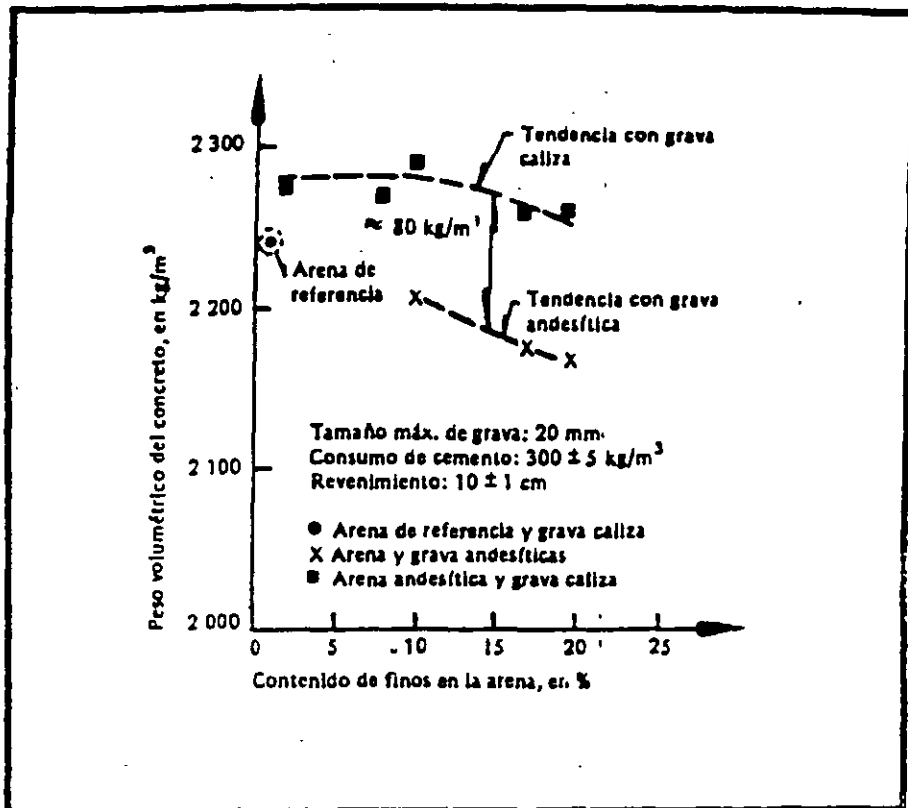


Fig. 3. Influencia del contenido de finos de la arena en el peso volumétrico del concreto.

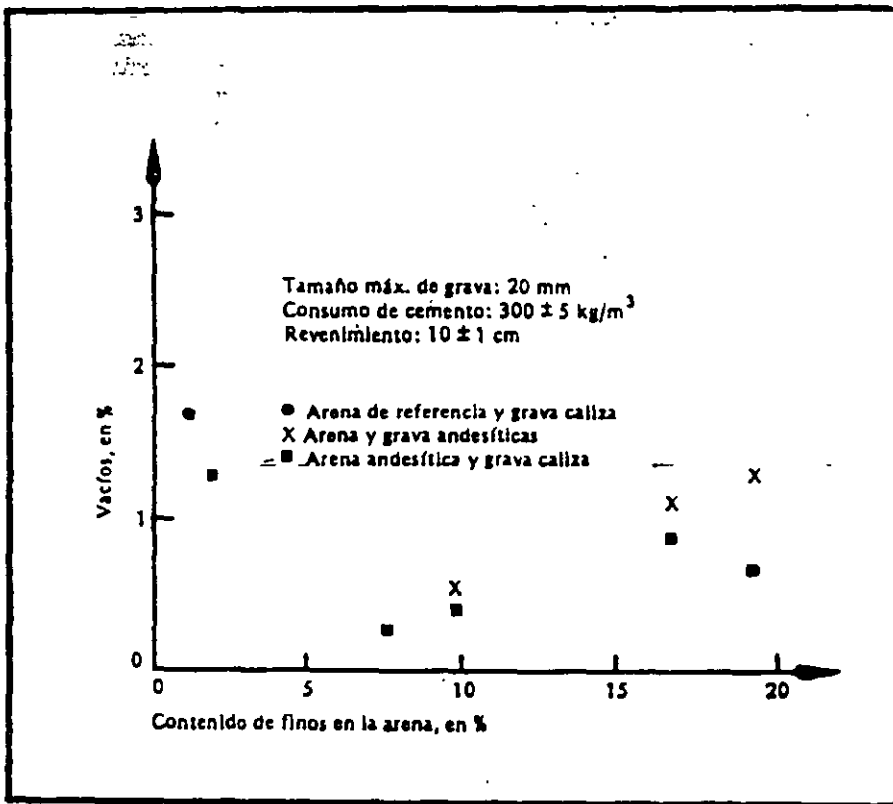


Fig. 4. Influencia de los finos de la arena en la cantidad de vacíos en las mezclas.

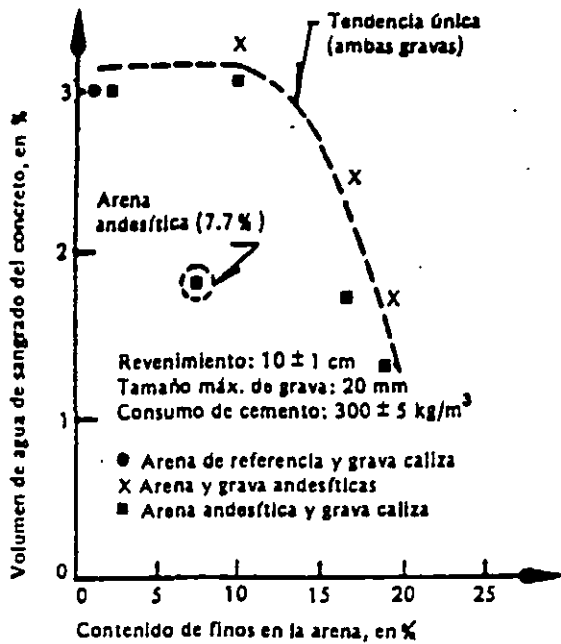


Fig. 5. Relación entre el contenido de finos de la arena y el agua de sangrado del concreto.

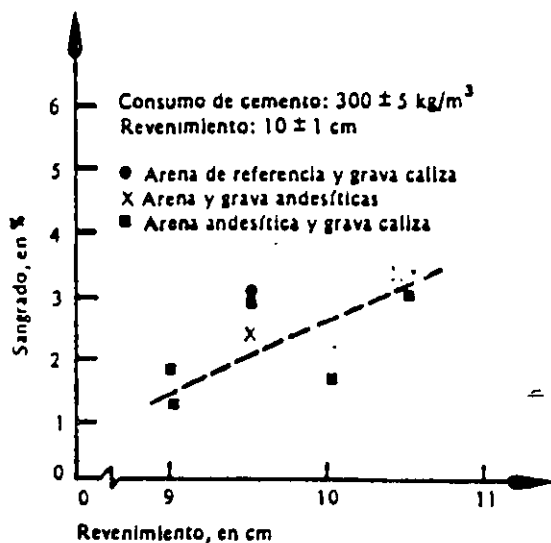


Fig. 6. Variación del sangrado en función del revenimiento.

tre los módulos de los concretos hechos con gravas andesíticas y los fabricados con gravas calizas, diferencia que corresponde a un incremento del orden del 80% en los valores alcanzados por estos últimos.

Por otra parte, los finos de las arenas influyeron en el módulo de elasticidad de los concretos de manera similar a como lo hicieron en la resistencia a la compresión. Para contenidos inferiores al 10% no existió variación apreciable en los valores alcanzados, en tanto que para contenidos de finos en la arena del 19% la disminución en el módulo de elasticidad fue del orden del 12% en relación con los valores alcanzados en los concretos hasta con 10% de finos.

Conviene señalar que, al igual que para la resistencia a la compresión, el empleo de la arena de referencia con 1.1% de finos no cambió el comportamiento del concreto en cuanto a módulo de elasticidad, el cual alcanzó valores similares a los obtenidos con la arena andesítica lavada.

En la figura 10 se presenta la relación que se manifestó entre el módulo de elasticidad del concreto y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión del mismo. Esta relación alcanzó un valor medio aproximado de 9 000 para los concretos de gravas andesíticas y un 16,500 para los de grava caliza. Conviene hacer notar que aunque el tamaño de la muestra es pequeño, la tendencia está bien definida y la totalidad de los resultados quedan localizados dentro de una dispersión de ± 2 o de la tendencia central.

En la contracción por secado, el tipo de grava empleada en el concreto tuvo también una influencia notoria; las contracciones de los concretos con grava caliza fueron del orden del 60% de las alcanzadas en los concretos con las gravas andesíticas. Asimismo, los finos de la arena, y en particular los finos con propiedades plásticas, influyeron también en forma considerable en las contracciones alcanzadas (figuras 11 y 12).

En los concretos con gravas andesíticas la contracción se incrementó des-

de un valor de 533×10^4 con el uso de arena con 10% de finos no plásticos hasta un valor de 759×10^4 con la arena de 19% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas.

En los concretos con gravas calizas el incremento de la contracción con el aumento de los finos en la arena no fue tan significativo; pasó de un valor de 332×10^4 a 448×10^4 al variar el contenido de finos del 10 al 19% respectivamente. Sin embargo, fue notorio el comportamiento del concreto fabricado con la arena con 7.7% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas. En este caso la contracción alcanzada resultó ser del mismo orden que la obtenida con la arena con 19% de finos. Conviene señalar que los finos de ambas arenas presentaron propiedades plásticas similares.

Los concretos fabricados con las arenas andesíticas lavadas y de referencia, que no tuvieron finos plásticos, presentaron contracciones similares a la alcanzada en el concreto con arena de 10% de finos, que tampoco tuvo finos plásticos.

En la figura 12 se puede observar la influencia que tuvo el contenido de finos plásticos, determinandos en función de la contracción lineal de los finos de la arena, en la contracción por secado del concreto. Como se observa la contracción por secado del concreto se incrementó al aumentar la contracción lineal de los finos de la arena, independientemente del tipo de grava utilizada, aunque este incremento fue mayor para los concretos con gravas andesíticas.

Las contracciones aquí registradas corresponden a las obtenidas después de un curado en agua de 28 días y secado al aire a una humedad relativa del 50% durante otros 28 días. De acuerdo con la literatura respectiva⁴, la contracción alcanzada en estas condiciones resulta ser del orden de la mitad de las contracciones últimas; por lo que si se extrapolaran los resultados en los concretos con las arenas hasta con 10% de finos plásticos y gravas calizas, se llegarían a valores de contracciones últimas comprendidas entre 600 y 900×10^4 , congruentes con los valores encontra-

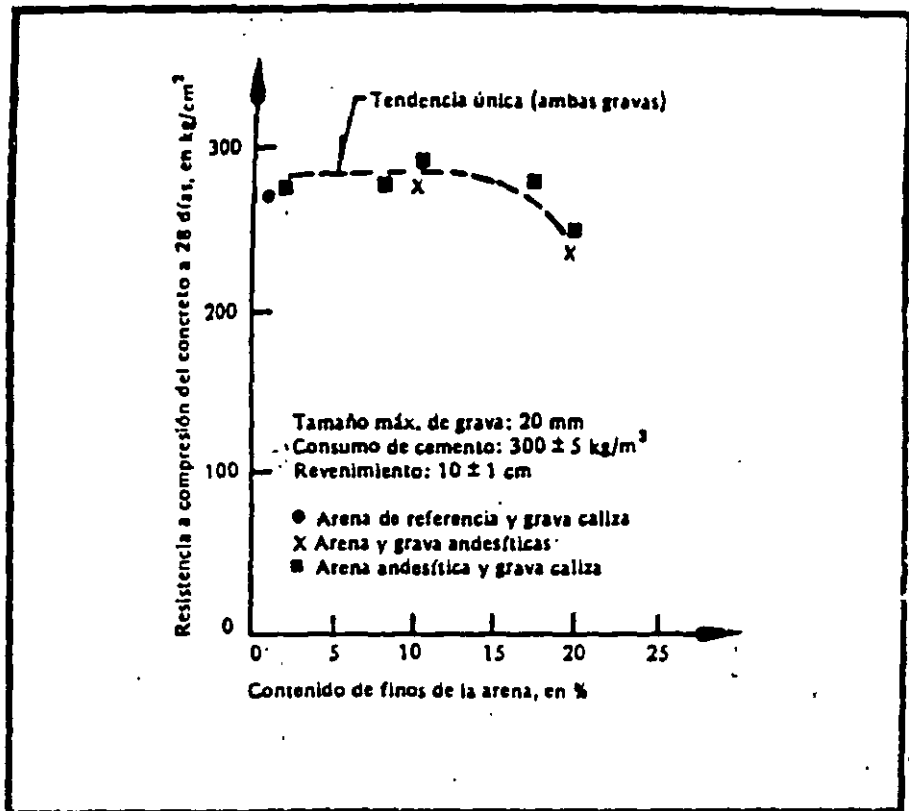


Fig. 7. Influencia del contenido de finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto.

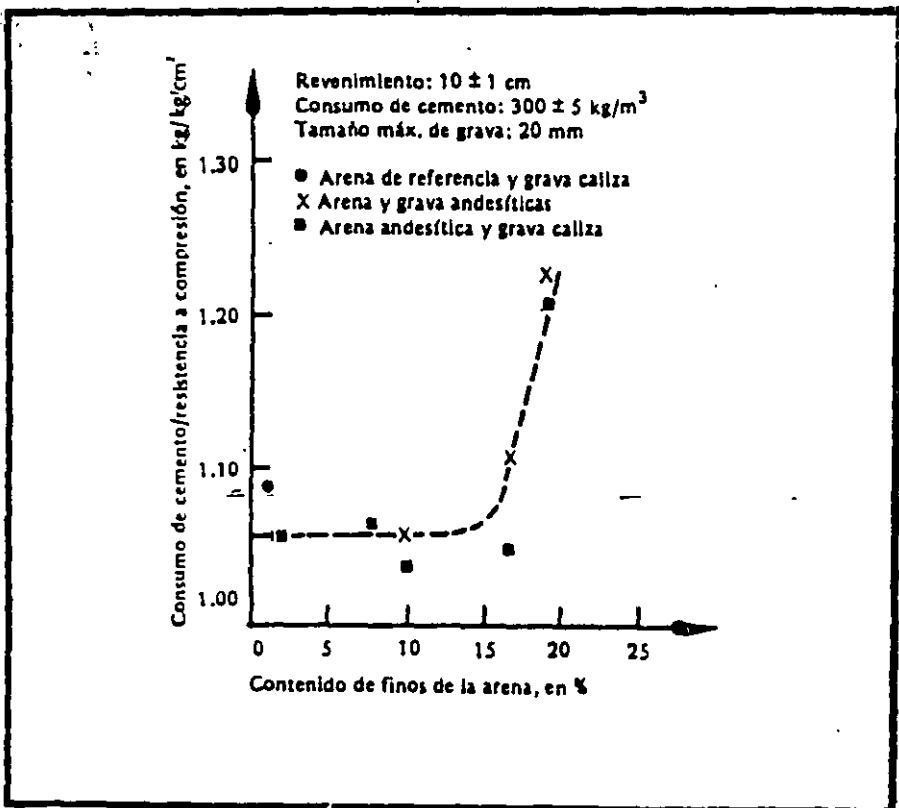


Fig. 8. Influencia del contenido de finos de arena en la eficacia del consumo de cemento.

dos en la literatura a que se refieren en esta obra.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Los resultados de los ensayos efectuados y las consideraciones hechas sobre el comportamiento de los concretos conducen a las siguientes conclusiones:

1. Para mejorar las propiedades mecánicas de los concretos que se utilizan en el Distrito Federal, es necesario emplear gravas más densas y con menos absorción de las que actualmente se emplean.
2. Las arenas andesíticas en uso resultan ser las únicas, desde el punto de vista económico, viables para la fabricación de los concretos en el D.F. Sin embargo, es necesario limitar la cantidad de finos y muy especialmente la de los finos plásticos que contienen.
3. El tipo de cemento empleado en las mezclas puede afectar algunas de las propiedades de los concretos. Las conclusiones a que se llega en este trabajo se refieren a concretos hechos con cemento portland tipo I.
4. Las gravas calizas empleadas tuvieron un comportamiento satisfactorio en cuanto a todas las propiedades mecánicas de los concretos estudiados.
5. El coeficiente volumétrico de las partículas de grava caliza triturada prácticamente igual a 0.20 con respecto a mezclas de concreto trabajables con contenidos de mortero usuales.
6. La proporción en la que se combinaron los tamaños de grava (35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm) se manifestó como una granulometría adecuada para estos materiales.
7. Desde el punto de vista de las propiedades mecánicas del concreto, para alcanzar los mejores resultados se requiere limitar los finos en la arena a un máximo de 10% y además la contracción lineal de estos finos debe ser nula.
8. Debido a que la proporción en que se mezclaron grava y arena se mantuvo constante en todo el estudio, la cantidad de finos totales en las mezclas de concreto resultó pro-

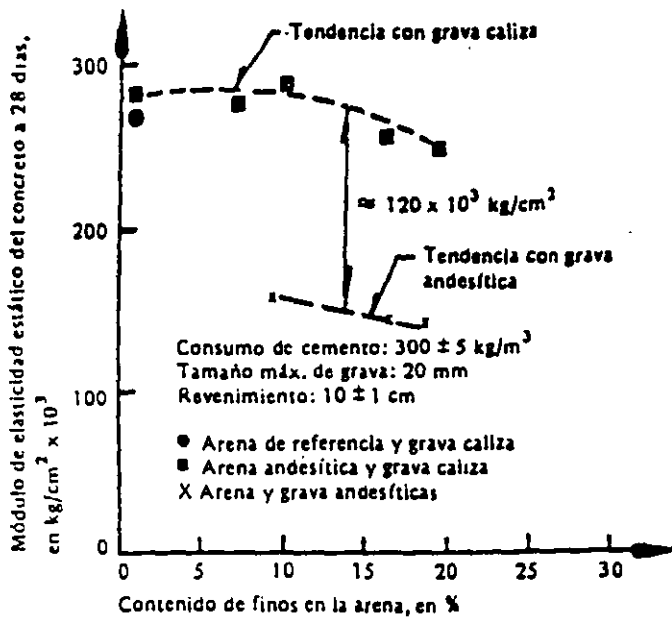


Fig. 9. Influencia del contenido de finos de la arena en el módulo de elasticidad del concreto.

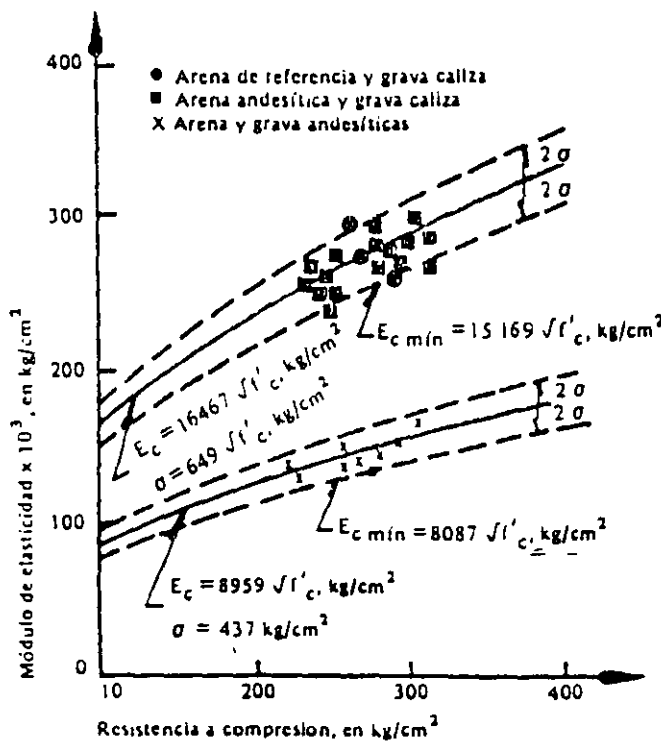


Fig. 10. Relación módulo de elasticidad - resistencia a la compresión de los concretos andesíticos y calizos.

porcional a la cantidad de finos en las arenas.

9. El requerimiento de agua de mezclado se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta 10%; para porcentajes mayores, la demanda de agua de mezclado se incrementó hasta en un 8% para contenidos de finos del orden del 19%.
10. Independientemente del contenido de finos en la arena, los concretos con grava caliza tuvieron un peso volumétrico mayor a $2\,250\text{ kg/m}^3$ mientras que en los concretos con gravas andesíticas el peso volumétrico fue siempre inferior a este valor.
11. La cantidad de vacíos en las mezclas de concreto resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado. Las mezclas fabricadas con arena andesítica lavada y con la arena de referencia tuvieron contenidos de aire cercanos al 2%; pero en las mezclas fabricadas con arenas con mayor contenido de finos los vacíos fueron siempre inferiores a esta cantidad.
12. El sangrado que presentaron: las mezclas de concreto varió en forma inversamente proporcional al contenido de finos de las arenas y en proporción directa con el revenimiento de las mezclas. Para mezclas con arena de hasta 10% de finos, sería conveniente tener sangrados máximos del 3.5%.
13. La resistencia a la compresión resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado y de los finos de la arena, cuando el porcentaje de éstos fue inferior al 10%. Para arenas con mayor contenido de finos la resistencia decreció.
14. Los módulos de elasticidad de los concretos hechos con agregados gruesos calizos resultaron del orden del doble de los obtenidos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10% no tuvieron influencia en el módulo de elasticidad alcanzado. El valor medio de la relación entre el módulo de elasticidad y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión resultó ser 16 500 para los concretos con gravas calizas y 9 000 para los hechos con gravas andesíticas.

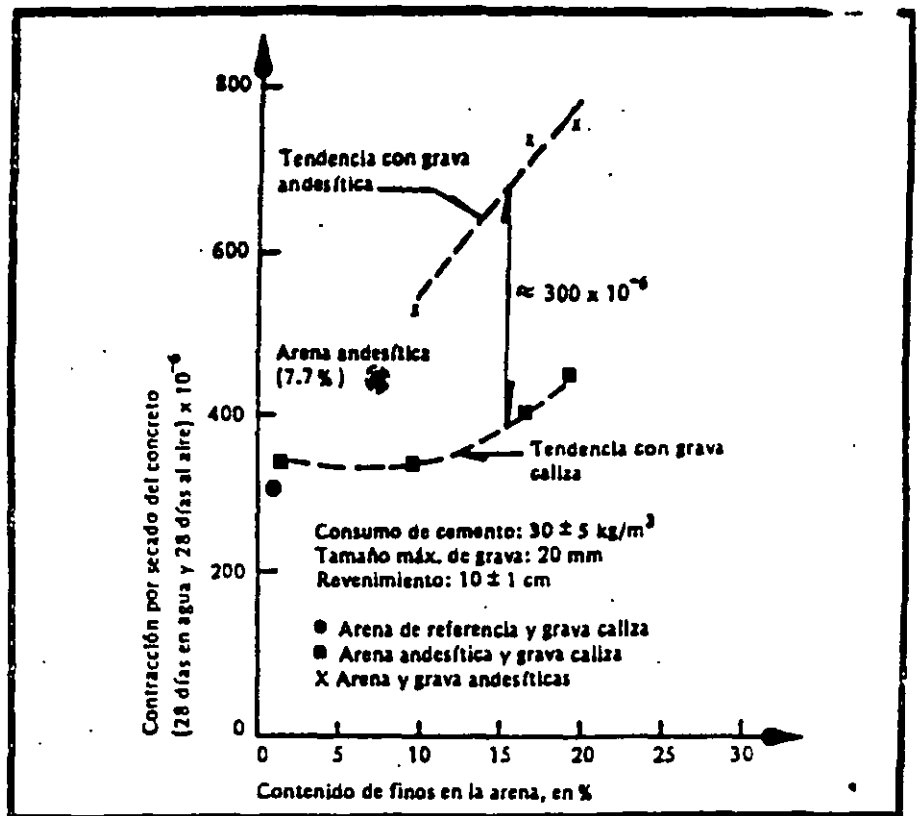


Fig. 11. Influencia del contenido de finos de la arena en la contracción por secado del concreto.

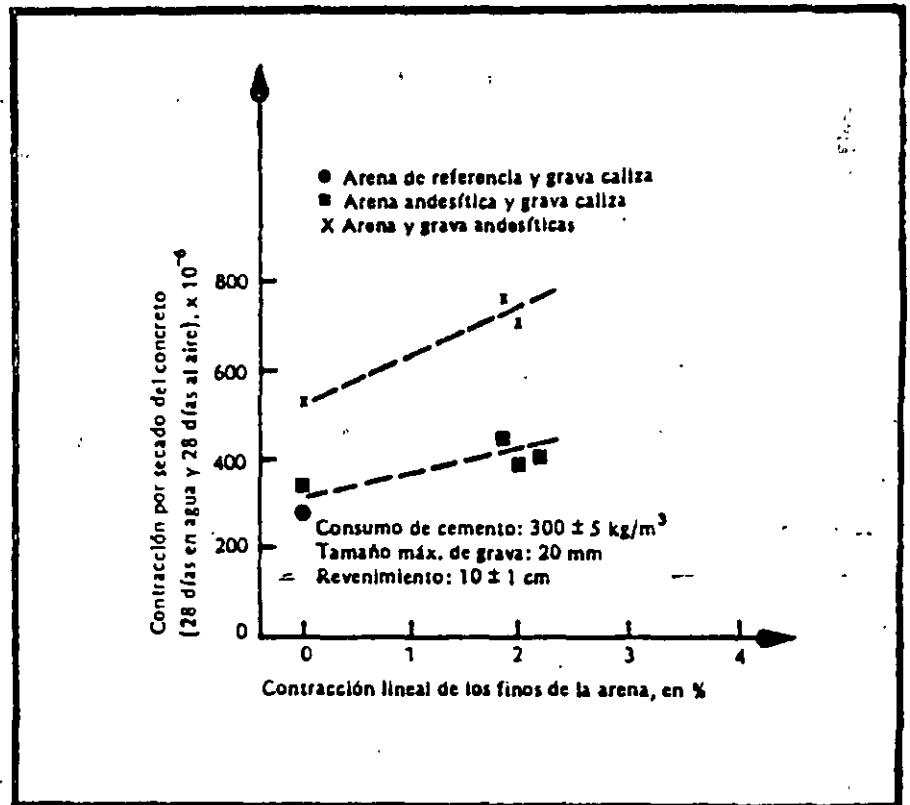


Fig. 12. Influencia de los finos plásticos de las arenas en la contracción por secado del concreto.

15. La contracción por secado de los concretos fabricados con grava caliza fue del orden del 60% de la obtenida en los concretos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas superiores al 10%, en especial el contenido de finos con propiedades plásticas, tuvieron una influencia determinante en la contracción del concreto, incrementándose ésta con el porcentaje y las propiedades plásticas de estos finos.

16. La contracción por secado, después de 28 días de curado húmedo y de otros 28 de secado al aire con una humedad relativa de 50%, en concretos con porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10%, resultó ser de 332×10^{-4} para los concretos con gravas calizas y de 533×10^{-4} para los de gravas andesíticas.

Recomendaciones

La evaluación de los resultados de los ensayos conduce a plantear las siguientes recomendaciones:

Para obtener un concreto de calidad satisfactoria para fines estructurales, se requiere seleccionar con precaución las características de los materiales componentes.

En cuanto a los cementos portland se puede emplear cualquiera de los tipos usuales (I, II, III y V) con tal que sea congruente con los fines a los que se destine la estructura. Con respecto al cemento portland-puzolana, se halla en curso de revisión la norma NOM C-2 con objeto de incluir un tipo denominado PUZ-1, el cual se debe compor-

tar en su desarrollo de resistencia como el cemento portland tipo I.

Las gravas deben proceder de una roca sana, preferiblemente con densidad superior a 2.6 y absorción no mayor al 2%. Si las gravas se obtienen por un proceso de trituración conviene verificar que la forma de las partículas sea tal, que su coeficiente volumétrico resulte mayor a 0.20. Se obtiene una granulometría adecuada para fabricar concreto con tamaño máximo de 20 mm, cuando las gravas de 5 a 10 mm se mezclan con las de 10 a 20 mm en proporción de 35 a 65%, respectivamente.

Las arenas que se utilicen para la fabricación de los concretos pueden ser de naturaleza andesítica, pero se debe verificar que el porcentaje de los finos que contenga sea inferior al 10% y además que estos finos no tengan propiedades plásticas. Una forma de medir la plasticidad de los finos puede ser la prueba de contracción lineal, la cual debe conducir a valores de 0% cuando la arena está exenta de finos plásticos.

Dada la buena trabajabilidad que mostraron las mezclas con revenimientos de 10 cm, se sugiere emplear este valor como máximo nominal, con una tolerancia de ± 2.5 cm. En caso de requerir una mezcla más fluida se puede adicionar en obra un aditivo fluidificante que permita incrementar ese revenimiento. Como medida de control y aceptación del concreto en su estado fresco se recomienda realizar, adicionalmente a la prueba de revenimiento, la determinación del peso volumétrico, cuyo resultado permitirá distinguir si el concreto se fabricó con agregados den-

sos o ligeros. Un valor mínimo para esta característica en el concreto estructural puede ser de $2\ 250 \text{ kg/m}^3$.

Tomando en cuenta el comportamiento de los concretos con agregados gruesos calizos, se puede estimar que el módulo de elasticidad de los mismos a los 28 días tendrá un valor mínimo de $14\ 500 f_c$ y que la contracción por secado última será inferior a 900×10^{-4} .

RECONOCIMIENTO

Este artículo es un resumen del informe "Ensayos para definir las características de los concretos estructurales en el D.F." preparado por el Instituto de Ingeniería para la Comisión de Validad y Transporte Urbano y se reproduce con la autorización de la mencionada comisión.

Los autores hacen patente su reconocimiento al personal del Grupo Toltteca, por su participación en la obtención y selección de los materiales empleados en el estudio; a los empleados de las empresas INSPECTEC, Laboratorios Liac y Laboratorio Nacional de la Construcción, quienes intervinieron en la realización de los ensayos; a la Comisión Federal de Electricidad por facilitar sus instalaciones y a todos los miembros del grupo de trabajo sobre control de calidad de los materiales de construcción. Se agradece en forma especial al Dr. Roberto Meli, por las sugerencias recibidas durante el desarrollo del estudio.



REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J., "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el D.F.", Informe 495, Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. Meli, R., "Estudio estadístico de propiedades de materiales y estructuras de concreto reforzado en el Distrito Federal", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, julio de 1985.
3. ASTM "Annual Book of Standards", Section 4, Volume 0.4.02 Concrete and Mineral Aggregates, 1983.
4. Rabot R., Coulon C. y Hamel J., "Contribution a l'amélioration de l'essai d'équivalent de sable", Bull Liaison Labo. P. et Ch. 57, enero-febrero de 1972.
5. ACI Committee 211 "Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete (ACI 211.1-81)", ACI Manual of Concrete Practice, Parte 1, 1986.
6. ACI Committee 209 "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Publication SP-27, 1971.

INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS AGREGADOS EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Carlos Javier Mendoza E.

Introducción

En una mezcla de concreto los agregados constituyen cuando menos tres cuartas partes de su volumen total, por lo que la calidad de éstos tienen una importancia definitiva en la resistencia, durabilidad y comportamiento de las estructuras construidas con ellos.

Por otro lado, los agregados son más económicos que el cemento, por lo que resulta ventajoso usar la mayor cantidad posible de ellos, a parte de que el empleo de volúmenes importantes de agregados da al concreto mayor estabilidad volumétrica y durabilidad.

Influencia de la forma y textura del agregado en la trabajabilidad y resistencia

La forma y textura superficial del agregado grueso tienen una influencia considerable en la resistencia del concreto, particularmente en la resistencia a flexión y son particularmente significativas en los concretos de alta resistencia.

La contribución de la forma y textura del agregado grueso en el desarrollo de la resistencia a compresión del concreto no se conoce, pero posiblemente una textura rugosa dé como resultado una fuerza de adhesión más grande entre las partículas y la matriz de cemento. De igual forma, una superficie de contacto más grande en los agregados angulosos significa que se puede desarrollar una mayor fuerza adhesiva. En la tabla 1 se hace una estimación cuantitativa de la manera en que la forma, la textura

superficial y el módulo de elasticidad del agregado afecta a las resistencias a flexión y compresión del concreto.

La forma y textura del agregado fino tiene un efecto significativo en el requerimiento de agua de mezclado, ya que estas propiedades se pueden expresar en forma indirecta en función del porcentaje de huecos que quedan en la arena en condición suelta. La influencia de los huecos entre las partículas del agregado grueso es menos definitiva en el consumo de agua, sin embargo, la forma del agregado grueso, y en particular el agregado grueso lajeado, tiene un efecto considerable en la trabajabilidad del concreto.

La influencia de las propiedades de los agregados en la trabajabilidad de crece con el consumo de cemento y posiblemente desaparece cuando la relación agregado/cemento es del orden de 2.5.

La influencia en la granulometría en la segregación es importante, pero esta depende mayormente del método de manejar y colocar el concreto. También el empleo de agregado grueso con peso específico muy diferente del que tiene el agregado fino aumenta la tendencia a la segregación.

Las propiedades físicas del agregado fino, especialmente el más pequeño que la malla #100 (150 μ m), puede afectar el sangrado del concreto.

La forma del agregado influye en la bombeabilidad de una mezcla, en general son preferibles arenas naturales y gravas redondeadas a los agregados triturados, pero puede hacerse una mezcla con características adecuadas para ser bombeada con una combinación apropiada de fracciones de agregados triturados.

Si la superficie del agregado es porosa los huecos internos pueden no estar totalmente saturados aún cuando estén completamente humedecidos. Cuando se aplica la presión en la línea, el aire en estos vacíos se contrae y el agua se introduce en los poros, dando como resultados que las mezclas sean más secas y poco manejables. Si se suspende el

bombeo y se libera la presión, se libera también el agua de los agregados; esta agua puede arrastrar materiales finos, formando un tapón cuando se reinicia el bombeo.

Influencia de la resistencia del agregado en el comportamiento del concreto

La resistencia a compresión del concreto no puede exceder a la del agregado con el que se fabrica. Sin embargo, la resistencia a compresión del agregado tal como se encuentra es difícil de determinar y la información requerida tiene que obtenerse através de pruebas indirectas: resistencia a compresión de muestras labradas de la roca, valor al aplastamiento del agregado grueso, o comportamiento del agregado en el concreto.

Lo anterior implica que se deben hacer algunos ensayos previamente con el agregado que se pretende usar y compararlos con la respuesta de otros concretos de calidad conocida. Si el agregado bajo ensayo conduce a una resistencia a compresión más baja que la del concreto de referencia, y en particular si numerosas partículas individuales de agregados aparecen fracturadas después de que el espécimen se ha ensayado, la resistencia del agregado es inferior a la de la mezcla de concreto a la cual se le incorporó, por tanto, tales agregados solo deben usarse en mezcla de baja resistencia.

Una resistencia inadecuada del agregado representa una limitación ya que las propiedades del agregado tiene cierta influencia en la resistencia del concreto, aún cuando sea suficientemente resistente para no fracturarse prematuramente. Si se comparan concretos hechos con diferentes agregados se puede observar que la influencia del agregado en la resistencia del concreto es cualitativamente la misma, independientemente del proporcionamiento de la mezcla y de que el concreto se ensaye en compresión o tensión. Es posible que la influencia del agregado sobre la resistencia del concreto se deba no solamente a la resistencia mecánica del agregado sino también, y en grado considerable, a sus características de

absorción y adherencia.

En general la resistencia y elasticidad del agregado depende de su composición, textura y estructura así, una baja resistencia se puede deber a una debilidad de los granos constituyentes, a que los granos, no obstante de ser suficientemente resistentes, no están bien ligados o cementados.

El módulo de elasticidad del agregado aunque se determina rara vez, no deja de tener importancia, ya que el módulo de elasticidad del concreto es más grande a medida que mayor es el módulo de elasticidad de los agregados constituyentes. El módulo de elasticidad del agregado afecta también la magnitud de la deformación diferida y de la contracción que puede presentarse en el concreto.

Por otro lado, el agrietamiento vertical de un espécimen sujeto a compresión uniaxial comienza bajo carga del orden de 50 a 75 por ciento de la carga última. El esfuerzo al que se forman las grietas depende en gran parte de las propiedades del agregado grueso: gravas lisas conducen al agrietamiento a esfuerzos más bajos que los requeridos con rocas trituradas, asperas y angulosas, debido probablemente a que la adherencia mecánica está influenciada por las propiedades de la superficie y, en cierta manera, por la forma del agregado grueso.

Las propiedades de los agregados afectan la carga de agrietamiento en compresión y la resistencia en flexión de la misma manera, por lo que la relación entre las dos cantidades es independiente del tipo del agregado usado, fig 1. Por otra parte la relación entre las resistencias a flexión y compresión depende del tipo de agregado grueso, ya que las propiedades del agregado, especialmente su textura superficial, afectan la resistencia última en compresión mucho menos que la resistencia en tensión o la carga de agrietamiento en compresión, fig 2, ref 1.

La influencia del tipo de agregado grueso en la resistencia del concreto varía en magnitud y depende de la relación agua/cemento de la mezcla.

Para relaciones agua/cemento inferiores a 0.4 el empleo de agregados triturados ha dado como resultado resistencias hasta 38 por ciento superiores que cuando se emplean gravas redondeadas. Con incremento en la relación agua/cemento la influencia del agregado disminuye, posiblemente debido a que la resistencia de la pasta misma es determinante, y a relaciones agua/cemento de 0.65 no se observa diferencias entre las resistencias alcanzadas con agregados triturados o gravas redondeadas.

La influencia del agregado en la resistencia a flexión parece depender también de la condición de humedad del concreto en el momento del ensaye.

Influencia de los agregados en el módulo de elasticidad del concreto

Las propiedades de los agregados también influyen en el módulo de elasticidad del concreto; mientras más alto sea el módulo de elasticidad del agregado, mayor será el módulo de elasticidad del concreto. La forma de las partículas de agregado y sus características superficiales pueden influir también en el valor del módulo de elasticidad del concreto y en la curvatura de la relación esfuerzo-deformación.

Es interesante hacer notar que los dos componentes del concreto, pasta de cemento y agregado, cuando están sujetos a esfuerzos en forma individual presentan una relación esfuerzo-deformación sensiblemente lineal. La razón para el comportamiento no lineal en el material compuesto (concreto) se debe a la presencia de interfases entre la pasta de cemento y el agregado y al desarrollo de microagrietamiento en esas interfases. Debido a que las grietas se desarrollan progresivamente en las interfases, hay un incremento progresivo en la intensidad del esfuerzo local y en la magnitud de la deformación, por lo que la deformación se incrementa más rápidamente que el esfuerzo promedio aplicado y la curva esfuerzo-deformación se hace cóncava hacia abajo con un comportamiento pseudo-plástico.

La relación entre módulo de elasticidad y resistencia depende también de la proporción de la mezcla (el agregado por lo general tiene un módulo

mayor que el de la pasta de cemento) y de la edad del concreto; a edades mayores (mayores resistencias) el módulo se incrementa más rápidamente que la resistencia. Esto se muestra en la fig 3, la cual también da resultados para concretos hechos con agregados de arcilla expandida. El módulo de elasticidad del concreto de agregado ligero no se incrementa con la resistencia en la misma proporción y su valor está entre 40 y 80 por ciento del módulo del concreto de agregado ordinario de la misma resistencia. Dado que el módulo del agregado ligero difiere poco del módulo de la pasta del cemento, la proporción con que se encuentra en la mezcla no afecta al módulo de elasticidad de los concretos de agregados ligeros.

Influencia de los agregados en la contracción

Los agregados restringen la contracción que se puede presentar. El tamaño y granulometría del agregado por ellos mismos no influyen en la magnitud de la contracción, pero un agregado más grande permite el uso de mezclas más pobres y origina, por tanto, una contracción menor.

Similarmente, para una resistencia dada, el concreto de baja trabajabilidad contiene más agregado que uno de alta trabajabilidad hecho con agregados del mismo tamaño y, como consecuencia, la primera mezcla presentará una contracción más pequeña.

La influencia combinada de la relación agua-cemento y contenido de agregado puede presentarse en una gráfica; esto se hace en la fig 4 pero debe recordarse que los valores de contracción dados son solamente típicos para el secado en climas templados.

Las propiedades elásticas de los agregados determinan el grado de restricción ofrecido. Por ejemplo, los agregados de acero conducen a una contracción un tercio menor y los agregados de arcilla expandida un tercio mayor que la que permiten los agregados ordinarios. La presencia de arcilla en el agregado reduce su efecto restrictivo en la contracción, y dado que la arcilla misma está sujeta a contracción, la presencia de arcilla en el recubrimiento de los agregados puede incrementar la contracción hasta en 70 por ciento.

Dentro del intervalo de agregados normales hay una variación considerable en la contracción, fig 5. El agregado natural común no se contrae por si mismo, pero existen algunos agregados que presentan contracciones por secado de hasta 900×10^{-6} , similar a la contracción que presenta el concreto fabricado con agregados sin contracción. Las rocas que presentan contracciones usualmente tienen alta absorción y este hecho debe servir como advertencia para investigar sus propiedades en relación con la contracción.

El agregado ligero usualmente conduce a contracciones más grandes que el agregado de peso normal, debido principalmente a que el agregado, teniendo un módulo de elasticidad más bajo, presenta menos restricciones a la contracción potencial de la pasta de cemento. Los materiales ligeros que tienen una proporción importante de material más pequeño que la malla 200 (75 μm) tienen una contracción aun más grande, dado que la finura conduce a un contenido mayor de vacíos.

El contenido de agua de una mezcla de concreto afecta la contracción por que reduce el volumen de los agregados que la restringe, siguiendo la tendencia mostrada en la fig 6, pero el contenido de agua por si mismo se piensa que no es un factor determinante.

Efecto del agregado en la deformación diferida

En la mayor parte de los casos el agregado de peso normal no está sujeto a deformación diferida, por lo que es razonable suponer que el origen de la deformación diferida está en la pasta de cemento, pero los agregados influyen en la deformación diferida del concreto a través de un efecto de restricción, similar al que se presenta en el caso de la contracción y dependiente de algunas propiedades físicas de las rocas de las cuales provienen.

Debido a la gran variación de los agregados dentro cualquier tipo mineralógico y petrográfico, no es posible establecer de una manera general la magnitud de la deformación diferida del concreto hecho con agregados de

diferentes tipos. Sin embargo, los datos de la fig 7 son de importancia considerable; después de 20 años de conservados a una humedad relativa de 50 por ciento, el concreto hecho con areniscas presenta una deformación diferida más del doble de la obtenida con calizas. Una diferencia aún más grande entre la deformación diferida del concreto hecho con diferentes agregados fue encontrada por Rüsck et al, después de 18 meses bajo carga a una humedad relativa de 65 por ciento, la máxima deformación diferida fue cinco veces el valor mínimo; los agregados en orden creciente de deformación diferida son: basalto y cuarzo; grava, marmol y granito; y arenisca.

El agregado ligero merece atención especial porque la opinión generalizada sugiere que su uso conduce a deformación diferida sustancialmente más alta que la alcanzada con agregado de peso normal. Trabajos recientes indican que no hay diferencia fundamental entre agregados normal y ligero en lo que se refiere a la deformación diferida y que la deformación diferida más alta de los concretos ligeros refleja solamente el módulo de elasticidad más bajo de los agregados. No hay diferencia en el comportamiento inherente al hecho de que los agregados estén o no cubiertos o a que sean obtenidos por procesos de manufactura diferente; esto no significa que todos los agregados conducen a la misma deformación diferida.

Como regla general se puede establecer que la deformación diferida del concreto de calidad estructural de agregado ligero es aproximadamente la misma que la del concreto hecho con agregado ordinario. (Es importante en cualquier comparación que el contenido de agregado no difiera mucho entre el concreto de agregado ligero y el concreto de agregado normal). Más aun, siendo la deformación elástica de los concretos con agregados ligeros mayor que la que tienen los concretos ordinarios, la relación deformación diferida a deformación elástica es más pequeña para los concretos de agregados ligeros.

Características de los concretos comunes en el Distrito Federal

4. Las expresiones que correlacionan la resistencia a tensión por flexión con la resistencia a compresión son las siguientes:

Concretos con grava y arena andesítica

$$f_f = 1.9 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica

$$f_f = 2.1 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

5. Las expresiones para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión son:

concretos con grava y arena andesítica

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica

$$E_c = 11000 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

6. La relación de Poisson para concretos andesíticos ensayados a 28 días de edad, varía de 0.25 para una resistencia de 100 kg/cm² a 0.35 para 500 kg/cm² de resistencia a compresión. Un valor medio de 0.30 se recomienda tomar para la mayor parte de las resistencias usuales.
7. El módulo de rigidez por cortante para concretos andesíticos se puede calcular con la expresión:

$$G = 3300 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

estando G y f'_c expresados en kg/cm²

Los concretos usualmente empleados en el Distrito Federal están fabricados con gravas y arenas de origen piroclástico (gravas y arenas andesíticas y basaltos escoriaáceos) las cuales son relativamente ligeras y muy absorbentes. Esta situación ha dado como consecuencia que las propiedades de estos concretos difieran en forma sustancial de las consideradas como comunes. En la tabla 2 se presentan los valores alcanzados en un estudio realizado al respecto y se comparan con aquellos considerados como comunes, ref 2. Como resultado de ese estudio se alcanzaron las siguientes conclusiones:

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Los concretos fabricados con grava de basalto escoriaáceo presentaron incrementos de resistencia más grandes respecto a la alcanzada a los 28 días en relación con los incrementos observados en los concretos fabricados con gravas andesíticas.

En cuanto a las arenas, los mayores incrementos se alcanzaron en los concretos fabricados con las arenas con menor contenido de polvos.

3. Las expresiones que correlacionan la resistencia a compresión a una edad cualquiera con la alcanzada a los 28 días se indican a continuación:

Concretos con grava y arena andesíticas

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c \quad , \text{ kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica

$$f_c = \frac{t}{9.3 + 0.67t} f'_c \quad , \text{ kg/cm}^2$$

8. La deformación unitaria correspondientes al esfuerzo máximo (ϵ_0) varía con el tipo de agregado grueso y con el nivel de resistencia del concreto. Valores representativos de este comportamiento, correspondientes a resistencias a compresión entre 200 y 300 kg/cm² pueden ser:

Concretos con agregado andesíticos

$$\epsilon_0 = 0.004$$

Concretos con agregado grueso de basalto escoriaáceo y arena andesítica

$$\epsilon_0 = 0.003$$

9. La curva esfuerzo-deformación se puede obtener con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c \epsilon}{\epsilon_0 \left| 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right|} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

en la que los valores de f'_c y ϵ_0 se seleccionan de acuerdo con las características de los concretos

10. La contracción por secado registrada fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas. El tipo de agregado grueso también tuvo influencia, presentando menos contracción los concretos hechos con grava de basalto escoriaáceo.
11. La contracción por secado a cualquier edad se puede estimar con las siguientes expresiones:

Concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos.

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.93}}{10 + t^{0.93}} \quad 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.71}}{10 + t^{0.71}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.84}}{16 + t^{0.84}} 1100 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.81}}{17 + t^{0.81}} 1000 \times 10^{-6}$$

Los valores determinados con estas expresiones habrán que afectarlos por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del material y las condiciones del medio ambiente.

12. La tendencia al agrietamiento, medida como la presencia o ausencia de grietas, depende no solamente de la contracción potencial sino también de la deformabilidad del concreto, su resistencia y el grado de restricción a la deformación, lo que puede conducir al agrietamiento.
13. El coeficiente de deformación diferida resulta mayor para los concretos más rígidos (mayor módulo de elasticidad), por lo que las deformaciones totales, incuyendo deformaciones instantáneas y a largo plazo, vienen a ser del mismo orden, independientemente del tipo de agregado grueso utilizado.
14. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos, incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida.

15. El coeficiente de la deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \quad 5.65$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \quad 3.12$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.80}}{46 + t^{0.80}} \quad 7.14$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.66}}{21 + t^{0.66}} \quad 3.88$$

16. La deformación diferida afecta las deformaciones y las deflexiones y en ocasiones la distribución de esfuerzos; sin embargo, afecta poco la resistencia última de los elementos estructurales y ayuda a la relevación de esfuerzo originados por contracciones, cambios de temperatura o movimiento de los apoyos.

Recomendaciones para los concretos estructurales futuros en el Distrito Federal

Conocidas las características y deficiencias de los concretos utilizados comúnmente en la ciudad de México es conveniente plantear algunas medidas correctivas a la práctica usual, sobre todo si se toma en cuenta el com-

portamiento poco favorable de algunas estructuras de concreto durante los recientes sismos.

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirá a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por seco do, por restringir mejor estas deformaciones, y menor deformación diferi da.

En cuanto a las mezclas de concreto, se emplearán aquellas con mayor conte nido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conduciría, por una parte, a menores consumos de agua los que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resis tencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

Para satisfacer estas recomendaciones se pueden sustituir las gravas ande siticas y las de basalto escoriaeo por otras trituradas de origen cali- zo o de basalto sano y denso. Estas pueden alcanzar densidades superiores a 2.6, en comparación con 2.3 que tienen las andesíticas o 2.0 los basaltos escoriaeos.

En cuanto a la arena andesítica es difícil sustituirla por otra de mejores características que se encuentre a distancias razonables de la ciudad de México, por lo que será necesario seguirlas empleando, limitando el contenido de polvos de las mismas. Un valor límite deseable en el conte nido de polvo podría ser 5 por ciento.

En cuanto a la trabajabilidad de las mezclas se deberá limitar el reventi miento a 10 cm y las relaciones arena/agregados totales a valores no superiores 0.45, en volumen absoluto.

En pruebas realizadas con un agregado calizo y con una arena con densidad de 2.4 y 5 por ciento de polvos se obtuvieron los siguientes parámetros, ref 3:

Peso volumétrico	2260 kg/m ³
Módulo de elasticidad	14100 $\sqrt{f'_c}$ en kg/cm ²
Contracción por secado última	900 X 10 ⁻⁶
Coefficiente de deformación diferida última	2.4

Lo anterior indica que con estos materiales se pueden tener parámetros del comportamiento del concreto en las estructuras muy cercanos a aquellos considerados como comunes.

Referencias

1. Neville, A.M. "Properties of concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
2. C.J. Mendoza "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal" Informe 495, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.
3. C.J. Mendoza "Comportamiento a corto y largo plazo de vigas presforzadas de concreto" Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.

TABLA 1. VALORES RELATIVOS PROMEDIO DEL EFECTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS AGREGADOS EN LA RESISTENCIA DEL CONCRETO (KAPLAN)

Propiedades del concreto	Efecto relativo de las propiedades de los agregados, por ciento		
	Forma	Textura superficial	Módulo de elasticidad
Resistencia a flexión	31	26	-43
Resistencia a compresión	22	44	34

Los valores representan la relación de variancia debida a cada propiedad a la variancia total obtenida para las tres características de los agregados en pruebas realizadas sobre tres mezclas hechas con 13 agregados.

TABLA 2. COMPARACION ENTRE CARACTERISTICAS DE CONCRETOS COMUNES Y LOS QUE SON FACTIBLES DE FABRICAR EN EL DISTRITO FEDERAL

<u>Características</u>	<u>Comunes</u>	<u>Andesítica</u>	<u>Basalto Escoriaéreo</u>	<u>Calizas</u>
Resistencia a tensión	$2.5 \sqrt{f'_c}$	$1.9 \sqrt{f'_c}$	$2.1 \sqrt{f'_c}$	-
Módulo de elasticidad	$14900 \sqrt{f'_c}$	$8500 \sqrt{f'_c}$	$11000 \sqrt{f'_c}$	$14000 \sqrt{f'_c}$
Relación de Poisson	0.15 - 0.20	0.30	-	-
Módulo de rigidez	$6500 \sqrt{f'_c}$	$3300 \sqrt{f'_c}$	-	-
Deformación unitaria al esfuerzo máximo	0.003	0.004	0.003	-
Contracción por secado última	800×10^{-6}	1300×10^{-6}	1100×10^{-6}	900×10^{-6}
Coefficiente de deformación diferida última	1.30 - 4.15	3.12 x 5.65	3.88 - 7.14	2.4

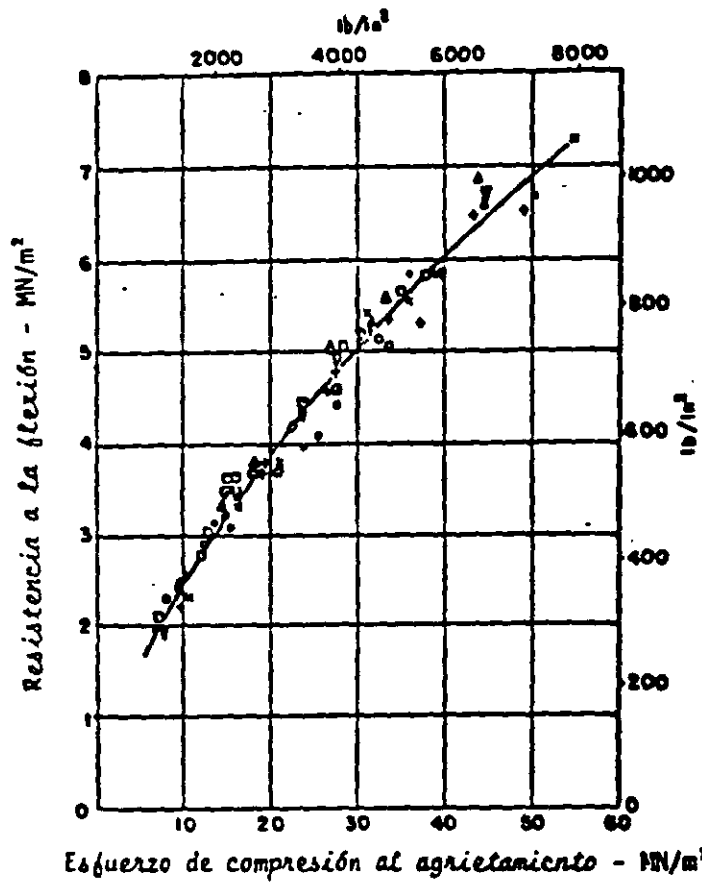


Fig 1. Relación entre resistencia a flexión y esfuerzo de compresión al agrietamiento para concretos hechos con diferentes agregados gruesos (ref 1)

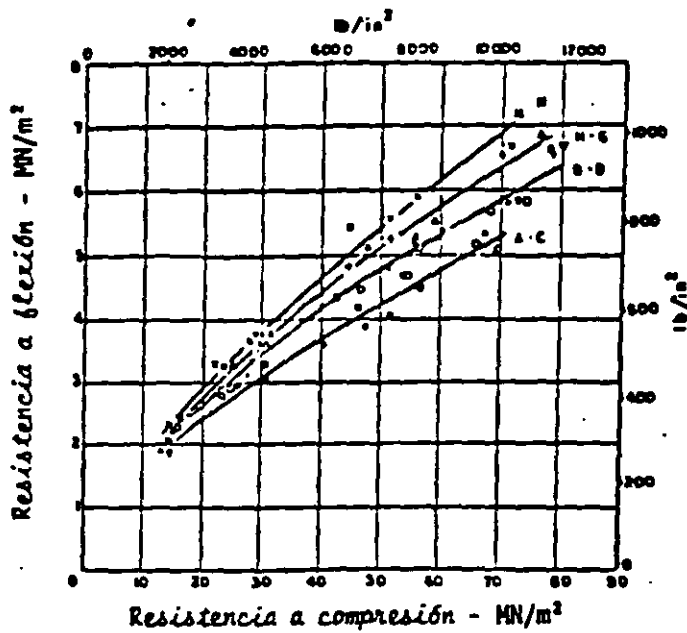


Fig. 2. Relación entre resistencia a flexión y compresión para concretos hechos con diferentes agregados (ref 1)

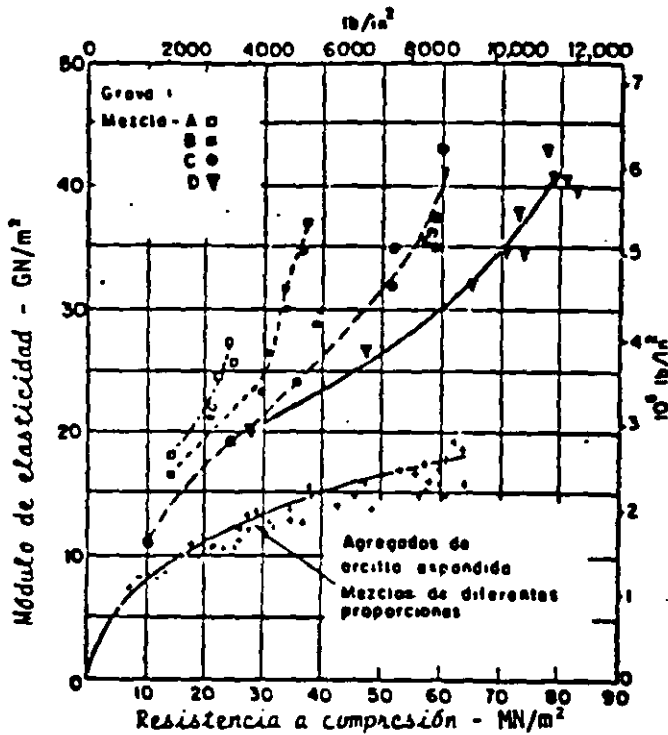


Fig. 3. Módulo de elasticidad estático de concretos hechos con agregados gruesos de río y de arcilla expandida, y ensayados a diferentes edades hasta un año (ref 1)

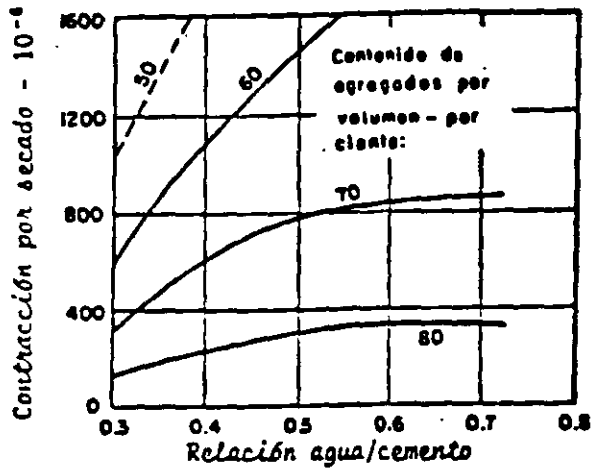


Fig. 4. Influencia de la relación agua/cemento y del contenido de agregado en la contracción (ref 1)

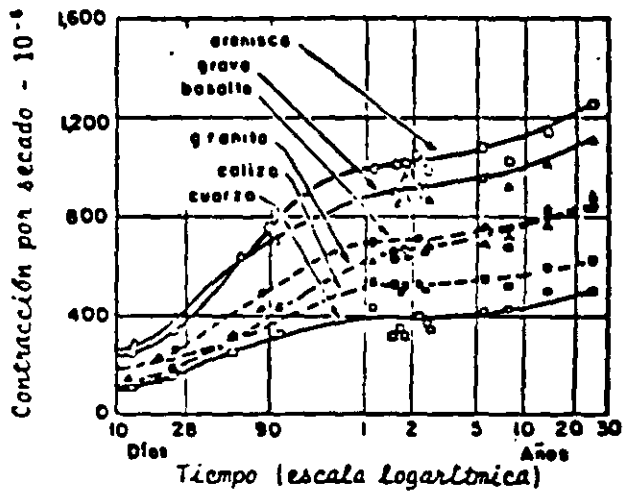


Fig. 5. Contracción por secado de concretos hechos con las mismas proporciones en la mezcla, pero con diferentes agregados, almacenados al aire a 21° C y una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)

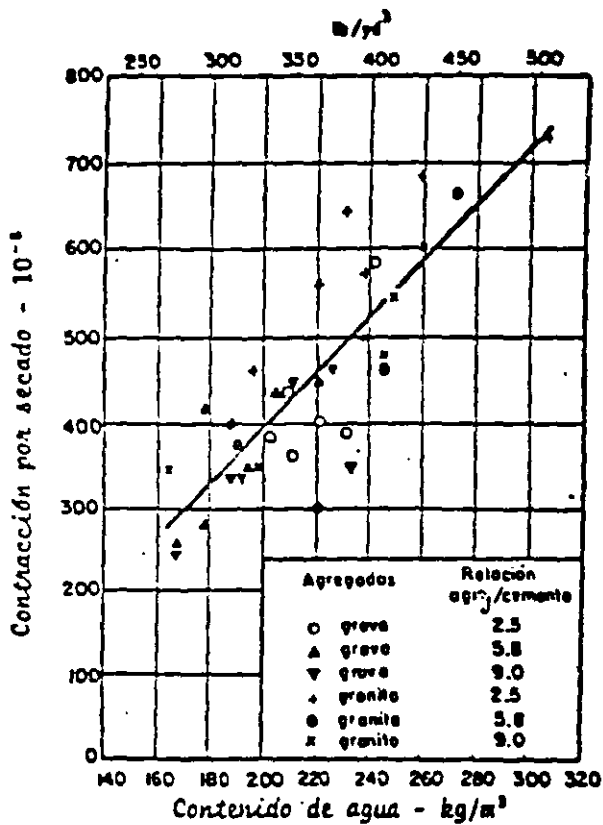


Fig 6. Relación entre el contenido de agua del concreto fresco y la contracción por secado (ref 1)

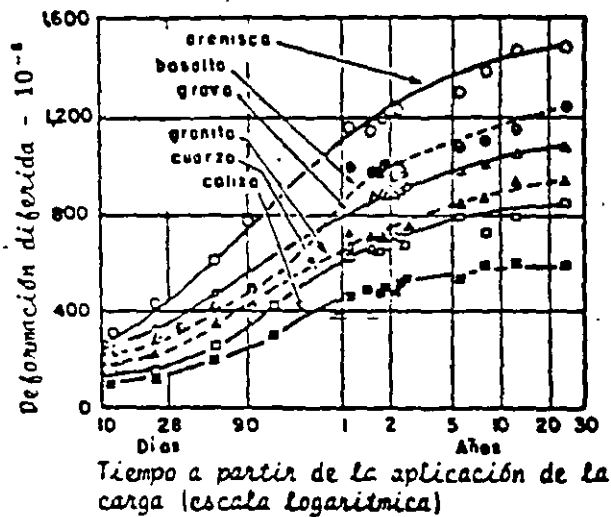


Fig 7. Deformación diferida de concretos de las mismas proporciones pero hechos con diferentes agregados, cargados a la edad de 28 días y almacenados en aire a 21° C y a una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)



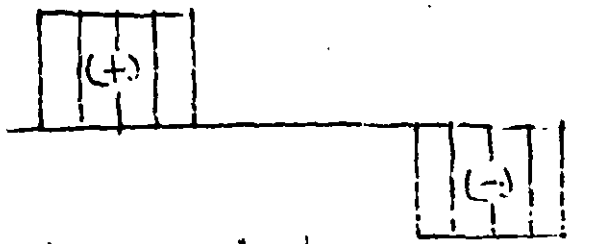
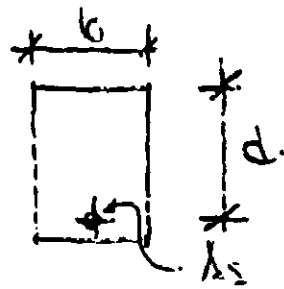
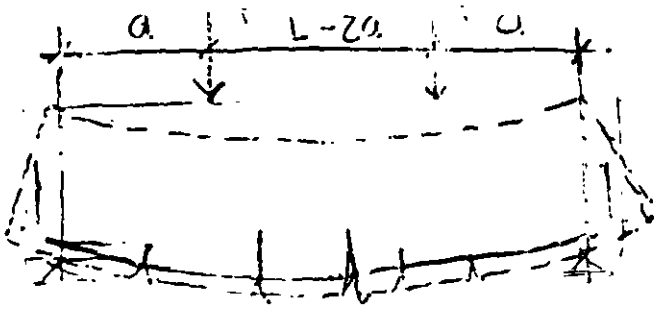
**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

CURSOS ABIERTOS DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

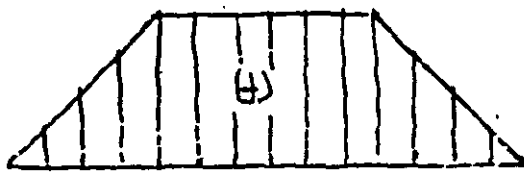
**TEMA:
AGRIETAMIENTOS Y DEFLEXIONES**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**



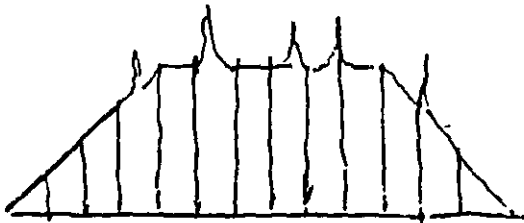
$V = P$
 $V = P$

DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES



$M_{max} = Pa$

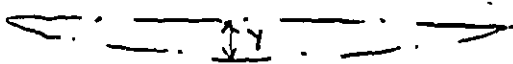
DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES



$$\phi = \frac{M}{EI}$$

DIAGRAMA DE CURVATURAS

$$\Delta = \gamma$$



EJE DE LA VIGA DEFORMADA.

$$\Delta_{total} = \Delta_{ca} + \Delta_{ld}$$

DEFLEXIONES

- CALCULAR LA MAGNITUD DE LAS DEFLEXIONES
- CRITERIOS SOBRE LÍMITES ACEPTABLES.

PRINCIPALES VARIABLES

- RESISTENCIA A LA TENSION DEL CONCRETO; σ_c' MÓDULO DE ELASTICIDAD E_c , PORCENTAJE DE ACERO (100) / TUNELAN. DE BESO. POR TENSION. $A_{s,req}$

Método de los momentos.

Definición: Se trata de una expresión para determinar el momento.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\Delta_{CM} = y = \int \int \frac{M}{EI}$$

Los métodos difieren fundamentalmente, en la forma de calcular Δ_{CM} .

Método del Δ_{CT}

$$E = E_c = 15000 \sqrt{f_c}$$

$$I = I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$$

$$M_{cr} = f_r (I_g / Y_r)$$

Para concreto de peso normal $f_r = 2 \sqrt{f_c}$

" " " " ligero $f_r = f_r (f_{cr}/f_c = \sqrt{f_c})$

Cuando no se especifica f_{cr} ; todo ligero $f_r = 0.75 f_r$

ligero con arena $f_r = 0.85 f_r$

En elementos continuos $I_e = I_{e\text{prom}}$

A efectos que se haga un análisis más exacto

$$\Delta_{LD} = \lambda \Delta_{CM} \text{ (debida a cargas sostenidas)}$$

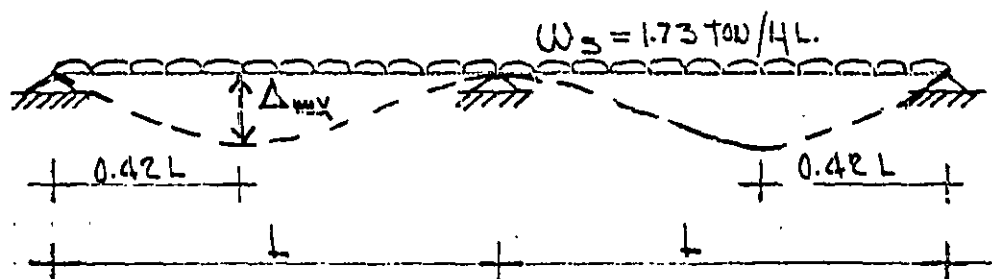
$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \xi} ; \quad \xi \text{ al } d.$$

	ξ
5 años o más	2.0
12 meses	1.4
6 "	1.7
3 "	1.0

EJEMPLO # 3

CALCULAR LA DEFLEXION MAXIMA DEL EJEMPLO ANTERIOR Y COMPARARLA CON LAS PERMISIBLES SEGUN CRITERIO ACI-77

LA DEFORMACION INSTANTANEA SE OBTIENE A PARTIR DE EXPRESIONES DERIVADAS SEGUN LA TEORIA ELASTICA (COMPORTAMIENTO ELASTICO-LINEAL)



$$\Delta_{max} = \frac{wL^4}{185EI} \quad (\text{TEORIA ELASTICA})$$

SEGUN ACI-77

$$\Delta_{inst} = \frac{w_s L^4}{185 E_c I_{ef}}$$

$$I_{ef} = \left(\frac{M_{ag}}{M_{max}} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{ag}}{M_{max}} \right)^3 \right] I_{ag} \leq I_g$$

COMO ES UNA VIGA CONTINUA: $I_{ef} = \frac{I_{ef(-)} + I_{ef(+)}}{2}$

EN EL APOYO:

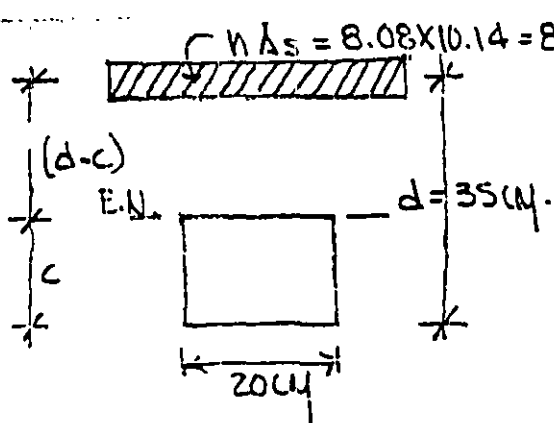
1. - MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION GRUESA

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 40^3}{12} = 106667 \text{ CM}^4$$

2. - MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION AGRIETADA

$$\text{RELACION MODULAR } n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.1 \times 10^6}{2.6 \times 10^5} = 8.08$$

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} = 15000 \sqrt{300} = 2.6 \times 10^5$$



$$\frac{20c^2}{2} = 81.93(d-c)$$

$$c^2 = 8.193(35-c)$$

$$c^2 + 8.193c - 286.76 = 0$$

$$c = \frac{-8.193 \pm \sqrt{67.125 + 1147}}{2}$$

$$c = \frac{-8.193 + 34.84}{2}$$

$$c = 13.33 \text{ cm}$$

$$I = \frac{20 \times (13.33)^3}{3} + 81.93(21.67)^2 = 54264 \text{ cm}^4$$

3). - Momento de Agrietamiento (M_{AG})

$$M_{AG} = f_r S$$

$$f_r = 2\sqrt{f_c'} = 2\sqrt{300} = 34.64 \text{ kg/cm}^2$$

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \times 40^2}{6} = 5333 \text{ cm}^3$$

$$M_{AG} = 1.85 \text{ ton.-m.}$$

4). - Momento Flexionante Máximo de Trabajo

$$M_{max} = 7.79 \text{ ton.-m.}$$

$$I_{ef(-)} = \left(\frac{1.85}{7.79}\right)^3 (106667) + (1 - 0.013)(54264) =$$

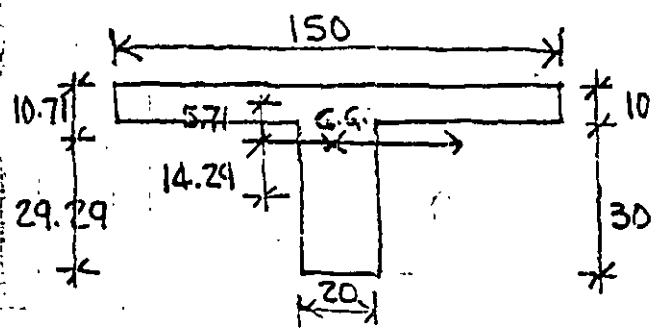
$$I_{ef(-)} = 53537 + 1429 = 54966 \text{ cm}^4$$

AL CENTRO DEL CARGO (PARA MOMENTO POSITIVO)

1). - Momento de Inercia de la Sección Gruesa.

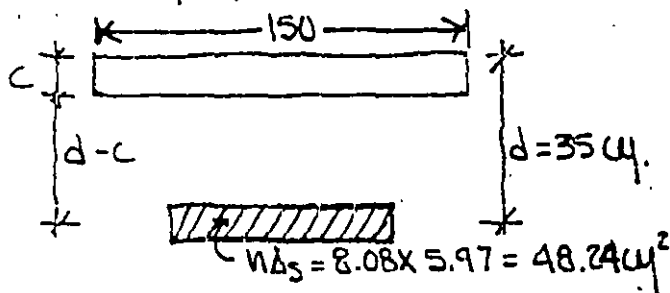
$$\bar{y} = \frac{1500 \times 20}{2100} = 14.29 \text{ cm.}$$

$$I_G = \frac{20 \times 30^3}{12} + \frac{150 \times 10^3}{12} + 1500(5.71)^2 + 600(14.29)^2 = 228929 \text{ cm}^4$$



PLANTA	NO. 3	DE
PROYECTO	DISEÑO	
CONCEPTO		
REFERENCIA	FECHA:	

2). - MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION AGRIETADA.



$$\frac{150c^2}{2} = 48.24(35 - c)$$

$$c^2 = 0.64(35 - c)$$

$$c^2 + 0.64c - 22.51 = 0$$

$$c = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.41 + 90.04}}{2}$$

$$c = \frac{-0.64 + 9.51}{2} = 4.44 \text{ cm} < 10$$

$$I_{AG} = \frac{150 \times 4.44^3}{3} + 48.24(30.56)^2 = 45052 + 4376 = 49428 \text{ cm}^4$$

3). - MOMENTO DE AGRIETAMIENTO (M_{AG})

$$f_r = \frac{M_{AG}}{I_{AG}} y_{i \max}$$

$$M_{AG} = \frac{f_r (I_{AG})}{y_{i \max}}$$

$$M_{AG} = \frac{34.64 \times 228929}{29.29} = 2.71 \text{ TON} \cdot \text{M}$$

4). - MOMENTO FLEXIONANTE MAXIMO

$$M_{\max_{LH}} = 4.38 \text{ TON} \cdot \text{M}$$

$$I = f(\omega) = \left(\frac{2.71}{4.38}\right)^3 (228929) + \left(1 - \left(\frac{2.71}{4.38}\right)^3\right) 49428 =$$

$$= (0.2365)(228929) + (0.7631)(49429) =$$

$$= 37721 + 54233 = 91954 \text{ cm}^4 < 228929 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{54966 + 91954}{2} = 73460 \text{ cm}^4$$

DEFORMACION MAXIMA INSTANTANEA.

$$\Delta_{CM} = \frac{11 \times 6^4 \times 10^8}{1.85 \times 2.6 \times 7.35 \times 10^4} = 0.40 \text{ CM}$$

$$\Delta_{C.V.} = 0.40 \times \frac{6.3}{11} = 0.23 \text{ CM.}$$

$$\Delta_{inst} = 0.63 \text{ CM.}$$

DEFORMACION POR CARGAS DE LARGA DURACION.

CONSIDERANDO UN 40% DE LAS CARGAS VIVAS COMO LAS CARGAS VIVAS PROMEDIO.

$$\Delta_{C.V. \text{ prom}} = 0.23 \times 0.40 = 0.09 \text{ CM.}$$

DEFORMACION PERMANENTE $\Delta = 0.49 \text{ CM}$

FACTOR DE CORRECCION:

$$\frac{\Delta_{S(1)}}{\Delta_{S(2)}} = \frac{4}{9.67} = 0.44 \quad F = [2 - 1.2 \Delta_{S(1)} / \Delta_{S(2)}] \geq 0.60$$

$$\frac{\Delta_{S(2)}}{\Delta_{S(4)}} = \frac{4}{6} = 0.66 \quad F = [2 - 1.2 \times 0.55] = 1.34$$

$$\left(\frac{\Delta_{S(1)}}{\Delta_{S(2)}}\right)_{\text{prom}} = 0.55$$

$$\Delta_{CLD} = 1.34 (0.49) = 0.66 \text{ CM.}$$

DEFORMACIONES TOTALES.

$$\Delta_T = 0.63 + 0.66 = 1.29 \text{ CM.}$$

DEFORMACIONES PERMISIBLES. (TRABE LIGADA A ELEMENTOS NO ESTRUCTURALES)

a). - CARGA VIVA INSTANTANEA. $\Delta_{CV} \leq L/360 = 1.67 > 0.23 \text{ CM.}$

b). - FLUJO PLASTICO Y CONTRACCION + CARGA VIVA $\Delta_{CLD} + \Delta_{CV} \leq L/480 = 1.25 \text{ CM}$

$$0.66 + 0.23 = 0.89 < 1.25 \text{ CM.}$$

2.2 ESTADOS LIMITE DE SERVICIO

2.2.1 ESFUERZOS BAJO CARGAS DE SERVICIO

SE DEBE USAR LAS HIPOTESIS ELASTICAS

SI $M_{AG} > M_{ACTUANTE}$ USAR I_g

" $M_{AG} < "$ " " I_{AG} $\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{f_c'} \text{ (CONCRETO CLASE 1)} \\ 1.4\sqrt{f_c'} \text{ (" " 2)} \end{array} \right.$

PARA CALCULAR M_{AG} USAR $I_g =$

EN CASOS CONTINUOS $I = (I_1 + I_2 + 2I_3)/4$

DEFLEXIONES DIFERIDAS

$$\Delta_{LD} = X (\Delta_{CD})$$

$$X = 2 / (1 + 50 p')$$
 (CLASE 1)

$$X = 4 / (1 + 50 p')$$
 (" 2)

ELEMENTOS NO CONTINUOS $p' = A_s' / b d$

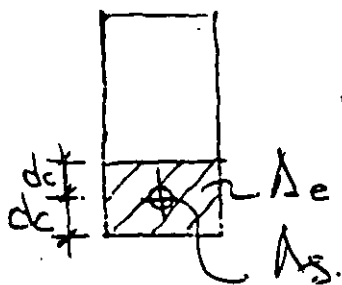
" " $(p' = p'_1 + p'_2 + 2p'_3) / 4$

2.2.3 AGRIETAMIENTO

CUANDO $f_y > 30000 \text{ kg/cm}^2$
 $f_s \sqrt{d_c \lambda}$ (2.38)

$$\leq 40000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 4 / 0.9 d \lambda_s$$



$$\lambda = \lambda_e / n$$

$n = \text{num. de var.}$

AGRIETAMIENTO λ_s ($f_y \geq 30000 \text{ kg/cm}^2$)

$$\lambda_s = f_s \sqrt{d_c \lambda}$$

$\lambda_s \leq 31250 \text{ kg/cm}^2$ exposición interna

$\lambda_s \leq 25845$ " " externa



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
PUNTAS DE PILOTES**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

La tabla 8.2 muestra los cuadros de diseño publicados por la Cement and Concrete Association (Asociación de Cemento y Concreto)¹⁰ sobre longitudes máximas de pilotes para pilotes de sección cuadrada en diversas condiciones de levantamiento. Los cuadros de diseño también proporcionan los momentos flexionantes ocasionados por el peso propio durante el levantamiento, y los momentos de resistencia última para diversas secciones cuadradas y octagonales.

Cuando las condiciones de hundimiento son de moderadamente fáciles a difíciles, resulta ventajosa una espiral o hélice. La hélice se coloca normalmente dentro de las barras principales, pero Saurin indica que es mejor colocarla fuera de ellas. La reducción en la cubierta de concreto sobre la hélice no es perjudicial, ya que parte del pilote está normalmente abarcada por la unión en la cabeza del larguero.

La figura 8.19a y b muestra detalles típicos de refuerzo en pilotes de concreto precolado. George Wimpey & Co. diseñó el pilote octagonal de 787 mm mostrado en la figura 8.19b para la terminal marina de la Irish Refining Company en Cork, Irlanda del Norte.

8.9.3. Puntas de pilotes

Cuando los pilotes se hunden por completo en suelos suaves, no requieren de punta. Los extremos de los pilotes se cue-

lan usualmente en forma de un punto achatado como lo muestra la figura 8.20a. Se prefiere una punta mas afilada (figura 8.20b) para hundimiento en arcillas rígidas o arenas y gravas compactas. La punta de hundimiento de metal comúnmente localizada en pilotes de concreto, hundidos en condiciones tanto suaves como rígidas, se basa en un diseño utilizado para evitar que los pilotes de madera se agnieten o escobillen, y en condiciones suaves no se requiere de punta de metal de ningún tipo. Cuando se deben hundir los pilotes en suelo con pedruscos o pedregones, se requiere de una punta como la que muestra la figura 8.20c para despedazar las rocas o para evitar el rompimiento del extremo inferior del pilote cuando éste empuja pedruscos o pedregones hacia un lado. El área de la parte superior de la punta metálica, en contacto con el concreto del pilote, debe ser lo bastante grande para asegurar que el esfuerzo a compresión del concreto se encuentre dentro de límites de seguridad.

Cuando se requiere que los pilotes penetren en roca, por ejemplo para obtener resistencia lateral, se utiliza un aditamento especial de roca como lo muestra la figura 8.20d. Pero si se hunden en roca sólida, se recomienda la "punta Oslo" (figura 8.20e). Este diseño es particularmente adecuado para hundimiento en una superficie de roca inclinada cuando, después de golpes cuidadosos de un martillo pesado con una caída corta, el extremo afilado del punto de tierra hueco se sujeta a la roca, evitando que el punto se deslice dentro de la

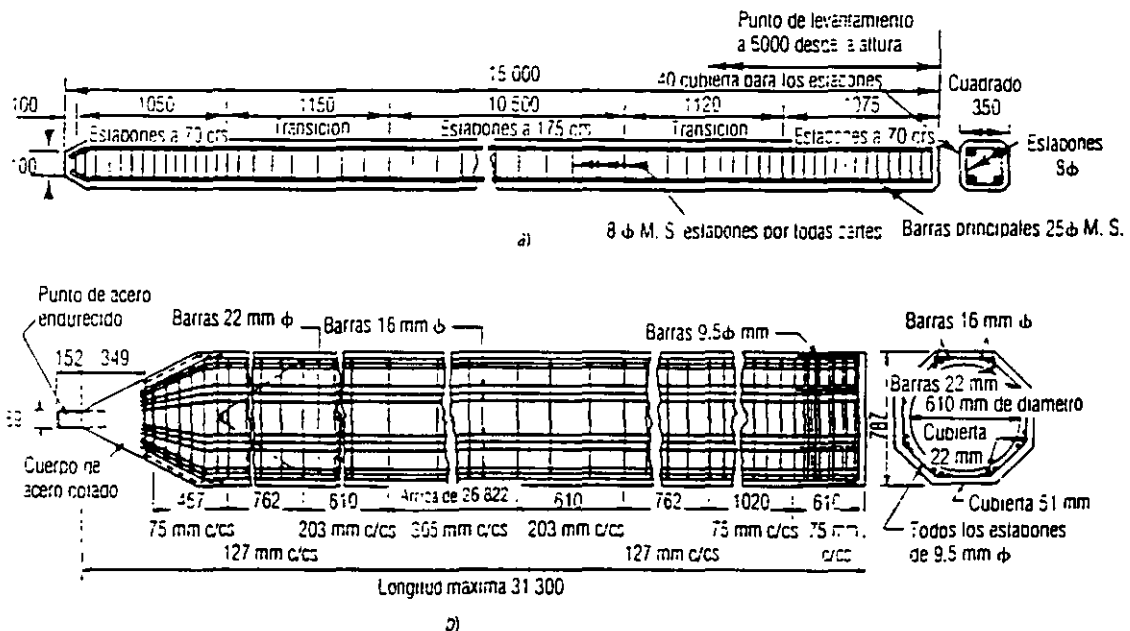
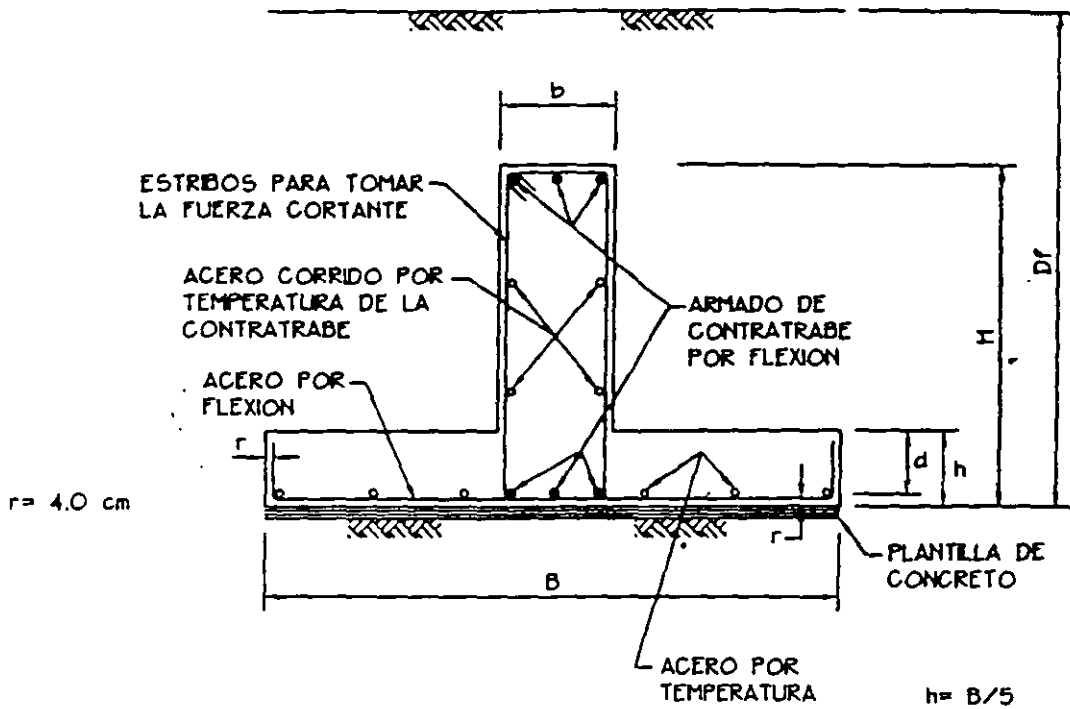


Figura 8.19. Detalles típicos de pilotes precolados de concreto reforzado. a) R. C. detalles para un caste de 350 × 350 × 15 000 mm. b) R. C. detalles para un pilote hueco octagonal de 787 mm. (Todas las distancias son en mm.)



$$h = B/5$$

$$\frac{L_p}{30} \leq h \leq \frac{L_p}{20}$$

$$b \geq \frac{h}{4}$$

L_p = DIMENSION MAYOR DEL EDIFICIO EN PLANTA

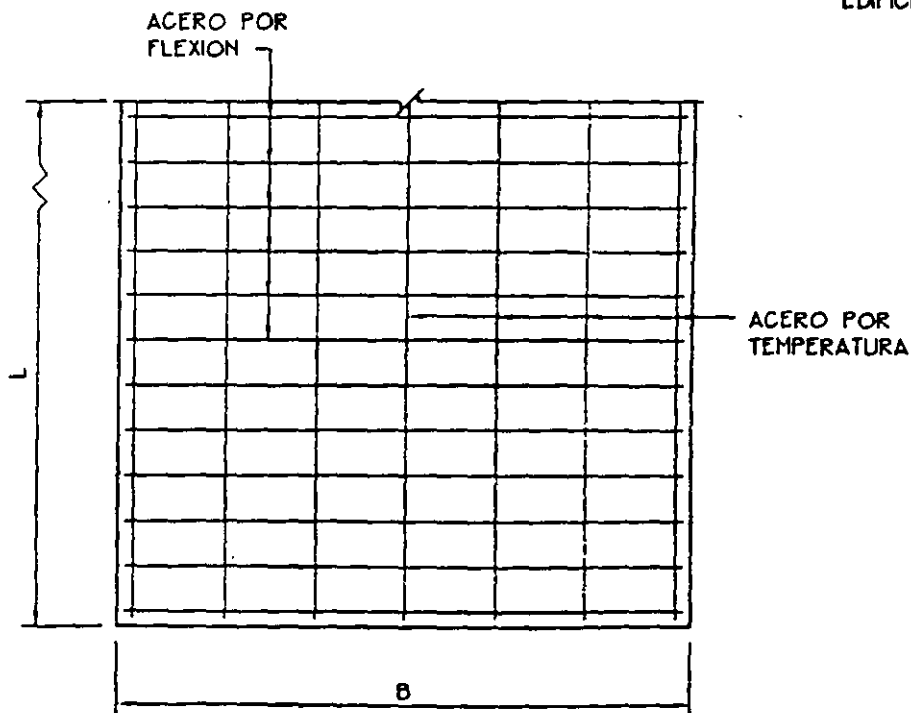


FIG. 11.24a DISPOSICION DEL ACERO DE REFUERZO EN UNA ZAPATA CORRIDA.

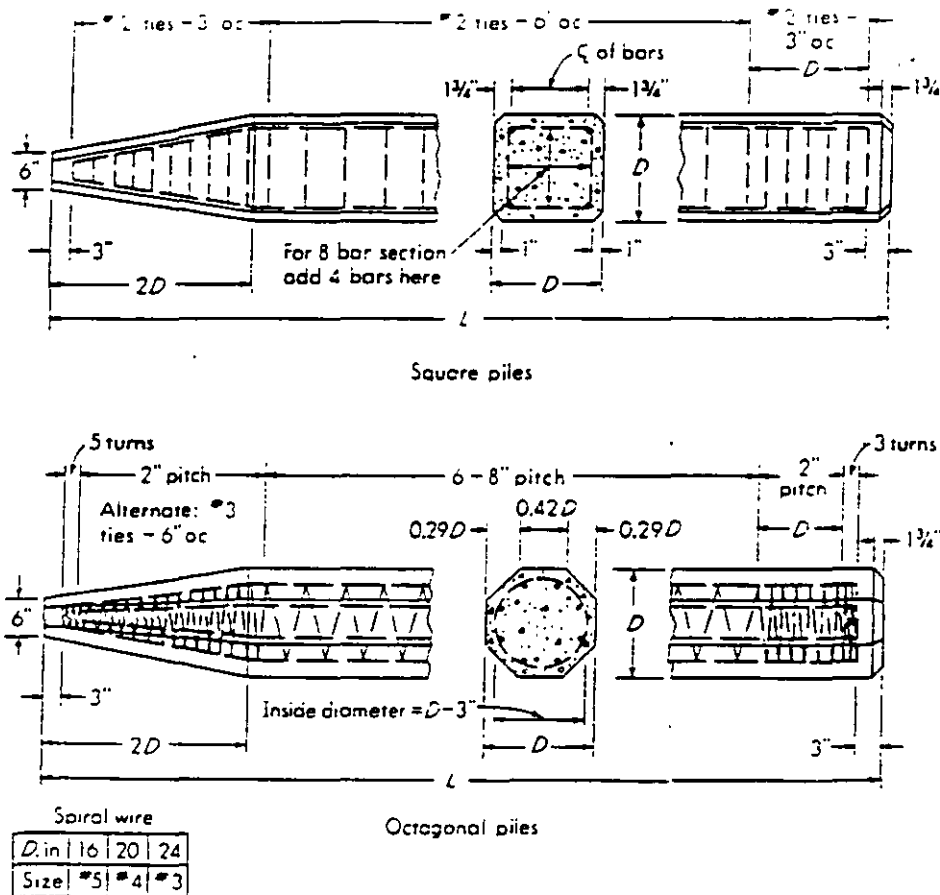


Fig. 9-5 Typical details of precast concrete piles. (After Chellis [9].)

after which withdrawal of the mandrel empties the casing. The casing may also be driven with a driving tip on the point, providing a shell that is ready for filling with concrete immediately, or the casing may be driven open-end, the soil entrapped in the casing being jetted out after the driving is completed.

Various methods with slightly different end results are available and patented. Figure 9-6 indicates some of the commonly available patented cast-in-place piles, and is intended to be representative only. It may be noted that they are basically of three types: (1) shell or cased, (2) shell-less (uncased), or (3) pedestal types.

9-4 STEEL PILES

These members are usually rolled H shapes or pipe piles. Wide-flange beams or I-beams may also be used; however, the H shape is especially proportioned to withstand the hard driving stresses to which the pile may be subjected. In the H pile the flanges and web are of equal thickness (the standard WF and I shapes have a thinner

Puesto que los esfuerzos durante el hincado son tan severos, es necesario proporcionar un concreto de muy buena calidad. Las Tablas 23 y 24 sintetizan las recomendaciones del "Foundation Code" para el concreto, los periodos del curado y separación de las cabezas. Los pilotes deben colocarse separadamente, o en todo caso, en fila, pero nunca en grupos, debido a las dificultades prácticas de asegurar un colado y curado adecuado. Los pilotes de concreto precolados, se fabrican en sección cuadrada hasta de 16 plg por lado. No obstante que se han colado pilotes cuadrados y rectangulares más grandes, hasta de 24 plg por lado, el código recomienda el uso de formas octagonales para secciones mayores de 16 plg.

Las Figs. 120 y 121 muestran algunos diseños típicos, ingleses y americanos, de pilotes de concreto precolado. En el caso de los pilotes de Morganza, menores de 100 pies de longitud, se le dio al contratista la opción de colar pilotes de sección cuadrada u octagonal y eligió la forma octagonal.

Los pilotes de concreto precolado, manufacturados con cemento de alto contenido de alúmina, produjeron grandes proble-

mas en el pasado. A menos que se hincen los pilotes poco después del colado, digamos de 24 a 28 horas* (Manning, 1949), pueden volverse muy frágiles, impidiendo completamente su hincado; parece que en climas cálidos esta condición se agrava aún más (Golder, 1956) aunque un curado hecho con todo cuidado puede aliviar el problema (Hedgson, 1949).

Los pilotes de concreto pueden tener juntas longitudinales y trabajar satisfactoriamente.* Se rompe el concreto y se empalma el refuerzo anterior con el nuevo, cuando menos en una longitud de 40 diá. Toda la basura y el material suelto deberá removerse, después de lo cual, se colará el nuevo tramo. Se dará la atención normal al curado y endurecimiento del concreto antes de que se hincen el nuevo tramo agregado.

Pilotes de Concreto Presforzado

Se mencionó anteriormente que los pilotes de concreto presforzado tienen ventajas en su manejo sobre los pilotes convencionales precolados y por ello son cada

- * Pero el Código recomienda esperar dos días.
- * Aunque los pretensados presentan dificultades.

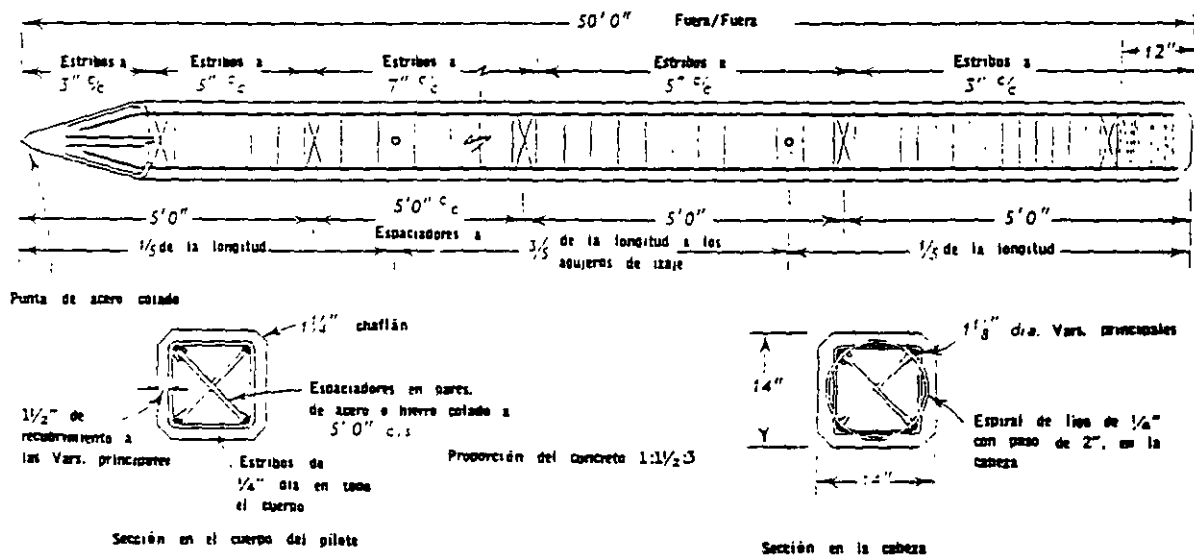
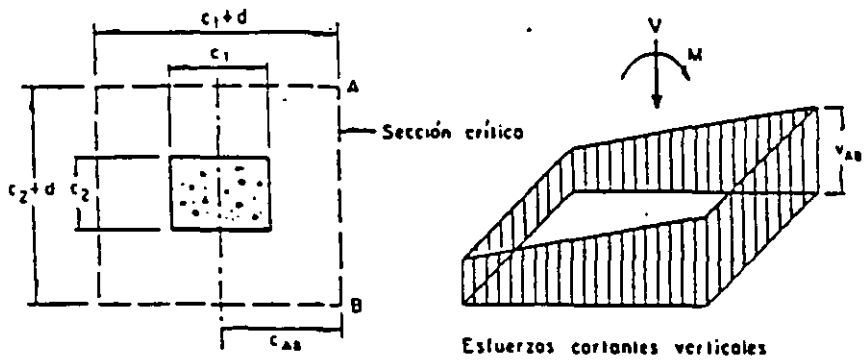


FIG. 120. Diseño típico de pilotes de concreto precolado (Práctica Británica)

(Starns Precast Concrete Ltd.)



$$v_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M c_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

(Cálculo del esfuerzo cortante máximo para una columna interior)

FIG 5.16 TRANSMISIÓN DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA
(NORMAS DE CONCRETO 1987)

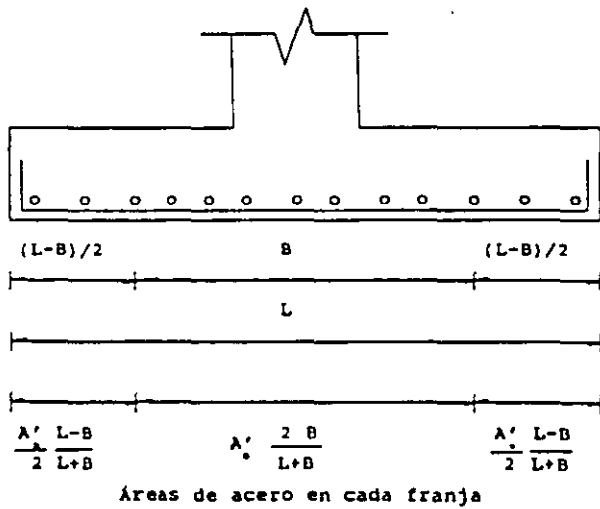
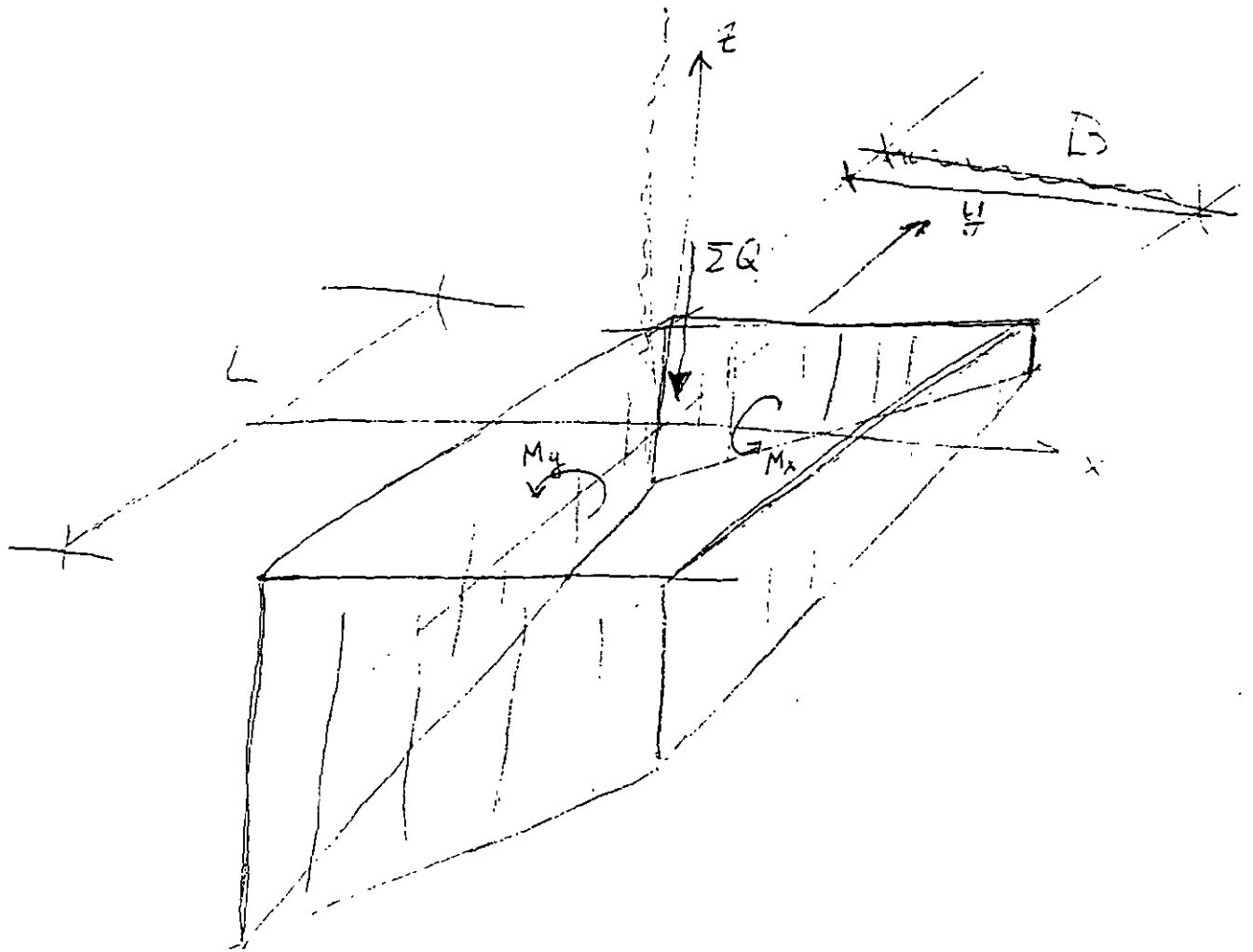
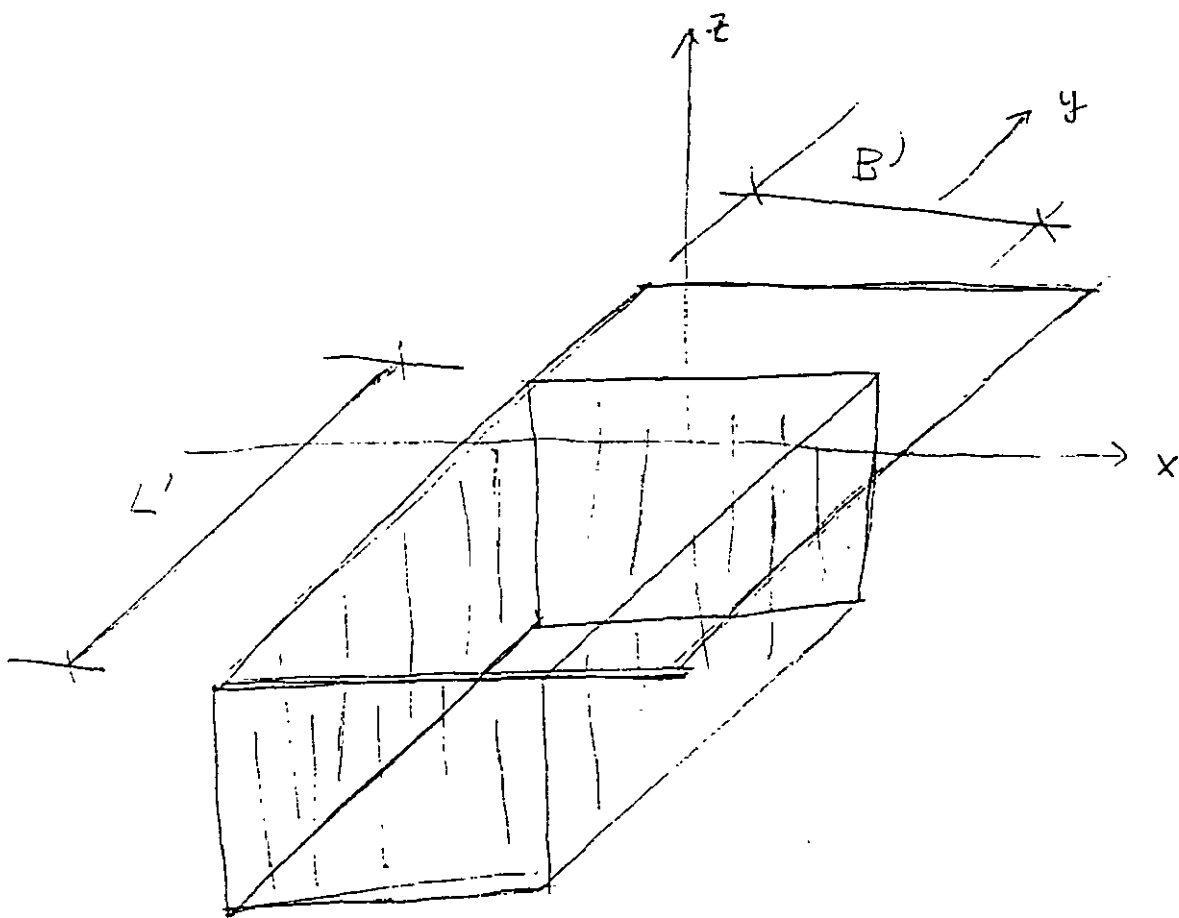
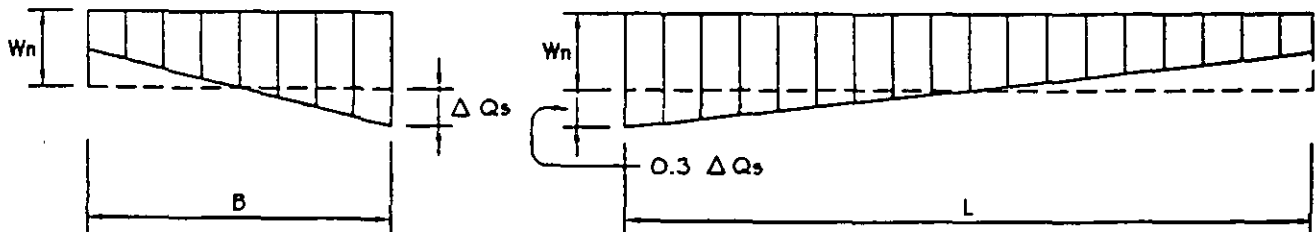
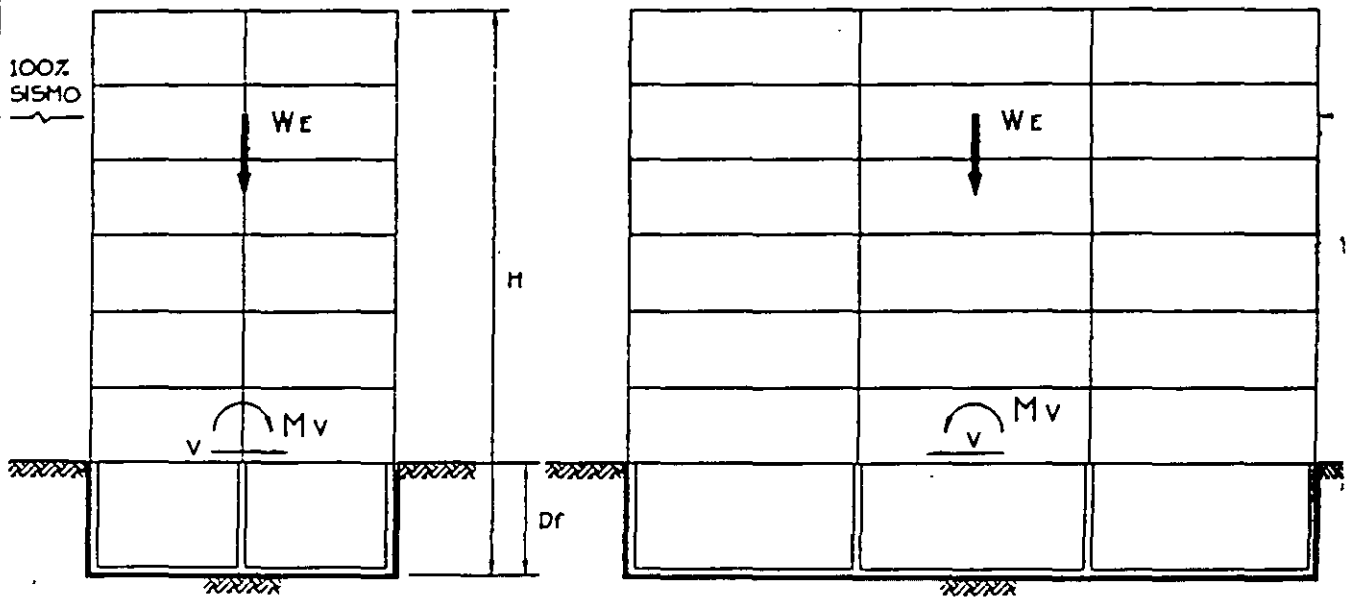
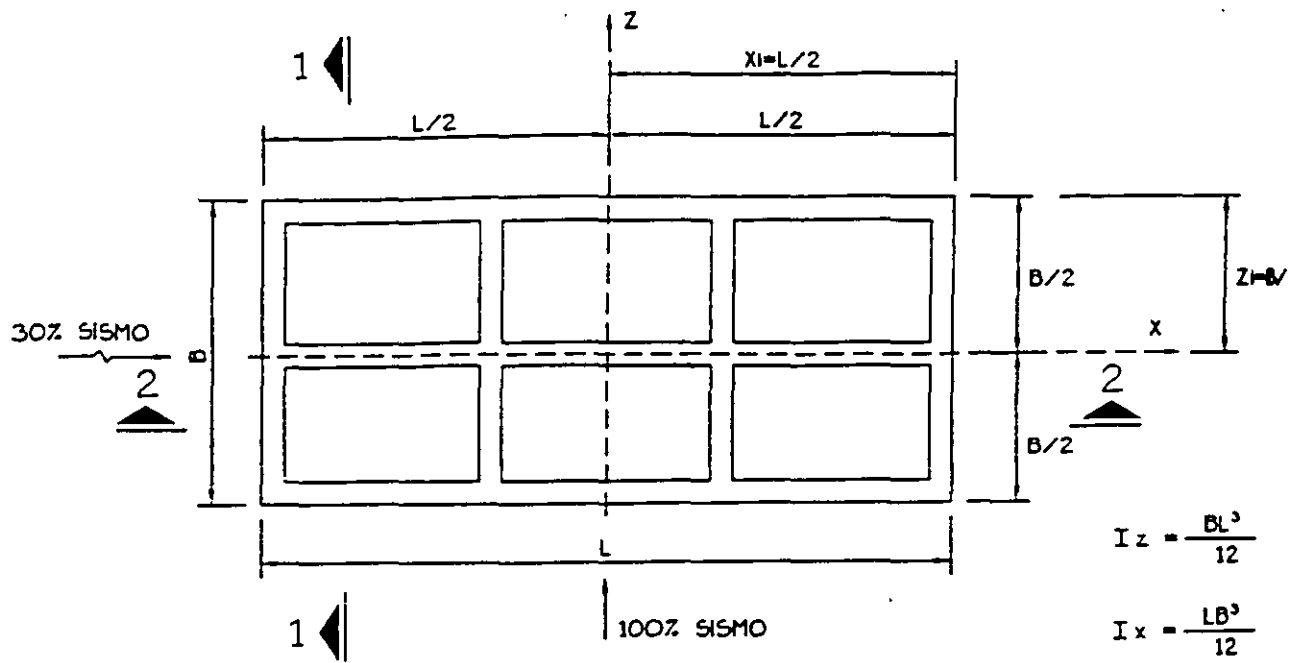


FIG 5.17 DISTRIBUCIÓN DEL ACERO DE REFUERZO EN EL LADO LARGO
(MELI 1985)





a
b

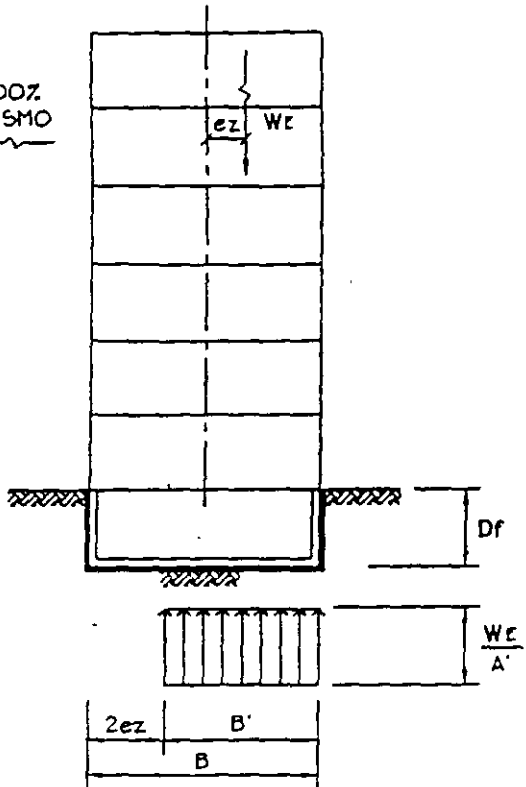


CORTE 1 - 1

CORTE 2 - 2

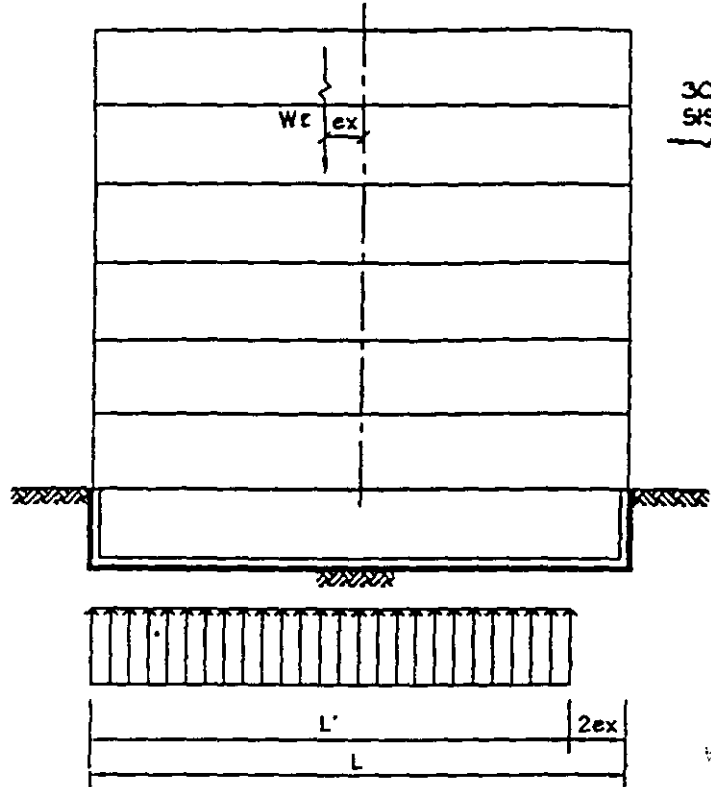
FIG. 1 L28 DIAGRAMA DE PRESIONES POR EFECTO SISMICO (REF. 6)

100%
SISMO



$$ez = \frac{M_v}{W_c}$$

30%
SISMO



$$ex = \frac{0.3 M_v}{W_c}$$

Z ↑

100% SISMO EN
LA DIRECCION MAS
DESFAVORABLE

30% SISMO EN
LA DIRECCION
MAS FAVORABLE

X →

AREA REDUCIDA
 $A' = B' \times L'$

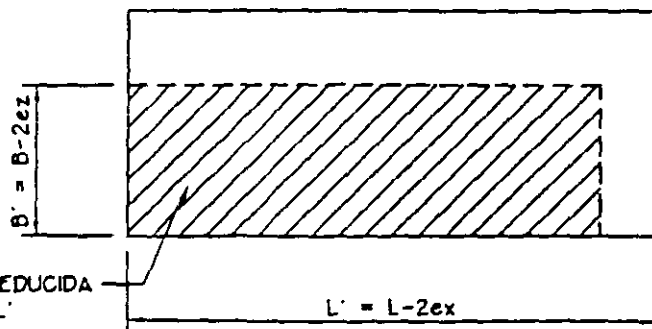
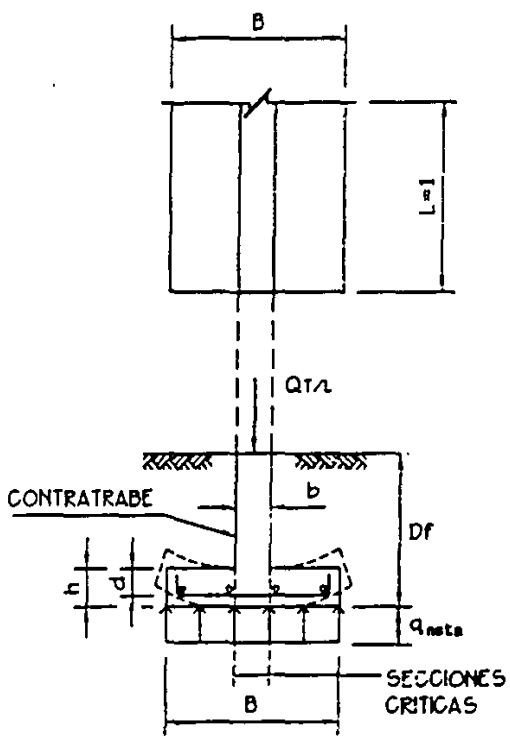
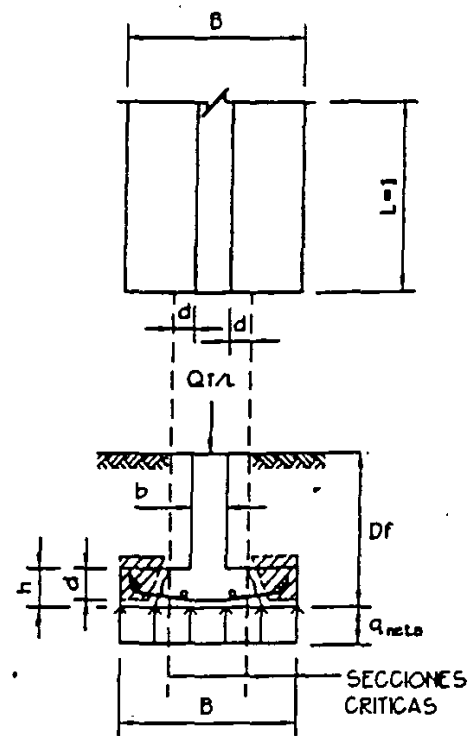


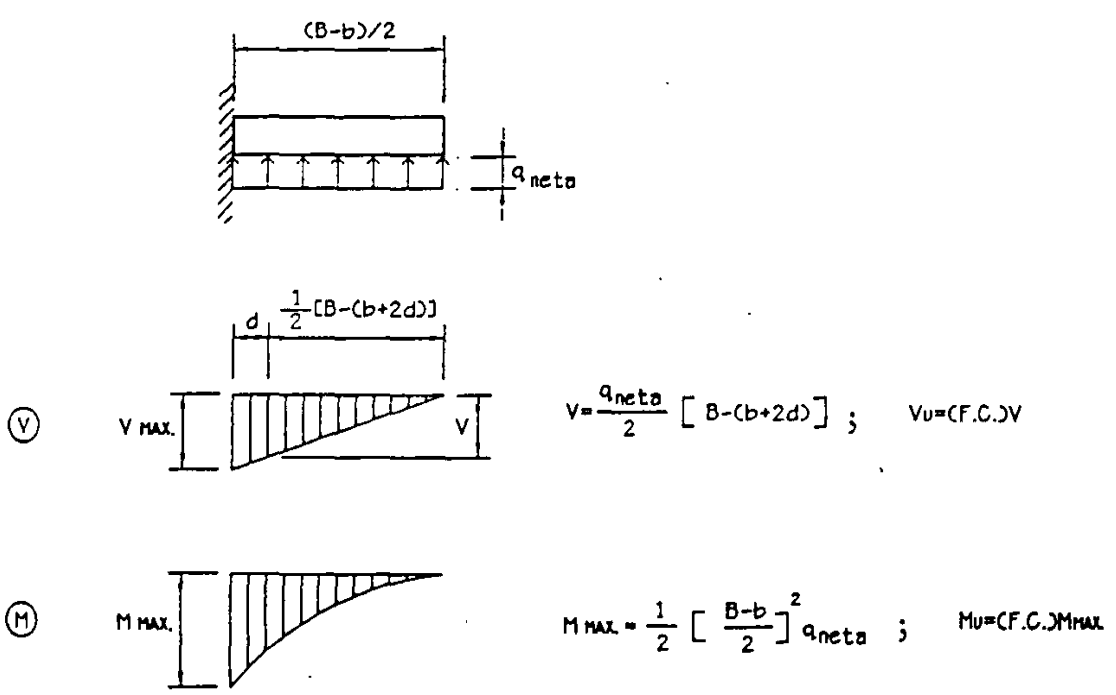
FIG. 11.29 CONDICIONES PARA LA REVISION SISMICA SEGUN EL
REGLAMENTO DE CONSTRUCCION (REF. 6)



a).- SECCION CRITICA POR FLEXION

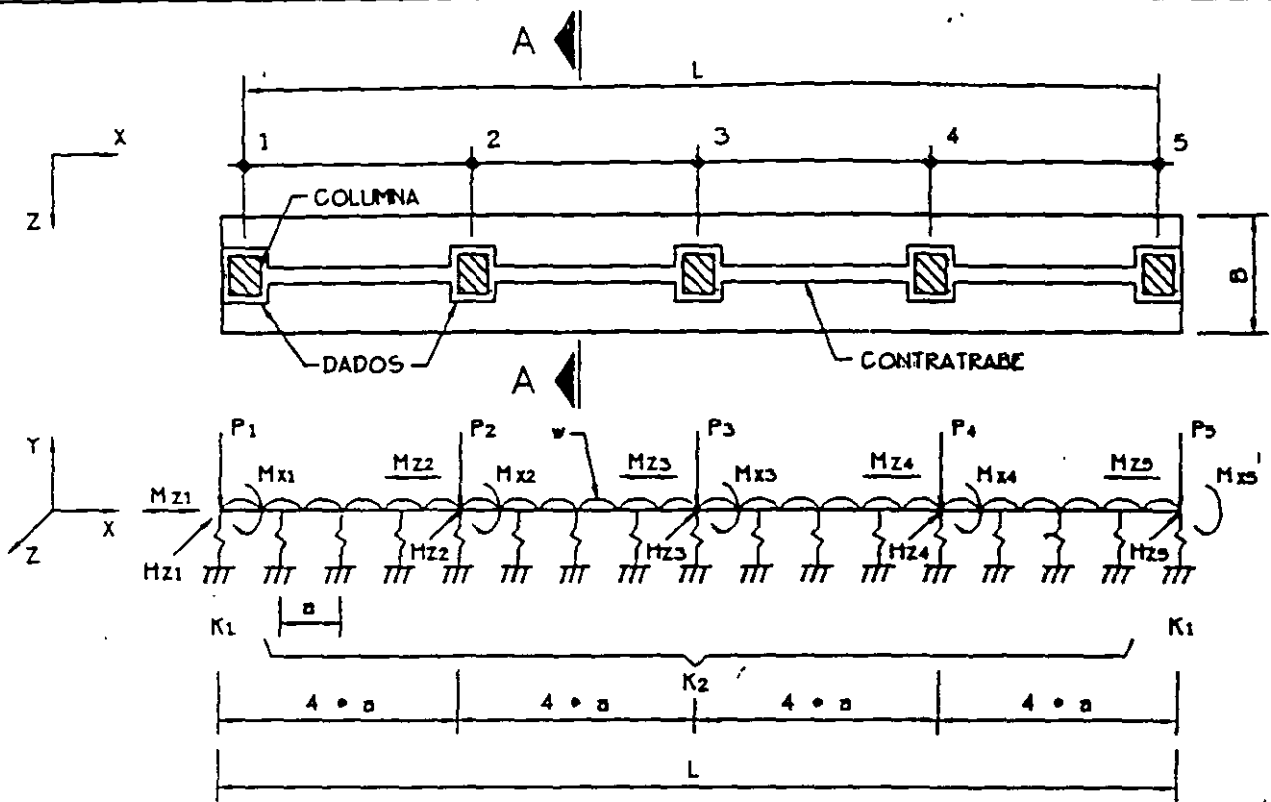


b).- SECCION CRITICA POR CORTANTE



c).- DIAGRAMAS DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE POR LONGITUD UNITARIA DE ZAPATA

FIG. 11.23 SECCIONES CRITICAS PARA DISEÑO POR FLEXION Y CORTANTE EN UNA ZAPATA CORRIDA.



$$Q_{T/L} = \frac{\sum P_i}{L} = \left[\frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)}{L} + w \right] 1.1 \quad \text{--- RESULTANTE DE CARGAS VERTICALES POR UNIDAD DE LONGITUD}$$

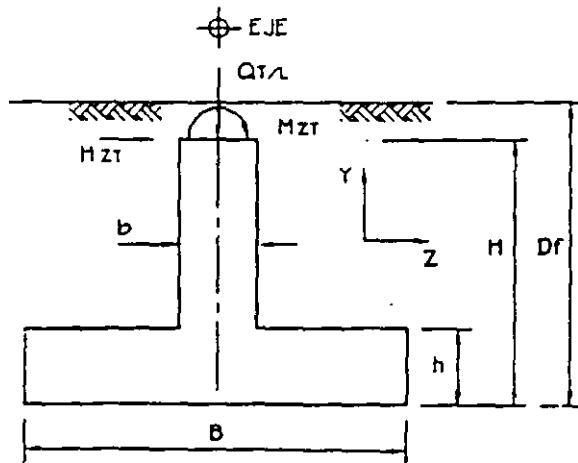
$$H_{ZT} = \frac{\sum H_{zi}}{L} = \frac{(H_{z1} + H_{z2} + H_{z3} + H_{z4} + H_{z5})}{L} \quad \text{--- RESULTANTE DE FUERZAS HORIZONTALES EN DIRECCION DEL MOMENTO DE VOLTEO POR UNIDAD DE LONGITUD.}$$

$$M_{ZT} = \frac{\sum M_{zi}}{L} + \left(\frac{\sum H_{zi}}{L} \right) H \quad \text{--- RESULTANTE DE MOMENTO DE VOLTEO AL NIVEL DEL DESPLANTE POR UNIDAD DE LONGITUD}$$

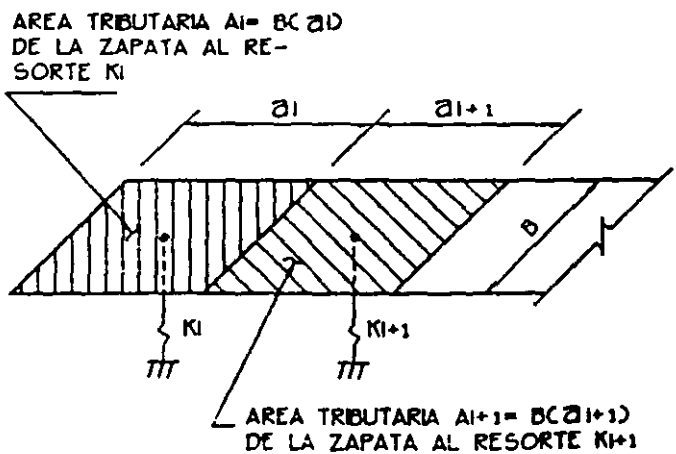
K₁ RIGIDEZ DE LOS RESORTES EXTREMOS
 K₂ RIGIDEZ DE LOS RESORTES INFERIORES

* FACTOR QUE TOMA EN CUENTA EL PESO PROPIO DE LA ZAPATA

a).- PLANTA DE UNA ZAPATA CORRIDA Y SU MODELO CON CARGAS PARA SU ANALISIS



b).- CORTE A-A



c).- AREAS TRIBUTARIAS A CADA RESORTE KI QUE REPRESENTA AL SUELO EN EL MODELO

FIG. 1.22 MODELO PARA ANALISIS Y DISEÑO DE UNA ZAPATA CORRIDA



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

**TEMA:
MUROS**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

4.5 MUROS

4.5.1 SUJETOS A CARGAS VERTICALES AXIALES O EXCÉNTRICAS

DEBEN DIMENSIONARSE COMO COLUMNAS CON LAS DISPOSICIONES COMPLEMENTARIAS SIGUIENTES:

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES TENGAN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \text{LONG. EFECTIVA DE PÁNDEO} = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ (1.3 - 0.85H/L)H & ; \text{ Si } 0.35 < H/L < 0.80 \\ L/2 & ; \text{ Si } H/L \geq 0.8 \end{cases}$$

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES NO TIENEN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ 0.215(H/L + 4.3)H \leq 2H & ; \text{ Si } H/L > 0.35 \end{cases}$$

- CARGAS CONCENTRADAS: $b_{\text{efectivo}} = b_{\text{contacto}} + 4b_{\text{apoyo}} \leq \text{DISTANCIA E A D E CARGAS}$

- REFUERZO MÍNIMO.

SI LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA FUERA DEL TERCIO MEDIO Y SU MAGNITUD $\leq 0.25 f_c A_g$:

EL REFUERZO MÍNIMO VERTICAL $A_{s \text{ min}} = \frac{66000 b_w}{f_y (b_w + 100)}$ SIN NECESIDAD DE RESTRINGIRLO CONTRA EL PÁNDEO

EN CASO CONTRARIO $A_{s \text{ min}} = (20/f_y) A_g$ Y DEBERÁ RESTRINGIRSE CONTRA EL PÁNDEO CON GIRASPAS

EN AMBOS CASOS, EL REFUERZO MÍNIMO HORIZONTAL SERÁ:

$A_{sh \text{ min}} = \frac{66000 b_w}{f_y (b_w + 100)}$ $\text{cm}^2/4$. (EN MUROS EXPUESTOS A LA INTemperIE O EN CONTACTO DIRECTO CON EL SUELO $A_{sh} = 1.5 A_{sh \text{ min}}$)

$S \leq \text{EL MEJOR DE } \begin{cases} 50 \text{ cm.} \\ 3.5 b_w \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } b_w \leq 15 \text{ EL ACERO SE PUEDE COLOCAR} \\ \text{EN UNA SOLA CAPA} \end{array} \right.$

4.5.2 MUROS SUJETOS A FUERZAS HORIZONTALES EN SU PLANO

- PARA CARGAS VERTICALES DESPRECIABLES $L/t \leq 70$
- PARA CARGAS VERTICALES NO DESPRECIABLES $L/t \leq 40$ Y SE APLICAN 4.5.1 Y 2.1.3
- $t \geq 13 \text{ cm} \geq 0.06 H$ A MENOS QUE SE HAGAN UN ANÁLISIS DE PUNDEO LATERAL DE LOS ~~MUROS~~ BORDES O SE LES SUPLIESTE RESTRICCIÓN LATERAL. EN CONSTRUCCIONES DE NO MÁS DE DOS NIVELES CON $H \leq 3 \text{ m}$, PUEDE SER $t = 10 \text{ cm}$.
- CUANDO LOS MUROS RESISTAN EL TOTAL DE LAS FZS. LATERALES DE SISMO $Q = 3.0$
- CUANDO LOS MUROS NO CUMPLAN CON EL INCISO b); $Q = 2.0$
- CUANDO PARTE DE LAS FZS. LATERALES SEAN RESISTIDAS POR OTRAS FORMAS ESTRUCTURALES (MARCOS DÚCTILES O LOSAS PLANAS) $Q =$ EL DEFINIDO EN EL CAPÍTULO CORRESPONDIENTE DE ESTAS NORMAS.

a) FLEXIÓN Y FLEJO COMPRESIÓN

$$\text{SI } P_u \leq 0.2 f_r(t L) f_c' \text{ Y } A_s/t d \leq 0.008$$

$$M_r = f_r A_s f_y z$$
$$z = \begin{cases} 0.8L; & \text{SI } H/L \geq 1.0 \\ 0.4(1+H/L)L; & \text{SI } 0.5 < H/L < 1.0 \\ 1.2H; & \text{SI } H/L \leq 0.5 \end{cases}$$

$H =$ ALTURA TOTAL DEL MURO ; $L =$ LONGITUD TOTAL DEL MURO

$$A_{s \text{ m\u00edn}} = (0.7 \sqrt{f_c'/f_y}) t d \quad (2.1.2a)$$

- CUANDO $H/L \leq 1.2$ EL REFZO. CALCULADO EN LA SECC. DE $M_{\text{m\u00e1x}}$ SE PROLONGAR\u00c1 EN TODA LA ALTURA DEL MURO, DISTRIBUIDO EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO $= (0.75 - 0.1 \frac{H}{L}) L$ MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE, $\leq 0.4 H$
- CUANDO $H/L > 1.2$ EL REFZO. PARA FLEXIÓN O FLEJO COMPRESIÓN SE COLOCAR\u00c1 EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO $= 0.15 L$ MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE

- ARriba del nivel 1.2L este refzo. se puede hacer variar, respetando 3.10
- Cuando se necesiten los ELEMENTOS EXTREMOS DEL INCISO b), el refzo. por FLEXIÓN SE COLOCARÁ EN ELLOS INDEPENDIENTEMENTE DE LA RELACION H/L
 - EL REFZO. COYO TRABAJO A COMPRESION SE JOYE EN CTA. EN LA RESISTENCIA DEBE RESTRINGIRSE CONTRA EL PASADEO CON CRIBOS O GRASAS SEGUN 4.7.3

b) ELEMENTOS EXTREMOS EN MUROS Y DIAFRAGMAS

- DEBEN SUMINISTRARSE DONDE $f_{comp. máx} > 0.2 f'_c$ (BAJO CARGAS DE DISEÑO)
- TAMBIEN EN LOS BORDES DE ABERTURAS DONDE SE EXCEDE EL LIMITE SUPERIOR.
- PUEBEN INTERRUPTIRSE DONDE $f_{comp} < 0.15 f'_c$
- LOS ELEMENTOS EXTREMOS CONTARÁN A TODO LO LARGO, CON EL REFZO. TRANSV. DE 5.3.4 PARA ELEMENTOS A FLEXOCOMPRESION.
- UN ELEMENTO EXTREMO DE MURO, SE DISEÑARÁ COMO COL. CORTA PARA QUE RESISTA COMO CARGA AXIAL LAS CARGAS QUE LE CORRESPONDA, CALCULADAS EN LA BASE DEL MURO, PARA EL MOMENTO MÁXIMO DE VOLTEO.
- EL REFZO. TRANSVERSAL DEL MURO DEBE NUCLEARSE EN LOS NÚCLEOS CENTRALES DE LOS ELEMENTOS EXTREMOS DE MANERA QUE PUEDAN ALCANZAR SU f'_y

c) FUERZA CORTANTE

- SI $H/L \leq 1.5$ $V_{cr} = 0.85 f_r \sqrt{f'_c} \tau L$
- SI $H/L \geq 2.0$, SE APLICAN LAS EC. 2.17 O 2.18 CON $l_0 = \tau$ Y $d = 0.8L$
- SI $1.5 < H/L < 2.0$ HACER UNA INTERPOLACION LINEAL
- EN MUROS CON ABERTURAS PARA VALOR V_{cr} EN LOS SEGMENTOS VERTICALES ENTRE ABERTURAS, SE TOMARÁ LA REL. MAYOR H/L ENTRE LAS DEL MURO COMPLEJO Y LA DEL SEGMENTO CONSIDERADO.

$$p_h = \frac{V_v - V_{cr}}{f_r t_y d t} \quad (4.6)$$

$$p_v = 0.0025 + 0.5(2.5 - H/L)(p_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

DONDE $p_h = \frac{\Lambda_{sh}}{S_h t}$; $p_v = \frac{\Lambda_{sv}}{S_v t}$

S_h = SEPARACIÓN DEL REFZO. HORIZONTAL

S_v = " " " VERTICAL

Λ_{sh} = ÁREAS DEL REFZO. HORIZONTAL COMPRENDIDAS EN UNA DISTANCIA S_h

Λ_{sv} = " " " VERTICAL " " " " " S_v

H = ALTURA TOTAL DEL MURO; L = LONGITUD HORIZONTAL DEL MURO

- NO ES NECESARIO QUE $p_v > p_h$

- SI $H/L \leq 2.0$; $p_v \geq p_h$

- LAS BARRAS VERTICALES DEBEN ESTAR ANCLADAS EN LA BASE DEL MURO DE MODO QUE DESARROLLEN SU f_y .

- REFUERZO MÍNIMO

$$p_{v \text{ mín}} = p_{h \text{ mín}} = 0.0025$$

- EL REFZO. SE COLOCARÁ UNIFORMEMENTE REPARTIDO CON $S \leq 35 \text{ cm}$

- CUANDO $t > 15 \text{ cm}$ O EL ESFUZO COMPRESIVO MEDIO DEBIDO A LAS CARGAS HORIZONTALES DE DISEÑO $> 0.6 \sqrt{f_c}$, SE COLOCARÁ EN DOS CAPAS. EN CASO CONTRARIO SE PUEDE COLOCAR EN UNA SOLA CAPA A MEDIO ESPESOR.

$$V_u \leq 2f_r(Lt) \sqrt{f_c}$$

d) ABERTURAS

SE PROPORCIONARÁ REFZO EN LA PERIFERIA PARA RESISTIR LAS TENSIONES QUE PUEDAN PRESENTARSE. COMO MÍNIMO DEBEN COLOCARSE $2 \nabla 4$ O SU EQUIVALENTE

DICHO REFZO. SE PROLONGARÁ UNA DISTANCIA $\geq L_d$, DESDE LAS ESQUINAS.

- Si f_{comp} EN UN BORDE ES $> 0.2 f'_c$, SE SUPLENIRÁ UN ELEMENTO DE BORDE
- LAS ABERTURAS DEBEN TOMARSE EN CTA. AL CALCULAR LA RIGIDEZ Y RESISTENCIA.

e) ELEMENTOS DE UNIÓN ENTRE MUROS.

LAS VIGAS DIAFRAGMAS QUE UNEN MUROS SE DISEÑARÁN SEGÚN 4.1.4 e)

4.6 DIAFRAGMAS Y ELEMENTOS A COMPRESIÓN DE CONTRAVIENTOS.

ESTOS REQUISITOS SE APLICAN A DIAFRAGMAS, COMO SISTEMAS DE PISO O TECHO, A PONTALES Y DIAGONALES A COMPRESIÓN DE SISTEMAS QUE TRANSMITAN FZAS. INDUCIDAS POR SISMOS.

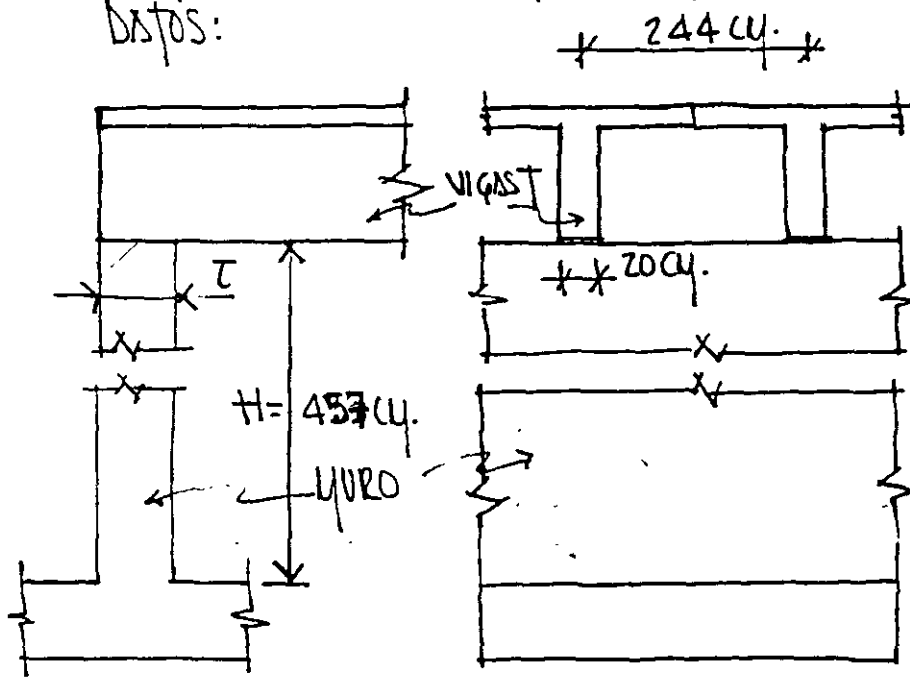
EN PISOS PREFABRICADOS, PUEDE FUNCIONAR COMO DIAFRAGMA UN FRENTE COMO SOBRE LOS PRECULSOS. PARA $L < 64$, $\tau \geq 3$ CM; PARA $L \geq 64$, $\tau \geq 6$ CM.

- LOS DIAFRAGMAS SE DISEÑARÁN COMO VIGAS (COMUNES O DIAFRAGMA)
- EL REFZO. MÍNIMO POR CONSTANTE SEGÚN 4.5.2c) PARA MUROS CON CARGA EN SU PLANO
- SE APLICA 4.5.2 EN LO QUE SE REFIERE AL USO DE ELEMENTOS DE REFZO. EN BORNES Y ABERTURAS.

- LOS ELEMENTOS EXTREMOS DE DIAFRAGMAS SE DISEÑARÁN PARA LA SUMA DE LA COMPRESIÓN DIRECTA Y LA DEBIDA AL MOMENTO QUE ACTÚA EN LA SECCIÓN, LA CUAL PUEDE OBTENERSE DIVIDIENDO EL MOMENTO ENTRE LA DISTANCIA A EJES DE LOS ELEMENTOS EXTREMOS.

- DEBE COMPROBARSE LA TRANSMISIÓN DE LAS FZAS. SÍSMICAS ENTRE EL DIAFRAGMA Y LOS ELEMENTOS VERTICALES DESTINADOS A RESISTIR FZAS. LATERALES.
- LOS ELEMENTOS CON $f_{maxc} > 0.2 f'_c$ TENDRÁN EL REFZO. TRANSV. DE 5.3.4 Y SE PUEDE INTERRUPTIR DONDE $f_{maxc} < 0.15 f'_c$. USANDO PARA CALCULAR f_{maxc} LA SECCIÓN BRUTA.

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES
 DATOS:



EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

DESCARGAS POR VIGAS T
 CARGA MUERTA = 12.70 TON.

" VIVA = 6.35 "

$f'_c = 280 \text{ KG/CM}^2$

$f_y = 4200 "$

SOLUCIÓN

I. SELECCIONAR EL ESPESOR τ DEL MURO

a) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCión LATERAL

1) - Si $H/L \leq 0.35$ ($L \geq 13.06 \text{ m}$); $H' = H = 4.57 \text{ m}$.

SE PUEDEN DESPRECIAR LOS EFECTOS DE ESBELTEZ CUANDO:

$$H'/r < 34 - 12 k_1/k_2$$

COMO $k_1 = k_2 = 0$; $k_1/k_2 = 1.0 \therefore H'/r < 22$

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ $\tau > 4.57 / 0.3 \times 22 = 69 \text{ CM}$.

2) - Si $0.35 < H/L < 0.8$ ($5.71 < L < 13.06 \text{ m}$);

COMO $L = 6 \text{ m}$. $H'/L = 4.57/6 = 0.76$; $H' = (1.3 - 0.85 \times 0.76) 4.57 = 2.99 \text{ m}$.

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ $\tau > 2.99 / 0.3 \times 22 = 45 \text{ CM}$.

3) - Si $H/L > 0.80$ ($L < 5.71 \text{ m}$) $H' = L/2$

PARA $L = 5.70 \text{ m}$. $H' = 5.70/2 = 2.85 \text{ m}$; $\tau > 43 \text{ CM}$.

b) Bordes verticales sin suficiente restricción lateral

1) Si $H/L \leq 0.35$ ($L \geq 13.06 \text{ m}$); $H' = H = 4.57 \text{ m}$; $\tau > 69 \text{ cm}$

2) Si $H/L > 0.35$ ($L < 13.06 \text{ m}$)

Para $L = 12.90 \text{ m}$; $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(H/L + 4.3)H = 0.215(0.36 + 4.30)4.57 = 4.58 \text{ m} < 2H = 9.14 \text{ m}$$

$$\tau > 458 / 0.8 \times 22 = 69 \text{ cm}$$

Para $L = 5.70 \text{ m}$; $H' = 5.01 \text{ m}$; $\tau > 501 / 0.3 \times 22 = 76 \text{ cm}$

II Cargas ultimas.

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ ton.}$$

III VERIFICAR EL APLASTAMIENTO

Para el caso 3) de a) con $\tau = 45 \text{ cm}$.

$$\text{ÁREA CARGADA} = A_1 = (b)(\tau) = 20 \times 45 = 900 \text{ cm}^2$$

$$\text{RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO} = (F_r f_c^*) (A_1) = 0.7 \times 224 \times 900 = 141 \text{ ton.} > P_u$$

IV LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO

$$\text{Defectivo} = b_{\text{contacto}} + 4\tau = 20 + 4 \times 45 = 200 \text{ cm} < 244 \text{ cm}$$

$$\therefore A_{s \text{ mín}} \text{ SEGUN 3.10 } (0.25 f_c' A_g = 0.25 \times 280 \times 9000 = 630 \text{ ton} > P_u)$$

$$A_s = \frac{66000 \tau}{f_y (1 + 100)} = \frac{66000 \times 45}{4200 (45 + 100)} = 4.88 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$A_{s \text{ mín}} = 1.5 A_s = 7.32 \text{ cm}^2 / \text{m} \leftarrow \text{var. } \# 3 @ 20 \text{ cm. EN AMBOS CARRAS}$$

V RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN

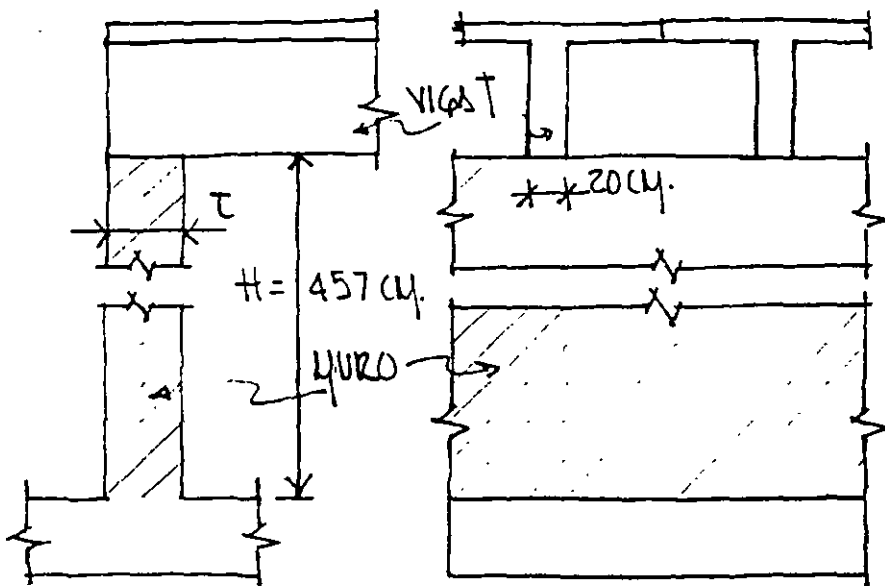
$$e_{\text{mín}} = 0.05 \tau > 2 \text{ cm}$$

$$e_{\text{mín}} = 2.25 \text{ cm}$$

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES.

DATOS:

$$+ 244 \text{ cm.} +$$



- EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

- DESCARGA POR VIGAS T

CARGA MUERTA = 12.70 TON.

" VIVA = 6.35 "

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 "$

SOLUCIÓN

I SELECCIONAR EL ESPESOR τ DEL MURO
SUPONIENDO $\tau = 20 \text{ cm.}$

II CARGA ÚLTIMA

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ TON.}$$

III. VERIFICAR EL APLASTAMIENTO

$$A_1 = (b)(\tau) = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

$$\text{RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO} = (\phi R^*) (A_1) = 0.7 \times 224 \times 400 = 62.72 \text{ TON.}$$

$> P_u$

IV RELACIÓN DE ESBELTEZ

1) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si $H/L \leq 0.35$ ($L \geq 13.06 \text{ m}$); $H' = H = 4.57 \text{ m.}$

$H'/r = 457/6 = \underline{76} > \underline{22}$ \therefore ES NECESARIO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ

b) Si $0.35 < H/L < 0.8$ ($5.71 < L < 13.06 \text{ m}$)

$$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H$$

PARA $L = 6 \text{ m}$. $H' = (1.30 - 0.85 \times 0.76) 457 = 298 \text{ cm}$.

$$H'/r = 298/6 = \underline{50} > 22$$

c) Si $H/L > 0.80$ ($L < 5.71 \text{ m}$) $H' = L/2$

PARA $L = 5.70 \text{ m}$. $H' = 285 \text{ cm}$. $H'/r = 285/6 = \underline{47.5} > 22$

2) BORDES VERTICALES SIN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si $H/L \leq 0.35$ ($L \geq 13.06 \text{ m}$); $H' = H$; $\underline{H'/r = 76} > 22$

b) Si $H/L > 0.35$ ($L < 13.06 \text{ m}$); $H' = 0.215(H/L + 4.3) H \leq 2H$

PARA $L = 12.70 \text{ m}$. $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(0.36 + 4.3) 4.57 = 4.58 \text{ m} < 9.14 \text{ m}$$

$$\underline{H'/r = 76.3} > 22$$

V LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO

$$b_{\text{EFFECTIVO}} = b_{\text{CONCRETO}} + 4\tau = 20 + 4 \times 20 = 100 \text{ cm} < 244 \text{ cm}$$

$$0.25 f_c A_g = 0.25 \times 280 \times 2000 = 140 \text{ TON.} > P_u$$

$$\therefore I_s \text{ min} = \frac{66000 \tau}{f_y (\tau + 100)} \text{ (cm}^2/\text{m)} \quad (\text{SEGÚN 3.10})$$

$$I_s \text{ min} = \frac{66000 \times 20}{4200 \times 120} = 2.62 \text{ cm}^2$$

$$I_s \text{ min} = 1.5 \times 2.62 = 3.93 \text{ cm}^2/\text{m} \leftarrow 6 \# 3 A_s = 4.26 \text{ cm}^2$$

COMO $\tau > 15 \text{ cm}$, COLOCAR DOS LECHOS

\therefore CU EL LECHO MÍNIMO QUEDA $\# 3$ E 30 cm . EN AMBOS LECHOS

$$S_{\text{max}} = 3.5 \tau = 70 \text{ cm} \leq 50 \text{ cm} \quad \therefore \underline{S_{\text{max}} = 50 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$$

VI EFECTOS DE ESBELTEZ

Como $H/r = 76 < 100$, ES APLICABLE EL PROCEDIMIENTO DE SIMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS (FACTOR DE SIMPLIFICACIÓN 1.3.2c)

SE DEBE DIMENSIONAR PARA P_u Y M_c

$$\text{DONDE } M_c = \bar{F}_{ab} M_{z0} + \bar{F}_{as} M_{zs} \quad (1.1)$$

$$\text{COMO } M_{zs} = 0; \quad M_c = \bar{F}_{ab} M_{z0}$$

$$\bar{F}_{ab} = \frac{C_m}{1 - P_u/P_c} \geq 1.0 \quad (1.2)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2 \geq 0.4 \quad (1.3)$$

$$P_c = \frac{FR \pi^2 EI}{(H)^2} \quad (1.4)$$

$$EI = 0.4 E_c I_g / (1 + \nu) \quad (1.5)$$

$$\text{COMO } M_1 = M_2 = 0; \quad M_1/M_2 = 1 \quad \therefore \underline{C_m = 1.0 > 0.4}$$

$$M_{z0} = P_u (e_{\min}) = 26.67 \times 0.0225 = \underline{0.60 \text{ TON-M}}$$

$$\nu = 0.67$$

$$E_c = 14000 \sqrt{f_c} = 2.34 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2; \quad I_g = 100 \times 20^3 / 12 = 6.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$EI = \frac{0.4 \times 2.34 \times 6.7 \times 10^9}{1.67} = 3.74 \times 10^9$$

SUPONIENDO $FR = 0.70$

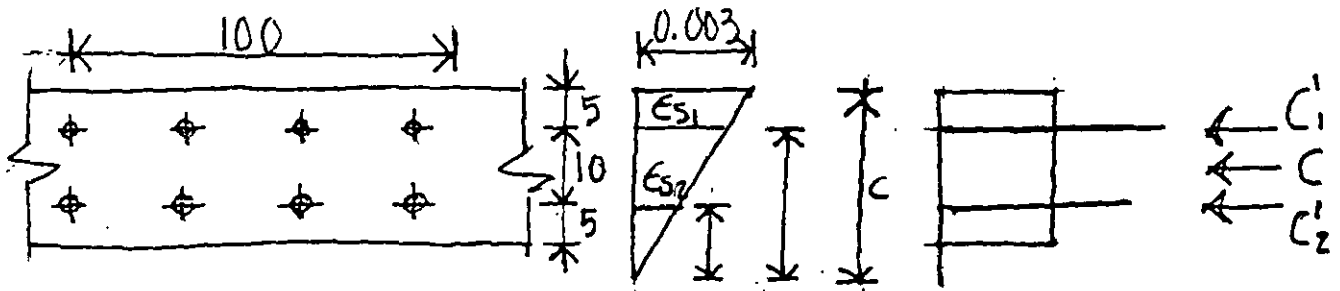
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (3.74 \times 10^9) \times 0.7}{(4.57)^2} = 124 \text{ TON}$$

$$\bar{F}_{ab} = \frac{1}{1 - 26.67/124} = 1.27$$

$$M_c = 1.27 \times 0.6 = 0.76 \text{ TON-M}$$

$$\underline{e = 2.85 \text{ cm}}$$

VIII RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN



PARA $c = 25 \text{ cm}$, $a = 20 \text{ cm}$.

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 20 / 25 = 2.4 \times 10^{-3} > \epsilon_y; f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 10 / 25 = \dots < \epsilon_y \quad f_{s2} = 2530 \quad "$$

$$C_1' = 2.13 \times 4200 = 8.95 \text{ ton}$$

$$C = 100 \times 20 \times 190 = 380.00 \quad "$$

$$C_2' = 2.13 \times 2530 = \frac{5.39 \quad "}{394.34 \quad "}$$

$$M_n = 0.05 (3.56) = 0.178 \text{ ton-m. } e =$$

$c = 20 \text{ cm}$ $a = 16 \text{ cm}$

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 15 / 20 = 2.25 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 5 / 20 = 7.50 \times 10^{-4} \therefore f_{s2} = 1575 \quad "$$

$$C_1' = 2.13 \times 1.575 = 8.95 \text{ ton}$$

$$C = 1.6 \times 190 = 304.00 \quad "$$

$$C_2' = \frac{3.35 \quad "}{316.30 \quad "}$$

$$M_n = 0.05 (5.6) + 304 \times 0.02 = 6.36 \text{ ton-m. } e =$$

$$c = 19 \text{ cm}; a = 15.2 \text{ cm}; \quad \epsilon_{s1} = 0.003 \times 14 / 19 = 2.21 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 4 / 19 = 6.3 \times 10^{-4} < \epsilon_y \therefore f_{s2} = 1330 \text{ kg/cm}^2$$

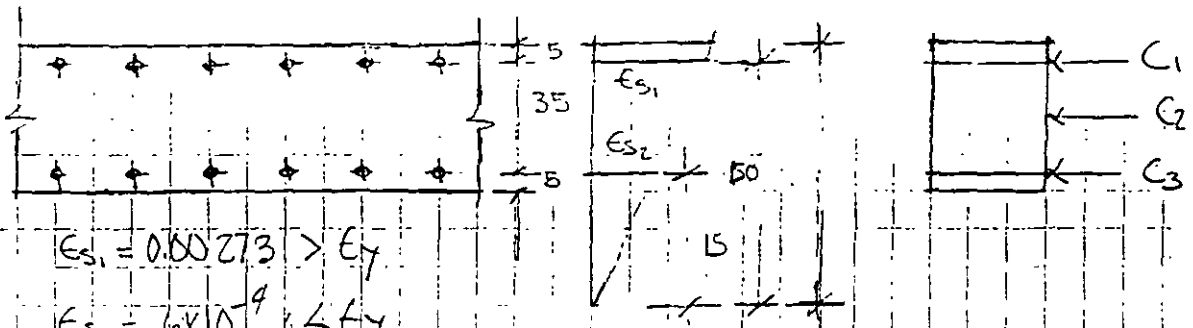
$$C_1' = 8.95 \text{ ton}$$

$$C_2' = 2.13 \times 1.33 = 2.83 \quad "$$

$$C = 1.52 \times 190 = \frac{288.80 \quad "}{300.58 \quad "}$$

$$M_n = 0.05 \times 6.12 + 0.04 \times 288.8 = 7.24 \text{ ton-m.}$$

$$e = 7.24 / 2.83 = 2.56 \text{ cm}$$



$$E_{s1} = 0.85 \times 273 > E_y$$

$$E_{s1} = 6 \times 10^{-4} < E_y$$

$$f_{s2} = 17260 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_1 = 7.1 \times 4200 = 29820 = 29.82$$

$$C_2 = 200 \times 40 \times 190 = 1520000 = 1520.0$$

$$C_3 = 7.1 \times 17260 = 122546 = 122.546$$

$$M_n = 0.175(29.82 - 122.546) + 0.025(1520) = 38.4 = 41.69$$

$$e = 2.67 \approx 2.25$$

$$P_e = 0.7 \times 1558.77 = 1091.14 \text{ TON} \approx 7726.67 \text{ TON}$$

EJEMPLO: DISEÑO POR CORTEANTE

DATOS:

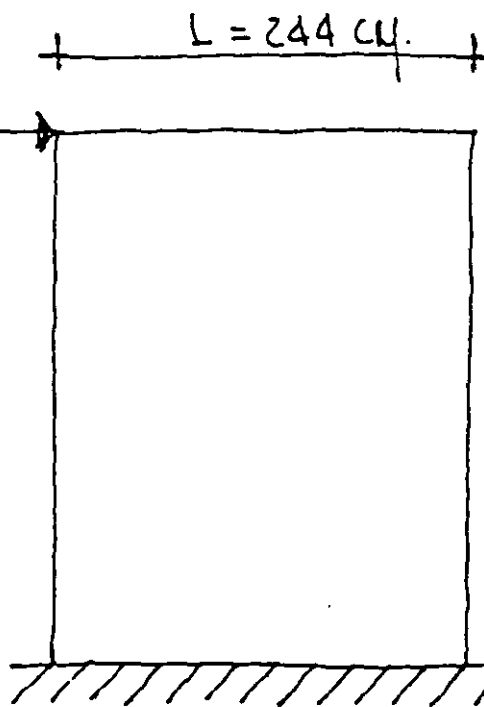
$$t = 20 \text{ cm.}$$

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

$$FR = 0.80$$

$$V_u = 90 \text{ ton.}$$



SOLUCIÓN

1. DETERMINACIÓN DEL LIMITE SUPERIOR DE V_u

$$V_u \leq FR (L t) (2 \sqrt{f'_c})$$

$$0.8 \times 244 \times 20 \times 2 \times \sqrt{160} = 98.76 \text{ ton.}$$

$$V_u = 90 \text{ ton} < 98.76 \text{ ton.}$$

\therefore EL ESPESOR DEL MURO (20 cm) ES ADECUADO

2. CALCULAR LA RESISTENCIA PROPORCIONADA POR EL CONCRETO V_{cr}

$$h/L = 3.66/2.44 = 1.5 \quad \therefore V_{cr} = 0.85 FR \sqrt{f'_c} (L t)$$

$$V_{cr} = 0.80 \times 0.85 \times 244 \times 20 \times \sqrt{160} = 42 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL REFUERZO HORIZONTAL REQUERIDO POR CORTEANTE

$$P_h = \frac{V_u - V_{cr}}{FR f_y d t} \quad (4.6)$$

$$P_h = \frac{A_{sh}}{S_h t}$$

$$S_h = \frac{A_{sh} f_y d \# 2}{V_u - V_{ce}}$$

USANDO # 3 DOS RAMAS

$$S_h = \frac{1.42 \times 4.2 \times 1.95 \times 0.8}{90 - 42} = 19 \text{ cm.}$$

4. CALCULAR EL REFOZO VERTICAL REQUERIDO POR CORTANTE

$$P_v = 0.0025 + 0.5(2.5 - h/L)(P_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

$$P_h = 0.0037$$

$$P_v = 0.0025 + (0.5(2.5 - 1.5)(0.0037 - 0.0025))$$

$$P_v = 0.0031$$

$$P_v = \frac{A_{sv}}{S_v \tau}$$

$$S_v = \frac{A_{sv}}{P_v(\tau)}$$

PARA $A_{sv} = 1.42 \text{ cm}^2$ (# 3 DOS RAMAS)

$$S_v = \frac{1.42}{0.0031 \times 20} = 23 \text{ cm.}$$

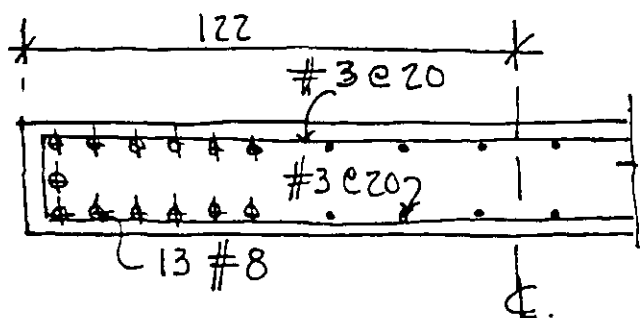
5. DIMENSIONAMIENTO POR FLEXIÓN

SUPONIENDO $\rho \leq 0.008$

COMO $L/h = 0.67$

$$z = 0.6L = 146.4 \text{ cm.}$$

$$A_{s \text{ req}} = \frac{M_u}{f_r z + y} = \frac{329.4}{0.8 \times 146.4 + 4.2} = 67 \text{ cm}^2 \leftarrow 13 \# 8$$





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
COMPUTER METHODS IN STRUCTURAL ANALYSIS**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ LUIS TRIGOS SUÁREZ
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

Computer Methods
in
Structural Analysis

H. B. HARRISON

School of Civil Engineering
University of Sydney

Automatic Elastic-Plastic Analysis of Plane **10** Frameworks

10.1 Introduction

The rational design of rigid steel frameworks presupposes the availability of accurate methods for predicting the maximum strength of a frame and the deformations at working load. Linear-elastic methods of analysis are generally satisfactory in predicting working-load deflections, although the slender members that can be proportioned in high-strength steel may require that factors such as shear and axial strains be accounted for in addition to flexural strains. If working-load deflections are kept within reasonable limits, the influence of deformations upon the reliability of the linear-elastic procedures which predict the deflections is quite negligible, equilibrium equations being formulated for the unloaded frame geometry. No direct evidence of frame strength in a redundant steel structure is provided by studying the stress conditions at working load.

The simplest available theory for predicting the maximum load-carrying capacity of steel frames is the simple (or rigid) plastic theory (1), and test results on adequately stabilized beams and single-story rigid frames (2) have shown quite satisfactory agreement between observed and predicted maximum loads. As in linear-elastic analysis, simple plastic theory also presupposes that deformations have a negligible effect upon the equilibrium equations when formulated for the original unloaded shape of a structure. Heyman (3) has shown that the neglect of deformation moments in simple plastic theory can lead to an over estimation of frame strength, and Vickery (4) has demonstrated how the deformation effects in portal frames of mild steel are often compensated for by strain hardening. The agreement between observed and calculated collapse loads in tests on portal frames of mild steel has been attributed to the compensating action of strain hardening and deformation moments, both of

which are ignored in the simple plastic theory (5). The problem has been further studied by Horne and Medland (6) principally with reference to portal frames under vertical loading. General design guides for this class of frame have been produced, whereby it is possible to detect for a given frame whether strain-hardening effects are likely to cancel out the adverse effects of deformation.

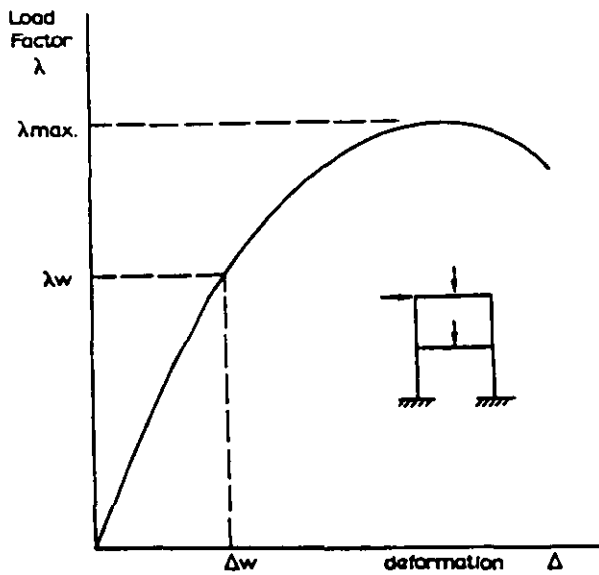
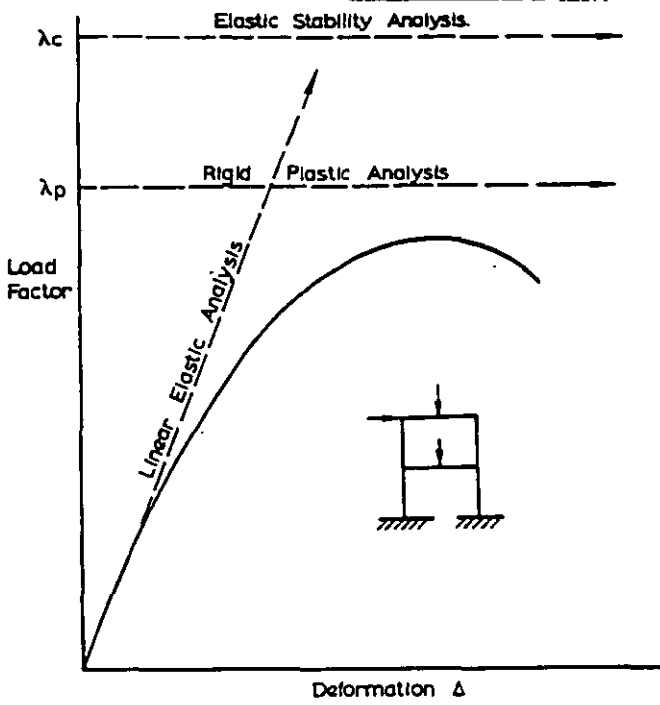
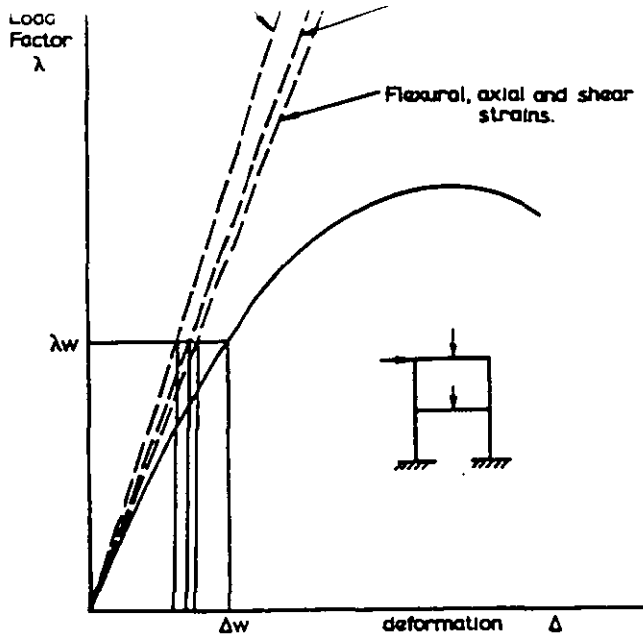
Accepting, then, that the simple plastic theory for predicting the strength of steel frames has its limitations, the load factor for plastic failure (λ_p) as determined by this theory is still an important frame parameter, and, for all but the simplest of structures, the manual methods for computing λ_p can be tedious and require, for a rapid solution, a considerable exercise of the analyst's intuition concerning the likely mode of failure. Once the generality of the matrix computer methods for linear-elastic frame analysis had been recognized, it was natural to expect that attention would be concentrated on the various types of nonlinear analysis that are feasible, using iterative techniques on a computer.

10.2 Elastic-Plastic Analysis

With regard to elastic-plastic analysis of plane steel frames, Wang (7) first described the basic principles of an effective computer program, and the scheme described in this chapter is a development of Wang's technique. To appreciate the advantages of Wang's automated system for detecting where a plastic hinge may form in a frame under increasing load, and for subsequently dealing with the modified structure that results, it is informative to consider at first the nature of simple or rigid plastic analysis.

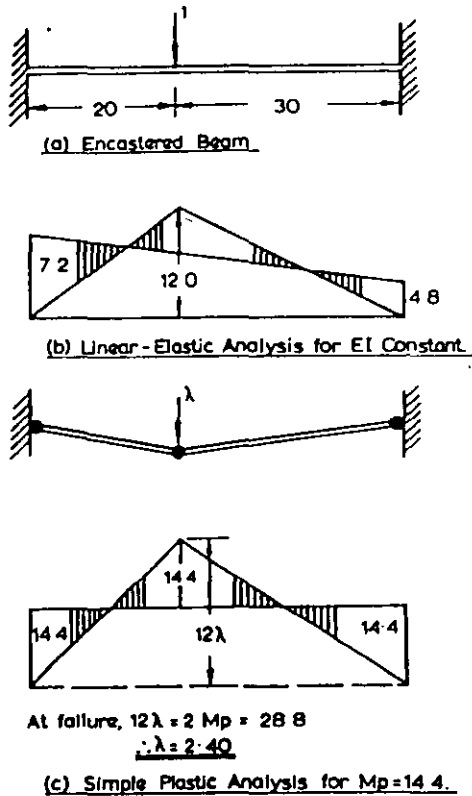
The encastered beam shown in Fig. 10.1(a) is a useful example, and an elastic analysis, whether by hand or by computer using any of the programs already described, would produce the result shown in Fig. 10.1(b). The significant conclusion is that the maximum bending moment occurs at the left-hand support, provided the material everywhere remains elastic. A plastic analysis of such a beam is inherently simple and direct, as it would begin with the intuitive and correct assumption that, at failure, plastic hinges will form at both supports and under the applied load. This information about the mode of failure is combined with static principles in Fig. 10.1(c), and the load factor at failure is immediately found.

Characteristic then of simple plastic analysis is the determination of the collapse load of a steel framework by the combination of equilibrium equations with an intuitively assumed mechanism of failure which is verified or discarded in the process. In general, trial-and-error procedures are involved. For highly redundant frameworks, the correct failure mechanism is rarely obvious from inspection, but satisfactory solutions can often be achieved after several mechanisms are examined with judicious use of the maximum and minimum principles (8). The elimination of the need for an elastic analysis of highly redundant frames has often been regarded as an advantage of plastic analysis, but when designs in high-strength steel are contemplated, the deformations at working load levels will be an important consideration; so the designer may have to carry out both elastic and plastic analyses, the former to check



4

Fig. 10.1 Linear-elastic and simple plastic analyses

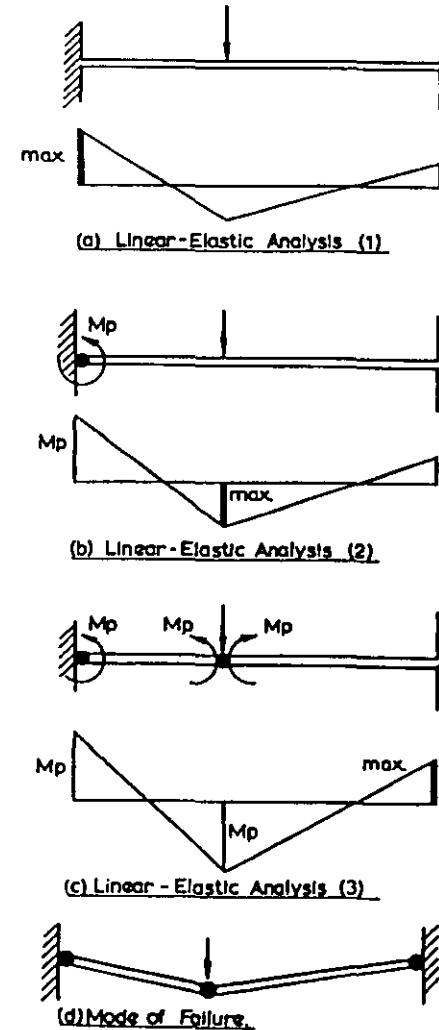


conditions at working load and the latter to give an estimate of overload strength. It is not easy to program a computer to make the intuitive judgments which help an experienced designer to achieve a satisfactory solution.

If the same encastered beam is studied again, as in Fig. 10.2, it can be seen that the failure load and mode could be determined from three successive linear-elastic analyses. The result of the first such analysis shown in Fig. 10.2(a) is the indication that the failure mode is very likely to involve a plastic hinge at the left-hand support. The second analysis in Fig. 10.2(b) is that of a cantilever propped at the left-hand support and loaded there with a constant anticlockwise end moment of value M_p , which is the full plastic value. This second analysis would indicate a peak moment under the load, so that a third elastic analysis could be made, as in Fig. 10.2(c). The

results of this final elastic analysis may be factored by the ratio of M_p to the computed moment value at the right-hand support, so that not only is the plastic failure load factor determined but also the deformations just to prior collapse.

Fig. 10.2 Elastic-plastic analysis

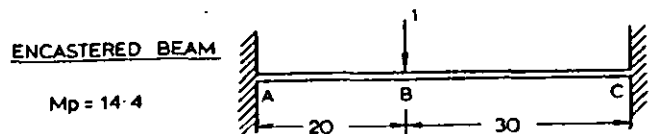


10.3 Automatic Elastic-Plastic Analysis

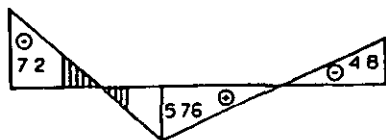
It is often the case that the form of an analysis carried out by hand would not be a desirable one to program for a computer. The procedure just described is a case in point, as it would be inefficient for a machine solution because of the necessity of providing, from the beginning, for the extra degrees of freedom and the corresponding new loading terms in the dimensioning of the various matrices affected by the degrees of freedom. If provision had to be made for an extra degree of freedom at every position where a plastic hinge was likely to form, a small frame would rapidly fill the available data-storage capacity of a computer.

The alternative system used by Wang does not involve the same difficulties and is illustrated by the encastered beam, shown again in Fig. 10.3. The beam is subjected to an elastic analysis under its working load, and the result is shown graphically and numerically in Fig. 10.3. The computed moment values at each joint, *A*, *B*, and *C* are

Fig. 10.3 Elastic-plastic analysis stage 1



ANALYSIS 1



MOMENTS AT NODES	7.20	5.76	4.80
MOMENT CAPACITY	14.40	14.40	14.40
LOAD FACTORS	2.00	2.50	3.00
MIN. LOAD FACTOR	2.00		
MIN.L.F. x MOMENTS	14.40	11.52	9.60
CAPACITY LEFT	0.00	2.88	4.80

CUMULATIVE LOAD FACTOR = 2.00

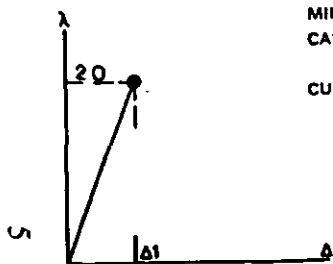
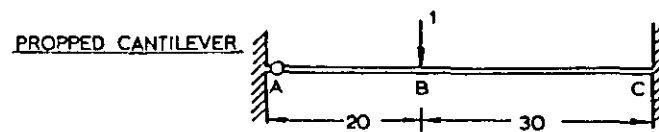
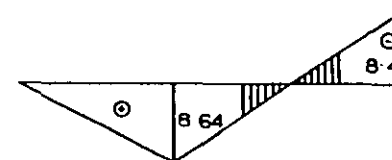


Fig. 10.4 Elastic-plastic analysis stage 2

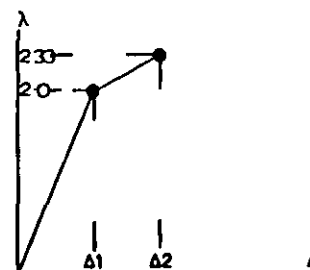


ANALYSIS 2



MOMENTS AT NODES	0.00	8.64	8.40
MOMENT CAPACITY	0.00	2.88	4.80
LOAD FACTORS	—	0.33	0.57
MIN. LOAD FACTOR		0.33	
MIN.L.F. x MOMENTS	0.00	2.88	2.80
CAPACITY LEFT	0.00	0.00	2.00

CUMULATIVE LOAD FACTOR = 2.33

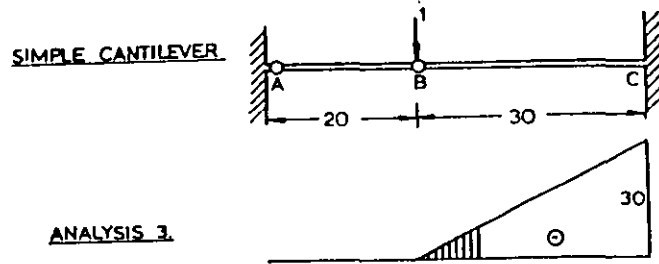


divided into the full plastic values to produce load factors of 2.0, 2.5, and 3.0, respectively. The position *A*, where the smallest of these factors is found, will be that where the first plastic hinge will be found if the working load is multiplied by the minimum load factor, which is 2.0. The computed deflections may be similarly factored so that the portion of the load-deflection curve shown in Fig. 10.3(c) is determined. At this stage, two separate operations are required. First, the moments at *A*, *B*, and *C* are factored by 2.0 and then subtracted from the full plastic values, which were 14.4, to give the residual capacities of 0, 2.88, and 4.80 shown in the figure. Second, the computer has to allow in its subsequent analyses for the existence of a free hinge at the end *A* of the member *AB*. This is a simple matter if the form of linear-elastic analysis being used is the displacement method, as explained for rigid plane frames in Chapters 7 and 8. Changes can be made to the member-stiffness matrix in

the manner shown in Figs 7.19 and 7.20, where the treatment of an internal hinged connection was discussed. The degree of freedom of a frame as measured by the possible unrestrained movements of nodes is unaffected by this change in member stiffness, so that the statics matrix $[A]$ will undergo no alterations in either size or in the values of its elements. The frame-stiffness matrix $[K]$ will be of the same size but will have some elements altered, since it is generated by the operation $[A] \cdot [S] \cdot [A]^T$, and changes would have been made to the four elements of $[S]$, which reflect the flexural stiffness of member AB .

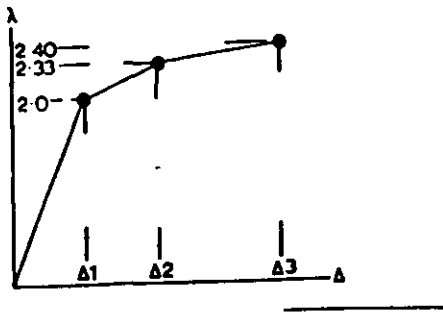
The stage is then set for the second linear-elastic analysis of the beam, as in Fig. 10.4. The computed moments at the member ends are divided into the available moment capacities and the minimum factor found after disallowing the division of zero

Fig. 10.5 Elastic-plastic analysis stage 3



MOMENTS AT NODES	0.00	0.00	30.00
MOMENT CAPACITY	0.00	0.00	2.00
LOAD FACTORS	—	—	0.07
MIN. LOAD FACTOR			0.07
MIN.L.F. × MOMENTS	0.00	0.00	2.00
CAPACITY LEFT	0.00	0.00	0.00

CUMULATIVE LOAD FACTOR = 2.40



by zero at node A . The second plastic hinge is seen to form under the load when the additional load factor is 0.33 or the cumulative load factor is 2.33. If the sequence of operations is repeated, as in Fig. 10.5, the load factor of 2.40 for plastic failure is determined by what appears to be a large effort in comparison with the simple calculation shown in Fig. 10.1. However, the right solution was reached without the necessity for an intuitive guess as to the mechanism of failure and, further, the deformations at the onset of failure would have been evaluated in the process.

It can also be seen from Figs. 10.3 to 10.5 that the procedure is essentially cyclical. Deformations are calculated at each stage in the process, but these results have not been included in the tabulations. A collapse mechanism will have been reached in the analysis when the structure has been converted into a mechanism. The numerical indication of such a phenomenon can be in several forms. It may be that the coefficients in the stiffness equations would form a singular matrix so that zero division would be encountered in an attempted solution and would end the analysis. If this does not occur, the computed deformations would be very large, which would indicate that the load-deflection diagram has become horizontal. Wang (7) has explained the computer indications of frame failure, though some of his collapse criteria have been eliminated in the present program, for reasons which will be explained later.

10.4 Programming the Method of Elastic-Plastic Analysis

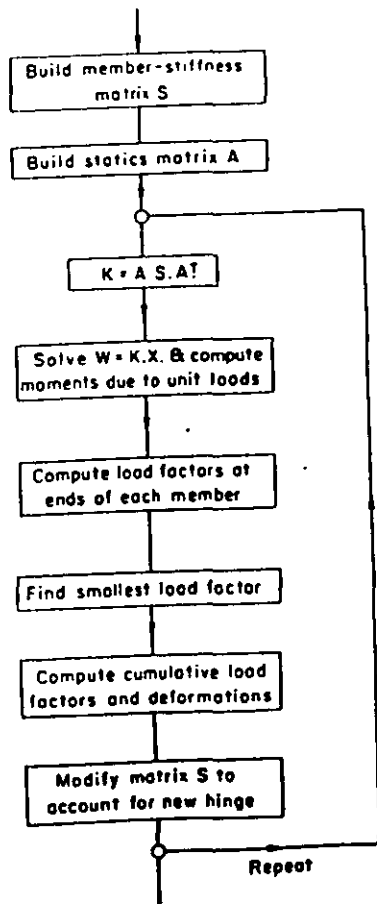
In Wang's original program, the statics and member-stiffness arrays $[A]$ and $[S]$ for the whole frame were prepared manually. In program *EPFO*, as listed in Appendix 10.1, all the required arrays are generated within the computer using elementary data in much the same form as that used by the linear-elastic programs *ELFO* and *ELFAS*, already described. To keep the program listing as short as possible, the member data have been confined to the barest minimum and comprises, for each member, the pair of connected joints, and the inertia, area and full plastic moment of the section. Members of the same material are presupposed, so that the elastic modulus is not included in the member data and, further, finite shear strains and the existence of initial internal hinges are not taken into account.

Either of the plane-frame linear analysis programs *ELFO* and *ELFAS* could have been modified to perform elastic-plastic analyses, but the former was preferred on the grounds of simplicity rather than efficiency since the statics matrix $[A]$ for a complete framework could be generated only once and stored ready for use in all the successive linear analyses as each plastic hinge was located. The extra-storage requirement, in providing for both the array $[A]$ and the frame-stiffness matrix, will decrease the maximum-sized frame that could otherwise be processed on any given machine. The essential alterations made to program *ELFO* in developing the elastic-plastic program *EPFO* are indicated on Fig. 10.6, and the blocks on this flow diagram may be identified in the listing given in Appendix 10.1. Flow diagrams are at best an easy substitute for the listing of a program and have not been included generally in this book.

An essential part of the program is that concerned with the search for the position at which a plastic hinge will form for the smallest increase in load factor. This part

of the program follows Wang's original scheme, except for one alteration. It was found that erroneous results were produced for some frames because the load factors were computed by dividing the residual moment capacity by the absolute value of the moments caused by the unit or working loads. Such a procedure is satisfactory, provided the unit-load moments at the critical positions are of the same sign in the successive analysis of the frames of deteriorated stiffness. It may well be the case that the moment at the position with the least reserve of strength may be decreasing under increasing load. A test has been incorporated in the section of the program concerned with the finding of the smallest-load factor to determine whether such is the case, and, if so, the position in question is not included in the search for the smallest-load factor.

Fig. 10.6 Elastic-plastic analysis



In his program, Wang incorporated four separate tests to determine whether the collapse load for a frame had been reached. These were (1) large deformations, (2) zero division, (3) full plastic moment exceeded, and (4) load factor too small. The above considerations dispense effectively with the need for (3). The fourth test involved the minimum-load factor, which, if too small, would indicate that the load-deflection curve for a frame was close to horizontal. However, it was found that this test would frequently terminate prematurely the analysis for any frame where two plastic hinges might form simultaneously. This test has been omitted from the present program, since it is considered that a deformation limitation will determine effectively whether or not the load-displacement curve might be horizontal.

Accordingly, only two of Wang's four tests have been retained. These are the tests for large deformations and zero division. The latter test outputs the message "division by zero in inversion," and it effectively determines the stage at which a diagonal element in the frame-stiffness matrix (K) contains only a zero term. In theory, this is the only necessary test, but the other is required also because rounding off errors in the arithmetic could delay the program termination and invalidate the calculation of plastic-hinge rotations, if these were desired.

This facility has not been included in program *EPFO* in order to keep the listing as short as possible. The theory is quite straightforward, however. Knowing the stress resultants for each member at the development of the final plastic hinge, the member deformations $\{x\}$ may be computed from purely elastic considerations. Since, in the displacement method, $\{SR\} = [S] \cdot \{x\}$ and the member-stiffness matrix $[S]$ is square, it follows that

$$\{x\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} \quad (10.1)$$

The array $[S]$ is the initial, unmodified member-stiffness matrix. However, it must be remembered that compatibility between member end rotations and joint rotations will not have been maintained in the process of an elastic-plastic solution, and the transformation

$$\{x\} = [A]^T \cdot \{X\} \quad (10.2)$$

will produce only the elastic components of the member-end deformations. Therefore, the amount of plastic-hinge rotation at all hinge locations except for the last to form may be evaluated by the operation

$$\{x_p\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} - [A]^T \cdot \{X\} \quad (10.3)$$

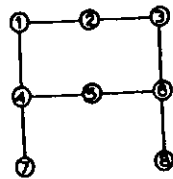
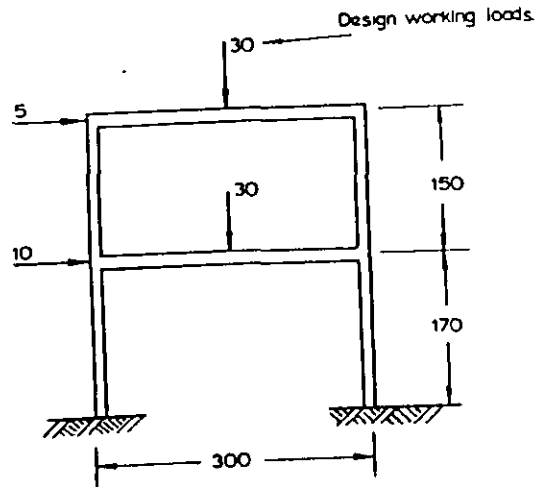
where the vectors $\{SR\}$ and $\{X\}$ are, respectively, the cumulative stress resultants and joint deformations when the last plastic hinge has formed. The vector $\{x_p\}$, as evaluated from equation (10.3), will have three elements per member comprising the extension and the rotation angles in radians at each end. The residual plastic extension should be zero, since this type of compatibility is not violated in the simple plastic theory. All the terms in $\{x_p\}$ will be effectively zero except for those positions where plastic hinges formed early in the elastic-plastic analysis. The matter of the plastic-

∞ hinge rotation capacity can be important when noncompact sections are used in a steel frame. These thin sections may have limited rotation capacity while resisting the full plastic value of an applied moment.

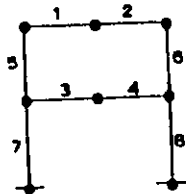
10.5 General Observations

The application of the elastic-plastic program *EPFO* to a small but typical problem in plastic analysis has been demonstrated for the frame in Fig. 10.7 in Appendix 10.2. An important limitation of the scheme is the requirement that loads

Fig. 10.7 Rigid frame for elastic-plastic analysis



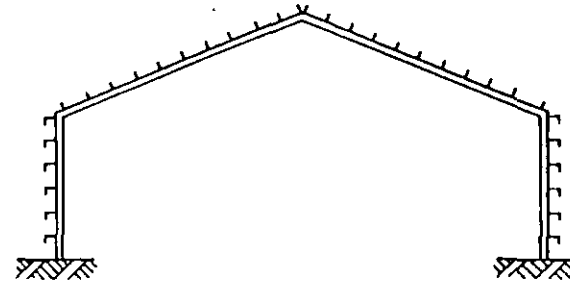
Joint notation



Member notation

Properties of Sections } Beams: $I = 1000$, $A = 20$, $M_p = 4500$.
 Columns: $I = 500$, $A = 25$, $M_p = 4000$.
 Modulus $E = 30,000$

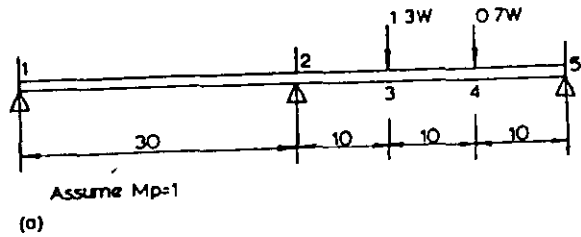
Fig. 10.8 Industrial rigid frame



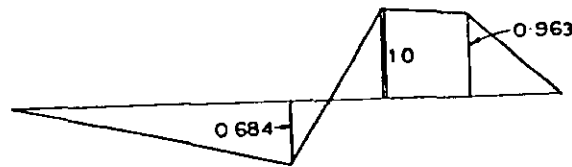
should act at joints only, so that distributed loading arrangements on frame members can present quite a problem if the "exact" location of a plastic hinge within such members is required. Industrial portal frames of the type shown in Fig. 10.8 are frequently designed on the basis of the simple plastic theory, and, if there are 10 purlin and girt spaces within each rafter and column, a computer of considerable size would be required by program *EPFO*, since the frame would need to be described as one of 40 members and 41 joints. Approximately 29,000 storage locations for real numbers would have to be declared. The necessary storage would be reduced to approximately 7,000 if each member were subdivided into 5 rather than 10 parts, and the errors involved would hardly be appreciable in any practical design. There are other ways of dealing with problems of this nature, and an effective scheme is to use interactive, time-sharing computers, which will be discussed in a later chapter.

One additional limiting factor should be mentioned. It can sometimes occur in steel frames that a plastic hinge which is formed early in the loading history may not be required in the collapse condition. The moment at such a section would decrease in magnitude, and a plastic hinge would not then exist. This phenomenon cannot be accounted for in the present program, as the process of free hinge insertion is irreversible. The calculated load factor for such a problem would err on the safe side, since the equilibrium and yield conditions would be satisfied but not the mechanism condition. The phenomenon has been mentioned by Finzi (9). The example of a two-span beam, which has been used by Neal (10) to demonstrate the problem, is shown in Fig. 10.9. For the loads shown in Fig. 10.9(a), an elastic analysis will produce a maximum moment at node 3, as can be seen in Fig. 10.9(b). However, a simple plastic analysis will predict a failure mechanism with plastic hinges at (2) and (4) but not at (3). This can be deduced from the moment diagram shown in Fig. 10.9(d). The results obtained from a computer analysis of this problem are in Appendix 10.3. It can be seen that the computer correctly detects the formation of the first hinge at node (3) and the second at (4) as shown in Fig. 10.9(c) but cannot account for the closing of the first formed hinge thereafter. Accordingly, it arrives at an invalid collapse mechanism.

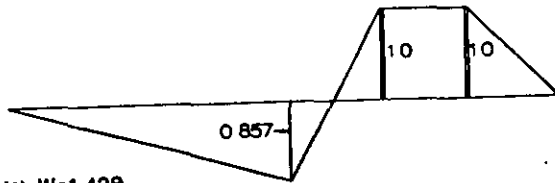
Fig. 10.9 Neal-Finzi problem



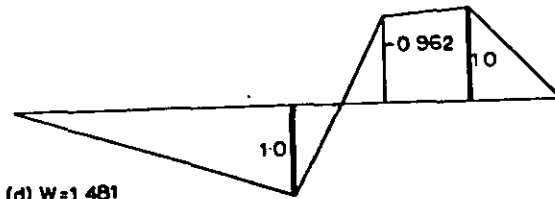
(a)



(b) $W=1.324$

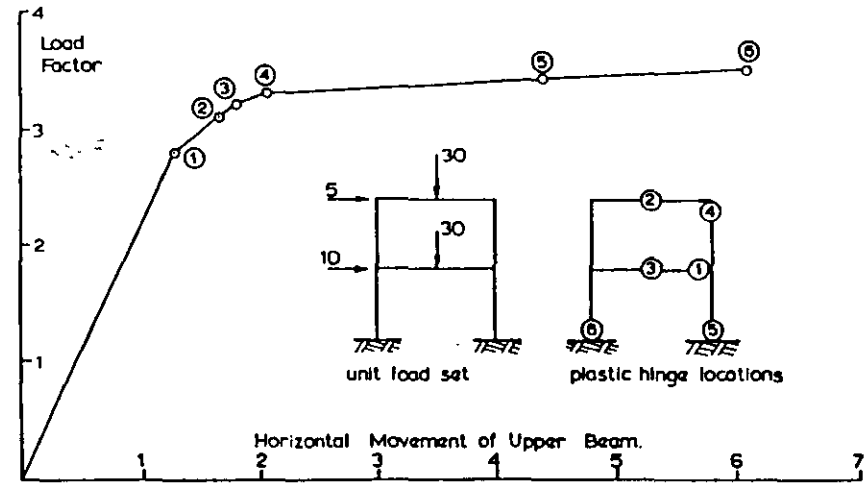


(c) $W=1.429$



(d) $W=1.481$

Fig. 10.10 Computed load-sway curve for rigid frame in Fig. 10.7



is quite as expected. Even if the mechanism is not a valid one, the results of the computer analysis should still be useful to a designer; he would have a statically admissible set of stress resultants with no moment greater than the full plastic value, so that, as a consequence of the limit theorems (8), the computed load factor would be low and hence on the safe side.

References

1. BAKER, J. F., HORNE, M. R. and HEYMAN, J. *Plastic Behaviour and Design, The Steel Skeleton, Vol. II.* London, Cambridge Univ. Press, 1956.
2. LAY, M. G. *The Experimental Bases for Plastic Design.* Lehigh Univ., Fritz Eng. Lab., Report No. 297.3, March 1963.
3. HEYMAN, J. "Plastic Design of Pitched Roof Portal Frames," *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 8, October 1957, 119-140.
4. VICKERY, B. J. "The Influence of Deformations and Strain Hardening on the Collapse Load of Rigid Frame Steel Structures," *Civil. Eng. Trans., I.E. Aust., CE3, No. 2* (1961), 103-114.

ism with a load factor smaller than the correct one. Consequently, it is desirable in any frame analysis to check the collapse mechanism arrived at by the computer to see whether or not it is valid. That shown in Fig. 10.10 for the rectangular rigid frame

5. HORNE, M. R. "Instability and the Plastic Theory of Structures," *Trans. Eng. Inst. of Canada*, 4, No. 2 (1960), 31-43.
6. HORNE, M. R. and MEDLAND, I. C. "Collapse Loads of Steel Frameworks Allowing for the Effect of Strain Hardening," *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 33, March 1966, 381-402.
7. WANG, C. K. "General Computer Program for Limit Analysis," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs., J. Struct. Div.*, 89, No. ST6 (1963), 101-117.
8. GREENBERG, H. J. and PRAGER, W. "Limit Design of Beams and Frames," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, 77, February 1951 (Separate No. 59), 12.
9. FINZI, L. "Unloading Processes in Elastic-Plastic Structures," *9th Int. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, 1957.
10. NEAL, B. G. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman & Hall, London, 1963.

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO

General Notes

1. The arrays are dimensioned and the data input from a file *PADATA* by statement lines 1000-1140. The degree of freedom is computed by lines 1150-1180.
2. Loads are input and the load vector $\{V_L\}$ assembled in statement lines 1190-1340.
3. Counters, variables, and arrays are set to zero and the nonzero parts of the member-stiffness matrix, namely, $\{SF\}$ and $\{SA\}$, established by statement lines 1350-1560.
4. The statics matrix $[A]$ for the whole frame is generated by lines 1570-1970.
5. The frame-stiffness matrix $\{ASAT\}$ is generated from $[A]$ and $\{SF\}$ and $\{SA\}$ by statement lines 1980-2090.
6. The stiffness matrix is augmented by the load vector and the equations solved by Gauss-Jordan elimination in statement lines 2100-2360.
7. Deflections larger than 1000 will terminate the run in lines 2370-2400. (Zero division in the equation solver is detected by statement line 2270.)
8. Stress resultants are calculated by statement lines 2410-2500, and the plastic-hinge location *NPH* and corresponding smallest-load factor *SALG* are detected by lines 2520-2660.
9. Cumulative deformations and stress resultants are calculated by lines 2670-2770 and output by statement lines 2780-3210.
10. The member-stiffness matrix is modified according to the location of the plastic hinge by statement lines 3220-3320, and the program will proceed to find the next plastic hinge.

pendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

PROGRAM EPFO

```

1000 DIMENSION A(18,24),ASAT(18,19),CORD(9,2),JTYPE(9,3)
1010 + MCON(8,2),SMA(8),AREA(8),PM(8),OLEN(8),VL(18).
1020 + SF(18,2),SA(8),CSAT(24),SATX(24),ALG(18),CM(18).
1030 + CT(8),CX(18)
1040 $FILE PADATA
1050 10 READ(1),JFN
1060 IF(JFN)20,20,30
1070 20 STOP
1080 30 READ(1),JCT,NM,E
1090 PRINT 40,JFN
1100 40 FORMAT(///3BH ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO.,I4//)
1110 DO 50 I=1,JCT
1120 50 READ(1),(CORD(I,J),J=1,2),(JTYPE(I,J),J=1,3)
1130 DO 60 I=1,NM
1140 60 READ(1),(MCON(I,J),J=1,2),SMA(I),AREA(I),PM(I)
1150 L=0
1160 DO 70 I=1,JCT
1170 DO 70 J=1,3
1180 70 L=L+JTYPE(I,J)
1190 READ(1),LN
1200 DO 72 I=1,L
1210 72 VL(I)=0.
1220 DO 77 I=1,LN
1230 READ(1),JN,(OLEN(J),J=1,3)
1240 LL=0
1250 LJ=JN-1
1260 IF(LJ)75,75,73
1270 73 DO 74 J=1,LJ
1280 DO 74 K=1,3
1290 74 LL=LL+JTYPE(J,K)
1300 75 DO 77 K=1,3
1310 IF(JTYPE(JN,K))77,77,76
1320 76 LL=LL+1
1330 VL(LL)=OLEN(K)
1340 77 CONTINUE
1350 NCYCL=0
1360 CLG=0.
1370 DO 90 I=1,L
1380 90 CX(I)=0.
1390 DO 270 I=1,NM
1400 J1=MCON(I,1)
1410 J2=MCON(I,2)
1420 X=CORD(J1,1)-CORD(J2,1)
1430 Y=CORD(J1,2)-CORD(J2,2)
1440 270 OLEN(I)=SQRT(X*X+Y*Y)
1450 DO 280 I=1,NM

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

1460 SF(2+1,2) = 4.0 * E * SMA(I) / OLEN(I)
1470 SF(2+1-1,1) = SF(2+1,2)
1480 SF(2+1,1) = 0.5 * SF(2+1,2)
1490 SF(2+1-1,2) = SF(2+1,1)
1500 280 SA(I) = E * AREA(I) / OLEN(I)
1510 M2 = 2 * NM
1520 M3 = 3 * NM
1530 DO 290 I = 1, M2
1540 290 CM(I) = 0.
1550 DO 291 I = 1, NM
1560 291 CT(I) = 0
1570 NJ = 0
1580 NK = 0
1590 DO 295 I = 1, L
1600 DO 295 J = 1, M3
1610 295 A(I,J) = 0.0
1620 DO 450 J = 1, JCT
1630 DO 440 M = 1, NM
1640 NA = NJ
1650 IF(J - MCON(M,1)) 340,330,340
1660 330 JF = MCON(M,2)
1670 MJ = 2 * M - 1
1680 MF = MJ + 1
1690 GO TO 380
1700 340 IF(J - MCON(M,2)) 440,350,440
1710 350 JF = MCON(M,1)
1720 MJ = 2 * M
1730 MF = MJ - 1
1740 360 X = CORD(JF,1) - CORD(J,1)
1750 Y = CORD(JF,2) - CORD(J,2)
1760 D = SQRT(X * X + Y * Y)
1770 S = Y / D
1780 C = X / D
1790 NN = 2 * NM + M
1800 IF(JTYPE(J,1)) 380,380,370
1810 370 NA = NA + 1
1820 A(NA,MJ) = S / D
1830 A(NA,MF) = A(NA,MJ)
1840 A(NA,NN) = -C
1850 380 IF(JTYPE(J,2)) 400,400,390
1860 390 NA = NA + 1
1870 A(NA,MJ) = -C / D
1880 A(NA,MF) = A(NA,MJ)
1890 A(NA,NN) = -S
1900 400 IF(JTYPE(J,3)) 420,420,410
1910 410 NA = NA + 1
1920 A(NA,MJ) = 1.0
1930 420 IF(NA - NK) 440,440,430

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

1940 430 NK = NA
1950 440 CONTINUE
1960 NJ = NK
1970 450 CONTINUE
1980 455 NCYCL = NCYCL + 1
1990 DO 480 J = 1, L
2000 DO 460 I = 1, M2
2010 K = ((I + 1) / 2) * 2 - 1
2020 460 CSAT(I) = SF(I,1) * A(J,K) + SF(I,2) * A(J,K + 1)
2030 DO 470 I = 1, NM
2040 K = M2 + I
2050 470 CSAT(K) = SA(I) * A(J,K)
2060 DO 480 I = 1, L
2070 ASAT(I,J) = 0.0
2080 DO 480 K = 1, M3
2090 480 ASAT(I,J) = ASAT(I,J) + A(I,K) * CSAT(K)
2100 DO 490 I = 1, L
2110 490 ASAT(I,L + 1) = VL(I)
2120 KJ = L + 1
2130 DO 610 I = 1, L
2140 IP1 = I + 1
2150 TEMP = ABS(ASAT(I,I))
2160 K = I
2170 DO 520 J = 1, L
2180 IF(ABS(ASAT(J,I)) - TEMP) 520,520,510
2190 510 K = J
2200 TEMP = ABS(ASAT(J,I))
2210 520 CONTINUE
2220 IF(K - I) 530,550,530
2230 530 DO 540 J = I, KJ
2240 TEMP = ASAT(I,J)
2250 ASAT(I,J) = ASAT(K,J)
2260 540 ASAT(K,J) = TEMP
2270 650 IF(ASAT(I,I)) 570,1000,570
2280 570 TEMP = 1.0 / ASAT(I,I)
2290 DO 580 J = I, KJ
2300 580 ASAT(I,J) = ASAT(I,J) * TEMP
2310 DO 610 J = 1, L
2320 IF(I - J) 590,610,590
2330 590 TEMP = ASAT(J,I)
2340 DO 600 K = IP1, KJ
2350 600 ASAT(J,K) = ASAT(J,K) - TEMP * ASAT(I,K)
2360 610 CONTINUE
2370 XLMT = 1000.
2380 DO 620 I = 1, L
2390 IF(ABS(ASAT(L,KJ)) - XLMT) 620,620,1020
2400 620 CONTINUE
2410 DO 850 I = 1, M3

```

Appendix

Chap. 10 Analysis of Plane Frameworks

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

2420 CSAT(I)=0.0
2430 DO 650 J=1,L
2440 650 CSAT(I)=CSAT(I)+A(J,I)*ASAT(J,L+1)
2450 DO 660 I=1,M2
2460 K=((I+1)/2)*2-1
2470 660 SATX(I)=SF(I,1)*CSAT(K)+SF(I,2)*CSAT(K+1)
2480 DO 670 I=1,NM
2490 K=M2+I
2500 670 SATX(K)=SA(I)*CSAT(K)
2510 CONTINUE
2520 DO 720 I=1,M2
2530 K=(I+1)/2
2540 ZERO=0.001*PM(K)
2550 IF(ABS(SATX(I))-ZERO)700,700,710
2560 700 ALG(I)=1.E10
2570 GO TO 720
2580 710 ALG(I)=(PM(K)-ABS(CM(I)))/ABS(SATX(I))
2590 720 CONTINUE
2600 SALG=1.E10
2610 DO 750 I=1,M2
2620 TEST=CM(I)*SATX(I)
2630 IF(TEST)750,730,730
2640 730 IF(ALG(I)-SALG)740,750,750
2650 740 SALG=ALG(I)
2660 NPH=1
2670 750 CONTINUE
2680 DO 760 I=1,M3
2690 760 SATX(I)=SALG*SATX(I)
2700 CLG=CLG+SALG
2710 DO 770 I=1,M2
2720 770 CM(I)=CM(I)+SATX(I)
2730 DO 780 I=1,NM
2740 K=M2+I
2750 780 CT(I)=CT(I)+SATX(K)
2760 DO 790 I=1,L
2770 ASAT(I,K)=ASAT(I,K)+SALG
2780 790 CX(I)=CX(I)+ASAT(I,K)
2790 I=(NPH+1)/2
2800 K=(NPH/2)*2-NPH
2810 IF(K)792,793,793
2820 792 J=MCON(L,1)
2830 GO TO 799
2840 793 J=MCON(L,2)
2850 799 PRINT 800,NCYCL,I
100 FORMAT(///18H PLASTIC HINGE, I3,18H FORMED IN MEMBER,
+ I3,12H NEAR JOINT, I3)
2880 PRINT 810,CLG
2890 810 FORMAT(18H WHEN LOAD FACTOR=,F10.5)

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

2900 CONTINUE
2910 PRINT 820
2920 820 FORMAT(///24H CUMULATIVE DEFORMATIONS/)
2930 PRINT 821
2940 821 FORMAT(42H JOINT X-MOVEMENT Y-MOVEMENT ROTATION/)
2950 LL=0
2960 DO 830 I=1,JCT
2970 DO 827 J=1,3
2980 IF(JTYPE(I,J))825,825,828
2990 825 CSAT(J)=0.
3000 GO TO 827
3010 828 LL=LL+1
3020 CSAT(J)=CX(LL)
3030 827 CONTINUE
3040 830 PRINT 840,I,(CSAT(J),J=1,3)
3050 840 FORMAT(I5,3F12.5)
3060 PRINT 850
3070 850 FORMAT(///18H CUMULATIVE MOMENTS/)
3080 PRINT 851
3090 851 FORMAT(61H MEMBER TERMINAL APPLIED MOMENTS NEAR
+ JOINTS PLASTIC VALUE/)
3100 DO 880 I=1,NM
3110 K=2*I-1
3120 880 PRINT 870,I,CM(K),CM(K+1),MCON(I,1),MCON(I,2),PM(I)
3140 870 FORMAT(I5,2X,2F13.4,I5,4H AND,I3,F14.4)
3150 PRINT 880
3160 880 FORMAT(///20H CUMULATIVE TENSIONS/)
3170 PRINT 885
3180 885 FORMAT(18H MEMBER TENSION/)
3190 DO 890 I=1,NM
3200 K=M2+I
3210 890 PRINT 900,I,CT(I)
3220 900 FORMAT(I5,F13.3)
3230 ITEST=((NPH/2)*2)-NPH
3240 IF(ITEST)910,920,920
3250 910 SF(NPH+1,2)=0.75*SF(NPH+1,2)
3260 SF(NPH+1,1)=0.0
3270 SF(NPH,1)=0.0
3280 SF(NPH,2)=0.0
3290 GO TO 455
3300 920 SF(NPH-1,1)=0.75*SF(NPH-1,1)
3310 SF(NPH-1,2)=0.0
3320 SF(NPH,1)=0.0
3330 SF(NPH,2)=0.0
3340 GO TO 455
3350 1000 PRINT1"ZERO DIVISION IN EQUATION SOLUTION"
3360 GO TO 1040
3370 1020 PRINT 1030,XLMT,NCYCL

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

3380 1030 FORMAT(/25H DEFORMATIONS LARGER THAN,1X,F8.1,13H IN
3390 + CYCLE NO.,14//)
3400 1040 PRINT 1050,JFN
3410 1050 FORMAT(/33H ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO.,13//)
3420 GO TO 10
3430 END
    
```

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME IN FIG. 10.7 USING PROGRAM EPFO

Member and load data and the joint and member identification are all shown in Fig. 10.7. Program EPFO will analyze the frame if the data are held in a file PADATA in the following sequence.

7					Frame number, joints, members, elastic modulus
8	8	30000			
0	320	1	1	1	Joint coordinates and type of restraint
150	320	1	1	1	
300	320	1	1	1	
0	170	1	1	1	
150	170	1	1	1	
300	170	1	1	1	
0	0	0	0	0	
300	0	0	0	0	
1	2	1000	20	4500	Member data: connections, inertias, areas and full plastic moment values
2	3	1000	20	4500	
4	5	1000	20	4500	
5	6	1000	20	4500	
1	4	500	25	4000	
3	6	500	25	4000	
4	7	500	25	4000	
6	8	500	25	4000	
4					Number of loaded joints, joint number, and load details for each of 4 joints
1	5	0	0		
4	10	0	0		
2	0	-30	0		
5	0	-30	0		
-1					No additional frames

FRAME ANALYSIS BY PROGRAM EPFO

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 7

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 4 NEAR JOINT 8
WHEN LOAD FACTOR=2.78839

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.29598	-.02253	.00572
2	1.28749	-.75690	-.00056
3	1.27899	-.03213	-.00328
4	.82326	-.01511	.00548
5	.83365	-.58992	-.00151
6	.83505	-.02282	.00071
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1528.8272	-4038.8124	1 AND 2 4500.0000
2	4038.8123	2947.5175	2 AND 3 4500.0000
3	-820.0844	-3613.8425	4 AND 5 4500.0000
4	3813.8424	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	1528.8272	1478.8988	1 AND 4 4000.0000
6	-2947.5178	-2149.3085	3 AND 6 4000.0000
7	-858.8142	-1625.3085	4 AND 7 4000.0000
8	-2350.6935	-2475.5974	6 AND 8 4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-33.979
2	-33.979
3	6.589
4	6.589
5	-37.090
6	-46.562
7	-68.849
8	-100.854

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 1 NEAR JOINT 2
WHEN LOAD FACTOR=3.09097

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.65939	-.02499	.00665
2	1.65022	-.84848	-.00071
3	1.64108	-.03559	-.00358
4	1.03358	-.01892	.00700
5	1.03517	-.75181	-.00148
6	1.03678	-.02512	.00247
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

Appendix

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1555 1385	1 AND 2	4500.0000
2	4499 9999	2 AND 3	4500.0000
3	-875 3311	4 AND 5	4500.0000
4	4267.0108	5 AND 6	4500.0000
5	1555 1385	1 AND 4	4000.0000
6	-3354 2146	3 AND 6	4000.0000
7	-749 4846	4 AND 7	4000.0000
8	-2356 0306	6 AND 8	4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-38.655
2	-36.655
3	6.370
4	6.370
5	-40.368
6	-52.361
7	-74.650
8	-110.808

PLASTIC HINGE 3 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 5
WHEN LOAD FACTOR=3.20328

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.80385	-0.2591	.00750
2	1.79407	-1.02136	-.00213
3	1.78429	-.03687	-.00418
4	1.11243	-.01780	.00750
5	1.11455	-.80837	-.00147
6	1.11667	-.02596	.00330
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1732.9770	1 AND 2	4500.0000
2	4499.9999	2 AND 3	4500.0000
3	-914.6529	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999	5 AND 6	4500.0000
5	1732.9770	1 AND 4	4000.0000
6	-3681.6762	3 AND 6	4000.0000
7	18.1903	4 AND 7	4000.0000
8	3.4091	6 AND 8	4000.0000

Chap. 10 Analysis of Plane Frameworks

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-39.122
2	-39.122
3	8.481
4	8.481
5	-41.553
6	-54.545
7	-77.651
8	-114.545

PLASTIC HINGE 4 FORMED IN MEMBER 6 NEAR JOINT 3
WHEN LOAD FACTOR=3.28408

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	2.07252	-.02659	0.0812
2	2.06216	-1.12659	-.00309
3	2.05181	-.03778	-.00434
4	1.25119	-.01822	.00908
5	1.25362	-1.13720	-.00366
6	1.25605	-.02644	.00460
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1778.3386	1 AND 2	4500.0000
2	4500.0000	2 AND 3	4500.0000
3	-1278.3381	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999	5 AND 6	4500.0000
5	1778.3383	1 AND 4	4000.0000
6	-4000.0000	3 AND 6	4000.0000
7	-691.9806	4 AND 7	4000.0000
8	-2288.2812	6 AND 8	4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-41.411
2	-41.411
3	9.718
4	9.718
5	-41.856
6	-56.607
7	-80.378
8	-116.607

Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF THE NEAL-FINZI CONTINUOUS BEAM IN FIG. 10.9

The joint-numbering system begins from the left-hand support as does the member identification, so that the data would be prepared in the following sequence:

8					Frame number, joints, members, elastic modulus
5	4	30,000			
Joint data					
0	0	0	0	1	
300	0	1	0	1	
400	0	1	1	1	
500	0	1	1	1	
600	0	1	0	1	
Member data					
1	2	100	10	100	
2	3	100	10	100	
3	4	100	10	100	
4	5	100	10	100	
Load data					
2					
3	0	-1.3	0		
4	0	-0.7	0		
-1					

Note: The dimensions and beam properties have been factored by 100 in comparison with the data in Fig. 10.9.

NEAL-FINZI BEAM ANALYSIS BY PROGRAM EPFO

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 8

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 2 NEAR JOINT 3
WHEN LOAD FACTOR = 1.32353

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	.00000	.00000	-.00114
2	.00000	.00000	.00228
3	.00000	-.24837	.00175
4	.00000	-.25899	-.00152
5	.00000	.00000	-.00313

Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	.0000	88.3824	1 AND 2 100.0000
2	-68.3824	-100.0000	2 AND 3 100.0000
3	100.0000	-96.3235	3 AND 4 100.0000
4	96.3235	-.0000	4 AND 5 100.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	.000
2	.000
3	.000
4	.000

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 4
WHEN LOAD FACTOR = 1.42857

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	.00000	.00000	-.00143
2	.00000	.00000	.00288
3	.00000	-.32540	.00143
4	.00000	-.30159	-.00190
5	.00000	.00000	-.00357

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	.0000	85.7143	1 AND 2 100.0000
2	-85.7143	-100.0000	2 AND 3 100.0000
3	100.0000	-100.0000	3 AND 4 100.0000
4	100.0000	-.0000	4 AND 5 100.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	.000
2	.000
3	.000
4	.000

DEFORMATIONS LARGER THAN 1000.0 IN CYCLE NO. 3

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO. 8

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

PLASTIC HINGE 5 FORMED IN MEMBER 8 NEAR JOINT 8
WHEN LOAD FACTOR = 3.42322

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	4.40574	-.02932	.02088
2	4.39440	-3.20008	-.01692
3	4.38306	-.03778	-.01817
4	2.01805	-.02011	.01801
5	2.02101	-2.83586	-.01365
6	2.02397	-.02844	.01305
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2404.4823	-4500.0000	1 AND 2 4500.0000
2	4500.0017	4000.0020	2 AND 3 4500.0000
3	-1904.4811	-4500.0000	4 AND 5 4500.0000
4	4499.9999	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	2404.4811	1831.1227	1 AND 4 4000.0000
6	-4000.0000	-2803.0290	3 AND 6 4000.0000
7	73.3582	-3106.6156	4 AND 7 4000.0000
8	-1896.9710	-4000.0000	6 AND 8 4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-45.353
2	-45.354
3	11.842
4	11.842
5	-48.030
6	-58.667
7	-88.726
8	-118.667

PLASTIC HINGE 6 FORMED IN MEMBER 7 NEAR JOINT 7
WHEN LOAD FACTOR = 3.49583

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	6.12163	-.03074	.02890
2	6.10957	-4.48691	-.02549
3	6.09751	-.03778	-.02674
4	2.68143	-.02110	.02465
5	2.68574	-3.71442	-.02084

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

6	2.69008	-.02644	.01860
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2731.6916	-4500.0000	1 AND 2 4500.0000
2	4500.0020	4000.0024	2 AND 3 4500.0000
3	-2231.6903	-4500.0000	4 AND 5 4500.0000
4	4499.9999	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	2731.6906	1881.2278	1 AND 4 4000.0000
6	-4000.0000	-3234.8830	3 AND 6 4000.0000
7	350.4624	-4000.0000	4 AND 7 4000.0000
8	-1265.1170	-4000.0000	6 AND 8 4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-48.232
2	-48.233
3	17.261
4	17.261
5	-48.211
6	-58.667
7	-93.089
8	-118.667

DEFORMATIONS LARGER THAN 1000 0 IN CYCLE NO. 7

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO. 7

INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA
MÉTODO ITERATIVO.

Agustin Deméneghi Colina*

La interacción suelo-estructura se puede resolver mediante un método iterativo. Esto tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o un programa de computadora que sustituye al terreno de cimentación por "resortes", que representan el módulo de reacción de dicho terreno. Dado que no se conoce *a priori* la constante del resorte, pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un método iterativo, que consiste en suponer valores iniciales de las "constantes de los resortes", y con ellas computar por una parte las deformaciones de la estructura, y por otra las deformaciones del suelo; la diferencia entre deformaciones de estructura y suelo permite ajustar la "constante del resorte"; el procedimiento se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y terreno. Esta técnica tiene la ventaja de que converge rápidamente, de tal forma que usualmente a la tercera iteración se alcanzan resultados satisfactorios.

Las expresiones que se emplean son las siguientes:

a) En el terreno de cimentación se entra con las cargas (o reacciones) r_i y se determinan las deformaciones δ_i con la matriz de flexibilidades del suelo (se puede iniciar con la reacción uniforme igual a la sumatoria de cargas verticales entre la longitud total de los cimientos); los módulos de reacción K_{vi} se obtienen

$$K_{vi} = \frac{r_i d_i}{\delta_i} \quad (1)$$

b) En la estructura se entra con las K_{vi} y se calculan las deformaciones δ_i ; las reacciones r_i por unidad de longitud (en t/m) se obtienen

$$r_i = \frac{K_{vi} \delta_i}{d_i} \quad (2)$$

donde d_i es la longitud en que actúa r_i .

Con estos valores de r_i se entra nuevamente al suelo (inciso c), y el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y suelo.

* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Ilustraremos el proceso anterior con el ejemplo del capítulo anterior. Cabe aclarar que no se obtendrán los mismos resultados, pues en este ejemplo en particular se supone que la reacción del terreno (a través de los "resortes") está concentrada en los nudos mientras que en el ejemplo anterior la reacción del suelo se tomaba como repartida. Si se usaran más "resortes" se alcanzaría una mayor coincidencia entre ambos métodos.

En el terreno de cimentación se había obtenido

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (3)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (4)$$

En la estructura la matriz de rigidez K no cambia. Los vectores de empotramiento y de cargas concentradas valen

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -7.4 & -35 \\ -14.8 & -50 \\ -7.4 & -35 \\ 4.9333 \\ -4.9333 \end{bmatrix} \quad \underline{P}^c = \begin{bmatrix} K_{v1} \delta_1 \\ K_{v2} \delta_2 \\ K_{v3} \delta_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la simetría $\delta_1 = \delta_3$, $\delta_4 = -\delta_6$, y aplicando la ecuación matricial

$$K \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$(10\,939.1 + K_{v1}) \delta_1 - 10\,939.1 \delta_2 - 21\,878.2 \theta_4 - 42.4 = 0 \quad (5)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + (21\,878.2 + K_{v2}) \delta_2 + 43\,756.4 \theta_4 - 64.8 = 0 \quad (6)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + 21\,878.2 \delta_2 + 58\,341.9 \theta_4 + 4.9333 = 0 \quad (7)$$

1ra iteración

Iniciemos el proceso considerando una reacción uniforme

$$r = (35(2) + 50 + 2.7(8)) / 8 = 18.7 \text{ t/m}$$

Sean $r_1 = r_2 = 18.7 \text{ t/m}$

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 3, 4 y 1

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	t/m	t/m
0.015944	0.031743	2345.7	2356.4

Estructura. Con los K_{v1} anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	τ/m	τ/m
0.020700	0.022280	24.28	13.12

2da iteración

Terreno de cimentación. Con los r_1 anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	τ/m	τ/m
0.020312	0.022979	2390.7	2283.8

Estructura. Con los K_{v1} anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	τ/m	τ/m
0.020587	0.022403	24.61	12.79

3ra iteración

Terreno de cimentación. Con los r_1 anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	τ/m	τ/m
0.020570	0.022461	2392.8	2277.7

Estructura. Con los K_{v1} anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	τ/m	τ/m
0.020589	0.022422	24.63	12.77

Apreciamos que en la tercera iteración prácticamente coinciden las deformaciones de suelo y estructura.

3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

3.6.1 Deformación vertical de un rectángulo cargado

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isotrópico, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida q , está dado por la fórmula de Schleicher (Terzaghi 1943)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left(L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde B = ancho del rectángulo
 L = longitud del rectángulo
 E = módulo de elasticidad del medio
 ν = relación de Poisson del medio

Si el cimiento es cuadrado, la ec 3.19 se convierte en

$$\delta = \frac{2 q B (1 - \nu^2) \ln (1 + \sqrt{2})}{\pi E} \quad (3.19')$$

$$\delta = \frac{1.763 q B (1 - \nu^2)}{\pi E} \quad (3.19'')$$

La rigidez lineal vertical se define como el cociente de la carga vertical concentrada Q_v entre el asentamiento vertical que produce dicha carga. En un cimiento de planta cuadrada de ancho B , la rigidez lineal vertical está dada por

$$K_v = \frac{0.891 E B}{1 - \nu^2} \quad (3.19''')$$

(En la ec 3.19''' el asentamiento se calcula bajo el centro del cuadrado.)

Cuando el medio elástico tiene un espesor H , el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme q está dado por la fórmula de Steinbrenner (Juárez Badillo y Rico 1980)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/\pi E] \left[L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{L^2 + H^2}}{L (B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{B^2 + H^2}}{B (L + A)} \right] \\ + (q/2\pi E) (1-\nu-2\nu^2) H \operatorname{ang} \tan \frac{L B}{H A} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + H^2} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig 3.12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y ν , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_z = (1/E) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.22)$$

donde σ_z , σ_x y σ_y son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y ϵ_z es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por

$$\delta = \epsilon_z H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato.

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

3.6.2 Circulo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert 1973)

$$\delta_v = \frac{\pi (1 - \nu^2) R q}{2 E} \quad (3.24)$$

El desplazamiento horizontal de un círculo sometido a una carga horizontal Q_h está dado por (Richart et al 1970)

$$\delta_h = \frac{(7 - 8 \nu) Q_h}{32 (1 - \nu) G R} \quad (3.25)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale (Richart et al 1970)

$$\theta = [3 (1 - \nu) M] / 8 G R^3 \quad (3.26)$$

en que $G = E / 2 (1 + \nu)$ (3.26)

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal

vertical se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_v = Q_v / \delta_v = 2 E R / (1 - \nu^2) \quad (3.27)$$

La rigidez lineal horizontal se define como la carga horizontal entre el desplazamiento horizontal que produce:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} = \frac{32 (1 - \nu) G R}{7 - 8 \nu} \quad (3.28)$$

La rigidez angular o rigidez a la rotación se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_r = M / \theta = 8 G R^3 / 3 (1 - \nu) \quad (3.29)$$

3.6.3 Giro de un rectángulo sometido a momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento M (fig 3.13) se puede calcular determinando la carga de tipo trapezoidal (ecs 3.14 y 3.15) o triangular (ecs 3.17 y 3.18) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número n de cargas uniformes (fig 3.9) y se determinan los esfuerzos normales σ_z , σ_x y σ_y con las ecs 3.6 a 3.9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ec 3.22) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec 3.23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig 3.9, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6.1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo I en el sentido que se está analizando, y se determina el radio equivalente a un círculo que tenga el mismo momento de inercia del rectángulo (Normas de Sismo 1987):

$$R = (4 I / \pi)^{1/4} \quad (3.30)$$

Con el radio equivalente R se emplea la ec 3.25 para determinar el giro de la cimentación de planta rectangular.

El criterio anterior es válido cuando la longitud del cimiento es similar al ancho del mismo. Para valores de la longitud mayores que

tres veces el ancho del cimiento, es conveniente usar la fórmula de Fröhlich para un cimiento continuo (de longitud infinita) de ancho B (Zeevaert 1973)

$$\theta = \text{ang tan} [16 (1 - \nu^2) \bar{M} / \pi E B^2] \quad (3.30)$$

donde \bar{M} es el momento por unidad de longitud del cimiento (t.m/m).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

TEMA: REQUISITOS DE DUCTIBILIDAD PARA ESTRUCTURAS DE CONCRETO

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ L UIS TRIGOS SUÁREZ
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

$$\Sigma A_u \geq 0.3 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$$\Sigma A_u \geq 0.19 \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

ΣA_u = suma de áreas de todas las ramas de estribos en la dirección considerada

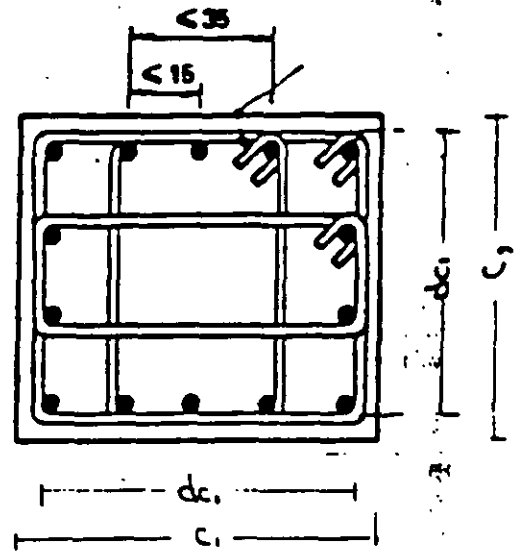
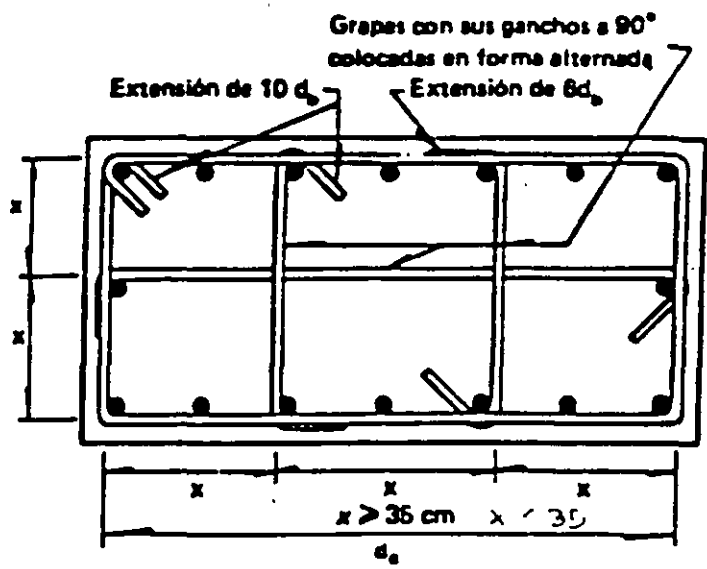
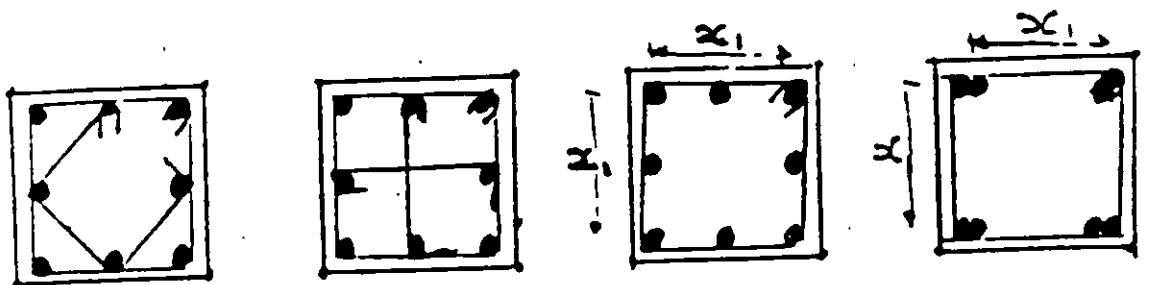


Fig. 10.10 Requisitos de distribución de refuerzo en columnas de estribos.



10.
 Figura 9.9 Combinaciones de estribos y grapas admisibles para confinamiento de columnas, según el Reglamento ACI 83.



No son aconsejables
 Admisibles si $x_1 \leq 30$

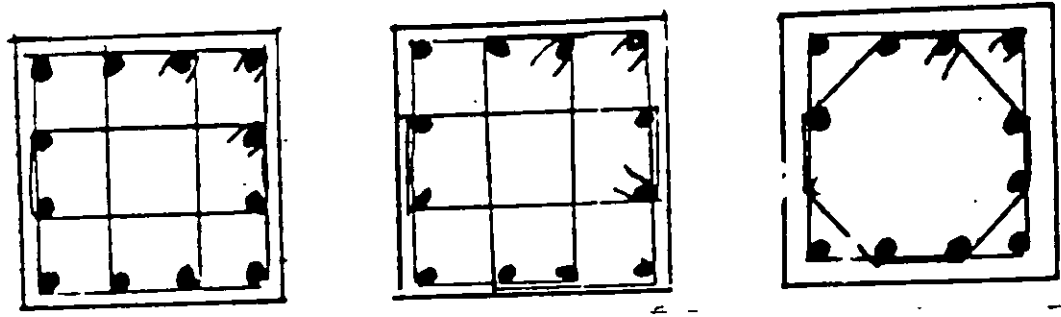
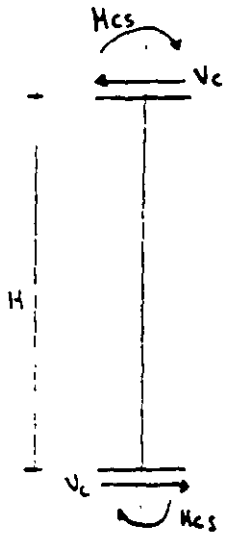


Fig. 9.9 - Arrangos admisibles de refuerzo en columnas de miembros de concreto

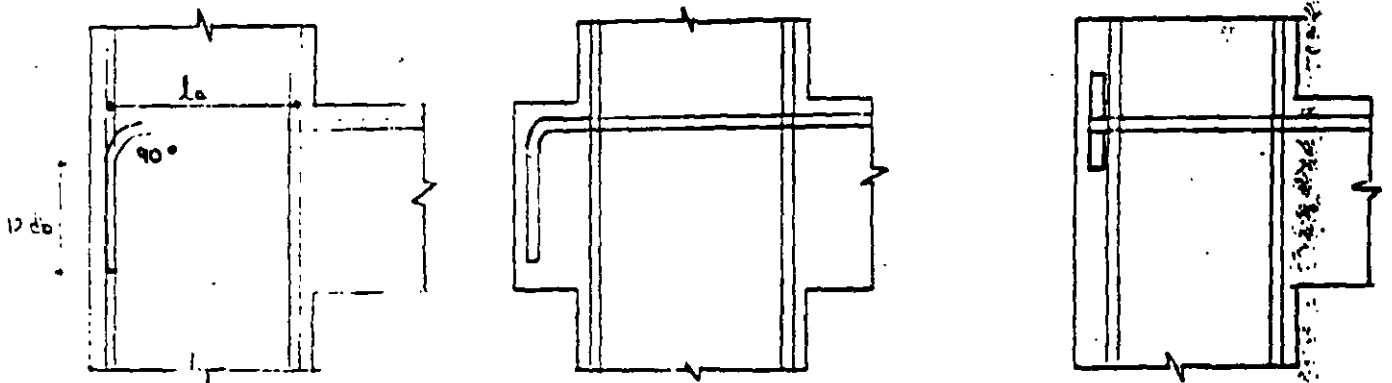


$$V_c = \frac{H_{cs} + H_{cs}}{H}$$

$$H_c \geq 1.5(\Sigma M_u)$$

- En el extremo inferior de columnas de plantas bajas, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente.
- En el extremo superior de columnas del último entrepiso se usará $1.5 \leq M_u$.

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por cortante de las columnas de marcos dúctiles.



$$l_d \geq \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}}$$

15 cm
8 db

NOTA: 30% menor en concreto ligero

a) Anclaje con gancho extremo

b) Viga con saliente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria

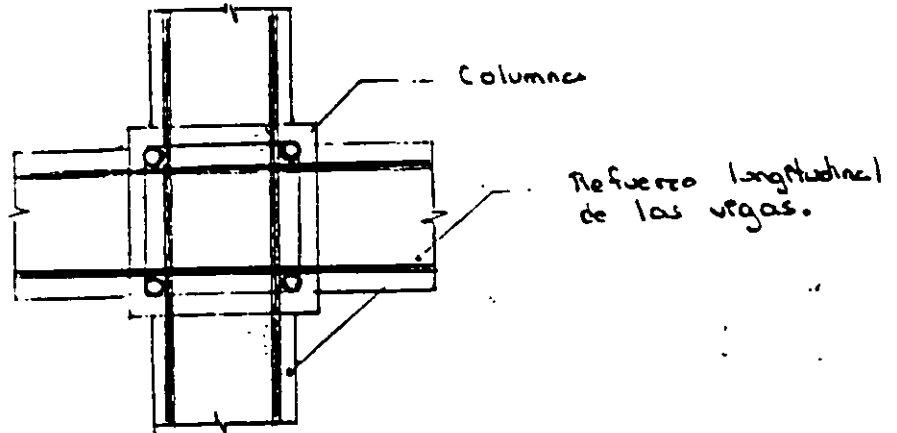
c) Anclaje mecánico

Fig. 10.15 Anclaje del refuerzo longitudinal en Vigas extremas de marcos dúctiles.

UNION VIGA-COLUMNA

Marco Doble

1) Requisitos generales

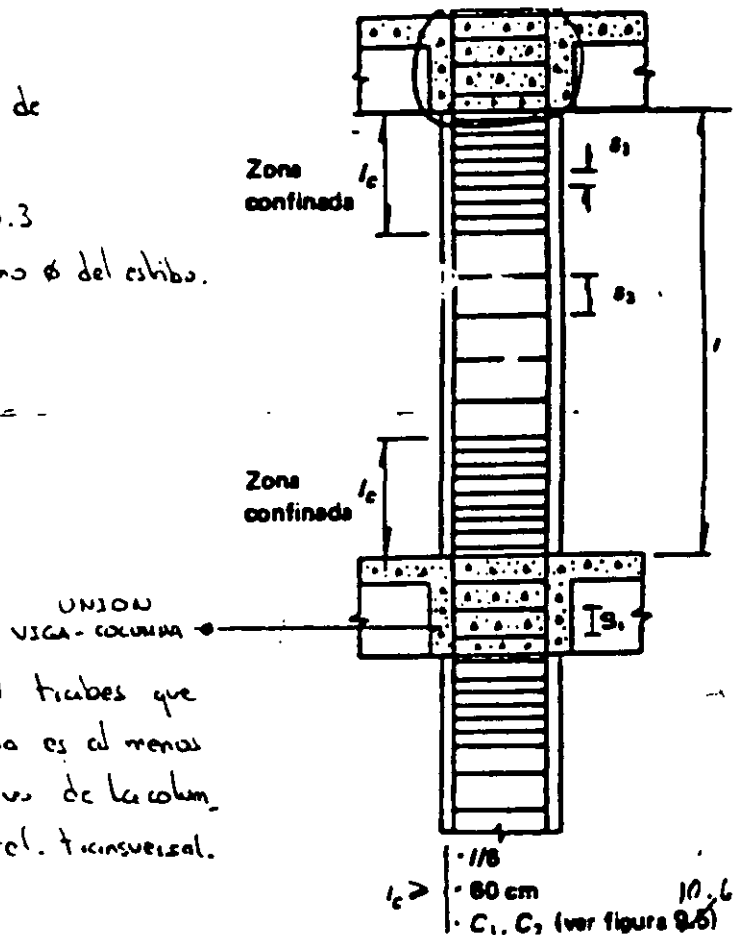


El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

1) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el 42
- El espaciamiento no debe ser de $\phi \geq \text{No.3}$
- Puede alternarse con grupos del mismo ϕ del estibo.

$$s_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\text{min}} \\ 10 \text{ cm.} \end{cases}$$

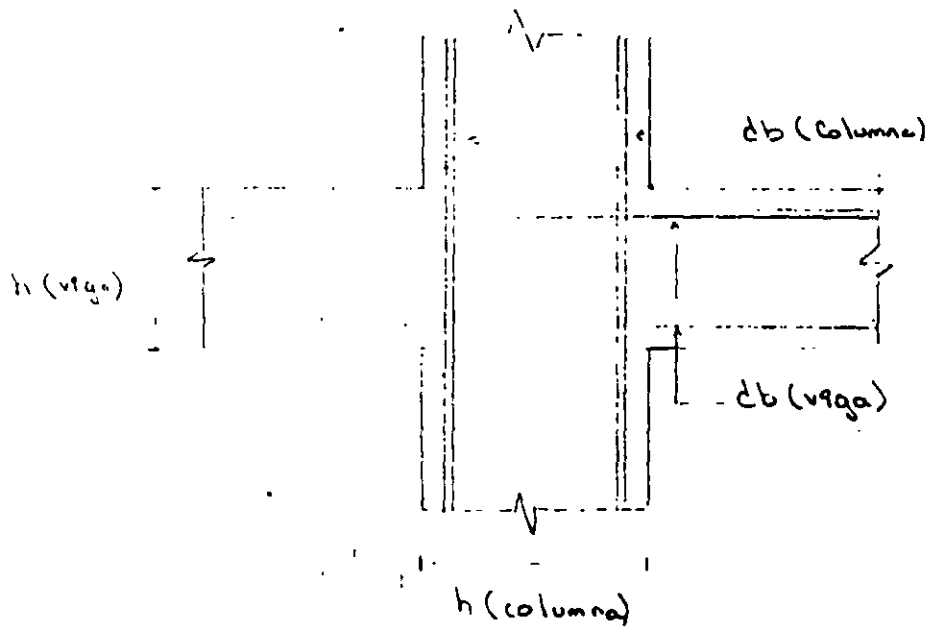


Si el núcleo está confinado por 4 tiras que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del ref. transversal.

$$\frac{P_u}{A_g f_c} \geq 0.3$$

Entonces: $h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

NOTA: también esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.



GENERALIDADES.

Se hará de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que las usadas en la columna en las secciones próximas a dicha sección, si es igual que en la zona de confinamiento).

Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torsiones causados por la excentricidad.

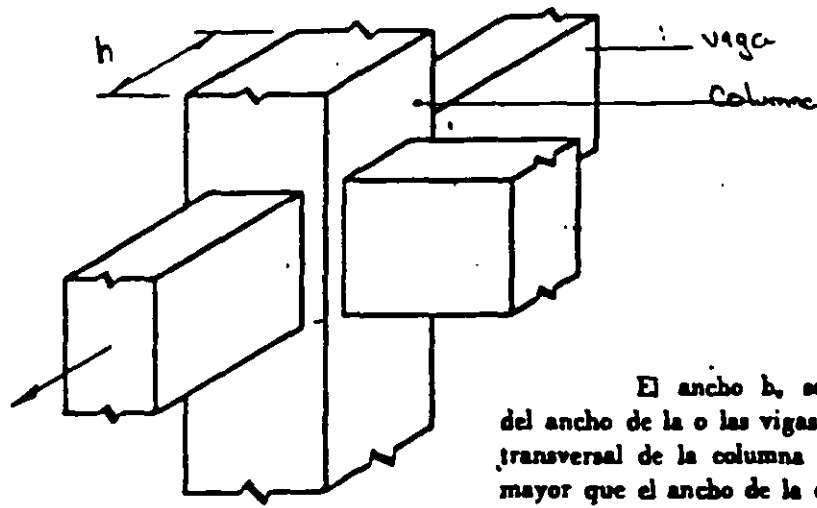
c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

en zonas confinadas
en zonas no confinadas

$$V_u = 5.5 F_u \sqrt{f_c} b_e h$$

$$V_u = 4.5 F_u \sqrt{f_c} b_e h$$



El ancho b_e se tomará igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero mayor que el ancho de la o las vigas más h .

d) Ancho del refuerzo

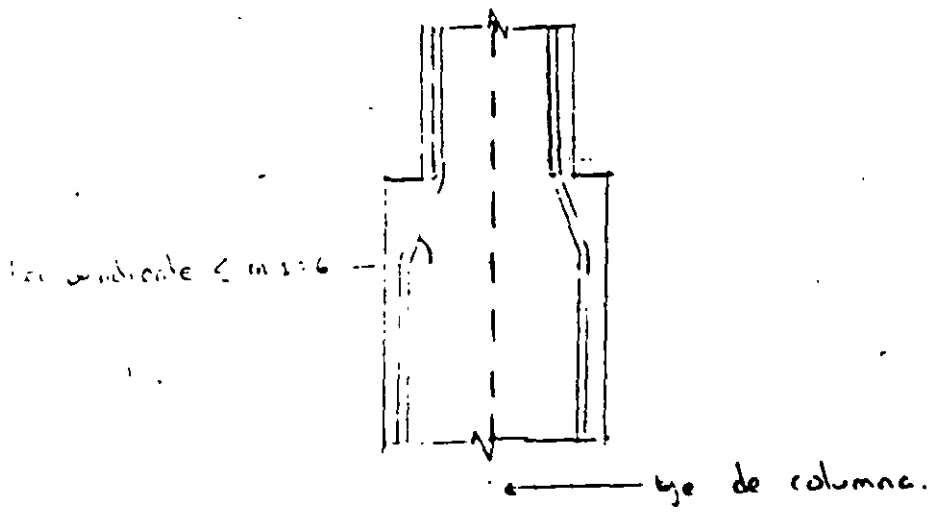
Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectas a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

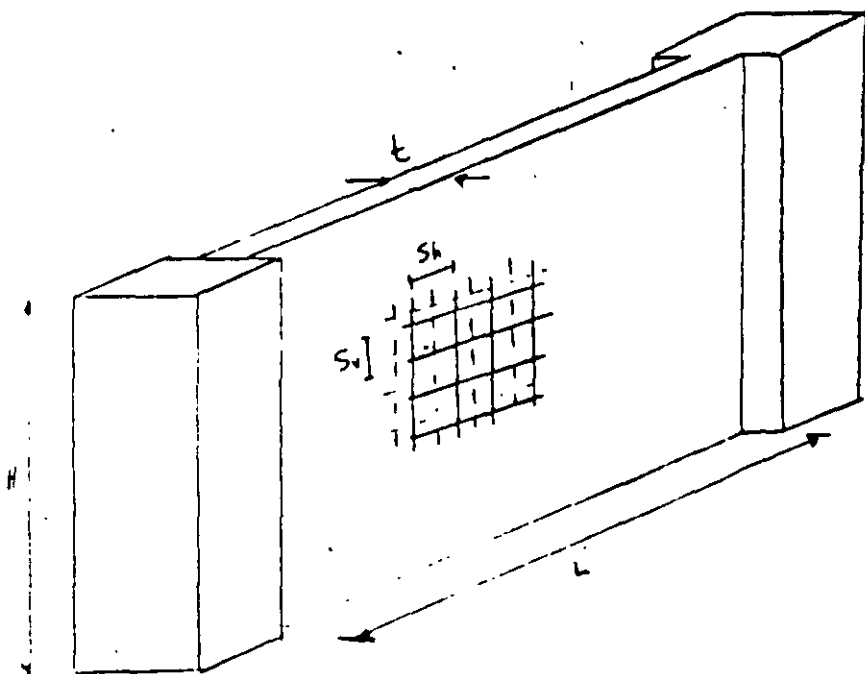
$$h(\text{col.})/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 20$$

$h(\text{col.})$ es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas

Es en la columna superior del nudo cumple:





Limitaciones geométricas

$$L/t \leq 70$$

$$t \geq \begin{cases} 13 \text{ cms.} \\ 0.06 H \text{ (altura no restringida lateralmente).} \end{cases}$$

Refuerzo mínimo

$$P_u, P_n \geq 0.0025$$

$$S_u, S_n \leq 35 \text{ cm.}$$

$$P_n = \frac{A_{sh}}{t S_u} \quad P_u = \frac{A_{s_v}}{t S_n}$$

Fig. 10.18 Requisitos geométricos y de refuerzo en muros de concreto

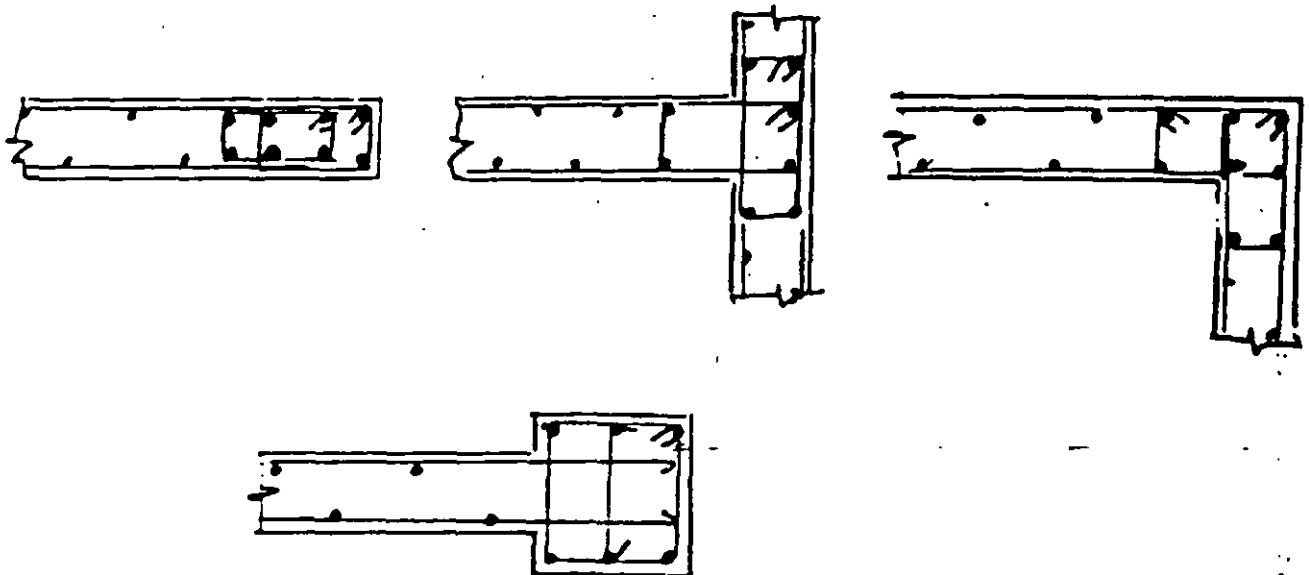
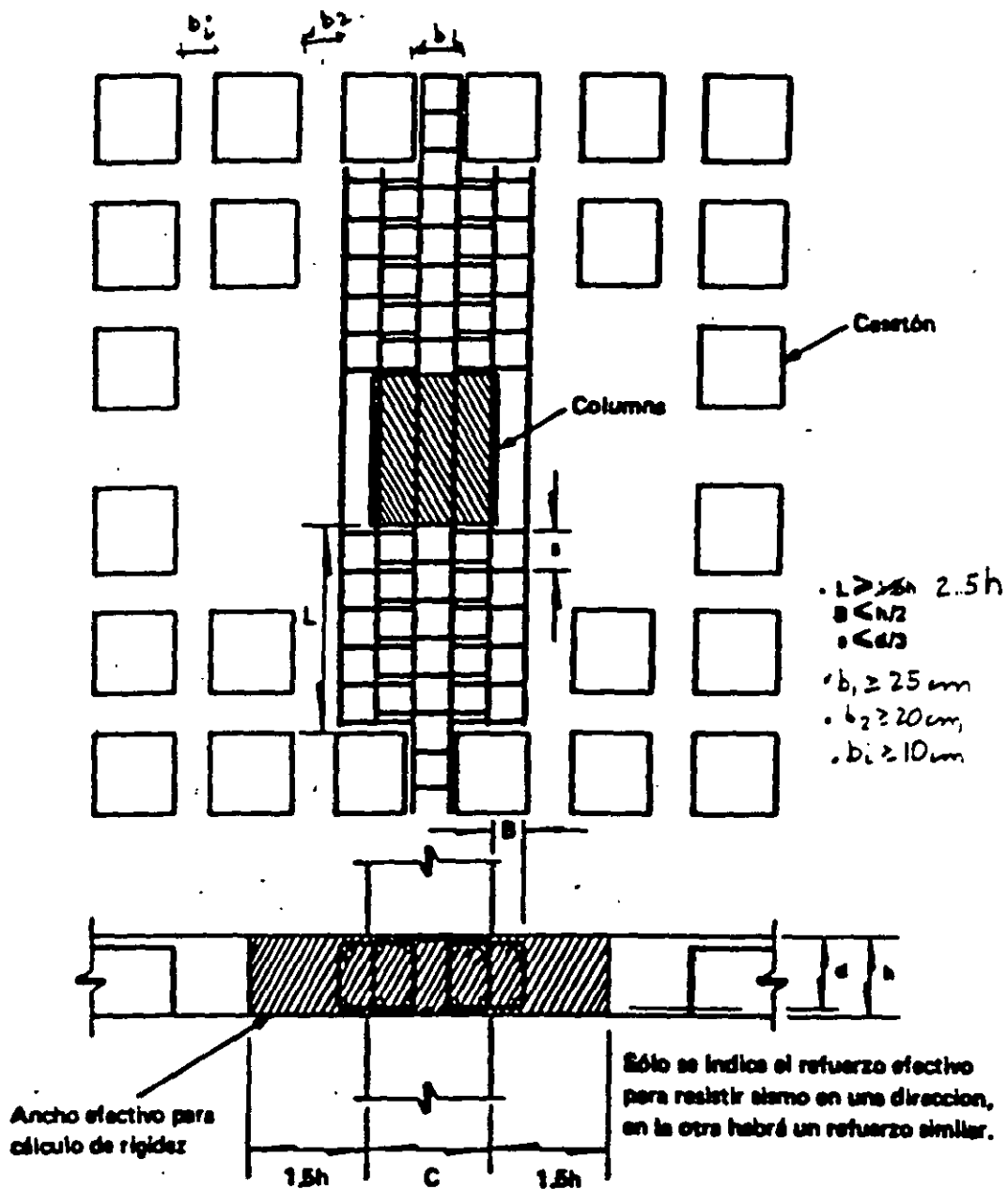
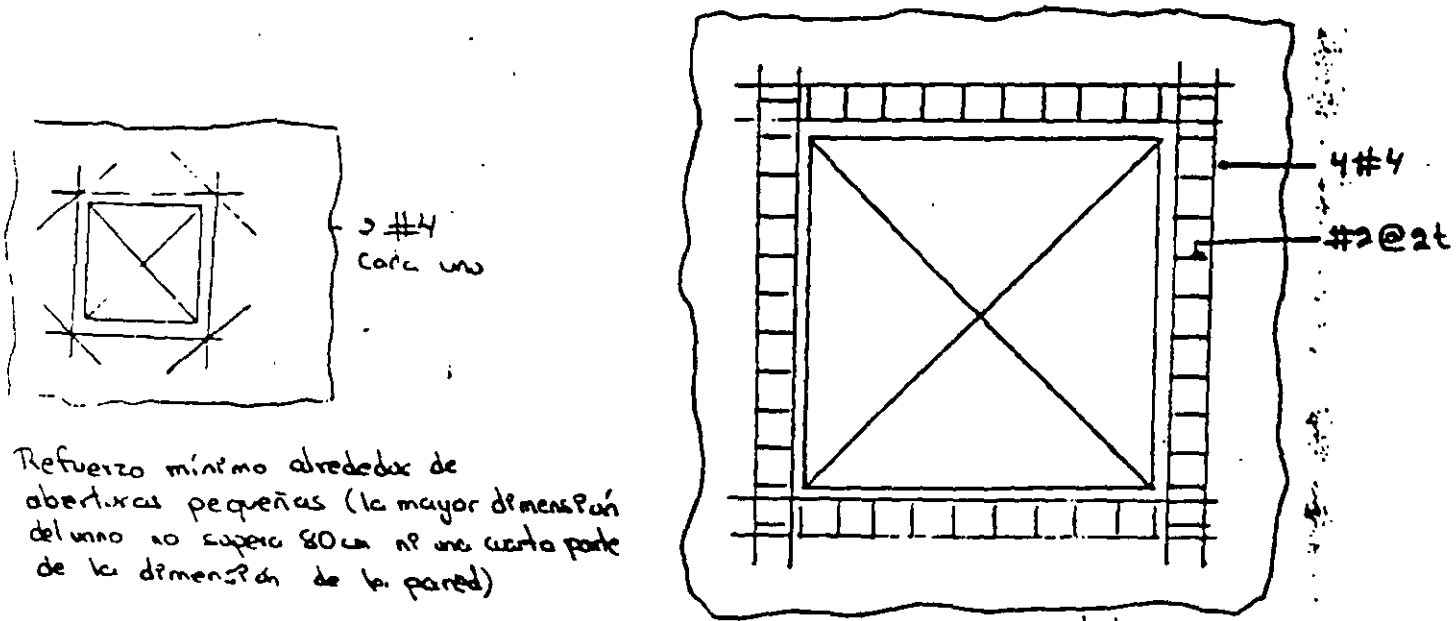


Fig. 10.14 Refuerzo en los extremos de muros



$n(\text{columna})/d_o(\text{barras de losca}) \geq 20$ $h(\text{columna}) - e$ es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losca consideradas.
 $h(\text{losca})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 1.5$

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losca-plano-columna



Refuerzo mínimo alrededor de aberturas pequeñas (la mayor dimensión del vano no supera 80 cm ni una cuarta parte de la dimensión de la pared)

Refuerzo mínimo alrededor de aberturas mayores.

Fig. 10.20 Detalles recomendados de refuerzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

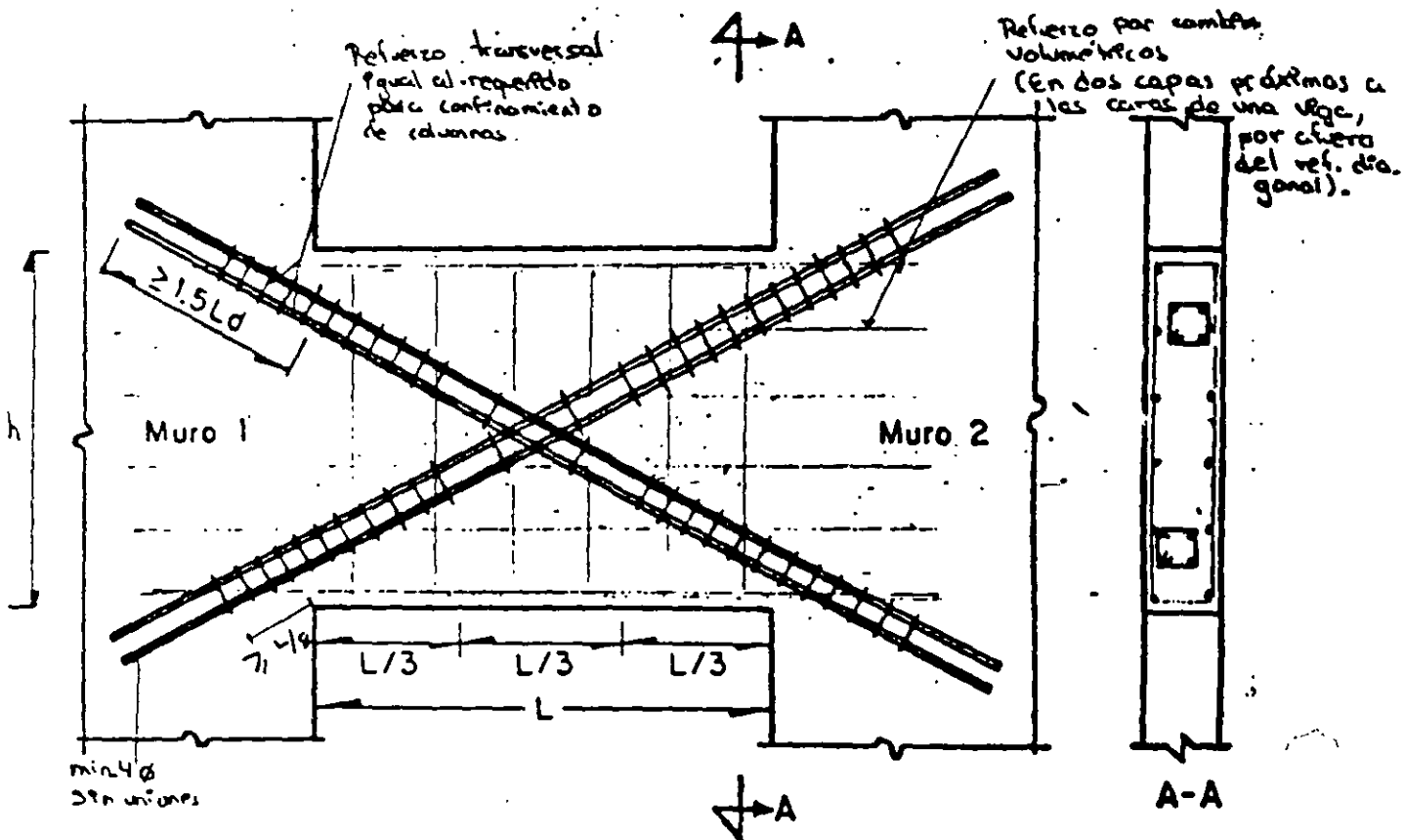
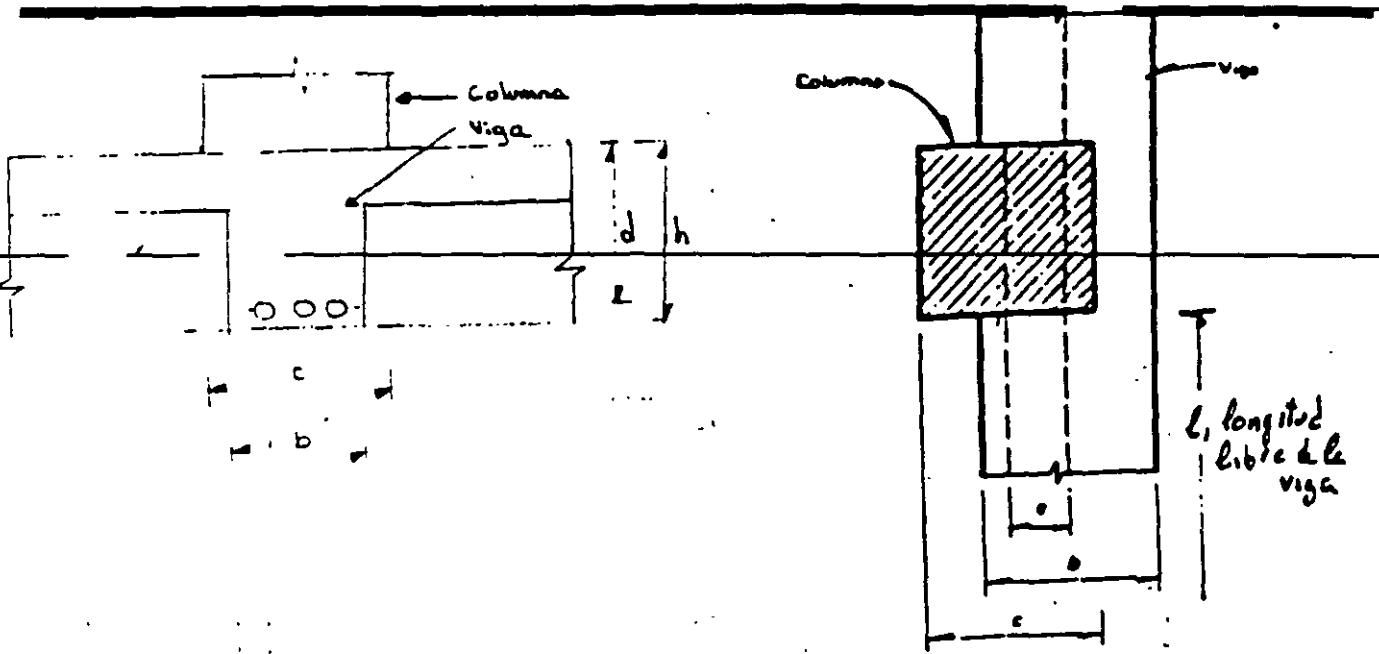


Fig. 10.21 Refuerzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto (para $L/h \leq 2$)



a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$b \geq 25 \text{ cm}$$

$$b \leq c$$

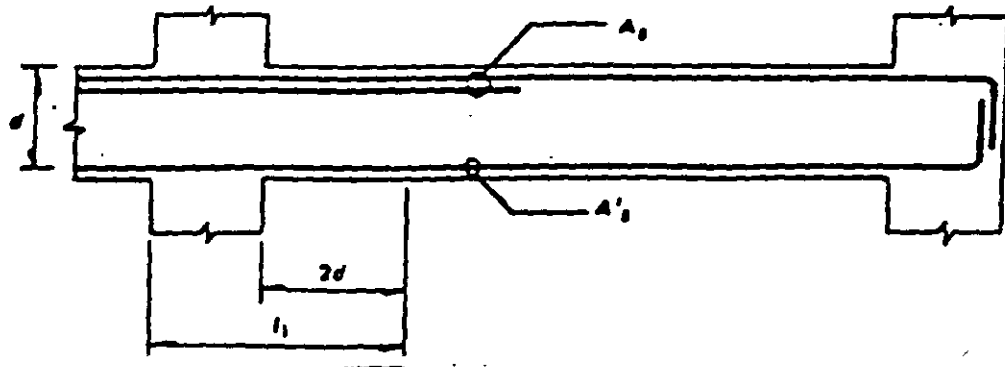
$$h/b \leq 3$$

$$e \leq 0.1c$$

$$l/b \leq 30$$

$$l/d \geq 4$$

Requisitos geométricos = para vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

$$A_s \text{ y } A'_s \geq 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \quad , \text{ en zonas donde aparezcan tensiones}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb} \quad (\text{área de refuerzo correspondiente a falla balanceada})$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$A_s, A'_s \geq 0.7 (\sqrt{f'_c}/f_y) bd, \text{ en toda la longitud de la viga}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb}$$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambas lectos

No se admiten paquetes de más de dos barras

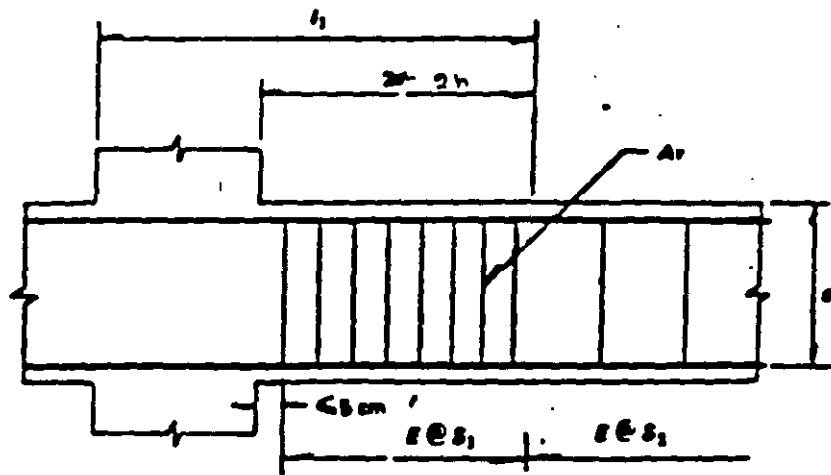
El momento resistente positivo en L_1 no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traspases, ni corte del refuerzo longitudinal en L_1

Todo el refuerzo de tensión, A_s , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

No se tendrá en cuenta estribos:

- que forma un ángulo con el eje de la pieza $< 45^\circ$
- Ni barras dobladas en que dicho ángulo sea $< 30^\circ$

Suministrar refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando

si $V_u < V_{cr}$, $\phi \geq \#2$ @ $0.5d$ (Se colocará a partir de toda unión de viga con columna o muro hasta 0.25 del dero correspondiente).

$$\text{si } V_u > V_{cr}, \quad S = \frac{F_r A_v f_y d (\sin \theta + \cos \theta)}{V_u - V_{cr}} \leq \frac{F_r A_v f_y}{3.5 b}$$

NOTA: en secciones circulares se cambia d por el diámetro.

$$S \geq 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} V_{cr} \leq V_u \leq 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} & \quad S \leq 0.6d \\ 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} < V_u & \quad S \leq 0.25d \end{aligned}$$

En ningún caso se permitirá que $V_u > 2 F_r b d \sqrt{f_c'}$

Cuando el refuerzo consiste de 1 solo estribo o grupo de barras paralelas dobladas en una misma sección, su área se calculará

$$A_v = \frac{V_u - V_{cr}}{F_r f_y \sin \theta}, \quad \text{en este caso no se admitirá } V_u > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$$

b) Requisitos para marcas dúctiles

1) Refuerzo Transversal para confinamiento

Estribas # 2.5 ó mayores

En la zona L_d los estribos deberán ser cerrados y con remate a 135° se indica en la fig. 10.4. La separación no deberá exceder de:

$$S_1 \leq \begin{cases} 8 \text{ diámetros de la barra longitudinal mayor} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ 30 \text{ cm.} \\ d/4 \end{cases}$$

Además al menos una de cada dos barras longitudinales de la periferia deberá estar abrazada por la esquina de un estribo.

2) Requisitos por cortante.

Fuera de L_d habrá estribos a una separación $S_2 \leq d/2$
Estribas verticales cerradas de una pieza.

$$\phi_s \geq 2.5$$

$$V_{oismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.3 Requisitos para refuerzo transversal de vigas de marcas de concreto

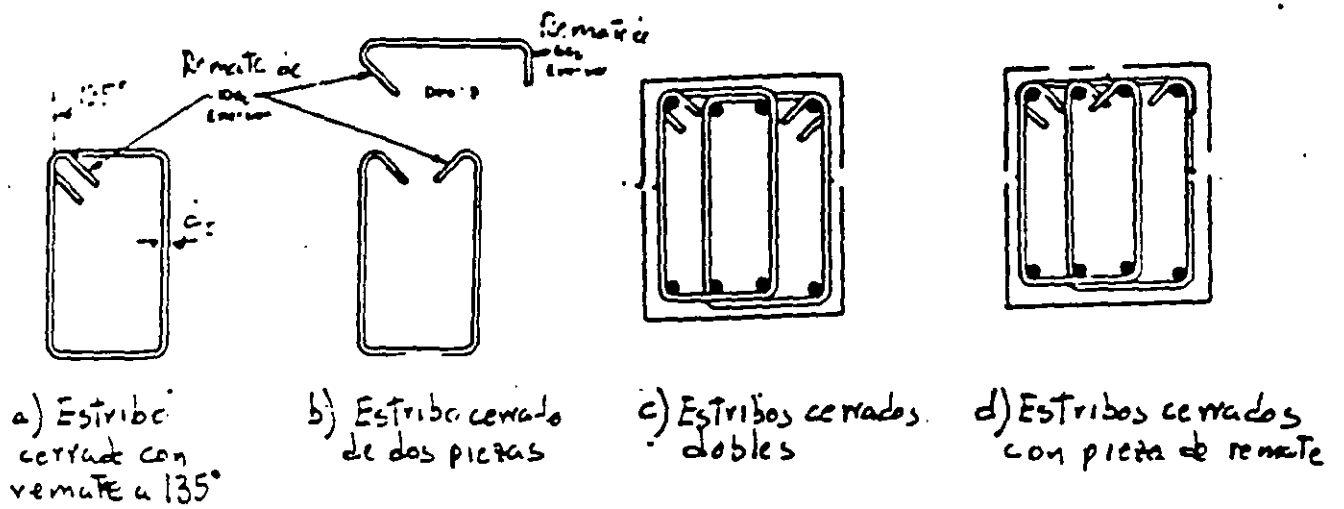


Fig 10.4 Estribos para confinamiento (de código ACI)

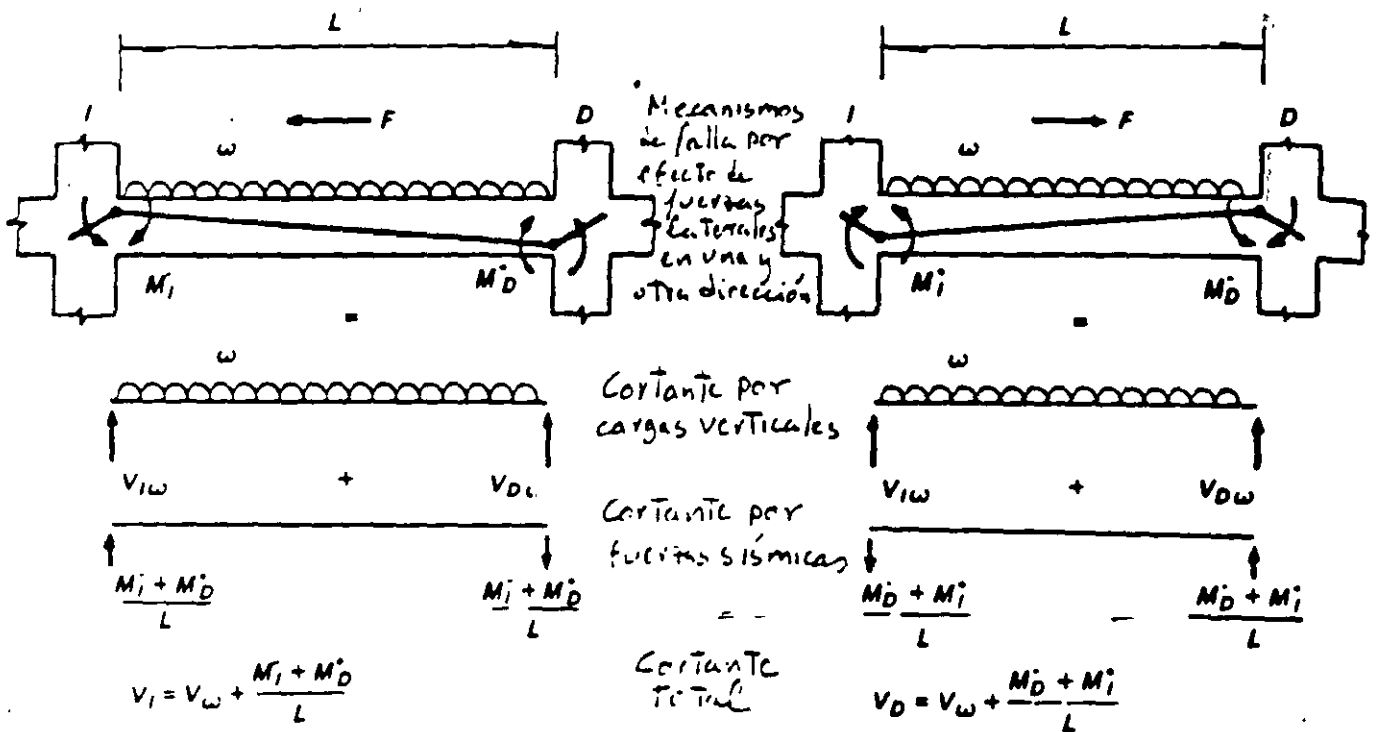
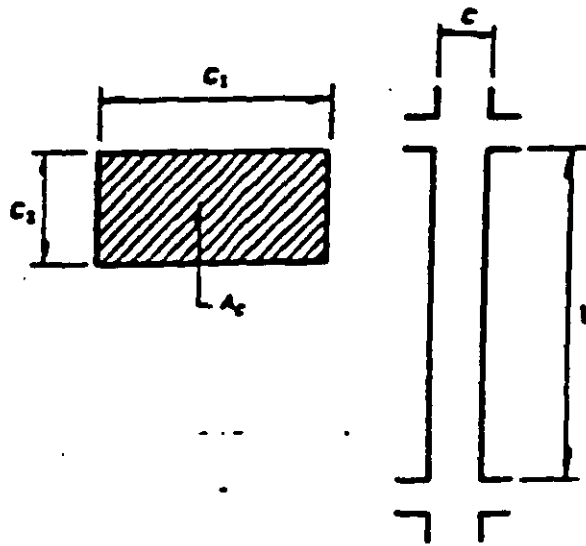


Fig 10.5 Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos directos de concreto



Requisitos generales

$$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$$

$$c_1/c_2 \leq 4$$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f_c}$$

$$c_1/c_2 \leq 2.5$$

$$l/c \leq 15$$

Fig 16.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

II. REFUERZO LONGITUDINAL

En la parte inferior de la columna que atenga la unión con la viga, debe colocarse el mismo ref. transversal que en la. Si el nudo está confinado

a) Requisitos generales

$$\frac{20}{f_y} \leq \rho \leq 0.06$$

Mínimo 4 barras en columnas rectangulares y 6 en circulares

b) Requisitos para marcos de detalles

$$0.01 \leq \rho \leq 0.04$$

Paquetes de no más de dos barras
Traspases solo en la mitad central de la altura libre de la columna

III. REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso.

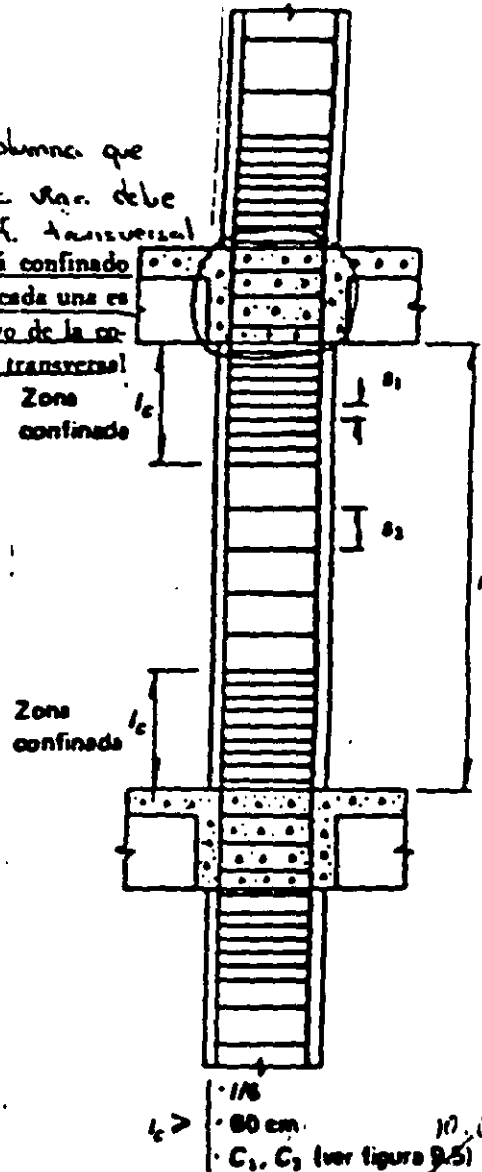
a) Requisitos generales

$$S_s \leq \begin{cases} \frac{250 d_v}{\sqrt{f_y}} & d_v - \phi \text{ más delgado} \\ 48 d_v & d_v - \phi \text{ estribo} \\ c_1/2, c_2/2 \end{cases}$$

$S_s \leq$ la mitad de los límites para S_v

b) Requisitos para marcos de detalles

y detalles



En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, debe continuarse dentro de la cimentación al menos una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra más gruesa

El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que 42.
 $d_v \geq \#3$

Refuerzo Transversal mínimo:

$$S_1 \leq \begin{cases} 10 \text{ cm.} \\ \frac{C_{menor}}{4} \end{cases}$$

S_1 - Mismos límites que para el caso general.

S_2 - Igual que para requisitos generales

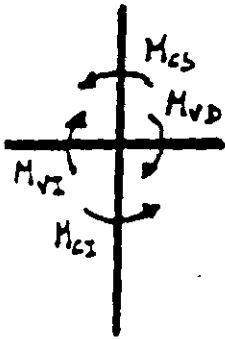
2) Fuerza cortante.

$$S: P_u < \frac{A_g f'_c}{20} \quad (\text{Incluyendo efectos sismo})$$

$$V_{sismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.7 Requisitos de refuerzo para columnas de marcos de concreto.

$$\Sigma M_c \geq 1.5(\Sigma M_v)$$

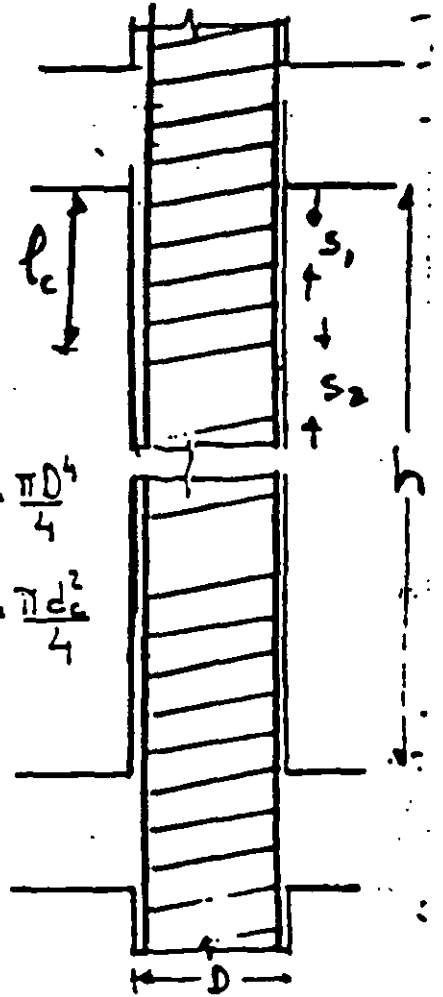
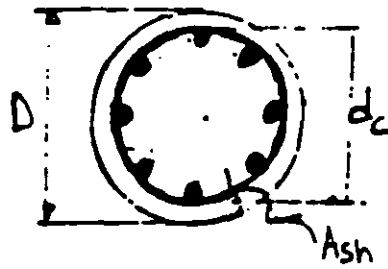


$\Sigma M_v = M_{vD} + M_{vI}$, es la suma de los momentos flexionantes resistentes (negativo de un lado y positivo del otro) de los extremos de las vigas que llegan a un nudo

$\Sigma M_c = M_{cS} + M_{cI}$, es la suma de los momentos flexionantes que deben ser capaces de resistir los extremos de las columnas (superior e inferior) que llegan a dicho nudo

El momento resistente de la columna se calculará para la carga axial que le corresponde a la columna por efecto de carga vertical más el doble de la que se genera por efecto de las fuerzas sísmicas actuando en la dirección correspondiente al signo de los momentos flexionantes considerados

Fig. 10? Procedimiento para la revisión de la capacidad en flexocompresión de columnas de marcos dúctiles de concreto



Hínimo 6 barras longitudinales
 Ref. Transversal $\phi \geq 10.3$
 El acero de la hélice \leq grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$l_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$s_2 \leq 7 \text{ cm}$ y ≥ 1.5 veces agregado

Los traspases tendrán 1.5 vueltas

Los hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

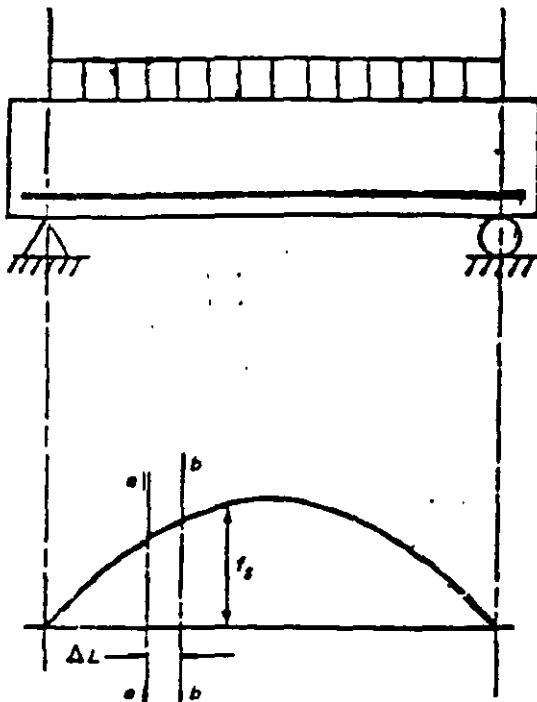
**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
ADHERENCIA Y ANCLAJE**

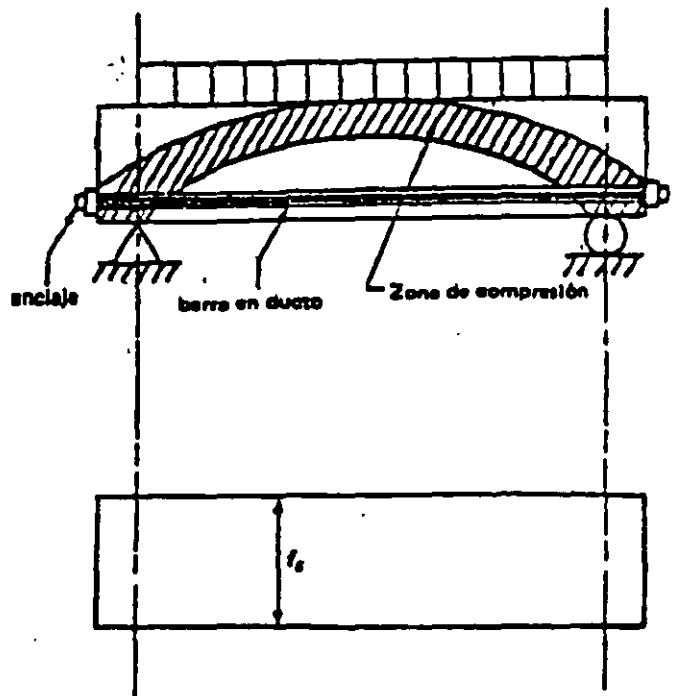
**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA**

IV. ADHERENCIA Y ANCLAJE

1.- NATURALEZA



REFUERZO ADHERIDO



REFUERZO SIN ADHERENCIA

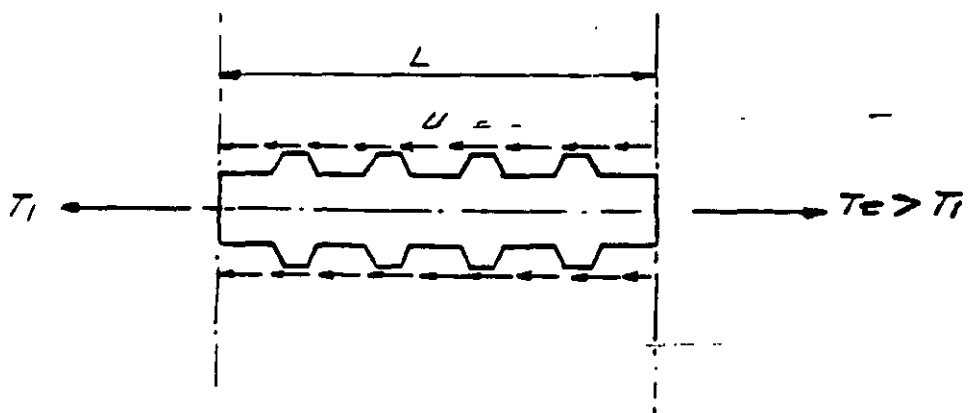


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN TRAMO DE BARRA ADHERIDA

1.1 ORIGEN DE LA ADHERENCIA O RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO

A) ADHESION DE ORIGEN QUIMICO

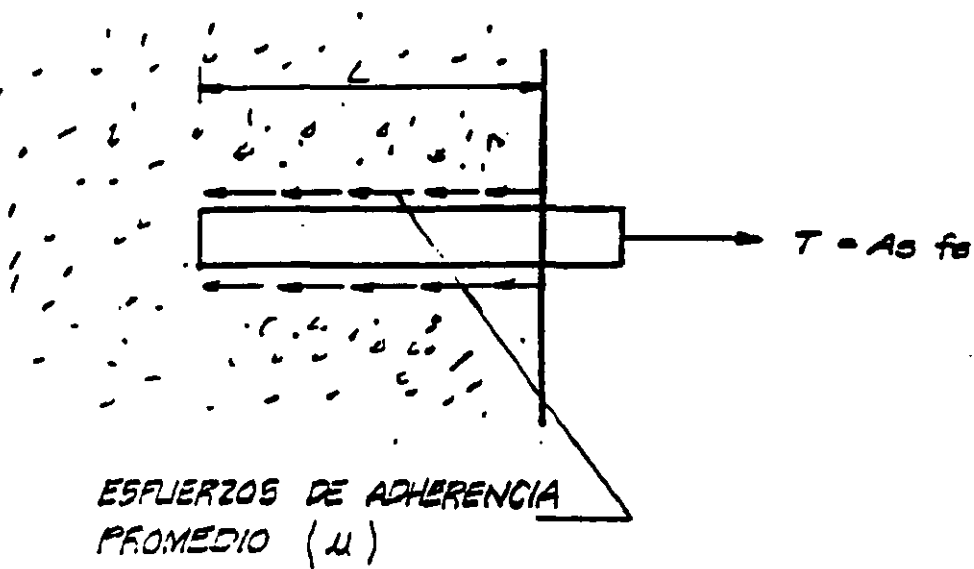
B) FRICCION ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO

C) APOYO DIRECTO DE LAS CORRUGACIONES

A) Y B) EN VARILLAS LISAS

A) B) Y C) EN VARILLAS CORRUGADAS

2.- ADHERENCIA POR ANCLAJE O DESARROLLO



POR EQUILIBRIO

$$\mu \Sigma 0 L = A_s f_s$$

$$\mu = \frac{A_s f_s}{\Sigma 0 L} = \frac{\frac{\pi d_b^2}{4} f_s}{\pi d_b L}$$

$$\mu = \frac{d_b f_s}{4L}$$

si $f_s = f_y$

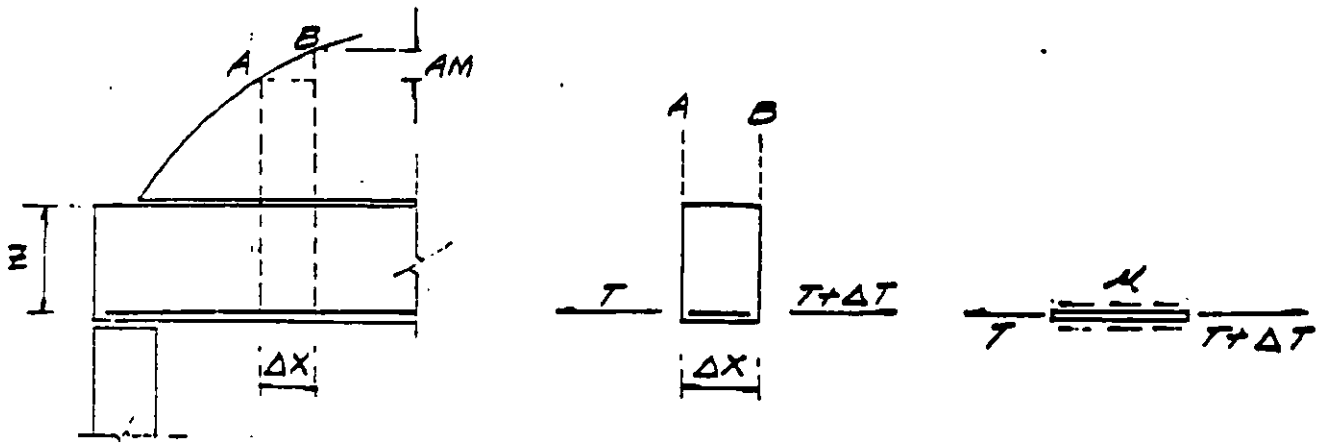
$\mu = \mu_{\mu}$

y $L = l_d$

$$l_d = \frac{f_y d_b}{4 \mu_{\mu}}$$

3.- ADHERENCIA POR FLEXION

A) POR EFECTO DE UN INCREMENTO DE ESFUERZOS EN LAS VARRILLAS DEBIDO A UN CAMBIO EN EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.



$$\Delta \tau = \frac{\Delta M}{z}$$

$$\Delta \tau = \mu (\Sigma O) \Delta x$$

$$\mu = \frac{\Delta M}{z \Sigma O \Delta x}$$

TOMANDO LIMITES CUANDO $\Delta x \rightarrow 0$

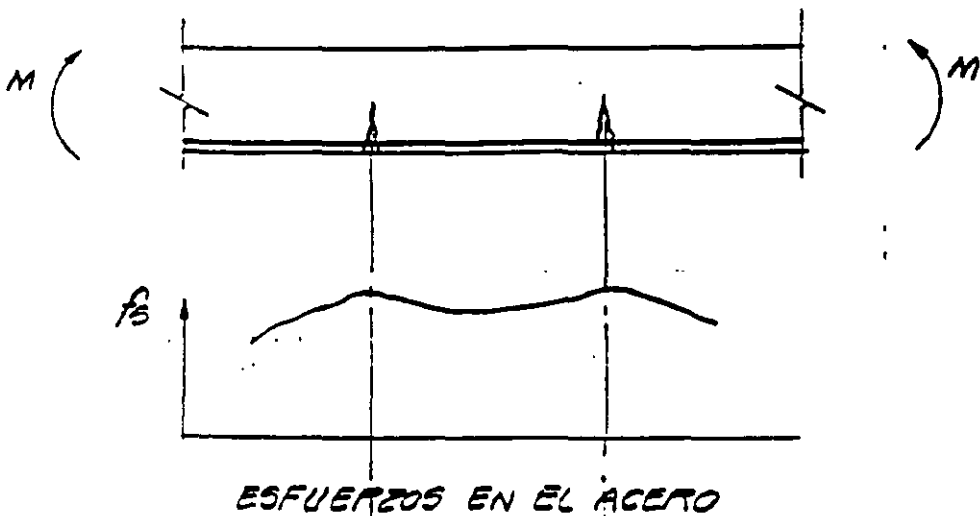
$$\mu = \frac{dM}{dx} \frac{1}{z \Sigma O}$$

PERO $\frac{dM}{dx} = V$

$$\mu = \frac{V}{z \Sigma O}$$

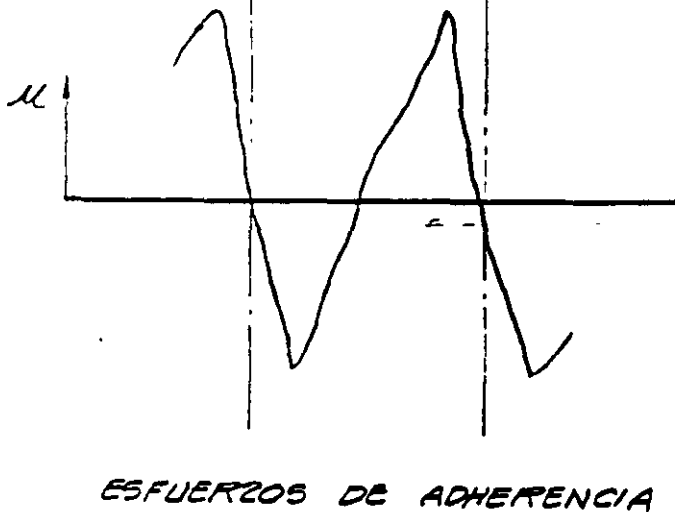
b) CAMBIO EN LOS ESFUERZOS DE LAS VARILLAS POR AGRIETAMIENTO DEL ELEMENTO

MOMENTO CONSTANTE



$$\mu = \frac{T_2 - T_1}{L E_0} = \frac{\Delta T}{L E_0}$$

$$\mu = \frac{dT}{dL} \frac{L}{E_0} = \frac{df_s}{dL} \frac{\Delta s}{E_0}$$



4.- VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL DESARROLLO DE LA ADHERENCIA.

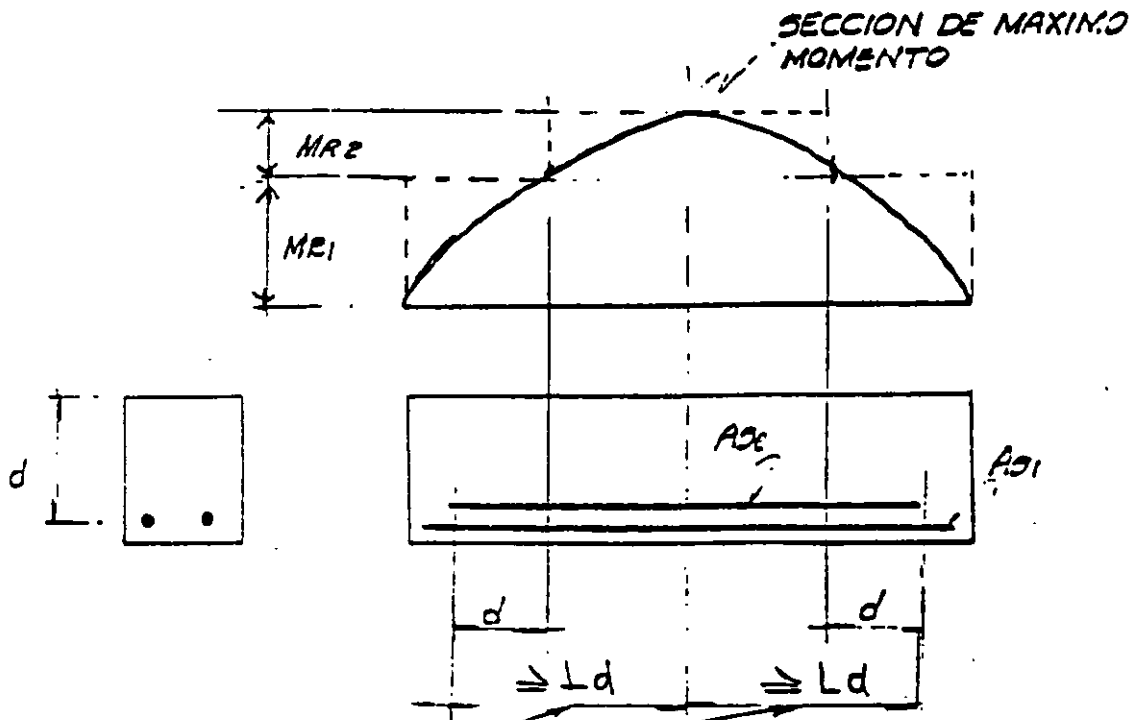
- A) RESISTENCIA A TENSION DEL CONCRETO, QUE ES PROPORCIONAL A $\sqrt{F'c}$.
- B) TIPO DE CORRUGACIONES Y DIAMETRO DEL REFUERZO.
- C) POSICION DEL REFUERZO.
SE DESARROLLA MAYOR ADHERENCIA EN VARILLAS DE LECHO INFERIOR QUE EN LECHO SUPERIOR, Y MEJOR EN BARRAS VERTICALES QUE EN HORIZONTALES.
- D) RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE LAS VARILLAS.
- E) CONFINAMIENTO DEL CONCRETO POR ESTRIBOS CERRADOS.
- F) EN BARRAS A COMPRESION, LA INEXISTENCIA DE GRIETAS DE FLEXION, MEJORA LA ADHERENCIA.

5.- REVISION DE LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

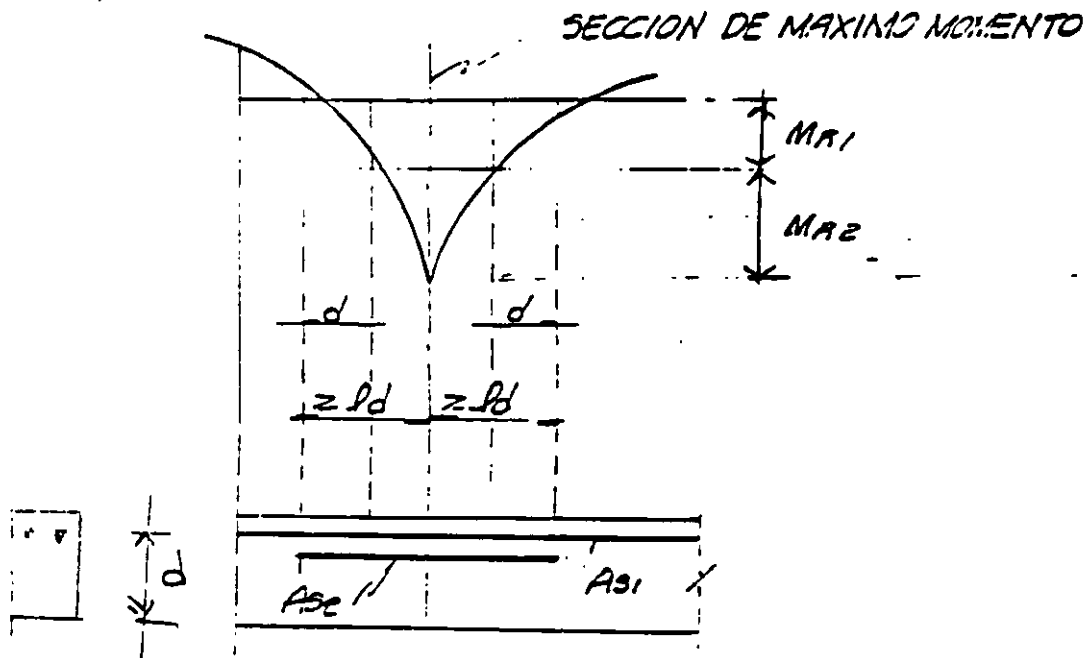
A CAMBIO DE CALCULAR LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA, LOS REGLAMENTOS ESPECIFICAN UNA LONGITUD DE ANCLAJE O DESARROLLO MINIMA QUE DEBE PROPORCIONARSE A CADA LADO DE LAS SECCIONES DONDE SE PRESENTEN ESFUERZOS MAXIMOS EN EL ACERO. ESTA LONGITUD DEPENDE BASICAMENTE DE LAS VARIABLES INDICADAS EN EL PUNTO 4.

6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:

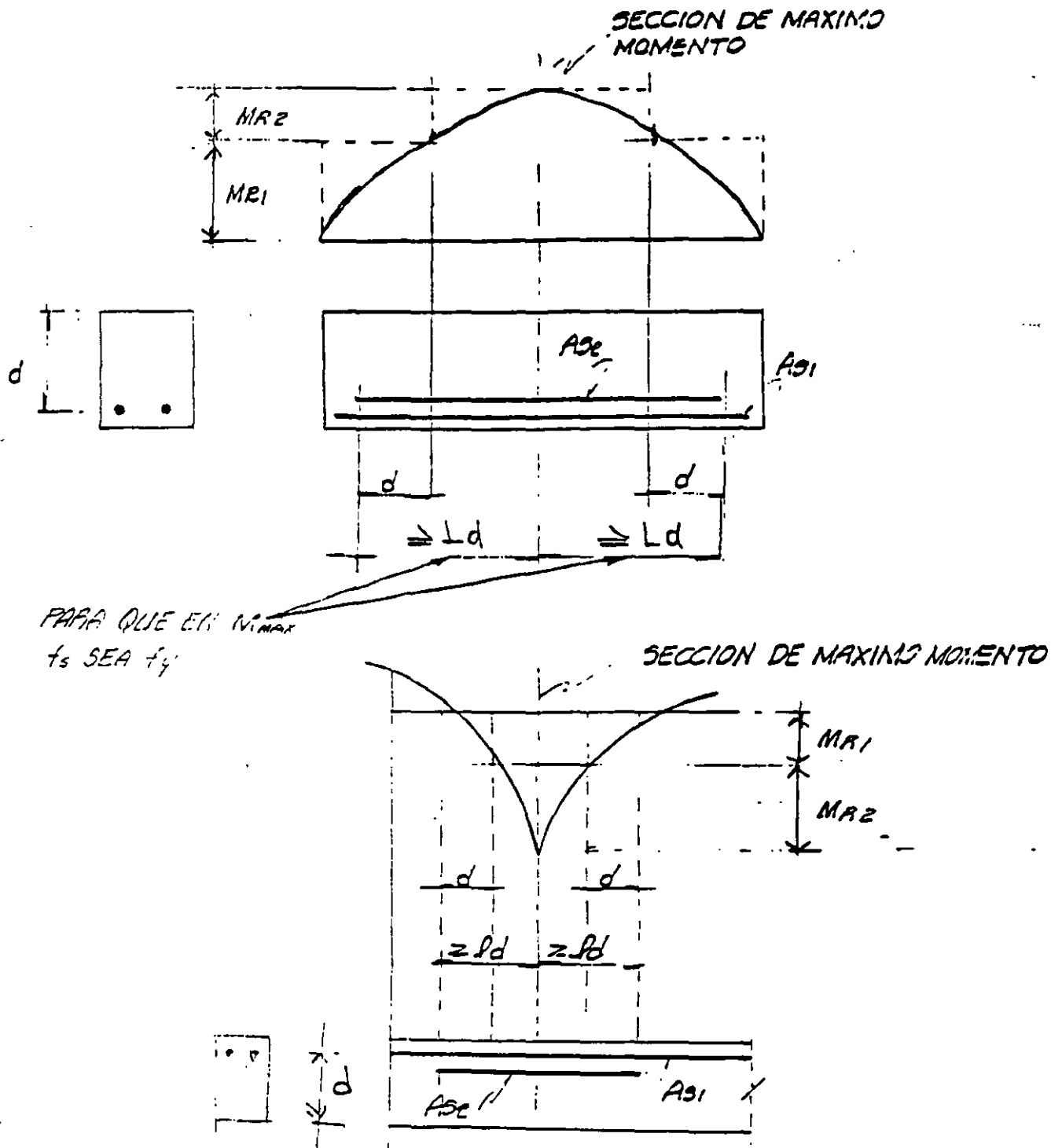


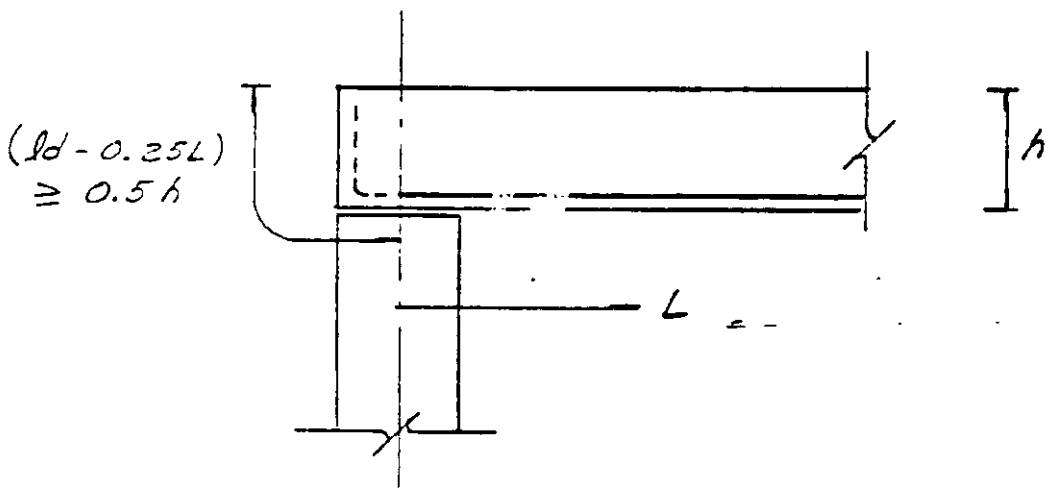
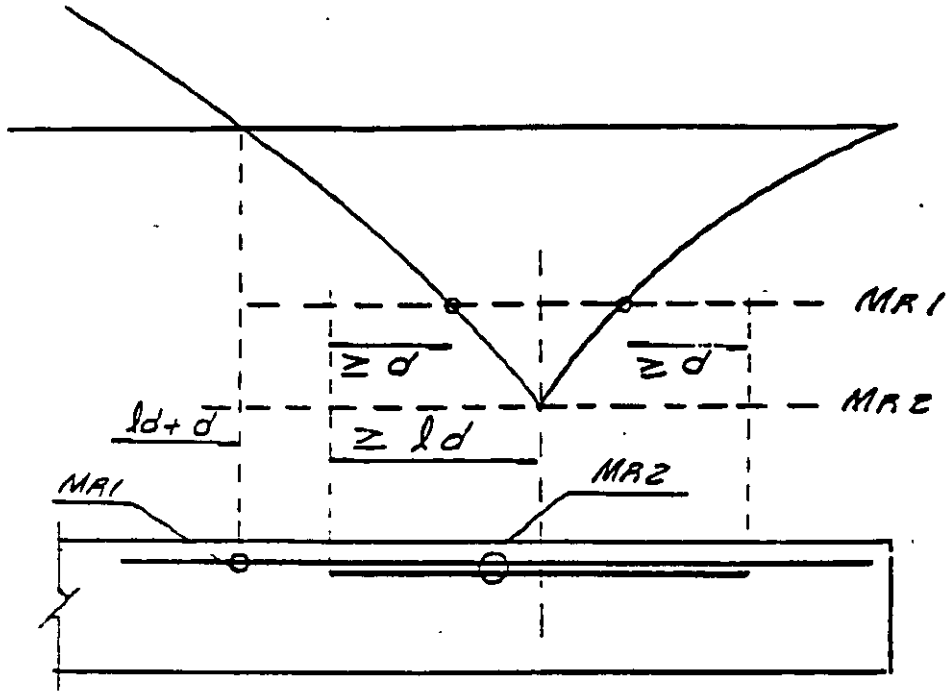
PARA QUE EN EL MOMENTO
 f_s SEA f_y



6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:





LONGITUD BASICA DE DESARROLLO:

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

FACTORES PARA OBTENER LA LONGITUD DE DESARROLLO. (L_d)

$$L_d = \text{Factor } L_{db}$$

<u>CONDICION DEL REFUERZO</u>	<u>FACTOR</u>
BARRAS HORIZONTALES O INCLINADAS COLOCADAS DE MANERA QUE BAJO ELLAS SE CUELEN MAS DE 30 CM DE CONCRETO.	1.4
EN CONCRETO LIGERO	1.33
BARRAS CON F_y MAYOR DE 4200 KG/CM ² (F_y , EN KG/CM ²).	$2 - \frac{4200}{F_y}$
BARRAS TORCIDAS EN FRIO DE DIAMETRO IGUAL O MAYOR QUE 19.1 MM (N°6).	1.2
TODOS LOS OTROS CASOS	1.0

EN NINGUN CASO L_d SERA MENOR DE 30 CM.

EN PAQUETES L_d SE INCREMENTA:



$$L_d = 1.2 L_{dc/b}$$



$$L_d = 1.00 L_{dc/b} \quad (\text{NO SE MODIFICA})$$

SI EL ESFUERZO EN EL ACERO ES MENOR QUE F_y :

$$L_d' = \frac{f_s}{f_y} L_d$$

DONDE $f_s = \frac{M}{A_s Z}$

EN VARILLAS LISAS

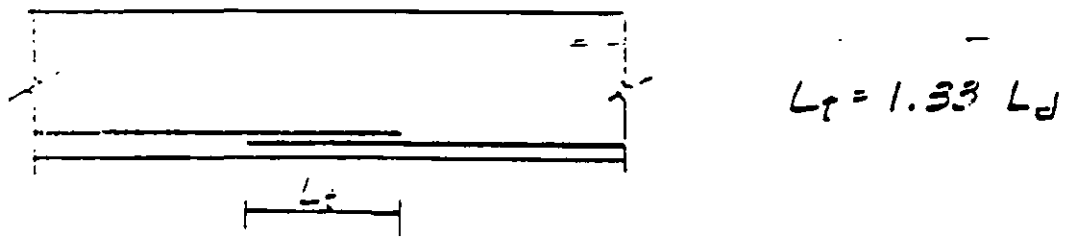
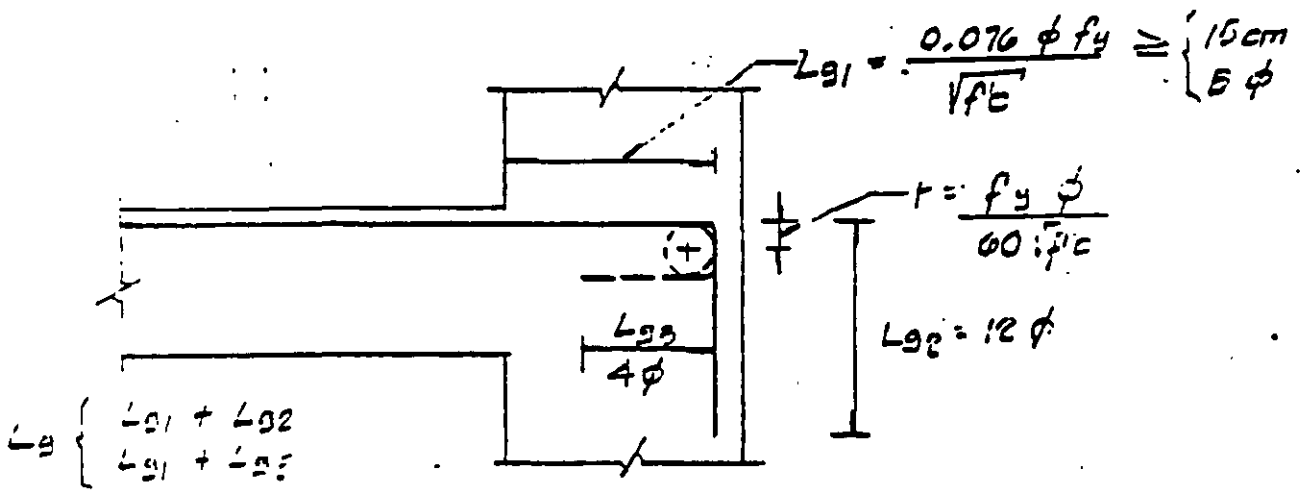
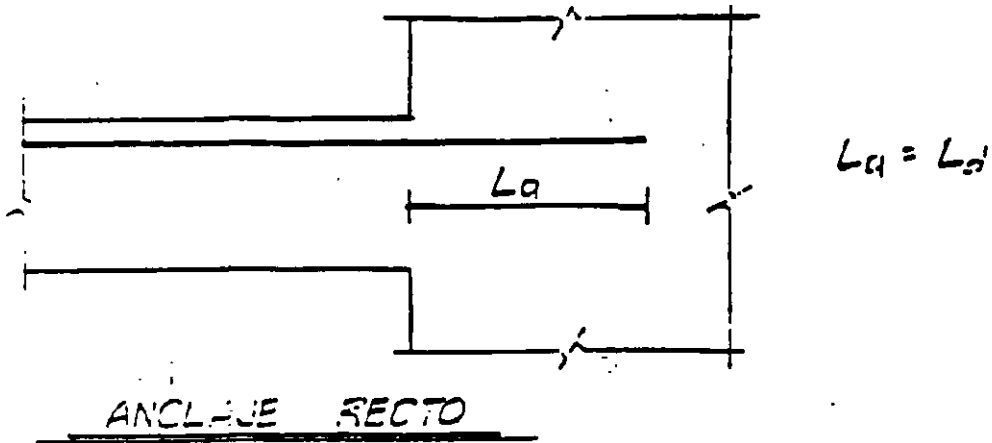
$$L_d' = 2 L_{d_{corr}}$$

ACERO EN COMPRESION.

$$L_d = 0.6 L_d \text{ tensión}$$

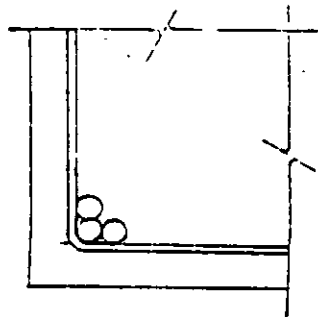
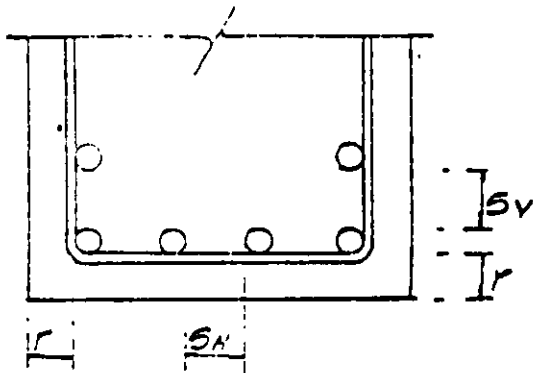
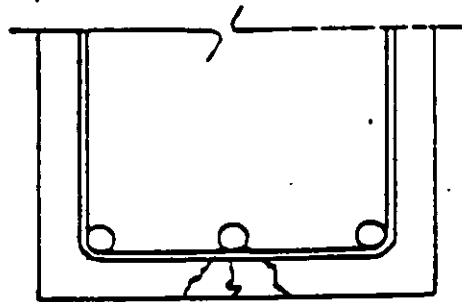
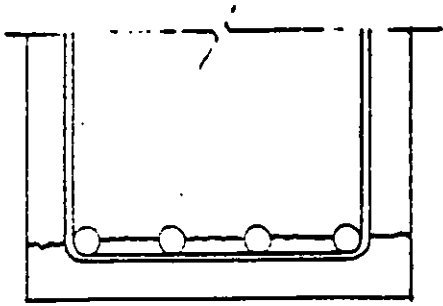
$$L_d \geq 20 \text{ cm.}$$

ANCLAJE EN ESCUADRA EN GENERAL



LONGITUD DE TRASLAPE (L_T)

RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE VARILLAS



EN ELEMENTOS NO EXPUESTOS

r SERÁ EL MENOR DE LOS DOS VALORES SIGUIENTES:

ϕ MAX.
8 CM.

EN ELEMENTOS COLADOS CONTRA EL SUELO

$r = \begin{cases} 5 \text{ CM. SIN PLANTILLA} \\ 3 \text{ CM. CON PLANTILLA} \end{cases}$

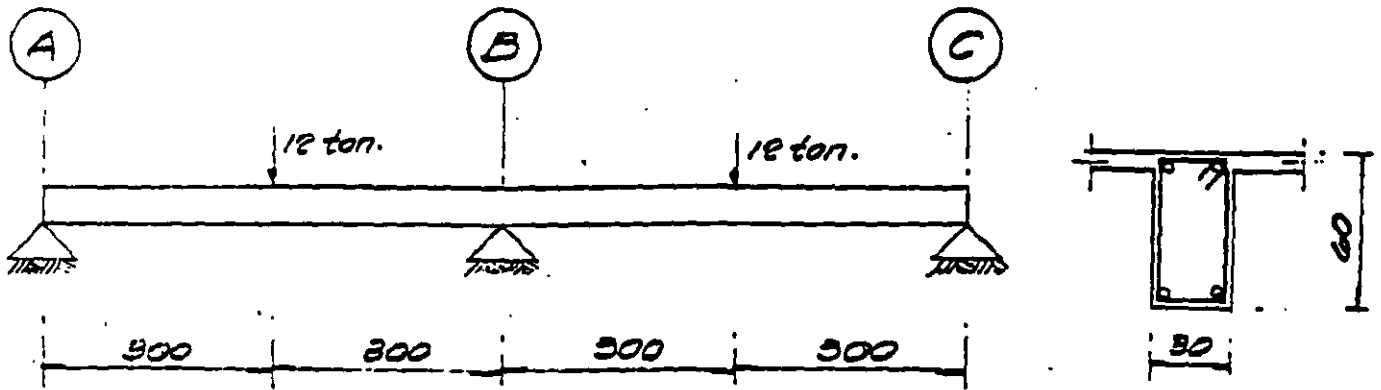
s_h EL MAYOR DE $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 1.5 T \text{ MÁX. AGR} \end{cases}$

s_v EL MAYOR DE $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 8 \text{ CM.} \end{cases}$

PAQUETES DE BARRAS A CONDICION QUE ESTEN EN UNA ESQUINA DE ESTRIBO

2 VARILLAS EN TRABES Y 3 EN COLUMNAS (MAX)

EJEMPLO



DATOS

$$P = 12 \text{ ton.}$$

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$d = 55 \text{ cm.}$$

$$r = 5 \text{ cm.}$$

$$h = 60 \text{ cm.}$$

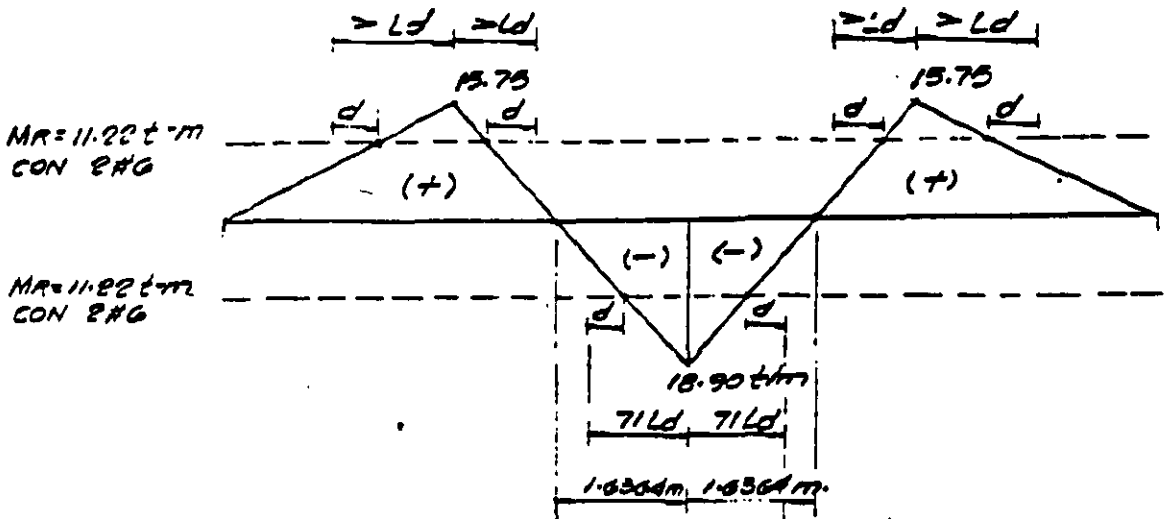
$$f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_u = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_r = 0.9 \text{ (FLEXION)}$$

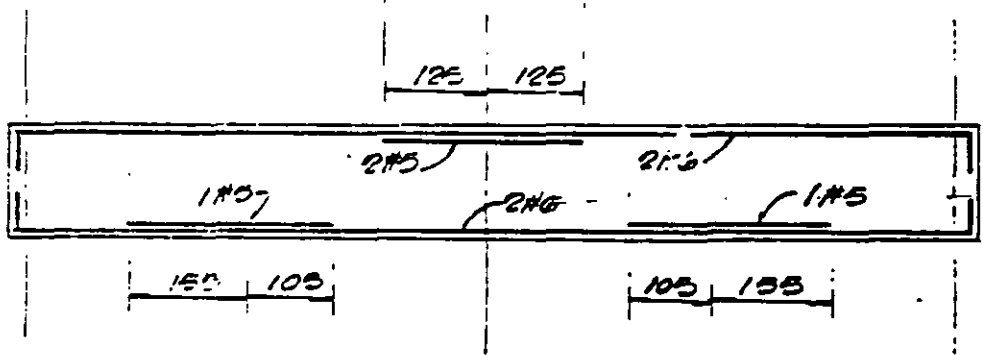
$$F_c = 1.4$$

DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE



$$L_d \#6 \begin{cases} l_s = 71 \\ l_i = 51 \end{cases}$$

$$L_d \#5 \begin{cases} l_s = 50 \\ l_i = 40 \end{cases}$$





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

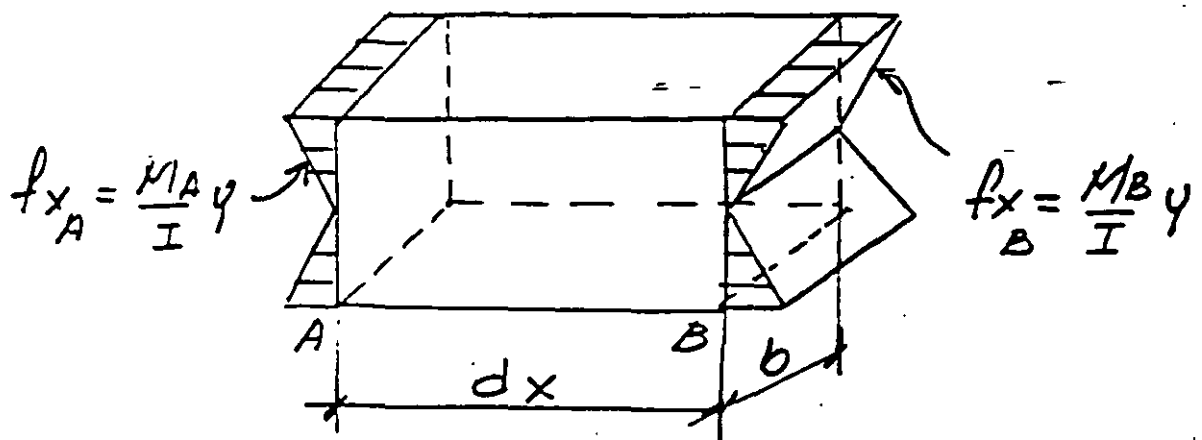
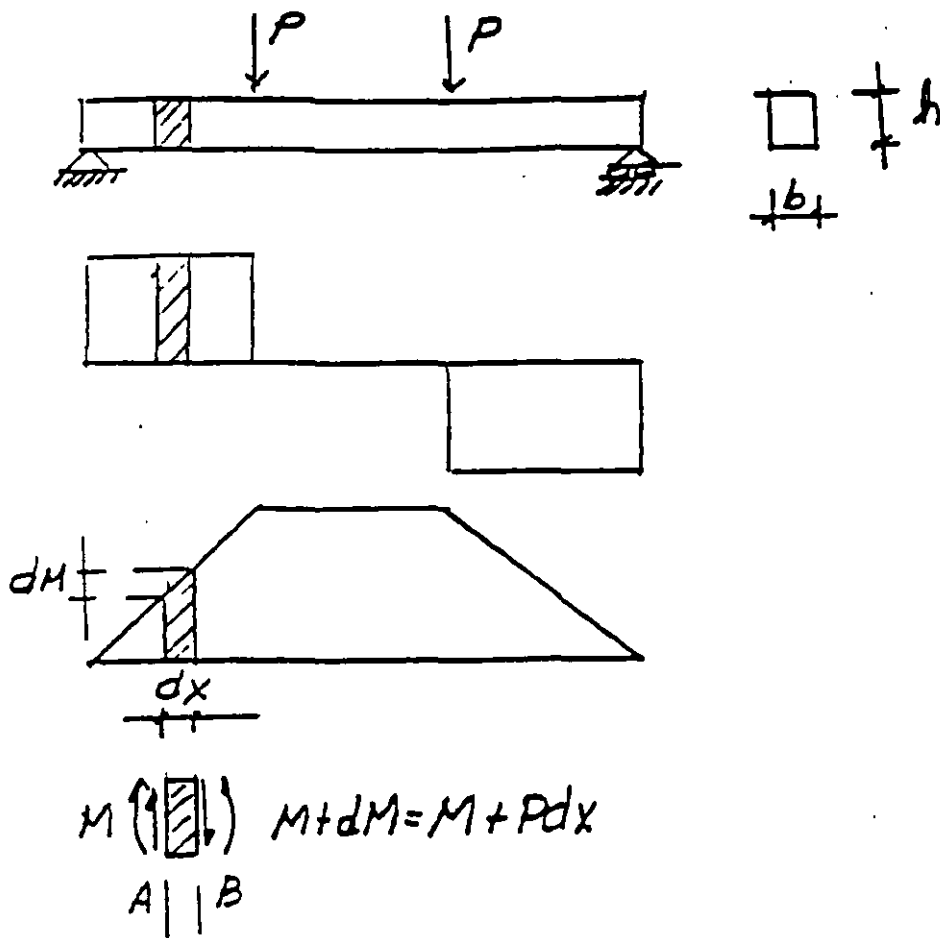
**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
CORTANTE**

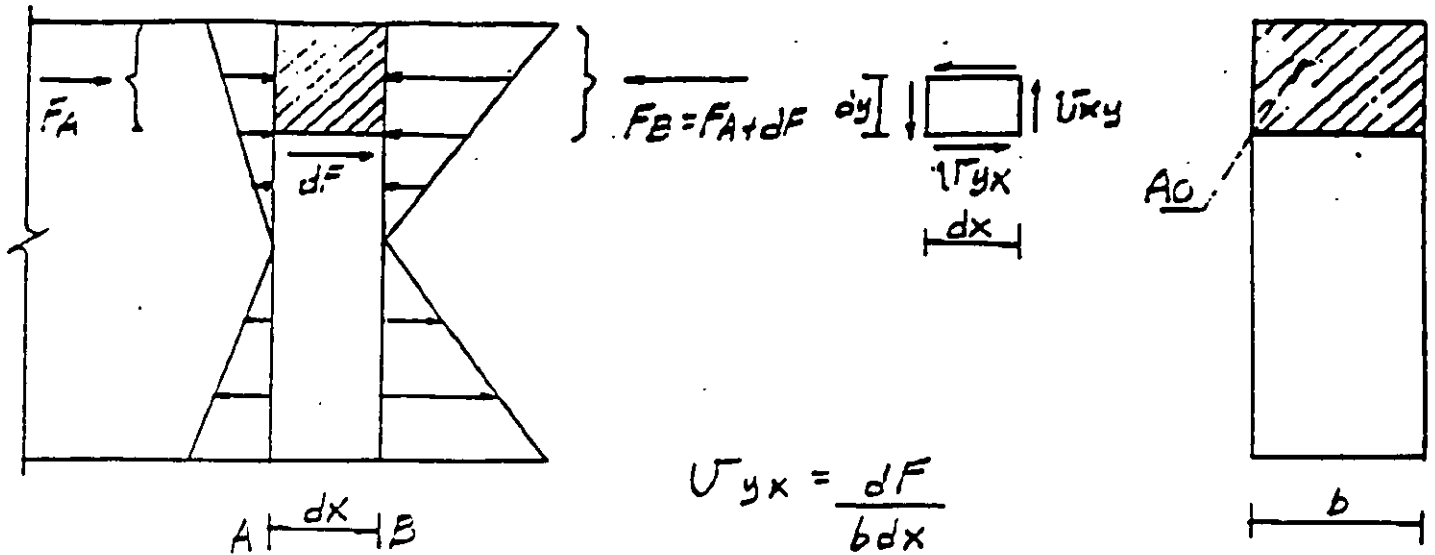
**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

V.- CORTANTE .

1.- COMPORTAMIENTO ELASTICO



$$F_E = F_B \Rightarrow F_E = F_B$$



$$\tau_{yx} = \frac{dF}{b dx}$$

$$F_A = \int_{A_0} f_x dA = \int_{A_0} \frac{M_A}{I} y dA = \frac{M_A}{I} \int_{A_0} y dA = \frac{M_A Q}{I}$$

$$\text{si } M_B = M_A + dM$$

$$F_B = \frac{M_A + dM}{I} Q$$

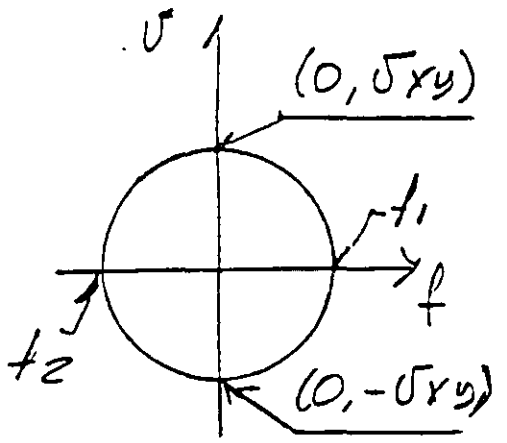
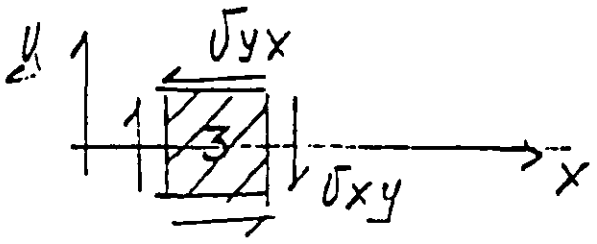
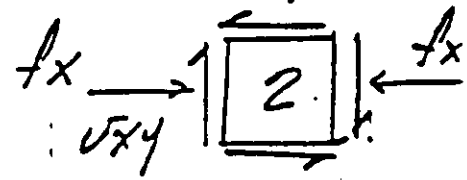
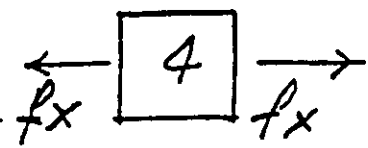
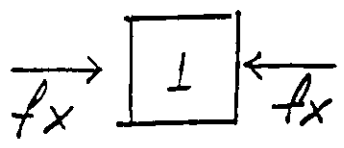
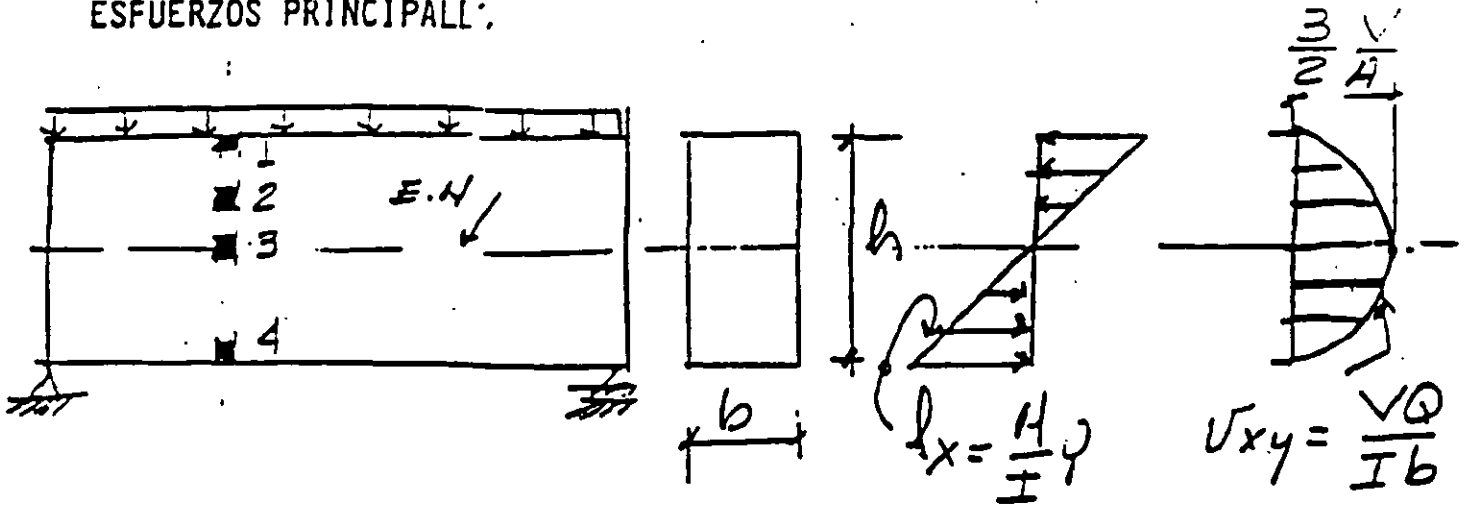
$$dF = F_B - F_A = \frac{M_A + dM}{I} Q - \frac{M_A}{I} Q = \frac{dM}{I} Q$$

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{b dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I b}$$

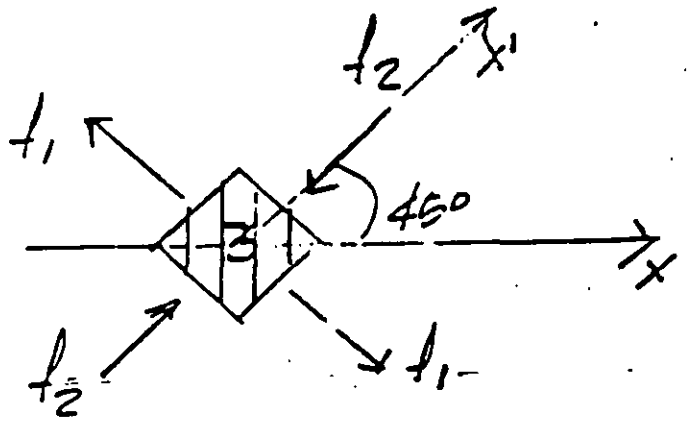
$$\text{pero } \frac{dM}{dx} = V$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

ESFUERZOS PRINCIPALL:

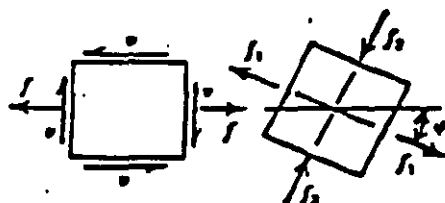
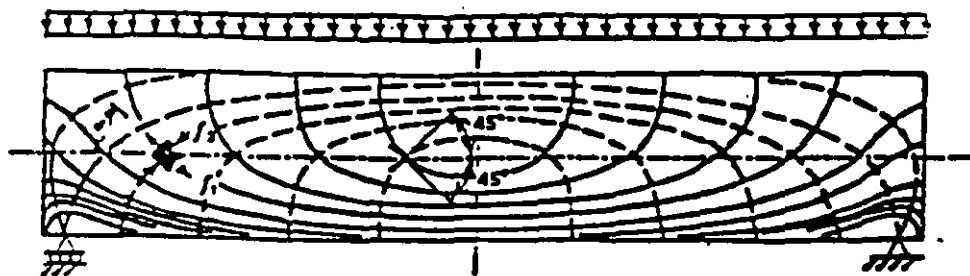


CIRCULO DE MOHR

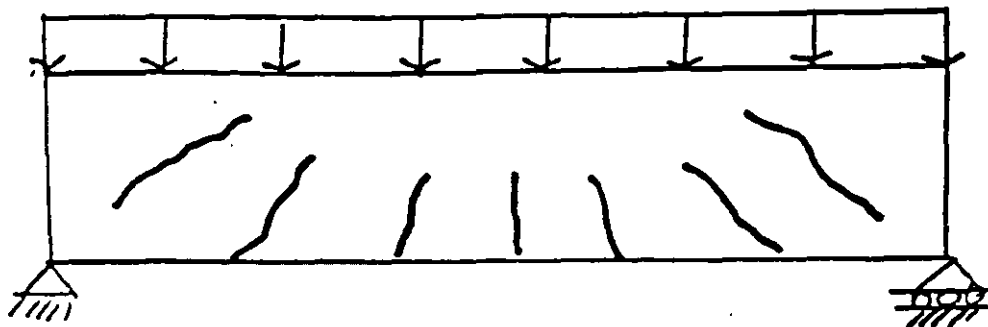


σ_1 .- TENSION MAXIMA (DIAGONAL)

TRAYECTORIAS DE ESFUERZOS PRINCIPALES



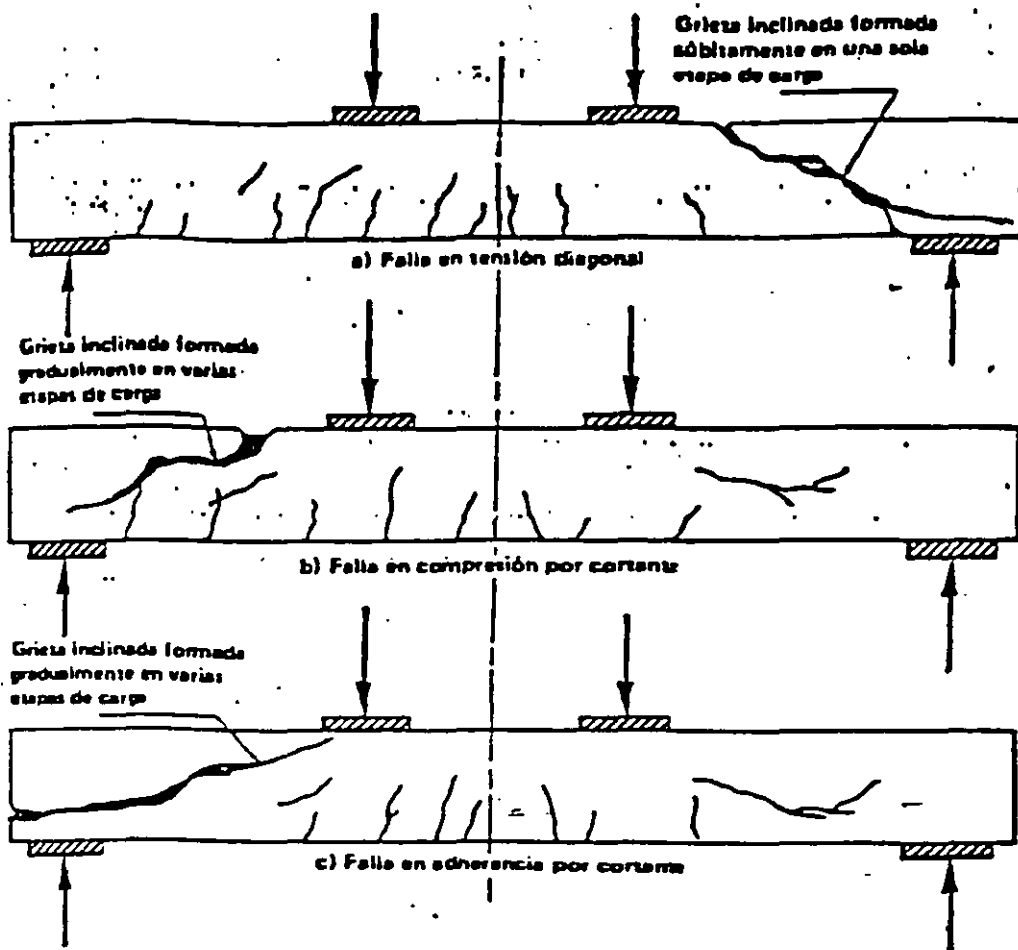
TENSIONES ———
COMPRESIONES - - - -



VIGA DE CONCRETO SIMPLE

LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CAMBIA APRECIABLEMENTE SI SE EXCEDEN LAS TENSIONES QUE PUEDE SOPORTAR EL CONCRETO Y APARECEN LAS PRIMERAS GRIETAS. POR LO TANTO, A PARTIR DE ESTE MOMENTO NO ES POSIBLE PREDECIR SU COMPORTAMIENTO BAJO LAS HIPOTESIS DE MATERIAL ELASTICO Y HOMOGENEO.

2.- MODOS DE FALLA EN TRABES SIN REFUERZO TRANSVERSAL



EFFECTOS DE LA GRIETA DIAGONAL.

- A) REDUCE LA ZONA DISPOBIBLE PARA TOMAR COMPRESIONES PARA FLEXION.
- B) AUMENTA SUBITAMENTE LA TENSION EN EL REFUERZO.
- C) REDUCE EL AREA DISPONIBLE PARA TOMAR CORTANTE.

3.- MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL.

- A) ANTES DEL AGRIETAMIENTO DIAGONAL, EL COMPORTAMIENTO ES PRACTICAMENTE EL MISMO CON O SIN REFUERZO TRANSVERSAL.
- B) AL APARECER LAS GRIETAS, EL REFUERZO TRANSVERSAL SE DEFORMA HASTA ALCANZAR SU LIMITE DE FLUENCIA, PARA EVITAR ANCHOS EXCESIVOS DE GRIETAS LOS REGLAMENTS LIMITAN EL F_y DEL REFUERZO A 4200 Kg/cm^2 .
- C) SI LOS ESTRIBOS SON VERTICALES Y CERRADOS, EL CONFINAMIENTO DEL CONCRETÓ MEJORA LA DUCTILIDAD DEL ELEMENTO Y LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

4.- CALCULO DE LA RESISTENCIA.

A) CONTRIBUCION DEL CONCRETO (V_c).

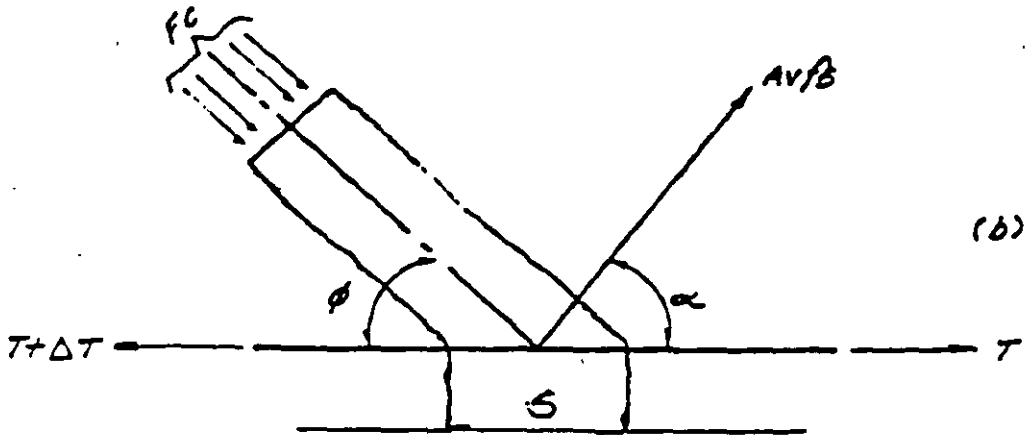
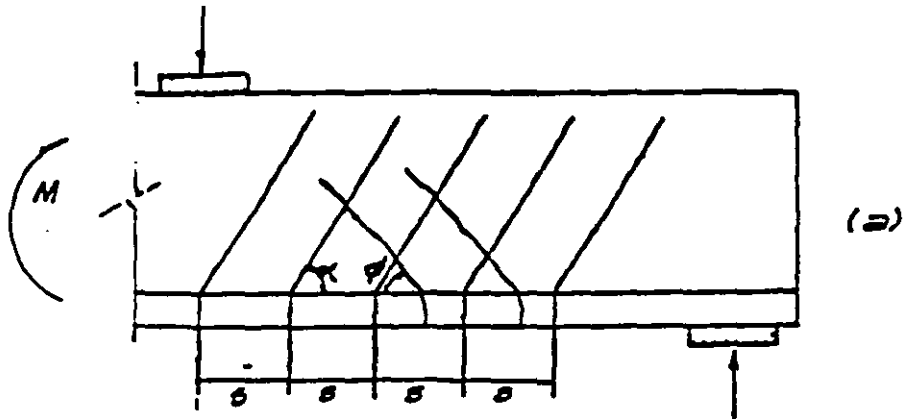
SE CONSIDERA QUE LA FUERZA CORTANTE QUE RESISTE - EL CONCRETO ES IGUAL A LA CARGA DE AGRIETAMIENTO-INCLINADO; Y ESTA ES FUNCION DE LA RESISTENCIA EN TENSION DEL CONCRETO, QUE A SU VEZ ES PROPORCIONAL A LA RAIZ CUADRADA DE SU RESISTENCIA EN COMPRESION.

POR TANTO:

$$V_c = K \cdot \sqrt{F'_c}$$

CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSAL. (V_s)

ANALOGIA DE LA ARMADURA



$$\sum F_V = 0; AV/s \sin \alpha = FC \sin \phi;$$

$$FC = \frac{AV/s \sin \alpha}{\sin \phi}$$

$$\sum F_H = 0; \Delta T = AV/s \cos \alpha + FC \cos \phi$$

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{s} = \frac{Vs}{s}$$

$$\Delta M = \frac{V \Delta x}{s}$$

$$\frac{Vs}{s} = AV/s \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right)$$

$$V = \frac{AV/s \cdot s}{s} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right) \text{ si } \phi = 45^\circ$$

$$V = \frac{AV/s \cdot s}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha) \text{ si } s = fy$$

$$Vs = \frac{AV/s \cdot s}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha) \text{ y } s = d$$

5.- REGLAMENTO . D. F. 1987.
 REVISION DEL ESTADO LIMITE DE FALLA POR CORTANTE

$$V_R \geq V_c + V_s$$

$$V_R \geq V_U$$

5.1 FUERZA CORTANTE ULTIMA ACTUANTE V_U .

A) FACTORES DE CARGA

$$V_U = F.C. V$$

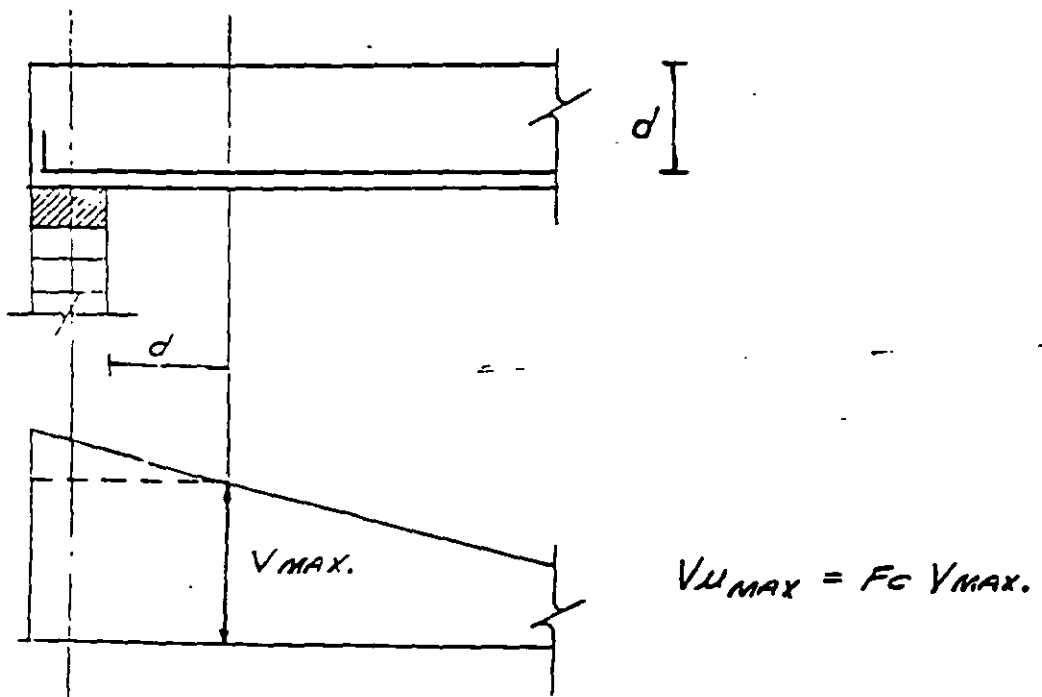
$$V_U = 1.4 (V_{cM} + V_{cV})$$

$$V_U = 1.5 (V_{cM} + V_{cV}) \longrightarrow \text{GRUPO A}$$

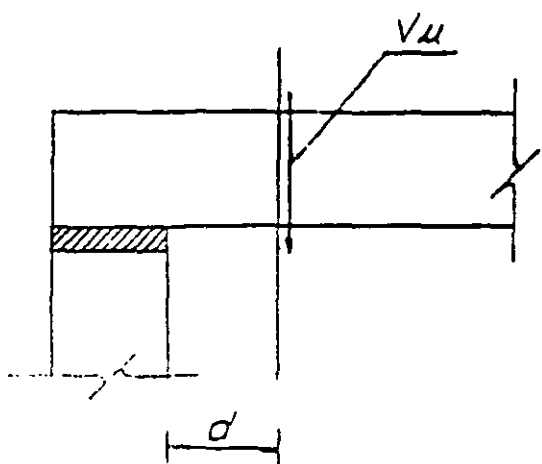
$$V_U = 1.1 (V_{cM} + V_{cV} + V_{cA})$$

B) FUERZA CORTANTE MAXIMA.

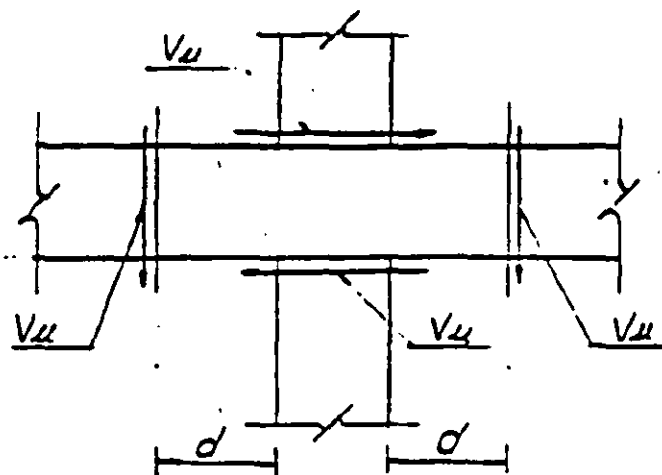
DETERMINACION DE $V_{U \text{ MAX.}}$



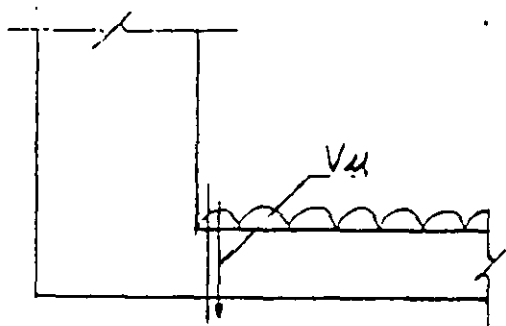
*SOLO SI LAS CARGAS COMPINEN DIRECTAMENTE
 A LA VIGA*



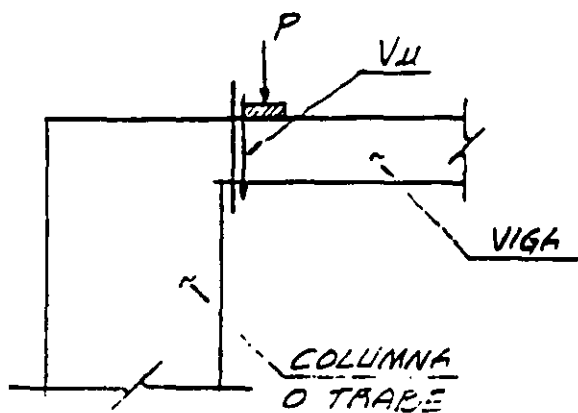
APOYO SIMPLE



NUDO MONOLITICO



LOSA APOYADA EN LECHO
BAJO DE TRASE



CARGA CONCENTRADA

5.2 DETERMINACION DE V_c .

A) SON APLICABLES LAS DISPOSICIONES PARA VIGAS EN QUE PREDOMINA LA FLEXION SI $L/h > 5$.

EN ESTE CASO:

$$V_c = V_{CR} \begin{cases} F_R (0.2 + 30 p) \sqrt{f^*c} bd & (\text{si } p \leq 0.01) \\ F_R (0.5) \sqrt{f^*c} bd & (\text{si } p > 0.01) \end{cases}$$

DONDE: $p = \frac{A_s}{bd}$

$$y F_R = \begin{cases} 0.8 & (Q \leq 2) \\ 0.6 & (Q > 2) \end{cases}$$

B) RELACION PERALTE/ANCHO.

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} h/b \leq 6 \\ h \leq 70 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow V_c = V_{CR}$$

$$\text{Si } h/b > 6 \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{Si } h > 70 \text{ cm} \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} h/b > 6 \\ h > 70 \text{ cm} \end{array} \right\} \quad V_c = 0.49 V_{CR}$$

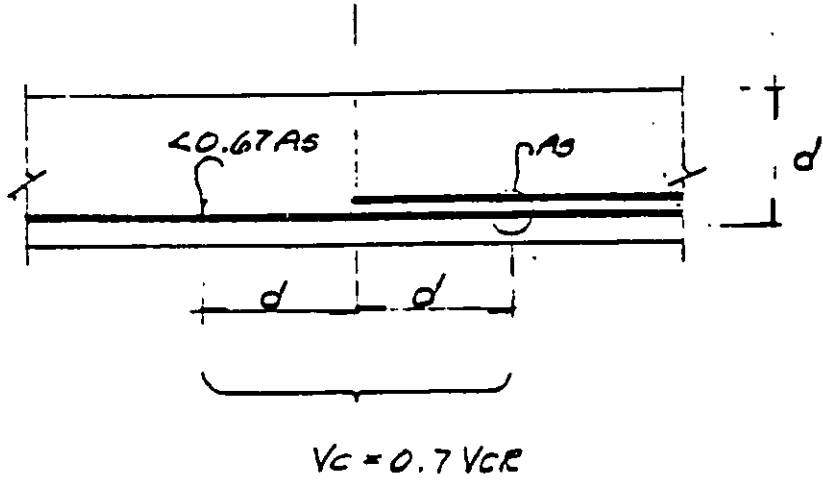
C) CONSIDERACION DE LA RELACION M/V

Si $L/h < 4$

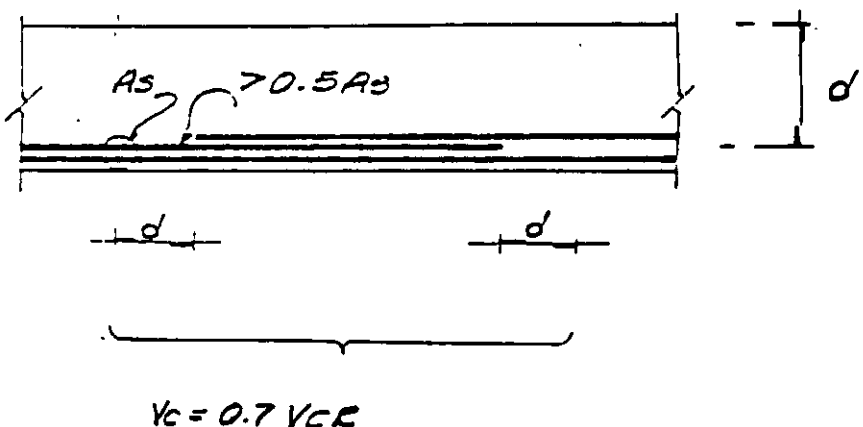
$$V_c = (3.5 - 2.5 \frac{M}{vd}) V_{CR}$$

PERO NO MAYOR QUE $1.5 F_{Rbd} \sqrt{f^*c}$

D) INTERRUPCION DEL REFUERZO LONGITUDINAL



E) TRASLAPES DEL REFUERZO LONGITUDINAL



F) CORTANTE Y CARGA AXIAL

$$V_c = K V_{CR}$$

DONDE

$$K = 1 + 0.007 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{COMPRESION}$$

$$K = 1 - 0.03 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{TENSION}$$

G) ELEMENTOS ANCHOS

LOSAS, ZAPATAS Y MUROS

$$\text{SI } \left\{ \begin{array}{l} b \geq 4d \\ \frac{M}{Vd} < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow V_c = 0.5 FRbd \sqrt{f'_c} \quad \text{INDEPENDIENTEMENTE DE P}$$

EN CASO QUE NO SE CUMPLA ALGUNA DE LAS DOS CONDICIONES.

$$V_c = V_{CR}$$

5.3 CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSAL

Si $V_u > V_c$

A) ESTRIBOS VERTICALES

$$V_s = \frac{F_R A_v f_y d}{s}$$

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

B) ESTRIBOS INCLINADOS

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} (\sin \alpha + \cos \alpha) \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

C) VALOR MAXIMO DE V_u .

$$V_u \leq 2 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

D) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE V_u .

$$\text{Si } V_u > V_c \quad \text{PERO } < 1.5 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.5 d$$

$$\text{Si } V_u > 1.5 F_R b d \sqrt{f^* c} \quad \text{PERO } < 2 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.25 d$$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

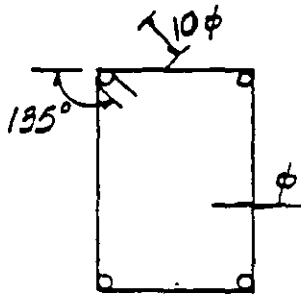
$$s = 0.25 d \quad \text{Si} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{Si} \quad (Q \leq 2)$$

F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

- $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$
- $\phi \text{ m\u00edn} = 6.3 \text{ mm} (1/4" \text{ o } \#2)$
- ANCLADOS 10ϕ DESPUES DE UN DOBLEZ A 135° SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



ESTRIBOS INCLINADOS $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS $\alpha \geq 30^\circ$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

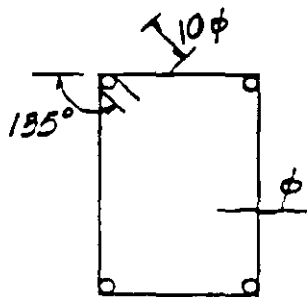
$$s = 0.25 d \quad \text{SI} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{SI} \quad (Q \leq 2)$$

F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

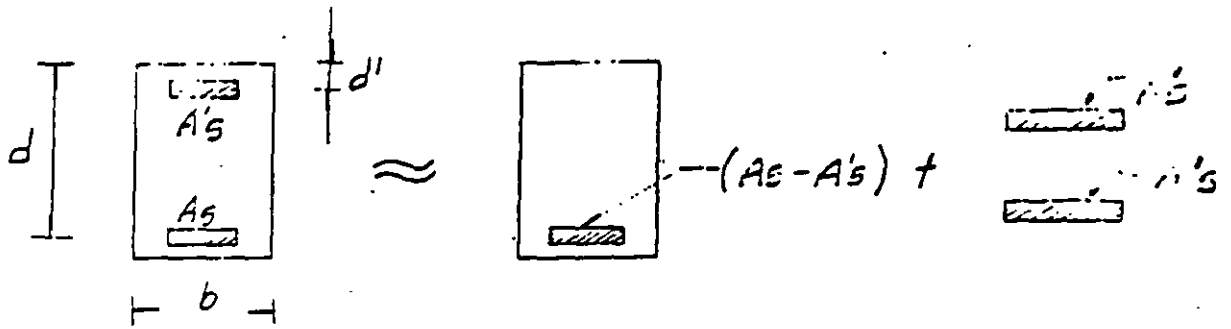
- $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$
- $\phi \text{ m\u00edn} = 6.3 \text{ mm} \text{ (1/4" o } \#2)$
- ANCLADOS 10ϕ DESPUES DE UN DOBLEZ A 135° SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



ESTRIBOS INCLINADOS $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS $\alpha \geq 30^\circ$

E) SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[(A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right]$$

de $C = T$

$$abf''c + A'_s f_y = A_s f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{bf''c}$$

SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4600}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

$$V_{c2} = 57\% \cdot 1.11 \times 0.7 = 434.75 \text{ Kg}$$

CÁLCULO DE V_{c3}

COMO $P = 0.012 > 0.01$ ADEMÁS SE INTERRUMPE EL ACERO EN MAS DEL 55 %

$$V_{c3} = V_{c2} \cdot 0.7 = (0.5 FR b d \sqrt{f'_c}) 70\% \times 70\%$$

$$V_{c3} = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.7 \times 0.7 = 5820.91$$

CÁLCULO DE V_{c4}

COMO $P = 0.012 > 0.01$

$$C_4 = V_{c2} 70\% \cdot (0.6 FR b d \sqrt{f'_c}) 0.70$$

$$C_4 = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.70 = 8315.58$$

3).- CONTRIBUCION DE LOS ESTRIBOS

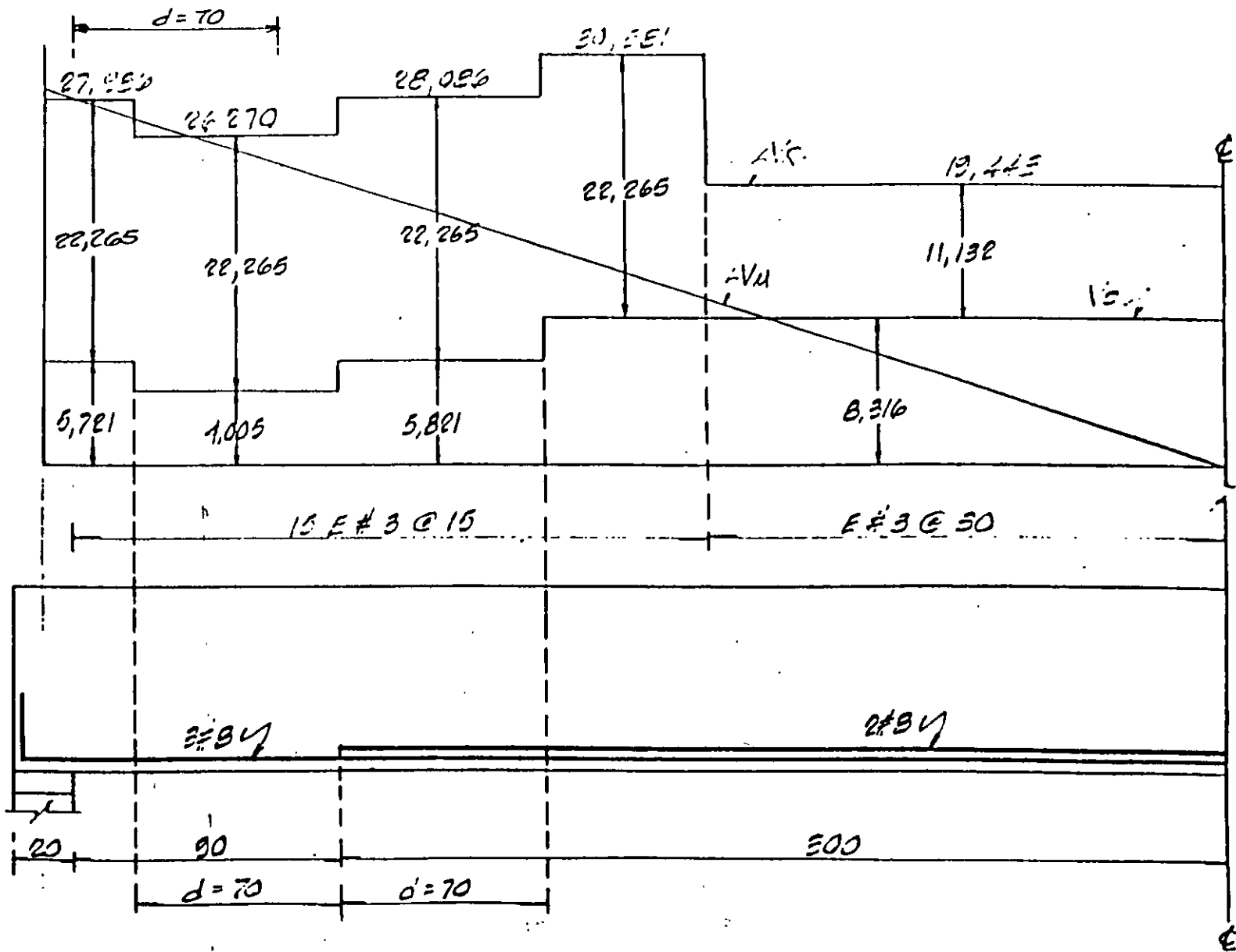
$$V' = \frac{FR A_v f_u d}{s} ; A_v = 2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$$

CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 15 cm.

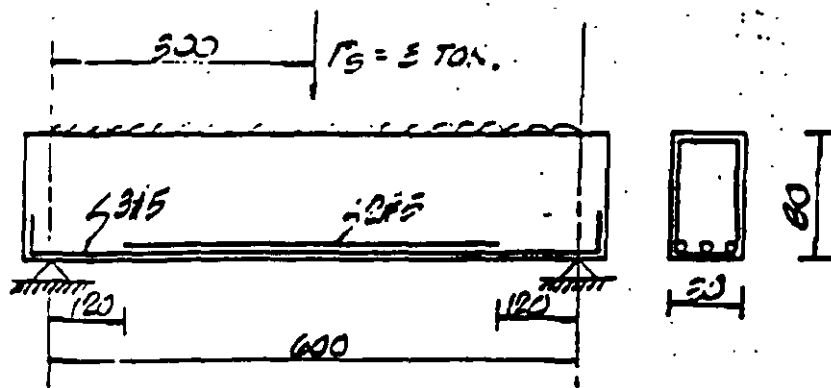
$$V_{s15} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{15} = 22,265.60 \text{ Kg}$$

CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 30 cm.

$$V_{s30} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{30} = 11,132.80 \text{ Kg}$$



2.- DISEÑO FCF CORTEANTE



$$f'_c = 250 \text{ Kg}$$

$$f_c = 170 \text{ Kg}$$

$$f_y = 4200$$

A: CONDICIONES

$$h = 80 \text{ cm} > 70 \text{ cm}$$

$$h = 80 \text{ cm} < 4b = 4(20) = 80$$

FOR LO QUE V_{CR} SE REDUCIRA EN UN 30%

B: CALCULO DE V_{CR}

COXO

$$\frac{L}{h} = \frac{600}{80} = 7.5 > 5$$

$$(3\#5) \rightarrow P = 0.00264 < 0.01$$

$$V_{CR} = (0.2 + 30P) F_r b d' \sqrt{f'_c}$$

$$V_{CR} = [(0.2 + 30(0.00264))] 0.6 \times 30 \times 75 \sqrt{200} = 7,107 \text{ Kg}$$

$$V_{CR} = V_{CR} 70\% = 7,107 \times 0.7 = 4,975 \text{ Kg POR TAMAÑO (h > 70)}$$

FOR INTERRUPCION DE VARILLAS

$$V_c = 0.7 \times 4.98 = 3.49 \text{ TON.}$$

$$(5\#5) \rightarrow P = 0.0044 < 0.01$$

$$V_{CR} = 0.6 (0.2 + 30 \times 0.0044) \sqrt{200} \times 50 \times 75 = 8.45 \text{ TON.}$$

$$\text{FOR TAMAÑO } V_c = 0.7 \times 8.45 = 5.91 \text{ T.}$$

$$\text{FOR CORTE DE VARILLAS } V_c = 0.7 \times 5.91 = 4.14 \text{ T.}$$

C. CALCULO DEL DEFLETO

$$S = \frac{FR Au fy d^3}{Vu - Vc}$$

$$S = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 75}{8100 - 3490}$$

$$DEF = 77 \text{ cm}$$

DEF. MAXIMA

$$1) \leq \sqrt{f_c} b d FR = 50.9$$

$$\therefore S_{MAX} = 0.5 d = 37 \text{ cm}$$

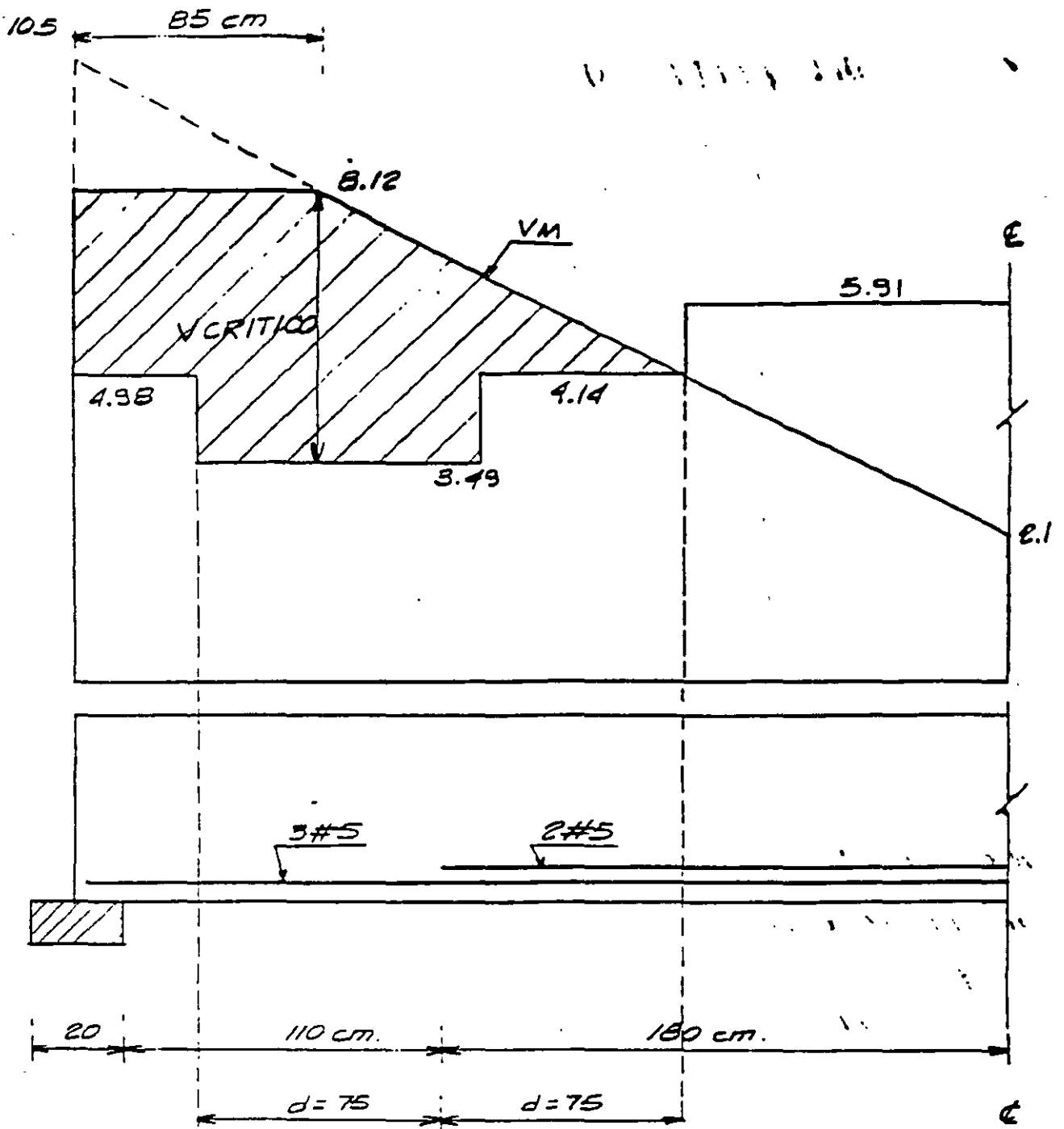
$$c) \frac{FR Au fy}{3.5 b} = 45 \text{ cm}$$

$$RIGE DEF_{MAX.} = 37 \text{ cm}$$

SE ARMARA CON

E # 3 @ 37

EN TODO EL CLARO



¿Qué es concreto presforzado?

Una manera sencilla de entender el concreto presforzado es a través de su comparación con el concreto simple y con el concreto reforzado como pasos sucesivos de un proceso.

Si tenemos una viga de concreto simple como la mostrada en la figura (fig 1), esta tendrá una cierta capacidad de carga, mientras los esfuerzos normales de tensión en el concreto no sean mayores a la capacidad del concreto a la tensión ($f_t = 2\sqrt{f'_c}$) que aunque pequeña, tiene un rango de existencia.

Durante este rango podemos suponer un comportamiento lineal del concreto y por lo tanto a partir de:

$$f = \frac{M}{I} y \quad M_{ag} = \frac{I}{y_i} f_t = 2\sqrt{f'_c} \frac{I}{y_i}$$

para una sección rectangular:

$$M_{ag} = \frac{bh^2}{3} \sqrt{f'_c} \quad \text{si } M = Pa$$
$$P = \frac{bh^2}{3a} \sqrt{f'_c}$$

Si ahora armamos la viga anterior con acero de refuerzo en la zona de tensión, aumentaremos su capacidad con respecto al momento de agrietamiento-fig. (:).

Si tomamos como base las consideraciones básicas del R.D.D.F., obtendremos una carga de servicio del orden de 4.5 veces mayor que la correspondiente a la viga de concreto simple.

En las figuras () y () se muestran los diagramas correspondientes para ambos casos.

Como siguiente paso del mismo proceso, demos ahora a la misma viga un estado de deformaciones contrario al producido por las pzas. P, de tal suerte que las tensiones en el concreto desaparezcan.

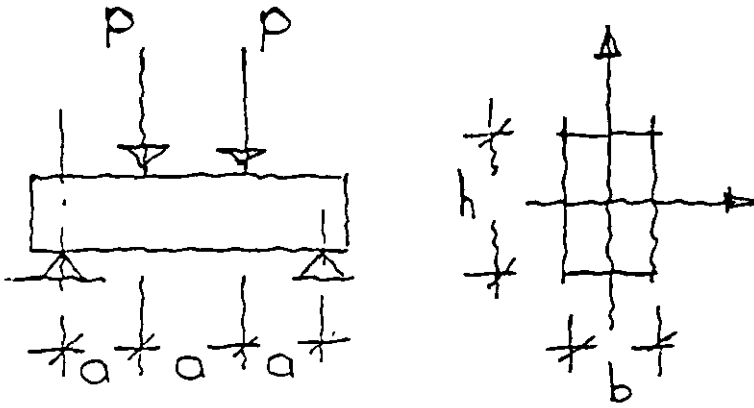
De esta manera, lograríamos una carga de servicio del orden de 7 veces mayor a la del concreto simple.

Es decir, si comparamos la misma sección, a través de concreto reforzado y presforzado, logramos con el segundo una capacidad mayor respecto al primero del orden de 1.55 veces.

Podemos ejemplificar lo anterior a través de un ejemplo sencillo.

v.g.

Si suponemos la siguiente viga:



$$b = 30 \text{ cm.}$$
$$h = 40 \text{ cm.}$$

La viga es de concreto simple con $f'_c = 400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

Si el valor de la carga P es de 10 tons.;

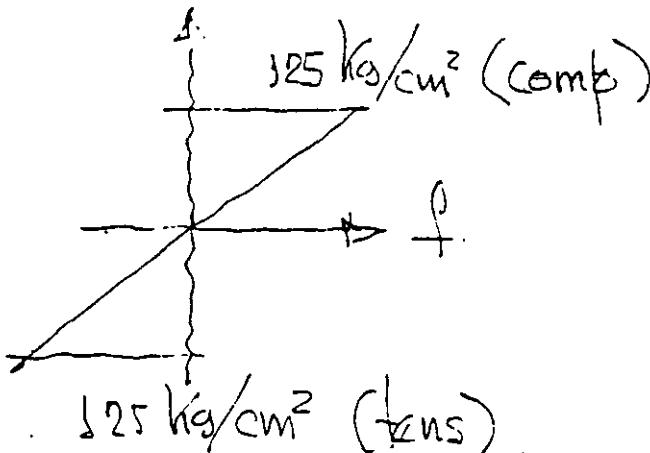
Entonces $M = Pa = 10 \text{ Tm.}$

y los esfuerzos:

$$f = \frac{M}{S} = \frac{10 \cdot 00000}{8000} = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}.$$

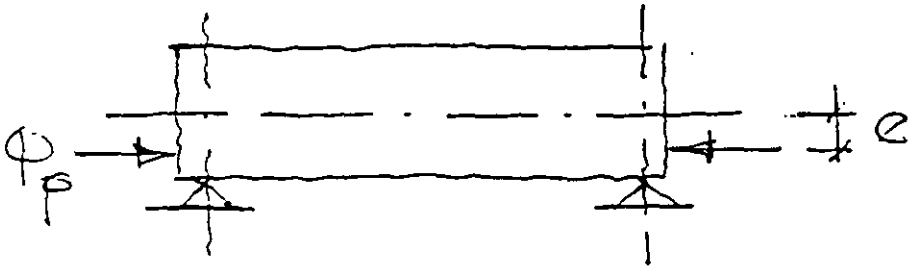
$$f = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

El diagrama de esfuerzos correspondiente es:



Es evidente que la viga fallaría puesto que las tensiones son excesivas.

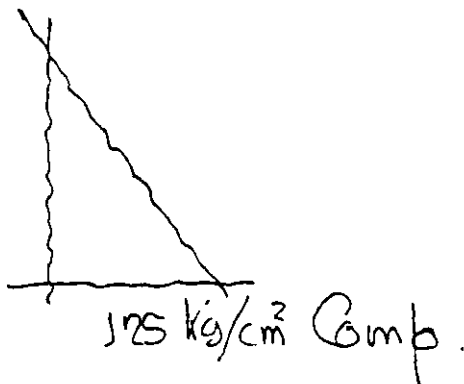
Sin embargo, si a la misma viga, a través de un medio mecánico le aplicamos la siguiente carga:



Siendo $P_p = 75000$ Kgs.

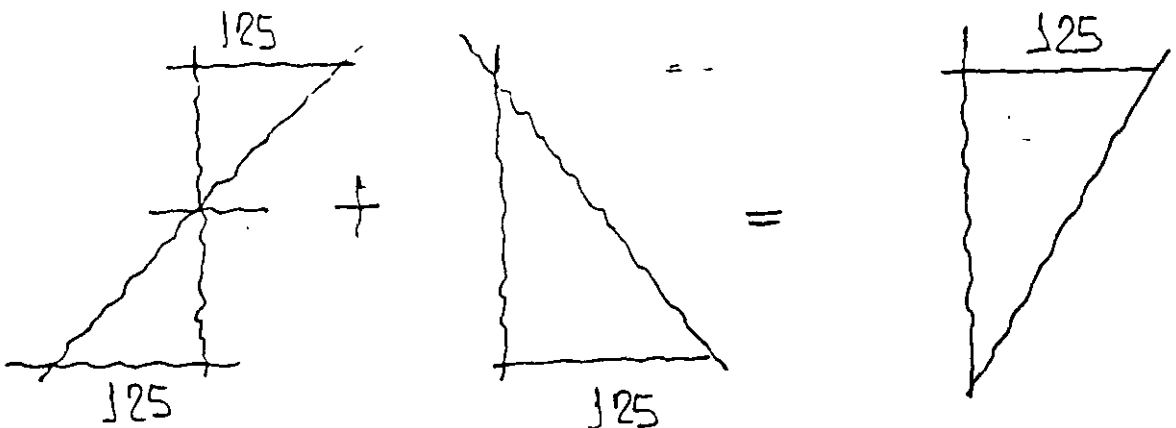
$e = 6.67$ cm.

de tal suerte que produzca el siguiente estado de esfuerzos



$125 \text{ Kg/cm}^2 \text{ comp.}$

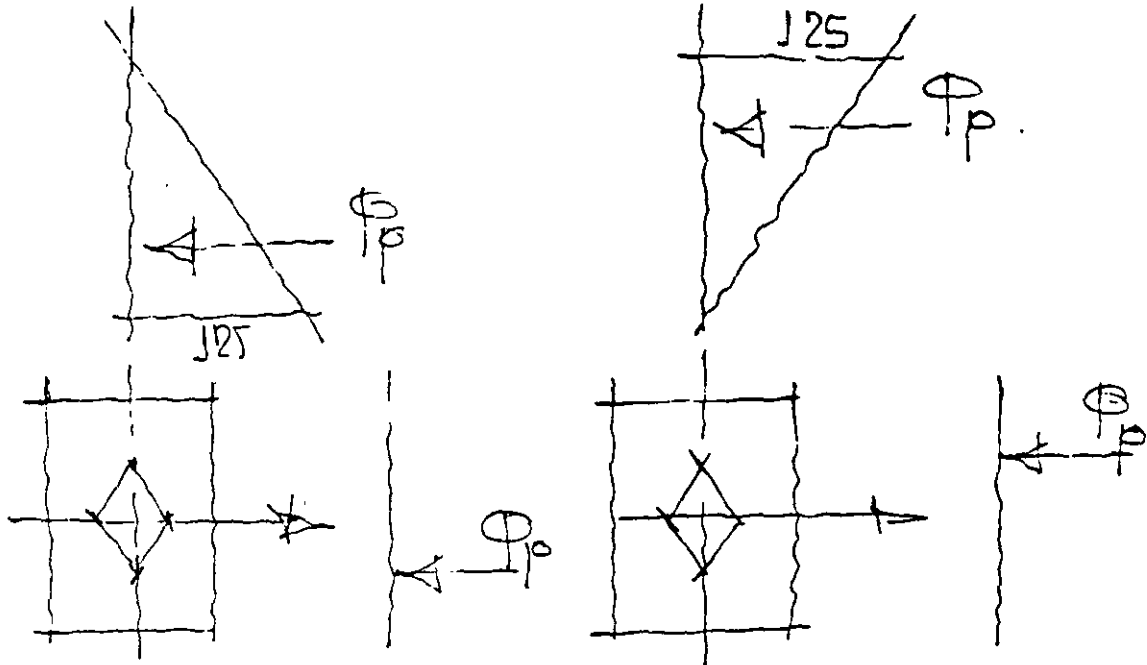
y sumamos ambos efectos tendremos la siguiente combinación de esfuerzos.



ahora es claro que el estado de esfuerzos es aceptable puesto que tan sólo hay compresiones y de una magnitud tal que son aceptables para el concreto.

Para este ejemplo hemos supuesto que el concreto no tiene capacidad alguna a la tensión.

Si analizamos los diagramas correspondientes al efecto mecánico externo de la carga P_p y al estado final:

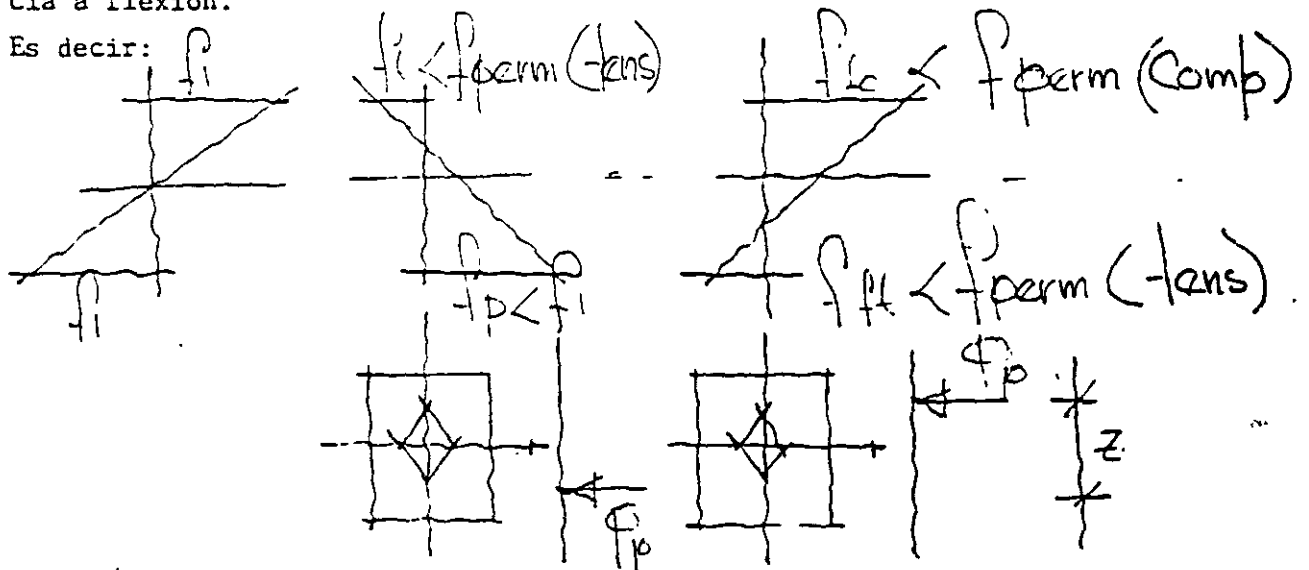


Vemos que la pza. P_p viajó del borde inferior del núcleo central, al superior.

Por lo tanto aquella sección con los bordes del núcleo central más alejados será una sección más eficiente desde el punto de vista de flexión.

Si ahora permitiésemos trabajar al concreto con tensiones, aún cuando menores a ciertos límites (controlados por el agrietamiento), tendríamos un mayor rango para el recorrido de $P_p(z)$ y por lo tanto una mayor eficiencia a flexión.

Es decir:



Estos esfuerzos permisibles estan reglamentados.

El efecto externo, de hecho de flexo compresión, constituye precisamente el presfuerzo. Es decir esfuerzos anteriores a los esfuerzos de trabajo.

Existen varias modalidades para el presfuerzo, siendo las mas comunes:

a) pretensado

b) postensado

El "pre" y el "post" se refieren a si el tensado del acero es anterior o posterior al colado y fraguado del elemento.

El hecho de trabajar con esfuerzos iguales o menores a los esfuerzos permisibles nos situa dentro del rango líneal y elástico y por lo tanto es válida la fórmula de la escuadría.

Diferencias básicas y rangos de utilización entre concreto pretensado y postensado.

Ventajas y desventajas:

Materiales:

Concreto.
Acero.

Perdidas de presfuerzo
Etapas de trabajo.

 * DISEÑO DE ELEMENTOS PRESFORZADOS *

LOS DATOS SON EN KGS. Y EN CMS. FECHA: 18-Abr-89

* NOMBRE DE LA PIEZA ? * =LOSA TT 247.5/60 H. VAZQUEZ

*** CONCRETOS *** *** ACEROS ***

f'c PRES.=	350 Kq./cm2.	fdu PRES.=	17500 Kq./cm2.
f'c REF. =	200 Kq./cm2.	Es PRES. =	2000000 Kq./cm2.
f'ci DET.=	250 Kq./cm2.	as PRES. =	0.55 cm2.
		C. PERD. =	0.80
		C. TENS. =	0.75

*** ETAPAS DE CARGA ***

CUANTAS ETAPAS SON = 4

SECCION SIMPLE = 1 SECCION COMPUESTA = 2

ETAPA	SECCION	S/C	W	
1	1		613.8	KG./ML.
2	1		420.8	KG./ML.
3	2		742.5	KG./ML.
4	2		400.0	KG./ML.

*** PROPIEDADES GEOMETRICAS ***

UNIDADES=cm^2

LAS AREAS SE DEBEN DAR DE ABAJO
 HACIA ARRIBA

PROPIEDADES GEOMETRICAS

++++ SECCION SIMPLE ++++
 CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	7557.50 cm^2.
I TOTAL=	818766.30 cm^4.
Y INF=	43.20 cm.
Y SUP=	16.80 cm.
S INF=	18953.40 cm^3.
S SUP=	48737.97 cm^3.

	BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
	cm.	cm.	cm.
1	18.00	30.00	5.00
2	247.50	247.50	5.00

++++ SECCION COMPUESTA ++++
 CUANTAS AREAS SON= 1

AREA=	3492.96 cm^2
I TOTAL=	1075274.22 cm^4
Y INF=	48.37 cm
Y SUP=	16.63 cm.
S INF=	22743.51 cm^3
S SUP=	64687.05 cm^3.

	BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
	cm.	cm.	cm.
	247.50	247.50	5.00

*** CABLES DE PRESFUERZO. NUMERO, POSICION Y CLARO ***

NUMERO DE CABLES = 8.0 CLARO (MTS.) = 10.81
 CENTROIDE, (cm.) = 6.5

*** REVISION DE ESFUERZOS PERMISIBLES ***

LOS ESFUERZOS SON: PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	18.40 Kq./cm2.	FI(1)=	-47.30 Kq./cm2.
2	FS(2)=	12.61 Kq./cm2.	FI(2)=	-37.43 Kq./cm2.
3	FS(3)=	11.73 Kq./cm2.	FI(3)=	-48.76 Kq./cm2.
4	FS(4)=	6.32 Kq./cm2.	FI(4)=	-26.77 Kq./cm2.

LOS TOTALES FS T = 49.05 Kg./cm². FI T = -154.74 Kg./cm²
 PRESFUERZO FS P = -16.73 Kg./cm². FI P = 107.52 Kg./cm²
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm². FT= -10.17
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm². FT= -59.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	1.67 Kg./cm ² .	FI(1)=	60.77 Kg./cm ² .
2	FS(2)=	14.28 Kg./cm ² .	FI(2)=	27.79 Kg./cm ² .
3	FS(3)=	26.01 Kg./cm ² .	FI(3)=	-20.97 Kg./cm ² .
4	FS(4)=	32.53 Kg./cm ² .	FI(4)=	-47.74 Kg./cm ² .

*** REVISION DE FLECHAS ***

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.210 cm.

LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.617 cm.

* * * LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.662 cm.

PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.717 cm.	CD =	-0.904 cm.
2	D =	0.428 cm.	CD =	-0.416 cm.
3	D =	0.656 cm.	CD =	0.740 cm.
4	D =	0.353 cm.	CD =	0.593 cm.

*** REVISION A LA RUPTURA ***

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 7.84 cm².

ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4200.00 Kg./cm²

CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm.

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO (SI=1, NO=0) : 1

FLUYE EL ACERO DE REFUERZO (SI=1, NO=0) : 1

EL MOMENTO RESISTENTE : 46.037 Ton.-m

EL MOMENTO ACTUANTE : 31.800 Ton.-m

EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.448

EL VALOR DE A= 7.442 cm

 * DISEÑO DE ELEMENTOS PRESFORZADOS *

LOS DATOS SON EN KGS. Y EN CMS. FECHA: 18-Abr-85

* NOMBRE DE LA PIEZA ? * = T. PORTANTE "L" H. VA78117

*** CONCRETOS *** *** ACEROS ***

f'c PRES. =	350 Kg./cm ² .	fdu PRES. =	7500 Kg./cm ² .
f'c REF. =	200 Kg./cm ² .	Es PRES. =	200000 Kg./cm ² .
f'ci DET. =	250 Kg./cm ² .	as PRES. =	0.95 cm ² .
		C. PERD. =	0.80
		C. TENS. =	0.75

*** ETAPAS DE CARGA ***

CUANTAS ETAPAS SON = 4

SECCION SIMPLE = 1 SECCION COMPLESTA = 2

ETAPA	SECCION	W	
1	1	822.0	KG./MI.
2	1	2072.0	KG./MI.
3	1	1316.0	KG./MI.
4	2	1550.0	KG./MI.

*** PROPIEDADES GEOMETRICAS ***

UNIDADES=cm²

LAS AREAS SE DEBEN DAR DE ABAJO HACIA ARRIBA

PROPIEDADES GEOMETRICAS

++++ SECCION SIMPLE +++++

CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	3425.00 cm ² .
I TOTAL=	2170547.83 cm ⁴ .
Y INF=	38.80 cm.
Y SUP=	46.11 cm.
S INF=	54531.72 cm ³ .
S SUP=	45985.76 cm ³ .

	BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
	cm.	cm.	cm.
1	50.00	50.00	30.00
2	35.00	35.00	55.00

++++ SECCION COMPLESTA +++++

CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	3840.76 cm ² .
I TOTAL=	3127047.62 cm ⁴ .
Y INF=	44.52 cm.
Y SUP=	50.48 cm.
S INF=	70241.92 cm ³ .
S SUP=	61944.12 cm ³ .

	BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
	cm.	cm.	cm.
1	35.00	35.00	5.00
2	75.00	75.00	5.00

*** CABLES DE PRESFUERZO. NUMERO. POSICION Y CLARO ***

NUMERO DE CABLES = 10.0 CLARO (MTS.) = 10.40
 CENTROIDE, (cm.) = 10.0

*** REVISION DE ESFUERZOS PERMISIBLES ***

LOS ESFUERZOS SON: PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	24.17 Kg./cm ² .	FI(1)=	-20.33 Kg./cm ² .
2	FS(2)=	60.92 Kg./cm ² .	FI(2)=	-51.27 Kg./cm ² .
3	FS(3)=	38.75 Kg./cm ² .	FI(3)=	-32.68 Kg./cm ² .
4	FS(4)=	27.13 Kg./cm ² .	FI(4)=	-29.83 Kg./cm ² .

LOS TOTALES FS T = 150.96 Kg./cm². FI T = -134.26 Kg./cm².
 PRESFUERZO FS P = -34.95 Kg./cm². FI P = 85.47 Kg./cm².
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm². FT= -10.12
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm². FT= -39.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	-10.78	Kg./cm ² .	FI(1)=	65.04	Kg./cm ² .
2	FS(2)=	50.14	Kg./cm ² .	FI(2)=	13.66	Kg./cm ² .
3	FS(3)=	88.89	Kg./cm ² .	FI(3)=	-19.01	Kg./cm ² .
4	FS(4)=	116.02	Kg./cm ² .	FI(4)=	-48.85	Kg./cm ² .

*** REVISION DE FLECHAS ***

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.021 cm.
 LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.023 cm.
 * * * LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.580 cm.
 PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.316	cm.	CD =	-0.709	cm.
2	D =	0.796	cm.	CD =	0.088	cm.
3	D =	0.506	cm.	CD =	0.594	cm.
4	D =	0.404	cm.	CD =	0.998	cm.

*** REVISION A LA RUPTURA ***

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 3.96 cm².
 ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4700.00 Kg./cm².
 CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO (SI=1. NO=0) : 1
 FLUYE EL ACERO DE REFUERZO (SI=1. NO=0) : 1
 EL MOMENTO RESISTENTE : 123.119 Ton -m.
 EL MOMENTO ACTUANTE : 77.907 Ton -m.
 EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.580
 EL VALOR DE A= 24.065 cm.

Deduct deflection caused by weight of member:

$$\Delta \downarrow = \frac{5 w l^4}{384 E_{ci} I}$$

$$= \frac{5 \left(\frac{0.418}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (3587) (20,985)} = 3.00 \text{ in.} \downarrow$$

$$\text{Net camber at release} = 4.41 \uparrow - 3.00 \downarrow$$

$$= 1.41 \text{ in.} \uparrow$$

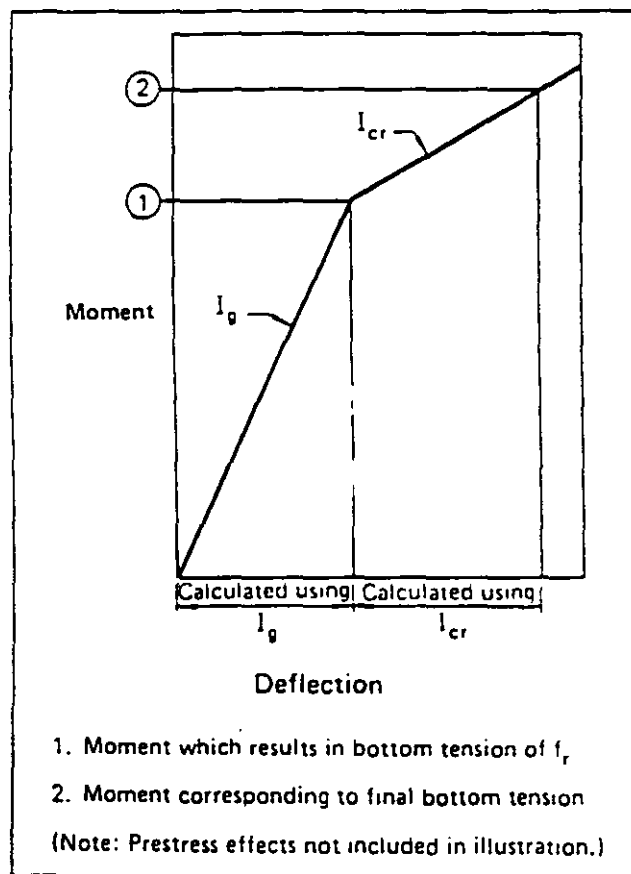
3.4.2 Elastic Deflections

Calculation of instantaneous deflections caused by superimposed service loads follow classical methods of mechanics. Design equations for various load conditions are given in Chapter 8 of this Handbook. If the bottom tension in a simple span member does not exceed the modulus of rupture, the deflection is calculated using the uncracked moment of inertia of the section. The modulus of rupture of concrete is defined in Chapter 9 of the Code as:

$$f_r = 7.5 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (\text{Eq. 3.4-1})$$

(See Sect. 3.3.2 for definition of λ)

Fig. 3.4.1 Bilinear moment-deflection relationship



3.4.2.1 Bilinear Behavior

Section 18.4.2 of the Code requires that "bilinear moment-deflection relationships" be used to calculate instantaneous deflections when the bottom tension exceeds $6 \sqrt{f'_c}$. This means that the deflection before the member has cracked is calculated using the gross (uncracked) moment of inertia (I_g) and the *additional* deflection after cracking is calculated using the moment of inertia of the cracked section. This is illustrated graphically in Fig. 3.4.1.

In lieu of a more exact analysis, the empirical relationship:

$$I_{cr} = n A_{ps} d^2 (1 - \sqrt{\rho_p}) \quad (\text{Eq. 3.4-2})$$

may be used to determine the cracked moment of inertia. Table 3.9.19 gives coefficients for use in solving this equation.

Example 3.4.2 – Deflection calculation using bilinear moment-deflection relationships

Given:

BDT24 of Examples 3.2.8 and 3.4.1

Problem:

Determine the total instantaneous deflection caused by the specified uniform live load.

Solution:

$$\text{Determine } f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi}$$

From Example 3.2.8, the final tensile stress is 782 psi, which is more than 530 psi, so the bilinear behavior must be considered.

Determine I_{cr} from Table 3.9.19

$$A_{ps} = 2.142 \text{ sq in. (See Ex. 3.2.8)}$$

$$d \text{ at midspan} = e_c + y_t = 13.65 + 6.85$$

$$= 20.5 \text{ in.}^1$$

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd} = \frac{2.142}{(96)(20.5)} = 0.00109$$

$$C = 0.0067$$

$$I_{cr} = Cbd^3 = 0.0067 (96)(20.5)^3$$

$$= 5541 \text{ in.}^4$$

¹"Allowable Tensile Stresses for Prestressed Concrete," *PCI Journal*, Feb. 1970.

¹It is within the precision of the calculation method and observed behavior to use midspan d and to calculate the deflection at midspan, although the maximum tensile stress in this case is assumed at 0.4ℓ .

Determine the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi.
 $782 - 530 = 252$ psi

The tension caused by live load alone is 1614 psi, therefore, the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi is:

$$\frac{1614 - 252}{1614} (0.280) = 0.236 \text{ kips/ft}$$

and

$$\Delta_g = \frac{5 w \ell^4}{384 E_c I_g} = \frac{5 \left(\frac{0.236}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(20,985)}$$

$$= 1.42 \text{ in.}$$

$$\Delta_{cr} = \frac{5 \left(\frac{0.044}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(5541)} = 1.00 \text{ in.}$$

Total deflection = $1.42 + 1.00 = 2.42$ in.

3.4.2.2 Effective Moment of Inertia

The Code allows an alternative to the method of calculation described in the previous section. An effective moment of inertia, I_e , can be determined and the deflection then calculated by substituting I_e for I_g in the deflection calculation.

The equation for effective moment of inertia is:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (\text{Eq. 3.4-3})$$

The difference between the bilinear method and the I_e method is illustrated in Fig. 3.4.2.

The use of I_e with prestressed concrete members is described in a paper by Branson.* The value of M_{cr}/M_a for use in determining live load deflections can be expressed as:

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left(\frac{f_{t\ell} - f_r}{f_\ell} \right) \quad (\text{Eq. 3.4.4})$$

where $f_{t\ell}$ = final calculated total stress in the member

f_ℓ = calculated stress due to live load

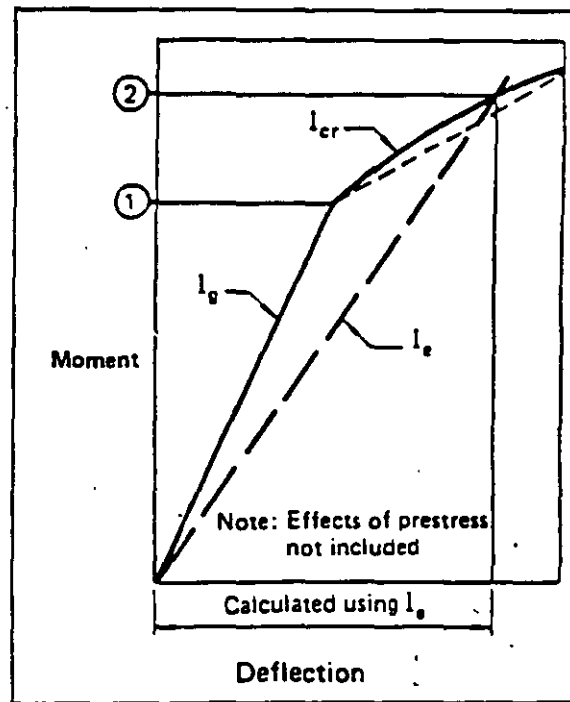
Example 3.4.3 – Deflection calculation using effective moment of inertia

Given:

Same section and loading conditions of Example 3.4.2

*Branson, D. E., "The Deformation of Noncomposite and Composite Prestressed Concrete Members" *Deflections of Concrete Structures*, SP-43, American Concrete Institute.

Fig. 3.4.2 Effective moment of inertia



Problem:

Determine the deflection caused by live using the I_e method.

Solution:

From the table of stresses in Example 3.2.8:

$$f_{t\ell} = 782 \text{ psi (tension)}$$

$$f_\ell = 1614 \text{ psi (tension)}$$

$$f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi (tension)}$$

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left(\frac{782 - 530}{1614} \right) = 0.844$$

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = (0.844)^3 = 0.601$$

$$1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = 1 - 0.601 = 0.399$$

$$I_e = 0.601 (20,985) + 0.399 (5541) = 14,823 \text{ in.}^4$$

I_e can also be found using Fig. 3.9.20

$$f_e = 782 - 530 = 252 \text{ psi}$$

$$\frac{f_e}{f_\ell} = \frac{252}{1614} = 0.16$$

$$\frac{I_{cr}}{I_g} = \frac{5541}{20,985} = 0.26$$

Follow arrows on the chart

$$\frac{I_g}{I_p} = 0.70$$

$$I_e = 0.70 (20,985) = 14,690 \text{ in.}^4$$

$$\Delta_l = \frac{5 w l^4}{384 E_c I_e} = \frac{5 \left(\frac{0.280}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287) (14,823)} = 2.38 \text{ in.}$$

3.4.3 Long-Time Camber/Deflection

ACI 318-77 provides a convenient equation for estimating the additional long-time deflection of non-prestressed reinforced concrete members (Section 9.5.2.5):

$$[2 - 1.2 (A'_s/A_s)] \geq 0.6, \text{ where}$$

A'_s is the compressive reinforcement and A_s is the tensile reinforcement. No such convenient guide is given for prestressed concrete.

The determination of long-time cambers and deflections in precast, prestressed members is somewhat more complex because of (1) the effect of prestress and the loss of prestress over time, (2) the strength gain of concrete after release of prestress, and because (3) the camber or deflection is important not only at the "initial" and "final" stages, but also at erection, which occurs at some intermediate stage, usually from 30 to 60 days after casting.

It has been customary in the design of precast, prestressed concrete to estimate the camber of a member after a period of time by multiplying the initial calculated camber by some factor, usually

based on the experience of the designer. To properly use these "multipliers," the upward and downward components of the initial calculated camber should be separated in order to take into account the effects of loss of prestress, which only affect the upward component.

Table 3.4.1 provides suggested multipliers which can be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members, i.e., those members which are within the span-depth ratios recommended in this Handbook. Derivation of these multipliers is contained in a paper by Martin.*

Long-time effects can be substantially reduced by adding non-prestressed reinforcement near the level of the prestressing steel. The reduction effects proposed by Shaikh and Branson† can be applied to the approximate multipliers of Table 3.4.1 as follows:

$$C_2 = \frac{C_1 + A_s/A_{ps}}{1 + A_s/A_{ps}}$$

where C_1 = multiplier from Table 3.4.1
 C_2 = revised multiplier
 A_s = area of non-prestressed reinforcement
 A_{ps} = area of prestressed steel

*Martin, L. D. "A Rational Method for Estimating Camber & Deflection of Precast, Prestressed Concrete Members" *PCI Journal*, Jan-Feb, 1977.

†Shaikh, A. F., and Branson, D. E., "Non-Tensioned Steel in Prestressed Concrete Beams." *PCI Journal*, Feb, 1970.

Table 3.4.1 Suggested multipliers to be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members

		Without Composite Topping	With Composite Topping
<i>At erection:</i>			
(1)	Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	1.85	1.85
(2)	Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	1.80	1.80
<i>Final:</i>			
(3)	Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	2.70	2.40
(4)	Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	2.45	2.20
(5)	Deflection (downward) — apply to elastic deflection due to superimposed dead load only	3.00	3.00
(6)	Deflection (downward) — apply to elastic deflection caused by the composite topping	—	2.30

Alternately using Table 5.20.4, for $b = 16$ in. and $A_{vf} + A_n = 4 - \#6$, read:

$$A_{sh} = 0.37 \text{ sq in.}$$

Note: Table 5.20.4 will usually be more conservative because it assumes A_{vf} to be the steel provided rather than the steel required.

5.9 Dapped-End Connections (REINFORCED CONCRETE)

Design of connections which are recessed, or dapped into the end of the member, requires the investigation of several potential failure modes. These are illustrated in Fig. 5.9.1 and listed below with the reinforcement required for each consideration.

- 1) Flexure (cantilever bending) and axial tension in the extended end. Provide flexural reinforcement, A_s , plus axial tension reinforcement, A_n .
- 2) Direct shear at the junction of the dap and the main body of the member. Provide shear-friction reinforcement composed of A_s and A_{vh} , plus axial tension reinforcement, A_n .
- 3) Diagonal tension emanating from the reentrant corner. Provide shear reinforcement, A_{sh} .
- 4) Diagonal tension in the extended end. Provide shear reinforcement composed of A_{vh} and A_v .
- 5) Bearing on the extended end. If plain concrete bearing strength is exceeded, use A_s as shear-friction reinforcement.

Each of these potential failure modes should be investigated separately. The reinforcement requirements are not cumulative, that is, A_s is the greater of that required by 1, 2 or 5, not the sum. A_{vh} is the greater of that required by 2 or 4.

5.9.1 Flexure and Axial Tension in the Extended End

The flexural and axial tension horizontal reinforcement can be determined by:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[\frac{V_u a + N_u (h - d)}{d} + N_u \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1})$$

where:

$$\phi = 0.85^*$$

$$a = \text{shear span, in. (can be assumed} = 3/4 \ell_p)$$

$$\ell_p = \text{dap projection, in.}$$

h = depth of the member above the dap, in.

d = distance from top to center of the reinforcement, A_s , in.

f_y = yield strength of the flexural reinforcement, psi

For design convenience, Eq. 5.9-1 can be rearranged as follows:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[V_u \left(\frac{a}{d} \right) + N_u \left(\frac{h}{d} \right) \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1a})$$

Table 5.20.5 may be used to determine the steel requirements.

5.9.2 Direct Shear

The potential vertical crack shown in Fig. 5.9.1 is resisted by a combination of $(A_s + A_n)$ and A_{vh} . This reinforcement can be calculated by Eqs. 5.9.2 through 5.9.4:

$$A_s = \frac{2V_u}{3\phi f_y \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-2})$$

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-3})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u}{3\phi f_{yv} \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-4})$$

where

$$\phi = 0.85$$

f_y = yield strength of A_s and A_n , psi

f_{yv} = yield strength of A_{vh} , psi

$$\mu_e = \frac{1000 \lambda^2 b h \mu}{V_u} \quad (\text{Eq. 5.9-5})$$

(See Sect. 5.6 for definition of λ)

The recommended minimum reinforcement requirements are:

$$A_s (\text{min}) = \frac{80 b h}{f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-6})$$

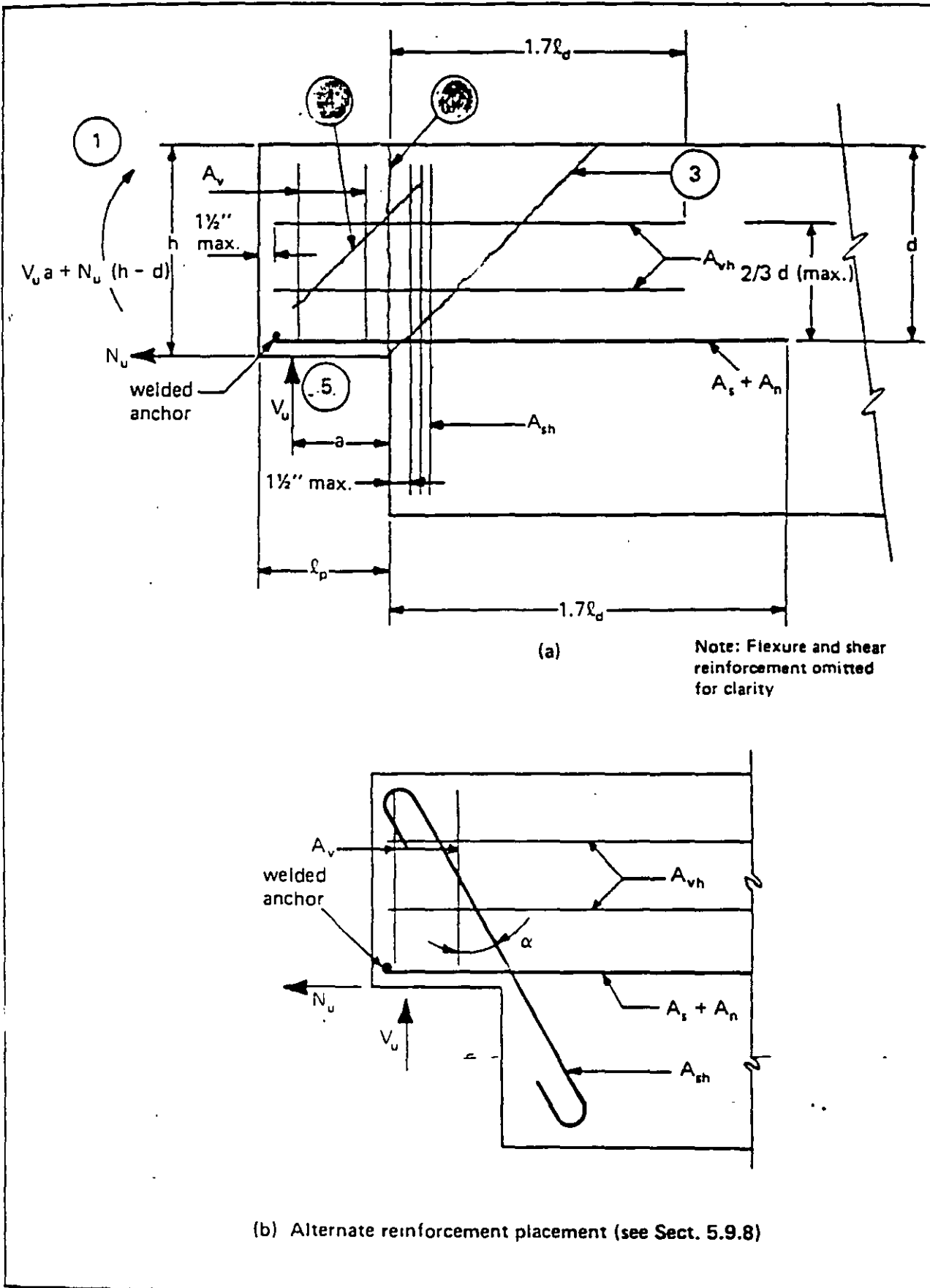
$$A_{vh} (\text{min}) = \frac{40 b h}{f_{yv}} \quad (\text{Eq. 5.9-7})$$

unless one-third more than that required by either Eq. 5.9-2 or 5.9-4 is provided.

Reinforcement A_{vh} should be uniformly distributed within $2/3 d$ of reinforcement $A_s + A_n$.

* To be theoretically correct, Eq. 5.9-1 should have $1/d$ in the denominator. The use of $\phi = 0.85$ instead of 0.90 (flexure) compensates for this approximation.

Fig. 5.9.1 Required reinforcement in dapped-end connections



For design convenience, Eq. 5.9-5 can be combined with Eqs. 5.9-2 and 5.9-4 to yield:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 bh} \quad (\text{Eq. 5.9-2a})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 bh} \quad (\text{Eq. 5.9-4a})$$

where

$$\mu = 1.4$$

V_u is in kips

f_y and f_{yv} are in ksi

5.9.3 Diagonal Tension at Reentrant Corner

The reinforcement required to resist diagonal tension cracking starting from the reentrant corner can be calculated from:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys}} \quad (\text{Eq. 5.9-8})$$

where

$$\phi = 0.85$$

V_u = applied factored load, lb

A_{sh} = vertical or diagonal bars across potential diagonal tension crack, sq in.

f_{ys} = yield strength of A_{sh} , psi

$V_u / \phi bd$ should not exceed $8\lambda \sqrt{f'_c}$.

5.9.4 Diagonal Tension in the Extended End

Additional reinforcement is required in the extended end, as shown in Fig. 5.9.1, such that:

$$\phi V_n = \phi (A_v f_v + A_{vh} f_{yv} + 2 \lambda bd \sqrt{f'_c}) \quad (\text{Eq. 5.9-9})$$

where

f_v = yield strength of A_v

Tests on dapped-end beams* indicate that at least one half of the reinforcement required in this area should be placed vertically. Thus:

$$\min A_v = \frac{1}{2 f_v} \left(\frac{V_u}{\phi} - 2 \lambda bd \sqrt{f'_c} \right) \quad (\text{Eq. 5.9-10})$$

5.9.5 Bearing on the Extended End

The bearing on the extended end should be checked against the plain concrete bearing limita-

tion of Eq. 5.7.1. If the limits are exceeded, then the capacity should be checked for reinforced concrete bearing as described in Sect. 5.8:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left(\frac{V_u \cos \theta}{\mu_e} + N_u \right) \quad (\text{Eq. 5.9-11})$$

$$A_{sh} f_{ys} + A_v f_v = \frac{A_s f_y}{\mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-12})$$

5.9.6 Anchorage of Reinforcement

Horizontal bars $A_s + A_n$ should be extended a minimum of $1.7\ell_d$ past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by welding to cross bars, angles or plates. Horizontal bars A_{vh} should be extended a minimum of $1.7\ell_d$ past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by hooks or other suitable means. Vertical or diagonal bars A_{sh} and A_v should be properly anchored by hooks as required by ACI 318-77. Welded wire fabric may be used for reinforcement, and should be anchored in accordance with ACI 318-77.

5.9.7 Detailing Considerations

Experience has shown that the depth of the extended end should not be less than one-half the depth of the beam, unless the beam is significantly deeper than necessary for architectural reasons.

Diagonal tension reinforcement, A_{sh} , should be placed as closely as practical to the reentrant corner. This reinforcement requirement is not additive to other shear reinforcement requirements.

Reinforcement requirements may be met with welded headed studs, deformed bar anchors or welded wire fabric.

If the flexural stress, calculated for the full depth of section using factored loads and gross section properties, exceeds $6\sqrt{f'_c}$ immediately beyond the dap, longitudinal reinforcement should be placed in the beam to develop the required flexural strength.

5.9.8 Alternate Placement of Reinforcement

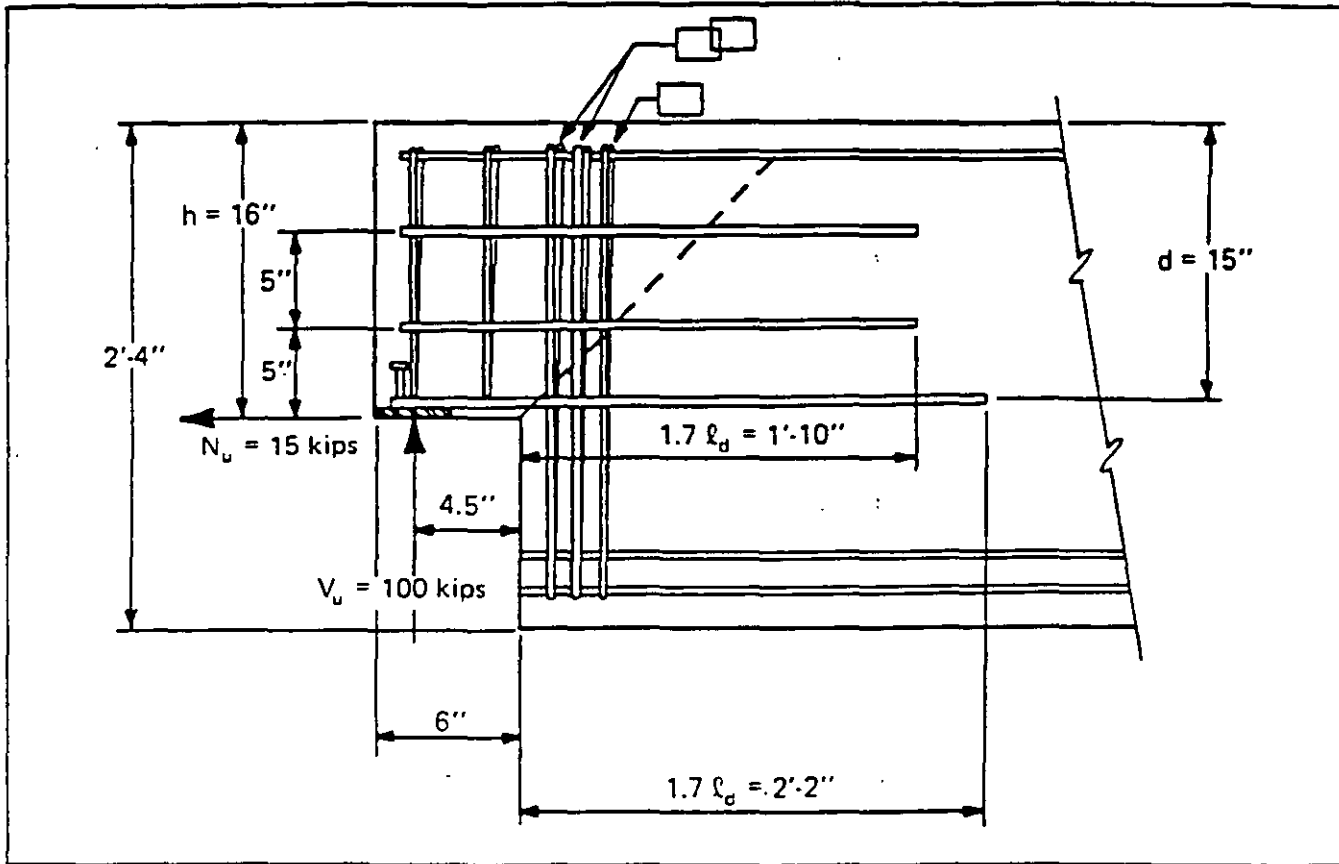
As an alternate to placing reinforcement as shown in Fig. 5.9.1a, diagonal bars can be placed as shown in Fig. 5.9.1b. The requirements for reinforcement placed in this manner can be determined by:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys} \cos \alpha} \approx \frac{V_u \sqrt{a^2 + d^2}}{\phi f_{ys} d} \quad (\text{Eq. 5.9-13})$$

$$A_s + A_n = \frac{N_u h}{\phi f_y d} \quad (\text{Eq. 5.9-14})$$

* Test performed by Raths, Raths and Johnson, Hinsdale, IL (results unpublished).

Fig. 5.9.2 Dapped-end beam of Example 5.9.1



but not less than that determined in sections 5.9.2 or 5.9.5.

If the diagonal bars can be adequately anchored into the extended end, they may also be used as at least partial replacement for A_v and A_{vh} requirements shown in Sect. 5.9.4.

Example 5.9.1 Reinforcement for dapped-end beam

Given: The 16RB28 beam with a dapped end as shown in Fig. 5.9.2.

- $V_u = 100$ kips (includes all load factors)
- $N_u = 15$ kips
- $f'_c = 5000$ psi (normal weight)
- f_y for all reinforcement = 60 ksi (weldable)

Problem: Determine the requirements for reinforcement $A_s + A_n$, A_{vh} , A_{ch} , and A_v shown in Fig. 5.9.1.

Solution:

Assume: Shear span, $a = 3/4 (6) = 4.5$ in.
 $d = 15$ in.

1) Flexure in extended end:

By Eq. 5.9-1a:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[V_u \left(\frac{a}{d} \right) + N_u \left(\frac{h}{d} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{0.85 \times 60} \left[100 \left(\frac{4.5}{15} \right) + 15 \left(\frac{16}{15} \right) \right] = 0.90 \text{ sq in.}$$

Use 3 - #5, $A_s = 0.93$ sq in.

This could also be obtained from Table 5.20.5

2) Direct shear:

By Eq. 5.9-2a:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 b h} = \frac{(100)^2}{1.78 (60) (1) (16) (16)}$$

$$= 0.37 \text{ sq in.}$$

By Eq. 5.9-6:

$$A_s (\text{min}) = \frac{80 b h}{f_y} = \frac{80 (16) (16)}{60,000}$$

$$= 0.34 \text{ sq in.} < 0.37$$

By Eq. 5.9-3:

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} = \frac{15,000}{(0.85)(60,000)} = 0.29 \text{ sq in.}$$

$$A_s + A_n = 0.37 + 0.29 = 0.66 \text{ sq in.} < 0.93$$

Therefore, flexure governs.

By Eq. 5.9-4a:

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 bh}$$

$$= \frac{(100)^2}{3.57 (60)(1)(16)(16)} = 0.18 \text{ sq in.}$$

From Eq. 5.9-7:

$$A_{vh} (\text{min}) = \frac{40 bh}{f_y} = \frac{40 (16)(16)}{60,000}$$

$$= 0.17 \text{ sq in.} < 0.18 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #3 U-bars, $A_{vh} = 0.44 \text{ sq in.}$

3) Diagonal tension at reentrant corner:

By Eq. 5.9-8:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_y} = \frac{100}{0.85(60)} = 1.96 \text{ sq in.}$$

Use 5 - #4 closed ties = 2.00 sq in.

$$\text{Check } V_u / \phi bd = 100 / (0.85 \times 16 \times 15)$$

$$= 0.490 \text{ ksi} < 8 \sqrt{f'_c} = 0.566 \text{ ksi OK}$$

4) Diagonal tension in the extended end:

$$\text{Concrete capacity} = 2\lambda \sqrt{f'_c} bd$$

$$= 2 (1) \sqrt{5000} (16)(15) / 1000 = 33.9 \text{ kips}$$

By Eq. 5.9-10:

$$A_v = \frac{1}{2 f_y} \left(\frac{V_u}{\phi} - 2\lambda \sqrt{f'_c} bd \right)$$

$$= \frac{1}{2 (60)} \left(\frac{100}{0.85} - 33.9 \right) = 0.70 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #4 = 0.80 sq in.

Check Eq. 5.9-9

$$\phi V_n = \phi (A_v f_y + A_{vh} f_{yv} + 2\lambda \sqrt{f'_c} bd)$$

$$= 0.85 [0.80 (60) + 0.44 (60) + 33.9]$$

$$= 92.1 \text{ kips} < 100$$

Change A_{vh} to 2 - #4

$$\phi V_n = 110.4 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

5) Check concrete bearing by Eq. 5.7-1:

$$w = 4.5 \text{ in.}$$

$$s = 4.5/2 \text{ (worst case)}$$

$$sw = 4.5 (4.5/2) = 10.1, \text{ use 9 max}$$

$$s/w = 0.5$$

$$C_r = \left(\frac{sw}{200} \right)^{N_u/V_u} = (9/200)^{0.15} = 0.63$$

$$\phi V_n = \phi C_r 70 \lambda \sqrt{f'_c} (s/w)^{1/3} bw$$

$$\phi V_n = 0.7 (0.63)(70)(1) \sqrt{5000} (0.5)^{1/3}$$

$$(16)(4.5)/1000 = 124.7 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

Reinforcement is not required for bearing
(Could also be determined from Table 5.20.1)

6) Check anchorage requirements:

$A_s + A_n$ bars:

From Table 8.2.7:

$$f_y = 60,000 \text{ psi, } f'_c = 5000 \text{ psi, } \#5 \text{ bars}$$

$$1.7\ell_d = 26 \text{ in. beyond dap}$$

A_{vh} bars:

From Table 8.2.7, for #4 bars,

$$1.7\ell_d = 20 \text{ in. beyond dap}$$

5.10 Beam Ledges

The design shear strength of continuous beam ledges supporting concentrated loads, as illustrated in Fig. 5.10.1, can be determined by the lesser of Eq. 5.10-1 and 5.10-2:

for $s > b + h$

$$\phi V_n = 3 \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h)^2 \quad (\text{Eq. 5.10-1})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + 2d_e) \quad (\text{Eq. 5.10-2})$$

for $s < b + h$, and equal concentrated loads, use the lesser of Eqs. 5.10-1a, 5.10-2a or 5.10-3

$$\phi V_n = 1.5 \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + s) \quad (\text{Eq. 5.10-1a})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} \left(\ell_p + \frac{b+h}{2} + d_e + s \right) \quad (\text{Eq. 5.10-2a})$$

where:

h = depth of the beam ledge, in.

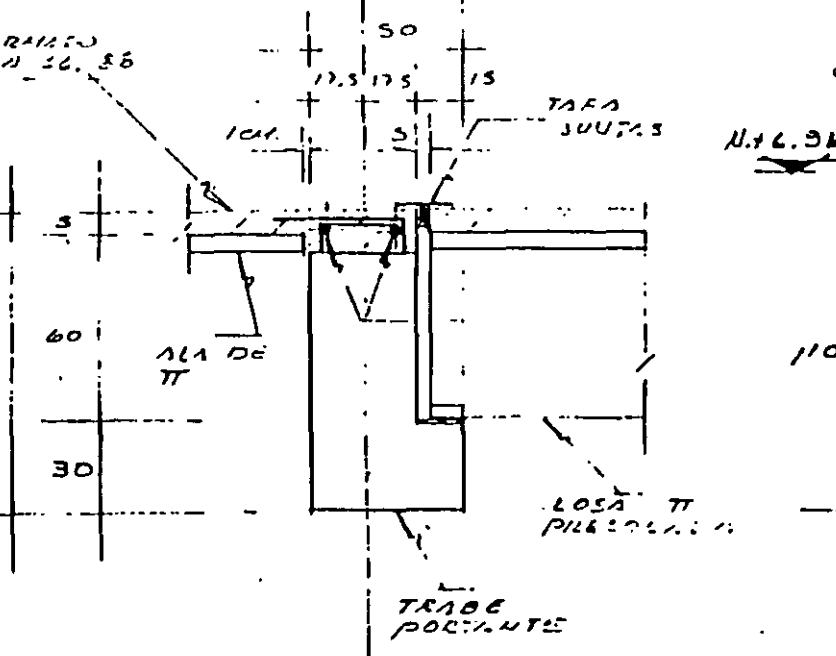
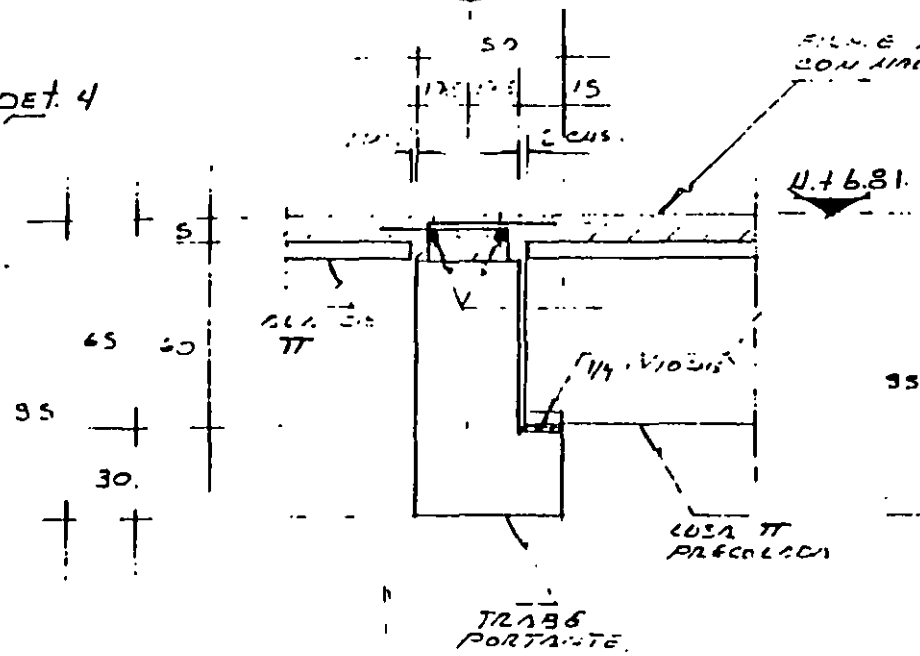
ℓ_p = ledge projection, in.

b = width of bearing area, in.

s = spacing of concentrated loads, in.

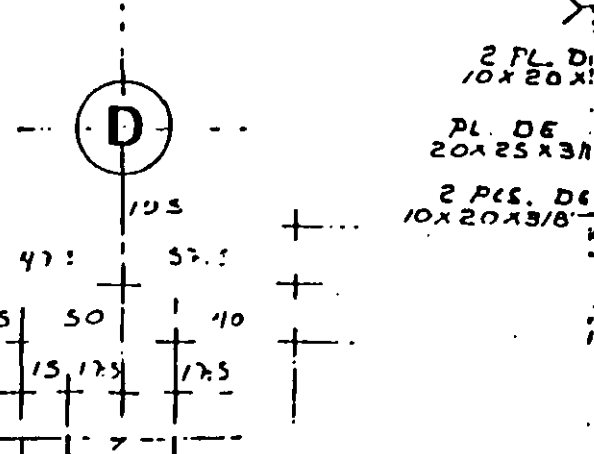
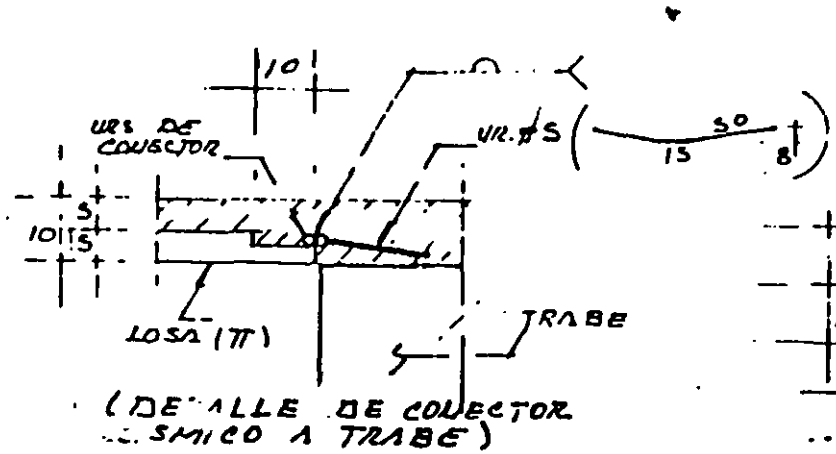
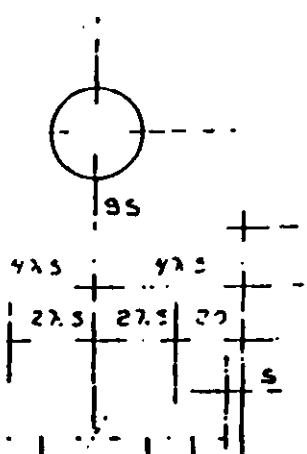
d_e = distance from center of load to the end of the beam, in.

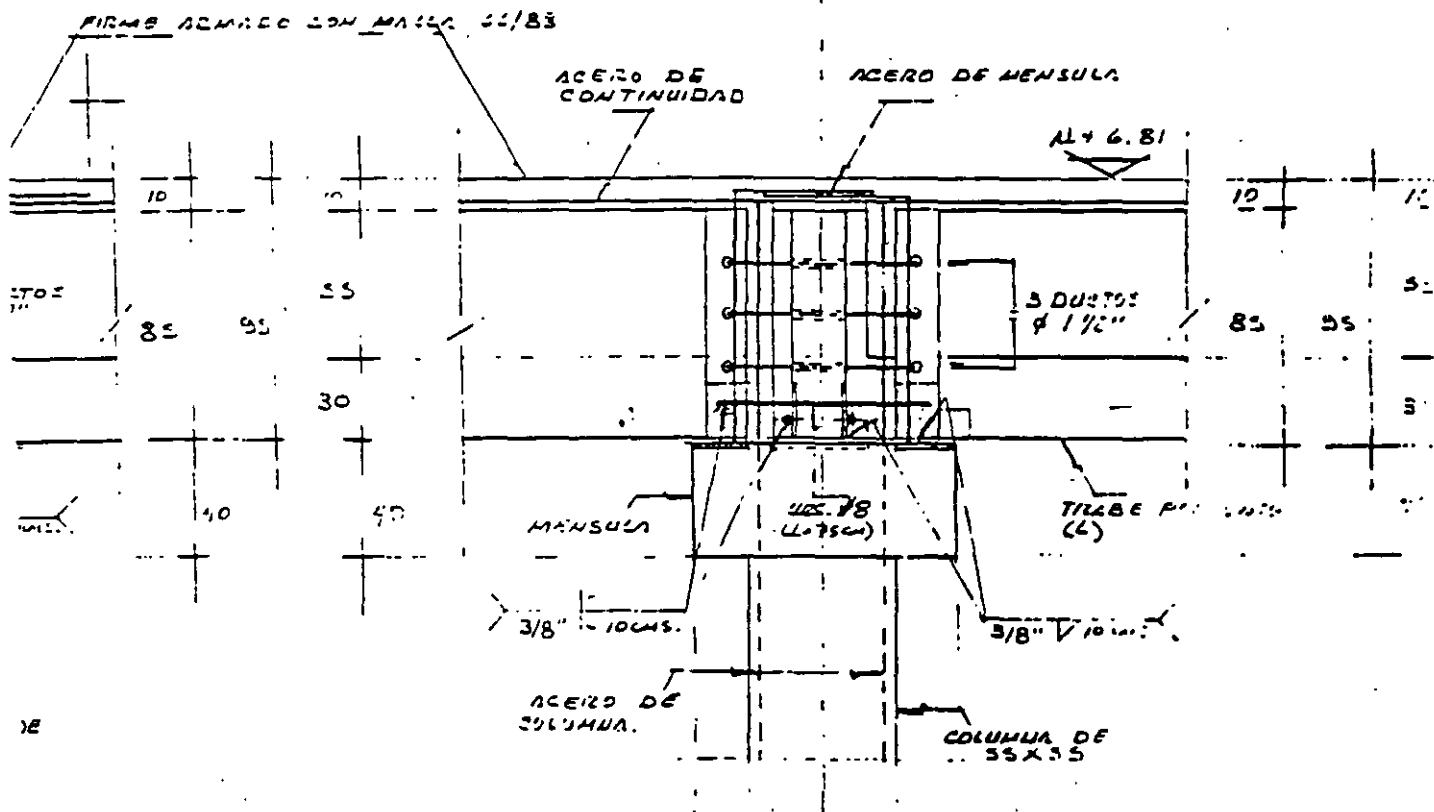
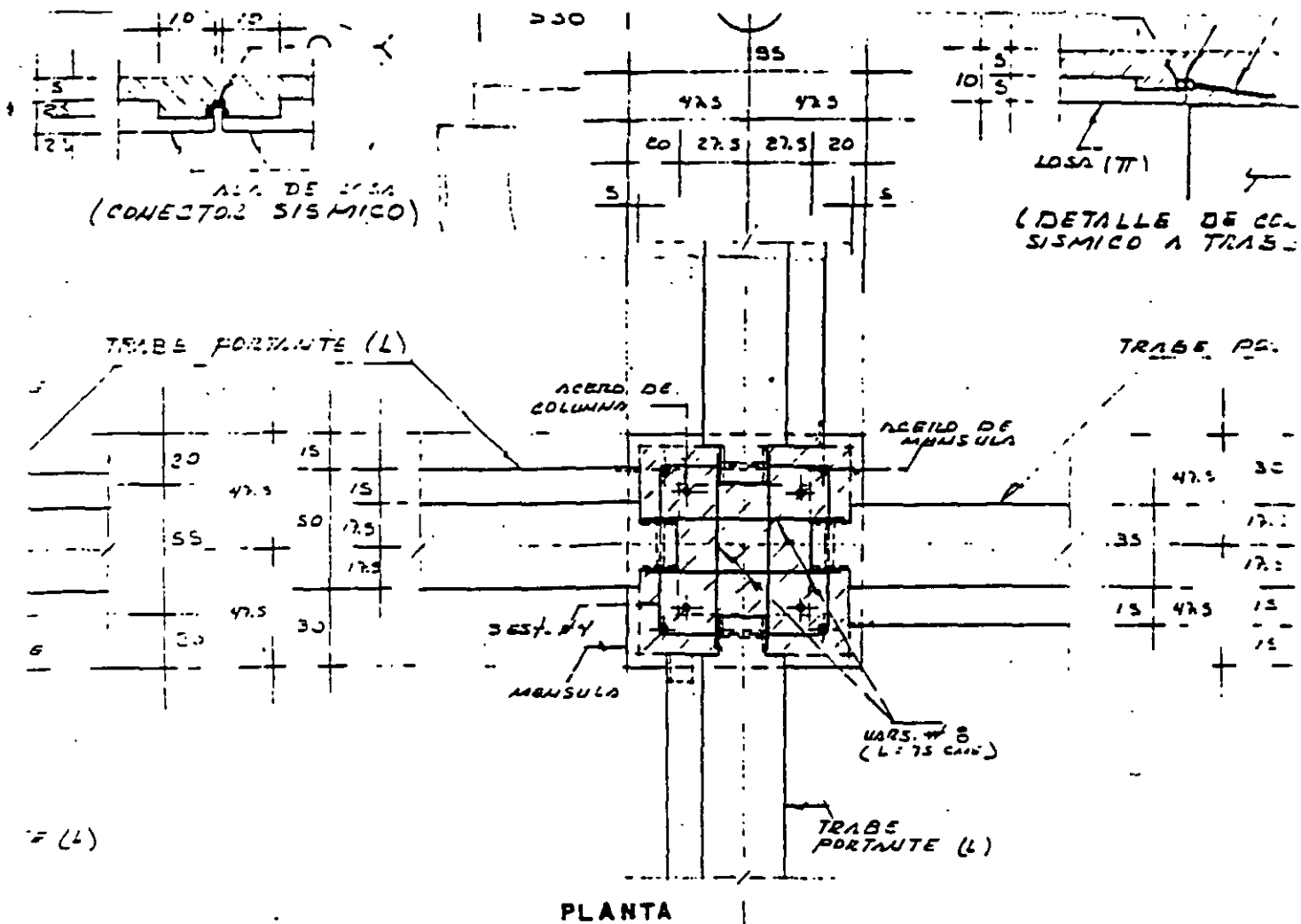
DET. 4



CORTE AA

CORTE B-B

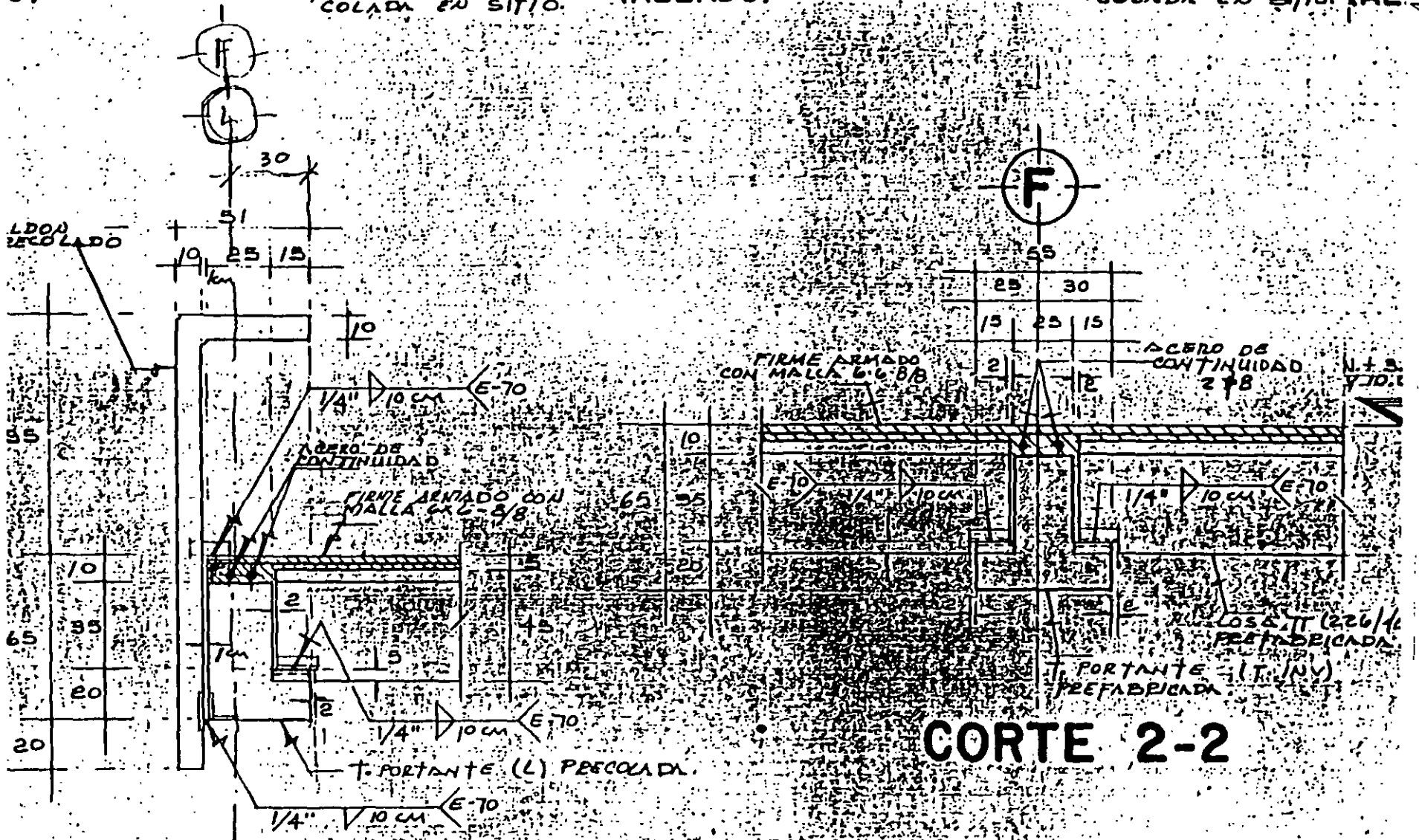




10)

T. RIGIDIZANTE COLADA EN SITIO. (ALZADO)

T. RIGIDIZANTE COLADA EN SITIO. (ALZADO)



CORTE- 1-1

CORTE 2-2



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
CIMENTACIONES SOMERAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

APUNTES DE CIMENTACIONES

5. CIMENTACIONES SOMERAS

Agustín Deméneghi Colina*
Héctor Sanginés García

En un cimiento somero, como en toda cimentación, se debe revisar su estabilidad tanto para los estados límite de falla como para los estados límite de servicio. Es decir, se debe verificar que se tenga una seguridad razonable para evitar que se presente una falla por resistencia al corte del terreno de cimentación, y que las deformaciones que sufra éste no afecten al comportamiento de los elementos de cimentación y de la propia estructura.

Cabe aclarar que en la revisión de una cimentación existen otros factores que deben tomarse en cuenta adicionalmente, pero la falla por resistencia al corte y las deformaciones del terreno de cimentación están entre los más importantes.

5.1 Profundidad de desplante

En una cimentación somera el estrato de apoyo se encuentra a poca profundidad, por lo que la profundidad de desplante debe ser tal que el cimiento quede desplantado satisfactoriamente en dicho estrato de apoyo.

Cabe aclarar que en el estudio de mecánica de suelos se define el estrato de apoyo de la cimentación, por lo que todos los elementos de esta deberán quedar desplantados en él. Durante la construcción de los cimientos se deberá verificar que se cumpla con esta disposición, evitando que los cimientos queden sobre suelo con sustancia orgánica, basura o material en estado suelto. El proceso constructivo deberá ser tal que no se afecte el terreno de cimentación, es decir, no se deberán alterar ni la estructura ni la humedad originales del terreno de cimentación, salvo que el estudio de mecánica de suelos establezca otras especificaciones. En muchas ocasiones conviene colar una plantilla de concreto pobre de $f'_c = 60 \text{ kg/cm}^2$ de 3 cm de espesor, inmediatamente después de llegar al fondo del corte.

La profundidad de desplante deberá ser tal que se cumpla con los requisitos de seguridad de la cimentación. En este sentido, se propone una profundidad de desplante y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad de la cimentación; el proceso se repite hasta determinar la profundidad de desplante que cumpla con lo anterior.

En general, es importante que los cimientos queden desplantados sobre un mismo estrato, ya que si se apoyan en materiales diferentes se

* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

pueden presentar asentamientos diferenciales en la estructura de cimentación.

El desplante de los cimientos deberá quedar abajo del suelo sujeto a erosión superficial o interna. Por ejemplo, en puentes el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de la profundidad de socavación de los materiales del lecho del río. Además, en cualquier cimentación somera existen suelos especialmente susceptibles a la erosión por agua o por viento, como son las arenas o los limos no plásticos, los que deberán protegerse para evitar que se descubran los cimientos.

Cuando el terreno de cimentación es una arcilla de tipo expansivo, el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de esta arcilla, para evitar que los movimientos por cambios de volumen de ella dañen la estructura de cimentación. Si los cimientos quedan por arriba de la arcilla expansiva, deberán tomarse las precauciones correspondientes para que la estabilidad de la cimentación no resulte afectada.

No existe una profundidad mínima de desplante aceptada de manera general por los ingenieros de mecánica de suelos, pero a manera de ejemplo, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1966 dice que "los cimientos deberán desplantarse, por lo menos, 50 cm bajo la superficie del terreno (...) Se exceptúan de este requisito las construcciones cimentadas directamente sobre roca". Por otra parte, se puede considerar en una cimentación somera una profundidad de desplante máxima de 2.5 m, a partir de la cual se trataría ya de una cimentación intermedia o profunda.

5.2 Determinación del área de la cimentación

El área de un cimiento somero es aquella para la cual la cimentación cumple con los requisitos de seguridad correspondientes. Por lo tanto, en la práctica se supone una cierta área y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad; se procede por tanteos, hasta hallar el área que haga que el cimiento cumpla con todos y cada uno de los requisitos de seguridad, al mínimo costo.

Con el propósito de reducir el número de tanteos, se puede estimar en forma aproximada la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación, y hallar un área preliminar para iniciar los cálculos.

La capacidad de carga admisible del terreno de cimentación es aquella presión vertical media de contacto entre la subestructura y el terreno, que garantiza un comportamiento adecuado de la cimentación. Se entiende por comportamiento adecuado que exista un factor de seguridad razonable contra una falla por resistencia al corte del suelo, y que el asentamiento del cimiento no produzca daños a la estructura, ni afecte su buen funcionamiento. Usualmente la capacidad de carga admisible se halla dividiendo la capacidad de carga última del suelo entre un cierto factor de seguridad. Sin embargo, se debe

verificar que la capacidad de carga admisible o presión media de contacto no produzca asentamientos excesivos del cimiento. En la tabla 4.1 se muestran valores de asentamientos permisibles para diferentes clases de cimientos someros.

Por lo anterior, la capacidad de carga admisible o presión media de contacto vale

$$q_a = \Sigma Q / A \quad (5.1)$$

donde ΣQ = sumatoria de cargas al nivel de desplante del cimiento
 A = área de contacto entre cimiento y suelo

Despejando A de la ec 5.1

$$A = \Sigma Q / q_a \quad (5.2)$$

Por otra parte, se define la capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión como la diferencia de la presión de contacto menos la presión total previamente existente al nivel de desplante de la subestructura, es decir

$$q_{an} = q_a - \gamma D_f \quad (5.3)$$

donde q_{an} = capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión
 q_a = presión de contacto o capacidad de carga admisible
 γ = peso volumétrico natural del suelo
 D_f = profundidad de desplante

En la tabla 5.1 se presentan valores aproximados de la capacidad de carga admisible neta del terreno, para diferentes tipos de suelo.

TABLA 5.1
 CAPACIDAD DE CARGA ADMISIBLE NETA APROXIMADA DEL SUELO
 q_{an} , t/m²

<u>Tipo de suelo</u>	<u>Zapatas</u>	<u>Losa de cimentación</u>
Arcilla blanda, arena suelta	3.5-6.0	1.5-2.0
Arcilla de consistencia media	5.0-8.0	2.0-3.0
Arena medianamente compacta, arcilla firme	7.0-10.0	3.0-5.0
Arena compacta, toba cementada	9.0-13.0	5.0-7.0
Arena muy compacta, roca sana	12.0-20.0	8.0-12.0

Cabe aclarar que el área A no se puede calcular directamente de la ec 5.2, pues ΣQ no se conoce a priori, ya que depende del área del cimiento, por lo que para estimar en forma aproximada esta área se procede de la siguiente forma:

La resultante de cargas $\Sigma Q = \Sigma Q' + W_{cim}$, en que $\Sigma Q'$ es la carga al nivel de la superficie del terreno o al nivel de piso terminado y W_{cim} es el peso del cimiento (incluyendo el peso del relleno que está sobre él),

$$\Sigma Q / A = \Sigma Q' / A + W_{cim} / A$$

pero $W_{cim} / A = \gamma D_f$ y $q_a = q_{an} + \gamma D_f = \Sigma Q / A$

$$\therefore q_{an} + \gamma D_f = \Sigma Q' / A + \gamma D_f \quad \frac{\Sigma Q}{A} = q_a = \frac{\Sigma Q'}{A} + \frac{W_{cim}}{A}$$

y $q_{an} = \Sigma Q' / A$

$$A = \Sigma Q' / q_{an}$$

$$q_a = \frac{\Sigma Q'}{A} + \gamma D_f \quad (5.4)$$

La ec 5.4 permite estimar en forma aproximada el área del cimiento.

5.3 Zapatas corridas

5.3.1 Mecánica de suelos

En ocasiones se tiene que utilizar una retícula a base de zapatas corridas, de tal forma que el peso total que se transmite en un tablero al nivel de cimentación se reparte en las cuatro zapatas corridas que limitan al tablero. Para ilustrar esta situación, consideremos el tablero de la fig 5.1a y sea ΣQ la carga que transmite la estructura al nivel de la cimentación. Se pueden calcular los semianchos b_1 y b_2 de las zapatas corridas de la fig 5.1b considerando que cada zapata toma una carga proporcional al área tributaria correspondiente del tablero. Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales, y llamando q_a a la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación y w al peso unitario de la estructura

$$w = \Sigma Q / a_1 a_2 \quad (5.5)$$

el ancho b_2 se obtiene resolviendo la siguiente ecuación cuadrática

$$4a_2 q_a b_2^2 + [a_1^2 w - 4 a_1 a_2 q_a - a_1 w (2 a_2 - a_1)] b_2 + w a_1^2 (2 a_2 - a_1) = 0 \quad (5.6)$$

5.2.2 Diseño estructural

Las alas de una zapata corrida se deben revisar por los siguientes conceptos: (a) tensión diagonal, (b) flexión, y (c) temperatura. A continuación se detalla la revisión de cada uno de ellos. Cabe aclarar que lo que rige en general en el diseño de una zapata de concreto es la tensión diagonal.

a) Tensión diagonal

En una zona cercana al paño de la columna o muro que llega a la zapata se puede presentar una falla por tensión diagonal, ocasionada esta a su vez por esfuerzo cortante (fig 5.5). Esta revisión se lleva a cabo verificando que la fuerza cortante última a una distancia "d" del paño de la columna o muro sea menor que la fuerza cortante resistente.

Para la fuerza cortante resistente, las Normas de Concreto establecen lo siguiente

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{CR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

donde

- b = ancho del elemento
- d = peralte efectivo del elemento
- p = cuantía o porcentaje de acero
- $f_c^* = 0.8 f'_c$
- F_R = factor de resistencia

En elementos anchos, como-losas, zapatas y muros, en los que el ancho b no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($b \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación $M / V d$ no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{CR} puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente de la cuantía de refuerzo.

b) Flexión

La sección crítica por flexión en el ala de la zapata depende del material que forme la columna o muro que llega a la zapata. En la fig 5.6 se presenta la sección crítica por flexión para tres diferentes tipos de material.

La revisión por flexión se realiza verificando que el momento último en la sección crítica sea menor que el momento resistente en dicha sección. A continuación se presenta un resumen de las expresiones necesarias para la revisión por flexión de las Normas de Concreto.

El momento resistente dado por las Normas de concreto es el siguiente:

$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5 q) \quad (5.7)$$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f'_c} / f_y \quad (5.8)$$

mientras que el máximo es $0.75p_b$, donde p_b es el porcentaje balanceado que vale

$$p_b = (f''_c / f_y) [4800 / (f_y + 6000)] \quad (5.9)$$

donde

$$f''_c = 0.85 f^*_c \quad \text{si } f^*_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.10)$$

$$f''_c = (1.05 - f^*_c / 1250) f^*_c \quad \text{si } f^*_c > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.11)$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último, M_u , está dado por las siguientes expresiones

$$c = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f''_c} \quad (5.12)$$

$$p = c f''_c / f_y \quad (5.13)$$

$$A_s = p b d \quad (5.14)$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde

s = separación entre varillas

a_s = área de la varilla que se emplea

d = distancia para la que se requiere el área A_s

A_s = área de acero requerida

c) Temperatura

El acero longitudinal en la zapata se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto):

$$A_s = 66000 (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.16)$$

en que

A_s = área de acero requerida por temperatura, para un espesor $h/2$ de la losa de la zapata, en cm^2/m

$h/2$ = semiespesor de la losa de la zapata, en cm

Cuando el elemento estructural está en contacto con el suelo, se recomienda emplear por temperatura un área de acero igual a $1.5 A_s$

Empleando $1.5 A_s$ en vez de A_s en la ec 5.16, dado que los cimien

están siempre en contacto con el terreno, obtenemos la siguiente expresión

$$A_s = 66000 (1.5) (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.17)$$

Ejemplo 5.3. Zapata corrida sometida a carga vertical

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.7. La longitud de la zapata $L = 6$ m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga $F_c = 1.4$.

En el terreno de cimentación $F_R = 0.45$

Solución

a) Mecánica de suelos

a.1) Estado límite de falla

En un suelo cohesivo, la revisión de la seguridad por resistencia al corte del suelo es satisfactoria cuando se cumple la desigualdad 2.1:

$$\Sigma Q F_c / A < c_u N_c F_R + p_v \quad (2.1)$$

$$\text{Sea } q_{cu} = \Sigma Q F_c / A \quad (2.2)$$

$$q_{rc} = c_u N_c F_R + p_v \quad (2.3)$$

$$\text{Por lo tanto } q_{cu} < q_{rc} \quad (2.4)$$

En las expresiones anteriores:

$\Sigma Q F_c$ = suma de las acciones verticales a tomar en cuenta en la combinación considerada, afectada por su respectivo factor de carga,

A = área del cimiento, m^2

p_v = presión vertical total a la profundidad de desplante por peso propio del suelo, t/m^2

γ = peso volumétrico del suelo, t/m^3

c_u = cohesión aparente, t/m^2 , determinada en ensaye triaxial UU

B = ancho de la cimentación, m

N_c es el coeficiente de capacidad de carga, dado por

$$N_c = 5.14 (1 + 0.25 D_f/B + 0.25 B/L) \quad (2.8)$$

para $D_f/B < 2$ y $B/L < 1$, donde D_f es la profundidad de desplante en metros. En caso de que D_f/B y B/L no cumplan las desigualdades

anteriores, dichas relaciones se considerarán iguales a 2 y 1, respectivamente.

La desigualdad 2.2 se aplica al nivel de desplante del cimiento, por lo que hay que valorar el peso del relleno y de la zapata

$$W_r = (1.3-0.2)(0.4)(1.5) = 0.66 \text{ t}$$

$$W_z = [(1.3)(0.2)+(0.2)(0.4)](2.4) = 0.816 \text{ t}$$

La suma de cargas al nivel de desplante del cimiento vale $0.66+0.816+10.4 = 11.876 \text{ t}$, es decir, $\Sigma Q_2 = 11.876 \text{ t}$ (por cada metro de longitud de zapata). $A = 1.3(6) = 7.8 \text{ m}^2$.

Sustituyendo en la ec 2.2 $q_{cu} = \Sigma Q F_c / A = 12.79 \text{ t/m}^2$

Sustituyendo en la ec 2.8, con $B = 1.3 \text{ m}$, $L = 6 \text{ m}$, $D_r = 0.6 \text{ m}$

$$N_c = 6.011$$

Sustituyendo en la ec 2.3 $q_{Rc} = c_u N_c F_R + p_v = 13.52 \text{ t/m}^2$

Se observa que $q_{cu} < q_{Rc}$, por lo tanto se cumple la desigualdad 2.4.

a.2) Estado límite de servicio

El asentamiento instantáneo de la zapata se puede calcular empleando la siguiente expresión, que proporciona el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado apoyado sobre un medio semiinfinito

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left(L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde q = incremento neto de presión = 8.18 t/m^2
 B = ancho del rectángulo = $1.3/2 = 0.65 \text{ m}$
 L = longitud del rectángulo = $6/2 = 3 \text{ m}$
 E = módulo de elasticidad del medio = 1600 t/m^2
 ν = relación de Poisson del medio = 0.25

Nótese que el área cargada se divide entre cuatro. Sustituyendo valores en la ec 3.19 $\delta = 0.0032 \text{ m}$

El asentamiento debido a toda el área se obtiene multiplicando por cuatro el calculado con la ec 3.19, por lo tanto

$$\delta_T = 4 \delta = 0.0128 \text{ m} = 1.28 \text{ cm}$$

que resulta menor que el asentamiento permisible de 3 cm .

b) Diseño estructural

b.1) Revisión por cortante (tensión diagonal)

La revisión por cortante se lleva a cabo a una distancia d del paño

del muro (fig 5.6). Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto.

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

donde $f_c^* = 0.8 f_c'$

En elementos anchos, como losas, zapatas y muros, en los que el ancho b no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($b \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación $M / V d$ no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{cR} puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente de la cuantía de refuerzo.

Como trabajamos por metro de longitud de zapata $b = 100$ cm. Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm; y dado que el diámetro de la varilla del No 4 es de 1.27 cm, su mitad vale 0.64 cm, por lo que el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 20 - 3.6 = 16.4$ cm.

En este caso se cumple ampliamente que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo. $M / V d = 0.645/3.341(0.164) = 1.177 < 2$, por lo tanto cumple como elemento ancho. Sustituyendo en la ec 5.6 se obtiene $V_{cR} = 8298$ kg.

Como se mencionó antes, el cortante último se halla a una distancia "d" del paño del muro (fig 5.8)

$$V = 8.66(0.386) = 3.34 \text{ t} \quad V_u = F_c V = 4.68 \text{ t} = 4680 \text{ kg}$$

Se observa que $V_{cR} > V_u$ \therefore Cumple

b.2) Flexión

El momento flexionante en la sección crítica vale (fig 5.8)

$$M = c_u l^2 / 2 = 8.65 (0.55)^2 / 2 = 1.31 \text{ t.m}$$

y el momento último $M_u = F_c M = (1.4) (1.31) = 1.83 \text{ t.m}$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{f_c' / f_y} \quad (5.8)$$

entras que el máximo es $0.75p_b$, donde p_b es el porcentaje balanceado que vale

$$p_b = (f_c'' / f_y) [4800 / (f_c' + 6000)]$$

donde

$$f_c'' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = (1.05 - f_c^* / 1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último M_u está dado por las siguientes expresiones

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f_c''} \quad (5.12)$$

$$p = q f_c'' / f_y \quad (5.13) \quad A_s = p b d \quad (5.14)$$

Sustituyendo valores se obtienen los siguientes resultados

$$p_{\min} = 0.00236$$

$$p_{\max} = 0.0114$$

$$p = 0.00186 \quad \therefore \text{rige } p_{\min} \quad A_s = p b d = 3.87 \text{ cm}^2$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde

a_s = área de la varilla que se emplea

d = distancia para la que se requiere el área A_s

A_s = área de acero requerida

Sustituyendo valores ($a_s = 1.27 \text{ cm}^2$, varilla No 4), $s = 32 \text{ cm}$. Por lo tanto, se necesitan varillas del No 4 @ 32 cm.

El acero longitudinal se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión

$$A_s = [65000 (h/e / f_y (h/2 + 100))] (1.5) \quad (5.16)$$

en que A_s = área de acero requerida por temperatura, en cm^2 / m

h = espesor del elemento (dimensión mínima del miembro
medida perpendicularmente al refuerzo), en cm

Sustituyendo valores $A_s = 2.14 \text{ cm}^2 / \text{m}$

Aplicando la ec 5.16, con varillas del No 3 ($a_s = 0.71 \text{ cm}^2$), $s = 33 \text{ cm}$. Por lo tanto, se requieren por temperatura, en la dirección longitudinal de la zapata, varillas del No 3 @ 33 cm.

En la fig 5.9 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

La reacción del suelo en una zapata corrida sometida a fuerza vertical y momento puede ser de tipo trapecial o de tipo triangular, tal como se indica en la fig 5.10 (en el inciso 3.5 se indica la forma de hallar estas reacciones). El cálculo del cortante y del momento en las secciones críticas se realiza con alguno de estos diagramas de reacción. Sin embargo, este procedimiento resultó laborioso, por lo que en ocasiones se sustituyen, para fines de

cálculo, los diagramas trapecial o triangular por una reacción uniforme equivalente, la cual se obtiene dividiendo la carga Q entre el ancho reducido B' (Meli 1985):

$$B' = B - 2e \quad (5.17) \quad e = M / Q \quad (5.18)$$

$$q' = Q / B' \quad (5.19)$$

En la fig 5.11 se muestra la reacción q' , la cual, repetimos, no corresponde a la reacción real del terreno, sino que únicamente se emplea para fines de cálculo. Con esta reacción q' se determinan el cortante y el momento en las secciones críticas correspondientes.

Ejemplo 5.4 Zapata corrida sometida a carga vertical y momento

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.12. La longitud de la zapata $L = 8$ m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga $F_c = 1.1$.

En el terreno de cimentación $F_R = 0.45$

Giro permisible = 0.82 %

Asentamiento permisible = 5 cm

Solución

a) Mecánica de suelos

El ancho de la zapata se obtiene empleando la ec 5.4

$$A = \Sigma Q' / q_{an} \quad (5.4)$$

Cuando existe momento se tiene que trabajar con el ancho reducido B' (ec 2.15, inciso 2.2)

$$B' = B - 2e$$

donde $B =$ ancho del cimiento

$$e = M / \Sigma Q$$

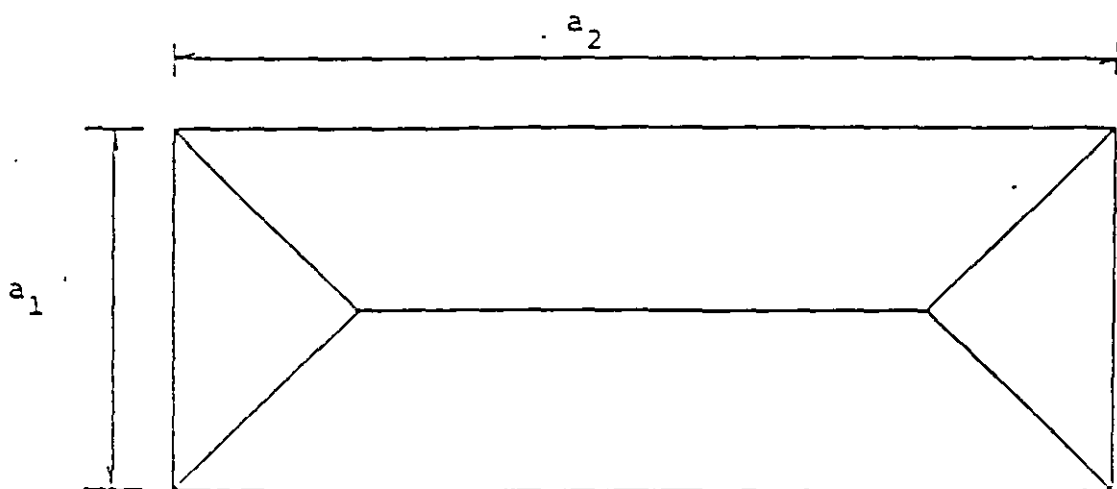
Consideremos inicialmente que no existe momento, entonces el ancho $B' = B$; trabajando por unidad de longitud del cimiento $A = B(1) = B$; de la ec 5.4

$$B' = \Sigma Q' / q_{an} = 15 / 13 = 1.15 \text{ m}$$

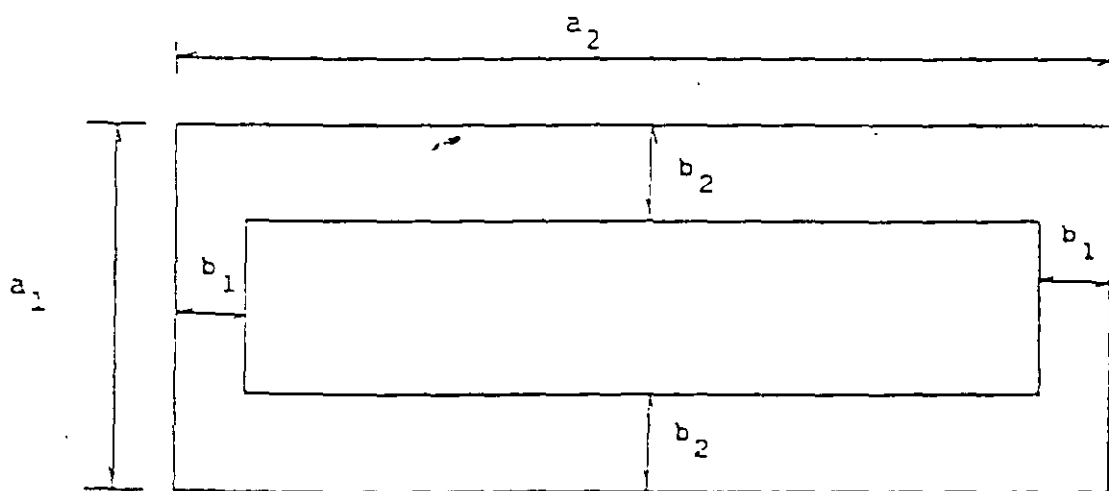
Si existe momento $B = B' + 2e$

$$e = M / 1.1 (\Sigma Q') \quad (\text{considerando un 15 \% de incremento debido al peso del cimiento})$$

$$e = 0.30 \text{ m}$$



a) Tablero con áreas tributarias



b) Planta de las zapatas corridas

FIG 5.1 DETERMINACIÓN DE ANCHOS DE ZAPATAS CORRIDAS

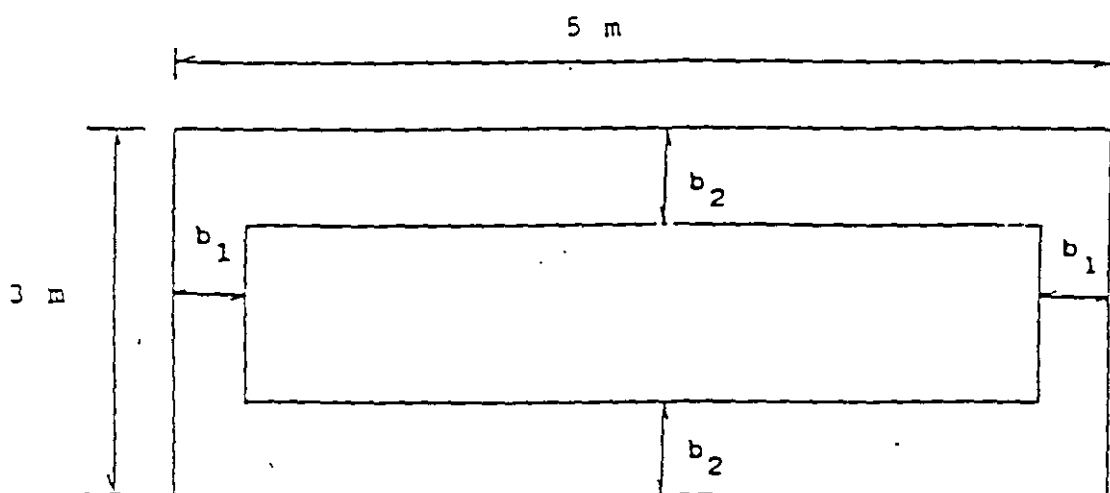


FIG 5.2 ZAPATAS DEL EJEMPLO 5.1

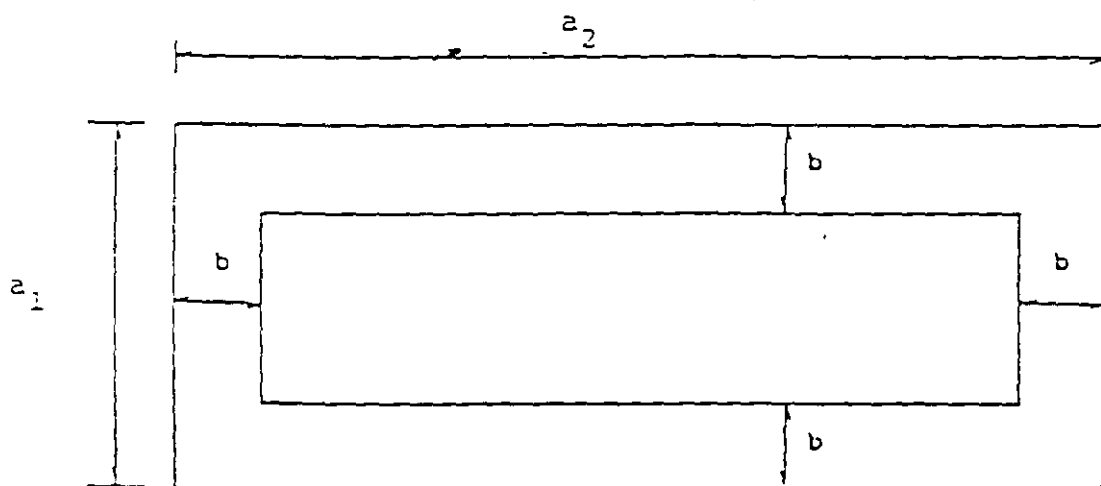


FIG 5.3 ZAPATAS CORRIDAS CON ANCHO ÚNICO

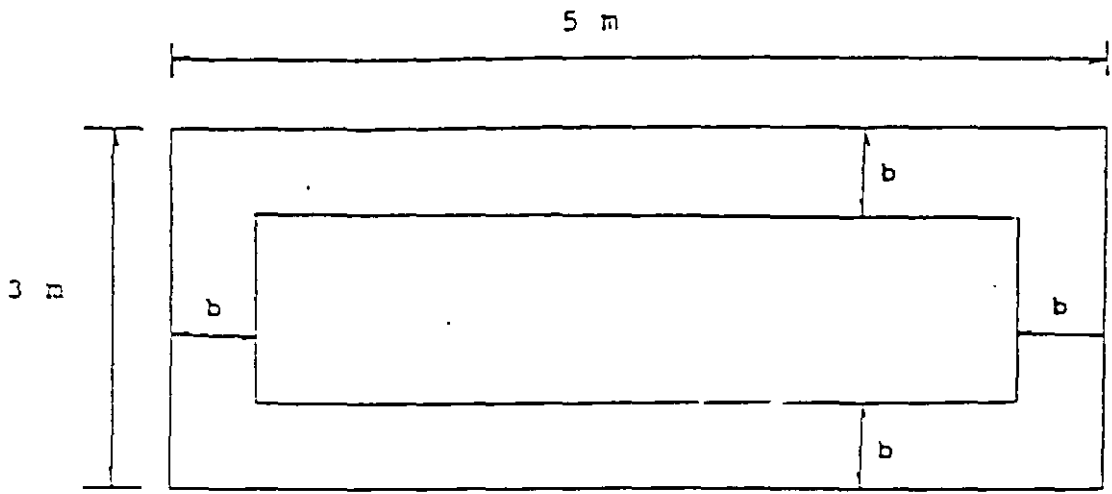


FIG 5.4 ZAPATAS CORRIDAS DEL EJEMPLO 5.2

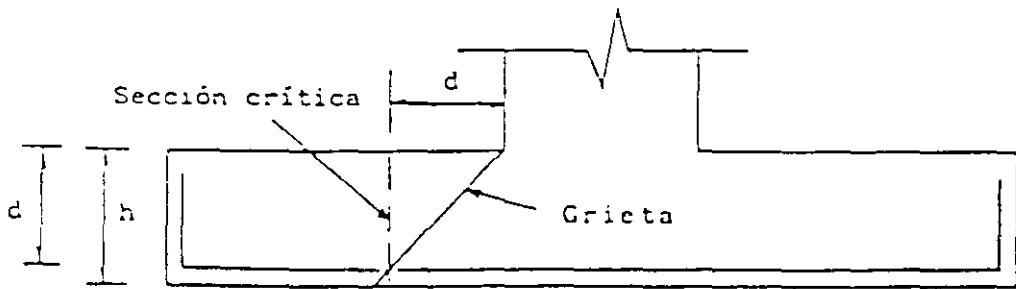
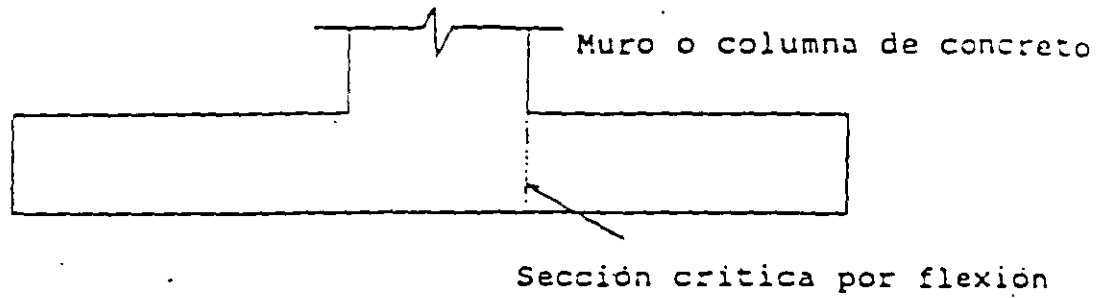
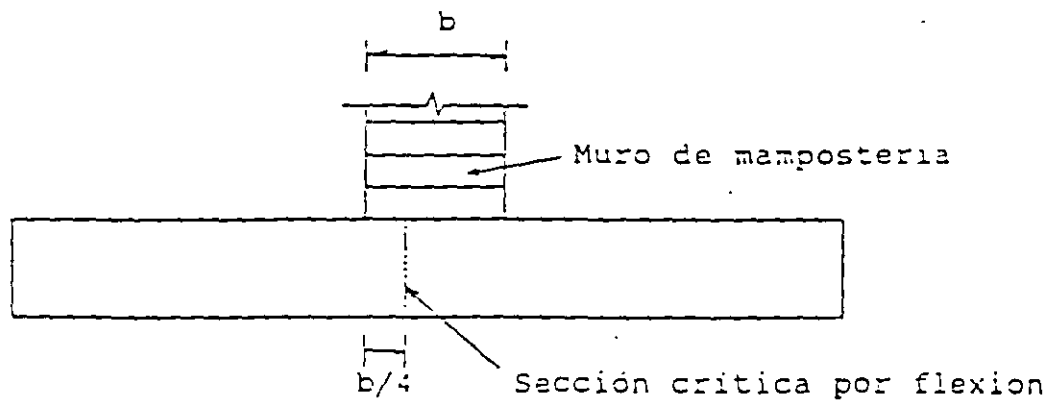


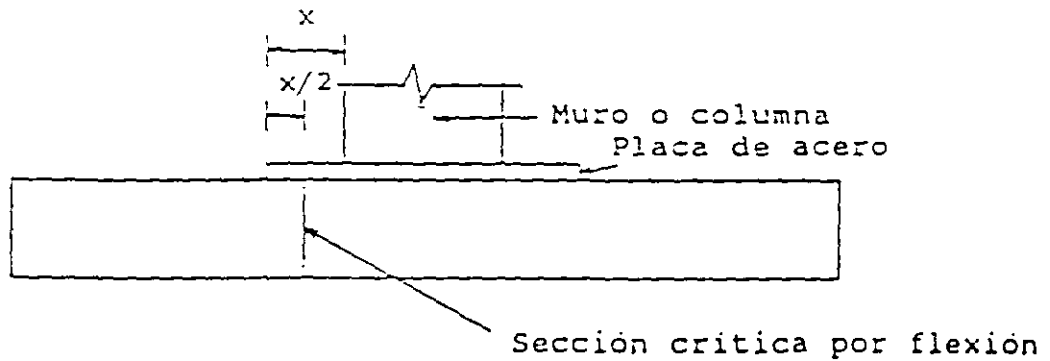
FIG 5.5 SECCION CRÍTICA POR CORTANTE



a) Muro o columna de concreto reforzado

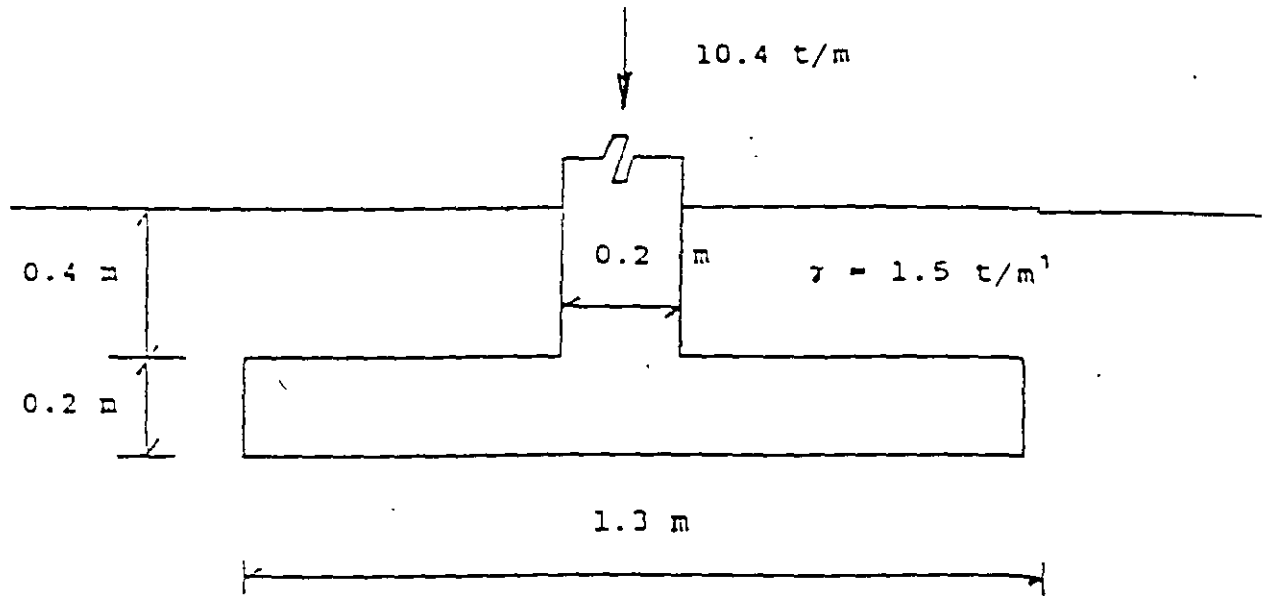


b) Muro de mampostería



c) Muro o columna con pedestal de placa de acero

FIG 5.6 SECCIONES CRÍTICAS POR FLEXIÓN



$c = 6 \text{ t/m}^2$ $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$ Toba parcialmente cementada
 $E_{ep} = 1600 \text{ t/m}^2$ $\nu = 0.25$

FIG 5.7 ZAPATA CORRIDA SOMETIDA A CARGA VERTICAL (EJEMPLO 5.3)

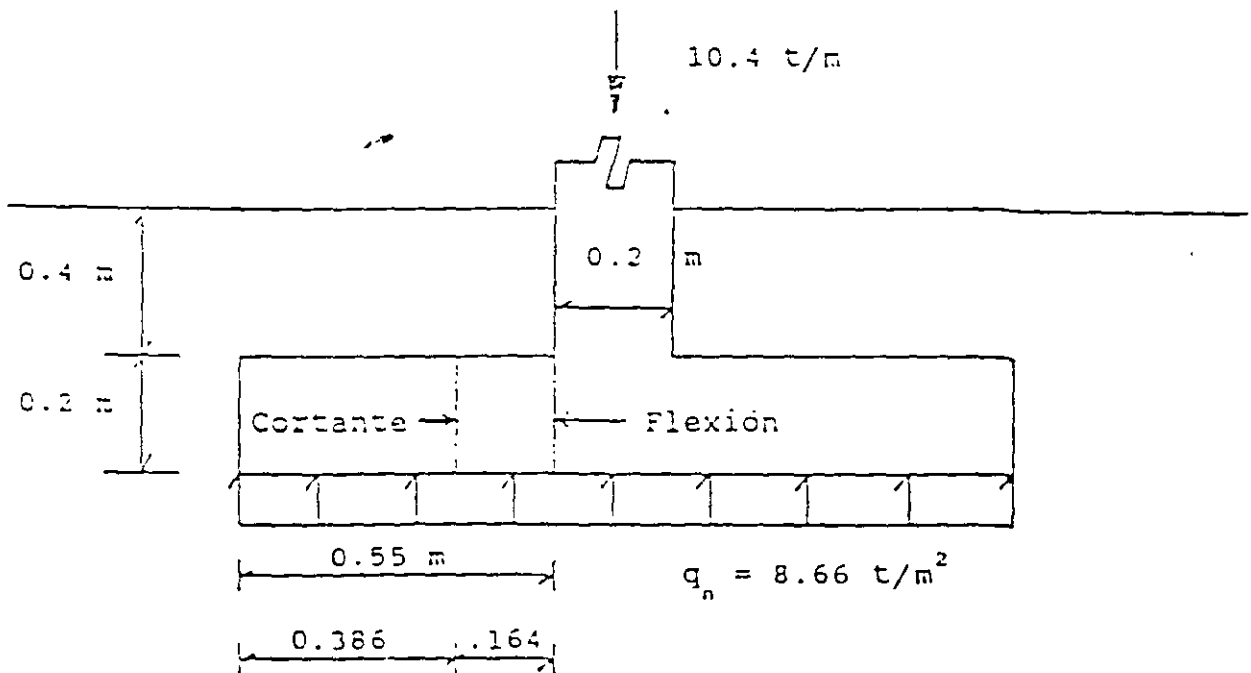


FIG 5.8 REACCIÓN DEL TERRENO Y SECCIONES CRÍTICAS POR CORTANTE Y POR FLEXIÓN (EJEMPLO 5.3)

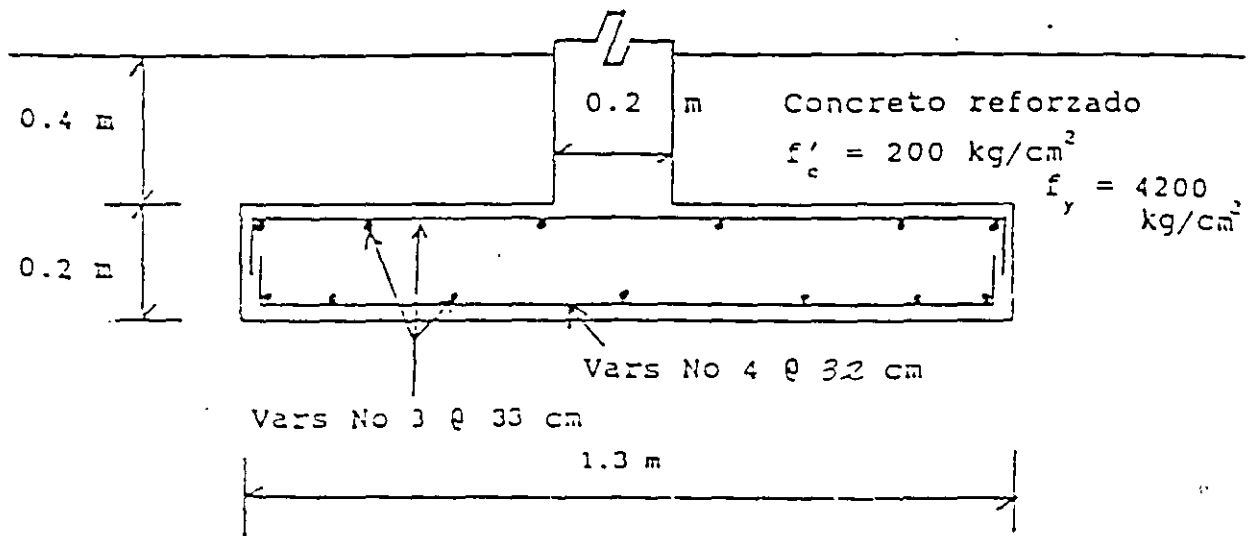
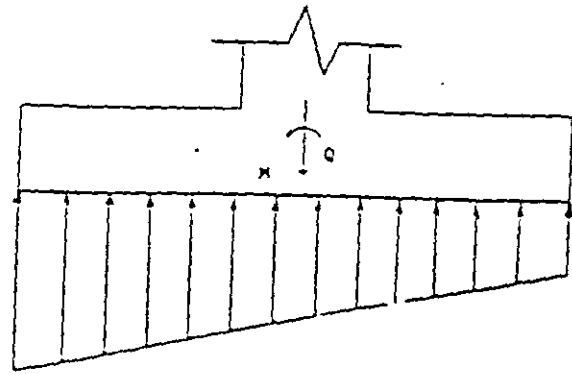
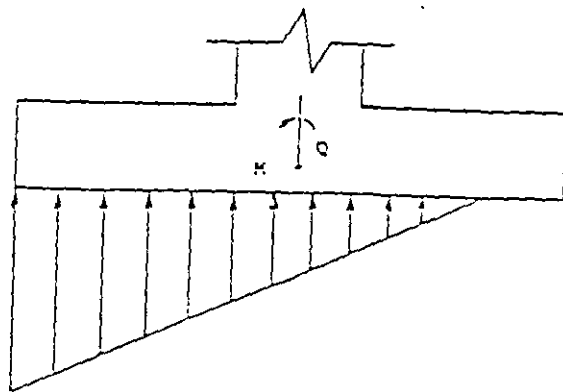


FIG 5.9 CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE LA ZAPATA (EJEMPLO 5.3)



a) Reacción trapecial



b) Reacción triangular

FIG 5.10 REACCIÓN DEL TERRENO TRAPEZIAL O TRIANGULAR

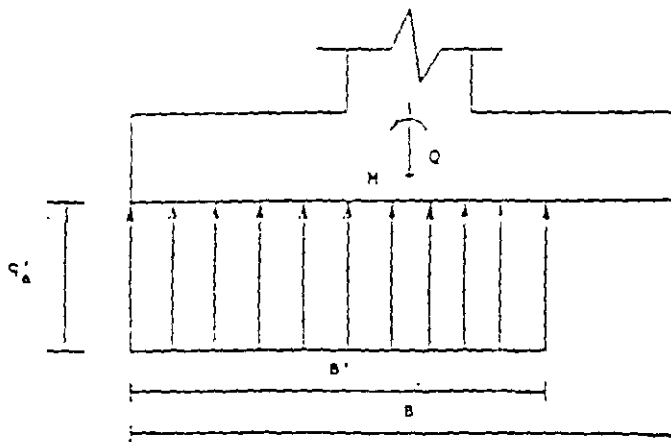


FIG 5.11 REACCIÓN DEL TERRENO RECTANGULAR

EJEMPLO DE DISEÑO ESTRUCTURAL DE UNA ZAPATA RECTANGULAR

Hacer el diseño estructural de la zapata rectangular de concreto reforzado de la fig 1

Columna de 25 por 30 cm. Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm. Profundidad de desplante = 60 cm. Considerar en el concreto reforzado $f_c' = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $\Sigma Q' = 26 \text{ t}$, $M_y = 4.2 \text{ t}\cdot\text{m}$, $M_x = 6.8 \text{ t}\cdot\text{m}$

Solución

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale

$$\Sigma Q = 26 + 1.7(2)(0.3)2.4 + 0.25(0.3)(0.3)(2.4) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(1.6) = 30.098 \text{ t}$$

$$e_x = M_y / \Sigma Q = 4.2 / 30.098 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / \Sigma Q = 6.8 / 30.098 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.421 \text{ m}$$
, $L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$

La presión de contacto media entre cimiento y terreno vale

$$q = 30.098 / 1.7(2) = 8.852 \text{ t/m}^2$$

El incremento neto de presión en el contacto cimiento-terreno es

$$q_n = 8.852 - 1.6(0.6) = 7.892 \text{ t/m}^2$$

a) Penetración

De acuerdo con las Normas de Concreto, la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual a $d/2$, siendo d el peralte efectivo de la losa (fig 2).

Revisaremos la penetración de la columna en la dirección del eje y .

Cuando haya transferencia de momento se supondrá que una fracción de momento dada por

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 - d)}} \quad (1)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(0.3 + 0.264)/(0.25 + 0.264)}}$$

$$\alpha = 0.412$$

se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño v_u se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (fig 2), es decir

$$v_{AB} = V/A_c + \alpha M c_{AB} / J_c \quad (2)$$

$$A_c = 2d(c_1 - c_2 - 2d) \quad (3)$$

$$A_c = 0.5692 \text{ m}^2$$

$$J_c = d(c_1 - d)^2/6 + (c_1 + d)d^3/6 + d(c_2 + d)(c_1 + d)^2/2$$

$$(4)$$

$$J_c = 0.031206 \text{ m}^4$$

En columnas rectangulares $c_1 = 0.3 \text{ m}$ es la dimensión paralela al momento transmitido y $c_2 = 0.25 \text{ m}$ es la dimensión perpendicular a c_1 .

En las expresiones anteriores, V es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta q_n , restando a la reacción del terreno las presiones debidas a peso propio de zapata y relleno

$$q_v = 8.852 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 7.652 \text{ t/m}^2$$

$$V = 7.652 [1.7(2) - (0.25 + 0.264)(0.3 + 0.264)] = 23.799 \text{ t}$$

$$c_{AB} = (0.3 - 0.264)/2 = 0.0282 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ec 2

$$v_{AB} = 23.799 / 0.5692$$

$$+ 0.412(6.8)(0.282) / 0.031206 = 67.13 \text{ t/m}^2$$

$$v_{ABu} = F_R v_{AB} = 1.4(67.13) = 93.98 \text{ t/m}^2$$

El esfuerzo cortante de diseño v_{ABu} (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores

$$v_{cR1} = F_R (0.5 - \gamma) \sqrt{f_c^*} \quad (5)$$

$$v_{cR1} = 0.8 (0.5 - 1.7/2) \sqrt{160} = 13.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{cR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (6)$$

$$v_{cR2} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = 0.8 f_c' \quad (7)$$

a menos que se suministre refuerzo $\gamma = 1.7/2 = 0.85$ es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción.

Se observa que

$$v_{ABu} = 94.0 \text{ kg/cm}^2 < v_{cR2} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 \therefore \text{Cumple}$$

b) Tensión diagonal

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia d del paño de la columna. Haremos la revisión en la dirección del eje y . Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto (fig 3).

Cálculo del cortante último

Las fuerzas se calculan con la reacción neta del terreno (tomando en cuenta el efecto de los dos momentos M_x y M_y). La reacción vale

$$q' = \Sigma Q / B' L' = 30.098 / 1.421(1.5482) = 13.681 \text{ t/m}^2$$

$$\text{La reacción neta } q_n' = 13.681 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6)$$

$$= 12.481 \text{ t/m}^2$$

Hallemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata, $b = 1 \text{ m}$)

$$V = 12.481(0.586) = 7.314 \text{ t}$$

$$M = 12.481(0.586)^2/2 = 2.143 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$V_u = 1.4(7.314) = 10.24 \text{ t}$$

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 - 30p) \sqrt{f_c^*} \quad (8)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (9)$$

donde $f_c^* = 0.8 f_c'$

En elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación M/Vd no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{cR} puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente de la cuantía de refuerzo (Normas de Concreto).

Como trabajamos por metro de ancho de zapata $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm, y puesto que el diámetro de la varilla del N° 4 es de 1.27 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 30 - 3.6 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$.

En este caso se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo

$$B > 4d, \quad B = 170 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/Vd = 1.11 < 2 \quad \therefore \text{cumple como elemento ancho}$$

$$V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5(0.8)(100)(26.4)\sqrt{160}$$

$$V_{cR} = 13357 \text{ kg} > V_u = 10240 \text{ kg} \quad \therefore \text{Cumple}$$

c) Flexión

Haremos el diseño por flexión en la dirección del eje y . El momento flexionante en la sección crítica vale

$$M = 12.481(0.85)^2/2 = 4.509 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_u = 1.4(4.509) = 6.312 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El acero mínimo por flexión es

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{f_c^*} / f_y \quad (10)$$

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es 0.75 p_b , donde p_b es el porcentaje balanceado

$$p_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{4800}{f_y - 6000} \quad (11)$$

donde

$$f_c'' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = (1.05 - f_c^*/1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesario para soportar un momento resistente M_R está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_R}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (12)$$

donde

$$p = q f_c'' / f_y$$

$$p = 0.002492$$

$$A_s = p b d \quad (13)$$

$$A_s = 6.578 \text{ cm}^2$$

Si hacemos $M_s = M_R$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (14)$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(6.312 \times 10^3)}{0.9(100)(26.4)(156)}} = 0.07695$$

La separación de varillas es $s = a_s d / A_s$ (15)

donde

$$a_s = \text{área de la varilla que se emplea} = 1.27 \text{ cm}^2 \text{ (N}^\circ 4)$$

$$d = \text{distancia para la que se requiere el área de acero } A_s, \quad d = 100 \text{ cm}$$

$$A_s = \text{área de acero requerida} = 6.578 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo valores $s = 19 \text{ cm}$. En consecuencia, se necesitan varillas N° 4 a cada 19 cm en el lecho inferior. Procediendo en forma similar, se obtiene que se requieren varillas del N° 4 a cada 20 en la dirección del eje x (rige el porcentaje de acero mínimo por flexión).

d) Temperatura

El acero del lecho superior se proporciona por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto)

$$A_s = \frac{66000(1.5)(h/2)}{f_y (h/2 - 100)} \quad (16)$$

en que

$$A_s = \text{área de acero necesaria por temperatura, en cm}^2/\text{m, para el semiespesor de losa } h/2$$

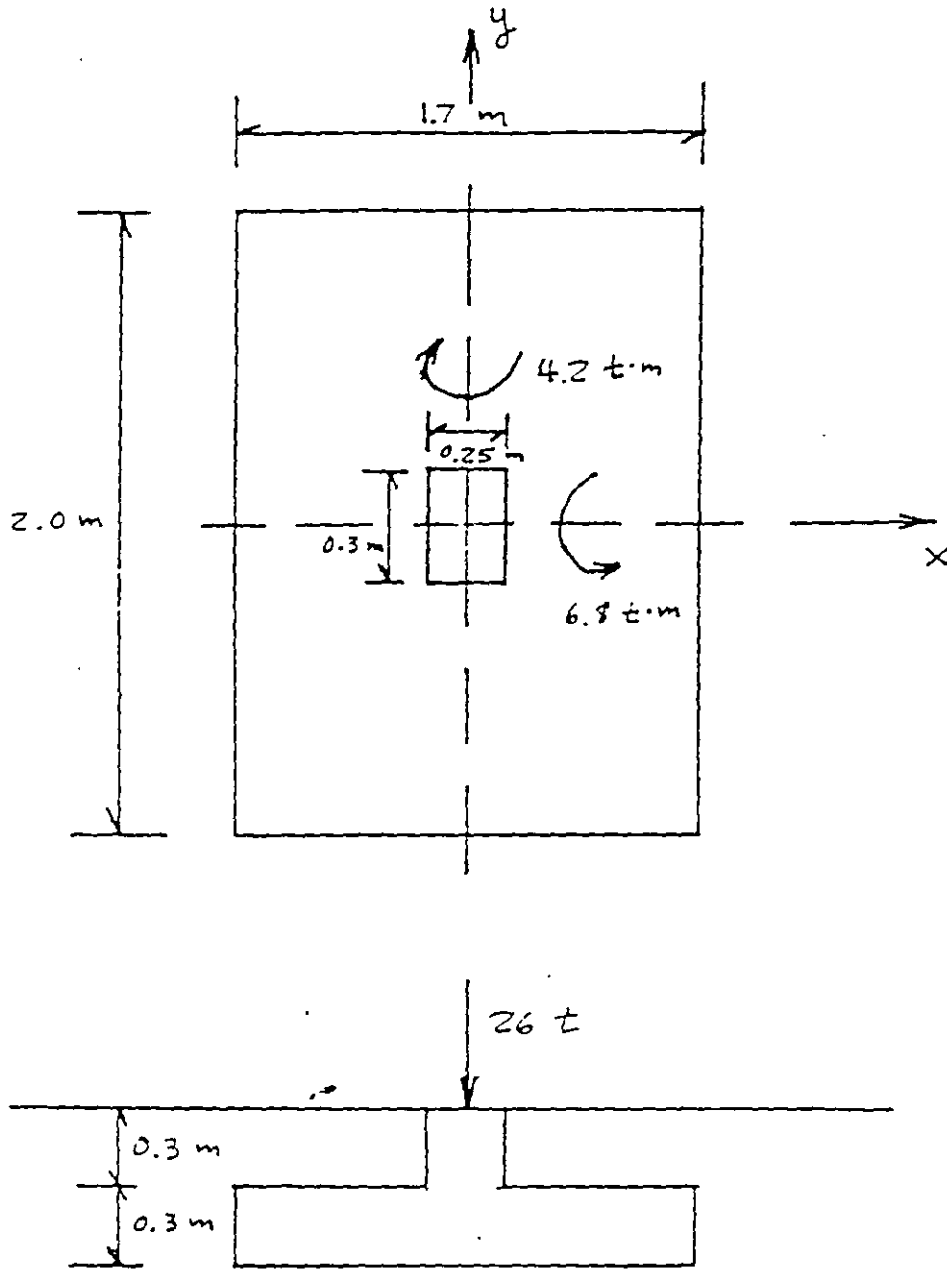
$$h/2 = \text{semiespesor de la losa de la zapata} = 30/2 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Sustituyendo valores } A_s = 3.075 \text{ cm}^2$$

Aplicando la ec 15, con varillas del N° 3 ($a_s = 0.71 \text{ cm}^2$), $s = 23 \text{ cm}$. Por lo tanto, se necesitan por temperatura varillas del N° 3 a cada 23 cm en el lecho superior.

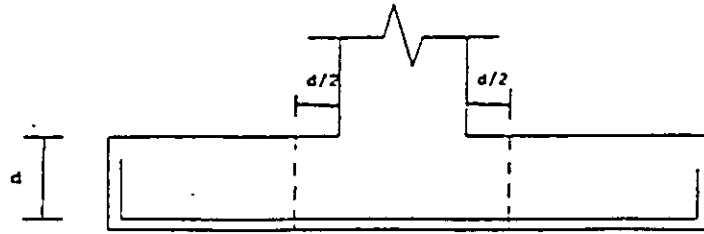
En la fig 4 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

(ACDEZAP)



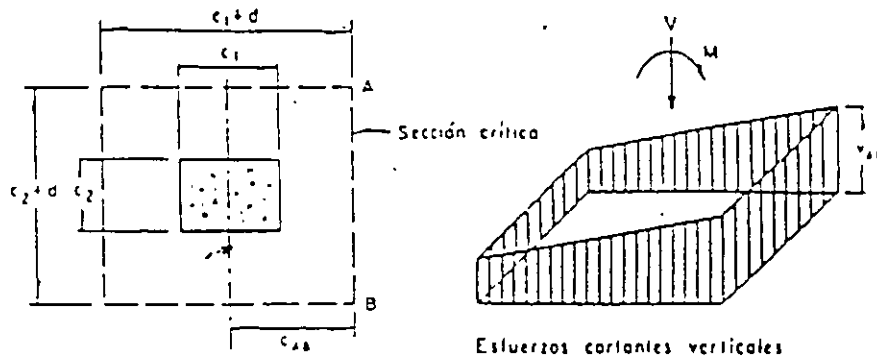
$D_r = 58\%$, $\phi^* = 37^\circ$, $\gamma_d = 1.6 \text{ t/m}^3$
 Arena $s_s = 2.6$

SUELO FRICCIONANTE
 FIGURA 1



SECCION CRITICA POR PENETRACION

(a)



$$v_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{dM c_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

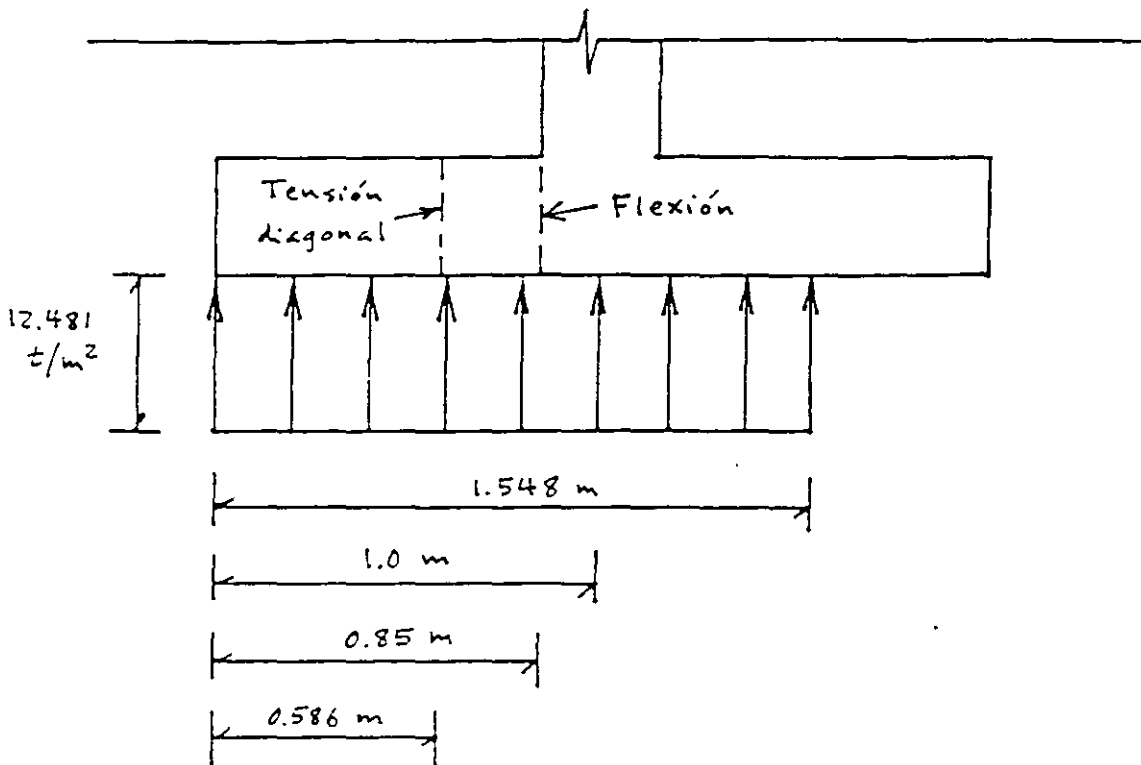
$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_1 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

Tabla del momento y fuerza cortante para una columna hueca

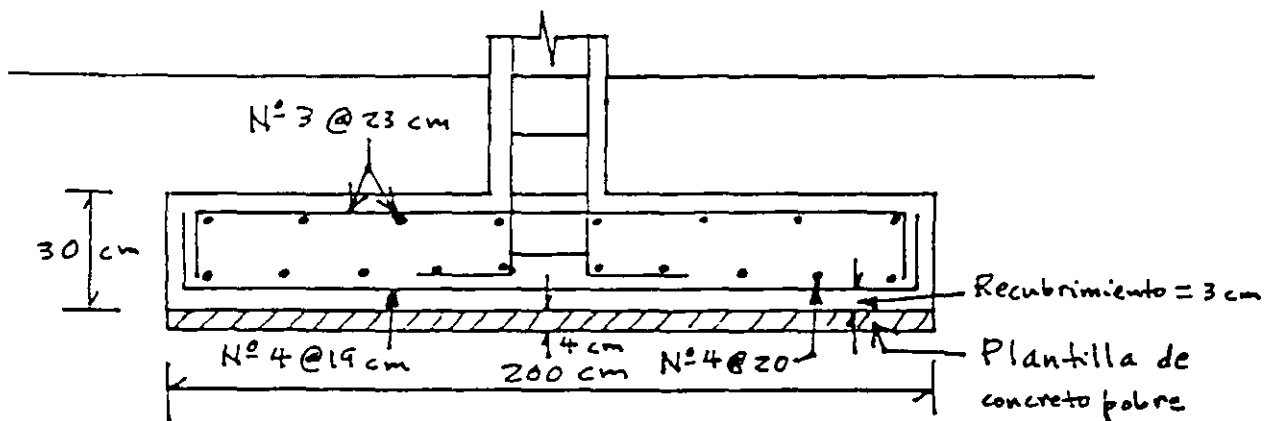
TRANSMISION DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA
(NORMAS DE CONCRETO 1987)

(b)

FIGURA 2



SECCIONES CRÍTICAS POR TENSIÓN DIAGONAL
Y POR FLEXIÓN
FIGURA 3



CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES
DE LA ZAPATA
FIGURA 4

APUNTES DE CIMENTACIONES
ZAPATAS DE COLINDANCIA

Agustín Demeneghi Colina*

La zapata de colindancia que recibe un muro de carga exhibe un momento de desequilibrio debido a la falta de coincidencia entre la línea de acción de la carga del muro y del diagrama de reacción del terreno de cimentación

Este momento de desequilibrio lo toma la estructura de la zapata mediante torsión a lo largo de la longitud de la zapata. Esta torsión ocurre en la zapata y en la trabe de enrase de la zapata.

Supongamos que los extremos de la zapata permanecen fijos. En el centro del claro el momento de torsión vale cero, por lo que la mitad de la zapata se puede considerar como empotrada en un extremo y libre en el otro. Una viga de longitud x , empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a un momento de torsión M_t en su extremo libre, sufre un giro que vale

$$\theta_x = (\sqrt{G I_t}) M_t$$

Llamando M' al momento de desequilibrio por unidad de longitud de la zapata (Fig. 1), el momento en una distancia x vale $M' dx$, y el giro debido a dM está dado por

$$d\theta = (\sqrt{G I_t}) M' dx$$

El giro en el centro del claro vale

$$\theta_c = \int_0^{L/2} (M' x / \sqrt{G I_t}) dx = M' L^2 / 8 \sqrt{G I_t} \quad (1)$$

Sin embargo, debido al giro θ_c el suelo reacciona con un momento que se puede valorar en forma aproximada haciendo la hipótesis que es igual a la mitad del caso por la fórmula de Förlisch, es decir

$$M_c' = \frac{\pi L \sqrt{G I_t} \theta_c}{32 (1 - \nu^2)}$$

Sea

$$K_n = M_c' / \theta_c = \pi E \sqrt{G I_t} / 32 (1 - \nu^2) \quad (2)$$

es decir

$$M_c' = K_n \theta_c \quad (3)$$

El nuevo momento M' es igual al momento inicial M_0' menos M_c' . Con este nuevo valor se aplican repetidamente las ecu. 1, 2 y 3, hasta que la variación de M' sea despreciable.

En una viga de sección rectangular de dimensiones b por h , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait *et al.* 1970)

$$I_t \cong (h b^3 / 3) [1 - 0.63 b/h + 0.052 (b/h)^2] \quad h \geq b \quad (4)$$

*Profesor del Departamento de Geotecnia, División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, Facultad de Ingeniería UNAM

Diseño estructural de la losa de la zapata

El momento de desequilibrio en la zapata es de $M_o' = 0.923 \text{ t-m/m}$. La trabe por torsión toma $M' = 0.7471 \text{ t-m/m}$, mientras que el suelo toma $M_s' = 0.1759 \text{ t-m/m}$. Por lo tanto, el momento sobre el suelo es $M_s' = 0.1759 \text{ t-m/m}$

$$e = M_s' / \Sigma Q = 0.1759 / 5.134 = 0.03426 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e = 0.5315 \text{ m} \quad q' = \Sigma Q / B' = 9.66 \text{ t/m}^2$$

En la fig 3 se exhiben la geometría y las fuerzas que actúan sobre la zapata

Diseño por flexión

$$d = 0.15 - 0.036 = 0.114 \text{ m}$$

$$M = 0.5288 \text{ t-m/m}$$

$$M_s = 0.7403 \text{ t-m/m}$$

$$p = 0.00154$$

$$p_{\text{min}} = 0.00236$$

$$A_{s\text{min}} = 2.687 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$A_{s\text{teor}} = 3.075 \text{ cm}^2/\text{m}$, por lo tanto, rige armado por temperatura

Se emplearán varillas del N° 3 a cada 23 cm, en el lecho inferior

Revisión por cortante

$$V = 2.006 \text{ t/m}$$

$$V_u = 2.809 \text{ t/m}$$

$$M = 0.2485 \text{ t-m/m}$$

$$M/Vd = 1.09 < 2 \text{ Cumple como elemento ancho}$$

$$V_{\text{res}} = 5768 \text{ kg} > V_u = 2809 \text{ kg} \therefore \text{Cumple}$$

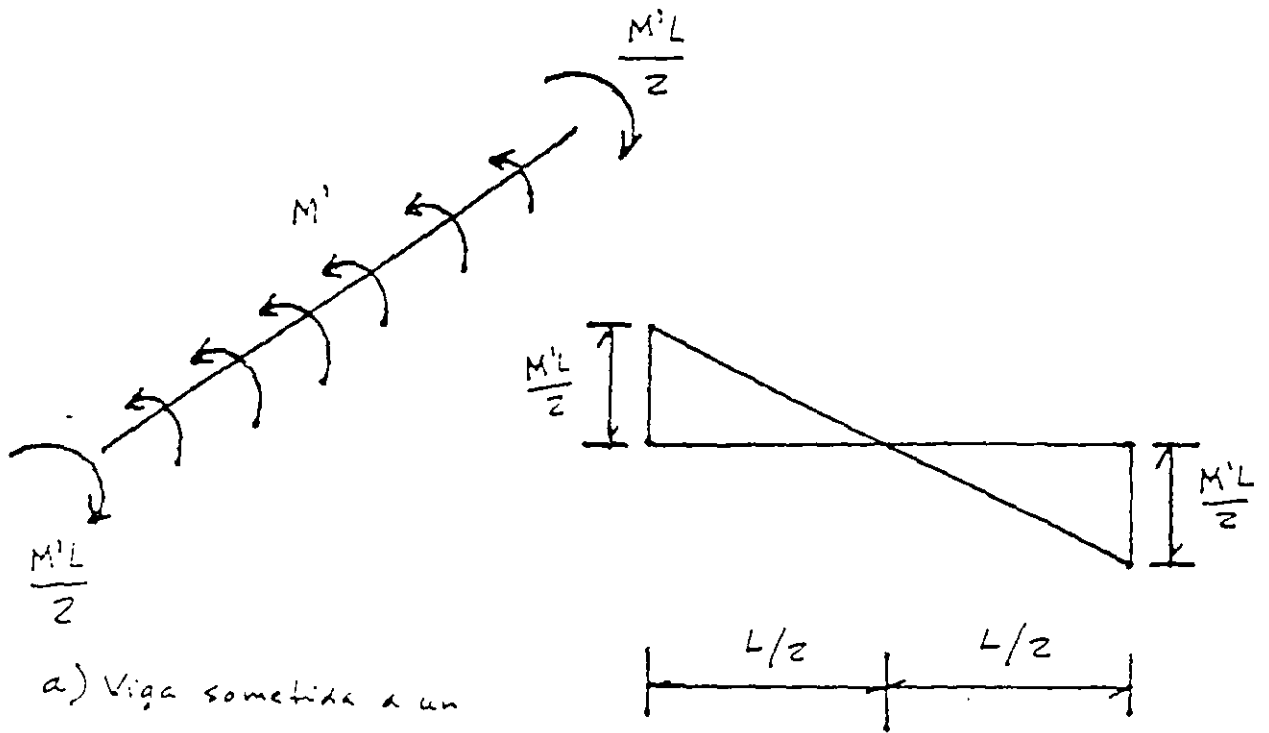
En la fig 4 se muestra el armado de la zapata

Referencias

Beaufait, F W., Rowan, W H., Hoadley, P G y Hackett, R M. *Computer Methods of Structural Analysis*. Prentice-Hall, 1970

Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Departamento del Distrito Federal, 1996

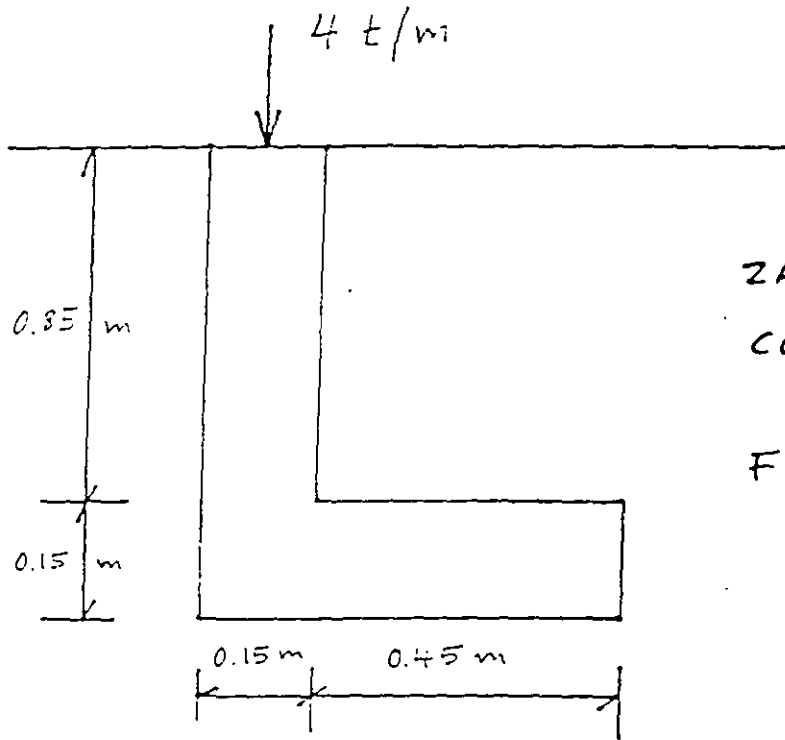
(ACZAPCOL)



a) Viga sometida a un momento de torsión M' por unidad de longitud

b) Variación del momento de torsión a lo largo de la viga

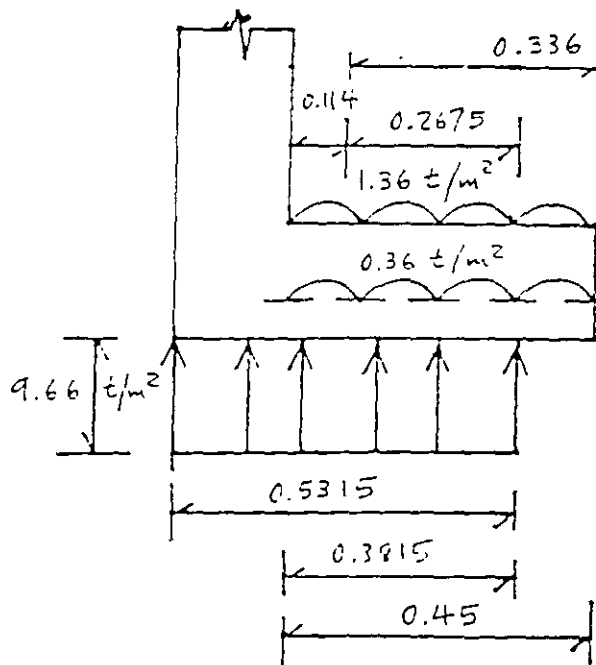
FIGURA 1



ZAPATA DE COLINDANCIA

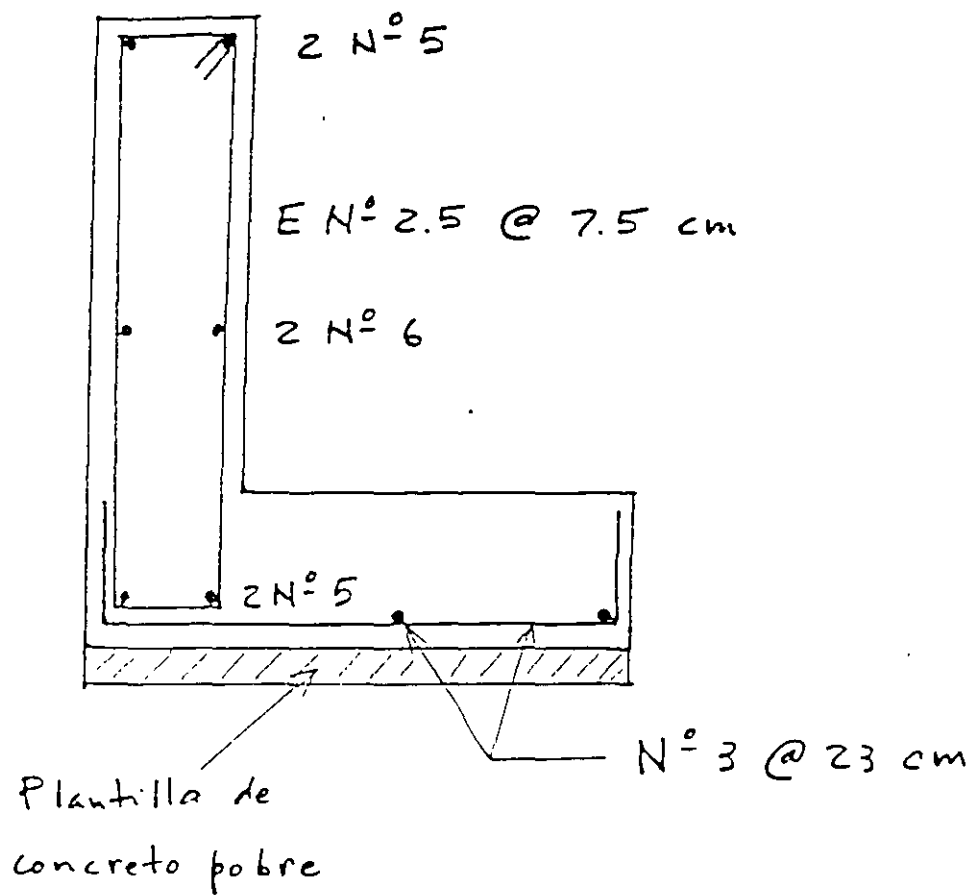
FIGURA 2

$$E_s = 800 \text{ t/m}^2, \nu = 0.25$$



FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA LOSA DE LA ZAPATA

FIGURA 3



ARMADO DE LA ZAPATA

FIGURA 4

APUNTES DE CIMENTACIONES CIMENTOS DE MAMPOSTERÍA

El ancho de un cimiento de mampostería se obtiene de manera análoga a lo visto para cimientos de concreto reforzado. "En cimientos de piedra braza la pendiente de las caras inclinadas, medida desde la arista de la dala o muro, no será menor que 1.5 (vertical) : 1 (horizontal).

"En cimientos de mampostería de forma trapezoidal con un talud vertical y el otro inclinado, tales como cimientos de lindero, deberá verificarse la estabilidad del cimiento a torsión. De no efectuarse esta verificación, deberán existir cimientos perpendiculares a ellos a separaciones no mayores de las que señala la siguiente tabla:

Presión de contacto con el terreno, p , t/m^2	Claro máximo, en metros	
	Caso 1	Caso 2
$p \leq 2.0$	5.0	10.0
$2.0 < p \leq 2.5$	4.5	9.0
$2.5 < p \leq 3.0$	4.0	7.5
$3.0 < p \leq 4.0$	3.0	6.0
$4.0 < p \leq 5.0$	2.5	4.5

"En todo cimiento deberán colocarse dalas de concretos reforzado, tanto sobre los cimientos sujetos a momento de volteo como sobre los perpendiculares a ellos. Los casillos deben empotrarse en los cimientos no menos de 40 cm.

"En la tabla anterior, el claro máximo permisible se refiere a la distancia entre los ejes de los cimientos perpendiculares, menos el promedio de los anchos medios de éstos. Los casos 1 y 2 corresponden respectivamente a mampostería ligada con mortero de cal y con mortero de cemento. No deberán existir planos definidos de falla transversales al cimiento".

"Las piedras que se empleen en elementos estructurales deberán satisfacer los requisitos siguientes:

Resistencia mínima a compresión en dirección normal a los planos de formación	150 kg/cm^2
Resistencia mínima a compresión en dirección paralela a los planos de formación	100 kg/cm^2
Absorción máxima	4%
Resistencia al intemperismo: máxima pérdida de peso después de 5 ciclos en solución saturada de sulfato de sodio	10%

"Las piedras no deberán ser labradas, pero se evitará en lo posible el empleo de piedras de formas redondeadas y de cantos rocados. Por lo menos el 70% del volumen del elemento estará constituido por piedras con un peso mínimo de 30 kg cada una.

"Los morteros que se empleen para mampostería de piedras naturales deberán cumplir con los requisitos siguientes:

- a) La relación volumétrica entre la arena y la suma de cementantes se encontrará entre 2.25 y 5.
- b) La resistencia mínima en compresión será de 15 kg/cm^2 .

"La mampostería se desplantará sobre una plantilla de mortero o concreto que permita obtener una superficie plana. En las primeras hiladas se colocarán las piedras de mayores dimensiones. Cuando las piedras sean de origen sedimentario se colocarán de manera que los lechos de estratificación queden normales a la dirección de las compresiones. Las piedras deberán humedecerse antes de colocarlas y se acomodarán de manera de llenar lo mejor posible el hueco formado por las otras piedras. Los vacíos se rellenarán completamente con piedra chica y mortero".

(Normas de Mampostería, cap 6).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
TORSIÓN**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

TORSION

7.1 INTRODUCCION

En las construcciones monolíticas de concreto, la torsión ocurre principalmente cuando la carga actúa a cierta distancia del eje longitudinal del elemento estructural. Una viga en el extremo de un tablero de piso, una viga de borde que recibe la carga de un solo lado, una marquesina, o una cubierta para parada de autobuses que se proyecta de una viga monolítica apoyada en columnas, vigas periféricas que circundan la abertura en un piso, o una escalera helicoidal, son ejemplos de elementos estructurales sujetos a momentos de torsión. Ocasionalmente, estos momentos provocan esfuerzos cortantes excesivos. Como resultado, puede desarrollarse un severo agrietamiento superior a los límites de serviceabilidad admisibles, a menos que se dote de un refuerzo especial para torsión. Las fotos 40 y 41 ilustran la cuantía del agrietamiento en la falla de una viga sujeta a torsión. Muestran el plano curvilíneo de torsión provocado por los momentos torsionantes impuestos. En las vigas de borde de un sistema estructural, normalmente no es tan severa la magnitud del daño debida a la torsión como se aprecia en las fotos 42 y 43. Ello se debe a la redistribución de esfuerzos en la estructura. Sin embargo, deberá siempre evitarse la pérdida de integridad debida a los esfuerzos torsionantes, mediante un diseño apropiado del refuerzo necesario para torsión.

La introducción al tema de la distribución de los esfuerzos de torsión debe iniciarse con el comportamiento elástico básico de las secciones sencillas, tales como las circulares y las rectangulares. La mayoría de las vigas de concreto sujetas a torsión son componentes de rectángulos. Estas son normalmente, secciones con patines, tales como las vigas en T o en L. Aun cuando las secciones circulares rara vez se consideran en la construcción normal de concreto, un comentario breve respecto de estas secciones circulares constituye una buena introducción al comportamiento torsional de otros tipos de secciones.

En las secciones circulares, al nivel elástico, el esfuerzo cortante es igual a la deformación unitaria de cortante multiplicada por el módulo de cortante. Igual que en el caso de la flexión, el esfuerzo es proporcional a su distancia al eje neutro (esto es: el centro de la sección circular) y es máximo en las fibras extremas. Si r es el radio del elemento, $J = \pi r^4/2$, su momento polar de inercia, y v_{te} el esfuerzo cortante elástico debido a un momento de torsión elástico T_e ,

$$v_{te} = \frac{T_e r}{J} \quad (a)$$

Quando tiene lugar la deformación en la barra circular, se supone que el eje del cilindro circular permanece recto. Todos los radios de una sección transversal también permanecen rectos (esto es: sin alabearse) y giran el mismo ángulo respecto al eje. Cuando el elemento circular empieza a tener un comportamiento plástico, el esfuerzo en el anillo plástico exterior se conserva constante, en tanto que el esfuerzo en el núcleo interior permanece elástico, como se muestra en la Fig. 7.1. Cuando toda la sección transversal se plastifica, $b = 0$ y el esfuerzo cortante

$$v_{tf} = \frac{3 T_p r}{4 J} \quad (b)$$

donde v_{tf} es el esfuerzo cortante no lineal debido a un momento de torsión T_p , donde el índice f denota falla.

En las secciones rectangulares, el problema de la torsión es considerablemente más complicado. Las secciones planas originales experimentan un alabeo debido al momento torsionante aplicado. Este momento produce esfuerzos cortantes axiales así como circunferenciales, con valor cero en las esquinas de la sección y el centroide del rectángulo, y valores máximos en la periferia al centro de los lados, como se aprecia en la Fig. 7.2. El esfuerzo cortante torsional máximo ocurrirá en los puntos medios A y B de la mayor dimensión de la sección transversal. Estas complicaciones, además del hecho de que las secciones de concreto reforzado no son ni homogéneas ni isótropas, hacen difícil desarrollar formulaciones matemáticas exactas basadas en modelos físicos tales como las ecuaciones (a) y (b) para secciones circulares.

Por más de 60 años, el análisis torsional de los elementos de concreto se ha basado, en ya sea, (1) la teoría clásica de la elasticidad desarrollada a través de formulaciones matemáticas asociadas a las verificaciones de la analogía con la membrana (St. Venant), o (2) la teoría de la plasticidad representada por la analogía con el montón de arena (Nadai). Ambas teorías fueron esencialmente aplicadas al estado de torsión pura. Pero se descubrió experimentalmente que la teoría plástica no es enteramente satisfactoria para la predicción precisa del estado de esfuerzos del concreto en torsión pura. Se encontró que el comportamiento del concreto se representa mejor mediante el enfoque plástico. Consecuentemente, casi todos los desarrollos de la torsión aplicados al concreto y el concreto reforzado han tenido lugar en esta última dirección.

7.2 TORSION PURA EN LOS ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE

7.2.1 Torsión en los Materiales Elásticos

En 1853 St. Venant presentó su solución al problema torsional elástico con alabeo debido a la torsión pura que se desarrolla en las secciones no circulares. En 1903, Prandtl demostró el significado físico de las formulaciones matemáticas mediante su modelo de la analogía con la membrana. El modelo establece relaciones particulares entre la superficie deformada de la membrana cargada y la distribución de los esfuerzos torsionantes en una barra sujeta a momentos de torsión. La Fig. 7.3 muestra el comportamiento de la analogía con la membrana para formas rectangulares y en L.

Para pequeñas deformaciones, puede demostrarse que la ecuación diferencial de la superficie de la membrana deformada tiene la misma forma que la ecuación que determina la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la barra sujeta a esfuerzos de torsión. En forma similar, se puede demostrar que (1) la tangente a la línea de contorno en un punto cualquiera de la membrana deformada proporciona la dirección del esfuerzo cortante en la correspondiente sección transversal de la membrana real sujeta a torsión; (2) la pendiente máxima de la membrana en cualquier punto es proporcional a la magnitud del esfuerzo cortante en el punto correspondiente en el elemento real; (3) el momento de torsión al que está sujeto el miembro real es proporcional al doble del volumen bajo la membrana deformada.

Puede verse en las Figs. 7.2 y 7.3b que el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de contorno. Mientras más próximas entre sí se encuentren las líneas, mayor es el esfuerzo, llevando a la conclusión antes expresada que el esfuerzo máximo de torsión ocurre al centro del lado mayor del rectángulo. De la analogía con la membrana, el esfuerzo máximo tiene que ser proporcional a la pendiente más pronunciada de las tangentes en los puntos A y B.

Si δ = desplazamiento máximo de la membrana a partir de la tangente en el punto A, entonces de los principios básicos de la mecánica de la teoría de St. Venant,

$$\delta = b^2 G \theta \quad (7.1a)$$

donde G es el módulo de cortante y θ es el ángulo de torsión. Pero $v_{t(\max)}$ es proporcional a la pendiente de la tangente; por tanto:

$$v_{t(\max)} = k_1 b G \theta \quad (7.1b)$$

donde las k son constantes. El correspondiente momento torsionante T_e es proporcional al doble del volumen bajo la membrana, o

$$T_e \propto 2(2/3 \delta bh) = k_2 \delta bh$$

o

$$T_e = k_3 b^3 h G \quad (7.1c)$$

De las Ecs. 7.1b y 7.1c,

$$v_{t(max)} = \frac{T_{eb}}{k b^3 h} \approx \frac{T_{eb}}{J_1} \quad (7.1d)$$

El denominador $k b^3 h$ en la Ec. 7.1d representa el momento polar de inercia J de la sección. La comparación de la Ec. 7.1d con la Ec. (a) para la sección circular muestra la similitud de las dos expresiones, excepto que el factor k de la ecuación para la sección rectangular toma en cuenta las deformaciones unitarias debidas al alabeo. La ecuación 7.1d puede simplificarse más aún para quedar:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{k b^2 h} \quad (7.2)$$

También puede establecerse para proporcionar el esfuerzo en los planos dentro de la sección, tal como un rectángulo concéntrico de dimensiones x y y , donde x es el lado más corto, de tal manera que:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{k x^2 y} \quad (7.3)$$

Al usar el enfoque de la analogía con la membrana, es importante notar que el esfuerzo cortante torsionante cambia de un punto a otro a lo largo del mismo eje como AB en la Fig. 7.3, a causa de la pendiente cambiante de la membrana análoga, tornando largos los cálculos para el esfuerzo cortante torsional.

7.2.2 Torsión en los Materiales Plásticos

Como se ha indicado antes, la analogía plástica del montón de arena proporciona una mejor representación del comportamiento de los elementos frágiles, tales las vigas de concreto sujetas a torsión pura. El momento torsional es también proporcional al doble del volumen bajo el montón y el esfuerzo cortante torsional máximo es proporcional a la pendiente del montón de arena. La figura 7.4 es una ilustración bi y tridimensional del montón de arena. El momento torsionante T_p en la Fig. 7.4d es proporcional al doble del volumen del montón rectangular que se muestra en las partes (b) y (c). También puede reconocerse que la pendiente de los lados del montón de arena como una medida del esfuerzo cortante torsional es

constante en el enfoque de la analogía con el montón de arena, en tanto que es continuamente variable en el de la analogía con la membrana. Esta característica del montón de arena simplifica las soluciones considerablemente.

7.2.3. La Analogía del Montón de Arena Aplicada a las Vigas en L

La mayoría de los elementos de concreto sujetos a torsión son secciones con patines, más comúnmente las vigas en L que comprenden las vigas externas de un piso estructural. Se elige la viga en L de la Fig. 7.5 para aplicar el enfoque del montón de arena plástico para evaluar su capacidad al momento torsionante y los esfuerzos cortantes a los que está sujeta.

El montón de arena se reparte en tres volúmenes:

V_1 = La pirámide que representa una forma cuadrada de la sección transversal = $y_1 b^2 w / 3$

V_2 = La porción en pabellón del alma que representa una forma rectangular de la sección transversal = $y_1 b_w (h - b_w) / 2$

V_3 = El pabellón que representa el patín de la viga, transfiriendo la parte PDI a NQM = $y_2 h_f (b - b_w) / 2$

El momento torsionante es proporcional al doble del volumen de los montones arena; por consiguiente:

$$T_p \approx 2 \left[\frac{y_1 b^2 w}{3} + \frac{y_1 b_w (h - b_w)}{2} + \frac{y_2 h_f (b - b_w)}{2} \right] \quad (7.4)$$

También, el esfuerzo cortante torsional es proporcional a la pendiente de los montones de arena; por lo tanto:

$$y_1 = \frac{v_t b_w}{2} \quad (7.5a)$$

$$y_2 = \frac{v_t h_f}{2} \quad (7.5b)$$

Substituyendo y_1 y y_2 de las Ecs. 7.5a y 7.5b, en la Ec. 7.4, se obtiene:

$$v_{t(max)} = \frac{T_p}{(b_w^2/6)(3h - b_w) + (h_f^2/2)(b - b_w)} \quad (7.6)$$

Si tanto el numerador como el denominador de la Ec. 7.6 se dividen por $(b_w h)^2$ y se arreglan los términos, se obtiene:

$$v_t(\max) = \frac{T_p h (b_w h)^2}{[1/6(3 - b_w/h)] + \frac{1}{2}(h_f/b_w)2(b/h - b_w/h)} \quad (7.7a)$$

si se supone que C_t es el denominador en la Ec. 7.7a y $J_E = C_t (b_w h)^2$, la Ec. 7.7a se convierte en

$$v_t(\max) = \frac{T_p h}{J_E} \quad (7.7b)$$

donde J_E es el momento polar de inercia equivalente y una función de la forma de la sección transversal de la viga. Nótese que la Ec. 7.7b es similar en forma a la Ec. 7.1d de la analogía con la membrana, excepto por los valores diferentes de los denominadores J y J_E . La ecuación puede de esa forma aplicarse a secciones rectangulares haciendo que $h_f = 0$.

También debe reconocerse que el concreto no es un material perfectamente plástico; por consiguiente, la resistencia real a la torsión de la sección de concreto simple tiene un valor que yace entre los valores de las analogías con la membrana y la del montón de arena.

La ecuación 7.7b puede establecerse de nuevo designando $T_p = T_c$ como la resistencia nominal a la torsión del concreto simple y $v_t(\max) = v_{tc}$, empleando la terminología del ACI, de tal manera que

$$T_c = k_2 b^2 h v_{tc} \quad (7.8a)$$

$$T_c = k_2 x^2 y v_{tc} \quad (7.8b)$$

donde x es la menor dimensión de la sección rectangular.

El extenso trabajo de Hsu y confirmado por otros, ha establecido que k_2 se puede tomar igual a $1/3$. Este valor se originó en la investigación de la teoría de la flexión oblicua del concreto simple. También se estableció que $1.59\sqrt{f'_c}$ se puede considerar como el valor límite de la resistencia a la torsión pura de un miembro sin refuerzo a la torsión. Utilizando un factor de reducción de 2.5 para la carga torsional en la primera grieta, $v_{tc} = 0.64\sqrt{f'_c}$, e introduciendo $k_2 = 1/3$ en la Ec. 7.8, resulta

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} x^2 y \quad (7.9)$$

donde x es el lado más corto de la sección rectangular. El alto factor de reducción de 2.5 tiene por objeto compensar algún efecto de los momentos flexionantes que pudiese estar presente.

Si la sección transversal es en T o en L, el área se puede descomponer en rectángulos, como en la Fig. 7.6, tal que

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} \Sigma x^2 y \quad (7.9b)$$

7.3 TORSION EN LOS LOS ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

En las estructuras de concreto rara vez ocurre la torsión sin estar acompañada por la flexión y el cortante. Los párrafos precedentes deberán proporcionar un antecedente suficiente de la contribución del concreto simple en la sección, en lo que concierne a que resistan parte de los esfuerzos combinados que resultan de las fuerzas; de torsión, axiales, de cortante, o de flexión. La capacidad del concreto simple para resistir la torsión cuando está combinada con otras cargas podría, en muchos casos, ser menor a cuando resiste sólo, los mismos momentos factorizados de torsión externa.

La inclusión de refuerzo longitudinal y transversal para resistir parte de los momentos torsionantes, introduce un nuevo elemento en el conjunto de fuerzas y momentos que actúan en la sección. Si

T_n = la resistencia torsional nominal total requerida de la sección incluyendo el refuerzo

T_c = la resistencia torsional nominal del concreto simple

T_s = la resistencia torsional del refuerzo

Entonces

$$T_n = T_c + T_s \quad (7.10a)$$

o

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.10b)$$

Con objeto de estudiar la contribución de las varillas longitudinales de acero de tal manera que T_s pueda evaluarse, se tiene que analizar el sistema de fuerzas que actúan en las secciones transversales alabeadas del elemento estructural en el estado límite de falla. Básicamente, en la actualidad hay dos caminos aceptables:

1. La teoría de la flexión oblicua, que se basa en el enfoque de la deformación plana para las secciones planas sujetas a flexión y torsión.
2. La teoría de la analogía con la armadura y su extensión como teoría del campo de la compresión. Se aplica a los estribos para torsión, una analogía con la armadura modificada comparable a la utilizada en el diseño de los estribos para cortante.

7.3.1 La Teoría de la Flexión Oblicua

Esta teoría considera en detalle el desempeño de deformación interno de la serie de superficies transversalmente alabeadas a lo largo de la viga. Inicialmente propuesta por Lessig, ha tenido contribuciones subsecuentes de Collins, Hsu, Zia, Gesund, Mattock, y Elfgren, entre los diversos investigadores en este campo. T.T.C. Hsu hizo una contribución experimental importante para el desarrollo de la teoría de la flexión oblicua tal como se encuentra en la actualidad.

En su reciente libro (Ref. 7.12), Hsu detalla el desarrollo de la teoría de la torsión aplicada a las estructuras de concreto y de cómo la teoría de la flexión oblicua formó las bases de las actuales disposiciones para la torsión del reglamento ACI. La complejidad del problema torsional puede permitir en este libro de texto, tan sólo el siguiente breve comentario.

La superficie de falla de la sección transversal normal de una viga sujeta al momento flexionante M_u , permanece plana después de flexionarse, como se muestra en la Fig. 7.7a. Si el momento de torsión T_u se aplica también, excediendo la capacidad de la sección, se desarrollan grietas en los tres lados de la sección transversal de la viga y esfuerzos de compresión en porciones del cuarto lado a lo largo de la viga. Al continuar la carga torsional al estado límite en la falla, resulta una superficie oblicua de falla, debida a la combinación de los momentos; el torsionante T_u y el flexionante M_u . El eje neutro de la superficie oblicua y el área sombreada en la Fig. 7.7b que denota la zona de compresión, no continuarán rectos, sino que subtienden un ángulo θ variable con el plano original de la sección transversal.

Antes del agrietamiento, ni las varillas longitudinales ni los estribos cerrados dan una contribución apreciable a la rigidez torsionante de la sección. En la etapa de carga posterior al agrietamiento se reduce la rigidez de la sección, pero se incrementa considerablemente su resistencia a la torsión, dependiendo de la cantidad y la distribución, tanto de las varillas longitudinales, como de los estribos cerrados. Debe subrayarse que sólo puede lograrse una poca resistencia torsional adicional a la capacidad del concreto simple en la viga, a menos que se empleen tanto varillas longitudinales, como estribos transversales.

La teoría de la flexión oblicua idealiza la zona de compresión considerándola de un peralte uniforme. Supone que las grietas en las restantes tres caras de la sección transversal están separadas uniformemente, con los estribos de acero en esas caras, soportando las fuerzas de tensión en las grietas y las varillas longitudinales resistiendo el cortante a través de acción de espiga con el concreto. La Fig. 7.8a muestra las fuerzas que actúan en el plano flexionado oblicuamente. El polígono de la Fig. 7.8b da la resistencia al cortante F_c del concreto, la fuerza T_1 de las varillas de acero longitudinales activas en la zona de compresión, y el bloque de la fuerza normal de compresión C_c .

El momento torsionante T_c de la fuerza cortante resistente F_c generada por el área sombreada del bloque de compresión en la Fig. 7.8a, es por lo tanto:

$$T_C = \frac{F_C}{\cos 45^\circ} \times \text{su brazo respecto a las fuerzas } F_V \text{ en la Fig. 7.8a}$$

o

$$T_C = \sqrt{2} F_C (0.8x) \quad (7.11a)$$

en que x es el lado más corto de la viga. Pruebas extensas (Refs. 7.9 y 7.12) para evaluar F_C en términos del esfuerzo interno en el concreto, $k_1 f'_c$, y las constantes torsionales geométricas de la sección, $k_2 x^2 y$, llevaron a la expresión

$$T_C = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} \quad (7.11b)$$

Las fuerzas de espiga F_x y F_y se suponen proporcionales a las áreas de la sección transversal de estas varillas. Si se establece una relación entre la proporción de la resistencia dada por las fuerzas de espiga F_x y F_y y la resistencia torsional de las fuerzas F_C de los anillos, los momentos torsionantes serán las sumas

$$\Sigma F_V (\frac{1}{2} x_1), \quad \Sigma F_X (\frac{1}{2} y_0), \quad \Sigma F_Y (\frac{1}{2} x_0), \quad \Sigma T_1 (\frac{1}{2} x_0)$$

Las dimensiones x_1 y y_1 son, respectivamente, la menor y la mayor dimensión centro a centro de los estribos rectangulares cerrados, y las dimensiones x_0 y y_0 son las correspondientes dimensiones centro a centro de las varillas longitudinales en las esquinas de los estribos. La expresión resultante para la resistencia torsional, T_s , suministrada por los anillos y el acero longitudinal en la sección rectangular, es

$$T_s = \alpha_1 \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.12)$$

donde $\alpha_1 = 0.66 + 0.33 y_1 / x_1$, de tal manera que el momento torsionante nominal de resistencia, es $T_n = T_C + T_s$, o

$$T_n = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} + (0.66 + 0.33 \frac{y_1}{x_1}) \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.13)$$

7.3.2 La Teoría de la Analogía con la Armadura en el Espacio

Esta teoría originalmente fue desarrollada por Ramsch y más tarde expandida por Lampert y Collins, con trabajo adicional de Hsu,

Thurliman, Elfgren, y otros. Un refinamiento posterior fue introducido por Collins y Mitchell (Ref. 7.11) como una teoría del campo de compresión. La analogía con la armadura en el espacio es una extensión del modelo usado en el diseño de los estribos que resisten cortante, en la que las grietas de tensión diagonal, una vez que empiezan a desarrollarse, son resistidas por los estribos. A causa de la forma no plana de las secciones transversales debida al momento de torsión, se utiliza como miembros a tensión diagonal, una armadura en el espacio compuesta por los estribos, y las fajas idealizadas de concreto a 45° entre las grietas se utilizan como los miembros a compresión, como se muestra en la Fig. 7.9.

En esta teoría se supone que la viga de concreto se comporta en torsión en forma similar a un cajón de paredes delgadas con un flujo de cortante constante en la sección transversal de la pared, produciendo un momento torsionante constante. El uso de secciones huecas en las paredes en vez de sólidas, demostró que se obtiene esencialmente el mismo momento torsionante último, siempre que las paredes no sean demasiado delgadas. Tal conclusión sale a relucir a partir de los ensayos que han mostrado que la resistencia a la torsión de las secciones sólidas está compuesta de la resistencia de la jaula de estribos cerrados, que consisten de barras longitudinales y estribos cerrados, y los idealizados puntales a compresión inclinados de concreto en el plano de las paredes de la jaula. Los puntales a compresión son las fajas inclinadas de concreto entre las grietas en la Fig. 7.9.

El reglamento CEB-FIP se basa en el modelo de la armadura en el espacio. En este código, el espesor efectivo de la viga hueca se toma como $1/6 D_o$, donde D_o es el diámetro del círculo inscrito en el rectángulo que conecta las varillas longitudinales de las esquinas, o sea, $D_o = x_o$ en la Fig. 7.9. En resumen, la ausencia del núcleo no afecta la resistencia en torsión de tales miembros, de ahí la aceptación del enfoque de la analogía con la armadura espacial basada en secciones huecas.

Si el flujo de cortante en las paredes de la sección en cajón es τt , donde τ es el esfuerzo cortante, y F es la fuerza de tensión en cada varilla longitudinal en las esquinas, la ecuación del equilibrio de fuerzas sería

$$4F = 2 \frac{\tau t x_o}{\tan \phi} + 2 \frac{\tau t y_o}{\tan \phi} \quad (7.14)$$

y los momentos debidos a las fuerzas del flujo de cortante serían

$$T_n = \tau t y_o x_o + \tau t x_o y_o \quad (7.15)$$

Si A_t , es el área de la sección transversal del estribo, y f_y es la resistencia de fluencia del estribo con separación a una distancia s , entonces

$$A_t f_y = \tau t s \tan \phi \quad (7.16a)$$

También, si A_1 es el área total de las cuatro varillas longitudinales en las esquinas,

$$F = \frac{1}{2} A_1 f_y \quad (7.16b)$$

Resolviendo las Ecs. (7.14), (7.15), y (7.16a), se llega a

$$T_n = 2x_o y_o \sqrt{\frac{A_1 f_y A_t f_y}{2s(x_o + y_o)}} \quad (7.17)$$

Para el caso de volúmenes iguales de acero longitudinal y estribos transversales (esto es: $\theta = 45^\circ$) el momento torsionante de resistencia T_n en la falla, sería

$$T_n = 2 \frac{A_t f_y}{s} x_o y_o \quad (7.18)$$

Nótese la similitud de la forma de la Ec. 7.12 desarrollada para la teoría de la flexión oblicua, con la de Ec. 7.18, desarrollada por la teoría de la analogía con la armadura espacial.

7.4 DESEMPEÑO DEL CONCRETO BAJO LA ACCION COMBINADA DE TORSION, CORTANTE Y FLEXION

7.4.1 Torsión y Cortante Combinados

Hasta ahora, esta discusión ha presentado el mecanismo resistente interno y las fuerzas acompañantes, momentos y esfuerzos en el concreto simple y en el refuerzo, cuando un elemento estructural unidimensional está sujeto a momentos torsionantes. Cuando la torsión externa está acompañada por cortante externo, la misma sección está sujeta a mayores esfuerzos cortantes debido al efecto combinado de los dos tipos de cargas al interactuar una con otra. La resistencia de una viga a la torsión y cortante combinados es menor que su resistencia a alguno de estos dos parámetros actuando solos. Consecuentemente, se torna necesaria una relación de interacción en una manera similar a la desarrollada para la combinación de la flexión y la carga axial, discutida en el Capítulo 9. La figura 7.10 representa la siguiente expresión no dimensional de interacción que relaciona la torsión al cortante:

1. Miembro sin acero en el alma:

$$\left(\frac{T_c}{T_{CO}} + \frac{V_c}{V_{CO}} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.19a)$$

T_c y V_c son la torsión y el cortante nominal externos cuando actúan simultáneamente. T_{c0} y V_{c0} son los valores nominales para la torsión y el cortante cuando cada uno actúa separadamente.

2. Miembros reforzados, para la combinación de torsión y cortante:

$$\left(\frac{T_n}{T_{n0}} + \frac{V_n}{V_{n0}} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.19b)$$

T_n y V_n representan las resistencias nominales de torsión y cortante para resistir T_u y V_u cuando actúan simultáneamente. $T_{n0} = T_c + T_s$ representa la resistencia torsional nominal del alma reforzada cuando la torsión pura actúa sola en la sección; $V_{n0} = V_c + V_s$ representa la resistencia nominal al cortante del alma reforzada cuando el cortante solo actúa en la sección. La ecuación 7.19a se puede anotar de nuevo utilizando el valor aproximado de T_c de la Ec. 7.11b y V_c de la Ec. 6.9 para el alma sin reforzar:

$$\left(\frac{T_c}{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left(\frac{V_c}{0.5\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.20)$$

En el caso del alma reforzada sujeta a torsión y cortante combinados, tiene que establecerse un límite superior para T_{n0} y V_{n0} para asegurar que el refuerzo del alma fluya en el estado límite de falla. Con base en los resultados de ensayos,

$$T_{n0} \leq 3.2\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \quad \text{y} \quad V_{n0} \leq 2.7\sqrt{f'_c} b_w d$$

Consecuentemente, la Ec. 7.19b se transforma en

$$\left(\frac{T_n}{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left(\frac{V_n}{2.7\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.21)$$

Al comparar las Ecs. 7.20 y 7.21 puede verse que $T_n = 5T_c$. El Reglamento ACI simplifica el procedimiento al requerir que

$$T_s \leq 4T_c \quad (7.22)$$

pues de otra manera, la sección deberá incrementarse.

7.4.2 Torsión y Flexión Combinadas

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce drásticamente. Como resultado, el agrietamiento debido al esfuerzo cortante torsional se genera a niveles bajos de la carga. La figura 7.11c muestra el vector resultante R_u para los momentos de flexión y torsión combinados que provocan el alabeo de la sección, como se muestra en la Fig. 7.7b.

De manera similar al caso de la torsión y el cortante combinados, se establece una relación de interacción relacionando la torsión con la flexión cuando ambas actúan simultáneamente. Tiene que suponerse que la sección está reforzada con acero de compresión y de tensión.

Se pueden desarrollar dos casos para los cuales son aplicables las siguientes expresiones de interacción:

1. Cuando fluye el acero de tensión en la zona de tensión,

$$\left(\frac{T_n}{T_{nO}} \right)^2 = r \left(1 - \frac{M_n}{M_{nO}} \right) \quad (7.23a)$$

2. Cuando ocurre la fluencia de tensión en la zona de flexión de compresión,

$$\left(\frac{T_n}{T_{nO}} \right)^2 = 1 + r \frac{M_n}{M_{nO}} \quad (7.23b)$$

donde T_n = momento nominal torsional resistente equivalente a T_u/ϕ
 T_{nO} = resistencia nominal torsional del alma reforzada cuando actúa sola la torsión pura

M_n = momento nominal resistente a flexión M_u/ϕ

M_{nO} = resistencia nominal a la flexión cuando ésta actúa sola

$$r = \frac{A_s f_y}{A'_s f_y}$$

7.4.3 Flexión, Cortante y Torsión Combinadas

Una combinación de estos tres parámetros resulta en una superficie tridimensional de interacción. El alcance del libro limita la posibilidad de una discusión profunda. La expresión aplicable resulta de la superposición del efecto de la torsión y el cortante combinados con el efecto de la flexión y la torsión combinadas a partir de los dos casos de interacción de las Secciones 7.4.1 y 7.4.2. El ACI requiere (1) el cálculo del acero transversal en el alma, para cortante; adicionándolo al acero transversal en el alma calculado para torsión; y (2) el cálculo de acero longitudinal para torsión, adicionándolo al acero de tensión para flexión, pero

distribuyéndolo simétricamente en todos los costados de la sección transversal.

7.5 DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A LA COMBINACION DE TORSION, FLEXION Y CORTANTE

7.5.1 Desempeño Torsional de las Estructuras

El momento de torsión que actúa en un cierto componente estructural tal como una viga de orilla se puede calcular utilizando los procedimientos normales del análisis estructural. El diseño de un componente en particular necesita basarse en el estado límite de falla. Por consiguiente, el comportamiento no lineal de un sistema estructural después del agrietamiento torsional se debe identificar en una de las dos siguientes condiciones: (1) no hay redistribución de los esfuerzos de torsión a otros miembros después del agrietamiento, y (2) la redistribución de los esfuerzos y momentos torsionantes después del agrietamiento para que tenga efecto la compatibilidad de deformación entre los miembros que se intersectan.

Las resultantes de esfuerzos debidas a la torsión en las vigas estáticamente determinadas se pueden evaluar de las solas condiciones de equilibrio. Tales condiciones requieren un diseño para el momento total factorizado exterior de torsión, ya que no es posible la redistribución de los esfuerzos torsionantes. Con frecuencia a este estado se le llama torsión de equilibrio. Una viga de orilla que soporta una marquesina en voladizo, como en la Fig. 7.13, es un ejemplo de ello.

La viga de orilla tiene que diseñarse para que resista la totalidad del momento externo factorizado de torsión debido a la losa en voladizo; de otra forma, la estructura experimentará un colapso. La falla sería ocasionada por la viga al no satisfacer las condiciones de equilibrio de las fuerzas y los momentos que resultan de la gran torsión exterior.

En los sistemas estáticamente indeterminados, las suposiciones relativas a las rigideces, la compatibilidad de las deformaciones en las uniones, y la redistribución de los esfuerzos pueden afectar los esfuerzos resultantes, llevando a una reducción de los esfuerzos resultantes de cortante torsional. Se permite una reducción en el valor del momento factorizado que se utiliza en el diseño del miembro, si parte de este momento se puede redistribuir a los miembros que se intersectan. El Reglamento ACI permite un momento torsional factorizado máximo en la sección crítica d a partir del paño de los apoyos:

$$T_u = \phi \left(\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right) \quad (7.24)$$

El hacer caso omiso del efecto total de la torsión externa total en este caso, no conduce de hecho, a la falla de la estructura, pero puede tener por resultado un agrietamiento excesivo si $\phi(\sqrt{f'_c} \sum x^2 y / 3)$ es de un valor considerablemente menor al momento real factorizado de torsión. En la Fig. 7.14 puede verse un ejemplo de la torsión de compatibilidad.

Las vigas B_2 aplican momentos de torsión T_u en las secciones 1 y 2 de la viga de orilla AB en la Fig. 7.14b. Las magnitudes de las rigideces relativas de la viga AB y las transversales B_2 determinan las magnitudes de la rotación en las juntas de intersección 1 y 2. A causa de la continuidad y la acción en dos direcciones, los momentos extremos de las vigas B_2 en sus intersecciones con la viga de orilla AB, no se transmitirán totalmente como momentos de torsión a las columnas de apoyo A y B. Se reducirán en forma importante ya que las redistribuciones de momentos resultan en una transferencia de la mayor parte de los momentos flexionantes de los extremos 1 y 2 a 3 y 4, así como al centro de los claros de las vigas B_2 . T_u en cada uno de los apoyos A y B de las vigas de orilla y en la sección crítica a una distancia d de estos apoyos se determina a partir de la Ec. 7.24.

$$T_u = \phi \left(\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right)$$

Si el momento torsionante factorizado real debido a las vigas B_2 es menor que el dado por la Ec. 7.24, la viga se tiene que diseñar para un valor torsional menor. Sin embargo, los momentos de torsión se desprecian, si

$$T_u < \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) \quad (7.25)$$

Quando el momento torsionante factorizado T_u excede $\phi(0.13 \sqrt{f'_c})$, el Reglamento ACI requiere que el alma de concreto simple se diseñe en secciones para

$$V_c = \frac{0.13 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [0.5 C_t (T_u / V_u)]^2}} \quad (7.26a)$$

y

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}} \quad (7.26b)$$

Las ecuaciones 7.26a y 7.26b se derivan de la Ec. 7.20 suponiendo que el cociente del momento torsionante respecto a la fuerza cortante permanece constante a través de la historia de carga. Cuando se toma en cuenta la contribución del refuerzo para torsión, el ACI limita la fuerza de torsión T_s resistida por el acero a un valor que no exceda $4T_c$, como se ve en la Ec. 7.22.

7.5.2 Refuerzo en el Alma para Torsión

Como se indica en la Sección 7.3.1, sólo se puede lograr una importante resistencia adicional a la torsión debida al refuerzo para torsión, si se emplean tanto estribos como varillas longitudinales. En forma ideal, deberán colocarse volúmenes iguales de acero tanto de estribos cerrados como de varillas longitudinales, de tal manera que ambos participen por igual para resistir los momentos de torsión. Este principio es la base de las expresiones de ACI para diseñar el acero torsional en el alma. Si s es la separación de los estribos, A_1 es el área total del acero de las varillas longitudinales de la sección transversal, y A_t es la sección transversal de una rama del estribo, donde las dimensiones del estribo son x_1 en la dirección corta y y_1 en la dirección larga, entonces:

$$2A_t(x_1 + y_1) = A_1s \quad (7.27a)$$

de tal manera que

$$2A_t = \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.27b)$$

Por tanto, el acero torsional total en el alma, incluyendo tanto los estribos cerrados como las varillas longitudinales de las Ecs. 7.27a y 7.27b, se convierte en

$$A_{total} = 2A_t + \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.28a)$$

Pero, de la Ec. 7.12

$$A_t = \frac{T_s s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_1} \quad (7.28b)$$

donde $\alpha_1 = 0.66 + 0.33y_1/x_1 \leq 1.5$ y T_s es el momento torsionante resistente del acero torsionante del alma. Si T_c es la resistencia torsional nominal del concreto simple en el alma,

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.29)$$

De la Ec. 7.27b, y empleando la expresión de ACI para A_t para la torsión y el cortante combinados, donde

$$2A_t = \frac{14 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t}$$

el refuerzo torsional longitudinal se puede expresar como

$$A_l = \left(\frac{28 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 X y_1}{s} \quad (7.30)$$

donde $C_t = b_w d / \sum x^2 y$. El término $2A_t$ en la Ec. 7.30 no puede ser menor que $3.5b_w s / f_y$, puesto que este valor es el mínimo $2A_t$ para que los estribos torsionales sean efectivos. En la ref. 7.12 se presenta una discusión completa y una derivación detallada de la Ec. 7.30.

Puede compensarse una reducción en los estribos mediante un incremento en el acero longitudinal siempre que el volumen del acero torsional total se mantenga el mismo. Si la separación s de los estribos es pequeña, de tal manera que $2A_t$ sea considerablemente mayor que el valor mínimo $3.5b_w s / f_y$, no es poco común que A_l de la Ec. 7.30 dé un valor negativo, de tal manera que se invoque A_l mínimo de la Ec. 7.27a para volúmenes iguales de estribos y varillas longitudinales; esto es:

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} \quad (7.31)$$

El área total A_{vt} de los estribos cerrados para la torsión y cortante combinados se convierte en

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5b_w s}{f_y} \quad (7.32)$$

7.5.3 Procedimiento de diseño para la Torsión y Cortante Combinados

Lo que sigue es un resumen de la secuencia recomendada de los pasos para el diseño. En la Fig. 7.15 se muestra un diagrama de flujo que describe la secuencia de las operaciones en forma gráfica.

1. Clasifique si la torsión aplicada es torsión de equilibrio o de compatibilidad. Determine la sección crítica y calcule el momento torsionante factorizado T_u . La sección crítica se toma a una distancia d del paño del apoyo. Si T_u es menor que $\phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2 y)$, se pueden despreciar los efectos de la torsión.
2. Calcule la resistencia nominal torsional T_c del alma de concreto simple:

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2}}$$

donde $C_t = b_w d / \sum x^2 y$. Los miembros sujetos a una tensión axial importante se pueden diseñar para un valor de T_c

que se multiplica por $(1 + N_u/35 A_g)$, en que N_u es negativa para tensión.

Verifique si T_u excede ϕT_c . Si no es así, desprecie el efecto torsionante. Si así ocurre, calcule el valor T_s de esa porción del momento torsionante que será resistida por el refuerzo de acero. Para torsión de equilibrio

$$T_s = T_n - T_c$$

Para torsión de compatibilidad

$$T_s = \frac{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{3} - T_c \quad \text{ó} \quad T_s = T_n - T_c$$

la que sea menor. El valor de T_n tiene que ser al menos equivalente a T_u/ϕ . Si $T_s > 4T_c$, incremente el tamaño de la sección.

Seleccione los estribos cerrados que se emplearán como refuerzo transversal. Puede emplearse una varilla del No. 3 como mínimo (9.5 mm. de diámetro). Si s es una separación constante de los estribos, calcule el área de una rama del estribo para torsión, para la separación unitaria:

$$A_t = \frac{T_s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_y}$$

3. Calcule el refuerzo A_v requerido para cortante por unidad de espaciamiento en una sección transversal. V_u es la fuerza cortante exterior factorizada en la sección crítica, V_c es la resistencia nominal al cortante del concreto en el ama, y V_s es la fuerza cortante que resisten los estribos:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{y d}$$

donde $V_s = V_n - V_c$, y

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}}$$

4. El valor de V_n tiene que ser cuando menos igual a V_u/ϕ . Obtenga el área total A_{vt} de los estribos cerrados para torsión y cortante, y diseñe los estribos de tal manera que

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5 b_w s}{f_y}$$

5. Calcule el área A_1 del refuerzo longitudinal requerida para torsión, donde

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s}$$

o

$$A_1 = \left(\frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

la que sea mayor. A_1 calculada empleando la segunda expresión no necesita ser mayor a

$$A_1 = \left(\frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - \frac{3.5b_w s}{f_y} \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

6. Arregle el refuerzo utilizando las siguientes directrices:
- La separación s de los estribos cerrados deberá ser menor a $(x_1 + y_1)/4$ o 30 cm
 - Las varillas longitudinales deberán quedar a separaciones iguales alrededor del perímetro de los estribos cerrados. La distancia entre las varillas deberá ser menor a 30 cm. y cuando menos una varilla longitudinal deberá colocarse en cada esquina.
 - La resistencia a la fluencia del refuerzo para torsión no excederá de $4,200 \text{ kg/cm}^2$.
 - Los estribos que se usen para refuerzo de torsión deberán anclarse a través de una distancia d desde las fibras extremas en compresión. Los anillos cerrados con ganchos en los estribos logran este efecto.
 - El refuerzo para torsión se suministrará al menos una distancia $(d + b)$ más allá del punto requerido teóricamente, con objeto de cubrir cualesquier esfuerzos cortantes excesivos potenciales.

7.5.4 Ejemplo 7.1: Diseño del Refuerzo en el Alma para la Torsión y el Cortante Combinados en una sección en T

Una viga de sección en T tiene las dimensiones geométricas que se muestran en la Fig. 7.16. En la sección crítica actúa una fuerza cortante externa factorizada, que tiene un valor de $V_u = 6,800 \text{ kg}$. Está sujeta a los siguientes momentos de torsión:

- momento exterior torsionante factorizado de equilibrio
 $T_u = 570,000 \text{ kg.cm}$;
- de compatibilidad factorizado, $T_u = 86,200 \text{ kg.cm}$;
- de compatibilidad factorizado, $T_u = 345,000 \text{ kg.cm}$.

Dados:

$$\begin{aligned} \text{Refuerzo para flexión } A_s &= 23.4 \text{ cm}^2 \\ f'_c &= 280 \text{ kg/cm}^2, \text{ concreto de peso normal} \\ f_y &= 4,200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Diseño del refuerzo en el alma necesario para esta sección.

Solución

(a) Torsión de equilibrio:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado el momento torsional de equilibrio = 570,000 kg-cm. La totalidad del momento de torsión debe tomarse en cuenta para el diseño. De la Fig. 7.16:

$$\begin{aligned} \sum x^2 y &= 35^2 \times 65 + 2(10^2 \times 30) = 79,500 \text{ cm}^3 \\ \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) &= \\ &= 0.85 \times 0.13 \times 280 \times 79,500 = 146,997 \text{ kg-cm} < T_u \end{aligned}$$

Por consiguiente, se deben colocar estribos

Diseño de estribos cerrados para torsión. (Paso 2)

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{570,000}{0.85} = 670,588 \text{ kg-cm}$$

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}$$

Supóngase un recubrimiento efectivo de 5.0 cm, y $d = 60 - 5 = 55$ cm

$$C_t = \frac{b_w d}{\sum x^2 y} = \frac{35 \times 55}{79,500} = 0.024$$

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{280} (79,500)}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.4(6,800)}{0.024(570,000)} \right)^2}} = 274,089 \text{ kg-cm}$$

Suponga también que tanto T_c como V_c son constantes para todos los propósitos prácticos al centro del claro de la viga.

$$T_s = T_n - T_c = 670,588 - 274,089 \text{ kg-cm}$$

Supóngase un recubrimiento libre de 2.5 cm y estribos cerrados del #4.

$$x_1 = 35 - 2(2.5 + 0.64) = 28.73 \text{ cm}$$

$$y_1 = 60 - 2(2.5 + 0.64) = 53.72 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 0.66 + 0.33(53.72/28.73) = 1.28 < 1.5$$

Emplée $\alpha_1 = 1.28$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{396,499}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.048 \text{ cm}^2/\text{cm}/1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5 \sqrt{280} (35) 55}{\sqrt{1 + [2.5 (0.024) 570,000/6,800]^2}}$$

$$= 3,141 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{6,800}{0.85} - 3,141 = 4,859 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{s} = \frac{4,859}{4,200(55)} = 0.021 \text{ cm}^2/\text{cm}/\text{dos ramas}$$

Estribos cerrados para torsión y cortante combinados (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.048) + 0.021 = 0.117 \text{ cm}^2/\text{cm}/ 2 \text{ ramas}$$

Pruébese con estribos cerrados del No. 3 (9.5 mm de diámetro). El área para las dos ramas = 1.42 cm^2 .

$$s = \frac{\text{área de la sección transversal del estribo}}{A_{vt}/s \text{ requerida}} = \frac{1.42}{0.117} = 12.1 \text{ cm}$$

$$\text{separación máxima permisible, } s_{\max} = \frac{x_1 + y_1}{4} = \frac{28.73 + 53.72}{4} = 20.6 \text{ cm} > 12.1 \text{ cm}$$

Utilice estribos cerrados del # 3 @ 12 cm c. a c.

$$\text{Area mínima de estribos requerida} = A_v + 2A_t = \frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)12}{4,200} = 0.35 \text{ cm}^2 < 1.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{Area proporcionada} = 1.42 > 0.35 \text{ cm}^2$$

Diseño del acero longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.048)(28.73 + 53.720) = 7.92 \text{ cm}^2$$

También:

$$A_1 = \left(\frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

(O substituyendo $3.5b_w s/f_y$ por $2A_t$, aquella que controle):

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = 0.35 \text{ cm}^2 < 2A_t = 2(0.048)12 = 1.15 \text{ cm}^2$$

Use $2A_t = 1.15 \text{ cm}^2$. Por consiguiente:

$$A_1 = \left(\frac{28(35)12}{4,200} \frac{570,000}{570,000 + \frac{6,800}{3(0.024)}} - 1.15 \right) \frac{28.73 + 53.72}{12} = 8.12 \text{ cm}^2 > 7.92 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, colóquese $A_1 = 8.12 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales de torsión

El área del refuerzo longitudinal a distribuir es 8.12 cm^2 . Supóngase que $\frac{1}{4} A_1$ se coloca en las esquinas superiores. Otro tanto en las esquinas inferiores, adicional a las varillas para flexión. El área requerida en cada esquina es $= 8.12/4 = 2.03 \text{ cm}^2$. El área requerida en cada costado vertical es también $\frac{1}{4} A_1 = 2.03 \text{ cm}^2$, a una separación no mayor de 30 cm. c a c. Colóquense 2 varillas del No. 4 en cada zona.

$$\text{Al centro del claro } \sum A_s = \frac{A_1}{4} + A_s = 2.03 + 23.4 = 25.43 \text{ cm}^2$$

Colóquense 5 vars. del #8 en la zona de tensión; $A_s = 25.35 \text{ cm}^2$
La figura muestra la geometría de la sección transversal.

Solución

(b) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado $T_u = 86,200$ kg-cm. Si se utilizan los resultados del caso (a), se tiene:

$$\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y) = 0.85(0.13)\sqrt{280}(79,500) = 146,997 \text{ kg-cm} \\ > T_u = 86,200 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, pueden despreciarse los efectos de torsión.

Solución

(c) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado que $T_u = 345,000$ kg-cm es mayor que $\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y)$, se deben suministrar estribos. Puesto que esta es una torsión de compatibilidad, la sección se puede diseñar para un momento torsionante de $\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3)$ si la torsión exterior excede este valor.

$$\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3) = 0.85(280)79,500/3 = 376,915 > 345,000 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la sección se diseñará para $T_u = 345,000$ kg-cm

Diseño de los estribos cerrados para torsión (Paso 2)

Utilizando la Ec. 7.26b,

$$T_c = \frac{0.21(\sqrt{280})79,500}{\sqrt{1 + \left[\frac{0.4(6,800)}{0.024(345,000)} \right]^2}} = 265,407 \text{ kg-cm}$$

$$T_s = T_n - T_c = 345,000/0.85 - 265,407 = 140,475 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{140,475}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.017 \text{ cm}^2/\text{cm}/1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (Paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 f'_c b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5\sqrt{280} 35(55)}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)(345,000/6,800)]^2}} \\ = 5,026 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = 6,800/0.85 - 5,026 = 2,974 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{2,974}{4,200(55)} = 0.013 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Estribos cerrados combinados para torsión y cortante (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.017) + 0.013 = 0.047 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Coloque estribos del #3 con un área de $2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$ (9.5 mm. de diámetro), y se tiene:

$$s = \frac{\text{área del estribo } A_s}{\text{área requerida } A_{vt}/s} = 1.42 / 0.047 = 30 \text{ cm}$$

separación máxima permisible $s_{\max} = (x_1 + y_1)/4 = 20 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

Por consiguiente, suministre estribos cerrados del #3 @ 20 cm c. a c.

$$\text{área mínima de estribos requerida} = 3.5(35)20/4,200 = 0.58 \text{ cm}^2$$

$$\text{área suministrada} = 1.42 > 0.58 \text{ cm}^2$$

Diseño del refuerzo longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.017) (28.73 + 53.72) = 2.80 \text{ cm}^2$$

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)20}{4,200} = 0.583 < 2A_t s = 2(0.017)20 = 0.68 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente:

$$A_1 = \left(\frac{28(35)20}{4,200} - \frac{345,000}{6,800} - 0.68 \right) \frac{28.73 + 53.72}{20} = 7.10 \text{ cm}^2 > 2.8 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente A_1 que se debe suministrar es igual a 7.10 cm^2

Distribución de las varillas longitudinales. Considérese el mismo criterio que se siguió en (a).

REFERENCIAS SELECTAS

- 7.1 Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part II: Advanced Theory*, D. Van Nostrand, New York, 1952, 501 págs.
- 7.2 Nadai, A., *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, McGraw Hill, New York, 1931, 349 págs.
- 7.3 Cowan, H.J., "Design of Beams Subject to Torsion Related to the Australian Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 56, January 1960, págs. 591-618.
- 7.4 Gesund, H., Schnette, F.J., Buchanan, G.R., and Gray, G.A., "Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Both Longitudinal and Transverse Reinforcement," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 61, December 1964, págs. 1509-1521.
- 7.5 Lessig, N.N., "Determination of Carrying Capacity of Reinforced Concrete Elements with Rectangular Cross-section Subjected to Flexure with Torsion," *Zhelezobeton*, 1959, págs. 5-28.
- 7.6 Zia, P., "Tension Theories for Concrete Members," *Special Publication SP 18-4*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, págs. 103-132.
- 7.7 Hsu, T.T.C., "Ultimate Torque of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST2, February 1968, págs. 485-510.
- 7.8 Rangan, B.V., and Hall, A.J., "Strength of Rectangular Prestressed Concrete Beams in Combined Torsion, Bending and Shear," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 70, April 1973, págs. 270-279.
- 7.9 Wang, C.K., and Salmon, C.G., *Reinforced Concrete Design*, 3rd ed., Harper & Row, New York, 1979, 918 págs.
- 7.10 Thurliman, B., "Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach, U.S. and European Practices," *Special Publication*, American Concrete Institute, Detroit, 1979, págs. 117-143.
- 7.11 Collins, M.P., and Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-prestressed Concrete Beams," *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc. Vol. 25, No. 5, September-October 1980, págs. 32-100.
- 7.12 Hsu, T.C.C., *Torsion of Reinforced Concrete*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983, 510 págs.

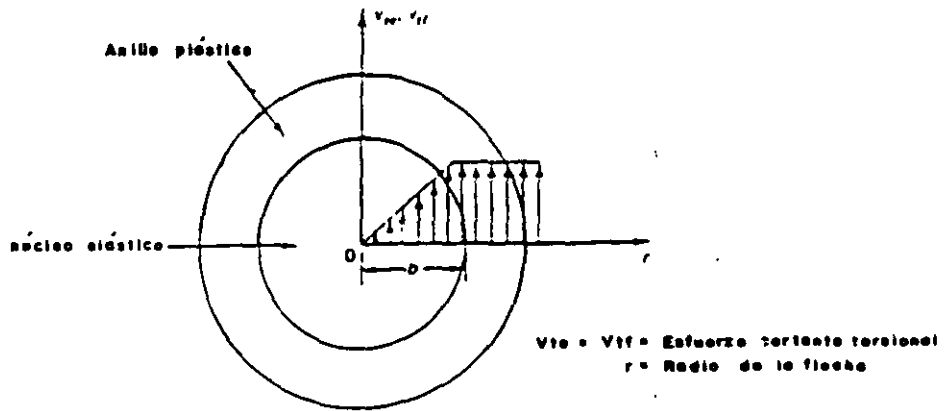


Fig. 7.1 Distribución de esfuerzos torsionales en una sección circular

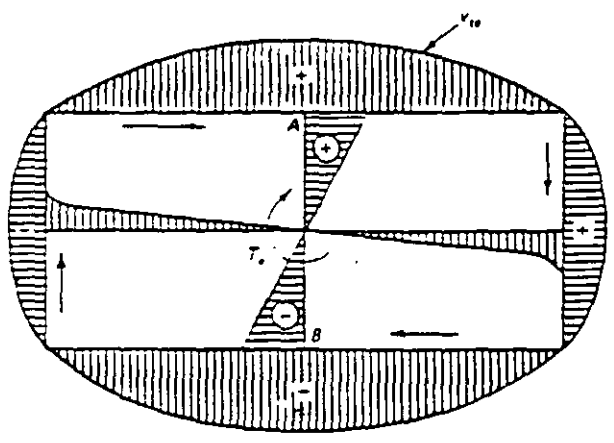


Fig. 7.2 Distribución de esfuerzos de torsión para en una sección rectangular.

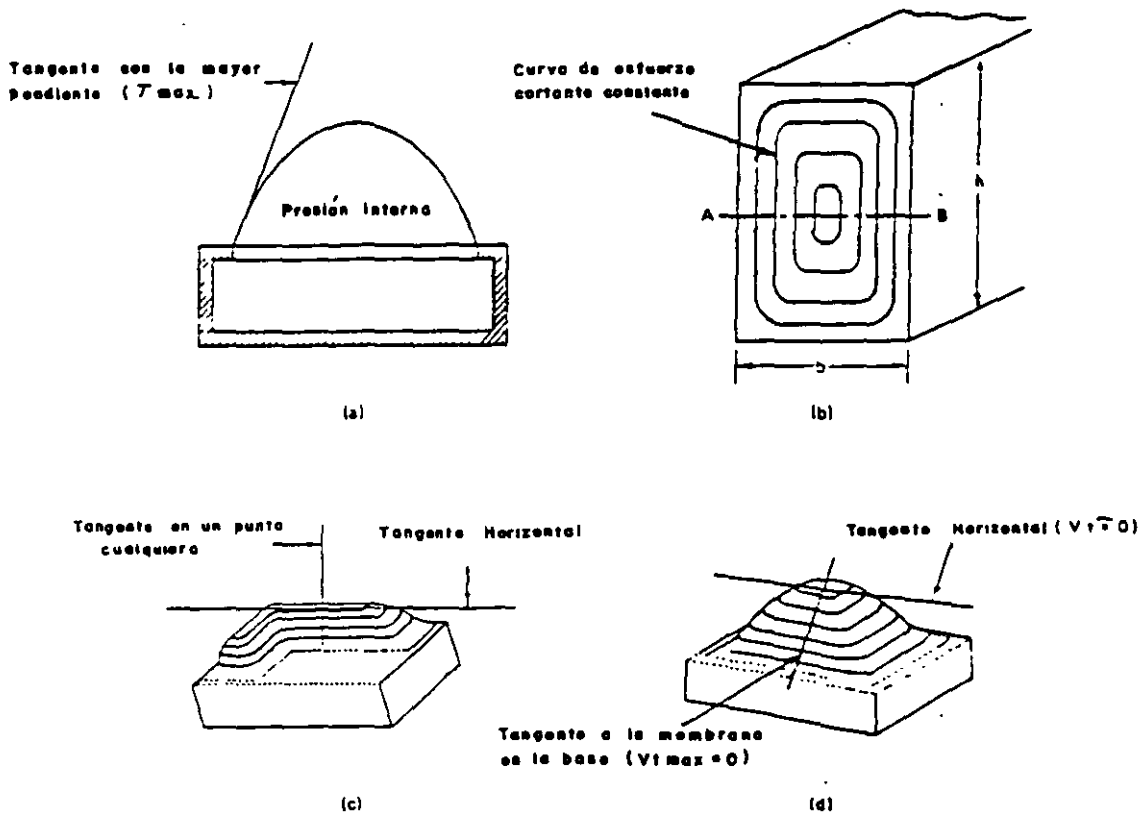


Fig. 7.3 Analogía con la membrana en la tensión pura elástica. (a) Membrana bajo presión; (b) Curvas en una viga real e en una membrana; (c) Sección L; (d) Sección rectangular.

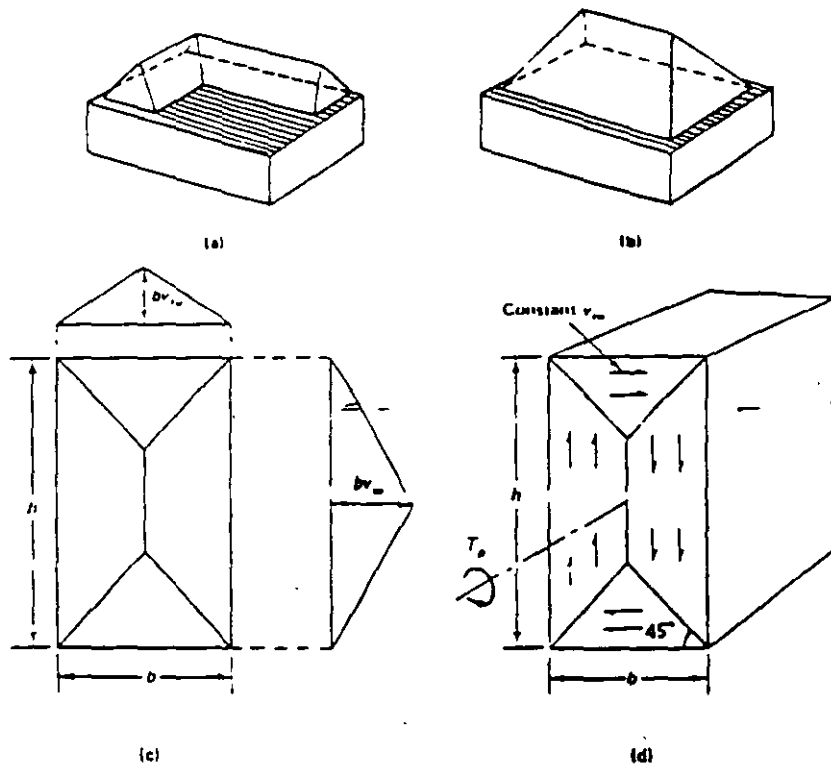


Fig. 7.4 Analogía con el montón de arena en tensión plástica pura. (a) Sección en L del montón de arena; (b) Sección rectangular del montón de arena; (c) Planta de la sección rectangular; (d) Esfuerzo cortante torsional.

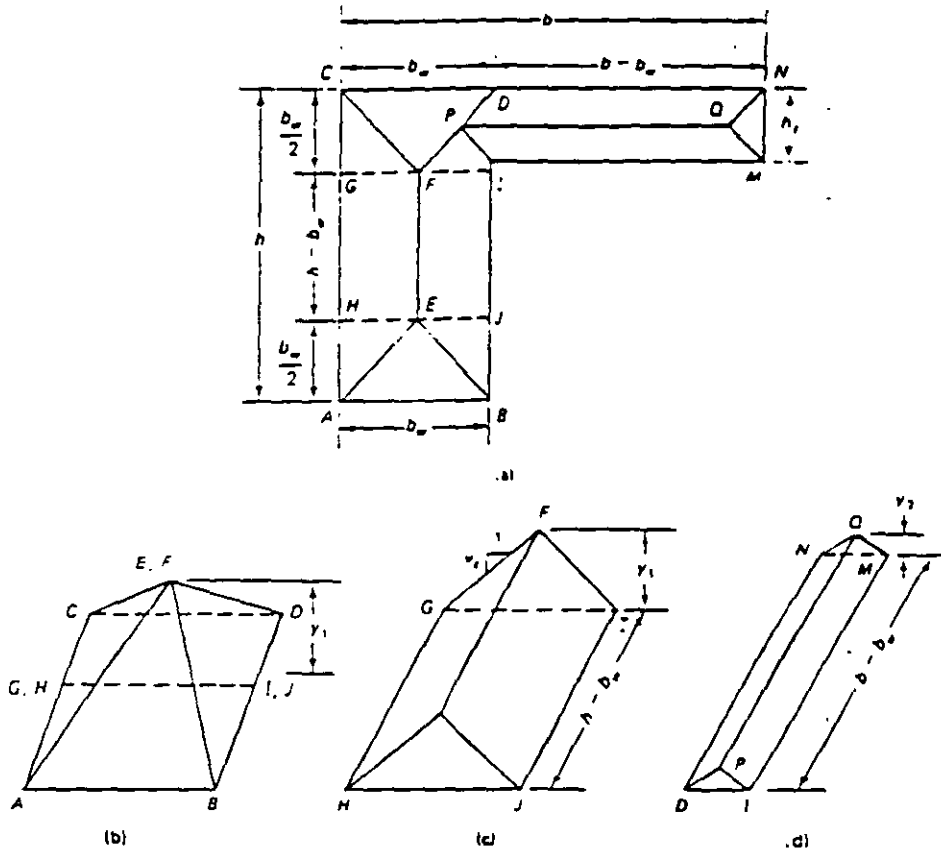


Fig. 7.5 Analogía con el montón de arena de la sección con patín (a) Montón de arena de la sección transversal en L; (b) Pirámide compuesta a partir del eje (V₁); (c) Segmento en pabellón a partir del eje (V₂); (d) Pabellón transformado del patín de la viga (V₂)

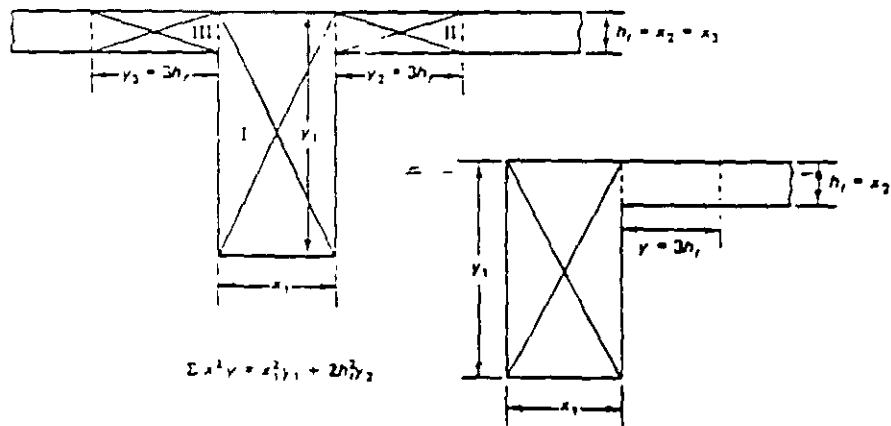


Fig. 7.6 Rectángulos compuestos para el cálculo de T_c.

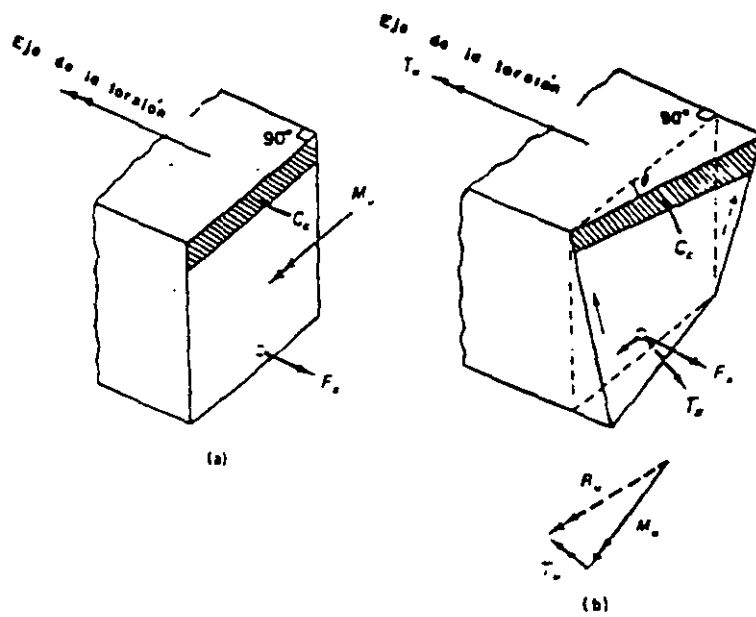
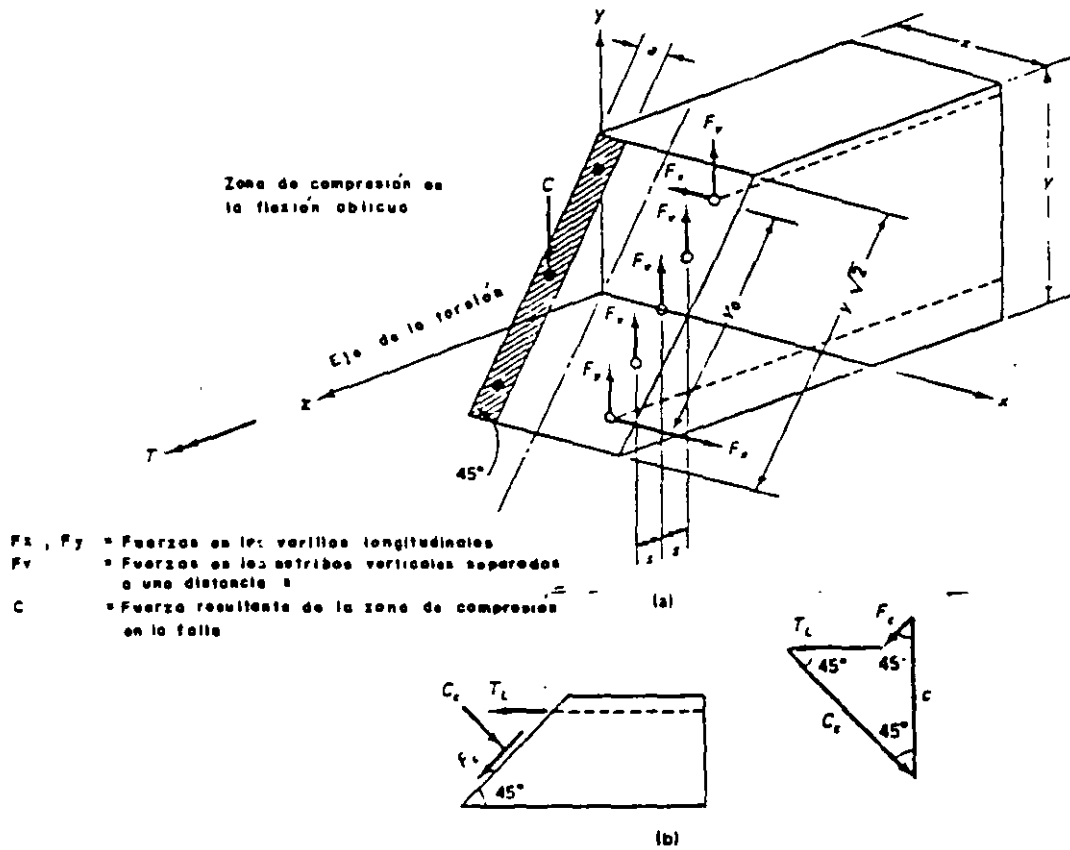


Fig. 7.7 Flexión oblicua debido a la torsión
 (a) Flexión antes de la torsión; (b) Flexión y torsión



F_x, F_y = Fuerzas en las varillas longitudinales
 F_v = Fuerzas en los estribos verticales separados a una distancia s
 C = Fuerza resultante de la zona de compresión en la falla

Fig. 7.8 Fuerza en las planas flexionadas oblicuamente
 (a) Todas las fuerzas actuas en un plano oblicuo en la falla; (b) Fuerza vectorial en la zona de compresión.

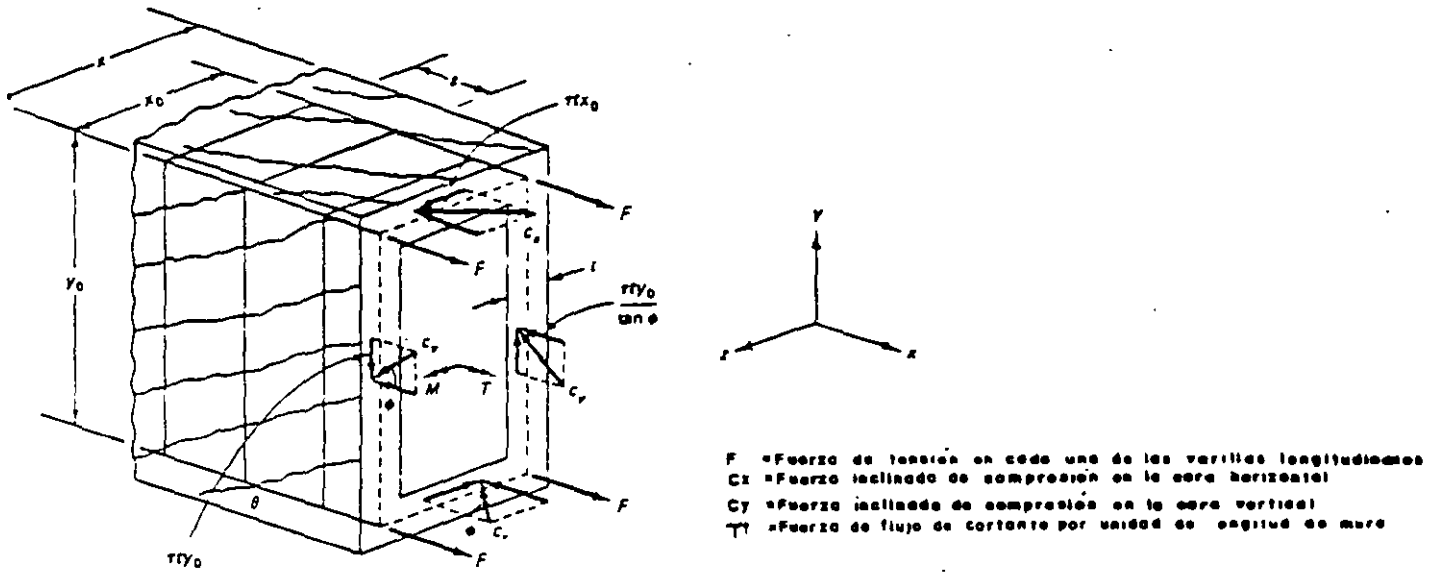


Fig. 7.9 Fuerzas en la superficie del cojón hueco de concreto mediante la analogía con la armadura

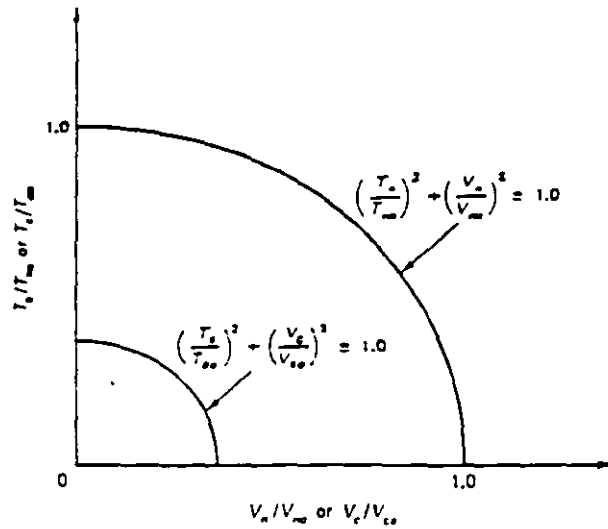


Fig. 7.10 Diagramas de interacción para la combinación de torsión y cortante

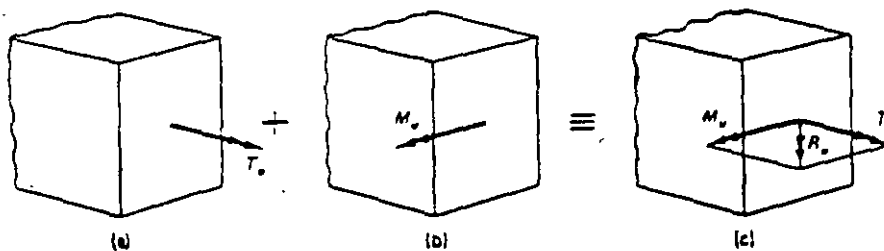


Fig. 7.11 Representación vectorial esquemática de la combinación de torsión con flexión: (a) Flexión; (b) Torsión; (c) Flexión y Torsión combinadas

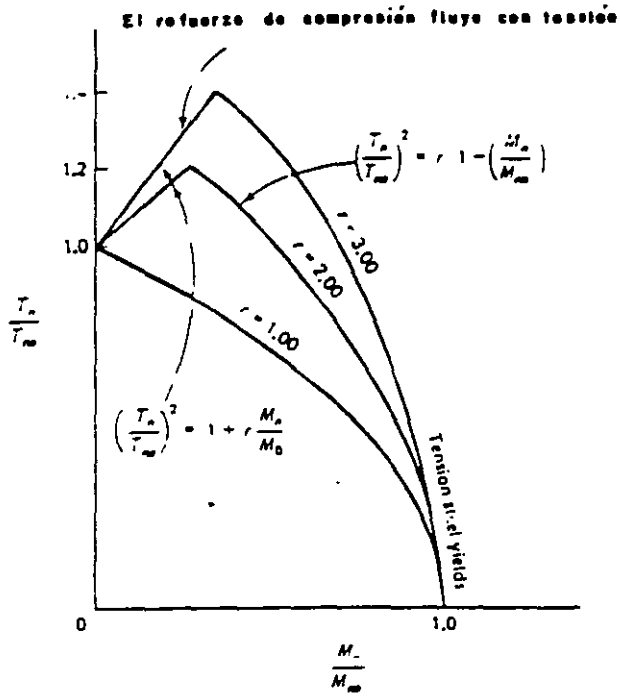


Fig. 7.12 Diagrama de interacción para combinación de tensión y flexión

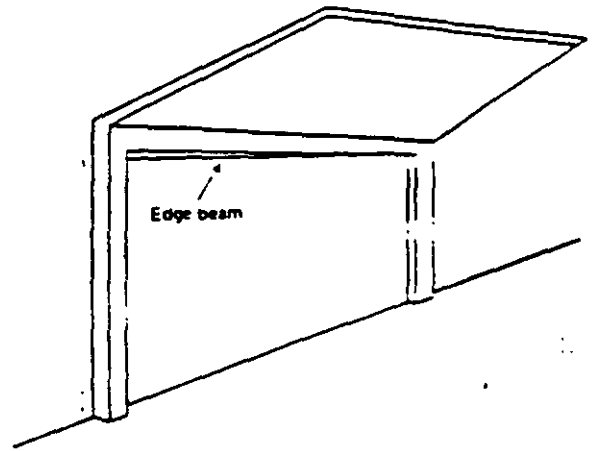
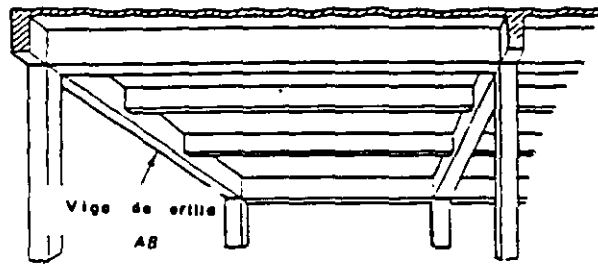
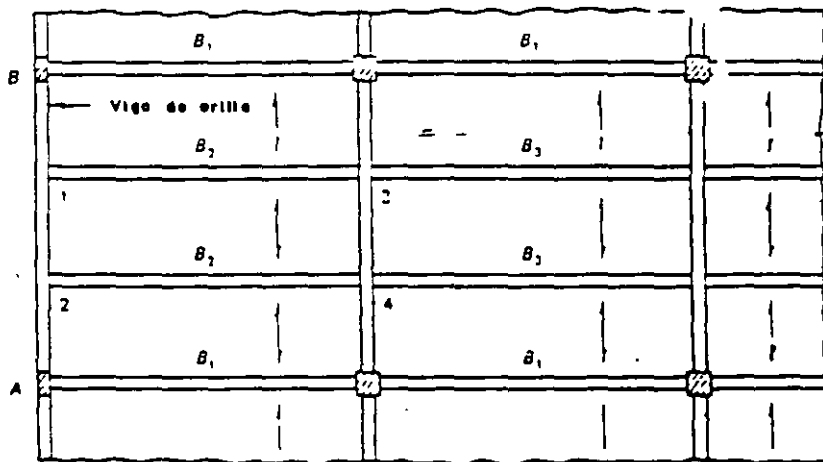


Fig. 7.13 No hay redistribución de la tensión (Tensión de equilibrio)



(a)



(b)

Fig. 7.14 Redistribución de la tensión (compatibilidad): (a) vista isométrica de un tablero de extremo; (b) Planta de un sistema típico de un sistema en un cantido.

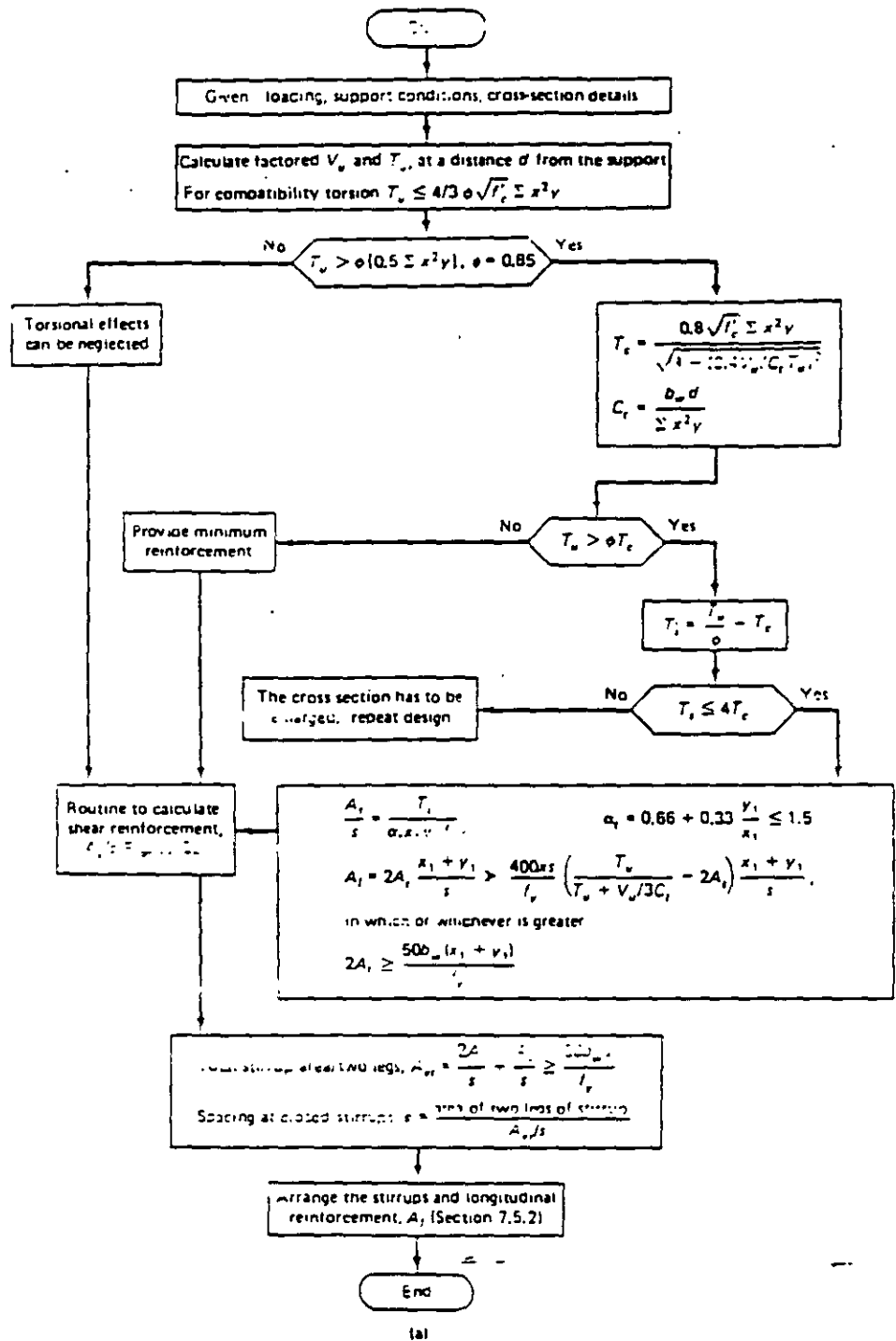


Fig. 7.15 Diagrama de flujo para diseñar el refuerzo para la combinación de cortante y torsión: (a) Acero torsional en el alma; (b) Acero para cortante en el alma.

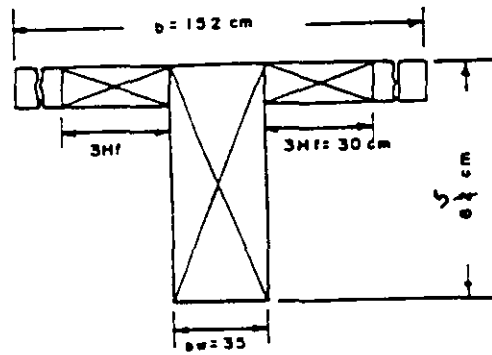
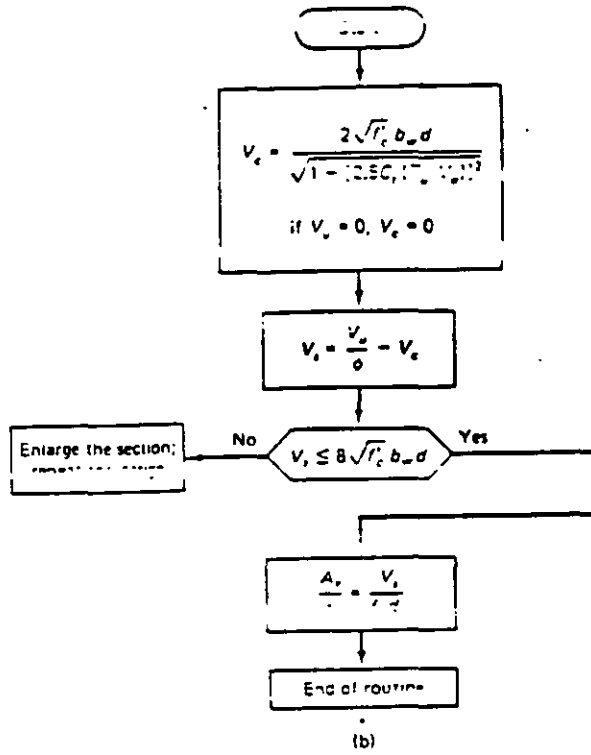


Fig. 7.16 Rectángulos componentes de una viga T.

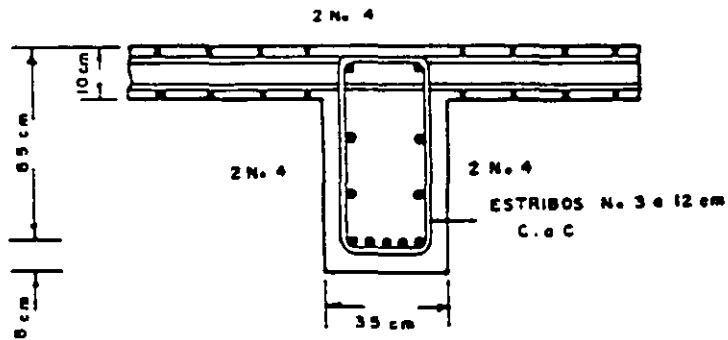


Fig. 7.17 Detalles del refuerzo en el alma, Ejemplo 7.1(a)



Photo 37 Simply supported beam prior to developing diagonal tension crack (load stage 11) (Test by N. J. et al.)

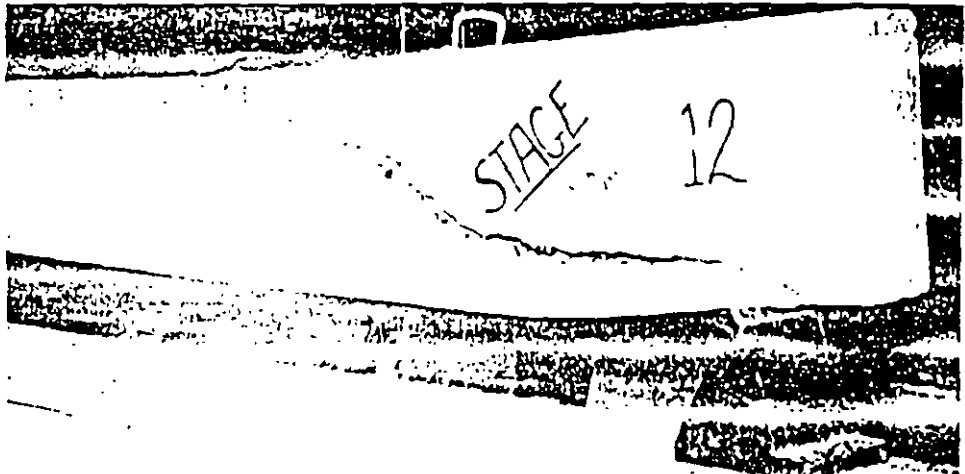


Photo 38 Principal diagonal tension crack at failure of beam in the preceding photograph (load stage 12).

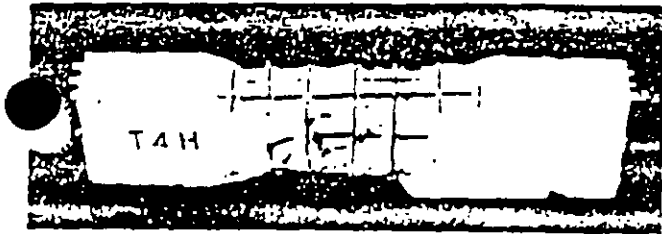


FOTO No. 40 Viga de yeso reforzada en la falla de torsión pura

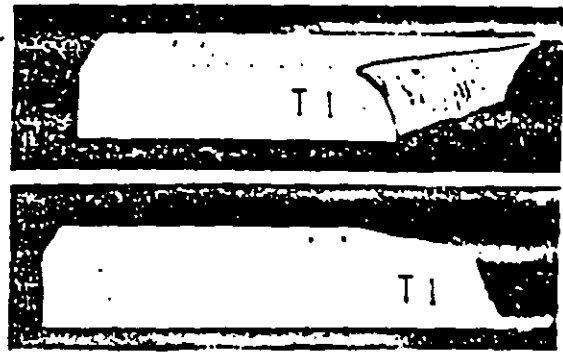


FOTO No. 41 Viga de mortero simple en torsión pura (a) Vista superior ; (b) Vista inferior

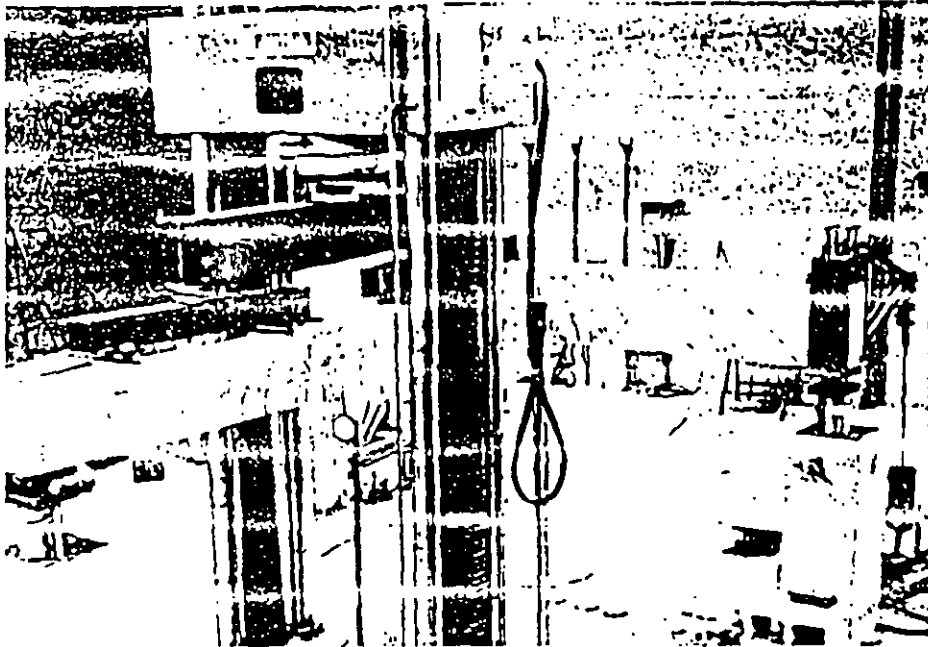
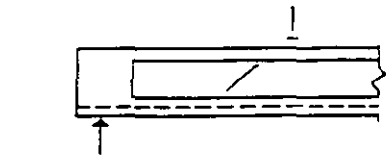


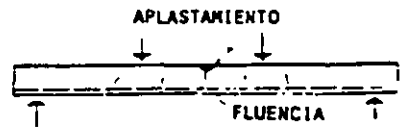
FOTO No. 42 Viga de concreto reforzado en torsión pura. Disposición para el ensayo



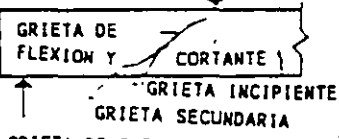
FOTO No. 43 Acercamiento del agrietamiento por torsión de las vigas de la fotografía anterior



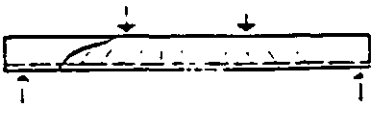
(a) GRIETA DE CORTANTE EN EL ALMA



(b) FALLA POR FLEXION



(b) GRIETA DE FLEXION Y CORTANTE



(b) FALLA DE TENSION DIAGONAL

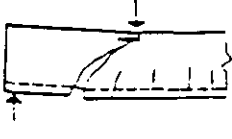
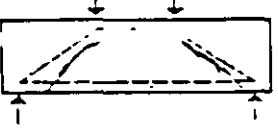
FIG. 3.1

Fig. 3.2

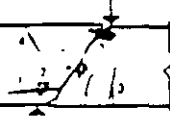
Tipos de Grietas Inclinas Fallas de Vigas Esbeltas



(a) SHEAR - TENSION FAILURE



(b) SHEAR - COMPRESSION FAILURE



- TIPO DE FALLA
- 1 FALLA DE ANCLAJE
 - 2 FALLA DE APLASTAMIENTO
 - 3 FALLA DE FLEXION
 - 4 & 5 FALLA DE COSTILLA DE ARCO

Fig. 3.3

Fallas Típicas de Cortantes en las Vigas Cortas

Fig. 3.4

Modelos de Falla de Vigas de Gran Peralte

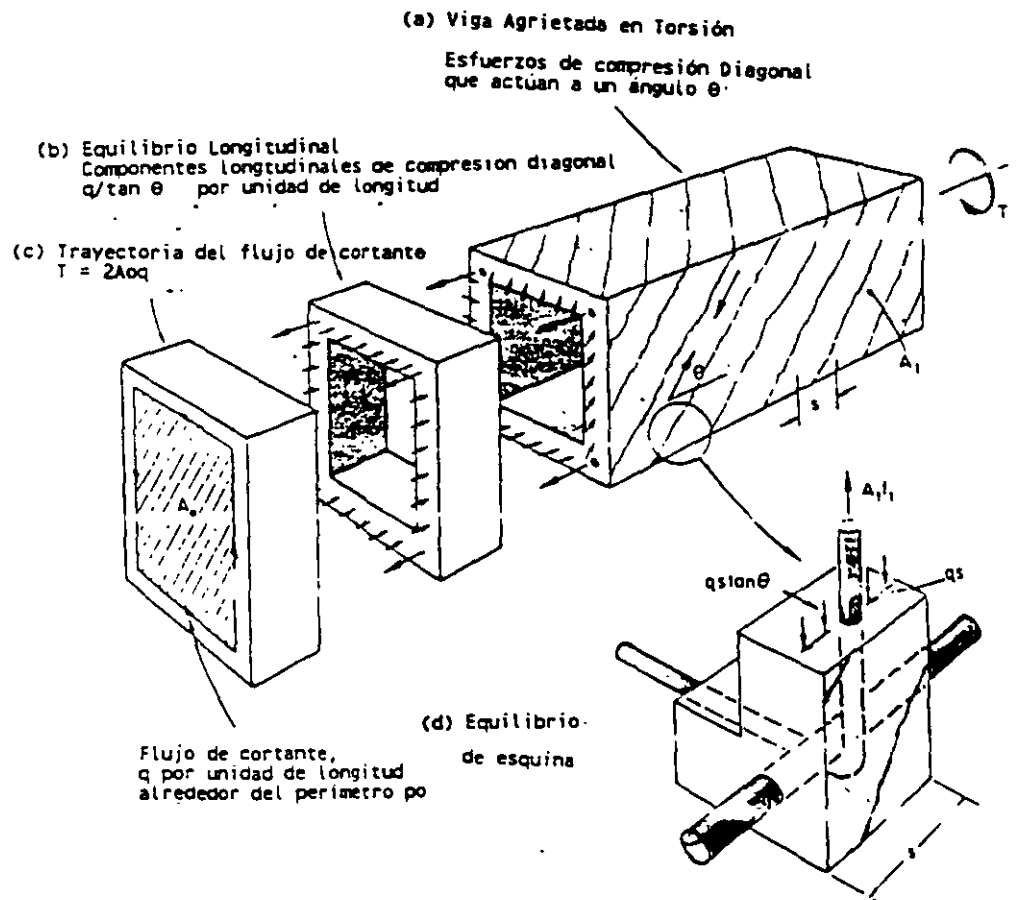
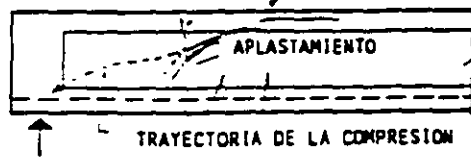
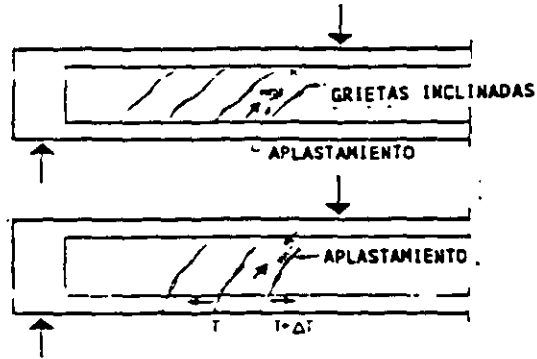


Fig. 3. Modelo de Armadura para Torsión que muestra las fuerzas que actúan en el elemento.

GRIETA DEBIDA A LA COMPRESION EXCENTRICA



(a) ARCH - RIB FAILURE



(b) WEB - CRUSHING FAILURE

FIG. 3.5 Falla Típica de Cortante en las vigas I

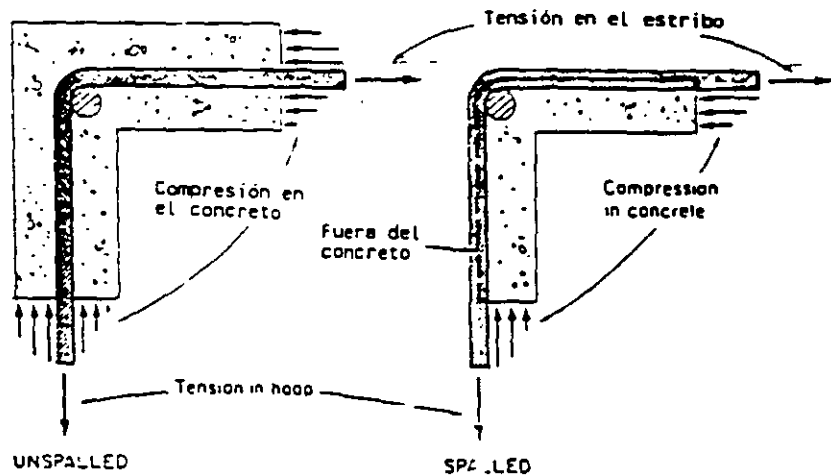
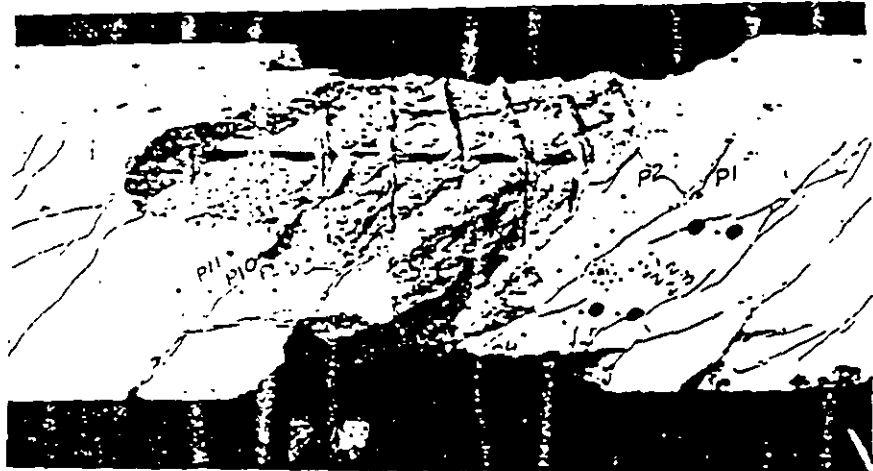


Fig. 4. Descascaramiento del recubrimiento del concreto debido a la torsión.

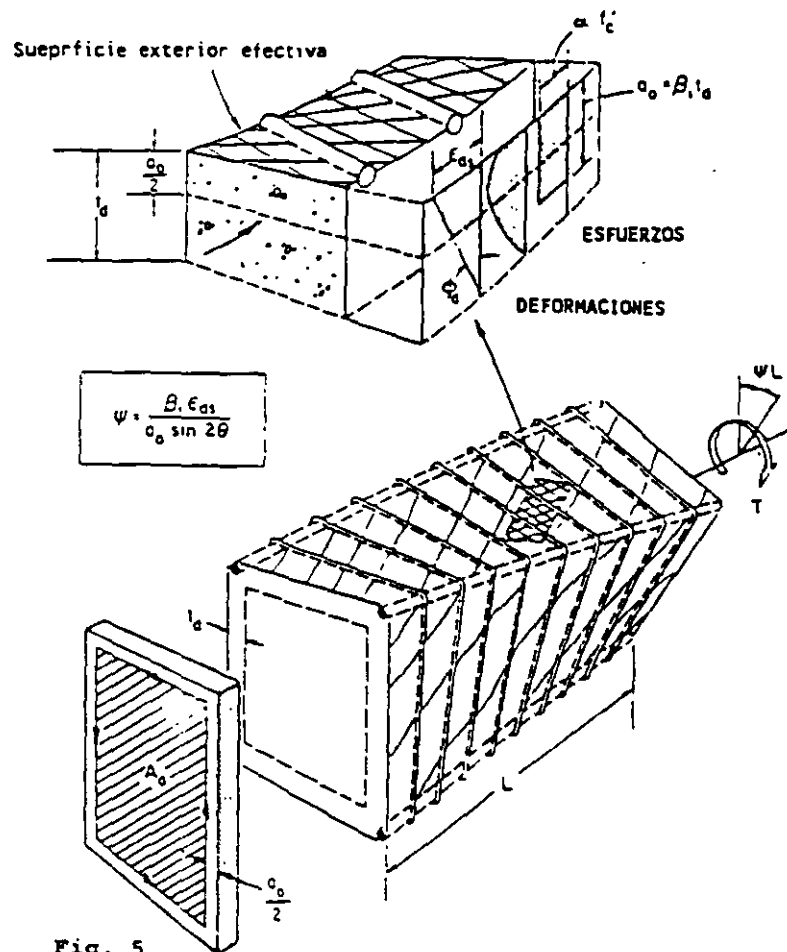


Fig. 5.

Espesor efectivo de la pared de un miembro en torsión.

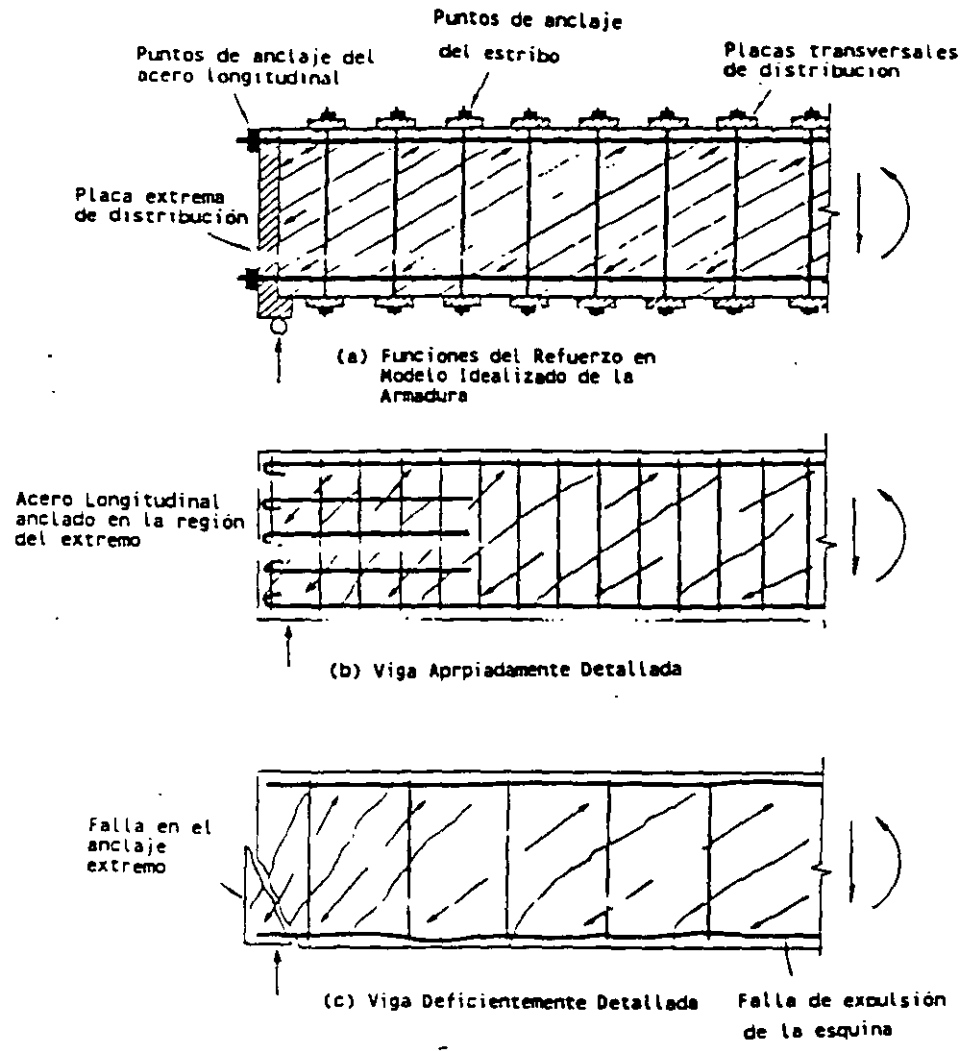


Fig. 18. Consideraciones de detallado para una viga sujeta a cortante y/o torsión.

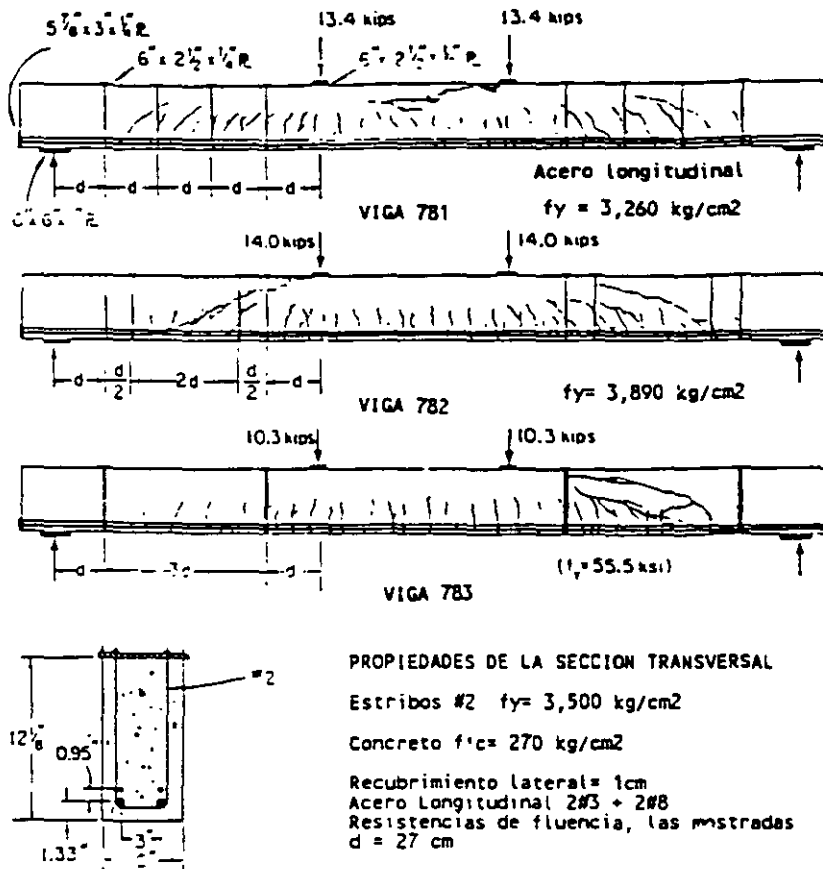


Fig. 20.
Tres vigas con separaciones grandes de los estribos.

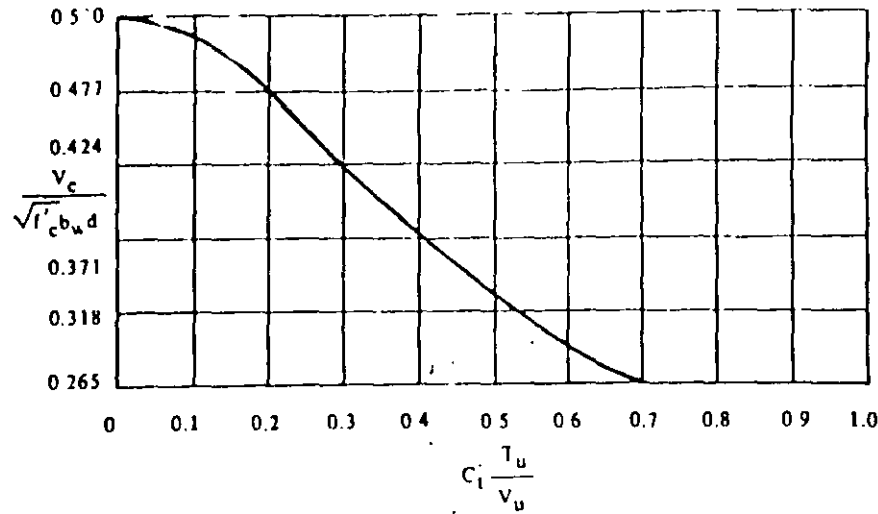


Fig. 13.6 Variación de $V_c/\sqrt{f'_c} b_w d$ con la relación $C_f T_u/V_u$, según la ecuación 11.5.

En la figura 13.7 se ilustran diversos tipos de distribución del refuerzo por cortante, de acuerdo con las secciones 11.5.1.1 y 11.5.1.2.

11.5.5 Refuerzo mínimo por cortante

En general, todos los elementos de concreto sujetos a flexión deben tener una cantidad mínima de refuerzo por cortante, excepto para losas y zapatas, nervaduras y vigas anchas de poco peralte (sección 11.5.5.1). Para elementos no presforzados se calcula el refuerzo mínimo por cortante requerido a partir de:

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} \quad \text{ecuación 11.14}$$

La esencia de la ecuación 11.14 consiste en que, cuando se utiliza el refuerzo mínimo por cortante, la resistencia total al cortante de una sección es $V_c + 3.5 b_w d$.

EJEMPLO 13.1 Diseño por cortante: Elementos sometidos solamente a cortante y flexión

Determinar el tamaño y la separación de los estribos verticales en U, para una viga simplemente apoyada, con un claro de 9.14 m.

$$b_w = 33 \text{ cm}$$

$$211 \text{ kg/cm}^2$$

$$w_u = 6.7 \text{ ton/m}$$

$$d = 51 \text{ cm}$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

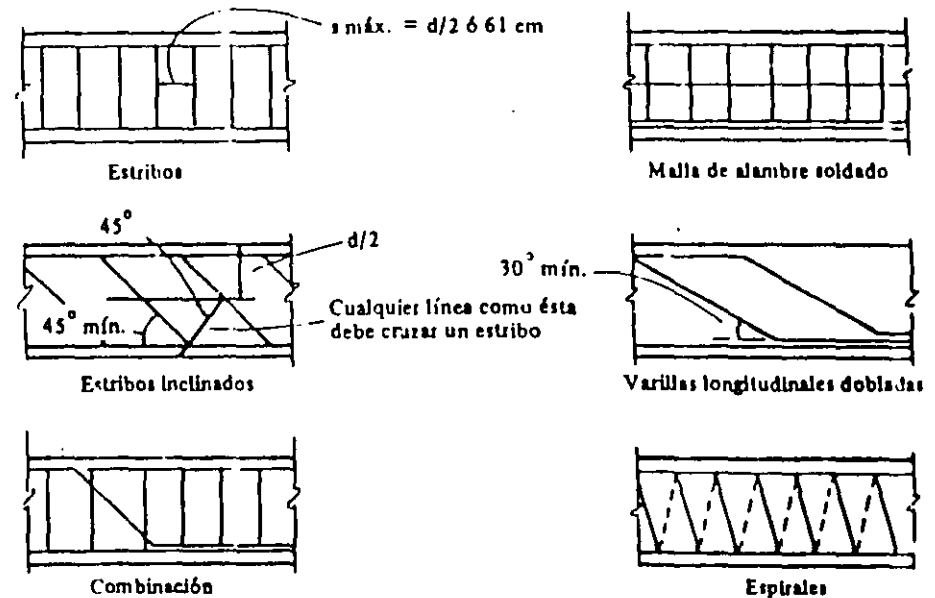


Fig. 13.7 Tipos y distribución del refuerzo por cortante.

Cálculo y análisis

Referencia en el Reglamento

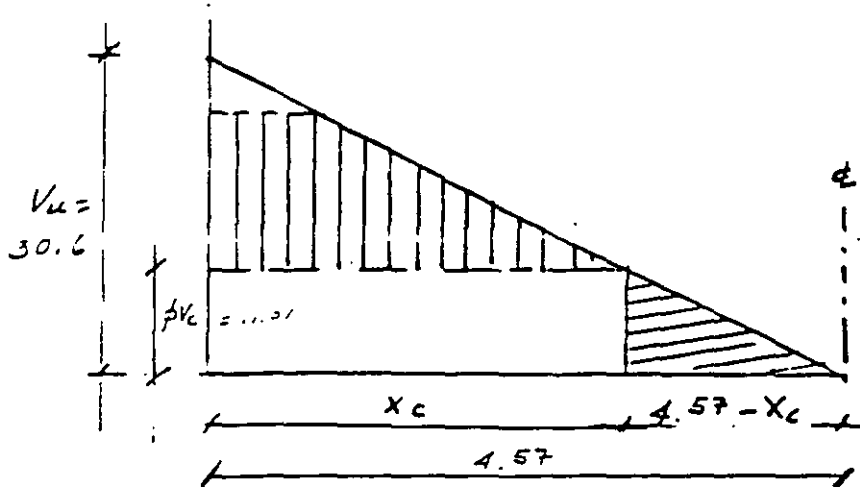
Para este ejemplo, se supone que la carga viva está fija, de tal modo que el cortante de diseño en el centro del claro es igual a cero. (Se obtiene un cortante de diseño mayor que cero si se considera una carga viva parcial sobre el claro.)

1. Determinar las fuerzas cortantes factorizadas @ apoyo: $V_u = 6.7 \times 4.57 = 30.6$ ton. @ distancia x del apoyo: $V_u = 30.6 - 6.7 \times 0.51 = 27.2$ ton. 11.1.2.1

2. Determinar la resistencia al cortante proporcionada por el concreto.

$$\phi V_c = \phi (0.53 \sqrt{f'_c} b_w d) \quad \text{ecuación 11.13}$$

$$= 0.85 \times 0.53 \sqrt{211} \times 33 \times 51 = 11013 = 11.01$$



Por comparación de Δ_s semejantes:

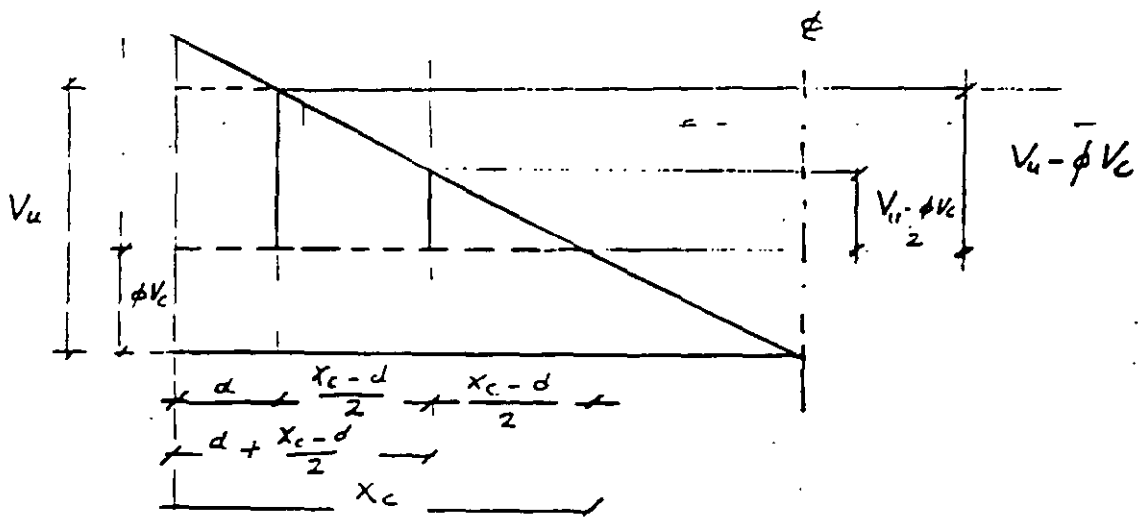
$$\frac{4.57 - X_c}{4.57} = \frac{\phi V_c}{V_u}$$

$$4.57 - X_c = 4.57 \left(\frac{\phi V_c}{V_u} \right); \quad 4.57 \left(1 - \frac{\phi V_c}{V_u} \right) = X_c$$

$$X_c = 4.57 \left(1 - \frac{11.01}{30.6} \right) = 2.93 \text{ m}$$

En la misma forma se puede determinar X_m

$$X_m = 4.57 \left(1 - \frac{\phi V_c / 2}{V_u} \right) = 4.57 \left(1 - \frac{5.50}{30.6} \right) = 3.75 \text{ m}$$

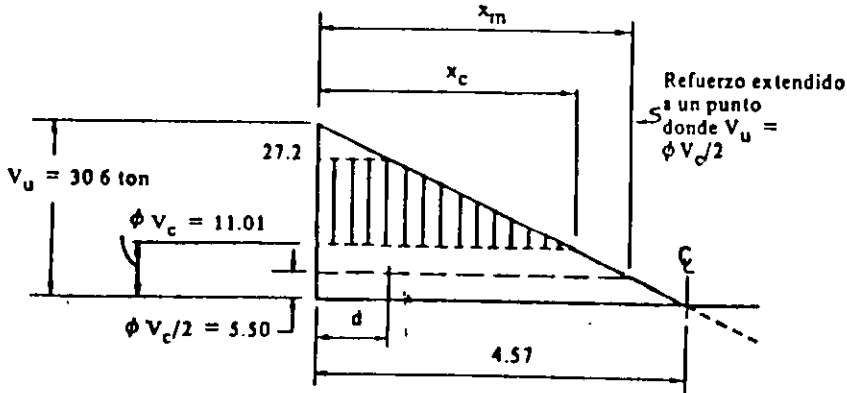


3. Determinar la distancia x_c desde el apoyo, más allá de la cual el concreto puede soportar el cortante total.

AA Del dibujo $(4.57 - x_c)/4.57 = \phi V_c/V_u$ en el apoyo
 $\therefore x_c = 4.57 [1 - (\phi V_c/V_u)] = 4.57 [1 - (11.01/30.6)] = 2.93 \text{ m}$

4. Determinar la distancia x_m desde el apoyo hasta donde sea preciso proporcionar refuerzo mínimo por cortante (es decir, hasta $V_u = \phi V_c/2$). 11.5.5.1

$$x_m = 4.57 [(30.6 - 5.50)/30.6] = 3.75 \text{ m}$$



5. Determinar la separación requerida de los estribos en U.

$$s \text{ (requerida)} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c) \quad \text{Comentarios sección 11.5.6}$$

Suponiendo estribos en U del #4 ($A_v = 2.58 \text{ cm}^2$) apéndice F @ distancia d del apoyo:

$$s \text{ (requerida)} = 0.85 (2.58) 2.8 (51) / (27.2 - 11.01) = 19.4 \text{ cm}$$

Puesto que $(V_u - \phi V_c)$ varía linealmente entre $x = d$, $x = x_c$ y la separación requerida varía inversamente con $(V_u - \phi V_c)$, la separación requerida en cualquier sección entre esos dos puntos se puede obtener directamente del valor s (requerido), correspondiente a $x = d$. Por ejemplo, en la sección:

$$x = d + [(x_c - d)/2] = 1.72 \text{ m del apoyo}$$

$$s \text{ (requerida)} = 19.4/0.5 = 38.8 \text{ cm}$$

o Verificar la separación máxima permisible de los estribos.

$$s \text{ (máx)} \text{ de los estribos verticales} < d/2 = 25.5 \text{ cm} \quad 11.5.4.1$$

$$\text{o también } < 61 \text{ cm}$$

s (máx) de los estribos en U del #4 correspondiente a los requerimientos mínimos de áreas de refuerzo

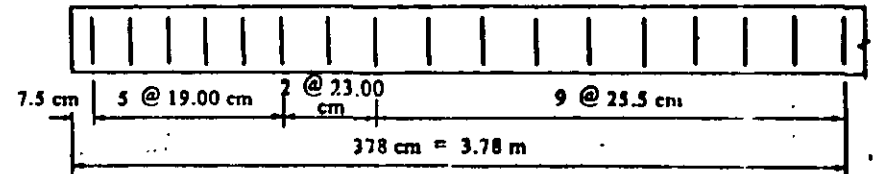
$$s \text{ (máx)} = A_v f_y / 3.5 b_w = 2.58 (2810) / 3.5 \times 33 \quad \text{ecuación 11.14}$$

$$= 63 \text{ cm}$$

$$\therefore s \text{ (max)} = 25.5 \text{ cm}$$

Resumen

Separación de los estribos utilizando estribos en U del #4:



6 estribos @ 19.00 cm

2 estribos @ 23.00 cm

9 estribos @ 25.5 cm

EJEMPLO 13.2 Diseño por cortante con tensión axial

Determinar la separación que se requiere para estribos verticales en U, para una viga sometida a tensión axial.

$$f'_c = 253 \text{ kg/cm}^2 \text{ (concreto ligero con arena; no se especifica } f_{ct})$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_d = 6.01 \text{ ton-m}$$

$$M_q = 4.42 \text{ ton-m}$$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

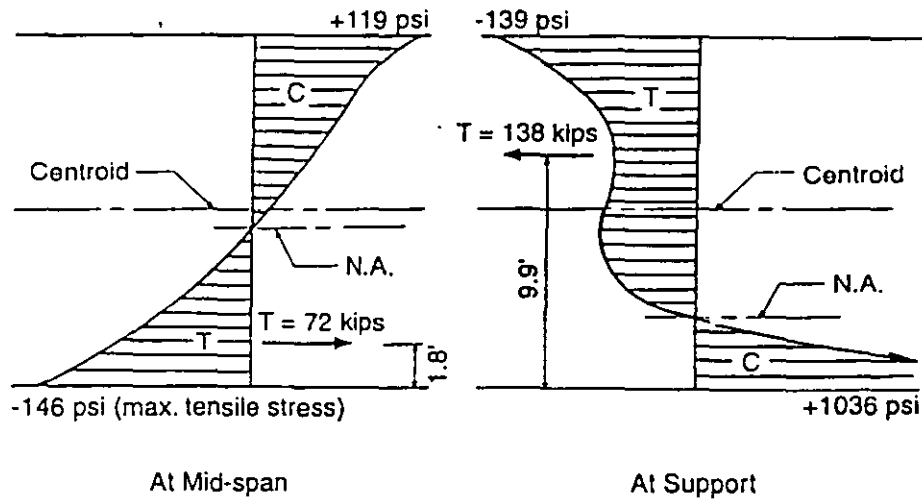
CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

**TEMA:
WALLS**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**



The variation of the stresses with respect to the depth of the member, as shown in the figure, can be obtained with similar calculations.

To avoid cracking at service loads, tensile stresses should not exceed the modulus of rupture.

$$f_r = 7.5\sqrt{f'_c} = 7.5\sqrt{3000} = 411 \text{ psi} > 146 \text{ psi} \quad \text{O.K.}$$

Eq. (9-9)

Designers using the Alternate Design Method of Appendix A may proceed directly with the flexural design as outlined in Reference 19.2, calculating the required reinforcement from the tensile resultants (T) and distributing the reinforcement appropriately. The following procedure is in accordance with the Strength Design Method.

- b. Determine required moment strengths.

$$w_u = 1.4 (10) + 1.7 (10) = 31.0 \text{ kips/ft}$$

Eq. (9-1)

@ mid-span (Ref. 19.2):

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon^2)}{24} \\ &= \frac{31 \times 30^2 (1 - 0.1^2)}{24} = 1151 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

@ support (Ref. 19.2):

$$M_u = \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{24}$$

Refer to Reference 19.2 for design constants:

$$C = 3 \text{ ft}, L = 27 + 3 = 30 \text{ ft}$$

$$\epsilon = \frac{C}{L} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}, \quad \beta = \frac{H}{L} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$w = 10 + 10 = 20 \text{ kips/ft} = \frac{20,000}{12} = 1667 \text{ lbs/in.}$$

$$\frac{w}{b} = \frac{1667}{15} = 111.1 \text{ lbs}$$

$$wL = 20 \times 30 = 600 \text{ kips}$$

From Figs. 2, 3, 4, and 5 (Ref. 19.2), the service load stresses and the magnitude and location of the resultant T of the tensile stresses at mid-span and support are determined as follows (plus indicates compression and minus tension):

- Mid-span

Stress = coefficients from Fig. 2 \times (w/b)

$$\text{Top stress} = +1.07 \times 111.1 = +119 \text{ psi}$$

$$\text{Bottom stress} = -1.31 \times 111.1 = -146 \text{ psi}$$

Tensile force T = coefficient from Fig. 4 \times wL

$$= 0.12 \times 600 = 72 \text{ kips}$$

Location of T from bottom of girder = coefficient from Fig. 5 \times L

$$= 0.06 \times 30 = 1.8 \text{ ft}$$

- Support

Stress = coefficients from Fig. 3 \times (w/b)

$$\text{Top stress} = -1.25 \times 111.1 = -139 \text{ psi}$$

$$\text{Bottom stress} = +9.32 \times 111.1 = +1036 \text{ psi}$$

Tensile force T = coefficient from Fig. 4 \times wL

$$= 0.23 \times 600 = 138 \text{ kips}$$

Location of T from bottom of girder = coefficient from Fig. 5 \times L

$$= 0.33 \times 30 = 9.9 \text{ ft}$$

Example 19.1—Design of Deep Flexural Members

This design example has been adapted from the PCA publication *Design of Deep Girders*^{19.2} and modified in accordance with the ACI Code and the Strength Design Method. The publication may be used directly to design deep members by the Alternate Design Method, or it may be used to locate the tensile resultants and check cracking under the Strength Design Method.

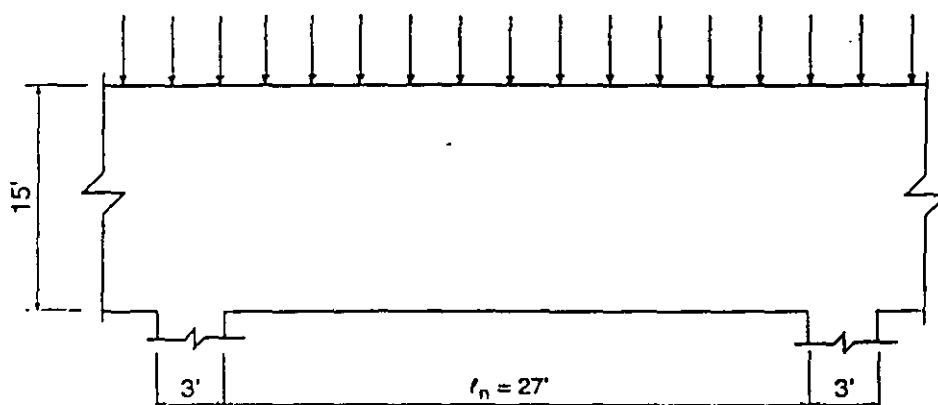
An interior span of a continuous deep girder is shown below.

Width of beam and support $b_w = 15$ in.

Uniform loads: Live load = 10 kips/ft, Dead load = 10 kips/ft

$$f'_c = 3000 \text{ psi}$$

$$f_y = 40,000 \text{ psi}$$



Calculations and Discussion

Code Reference

1. Determine if deep beam provisions apply

$$\frac{\ell_n}{h} = \frac{27}{15} = 1.8$$

$$\text{For flexure: } \frac{\ell_n}{h} < 2.5$$

10.7.1

$$\text{For shear: } \frac{\ell_n}{d} < 5$$

11.8.1

Design for flexure and shear must satisfy deep beam provisions of 10.7 and 11.8.

2. Design for Flexure

10.7

- a. Determine moment stresses (at service loads).

Shear reinforcement may be varied along the length of span as for ordinary beams; however, a minimum area of both vertical and horizontal reinforcement, A_v and A_{vh} , in accordance with 11.8.9 and 11.8.10 must be provided throughout the full span length, irrespective of shear force conditions. Note that the spacing s of the vertical shear reinforcement A_v must not exceed $d/5$ nor 18 in. (somewhat closer maximum spacing than that permitted for ordinary beams). Note also that the horizontal shear reinforcement A_{vh} does not contribute to the shear strength V_s for continuous deep members:

As for simply supported deep members, in continuous deep members, the shear strength V_n must not be taken greater than:

$$V_n = 8\sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left(10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5$$

REFERENCES

- 19.1 *Tilt-Up Load-Bearing Walls—A Design Aid*, Portland Cement Association, Skokie, IL, EB074D, 1994, 28 pp. A "column model" (a panel considered hinged along loaded edges and free along vertical edges) is used to compute load capacities of reinforced concrete tilt-up wall panels with both one and two layers of reinforcement that rest on continuous footings. An approximate but rational means of evaluating the effects of isolated footings and sustained loads on the capacity of these slender walls is included, as well as load-moment interaction charts and tables and design applications.
- 19.2 *Design of Deep Girders*, Portland Cement Association, Skokie, IL, IS079D, 10 pp. Presents analysis of deep girders according to elastic theory of Franz Dischinger, including special studies and numerical examples. Data and procedures apply to design of deep wall-like members such as in bins, hoppers, and foundation walls.
- 19.3 Chow, Li., Conway, H., and Winter, G., "Stresses in Deep Beams," *Transactions, ASCE*, Vol. 118, 1953, pp. 686-708.
- 19.4 Park, R. and Paulay, T., *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

Example 19.2 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

For $\frac{\ell_n}{d} = 3.35$:

$$V_n = \frac{2}{3} \left(10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{Eq. (11-27)}$$

$$V_n = \frac{2}{3} (10 + 3.35) \sqrt{4000} \times 20 \times \frac{43}{1000} = 484 \text{ kips}$$

$$\phi V_n = 0.85 (484) = 411 \text{ kips} > 352.5 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

5. Determine shear strength with minimum shear reinforcement. 11.8.9

Substituting minimum A_v and A_{vh} into Eq. (11-30): 11.8.10

$$\begin{aligned} \phi V_s &= \phi (0.029d - 0.001\ell_n) b_w f_y / 12 \\ &= 0.85 [(0.029 \times 43) - (0.001 \times 12 \times 12)] (20 \times 60) / 12 = 94 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$\phi (V_c + V_s) = 92.5 + 94 = 186.5 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

- 6 Determine shear strength ϕV_c using more complex Eq. (11-29) at critical section. 11.8.7

$$V_c = \left(3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} \right) \left(1.9 \sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad \text{Eq. (11-29)}$$

At critical section:

$$\frac{M_u}{V_u d} = \frac{352.5 \times 3}{352.5 \times 3.58} = 0.84$$

$$3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} = 3.5 - (2.5 \times 0.84) = 1.4 < 2.5$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{14.0}{20 \times 43} = 0.0163$$

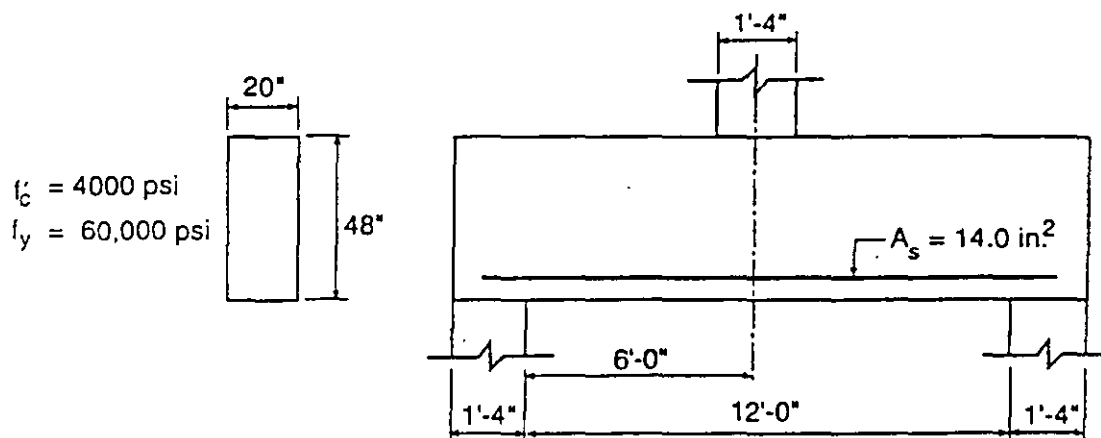
$$V_c = 1.4 \left[1.9 \sqrt{4000} + \frac{2500 (0.0163)}{0.84} \right] (20 \times 43) / 1000 = 203 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 0.85 (203) = 173 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 173 \text{ kips} < \phi (6 \sqrt{f'_c} b_w d) = 0.85 (6 \sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 277 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad \text{11.8.7}$$

Example 19.2—Design of Deep Flexural Members

Determine the required shear reinforcement for the simply supported transfer girder supporting the single column shown below. Column loads: dead load = 200 kips, live load = 250 kips.



Calculations and Discussion

Code
Reference

1. Determine if deep beam provisions apply.

$$d = 48 - 5 = 43 \text{ in.}$$

$$\frac{\ell_n}{d} = \frac{12 \times 12}{43} = 3.35 < 5, \text{ deep beam provisions apply}$$

11.8.1

2. Determine critical section for shear (neglect uniform dead load since it is small compared to the concentrated loads).

11.8.5

$$0.5a = 0.5 \times 6 = 3 \text{ ft} < d = 3.58 \text{ ft}$$

3. Determine shear strength without shear reinforcement.

11.8.6

$$\phi V_c = \phi (2\sqrt{f'_c} b_w d)$$

Eq. (11-28)

$$= 0.85 (2\sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 92.5 \text{ kips}$$

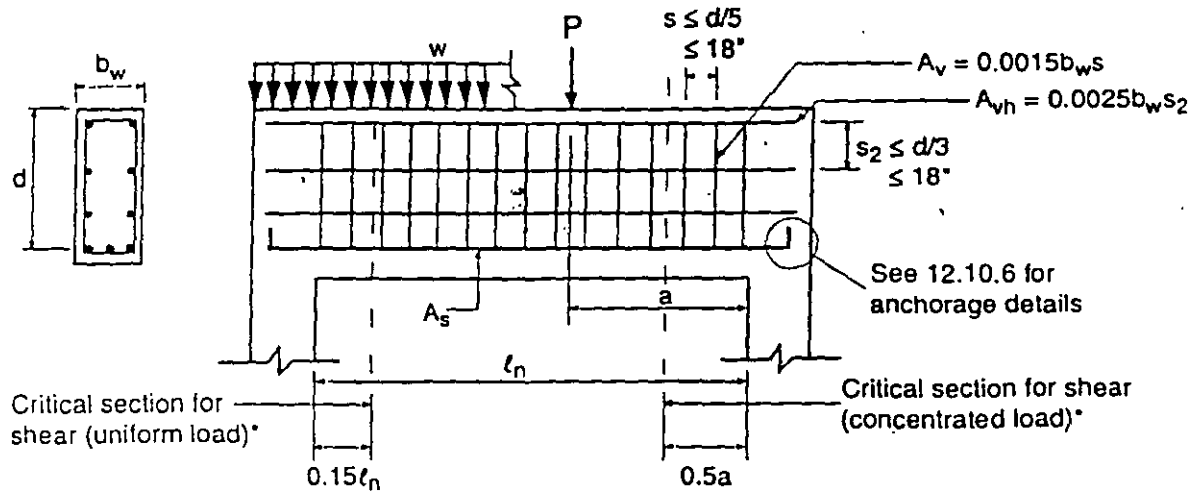
$$V_u = \frac{1.4(200) + 1.7(250)}{2} = 352.5 \text{ kips} > 92.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Shear strength provided by concrete ϕV_c is not adequate to carry the factored shear force V_u .

4. Check maximum shear strength permitted.

11.8.4

14y



* Use same shear reinforcement throughout span.

Figure 19-6 Design Details for Simply Supported Deep Beams ($l_n/d < 5$)

11.8.3 Continuous Deep Flexural Members

For shear design of continuous deep members, the design procedure is the same as for ordinary beams. The maximum factored shear force V_u is calculated at the critical section defined in 11.8.5. The factored shear force V_u must not exceed the shear strength provided by the section $\phi(V_c + V_s)$, where V_c may be computed from either the more complex Eq. (11-5), or the simpler Eq. (11-3), $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_wd$. Section 11.8.3 also specifies that the design of continuous deep flexural members must also satisfy 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Section 11.8.4 sets an upper limit to V_u . Sections 11.8.9 and 11.8.10 specify minimum vertical and horizontal shear reinforcement, respectively.

The first step in the design is to check if V_u is less than ϕV_c , with V_c equal to $2\sqrt{f'_c}b_wd$. If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force V_u , calculate ϕV_s for minimum shear reinforcement and add to ϕV_c . Using the minimum shear reinforcement of 11.8.9 ($A_v = 0.0015b_ws$), the shear strength Eq. (11-15) reduces to

$$\begin{aligned} V_s &= 0.0015f_yb_wd \\ &= 60 b_wd \text{ for Grade 40 bars} \\ &= 90 b_wd \text{ for Grade 60 bars} \end{aligned}$$

Note that the minimum shear reinforcement of 11.8.9 is greater than that required by Eq. (11-13). The shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi(2\sqrt{f'_c}b_wd + 0.0015f_yb_wd)$$

If the shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-5) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement A_v may be added to increase the shear strength of the section. Using Eq. (11-15), the required shear reinforcement is:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d}$$

increase the shear strength of the section. Shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span in all cases (11.8.11).

$$V_c = [3.5 - (2.5)(M_u/V_u d)] \times [1.9\sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u}] b_w d$$

Plotted for 3,000 psi concrete, simple span and uniform load.

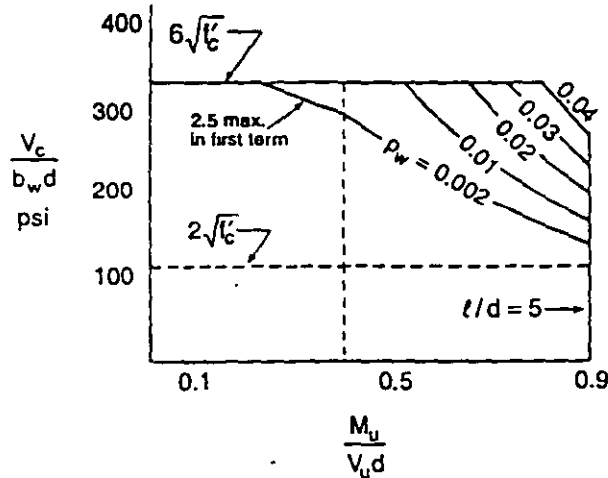


Figure 19-5 Shear Strength of Simply Supported Deep Flexural Members

For design convenience, the required area of shear reinforcement A_v and A_{vh} in terms of the factored shear force V_u can be computed using Eq. (11-30) as follows:

$$\frac{\phi V_s}{\phi f_y d} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left(\frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

The shear strength $V_n = V_c + V_s$ must not be taken greater than:

$$V_n = 8\sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left(10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5 \quad 11.8.4$$

At the upper limit of $\ell_n/d = 5$, $V_n = 10\sqrt{f'_c} b_w d$ (the same as for ordinary beams).

A strict reading of 11.8.8 would appear to suggest that no shear reinforcement is needed in a simply supported deep beam unless V_u exceeds ϕV_c , which may be as high as $\phi(6\sqrt{f'_c} b_w d)$. However, a deep beam without shear reinforcement is not recommended. It would be more appropriate to conform with 11.8.9 and 11.8.10 for the design of simply supported deep beams.

Design details for simply supported deep members is illustrated in Fig. 19-6.

Example 19.2 (cont'd)

Calculations and Discussion

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

7. Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30).

11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left(\frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

Eq. (11-30)

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement:

11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025 b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face), $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left(\frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Eq. (11-30)

Solving for $\frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face), $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left(\frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30).

11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left(\frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

Eq. (11-30)

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement:

11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face), $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left(\frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Eq. (11-30)

$$\text{Solving for } \frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face), $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left(\frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Solving for $\frac{A_v}{s} = 0.1048 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$A_v = 0.1048 \times 12 = 1.257 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Use #5 @ 6 in. (each face), $A_v = 1.24 \text{ in.}^2/\text{ft}$ O.K.

8. Check shear strength provided using #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

$$V_s = \left[\frac{A_v}{s} \left(\frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left(\frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) \right] f_y d \tag{Eq. (11-30)}$$

$$= \left[0.1033 \left(\frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left(\frac{11 - 3.35}{12} \right) \right] (60 \times 43) = 210.1 \text{ kips}$$

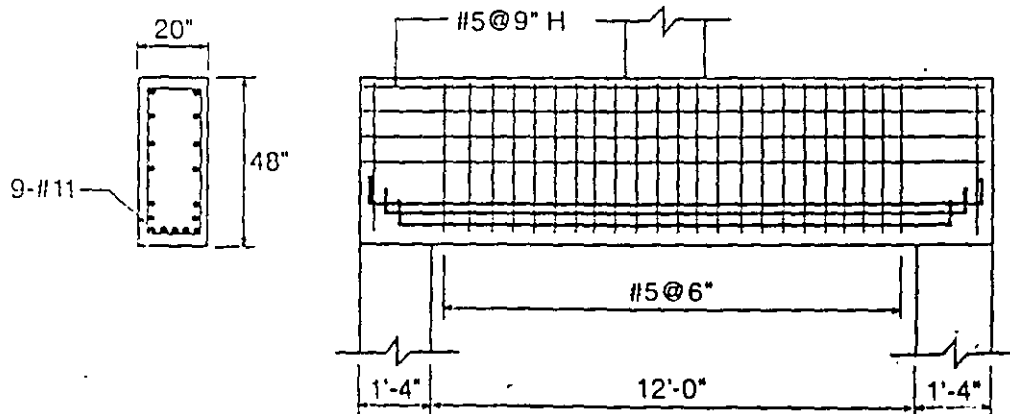
$\phi V_s = 0.85 (210.1) = 178.6 \text{ kips}$

$\phi (V_c + V_s) = 173 + 178.6 = 351.6 \text{ kips} = 352.5 \text{ kips}$ O.K.

9. Both horizontal and vertical shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span. See reinforcement details below. 11.8.11

Use #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

Note: The main flexural reinforcement must be anchored to develop the specified yield strength f_y in tension at the face of the support. 12.10.6
12.11.4



Reinforcement Details

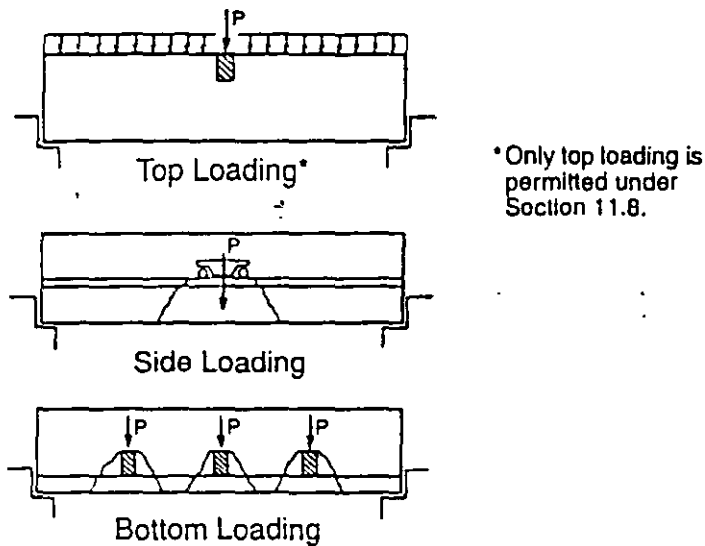


Figure 19-4 Loading of Deep Flexural Members

Different shear design procedures are prescribed for simply supported and continuous deep flexural members. Design of simply supported members for shear must be based on the special provisions of 11.8. Design of continuous members for shear must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 as well as 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Also, when loads are applied through the sides or bottom of the member, simply supported or continuous, the shear design provisions of 11.1 through 11.5 must be used.

11.8.2 Simply Supported Deep Flexural Members

For shear design of simply supported deep members, the maximum factored shear force V_u is calculated at a distance from the face of the support defined as 0.15 times the clear span for uniformly loaded beams or 0.50 times the shear span a (distance between concentrated load and face of support) for beams with concentrated loads, but in no case greater than d from the face of the support (11.8.5).

The factored shear force V_u must not exceed the shear strength $\phi V_n = \phi(V_c + V_s)$, where V_c is the shear strength provided by the concrete and V_s is the shear strength provided by the shear reinforcement, both horizontal and vertical. V_c may be computed from either the more complex Eq. (11-29), which takes into account the effects of the tensile reinforcement and $M_u/V_u d$ at the critical section, or may be determined from the simpler Eq. (11-28),

$V_c = 2\sqrt{f'_c} b_w d$. Equation (11-29) is illustrated in Fig. 19-5.

The first step in the design is to check if V_u is less than ϕV_c , with V_c equal to $2\sqrt{f'_c} b_w d$. If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force V_u , calculate ϕV_s for minimum shear reinforcement and add to ϕV_c . Using the minimum shear reinforcement requirements of 11.8.9 ($A_v = 0.0015 b_w s$) and 11.8.10 ($A_{vh} = 0.0025 b_w s_2$), shear strength Eq. (11-30) reduces to

$$V_s = (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12$$

Substituting V_c from Eq. (11-28) and V_s from above, the shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi \left[2\sqrt{f'_c} b_w d + (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12 \right]$$

If shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-29) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement A_v and A_{vh} may be added to

depth and compressive stresses may be as high as 14 times those indicated by linear strain and stress distribution.^{19.2} In these cases, reinforcing details require special consideration. If service load compressive stresses approach about $0.45f'_c$, it may be necessary to treat the compression area as an axially loaded member, using laterally tied reinforcement to carry the compressive forces as the moment strength is approached.

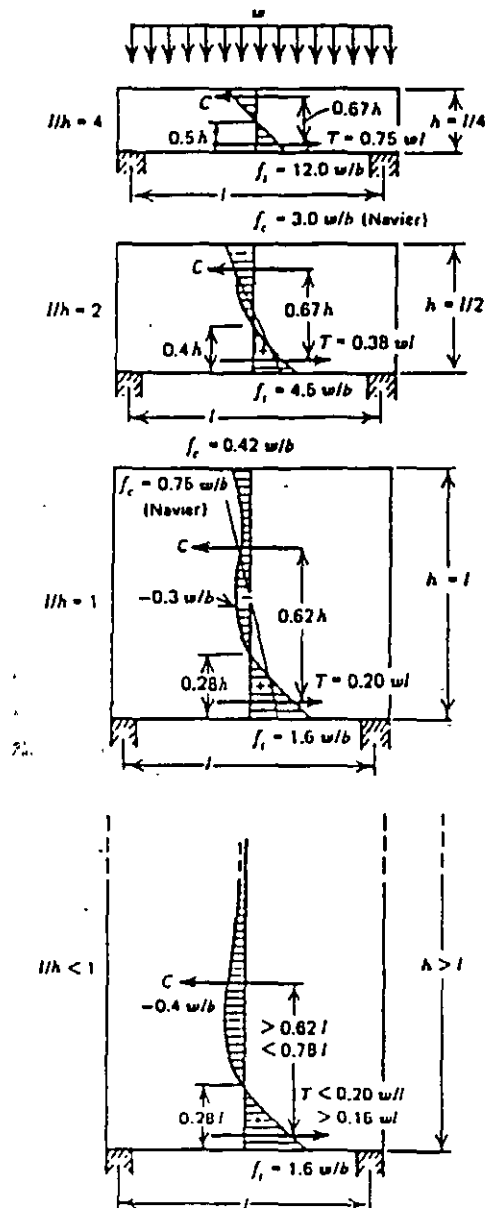


Figure 19-3 Distribution of Flexural Stresses in Homogeneous Simply Supported Beams (Ref. 19.4)

11.8 SHEAR STRENGTH OF DEEP FLEXURAL MEMBERS

The special shear strength provisions for deep flexural members apply only to members having a clear-span-to-effective-depth ratio (l_n/d) less than 5. The deep members must be loaded at the top face as shown in Fig. 19-

Since the principal tensile forces in deep members are primarily horizontal (vertical cracking), horizontal shear reinforcement is effective in resisting the tensile forces. Truss bars are, therefore, not recommended as shear reinforcement in deep members.

Lateral buckling in a vertical direction (Fig. 19-2), particularly near concentrated loads and at supports, can be checked by the moment magnifier method for columns, or by numerical or energy methods. A simplified procedure for wall-like beams (tilt-up panels) is provided in Reference 19.1. If the height-to-thickness ratio of a member is limited to 25, buckling should not be a problem.

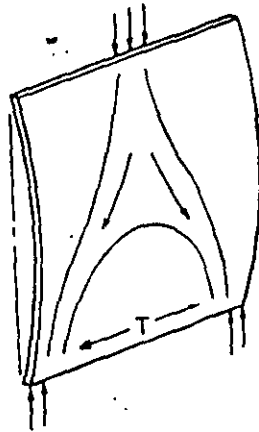


Figure 19-2 Lateral Buckling of Deep Flexural Members

The design of continuous deep flexural members for shear strength must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 with 11.8.5 substituted for 11.1.3, and must also satisfy the provisions of 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. The special shear strength provisions of 11.8 are intended to apply only to simply supported deep beams. Recent tests of continuous deep beams have indicated that the special shear provisions of 11.8 are inadequate for continuous members. Section 11.8.3 directs the engineer to base shear strength of continuous members on the design provisions of 11.1 through 11.5. Section 11.8 is basically limited to simply supported deep beams.

10.7 DEEP FLEXURAL MEMBERS

The code requires that "nonlinear distribution of strain" be taken into account in flexural design of deep members. The elastic analyses by Dischinger and others (Refs. 19.2-19.4) have shown that the shape of the elastic stress curve can be quite different from the linear distribution usually assumed. At midspan, the neutral axis moves away from the loaded face of the member as the span-to-depth ratio decreases (see Fig. 19-3). Over the supports, the resultant elastic tensile forces can be within a third of the member depth from the top fiber.

Nonlinear distribution of strains and stresses assumes an uncracked, homogeneous cross-section and, therefore, does not apply to design at the ultimate moment strength (nominal moment strength M_n for design), since cracking usually occurs before the moment strength can be developed. This would imply that the tensile reinforcement required to develop the moment strength M_n could be placed near the extreme tensile fiber as is customary for ordinary flexural members. Reference 19.3, however, recommends that tensile reinforcement be distributed throughout the tensile area and centered at or near the resultant of the tensile forces, so that, when cracking occurs, there will not be a sudden shift in the location of the resultant tensile force. Both methods of sizing and placing reinforcement are illustrated in Example 19.1 and it is left to the judgment of the designer to choose the more appropriate method.

Development of horizontal tensile reinforcement in single-span simply-supported deep members requires special consideration. Since moments increase rapidly from zero at the face of the support, the reinforcement may not have sufficient anchorage length to develop the required moment strength near the support. Tensile bars may be anchored by development length (if available), standard hooks, or by special anchorage devices.

The most radical departure from a linear strain and stress distribution is in compression areas at or near supports of continuous members. Compressive forces may be confined to the bottom 5 or 10 percent of the member

Deep Flexural Members

UPDATE FOR THE '95 CODE

Two new sections, 12.11.4 and 12.12.4, have been added which affect the reinforcement detailing of deep flexural members. The new sections require that at interior supports of deep flexural members, positive moment tension reinforcement and negative moment tension reinforcement shall be continuous with that of adjacent spans to develop proper anchorage.

GENERAL CONSIDERATIONS

The code gives two definitions for "deep" members. For flexure, members with overall depth-to-clear-span ratios greater than $2/5$ for continuous spans or $4/5$ for simple spans are defined as "deep" (10.7.1). For shear, a "deep" member is one with an effective depth-to-span ratio of $1/5$ or greater (11.8.1).

Specific provisions for designing deep members for flexure are found in the code, but such members must be designed "taking into account nonlinear distribution of strain and lateral buckling" (10.7.1). Appropriate references for the design of deep beams for flexure are given in the Commentary and at the end of Part 19.

Information on lateral buckling is more difficult to find. Fortunately, most walls and beams receive lateral support from supported floor or roof members, so lateral buckling of the compression flange is rarely a problem (see Fig. 19-1(a)). Some form of lateral support is required at intervals not exceeding 50 times the least width of the compression flange (10.4.1), even if the member is free-standing (see Fig. 19-1(b)). For free-standing walls, a lateral stability check should be made and an adequate margin of safety against lateral buckling provided. As shown in Fig. 19-1(c), lateral bracing can also be achieved by providing flanges.

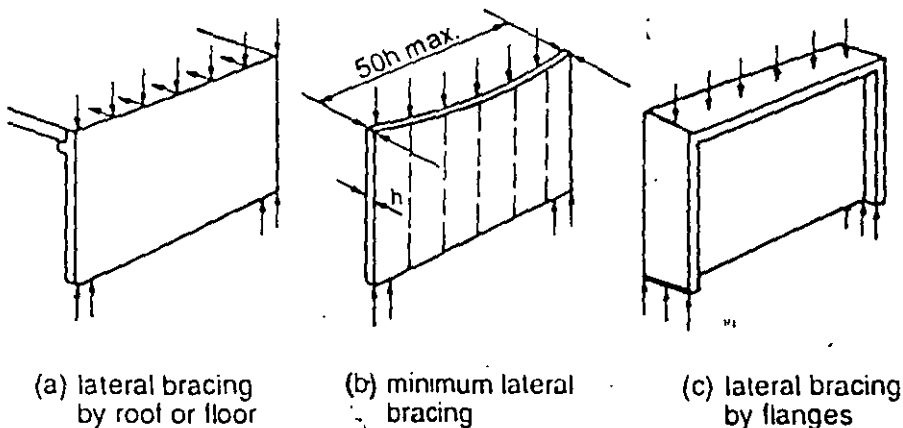


Figure 19-1 Lateral Support for Deep Flexural Members

Use 2-#4 @ 14 in.

4. Determine vertical shear reinforcement.

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0.0025 + 0.5 \left(2.5 - \frac{h_w}{\ell_w} \right) (\rho_{ln} - 0.0025) && \text{Eq. (11-34)} \\ &= 0.0025 + 0.5 (2.5 - 1.5) (0.0036 - 0.0025) \\ &= 0.0031 \end{aligned}$$

$$\text{Maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{3} = \frac{8 \times 12}{3} = 32 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 11.10.9.5$$

Use 2-#4 @ 14 in.

5. Design for flexure.

$$M_u = V_u h_w = 200 \times 12 = 2400 \text{ ft-kips}$$

Using Table 10-1:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{2400 \times 12}{0.9 \times 3 \times 8 \times 76.8^2} = 0.2261$$

where $d = 0.8 \ell_w = 0.8 \times 96 = 76.8 \text{ in.}$

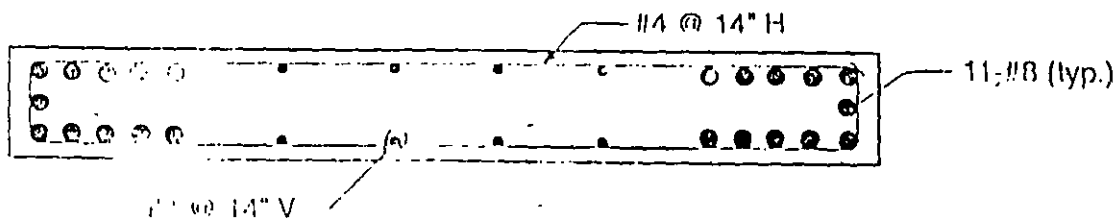
11.10.4

(a larger value of d could be used if determined by a strain compatibility analysis)

From Table 10-1, read $\omega = 0.269$

$$\Lambda_s = \rho h d = \frac{\omega f'_c b d}{f_y} = \frac{0.269 \times 3 \times 8 \times 76.8}{60} = 8.26 \text{ in.}^2$$

Use 11-#8 bars each side ($\Lambda_s = 8.69 \text{ in.}^2$)



$$= \left[0.6 \sqrt{3000} + \frac{96 (1.25 \sqrt{3000} + 0)}{96 - 48} \right] \left(\frac{8 \times 76.8}{1000} \right) = 104 \text{ kips (governs)}$$

where: $M_u = (12 - 4) V_u = 8V_u$ ft kips $= 96V_u$ in.-kips

$$V_u = 200 \text{ kips} > \phi V_c / 2 = 0.85 (104) / 2 = 44.2 \text{ kips} \quad 11.10.8$$

Shear reinforcement must be provided in accordance with 11.10.9.

3. Determine required horizontal shear reinforcement. 11.10.9.1

$$V_u \leq \phi V_n \quad \text{Eq. (11-1)}$$

$$\leq \phi (V_c + V_s) \quad \text{Eq. (11-2)}$$

$$\leq \phi V_c + \frac{\phi A_v f_y d}{s_2} \quad \text{Eq. (11-33)}$$

$$\frac{A_v}{s_2} = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_y d}$$

$$= \frac{[200 - (0.85 \times 104)]}{0.85 \times 60 \times 76.8} = 0.0285$$

For 2-#3: $s_2 = \frac{2 \times 0.11}{0.0285} = 7.7 \text{ in.}$

2-#4: $s_2 = \frac{2 \times 0.20}{0.0285} = 14.0 \text{ in.}$

2-#5: $s_2 = \frac{2 \times 0.31}{0.0285} = 21.8 \text{ in.}$

Try 2-#4 @ 14 in.

$$\rho_h = \frac{A_v}{A_g} = \frac{2 \times 0.20}{8 \times 14} = 0.0036 > 0.0025 \quad \text{O.K.} \quad 11.10.9.2$$

$$\text{maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{5} = \frac{8 \times 12}{5} = 19.2 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 11.10.9.3$$

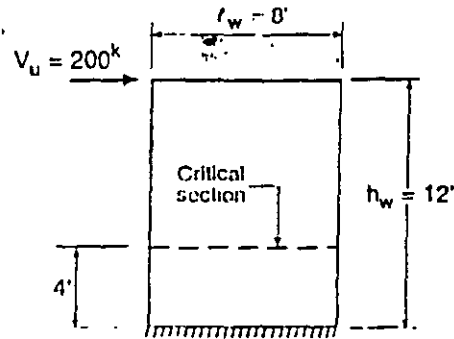
Example 23.4—Shear Design of Wall

Determine the shear and flexural reinforcement for the wall shown.

$$h = 8 \text{ in.}$$

$$f'_c = 3000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi}$$



Calculations and Discussion

Code
Reference

1. Check maximum shear strength permitted.

$$V_u \leq \phi 10 \sqrt{f'_c} h d \quad 11.10.3$$

$$\leq 0.85 \times 10 \sqrt{3000} \times 8 (0.8 \times 96) / 1000 = 286 \text{ kips} > 200 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad 11.10.4$$

2. Calculate shear strength provided by concrete V_c .

Critical section for shear: 11.10.7

$$\frac{l_w}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ ft (governs)}$$

$$\frac{h_w}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ft}$$

$$V_c = 3.3 \sqrt{f'_c} h d + \frac{N_u d}{4 l_w} \quad \text{Eq. (11-31)}$$

$$= 3.3 \sqrt{3000} (8) (76.8) + 0 = 111 \text{ kips}$$

or

$$V_c = \left[0.6 \sqrt{f'_c} + \frac{l_w \left(1.25 \sqrt{f'_c} + \frac{0.2 N_u}{l_w h} \right)}{\frac{M_u}{V_u} + \frac{l_w}{2}} \right] h d \quad \text{Eq. (11-32)}$$

Example 23.3 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

Bearing capacity = $\phi(0.85f'_c A_1) = 0.70(0.85 \times 4 \times 52.5) = 125 \text{ kips} > 63 \text{ kips}$ O.K.

4. Calculate design strength of wall.

Effective horizontal length of wall per tee reaction = $\begin{cases} 7 + 1(7.5) = 37 \text{ in. (governs)} \\ 8 \times 12 = 96 \text{ in.} \end{cases}$ 14.2.4

$$\phi P_{nw} = 0.55\phi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{k l_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

$$= 0.55 \times 0.70 \times 4(37 \times 7.5) \left[1 - \left(\frac{0.8 \times 15 \times 12}{32 \times 7.5} \right)^2 \right]$$

$$= 273 \text{ kips} > 63 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

The 7.5-in. wall is adequate, with sufficient margin for possible effect of load eccentricity.

5. Determine single layer of reinforcement.

Based on 1-ft width of wall and Grade 60 reinforcement (#5 and smaller):

$$\text{Vertical } A_s = 0.0012 \times 12 \times 7.5 = 0.108 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.2$$

$$\text{Horizontal } A_s = 0.0020 \times 12 \times 7.5 = 0.180 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.3$$

$$\text{Spacing} = \begin{cases} 3h = 3 \times 7.5 = 22.5 \text{ in.} \\ 18 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 14.3.5$$

Vertical A_s : use #4 @ 18 in. on center ($A_s = 0.13 \text{ in.}^2/\text{ft}$)

Horizontal A_s : use #4 @ 12 in. on center ($A_s = 0.20 \text{ in.}^2/\text{ft}$)

Design aids such as Fig. 23-6 may be used to select reinforcement directly.

Example 23.3—Design of Bearing Wall by Empirical Design Method (14.5)

A concrete bearing wall supports a floor system of precast single tees spaced at 8 ft on centers. The stem of each tee section is 8 in. wide. The tees have full bearing on the wall. The height of wall is 15 ft, and the wall considered laterally restrained at top. Design of the wall is required.

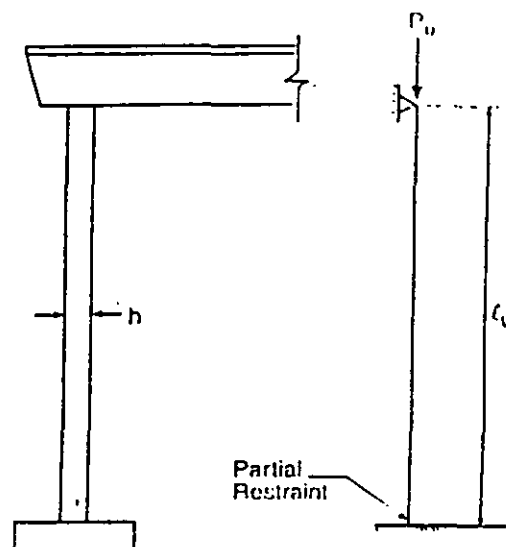
Design Data:

Floor beam reactions: dead load = 28 kips
live load = 14 kips

$f'_c = 4000$ psi

$f_y = 60,000$ psi

Neglect self-weight of wall



Calculations and Discussion

Code Reference

The general design procedure is to select a trial wall thickness h , then check the trial wall for the applied loading conditions.

1. Select trial wall thickness h :

$$h > \frac{P_u}{25} \text{ but not less than 4 in.} \quad 14.5.3.1$$

$$> \frac{15 \times 12}{25} = 7.2 \text{ in.}$$

$$\text{Try } h = 7.5 \text{ in.}$$

2. Calculate factored loading.

$$P_u = 1.4D + 1.7L \quad \text{Eq. (9-1)}$$

$$= 1.4(28) + 1.7(14)$$

$$= 39.2 + 23.8 = 63 \text{ kips}$$

3. Check bearing strength on concrete.

10.17

Assume width of stem for bearing equal to 7 in., to allow for beveled bottom edges.

$$\text{Loaded area } A_1 = 7 \times 7.5 = 52.5 \text{ in.}^2$$

163

18

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-2 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A6. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls *
 (h = 6 1/2" (165 mm) and q_uhφ = 30 or 45 psl (1.4 or 2.2 kN/m²))

w = 150 psl (2400 kN/m²)
 f_c = 4000 psl (28 MPa)
 f_t = 60 ksi (400 MPa)

h = 6 1/2" (165 mm)

$P_u / \phi = (\text{coeff.}) h_c h_f$

P _u / h _c < h _f	End eccentricity, e, (mm)	q _u hφ = 30 psl (1.4 kN/m ²) Slenderness ratio, k _t h _i =				k _t h _i φ coeff. † ≥ 0.001	q _u hφ = 45 psl (2.2 kN/m ²) Slenderness ratio, k _t h _i =				k _t h _i φ coeff. † ≥ 0.001
		20	30	40	50		20	30	40	50	
0.15	1.00 (25)	0.468	0.316	0.035	—	49	0.438	0.110	—	—	39
	3.25 (85)	0.079	0.011	—	—	39	0.067	—	—	—	29
	6.75 (170)	0.016	0.005	—	—	39	0.014	—	—	—	29
0.25	1.00 (25)	0.468	0.316	0.151	0.030	**	0.438	0.301	0.065	—	49**
	3.25 (85)	0.101	0.026	0.006	—	49	0.092	0.016	—	—	39
	6.75 (170)	0.024	0.014	0.004	—	49	0.023	0.009	—	—	39
0.50	1.00 (25)	0.483	0.316	0.151	0.040	**	0.453	0.301	0.070	0.010	**
	3.25 (85)	0.121	0.046	0.016	0.004	**	0.114	0.036	0.010	0.003	**
	6.75 (170)	0.042	0.028	0.013	0.003	**	0.040	0.024	0.009	0.002	**
0.75	1.00 (25)	0.498	0.316	0.151	0.050	**	0.468	0.301	0.070	0.020	**
	3.25 (85)	0.141	0.066	0.026	0.009	**	0.137	0.056	0.021	0.006	**
	6.75 (170)	0.061	0.042	0.023	0.007	**	0.059	0.039	0.020	0.005	**

*Observe the direction of ultimate transverse loads (q_u) and note the bending moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4). A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

**Walls with slenderness ratios, k_th_i, greater than 50 are not recommended.

†This column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-1 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A5. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls *
 (h = 6 1/2" (165 mm) and q_u/h = 0 or 15 psf (0 or 0.7 kN/m²))

$P = \frac{A_c \times 100}{h_1 \times h}$		End eccentricity, in. (mm)	q _u /h = 0 psf (0 kN/m ²) [†] Slenderness ratio, $\lambda t/h_1 =$				λt/h ₁ @ coeff. † ≤ 0.001	q _u /h = 15 psf (0.7 kN/m ²) Slenderness ratio, λt/h ₁ =				λt/h ₁ @ coeff. † ≤ 0.001
			20	30	40	50		20	30	40	50	
0.15	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.085	**	
	3.25 (85)	0.094	0.042	0.018	0.013	**	0.087	0.021	0.005	—	49	
	6.75 (170)	0.018	0.014	0.005	0.003	**	0.017	0.009	0.003	—	49	
0.25	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.090	**	
	3.25 (85)	0.110	0.050	0.026	0.018	**	0.105	0.037	0.011	0.003	**	
	6.75 (170)	0.029	0.022	0.010	0.006	**	0.025	0.015	0.006	0.002	**	
0.50	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.483	0.331	0.191	0.100	**	
	3.25 (85)	0.128	0.066	0.034	0.022	**	0.124	0.055	0.023	0.011	**	
	6.75 (170)	0.049	0.034	0.020	0.012	**	0.045	0.029	0.016	0.009	**	
0.75	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.498	0.331	0.191	0.110	**	
	3.25 (85)	0.146	0.082	0.042	0.026	**	0.142	0.073	0.035	0.019	**	
	6.75 (170)	0.069	0.046	0.030	0.018	**	0.065	0.044	0.026	0.016	**	

*Observe the direction of ultimate transverse loads (q_u) and note the bending moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4). A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

**Walls with slenderness ratios λt/h₁ greater than 50 are not recommended.

†The column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity.

Example 23.2—Design of Tilt-up Wall of Example 23.1 Using Design Aid EB074D

1. Summary of factored loads

$$\begin{aligned}\text{Load case 1: } P_u &= 1.4(1.6) + 1.7(0.64) \\ &= 2.2 + 1.1 = 3.3 \text{ kips}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 2: } P_u &= 0.75(2.2 + 1.1) = 2.5 \text{ kips} \\ q_u &= 0.75(1.7 \times 20) = 25.5 \text{ psf}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 3: } P_u &= 0.9 \times 1.6 = 1.4 \text{ kips} \\ q_u &= 1.3 \times 20 = 26.0 \text{ psf}\end{aligned}$$

From Ex. 23.1, $\phi = 0.87$

2. Select trial section

Use same trial sections as in Example 23.1.

$$h = 6.5 \text{ in.}$$

$$\rho = 0.0025$$

$$\frac{k\ell_u}{h} = \frac{1.0 \times 16 \times 12}{6.5} = 29.5 \approx 30$$

3. Check strength using EB074D design aid

$$\begin{aligned}\text{Load case 1: Required } P_u / \phi &= 3.8 \text{ kips, } q_u / \phi = 0 \\ \text{Use Table A5 (see Table 23-1) from EB074D} \\ \text{For } \rho &= 0.0025, k\ell_u / h = 30, e = 6.75 \text{ in., and} \\ q_u / \phi &= 0, \text{ coefficient} = 0.022 \\ P_n &= 0.022 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 6.9 \text{ kips} > P_u / \phi \quad \text{O.K.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 2: Required } P_u / \phi &= 2.9 \text{ kips, } q_u / \phi = 29.3 \text{ psf, say } 30 \text{ psf} \\ \text{Use Table A6 (see Table 23-2) from EB074D} \\ \text{For } \rho &= 0.0025, k\ell_u / h = 30, e = 6.75 \text{ in., and} \\ q_u / \phi &= 30 \text{ psf, coefficient} = 0.014 \\ P_n &= 0.014 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 4.4 \text{ kips} > P_u / \phi \quad \text{O.K.}\end{aligned}$$

By inspection, the strength requirements for load case 3 are satisfied.

Therefore, the 6.5-in. wall reinforced with #4 @ 12 in. is adequate for all of the load combinations investigated.

$$\phi = 0.9 - \frac{0.2P_u}{0.1f'_c A_g} \geq 0.70$$

$$= 0.9 - \frac{0.2 \times 4.5}{0.1 \times 4 \times 12 \times 6.5} = 0.87$$

Although slight variations from this value will occur for different load cases, this single value is considered adequate.

Determine magnified moment M_c for each load case.

Load Case	P_u (kips)	M_u (in.-kips)	β_d	$\beta = 0.869 + 0.5\beta_d^2 \geq 1.0$	$EI = \frac{99 \times 10^6}{\beta}$ (lb-in. ²)	$P_c = \frac{26.5}{\beta}$ (kips)	$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0$	$M_c = \delta_{ns} M_u$ (in.-kips)
1	4.5	22.4	0.76	1.16	85×10^6	22.8	1.36	30.5
2	3.4	26.6	0.76	1.16	85×10^6	22.8	1.25	33.3
3	2.2	19.7	1.00	1.37	72×10^6	19.3	1.18	23.2

5. Check design strength vs. required strength

For each load case, the required nominal strength will be compared to the design strength using the load-moment interaction diagram in Fig. 23-4(h). The results are tabulated below, based on the moment strengths for the given axial loads.

Load Case	Required Nominal Strength		Design Strength M_n (in.-kips)
	$P_n = P_u / \phi$ (kips)	$M_n = M_c / \phi$ (in.-kips)	
1	5.2	35.1	50.0
2	3.9	38.3	45.0
3	2.5	26.7	40.0

The wall is adequate with the #4 @ 12 in. since the design strength is greater than the required nominal strength for all three load cases.

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \left(\frac{P_u}{0.75P_c} \right)} \geq 1 \quad \text{Eq. (10-10)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Eq. (10-11)}$$

$$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left(0.5 - \frac{e}{h} \right) \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad \text{Eq. (1)}$$

$$\leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{6.75}{6.5} = 1.04$$

$$\text{Thus, } EI = 0.1 \left(\frac{E_c I_g}{\beta} \right)$$

$$E_c = 57,000 \sqrt{4000} = 3.605 \times 10^6 \text{ psi} \quad \text{8.5.1}$$

$$I_g = \frac{12 \times 6.5^3}{12} = 274.6 \text{ in.}^4$$

$$\beta = 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12\rho \geq 1.0$$

$$= 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12(0.00256)$$

$$= 0.869 + 0.5\beta_d^2 \geq 1.0$$

$$EI = \frac{0.1 \times 3.605 \times 10^6 \times 274.6}{\beta} = \frac{99 \times 10^6}{\beta} \text{ lb-in.}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 99 \times 10^6}{\beta (16 \times 12)^2 \times 1000} = \frac{26.5}{\beta} \text{ kips}$$

$C_m = 1.0$ for members with transverse loads between supports

Calculate ϕ factor for largest $P_u = 4.5$ kips

9.3.2.2(b)

b. Roof loading per foot of wall

$$\text{dead load} = 50 \times 20 \left(\frac{4}{2.5} \right) = 1600 \text{ lb/ft}$$

$$\text{live load} = 20 \times 20 \left(\frac{4}{2.5} \right) = 640 \text{ lb/ft}$$

$$\text{wall dead load at mid-height} = 150 (8 + 2) \left(\frac{6.5}{12} \right) = 813 \text{ lb/ft}$$

Factored load combinations.

Load case 1: $U = 1.4D + 1.7L$ Eq. (9-1)

$$P_u = 1.4 (1.6 + 0.81) + 1.7 (0.64)$$

$$= 3.4 + 1.1 = 4.5 \text{ kips}$$

$$M_u = 1.4 (1.6 \times 6.75) + 1.7 (0.64 \times 6.75)$$

$$= 15.1 + 7.3 = 22.4 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_{dl} = 3.4/4.5 = 0.76$$

Load case 2: $U = 0.75 (1.4D + 1.7L + 1.7W)$ Eq. (9-2)

$$P_u = 0.75 (3.4 + 1.1 + 0)$$

$$= 2.6 + 0.8 = 3.4 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.75 [15.1 + 7.3 + 1.7 (0.02 \times 16^2 \times 12/8)]$$

$$= 11.3 + 5.5 + 9.8 = 26.6 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_{dl} = 2.6/3.4 = 0.76$$

Load case 3: $U = 0.9D + 1.3W$ Eq. (9-3)

$$P_u = 0.9 (1.6 + 0.81) + 0 = 2.2 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.9 (1.6 \times 6.75) + 1.3 (0.02 \times 16^2 \times 12/8)$$

$$= 9.7 + 10.0 = 19.7 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_{dl} = 2.41/2.41 = 1.0$$

3. Check wall slenderness:

$$\frac{k l_u}{r} = \frac{1.0 (16 \times 12)}{(0.3 \times 6.5)} = 98.5$$

< 100, approximate evaluation of slenderness effects by 10.11.1 may be used.

4. Calculate moment magnification

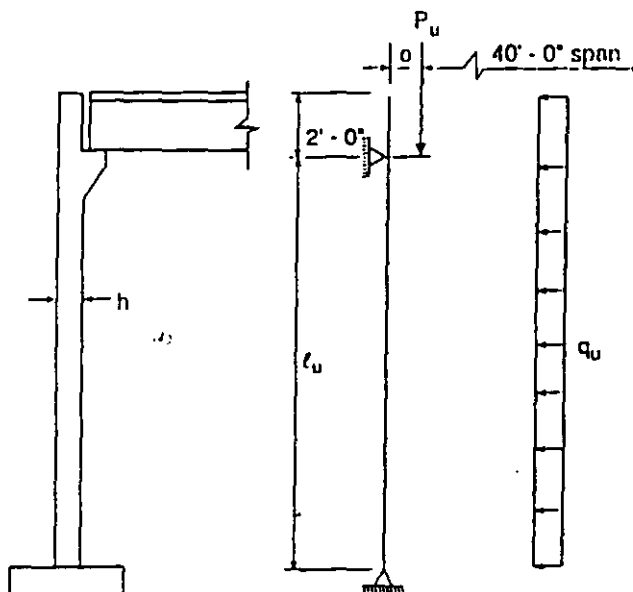
10.12

$$M_c = \delta_{ms} M_2$$

Eq. (10-9)

Example 23.1—Design of Tilt-up Wall Panel by Chapter 10 (14.4)

Design of the wall shown is required. The walls are spaced at 40 ft on center and restrained at the top edge. The roof load is supported through 4 in. tee stems spaced at 4 ft on center.



Design data:

Roof dead load = 50 psf

Roof live load = 20 psf

Wind load = 20 psf

Unsupported length of wall $l_u = 16$ ft

Effective length factor $k = 1.0$ (pinned-pinned end condition)

Concrete $f'_c = 4000$ psi ($w_c = 150$ pcf)

Steel $f_y = 60,000$ psi

Assume non-sway condition.

Calculations and Discussion

Code
Reference

1. Trial wall selection (design for 1 ft wall section)

Try $h = 6.5$ in. with assumed $e = 6.75$ in.

Try #4 @ 12 in. ($A_s = 0.20$ in.²/ft)

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{0.20}{(12 \times 6.5)} = 0.00256$$

2. a. Effective wall length for roof reaction

14.2.4

(i) bearing width + 4 (wall thickness) = $4 + 4(6.5) = 30$ in. = 2.5 ft (governs)

(ii) center-to-center distance between stems = 4 ft

REFERENCES

- 23.1 MacGregor, J.G., "Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Members," paper presented at International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium, Quebec, 1974.
- 23.2 *Tilt-Up Load Bearing Walls - A Design Aid*, Publication EB074D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1994.
- 23.3 Kripanaryanan, K.M., "Interesting Aspects of the Empirical Wall Design Equation," *ACI Journal*, Proceedings Vol. 74, No. 5, May 1977; pp. 204-207.
- 23.4 *PCI Design Handbook - Precast and Prestressed Concrete*, 4th Edition, Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL, 1994.

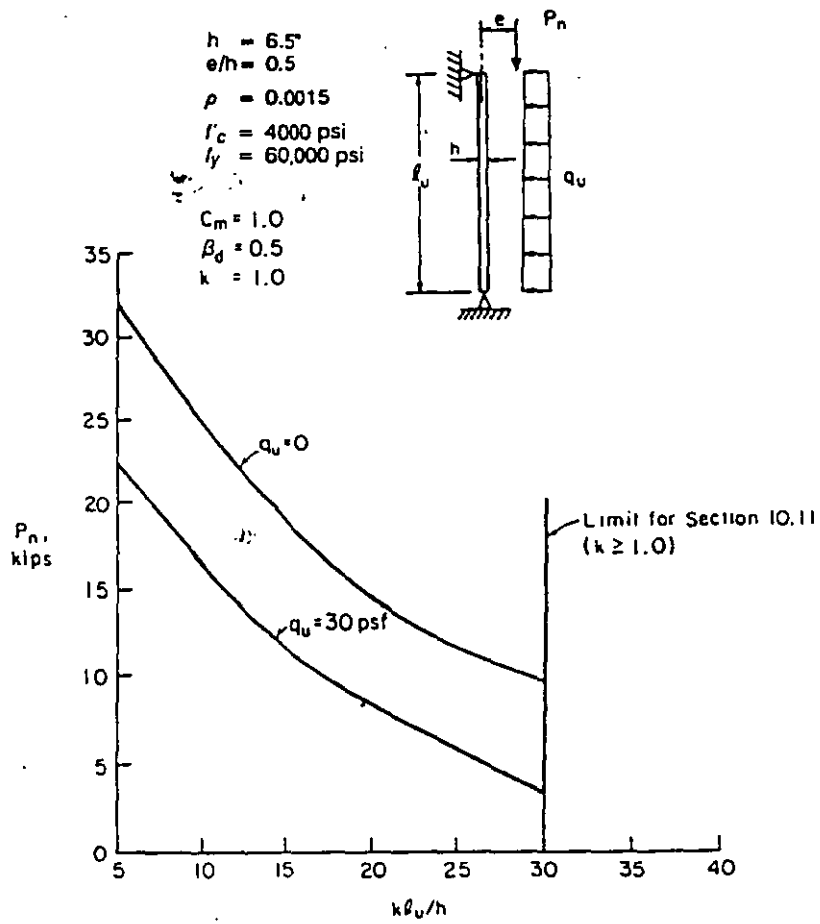


Figure 23-5 Design Chart for 6.5-in. Wall

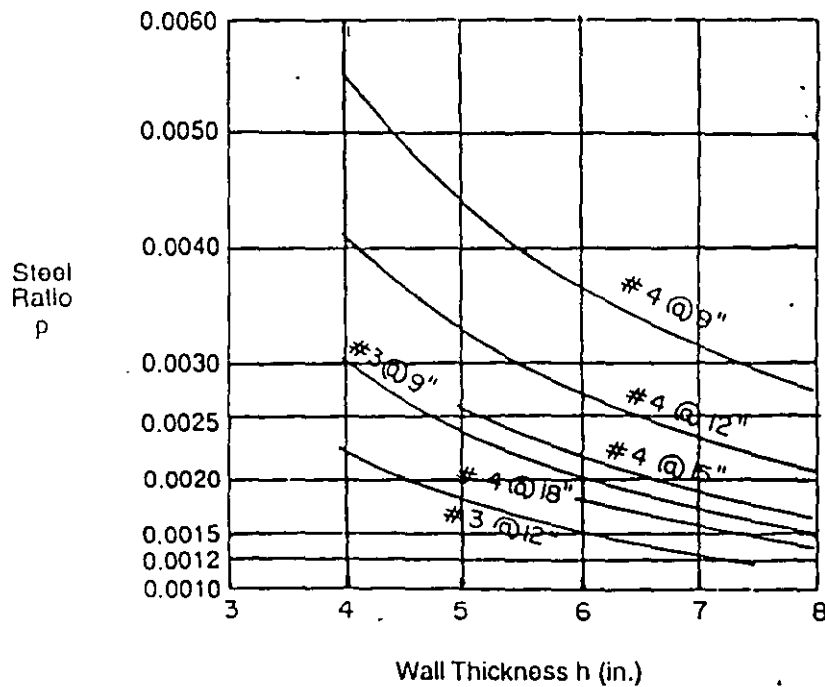
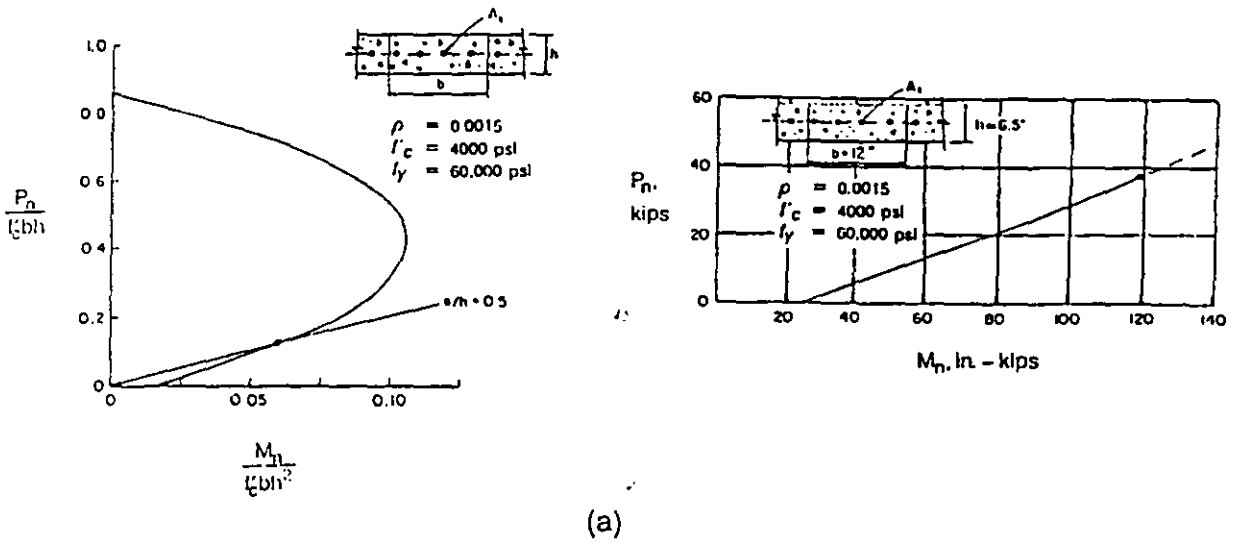
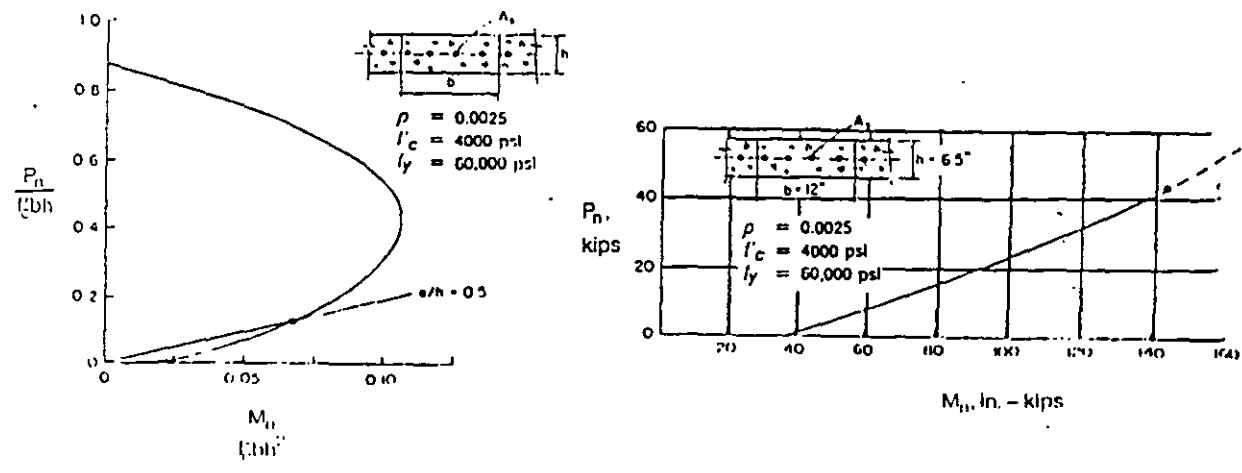


Figure 23-6 Design Aid for Wall Reinforcement

design aids to fit the range of conditions usually encountered in practice. For example, strength interaction diagrams such as those plotted in Fig. 23-4(a) ($\rho = 0.0015$) and Fig. 23-4(b) ($\rho = 0.0025$) can be helpful design aids for evaluation of wall strength. "Blow-ups" of the lower portions of the strength interaction diagrams are shown for specific walls ($h = 6.5$ in.). Load charts, such as the one shown in Fig. 23-5 can also be developed for specific walls. Design aids such as the one shown in Fig. 23-6 may facilitate selection of wall reinforcement.



(a)



(b)

Figure 23-4 Load Moment Interaction Diagram for Wall with (a) Reinforcement $\rho = 0.0015$, and (b) Reinforcement $\rho = 0.0025$

Prestressed walls are not covered specifically in Part 23. Prestressing of walls is advantageous for handling (precast panels) and for increased buckling resistance. For design of prestressed walls the designer should consult Ref. 23.4.

2. Walls must contain both horizontal and vertical reinforcement. The area of horizontal reinforcement must not be less than 0.0025 times the gross concrete area, and that of the vertical reinforcement not less than 0.0015 times the gross concrete area. These ratios may be reduced to 0.0020 and 0.0012 respectively, when #5 or smaller bars having $f_y \geq 60,000$ psi, or welded wire fabric with W31 or D31 or smaller wires are used. In walls greater than 10 in. thick (except basement walls) the reinforcement in each direction must be placed in two layers (14.3).
3. Length of wall to be considered as effective for each beam reaction must not exceed center-to-center distance between reactions, nor width of bearing plus $4h$ (14.2.4).
4. The wall must be anchored to the floors or to columns and other structural elements of the building (14.2.6).

Note that the minimum wall reinforcement required by 14.3.2 does not substantially increase the strength of a wall above that of a plain concrete wall. The minimum wall reinforcement required by 14.3 is provided primarily for control of cracking due to shrinkage and temperature stresses.

With the publication of ACI 318-83, the empirical wall design Eq. (14-1) was modified to reflect the general range of end conditions encountered in wall design, and to allow for a wider range of design applications. The wall strength equation in previous codes was based on the assumption that the top and bottom ends of the wall are restrained against lateral movement, and that rotation restraint exists at one end, so as to have an effective length factor between 0.8 and 0.9. Axial load strength values could be unconservative for pinned-pinned end conditions, which can exist in certain walls, particularly of precast tilt-up construction. Axial strength could also be overestimated where the top end of the wall is free and not braced against translation. In these cases, it is necessary to reflect the proper effective length in the design equation. Equation (14-1) allows the use of different effective length factors k to address this situation. The values of k have been specified in 14.5.2 for commonly occurring wall end conditions. Equation (14-1) will give the same results as the 1977 Code Eq. (14-1) for walls braced against translation of both ends and with reasonable base restraint against rotation.

Reasonable base restraint against rotation implies attachment to a member having a flexural stiffness EI/ℓ at least equal to that of the wall. Selection of the proper k for a particular set of support end conditions is left to the judgment of the engineer.

Example 23.3 illustrates application of the Empirical Design Method to a bearing wall supporting precast floor beams. It should be noted that the reinforcement and minimum thickness requirements of 14.3 and 14.5.3 may be waived where structural analysis shows adequate strength and wall stability (14.2.7). This required condition may be satisfied by a design using the structural plain concrete provisions in Chapter 22.

11.10 SPECIAL SHEAR PROVISIONS FOR WALLS

For most low-rise buildings, horizontal shear forces acting in the plane of walls are small, and can usually be neglected in design. In-plane forces, however, become a design consideration in major structures where a limited number of walls resist the total lateral load, such as in high-rise buildings. Flexural strength must also be considered when in-plane loads are significant. Example 23.4 illustrates in-plane shear design of walls, including design for flexural strength.

DESIGN SUMMARY

A trial procedure for wall design is suggested: first assume a wall thickness h and a reinforcement ratio ρ , then check the trial wall for the applied loading conditions.

It is not within the scope of Part 23 to include design aids for a broad range of wall and loading conditions. The intent is to present examples of design options and aids. The designer can, with reasonable effort, produce

only to walls of solid rectangular cross-section. The empirical method is a simple design procedure for these limited cases, requiring only a single strength calculation to determine the design axial load strength of a wall.

Primary application of the Empirical Design Method is for relatively short walls spanning vertically, and subject to vertical loads only, such as those resulting from floor or roof reactions. Application becomes extremely limited when lateral loads need to be considered, because the "effective" load eccentricity is limited to $h/6$. Walls not falling in this category must be designed as compression members for axial load and flexure by the provisions of Chapter 10 (14.4).

When the eccentricity e of the "effective" load does not exceed $h/6$, the design is performed considering P_u as a concentric load. The factored axial load P_u must be less than the design axial load strength ϕP_{nw} computed by Eq. (14-1):

$$P_u \leq \phi P_{nw} \leq 0.55\phi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{kl_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

The single strength equation for ϕP_{nw} considers both load eccentricity and slenderness effects. The eccentricity factor 0.55 was originally selected to give strengths comparable with those given by Chapter 10 for members with axial load applied at an eccentricity of $h/6$. Figure 23-3 shows typical load-moment strength curves for 8-, 10-, and 12-in. walls with $f'_c = 4000$ psi and $f_y = 60,000$ psi.^{23.3} The curves yield eccentricity factors (ratios of strength under eccentric loading to that under concentric loading) of 0.562, 0.568, and 0.563 for the 8-, 10-, and 12-in. walls with $e = h/6$ and $\rho = 0.0015$.

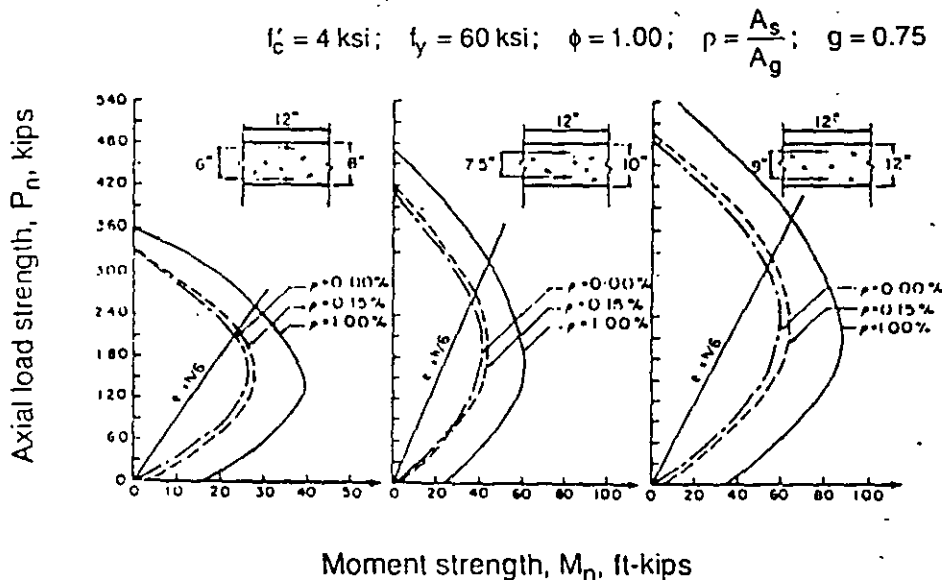


Figure 23-3 Typical Load-Moment Strength Curves for 8-, 10-, and 12-in. Walls

Use of Eq. (14-1) is further limited to the following design conditions:

1. Wall thickness h must not be less than $1/25$ times the supported length or height, whichever is shorter, nor less than 4 in. (14.5.3.1). Exterior basement walls and foundation walls must be at least 7-1/2 in. thick (14.5.3.2).

The ratio of $EI/E_c I_g$ is plotted as a function of eccentricity e/h for several values of β_d , with the reinforcement ratio ρ constant at 0.0015. Note that Code Eq. (10-13) assumes EI to be independent of e/h and appears to overestimate wall stiffness for higher load eccentricity. For walls designed by Chapter 10 with slenderness evaluation by 10.11, Eq. (1) is recommended in lieu of Code Eq. (10-13) for determining wall stiffness. Example 23.1 illustrates application of 10.11, using Eq. (1) for wall stiffness.

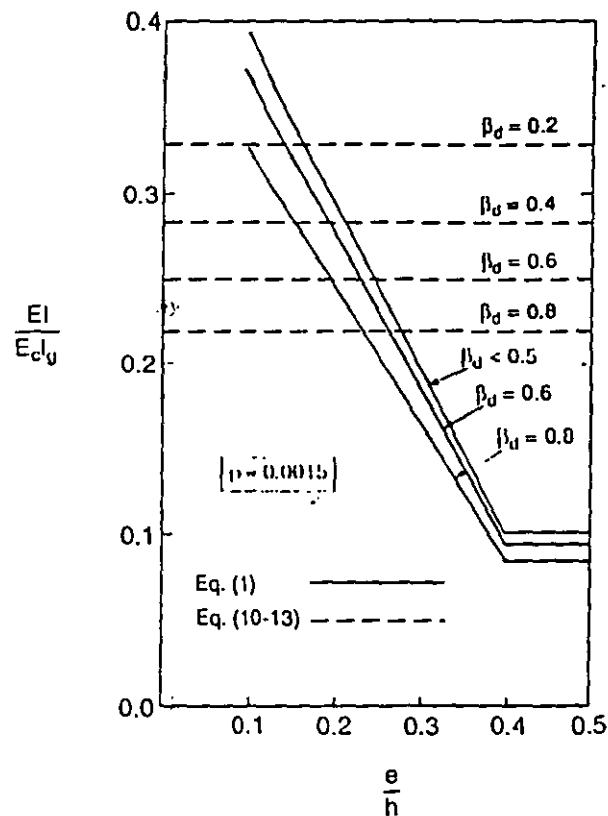


Figure 23-2 Stiffness EI of Walls

When wall slenderness exceeds the limit for application of the approximate slenderness evaluation method of 10.11 ($k\ell_u/h \geq 30$), a more detailed evaluation of wall slenderness effects is required, as defined in 10.10.1. The slender load-bearing concrete wall panels currently used in some building systems, especially in tilt-up wall construction, fall in this high slenderness category. The more detailed slenderness analysis should account for the influence of variable wall stiffness, the effects of deflections on the moments and forces, and the effects of load duration. Such an analysis is presented in PCA design aid EB074D *Tilt-up Load-Bearing Walls*.^{23.2} It presents load capacities of slender wall panels ($20 \leq k\ell_u/h \leq 50$) with thicknesses varying from 5-1/2 to 9-1/2 in. and having single or double layers of reinforcement. The design process involves the use of load capacity coefficient tables, which are simple to use, requiring only a minimum amount of calculations. A detailed description of how the design tables were developed is included in the publication. Example 23.2 illustrates application of EB074D.

14.5 EMPIRICAL DESIGN METHOD

The Empirical Design Method may be used for design of load-bearing walls if the resultant of all applicable loads falls within the middle one-third of the wall thickness (eccentricity $e \leq h/6$), and the thickness is at least the minimum prescribed in 14.5.3. Note that in addition to any eccentric axial loads, the effect of any lateral loads on the wall must be included to determine the "effective" eccentricity of the resultant load. The method applies

Shear forces must be considered in the design of walls. Section 14.2.3 requires the design for shear to be in accordance with 11.10, the special shear provisions for walls. The required shear reinforcement may exceed the minimum wall reinforcement given in 14.3.

The provisions of 15.8 specifically address force transfer between a wall and footing, with 15.8.2.2 requiring a minimum amount of reinforcement, not less than the minimum vertical reinforcement given in 14.3.2, to be provided across the interface between a wall and a supporting footing.

14.4 WALLS DESIGNED AS COMPRESSION MEMBERS

Where wall geometry and loading conditions do not satisfy the limitations of 14.5 (usually where lateral loads are present), walls must be designed as compression members by the strength design provisions in Chapter 10 for flexure and axial loads. Minimum reinforcement requirements of 14.3 apply to walls designed by strength design provisions of Chapter 10. The vertical wall reinforcement need not be enclosed by lateral ties (as for columns) if the conditions of 14.3.6 are satisfied. All other code provisions for compression members apply to walls designed by Chapter 10.

As with columns, the design of walls is usually difficult without the use of design aids. Wall design is further complicated by the fact that slenderness is a consideration in practically all cases. Two methods for slenderness consideration are specified in the code. A second-order analysis, which takes into account variable wall stiffness, as well as the effects of member curvature and lateral drift, duration of the loads, shrinkage and creep, and interaction with the supporting foundation, is specified in 10.10.1. In lieu of that procedure, the approximate evaluation of slenderness effects prescribed in 10.11 may be used.

It is important to note that Eqs. (10-12) and (10-13) for EI in the approximate slenderness method were not originally derived for members with a single layer of reinforcement.

For members with a single layer of reinforcement, the following expression for EI has been suggested by MacGregor^{23.1}

$$EI = \frac{F_c I_g}{\beta} \left(0.5 - \frac{e}{h} \right) \geq 0.1 \frac{F_c I_g}{\beta} \tag{1}$$

$$\leq 0.4 \frac{F_c I_g}{\beta}$$

where $\beta = 0.9 + (0.5\beta_d^2) - 12\rho \geq 1.0$

β_d = ratio of dead load to total load

ρ = ratio of area of vertical reinforcement to gross concrete area

For ACI 318-95, the definition of the creep effect factor β_d , included with Eqs. (10-12) and (10-13) for EI , now depends on the lateral stiffness of the structure. Walls have considerable stiffness in their own planes. Additionally, they are connected by a roof and/or floor slab. The structure which is created by these walls, therefore, is laterally stiff, i.e., lateral sway is negligible. According to 10.0, β_d for non-sway frames is the ratio of the maximum factored axial dead load to the total factored axial load. For consistency, the same sustained load ratio seems appropriate for the EI expressions for walls in Eq. (1).

Figure 23-2 shows the comparison of flexural stiffness (EI) by Code Eq. (10-13) and Eq. (1) in terms of $F_c I_g$.

Walls

UPDATE FOR THE '95 CODE

The code change affecting the design of walls is due to the revisions in the slenderness provisions of 10.10 to 10.13. Section 14.4 makes reference to these revised sections.

GENERAL CONSIDERATIONS

Section 14.2.2 allows the designer two options in designing walls: (1) walls may be designed as compression members using the strength design provisions for flexure and axial loads of Chapter 10 (Fig. 23-1(a)) or (2) they may be designed by the Empirical Design Method of 14.5 (Fig. 23-1(b)). The provisions of 14.2 and 14.3 apply to walls designed by either method. No minimum wall thicknesses are prescribed for walls designed as compression members (14.4).

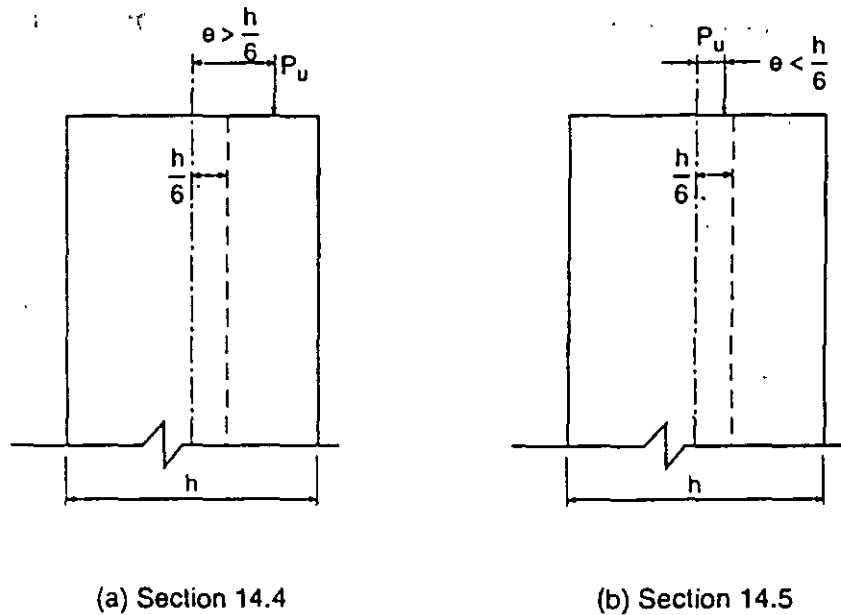


Figure 23-1 Design of Walls by ACI Code

Note that the Empirical Design Method applies to load bearing walls, and only to walls of solid rectangular cross-section. Minimum thicknesses are prescribed for walls designed by this method (14.5.3). Load bearing walls of nonrectangular cross-section, such as ribbed wall panels, must be designed by the provisions in 14.4. Cantilever retaining walls are designed by the flexural design provisions of Chapter 10 (see 14.1.2).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
FLEXO-COMPRESIÓN Y EFECTOS DE ESBELTEZ EN
COLUMNAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. VÍCTOR MANUEL PAVÓN RODRÍGUEZ
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

CURSO
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Flexo-Compresión y Efectos de Esbeltez en Columnas

Instructor: M. en I. Víctor M. Pavón R.

Septiembre del 2000

BIBLIOGRAFÍA PARA EL CURSO DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

1. Normas técnicas Complementarias al RC.D.F. Normas para la Construcción con Concreto.
2. Reglamento de Construcciones para el D.F.
3. Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural y Comentarios. ACI 318-95 y ACI 318R-95. Publicado por el IMCYC.
4. Diseño de Estructuras de Concreto Conforme al Reglamento ACI 318-89. Publicado por el IMCYC.
5. Notes on ACI-318-99. Building Code Requirements for Structural Concrete. Portland Cement Association, 2000.
6. James MacGregor. Reinforced Concrete. Mechanics and Design. Third Edition. Prentice Hall.

CONSIDERACIONES GENERALES

Esencialmente el diseño de columnas consiste en seleccionar una sección transversal y un refuerzo adecuado para que la columna sea capaz de soportar una combinación requerida de la carga axial factorada P_u y un momento factorado (primario) M_u , además de tomar en consideración la esbeltez de la columna (momentos secundarios).

La esbeltez de la columna se expresa en términos de su relación de esbeltez

$$\frac{kl_u}{r}$$

en la que:

k es un factor de la longitud efectiva, el cual depende de las restricciones laterales y rotacionales en los extremos de la columna,

l_u es la longitud entre los apoyos de dicha columna, y,

r es el radio de giro de la sección transversal de la misma columna.

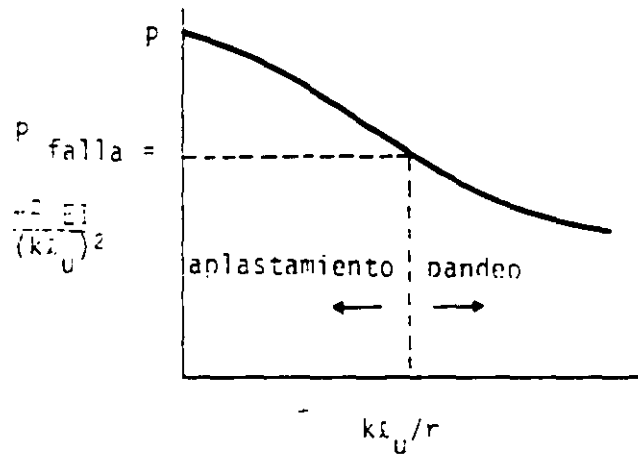
Para propósitos de diseño, el término columna corta se utiliza para designar una columna que tiene una resistencia igual a la calculada para su sección transversal, empleando las fuerzas y momentos obtenidos de un análisis para la combinación de flexión y carga axial.

La columna esbelta se define como la columna cuya resistencia se reduce a causa de las deformaciones de segundo orden (momentos secundarios).

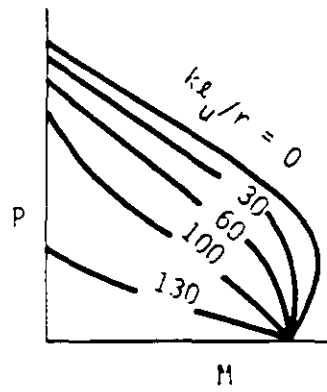
Mediante estas definiciones, puede considerarse que una columna con una relación de esbeltez dada, para un cierto conjunto de restricciones, puede diseñarse como columna corta, así como columna larga para otro tipo.

Mediante el uso de concretos y refuerzos con mayores resistencias, así como con los métodos de diseño más precisos, es posible obtener secciones transversales de menor tamaño, dando por resultado elementos estructurales más esbeltos.

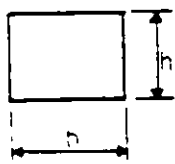
Por lo tanto, en el diseño de columnas, una consideración de gran importancia, es la de contar con procedimientos de diseño confiables y racionales para tomar en cuenta la esbeltez de estos elementos estructurales.



CURVA DE LA COLUMNA.



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS ESBELTAS.

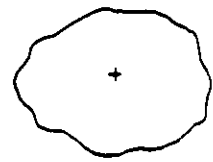


$$r = 0.3b$$

$$r = 0.3h$$

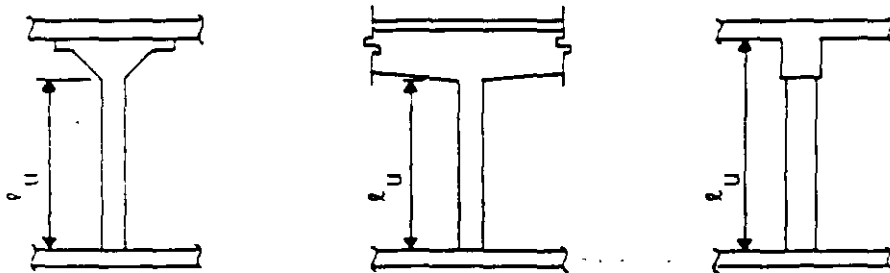


$$r = 0.25 \text{ dia.}$$



$$r = \sqrt{\frac{I_n}{A_n}}$$

RADIO DE GIRO (r)



LONGITUD NO SOPORTADA (l_u)

Ejemplo de aplicación del diseño de elementos cortos sujetos a flexo-compresión, en los cuales no es necesario tomar en consideración los efectos de esbeltez.

Diséñese una columna rectangular armada con estribos. Defínase el refuerzo vertical para una carga muerta de 160 ton y una carga viva de 110 ton. Los momentos de carga muerta y viva aplicados en el extremo superior de la columna tienen un valor de 13.00 y 10.00 ton-m, respectivamente, respecto al eje fuerte. Supóngase que los momentos en el extremo inferior son la mitad de los aplicados en el extremo superior. Respecto del eje débil los momentos son insignificantes.

La columna tiene una altura libre entre apoyos, de 2.30 m. en ambas direcciones, y respecto del eje fuerte se flexiona en curvatura doble, en tanto que respecto al eje débil lo hace en curvatura sencilla. Utilícese un concreto $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$ y un acero de refuerzo, con $f_s = 4,000 \text{ kg/cm}^2$. El marco del cual forma parte la columna se encuentra atesado (no experimenta ladeo).

El proceso de diseño se desarrolla de conformidad con las N.T.C. para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, del Reglamento de Construcciones del D.F.:

1. Las cargas para diseño valen:

$$P_u = 1.4(160 + 110) = 378.00 \text{ ton}$$

$$M_u = 1.4(13.00 + 10.00) = 32.2 \text{ ton-m}$$

R.C.D.F. Art. 194

2. Esbeltez de la columna. Sección de la misma

Verifíquese la esbeltez de la columna. Supóngase una columna con dimensiones de 35 por 60 cm.

La sección 1.3.2.b) de las NTC, establece que en miembros con extremos restringidos lateralmente (que no experimentan ladeo), pueden despreciarse los efectos de esbeltez cuando la relación entre la longitud efectiva y el radio de giro r de la sección

considerada, sea menor que $34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$. El cociente es negativo cuando el elemento

se flexiona en curvatura doble y positivo cuando lo hace en curvatura sencilla. M_1 es el ~~menor~~ ^{menor} de los momentos y M_2 es el ~~mayor~~ ^{mayor} de los que actúan en los extremos de la columna

El concepto de los efectos de esbeltez se tratará con mayor amplitud más adelante, en una sesión especial sobre el tema

a. Esbeltez respecto al eje débil (35 cm)

$k = 1.0$ por tratarse de un elemento a compresión que no experimenta ladoeo (ACI 10.12.1)

$$r = 0.30(35) = 10.5 \text{ cm}$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{10.5} = 21.90$$

Con momentos respecto al eje débil insignificantes. supóngase $M_1 / M_2 = 1.0$
Para considerar la esbeltez:

$$\frac{kl_u}{r} < 34 - 12(1.0) = 22 \text{ en curvatura sencilla}$$

Por lo tanto: respecto al eje débil no es necesario tomar en cuenta la esbeltez

b. Esbeltez respecto al eje fuerte (60 cm)

$$k = 1.0$$

$$r = 0.30(60) = 18$$

$$M_1 / M_2 = -0.5$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{18} = 12.78 < 34 - 12(-0.5) = 40$$

Por lo tanto: pueden despreciarse los efectos de esbeltez respecto al eje fuerte

3. Cálculo del acero de refuerzo

a. Porcentaje de refuerzo mínimo y máximo

En la sección 4.22 de las NTC para concreto, se establece que el porcentaje de refuerzo no debe ser menor a $20/f_c$ ni mayor al 6 por ciento. El número mínimo de varillas es de 6 en columnas circulares y de 4 en columnas cuadradas o rectangulares.

b. Esfuerzos y módulo de elasticidad de los materiales para el diseño

Para el diseño se utiliza.

$$f_c^* = 0.8 f_c$$

Ec. 1.7 de la sección 1.4.1.b de las NTC

Para usos estructurales, el concreto clase 1 deberá tener una resistencia mínima:

$$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

sección 1.4.1.b de las NTC

El módulo de elasticidad del concreto clase 1, se estipula igual a $14,000\sqrt{f'_c}$ (1.4.1.d de las NTC), en tanto que el módulo de elasticidad del acero es casi siempre igual a:

$$E_s = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se emplea la resistencia del acero en su punto de fluencia:

$$f_s = 4.000 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Sección 1.4.2 de las NTC})$$

c. Factores de reducción de la resistencia

De conformidad con la sección 1.6 de las NTC, los factores de reducción de la resistencia que se deben emplear, son:

- Para flexión: $F_R = 0.9$
- Para cortante y torsión: $F_R = 0.8$

Para flexocompresión, el factor de reducción de la resistencia vale 0.8, si el núcleo está confinado por un zuncho, y 0.7 si se colocan estribos y la falla de la columna es en compresión.

4. Utilización del diagrama de interacción del D.F.

Supóngase que se utilizan varillas del #10 (1.25 pulgadas)

a. Cálculo del parámetro d/h . Para el peralte de 60 cm.

$$d = \text{peralte total} - \text{recubrimiento libre} - \text{el diámetro del estribo} - \frac{1}{2} \text{ del diámetro de la varilla} = 60 - 1.5 - 0.95 - 1.59 = 55.96 \text{ cm}$$

El cociente $d/h = 55.96/60 = 0.93$. Se utiliza el diagrama de interacción para $d/h = 0.95$

5. Diagrama de interacción

Hay varias formas de ingresar al diagrama de interacción. Una de ellas es la de calcular los valores de:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} ; \text{ y } R = \frac{M_u}{F_R h^2 f'_c}$$

expresiones en las cuales b y h son los lados menor y mayor de la columna; para columnas con refuerzo transversal de estribos, el factor de reducción $F_R = 0.7$; y

$$f'_c = 0.85(0.8)f'_c = 0.85(0.8)300 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

Reemplazando valores, se obtiene que $K = 1.26$ y $R = 0.18$, en cuya intersección se encuentra $q = 0.71$.

Ahora,

$$q = p \frac{f_y}{f_c}; \text{ y } p = \frac{A_s}{bh};$$

donde A_s es el área de acero de la sección de concreto.

Reemplazando: si
$$q = p \frac{f_y}{f_c} = 0.71$$

entonces:
$$p = 0.71 \frac{204}{4,000} = 0.0362 = 3.62\%$$

Lo anterior significa que el área de acero necesaria es el 3.62% del área del concreto:

$$A_s = p(bh) = 0.0362(35)60 = 76.04 \text{ cm}^2$$

Ocho varillas del #10 (1¼ de pulgada) tienen un área de 63.52 cm², en tanto que 10 varillas del No. 10, tienen un área de 79.40 cm². Se requieren, por consiguiente, 10 varillas del #10.

Otro procedimiento para hacer uso del diagrama de interacción, es el de calcular el parámetro e/h , donde e , es la excentricidad de la aplicación de la carga, la cual se obtiene, dividiendo el momento M_u entre la carga axial P_u . En efecto:

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u h} = \frac{34.2(10)^5}{378(10)^3 60} = 0.142$$

En la intersección de $\frac{e}{h} = 0.14$ con $K = 1.26$, se lee nuevamente $q = 0.71$, y descendiendo hasta la abscisa R se encuentra el valor 0.18 de ésta, obteniéndose los mismo valores que ya se habían determinado previamente. Con este valor de R , puede calcularse M_u y compararlo con el propuesto para el diseño. En caso de que este valor calculado sea mayor que el momento último de diseño, se verifica que el área de acero calculada resulta correcta. De otra forma, habrá que incrementar la cantidad de acero o el tamaño de la sección de concreto, y efectuar una nueva secuencia de diseño con los nuevos valores.

6. Porcentaje de refuerzo

El porcentaje efectivo de acero suministrado, vale:

$$p = \frac{A_s}{bh} = \frac{79.4}{35(60)} = 3.79\% > 3.62\% \text{ requerido}$$

a. Refuerzo máximo y mínimo

El porcentaje mínimo admisible de refuerzo es:

$$p_{\min} = \frac{20}{f_y} = \frac{20}{4,000} = 0.005 = 0.5\% < 3.62\% \therefore \text{correcto}$$

Este último porcentaje resulta un tanto alto para los porcentajes de refuerzo que usualmente se utilizan en la práctica, pero aún así es menor al máximo permisible del 6%. El número de 10 varillas colocadas es, por supuesto, mayor al mínimo de 4 necesarias en una sección transversal cuadrada o rectangular.

b. Comportamiento de la columna según las cargas aplicadas y la sección dada

Por otro lado, de conformidad con la zona donde se ubica la intersección de K con los demás parámetros calculados, incluyendo R , es factible percatarse de que la falla de la columna tendría lugar en la zona de compresión, por lo cual, el valor de 0.7 adoptado para el factor de reducción F_R , es correcto.

7. Refuerzo transversal

a. Separación de los estribos

La sección 4.2.3. de las N.T.C. señala que la separación de los estribos no será mayor a:

- $\frac{850}{\sqrt{f_c}}$ veces el diámetro de la varilla longitudinal;
- 48 veces el diámetro de la varilla del estribo; ni
- la mitad de la menor dimensión de la columna

Efectuando operaciones:

$$\begin{array}{rcl} \frac{850}{\sqrt{4,000}} & = 13.44; \times 3.81 \text{ cm} & = 51.21 \text{ cm;} \\ 48(0.95) & & = 45.60 \text{ cm;} \\ 0.5(35) & & = 17.5 \text{ cm} \quad \underline{\text{rige}} \end{array}$$

Deberá entonces colocarse estribos del #3 @ 17.5 cm de separación

b. Separación en la zona de las juntas

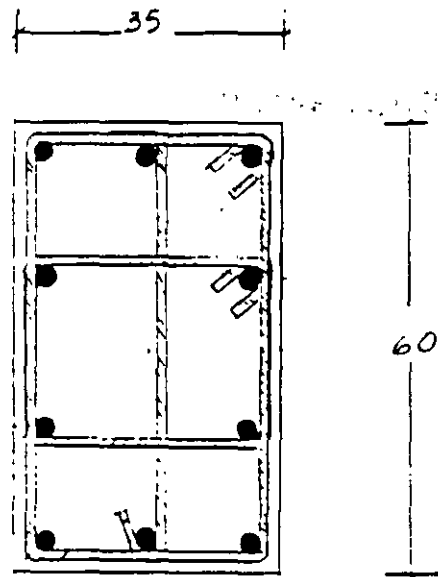
La separación máxima se debe reducir a la mitad de la antes indicada, en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de columna, 1/6 de la altura libre de ésta, ni que 60 cm, arriba y debajo de cada unión con traveses y losas, medida a partir del respectivo plano de intersección. En este caso:

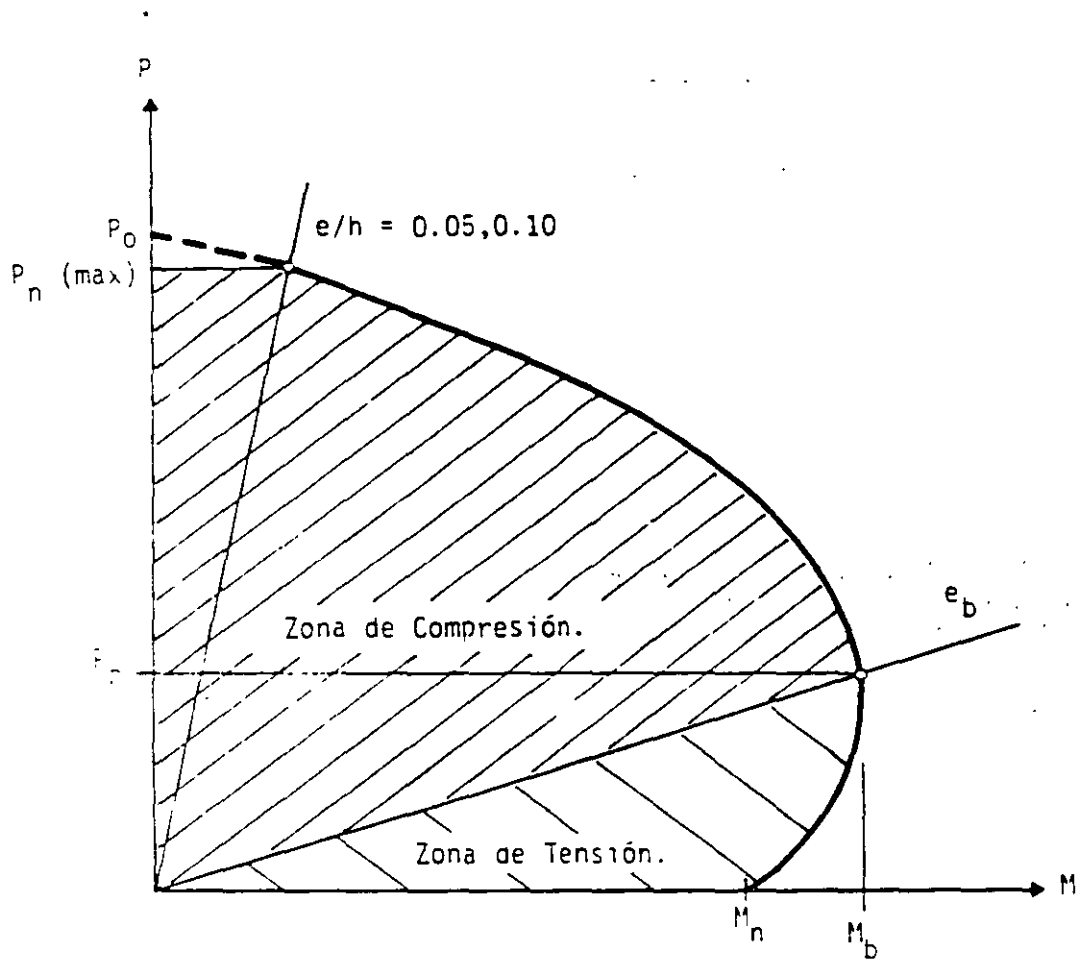
- La mayor longitud transversal de la columna es de 60 cm
- $1/6$ de la altura libre = 38 cm
- 60 cm

Por consiguiente, la dimensión que rige es la de 60 cm

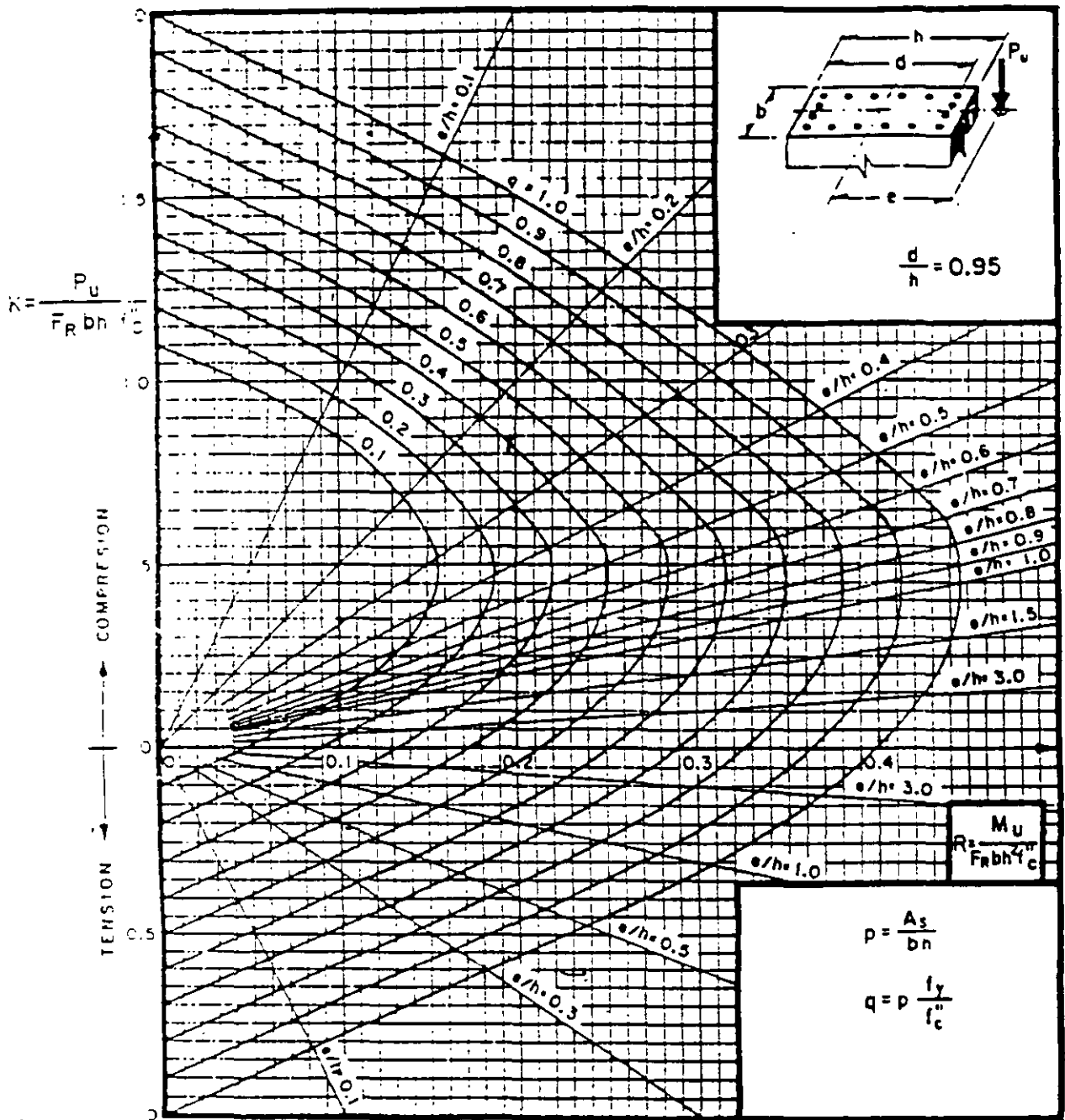
c. Detalle de la colocación de los estribos

Los estribos deben disponerse de tal manera que cada varilla longitudinal de esquina y una de cada dos consecutivas de la periferia tengan un soporte lateral suministrado por el doblé de un estribo con un ángulo interno no mayor de 135 grados. Además, ninguna varilla sin soporte lateral debe distar más de 15 cm de una varilla soportada lateralmente.





FORMA GENERAL DE LA INTERACCION DE LA RESISTENCIA CARGA - MOMENTO.



A_s = Area total de refuerzo

$f_c'' = 0.85 f_c'$; si $f_c' \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c'}{1250}) f_c'$; si $f_c' > 250 \text{ kg/cm}^2$

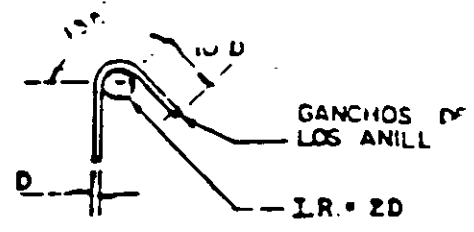
M_u = Momento flexionante de diseño

P_u = Carga axial de diseño

Fig 8

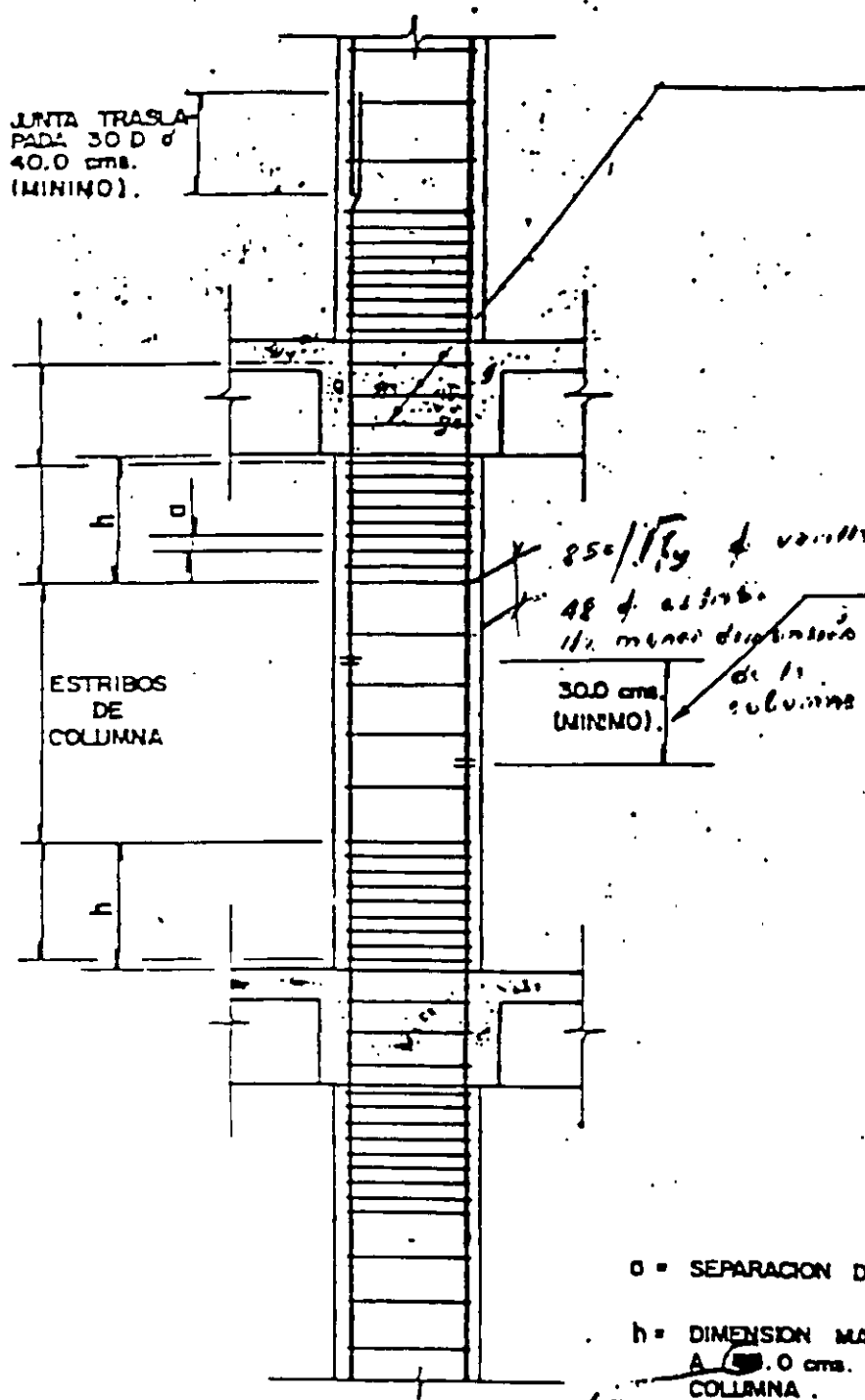


GANCHOS SUPLEMENTARIOS



GANCHOS DE LOS ANILLOS

I.R. = 2D



JUNTA TRASLAPA
PARA 30 D o
40.0 cms.
(MINIMO).

ESTRIBOS DE COLUMNA

85% de longitud de varilla más delgado
48% de estribo
1/2 menor dimensión de la columna
30.0 cms (MINIMO).

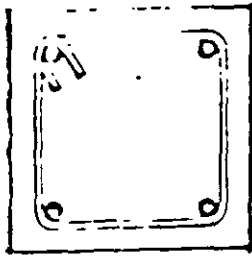
ANILLOS DE JUNTAS CON SEPARACION "2s" CUANDO EXISTAN VIGAS EN LOS 4 LADOS DE LA COLUMNA. PARA OTRAS CONDICIONES, PONER ANILLOS CON SEPARACION "s".

CUANDO LA CONTINUIDAD DE LA VARILLA SE LOGRA MEDIANTE SOLDADURA CON POSITIVOS MECANICOS, DEBERA TRASLAPARSE A CUALQUIER NIVEL NO MAS DE UN CUARTO DE LAS VARILLAS, Y LA DISTANCIA ENTRE LOS NIVELES DE TRASLAPE DE VARILLAS ADYACENTES, NO DEBERA SER MENOR A 30.0 cms.

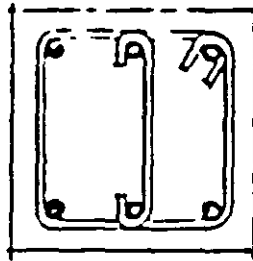
s = SEPARACION DE LOS ANILLOS Y GANCHOS SUPLEMENTARIOS

h = DIMENSION MAXIMA DE LA COLUMNA, PERO NO MENOR A 30.0 cms. O UN SEXTO DE LA ALTURA LIBRE DE LA COLUMNA.

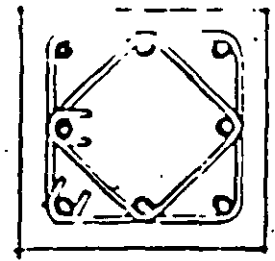
DETALLES TIPICOS DE COLUMNAS RECTANGULARES DE ESTRIBOS PARA ESTRUCTURAS DUCTILES QUE RESISTEN MOMENTOS



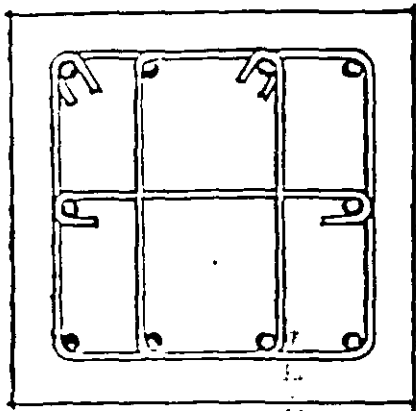
4 varillas



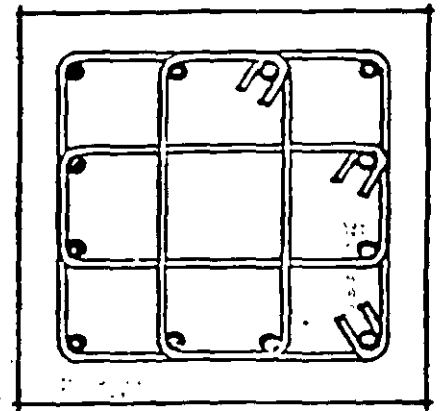
6 varillas



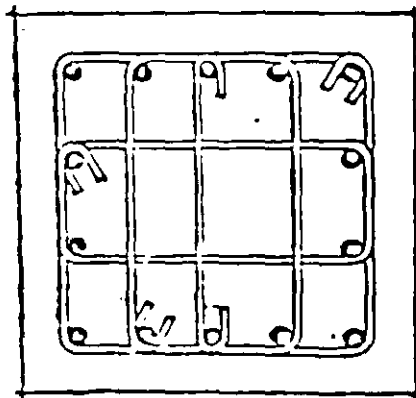
8 varillas



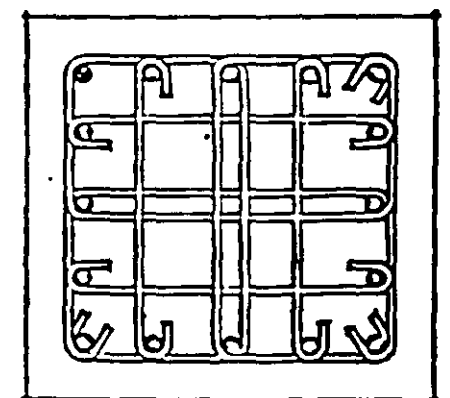
10 varillas



12 varillas



14 varillas



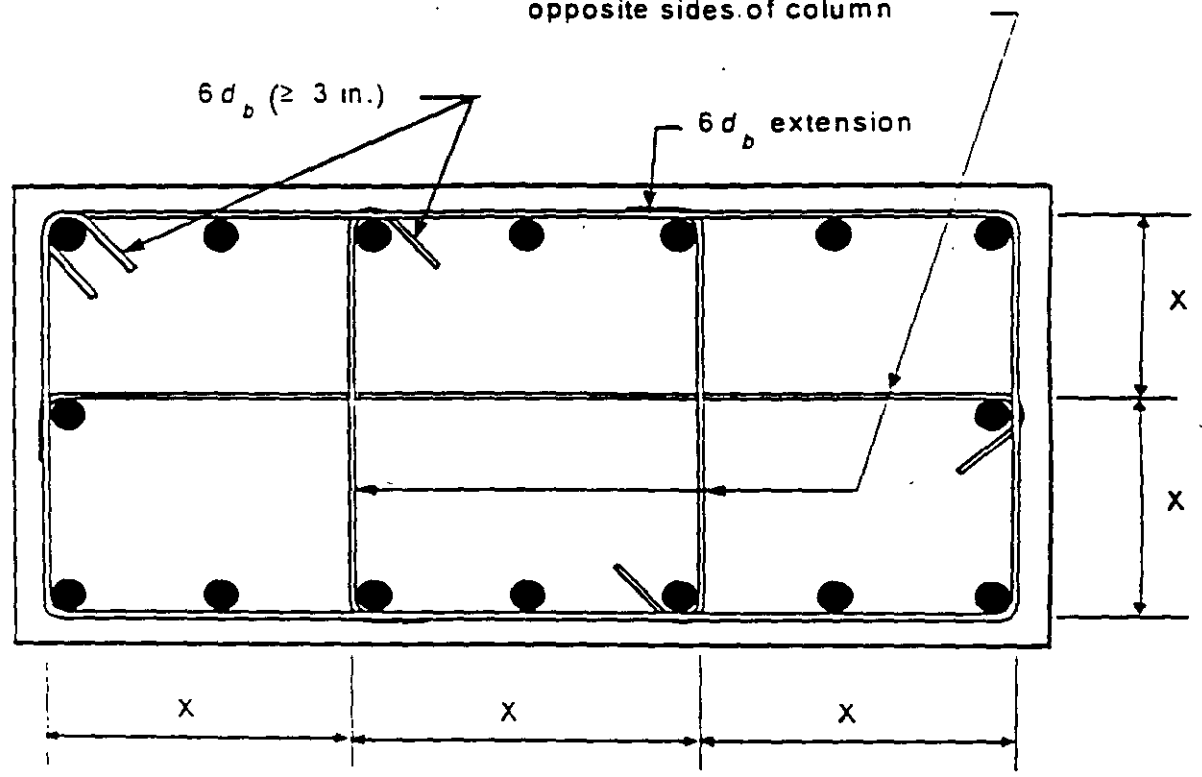
16 varillas

TODAS LAS VARILLAS DEBERAN LLEVAR ESTRIBOS O ANILLOS CUANDO MENOS DEL No. 2, PARA RESTRINGIR EL PANDEO. DICHSO ESTRIBOS DEBERAN ESPACIARSE NO MAS DE 16 ϕ DE LA VARILLA LONGITUDINAL, 48 ϕ DE LA VARILLA DEL ESTRIBO, O LA MENOR DIMENSION DE LA COLUMNA. ADENAS LA DISPOSICION DE LOS ESTRIBOS SERA DE TAL FORMA QUE CADA VARILLA LONGITUDINAL TENGA UN SOPORTE LATERAL DADO POR EL DOBLEZ DE CUALQUIERA DE LOS ANILLOS CON UN ANGULO INTERNO MENOR O IGUAL A 136°. ESTAS SUGERENCIAS RIGEN TANTO PARA EL USO DE PAQUETES DE VARILLAS COMO PARA EL REFUERZO NORMAL.

Fig. A-20

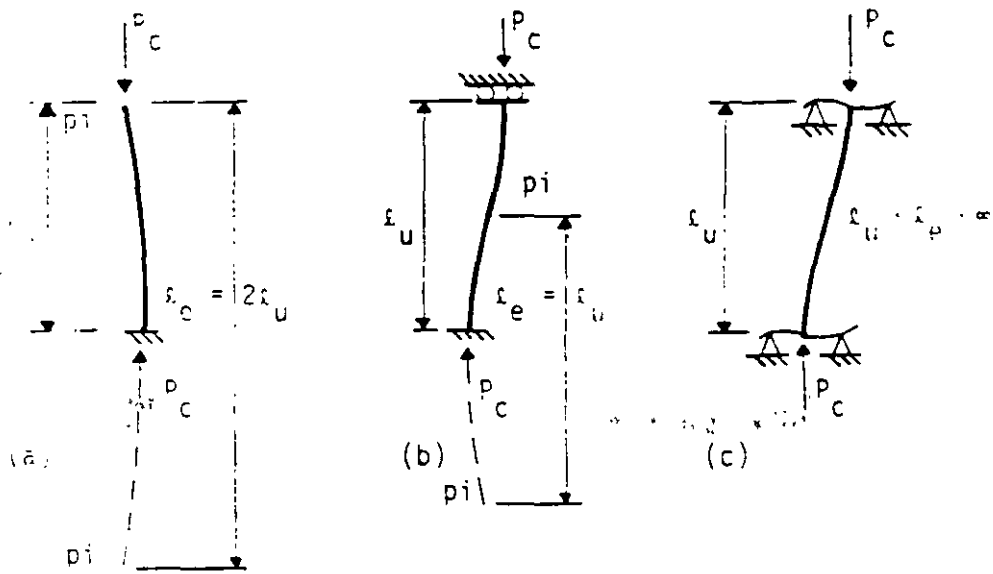
TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL EN COLUMNAS

Consecutive cross-ties
engaging the same
longitudinal bar shall have
their 90-deg hooks on
opposite sides of column

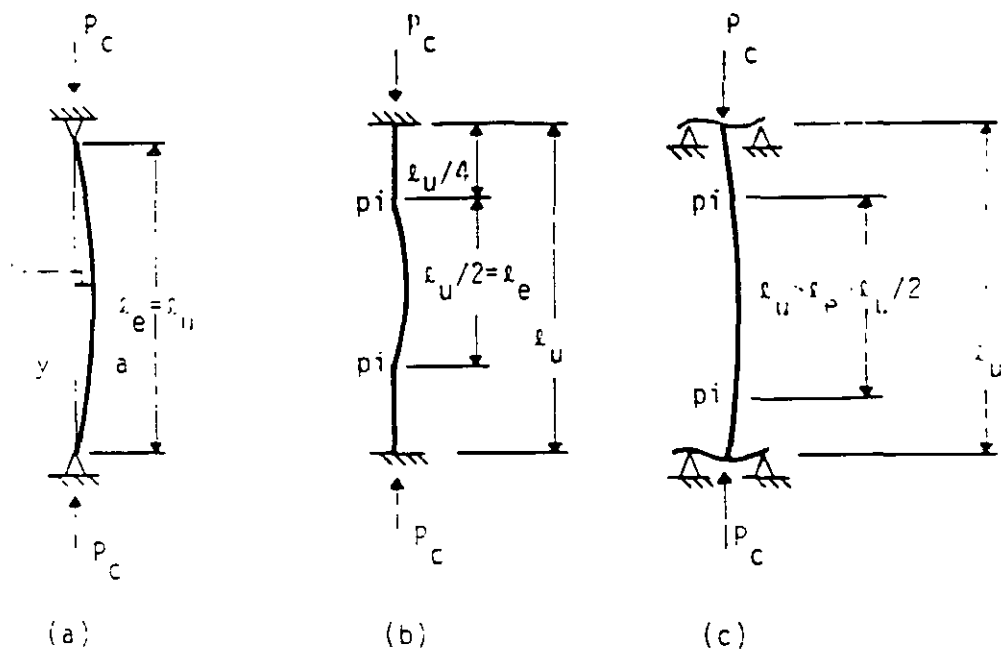


Note X shall not exceed 14 inches.
 h_x = maximum value of X on all column faces.

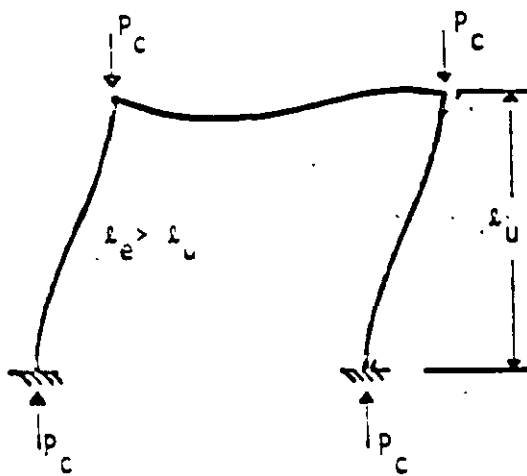
New Fig. R21.4.4 -- Example of transverse reinforcement in columns



LONGITUD EFECTIVA l_e (TRASLACION LATERAL PERMITIDA)



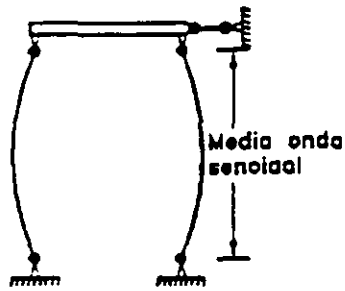
LONGITUD EFECTIVA l_e (TRASLACION LATERAL IMPEDIDA)



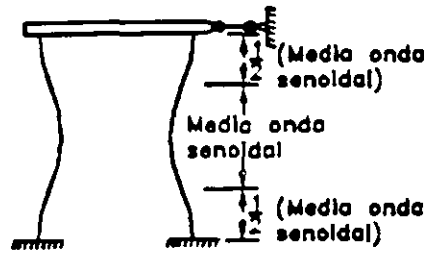
MARCO RIGIDO (TRASLACION LATERAL PERMITIDA)

En resumen, se tiene que:

- a) En las columnas que están contraventeadas (sin ladeo), la longitud efectiva l_e se encuentra entre $\frac{l_u}{2}$ y l_u , donde l_u es la longitud no soportada entre los apoyos de la columna;
- b) En las columnas que no están contraventeadas, la longitud efectiva l_e es siempre mayor que la longitud real de la columna l_u , y puede resultar $2l_u$ o más. En tal caso, un valor de k menor que 1.2 no se considera razonable
- c) El uso de los nomogramas anexos, permite una determinación gráfica de los factores de longitud efectiva para los marcos atiesados (sin ladeo), o no atiesados (con ladeo), respectivamente
- d) Si ambos extremos están empotrados o casi, entonces $\Psi = 0$, y $k = 0.5$.
- e) Si ambos extremos de una columna no atiesada (con ladeo) tiene una mínima rigidez a la rotación, o se aproxima a $\Psi = \infty$, entonces $k = \infty$.
- f) Si ambos extremos se aproximan al empotramiento perfecto, entonces $\Psi = 0$, y $k = 1$.

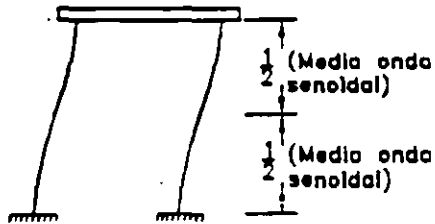


(a) $n = 1, kl = l$

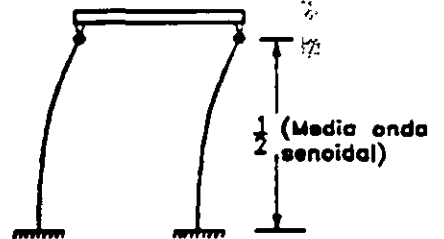


(b) $n = 2, kl = \frac{1}{2}l$

Marcos contraventeados contra el lado



(c) $n = 1, kl = l$

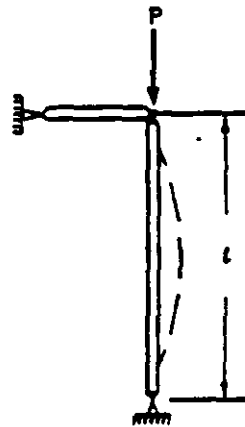
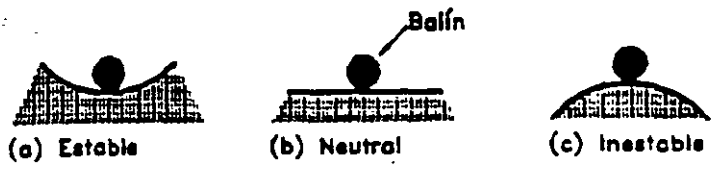


(d) $n = \frac{1}{2}, kl = 2l$

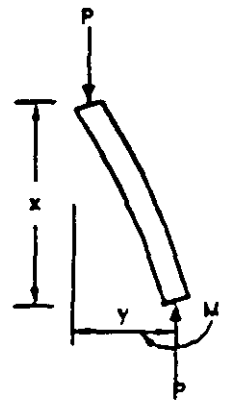
Longitudes efectivas de columnas idealizadas

Marcos con libertad para experimentar lado

Estados de equilibrio

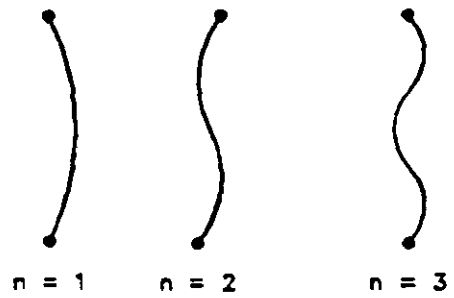


(a) Columna



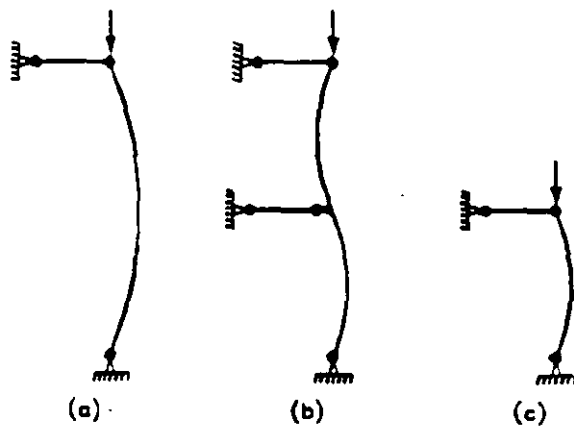
(b) Diagrama de Cuerpo Libre

Pandeo de una columna biarticulada

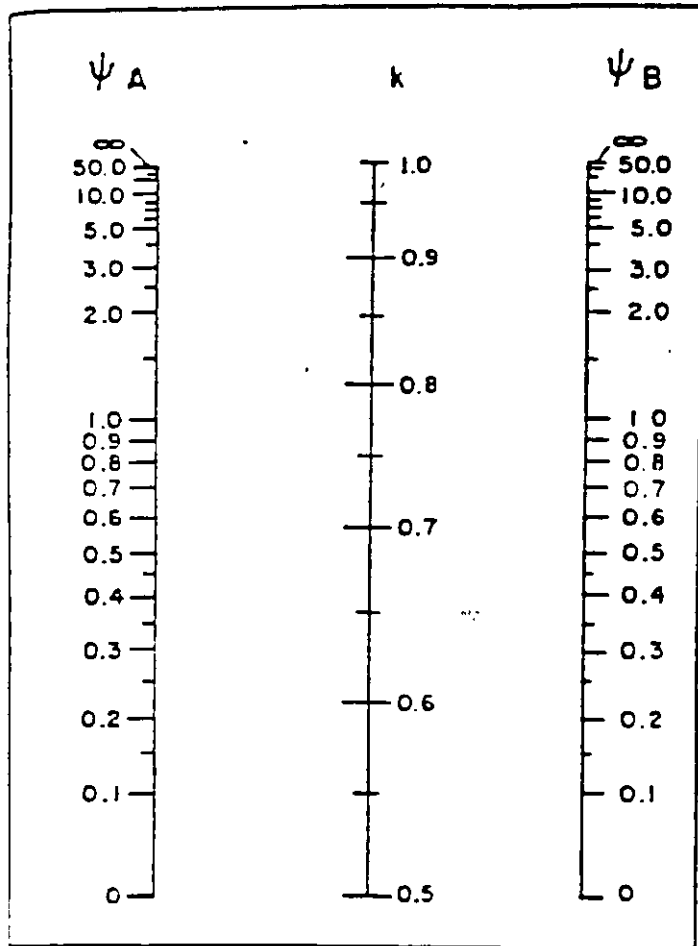


(c) Número de medias ondas senoidales

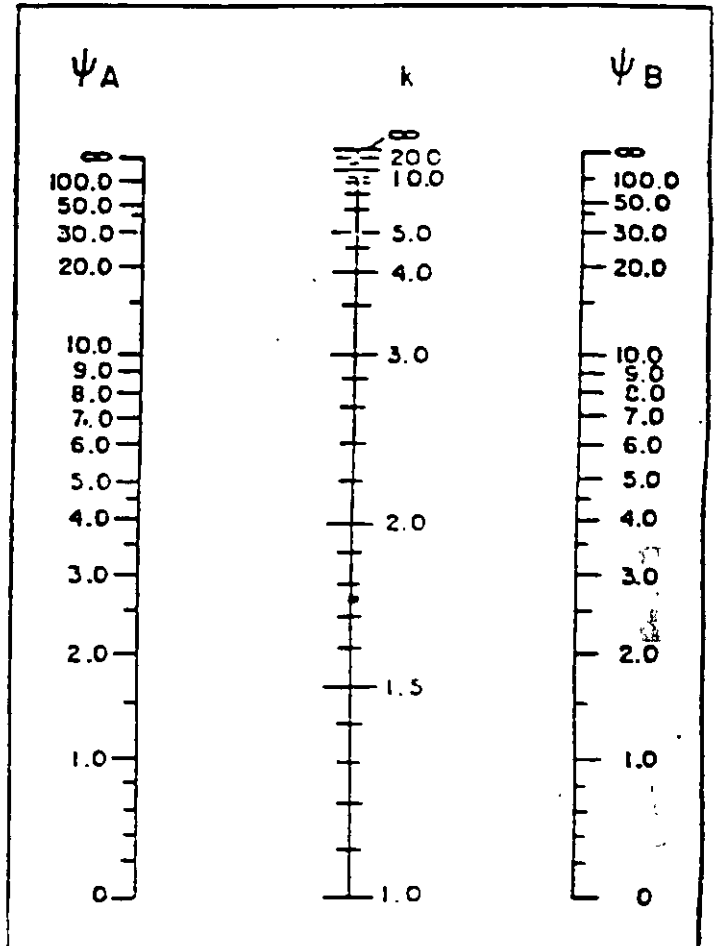
Longitud efectiva de columnas



(a)



(b)



ψ = cociente de $\sum(I/L)$ de las columnas, entre $\sum(I/L)$ de los miembros de flexión que llegan a un extremo de una columna, en el plano considerado

$H' = kH$

A y B son los extremos de la columna

Fig 11. Nomogramas para determinar longitudes efectivas, H' , de miembros a flexocompresión

6 Lu (ACS)

EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS, DE CONFORMIDAD CON EL CAPÍTULO 10 DE ACI 318-99

10.10. Efectos de esbeltez en los elementos a compresión

En 1995, el reglamento se modificó para especificar que en lo sucesivo los efectos de esbeltez se tomen en consideración por medio de un análisis de 2o. orden (10.10.1). Si se toma en cuenta que los procedimientos de computación y muchos programas existentes son ahora capaces de realizar análisis de 2o. orden, se justifica esta disposición del ACI 318-95, la cual continúa vigente en 1999.

Como una alternativa a lo establecido en 10.10.1, tal y como ha ocurrido en versiones previas del reglamento, se permiten, en 10.12 y 10.13, los métodos aproximados que determinan un momento de diseño amplificado mediante un factor δ , para tomar en cuenta la esbeltez del elemento en consideración.

En la presente revisión del reglamento, se establece en forma más explícita que en las versiones anteriores, la diferencia entre los marcos no contraventeados, (que ahora se les llama "con ladeo"), de los contraventeados, (que ahora se les llama "sin ladeo"). En ambos casos se especifican límites para los efectos de esbeltez.

Se establecen límites inferiores para la esbeltez, abajo de los cuales pueden despreciarse los momentos de segundo orden y sólo deberán considerarse las cargas axiales y los momentos de primer orden para el diseño como columnas "cortas."

Cuando se tienen relaciones de esbeltez moderadas, es permisible la determinación de los momentos amplificados mediante los procedimientos aproximados que se mencionan en 10.12 y 10.13.

En las columnas con relaciones de esbeltez altas, se requiere un análisis de segundo orden que resulte más preciso (sección 10.11.5) y que tome en cuenta la no linealidad del material y el agrietamiento, los efectos de la curvatura del elemento, la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, la contracción y la fluencia (flujo plástico), así como la interacción con la cimentación. Los límites que se establecen en 10.12.2 y 10.13.2 para marcos, sin ladeo y con ladeo, respectivamente, se resumen a continuación:

Marco con ladeo (sin contraventear)		Marco sin ladeo (contraventeado)
si $kl_u/r < 22$ ⇒	Se desprecia la esbeltez	si $kl_u/r \leq 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $22 \leq kl_u/r \leq 100$ ⇒	Metodos aproximados	si $100 \geq kl_u/r > 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $kl_u/r > 100$ ⇒	Análisis P-Δ	si $kl_u/r > 100$ ⇐

Donde:

M_1 y M_2 son respectivamente, el menor y el mayor de los momentos factorados en los extremos de la columna. M_1 es positivo si el elemento se flexiona en curvatura sencilla y negativo si lo hace en curvatura doble; en tanto que M_2 siempre será positivo.

k es el factor que determina la longitud efectiva del elemento en flexo-compresión. El factor k se determina de conformidad con 10.12, calculando las expresiones que se presentan en R10.12, o por medio de los nomogramas de Jackson y Moreland, que permiten calcular dicho valor de k , para columnas de sección constante en un marco

r es el radio de giro de la sección del elemento en flexo-compresión

l_u es la longitud fuera de los apoyos, del elemento en flexo-compresión

10.10.1 Excepto con lo permitido en 10.10.2, el diseño de los elementos a compresión, las vigas de restricción y otros elementos de apoyo, se basará en las fuerzas y momentos factorados a partir de un análisis de segundo orden, considerando la no linealidad y el agrietamiento del material, así como los efectos de la curvatura del elemento y la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, contracción y flujo plástico, y la interacción con la cimentación. Las dimensiones de la sección transversal de cada elemento que se use en el análisis estarán dentro del 10 por ciento de las dimensiones de los elementos mostrados en los planos de diseño, o deberá repetirse el análisis proponiéndose nuevas secciones de los elementos.

Comentario: Las disposiciones de la sección 10.10.1 para los efectos de esbeltez en los elementos a compresión se revisaron en 1995, para reconocer el uso de los análisis de segundo orden y para mejorar la distinción entre los marcos con ladeo y sin ladeo.

Se aclara el uso de los marcos no contraventados que experimentan ladeo y los marcos contraventados que no experimentan ladeo.

10.11. Momentos amplificados

10.11.1 Las cargas axiales factoradas P_u , los momentos factorados M_1 y M_2 en los extremos de las columnas y cuando se requieran, las deflexiones laterales relativas Δ_o en el entrepiso, se calcularán utilizando un análisis elástico de primer orden donde las propiedades de la secciones se determinan tomando en cuenta la influencia de las cargas axiales, la presencia de las regiones agrietadas a lo largo del miembro, así como los efectos de la duración de las cargas. En forma alternativa se permitirá el uso de las siguientes propiedades para los elementos de la estructura:

a) El módulo de elasticidad	de la sección 8.5.1: para concreto de peso normal $E_c = 15000\sqrt{f_c}$
b) Momentos de inercia:	
Vigas	0.35 I _g
Columnas	0.70 I _g
Muros - sin agrietar	0.70 I _g
agrietados	0.35 I _g
Placas y losas planas	0.25 I _g
c) Area	1.0 A _g

Los momentos de inercia se dividirán por $(1 + \beta_u)$, donde β_u :

a) Para marcos sin ladeo:

$$\beta = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

b) Para marcos con ladeo, excepto a lo requerido en c):

$$\beta_u = \frac{\text{cortante sostenido máximo factorado en un entrepiso}}{\text{cortante máximo factorado en ese entrepiso}}$$

c) en la verificación de la estabilidad de marcos con ladeo llevado a cabo de conformidad con 10.13.6:

$$\beta_u = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

10.11.4 Los marcos sin y con ladeo

En las estructuras reales no existen las condiciones perfectas "con ladeo" o "sin ladeo." Si mediante una inspección no es posible determinar con precisión si el marco está o no contraventeado, las secciones 10.11.4.1 y 10.11.4.2 proporcionan dos formas para determinar la condición del marco. De conformidad con 10.11.4.1, una columna que forma parte del marco se considera contraventeada (sin ladeo), si los momentos en los extremos de ella, debidos a los efectos de segundo orden, no sobrepasan el 5 por ciento de los correspondientes momentos de primer orden. De acuerdo con 10.11.4.2, se puede suponer que un entrepiso del marco no experimenta ladeo, si:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_u}{V_u l_c} \leq 0.05 \quad \text{Ec. (10-7)}$$

en la que:

Q	=	índice de estabilidad en un entrepiso
$\sum P_u$	=	carga vertical factorada total en el entrepiso
V_u	=	cortante total en el entrepiso

Δ_n = deflexión relativa de primer orden entre los extremos superior e inferior del entrepiso, debida a V_u

l_c = longitud de la columna, medida centro a centro entre las juntas del marco

10.12.2. En los marcos sin ladeo se permitirá despreciar los efectos de esbeltez para los elementos en compresión que satisfagan:

$$\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12(M_1/M_2) \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde el término $[34 - 12(M_1/M_2)]$ no se tomará mayor a 40. El término M_1/M_2 es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla, y negativo si se flexiona en curvatura doble.

10.12.3. Los elementos en compresión se diseñarán para la carga axial factorada P_u y el momento M_c amplificado por los efectos de la curvatura, como sigue:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-9)}$$

en la que:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec. (10-10)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

El se tomará igual a:

$$EI = \frac{(0.2E_c I_g + E_s I_{sc})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$\text{ó} \quad EI = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-13)}$$

10.12.3.1 En los elementos sin cargas transversales entre los apoyos, C_m se tomará como

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad \text{Ec. (10-14)}$$

donde M_1/M_2 es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla. En los miembros con cargas transversales entre los apoyos, C_m se tomará igual a 1.0.

10.12.3.2. El momento factorado M_2 de la ec. (10-9) no se tomará menor a

$$M_{2,min} = P_u(0.6 + 0.012h) \quad \text{Ec. (10-15)}$$

separadamente alrededor de cada uno de los ejes, donde 0.6 y h están en centímetros. En los elementos en los que $M_{2,\min}$ excede M_2 , el valor de C_m de la ec. (10-14) se tomará, ya sea, igual a 1.0, o se basará en el cociente de los momentos calculados M_1 y M_2 .

10.13. Amplificación de momentos — marcos con ladeo

El diseño por esbeltez de los elementos con ladeo se revisó en el Reglamento de 1995. El procedimiento revisado consiste de tres pasos:

1) Se calculan los momentos amplificados $\delta_s M_s$. Esto puede llevarse a cabo de tres maneras diferentes:

Primero, se podrá utilizar un análisis elástico de segundo orden del marco (10.13.4.1).

Segundo, podrá utilizarse una aproximación de dicho análisis (10.13.4.2).

La tercera alternativa es la de utilizar el amplificador de ladeo δ_s de las ediciones anteriores del reglamento (10.3.4.3).

2) Los momentos amplificados de ladeo $\delta_s M_s$ se suman al momento no amplificado sin ladeo M_{ns} en cada extremo de cada una de las columnas (10.13.3). Los momentos sin ladeo se podrán calcular utilizando un análisis elástico de primer orden.

10.13.1 En los elementos a compresión no contraventeados contra el ladeo, el factor k de longitud efectiva se determinará utilizando E e I de conformidad con 10.11.1 y será mayor que 1.0.

10.13.2 En los elementos a compresión que no estén contraventeados contra ladeo, los efectos de la esbeltez se despreciarán si kl_u/r es menor que 22.

10.13.3 Los momentos M_1 y M_2 en los extremos del elemento en compresión se tomarán como

$$M_1 = M_{1ns} - \delta_s M_{1s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

$$M_2 = M_{2ns} - \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec. (10-17)}$$

donde, $\delta_s M_{1s}$ y $\delta_s M_{2s}$, se calcularán de conformidad con 10.13.4.

10.13.4 Los momentos de ladeo amplificados $\delta_s M_s$ se tomarán como los momentos en los extremos de la columna, calculados utilizando un análisis elástico de segundo orden, basado en la rigidez del miembro dada en 10.11.1.

10.13.4.2. En forma alternativa se permitirá calcular $\delta_s M_s$ como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_c}{1-Q} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-18)}$$

Si δ_s calculado de esta manera excede 1.5, $\delta_s M_s$ se calculará utilizando 10.13.4.1 o 10.13.4.3.

10.13.4.3. Alternativamente se permitirá calcular los momentos amplificados de ladoo $\delta_s M_s$ como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-19)}$$

donde $\sum P_u$ es la suma de todas las cargas verticales en el entrepiso y $\sum P_c$ es la suma de todas las cargas de las columnas que resisten ladoo en el entrepiso. P_c se calcula utilizando la ecuación (10-11), donde k se obtiene con 10.13.1 y EI de la ecuación (10-12) o la (10-13).

10.13.5. Si en un elemento a compresión:

$$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}} \quad \text{Ec. (10-20)}$$

el momento máximo ocurrirá entre los extremos de las columnas y en ese caso, M_2 se deberá amplificar mediante el amplificador para marcos sin ladoo de la ecuación (10-10), de la siguiente manera:

$$M_c = \delta_m M_2 = \left(\frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \right) (M_{2,1} + \delta_s M_{2,2}) \quad \text{Ec. (10-9)}$$

Entonces, la columna se diseñará para la carga axial factorada P_u y el momento M_c calculado utilizando 10.12.3, en que M_1 y M_2 se calculan de conformidad con 10.13.3, β_d como se define para la combinación de carga en consideración, y k como se define en 10.12.1.

Se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto, ante cargas gravitacionales, como sigue:

10.13.6. En adición a los casos de carga que comprenden cargas laterales, se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto bajo cargas gravitacionales factoradas

a) Cuando $\delta_s M_s$ se calcula a partir de 10.13.4.1, el cociente de las deflexiones laterales de segundo orden por las deflexiones laterales de primer orden, con 1.4 veces la carga muerta y 1.7 veces la carga viva, más la carga lateral aplicada a la estructura, no excederá de 2.5.

b) Cuando $\delta_s M_s$, se calcula a partir de 10.13.4.2, el valor de Q calculado utilizando ΣP_u con 1.4 veces la carga muerta más 1.7 veces la carga viva, no excederá de 0.60.

c) Cuando $\delta_s M_s$, se calcula a partir de 10.13.4.3, δ_s calculado utilizando ΣP_u y ΣP_c correspondiente a las cargas factoradas muerta y viva, será positiva y no excederá de 2.5.

En los casos a), b), y c), β_d se tomará como el cociente de la carga axial máxima factorada sostenida, por la carga axial máxima factorada.

10.13.7. En los marcos con ladeo, los elementos a flexión se diseñarán para los momentos totales amplificados en la junta, en los extremos de los elementos a compresión.

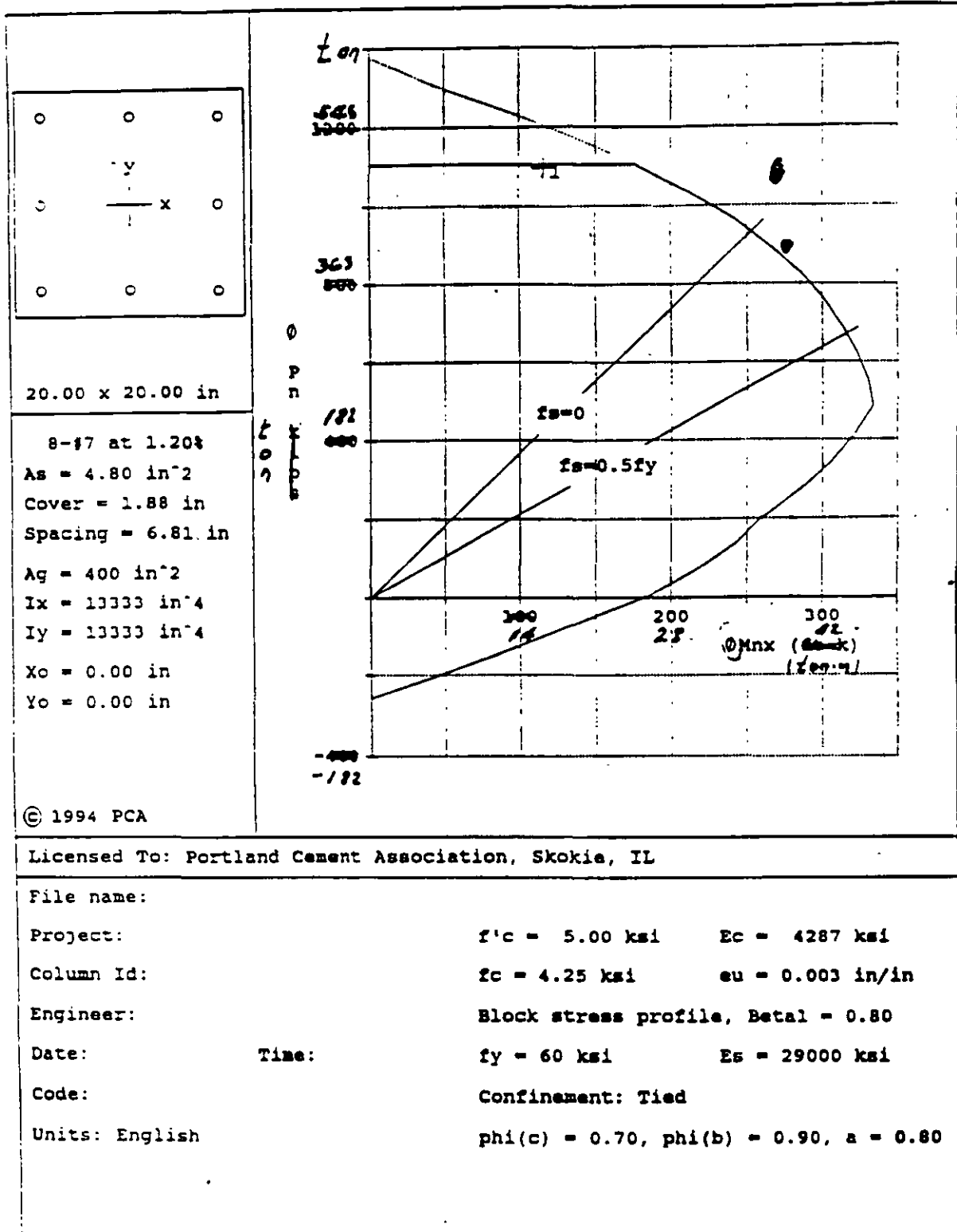


Figure 13-14 Design Strength Interaction Diagram for Column A3

Similarly, for column C3, use 24-#9 ($\rho_g = 4.2\%$; see Fig. 13-15).

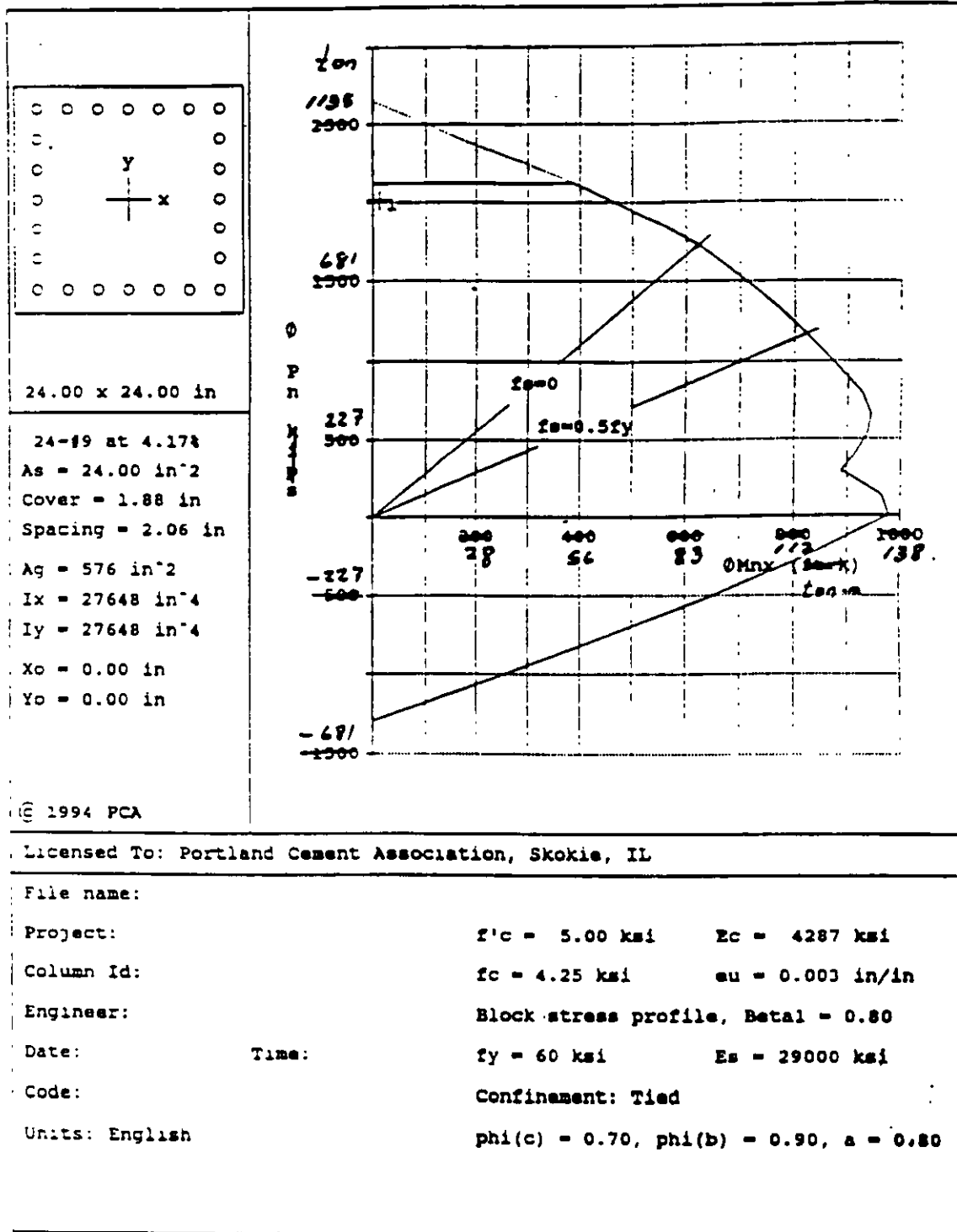


Figure 13-15 Design Strength Interaction Diagram for Column C3

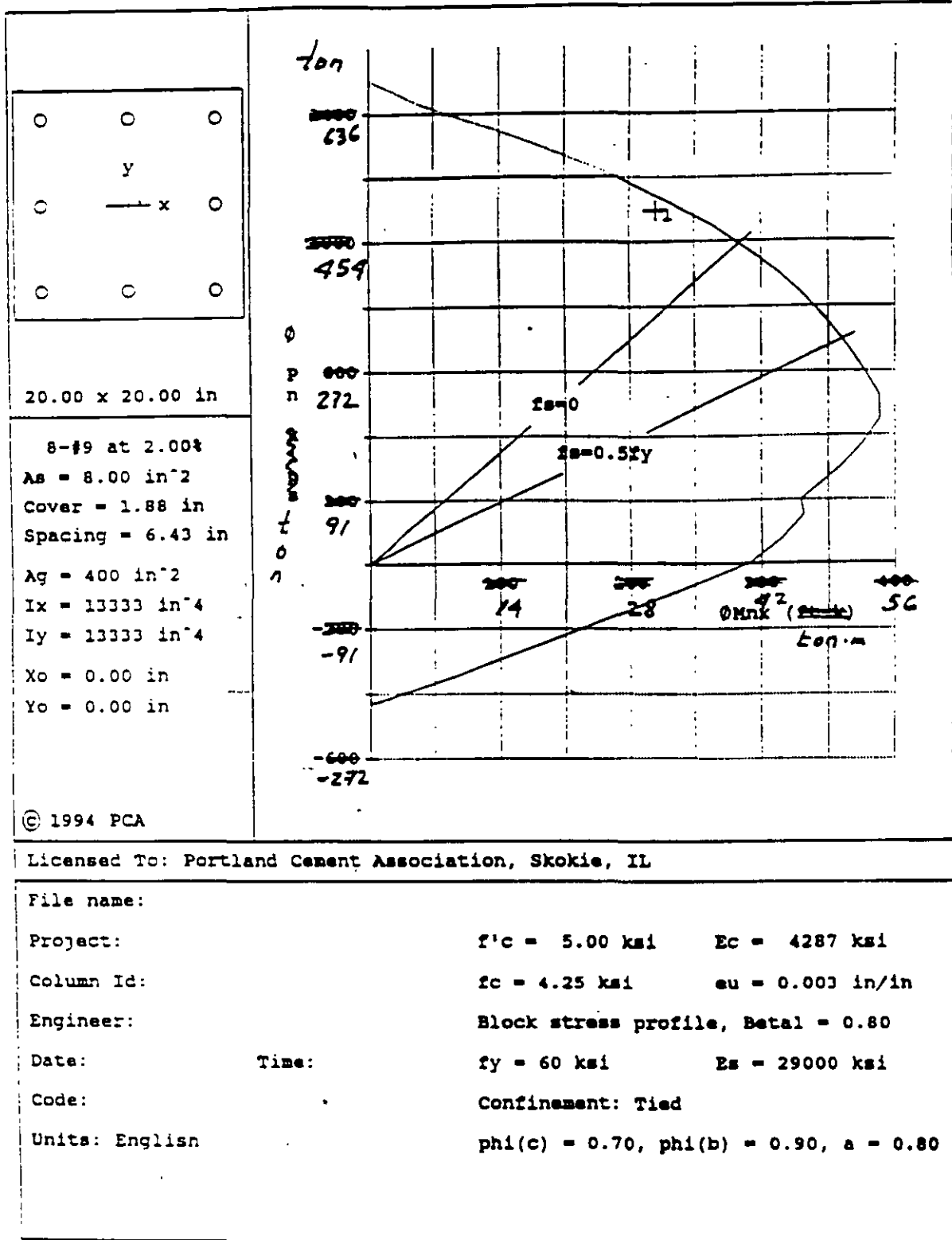
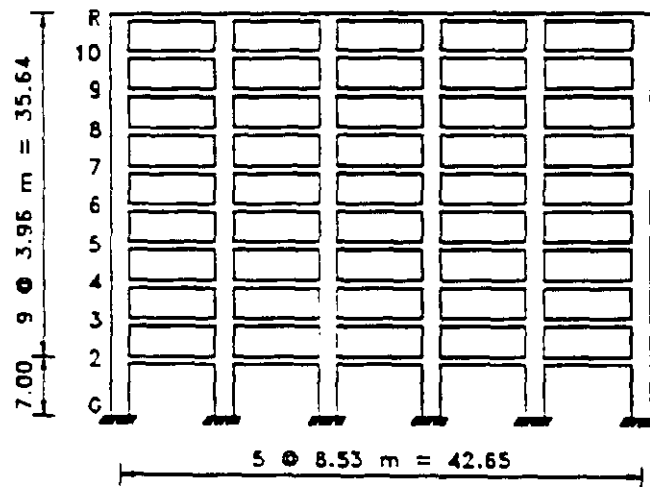
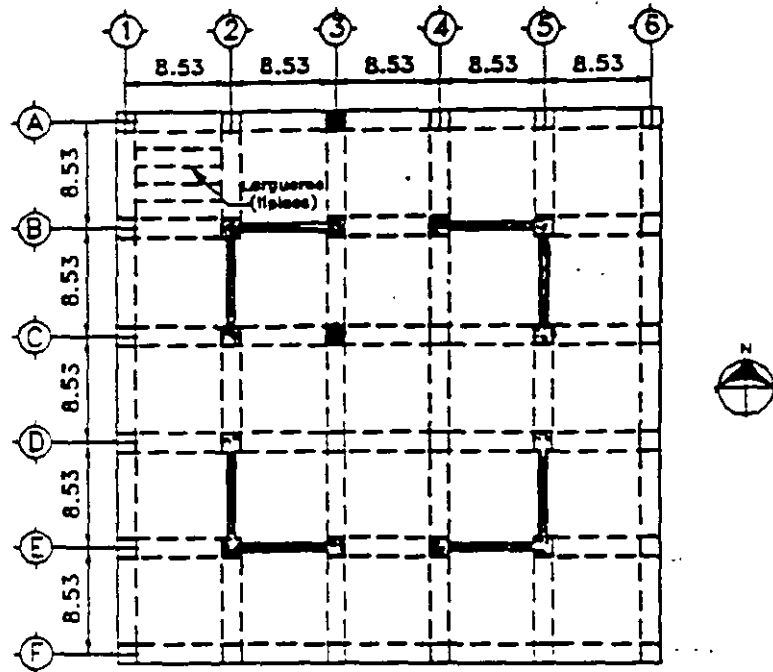


Figure 13-16 Design Strength Interaction Diagram for Column A3 (including magnified moment)



Ejemplo 13.1 — Efectos de esbeltez para columnas en un marco sin ladeo (Contraventeado).

Diséñense las columnas A3 y C3 del primer entrepiso del edificio para oficinas con 10 entrepisos, que se muestra abajo. La altura libre de primer entrepiso es de 6.50 m, y de 3.45 m para los otros entrepisos. Supóngase que los efectos de las cargas laterales en el edificio son causadas por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedad de los materiales:

Concreto: $f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo: $f_s = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Muros de cortante: 30 cm

Peso de los largueros de piso: 420 kg/cm²

Carga muerta sobrepuesta: 156 kg/cm²

Carga viva: 244 kg/cm²

1. Cargas gravitacionales factoradas

Columna	Carga axial factorada ton	Momentos flexionantes factorados, ton-m			
		M ₁ extr. sup.	M ₂ extr. inferior	M ₁	M ₂
A3	498	16.08	8.21	8.21	16.08
C3	916	1.69	0.86	0.86	1.69

2. Determinese si el marco es con o sin ladeo

Secc. 10.11.4.2

Los resultados de un análisis elástico de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.1.1, se resumen en la tabla que sigue:

Nivel de piso	$\sum P_u$ ton	Δ_c cm	V_u ton	l_c cm	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_c}{V_u l_c}$
Az	1,803	0.036	10.90	396	0.015
10	3,661	0.036	32.19	396	0.010
9	5,518	0.038	53.07	396	0.010
8	7,375	0.038	73.46	396	0.010
7	9,232	0.036	93.25	396	0.009
6	11,090	0.036	112.46	396	0.009
5	12,947	0.036	131.02	396	0.009
4	14,804	0.028	148.96	396	0.007
3	16,662	0.025	165.80	396	0.006
2	18,631	0.028	187.68	675	0.004

El índice de estabilidad $Q = \sum P_u \Delta_c / V_u l_c$ para cada entrepiso es menor que 0.05. Por consiguiente, toda la estructura se puede considerar como de *no ladeo* (contraventada).

3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Para columnas con anillos, excluyendo efectos de esbeltez:

$$\phi P_{n,max} = 0.80 \phi [0.85 f_c (A_g - A_{sv}) + 4,200 A_{sv}] \quad \text{Ec (10-2)}$$

Para la columna A-3:

$$498 = 0.80(0.70)[0.85(350)(50^2 - A_{sv}) + 4,200 A_{sv}]$$

de donde: $A_{sv} = 37.29 \text{ cm}^2$

Utilicé 8 varillas del #8 ($A_{sv} = 40.56 \text{ cm}^2$; $\rho_x = 1.6\%$)

Utilicé PCACOL para determinar la capacidad nominal de la columna **A3** con:

$$P_u = 498 \text{ ton.}$$

De la figura 13.14:

$$\phi M_{n,x} = 24.98 \text{ ton-m} > 16.08 \quad \text{CORRECTO}$$

En forma similar, de la figura 13.15, para la columna **C3** utilice 24 vars. del #9: $A_{sv} = 153.87 \text{ cm}^2$

$$\rho_x = \frac{153.87}{60 \times 60} = 0.0427 = 4.3\%$$

4. **Columna C3** — Diseño final, que incluye los efectos de esbeltez. Determinese si debieran considerarse los efectos de esbeltez. Utilícese un factor de longitud efectiva $k = 1.0$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(650)}{0.3(60)} = 36.11 \quad 10.12.1$$

Puesto que la columna se flexiona en doble curvatura:

$$34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 34 - 12 \left(\frac{-0.86}{1.69} \right) = 40.1 > 36.1$$

No requieren considerarse los efectos de esbeltez para la columna C3 puesto que $kl_u/r < 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ 10.12.2

Nótese que de conformidad con la disposición de 10.12.2 de ACI 318-99, $34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ no debe tomarse mayor a 40.

En este caso no es necesario calcular un valor más preciso de k , ya que la columna no es esbelta para $k = 1.0$. Las 24 vars. del #9 resultan adecuadas.

5. **Columna A3** — Diseño final, incluyendo efectos de esbeltez

a) Determinese si es necesario considerar los efectos de esbeltez

Determinese k del nomograma en R.10.12

$$I_{col} = 0.7 \left(\frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 282,589 \text{ kg/cm}^2$$

Para la columna en la planta baja, de 6.75 m = 675 cm

$$\frac{EI}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{675} = 153 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

Para la columna en el segundo entrepiso, de 3.96 m = 396 cm

$$\frac{EI}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{396} = 260 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$I_{viga} = \frac{0.35(60 \times 50^3)}{12} = 218,750 \text{ cm}^4$$

Para la viga de 8.53 m

$$\frac{E_c I}{l} = \frac{282.589(218.750)}{853} = 72 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I \Delta_c}{\sum E_c I l} = \frac{(153+260)10^5}{72 \times 10^5} = 5.7$$

Supóngase que $\Psi_B = 1.0$ (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma en R10.10.12.1 (a): $k = 0.84$.

Por consiguiente, para la columna A3 flexionada en doble curvatura:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left(\frac{8.21}{16.08} \right) = 28$$

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left(\frac{-8.21}{16.08} \right) = 40$$

para la columna A3 flexionada en curvatura sencilla:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 > 34 - 12 \left(\frac{8.21}{16.04} \right) = 28$$

No es necesario considerar la esbeltez de la columna A3, si se flexiona en doble curvatura, la cual es la condición más común para las construcciones de concreto vaciado en sitio. Si embargo, con objeto de ilustrar el procedimiento de diseño, incluidos los efectos de esbeltez en las columnas sin ladeo, supóngase una curvatura sencilla.

b. Determinese el momento total M_c (incluidos los efectos de esbeltez) y la combinación de cargas para el diseño.

$$M_c = \delta_m M_1 \quad \text{Ec (10-9)}$$

donde.

$$\delta_m = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec (10-10)}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0.4 \quad \text{Ec (10-14)}$$

$$= 0.6 + 0.4 \left(\frac{8.21}{16.08} \right) = 0.8$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec (10-11)}$$

$$EI = \frac{0.2E_c I_x + E_s I_{sr}}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec (10-12)}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 15,100 \sqrt{350} = 282,589 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.5.1}$$

$$I_x = \frac{50^4}{12} = 520,833 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.5.2}$$

$$I_{sr} = 2 \left[(3 \times 5.07) \left(\frac{50}{2} - 1.11 - 1.91 - 3.81 \right)^2 \right] = 10,043 \text{ cm}^4$$

En la expresión anterior, el diámetro de la varilla del #7 dividido por 2 = 1.11 cm; el diámetro del estribo del #6 = 1.91 cm, y el recubrimiento de 1.5" = 3.81 cm

$$\beta_d = \frac{1.4 P_D}{1.4 P_D + 1.7 P_L} = 0.82$$

$$EI = \frac{0.2(282,589)520,833 + 2(10^6)10,043}{1 + 0.82} = 2.72(10)^{10} \text{ kg-cm}^2$$

De la Ec (10.-13):

$$EI = \frac{0.4 E_c I_x}{1 - \beta_d} = \frac{0.4(282,589)520,833}{1.82} = 3.23(10^{10})$$

Si se utiliza este último valor, la carga crítica P_c vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 (3.23)10^{10}}{(0.84 \times 650)^2} = 1,070,919 \text{ kg}$$

$$\delta_{ms} = \frac{0.8}{1 - \frac{498,000}{0.75(1,071,000)}} = 2.11$$

Verifiquense los requisitos de momento mínimo:

$$M_{2,max} = P_u(0.6 + 0.03h) = 498,000(0.6 + 0.03 \times 50) \quad \text{Ec (10-15)}$$

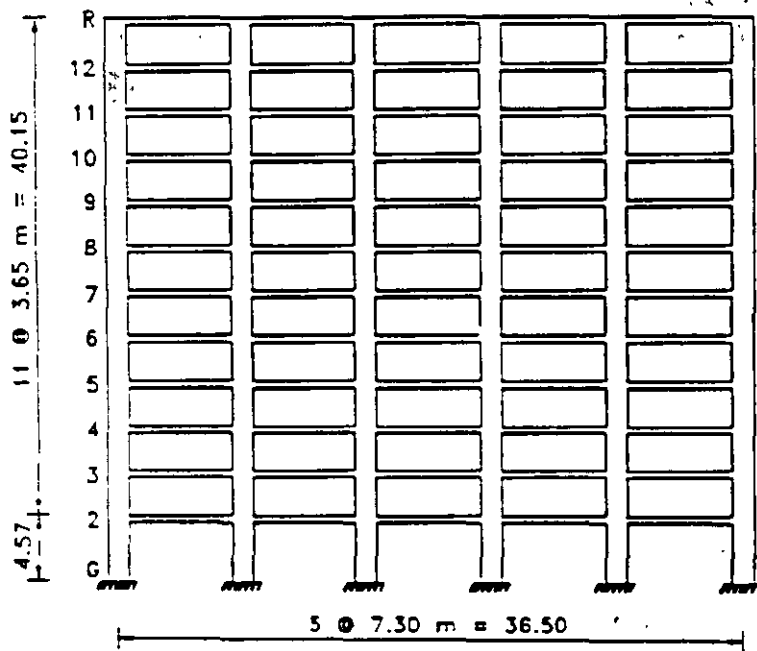
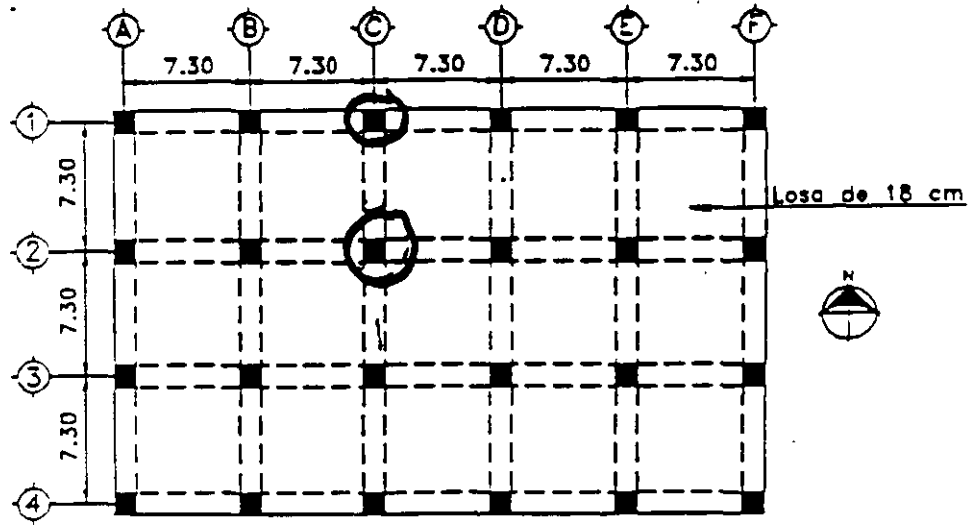
$$= 1,045,800 \text{ kg-cm} = 10.45 < 16.08 \text{ ton-m}$$

Por consiguiente:

$$M_c = 2.11(16.08) = 33.85 \text{ ton-m}$$

Si se utiliza la figura 13-14, resulta evidente que la columna de 50 x 50 cm reforzada con 8 varillas del #7 no es adecuada para la combinación de cargas $P_u = 498 \text{ ton}$ y $M_c = 33.85 \text{ ton-m}$. En este caso se requieren 8 vars. del #9, las cuales representan un $\rho_f = 2.0\%$.

6. Para propósitos comparativos se realizó un análisis $P-\Delta$ utilizando las propiedades que aparecen en la sección 10.11.1 del Reglamento. Los momentos totales que se obtuvieron de este análisis $P-\Delta$ son esencialmente los mismos a los que se obtuvieron a partir de una análisis de primer orden. Lo anterior ilustra la economía total que se logra cuando para el diseño de los elementos se utiliza un análisis $P-\Delta$.



Ejemplo 13.2 — Efectos de esbeltez en las columnas de un marco con ladeo (no contraventeado).

Diséñense las columnas C1 y C2 en el primer entrepiso del edificio para oficinas con 12 entrepisos, el cual se muestra abajo. La altura libre del primer entrepiso es de 4.05 m y de 3.15 m para todos los demás. Supongase que los efectos laterales en el edificio son provocados por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedades de los materiales:

Concreto $f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$ para las columnas en los dos
entrepisos inferiores

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ para todos los demás sitios
($w_c = 2,400 \text{ kg/m}^3$)

Refuerzo $f_s = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Carga muerta sobrepuesta = 208 kg/m²

Carga viva = 244 kg/m²

1. Combinaciones las cargas factoradas

Secc. 9.2

1 $U = 1.4D + 1.7L$ Ec (9-1)

2 $U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$ Ec (9-2)

3 $U = 0.9D + 1.3W$ Ec (9-3)

2. Determínese si el marco es con ladeo o sin ladeo

Los resultados del análisis de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.11.1 se resumen en la tabla siguiente:

Col	Combinación de cargas	Carga axial factored	Momentos flexionantes factorados (ton-m)											
			M _x extremo superior			M _x extremo inferior			M ₁	M ₂	M _{1,m}	M _{2,m}	M _{1,1}	M _{1,2}
			ns	s	total	ns	s	total						
C1	602	7.87	-	7.87	3.94	-	3.94	3.94	7.87	3.94	7.87	-	-	
	478	5.91	2.26	8.16	2.95	21.73	24.68	8.16	24.68	5.91	2.95	2.26	21.73	
	328	3.78	2.30	6.08	1.90	22.14	24.04	6.08	24.04	3.78	1.90	2.30	22.14	
C2	1.068	0.14	-	0.14	0.07	-	0.07	0.07	0.14	0.07	0.14	-	-	
	796	0.12	6.10	6.22	0.07	45.67	45.74	6.22	45.74	0.12	0.07	6.10	45.67	
	814	0.1	6.23	6.33	0.04	46.50	46.54	6.33	46.54	0.10	0.04	6.23	46.50	

Nivel de Piso	$\sum P_u^*$ (ton)	Δ_n (cm)	V_u (ton)	l_c (cm)	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_n}{V_u l_c}$
Azotea	1.420	0.15	8.67	365	0.067
12	2.849	0.25	25.79	365	0.076
11	4.277	0.41	42.63	365	0.113
10	5.704	0.53	59.11	365	0.140
9	7.135	0.66	75.27	365	0.171
8	8.530	0.79	90.98	365	0.203
7	9.970	0.91	106.19	365	0.234
6	11.399	1.04	129.95	365	0.269
5	12.857	1.14	135.20	365	0.297
4	14.250	1.19	148.87	365	0.312
3	15.690	1.12	161.71	365	0.298
2	17.139	0.84	175.11	430	0.190

* Incluye el peso del piso, las cargas muertas sobrepuestas y las cargas vivas reducidas. El factor de reducción de la carga viva se tomó igual a 0.08 (A-150)

El índice de estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_n}{V_u l_c}$$

es mayor a 0.05 en todos los niveles de piso. Por consiguiente, las columnas no están contraventeadas.

3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Utilice el programa PCACOL para determinar el área requerida del acero longitudinal, sin incluir los efectos de esbeltez.

Para la columna C1, utilice 8 vars. del # 8 ($\rho_x = 1.6\%$)

Para la columna C2, utilice 16 vars. del # 11 ($\rho_x = 4.3\%$)

4. **Columna C1**—Diseño definitivo, incluyendo efectos de esbeltez

a. Determine k del nomograma en R10.12.1

$$I_{cw} = 0.7 \left(\frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 15,100 \sqrt{420} = 309,458 \text{ cm}^2 \quad \text{Secc. 8.5.1}$$

Para la columna de 4.32 m: $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364,583)}{430} = 262 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

Para la columna de 3.65 m: $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364,583)}{365} = 309 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

$$I_{viga} = 0.35 \left(\frac{60 \times 50^3}{12} \right) = 218,750 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

Para la viga de 7.30 m de longitud:

$$\frac{E_c I}{l} = \frac{309,458(218,750)}{732} = 92.5 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / l_c}{\sum E_c I / l} = \frac{262 + 309}{925} = 6.17$$

Supóngase que $\Psi_B = 1.0$ (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma de la figura R.10.12.1(b), $k = 1.76$:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.76(405)}{0.3(50)} = 48 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente: deberán considerarse los efectos de esbeltez

b. Determine el momento total M_2 (incluidos los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño

$$M_2 = M_{2m} + \delta_c M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis $P - \Delta$ aproximado:

$$\delta_c M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} > M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de las cargas de diseño, incluidos los efectos de esbeltez:

Combinación de cargas	$M_{2,u}$ (ton-m)	$M_{2,s}$ (ton-m)	Q	δ_s	$\delta_s M_{2,s}$	M_2 (ton-m)	P_c (ton)
1	7.87	-	-	-	-	7.87	602
2	2.95	21.73	0.19	1.24	26.95	29.90	478
3	1.90	22.14	0.19	1.24	27.45	29.35	528

Utilizando la figura 13.17, es evidente que las tres combinaciones de carga caen dentro del diagrama de interacción. Por lo tanto, las 8 varillas del #8 son adecuadas cuando se toman en cuenta los efectos de esbeltez al utilizar un análisis $P - \Delta$ aproximado.

Para propósitos de comparación, recalcúlese $\delta_s M_{2,s}$ utilizando el método de amplificación de momentos dado en ediciones anteriores del Reglamento ACI.

$$\delta_s M_{2,s} = \frac{M_{2,s}}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_{2,s} \quad \text{Ec (10-19)}$$

La carga crítica P_c se calcula a partir de la Ec (10-11), utilizando k de 10.13.1 y EI de la Ec (10-12) o (10-13).

Para cada una de las doce columnas exteriores a lo largo de los ejes de columnas 1 y 4 (esto es: las columnas que reciben sólo 1 viga en la dirección del análisis), k se determinó en la parte 4(a) con un valor de 1.76. Utilizando la Ec (10-13), con $\beta_u = 0$:

$$EI = 0.4(309.458) \left(\frac{50^4}{12} \right) = 6.45(10^{10})$$

La carga crítica vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kL_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45(10^{10})}{(1.76 \times 405)^2} = 1.257.922 \text{ kg} = 1.257 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las columnas de orilla A2, A3, F2 y F3 (esto es: las columnas que reciben a dos traves, una a cada lado, en la dirección del análisis).

$$\Psi_A = \frac{262 + 309}{2 \times 92.7} = 3.08$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma correspondiente, $k = 1.58$.

La carga crítica es:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45(10)^{16}}{(1.58 \times 405)^2} = 1.554,659 \text{ kg} = 1,555 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las ocho columnas interiores:

$$I_{col} = 0.7 \left(\frac{60^4}{12} \right) = 756,000 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

$$\text{Para la columna de 4.32m: } \frac{E_c I}{l_c} = \frac{309.458(756.000)}{432} = 541 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

$$\text{Para la columna de 3.65 m: } \frac{E_c I}{l_c} = \frac{309.458(756.000)}{365} = 641 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{541 + 641}{(2 \times 92.7)} = 6.38$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma: $k = 1.8$

$$EI = 0.4(309.458) \left(\frac{60^4}{12} \right) = 1.34 \times 10^{11} \quad \text{Ec (10-13)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.34 \times 10^{11}}{(1.8 \times 405)^2} = 2,488,568 \text{ kg} = 2,488 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_c = 12(1,257) + 4(1,555) + 8(2,488) = 41,208 \text{ ton}$$

$$\delta_c = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(41,208)}} = 2.24$$

Para la combinación 2, de cargas:

$$M_2 = 2.95 + 2.24(21.73) = 51.62 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3, de cargas:

$$M_2 = 1.90 + 2.24(22.14) = 51.49 \text{ ton-m}$$

De la figura 13.17, resulta claro que la combinación 2 de cargas cae fuera del diagrama de interacción. Por consiguiente, es necesario incrementar el refuerzo a 8 varillas del #9 ($\rho_x = 2.0\%$), para tomar en cuenta los efectos de esbeltez, cuando se utiliza el método de la amplificación de momentos de reglamentos previos de ACI.

5. Columna C2. Diseño definitivo, para incluir los efectos de esbeltez.

a. Determinése si deben considerarse los efectos de esbeltez.

En la parte 4(b), k se determinó igual a 1.8 para las columnas interiores. Por consiguiente:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.8(405)}{0.3(60)} = 40.5 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente, deben considerarse los efectos de esbeltez.

b) Determinése el momento total M_2 (incluyendo los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño.

$$M_2 = M_{2m} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis $P - \Delta$ aproximado:

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} \geq M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de cargas de diseño, incluyendo los efectos de esbeltez:

Combinación de carga	M_{2m} (ton-m)	M_{2s} (ton-m)	Q	δ_s	$\delta_s M_{2s}$	M_2 (ton-m)	P_u (ton)
1	0.14	-	-	-	-	0.14	1.060
2	0.07	45.67	0.19	1.24	56.63	56.70	795
3	0.04	46.50	0.19	1.24	57.66	57.70	514

De la figura 13.18 resulta evidente que las tres combinaciones de cargas (P_u, M_2) caen dentro del diagrama de interacción. Por consiguiente, las 16

varillas del #11 son adecuadas cuando se incluyen los efectos de esbeltez, utilizando una análisis aproximado $P - \Delta$.

- Para propósitos de comparación, recalcúlese δ , M_2 , utilizando el método de amplificación de momentos, el cual aparece en ediciones anteriores del Reglamento ACI. Utilizando los valores $\sum P_u$, $\sum P_c$ y δ , calculados en la parte 4(b):

$$\delta_s = 2.24$$

Para la combinación 2 de cargas:

$$M_2 = 0.07 + 2.14(45.67) = 102.37 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3 de cargas:

$$M_2 = 0.04 + 2.14(46.50) = 104.20 \text{ ton-m}$$

Resulta evidente de la figura 13.18 que ambas combinaciones caen dentro del diagrama de interacción y por consiguiente, las 16 varillas del #11 son adecuadas cuando los efectos de esbeltez se determinan mediante este metodo.

6. Determinése si el momento máximo ocurre en el extremo del elemento. Ver la sección 10.13.5.

En la columna C1:

$$\frac{l_u}{r} = \frac{405}{0.3(50)} = 27 < \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{1.060.000}{420(60)^2}}} = 41.8 \quad \text{Ec (10-20)}$$

Por consiguiente, para cada una de las columnas C1 y C2 el momento máximo ocurre en uno de los dos extremos, y el momento total M_2 no tiene porqué amplificarse mediante δ_{ms} .

7. Verifíquese la inestabilidad debida una deflexión lateral de la estructura (Secc. 10.13.6):

a. Cuando se utiliza 10.13.4.2 para calcular δ , M_2 , el valor de Q que se evalúa utilizando cargas gravitacionales factoradas, no deberá exceder de 0.60. Nótese que para verificar la estabilidad, todos los momentos de inercia se deberán dividir por $(1 + \beta_u)$, donde, para este piso (Secc. 10.11.1):

$$\beta_d = \frac{\sum 1.4 P_n}{\sum P_n} = 0.89; \quad 1 + \beta_d = 1.89$$

El dividir todos los momentos de inercia por $(1 + \beta_d)$ es equivalente a incrementar las deflexiones, y consecuentemente Q , por $(1 + \beta_d)$.

Por lo tanto, en el 2o. nivel:

$$Q = 1.89 \times 0.19 = 0.36 < 0.60$$

Por lo tanto, la estructura es estable en este nivel. De hecho, si se calcula la Q modificada en cada piso, se muestra que la estructura es estable.

b. Al utilizar 10.13.4.3 para calcular δM_c , el valor de δ , calculado utilizando $\sum P_c$ y $\sum P_c$ correspondientes a las cargas muertas y vivas factoradas, será positiva y no excederá de 2.5. Para la verificación de la estabilidad, los valores de EI se deberán dividir por $(1 + \beta_d)$. Por consiguiente, los valores de P_c se deberán recalculer considerando los efectos de β_d .

En las columnas B1 a E1 y B4 a E4, $\beta_d = 0.89$, y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1.297}{1 + 0.89} = 686 \text{ ton}$$

En las columnas A1, F1, A4 y F4, $\beta_d = 0.91$, y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1.297}{1 + 0.91} = 679 \text{ ton}$$

En las columnas A2, A3, F2 y F3, $\beta_d = 0.89$, y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1.642}{1 + 0.89} = 869 \text{ ton}$$

En cada una de las columnas interiores, $\beta_d = 0.88$, y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{2.590}{1 + 0.88} = 1,378 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_i = 8(686) + 4(679) + 4(869) + 8(1,378) = 22,704 \text{ ton}$$

y,

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(22,704)}} < 0$$

La estructura es inestable cuando se utiliza el método de amplificación de momentos.

8. Para propósitos de comparación, se llevó a cabo un análisis $P-\Delta$ utilizando las propiedades de la sección, dadas en 10.11.1. En la columna C1, el momento total M_2 aumentó aproximadamente 26% y en la columna C2 aumentó aproximadamente 42%. En ambas columnas, la cantidad de refuerzo determinada en la etapa de diseño preliminar es adecuada para las combinaciones de cargas a partir del análisis de segundo orden. Nótese que en promedio, los momentos de las columnas en el primer nivel aumentaron aproximadamente 26%.

Para la revisión de la estabilidad según 10.13.6, los valores de I se dividieron por $(1 + \beta_d)$. En todos los niveles de piso, el cociente de las deflexiones laterales de 2o. orden respecto de las de 1er. orden, se determinó menor a 2.5, lo cual significa estabilidad de conjunto de la estructura.

9. Es importante hacer notar que también deben considerarse los efectos de las cargas de viento que actúan en la dirección S-N. Sin embargo, en aras de simplicidad, en este ejemplo no se consideran éstas.

10. Cuando las columnas están sujetas a flexión en las direcciones x y y , el análisis anterior deberá ejecutarse en cada una de las dos direcciones. La verificación del diseño final de la columna podrá llevarse a cabo utilizando el método de la carga recíproca:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} + \frac{1}{P_{RO}}}$$

En la cual:

P_R carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades e_x y e_y

P_{RO} carga axial resistente de diseño, para las excentricidades $e_x = e_y = 0$

$$P_{RO} = 0.80 \phi [0.85 f_c (A_c - A_w) + f_y A_w]$$

cuando se trate de columnas con refuerzo transversal con estribos. Cuando ese refuerzo transversal consista de espirales, el coeficiente 0.80 se reemplazará por 0.85.

- P_{R_x} carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad e_x , en uno de los planos de simetría
- P_{R_y} carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad e_y , en el otro plano de simetría

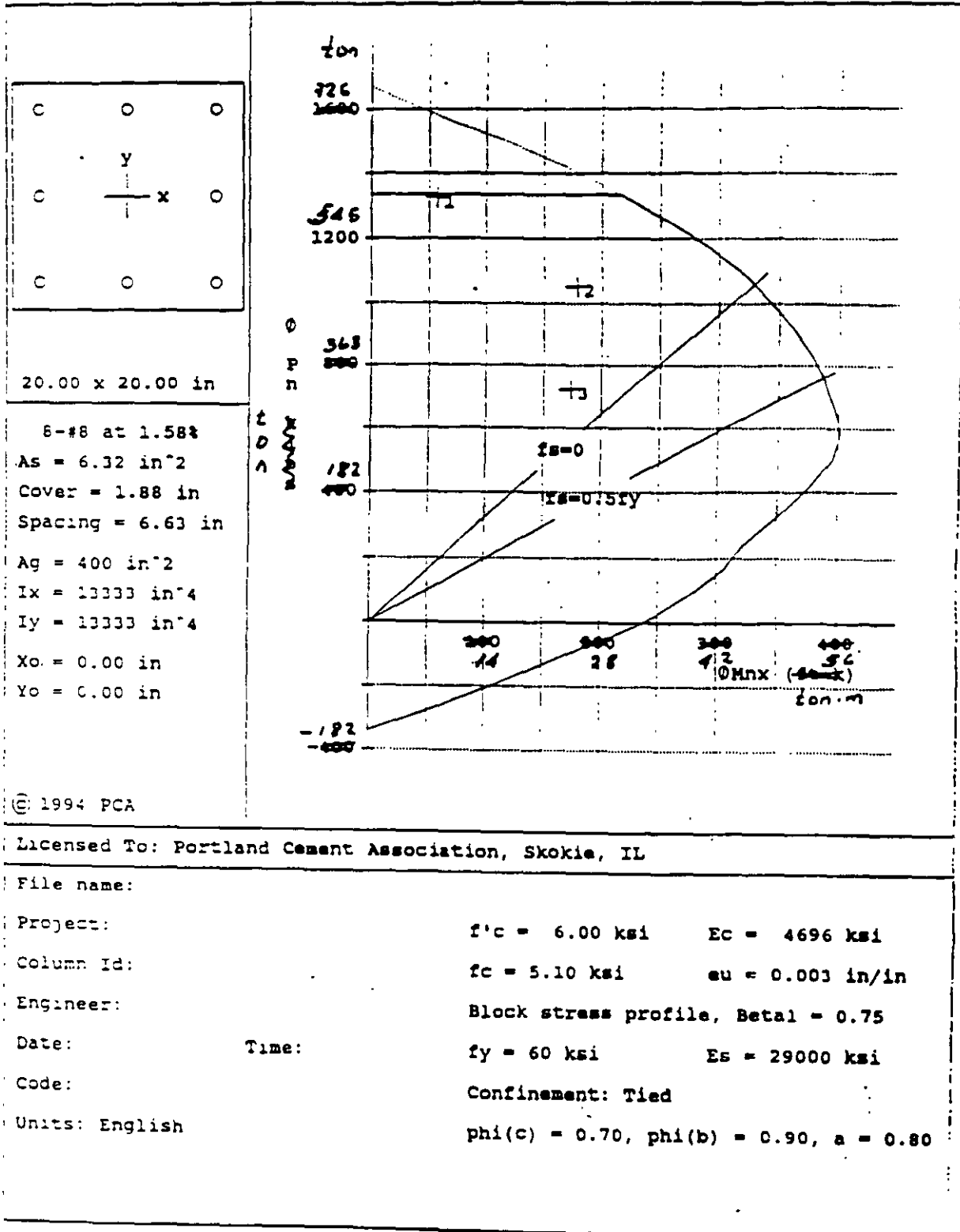


Figure 13-17 Design Strength Interaction Diagram for Column C1

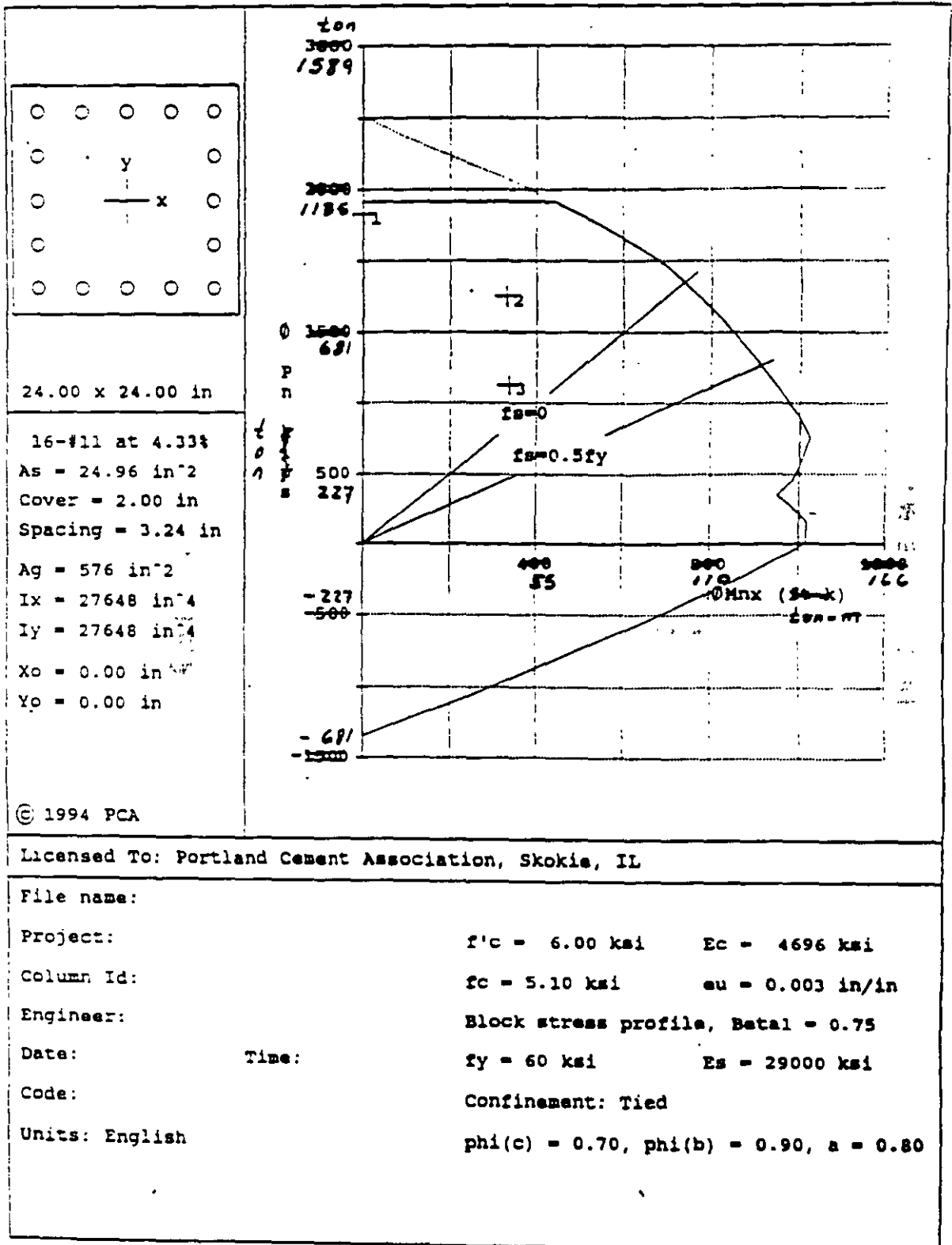


Figure 13-18 Design Strength Interaction Diagram for Column C2



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
TEORÍA DE FUERZA CORTANTE**

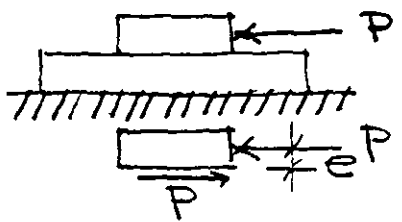
**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

TEORIA DE FUERZA CORTANTE

1. - INTRODUCCION

SE ESTUDIA BASICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS. EN ESTOS ELEMENTOS, LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS POR LA FUERZA CORTANTE, LLAMADOS ESFUERZOS CORTANTES, SE PRESENTAN CASI SIEMPRE ACUMULADOS POR LOS ESFUERZOS NORMALES DE FLEXION. DICHA COMBINACION DE ESFUERZOS CAUSA CONDICIONES CRITICAS DE ESFUERZOS. EN ESTA SECCION SE ANALIZA UNICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE POR SEPARADO. EXISTEN ELEMENTOS ESTRUCTURALES (REMACHES, TORNILLOS, PERNOS ETC) EN LOS QUE ACTUAN UNICAMENTE ESFUERZOS CORTANTES O EN LOS QUE LOS ESFUERZOS NORMALES SE DESPRECIAN. ESTOS ESFUERZOS CORTANTES SE DENOMINAN "ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS".

2. - ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS :



Pe SE DESPRECIA

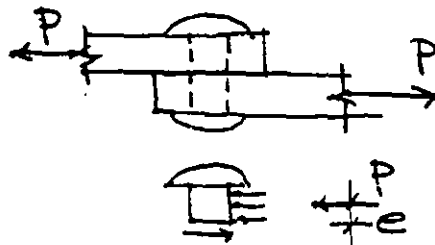
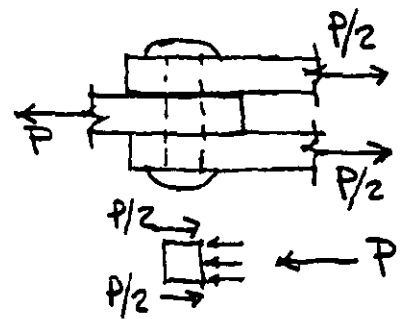


FIG. (1)



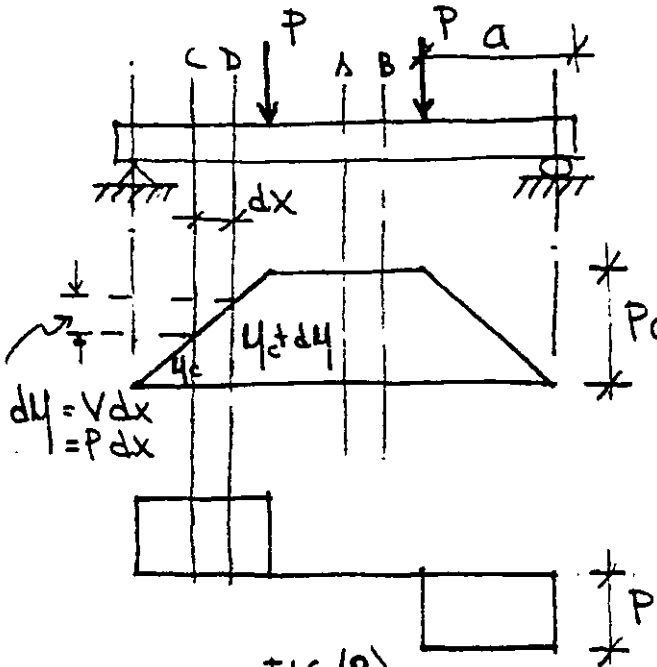
$$\tau = \frac{P}{A} \quad \text{--- (1)}$$

τ = ESFUERZO CORTANTE DIRECTO O ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO

P = FUERZA TOTAL ACTUANTE

A = AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL

3. - EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS



Como

$$V = -\frac{dU}{dx} \dots \dots (2)$$

ENTRE LAS SECCIONES A y B COMO EL MOMENTO FLEXIONANTE ES CONSTANTE

$$V = 0$$

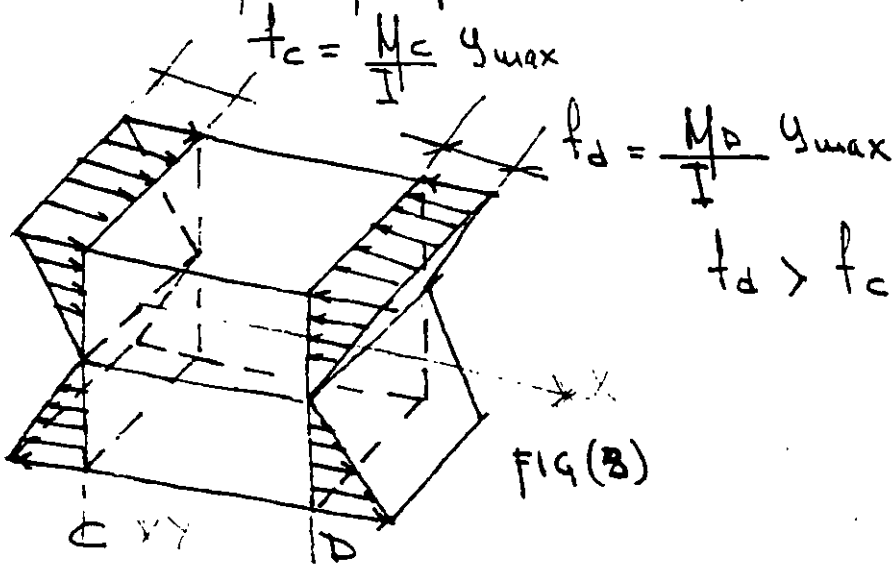
ENTRE LAS SECCIONES C y D DONDE VARIA EL MOMENTO FLEXIONANTE EXISTE UN VALOR DE LA FUERZA CORTANTE.

FIG (2)

POR LO TANTO, ENTRE DOS SECCIONES ALEJADAS UNA DISTANCIA dx EN DONDE EXISTE VARIACION DE MOMENTO:

$$dM = -V dx \dots \dots (3)$$

CONSIDERANDO EL SEGMENTO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C y D Y SUPONIENDO QUE LA SECCION TRANSVERSAL ES RECTANGULAR, LOS ESFUERZOS NORMALES POR FLEXION EN EL RANGO ELASTICO SON:

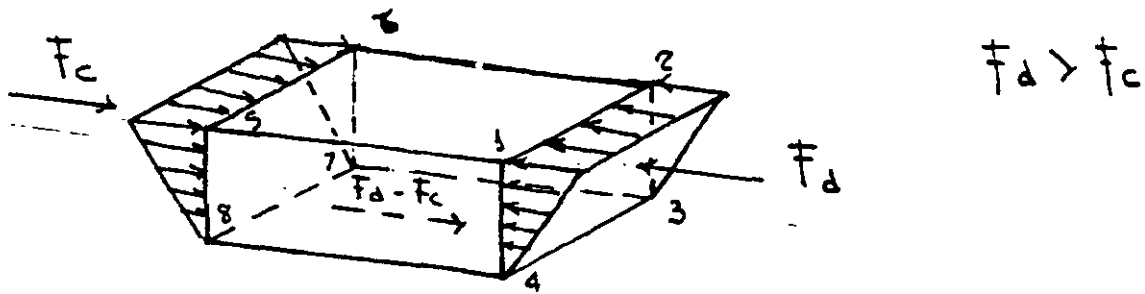


$$f_c = \frac{M_c}{I} y_{max}$$

$$f_d = \frac{M_d}{I} y_{max}$$

$$f_d > f_c$$

FIG (3)



$$F_d > F_c$$

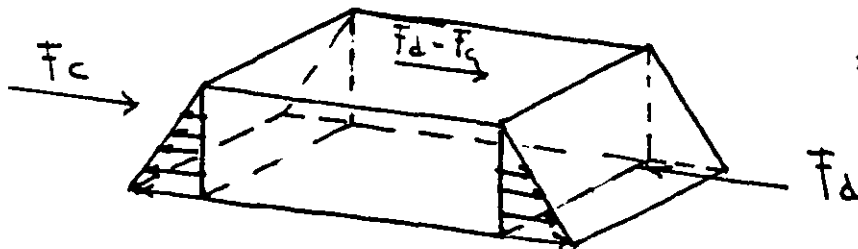


FIG. (4)

SI SE SEPARA LA PORCIÓN SITUADA ENCIMA DEL EJE NEUTRO DE LA DE ABAJO, SE DEBEN SATISFICER LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO EN CUALQUIERA DE LAS DOS PORCIONES.

HACIENDO $\sum F_y = 0$ SE VE QUE LA FUERZA CORTANTE VERTICAL EN LAS DOS SECCIONES C y D ES IGUAL.

HACIENDO $\sum F_x = 0$, TENEMOS:

COMO $F_d > F_c$, LA FUERZA $F_d - F_c$ ESTARÁ ACTUANDO EN EL AREA $\overline{3478}$

SI LAS DOS PORCIONES ESTÁN UNIDAS POR UN PERNO, ENTONCES LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL $F_d - F_c$ ES RESISTIDA POR EL PERNO

4. - FLUJO DE CORTANTE

SUPONGAMOS, QUE LA VIGA DE LA FIG. (2) SE ENCUENTRA FORMADA DE VARIAS PLACAS. PARA HACER QUE ESTAS PLACAS TRABAJEN EN CONJUNTO, SE UNEN POR MEDIO DE PERNOS, SEPARADOS A UNA DISTANCIA CONVENIENTE. (CONSIDERANDO EL TRAMO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C Y D Y TOMANDO EN CUENTA QUE EN LA SECCION C ACTUA UN MOMENTO M_c Y EN LA SECCION D UN MOMENTO M_d . LOS ESFUERZOS NORMALES (TENSION Y COMPRESION) PRODUCIDOS POR ESTOS MOMENTOS EN ~~UN PUNTO~~ UN PUNTO SITUADO A UNA DISTANCIA Y DEL EJE NEUTRO VALDRAN RESPECTIVAMENTE $\frac{M_c}{I} y$ Y $\frac{M_d}{I} y$

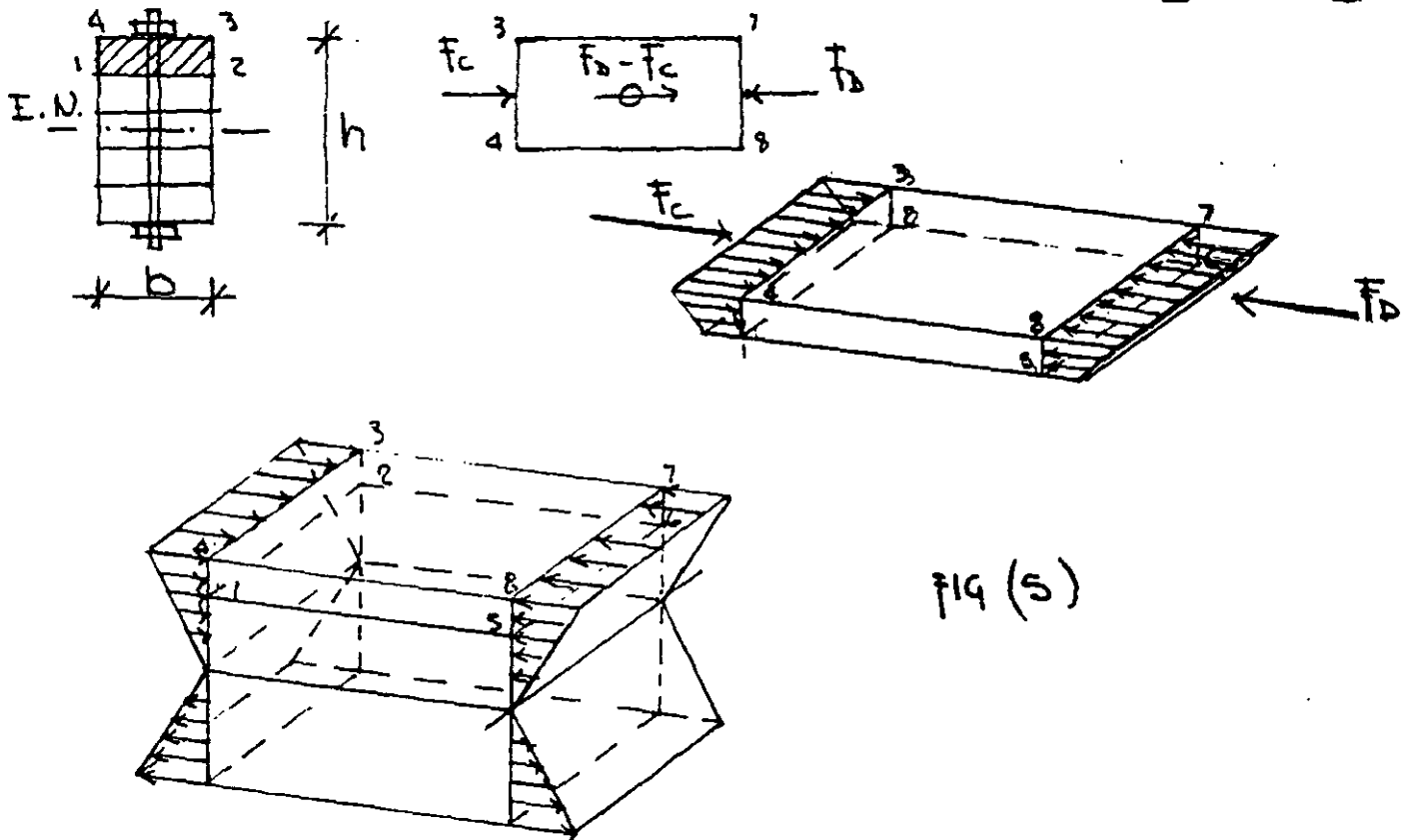


FIG (5)

SI SE TOMA LA PLACA SUPERIOR CUYAS FIBRAS MAS CERCAAS AL EJE NEUTRO ESTA A UNA DISTANCIA y_1 , SE PUEDEN DETERMINAR LAS FUERZAS PERPENDICULARES QUE ACTUAN EN LAS SECCIONES C Y D

LA FUERZA QUE ACTUA EN UN AREA DIFERENCIAL (dA) SITUADA A UNA DISTANCIA y DEL EJE NEUTRO VALE:

EN LA SECCION C

$$dF_c = \left(\frac{M_c}{I} y \right) dA \quad \dots \dots \dots (1)$$

LA FUERZA EN EL AREA $\overline{1234}$ VALE

$$F_c = \int_{\text{AREA}} \left(\frac{M_c}{I} y \right) dA = \frac{M_c}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$Q = \int_{\text{AREA}} y dA =$ MOMENTO ESTADISTICO O DE PRIMER ORDEN DEL AREA $\overline{1234}$ CON RESPECTO AL EJE NEUTRO.

$$F_c = \frac{M_c Q}{I} \quad \dots \dots \dots (2)$$

EN FORMA SEMEJANTE LA FUERZA EN EL AREA $\overline{5678}$ EN LA SECCION D VALE:

$$F_D = \int_{\text{AREA}} \left(\frac{M_D}{I} y \right) dA = \frac{M_D}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$$F_D = \frac{M_D Q}{I} \quad \dots \dots \dots (3)$$

SI $M_c = M_D$, LAS FUERZAS F_c Y F_D SERIAN IGUALES

EN NUESTRO CASO, EL MOMENTO EN LA SECCION C VALE M_c Y EN LA SECCION D VALE $M_c + dM$. COMO LAS SECCIONES SE ENCUENTRAN SEPARADAS UNA DISTANCIA dx , ENTONCES LA FUERZA RESULTANTE ($F_D - F_c$) SERA TAMBIEN UNA FUERZA DIFERENCIAL

$$dF = F_D - F_c = \frac{M_D}{I} Q - \frac{M_c}{I} Q = \left(\frac{M_c + dM}{I} \right) Q - \frac{M_c}{I} Q$$

$$dF = \frac{dM}{I} Q \quad \dots \dots \dots (4)$$

LA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE ENCUENTRA DIVIDIENDO LA FUERZA dF ENTRE LA LONGITUD EN QUE ACTUA (dx). DICHA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE DESIGNA CON LAS LETRAS q Y SE LLAMA FLUJO DE CORTANTE

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} \text{ --- (5)}$$

COYO: $\frac{dM}{dx} = V$

$$q = \frac{VQ}{I} \text{ --- (6)}$$

- V = FUERZA CORTANTE EN LA SECCION CONSIDERADA (TONS, KG. ETC.)
- Q = MOMENTO DE PRIMER ORDEN DE LA PARTE DE LA SECCION TRANSVERSAL SITUADA ENCIMA DEL NIVEL CONSIDERADO CON RESPECTO AL EJE NEUTRO. (M^3 , CM^3 ETC.)
- I = MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO AL EJE NEUTRO (M^4 , CM^4 ETC.)
- q = FLUJO DE CORTANTE (TONS./ML., KG./CM ETC.)

5. - ESFUERZO CORTANTE.

SI SE DIVIDE EL VALOR DE LA FUERZA dF ENTRE EL AREA EN QUE ESTA ACTUANDO, SE OBTIENE EL VALOR DEL ESFUERZO CORTANTE EN EL PLANO HORIZONTAL.

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{bdx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{Ib} = \frac{VQ}{Ib} \text{ --- (1)}$$

TAMBIEN $\tau_{yx} = \frac{q}{b}$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS ESFUERZOS τ_{yx} SIEMPRE ESTAN ACOMPAÑADOS DE ESFUZOS. CORTANTES VERTICALES τ_{xy} Y QUE SON DE LAS MISMAS MAGNITUDES

6. - CENTRO DE CORTANTE O CENTRO DE TORSION

Como se dijo anteriormente, siempre que el momento flexionante sea variable, existirá esfuerzo cortante. Estos esfuerzos, al actuar sobre sus áreas respectivas, dan lugar a ~~los~~ fuerzas cortantes internas o resistentes cuya resultante deberá ser igual, colinial y opuesta con la fuerza cortante externa. Si esto no ocurre la fuerza cortante interna y la fuerza cortante externa producen un momento torsionante.

Se llama centro de cortante o centro de torsion al punto por donde tiene que pasar el plano de cargas exteriores para que no exista torsion.

Para ilustrar la determinacion del centro de cortante, considere una viga de seccion canal. Se supone que las paredes son lo suficientemente delgadas para que todos los calculos puedan basarse en la hipotesis de que el area esta concentrada en la linea media del espesor, se supone que es aplicable la formula de las escuadrias

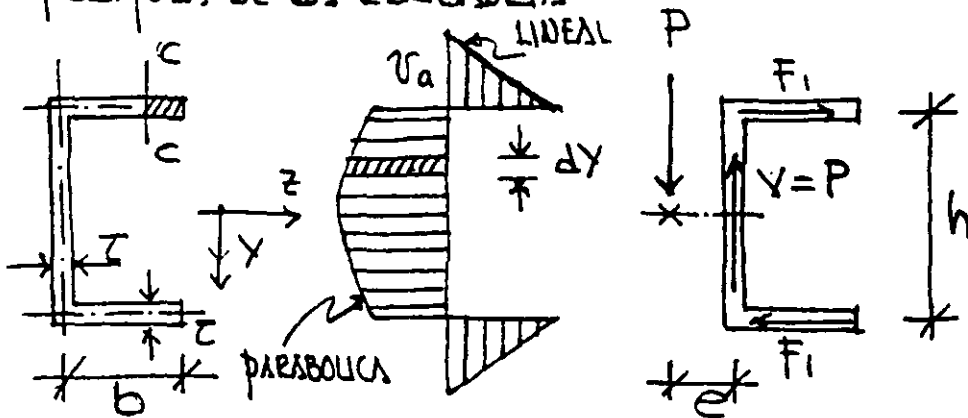


FIG (6)

EL ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO $(\tau_0/2)$ MULTIPLICADO POR EL AREA DEL PASTO DA UNA FUERZA $F_1 = (\tau_0/2) b t$

DE IGUAL FORMA EN EL ALMA RESULTA LA FUERZA:...

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} \tau t dy$$

EN LA FIG. (6c) SE DIBUJAN LAS FUERZAS QUE RESULTAN. LA FUERZA F_1 PRODUCE UN PAR QUE VALE $(F_1)(h)$, EL CUAL, TIENDE A TORSIONAR LA SECCION ALREDEDOR DE SU EJE LONGITUDINAL.

PARA EVITAR EL GIRO ES NECESARIO APLICAR LAS CARGAS P A UNA DISTANCIA e TAL QUE:

$$F_1 h = P e$$

POR LO TANTO:

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{1/2 \tau_0 a b t h}{P} = \frac{b t h}{2P} \frac{V Q}{I \tau} = \frac{b t h}{2P} \frac{V b \tau (h/2)}{I \tau} = \frac{b^2 h^2 \tau}{4I}$$

EN FORMA SEMEJANTE, UNA INVESTIGACION DE LA LOCALIZACION DEL PLANO DONDE DEBEN ESTAR CONTENIDAS LAS FUERZAS HORIZONTALES PARA QUE NO EXISTA TORSION INDICA QUE ESTE PLANO COINCIDE CON EL PLANO NEUTRO. LA INTERSECCION DE LOS DOS PLANOS DE CARGA DEFINEN UN PUNTO LLAMADO CENTRO DE CARGA O CENTRO DE TORSION

7. - DEFORMACIONES POR CORTANTE

LAS FUERZAS CORTANTES PRODUCEN UNA DEFORMACION TANGENCIAL O DISTORSION. UN ELEMENTO SUJETO A FUERZA CORTANTE NO VARIA LA LONGITUD DE SUS LADOS SINO QUE UNICAMENTE CAMBIA DE FORMA DE RECTANGULO A PARALELO GRAMO.

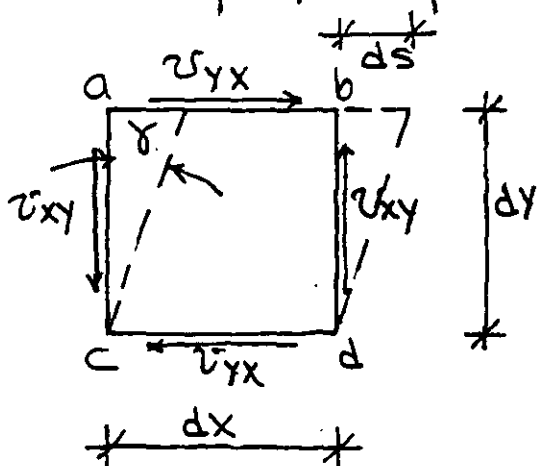


FIG. (7)

ANTES DE LA DEFORMACION EL ANGULO EN EL PUNTO C VALE $\pi/2$. DESPUES DE LA DEFORMACION SE REDUCE A $\pi/2 - \gamma$. EN EL PUNTO A EL ANGULO SE INCREMENTA A $\pi/2 + \gamma$

$$\tan \gamma = \frac{ds}{dy}$$

γ = DEFORMACION POR CORTANTE

COMO EL ANGULO γ ES SIEMPRE MUY PEQUEÑO:

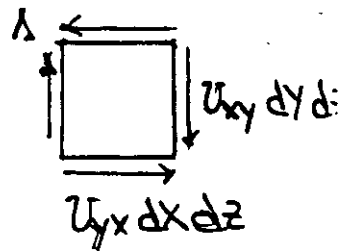
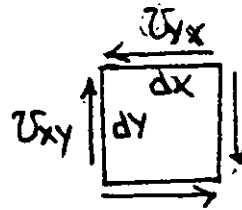
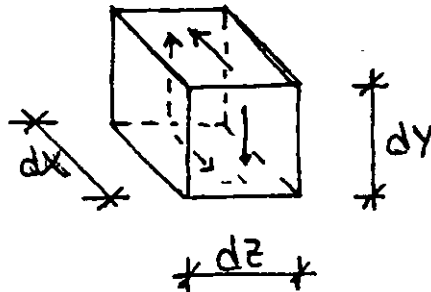
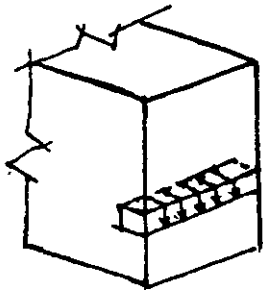
$$\gamma = \frac{ds}{dy}$$

SE REALIZAN ENSAYES PARA OBTENER LAS GRAFICAS ESFUERZO-DEFORMACION (EN ENSAYES A CORTANTE PURO) LAS CUALES SON SEMEJANTES A LAS DE TENSION. LOS EXPERIMENTOS, MUESTRAN QUE PARA METALES DUCTILES INCLUYENDO EL ACERO EL ESFUERZO DE FLUENCIA AL CORTANTE τ_y VARIA ENTRE $0.5 f_y$ Y $0.6 f_y$.

LA LEY DE HOOKE PARA CORTANTE ES: $\tau_y = G \gamma$

G = MODULO DE ELASTICIDAD AL ESFUERZO CORTANTE

* DEMOSTRACIÓN DE QUE $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

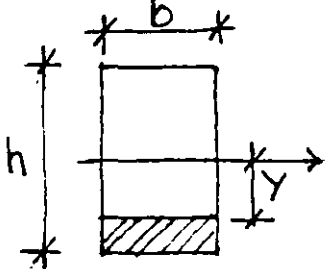


CONSIDERANDO UN ELEMENTO DE DIMENSIONES DIFERENCIALES. POR EQUILIBRIO HORIZONTAL EL ESFUERZO EN LA CARA SUPERIOR REQUIERE OTRO IGUAL Y DE SENTIDO CONTRARIO EN LA CARA INFERIOR. TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR A. SE TIENE:

$$(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0$$

$$\therefore \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

* CALCULAR LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZO CORTANTE EN UNA SECC. RECTANGULAR



$$v = \frac{V Q}{I b}$$

$$Q = b(h/2 - y) \frac{[y + (h/2 - y)/2]}{(h/2 + y)/2} = \frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2]$$

SUSTITUYENDO:

$$v = \frac{V}{I b} \left[\frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2] \right] = \frac{V}{2I} [(h/2)^2 - y^2]$$

LA EC. ANTERIOR INDICA QUE LA MAGNITUD DE τ VARIA EN FUNCIÓN DE y^2 POR LO QUE LA VARIACION ES PARABOLICA. EL τ_{max} SE OBTIENE PARA $y = 0$. DICHO VALOR ES:

$$\tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{2I}$$

$$\text{COYO } I = \frac{bh^3}{12}; \quad \tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{b h^3 / 6} = \frac{3V}{2bh}$$

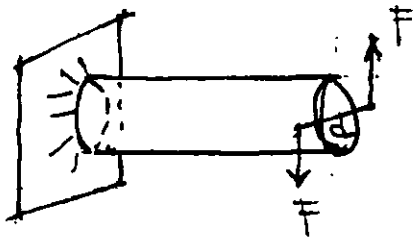
$$bh = A$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{prom.}$$

$$\tau_{prom.} = \frac{V}{A}$$

TORSION

MOYENTO TORSIONANTE: ES LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS MOYENTOS DE LOS PARES APLICADOS SITUADOS A LA DERECHA O A LA IZQUIERDA DE LA SECCION CONSIDERADA.



$$T = \text{MOYENTO TORSIONANTE}$$
$$T = (d)(F)$$

EFECTOS DEL MOYENTO TORSIONANTE

1. - PRODUCE UN DESPLAZAMIENTO ANGULAR DE UNA SECCION CON RESPECTO A OTRA

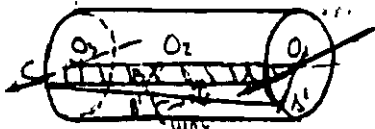
2. - ORIGINA ESFUERZOS CORTANTES EN CUALQUIER SECCION DE LA BARRA

HIPOTESIS BASICAS

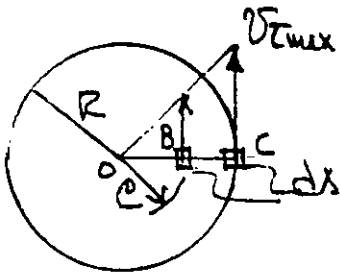
1. - LAS SECCIONES TRANSVERSALES PLANAS PERPENDICULARES AL EJE DE LA BARRA (CIRCULAR) PERMANECEN PLANAS DESPUES DE LA APLICACION DE UN MOYENTO TORSIONANTE.

2. - EN MIEMBROS DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR QUE SE SOMETEN A TORSION SU DEFORMACION ANGULAR γ , VARIA LINEALMENTE DESDE SU EJE (LOS RADIOS PERMANECEN RECTOS)

3. - POR LO TANTO, SE DEDUCE QUE EL ESFUERZO CORTANTE ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DEFORMACION.



- FORMULA DEL ESFUERZO POR TORSION MATERIAL ELASTICO-LINEAL



EN EL CASO ELASTICO, COMO EL ESFUERZO ES PROPORCIONAL A LA DEFORMACION, LOS ESFUERZOS VARIAN TAMBIEN LINEALMENTE DESDE EL EJE LONGITUDINAL. LOS ESFUERZOS INDUCIDOS SON ESFUERZOS CORTANTES Y ACTUAN EN UN PLANO PARALELO A LA SECCION Y PERPENDICULAR AL EJE DE LA BARRA.

EL ESFUERZO EN UN PUNTO A UNA DISTANCIA ρ DEL CENTRO VALE:

$$\tau_c = \frac{\rho}{R} \cdot \tau_{cmax} \quad \text{--- (1)}$$

UNA VEZ ESTABLECIDA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN UNA SECCION, SE PUEDE DETERMINAR LA RESISTENCIA A MOMENTO TORSIONANTE EN FUNCION DEL ESFUERZO. POR LO TANTO, SE PUEDE FORMULAR LA SIGUIENTE ECUACION.

$$\int_A \underbrace{\frac{\rho}{R} \tau_{cmax}}_{\text{ESFUERZO}} \underbrace{dx}_{\text{AREA}} \underbrace{\rho}_{\text{BRAZO DE MOMENTO}} = T \quad \text{--- (2)}$$

MOMENTO TORSIONANTE

T = MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE

τ_{cmax} y R SON CONSTANTES PARA UNA SECCION TRANSVERSAL DADA

$$\therefore T = \frac{\tau_{cmax}}{R} \int_A \rho^2 dA \quad \text{--- (3)}$$

$\int \rho^2 dA = J = \text{MOMENTO POLAR DE INERCIA}$

PARA UNA SECCION CIRCULAR $dA = 2\pi e de$

$$\therefore J = \int_A e^2 dA = \int_0^R 2\pi e^3 de = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

POR LO TANTO:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{TR}{J} \text{ ----- (4)}$$

LA ECUACION (4) ES LA FORMULA DE LA TORSION PARA SECCIONES CIRCULARES.

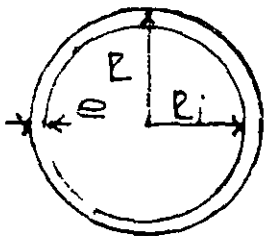
PARA CALCULAR EL ESFUERZO EN UN PUNTO CUALQUIERA A UNA DISTANCIA e DEL CENTRO TENEMOS:

$$\tau = \frac{Te}{J} \text{ ----- (5)}$$

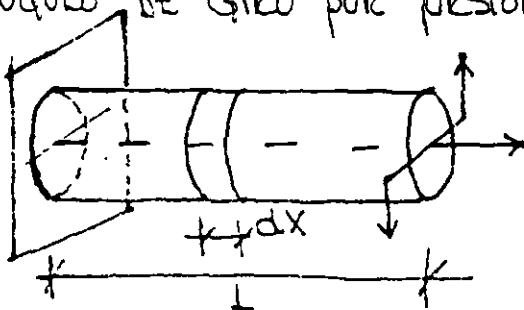
- LAS ECS. (4) Y (5) TAMBIEN SON APLICABLES A TUBOS DE SECCION CIRCULAR, PUESTO QUE SON APLICABLES LAS MISMAS HIPOTESIS Y UNICAMENTE ES NECESARIO CAMBIAR EL VALOR DE J

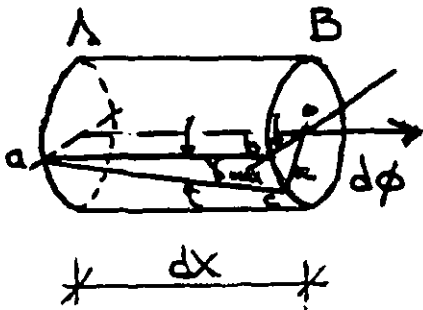
PARA ESTE CASO:

$$J = \int e^2 dA = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi e^3 de = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$$



- ANGULO DE GIRO POR TORSION EN MIEMBROS DE SECCION CIRCULAR





Por la definición de ángulo

$$d\phi = \frac{bc}{r}$$

$$bc = R d\phi$$

En ángulos muy pequeños las cuerdas y el arco se confunden.

$$\therefore \tan \gamma_{max} = \frac{bc}{dx} \approx \gamma$$

$$\gamma_{max} = \frac{bc}{dx}$$

$$bc = \gamma_{max} dx$$

$$\therefore R d\phi = \gamma_{max} dx \quad \dots \dots \dots (6)$$

Como existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación

$$\tau_{max} = G \gamma_{max} \quad \dots \dots \dots (7)$$

G = módulo de elasticidad al esfuerzo cortante

tomando en cuenta que $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$

$$\frac{TR}{J} = G \gamma_{max}$$

$$\gamma_{max} = \frac{TR}{GJ} \quad \dots \dots \dots (8)$$

Sustituyendo el valor de γ_{max} en la ec. (6)

$$R d\phi = \frac{TR}{GJ} dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx$$

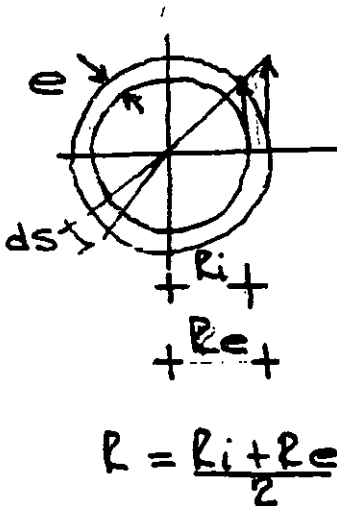
$$\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx = \frac{TL}{GJ}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad \dots \dots \dots (9)$$

— MIEMBROS DE SECCION HUECA Y PARED DELGADA

LOS TUBOS DE PARED DELGADA DE CUALQUIER FORMA, SE PUEDEN ANALIZAR FACILMENTE PARA DETERMINAR LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS Y EL ANGULO PRODUCIDO POR UN MOMENTO TORSIONANTE APLICADO

- ESFUERZOS CORTANTES POR TORSION EN LA SECCION CIRCULAR HUECA.



$$\tau_z = \frac{T e}{J}$$

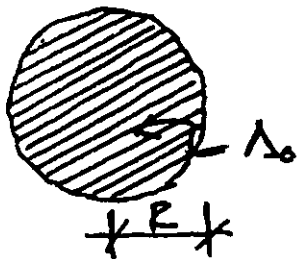
$$J = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$J = \int R^2 dA = \int_0^R R^2 e ds = R^2 e (2\pi R)$$

$$J = 2R^3 e \pi$$

$$e = R$$

$$R = \frac{R_i + R_e}{2}$$



$$\tau_z = \frac{T R}{2\pi R^3 e} = \frac{T}{2\pi R e} = \frac{T}{2\lambda_0 e}$$

$$\tau_z = \frac{T}{2\lambda_0 e} \quad \text{--- (10)}$$

- ANGULO DE GIRO

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

$$\frac{\tau_z}{R} = \frac{T}{J}$$

$$\therefore \phi = \frac{\tau_z L}{R G}$$

MULTIPLICANDO POR πR

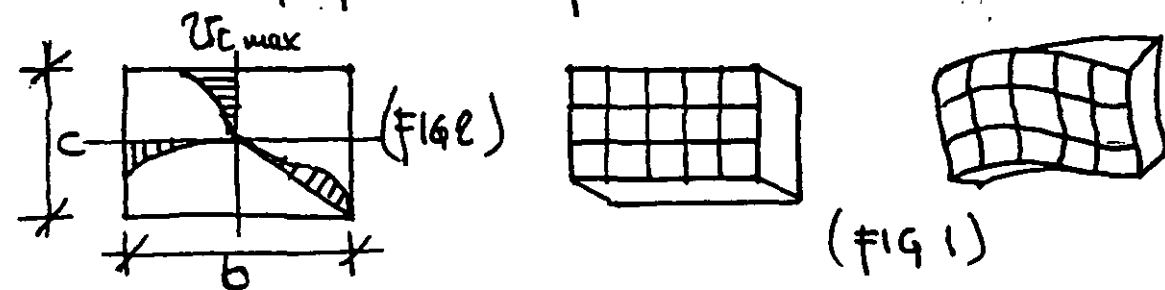
$$\phi = \frac{\tau_z L \pi R}{\pi R^2 G} = \frac{\tau_z L S}{2\lambda_0 G}$$

$$\phi = \frac{\tau_z L S}{2\lambda_0 G} \quad \text{--- (11)}$$

LAS ECS. (10) Y (11) SON APLICABLES A ~~SECCIONES~~ SECCIONES HUECAS DE CUALQUIER FORMA.

- MIEMBROS DE SECCION HACIZA NO CIRCULAR

EL TRATAMIENTO ANALITICO MATEMATICAMENTE ES COMPLICADO. LAS PERMIS DOS HIPOTESIS NO SON VALIDAS. LAS SECCIONES TRANSVERSALES SI SE ALABEAN. LAS DISTORSIONES QUE OCURREN EN LA SECCION RECTANGULAR PUEDEN VERSE EN LA FIG. (1). EN ESTA SECCION LOS ELEMENTOS DE ESQUINA NO SE DISTORSIONAN EN LO ABSOLUTO. LOS ESFUERZOS CORTANTES SON NULOS EN LOS VERTICES Y MAXIMOS EN LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE MAYOR LONGITUD. EN LA FIG (2) SE MUESTRA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS A LO LARGO DE TRES LINEAS RADIALES QUE PARTEN DEL CENTRO



SE HAN DESARROLLADO SOLUCIONES ANALITICAS PARA LA PRESION DE MIEMBROS ELASTICOS DE SECCION RECTANGULAR (TEORIA DE ELASTICIDAD). AQUI SE PRESENTAN UNICAMENTE LOS RESULTADOS FINALES. PARA EL ESFUERZO MAXIMO Y EL ANGULO DE GIRO, DICHS RESULTADOS SE PUEDEN EXPRESAR COMO:

$$\tau_{Tmax} = \frac{T}{\alpha b c^2} \text{ --- --- --- (1)}$$

$$\phi = \frac{T L}{\beta b c^2 G} \text{ --- --- --- (2)}$$

α y β SON PARAMETROS QUE DEPENDEN DE LA RELACION b/c . VER TABLA 1. CUANDO b ES MUCHO MAYOR QUE c α y β TIENDEN A $1/3$

TABLA 1

b/c	1.00	1.50	2.00	3.00	6.00	10.0	∞
α	0.209	0.231	0.246	0.267	0.299	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

EXISTEN FORMULAS COMO LAS ANTERIORES PARA OTROS TIPOS DE SECCIONES TRANSVERSALES.

PARA LOS CASOS QUE NO SE PUEDEN RESOLVER MATEMATICAMENTE EN FORMA CONVENIENTE SE HA IDEADO UN METODO. RESULTA, QUE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL QUE DEBE RESOLVERSE EN EL PROBLEMA DE LA TORSION ELASTICA MATEMATICAMENTE ES IGUAL A LA ECUACION DE UNA MEMBRANA DELGADA, TAL COMO UNA PELICULA DE JABON, FORMADA Y LIGERAMENTE ESTIRADA SOBRE UN AGUJERO. ESTE, DEBE SER GEOMETRICAMENTE ^{IGUAL} A LA SECCION EN ESTUDIO. SE PUEDEN OBSERVAR LOS SIGUIENTES PUNTOS:

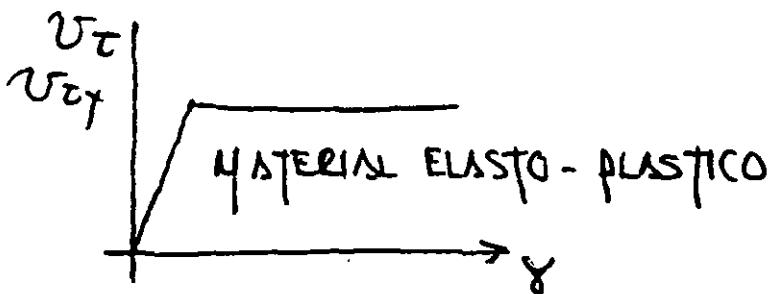
1. - EL ESFUERZO CORTE POR TORSION EN UN PUNTO ES PROPORCIONAL A LA PENDIENTE DE LA MEMBRANA EN EL MISMO PUNTO.
2. - LA DIRECCION DEL ESFUERZO EN UN PUNTO ES PERPENDICULAR A LA PENDIENTE EN EL MISMO PUNTO.
3. - EL DOBLE DEL VOLUMEN ENCERRADO POR LA MEMBRANA ES PROPORCIONAL AL MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE.

LA ANALOGIA ANTERIOR SE CONOCE COMO "ANALOGIA DE LA MEMBRANA"

TORSION PURA EN EL INTERVALO INELASTICO

SI EN UNA SECCION TRANSVERSAL SE APLICA UN MOMENTO TORSIONANTE Y ESTE SE INCREMENTA EN FORMA GRADUAL, LLEGA UN INSTANTE EN QUE EN LOS PUNTOS DE ESFUERZO MAXIMO SE ALCANZA EL ESFUERZO DE FLUENCIA; SI EL MOMENTO CRECE TODAVIA MAS, LAS ZONAS PLASTIFICADAS SE VAN EXTENDIENDO HASTA QUE EVENTUALMENTE ABARCAN TODA LA SECCION.

ES FACIL DETERMINAR LA MAGNITUD DEL MOMENTO TORSIONANTE QUE OCASIONA LA PLASTIFICACION TOTAL DE LA SECCION PERO EN CAMBIO, EL PROBLEMA DE LA DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS DURANTE LAS ETAPAS DE PLASTIFICACION ES MUY COMPLEJA. LA DETERMINACION DEL MOMENTO SE HACE POR UNA EXTENSION DE LA ANALOGIA DE LA MEMBRANA A LA ZONA DE COMPORTAMIENTO INELASTICO IDEALIZANDO EL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL AL DE UN MATERIAL ELASTO-PLASTICO. DICHA EXTENSION SE CONOCE COMO "ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA".



GRAFICA ESFUERZO - DEFORMACION

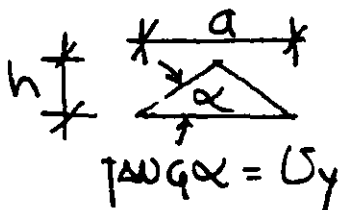
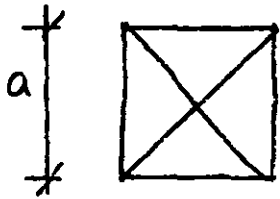
- ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA

ESTA ANALOGIA HA SIDO DESARROLLADA PARA LA PRESION PLASTICA.

SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA QUE TENGA LA FORMA DE LA SECCION TRANSVERSAL, SE VIERTE ARENA SECA. LA SUPERFICIE DEL MONTON DE ARENA FORMADA, TIENE UNA PENDIENTE CONSTANTE. POR EJEMPLO, SOBRE UN DISCO CIRCULAR SE FORMA UN CONO Y SOBRE UNA BASE CUADRADA UNA PIRAMIDE CUADRANGULAR.

EJEMPLO, EN UNA BARRA DE SECCION TRANSVERSAL CUADRADA

$$\begin{aligned} \text{VOLUMEN} &= \frac{1}{3} a^2 h \\ &= \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{a}{2}\right) \text{TAN } \alpha \\ &= \frac{a^3}{6} v_y \end{aligned}$$



$$T_p = 2(\text{VOLUMEN})$$

$$T_p = \frac{a^3}{3} v_y$$

SI CONSIDERAMOS QUE $v_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}}$

$$T_p = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} f_y = \frac{\sqrt{3}}{9} a^3 f_y$$

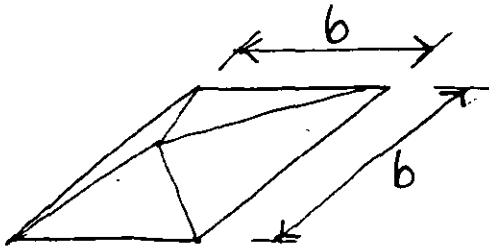
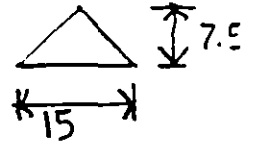
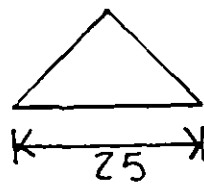
PARA UNA SECCION CIRCULAR DE RADIO R

$$T_p = \frac{2}{3} \pi R^2 (R \text{TAN } \alpha) = \frac{2}{3} \pi R^3 v_y$$

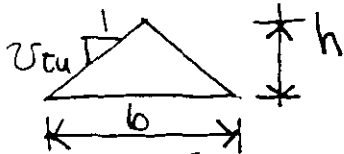
$$T_p = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi R^3 f_y = \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3 f_y$$

EJEMPLO 1: DEDUCIR LA ECUACION DEL ESTUEROO CORTANTE POR TORSION τ_{cu} USANDO LA ANALOGIA DEL MONTON DE ARENAS.

SOLUCION



SOLUCION:



$$VOLUEN = \frac{b^2 h}{3}$$

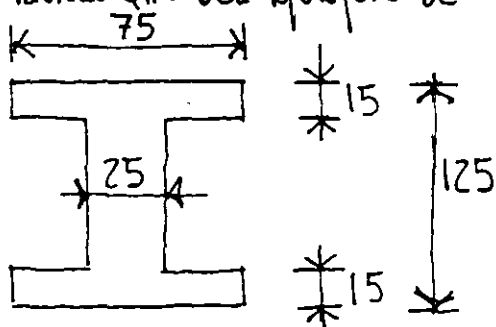
$$T_u = \frac{2}{3} b^2 h$$

$$h = \tau_{cu} \frac{b}{2}$$

$$T_u = \frac{2}{3} b^2 \left(\tau_{cu} \frac{b}{2} \right) = \frac{b^3 \tau_{cu}}{3}$$

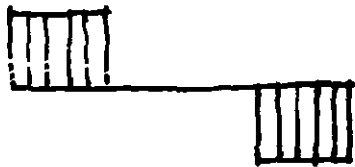
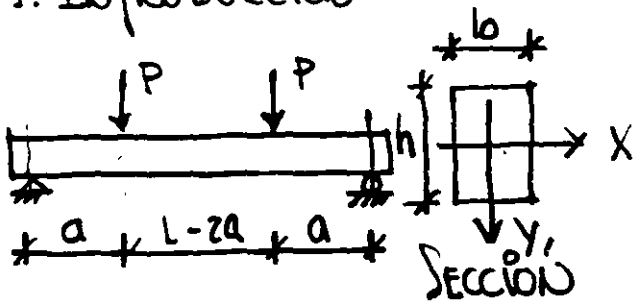
$$\tau_{cu} = \frac{3 T_u}{b^3}$$

EJEMPLO 2: DEDUCIR LA ECUACION DEL ESTUEROO CORTANTE POR TORSION τ_{cu} USANDO LA ANALOGIA DEL MONTON DE ARENAS



ELEMENTOS SUJETOS A CORTANTE 2. COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA

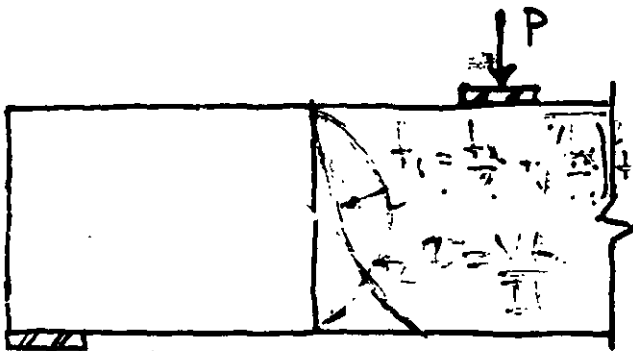
1. INTRODUCCIÓN



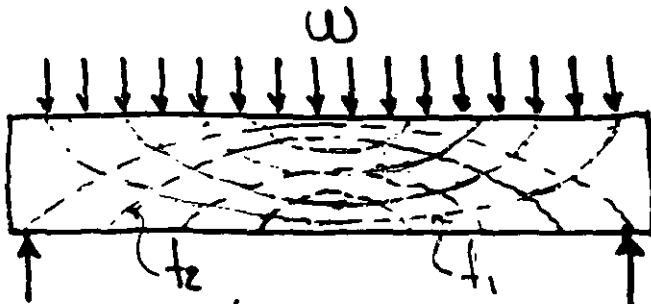
$$v = \frac{VA}{Ib}$$



$$f_x = \frac{M}{I} y$$

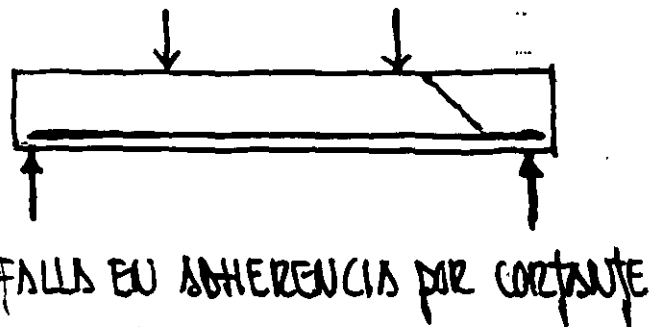
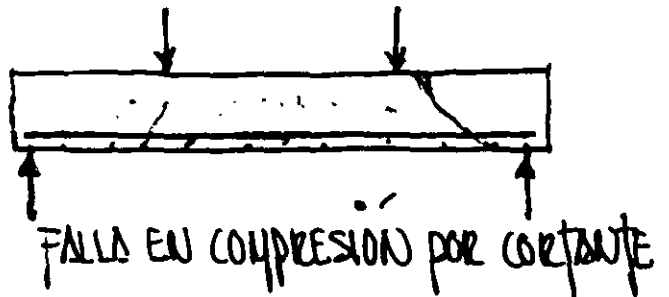
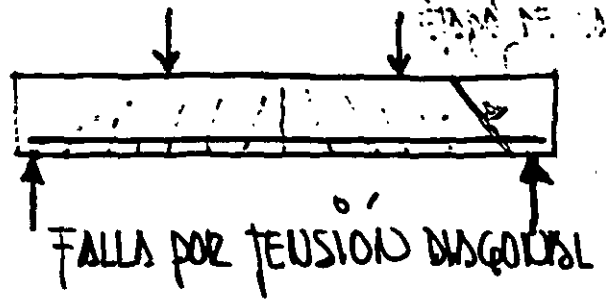


DISTRIB ESTRO EN UNA SECC



DISTRIBUCIÓN DE ESFUEROS PRINCIPALES

$$\tan \alpha = \frac{\tau_v}{f_x}$$



* SECCIONES NO RECTANGULARES
CIRCULARES, I, CAJON, ETC
LOS SECC I PUEDEN FALLAR POR APLAS
TAMIENTO DEL ALMA

3. TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL



BARRAS DOBLADAS



ESTRIBOS INCLINADOS

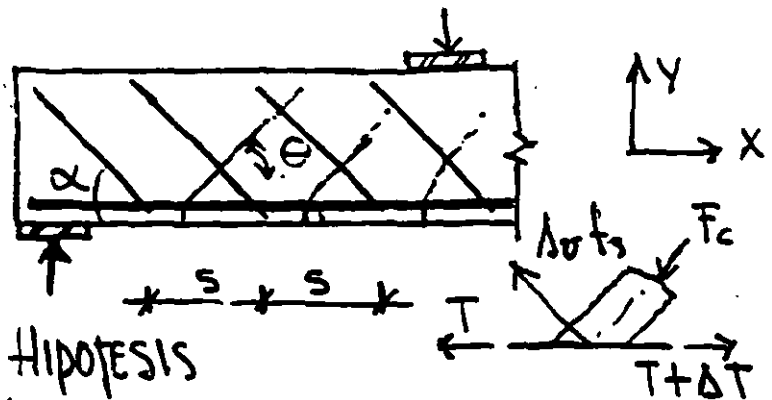


ESTRIBOS VERTICALES

$$\frac{V_s}{z} = \Delta \sigma f_s \left[\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \right]$$

$$V = \frac{\Delta \sigma f_s}{s} z \left[\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \right]$$

* ANALOGIA DE LA ARMADURA (RITTER 1899)



HIPOTESIS

- LA ZONA COMPRESIONADA TIENE SOLO ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESION
- EL REFZO LONG TIENE SOLO ESFUERZOS NORMALES DE TENSION
- LAS TENSIONES DIAGONALES SON RESISTIVAS POR EL REFZO TRANSV
- LAS GRIETAS DIAGONALES SE DESARROLLAN DEL REFZO LONG AL CENTRO DE LAS ZONAS DE COMPRESION
- SE DESPRECIA EL PESO DE LA VIGA. EL INCREMENTO DEL MOMENTO EN UNA DISTANCIA S ES:

$$\Delta M = V s$$

$$\sum F_y = 0 = \Delta \sigma f_s \sin \alpha - F_c \sin \theta = 0$$

$$\therefore F_c = \Delta \sigma f_s \sin \alpha / \sin \theta$$

$$\sum F_x = 0 = -T + T + \Delta T - \Delta \sigma f_s \cos \alpha - F_c \cos \theta = 0$$

$$\Delta T = \Delta \sigma f_s \cos \alpha + F_c \cos \theta$$

$$= \Delta \sigma f_s \left[\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \theta} \right]$$

$$\Delta M = \Delta T (z) = V s$$

CONSTANTE

REGLA MENTO ACI-83

$$V_u \leq \phi V_n \quad (11.1)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (11.2)$$

CUANDO LA REACCION INTRODUCE ESFUERZOS DE COMPRESION EN EL EXTREMO DE UN MIEMBRO LA SECCION CRITICA SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA "d" DEL PAÑO INTERIOR DEL APOYO.

METODO SIMPLIFICADO

$$V_c = 0.53 \sqrt{f_c'} b d \quad (11.3)$$

METODO DETALLADO

$$V_c = (0.5 \sqrt{f_c'} + 175 \rho_w \frac{V_u d}{\phi V}) b d \quad (11.6)$$

$$\frac{V_u d}{\phi V} \leq 1 \quad V_c \leq 0.93 \sqrt{f_c'} b d$$

EN LOS DOS METODOS:

PARA ESTRIBOS INCLINADOS

$$V_s = \frac{A_s f_y d (\sin \alpha + \cos \alpha)}{s}$$

PARA ESTRIBOS VERTICALES

$$V_s = \frac{A_s f_y d}{s}$$

$$f_y \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$$

ESPECIFICACIONES:

$$A_{s \min} = \frac{3.5 b s}{f_y} \quad s_{\max} = d/2$$

$$\text{CUANDO } V_s > 1.1 \sqrt{f_c'} b d \quad s_{\max} = d/4$$

$$V_s \leq 2.1 \sqrt{f_c'} b d$$

DEBE COLOCARSE REFUERZO TRANSVERSAL EN TODAS LAS SECCIONES DONDE:

$$V_u > \phi V_c / 2$$

ESPECIFICACIONES U.F.C.

2.1.5

4) FZA. CORTANTE DE F. PARA EL CONCRETO (V_{CR})

LAS EXPRESIONES DE V_{CR} SON APLICABLES CUANDO:

$$h \leq 70 \text{ cm}; \quad h/b \leq 6$$

PARA CADA CONDICIÓN QUE NO SE CUMPLA, SE DEBE REDUCIR V_{CR} EN 30%

I VIGAS SIN REFZO. CUANDO $L/h \geq 5$

$$\text{SI } p < 0.01; \quad V_{CR} = f_{Rt} (0.7 + 30p) \sqrt{f_c} (bd)$$

$$\text{" } p \geq 0.01; \quad V_{CR} = f_{Rt} bd (0.5 \sqrt{f_c})$$

$$V_u \leq 2.0 f_{Rt} bd \sqrt{f_c}$$

$$\text{SI } V_u > 1.5 f_{Rt} bd \sqrt{f_c}; \quad s_{\text{max}} = d/4$$

$$\text{SI } V_u < 1.5 f_{Rt} bd \sqrt{f_c}; \quad s_{\text{max}} = d/2$$

$$s_{\text{mín}} = \frac{3.5 b s}{f_{Rt} f_y}$$

II ELEMENTOS ANCHOS (LOSAS, ESPALDAS Y MUROS)

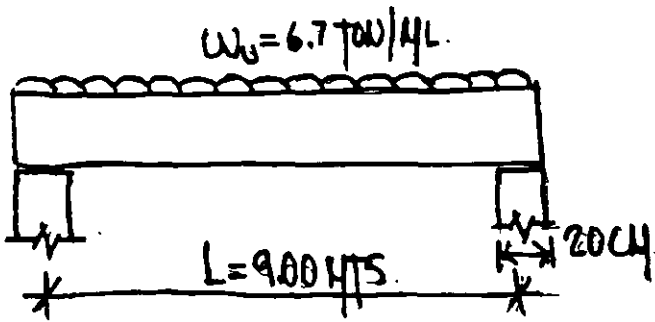
$$b \geq 4d; \quad \text{con } h = 60 \text{ cm} \quad \text{y } U/V_d \leq 2.0$$

$$\therefore V_{CR} = 1.5 f_{Rt} b d \sqrt{f_c}$$

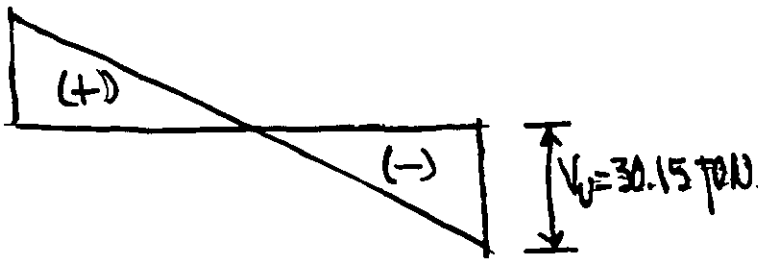
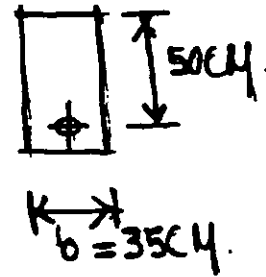
EL REFZO. POR FLEXIÓN DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS DE 3.1 ES DECIR, DEBE ESTAR ADECUADAMENTE ANCLADO A MUROS LARGOS DE LA SECC. DEBE SER A LA MÁX. POSIBLE QUEJTA UCLINADA PERPENDICULAR POR FZA. CORTANTE. EN ZAPATAS DE SECC. CTE. BASTA CON SUMINISTRAR EN LOS EXTREMOS ANCHOS ESTÁNDAR.

SI $h = 60 \text{ cm}$ y/o $U/V_d > 2.0$ V_{CR} SE CALCULA DE NUEVO CON LA SECC. I. EL ANCLAJE DEL REFZO. DEBE SER CON GANCHO EN LOS EXTREMOS.

REVISAR POR CORTANTE LA SIGUIENTE VIGA



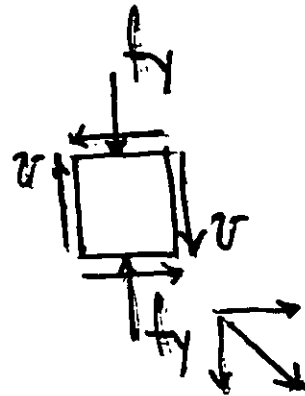
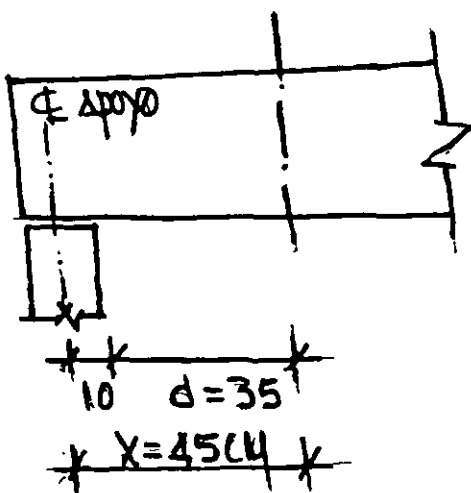
SECCION



MATERIALES:

$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$
 $f_y = 2800 \text{ KG/CM}^2$

SECCION CRITICA.



$$V_U = \frac{30.15 \times 4.05}{4.50} = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_U = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_U \leq \phi V_n$$

PARA CORTANTE $\phi = 0.85$

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f_c'} b w d$$

$$V_c = 13.12 \text{ TON}$$

$$V_{s_{REQ}} = V_u / \phi - V_c$$

$$V_{s_{REQ}} = 18.81 \text{ TON}$$

$$S_{REQ} = \frac{A_s f_y d}{V_s}$$

USANDO ESTRIBOS $\# 3$

$$S = \frac{1.42 \times 2800 \times 50}{18810} = 10.57 \text{ CM}$$

ESPECIFICACIONES:

SEPARACIÓN MÁXIMA

$$S \leq d/2$$

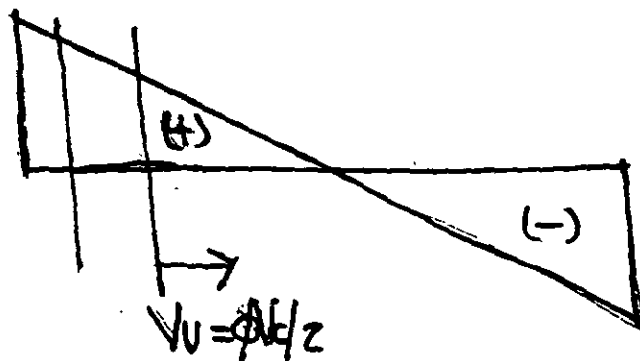
$$S \leq 25 \text{ CM} \leftarrow \text{RIGE}$$

ÁREA DE ACERO DE REFUERZO MÍNIMA

$$A_{s_{min}} = \frac{3.5 b w S}{f_y}$$

$$S_{max} = \frac{A_{s_{min}} f_y}{3.5 b w}$$

$$S_{max} = \frac{1.42 \times 2800}{3.5 \times 35} = 32 \text{ CM}$$



4.1.5 VIGAS DE SECCIÓN COMPUESTA

a) CONCEPTOS GENERALES

- ES, LA FORMADA POR UN ELEMENTO PREFABRICADO Y CONCRETO COLADO EN SITIO. LAS PARTES INTEGRANTES DEBEN ESTAR CONECTADAS DE MANERA QUE ACTÚEN COMO UNA UNIDAD. EL ELEMENTO PREFABRICADO PUEDE SER DE CONCRETO O DE ACERO. (EN ESTE ÚLTIMO CASO VER LAS NORMAS DE ESTRUCTURAS METÁLICAS)
- SI LAS f'_c , γ_c U OTRAS PROPIEDADES DEL CONCRETO DE LOS ELEMENTOS SON DIFERENTES, ~~SE~~ DEBEN TOMARSE EN CUENTA AL DISEÑAR O USAR LAS PROPIEDADES MÁS DESFAVORABLES.
- DEBERÁN TENERSE EN CUENTA LOS EFECTOS DEL APUNTAMIENTO O FALTA DEL MISMO SOBRE LAS DEFLEXIONES Y EL AGRIETAMIENTO.

b) EFECTOS DE LA FUERZA CORTANTE

- I EL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL, τ_h EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO ENTRE LOS ELEMENTOS QUE FORMAN LA VIGA PUEDE CALCULARSE CON LA EXPRESIÓN:

$$\tau_h = \frac{V_u}{f_r b_o d} \quad (4.1)$$

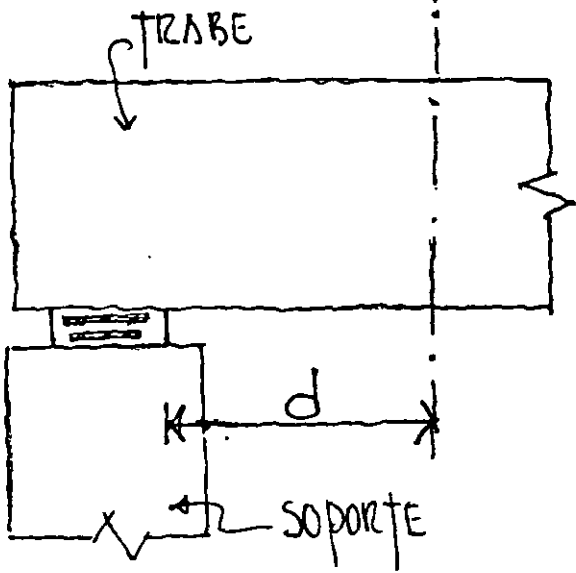
V_u = FZA. CORTANTE DE DISEÑO

b_o = ANCHO DEL ÁREA DE CONTACTO

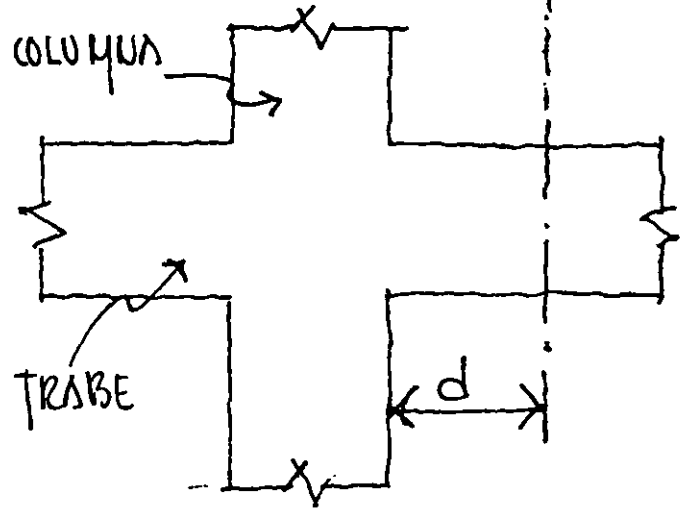
d = PERALTE EFECTIVO DE LA SECCIÓN COMPUESTA.

- II DEBE ASEGURARSE QUE SE TRANSMITAN LOS ESFUERZOS CORTANTES (τ_h) QUE ACTÚAN EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO.
- III PARA TRANSMITIR τ_h SE ADMITEN LOS VALORES SIGUIENTES:

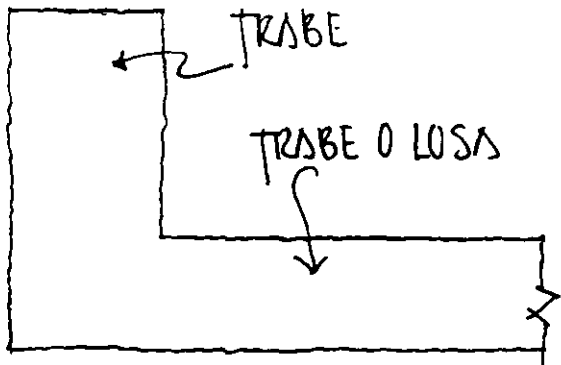
SECCIÓN CRÍTICA



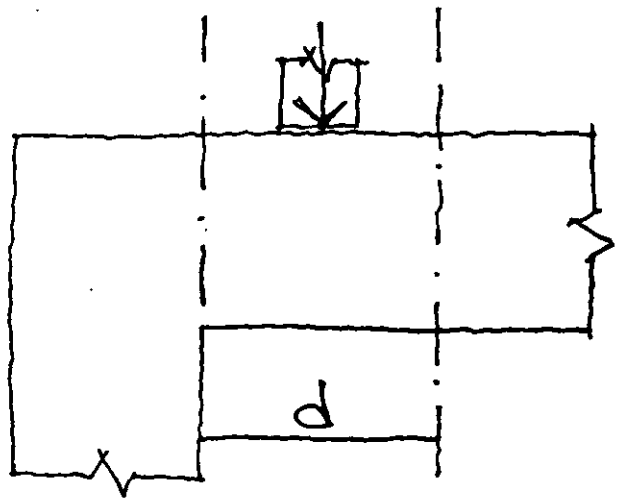
SECCIÓN CRÍTICA

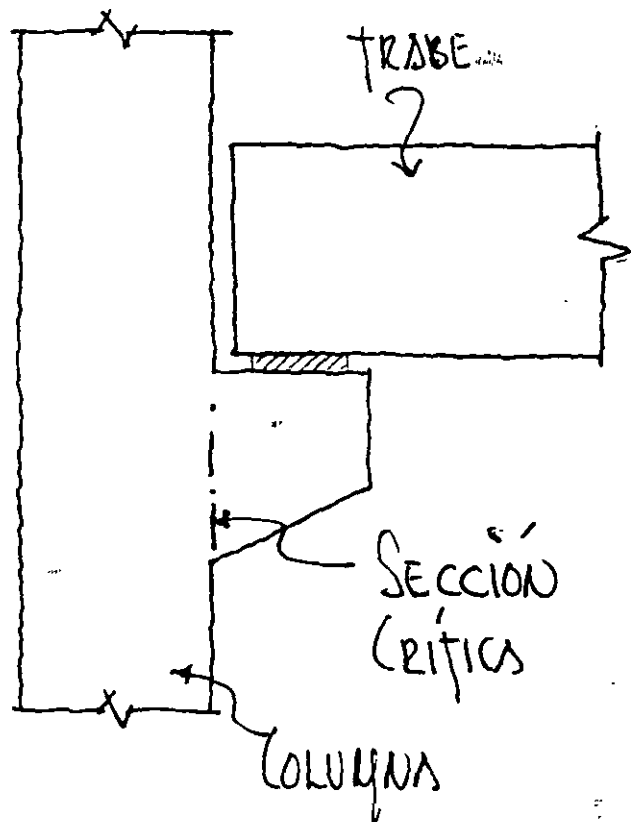
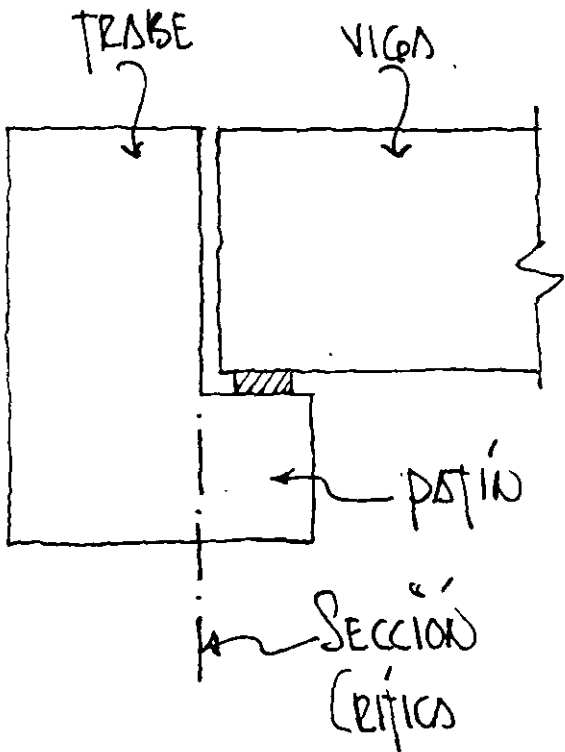
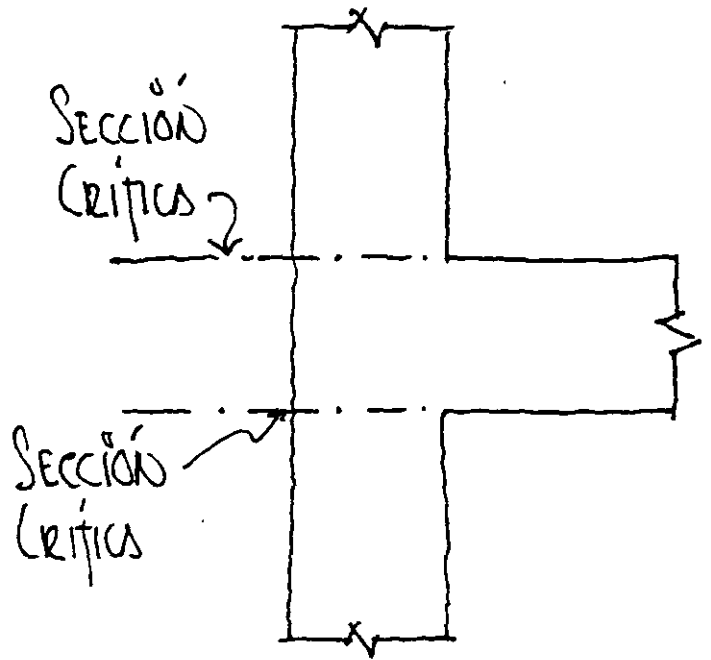
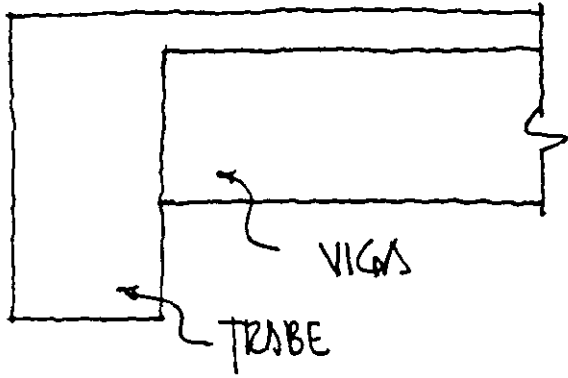


SECCIÓN CRÍTICA



SECCIÓN CRÍTICA





EJEMPLO 2: DISEÑO POR CORTANTE CON TENSIÓN AXIAL

ACERO DE REFUERZO $f_y = 4200 \frac{kg}{cm^2}$

CONCRETO (LIGERO CON ARENA) $f'_c = 250 \frac{kg}{cm^2}$

$M_d =$

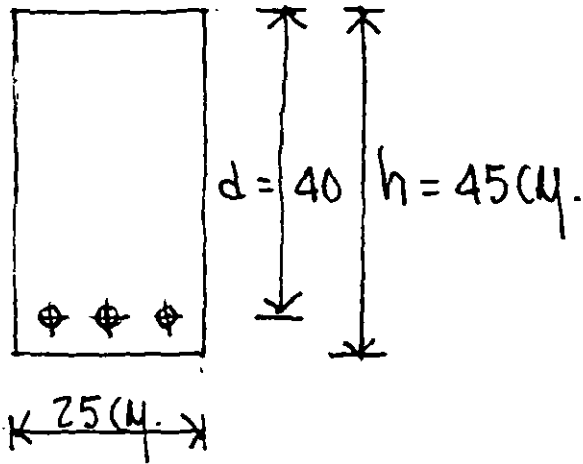
$M_l =$

$V_d = 5.82 \text{ ton}$

$V_l = 4.09 \text{ ''}$

$N_d = -0.91 \text{ '' (TENSIÓN)}$

$N_l = -6.91 \text{ '' ''}$



CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

REFERENCIA
AL CONGO

1. DETERMINAR LAS CARGAS FACTORIZADAS

$$V_u = 1.4 \times 5.82 + 1.7 \times 4.09 = 15.10 \text{ ton}$$

$$N_u = 1.4 \times (-0.91) + 1.7 \times (-6.91) = -13.02 \text{ ''}$$

2. CALCULAR ϕV_c

(COMO NO SE ESPECIFICA f_{ct})

$$\phi V_c = \phi \left[1 + \frac{N_u}{35 A_g} \right] (0.54 \times 0.85 \sqrt{f'_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left(1 + \frac{-13020}{35 \times 1125} \right) (0.54 \times 0.85 \sqrt{250}) 25 \times 40 = 4.13 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL ESPACIAMIENTO REQUERIDO DE ESTRIBOS

$$S_{req} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

USANDO ESTRIBOS #3 DOS RAMAS $A_v = 1.42 \text{ cm}^2$.

$$S_{req} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times 40 / (15.1 - 4.13) = 18.5 \text{ cm.}$$

VERIFICAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO

$$S_{max} = d/2 = 40 \text{ cm.}; S_{max} = A_v f_y / 3.5 b_w = 68 \text{ cm.}$$

\therefore USAR ESTRIBOS #3 @ 15 cm.

11.2.1.2

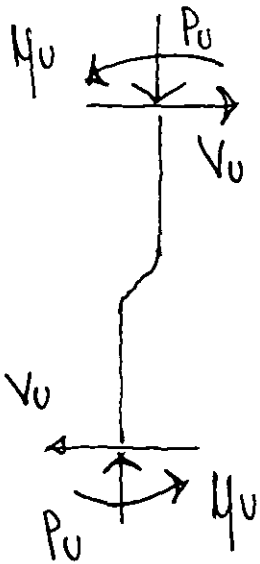
EJEMPLO 3: DISEÑO DE UN MIEMBRO POR CORTEANTE CON COMPRESIÓN AXIAL.

CONDICIÓN DE CARGAS 1:

$$M_u = 70 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 72.72 \text{ ton.}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$



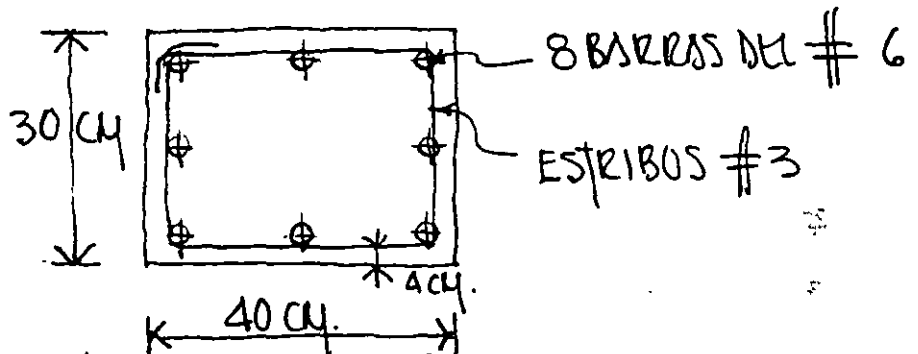
CONDICIÓN DE CARGAS 2:

$$M_u = 70 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 4.55 \text{ ton}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$

SECCIÓN TRANSVERSAL



ACERO DE REFUERZO: $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 CONCRETO: $f_c = 210 \text{ "}$

CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

CONDICIÓN 1:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTEANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO ϕV_c

$$d = 40 - (4 + 1 + 1) = 34 \text{ cm.}$$

$$\phi V_c = \phi \left(1 + \frac{N_u}{140 A_g} \right) (0.54 \sqrt{f_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left(1 + \frac{72720}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 = 9.70 \text{ ton.} > V_u = 9.09 \text{ ton}$$

REFERENCIA AL CÓDIGO

EC. (11-4)

CONDICIÓN 2:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO ϕV_c

$$\phi V_c = 0.85 \left(1 + \frac{4550}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 =$$

E.C. (11-4)

$$\phi V_c = 6.97 \text{ ton} < V_u$$

POR LO TANTO, SE REQUIERE COLOCAR ACEROS DE REFUERZO TRANSVERSAL

2. DETERMINAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO PARA ESTEBOS DEL #3.

$$S_{\text{max}} = d/2 = 34/2 = 17 \text{ cm.}$$

11.5 4.1

3. VERIFICAR LA RESISTENCIA A CORTANTE TOTAL

$$\phi V_s = \phi A_v f_y \frac{d}{s} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times \frac{34}{5} = \frac{172.36}{5}$$

PARA $s = 15 \text{ cm.}$

$$\phi V_s = 11.49 \text{ ton.}$$

$$\phi V_c + \phi V_s = 18.46 \text{ ton} > V_u$$

1. NO SE USAN ANCLAJES METÁLICOS Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÁ RUGOSA Y LIMPIA. ... 3 kg/cm²

2. SE CUMPLEN LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA LOS CONECTORES DEL INCISO III Y LA SUPERFICIE ESTÁ LIMPIA. 6 "

3. SE CUMPLEN LOS REQUISITOS PARA CONECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÁ LIMPIA Y RUGOSA. 25 "

(CUANDO $\tau_{\text{h}} > 25 \text{ kg/cm}^2$ EL DISEÑO SE HACE CON EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN DE 2.1.5 i)

IV LOS CONECTORES DEBEN ESTAR FORJADOS POR BARRAS O ESTRIBOS NORMALES A LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL ÁREA MÍNIMA DE ESTE REFZO SERÁ

$$A_{\text{min}} = (3/f_y) (\text{ÁREA DE CONTACTO})$$

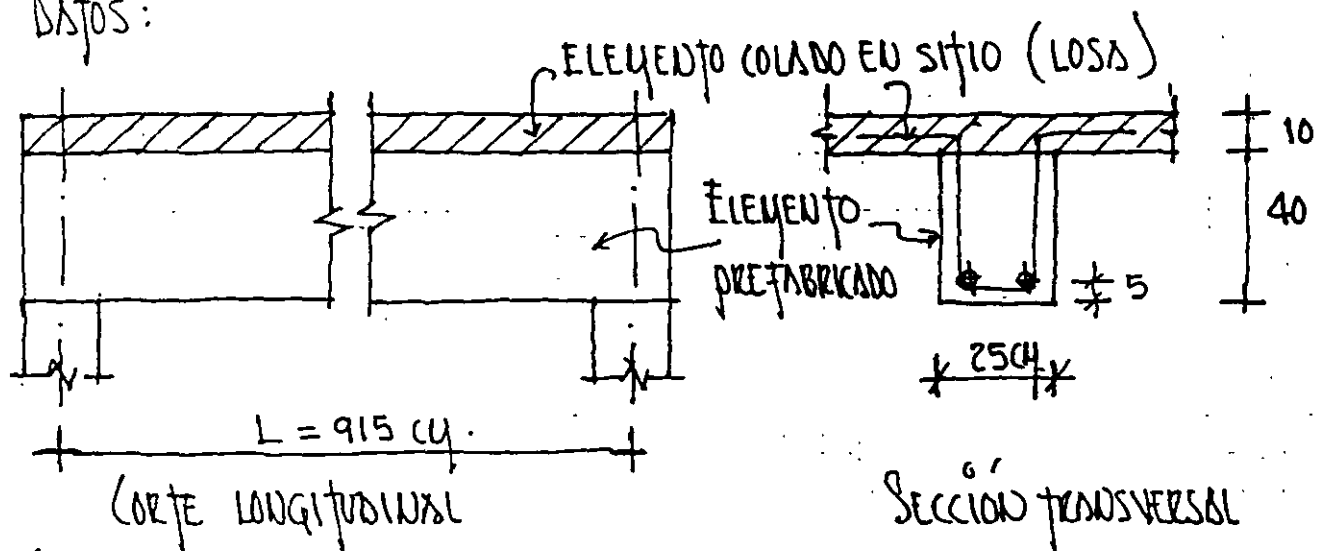
SU SEPARACIÓN (s) $s \leq 6$ (ESPESOR DEL ELEMENTO COLADO EN SITIO)
 $s \leq 60 \text{ cm.}$

LOS CONECTORES DEBEN ESTAR ANCLADOS EN AMBOS ELEMENTOS DE MODO QUE EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO DESARROLLEN AL MENOS $0.8 f_y$.

V EL REFZO. POR TENSIÓN DIAGONAL SE DIMENSIONARÁ IGUAL QUE PARA UNA VIGA MONOLÍTICA DE LA MISMA FORMA.

EJEMPLO: DISEÑAR POR CORTANTE HORIZONTAL LAS VIGAS DE SECCIÓN COMPUESTAS SIGUIENTE:

DATOS:



CARGA MUERTA DE SERVICIO = 470 KG/M

" VIVA " " = 350 "

$$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$$

$$f_y = 4200 "$$

SOLUCIÓN

1. DETERMINAR V_u EN EL EXTREMO

$$W_u = 1.4(0.47 + 0.35) = 1.15 \text{ ton/m}$$

$$V_u = 1.15 \times 9.15 / 2 = 5.26 \text{ ton}$$

2. DETERMINAR LA MAGNITUD DEL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL (τ_h)

$$\tau_h = \frac{5260}{0.8 \times 25 \times 45} = 5.85 \text{ KG/CM}^2$$

$$3 \text{ KG/CM}^2 < \tau_h < 6 \text{ KG/CM}^2$$

∴ SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA LOS CONECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA.

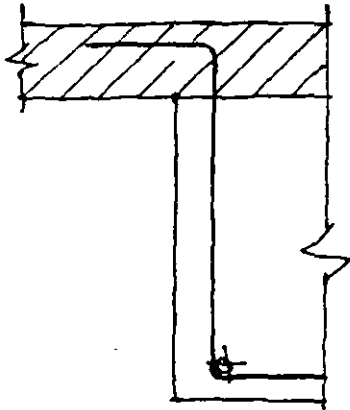
3. CALCULAR LA SEPARACIÓN Y EL AREA DE LOS COLECTORES

$$\text{SEPARACIÓN } S = 6(10) = 60 \text{ CM}$$

$$A_{sv \text{ min}} = (3/4200)(25 \times 60) = 1.07 \text{ CM}^2$$

USANDO COLECTORES DEL # 3 DOS RAYAS $A_{sv} = 1.47 \text{ CM}^2 > A_{sv \text{ min}}$

4. CALCULAR LOS REQUISITOS DE ANCLAJE DE LOS COLECTORES.



AUMENTANDO LAS CARGAS:

$$\text{CARGA MUERTA DE SERVICIO} = 470 \text{ KG/M}$$

$$\text{" VIVAS " " " = 1500 "}$$

SOLUCIÓN:

1. CALCULAR V_0 EN EL EXTREMO

$$W_0 = 1.4(0.47 + 1.50) = 2.76 \text{ TON/M.}$$

$$V_0 = 2.76 \times 9.15 / 2 = 12.63 \text{ TON.}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE σ_h

$$6 \text{ KG/CM}^2 < \sigma_h = \frac{12630}{0.8 \times 25 \times 45} = 14 \text{ KG/CM}^2 < 25 \text{ KG/CM}^2$$

∴ SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA COLECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA Y RUGOSA.

INCREMENTANDO LAS CARGAS A:

CARGA MUERTA DE SERVICIO = 800 KG/ML

• VIVAS " " = 3000 "

SOLUCIÓN

1. CALCULAR V_0 EN EL EXTREMO

$$W_0 = 1.4 (0.80 + 3.00) = 5.32 \text{ ton/ML}$$

$$V_0 = 5.32 \times 9.15 / 2 = 24.34 \text{ ton}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE σ_n

$$\sigma_n = \frac{24340}{0.8 \times 25 \times 45} = 27.14 \text{ kg/cm}^2 > 25 \text{ kg/cm}^2$$

∴ EL DISEÑO DEBE HACERSE CON EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN

17.5 RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL

EL CORTANTE HORIZONTAL EN MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN SE CUBRE EN EL CAP 17 DEL CÓDIGO.

LAS FUERZAS DE CORTANTE HORIZONTAL ACTÚAN SOBRE LA SUPERFICIE DE UNIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS DE LOS MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN. ESTAS FUERZAS HORIZONTALES SON PRODUCIDAS POR EL GRADIENTE DE MOMENTO DEBIDO A LAS FUERZAS CORTANTES VERTICALES. EN LA SECCIÓN 17.5.1, SE REQUIERE QUE SE TRANSMITA EL TOTAL DE LAS FUERZAS CORTANTES HORIZONTALES, GENERADAS EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL CÓDIGO CONSIDERA QUE LA RESISTENCIA DE UN MIEMBRO COMPUESTO ES LA MISMA YA SEA QUE ESTÉ APUNTALADO O NO.

LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL SE DEBE INVESTIGAR EN TODOS LOS MIEMBROS COMPUESTOS. CUANDO $V_u > \phi(35b_v d)$, EL DISEÑO SE DEBE HACER SEGÚN 11.7.4 (CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN). ÉSTE LÍMITE SUPERIOR, SE INCREMENTÓ DE $\phi(24.5b_v d)$ CORRESPONDIENTE A LAS EDICIONES ANTERIORES.

EL LÍMITE SUPERIOR DE LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL DEPENDE DE LAS CONDICIONES DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL REQUISITO COMÚN DE TODOS LOS CASOS ES QUE LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA. $V_{nh} < 5.6 b_v d$, CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO SE DEJA INTENCIONALMENTE RUGOSA (17.5.2.1) O, CUANDO SE USA UN MÍNIMO DE CONECTORES (17.5.2.2).

CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÉ INTENCIONALMENTE RUGOSA Y SE PROPORCIONE EL REFUERZO MÍNIMO DE CONECTORES:

$$V_{nh} < (18.2 + 0.6 p_r f) b_v d$$
$$(18.2 + 0.6 p_r f) < 35 \text{ kg/cm}^2$$

$$r_v = A_v / s_b$$

SI: $V_u > \phi(35)bd$, EL DISEÑO DE LA SECCION SE DEBE HACER USANDO EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN (SECCION 11.7.4 DEL CODIGO)

ii 1.0, PARA SUPERFICIE INTENCIONALMENTE RUGOSA

ii 0.6, PARA SUPERFICIE LISA

LA SECCION 17.5.2.5, FUE INTRODUCIDA EN LA EDICION DE 1992., DEFINE EL PERALTE EFECTIVO PARA DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL COMO LA DISTANCIA DE LA FIBRA EXTREMA A COMPRESION AL CENTROIDE DEL ACERO A TENSION, O 0.8 DEL PERALTE TOTAL DE LA SECCION COMPUESTA. ESTO ACLARA LA DEFINICION DE d PARA SECCIONES COMPUESTAS, HACIÉNDOLO CONSISTENTE CON EL DISEÑO POR CORTANTE DEL RESTO DEL CODIGO. ESTA SECCION ES SIGNIFICATIVA PARA EL DISEÑO DE MIEMBROS PESFORZADOS EN LOS QUE EL PERALTE VARIA A LO LARGO DEL MIEMBRO. EL CODIGO TAMBIEN PRESENTA UN METODO ALTERNATIVO PARA EL DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL EN LA SECCION 17.5.3. LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL QUE DEBE TRANSMITIRSE A TRAVES DE LA SUPERFICIE DE UNION DE LAS PARTES DEL ELEMENTO COMPUESTO SE TOMA COMO EL CAMBIO EN LA FUERZA DE TENSION O COMPRESION EN UN TRAMO DE VIGA. CUANDO SE USA ESTE METODO, LOS LIMITES DE 17.5.2.1 A 17.5.3.1, SE APLICAN,

SUSTITUYENDO A_c POR $b_v d$ EN LA EXPRESION. LA SECCION 17.5.3.1 TAMBIEN REQUIERE QUE EL ACERO ESTE DISTRIBUIDO PARA REFLEJAR EN FORMA APROXIMADA LA VARIACION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO. ESTE REQUISITO ENFATIZA LA DIFERENCIA ENTRE EL DISEÑO DE MIEMBROS COMPUESTOS SOBRE CONCRETO Y ACERO. EL DESLIZAMIENTO CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ENTRE UNA VIGA DE ACERO Y UNA LOSA QUE FORMAN SECCION COMPUESTA ES GRANDE, LO CUAL PERMITE LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL MIEMBRO. EN MIEMBROS DE CONCRETO QUE FORMAN SECCION COMPUESTA CON LA LOSA, EL DESLIZAMIENTO CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ES PEQUEÑO Y POR TANTO LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO ES LIMITADA. POR TANTO, LA DISTRIBUCION DEL REFUEZO POR CORTANTE HORIZONTAL DEBE BASARSE EN LA DISTRIBUCION CALCULADA DEL CORTANTE HORIZONTAL FACTORIZADO, PARA EL CASO DE MIEMBROS COMPUESTOS DE CONCRETO.

CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

DE ACUERDO CON 17.6.3, SE REQUIERE QUE LOS CONECTORES ESTEN TOTALMENTE ANCLADOS EN LOS ELEMENTOS INTERCONECTADOS CUMPLIENDO CON 12.13. LA FIGURA 1 MUESTRA ALGUNOS DETALLES QUE HAN USADOS CON EXITO TANTO EN ENSAYES COMO EN LA PRACTICA.

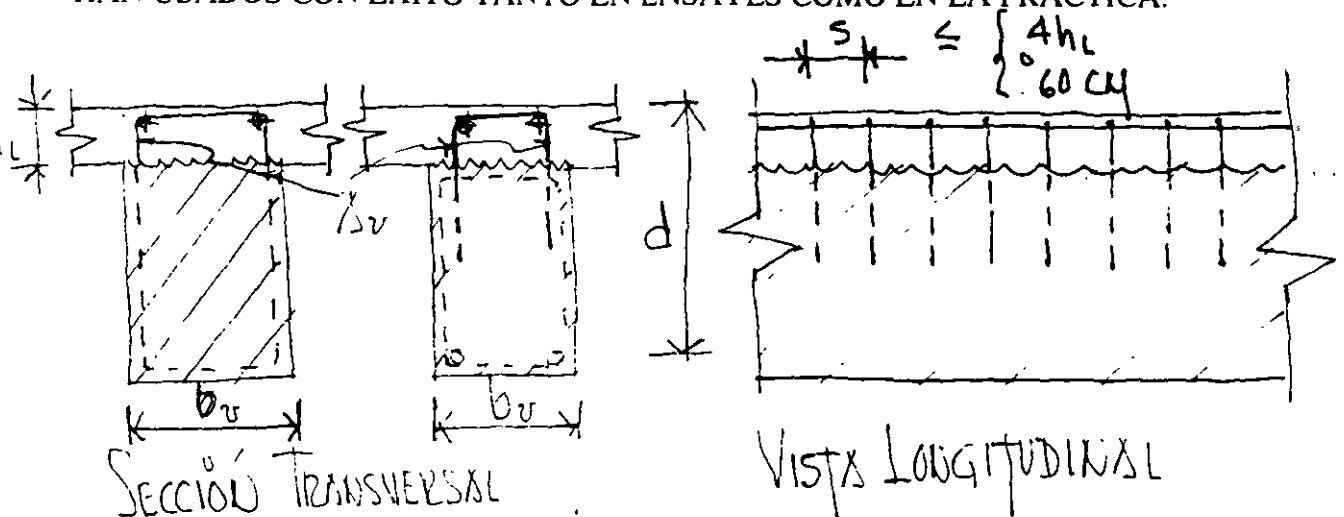
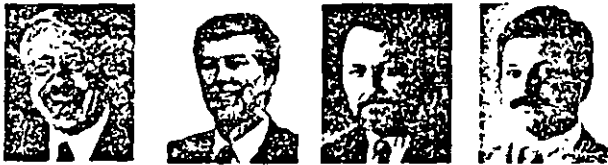


FIG. 1. CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

$$P_v = \frac{\Delta v}{b_v s}$$

$$\Delta v_{min} = \frac{3.5 b_v s}{f_y}$$

A General Shear Design Method



by Michael P. Collins, Denis Mitchell, Perry Adebar, and Frank J. Vecchio

A simple, unified method is presented for the shear design of both prestressed concrete members and nonprestressed concrete members. The method can treat members subjected to axial tension or axial compression and treats members with and without web reinforcement. The derivation of the method is summarized and the predictions of the method are compared with those of the current ACI Code.

Keywords: aggregate interlock; axial loads; building codes; crack width and spacing; reinforced concrete; shear strength; structural design.

The shear design provisions of the 1995 ACI Code¹ consist of about 43 empirical equations for different types of members and different types of loading, some of which are illustrated in Fig. 1. In 1973, the ACI-ASCE Shear Committee² expressed the hope that these "design regulations for shear strength can be integrated, simplified, and given a physical significance." As shown by the growth in the number of ACI shear design equations (see Fig. 2), the code has not met this desirable goal. It is interesting to note that, prior to 1963, the ACI shear design procedure was so simple that only four equations were required.

Most of the shear design equations given in Fig. 1 were introduced in either the 1963 or 1971 edition of the ACI Code.^{3,4} These design equations were developed in the period following the 1955 air-force warehouse shear failures⁵ and rely on the traditional concept of adding a concrete contribution V_c to the shear reinforcement contribution V_s calculated on the basis of the 45 deg truss equation.

Since 1971 there has been an intensive research effort aimed at improving design methods for shear (see Fig. 3). The research has shown that, in general, the angle of inclination of the concrete compression is not 45 deg, and that equations based on a variable angle truss provide a more realistic basis for shear design. In addition, tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear⁶ improved the understanding of the stress-strain characteristics of diagonally cracked concrete.

Stress-strain relationships made it possible to develop a physical model, called the modified compression field theory, that proved capable of accurately predicting the response of reinforced concrete subjected to shear.

The objective of this paper is to present briefly a simple, general shear design method based on the modified compression field theory. This design method, recently introduced by Collins and Mitchell,⁷ has been adopted by the Ontario Highway Bridge Design Code,⁸ the Canadian Standards Association Concrete Design Code,⁹ and the AASHTO LRFD specifications.¹⁰ The method is summarized in Fig. 4.

SHEAR RESPONSE OF CRACKED CONCRETE

Tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear (see Fig. 4) demonstrated that even after cracking, tensile stresses exist in the concrete and that these stresses can significantly increase the ability of reinforced concrete to resist shear stresses.

Cracked reinforced concrete transmits load in a relatively complex manner involving opening or closing of pre-existing cracks, formation of new cracks, interface shear transfer at rough crack surfaces, and significant variation of the stresses in reinforcing bars due to bond, with the highest steel stresses occurring at crack locations. The modified compression field model attempts to capture the essential features of this behavior without considering all of the details. The crack pattern is idealized as a series of parallel cracks all occurring at angle θ to the longitudinal direction. In lieu of following the complex stress variations in the cracked concrete, only the average stress state and the stress state at a crack are considered [see Fig. 4(b) and 4(c)]. As these two states of stress are statically equivalent, the loss of tensile stresses in the concrete at the crack must be replaced by increased steel stresses or, after yielding of some of the reinforcement at the crack, by shear stresses on the crack interface. The shear stress that can be transmitted across the crack will be a function of the crack width. Note that shear stress on the crack implies that the direction of principal stresses in the concrete changes at the crack location.

ACI Structural Journal, V. 93, No. 1, January-February 1996

Received June 17, 1994, and reviewed under Institute publication policies. Copyright © 1995, American Concrete Institute. All rights reserved, including the making of copies unless permission is obtained from the copyright proprietor. Terms of discussion will be published in the November-December 1996 *ACI Structural Journal* if received by July 1, 1996.

Michael P. Collins, F.A.C.I., is Baben-Jambouma Professor of Civil Engineering at the University of Toronto, Toronto, Canada. He is a member of ACI Committee 358 Concrete Girders, the ACI Technical Activities Committee subcommittee on High-Performance Concrete, and joint ACI-ASCE Committee 445 Shear and Torsion. He is a member of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

Dennis Mitchell, F.A.C.I., is a professor in the Department of Civil Engineering and Applied Mechanics at McGill University. He is a member of ACI Committee 408, Bond and Development of Reinforcement, and ACI-ASCE Committee 445 Shear and Torsion. He is Chairman of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

ACI member Perry Adebar is an associate professor in the Department of Civil Engineering at the University of British Columbia, Vancouver, Canada. He is Secretary of ACI Committee 344 Earthquake Resistant Concrete Bridges, and joint ACI-ASCE Committee 445 Shear and Torsion. He is Chairman of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

ACI member Frank J. Vecchio is a professor in the Department of Civil Engineering at the University of Toronto. He is a member of ACI Committees 441, Reinforced Concrete Columns, and 447, Finite Element Analysis, and of the CEB Committee on Constitutive Modeling.

The average principal tensile strain ϵ_1 in the cracked concrete is used as a "damage indicator" that controls the average tensile stress f_1 in the cracked concrete. The ability of the diagonally cracked concrete to carry compressive stresses f_2 , and the shear stress v_{ci} that can be transmitted across a crack

The principal compressive stress in the concrete f_2 is related to both the principal compressive strain ϵ_2 and the principal tensile strain ϵ_1 in the following manner [see Fig. 5(a)]

$$f_2 = f_{2max} \left[\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_c'} - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

where

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_1) \leq f_c' \quad (2)$$

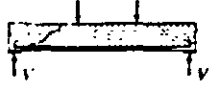
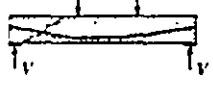
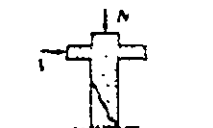
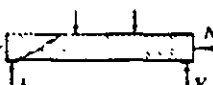
ACI Method		General Method
$V_n = V_c + V_s$		$V_n = V_c + V_s + V_p$
Non-Prestressed Beams 	$V_c = \left(1.9 \sqrt{f_c'} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$ but $\frac{V_u d}{M_u} \leq 1.0$ $V_c \geq 3.5 \sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = 2 \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s}$ $V_s \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	$V_c = \beta \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y}{s} d \cot \theta$ where β and θ are functions of the strain, ϵ_1 , shear stress, v , and crack spacing, s_r where $v = \frac{V_n - V_p}{b_w d}$ and $s_r = \frac{M_u / d_w + 0.5(N_u + V_u \cot \theta) - A_p f_{pr}}{F_s A_s + F_p A_p}$
Prestressed Beams 	$V_c = \left(0.8 \sqrt{f_c'} + 700 \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$ but $2 \sqrt{f_c'} b_w d \leq V_c \leq 5 \sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = V_{ci} = 0.6 \sqrt{f_c'} b_w d + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{max}}$ but $V_{ci} \geq 1.7 \sqrt{f_c'} b_w d$ and $V_c \leq V_{cr} = \left(3.5 \sqrt{f_c'} + 0.3 f_{pc} \right) b_w d + V_p$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
Axial Compression and Shear 	$V_c = \left(1.9 \sqrt{f_c'} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u - N_u \left(\frac{4h - d}{8} \right)} \right) b_w d$ $V_c \leq 3.5 \sqrt{f_c'} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500 A_g}}$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} < 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
Axial Tension and Shear 	$V_c = 2 \left(1 - \frac{N_u}{500 A_g} \right) \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
Detailing Rules <ul style="list-style-type: none"> Reinforcement shall extend beyond the point at which it is no longer required to resist flexure for a distance equal to the effective depth of the member or $12d_s$, which is greater... Flexural reinforcement shall not be terminated in a tension zone unless <ul style="list-style-type: none"> shear at cutoff $\leq 2/3$ shear permitted, or stirrup area, A_{sv}, in excess of that required for shear and torsion, is provided ... $A_{sv} \geq 60 b_w s f_y$... $s \leq d/8 \beta_s$, or for #11 bars or smaller: shear at the cutoff $\leq 3/4$ shear permitted and continuing reinforcement provides double the area required for flexure at the cutoff. At simple supports and points of inflection, the diameter of the positive moment tension reinforcement shall be limited so that $l_d \leq \frac{M_u}{V_u} + l_s$ 		Detailing Rules Longitudinal steel must be detailed so that $A_s f_y + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi d_s} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left(\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p \right) \cot \theta$

Fig. 1--Comparison of ACI and proposed shear design approaches

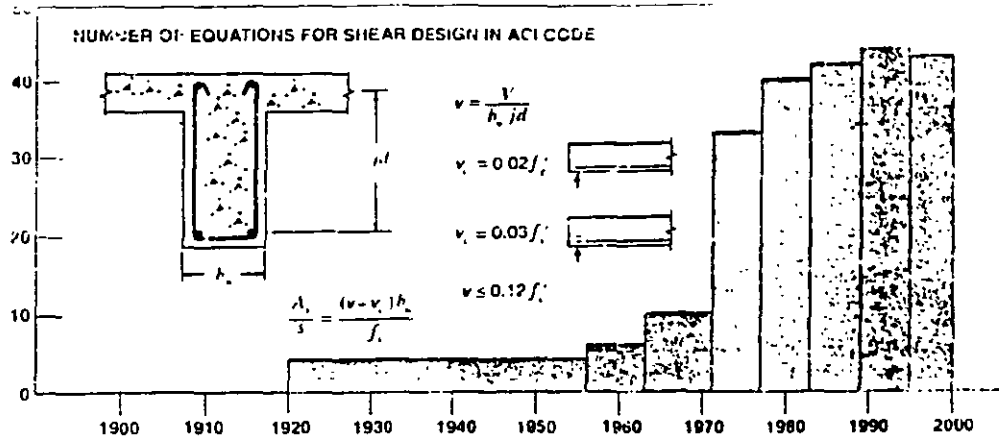


Fig. 2—Number of ACI shear design equations

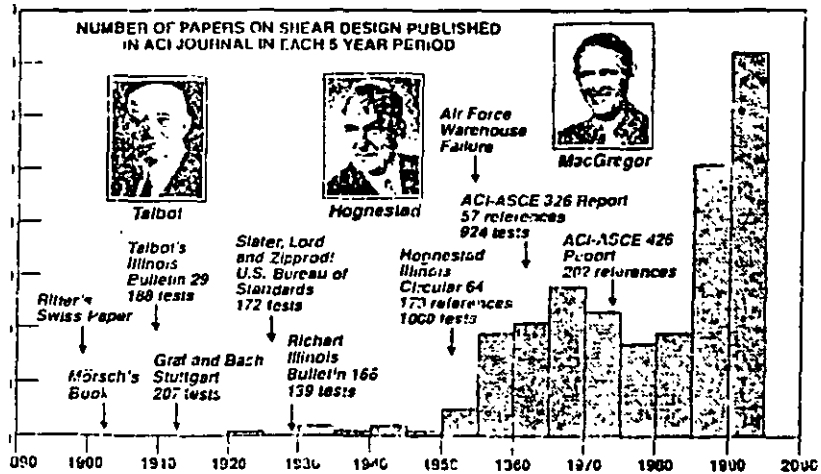


Fig. 3—Research into shear design methods

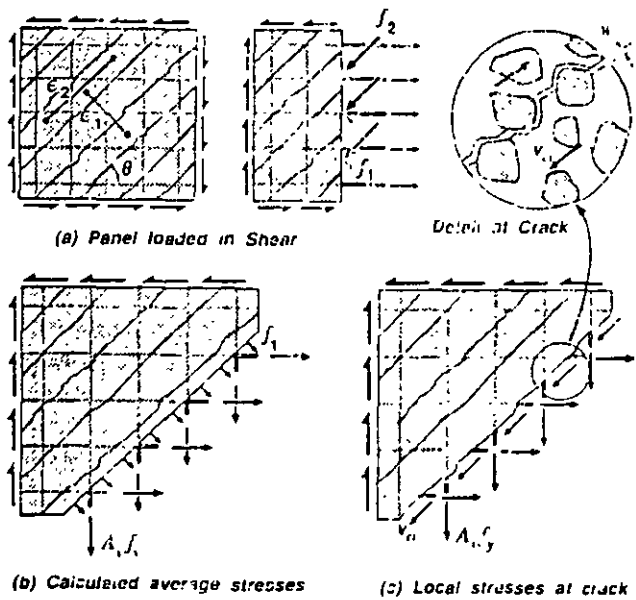


Fig. 4—Reinforced concrete panels subjected to shear

From Eq. (1), the principal compressive strain for the loading condition of the stress-strain relationship is

$$\epsilon_2 = -0.002 \left(1 - \sqrt{1 - f_1 / f_{2max}} \right) \quad (3)$$

where ϵ_1' has been taken as -0.002.

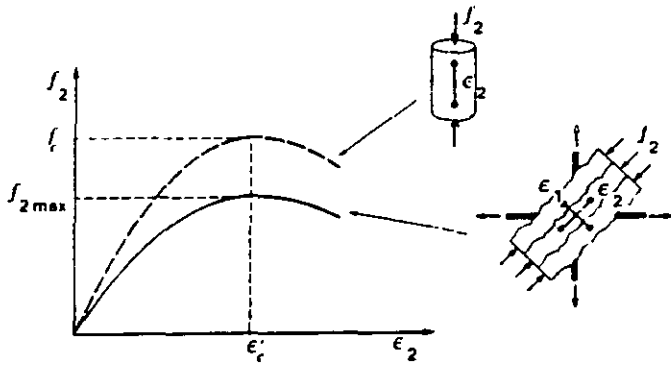
After cracking, the principal tensile stress in the concrete f_1 is related to the principal tensile strain ϵ_1 as follows [see Fig. 5(b)]

$$f_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \quad (4)$$

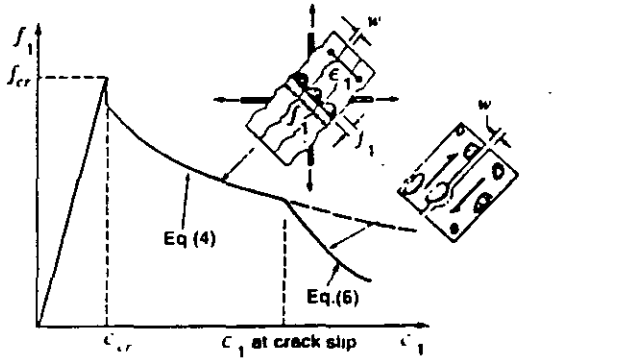
where the cracking stress f_{cr} can be taken as $4 \sqrt{f_c}$ psi ($0.33 \sqrt{f_c}$ MPa). For large values of ϵ_1 , the cracks will become wide and the magnitude of f_1 will be controlled by the yielding of the reinforcement at the crack and by the ability to transmit shear stresses v_s across the cracked interface [see Fig. 5(b)]. The shear stress that can be transmitted across the crack is a function of the crack width w and the aggregate size c [see Fig. 4(c)], as given by

$$v_{cr} = \frac{2.16 \sqrt{f_c}}{0.3 + \frac{2+w}{a+0.63}} \quad \text{psi and in.} \quad (5)$$

For MPa and mm units, replace the 2.16 by 0.18 and the 0.63 by 16.



(a) Softening of compressive stress-strain curve due to transverse tensile strain



(b) Average tensile stresses in cracked concrete as a function of ϵ_1
 Fig. 5—Stress-strain relationships for cracked concrete

If the stirrups have reached their yield stress and the crack begins to slip, the average tensile stress in the concrete f_1 is limited to

$$f_1 = v_{cr} \tan \theta \quad (6)$$

The previous stress-strain relationships, together with equilibrium and compatibility, can be used to predict the load-deformation response of reinforced concrete beams subjected to shear.¹¹ In addition, these relationships can be used as the basis for non-linear finite element formulations.^{12,13}

DESIGN OF STIRRUPS FOR SHEAR

In applying the modified compression field theory to the design of beams, it is appropriate to make a number of simplifying assumptions. As illustrated in Fig. 6, the shear stresses are assumed to be uniform over the effective shear area $b_s d_v$. The highest longitudinal strain ϵ_1 occurring within the web is used to calculate the principal tensile strain ϵ_1 . For design, ϵ_1 can be approximated as the strain in the flexural tension reinforcement. The determination of ϵ_1 for a nonprestressed beam is illustrated in Fig. 7. For a prestressed concrete member, the concrete surrounding the reinforcement will remain in compression until the applied tension exceeds the prestress force $A_p f_{ps}$, where f_{ps} is the stress in the tendon when the surrounding concrete is at zero stress. In lieu of more accurate calculations, f_{ps} can be taken as 1.10 times f_{cr} .

Hence, for design

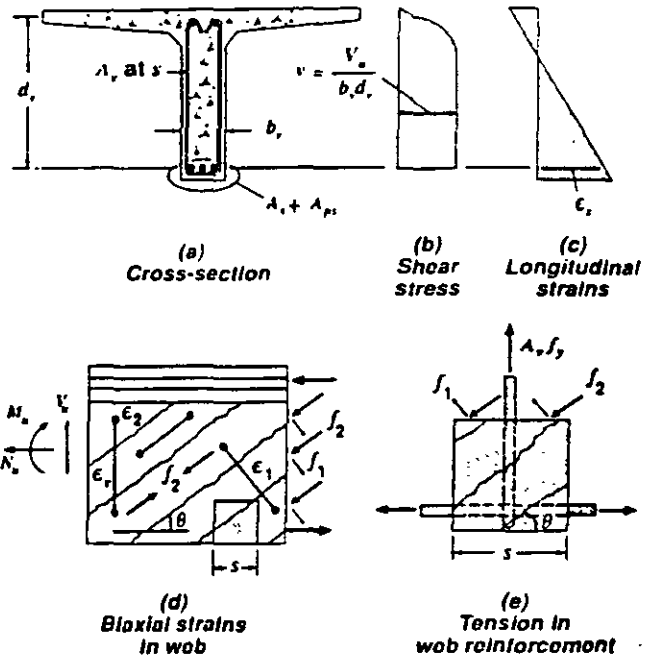


Fig. 6—Beam subjected to shear, moment, and axial load

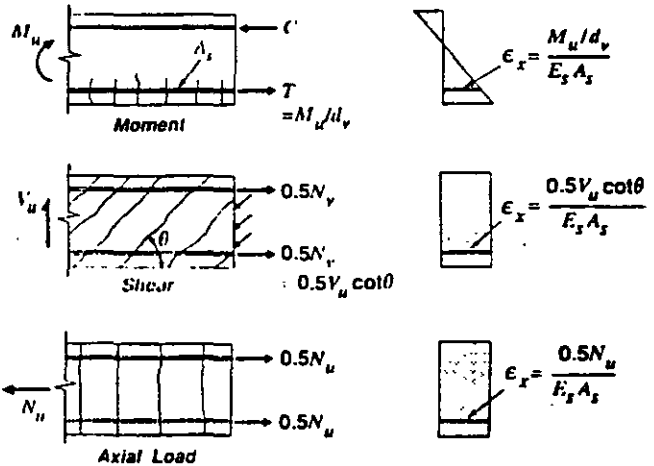


Fig. 7—Determination of strain ϵ_1 for nonprestressed beam

$$\epsilon_1 = \frac{(M_u/d_v) + 0.5N_u + 0.5V_u \cot \theta - A_p f_{ps}}{E_s A_s + E_p A_{ps}} \geq 0 \quad (7)$$

ability, the principal tensile strain ϵ_1 can be related to the longitudinal strain ϵ_1 , the direction of the principal compressive stress θ , and the magnitude of the principal compressive strain ϵ_2 in the following manner

$$\epsilon_1 = \epsilon_1 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cot^2 \theta \quad (8)$$

Hence, as the longitudinal strain ϵ_x becomes larger and the inclination θ of the principal compressive stresses becomes smaller, the "damage indicator" ϵ_1 becomes larger. The nominal shear strength V_n of a member can be expressed as

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_1 b_s d_v \cot \theta + \frac{A_v f_y}{s} d_v \cot \theta + V_p$$

$$= \beta \sqrt{f'_c} b_v d_v + \frac{A_v f_s}{s} d_v \cot \theta + V_p \quad (9)$$

From the expressions for the average tensile stress in the cracked concrete [Eq. (4) and (6)], the tensile stress factor β can be determined as

$$\beta = \frac{4 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{2.16}{0.3 + \frac{24w}{a + 0.63}} \text{ psi and in.} \quad (10)$$

For MPa and mm units, replace the 4 by 0.33, the 2.16 by 0.18, and the 0.63 by 16. The crack width w is taken as the crack spacing times the principal tensile strain ϵ_1 .

It can be seen from the previous expressions for β that as the tensile straining of the concrete increases (i.e., ϵ_1 increases), the shear that can be resisted by tensile stresses in the concrete V_t decreases. The value of the principal tensile strain ϵ_1 will depend on the magnitudes of the longitudinal strain ϵ_x , the principal compressive strain ϵ_2 , and the inclination θ of the principal stresses [see Eq. (8)]. Strain ϵ_2 can be found from Eq. (3). In using this equation, the principal compressive stress f_2 can be conservatively taken as

$$f_2 = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

where

$$v = \frac{V_u - V_p}{b_v d_v} \quad (12)$$

From Eq. (3), (8), and (11), ϵ_1 can be expressed as

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[\epsilon_x + 0.002 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{f'_c} (\tan \theta + \cot \theta) (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot \theta \quad (13)$$

Table 1—Values of θ and β for members with web reinforcement

$\frac{v}{f'_c}$		Longitudinal strain $\epsilon_1 \times 1000$					
		≤ 0	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 1.00	≤ 1.50	≤ 2.00
≤ 0.050	θ deg	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	β	4.88	3.49	2.51	2.23	1.95	1.72
≤ 0.075	θ deg	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	β	4.88	3.01	2.47	2.16	1.90	1.65
≤ 0.100	θ deg	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	β	3.26	2.54	2.41	2.09	1.72	1.45
≤ 0.150	θ deg	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	β	2.55	2.45	2.28	1.93	1.50	1.24
200	θ deg	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	β	2.45	2.33	2.10	1.58	1.21	1.00
250	θ deg	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	β	2.30	2.01	1.64	1.40	1.30	1.25

Note: for β values in MPa units divide given values by 12.

To use Eq. (9) to determine the required stirrups, the designer needs to determine appropriate values of θ and β . For this purpose, Table 1 gives suitable values of θ and β as functions of the longitudinal strain ϵ_1 and the shear stress level v/f'_c . While the values in Table 1 were calculated assuming a diagonal crack spacing of 12 in. (305 mm) and a maximum aggregate size of 3/4 in. (19 mm), it is believed that these values are appropriate for the full range of beams containing stirrups.

The θ values given in Table 1 have been chosen to insure that the stirrup strain ϵ_s is at least equal to 0.002 and to insure that, for highly stressed members, the principal compressive stress f_2 in the concrete does not exceed the crushing strength f_{2max} . Within the range of values of θ that satisfy these requirements, the values given in Table 1 will result in close to the smallest amount of shear reinforcement.

While the values in Table 1 can be applied to a range of values of ϵ_1 and v/f'_c (e.g., $\theta = 36$ deg and $\beta = 2.09$ can be used provided that ϵ_1 is not greater than 1×10^{-3} and v/f'_c is not greater than 0.10), they were calculated for the upper limits of the range. Linear interpolation between the values given in Table 1 could be used, but it is usually not worth the effort.

At a particular section of a member subjected to V_u , M_u , and N_u , the required shear strength is determined from

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

where the strength reduction factor ϕ can be taken as 0.85.

The amount of stirrups required at the section can then be found from Eq. (9) as

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_t - V_p \quad (15)$$

While this calculation is performed for a particular section, a shear failure caused by yielding of the stirrups involves yielding the reinforcement over a length of beam about $d_v \cot \theta$ long. Hence, the calculations for one section can be taken as representing a length of beam, $d_v \cot \theta$ long, with the calculated section being in the middle of this length. Thus, near a support, the first section to be checked is the section $0.5d_v \cot \theta$ from the face of the support. Near concentrated loads, sections closer than $0.5d_v \cot \theta$ to the load need not be checked. As a simplification, the term $0.5d_v \cot \theta$ may be taken as d_v . Since 1963, the ACI Code has required that at least a minimum area of stirrups be provided whenever V_u exceeds one-half of the shear strength provided by the concrete. For the design method presented in this paper, it is recommended that a minimum area of stirrups be provided if

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

where the minimum requirement is

$$\frac{A_v f_s}{b_v s} \geq 0.72 \sqrt{f'_c} \text{ psi}$$

for MPa units replace the 0.72 by 0.06.

DESIGN OF LONGITUDINAL REINFORCEMENT

Fig. 8 illustrates the influence of shear on the tensile forces in the longitudinal reinforcement. While the moment is zero at the simple support B, there still needs to be considerable tension in the longitudinal reinforcement near the support. The required tension in the bottom reinforcement at Support B can be determined from the free body diagram in Fig. 8(b) by taking moments about Point C and assuming that the aggregate interlock force in the crack that contributes to V_c has a negligible moment about Point C. For this nonprestressed beam, the tensile force required at the inner edge of the bearing area is

$$T = \left(\frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c \right) \cot \theta \quad (17)$$

Eq. (17) gives the additional tension due to shear. Hence, at a section subjected to a shear V_u , a moment M_u , and an axial force N_u , the longitudinal reinforcement on the flexural tension side of the member must satisfy

$$A_s f_s + \rho_p f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi f_t} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left(\frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c \right) \cot \theta \quad (18)$$

At maximum moment locations, the shear force changes sign and hence, the inclination of the diagonal compressive stresses changes. At direct supports and point loads, this change of inclination is associated with a fan-shaped pattern of compressive stresses radiating from the point load or the direct support, as shown in Fig. 8(a). This fanning of the diagonal stresses reduces the tension in the longitudinal reinforcement caused by the shear (i.e., angle θ becomes steeper). Due to this effect, tension in the reinforcement does not exceed that due to the maximum moment alone.

MEMBERS WITHOUT WEB REINFORCEMENT

In evaluating the β factors given in Table 1, it was assumed that the diagonal cracks in webs containing stirrups would be spaced about 12 in. (303 mm) apart. For members not containing web reinforcement, this assumption may be unconservative, hence, it is inappropriate to use the β factors in Table 1 to evaluate the shear strength of members without web reinforcement.

For members without stirrups, the ability of the cracked concrete to transmit shear is primarily governed by the width of the diagonal cracks [see Eq. (10)]. The crack width can be taken as the principal tensile strain ϵ_t multiplied by the crack spacing. Hence, for a given value of ϵ_t , the shear strength will be a function of the crack spacing, with more widely spaced cracks resulting in low shear capacities.

Fig. 9 illustrates the assumptions made in this design method concerning the crack spacing. For members without stirrups, the diagonal cracks will become more widely spaced as θ approaches zero. The crack spacing when $\theta = 90$ deg is called s_x , and this spacing is primarily a function of the maximum distance between reinforcing bars or between reinforcing bars and the diagonal compression zone.

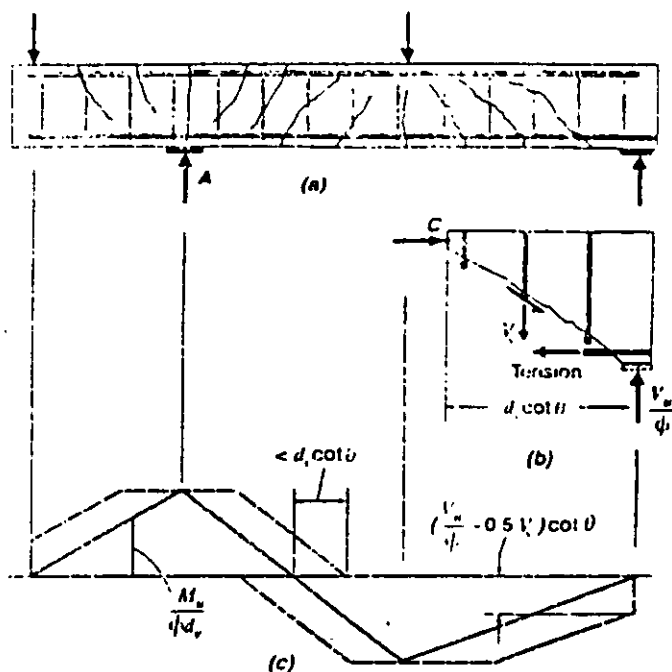


Fig. 8—Influence of shear on forces in longitudinal reinforcement

The factor β , which is the indicator of the ability of the cracked concrete to transmit shear, is a function of θ , ϵ_t , and s_x . For given values of ϵ_t and s_x and a chosen value of θ , the factor β can be calculated from Eq. (9), (10), (12) and (13). Table 2 lists the values of θ that will result in the highest β values for cracked concrete. The β values in Table 2 were derived assuming that the maximum aggregate size a was $3/4$ in. (19 mm). However, the tabulated values can be used for other aggregate sizes by using an equivalent spacing parameter s_{xe} [see Eq. (10)] such that

$$s_{xe} = s_x \frac{1.38}{a + 0.63} \text{ in.} \quad (19)$$

For mm units, replace the 1.38 by 35 and the 0.63 by 16. For members without well-distributed crack control reinforcement, the crack spacing parameter s_x will increase as the member size increases. It is apparent from Table 2 that an increase in s_x results in a decrease in shear capacity.

Compelling evidence of the reduction in shear stress capacity that occurs as members become larger was provided by an extensive experimental program conducted in Japan by Shioya, et al.^{14,15} In the program, lightly reinforced beams without stirrups and having effective depths d ranging from 4 to 118 in. (100 to 3000 mm) were uniformly loaded until failure. Fig. 10 compares the observed failure shear stresses for one series of these beams with the failure shears predicted by both the 1995 ACI Code expressions and the general method. It can be seen that the largest beam in this series failed at a shear stress less than one-half of the failure shear predicted by the 1995 ACI Code equations.

sion where the ACI equations can be very unconservative. On the other hand, for uniformly loaded members, members with inclined prestressing tendons, and members subjected to high axial tension, the ACI equations can be extremely conservative.

CONCLUSIONS

It is believed that the method presented in this paper is "integrated," "simplified," and gives "a physical significance" to the parameters being calculated. For example, the shear carried by tensile stresses in the concrete V_c is made a function of the longitudinal straining in the web of the member ϵ_c . As ϵ_c increases, V_c decreases. Increasing the magnitude of the moment or applying axial tension increases ϵ_c and hence, decreases V_c . Applying axial compression or prestress or increasing the area of longitudinal reinforcement decreases ϵ_c and hence, increases V_c .

A key feature of the new procedures is that they explicitly consider the influence of shear upon the longitudinal reinforcement. It is believed that if engineers understand that shear causes tension in the longitudinal reinforcement, they will avoid some of the more serious detailing errors that are sometimes made in current practice.

ACKNOWLEDGMENTS

The development of the modified compression field theory was made possible by a series of grants from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and by support from the Networks of Centers of Excellence Program funded by the Minister of State, Science, and Technology, Canada. The authors would like to express their gratitude to these organizations for their support. The challenge of developing practical and comprehensive shear design provisions for the National Cooperative Highway Research Program's project "Development of Bridge Specifications" was the catalyst for the formulation of these proposals. The authors are also indebted to Dr. Khalidoun N. Raljal for his valuable assistance in performing the many calculations required to prepare Tables 1, 2, and 3.

NOTATION

- A_{ps} = area of prestressed longitudinal reinforcement on flexural tension side of member
- A_s = area of longitudinal reinforcing bars on flexural tension side of member
- A_v = area of shear reinforcement within distance s
- a = maximum aggregate size
- b = effective web width taken as minimum web width within effective shear depth d
- d = distance from extreme compression fiber to centroid of longitudinal tension reinforcement
- d_e = effective shear depth taken as flexural lever arm which need not be taken less than $0.9d$. For prestressed members, d_e need not be taken less than $0.8h$ in determining d_e
- E_p = modulus of elasticity of prestressing tendons
- E_s = modulus of elasticity of reinforcing bars
- f_c = specified compressive strength of concrete
- f_{cr} = cracking strength of concrete
- f_{ps} = stress in prestressed tendon when surrounding concrete is at zero stress
- f_{se} = effective stress in prestressed tendon after all losses
- f_t = residual tensile stress in cracked concrete
- f'_c = principal compressive stress in concrete
- $f'_{2\theta}$ = crushing strength of diagonally cracked concrete
- h = overall height of member
- M_u = factored moment taken as positive
- N_u = factored axial load taken as positive for tension, negative for compression
- ρ = spacing of shear reinforcement
- ρ_s = crack spacing parameter for members without stirrups $\rho_s = \frac{A_s}{bd}$
- ρ_{se} = equivalent value of ρ_s for beams where aggregate size is not $\frac{1}{4}$ in
- V_c = shear strength provided by tensile stresses in cracked concrete

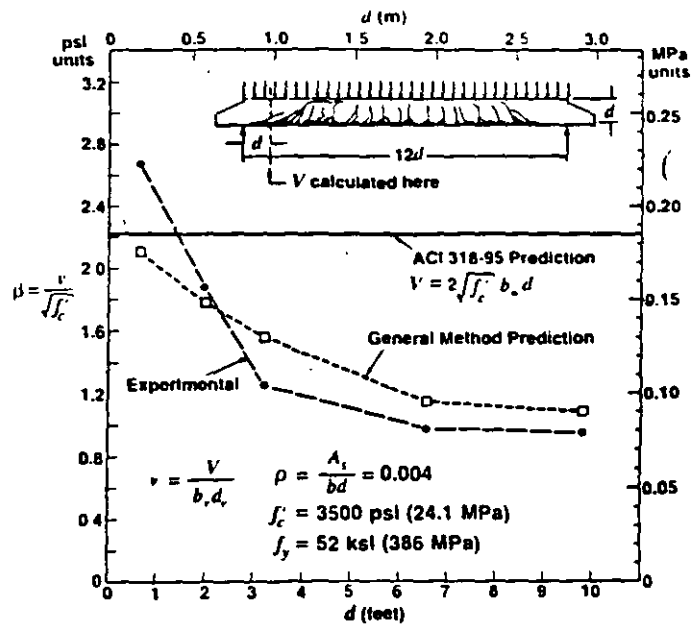


Fig. 10—Influence of member size and maximum aggregate size on shear stresses at failure

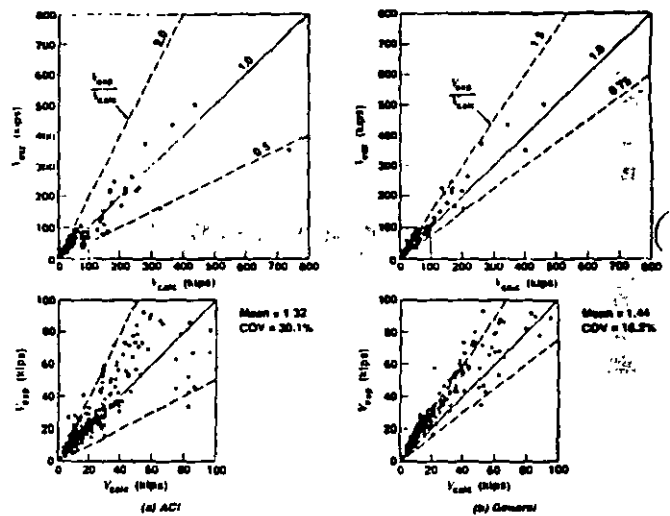


Fig. 11—Correlation of experimental and predicted failure shears for 528 tests

- V_n = nominal shear strength
- V_p = vertical component of prestressing
- V_s = shear strength provided by stirrups
- V_u = factored shear force taken as positive
- β = tensile stress factor indicating ability of cracked concrete to transmit shear
- ϵ_1 = principal tensile strain in cracked concrete
- ϵ_2 = principal compressive strain in cracked concrete
- ϵ'_c = strain in concrete when f_c reaches f'_c
- θ = angle of inclination of principal compressive stress in cracked concrete with respect to longitudinal axis of member
- ϕ = strength reduction factor

REFERENCES

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary ACI 318 R-95," American Concrete Institute, Detroit, 1995, 369 pp.
2. ACI/ASCE Committee 426, "Shear Strength of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V. 99, No. ST6, June 1973, pp. 1191-1187.
3. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced

PROPOSED SHEAR DESIGN PROCEDURE

The general equations of the modified compression field theory, which are intended to account for the complex behavior of diagonally cracked concrete, are more suited for computer solutions (e.g., see program RESPONSE) than for hand calculations. With the θ and β tables, the method becomes simple enough to solve by hand. For design, the steps are as follows:

Step 1—At the design section, calculate the shear stress v from Eq. (12).

Step 2—Calculate the longitudinal strain ϵ_x from Eq. (7).

Step 3—For members with web reinforcement, choose the values of θ and β from Table 1. For members without web reinforcement, choose the values of θ and β from Table 2.

Step 4—For members without web reinforcement, use Eq. (9) to determine the nominal strength. For members with web reinforcement, use Eq. (9) to determine the required amount of web reinforcement.

Step 5—Use Eq. (18) to check the capacity of the longitudinal reinforcement.

EXPERIMENTAL VERIFICATION

The ACI Code shear design expressions were obtained by first categorizing beams and columns into the following groups: nonprestressed members subjected to shear and flexure only; nonprestressed members subjected to axial compression; nonprestressed members subjected to axial tension; and prestressed members.

For each of the previous groups, an empirical equation was developed to provide a good fit to the available experimental data. Most of the equations were derived in the 1962 ACI/ASCE Shear Committee report¹⁶ using the data available at that time.

In contrast, the shear design method in this paper was derived from the modified compression field theory that is based on equilibrium, compatibility, and the stress-strain characteristics of cracked reinforced concrete. In this fundamental approach, no fitting factors were employed to match the predictions to available beam tests. Thus, it is of considerable interest to compare the accuracy of the equations resulting from this new method with the accuracy of the traditional ACI equations.

In Fig. 11 the experimentally determined failure shears from 528 tests were compared to the failure shears predicted by both the ACI equations and the method presented in this paper. These tests encompass a wide range of cross-sectional shapes, sizes, material properties, and types of loading, as summarized in Table 3. The specimens selected were those that failed primarily due to high shear stresses. Specimens with short shear spans were excluded because such members should be designed using either strut-and-tie models^{12,17,18} or the ACI deep-beam equations,¹ rather than the sectional design approaches described in this paper.

As seen in Fig. 11, the proposed general method predicts the failure shears more accurately than the equations of the current ACI Code. Table 3 indicates situations where the ACI shear design method can be very inaccurate. These situations include large, lightly reinforced members and members subjected to high axial compression.

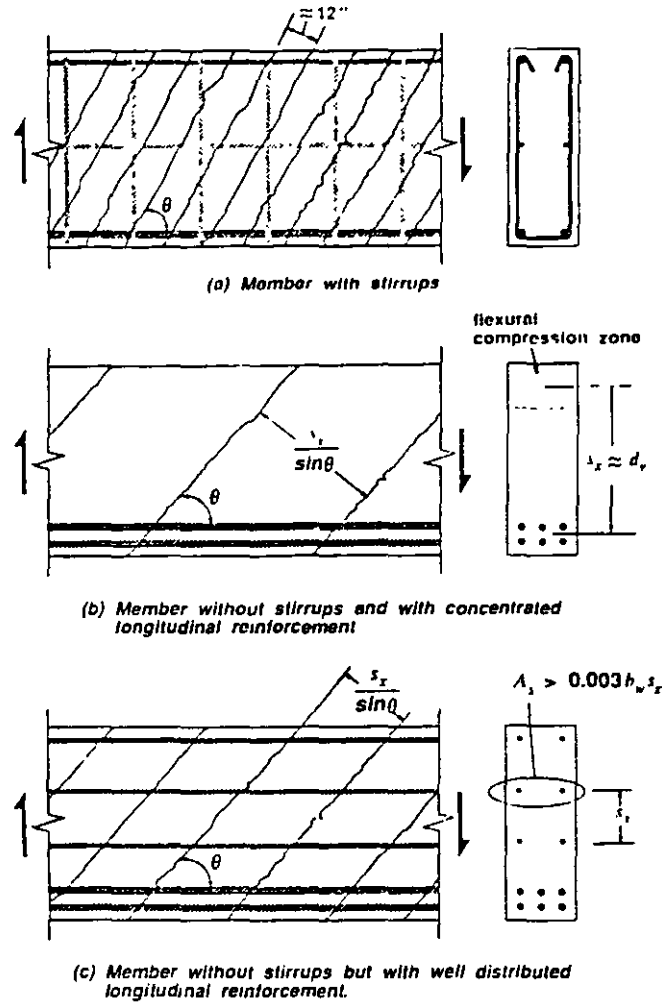


Fig. 9—Influence of reinforcement on spacing of diagonal cracks

Table 2—Values of θ and β for members without web reinforcement

s_x		Longitudinal strain $\epsilon_x \times 1000$					
		≤ 0	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 1.00	≤ 1.50	≤ 2.00
≤ 5 in.	θ deg.	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0 deg.	38.0 deg.
	β	4.93	3.78	3.19	2.56	2.19	1.93
≤ 10 in.	θ deg.	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0 deg.
	β	4.65	3.45	2.83	2.19	1.87	1.65
≤ 15 in.	θ deg.	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0 deg.
	β	4.47	3.21	2.59	1.98	1.65	1.45
≤ 25 in.	θ deg.	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0 deg.
	β	4.19	2.85	2.26	1.69	1.40	1.18
≤ 50 in.	θ deg.	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0 deg.
	β	3.83	2.39	1.82	1.27	1.00	0.83
≤ 100 in.	θ deg.	42.0	55.0	62.0	69.0	72.0	75.0 deg.
	β	3.47	1.88	1.35	0.87	0.65	0.52

Note: For β values in MPa units divide given values by 12

Table 3—Experimental verification

Reference	Date	Number and specimen type	Loading	Depth, m	Concrete, psi	Straps $\frac{A_s}{b_s \cdot s}$ psi	Experiment/predicted					
							ACI		General			
							Mean	Coefficient of variation, percent	Mean	Coefficient of variation, percent		
Kam ¹⁷	1979	68 rectangular beams	2 point loads on simple span	6 to 13	2230 to 5320	0	1.23	14.9	1.33	8.0	1	
Kam ¹⁹	1979	95 T-beams	2 point loads on simple span	12	2510 to 5550	0	1.60	11.5	1.63	10.1	2	
Shoya ¹⁵	1989	13 rectangular beams	Uniformly distributed load on simple span	5 to 124	2860 to 4130	0	0.86	42.9	0.98	35.1	3	
Gupta ²⁰	1993	16 rectangular beams	End loads applying shear and compression	12	8700 to 9120	0 to 170	0.85	27.3	1.13	16.8	4	
Adebar and Collins ²¹	1996	7 rectangular columns	End loads applying shear and tension	12	6700 to 8500	0	2.75	51.4	0.90	12.8	5	
Gregor and Collins ²²	1993	6 prestressed bridge girders	Uniformly distributed load on continuous span	36	6500 to 8400 psi	370 to 590	1.06	17.5	1.37	12.7	6	
Collins and Vegh ²³	1993	14 rectangular beams	Point loads on continuous span	11 to 36	7250 to 13,500	0 to 120	0.84	18.2	1.07	15.9	7	
Griezic, Cook, and Mitchell ²⁴	1993	4 T-beams	Uniformly distributed load on simple span	16	5800	225 to 350	1.44	12.2	1.34	12.6	8	
Haddadin, Hong, and Mattock ²⁵	1971	59 T-beams	Point loads on beams with tension or compression	13.5	1950 to 6500	0 to 700	1.61	32.3	1.45	18.7	9	
Elzanaty, Nilson, and Slate ²⁶	1986	33 prestressed I-beams	2 point loads on simple span	14 and 18	6000 to 11,400	0 to 700	1.07	11.6	1.35	9.5	10	
Pasley, Gogoi, Darwin, and McCabe ²⁷	1990	13 T-beams	Point loads on continuous span	18	4500	0 to 82	0.99	12.6	1.27	7.0	11	
Mattock ²⁸	1969	31 rectangular beams	Point loads on beams with tension or compression	12	2200 to 8000	0 to 100	1.56	24.7	1.45	11.0	12	
Bennett and Balasouriya ²⁹	1971	20 prestressed I-beams	2 point loads on simple span	10 and 18	4400 to 6460	630 to 1900	1.71	19.4	1.46	18.2	13	
Bennett and Debarkey ²⁹	1974	22 prestressed I-beams	Point load on simple span	13	6000 to 10,500	103 to 5600	1.15	9.9	1.54	10.9	14	
Moody, Viest, Elstner, and Hognestad ³¹	1954	12 rectangular beams	Point load on simple span	12	880 to 4600	0	1.27	14.2	1.27	13.5	15	
MacGregor ³²	1960	33 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2400 to 7000	0 to 470	1.09	25.8	1.54	22.5	16	
Oleson, Sozen, and Siess ³³	1967	27 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2450 to 6700	0 to 350	1.06	18.8	1.59	15.3	17	
Roller and Russell ³⁴	1990	10 rectangular beams	Point load on simple span	25 to 34	10,500 to 18,170	0 to 1176	1.05	20.0	1.19	13.5	18	
Shahawy, Robinson, and Batchelor ³⁵	1993	39 full-size prestressed bridge girders	Point load on simple span	44	6800	165 to 1670	1.09	19.5	1.13	15.8	19	
Yoon, Cook, and Mitchell ³⁶	1996	12 rectangular beams	Point load on simple span	30	5220 to 12,615	0 to 145	1.14	13.8	1.07	10.3	20	
		528 beams		4	5	6	Average	1.32	33.7	1.39	16.7	21

etc.," American Concrete Institute, Detroit, 1961, 144 pp.
 2. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 pp.
 3. Elstner, R. C., and Hognestad, E., "Laboratory Investigation of Rigid Frame Failure," ACI JOURNAL, *Proceedings* V. 53, No. 1, Jan.

1957, pp. 637-668.

6. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 2, Mar.-Apr. 1986, pp. 219-231.

7. Collins, M. P., and Mitchell, D., *Prestressed Concrete Structures*,

Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991, 766 pp.

8. MTO, OHBDC Committee, *Ontario Highway Bridge Design Code*, 3rd Edition, Ontario Ministry of Transportation, Downsview, 1991, 370 pp.

9. CSA Committee A23.3, "Design of Concrete Structures: Structures (Design)—A National Standard of Canada," Canadian Standards Association, Rexdale, Dec. 1994, 199 pp.

10. "AASHTO LRFD Bridge Design Specifications and Commentary," First Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1994, 1091 pp.

11. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory," *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 3, May-June 1988, pp. 258-268.

12. Cook, W. D., and Mitchell, D., "Studies of Disturbed Regions near Discontinuities in Reinforced Concrete Members," *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 2, Mar.-Apr. 1988, pp. 206-216.

13. Vecchio, F. J., "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes," *ACI Structural Journal*, V. 86, No. 1, Jan.-Feb. 1989, pp. 26-35.

14. Shiroya, T.; Iguro, M.; Nojiri, Y.; Akiyama, H.; and Okada, T., "Shear Strength of Large Reinforced Concrete Beams," *Fracture Mechanics: Application to Concrete*, SP-118, American Concrete Institute, Detroit, 1989, 309 pp.

15. Shiroya, T., "Shear Properties of Large Reinforced Concrete Member," *Special Report of Institute of Technology, Shimizu Corporation*, No. 25, Feb. 1989, 198 pp.

16. ACI-ASCE Committee 326, "Shear and Diagonal Tension," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 59, Jan., Feb., and Mar. 1962, pp. 1-30, 277-344, and 352-396.

17. Collins, M. P., and Mitchell, D., "Rational Approach to Shear Design—The 1984 Canadian Code Provisions," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 6, Nov.-Dec. 1986, pp. 925-933.

18. Schlaich, J.; Schafer, K.; and Jennewein, M., "Towards a Consistent Design of Reinforced Concrete Structures," *PCI Journal*, V. 32, No. 3, May-June 1987, pp. 74-150.

19. Kani, M. W.; Huggins, M. W.; and Wittkopp, R. R., *Kani on Shear in Reinforced Concrete*, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, 1979, 225 pp.

20. Gupta, P., and Collins, M. P., "Behavior of Reinforced Concrete Members Subjected to Shear and Compression," MASC thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1993.

21. Adebisi, P., and Collins, M. P., "Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement," *Canadian Journal of Civil Engineering*, V. 23, No. 1, Feb. 1996, pp. 30-41.

22. Gregor, T., and Collins, M. P., "Tests of Large Partially Prestressed

Concrete Girders," *ACI Structural Journal* (submitted for publication).

23. Collins, M. P.; Mitchell, D.; and MacGregor, J. G., "Structural Design Considerations for High-Strength Concrete," *Concrete International*, May 1993, pp. 27-34.

24. Gazic, A.; Cook, W. D.; and Mitchell, D., "Tests to Determine Performance of Deformed Welded Wire Fabric Stirrups," *ACI Structural Journal*, V. 91, No. 2, Mar.-Apr. 1994, pp. 211-220.

25. Haddadin, M. J.; Hong, S. T.; and Mattock, A. H., "Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 97, No. ST9, Sept. 1971, pp. 2277-2297.

26. Elzanaty, A. H.; Nilson, A. H.; and Slate, F. O., "Shear Capacity of Prestressed Concrete Beams Using High-Strength Concrete," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 3, May-June 1986, pp. 359-368.

27. Pasley, G. P.; Gogoi, S.; Darwin, D.; and McCabe, S. L., "Shear Strength of Continuous Lightly Reinforced T-Beams," *SM Report No. 26*, University of Kansas, Dec. 1990, 151 pp.

28. Mattock, A. H., "Diagonal Tension Cracking in Concrete Beams with Axial Forces," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 95, No. ST9, Sept. 1969, pp. 1887-1900.

29. Bennett, E. W., and Balasooriya, B. M. A., "Shear Strength of Prestressed Beams with Thin Webs Failing in Inclined Compression," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 68, No. 3, Mar. 1971, pp. 204-212.

30. Bennett, E. W., and Dechaiky, S. Y., "High-Strength Steel as Shear Reinforcement in Prestressed Concrete Beams," *Shear in Reinforced Concrete*, SP-42, American Concrete Institute, 1974, pp. 231-248.

31. Moody, K. G.; Viest, M.; Elstner, R. C.; and Hognestad, E., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams: Part I—Tests of Simple Beams," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 26, No. 4, Dec. 1954, pp. 317-332.

32. MacGregor, J. G., "Strength and Behavior of Prestressed Concrete Beams with Web Reinforcement," PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, 1960, 295 pp.

33. Oleson, S. O.; Sozen, M. A.; and Siess, C. P., "Investigation of Prestressed Reinforced Concrete for Highway Bridges: Part IV—Strength in Shear of Beams with Web Reinforcement," *Bulletin No. 493*, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, 1967.

34. Roller, J. J., and Russell, H. G., "Shear Strength of High-Strength Concrete Beams with Web Reinforcement," *ACI Structural Journal*, V. No. 2, Mar.-Apr. 1990, pp. 191-198.

35. Shahawy, M.; Robinson, B.; and Batchelor, B. deV., "Investigation of Shear Strength of Prestressed Concrete AASHTO Type II Girders," *Structures Research Center, Florida Dept. of Transportation*, Jan. 1993, 182 pp.

36. Yoon, Y. S.; Cook, W. D.; and Mitchell, D., "Minimum Shear Reinforcement in Normal, Medium, and High-Strength Concrete Beams," *ACI Structural Journal* (accepted for publication).

UN METODO GENERAL DE DISEÑO POR CORTANTE

LAS ESPECIFICACIONES PARA DISEÑO POR CORTANTE DEL CODIGO ACI 318-95 CONSISTEN DE ALREDEDOR DE 43 EC. EMPÍRICAS PARA DIFERENTES TIPOS DE MIEMBROS Y DE CARGAS, ALGUNAS SE ILUSTRAN EN LA FIG. 1.

EN 1973, EL COMITÉ DE CORTANTE ACI-ASCE EXPRESÓ LA ESPERANZA QUE ESAS "REGULACIONES DE DISEÑO PARA LA RESISTENCIA A CORTANTE PODRAN SER INTEGRADAS, SIMPLIFICADAS Y DADO UN SIGNIFICADO FÍSICO." COMO LO QUERÍAN EL INCREMENTO EN EL NÚMERO DE EC. PARA DISEÑO POR CORTANTE DEL ACI (FIG. 2), EL CODIGO NO HA CUMPLIDO CON ESTA META. ES INTERESANTE NOTAR QUE, ANTES DE 1963 EL PROCEDIMIENTO DE DISEÑO POR CORTANTE DEL ACI FUE TAN SIMPLE QUE SOLO SE REQUERÍAN CUATRO ECUACIONES.

LA MAYORÍA DE LAS EC. DADAS EN LA FIG. 1 FUERON INTRODUCIDAS EN LAS EDICIONES DEL CODIGO ACI DE 1963 Y 1971. ESTAS EC. FUERON DESARROLLADAS EN EL PERIODO SIGUIENTE A LA ACUMULACIÓN

DE FALLAS POR CORTANTE HECHAS POR LA FTA. AEREA HASTA 1955, Y DEPENDIENDO DEL EL CONCEPTO TRADICIONAL DE SUMAR LA CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO V_c A LA CONTRIBUCIÓN DEL ACERO V_s CALCULADA SOBRE LA BASE DE LAS EC. DE LAS NORMAS PARA 45°.

DESDE 1971 SE HA REALIZADO UN INTENSO ESFUERZO DE INVESTIGACIÓN ENCAMINADO A PERFECCIONAR LOS MÉTODOS DE DISEÑO POR CORTANTE (FIG. 3). LA INVESTIGACIÓN QUERÍA QUE, EN GENERAL, EL ANGULO DE INCLINACIÓN DE LA COMPRESIÓN EN EL CONCRETO NO ES A 45° Y QUE LAS EC. BASADAS SOBRE UN ANGULO ~~DE 45°~~

UN VARIABLE DE APLICACIÓN PROPORCIONAN UNAS BASES MÁS REALISTAS PARA DISEÑAR POR CORTANTE. ADEMAS, LOS ENSAYOS DE PRUEBAS DE CONCRETO SUJETOS A CORTANTE PUERON MEJORARON EL ENTENDIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS ESFUZO-DEF. DEL CONCRETO AGRIETADO DIAGONALMENTE. ESTAS RELACIONES ESFUZO-DEF. HACEN POSIBLE DESARROLLAR UN MODELO ANALÍTICO, LLAMADO LA TEORÍA DEL CASPO DE COMPRESIÓN, QUE RESULTÓ

capaz de predecir con exactitud la respuesta del concreto reforzado sujeto a cortante.

El objetivo de este artículo es presentar en forma breve un método general de diseño por cortante basado en la teoría modificada del cuerpo de compresión. Este método de diseño, incluido recientemente por Collins y Mitchell, ha sido adoptado por el Código de Diseño de Puente de Auto-pistas en Ontario, el Código de la Asociación Canadense de Diseño de Concreto y las Especificaciones ASHTO ^{LRFD}.

El método se resume en la Fig. 1. Respuesta a Cortante del Concreto Agrietado.

Los ensayos de paneles de concreto sujetos a cortante puro (Fig. 4) muestran que aun después del agrietamiento, existen ^{esfuerzos} esfuerzos de tensión en el concreto y que estos esfuerzos pueden incrementar en forma significativa la capacidad del concreto reforzado para resistir esfuerzos cortantes.

El concreto reforzado transmite cargas en forma relativamente compleja incluyendo el cierre o la abertura de grietas pre-existentes, la formación de grietas nuevas, la transferencia de cortante en las superficies de las grietas y la variación significativa de los esfuerzos en el refuerzo debido a la adherencia que ocurre simultáneamente con los altos esfuerzos del acero en las secciones agrietadas. El modelo del cuerpo de compresión modificado intenta capturar las características esenciales de este comportamiento sin considerar todos los detalles. El patrón de agrietamiento se idealiza como una serie de grietas paralelas todas formando un ángulo θ con la dirección longitudinal. En lugar de considerar la variación de esfuerzos compleja en el concreto agrietado, solo se considera el estado de esfuerzo proyectado y el estado de esfuerzo en una grieta (Fig. 4b y 4c). Como estos dos estados de esfuerzo son equivalentes estáticamente, la pérdida de esfuerzos de tensión en el

CONCRETO EN LA GRIETA DEBE SER SUSTITUIDO POR UN INCREMENTO EN LOS ESFUZOS DE TENSIÓN EN EL ACERO O, DESPUÉS DE LA FLEXIÓN DE ALGUN REFZO. EN LA GRIETA POR ESFUZOS. CORTANTES SOBRE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA. EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANSMITIR A TRAVÉS DE LA GRIETA SERÁ FUNCIÓN DEL ANCHO DE LA GRIETA. NOTAR QUE EL ESFUZO. CORTANTE SOBRE LA GRIETA IMPLICA QUE LA DIRECCIÓN DE ESFUZOS. PRINCIPALES SOBRE LA GRIETA CAMBIA DE LOCALIZACIÓN.

LA DEFORMACIÓN UNITARIA PRINCIPAL DE TENSIÓN ϵ , EN EL CONCRETO SE USA COMO UN "INDICADOR DE DAÑO" QUE CONTROLA AL ESFUZO. PROMEDIO DE TENSIÓN f_1 EN EL CONCRETO AGRIETADO, LA CAPACIDAD DEL CONCRETO, AGRIETADO DIAGONALMENTE PARA TOMAR ESFUZOS. DE COMPRESIÓN f_2 Y ESFUZO. CORTANTE τ_c QUE PUEDE TRANSMITIRSE A TRAVÉS DE UNA GRIETA

EL ESFUZO. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN EN EL CONCRETO f_2 ESTÁ RELACIONADO A LA DEFORMACIÓN PRINCIPAL DE COMPRESIÓN.

ϵ_2 Y A LA DE TENSIÓN ϵ_1 , EN LA FORMA SIGUIENTE (FIG. 5a):

$$f_2 = f_{2max} \left[\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_c'} - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_c'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_c') \leq f_c' \quad (2)$$

DE LA EC. (1), LA DEF. UNITARIA DE COMPRESIÓN PARA LA PORCIÓN CARGADA DE LA RBL. ESFUZO.-DEF. ES:

$$\epsilon_2 = -0.002 \left(1 - \sqrt{1 - f_2 / f_{2max}} \right) \quad (3)$$

DONDE SE TOMÓ $\epsilon_c' = 0.002$ DESPUÉS DEL AGRIETAMIENTO, EL ESFUZO. PRINCIPAL DE TENSIÓN EN EL CONCRETO f_1 ESTÁ RELACIONADO A LA DEF. PRINCIPAL DE TENSIÓN ϵ_1 (FIG. 5b) COMO SIGUE:

$$f_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} \quad (4)$$

EL ESFUZO. DE AGRIETAMIENTO PUEDE TOMARSE COMO $1.5 \sqrt{f_c'} (0.33 \sqrt{f_c'} \text{ MPa})$. PARA VALORES GRANDES DE ϵ_1 , LAS GRIETAS SON ANCHAS Y LA MAGNITUD DE f_1 ESTÁ CONTROLADA POR LA FRECUENCIA DEL ACERO EN LA GRIETA Y LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR ESFUZOS. CORTANTES τ_c A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA (FIG. 5b). EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANS-

MITRE A TRAVÉS DE LA GRIETA ES FUNCIÓN DEL ANCHO w DE LA GRIETA Y DEL TAMAÑO a DEL AGREGADO (FIG. 4c) DADO POR:

$$v_{ci} = \frac{2.16 \sqrt{f_c}}{0.3 + \frac{2.4w}{a + 0.63}}$$

PARA w/a Y w/d , SUSTITUIR 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16.

SI LOS ESTRIBOS ALCANZAN SU ESFUZO DE FLUENCIA Y LA GRIETA SE DESLIZA, EL ESFUZO PROMEDIO DE TENSION EN EL CONCRETO f_1 ESTÁ LIMITADO A:

$$f_1 = v_{ci} \tan \theta$$

LAS RELACIONES ANTERIORES ESFUZO-DEF. JUNTO CON EL EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD, SE PUEDE USAR PARA PREDECIR LA RESPUESTA CARGA-DEF. DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A CORTANTE. ASÍ, ESTAS RELACIONES SE PUEDEN USAR COMO LA BASE PARA LA FORMULACIÓN NO LINEAL DE ELEMENTOS FINITOS.

DISEÑO POR CORTANTE DE LOS ESTRIBOS
EN LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA MODIFICADA DEL CAMPO DE COMPRESIÓN AL DISEÑO DE VIGAS, ES APROPIADO HACER UN

USO DE SUPOSICIONES SIMPLIFICADORAS. COMO SE ILUSTRAN EN LA FIG. 6, SE SUPONE QUE LOS ESFUZOS CORTANTES SON UNIFORMES SOBRE EL AREA EFECTIVA DE CORTANTE $b_w d_w$.

(5) LA DEF. LONGITUDINAL MAYOR ϵ_x QUE OCURRE DENTRO DEL ALMA SE USA PARA CALCULAR LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION ϵ_1 . PARA DISEÑO, ϵ_x SE PUEDE APROXIMAR COMO LA DEF. EN EL ACERO DE TENSION POR FLEXION. LA DETERMINACION DE ϵ_x PARA VIGAS NO PRESTRENSADAS SE ILUSTRAN EN LA FIG. 7; PARA UNA PRESTRENSADA,

EL CONCRETO QUE RODEA AL REFZO. PERMITE CERRAR EN COMPRESION HASTA SI LA TENSION APLICADA EXCEDE LA FZS. DE REFZO, f_{ps} , DONDE f_{ps} ES EL ESFUZO EN EL TENDON CUANDO EL ESFUZO EN EL CONCRETO QUE LO RODEA ES CERO. EN LUGAR DE UN CALCULO MAS EXACTO, f_{ps} SE PUEDE TOMAR IGUAL A $1.1 f_{se}$. ENTONCES, PARA DISEÑO:

$$\epsilon_x = \frac{(k_1 f_s + 0.5) w + 0.5 v_{ci} \cot \theta}{E_s A_s + E_p A_{ps}} \geq 0 \quad (7)$$

CON BASE EN LA COMPATIBILIDAD, LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION ϵ_1 PUEDE RELACIONARSE A LA DEF. LONG. ϵ_x , LA DIRECCION DEL ESFUZO PRINCIPAL θ Y LA MAGNITUD DE LA

DEF. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN ϵ_2 COMO SIGUE:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_z) \cot^2 \theta \quad (8)$$

Por tanto, como ϵ_x llega a ser grande y θ pequeño, el "INDICADOR DE DAÑO" ϵ_1 llega a ser grande. La resistencia nominal a cortante V_n de un miembro se puede expresar como:

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_1 b_w d_v \cot \theta + \frac{A_s f_y d_v}{s} \cot \theta + V_p = \beta (0.27 \sqrt{f_c'}) b_w d_v + \frac{A_s f_y d_v}{s} \cot \theta + V_p \quad (9)$$

DE LAS EXPRESIONES PARA EL ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO EN EL CONCRETO AGRIETADO (EC. (4) y (6)), EL FACTOR DE ESFUERZO DE TENSION β SE PUEDE DETERMINAR COMO:

$$\beta = \frac{0.33 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{0.18}{0.33 + \frac{4W}{0.16}} \quad (10)$$

PARA MPa Y MM., SUSTITUIR 4 POR 0.33, 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16. EL ANCHO DE GRIETA W SE TOMA COMO EL ESPACIO MIENTO ENTRE GRIETAS MULTIPLICADO POR ϵ_1 . SE PUEDE VER DE LAS EXPRESIONES

PARA β QUE A MEDIDA QUE LA DEF. POR TENSION CREECE (ϵ_1 CREECE), EL ESFUERZO

CORTANTE QUE PUEDE SER RESISTIDO POR ESFUERZO DE TENSION EN EL CONCRETO V_c SE REDUCE.

EL VALOR DE ϵ_1 DEPENDERÁ DE LAS MAGNITUDES DE ϵ_x , ϵ_z Y θ (FIG. 8). LA DEF. CORTANTE ϵ_z SE PUEDE HALLAR DE LA EC. (3). USANDO ESTAS EC., EL ESFUERZO PRINCIPAL DE COMPRESIÓN f_2 SE PUEDE TALLAR CONSERVANDOSE COMO:

$$f_2 = \sigma (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{V_n - V_p}{b_w d_v} \quad (12)$$

DE LAS EC. (3), (8) Y (11), ϵ_1 PUEDE EXPRESARSE COMO:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[\epsilon_x + 0.002 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma (\tan \theta + \cot \theta)}{f_c'} (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot^2 \theta \quad (13)$$

PARA DETERMINAR LOS ESTRIBOS REQUERIDOS, EL DISEÑADOR NECESITA DETERMINAR LOS VALORES DE θ Y β PARA CUMPLIR LA EC. (9). CON ESTE PROPOSITO, LA TABLA 1 DA LOS VALORES DE θ Y β EN FUNCION DE ϵ_x Y EL NIVEL DEL ESFUERZO CORTANTE σ/f_c' . LOS VALORES DE LA TABLA 1 SE CALCULARON SUPONIENDO UN ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS DIAGONALES

DE 12" (30.5 cm) Y TAMAÑO MÁXIMO DE AGREGADO DE 3/4" (19 mm), SE CREE QUE ESTOS VALORES SON APROPIADOS PARA EL RANGO TOTAL DE VIGAS CON ESTRIBOS.

LOS VALORES DE θ DADOS EN LA TABLA 1 SE HAN SELECCIONADO PARA ASEGURAR QUE LA DEF. DEL ESTRIBO ϵ_1 ES AL MENOS IGUAL A 0.002 Y PARA ASEGURAR QUE LOS MIEMBROS ACTIVAMENTE EFECTIVOS, EL ESFUERZO PRINCIPAL DE COMPRESIÓN f_2 EN EL CONCRETO NO EXCEDE A LA RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO f_{2max} . DENTRO DEL RANGO DE VALORES DE θ QUE SATISFACEN ESTOS REQUISITOS, LOS VALORES DADOS EN LA TABLA 1 RESULTARÁN CERCA A LOS CORRESPONDIENTES A LA CANTIDAD MÁS PEQUEÑA DE REFZO. POR CONSTANTE. MIENTRAS QUE LOS VALORES DE LA TABLA 1 SE PUEDEN APLICAR A UN RANGO DE VALORES DE ϵ_x Y σ/f_c (POR EJEMP. $\theta = 36^\circ$ Y $\beta = 2.09$, PARA $\epsilon_x \leq 1 \times 10^{-3}$ Y $\sigma/f_c \leq 0.10$), FUERON CALCULADOS PARA EL LÍMITE SUPERIOR DEL RANGO. SE PUEDE HACER UNA INTERPOLACIÓN LINEAL PARA

ENTRE LOS VALORES DE LA TABLA. SIN EMBARGO, NO SE JUSTIFICA DICHO ESFUERZO EN UNA SECCIÓN PARTICULAR DE UN MIEMBRO SUJETO A V_u , M_u Y N_u , EL REFZO. POR CONSTANTE SE DETERMINA DE:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

$\phi = 0.85$
LA CANTIDAD DE REFZO. REQUERIDA EN UNA SECCIÓN, SE DETERMINA DE:

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c - V_p \quad (15)$$

MIENTRAS QUE ESTE CÁLCULO SE HACE PARA UNA SECCIÓN EN PARTICULAR, UNA FALLA POR CONSTANTE CAUSADA POR LA FLEXIÓN DE LOS ESTRIBOS INVOLUCRA FLEXIÓN Y REFZO. SOBRE UNA LONGITUD DE LA VIGA ALREDEDOR DE d COTE. ENTONCES, LOS CÁLCULOS PARA UNA SECCIÓN PUEDEN TOMARSE COMO REPRESENTATIVOS DE UNA LONGITUD DE VIGA IGUAL A d COTE, CONSIDERANDO QUE LA SECCIÓN SE LOCALIZA A LA MITAD DE ESTA LONGITUD. ASÍ, CERCA DE UN APOYO, LA PRIMERA SECCIÓN QUE SE DEBE REVISAR SE LOCALIZA A 0.15 d COTE DE LA CARA DEL SOPORTE. CERCA DE LAS

CARGAS CONCENTRADAS, LAS SECCIONES LO CALIZADAS A MENOS DE 0.5 d O COTA DE LAS CARGAS, NO NECESITAN VERIFICARSE. COMO UNA SIMPLIFICACION, 0.5 d O COTA PUEDE TOMARSE COMO d. DESDE 1963, EL CODIGO ACI HA RECOMENDADO QUE AL MENOS SE COLOQUE UN AREA MINIMA DE ESTIBOS CUANDO $V_u > \phi V_c / 2$. PARA EL METODO QUE AQUI SE PRESENTA, SE RECOMIENDA QUE SE COLOQUE UN AREA MINIMA DE ESTIBOS SI:

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

DONDE EL REQUISITO MINIMO ES:

$$\frac{A_{vs}}{b_w s} \geq 0.20 \sqrt{f_c}$$

PARA UNIDADES MPa SUSTITUIR 0.2 POR 0.06

DISEÑO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

LA FIG. 8 ILUSTRAS LA INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FZAS. DE TENSION EN EL REFZO. LONG. MIENTRAS QUE EL MOMENTO ES CERO EN EL APOYO B, ALLI TRANQUILAMENTE SE NECESITA TENSION CONSIDERABLE EN EL REFZO. LONG. CERCA DEL APOYO. LA TENSION REQUERIDA EN

EL REFZO. DEL q LECHO BAJO EN EL APOYO B, SE PUEDE DETERMINAR DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA FIG. 8b, TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO AL PUNTO C Y SUPONIENDO QUE LA FZA. DE TRACCION DEL AGREGADO EN LA GRIETA QUE CONTRIBUYE A V_c TIENE UN MOMENTO DESPRECIABLE CON RESPECTO AL PUNTO C. PARA ESTAS VIGAS NO PRESTREZADAS, LA FZA. DE TENSION REQUERIDA EN EL BORDE INTERIOR DEL AREA DE APOYO ES:

$$T = \left(\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s \right) \cot \theta \quad (17)$$

LA EC. (17) DA LA TENSION ADICIONAL DEBIDA AL CORTANTE. ENTONCES, EN UNA SECCION SUJETA A CORTANTE V_u , UN MOMENTO M_u Y UNA FZA. AXIAL N_u , EL REFZO. LONG. SOBRE LA CARA DE TENSION POR FLEXION DEBE CUMPLIR CON:

$$A_s f_y + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi f_y} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left(\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p \right) \cot \theta \quad (18)$$

EN LAS SECC. DE MOMENTO MAX. EL CORTANTE CAMBIA DE SIGNO Y ENTONCES, LA INCLINACION DE LA COMPRESION DIAGONAL

TAMBIÉN CAMBIA. EN LOS APOYOS DIRECTOS Y EN LOS PUNTOS DE CARGA, ESTE CAMBIO DE INCLINACIÓN ESTÁ ASOCIADO CON UN PATRÓN ABANICADO DE ESFUERZOS. DE COMPRESIÓN RADIAL DESDE EL PUNTO DE CARGA O DEL APOYO DIRECTO, COMO SE MUESTRA EN LA FIG. 8a. ESTA FORMA ABANICADA DE LOS ESFUERZOS DIAGONALES REDUCE LA TENSION EN EL REFZO. LONGITUDINAL PRODUCIDA POR EL CORTANTE (POR EJEMPLO EL ANGULO θ DE LOS A SER ESCARPADO). DIBIDO A ESTE EFECTO, LA TENSION EN EL REFZO NO EXCEDE DE LA PRODUCIDA ÚNICAMENTE POR EL MOMENTO MÁXIMO.

MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALMA.

EN LA EVALUACIÓN DE LOS FACTORES β DADOS EN LA TABLA 1, SE ASUMIÓ QUE LAS GRIETAS DIAGONALES EN LAS ALMAS CON ESTRIBOS PUEDEN ESPACIARSE A 12 IN (305 MM). PARA MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALMA, ESTA SUPOSICIÓN PUEDE NO SER CONSERVADORA; ENTONCES, PARA USAR β DE LA TABLA 1, ES NECE-

NO ES ADECUADO USAR β DE LA TABLA 1 PARA EVALUAR LA RESISTENCIA A CORTANTE DE MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALMA.

PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR CORTANTE DEL CONCRETO AGRIETADO ESTÁ GOBERNADA PRINCIPALMENTE POR EL ANCHO DE LAS GRIETAS DIAGONALES (EE. 10). EL ANCHO DE GRIETA SE PUEDE TOMAR COMO LA DEF. UNITARIA PRINCIPAL DE TENSION ϵ , MULTIPLICADA POR EL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS. ENTONCES, PARA UN VALOR DADO DE ϵ , LA RESISTENCIA A CORTANTE ES FUNCIÓN DEL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS POR LO QUE PARA UN ESPACIAMIENTO GRANDE DE GRIETAS, LAS CAPACIDADES A FZ. CORTANTE SE REDUCEN. LA FIG. 9 ILUSTRAS LA SUPOSICIÓN HECHA EN ESTE MÉTODO DE DISEÑO CON RESPECTO AL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS. PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LAS GRIETAS DIAGONALES ESTARÁN MÁS ESPACIADAS A MENOS QUE θ SE APROXIMA A CERO. LA SEPARACIÓN DE GRIETAS CUANDO $\theta = 90^\circ$ SE LLAMA s Y SU VALOR ES FUNCIÓN PRINCIPALMENTE

DE LA SEPARACIÓN MÁXIMA ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. O ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. Y LA ZONA DE COMPRESIÓN POR FLEXIÓN.

β (INDICADOR DE LA CAPACIDAD DEL CONCRETO AGRIETADO PARA RESISTIR CORTANTE) ES FUNCIÓN DE θ , ϵ , Y S_x . PARA VALORES DADOS DE ϵ_x Y S_x Y UN VALOR SELECCIONADO DE θ , SE PUEDE CALCULAR β CON LOS EC. (9), (10), (12) Y (13). LA TABLA 2 ENLISTA LOS VALORES DE θ QUE PRODUCEN VALORES ALTOS DE β PARA CONCRETO AGRIETADO. LOS VALORES DE β DE LA TABLA SE DERIVARON SUPONIENDO EL TAMAÑO MÁX. DEL AGREGADO $a = 3/4"$ (19.44). SIN EMBARGO, SE PUEDEN USAR PARA OTROS TAMAÑOS USANDO UN PARÁMETRO EQUIVALENTE DE ESPACIAMIENTO S_{xe} (EC. 10) TAL QUE:

$$S_{xe} = \frac{1.38}{a + 0.63} (S_x) \quad (14) \quad (19)$$

PARA MM., SUSTITUIR 1.38 POR 35 Y 0.63 POR 16. EN MIEMBROS SIN REFZO. BIEN DISTRIBUIDO PARA EL CONTROL DEL AGRIETAMIENTO, S_x SE INCREMENTA

LA MEDIDA QUE EL TAMAÑO DEL MIEMBRO SE INCREMENTA. EN LA TABLA 2 SE APRECIABA QUE UN INCREMENTO DE S_x RESULTA EN UNA REDUCCIÓN EN LA CAPACIDAD A CORTANTE.

UN EXTENSIVO PROGRAMA EXPERIMENTAL CONDUcido POR SHIOYA EN JAPÓN PROPORCIONÓ EVIDENCIA CONVINCENTE DE LA REDUCCIÓN DE LA CAPACIDAD A EFORTO. CORTANTE QUE OCURRE A MEDIDA QUE LOS MIEMBROS CRECEN. EN EL PROGRAMA, VIGAS CON POCO REFZO, SIN ESTRIBOS, CON PERALTE EFECTIVO ENTRE 4 Y 118 IN (100 A 3000 MM.) SE CARGARON UNIFORMEMENTE HASTA LA FALLA. LA FIG. 10 COMPARA LOS EFORTOS CORTANTES DE FALLA PARA UNA SERIE DE ESTAS VIGAS CONTRA LA FALLA ESTIMADA CON EL ACI 318 - 95 Y EL MÉTODO GENERAL. SE PUEDE OBSERVAR QUE LAS VIGAS GRANDES FALLAN A UN EFORTO. CORTANTE MENOR QUE LA MITAD DEL ESTIMADO CON LAS EES. DEL ACI. 318 - 95.

PROCEDIMIENTO PROPOSTO PARA DISEÑO POR CORTANTE. DE LA TEORÍA DE LOS EC. GENERALES DEL CAMPO DE VOL

presión modificada, con la cual se pretende obtener exactitud en el complejo comportamiento de concreto diagonalmente agrietado. Son más adecuados para un programa de computadoras (por ejem. VOR EL PROGRAMA RESPONCE) que para los cálculos a mano. Con los tablas de θ y β , el método resulta bastante simple para resolverse a mano. En el diseño, los pasos son como sigue:

1. En la sección de diseño, calcular el esfuerzo cortante τ con la ec. (12)
2. Calcular la def. unitaria longitudinal ϵ_x con la ec. (7).
3. Para miembros con refzo. en el alma, seleccionar los valores de θ y β de la tabla 1; Para miembros sin refzo. en el alma, usar la tabla 2.
4. En miembros sin refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la resistencia nominal. Para miembros con refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la capacidad de refzo. en el alma.

5. Usar la ec. (18) para verificar la capacidad del refzo. longitudinal.

VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Las expresiones para diseño por cortante del ACI, fueron obtenidas considerando vigas y cols. en los sig. grupos: miembros no prestozados sujetos a cortante y torsión; miembros no prestozados sujetos a compresión axial; miembros no prestozados sujetos a tensión axial y miembros prestozados.

Para cada grupo, se desarrolló una ec. empírica para proporcionar una buena aproximación para los datos experimentales disponibles. La mayoría de las ecs. fueron derivadas en el informe del Comité de Cortante del ACI/ASCE de 1962, usando los datos disponibles en ese tiempo. En contraste, el método de diseño por cortante de este artículo se derivó de la teoría modificada del campo de compresión que está basada en el equilibrio, compatibilidad y las

características esfu.-def. del concreto
to ~~concreto~~ reforzado acortado.
En este enfoque fundamental, no se
emplearon factores de ajuste para
las predicciones con los ensayos
disponibles de vigas. Por lo tanto, es
de considerable interés comparar la
exactitud de los resultados obtenidos
con los EES. de este método nuevo con
tra la exactitud de los EES. tradicio-
nales del SCI. (Fig. 11). Se compara-
ron las fallas por cortante de algu-
nos especímenes en 528
ensayos con las predichas con ambos
métodos. Estos ensayos abarcan un
amplio rango de ~~secciones~~ formas de
secciones, tamaños, proporciones de las
terminales y tipos de cargas, como se ve
sobre en la tabla 3. Los especímenes
seleccionados fueron aquellos que
fallaron principalmente debido a al-
tos esfuerzos cortantes. Se excluyeron
los especímenes con claros de cortan-
te cortos, debido a que tales miembros
pueden diseñarse usando los modelos

puntal - y - trante, o los EES. para vigas
de gran peralte del SCI.
Como se ve en la Fig. 11, el método
general propuesto predice más exacta-
mente las fallas por cortante que los
EES del actual SCI. La tabla 3 indica
situaciones donde el método del SCI
puede ser muy inexacto. Estas situaciones
incluyen miembros grandes, miembros
con poco esfu. long. y miembros sujetos
a compresión axial grande, donde el
SCI puede ser poco conservador. Por
otro lado, para miembros con claros mu-
cho más pequeños, miembros con
terminales inclinados y miembros con
tensión axial grande, el SCI puede
ser extremadamente conservador.

CONCLUSIONES

SE CREE QUE EL MÉTODO PRESENTADO DE LOS ERRORES MÁS SERIOS DE DETALLE EN ESTE ARTICULO ESTÁ "INTEGRADO" QUE A VECES SE COMETEN EN LA PRÁCTICA "SIMPLIFICADO" Y DA "UN SIGNIFICADO ACTUAL. FÍSICO" A LOS PARÁMETROS QUE SE CALCULAN. POR EJEMPLO, EL COEFICIENTE TOMADO POR LOS ESFUERZOS DE TENSION EN EL CONCRETO V_c SE HACE FUNCIÓN DE LA DEFORMACIÓN UNITARIA LONGITUDINAL EN EL ACI ϵ_x . A MEDIDA QUE ϵ_x CRECE, V_c DECRECE. INCREMENTANDO LA MAGNITUD DEL MOMENTO O APLICANDO TENSION AXIAL ϵ_x CRECE, Y ENTONCES, V_c DECRECE. APLICANDO COMPRESION AXIAL, PRESFUERZO O AUMENTANDO EL AREA DEL REFUERZO LONGITUDINAL, ϵ_x DECRECE Y ENTONCES, V_c CRECE.

UNA CARACTERISTICA CLAVE DE LOS PROCEDIMIENTOS NUEVOS ES QUE EXPLICITAMENTE CONSIDERAN LA INFLUENCIA DEL COEFICIENTE SOBRE EL REFUERZO LONGITUDINAL. SE CREE QUE SI LOS INGENIEROS ENTENDEN QUE EL COEFICIENTE PRODUCE TENSION EN EL REFUERZO LONGITUDINAL, EVITARAN UNO

EFECTO	METODO DEL ACI	METODO GENERAL
	$V_n = V_c + V_s$	$V_n = V_c + V_s + V_p$
1	$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_{ud}}{l_u}) b_w d$; $V_{ud} \leq 1.0$ $V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d$ o $V_c = 0.54\sqrt{f'_c} b_w d$ $V_s = \frac{\Delta r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \beta(0.27\sqrt{f'_c}) b_w d_v$ $V_s = \frac{\Delta r f_y d_v}{s} \cot \theta$ β Y θ SON FUNCIÓN DE: LA DEFORMACIÓN UNITARIA ϵ_x , ESFUZO CORTANTE τ Y DEL ESPACIAMIENTO DEL ARMAMIENTO s_x
2	$V_c = (0.16\sqrt{f'_c} + 50 \frac{V_{ud}}{l_u}) b_w d$; $0.54\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1.35\sqrt{f'_c} b_w d$ $V_c \leq V_c = 0.16\sqrt{f'_c} b_w d + V_a + \frac{V_{i,flex}}{l_{u,flex}}$; $V_c \geq 0.46\sqrt{f'_c} b_w d$ $V_c \leq V_{cw} = (0.95\sqrt{f'_c} + 0.3 f_{pc}) b_w d + V_p$ $V_s = \frac{\Delta r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	Y DEL ESPACIAMIENTO DEL ARMAMIENTO s_x DONDE: $\tau = \frac{V_n - V_p}{b_w d_v}$
3	$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_{ud}}{l_u - N_u(4h - d)}) b_w d$ $V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{\frac{1 - N_u}{35 \Delta g}}$ $V_s = \frac{\Delta r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	$\epsilon_x = \frac{N_u}{E_s \Delta_s} + 0.5(N_u + N_u \cot \theta) - \Delta r s f_p$ $E_s \Delta_s + E_p \Delta_p$
4	$V_c = 0.54\sqrt{f'_c} (1 + N_u/35 \Delta g) b_w d$ $V_s = \Delta r f_y d \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	

REGLAS PARA DETALLAR:

- SE DEBE EXTENDER EL REFZO. MAS ALLA DEL PUNTO DONDE YA NO SE REQUIERE UNA DISTANCIA $\geq \Delta d$ O $12d_b$
- NO SE DEBE TERMINAR REFZO. EN ZONA DE TENSION A MENOS QUE: EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE $\leq 2/3$ DEL CORTANTE PERMITIDO O EL AREA DE ESTR. A_{or} EN EXCESO DE LA REQ. POR CORTANTE Y TORSION SE PROPORCIONA PARA $A_{or} \geq 3.5 b_w s / f_y$ $s \leq d$ O $8b_b$
- PARA BARRAS $\leq \#11$, EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE $\leq 3/4$ DEL CORTANTE PERMITIDO Y CONTINUANDO EL DOBLE DEL REFZO. REQUERIDO POR FLEXION, EN LA SECCION DE CORTE.
- EN UN APOYO SIMPLE Y EN PUNTOS DE INFLEXION, SE DEBE LUJUI EL DIAMETRO DEL REFZO. POR MOMENTO POSITIVO EN PUNTO QUE: $d \leq \frac{l_n}{V_u} + l_a$

REGLAS PARA DETALLAR:

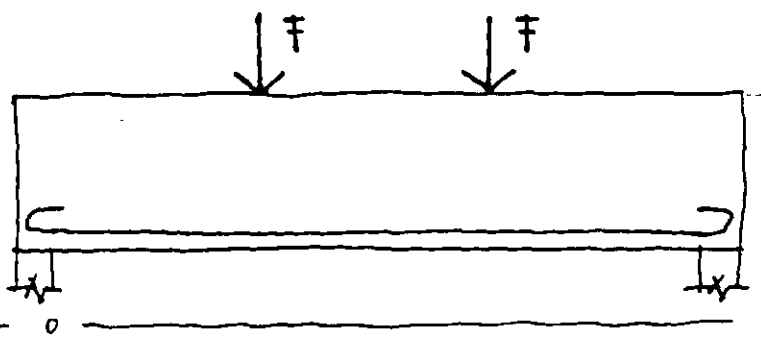
EL REFUERZO LONGITUDINAL SE DEBE DETALLAR PARA QUE:

$$\Delta r f_y + \Delta r s f_p s > \frac{N_u + 0.5 N_u}{\phi A_{or} \phi} + (\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p) \cot \theta$$

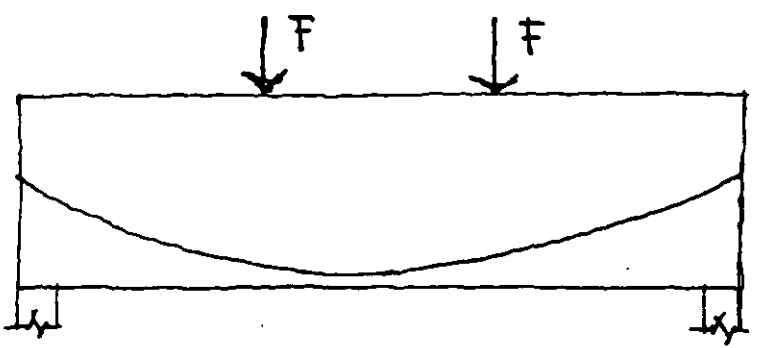
FIG.1. Comparación entre el Enfoque de Diseño Por Corte del ACI y El Propuesto

COMPLEMENTO DE LA FIGURA 1

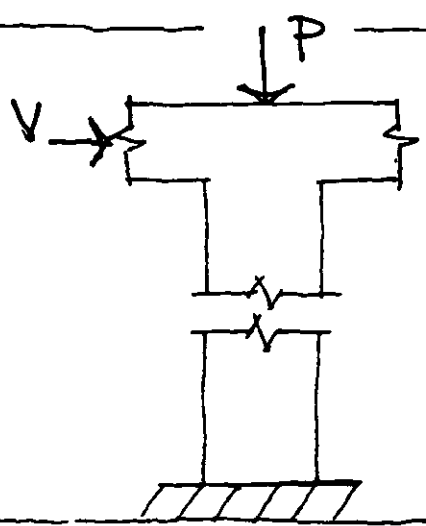
1. VIGAS DE CONCRETO REFORZADO



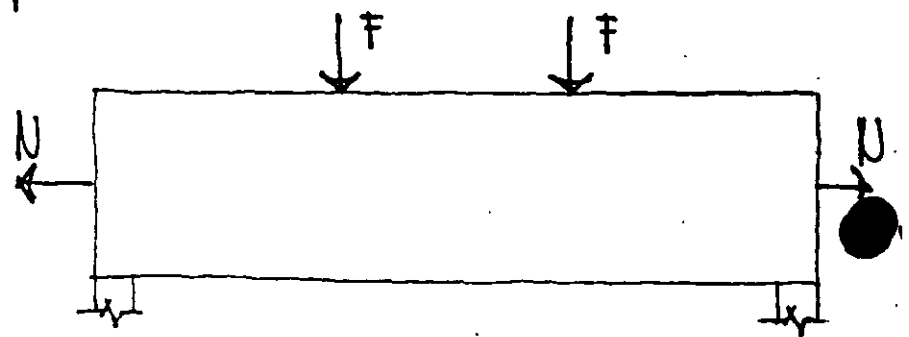
2. VIGAS DE CONCRETO PRESTFORZADO



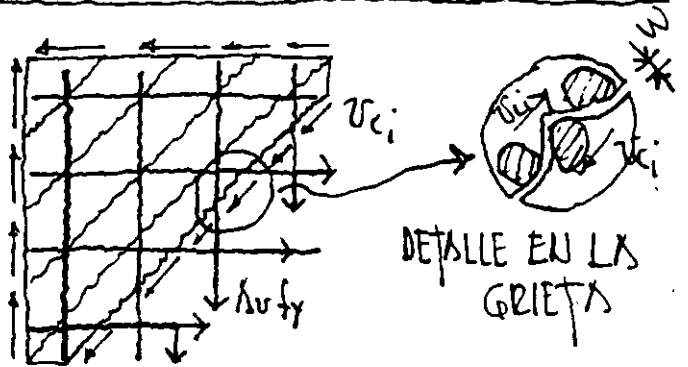
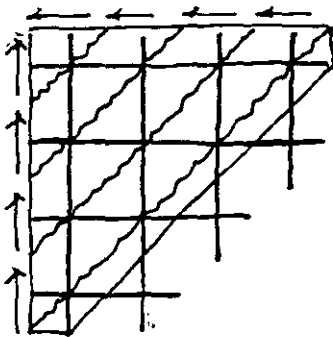
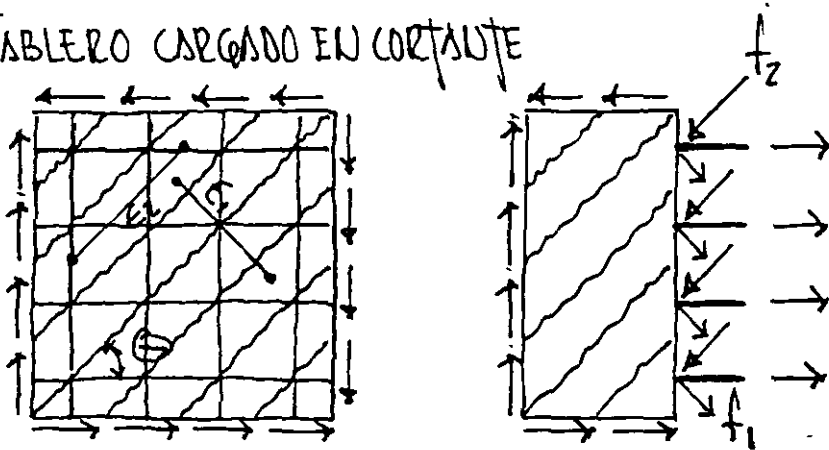
3. FLEXOCOMPRESIÓN Y CORTANTE



4. FLEXOTENSION Y CORTANTE

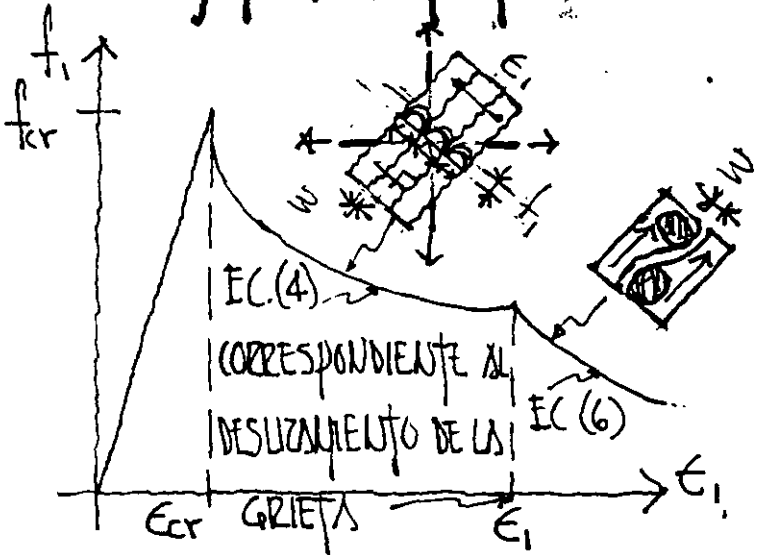
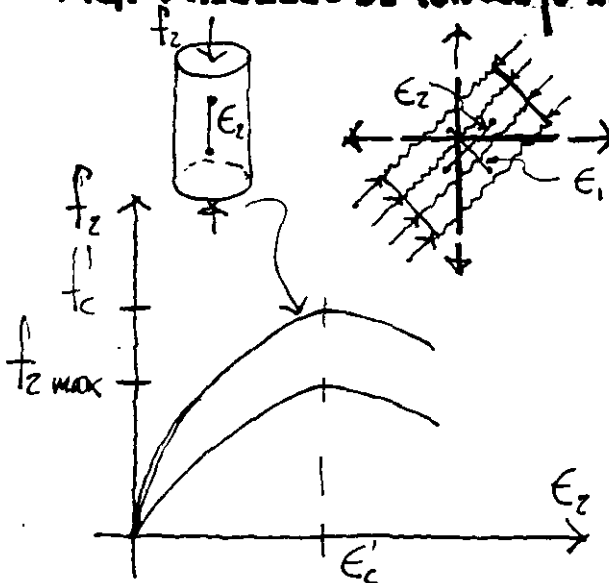


a) TABLERO CARGADO EN CORTANTE



b) ESFUERZOS PROPIOS CALCULADOS;
FIG. 4 PANELES DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A CORTANTE

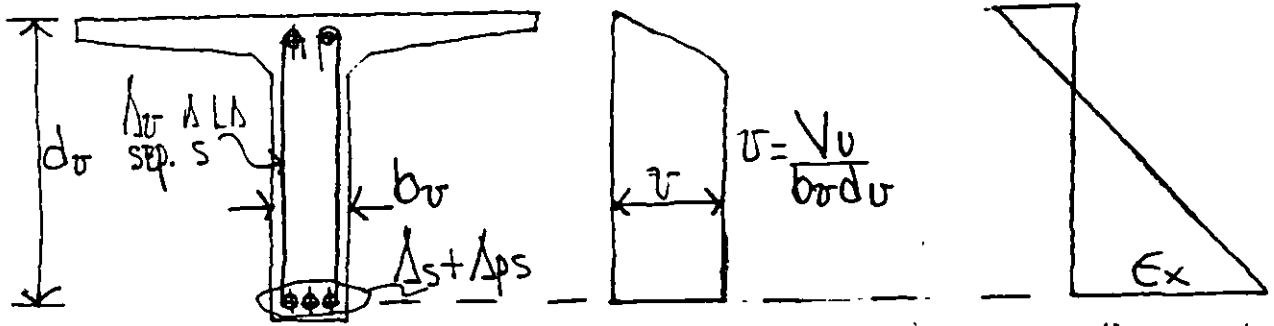
c) ESFUERZOS LOCALES EN LAS GRIETAS



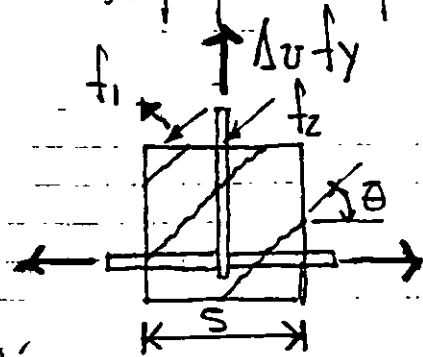
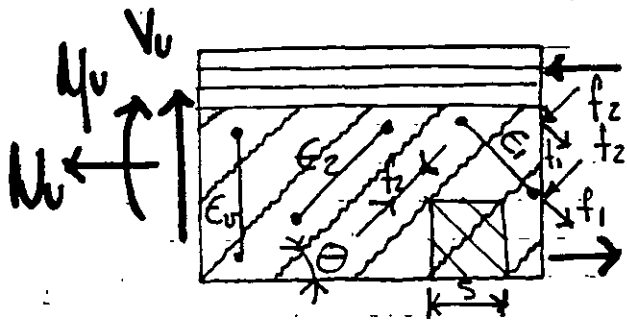
a) ABLANDAMIENTO DE LA CURVA ESFU. - DEF. A COMPRESIÓN DEBIDO A LA DEFORMACIÓN TRANSVERSAL DE TENSION

b) ESFUERZOS PROPIOS DE TENSION EN CONCRETO AGRIETADO EN FUNCIÓN DE ϵ_1

FIG. 5 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA CONCRETO AGRIETADO



a) SECCIÓN TRANSVERSAL b) ESFUERZO CORTANTE c) DEFORMACIONES LONGITUDINALES LINEALES



a) ESTADO BIAJIAL DE DEF. EN EL ALICATA b) TENSION EN EL REFORZADO DEL ALICATA

FIG. 6 VIGA SUJETA A CORTANTE, MOMENTO Y CARGA AXIAL

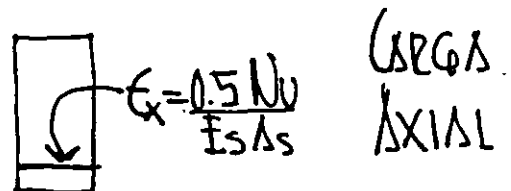
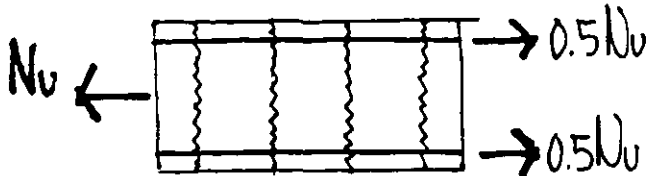
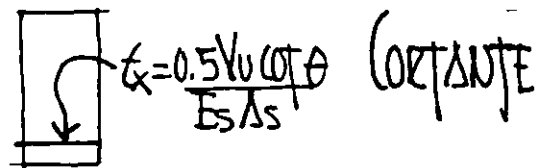
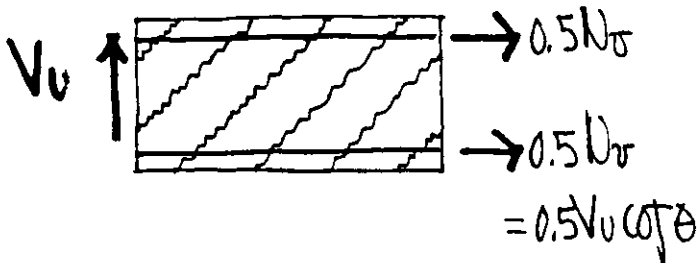
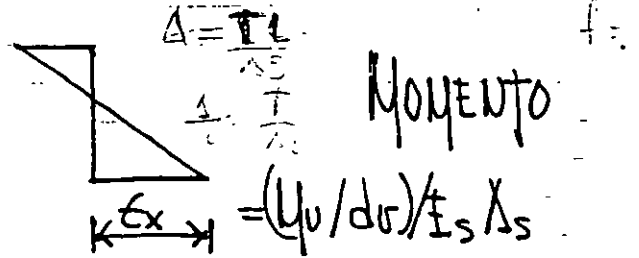
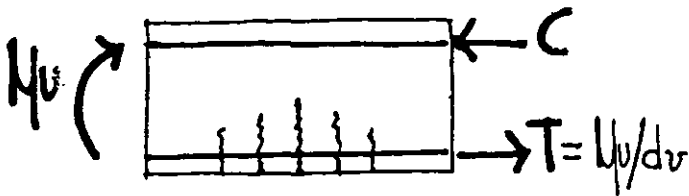


FIG. 7. DETERMINACIÓN DE epsilon_x EN VIGAS NO PREFORZADAS

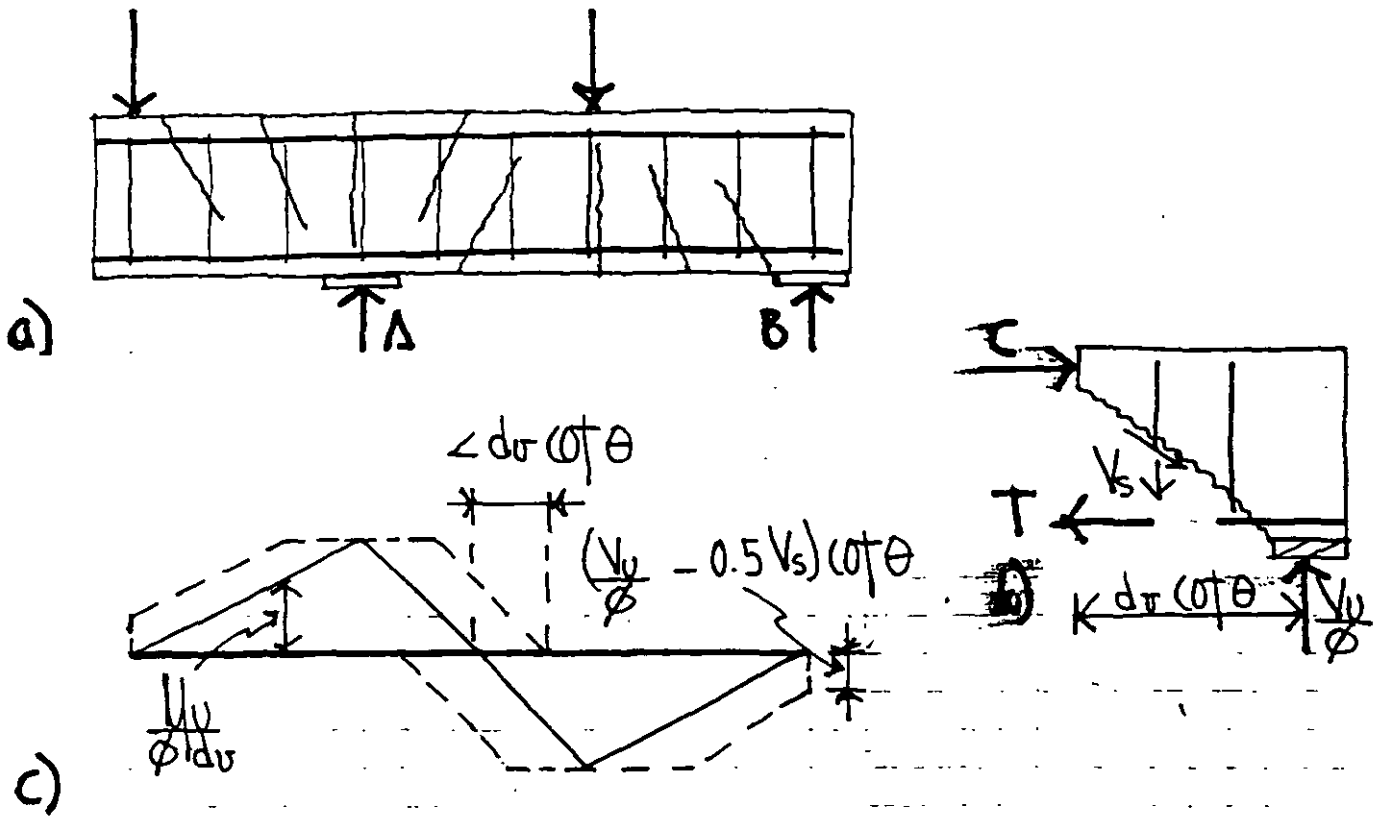


FIG. 8 INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FUERZAS EN EL REFUERZO LONGITUDINAL

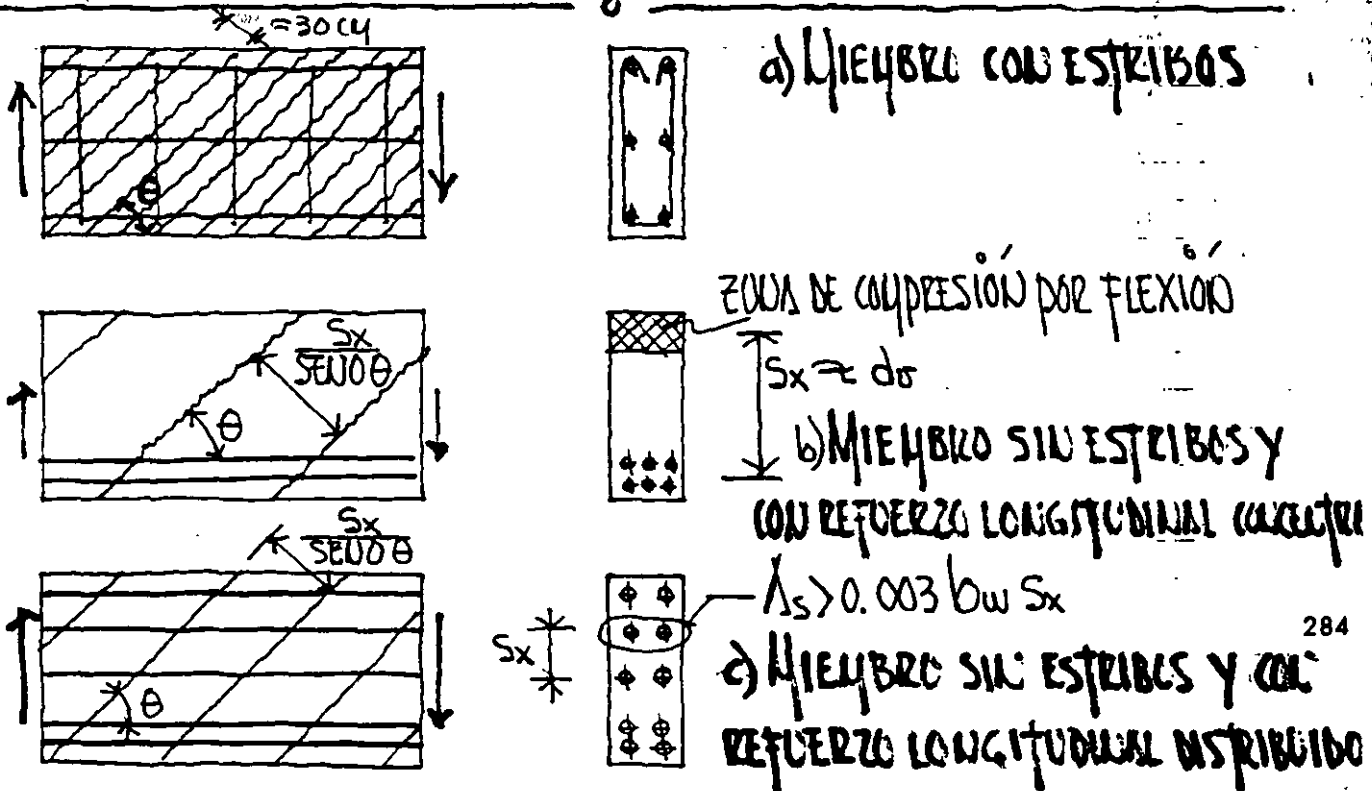


FIG. 9. INFLUENCIA DEL REFUERZO SOBRE EL ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

TABLA 1. VALORES DE θ Y β PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALMA.

t_s/f_c		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		≤ 0	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 1.00	≤ 1.50	≤ 2.00
≤ 0.05	θ°	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	β	4.32	0.94	0.68	0.60	0.53	0.46
≤ 0.075	θ°	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	β	1.32	0.81	0.67	0.58	0.51	0.18
≤ 0.10	θ°	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	β	0.88	0.69	0.65	0.56	0.46	0.39
≤ 0.15	θ°	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	β	0.69	0.66	0.62	0.52	0.41	0.38
≤ 0.20	θ°	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	β	0.66	0.63	0.57	0.43	0.33	0.27
≤ 0.25	θ°	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	β	0.62	0.54	0.44	0.38	0.35	0.34

TABLA 2. VALORES DE θ Y β PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA.

cu. S_x		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		≤ 0	≤ 0.25	≤ 0.50	≤ 1.00	≤ 1.50	≤ 2.00
≤ 12.5	θ°	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0	38.0
	β	1.33	1.02	0.86	0.69	0.59	0.52
≤ 25	θ°	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0
	β	1.26	0.93	0.76	0.59	0.50	0.45
≤ 37.5	θ°	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0
	β	1.21	0.87	0.70	0.53	0.45	0.39
≤ 62.5	θ°	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0
	β	1.13	0.77	0.61	0.46	0.38	0.32
≤ 125	θ°	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0
	β	1.03	0.65	0.49	0.34	0.27	0.22
≤ 250	θ°	42.00	55.0	62.0	69.60	72.0	75.0
	β	0.94	0.51	0.36	0.23	0.18	0.14

S_x = ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

METODO GENERAL DE DISEÑO POR CORTANTE EN MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA

RESISTENCIA A CORTANTE DEL MIEMBRO NO REFORZADO $S_{xe} = S_x [1.38 / (\alpha + 0.63)]$ (19)

$t_z = t_{zmax} [2 \epsilon / \epsilon_c' - (\epsilon_c / \epsilon_c')^2]$ (1)

$t_{zmax} = f_c' / (0.8 + 170 \epsilon_c) \leq f_c'$ (2)

$\epsilon_c = -0.002 (1 - \sqrt{1 - t_z / t_{zmax}})$ (3)

$f_c = f_{cr} / (1 + 500 \epsilon_c)$ (4)

$f_{cr} = 4 \sqrt{f_c}$ (4)

$\sigma_{ci} = 7.16 \sqrt{f_c} [0.3 + 24w / (\alpha + 0.63)]$ (5)

$f_c = \sigma_{ci} \tan \theta$ (6)

DISEÑO DE ESTRIBOS PARA CORTANTE

$\epsilon_x = \frac{M_u / d_r + 0.5 N_u + 0.5 V_u (\cot \theta - \Delta s / d_r)}{E_s A_s + E_p A_p} \geq 0$ (7)

$\epsilon_x = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_c) (\cot^2 \theta)$ (8)

$V_n = V_c + V_s + V_p = \frac{1}{2} b_w d_r \cot \theta + b_w f_y d_r \cot \theta + V_p$ (9)

$= \beta \sqrt{f_c} b_w d_r + \Delta s f_y d_r \cot \theta + V_p$ (9)

$\beta = 4 \cot \theta / (1 + 1500 \epsilon_c) \leq 7.14 [0.3 + 24w / (\alpha + 0.63)]$ (10)

$t_z = v (\tan \theta + \cot \theta)$ (11)

$v = (V_n - V_p) / (0.8 \rho_w d_r)$ (12)

$\epsilon_c = \epsilon_x + \left[\epsilon_x + 0.004 \sqrt{f_c} / (E_s \tan \theta + \cot \theta (0.8 + 170 \epsilon_c)) \right] \cot^2 \theta$ (13)

$V_u \leq \phi V_n$ (14)

$V_s \geq V_u / \phi - V_c - V_p$ (15)

$V_u > \phi 0.5 (V_c + V_p)$ (16)

$\Delta s f_y / d_w S \geq 0.72 \sqrt{f_c}$

$T = (V_u / \phi - 0.5 V_s) \cot \theta$ (17)

$\Delta s_r + \Delta s_p S \geq \frac{V_u}{\phi} + 0.5 V_u + \frac{V_u - 0.5 V_s - V_p}{\phi} \cot \theta$ (18)

PROCEDIMIENTO DE DISEÑO POR CORTANTE

PROPUESTO

1. EN LA SECCION CONSIDERADA CALCULAR EL ESFUERZO CORTANTE V_u CON LA EC. (12)

2. CALCULAR LA DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL ϵ_x CON LA EC. (7)

3. PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALMA, SELECCIONAR LOS VALORES DE θ Y β DE LA TABLA 1.

PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA SELECCIONAR LOS VALORES DE θ Y β DE LA TABLA 2.

4. PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA, USAR LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA NOMINAL (V_n).

PARA MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL, USAR LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE REFUERZO EN EL ALMA.

5. USAR LA EC. (18) PARA VERIFICAR LA CAPACIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

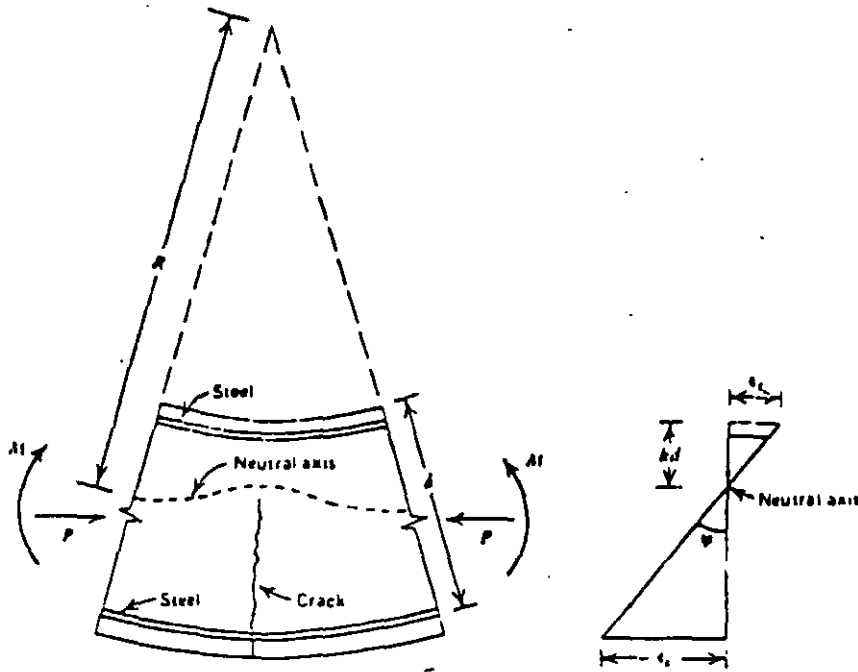
**TEMA:
FLEXIÓN**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

III.- F L E X I O N

1.- HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE LA RESISTENCIA.

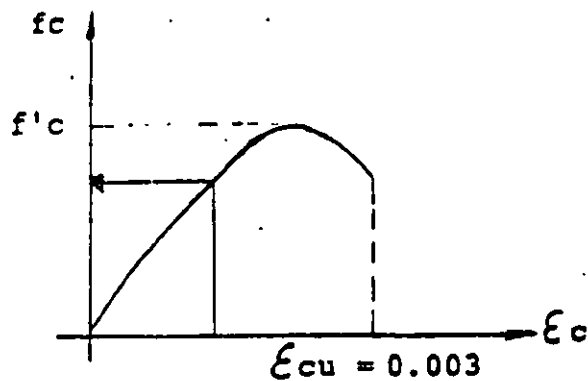
- A) EL CONCRETO NO RESISTE ESFUERZOS DE TENSION.
- B) LA DISTRIBUCION DE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES EN LA SECCION TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO - ES PLANA Y POR LO TANTO SE CONSIDERA QUE EXISTE ADHERENCIA PERFECTA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO.



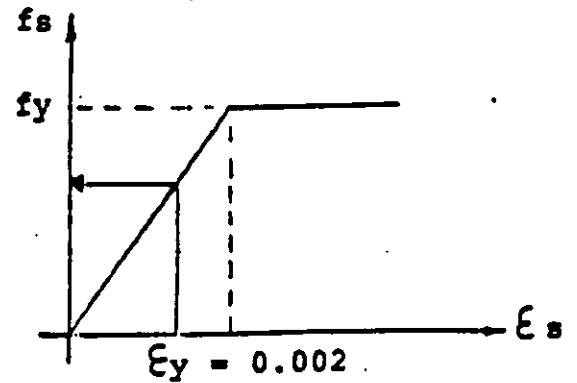
- C) LA DEFORMACION UNITARIA DEL CONCRETO A COMPRESION - CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA DE LA SECCION ES:

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

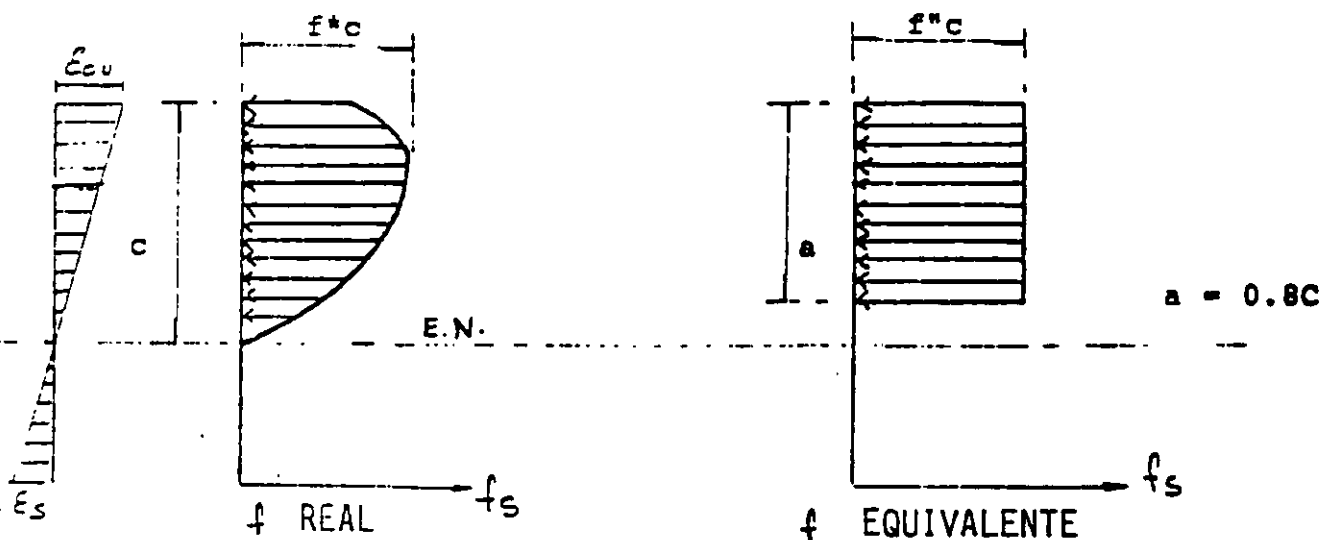
D) LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN EL CONCRETO Y EL ACERO CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA SE CONOCEN



CURVA TIPICA DEL CONCRETO EN COMPRESION.



CURVA TIPICA DEL ACERO EN TENSION.



$$f^*c = 0.8 f'c$$

$$f''c = 0.85 f^*c$$

$$\text{si } f^*c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f''c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c$$

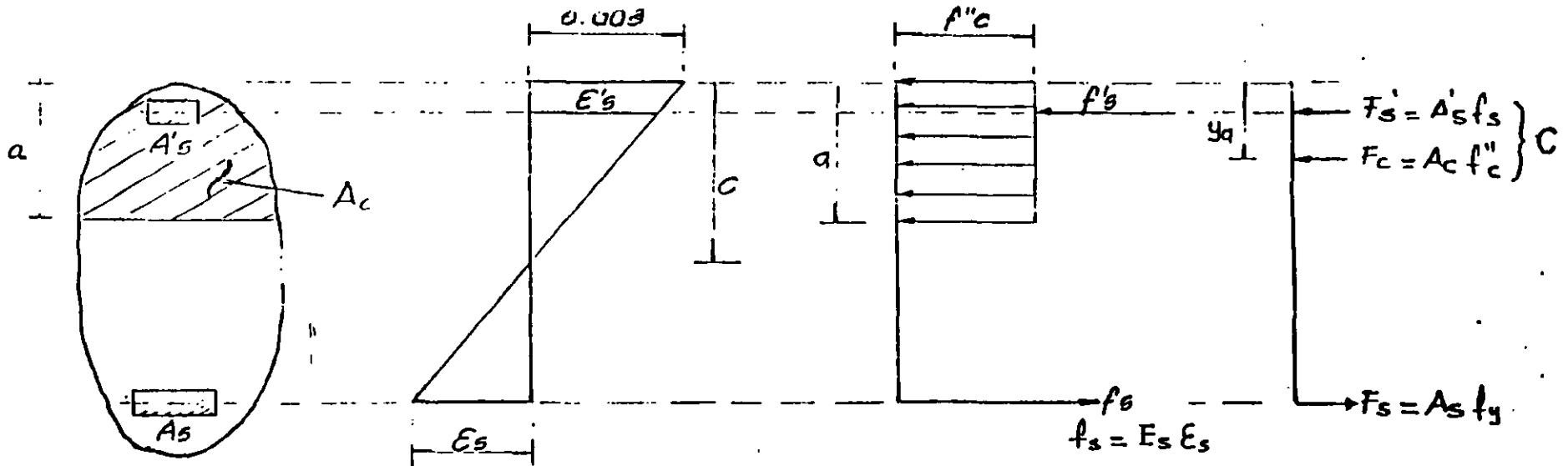
$$\text{si } f^*c > 250 \text{ Kg/cm}^2$$

SECCION DE
FORMA
CUALQUIERA

DEFORMACIONES
UNITARIAS

DISTRIBUCION
DE
ESFUERZOS

FUERZAS

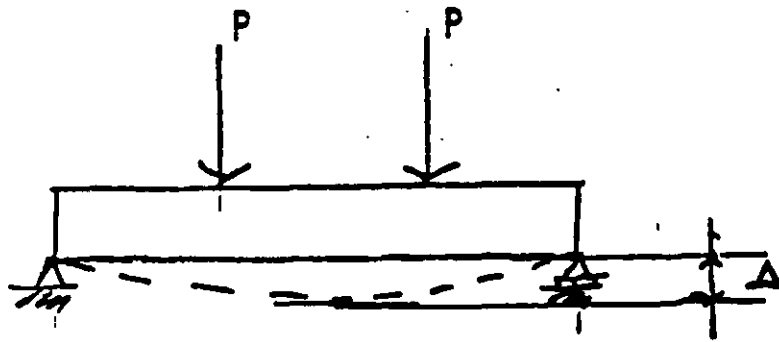


$$\sum F = 0 \Rightarrow C = T$$

$$\sum M = M_r$$

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA CALCULAR LA RESISTENCIA M_r

GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO
CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE -
REFUERZO.



CARGA P

APLASTAMIENTO

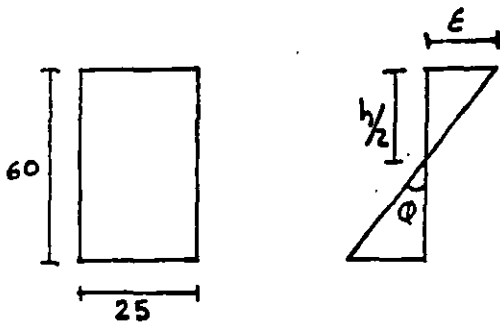
FLUENCIA DEL
REFUERZO

CARGA DE
AGRIETAMIENTO

DEFLEXION Δ

CALCULO DE RESISTENCIAS A FLEXION DE UNA SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO CON DIFERENTE PROCENTAJE DE REFUERZO (R.C.D.F. - 1987).

1) SECCION DE CONCRETO SIMPLE



$f'c = 200$	Kg/cm ²
$f^*c = 160$	Kg/cm ²
$f''c = 136$	Kg/cm ²
* $\bar{f}_t = 19.80$	Kg/cm ²
** $E = 113,137$	Kg/cm ²
$E_s = 2 \times 10^6$	Kg/cm ²

$$\begin{aligned} \gamma_d &= 0.9 \\ * E &= 8000 \sqrt{f'_c} \\ ** \bar{f}_t &= 1.4 \sqrt{f''_c} \end{aligned}$$

A) CALCULO DE M_R

$$\bar{f}_t = \frac{M_R}{I} C \quad M_R = \bar{f}_t \frac{I}{C} = \bar{f}_t S = \bar{f}_t \frac{bh^2}{6}$$

$$M_R = 19.80 \frac{(25 \times 60^2)}{6} = 297,000 \text{ Kg} - \text{cm}$$

$$M_R = 2.97 \text{ Ton} - \text{M}$$

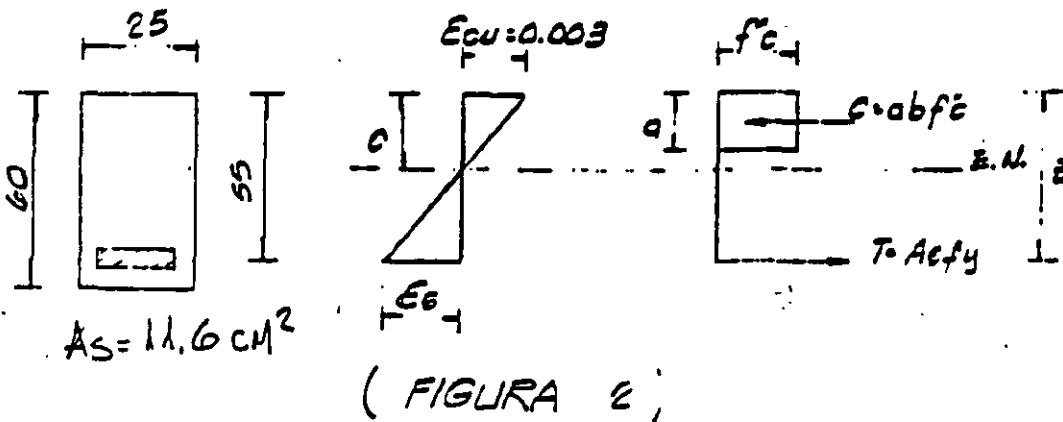
$$M_R = 2.97 \times 0.9 = 2.67 \text{ Ton-M} \quad (\text{MOMENTO DE AGRIETAMIENTO})$$

B) CALCULO DE ϕ (CURVATURA)

$$\epsilon = \frac{\bar{f}_t}{E} = \frac{19.80}{113,137} = 0.00018$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{C} = \frac{\epsilon}{h/2} = \frac{0.00018}{30} = 0.6 \times 10^{-5}$$

2) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



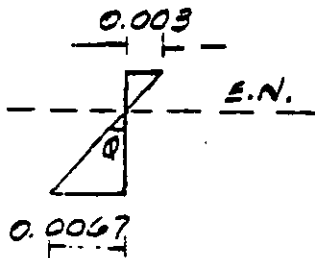
A) CALCULO DE MR

SE SUPONE $c = 17.00$

$$a = 0.8 \times 17 = 13.60$$

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \left(\frac{55}{17} \times 0.003 \right) - 0.003 = 0.0067$$

$$\epsilon_s = 0.0067 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



FALLA DUCTIL

$$C = a b f' c = 13.60 \times 25 \times 136 = 46,240 \text{ Kg} = 46.24 \text{ Ton.}$$

$$T = A_s f_y = 11.60 \times 4000 = 46,400 \text{ Kg} \hat{=} C$$

$$M_R = T_z = T \left(d - \frac{a}{2} \right) = 46,400 \left(\frac{55 - 13.60}{2} \right) = 2,236,480 \text{ Kg-cm.}$$

$$M_R = 22.36 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 22.36 \times 0.9 = \underline{20.12 \text{ Ton-m}}$$

B) CALCULO DE ϕ (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.0030}{17} = \frac{17.65 \times 10^{-5}}{\text{cm}} \text{ rad}$$

3) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SOBREREFORZADA)

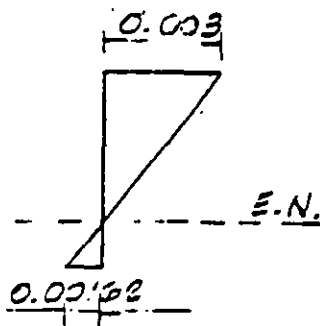
A) CALCULO DE M_R

$$A_s = 30.00 \text{ cm}^2 \quad \text{SECCION } 25 \times 60$$

$$\text{SE SUPONES } c = 35.7$$

$$a = 0.8c = 0.8 \times 35.7 = 28.56 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = \left(\frac{d}{c} \epsilon_{cu} \right) - \epsilon_{cu} = \frac{55}{35.70} \cdot 0.003 - 0.003 = 0.0016 < \epsilon_y$$



NO FLUYE EL
ACERO

$$f_s = \epsilon_s E_s$$

FALLA FRAGIL

$$C = abf''c = 28.56 \times 25 \times 136 = 97,104 \text{ Kg}$$

$$T = A_s \epsilon_s E = 30 \times 0.00162 \times 2 \times 10^6 = 97,200 \text{ Kg}$$

$$M_R = Tz = T \left(d - \frac{a}{2} \right) = 97,200 \left(55 - \frac{28.56}{2} \right) = 3,957,964 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

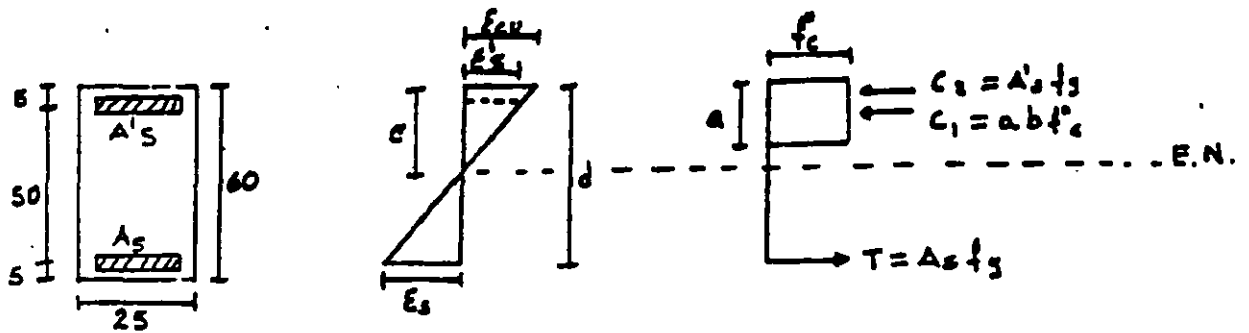
$$M_R = 39.58 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

$$M_R = 39.58 \times 0.9 = \underline{35.62} \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

B) CALCULO DE θ (CURVATURA)

$$\theta = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{35.70} = \underline{8.40 \times 10^{-5}} \text{ rad/cm}$$

4) SECCION DOBLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



DATOS:

$$A_s = 30 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = 10 \text{ cm}^2$$

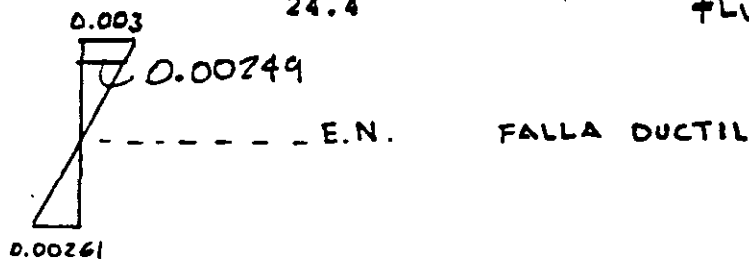
B) CALCULO DE M_R

SE SUPONE $c = 29.4$

$$a = 0.8c = 23.52$$

$$\epsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \epsilon_{cu} = \frac{(29.4 - 5)}{29.4} 0.003 = 0.00249 > f_y = 0.002 \quad \text{FLUYE EN COMPRESION}$$

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{29.4} 0.003 - 0.003 = 0.00261 > f_y = 0.002 \quad \text{+ FLUYE EN TENSION}$$



$$C_1 = a b f_c = 23.52 \times 25 \times 136 \cong 79\,968 \text{ Kg}$$

$$C_2 = A'_s f_y = 10 \times 4000 = 40000 \text{ Kg}$$

$$C = C_1 + C_2 = 79968 + 40000 = 119,968 \text{ Kg}$$

$$T = A_s f_y = 30 \times 4000 = 120\,000 \text{ Kg} \cong C$$

$$M_R = C_1 \left(\bar{d} - \frac{a}{2} \right) + C_2 (\bar{d} - d')$$

$$M_R = 79,968 \cdot (55 - \frac{23.52}{2}) + 40000 (55 - 5)$$

$$M_R = 5'457,816 \text{ Kg} - \text{cm}^2$$

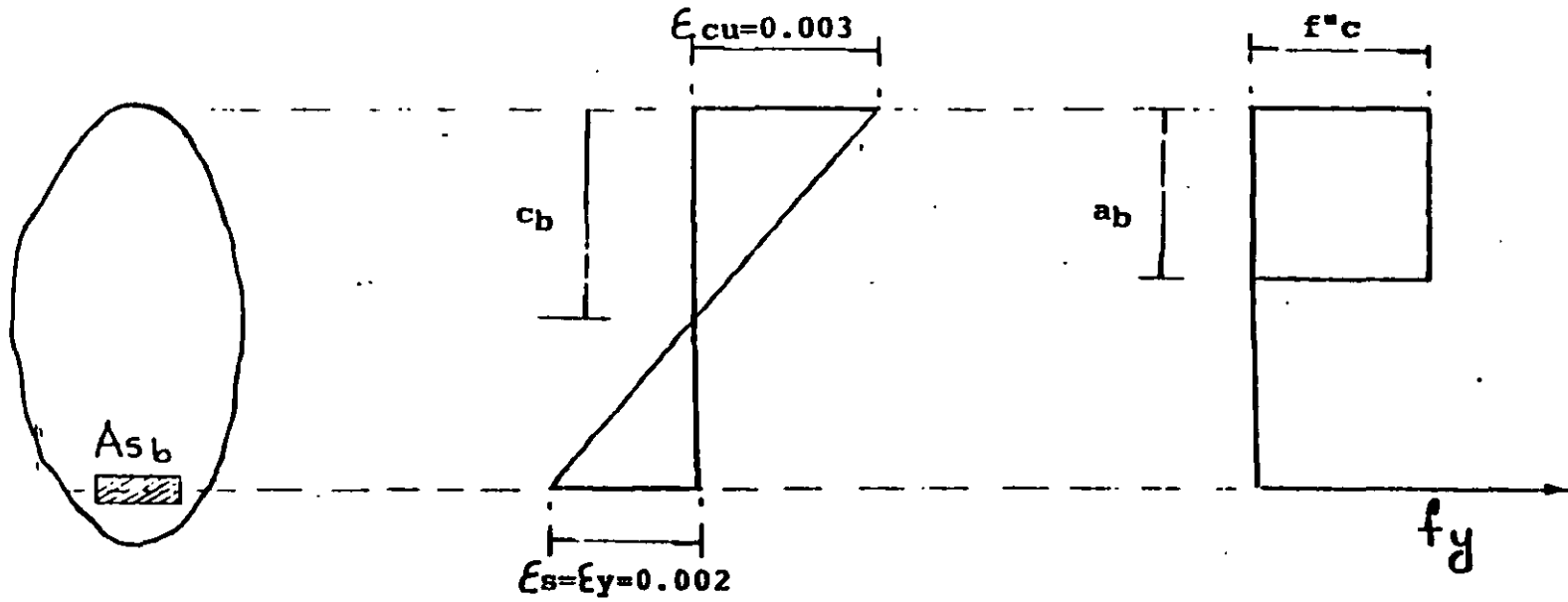
$$M_R = 54.57 \text{ Ton} - \text{m}$$

$$M_R = 54.57 \times 0.9 = \underline{49.11 \text{ Ton} - \text{m}}$$

B) CALCULO DE θ

$$\theta = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{29.40} = \underline{10.20 \times 10^{-5} \text{ rad/cm}}$$

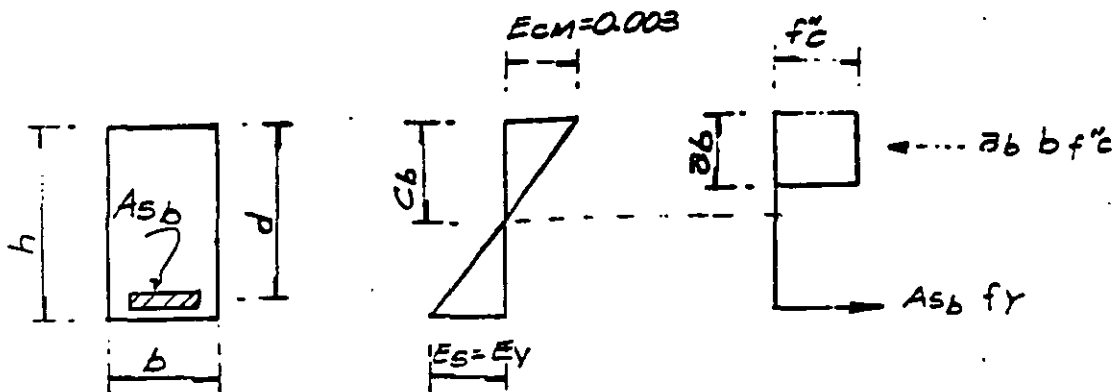
FALLA BALANCEADA



SECCION SUBREFORZADA $A_s \leq A_{sb}$

SECCION SOBREFORZADA $A_s > A_{sb}$

CALCULO DEL PORCENTAJE BALANCEADO EN SECCIONES RECTANGULARES



$$P_b = \frac{A_{sb}}{bd}$$

$$C = T$$

$$0.8 C_b b f_c'' = P_b b d f_y$$

$$C_b = \frac{P_b b d f_y}{0.8 b f_c''} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f_c''}$$

PERO $\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{C_b}{d}$

$$\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f_c'' d}$$

$$P_b = \frac{0.8 f_c''}{f_y} \frac{0.003}{E_y + 0.003}$$

MULTIPLICANDO POR $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

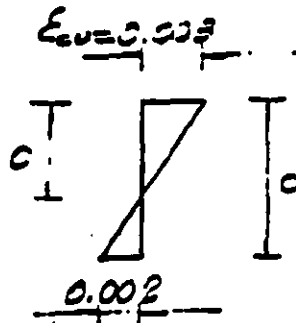
$$P_b = \frac{0.8 f_c''}{f_y} \frac{6000}{f_y + 6000} \quad \left[f_y = E_s E_y \right]$$

$$P_b = \frac{4800}{f_y + 6000} \frac{f_c''}{f_y}$$

5) SECCION BALANCEADA

A) CALCULO DE MR

$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4000}{2 \times 10^6} = 0.002$$



DE LA FIGURA

$$\frac{c}{\epsilon_{cu}} = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad c = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \epsilon_{cu}$$

$$C = \frac{55 \times 0.003}{0.003 + 0.002} = 33.00 \text{ cm.}$$

$$a = 0.8c = 0.8 (33) = 26.40 \text{ cm}$$

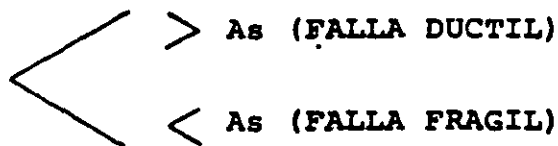
LA FUERZA DE COMPRESION ES

$$C = abf''c = 26.40 \times 25 \times 136 = 89,760 \text{ Kg}$$

POR EQUILIBRIO

$$T = C \implies A_s b f_y = 89,760$$

$$A_s b = \frac{89760}{4000} = \underline{\underline{22.44}} \text{ cm}^2$$



$$M_R = CZ = C \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_R = 89760 \left(55 - \frac{26.40}{2} \right) = 3'751,968 \text{ Kg - cm}$$

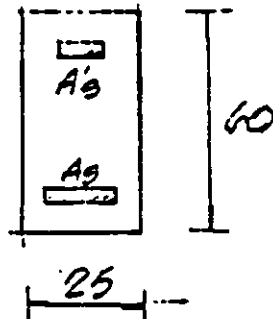
$$M_R = 37.52 \times 0.9 = \underline{\underline{33.77}} \text{ Ton-M}$$

B) CALCULO DE ϕ (CURVATURA)

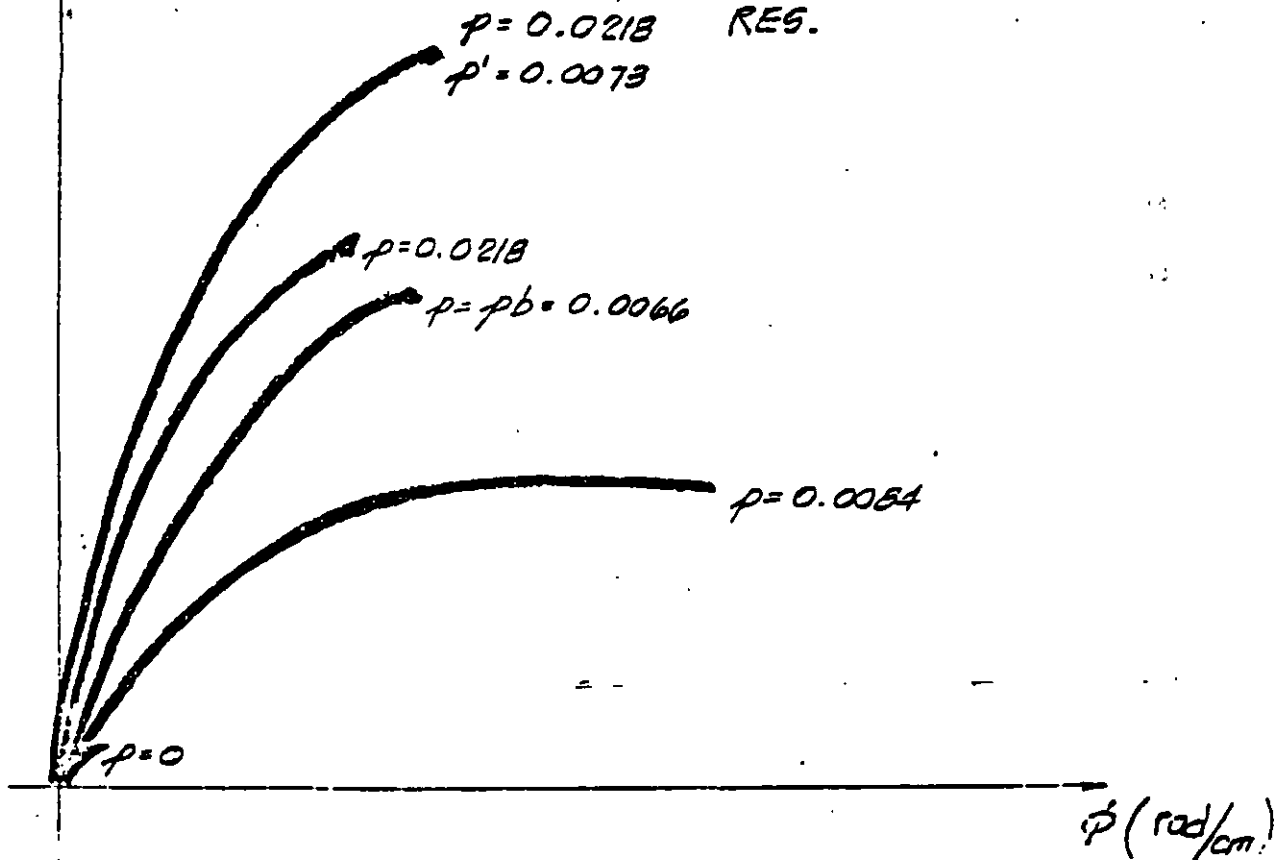
$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{33.00} = \underline{\underline{9.09 \times 10^{-5}}} \text{ rad/cm}$$

GRAFICA MOMENTO-CURVATURA PARA DISTINTOS PORCENTAJES DE REFUERZO

M (TON-m)



RESISTENCIA Y CURVATURAS OBTENIDAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES.



RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO (RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

$$1.1) M_R \geq 1.5 M_{ag}$$

$$M_{ag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{MAX}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'_c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{smin} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

$$2.1) A_{smax} \begin{cases} A_{sb} & \text{(NO SISMO)} \\ 0.75 A_{sb} & \text{(SI SISMO)} \end{cases}$$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1) $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{\text{MAX}}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

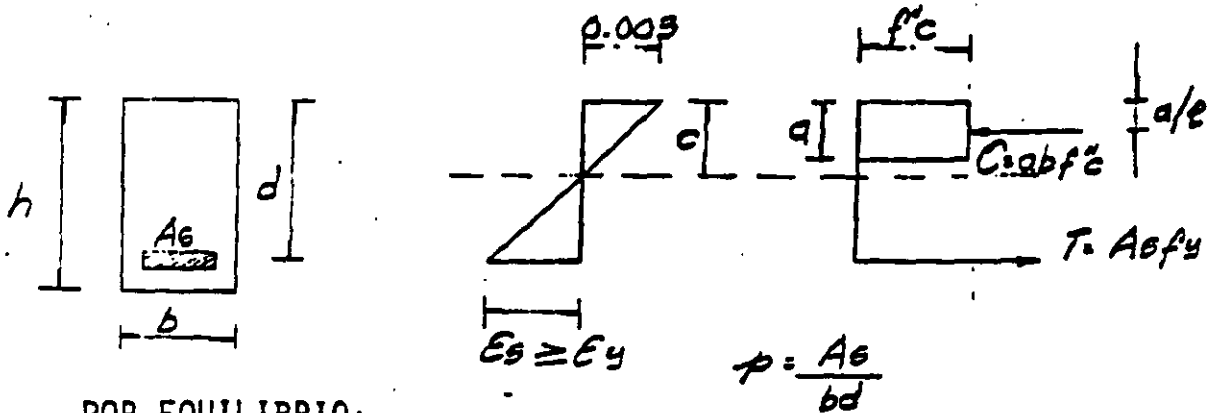
2.1) $A_{s\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & \text{(NO SISMO)} \\ 0.75 A_{sb} & \text{(SI SISMO)} \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

FORMULAS PARA CALCULAR LAS RESISTENCIAS EN SECCIONES DE FORMA COMUN

A) SECCIONES RECTANGULARES SUBREFORZADAS SIN ACERO DE COMPRESION.



POR EQUILIBRIO:

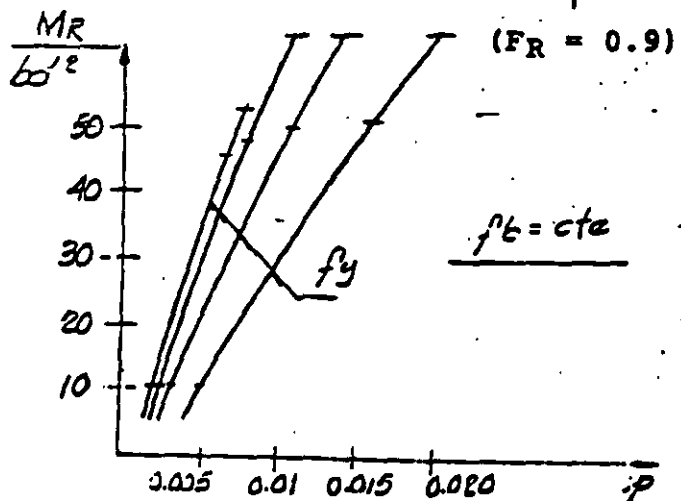
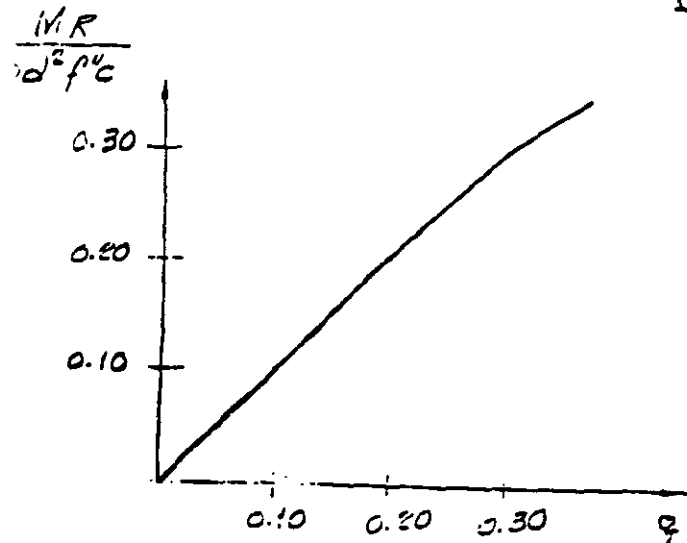
$$c = T$$

$$abf''c = Asfy$$

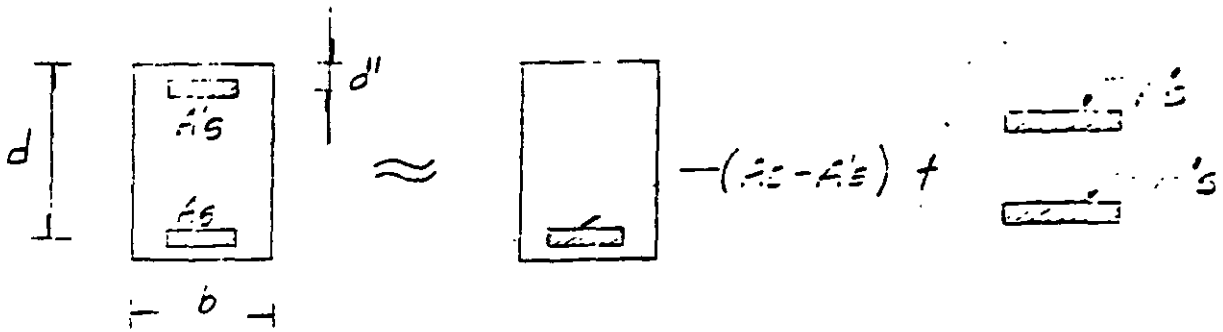
$$a = \frac{Asfy}{bf''c} = \frac{Pdfy}{f''c} \quad ; \quad q = \frac{Pfy}{f''c}$$

$$M_R = c(d - \frac{a}{2}) = abf''c d(1 - \frac{a}{2d}) = \frac{pdfy}{f''c} bf''c d(1 - \frac{Pdfy}{2df''c})$$

$$M_R = F_R [b d^2 f''c q (1 - 0.5q)]$$



SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[(A_s - A_s') f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right]$$

de $C = T$

$$abf''c + A_s' f_y = A_s f_y$$

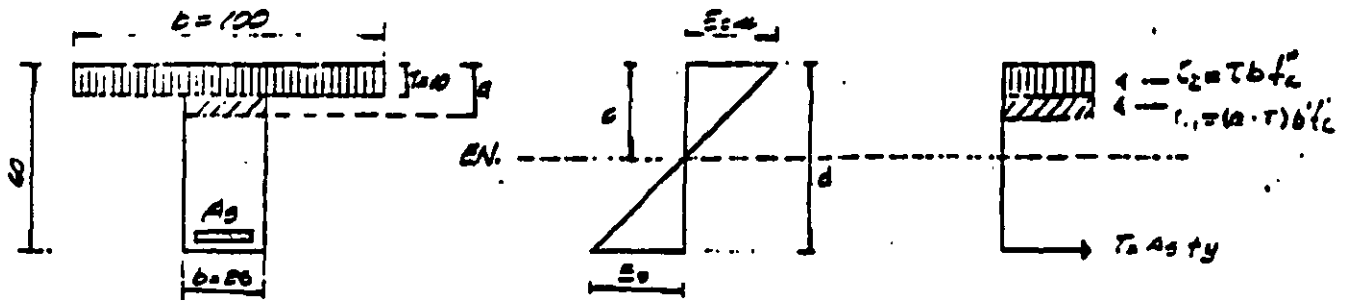
$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{bf''c}$$

SOLO SI

$$(P - P') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

6-) SECCION T SIMPLEMENTE ARMADA
(SUBREFORZADA)



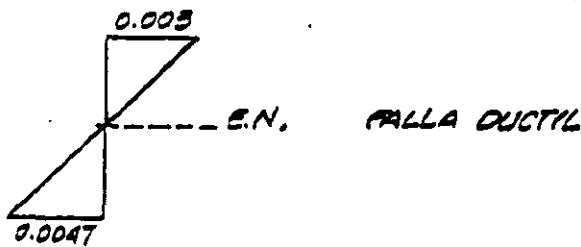
$$L_0 = 40.00 \text{ CM}^2$$

A-) CALCULO DE M_r .

SE SUPONE $c = 21.32 \text{ CM}$.

$$d = 0.8 = 0.8 \times 21.32 = 17.06 \text{ CM}$$

$$\epsilon_s = \frac{c}{d} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{21.32}{17.06} \times 0.003 = 0.00477 \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



$$C_1 = (a - c) b' f_c = (17.06 - 10) 25 \times 136 = 24,004 \text{ Kg}$$

$$C_2 = T b f_c = 10 \times 100 \times 136 = 136,000 \text{ Kg}$$

$$C = 24,004 + 136,000 = 160,004 \text{ Kg}$$

$$T = A_s f_y = 40 \times 4000 = 160,000 \text{ Kg} = C$$

$$M_r = C_1 \left(d - a + \frac{a - c}{2} \right) + C_2 \left(d - \frac{c}{2} \right)$$

$$M_r = 2400 \left(0.55 - 0.17 + \frac{0.17 - 0.1}{2} \right) + 136,00 \left(0.55 - \frac{0.1}{2} \right) = 77.95 \text{ TON-M}$$

$$M_r = 77.95 \times 0.9 = 70.16 \text{ TON-M}$$

E-) CALCULO DE ϕ (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{c} = \frac{0.0047}{21.32} = 0.00022 \frac{\text{rad}}{\text{CM}}$$

EJEMPLO 9.1 Diseño de una viga rectangular simplemente armada

Obtener las dimensiones de una viga rectangular y la cuantía de acero As para resistir los siguientes momentos (en condiciones de servicio): $M_D = 7.50$ ton-m y $M_L = 5.00$ ton-m. El agrietamiento por flexión debe ser revisado con el refuerzo; suponga que la viga está expuesta a la intemperie.

Usar $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$Z = 145 \text{ (exposición al exterior)}$$

CALCULOS Y DISCUSION

referencias

10.3.3

1.- El procedimiento de diseño completo para secciones rectangulares simplemente armadas se presenta a partir de calcular un peralte mínimo, usando el porcentaje máximo que se permite para los miembros a flexión, $0.75 P_b$

Paso 1. Cálculo del porcentaje máximo de acero*

$$P_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.0283$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ (} f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2 \text{)}$$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b = 0.75 (0.0283) = 0.0212$$

10.3.3

Paso 2. Cálculo del bd^2 necesario

Resistencia a la flexión necesaria:

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$M_u = 1.4 \times 7.50 + 1.7 \times 5.0$$

ec (9-1)

$$M_u = 19.00 \text{ ton-m}$$

* Los valores de P_b y $0.75 P_b$ se pueden obtener también directamente de la tabla 9.1

$$R_n = p f_y \left(1 - 0.5 \frac{p f_y}{0.85 f_c'} \right)$$

$$= 0.0212 \times 4200 \left(1 - \frac{0.5 \times 0.0212 \times 4200}{0.85 \times 280} \right)$$

$$R_n = 72.38 \text{ Kg/cm}^2$$

9.3.2.1

$$\phi = 0.90 \text{ (flexión)}$$

$$bd^2_{\text{nec.}} = \frac{M_u}{\phi R_n} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 \times 72.38} = 29,167 \text{ cm}^3$$

Paso 3. Dimensiones del elemento

$$bd^2_{\text{nec.}} \leq bd^2_{\text{disp.}}$$

Sea $b = 25.0 \text{ cm}$ (ancho de columna)

$$d = \sqrt{\frac{29,167}{25}} = 34.16 \text{ cm}$$

Peralte mínimo total $\hat{=} 34.16 + 6.25 = 40.4 \text{ cm}$

Para la resistencia a la flexión, resulta adecuada una viga de $25 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Sin embargo, debe observarse que el peralte total de 40 cm es un poco menor que el requerido según el criterio de esfuerzos admisibles. Debido a eso que las deflexiones pueden ser importantes en las vigas diseñadas con el criterio de resistencia última.

Paso 4. Con el peralte total de 40 cm , se calcula un valor revisado de p .
Como ilustración, se calcula el p con cuatro diferentes métodos

$$d \hat{=} 40 - 6.2 = 33.8 \text{ cm}$$

(1) por fórmula (método exacto):

$$R_n = \frac{M_u}{\phi (bd^2)_{disp}} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 (25 \times 33.8^2)} = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$p = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}} \right)$$

$$p = \frac{0.85 \times 0.28}{4.2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 73.9}{0.85 \times 280}} \right) = 0.0218 \hat{=} P_{\text{máx}}$$

(2) Con las curvas de resistencia como las de la fig. 9.1 para $R_n = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$ (10511b/pulg²), $p = 0.0214$

(3) Con las tablas de resistencia como la tabla 9.2:

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c bd^2} = \frac{19 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 25 \times 33.8^2} = 0.2640$$

$$w = 0.327$$

$$p = wf'_c / f_y = 0.327 \times 0.28 / 4.2 = 0.0218$$

(4) Con aproximación lineal:

$$p = (p_{\text{original}}) \frac{(R_n \text{ revisado})}{(R_n \text{ original})}$$

$$p = 0.0212 \times 73.92 / 72.38 = 0.0217$$

Paso 5. Cálculo de A_s necesaria

$$A_s = (p_{\text{revisado}}) (bd)_{disp}$$

$$A_s = 0.0218 \times 25 \times 33.8 = 18.42 \text{ cm}^2$$

2.- División de la corrección de los cálculos, por simple estática
(ver la siguiente figura):

$$T = \rho b d f_y = A_s f_y = 18.42 \times 4.2 = 77.36 \text{ ton}$$

$$a = \frac{C \delta T}{0.85 f'_c b} = \frac{77.36}{0.85 \times 0.28 \times 25} = 13 \text{ cm}$$

Resistencia de diseño a la flexión:

$$\phi M_n = [\phi A_s f_y (d - \frac{a}{2})] = [0.9 \times 77.36 (33.8 - 13.00/2)]$$

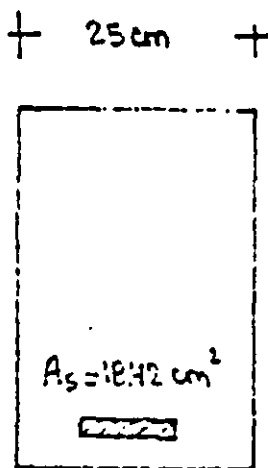
$$\phi M_n = 1900.74 \text{ ton-cm} \approx 19.01 \text{ ton-m}$$

como (resistencia necesaria) \leq (resistencia disponible), o sea que

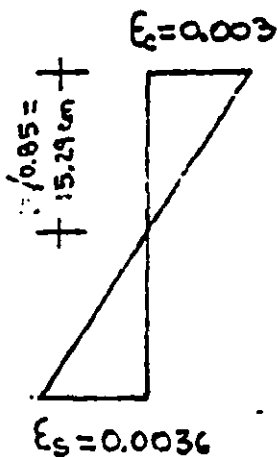
$$M_u \leq \phi M_n$$

$$19.00 \approx 19.01$$

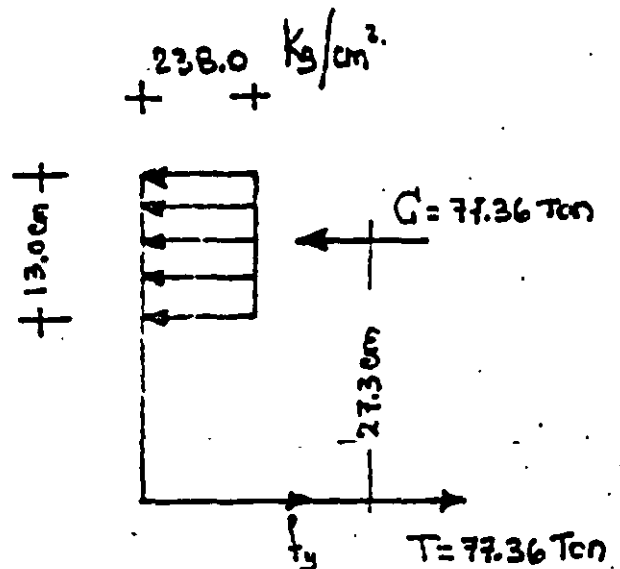
bien



sección transversal



deformaciones



Bloque de esfuerzos

3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar $z = 145$ para elementos a la intemperie,

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

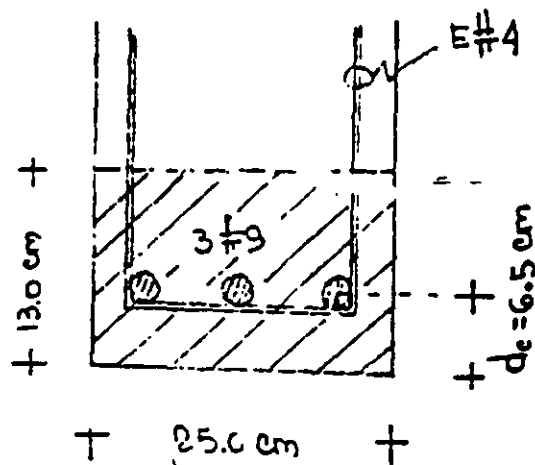
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10:6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \text{bien}$$



3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar $z = 145$ para elementos a la intemperie,

10.6

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

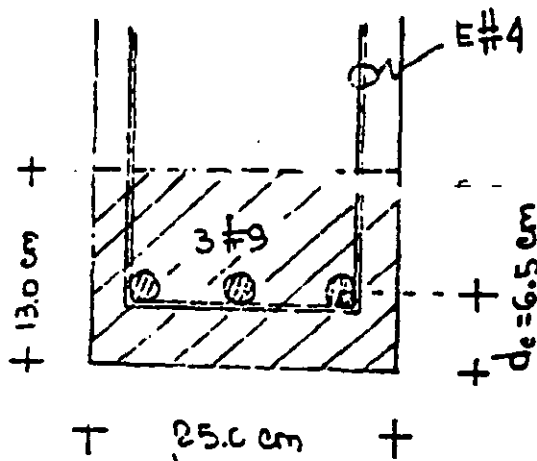
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$



4. Revisión del ancho de viga

$$b_{\text{disp.}} \geq 2 \times (\text{recubrimiento}) + 3 \times 2.86 + 2 \times 2.86 = \quad 7.6.1$$

$$= 2 \times 5.07 + 14.30 = 24.4 < 25 \text{ cm (ancho disponible)} \quad 7.7.1$$

bien

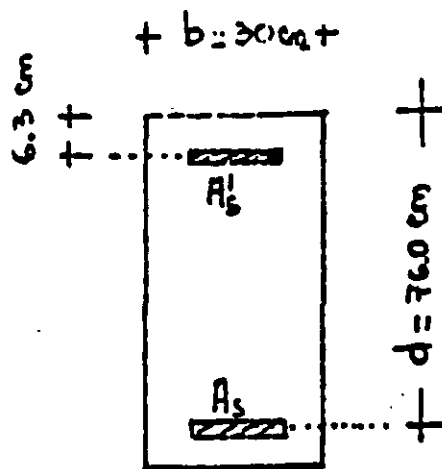
EJEMPLO 9.2 DISEÑO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE ARMADA

Se tiene una sección transversal de una viga, con las dimensiones como se observa en la siguiente figura, y se pide calcular las cantidades de acero para resistir un momento factoral $M_u = 124 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$ (exposición al exterior)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Revisión como simplemente armada (acero a tensión)

Cálculo del acero de refuerzo a tensión que se requiere, con la ayuda de la tabla 9.2:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{124 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 30 \times 76^2} = 0.2840$$

de la tabla 9.2, $w = 0.361$

Porcentaje de acero a tensión necesario:

$$p = w f'_c / f_y = 0.361 \times 0.28 / 4.2 = 0.241$$

Considerando solo refuerzo a tensión:

$$p_{\text{máx}} = 0.75 p_b$$

10.3.3

de la tabla 9.1, con $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$ (4000 lb/pulg²) y

$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ (60000 lb/pulg²):

$$p_{\text{máx}} = 0.0214$$

como $0.0241 > 0.0214$ se necesita acero de compresión

2. Cálculo del acero necesario, A_s y A'_s :

La w máxima que se permite para vigas simplemente armadas (acero de tensión) es:

$$w \leq 0.75 \rho_b f_y / f'_c = 0.0214 \times 4.2 / 0.28 = 0.321; \text{ de la tabla}$$

9.2, con $w = 0.321$:

$$M_n / f'_c b d^2 = 0.2602$$

La resistencia máxima de diseño a la flexión como simplemente armada vale:

$$\begin{aligned} \phi M_n &= 0.9 (0.2602) (0.28 \times 30) (76^2) / 100 \\ &= 113.62 \text{ ton-m} \end{aligned}$$

y la resistencia necesaria tomada con el refuerzo a compresión:

$$M'_u = 124 - 113.62 = 10.38 \text{ ton-m}$$

Suponiendo que el acero a compresión fluye, $f'_s = f_y$:

$$p' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{M'_u}{\phi f_y (d-d') bd}$$

$$p' = \frac{10.38 \times 100,000}{0.9 \times 4200 (76 - 6.3) 30 \times 76} = 0.00173$$

$$p = 0.75 \rho_b + p' = 0.0214 + 0.00173 = 0.0231$$

NOTA: para elementos doblemente armados, el porcentaje de ρ_b con que contribuye el refuerzo de compresión no se necesita reducir por el factor de 0.75

Ver la tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento

$$A'_s = p'bd = 0.00173 \times 30 \times 76 = 3.94 \text{ cm}^2$$

$$A_s = pbd = 0.0231 \times 30 \times 76 = 52.67 \text{ cm}^2$$

Revisión de que se cumpla que el acero de compresión esté fluyendo:

$$\frac{A_s - A'_s}{bd} \geq \frac{0.85 b_1 f'_c d'}{f_y d} \left(\frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0231 - 0.00173 \geq \frac{0.85 \times 0.85 \times 0.28 \times 6.3}{4.2 \times 76} \left(\frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0214 \geq 0.0133$$

∴ sí fluye el acero de compresión como se supuso, bien.

3. Se puede llevar a cabo una revisión de las correcciones a los cálculos, según las exs. de resistencia que se dan en la sección 10.3 (A) (3) de los comentarios del Reglamento. Cuando el armado a compresión fluye:

$$\phi M_h = \phi \left[(A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right]$$

$$= 0.9 \left\{ (48.79 \times 4.2) \left(76 - \frac{28.70}{2} \right) + 3.94 \times 4.2 (76 - 6.3) \right\} \dots$$

$$= 124.08 \text{ ton-m} \dots \dots \text{ bien}$$

$$\text{donde } a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{48.79 \times 4.2}{0.85 \times 0.28 \times 30} = 28.70$$

4. Distribución del acero para satisfacer el criterio de agrietamiento (por flexión) de la sección 10.6 para elementos colocados a la intemperie.

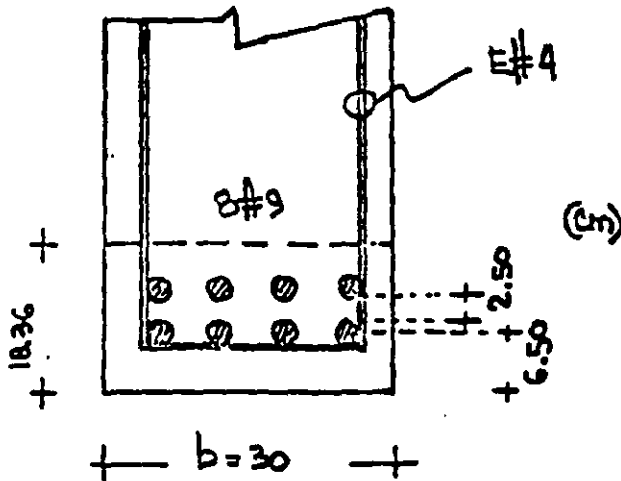
Refuerzo a tensión:

$$\text{sean 8 var. } \# 9 \quad (A_s = 51.28 \text{ cm}^2 \approx 52.67 \text{ cm}^2)$$

(2% menos que lo necesario bien)

Acero a compresión:

sean 2 var. # 5 ($A'_s = 3.96 \text{ cm}^2 \approx 3.94 \text{ cm}^2$, bien)



$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A}$$

ec(10.4)

$$d_c = (\text{recubrimiento}) + \frac{1}{2} \phi_{\text{longit.}} + \phi_{\text{estribo}}$$

10.0

$$= 3.81 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm}$$

$$(\text{recubrimiento para var. \# 9} = 3.81 + 1.27 = 5.08 \text{ cm})$$

7.7.1

(expuesta a la intemperie)

$$A = 18.36 \times 30/8 = 68.85 \text{ cm}^2/\text{varilla}$$

10.0

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 2.52 \text{ ton/cm}^2$$

10.6.4

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 68.85} = 108 < 145 \quad \text{--- bien}$$

5. Revisión del ancho de viga

$$b = 2 \times (\text{recubrimiento}) + 4 \times 2.86 + 3 \times 2.86$$

$$= 2 \times 5.08 + 11.44 + 8.58 = 30 \text{ cm} \quad \text{--- bien}$$

6. Para el momento de diseño el armario de carga crítica se determina por el momento de diseño. Para la resistencia se necesitan los radios con:

$$\text{rop. máx} \leq 16 \times 1.59 = 25.4 \text{ cm}$$

$$48 \times 1.27 = 60.9 \text{ cm}$$

7.10.5.2

$$\text{dimensión menor de la viga} = 30 \text{ cm}$$

usar E # 4 @ 25 cm

Resistencia a la compresión del patín:

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$= 0.85 \times 0.28 (75 - 25) 6.5 = 77.35 \text{ ton}$$

A_{sf} necesario con que contribuye el patín:

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{77.35}{4.2} = 18.42 \text{ cm}^2$$

Contribución, a la resistencia, del patín:

$$\phi M_{nf} = \phi [A_{sf} f_y (d - 0.5 h_f)]$$

$$= 0.9 [18.42 \times 4.2 (49 - 0.5 \times 6.5)]/100 = 31.85 \text{ t-m}$$

Momento que debe tomar el alma de la viga:

$$\phi M_{lw} = M_u - \phi M_{nf} = 55.0 - 31.85 = 23.15 \text{ ton-m}$$

3. Con la ayuda de la tabla 9.2 se calcula el área de acero A_{sw} necesario para absorber 23.15 t-m

$$\text{para } \frac{M_{lw}}{\phi f'_c b d^2} = \frac{23.15 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 25 \times 49^2} = 0.153$$

de la tabla 9.2, $w = 0.167$

$$A_w = 1.18 w d = 1.18 \times 0.167 \times 49 = 9.7 \text{ cm}$$

4. Así, el refuerzo total necesario para tomar el $M_u = 55 \text{ ton-m}$ es

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 18.42 + 13.74 = 32.16 \text{ cm}^2$$

5. Revisión del porcentaje máximo permitido según la sección 10.3.3. Ver la fig. 10.3.2 (c) y tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento:

- (2) para secciones "T" simplemente armadas:

$$p_{\text{máx}} = 0.75 \left[\frac{b_w}{b} (\bar{p}_b + p_f) \right]$$

$$p_f = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} (b - b_w) h_f / (b_w d)$$

$$= 0.85 \frac{0.28}{4.2} (75 - 25) 6.5 / (25 \times 49) = 0.0150$$

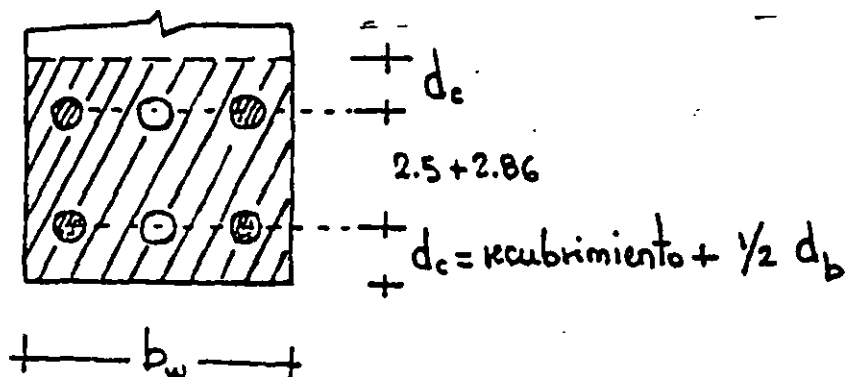
de la tabla 9.1, $\bar{p}_b = 0.0285$

$$p_{\text{máx}} = 0.75 \left[\frac{25}{75} (0.0285 + 0.015) \right] = 0.0109$$

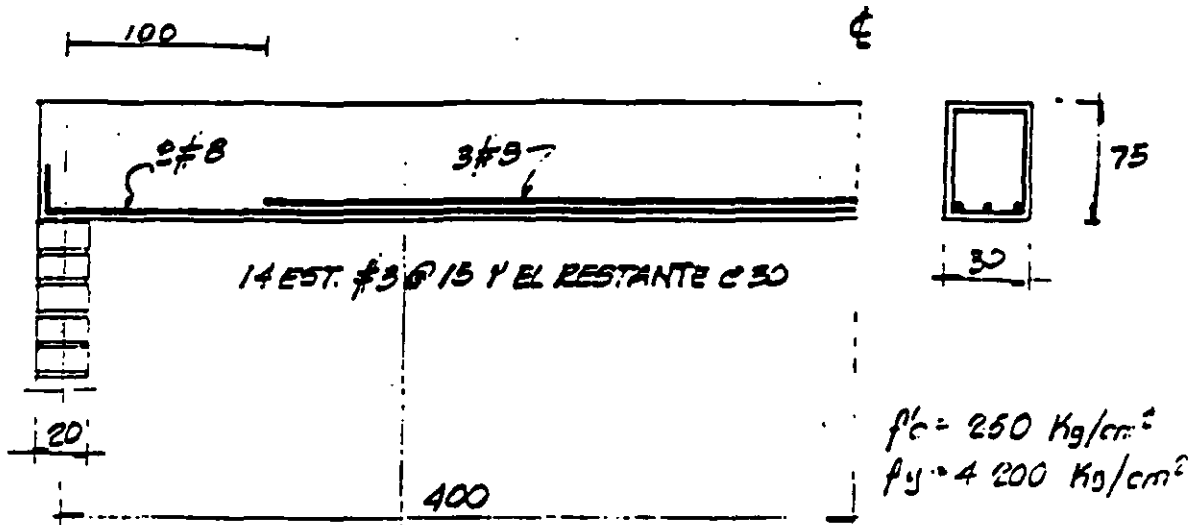
$$A_{s \text{ máx}} = 0.0109 \times 75 \times 49 = 40.06 \text{ cm}^2 > 32.16 \quad \text{bien}$$

6. Selección del armado tal que satisfaga el criterio de control de agrietamiento para exposición a la intemperie ($z = 145$)

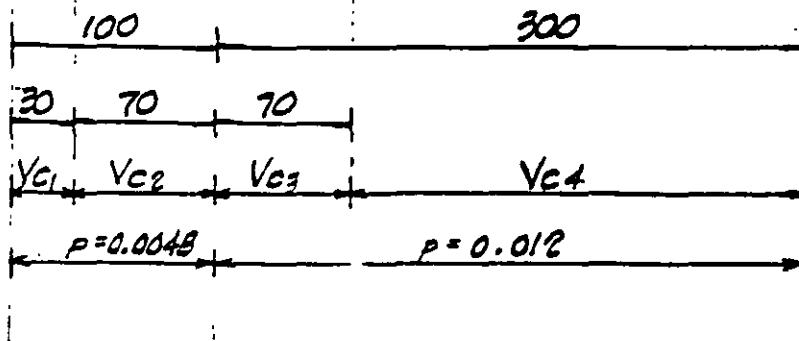
sean 4 var # 9 y 2 var # 7, ($A_s = 33.40 \text{ cm}^2$)



1.- REDUCCIÓN A DELANTE DE UNA VIGA RECTANGULAR



A).- CONTRIBUCION DE V_c



(COMO $h > 70$ REDUCIR EN UN 30% A V_c EN TODOS LOS CASOS)

- CALCULO DE V_c ,

COMO $P = 0.0048 < 0.01$,

$$V_{c1} = V_{c2} = \left[(0.2 + 30P) F_r b d \sqrt{f'_c} \right] 0.7$$

$$V_{c1} = \left[(0.2 + 30 \cdot 0.0048) 0.8 \times 20 \times 70 \sqrt{250} \right] 0.70 = 5721.11$$

- CALCULO DE V_{c2}

EN ESTE TERMINO SE INTERLUMINA MÁS DEL 33%

$$V_{c2} = V_{c1}, 0.7$$

$$A_{sw} = \frac{0.85 f'_c b_w d}{f_y} = \frac{0.85 \times 0.28 \times 25 \times 9.7}{4.2} = 13.74 \text{ cm}^2$$

De igual modo, A_{sw} se puede calcular directamente de

$$A_{sw} = \frac{w f'_c b_w d}{f_y} = \frac{0.167 \times 0.28 \times 25 \times 49}{4.2} = 13.64 \text{ cm}^2$$

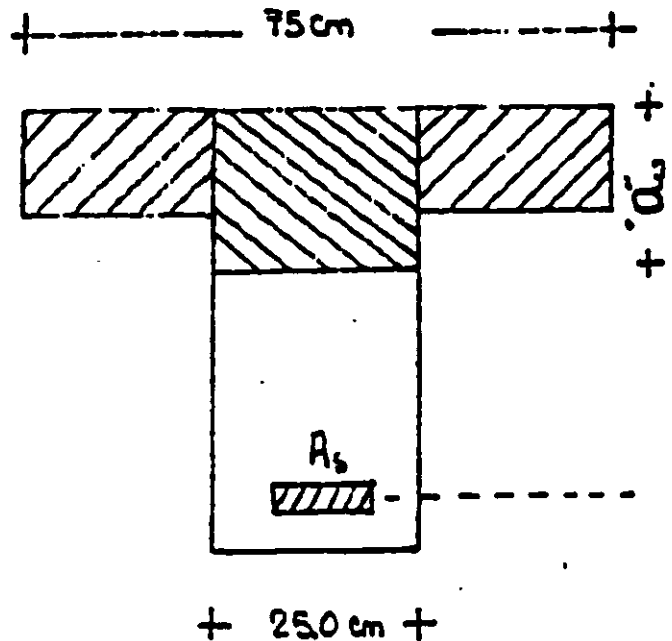
EJEMPLO 9.5 DISEÑO DE UNA SLABAS TIPO "T" SIMPLEMENTE ARMADA

Calcular el armado a tensión de una sección "T" que debe resistir un momento ya afectado por el factor de carga de $M_u = 55 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$ (expuesta a la intemperie)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Con la ayuda de la tabla 9.2 se determina la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos, a , como sección rectangular

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{55 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 75 \times 49^2} = 0.121 \quad 9.3.2.1$$

de tabla 9.2, $w = \rho f_y / f'_c = 0.132$

$$\begin{aligned} "a" &= 1.19 w d \\ &= 1.18 \times 0.132 \times 49 = 7.63 > 6.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Como el valor de "a" necesario, como si fuera sección rectangular, es mayor que el espesor del patín, entonces el diseño debe hacerse como sección "T".

2. Cálculo del armado necesario A_{sf} y de la resistencia ϕM_{nf} con que contribuye el patín de la viga.

$$d_c = 5.08 + 1.43 = 6.50 \text{ cm}$$

área efectiva de tensión del concreto:

$$A = (2d_c + 2.5 + 2.86) b_w / \text{No. equivalente de var} \# 9$$

$$= 18.36 \times 25 / (33.40 / 6.45) = 89.71 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.6) \sqrt[3]{d_c A} = 0.6 \times 4.2 \times 5.6 \sqrt[3]{6.5 \times 89.7}$$

$$= 118 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$

7. Revisión del ancho del alma necesario

$$b_w \text{ necesario} = 2 (\text{recubrimiento}) + 2d_{b1} + 2d_{b1}^* + d_{b2}$$

$$= 2 \times 5.08 + 4 \times 2.86 + 2.22$$

$$= 23.8 \text{ cm} < 25 \text{ cm} \quad \underline{\text{bien}}$$

*La distancia libre entre dos varillas debe ser mayor que d_b ó 2.5 cm

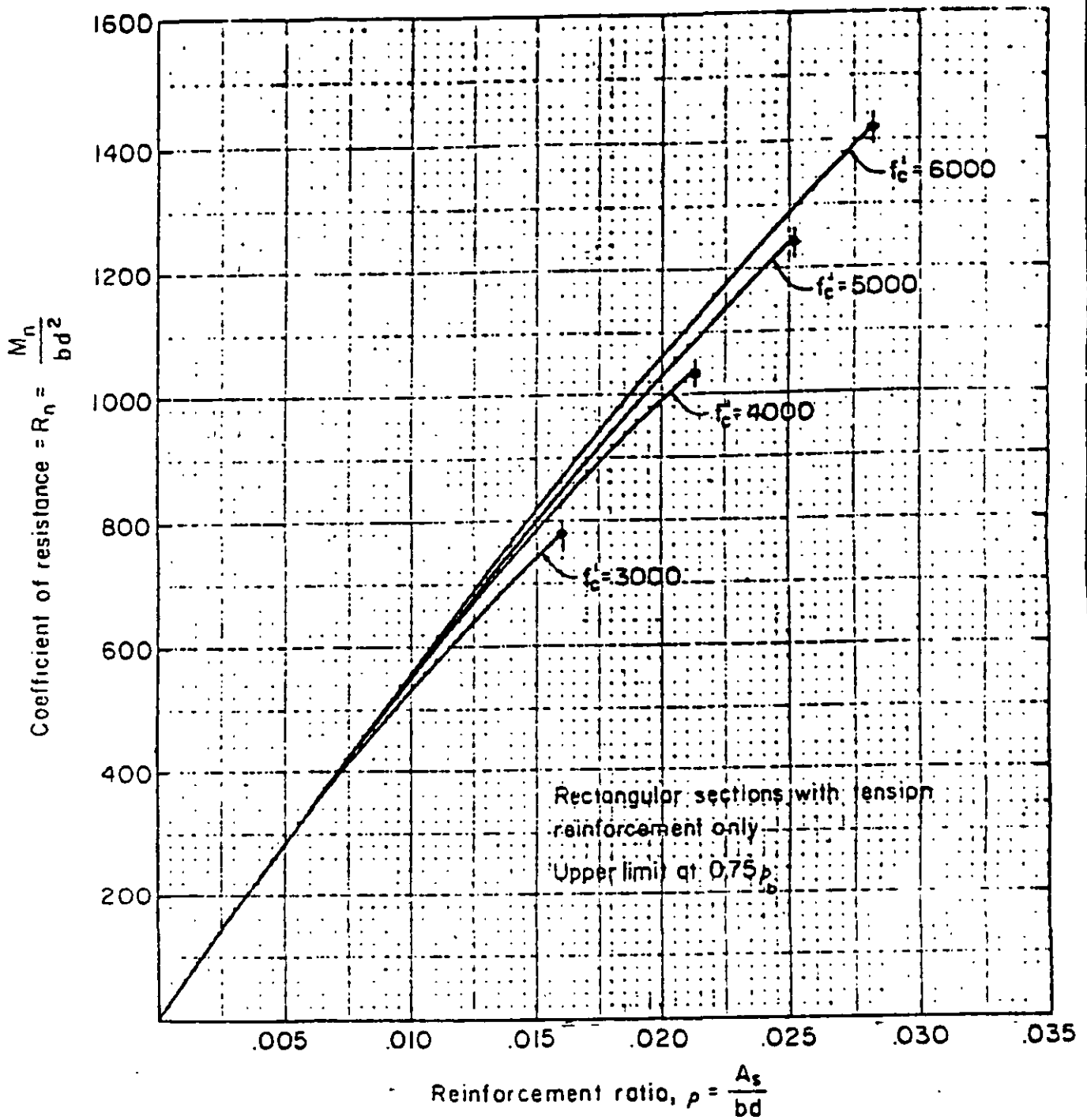


Fig. 9-1 - Strength Curves (R_n vs ρ) for Grade 60 Reinforcement

TABLE 9-2. Moment Strength $M_u / \phi f'_c b d^2$ or $M_n / f'_c b d^2$ of Rectangular Sections with Tension Reinforcement Only*

ω	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
0.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
0.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
0.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
0.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0439	.0448	.0457	.0467	.0476
0.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
0.06	.0579	.0588	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
0.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0725	.0735	.0744	.0753
0.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
0.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
0.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
0.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
0.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
0.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
0.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
0.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
0.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1489	.1497	.1506	.1514	.1522
0.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
0.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
0.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
0.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
0.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
0.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
0.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
0.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
0.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
0.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
0.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
0.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
0.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
0.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
0.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
0.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
0.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
0.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
0.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
0.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
0.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
0.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
0.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051

$M_n / f'_c b d^2 = A_s f_y (d-a/2) / f'_c b d^2 = \omega(1-0.59\omega)$, where $\omega = \rho f_y / f'_c$
 and $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b$.

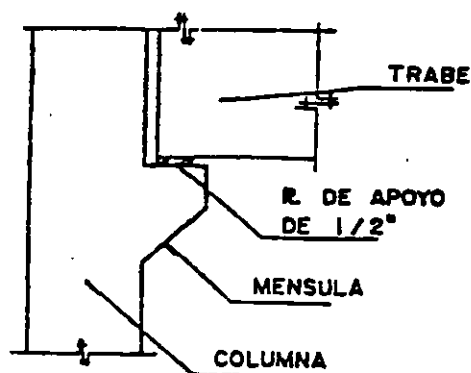
Design: Using factored moment M_u enter table with $M_u / \phi f'_c b d^2$; find ω and compute steel percentage ρ from $\rho = \omega f'_c / f_y$.

Investigation: Enter table with ω from $\omega = \rho f_y / f'_c$; find value of $M_n / f'_c b d^2$ and solve for nominal moment strength, M_n .

Ejemplo:

Diseñar la ménsula mostrada en la figura con las mínimas dimensiones para soportar la trabe.

La ménsula se encuentra en una columna de 35 cm. Debido al efecto de contracción y flujo plástico restringidos se crea una fuerza de 9 ton. en el apoyo soldado.



$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2 \text{ (peso norm)}$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

Cargas

$$C.M. = 10.9 \text{ ton.}$$

$$C.V. = 17.0 \text{ ton.}$$

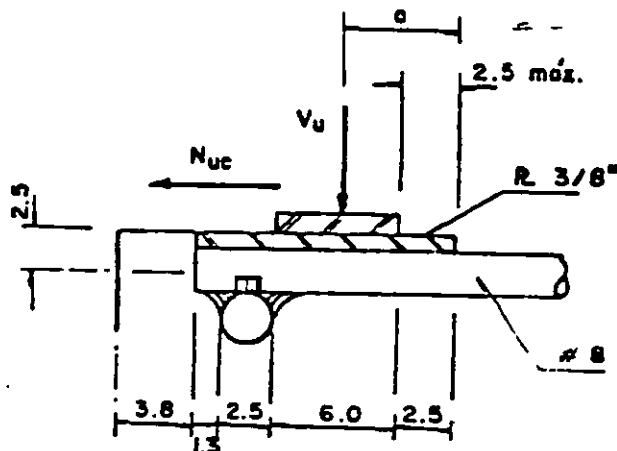
$$T = 9.1 \text{ ton.}$$

Cálculo y Discusión

Referencia del
Reglamento

1.- Dimensión del apoyo basado en la resistencia al aplastamiento de concreto de acuerdo a la sección 10.15.

El ancho del apoyo = 35 cm.



Cálculos y discusión.

Referencia del
Reglamento

$$V_u = 1.4 (10.9) + 1.7(17.0) = 44.2 \text{ tons.}$$

$$V_u \leq \phi P_{nb} = \phi (0.85 f'_c A_s)$$

10.5

$$44200 = 0.70 (0.85) (350) A_s = 208.3 A_s$$

9.3.2.4

$$A_s = 44200 / 208.3 = 212.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Longitud de apoyo} = 212.2 / 35 = 6 \text{ cm.}$$

Usar un apoyo de 6 X 35 cm.

$$N_{uc} = 1.7 (9.1) = 15.5 \text{ ton. (como carga viva)}$$

11.9.3.4

2. Determinación de "a" con 2.54 cm. de holgura al final de la trabe. Considerando la reacción a un tercio de la placa de apoyo.

$$a = 2/3 (6.0) + 2.54 = 6.54 \text{ cm.}$$

Usar un a = 7 cm.

3. Determinación del peralte de la ménsula basándose en el diseño al límite por resistencia al cortante V_n .

$$\text{Para } f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2, V_n (\text{max}) = 56 \text{ bwd}$$

11.9.3.2.1

$$V_u \leq \phi V_n = \phi (56 \text{ bwd})$$

Se requiere un peralte:

$$"d" = 44200 / 0.85 (56) (35)$$

Cálculo y discusión.

Referencia del
Reglamento

$$d = 26.5 \text{ cm.}$$

Suponiendo varillas #8 más la tolerancia

$$h = 26.5 + 2.54 = 29 \text{ cm.}$$

Usar h = 30 cm.

Para el diseño $d = 30 - 2.50 = 27.50 \text{ cm.}$

$$a/d = 0.26.$$

4. Determinación del refuerzo por cortante-fricción A_{uf} .

$$A_{uf} = \frac{V_u}{\phi f_y \mu} = \frac{44200}{0.85(4200)(1.4)} = 8.8 \text{ cm.}$$

11.7.4.1

11.7.4.3

5. Determinación del refuerzo por momento A_f .

$$M_u = V_u a + N_u c (h-d)$$

11.9.3.3

$$= 44200(6.54) + 15500(30 - 27.50) = 327,820 \text{ Kg.cm}$$

$$= 3.28 \text{ Ton.m.}$$

Utilizando un método ordinario de flexión para el cálculo de A_f o usando conservadoramente $j d = 0.9 d$.

$$A_f = \frac{327820}{0.85(4200)(0.9)(27.50)} = 3.71 \text{ cm}^2$$

Nota: Para todos los cálculos se ha utilizado $\phi = 0.85$

11.9.3.1

Cálculos y discusión.

Referencia del
Reglamento

6. Determinación del refuerzo por tensión
directa.

A_n

11.9.3.4

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} = \frac{15500}{0.85(4200)} = 4.34 \text{ cm}^2$$

7. Determinación del refuerzo por tensión
primaria.

A_s

11.9.3.5

$$(2/3) A_{uf} = (2/3) 8.8 = 5.9 \text{ cm}^2$$

$$A_f = 3.71 \text{ cm}^2 < (2/3) A_{uf}$$

$$A_s = (2/3) A_{uf} + A_n = 5.9 + 4.34 = 10.24 \text{ cm}^2$$

Usar 2 # 8

11.9.5

Verificación del refuerzo mínimo A_s -

$$p_{min} = 0.04(f'_c/f_y) = 0.04(350/4200) = 0.003$$

$$A_{smin} = 0.003(35)(27.5) = 2.88 \text{ cm}^2 < 10.24$$

8. Determinación del refuerzo por cor--
tante A_h

11.9.4

$$A_h = 0.5(A_s - A_n) = 0.5(10.24 - 4.34) = 2.95 \text{ cm}^2$$

Usar 3 Estribos # 3 ($A_h = 4.26 \text{ cm}^2$)

Distribuir los estribos en 2/3 d adyacen
tes a A_s .

Ejemplo de muros.

Un muro de carga soporta un sistema de piso a base de vigas "T" pre fabricados separados 2.40 m.. El alma de la sección "T" es de 20 cm. y estan apoyadas por completo en el muro. La altura del muro es de 4.60 m. y se encuentra contraventeado lateralmente como se muestra en la figura.

Datos de Diseño

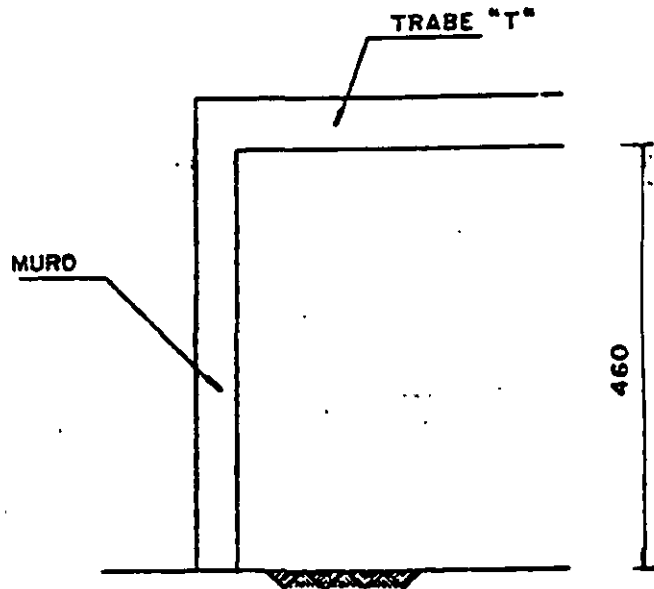
Reacciones:

$$P_{cM} = 12.7 \text{ ton.}$$

$$P_{cV} = 6.4 \text{ ton.}$$

$$f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Cálculo y discusión

Referencia del Reglamento

El procedimiento general de diseño es de suponer un espesor del muro h , después comprobarlo con las condiciones de carga.

1. Selecciones del espesor h

$$h > l_u/25 \text{ pero no menor de } 10 \text{ cm.}$$

14.5.3.1

$$> 4.6/25 = 0.18 \text{ m.}$$

Se probará con $h = 19 \text{ cm.}$

2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

Ec. (9-1)

3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Área cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \psi (0.85 f'_c A_c) &= 0.70(0.85)(280)(338.2) \\ &= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.} \end{aligned}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro. $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\begin{aligned} \psi P_{n_w} &= 0.55 \psi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{k l_c}{32h} \right)^2 \right] \\ &= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[1 - \left(\frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right] \\ &= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.} \end{aligned}$$

Ec. (14-1)

$$P_u < \psi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$ es suficiente para soportar un posible efecto de excentrici

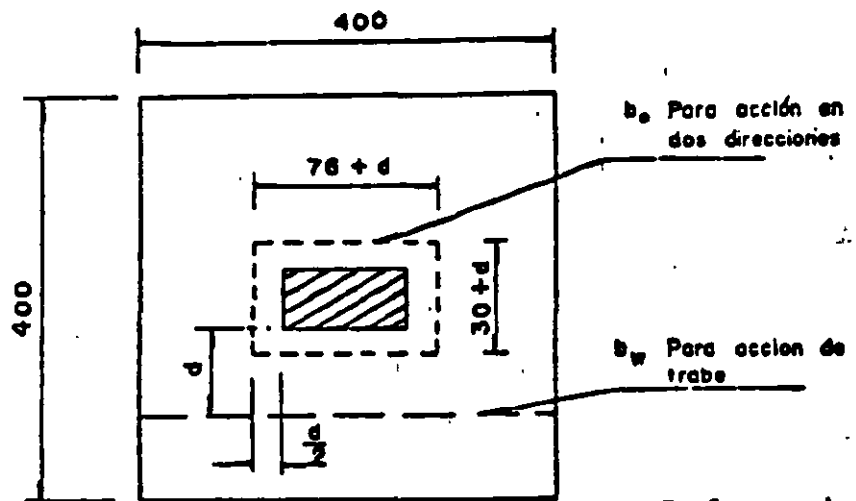
Ejemplo de Zapatas:

Determinar el espesor de la losa de la zapata que se muestra en la figura:

$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$Pu = 435 \text{ ton.}$$

$$qs = 27.9 \text{ ton/m}^2$$



Cálculo y Diseño

Referencia del reglamento

Determinar el peralte para resistir el cortante sin refuerzo. Debe investigarse la acción de viga y la acción en dos direcciones. Supondremos un espesor total de 84 cm. $d = 70$ cm.

11.11

1. Acción de trabe

11.11.1.1

$$Vu \leq \psi Vn$$

Ec (11-1)

$$Vu \leq \psi (0.53 \sqrt{f'c}) b_w d$$

Ec. (11-3)

$$Vu = 27.9 (4.0) (1.80 - 0.35) = 162 \text{ ton}$$

$$b_w = 4.0 \text{ m.}$$

$$Vu \leq 0.85 (0.53) \sqrt{210} (400) (70) = 345 \text{ ton}$$

Cálculo y Discusión

Referencia de
reglamento

$$162 < 345 \text{ ton}$$

2. Acción en las dos direcciones

11.11.1.2

$$V_u \leq \psi V_n$$

Ec (11.1)

$$V_u \leq \psi (0.27) (2+4/\beta_c) \sqrt{f'_c} b_o d$$

Ec (11.36)

pero V_c no será mayor que $1.1 \sqrt{f'_c} b_o d$

$$V_u = 27.90 (16.00 - 1.5 \times 1.0) = 405 \text{ ton}$$

$$b_o = 2(1.50) + 2(1.0) = 5 \text{ m.}$$

$$\beta_c = 75/30 = 2.5$$

$$V_u \leq 0.85 (0.27) (2+4/2.5) \sqrt{210} (500) (70)$$

$$405 \leq 419 \text{ ton.}$$

$$V_c \leq 1.1 \sqrt{210} (500) (70) = 558000 \text{ Kg}$$

Por lo tanto el peralte de 70 cm. es adecuado para resistir el cortante.

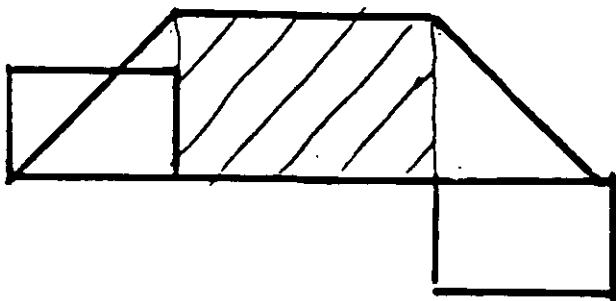
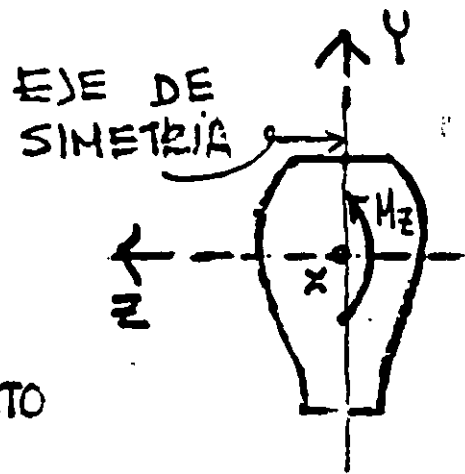
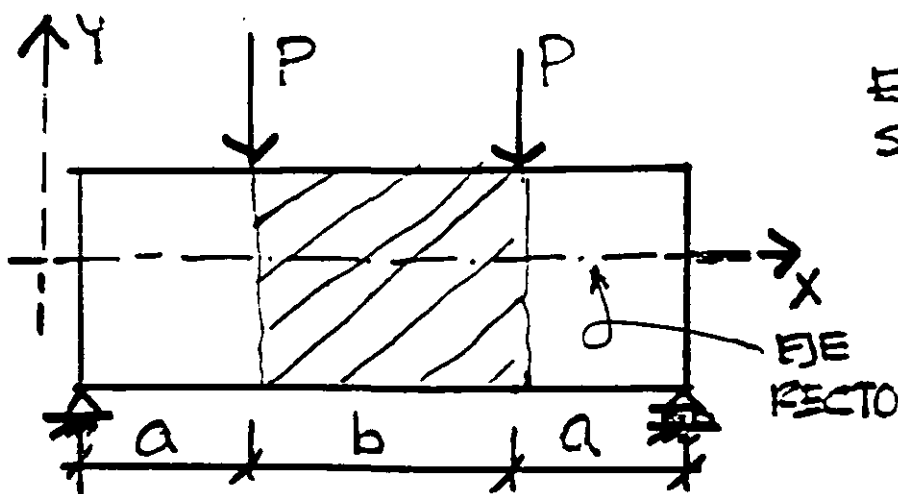
3.- FLEXION

INTRODUCCION

TEORIA CLASICA DE LA FLEXION

LIMITACIONES.

1.- VIGAS DE EJE RECTO HORIZONTAL QUE PASA POR TODAS LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE LA VIGA.

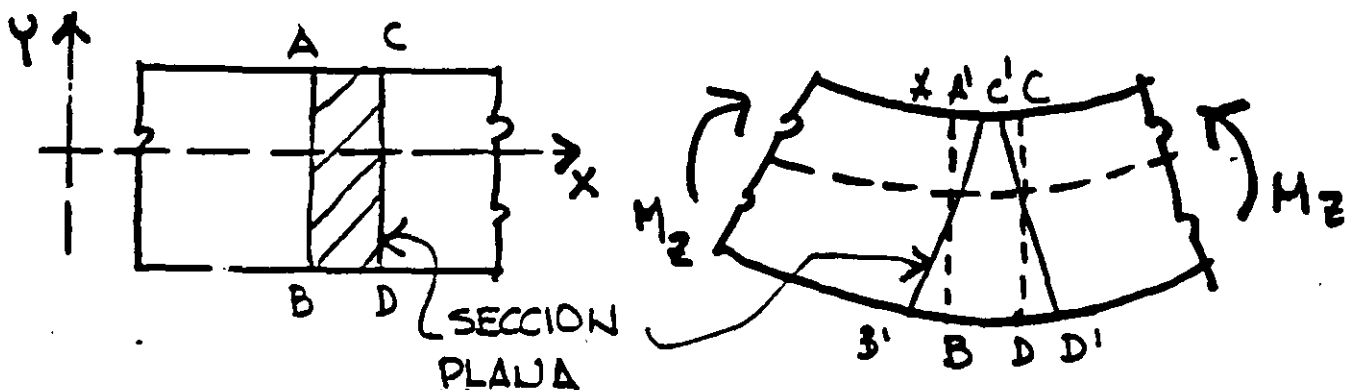


2.- LA SECCION TRANSVERSAL ES DE FORMA CUALQUIERA, PERO TIENE UN EJE VERTICAL DE SIMETRIA.

- 3.- SE CONSIDERA QUE EN LA SECCION QUE SE ANALIZA, SOLO EXISTE FLEXION.
- 4.- LA RELACION DE CLARO A ANCHO DE LA VIGA ES TAL QUE NO SE PRODUCE PUNDEO LATERAL.
- 5.- EL MOMENTO FLEXIONANTE M_z , ESTA EN EL MISMO PLANO DEL EJE DE SIMETRIA.
- 6.- EL MATERIAL DE LA VIGA ES HOMOGENEO.

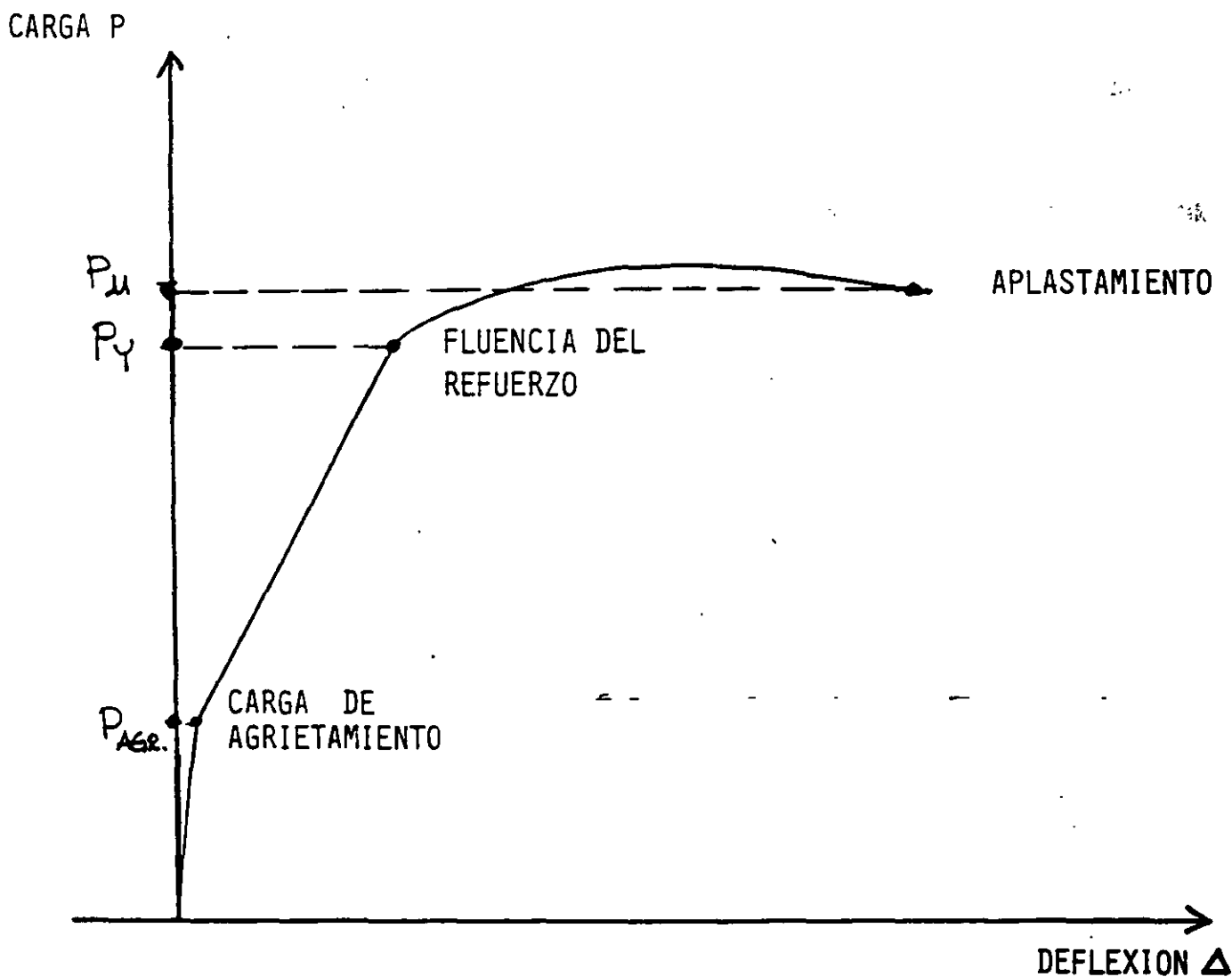
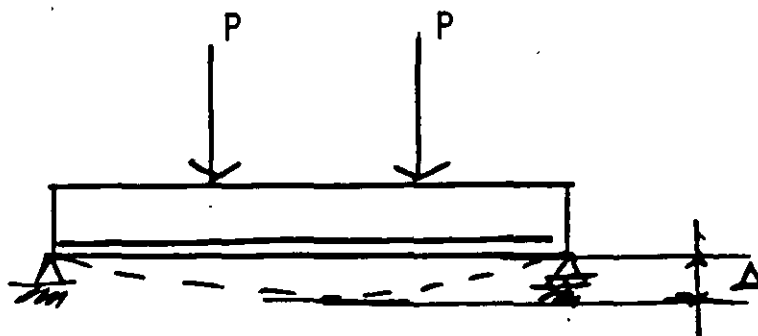
HIPOTESIS BASICA

LAS SECCIONES PLANAS, NORMALES AL EJE DE LA VIGA, SIGUEN SIENDO PLANAS DESPUES DE APLICAR LA FLECCION (H. NAVIER).



FLEXION EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE REFUERZO.



Cálculo y Discusión

Referencia del
Reglamento

2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

Ec.(9-1)

3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Area cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\varphi (0.85 f'_c A_c) = 0.70(0.85)(280)(338.2)$$

$$= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro. $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\varphi P_{n_w} = 0.55 \varphi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{k l_c}{32h} \right)^2 \right]$$

$$= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[1 - \left(\frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right]$$

$$= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.}$$

$$P_u < \varphi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$ es suficiente para soportar un posible efecto de excentricidad

14.2.4

Ec. (14-1)

¿cuidad de carga.

5. Selección de refuerzo

Proporcionando refuerzo en una sola cara

Acero horizontal $A_s = 0.0020 \times 19 \times 100 = 3.8 \text{ cm}^2/\text{m}$. 14.3.3

Acero vertical $A_s = 0.0012 \times 19 \times 100 = 2.3 \text{ cm}^2/\text{m}$. 14.3.2

$S = 3h$, pero no mayor a 45 cm. 7.6.5

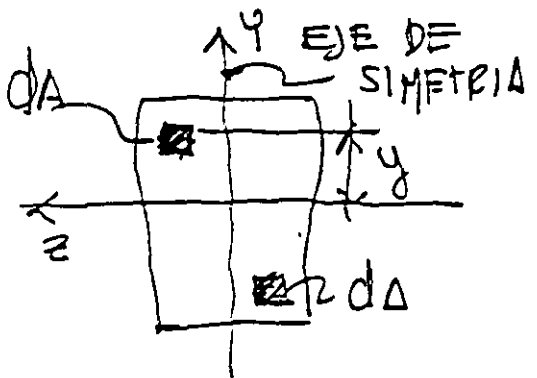
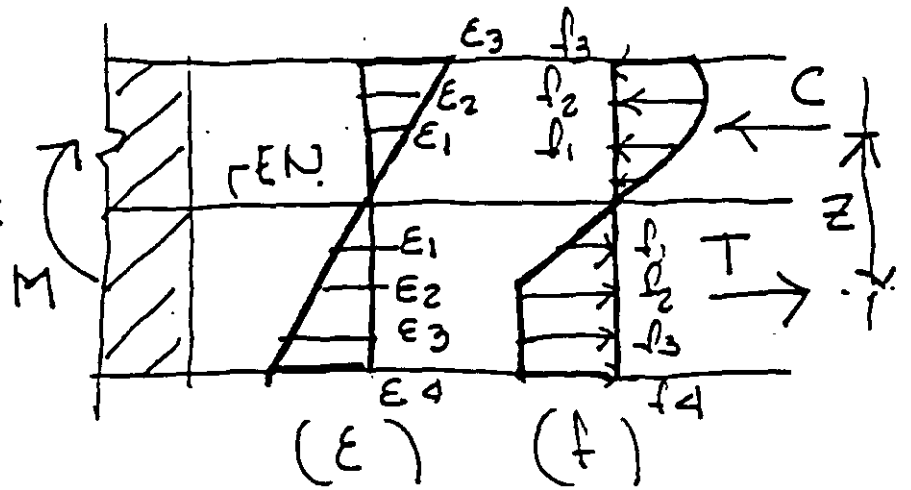
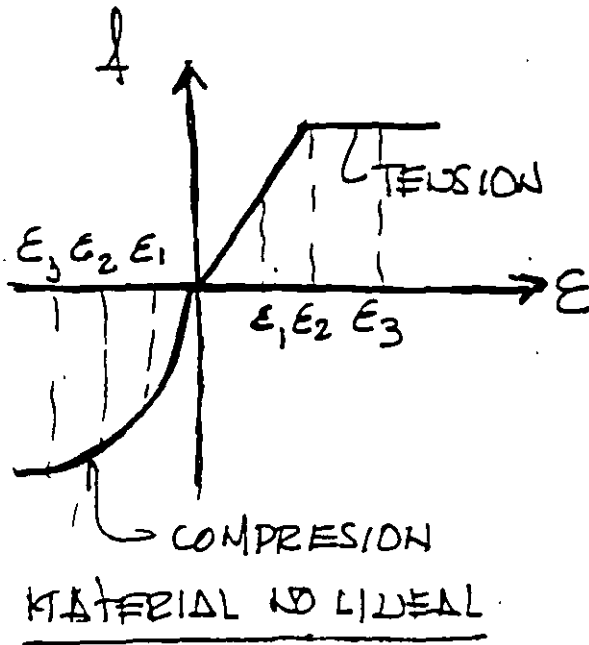
$= 3 \times 19 = 57 > 45$ ($S = 45 \text{ cm}$)

horizontal A_s - usar # 4 @ 30 cm.

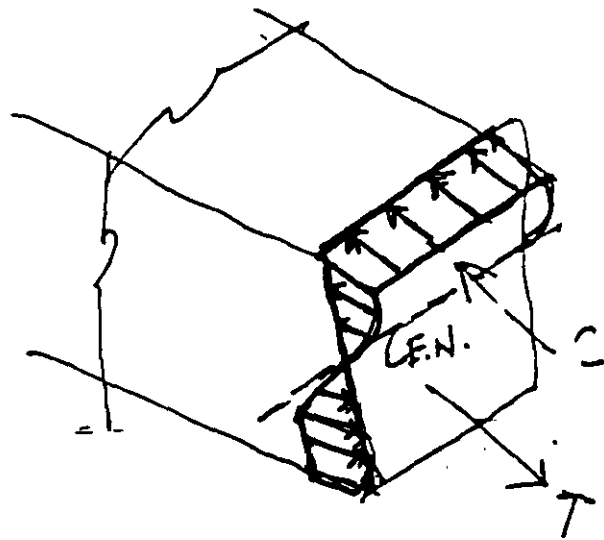
vertical A_s - usar # 4 @ 45 cm.

FLEXION INELASTICA

SE CONSERVA LA HIPOTESIS BASICA DE SECCIONES PLANAS.



SECCION DE FORMA CUALQUIERA



EQUILIBRIO: $\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A f_x dA = 0 \quad (C=T)$

$\sum M_z = 0 \rightarrow \int f_x y dA = M_R$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA:
COMENTARIOS A LAS NORMAS TÉCNICAS PARA
DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

5. MARCOS DUCTILES

5.1 Requisitos generales

Este capítulo es nuevo en las Normas; está basado esencialmente en el Apéndice A del Reglamento ACI de 1983 (ref) y en algunos criterios de diseño neozelandeses (refs). Se entiende por marco dúctil una estructura monolítica formada por columnas y vigas que bajo la acción del un sismo intenso puede soportar una serie de ciclos de comportamiento inelástico, sin menoscabo significativo de su capacidad de carga. Lo anterior se logra si en el marco puede formarse un mecanismo de falla en el que las zonas que funcionan como articulaciones plásticas poseen una considerable capacidad de giro ante acciones repetidas. La razón principal de usar estructuras dúctiles es que permiten ser diseñadas para resistencias menores que las que requerirían en un cierto sitio estructuras de comportamiento elástico. Esto ocurre así, entre otras razones, por la energía ^{que} durante un sismo disipa el marco dúctil en los ciclos histeréticos. Pero se debe estar consciente de que bajo sismos extraordinarios son de esperarse daños estructurales, principalmente en las vigas, que requerirán quizá de reparaciones de costo no despreciable; de manera que los responsables del proyecto y el propietario tienen que elegir entre usar el nivel de seguridad suministrado por el Reglamento y sus Normas Complementarias, o aumentar el costo inicial de la estructura para disminuir el riesgo de daños futuros.

en las articulaciones plásticas
La capacidad de giro se logra suministrando confinamiento lateral al concreto por medio de estribos cerrados o zunchos suficientemente resistentes y próximos entre sí, y limitando la cuantía de refuerzo. El confinamiento lateral hace que aumente la capacidad de deformación longitudinal de compresión del concreto tanto directa como por flexión y, por tanto, que se incremente la capacidad de giro.

Las fallas no dúctiles, como las debidas a fuerza cortante o a menoscabo en la adherencia, se evitan mediante el uso de _____

acero con fluencia definida. Si el acero fluye bajo una cierta fuerza, queda acotados los esfuerzos de adherencia y los momentos flexionantes; indirectamente también quedan acotadas las fuerzas cortantes. El obtener un comportamiento aceptablemente estable bajo cargas cíclicas como las que imponen los sismos se propicia manteniendo bajos los esfuerzos cortantes en los elementos del marco.

En general, los requisitos de este capítulo están encaminados a lograr, mediante requisitos de detalles de refuerzo y dimensiones, que el comportamiento del marco esté regido por el giro inelástico por flexión en las zonas que se consideran articulaciones plásticas sin que se presente antes otro tipo de falla, y que soporte ciclos de carga impuestos por sismos intensos.

De acuerdo con el criterio general adoptado en el artículo 207 del Reglamento y en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, a los edificios formados por marcos dúctiles les corresponde un factor de comportamiento sísmico, Ω , igual a 4. También puede aplicarse este valor cuando se usan marcos y muros o contravientos, con tal que la fuerza sísmica resistida por los marcos ^{en cada entrepiso} sea por lo menos el 50 por ciento de la total. Se admite así porque, ^{aunque} el muro tiene menos capacidad que un marco para deformarse sin fallar, en una estructura formada por marcos dúctiles y muros, si llegan a fallar éstos, los marcos representan una segunda defensa que puede evitar el derrumbe de la construcción.

Para revisar el requisito de que en cada entrepiso los marcos sean capaces de resistir al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante, puede procederse en la forma siguiente:

- a) Analícese la estructura y determinen las fuerzas cortantes que actúan en las columnas.
- b) Si en cada entrepiso la suma de las fuerzas cortantes que actúan en las columnas que forman marcos al suponer que no existen los muros es al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante total de ese entrepiso, se acepta que se cumple el requisito.

Este proceder se justifica porque al dimensionar se suministrará a esos marcos por lo menos el 50 por ciento de la resistencia necesaria de entrepiso.

Si al aplicar el procedimiento anterior ^{no} se cumple ^{con} el requisito, puede recurrirse al criterio general que consiste en comprobar que los marcos solos, suponiendo que los muros han fallado, son capaces de resistir en cada entrepiso al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante. Para esto, se analizan los marcos sin los muros, bajo el 50 por ciento de las fuerzas laterales totales, y se diseñan para que lo resistan; o bien se diseña la estructura, incluyendo los muros, y después ^{se} se revisa que la resistencia de los marcos solos cumpla con el requisito. Este último proceder es más laborioso.

En cuanto a la condición 3 para usar $\Omega = 4$ que aparecen en las normas para diseño por sismo en el sentido de que el mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiera en más de 35 por ciento del promedio de dicho cociente para todos los entrepisos, puede suponerse que la resistencia de un entrepiso \longrightarrow

corresponde al mecanismo que en él se forme con articulaciones plásticas en los extremos de las columnas y que la resistencia del muro es la que tiene a fuerza cortante en el entrepiso. Este ^{procedimiento} sobrestima la resistencia de entrepiso, particularmente en edificios esbeltos donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas y el muro de concreto falle por flexión en su base. Sin embargo, se justifica hacerlo así porque la intención del requisito es evitar que haya discontinuidades importantes en las resistencias de los entrepisos, y no interesa tanto el valor real de esas resistencias, sino sus valores relativos. No vale la pena

tratar de valuar la resistencia real de entrepiso, pues cuando no se forma un mecanismo en el entrepiso que se trata sino que el mecanismo de falla del edificio está definido por articulaciones en las vigas, el concepto de resistencia de entrepiso pierde un tanto su significado. Si se deseara calcularla debería ser la fuerza cortante que actúa en ese entrepiso cuando se forma el mecanismo de falla general del edificio; lo anterior se complica aún más cuando existen muros de concreto *para sísmo*.

Así pues, para fines de revisar el requisito que se trata, basta aplicar la expresión siguiente:

$$V_{RE} = \frac{\sum M_C}{h} + V_R \text{ muro}$$

donde V_{RE} es la resistencia ficticia del entrepiso, $\sum M_C$ es la

suma de los momentos resistentes en los extremos de las columnas y $V_{R \text{ muro}}$ la resistencia del muro a fuerza cortante. Para valuar M_c debe tomarse en cuenta la carga axial que actúa en la columna (pueden usarse los diagramas de interacción flexión-compresión). La resistencia del muro se determina de acuerdo con la sección 4.5.2c) de las Normas, considerando muro no esbelto; así se obtiene:

$$V_{R \text{ muro}} = 0.85 F_R \sqrt{f_c^*} \cdot tL + p_h (F_R f_y dt) \leq 2F_R Lt \sqrt{f_c^*} .$$

Una de las características de un marco que influyen en su comportamiento y resistencia es la resistencia relativa entre columnas y vigas. La tendencia actual es propiciar que las columnas sean más resistentes en flexión que las vigas, a fin de evitar las fallas laterales de entrepiso por la formación de articulaciones plásticas en los extremos de las columnas; esto es, se llega a una estructura en que el mecanismo de falla ocurre por la formación de articulaciones inelásticas en las vigas y donde las columnas permanecen de hecho en la zona elástica excepto en sus bases. Bajo un cierto sismo, la demanda de giro en las articulaciones plásticas de una estructura cuyo mecanismo de falla está definido por articulaciones en las vigas es menor que el que se tiene en las articulaciones de un mecanismo de entrepiso;

Es decir, la estructura (con columnas más resistentes que las vigas) tiene más probabilidades de sobrevivir durante un sismo de

por otra parte, a causa de la carga axial la capacidad de giro inelástico de las columnas es menor que la de las vigas.

lateral que la que en realidad le corresponde.

Se pide que la resistencia especificada, f'_c , del concreto no sea menor de 200 kg/cm^2 debido al efecto desfavorable que sobre la curvatura en la falla tiene el disminuir f'_c ; en una sección rectangular que tiene un cierto refuerzo, la profundidad del eje neutro en la falla es $c = A_s f_y / b f'_c$; al disminuir f'_c aumenta c y la curvatura disminuye. 0.8

El uso de refuerzo longitudinal que no fluya francamente o que fluya bajo un esfuerzo considerablemente mayor que el aplicado al dimensionar puede conducir a fallas frágiles por fuerza cortante o por adherencia. Estos tipos de falla deben evitarse aunque ocurran bajo cargas mayores que las de diseño, de aquí el primer requisito que se pide para el refuerzo longitudinal de vigas y columnas. También es necesario que el esfuerzo real de fluencia del refuerzo de las vigas no exceda demasiado al de cálculo, para que efectivamente se mantenga la tendencia a que las articulaciones plásticas se formen en las vigas y no en las columnas.

El otro requisito relativo al acero de refuerzo pide que después de la fluencia el material tenga endurecimiento por deformación, de características tales que la resistencia real sea al menos 1.25 veces el esfuerzo real de fluencia. Considerando el caso extremo de que el acero fluyera y no tuviera endurecimiento por deformación, la fluencia ocurriría sólo en la

sección de momento máximo y de hecho no se formaría una zona que trabajara como articulación plástica, sino que la deformación del acero se concentraría en unos cuantos milímetros y rápidamente ocurriría su fractura, originando una falla frágil. Si el acero tiene endurecimiento por deformación, al llegar su deformación a la zona de endurecimiento el momento en la sección de momento máximo aumenta y también *lo hacen* los momentos en las secciones vecinas, con lo que la fluencia del acero se propaga y se forma una articulación plástica. El requisito de las normas tiende a asegurar que la fluencia ocurra en una cierta longitud, y lograr así una cierta capacidad de giro inelástico en esa zona.

5.2 Miembros a flexión

5.2.1 Requisitos geométricos

Se pide que la relación claro-peralte no sea menor que 4 porque hay evidencia experimental (ref) de que bajo acciones repetidas el comportamiento de vigas peraltadas que no cumplan con el requisito es más desfavorable que el de vigas esbeltas.

Los requisitos que limitan las relaciones del ancho de una viga con la longitud no soportada lateralmente y con su peralte tienen la intención de evitar el pandeo lateral.

Los extremos de las vigas normalmente están bajo flexión negativa y la zona comprimida es rectangular. Bajo acciones repeti

tidas es probable que se desprenda el recubrimiento y sólo se cuente con el concreto contenido dentro de los estribos; por esta razón se requiere un ancho mínimo de 25 cm. Se pide que el ancho de la viga no sea mayor que el de la columna, para hacer lo más eficiente posible la transmisión de momento entre viga y columna.

La intención del último requisito geométrico para vigas es evitar momentos adicionales importantes en las columnas, causados por excentricidad de la carga vertical y que normalmente no se toman en cuenta en el análisis.

5.2.2 Refuerzo longitudinal

El primer requerimiento va encaminado a no dejar alguna sección con posibilidad de falla frágil por flexión de uno o de otro signo; esto último en vista de las incertidumbres en el análisis, la posible ocurrencia de hundimientos diferenciales de apoyos, o acortamientos diferenciales en columnas a corto o a largo plazo, todo lo cual usualmente no se considera en el análisis, y también en vista de la posibilidad ^{de} que el sismo sea más intenso que lo previsto y haga que cambien los signos de los momentos.

Como se dice en 2.1.2a), el refuerzo mínimo obliga a que el momento resistente de la sección agrietada sea al menos 1.5 veces mayor que el momento bajo el cual se agrieta la viga, con lo que se evita que ésta falle bruscamente al agrietarse. El requisito

de que sean por lo menos dos barras en cada lecho se refiere más bien a la necesidad de ellas por razones de construcción. Se mantuvo el límite de $0.75 A_{sb}$ para el acero a tensión. ^{seguido} Aunque el concepto de falla balanceada no es ya en rigo ^T aplicable a una viga sujeta a acciones que le provocan deformaciones cíclicas inelásticas, la cuantía que tenga la sección con relación a la cuantía balanceada continúa siendo un índice de la ductilidad de la viga. Se sugiere que la cuantía no exceda de 0.025 a fin de evitar congestinamiento ^o de las barras de refuerzo y de limitar, indirectamente, la fuerza constante que puede generarse en la viga.

Se pide que en la unión con un nudo ^{el} momento resistente positivo de una viga sea por lo menos igual a la mitad del momento resistente negativo que se tenga en esa sección, para prever la posibilidad de que, aunque el análisis no lo indique, el momento positivo debido al sismo exceda al negativo causado por las cargas verticales. Esta situación puede verse propiciada por hundimientos diferenciales, o acortamientos diferenciales de las columnas. Además, el acero longitudinal en el lecho inferior tiene el efecto favorable de que bajo momento negativo ayuda al concreto a tomar las compresiones. El riesgo de que se invierta el signo del momento flexionante en los extremos de las vigas de un marco es mayor si los claros son pequeños.

Se pide que en las uniones por traslape se suministre refuerzo helicoidal o estribos cerrados, debido a la posible caída del recubrimiento lo que disminuiría la adherencia de las barras y debilita

ría la unión traslapada. Las uniones traslapadas no se permiten en zonas donde se prevén zonas que funcionen como articulaciones plásticas, pues no son confiables bajo deformaciones cíclicas inelásticas.

En un paquete de dos barras es pequeño el menoscabo en la adherencia con el concreto. Debe buscarse que los esfuerzos de adherencia sean pequeños, ya que su deterioro bajo acciones cíclicas es una de las causas de la pérdida de rigidez de elementos y nudos de concreto reforzado bajo cargas cíclicas.

De los requisitos que deben satisfacer las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, se hace hincapié en el que pide que resistan al menos 1.25 veces la fuerza de fluencia de las barras que unen.

Al definir el diámetro, la cantidad y la distribución del refuerzo longitudinal, debe tenerse presente la facilidad de construcción, en particular ^{respecto a} las barras que llegan a las uniones con las columnas.

5.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

El refuerzo que se pide es para confinar el concreto en las zonas de articulaciones plásticas, a fin de aumentar su capacidad de deformarse sin fallar y de resistir acciones cíclicas. También tiene la función de restringir lateralmente al acero longitudinal que pueda trabajar a compresión. El diámetro del refuerzo para confinar estará de acuerdo con el tamaño de la viga. Como guía, se sugiere usar barras No.2.5 en vigas con peralte de

hasta 50 ó 60 cm, No 3 con peraltes de hasta 80 ó 90 cm, y No 4 o más gruesas para peraltes mayores.

El requisito relativo a las barras longitudinales de la periferia en las zonas de articulaciones plásticas significa que las barras de esquina y una de cada dos consecutivas deben tener el soporte lateral como se indica en 4.2.3, y que ninguna barra no soportada lateralmente debe distar ^{a cada lado,} más de 15 cm de una barra sí soportada.

5.2.4 Requisitos para fuerza cortante

La forma de obtener las fuerzas cortantes en una viga de un marco dúctil se ilustra en la fig 1. Para evitar que ocurra la falla por fuerza cortante antes que aparezcan las articulaciones, ^{a partir del equilibrio de la viga,} las fuerzas cortantes de diseño se calculan suponiendo que ya se formaron las articulaciones plásticas en ^{sus} extremos, ^{seguido} Los momentos de fluencia se calculan sin factor de reducción, porque así se tiene una condición más desfavorable ya que se obtienen fuerzas cortantes mayores. Además, se supone que las amplitudes de las rotaciones son tales que el acero puede llegar a tener endurecimiento por deformación, por lo que el momento se calcula con el esfuerzo en el acero igual a $1.25 f_y$.

La situación descrita en la fig 2 puede ocurrir durante un sismo intenso: primero se forma la articulación en el extremo donde el momento del sismo se suma con el causado por las cargas de gravedad; después, al aumentar el efecto del sismo, se forma la articulación de momento positivo en el otro extremo.

En sistemas de piso viga-losa monolíticos, el momento resistente negativo de la viga aumenta con relación al teórico, a causa del refuerzo de la losa que trabaja a tensión junto con el refuerzo de la viga. Se recomienda tomar en cuenta esta incremento en vigas relativamente pequeñas (peralte menor de 50 cm; como guía) y también cuando la cuantía de refuerzo de la losa exceda de 0.006 ó 0.007 (ref.).

Con el procedimiento optativo se pretende obtener el mismo resultado que con el general, es decir, evitar que la viga falle por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones inelásticas en los extremos. El procedimiento optativo es más sencillo, aunque, como suele suceder en estos casos, puede conducir a un mayor consumo de acero en estribos.

5.3 Miembros a flexocompresión

Los miembros a flexocompresión con carga axial pequeña

($P_u \leq A_g f'_c / 10$) se tratan como vigas.

Las razones para pedir un mínimo en la dimensión transversal de una columna son las siguientes: a) hacerlas menos vulnerables a errores constructivos, a impactos accidentales y a excentricidades accidentales de otra índole, y b) facilitar la colocación del refuerzo y del concreto, así como lograr cumplir con los recubrimientos necesarios sin disminuir demasiado la relación del área del núcleo al área transversal total.

La intención de que el área de la sección transversal sea al menos igual a $P_u/0.5f'_c$ es garantizar una cierta capacidad de giro en zonas de la columna donde llegarán a formarse articulaciones plásticas. La capacidad de giro inelástico en una columna aumenta al disminuir la relación $P_u/A_g f'_c$.

Se pide que la relación entre la dimensión transversal mayor de la columna y la menor m exceda de 2.5, para que el elemento siga siendo propiamente una columna y no pase a tener características de muro con el consiguiente problema del pandeo lateral.

Para evitar que los efectos de esbeltez lleguen a ser causa de una disminución significativa de la ductilidad general de la estructura, ^a las disposiciones de 1.3.2 se adiciona el requisito de que la relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no exceda de 15.

5.3.2 Resistencia mínima a flexión

En la sección 5.3.2 explícitamente se trata de disminuir las probabilidades de que se presente fluencia en las columnas y, por tanto, de que se forme un mecanismo de falla lateral en algún entrepiso. El requisito de la sección propicia la formación de un mecanismo de falla definido por articulaciones plásticas en las vigas y en la base de las columnas. (fig).

³⁵⁴

Bajo un mismo sismo, la demanda de giro en las articulaciones del segundo mecanismo es menor que la demanda de giro de las

articulaciones de un mecanismo de falla de entrepiso, a causa de que en éste último la disipación de energía sólo ocurre en las articulaciones plásticas de los extremos de las columnas del entrepiso que falla, en tanto que en el otro se disipa en un número mayor de articulaciones distribuidas en todo el edificio.

→ Por otra parte, la capacidad de giro de una articulación formada en una viga es mayor que la de aquella que se forma en una columna, a causa de la carga axial. Además, y en particular si la falla lateral de entrepiso ocurre en la zona baja de la estructura, aumenta la importancia de los momentos de segundo orden en las columnas del entrepiso dañado, con el consiguiente incremento en el riesgo de derrumbe brusco del edificio. Lo anterior significa que una estructura donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas tiene más probabilidades de sobrevivir bajo un sismo de intensidad extraordinaria que otra en donde la fluencia ocurra en las columnas de un entrepiso y en él se forme un mecanismo de falla lateral.

Debe hacerse hincapié en que la importancia de que no se formen articulaciones plásticas en las columnas es mayor en los primeros entrepisos de edificios altos. En edificios de uno o dos niveles o en los últimos pisos de edificios de más altura se puede ser menos estricto en este aspecto. Así mismo, en un cierto caso podría admitirse fluencia en algunas columnas de un entrepiso a condición de que las restantes del entrepiso

permanezcan elásticas e impidan la formación de un mecanismo de falla lateral.

En rigor, no es posible asegurar que no se formen zonas inelásticas en las columnas, por lo que se debe suministrar en sus extremos el refuerzo de confinamiento prescrito en 5.3.4. Entre otras, las razones que pueden provocar la fluencia de las columnas es la sobrerresistencia de las vigas a causa del endurecimiento por deformación del acero de refuerzo y por la contribución al momento resistente negativo de la viga del acero de la losa adyacente.

Se pide duplicar la carga axial debida al sismo para prever que la fuerza sísmica horizontal excede de la obtenida dividiendo el coeficiente sísmico entre el factor de comportamiento sísmico, Q , igual a 4. Una de las razones para dividir entre Q es el supuesto comportamiento plástico de la estructura, pero éste se ve afectado por la sobrerresistencia de las vigas, la presencia de muros y por la no simultaneidad en la formación de las articulaciones plásticas, todo lo cual conduce a que la fuerza lateral que toma el edificio sea creciente con la deformación lateral, y, por consiguiente, a que aumenten los momentos de volteo y las cargas axiales en las columnas, incremento que no se toma en cuenta en el análisis.

Con el procedimiento optativo ($F_R = 0.6$) se pretende obtener resultados equivalentes, esto es, tender a evitar la formación

de mecanismos de falla lateral de entrepiso.

Si se llega a formar el mecanismo definido por articulaciones en las vigas y en las bases de las columnas, la falla de la estructura estará gobernada por la falla de las bases de las columnas, por lo que resulta esencial que esa zona cuente con el adecuado refuerzo transversal de confinamiento. El confinamiento aumentará la capacidad de giro de las bases de las columnas y permitirá que soporte más ciclos de acciones sísmicas sin perder su capacidad de carga vertical.

5.3.3 Refuerzo longitudinal

El límite inferior para la cuantía de refuerzo longitudinal tiene el propósito de evitar que dicho refuerzo fluya en compresión a causa del flujo plástico (creep) del concreto. Al deformarse el concreto con el tiempo, va transfiriendo su carga al acero de refuerzo el cual puede llegar a fluir en compresión si su cuantía es muy pequeña; la columna se iría acortando al paso del tiempo se crearían ^{las} esfuerzos y deformaciones no previstas en vigas y en otras columnas. Otra razón para establecer una ^A cuantía mínima de refuerzo longitudinal es suministrar una cierta resistencia a la flexión.

El límite superior para la cuantía de refuerzo longitudinal es en esencia para evitar que se congestione el refuerzo, particularmente en las intersecciones con las vigas. Si el refuerzo es excesivo, se dificultan su colocación y el colado del concreto.

Se limita a dos el número de barras por paquete a fin de disminuir el riesgo de fallas de adherencia en la columna y en especial en las intersecciones con las vigas. Por otra parte, se logra un mejor confinamiento del concreto del núcleo si las barras longitudinales están distribuidas en la periferia que si se concentran en paquetes. Esta disposición tiende a dejar fuera de uso la práctica anterior de concentrar la mayor parte del refuerzo longitudinal en las esquinas que, si bien aumenta la resistencia en flexión, propicia problemas de adherencia y de menoscabo en el confinamiento.

Al igual que en las vigas, las uniones de barras por traslape en columnas son vulnerables al desprendimiento del recubrimiento. Los traslapes sólo se permiten en la zona central de la columna donde es poco probable que se desprenda el recubrimiento. Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos no *presentan ese inconveniente y se permiten* en cualquier localización con tal que se cumpla con los requisitos que se incluyen sobre cantidad de uniones y separación entre ellas:

Se hace énfasis en la importancia de que se cumplan los requisitos de la sección 4.2 que no resulten modificados por el inciso 5.3.3.

5.3.4 Refuerzo transversal

El refuerzo transversal de una columna tiene la función de suministrar la resistencia requerida a fuerza cortante y dar confinamiento adecuado al núcleo, así como restricción lateral al

refuerzo longitudinal. El confinamiento lateral ^{hace} que aumente considerablemente la capacidad del concreto para deformarse en la dirección longitudinal sin fallar, con lo cual se evita el comportamiento frágil de la columna. El refuerzo mínimo que se especifica en esta sección es el necesario para confinar el concreto del núcleo y restringir lateralmente las barras longitudinales; este refuerzo sólo se pide en las zonas donde es probable que ocurra comportamiento inelástico durante sismos intensos. No obstante la tendencia hacia evitar que las columnas sufran comportamiento inelástico, debe prevverse la posibilidad de que esto ocurra, según se indica en los comentarios a la sección 5.3.2, de aquí la necesidad de suministrar el refuerzo transversal para confinamiento.

En toda sección de una columna el refuerzo transversal debe satisfacer el requisito que sea más estricto entre el necesario para confinamiento y el necesario para fuerza cortante, teniendo en cuenta que el primero únicamente es necesario en las zonas indicadas.

Las zonas en que cabe esperar comportamiento inelástico durante sismos extraordinarios son las próximas a las intersecciones con las vigas, por ser en ellas máximos los momentos causados por las fuerzas laterales. Para tomar en cuenta que en las columnas de planta baja normalmente el punto de inflexión se encuentra ^e más próximo a los nudos superiores, se pide que, además de cumplir con los requisitos generales que fijan la longitud confinada, ésta llegue por lo menos hasta media altura

de la columna; por otro lado, para dar continuidad a la columna dentro de su cimentación, a fin de evitar que allí el confinamiento deba depender de otros refuerzos, se especifica que el refuerzo para confinar se continúe en la cimentación.

La cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal, p_g , se define como el cociente del volumen de acero helicoidal entre el volumen del núcleo de concreto confinado por dicho acero

($p_g = 4a_s / SD_c$, donde D_c es el diámetro del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo helicoidal).

La primera fórmula del inciso a) se obtiene de obligar a que la resistencia a carga axial de la columna antes de perder el recubrimiento sea igual a la resistencia del núcleo confinado por la hélice, la cual se alcanza bajo deformaciones grandes de compresión cuando ya se desprendió el recubrimiento.

Durante un sismo violento, normalmente lo que va a incrementarse y quizá variar cíclicamente es la magnitud de los momentos flexionantes que actúan en las columnas y no tanto la magnitud de la carga axial (si el edificio es esbelto, los incrementos de carga axial en los primeros entresijos debidos al sismo sí pueden ser importantes); sin embargo, se ha mantenido el criterio del inciso a), en vista de que el confinamiento logrado también mejora la ductilidad de la columna aunque haya flexiones importantes adicionales a la carga axial (ref.). El límite $0.12 f'_c / f_y$ rige en secciones grandes; en ellas A_g / A_c tiende a 1.0 y la cuantía suministrada por la primera fórmula tiende a cero.

Se admite que el confinamiento suministrado por estribos cerrados rectangulares según se establece en el inciso b) es equivalente al que proporciona el zuncho en columnas circulares. Se sabe, sin embargo, que en realidad el confinamiento que da el estribo rectangular es menos eficiente debido a que la barra se flexiona y su acción sobre el núcleo disminuye al alejarse de las esquinas del estribo. Este inconveniente se pretende compensar usando más refuerzo transversal y también por medio del uso de grapas intermedias, así como limitando las dimensiones de los estribos. En efecto, la cuantía volumétrica de refuerzo transversal rectangular del inciso b) es aproximadamente un tercio mayor que la obtenida con las fórmulas del inciso a) para columnas con zuncho circular, y la mayor dimensión de un estribo rectangular no debe exceder ^{de} 45 cm. Se recomienda el uso abundante de las grapas complementarias descritas en las Normas. En la fig se presenta un ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento.

Los requisitos de separación máxima del refuerzo transversal y los relativos a la distancia entre ramas de estribos, entre éstas y grapas y de máxima dimensión de estribos sencillos que se establecen en esta sección, se refieren sólo al refuerzo para confinamiento.

5.3.5 Requisitos para fuerza cortante

Estos requisitos tratan de evitar que las columnas fallen por

fuerza cortante antes que se formen articulaciones plásticas en las vigas, es decir, relacionan directamente la resistencia a fuerza cortante de las columnas con las articulaciones en las vigas y no con la formación de articulaciones en los extremos de la propia columna. Se optó por este procedimiento a fin de simplificar en cierto grado el diseño.

El valor de $0.75 M_g$ para el momento que actúa en un extremo de una columna al considerar su equilibrio proviene de suponer, que se cumple la condición de 5.3.2, como igualdad, y que los momentos en las dos columnas que llegan a un nudo son iguales; también por sencillez, se admite que M_g es el valor de diseño, es decir, está valuado con f_y e incluye a F_R . Este proceder es algo más sencillo que las operaciones que habría que realizar al considerar en el equilibrio de las columnas sus momentos resistentes obtenidos con sus dimensiones y refuerzos reales, y con la carga axial que conduce a la máxima resistencia a flexión.

Existe una posibilidad desfavorable, que se presentaría cuando tanto las sumas de los momentos resistentes reales de las vigas y de las columnas fueran, cada una, mayores que $1.5 M_g$, (en las vigas a causa, por ejemplo, del refuerzo de la losa, y en las columnas porque rigiera el refuerzo mínimo). En tales condiciones, la falla se presentaría por fuerza cortante en las columnas. Esta circunstancia es poco probable, pero al diseñar debe tenerse en cuenta su posible ocurrencia y cuando

se juzgue que pueda *presentarse,* para obtener la fuerza cortante se debe plantear el equilibrio de la columna con sus momentos resistentes sin reducir, en lugar de con $0.75 M_g$; se recomienda proceder así cuando rija el refuerzo longitudinal mínimo en la columnas.

5.4 Uniones viga-columna

5.4.1 Requisitos generales

Las condiciones de equilibrio horizontal de un nudo interior de una marco sujeto solo a carga lateral se muestran en la fig

En el acero a tensión que llega al nudo se supone un esfuerzo de $1.25f_y$ debido a que ensayos han demostrado que los giros inelásticos debidos a sismo en las caras del nudo implican deformaciones en el refuerzo de flexión considerablemente mayores que las correspondientes a la primera fluencia y que bien pueden llegar a los que corresponden a la resistencia máxima del acero supuesta de $1.25 f_y$ (para acero de grado 42, la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo es del orden de 0.08 a 0.10). La fuerza cortante calculada a media altura del nudo resulta igual a $A_{s2}(1.25f_y) + \bar{A}_{s1}(1.25f_y) - V$.

Las uniones viga-columna son elementos críticos en un marco por lo que su diseño y detallado no debe descuidarse. Si un nudo se daña es muy difícil repararlo, y si pierde capacidad de carga vertical causa la falla de la columna que llega a él y quizá el derrumbe de la estructura; lo ideal es que la resis-

tencia del nudo sea mayor que la de los elementos que concurren en él.

Los principales problemas involucrados en el diseño de uniones viga-columna se refieren a su resistencia a fuerza cortante, al anclaje del refuerzo dentro de él, y al posible congestionamiento excesivo de refuerzo. La fuerza cortante causa que el nudo se agriete en diagonal según se muestra en la fig . Bajo las acciones cíclicas causadas por el sismo, el patrón de agrietamiento es en dos direcciones cruzadas (fig). El anclaje en el nudo de las barras de vigas y columnas que llegan a él presenta el problema de que frecuentemente en una cara del nudo una cierta barra está a tensión y en la cara opuesta a compresión, *lo que*
provoca

que se incremente la longitud de anclaje necesaria con relación a la requerida si sólo actuara la tensión. También se tiene el inconveniente de que al formarse en una viga una articulación plástica adyacente al nudo, la fluencia de las barras tiende a penetrar en éste provocando cierto menoscabo en la adherencia. ^o Todo lo anterior se ve agravado por el efecto de las acciones *cíclicas* impuestas por el sismo, *las cuales* tienden a ir deteriorando la adherencia de las barras dentro del nudo. En buena medida se disminuyen los problemas de anclaje en los nudos evitando el uso de barras de diámetro grande. En el dimensionamiento y detallado del nudo debe buscarse un equilibrio entre su resistencia a fuerza cortante y el diámetro, la cantidad y la distribución de las barras que entran en él, a fin de evitar un congestionamiento excesivo del refuerzo que dificulte su habilitación y afecte la correcta colocación del concreto. A este

respecto, se recomienda tener en mente el detallado de los nudos desde que se dimensionan las columnas y vigas del marco. Generalmente da buen resultado mantener baja la cuantía de refuerzo longitudinal de las vigas. Elaborar dibujos amplios a escala de $1/2$ disposición del refuerzo dentro de los nudos contribuye importantemente a evitar dificultades inesperadas en la obra..

Para el diseño de los nudos, en las Normas se optó por el criterio del Apéndice A del Reglamento ACI 318-83 (ref); es un procedimiento sencillo que no origina congestionamientos excesivos de refuerzo y que tiene apoyo teórico y experimental (refs).

El requisito de que las barras longitudinales de las vigas pasen dentro del núcleo de la columna obedece a que allí las condiciones para el anclaje son más favorables, a causa del confinamiento suministrado por el refuerzo transversal de la columna.

5.4.2 Refuerzo transversal

El principal papel que desempeña el refuerzo transversal en un nudo es suministrar confinamiento al concreto del núcleo, a fin de aumentar su capacidad de deformarse y de resistir el efecto de acciones cíclicas, sin perder su capacidad de carga vertical. También tiene la función de contribuir a resistir la fuerza cortante que actúa en el nudo (fig). ^{Por otra parte, el} confinamiento que da el refuerzo transversal mejora las condiciones de anclaje del refuerzo que allí llega. La fuerza cortante provoca tensiones principales inclinadas que causan agrietamiento diagonal en el nudo. El refuerzo transversal prescrito debe usarse siempre en todo el nudo,

aunque la fuerza cortante calculada resulte pequeña.

5.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Para revisar un nudo por fuerza cortante se admite prescindir del requisito de las Normas para Diseño por Sismo que pide cambiar la totalidad de los efectos de un componente del sismo con el 30 por ciento de los efectos del componente ortogonal; la revisión puede efectuarse en cada dirección principal en forma independiente. En la fig , la fuerza cortante horizontal calculada a media altura del nudo resulta igual a $A_{s2}(1.25f_y) + A_{s1}(1.25f_y) - V$ (en la cara izquierda la suma de las compresiones en el concreto y en el acero es igual a la tensión en el acero inferior, $A_{s2}(1.25f_y)$, pues forman un par).

En la fig se ilustran las condiciones de trabajo de un nudo interior de un marco donde ampliamente predomina el efecto de las fuerzas laterales (se ha omitido la fuerza axial en la columna). La parte b) de la fig es el equilibrio de la porción de nudo limitada por la grieta diagonal inferior, y en ella se aprecia el papel que se empeñan el concreto y el refuerzo en la resistencia a fuerza cortante. El concreto trabaja a compresión formando básicamente un puntal en diagonal; el refuerzo horizontal y vertical trabaja a tensión y contribuye a mantener el equilibrio. En la fig se aprecia el efecto favorable de usar estribos transversales y también barras verticales intermedias en las columnas; sin estos refuerzos intermedios, aumentarían demasiado los esfuerzos de adherencia en las barras

longitudinales extremas de vigas y columnas que llegan al núcleo (así, el esfuerzo en las barras longitudinales inferiores de la viga tendría que pasar, en un pequeño tramo de anclaje, L_a , del de fluencia en tensión, a la izquierda de la grieta, a uno de compresión, C_s/A_s , mientras que con la presencia de los estribos horizontales la fuerza en las barras inferiores en lugar de ser la de fluencia sería igual a $T - \sum a_{si} f_{si}$, donde a_{si} son las áreas transversales de los estribos y f_{si} los respectivos esfuerzos.

Como se mencionó antes, el procedimiento para diseñar las uniones por fuerza cortante es el del Reglamento ACI 318-83; éste a su vez está basado en un estudio realizado en la Universidad de Texas (ref). En dicho trabajo se concluyó que la resistencia de una unión a fuerza cortante es función básicamente de tres variables: la presencia de vigas transversales que lleguen al nudo, el refuerzo transversal y la resistencia del concreto. Se encontró que la variación de la resistencia no era muy sensible a cambios en el refuerzo transversal, por lo que optaron por hacerla depender, para fines de diseño, sólo de las dimensiones del nudo, de la resistencia a compresión del concreto, y de las vigas transversales; en cuanto al refuerzo transversal, optaron por usar una cierta cantidad mínima obligatoria.

En el diseño de uniones viga-columna de marcos dúctiles existen discrepancias importantes en los criterios ^{adoptados en distintos países} e instituciones.

Así, dentro del propio ACI el procedimiento propuesto por el Comité ACI-ASCE ³⁵² (ref) lleva a una cantidad mayor de estribos que la obtenida de aplicar el apéndice A del Reglamento ACI 318-83. El procedimiento que se aplica en Nueva Zelanda es aún más conservador que el del Comité ACI-ASCE 352. En las Normas para el Distrito Federal se optó por el del Reglamento ACI 318-83, atendiendo a que tiene buen apoyo experimental, es sencillo y no conduce a congestionamientos excesivos de refuerzo. Para valuar el área del nudo, se ^{entr} adoptó el criterio del Comité 352, que usa un ancho efectivo igual al promedio de los anchos de viga y columna.

Para el diseño por fuerza cortante de uniones debe usarse el valor de F_R general para cortante ($F_R = 0.8$). Cuando la fuerza cortante de diseño exceda a la resistencia de diseño, el proyectante puede aumentar las dimensiones transversales de la columna, o aumentar el peralte de las vigas; con esto último disminuye el área de refuerzo longitudinal de las vigas y por consiguiente la fuerza cortante de diseño en el nudo.

En la fig. se ilustra la determinación del ancho efectivo, b_e . Al haber limitado la relación de dimensiones transversales de las columnas a un máximo de 2.5, en realidad ya no tiene aplicación el requisito según el cual el ancho efectivo no debe ser mayor que el ancho de la o las vigas más h , y podría omitirse.

5.4.4 Anclaje del refuerzo

De hecho, el primer párrafo de esta sección se refiere a nudos de columnas de orilla. Se optó por exigir que las barras longitudinales de las vigas se prolonguen hasta el fondo del núcleo de la columna, a fin de hacer más definido el trabajo en el nudo en el sentido de que las barras sigan la tendencia de las tensiones principales y se defina claramente la formación del puntal a compresión en el concreto (fig). Si las barras cumplen con los otros requisitos de anclaje, pero no se llevan hasta la cara opuesta del núcleo sino que se doblan antes, se provoca una distribución de esfuerzos irregular que puede acelerar el deterioro del núcleo ante acciones repetidas. Se juzgó conveniente considerar en forma explícita que bajo acciones repetidas el recubrimiento de una columna se deteriora y deja de ser eficaz para contribuir al anclaje de las barras de las vigas (ref); por esta razón, se pide que la sección crítica para anclaje sea en el plano externo del núcleo de la columna. La influencia de este requisito es mayor en columnas de sección pequeña.

El anclaje de las barras de una viga en un nudo presenta la circunstancia favorable de que tiene lugar dentro de una zona confinada por estribos y también generalmente por vigas transversales que llegan al nudo; por otro lado, se tiene el efecto desfavorable de las acciones repetidas impuestas por el sismo, y la penetración de la fluencia de las barras de las vigas dentro del núcleo cuando en éstas se ^{forman} articulaciones plásticas adya

centes al nudo. Al respecto, se adoptó el criterio del Reglamento ACI-318-83 que estima que tiene cierto predominio el efecto favorable del confinamiento, por lo que se admite reducir la longitud de desarrollo al 90 por ciento de la requerida en 3.1.1c). Debe aclararse que esta reducción no se aplica a la longitud recta de 12 diámetros que sigue al dobléz.

Las barras de vigas y columnas que pasan a través de un nudo tienen la particularidad desfavorable de que pueden estar a tensión en una cara del nudo y a compresión en la cara opuesta, la ^{cual} aumenta los esfuerzos de adherencia dentro del nudo.

No obstante, existen algunas atenuante al problema: a) el ya mencionado confinamiento suministrado por los estribos del nudo y las vigas transversales; b) si las barras de una viga llegan a perder su adherencia en el nudo, quedan ancladas en la viga opuesta; esto causa que aumenten las compresiones en dicha viga opuesta, pero no implica peligro inminente de derrumbe; c) es mínimo el riesgo de que las barras de las columnas tengan que fluir en tensión y en compresión en las caras horizontales del nudo, pues la tendencia del diseño es que más bien fluya el refuerzo de las vigas; por otra parte, la carga axial de las columnas tiende a evitar que sus barras fluyan en tensión.

Se juzga que las relaciones entre dimensiones de nudo y diámetros de barras que se prescriben, conducen a un comportamiento tolerable de los nudos en cuanto al anclaje de las barras que los cruzan. Sin embargo, se está consciente de que no se

evita totalmente la posibilidad de que la adherencia sufra menoscabo si la estructura se ve sujeta a varios sismos intensos durante su vida. Este es uno de los aspectos débiles que tienen los marcos destinados a resistir sismo.

NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS, DDF. ESTRUCTURAS DE CONCRETO

PROPUESTA

27 de febrero, 1990

11.3 Concreto

11.3.1 Materiales componentes

La calidad y proporciones de los materiales componentes del concreto serán tales que se logren la resistencia, rigidez y durabilidad necesarias.

La calidad de todos los materiales componentes del concreto deberá verificarse antes del inicio de la obra y también cuando exista sospecha de cambio en las características de los mismos o haya cambio de las fuentes de suministro. Esta verificación de calidad se realizará a partir de muestras tomadas del sitio de suministro o del almacén del productor de concreto. El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, en lugar de esta verificación podrá admitir la garantía del fabricante del concreto de que los materiales fueron ensayados en un laboratorio autorizado por el Sistema Nacional de Acreditamiento de Laboratorios de Prueba (SINALP), y que cumplen con los requisitos establecidos en 1.4.1 y los que a continuación se indican; pero en este caso también podrá ordenar la verificación de la calidad de los materiales cuando lo juzgue procedente.

Los materiales pétreos, grava y arena, deberán cumplir con los requisitos de la norma NOM C-111, con las siguientes modificaciones y adiciones:

Propiedad	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Coefficiente volumétrico de la grava, mín	0.20	---
Material más fino que la malla F 0.075 (No. 200) en la arena, porcentaje máx. en peso (NOM C 084).	15	15
Contracción lineal de los finos (pasan la malla No 40) de la arena y la grava, en la proporción en que éstas intervienen en el concreto, a partir del límite líquido, porcentaje máx.	2	3

En adición a la frecuencia de verificación estipulada para todos los materiales componentes al principio de este inciso, los requisitos especiales precedentes deberán verificarse cuando menos una vez por mes para el concreto clase 1.

Los límites correspondientes a estos requisitos especiales pueden modificarse si el fabricante del concreto demuestra, con pruebas realizadas en un laboratorio acreditado por el SINALP, que con los nuevos valores se obtiene concreto que cumpla con el requisito de módulo de elasticidad establecido en 11.3.4. En tal caso, los nuevos límites serán los que se apliquen en la verificación de estos requisitos para los agregados específicamente considerados en dichas pruebas.

11.3.2 Elaboración del concreto

El concreto podrá ser dosificado en una planta central y transportado a la obra en camiones revolvedores, o dosificado y mezclado en una planta central y transportado a la obra en camiones agitadores, o bien podrá ser elaborado directamente en la obra; en todos los casos deberá cumplir con los requisitos de elaboración que aquí se indican.

El concreto clase 1, premezclado o hecho en obra, deberá ser elaborado en una planta de dosificación y mezclado de acuerdo con los requisitos de elaboración establecidos en la norma NOM C-155.

El concreto clase 2, si es premezclado, deberá satisfacer los requisitos de elaboración de la mencionada norma NOM C-155. Si es hecho en obra, podrá ser dosificado en peso o en volumen, pero deberá ser mezclado en una revolvedora mecánica ya que no se permitirá la mezcla manual de concreto estructural.

11.3.3 Requisitos y control del concreto fresco

Al concreto en estado fresco, antes de su colocación en las cimbras, se le harán pruebas para verificar que cumple con los requisitos de revenimiento y peso volumétrico. Estas pruebas se realizarán al concreto muestreado en obra, con la siguiente frecuencia como mínimo:

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Revenimiento (NOM C-156)	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada revoltura, si es hecho en obra.	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada 5 revolturas, si es hecho en obra.

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Peso volumétrico (NOM C-162)	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 20 m ³ de concreto.	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 40 m ³ .

El revenimiento será el mínimo requerido para que el concreto fluya a través de las barras de refuerzo y para que pueda bombearse en su caso, así como para lograr un aspecto satisfactorio. El revenimiento nominal de los concretos no será mayor de 12 cm. Para permitir la colocación del concreto en condiciones difíciles, o para que pueda ser bombeado, se autoriza aumentar el revenimiento nominal hasta un máximo de 18 cm, mediante el uso de aditivo superfluidificante, de manera que no se incremente el contenido unitario de agua; en tal caso, la verificación del revenimiento se realizará en la obra antes y después de incorporar el aditivo superfluidificante, comparando con los valores nominales de 12 y 18 cm respectivamente; las demás propiedades, incluyendo las del concreto endurecido, se determinarán en muestras que ya incluyan dicho aditivo.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, podrá autorizar la incorporación del aditivo superfluidificante en la planta de premezclado para cumplir con revenimientos nominales mayores de 12 cm.

34 Si el concreto es premezclado y se surte con un revenimiento

nominal mayor de 12 cm, deberá ser entregado con un comprobante de incorporación del aditivo en planta; en la obra se medirá el revenimiento para compararlo con el nominal máximo de 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de revenimiento, su valor determinado deberá concordar con el nominal especificado, con las siguientes tolerancias:

Revenimiento nominal, cm	Tolerancia, cm
menor de 5	+ 1.5
de 5 a 10	+ 2.5
mayor de 10	+ 3.5

Estas tolerancias también se aplican a los valores nominales máximos de 12 y 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de peso volumétrico en estado fresco, su valor determinado deberá ser mayor de 2200 kg/m³ para el concreto clase 1, y no menor de 1900 kg/m³ para el concreto clase 2.

11.3.4 Requisitos y control del concreto endurecido

La calidad del concreto endurecido se verificará mediante pruebas de resistencia a compresión en cilindros elaborados, curado y probados de acuerdo con las normas NOM C 160 y NOM C 83, en un laboratorio acreditado por el SINALP.

Cuando la mezcla de concreto se diseña para obtener la resistencia especificada a 14 días, las pruebas anteriores se efectuarán

a esta edad; de lo contrario, las pruebas deberán efectuarse a los 28 días de edad.

Para verificar la resistencia a compresión de concreto de las mismas características y nivel de resistencia, se tomará como mínimo una muestra por cada día de colado, pero al menos una por cada cuarenta metros cúbicos; sin embargo, si el concreto se emplea para el colado de columnas, se tomará por lo menos una muestra por cada diez metros cúbicos. De cada muestra se elaborarán y ensayarán al menos dos cilindros; se entenderá por resistencia de una muestra el promedio de las resistencias de los cilindros que se elaboren de ella.

Para el concreto clase 1, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada, f'_c , si ninguna muestra da una resistencia inferior a $f'_c - 35 \text{ kg/cm}^2$, y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que f'_c .

Para el concreto clase 2, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada, f'_c , si ninguna muestra da una resistencia inferior a $f'_c - 50 \text{ kg/cm}^2$, y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que $f'_c - 17 \text{ kg/cm}^2$.

Si sólo se cuenta con dos muestras, el promedio de las resistencias de ambas no será inferior a $f'_c - 13 \text{ kg/cm}^2$ para concreto

clase 1, ni a $f'_c = 28 \text{ kg/cm}^2$ para clase 2, además de cumplir con el respectivo requisito concerniente a las muestras tomadas una por una.

Cuando el concreto no cumpla con el requisito de resistencia, el Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, tomará las medidas conducentes a garantizar la seguridad de la estructura. Estas medidas estarán basadas principalmente en el buen criterio de los responsables mencionados; como factores de juicio deben considerarse, entre otros, el tipo de elemento en que no se alcanzó el nivel de resistencia especificado, el monto del déficit de resistencia y el número de muestras o grupos de ellas que no cumplieron. En ocasiones debe revisarse el proyecto estructural a fin de considerar la posibilidad de que la resistencia que se obtuvo sea suficiente.

Si subsiste la duda sobre la seguridad de la estructura se podrán extraer y ensayar corazones, de acuerdo con la norma NOM C 169, del concreto en la zona representada por los cilindros que no cumplieron. Se probarán tres corazones por cada incumplimiento con la calidad especificada. La humedad de los corazones al probarse debe ser representativa de la que tenga la estructura en condiciones de servicio.

El concreto representado por los corazones se considerará adecuado si el promedio de las resistencias de los tres corazones es mayor o igual que $0.8 f'_c$ y si la resistencia de ningún corazón es

menor que $0.7 f'_c$. Para comprobar que los especímenes se extrajeron y ensayaron correctamente, se permite probar nuevos corazones de las zonas representadas por aquellos que hayan dado resistencias erráticas. Si la resistencia de los corazones ensayados no cumple con el criterio de aceptación que se ha descrito, el responsable en cuestión nuevamente debe decidir a su juicio y responsabilidad las medidas que han de tomarse. Puede optar por reforzar la estructura hasta lograr la resistencia necesaria, o recurrir a realizar pruebas de carga (artículos 239 y 240 del Reglamento) en elementos no destinados a resistir sismo, u ordenar la demolición de la zona de resistencia escasa, etc. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante en caso de que el concreto no cumpla con el requisito de resistencia.

El concreto debe cumplir además con el requisito de módulo de elasticidad especificado a continuación*:

		Clase 1	Clase 2
Módulo de elasticidad a 28 días de edad, kg/cm ² , mín.	Una muestra cualquiera	$12500\sqrt{f'_c}$	$7000\sqrt{f'_c}$
	además, promedio de todos los conjuntos de dos muestras consecutivas	$13200\sqrt{f'_c}$	$7400\sqrt{f'_c}$

* Debe cumplirse tanto el requisito relativo a una muestra cualquiera, como el que se refiere a los conjuntos de dos muestras consecutivas.

Para la verificación anterior, se tomará una muestra por cada 100 metros cúbicos, o fracción, de concreto, pero no menos de dos en una cierta obra. De cada muestra se fabricarán y ensayarán al menos tres especímenes. Se considerará como módulo de elasticidad de una muestra, el promedio de los módulos de los especímenes elaborados con ella.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, no estará obligado a exigir la verificación del módulo de elasticidad; sin embargo, si, a su criterio las condiciones de la obra lo justifican, podrá requerir su verificación, o la garantía escrita del fabricante de que el concreto cumple con él. Cuando proceda, la verificación se realizará en un laboratorio acreditado por el SINALP. En caso que el concreto no cumpla con el requisito mencionado, el responsable de la obra evaluará las consecuencias de la falta de cumplimiento y determinará las medidas que deberán tomarse. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante por incumplimiento del requisito antedicho.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III CA022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

**TEMA:
CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN SUELOS
(ANEXO DEL MÓDULO II: DISEÑO DE CIMENTACIONES SEGÚN
EL REGLAMENTO DEL DF)**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR SANGINÉS GARCÍA
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DE 2003**

No es usual que en el terreno se presente una compresión isotrópica, mientras que la compresión confinada es básicamente un fenómeno de cambio de volumen. En la compresión triaxial ocurren deformaciones unitarias laterales, pudiendo considerarse ésta como un fenómeno de cambio de forma. Por lo tanto, para el estudio de la deformación de un suelo, ésta se puede dividir en dos componentes: (a) una compresión por cambio de volumen, y (b) una compresión por cambio de forma.

COMPRESIÓN POR CAMBIO DE VOLUMEN

Si sometemos una muestra de suelo granular a un ensaye de compresión sin deformación lateral (compresión confinada) obtenemos una curva de compresibilidad como la de la fig 9a (Schlosser, 1988). Al inicio de la carga, las deformaciones son grandes, las cuales se deben a movimientos y a reacomodo de los granos. Cuando el esfuerzo vertical aumenta, los movimientos disminuyen y las deformaciones son el resultado de la compresión aproximadamente elástica de los propios granos. El ciclo de descarga y de recarga ABCA (fig 9a), que no coincide con la curva inicial, muestra que el comportamiento del esqueleto sólido no es reversible.

Bajo esfuerzos altos se presenta rotura de los granos, que se traduce en un cambio de pendiente de la curva de la fig 9b (Schlosser, 1988)

En la fig 10 se muestran los resultados de pruebas de compresión confinada, en escala semilogarítmica, para varias clases de arenas (Lambe y Whitman, 1969). La rotura de granos ocurre cuando cambia la pendiente de la curva de compresibilidad. Para la arena formada por feldespatos la rotura se presenta a un esfuerzo ligeramente superior a 100 lb/plg^2 (7.03 kg/cm^2), mientras que para la arena de Sandy Point la rotura ocurre a un esfuerzo más de diez veces superior ($1400 \text{ lb/plg}^2 = 98.4 \text{ kg/cm}^2$).

En arcillas totalmente saturadas, la compresión por cambio de volumen ocurre a largo plazo, debido a la baja permeabilidad del suelo.

COMPRESIÓN POR CAMBIO DE FORMA

La fig 11 exhibe los resultados de una prueba de compresión triaxial en una arena (Lambe y Whitman, 1969). La relación esfuerzo-deformación unitaria se curva a pequeñas deformaciones y alcanza un máximo para una deformación unitaria del orden de 2%. Nótese que aún a pequeñas deformaciones la curva esfuerzo-deformación unitaria es no lineal.

Es interesante notar que en una prueba triaxial, tanto una arena compacta como una arena suelta tienden a la misma relación de vacíos (y a la misma resistencia) para grandes deformaciones (fig 12).

Si se aplica una carga relativamente rápida a un suelo cohesivo totalmente saturado, éste sufre una deformación prácticamente a volumen constante, pues el agua no alcanza a salir por la baja permeabilidad de la arcilla.

EFFECTO DE LA PRESIÓN DE CONFINAMIENTO

Consideremos una muestra de suelo sometido a una presión de confinamiento p_c , y apliquemos un esfuerzo desviador σ_z ; en la fig 13 se muestra una curva típica esfuerzo desviador-deformación unitaria de un suelo en compresión triaxial. Observamos que el tramo inicial es una línea recta, y que después de cierto nivel de esfuerzo se convierte en una curva de concavidad hacia abajo. A la pendiente de la recta inicial se le conoce como módulo tangente inicial E , del suelo. Algunos ingenieros utilizan el módulo de deformación correspondiente al 50% de la falla, el cual se denomina E_{50} .

En términos generales, al aumentar la presión de confinamiento se incrementa la rigidez de un suelo, siendo este fenómeno más acusado en suelos friccionantes. En la fig 14 se muestra la variación del módulo tangente inicial (o del E_{50}) con la presión de confinamiento en un suelo.

Una forma aproximada de tomar en cuenta el fenómeno del incremento de rigidez con el confinamiento consiste en el empleo del criterio de Janbu (1963; citado por Duncan y Chang, 1970), que establece que el módulo tangente inicial de deformación está dado por

$$E_t = E_{i0} + K p_a (p_c / p_a)^n \quad (1)$$

donde

E_t = módulo tangente inicial de deformación

E_{i0} = módulo tangente inicial de deformación para un confinamiento efectivo igual a cero

K = coeficiente que depende de la rigidez del material

p_a = presión atmosférica = 10.3 t/m²

p_c = presión de confinamiento

n = exponente que depende de la clase de suelo

En el campo, los esfuerzos horizontales por peso propio del suelo en general son diferentes del esfuerzo vertical (fig 15a). Es usual tomar una presión de confinamiento de campo dada por

$$p_{co} = \frac{p_{vo} + p_{ho} + p_{ho}}{3} = \frac{p_{vo} + 2p_{ho}}{3} \quad (2)$$

La presión horizontal vale.

$$p_{ho} = K_o p_{vo} \quad (3)$$

donde K_o es el coeficiente de presión en reposo, y está dado por (Mitchell, 1993)

$$K_o = (1 - \text{sen } \phi') (\text{OCR})^{\text{sen } \phi'} \quad (4)$$

donde

ϕ' = ángulo de fricción interna del suelo

OCR = relación de preconsolidación del suelo

Reemplazando la ec 3 en la ec 2

$$p_{co} = (1 + 2 K_o) p_{vo} / 3 \quad (5)$$

Si se construye una obra de ingeniería, ésta produce incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y (fig 15b). La presión de confinamiento se incrementa en la cantidad

$$p_{cf} = p_{co} + \Delta p_c$$

donde

$$\Delta p_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

por lo tanto

$$p_{cf} = p_{co} + (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (6)$$

Por otra parte, el módulo de Poisson se puede obtener de manera aproximada de la siguiente forma: consideremos un estrato de suelo cubierto por otros estratos en proceso de sedimentación, en el cual, por simetría, la deformación horizontal vale cero: $\epsilon_h = 0$. Aplicando la ley de Hooke

$$\epsilon_h = (1/E) [p_{ho} - \nu (p_{vo} + p_{ho})] = 0$$

$$p_{ho} = [\nu / (1 - \nu)] p_{vo} \quad (7)$$

Pero $p_{ho} = K_o p_{vo}$

Por lo tanto

$$\nu = K_o / (1 + K_o) \quad (8)$$

EFECTO DE LA TRAYECTORIA DE ESFUERZOS

El ejemplo más claro de que la deformación de un suelo depende de la trayectoria de esfuerzos consiste en la diferencia de rigidez entre un suelo normalmente cargado y un suelo precargado. En este último, su rigidez puede ser de 3 a 4 veces mayor que la del material normalmente cargado; las deformaciones del suelo serán por lo tanto muy diferentes en cada caso (Décourt, 1989).

El efecto de la precarga en las arenas es muy significativo; así, puede haber arenas "precargadas" o "normalmente cargadas" con similar D_r , pero con comportamiento muy diferente (Ladd *et al*, 1977). Por lo tanto, resulta inadecuada la utilización de la compacidad relativa D_r como un índice único del comportamiento de una arena. Por el mismo motivo, la poca sensibilidad de la prueba de penetración estándar (SPT) para detectar el decremento de compresibilidad en arenas causado por la precarga (o preconsolidación) es la razón principal de la gran dispersión hallada en la predicción de asentamientos de zapatas en arenas. Los métodos que no separan las arenas normalmente cargadas de las precargadas están condenados al fracaso (Décourt, 1989). De acuerdo con Burland y Burbridge (1985), el asentamiento de una zapata en una arena precargada es aproximadamente igual a un tercio de la

misma zapata sobre una arena normalmente cargada, independientemente de la magnitud de la relación de preconsolidación (OCR).

Mediante la ejecución de pruebas de placa helicoidal (screw plate tests), se puede estimar la máxima presión de precarga en arenas (Dahlberg, 1974; citado por Mitchell, 1978).

En una arcilla totalmente saturada, la compresibilidad en el tramo de recompresión es bastante menor que la compresibilidad en el tramo virgen (fig 16; Mitchell, 1993).

INCREMENTO NETO DE CARGA

Se define el incremento neto de carga, o presión neta de la siguiente forma

$$q_n = q - p_{vo} \quad (9)$$

donde

q = presión media de contacto entre suelo y cimiento

p_{vo} = presión total previamente existente al nivel de desplante, debida a peso propio del suelo

INFLUENCIA DE LA CLASE DE SUELO

La magnitud y la evolución de las deformaciones de un suelo dependen fundamentalmente del tipo de material y de la presencia del nivel de agua freática (NAF). Se pueden distinguir cuatro clases de suelos:

- i) Suelos friccionantes
- ii) Suelos cohesivos totalmente saturados
- iii) Suelos cohesivos parcialmente saturados
- iv) Suelos cementados parcialmente saturados

Las deformaciones en estos suelos se pueden calcular como se indica en los siguientes incisos. (Debido a lo extenso del tema, y aun cuando son de gran importancia, se omiten los aspectos dinámicos.)

SUELOS FRICCIONANTES

Como mencionamos antes, en suelos friccionantes es muy importante tomar en

cuenta el incremento de rigidez del terreno con la presión de confinamiento. Para esto se puede emplear en forma aproximada la fórmula de Janbu (1963), dada por la ec 1.

En la tabla 1 se presentan valores estadísticos de los módulos de deformación, los cuales deben emplearse únicamente para fines preliminares de análisis.

El asentamiento se calcula empleando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\delta_z = (H/E_s) [\sigma_z - v (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (10)$$

La presión de confinamiento p_c que debe utilizarse en la ec 1 debe ser la presión efectiva, dada por

$$p_c = p_{co} + (1/2) \Delta p_c$$

$$\text{Pero } \Delta p_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

Por lo tanto

$$p_c = p_{co} + (1/6) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (11)$$

Efecto de la presencia del nivel de agua freática (NAF). Si el suelo se encuentra abajo del NAF, en las ecs 1 y 11 se debe emplear la presión efectiva en vez de la presión total, pues la rigidez de una arena está en función de dicha presión efectiva.

Por otra parte, en relación con el cálculo de asentamientos de zapatas en arenas, analizando la mayoría de los datos publicados, Burland y Burbridge (1985; citados por Décourt, 1989) concluyeron que el asentamiento δ (en milímetros) de zapatas en arenas normalmente cargadas está dado por

$$\delta = q B^{0.7} l_c \quad (12)$$

mientras que para arenas precargadas

$$\delta = q B^{0.7} l_c / 3 \quad (13)$$

donde

$$l_c = 1.17 / N^{1.4} \quad (14)$$

q = presión de contacto, en kN/m^2
 B = ancho de la cimentación, en metros

Existen varios métodos para calcular las deformaciones de los suelos friccionantes, tomando en cuenta los efectos de la presión de confinamiento y la no linealidad de la curva esfuerzo-deformación unitaria. En el anexo 1 se presenta el procedimiento de Deméneghi (1999), en el anexo 2 el de Schmertmann (1970) y en el anexo 3 el de Kondner (Duncan y Chang, 1970).

SUELOS COHESIVOS TOTALMENTE SATURADOS

En suelos cohesivos totalmente saturados se presentan expansiones inmediatas producidas por excavación, asentamientos inmediatos a volumen constante (por recompresión y por compresión) y asentamientos diferidos con cambio de volumen (por recompresión y por compresión). Ocurren también deformaciones transitorias y permanentes, a volumen constante, producidas por sismo.

Las Normas de Cimentaciones establecen que en cimentaciones compensadas se calcularán:

- i) Los movimientos instantáneos debidos a la carga total transmitida al suelo por la cimentación (asentamientos inmediatos a volumen constante),
- ii) Las deformaciones transitorias y permanentes del suelo de cimentación bajo cargas sísmicas; y
- iii) Los movimientos diferidos debidos al incremento neto de carga en el contacto cimentación-suelo.

En una excavación pueden ocurrir fuertes expansiones inmediatas debidas a deformaciones del suelo a volumen constante. Por ejemplo, en una excavación de 6 m de profundidad, de 18 m de ancho por 124.8 m de longitud, se observó una expansión al centro de 50 cm y de 20 en las orillas. En otra excavación de 6 m de profundidad, de 10 m de ancho por 48 m de longitud, se midió una expansión inmediata de 40 cm al centro y de 10 cm en las orillas. Estos datos fueron registrados por Marsal y Mazari (1959), que además señalan que tales movimientos del subsuelo son causa de asentamientos en un edificio, aunque se le haya compensado totalmente. Por su parte, Tamez (1996) señala que "en la ejecución de

excavaciones hasta de 120 m de longitud, 16 m de ancho y 6 a 7 m de profundidad, en aras del cumplimiento del programa de construcción (que debió llevarse a cabo con gran premura) hubo que admitir el desarrollo de expansiones del fondo, que llegaron hasta 60 cm, en algunos casos, por lo que se requirió la instalación de pilotes de control para reducir y controlar los asentamientos generados por la recuperación de las expansiones. Debe agregarse que solamente se empleó bombeo de achique para el control de filtraciones a la excavación, durante todo el tiempo que tomó la construcción de las cimentaciones. Esta contradicción, de *diseñar una cimentación compensada que, en teoría, no debiera sufrir asentamientos*, y la triste realidad de *no poder controlar las expansiones inducidas por el proceso de excavación*, que se traducirían más tarde en grandes asentamientos, me resultó muy inquietante, y la llamé, para mi propio uso, 'la paradoja de las cimentaciones compensadas', que me mantuvo inquieto durante varios años".

Para ejemplificar las deformaciones que experimenta un suelo cohesivo totalmente saturado, consideremos un edificio apoyado en una cimentación parcialmente compensada a base de un cajón de concreto reforzado, en un suelo de este tipo. Para alojar el cajón es necesario efectuar un corte, lo que produce expansiones inmediatas del fondo de la excavación. Al construir el edificio, las expansiones se recuperan mediante hundimientos, que se denominan asentamientos por recompresión. Debido al incremento neto de carga, se presentan hundimientos inmediatos adicionales, que se denominan asentamientos por compresión. Finalmente, debido al incremento neto de carga, ocurren hundimientos diferidos debidos al fenómeno de consolidación de la arcilla.

El cálculo de las deformaciones anteriores se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

Expansiones inmediatas. Se ha observado que las expansiones inmediatas son de tipo elástico, por lo que con frecuencia se calculan empleando la teoría de la elasticidad. Sin embargo, es conveniente considerar que el módulo elástico del suelo es no lineal y además aumenta con la presión de confinamiento. El módulo elástico no lineal se suele obtener mediante pruebas de compresión triaxial (de preferencia del tipo consolidadas-no drenadas),

aplicando para cada presión de confinamiento ciclos de carga y descarga en el suelo. Las expansiones inmediatas se pueden calcular utilizando un módulo elástico lineal E_e , pero, por lo comentado en el cuerpo de este capítulo, el cómputo será sólo será aproximado, por el marcado comportamiento no lineal de los suelos. Cabe aclarar que en algunos sitios de la ciudad de México, la arcilla exhibe un módulo elástico no drenado del orden de 50 kg/cm^2 (Alberro, 1970).

Asentamientos inmediatos por recompresión. Los asentamientos inmediatos por recompresión se calculan con la teoría de la elasticidad, pero conviene considerar que el módulo de deformación en recompresión es no lineal y que se acrecienta con la presión de confinamiento. El cálculo se efectúa en forma similar al de las expansiones, pues el módulo de recompresión es muy parecido al de expansión; el signo de los esfuerzos es ahora de compresión.

Asentamientos inmediatos por compresión. Los asentamientos inmediatos por compresión se calculan con la teoría de la elasticidad, pero conviene considerar que el módulo de deformación es no lineal y que aumenta con la presión de confinamiento.

Asentamientos diferidos por recompresión y compresión. Las cargas por recompresión y por compresión producen asentamientos diferidos ocasionados por cambio de volumen al ser expulsada el agua. Éstos se calculan con los resultados de pruebas de consolidación unidimensional.

Al aplicar una carga sostenida en un suelo cohesivo totalmente saturado se presenta una deformación a largo plazo, debida al fenómeno de *consolidación* del suelo. En general se acepta que la consolidación consta de dos procesos. (a) la *consolidación primaria*, debida al fenómeno de expulsión del agua del suelo, y (b) la *consolidación secundaria*, debida a una deformación de tipo viscoplástico de las partículas del suelo.

La deformación por consolidación primaria se puede calcular con la teoría de Terzaghi (Juárez Badillo y Rico, 1976) y la deformación por consolidación secundaria se puede calcular empleando la teoría de Zeevaert (1973).

En la práctica la deformación diferida se conoce a partir de una prueba de consolidación, que consiste en aplicar varias cargas sostenidas, durante lapsos más o menos definidos (que usualmente duran un día). En general se aplican del orden de 7 a 9 cargas, por lo que un ensaye de consolidación dura de 7 a 9 días. Los resultados de una prueba de consolidación se grafican en una curva de *compresibilidad*, en la que se trazan en el eje de las ordenadas la relación de vacíos y en el eje de las abscisas la presión aplicada (es usual graficar ésta en escala logarítmica).

Conocida la curva de compresibilidad de un estrato de suelo, el asentamiento se puede calcular con la siguiente expresión

$$\Delta H = [\Delta e / (1 + e_0)] H \quad (15)$$

La deformación diferida se puede calcular también en forma aproximada en función del índice de recompresión C_{rc} en el tramo de recompresión (fig 17). El asentamiento a largo plazo de un estrato de espesor H se obtiene de la siguiente forma

$$\Delta e = C_{rc} \log \left(\frac{p_{vo}' + \Delta p'}{p_{vo}'} \right) \quad (16)$$

Por lo tanto

$$\Delta H = \frac{C_{rc} H}{1 + e_0} \log \left(\frac{p_{vo}' + \Delta p'}{p_{vo}'} \right) \quad (17)$$

En el tramo virgen la deformación diferida se calcula

$$\Delta e = C_c \log \left(\frac{P_{vo}' + \Delta p'}{p_{vo}'} \right) \quad (18)$$

Por lo tanto

$$\Delta H = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \left(\frac{p_{vo}' + \Delta p'}{p_{vo}'} \right) \quad (19)$$

En el anexo 1 se presenta un procedimiento no lineal para el cálculo de las compresiones a corto y a largo plazo en suelos cohesivos totalmente saturados.

SUELOS COHESIVOS PARCIALMENTE SATURADOS

La problemática de los suelos cohesivos parcialmente saturados es diferente a la de los suelos totalmente saturados. En éstos, la presión hidráulica u_w es mayor que cero, mientras que en aquéllos la presión u_w es menor que cero.

Consideremos un suelo cohesivo totalmente saturado, y hagamos que éste pierda humedad; durante este proceso se forman meniscos que producen esfuerzos de tensión en el agua del suelo, lo que a su vez ocasiona esfuerzos efectivos de compresión en la estructura sólida del suelo (Juárez Badillo y Rico, 1976); a la tensión en el agua se le denomina *succión*. Por lo tanto, en una arcilla parcialmente saturada la succión produce un incremento de la presión efectiva, y un proceso de contracción del material. Por el contrario, una disminución de la succión ocasionará un aumento del volumen del suelo.

La succión total de un suelo consiste de dos componentes: la succión osmótica y la succión mátrica (Nelson y Miller, 1992).

La succión osmótica en una arcilla se debe a las fuerzas ejercidas sobre las moléculas de agua, como resultado de la diferencia de concentración de iones en el agua en la zona cercana a la doble capa eléctrica. En efecto, cerca de la partícula existe una mayor concentración de iones por la atracción de la carga negativa de una partícula sobre los cationes del agua, mientras que lejos de esta región la atracción disminuye y con ello la concentración de iones. Esta diferencia de concentración produce un fenómeno osmótico que tiene como consecuencia la aparición de la succión osmótica en el agua del suelo.

Para describir la succión mátrica, consideremos el suelo parcialmente saturado de la fig 18a. La altura hasta la cual el suelo permanece totalmente saturado por arriba del nivel de agua freática (NAF) depende del tamaño de los poros del suelo y de la diferencia entre las presiones del aire y del agua; en la fig 18a esta altura corresponde a la parte inferior del canal de aire, el cual se muestra amplificado en la fig 18b. Fredlund (1979) indica que para propósitos prácticos la frontera entre aire y agua se puede considerar como una *membrana* que representa

una fase distinta del suelo. El equilibrio del diagrama de cuerpo libre de esta membrana conduce a la siguiente expresión (Nelson y Miller, 1992)

$$(u_a - u_w) = 2T_s/r \quad (20)$$

donde

u_a = presión en el aire

u_w = presión en el agua

T_s = tensión superficial de la membrana

r = radio de la esfera (idealizada)

La cantidad $(u_a - u_w)$ es justamente la succión mátrica del suelo.

La succión total es una función de las succiones mátrica y osmótica. Para la mayoría de las aplicaciones prácticas, el rango de variación del contenido de agua de un suelo es tal que los cationes adsorbidos están generalmente hidratados totalmente, y las fuerzas osmóticas se mantienen constantes. En consecuencia, no ocurren cambios significativos en la presión osmótica (Krahn y Fredlund, 1972) y los cambios en la succión total se deben fundamentalmente a variaciones en la succión mátrica (Nelson y Miller, 1992). En ocasiones la succión se expresa como el potencial de succión pF , que es igual al logaritmo en base 10 de la succión medida en centímetros de columna de agua.

Por otra parte, la plasticidad de los suelos da lugar a que además de la deformación debida a cambio de esfuerzos (por carga externa, peso propio o succión), se presente una expansión producida por la absorción de moléculas de agua dentro de las moléculas de las partículas sólidas del suelo, o por una hidratación de la doble capa eléctrica que rodea a las partículas. Esta absorción de agua e hidratación de la doble capa eléctrica depende de la mineralogía de las partículas de arcilla; por ejemplo, es mayor cuando el mineral es montorilonita.

Consideremos una arcilla en estado natural con baja humedad, y hagamos pruebas de compresión triaxial consolidadas-drenadas (pruebas lentas) para diferentes valores de la presión de confinamiento p_c (fig 19). Si se permite un aumento de humedad a la arcilla, ésta sufrirá una expansión por absorción de agua; después de que ocurra la expansión repetimos las pruebas de compresión triaxial; la

variación de E_i , es como se muestra en la fig 19. Vemos que la rigidez disminuye con el aumento del grado de saturación S_r ,

La familia de curvas de la fig 19 se puede visualizar también en función de la succión, como se indica en la fig 20.

Es importante destacar que la deformación de la arcilla es la suma algebraica de la deformación por absorción de moléculas de agua más la compresión por el incremento de carga externa.

Un ejemplo de suelos cohesivos parcialmente saturados lo constituyen las arcillas expansivas, las cuales en temporada de lluvias pueden sufrir fuertes expansiones y en temporada de estiaje pueden experimentar contracciones por una disminución de su humedad.

Los movimientos anteriores pueden producir daños, sobre todo en estructuras ligeras como casas habitación y pavimentos. Estos daños se presentan en lugares de clima semiárido o árido, donde el nivel de agua freática (NAF) se encuentra a gran profundidad.

En la fig 21 se muestra un perfil de succión medido en Adelaide, Australia (Aitchison y Woodburn, 1969). La fig 22 exhibe cambios de la relación de vacíos de un suelo cuando se somete a cambios de succión y de carga externa en el consolidómetro. En la fig 23 se muestran variaciones de la deformación cuando cambia la succión con una carga constante (Aitchison y Woodburn, 1969).

En ocasiones se requiere conocer la presión vertical p_{vso} debida a peso propio y succión en un suelo. La valuación de p_{vso} se puede llevar a cabo con la realización de una prueba de "volumen constante", que consiste en aplicar una carga dada al suelo, para luego sumergir éste en agua; la arcilla tiende a expandirse, por lo que se incrementa la carga para evitar dicha expansión; el proceso se continúa hasta que el espécimen no muestra ya tendencia a expandirse. A partir de esta presión, la prueba se continúa en forma normal, cargando y descargando el suelo. La presión de expansión p_s' se obtiene como se indica en la fig 24; se considera que $p_{vso} \cong p_s'$. Esta corrección se hace debido a efectos de alteración del suelo al pasar del campo al laboratorio (Fredlund y Rahardjo, 1993).

En el anexo 1 se presenta un procedimiento no lineal (Deméneghi, 1999) y en el anexo 4 se presenta el criterio de Fredlund y Rahardjo (1993) para la valuación de la deformación de un estrato de arcilla por aumento o disminución de humedad.

SUELOS POCO PLÁSTICOS, CEMENTADOS, PARCIALMENTE SATURADOS

Es frecuente encontrar en la naturaleza suelos de baja o nula plasticidad en los que sus partículas se encuentran unidas por algún tipo de cementante. La cementación de los granos es muy variable: puede ser tan fuerte que el suelo se clasifica como roca –por ejemplo algunas tobas de consistencia dura, conocidas como piedra de cantera-, o puede ser tan débil que un pequeño aumento de humedad puede producir la pérdida completa de la cementación. Ejemplos de terrenos cementados poco plásticos son los suelos colapsables, algunas tobas y algunos suelos residuales.

Uno de los problemas que se presentan en los suelos cementados consiste en que al aumentar su humedad ocurre una disminución de la rigidez del material, lo cual afecta obviamente la seguridad del terreno de cimentación.

Por lo anterior, en suelos poco plásticos cementados parcialmente saturados conviene realizar pruebas de deformabilidad variando el grado de saturación del terreno. En la fig 19 se exhibe la variación del módulo tangente inicial E_i con el grado de saturación; apreciamos que la rigidez del suelo disminuye con el aumento del grado de saturación.

En la fig 25 se muestra la fuerte disminución de la relación de vacíos de un suelo colapsable al incrementarse la humedad (Dudley, 1970). Otro factor importante a considerar es el grado de alteración de las muestras extraídas del subsuelo. En la fig 26 se exhibe la influencia del grado de alteración en la deformabilidad del terreno (Houston y Houston, 1997); la curva AB corresponde a una muestra con muy poca o nula alteración, mientras que las curvas AC, AD y AE se obtienen para grados cada vez mayores de perturbación. Consideremos un suelo que al cargarlo en estado natural pasa de A a B (fig 26); al humedecerlo pasaría de B a F,

y el asentamiento estaría dado por la distancia vertical entre los puntos A y F. Si la muestra de suelo se alterara, obtendríamos por ejemplo la curva AD, y el asentamiento por humedecimiento estaría dado por la distancia de D a F. Sin embargo, en el campo el asentamiento por hidratación en realidad estaría dado por la distancia vertical entre B y F. Por otra parte, en general el hundimiento por carga en un suelo cementado en general es pequeño (distancia vertical AB, fig 26). Por lo anterior, para el cálculo del asentamiento por humedecimiento se recomienda utilizar la distancia vertical entre los puntos A y F de la fig 26 (Houston y Houston, 1997)

EMPLEO DE FÓRMULAS ELÁSTICAS

La teoría de la elasticidad proporciona un buen número de soluciones para diferentes condiciones geométricas y de carga sobre el terreno. Por lo tratado en los incisos anteriores, es evidente que el empleo de fórmulas elásticas sólo proporciona una solución aproximada, pues no se toma en cuenta el efecto de la no linealidad en la relación esfuerzo-deformación del suelo, ni de la variación de la rigidez del material con la profundidad. Sin embargo, las fórmulas elásticas se usan con frecuencia en la práctica, dada su sencillez; el ingeniero debe estar consciente que su empleo sólo da una aproximación gruesa al cálculo de las deformaciones.

En el anexo 5 se proporcionan fórmulas elásticas para varios casos prácticos. El lector puede consultar el libro de Poulos y Davis (1974), el cual contiene numerosas soluciones elásticas de interés para la ingeniería de cimentaciones.

USO DE CORRELACIONES

El cálculo de las deformaciones de un suelo requiere de la determinación previa de sus propiedades mecánicas. Es siempre recomendable obtener estas propiedades a partir de pruebas directas de campo —como una prueba de placa— o de ensayos de laboratorio.

Sin embargo, en ocasiones no es posible obtener estas propiedades porque el costo de las pruebas de placa es alto, o porque no se pueden extraer muestras inalteradas del suelo —

como es el caso de suelos puramente friccionantes, como las arenas limpias—. Para resolver el problema, desde el punto de vista práctico, se recurre a correlaciones entre propiedades mecánicas, entre éstas y pruebas índice o ensayos de campo. Por lo estudiado en los incisos anteriores, estas correlaciones sólo pueden dar valores muy aproximados de las propiedades mecánicas, por lo que la dispersión de dichas correlaciones es alta, razón por la cual el ingeniero debe usarlas con precaución. En los siguientes párrafos presentamos algunas correlaciones que se usan con cierta frecuencia en la práctica.

Suelos friccionantes

De acuerdo con Schmertmann *et al* (1978), la relación entre el módulo de deformación E_s del suelo y la resistencia en la punta del cono holandés q_c vale

$$\begin{aligned} E_s &= 2.5q_c, \text{ para una zapata cuadrada} \\ E_s &= 3.5q_c, \text{ para una zapata corrida} \end{aligned}$$

Por su parte, Denver (1985) propone la siguiente expresión

$$E_s = F \sqrt{q_c/q_0} \quad (21)$$

Donde $F = 8 \text{ MPa}$ y $q_0 = 1 \text{ MPa}$.

La relación entre E_s y el número de golpes N de la prueba de penetración estándar es, según Denver

$$E_s = C \sqrt{N} \quad (22)$$

donde $C = 7 \text{ MPa}$.

La relación entre N y q_c (q_c en kg/cm^2) está dada por (Schmertmann, 1970)

Suelo	q_c/N
Limo. Limo arenoso	2
Arena de fina a media. Arena poco limosa	3.5
Arena gruesa. Arena con poca grava	5
Arena con grava. Grava	6

Como vimos en el inciso de suelos friccionantes, el asentamiento en milímetros de una zapata está dado por (Burland y Burbridge, 1985)

Arena normalmente cargada

$$\delta = q B^{0.7} I_c \quad (24)$$

Arena precargada

$$\delta = q B^{0.7} I_p/3 \quad (25)$$

donde

$$I_c = 1.17 / N^{1.4} \quad (26)$$

q = presión de contacto, en kN/m²

B = ancho de la cimentación, en metros

Terzaghi y Peck (1967) proporcionan (fig 27) la presión de contacto en un cimiento, para que el asentamiento no sea mayor que 2.5 cm, en función del número de golpes de la prueba de penetración estándar y del ancho de la zapata.

Suelos cohesivos totalmente saturados

Se ha observado que existe cierta correlación entre el módulo E_u y la resistencia al corte no drenada c_u en un suelo cohesivo totalmente saturado, pero que esta relación depende de la plasticidad del material. En la fig 28 se muestra la variación de E_u/c_u en función de la relación de preconsolidación (Duncan y Buchignani, 1976; citados por Tavenas y Leroueil, 1987).

Suelos cohesivos parcialmente saturados

La tabla 2 contiene el probable grado de expansibilidad de un suelo cohesivo, al pasar de seco a saturado, en función de su plasticidad (Holtz y Gibbs, 1956).

General

En la tabla 3 se muestran rangos de valores del módulo de deformación E_s de los suelos (Bowles, 1968).

EXPERIENCIA LOCAL

Cada localidad se asienta sobre una o varias formaciones geológicas, las cuales exhiben una estratigrafía y propiedades típicas de cada una de ellas.

Una formación geológica presenta problemas de ingeniería propios de la misma. Por lo tanto, el ingeniero debe estar familiarizado con la

estratigrafía y propiedades de dicha formación, y observar el comportamiento de las obras construidas en ella, lo cual permite una adecuada calibración entre uso de propiedades mecánicas y conducta de las cimentaciones.

En los siguientes párrafos presentamos magnitudes de propiedades mecánicas para el subsuelo de la ciudad de México, obtenidas a partir de la estadística. Cabe aclarar que estas propiedades el ingeniero las debe emplear con las reservas de caso, pues en general la dispersión de los datos es alta. Desde luego, presentan una mayor confiabilidad aquellas correlaciones en las que se proporcionan magnitudes de la dispersión de los datos (desviación estándar o variancia).

En la tabla 4 se presentan datos obtenidos de curvas de compresibilidad de la arcilla de la ciudad de México, donde, de acuerdo con las ecs 17 y 19

$$C_{rc}' = C_{rc}/(1+e_0) \quad (27)$$

$$C_c' = C_c/(1+e_0) \quad (28)$$

Los parámetros de la población estadística de la tabla 5 se obtienen de la siguiente manera: la media de la población se toma igual a la media de la muestra estadística. La variancia de la población se estima

$$\sigma^2 = (N-1) s^2 / \chi^2_{1-\alpha_1} \quad (29)$$

donde $\chi^2_{1-\alpha_1}$ se obtiene para N-1 grados de libertad; para fines prácticos α_1 se puede tomar igual a 50%.

Con los valores de la tabla 5 se pueden hacer inferencias estadísticas de las propiedades mecánicas. En efecto, aceptando que una población estadística tiene una distribución normal de probabilidad, un valor desfavorable (poco probable) se calcula

$$\text{Valor desfavorable} = \mu - \sigma z_{\alpha_2} \geq 0 \quad (30)$$

La probabilidad de que la magnitud de una propiedad mecánica sea menor que el valor desfavorable calculado con la ec 30, es α_2 .

Aplicando la ec 30, en la tabla 6 se presentan valores desfavorables de los parámetros de deformabilidad, para distintos niveles de confianza α_2 . El uso de la tabla 6 es como

sigue: tomando por ejemplo un nivel de confianza $\alpha_2 = 20\%$, existe una probabilidad de 20% de que C_{rc}' resulte menor que 0.060972 y que C_c' resulte menor que 0.69771.

La comparación de resultados de hundimientos de estructuras (manteniéndose la arcilla en el tramo de recompresión) con asentamientos calculados con los valores de C_{rc}' de la tabla 6 arroja en general buenos resultados, pues los segundos son muy parecidos a los primeros.

La arcilla de la ciudad de México, aunque se encuentre normalmente consolidada, exhibe una cierta "preconsolidación", debida fundamentalmente a fuerzas de tipo fisicoquímico que se desarrollan en los contactos entre las partículas. Esta "preconsolidación", que se puede denominar "rigidez fisicoquímica" varía en la arcilla de la ciudad de México entre 1.8 y 2.6 t/m^2 (Deméneghi, 1982). Este incremento de presión se puede agregar a la presión vertical efectiva y el suelo todavía se mantiene en el tramo de recompresión. Tomando un factor de seguridad de 1.5, en la práctica se puede usar una rigidez fisicoquímica del orden de 1.2 t/m^2 . Desde luego, si mediante pruebas de laboratorio o mediciones de campo se estima un valor mayor de la presión de preconsolidación, el valor anterior se podrá aumentar en consecuencia.

Por otra parte, en la fig 29 se muestran curvas de correlación entre la resistencia en la punta del cono q_c y los coeficientes de deformabilidad volumétrica m_v (rama virgen) y m_r (rama de recompresión), obtenidos de datos de laboratorio, para arcillas con un ligero grado de preconsolidación (Cuevas, 1988; citado por Santoyo *et al*, 1989). El coeficiente m_v se obtuvo en el rango de esfuerzos p_{vo}' y $[p_{vo}' + (2/3)(p_{vc}' - p_{vo}')$, donde p_{vc}' es la presión de preconsolidación.

La tabla 7 contiene datos de deformabilidad de suelos de la zona poniente de la ciudad de México (Deméneghi y Sanginés, 2000). Las tobas están formadas por limos arenosos y los conglomerados están formados por boleos y gravas empacados en una matriz arenosa, o por boleos y gravas empacados en una matriz arenarcillosa (Gutiérrez y Cuevas, 1992). Se observa que los módulos obtenidos con el odómetro son pequeños comparados con los módulos determinados con pruebas de cono en campo; dado que es usual saturar la probeta de

suelo en una prueba de consolidación, es probable que los módulos del odómetro se hayan obtenido en muestras saturadas; por esta razón se hace la hipótesis de que los módulos del odómetro corresponden a muestras saturadas totalmente.

Por lo que respecta a las arenas pumíticas, en una prueba de placa se obtuvo $E_{nat} = 2400 t/m^2$, mientras que de dos ensayos de odómetro se determinaron magnitudes de E' de 640 y de 1000 t/m^2 (León, 1976).

En la tabla 8 se presentan los parámetros de deformabilidad de las poblaciones estadísticas de las tobas y de los conglomerados, usando los datos de la tabla 7 (Deméneghi y Sanginés, 2000).

Utilizando la ec 30, se obtienen valores desfavorables de las propiedades mecánicas, los cuales se presentan en la tabla 9, para distintos niveles de confianza α_2 . Para usar la tabla 9, el ingeniero elige un cierto nivel de confianza de acuerdo a su criterio y obtiene la probabilidad de ocurrencia de la propiedad mecánica de interés. Tomemos como ejemplo $\alpha_2 = 20\%$ en la tabla 9: en la toba existe una probabilidad de 20% de que E' resulte menor que 323.970 t/m^2 y de que E_{nat} resulte menor que 4430.791 t/m^2 .

En general, en la zona poniente de la ciudad de México los hundimientos de las estructuras son bajos. Por ejemplo, el asentamiento de una losa de cimentación de 42 por 50 m en planta, que transmite al terreno un incremento de carga de 60 t/m^2 tuvo un asentamiento máximo de 2.1 cm (Girault, 1992). Utilizando el valor medio $E_{nat} = 6211.667 t/m^2$ de la tabla 9 ($\alpha_2 = 50\%$), y usando la fórmula de Steinbrenner con $H = B = 42$ m y $\nu = 0.3$, se obtiene un asentamiento de 24.5 cm; se observa que en este caso particular, los datos estadísticos proporcionan resultados del lado de la seguridad.

Ciudad Universitaria, D F, enero de 2001

REFERENCIAS

Aitchison, G D y Woodburn, J A, "Soil suction in foundation design", VII Congr Int Mec Suelos Ing Ciment, vol 2: 1-8. México, D F, 1969

- Alberro, J, "Investigaciones sobre el metropolitano de la ciudad de México. Mediciones efectuadas en las excavaciones", Rev Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, julio-sept 1970
- Bowles, J E, *Foundation Analysis and Design*, McGraw-Hill, 1968
- Burland, J B y Burbridge, M C, "Settlement of foundations on sand and gravel", Proc Inst Civ Engrs, part I, pp 1325-1381, 1985
- Dahlberg, R, "Penetration, pressurometer and screw plate tests in a preloaded natural sand deposit", Proc European Symposium on Penetration Testing, Stockholm, Vol 2.1, National Swedish Building Research, pp 69-87, 1974
- Décourt, L, "The standard penetration test, state-of-the-art report", XII Congr Int Mec Suelos Ing Ciment, Río de Janeiro, 1989
- Cuevas, A, Comunicación personal en 1988 con Santoyo *et al* (1989)
- Deméneghi, A, "Aplicaciones de la estadística a la arcilla de la formación Tacubaya del valle de México", Revista Ingeniería, Vol LII, N° 4:95-106, 1982
- Deméneghi, A, Apuntes de Cimentaciones, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1999
- Denver, H, "Settlement calculation for footings on sand", XI Int Conf Soil Mech Found Eng, vol 4: 2183-2190, San Francisco, 1985
- Dudley, J H, "Review of collapsing soils", Jour Soil Mech Found Div, ASCE, SM3: 925-947, 1970
- Duncan, J M y Buchignani, A L, "An engineering manual for settlement studies", Dep Civil Eng, University of California, Berkeley, 1976
- Duncan, J M y Chang, C Y, "Non linear analysis of stress and strain in soils", Jour Soil Mech Found Div, ASCE, SM5, sept 1970
- Fredlund, D G, "Appropriate concepts and technology for unsaturated soils. 2nd Canadian Geotech Colloquium, Canadian Geotech Jour, V 16, N° 1: 121-139, 1979
- Fredlund, D G y Rahardjo, H, *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*, Wiley, 1993
- Girault, P, "Cimentación y excavación para la Torre Lomas", Simposio sobre Experiencias Geotécnicas en la Zona Poniente del Valle de México: 83-88, Soc Mex Mec Suelos, México, D F, 1992
- Gutiérrez, C E y Cuevas, A, "Solución de cimentación sobre rellenos mediante una losa de suelo-cemento", Simposio sobre Experiencias Geotécnicas en la Zona Poniente del Valle de México: 65-81, Soc Mex Mec Suelos, México, D F, 1992
- Holtz, W G y Gibbs, H J, "Engineering properties of expansive clays", Trans ASCE, 121: 641-677, 1956
- Houston, S L y Houston, W N, "Collapsible soils engineering", Unsaturated Soil Engineering Practice, Geotch Special Publ N° 68: 199-232, ASCE, 1997
- Janbu, N, "Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests", European Conf Soil Mech Found Eng, Wiesbaden, Germany, Vol 1: 19-25, 1963
- Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo I, 3ra ed, Limusa, 1976
- Krahn, J y Fredlund, D G, "On total, matric and osmotic suction", Soil Sci 114(5): 339-345, 1971
- Ladd, C C, Foott, R, Ishihara, K, Schlosser, F y Poulos, H G, "Stress-deformation and strength characteristics", IX Congr Int Mec Suelos Ing Ciment, Tokio, 1977
- Lambe, T W y Whitman, R V, *Soil Mechanics*, Wiley, 1969
- León, J L, "Propiedades del suelo", Simposio sobre Cimentaciones en Zonas Minadas de la Ciudad de México: 22-36, Soc Mex Mec Suelos, México, D F, 1976
- Marsal, R J y Mazari, M, *El Subsuelo de la Ciudad de México*, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1959
- Mitchell, J K, "In-situ techniques for site characterization", Proceedings Symposium on

Site Characterization and Exploration, ASCE, 1978

Mitchell, J K, *Fundamentals of Soil Behavior*, 2nd ed, Wiley, 1993

Nelson, J D y Miller, D J, *Expansive Soils. Problems and Practice in Foundation and Pavement Engineering*, Wiley, 1992

Poulos, H G y Davis, E H, *Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics*, Wiley, 1974

Santoyo, E, Riqing, L X y Ovando, E, *El Cono en la Exploración Geotécnica*, TGC Geotecnia, 1989

Schlosser, F, *Elements de Mecanique de Sols*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1988

Schmertmann, J H, "Static cone to compute static settlement over sand", Jour Soil Mech Found Div, ASCE, SM3, mayo 1970

Schmertmann, J H, Hartman, J P y Brown, P R, "Improved strain influence factor diagrams", Jour Geotech Eng Div, ASCE, GT8, agosto 1978

Tamez, E, "Cincuenta años de geotecnia en ICA", Memoria de la Reunión Conmemorativa: 40 Años de Investigación y Práctica en Geotecnia, tomo II, Fundación ICA, 1996

Tavenas, F y Leroueil, S, "Laboratory and in situ stress-strain-time behavior of soft clays: a State-of-the-Art", Memorias del Simposio Internacional de Ingeniería Geotécnica de Suelos Blandos, vol 2: 3-48, México, D F, 1987

Terzaghi, K y Peck, R B, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2nd ed, Wiley, 1967

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

(Ac dsp10)

TABLA 1
VALORES APROXIMADOS DE PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN EN SUELOS FRICCIONANTES.
FÓRMULA DE JANBU

Estado	D_r	N	q_c kg/cm ²	N	Normalmente cargado	Precargado
					K	
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	0.65	< 140	< 420
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	0.65-0.62	140-290	420-870
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	0.62-0.58	290-800	870-2400
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	0.58-0.55	800-1300	2400-3900
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	0.55	> 1300	> 3900

D_r = compacidad relativa

N = número de golpes en la prueba de penetración estándar

q_c = resistencia en la punta del cono holandés

TABLA 2
GRADO DE EXPANSIBILIDAD DE UNA ARCILLA (Holtz y Gibbs, 1956)

Porcentaje de partículas menor que 0.001 mm	Índice plástico	Límite de contracción	Grado de expansibilidad	Expansión probable, de seco a saturado
	%	%		%
> 28	> 35	< 11	Muy alto	> 30
20-31	25-41	7-12	Alto	20-30
13-23	15-28	10-16	Medio	10-20
< 15	< 18	> 15	Bajo	< 10

La expansión probable se mide en una arcilla secada al aire y puesta a saturar en un consolidómetro estándar, bajo una presión de 0.07 kg/cm^2

TABLA 3
RANGO DE VALORES DEL MÓDULO DE DEFORMACIÓN E_s DEL SUELO (Bowles, 1968)

Clase de suelo	Módulo de deformación, E_s
	t/m^2
Arcilla muy blanda	35-280
Arcilla blanda	175-420
Arcilla media	420-845
Arcilla dura	700-1755
Arcilla arenosa	2810-4220
Arena limosa	700-2110
Arena suelta	1055-2460
Arena compacta	4920-8435
Arena y grava compactas	9840-19685
Loess	9840-12655

TABLA 4
PARÁMETROS DE DEFORMABILIDAD. MUESTRAS ESTADÍSTICAS DE LA ARCILLA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Propiedad mecánica	C_{rc}'	C_c
Número de valores, N	51	40
Media	0.045504	0.57118
Variancia, s^2	0.0003166	0.020959
Desviación estándar, s	0.017794	0.14477
Coefficiente de variación	0.391	0.253

TABLA 5
PARÁMETROS DE DEFORMABILIDAD. POBLACIONES ESTADÍSTICAS DE LA ARCILLA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Propiedad mecánica	C_{rc}'	C_c'
Número de valores, N	51	40
χ cuadrada	46.864	36.163
Media, μ	0.045504	0.57118
Variancia, σ^2	0.00033781	0.022603
Desviación estándar, σ	0.018380	0.15034

TABLA 6
VALORES DESFAVORABLES ESTIMADOS DE PROPIEDADES DE DEFORMABILIDAD

Nivel de confianza α_2 %	$Z_{\alpha/2}$	C_{rc}'	C_c'
5	1.6449	0.075736	0.81848
10	1.2816	0.069059	0.76386
15	1.0364	0.064552	0.72699
20	0.8416	0.060972	0.69771
25	0.6745	0.057901	0.67258
30	0.5244	0.055142	0.65002
40	0.2533	0.050159	0.60926
50	0	0.045503	0.57118

TABLA 7
PARÁMETROS DE DEFORMABILIDAD. MUESTRAS ESTADÍSTICAS DE TOBAS Y DE
CONGLOMERADOS (Deméneghi y Sanginés, 2000)

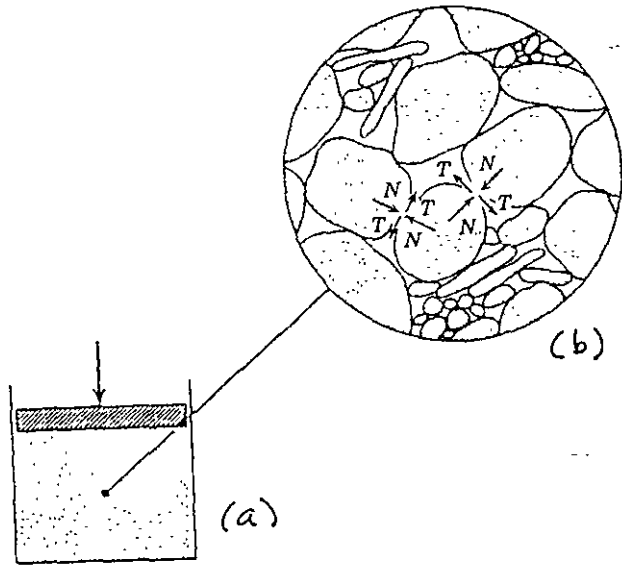
Propiedad mecánica	Tobas		Conglomerados
	E' Odómetro	E _{nat} Pruebas de cono en campo	E _{nat} Pruebas de cono en campo
	t/m ²	t/m ²	t/m ²
Número de valores, N	6	12	13
Media	1368.889	6211.667	7570.769
Variancia, s ²	1126863.54	3760051.52	2816957.69
Desviación estándar, s	1061.538	1939.085	1678.379
Coefficiente de variación	0.775	0.312	0.222

TABLA 8
PARÁMETROS DE DEFORMABILIDAD. POBLACIONES ESTADÍSTICAS DE TOBAS Y DE
CONGLOMERADOS (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Propiedad mecánica	Tobas		Conglomerados
	E'	E _{nat}	E _{nat}
	t/m ²	t/m ²	t/m ²
Número de valores, N	6	12	13
χ cuadrada	3.655	9.237	10.182
Media, μ	1368.889	6211.667	7570.769
Variancia, σ^2	1541536.99	4477705.6 1	3319926.56
Desviación estándar, σ	1241.586	2116.059	1822.066

TABLA 9
VALORES DESFAVORABLES ESTIMADOS DE PROPIEDADES DE DEFORMABILIDAD (Deméneghi y
Sanginés, 2000)

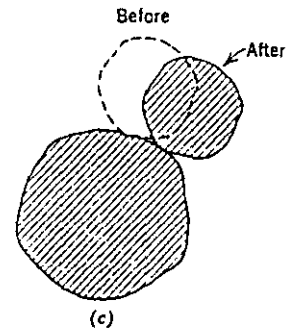
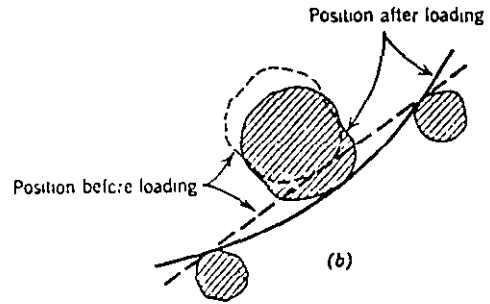
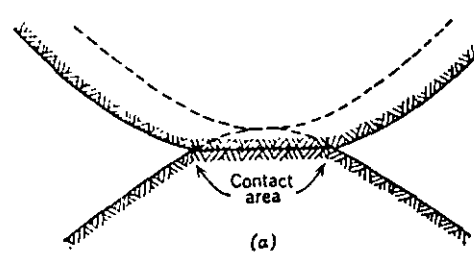
Nivel de confianza α_2	Z _{α_2}	Tobas		Conglomerados
		E'	E _{nat}	E _{nat}
%		t/m ²	t/m ²	t/m ²
5	1.6449	0	2730.961	4573.652
10	1.2816	0	3499.726	5235.609
15	1.0364	82.109	4018.583	5682.379
20	0.8416	323.970	4430.791	6037.318
25	0.6745	531.439	4784.385	6341.785
30	0.5244	717.801	5102.005	6615.277
40	0.2533	1054.395	5675.669	7109.240
50	0	1368.889	6211.667	7570.769



Schematic representation of force transmission through soil. (a) Cross section through box filled with soil. (b) Enlargement through portion of cross section showing forces at two of the contact points.

(Lambe y Whitman, 1969)

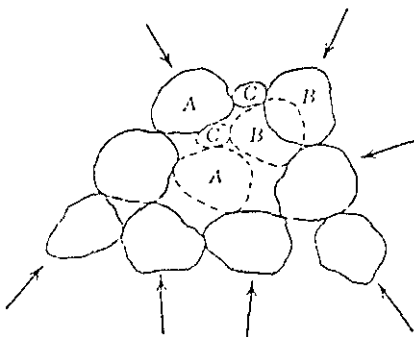
FIGURA 1



Causes of relative motions among soil particles. (a) Motion of particles due to deformation of contacts. Solid lines show surfaces of particles after loading (the lower particle was assumed not to move); dashed lines show surfaces before loading. (b) Relative motion of particles due to bending of platelike particles. (c) Relative motion of particles due to interparticle sliding.

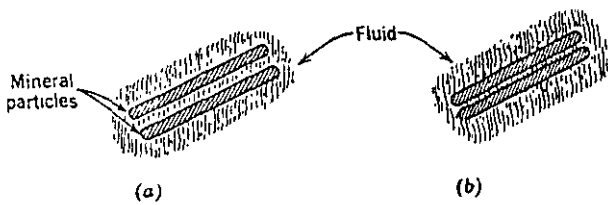
(Lambe y Whitman, 1969)

FIGURA 2



Collapse of an unstable array of particles. (Lambe y Whitman, 1969)

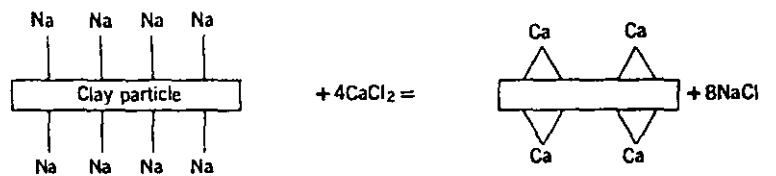
FIGURA 3



Fluid films surrounding very small soil particles. (a) Before load. (b) Particles squeezed close together by load.

(Lambe y Whitman, 1969)

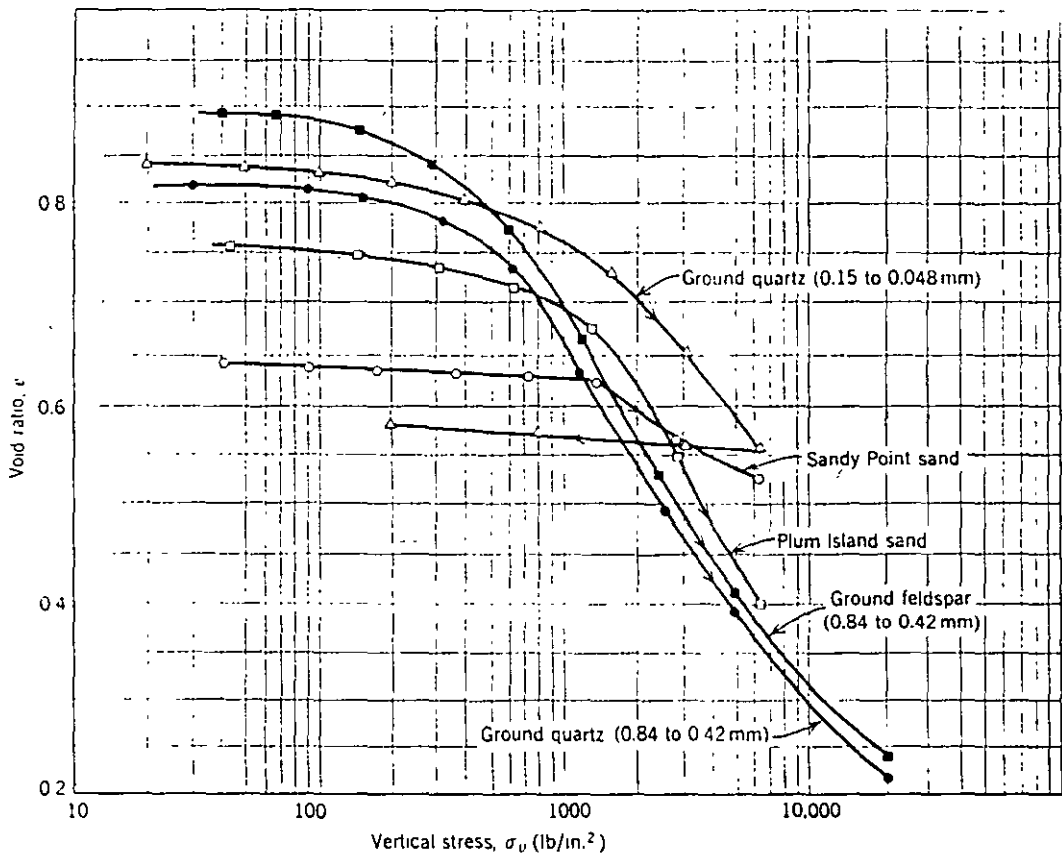
FIGURA 4



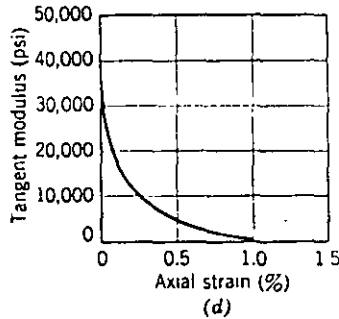
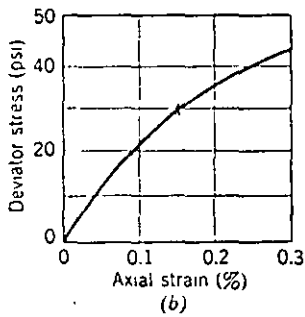
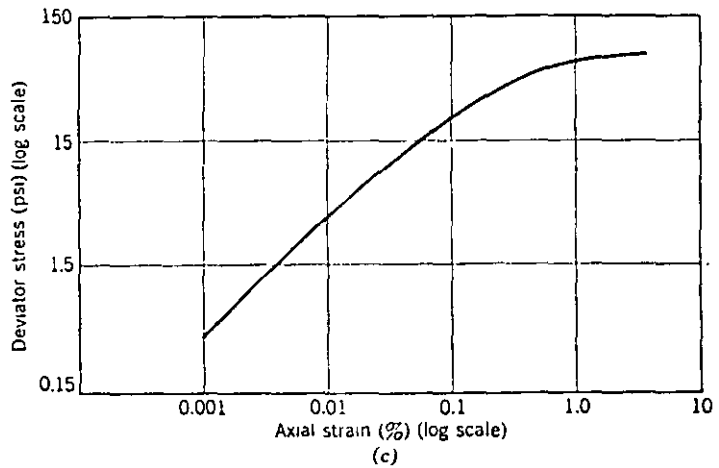
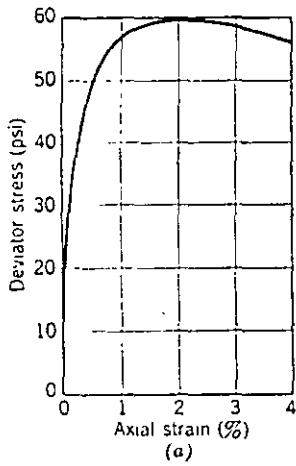
Ion exchange reaction.

(Lambe y Whitman, 1969)

FIGURA 5

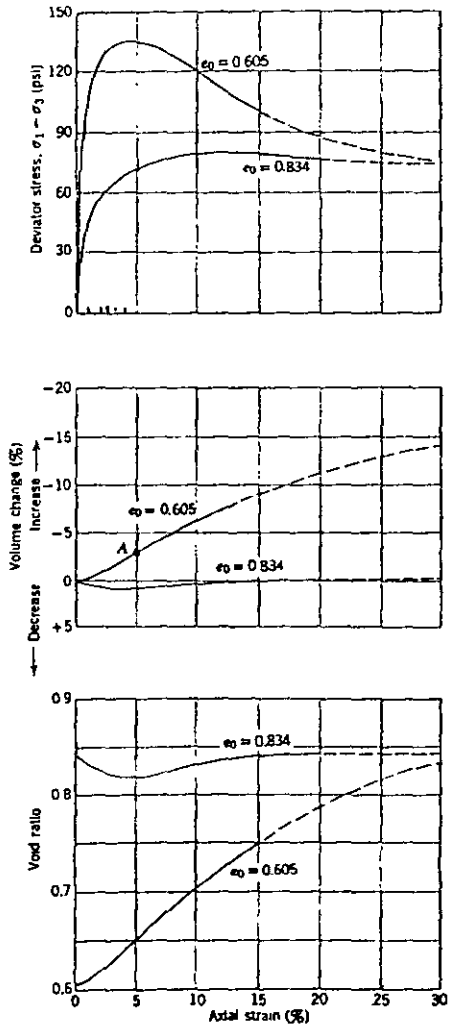


Results of high-stress, confined compression tests on several sands (data from Roberts, 1964).
FIGURA 10



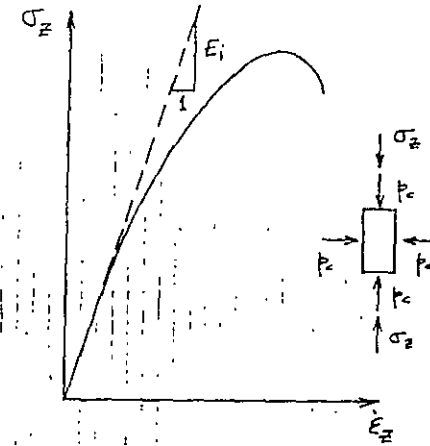
Stress-strain data from a triaxial test. Note. Medium, subangular sand: porosity = 0.39; confining stress = 14.3 lb/in.² (From Chen, 1948.)

FIGURA 11

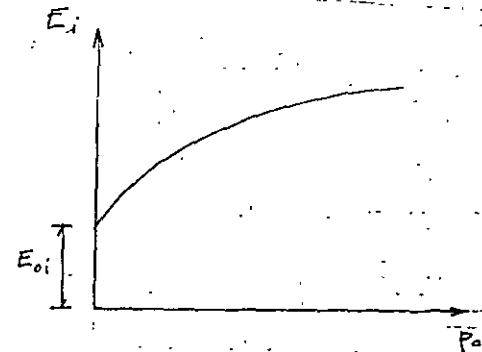


Stress-strain curves for loose and dense specimens. Medium-fine sand. $\sigma_3 = 30 \text{ lb/in.}^2$; $e_0 = 0.605 \approx 100\% D_r$; $e_0 = 0.834 \approx 20\% D_r$. Solid line, actual test data; dashed line, extrapolations based on results of other tests. (After Taylor, 1948.)

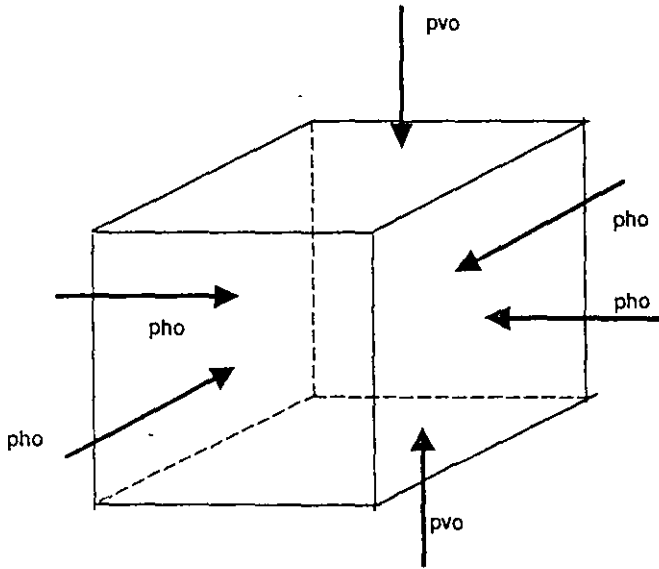
FIGURA 12



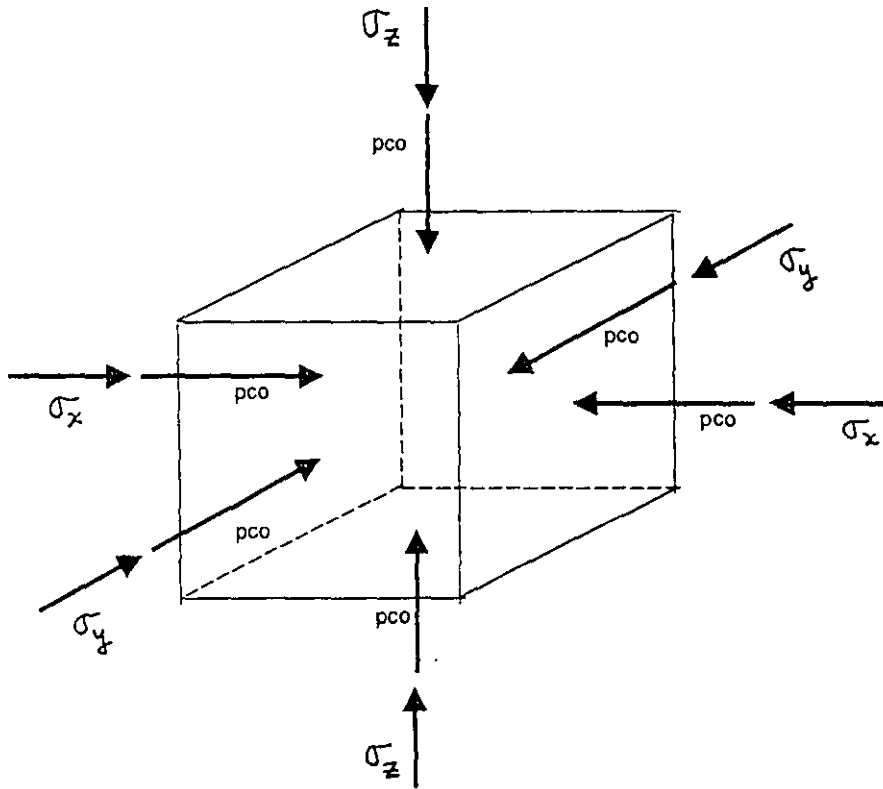
CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA DE UN SUELO
FIGURA 13



VARIACIÓN DEL MÓDULO TANGENTE INICIAL CON LA PRESIÓN DE CONFINAMIENTO
FIGURA 14

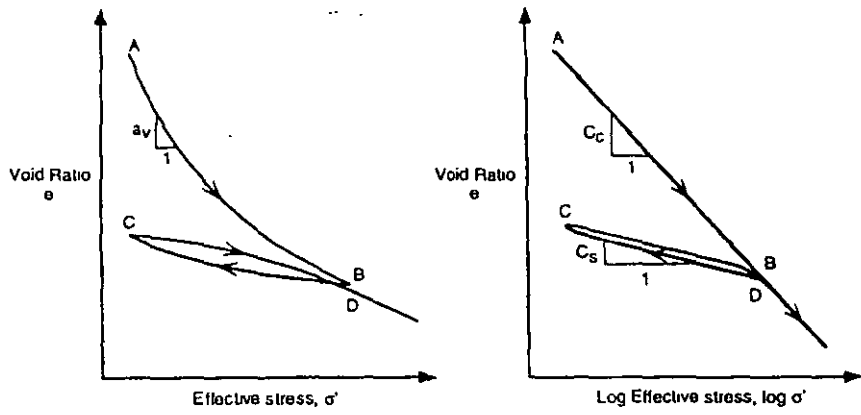


a) Esfuerzos por peso propio



b) Incrementos de esfuerzo por la presencia de una obra de ingeniería

ESFUERZOS EN UN ELEMENTO DE SUELO
FIGURA 15



AB = Initial or virgin compression

BC = Rebound or swelling

CD = Recompression

a_v = Coefficient of compressibility = $-de/dσ'$ = $-0.434C_c/σ'$

m_v = Compressibility = $-a_v/(1+e)$

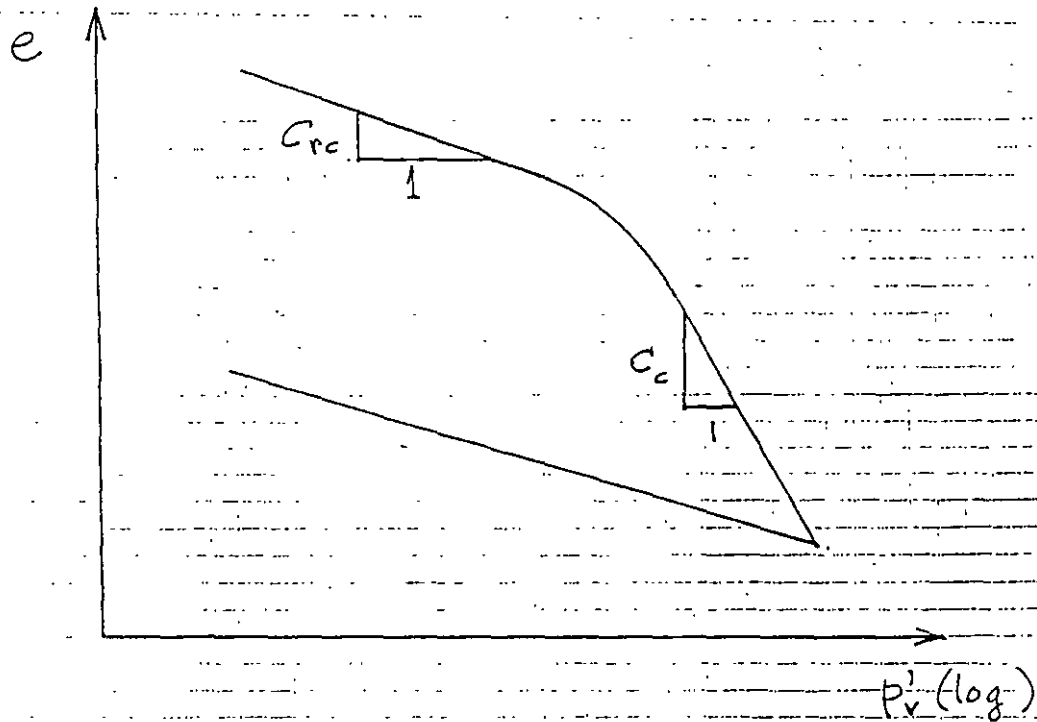
C_c = Compression index = $-de/d \log σ'$ on compression

C_s = Swelling index = $-de/d \log σ'$ on swelling

Idealized void ratio-effective stress relationships for a compressible soil.

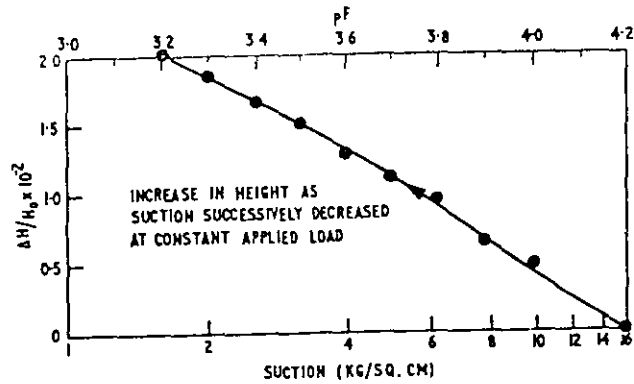
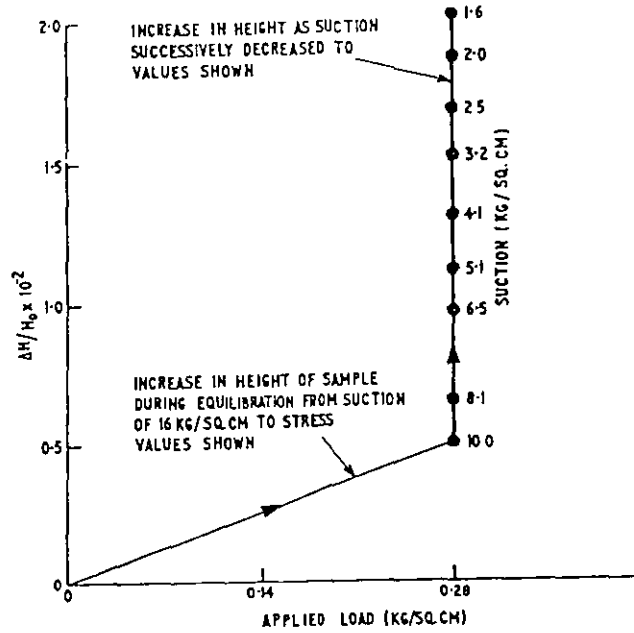
(Mitchell, 1993)

FIGURA 16



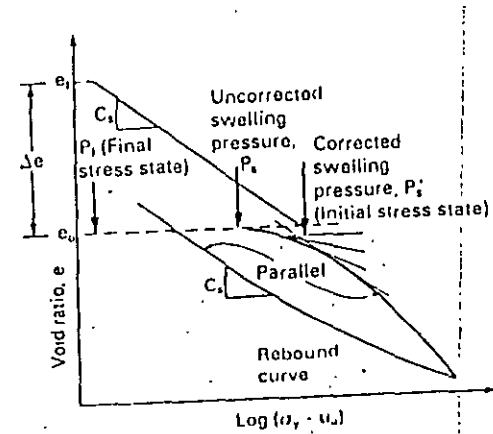
SUELO COHESIVO TOTALMENTE SATURADO

FIGURA 17



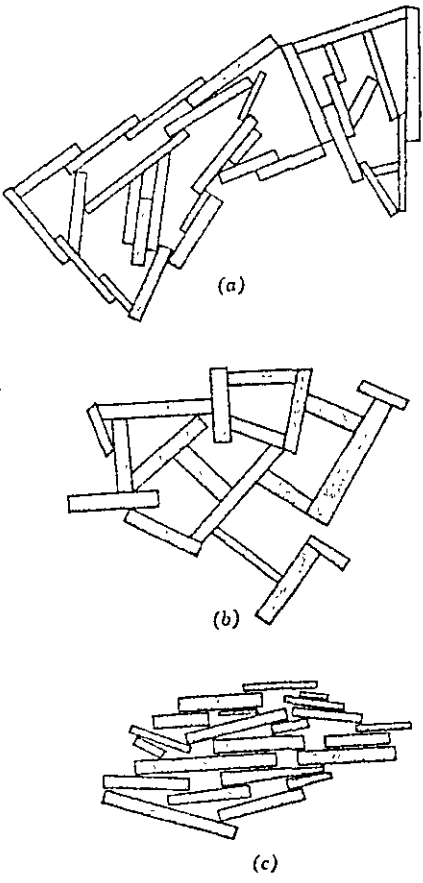
Swell/suction decrease relationship in loaded black earth
(Aitchison y Woodburn, 1969)

FIGURA 23



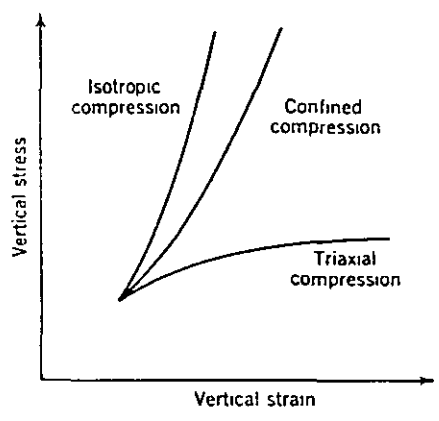
PRUEBA DE VOLUMEN CONSTANTE
(Fredlund y Rahardjo, 1993)

FIGURA 24



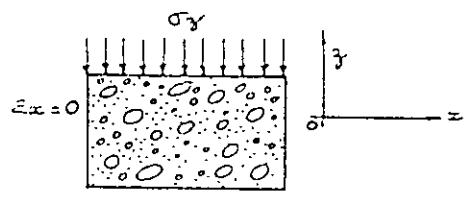
Sediment structures. (a) Salt flocculation. (b) Nonsalt flocculation. (c) Dispersion. (Lambe y Whitman, 1969)

FIGURA 6



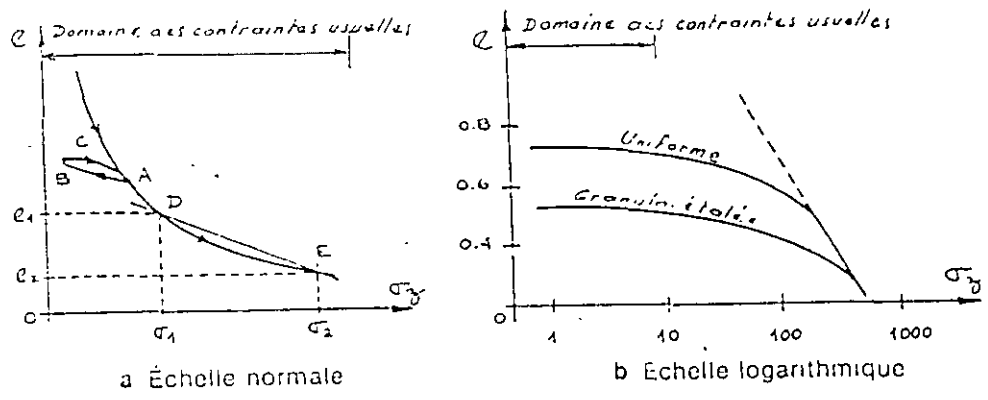
Comparison of stress-strain curves for three types of compression. (Lambe y Whitman, 1969)

FIGURA 7



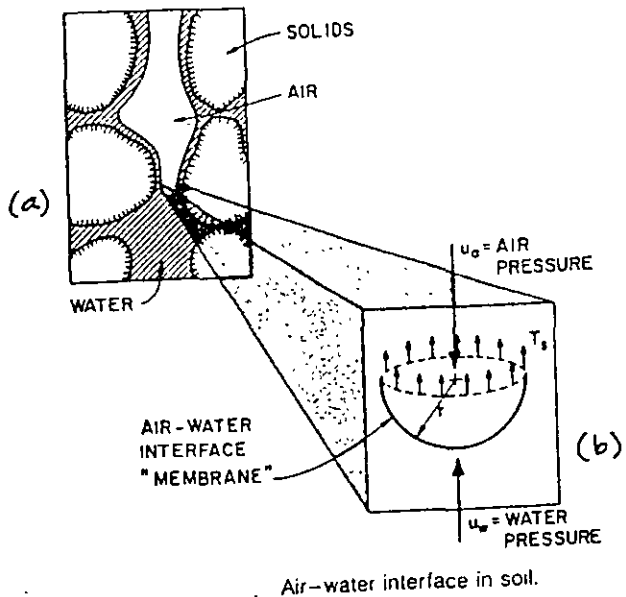
COMPRESIÓN CONFINADA (Schlosser, 1988)

FIGURA 8



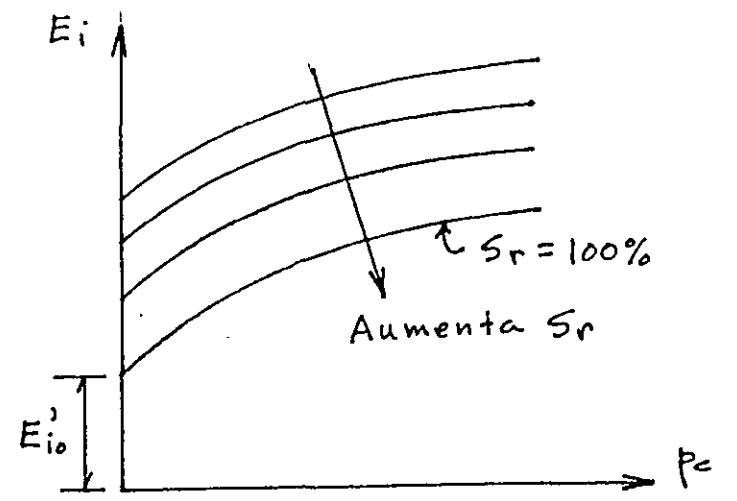
CURVAS DE COMPRESIBILIDAD (Schlosser, 1988)

FIGURA 9

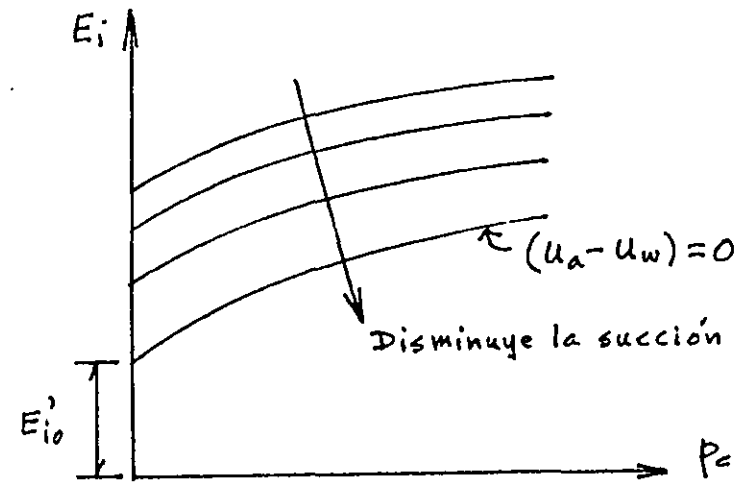


Air-water interface in soil.
(Nelson y Miller, 1992)

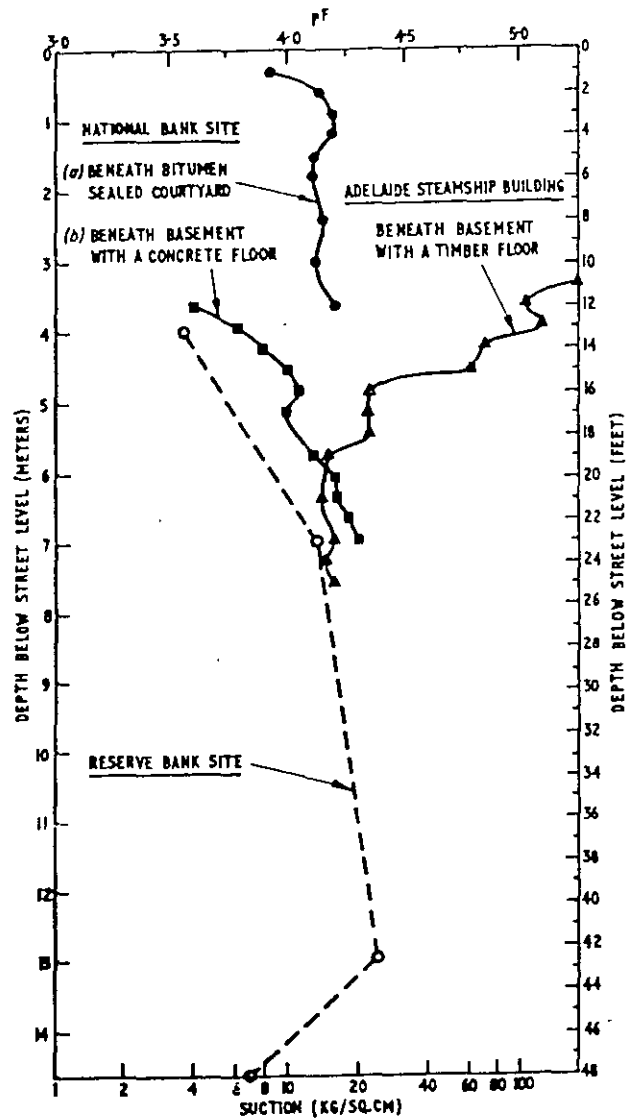
FIGURA 18



VARIACIÓN DE E_i CON S_r
FIGURA 19

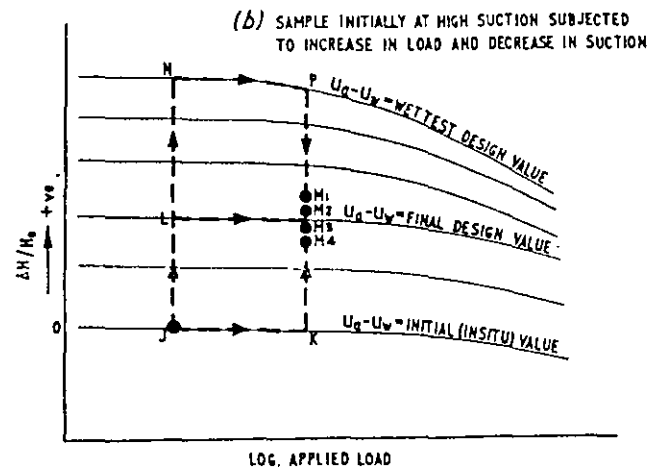
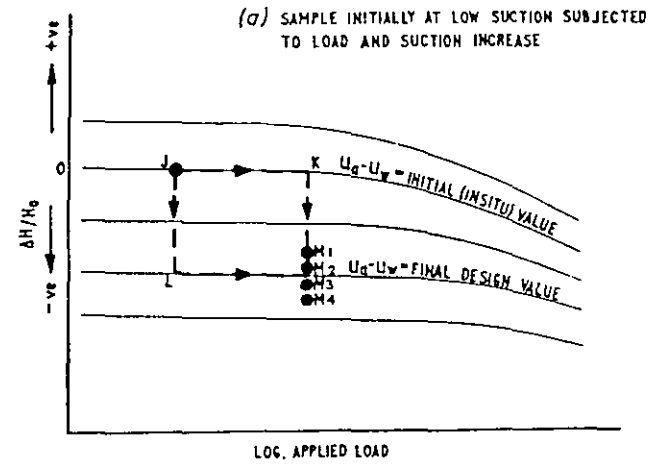


VARIACIÓN DE E_i CON
LA SUCCIÓN
FIGURA 20



Suction profiles in clay beneath major buildings in Adelaide, South Australia (Aitchison y Woodburn, 1969)

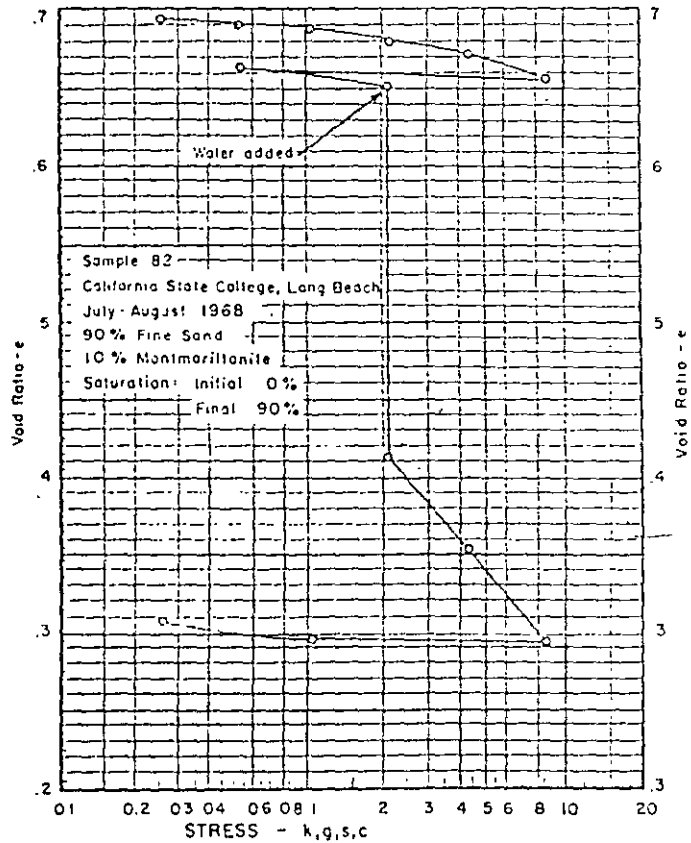
FIGURA 21



Typical stress paths for combinations of applied load and suction

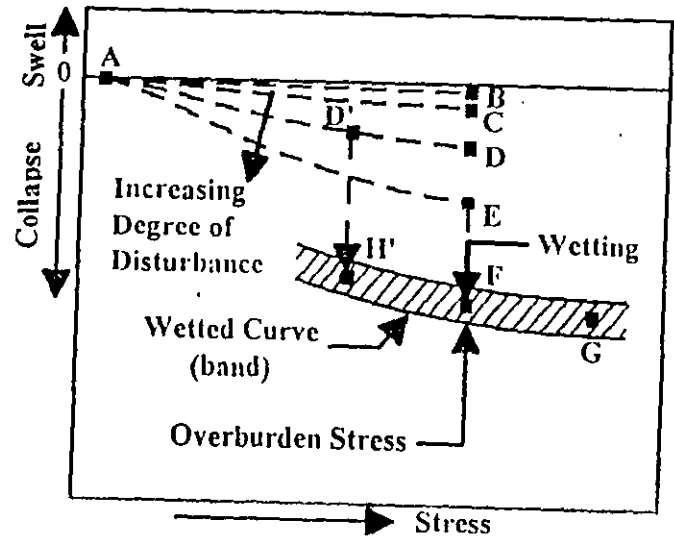
(Aitchison y Woodburn, 1969)

FIGURA 22



COLLAPSE IN A CONSOLIDATION TEST

FIGURA 25 (Dudley, 1970)



Schematic for Response-to-Wetting for a Collapsible Soil

(Houston y Houston, 1997)

FIGURA 26

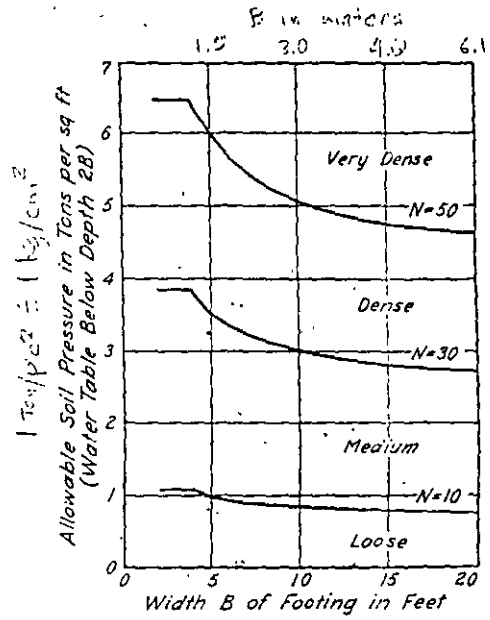


Chart for estimating allowable soil pressure for footings on sand on basis of results of standard penetration test

(Terzaghi & Peck, 1967)
 FIGURA 27

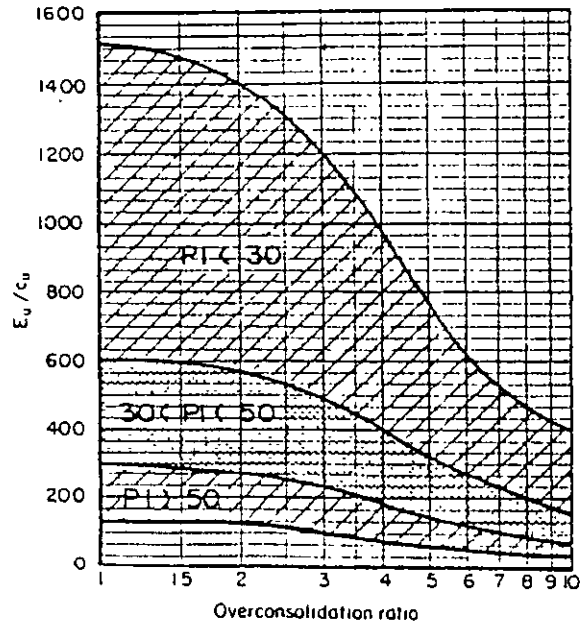
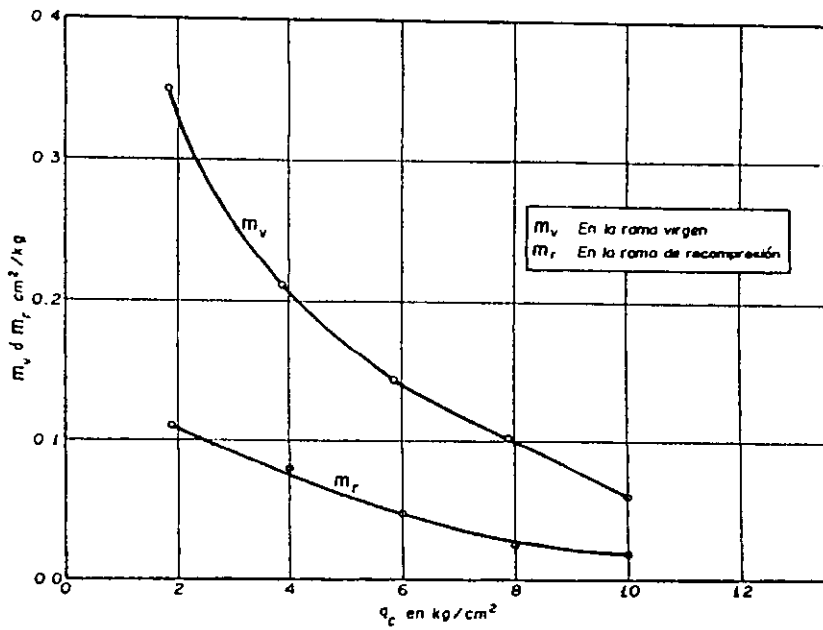


Chart for estimating the undrained modulus (from Duncan & Buchignani, 1976).

FIGURA 28



Curvas de correlación de la compresibilidad (Cuevas, 1988)

FIGURA 29



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

**MÓDULO III
CA:022 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE
CONCRETO REFORZADO**

TEMA:

**COMENTARIOS, AYUDAS DE DISEÑO Y EJEMPLOS
DE LAS NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS
PARA DISEÑOS Y CONSTRUCCIÓN DE
ESTRUCTURAS DE CONCRETO, DDF**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR GUZMÁN OLGUÍN
PALACIO DE MINERÍA
MAYO DEL 2003**

**COMENTARIOS,
AYUDAS DE DISEÑO Y EJEMPLOS
DE LAS NORMAS TÉCNICAS
COMPLEMENTARIAS PARA DISEÑO
Y CONSTRUCCIÓN DE
ESTRUCTURAS DE
CONCRETO, DDF**

COMENTARIOS

SANTIAGO LOERA*

CARLOS JAVIER MENDOZA*

***Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM**

PRESENTACIÓN

El 4 de julio de 1987, al día siguiente de su publicación en el Diario Oficial, entró en vigor una nueva versión del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Las disposiciones que contiene se agrupan en los siguientes títulos:

TÍTULO I	DISPOSICIONES GENERALES
TÍTULO II	VÍAS PÚBLICAS Y OTROS BIENES DE USO COMÚN
TÍTULO III	DIRECTORES RESPONSABLES DE OBRA Y CORRESPONSABLES
TÍTULO IV	LICENCIAS Y AUTORIZACIONES
TÍTULO V	PROYECTO ARQUITECTÓNICO
TÍTULO VI	SEGURIDAD ESTRUCTURAL DE LAS CONSTRUCCIONES
TÍTULO VII	CONSTRUCCIÓN
TÍTULO VIII	USO, OPERACIÓN Y MANTENIMIENTO
TÍTULO IX	AMPLIACIONES DE OBRA DE MEJORAMIENTO
TÍTULO X	DEMOLICIONES
TÍTULO XI	EXPLOTACIÓN DE YACIMIENTOS DE MATERIALES PÉTREOS
TÍTULO XII	MEDIDAS DE SEGURIDAD
TÍTULO XIII	VISITAS DE INSPECCIÓN, SANCIONES Y RECURSOS

Las disposiciones relativas a diseño estructural (Título VI) se refieren exclusivamente a aquellos requisitos aplicables a cualquier material y sistema estructural y a los criterios generales de diseño que se espera sean válidos por un lapso considerable. Este título incluye, además, disposiciones detalladas relativas a diseño por sismo y a diseño de cimentaciones, por ser temas de particular importancia en el Distrito Federal.

Las disposiciones relativas a materiales y sistemas particulares se estipulan en Normas Técnicas Complementarias, las cuales tienen la misma validez legal que el Reglamento pero pueden ser modificadas con mayor facilidad, ya que requieren un proceso de legalización más sencillo. En esta forma será factible incorporar con prontitud a las Normas los nuevos procedimientos de construcción o de diseño que vayan siendo aceptados.

En la Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, se publicaron las siguientes normas en las fechas indicadas:

- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructura de Concreto, 26 de noviembre de 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Metálicas, 3 de diciembre de 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería, 19 de noviembre 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Madera, 10 de diciembre de 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones, 12 de noviembre de 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, 5 de noviembre de 1987
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Viento, 29 de octubre de 1987

El Instituto de Ingeniería, UNAM, edita esta serie de publicaciones donde se presentan los comentarios al Título VI del Reglamento de 1987 y a sus Normas Técnicas Complementarias, que ayudan a interpretar y explicar la razón de ser de dichos documentos. Para algunas normas se incluyen ayudas de diseño formadas por tablas y gráficas, a fin de evitar repeticiones laboriosas en el uso rutinario de los procedimientos prescritos, y ejemplos, que ilustran la forma de aplicar tales procedimientos.

El material ha sido preparado por el personal técnico del Instituto de Ingeniería y de otras instituciones que intervino en la elaboración del Reglamento y de las Normas Técnicas.

Se considera que estas publicaciones resultarán útiles tanto para la práctica del diseño estructural como para la docencia en ese campo.

COMENTARIOS

1.	CONSIDERACIONES GENERALES	1
2.	REVISION DE LOS ESTADOS LIMITE	17
3.	REQUISITOS COMPLEMENTARIOS	27
4.	DISPOSICIONES COMPLEMENTARIAS PARA ELEMENTOS ESTRUCTURALES COMUNES	29
5.	MARCOS DUCTILES	35
6.	LOSAS PLANAS	59
7.	CONCRETO PRESFORZADO	79
8.	CONCRETO PREFABRICADO	85
9.	CONCRETO SIMPLE	87
10.	CONCRETO LIGERO	87
11.	CONSTRUCCION	89
	FIGURAS	95

AYUDAS DE DISEÑO

TABLAS

1.	CONSTANTES DE CALCULO	123
2.	DIAMETROS, PESOS Y AREAS DE BARRAS	124
3.	LONGITUDES DE DESARROLLO, L_d , DE BARRAS CORRUGADAS A TENSION, NO TORCIDAS EN FRIO	125

FIGURAS

1.	MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES ($f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$)	126
2.	MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES ($f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$)	127
3.	MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES ($f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$)	128

DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION

FIGS 4 a 11.	SECCIONES RECTANGULARES CON REFUERZO EN CARAS OPUESTAS	129
12 a 19.	SECCIONES RECTANGULARES CON REFUERZO DISTRIBUIDO EN LAS CUATRO CARAS	137
20 a 27.	SECCIONES CIRCULARES	145
FIG 28.	LOSAS. Separación de barras # 2.5 en lecho inferior, $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$	153
29.	LOSAS. Separación de barras # 2.5 en lecho superior, $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$	154
30.	LOSAS. Separación de barras # 3 en lecho inferior $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$	155
31.	LOSAS. Separación de barras # 3 en lecho superior $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$	156
32.	Cálculo del esfuerzo cortante máximo en una losa, en una conexión de orilla	157

EJEMPLOS

1.	CALCULO DE LAS DIMENSIONES Y DEL REFUERZO DE UNA SECCION RECTANGULAR, DADOS EL MOMENTO DE DISEÑO M_u Y LA RELACION d/b	161
2.	CALCULO DEL ACERO DE REFUERZO DE UNA VIGA RECTANGULAR, DADO EL MOMENTO DE DISEÑO Y LA SECCION TRANSVERSAL	165
3.	CALCULO DEL ACERO DE REFUERZO DE UNA VIGA RECTANGULAR DOBLEMENTE REFORZADA, CONOCIDA LA SECCION	169
4.	CALCULO DEL ACERO DE REFUERZO DE UNA VIGA "T"	175
5.	CORTE DE BARRAS Y REQUISITOS DE ANCLAJE EN UNA VIGA CONTINUA	179
6.	DIMENSIONAMIENTO POR FUERZA CORTANTE DE UNA VIGA CONTINUA (Viga del ejemplo 5)	185
7.	DIMENSIONAMIENTO POR FUERZA CORTANTE Y TORSION DE UNA VIGA DE ORILLA	191
8.	CALCULO DE LA DEFLEXION MAXIMA DE LA VIGA DEL EJEMPLO 5	199
9.	REVISION DEL AGRIETAMIENTO DE LA VIGA DEL EJEMPLO 5	207

10.	DIMENSIONAMIENTO DE UNA COLUMNA POR FLEXOCOMPRESION BAJO CARGAS MUERTA, VIVA, INSTANTANEA Y SISMO	211
11.	DISEÑO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA, BAJO CARGA UNIFORME	223
12.	CALCULO DEL ACERO DE REFUERZO DE UNA MENSULA, DADA SU GEOMETRIA	237
13.	DISEÑO DE UNA ZAPATA AISLADA	243
14.	DISEÑO DE UN MARCO DUCTIL	253
15.	DISEÑO DE UNA LOSA PLANA ALIGERADA	303
	RECONOCIMIENTO	341

1. CONSIDERACIONES GENERALES

1.1 Alcance

Estas normas deben entenderse como requisitos mínimos que, en el Distrito Federal, debe cumplir todo proyecto y construcción de concreto estructural en sus distintas modalidades.

1.2 Criterios de diseño

Respecto a los criterios de análisis, véanse los comentarios a la sección 1.3.

El procedimiento para dimensionar de acuerdo con el concepto de estado límite de falla es el conocido generalmente como dimensionamiento plástico, por resistencia última, o a la rotura. Al aplicarlo, se logra que el grado de seguridad de la estructura contra la falla quede en un nivel que se juzga aceptable. Con la revisión de los estados límite de servicio, se trata de lograr que el funcionamiento de la estructura en las condiciones en que da servicio sea satisfactorio. En estructuras de concreto, esta revisión incluye deformaciones, agrietamiento y, en algunos casos, vibraciones.

Se supone que, entre otras razones, la energía que durante un sismo disipe por comportamiento inelástico una estructura que cumpla con los requisitos generales de las Normas permite disminuir a la mitad ($Q = 2$) los valores de los coeficientes sísmicos dados en el cap VI del Reglamento. En particular, a estructuras diseñadas según el cap 5 de estas Normas se les ha asignado un factor Q de 4. Estos valores son resultado de opiniones del personal técnico encargado de la elaboración de los reglamentos, basadas en comparaciones con valores usados en estructuras que se juzga han tenido comportamiento satisfactorio. Los valores de Q especificados no tienen justificación teórica, salvo para estructuras ideales muy sencillas.

1.3 *Análisis*

1.3.1 Aspectos generales

Normalmente, es aceptable realizar el análisis de la estructura usando dimensiones entre ejes, es decir, sin tomar en cuenta las dimensiones transversales de vigas y columnas, y efectuando el dimensionamiento con los momentos y fuerzas internas que actúan en los paños de los elementos. Sin embargo, se recomienda que para dimensionar las columnas se usen los momentos que resulten directamente del análisis en lugar de los que actúan en las secciones extremas. Evidentemente serían preferibles los análisis que toman en cuenta las dimensiones transversales de los elementos (ref 1.1). Si el análisis se realiza con dimensiones entre ejes, debe tenerse presente que las deformaciones laterales que resulten serán mayores que las obtenidas por procedimientos más precisos, lo cual quiere decir que si una estructura analizada entre ejes rebasa el límite correspondiente para su deformación lateral, quizá se justifique repetir el análisis tomando en cuenta las dimensiones transversales de sus elementos.

El primer requisito mencionado para poder aplicar análisis límite tiende a garantizar que las articulaciones plásticas iniciales tengan suficiente capacidad de giro para mantener el momento plástico sin romperse, en

tanto van apareciendo las articulaciones restantes necesarias para formar el mecanismo de falla; esto se torna más difícil de lograr si las acciones son cíclicas, como las causadas por los sismos, debido al deterioro que ocurre de un ciclo a otro. El segundo requisito se refiere a que la estructura puede perder demasiada rigidez lateral y volverse inestable antes que se alcance a formar el mecanismo de falla supuesto en el análisis. Las circunstancias anteriores hacen que el análisis al límite solo se recomiende para losas apoyadas en su perímetro y vigas continuas, sujetas a cargas estáticas.

Debido al efecto de la carga axial, la capacidad de giro de una articulación plástica que aparezca en una columna es en general considerablemente menor que la de una que se forme en una viga. En las losas planas la capacidad de giro está limitada por la posible falla de la losa por cortante y torsión alrededor de las columnas. Por las razones anteriores, en columnas y losas planas es menor el monto de la redistribución admisible de momentos.

1.3.2 Efectos de esbeltez

Los efectos de esbeltez pueden definirse como los momentos, adicionales a los obtenidos de un análisis convencional, causados por las cargas verticales al actuar sobre la estructura deformada. En esta parte hay varios cambios con respecto a las Normas de 1977; los principales son los siguientes:

a) Se adoptó el criterio del Reglamento ACI 318-83 (refs 1.2 y 1.3) en el sentido de usar un factor de amplificación para los momentos causados por cargas que no originan desplazamientos laterales significativos, y otro factor para los momentos que provienen de cargas que sí causan movimientos laterales importantes; b) se suprimió uno de los procedimientos aproximados que se incluían y se conservó el que está basado en la ref 1.4, debido a que éste permite tomar en cuenta el factor de comportamiento sísmico, Q , y porque usa los valores de las rigideces de entrepiso, R , que normalmente ya se calcularon en una etapa anterior del

diseño.

a) Conceptos preliminares

En edificios esbeltos, para calcular las rigideces de entrepiso a que se hace referencia, deben incluirse las deformaciones laterales debidas a la flexión general de la estructura. La flexión general se toma en cuenta incluyendo en el análisis las deformaciones axiales de las columnas. Como guía, en edificios con relación altura-base no mayor de 2.0, pueden ignorarse los efectos de la flexión general; en muros anchos cuya relación altura total-ancho no exceda de 0.5, puede admitirse calcular la rigidez lateral tomando en cuenta sólo las deformaciones debidas a fuerza cortante; si la relación altura total-ancho del muro es mayor que 1.0 es necesario tomar en cuenta también las deformaciones por flexión. Si el análisis se realizó mediante un procedimiento que suministre los desplazamientos laterales de cada nivel (p ej el progr SUPERETABS, ref 1.1), las rigideces de entrepiso y las particulares de muros o crujiás contraventeadas pueden calcularse dividiendo la fuerza cortante que actúa en el entrepiso, o en el muro o contraviento, entre la diferencia de desplazamientos laterales de los niveles que limitan el entrepiso. El límite de 85 por ciento que se da en el texto está tomado de la ref 1.3.

Las fórmulas del procedimiento prescrito en 1.3.2d) están obtenidas a partir del concepto de columnas doblemente articuladas, de aquí la necesidad de usar el artificio de longitud efectiva. Los nomogramas de las figs 1a y 1b se deben a Jackson y Moreland (ref 1.3) y son el medio normal que recomienda el AISC para valuar longitudes efectivas en columnas de acero (ref 1.5); se aplican a marcos de vigas y columnas de sección constante. El Comité ACI 441 propuso su empleo para columnas de concreto con atención a la influencia que sobre las rigideces de los miembros que concurren al nudo tienen el agrietamiento y la cuantía de refuerzo. Al respecto, para tomar en cuenta que generalmente el agrietamiento de las vigas es mayor que el de las columnas, en marcos comunes pueden calcularse las rigideces I/L de vigas y columnas con la mitad y

la totalidad del momento de inercia de la sección bruta, respectivamente. Si la losa es monolítica con la viga, debe suponerse sección T e incluir los patines.

En columnas de estructuras no restringidas lateralmente sujetas sólo a cargas verticales que no produzcan desplazamiento lateral apreciable, y en las que, además, la configuración de pandeo no implique desplazamiento lateral, la longitud efectiva, H' , se puede calcular suponiendo que los extremos están restringidos lateralmente. Como ejemplo, se tienen las columnas de un marco simétrico ordinario, sujeto a cargas simétricas provenientes de losas; al contrario, si en dicho marco por alguna razón existen altas cargas concentradas en las columnas, que puedan dar lugar a una configuración lateral de pandeo, las longitudes efectivas deben valuarse suponiendo que los extremos no están restringidos.

b) Miembros en los que pueden despreciarse los efectos de esbeltez

Los límites indicados corresponden a columnas en las que los momentos adicionales por esbeltez no representan más de 9 por ciento de incremento, aproximadamente. En particular, el criterio que se aplica en cuanto al desplazamiento de entrepiso se obtiene igualando a 0.09 el segundo término del segundo miembro de la ec 1.6. El llamado desplazamiento de entrepiso es la diferencia de desplazamientos laterales entre los dos niveles que limitan al entrepiso donde se encuentra la columna por diseñar; consta de la deformación lateral causada por la fuerza cortante que actúa en ese entrepiso y del desplazamiento lateral relativo causado por la flexión general de la estructura y el giro de la base. Normalmente el desplazamiento lateral causado por la flexión general y el giro de la base puede ignorarse si la relación altura-base del edificio no excede de 2. La deformación lateral de entrepiso causada por la fuerza cortante se obtiene multiplicando por el factor de comportamiento sísmico, Q , la obtenida del análisis elástico bajo acciones sísmicas reducidas, sin factor de carga.

Cuando al diseñar se limitan las deformaciones laterales de entrepiso debidas a fuerza cortante a $0.006h$ (art 209 del Reglamento), y la flexión general del edificio y el giro de su base son despreciables, como ocurre en las estructuras no esbeltas, los efectos de esbeltez por movimiento lateral pueden despreciarse si $V/W_u \geq 0.075$ (ya que $0.08 V/W_u = 0.006$ si $V/W_u = 0.075$). Cuando las deformaciones mencionadas se limitan a $0.012h$, y el edificio no es esbelto, los efectos de esbeltez pueden despreciarse si $V/W_u \geq 0.15$. Si el edificio es esbelto debe revisarse según 1.3.2b) la necesidad de incluir los efectos de esbeltez, aunque se hayan limitado las deformaciones laterales a $0.006h$ ó $0.012h$.

En secciones rectangulares, el radio de giro, r , puede tomarse igual a 0.30 por la dimensión de la sección en la dirección considerada, y en secciones circulares igual a 0.25 por el diámetro. Para otras secciones, r se calcula a partir de la sección total de concreto.

c) Limitación para H'/r

El límite 100 representa el orden de magnitud de los valores máximos de H'/r que se han usado en ensayos de miembros esbeltos que forman parte de marcos.

d) Momentos de diseño

El procedimiento para tomar en cuenta los efectos de esbeltez está basado esencialmente en el Reglamento ACI 318-83 (ref 1.2) y en la ref 1.4. Se funda en el concepto de factores de amplificación que multiplican a los momentos obtenidos con un análisis convencional. La idea es la misma que se ha aplicado para dimensionar columnas esbeltas de acero según el AISC (ref 1.5), lo que está de acuerdo con el hecho de que los efectos de esbeltez tienen el mismo significado independientemente del material de que se trate, esto es, la aparición de momentos flexionantes adicionales originados por la deformación de la estructura.

El momento amplificado por esbeltez, M_c , consta de dos partes; la primera está formada por el momento causado por cargas que no provocan desplazamiento lateral apreciable, multiplicado por el factor de amplificación F_{ab} ; la segunda, por el momento causado por cargas que sí originan movimiento lateral apreciable, multiplicado por el factor F_{as} . Estos momentos se han designado M_{2b} y M_{2s} respectivamente y se encuentran definidos en el texto de las Normas. Las fuerzas longitudinales en las columnas, provenientes de cargas que no causan movimiento lateral importante, tienen excentricidades accidentales; por esta razón, en las Normas se pide que los momentos asociados a ellas (M_{2b}) no sean menores que los que resulten de aplicar la excentricidad mínima. En vista de que dicha excentricidad mínima de las cargas verticales subsiste cuando actúa el sismo, debe comprobarse que M_{2b} no sea menor que el momento proveniente de la carga vertical y de la excentricidad mínima al revisar la condición de cargas verticales y sismo o viento; por otro lado, al realizar esta revisión debe comprobarse que el momento total M_c sea igual o mayor que el que resulte de la fuerza axial por cargas verticales más sismo y la excentricidad mínima.

Para decidir cuándo las cargas verticales causan un desplazamiento lateral apreciable y, por tanto, multiplicar por F_{as} los momentos que ellas provocan, puede aplicarse el criterio que señala la ref 1.3; esto es, suponer que el desplazamiento lateral es apreciable si $\Delta > H/1500$. El desplazamiento Δ es el causado sólo por las cargas verticales.

El factor de amplificación F_{ab} toma en cuenta los momentos de segundo orden originados por la deformación de la columna a todo su largo, sin que haya movimiento lateral relativo entre sus extremos. El factor F_{as} toma en cuenta los momentos de segundo orden causados por el desplazamiento lateral relativo de los extremos de la columna.

En rigor, los momentos amplificados $F_{ab} M_{2b}$ y $F_{as} M_{2s}$ no ocurren en la misma sección ($F_{ab} M_{2b}$ se presenta a una cierta altura de la columna y $F_{as} M_{2s}$, en un extremo). Sin embargo, por sencillez y en forma

conservadora, M_{2b} se toma igual al momento en el extremo y se aplica la ec 1.1, tomando en cuenta que el momento máximo real amplificado no puede exceder de la suma indicada por dicha expresión. Los momentos M_b y M_s se toman en un mismo extremo de la columna. Se debe diseñar para el extremo más desfavorable, que normalmente es en el que actúan los momentos mayores. Otra posible condición desfavorable se tiene cuando la fuerza axial en la columna disminuye por efecto del sismo y la falla es en la zona de tensión. Si las dimensiones de la sección transversal ya están definidas, como sucede generalmente, la condición más desfavorable es la que conduce a una mayor cuantía de refuerzo.

En una estructura no restringida lateralmente, en general los momentos F_{ab} M_{2b} son significativos sólo cuando el movimiento lateral relativo de los extremos de la columna es pequeño (fig 1.1a). Si el movimiento lateral relativo de los extremos es grande (fig 1.1b), los momentos F_{ab} M_{2b} pierden importancia comparados con los causados por las fuerzas horizontales F_{as} M_s . Lo anterior quiere decir que, en estructuras sin restricción lateral, el término F_{ab} M_{2b} usualmente tiene importancia sólo cuando se revisa bajo carga muerta y viva. En la revisión bajo cargas muerta, viva y sismo, el término F_{ab} M_{2b} puede ser importante en columnas que por alguna razón sean más esbeltas que las restantes del entrepiso o que tengan más carga que éstas, o estén en ambas situaciones; si todas las columnas del entrepiso tienen esbeltez efectiva y carga del mismo orden, en esta revisión los momentos importantes son los F_{as} M_s .

Al revisar si pueden despreciarse los efectos de esbeltez causados por las deformaciones debidas a las fuerzas verticales en estructuras no restringidas lateralmente sujetas sólo a fuerzas verticales, o a verticales y horizontales, si las fuerzas verticales solas no causan desplazamiento lateral apreciable, y, además, el pandeo que puedan provocar ocurre sin desplazamiento lateral, las longitudes efectivas de las columnas deben calcularse suponiendo que los extremos están restringidos lateralmente (fig 1.1a de las Normas). Cuando las cargas verticales solas sí causan desplazamiento lateral apreciable, o el pandeo que originarían ocurre con desplazamiento lateral, las longitudes efectivas deben valuarse suponiendo

que los extremos no están restringidos lateralmente (fig 1.1b de las Normas). De hecho, la mencionada figura 1.1b sólo se usa cuando se investiga si pueden ignorarse los efectos de esbeltez debidos a fuerzas verticales que sí causan desplazamiento lateral apreciable, o el pandeo que provocaran implique desplazamiento lateral (al comparar H'/r con 22). El factor F_{ab} se calcula suponiendo que los extremos de la columna están restringidos lateralmente, aunque sí haya movimiento lateral relativo entre ellos, porque sólo toma en cuenta el efecto de la curvatura con relación a la recta que une los extremos de la columna.

En el primer procedimiento optativo de las Normas Técnicas de 1977, al igual que en el Reglamento ACI-1977, se usaba un solo factor de amplificación, F_a , que se aplicaba al mayor de los momentos, M_2 , que actúan en los extremos de la columna. En M_2 estaban incluidos los momentos causados por cargas verticales y los causados por fuerzas horizontales. En realidad, atendiendo a la forma como están obtenidos los factores de amplificación, no es correcto afectar los momentos causados por las cargas verticales por el mismo factor que afecta a los momentos causados por fuerzas horizontales. El factor F_{as} (ec 1.6) toma en cuenta el incremento en los momentos de los extremos de las columnas de un entrepiso causado por un desplazamiento lateral relativo entre los niveles que limitan el entrepiso; se obtiene de considerar el equilibrio de las columnas de un entrepiso. Si no hubiera deformación lateral causada por las cargas, la suma de los momentos en los extremos de las columnas sería igual al producto Vh . A causa de un desplazamiento lateral del entrepiso, Δ , la suma de esos momentos es:

$$\sum M = Vh + W\Delta$$

que puede escribirse como sigue (ref 1.4):

$$\sum M = F_{as} Vh$$

Es decir, F_{as} solo debe afectar a los momentos asociados a la fuerza cortante V . Afectar por F_{as} los momentos causados por cargas verticales que no causan desplazamiento lateral apreciable resulta innecesariamente conservador.

El criterio de aplicar F_{as} a los momentos causados por cargas verticales que sí originan movimientos laterales apreciables es sólo una forma aproximada de proceder que no tiene justificación teórica, pero que se considera

aceptable. En la ref 1.4 se dice cómo tratar este caso en forma más precisa.

El factor de amplificación, F_{ab} , para momentos causados por fuerzas que no provocan desplazamiento lateral apreciable toma en cuenta los momentos adicionales causados por las deformaciones transversales de la columna en toda su altura, estando fijos lateralmente sus extremos. Su obtención se basa en las ideas siguientes:

En una viga-columna sujeta a una carga axial, $P < P_c$, y a un momento flexionante constante, M_o , la flecha en una sección se obtiene aproximadamente con la expresión (ref 1.6):

$$Y = Y_o \frac{1}{1-P/P_c}$$

donde Y_o es la flecha que habría si no actuara la carga P . El momento flexionante resulta ser

$$M = M_o + PY_o \frac{1}{1-P/P_c}$$

expresión que, con algunas simplificaciones, se transforma en la siguiente (ref 1.6):

$$M = \frac{1}{1-P/P_c} M_o$$

El coeficiente de M_o de esta expresión es el factor de amplificación que sirve de base a la ec 1.2.

La cantidad C_m es un factor correctivo menor que 1.0 que se aplica cuando el momento de primer orden no es constante a lo largo de la columna, es decir cuando los momentos máximos de primer y de segundo orden no ocurren en la misma sección, como sucede en columnas con extremos restringidos lateralmente cuando M_1 y M_2 no son de igual magnitud y, sobre todo,

cuando la pieza se deforma con curvatura doble. Esto último se refleja con el signo de $0.4 M_1/M_2$ que debe ser negativo cuando la curvatura es doble y positivo en caso contrario. Para calcular C_m , se aplica lo dicho en el primer párrafo de 1.3.2.b acerca de M_1 , M_2 y M_1/M_2 .

Para valuar la carga crítica, P_c , con la ec 1.4, se usa una rigidez modificada EI (ec 1.5) que es una fracción de la rigidez de la sección total no agrietada ($E_c I_g$). El factor 0.4 toma en cuenta, aproximadamente, la no elasticidad del concreto y el agrietamiento. El factor $1/(1 + u)$ toma en cuenta el efecto de las deformaciones diferidas debidas al flujo plástico del material; interviene en el cálculo de F_{ab} , pero no en el de F_{as} . La cantidad u es el cociente entre el máximo momento de diseño por carga muerta y el máximo momento de diseño debido a carga muerta más carga viva (tómese en cuenta que en este último no se incluye el efecto del sismo ni del viento). La ec 1.5 es demasiado conservadora cuando la cuantía de refuerzo es grande (del orden de 0.03 ó más). En estos casos se puede tomar en cuenta la contribución del refuerzo con la expresión siguiente:

$$EI = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_s}{1 + u}$$

donde I_s es el momento de inercia del refuerzo con respecto al eje centroidal de la sección, y E_s , el módulo de elasticidad del acero.

Al calcular la rigidez de entrepiso, R , que interviene en la fórmula de F_{as} (ec 1.6), deben incluirse los efectos de la flexión general cuando ésta sea significativa (véanse los comentarios al inciso a) Conceptos preliminares, de esta sección).

En el factor F_{as} , la rigidez de entrepiso se encuentra dividida entre Q . Inicialmente se supuso que el factor de comportamiento sísmico Q es igual al factor de ductilidad x_u/x_y . En estas condiciones, el motivo de que se divida entre Q es el siguiente: si se requiere diseñar una estructura elastoplástica para que resista una fuerza lateral V_u (fig 1.2), el momento

resistente en la base debe ser $V_u h + W_u x_u$; pero esto según la figura equivale a tratar una estructura ficticia elástica de rigidez R/Q .

En realidad, el factor de comportamiento sísmico Q no es igual al factor de ductilidad; sin embargo, se ha conservado el cociente R/Q , pero más bien para involucrar en él aproximadamente los efectos del comportamiento inelástico, sin que se pretenda que esté plenamente justificado el proceder. Se juzga que es razonablemente conservador en la mayor parte de los casos.

El factor de comportamiento sísmico, Q , resulta igual al factor de ductilidad solo en el caso de estructuras ideales elastoplásticas sujetas a sismos de espectro de banda ancha, es decir que no tengan periodo dominante definido. Las estructuras reales no son elastoplásticas y los movimientos del terreno en la zona blanda del Distrito Federal durante sismos intensos sí tienen periodo dominante bien definido.

1. Materiales

1.4.1 Concreto

La inclusión de dos clases de concreto en las Normas es uno de los cambios principales con relación a las Normas de 1977. El concreto clase 2 de hecho es el fabricado con los agregados andesíticos tradicionales del Valle de México. El concreto clase 1 es más denso, más rígido, y con menor deformación diferida y menor contracción que el concreto clase 2; principalmente se fabricará con agregados calizos traídos de fuera del Valle. Se pretende que el de clase 1 se use en las estructuras de importancia especial, ya sea por su función o por su tamaño.

Una razón que motivó la busca de nuevos agregados fue el hecho de que la calidad de los agregados andesíticos es cada vez peor, a causa de que los bancos de agregados de buena calidad se van agotando.

Las Normas promueven que las estructuras, en especial las del grupo A o B1 según se describen en el art 174 del Reglamento (ref 1.7), se construyan con concreto 1; sin embargo, dejan en libertad a los responsables de la obra para que puedan optar por el de clase 2, si a su criterio y bajo su responsabilidad consideran que conviene usarlo para alguna obra de las mencionadas. En efecto, puede ocurrir que por alguna razón sea muy difícil conseguir el agregado denso para el concreto de clase 1 y los responsables encuentren que el agregado andesítico disponible puede dar lugar a una estructura satisfactoria. Deberán evaluar las propiedades del concreto clase 2 que deseen usar y con ellas justificar en la memoria de cálculo que la estructura se comportará satisfactoriamente; en particular, que se obtendrá la resistencia, durabilidad y rigidez necesarias. En el diseño deberán incluir los efectos de la mayor deformabilidad y mayor contracción del concreto.

El valor nominal, f_c^* , representa una resistencia tal que la probabilidad de que la resistencia del concreto en la estructura sea menor que f_c^* es aproximadamente de 2 por ciento. El percentil 2 corresponde al planteamiento general de los niveles de seguridad adoptados en el Reglamento (ref 1.7). Por otra parte, en f_c^* está incluida la tendencia observada (ref 1.8) en el sentido de que la resistencia del concreto en la estructura es menor que la obtenida en los cilindros de control. Esta disminución es un efecto normal de las operaciones de colocación (transporte hasta los moldes, compactación, etc), así como de la menor eficacia que normalmente tiene el curado del concreto en la estructura con relación al curado de los cilindros.

1.4.2 Acero

Los títulos de las Normas citadas son los siguientes:

NOM B6 Varillas corrugadas y lisas de acero, procedentes de lingote o palanquilla, para refuerzo de concreto

- NOM B294 Varillas corrugadas de acero, torcidas en frío, procedentes de lingote o palanquilla, para refuerzo de concreto
- NOM B457 Varillas corrugadas de acero de baja aleación, procedentes de lingote o palanquilla, para refuerzo de concreto
- NOM B290 Malla soldada de alambre de acero, para refuerzo de concreto
- NOM B293 Alambre sin recubrimiento, relevado de esfuerzos, para usarse en concreto presforzado
- NOM B292 Torón de siete alambres sin recubrimiento, relevado de esfuerzos, para concreto presforzado
- NOM B18 Varillas corrugadas y lisas de acero, procedentes de riel, para refuerzo de concreto
- NOM B32 Varillas corrugadas y lisas de acero, procedentes de eje, para refuerzo de concreto
- NOM B72 Alambre corrugado de acero, laminado en frío, para refuerzo de concreto

1.5 Dimensiones de diseño

Las reducciones estipuladas toman en cuenta variaciones desfavorables en la colocación del refuerzo, y en las dimensiones y colocación de los moldes. Estas variaciones afectan principalmente la resistencia de elementos de sección pequeña.

1.6 Factores de resistencia

Los factores de resistencia y los factores de carga, junto con los valores medios y dispersiones de las acciones internas y de las resistencias correspondientes de los elementos, definen una cierta probabilidad de falla del elemento con relación a la acción interna considerada

(ref 1.9). Con los factores de carga se toma en cuenta principalmente la variabilidad de las cargas, las incertidumbres en el análisis estructural y la importancia de la estructura. Con los factores de resistencia se toma en cuenta: a) la dispersión en las resistencias reales con relación a la predicha por las fórmulas, p. ej. las resistencias de flexión tienen una dispersión menor que las resistencias a fuerza cortante; b) el grado de seguridad involucrado en cada fórmula, es decir hay fórmulas que dan valores medios de la resistencia y hay otras que dan envolventes inferiores; c) el tipo de falla que puede producirse; así, una falla por flexión es más bien dúctil y una por fuerza cortante es frágil; d) las consecuencias de la falla, p. ej. la falla de una columna generalmente es de más consecuencia que la de una losa o una viga.

En general, se busca que la probabilidad de falla sea menor en estructuras de importancia especial, en formas de falla frágil, y en elementos cuya falla implica la falla de otros.

REFERENCIAS

- 1.1 Maison, B F y Neuss, C F, "SUPER-ETABS", An enhanced version of the ETABS Program, J G BOUWKAMP, INC. Berkeley, California (ene 1983)
- 1.2 Comité ACI 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete" American Concrete Institute, Detroit (1983)
- 1.3 Comité ACI 318, "Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)", American Concrete Institute, Detroit (1983)
- 1.4 Rosenblueth, E, "Efectos de esbeltez en edificios", Revista Ingeniería, Vol XXXV N° 1, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D F (ene 1965)

- 1.5 "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", American Institute of Steel Construction, Nueva York (1969)
- 1.6 Timoshenko, S P y Gere, J M, "Theory of Elastic Stability", 2a Ed, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, Nueva York (1961)
- 1.7 Departamento del Distrito Federal, "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Diario Oficial de la Federación, 3 de julio de 1987, México, D F
- 1.8 Bloem, D L, "Concrete Strength in Structures", ACI Journal (mar 1968)
- 1.9 Meli, R, "Bases para los criterios de diseño estructural del proyecto de Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Informe 375 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México D F (1976).

2. REVISION DE LOS ESTADOS LIMITE

2.1 *Estados límite de falla*

2.1.1 Hipótesis para la obtención de resistencias de diseño

En la fig 2.1 se ilustra el significado de la hipótesis y la aplicación de las condiciones de equilibrio. Las hipótesis son aplicables a secciones de cualquier forma. A diferencia del Reglamento ACI 318, se hace disminuir el esfuerzo medio de compresión del bloque de esfuerzos como función de f'_c , en lugar de su profundidad. Desde el Reglamento DDF de 1966 (ref 2.1) se adoptó este criterio, porque permite construir juegos de curvas de interacción que no dependen de f'_c para dimensionamiento de columnas (ref 2.2), y conduce a resultados muy semejantes a los obtenidos con el del ACI.

2.1.2 Flexión

a) Refuerzo mínimo

El objeto del refuerzo mínimo es evitar la falla súbita que se produciría al agrietarse el miembro. En efecto, si la resistencia a flexión

de la sección agrietada es menor que la resistencia de la sección no agrietada, el momento flexionante que agriete al miembro lo hará fallar. Contra esta eventualidad se adoptó un margen de seguridad de 1.5. La fórmula 2.1 se obtiene aplicando el criterio indicado a una sección de ancho b y peralte h .

b) Refuerzo máximo

Al limitar la cantidad de refuerzo de tensión, se logra que el elemento tenga comportamiento dúctil, es decir que sea capaz de disipar cierta energía antes de romperse. Esta cualidad es particularmente deseable en elementos que deban resistir sismos, de allí que en ellos el refuerzo de tensión se limite al 75 por ciento del que corresponde a la falla balanceada. Las hipótesis para calcular resistencias a flexión y, por tanto, el concepto de falla balanceada no son en rigor aplicables a un elemento que ha sufrido varios ciclos de deformaciones inelásticas, como ocurre bajo un sismo intenso; sin embargo, la cuantía de refuerzo de tensión continúa siendo un índice de la fragilidad de la viga.

En la fig 2.2 se muestran las condiciones que corresponden a la falla balanceada de una sección. Cuando no hay acero de compresión, se llega a la ec 2.2 a partir de dichas condiciones y del equilibrio.

c) Secciones L y T

El refuerzo prescrito es para evitar fallas por esfuerzos cortantes y tensiones normales en los planos de los paños del alma en que los patines se unen a ésta (ref 2.3).

d) Fórmulas para calcular resistencias

Las fórmulas están obtenidas a partir de las condiciones de equilibrio y de las hipótesis de 2.1.1.

e) Resistencia a flexión de vigas diagrama

El conjunto de hipótesis de 2.1.1 para calcular resistencias a flexión deja de ser aplicable cuando la relación entre el peralte y el claro es grande. Por otro lado, reforzar una viga diafragma concentrando el refuerzo por flexión cerca de la cara de tensión como si fuera una viga ordinaria, aunque podría dar la resistencia requerida a flexión, en condiciones de servicio provocaría agrietamientos excesivos en zonas más alejadas del borde de tensión, debido a que en ellas se presentan los esfuerzos máximos de tensión antes que la viga se agriete (ref 2.4). Por esto es la necesidad de distribuir el refuerzo como se indica en 4.1.4 y el tener que valuar el brazo del par resistente con expresiones que dependen de la relación L/h . Los procedimientos para el cálculo de vigas diafragma por flexión están basados en la ref 2.4 con algunas modificaciones.

2.1.3 Flexocompresión

En interés de la sencillez en los cálculos, se suprimió el concepto de excentricidad accidental (sólo se mantuvo como excentricidad mínima). En cierta medida, el haber suprimido la excentricidad accidental se compensa con la reducción que se introdujo en los factores de resistencia, F_R , para flexocompresión. Desde el punto de vista del concepto, es preferible tomar en cuenta los momentos no previstos mediante la excentricidad accidental a considerarlos con los factores de resistencia; pero se juzgó que la simplificación que se logra en los cálculos al dimensionar justificaba la medida adoptada.

La fórmula 2.15 es la de B Bresler (ref 2.5)

2.1.4 Aplastamiento

Este inciso se refiere a esfuerzos de aplastamiento sobre concreto que no tiene refuerzo transversal que restrinja las deformaciones normales a la dirección de los esfuerzos. No se aplica a zonas de anclaje de elementos postensados porque éstas sí están reforzadas transversalmente.

2.1.5 Fuerza cortante

a) Fuerza cortante que toma el concreto, V_{CR}

Las reducciones en V_{CR} que se prescriben para vigas de más de 70 cm de peralte y/o relación h/b mayor que 6, tienen como antecedentes los ensayos que sobre el efecto del tamaño de la sección se citan en la ref 2.3 La tendencia de los resultados de dichos ensayos indica que V_{CR} disminuye al aumentar el tamaño y la relación peralte-ancho. Ahora los valores prescritos son más conservadores que en las Normas anteriores, a causa del frecuente agrietamiento diagonal observado en vigas grandes.

I Vigas sin presfuerzo

Diversos estudios posteriores al Reglamento de 1966 han demostrado la necesidad de hacer depender la fuerza cortante que toma el concreto de la cuantía de acero longitudinal de tensión en forma más directa que como entonces se hacía. Este criterio ha sido adoptado también por otros reglamentos (refs 2.6, 2.7).

Lo que en una viga con refuerzo transversal se llama "contribución del concreto", V_{CR} , consta en realidad del componente vertical de la fuerza que actúa en el concreto arriba de la grieta, de la fricción que se genera en ésta entre las superficies de concreto en contacto, y de la fuerza cortante que toma el propio refuerzo longitudinal. Si disminuye la cuantía de refuerzo longitudinal, disminuye la fuerza cortante que toma dicho refuerzo y, por otra parte, la grieta diagonal se hace más larga y ancha, con lo que se reduce la capacidad de la zona de compresión y disminuye la fricción a lo largo de la grieta. El factor (3.5-2.5 M/Vd) toma en cuenta que las condiciones de equilibrio de una viga después del agrietamiento diagonal mejoran conforme disminuye la relación claro de cortante a peralte.

II. Elementos anchos

El ancho de un elemento tiene un efecto favorable sobre su resistencia a fuerza cortante. Esta particularidad se hizo intervenir en las nuevas normas, de manera que el diseño por cortante de elementos anchos, como zapatas y muros, es algo menos conservador que según las Normas de 1976, con las que se diseñaban como si fueran vigas. Las disposiciones actuales tienen como antecedente la ref 2.8. Se debe tener presente la necesidad de que el refuerzo para flexión cuente con el anclaje adecuado, de acuerdo con lo que se establece en las Normas.

III. Miembros sujetos a flexión y carga axial

Las expresiones de este inciso están basadas en las refs 1.2 y 1.3. Toman en cuenta que la resistencia a tensión diagonal aumenta o disminuye según que el miembro esté sujeto a compresiones o tensiones axiales. El criterio para tratar columnas circulares proviene de la ref 2.9.

IV. Miembros de concreto presforzado

El criterio que se adoptó es la forma simplificada que especifica el Reglamento ACI 318. Si el presfuerzo es parcial, la viga se trata como si no fuera presforzada, lo cual es un criterio conservador que se considera razonablemente justificado.

b) Refuerzo por tensión diagonal en vigas y columnas sin presfuerzo

La fórmula para calcular el refuerzo transversal es la que se obtiene de la analogía de la armadura. Ahora se exige un refuerzo mínimo por tensión diagonal en las zonas críticas de todas las vigas, aunque no tengan que resistir sismos. El requisito de que V_u no exceda de $2 F_R bd \sqrt{f_c^*}$ tiene por objeto evitar que el miembro falle por compresión del concreto antes que fluya el acero del refuerzo en el alma. El coeficiente se redujo de 2.5 a 2, a fin de llegar a secciones de mayor tamaño cuando la fuerza cortante es grande. Una sección mayor, además de que dis-

minuye el riesgo de falla frágil por compresión, conduce a un mejor comportamiento en flexión ante acciones repetidas como las debidas a sismo, y, por otra parte, restringe el agrietamiento diagonal excesivo ante cargas estáticas, problema que solía presentarse en vigas que cumplían con el requisito.

c) Refuerzo por tensión diagonal en vigas presforzadas

Para vigas con presfuerzo total, en esencia el criterio prescrito es el del Reglamento ACI 318.

d) Proximidad a reacciones y cargas concentradas

La compresión transversal que la reacción induce en la zona de apoyo de la viga aumenta la capacidad a tensión diagonal de esa zona, de aquí que se admita dimensionar con la fuerza cortante que actúa a un peralte efectivo del paño del apoyo. Si la reacción no comprime la cara inferior del miembro como sucede, por ejemplo, en las vigas de un marco, el efecto favorable mencionado es dudoso, y en tales casos se recomienda dimensionar la zona extrema de la viga con la fuerza cortante que actúe en el paño de la columna. Aparentemente, debería admitirse diseñar con la fuerza cortante que actúa a un peralte del paño del apoyo sólo en el caso de extremos de vigas sobre apoyos libres; en estas condiciones no hay momento negativo y la grieta diagonal se forma a cierta distancia del paño del apoyo.

f) Interrupción y traslape del refuerzo longitudinal

El agrietamiento tiende a desarrollarse prematuramente donde se interrumpe parte del refuerzo longitudinal en zonas de tensión, con la consiguiente reducción en la capacidad a fuerza cortante. Las disposiciones de este inciso están dirigidas a controlar dichos efectos.

g) Fuerza cortante en vigas diafragma

El criterio general que se adoptó es el del Reglamento ACI 318.

h) Fuerza cortante en losas y zapatas

Una zapata o una losa plana puede fallar por tensión diagonal como si fuera una viga ancha, es decir, con agrietamiento inclinado en una sección que abarcaría todo el ancho, o bien la falla se puede presentar en torno de una columna o de una carga concentrada, de modo que el agrietamiento inclinado define superficies de conos o pirámides truncados. El objeto de los incisos I y II es revisar ambas posibles formas de falla.

En la fig 2.3 se ilustra la definición de sección crítica. La reducción de la sección crítica por efecto de aberturas próximas se ilustra en la ref 1.3.

El procedimiento para calcular el refuerzo por tensión diagonal se desarrolló a partir de las disposiciones del Reglamento ACI 318 y del método que en la ref 2.10 se aplica cuando no hay transferencia de momento entre columna y losa.

En los comentarios a la sección 6.5 de las Normas se trata algo más sobre este tema.

i) Resistencia a fuerza cortante por fricción

La fig 2.4 ilustra el concepto de resistencia a cortante por fricción. El criterio de dimensionamiento está basado en las refs 1.2 y 2.11.

2.1.6 Torsión

Las disposiciones no son aplicables a miembros demasiado cortos, porque en éstos el mecanismo de falla por torsión es distinto del supuesto en el desarrollo del procedimiento.

La idea de considerar dos casos en el diseño por torsión (miembros en los que su resistencia a torsión es o no necesaria directamente para el equilibrio de la estructura) está tomada de los reglamentos inglés y CEB

(refs 2.6 y 2.7)

Para miembros del primer tipo, se siguió el criterio europeo de suponer nula la contribución del concreto, T_{CR} . Un ejemplo típico de estos elementos es el de una viga que a lo largo de ella soporta una marquesina en voladizo.

El segundo caso se presenta en estructuras hiperestáticas donde la falta de resistencia a torsión de sus miembros no afecta directamente el equilibrio, el cual puede mantenerse por redistribución. Sin embargo, los momentos torsionantes remanentes pueden disminuir la resistencia a fuerza cortante, por lo que no es posible ignorar totalmente la torsión. La viga que se diseña en el ejemplo 7 ilustra este caso.

El criterio para valuar la rigidez torsional es el del reglamento inglés, que toma en cuenta el agrietamiento disminuyendo a la mitad la rigidez torsional elástica de la sección completa.

El resto de las disposiciones es una simplificación del criterio ACI 318-71.

El valor de T_{OR} dado por la ec 2.31 es la resistencia a torsión de una sección sin refuerzo; T_{CR} representa el nivel al que puede llegar T_u sin que disminuya considerablemente la resistencia a fuerza cortante; por otra parte, es un valor conservador de lo que suele llamarse "contribución del concreto" (en buena parte constituida por el momento de las fuerzas cortantes que toman directamente las barras longitudinales). Estos conceptos, así como el criterio que se adoptó para definir cuándo se puede desprestigiar la torsión, se ilustran en la fig 2.5. La expresión 2.30, como igualdad, representa la interacción entre las resistencias a torsión y a fuerza cortante de un miembro sin refuerzo transversal.

La limitación de T_u es necesaria para evitar que el concreto falle por las compresiones diagonales causadas por la torsión, antes que fluya el refuerzo. La expresión para el límite de T_u de las normas anteriores se modificó para darle más congruencia con el límite que establece el

Reglamento ACI 318.

2.2 Estados límite de servicio

2.2.2 Deflexiones

Se juzgó aceptable la precisión obtenida al calcular deflexiones a partir del momento de inercia de la sección transformada agrietada (ref 2.12). Si se desea una precisión algo mayor, puede usarse el procedimiento de la ref 1.2. Este último se recomienda para calcular deflexiones en losas. El incremento que con el transcurso del tiempo experimentan las deflexiones se debe esencialmente al flujo plástico del concreto causado por compresiones debidas a flexión; el refuerzo de compresión restringe estas deformaciones, de aquí que la magnitud de la deflexión diferida dependa de la cuantía A'_s/bd (refs 2.12 y 1.2).

2.2.3 Agrietamiento en elementos no presforzados que trabajan en una dirección.

Con el requisito prescrito se limita indirectamente el ancho de grieta a un valor del orden de 0.5 mm. El criterio es en esencia el del Reglamento ACI-318.

REFERENCIAS

- 2.1 Departamento del Distrito Federal, "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Diario Oficial del 9 de febrero de 1966, México, D F
- 2.2 Meli, P R, "Gráficas para diseño plástico de columnas de concreto reforzado", Apéndice del Informe 176, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D F (1969)
- 2.3 Joint ASCE-ACI Task Committee 426, "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members", Journal of the Structural Division, ASCE (jun 1973)

- 2.4 Bulletin d'Information No 65, "Poutres-cloisons", Comité Européen du Béton, Paris (feb 1968)
- 2.5 Bresler, B, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending", ACI Journal (nov 1960)
- 2.6 "International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures", Comité Européen du Béton-Federation Internationale de la Précontrainte, Cement and Concrete Assn, Londres (1970)
- 2.7 "Code of Practice for the Structural use of Concrete", CP 110, British Standards Institution, Londres (1972)
- 2.8 Loera, S, "Resistencia a cortante de elementos anchos de concreto reforzado", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No 474, México, D F (nov 1983)
- 2.9 Faradji, C M y Díaz de Cossío, R, "Tensión diagonal en miembros de concreto de sección circular", Revista Ingeniería, Vol. XXXV, No 2, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D F (abr 1965)
- 2.10 González, C O, Robles, F F, Casillas G de L, J y Díaz de Cossío, R, "Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado", Ed Limusa, S A, México, D F (1974)
- 2.11 Mattock, H A y Hawkins, M N, "Shear Transfer in Reinforced Concrete Recent Research", Journal of the Prestressed Concrete Institute, Chicago (mar-abr 1972)
- 2.12 Winter, G y Yu, W W, "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads", ACI Journal (jul 1960)

3. REQUISITOS COMPLEMENTARIOS

3.1 Anclaje

3.1.1 Requisitos generales

Desde las Normas de 1977, se adoptó el criterio de revisar sólo longitudes de anclaje en lugar de esfuerzos de adherencia. En general, el criterio es el del Reglamento ACI 318. Existen varias razones que hacen más significativo el concepto de longitud de anclaje que el de esfuerzo de adherencia; entre ellas están las que siguen:

- a) Los esfuerzos de adherencia resistentes que antes se especificaban provienen de dividir magnitudes de fuerzas entre productos de longitudes de anclaje por perímetros de barras, es decir, son esfuerzos medios que tienen significado si se asocian a una longitud de barra, pero que no pueden relacionarse con el esfuerzo que actúe en una sección.
- b) Los esfuerzos reales distan mucho de tener distribuciones que puedan calcularse.

c) Con el criterio de revisar esfuerzos de adherencia no es posible tomar en cuenta el anclaje extremo que tenga el refuerzo en los apoyos.

El requisito necesario y suficiente en cuanto a anclaje es el del inciso 3.1.1 a) de las Normas; el resto de la sección 3.1 indica cómo cumplir con él en casos usuales. La exigencia de valuar la fuerza de tensión con el máximo momento que actúa en un peralte efectivo a cada lado de la sección se debe a que la formación de una grieta diagonal incrementa la tensión en esa sección; este efecto se demuestra en la fig 3.1.

La expresión y los criterios para calcular longitudes de desarrollo de refuerzo de tensión están basados en la ref 1.2, al igual que el resto de la sección 3.1. En las nuevas normas se precisó la forma de calcular el anclaje de barras dobladas a 90 ó 180 grados; el procedimiento está basado en el tratamiento que se da en la ref 1.2 al anclaje de barras que terminan en ganchos estándar.

Las otras disposiciones de la sección 3 son, en esencia, las correspondientes de las Normas de 1977, con las salvedades de que se amplió la sección 3.4 relativa al recubrimiento del refuerzo, y se incrementó a 660 el coeficiente de la fórmula que da el refuerzo mínimo por cambios volumétricos. Esto último a fin de disminuir la diferencia entre el refuerzo calculado con dicha fórmula y el obtenido con la regla de 0.002, para aceros de alta resistencia, como la malla de alambre soldado.

4. DISPOSICIONES COMPLEMENTARIAS PARA ELEMENTOS ESTRUCTURALES COMUNES

4.1 Vigas

4.1.1 Conceptos generales

La definición de claro que se incluye en las Normas se refiere en realidad a vigas libremente apoyadas. Cuando la viga es monolítica con sus apoyos, el claro se considera como la distancia libre entre paños de apoyos.

En el cálculo de fuerzas cortantes de vigas de más de 3 m de claro que reciben cargas de losas con distribución notoriamente distinta de la uniforme, debe tomarse en cuenta esta circunstancia; tal es el caso de vigas grandes que soportan tableros cuadrados de losas, pues en ellas la carga proveniente de la losa tienen una distribución mas bien semejante a la triangular, y, aunque la fuerza cortante máxima es la misma que la que resultaría de suponer distribución uniforme, a lo largo de la viga se obtienen fuerzas cortantes mayores.

4.1.4 Vigas diafragma

e) *Vigas diafragma que unen muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano.*

En estas vigas se descarta el refuerzo formado por barras longitudinales y estribos transversales, a causa de que el agrietamiento alterno de flexión provocado por el sismo deteriora el concreto en todo el peralte de los extremos de la viga, formando secciones con resistencia a fuerza cortante prácticamente nula. Las diagonales de refuerzo que se especifican suministran la capacidad necesaria a fuerza cortante, aunque el concreto se dañe. Este tipo de refuerzo se desarrolló en Nueva Zelanda (refs 4.1 y 4.2).

4.1.5 Vigas de sección compuesta

Los criterios de dimensionamiento son los del Reglamento ACI-318

4.2 *Columnas*

4.2.2 Refuerzos mínimo y máximo

Los propósitos de especificar un mínimo para el refuerzo longitudinal son suministrar una cierta resistencia a flexión y evitar que, por efecto del flujo plástico del concreto, el refuerzo llegue a fluir bajo cargas sostenidas de servicio. Un límite máximo es necesario para que el concreto pueda colarse sin dificultades excesivas, y para que el costo no aumente demasiado por el mayor consumo de acero.

4.2.3 Requisitos para el refuerzo transversal

La expresión $850/\sqrt{f_y}$ da, aproximadamente, 17 para el acero grado estructural de las normas antiguas ($f_y = 2300 \text{ kg/cm}^2$). La intención de reducir la separación de los estribos cerca de los nudos es aumentar la ductilidad de la columna en esas zonas, que son críticas bajo sismo.

En la fig 5.4 se presenta un ejemplo del uso de grapas para dar soporte lateral a barras que no son de esquina.

4.2.4 Columnas zunchadas

La ventaja de una columna zunchada con respecto a otra no zunchada es su mayor ductilidad; ésta proviene del efecto confinante del zuncho, que actúa después que el recubrimiento se desprende. La ec 4.2 está obtenida de modo que, bajo carga axial, el incremento de resistencia debido al zuncho es igual a la disminución de ésta causada por la pérdida del recubrimiento.

4.2.5 Detalles del refuerzo en intersecciones con vigas o losas

Debe hacerse hincapié en la importancia de no omitir los estribos de las columnas en las intersecciones con vigas o losas, y de que éstos cumplan con los requisitos prescritos. La falta o escasez de estribos de columnas en dichas uniones ha originado derrumbes durante sismos por pandeo del refuerzo longitudinal.

4.3 Losas

4.3.3 Losas apoyadas en su perímetro

Se ha conservado el criterio del Reglamento de 1966 para el diseño de losas apoyadas en su perímetro. Los coeficientes están obtenidos de los de Siess y Newmark (ref 4.3). En la ref 4.4 se pueden consultar los puntos principales de la obtención de los coeficientes, así como algunas observaciones sobre otros aspectos del diseño de estas losas (cargas concentradas, cargas lineales). Cabe decir que desde las Normas de 1977 se anexó el caso del tablero aislado y que sus coeficientes son las del método 2 del código ACI 318-66. También entonces se incluyó un criterio aproximado para revisar la resistencia a fuerza cortante.

4.5 Muros

En general, las disposiciones para muros sujetos a cargas verticales son las del Reglamento de 1966. En cuanto a los muros con fuerzas horizontales en su plano, se optó por reunir en un solo subcapítulo todos los requisitos para su diseño, como los de flexión y fuerza cortante; los criterios para estos muros están basados en el Reglamento ACI-318.

El uso de muros de concreto para resistir sismo presenta la ventaja evidente de facilitar el control de las deformaciones laterales, aspecto que se vuelve crítico en marcos de cierta altura; además, suprime la posibilidad de que se formen accidentalmente mecanismos de falla lateral de entrepiso (esta posibilidad existe, aun cuando se diseñe con el criterio de viga débil-columna fuerte).

Cuando se recurra a muros para resistir fuerzas laterales, se recomienda tener presente las consideraciones siguientes:

- a) La solución más aconsejable consiste en tener al menos cuatro ejes con muros acoplados, y marcos en los ejes restantes, todo esto dispuesto simétricamente. El contar con marcos además de los muros suministra una segunda línea de defensa que en un momento dado puede evitar el derrumbe de la estructura.
- b) No es aconsejable usar solo dos ejes con muros, aunque sean simétricos, pues si falla uno puede fallar la estructura completa, por la aparición inmediata de torsiones importantes de entrepiso al faltar uno de los muros.
- c) Cuando se usen muros y marcos, al diseñarlos debe revisarse que la rigidez, resistencia y capacidad de deformarse de ambas formas estructurales sean tales que permitan sumar sus resistencias, a fin de obtener un diseño eficiente. En efecto, puesto que generalmente la rigidez y resistencia de un muro son mayores que la del marco acoplado a él, y su capacidad de deformarse es menor que la de éste, puede

ocurrir que el muro falle antes que el marco alcance su resistencia. Si esta situación se presentara, para resolver el problema podría aumentarse la capacidad de deformarse del muro, o aumentarse la rigidez del marco.

4.8 *Articulaciones plásticas en vigas, columnas y arcos*

Estos requisitos están encaminados a garantizar una cierta capacidad de giro en las secciones donde se supongan articulaciones plásticas. Sin embargo, debe advertirse que cuando se analice al límite considerando mecanismos de colapso, en algunos casos la capacidad de rotación puede ser insuficiente.

4.9 *Ménsulas*

En las nuevas normas se dan disposiciones para diseñar ménsulas con relaciones c/d hasta 1.0, con base en el Reglamento ACI 318. Al igual que con los muros, para las ménsulas se agruparon en un solo subcapítulo los distintos requisitos de diseño.

REFERENCIAS

- 4.1 Paulay, T, "Some Aspects of Shear Wall Design", Boletín New Zealand Society for Earthquake Engineering, Vol 5 No 3, Nueva Zelanda (sep 1972)
- 4.2 Binney, J R, "Diagonal Reinforced Coupling Beams", University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelanda (1972)
- 4.3 Newmark, N M y Siess, C P, "Proposed Design Specifications for Two-Way Floor Slabs", ACI Journal (abr 1950)
- 4.4 Rosenblueth, E, "Los capítulos sobre concreto en el nuevo Reglamento de las Construcciones en el Distrito Federal", Folleto F-4893, Biblioteca de la División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM (1966)

5. MARCOS DUCTILES

5.1 *Requisitos generales*

Este capítulo es nuevo en las Normas; está basado esencialmente en el Apéndice A del Reglamento ACI de 1983 (refs 1.2, 1.3 y 5.1) y en algunos criterios de diseño neozelandeses (refs 5.2 y 5.3). Se entiende por marco dúctil una estructura monolítica formada por columnas y vigas que, bajo la acción de un sismo intenso es capaz de soportar una serie de ciclos de comportamiento inelástico, sin menoscabo significativo de su capacidad de carga. Lo anterior se logra si en el marco puede formarse un mecanismo de falla en el que las zonas que funcionan como articulaciones plásticas poseen una considerable capacidad de giro ante acciones repetidas. La razón principal de usar estructuras dúctiles es que permiten ser diseñadas para resistencias menores que las que requerirían en un cierto sitio estructuras de comportamiento elástico. Esto ocurre así, entre otros motivos, por la energía que durante un sismo disipa el marco dúctil en los ciclos histeréticos. Pero se debe estar consciente de que bajo sismos extraordinarios son de esperarse daños estructurales, principalmente en las vigas, que requerirán quizá de reparaciones de costo no despreciable; de manera que los responsables del proyecto y el propietario tienen que elegir entre usar el nivel de seguridad sumi-

nistrado por el Reglamento y sus Normas Complementarias para marcos dúctiles, o aumentar el costo inicial de la estructura para disminuir el riesgo de daños futuros.

La capacidad de giro en las articulaciones plásticas se logra limitando la cuantía de refuerzo a tensión y suministrando confinamiento lateral al concreto por medio de estribos cerrados o zunchos suficientemente resistentes y próximos entre sí. El confinamiento lateral hace que aumente la capacidad de deformación longitudinal de compresión del concreto tanto directa como por flexión y, por tanto, que se incremente la capacidad de giro.

Las fallas no dúctiles, como las debidas a fuerza cortante o a menoscabo en la adherencia, se restringen mediante el uso de acero con fluencia definida. Si el acero fluye bajo una cierta fuerza, quedan acotados los esfuerzos de adherencia y los momentos flexionantes; indirectamente también quedan acotadas las fuerzas cortantes. El obtener un comportamiento aceptablemente estable bajo cargas cíclicas, como las que imponen los sismos, se propicia manteniendo bajos los esfuerzos cortantes en los elementos del marco.

En general, los requisitos de este capítulo están encaminados a lograr, mediante requisitos de detalles de refuerzo y dimensiones, que el comportamiento del marco esté regido por el giro inelástico por flexión en las zonas que se consideran articulaciones plásticas sin que se presente antes otro tipo de falla, y que soporte ciclos de carga impuestos por sismos intensos.

De acuerdo con el criterio general adoptado en el art 207 del Reglamento (ref 1.7) y en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (ref 5.4), a los edificios formados por marcos dúctiles les corresponde un factor de comportamiento sísmico, Q , igual a 4. También puede aplicarse este valor cuando se usan marcos y muros o contravientos, con tal que la fuerza sísmica resistida por los marcos en cada entrepiso sea por lo menos el 50 por ciento de la total. Se admite así porque,

aunque el muro tiene menos capacidad que un marco para deformarse sin fallar, en una estructura formada por marcos dúctiles y muros, si llegan a fallar éstos, los marcos representan una segunda defensa que puede evitar el derrumbe de la construcción.

Para revisar el requisito de que en cada entrepiso los marcos sean capaces de resistir al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante, puede procederse en la forma siguiente:

- a) Analícese la estructura y determínense las fuerzas cortantes que actúan en las columnas.
- b) Si en cada entrepiso la suma de las fuerzas cortantes que actúan en las columnas que forman marcos al suponer que no existen los muros es al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante total de ese entrepiso, se acepta que se cumple el requisito.

Este proceder se justifica porque al dimensionar se suministrará a esos marcos por lo menos el 50 por ciento de la resistencia necesaria de entrepiso.

Si al aplicar el procedimiento anterior no se cumple con el requisito, puede recurrirse al criterio general que consiste en comprobar que los marcos solos, suponiendo que los muros han fallado, son capaces de resistir en cada entrepiso al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante. Para esto, se analizan los marcos sin los muros bajo el 50 por ciento de las fuerzas laterales totales, y se diseñan para que lo resistan; o bien se diseña la estructura, incluyendo los muros, y después se revisa que la resistencia de los marcos solos cumpla con el requisito. Esta última forma es más laboriosa.

En cuanto a la condición 3 para usar $Q = 4$ que aparece en las normas para diseño por sismo, en el sentido de que el mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiera en más de 35 por ciento del promedio de dicho cociente para todos los en-

trepisos, puede suponerse que la resistencia de un entrepiso corresponde al mecanismo que en él se forme con articulaciones plásticas en los extremos de las columnas y que la resistencia del muro es la que tiene a fuerza cortante en el entrepiso. Este procedimiento sobrestima la resistencia de entrepiso, particularmente en edificios esbeltos donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas y el muro de concreto falle por flexión en su base. Sin embargo, se justifica hacerlo así porque la intención del requisito es evitar que haya discontinuidades importantes en las resistencias de los entrepisos, y no interesa tanto el valor real de esas resistencias, sino sus valores relativos. No vale la pena tratar de valuar la resistencia real de entrepiso, pues cuando no se forma un mecanismo en el entrepiso que se trata sino que el mecanismo de falla del edificio está definido por articulaciones en las vigas, el concepto de resistencia de entrepiso pierde un tanto su significado. Si se deseara calcularla, debería ser la fuerza cortante que actúa en ese entrepiso cuando se forma el mecanismo de falla general del edificio; lo anterior se complica aún más cuando existen muros de concreto para sismo.

Así pues, para fines de revisar el requisito que se trata, basta aplicar la expresión siguiente:

$$V_{RE} = \frac{\sum M_c}{h} + V_{R \text{ muro}}$$

donde V_{RE} es la resistencia ficticia del entrepiso, $\sum M_c$ es la suma de los momentos resistentes en los extremos de las columnas y $V_{R \text{ muro}}$ la resistencia del muro a fuerza cortante. Para valuar M_c debe tomarse en cuenta la carga axial que actúa en la columna (pueden usarse los diagramas de interacción flexión-compresión). La resistencia del muro se determina de acuerdo con la sección 4.5.2c) de las Normas, considerando muro no esbelto; así se obtiene:

$$V_{R \text{ muro}} = F_R (0.85 L_t \sqrt{f_c^*} + P_{h y} f_{dt}) \leq 2F_R L_t \sqrt{f_c^*}$$

Una de las características de un marco que influyen en su comportamiento y resistencia es la resistencia relativa entre columnas y vigas. La tendencia actual es propiciar que las columnas sean más resistentes en flexión que las vigas, a fin de evitar las fallas laterales de entrepiso por la formación de articulaciones plásticas en los extremos de las columnas; esto es, se llega a una estructura en que el mecanismo de falla ocurre por la formación de articulaciones inelásticas en las vigas y donde las columnas permanecen de hecho en la zona elástica excepto en sus bases.

El requisito de que los marcos que se diseñen con $Q = 4$ sean monolíticos colados en el lugar se debe a que los detalles que se especifican están basados en ensayos realizados en especímenes monolíticos. Los requisitos para marcos prefabricados se dan en el cap 8.

Es importante revisar que se cumplan, además, todos los requisitos que para usar $Q = 4$ se prescriben en las normas técnicas para diseño por sismo (ref 5.4), y que no están mencionados en las normas para estructuras de concreto.

La condición de que cada marco debe resistir al menos el 25 por ciento de la fuerza horizontal que le correspondería si estuviera aislado prevé la posibilidad de que el sistema de piso no transmita adecuadamente las fuerzas de inercia a los elementos verticales más rígidos, por ejemplo porque se dañe durante un sismo violento. También toma en cuenta imprecisiones en el cálculo de las rigideces laterales de muros y columnas que puedan hacer pensar que algún marco toma menos fuerza lateral que la que en realidad le corresponde.

Se pide que la resistencia especificada, f'_c , del concreto no sea menor de 200 kg/cm^2 , debido al efecto desfavorable que sobre la curvatura en la falla tiene el disminuir f'_c : en una sección rectangular que tiene un cierto refuerzo, la profundidad del eje neutro en la falla es $c = A_s f_y / 0.8bf'_c$; al disminuir f'_c aumenta c y la curvatura disminuye.

El uso de refuerzo longitudinal que no fluya francamente o que fluya bajo un esfuerzo considerablemente mayor que el utilizado al dimensionar puede conducir a fallas frágiles por fuerza cortante o por adherencia. Estos tipos de falla deben evitarse aunque ocurran bajo cargas mayores que las de diseño, de aquí el primer requisito que se pide para el refuerzo longitudinal de vigas y columnas. También es necesario que el esfuerzo real de fluencia del refuerzo de las vigas no exceda demasiado al de cálculo, para que efectivamente se mantenga la tendencia a que las articulaciones plásticas se formen en las vigas y no en las columnas.

El otro requisito relativo al acero de refuerzo pide que después de la fluencia el material tenga endurecimiento por deformación, de características tales que la resistencia real sea al menos 1.25 veces el esfuerzo real de fluencia. Considerando el caso extremo de que el acero fluyera y no tuviera endurecimiento por deformación, la fluencia ocurriría sólo en la sección de momento máximo y de hecho no se formaría una zona que trabajara como articulación plástica, sino que la deformación del acero se concentraría en unos cuantos milímetros y rápidamente ocurriría su fractura, originando una falla frágil. Si el acero tiene endurecimiento por deformación, al llegar su deformación a la zona de endurecimiento el momento en la sección de momento máximo aumenta y también lo hacen los momentos en las secciones vecinas, con lo que la fluencia del acero se propaga y se forma una articulación plástica. El requisito de las Normas tiende a asegurar que la fluencia ocurra en una cierta longitud, y lograr así una cierta capacidad de giro inelástico en esa zona.

5.2 *Miembros a flexión*

5.2.1 Requisitos geométricos

Se pide que la relación claro-peralte no sea menor que 4 porque hay evidencia experimental (ref 1.3) de que bajo acciones repetidas el comportamiento de vigas peraltadas que no cumplan con el requisito es más desfavorable que el de vigas esbeltas.

Los requisitos que limitan las relaciones del ancho de una viga con la longitud no soportada lateralmente y con su peralte tienen la intención de evitar el pandeo lateral.

Los extremos de las vigas normalmente están bajo flexión negativa y la zona comprimida es rectangular. Bajo acciones repetidas es probable que se desprenda el recubrimiento y sólo se cuente con el concreto contenido dentro de los estribos; por esta razón se requiere un ancho mínimo de 25 cm. Se pide que el ancho de la viga no sea mayor que el de la columna, para hacer lo más eficiente posible la transmisión de momento entre viga y columna.

El propósito de la última condición geométrica para vigas es evitar momentos adicionales importantes en las columnas, causadas por excentricidad de la carga vertical y que normalmente no se toman en cuenta en el análisis.

5.2.2 Refuerzo longitudinal

El primer requisito va encaminado a no dejar alguna sección con posibilidad de falla frágil por flexión de uno u otro signo; esto último en vista de las incertidumbres en el análisis, la posible ocurrencia de hundimientos diferenciales de apoyos, o acortamientos diferenciales en columnas a corto o a largo plazo, todo lo cual usualmente no se considera en el análisis, y también en vista de la posibilidad de que el sismo sea más intenso que lo previsto y haga que cambien los signos de los momentos.

Como se dice en los comentarios a 2.1.2a), el refuerzo mínimo obliga a que el momento resistente de la sección agrietada sea al menos 1.5 veces mayor que el momento bajo el cual se agrieta la viga, con lo que se evita que ésta falle bruscamente al agrietarse. La exigencia de que sean por lo menos dos barras en cada lecho se refiere más bien a la necesidad de ellas por razones de construcción. Se mantuvo el límite de $0.75 A_{sb}$ para el acero a tensión (veáanse los comentarios a 2.1.2b). Se sugiere

que la cuantía no exceda de 0.025 a fin de evitar congestionamiento de las barras de refuerzo y de limitar, indirectamente, la fuerza cortante que puede generarse en la viga.

Se pide que en la unión con un nudo el momento resistente positivo de una viga sea por lo menos igual a la mitad del momento resistente negativo que se tenga en esa sección, para prever la posibilidad de que, aunque el análisis no lo indique, el momento positivo debido al sismo exceda al negativo causado por las cargas verticales. Esta situación puede verse propiciada por hundimientos diferenciales, o acortamientos diferenciales de las columnas. Además, el acero longitudinal en el lecho inferior tiene el efecto favorable de que bajo momento negativo ayuda al concreto a tomar las compresiones. El riesgo de que se invierta el signo del momento flexionante en los extremos de las vigas de un marco es mayor si los claros son pequeños.

Es necesario que en las uniones por traslape se suministre refuerzo helicoidal o estribos cerrados, debido a la posible caída del recubrimiento lo que disminuiría la adherencia de las barras y debilitaría la unión traslapada. Las uniones traslapadas no se permiten en zonas donde se preven articulaciones plásticas, pues no son confiables bajo deformaciones cíclicas inelásticas.

En un paquete de dos barras es pequeño el menoscabo en la adherencia con el concreto. Debe buscarse que los esfuerzos de adherencia entre refuerzo y concreto sean pequeños, ya que el deterioro de la adherencia bajo acciones cíclicas es una de las causas de la pérdida de rigidez de elementos y nudos de concreto reforzado bajo sismo.

De los requisitos que han de satisfacer las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, se hace hincapié en el que pide que resistan al menos 1.25 veces la fuerza de fluencia de las barras que unen.

Al definir el diámetro, la cantidad y la distribución del refuerzo longitudinal de vigas, debe tenerse presente la facilidad de construcción,

en particular respecto a las barras que llegan a las uniones con las columnas.

5.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

El refuerzo que se pide es para confinar el concreto en las zonas de articulaciones plásticas, a fin de aumentar su capacidad de deformarse sin fallar y de resistir acciones cíclicas. También tiene la función de restringir lateralmente al acero longitudinal que pueda trabajar a compresión. El diámetro del refuerzo para confinar estará de acuerdo con el tamaño de la viga. Como guía, se sugiere usar barras No 2.5 en vigas con peralte de hasta 50 ó 60 cm, No 3 con peraltes de hasta 80 ó 90 cm, y No 4 o más gruesas para peraltes mayores.

El requisito relativo a las barras longitudinales de la periferia en las zonas de articulaciones plásticas significa que las barras de esquina y una de cada dos consecutivas deben tener el soporte lateral como se indica en 4.2.3, y que ninguna barra no soportada lateralmente debe distar, a cada lado, más de 15 cm (libres) de una barra sí soportada (fig 5.1).

5.2.4 Requisitos para fuerza cortante

La forma de obtener las fuerzas cortantes en una viga de un marco dúctil se ilustra en la fig 5.2. Para evitar que ocurra la falla por fuerza cortante antes que aparezcan las articulaciones, las fuerzas cortantes de diseño se calculan a partir del equilibrio de la viga, suponiendo que ya se formaron las articulaciones plásticas en sus extremos. Los momentos de fluencia se calculan sin factor de resistencia, porque así se tiene una condición más desfavorable ya que se obtienen fuerzas cortantes mayores. Además, se supone que las amplitudes de las rotaciones son tales que el acero puede llegar a tener endurecimiento por deformación, por lo que el momento se calcula con el esfuerzo en el acero igual a $1.25 f_y$.

La situación descrita en la fig 5.2 puede ocurrir durante un sismo intenso: primero se forma la articulación en el extremo donde el momento del

sismo se suma con el causado por las cargas de gravedad; después, al aumentar el efecto del sismo, se forma la articulación de momento positivo en el otro extremo.

En sistemas de piso viga-losa monolíticos, el momento resistente negativo de la viga aumenta con relación al teórico, a causa del refuerzo de la losa que trabaja a tensión junto con el refuerzo de la viga. Se recomienda tomar en cuenta este incremento en vigas relativamente pequeñas (peralte menor de 50 cm, como guía) y también cuando la cuantía de refuerzo de la losa exceda de 0.005 ó 0.006 (ref 5.5).

Con el procedimiento optativo se pretende obtener el mismo resultado que con el general, es decir, evitar que la viga falle por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones inelásticas en los extremos. El procedimiento optativo es más sencillo, aunque, como suele suceder en estos casos, puede conducir a un mayor consumo de acero en estribos.

5.3 Miembros a flexocompresión

Los miembros a flexocompresión con carga axial pequeña ($P_u \leq A_g f'_c / 10$) se tratan como vigas.

Las razones para pedir un mínimo en la dimensión transversal de una columna son las siguientes: a) hacerlas menos vulnerables a errores constructivos, a impactos accidentales y a excentricidades accidentales de otra índole, y b) facilitar la colocación del refuerzo y del concreto, así como lograr cumplir con los recubrimientos necesarios sin disminuir demasiado la relación del área del núcleo al área transversal total.

La intención de que el área de la sección transversal sea al menos igual a $P_u / 0.5f'_c$ es garantizar una cierta capacidad de giro en zonas de la columna donde llegaren a formarse articulaciones plásticas. La capacidad de giro inelástico en una columna aumenta al disminuir la relación

$$P_u / A_g f'_c.$$

Se pide que la relación entre la dimensión transversal mayor de la columna y la menor no exceda de 2.5, para que el elemento siga siendo propiamente una columna y no pase a tener características de muro con el consiguiente problema del pandeo lateral.

Para evitar que los efectos de esbeltez lleguen a ser causa de una disminución significativa de la ductilidad general de la estructura, a las disposiciones de 1.3.2 se adiciona el requisito de que la relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no exceda de 15.

5.3.2 Resistencia mínima a flexión

En la sección 5.3.2 explícitamente se trata de disminuir las probabilidades de que se presente fluencia en las columnas y, por tanto, de que se forme un mecanismo de falla lateral en algún entrepiso (fig 5.3a). El requisito que se establece propicia la formación de un mecanismo de falla definido por articulaciones plásticas en las vigas y en la base de las columnas (fig 5.3.b). Bajo un mismo sismo, la demanda de giro en las articulaciones del segundo mecanismo es menor que la demanda de giro de las articulaciones de un mecanismo de falla de entrepiso, a causa de que en éste último la disipación de energía sólo ocurre en las articulaciones plásticas de los extremos de las columnas del entrepiso que falla, en tanto que en el otro se disipa en un número mayor de articulaciones distribuidas en todo el edificio. Por otra parte, la capacidad de giro de una articulación formada en una viga es mayor que la de aquella que se forma en una columna, a causa de la carga axial. Además, y en particular si la falla lateral de entrepiso ocurre en la zona baja de la estructura, aumenta la importancia de los momentos de segundo orden en las columnas del entrepiso dañado, con el consiguiente incremento en el riesgo de derrumbe brusco del edificio. Lo anterior significa que una estructura donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas tiene más probabilidades de sobrevivir bajo un sismo de intensidad extraordinaria que otra en donde la fluencia ocurra en las columnas de un entrepiso y en él se forme un mecanismo de falla lateral.

Debe hacerse hincapié en que la importancia de que no se formen articulaciones plásticas en las columnas es mayor en los primeros entrepisos de edificios altos. En edificios de uno o dos niveles, o en los últimos pisos de edificios de más altura, se puede ser menos estricto en este aspecto. Así mismo, en un cierto caso podría admitirse fluencia en algunas columnas de un entrepiso a condición de que las restantes del entrepiso permanezcan elásticas e impidan la formación de un mecanismo de falla lateral.

En rigor, no es posible asegurar que no se formen zonas inelásticas en las columnas, por lo que se debe suministrar en sus extremos el refuerzo de confinamiento prescrito en 5.3.4. Una causa que puede provocar la plastificación de las columnas es la sobrerresistencia en flexión de las vigas originada por el endurecimiento por deformación del acero de refuerzo y por la contribución del refuerzo de la losa al momento resistente negativo. También puede propiciar la formación de un mecanismo de falla lateral en un entrepiso la presencia de muros divisorios de cierta resistencia en los entrepisos adyacentes, cuando el entrepiso considerado no cuenta con esos elementos.

Se pide incrementar 70 por ciento la carga axial debida al sismo para prever que la fuerza sísmica horizontal exceda de la obtenida dividiendo el coeficiente sísmico entre el factor de comportamiento sísmico, Q , igual a 4 (ref 5.6). Una de las razones para dividir entre Q es el supuesto comportamiento elastoplástico de la estructura, pero éste se ve afectado por la sobrerresistencia de las vigas, la presencia de muros y por la no simultaneidad en la formación de las articulaciones plásticas, todo lo cual conduce a que la fuerza lateral que toma el edificio sea creciente con la deformación lateral, y, por consiguiente, a que aumenten los momentos de volteo y las cargas axiales en las columnas, incremento que no se toma en cuenta en el análisis. El incremento es particularmente importante en las columnas de los primeros entrepisos de edificios altos y esbeltos.

Con el procedimiento optativo ($F_R = 0.6$) se pretende obtener resultados equivalentes, esto es, tender a evitar la formación de mecanismos de falla lateral de entrepiso.

Si se forma el mecanismo definido por articulaciones en las vigas y en las bases de las columnas de planta baja, la falla de la estructura esta-

rá regida por la falla de las bases de las columnas, de aquí que resulte esencial que esas zonas cuenten con el adecuado refuerzo transversal de confinamiento, el cual les aumentará la capacidad de giro y permitirá que soporten más ciclos de acciones sísmicas sin perder su capacidad de carga vertical.

5.3.3 Refuerzo longitudinal

El límite inferior para la cuantía de refuerzo longitudinal tiene el propósito de evitar que dicho refuerzo fluya en compresión a causa del flujo plástico (creep) del concreto. Al deformarse el concreto con el tiempo, va transfiriendo su carga al acero de refuerzo el cual puede llegar a fluir en compresión si su cuantía es muy pequeña; la columna se iría acortando al paso del tiempo y se crearían esfuerzos y deformaciones no previstas en las vigas y en otras columnas. Otra razón para establecer una cuantía mínima de refuerzo longitudinal es suministrar una cierta resistencia a flexión.

El límite superior para la cuantía de refuerzo longitudinal es en esencia para evitar que se congestione el refuerzo, particularmente en las intersecciones con las vigas. Si el refuerzo es excesivo, se dificultan su colocación y el colado del concreto.

Se limita a dos el número de barras por paquete a fin de disminuir el riesgo de fallas de adherencia en la columna y en especial en las intersecciones con las vigas. Por otra parte, se logra un mejor confinamiento del concreto del núcleo si las barras longitudinales están distribuidas en la periferia que si se concentran en paquetes. Esta disposición tiende a dejar fuera de uso la práctica anterior de concentrar la mayor parte del refuerzo longitudinal en las esquinas que, si bien aumenta la resistencia en flexión, propicia problemas de adherencia y de menoscabo en el confinamiento.

Al igual que en las vigas, las uniones de barras por traslape en columnas son vulnerables al desprendimiento del recubrimiento. Los trasla-

pes sólo se permiten en la zona central de la columna, donde es poco probable que se desprenda el recubrimiento. Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos no presentan ese inconveniente y se permiten en cualquier localización, con tal que se cumpla con los requisitos que se incluyen sobre cantidad de uniones y separación entre ellas.

Se hace énfasis en la importancia de que se cumpla con los requisitos de la sección 4.2 que no resulten modificados por el inciso 5.3.3.

5.3.4 Refuerzo transversal

El refuerzo transversal de una columna tiene la función de suministrar la resistencia requerida a fuerza cortante y dar confinamiento adecuado al núcleo, así como restricción lateral al refuerzo longitudinal. El confinamiento lateral hace que aumente considerablemente la capacidad del concreto para deformarse en la dirección longitudinal sin fallar, con lo cual se evita el comportamiento frágil de la columna. El refuerzo mínimo que se especifica en esta sección es el necesario para confinar el concreto del núcleo y restringir lateralmente las barras longitudinales; este refuerzo sólo se pide en las zonas donde es probable que ocurra comportamiento inelástico durante sismos intensos. Los estribos que forman parte del refuerzo para confinamiento deben ser rectangulares, con sus ramas paralelas a las caras de la columna. No obstante la tendencia hacia evitar que las columnas sufran comportamiento inelástico, debe preverse la posibilidad de que esto ocurra, según se indica en los comentarios a la sección 5.3.2; de aquí la necesidad de suministrar el refuerzo transversal para confinamiento. En toda sección de una columna, el refuerzo transversal debe satisfacer el requisito que sea más estricto entre el necesario para confinamiento y el necesario para fuerza cortante, teniendo en cuenta que el primero únicamente es necesario en las zonas indicadas. Tanto el refuerzo para confinamiento como el necesario por fuerza cortante deben cumplir con los requisitos de 4.2.3.

Las zonas en que cabe esperar comportamiento inelástico durante sismos extraordinarios son las próximas a las intersecciones con las vigas, por

ser en ellas máximos los momentos causados por las fuerzas laterales. Para tomar en cuenta que en las columnas de planta baja normalmente el punto de inflexión se encuentra más próximo a los nudos superiores, se pide que, además de cumplir con los requisitos generales que fijan la longitud confinada, ésta llegue por lo menos hasta media altura de la columna; por otro lado, para dar continuidad a la columna dentro de su cimentación, a fin de evitar que allí el confinamiento deba depender de otros refuerzos, se especifica que el refuerzo para confinar se continúe en la cimentación.

La cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal, p_s , se define como el cociente del volumen de acero helicoidal entre el volumen del núcleo de concreto confinado por dicho acero ($p_s = 4a_s/sD_c$, donde D_c es el diámetro del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo helicoidal, y a_s , el área transversal de la hélice).

La primera fórmula del inciso a) se obtiene de obligar a que la resistencia a carga axial de la columna antes de perder el recubrimiento sea igual a la resistencia del núcleo confinado por la hélice, la cual se alcanza bajo deformaciones grandes de compresión cuando ya se desprende el recubrimiento.

Durante un sismo violento, normalmente lo que va a incrementarse y quizá variar cíclicamente es la magnitud de los momentos flexionantes que actúan en las columnas y no tanto la magnitud de la carga axial (si el edificio es esbelto, los incrementos de carga axial en los primeros entresijos debidos al sismo sí pueden ser importantes); sin embargo, se ha mantenido el criterio del inciso a), en vista de que el confinamiento logrado también mejora la ductilidad de la columna aunque haya flexiones importantes adicionales a la carga axial (ref 5.7). El límite $0.12 f'_c/f_y$ rige en secciones grandes; en ellas A_g/A_c tiende a 1.0 y la cuantía suministrada por la primera fórmula tiende a cero.

Se admite que el confinamiento suministrado por estribos cerrados rectangulares, según se establece en el inciso b), es equivalente al que pro-

porciona el zuncho en columnas circulares. Se sabe, sin embargo, que en realidad el confinamiento que da el estribo rectangular es menos eficiente debido a que la barra se flexiona y, por tanto, su acción sobre el núcleo disminuye al alejarse de las esquinas del estribo. Este inconveniente se pretende compensar usando más refuerzo transversal, y también por medio del uso de grapas intermedias, así como limitando las dimensiones de los estribos. En efecto, la cuantía volumétrica de refuerzo transversal de una columna cuadrada es aproximadamente un tercio mayor que la obtenida con las fórmulas del inciso a) para columnas con zuncho circular; por otra parte, la mayor dimensión de un estribo rectangular no debe exceder de 45 cm. Se recomienda el uso abundante de las grapas complementarias descritas en las Normas. En la fig 5.4 se presenta un ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento.

Los requisitos de separación máxima del refuerzo transversal y los relativos a la distancia entre ramas de estribos, entre éstas y grapas, y los de máxima dimensión de estribos sencillos que se establecen en esta sección, se refieren sólo al refuerzo para confinamiento.

5.3.5 Requisitos para fuerza cortante

Estos requisitos van encaminados a suministrar a las columnas mayor resistencia a fuerza cortante que a flexocompresión a fin de evitar que fallen por fuerza cortante, por ser ésta una forma de falla en la que no se pueden resistir ciclos de acciones como los que inducen los sismos. Una columna que falla por fuerza cortante se agrieta en diagonal y pronto pierde su capacidad para soportar la carga vertical, con lo que ocurre un derrumbe brusco.

Aunque el criterio general de diseño tiende a que las articulaciones plásticas se formen en las vigas y no en las columnas, existe la posibilidad de que sean las columnas las que se articulen (comentarios a 5.3.2), de aquí que sea necesario proporcionarles mayor resistencia a fuerza cortante que a flexocompresión.

Se requiere que al valuar los momentos resistentes de las columnas se tome 1.7 veces la fuerza axial causada por el sismo, cuando esto conduzca a un momento resistente mayor; la razón para el incremento es la misma que se expone en los comentarios a 5.3.

El procedimiento de diseño por fuerza cortante puede resultar demasiado conservador, o puede dar lugar a un proceso que diverge, pues al tratar de dar más capacidad a fuerza cortante aumentando la escuadría, se incrementan los momentos resistentes en los extremos de las columnas, lo que provoca que aumente la fuerza cortante por resistir y así sucesivamente. Por esta razón, se admite que no sea necesario suministrar más resistencia a fuerza cortante que la obtenida aplicando el procedimiento optativo, el cual se basa en la fuerza cortante proveniente del análisis y un factor F_R igual a 0.5.

5.4 Uniones viga-columna

5.4.1 Requisitos generales

Las condiciones de equilibrio horizontal de un nudo interior de un marco sujeto sólo a carga lateral se muestran en la fig 5.5. En el acero a tensión que llega al nudo se supone un esfuerzo de $1.25 f_y$ debido a que ensayos han demostrado que los giros inelásticos causados por sismo en las caras del nudo implican deformaciones en el refuerzo de flexión considerablemente mayor que las correspondientes a la primera fluencia y que bien pueden llegar a los que corresponden a la resistencia máxima del acero supuesta de $1.25 f_y$ (para acero de grado 42, la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo es del orden de 0.08 a 0.10). La fuerza cortante calculada a media altura del nudo resulta igual a $A_{s2} (1.25 f_y) + A_{s1} (1.25 f_y) - V$

Las uniones viga-columna son elementos críticos en un marco, por lo que su diseño y detallado no debe descuidarse. Si un nudo se daña es muy difícil repararlo, y si pierde capacidad de carga vertical causa la falla de la columna que llega a él y quizá el derrumbe de la estructura; lo ideal es que la resistencia del nudo sea mayor que la de los elementos que concurren en él.

Los principales problemas involucrados en el diseño de uniones viga-columna se refieren a su resistencia a fuerza cortante, al anclaje del refuerzo dentro de él, y al posible congestionamiento del refuerzo. La fuerza cortante causa que el nudo se agriete en diagonal según se muestra en la fig 5.5. Bajo las acciones cíclicas causadas por el sismo, el patrón de agrietamiento es en dos direcciones cruzadas. El anclaje en el nudo, de las barras de vigas y columnas que llegan a él, presenta el problema de que frecuentemente en una cara del nudo una cierta barra está a tensión y en la cara opuesta a compresión, lo que provoca que se incremente la longitud de anclaje necesaria con relación a la requerida si sólo actuara la tensión. También se tiene el inconveniente de que al formarse en una viga una articulación plástica adyacente al nudo, la fluencia de las barras tiende a penetrar en éste provocando cierto menoscabo en la adherencia. Todo lo anterior se ve agravado por el efecto de las acciones cíclicas impuestas por el sismo, las cuales tienden a ir deteriorando la adherencia de las barras dentro del nudo. En buena medida se disminuyen los problemas de anclaje en los nudos evitando el uso de barras de diámetro grande. En el dimensionamiento y detallado del nudo debe buscarse un equilibrio entre su resistencia a fuerza cortante, y el diámetro, la cantidad y la distribución de las barras que entran en él, a fin de evitar un congestionamiento del refuerzo que dificulte su habilitación y afecte la correcta colocación del concreto. A este respecto, se recomienda tener en mente el detallado de los nudos desde que se dimensionan las columnas y vigas del marco. Generalmente da buen resultado mantener baja la cuantía de refuerzo longitudinal de las vigas. Elaborar dibujos amplios, a escala, de la disposición del refuerzo dentro de los nudos contribuye importantemente a evitar dificultades inesperadas en la obra.

Para el diseño de los nudos, en las Normas se optó por el criterio del Apéndice A del Reglamento ACI 318-83 (ref 1.2); es un procedimiento sencillo que no origina congestionamientos excesivos de refuerzo y que tiene apoyo teórico y experimental (refs 5.8 y 5.9).

El requisito de que las barras longitudinales de las vigas pasen dentro del núcleo de la columna obedece a que allí las condiciones para el anclaje son más favorables, a causa del confinamiento suministrado por el refuerzo transversal de la columna.

5.4.2 Refuerzo transversal

El principal papel que desempeña el refuerzo transversal en un nudo es suministrar confinamiento al concreto del núcleo, a fin de aumentar su capacidad de deformarse y de resistir el efecto de acciones cíclicas, sin perder su capacidad de carga vertical. También tiene la función de contribuir a resistir la fuerza cortante que actúa en el nudo (fig 5.5). Por otra parte, el confinamiento que da el refuerzo transversal mejora las condiciones de anclaje del refuerzo que allí llega. La fuerza cortante provoca tensiones principales inclinadas que causan agrietamiento diagonal en el nudo. El refuerzo transversal prescrito en las Normas debe usarse siempre en todo el nudo, aunque la fuerza cortante calculada resulte pequeña.

5.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Para revisar un nudo por fuerza cortante, se admite prescindir del requisito de las Normas para Diseño por Sismo que pide combinar la totalidad de los efectos de un componente del sismo con el 30 por ciento de los efectos del componente ortogonal; es decir, la revisión del nudo puede efectuarse en cada dirección principal en forma independiente. En la fig 5.5, la fuerza cortante horizontal calculada a media altura del nudo resulta igual a $A_{s2} (1.25f_y) + A_{s1} (1.2f_y) - V$ (en la cara derecha la suma de las compresiones en el concreto y en el acero es igual a la tensión en el acero inferior, $A_{s2} (1.25f_y)$, pues forman un par).

Las figuras 5.5 y 5.6 ilustran las condiciones de trabajo de un nudo interior de un marco donde ampliamente predomina el efecto de las fuerzas laterales (se ha omitido la fuerza axial en la columna). En la fig 5.6 aparece el equilibrio de la porción de nudo limitada por la grieta

diagonal inferior del nudo de la fig 5.5, y en ella se aprecia el papel que desempeñan el concreto y el refuerzo en la resistencia a fuerza cortante. El concreto trabaja a compresión formando básicamente un puntal en diagonal; el refuerzo horizontal y vertical trabaja a tensión y contribuye a mantener el equilibrio. En la figura se aprecia el efecto favorable de usar estribos transversales y también barras verticales intermedias en las columnas; sin estos refuerzos intermedios, aumentarían demasiado los esfuerzos de adherencia en las barras longitudinales extremas de vigas y columnas que llegan al núcleo (así, la fuerza en las barras longitudinales inferiores de la viga tendría que pasar, en un pequeño tramo de anclaje, L_a , de $1.25 A_{s2} f_y$ en tensión, a la derecha de la grieta, a uno de compresión, C_s , mientras que con la presencia de los estribos horizontales la fuerza en las barras inferiores en lugar de ser $1.25 A_{s2} f_y$ sería $1.25 A_{s2} f_y - \sum a_{si} f_{si}$, donde a_{si} son las áreas transversales de los estribos y f_{si} los respectivos esfuerzos).

Como se mencionó antes, el procedimiento para diseñar las uniones por fuerza cortante es el del Reglamento ACI 318-83; éste a su vez está basado en un estudio realizado en la Universidad de Texas (ref 5.8). En dicho trabajo se concluyó que la resistencia de una unión a fuerza cortante es función básicamente de tres variables: la presencia de vigas transversales que lleguen al nudo, el refuerzo transversal, y la resistencia del concreto. Se encontró que la variación de la resistencia no era muy sensible a cambios en el refuerzo transversal, por lo que optaron por hacerla depender, para fines de diseño, sólo de las dimensiones del nudo, de la resistencia a compresión del concreto, y de las vigas transversales; en cuanto al refuerzo transversal, optaron por usar una cierta cantidad mínima obligatoria.

En el diseño de uniones viga-columna de marcos dúctiles existen discrepancias importantes en los criterios adoptados en distintos países e instituciones. Así, dentro del propio ACI el procedimiento propuesto por el Comité ACI-ASCE 352 (ref 5.7) lleva a una cantidad mayor de estribos que la obtenida de aplicar el apéndice A del Reglamento ACI 318-83. El procedimiento que se aplica en Nueva Zelanda es aún más conser-

vador que el del Comité ACI-ASCE 352. En las Normas para el Distrito Federal se optó por el del Reglamento ACI 318-83, atendiendo a que tiene buen apoyo experimental, es sencillo, y no conduce a congestionamientos excesivos de refuerzo. Para valuar el área del nudo, se adoptó el criterio del Comité 352, que usa un ancho efectivo igual al promedio de los anchos de viga y columna.

En el diseño por fuerza cortante de uniones, debe usarse el valor de F_R general para cortante ($F_R = 0.8$). Cuando la fuerza cortante de diseño exceda a la resistencia de diseño, el proyectista puede aumentar las dimensiones transversales de la columna, o aumentar el peralte de las vigas; con esto último disminuye el área de refuerzo longitudinal de las vigas y por consiguiente la fuerza cortante de diseño en el nudo.

En la fig 5.7 se ilustra la determinación del ancho efectivo, b_e . Al haber limitado la relación de dimensiones transversales de las columnas a un máximo de 2.5, en la mayor parte de los casos no rige el requisito según el cual el ancho efectivo no debe ser mayor que el ancho de la o las vigas más h , sino el que pide que b_e no exceda del promedio $0.5 (b_v + b_c)$.

5.4.4 Anclaje del refuerzo

De hecho, el primer párrafo de esta sección se refiere a nudos de columnas de orilla. Se optó por exigir que las barras longitudinales de las vigas se prolonguen hasta el fondo del núcleo de la columna, a fin de hacer más definido el trabajo en el nudo en el sentido de que las barras sigan la tendencia de las tensiones principales y se defina claramente la formación del puntal a compresión en el concreto (fig 5.8). Si las barras cumplen con los otros requisitos de anclaje, pero no se llevan hasta la cara opuesta del núcleo sino que se doblan antes, se provoca una distribución de esfuerzos irregular que puede acelerar el deterioro del núcleo ante acciones repetidas. Se juzgó conveniente considerar en forma explícita que bajo acciones repetidas el recubrimiento de una columna se deteriora y deja de ser eficaz para contribuir al anclaje de

las barras de las vigas (ref 5.3); por esta razón, se pide que la sección crítica para anclaje sea en el plano externo del núcleo de la columna. La influencia de este requisito es mayor en columnas de sección pequeña.

El anclaje de las barras de una viga en un nudo presenta la circunstancia favorable de que tiene lugar dentro de una zona confinada por estribos y también generalmente por vigas transversales que llegan al nudo; por otro lado, se tiene el efecto desfavorable de las acciones repetidas impuestas por el sismo, y la penetración de la fluencia de las barras de las vigas dentro del núcleo cuando en éstas se forman articulaciones plásticas adyacentes al nudo. A este respecto, se adoptó el criterio del Reglamento ACI-318-83 que estima que tiene cierto predominio el efecto favorable del confinamiento, por lo que se admite reducir la longitud de desarrollo al 80 por ciento de la requerida en 3.1.1c). Debe aclararse que esta reducción no se aplica a la longitud recta de 12 diámetros que sigue al doblez.

Las barras de vigas y columnas que pasan a través de un nudo tienen la particularidad desfavorable de que pueden estar a tensión en una cara del nudo y a compresión en la cara opuesta, lo cual aumenta los esfuerzos de adherencia dentro del nudo. No obstante, existen algunas atenuantes al problema: a) el ya mencionado confinamiento suministrado por los estribos del nudo y las vigas transversales; b) si las barras de una viga llegan a perder su adherencia en el nudo, quedan ancladas en la viga opuesta; esto causa que aumenten las compresiones en dicha viga opuesta, pero no implica peligro inminente de derrumbe; c) es mínimo el riesgo de que las barras de las columnas tengan que fluir en tensión y en compresión en las caras horizontales del nudo, pues la tendencia del diseño es que más bien fluya el refuerzo de las vigas; por otra parte, la carga axial de las columnas tiende a evitar que sus barras fluyan en tensión.

Se juzga que las relaciones entre dimensiones de nudo y diámetros de barras que se prescriben, conducen a un comportamiento tolerable de los

nudos en cuanto al anclaje de las barras que lo cruzan. Sin embargo, se está consciente de que no se evita totalmente la posibilidad de que la adherencia sufra menoscabo, si la estructura se ve sujeta a varios sismos intensos durante su vida. Este es uno de los aspectos débiles que tienen los marcos destinados a resistir sismo.

REFERENCIAS

- 5.1 Portland Cement Association "Notes on ACI 318-83 Building Code Requirements for Reinforced Concrete with Design Applications" Skokie Illinois (1984)
- 5.2 Park, R, "Práctica de diseño sísmico de estructuras de concreto en Nueva Zelanda", Revista Ingeniería Sísmica N° 22, diciembre 1980, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, México, D F
- 5.3 Paulay, T, "A critique of the special provisions for seismic design of the Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)", ACI Journal (marzo-abril 1986)
- 5.4 Departamento del Distrito Federal, "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 5 de noviembre de 1987, México, D F
- 5.5 Durrani, A J y Zerbe, H E, "Seismic resistance of R/C exterior connections with floor slab", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol 113, N° 8 (agosto 1987)
- 5.6 Romero, J E, "Comportamiento inelástico de edificios esbeltos", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM (enero 1991)
- 5.7 Hognestad E, "A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members", University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin N° 399 (nov 1951)

- 5.8 ACI-ASCE Committee 352, "Recommendations for design of beam-column joints in monolithic reinforced concrete structures", ACI Journal (mayo-junio 1985)
- 5.9 Meinheit, D F y Jirsa, J O, "The shear strength of reinforced concrete beam-column joints", CESRL Report N° 77-1, Universidad de Texas, Austin (enero 1977)

6. LOSAS PLANAS

6.1 *Requisitos generales*

En la fig 6.1 se ilustran algunos de los tipos de losas planas que se describen en la sección 6.1.

El uso de estructuras formadas por losas planas y columnas se ha visto favorecido por las ventajas que presenta este sistema con respecto al que consta de vigas; dichas ventajas principalmente son las tres siguientes: a) para una cierta altura libre de entrepiso, se obtiene una altura total del edificio menor, con el consiguiente menor peso de la construcción, menores aceleraciones horizontales y los ahorros en acabados y en el costo de las instalaciones; b) la cimbra es más sencilla y menos costosa, pues resulta una cimbra plana sin huecos para las vigas; c) se facilita la colocación de ductos horizontales de instalaciones, porque no hay el estorbo que causan las vigas.

A cambio de las ventajas descritas, se tienen las desventajas siguientes: a) resulta una estructura de baja rigidez, tanto ante cargas verticales como ante fuerzas horizontales, por lo que se dificulta cumplir con las

deformaciones admisibles, en particular las deformaciones laterales de entrepiso; b) la transmisión correcta de fuerzas y momentos entre losa y columna es más difícil de lograr, desventaja que se acentúa si la estructura debe resistir las acciones laterales cíclicas causadas por los sismos.

En cada caso, tomando en cuenta las ventajas y desventajas señaladas, el proyectista estructural, en acuerdo con el encargado del proyecto arquitectónico y con el propietario, debe decidir si opta por el uso de losa plana y columnas, o por vigas, losa y columnas.

Para evitar problemas derivados de flechas inmediatas y diferidas excesivas, se sugiere no usar losa plana para claros mayores de 7 u 8 metros si no se usa capitel ni ábaco; en caso de usar ábaco puede extenderse el uso del sistema hasta claros de nueve metros. Si en la orilla del piso la losa sobresale en voladizo, se recomienda que la longitud del voladizo no exceda de 5 veces el espesor de la losa. (No debe confundirse el ábaco o el capitel con la zona maciza que en losas aligeradas es necesario dejar alrededor de las columnas. En este texto el término "claro" es la distancia entre ejes).

Algunas sugerencias de carácter general son las que siguen:

- Usar al menos tres crujiás en cada dirección, a fin de disminuir el número de uniones de orilla con relación al total de uniones losa-columna en un nivel, ya que la transmisión del momento entre losa y columna es más incierta en las conexiones de orilla que en las interiores. Para evitar que se vuelva más crítica la transmisión de fuerzas y momentos en las uniones de orilla, las Normas no admiten que la columna sobresalga del borde de la losa.
- Procurar que los tableros de losa tiendan a ser cuadrados, con objeto de utilizar eficientemente el peralte de la losa en ambas direcciones, es decir, evitar que en la dirección del claro corto rija el refuerzo mínimo por flexión. Al respecto, se recomienda

que la relación de claro mayor a claro menor no exceda de 1.5.

-Para resolver el problema de la baja rigidez lateral y disminuir la magnitud de los momentos que deben transmitirse entre losa y columna durante los sismos, el sistema puede combinarse con muros de concreto reforzado según se indica en la sección 6.2. También podría combinarse con marcos de concreto, colocando éstos sólo en las fachadas, a fin de que las vigas no obligaran a aumentar la altura del edificio para una cierta altura libre de entrepiso.

En general, para construcciones de habitación u oficinas es suficiente la losa plana aligerada, sin capiteles ni ábacos; en este caso, el peralte puede suponerse inicialmente como el claro mayor entre 20. Para construcciones con cargas vivas mayores, como almacenes y bodegas o comercios de mercancía pesada, puede usarse losa aligerada o maciza con capiteles y/o ábacos. La función principal del capitel y del ábaco es aumentar las dimensiones de la sección crítica en la que podría fallar la losa por tensión diagonal alrededor de las columnas, debido a la trasmisión de fuerzas y momentos. Una consecuencia del uso de ábacos o capiteles es que aumenta la rigidez lateral de la estructura. Si se usan ábacos o capiteles, el espesor de la losa aligerada puede suponerse inicialmente igual al claro mayor entre 30. De lo anterior resulta que la losa plana con capiteles y/o ábacos, bajo cargas vivas elevadas (450 kg/m^2 o más), compete ventajosamente con el sistema formado por vigas y losa, sin que, como se dijo en párrafos anteriores, el claro mayor exceda de aproximadamente 9 m.

Para aligerar las losas planas, pueden usarse bloques huecos de mortero ligero o casetones de poliestireno expandido, que en ambos casos quedan permanentemente ahogados en la losa. También pueden emplearse moldes de fibra de vidrio que se retiran y dejan visible los huecos entre nervaduras. Se sugiere que para valorar rigideces se desprecie la contribución de los casetones, aun de los formados por bloques huecos; este proceder es conservador por lo que se refiere a deformaciones y por lo que toca a la fuerza de sismo que resulte para diseño, pues normalmente estas

estructuras quedan en la zona creciente del espectro y se llega a ordenadas mayores al suponerles menos rigidez.

La zona maciza que en losas aligeradas se exige alrededor de columnas o capiteles tiene por objeto mejorar las condiciones de transmisión de fuerzas y momentos entre losa y columna. La que se exige adyacente a muros para sismo, obedece principalmente a favorecer la transmisión correcta de la fuerza de inercia entre losa y muro.

Las nervaduras anchas que se piden en las zonas de los ejes de columnas tienen el propósito de suministrar la mayor resistencia a flexión y a cortante que se requiere en esas zonas, con relación a las franjas centrales de la losa. En la orilla de losas planas aligeradas, se recomienda usar una nervadura de ancho no menor de 25 cm ni que el espesor de la losa, con al menos tres barras N° 4 en cada lecho y estribos cerrados espaciados a cada medio espesor de la losa; el objeto de esta nervadura es disminuir las deformaciones por flexión del borde de la losa, en particular las diferidas debidas al flujo plástico (creep) del concreto.

Se pide en las Normas que existan cuando menos seis hileras de casetones en cada entre-eje, a fin de que sean válidos los coeficientes para distribuir los momentos flexionantes en las franjas de columna y centrales, los cuales están obtenidos suponiendo que la losa es maciza. En estos comentarios se sugiere que la separación entre nervaduras, además de cumplir con el requisito mencionado, no llegue a exceder de un metro.

La revisión de la losa como diafragma para garantizar la transmisión en su plano de las fuerzas generadas por el sismo, es de mayor importancia cuando la losa tiene aberturas o entrantes, o es muy alargada.

6.2 *Sistemas losa plana-columnas para resistir sismo*

En general, la disipación de energía en las zonas de comportamiento inelástico de las losas planas durante sismos intensos es menor que la que ocurre en los marcos dúctiles tratados en el capítulo 5, de aquí que

estas estructuras deban diseñarse para que tengan resistencias laterales mayores que los marcos dúctiles, es decir con valores de Q menores.

La causa principal de la menor disipación de energía que se mencionó es que, en parte, la transmisión de momentos entre losa y columna ocurre por la torsión de la losa, mientras que en una estructura de vigas y columnas la transmisión de momentos entre vigas y columnas implica principalmente la flexión de estos elementos. Las zonas de comportamiento inelástico en un marco dúctil se forman principalmente en las vigas y se comportan realmente como articulaciones causadas por flexión en las que durante varios ciclos puede haber una franca disipación de energía, en buena parte debido a la fluencia del acero de tensión; las zonas de comportamiento inelástico en una estructura formada por losa plana y columnas pueden formarse en la losa alrededor de las columnas o en las propias columnas. Si el comportamiento inelástico ocurre en la losa, aunque una porción se debe a flexión de la losa, hay otra parte significativa causada por torsión de la misma, la cual no implica fluencia del refuerzo, sino más bien daño en el concreto, por lo que la disipación de energía por este concepto es mínima. Otro efecto desfavorable de la torsión que ocurre en la losa es que la va debilitando alrededor de la columna y causa que disminuya el número de ciclos de acción del sismo que la losa puede soportar antes que pierda su capacidad de transmitir la carga vertical a la columna y se produzca la llamada falla por punzonamiento.

Al asignarle un valor de Q a un sistema estructural, también interviene el buen o mal funcionamiento que dicho sistema ha tenido en sismos anteriores. El funcionamiento de estructuras altas formadas por losas planas y columnas en general no fue satisfactorio durante los sismos de 1985, y por esta razón se limita a 20 m la altura de la construcción para poder aplicar $Q = 3$. Los requisitos de que haya al menos tres crujeas o existan vigas de borde tienden a disminuir la influencia desfavorable de las conexiones de orilla losa-columna; las conexiones de orilla entre losa y columna son menos eficientes que las interiores en cuanto a la energía disipada bajo las acciones cíclicas causadas por los sismos.

Si el sistema losa plana-columnas se combina con muros de concreto reforzado, de manera que éstos sean capaces de resistir, en cada entrepiso, al menos el 75 por ciento de la correspondiente fuerza cortante, puede aplicarse Q igual a 3. En este caso, no se limita la altura de la construcción, ni se exigen tres crujiás o vigas de borde; de hecho, se supone que el comportamiento de la estructura estará gobernado por los muros de concreto, a los que de acuerdo con 4.5.2 les corresponde $Q = 3$. Para cumplir con el requisito de que en cada entrepiso los muros sean capaces de resistir no menos del 75 por ciento de la fuerza cortante que en él actúa, puede analizarse la estructura completa, aislar los muros y determinar qué fuerzas cortantes actúan en ellos; si en cada entrepiso la fuerza cortante que actúa sobre los muros es al menos el 75 por ciento de la total de ese entrepiso, se puede suponer que se cumple con el requisito. Se sobrentiende que los muros han de ser continuos desde la cimentación hasta la azotea, sin variaciones bruscas en rigidez, ni en resistencia.

La intención de pedir que las columnas cumplan con los requisitos para columnas de marcos dúctiles es asegurar cierta capacidad de giro inelástico y de disipación de energía en los extremos de estos elementos, cuando la falla tienda a ocurrir en las columnas y no en la losa.

En cuanto a la revisión de los nudos, se admite prescindir de verificar su resistencia a fuerza cortante, porque el nudo está confinado en todas direcciones por la losa, y si ésta llegara a debilitarse alrededor del nudo y disminuyera la eficacia del confinamiento que suministra, la pequeña dimensión vertical del nudo, que es igual al espesor de la losa, dificulta la formación de un mecanismo de falla definido por grietas inclinadas causadas por la fuerza cortante.

No se define la cantidad de barras de la losa que en un nudo deben pasar por el núcleo de la columna; dicha cantidad queda determinada en cada caso por el ancho de la columna y la separación entre barras que haya resultado en la zona próxima al eje de columnas al diseñar el refuerzo por flexión según 6.6 y 6.7.

Para las relaciones que deben cumplirse entre el espesor de la losa o las dimensiones transversales de las columnas y los diámetros de las barras, en esencia son aplicables los comentarios que se hacen en 5.4.4

para las barras que cruzan nudos de marcos dúctiles.

6.3 Análisis

En la fig 6.2 se ilustra cómo se divide en marcos en la dirección longitudinal la estructura de dos niveles que allí aparece. Análogamente, en la dirección transversal la estructura se dividiría en cuatro marcos, dos interiores y dos exteriores.

El tomar en cuenta que la rigidez de la losa no está concentrada sobre el eje de columnas significa que hay que considerar la forma de trabajo estructural de sistemas losa plana-columnas, en la cual juegan un papel importante las torsiones en la losa. En forma cualitativa, el funcionamiento de estos sistemas en el intervalo elástico se describe a continuación, con base en las figuras indicadas.

La fig 6.3 muestra una viga y una losa plana de crujiás de orilla. A fin de simplificar el dibujo, supóngase que las columnas son infinitamente rígidas en flexión. En el caso de la viga, no hay giro relativo entre ella y la columna; la elástica de la viga es horizontal en su unión con la columna. En la losa plana, sí ocurre un giro relativo entre la elástica media de la losa y la columna; sobre el eje de columnas el giro relativo entre losa y columna es nulo, pero va creciendo hacia ambos lados y es máximo en los bordes laterales de la losa, θ_{\max} . Esta diferencia en giros relativos implica la torsión de la zona de losa ABCD, como se aprecia en la figura 6.3b.

En el análisis bajo cargas verticales, para tomar en cuenta el giro relativo entre la elástica media de la losa y la columna, el Comité ACI-318 (ref 1.2) supone que la losa se une a la columna por medio de un elemento que sólo trabaja a torsión, de manera que la conexión losa-columna de la fig 6.3 queda idealizada como se muestra en la fig 6.4 a. Un marco de losa plana y columnas de dos crujiás y dos niveles se idealizaría como se ilustra en la fig 6.4b. Así que, para tomar en cuenta que la rigidez a flexión de la losa no está concentrada sobre el eje de colum-

nas, una forma de proceder al tratar las cargas verticales sería idealizar los marcos como en la fig 6.4.b y analizarlos, p. ej. con el programa SAP IV. La rigidez a torsión del elemento que liga la losa con la columna se calcularía con base en la expresión que al respecto suministra el Reglamento ACI-318.

El giro que ocurre entre la posición media de la losa y la columna se presenta tanto bajo la acción de cargas verticales como de fuerzas horizontales; es decir, bastaría idealizar la estructura de interés en marcos como el de la fig 6.4b para analizarla bajo cargas verticales y bajo fuerzas horizontales, aunque para estas últimas habría que comprobar si son aplicables las propiedades del elemento a torsión del Reglamento ACI 318.

En las Normas se establecen formas simplificadas que permiten analizar estas estructuras como si fueran marcos planos. Ante fuerzas horizontales se reduce la rigidez de la losa al prescribir un ancho efectivo de $c_2 + 3h$, lo cual equivale en cierta forma a asociar a la losa el elemento a torsión; esto es, la flexibilidad de la losa se suma a la de este elemento por estar conectados en serie. Bajo cargas verticales se reduce la rigidez de las columnas a la mitad, lo que equivale a asociar a las columnas los elementos a torsión; aquí, la flexibilidad de las columnas se suma a la del elemento a torsión.

El ancho efectivo de losa para análisis por fuerzas laterales igual a $c_2 + 3h$ es el valor recomendado en la ref 6.1; este ancho es apreciablemente menor que el ancho efectivo que establecían las Normas Técnicas de 1977, porque toma en cuenta el giro inelástico que ocurre entre losa y columna bajo acciones alternantes como las impuestas por los sismos, circunstancia que no había sido considerada anteriormente. Esto último hace dudar que para análisis por fuerzas horizontales sea válido usar un elemento a torsión de las mismas características que el que recomienda el Reglamento ACI-318 para el análisis por carga vertical. Si se deseara analizar la estructura idealizándola con elementos a torsión, como en la fig 6.4, habría que definir un elemento a torsión cuyas propiedades condujeran a resultados semejantes a los que se obtienen analizando mar-

cos planos con ancho equivalente de losa igual a $c_2 + 3h$.

En losas aligeradas, la variación del momento de inercia puede tomarse en cuenta en forma aproximada usando el promedio de los momentos de inercia de la sección del centro del claro y de una sección adyacente a la columna, o al ábaco o capitel, que incluya la zona maciza que se deja alrededor de estos elementos. En el cap 16 de la referencia 6.2 se encuentran gráficas que permiten calcular rigideces angulares y factores de transporte de miembros con momento de inercia infinito en parte de su longitud, como es el caso de columnas y vigas equivalentes cuando se usa capitel; en la ref 6.3 se encuentran expresiones para valuar rigideces de entrepiso cuando se usan capiteles en las columnas. Es importante tomar en cuenta la presencia de los capiteles porque provocan que bajo carga vertical los momentos negativos de la losa se incrementen. Los capiteles deben reforzarse con anillos cerrados horizontales y barras paralelas a la superficie del capitel situadas en planos verticales y ancladas en la losa en sus extremos superiores y en la columna en los extremos inferiores (fig 6.5); en particular, este refuerzo es necesario si el sistema losa-columna debe resistir fuerzas de sismo.

La necesidad de considerar la totalidad de la carga en cada dirección ortogonal de la losa se pone de manifiesto con ayuda de la fig 6.6. Supóngase que se coloca refuerzo para tomar toda la carga en una dirección y no se usa refuerzo en la otra dirección, pensando que esto no es necesario en vista de que ya se tomó toda la carga en la primera dirección; la falla ocurriría en la dirección normal al refuerzo con una resistencia prácticamente nula, pues es evidente que el refuerzo usado en nada contribuye para evitar la falla en la otra dirección, según se aprecia en la figura.

En cuanto al ancho de las franjas de columna, se hace hincapié en que éste es igual, a cada lado del eje de columnas, a la cuarta parte del claro menor, tanto si la franja es paralela al claro largo como si lo es al claro corto. La razón de esto es que las curvaturas, y por tanto los momentos, tienden a concentrarse cerca del eje de columnas independien-

temente de cuánto se extiende la losa hacia los lados.

6.4 *Análisis aproximado por carga vertical*

El procedimiento aproximado que se incluye en la sección 6.4 es una simplificación del marco equivalente del Reglamento ACI-318, y se aplica sólo a estructuras que cumplan con las limitaciones señaladas en dicha sección. Se estableció comparando resultados de análisis de marcos típicos realizados tomando en cuenta los elementos a torsión, con resultados de análisis convencionales en los que se variaba la rigidez de las columnas (ref 6.4). La formulación del procedimiento se revisó considerando las observaciones de la ref 6.5. Las limitaciones que se imponen en la aplicación del procedimiento aproximado provienen de las características de los marcos utilizados en su desarrollo.

El procedimiento resuelve el principal problema que se tenía en el análisis por carga vertical de sistemas regulares losa plana-columnas, esto es, la obtención satisfactoria de los momentos en los claros extremos. Al no tomar en cuenta el giro relativo que ocurre entre la elástica media de la losa y la elástica de la columna, que se describió al comentar la sección 6.3, se obtienen en la losa momentos negativos mayores que los correctos en su unión con las columnas de orilla, y momentos negativos interiores y positivos menores. En los claros interiores la importancia de estos efectos es considerablemente menor. Al reducir la rigidez de las columnas, se aumenta el giro en los nudos con lo que se obtiene un efecto equivalente al del giro relativo entre losa y columna, y disminuyen los momentos negativos exteriores de claros extremos y aumentan los negativos interiores y los positivos.

Con el cálculo aproximado por carga vertical que dan las Normas, las mayores diferencias con resultados de análisis más precisos se tienen en los momentos de las columnas; pero bajo carga vertical los momentos en las columnas son pequeños comparados con los causados por el sismo,

que son los que rigen el diseño. Por otra parte, las columnas de estructuras con losa plana han fallado bajo carga vertical y sismo, pero no bajo carga vertical sola. Las consideraciones anteriores permiten juzgar que para el análisis por carga vertical no se requiere mayor precisión que la que da el procedimiento aproximado de la sección 6.4 de las Normas.

6.5 *Trasmisión de momento entre losa y columnas*

En parte, los comentarios que siguen también se refieren a la sección 2.5.1 h de las Normas.

Cuando en una conexión losa-columna se trasmite momento, una fracción de la transmisión ocurre por flexión en la losa, y el resto por torsiones y esfuerzos cortantes. En la fig 6.7a, el momento total que se trasmite entre losa y columna vale FH ; la parte que se trasmite por flexión es la representada por los dos momentos M_f ; la que se trasmite por esfuerzos cortantes es Va , y la que se trasmite por torsión es $2M_t$. En la fig 6.7b, se ilustra la transmisión de momentos entre columna y vigas de un marco; se aprecia que en esencia el mecanismo es semejante, con la diferencia de que en el caso de columna y vigas no hay transmisión por torsión. La fig 6.8 muestra las columnas en perspectiva.

El tratamiento que en las Normas se da a la transmisión de fuerzas y momentos entre losa plana y columna está basado principalmente en el Reglamento ACI 318, el cual a su vez tiene como antecedente el trabajo experimental de Hanson y Hanson (ref 6.6). En dicha investigación se ensayó una conexión de orilla y 16 uniones interiores semejantes a la de la fig 6.7a, con distintas combinaciones de carga y momento transmitidos. Las conclusiones principales fueron que la resistencia de la conexión puede

valuarse aceptablemente con la suposición de la variación lineal de los esfuerzos cortantes (fig 2.1 de las Normas y ref 6.7), y que, para columnas cuadradas, la porción del momento que se transmite por flexión es del orden del 60 por ciento del total (el 40 por ciento restante se transmite por fuerzas cortantes y torsiones).

Los porcentajes anteriores son la base de la expresión 2.26 de las Normas que da el valor de α , cuando las columnas son rectangulares. En columnas rectangulares, si el momento que se transmite es paralelo a la dimensión transversal mayor de la columna, la fracción que se transmite por esfuerzos cortantes y torsiones aumenta a más del 40 por ciento. En vista de que es preferible la transmisión por flexión a la que ocurre por cortantes y torsión, por la mayor ductilidad que la primera desarrolla, se recomienda mantener secciones de columna cuadradas o lo menos oblongas que sea posible.

El refuerzo de estribos de vigas ahogadas en la losa, que se prescribe en 2.1.5h, es el que ha demostrado ser más eficiente para mejorar la ductilidad de la losa en la vecindad de la columna, en particular ante acciones cíclicas. En buena parte, esto se explica por el hecho, comentado en párrafos anteriores, de que si la sección de la columna no difiere mucho de la cuadrada, en ambas direcciones la mayor parte del momento se transmite por flexión de la losa, es decir por el trabajo en flexión y cortante de la viga ahogada, la cual cuenta con barras longitudinales y estribos, y trabaja efectivamente como una viga ancha que llega a la columna. Aquí se hace hincapié en la importancia de tomar en cuenta el refuerzo mínimo de estribos que se pide en 2.1.5h.

Los nuevos esfuerzos cortantes admisibles están basados en los resultados del trabajo descrito en la ref 6.1. Para tomar en cuenta el efecto de las acciones repetidas, el factor de resistencia se baja a 0.7 cuando se incluye el sismo en la combinación de acciones.

El momento αM que se transmite por esfuerzos cortantes y torsiones se obtiene de aplicar el factor α al momento que actúa de la losa sobre la co-

lumna cuando la fuerza cortante está aplicada en el centroide de la sección crítica que se define en 2.1.5h. La fracción que se trasmite por flexión se obtiene de multiplicar el mismo momento M por $(1-\alpha)$. En una conexión interior, M es el momento en el centro del nudo, pues el centroide de la sección crítica queda en el centro del nudo. En una conexión de orilla, el centroide de la sección crítica queda excéntrico con respecto al centro del nudo y el momento que se afecta por α es $M-Ve$, de acuerdo con la fig 6.9. El momento Ve es el necesario para transportar la fuerza V del centro del nudo al centroide de la sección crítica. La fuerza V aplicada en el centroide de la sección crítica origina una distribución uniforme de esfuerzos cortantes verticales en dicha sección (V_u/A_c). En la fig 2.1 de las Normas se dan expresiones para valuar esfuerzos cortantes en conexiones losa-columna interiores. Para conexiones de orilla se aplican las fórmulas de la fig 32 de las Ayudas de Diseño.

El ancho ($c_2 + 3h$) en que se trasmite por flexión la fracción $(1-\alpha)M$ es mayor que el ancho de la sección crítica ($c_2 + d$), lo cual crea una cierta inconsistencia en el equilibrio del nudo, pero no invalida a lo antes expuesto. Dicho incremento en el ancho se realizó artificialmente en el Reglamento ACI-318, a fin de no causar congestión del refuerzo de la losa para flexión.

6.6 Dimensionamiento del refuerzo para flexión

El que el refuerzo para momento negativo exterior se coloque como si fuera para sismo quiere decir que la totalidad de este momento debe resistirse con refuerzo colocado en un ancho igual a $c_2 + 3h$ y que al menos el 60 por ciento de él debe cruzar el núcleo de la columna. Para este momento, la franja de columna no incluida en el ancho $c_2 + 3h$, así como las franjas centrales, contarán con el refuerzo mínimo por flexión y por cambios volumétricos de 2.1.2 a) y 3.10, el cual debe tenerse en cuenta en toda la losa.

Cuando hay transmisión importante de momento entre losa y columna, como ocurre en las conexiones de orilla bajo carga vertical o en todas las conexiones cuando actúa el sismo, los momentos en la proximidad del eje de columnas aumentan con relación a las que allí ocurren en claros interiores bajo carga vertical; de aquí el requisito de concentrar el refuerzo para sismo y el de conexiones de orilla bajo cargas verticales cerca del eje de columnas. Los coeficientes de 6.9 para distribuir los momentos en franjas de columna y centrales son aplicables a claros interiores bajo carga vertical.

El término "refuerzo necesario por sismo" que se menciona en el párrafo II se refiere al refuerzo necesario para el momento que es igual a la diferencia entre el momento de diseño, M_u , bajo la combinación carga muerta, carga viva reducida y sismo, y el momento de diseño bajo la combinación carga muerta y carga viva máxima. De acuerdo con lo anterior, en la fig 6.10, que representa las envolventes de momentos de diseño, M_u , en dos claros interiores de una losa plana, los momentos negativos necesarios por sismo están representados por las zonas con rayado abierto y los positivos por las zonas con rayado cerrado.

6.7 Disposiciones complementarias sobre el refuerzo

Las dos primeras disposiciones complementarias tienen por objeto tomar en cuenta variaciones en la posición de los puntos de inflexión, en particular a causa de que la intensidad del sismo exceda a la prevista.

El requisito para el refuerzo positivo de las franjas de columnas va encaminado a asegurar que estas franjas cuenten con una cierta resistencia mínima autónoma del resto de la losa y que por sí solas en un momento dado formen marcos con las columnas.

La cantidad que se pide de refuerzo de lecho inferior que atraviesa el núcleo de una columna suministra cierta resistencia a flexión positiva en caso de que durante un sismo extraordinario se invierta el signo del momento flexionante en la losa cerca de la columna. Otra función impor-

tante que tiene este refuerzo es disminuir el riesgo de falla catastrófica por punzonamiento de la losa, pues ésta podría quedar colgando de dicho refuerzo en caso de ocurrir el punzonamiento (ref 6.8). Se hace notar que para este fin no es útil el refuerzo de la losa del lecho superior, porque se separaría de ella al desprenderse el recubrimiento.

Al revisar el refuerzo máximo por flexión en losas aligeradas, debe cuidarse de no incluir los bloques de aligeramiento al valuar los anchos de las secciones resistentes.

6.8 *Secciones críticas para momento*

En una losa plana que falla por flexión se forman líneas de fluencia negativas que son tangentes a las caras de los apoyos interiores. Por esta razón, la sección crítica se supone a $c/2$ del eje de columnas. En un apoyo exterior no se forma línea de fluencia a menos que exista una viga de orilla con suficiente rigidez y resistencia en torsión; sin embargo, el acero de flexión de la losa fluye en el paño de la columna, por lo que también en las columnas de orilla procede suponer la sección crítica a $c/2$.

6.9 *Distribución de los momentos en las franjas*

Los coeficientes para distribuir los momentos en las franjas de columna y centrales provienen de soluciones elásticas de tableros interiores de losas planas macizas. Pueden aplicarse al momento positivo y al negativo interior de tableros de orilla; el refuerzo para el momento negativo exterior de tableros de orilla debe distribuirse como se establece en el inciso I de 6.6. En losas aligeradas son aplicables los coeficientes con tal que en cada dirección haya al menos seis hileras de casetones o alvéolos entre ejes de columnas.

6.10 *Efecto de la fuerza cortante*

En lo esencial, el tema queda cubierto por los comentarios de 2.1.5h) y

de 6.5. Si existe una abertura próxima a una columna, se recomienda tratar la conexión como si fuera de orilla, suponiendo que el borde de la losa es el borde de la abertura. Se hace destacar la importancia de tomar en cuenta el refuerzo mínimo que se prescribe al final de 2.1.5 h), a fin de contar con cierta capacidad de deformación inelástica en las conexiones losa-columna.

6.11 Peraltes mínimos

En un tablero interior de losa plana bajo carga uniforme, la flecha elástica en el centro de él puede expresarse como $\Delta = \alpha w L^4 / E h^3$, donde w es la carga por m^2 , L es el claro mayor del tablero, h el espesor de la losa, E el módulo de elasticidad y α un coeficiente que depende de la relación de claro largo a corto. Si se desea que Δ/L no exceda de un cierto valor, según la expresión anterior el espesor debe cumplir con

$$h \geq \sqrt[3]{\alpha \frac{w}{E \Delta / L}} L = A \sqrt[3]{w} L \quad (1)$$

condición que es la base de la expresión 6.2 de las Normas. El factor $(1-2c/3L)$ toma en cuenta el efecto de la dimensión de la columna o capitel, el cual es favorable.

El coeficiente k se hizo depender también de f_s atendiendo a las consideraciones siguientes:

En una sección agrietada, la curvatura es igual a $\epsilon_s / d (1-k)$, en que ϵ_s es la deformación unitaria del acero a tensión y kd la profundidad del eje neutro. En términos del esfuerzo, f_s , y del módulo de elasticidad, E_s , queda

$$\frac{f_s}{E_s} / d (1-k)$$

Integrando estas curvaturas, se llega a que la flecha en el centro del

tablero tiene la forma:

$$\Delta = B \frac{f_s}{d} L^2 \approx B \frac{f_s}{h} L^2$$

Si Δ/L no debe exceder a un cierto valor, el espesor debe cumplir con

$$h \geq \frac{B f_s L}{\Delta/L} = C f_s L \quad (2)$$

Para el coeficiente k de la ec 6.2 se tomó un promedio geométrico pesado entre los coeficientes de L en las ecs 1 y 2 anteriores, a fin de tomar en cuenta que hay más secciones no agrietadas que agrietadas:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{3}{\sqrt{w}}\right)^3 f_s} = \sqrt[4]{w f_s}$$

El criterio anterior ha estado vigente desde el Reglamento DDF de 1966 y fue propuesto por los autores de dicho documento.

En tableros de orilla la flecha máxima es mayor que en tableros interiores debido a la falta de continuidad en el borde de orilla. En losas aligeradas la flecha máxima es mayor que en losas macizas por la menor rigidez de aquéllas. Normalmente un piso formado por losa plana tiene tableros de orilla y tableros interiores; sin embargo, se usa un espesor constante en todo el piso, definido por los tableros de orilla. Podría suponerse que todos los tableros son interiores si la losa sobresale en voladizo entre cuatro y cinco veces su espesor, en todos los ejes exteriores de columnas.

En un piso de losa plana aligerada que tenga tableros de orilla el espesor se determina aplicando un factor igual a 1.2 x 1.2, al espesor que resulte de la ec 6.2.

6.12 Dimensiones de los ábacos

Un ábaco es una zona de la losa de mayor espesor, que se deja alrededor de las columnas o de los capiteles. Las funciones del ábaco son mejorar las condiciones de transmisión de fuerzas y momentos entre losa y columna y aumentar el brazo interno del refuerzo negativo de la losa para flexión. Además, permite disminuir el espesor de la losa, y aumenta la rigidez lateral de la estructura. Los requisitos de dimensiones que se establecen en 6.12 son necesarios para que los ábacos cumplan con las funciones mencionadas.

6.13 Aberturas

El criterio adoptado en las Normas para tomar en cuenta el efecto de aberturas es el del Reglamento ACI-318. El efecto general de las aberturas es interrumpir la continuidad y uniformidad del flujo de esfuerzos de flexión y cortantes, y provocar concentraciones de esfuerzos. La influencia de una abertura depende de su localización y de su tamaño.

Las disposiciones de 6.13 se refieren más bien al efecto de las aberturas sobre los esfuerzos de flexión en la losa, y ponen de manifiesto que el efecto de una abertura es mayor en franjas de columna que en franjas centrales. Las disposiciones para tomar en cuenta el efecto de las aberturas sobre los esfuerzos cortantes se encuentran en la sección 2.1.5h y a ellas se hace referencia en el último párrafo de 6.13.

La intención de colocar a los lados de una abertura el refuerzo que en ella se interrumpe es mantener el momento de fluencia total necesario para el equilibrio en una sección de la losa que cruce por la abertura. En ciertos casos podría ocurrir que la sección se volviera sobrerreforzada, al disminuir el área de concreto a compresión y no disminuir el acero de refuerzo. Por esta razón se pide en las Normas revisar que no se exceda el refuerzo máximo admisible en las secciones afectadas por aberturas y se use sólo el ancho que resulte de descontar las aberturas.

REFERENCIAS

- 6.1 Rodríguez M, "Diseño sísmico de conexiones entre losas planas reticulares y columnas", Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D F (julio 1979)
- 6.2 Ferguson, Ph M, Breen, J E y Jirsa, J O, "Reinforced Concrete Fundamentals", Quinta edición, John Wiley & Sons, Inc (1988)
- 6.3 Loera, S, "Contribución a un manual para diseño de losas de concreto reforzado", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D F (1964)
- 6.4 Loera, S, "Revisión de los criterios de análisis del Reglamento DDF para edificios con losas planas", Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D F (agosto 1983)
- 6.5 Jara M e Iglesias J, "Comentarios sobre la revisión de los criterios de análisis del Reglamento D D F para edificios con losas planas" (ref 6.4), Informe interno, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México, D F (1984)
- 6.6 Hanson, N W y Hanson J M, "Shear and moment transfer between concrete slabs and columns", Journal of the PCA Research and Development Laboratories, Portland Cement Association, Skokie, Illinois (enero 1968)
- 6.7 Di Stasio, J y Van Buren, M P, "Transfer of bending moment between flat plate floor and column", ACI Journal (sept 1960)
- 6.8 Hawkins, N M y Mitchell, D, "Progressive collapse of flat plate structures", ACI Journal (julio 1979)

7. CONCRETO PRESFORZADO

7.1 *Introducción*

Este capítulo tiene adiciones importantes con relación al de las Normas de 1977. La más destacada consiste en tomar en cuenta explícitamente el concepto de presfuerzo parcial. En la revisión de este capítulo tuvo una intervención relevante el Ing. Constancio Rodríguez C. del grupo Riobóo, S.A.

En las Normas se pide que para elementos presforzados y parcialmente presforzados sólo se use concreto clase 1, a causa principalmente de la menor deformación diferida (creep) que sufre este concreto respecto del tipo 2, con la consiguiente menor pérdida de presfuerzo por ese concepto.

7.2 *Presfuerzo parcial y presfuerzo total*

El concepto de presfuerzo parcial ha experimentado algunos cambios. P.W. Abeles (ref 7.1) consideraba que una sección a flexión tiene presfuerzo total cuando la sección completa permanece en compresión bajo cargas de servicio, y que tiene presfuerzo parcial cuando bajo cargas de servicio existen esfuerzos de tensión de cierta magnitud y se forman grietas de ancho controlado. En las Normas se adoptó como base la definición pro-

puesta más recientemente por A.E. Naaman (ref 7.2) y se complementó con valores del índice de presfuerzo. La definición de Naaman dice: "una condición necesaria y suficiente para que a un miembro se le llame parcialmente presforzado es que contenga refuerzo presforzado y no presforzado destinados a resistir cargas externas de la misma naturaleza". La forma del índice de presfuerzo que se usa en las Normas también se debe a Naaman. Normalmente hay correspondencia entre las definiciones de P. Abeles y de Naaman.

En general, se recurre al presfuerzo parcial en elementos con carga viva que actúa sólo muy ocasionalmente, como los de azoteas, que si se diseñaran con presfuerzo total presentarían la mayor parte del tiempo contraflechas notorias indeseables debidas al presfuerzo. Al usar en este caso el presfuerzo parcial, se admite que bajo la carga viva máxima exista cierto agrietamiento, pero se logra que durante los lapsos en que no hay carga viva, o ésta es muy pequeña, no ocurran contraflechas.

También se recurre al presfuerzo parcial cuando se desea aumentar, para la misma resistencia, la capacidad del elemento de deformarse sin fallar, o se desea aumentar la capacidad a cargas de impacto.

7.3 Revisión de los estados límite de falla

En la fig 7.1 se ilustra la aplicación de las hipótesis generales de flexión en la obtención del momento resistente de una sección presforzada que falla por compresión; la deformación inicial del acero debida al presfuerzo es la cantidad ϵ_{se} .

La falla de una sección presforzada puede deberse a la ruptura del acero antes que el concreto se aplaste, o, como en la fig 7.1, al aplastamiento del concreto antes que se rompa el acero. Para definir si la viga falla por tensión o por compresión, se supone que se rompe el acero, es decir $\epsilon_{sp} = \epsilon'_s$ y se calcula la deformación máxima del concreto, ϵ_c :

$$\epsilon_c = (\epsilon'_s - \epsilon_{se}) \frac{c}{d-c}$$

Si ϵ_c resulta menor que 0.003, la falla es por ruptura del acero y el momento resistente vale $F_R A_{sp} f_{sr} z$. El brazo interno, z , se obtiene a partir de la profundidad del bloque de esfuerzos, la que a su vez se determina del equilibrio de fuerzas ($T = C$). Si ϵ_c resulta mayor que 0.003, o igual, la falla es por aplastamiento del concreto; en este caso, no se conoce directamente el esfuerzo en el acero, f_{sp} , cuando se alcanza el momento resistente, y se determina por tanteos; el momento resistente es $F_R A_{sp} f_{sp} z$.

Las fórmulas de la sección 7.3.1, que permiten valuar aproximadamente el esfuerzo en el acero de presfuerzo, f_{sp} , cuando se alcanza el momento resistente, están basadas en resultados de ensayos de vigas que sólo tenían acero presforzado, fabricadas con concreto de resistencia a compresión aproximadamente igual a 350 kg/cm^2 (ref 1.3). Después, las expresiones originales se adaptaron para aplicarlas a vigas con presfuerzo parcial (ref 7.3).

La condición $\epsilon_{sp} \geq \epsilon_{yp}/0.75$ para determinar las cantidades máximas de acero de presfuerzo y ordinario tiende a asegurar una cierta curvatura cuando se alcanza el momento resistente, según se aprecia en la fig 7.1; con esto se evita que la falla del elemento sea frágil.

7.4 Revisión de los estados límite de servicio

Se recuerda la necesidad de, en elementos con presfuerzo, invariablemente revisar la resistencia y el comportamiento en condiciones de servicio. La revisión en condiciones de servicio incluye principalmente el agrietamiento, las flechas y las vibraciones.

Los esfuerzos admisibles que se dan en las Normas para miembros con presfuerzo total son esencialmente una forma indirecta de limitar el agrietamiento. Las flechas de estos elementos deben calcularse cuidadosamente, pues suele tratarse de elementos esbeltos poco rígidos. En particular, debe tenerse presente el grado de variación que con el tiempo va a tener la carga viva. Si ésta actúa con su intensidad máxima sólo esporádicamente, pueden presentarse contra-flechas indeseables, que tienden a au-

mentar al paso del tiempo a causa del creep del concreto. Por el contrario, si la carga viva máxima actúa casi continuamente, el creep tenderá a que con el tiempo aumente la flecha hacia abajo. En la ref 7.4 se dan ciertas bases para el cálculo de flechas en elementos con presfuerzo total.

Los elementos parcialmente presforzados generalmente se diseñan de modo que se agrieten bajo condiciones de servicio. En el cálculo de flechas de estos elementos se usa el concepto de momento de inercia efectivo, de la forma $A I_g + B I_{cr}$, que toma en cuenta el agrietamiento a lo largo de la viga. (I_g e I_{cr} son, respectivamente, los momentos de inercia de la sección bruta y de la sección transformada agrietada). Las referencias 7.2 y 7.5 tratan el problema de la revisión del agrietamiento y de las flechas de elementos parcialmente presforzados.

La recomendación del inciso 7.4.2 en el sentido de que el momento de descompresión sea al menos igual al que produce la carga muerta más la viva media tiene el propósito de evitar contraflechas no deseadas durante el funcionamiento normal del elemento. En la fig. 7.2 se ilustra la recomendación anterior. El primer diagrama de esfuerzos en el concreto corresponde al efecto del presfuerzo sólo; el otro diagrama corresponde al efecto del presfuerzo más el momento de descompresión, cuya magnitud se recomienda que sea igual al valor antes indicado.

Las restantes disposiciones del capítulo en esencia también están basadas en las propuestas del personal técnico de Riobóo, S.A. que intervino en el grupo que asesoró la elaboración de las Normas.

REFERENCIAS

- 7.1 Abeles, P.W, "Design of Partially Prestressed Concrete Beams", ACI Journal (octubre 1967)
- 7.2 Naaman, A E, "Partially Prestressed Concrete Members Under Static Loading: American Perspective", Reporte N° UMEE 84R2, Departamento

de Ingeniería Civil, Colegio de Ingeniería, Universidad de Michigan
(junio 1984)

- 7.3 Naaman, A E, "A Proposal to Extend Some Code Provisions on Reinforcement to Partial Prestressing", PCI Journal (marzo-abril 1981)
- 7.4 Nilson, H A y Winter G, "Design of Concrete Structures", décima edición, Mc Graw-Hill Book Co (1986)
- 7.5 Naaman, A E, "Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals", Mc Graw-Hill Book Co, Nueva York (1983)

8. CONCRETO PREFABRICADO

En forma semejante al capítulo de concreto presforzado, las disposiciones para concreto prefabricado en buena medida fueron propuestas por el personal técnico del grupo Riobóo, S.A. Son el resultado de la experiencia que dicho grupo ha tenido en el diseño y construcción de estructuras pre fabricadas en nuestro medio.

La prefabricación puede definirse como un sistema constructivo en el que los elementos estructurales se fabrican en una posición distinta de la que tendrán en la estructura terminada (ref 8.1). Incluye varias modalidades, como las estructuras construidas totalmente con elementos prefabricados en plantas especiales fijas o en plantas montadas en el lugar de la obra, y las estructuras mixtas formadas por elementos prefabricados y elementos colados en el lugar.

Entre las ventajas principales que tiene la prefabricación están las siguientes: a) economía en cimbra y obra falsa, b) economía en mano de obra, c) rapidez de ejecución, etc. Como desventajas pueden mencionarse las siguientes: a) necesidad de invertir en equipo especial, b) dificultad para lograr capacidad de deformación inelástica en las conexiones ante acciones repetidas, c) dificultad para lograr rigidez en la estrucu

tura por la falta de monolitismo de las conexiones, d) necesidad de programar y proyectar con detalle, etc. Como consecuencia principalmente de la ventaja y la desventaja señaladas con la letra a), surgen las dos condiciones siguientes para que la prefabricación tenga éxito: 1) que el volumen de obra sea considerable, y 2) que exista la posibilidad de estandarizar en grado suficiente los elementos estructurales. Pero no es suficiente que se cumplan las dos condiciones anteriores, sino que en cada caso debe hacerse una comparación de costos cuidadosa (ref 8.1).

La desventaja relativa a la dificultad de lograr capacidad de deformación inelástica en las conexiones bajo cargas repetidas es la razón por la que se establece que las estructuras prefabricadas de concreto se diseñen por sismo con un factor Q igual a 2, o cuando mucho 3 si así lo juzga procedente el Departamento del Distrito Federal. Esta circunstancia influye en la comparación de costos que se mencionó en el párrafo anterior.

En vista de la importancia que tiene el diseño y la construcción adecuados de las conexiones, en las Normas se incluyó una serie de requisitos específicos para esas zonas de unión.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

- 8.1 Robles, F F, "Prefabricación de Estructuras de Concreto", Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, México, D F (1964)
- 8.2 ACI-ASCE Committee 512, "Precast Structural Concrete in Buildings", ACI Journal (nov 1974)
- 8.3 American Concrete Institute, "Precast Concrete: Handling and Erection", Monograph 8, Detroit (1974)
- 8.4 Prestressed Concrete Institute, "Design and Typical Details of Connections for Precast and Prestressed Concrete", Chicago (1988).

- 8.5 Mokk L, "Construcciones con Materiales Prefabricados de Hormigón Armado", Editorial URMO, Bilbao (1969)
- 8.6 Fernández Ordóñez J A, "Prefabricación, Teoría y Práctica", (dos tomos), Editores Técnicos Asociados, S.A., Barcelona (1974)
- 8.7 Applied Technology Council, "Proceedings, Workshops on Design of Prefabricated Concrete Buildings for Earthquake Loads", ATC-8 Report, Berkeley, California (1981)

9. CONCRETO SIMPLE

Un ejemplo de uso de concreto simple se tiene en algunas pilas de cimentación.

10. CONCRETO LIGERO

En general, para concreto simple y concreto ligero se han conservado los criterios del Reglamento de 1966. Se permite el uso de concreto ligero sin autorización especial del Departamento del D.F. sólo en elementos secundarios, debido a la escasez de experiencia y estudios con los concretos ligeros locales.

11. CONSTRUCCION

Las modificaciones más importantes que tuvo este capítulo con respecto a las Normas de 1977 están en la parte relativa al control del concreto. Los comentarios que aquí se incluyen cubren los principales aspectos del tema mencionado.

11.3 *Concreto*

11.3.1 Materiales componentes

La verificación de la calidad de los materiales componentes del concreto antes del inicio de una obra permite seleccionar aquéllos que potencialmente tienen las características requeridas para fabricar la clase de concreto que se necesita en la obra. En la verificación se hace énfasis en las propiedades directamente relacionadas con la resistencia, rigidez y durabilidad del concreto.

Pedir que la verificación de la calidad se haga en un laboratorio autorizado por el SINALP permite tener cierta confianza en que los equipos y métodos de ensaye empleados en la realización de las pruebas son los indicados por las normas respectivas; sin embargo, en todo caso es el

Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director Responsable de Obra cuando no se requiera Corresponsable, el que asuma la responsabilidad de los resultados de ese laboratorio.

El coeficiente volumétrico se define como la relación que existe entre la suma de los volúmenes de un grupo de partículas representativas del agregado (50 mínimo) y la suma de los volúmenes de las esferas que circunscriben a cada partícula.

Limitar el coeficiente volumétrico de la grava triturada que se emplea para el concreto clase 1 a un valor mínimo de 0.20, permite obtener mezclas trabajables con relaciones arena/agregados totales relativamente bajas, con lo que se propicia que el concreto resultante se contraiga menos y en general que sea más rígido.

Para el concreto clase 2 no se especifica ningún límite para el coeficiente volumétrico, porque los agregados gruesos que usualmente se emplean en la ciudad de México para este concreto (andesitas) tienen formas satisfactorias, con valores de coeficiente volumétrico superiores al mínimo deseable.

El porcentaje de material más fino que la malla F 0.075 (No 200) que se permite que tenga la arena en las Normas es superior al límite aceptado internacionalmente (5 por ciento) para este material. Lo anterior se hizo ante la imposibilidad de obtener en zonas cercanas a la ciudad de México arenas de mejor calidad, o de disponer de suficiente agua para permitir su lavado. Sin embargo, a fin de subsanar aunque sea en parte el problema que implica el uso de arenas y gravas con altos porcentajes de finos, se trata de evitar el empleo de finos de origen arcilloso, que son los que más detrimento causan en las propiedades del concreto. Esto se logra mediante la limitación de la contracción lineal de los finos de la arena y la grava.

Para determinar la contracción lineal de los finos de la arena y la grava de una muestra representativa de estos materiales, se obtienen por

separado los finos que pasan la malla No 40, se mezclan estos finos en la proporción en que intervienen en la mezcla de concreto y se llevan a la condición de humedad correspondiente al límite líquido, de manera semejante a como se hace con las muestras de suelo. La contracción que presentan estos finos después de secarlos al ambiente hasta que su color cambie de oscuro a claro, y en horno por 18 horas a temperatura de 100-110°C, no debe exceder a los límites especificados en estas Normas, con objeto de que su efecto no propicie detrimento significativo en la calidad del concreto (ref 11.1).

11.3.2 Elaboración del concreto

La mencionada norma NOM C 155 "Industria de la Construcción. Concreto hidráulico. Especificaciones" incluye aspectos relacionados con los requisitos para los equipos de dosificación, mezclado, transporte y entrega de concreto, que son aplicables tanto a los concretos premezclados como a los hechos en obra.

11.3.3 Requisitos y control del concreto fresco

Las frecuencias de muestreo propuesta para las pruebas de revenimiento y peso volumétrico permiten identificar aquellas mezclas que tienen pocas probabilidades de alcanzar las características especificadas del concreto, en una etapa en la que se puede evitar la colocación de concreto de calidad deficienté en la estructura.

Con la aparición en el mercado de aditivos superfluidificantes de larga duración, se presenta la posibilidad de incorporar estos aditivos en planta con las ventajas de tener un mejor control en su dosificación. Como inconveniente se tiene el que no se pueda verificar el revenimiento del concreto antes de la incorporación del aditivo.

La prueba de peso volumétrico resulta ser una verificación muy sencilla de realizar para discriminar entre un concreto clase 1 ó 2. Debido a que el volumen concreto que se maneja en la prueba es pequeño, se reco-

mienda tener cuidado especial en la calibración del equipo.

11.3.4 Requisitos y control del concreto endurecido

La verificación del cumplimiento con el requisito de resistencia a compresión se basa en el criterio de aceptar una probabilidad de no alcanzar la resistencia especificada de 10 por ciento para el concreto clase 1 y de 20 por ciento para el clase 2. Para ambos, se parte de la hipótesis de que la desviación estándar de los resultados de ensaye es independiente del nivel de resistencia e igual a 33 kg/cm^2 , y de que la regla de verificación conduce a una probabilidad de 2.3 por ciento de que a un productor le sea rechazado su concreto cuando cumple en el límite con la calidad especificada, ref 11.2.

El objeto de especificar una resistencia mínima en las muestras individuales es evitar que en la estructura quede alguna zona que, aunque de poca extensión, sea demasiado débil; por otra parte, cumplir con la regla del promedio de las muestras evita que quede alguna zona de cierta extensión que, aunque no tan débil como en el caso anterior, tenga resistencia media baja. Ambas situaciones son indeseables para la seguridad de la estructura.

En la evaluación de la resistencia del concreto en la estructura a partir del ensaye de corazones hay que tener presente que conviene que el diámetro de los corazones sea igual o mayor a tres veces el tamaño máximo del agregado grueso, y que esta relación nunca debe ser menor que dos veces ese tamaño. Cabe mencionar que la relación diámetro/tamaño máximo del agregado grueso influye en forma importante en la resistencia a compresión que se alcanza en el corazón y que ésta es menor mientras más pequeña es dicha relación, ref 11.3.

Por otra parte, si la relación longitud a diámetro del corazón es inferior a dos, pero mayor que uno, se hace la corrección apropiada para la relación longitud a diámetro obtenida, multiplicando la resistencia a compresión alcanzada por los factores indicados en la siguiente tabla. No se ensayarán corazones que tengan su longitud inferior a 95 por cien-

to de su diámetro, antes del cabeceo, o inferior a su diámetro, después del cabeceo.

Relación longitud a diámetro del corazón, l/d	Factor de corrección por resistencia
2.00	1.00
1.75	0.98
1.50	0.96
1.25	0.93
1.00	0.87

Para valores intermedios se interpola linealmente.

Estos factores de corrección son aplicables a concretos de peso normal y a concretos ligeros con pesos volumétricos comprendidos entre 1.600 y 1.900 kg/m^3 , y, en ambos casos, resistencias a compresión de entre 150 y 400 kg/cm^2 . Se aplican indistintamente a concretos que se ensayan en condición seca o húmeda.

Para que los corazones estén en condición "seca" se requiere dejarlos expuestos al aire por un lapso de 7 días a una temperatura comprendida entre 15 y 27°C y a una humedad relativa inferior a 60 por ciento; el ensaye se realiza en esa condición. Para la condición húmeda, los corazones se sumergen en agua saturada con cal a $23 \pm 1.7^\circ\text{C}$, al menos por las 40 horas previas a su ensaye, y se prueban inmediatamente después de retirarlos del agua. Durante el lapso comprendido entre su remoción del agua y su ensaye, los corazones se conservan en condición húmeda, cubriéndolos con una manta absorbente saturada de agua.

Los valores $0.85 f'_c$ y $0.75 f'_c$ que se emplean en la evaluación de la resistencia a compresión del concreto clase 1 por medio de corazones corresponden a los mínimos de una distribución normal de probabilidades para valores medios de tres resultados de ensaye y para valores individuales, respectivamente. Para el concreto clase 2, las resistencias

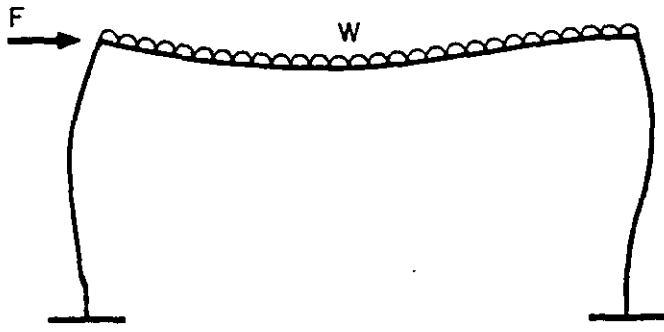
mínimas de los corazones correspondientes al valor medio de tres resultados de ensaye y a las resistencias individuales son $0.80 f'_c$ y $0.70 f'_c$, respectivamente. Para ambos concretos y reglas de verificación, se considera una desviación estándar de 45 kg cm^2 y una probabilidad de no alcanzar las resistencias mínimas de 2.5 por ciento, ref 3.

La verificación del cumplimiento con el módulo de elasticidad parte de considerar una probabilidad de 20 por ciento de tener resultados inferiores a $14000 \sqrt{f'_c}$ para el concreto clase 1 y a $8000 \sqrt{f'_c}$ para el clase 2. La desviación estándar de la distribución de probabilidades para los concretos clase 1 se supuso igual a $1000\sqrt{f'_c}$ y para el clase 2 a $700 \sqrt{f'_c}$, en kg/cm^2 . La regla de verificación se establece en estas normas con una probabilidad de tener valores inferiores a los mínimos estipulados de 1 en 100. Para ambos, f'_c representa la resistencia a compresión especificada del concreto, en kg/cm^2 .

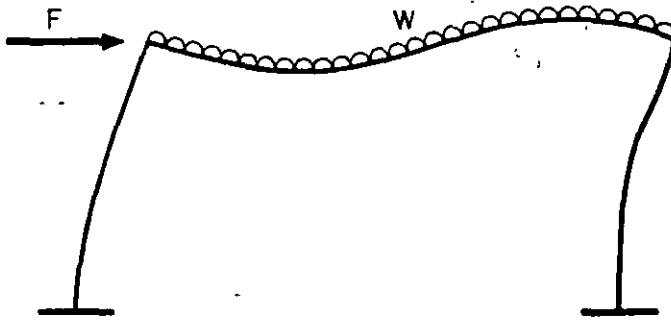
Debido a que la dispersión de los resultados de ensaye en la prueba del módulo de elasticidad es mayor que la alcanzada en la prueba de resistencia a compresión, se pide que en la determinación del módulo de elasticidad se empleen al menos tres especímenes.

REFERENCIAS

- 11.1 CJ Mendoza y M Mena "Influencia de las características de los agregados en las propiedades de los concretos estructurales del DF", Revista IMCYC No 192, Vol XXV (mayo 1987)
- 11.2 R Meli, CJ Mendoza "Revisión de las reglas de verificación de calidad del concreto", Revista Ingeniería (por publicarse)
- 11.3 CJ Mendoza "Evaluación de la resistencia del concreto en la estructura por medio del ensaye de corazones", Revista Construcción y Tecnología (por publicarse).

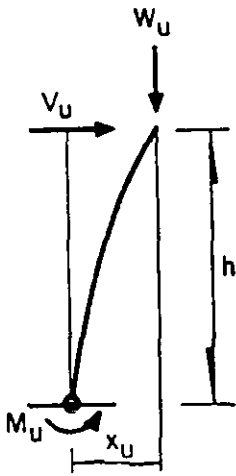


(a)



(b)

Fig 1.1 Influencia de la magnitud de la fuerza horizontal sobre la forma de la elástica



$$M_u = V_u h + W_u x_u$$

R = Rigidez de entrepiso,
sin carga vertical

$$Q = \frac{x_u}{x_y} ; Rh = \frac{M_u}{x_y}$$

$$R'h = \frac{M_u}{x_u} = \frac{M_u}{Qx_y} = \frac{R}{Q} h$$

$$R' = \frac{R}{Q}$$

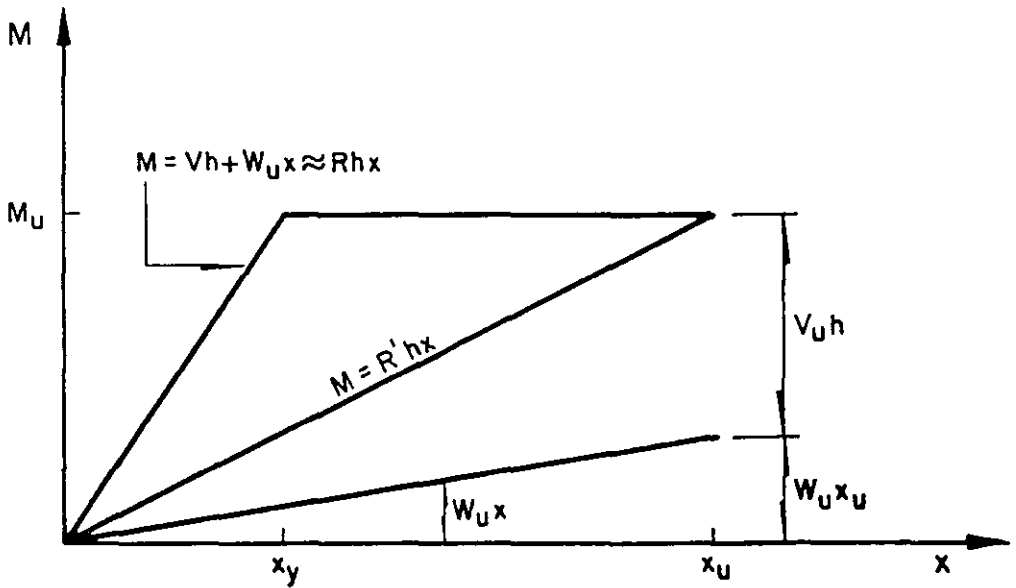
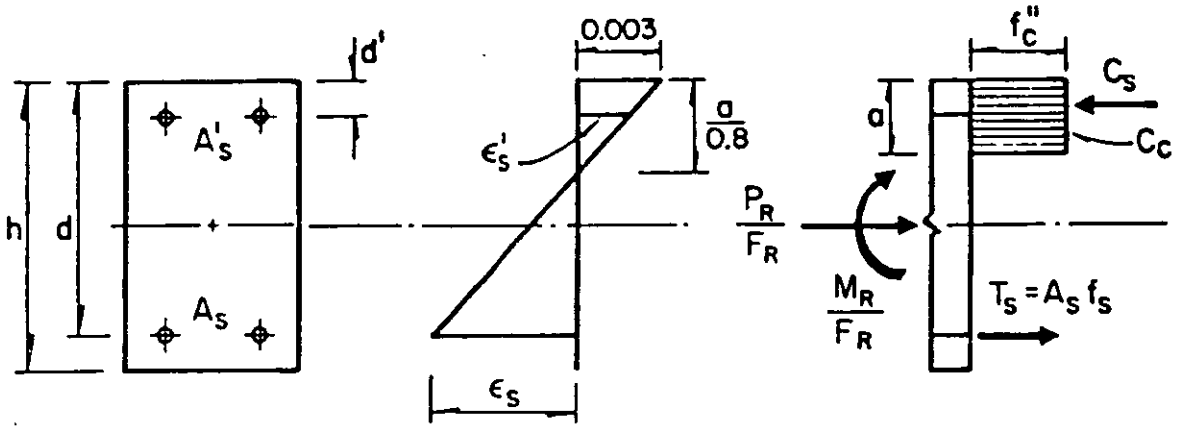


Fig 1.2 Efectos de esbeltez en una estructura elastoplástica, suponiendo que Q fuera el factor de ductilidad



$$\text{de } \Sigma F = 0; \quad \frac{P_R}{F_R} = C_c + C_s - T_s$$

$$\Sigma M = 0; \quad \frac{M_R}{F_R} = (T_s + C_s) \frac{d - d'}{2} + C_c \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

Fig 2.1. Aplicación de las hipótesis para calcular resistencias y de las condiciones de equilibrio, a una sección rectangular

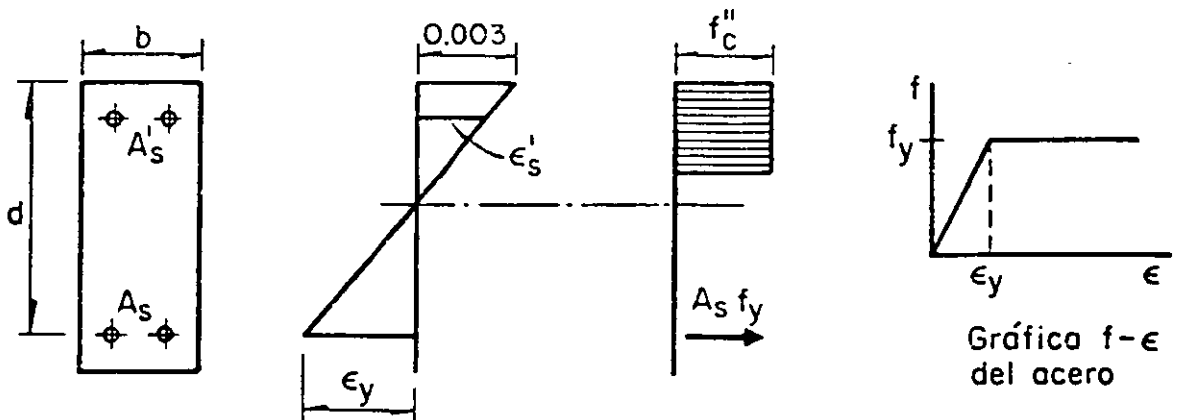


Fig 2.2. Condiciones de falla balanceada

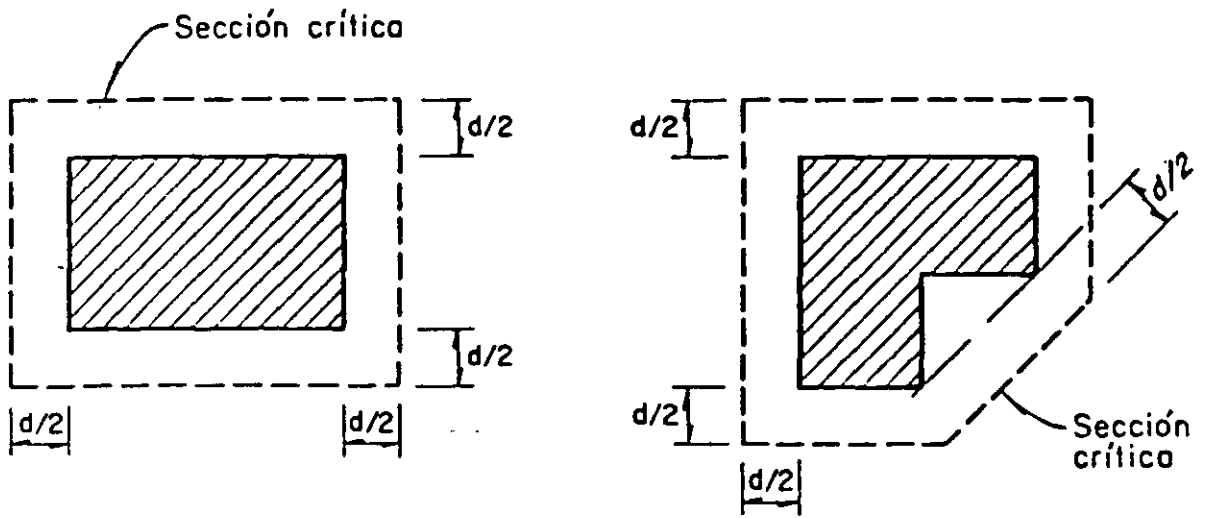
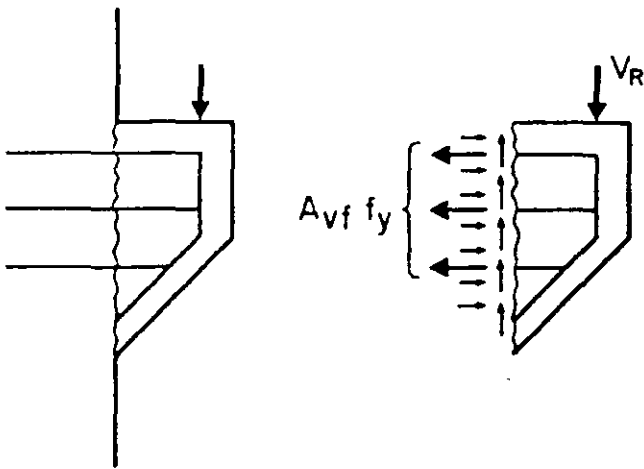


Fig 2.3. Ejemplos de secciones críticas por tensión diagonal en losas y zapatas



Del equilibrio vertical

$$V_R = A_{vf} f_y \mu$$

puesto que la fuerza normal a la superficie de falla es numéricamente igual a $A_{vf} f_y$, por equilibrio horizontal

Fig 2.4. Resistencia a cortante por fricción

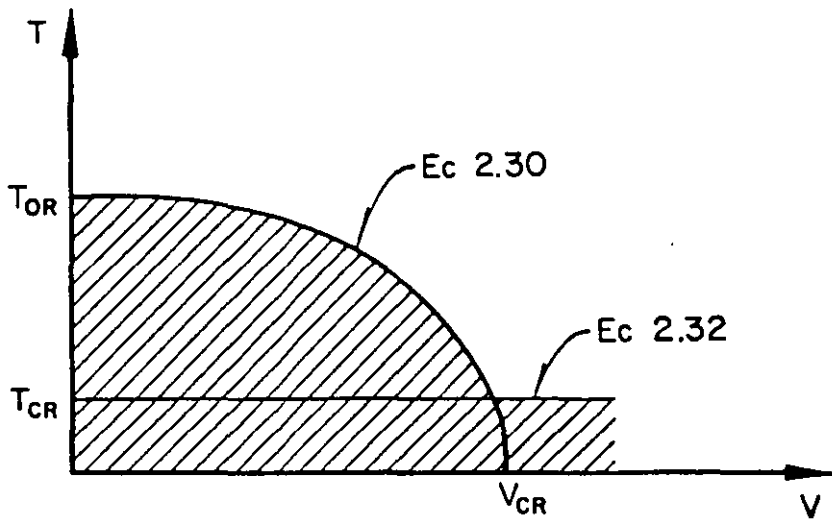
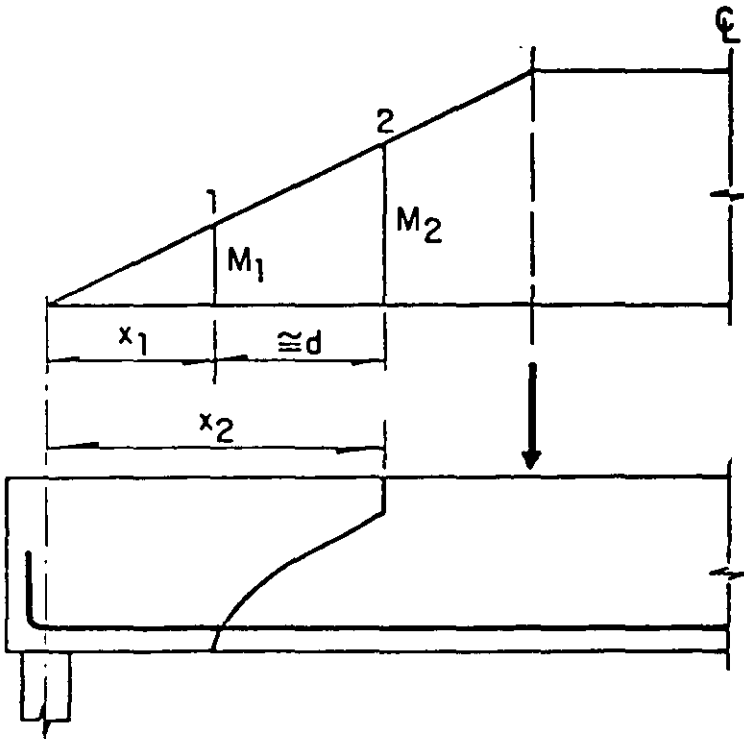


Fig 2.5. Representación gráfica de las expresiones 2.30 , como igualdad, y 2.32



Antes del agrietamiento

$$T_1 \cong \frac{M_1}{z}$$

Después

$$\Sigma M = 0$$

$$T_1 z = R x_2$$

$$T_1 = \frac{R x_2}{z} = \frac{M_2}{z}$$

$$T_1 \cong \frac{M_2}{z}$$

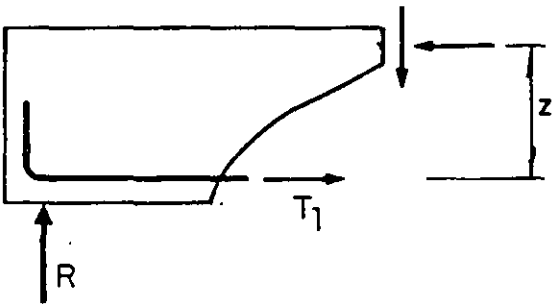


Fig 3.1. Incremento en la tensión del refuerzo en la sección 1 debido a la formación de una grieta diagonal

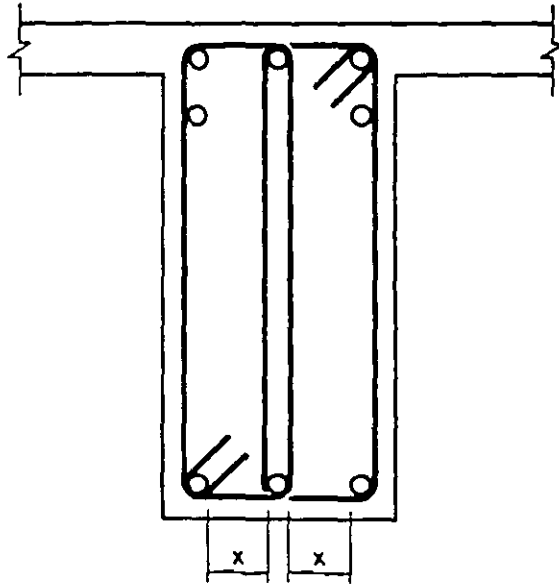
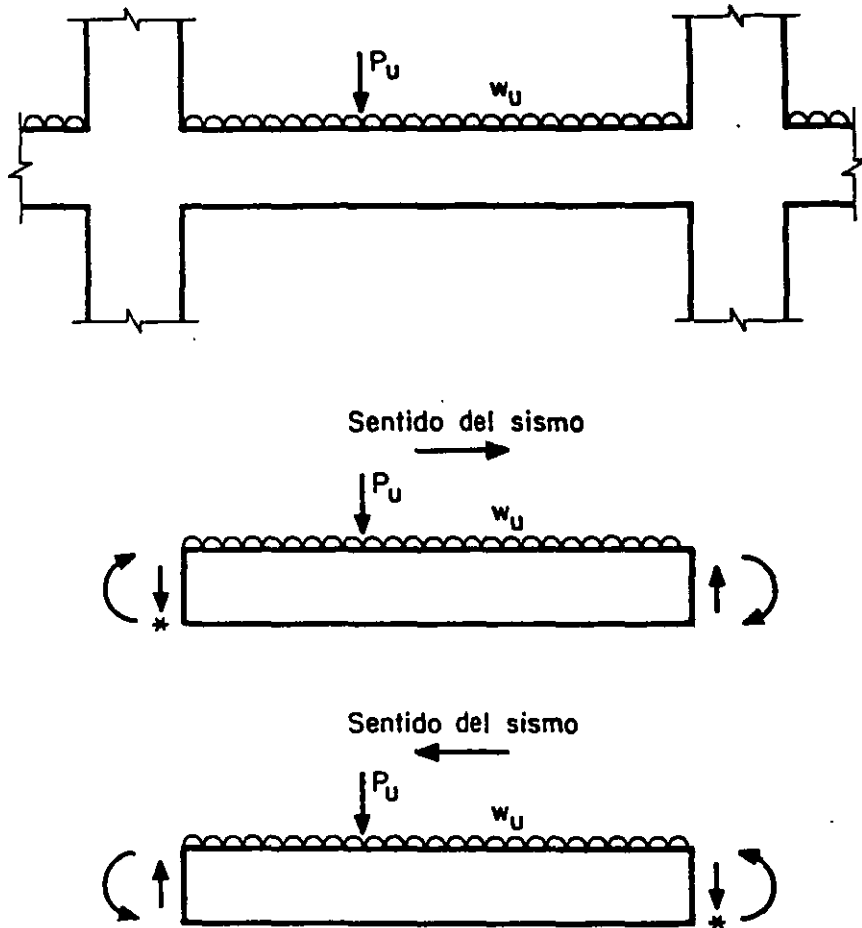
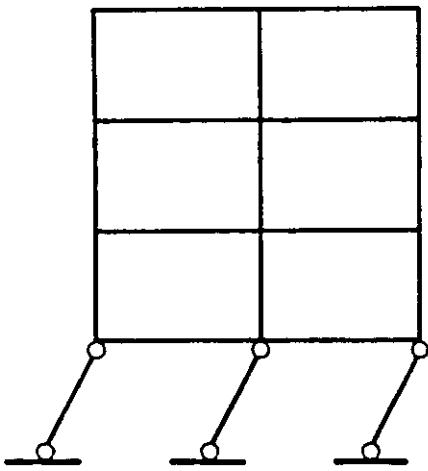


Fig 5.1 Ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento en vigas de marcos dúctiles (cuando $x > 15$ cm)

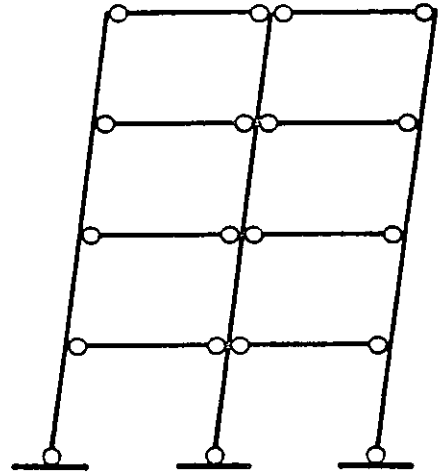


* El sentido de las fuerzas señaladas depende de las magnitudes de P_u , w_u y de los momentos de los extremos

Fig 5.2 Determinación de la fuerza cortante en vigas de acuerdo con la sección 5.2.4 de las Normas



(a)



(b)

Fig 5.3 Mecanismos de falla

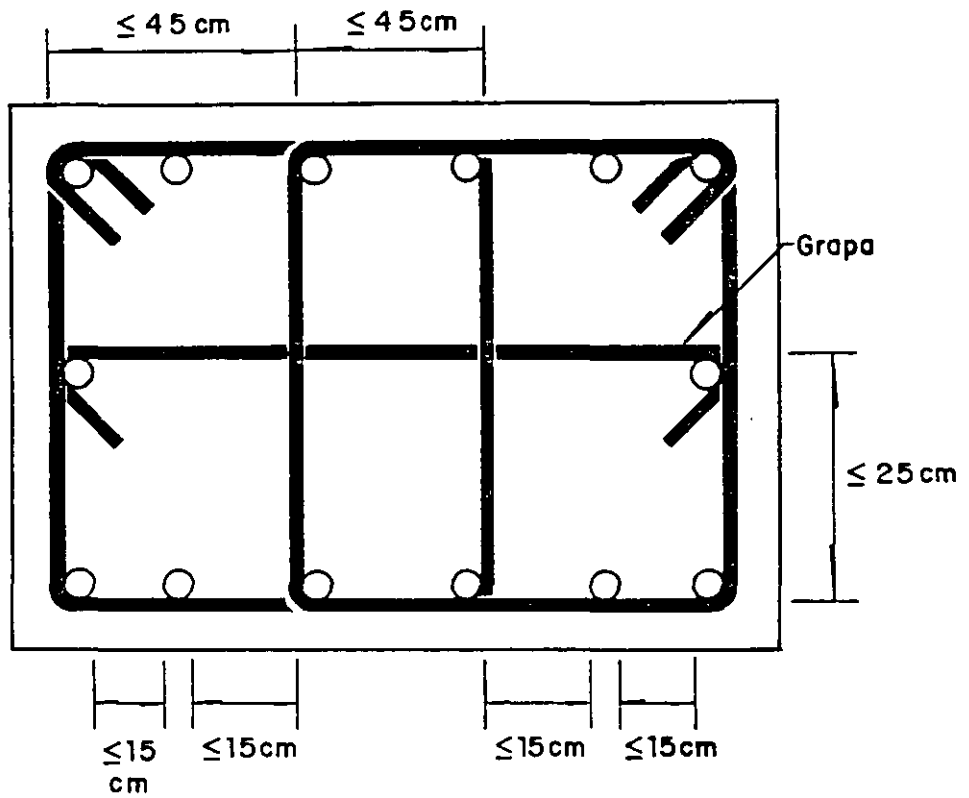


Fig 5.4 Ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento en columnas de marcos dúctiles

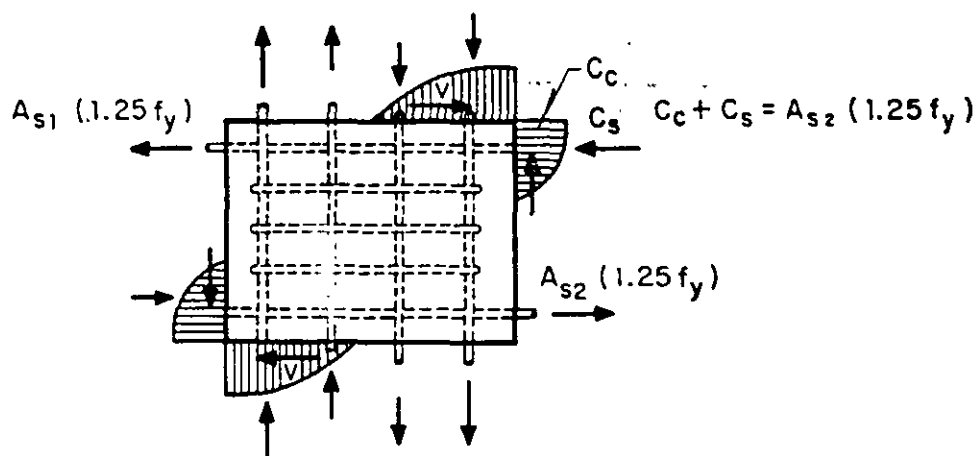
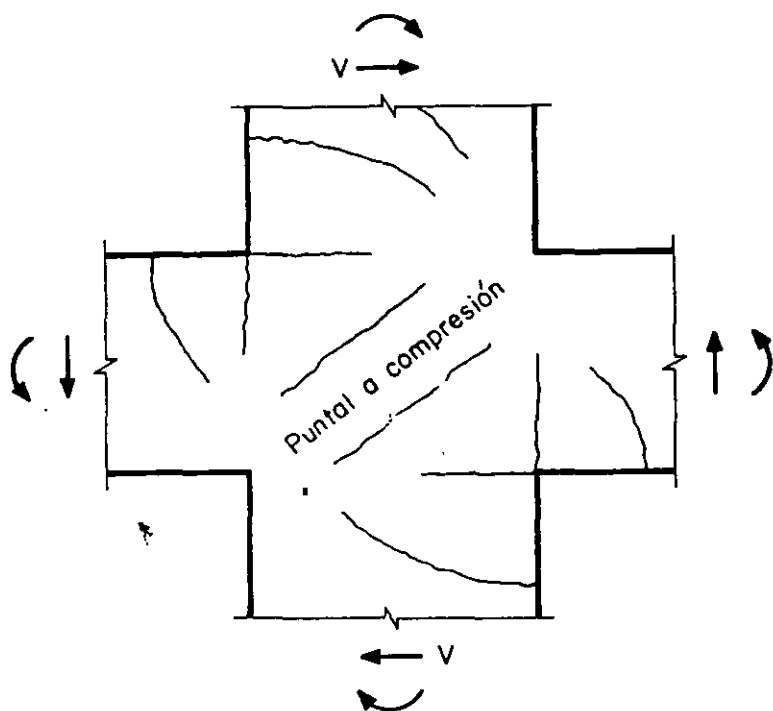


Fig 5.5 Nudo interior de un marco sujeto sólo a fuerzas horizontales

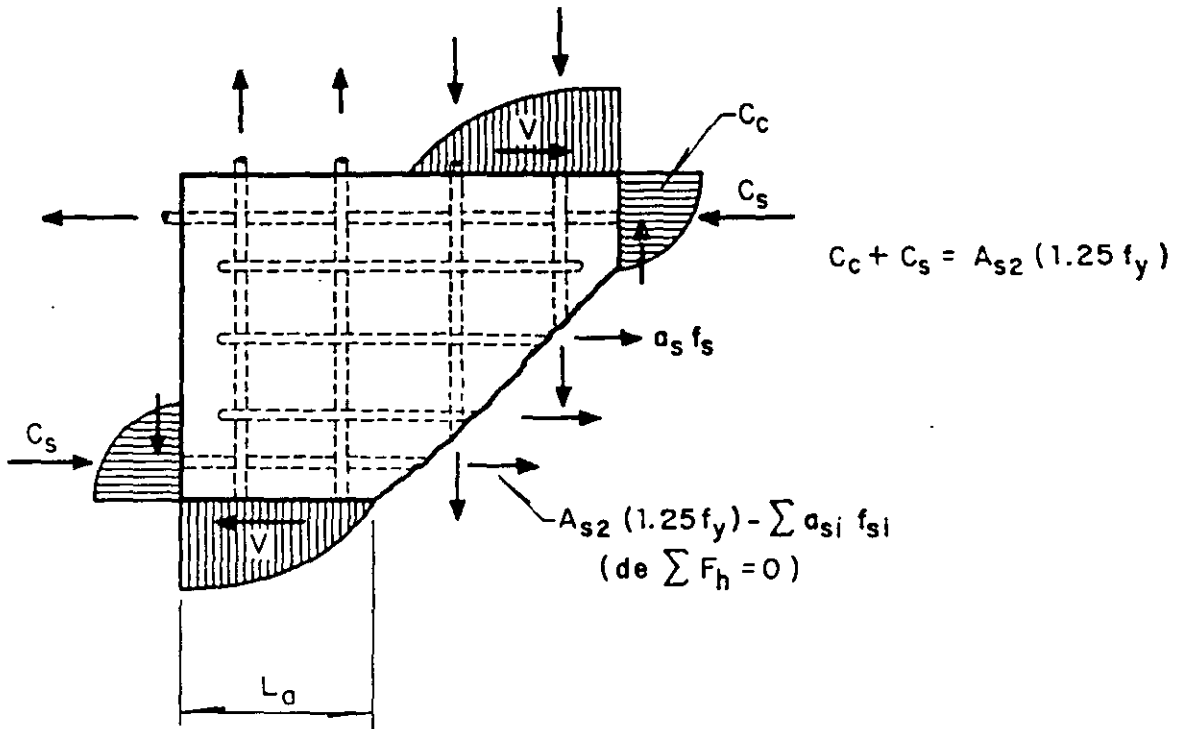
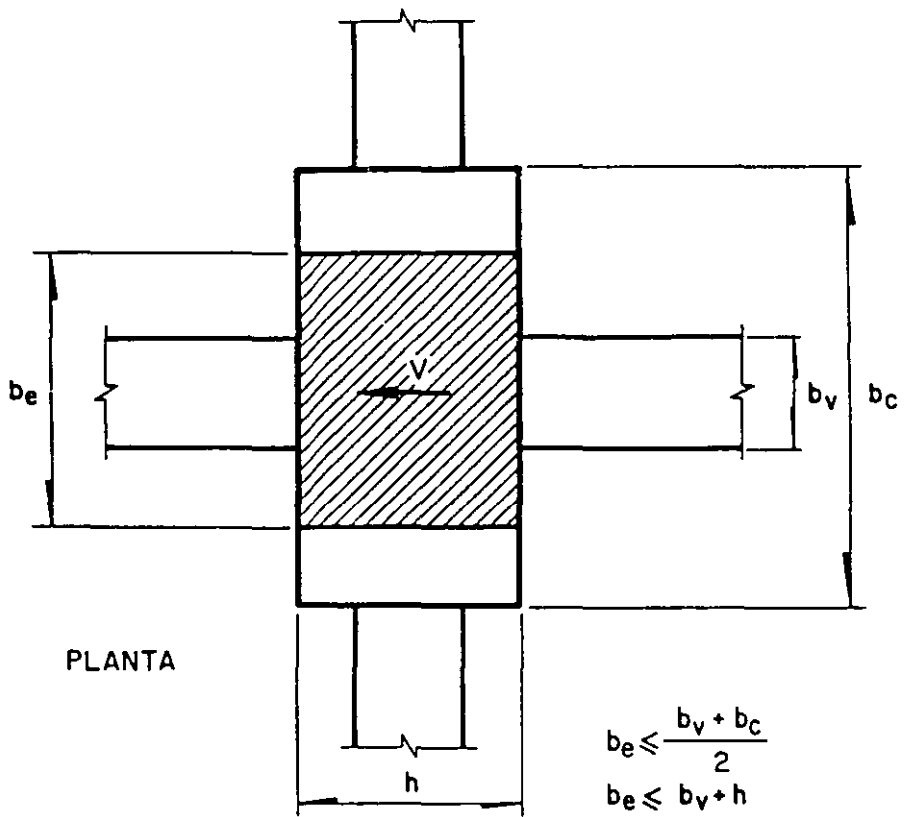


Fig 5.6 Equilibrio de una porción del nudo de la fig 5.5



Si los anchos de las vigas son distintos, se toma

$$b_v = \frac{b_{v1} + b_{v2}}{2}$$

Fig 5.7 Determinación del ancho efectivo, b_e

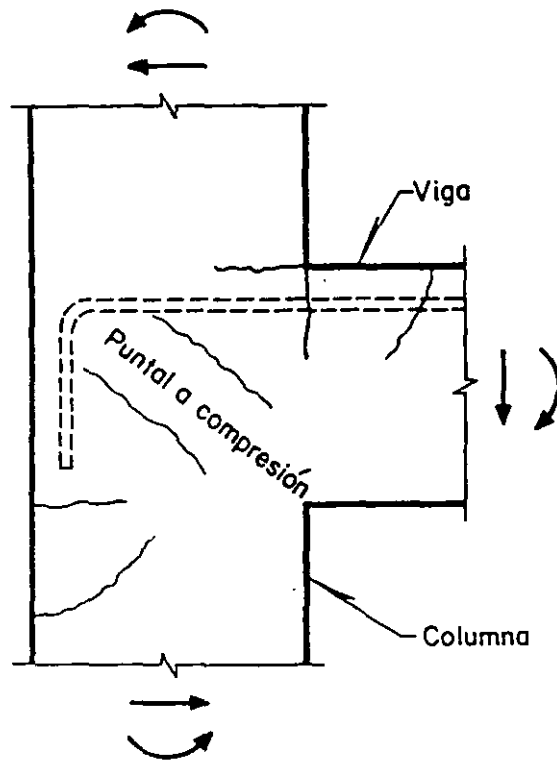


Fig 5.8 Anclaje del refuerzo longitudinal negativo en un nudo de orilla

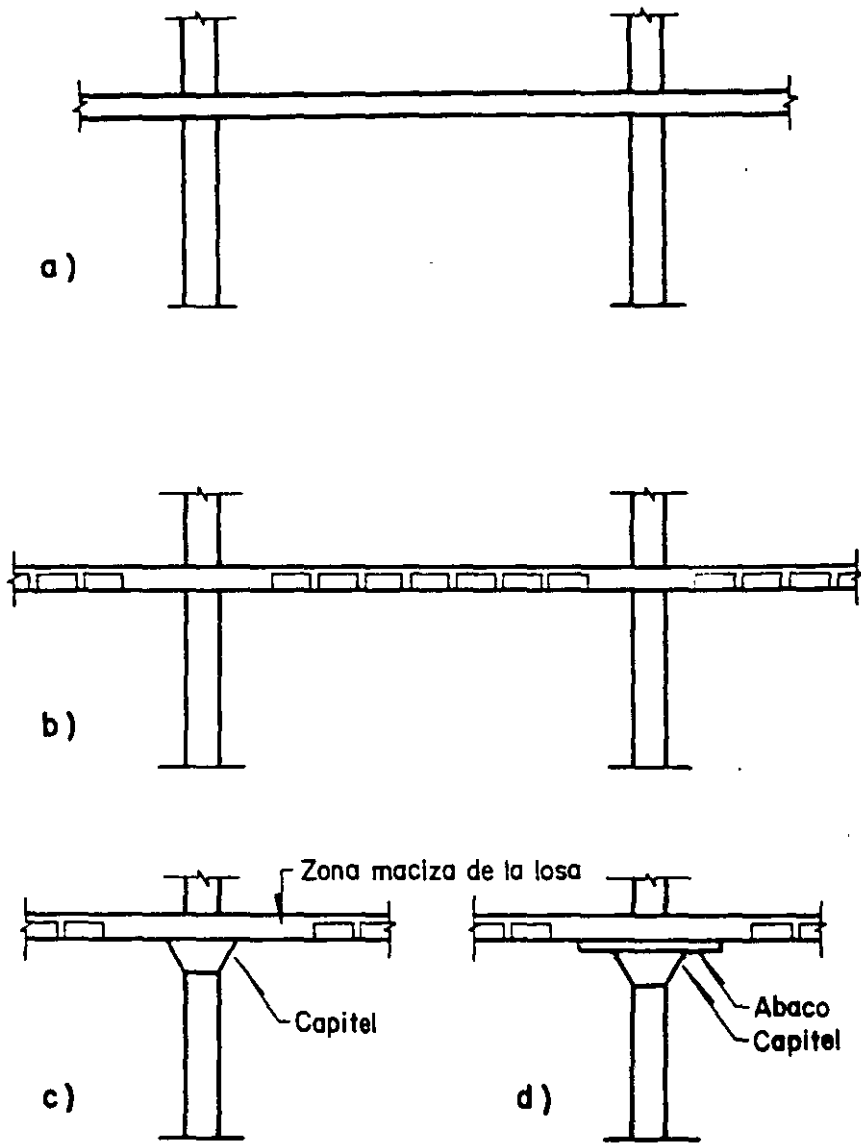


Fig 6.1 Tipos de losas planas

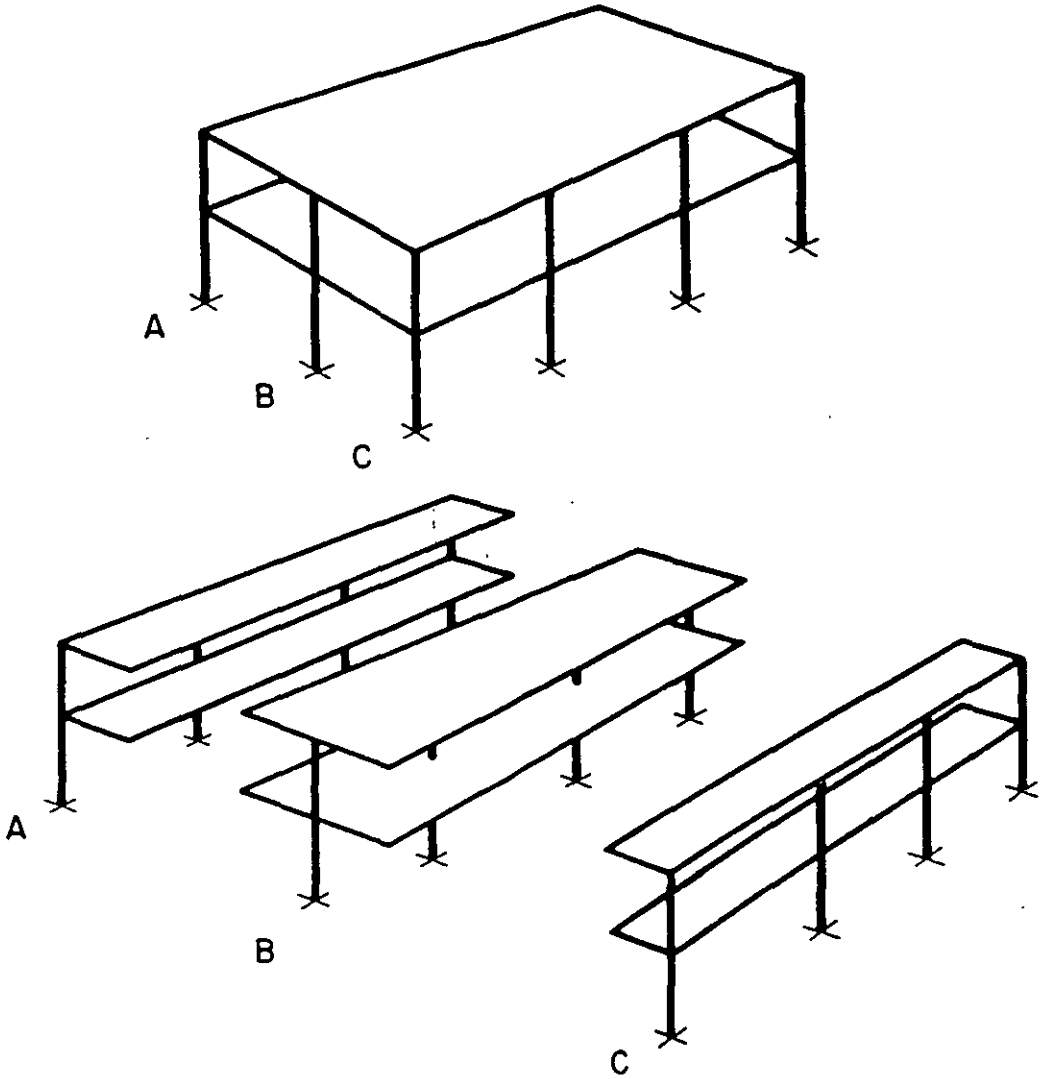


Fig 6.2 Idealización de una estructura con losa plana en la dirección longitudinal

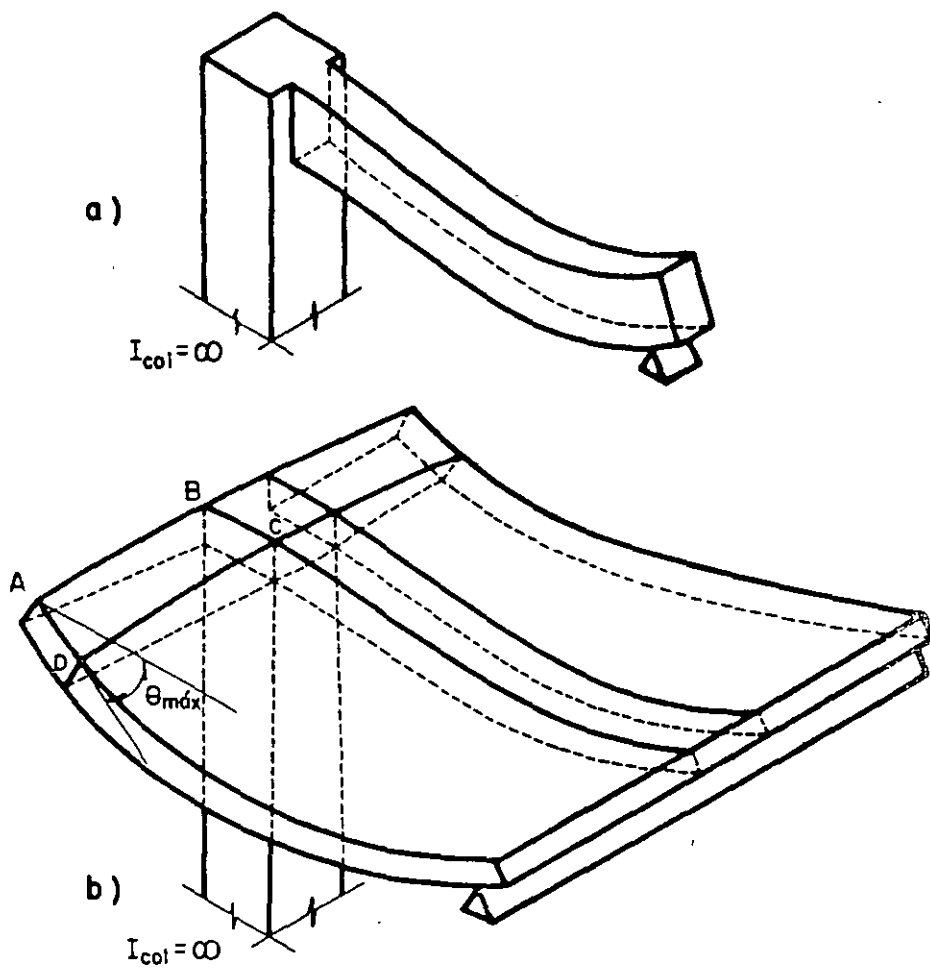


Fig 6.3 Deformaciones en una viga y en una losa plana de crujiás de orilla

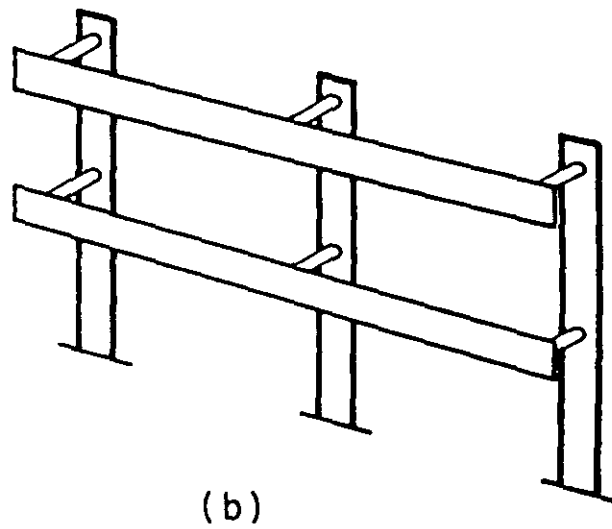
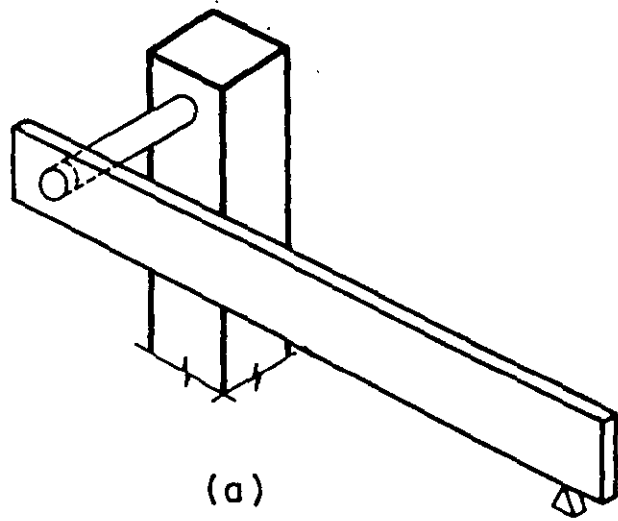


Fig 6.4 Elementos a torsión entre losa y columna

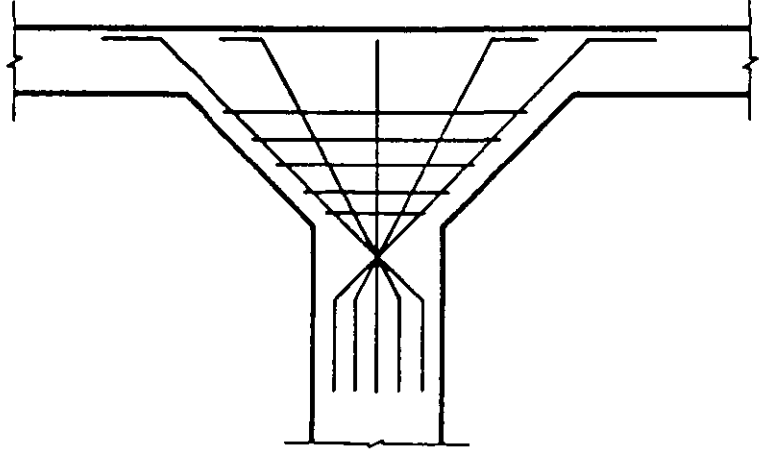


Fig 6.5 Refuerzo de un capitel

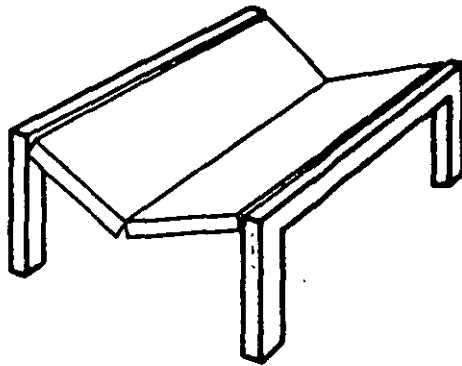
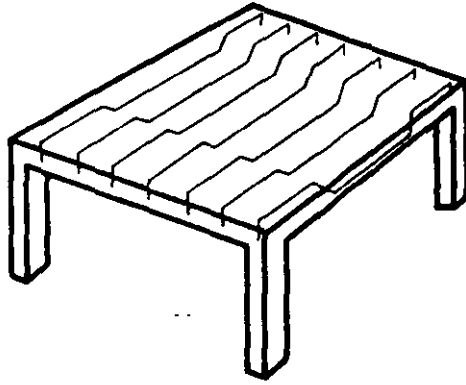


Fig 6.6 Falla de una losa plana que se reforzó para tomar toda la carga sólo en una dirección

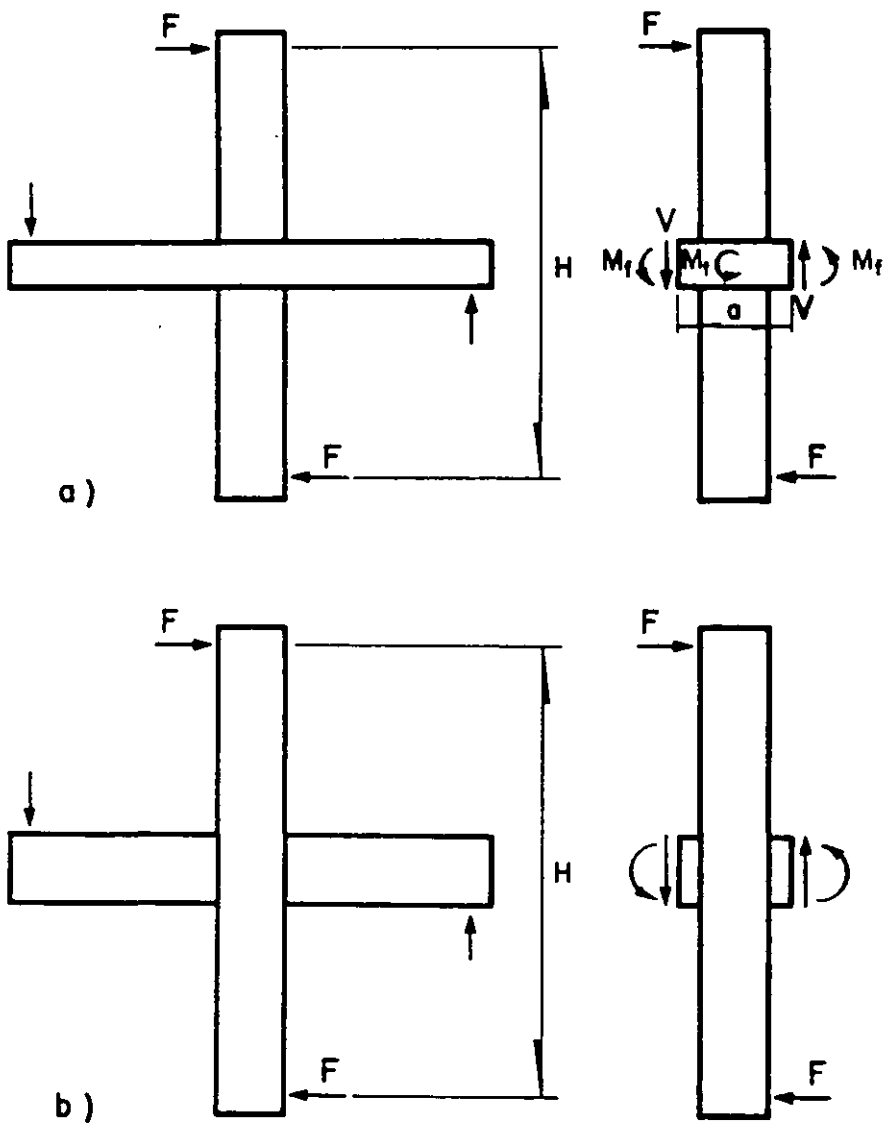


Fig 6.7 Trasmisión del momento FH entre losa y columna, y entre vigas y columna

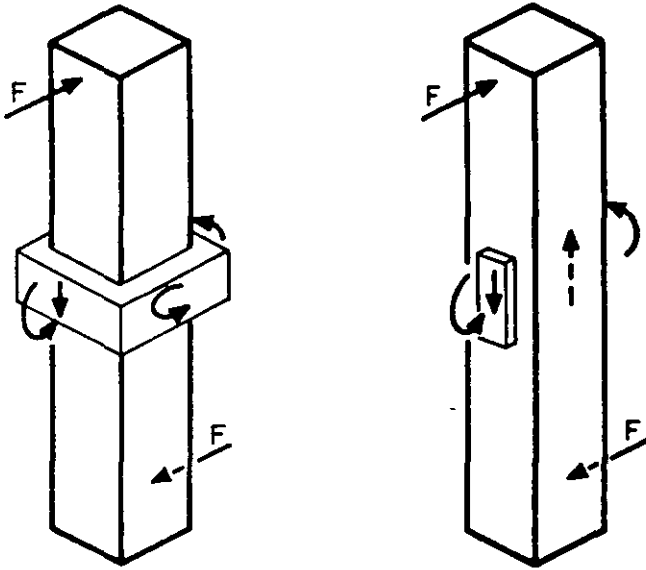


Fig 6.8 Columnas de la fig 6.7

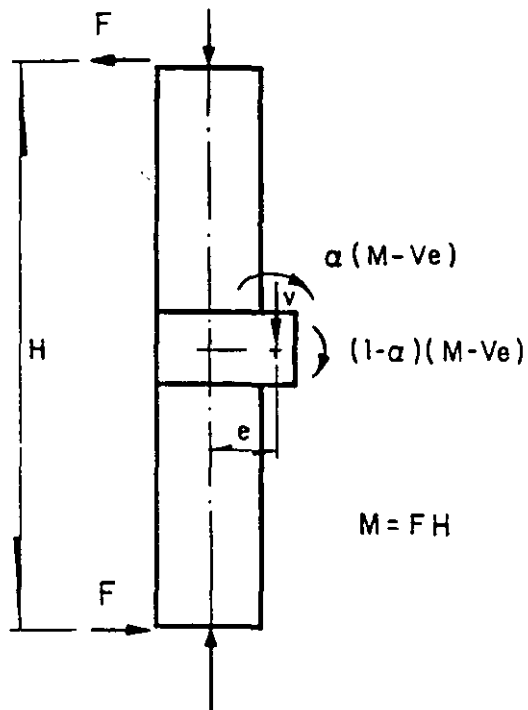


Fig 6.9 Trasmisión del momento FH en una conexión de orilla

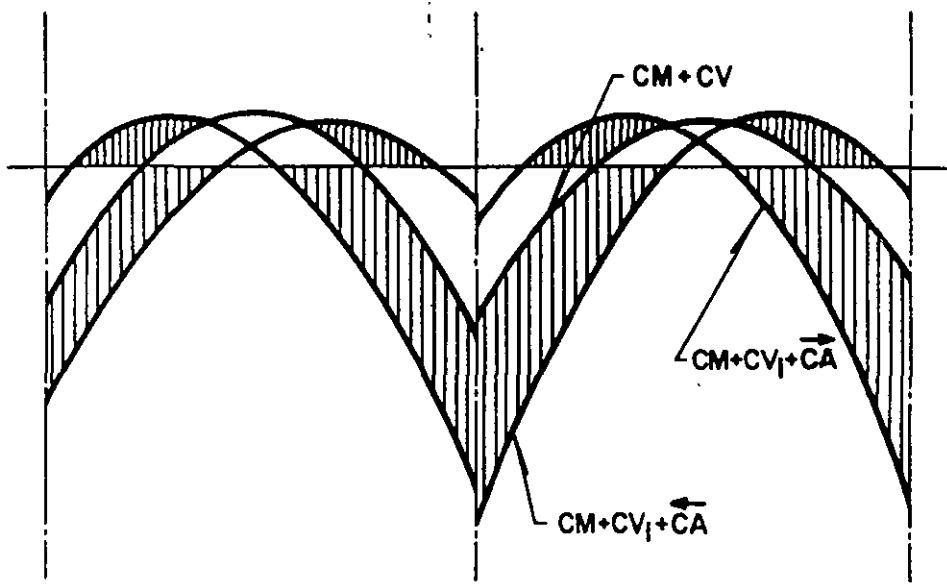


Fig 6.10 Momentos para calcular el "refuerzo necesario por sismo"

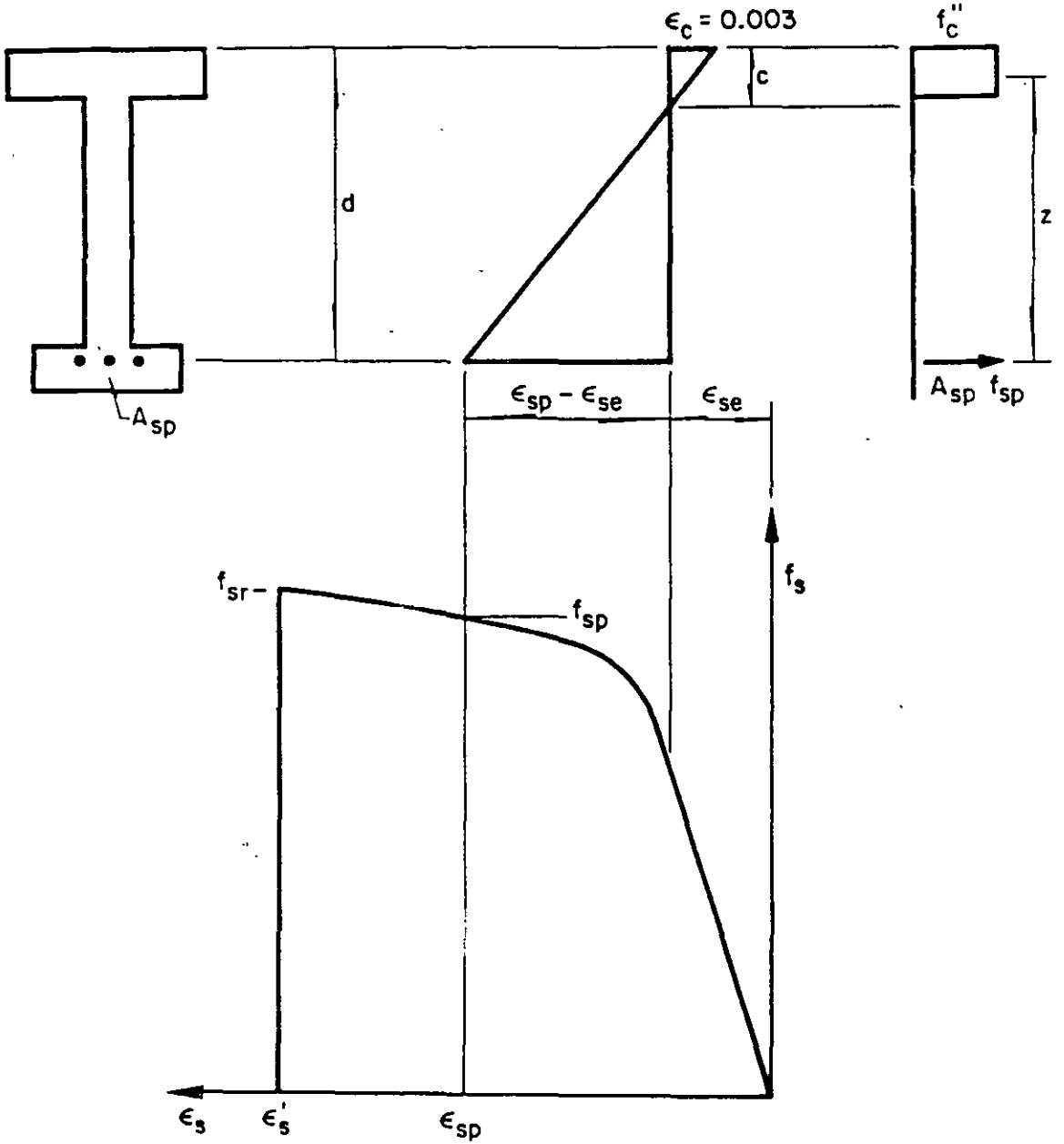


Fig 7.1 Condiciones para valuar el momento resistente de una sección presforzada que falla por compresión

AYUDAS DE DISEÑO

SANTIAGO LOERA*
MARIO RODRÍGUEZ*
ROBERTO MELI*

* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

TABLA 1. CONSTANTES DE CALCULO

f'_c (kg/cm ²)	f_c^*	f_c''	$\sqrt{f_c^*}$	$0.5\sqrt{f_c^*}$	$\sqrt{f_c'}$	$0.7\sqrt{f_c'}$	$8000\sqrt{f_c'}$	$14000\sqrt{f_c'}$
150	120	102	10.95	5.48	12.25	8.57	97980	
200	160	136	12.65	6.32	14.14	9.90	113100	198000
250	200	170	14.14	7.07	15.81	11.07	126500	221400
300	240	204	15.49	7.75	17.32	12.12		242500
350	280	231.3	16.73	8.37	18.71	13.10		261900
400	320	254.1	17.89	8.94	20.00	14.00		280000

Se utilizaron las siguientes fórmulas

$$f_c^* = 0.8 f_c'$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250}\right) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

TABLA 2 DIAMETROS, PESOS Y AREAS DE BARRAS

Número de designación	Diámetro nominal		Peso kg/m	NUMERO DE BARRAS										Areas de acero, en cm ²
	pulg	mm		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1/4	6.4	0.248	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	
3	3/8	9.5	0.559	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.20	
4	1/2	12.7	0.993	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	
5	5/8	15.9	1.552	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80	
6	3/4	19.0	2.235	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	
7	7/8	22.2	3.042	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80	
8	1	25.4	3.973	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	
9	1 1/8	28.6	5.028	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10	
10	1 1/4	31.8	6.207	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20	
11	1 3/8	34.9	7.511	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80	
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	

TABLA 3. LONGITUDES DE DESARROLLO, L_d , DE BARRAS CORRUGADAS A TENSION, NO TORCIDAS EN FRIO, EN CM

Barra No.	f_y / f'_c	150		200		250		300		350		400	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
2.5	3000 kg/cm ²	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
	4200	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
	5200	30	41	30	41	30	41	30	41	30	41	30	41
3	3000	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
	4200	30	34	30	34	30	34	30	34	30	34	30	33
	5200	35	50	35	50	35	50	35	50	35	50	35	50
4	3000	30	32	30	32	30	32	30	32	30	32	30	32
	4200	32	45	32	45	32	45	32	45	32	45	32	45
	5200	47	66	47	66	47	66	47	66	47	66	47	66
5	3000	30	41	30	40	30	40	30	40	30	40	30	40
	4200	41	57	40	56	40	56	40	56	40	56	40	56
	5200	60	84	59	83	59	83	59	83	59	83	59	83
6	3000	42	59	36	51	34	48	34	48	34	48	34	48
	4200	59	82	51	71	48	67	48	67	48	67	48	67
	5200	87	121	75	105	71	99	71	99	71	99	71	99
7	3000	57	80	49	69	44	62	40	56	40	60	40	56
	4200	80	112	69	97	62	87	56	79	56	78	56	78
	5200	118	165	102	143	91	128	85	119	83	116	83	116
8	3000	75	104	65	90	58	81	53	74	49	68	46	64
	4200	104	146	90	126	81	113	74	103	69	96	64	90
	5200	154	216	133	187	119	167	109	153	101	141	95	132
9	3000	94	132	82	114	73	102	67	93	62	86	58	81
	4200	132	185	114	160	102	143	93	131	86	121	81	113
	5200	195	273	168	236	151	211	138	193	128	179	119	167
10	3000	116	163	101	141	90	126	82	115	76	107	71	100
	4200	163	228	141	198	126	177	115	161	107	149	100	140
	5200	241	337	208	292	186	261	170	238	158	221	147	206
11	3000	141	197	122	171	109	153	100	139	92	129	86	121
	4200	197	276	171	239	153	214	139	195	129	181	121	169
	5200	291	408	252	353	226	316	206	288	191	267	178	250
12	3000	168	235	145	203	130	182	118	166	110	154	103	144
	4200	235	328	203	284	182	254	166	232	154	215	144	201
	5200	346	485	300	420	268	376	245	343	227	318	212	297

I Barras con no más de 30 cm de concreto bajo ellas
 II Barras con más de 30 cm de concreto bajo ellas

MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES

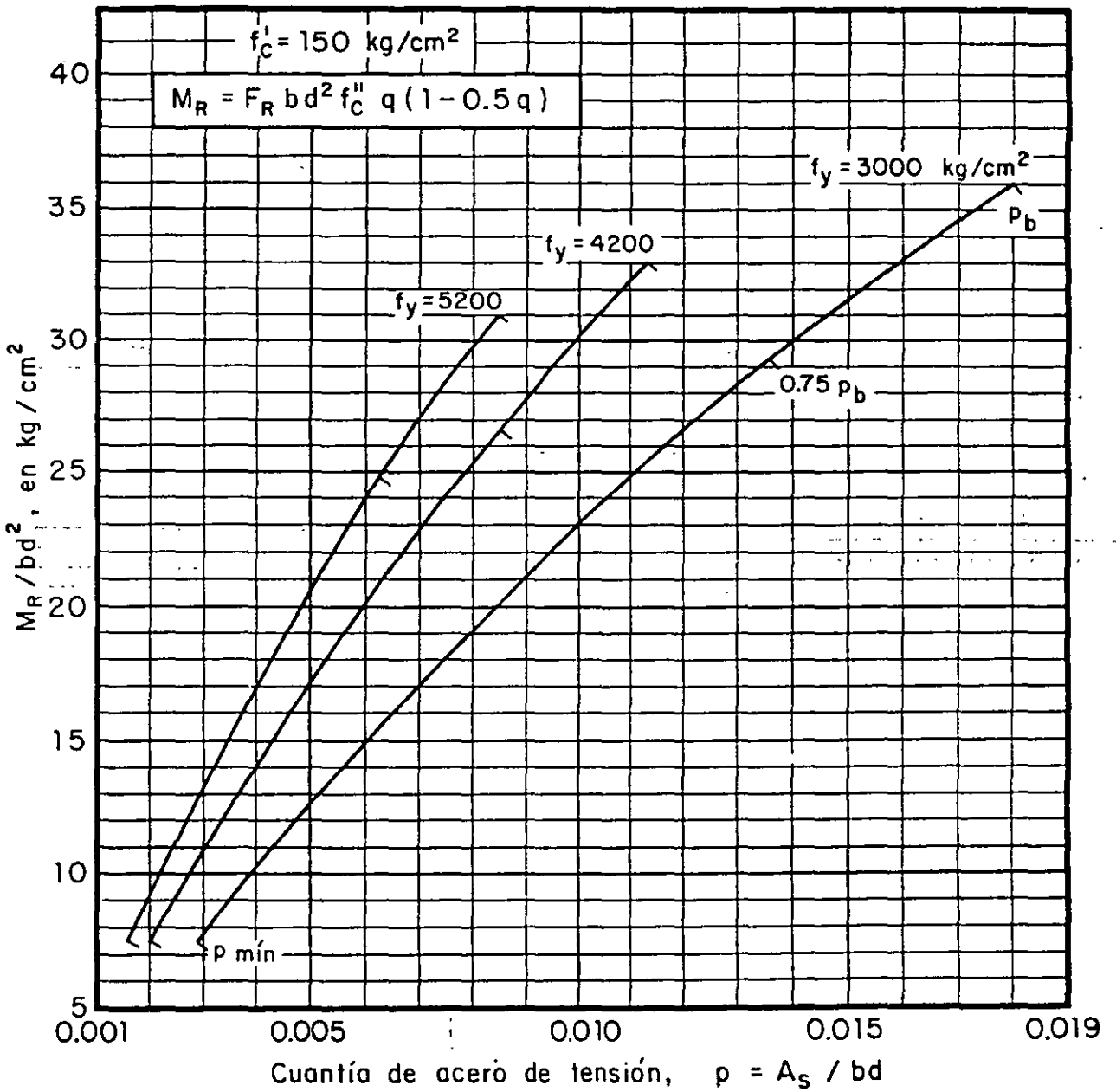


Fig 1

MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES

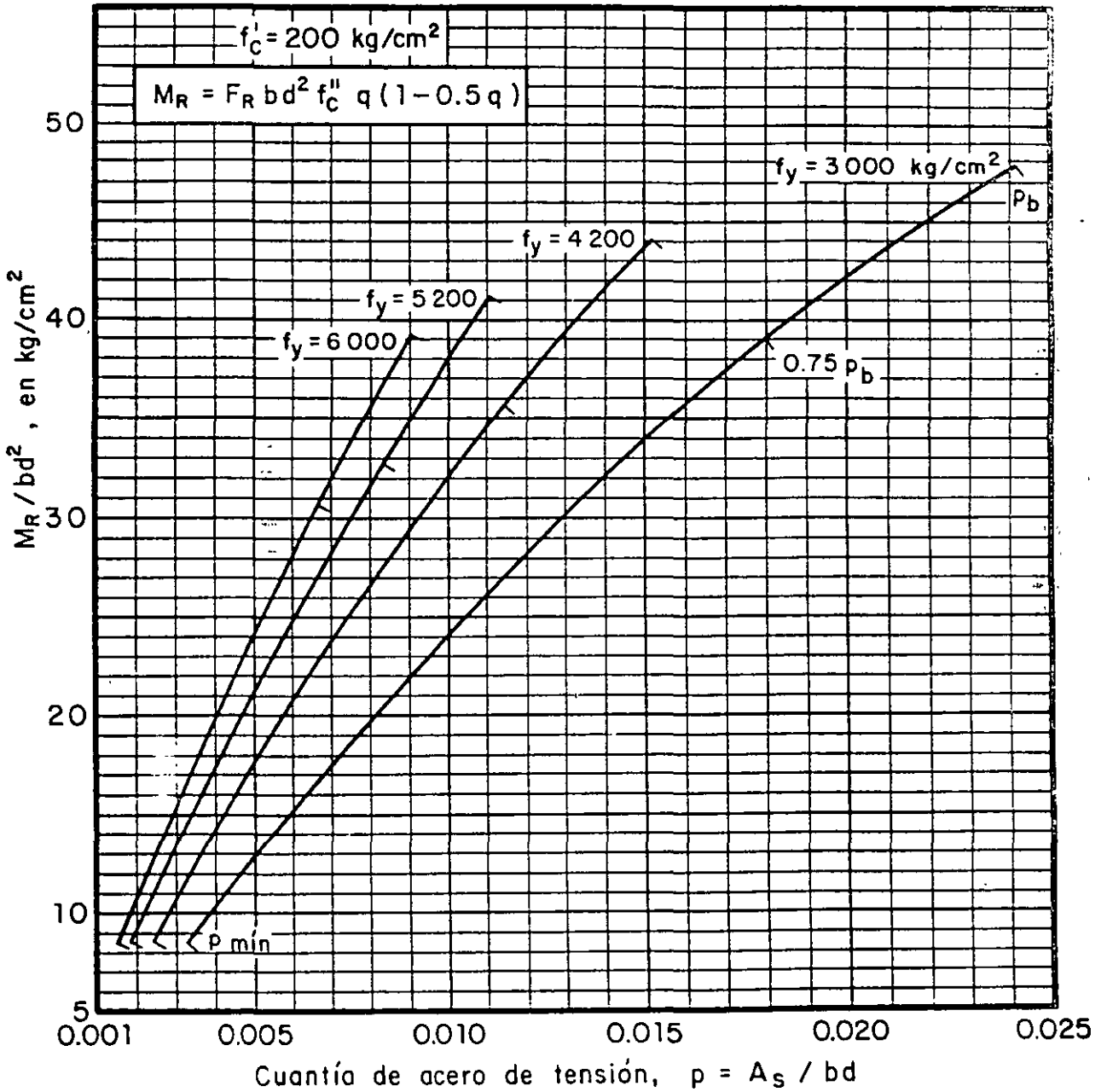


Fig 2

MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES

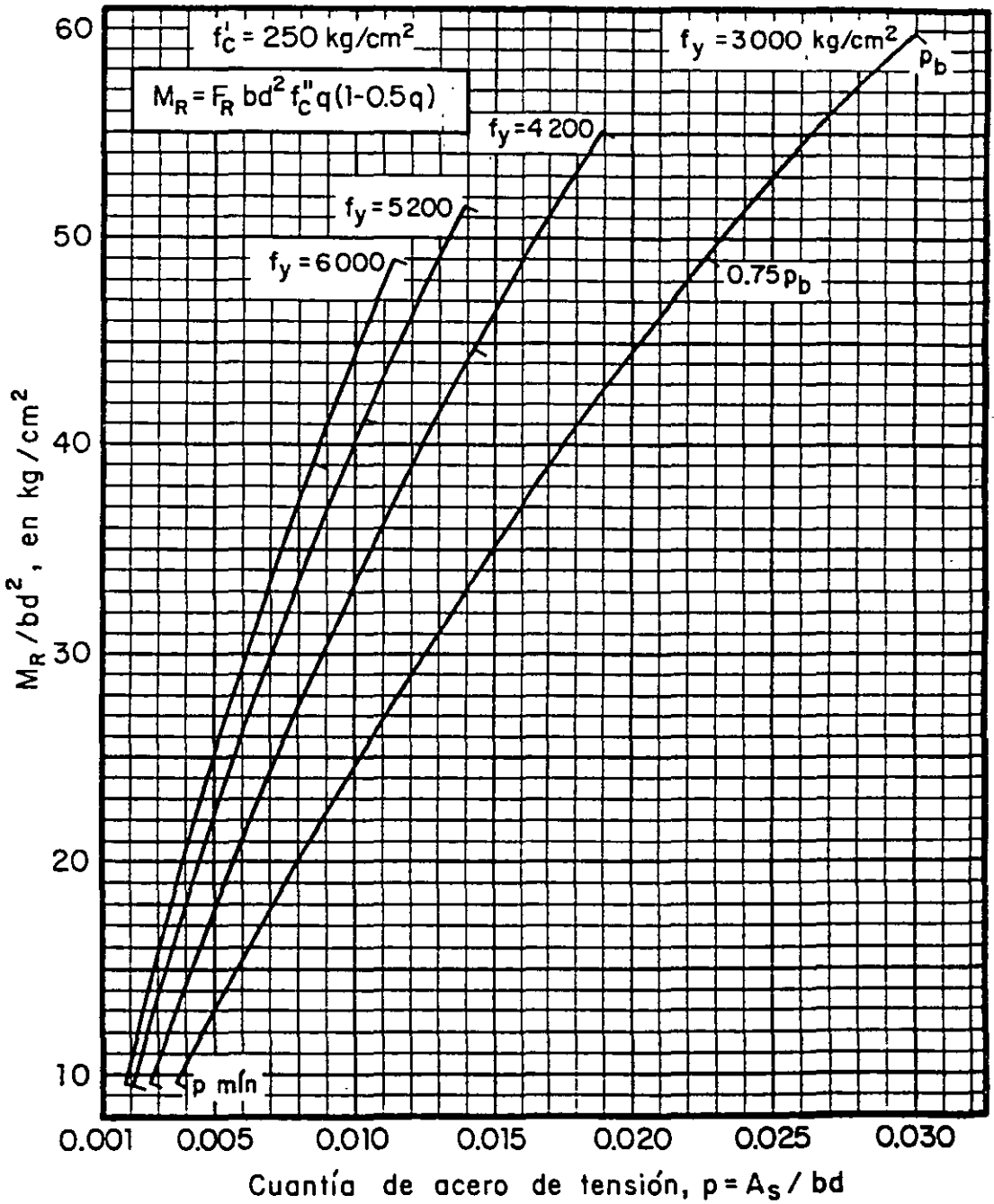
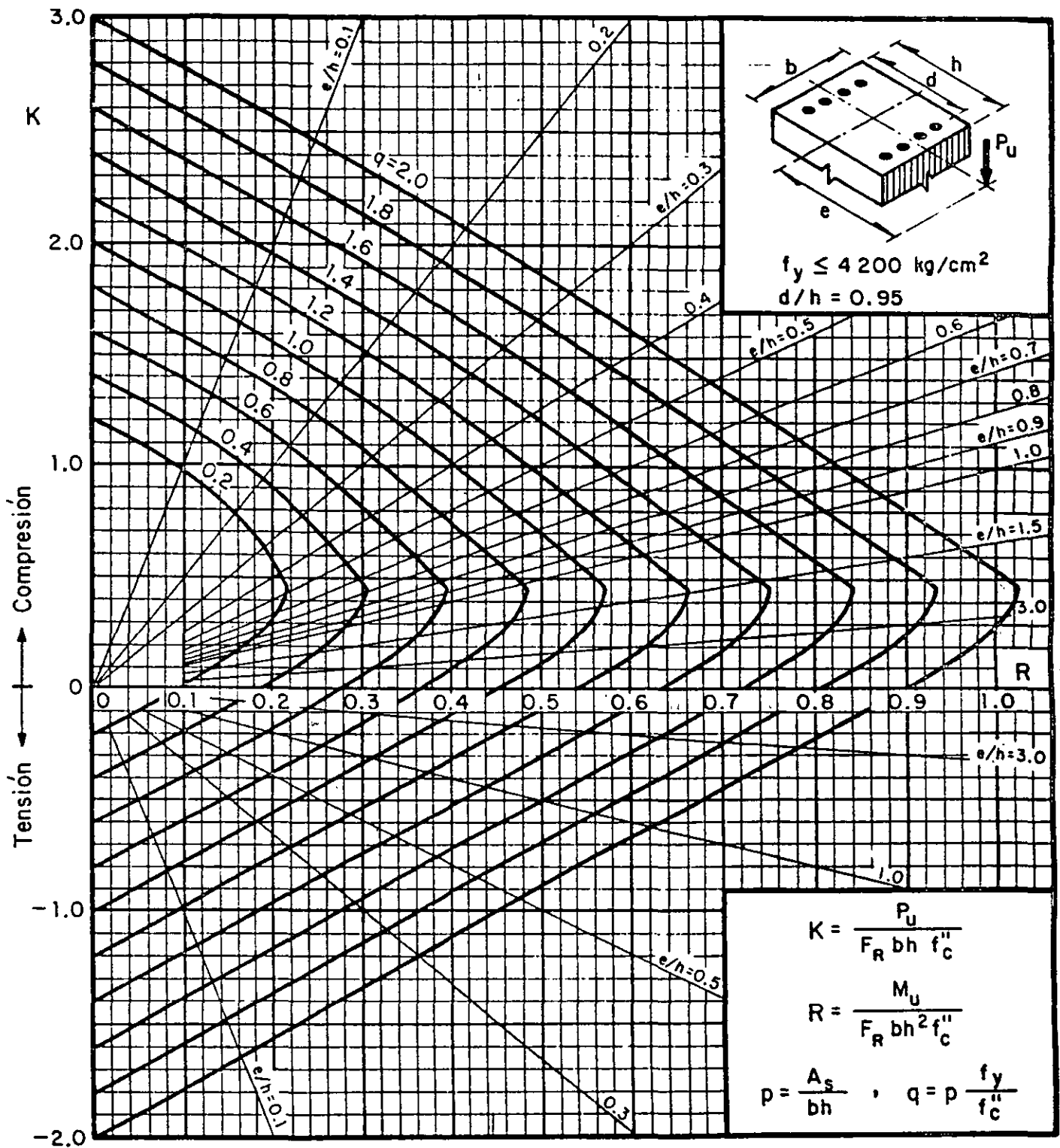
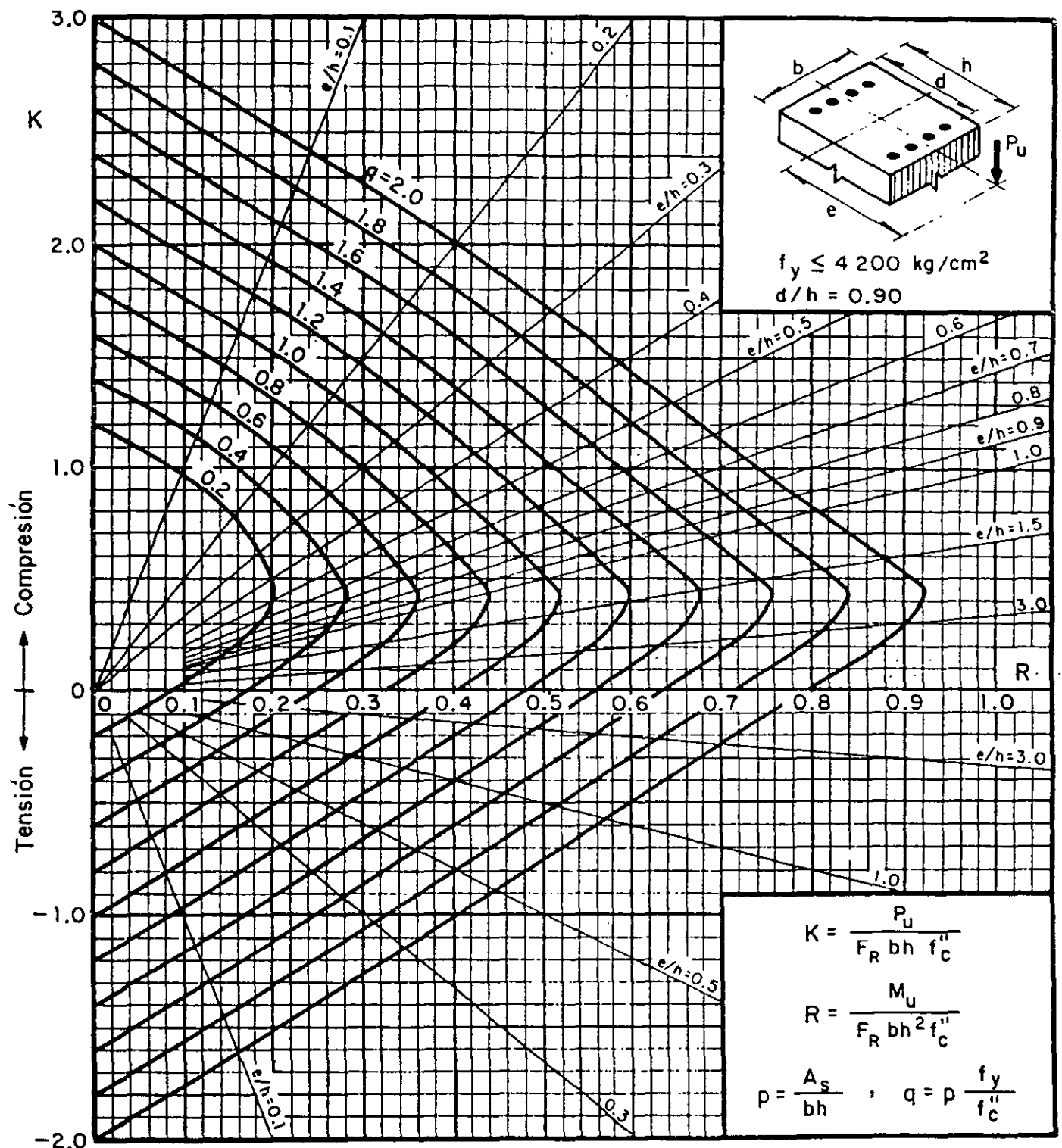


Fig 3



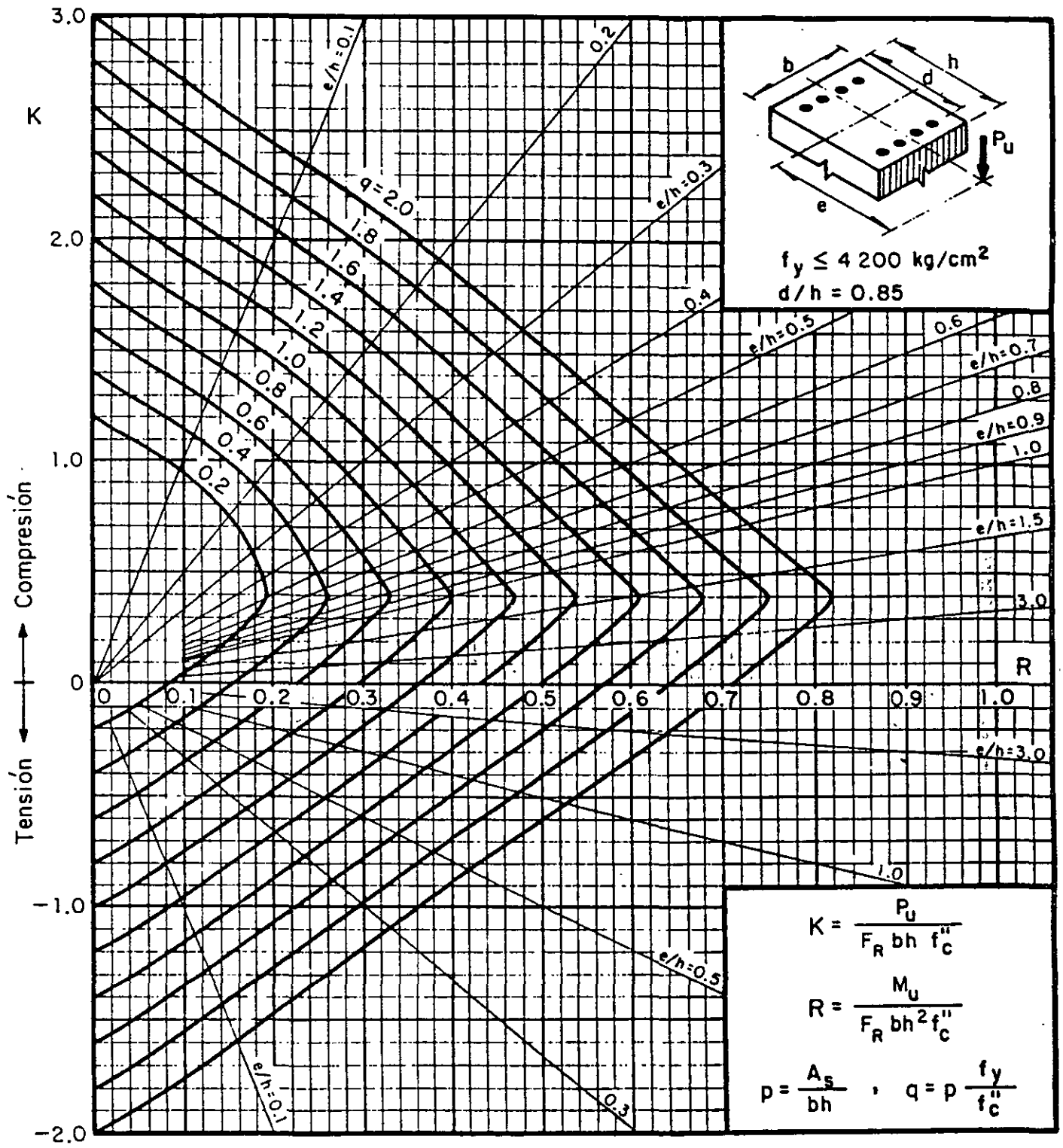
A_s = Area total de refuerzo.
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_U = Carga axial de diseño
 M_U = Momento flexionante de diseño

Fig 4
129



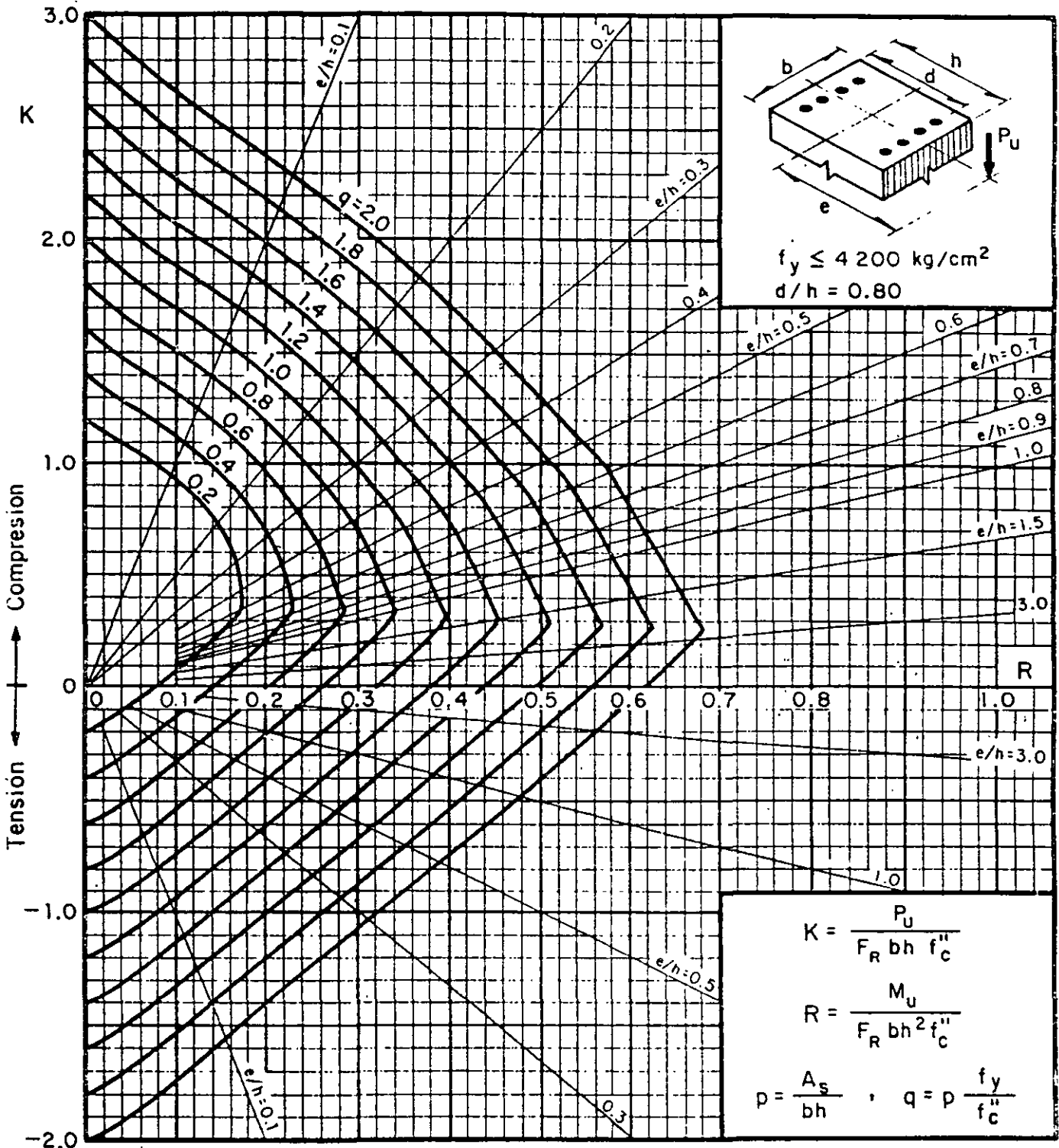
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 5
130



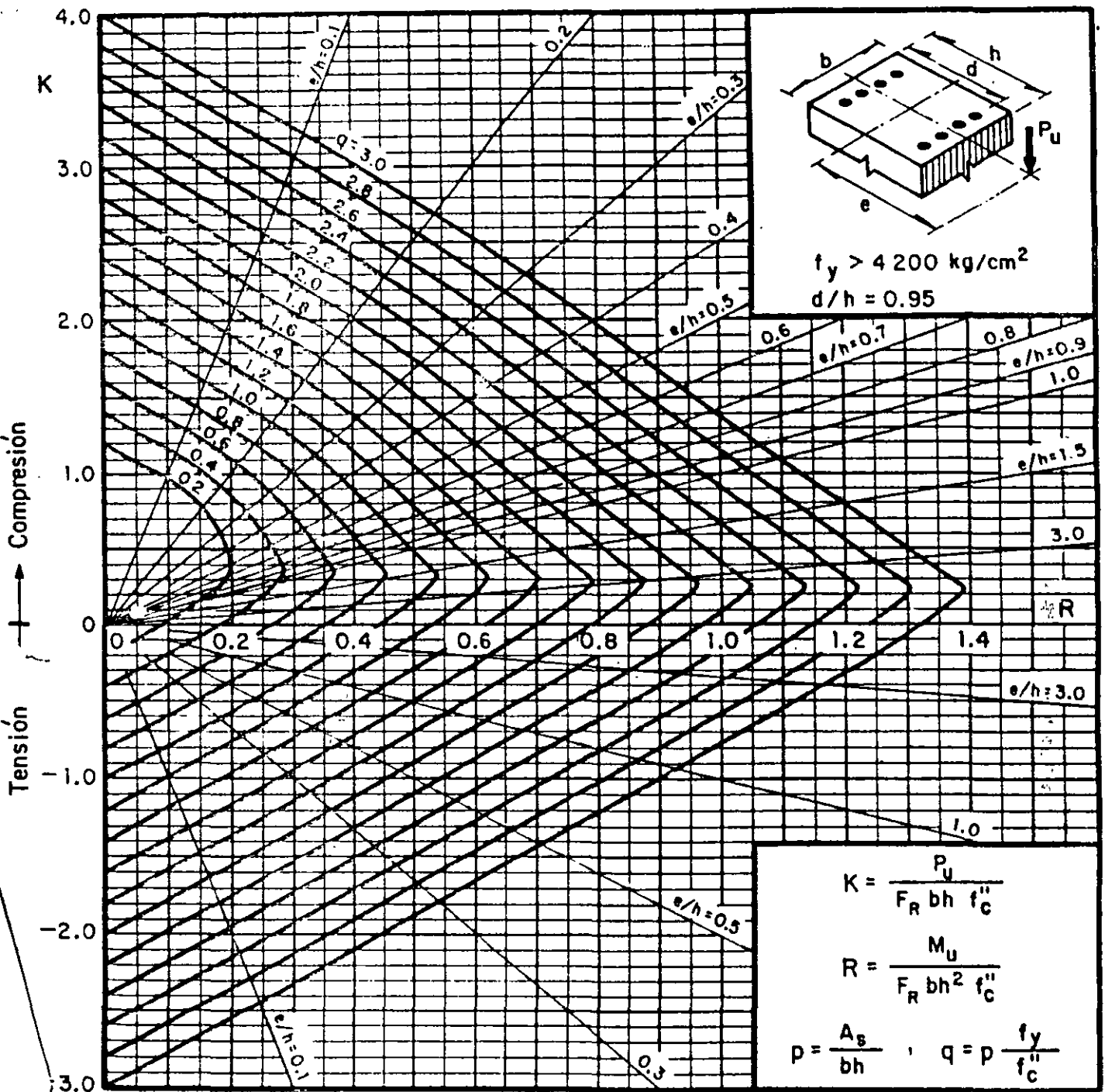
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 6
131



A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 7
132



A_s = Área total de refuerzo

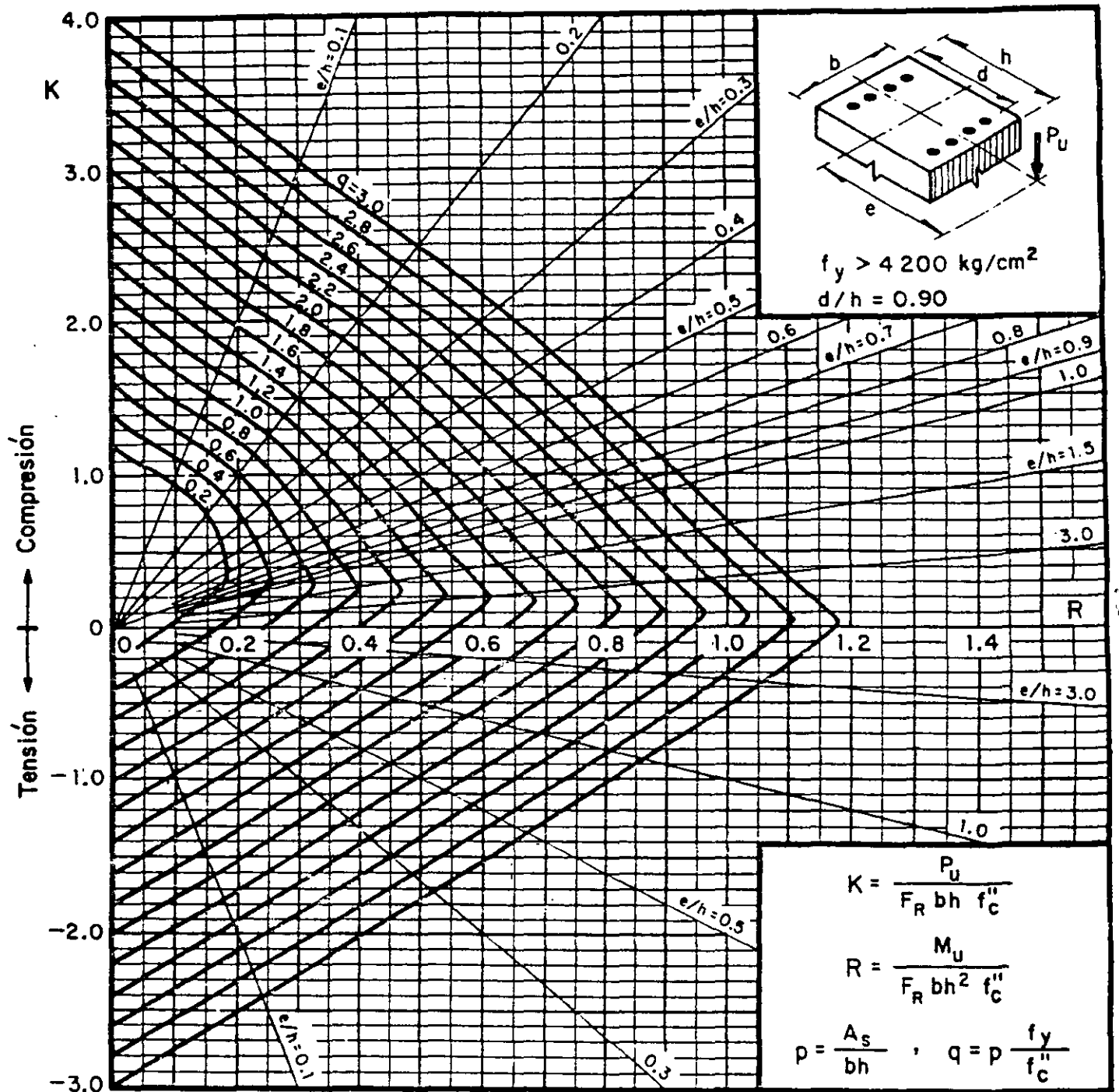
$f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

F_R = Factor de resistencia

P_u = Carga axial de diseño

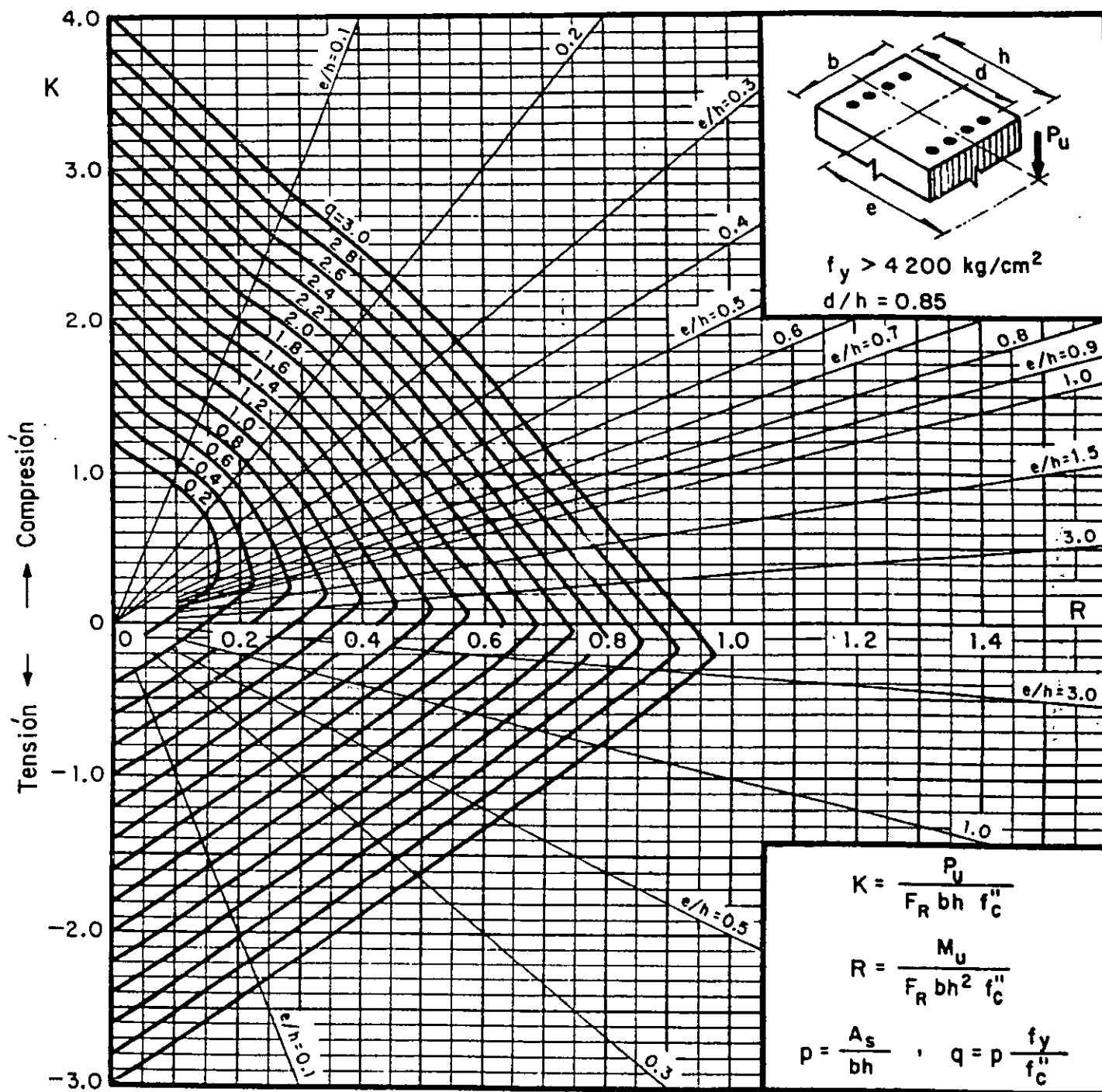
M_u = Momento flexionante de diseño

Fig. 8



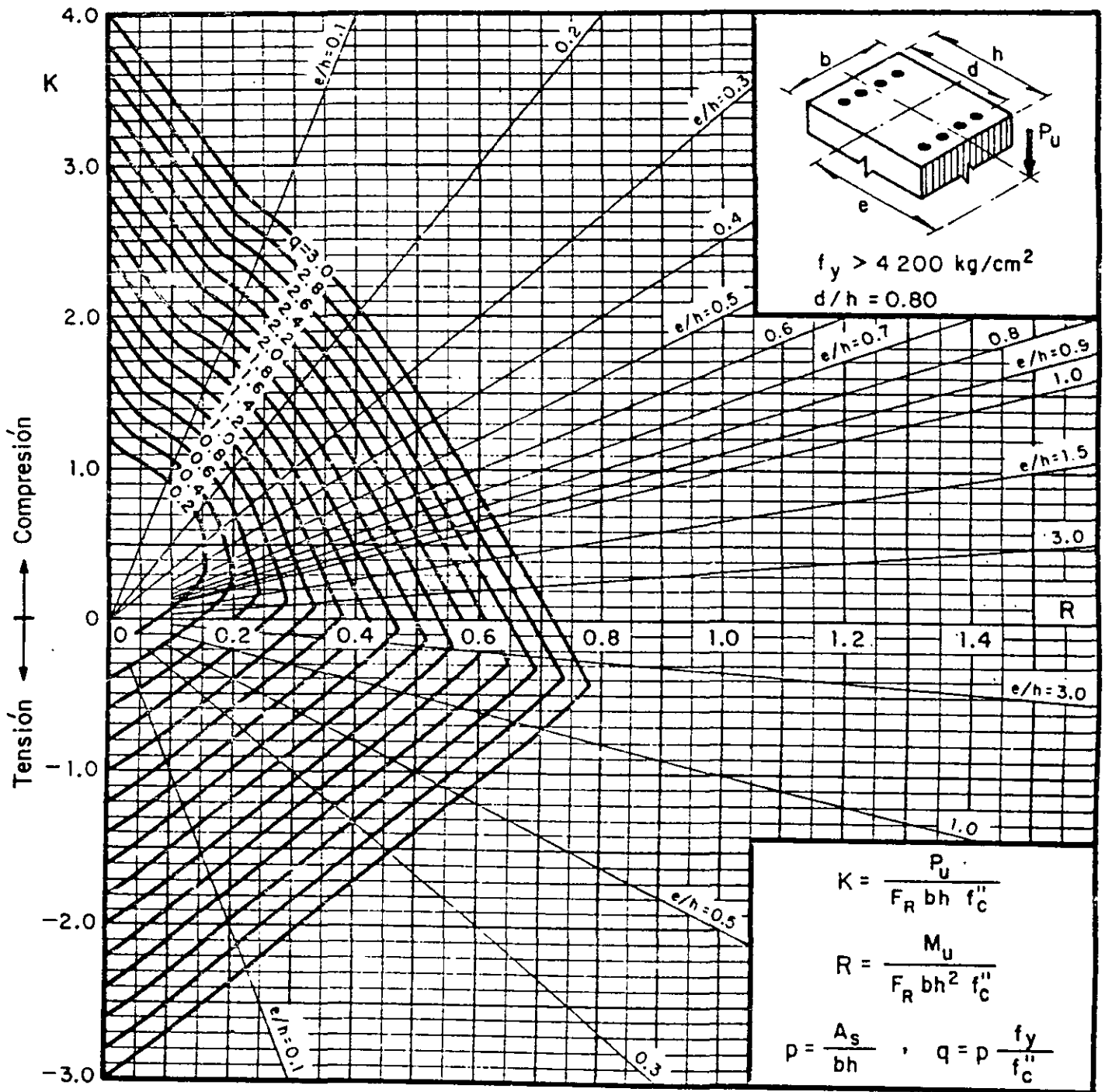
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseo
 M_u = Momento flexionante de diseo

Fig 9



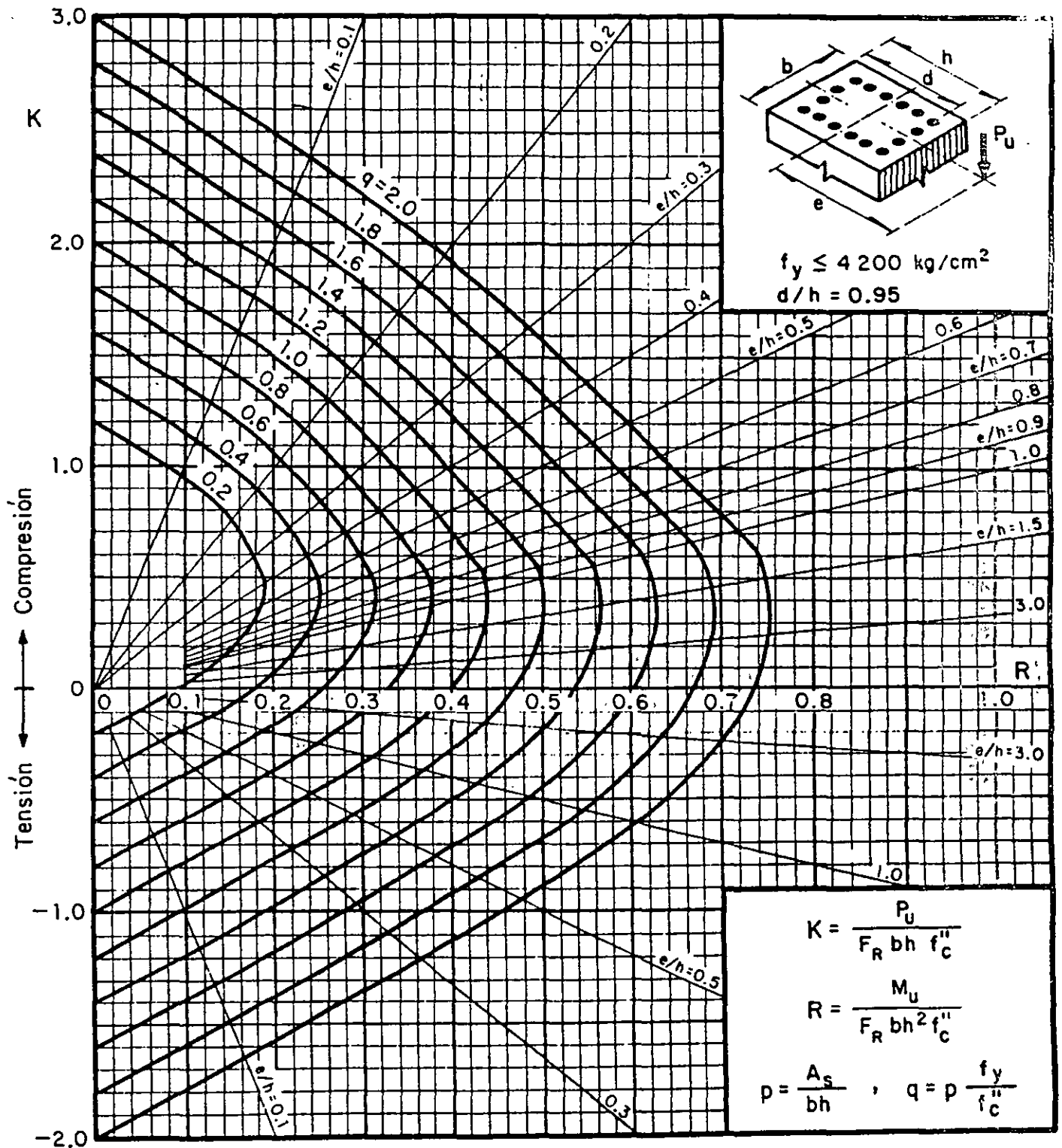
A_s = Área total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_U = Carga axial de diseño
 M_U = Momento flexionante de diseño

Fig 10



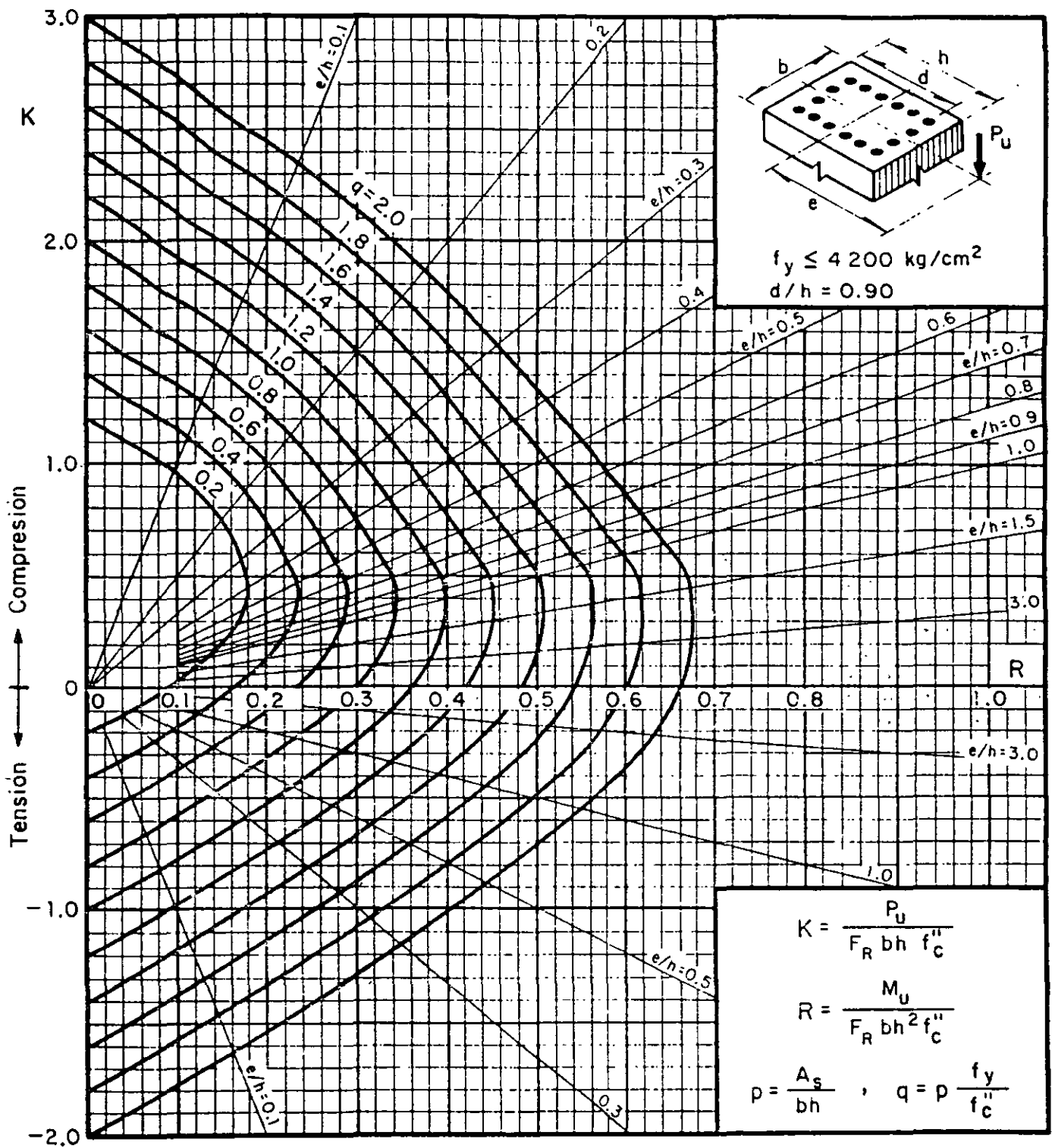
A_s = Área total de refuerzo
 $f'_c = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f'_c = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 11



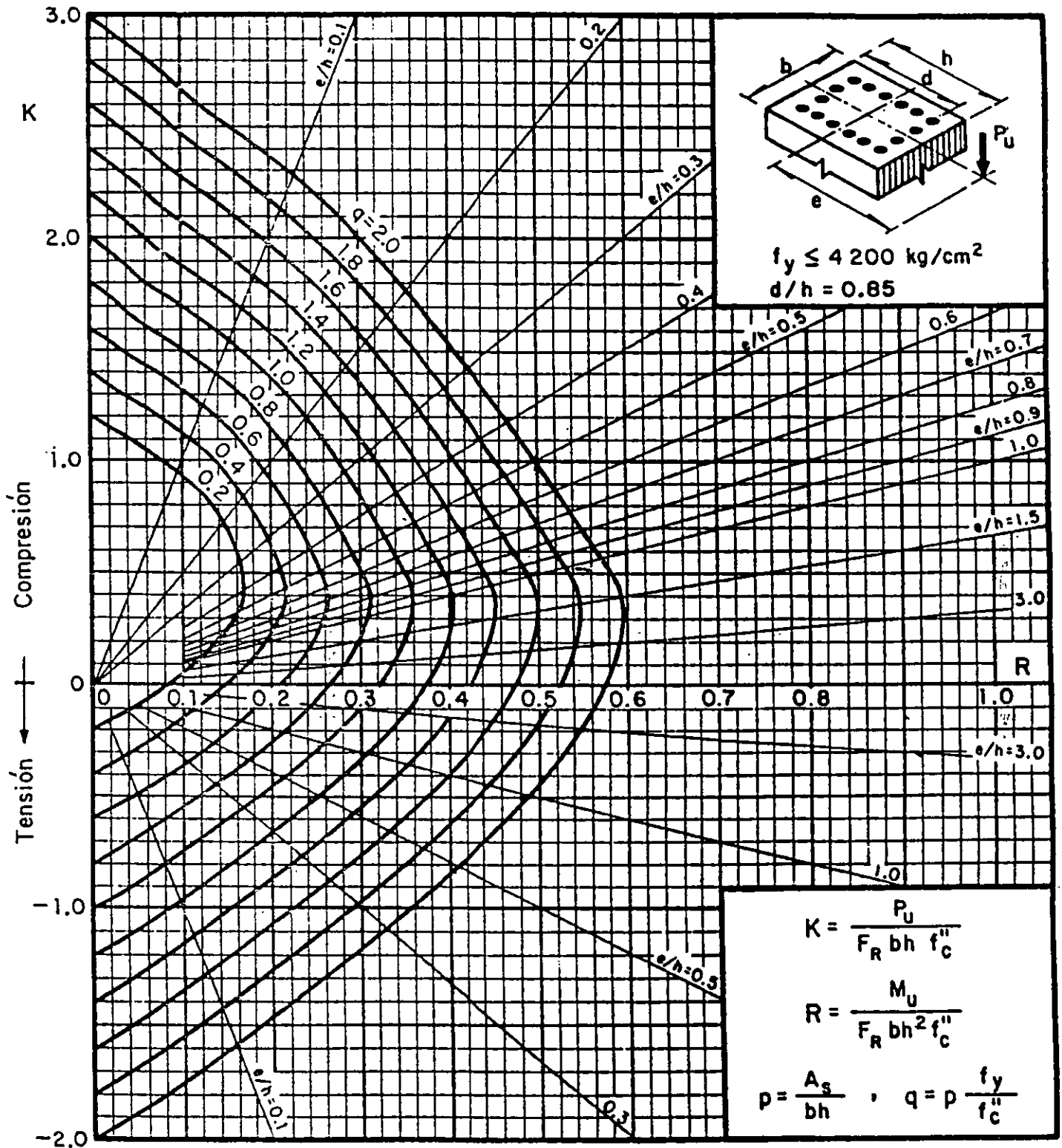
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 12



A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseo
 M_u = Momento flexionante de diseo

Fig 13
138



A_s = Area total de refuerzo

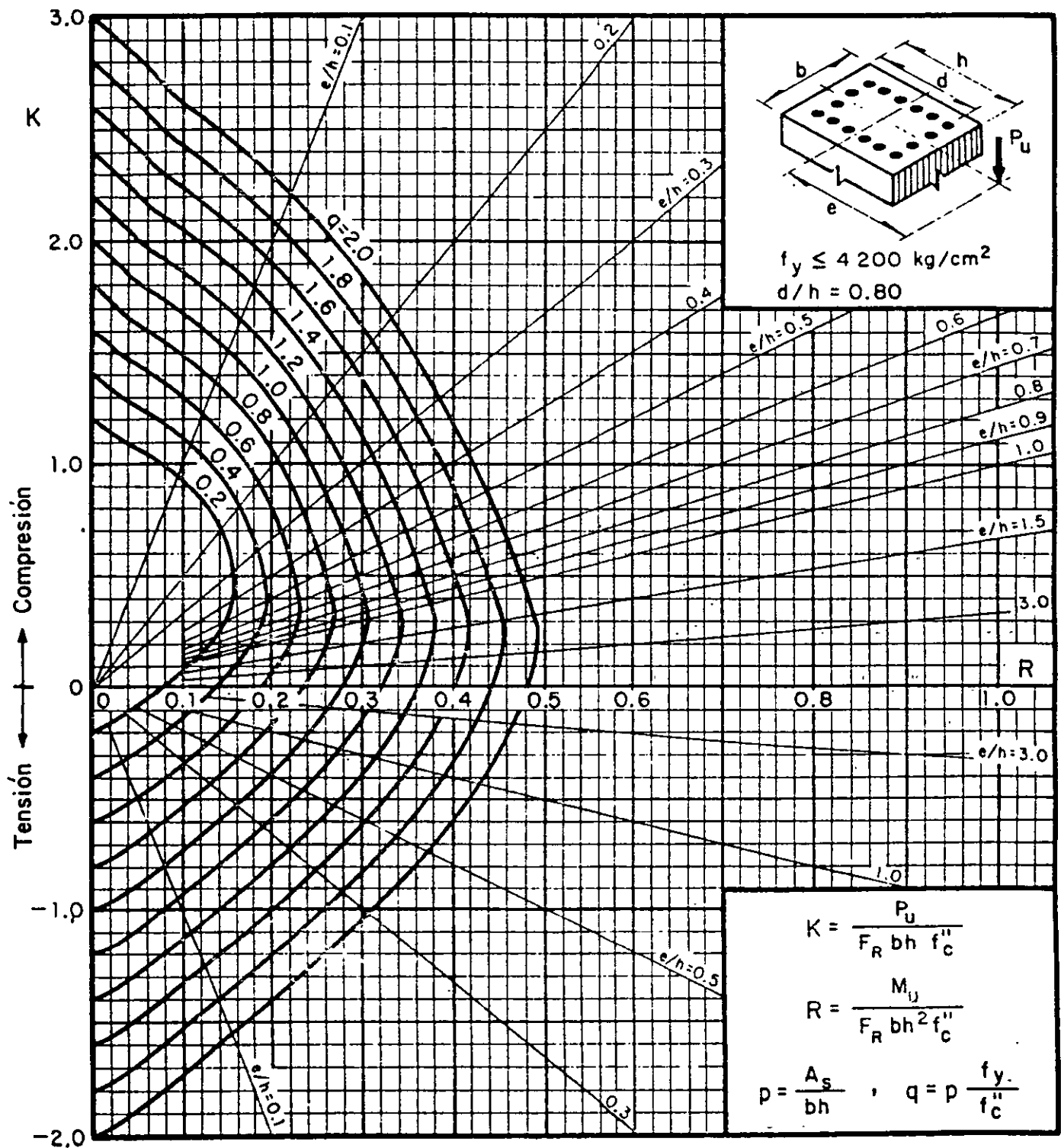
$f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

F_R = Factor de resistencia

P_u = Carga axial de diseño

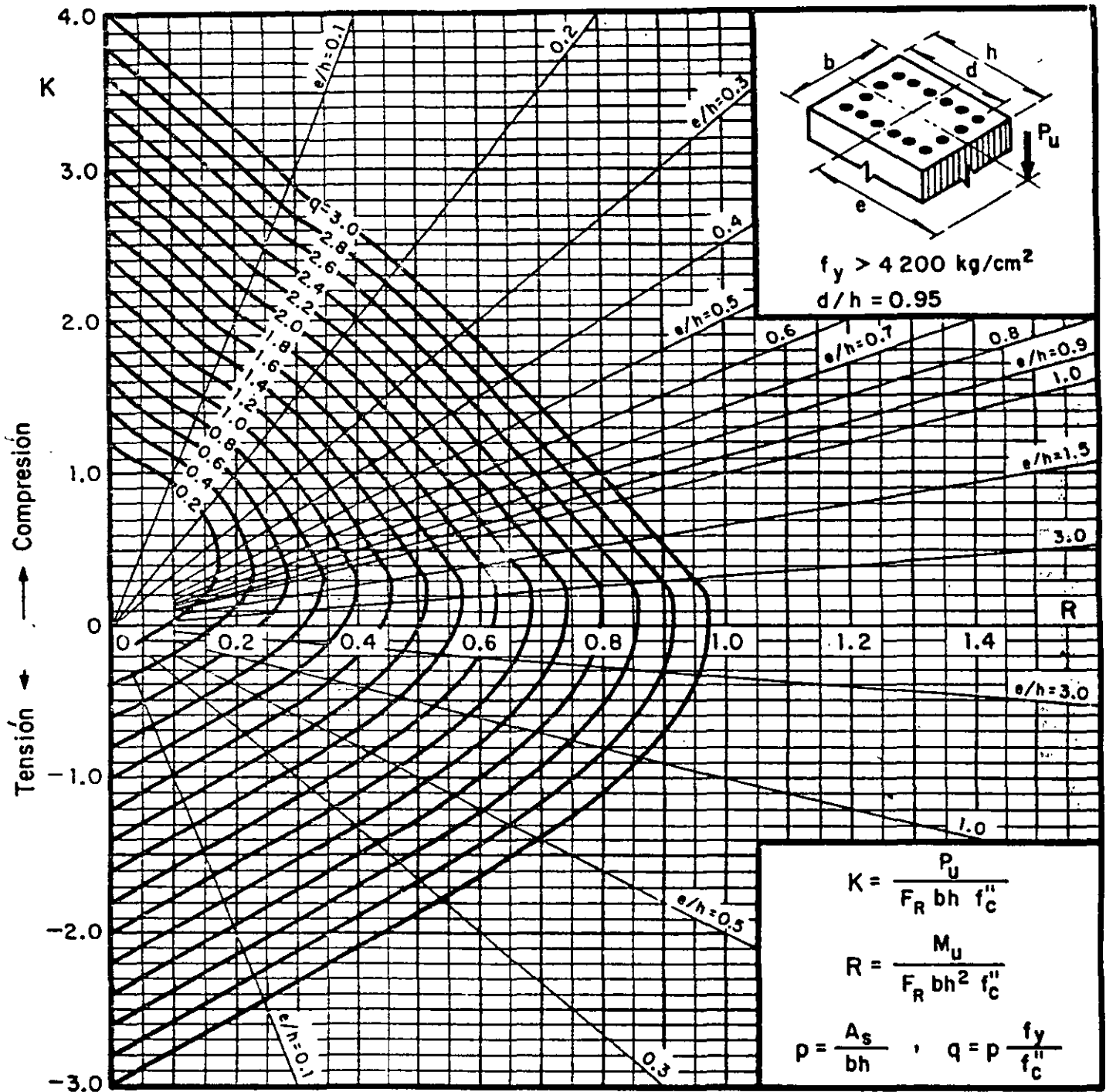
M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 14



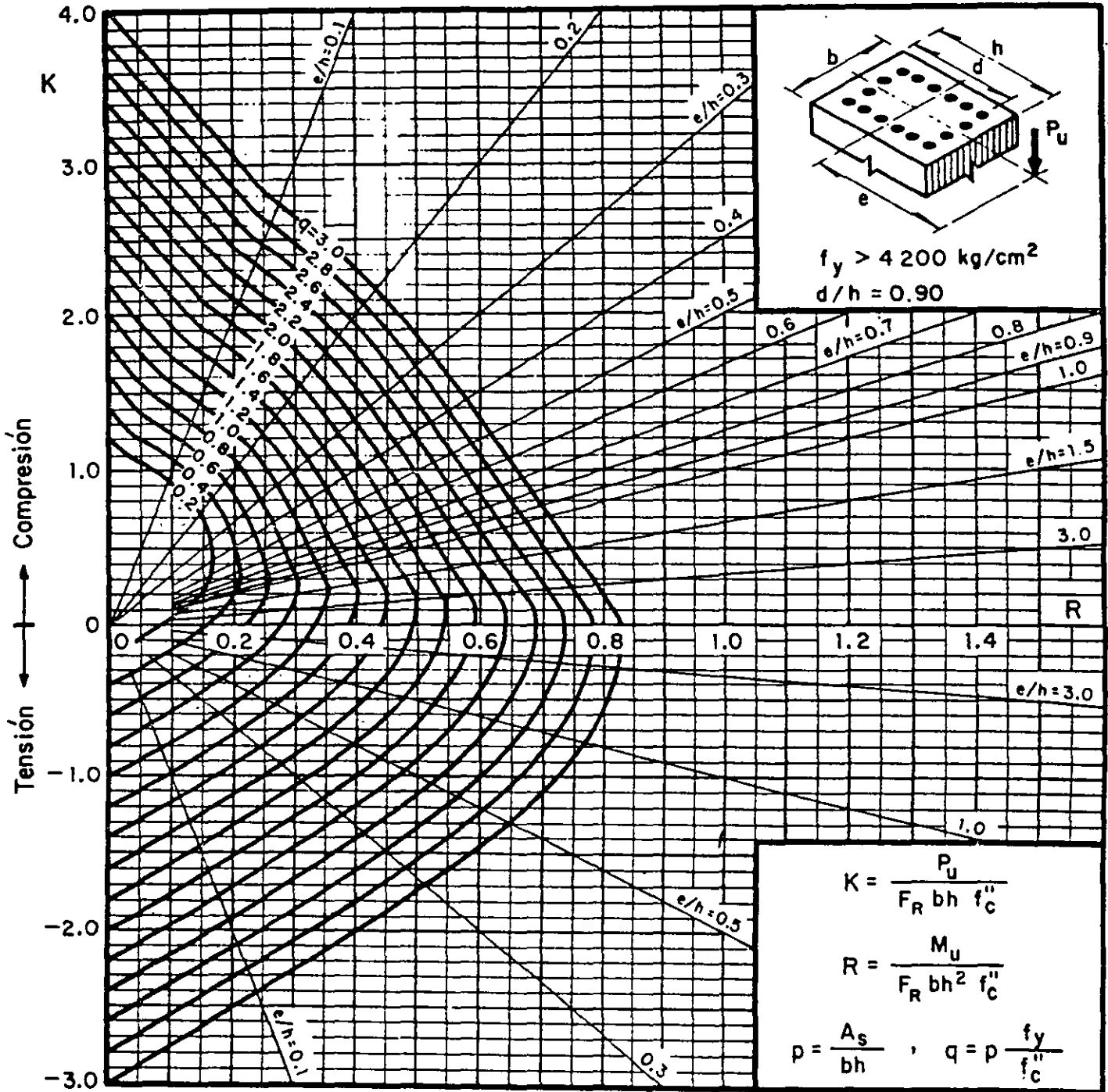
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 15
140



A_s = Área total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 16



A_s = Área total de refuerzo

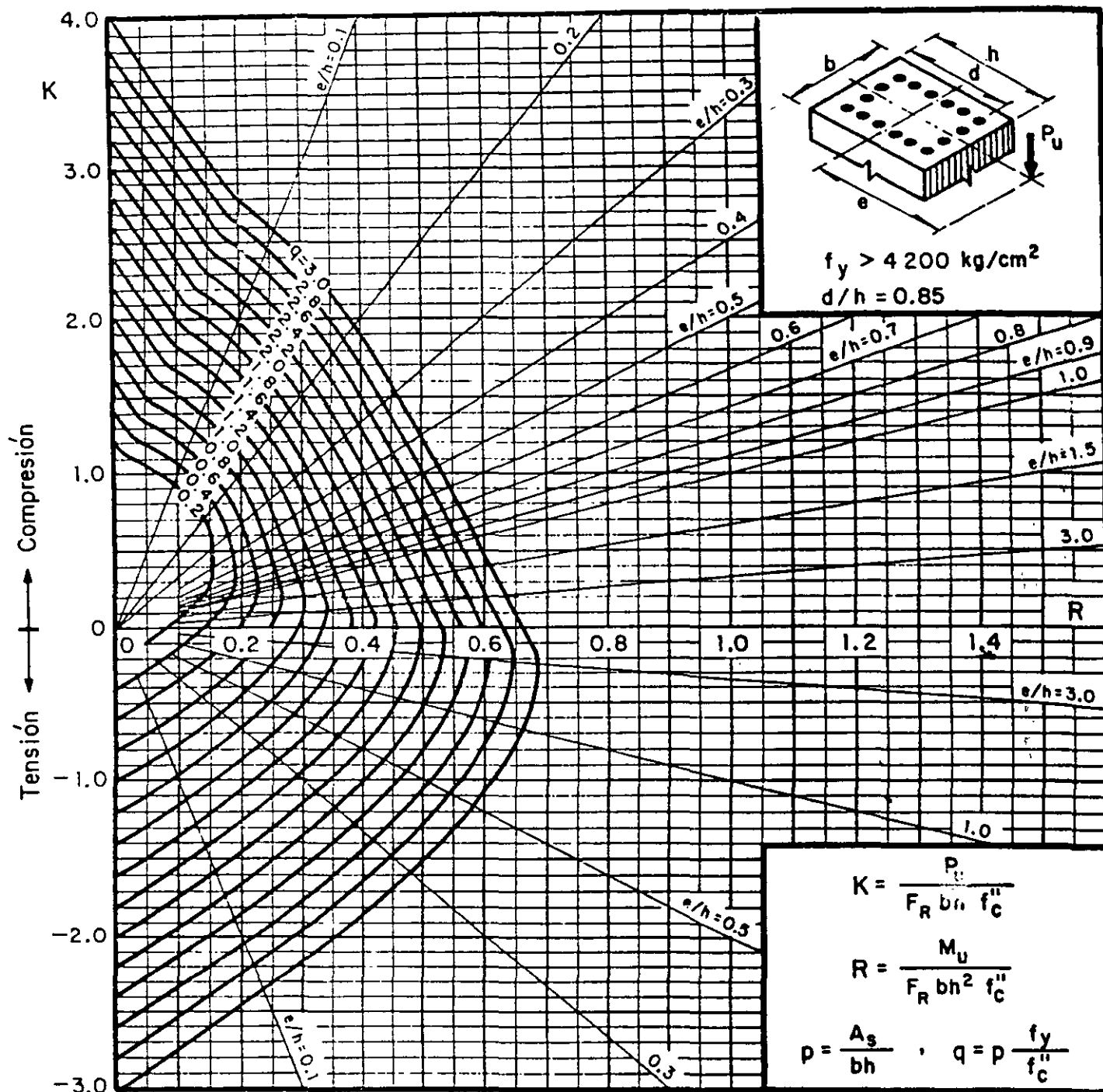
$f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

F_R = Factor de resistencia

P_u = Carga axial de diseño

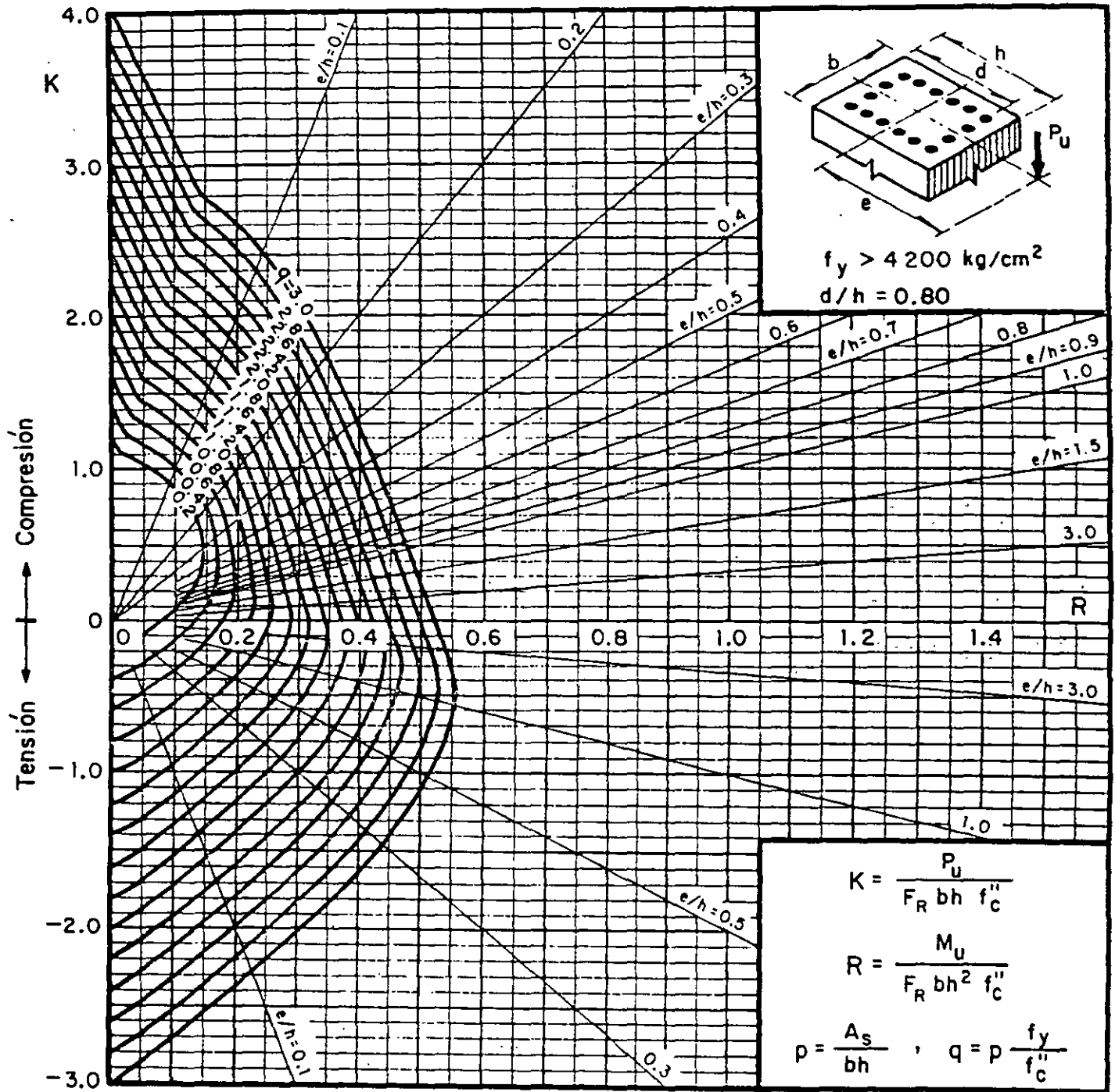
M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 17



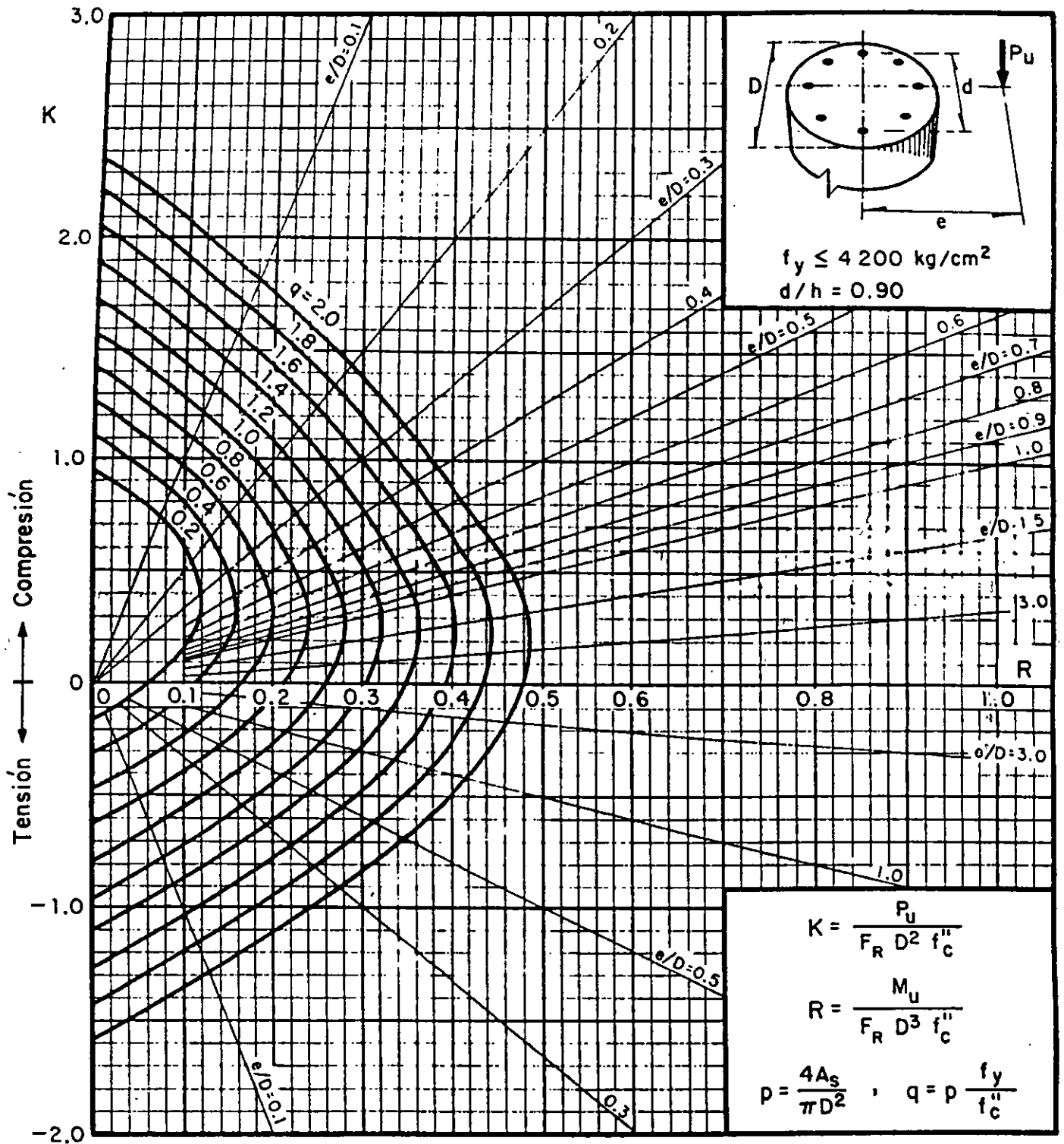
A_s = Área total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 18
143



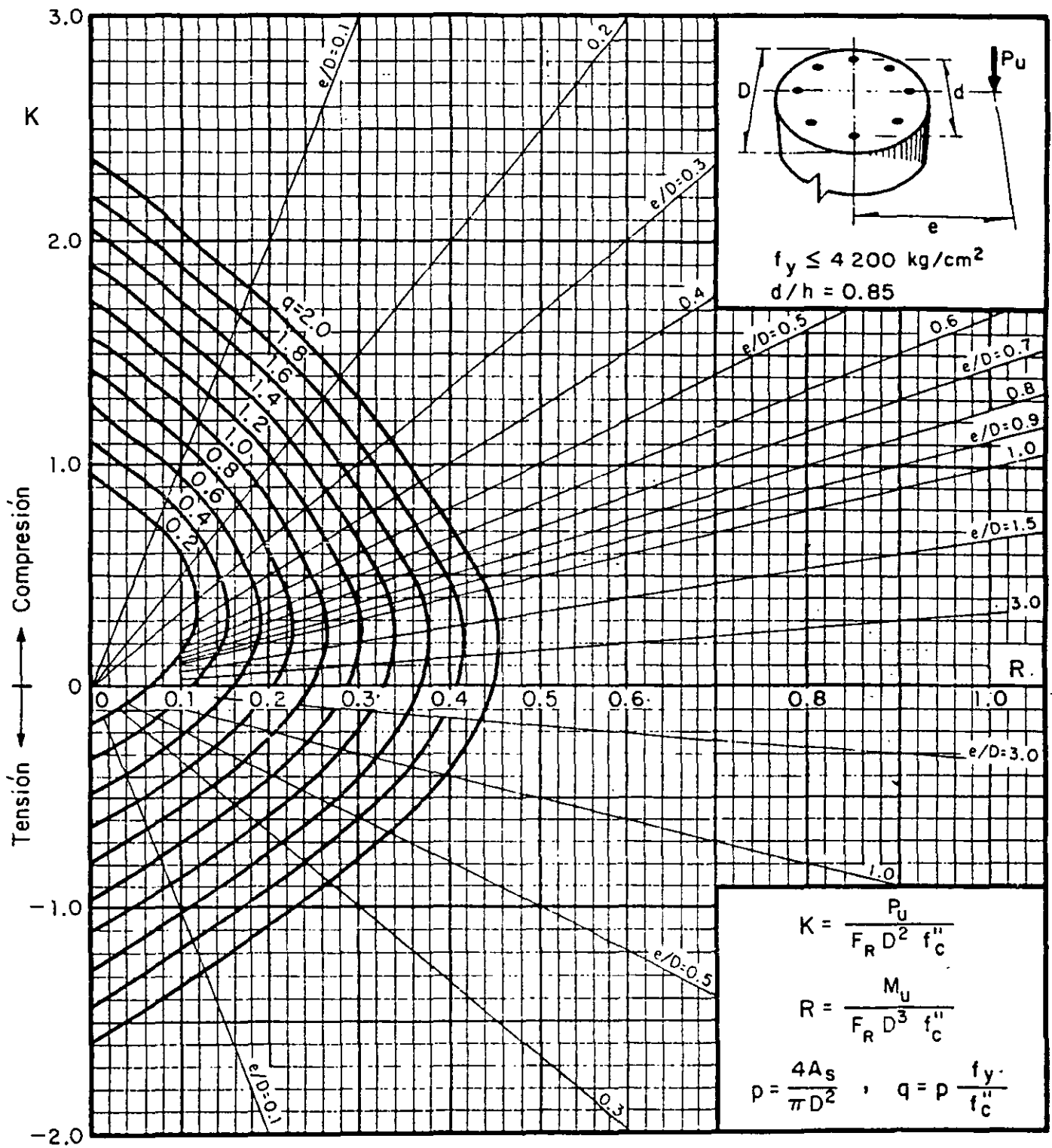
A_s = Ared total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseo
 M_u = Momento flexionante de diseo

Fig 19



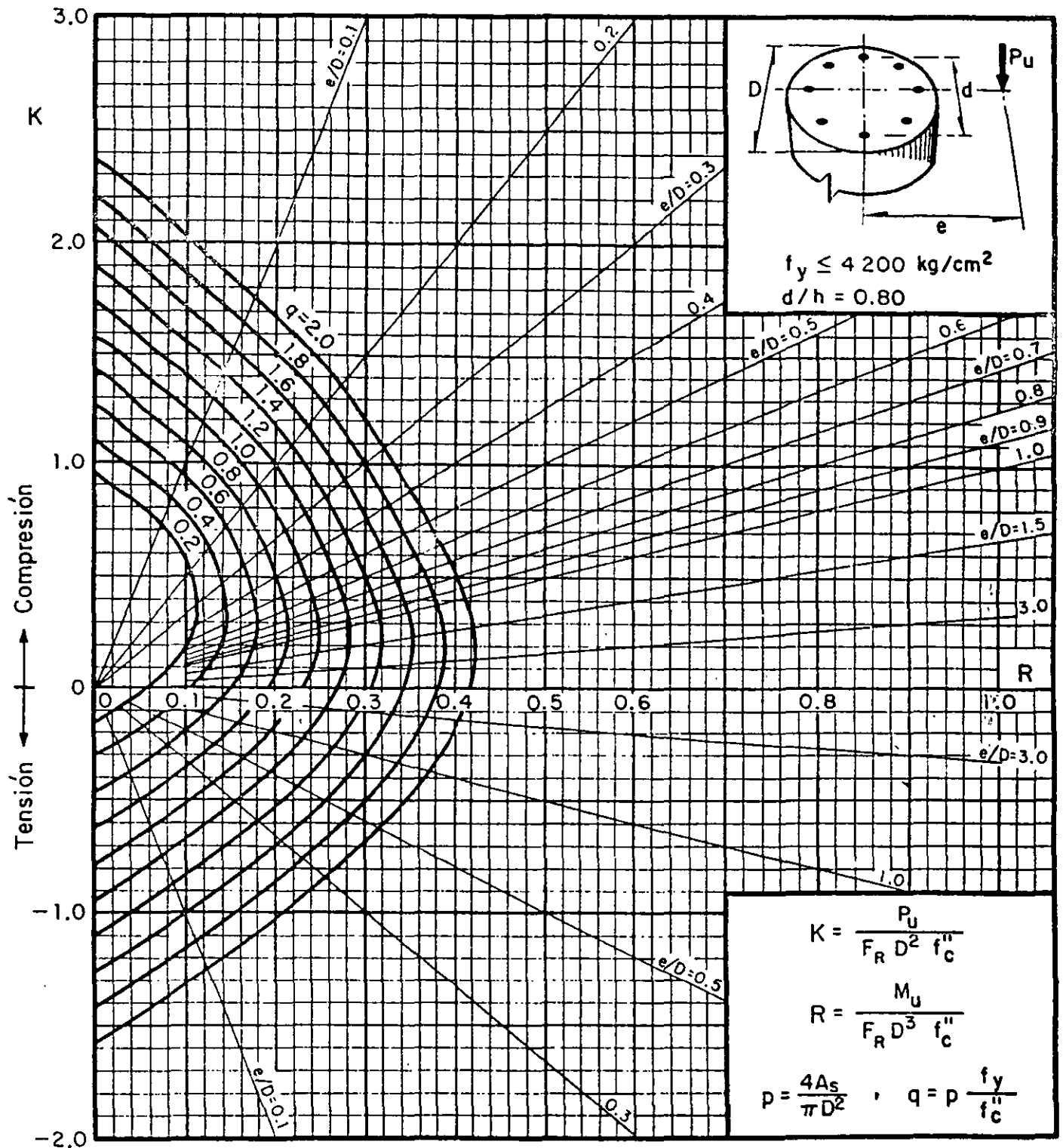
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 20



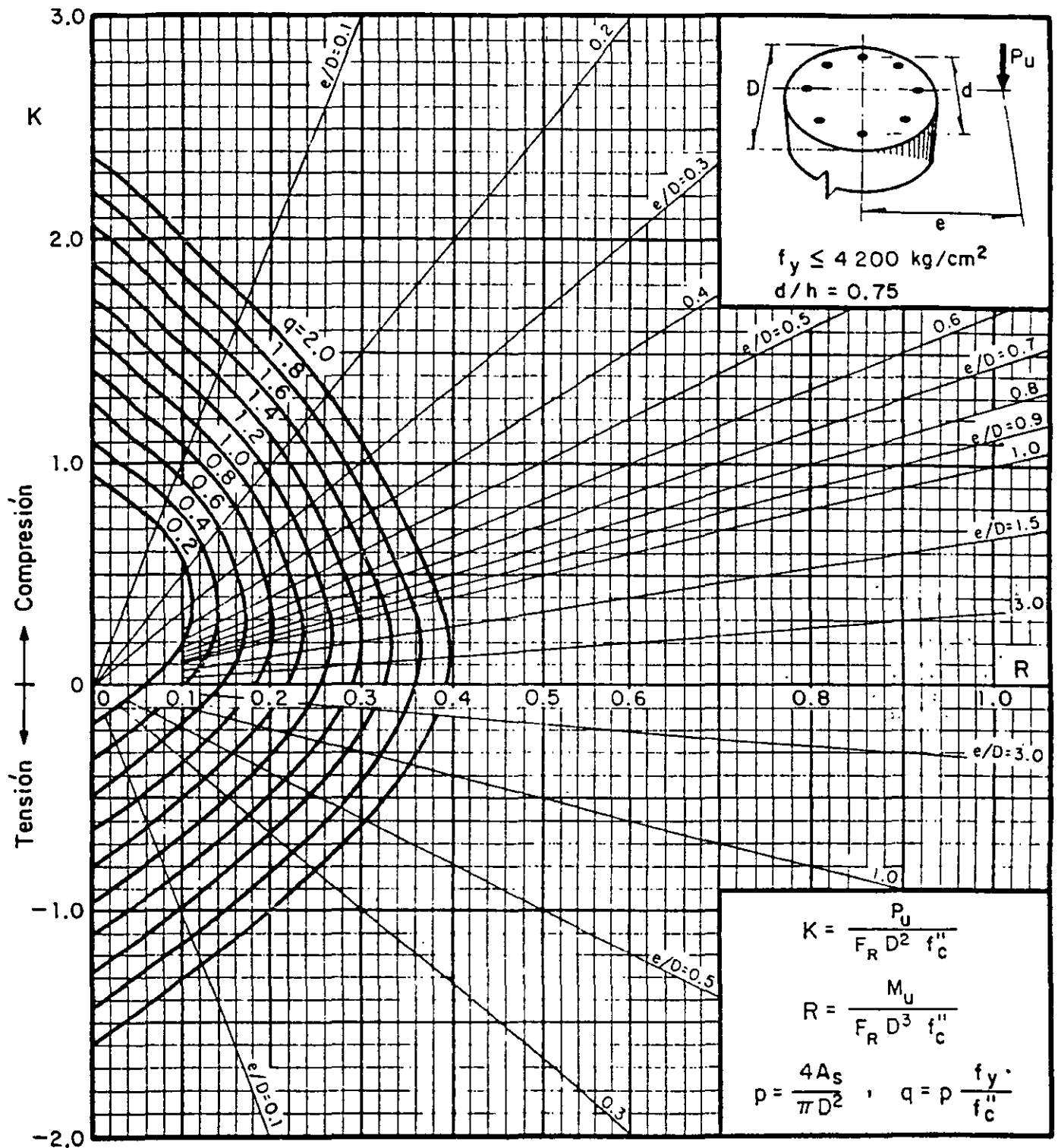
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 21
146



A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 22



A_s = Área total de refuerzo

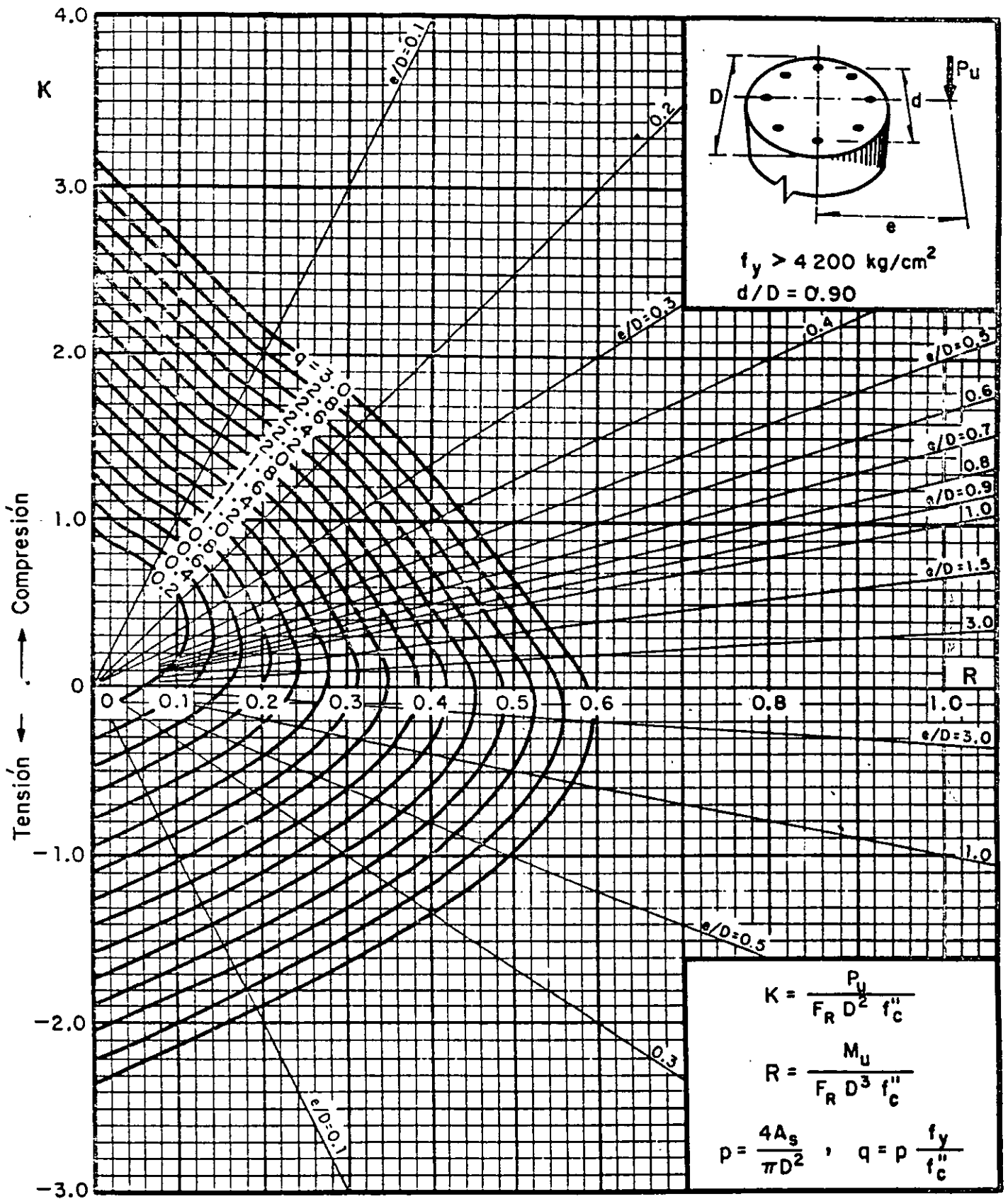
$f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

F_R = Factor de resistencia

P_u = Carga axial de diseño

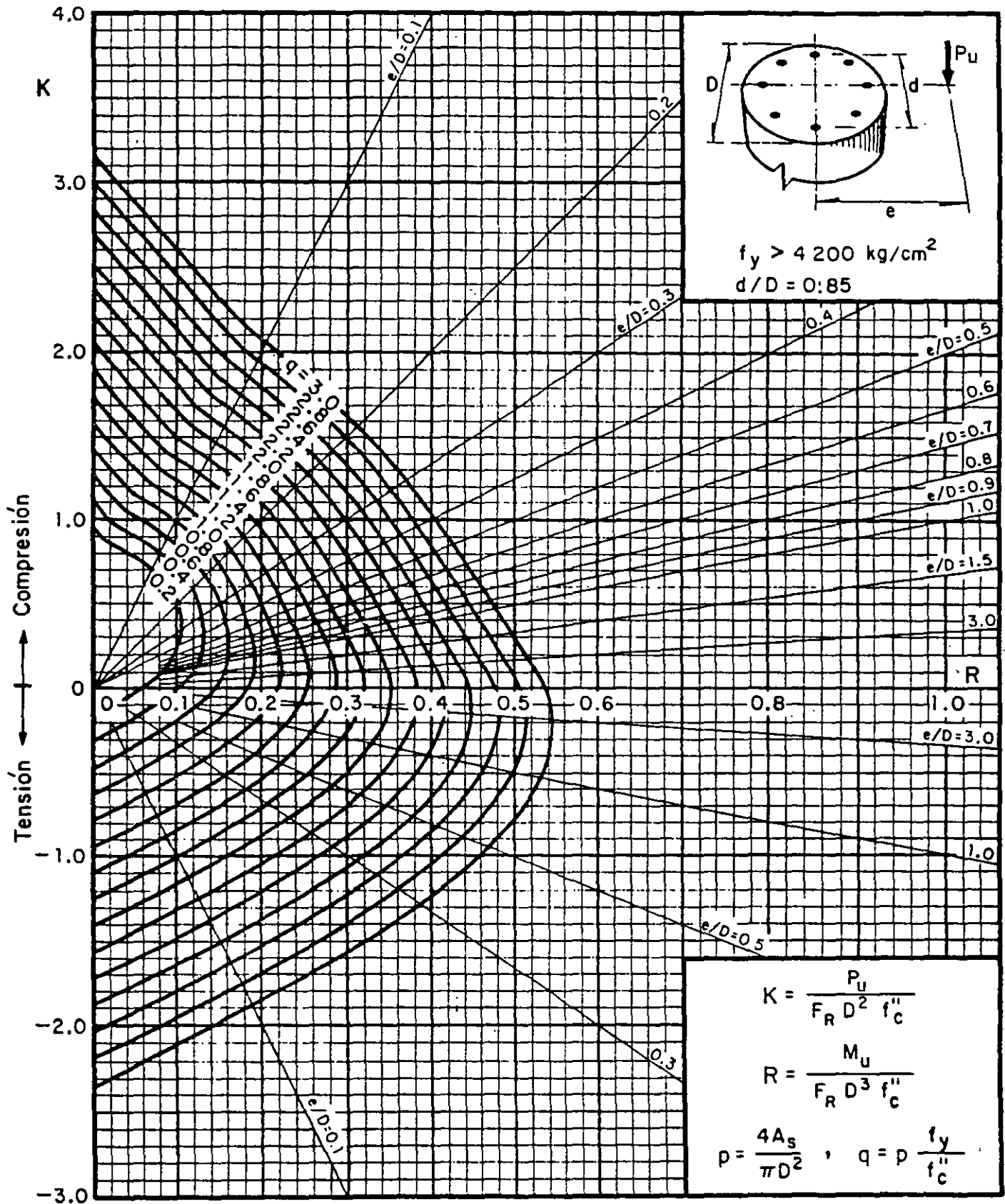
M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 23



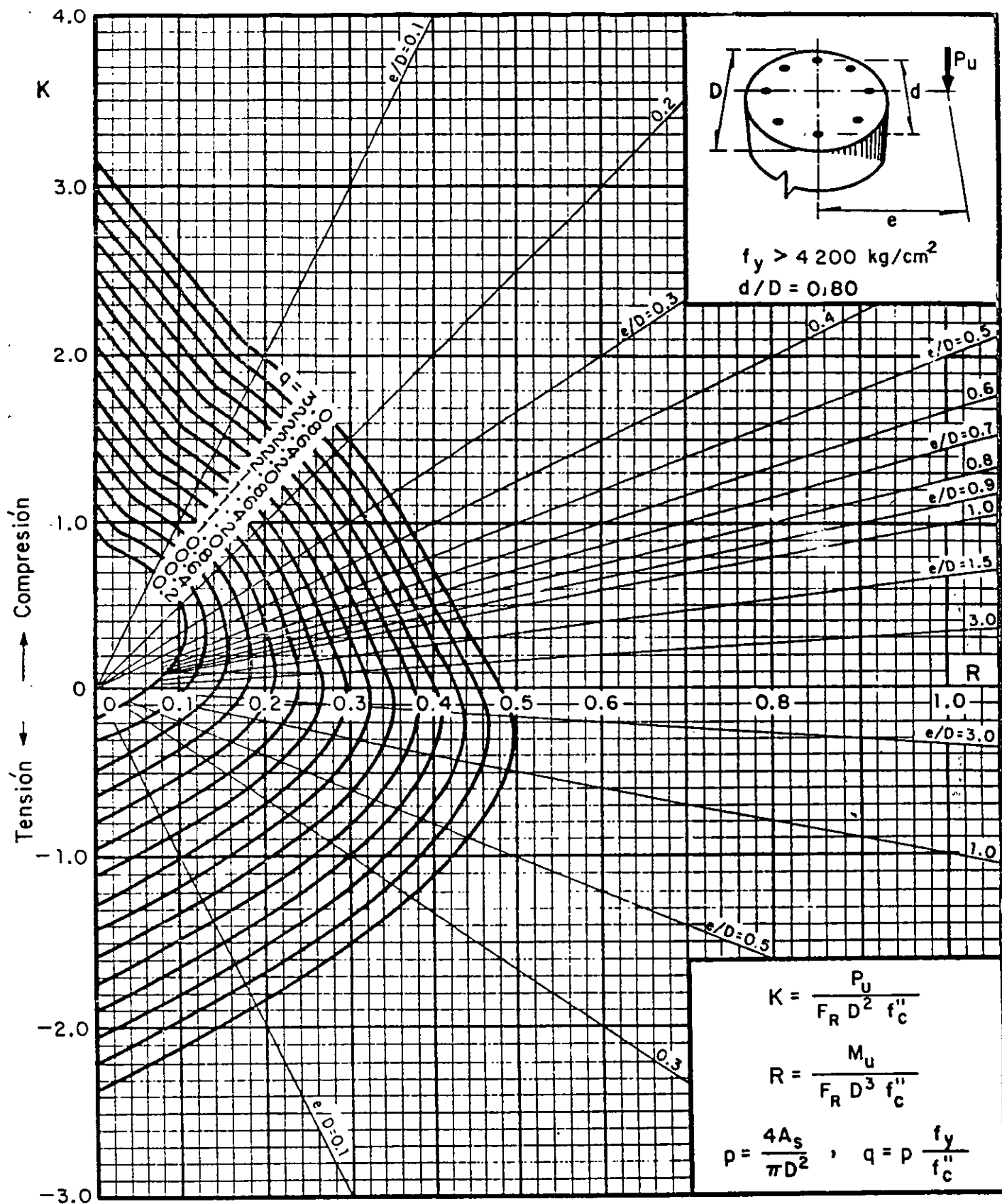
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 24



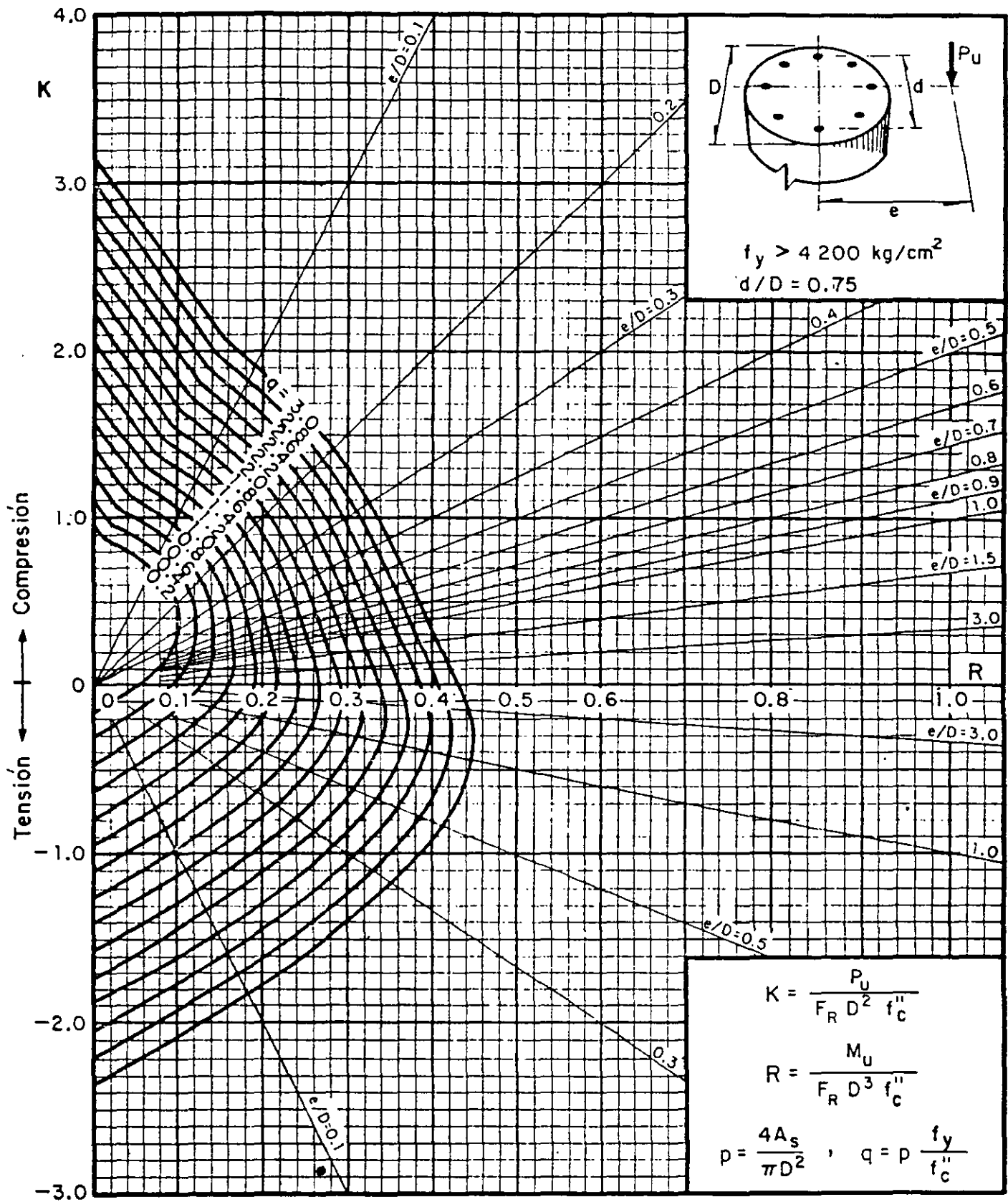
A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_U = Carga axial de diseño
 M_U = Momento flexionante de diseño

Fig 25
150



A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 26
151



A_s = Area total de refuerzo
 $f_c'' = 0.85 f_c^*$, si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$, si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$
 F_R = Factor de resistencia
 P_u = Carga axial de diseño
 M_u = Momento flexionante de diseño

Fig 27

LOSAS . Separación, s , de barras # 2.5 en lecho inferior

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$h = 10, 11 \text{ y } 12 \text{ cm}$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$d = 8, 9 \text{ y } 10 \text{ cm}$

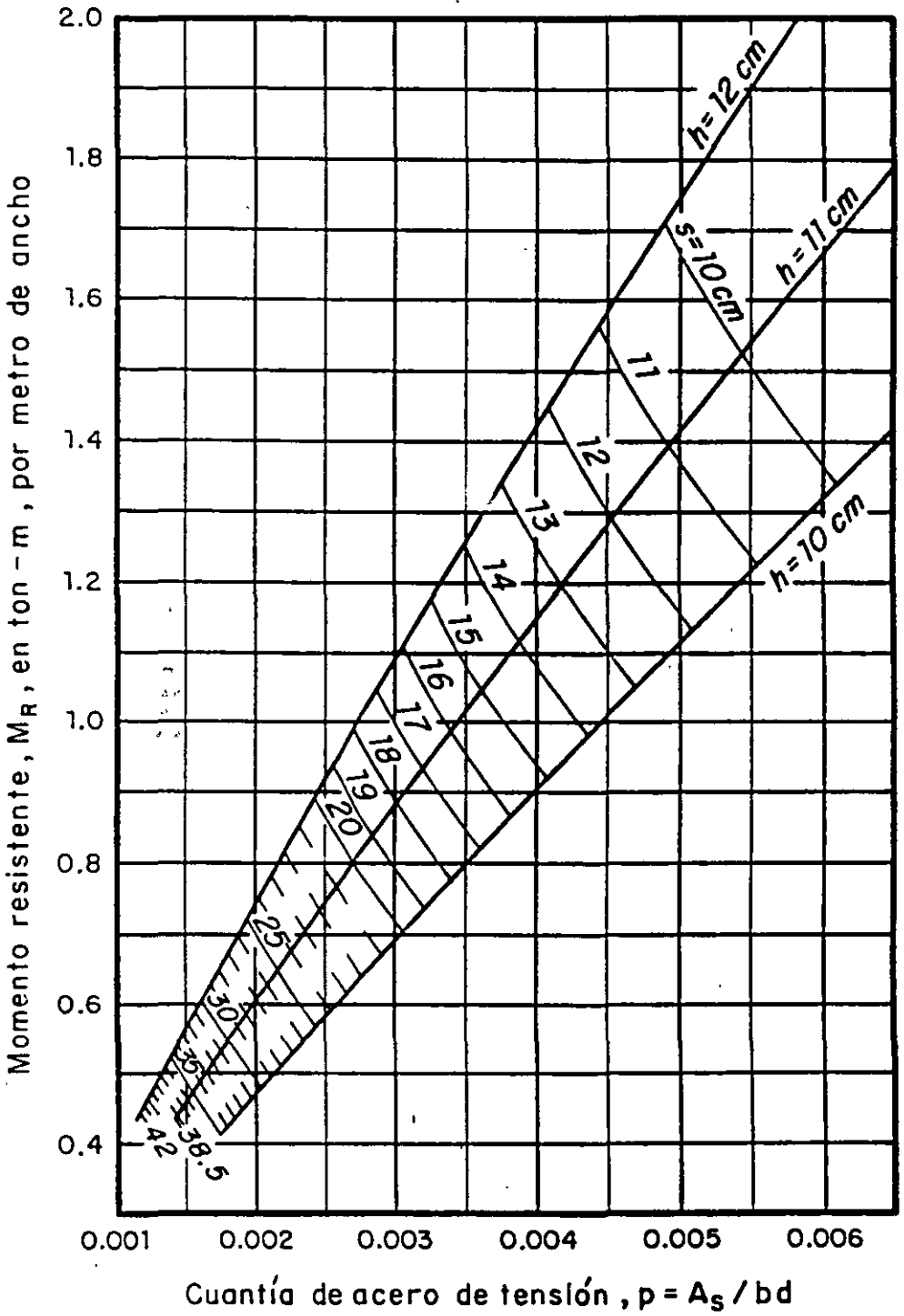


Fig 28

LUSAS. Separación, s , de barras # 2.5 en lecho superior

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$h = 10, 11 \text{ y } 12 \text{ cm}$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$d = 6, 7 \text{ y } 8 \text{ cm}$

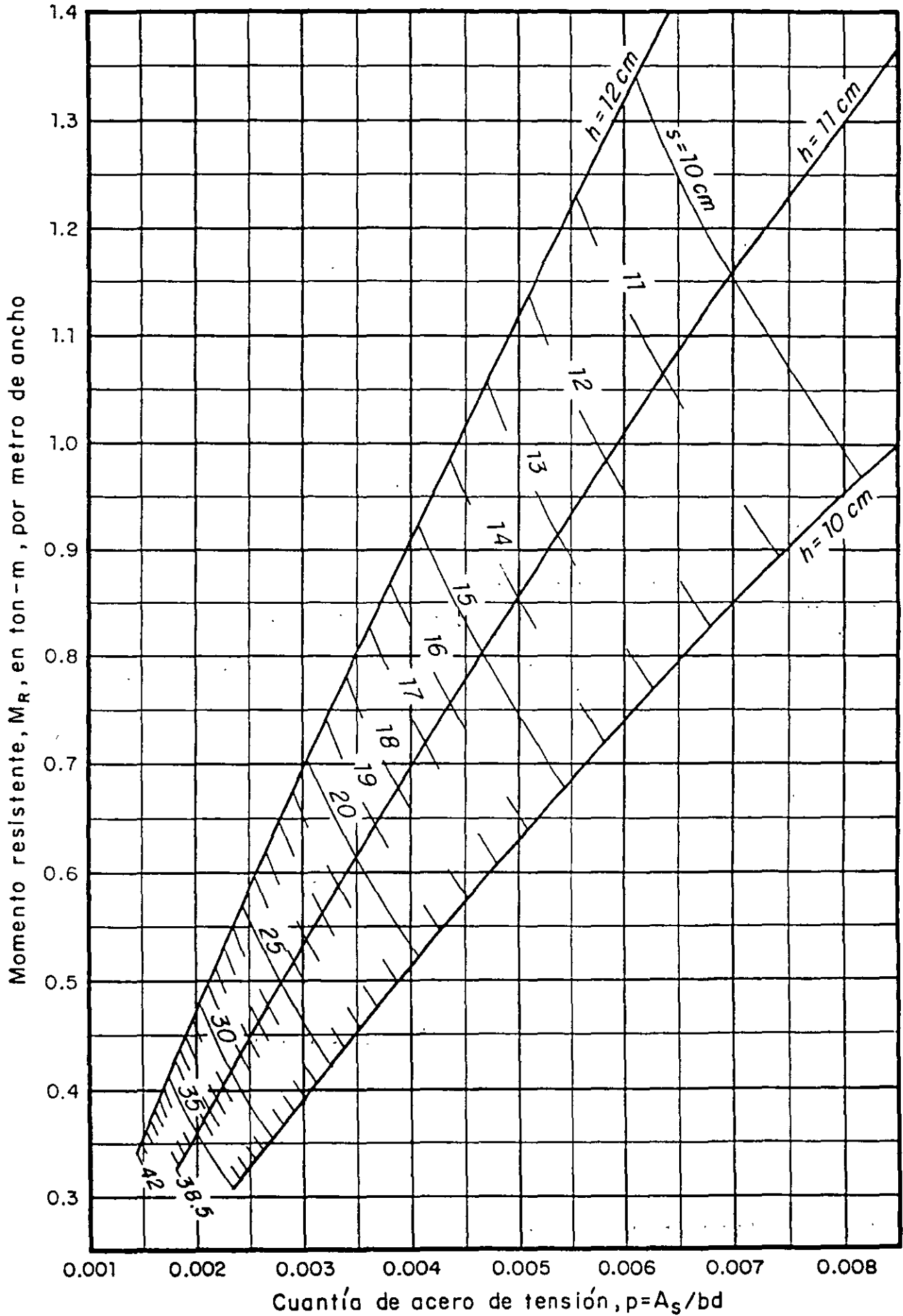


Fig. 29

$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$h = 10, 11, 12 \text{ y } 15 \text{ cm}$
 $d = 8, 9, 10 \text{ y } 13 \text{ cm}$

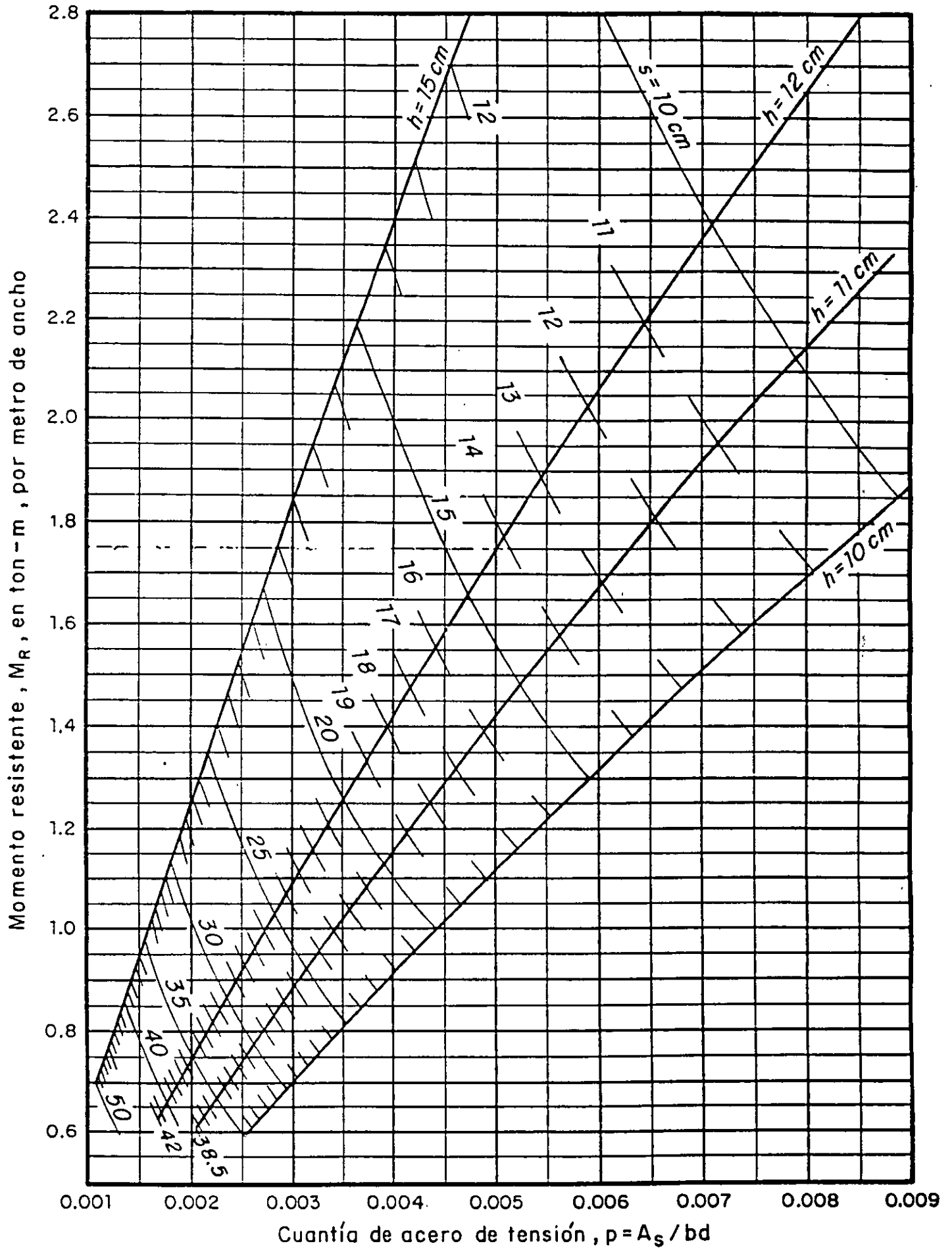


Fig 30

LOSAS. Separación, s , de barras # 3 en lecho superior

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$h = 10, 11, 12 \text{ y } 15 \text{ cm}$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$d = 6, 7, 8 \text{ y } 11 \text{ cm}$

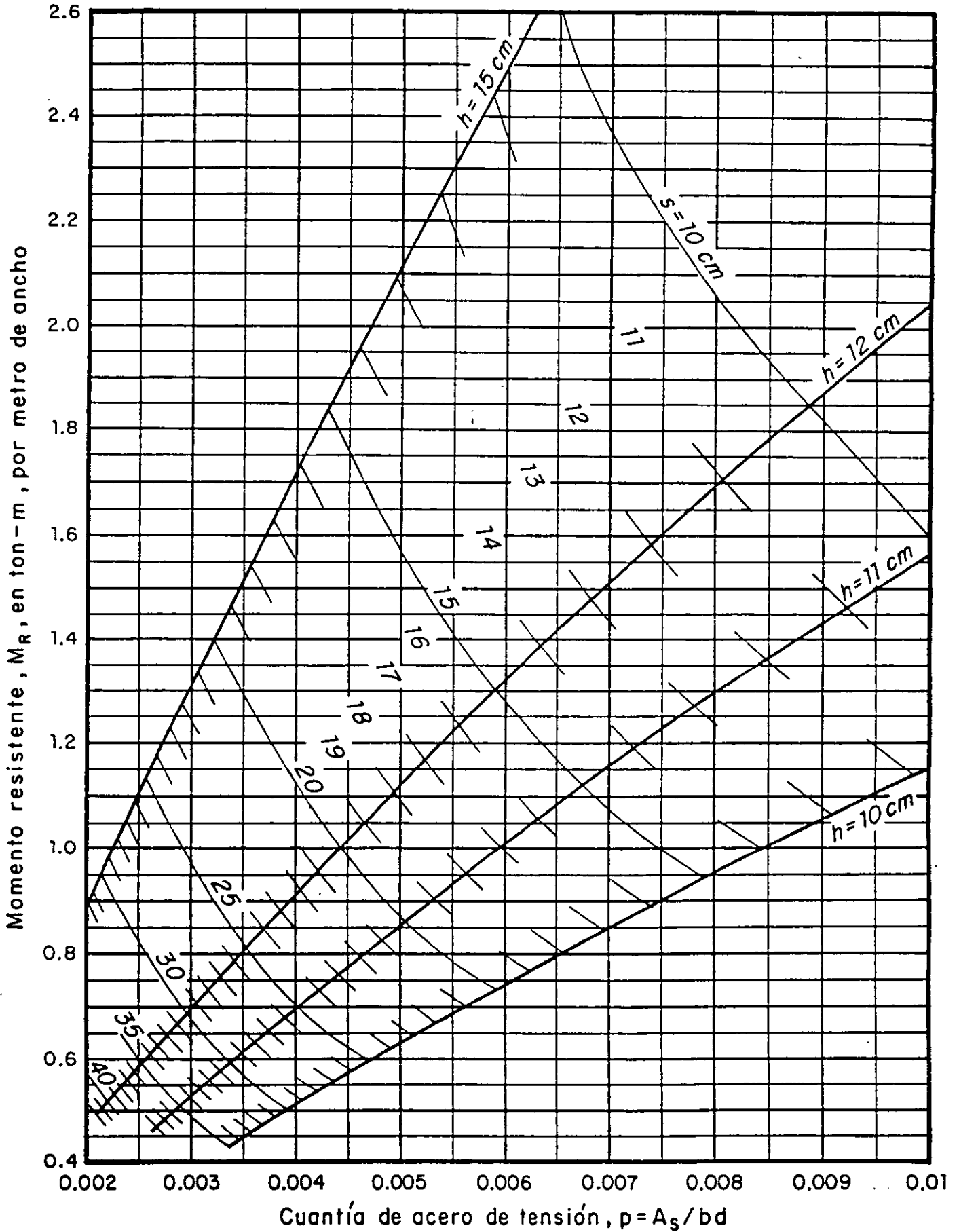


Fig 31

EJEMPLOS

SANTIAGO LOERA *

JOSÉ E ROMERO **

*** Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM**

**** Becario, Instituto de Ingeniería, UNAM**

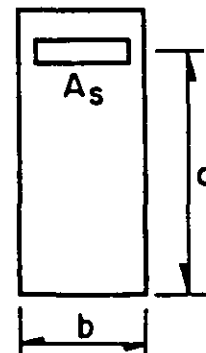
DATOS

1 $M_u = 30 \text{ t-m (momento negativo)}$

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$d/b = 2.5$



2 $P = P_{\text{máx}} = 0.75 P_b$

CONSTANTES

$f^*_c = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$ (ec 1.7)

$f''_c = 0.85 f^*_c = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$ (ec. 2.3)

por ser $f^*_c < 250 \text{ kg/cm}^2$

$P_b = \frac{f''_c}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.01524$ (ec 2.2)

$p = 0.75 P_b = 0.75 (0.01524) = 0.01143$

$q = p \frac{f_y}{f''_c} = 0.0114 \frac{4200}{136} = 0.3521$ (ec 2.7)

SOLUCION

$M_R = F_R b d^2 f''_c q (1-0.5q)$ (ec 2.5)

$bd^2 = \frac{M_R}{F_R f''_c q (1-0.5q)}$

3 $bd^2 = \frac{30 \times 10^5}{0.9 \times 136 \times 0.3521 (1-0.5 \times 0.352)} = 84510 \text{ cm}^3$

$$\text{sustituyendo } b = \frac{d}{2.5}$$

$$d^3 = 2.5 \times 84\,510 = 211\,300 \text{ cm}^3$$

$$d = \sqrt[3]{211300} = 59.6 \text{ cm}$$

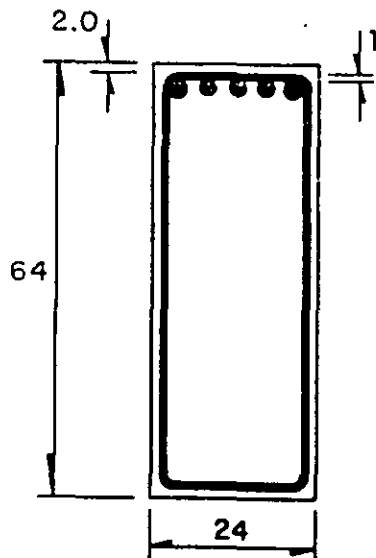
$$b = \frac{59.6}{2.5} = 23.8 \text{ cm; usar } b = 24 \text{ cm}$$

$$h = 59.6 + 4.1 = 63.7 \text{ cm; usar } h = 64 \text{ cm}$$

$$A_s = p b d = 0.0114 (23.8) (59.6)$$

$$A_s = 16.2 \text{ cm}^2$$

SECCION Y REFUERZO PROPUESTOS



3 # 5	5.94 cm ²
2 # 8	10.14
A_s	16.08 cm ²

COMENTARIOS

1. El momento dado, M_u , es el de diseño, es decir ya está afectado por el factor de carga correspondiente. Se supone que M_u se debe a cargas muerta, viva y sismo. Por ser viga subreforzada se puede despreciar el acero que tenga en la zona de compresión.
2. En este ejemplo se usó la cuantía máxima admisible que, según 2.1.2b), es igual a $0.75 p_b$ por tratarse de un elemento destinado a resistir sismo. Podría usarse una cuantía menor.
3. Para flexión, el factor de resistencia, F_R , es igual a 0.9, de acuerdo con 1.6.

DATOS

$$M_u = 34 \text{ t-m (negativo)}$$

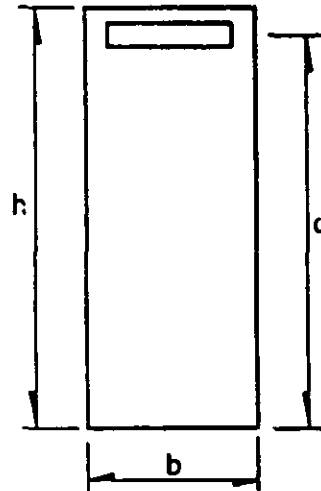
$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 75 \text{ cm}$$

$$d = 70 \text{ cm (supuesto)}$$

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



CONSTANTES

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 1.8})$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 2.3})$$

(por ser $f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2$)

$$p_b = \frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{4800}{10200} = 0.01524 \quad (\text{ec 2.2})$$

$$p_{\text{máx}} = 0.75 p_b = 0.75 \times 0.01524 = 0.01143$$

$$p_{\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \sqrt{200}}{4200} = 0.002357 \quad (\text{ec 2.1})$$

SOLUCION

Cálculo de la cuantía, p

$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5q) \quad (\text{ec 2.5})$$

$$34.0 \times 10^5 = 0.9 \times 30 \times (70)^2 \cdot 136 (q - 0.5q^2)$$

Efectuando operaciones y despejando q

$$q^2 - 2q + 0.378 = 0$$

$$q_1 = 1.7885$$

$$q_2 = 0.2115; p = q \frac{f_c''}{f_y} = 0.2115 \times \frac{136}{4200} = 0.006848 \quad (\text{ec 2.7})$$

En otra forma, usando la fig 2 de las Ayudas de Diseño:

$$\frac{M_R}{bd^2} = \frac{34 \times 10^5}{30 \times 70^2} = 23.13 \text{ kg/cm}^2$$

este valor y la curva correspondiente a $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ llevan a un valor de la cuantía igual a 0.0068

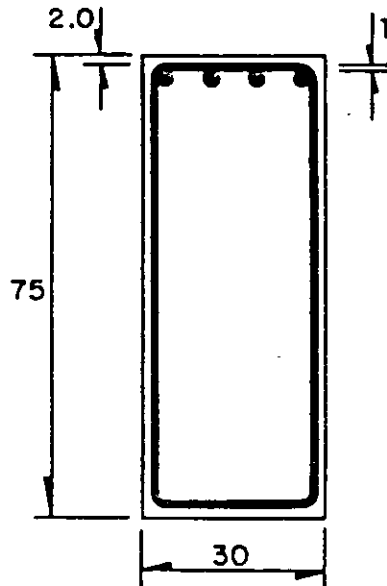
Revisión de $p_{\text{máx}}$ y $p_{\text{mín}}$

$$0.00685 \left\{ \begin{array}{l} > p_{\text{mín}} = 0.00236 \\ < p_{\text{máx}} = 0.0114 \end{array} \right. \quad \underline{\text{se acepta } p = 0.00685}$$

Cálculo de A_s

$$A_s = pbd = 0.00685 \times 30 \times 70 = 14.4 \text{ cm}^2$$

REFUERZO PROPUESTO



2 # 8	10.14 cm ²
2 # 5	<u>3.96 "</u>

$$A_s = 14.10 \text{ cm}^2$$

COMENTARIOS

1. El momento dado, M_u , es el de diseño; es decir, ya está afectado por el factor de carga correspondiente.
2. De acuerdo con 2.1.2b), se usará como cuantía máxima de acero $0.75 p_b$, por tratarse de una viga principal de un sistema que deberá resistir sismo.

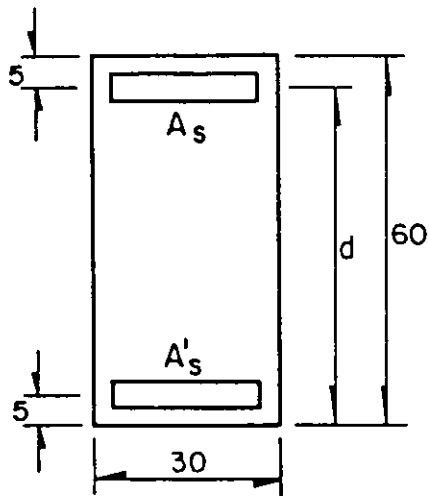
DATOS

1 $M_u = 45.6 \text{ t-m (negativo)}$

$b = 30 \text{ cm}$

$h = 60 \text{ cm}$

$d = 55 \text{ cm (supuesto)}$



$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

CONSTANTES

$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$ (ec 1.7)

$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$ (ec 2.3)

(Por ser $f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2$)

$$P_b = \frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.01524 \quad (\text{ec } 2.2)$$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b = 0.75 \times 0.01524 = 0.01143$$

$$q_{\text{máx}} = P_{\text{máx}} \frac{f_y}{f_c''} = 0.01143 \times \frac{4200}{136} = 0.3530 \quad (\text{ec } 2.7)$$

SOLUCION

Cálculo del momento resistente máximo de la viga si solo tuviera refuerzo a tensión (M_{R1})

$$M_{R1} = F_R b d^2 \frac{f_c''}{c} q_{\text{máx}} (1 - 0.5 q_{\text{máx}}) \quad (\text{ec } 2.5)$$

$$M_{R1} = 0.9 \times 30 \times 55^2 \times 136 \times 0.353 (1 - 0.5 \times 0.353)$$

$$M_{R1} = 3\,229\,000 \text{ kg-cm} = 32.29 \text{ t-m}$$

$$M_{R1} = 32.29 \text{ t-m} < M_u = 45.6 \text{ t-m}$$

luego, se requiere refuerzo a compresión

Cálculo de A_s y A'_s (suponiendo que A'_s fluye)

$$M_{R2} = M_u - M_{R1} = 45.60 - 32.29 = 13.31 \text{ t-m}$$

$$A_s - A_{s\text{máx}} = \frac{M_{R2}}{F_R f_y (d-d')} = \frac{13.31 \times 10^5}{0.9 \times 4200 (55-5)} = 7.042 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 7.04 + A_{s\text{máx}} = 7.04 + 18.86 = \underline{29.9 \text{ cm}^2}$$

usar 5 # 8 (25.35 cm²)

$$A_{s\text{máx}} = P_{\text{máx}} b d = 0.01143 \times 30 \times 55 = 18.86 \text{ cm}^2$$

y el acero a compresión:

$$A'_s = \frac{7.04}{0.75} = \underline{9.39 \text{ cm}^2} \quad \underline{\text{usar 2\#8 (10.14 cm}^2\text{)}}$$

la cuantía del acero a tensión será:

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{25.35}{30 \times 55} = 0.0154$$

y la cuantía del acero a compresión

$$p' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{10.14}{30 \times 55} = 0.0061$$

Comprobación de que fluya el acero a compresión

Este acero fluye si:

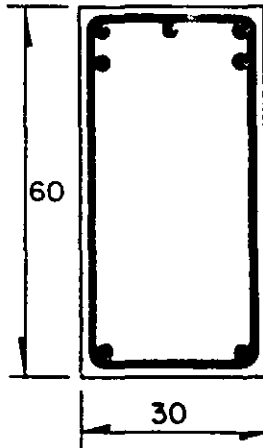
$$p - p' > \frac{f''_c}{f_y} \cdot \frac{d'}{d} \cdot \frac{4800}{6000 - f_y} \quad (\text{ec 2.10})$$

$$\frac{f''_c}{f_y} \cdot \frac{d'}{d} \cdot \frac{4800}{6000 - f_y} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{5}{55} \cdot \frac{4800}{6000 - 4200} = 0.0078$$

$$p - p' = 0.0154 - 0.0061 = 0.0093 > 0.0078$$

luego, si fluye el acero a compresión

REFUERZO PROPUESTO



A tensión

5 # 8 25.35 cm²

A compresión

2 # 8 10.14 cm²

COMENTARIOS

1. Momento negativo de diseño, bajo carga muerta, viva y sismo; incluye el factor de carga correspondiente.
2. Por tratarse de una viga principal de un sistema que deberá resistir sismo, el área máxima de acero de tensión será 75 por ciento de la correspondiente a la falla balanceada, según 2.1.2 b).
3. Se calcula el momento resistente de la viga, M_{R1} , con el acero máximo permisible y se compara con el momento de diseño M_u ; si M_{R1} es menor que M_u , deberá agregarse acero de compresión y tensión para resistir el momento $M_{R2} = M_u - M_{R1}$.
4. Obsérvese que esta igualdad es equivalente a la ec 2.9.
5. La condición para que en una viga doblemente reforzada fluya el acero de tensión, si el de compresión fluye, es la siguiente

$$A_s \leq A_{sb} + A'_s$$

donde A_{sb} está dada por la ec 2.2 En vigas que deban resistir sismo,

el refuerzo de tensión se limita al 75 por ciento del valor anterior, de modo que en el ejemplo se debe tener $A_s = 0.75 (A_{sb} + A'_s)$, es decir $A_s = A_{sm\acute{a}x} + 7.04 = 0.75 (A_{sb} + A'_s)$. Puesto que $A_{sm\acute{a}x} = 0.75 A_{sb}$, resulta que $7.04 = 0.75 A'_s$, es decir $A'_s = 7.04/0.75$.

CALCULO DEL ACERO DE REFUERZO DE UNA VIGA "T"

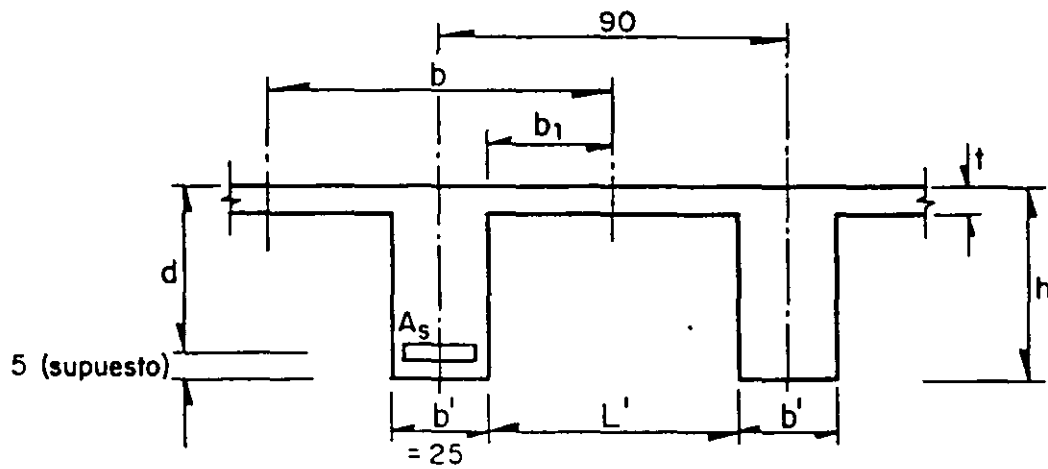
DATOS

$$M_u = 37 \text{ t-m}$$

$$L = 8 \text{ m (claro de la viga)}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$t = 7 \text{ cm}$$



$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 1.7})$$

$$f'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 2.3})$$

$$(\text{por ser } f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2)$$

Ancho del patín que trabaja a compresión

$$b_1 \begin{cases} L/8 - b'/2 = 800/8 - 25/2 = 100 - 12.5 = 87.5 \text{ cm} \\ L'/2 = 65/2 = 32.5 \text{ cm} \\ 8t = 8(7) = 56 \text{ cm} \end{cases}$$

Se elige el menor valor:

$$b_1 = 32.5 \text{ cm}$$

$$b = 2b_1 + b' = 65 + 25 = 90 \text{ cm}$$

3 REVISION PARA DEFINIR SI LA VIGA SE CALCULA COMO T

Supóngase $z = d - t/2 = 45 - \frac{7}{2} = 41.5 \text{ cm}$

De $\bar{M} = 0$

$$A_s = \frac{M_u}{F_R f_y z} = \frac{37 \times 10^5}{0.9 \times 4200 \times 41.5} = 23.59 \text{ cm}^2$$

De $\bar{F} = 0$

la profundidad del bloque de esfuerzos, a , resulta

$$a = \frac{A_s f_y}{f'_c b} = \frac{23.59 \times 4200}{136 \times 90} = 8.09 > t \quad (\text{ec 2.11})$$

luego, la viga se dimensionará como viga T

SOLUCION

4 Cálculo del momento que corresponde a los patines, M_1

$$A_{sp} = \frac{f'_c (b-b') t}{f_y} = \frac{136 (90-25) 7}{4200} = 14.73 \text{ cm}^2$$

$$M_1 = F_R A_{sp} f_y (d-t/2) = 0.9 \times 14.73 \times 4200 (45-7/2)$$

$$M_1 = 2311 \text{ 000 kg-cm}$$

El momento, M_2 , que se asoció al alma será

$$M_2 = M_u - M_1 = 37.00 \times 10^5 - 23.11 \times 10^5 = 13.89 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

En estas condiciones, el alma se trata como una viga rectangular con un área de acero igual a $A_s - A_{sp}$. Esta área se obtendrá usando la fig 2 de las Ayudas de Diseño:

$$\frac{M_R}{b'd^2} = \frac{13.89 \times 10^5}{25 \times 45^2} = 27.44 \text{ kg/cm}^2$$

en la figura se obtiene $p = 0.0083$

$$A_s - A_{sp} = pb'd = 0.0083 \times 25 \times 45 = 9.34 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 9.34 + A_{sp} = 9.34 + 14.73 = \underline{24.07 \text{ cm}^2}$$

Comprobación de que el acero fluya

Se debe cumplir $A_s \leq A_{sb} = \frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} \cdot b'd + A_{sp}$ (ec 2.13)

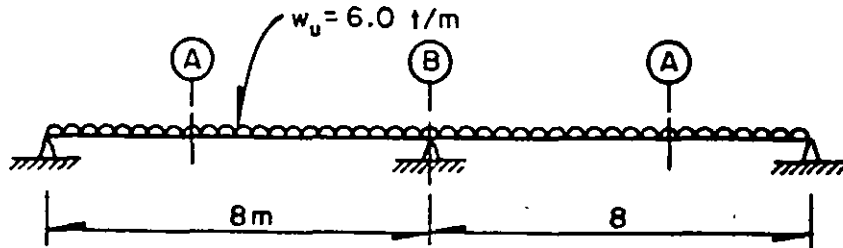
$$\frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} \cdot b'd + A_{sp} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{4800}{4200+6000} \cdot 25 \times 45 + 14.73 = 31.87 > A_s$$

luego, sí fluye el refuerzo

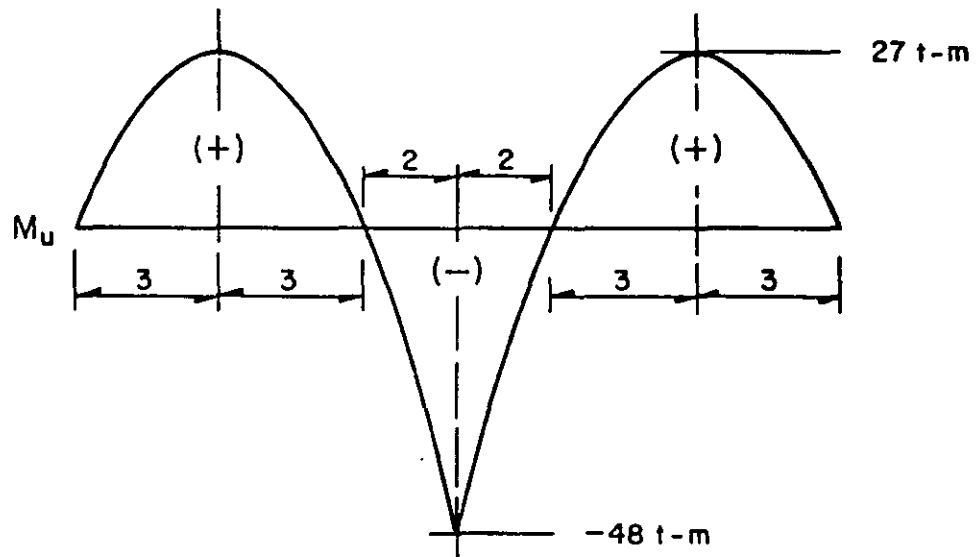
COMENTARIOS

1. El momento M_u es el de diseño, es decir, ya está afectado por el factor de carga correspondiente.
2. b_1 se determina según 2.1.2.c).
3. Se supone la profundidad del bloque de esfuerzos, a , igual al espesor del patín y aplicando las condiciones de equilibrio se calcula dicha profundidad. Si el valor calculado es mayor que el espesor del patín procede dimensionar la viga como T; en caso contrario se dimensiona como viga rectangular de ancho igual al del patín.
4. M_1 es un par formado por la compresión que actúa sólo en los patines y la tensión que actúa en un área de acero A_{sp} , afectado por el factor de resistencia, F_R .
5. Se supone que la viga no está destinada a resistir sismo por lo que basta comprobar que se cumpla $A_s \leq A_{sb}$.

DATOS



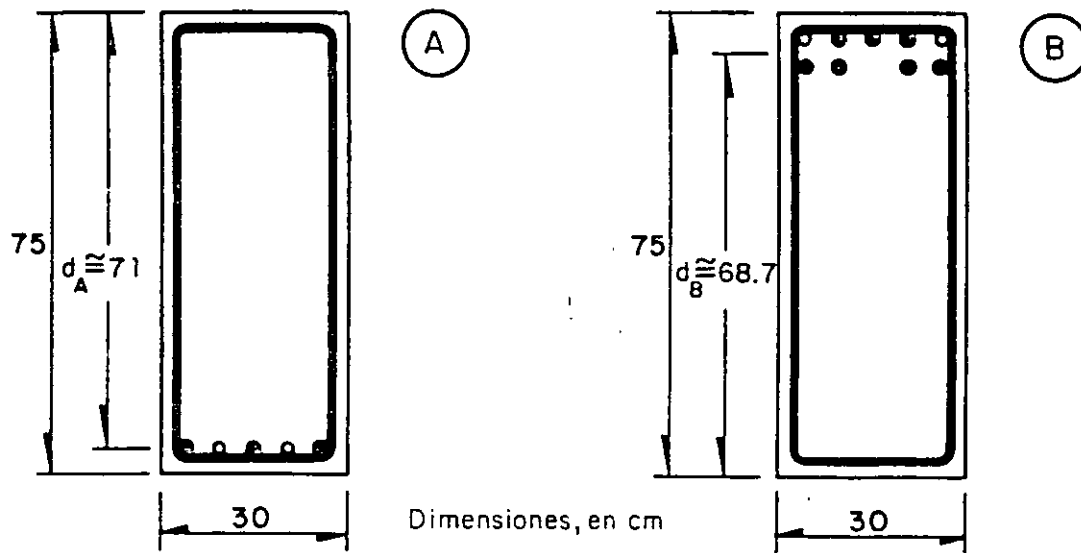
1 Diagrama de momentos flexionantes de diseño, M_u



$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Secciones A y B



$$A_s = 11.09 \text{ cm}^2$$

$$M_R = 27.4 \text{ t-m}$$

$$A_s = 22.49 \text{ cm}^2$$

$$M_R = 48.5 \text{ t-m}$$

● barra # 6

○ barra # 4

LONGITUDES DE DESARROLLO (véase 3.1.1.c)

Barras No 6:

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} = \frac{0.06 \times 4200}{\sqrt{200}} \quad a_s = 17.85 \times 2.85 = 50.8 \text{ cm}$$

$$L_{db} \geq 0.006 d_b f_y = 0.006 \times 4200 d_b = 25.2 \times 1.9 = 47.9 \text{ cm}$$

Para lecho inferior: $L_d = \underline{50.8 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$

Para lecho superior: $L_d = 1.4 \times 50.8 = \underline{71.1 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$

Barras No 4

$$L_{db} = 17.85 a_s = 17.85 \times 1.27 = 22.7 \text{ cm}$$

$$L_{db} \geq 25.2 \times 1.27 = 32 \text{ cm}$$

Para lecho inferior: $L_d = 32 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$

Para lecho superior: $L_d = 1.4 \times 32 = 44.8 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$

MOMENTOS RESISTENTES DE GRUPOS DE BARRAS

Refuerzo positivo

$$1 \# 6; m_R = \frac{a_s}{A_s} M_R = \frac{2.85}{11.09} 27.4 = 7.04 \text{ t-m}$$

$$2 \# 6; m_R = 14.1 \text{ t-m}$$

$$2 \# 4; m_R = \frac{2.54}{11.09} 27.4 = 6.28 \text{ t-m}$$

Refuerzo negativo

$$1 \# 6; m_R = \frac{2.85}{22.5} 48.5 = 6.14 \text{ t-m}$$

$$2 \# 6; m_R = 12.3 \text{ ton-m}$$

$$2 \# 4; m_R = \frac{2.54}{22.5} 48.5 = 5.47 \text{ t-m}$$

CALCULOS PARA LA APLICACION DE LAS REGLAS DE LA SECCION 3.1.1 DE LAS NORMAS

Inciso 3.1.1 b II

$$\text{Barras \# 4} \quad L_d + d = 32 + 71 = 103 \text{ cm}$$

positivas

$$\text{Barras \# 6} \quad L_d + d = 71 + 69 = 140 \text{ cm}$$

negativas

Inciso 3.1.1 b IV:

$$L_d - 0.25 L = 50.8 - 0.25 \times 800 < 0.5h$$

$$\text{rige } 0.5 h = 0.5 \times 75 = 37.5 \text{ cm}$$

Inciso 3.1.2 I:

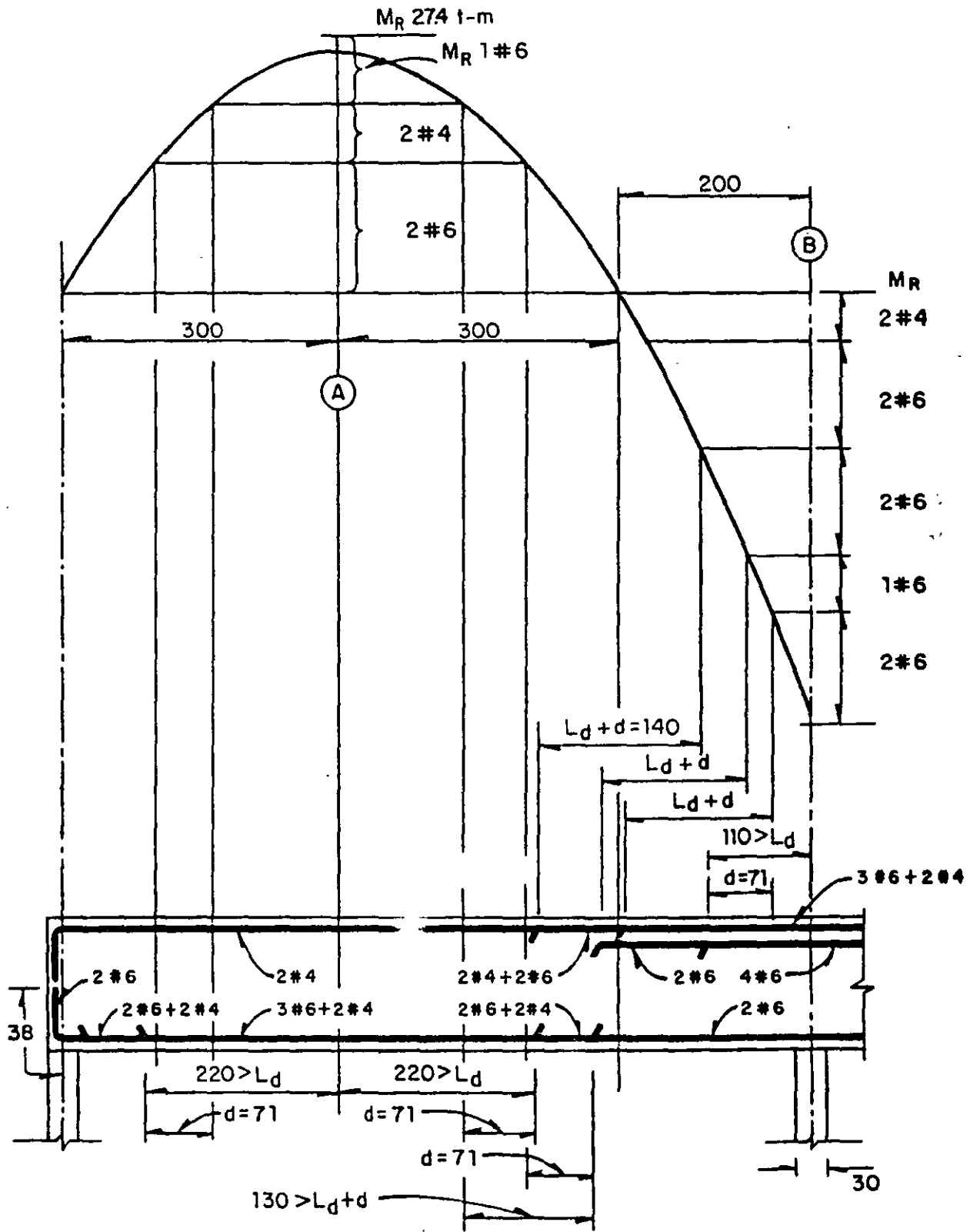
$$\text{Area de acero para momento positivo máx. } A_s = 11.09 \text{ cm}^2$$

$$\text{Area que llega a cada extremo (2 \# 6) } A_s = 5.70 \text{ cm}^2 > \frac{11.09}{3}$$

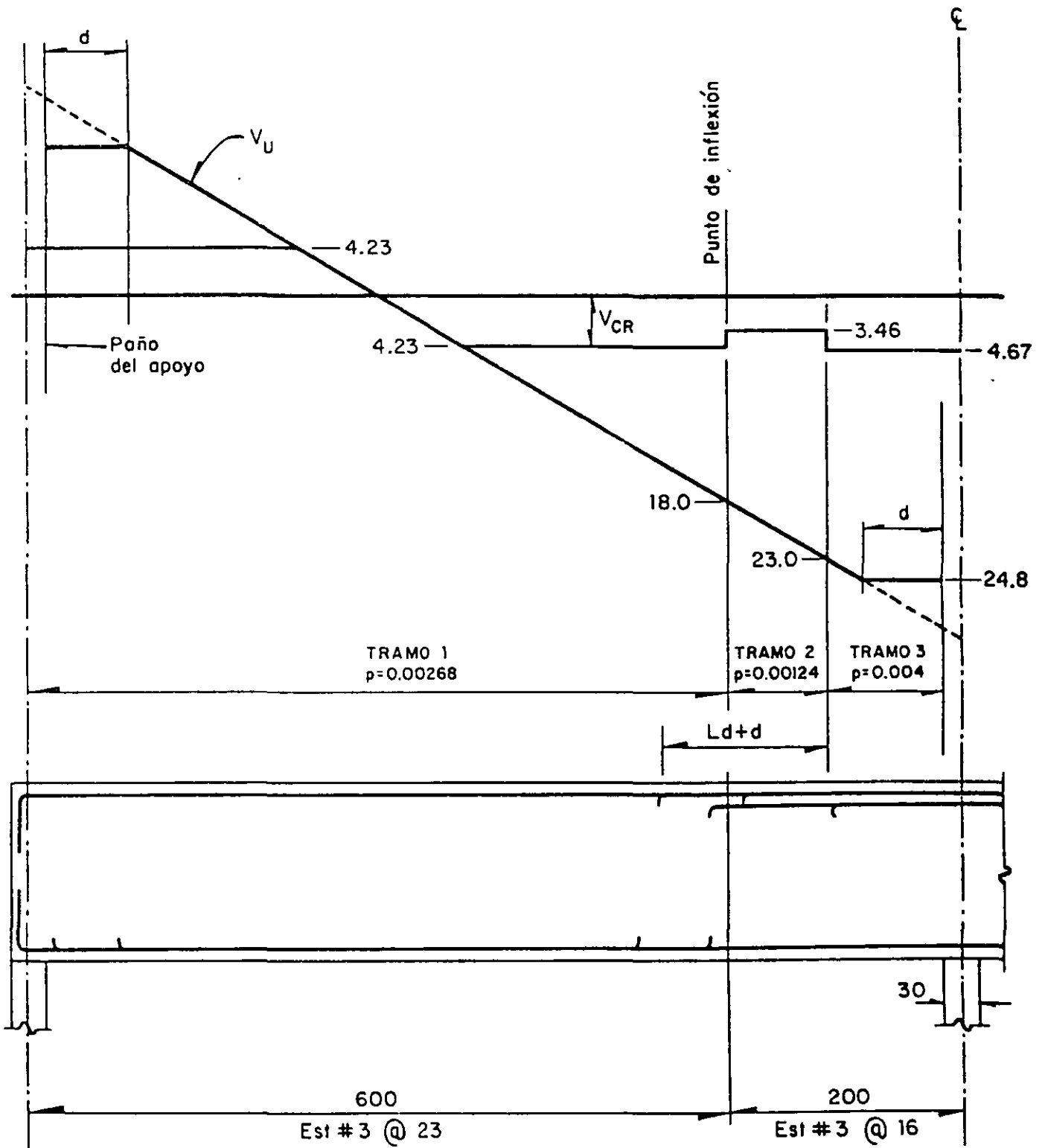
Sí se cumple el requisito de 3.1.2I

COMENTARIOS

1. Los momentos M_u ya están afectados por el factor de carga
2. El ejemplo está planeado para ilustrar el corte de todas las barras que van dejando de ser necesarias por flexión, sin que en ninguna sección de corte en zona de tensión se interrumpa más del 33 por ciento del refuerzo (véanse 2.1.5f y el ejemplo 6). Este proceder puede resultar demasiado laborioso en la práctica, y es entonces preferible un esquema de cortes más sencillo, aunque implique un consumo algo mayor de refuerzo longitudinal.
3. Se supone que el momento resistente varía linealmente con A_s y que el peralte efectivo es el mismo para todas las barras.
4. Las longitudes constructivas de las barras y su localización se obtienen de este diagrama, que debe dibujarse a escala.



Dimensiones, en cm



Dimensiones en cm
Fuerzas en toneladas

DIMENSIONAMIENTOFuerza cortante que toma el concreto

Tramo 1 Por sencillez se considerará la V_{CR} que corresponda a las dos barras # 6 que se corren en todo el claro, $A_s = 5.70 \text{ cm}^2$

$$p = \frac{5.70}{30 \times 71} = 0.00268 < 0.01$$

$$V_{CR} = 0.7 F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 71 (0.2 + 30 \times 0.00268) \\ \times 12.65 = \underline{4231 \text{ kg}}$$

Tramo 2 Se considerará el área de dos barras # 4

$$A_s = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$p = \frac{2.54}{30 \times 68.7} = 0.00123$$

$$V_{CR} = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 (0.2 + 30 \times 0.00123) \times 12.65 = \underline{3459 \text{ kg}}$$

Tramo 3 Se tomará sólo el área de dos # 4 más dos # 6

$$A_s = 8.24 \text{ cm}^2$$

$$p = \frac{8.24}{30 \times 68.7} = 0.004$$

$$V_{CR} = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 (0.2 + 30 \times 0.004) \times 12.65 = \underline{4672 \text{ kg}}$$

Revisión de la necesidad de disminuir V_{CR} por interrupción de más del 33 por ciento del refuerzo longitudinal (véase 2.1.5 f)

Refuerzo positivo:

$$\text{Corte de una \# 6 } \frac{A_{s \text{ int}}}{A_s} = \frac{2.85}{11.09} < 0.33$$

$$\text{Corte de dos \# 4 } \frac{A_{s \text{ int}}}{A_s} = \frac{2.54}{11.09 - 2.85} = 0.308 < 0.33$$

Refuerzo negativo:

$$\text{Corte de dos \# 6 } \frac{A_{s \text{ int}}}{A_s} = \frac{5.70}{22.49} < 0.33$$

$$\text{Corte de una \# 6 } \frac{A_{s \text{ int}}}{A_s} = \frac{2.85}{22.49 - 5.70} < 0.33$$

$$\text{Corte de dos \# 6 } \frac{A_{s \text{ int}}}{A_s} = \frac{5.70}{16.79 - 2.85} = \frac{5.70}{13.94} = 0.41 > 0.33$$

pero este corte ya está en la zona de compresión

luego, no es necesario reducir V_{cR}

Revisión para ver si se admite la sección de 30 x 75 cm

(véase 2.1.5 b)

Se debe cumplir: $V_u < 2 F_R b d \sqrt{f_c^*}$

De diagrama $V_{u \text{ máx}} = 24.8 \text{ ton}$

$$2F_R b d \sqrt{f_c^*} = 2 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 \times 12.65 = 41710 \text{ kg} > V_{u \text{ máx}}$$

luego, se admite la sección de 30 x 70 cm

Separaciones de estribos verticales # 3, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Tramo 3: $V_{u \text{ máx}} = 24800 \text{ kg}; \quad V_{cR} = 4672 \text{ kg}$

$$s = \frac{F_R A_v d}{V_u - V_{cR}} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 68.7}{24800 - 4672} = \frac{327800}{20128} = 16.3 \text{ cm} \quad (\text{ec 2.21})$$

separación máxima:

$$s \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45.4 \text{ cm}$$

$$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 \times 12.65 = 31290 \text{ kg} > V_{u \text{ máx}}$$

luego: $s \leq 0.5d = 0.5 \times 68.7 = 34.4 \text{ cm}$

usar est # 3 @ 16 cm en el tramo 3

Tramo 2: $V_{u \text{ máx}} = 23000 \text{ kg}; \quad V_{cR} = 3459 \text{ kg}; \quad V_u - V_{cR} = 19540 \text{ kg}$

$$s = \frac{327800}{19540} = 16.8 \text{ cm}$$

usar est # 3 @ 16 cm en el tramo 2

Tramo 1: $V_{u \text{ máx}} = 18000 \text{ kg}; \quad V_{cR} = 4231 \text{ kg}$

$$s = \frac{327800}{13770} = 23.8 \text{ cm}$$

usar est # 3 @ 23 cm en el tramo 1

COMENTARIOS

1. Las fuerzas cortantes V_u ya están afectadas por el factor de carga
2. La viga se dividió en tres tramos para calcular en cada uno de ellos una separación de estribos. En cada tramo la separación de estribos se calculó usando la fuerza cortante de diseño máxima que en él actúa y una contribución del concreto, V_{CR} , obtenida con un valor conservador de la cuantía de refuerzo longitudinal.

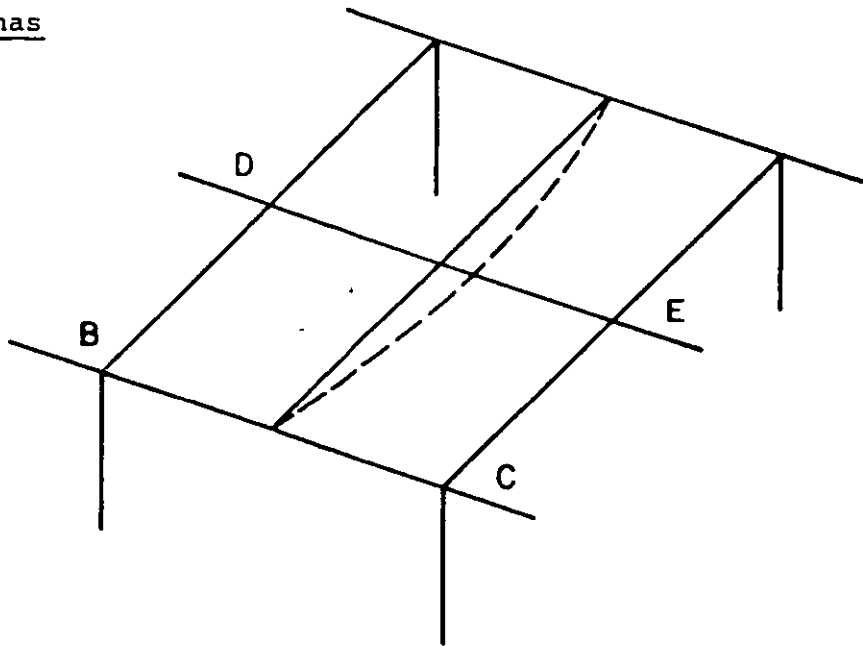
El número de tramos por considerar y el grado de precisión en la cuantía que se use para valuar V_{CR} es a juicio del proyectista quien, de acuerdo con las condiciones del caso, debe conciliar la sencillez de cálculo y de construcción con el consumo de acero en estribos.

3. Debido a que el peralte de la viga es mayor de 70 cm, la fuerza cortante que toma el concreto calculada con la ec 2.17 se reduce 30 por ciento (según 2.1.5 a).

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$; $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

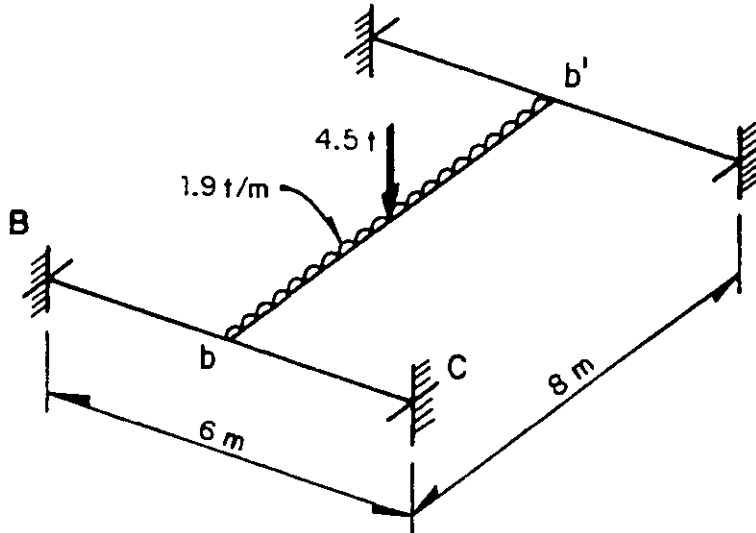
Acciones internas

Torsión



Sólo se tendrá en cuenta la torsión causada por la viga secundaria (se despreciará la producida por la losa).

Para valuar la torsión, el sistema de vigas se idealizará como sigue



Se hará una distribución de momentos en el nudo b de acuerdo con la rigidez a torsión de la viga BC y con la rigidez a flexión de la viga bb'.

Momento de empotramiento viga bb'

$$M_e = \frac{PL}{8} + \frac{WL}{12} = \frac{4.5 \times 8}{8} + \frac{15.2 \times 8}{12} = 14.6 \text{ t-m}$$

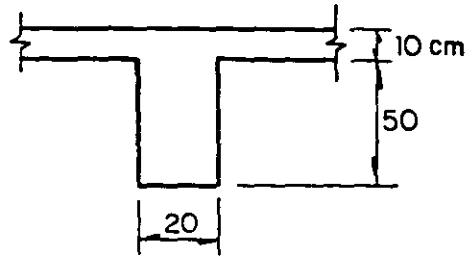
$$W = 1.9 \times 8 = 15.2 \text{ t}$$

Rigideces

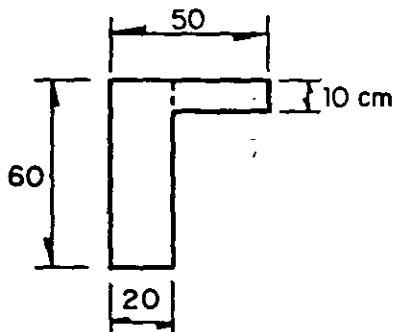
Viga bb'

$$r_{bb'} = \frac{2EI}{L} = \frac{2 \times 360\,000}{800} E = 900 E$$

$$I_T = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360\,000 \text{ cm}^4$$



Rigidez a torsión de la viga BC:



Rigidez de media viga:

$$r_{tors} = \frac{G \sum (y x^3 \beta)}{2L}$$

$$= \frac{G(60 \times 20^3 \times 0.263 + 30 \times 10^3 \times 0.263)}{2 \times 300}$$

$$G = 0.4E; \quad r_{tors} = 223.5 G = 223.5(0.4E) = 89.4E$$

$$\text{rigidez de las dos mitades} = 2 \times 89.4E = 178.8E$$

Factores de distribución

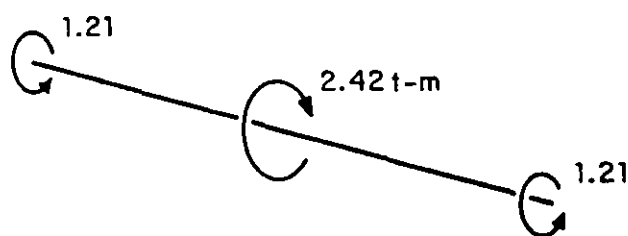
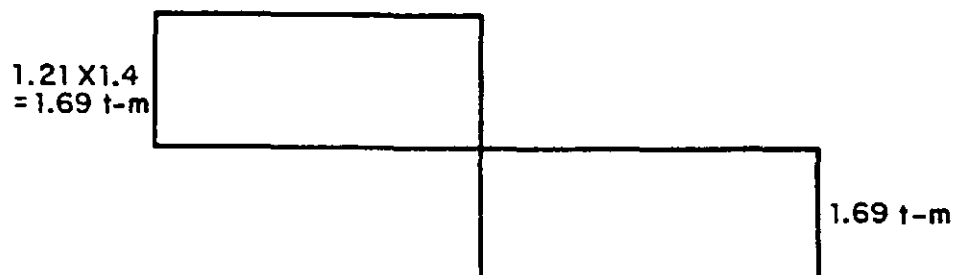
$$f_{bb'} = \frac{r_{bb'}}{\sum r} = \frac{900}{900 + 179} = 0.834$$

$$f_{BC} = \frac{179}{900 + 179} = 0.166 \quad (\text{en torsión})$$

Distribución del momento de empotramiento

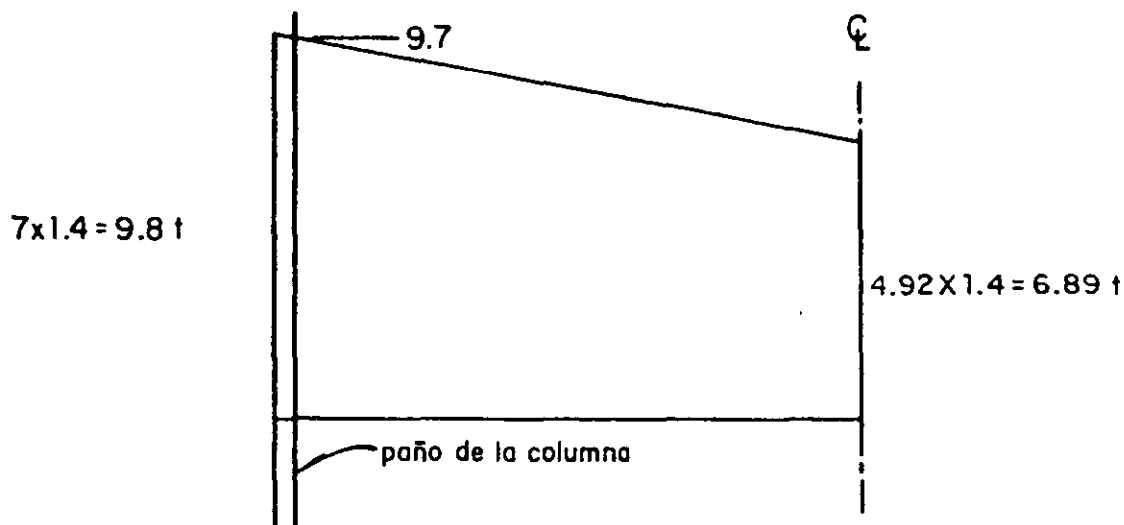
	viga BC	viga bb'
Fact. de distr.	0.166	0.834
Mom. empotr.		+14.6
	-2.42	-12.18
M. finales	-2.42	+ 2.42 t-m

En cuanto a torsión, la viga BC está sujeta a los momentos siguientes (de servicio):

Diagrama de momentos torsionantes de diseño, T_u 

Fuerza cortante

(En la viga BC domina la condición CM + CV)

Diagrama de fuerzas cortantes de diseño, V_u .Revisión de la necesidad de tomar en cuenta la torsión

(En este ejemplo se supondrá que las dimensiones resistentes menores de 20 cm son iguales que las nominales)

$$T_{OR} = 0.6 F_R \sum x^2 y \sqrt{f_c^*} = 0.6 \times 0.8 \times 12.65 (20^2 \times 60 + 10^2 \times 30) = 163\,900 \text{ kg-cm} \quad (\text{ec 2.31})$$

Supóngase que en cada lecho se corren dos barras # 5 a todo lo largo de la viga, de modo que, para valuar V_{CR} , puede tomarse en forma conservadora

$$p = \frac{2 \times 1.98}{20 \times 55} = 0.0036 \quad V_{CR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} =$$

$$0.8 \times 20 \times 55 (0.2 + 30 \times 0.0036) 12.65 = 3429 \text{ kg} \quad (\text{ec 2.17})$$

$$T_u = 1.69 \text{ t-m}$$

$$\frac{T_u^2}{T_{OR}^2} + \frac{V_u^2}{V_{CR}^2} = \left(\frac{1.69}{1.64}\right)^2 + \left(\frac{9.7}{3.43}\right)^2 = 1.062 + 7.998 = 9.06 > 1$$

$$T_{cR} = 0.25 T_{OR} = 0.25 \times 1.64 = 0.41 \text{ t-m}$$

luego, se requiere refuerzo por torsión

5 Revisión de la sección de 20 x 60 cm

$$\text{Se debe cumplir } T_u \leq 1.25 T_{cR} \sqrt{16 - \left(\frac{V_u}{0.5 F_R b d \sqrt{f_c}} \right)^2} \quad (\text{ec 2.35})$$

$$\begin{aligned} 1.25 \times 0.41 \sqrt{16 - \left(\frac{9700}{0.5 \times 0.8 \times 20 \times 55 \times 12.65} \right)^2} &= 0.5125 \sqrt{16 - 3.037} \\ &= 1.84 \text{ t} > T_u = 1.69 \text{ t} \end{aligned}$$

luego, se acepta la sección de 20x60 cm

Cálculo del refuerzo

Refuerzo transversal

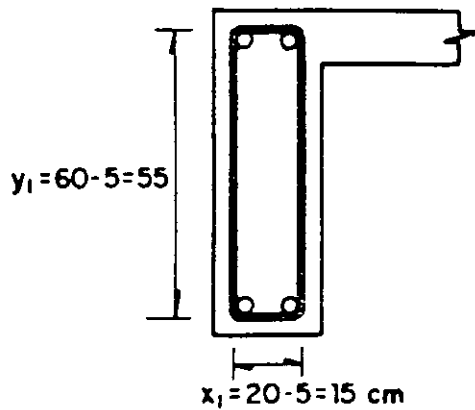
a) Por fuerza cortante (A_v = área de las dos ramas de un estribo)

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - V_{cR}}{F_R d f_y} = \frac{9700 - 3430}{0.8 \times 55 \times 4200} = 0.0339 \text{ rige ésta}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{3.5b}{F_R f_y} = \frac{3.5 \times 20}{0.8 \times 4200} = 0.0208$$

b) Por torsión A_{sv} = área trans. de una rama de estribo

$$\frac{A_{sv}}{s} = \frac{T_u - T_{cR}}{F_R \Omega x_1 y_1 f_{yv}} = \frac{169000 - 41000}{0.8 \times 1.5 \times 15 \times 55 \times 4200} = \frac{128000}{4158000} \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}} = 0.0308 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$



$$\Omega = 0.67 + 0.33 \frac{y_1}{x_1} = 0.67 + 0.33 \frac{55}{15}$$

$$= 1.88 > 1.5 \therefore \Omega = 1.5$$

c) Total

$$\frac{A_s \text{ total}}{s} = 0.5 \frac{A_v}{s} + \frac{A_{sv}}{s} = 0.0169 + 0.0308 = 0.0477 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}} \text{ (rige)}$$

(de una rama)

d) Refuerzo mínimo (véase 2.1.6bI)

$$\frac{A_s \text{ mín}}{s} = \frac{4 T_{CR} - T_{CR}}{F_R \Omega x_1 y_1 f_{yv}} = \frac{3 \times 41000}{4158000} = 0.0296 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

Separación de estribos

$$\text{con estr. \# 2.5 } s = \frac{0.49}{0.0477} = 10.3 \text{ cm}$$

Separación máxima

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 15 \text{ cm} \\ 0.5 y_1 = 0.5 \times 55 = 27.5 \text{ cm} \\ 30 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Usar estribos \# 2.5 @ 10 cm

en toda la viga

Refuerzo longitudinal por torsión

$$A_{st} = 2 \frac{A_{sv}}{s} (x_1 + y_1) \frac{f_{yv}}{f} = 2 \times 0.0308 (15 + 55) \times 1 = 4.31 \text{ cm}^2 \quad (\text{ec 2.34})$$

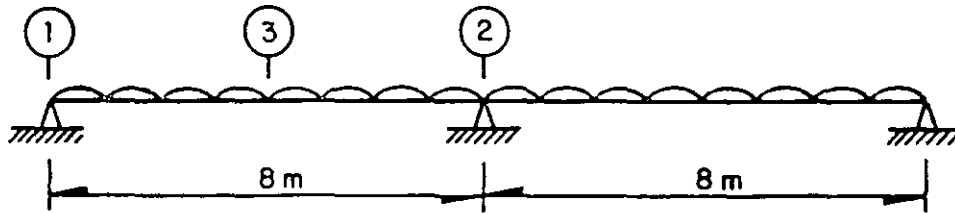
$$4 \# 4, A_s = 5.08 \text{ cm}^2$$

Usar 4 barras # 4, una en cada esquina, en toda la viga, adicionales a las necesarias por flexión.

COMENTARIOS

1. La carga uniforme en la viga bb' se debe a su peso propio y a la carga que proviene de la losa; la carga concentrada es el efecto de la viga secundaria D-E, que tiene sólo 25 cm de peralte. Todos son valores en condiciones de servicio.
2. Es la rigidez de una viga simétrica.
3. El momento de inercia centroidal de una viga T es mayor que el del alma con su peralte total, pero el agrietamiento lo reduce, de modo que es suficiente considerar la sección rectangular.
4. De acuerdo con 2.1.6 a) la rigidez a torsión que se use en el análisis debe ser la mitad de la rigidez elástica; de aquí el 2 que aparece en el denominador. La longitud del ala no debe exceder de $3x = 30 \text{ cm}$.
5. Véase el párrafo final de 2.1.6 b).
6. Es la ec 2.21 en la que se ha despejado A_v/s . Se procede así porque se facilita sumar después con el refuerzo transversal por torsión.

DATOS



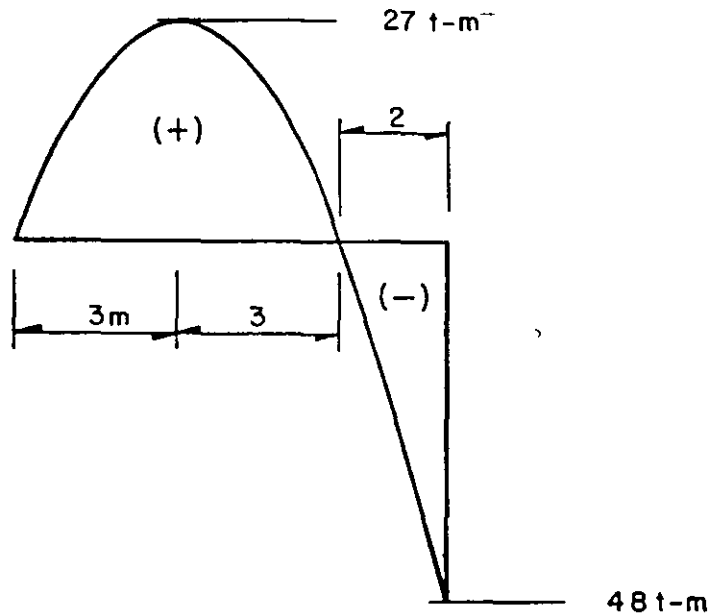
Cargas de servicio:

carga muerta 1.5 t/m

carga viva 2.8 t/m

carga viva para calcular deflexiones diferidas: 0.8 t/m

Diagrama de momentos flexionantes de diseño:

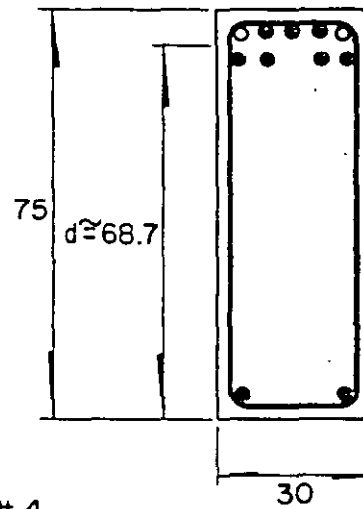
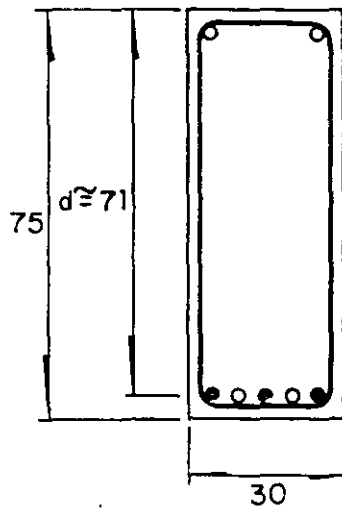


Momentos resistentes en las secciones de momento máximo

$$M_R^+ = 27.4 \text{ t-m}$$

$$M_R^- = 48.5 \text{ t-m}$$

Refuerzo en las secciones central 3 y extrema 2



○ var # 4

● var # 6

Dimensiones, en cm

$$A_{s3} = 11.09 \text{ cm}^2$$

$$A'_{s3} = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = 22.49 \text{ cm}^2$$

$$A'_{s2} = 5.70 \text{ cm}^2$$

Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES

$$E_c = 8000 \sqrt{f'_c} = 8000 \sqrt{200} = 113100 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{concreto clase 2})$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{1.131 \times 10^5} = 17.7$$

$$(n-1) = 17.7 - 1 = 16.7$$

SOLUCION

a) Deflexión inmediata bajo una carga distribuida, w

$$\Delta = \frac{wL^4}{185 EI}$$

Cálculo del momento de inercia

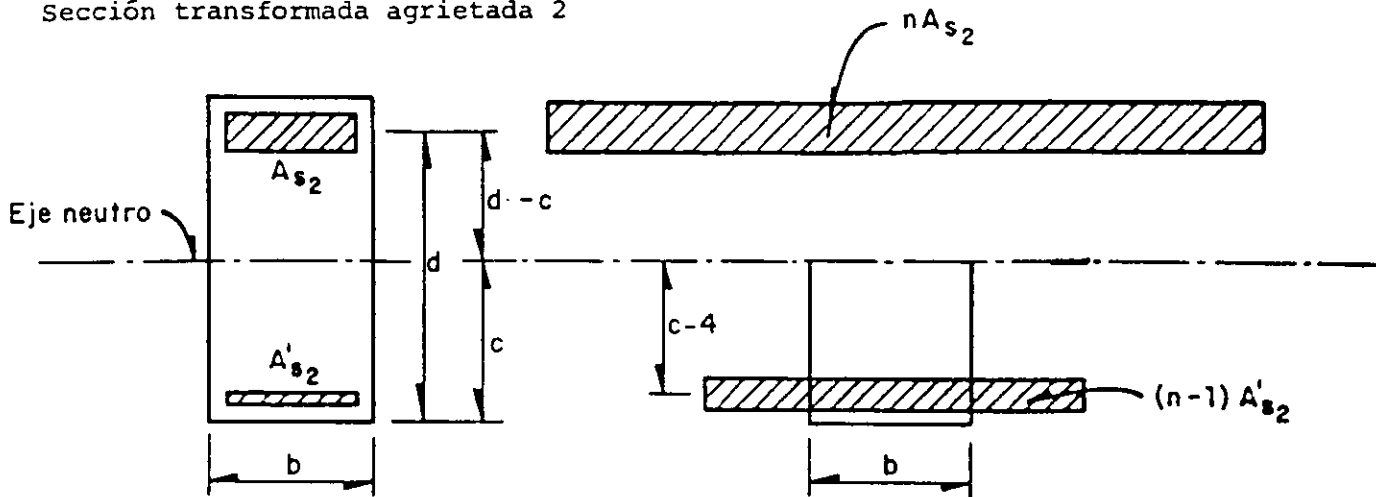
$$I = \frac{I_2 + 2I_3}{3}$$

 $I_1 = 0$ por ser extremo discontinuoCálculo de I_2

$$nA_{s2} = 17.7 \times 22.49 = 398.1 \text{ cm}^2$$

$$(n-1) A'_{s2} = 16.7 \times 5.70 = 95.19 \text{ cm}^2$$

Sección transformada agrietada 2



Tomando momentos estáticos de las áreas respecto al eje neutro:

$$nA_{s2} (d-c) = bc \frac{c}{2} + (n-1) A'_{s2} (c-4)$$

$$c^2 + 32.88c - 1848 = 0$$

$$c = 29.6 \text{ cm}$$

$$n A_{s2} (d-c)^2 = 398.1 (68.7-29.6)^2 = 608\ 600$$

$$\frac{bc^3}{3} = \frac{30(29.6)^3}{3} = 259\ 300$$

$$(n-1) A'_{s2} (c-4)^2 = 95.19 (29.6-4)^2 = 62\ 380$$

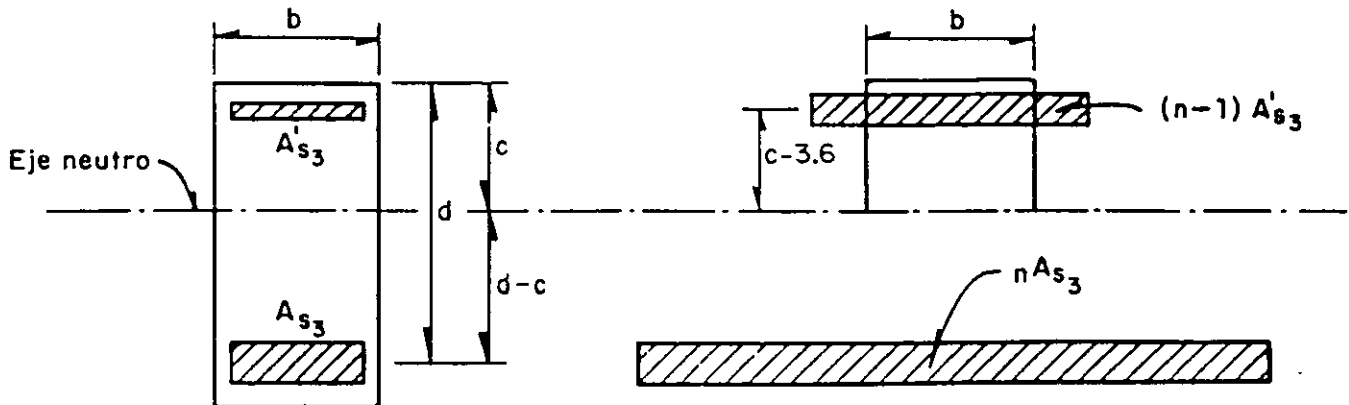
$$I_2 = 930\ 280 \text{ cm}^4$$

Cálculo de I_3 .

$$nA_{s3} = 17.7 \times 11.09 = 196.3 \text{ cm}^2$$

$$(n-1)A'_{s3} = 16.7 \times 2.54 = 42.42 \text{ cm}^2$$

Sección transformada agrietada 3



$$nA_{s3}(d - c) = bc \frac{c}{2} + (n-1)A'_{s3}(c-3.6)$$

$$196.3(71-c) = 15c^2 + 42.42(c-3.6)$$

$$c^2 + 15.92c - 939.4 = 0$$

$$c = 23.7 \text{ cm}$$

$$nA_{s3}(d-c)^2 = 196.3(71 - 23.7)^2 = 439200$$

$$\frac{bc^3}{3} = \frac{30 \times (23.7)^3}{3} = 133100$$

$$(n-1)A'_{s3}(c-3.6)^2 = 42.42(23.7 - 3.6)^2 = \underline{17140}$$

$$I_3 = 589440 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia que se utilizará para calcular la deflexión inmediata

$$I = \frac{I_2 + 2 I_3}{3} = \frac{930280 + 2 \times 589440}{3} = 703100 \text{ cm}^4$$

$$\Delta_i = \frac{wL^4}{185 E_c I} = \frac{w \times 800^4}{185 \times 113100 \times 703100} = \underline{0.02784 w}$$

Deflexión inmediata bajo la carga muerta (1.5 t/m)

$$\Delta_{icM} = 0.02784 \times 15 = \underline{0.42 \text{ cm}}$$

Deflexión inmediata bajo la carga viva media (0.8 t/m)

$$\Delta_{i0.8} = 0.02784 \times 8 = \underline{0.22 \text{ cm}}$$

Deflexión diferida, bajo la carga muerta y la carga viva media

$$\Delta_d = \Delta_i \cdot 4 / (1 + 50 p') \quad (\text{ec 2.37 para concreto clase 2})$$

$$\Delta_i = 0.42 + 0.22 = 0.64 \text{ cm}$$

Cuantía p' que se usará

$$p' = \frac{P'_2 + 2P'_3}{3}$$

$$P'_2 = \frac{5.70}{30 \times 68.7} = 0.002766$$

$$P'_3 = \frac{2.54}{30 \times 71} = 0.001192$$

sustituyendo

$$p' = \frac{0.002766 + 2 \times 0.001192}{3} = 0.00172$$

$$\Delta_{dCM + 0.8} = 0.64 \times 4 / (1 + 50 \times 0.00172) = 2.36 \text{ cm}$$

Deflexión inmediata correspondiente a la diferencia de cargas vivas

$$2.8 - 0.8 = 2 \text{ t/m}$$

$$\Delta_{i2} = 0.02784 \times 20 = 0.56 \text{ cm}$$

Deflexión total

$$\Delta = \Delta_{iCM} + \Delta_{i0.8} + \Delta_{dCM} + 0.8 + \Delta_{i2} = 0.42 + 0.22 + 2.36 + 0.56$$

$$\Delta = \underline{3.6 \text{ cm}}$$

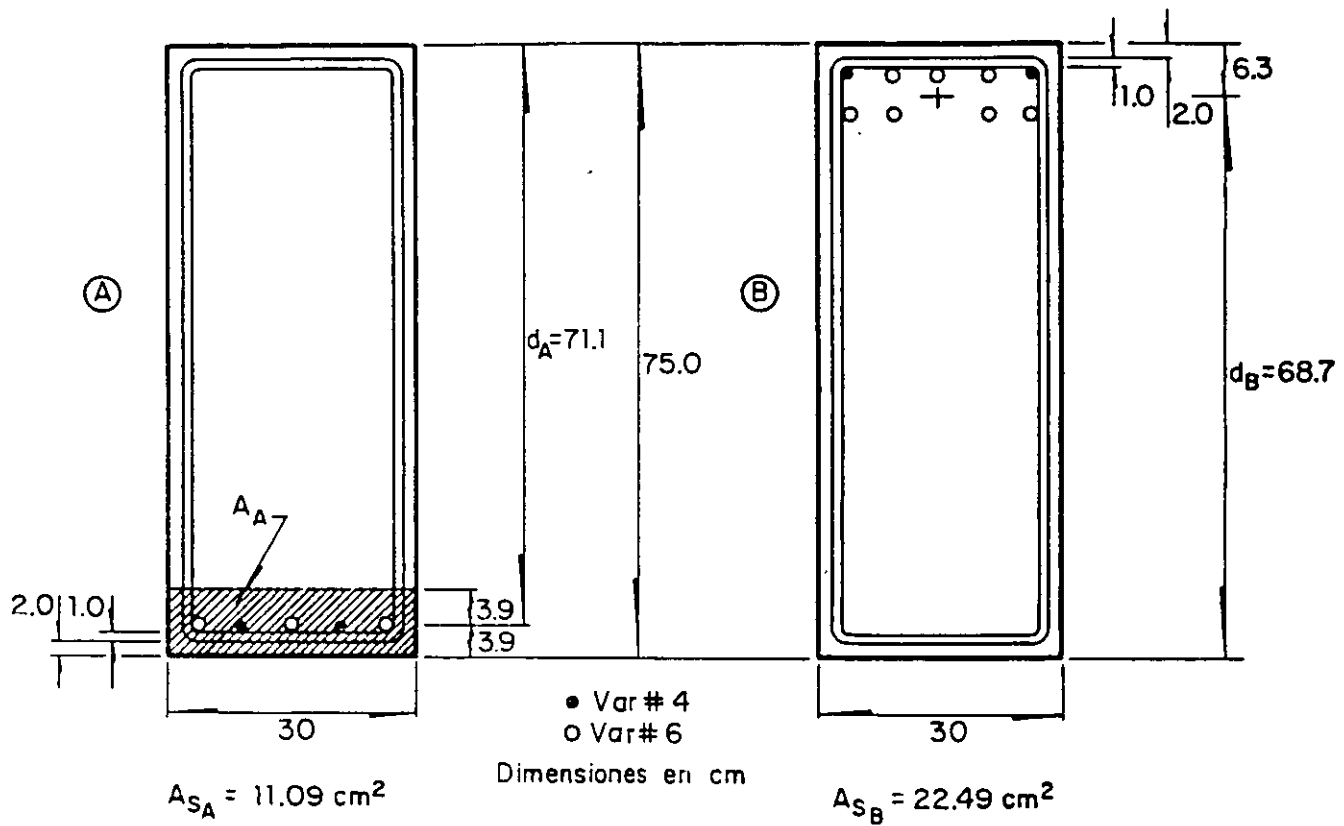
COMENTARIOS

1. Se supone que la carga viva para calcular deflexiones diferidas está obtenida con la intensidad media de la carga viva (véase el Art 199 del Reglamento).
2. Es la ec 2.36 en la que se ha tomado I_1 igual a cero por tratarse de un extremo discontinuo. El mayor peso p' que en la ec 2.36 se asigna al momento de inercia del centro del claro (se supone que allí hay flexión positiva) se debe a que normalmente en una viga continua el tramo sujeto a momento positivo es mayor que la suma de los tramos donde el momento es negativo; si un extremo es discontinuo esta diferencia aumenta, de aquí que se suponga uno de los momentos de inercia extremos igual a cero.
3. La deflexión diferida es debida a la carga muerta más una carga viva de 0.8 t/m, de acuerdo con los datos del problema.
4. Según 2.2.2, p' se calcula con el mismo criterio que para valuar el momento de inercia.
5. Si poco después que principia a actuar la carga muerta sobre la viga al retirar su apuntalamiento, se construyen sobre ella muros divisorios no estructurales, las flechas de la viga que pueden dañar a los muros divisorios son las deflexiones inmediatas y diferidas que ocurren después; en el ejemplo, la suma de estas últimas es la siguiente:

$$\Delta_{i0.8} + \Delta_{dCM+0.8} + \Delta_{i2} = 3.14 \text{ cm}$$

DATOS

Refuerzo en las secciones de momento máximo



Momentos flexionantes de servicio

$$M_A = 19.3 \text{ t-m}$$

$$M_B = 34.3 \text{ t-m}$$

Se supone que la viga no está expuesta a un ambiente agresivo

Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

REVISION DE LA SECCION A (momento positivo)

Se debe cumplir $f_s \sqrt[3]{d_c A} \leq 40000 \text{ kg/cm}$ (ec 2.38)

$$f_{sA} = \frac{M_A}{0.9 \times d_A \times A_{sA}} = \frac{1930\ 000}{0.9 \times 71.1 \times 11.09} = 2720 \text{ kg/cm}^2$$

$$d_{cA} = 3.0 + \frac{1.9}{2} = 3.95 \text{ cm}$$

Por haber barras de diferente diámetro, A_A se calcula como sigue:

$$A_A = \frac{\text{área de concreto que rodea al refuerzo principal de tensión}}{\text{área del acero de refuerzo/área del acero de la barra de mayor diámetro}}$$

$$A_A = \frac{3.9 \times 30 \times 2}{11.09/2.85} = \frac{234}{3.89} = 60.15 \text{ cm}^2$$

área de acero de la barra de mayor diámetro $a_s \# 6 = 2.85 \text{ cm}^2$

sustituyendo

$$f_{sA} \sqrt[3]{d_{cA} A_A} = 2720 \sqrt[3]{3.95 \times 60.15} = 16850 < 40\ 000 \text{ kg/cm}$$

Se acepta el refuerzo de la sección

A por lo que se refiere a agrietamiento.

REVISION DE LA SECCION B (momento negativo)

$$f_{sB} = \frac{M_B}{0.9 d_B A_{sB}} = \frac{3430\ 000}{0.9 \times 68.7 \times 22.49} = 2467 \text{ kg/cm}^2$$

3

$$d_{cB} = 3.0 + \frac{1.9}{2} = 3.95 \text{ cm}$$

En forma semejante a como se procedió para la sección A:

$$A_B = \frac{6.3 \times 30 \times 2}{22.49/2.85} = \frac{378}{7.89} = 47.91 \text{ cm}^2 \quad (6.3 = h-d)$$

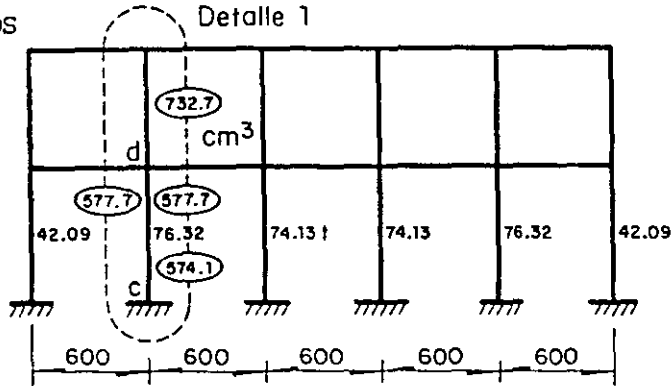
$$f_{sB} \sqrt[3]{d_{cB} A_A} = 2467 \sqrt[3]{3.95 \times 47.91} = \underline{14160 < 40\,000 \text{ kg/cm}}$$

Se acepta el refuerzo de la sección B por lo que se refiere a agrietamiento

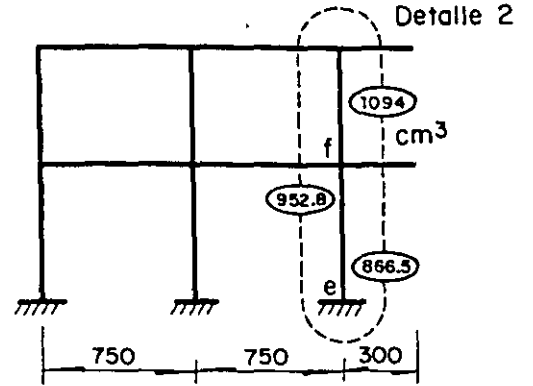
COMENTARIOS

1. Las secciones donde se revisa el agrietamiento son las de momento máximo de servicio, según 2.2.3).
2. f_s puede estimarse así, según 2.2.3).
3. Se toman las barras # 6, y no las # 4, como base para valuar d_c , porque el área que ellas representan es considerablemente mayor que la de las barras # 4. Si las áreas fueran iguales o semejantes, también habría que usar las de mayor diámetro a fin de quedar del lado conservador; sólo se usarían las de menor diámetro cuando éstas predominaran ampliamente sobre las de mayor diámetro.
4. El área de concreto que rodea al refuerzo debe ser tal que su centroide coincida con el centroide de éste, de aquí que el área del numerador sea 3.9 cm x 30 cm x 2 (véase la figura de los datos).

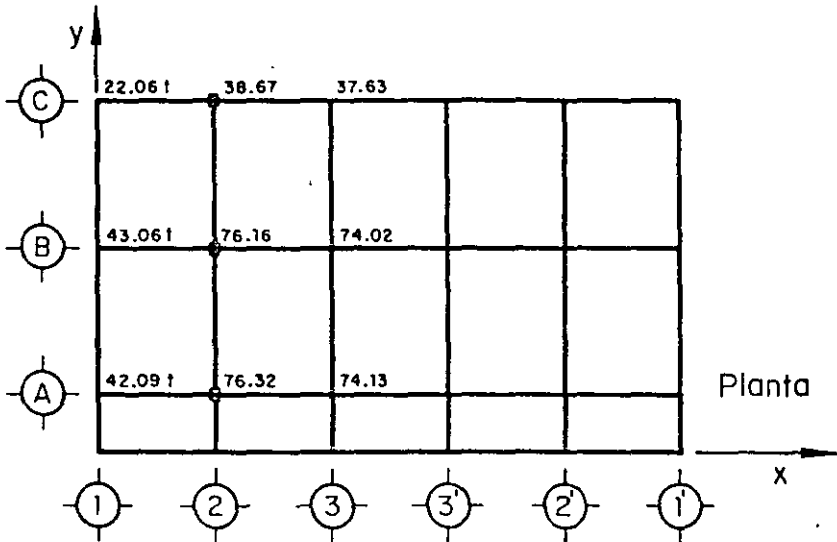
DATOS



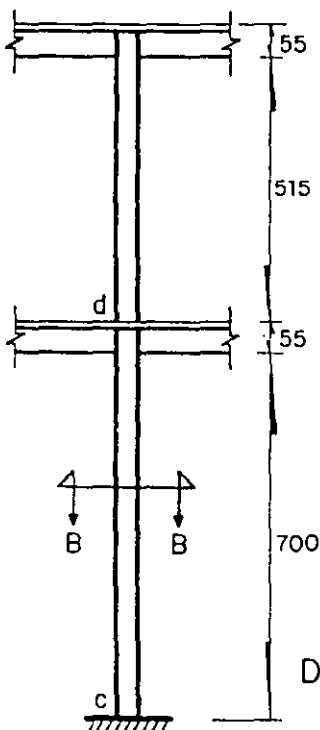
Elevación eje A



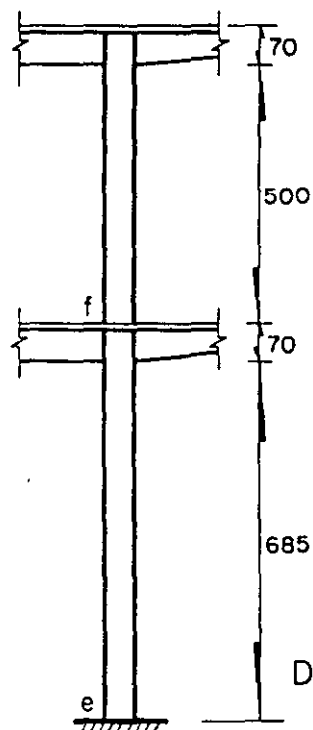
Elevación eje 2



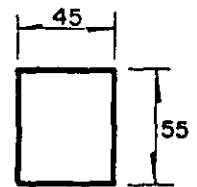
Planta



Detalle 1



Detalle 2



Sección B-B

Dimensiones, en cm

3 TABLA 1. Fuerzas y momentos internos causados por la gravedad y por los componentes del sismo (fuerzas en t y momentos en t-m)

	Gravedad (CM+CV inst)	Componente del sismo, en dirección positiva del eje x	Componente del sismo, en dirección positiva del eje y
Dirección x			
Dirección y			
Dirección vertical			

TABLA 2. Fuerzas cortantes totales debidas a los componentes del sismo, y desplazamiento medios de entrepiso en planta baja.

	Fuerza cortante (t)	Desplazamiento (cm)	
		por sismo	por CM + CV _{inst.}
DIRECCION X	86.04	8.70	0
DIRECCION Y	86.04	5.91	0.08

Materiales $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$; $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

CONSTANTES

$$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Tabla 1 de las Ayudas de Diseño})$$

$$A_c = bh = 45 \times 55 = 2475 \text{ cm}^2$$

$$f''_c = 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_c f''_c = 2475 \times 0.136 = 336.6 \text{ t}$$

$$\frac{f_y}{f'_c} = \frac{4200}{136} = 30.88$$

$$f''_c = 136$$

5 EFECTOS DE ESBELTEZ

Dirección X

a) Debidos a carga vertical

Revisión para ver, si pueden despreciarse los efectos de esbeltez (inciso 1.3.2b).

De acuerdo con los comentarios a 1.3.2b), el desplazamiento lateral que causa esta condición de carga se considera apreciable si es mayor que $H/1500$. En este caso el desplazamiento es nulo, por lo que puede aplicarse el criterio que se usa para columnas con extremos restringidos lateralmente, es decir, los efectos de esbeltez pueden ignorarse si

$$\frac{H'}{r} < 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

$$\text{Nudo c} \quad \psi = 0$$

$$\text{Nudo d} \quad \psi = \frac{732.7 + 574.1}{577.7 + 577.7} = \frac{1307}{1135} = 1.132$$

En la fig 1.1a de las Normas se obtiene $k = 0.63$

$$H' = kH = 0.63 \times 700 = 441.0 \text{ cm}$$

$$r = 0.3h = 0.3 \times 45 = 13.5 \text{ cm}$$

$$\frac{H'}{r} = \frac{441.0}{13.5} = 32.67$$

$$34-12 \frac{M_1}{M_2} = 34-12 \left(-\frac{0.17}{0.30} \right) = 40.8 > \frac{H'}{r}$$

luego, pueden despreciarse los efectos de esbeltez

$$(F_{abx} = 1.0)$$

b) Debidos a fuerza lateral

Estos efectos pueden despreciarse si se cumple la condición siguiente:

$$6 \quad \frac{\text{desplazamiento de entrepiso}}{\text{diferencia de elevaciones}} \leq 0.08 \quad \frac{\text{fuerza cortante de entrepiso}}{\text{suma de cargas muertas y vivas de diseño}}$$

$$\frac{\text{desp. de entr.}}{h} = \frac{8.70}{727.5} = 0.0120$$

$$0.08 \frac{V}{W_u} = 0.08 \frac{86.04}{1.1 \times 968.3} = 0.0065 < \frac{\text{desp. de entr.}}{h}$$

por tanto, deben tomarse en cuenta los efectos de esbeltez

Factor de amplificación

$$f_{asx} = 1 + \frac{W_u/h}{R/Q - 1.2 W_u/h} \quad (\text{ec } 1.6)$$

$$W_u = 1.1 \times 968.3 = 1065t$$

$$h = 727.5 \text{ cm}$$

$$7 \quad R = \frac{V}{\delta} = \frac{86.04}{8.70/2} = 19.78 \text{ t/cm}$$

$$Q = 2$$

$$F_{asx} = 1 + \frac{1065/727.5}{19.78/2 - 1.2 \times 1065/727.5} = 1.180$$

8

Dirección Ya) Debidos a carga vertical

El desplazamiento, Δ , que causa esta condición de carga se considera apreciable sí:

$$\Delta > H/1500$$

$$\frac{H}{1500} = \frac{685}{1500} = 0.46 \text{ cm} > \Delta = 0.08 \text{ cm}$$

Por lo que puede aplicarse el criterio para columnas con extremos restringidos, es decir, los efectos de esbeltez pueden ignorarse si

$$\frac{H'}{r} < 34-12 \frac{M_1}{M_2}$$

Nudo e $\psi=0$

$$\text{Nudo f } \psi = \frac{1094 + 866.5}{952.8} = 2.058$$

de la fig 1.1a de las Normas se obtiene $k = 0.65$

$$H' = kH = 0.65 \times 685 = 445.2 \text{ cm}$$

$$r = 0.3h = 0.3 \times 55 = 16.5 \text{ cm}$$

$$\frac{H'}{r} = \frac{445.2}{16.5} = 26.98$$

$$34-12 \frac{M_1}{M_2} = 34-12 \left(- \frac{0.78}{0.80} \right) = 45.7 > \frac{H'}{r}$$

por tanto, pueden despreciarse los efectos de esbeltez ($F_{aby} = 1.0$)

b) Debidos a fuerza lateral

Estos efectos, pueden despreciarse si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\text{desplazamiento de entrepiso}}{\text{diferencia de elevaciones}} \leq 0.08 \frac{\text{fuerza cortante de entrepiso}}{\text{suma de cargas muertas y vivas de diseño}}$$

$$\frac{\text{desp de entr.}}{h} = \frac{5.91}{720} = 0.0082$$

$$0.08 \frac{V}{W_u} = 0.08 \frac{86.04}{1.1 \times 968.3} = 0.0065 < \frac{\text{desp. de entr.}}{h}$$

luego, deben tomarse en cuenta los efectos de esbeltez

Factor de amplificación

$$F_{asy} = 1 + \frac{W_u / h}{R/Q - 1.2 W_u / h} \quad (\text{ec } 1.6)$$

$$W_u = 1065 \text{ t}$$

$$h = 720 \text{ cm}$$

$$R = \frac{V}{\delta} = \frac{86.04}{5.91/2} = 29.12 \text{ t/cm} \quad (\text{véase el comentario 6})$$

$$Q = 2$$

$$F_{asy} = 1 + \frac{1065/720}{29.12/2 - 1.2 \times 1065/720} = \underline{1.116}$$

9 DIMENSIONAMIENTO. (Se dimensionará en el extremo inferior por ser ahí mayores los momentos bajo CM + CV_{inst} + sismo)

Acciones internas de diseño causadas por la gravedad y los componentes del sismo (véase la Tabla 1)

Efectos gravitacionales

Dirección vertical

$$P_u = 1.1 \times 76.32 = \underline{83.95 \text{ t}}$$

Dirección X

$$M_{2b} = 1.1 \times 0.17 = 0.19 \text{ t-m, pero no menor que } P_u e_{\text{mín}}$$

$$e_{\text{xmín}} = 0.05h = 0.05 \times 45 = 2.25 \text{ cm} > 2.0 \text{ cm}$$

$$P_u e_{\text{mín}} = 83.95 \times 0.0225 = 1.89 \text{ t-m (rige)}$$

$$\underline{M_{-2bx} = 1.889 \text{ t-m}}$$

Dirección Y

$$M_{2b} = 1.1 \times 0.78 = 0.86 \text{ t-m, pero no menor que } P_u e_{\text{mín}}$$

$$e_{\text{ymín}} = 0.05 \times 55 = 2.75 \text{ cm} > 2.0 \text{ cm}$$

$$P_u e_{\text{ymín}} = 83.95 \times 0.0275 = 2.31 \text{ t-m (rige)}$$

$$\underline{M_{-2by} = 2.31 \text{ t-m}}$$

100% de los efectos del componente X

$$P_u = 1.1 \times 2.10 = 2.31 \text{ t}$$

en la dirección X

$$M_{2s} = 1.1 \times 21.07 = 23.18 \text{ t-m}$$

en la dirección Y

$$M_{2s} = 1.1 \times 2.32 = 2.55 \text{ t-m}$$

100% de los efectos del componente Y

$$P_u = 1.1 \times 6.92 = 7.61 \text{ t}$$

en la dirección X

$$M_{2s} = 1.1 \times 1.48 = 1.63 \text{ t-m}$$

en la dirección Y

$$M_{2s} = 1.1 \times 17.81 = 19.59 \text{ t-m}$$

Dimensionamiento considerando la flexocompresión principal en la dirección X

$$P_u = 83.95 + 2.31 + 0.3 \times 7.61 = 88.54 \text{ t}$$

Momento amplificado de diseño en la dirección X:

$$M_{\text{cx}} = F_{\text{abx}} M_{2bx} + F_{\text{asx}} M_{2sx}$$

(ec 1.1)

$$M_{cx} = 1.0 \times 1.89 + 1.180 (23.18 + 0.3 \times 1.63) = 29.82 \text{ t-m, pero no menor}$$

que $P_u e_{mín}$

$$P_u e_{xmín} = 88.55 \times 0.0225 = 1.99 \text{ t-m}$$

$$\underline{M_{cx} = 29.82 \text{ t-m}}$$

Momento amplificado de diseño, en la dirección Y:

$$M_{cy} = F_{aby} M_{2by} + F_{asy} M_{2sy} \quad (\text{ec 1.1})$$

$$M_{cy} = 1.0 \times 2.31 + 1.116(2.55 + 0.3 \times 19.59) = 11.71 \text{ t-m, pero no menor}$$

que $P_u e_{mín}$

$$P_u e_{ymín} = 88.55 \times 0.0275 = 2.44 \text{ t-m}$$

$$\underline{M_{cy} = 11.71 \text{ t-m}}$$

En resumen, la columna se dimensionará por flexocompresión biaxial con los datos siguientes, y después se revisará en la dirección Y:

$$P_u = 88.54 \text{ t}; \quad e_x = 29.82/88.54 = 0.337 \text{ m}; \quad e_y = 11.71/88.54 = 0.132 \text{ m}$$

Aplicación por tanteos de la ec 2.15

$$\text{Tanteo 1. Supóngase } p = 0.01, \quad A_s = pbh = 0.01 \times 2475 = 24.75 \text{ cm}^2$$

$$P_{RO} = F_R (A_c f_c'' + A_s f_y) = 0.7 (336.6 + 24.75 \times 4.2) = 308.4 \text{ t}$$

Para calcular P_{Rx} y P_{Ry} , se supondrá el refuerzo distribuido en la periferia: $d/h = 0.9$.

$$q = p \frac{f_y}{f_c''} = 0.01 \times 30.88 = 0.3088$$

$$e_x/h_x = 33.7/45 = 0.75$$

en la fig 13 de las Ayudas de Diseño se obtiene $K = 0.27$

$$P_{Rx} = K F_R b h f_c'' = 0.27 \times 0.7 \times 336.6 = 63.62 \text{ t}$$

$$e_y/h_y = 13.2/55 = 0.24 \quad K = 0.75$$

$$P_{Ry} = 0.75 \times 0.7 \times 336.6 = 176.7t$$

sustituyendo en la ec 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{RO}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{63.62} + \frac{1}{176.7} - \frac{1}{308.4} \right)^{-1} = 55.14 t < P_u$$

$P_R/P_{RO} > 0.1$ luego, la ec 2.15 es aplicable.

Tanteo 2. Supóngase $p = 0.025$; $A_s = 0.025 \times 2475 = 61.88 \text{ cm}^2$

$$P_{RO} = 0.7(336.6 + 61.88 \times 4.2) = 417.5 t$$

$$q = 0.025 \times 30.88 = 0.772$$

$$e_x/h_x = 0.75 \quad \longrightarrow \quad K = 0.46$$

$$P_{Rx} = 0.46 \times 0.7 \times 336.6 = 108.4 t$$

$$e_y/h_y = 0.24 \quad \longrightarrow \quad K = 1.01$$

$$P_{Ry} = 0.7 \times 1.01 \times 336.6 = 238.0 t$$

$$P_R = \left(\frac{1}{108.4} + \frac{1}{238.0} - \frac{1}{417.5} \right)^{-1} = 90.65 t > P_u = 88.54 t$$

Se acepta $p = 0.025$, $A_s = 61.88 \text{ cm}^2$

Revisión con la flexocompresión principal en la dirección Y

$$P_u = 83.95 + 0.3 \times 2.31 + 7.61 = 92.25 t$$

Momento amplificado de diseño, en la dirección X:

$$M_{cx} = 1.0 \times 1.89 + 1.180 (0.3 \times 23.18 + 1.63) = 12.02t, \text{ pero no menor}$$

que $P_u e_{mín}$

$$P_u e_{xmín} = 92.26 \times 0.0225 = 2.08 \text{ t-m}$$

$$\underline{M_{cx} = 12.01 \text{ t-m}}$$

Momento amplificado de diseño, en la dirección Y:

$$M_{cy} = 1.0 \times 2.31 + 1.116 (0.3 \times 2.55 + 19.59) = 25.03 \text{ t-m, pero no menor}$$

que $P_u e_{mín}$

$$P_u e_{ymín} = 92.26 \times 0.0275 = 2.54 \text{ t-m}$$

$$\underline{M_{cy} = 25.03 \text{ t-m}}$$

En resumen, la columna se revisará con los datos siguientes:

$$P_u = 92.26T; \quad e_x = 12.02/92.26 = 0.130 \text{ m}; \quad e_y = 25.03/92.26 = 0.271 \text{ m}$$

$$p = 0.025; \quad q = 0.772; \quad P_{RO} = 417.5 \text{ t}$$

$$e_x/h_x = 13/45 = 0.29 \quad \longrightarrow \quad K = 0.91$$

$$P_{Rx} = 0.7 \times 0.91 \times 336.6 = 214.4 \text{ t}$$

$$e_y/h_y = 27.1/55 = 0.49 \quad \longrightarrow \quad K = 0.65$$

$$P_{Ry} = 0.7 \times 0.65 \times 336.6 = 153.2 \text{ t}$$

$$P_R = \left(\frac{1}{214.4} + \frac{1}{153.2} - \frac{1}{417.5} \right)^{-1} = 113.7t > P_u = 92.26 \text{ t}$$

por tanto, es suficiente la cuantía $p = 0.025$ ($A_s = 61.88 \text{ cm}^2$)

COMENTARIOS

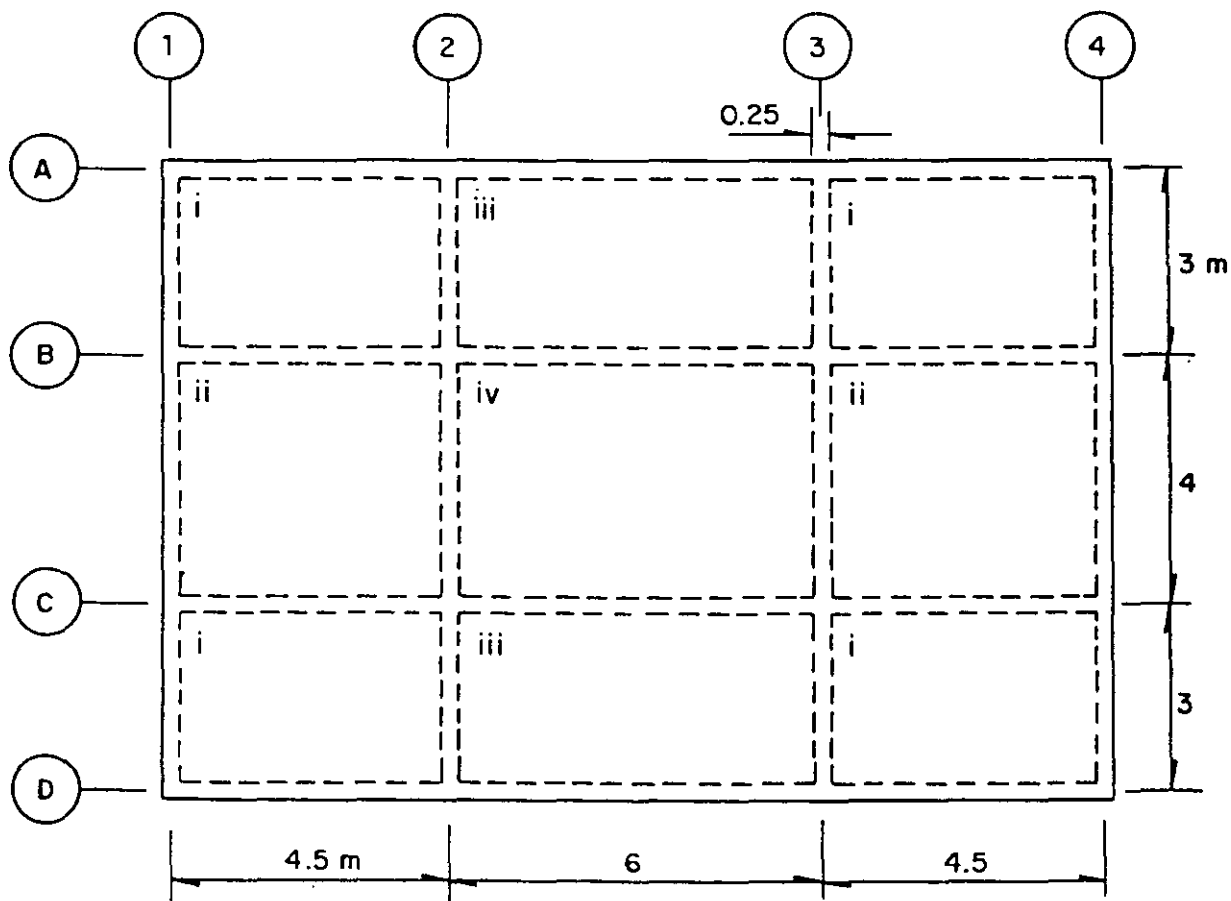
1. Se trata de un edificio situado en la zona I, diseñado con un factor de comportamiento sísmico, Q , igual a 2. Se supone que en el diseño de las columnas no rige la condición carga muerta más carga viva máxima.
2. Los números en óvalos son valores de las rigideces relativas, I/L . Junto a cada columna (en la elevación y en la planta) se anota su carga de servicio, P , bajo carga muerta más carga viva instantánea.
3. Son las fuerzas y momentos obtenidos del análisis, sin factorizar. Aunque el efecto de las torsiones de entrepiso es pequeño, en el ejemplo se ha incluido para ilustrar la combinación de las fuerzas internas, según el inciso 8.8 de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo. Por ejemplo, el momento en la dirección X (1.48 t-m) causado por el componente Y del sismo se debe a la torsión de entrepiso. Al dimensionar se debe tomar el sentido más desfavorable del sismo en cada dirección.
4. Los desplazamientos debidos al sismo ya están multiplicados por Q , de acuerdo con el artículo 207 del Reglamento.
5. Las columnas no tienen restricción lateral, por no haber muros de suficiente rigidez que la suministren (véase 1.3.2a).
6. En este edificio se limitó el desplazamiento de entrepiso a $0.012h$. Cuando se aplica este límite y la estructura no es esbelta, los efectos de esbeltez por movimiento lateral pueden desprejarse si $V/W_u \geq 0.15$, ya que $0.08 V/W_u = 0.012$ si $V/W_u = 0.15$. En caso de que $V/W_u < 0.15$, debe aplicarse el criterio de 1.3.2 b) para definir si es necesario considerar dichos efectos. En el ejemplo, $V/W_u = 86.04/1065 = 0.081 < 0.15$, por lo que procede aplicar el criterio mencionado.
7. La cantidad R es la rigidez elástica de entrepiso. El desplazamiento de entrepiso causado por la fuerza cortante de 86.04 t es igual a $8.70/Q$, puesto que, según el comentario 4, el valor 8.70 cm ya incluye a Q .

8. Para valuar los efectos de esbeltez en la dirección Y se aplican los mismos procedimientos que en la dirección X.
9. La columna se dimensionará por flexocompresión biaxial; primero se aplicará la flexocompresión principal en la dirección X, y después se revisará aplicándola en la dirección Y. Los efectos del sismo en dos direcciones ortogonales y de la gravedad se combinarán de acuerdo con el inciso 8.8 de las Normas T.C. para Diseño por Sismo. Esta combinación es la suma vectorial de las acciones mencionadas; en el ejemplo, la combinación se realiza sumando los componentes en X y en Y de los vectores que representan a los efectos de la gravedad y a los efectos de un componente del movimiento del terreno y del 30% de los efectos del otro componente.
10. Se toma la excentricidad mínima prescrita en 2.1.3 a), pero sólo con la carga vertical que resulta de la condición $CM + CV_{inst}$
11. La ec 1.6, que suministra el valor del factor de amplificación F_{as} , supone sólo traslación de los niveles. En interés de la sencillez del cálculo, se aplica también a los momentos que provienen de la torsión de entrepiso, como el momento de 1.622 t-m.
12. Ahora, la excentricidad mínima se aplica a la fuerza axial de diseño, P_u
13. En todo el ejemplo se usó $F_R = 0.7$, valor que se aplica a columnas con núcleo no confinado que fallan en la zona de compresión (inciso 1.6 de las Normas). Por haber adoptado $Q = 2$ en el ejemplo, se considera que la columna no tiene su núcleo confinado, de manera que se está suponiendo que falla en la zona de compresión. Esto hay que comprobarlo, y para ello parece justificado tomar en cuenta el tipo de falla que tendría la columna si sólo actuaran las fuerzas internas en la dirección en que rigió el dimensionamiento, en este caso la dirección X. Si fallara en la zona de tensión habría que aplicar $F_R = 0.8$.

DATOS

Todos los apoyos son monolíticos con la losa y tienen 25 cm de ancho.

La losa no está expuesta a la intemperie



Carga viva, C.V. = 700 kg/m^2

Acabado del piso = 80 kg/m^2

Peso volumétrico del concreto = 2.4 t/m^3

Factor de carga: 1.4

Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{concreto clase 1})$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 1.7})$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 2.3})$$

(Por ser $f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2$)

$$P_{\text{máx}} = P_b = \frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} \quad (\text{ec 2.2})$$

$$P_{\text{máx}} = \frac{136}{4200} \cdot \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.0152$$

ESTIMACIONES PRELIMINARES

Estimación de la carga

$$\text{Suponiendo una losa de } 11.0 \text{ cm: } 0.11 \times 2.4 = 0.264 \text{ t/m}^2$$

$$\text{Acabado} + 0.02 \text{ t/m}^2 \text{ de carga muerta adicional} = \frac{0.100 \text{ t/m}^2}{\text{Carga muerta} = 0.364 \text{ t/m}^2}$$

$$\text{Carga viva} = 0.700 \text{ t/m}^2$$

$$\text{Carga de servicio} \quad w = 1.064 \text{ t/m}^2$$

Estimación del peralte

Peralte efectivo mínimo (tablero crítico iv)

$$d = \frac{2(375 + 575)}{270} = 7.04 \text{ cm}$$

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$2520 \text{ kg/cm}^2 > 2000 \text{ kg/cm}^2$$

$$w = 1064 \text{ kg/m}^2 > 380 \text{ kg/m}^2$$

$$d_{\min} = 7.04 \times 0.034 \sqrt[4]{2520 \times 1064} = 7.04 \times 1.376$$

$$d_{\min} = 9.69 \text{ cm}$$

$$\text{recubrimiento} = \underline{2.00 \text{ cm}}$$

$$h = 11.69 \text{ cm}$$

$$\text{Considérese } h = \underline{12.0 \text{ cm}}$$

$$\text{Nueva carga muerta: } 0.12 \times 2400 + 100 = 388 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Carga total: } 388 + 700 = 1088 \text{ kg/m}^2$$

$$w_u = 1.4 \times 1088 = 1523 \text{ kg/m}^2$$

4 Revisión por flexión del peralte propuesto

Se debe cumplir $p \leq p_{\max}$

Se revisará con el momento negativo en el claro corto del tablero iv.

$$m = a_1/a_2 = 375/575 = 0.652$$

De la tabla 4.1 se obtiene, interpolando linealmente

$$K = 0.0459$$

$$M_u = K w_u a_1^2 = 0.0459 \times 1523 (3.75)^2$$

$$M_u = 983 \text{ kg-m}$$

Cálculo de p (fig 2 de las Ayudas de Diseño)

$$\frac{M_R}{bd^2} = \frac{98300}{100 \times 8^2} = 15.36$$

(suponiendo $d = h - r - 2 \text{ cm} = 12 - 2 - 2 = 8 \text{ cm}$)

En la figura se obtiene $p = 0.0043 < p_{\text{máx}} = 0.0152$

El peralte supuesto se acepta por flexión

Revisión por fuerza cortante del peralte supuesto (según 4.3.3f)

La fuerza cortante máxima ocurre, en este caso, en el claro corto del table-
ro iv:

$$V_u = \frac{(0.5a_1 - d) w_u}{1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^6} = \frac{(0.5 \times 3.75 - 0.08) 1523}{1 + \left(\frac{3.75}{5.75}\right)^6} = 2538 \text{ kg/m} \quad (\text{ec 4.3})$$

Resistencia de diseño:

$$V_{cR} = 0.5 F_R bd \sqrt{f_c^*} = 0.5 \times 0.8 \times 100 \times 8 \times \sqrt{160} = 4048 \text{ kg} > V_u$$

El peralte supuesto se acepta por fuerza cortante

ANÁLISIS Y DIMENSIONAMIENTO POR FLEXIÓN

(los cálculos se refieren a una franja de un metro de ancho)

Peraltes efectivos:

Refuerzo positivo: $d = h - r = 12 - 2.3 = 9.7 \text{ cm}$

Refuerzo negativo: $d = h - r - 2 = 12 - 2.3 - 2 = 7.7 \text{ cm}$

Con barras N°2.5, $r = 1.5 + d_b = 2.3 \text{ cm}$

Refuerzo mínimo

(por cambios volumétricos)

$$a_s = \frac{660 x_1}{f_y (x_1 + 100)} = \frac{660 \times 12}{4200(12 + 100)} = 0.01684 \text{ cm}^2 \quad (\text{ec 3.3})$$

En un ancho de 100 cm: $A_{s\text{mín}} = 0.01684 \times 100 = 1.684 \text{ cm}^2/\text{m}$

Con barras # 2.5, a esta área corresponde la separación siguiente:

$$s = \frac{100a_s}{A_s} = \frac{100 \times 0.49}{1.684} = 29.10 \text{ cm}$$

pero $s_{\text{máx}}$ $\left\{ \begin{array}{l} 3.5 h = 3.5 \times 12 = 42 \text{ cm} \\ 50 \text{ cm} \end{array} \right.$

Rige la de 29.1 cm; se usará una separación máxima de 30 cm

Valores de $w_u a_1^2$ y de a_1/a_2

Tablero	i	ii	iii	iv
Tipo	De esquina	De borde, un lado corto discontinuo	De borde, un lado largo discontinuo	Interior
a_1 (m)	2.75	3.75	2.75	3.75
$w_u a_1^2$ (kg)	11520	21420	11520	21420
a_1/a_2	0.647	0.882	0.478	0.652

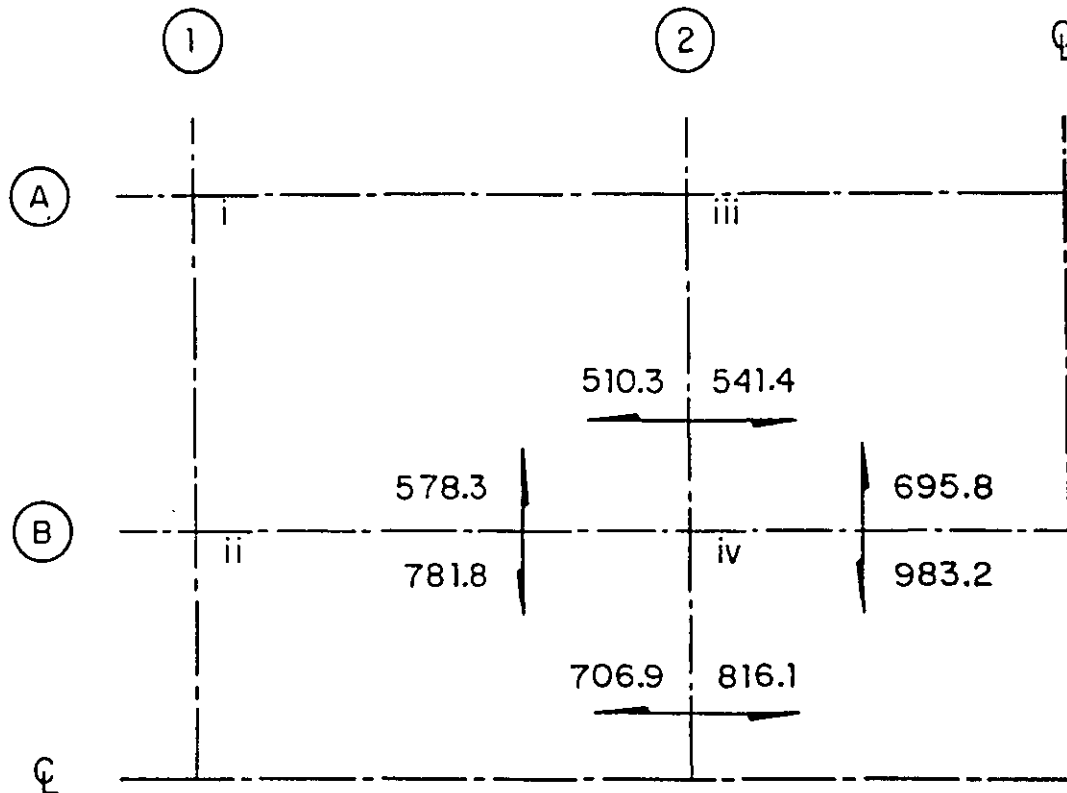
8

TABLA DE MOMENTOS Y SEPARACION DE BARRAS

Tablero	Momento	Claro	Coefficiente K	$M_u = Kw \frac{a^2}{u_1}$ (kg-m/m)	Momento ajustado	Separación teórica, s (cm)
i	Neg. en bordes interiores	corto	0.0502	578.3	656.6	21.5
		largo	0.0443	510.3	520.7	27.5
	Neg. en bordes discontinuos	corto	0.0300	345.6		30
		largo	0.0242	278.8		30
	Positivo	corto	0.0284	327.2		30
		largo	0.0144	165.9		30
ii	Neg. en bordes interiores	corto	0.0365	781.8	724.4	19.5
		largo	0.0330	706.9	743.3	19
	Neg. en bordes discontinuos	largo	0.0209	447.7		30
		Positivo	corto	0.0173	370.6	
		largo	0.0129	276.3		30
	iii	Neg. en bordes interiores	corto	0.0604	695.8	806.4
largo			0.0470	541.4	531.0	27
Neg. en bordes discontinuos		corto	0.0375	432.0		30
		Positivo	corto	0.0352	405.5	
		largo	0.0149	171.6		30
iv		Neg. en bordes interiores	corto	0.0459	983.2	902.2
	largo		0.0381	816.1	779.7	18
	Positivo	corto	0.0247	529.1		30
		largo	0.0132	282.7		30

Ajuste de momentos

Momentos teóricos (kg-m/m)



Distribución de momentos

Rigidez de tableros

 (d^3/a_1)

Tablero i	$d^3/275 = 0.003636 d^3$
Tablero ii	$d^3/375 = 0.002667 d^3$
Tablero iii	$d^3/275 = 0.003636 d^3$
Tablero iv	$d^3/375 = 0.002667 d^3$

Distribución entre tablero i y ii

Momento de desequilibrio = $781.8 - 578.3 = 203.5$ kg-m/m

Momento por distribuir = $\frac{2}{3} \times 203.5 = 135.7$ kg-m/m

Tablero	i	ii	Σ
$1000/a_1$	3.636	2.667	6.303
f_d	0.577	0.423	1.000
m_{emp}	-578.3	+781.8	
	-78.3	- 57.4	
momentos ajustados	-656.6	+724.4	kg-m/m

Distribución entre tableros ii y iv

Momento de desequilibrio = $816.1 - 706.9 = 109.2$ kg-m/m

Momento por distribuir = $\frac{2}{3} \times 109.2 = 72.8$ kg-m/m

Tablero	i	iv	Σ
$1000/a_1$	2.667	2.667	5.334
f_d	0.500	0.500	1.000
m_{emp}	-706.9	+816.1	
	- 36.4	-36.4	
momentos ajustados	-743.3	+779.7	kg-m/m

Distribución entre tableros iii y iv

Momento de desequilibrio = $983.2 - 695.8 = 287.4$ kg-m/m

Momento por distribuir = $\frac{2}{3} \times 287.4 = 191.6$ kg-m/m

Tablero	iii	iv	Σ
$1000/a_1$	3.636	2.667	6.303
f_d	0.577	0.423	1.000
m_{emp}	-695.8	+983.2	
	-110.6	-81.0	
momentos ajustados	-806.4	+902.2	kg-m/m

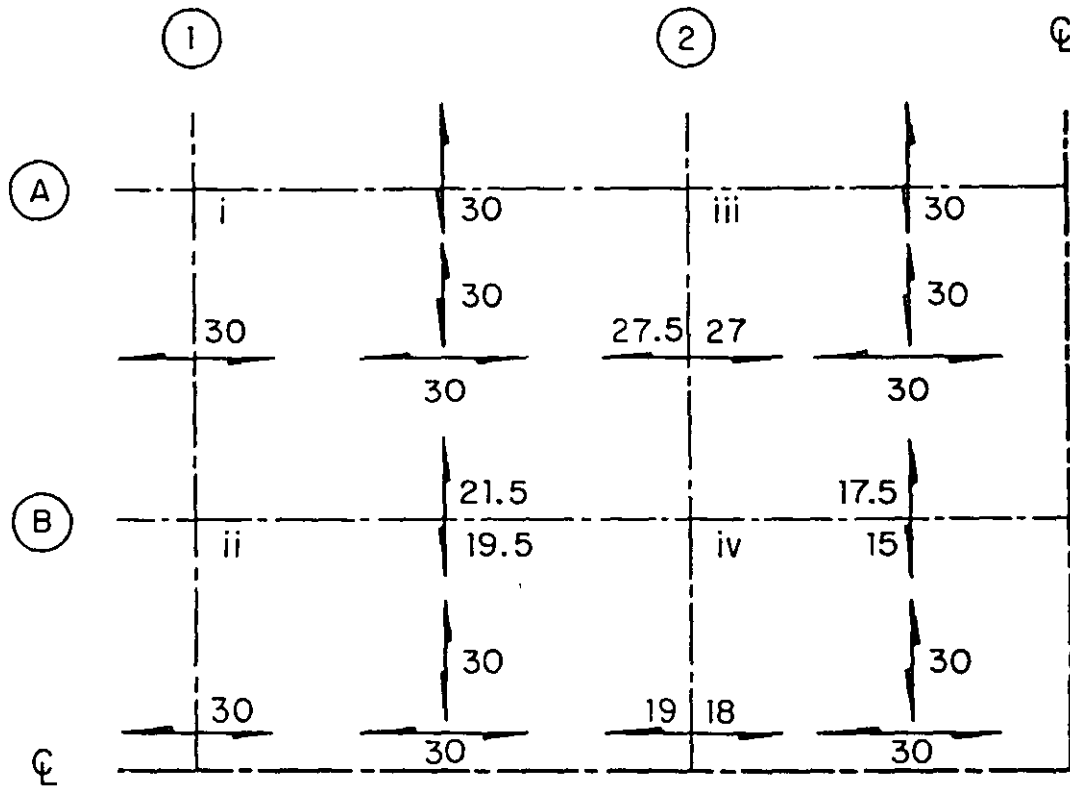
Distribución entre tableros i y iii

Momento de desequilibrio = $541.4 - 510.3 = 31.1$ kg-m/m

Momento por distribuir = $\frac{2}{3} \times 31.1 = 20.73$ kg-m/m

Tablero	i	iii	Σ
$1000/a_1$	3.636	3.636	7.272
f_d	0.500	0.500	1.000
m_{emp}	-510.3	+541.4	
	- 10.4	- 10.4	
momentos ajustados	-520.7	+531.0	kg-m/m

Separaciones teóricas, en cm (de la tabla)

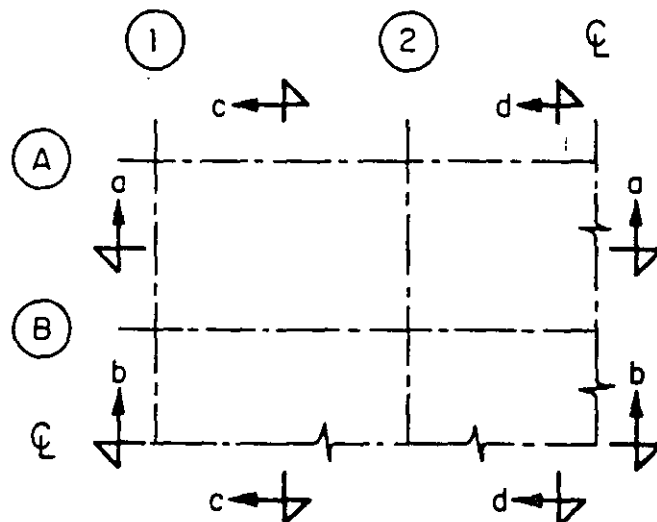


Refuerzo en franjas extremas

Se usará el 60% del acero requerido en las franjas centrales respetando las especificaciones de acero mínimo y separaciones máximas.

CROQUIS DE ARMADO

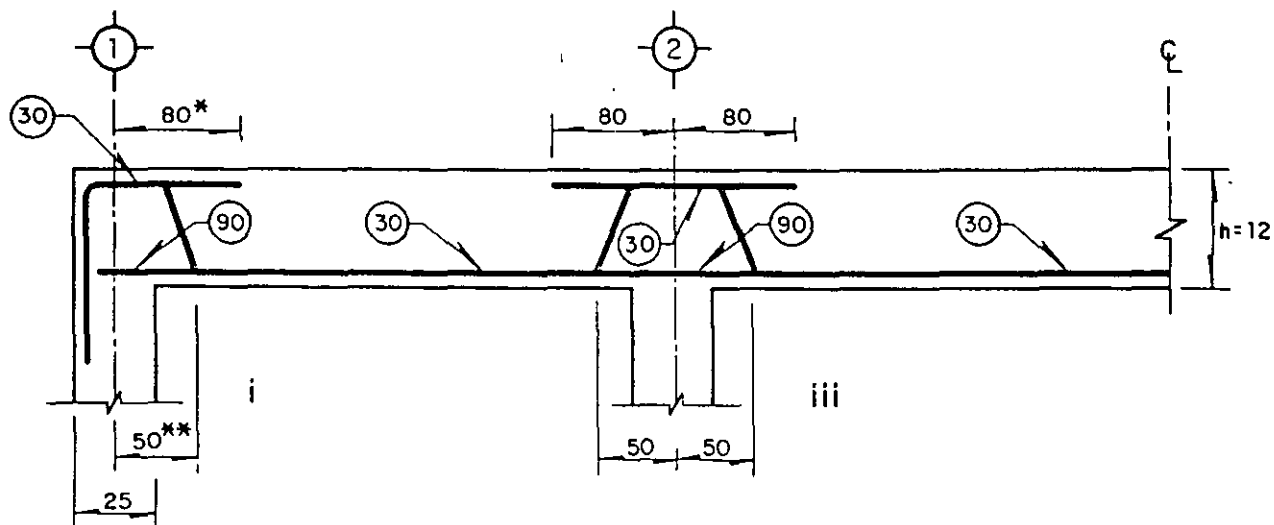
Planta de localización de secciones



NOTAS

-Los números en círculo son separaciones, en cm, de barras # 2.5 y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, en las franjas centrales

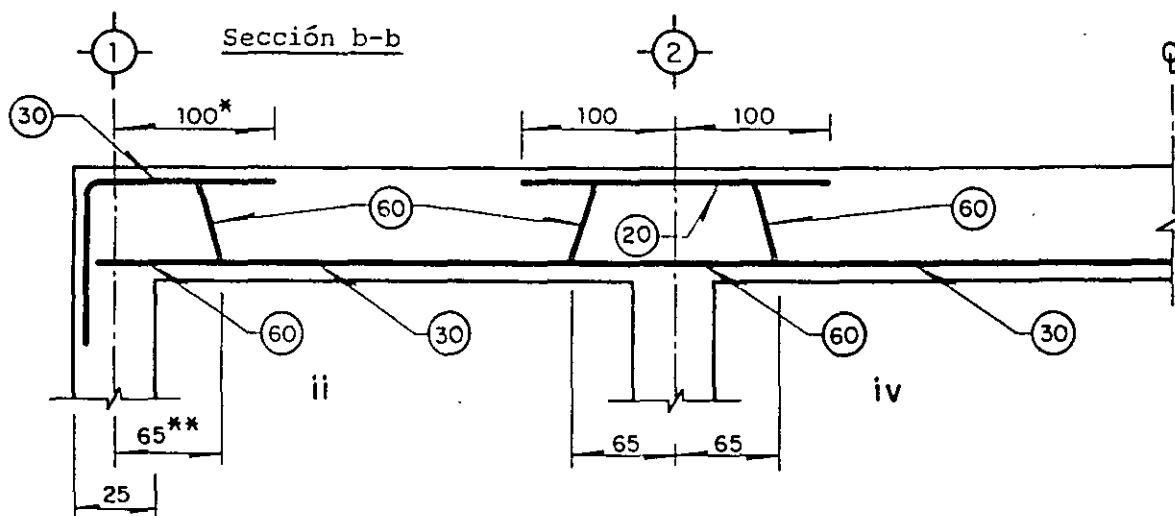
-Dimensiones en cm

Sección a-a

13

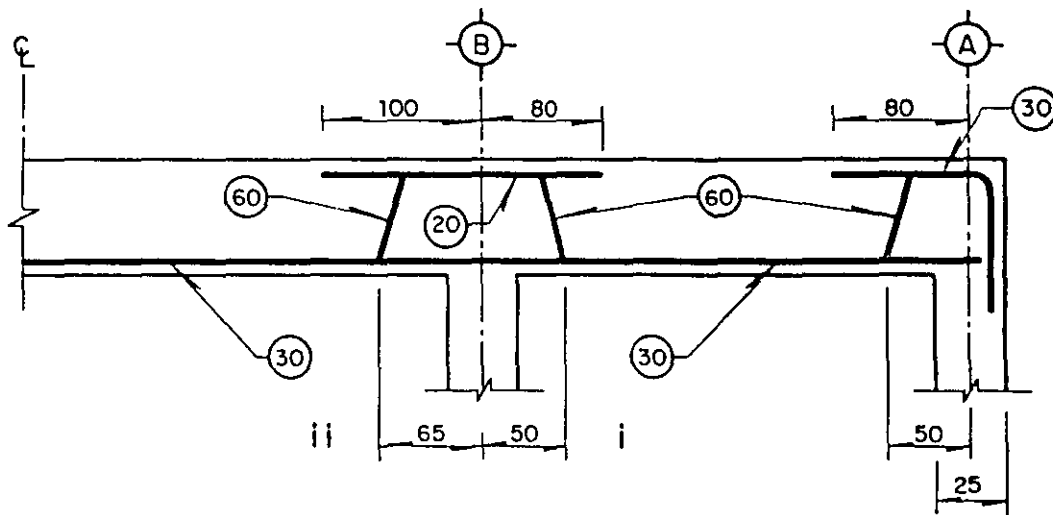
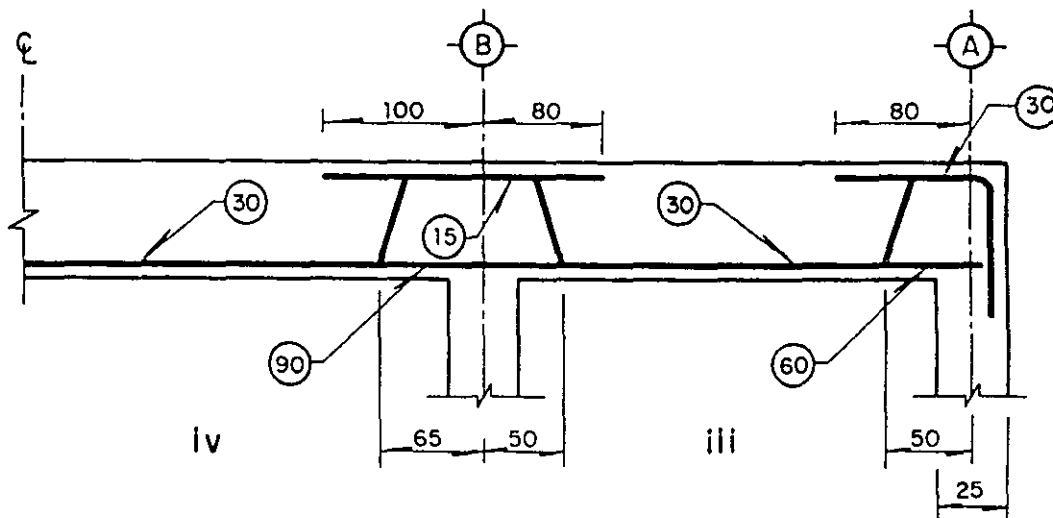
$$* \frac{25}{2} + \frac{a_1}{5} + d = 12.5 + \frac{275}{5} + 10 = 77.5 \quad \text{se usarán } 80 \text{ cm}$$

$$** 125 + \frac{a_1}{6} - d = 12.5 + \frac{275}{6} - 10 = 48.3 \quad \text{se usarán } 50 \text{ cm}$$

Sección b-b

$$* 12.5 + \frac{a_1}{5} + d = 12.5 + \frac{375}{5} + 10 = 97.5 \quad \text{se usarán } 100 \text{ cm}$$

$$** 12.5 + \frac{a_1}{6} - d = 12.5 + \frac{375}{6} - 10 = 65.0 \quad \text{se usarán } 65 \text{ cm}$$

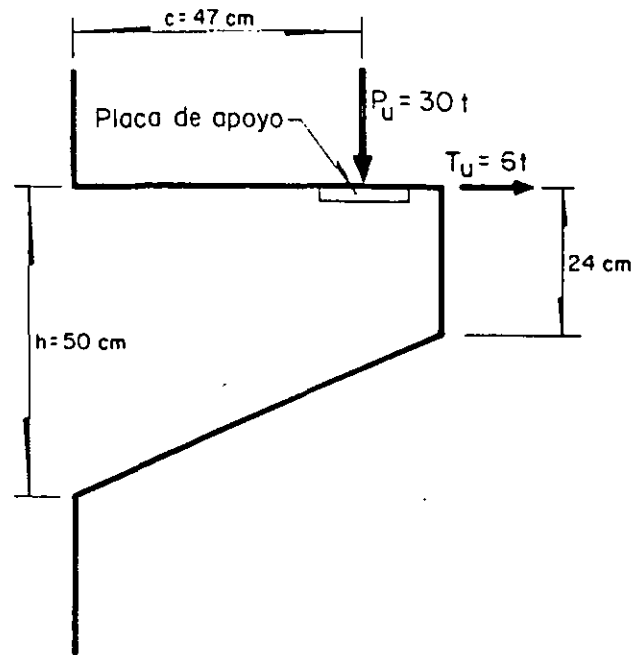
Sección c-cSección d-d

COMENTARIOS

1. Se supone que el responsable de la obra autorizó el uso de concreto clase 1 con $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$, de acuerdo con 1.4.1.b). En elementos que principalmente trabajan a flexión, como esta losa, generalmente no se justifica usar resistencias mayores. El concreto clase 2 no es recomendable en este caso porque conduce a flechas excesivas.
2. La losa no está destinada a resistir sismo en flexión, de aquí que la cuantía máxima admisible sea igual a p_b , y no $0.75 p_b$ (véase 2.1.2b).
3. El tablero crítico es el que tiene mayor perímetro calculado según 4.3.3 e).
4. Antes de calcular los momentos y el refuerzo en todas las secciones críticas de la losa, conviene comprobar si el peralte de 11 cm elegido por consideraciones de flecha es también adecuado desde el punto de vista de resistencia. La inspección de la losa indica que el tablero crítico por resistencia será probablemente el iv.
5. De acuerdo con 1.5, los peraltes efectivos menores de 20 cm correspondientes al refuerzo del lecho superior deben reducirse en 2 cm.
6. En rigor deberían usarse peraltes efectivos distintos en el claro corto y en el claro largo. Generalmente esto no se justifica, por lo que en el ejemplo se ha seguido la práctica común de utilizar un valor medio del peralte para ambos claros.
7. En losas apoyadas perimétricamente no se aplica el requisito de refuerzo mínimo por flexión de 2.1.2a), de modo que el refuerzo mínimo es el necesario por cambios volumétricos que se especifica en 3.10.
8. Las separaciones teóricas consignadas en la tabla se obtuvieron con las figuras 28 y 29 de las Ayudas de Diseño. Cuando rigió la separación máxima se anotó su valor (30 cm).

9. De acuerdo con 4.3.3c), en los bordes comunes de tableros adyacentes deben distribuirse dos tercios del momento de desequilibrio, cuando losa y viga son monolíticas; la tercera parte restante es tomada por la viga en torsión. Para esta distribución se supone que todos los tableros tienen el mismo peralte efectivo, d .
10. Las flechas indican las direcciones en que actúan los momentos.
11. Las flechas indican las direcciones en que se coloca el refuerzo, y los números las separaciones, en cm.
12. Según nota de tabla 4.1.
13. Según 4.3.3 b) y 3.1. (La longitud 25 cm es el ancho de la viga.)

DATOS



La ménsula se colará monolíticamente con la columna

Ancho de la ménsula $b = 30 \text{ cm}$

Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES

$$f^*_c = 0.8 f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec } 1.7)$$

$$f''_c = 0.85 f^*_c = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec } 2.3)$$

(Por ser $f^*_c < 250 \text{ kg/cm}^2$)

$$\text{Por flexión, } p_{\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \times \sqrt{200}}{4200} = 0.002357$$

$$p_b = \frac{f'_c}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.01524$$

$F_R = 0.8$ (según inciso 4.9.1 de las Normas)

2 Coeficiente de fricción $\mu = 1.4$

DIMENSIONAMIENTO

3 Cálculo del área de acero de refuerzo para flexión, A_f

Si el área A_f no excede del área balanceada obtenida con la ec 2.2, el refuerzo A_f puede calcularse con la expresión siguiente:

$$M_R = F_R A_f f_y z \quad (\text{ec 2.14 con } A_s = A_f)$$

suponiendo que el brazo z es igual a $0.9 d$.

$$M_u = P_u c + T_u (h-d)$$

$$d = h - (r + d_b/2) = 50 - 2.95 = 47.05 \text{ cm}$$

$$h-d = 50 - 47.05 = 2.95 \text{ cm}$$

$$M_u = 30 \times 0.47 + 6 \times 0.0295 = 14.28 \text{ t-m}$$

$$z = 0.9 d = 0.9 \times 47.05 = 42.34 \text{ cm}$$

$$A_f = \frac{M_u}{F_R f_y z} = \frac{1428000}{0.8 \times 4200 \times 42.34} = \underline{10.04 \text{ cm}^2}$$

$$p = \frac{A_f}{bd} = \frac{10.04}{30 \times 47.05} = 0.007113$$

$p_{\text{mín}} < p < I'_b$ luego, es correcto usar la ec 2.14

Cálculo del área de acero de refuerzo por tensión directa, A_t

$$A_t = \frac{T_u}{F_R f_y} = \frac{6000}{0.8 \times 4200} = 1.786 \text{ cm}^2$$

4 Cálculo del área de acero de refuerzo para cortante por fricción, A_{vf}

$$V_R = F_R \mu (A_{vf} f_y + N_u) \quad (\text{ec 2.27})$$

$$A_{vf} = \frac{V_R}{F_R \mu f_y}; \quad N_u = 0 \text{ en este caso}$$

$$A_{vf} = \frac{30\,000}{0.8 \times 1.4 \times 4200} = 6.378 \text{ cm}^2$$

Revisión de las limitaciones indicadas por las ecs 2.28 y 2.29

$$F_R [14A + 0.8 (A_{vf} f_y + N_u)] \quad (\text{ec 2.28})$$

$$= 0.8 [14 \times 30 \times 50 + 0.8 (6.378 \times 4200 + 0)] = 33940 \text{ kg} > 30\,000 \text{ kg}$$

$$0.25 F_R f_c^* A \quad (\text{ec 2.29})$$

$$= 0.25 \times 0.8 \times 160 \times 30 \times 50 = 48\,000 \text{ kg} > 30\,000 \text{ kg}$$

por lo que $A_{vf} = 6.38 \text{ cm}^2$ es correcta

Area del acero de refuerzo para barras principales, A_s

El área A_s se tomará como la mayor de las dos siguientes (según 4.9.2):

$$A_f + A_t$$

ó

$$\frac{2}{3} A_{vf} + A_t$$

$$A_f + A_t = 10.04 + 1.79 = 11.83 \text{ cm}^2$$

$$\frac{2}{3} A_{vf} + A_t = \frac{2}{3} \times 6.38 + 1.79 = 6.04 \text{ cm}^2$$

$$\underline{\text{por tanto } A_s = 11.83 \text{ cm}^2}$$

Area del acero de refuerzo para estribos complementarios horizontales, A_h

Se tomará igual a $0.5 (A_s - A_t)$, ó mayor

$$0.5 (A_s - A_t) = 0.5 (11.83 - 1.79) = \underline{5.02 \text{ cm}^2}$$

Barras que se suministran

$$\text{Para } A_s: \quad 2 \# 6 \text{ y } 3 \# 5 \quad A = 11.64 \text{ cm}^2$$

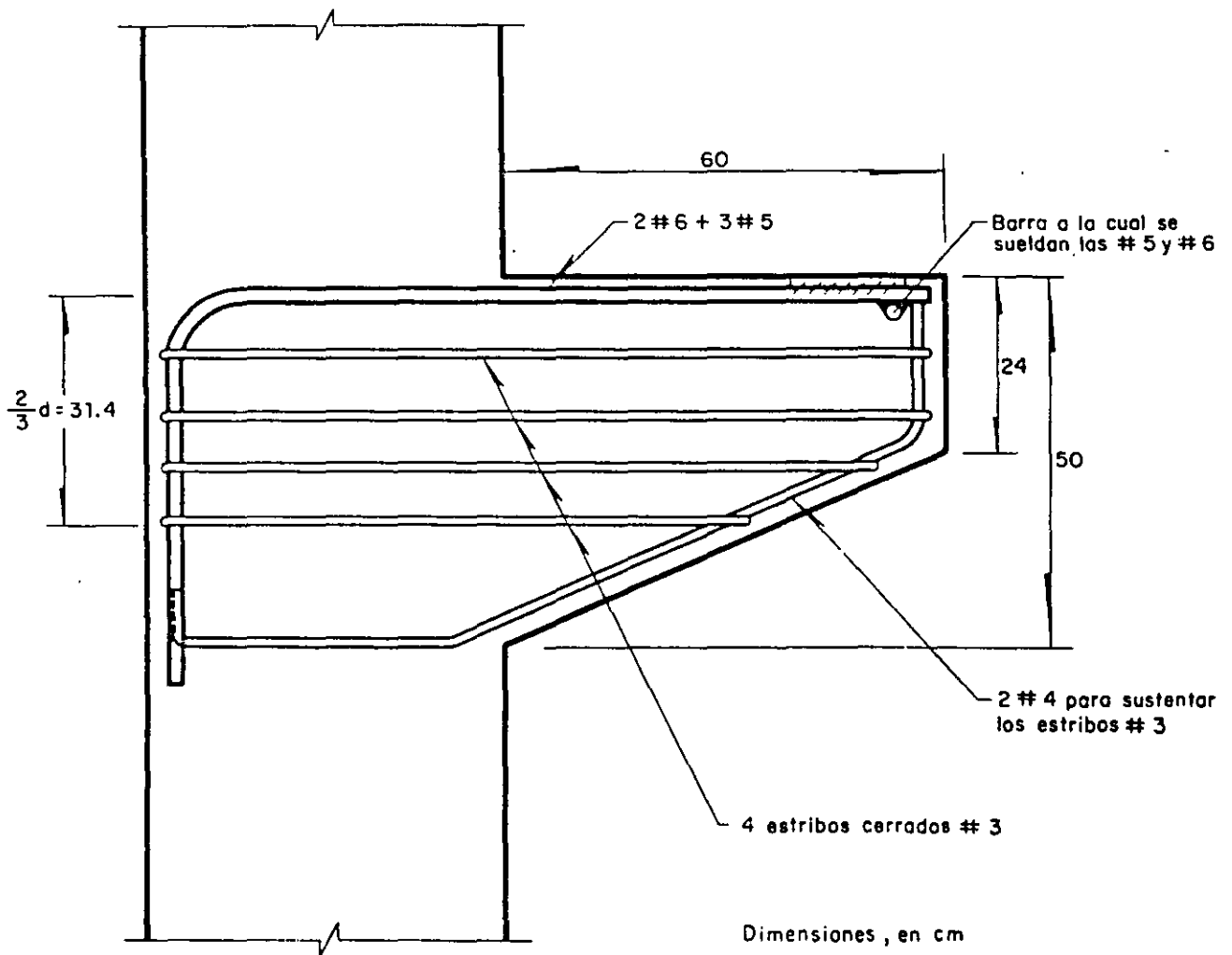
$$\text{Para } A_h: \quad 8 \# 3 \quad A = 5.68 \text{ cm}^2$$

Revisión de la cuantía mínima de refuerzo primario (4.9.2)

$$0.04 f'_c / f_y = 0.04 \times 200 / 4200 = 0.0019$$

$$A_s / bd = 11.64 / 30 \times 47.05 = 0.0082 > 0.0019$$

REFUERZO PROPUESTO



COMENTARIOS

1. Las cargas P_u y T_u son las de diseño, es decir, ya están afectadas por el factor de carga.
2. Según 2.1.5 i) para concreto monolítico μ vale 1.4
3. Según 4.9.2
4. Según 4.9.2 y 2.1.5 i)
5. Véase la fig 4.6 de las Normas

DATOS

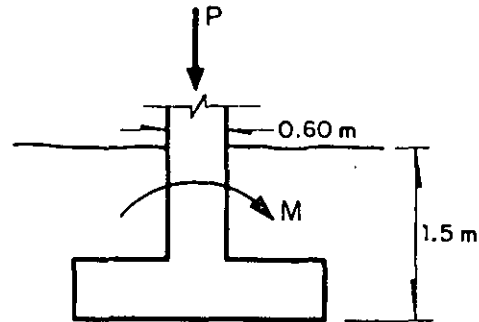
1 Acciones en condiciones de servicio

CM + CV $P = 90 \text{ ton}; M = 0$

$P = 90 \text{ ton}$

CM+CV+CA

$M = 20 \text{ t-m}$



Columna de 60 x 40 cm

2 Resistencia de diseño del suelo 22 ton/m^2 , en el nivel de desplante

Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

peso volumétrico del relleno, 1.3 t/m^3

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES

$$f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sqrt{f_c^*} = \sqrt{160} = 12.65 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f_c^*}}{f_y} = \frac{0.7 \times \sqrt{200}}{4200} = 0.00236$$

Area de la zapata (A)

Supóngase $h = 60 \text{ cm}$

Carga de diseño en la columna bajo CM + CV:

$$P_u = 1.4 \times 90 = 126 \text{ t}$$

Iguando en la base de la zapata la acción de diseño con la resistencia de diseño del suelo

$$F_c (P + \text{p.p. zapata} + \text{peso relleno}) = 22A$$

Dividiendo entre A

$$\frac{F_c P}{A} + F_c \frac{\text{p.p. zapata} + \text{p. relleno}}{A} = 22$$

de donde

$$A = \frac{P_u}{22 - F_c \frac{\text{p.p. zapata} + \text{p. relleno}}{A}}$$

El segundo término del denominador, aproximadamente puede valuarse como sigue

$$F_c \frac{\text{p.p. zapata} + \text{p. relleno}}{A} = 1.4 \left[0.6 \times 2.4 + (1.5 - 0.6) \cdot 1.3 \right]$$

$$= 3.654 \text{ t/m}^2$$

sustituyendo

$$A = \frac{126}{22 - 3.654} = \frac{126}{18.35} = 6.866 \text{ m}^2$$

Supóngase la zapata de 2 x 3.5 m

Revisión del área de 2 x 3.5 m bajo CM + CV + CA

En el nivel de desplante:

$$P_{ud} = F_c (P + \text{p.p. zapata} + \text{peso relleno}) = 1.1 (90 + 10.08 + 8.19) = 119.1 \text{ t}$$

$$\text{p.p. zapata} = 2 \times 3.5 \times 0.60 \times 2.4 = 10.08 \text{ t}; \text{ p. relleno} = 2 \times 3.5 \times 0.9 \times 1.3$$

$$= 8.19 \text{ t}$$

$$M_u = 1.1 \times 20 = 22 \text{ t-m}$$

$$e = \frac{M_u}{P_{ud}} = \frac{22}{119.1} = 0.185 \text{ m}$$

$$\text{Ancho de cálculo } B' = B - 2e = 3.5 - 2 \times 0.185 = 3.13 \text{ m}$$

$$A' = 2 \times 3.13 = 6.26 \text{ m}^2$$

$$\text{Presión actuante } \frac{P_{ud}}{A'} = \frac{119.1}{6.26} = 19.03 \text{ t/m}^2 < 22 \text{ t/m}^2$$

Se acepta la zapata de 2 x 3.5 m

DIMENSIONAMIENTO

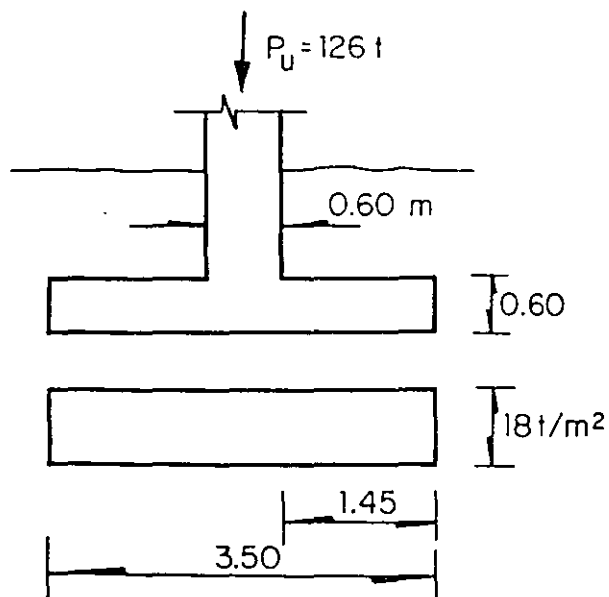
Revisión del peralte propuesto

a) Bajo CM+CV ($P_u = 126 \text{ t}$; $M_u = 0$)

Flexión

Momentos de diseño, m_u

Dirección paralela al lado largo



Reacción debido a la carga de 126 ton

$$q_n = \frac{126}{7} = 18 \text{ t/m}^2 \text{ (reacción neta)}$$

Momento en la sección crítica,
por metro de ancho

$$m_u = \frac{18 \times 1.45^2}{2} = 18.9 \text{ t-m}$$

$$d = 60 - 5 \text{ cm} - 0.6 = 54.4 \text{ cm}$$

En la fig 2 de las Ayudas de Diseño.

$$\frac{M_R}{bd^2} = \frac{18.9 \times 10^5}{100 \times 54.4^2} = 6.39; \text{ rige } p_{\min} = 0.00236$$

Fuerza cortante

Revisión como viga ancha (la sección crítica está a un peralte, d , del paño de columna)

$$\begin{aligned} V_{cR} &= F_R bd (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 100 \times 54.4 (0.2 + 30 \times 0.00236) 12.65 \\ &= 14\,910 \text{ kg/m} \quad (\text{ec 2.17}) \end{aligned}$$

$$V_u = (1.45 - 0.54) \times 18 = 16.38 \text{ t} > V_{cR}$$

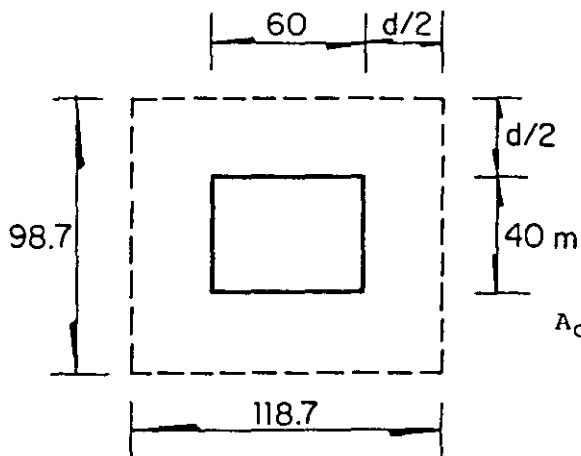
aumentese el peralte a 65 cm

$$d = 65 - 5 - 0.6 = 59.4 \text{ cm}$$

$$V_{cR} = \frac{59.4}{54.4} \times 14910 = 16280 \text{ kg} \approx V_u$$

Usar tentativamente $h = 65 \text{ cm}$

Revisión por penetración



$$\text{Se usará } d = 65 - 5 - 1.27 = 58.7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro de la sección crítica} &= \\ &= 2(40 + 60 + 2 \times 58.7) \\ &= 434.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area de la sección crítica} &= \\ A_c &= 58.7 \times 434.8 = 25520 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$V_u = 126 \text{ t} - 0.987 \times 1.187 \times 18 = 126 - 21.1 = 104.9 \text{ t}$$

$$v_u = \frac{104900}{25520} = 4.11 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec 2.25})$$

$$v_{cR} = F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \leq F_R \sqrt{f_c^*} \quad (\text{según 2.1.5 h})$$

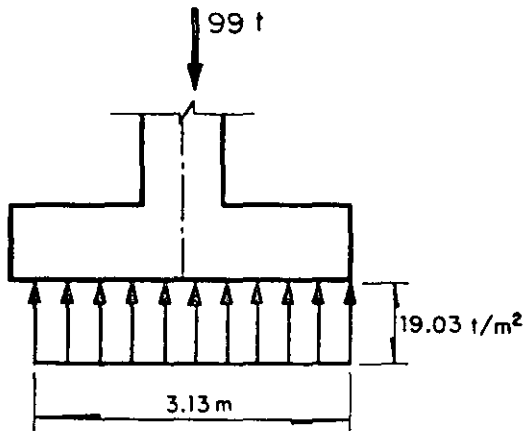
$$(0.5 + \gamma) = (0.5 + 40/60) > 1.0$$

$$\text{rige } F_R \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 12.65 = 10.1 \text{ kg cm}^2 > v_u$$

Se acepta h = 65 cm por este concepto

b) Revisión bajo CM + CV + CA

Flexión y cortante como viga ancha



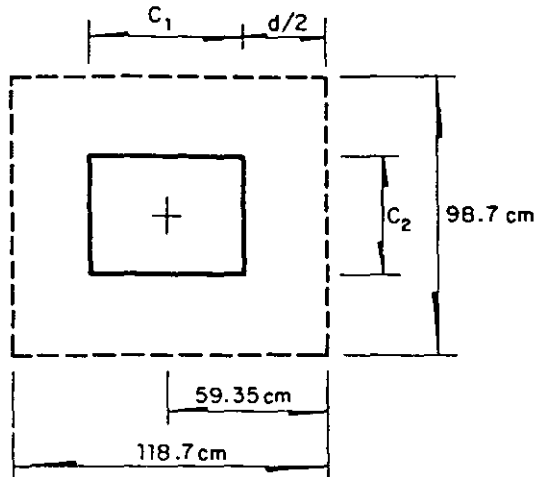
$$\frac{P_{ud}}{A'} = 19.03 \text{ t/m}^2$$

(despreciando el efecto del cambio de espesor de 60 a 65 cm)

Reacción neta

$$\begin{aligned} q_n &= 19.03 - 1.1 (\text{zapata} + \text{relleno}) \\ &= 19.03 - 1.1 (0.65 \times 2.4 + 0.85 \times 1.3) \\ &= 16.1 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

La reacción neta resulta menor que bajo CM+CV (18 t/m^2), por lo que en cuanto a flexión y cortante como viga ancha rige la condición CM + CV

Revisión por penetración

$$c_1 = 60 \text{ cm}$$

$$c_2 = 40 \text{ cm}$$

$$d = 65 - 5 - 1.27 = 58.7 \text{ cm}$$

$$c_1 + d = 118.7 \text{ cm}$$

$$c_2 + d = 98.7 \text{ cm}$$

Revisión para decidir si puede despreciarse el momento que se trasmite entre columna y zapata, de acuerdo con 2.1.5 h)

$$M_u = 1.1 \times 20 = 22 \text{ t-m}$$

$$V_u = 99 - 1.187 \times 0.987 \left[19.03 - 1.1 (0.65 \times 2.4 + 0.85 \times 1.3) \right]$$

$$= 99 - 1.172 \times q_n = 99 - 1.172 \times 16.1 = 80.13 \text{ t}$$

(La fuerza V_u se obtuvo del equilibrio vertical de la porción de zapata comprendida dentro de la sección crítica)

$$0.2 V_u d = 0.2 \times 80.13 \times 0.587 = 9.41 \text{ t-m} < M_u$$

por tanto, no puede despreciarse el momento

Fracción de momento que debe transmitirse por esfuerzos cortantes y torsión

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} \quad (\text{ec 2.26})$$

$$\sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)} = \sqrt{118.7/98.7} = 1.097$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \times 1.097} = 0.4236$$

$$\alpha M_u = 0.4236 \times 22 = \underline{9.32 \text{ t-m}}$$

Máximo esfuerzo actuante

$$v_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\alpha M_u c_{AB}}{J_c} \quad (\text{de la fig 2.1 de las Normas})$$

$$c_{AB} = (c_1 + d)/2 = 118.7/2 = 59.35 \text{ cm}$$

$$A_c = 2 (118.7 + 98.7) \times 58.7 = 25520 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d) d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2} \\ &= \frac{58.7 \times 118.7^3}{6} + \frac{118.7 \times 58.7^3}{6} + \frac{58.7 \times 98.7 \times 118.7^2}{2} \\ &= 16.36 \times 10^6 + 4.001 \times 10^6 + 40.82 \times 10^6 = 61.18 \times 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{80130}{25520} + \frac{932000 \times 59.35}{61180000} = 3.14 + 0.90 \\ &= 4.04 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Esfuerzo resistente

$$v_{CR} = F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \leq F_R \sqrt{f_c^*}$$

se vio que rige

$$F_R \sqrt{f_c^*} = 0.7 \times 12.65 = 8.86 \text{ kg/cm}^2 > v_u$$

se acepta h = 65 cm

Refuerzo por flexión

Refuerzo paralelo al lado largo

Rige CM + CV; se obtuvo $p = p_{\text{mín}} = 0.00236$

$$d = 65 - 5 - 0.5 \times 1.27$$

(suponiendo barras # 4)

$$A_s = pbd = 0.00236 \times 100 \times 59.4 = 14.02 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{con barras \# 4} \quad s = \frac{100 a_s}{A_s} = \frac{127}{14.02} = 9.06 \text{ cm}$$

$$\text{con barras \# 5} \quad s = \frac{198}{14.02} = 14.1 \quad \underline{\text{usar \# 5 @ 14 cm}}$$

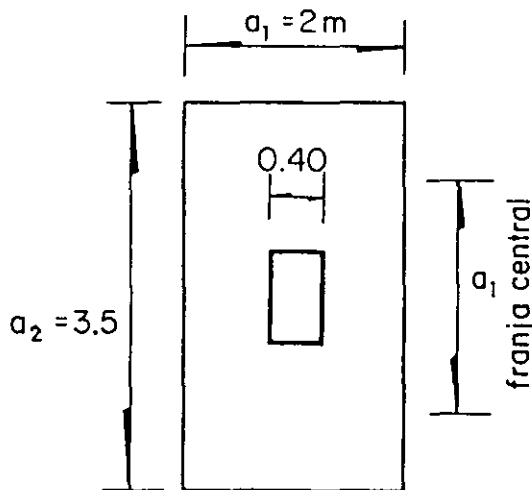
7

Refuerzo paralelo al lado corto (rige CM + CV)

$$\text{reacción neta} = 18 \text{ t/m}^2$$

$$d = 65 - 5 - 1.5 \times 1.27 = 58.1 \text{ cm}$$

$$\text{Momento total en la sección crítica} = \frac{18 \times 0.8^2 \times 3.5}{2} = 20.16 \text{ t-m}$$



Momento en la franja central, por metro de ancho:

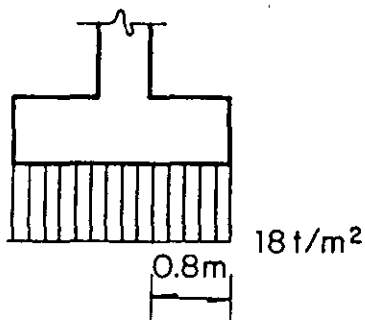
$$\frac{20.16}{a_1} \cdot \frac{2a_1}{a_1 + a_2} =$$

$$= 20.16 \times \frac{2}{2+3.5} = 7.33 \text{ t-m/m}$$

Refuerzo en la franja central:

$$\frac{M_R}{bd^2} = \frac{733000}{100 \times 58.1^2} = 2.17 \text{ kg/cm}^2 \text{ m}$$

resulta $p = p_{\text{mín}}$

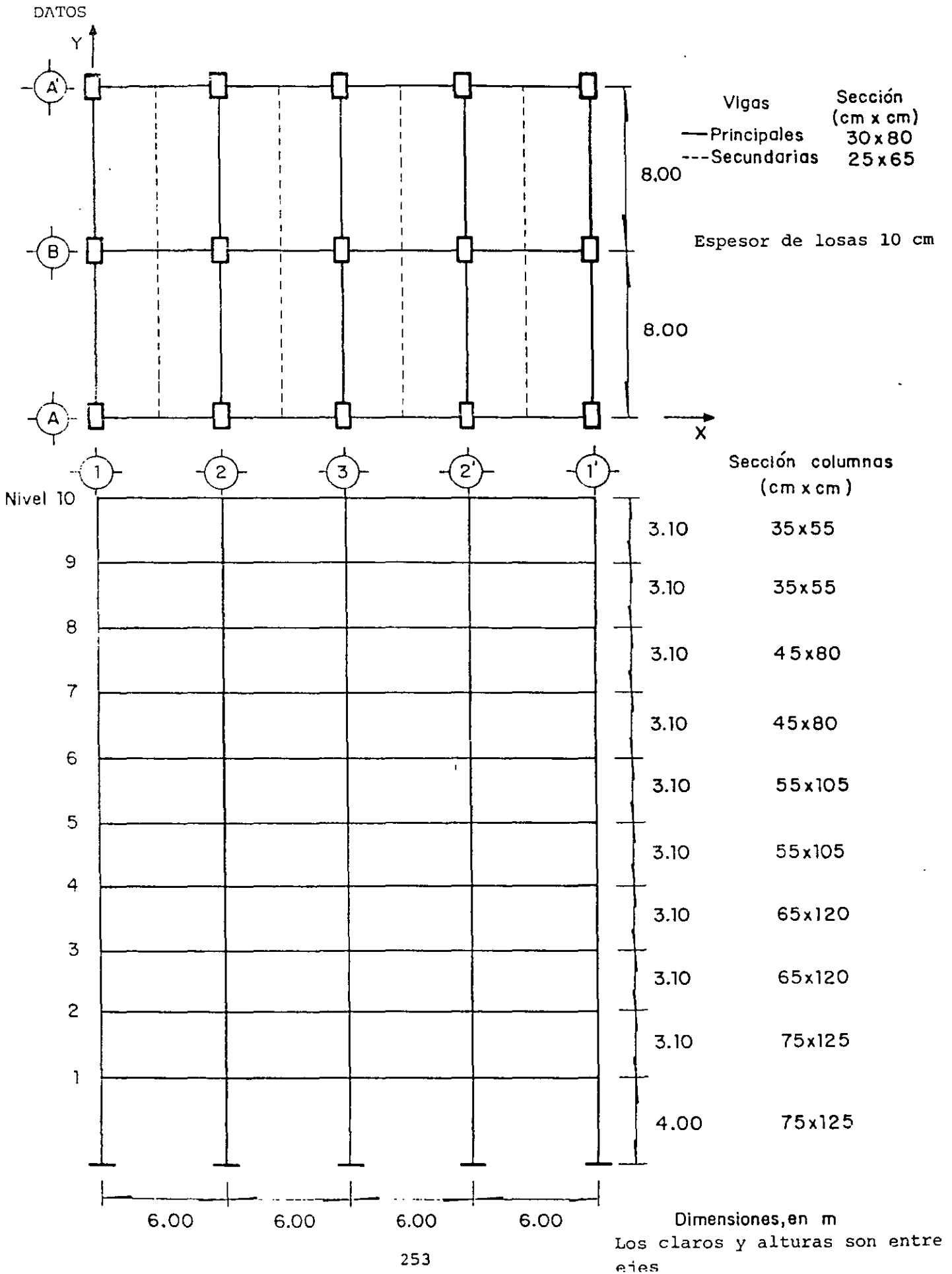


Usar # 5 @ 14 cm en todo el ancho de 3.5 m

COMENTARIOS

1. Se trata de la zapata para una columna interior de una estructura simétrica, por lo que bajo CM + CV el momento es prácticamente nulo y, por otra parte, el incremento en la carga axial por sismo es despreciable.
2. Se supone que la presión de diseño del suelo se obtuvo según el inciso 3.3.1 de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones, y que se trata de un material limoso esencialmente cohesivo. Para el diseño de la zapata, se desprecia la excentricidad accidental de la carga P bajo CM + CV.
3. Se supone que en este ejemplo el efecto de la carga viva es pequeño comparado con el de la carga muerta, por lo que en el análisis se usó la misma carga viva en las combinaciones CM + CV y CM + CV + CA. En rigor, para la primera combinación habría que aplicar la carga viva máxima, y para la segunda, la carga viva instantánea.
4. De acuerdo con 3.3.1c) de las Normas citadas en el comentario 2.
5. Al revisar la resistencia a fuerza cortante de una zapata, primero debe comprobarse si puede ser considerada como elemento ancho de acuerdo con 2.1.5 a)II. La zapata del ejemplo no está en ese caso, pues su ancho (2m) es menor que cuatro veces su peralte efectivo ($4 \times 54.4 = 218$ cm). Por consiguiente, se revisa con el criterio que se aplica a vigas (2.1.5 aI).
6. En lugar de aumentar el peralte podría aumentarse la cuantía p.
7. Véase 4.4.1.

2



Acciones

Edificio para oficinas

Grupo B

Zona III

 $Q = 4$ Carga viva máxima en azotea 100 kg/m^2 Carga viva instantánea en azotea 70 kg/m^2 Carga viva máxima en nivel típico 250 kg/m^2 Carga viva instantánea en nivel típico 180 kg/m^2 Factor de carga (CM + CVmáx) $F_c = 1.4$ Factor de carga (CM + CVins + CA) $F_c = 1.1$ MaterialesConcreto clase 1 $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ Acero de refuerzo $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

CONSTANTES

$$f_c^* = 0.8f'_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85f_c^* = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

Flexión:

$$p_{\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \sqrt{250}}{4200} = 0.002635$$

$$p_{\text{máx}} = 0.75 n_b = 0.75 \times \frac{f_c''}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000} = 0.75 \times \frac{170}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.01429$$

$$\frac{f_y}{f_c''} = \frac{4200}{170} = 24.71$$

Flexocompresión:

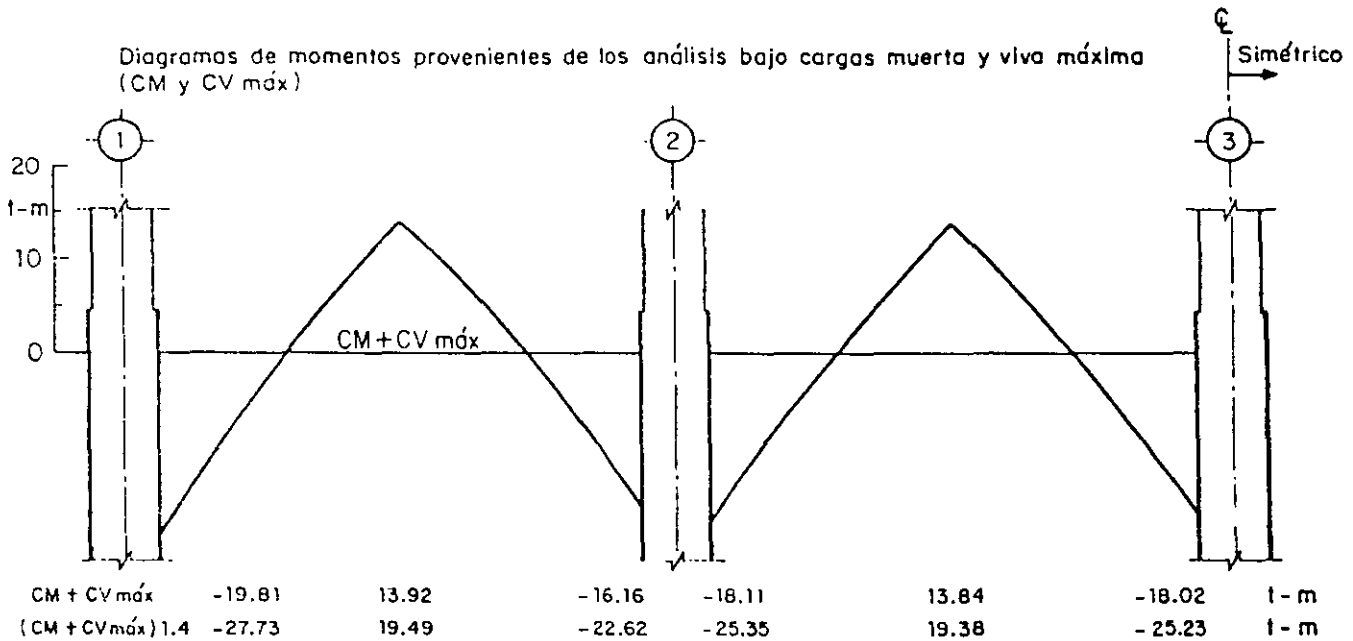
$$p_{\text{mín}} = 0.01; \quad q_{\text{mín}} = p_{\text{mín}} \frac{f_y}{f_c''} = 0.01 \frac{4200}{170} = 0.2471$$

$$p_{\text{máx}} = 0.04; \quad q_{\text{máx}} = 0.04 \frac{4200}{170} = 0.9882$$

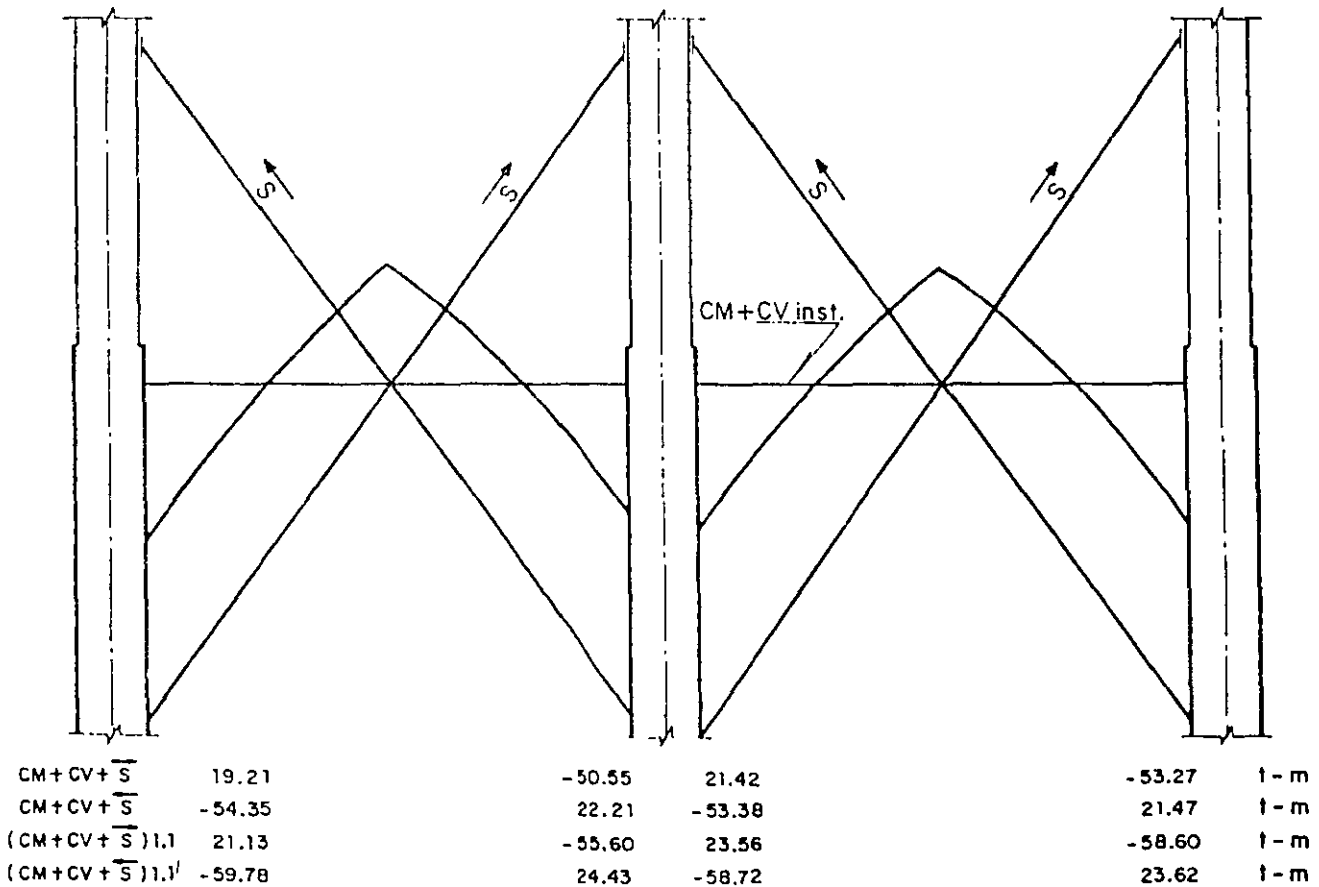
DIMENSIONAMIENTO DE LAS VIGAS DEL NIVEL 2, MARCO B

Dimensionamiento por flexión

Diagramas de momentos provenientes de los análisis bajo cargas muerta y viva máxima (CM y CV máx)



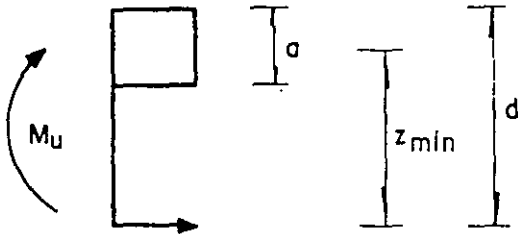
Bajo cargas muerta y viva instantánea (CM+CV inst.) y sismo (S)



4

Cálculo del refuerzo longitudinal

Obtención del brazo interno mínimo (corresponde al momento máximo)

Con $M_{\text{máx}} = 59.78 \times 10^5 \text{ kg-cm}$

$$M/bd^2 = 59.78 \times 10^5 / 30 \times 75.8^2 = 34.68 \text{ kg/cm}^2$$

 $p = 0.0105$ (fig 3 de las Ayudas de Diseño)

$$A_s = pbd = 0.0105 \times 30 \times 75.8 = 23.88 \text{ cm}^2$$

$$z = 59.78 \times 10^5 / 0.9 \times 23.88 \times 4200 = 66.23 \text{ cm}$$

$$z_{\text{mín}} = \frac{M_u}{F_R A_s f_y}$$

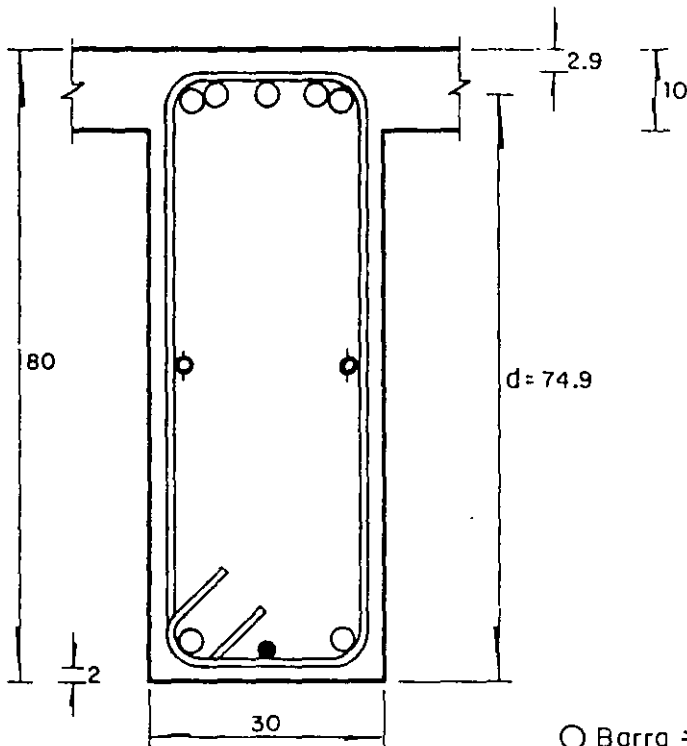
5

En el resto de la viga, y para los dos lechos, el refuerzo se calcula usando el brazo interno mínimo por medio de la expresión

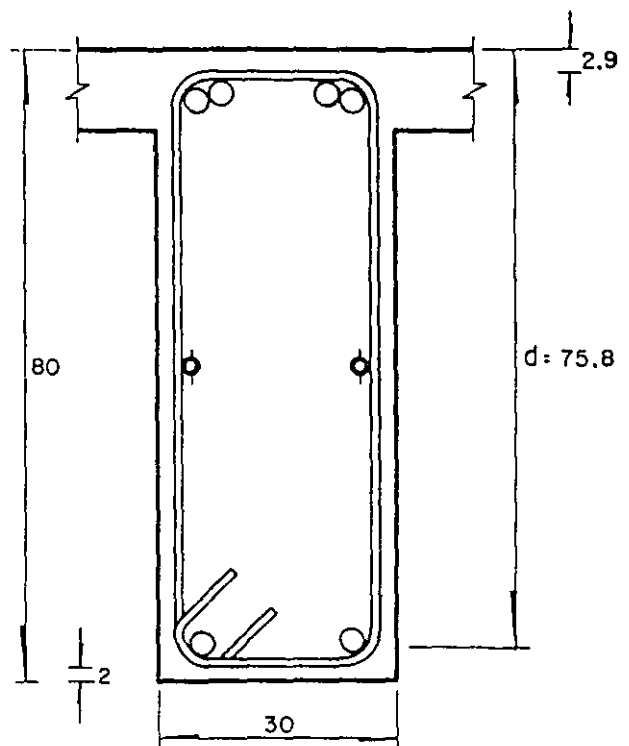
$$A_s = \frac{M_u}{F_R z_{\text{mín}} f_y} = \frac{M_u}{0.9 \times 0.6623 \times 4.2} = 0.3994 M_u \text{ (cm)}^2$$

donde M_u está en ton-m

6



Sección A-A

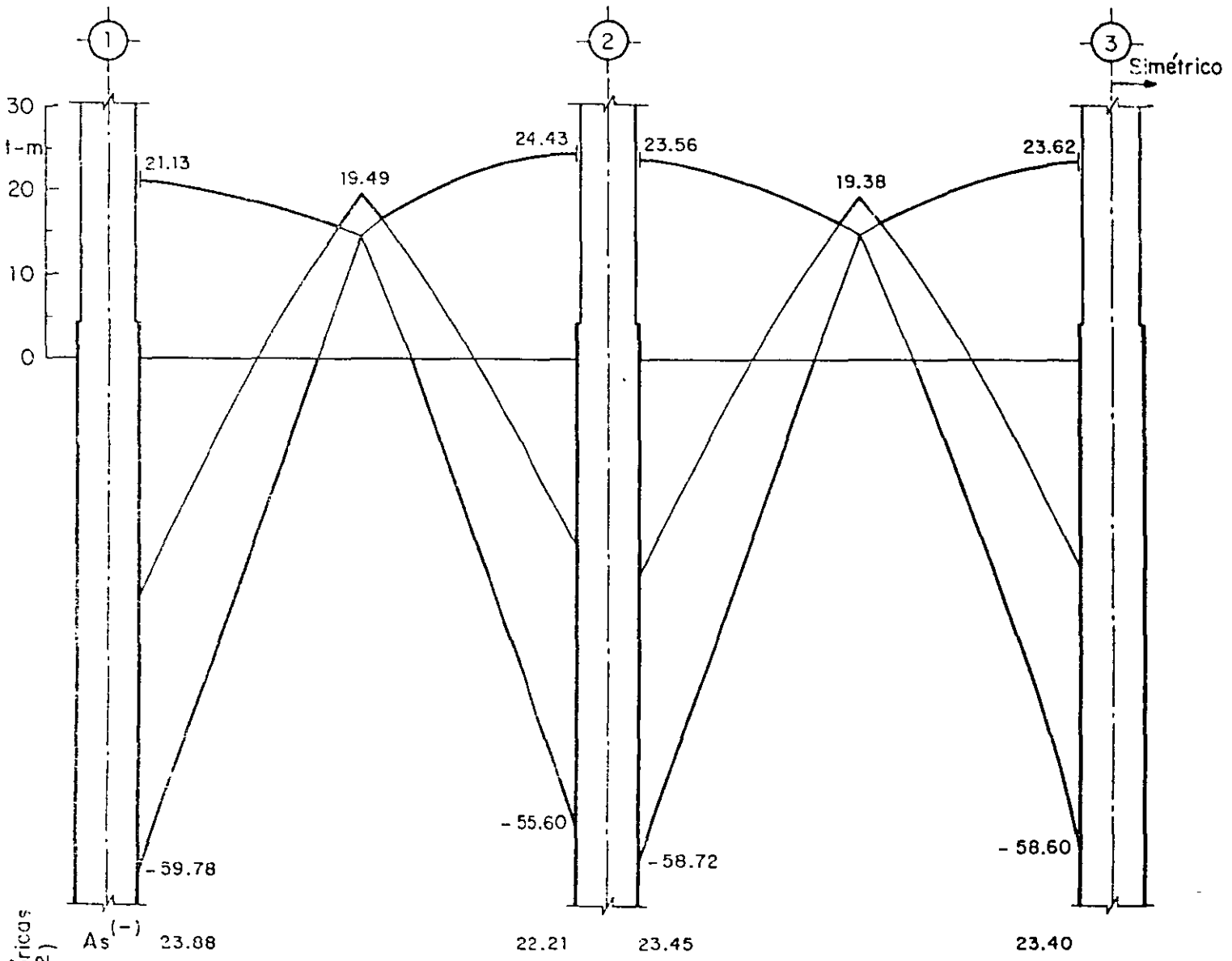


Sección B-B

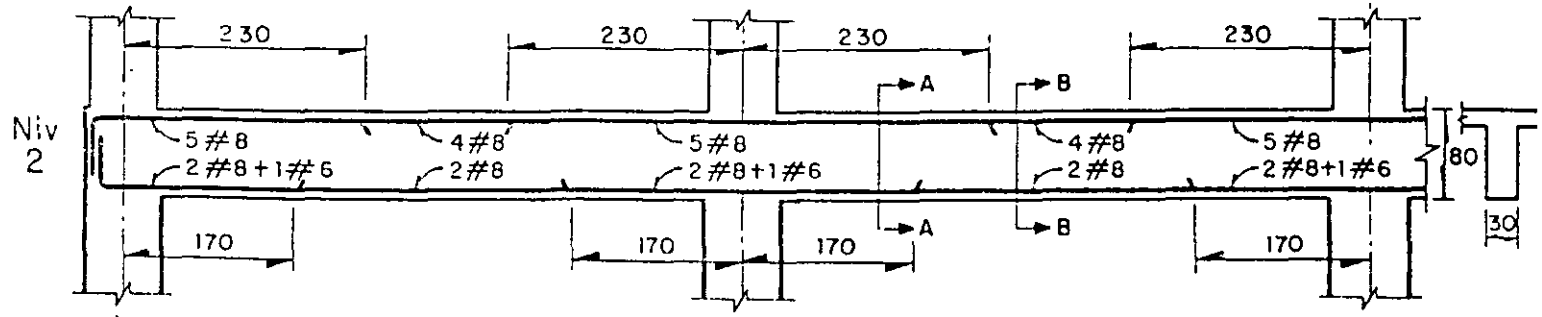
○ Barra # 8

● Barra # 6

Envolvente de momentos, M_u (t-m)



Location	$A_s (-)$	$A_s (+)$
Column 1	23.88	8.44
Joint 1-2	22.21	7.78
Column 2	23.45	9.76
Joint 2-3	23.40	9.41
Column 3	23.40	7.74
Column 3 (Symmetric)	-	9.43



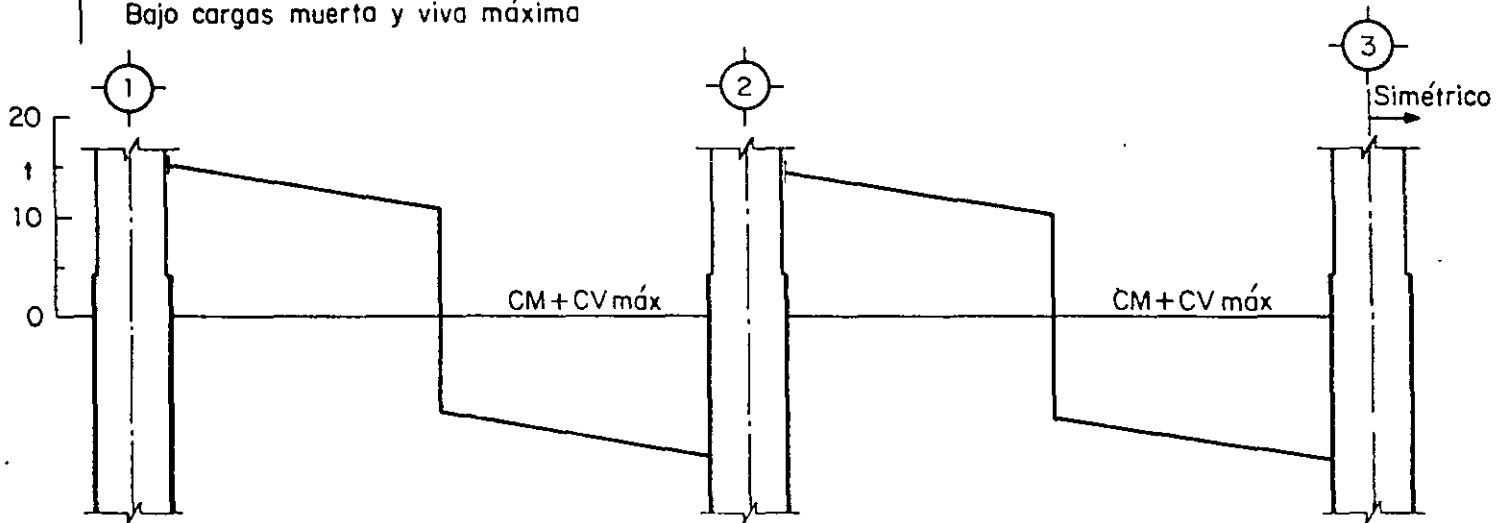
Refuerzo longitudinal

Dimensiones, en cm

Dimensionamiento por fuerza cortante

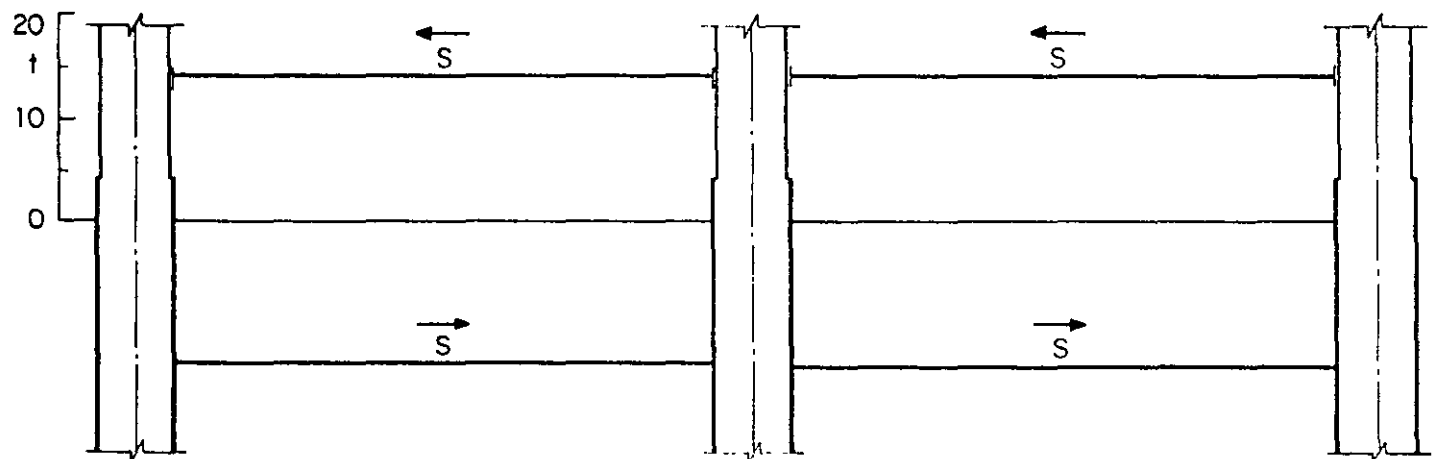
Diagramas de fuerzas cortantes provenientes de los análisis (sin factor de carga)

Bajo cargas muerta y viva máxima



CM+CVmáx	15.00	10.70 - 9.30	13.60	14.32	10.02 - 9.99	14.28	†
(CM+CVmáx)1.4	21.00	14.98 - 13.03	19.04	20.05	14.03 - 13.99	19.99	†

9 Bajo sismo (S)



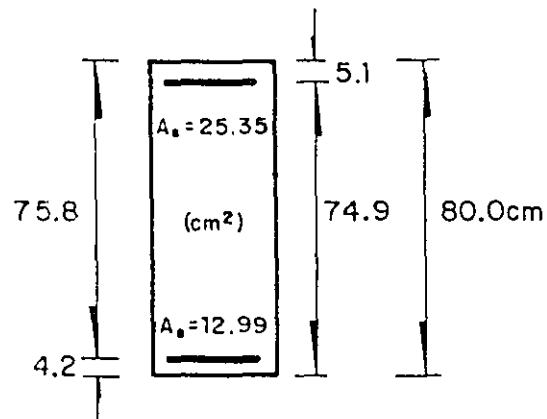
\overrightarrow{S}	13.94	13.94	14.24	14.24	†
\overleftarrow{S}	13.94	13.94	14.24	14.24	†
$(\overrightarrow{S})1.1$	15.33	15.33	15.66	15.66	†
$(\overleftarrow{S})1.1$	15.33	15.33	15.66	15.66	†

Cálculo del refuerzo transversal (estribos verticales)

Las fuerzas cortantes de diseño, V_u , se obtendrán del equilibrio de la viga, de acuerdo con el inciso 5.2.4 de las Normas.

10 Momentos resistentes en los extremos de las vigas, sin factores de reducción y con el esfuerzo en el acero de tensión de $1.25 f_y$:

Supóngase $z = 0.95d$



$$M_R = 1.25 A_s f_y z$$

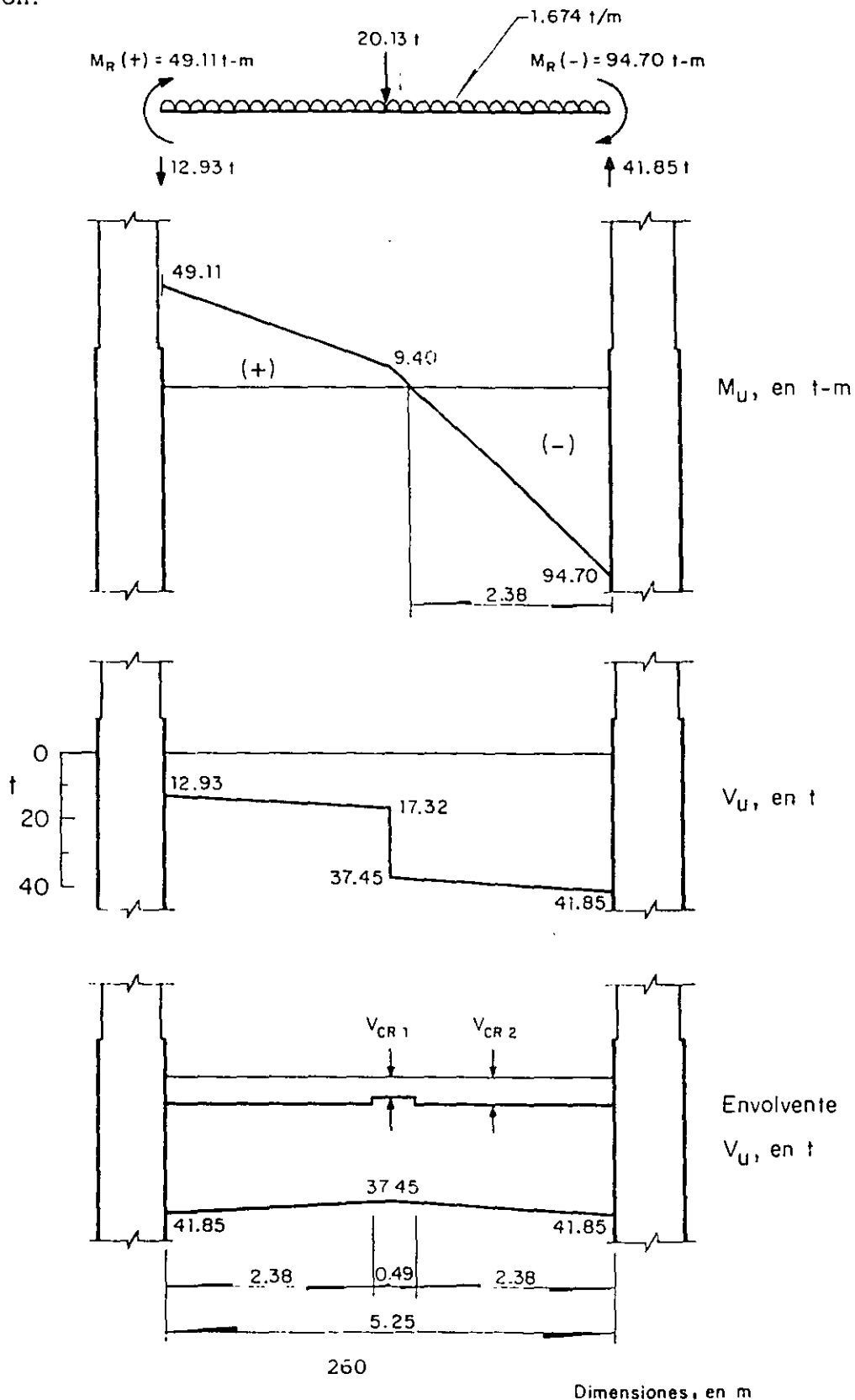
$$M_R^{(+)} = 1.25 \times 12.99 \times 4200 \times 0.95 \times 75.8 = 4\,911\,000 \text{ kg-cm}$$

$$M_R^{(+)} = 49.11 \text{ t-m}$$

$$M_R^{(-)} = 1.25 \times 25.35 \times 4200 \times 0.95 \times 74.9 = 9\,470\,000 \text{ kg-cm}$$

$$M_R^{(-)} = 94.70 \text{ t-m}$$

Cuando el sismo actúa hacia la derecha, el equilibrio de la viga y los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante son como se indica a continuación:



La fuerza cortante de diseño por sismo es, en toda la viga, menor que la mitad de la fuerza cortante de diseño total (envolvente de V_u), por lo que sí se tomará en cuenta la contribución del concreto a la resistencia (inciso 5.2.4 de las Normas)

12 Para valuar la contribución del concreto, se tomarán conservadoramente las siguientes cuantías de refuerzo longitudinal de tensión:

para M(+) $p = 0.00446$ (2 # 8)

para M(-) $p = 0.00902$ (4 # 8)

Revisión de la sección de 80 x 30 cm por fuerza cortante y cálculo de la separación de estribos en los extremos:

13 $V_u = 41\ 850$ kg

$$V_{CR1} = 0.7 F_R b d (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 74.9 (0.2 + 30 \times 0.009) \sqrt{200}$$

$$V_{CR1} = 8\ 364$$
 kg

Límites para V_u (inciso 2.1.5b):

$2F_R b d \sqrt{f_c^*} = 2 \times 0.8 \times 30 \times 74.9 \times \sqrt{200} = 50\ 840$ kg $> V_u$, por tanto, se acepta la sección de 80x30 cm.

$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 30 \times 74.9 \times \sqrt{200} = 38\ 130$ kg $< V_u$, luego, la separación máxima debe ser 0.25d

Con estribos No 3 de dos ramas se tiene:

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{CR}} < \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

$$s = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 74.9}{41\ 850 - 8364} = 10.7$$
 cm (rige)

$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45.4$$
 cm

$$0.25d = 0.25 \times 74.9 = 18.7$$
 cm

Cálculo de la separación de estribos en la zona central

$$V_u = 37\,450 \text{ kg}$$

$$V_{cR2} = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 75.8 (0.2 + 30 \times 0.00446) \sqrt{200} = 6011 \text{ kg}$$

$$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 30 \times 75.8 \times \sqrt{200} = 38\,590 \text{ kg} > V_u, \text{ luego, la separación máxima debe ser } 0.5d.$$

Con estribos No 3 de dos ramas:

$$s = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 75.8}{37450 - 6011} = 11.5 \text{ cm} \quad (\text{rige})$$

$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5b} = 45.4 \text{ cm}$$

$$0.5d = 0.5 \times 75.8 = 37.9 \text{ cm}$$

14 Colocar en toda la viga est # 3 de dos ramas @10 cm

15 Refuerzo transversal por confinamiento (según sección 5.2.3 de las Normas)

En cada extremo de los miembros, sobre una distancia de dos peraltes medida a partir del paño del nudo, la separación de estribos cerrados verticales no debe exceder de los valores siguientes:

$$0.25d = 0.25 \times 74.9 = 18.7 \text{ cm}$$

$$8 d_b = 8 \times 1.90 = 15.2 \text{ cm}$$

$$24 d_E = 24 \times 0.95 = 22.8 \text{ cm}$$

$$30 \text{ cm}$$

Rige la separación por resistencia est # 3 @ 10 cm en toda la viga.

Los estribos quedarían como se indica en las figuras que, en páginas anteriores, representan las secciones A-A y B-B de la viga.

El primer estribo se colocará a 5 cm de la cara de la columna.

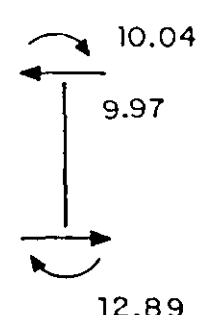
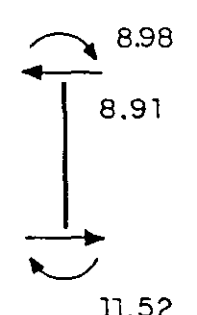
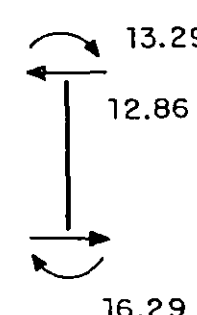
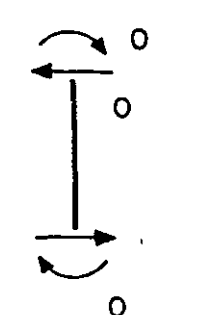
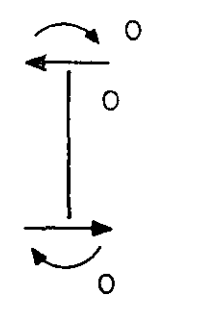
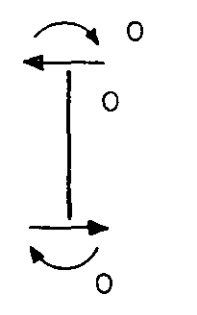
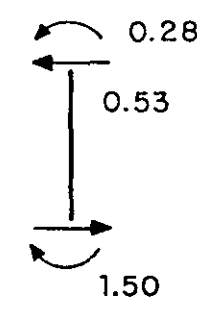
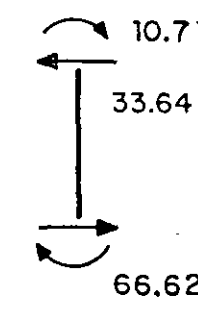

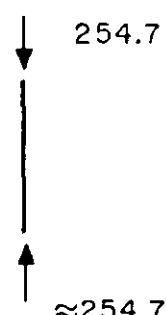

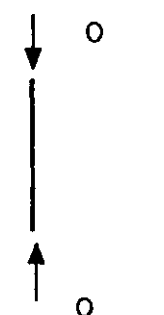
La localización del remate del estribo debe alternarse de uno a otro.

DIMENSIONAMIENTO DE LAS COLUMNAS 1B y 2B DE LOS ENTREPISOS 1-2 Y 2-3

16

Columna 1B entrepiso 1-2

Fuerzas y momentos internos en condiciones de servicio (fuerzas en t y momentos en t-m)

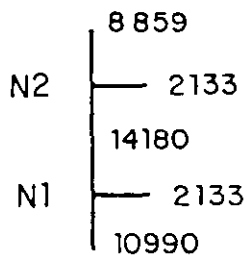
	CM+CV _{máx}	CM+CV _{inst}	Sismo en dirección X hacia la izquierda	Sismo en dirección Y
Dirección X				
Dirección Y				
Dirección vertical				

17 Obtención del refuerzo necesario por flexocompresión bajo cargas muerta y viva máxima

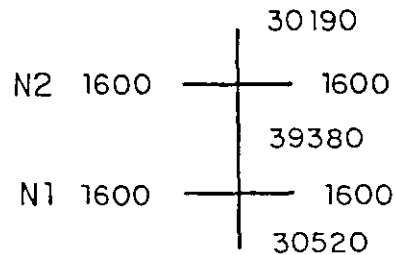
18 Efectos de esbeltez

Rigideces relativas (I/L en cm^3)

Dirección X



Dirección Y



Revisión para ver si pueden despreciarse los efectos de esbeltez

a) Dirección X

Longitud efectiva

$$\text{Extremo superior } \psi = \frac{8\ 859 + 14\ 180}{2133} = 10.8$$

$$\text{Extremo inferior } \psi = \frac{14\ 180 + 10\ 990}{2133} = 11.8$$

En vista de que las cargas verticales no causan desplazamiento lateral por ser una estructura simétrica en geometría y cargas, se procede como si los extremos estuvieran restringidos lateralmente (inciso 1.3.2b)

De la fig 1.1a de las Normas:

$$k = 0.97; H' = 0.97 \times 230 = 223.1 \text{ cm}$$

Los efectos de esbeltez pueden despreciarse si:

$$H'/r \leq 34 - 12 M_1/M_2 \quad (\text{inciso 1.3.2b})$$

$$H'/r = 223.1/0.3 \times 75 = 9.92$$

El miembro se deforma con curvatura doble, por lo que el signo de M_1/M_2 es negativo y el segundo miembro de la desigualdad resulta mayor que 34; por tanto, los efectos de esbeltez pueden despreciarse.

b) Dirección Y

Longitud efectiva

$$\text{Extremo superior } \psi = \frac{30190 + 39380}{2 \times 1600} = 21.7$$

$$\text{Extremo inferior } \psi = \frac{30520 + 39380}{2 \times 1600} = 21.8$$

de la fig 1.1a de las Normas:

$$k = 0.98; \quad H' = 0.98 \times 230 = 225.4 \text{ cm}$$

$$H'/r < 34 - 12 M_1/M_2$$

$$H'/r = 225.4/0.3 \times 125 = 6.01$$

$$M_1 = M_2 = 0, \text{ por lo que, según 1.3.2b), } M_1/M_2 = 1.0$$

$$34 - 12 M_1/M_2 = 34 - 12 = 22 > H'/r$$

luego, los efectos de esbeltez se desprecian

Dimensionamiento del refuerzo

$$P_u = 1.4 \times 270.3 = 378.4 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s} \quad (\text{ec 1.1})$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{2bx} = 1.4 \times 12.89 = 18.05 \text{ t-m}$$

$$\text{pero } M_{2bx} \geq P_u (0.05 h) = 378.4 \times 0.05 \times 0.75 = 14.19 \text{ t-m (según 1.3.2d)}$$

$$\text{rige } M_{2bx} = 18.05 \text{ t-m}$$

$$M_{2sx} = 0$$

sustituyendo en la ec. 1.1:

$$M_{cx} = 1.0 \times 18.05 + 1.0 \times 0 = 18.05 \text{ t-m}$$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{2by} = 0$$

$$\text{pero } M_{2by} \geq P_u (0.05 h) = 378.4 \times 0.05 \times 1.25 = 23.65 \text{ t-m}$$

$$M_{2sy} = 0$$

$$M_{cy} = 23.65 \text{ t-m}$$

En resumen, se dimensionará con los valores siguientes:

$$P_u = 378.4 \text{ t}; e_x = \frac{M_{cx}}{P_u} = \frac{18.05}{378.4} = 0.0477\text{m}; e_y = \frac{23.65}{378.4} = 0.0625\text{m}$$

$$e_x/h = 0.0477/0.75 = 0.064; e_y/h = 0.0625/1.25 = 0.050$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15
$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\min} = 0.01$

$$q_{\min} = 0.247 \text{ (calculada en el apartado "CONSTANTES")}$$

Con refuerzo distribuido en la periferia y $d/h = 0.9$, en la fig 13 de las Ayudas de Diseño, para los valores de e/h y q anteriores se obtiene:

$$K_x = 1.09; K_y = 1.11$$

$$P_R = F_R K_b h f_c$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.09 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1390 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 1.11 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 1415 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = F_R (b h f_c + A_s f_y)$$

$$A_s = 0.01 \times 75 \times 125 = 93.75 \text{ cm}^2$$

$$P_{Ro} = 0.8 (75 \times 125 \times 0.170 + 93.75 \times 4.2) = 1590 \text{ t}$$

sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1390} + \frac{1}{1415} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 1254 \text{ t} > P_u = 378.4 \text{ t luego, rige } p = p_{\min}$$

(fue suficiente un tanteo)

Obtención del refuerzo necesario por flexocompresión bajo cargas muertas, viva instantánea y sismo

Efectos de esbeltez

Revisión para ver si pueden despreciarse los efectos de esbeltez

a) Dirección X

Efectos debidos a las deformaciones causadas por la carga vertical

$$H' = 223.1 \text{ cm}$$

$$H'/r = 9.92$$

El elemento se deforma en curvatura doble, por lo que se cumple que

$$H'/r = 9.92 < 34-12 M_1/M_2$$

y, por tanto, pueden despreciarse los efectos de esbeltez.

21 Efectos debidos a las deformaciones causadas por las fuerzas laterales

Los efectos de esbeltez que causan estas deformaciones pueden despreciarse si

$$\frac{\text{Desplazamiento de entrepiso}}{h} \leq 0.08 \frac{V}{W_u}$$

22
$$\text{Desp. de entr.}/h = \frac{1.35}{310} = 0.00435$$

$$0.08 \frac{V}{W_u} = 0.08 \times \frac{338.7}{4229} = 0.0064 > \frac{\text{Desp. de ent}}{h}$$

por tanto, los efectos de esbeltez se desprecian.

b) Dirección Y

20 Efectos debidos a las deformaciones causadas por la carga vertical

$$H' = 225.4 \text{ cm}$$

$$H'/r = 6.01$$

$$M_1 = M_2 = 0 \quad \text{por lo que } M_1/M_2 = 1.0$$

$34-12 M_1/M_2 = 22 > H'/r$ luego, los efectos de esbeltez se desprecian

Efectos debidos a las deformaciones causadas por las fuerzas laterales

$$\frac{\text{Desp. de entr.}}{h} = \frac{1.42}{310} = 0.00458$$

$$0.08 \frac{V}{W_u} = 0.08 \times \frac{340.6}{4229} = 0.00644 > \frac{\text{Desp. de entr.}}{h}$$

por tanto, se desprecian los efectos de esbeltez

Dimensionamiento del refuerzo

23 Se dimensionará considerando la flexocompresión principal en la dirección X, y después se revisará en la dirección Y. Esto se realizará en el extremo inferior de la columna por ser allí mayores los momentos.

Flexocompresión principal en dirección X

24 1) Si la fuerza axial que causa el sismo en dirección X es de compresión

25 Caso 1.1) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 + 1.7 \times 82.14) = 433.8 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{2bx} = 1.1 \times 11.52 = 12.67 \text{ t-m}$$

26 pero $M_{2bx} > P_u (0.05 h) = 1.1 \times 254.7 \times 0.05 \times 0.75 = 10.51 \text{ t-m}$

rige $M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$

27 $M_{2sx} = 1.1 \times 16.29 = 17.92 \text{ t-m}$

$$M_{cx} = 12.67 + 17.92 = 30.59 \text{ t-m} \quad (F_{ab} = F_{as} = 1.0)$$

$$M_{cx} > P_u (0.05 h) = 433.8 \times 0.05 \times 0.75 = 16.27 \text{ t-m} \quad (\text{de acuerdo con 2.1.3a})$$

rige $M_{cx} = 30.59 \text{ t-m}$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{2by} = 0$$

26 pero $M_{2by} > P_u (0.05 h) = 1.1 \times 254.7 \times 0.05 \times 1.25 = 17.51 \text{ t-m}$

28 $M_{2sy} = 1.1 (1.5 + 0.3 \times 66.62) = 23.63 \text{ t-m}$

$$M_{cy} = 17.51 + 23.63 = 41.14 \text{ t-m} \quad (F_{ab} = F_{as} = 1.0)$$

$$M_{cy} > P_u (0.05 h) = 433.8 \times 0.05 \times 1.25 = 27.11 \text{ t-m} \quad (\text{según 2.1.3a})$$

rige $M_{cy} = 41.14 \text{ t-m}$

En resumen, se dimensionará con la carga y momentos siguientes:

$$P_u = 433.8 \text{ t}; \quad e_x = M_{cx}/P_u = 30.59/433.8 = 0.0705 \text{ m}; \quad e_y = 41.14/433.8 = 0.0948$$

$$e_x/h = 0.0705/0.75 = 0.094; \quad e_y/h = 0.0948/1.25 = 0.076$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15: $P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{RO}} \right)^{-1} \quad (2.15)$

$$q_{\min} = 0.247 \quad A_s = 93.75 \text{ cm}^2$$

(refuerzo uniformemente distribuido en la periferia y $d/h = 0.9$)

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, entrando con los valores de e/h y q anteriores, se obtiene:

$$K_x = 1.1 \quad K_y = 1.06$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.1 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1402 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 1.06 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 1352 \text{ t}$$

$$P_{RO} = 0.8 (75 \times 125 \times 0.170 + 93.75 \times 4.2) = 1590 \text{ t}$$

sustituyendo en la ec. 2.15:

$$P_R = \left(\frac{1}{1402} + \frac{1}{1352} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 1214 \text{ t} > P_u = 460.9 \text{ t} \text{ luego, rige } p = p_{\min}$$

(fue suficiente un tanteo)

25 Caso 1.2) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 + 82.14) = 370.5 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{cx} = 30.59 \text{ t-m} \text{ (del caso 1.1, pues ahora } P_u \text{ es menor)}$$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{cy} = 41.14 \text{ t-m} \text{ (del caso 1.1)}$$

En resumen, se dimensionará con los valores siguientes

$$P_u = 370.5 \text{ t}, e_x = 30.59/370.5 = 0.0826 \text{ m}, e_y = 41.14/370.5 = 0.1110 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0826/0.75 = 0.11; e_y/h = 0.1110/1.25 = 0.089$$

Aplicación por tanteos de la ec 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{RO}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\min} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

(refuerzo uniformemente distribuido en la periferia y $d/h = 0.9$)

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, entrando con los valores de e/h y q anteriores, se obtiene:

$$K_x = 0.97$$

$$K_y = 1.03$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 0.97 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1237 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 1.03 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 1313 \text{ t}$$

$$P_{RO} = 1590 \text{ t}$$

Sustituyendo en la ec 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1237} + \frac{1}{1313} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 1063 \text{ t} > P_u = 370.5 \text{ t luego, rige}$$

$p = p_{\text{mín}}$ (fue suficiente un tanteo)

- 24 2) Si la fuerza axial que causa el sismo en dirección X es de tensión
 25 Caso 2.1) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1(254.7 - 82.14) = 189.8 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{as}$$

Momento M_c en la dirección X

29 $M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$

pero $M_{2bx} \geq P_u (0.05 \text{ h}) = 10.51 \text{ t-m}$ (se calculó en el caso 1.1)

rige $M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$

$$M_{2sx} = 17.92 \text{ t-m}$$

30 $M_{cx} = -12.67 + 17.92 = 5.25 \text{ t-m}$

pero $M_{cx} \geq P_u (0.05 \text{ h}) = 189.8 \times 0.05 \times 0.75 = 7.118 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cx} = 7.118 \text{ t-m}$

Momento M_c en la dirección Y

29 $M_{2by} = 0$

pero $M_{2by} \geq P_u (0.05 h) = 17.51 \text{ t-m}$ (se calculó en el caso 1.1)

$$M_{2sy} = 23.63 \text{ t-m}$$

$$M_{cy} = 17.51 + 23.63 = 41.14 \text{ t-m}$$

pero $M_{cy} \geq P_u (0.05 h) = 189.8 \times 0.05 \times 1.25 = 11.86 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cy} = 41.14 \text{ t-m}$

En resumen, se dimensionará con los datos siguientes

$$P_u = 189.8 \text{ t}; \quad e_x = 7.118/189.8 = 0.0375 \text{ m}; \quad e_y = 41.14/189.8 = 0.217 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0375/0.75 = 0.050; \quad e_y/h = 0.217/1.25 = 0.17$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15:

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\text{mín}} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q , se obtiene:

$$K_x = 1.12; \quad K_y = 0.85$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.12 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1428 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.85 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 1084 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

Sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1428} + \frac{1}{1084} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 1006 \text{ t} > P_u = 189.8 \text{ t luego, rige}$$

$$P = P_{\text{mín}} \quad (\text{fue suficiente un tanteo})$$

Caso 2.2) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada.

$$P_u = 1.1 (254.7 - 1.7 \times 82.14) = 126.6 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{cx} = 5.25 \text{ t-m (del caso 2.1)}$$

$$\text{pero } M_{cx} \geq P_u (0.05 h) = 126.6 \times 0.05 \times 0.75 = 4.75 \text{ t-m (según 2.1.3a)}$$

$$\text{rige } M_{cx} = 5.25 \text{ t-m}$$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{cy} = 41.14 \text{ t-m (del caso 2.1)}$$

En resumen, se dimensionará con los datos siguientes

$$P_u = 126.6 \text{ t}; \quad e_x = 5.25/126.6 = 0.0415 \text{ m}; \quad e_y = 41.14/126.6 = 0.325 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0415/0.75 = 0.0553 \quad e_y/h = 0.325/1.25 = 0.26$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

$$\text{Tanteo 1. Supóngase } p = p_{\text{mín}} = 0.01 \text{ (} A_s = 93.75 \text{ cm}^2 \text{)}$$

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q , se obtiene:

$$K_x = 1.1; \quad K_y = 0.66$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.1 \times 125 \times 75 \times 0.17 = 1402 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.66 \times 75 \times 125 \times 0.17 = 841.5 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

Sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1402} + \frac{1}{841.5} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 785.7 \text{ t} > p_u = 99.46 \text{ t luego, rige}$$

$$p = p_{\text{mín}} \text{ (fue suficiente un tanteo)}$$

Revisión con la flexocompresión principal en dirección Y

24 1) Si la fuerza axial que causa el sismo en dirección X es de compresión

25 Caso 1.1) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada.

$$P_u = 1.1 (254.7 + 1.7 \times 0.3 \times 82.14) = 326.2 \text{ t}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$$

pero $M_{2bx} \geq P_u (0.05h) = 10.51 \text{ t-m}$ (se calculó en el caso 1.1 correspondiente a la flexocompresión principal en la dirección X)

rige $M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$

$$M_{2sx} = 1.1 \times 0.3 \times 16.29 = 5.38 \text{ t-m}$$

$$M_{cx} = 12.67 + 5.38 = 18.05 \text{ t-m}$$

pero $M_{cx} \geq P_u (0.05 h) = 326.2 \times 0.05 \times 0.75 = 12.23 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cx} = 18.05 \text{ t-m}$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{2by} = 0$$

pero $M_{2by} \geq P_u (0.05 h) = 17.51 \text{ t-m}$ (se calculó en el caso 1.1 correspondiente a la flexocompresión principal en la dirección X)

$$M_{2sy} = 1.1 (66.62 + 0.3 \times 1.50) = 73.78 \text{ t-m}$$

$$M_{cy} = 17.51 + 73.78 = 91.29 \text{ t-m}$$

pero $M_{cy} \geq P_u (0.05 h) = 326.2 \times 0.05 \times 1.25 = 20.39 \text{ t-m}$ (de acuerdo con 2.1.3a)

rige $M_{cy} = 91.29 \text{ t-m}$

En resumen, se revisará con los datos siguientes:

$$P_u = 326.2 \text{ t}; e_x = 18.05/326.2 = 0.0553 \text{ m}; e_y = 91.29/326.2 = 0.280 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0553/0.75 = 0.074; e_y/h = 0.280/1.25 = 0.224$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\text{mín}} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q , se obtiene:

$$K_x = 1.11; \quad K_y = 0.72$$

$$P_{Rx} = 0.3 \times 1.11 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1415 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.72 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 918 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1415} + \frac{1}{918} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 856.8 \text{ t} > P_u = 326.2 \text{ t}$$

luego, rige $p = p_{\text{mín}}$ (fue suficiente un tanteo)

25 Caso 1.2) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 + 0.3 \times 82.14) = 307.3 \text{ t}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{cx} = 18.05 \text{ t-m} \quad (\text{del caso 1.1, pues ahora } P_u \text{ es menor})$$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{cy} = 91.29 \text{ t-m} \quad (\text{del caso 1.1})$$

En resumen, se revisará con los datos siguientes:

$$P_u = 307.3 \text{ t}; \quad e_x = 18.05/307.3 = 0.0587 \text{ m}, \quad e_y = 91.29/307.3 = 0.297 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0587/0.75 = 0.078, \quad e_y/h = 0.297/1.25 = 0.24$$

Aplicación por tanteos de la ec 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\text{mín}} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q, se obtiene:

$$K_x = 1.05; \quad K_y = 0.70$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.05 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1339 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.70 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 892.5 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

Sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1339} + \frac{1}{892.5} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 807.5 \text{ t} > P_u = 307.3 \text{ t}$$

luego, rige $p = p_{\min}$ (fue suficiente un tanteo)

24 2) Si la fuerza axial que causa el sismo en dirección X es de tensión

25 2.1) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 - 0.3 \times 82.14) = 253.1 \text{ t}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$$

pero $M_{2bx} \geq P_u (0.05 h) = 10.51 \text{ t-m}$

rige $M_{2bx} = 12.67 \text{ t-m}$

$$M_{2sx} = 1.1 \times 0.3 \times 16.29 = 5.376 \text{ t-m}$$

$$M_{cx} = 12.67 - 5.376 = 7.294 \text{ t-m}$$

pero $M_{cx} \geq P_u (0.05 h) = 253.1 \times 0.05 \times 0.75 = 9.491 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cx} = 9.491 \text{ t-m}$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{2by} = 0$$

pero $M_{2by} \geq P_u (0.05h) = 17.51 \text{ t-m}$

$$M_{2sy} = 1.1 (66.62 + 0.3 \times 1.50) = 73.78 \text{ t-m}$$

$$M_{cy} = 17.51 + 73.78 = 91.29 \text{ t-m}$$

pero $M_{cy} = \geq P_u (0.05 h) = 253.1 \times 0.05 \times 1.25 = 15.82 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cy} = 91.29 \text{ t-m}$

En resumen, se revisará con los valores siguientes:

$$P_u = 253.1 \text{ t}; \quad e_x = 9.491/253.1 = 0.0375 \text{ m}; \quad e_y = 91.29/253.1 = 0.361 \text{ m}$$

$$e_x/h = 0.0375/0.75 = 0.05; \quad e_y/h = 0.361/1.25 = 0.29$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\text{mín}} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q_{\text{mín}} = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q , se obtiene:

$$K_x = 1.12; \quad K_y = 0.63$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.12 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1428 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.63 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 803.2 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

Sustituyendo en la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{1428} + \frac{1}{803.2} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 759.7 \text{ t} > P_u = 253.1 \text{ t luego,}$$

rige $p = p_{\text{mín}}$ (fue suficiente un tanteo)

Caso 2.2) La fuerza axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada.

$$P_u = 1.1 (254.7 - 1.7 \times 0.3 \times 82.14) = 234.1 \text{ t}$$

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s}$$

Momento M_c en la dirección X

$$M_{cx} = 7.294 \text{ t-m} \quad (\text{del caso 2.1})$$

pero $M_{cx} \geq P_u(0.05h) = 234.1 \times 0.05 \times 0.75 = 8.779 \text{ t-m}$ (según 2.1.3a)

rige $M_{cx} = 8.779 \text{ t-m}$

Momento M_c en la dirección Y

$$M_{cy} = 91.29 \text{ t-m} \quad (\text{del caso 2.1, pues ahora } P_u \text{ es menor})$$

En resumen, se revisará con los valores siguientes

$$P_u = 234.1 \text{ t}; \quad e_x = 8.779/234.1 = 0.0375\text{m}; \quad e_y = 91.29/234.1 = 0.390$$

$$e_x/h = 0.0375/0.75 = 0.050; \quad e_y/h = 0.390/1.25 = 0.312$$

Aplicación por tanteos de la ec. 2.15

$$P_R = \left(\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{Ro}} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

Tanteo 1. Supóngase $p = p_{\text{mín}} = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$)

$$q = 0.01 \times 4200/170 = 0.247$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño, con los valores anteriores de e/h y q , se obtiene:

$$K_x = 1.12; \quad K_y = 0.59$$

$$P_{Rx} = 0.8 \times 1.12 \times 125 \times 75 \times 0.170 = 1428 \text{ t}$$

$$P_{Ry} = 0.8 \times 0.59 \times 75 \times 125 \times 0.170 = 752.2 \text{ t}$$

$$P_{Ro} = 1590 \text{ t}$$

sustituyendo en la ec 2.15:

$$P_R = \left(\frac{1}{1428} + \frac{1}{752.2} - \frac{1}{1590} \right)^{-1} = 713.9 \text{ t} > P_u = 226.0 \text{ t}$$

por tanto, rige $p = p_{\text{mín}}$ (fue suficiente un tanteo)

Se acepta $p = 0.01$ ($A_s = 93.75 \text{ cm}^2$), que se suministra con 12 # 10 (95.04 cm^2), distribuidas uniformemente en la periferia.

En la forma semejante, se calculó el refuerzo necesario para la columna 2B del entrepiso 1-2 y para las 1B y 2B del entrepiso 2-3. En todas ellas fue suficiente suministrar el refuerzo mínimo ($p = p_{\min} = 0.01$). Las áreas de refuerzo de dichas columnas, correspondientes a los diámetros de barras seleccionadas son las siguientes:

Entrepiso	Sección (cm)	Columna 1B			Columna 2B		
		A_s (cm ²)	p	q	A_s (cm ²)	p	q
1-2	75 x 125	95.04	0.0101	0.25	95.04	0.0101	0.25
2-3	65 x 120	83.64	0.0107	0.26	83.64	0.0107	0.26

31 Resistencia mínima a flexión de las columnas que se están diseñando (inciso 5.3.2)

La resistencia a flexión de las columnas en un nudo debe satisfacer la condición siguiente:

$$\sum M_e \geq 1.5 \sum M_g$$

donde:

$\sum M_e$ suma de los momentos resistentes de diseño de las columnas que llegan a ese nudo, referidos al centro del nudo

$\sum M_g$ suma de los momentos resistentes de diseño de las vigas que llegan al nudo, referidos al centro de éste.

Nudo 1B del nivel 2

32 1) Si el sismo actúa de derecha a izquierda (causa fuerza axial de compresión en la columna)

Mínimo momento resistente de diseño de la columna 1B del entrepiso 1-2

33 Caso 1.1) La fracción de la fuerza axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 + 1.7 \times 82.14) = 433.8 \text{ t}$$

$$K_u = \frac{P_u}{F_R b h f_c} = \frac{433.8}{0.8 \times 125 \times 75 \times 0.170} = 0.34$$

Caso 1.2) La fracción de la fuerza axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 + 82,14) = 370.5 \text{ t}$$

$$K = \frac{370.5}{0.8 \times 125 \times 75 \times 0.170} = 0.29$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño con $\eta = 0.25$ y $K = 0.29$ se obtiene $R = 0.18$, que corresponde al momento mínimo

$$M = F_R R b h^2 f_c''$$

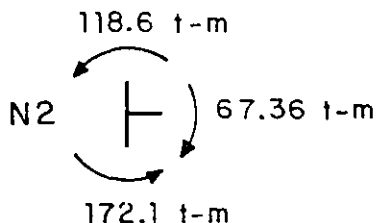
$$M_e = 0.8 \times 0.18 \times 1.25 \times 0.75^2 \times 1700 = 172.1 \text{ t-m}$$

Para la columna 1B del entrepiso 2-3 se obtiene:

$$M_e = 118.6 \text{ t-m}$$

Momento resistente de diseño de la viga que llega a este nudo

$$M_g = 67.36 \text{ t-m (momento negativo)}$$



$$\Sigma M_e = 118.6 + 172.1 = 290.7 \text{ t-m}$$

$$1.5 M_g = 1.5 \times 67.36 = 101.0 \text{ t-m} < \Sigma M_e$$

luego, se cumple la condición de 5.3.2

32 2) Si el sismo actúa de izquierda a derecha (causa fuerza axial de tensión en la columna)

Mínimo momento resistente de diseño de la columna 1B del entrepiso 1-2

33 Caso 2.1) La fracción de la carga axial debida al sismo se toma igual a la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 - 82.14) = 189.8 \text{ t}$$

$$K = \frac{189.8}{0.8 \times 125 \times 75 \times 0.17} = 0.15$$

Caso 2.2) La fracción de la carga axial debida al sismo se toma igual a 1.7 veces la calculada

$$P_u = 1.1 (254.7 - 1.7 \times 82.14) = 126.6 \text{ t}$$

$$K = \frac{126.6}{0.8 \times 125 \times 75 \times 0.17} = 0.099$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño con $q = 0.25$ y $K = 0.099$ se obtiene $R = 0.135$, que corresponde al momento mínimo

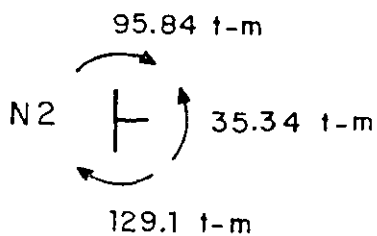
$$M_e = 0.8 \times 0.135 \times 1.25 \times 0.75^2 \times 1700 = 129.1 \text{ t-m}$$

Para la columna 1B del entrepiso 2-3 se obtiene

$$M_e = 95.84 \text{ t-m}$$

Momento resistente de diseño de la viga que llega a este nudo (1B del nivel 2)

$$M_g = 35.34 \text{ t-m} \quad (\text{momento positivo})$$



$$\Sigma M_e = 95.84 + 129.1 = 224.9 \text{ t-m}$$

$$1.5 \Sigma M_g = 1.5 \times 35.34 = 53.01 \text{ t-m} < \Sigma M_e$$

luego, se cumple la condición de 5.3.2

Nudo 2B del nivel 2

- 32 1) Si el sismo actúa de derecha a izquierda (causa fuerza axial de compresión en la columna)

Procediendo en forma semejante a como se hizo en el nudo 1B, para la columna 2B del entrepiso 1-2 se obtiene

$$M_e = 180.7 \text{ t-m}$$

y para la columna 2B del entrepiso 2-3

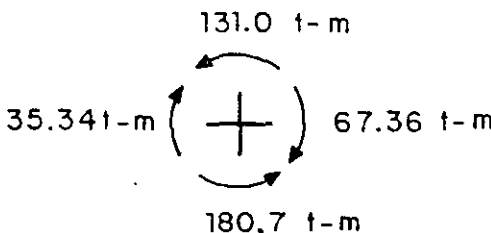
$$M_e = 131.0 \text{ t-m}$$

Momento resistente de diseño de la viga 1-2 que llega a este nudo

$$M_g = 35.34 \text{ t-m} \quad (\text{momento positivo})$$

Momento resistente de diseño de la viga 2-3 que llega a este nudo

$$M_g = 67.36 \text{ t-m (momento negativo)}$$



$$\Sigma M_e = 131.0 + 180.7 = 311.7 \text{ t-m}$$

$$1.5 \Sigma M_g = 1.5 (35.34 + 67.36) = 154.0 \text{ t-m} < \Sigma M_e$$

luego, se cumple la condición de 5.3.2

2) Si el sismo actúa de izquierda a derecha (causa fuerza axial de tensión en la columna)

Para la columna 2B del entrepiso 1-2 se obtiene:

$$M_e = 180.7 \text{ t-m}$$

y para la columna 2B del entrepiso 2-3,

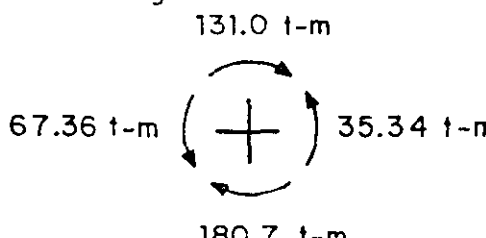
$$M_e = 131.0 \text{ t-m}$$

Momento resistente de diseño de la viga 1-2 que llega a este nudo

$$M_g = 67.36 \text{ t-m (momento negativo)}$$

Momento resistente de diseño de la viga 2-3 que llega a este nudo

$$M_g = 35.34 \text{ t-m (momento positivo)}$$



$$\Sigma M_e = 131.0 + 180.7 = 311.7 \text{ t-m}$$

$$1.5 \Sigma M_g = 1.5 (67.36 + 35.34) = 154.0 \text{ t-m} < \Sigma M_e$$

luego, se cumple la condición de 5.3.2

Por tanto, es suficiente la resistencia a flexión de las columnas que llegan a los nudos 1B y 2B del nivel 2.

Dimensionamiento por fuerza cortante

La fuerza cortante de diseño se obtendrá a partir del equilibrio de la columna en su altura libre, suponiendo en cada extremo su momento máximo resistente (sin F_B).

Columna 1B entrepiso 1-2

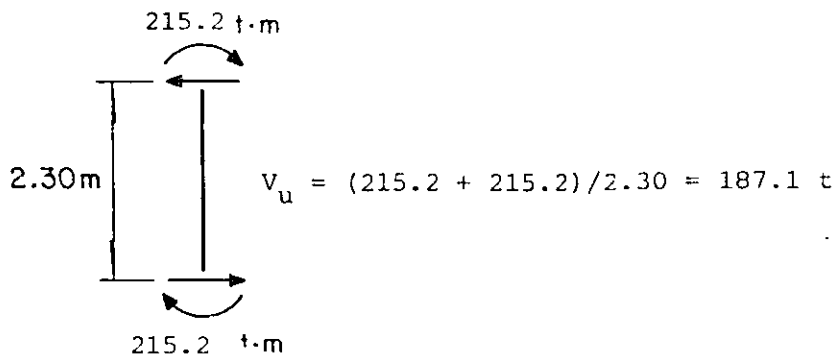
$$P_u = 1.1 [254.7 + 1.7 (82.14)] = 433.8 \text{ t}$$

$$K = \frac{433.8}{75 \times 125 \times 0.170} = 0.27$$

En la fig 13 de las Ayudas de Diseño con $q = 0.25$ y el valor anterior de K , se obtiene

$$R = 0.18$$

$$M_R = R b h^2 f_c'' = 0.18 \times 1.25 \times 0.75^2 \times 1700 = 215.2$$



Para valuar la contribución del concreto, se tomará la cuantía correspondiente a cuatro barras # 10 (de acuerdo con 2.1.5 III y con el arreglo de barras adoptado, el cual se muestra más adelante en una figura)

$$p = \frac{4 \times 7.92}{125 \times 69.8} = 0.00363$$

$$V_{CR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c''} \quad (2.17)$$

$$V_{CR} = 0.8 \times 125 \times 69.8 (0.2 + 30 \times 0.00363) \sqrt{200} = 30490 \text{ kg} = 30.49 \text{ t}$$

Revisión por fuerza cortante de la sección de 125 x 75 cm

Límite para V_u (inciso 2.1.5b)

$$2 F_R b d \sqrt{f_c''} = 2 \times 0.8 \times 125 \times 69.8 \times \sqrt{200} = 197400 \text{ kg}$$

$$2 F_R b d \sqrt{f_c''} > V_u = 187.1 \text{ t por tanto, se acepta la sección de } 125 \times 75 \text{ cm}$$

Separación de estribos

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{CR}} < \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} \quad (2.21)$$

Con estribos del # 5 de cuatro ramas

$$A_v = 4 \times 1.98 = 7.92 \text{ cm}^2$$

$$s = \frac{0.8 \times 7.92 \times 4200 \times 69.8}{187100 - 30490} = 11.9 \text{ cm} \quad (\text{rige})$$

Pero la separación no debe ser mayor que ninguno de los valores siguientes:

$$a) \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 7.92 \times 4200}{3.5 \times 125} = 60.8 \text{ cm}$$

$$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 125 \times 69.8 \times \sqrt{200} = 148100 \text{ kg} = 148.1 \text{ t}$$

$$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} < V_u = 189.1 \text{ t} \quad \text{luego, la separación máxima debe ser:}$$

$$b) 0.25 d = 0.25 \times 69.8 = 17.45 \text{ cm}$$

Por fuerza cortante, se usarán estribos # 5 de cuatro ramas a cada 11 cm. Sin embargo, debe revisarse además que el refuerzo transversal cumpla con los requisitos mínimos de 5.3.4

Requisitos mínimos para el refuerzo transversal

Según las secciones 5.3.4 y 4.2.3, en todo el elemento la separación entre estribos no debe exceder de ninguno de los valores siguientes

$$(850/\sqrt{f_y}) db = (850/\sqrt{4200}) 3.18 = 41.7 \text{ cm}$$

$$48 d_e = 48 \times 1.59 = 76.3 \text{ cm}$$

$$h_{\min}/2 = 75/2 = 37.5 \text{ cm}$$

$$\text{rige } s = 37.5 \text{ cm}$$

Separación de estribos en los extremos de la columna (sec 5.3.4)

Arriba y abajo de cada unión con trabe, en una cierta longitud medida a partir del respectivo plano de intersección, la suma de áreas de estribos y grapas, A_{sh} en cada dirección de la sección de la columna no será menor que

$$0.3 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} s h_c, \text{ ni que } 0.12 \frac{f'_c}{f_y} s h_c$$

Esta revisión se realizará despejando s y suponiendo los estribos # 5 de cuatro ramas que se consideraron al revisar por fuerza cortante.

$$s \leq \frac{A_{sh} f_y}{0.3 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) f'_c h_c}$$

$$s \leq \frac{A_{sh} f_y}{0.12 f'_c h_c}$$

$$A_{sh} = 4 \times 1.98 = 7.92 \text{ cm}^2$$

$$A_g = 125 \times 75 = 9375 \text{ cm}^2$$

$$A_c = (125-4) (75-4) = 8591 \text{ cm}^2$$

$$h_c = 121 \text{ cm}$$

sustituyendo

$$s \leq \frac{7.92 \times 4200}{0.3 \left(\frac{9375}{8591} - 1 \right) 250 \times 121} = 40.2 \text{ cm}$$

$$s \leq \frac{7.92 \times 4200}{0.12 \times 250 \times 121} = 9.16 \text{ cm}$$

Para cumplir con la segunda condición, se eligen estribos # 5 de cuatro ramas a cada 9 cm.

Según las Normas, la separación no debe ser mayor que ninguno de los tres valores siguientes

-la mitad de la obtenida como
máxima para todo el elemento = $37.5/2 = 18.7 \text{ cm}$ (inciso 4.2.3)

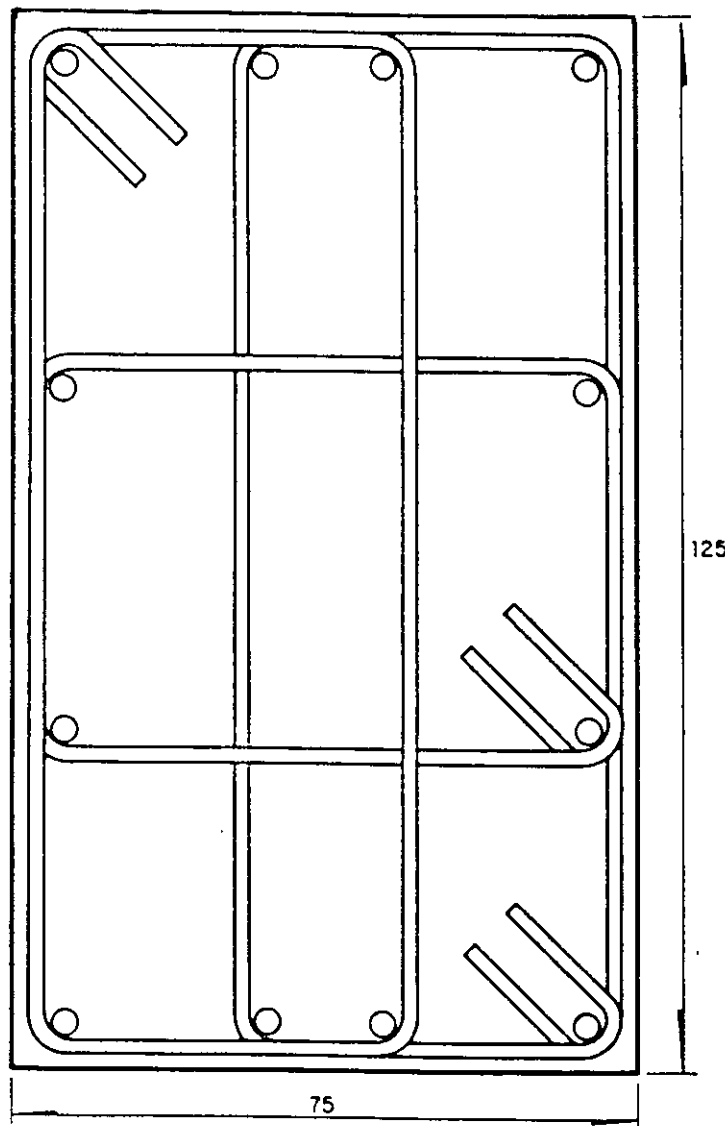
-la cuarta parte de la menor
dimensión transversal de la
columna = $75/4 = 18.7 \text{ cm}$ (5.3.4b)

-10.0 cm (5.3.4b)

La longitud en la que se colocarán estos estribos no será menor que ninguno de los tres valores siguientes

- la dimensión transversal máxima de la columna = 125.0 cm
- un sexto de su altura libre = $230/6$ = 38.3 cm
- 60.0 cm

Rige 125 cm; por tanto, deben colocarse estribos # 5 de cuatro ramas a cada 9 cm en toda la longitud de la columna. En la figura siguiente se propone una distribución de estribos. Se indica el refuerzo transversal que resultó necesario según el dimensionamiento en la dirección X; en un caso real habría que dimensionar el refuerzo transversal también en la dirección Y. El refuerzo que se muestra consta, en la parte central, de seis ramas de estribo en la dirección X (en cada extremo hay dos barras a causa de que se sobrepone parcialmente dos estribos); sin embargo, fuera de la parte central sí consta de cuatro ramas que es el número mínimo que puede usarse.



Dimensiones, en cm

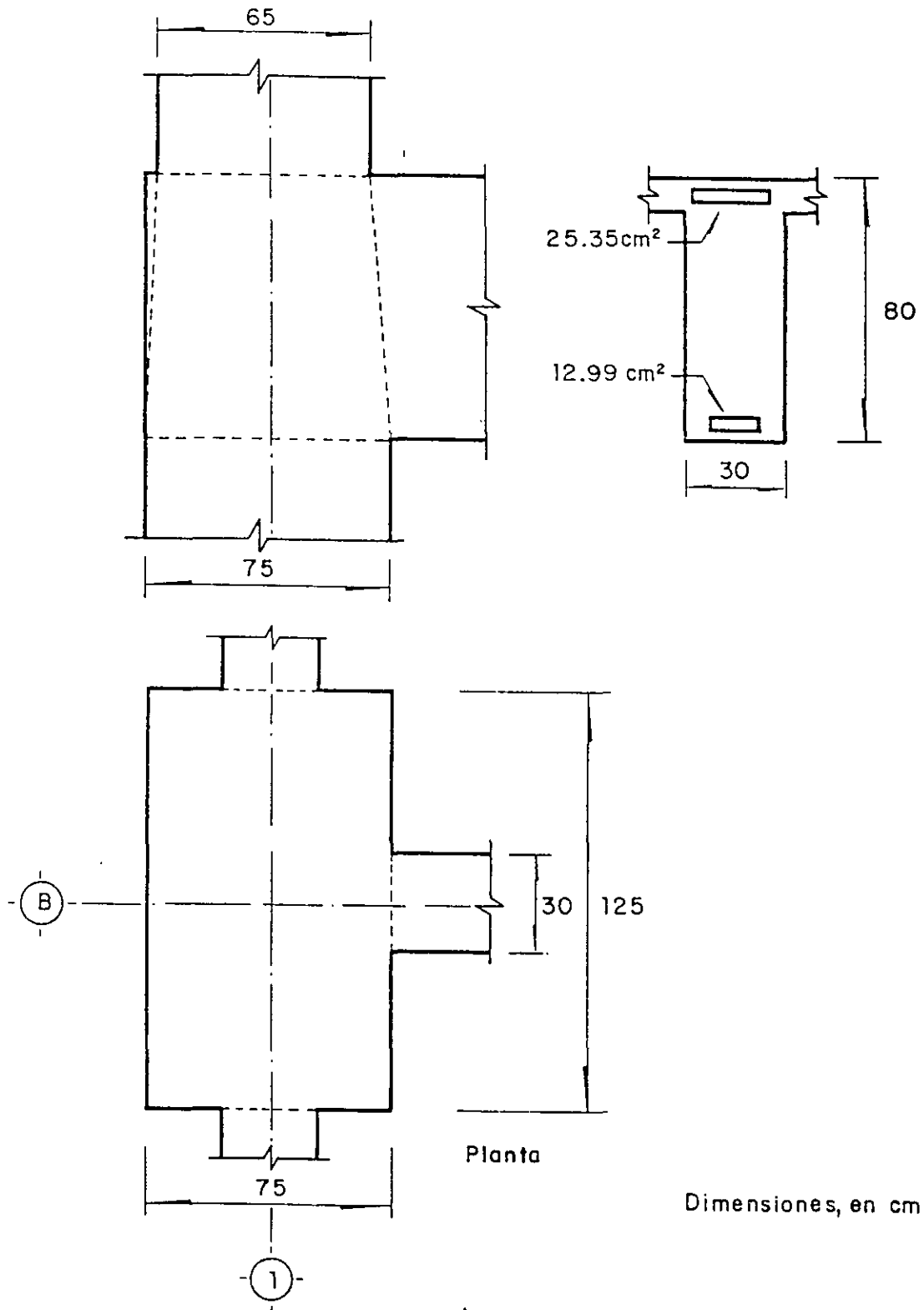
○ # 10

Estribos # 5 de cuatro ramas @ 9 cm

Refuerzo transversal en columnas

REVISION DE LAS UNIONES VIGA-COLUMNA 1B y 2B DEL NIVEL 2

Unión 1B del nivel 2



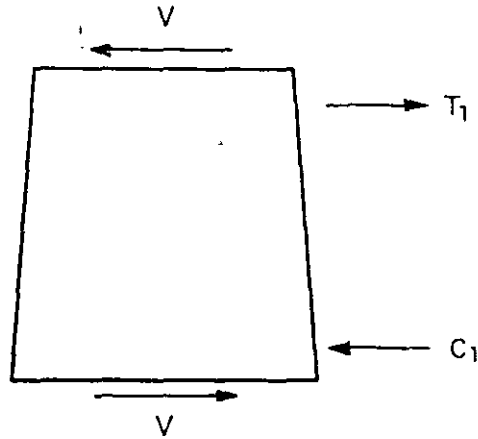
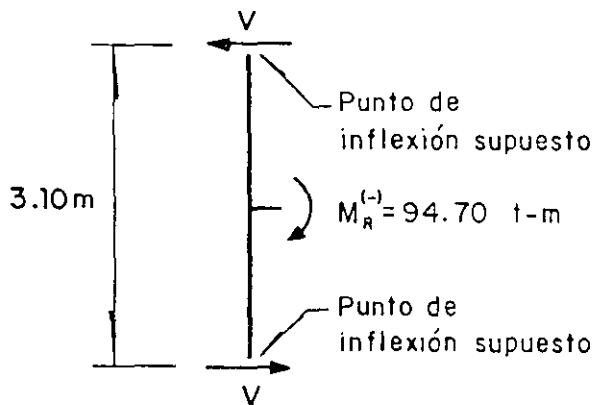
Revisión por fuerza cortante

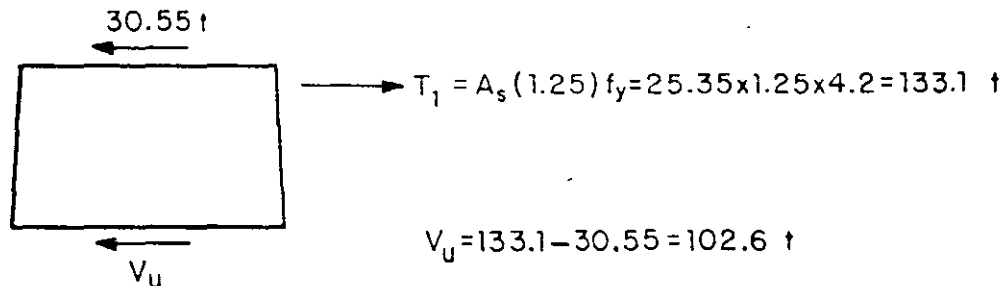
Diagrama de cuerpo libre

Para el cálculo de V , se supone que existen puntos de inflexión a media altura de las columnas que llegan al nudo y que actúa, en el extremo de la viga, el máximo momento resistente valuado sin F_R y con el esfuerzo en el acero de tensión igual a $1.25 f_y$



$$v = \frac{94.70}{3.10} = 30.55 \text{ t}$$

Obtención de la fuerza cortante, V_u , en un plano horizontal a media altura del nudo:



El nudo no está confinado, por lo que la resistencia de diseño a fuerza cortante se tomará igual a

$$4.5 F_R \sqrt{f_C^*} b_e h \quad (\text{incisos 5.4.2 y 5.4.3})$$

donde

b_e ancho efectivo del nudo

h dimensión transversal de la columna en la dirección de la fuerza

El ancho efectivo, b_e , se tomará como la menor de las siguientes cantidades.

- 40 a) el promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza $\frac{30 + 122.5}{2} = 76.25 \text{ cm (rige)}$
- b) el ancho de la o las vigas mas h $30 + 70 = 100.0 \text{ cm}$

sustituyendo

$$4.5 F_R \sqrt{f_C^*} b_e h = 4.5 \times 0.8 \times \sqrt{200} \times 76.25 \times 70.0 = 271700 \text{ kg} > V_u$$

luego, se aceptan las dimensiones del nudo

Refuerzo transversal mínimo

Puesto que el nudo no está confinado, en él se usará en forma conservadora el mayor refuerzo transversal que se obtuvo para los extremos de las columnas que llegan a la unión. En este caso, los refuerzos transversales de las dos columnas resultaron prácticamente iguales (est # 5 de cuatro ramas a cada 9 cm). Se recuerda que en el ejemplo se dimensionó el refuerzo transversal considerando sólo la dirección X y que en un caso real habría que revisar en la dirección Y también.

Anclaje del refuerzo

En las figuras que siguen se muestran detalles de la disposición y anclaje del refuerzo; la revisión se realizó de acuerdo con la sección 5.4.4 de las Normas.

Barras horizontales a tensión que terminan con un doblé a 90 grados

Barras de lecho superior (5 # 8)

Según 3.8, el radio interior de dobléz no será menor que los valores siguientes:

$$a) \frac{f_y}{60 \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{4200}{60 \sqrt{250}} (2.54) = 11.24 \text{ cm} \quad (\text{rige})$$

$$b) \text{ norma NOM B6 para la prueba de doblado} \quad (2.5 d_b) = 2.5(2.54) = 6.35 \text{ cm}$$

La distancia, paralela a la barra, entre la sección crítica (plano externo del núcleo de la columna según 5.4.4) y el paño externo de la barra en el dobléz, se tomará como la mayor de las siguientes

$$a) \frac{0.9 \times 0.076 d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} = \frac{0.9 \times 0.076 \times 2.54 \times 4200}{\sqrt{250}} = 46.15 \text{ cm} \quad (\text{rige})$$

$$b) 15 \text{ cm}$$

$$c) 8 d_b = 8 \times 2.54 = 20.32 \text{ cm}$$

El tramo recto después del dobléz no será menor que $12 d_b$

$$12 d_b = 12 \times 2.54 = 30.48 \text{ cm}$$

Barras de lecho inferior (2 # 8 y 1 # 6)

Los requisitos de anclaje de las barras # 8 son los mismos que para las del lecho superior. A la barra # 6 se le dará el mismo radio de dobléz que a las # 8; y sólo se modificará el tramo recto después del dobléz.

$$12 d_b = 12 \times 1.90 = 22.8 \text{ cm}$$

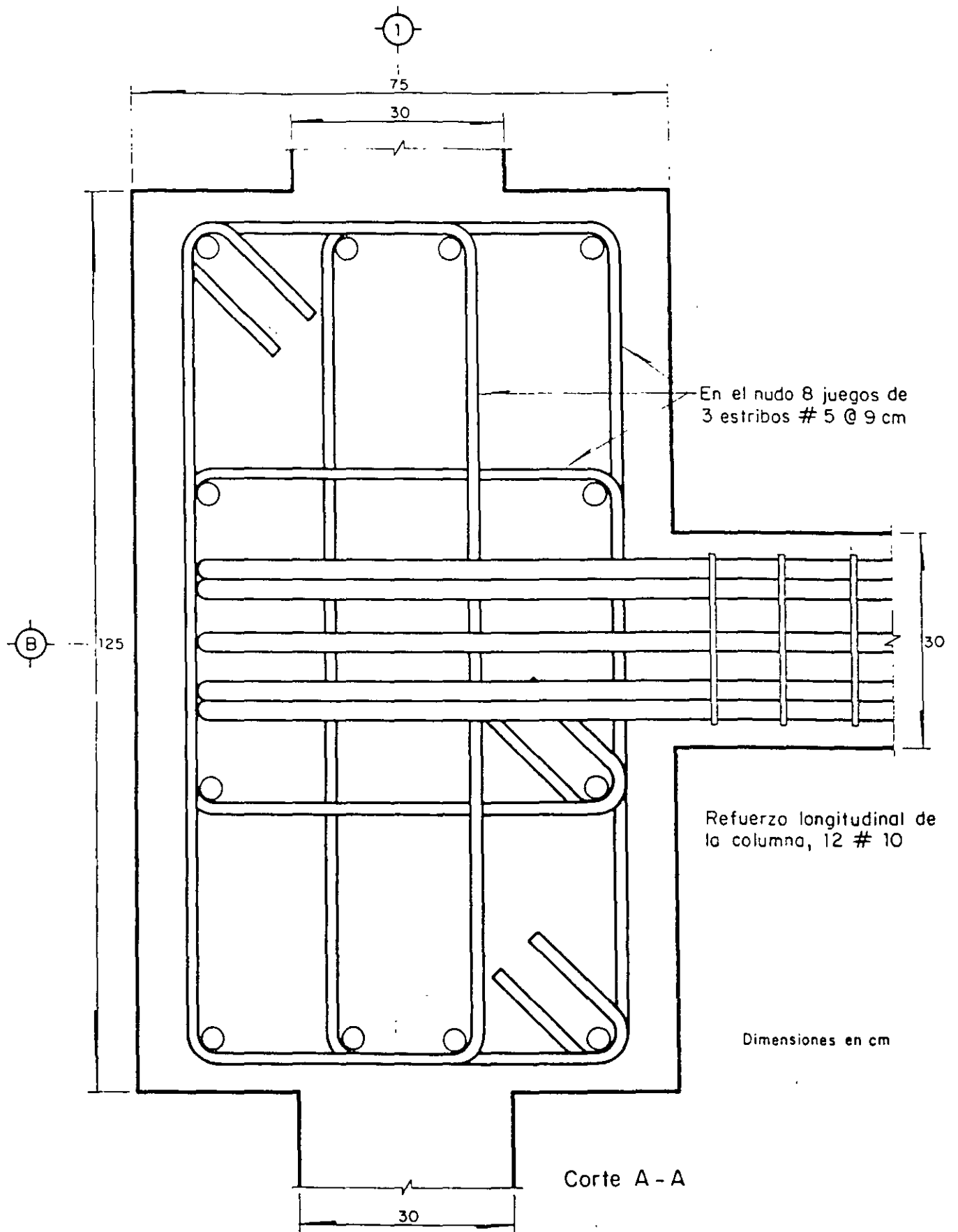
Continuando con los requisitos del inciso 5.4.4, los diámetros de las barras de la columna que pasen rectas a través del nudo deben cumplir con la relación siguiente:

$$h \text{ (viga)} / d_b \text{ (barras de columna)} \geq 20$$

$$h \text{ (viga)} = 80.0 \text{ cm}$$

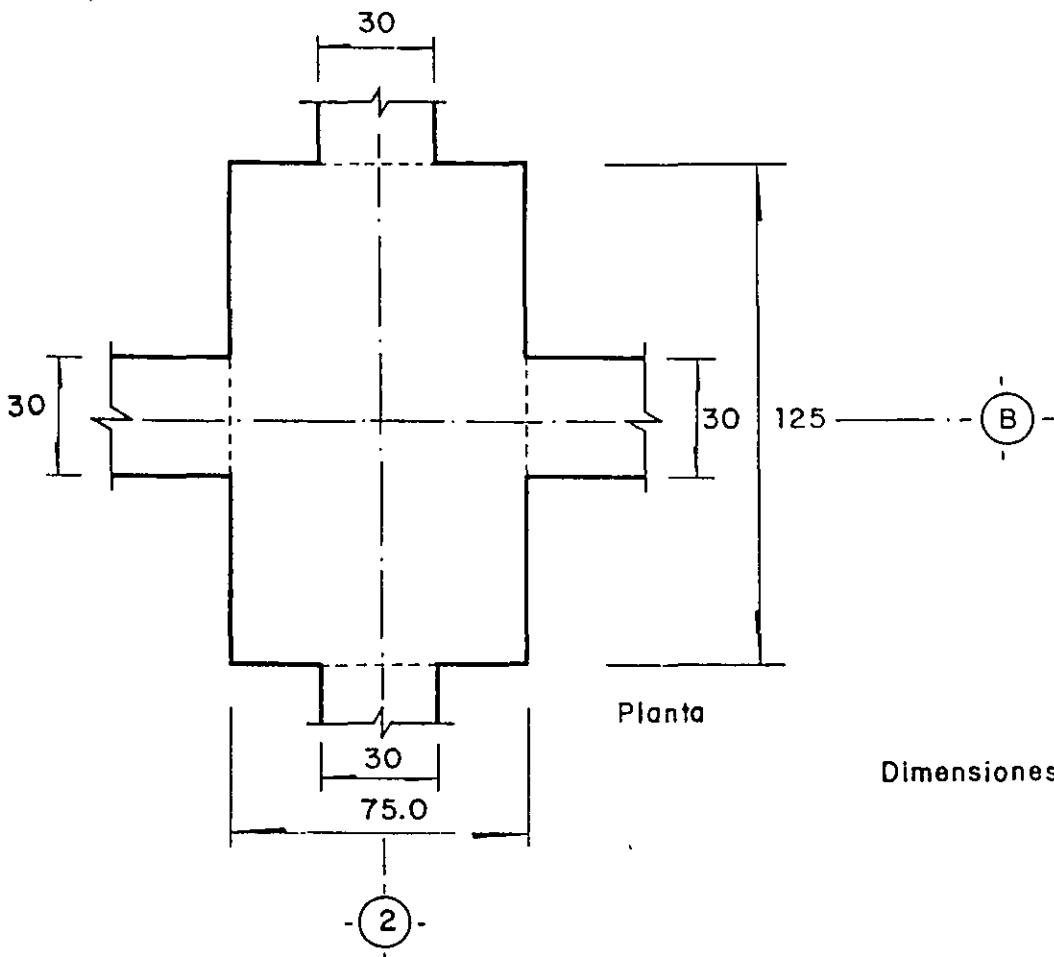
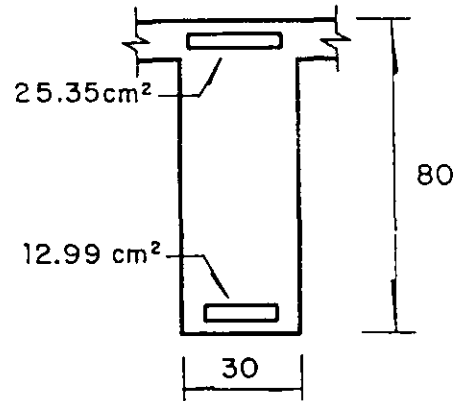
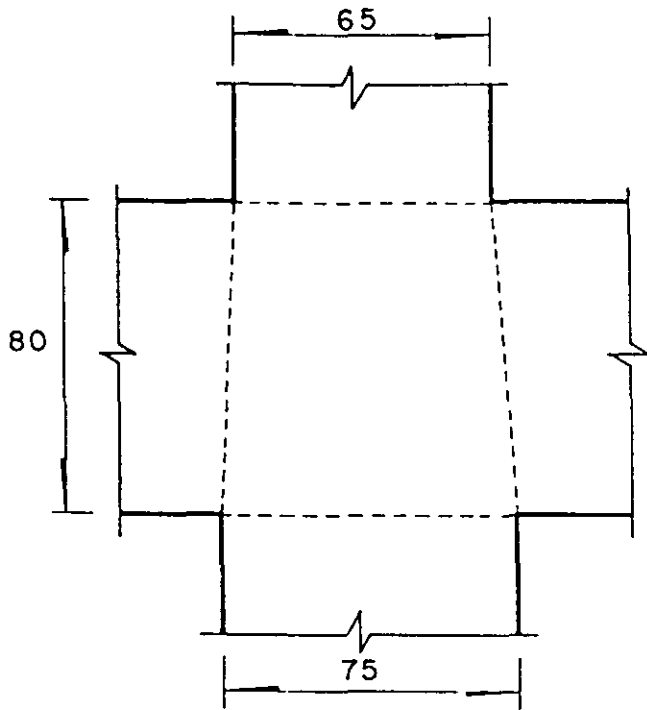
$$d_b \text{ (barras de columna)} = 3.18 \text{ cm}$$

sustituyendo



Unión viga - columna 1-B del nivel 2

Unión 2B del nivel 2



Dimensiones, en cm

38

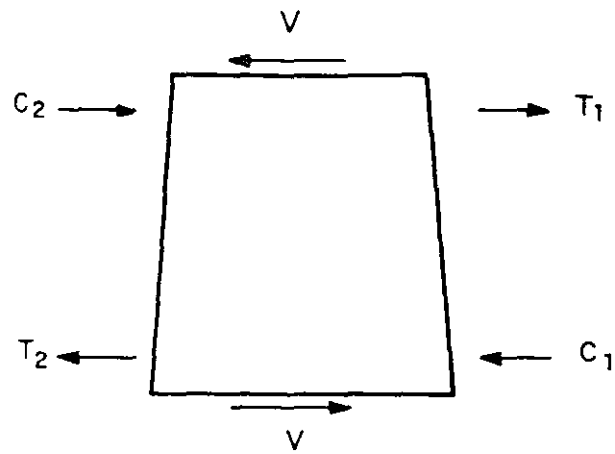
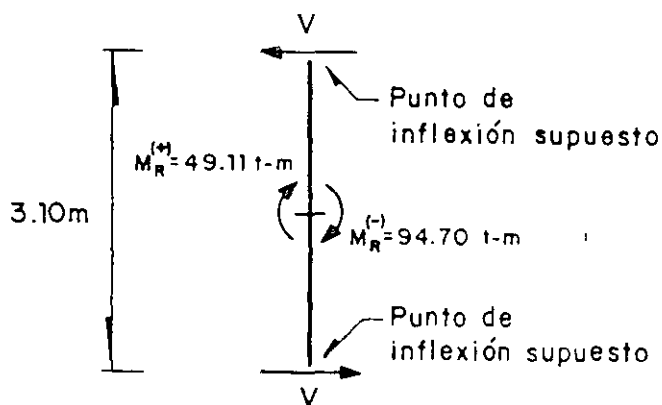
Revisión por fuerza cortante

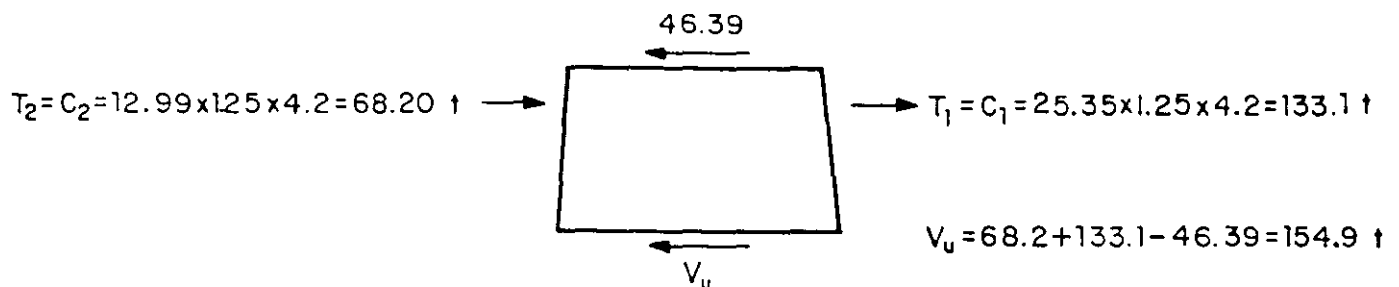
Diagrama de cuerpo libre

Las fuerzas que actúan en el nudo se obtienen con el mismo criterio que para el nudo 1B



$$V = \frac{49.11 + 94.70}{3.10} = 46.39 \text{ t}$$

Obtención de la fuerza cortante, V_u , en un plano horizontal a media altura del nudo:



El nudo no está confinado, por lo que la resistencia de diseño a fuerza cortante es

$$4.5 F_R \sqrt{f_c^*} b_e h \quad (\text{incisos 5.4.2 y 5.4.3})$$

el ancho efectivo, b_e , se tomará como la menor de las siguientes cantidades

- 40 a) el promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza

$$\frac{30+122.5}{2} = 76.25 \text{ cm (rige)}$$

- b) el ancho de la o las vigas más h

$$30 + 70 = 100.0 \text{ cm}$$

sustituyendo

$$4.5 F_R \sqrt{f_c^*} b_e h = 4.5 \times 0.8 \times \sqrt{200} \times 76.25 \times 70 = 271700 \text{ kg} > V_u$$

por tanto, se aceptan las dimensiones del nudo

Refuerzo transversal mínimo

Debido a que el nudo no está confinado, se continúa el refuerzo transversal que resultó para los extremos de las columnas (estribos # 5 de cuatro ramas a cada 9 cm). Véase "Refuerzo transversal mínimo" del nudo 1-B

Anclaje del refuerzo

De acuerdo con el segundo párrafo de 5.4.4, los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectos a través del nudo deben cumplir con las relaciones siguientes:

$$h (\text{columnas}) / d_b (\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$h (\text{viga}) / d_b (\text{barras de columna}) \geq 20$$

$$h (\text{columna}) = 65 \text{ cm}$$

$$d_b (\text{barras de viga}) = 2.54 \text{ cm}$$

$$h (\text{viga}) = 80.0 \text{ cm}$$

$$d_b (\text{barras de columna}) = 3.18 \text{ cm}$$

sustituyendo

$$h (\text{columna}) / d_b (\text{barras de viga}) = 65 / 2.54 = 25.6 > 20$$

$$h (\text{viga}) / d_b (\text{barras de columna}) = 80.0 / 3.18 = 25.2 > 20$$

42 por tanto, se aceptan los diámetros de las barras seleccionadas para vigas y columnas.

COMENTARIOS

1. El ejemplo está basado en el capítulo 5 de las Normas Técnicas Complementarias. Sólo se ilustra el dimensionamiento de las vigas del nivel 2 del marco largo central, de una columna del entrepiso 1-2, y de dos uniones viga-columna del nivel 2.
2. Las escuadrías propuestas de vigas y columnas son las necesarias para que las deformaciones laterales de entrepiso debidas a fuerza cortante no excedan de 0.006 veces la altura de entrepiso (art 209 del Reglamento); se obtuvieron por tanteos a partir de análisis bajo fuerzas laterales, y cumplen con los requisitos geométricos de 5.2.1 y 5.3.1
3. El momento negativo exterior de la viga 1-2 es mayor que el negativo interior debido a que el extremo 2 de la viga baja con respecto al extremo 1, por ser mayor la deformación axial de las columnas del eje 2 que la de las columnas del eje 1 (la carga axial en las columnas del eje 2 es mayor que en las del eje 1).
4. En una obra se debe procurar usar el menor número posible de diámetros distintos de barras de refuerzo. Para las vigas del ejemplo se usaron sólo barras N° 8 y N° 6 como refuerzo longitudinal y N° 3 para estribos. De acuerdo con estos diámetros y suponiendo sólo una capa de barras de refuerzo negativo y una de refuerzo positivo, se valuó un peralte efectivo, $d=75.8$ cm. El recubrimiento libre se supuso de 2 cm, según el inciso 3.4 de las Normas.
5. Los brazos internos mínimos se tienen en las secciones de momento máximos; en ellas las fuerzas de tensión y de compresión que forman el par resistente son máximas, y, por tanto, es máxima la profundidad, a , del bloque de esfuerzos de compresión, y mínimo el brazo interno $d-0.5a$. Al usar los brazos mínimos en otras secciones de la viga, se obtienen áreas de acero ligeramente mayores que las que resultarían si éstas se calcularan en cada una de ellas. Por otro lado, al suponer el brazo constante a lo largo de la viga, el área

de refuerzo necesaria varía linealmente con el momento de diseño ($A_s = KM_u$). Con esta suposición se puede obtener por separado el momento resistente de una barra, o de un grupo de barras, y sumar estos valores para dar el momento resistente total necesario. Lo anterior simplifica el corte de barras y la revisión de los requisitos de anclaje, ya que permite usar directamente la envolvente de momentos de diseño, M_u , para estos fines. En el ejemplo se calculó un brazo interno mínimo para valuar tanto el refuerzo negativo como el positivo. Los peraltes efectivos (74.9 y 75.8 cm) resultan ligeramente distintos porque el refuerzo negativo incluye dos paquetes que requieren más recubrimiento.

6. En rigor, por ser monolíticos con la losa, las vigas bajo momento positivo podrían trabajar como vigas T. Sin embargo, para el cálculo del refuerzo, en general no se justifica tomar en cuenta lo anterior y basta considerar secciones rectangulares.
7. Las dos barras a medio peralte son para cumplir con el requisito de 4.1.3. Pueden ser # 3 ó 4
8. Los cortes de barras se definieron aplicando las disposiciones de anclaje de la sección 3.1 de las Normas, con la salvedad de que al revisar que a cada lado de una sección de momento máximo la longitud de las barras sea al menos L_d (regla III), se supuso que la articulación plástica adyacente a una columna abarca un peralte efectivo y, por tanto, que las barras deben ser capaces de fluir en una sección que dista un peralte efectivo de la de momento máximo. La barra N° 6 de refuerzo positivo que se agregó en las zonas próximas a las columnas es para lograr que el momento resistente positivo sea al menos igual a la mitad del negativo (sección 5.2.2).
9. Se usa sola la fuerza causada por el sismo para revisar el tercer párrafo de 5.2.4.

10. Para valuar V_u , es suficiente calcular los momentos M_R en la forma indicada.
11. La envolvente de fuerzas cortantes de diseño, V_u , se obtiene de considerar la acción del sismo hacia la derecha y también hacia la izquierda. Dicha envolvente resultó simétrica debido a que las cargas y los refuerzos por flexión son simétricos.
12. Son las cuantías que dan las barras que continúan en toda la viga
13. Reducción de 30 por ciento en V_{CR} según 2.1.5a, por ser el peralte mayor de 70 cm.
14. En los extremos rige $s=10.7$ cm; en la zona central, $s = 11.5$ cm. Se optó por usar $s = 10$ cm en toda la viga.
15. Se revisará que el refuerzo transversal calculado por resistencia cumpla con los requisitos para confinamiento de la sección 5.2.3.
16. Se supone que las fuerzas y momentos internos mostrados ocurren en el mismo instante (al dimensionar por flexocompresión se requieren parejas de valores de P y M que sean simultáneas). Sin embargo, se debe estar consciente de que esta condición sólo se podría lograr si se realizara un análisis paso a paso de la estructura bajo un cierto sismo. Si se efectúa un análisis dinámico modal espectral, las fuerzas y momentos que se obtienen son valores probables que resultan de combinar las respuestas máximas de los distintos modos, las cuales no ocurren en el mismo instante. El suponer que las fuerzas y momentos internos son simultáneos es aceptable cuando domina ampliamente uno de los modos, como ocurre en la mayoría de los edificios comunes, pues en ellos domina el primer modo. El efecto del sismo en una dirección cuando éste actúa en la dirección normal se debe a la torsión de entrepiso.

17. Primero se revisará totalmente bajo $CM + CV_{\text{máx}}$ y después bajo $CM + CV_{\text{inst}} + \text{sismo}$.
18. Para calcular los momentos de inercia, I , se consideraron secciones rectangulares no agrietadas. Es una forma aproximada de proceder que se basa en que el aumento de rigidez debido a la losa se compensa aproximadamente por la disminución causada por el agrietamiento.
19. Debido a que bajo $CM + CV_{\text{máx}}$ no hay desplazamiento lateral.
20. Esta revisión es semejante a la realizada bajo CM y $CV_{\text{máx}}$, en vista de que la carga vertical por sí sola no causa deformación lateral.
21. Cuando, como en este ejemplo, se limitan las deformaciones laterales de entrepiso a $0.006 h$, y la flexión general es despreciable (edificios no esbeltos) los efectos de esbeltez por movimiento lateral pueden despreciarse si $V/W_u \geq 0.075$ (ya que $0.08 V/W_u = 0.006$, si $V/W_u = 0.075$). En el ejemplo, $V/W_u = 338.7/4229 = 0.08$, y el edificio no es esbelto en la dirección X , por lo que podría omitirse la revisión de los efectos de esbeltez por fuerza lateral; sin embargo, a fin de ilustrar el procedimiento, sí se revisan dichos efectos de esbeltez.
22. El desplazamiento de entrepiso (1.35 cm) se obtuvo multiplicando por $O = 4$ el desplazamiento calculado en el análisis de la estructura; incluye la deformación de entrepiso causada por la fuerza cortante y el efecto de la flexión general del edificio debida al acortamiento de columnas por carga axial.
23. Se ha llamado flexocompresión principal la que contiene el 100 por ciento del efecto del sismo. Se sugiere que el dimensionamiento comience en la dirección más desfavorable, que normalmente es aquella en que el momento por sismo es mayor y es menor la dimensión transversal de la sección. En el ejemplo no es evidente cuál es la direc-

ción más desfavorable, y se supuso que sería la dirección X.

24. Para la columna en estudio, es necesario revisar dos situaciones causadas por el sismo: cuando el sismo origina compresión, y cuando causa tensión, con el correspondiente cambio de signo en los momentos. Normalmente rige la primera de ellas, pero es necesario revisar también la segunda. En dicha columna, el sismo no causa fuerza axial cuando actúa en la dirección Y. En caso que sí originara fuerza axial, como ocurre en una columna de esquina, habría que tomar en cuenta el 30 por ciento de su valor; esta fuerza axial podría ser tensión o compresión, según el sentido del sismo en Y, y habría que revisar ambos casos.
25. De acuerdo con la sección 5.3 de las Normas, es necesario considerar el valor de la carga axial de sismo obtenida del análisis y, por otra parte, 1.7 veces de dicho valor, y debe dimensionarse con el más desfavorable de los dos. La expresión completa de P_u es la siguiente:

$$1.1 \left\{ 254.7 + 1.7 \left[1.0 (82.14) + 0.3 (0) \right] \right\}$$

La cantidad 1.0 (82.14) es el 100 por ciento de la fuerza axial causada por el sismo cuando actúa en la dirección X; la cantidad 0.3 (0) es el 30 por ciento de la fuerza axial causada por el sismo cuando actúa en la dirección Y.

26. Se toma la fuerza axial causada sólo por las cargas muerta y viva instantánea, 254.7 t
27. En general, cuando el sismo actúa en una dirección provoca flexión en las columnas también en la dirección normal a causa de la torsión del entrepiso. En la columna 1B, el sismo no causa flexión en la dirección X cuando actúa en la dirección Y, porque forma parte del marco central (eje B), el cual en la dirección X no se ve afectado por la torsión de entrepiso; en otras columnas, p. ej. la 1A, sí se genera momento de flexión en la dirección X cuando el sismo actúa en la di-

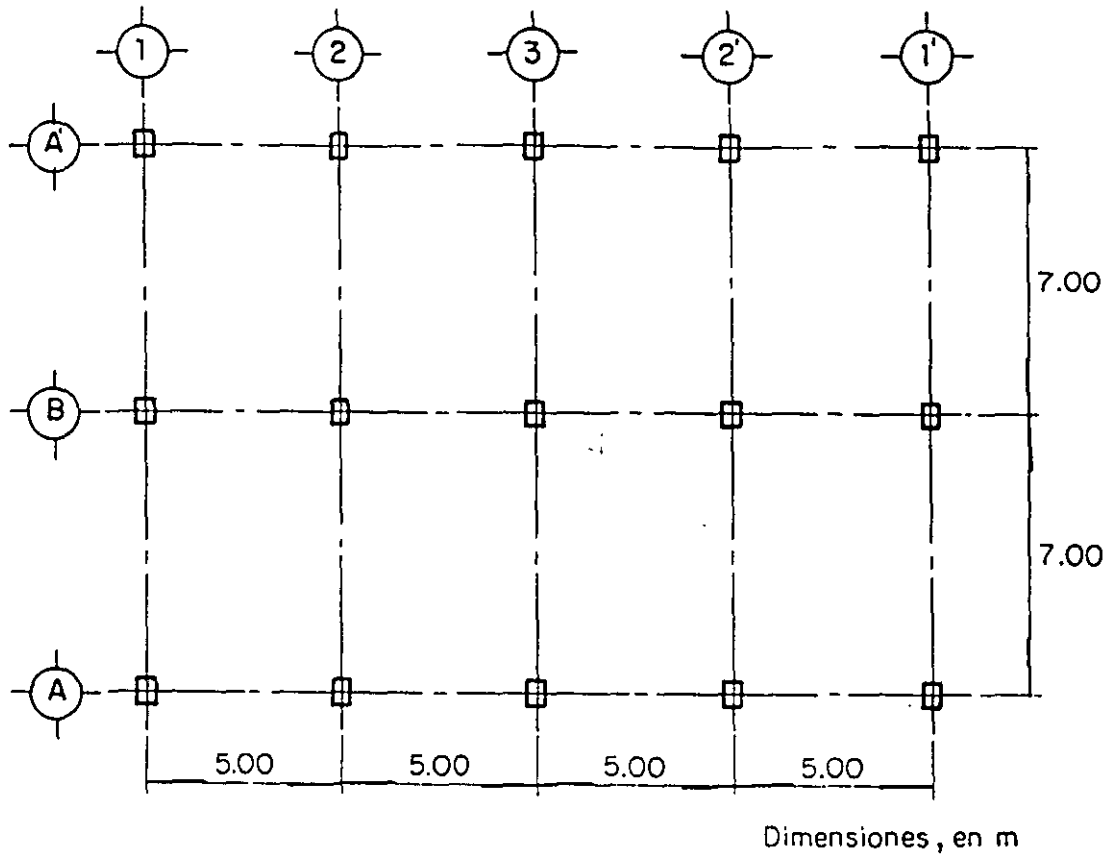
- rección Y y se debe incluir el 30 por ciento de su valor, de acuerdo con la sección 8.8 de las Normas T. C. para Diseño por Sismo (consúltese el ejemplo 10 de este Manual).
28. La cantidad 0.3×66.62 es el 30 por ciento del momento en la dirección Y causado por el sismo cuando actúa en esa dirección. Debido a que se está considerando que la flexocompresión principal es en la dirección X, se toma el 100 por ciento de los efectos del sismo cuando éste actúa en la dirección X, y el 30 por ciento de sus efectos cuando actúa en la dirección Y. Véanse la sección 8.8 de las Normas T.C. para Diseño por Sismo y el ejemplo 10 de esta serie.
29. Los valores de M_{2b} , M_{2s} y P_u (0.05 h) son los mismos que se calcularon cuando la carga de sismo es de compresión.
30. En la columna 1B, el sismo causa tensión cuando actúa de izquierda a derecha; para esta condición el momento que produce (17.92 t-m) es de sentido opuesto al debido a las cargas verticales (12.67 t-m).
31. Esta revisión debe realizarse en cada dirección en que se forman marcos. Al revisar en una dirección, no es necesario considerar los efectos del sismo cuando actúa en la otra dirección. El ejemplo sólo incluye la revisión en la dirección X.
32. De acuerdo con el inciso 5.3.2, la revisión de la resistencia mínima a flexión debe realizarse para los dos sentidos en que puede actuar el sismo. El sentido mas desfavorable es aquél para el cual es mínimo el cociente $\Sigma M_e / \Sigma M_g$.
33. De acuerdo con la sección 5.3.2 de las Normas, es necesario considerar el valor de la fuerza axial de sismo obtenida del análisis, y, por otra parte, 1.7 veces dicho valor, a fin de escoger el que conduce al menor momento resistente de la columna.

34. Los momentos M_e resultaron iguales que cuando el sismo actúa de derecha a izquierda, debido a que la fuerza axial causada por el sismo es muy pequeña en las columnas del eje 2.
35. También aquí deben considerarse los dos sentidos del sismo y los valores sencillo e incrementado de la fuerza axial que aquél causa en la columna, a fin de llegar al máximo momento resistente. En el ejemplo resultó que la condición que lleva al máximo momento resistente corresponde al sismo actuando de derecha a izquierda (compresión en la columna) y con 1.7 veces la fuerza axial de sismo calculada; ocurrió así porque la falla de la columna es de tensión (está abajo de la falla balanceada).
36. Para estimar el peralte efectivo, (69.8 cm) se supuso que los estribos serían del N° 5.
37. En el ejemplo, por sencillez se omitió el incremento en V_{CR} debido a la compresión axial. En general, se justifica tomar en cuenta dicho incremento sólo cuando al despreciarlo resulte una separación de estribos muy pequeña. Además, debe tenerse presente que en columnas de marcos dúctiles suele regir la separación de estribos necesaria para confinamiento del núcleo, como ocurrió en el ejemplo. Cuando, por efecto del sismo, la fuerza axial en la columna sea de tensión, debe siempre tomarse en cuenta la disminución de V_{CR} , de acuerdo con 2.1.5 a) III.
38. Para revisar el nudo por fuerza cortante, debe suponerse, por un lado, que se forma una articulación plástica en la viga, sin que se articulen las columnas y, por otro lado, que se forman articulaciones plásticas en los extremos de una de las columnas que llegan al nudo. Es necesario proceder así porque de antemano no se sabe cuál de las dos situaciones es más desfavorable. La formación de articulaciones plásticas en los extremos de una columna puede ser propiciada por la presencia de muros divisorios en los entrepisos adyacentes a aquél donde está la columna. En el ejemplo sólo se ilus-

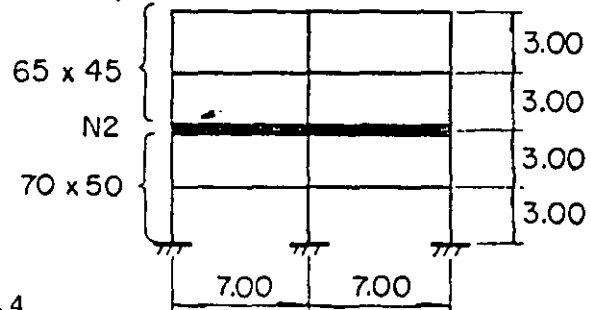
tra el caso en que aparezca articulación plástica en la viga. En una situación real, si el proyectista de la estructura juzga que hay riesgo significativo de que se articulen las columnas, debe tomar en cuenta esta condición al revisar la unión.

39. El momento resistente de la viga (94.7 t-m) se valuó en el apartado "cálculo del refuerzo transversal" de la parte de este ejemplo correspondiente al dimensionamiento de las vigas por fuerza cortante. Se escogió el momento resistente negativo, y no el positivo, porque puede demostrarse que el momento mas desfavorable, para revisar la unión por fuerza cortante, es el mayor de los dos.
40. Como dimensiones del nudo se usaron los promedios de las dimensiones correspondientes de las dos columnas que llegan a la unión; p. ej. $122.5 \text{ cm} = 0.5 (120 + 125)$.
41. Las barras más críticas de la viga en cuanto a anclaje son las del lecho superior. Se tomó la dimensión de la columna de arriba (65 cm), porque las dimensiones del núcleo del nudo al nivel de las barras superiores corresponden mas bien al núcleo de tal columna.
42. En las vigas de los niveles superiores en las que ya no se cumpla el requisito $h(\text{col})/d_b$ (barras de viga) ≥ 20 , por ser más pequeñas las secciones de las columnas, habrá que usar diámetros menores que N° 8 para el refuerzo de las vigas, p. ej. barras del N° 6.

DATOS



Sección de columnas, cm²



Columnas 70 x 50 cm

Peralte efectivo $d = 36$ cm

Espesor de losa $h = 40$ cm

Factor de carga $(CM + CV_{\text{máx}}) F_c = 1.4$

Factor de carga $(CM + CV_{\text{inst}} + S) F_c = 1.1$

Materiales

$f'_c = 250$ kg/cm² (concreto clase 1)

$f_y = 4200$ kg/cm²

2

CONSTANTES

$$f_c^* = 0.8f_c' = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec. 1.7})$$

$$f_c'' = 0.85f_c^* = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec. 2.3})$$

(por ser $f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2$)

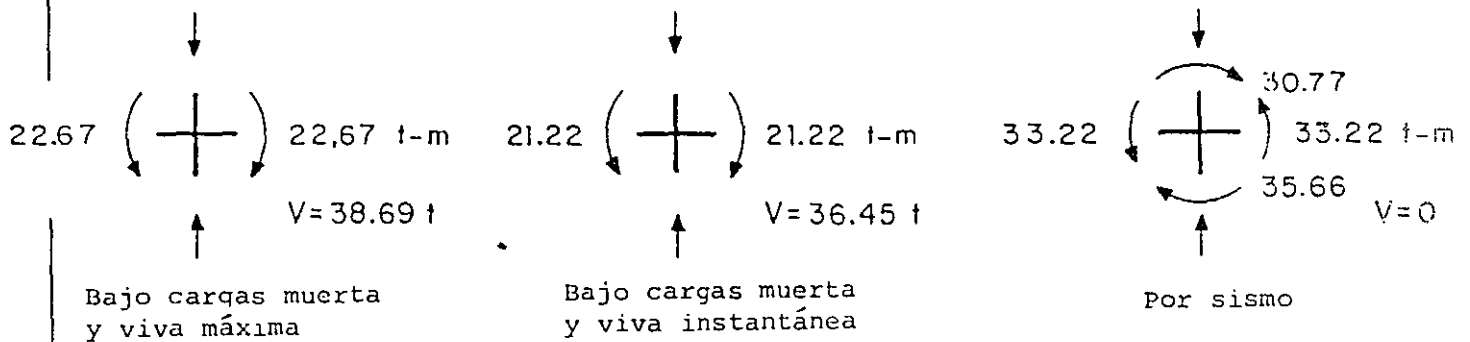
$$\sqrt{f_c^*} = \sqrt{200} = 14.14$$

$$P_{\min} = \frac{0.7 \sqrt{f_c'}}{f_y} = \frac{0.7 \sqrt{250}}{4200} = 0.002635$$

$$P_{\max} = 0.75 P_b = 0.75 \frac{f_c''}{f_y} \cdot \frac{4800}{f_y + 6000} = (0.75) \frac{170}{4200} \cdot \frac{4800}{4200 + 600} = 0.01429$$

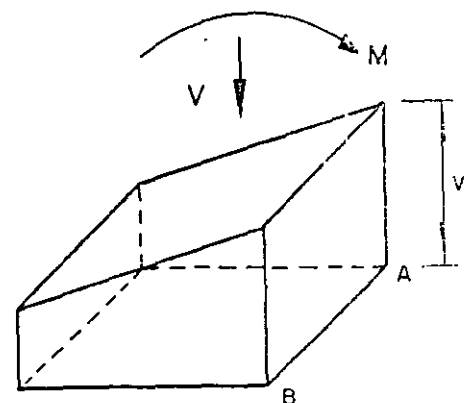
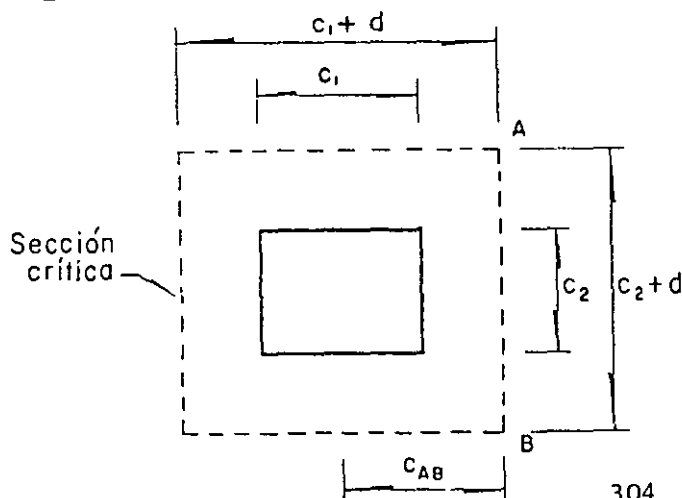
3 REVISION POR TENSION DIAGONAL ALREDEDOR DE LA COLUMNA INTERIOR, 2B

4 Fuerzas y momentos internos en condiciones de servicio



Propiedades geométricas de la conexión

(fig 2.1 de las Normas)



$$c_1 = 70 \text{ cm}$$

$$c_2 = 50 \text{ cm}$$

$$c_1 + d = 70 + 36 = 106 \text{ cm}$$

$$c_2 + d = 50 + 36 = 86 \text{ cm}$$

$$c_{AB} = \frac{c_1 + d}{2} = \frac{106}{2} = 53 \text{ cm}$$

$$A_c = 2d (c_1 + c_2 + 2d) = 2 \times 36(70 + 50 + 2 \times 36) = 13\,820 \text{ cm}^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{106/86}} \quad (\text{ec. 2.26})$$

$$\alpha = 0.4266$$

$$J_c = \frac{d (c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d) d^3}{6} + \frac{d (c_2 + d) (c_1 + d)^2}{2}$$

$$J_c = \frac{(36) (106)^3}{6} + \frac{(106) (36)^3}{6} + \frac{(36) (86) (106)^2}{2}$$

$$J_c = 7\,146\,000 + 824\,300 + 17\,390\,000 = 25\,360\,000 \text{ cm}^4$$

Revisión bajo carga muerta más carga viva máxima

5

$$V_u = V_x 1.4 = 38.69 \times 1.4 = 54.17 \text{ t}$$

$$M_u = 0$$

$$v_u \text{ máx} = \frac{54170}{13820} = 3.920 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo cortante de diseño admisible si no se usa refuerzo

$$F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \leq F_R \sqrt{f_c^*}$$

$$\gamma = \frac{50}{70} = 0.7143 > 0.5,$$

$$\text{es decir rige } F_R \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 14.14 = 11.31 \text{ kg/cm}^2 > v_{u \text{máx}}$$

luego, por resistencia no es necesario refuerzo bajo CM + CV_{máx}

Revisión bajo cargas muerta, viva instantánea y sismo

$$V_u = (36.45 + 0) 1.1 = 40.10 \text{ t}$$

$$M_u = (30.77 + 35.66) \times 1.1 = 66.43 \times 1.1 = 73.07 \text{ t-m}$$

$$v_{u \text{máx}} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\alpha M_u C_{AB}}{J_c} \quad (\text{Véase fig 2.1 de las Normas})$$

$$v_{u \text{máx}} = \frac{40\ 100}{13\ 820} + \frac{0.4266 \times 73.07 \times 10^5 \times 53}{25\ 360\ 000}$$

$$v_{u \text{máx}} = 2.902 + 6.515$$

$$v_{u \text{máx}} = 9.417 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo cortante admisible} = F_R \sqrt{f_c^*} = 0.7 \times 14.14 = 9.898 \text{ kg/cm}^2 > v_{u \text{máx}}$$

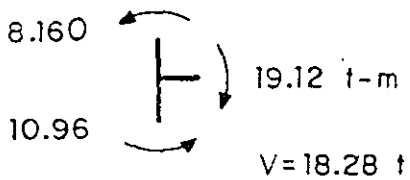
luego, bajo CM + CV_{inst} + S no se requiere refuerzo

Refuerzo transversal mínimo (De acuerdo con el último párrafo de 2.1.5h)

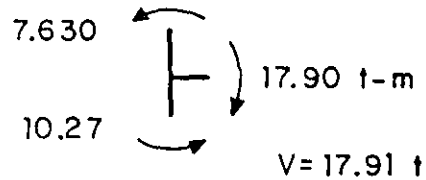
Se usarán estribos # 2 de cuatro ramas tanto en la nervadura del eje de columnas como en las adyacentes a ella, espaciados a $d/3 = 12 \text{ cm}$ hasta un cuarto del claro correspondiente ($700/4 = 175 \text{ cm}$) medido desde el eje de la columna.

REVISION POR TENSION DIAGONAL ALREDEDOR DE LA COLUMNA EXTERIOR, 2A

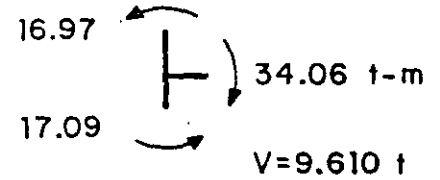
Fuerzas y momentos internos en condiciones de servicio



Bajo cargas muerta
y viva máxima

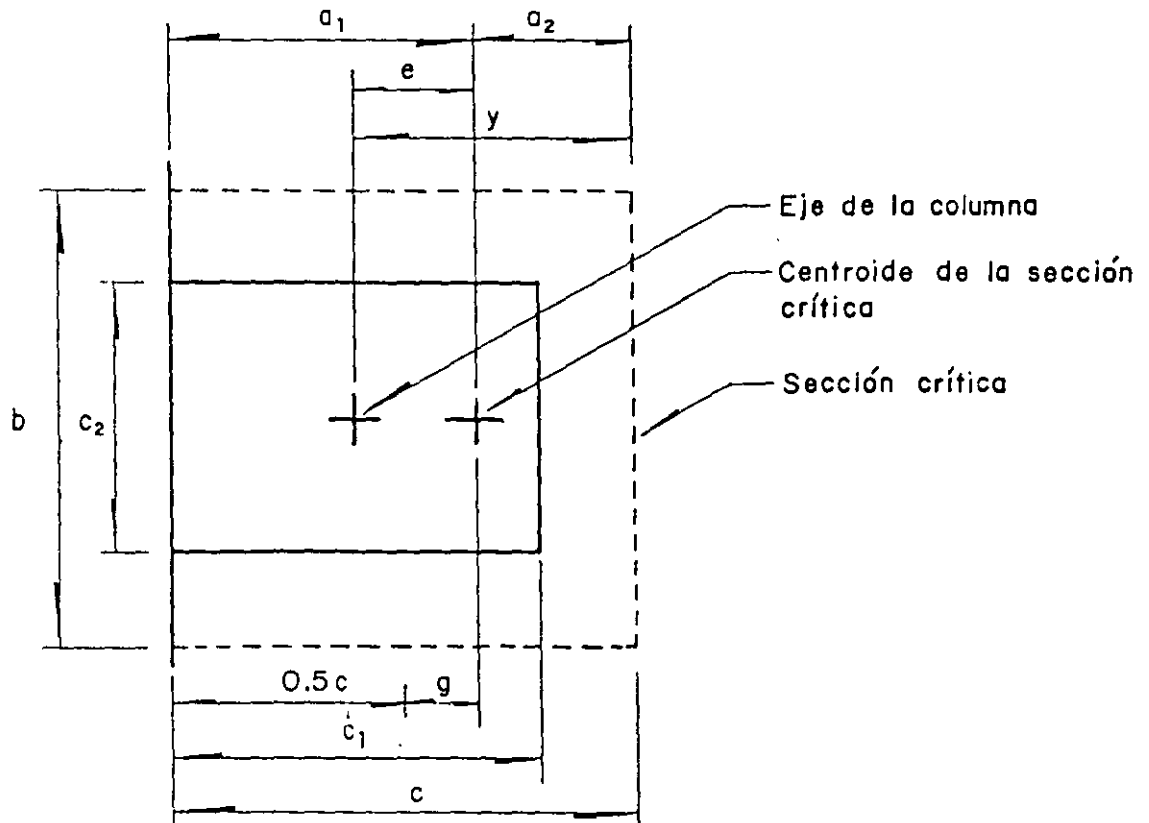


Bajo cargas muerta
y viva instantánea



Por sismo

Propiedades geométricas de la conexión (fig 32 de las Ayudas de Diseño)



$c_1 = 70 \text{ cm}$
 $c_2 = 50 \text{ cm}$
 $d = 36 \text{ cm}$

$$c = c_1 + \frac{d}{2} = 70 + \frac{36}{2} = 88 \text{ cm}$$

$$b = c_2 + d = 50 + 36 = 86 \text{ cm}$$

$$A_c = (2c + b) d = (2 \times 88 + 86) \times 36 = 9432 \text{ cm}^2$$

$$g = \frac{bc}{2(2c + b)} = \frac{86 \times 88}{2(2 \times 88 + 86)} = \frac{7568}{524} = 14.44 \text{ cm}$$

$$y = c - c_1/2 = 88 - \frac{70}{2} = 53.0 \text{ cm}$$

$$a_2 = \frac{c}{2} - g = \frac{88}{2} - 14.44 = 29.56 \text{ cm}$$

$$e = y - \frac{c}{2} + g = 53 - \frac{88}{2} + 14.44 = 23.44 \text{ cm}$$

$$J_c = \frac{dc^3}{6} + \frac{cd^3}{6} + 2cdg^2 + bd(c/2 - g)^2$$

$$J_c = \frac{36 \times 88^3}{6} + \frac{88 \times 36^3}{6} + 2 \times 88 \times 36 \times 14.44^2 + 86 \times 36 \left(\frac{88}{2} - 14.44\right)^2$$

$$J_c = 4\,089\,000 + 684\,300 + 1\,321\,000 + 2\,705\,000$$

$$J_c = 8\,799\,000 \text{ cm}^4$$

7

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d/2)/(c_2 + d)}} = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{c/b}}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{88/86}} = 1 - 0.5960 = 0.4040$$

Revisión bajo cargas muerta y viva máxima

$$M_u = M \cdot F_c = 19.12 \times 1.4 = 26.77 \text{ t-m}$$

$$V_u = V \cdot F_c = 18.28 \times 1.4 = 25.59 \text{ t}$$

8

$$v_{um\acute{a}x} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\alpha (M_u - V_u e) a_2}{J_c}$$

$$v_{um\acute{a}x} = \frac{25590}{9432} + \frac{0.404 (26.77 \times 10^5 - 25590 \times 23.44) 29.56}{8\,799\,000}$$

$$v_{um\acute{a}x} = 2.713 + 2.819 = 5.532 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo cortante de dise\~{n}o admisible si no se usa refuerzo:

$$F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \leq F_R \sqrt{f_c^*}$$

$$\gamma = \frac{50}{70} = 0.7143 > 0.5$$

$$\text{es decir rige } F_R \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 14.14 = 11.31 \text{ kg/cm}^2 > v_{um\acute{a}x}$$

luego, bajo CM + CV_{m\acute{a}x} no se requiere refuerzo

Revisi\~{o}n bajo cargas muerta, viva instant\~{a}nea y sismo

$$M_u = M \cdot F_c = (17.90 + 34.06) \times 1.1 = 57.16 \text{ t-m}$$

$$V_u = V \cdot F_c = (17.91 + 9.61) \times 1.1 = 30.27 \text{ t}$$

$$v_{um\acute{a}x} = \frac{30270}{9432} + \frac{0.404 (57.16 \times 10^5 - 30\,270 \times 23.44) 22.56}{8\,799\,000}$$

$$v_{um\acute{a}x} = 3.209 + 6.795 = 10.00 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo cortante de dise\~{n}o admisible si no se usa refuerzo

$$F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \leq F_R \sqrt{f_c^*}$$

$$\gamma = \frac{50}{70} = 0.7143 > 0.5$$

$$\text{es decir rige } F_R \sqrt{f_c^*} = 0.7 \times 14.14 = 9.898 \text{ kg/cm}^2 < v_{um\acute{a}x}$$

luego, se requiere refuerzo

Revisión del esfuerzo cortante de diseño máximo admisible

$$1.3 F_R \sqrt{f_c^*} = 1.3 \times 0.7 \times 14.14 = 12.87 \text{ kg/cm}^2 > v_{um\acute{a}x} = 10.00 \text{ kg/cm}^2$$

por tanto, es suficiente el peralte efectivo de 36 cm

Refuerzo por tensión diagonal

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{cR}} < \frac{F_R A_v f_u}{3.5b} \quad (\text{ec. 2.21})$$

la separación real no será mayor que 0.85 s

$$V_u = b d v_{um\acute{a}x} = 86 \times 36 \times 10.00 = 30\,960 \text{ kg}$$

$$V_{cR} = 0.4 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.4 \times 0.7 \times 86 \times 36 \times 14.14 = 12\,260 \text{ kg}$$

$$A_v = 8 \times 0.32 = 2.56 \text{ cm}^2 \text{ (estribos \# 2 de 8 ramas)}$$

$$s = \frac{0.7 \times 2.56 \times 4200 \times 36}{30\,960 - 12\,260} = 14.49 \text{ cm}$$

$$0.85 (14.49) = 12.3 \text{ cm}$$

Revisión de la separación máxima

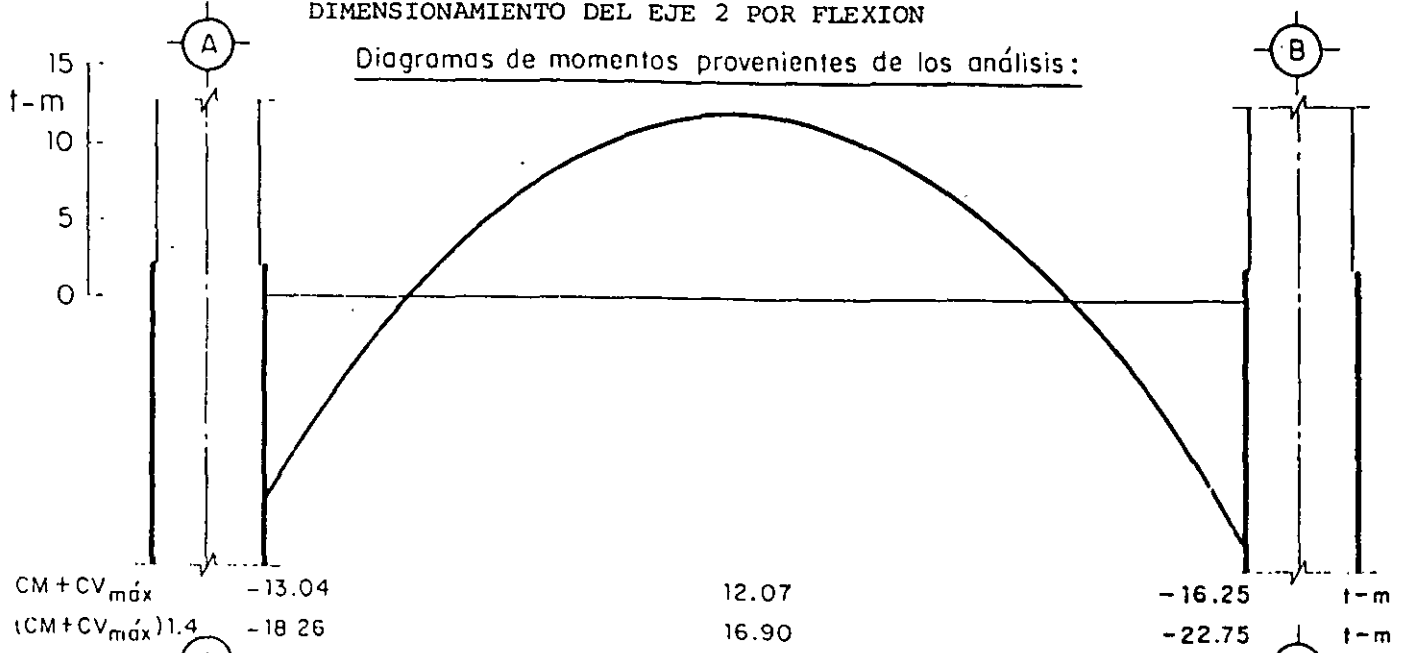
$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.7 \times 2.56 \times 4200}{3.5 \times 86} = 25.0 \text{ cm} > 12.3 \text{ cm}$$

$$d/3 = 12 \text{ cm} < 12.39 \text{ cm} \quad (\text{rige } 12 \text{ cm})$$

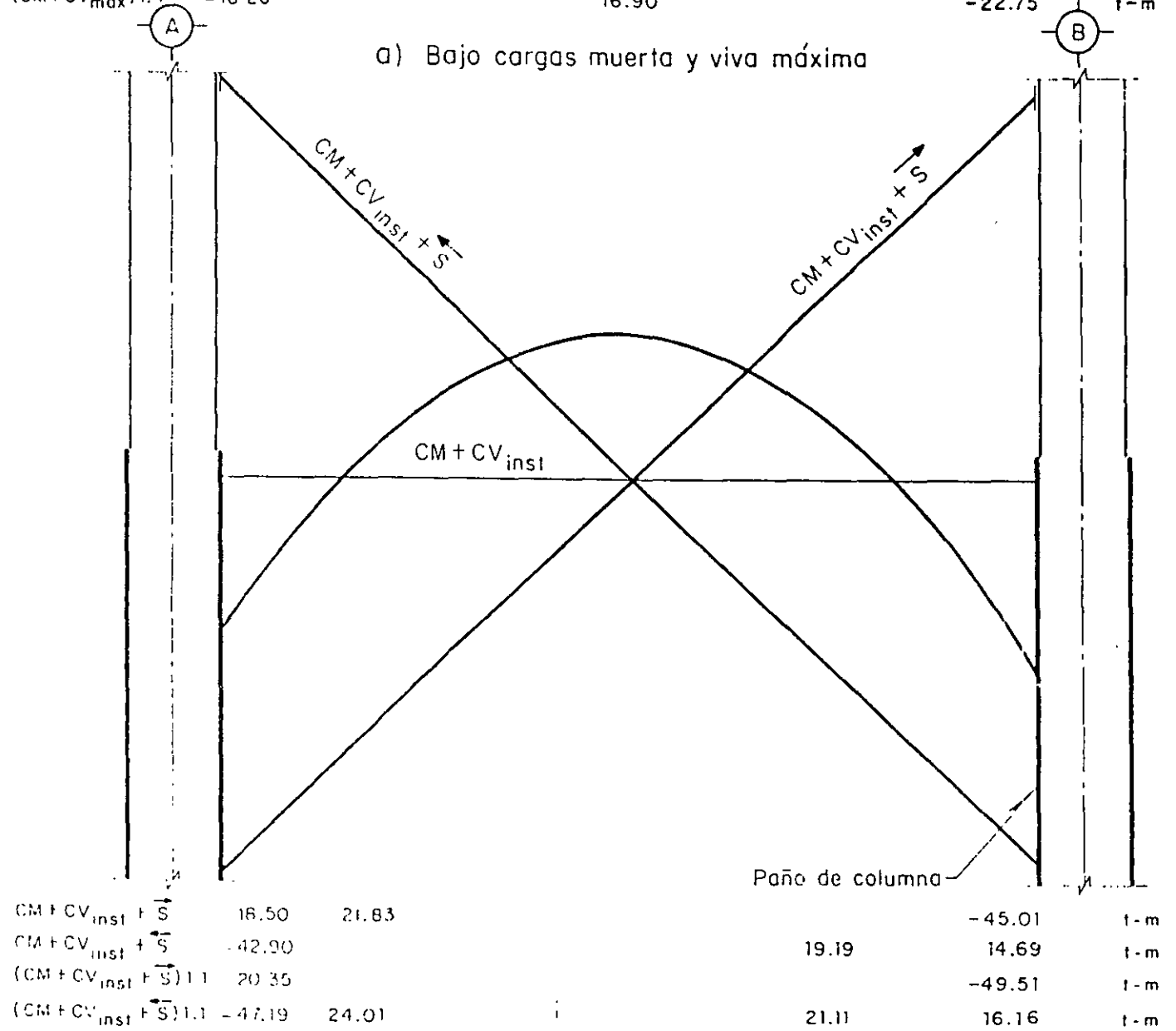
Usar est # 2 de 8 ramas @ 12 cm hasta un cuarto del claro ($700/4 = 175$); medido desde el paño de la columna es $175 - 35 = 140 \text{ cm}$

DIMENSIONAMIENTO DEL EJE 2 POR FLEXION

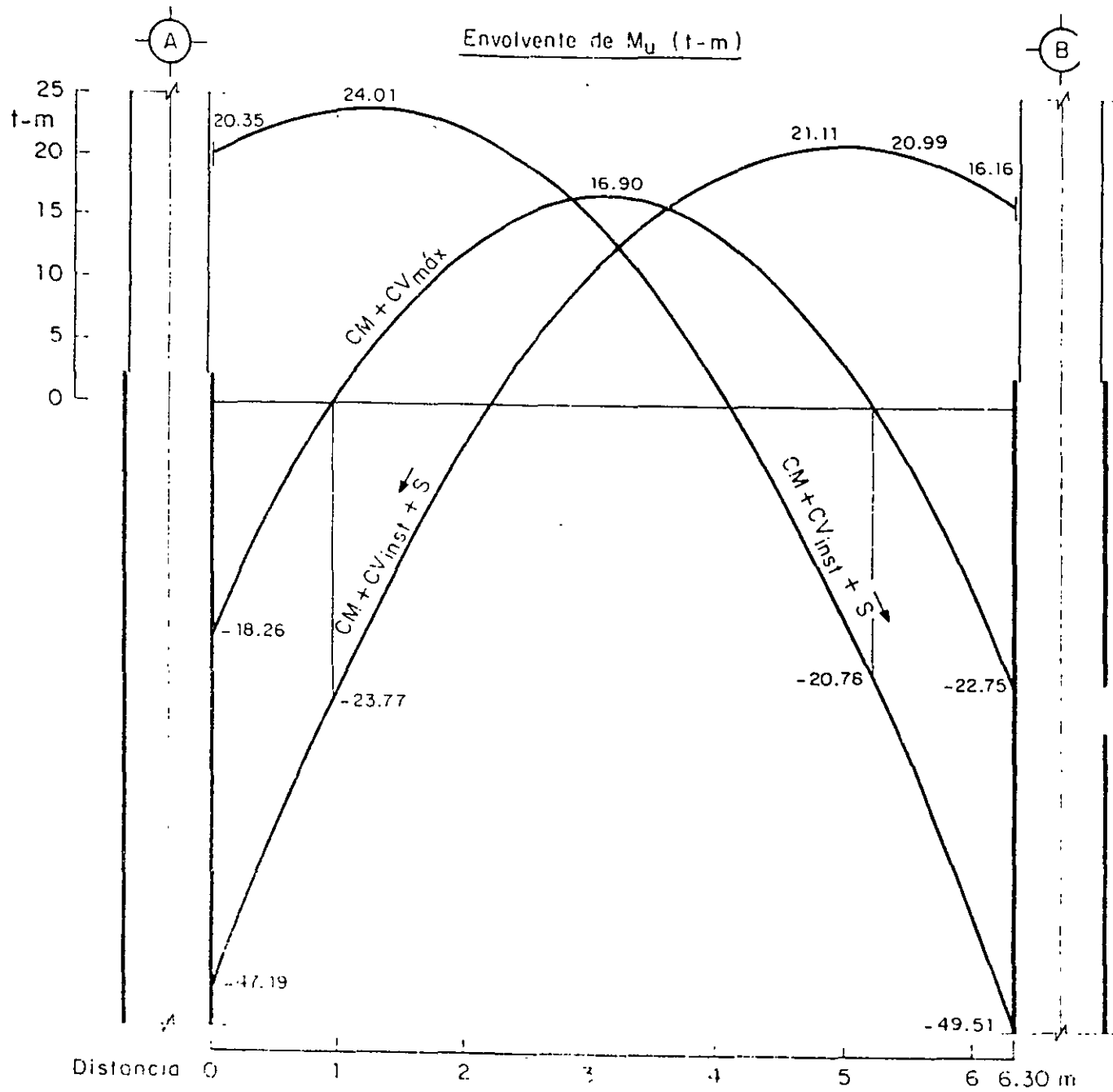
Diagramas de momentos provenientes de los análisis:



a) Bajo cargas muerta y viva máxima

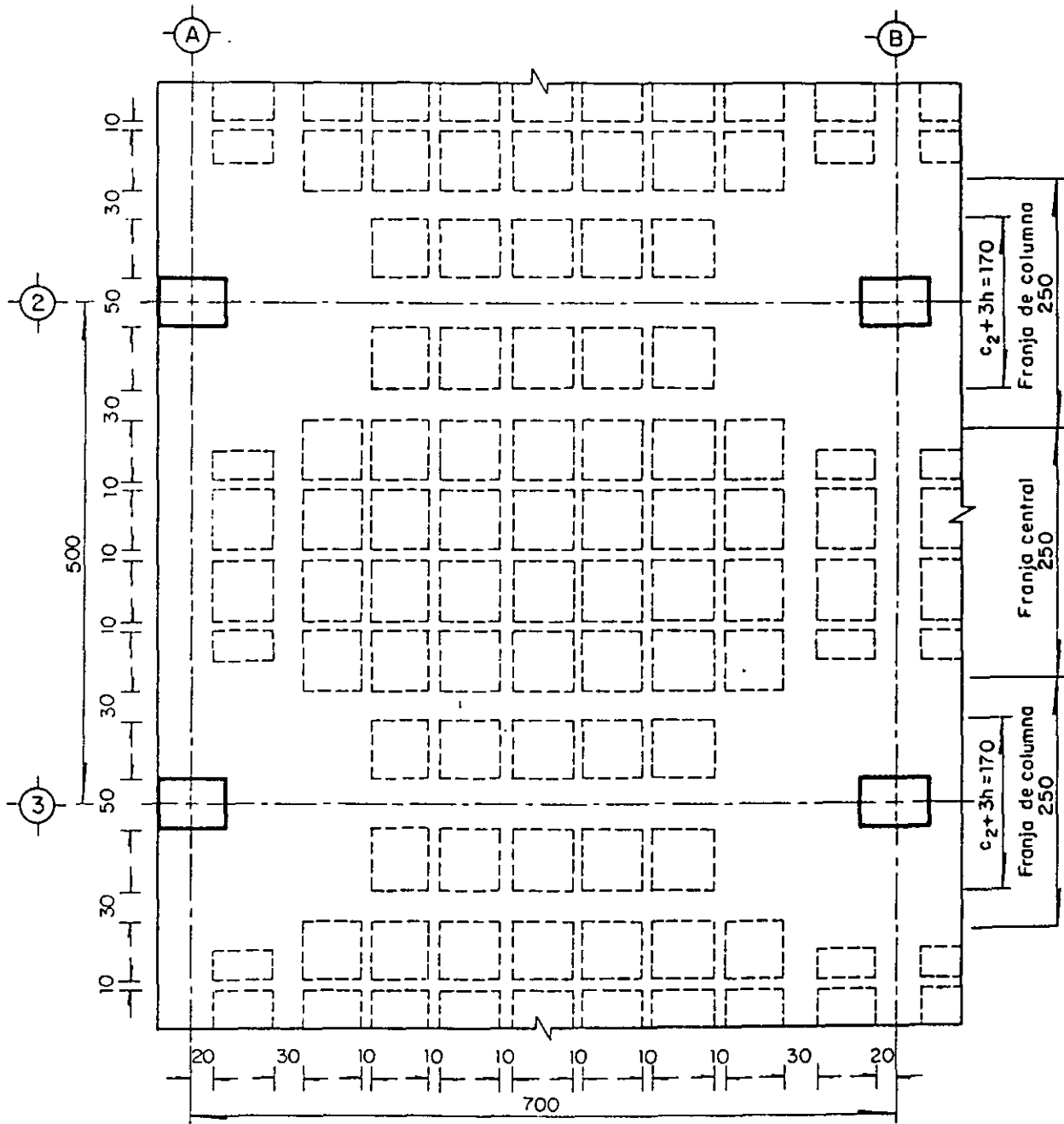


b) Bajo cargas muerta, viva instantánea ($CM + CV_{inst}$) y sismo (S)



Áreas teóricas de refuerzo (cm^2)

9	Complemento $CM+CV máx$	1 franja col.	16.30 (-)	0.0	9.049 (+)	0.0	15.22 (-)
10		2 franja cent.	0.0	0.0	6.033	0.0	5.076
11		3 $C_2 + 3h$	16.30	0.0	4.11	0.0	7.61
12	Complemento $CM+CV_i+S$	4 (1-3)	0.0	0.0	4.939	0.0	7.61
13		5 lecho sup.	25.82	21.21	0.0	18.54	23.08
		6 lecho inf.	18.16	21.29	0.0	18.73	14.42
14	Total en $C_2 + 3h$	7 lecho sup.	42.12	21.21	0.0	18.54	31.49
		8 lecho inf.	18.16	21.29	4.11	18.73	14.42



Casetones 60 x 60

Dimensiones, en cm

Distribución de casetones

Cálculos para el dimensionamiento por flexión (Según la sección 6.6 de las Normas)

6

En los cálculos de las áreas de acero se utilizará la expresión siguiente:

$$A_s = \frac{M_u}{F_r z f_y} = \frac{M_u}{0.9 \times 0.8235 \times 0.36 \times 4.2} = 0.8924 M_u$$

con $z = 0.8235 \times 36 = 29.65$ cm, que es el brazo asociado al área máxima de acero admisible ($0.75 A_{sb}$). En la expresión anterior M_u está en ton-m y A_s resulta en cm^2 .

Momento negativo exterior. El refuerzo para este momento debe concentrarse en $c_2 + 3h$ y centrarse respecto al eje de columnas.

En la sección crítica:

por $CM + CV_{\text{máx}}$

$$M_u = 18.26 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 M_u = 0.8924 \times 18.26 = 16.30 \text{ cm}^2$$

por complemento a $CM + CV_{\text{inst}} + S$

$$M_u = 47.19 - 18.26 = 28.93 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 \times 28.93 = 25.82 \text{ cm}^2$$

Momento negativo interior

por $CM + CV_{\text{máx}}$

$$\text{en franja de columna } M_u = 0.75 \times 22.75 = 17.06 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 \times 17.06 = 15.22 \text{ cm}^2$$

en franjas centrales $M_u = 0.25 \times 22.75 = 5.688 \text{ t-m}$

$$A_s = 0.8924 \times 5.688 = 5.076 \text{ cm}^2$$

por complemento a $CM + CV_{inst} + S$

$$M_u = 49.51 - 22.75 = 26.76 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 \times 26.76 = 23.88 \text{ cm}^2$$

Momento positivo

Máximo por $CM + CV_{m\acute{a}x}$

en franja de columna: $M_u = 0.6 \times 16.90 = 10.14 \text{ t-m}$

$$A_s = 0.8924 \times 10.14 = 9.049 \text{ cm}^2$$

en franjas centrales: $M_u = 0.4 \times 16.90 = 6.76 \text{ t-m}$

$$A_s = 0.8924 \times 6.76 = 6.033 \text{ cm}^2$$

Máximo por $CM + CV_{inst} + \vec{S}$

$$M_u = 23.86 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 \times 23.86 = 21.29 \text{ cm}^2$$

Máximo por $CM + CV_{inst} + \overleftarrow{S}$

$$M_u = 20.99 \text{ t-m}$$

$$A_s = 0.8924 \times 20.99 = 18.73 \text{ cm}^2$$

Al pie de la figura donde aparece la envolvente de M_u se resumen los resultados obtenidos. Para el refuerzo por flexión sólo se usaron barras de los números 8 y 5.

Revisión del porcentaje de acero suministrado en cada nervadura

$$P_{m\acute{a}n} = 0.002635$$

$$P_{m\acute{a}x} = 0.75 p_b = 0.01429$$

a) Refuerzo en $c_2 + 3h$ (en este ancho sólo queda incluida la nervadura del eje)

Extremo exterior. Refuerzo negativo 8 # 8, $A_s = 40.56 \text{ cm}^2$

$$p = \frac{40.56}{86 \times 36} = 0.0131; p_{\text{mín}} < p < p_{\text{máx}}$$

Se toma $b = c_2 + d = 86 \text{ cm}$, porque es el ancho de la viga ficticia en que se suministra refuerzo transversal.

Refuerzo positivo 4 # 8 + 2 # 5 ($A_s = 24.24 \text{ cm}^2$)

$$p = \frac{24.24}{86 \times 36} = 0.007829 > p_{\text{mín}}$$

Extremo interior. Refuerzo negativo 6 # 8, $A_s = 30.42 \text{ cm}^2$

$$p = \frac{30.42}{50 \times 36} = 0.0169; p_{\text{mín}} < p > p_{\text{máx}}$$

Aunque se rebasa el porcentaje máximo, este refuerzo se coloca en la zona maciza por lo que es realista suponer un ancho útil $b \geq 60 \text{ cm}$ con el cual resulta $p \leq p_{\text{máx}}$

Zona de la nervadura ($b = 50 \text{ cm}$)

4 # 8, $A_s = 20.28 \text{ cm}^2$

$$p = \frac{20.28}{50 \times 36} = 0.1127; p_{\text{mín}} < p < p_{\text{máx}}$$

b) Nervaduras adyacentes a la del eje de columnas

3 # 4, $A_s = 3.81 \text{ cm}^2$

$$p = \frac{3.81}{30 \times 36} = 0.003528; p_{\text{mín}} < p < p_{\text{máx}}$$

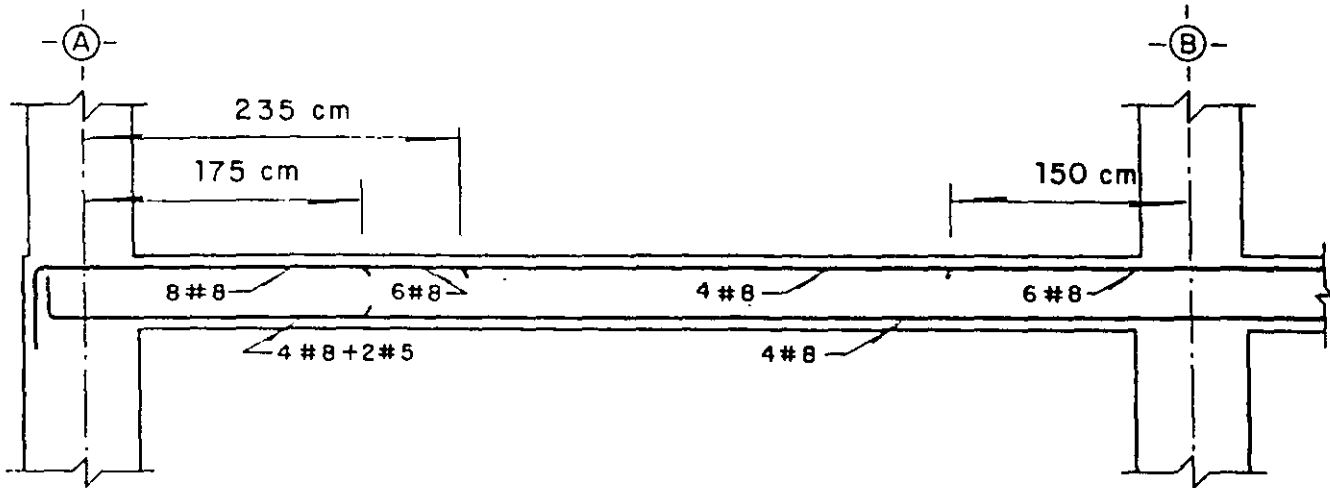
c) Nervaduras de franja central

1 # 5 $A_s = 1.98 \text{ cm}^2$

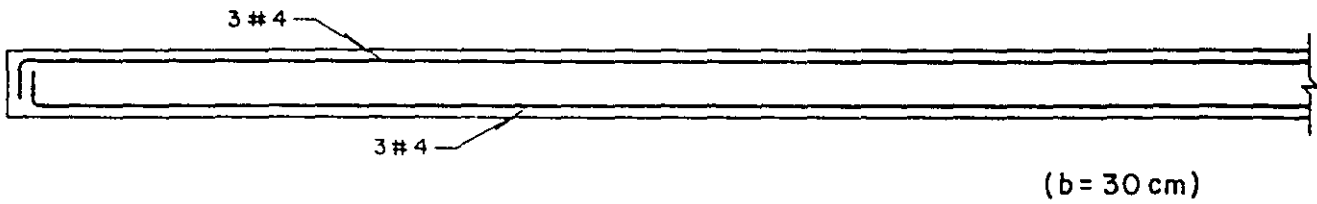
$$p = \frac{1.98}{10 \times 36} = 0.0055; p_{\text{mín}} < p < p_{\text{máx}}$$

En las figuras que siguen se muestra el refuerzo por flexión de las nervaduras, y detalles de la unión exterior losa-columna.

17

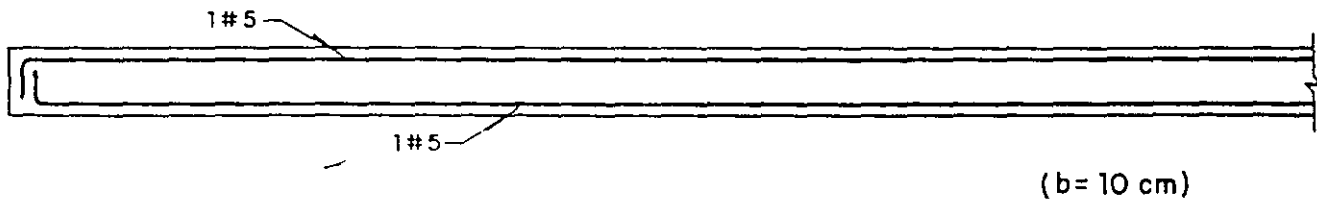


a) Refuerzo en el ancho c_2+3h



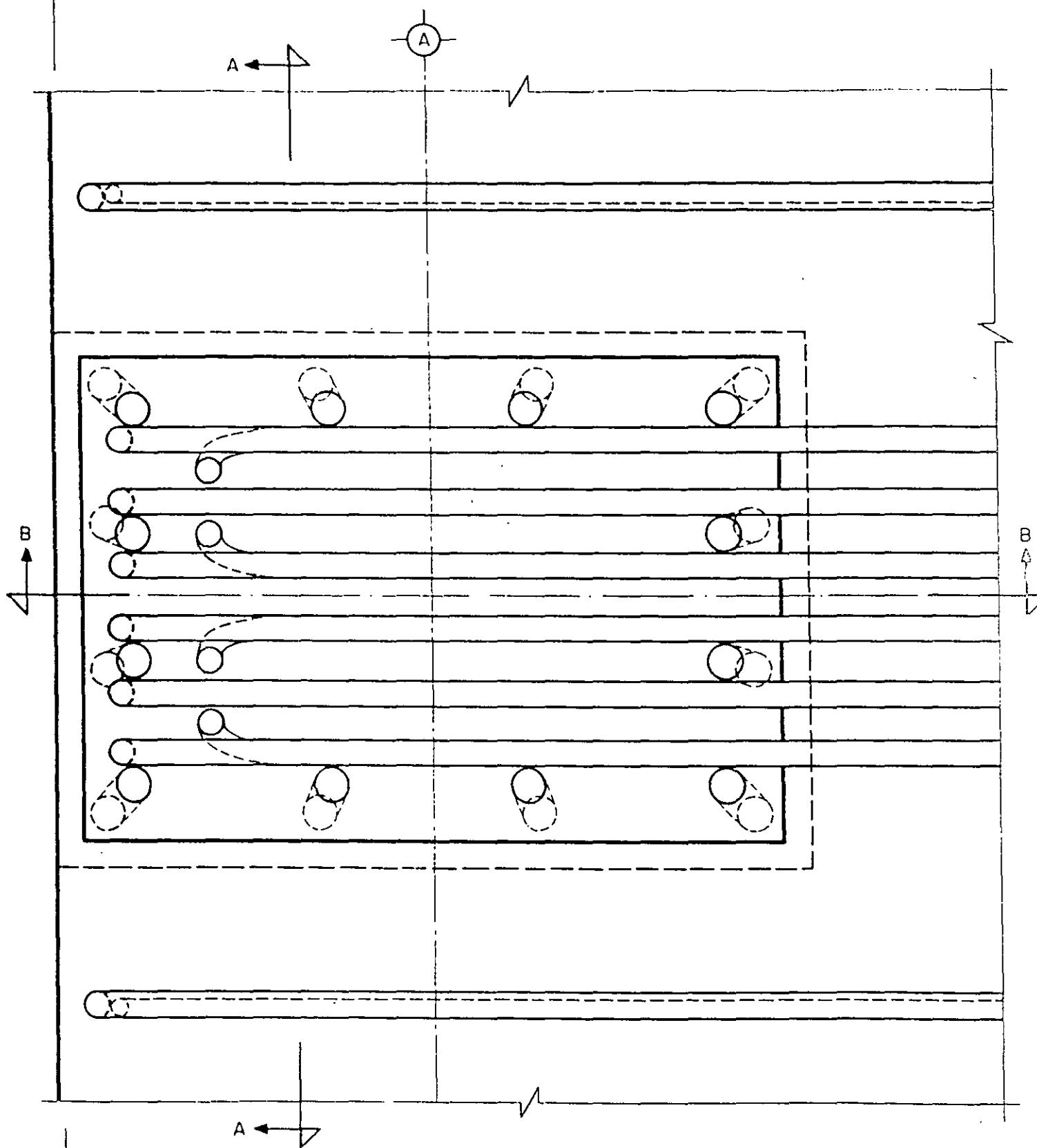
b) Nervadura adyacente a la del eje de columnas

19

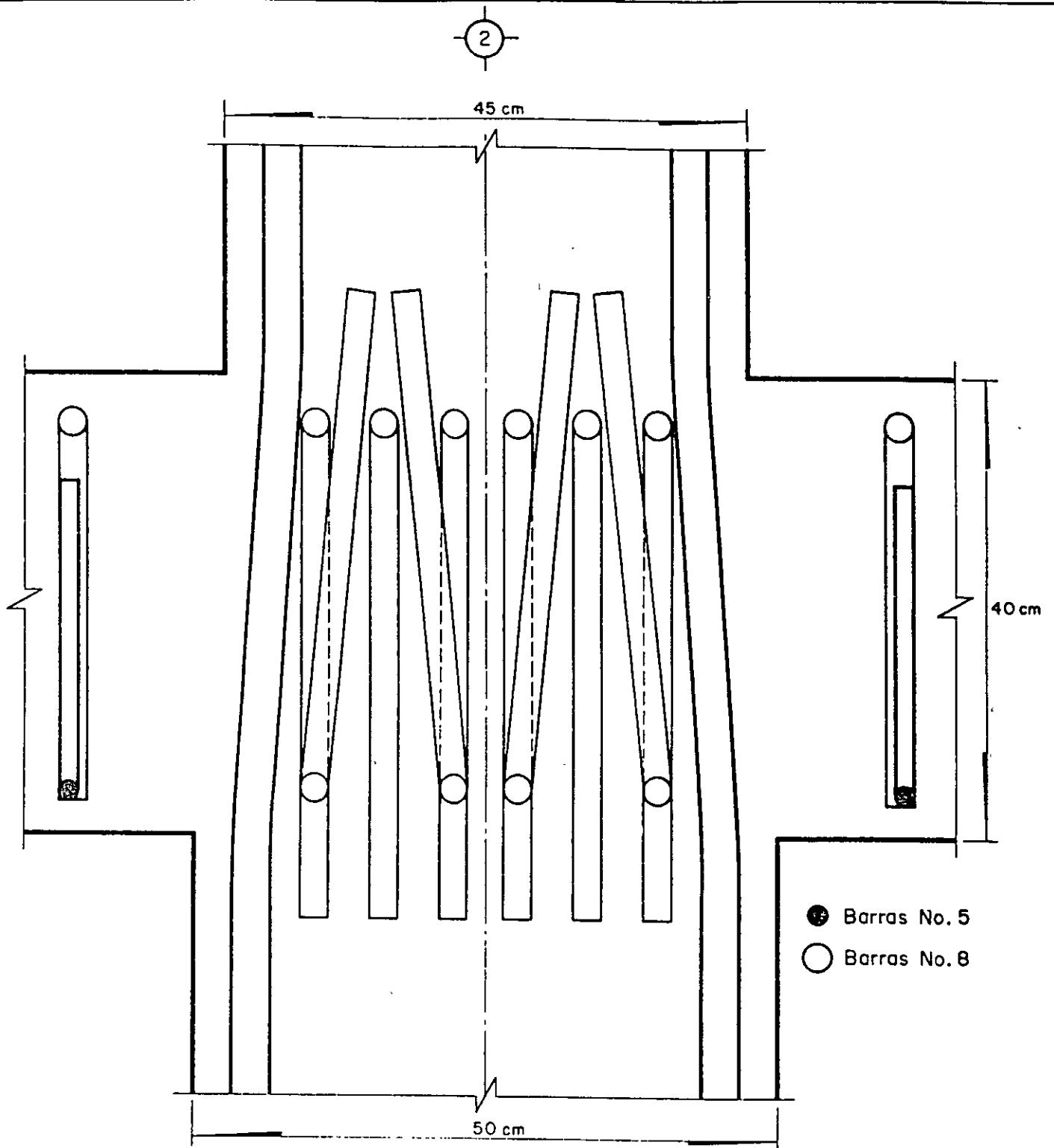


c) Nervadura de franja central

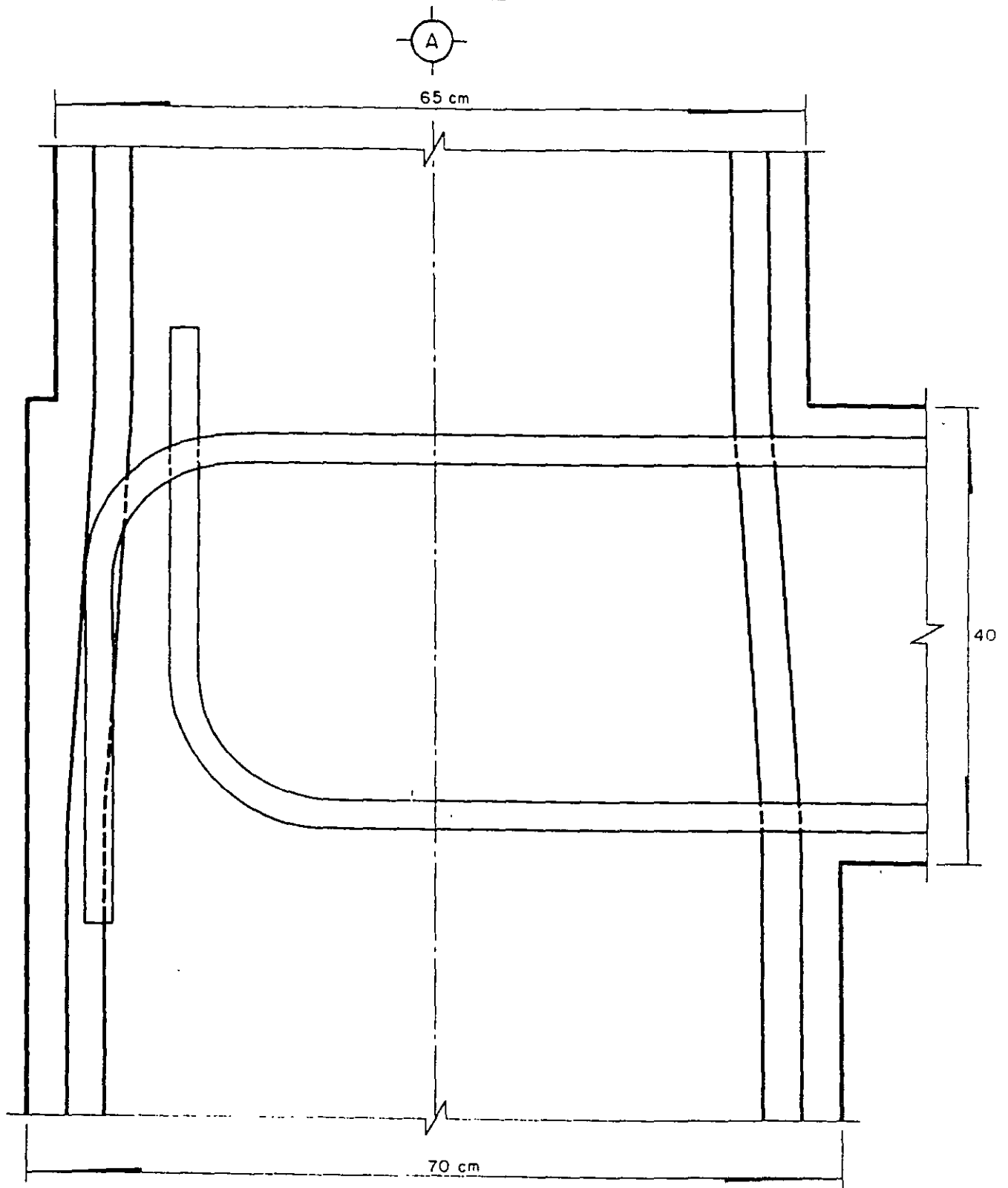
Refuerzo por flexión



Planta de la unión exterior losa - columna



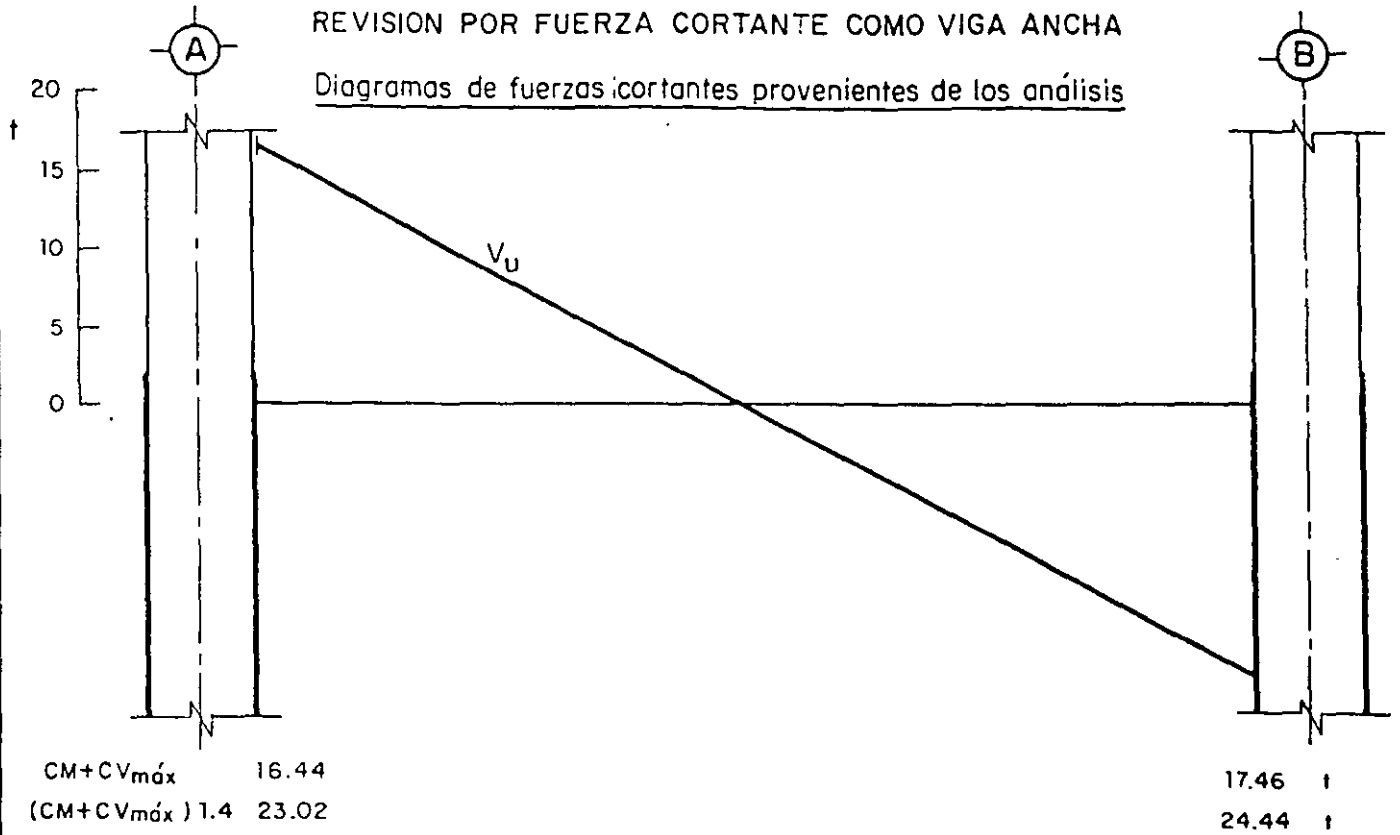
Unión exterior losa - columna. Sección A-A
 (no se muestran los estribos de la columna
 ni del nudo; tampoco dos barras intermedias
 del fondo de la columna)



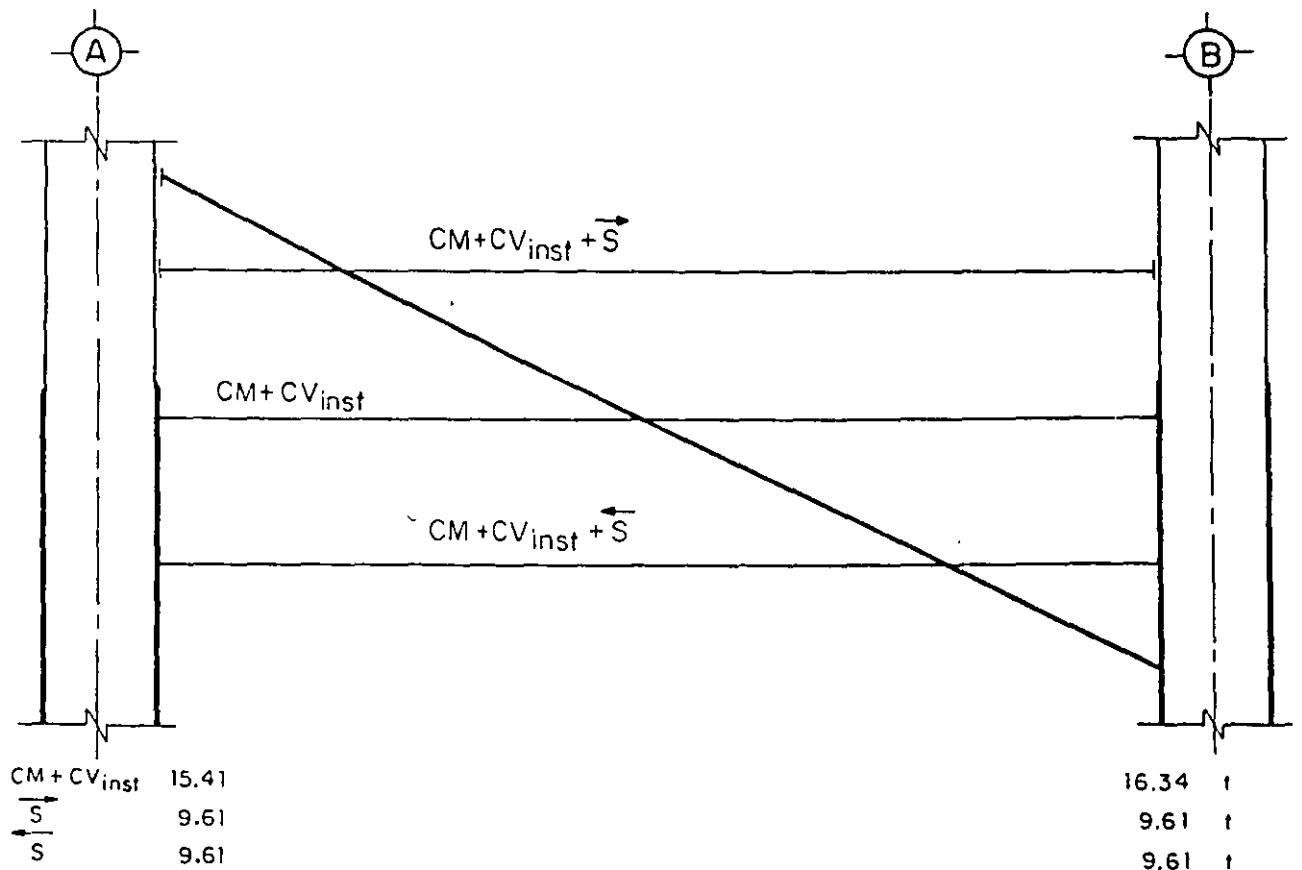
Unión exterior losa - columna. Sección B-B
(no se muestran los estribos de la columna
ni del nudo; tampoco dos barras intermedias
del fondo de la columna)

REVISION POR FUERZA CORTANTE COMO VIGA ANCHA

Diagramas de fuerzas cortantes provenientes de los análisis



a) Bajo cargas muerta y viva maxima ($CM + CV_{m\acute{a}x}$)



b) Bajo cargas muerta, viva instantánea ($CM + CV_{inst}$) y sismo (S)

Cálculos para el refuerzo por fuerza cortante

a) Bajo cargas muerta y viva máxima

Nervadura del eje de columnas ($b = 50 \text{ cm}$)

Resistencia que suministra el concreto

En toda la nervadura y para cada lecho $p > 0.01$, por tanto

$$V_{CR} = F_R b d (0.5) \sqrt{f'_C} = 0.8 \times 50 \times 36 \times 0.5 \times 14.14 = 10\,180 \text{ kg}$$

Resistencia suministrada por los estribos que resultaron al revisar la tensión diagonal alrededor de las columnas:

$$0 \leq x \leq 1.40 \text{ m est } \# 2 \text{ de } 6 \text{ ramas } @ 12 \text{ cm}$$

$$V_s = \frac{0.8 \times 1.92 \times 4200 \times 36}{12} = 19350 \text{ kg}$$

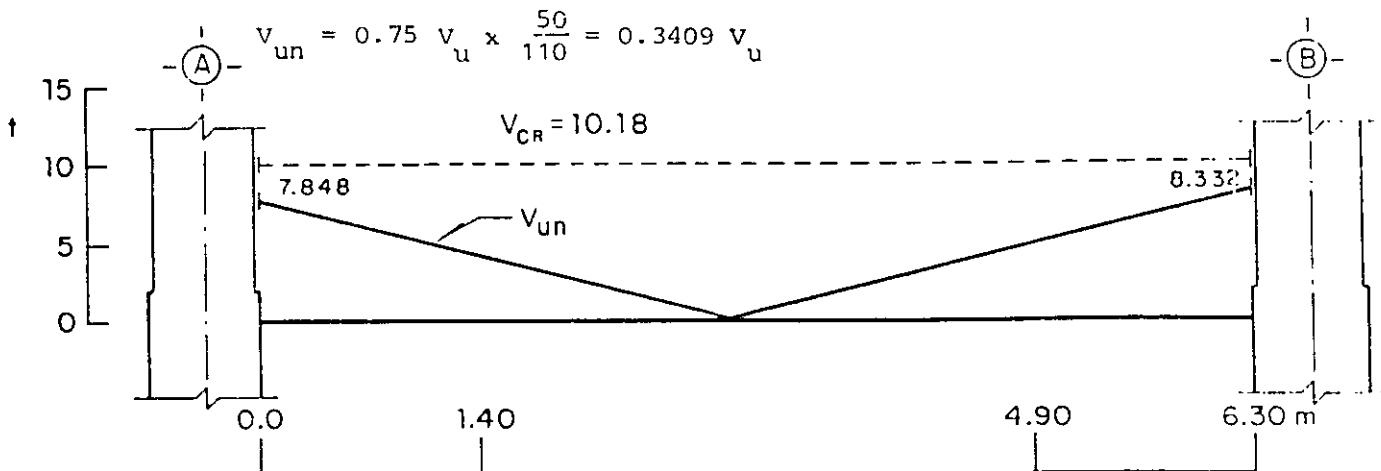
$$1.40 \leq x \leq 4.90 \text{ m}$$

$$V_s = 0$$

$$4.90 \leq x \leq 6.30 \text{ m est } \# 2 \text{ de } 4 \text{ ramas } @ 12 \text{ cm}$$

$$V_s = \frac{0.8 \times 1.28 \times 4200 \times 36}{12} = 12\,900 \text{ kg}$$

La fuerza cortante que corresponde a esta nervadura es



En toda la nervadura $V_{CR} > V_{un}$; luego, no se requiere refuerzo adicional bajo cargas muerta y viva máxima

Nervaduras adyacentes a la del eje de columnas ($b = 30$ cm)

Resistencia que suministra el concreto

En toda la nervadura y para cada lecho

$$p = 0.003528 \quad (3 \# 4 \text{ en cada lecho})$$

$$V_{CR} = F_R \cdot d(0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 30 \times 36 (0.2 + 30 \times 0.003528) 14.14 = 3736 \text{ kg}$$

Resistencia suministrada por los estribos que resultaron al revisar la tensión diagonal alrededor de las columnas:

$$0 \leq x \leq 1.40 \text{ est } \# 2 \text{ de } 4 \text{ ramas } @ 12 \text{ cm}$$

$$V_s = \frac{0.8 \times 1.28 \times 4200 \times 36}{12} = 12900 \text{ kg}$$

$$1.40 \leq x \leq 4.90 \text{ m}$$

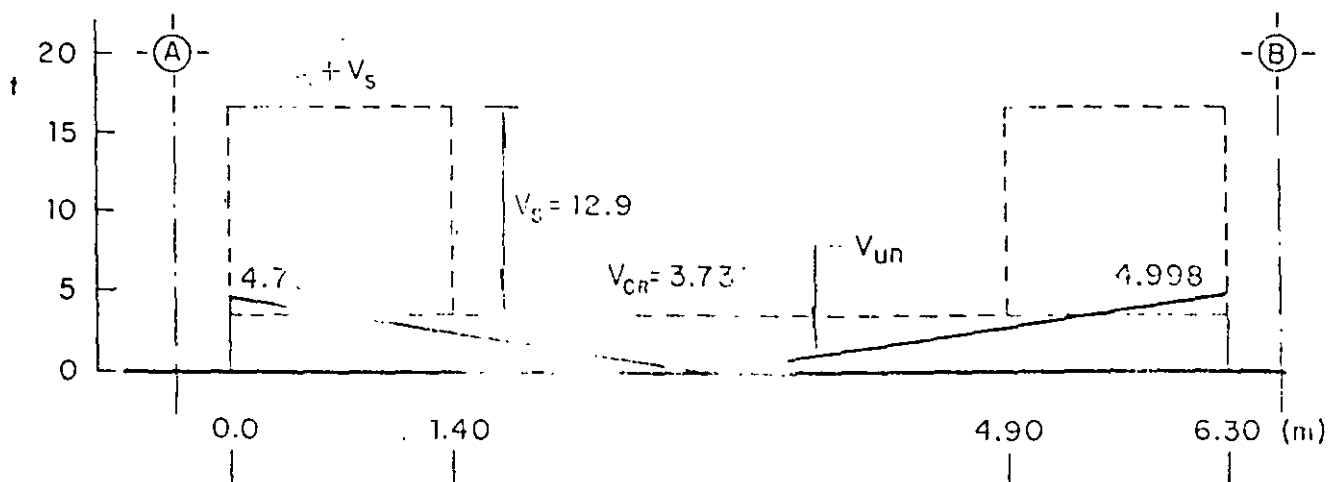
$$V_s = 0$$

$$4.90 \leq x \leq 6.30 \text{ m} \quad \text{est } \# 2 \text{ de } 4 \text{ ramas } @ 12 \text{ cm}$$

$$V_s = 12900 \text{ kg}$$

La fuerza cortante correspondiente a esta nervadura es

$$V_{un} = 0.75 V_u \cdot \frac{30}{110} = 0.2045 V_u$$



Bajo cargas muerta y viva máxima, en toda la nervadura no se requiere refuerzo transversal adicional al calculado cuando se revisó la tensión diagonal alrededor de la columna.

Al final del ejemplo se incluyen figuras que muestran el refuerzo transversal en las distintas nervaduras.

Nervaduras de franja central ($b = 10$ cm)

Resistencia que suministra el concreto

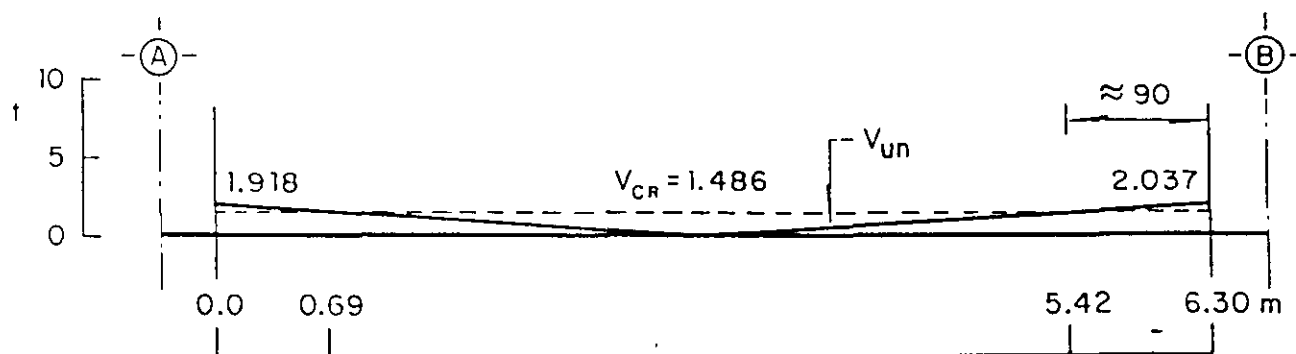
En toda la nervadura y para cada lecho

$$p = 0.0055 \quad (1 \# 5 \text{ en cada lecho})$$

$$V_{CR} = 0.8 \times 10 \times 36 (0.2 + 30 \times 0.0055) 14.14 = 1486 \text{ kg}$$

La fuerza cortante que corresponde a esta nervadura es

$$V_{un} = 0.25 V_u \times \frac{10}{30} = 0.08333 V_u$$



Revisión de la sección de fuerza cortante máxima (sección en el extremo derecho)

$$V_{un} = 2037 \text{ kg}$$

$$\text{Límite } 1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 10 \times 36 \times 14.14 = 6108 \text{ kg}$$

ya que $V_{cR} < V_u < 1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, la separación del refuerzo transversal no será mayor que $0.5d = 0.5 \times 36 = 18 \text{ cm}$

Separación teórica con grapas # 2

$$s = \frac{0.8 \times 0.32 \times 4200 \times 36}{2037 - 1486} = 70.25 \text{ cm}$$

pero no mayor que

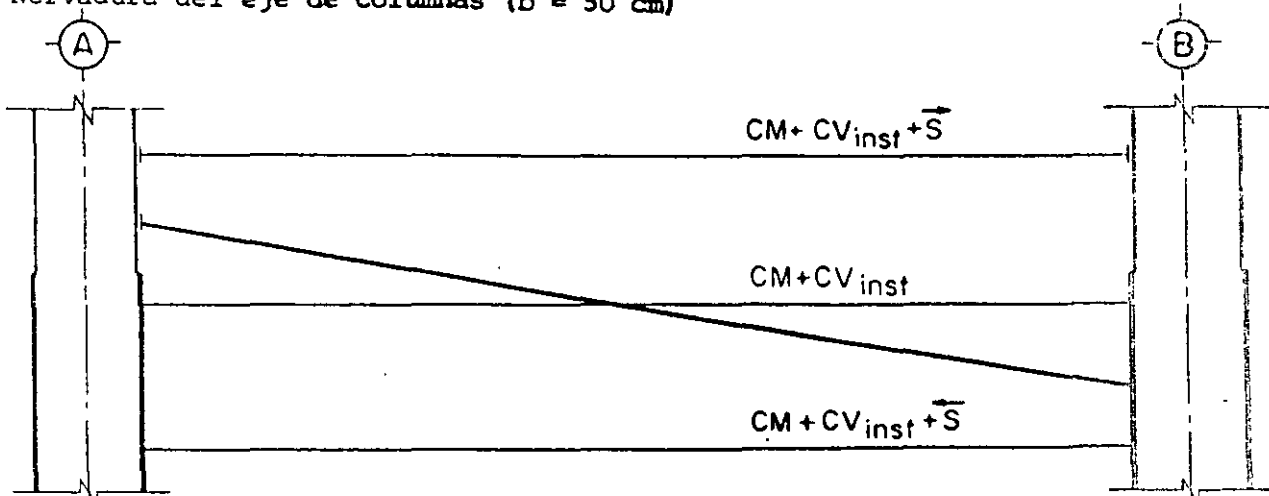
$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5b} = \frac{0.8 \times 0.32 \times 4200}{3.5 \times 10} = 30.72 \text{ cm}$$

Rige $s = 18 \text{ cm}$

Por resistencia se colocarán en cada extremo de las nervaduras grapas # 2 @ 18 cm en una longitud de 90 cm a partir de la prolongación del paño de la columna. Véanse las figuras que se presentan al final del ejemplo.

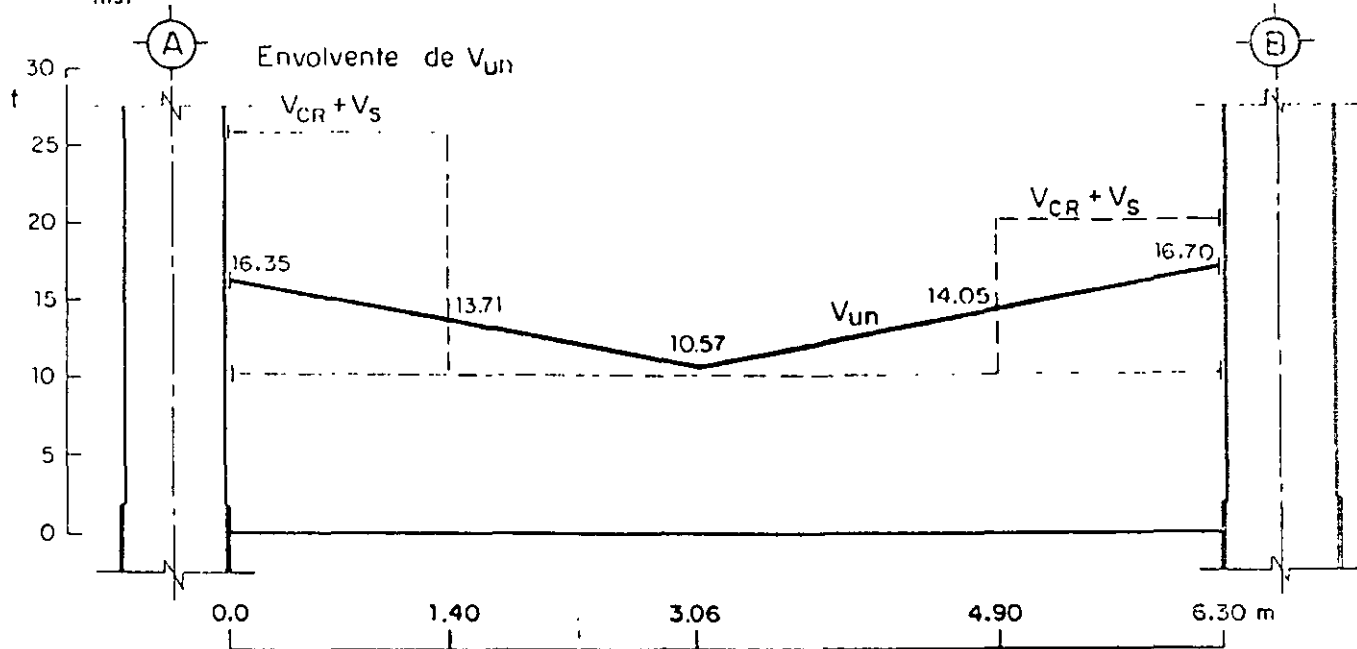
25 b) Bajo cargas muerta, viva instantánea y sismo

Nervadura del eje de columnas ($b = 50 \text{ cm}$)



26

$CM + CV_{inst} + S$	4.357	15.18	t
$(CM + CV_{inst} + S) 1.1$	4.793	16.70	t
$CM + CV_{inst} + S$	14.86	4.04	t
$(CM + CV_{inst} + S) 1.1$	16.35	4.44	t



Resistencia que suministra el concreto

En toda la nervadura y para cada lecho $p > 0.01$, por tanto

$$V_{cR} = 0.8 \times 50 \times 36 \times 0.5 \times 14.14 = 10180 \text{ kg}$$

Resistencia que suministran los estribos que resultaron al revisar la tensión diagonal alrededor de las columnas y como viga ancha bajo cargas muerta y viva máxima (en esta última condición no se requirieron estribos adicionales).

$0 \leq x \leq 1.40\text{m}$ est # 2 de 6 ramas @ 12 cm

$$V_s = \frac{0.8 \times 1.92 \times 4200 \times 36}{12} = 19350 \text{ kg}$$

$1.40 \leq x \leq 4.90 \text{ m}$

$$V_s = 0$$

$4.90 \leq x \leq 6.30 \text{ m}$, est # 2 de 4 ramas @ 12 cm

$$V_s = \frac{0.8 \times 1.28 \times 4200 \times 36}{12} = 12900 \text{ kg}$$

De acuerdo con la figura de envolvente de V_{un} , la sección crítica por fuerza cortante corresponde a $x = 4.90 \text{ m}$

En dicha sección $V_u = 14050 \text{ kg}$

Límite $1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 1.5 \times 0.8 \times 50 \times 36 \times 14.14 = 30540 \text{ kg}$

Puesto que $V_{CR} < V_u < 1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$

la separación del refuerzo transversal no será mayor que $0.5d = 18 \text{ cm}$

Separación teórica con est # 2 de 4 ramas

$$s = \frac{0.8 \times 1.28 \times 4200 \times 36}{14050 - 10180} = 40.01 \text{ cm}$$

pero no mayor que

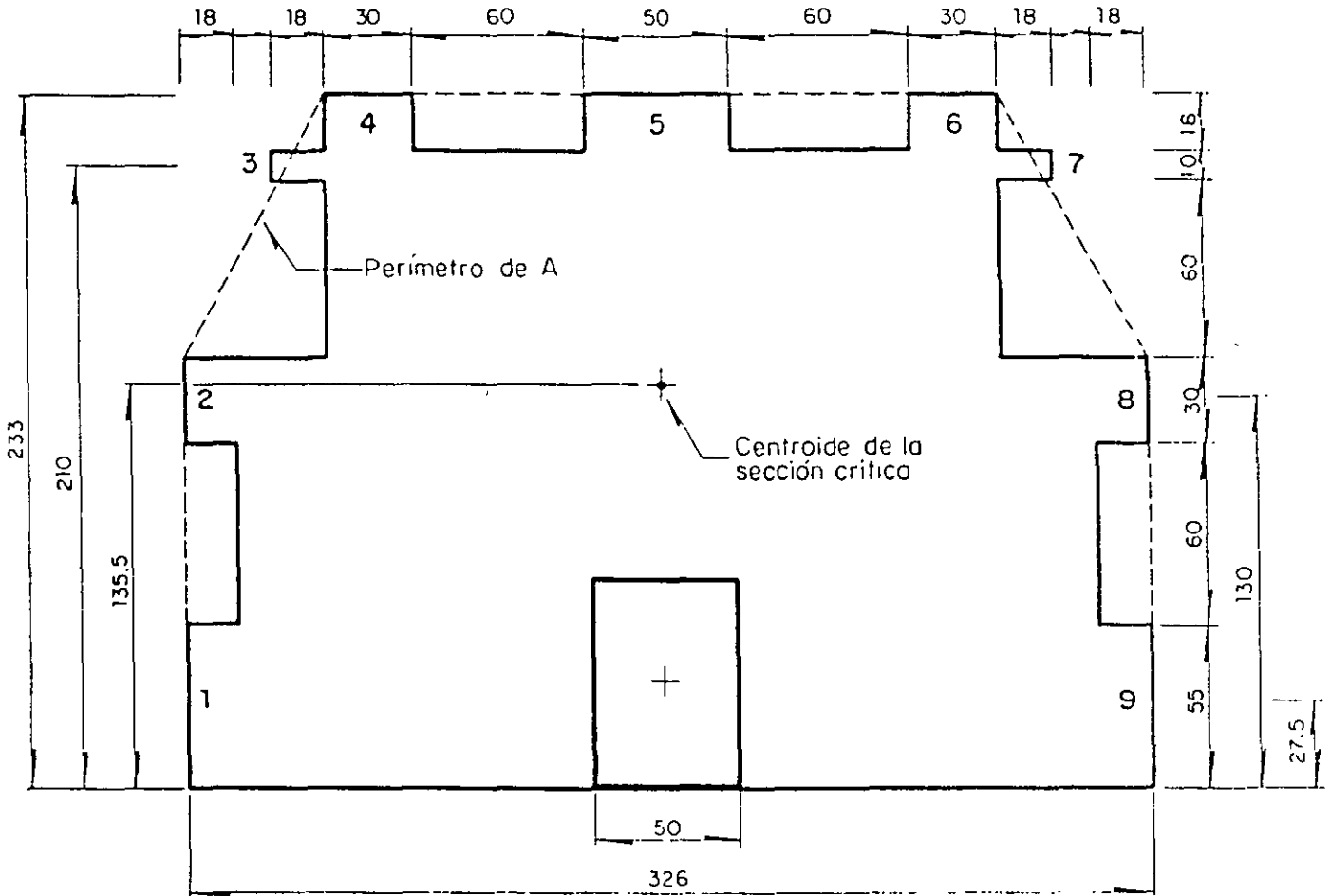
$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5b} = \frac{0.8 \times 1.28 \times 4200}{3.5 \times 50} = 24.58 \text{ cm}$$

luego, se colocarán est. # 2 de 4 ramas @ 18 cm en los 3.50 m centrales de la nervadura, que es la zona donde no se requirieron estribos al revisar la tensión diagonal alrededor de las columnas. Veáanse las figuras que se presentan al final del ejemplo.

REVISION POR TENSION DIAGONAL DE LA SECCION CRITICA SITUADA A $d/2$ DE LA PERIFERIA DE LA ZONA MACIZA QUE RODEA A LA COLUMNA EXTERIOR, 2A

27

Revisión bajo cargas muerta, viva instantánea y sismo



Dimensiones, en cm

La fuerza cortante en cada nervadura, V_i , se calcula con la expresión:

28

$$V_i = \frac{(V_u - Aw_u) a_i}{\sum a_i} + \frac{c_i a_i}{\sum c_i^2 a_i} \alpha [M_u + Aw_u (e-f) - V_u e]$$

donde:

$V_u - Aw_u$ fuerza cortante de diseño en la sección crítica

a_i área transversal de la nervadura i en la sección crítica

V_u fuerza cortante de diseño calculada en el eje de la columna

A área de la losa limitada por la sección crítica

w_u carga de diseño por m^2 de losa

c_i distancia del centroide de la sección crítica al centroide de la sección transversal de la nervadura i

α fracción del momento transmitida por fuerzas cortantes en las nervaduras

$M_u - A w_u (e-f) - V_u e = m_d$ momento que actúa en la sección crítica cuando la fuerza cortante $V_u - A w_u$ pasa por el centroide de dicha sección crítica.

M_u momento de diseño que se transmite entre losa y columna, valuado en el centro del nudo

e distancia del eje de la columna al centroide de la sección crítica

f distancia del eje de la columna a la resultante de la carga que actúa en el área A

Cálculo de las constantes que intervienen en la expresión para V_i

Centroide de la sección crítica:

$$y = \frac{233 (30 + 50 + 30) + 2 (210 \times 10 + 130 \times 30 + 27.5 \times 55)}{30 + 50 + 30 + 2 (10 + 30 + 55)} = \underline{135.5 \text{ cm}}$$

Posición de la resultante de la carga que actúa en el área A :

$$\frac{326 \times 145 \times \frac{145}{2} + \frac{326 + 230}{2} \times 88 \times \left[145 + \frac{88}{3} \cdot \frac{326 + 2 \times 230}{326 + 230} \right]}{326 \times 145 + \frac{326 + 230}{2} \times 88} =$$

$$= \frac{3427000 + 24460 (186.5)}{71730} = 111.4 \text{ cm}$$

$V_u = 30270 \text{ kg}$ (de la revisión por tensión diagonal alrededor de la columna)

$M_u = 57.16 \times 10^5 \text{ kg-cm}$ (ídem)

$$w_u = 1.1 \times 0.1009 = 0.1110 \text{ kg/cm}^2$$

$$e = 135.5 - 35.0 = 100.5 \text{ cm}$$

$$f = 111.4 - 35.0 = 76.40 \text{ cm}$$

$$\alpha = 0.404$$

$$A = 326 \times 145 + 88 (326 + 230)/2 = 71730 \text{ cm}^2$$

$$V_u - Aw_u = 30270 - 71730 \times 0.1110 = 22310 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} m_d = M_u + Aw_u (e-f) - V_u e &= 57.16 \times 10^5 + 71730 \times 0.1110 (100.5 - 76.40) - 30270 \times 100.5 \\ &= 28.66 \times 10^5 \text{ kg-cm} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$V_i = \frac{22310 \times a_i}{\Sigma a_i} + \frac{c_i a_i}{\Sigma c_i^2 a_i} \times 0.404 \times 28.66 \times 10^5$$

$$V_i = \frac{22310 a_i}{\Sigma a_i} + \frac{c_i a_i}{\Sigma c_i^2 a_i} \times 11.58 \times 10^5$$

En la tabla siguiente se muestran los cálculos para obtener las fuerzas cortantes en la sección crítica de las nervaduras 4, 5 y 6.

Nervadura i	a_i (cm ²)	c_i (cm)	$a_i c_i$ (cm ³)	$a_i c_i^2$ (cm ⁴)	$\frac{a_i}{\Sigma a_i}$	$\frac{a_i c_i}{\Sigma a_i c_i}$ (1/cm)	$\frac{(V_u - A_w) a_i}{\Sigma a_i}$ (kg)	$\frac{a_i c_i \alpha m_d}{\Sigma a_i c_i^2}$ (kg)	V_i (kg)
1	2200	108.0	237600	25660000					
2	1200	5.5	6600	36300					
3	400	74.5	29800	2220000					
4	1200	97.5	117000	11410000	0.1	0.001198	2231	1387	3618
5	2000	97.75	195000	19010000	0.1667	0.001997	3719	2312	6031
6	1200	97.5	117000	11410000	0.1	0.001198	2231	1387	3618
7	400	74.5	29800	2220000					
8	1200	5.5	6600	36300					
9	2200	108.0	237600	25660000					

Sumas 12000 97660000

Fuerzas cortantes resistentes por nervadura (véanse los "cálculos para el refuerzo por fuerza cortante" de este mismo ejemplo).

Nervadura del eje de columnas (nervadura 5)

Resistencia que suministra el concreto

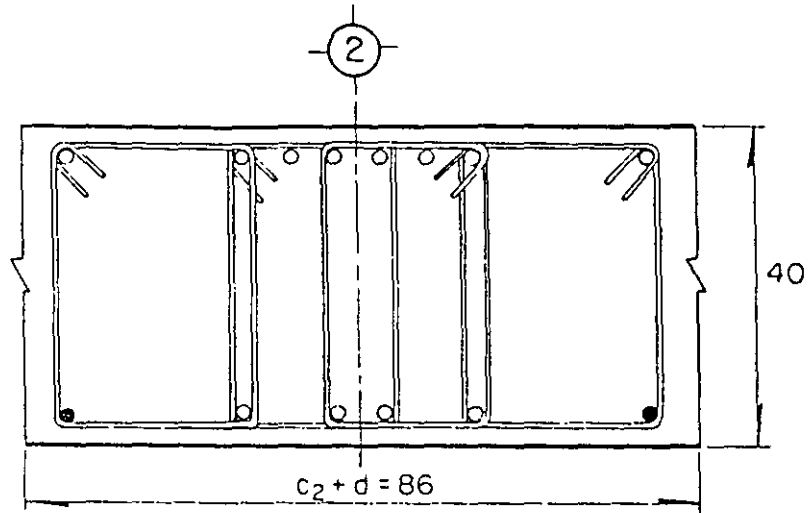
$$V_{CR} = 10180 \text{ kg} > V_5 = 6031 \text{ kg}$$

Nervaduras adyacentes a la del eje de columnas (nervaduras 4 y 6)

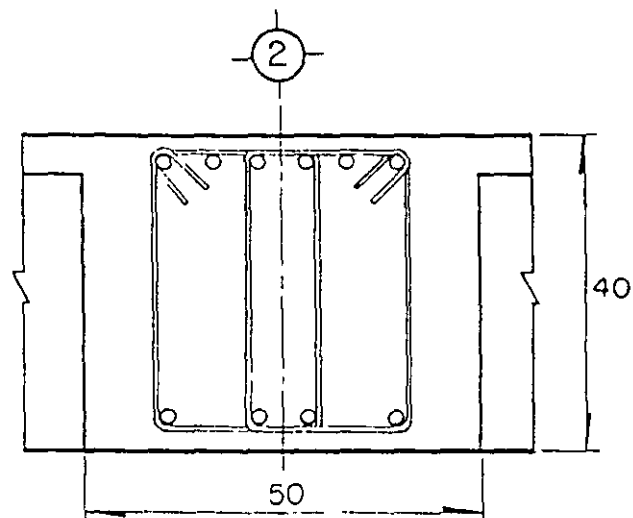
Resistencia que suministra el concreto

$$V_{CR} = 3736 \text{ kg} > V_4 = V_6 = 3618 \text{ kg} \quad \text{luego, no es necesario modificar el refuerzo}$$

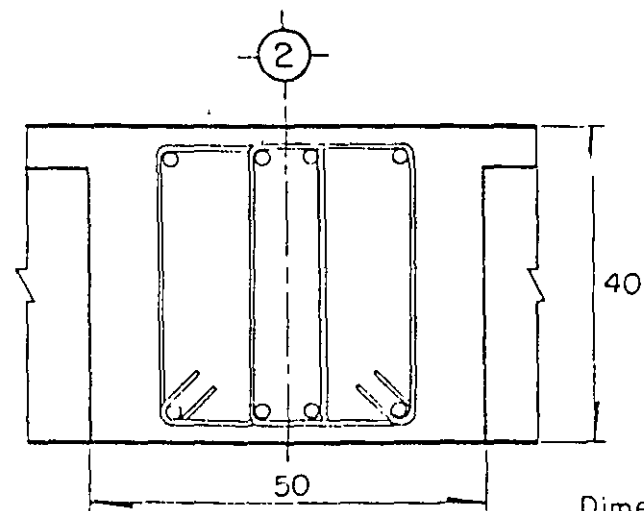
transversal de las nervaduras que se había calculado



Sección 1-1
(Juegos de cuatro estribos N°2)



Sección 2-2
(Juegos de dos estribos N°2)



- Barra N°8
- Barra N°5

Dimensiones, en cm

Sección 3-3
(Juegos de dos estribos N°2)

COMENTARIOS

1. En el ejemplo se ilustra el dimensionamiento en una dirección de la losa del nivel 2 de un edificio de cuatro niveles formado por losas planas aligeradas y columnas. El edificio está destinado a oficinas (grupo B) y se encuentra situado en la zona III. En un caso real habría que dimensionar también en la dirección perpendicular. La dirección que se estudia en el ejemplo es la que tiene claros de 7 metros. De acuerdo con el inciso 6.2 de las Normas, se aplicó $Q=2$.
2. Para estimar el peralte debe aplicarse el inciso 6.11 de las Normas, así como el art 209 del Reglamento, procediendo por tanteos. En el ejemplo rigió el peralte de losa necesario para limitar las deformaciones laterales de entrepiso a 0.006 (art 209).
3. La revisión se efectúa de acuerdo con 6.10 y 2.1.5 h. Por brevedad, se ha omitido la revisión en cuanto a fuerza cortante como viga ancha; esta condición no suele requerir, pero sí hay que revisarla en un diseño real.
4. Estas acciones internas provienen del análisis de la estructura y corresponden a un marco interior corto. Las rigideces y las cargas de los marcos equivalentes se determinaron idealizando la estructura en marcos ortogonales, de acuerdo con los incisos 6.3 y 6.4 de las Normas. El análisis se realizó despreciando las dimensiones transversales de los elementos, por lo que los momentos y fuerzas que se muestran actúan en los ejes de la estructura. Las fuerzas cortantes bajo cargas muertas y vivas (38.69t y 36.45t para la columna 2B, y 18.28t y 17.9t para la 2A) son los promedios de las obtenidas en los dos marcos ortogonales de los cuales forman parte las columnas 2B y 2A.
5. Al valuar V_u se despreció la carga que actúa en el área limitada por la sección crítica. Al valuar M_u se despreció la excentricidad mínima de las fuerzas de compresión de las columnas.

6. La fuerza cortante debida a cargas muerta y viva instantánea disminuye en menor proporción que lo que disminuyen los momentos, con relación a la condición de cargas muerta y viva máxima, a causa del peso de la fachada el cual es independiente de la carga viva, mientras que los momentos sí dependen de ella.
7. Es la ec. 2.26 en la cual se ha sustituido $c_1 + d$ por $c_1 + d/2$.
8. Véanse los comentarios a la sección 6.5 de las Normas, en particular los relativos a la fig 6.9.
9. El área de 16.30 cm^2 corresponde al momento negativo total exterior por $CM + CV_{\text{máx}}$; según 6.6I debe colocarse toda ella en un ancho igual a $c_2 + 3h$. El área 9.049 cm^2 corresponde, según 6.9, al 60 por ciento del momento positivo total por $CM + CV_{\text{máx}}$; el área 15.22 cm^2 corresponde al 75 por ciento del momento negativo total interior por $CM + CV_{\text{máx}}$. Los valores anteriores están calculados en el apartado "Cálculos para dimensionamiento por flexión" de este ejemplo.
10. Son las áreas correspondientes a los momentos que, según la sección 6.9 de las Normas, actúan en las franjas centrales.
11. En cuanto al valor 16.3 cm^2 , véase el comentario 9. El área 4.11 cm^2 es la que queda incluida en el ancho $c_2 + 3h = 170 \text{ cm}$, suponiendo que el refuerzo de la franja de columna se reparte en proporción al ancho de las nervaduras, es decir, $4.11 = 9.04 \times 50 / (50 + 2 \times 30)$. El ancho $c_2 + 3h$ sólo incluye a la nervadura del eje, cuyo ancho es de 50 cm ; la franja de columna incluye la nervadura del eje y las dos adyacentes de 30 cm de ancho. El refuerzo de 4.11 cm^2 queda alojado, por tanto, en la nervadura del eje de columnas. El área 7.61 cm^2 es la mitad del área necesaria en la franja de columna (15.22 cm^2), a fin de cumplir con el requisito de 6.6I.

12. Las áreas de refuerzo del renglón 4 son las que debe llevar la franja de columna fuera del ancho $c_2 + 3h$.
13. Las áreas de refuerzo de los renglones 5 y 6 se calcularon con los momentos que son la diferencia entre los que se tienen bajo $CM + CV_{inst} + S$ y los correspondientes a $CM + CV_{m\acute{a}x}$. Este refuerzo debe colocarse en un ancho igual a $c_2 + 3h$, según 6.6-II.
14. Las áreas de los renglones 7 y 8 son las totales que deben quedar en el ancho $c_2 + 3h$; se obtienen sumando las del renglón 3 a las de los renglones 5 ó 6, según correspondan a momento negativo o positivo.
15. Se propone una distribución de casetones de 60 x 60 cm, la cual debe cumplir con los requisitos de la sección 6.1 de las Normas, en cuanto a anchos de nervaduras, dimensiones de zonas macizas, etc.
16. El mínimo valor que puede adquirir el brazo interno ($d-0.5a$) es el que corresponde a la máxima área de acero, pues por equilibrio de fuerzas con la máxima fuerza de tensión se tiene la máxima profundidad del bloque de compresión (a). Al calcular en el resto del elemento las áreas de acero con el brazo mínimo, se obtienen valores algo mayores que los que resultarían si se calcularan en cada sección. Se procede así por la ventaja que significa en el cálculo del refuerzo y en el corte de barras que el área de acero sea proporcional al momento resistente.
17. El refuerzo mostrado en la figura se obtiene con las áreas de los renglones 7 y 8 de la tabla de áreas teóricas. Los cortes de barras también deben basarse en los mencionados renglones 7 y 8 aplicando los requisitos de anclaje de 3.1; para este fin se puede suponer que las áreas de acero necesarias son proporcionales a la envolvente de M_u . Las áreas suministradas por las barras indicadas para momentos negativos son algo menores que las teóricas, porque se aplicó cierta redistribución de momentos suministrando un refuerzo positivo ligeramente mayor que el necesario (inciso 1.3.1

de las Normas). Se recurrió a la redistribución a fin de descongestionar la zona de refuerzo negativo. De las ocho barras # 8 para momento negativo exterior, en la nervadura del eje de columnas sólo van seis de ellas; las dos barras restantes se alojaron en la zona maciza dentro del ancho $c_2 + 3h$. Las seis barras de la nervadura del eje se anclan en el núcleo de la columna con ganchos a 90° . La disposición anterior se ilustra en las figuras de la unión exterior losa-columna.

La aquí descrita es una posible distribución del refuerzo; podría haberse optado por otra y por otros diámetros de barras. Al definir la disposición del refuerzo, debe tenerse presente la sencillez y la facilidad en la construcción. Se recomienda usar pocos diámetros distintos de barras y evitar congestionamiento del refuerzo; también se recomienda que en una misma sección ni el refuerzo positivo ni el negativo conste de barras de diámetros muy distintos.

18. En la figura se muestra el refuerzo de una de las nervaduras adyacentes a la del eje de columnas. Este refuerzo se obtiene del renglón 4 de la tabla de áreas teóricas, teniendo en cuenta que son dos las nervaduras adyacentes al eje. Las áreas del renglón 4 representan el refuerzo que debe colocarse en la franja de columna fuera del ancho $c_2 + 3h$. Se optó por usar 3 barras # 4 en cada lecho en lugar de 2 # 5 para cumplir con el requisito de 2.1.5 h, en el sentido de que la separación transversal entre ramas verticales de los estribos no debe exceder de 20 cm.
19. El refuerzo de las nervaduras de franja central se obtiene del renglón 2 de la tabla de áreas teóricas, tomando en cuenta que son tres nervaduras.
20. En la revisión por fuerza cortante como viga ancha, bajo cargas muerta y viva máxima se sigue el criterio establecido en el párrafo I de la sección 2.1.5 h) de las Normas; bajo cargas muerta, viva instantánea y sismo, se aplica el criterio de resistir en un ancho

igual a $c_2 + 3h$ la fuerza cortante causada por el sismo, en acuerdo con la forma de proceder al diseñar por flexión. Las distintas nervaduras se revisan por separado, empezando por la situada en el eje de columnas.

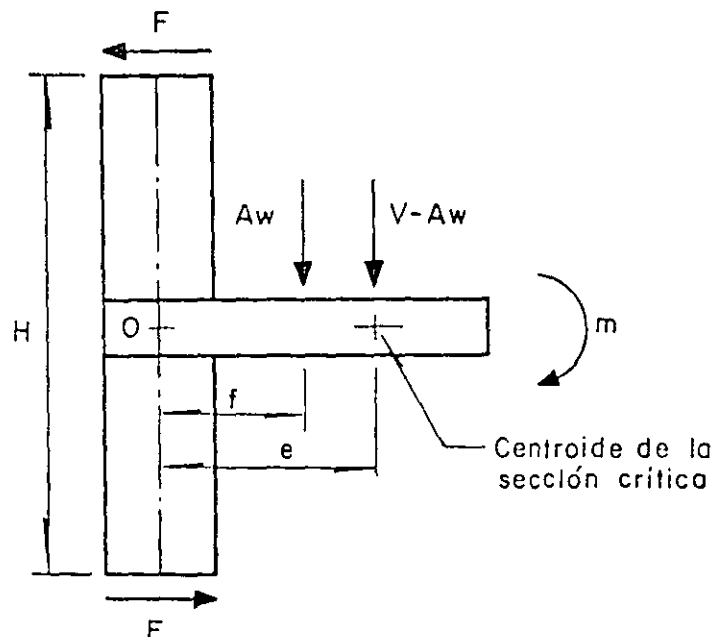
21. Al revisar la tensión diagonal alrededor de la columna 2A se obtuvieron estribos de ocho ramas a cada 12 cm que abarcan aproximadamente un ancho de 80 cm de la zona maciza. En la revisión como viga ancha conservadoramente sólo se consideraron seis ramas de dichos estribos, que son las que quedan incluidas en el ancho de la nervadura (50 cm). La cantidad x es la distancia desde el paño de la columna.
22. La fuerza $0.75 V_u$ es la que le corresponde a la franja de columna. El ancho de la nervadura del eje es de 50 cm, y la suma de los anchos de las nervaduras que quedan en la franja de columnas es $50+2x30 = 110$ cm. (V_u es la fuerza cortante de diseño que actúa en todo el ancho).
23. En el paño del apoyo izquierdo, V_{un} vale $0.3409 \times 23.02 = 7.848t$.
24. La cantidad V_s es la resistencia suministrada por los estribos que resultaron al revisar la tensión diagonal alrededor de las columnas. La cantidad V_{un} es la fuerza cortante de diseño que actúa en la nervadura, y que en el extremo izquierdo vale: $0.2045 \times 23.02 = 4.708t$.
25. A fin de ir de acuerdo con el criterio de resistir el efecto del sismo en el ancho $c_2 + 3h$, se supondrá que toda la fuerza cortante causada por el sismo actúa en dicho ancho. En el ejemplo, resulta que en $c_2 + 3h$ sólo queda la nervadura del eje por lo que la totalidad de la fuerza cortante de sismo se asignará a esa nervadura.
26. El diagrama de fuerza cortante sobre la nervadura del eje bajo cargas muerta y viva instantánea se obtiene del de fuerza cortante en todo el ancho, tomando, por una parte, el 75 por ciento, que es lo que actúa en la franja de columna y, por otra, haciendo que la fuerza que actúa en la nervadura sea proporcional a su ancho. Al dia-

grama así obtenido se suma el efecto total del sismo. En esta forma, la fuerza cortante en el extremo izquierdo (14.86t) se obtiene como sigue:

$$14.86 = 0.75 \times 15.41 \frac{50}{50 + 60} + 9.61$$

27. En el ejemplo sólo se revisó la condición $CM + CV_{inst} + sismo$, porque es la que rigió por amplio margen al revisar la tensión diagonal alrededor de la columna. En casos en que ese margen sea pequeño y haya duda sobre cual condición rige, habrá que revisar también bajo $CM + CV_{m\acute{a}x}$.
28. La expresión para V_i supone variación lineal de las fuerzas cortantes en las nervaduras; su deducción puede consultarse en la ref 6.1 de los Comentarios a las Normas. La fuerza cortante ($V_u - Aw_u$) actuando en el centroide de la sección crítica causa una distribución uniforme de esfuerzos cortantes en dicha sección. El momento $M_u + Aw_u(e-f) - V_u e$ es el que actúa de la losa sobre la sección crítica cuando la fuerza ($V_u - Aw_u$) pasa por el centroide de esa sección; se supuso que sólo una fracción de este momento es la que causa fuerzas cortantes en las nervaduras, y que esta fracción es igual al valor de α usado en la revisión por cortante alrededor de la columna.

En la figura siguiente se presenta el equilibrio de la porción de estructura comprendida entre la sección crítica de la losa y los puntos de inflexión de las columnas, así como la obtención del momento que interviene en la fórmula de V_i .



$$\Sigma M_o = 0$$

$$FH - Awf - (V-Aw)e - m = 0$$

$$m = FH - Awf - (V-Aw)e$$

$$m = M + Aw(e-f) - Ve$$

$$(M = FH)$$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MODULO III DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO CA022

**TEMA: APUNTES DE CIMENTACIONES DISEÑO
ESTRUCTURAL DE CIMIENTOS**

**Agustín Deméneghi Colina
Margarita Puebla Cadena
Héctor Sanginés García**

**PALACIO DE MINERÍA
MAYO DEL 2003**

APUNTES DE CIMENTACIONES DISEÑO ESTRUCTURAL DE CIMENTOS

Agustín Deméneghi Colina*
Margarita Puebla Cadena*
Héctor Sanginés García*

Diseño estructural de una zapata

a) Determinación de elementos mecánicos

Consideremos una zapata sometida a carga vertical y momento. El diagrama de reacción del terreno es de forma aproximadamente trapezoidal, tal como se indica en la fig 1a. Con el propósito de simplificar los cálculos, en la práctica es usual sustituir la reacción trapezoidal por una reacción rectangular (fig 1b); el ancho B' de esta reacción está dado por

$$B' = B - 2e \quad (1)$$

donde e es la excentricidad, que vale

$$e = M/\Sigma Q \quad (2)$$

Las cargas que obran sobre el ala de la zapata se muestran en la fig 2. La carga uniforme para cálculo estructural q_e vale

$$q_e = q' - W_{feff} - W_{zap} \quad (3)$$

El ala de la zapata se puede considerar como un cantiliver sometido a una carga uniforme q_e de abajo hacia arriba. Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante sobre el ala de la zapata se exhiben en la fig 3. La fuerza cortante última y el momento último se obtienen multiplicando estos diagramas por el factor de carga F_c correspondiente.

En el caso de una zapata sometida a carga vertical y dos momentos, el diagrama de reacción se muestra en la fig 4a. Para fines de cálculo, este diagrama se sustituye por el de la

fig 4b (Meli, 1985), en el que las dimensiones reducidas B' y L' valen

$$B' = B - 2e_x, \quad e_x = M_y/\Sigma Q \quad (4)$$

$$L' = L - 2e_y, \quad e_y = M_x/\Sigma Q \quad (5)$$

El diseño por tensión diagonal y por flexión se lleva a cabo haciendo uso de la reacción uniforme del terreno obtenida con las dimensiones reducidas B' y L' de las ecs 4 y 5, es decir

$$q' = \Sigma Q/(B'L') \quad (A)$$

b) Diseño estructural

b.1) Tensión diagonal

En una zona cercana al paño de la columna o muro que llega a la zapata se puede presentar una falla por tensión diagonal, ocasionada ésta a su vez por esfuerzo cortante (fig 5). Esta revisión se lleva a cabo verificando que la fuerza cortante última a una distancia d del paño de la columna o muro sea menor que la fuerza cortante resistente.

Para valuar la fuerza cortante resistente, las Normas de Concreto (1987) contienen las siguientes expresiones

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} \quad (6)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (7)$$

donde

b = ancho de cálculo del elemento estructural

* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

d = peralte efectivo del elemento estructural
 p = cuantía de acero
 $f_c^* = 0.8 f_c'$ (8)
 F_R = factor de resistencia

En elementos anchos, como puede ser el ala de una zapata, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación M/Vd no exceda de 2, la fuerza resistente V_{cR} puede tomarse igual a $0.5F_Rbd \sqrt{f_c^*}$, independientemente de la cuantía de refuerzo.

b.2) Flexión

La sección crítica por flexión en el ala de la zapata depende del material que forma la columna o muro que llega a la zapata. En la fig 6 se presenta la sección crítica por flexión para tres diferentes clases de material.

La revisión por flexión se realiza verificando que el momento último en la sección crítica sea menor que el momento resistente en dicha sección. A continuación se presenta un resumen de las expresiones de las Normas de Concreto (1987) para la revisión por flexión.

El momento resistente, en una sección subreforzada, está dado por

$$M_R = F_R b d^2 f_c^* q (1-0.5q) \quad (9)$$

$$q = p f_y / f_c^*$$

El acero mínimo por flexión vale

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f_c'} / f_y \quad (10)$$

mientras que el máximo es $0.75p_b$, donde p_b es el porcentaje balanceado, que vale

$$p_b = (f_c^*/f_y) [4800/(f_y + 6000)] \quad (11)$$

donde

$$f_c^* = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (12a)$$

$$f_c^* = (1.05 - f_c^*/250) \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (12b)$$

La cuantía de acero necesario para resistir un momento último M_u se obtiene haciendo $M_u = M_R$ en la ec 9, y despejando q

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f_c^*} \quad (13)$$

Pero

$$p = q f_c^* / f_y \quad (14)$$

$$A_s = p b d \quad (15)$$

La separación de las varillas se obtiene

$$s = a_s g / A_s \quad (16)$$

donde

s = separación entre varillas

a_s = área de la varilla que se emplea

g = distancia para la que se requiere el área A_s

A_s = área de acero requerida

Por otra parte, en la dirección del lado corto de una zapata rectangular se concentran los momentos flexionantes cerca de la columna, por lo que el refuerzo paralelo al lado corto deber ser mayor en la parte central (Meli, 1985). En la fig 7 se muestra la forma como debe colocarse el refuerzo; en la franja central de ancho B se coloca una fracción igual a $2B/(L+B)$ de la cantidad total de refuerzo para el largo L , mientras que el resto se reparte en las franjas laterales. Así, llamando A_s al área de acero por metro de longitud de la zapata, la cantidad total de refuerzo $A_s' = A_s L/100$, y las separaciones del refuerzo en las franjas están dadas por

En la franja central de ancho B

$$s = a_s(B+L)/2A_s' = 100a_s(B+L)/(2A_s L) \quad (16a)$$

En las franjas laterales

$$s = a_s(B+L)/A_s' = 100a_s(B+L)/(A_s L) \quad (16b)$$

b.3) Penetración

De acuerdo con las Normas de Concreto, la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual a $d/2$, siendo d el peralte efectivo de la losa (fig 8).

Cuando haya transferencia de momento se supondrá que una fracción de momento dada por

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} \quad (17)$$

se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño v_u se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (fig 8), es decir

$$v_{AB} = V/A_c + \alpha M c_{AB}/J_c \quad (18)$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d) \quad (19)$$

$$J_c = d(c_1 + d)^3/6 + (c_1 + d)d^3/6 + d(c_2 + d)(c_1 + d)^2/2 \quad (20)$$

En columnas rectangulares c_1 es la dimensión paralela al momento transmitido y c_2 es la dimensión perpendicular a c_1 .

En las expresiones anteriores, V es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta q_v , restando a la reacción del terreno las presiones debidas a peso propio de zapata y relleno.

El esfuerzo cortante de diseño v_{ABu} (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores

$$v_{cR1} = F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \quad (21)$$

$$v_{cR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (22)$$

$$f_c^* = 0.8 f_c' \quad (23)$$

a menos que se suministre refuerzo. γ es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción.

b.4) Acero por temperatura

Cuando el espesor de la zapata es mayor que 15 cm se requiere colocar acero por temperatura en la porción sometida a compresión (donde no se requiere acero por motivos estructurales). Para esto, se emplea la siguiente ecuación

$$A_s = 66000 (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (24)$$

en que

A_s = área de acero requerida por temperatura, para un espesor $h/2$ de la losa de la zapata, en cm^2/m

$h/2$ = semiespesor de la losa de la zapata, en cm

Cuando el elemento estructural está en contacto con el suelo, se recomienda emplear por temperatura un área de acero igual a $1.5A_s$. Empleando $1.5A_s$ en vez de A_s en la ec 24, dado que los cimientos están siempre en contacto con el terreno, obtenemos la siguiente expresión

$$A_s = 99000 (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (25)$$

Ejemplo de diseño estructural de una zapata rectangular

Hacer el diseño estructural de la zapata rectangular de concreto reforzado de la fig 9.

Columna de 25 por 30 cm. Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm. Profundidad de desplante = 60 cm. Considerar en el concreto reforzado $f_c' = 200 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

$\Sigma Q' = 26 \text{ t}$, $M_y = 4.2 \text{ t}\cdot\text{m}$, $M_x = 6.8 \text{ t}\cdot\text{m}$

Solución

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale

$$\Sigma Q = 26 + 1.7(2)(0.3)2.4 + 0.25(0.3)(0.3)(2.4)$$

$$+ ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(1.6) = 30.098 \text{ t}$$

$$e_x = M_y / \Sigma Q = 4.2 / 30.098 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / \Sigma Q = 6.8 / 30.098 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.421 \text{ m}, \quad L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$$

La presión de contacto media entre cimiento y terreno vale

$$q = 30.098 / 1.7(2) = 8.852 \text{ t/m}^2$$

a) Penetración

De acuerdo con las Normas de Concreto, la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual a $d/2$, siendo d el peralte efectivo de la losa (fig 8).

Revisaremos la penetración de la columna en la dirección del eje y .

Cuando haya transferencia de momento se supondrá que una fracción de momento dada por (ec 17)

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(0.3 + 0.264)/(0.25 + 0.264)}}$$

$$\alpha = 0.412$$

se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño v_u se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (fig 8), es decir

$$V_{AB} = V/A_c + \alpha M c_{AB}/J_c \quad (\text{ec } 18)$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d) \quad (\text{ec } 19)$$

$$A_c = 0.5692 \text{ m}^2$$

$$J_c = d(c_1 + d)^3/6 + (c_1 + d)d^3/6 + d(c_2 + d)(c_1 + d)^2/2 \quad (\text{ec } 20)$$

$$J_c = 0.031206 \text{ m}^4$$

En columnas rectangulares $c_1 = 0.3 \text{ m}$ es la dimensión paralela al momento transmitido y $c_2 = 0.25 \text{ m}$ es la dimensión perpendicular a c_1 .

En las expresiones anteriores, V es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta q_v , restando a la reacción del terreno las presiones debidas a peso propio de zapata y relleno:

$$q_v = 8.852 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 7.652 \text{ t/m}^2$$

$$V = 7.652 [1.7(2) - (0.25 + 0.264)(0.3 + 0.264)]$$

$$= 23.799 \text{ t}$$

$$c_{AB} = (0.3 + 0.264)/2 = 0.282 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ec 2

$$V_{AB} = 23.799/0.5692$$

$$+ 0.412(6.8)(0.282)/0.031206 = 67.13 \text{ t/m}^2$$

$$V_{ABu} = F_c V_{AB} = 1.4(67.13) = 93.98 \text{ t/m}^2$$

El esfuerzo cortante de diseño v_{ABu} (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores

$$v_{cR1} = F_R (0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \quad (\text{ec } 21)$$

$$v_{cR1} = 0.8 (0.5 + 1.7/2) \sqrt{160} = 13.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{cR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (\text{ec } 22)$$

$$v_{cR2} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = 0.8 f_c' \quad (\text{ec } 23)$$

a menos que se suministre refuerzo. $\gamma = 1.7/2 = 0.85$ es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción.

Se observa que

$$V_{ABu} = 9.40 \text{ kg/cm}^2 < v_{cR2} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 \therefore$$

Cumple

b) Tensión diagonal

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia d del paño de la columna. Haremos la revisión en la dirección del eje y . Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto (fig 10).

Cálculo del cortante último

Las fuerzas se calculan con la reacción neta del terreno (tomando en cuenta el efecto de los dos momentos M_x y M_y). La reacción vale (ec A)

$$q' = \Sigma Q/B'L' = 30.098/1.421(1.5482) = 13.681 \text{ t/m}^2$$

$$\text{La reacción neta } q_n' = 13.681 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 12.481 \text{ t/m}^2$$

Hallemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata, $b = 1 \text{ m}$)

$$V = 12.481(0.586) = 7.314 \text{ t}$$

$$M = 12.481(0.586)^2/2 = 2.143 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$V_u = 1.4(7.314) = 10.24 \text{ t}$$

En elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación M/Vd no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{cR} puede tomarse igual a $0.5F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente de la cuantía de refuerzo (Normas de Concreto, 1987).

Como trabajamos por metro de ancho de zapata $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm, y puesto que el diámetro de la varilla del N° 4 es de 1.27 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 30 - 3.6 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$.

En este caso se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo

$$B > 4d, \quad B = 170 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/Vd = 1.11 < 2 \therefore \text{cumple como elemento ancho}$$

$$V_{cR} = 0.5F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5(0.8)(100)(26.4)\sqrt{160}$$

$$V_{cR} = 13357 \text{ kg} > V_u = 10240 \text{ kg} \therefore \text{Cumple}$$

c) Flexión

Haremos el diseño por flexión en la dirección del eje y . El momento flexionante en la sección crítica vale (fig 10)

$$M = 12.481(0.85)^2/2 = 4.509 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_u = 1.4(4.509) = 6.312 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El acero mínimo por flexión es

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f_c'} / f_y \quad (\text{ec } 10)$$

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es $0.75 p_b$, donde p_b es el porcentaje balanceado

$$p_b = \frac{f_c' \cdot 4800}{f_y \cdot f_y + 6000} \quad (\text{ec } 11)$$

donde

$$f_c' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec } 12a)$$

$$f_c' = (1.05 - f_c^* / 1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ec } 12b)$$

$$p_{\max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesario para soportar un momento último M_u está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c'}} \quad (\text{ec } 13)$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(6.312 \times 10^5)}{0.9(100)(26.4)(136)}} = 0.07695$$

$$p = q f_c' / f_y \quad (\text{ec } 14)$$

$$p = 0.002492$$

$$A_s = p b d \quad (\text{ec } 15)$$

$$A_s = 6.578 \text{ cm}^2$$

La separación de varillas es

$$s = a_s g / A_s \quad (\text{ec } 16)$$

donde

$$a_s = \text{área de la varilla que se emplea} = 1.27 \text{ cm}^2 \quad (\text{N}^\circ 4)$$

g = distancia para la que se requiere el área de acero A_s , $g = 100 \text{ cm}$

$$A_s = \text{área de acero requerida} = 6.578 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo valores $s = 19 \text{ cm}$. En consecuencia, se necesitan varillas del N° 4 a cada 19 cm en el lecho inferior (fig 11).

Procediendo en forma similar, se requiere $A_s = 4.403 \text{ cm}^2$ en la dirección del lado largo de la zapata (eje x). En esta dirección debemos concentrar el refuerzo en la franja central de la zapata; aplicando las ecs 16a y 16b

Franja central, $s = 26 \text{ cm}$

Franjas laterales, $s = 53 \text{ cm}$

La separación mínima por flexión, aplicando la ec 10 resulta de 20 cm, por lo que usaremos $s = 20 \text{ cm}$ en la franja central y 30 cm en las franjas laterales (fig 11).

d) Temperatura

El acero del lecho superior se proporciona por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto, 1987)

$$A_s = \frac{66000(1.5)(h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (\text{ec } 25)$$

en que

A_s = área de acero necesaria por temperatura, en cm^2/m , para el semiespesor de losa $h/2$

$h/2$ = semiespesor de la losa de la zapata = $30/2 = 15 \text{ cm}$

Sustituyendo valores $A_s = 3.075 \text{ cm}^2$

Aplicando la ec 16, con varillas del N° 3 ($a_s = 0.712 \text{ cm}^2$), $s = 23 \text{ cm}$. Por lo tanto, se necesitan por temperatura varillas del N° 3 a cada 23 cm en el lecho superior.

En la fig 11 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

Ejemplo de diseño estructural de una zapata corrida

El diseño de una zapata corrida es similar al de una zapata aislada, con la diferencia que en aquella se debe dimensionar además la contratrabe de cimentación, y que en la zapata corrida no se hace la revisión por penetración.

Para ilustrar el proceso, hagamos el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 12.

Determinamos primeramente el momento de inercia de la zapata. El centro de gravedad queda a 26.09 cm de la base del cimiento (fig 12a), y el momento de inercia con respecto a dicho centro de gravedad vale 0.02982 m^4 .

Para el análisis de interacción dividimos cada contratrabe de 3.2 m de longitud en 4 barras, lo que da un total de 8 barras para las dos contratraves. Utilizando el procedimiento indicado en el capítulo anterior (Interacción suelo-estructura), se obtienen los diagramas de reacción y de asentamientos mostrados en la fig 13. Empleando las ecs 71 a 74 del capítulo anterior hallamos las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en los nudos de las barras; con las ecs 79 a 84 se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante indicados en la fig 14.

Diseño estructural de la contratrabe

a) Acero por flexión

La fracción de acero necesario para soportar un momento último M_u está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c'}} \quad (\text{ec } 13)$$

donde

$$p = q f_c' / f_y \quad (\text{ec } 14)$$

$$A_s = p b d \quad (\text{ec } 15)$$

Cálculo del acero positivo (lecho inferior de la contratrabe)

$$M_u = 15.2 \times 10^5 (1.4) = 21.28 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(21.28 \times 10^5)}{0.9(30)(81)^2(136)}} = 0.09262$$

$$p = 0.003$$

$$A_s = 7.288 \text{ cm}^2$$

Usamos 3 varillas del N° 6

Cálculo del acero negativo (lecho superior de la contratrabe)

$$M_u = 10.5 \times 10^5 (1.4) = 14.7 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$

$$p = 0.00204$$

$$A_s = 4.957 \text{ cm}^2$$

Usamos 2 varillas del N° 6

b) Revisión por fuerza cortante

La separación de estribos verticales está dada por (Normas de Concreto, 1987)

$$s = F_R A_v f_y d / (V_u - V_{cr}) \leq F_R A_v f_y / 3.5 b \quad (26)$$

A_v es el área transversal del refuerzo por tensión diagonal comprendido en una distancia s . V_{cr} se obtiene con las ec 6 ó la ec 7.

Utilicemos como estribos varillas del N° 3. Sustituyendo en la ec 26

$$s = 0.8 (2) (0.712) (4200) (81) / (35000 - 7115)$$

$$s = 13.9 \text{ cm}$$

En la fig 15 se muestra el armado de la contratrabe.

Diseño estructural de la losa de la zapata

a) Tensión diagonal

En la fig 13b se muestran la variación de la reacción del terreno a lo largo de la zapata corrida. El valor de 46.6 t/m en los extremos de la estructura no lo tomamos para el diseño estructural de la zapata porque se concentra bajo la carga de la columna y no se transmite a la zapata (de hecho, si utilizamos un mayor número de reacciones, los altos valores de éstas en los extremos quedan exclusivamente bajo las columnas). Haremos el diseño estructural para la reacción de 17.2 t/m (fig 13).

La reacción del terreno en unidades de esfuerzo vale

$$q = 17.2/1.6 = 10.75 \text{ t/m}^2$$

$$\text{La reacción neta } q_n = 10.75 - 0.2(2.4) - 0.65(1.6) = 10.75 - 1.52 = 9.23 \text{ t/m}^2$$

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia d del paño de la columna. Como trabajamos por metro de ancho de zapata $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. Dado que se cuele una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm, y puesto que el diámetro de la varilla del N° 3 es de 0.712 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 20 - 3.4 \text{ cm} = 16.6 \text{ cm}$.

Hallemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata, $b = 1 \text{ m}$; fig 16)

$$V = 9.23(0.484) = 4.467 \text{ t}$$

$$M = 9.23(0.484)^2/2 = 1.081 \text{ t.m}$$

$$V_u = 1.4(4.467) = 6.254 \text{ t}$$

En elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación M/Vd no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{cr} puede tomarse igual a $0.5F_R b d \sqrt{f_c'}$, independientemente de la cuantía de refuerzo (Normas de Concreto).

En este caso se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo

$$B > 4d, \quad B = 320 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/Vd = 1.458 < 2 \therefore \text{cumple como elemento ancho}$$

$$V_{cr} = 0.5F_R b d \sqrt{f_c'} = 0.5(0.8)(100)(16.6)\sqrt{160}$$

$$V_{cr} = 8399 \text{ kg} > V_u = 6254 \text{ kg} \therefore \text{Cumple}$$

b) Flexión

El momento flexionante en la sección crítica vale (fig 16)

$$M = 9.23(0.65)^2/2 = 1.9498 \text{ t.m}$$

$$M_u = 1.4(1.9498) = 2.7298 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El acero mínimo por flexión es

$$\rho_{\min} = 0.7 \sqrt{f_c^*} / f_y \quad (\text{ec } 10)$$

$$\rho_{\min} = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es 0.75 ρ_b , donde ρ_b es el porcentaje balanceado

$$\rho_b = \frac{f_c^*}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} \quad (\text{ec } 11)$$

donde

$$f_c^* = 0.85 f_c \quad \text{si } f_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = (1.05 - f_c^*/1250) f_c \quad \text{si } f_c > 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_{\max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesario para soportar un momento M_u está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c^*}} \quad (\text{ec } 13)$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(2.7298 \times 10^5)}{0.9(100)(16.6)^2(136)}} = 0.08450$$

$$\rho = q f_c^* / f_y \quad (\text{ec } 14)$$

$$\rho = 0.002736$$

$$A_s = \rho b d \quad (\text{ec } 15)$$

$$A_s = 4.5423 \text{ cm}^2$$

La separación de varillas es

$$s = a_s g / A_s \quad (\text{ec } 16)$$

donde

$$a_s = \text{área de la varilla que se emplea} = 0.712 \text{ cm}^2 \text{ (N}^\circ 3)$$

g = distancia para la que se requiere el área de acero A_s , $g = 100 \text{ cm}$

$$A_s = \text{área de acero requerida} = 4.542 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo valores $s = 15 \text{ cm}$. En consecuencia, se necesitan varillas N° 3 a cada 15 cm en el lecho inferior.

d) Temperatura

El acero en dirección longitudinal de la zapata, y el del lecho superior se proporciona por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto)

$$A_s = \frac{66000(1.5)(h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (\text{ec } 25)$$

en que

A_s = área de acero necesaria por temperatura, en cm^2/m , para el semiespesor de losa $h/2$

$h/2$ = semiespesor de la losa de la zapata = $20/2 = 10 \text{ cm}$

Sustituyendo valores $A_s = 2.143 \text{ cm}^2$

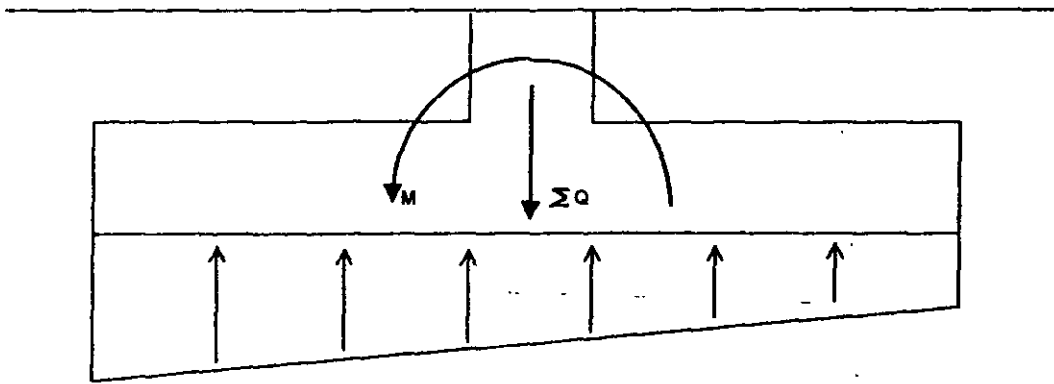
Aplicando la ec 15, con varillas del N° 3 ($a_s = 0.712 \text{ cm}^2$), $s = 33 \text{ cm}$. Por lo tanto, usaremos varillas del N° 3 a cada 30 cm, por temperatura.

En la fig 17 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

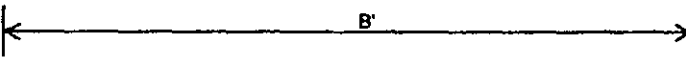
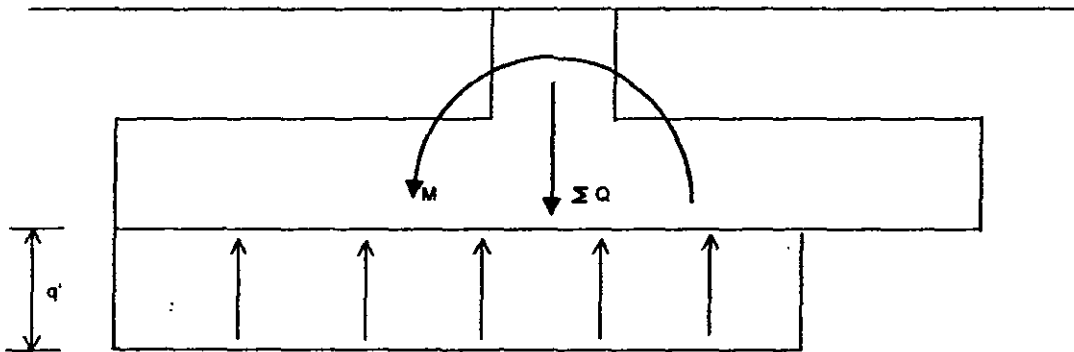
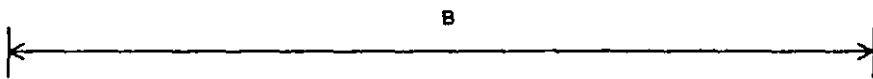
Referencias

Meli, R, *Diseño Estructural*, Cap 7, Limusa, 1985

Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Gobierno del Distrito Federal, 1987



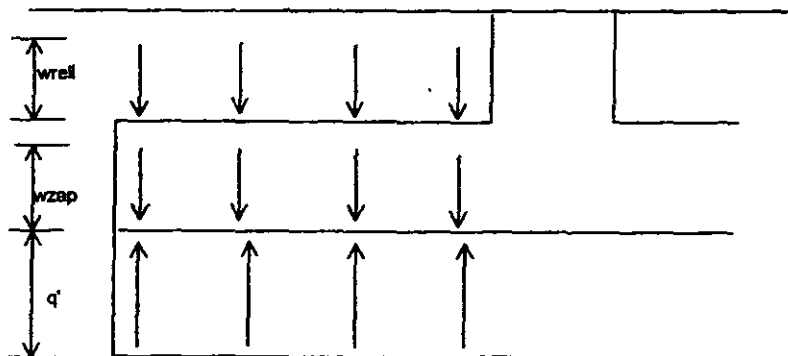
a) REACCIÓN TRAPEZIAL



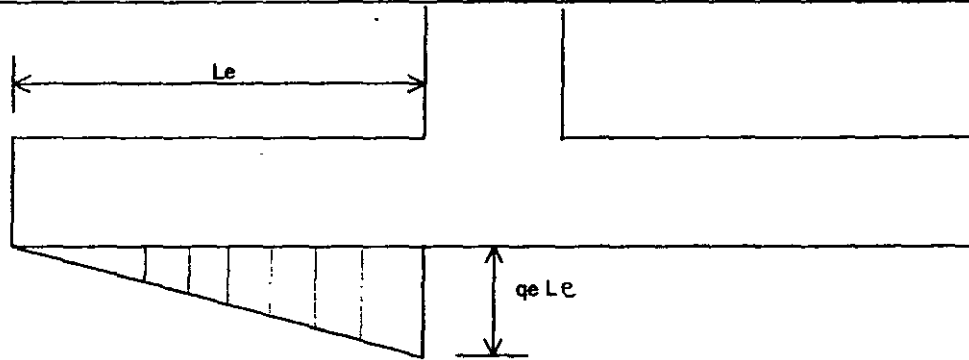
b) REACCIÓN RECTANGULAR

CARGAS SOBRE UNA ZAPATA
FIGURA 1

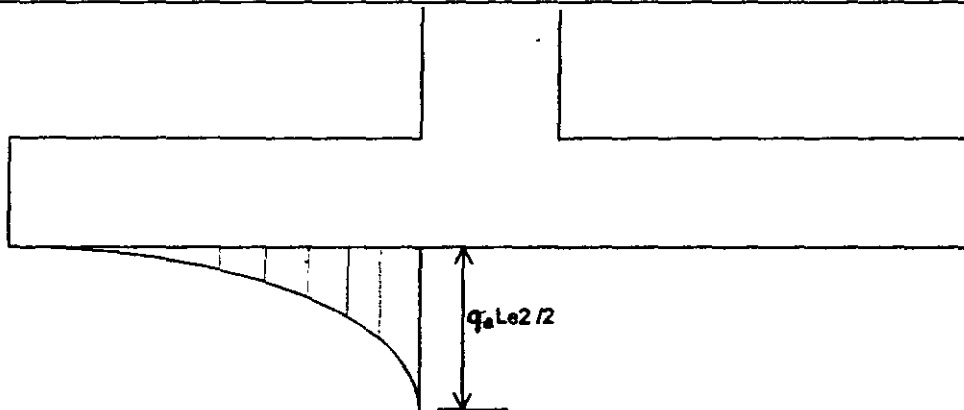
(Acdezapf11)



CARGAS QUE ACTÚAN SOBRE EL ALA DE LA ZAPATA
FIGURA 2



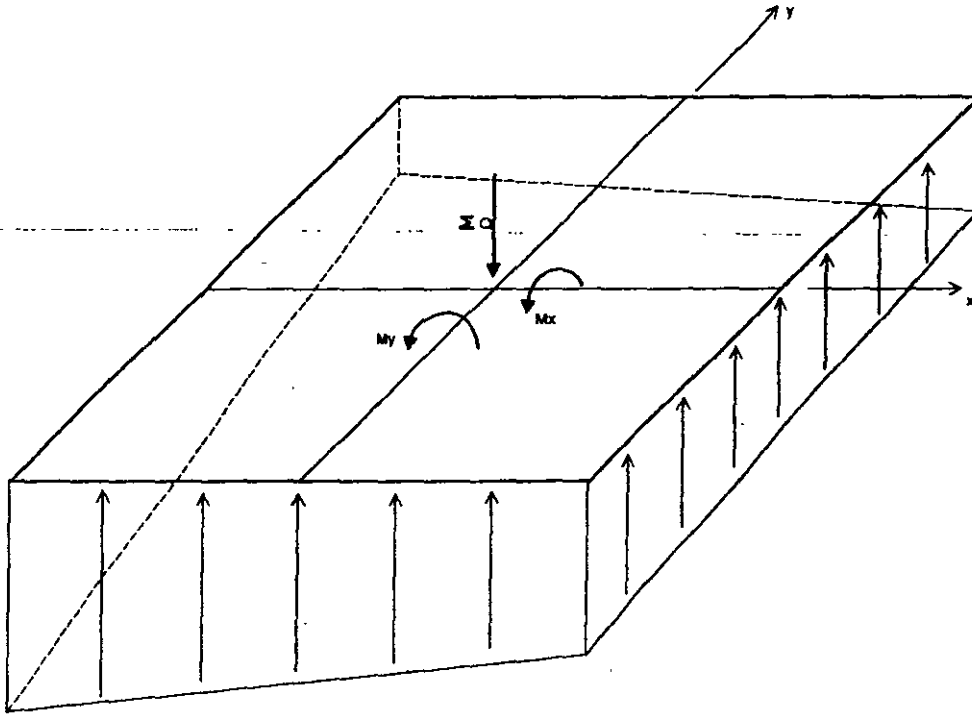
a) DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE



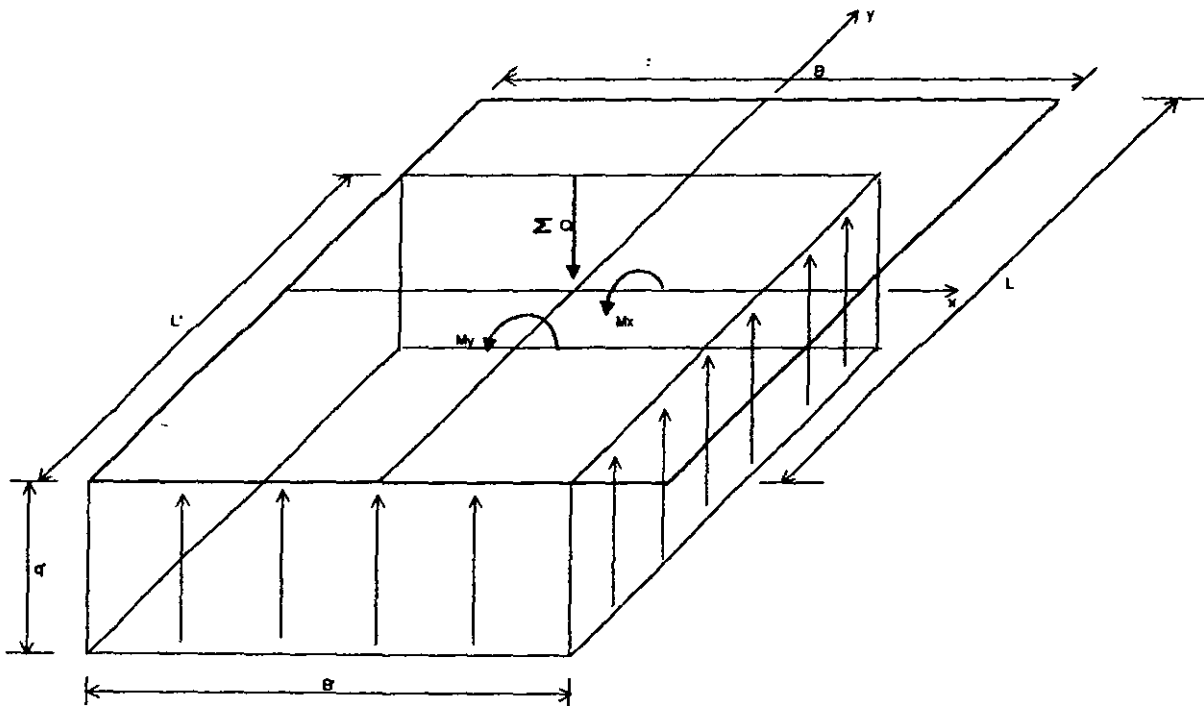
b) DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE

ELEMENTOS MECÁNICOS SOBRE EL ALA IZQUIERDA DE LA ZAPATA
FIGURA 3

(Acdezapf11)



a) REACCIÓN DEL TERRENO



b) REACCIÓN SIMPLIFICADA PARA FINES DE CÁLCULO

DIAGRAMAS DE REACCIÓN DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN
FIGURA 4

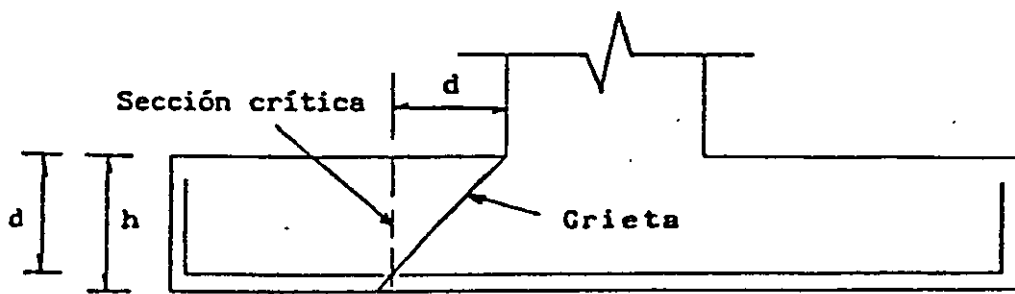
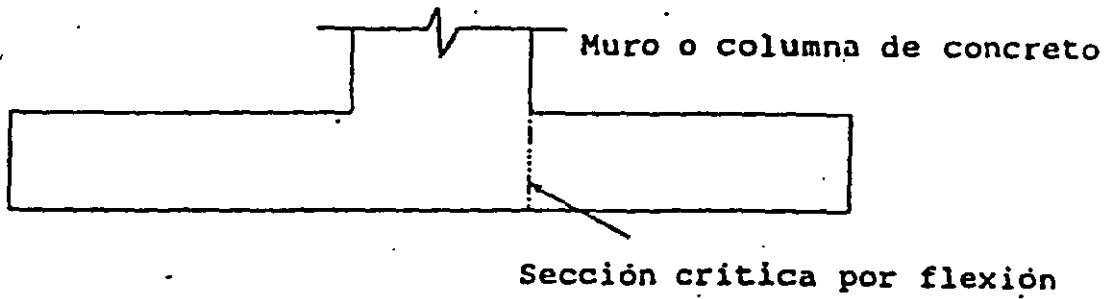
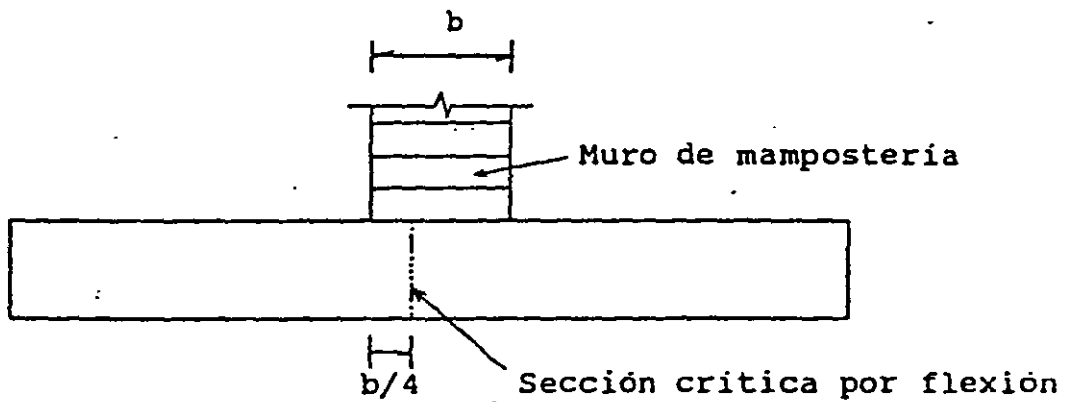


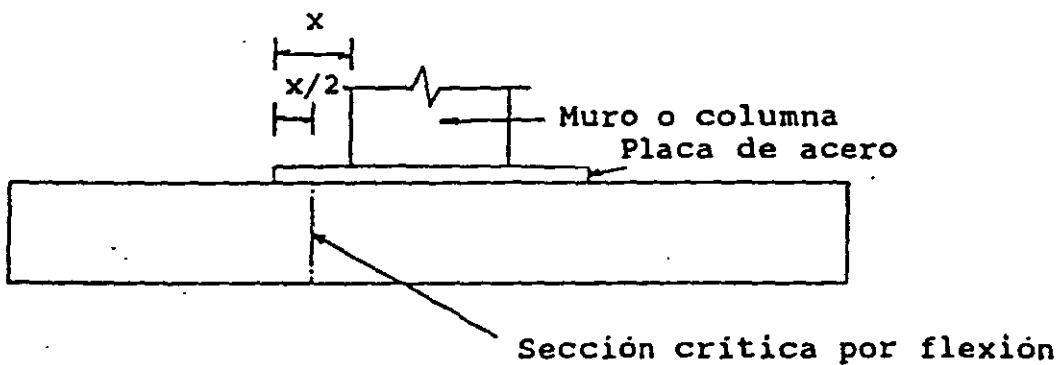
FIG 5 SECCIÓN CRÍTICA POR CORTANTE



a) Muro o columna de concreto reforzado

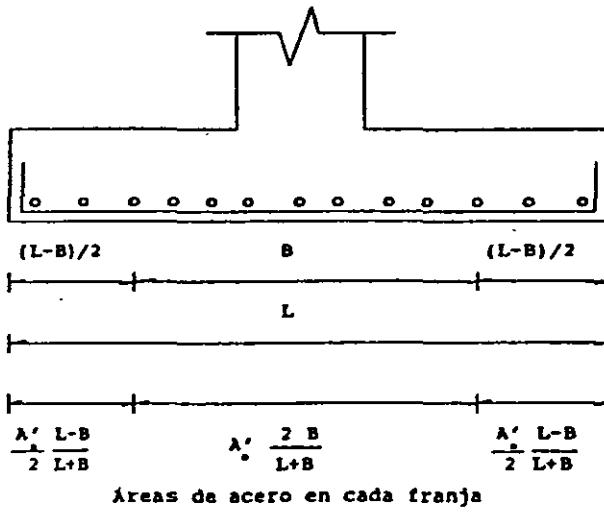


b) Muro de mampostería



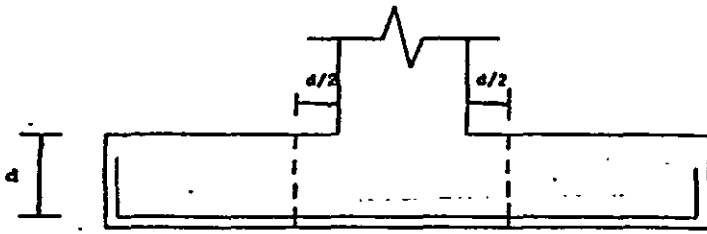
c) Muro o columna con pedestal de placa de acero

FIG 6 SECCIONES CRÍTICAS POR FLEXIÓN



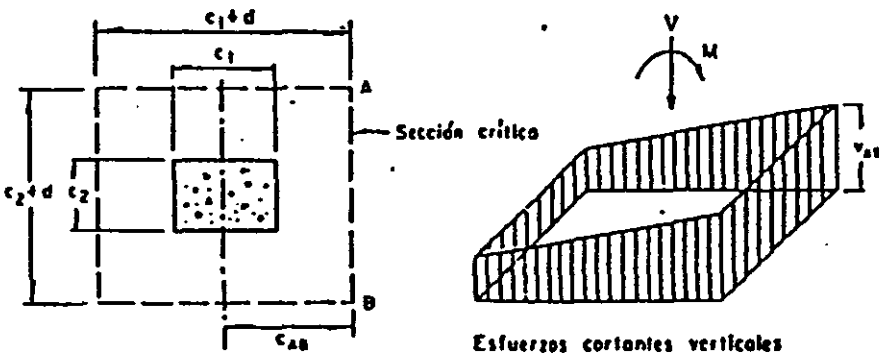
DISTRIBUCIÓN DEL ACERO DE REFUERZO EN EL LADO LARGO
 (MELI, 1985)

FIGURA 7



SECCIÓN CRÍTICA POR PENETRACIÓN

(a)



$$v_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\sigma M c_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

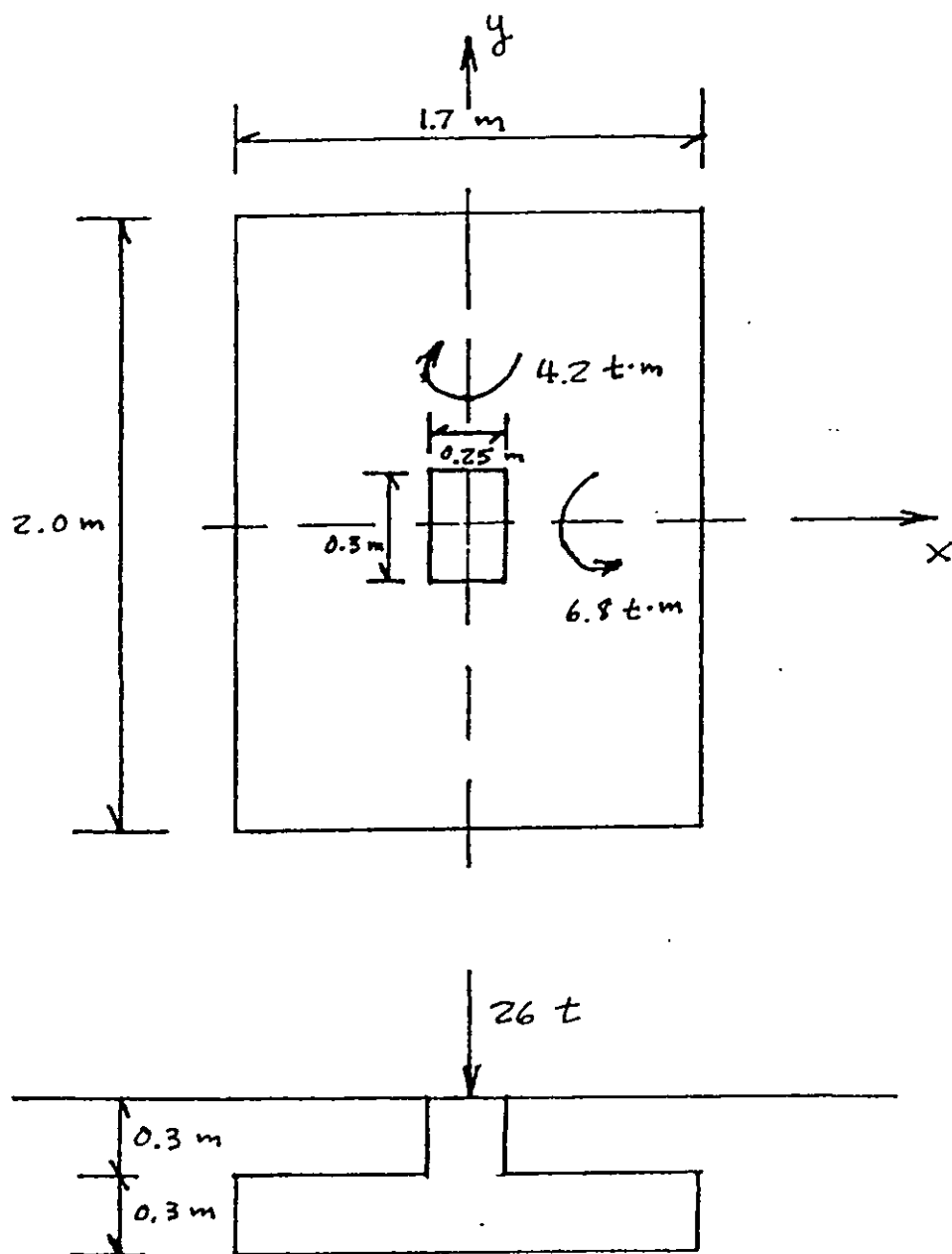
$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

El valor de esfuerzos cortantes máximos para una columna hueca

TRANSMISIÓN DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA
(NORMAS DE CONCRETO 1987)

(b)

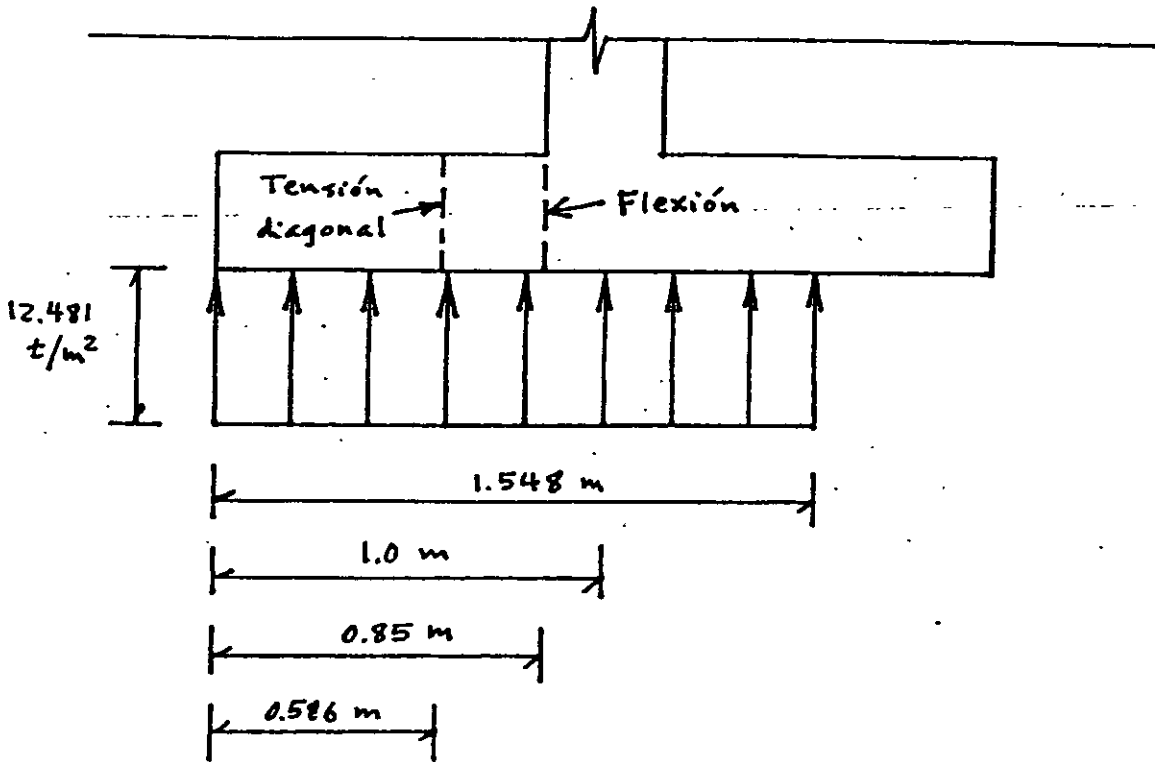
FIGURA 8



$D_r = 58\%$, $\phi^* = 37^\circ$, $\gamma_d = 1.6 \text{ t/m}^3$
 Arena $\epsilon_s = 2.6$

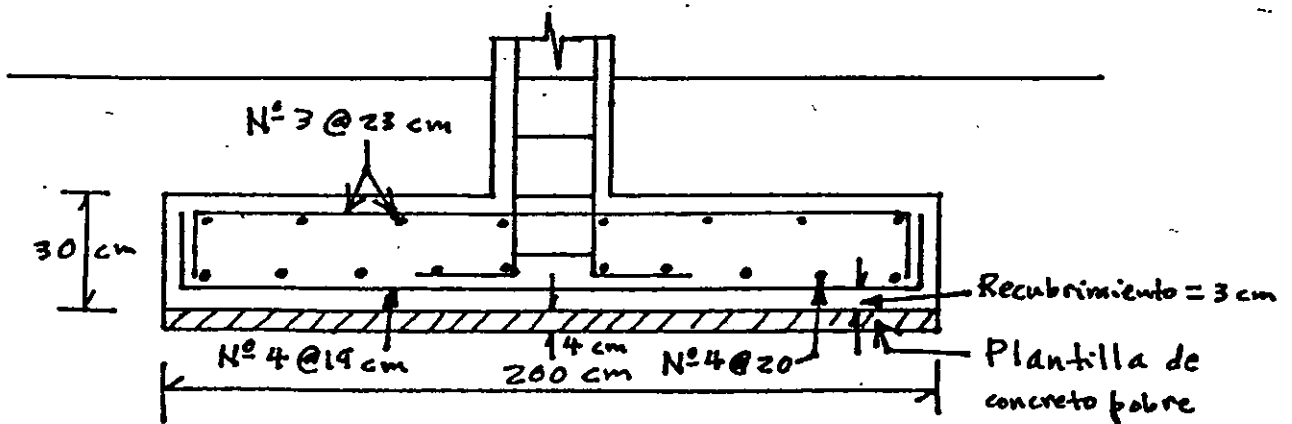
SUELO FRICCIONANTE

FIGURA 9



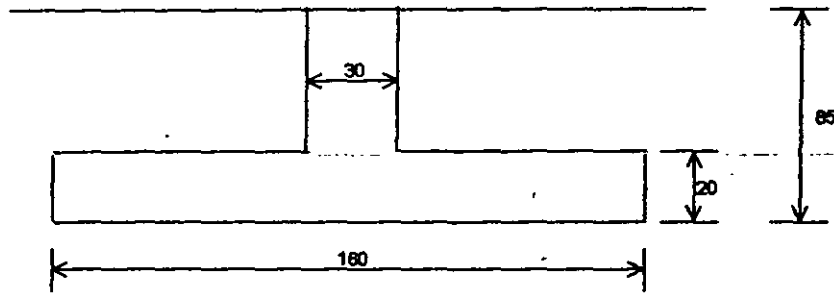
SECCIONES CRÍTICAS POR TENSIÓN DIAGONAL
Y POR FLEXIÓN

FIGURA 10



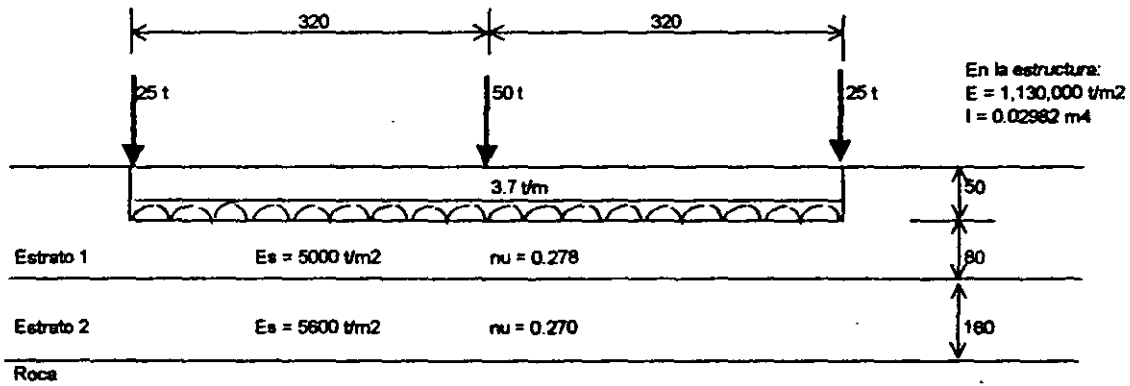
CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES
DE LA ZAPATA

FIGURA 11



a) Corte transversal

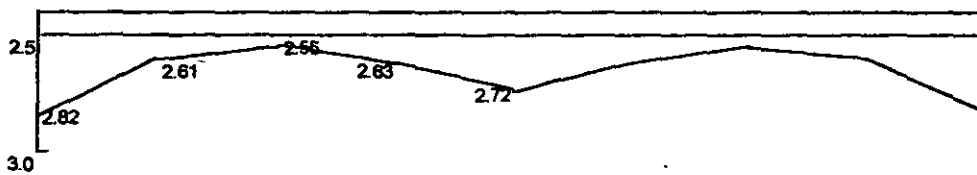
Distancias en centímetros
Croquis sin escala



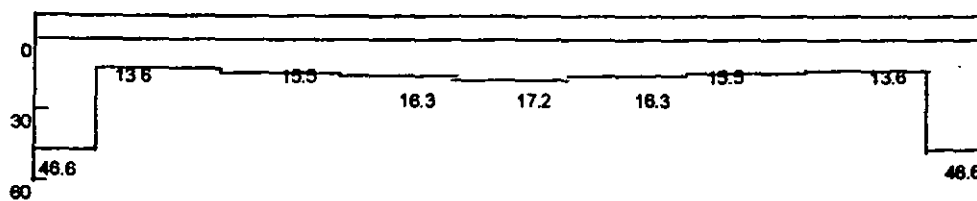
b) Corte longitudinal

(Acdezapf)

ZAPATA CORRIDA DE CONCRETO REFORZADO
FIGURA 12



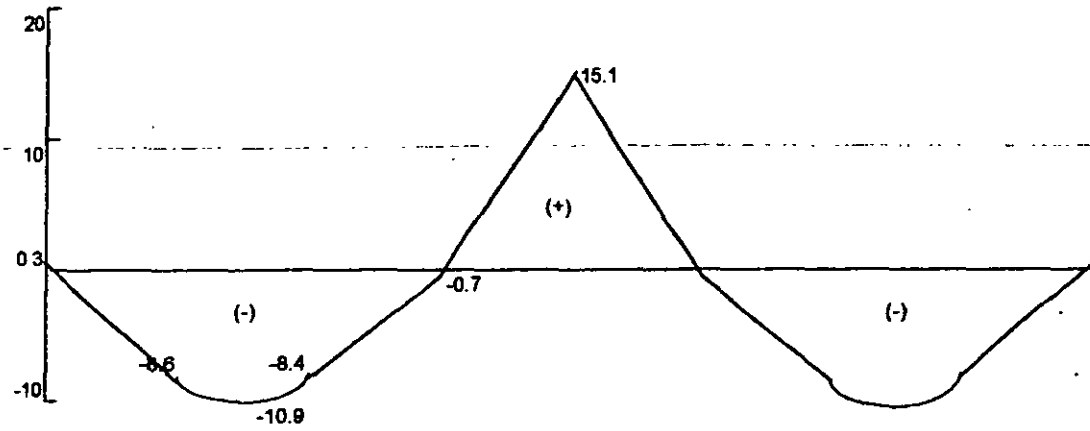
a) Asentamientos, mm



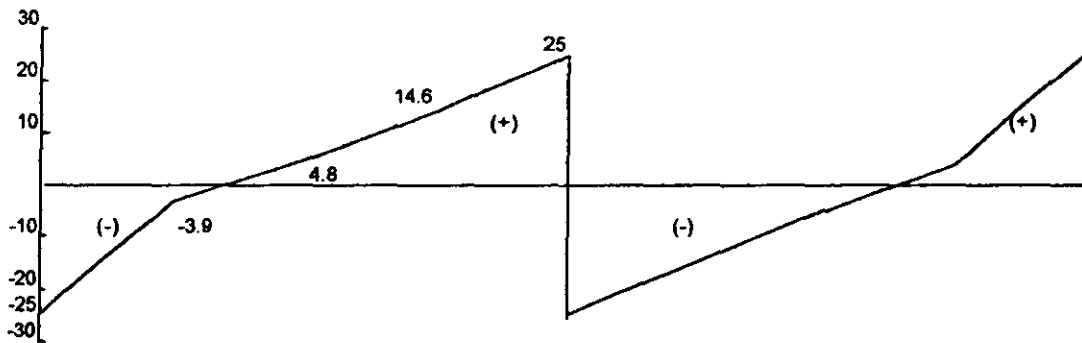
b) Reacciones, t/m

(Acdezapf)

DIAGRAMAS DE ASENTAMIENTOS Y REACCIONES
FIGURA 13



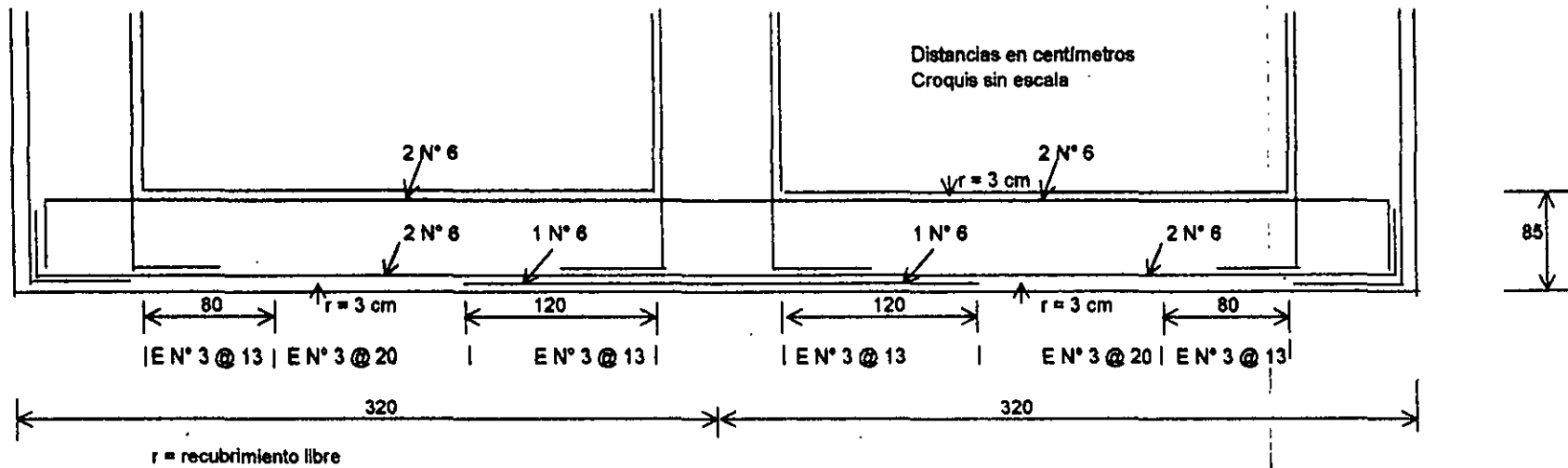
a) DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE, t.m



b) DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE, t

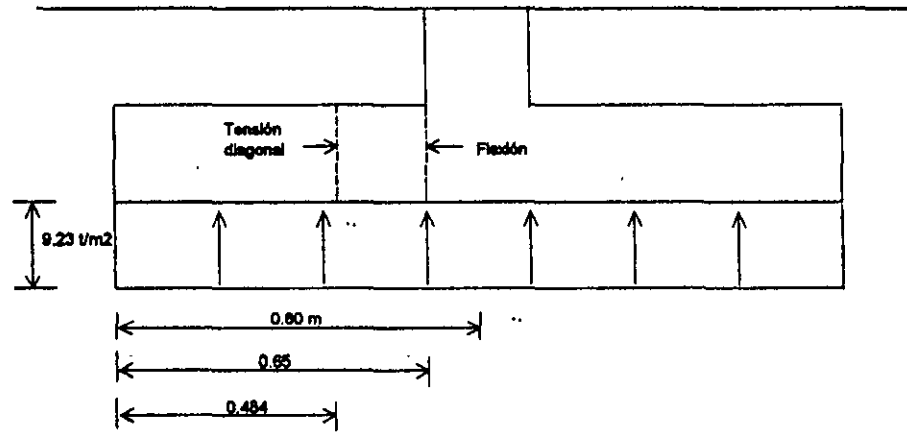
ELEMENTOS MECÁNICOS
FIGURA 14

(Acdezapf)

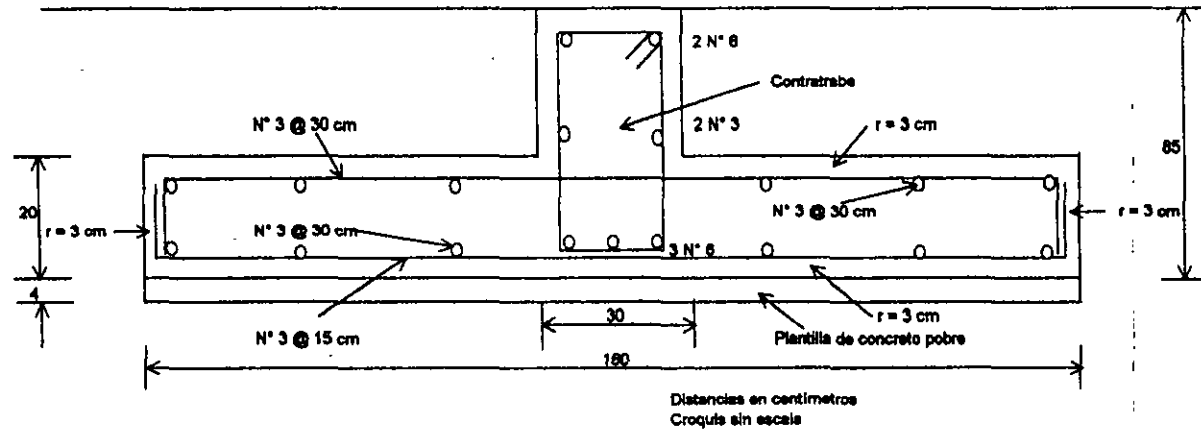


ARMADO DE LA CONTRATRABE DE LA ZAPATA CORRIDA
FIGURA 15

(Acdezapf)



SECCIONES CRÍTICAS POR TENSIÓN DIAGONAL
Y POR FLEXIÓN
FIGURA 16



ARMADO DE ZAPATA CORRIDA
(REACCIÓN DE 17.2 U/m)
FIGURA 17

(Accezapf)

APUNTES DE CIMENTACIONES
ZAPATAS DE COLINDANCIA

Agustín Deméneghi Colina*

La zapata de colindancia que recibe un muro de carga exhibe un momento de desequilibrio debido a la falta de coincidencia entre la línea de acción de la carga del muro y del diagrama de reacción del terreno de cimentación.

Este momento de desequilibrio lo toma la estructura de la zapata mediante torsión a lo largo de la longitud de la zapata. Esta torsión ocurre en la zapata y en la trabe de enrase de la zapata.

Supongamos que los extremos de la zapata permanecen fijos. En el centro del claro el momento de torsión vale cero, por lo que la mitad de la zapata se puede considerar como empotrada en un extremo y libre en el otro. Una viga de longitud x , empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a un momento de torsión M_x en su extremo libre, sufre un giro que vale

$$\theta_x = (x/G I_t) M_x$$

Llamando M' al momento de desequilibrio por unidad de longitud de la zapata (fig 1), el momento en una distancia dx vale $M' dx$, y el giro debido a dM está dado por

$$d\theta = (x / G I_t) M' dx$$

El giro en el centro del claro vale

$$\theta_c = \int_0^{L/2} (M' x / G I_t) dx = M' L^2 / 8 G I_t \quad (1)$$

Sin embargo, debido al giro θ_c el suelo reacciona con un momento que se puede valuar en forma aproximada haciendo la hipótesis que es igual a la mitad del dado por la fórmula de Frohlich, es decir

$$M_s' = \frac{\pi E_s B^2 \theta_c}{32 (1 - \nu^2)}$$

Sea

$$K_{rs} = M_s' / \theta_c = \pi E_s B^2 / 32 (1 - \nu^2) \quad (2)$$

es decir

$$M_s' = K_{rs} \theta_c \quad (3)$$

El nuevo momento M' es igual al momento inicial M_o' menos M_s' . Con este nuevo valor se aplican repetidamente las ecs 1, 2 y 3, hasta que la variación de M' sea despreciable.

En una viga de sección rectangular de dimensiones b por h , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valuar en forma aproximada (Beaufait *et al* 1970)

$$I_t \cong (h b^3 / 3) [1 - 0.63 b/h + 0.052 (b/h)^5] \quad (4)$$

*Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

El momento de torsión se toma con respecto al centroide de la trabe. La sección crítica es a una distancia d del paño de la trabe de liga. Se emplean las siguientes expresiones (Normas de Concreto 1996):

$$T_{OR} = 0.6 F_R (\Sigma x^2 y) \sqrt{f'_c} \quad (5)$$

$$T_{cR} = 0.25 T_{OR} \quad (6)$$

x = ancho de la trabe, y = peralte de la trabe

T_{OR} = momento torsionante resistente de diseño de un miembro sin refuerzo para torsión, kg.cm

T_{cR} = momento con que contribuye el concreto en un miembro reforzado por torsión, kg.cm

Para proporcionar refuerzo por torsión se deben cumplir simultáneamente las dos siguientes condiciones:

$$a) T_u > T_{cR} \quad (7)$$

$$b) (T_u / T_{OR})^2 + (V_u / V_{cR})^2 \geq 1 \quad (8)$$

Si no se cumple alguna de las dos condiciones anteriores los efectos de la torsión pueden despreciarse.

Refuerzo por cortante

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{cR}}$$

es decir

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - V_{cR}}{F_R f_y d} \quad (\text{cm}^2 / \text{cm, dos ramas}) \quad (9)$$

Refuerzo por torsión

$$A_{sv} = \frac{s (T_u - T_{cR})}{F_R \Omega (x_1 y_1) f_y}$$

es decir

$$\frac{A_{sv}}{s} = \frac{T_u - T_{cR}}{F_R \Omega (x_1 y_1) f_y} \quad (\text{cm}^2 / \text{cm, una rama}) \quad (10)$$

$$\Omega = 0.67 + 0.33 (y_1 / x_1) \leq 1.5 \quad (11)$$

El refuerzo total es la suma del requerido por cortante y por torsión.

La separación no debe ser mayor que el ancho de los estribos ni de la altura de los mismos, ni mayor que 30 cm.

Acero longitudinal por torsión

$$A_{st} = (2 A_{sv} / s) (x_1 + y_1) (f_{yv} / f_y) \quad (12)$$

Ejemplo

Revisar la seguridad del terreno de cimentación y hacer el diseño estructural de la zapata de la fig 1.

$$\text{Concreto } f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 141\,421 \text{ kg/cm}^2$$

Acero $f_y = 4\ 200\ \text{kg/cm}^2$
 Longitud de la zapata $6\ \text{m}$
 $F_c = 1.4$
 Terreno de cimentación
 Arena medianamente compacta $\gamma = 1.6\ \text{t/m}^3$

Solución

Cálculo del momento M_o' y de ΣQ

$$M_o' = 0.923\ \text{t}\cdot\text{m/m} \quad \Sigma Q = 5.134\ \text{t/m}$$

Consideremos únicamente el momento de inercia de la trabe. Empleando la ec 4:

$$I_t = 0.00102\ \text{m}^4$$

El módulo de rigidez del concreto está dado por

$$G = E/2(1+\nu) = 565\ 685\ \text{kg/cm}^2$$

El procedimiento iterativo para conocer el momento de torsión consiste en:

a) Aplicando la ec 1, con $M' = M_o' = 0.923\ \text{t}\cdot\text{m/m}$

$$\theta_c = 0.007208$$

b) De la ec 2

$$K_{rs} = M_t' / \theta_c = \pi E_s B^2 / 32(1 - \nu^2)$$

c) Sustituyendo valores $K_{rs} = 30.1593\ \text{t}\cdot\text{m/m}$. De la ec 3

$$M_t' = K_{rs} \theta_c = 0.2174\ \text{t}\cdot\text{m/m}$$

El nuevo valor de M' vale: $0.923 - 0.2174 = 0.6826\ \text{t}\cdot\text{m/m}$

Se repiten los pasos (a) a (c), hasta que la variación de M' sea despreciable. En cada iteración M' se obtiene restando a $M_o' = 0.923\ \text{t}\cdot\text{m/m}$ el valor calculado de M_t' .

A continuación presentamos los valores obtenidos en la última iteración:

$$M' = 0.7471\ \text{t}\cdot\text{m/m}, \quad \theta_c = 0.005834, \quad M_t' = 0.1759\ \text{t}\cdot\text{m/m}$$

Cálculo del refuerzo por torsión

El momento de torsión a una distancia d del paño del eje donde termina la trabe vale

$$T = 0.7471(5.772)/2 = 2.156\ \text{t}\cdot\text{m} \quad (d = 11.4\ \text{cm})$$

$$T_u = F_c T = 3.0184\ \text{t}\cdot\text{m}$$

Como se trata de una trabe con muro de carga, $V = 0$

Aplicando la ec 5 $T_{OR} = 136\ 610\ \text{kg}\cdot\text{cm}$

Aplicando la ec 6 $T_{cR} = 34\ 152.6\ \text{kg}\cdot\text{cm}$

Verificamos que se cumplan las condiciones dadas por las expresiones 7 y 8:

a) $T_u = 301\ 840\ \text{t}\cdot\text{m/m} > T_{cR} = 34\ 153\ \text{t}\cdot\text{m/m}$

b) $(T_u/T_{OR})^2 + (V_u/V_{cR})^2 = 4.88 \geq 1$

Se cumplen las condiciones (a) y (b), por lo que sí se requiere refuerzo por torsión.

Cálculo del acero de refuerzo por torsión

Acero transversal

Aplicando las ecs 11 y 10

$$\Omega = 1.5 \quad A_{sv}/s = 0.06278\ \text{cm}^2/\text{cm}$$

Empleando una separación $s = 7.5\ \text{cm}$, $A_{sv} = 0.471\ \text{cm}^2$. Por lo tanto, se requieren estribos del No 2.5 a cada 7.5 cm ($a_s = 0.495\ \text{cm}^2$).

Acero longitudinal

Empleando la ec 12, $A_{st} = 13.6\ \text{cm}^2$. Por lo tanto, se requieren 4 varillas del No 5 más 2 varillas del No 6, como acero longitudinal por torsión.

Diseño estructural de la losa de la zapata

El momento de desequilibrio en la zapata es de $M_o' = 0.923 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$. La trabe por torsión toma $M' = 0.7471 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$, mientras que el suelo toma $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$. Por lo tanto, el momento sobre el suelo es $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$.

$$e = M_s' / \Sigma Q = 0.1759 / 5.134 = 0.03426 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e = 0.5315 \text{ m} \quad q' = \Sigma Q / B' = 9.66 \text{ t}/\text{m}^2$$

En la fig 2 se exhiben la geometría y las fuerzas que actúan sobre la zapata.

Diseño por flexión

$$d = 0.15 - 0.036 = 0.114 \text{ m}$$

$$M = 0.5288 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M_u = 0.7403 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$p = 0.00154$$

$$p_{\min} = 0.00236 \quad A_{\min} = 2.687 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{\text{temp}} = 3.075 \text{ cm}^2/\text{m}; \text{ por lo tanto, rige armado por temperatura}$$

Se emplearán varillas del N° 3 a cada 23 cm, en el lecho inferior

Revisión por cortante

$$V = 2.006 \text{ t}/\text{m}$$

$$V_u = 2.809 \text{ t}/\text{m}$$

$$M = 0.2485 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M/Vd = 1.09 < 2 \quad \text{Cumple como elemento ancho}$$

$$V_{eR} = 5768 \text{ kg} > V_u = 2809 \text{ kg}; \therefore \text{Cumple}$$

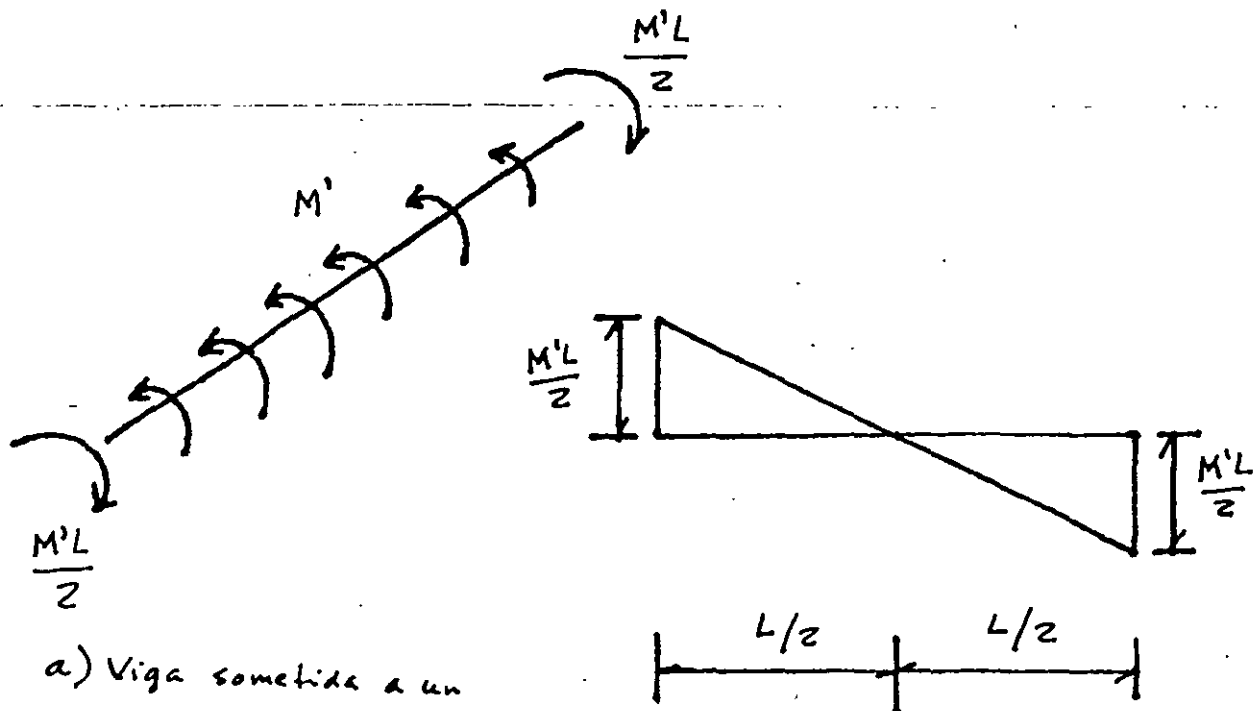
En la fig 3 se muestra el armado de la zapata.

Referencias

Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, *Computer Methods of Structural Analysis*, Prentice-Hall, 1970

Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Departamento del Distrito Federal, 1996

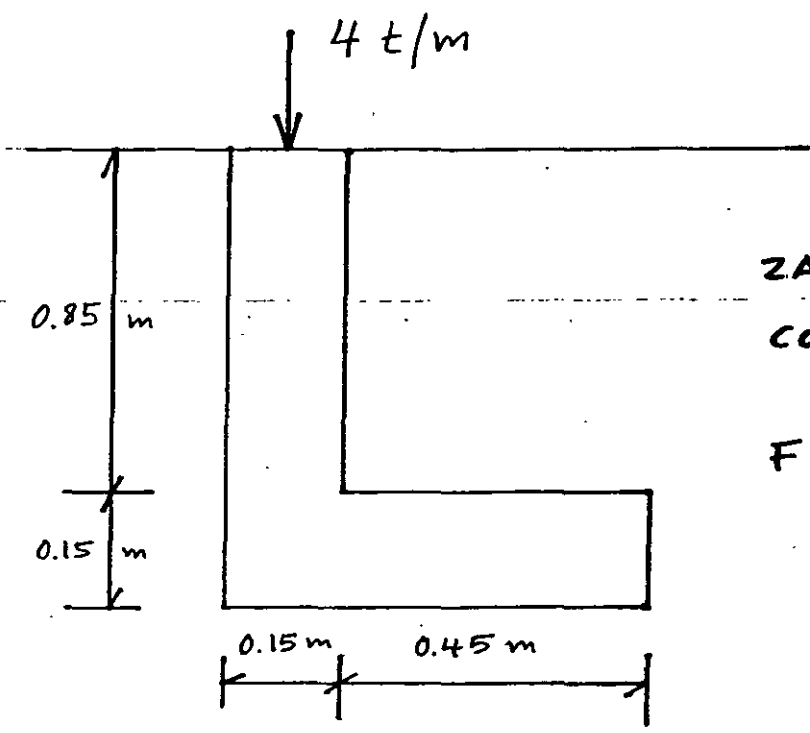
(ACZAPCOL)



a) Viga sometida a un momento de torsión M' por unidad de longitud

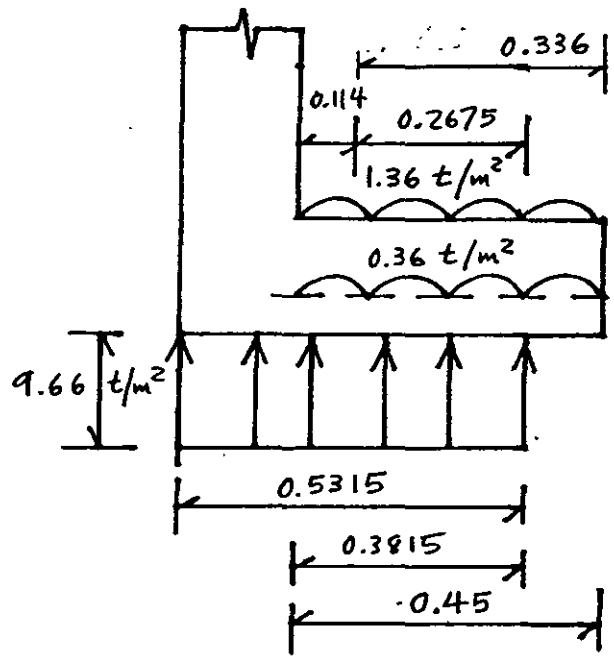
b) Variación del momento de torsión a lo largo de la viga

FIGURA 1



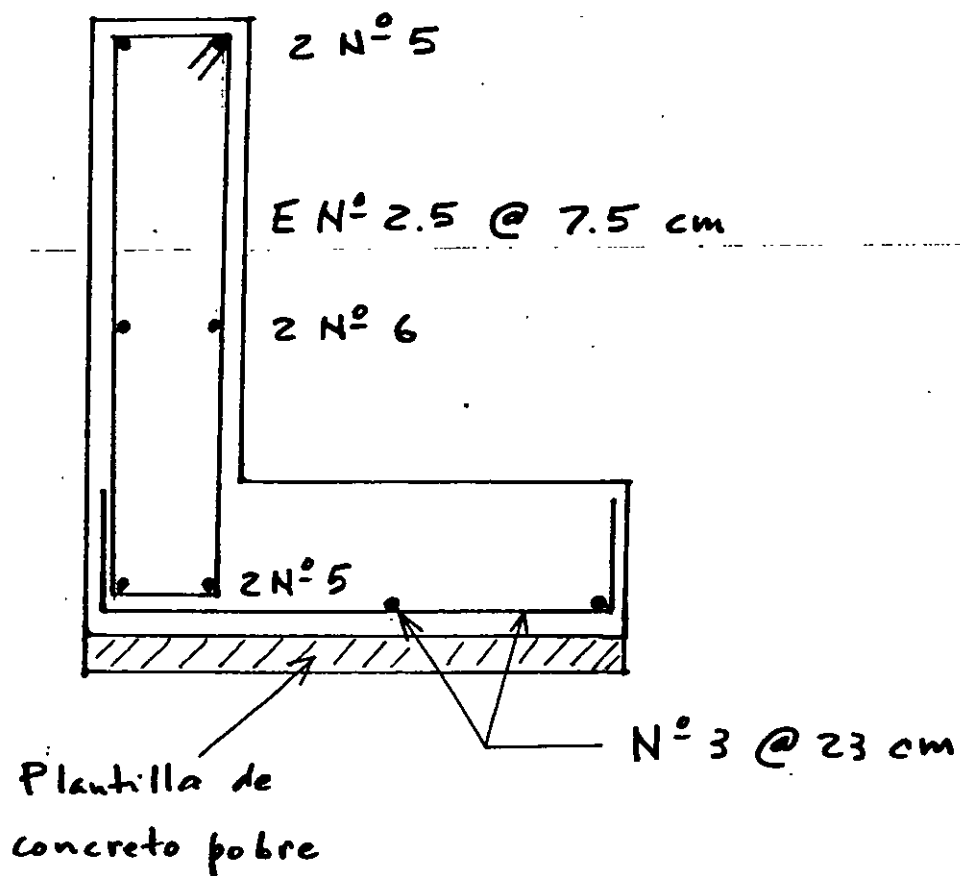
ZAPATA DE COLINDANCIA

FIGURA 1



FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA LOSA DE LA ZAPATA

FIGURA 2



ARMADO DE LA ZAPATA

FIGURA 3



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES

MÓDULO III: DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

TEMA:

**CALCULO DE ASENTAMIENTOS EN SUELOS FRICCIONANTES
MÉTODO DE SCHMERTMANN**

**EXPOSITOR: ING. HÉCTOR SANGINÉS GARCÍA
SEDE: PALACIO DE MINERÍA
JUNIO 2003**

ANEXO 2
CÁLCULO DE ASENTAMIENTOS EN SUELOS FRICCIONANTES
MÉTODO DE SCHMERTMANN

El asentamiento de una zapata se calcula con la siguiente expresión (Schmertmann, 1970)

$$\delta = C_1 C_2 q_n \sum (I_z/E_s) \Delta z$$

donde

- q_n = incremento neto de carga = $q - p_{vd}$
- q = presión de contacto entre cimiento y terreno
- p_{vd} = presión total inicial en el suelo, al nivel de desplante del cimiento
- C_1 = coeficiente que toma en cuenta la profundidad de desplante = $1 - 0.5(p_{vd}/q_n) \geq 0.5$
- C_2 = coeficiente que toma en cuenta el flujo viscoso (creep) del suelo = $1 + 0.2 \log_{10}(t_{años}/0.1)$
- I_z = factor de influencia de la deformación unitaria vertical, cuyo valor se muestra en la fig 1 (Schmertmann *et al*, 1978).
- La máxima magnitud de I_z vale
- $I_{zp} = 0.5 + 0.1(q_n/p_{vp})^{1/2}$
- E_s = módulo de deformación del suelo
- $E_s = 2.5q_c$ (zapata cuadrada, $L/B = 1$)
- $E_s = 3.5q_c$ (zapata corrida, $L/B > 10$)
- q_c = resistencia en la punta del cono

Ejemplo

Calcular el asentamiento de la zapata de concreto reforzado de la fig E-1, para un tiempo de 5 años.

Solución

El subsuelo se dividió en "estratos" de 20 cm de espesor. En la tabla E-1 se presenta el cómputo del asentamiento para los tres primeros "estratos". Para el cómputo del factor I_z se utilizó la gráfica para zapata cuadrada, ya que el cimiento de este ejemplo es muy cercano a ella.

Teniendo en cuenta las deformaciones de 17 "estratos" de 20 cm de espesor, hasta una profundidad $2B=3.4$ m bajo el nivel de desplante, se obtuvo un asentamiento total de 0.924 cm.

Referencias

Schmertmann, J H, "Static cone to compute static settlement over sand", Jour Soil Mech Found Div, ASCE, SM3, mayo 1970

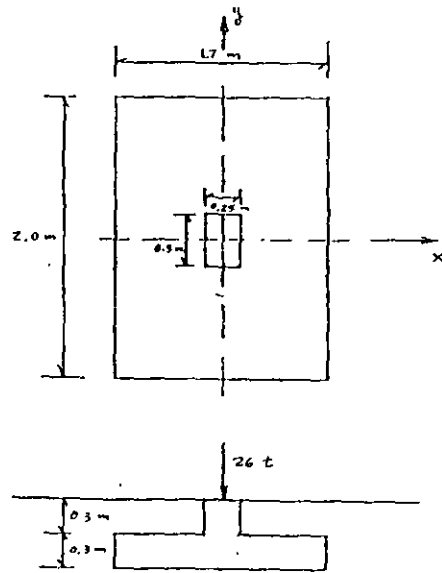
Schmertmann, J H, Hartman, J P y Brown, P R, "Improved strain influence factor diagrams", Jour Geotech Eng Div, ASCE, GT8, agosto 1978

Tomlinson, M J, *Cimentaciones. Diseño y Construcción*, Trillas, 1996

TABLA E-1
CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO

Estrato	z	I_z	$I_z \Delta z/E_s$	δ
	m			m
1	0.1	0.1688	2.572×10^{-5}	0.0002554
2	0.3	0.3063	4.667×10^{-5}	0.0004635
3	0.5	0.4438	6.763×10^{-5}	0.0006716

$q_n = 7.892 \text{ t/m}^2$, $q_c = 3.5N = 3.5(15) = 52.5 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2.5q_c = 1312.5 \text{ t/m}^2$
 $C_1 = 1 - 0.5 (0.96/7.892) = 0.9392$
 $C_2 = 1 + 0.2 \log_{10} (5/0.1) = 1.34$
 $I_{zp} = 0.6844$



$\rho_r = 58\%$, $\phi^* = 37^\circ$, $\gamma_s = 1.6 \text{ t/m}^3$
 Arena $\epsilon_s = 2.6$
 $N = 15$ golpes
 SUELO FRICCIONANTE
 FIGURA E-1

(Defschmer6)

ANEXO 3 MÉTODO DE KONDNER

Consideremos una muestra de suelo sometido a prueba de compresión triaxial; la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria es parecida a la de una hipérbola, como se indica en la fig 1. Kondner propone la siguiente expresión para el cómputo de la deformación (Duncan y Chang, 1970)

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \varepsilon / (a + b\varepsilon) \quad (1)$$

Obtengamos a continuación los valores de a y b . Derivando la ec 1 con respecto a ε

$$d(\sigma_1 - \sigma_3) / d\varepsilon = a / (a + b\varepsilon)^2$$

El módulo tangente inicial es la pendiente de la curva esfuerzo-deformación unitaria cuando ésta tiende a cero, es decir

$$E_i = [d(\sigma_1 - \sigma_3) / d\varepsilon]_{\varepsilon \rightarrow 0} = 1/a$$

La ec 1 se puede poner en la forma

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 1 / (a\varepsilon + b)$$

$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ se obtiene cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ (fig 1), es decir

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = 1/b$$

De lo anterior

$$a = 1/E_i$$

$$b = 1/(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$$

La asíntota $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ es mayor que la resistencia a compresión $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$, en una pequeña cantidad. La asíntota se puede relacionar con la resistencia mediante el factor R_f , de la siguiente forma

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (2)$$

donde R_f es un factor que varía entre 0.75 y 1.0.

La ec 1 se puede escribir

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{1/E_i + \varepsilon R_f / (\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (3)$$

La deformación unitaria vale

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_i [1 - R_f (\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)_f]} \quad (4)$$

Estudios experimentales de Janbu (1963) han mostrado que la relación entre el módulo tangente inicial y la presión de confinamiento se puede expresar como

$$E_i = E_{i0} + K p_a (\sigma_3 / p_a)^n \quad (5)$$

donde p_a = presión atmosférica = 10.3 t/m²

Si se considera que cuando la falla ocurre no se presenta cambio en σ_3 , la relación entre la resistencia a compresión y la presión de confinamiento, en función de la ley de resistencia de Mohr-Coulomb se obtiene de la siguiente forma (fig 2)

$$\begin{aligned} \text{sen } \phi &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) / 2}{c / \tan \phi + (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 + \sigma_3} \\ (\sigma_1 - \sigma_3)_f &= \frac{2(c \cos \phi + \sigma_3 \text{ sen } \phi)}{1 - \text{sen } \phi} \end{aligned} \quad (6)$$

El método de Kondner se puede aplicar al cálculo del asentamiento de un cimiento de la siguiente forma: en un elemento de suelo consideramos que el esfuerzo σ_3 es igual a la presión media de confinamiento

$$\sigma_3 = p_c = p_{\infty} + (1/6) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (7)$$

Con $\sigma_3 = p_c$ se obtiene el módulo tangente inicial E_i (ec 5). El esfuerzo principal mayor $\sigma_1 = p_{\infty} + \sigma_z$. Por lo tanto

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_z - (1/6) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (8)$$

La deformación unitaria ε se halla sustituyendo $(\sigma_1 - \sigma_3)$ en la ec 4. El módulo del suelo para este nuevo nivel de esfuerzo de confinamiento es

$$E_s = (\sigma_1 - \sigma_3) / \varepsilon \quad (9)$$

La deformación de un estrato de espesor h se calcula con la ley de Hooke

$$\delta = (h/E_s) [\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (10)$$

En la tabla 1 se muestran propiedades aproximadas del suelo, que se pueden utilizar en la fórmula de Janbu (ec 5), cuando se aplica el método de Kondner.

Ejemplo

Calcular el asentamiento de la zapata de la fig E-1, utilizando el método de Kondner, con las siguientes propiedades del suelo:

$K = 665$, $n = 0.61$, $R_f = 0.9$, $\phi = 37^\circ$, $K_o = 0.398$,
 $v = 0.285$, $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$

Solución

El subsuelo se dividió en "estratos" de 20 cm de espesor. En la tabla E-1 se presenta el cómputo

del asentamiento para los tres primeros "estratos".

Tomando en cuenta las deformaciones de 17 "estratos" de 20 cm de espesor, hasta la profundidad de 3.4 m bajo el nivel de desplante, se obtuvo un asentamiento total de 0.60 cm.

REFERENCIAS.

Duncan, J M y Chang, C Y, "Non linear analysis of stress and strain in soils", Jour Soil Mech Found Div, ASCE, SM5, sept 1970

Janbu, N, "Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests", European Conf Soil Mech Found Eng, Wiesbaden, Germany, Vol 1, pp 19-25, 1963

TABLA 1
 VALORES APROXIMADOS DE K y n DE LA FÓRMULA DE JANBU, EN SUELOS FRICCIONANTES, CUANDO SE APLICA EL MÉTODO DE KONDNER

Estado	D_r	N	q_c kg/cm ²	n	Normalmente	Precargado
					cargado	K
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	0.65	< 220	< 670
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	0.65-0.62	220-460	670-1390
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	0.62-0.58	460-1280	1390-3840
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	0.58-0.55	1280-2080	3840-6240
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	0.55	> 2080	> 6240

D_r = compacidad relativa

N = número de golpes en la prueba de penetración estándar

q_c = resistencia en la punta del cono holandés

(Dskondner, Defsfkond101)

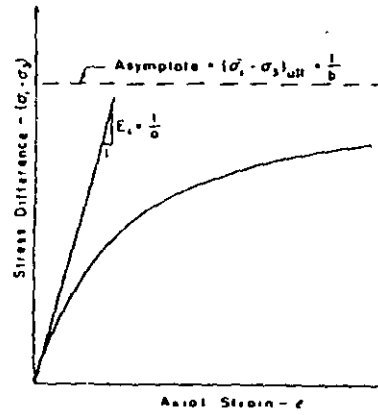
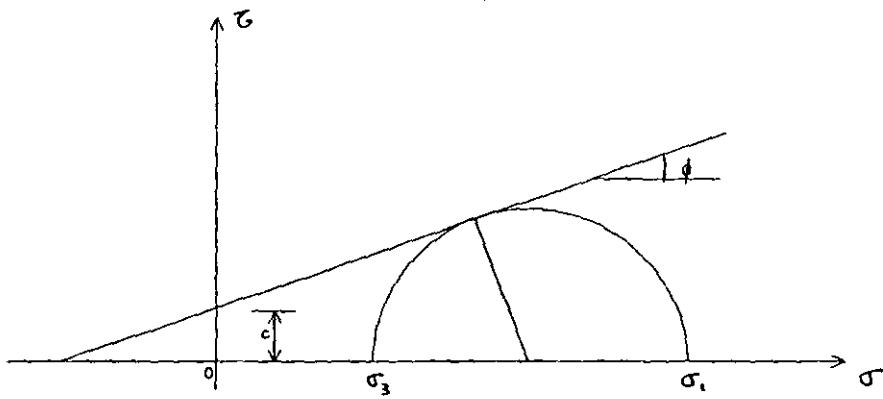
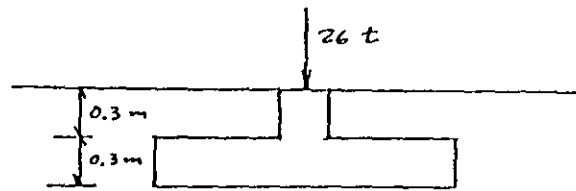
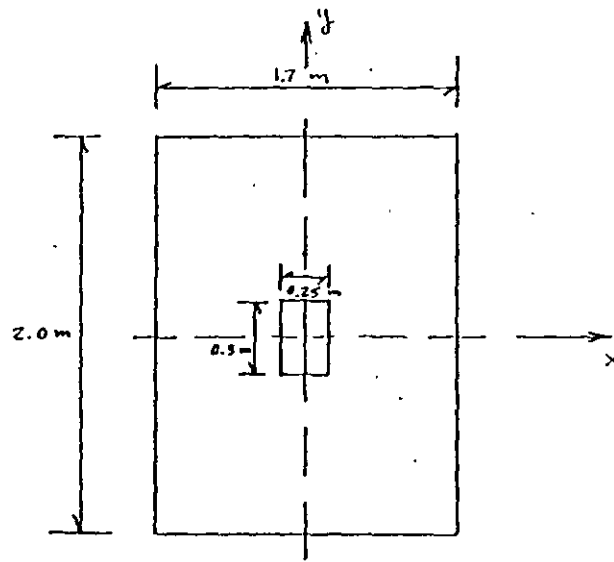


FIG. 1.—HYPERBOLIC STRESS-STRAIN CURVE
(Duncan y Chang, 1970)



OBTENCIÓN DEL ESFUERZO DESVIADOR DE FALLA
FIGURA 2

(Dskondner)



$D_r = 58\%$, $\phi = 37^\circ$, $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$
 Arena $\epsilon_s = 2.6$

SUELO FRICCIONANTE
 FIGURA E-1

(Dskondner)

NOMBRE: MÉTODO DE KONDNER EJEMPLO													
FECHA: 16/04/01													
ARCHIVO: Ackondner													
TABLA E-1													
MÉTODO DE KONDNER. EJEMPLO													
Estrato	Espesor m	pvo' t/m2	pco' t/m2	σ_z t/m2	σ_x t/m2	σ_y t/m2	pc t/m2	$(\sigma_1 - \sigma_3)$ t/m2	Ei t/m2	$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ t/m2	Epsilon	Es t/m2	Delta m
1	0.2	1.12	0.671	7.884	5.118	5.293	3.72	4.835	3680.0978	11.245	0.002143	2255.914	0.000436
2	0.2	1.44	0.862	7.708	3.471	3.373	3.288	5.282	2142.714	9.938	0.002967	1780.287	0.000647
3	0.2	1.76	1.054	7.203	2.191	1.971	2.948	5.308	2004.824	8.911	0.003584	1481.301	0.000812
(Ackondner, Defsfkond101)													

ANEXO 4
MÉTODO DE FREDLUND Y RAHARDJO (1993)

Una arcilla parcialmente saturada se encuentra sometida a dos clases de esfuerzos: (a) un esfuerzo total ($p_v - u_a$), debido a la presión externa sobre el suelo, y (b) una succión ($u_a - u_w$), debida a un esfuerzo interno por efectos capilares. La variación de alguno de estos esfuerzos ocasiona una deformación del suelo, o una reducción de su relación de vacíos.

Denominemos presión total-succión p_{vs} a la suma de los dos esfuerzos anteriores

$$p_{vs} = (p_v - u_a) + (u_a - u_w)$$

En la fig 1 se muestra una curva de compresibilidad, en la que en el eje de las abscisas hemos trazado la presión p_{vs} .

El decremento de relación de vacíos del suelo es (fig 1)

$$\Delta e = C_s \log (p_{vsf} / p_{vso}) \quad (1)$$

La deformación de un estrato de espesor H vale

$$\Delta H = \Delta e H / (1 + e_o) \quad (2)$$

Supongamos ahora que deseamos valuar la deformación que sufre una estructura al variar la succión de la temporada de estiaje a la temporada de lluvias (fig 2). Antes de la construcción de la estructura la presión total vertical a la profundidad z vale ($p_{vo} - u_a$); además, el suelo está sometido a una succión que vale ($u_a - u_{wo}$). Por lo tanto, la presión total-succión inicial p_{vso} está dada por

$$p_{vso} = (p_{vo} - u_a) + (u_a - u_{wo}) \quad (3)$$

La construcción de la estructura produce un incremento vertical de carga $\Delta p = \sigma_z$. Si posteriormente la succión cambia a otro valor u_{wf} , la presión total-succión final será

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wf}) \quad (4)$$

La expansión del estrato de arcilla la obtenemos con las ecs 1 y 2

$$\Delta e = C_s \log (p_{vsf} / p_{vso})$$

$$\Delta e = C_s \log \{ [(p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wf})] / [(p_{vo} - u_a) + (u_a - u_{wo})] \}$$

(5)

$$\Delta H = \Delta e H / (1 + e_o)$$

La valuación de p_{vso} se puede llevar a cabo con la realización de una prueba de "volumen constante", que consiste en aplicar una carga dada al suelo, para luego sumergir éste en agua; la arcilla tiende a expandirse, por lo que se incrementa la carga para evitar dicha expansión; el proceso se continúa hasta que el espécimen no muestra ya tendencia a expandirse. A partir de esta presión, la prueba se continúa en forma normal, cargando y descargando el suelo (fig 3).

La presión "corregida" p_s' se obtiene de la siguiente forma (Fredlund y Rahardjo, 1993): obténgase el punto de máxima curvatura, donde la curva se acerca al tramo de recompresión (fig 3). Trácese en este punto una recta horizontal y una recta tangente; la presión "corregida" se obtiene como la intersección de la bisectriz a las dos rectas anteriores y una recta paralela al tramo de descarga, trazada tangente a la curva de recompresión. En la práctica se considera que $p_{vso} \cong p_s'$. Esta corrección se hace debido a efectos de alteración del suelo al pasar del campo al laboratorio (Fredlund y Rahardjo, 1993).

La magnitud de u_{wf} se tiene que estimar para la condición más desfavorable en el campo. Un extremo puede ser $u_{wf} \geq 0$, lo que implica que la presión en el agua puede ser igual o mayor que la presión atmosférica. Sin embargo, no necesariamente se presenta esta condición extrema, pues en sitios áridos con buen drenaje nunca se presenta una saturación completa del suelo. En este sentido, es conveniente realizar mediciones de campo durante varios años, para tener valores estadísticos de las variaciones de la succión en cada localidad.

Se puede emplear el mismo criterio para valuar la contracción de la arcilla al pasar de la temporada de lluvias a la de estiaje. Considerando el mismo ejemplo, en la temporada de lluvias

$$p_{vso} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wo})$$

En la época de estiaje la succión vale ($u_a - u_w$) y la presión final

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_w)$$

La contracción se obtiene aplicando las ecs 1 y 2.

Ejemplo

Estructura de planta de 8 por 16 m, con $q = 3 \text{ t/m}^2$. En el suelo (fig 2): $C_s = 0.09$, $e_o = 1.9$. En una prueba de "volumen constante": $p_s' = 45 \text{ kg/cm}^2$ (en temporada de estiaje).

Al pasar a la temporada de lluvias la succión se reduce a 5 kg/cm^2 . En temporada de estiaje la succión aumenta de 5 a 44.8 kg/cm^2 .

Calcular los movimientos de la arcilla al pasar de la época de estiaje a la de lluvias, y de ésta a la de estiaje.

Solución

$$p_{vo} = 1.8(0.6) + 1.5(0.3) = 1.53 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_z = 2.986 \text{ t/m}^2$$

Cálculo de la expansión de la arcilla, al pasar de la temporada de estiaje a la temporada de lluvias:

$$p_{vso} \cong p_s' = 45 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{En la temporada de lluvias } p_{vsf} = 0.153 + 0.299 + 5 = 5.452 \text{ kg/cm}^2$$

Aplicando las ecs 1 y 2

$$\Delta e = 0.09 \log (5.452 / 45) = -0.0825$$

$$\Delta H = \Delta e H / (1 + e_o) = -0.0825(0.6) / (1 + 1.9) = -0.0171 \text{ m}$$

La arcilla se expande 1.7 cm.

Cálculo de la contracción al pasar de la temporada de lluvias a la de estiaje.

$$p_{vso} = 5.452 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_w) = 0.153 + 0.299 + 44.8 = 45.252 \text{ kg/cm}^2$$

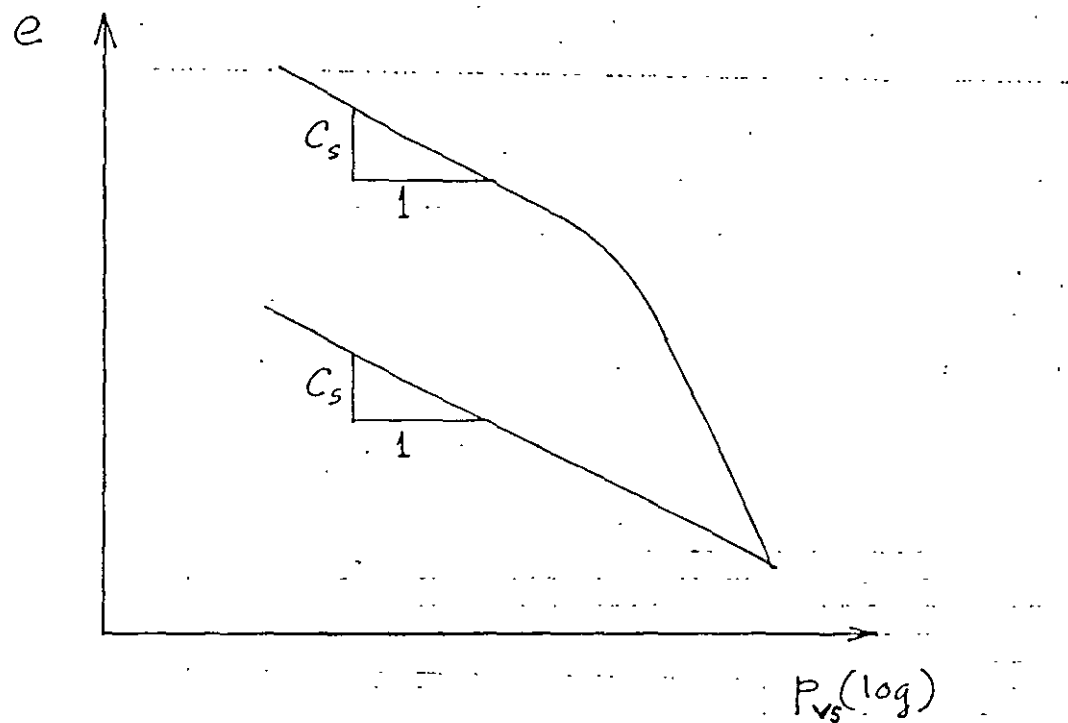
$$\Delta e = 0.0827, \Delta H = 0.0171 \text{ m}$$

La arcilla se contrae 1.7 cm.

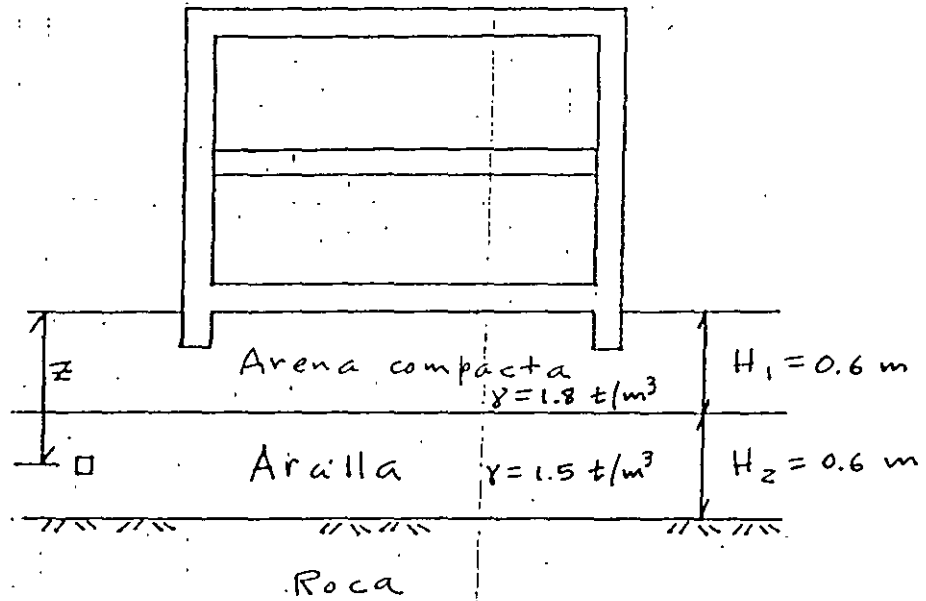
Referencia

Fredlund, D G y Rahardjo, H, *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*, Wiley, 1993

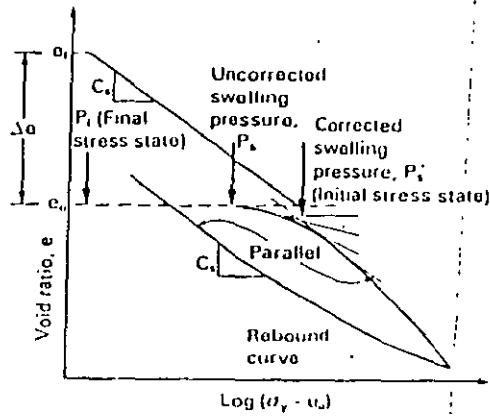
(Defsfredl)



SUELO COHESIVO PARCIALMENTE SATURADO
FIGURA 1



EXPANSION DE UN ESTRATO DE ARCILLA
FIGURA 2



PRUEBA DE VOLUMEN CONSTANTE
(FREDLUND Y RAHARDJO 1993)
FIGURA 3

ANEXO 5

importante; por lo tanto, deben determinarse, en muestras en el laboratorio, las deformaciones permanentes acumuladas por la repetición de cargas. En forma aproximada y únicamente para fines de anteproyecto, se pueden emplear las siguientes expresiones

$$\delta_{pN} = \delta_p (1 + a \log N) \quad (3.5)$$

donde δ_{pN} = deformación permanente debida a N repeticiones de carga
 δ_p = deformación permanente correspondiente a la primera aplicación de carga
N = número de repeticiones de carga
a = coeficiente que depende del tipo de suelo. Para suelos granulares $a \approx 0.25$
log = logaritmo decimal (base 10)

c) Asentamiento diferido debido al incremento neto de carga

Considerando que la presión efectiva en una arcilla saturada no cambia en forma importante por una excavación, el asentamiento a largo plazo se calcula entonces empleando el incremento neto de carga, el cual es el resultado de sustraer de la presión o carga total transmitida al suelo por una subestructura o un elemento de ella, la presión o carga total previamente existente en el suelo al nivel de desplante (RCDF 1976). Además, si el terreno de cimentación consiste en arcilla, el asentamiento debido a cedencia lateral de suelo es usualmente pequeño en comparación con el asentamiento total; por esta razón, aun el asentamiento de cimentaciones en estratos de gran espesor de arcilla puede ser evaluado por métodos basados en deformación unidimensional (Terzaghi y Peck 1967, art 41); es decir, para calcular los asentamientos diferidos únicamente hay que utilizar el esfuerzo normal vertical σ_z .

En el ejemplo 6.1 se presenta la valuación del asentamiento a largo plazo en una cimentación compensada. Cabe aclarar que si se desea obtener adicionalmente la evolución del hundimiento, se puede emplear la teoría de consolidación de Terzaghi-Zeevaert que considera adicionalmente la componente de deformación por viscosidad intergranular (consolidación secundaria); véase para esto Zeevaert (1985).

3.4 Incrementos de esfuerzo en la masa de suelo ocasionados por una carga repartida aplicada en la superficie

3.4.1 Carga uniforme

A continuación se presentan las expresiones para determinar los esfuerzos normales verticales bajo la esquina de un rectángulo sometido a una carga uniforme q aplicada en la superficie (fig 3.5).

Para σ_z (Damy 1985)

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{x y z}{A} + \text{ang tan } \frac{x y}{z A} \right] \quad (3.6)$$

Para σ_x y σ_y (Dashkó y Kagán 1980)

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x y z}{(x^2 + z^2) A} - \text{ang tan } \frac{z A}{x y} + (1 - 2\nu) (\text{ang tan } y/x - \text{ang tan } \frac{y A}{x z}) \right] \quad (3.7)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x y z}{(y^2 + z^2) A} - \text{ang tan } \frac{z A}{x y} + (1 - 2\nu) (\text{ang tan } x/y - \text{ang tan } \frac{x A}{y z}) \right] \quad (3.8)$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

Los esfuerzos normales bajo el centro de un círculo cargado están dados por (Yoder 1967)

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (3.6')$$

$$\sigma_r = (q/2) \left[1 + 2\nu - 2(1+\nu) z / (R^2 + z^2)^{1/2} + z^3 / (R^2 + z^2)^{3/2} \right] \quad (3.7')$$

donde R es del radio del círculo.

3.4.2 Carga triangular

Cuando la carga que se aplica en la superficie es de tipo triangular (fig 3.6), se pueden utilizar las fórmulas de Hamilton Gray (Júarez Badillo y Rico 1980)

Bajo el punto A

$$\sigma_{zA} = \left[p L / (2\pi B) \right] \left(\frac{z \sqrt{L^2 + B^2 + z^2}}{L^2 + z^2} - \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \frac{B L}{\sqrt{B^2 L^2 + B^2 z^2 + L^2 z^2 + z^4}} \right) \quad (3.10)$$

Bajo el punto B

$$\sigma_{zB} = \left[p L / (2\pi B) \right] \left(\frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} - \frac{z^3}{(B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + L^2 + z^2}} \right) \quad (3.11)$$

donde L es la longitud de la carga triangular.

3.5 Cimientos sujetos a carga vertical y momento

3.5.1 Reacción del terreno trapecial

En numerosas ocasiones en la práctica un cimiento se ve sometido a carga vertical y momento. Por ejemplo, una columna le transmite usualmente a una zapata aislada carga vertical y momento. El efecto de un sismo se traduce en fuerzas cortantes y momentos al nivel de cimentación; así, un edificio alto desplantado sobre una losa de apoyo o un cajón de cimentación, en una región sísmica transmite al terreno de cimentación un fuerte momento de volteo, el cual ocasiona deformaciones en dicho terreno que pueden llegar a ser muy importantes. Por lo tanto, se hace necesario determinar las deformaciones del suelo ocasionadas por una fuerza vertical y un momento de volteo, tema que trataremos en este inciso.

Consideremos un cimiento sometido al sistema de cargas de la fig 3.7, y supongamos que la reacción del terreno es la suma de una reacción uniforme debida a la carga Q, y a una reacción debida al momento M. La reacción uniforme se obtiene del cociente Q/A, siendo A el área del cimiento, mientras que la reacción provocada por el momento se obtiene en forma aproximada utilizando la fórmula de la escuadria: $\Delta\sigma = (M/I) \cdot y$. Observamos que la reacción del suelo se calcula entonces con la siguiente expresión

$$\sigma = Q/A \pm (M/I) y$$

donde I = momento de inercia de la planta de la cimentación
y = distancia del centroide del área de la cimentación a la fibra donde se esté calculando el esfuerzo

En los puntos extremos A y B del cimiento los esfuerzos se calculan

$$\sigma_a = Q/A + (M/I) B/2 \quad (3.12)$$

$$\sigma_b = Q/A - (M/I) B/2 \quad (3.13)$$

Si el cimiento es rectangular de ancho B y longitud L

$$\sigma_a = Q / B L + 6 M / L B^2 \quad (3.14)$$

$$\sigma_b = Q / B L - 6 M / L B^2 \quad (3.15)$$

Por la tercera ley de Newton, la carga sobre el terreno es la de la fig 3.7, pero con sentido de arriba hacia abajo (fig 3.8).

Por lo tanto, para determinar las deformaciones del suelo provocadas por un cimiento con carga vertical y momento, es necesario determinar el estado de esfuerzo dentro de la masa de suelo ocasionado por la

carga de tipo trapecial de la fig 3.8.

Cuando solo se desea determinar el esfuerzo normal vertical en la masa de suelo, el problema se puede dividir en el de una carga rectangular σ_b y de una carga triangular σ_a (fig 3.8). El esfuerzo normal ocasionado por la primera se calcula con la fórmula de Damy (ec 3.6), mientras que para la carga triangular se pueden emplear las fórmulas de Hamilton Gray (fig 3.7, ecs 3.10 y 3.11).

Cuando se requiere conocer además del esfuerzo normal vertical σ_z , los esfuerzos normales horizontales σ_x y σ_y , el problema se puede resolver dividiendo la carga trapecial en un número n de cargas uniformes como se ilustra en la fig 3.9. Los esfuerzos buscados se obtienen aplicando las ecs 3.6 a 3.9, para cada una de las cargas uniformes en las que se dividió la carga trapecial.

3.5.2 Reacción triangular

Cuando el momento de volteo es alto, puede ocurrir que se presenten en un extremo esfuerzos teóricos de tensión entre cimiento y terreno (fig 3.10). En la realidad la resistencia a la tensión entre estos dos materiales es prácticamente nula, por lo que no existe dicha zona de tensión. Por lo anterior, se requiere determinar la reacción del terreno ignorando esta zona de tensión.

Supongamos una reacción triangular como la indicada en la fig 3.11. Por equilibrio de fuerzas verticales

$$\sigma_a C / 2 = Q = \text{área del triángulo} \quad (3.16)$$

Tomando momentos con respecto a un eje que pasa por el punto A

$$\Sigma M_A = - Q C / 3 + Q B / 2 - M = 0$$

$$\therefore C = 1.5 B - 3 M / Q \quad (3.17)$$

De la ec 3.16 $\sigma_a = 2 Q / C \quad (3.18)$

En consecuencia, dado un cimiento en el que las cargas Q y M ocasionan esfuerzos teóricos de tensión en el contacto entre terreno y suelo, la reacción de este, supondiéndola triangular (fig 3.11), se obtiene utilizando la ec 3.17 para determinar la distancia C, y la ec 3.18 para obtener el esfuerzo σ_a .

Los esfuerzos en el interior del medio elástico, ocasionados por la carga triangular se hallan empleando las ecs 3.10 y 3.11 del inciso 3.4.2 anterior.

3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

3.6.1 Deformación vertical de un rectángulo cargado

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isotrópico, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida q , está dado por la fórmula de Schleicher (Terzaghi 1943)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left(L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde B = ancho del rectángulo
 L = longitud del rectángulo
 E = módulo de elasticidad del medio
 ν = relación de Poisson del medio

Si el cimiento es cuadrado, la ec 3.19 se convierte en

$$\delta = \frac{2 q B (1 - \nu^2) \ln (1 + \sqrt{2})}{\pi E} \quad (3.19')$$

$$\delta = \frac{1.763 q B (1 - \nu^2)}{\pi E} \quad (3.19'')$$

La rigidez lineal vertical se define como el cociente de la carga vertical concentrada Q_v entre el asentamiento vertical que produce dicha carga. En un cimiento de planta cuadrada de ancho B , la rigidez lineal vertical está dada por

$$K_v = \frac{0.891 E B}{1 - \nu^2} \quad (3.19''')$$

(En la ec 3.19''' el asentamiento se calcula bajo el centro del cuadrado.)

Cuando el medio elástico tiene un espesor H , el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme q está dado por la fórmula de Steinbrenner (Juárez Badillo y Rico 1980)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/\pi E] \left[L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{L^2 + H^2}}{L (B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{B^2 + H^2}}{B (L + A)} \right] + (q/2\pi E) (1-\nu-2\nu^2) H \operatorname{ang} \tan \frac{L B}{H A} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + H^2} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig 3.12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y ν , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_z = (1/E) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.22)$$

donde σ_z , σ_x y σ_y son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y ϵ_z es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por

$$\delta = \epsilon_z H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato.

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

3.6.2 Círculo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert 1973)

$$\delta_v = \frac{\pi (1 - \nu^2) R q}{2 E} \quad (3.24)$$

El desplazamiento horizontal de un círculo sometido a una carga horizontal Q_h está dado por (Richart et al 1970)

$$\delta_h = \frac{(7 - 8 \nu) Q_h}{32 (1 - \nu) G R} \quad (3.25)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale (Richart et al 1970)

$$\theta = [3 (1 - \nu) M] / 8 G R^3 \quad (3.26)$$

en que $G = E / 2 (1 + \nu)$ (3.26)

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal

vertical se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_v = Q_v / \delta_v = 2 E R / (1 - \nu^2) \quad (3.27)$$

La rigidez lineal horizontal se define como la carga horizontal entre el desplazamiento horizontal que produce:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} = \frac{32 (1 - \nu) G R}{7 - 8 \nu} \quad (3.28)$$

La rigidez angular o rigidez a la rotación se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_r = M / \theta = 8 G R^3 / 3 (1 - \nu) \quad (3.29)$$

3.6.3 Giro de un rectángulo sometido a momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento M (fig 3.13) se puede calcular determinando la carga de tipo trapecial (ecs 3.14 y 3.15) o triangular (ecs 3.17 y 3.18) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número n de cargas uniformes (fig 3.9) y se determinan los esfuerzos normales σ_z , σ_x y σ_y con las ecs 3.6 a 3.9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ec 3.22) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec 3.23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig 3.9, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6.1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo I en el sentido que se está analizando, y se determina el radio equivalente a un círculo que tenga el mismo momento de inercia del rectángulo (Normas de Sismo 1987):

$$R = (4 I / \pi)^{1/4} \quad (3.29)$$

Con el radio equivalente R se emplea la ec 3.25 para determinar el giro de la cimentación de planta rectangular.

El criterio anterior es válido cuando la longitud del cimiento es similar al ancho del mismo. Para valores de la longitud mayores que

tres veces el ancho del cimientto, es conveniente usar la fórmula de Fröhlich para un cimientto continuo (de longitud infinita) de ancho B (Zeevaert 1973)

$$\theta = \text{ang tan} [16 (1 - \nu^2) \bar{M} / \pi E B^2] \quad (3.30)$$

donde \bar{M} es el momento por unidad de longitud del cimientto (t.m/m).

TABLA 3.1
ASENTAMIENTOS PERMISIBLES

Asentamiento total permisible de la cimentación de una estructura, de tal forma que no se presente daño funcional en las siguientes instalaciones o elementos:

Obras de drenaje	15 a 30 cm
Accesos a la estructura	30 a 60 cm
Muros de mampostería	2.5 a 5 cm
Marcos estructurales de concreto o acero	5 a 10 cm
Losas o cajones de cimentación	7.5 a 30 cm

Los valores mayores son para asentamientos en terrenos de cimentación homogéneos y estructuras de buena calidad de construcción. Los valores menores son para asentamientos en terrenos de cimentación con estratigrafía errática y estructuras de regular calidad de construcción.

Tomado de Sowers (1962)

ANEXO 6
PROBLEMAS RESUELTOS

Agustín Deméneghi Colina

- 1) Calcular el asentamiento de la zapata de la fig P-1. La arena se encuentra normalmente cargada. Para el cómputo de los incrementos de esfuerzo en el terreno, emplear la presión de contacto suelo-cimiento. Utilizar los siguientes procedimientos
- Fórmula de Burland y Burbridge
 - Gráfica de Terzaghi y Peck
 - Fórmula de Schleicher

Solución

- a) Fórmula de Burland y Burbridge. Se emplea la siguiente expresión

$$\delta = q B^{0.7} I_c \quad (\text{ec 12})$$

donde

$$I_c = 1.17 / N^{1.4} \quad (\text{ec 14})$$

δ = asentamiento del cimiento, en milímetros

q = presión de contacto, en kPa

B = ancho del cimiento, en metros

N = número de golpes de la prueba de penetración estándar

Sustituyendo valores

$$I_c = 1.17 / 15^{1.4} = 0.02640$$

$$q = [26 + 0.25(0.3)(2.4) + 0.3(1.7)(2)(2.4) + (1.7(2) - 0.25(0.3))(1.6)] / [1.7(2)] = 8.852 \text{ t/m}^2$$

$$q = 8.852(9.807) = 86.812 \text{ kPa}$$

Reemplazando en la ec 12

$$\delta = 86.812(1.7)^{0.7}(0.0264) = 3.32 \text{ mm}$$

$$\delta = 0.332 \text{ cm}$$

- b) Gráfica de Terzaghi y Peck. Entrando con $B = 1.7 \text{ m}$ y $N = 15$ en la fig 27, obtenemos que con un incremento de presión de $1.3 \text{ kg/cm}^2 = 13 \text{ t/m}^2$ se presenta un hundimiento máximo de 2.5 cm . Empleando un incremento de presión de 8.852 t/m^2 , considerando una variación lineal, ocurriría un asentamiento de $8.852(2.5)/13 = 1.702 \text{ cm}$

- c) Fórmula de Schleicher. Se emplea la siguiente expresión, que proporciona el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado (ec 3.19, anexo 5)

$$\delta = [q(1 - \nu^2) / (\pi E)] \{ L \ln [(B + \sqrt{B^2 + L^2}) / L] + B \ln [(L + \sqrt{B^2 + L^2}) / B] \}$$

La magnitud de E la obtenemos con la fórmula de Denver

$$E_s = C \sqrt{N} \quad (\text{ec 22})$$

donde $C = 7 \text{ MPa}$

$$E_s = 7 \sqrt{15} = 27.111 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ MPa} = (1/9.807 \times 10^{-3}) \text{ t/m}^2$$

$$E_s = 2764.44 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0.285$$

Entramos en la ec 3.19 del anexo 5, con $B = 1.7/2 = 0.85 \text{ m}$ y $L = 2/2 = 1 \text{ m}$, con lo que determinamos la cuarta parte δ' del asentamiento

$$\delta' = 0.001519 \text{ m, y}$$

$$\delta = 0.001519(4) = 0.006076 \text{ m} = 0.608 \text{ cm}$$

- 2) Calcular el asentamiento de la zapata de la fig P-2. Los suelos se encuentran normalmente cargados. Para el cómputo de los incrementos de esfuerzo, emplear el incremento neto de presión al terreno. Utilizar los siguientes procedimientos

- Ley de Hooke, con la fórmula de Denver
- Fórmula de Steinbrenner

Solución

- a) Ley de Hooke, con la fórmula de Denver. Los incrementos de esfuerzo en el terreno se obtienen con las ecs 3.6, 3.7 y 3.8 del anexo 5, usando $q = q_n$, con

$$q_n = q - p_{vd} = 8.852 - 1.6(0.6) = 7.892 \text{ t/m}^2$$

En la tabla P-2.1 se muestra el cálculo de la deformación de cada estrato

Se emplean las siguientes expresiones

$$E_s = C \sqrt{N} \quad (\text{ec 22})$$

donde $C = 7 \text{ MPa}$

$$K_o = (1 - \text{sen } \phi) (\text{OCR})^{\text{sen } \phi} \quad (\text{ec 4})$$

(OCR) = grado de preconsolidación = 1

$$\nu = K_o / (1 + K_o) \quad (\text{ec 8})$$

Para el cómputo del asentamiento de usa la ley de Hooke

$$\varepsilon = (1/E_s) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$\varepsilon = \delta/h_0$, donde h_0 = espesor del estrato

$$\delta = (h_0/E_s) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

b) Fórmula de Steinbrenner. Se emplea la siguiente expresión, que proporciona el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado (ec 3.20, anexo 5)

$$\delta = [q (1 - \nu^2) / (\pi E)]$$

$$\{ L \ln \{ (B + \sqrt{B^2 + L^2}) \sqrt{L^2 + H^2} / [L (B + A)] \}$$

$$+ B \ln \{ (L + \sqrt{B^2 + L^2}) \sqrt{B^2 + H^2} / [B (L + A)] \} }$$

$$+ [q / (2\pi E)] (1 - \nu - 2\nu^2) H \tan^{-1} [LB / (HA)]$$

$$A = \sqrt{B^2 + L^2 + H^2} \quad (\text{ec 3.21, anexo 5})$$

Los módulos de deformación E_s y de Poisson ν del suelo se pueden obtener como un promedio ponderado (promedio pesado) de sus valores en los estratos. En cada estrato E_s se halla con la fórmula de Denver (ec 22) y ν se obtiene con las ecs 4 y 8. En la tabla P-2.2 se exhibe el cómputo de los promedios ponderados de E_s y ν . Así

$$E_s = 44.86/1.2 = 37.383 \text{ MPa} = 3811.09 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0.3325/1.2 = 0.277$$

Con estas magnitudes, entramos en la ec 3.20 del anexo 5, con $B = 1.7/2 = 0.85 \text{ m}$, $L = 2/2 = 1 \text{ m}$, $H = 1.2 \text{ m}$, $q = q_n = 7.892 \text{ t/m}^2$, con lo que determinamos la cuarta parte δ' del asentamiento

$$\delta' = 0.0004266 \text{ m, y}$$

$$\delta = 0.0004266(4) = 0.001706 \text{ m} = 0.171 \text{ cm}$$

3) Para alojar el cajón de cimentación de un edificio se requiere hacer una excavación de 3.0 m de profundidad, en un área de 16.5 por 39.8 m en planta. El inmueble tiene un peso unitario máximo de 8.042 t/m^2 y un peso unitario medio de 6.542 t/m^2 (ya considerando el peso del cajón de cimentación). La estratigrafía y propiedades del subsuelo se indican en la tabla P-3.1. Calcular:

- La expansión inmediata del fondo del corte, debida a la excavación.
- El asentamiento inmediato por recompresión (recuperación de la expansión por excavación).

c) El asentamiento inmediato por compresión (debido al incremento neto de carga por el peso del edificio).

d) El asentamiento diferido por compresión (debido al incremento neto de carga por el peso del edificio).

Usar los siguientes procedimientos

- Ley de Hooke, con E_e , E_u y E' constantes en cada estrato (tabla P-3.1)
- Fórmula de Janbu
 $E = E_o + Kp_a(p_c/p_a)$
con las propiedades indicadas en la tabla P-3.1, con $n = 0.3$, $K_o = 0.4$, $p_a = 10.3 \text{ t/m}^2$
- Fórmula de Steinbrenner, con $E_s = 500 \text{ t/m}^2$, $E_u = 400 \text{ t/m}^2$ y $E' = 300 \text{ t/m}^2$, entre las profundidades de 3 a 15 m

Solución

La descarga por excavación vale $1.55(2.1) + 1.43(3 - 2.1) = 4.542 \text{ t/m}^2$. Con este valor se obtiene la expansión inmediata por dicha excavación.

El cómputo del hundimiento inmediato por compresión se lleva a cabo usando un incremento neto de presión de $8.042 - 4.542 = 3.5 \text{ t/m}^2$.

El asentamiento diferido se calcula con un incremento neto de presión de $6.542 - 4.542 = 2 \text{ t/m}^2$.

- En las tablas P-3.2 a P-3.4 se presenta el cómputo de la expansión inmediata, del asentamiento inmediato por compresión y del asentamiento diferido por compresión, respectivamente, considerando propiedades constantes en cada estrato (el asentamiento inmediato por recompresión es del mismo orden de magnitud de la expansión inmediata). Se obtienen los siguientes valores: 4.5, 4.3 y 6.6 cm, respectivamente.
- En las tablas P-3.5 a P-3.7 se presenta el cómputo de la expansión inmediata, del asentamiento inmediato por compresión y del asentamiento diferido por compresión, respectivamente, calculando las propiedades de deformación a partir de la fórmula de Janbu (el asentamiento inmediato por recompresión es del mismo orden de magnitud de la expansión inmediata). Se obtienen los siguientes valores: 4.8, 5.2 y 7.1 cm, respectivamente.
- Fórmula de Steinbrenner. Se emplea la siguiente expresión, que proporciona el

asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado (ec 3.20, anexo 5)

$$\delta = [q(1 - \nu^2) / (\pi E)]$$

$$\{ L \ln \{ (B + \sqrt{B^2 + L^2}) \sqrt{L^2 + H^2} / [L(B+A)] \}$$

$$+ B \ln \{ (L + \sqrt{B^2 + L^2}) \sqrt{B^2 + H^2} / [B(L+A)] \}$$

$$+ [q / (2\pi E)] (1 - \nu - 2\nu^2) H \tan^{-1} [LB / (HA)]$$

$$A = \sqrt{B^2 + L^2 + H^2} \quad (\text{ec 3.21, anexo 5})$$

En este caso: $H = 15 - 3 = 12$ m, $B = 16.5/2 = 8.25$ m, $L = 39.8/2 = 19.9$ m

Usamos las ecs 3.20 y 3.21 del anexo 5:

Con $E_e = 500$ t/m², $\nu = 0.5$, $q = 4.542$ t/m², hallamos $\delta = 1.12$ cm, y la expansión inmediata $\delta_e = 4(\delta) = 4.5$ cm

Con $E_u = 400$ t/m², $\nu = 0.5$, $q = 3.5$ t/m², hallamos $\delta = 1.09$ cm, y el asentamiento inmediato por compresión $\delta_u = 4(\delta) = 4.3$ cm

Con $E' = 300$ t/m², $\nu = 0$, $q = 2$ t/m², hallamos $\delta = 1.75$ cm, y el asentamiento diferido por compresión $\delta' = 4(\delta) = 7.0$ cm

Se aprecia que se obtienen magnitudes similares de deformación con los tres métodos.

TABLA P-2.1
CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO. SUELO FRICCIONANTE

Estrato	N	E_s MPa	E_s t/m ²	K_o	ν	σ_z t/m ²	σ_x t/m ²	σ_y t/m ²	δ m
1	25	35.0	3568.88	0.398	0.285	7.867	4.681	4.775	0.000435
2	32	39.60	4037.73	0.371	0.270	7.203	2.123	1.912	0.000605
3	28	37.04	3776.95	0.384	0.278	5.392	0.632	0.453	0.000674
Suma									0.001714

TABLA P-2.2
OBTENCIÓN DE PROMEDIOS PONDERADOS DE E_s Y ν

Estrato	N	E_s MPa	ν	h_o m	$E_s h_o$ m.MPa	νh_o m
1	25	35.0	0.285	0.3	10.5	0.0855
2	32	39.60	0.270	0.4	15.84	0.108
3	28	37.04	0.278	0.5	18.52	0.139
Sumas				1.2	44.86	0.3325

TABLA P-3.1
ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES DEL SUBSUELO

Estrato	Profundidad	h_o	w	γ_{sat}	Propiedades de deformación constantes	Propiedades de deformación (fórmula de Janbu)	Descripción
	m	m	%	t/m ³			
1	0-1.8	1.8	46.2	1.55		--	Limo arenoso
1'	1.8-2.1	0.3	46.2	1.55		--	Limo arenoso
2	2.1-3.0	0.9	75.1	1.43	$E_e = 800 \text{ t/m}^2$ $E_u = 700 \text{ t/m}^2$ $E' = 450 \text{ t/m}^2$	$E_{eo} = 200 \text{ t/m}^2, K_e = 80$ $E_{uo} = 150 \text{ t/m}^2, K_u = 70$ $E_o' = 80 \text{ t/m}^2, K' = 50$	Limo arcilloso
2'	3.0-4.8	1.8	75.1	1.43	$E_e = 800 \text{ t/m}^2$ $E_u = 700 \text{ t/m}^2$ $E' = 450 \text{ t/m}^2$	$E_{eo} = 200 \text{ t/m}^2, K_e = 80$ $E_{uo} = 150 \text{ t/m}^2, K_u = 70$ $E_o' = 80 \text{ t/m}^2, K' = 50$	Limo arcilloso
3	4.8-6.6	1.8	147.8	1.32	$E_e = 500 \text{ t/m}^2$ $E_u = 400 \text{ t/m}^2$ $E' = 300 \text{ t/m}^2$	$E_{eo} = 100 \text{ t/m}^2, K_e = 50$ $E_{uo} = 75 \text{ t/m}^2, K_u = 35$ $E_o' = 60 \text{ t/m}^2, K' = 30$	Arcilla limosa
4	6.6-11.4	4.8	109.6	1.39	$E_e = 500 \text{ t/m}^2$ $E_u = 400 \text{ t/m}^2$ $E' = 300 \text{ t/m}^2$	$E_{eo} = 100 \text{ t/m}^2, K_e = 50$ $E_{uo} = 75 \text{ t/m}^2, K_u = 35$ $E_o' = 60 \text{ t/m}^2, K' = 30$	Arcilla limosa
5	11.4-15.0	3.6	260.4	1.18	$E_e = 500 \text{ t/m}^2$ $E_u = 400 \text{ t/m}^2$ $E' = 300 \text{ t/m}^2$	$E_{eo} = 100 \text{ t/m}^2, K_e = 50$ $E_{uo} = 75 \text{ t/m}^2, K_u = 35$ $E_o' = 60 \text{ t/m}^2, K' = 30$	Arcilla limosa
6	15.0-19.5						Arena en estado muy compacto

Profundidad del nivel de agua freática (NAF): 1.8 m

w = contenido natural de agua

γ = peso volumétrico saturado del suelo

TABLA P-3.2
CÁLCULO DE LA EXPANSIÓN INMEDIATA POR EXCAVACIÓN. PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN CONSTANTES

Es-trato	h_o	σ_z	σ_x	σ_y	E_e	v	δ
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²		m
2'	1.8	4.539	4.152	3.914	800	0.5	0.001140
3'	1.0	4.480	3.404	2.767	500	0.5	0.005021
4	4.8	4.080	2.266	1.337	500	0.5	0.021871
5	3.6	3.304	1.311	0.537	500	0.5	0.017136
Expansión							0.045168

Fórmula utilizada $\delta = h_o [\sigma_z - v (\sigma_x + \sigma_y)] / E_e$

TABLA P-3.3
CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO INMEDIATO POR COMPRESIÓN. PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN CONSTANTES

Es-trato	h_o	σ_z	σ_x	σ_y	E_u	v	δ
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²			m
2'	1.8	3.498	3.199	3.016	700	0.5	0.001004
3	1.8	3.452	2.623	2.132	400	0.5	0.004837
4	4.8	3.144	1.746	1.030	400	0.5	0.021067
5	3.6	2.546	1.010	0.414	400	0.5	0.016506
Asentamiento							0.043413

Fórmula utilizada $\delta = h_o [\sigma_z - v (\sigma_x + \sigma_y)] / E_u$

TABLA P-3.4

CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO DIFERIDO POR COMPRESIÓN. PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN CONSTANTES

Es-trato	h _o	σ _z	σ _x	σ _y	E'	v'	δ'
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²			m
2'	1.8	3.498	3.199	3.016	450	0	0.007996
3	1.8	3.452	2.623	2.132	300	0	0.011837
4	4.8	3.144	1.746	1.030	300	0	0.028742
5	3.6	2.546	1.010	0.414	300	0	0.017458
Asentamiento							0.066033

$\sqrt{\sigma_z}$

1.7999
1.973
1.726
1.455

Fórmula utilizada $\delta' = h_o [\sigma_z - v' (\sigma_x + \sigma_y)] / E'$

TABLA P-3.5

CÁLCULO DE LA EXPANSIÓN INMEDIATA POR EXCAVACIÓN. FÓRMULA DE JANBU

Es-trato	h _o	p _{vo} '	p _{co} '	σ _z	σ _x	σ _y	E _{eo}	K _e	E _e	δ
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²		t/m ²	m
2'	1.8	3.729	2.237	3.498	3.199	3.016	200	80	721.2	0.001264
3	1.8	4.404	2.642	3.452	2.623	2.132	100	50	442.4	0.005675
4	4.8	5.628	3.377	3.144	1.746	1.030	100	50	468.6	0.023338
5	3.6	6.888	4.133	2.546	1.010	0.414	100	50	491.6	0.017429
Expansión										0.047706

Fórmulas utilizadas: $E_e = E_{eo} + K_e p_a (p_{co}' / p_a)^n$

$\delta = h_o [\sigma_z - v' (\sigma_x + \sigma_y)] / E_e$

$p_a = 10.3 \text{ t/m}^2$, $n = 0.3$, $K_o = 0.4$, $p_{co}' = (1 + 2K_o) p_{vo}' / 3$

$p_{co}' =$ presión de confinamiento efectiva

TABLA P-3.6

CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO INMEDIATO POR COMPRESIÓN. FÓRMULA DE JANBU

Es-trato	h _o	p _{vo} '	p _{co} '	σ _z	σ _x	σ _y	E _{uo}	K _u	E _u	δ
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²		t/m ²	m
2'	1.8	3.729	2.237	3.498	3.199	3.016	150	70	606.0	0.001159
3	1.8	4.404	2.642	3.452	2.623	2.132	75	35	314.7	0.006148
4	4.8	5.628	3.377	3.144	1.746	1.030	75	35	333.0	0.025306
5	3.6	6.888	4.133	2.546	1.010	0.414	75	35	349.1	0.018912
Asentamiento										0.051525

Fórmulas utilizadas: $E_u = E_{uo} + K_u p_a (p_{co}' / p_a)^n$

$\delta = h_o [\sigma_z - v' (\sigma_x + \sigma_y)] / E_u$

$p_a = 10.3 \text{ t/m}^2$, $n = 0.3$, $K_o = 0.4$, $p_{co}' = (1 + 2K_o) p_{vo}' / 3$

$p_{co}' =$ presión de confinamiento efectiva

TABLA P-3.7

CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO DIFERIDO POR COMPRESIÓN. FÓRMULA DE JANBU

Es- trato	h_o	p_{vo}'	p_{co}'	σ_z	σ_x	σ_y	E_o'	K'	E'	δ'
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²	t/m ²		t/m ²	m
2'	1.8	3.729	2.237	3.498	3.199	3.016	80	50	405.7	0.008868
3	1.8	4.404	2.642	3.452	2.623	2.132	60	30	265.5	0.013377
4	4.8	5.628	3.377	3.144	1.746	1.030	60	30	281.1	0.030671
5	3.6	6.888	4.133	2.546	1.010	0.414	60	30	295.0	0.017758
									A asentamiento	0.070673

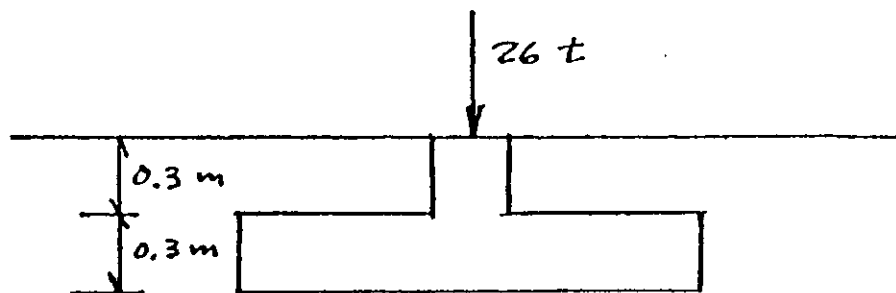
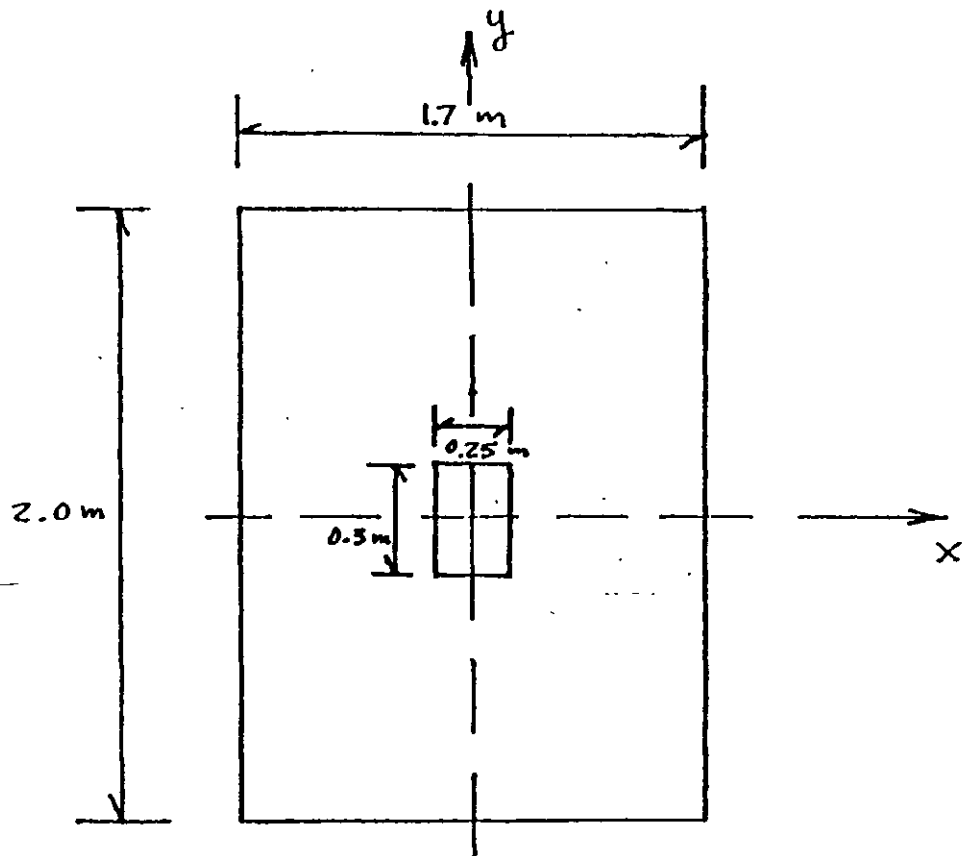
Fórmulas utilizadas: $E' = E_o' + K' p_a (p_{co}' / p_a)^n$

$\delta' = h_o [\sigma_z - v (\sigma_x + \sigma_y)] / E'$

$p_a = 10.3 \text{ t/m}^2$, $n = 0.3$, $K_o = 0.4$, $p_{co}' = (1 + 2K_o) p_{vo}' / 3$

$p_{co}' =$ presión de confinamiento efectiva

(Acprores1,acdefsfj11,dscts5,aseninst)



$$D_r = 58\% , \phi^* = 37^\circ , \gamma_d = 1.6 \text{ t/m}^3$$

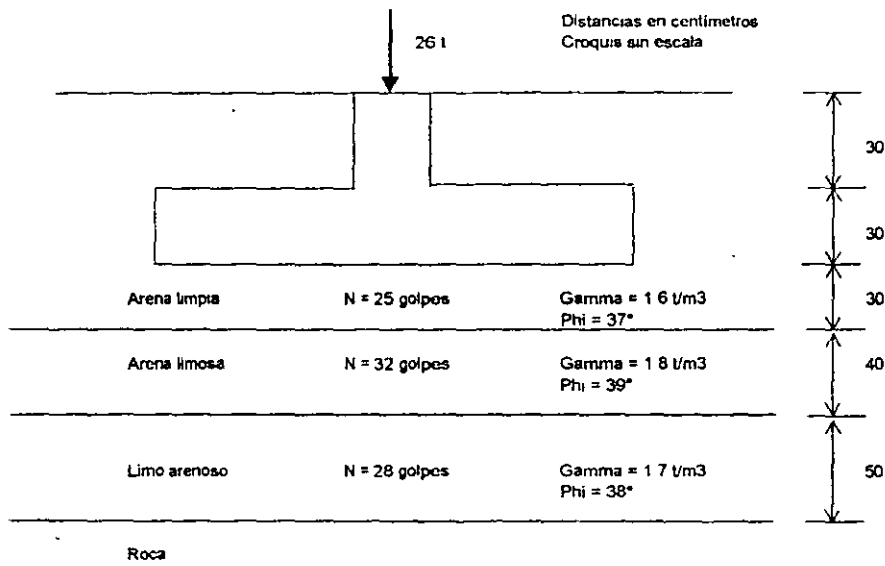
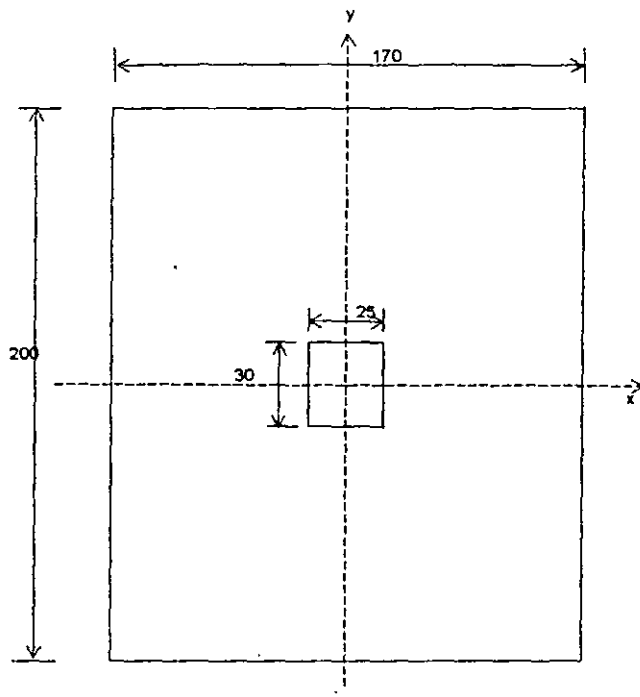
Arena

$$s_s = 2.6$$

$N = 15$ golpes

SUELO FRICCIONANTE

FIGURA P-1



(Acde/sfej11)

FIGURA P2

ANEXO 7
TEORÍA DE LA CONSOLIDACIÓN PRIMARIA DE TERZAGHI

DEFORMACIÓN VERTICAL DE UN ESTRATO DE ARCILLA

Consideremos un estrato de arcilla de espesor inicial h_1 , el cual, al ser sometido a un incremento de carga, sufre una deformación vertical δ (fig 1), quedando con un espesor final h_2

$$\delta = h_1 - h_2 \quad (1)$$

Sus relaciones de vacíos inicial y final son (fig 1)

$$e_1 = h_{v1}/h_s \quad (2)$$

$$e_2 = h_{v2}/h_s \quad (3)$$

Supongamos que la compresión vertical se debe únicamente a una reducción de los vacíos del suelo, entonces (fig 1)

$$h_1 = h_{v1} + h_s \quad (4)$$

$$h_2 = h_{v2} + h_s \quad (5)$$

Reemplazando las ecs 4 y 5 en la ec 1

$$\delta = h_{v1} - h_{v2} \quad (6)$$

Sustituyendo las ecs 2 y 3 en la ec 6

$$\delta = e_1 h_s - e_2 h_s = h_s (e_1 - e_2)$$

Dividiendo ambos miembros entre h_1

$$\delta/h_1 = (h_s/h_1) (e_1 - e_2)$$

Tomando en cuenta las ecs 4 y 2

$$\delta/h_1 = [h_s/(h_{v1} + h_s)] (e_1 - e_2)$$

$$\delta/h_1 = [h_s/(e_1 h_s + h_s)] (e_1 - e_2)$$

$$\delta/h_1 = [1/(1 + e_1)] (e_1 - e_2)$$

$$\text{Hagamos } \Delta e = e_1 - e_2 \quad (7)$$

$$\delta = [(\Delta e)/(1 + e_1)] h_1 \quad (8)$$

La ec 8 permite calcular la deformación vertical de un estrato de suelo de espesor inicial h_1 , en función de su decremento de relación de vacíos y de su relación de vacíos inicial.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CONSOLIDACION PRIMARIA

Sea un estrato de arcilla de espesor H , con el nivel de agua freática (NAF) en la superficie del terreno (fig 2a). Los diagramas de presión total, hidráulica y efectiva se muestran en la fig 2a. Consideremos que aplicamos una carga unitaria vertical q en un área suficientemente grande para que el incremento de presión vertical sea constante con la profundidad; supongamos además que se permite el drenaje en la frontera superior del estrato de arcilla. Los diagramas de presión en el suelo quedan como se indica en la fig 2b.

Calculemos el gasto de salida dV_1 y de entrada dV_2 de un elemento de suelo de espesor dz , situado a la profundidad z (fig 3). La curva de variación de la presión hidráulica en un tiempo t se indica en la fig 3.

Obtengamos el gradiente hidráulico a la profundidad z (punto A, fig 3). La altura piezométrica vale (fig 2b)

$$h = u/\gamma_w + y = (u_0 + \Delta u)/\gamma_w + y$$

$$h = u_0/\gamma_w + (\Delta u)/\gamma_w + y$$

$$\text{Pero } u_0 = \gamma_w (H - y)$$

$$h = H - y + (\Delta u)/\gamma_w + y$$

$$h = H + (\Delta u)/\gamma_w \quad (9)$$

Llamemos Δu al incremento de presión hidráulica en el punto A (fig 3)

$$(\Delta u)_A = (\Delta u)$$

El incremento de presión hidráulica en el punto B vale (fig 3)

$$(\Delta u)_B = (\Delta u) + [\partial(\Delta u)/\partial z] dz$$

El gradiente hidráulico en el punto A (flujo vertical) es

$$i_A = \partial h / \partial z$$

Tomando en cuenta la ec 9

$$i_A = (1/\gamma_w) \partial(\Delta u) / \partial z$$

El gradiente hidráulico en el punto B es

$$i_B = (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u) + [\partial(\Delta u)/\partial z] dz \}$$

El gasto de salida del elemento (cara I), para un área unitaria en dirección vertical, utilizando la ley de Darcy, vale

$$dV_I/dt = k (1/\gamma_w) \partial(\Delta u) / \partial z$$

$$dV_I = k (1/\gamma_w) [\partial(\Delta u) / \partial z] dt \quad (10)$$

En forma análoga, el gasto de entrada al elemento (cara II) es

$$dV_{II}/dt = k (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u) + [\partial(\Delta u)/\partial z] dz \}$$

$$dV_{II} = \{ k (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u) + [\partial(\Delta u)/\partial z] dz \} \} dt \quad (11)$$

La diferencia entre el gasto de salida y el de entrada será, restando la ec 11 a la ec 10

$$\Delta dV = dV_I - dV_{II}$$

$$\Delta dV = - (k/\gamma_w) [\partial^2(\Delta u) / \partial z^2] dz dt \quad (12)$$

Por otra parte, la deformación vertical del elemento de espesor dz vale, aplicando la ec 8

$$\Delta d\delta = [de/(1+e)] dz$$

Y el decremento de volumen, para un área unitaria en dirección vertical

$$\Delta dV = [de/(1+e)] dz \quad (13)$$

El coeficiente de compresibilidad se define como

$$a_v = de/dp_v', \quad de = a_v dp_v'$$

Reemplazando en la ec 13

$$\Delta dV = [a_v dp_v' / (1+e)] dz \quad (14)$$

Por otra parte, en un suelo totalmente saturado se cumple

$$p_v = p_v' + u = p_v' + u_o + \Delta u$$

$$dp_v = 0 = dp_v' + du_o + d(\Delta u)$$

$$dp_v' = - d(\Delta u)$$

$$d(\Delta u) = [\partial(\Delta u) / \partial t] dt$$

$$dp_v' = - [\partial(\Delta u) / \partial t] dt$$

Sustituyendo en la ec 14

$$\Delta dV = - [a_v / (1+e)] [\partial(\Delta u) / \partial t] dt dz \quad (15)$$

$$\text{Sea } m_v = a_v / (1+e) \quad (16)$$

m_v se conoce como coeficiente de compresibilidad volumétrica del suelo.

$$\Delta dV = - m_v [\partial(\Delta u) / \partial t] dt dz \quad (17)$$

El volumen de agua expulsada del elemento (fig 3) debe ser igual al cambio de volumen del mismo, por lo tanto, las ecs 12 y 17 miden la misma cantidad, y deben ser iguales

$$- (k/\gamma_w) [\partial^2(\Delta u) / \partial z^2] dz dt = - m_v [\partial(\Delta u) / \partial t] dt dz$$

$$(k/m_v \gamma_w) [\partial^2(\Delta u) / \partial z^2] = [\partial(\Delta u) / \partial t] \quad (18)$$

$$\text{Sea } C_v = k/m_v \gamma_w \quad (19)$$

A C_v se le conoce como coeficiente de consolidación del suelo.

$$C_v [\partial^2(\Delta u) / \partial z^2] = [\partial(\Delta u) / \partial t] \quad (20)$$

La ec 20 mide la variación del incremento de presión hidráulica en función de la profundidad y del tiempo, y se conoce como la ecuación diferencial del fenómeno de consolidación primaria para flujo vertical.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONSOLIDACIÓN

Para la solución de la ecuación diferencial de la consolidación

$$C_v [\partial^2(\Delta u) / \partial z^2] = [\partial(\Delta u) / \partial t] \quad (\text{ec 20})$$

Se consideran las siguientes condiciones de frontera (fig 2b)

$$\Delta u = 0, \text{ para } z = 0 \text{ y } z = 2H_e, \text{ para todo } t > 0.$$

Con la siguiente condición inicial

$$\Delta u = q, \text{ para } t = 0^+, \text{ y } 0 < z < 2H_e$$

Para estas condiciones, la solución de la ec 20 es (Juárez Badillo y Rico, 1976)

$$\Delta u = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2 H_e} \right] \exp \left[- \frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} \quad (21)$$

$$\text{donde } T = C_v t / H_e^2 \quad (22)$$

A T se le denomina factor tiempo.

GRADO DE CONSOLIDACIÓN DE UN ESTRATO DE ARCILLA

Se define el grado o porcentaje de consolidación a la profundidad z de la siguiente forma (fig 4)

$$U_z(\%) = (AC/AB) (100) = [(q - \Delta u)/q] (100)$$

$$U_z(\%) = (1 - \Delta u/q) (100) \quad (23)$$

Se define el grado o porcentaje de consolidación de un estrato de arcilla de espesor H = 2H_e de la siguiente forma (fig 4)

$$U(\%) = \frac{\int_0^{2H_e} (q - \Delta u) dz}{q (2H_e)} (100) \quad (24)$$

$$U(\%) = (100) \left\{ 1 - [1/q(2H_e)] \int_0^{2H_e} (\Delta u) dz \right\} \quad (25)$$

Tomando en cuenta la ec 21

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2 H_e} \right] \exp \left[- \frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\}$$

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \exp \left[- \frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ - \frac{2H_e}{(2i+1)\pi} \cos \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2 H_e} \right] \right\} \right\}$$

$$- \cos \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2 H_e} \right] = - [\cos (2i+1)\pi - \cos 0]$$

$$= -(-1-1) = 2$$

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q (2H_e) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp \left[- \frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right]$$

Sustituyendo en la ec 25

$$U(\%) = (100) \left[1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp \left[- \frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right] \quad (26)$$

En la ec 26 observamos que el porcentaje de consolidación de un estrato depende únicamente del factor tiempo: U = f(T). En la tabla 1 se muestran los valores de U en función de T (Juárez Badillo y Rico, 1976).

Ejemplo

Calcular el asentamiento por consolidación del estrato de arcilla, bajo el centro del área en planta de un edificio, 102 días después de terminada la construcción, suponiendo que la carga q se aplica en forma instantánea, para la estratigrafía y propiedades del subsuelo mostradas en la fig E-1. Suponga que el estrato de limo arenoso está saturado por capilaridad hasta la superficie del terreno.

Solución

Para el cálculo del asentamiento total por consolidación se aplica la ec 17

$$\delta = \frac{C_{rc} H}{1+e_o} \log \left(\frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)$$

$$p_{vo}' = 1.9(1) + 2(0.9) + 1.5(0.4) = 4.3 \text{ t/m}^2$$

$$q_n = q - p_{vd} = 5 - 2(1.9) = 1.2 \text{ t/m}^2$$

El incremento de esfuerzo vertical a la mitad del estrato, aplicando la fórmula de Boussinesq vale $\sigma_z = 1.148 \text{ t/m}^2$

Sustituyendo valores

$$\delta = \frac{0.96 (3)}{1+6} \log \frac{4.3 + 1.148}{4.3} = 0.04228 \text{ m}$$

El factor tiempo vale (ec 22)

$$T = C_v t / H_e^2 = [2 \times 10^{-3} (102) (86400)] / 150^2 = 0.7834$$

De la tabla 1: $U = 88.03\%$
El asentamiento a 102 días valdrá
 $4.228(0.8803) = 3.72 \text{ cm}$

REFERENCIA

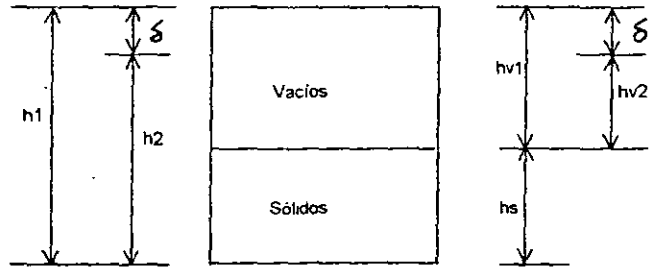
Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo I, Limusa, 1976

TABLA 1
RELACIÓN TEÓRICA U(%)-T

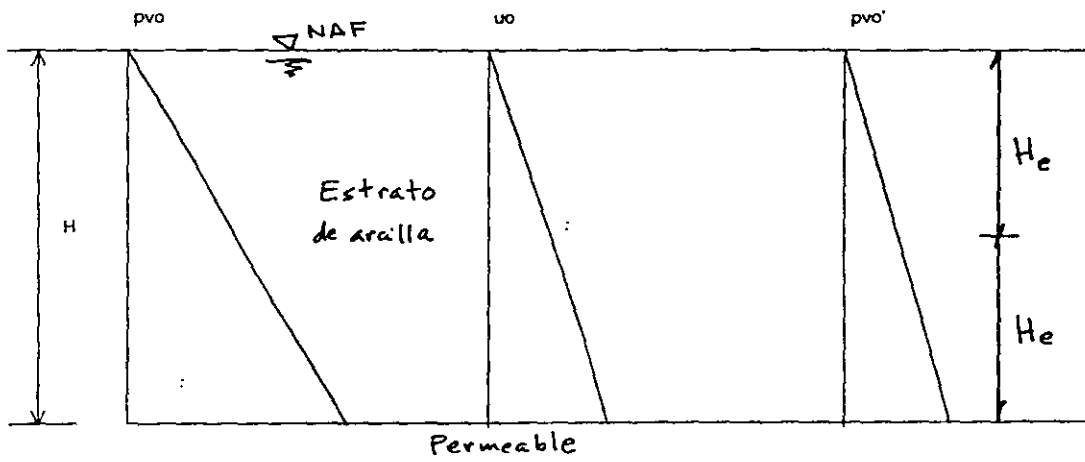
U(%)	T
0	0
10	0.008
15	0.018
20	0.031
25	0.049
30	0.071
35	0.096
40	0.126
45	0.159
50	0.197
55	0.238
60	0.287
65	0.342
70	0.405
75	0.477
80	0.565
85	0.684
90	0.848
95	1.127
100	∞

(Tomada de Juárez Badillo y Rico, 1976)

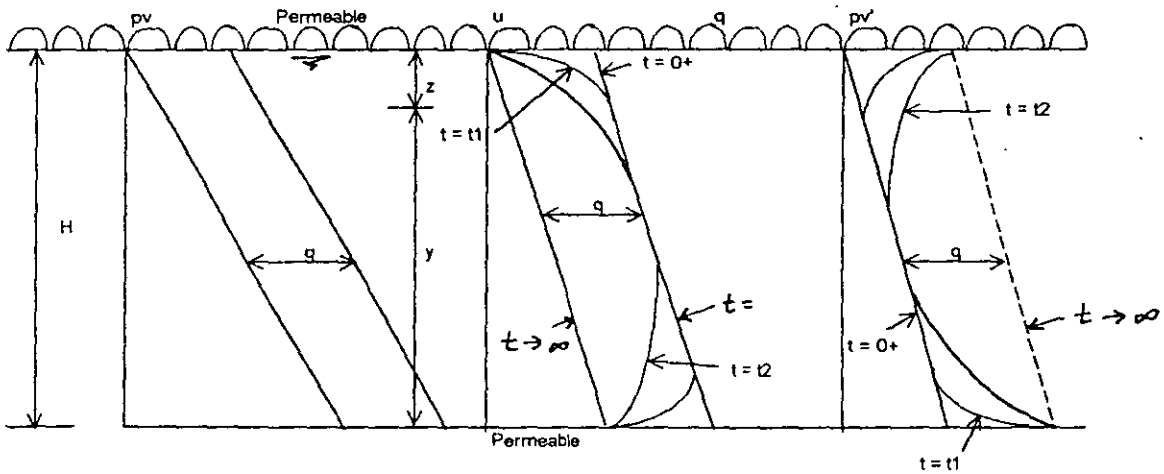
(C\$consprim2,c\$consprim2f)



DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE SUELO
FIGURA 1



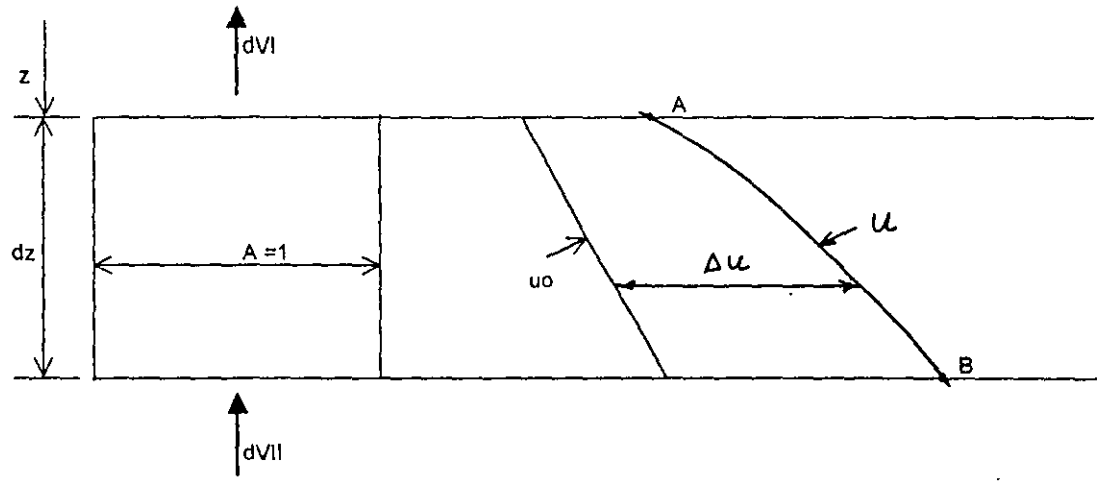
a) Diagramas de presión iniciales



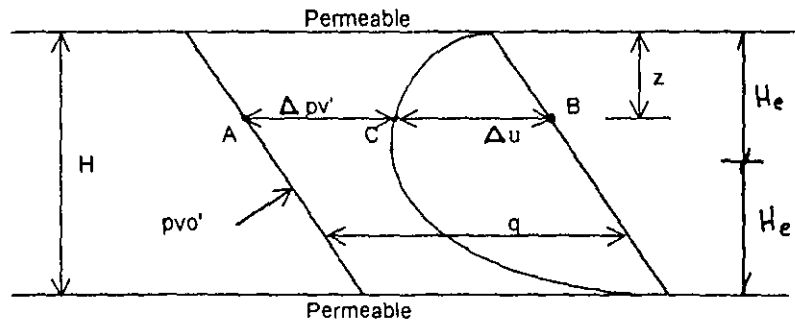
b) Diagramas de presión con un incremento de carga repartida q

ESTRATO SOMETIDO A UN INCREMENTO DE CARGA q
FIGURA 2

(Cscsprim2f)

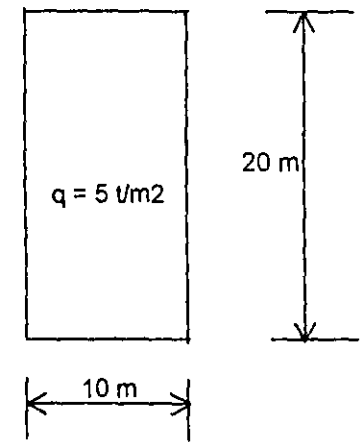
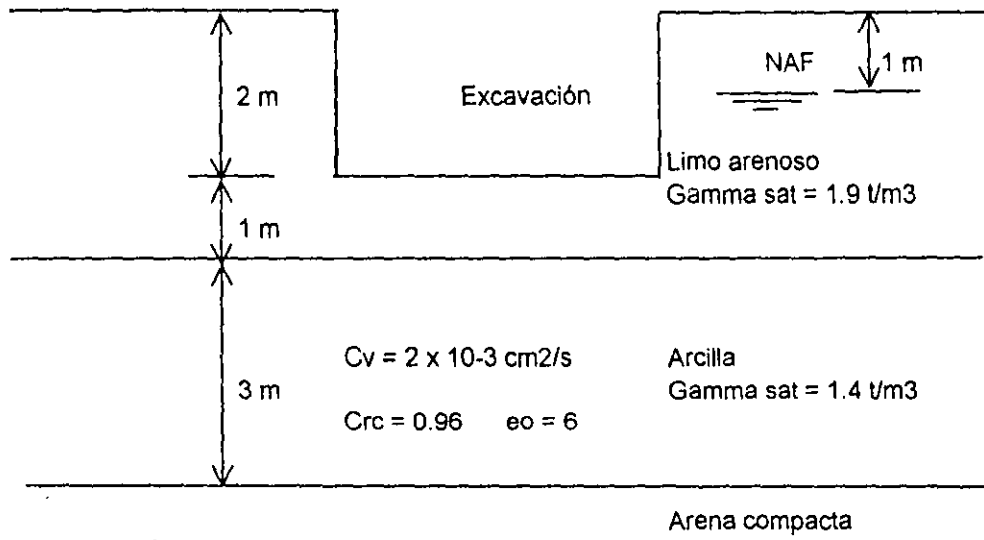


FLUJO VERTICAL A TRAVÉS DE UN ELEMENTO DE SUELO
FIGURA 3



GRADO DE CONSOLIDACIÓN DE UN ESTRATO DE ARCILLA DE ESPESOR H
FIGURA 4

(C_sconsprim2f)



PLANTA DEL EDIFICIO

ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES
 FIGURA E-1

(Csconsprim2f)

CONSOLIDACIÓN SECUNDARIA'

Agustín Deméneghi Colina*

Margarita Puebla Cadena*

Retomando lo visto en el tema de consolidación unidimensional, podemos distinguir en una curva de consolidación dos partes: la primaria (que es la estudiada bajo el título de consolidación unidimensional) y la secundaria, la cual será tratada a continuación.

Podemos considerar que la consolidación primaria es un fenómeno de tipo hidrodinámico, que implica expulsión de agua. Si lo expresamos mediante una analogía física, ésta sería la Analogía Mecánica de Terzaghi.

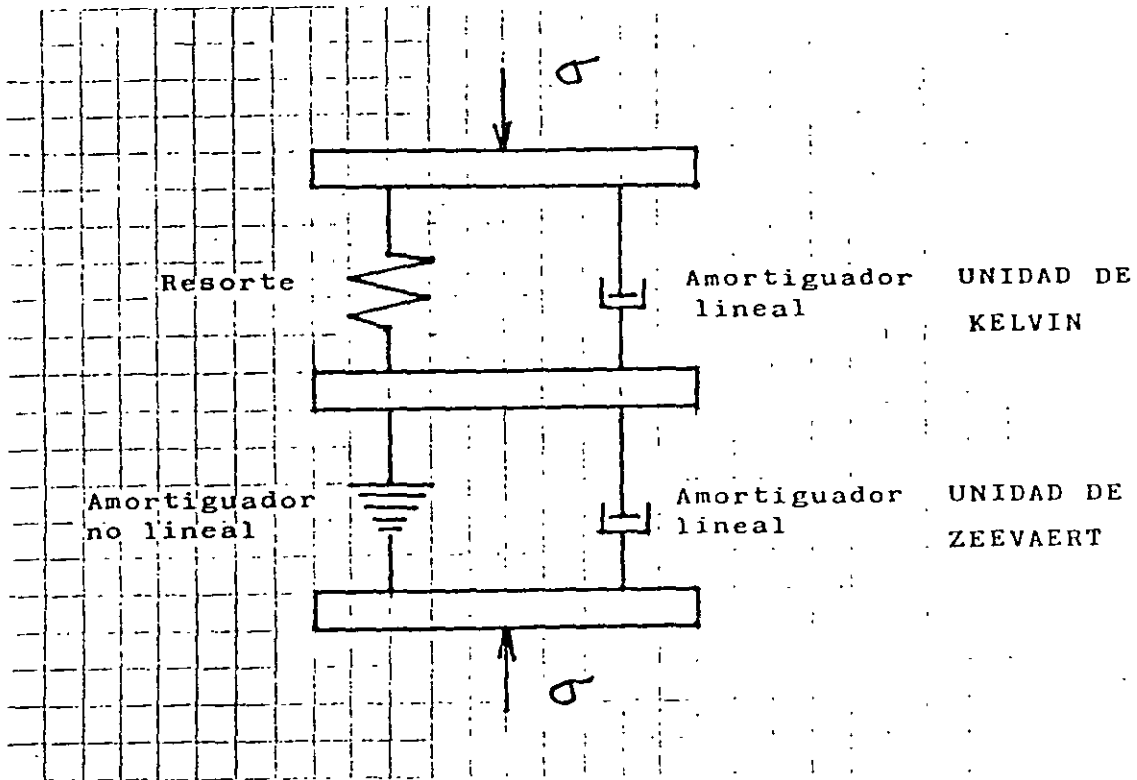
La consolidación secundaria, por su parte, es un fenómeno de tipo viscoso que se atribuye al agua que rodea a las partículas de arcilla. Se considera que, en un cierto momento, las partículas "resbalan" unas sobre otras (como si patinaran). Debido a lo anterior, sucede que el suelo se sigue deformando aunque la mayor parte del agua ya haya salido de él. Cabe recalcar que, si bien es cierto que disminuye el volumen del suelo, la cantidad de agua que sale durante este fenómeno es muy poca, en comparación con la que se expulsa durante la consolidación primaria.

Actualmente existen diferentes teorías para el cálculo de la consolidación secundaria, como son: la de Buisman y la de Zeevaert. En el presente trabajo trataremos esta última.

* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

TEORÍA DE ZEEVAERT (1986) DE CONSOLIDACIÓN SECUNDARIA

Sea el siguiente modelo físico, formado por una Unidad de Kelvin y una Unidad de Zeevaert.



Si observamos la Unidad de Kelvin, vemos que está compuesta por un resorte y un amortiguador lineal, estando el resorte sujeto a la Ley de Hooke y el amortiguador a la Ley de Newton.

Ley de Hooke: $\epsilon_1 = \alpha_1 \sigma$

donde: ϵ_1 es la deformación unitaria

α_1 es el coeficiente de proporcionalidad

σ es el esfuerzo

Ley de Newton: $\dot{\epsilon} = d\epsilon_1 / dt = \phi_1 \sigma$

donde $\dot{\epsilon}$ es la velocidad de deformación.

La Unidad de Kelvin en realidad es el modelo del émbolo que representa a la consolidación lineal de Terzaghi, siendo los sólidos del suelo representados por el resorte y el agua representada por el amortiguador lineal.

La Unidad de Zeevaert está constituida por un amortiguador lineal y por otro amortiguador no lineal. El amortiguador lineal está gobernado por la Ley de Newton y el no lineal, por la Ley de Zeevaert.

Ley de Zeevaert: $\dot{\epsilon}_z = [a / (b + t)] \sigma_z$

donde: $\dot{\epsilon}_z$ = velocidad de deformación.

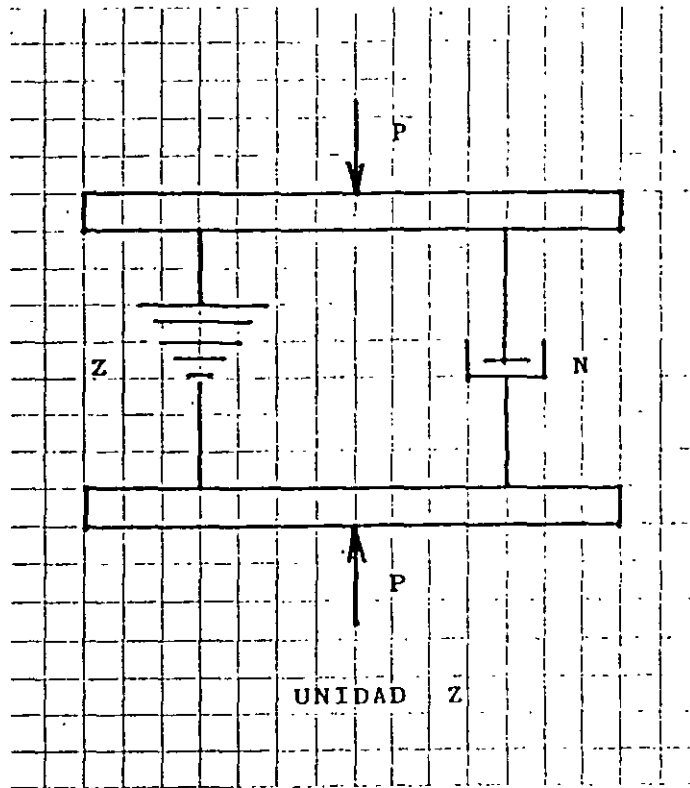
a y b son coeficientes

t = tiempo transcurrido desde el instante en que se aplica la carga al instante en que se mide la deformación.

σ_z = esfuerzo normal vertical.

Así como la Unidad de Kelvin representa a la consolidación primaria, la Unidad de Zeevaert representa a la consolidación secundaria.

Ahora consideremos detalladamente el modelo:



Al someter a la Unidad de Zeevaert al efecto de una carga P , se considera que dicha carga se distribuye entre el amortiguador lineal y el no lineal: $P = P_z + P_n$

Así pues, se tiene que: $P/A = (P_z/A) + (P_n/A)$

y por ello: $\sigma = \sigma_z + \sigma_n$

Por otra parte, considerando que la deformación unitaria en la Unidad de Zeevaert, es la misma en ambos amortiguadores, se cumple que : $\epsilon = \epsilon_n = \epsilon_z$

Ahora bien, considerando las velocidades de deformación, tenemos que:

$$\dot{\epsilon}_n = \phi_2 \sigma_n \quad (1)$$

donde ϕ_2 es la fluidez del agua viscosa del suelo, σ_n es el esfuerzo normal y $\dot{\epsilon}_n$ es la velocidad de deformación en el amortiguador lineal.

La velocidad de deformación en el amortiguador no lineal, por su parte, está gobernada por la Ley de Zeevaert:

$$\dot{\epsilon} = [a / (b+t)] \sigma_z \quad \text{donde: } \dot{\epsilon} \text{ es la velocidad de deformación del amortiguador no lineal, } \sigma_z \text{ es el esfuerzo normal, siendo a y b coeficientes y t el tiempo entre el instante en que se aplica la carga y el instante en que se mide la deformación.}$$

Si despejamos los valores de σ_n y σ_z de las expresiones anteriores, tenemos que:

$$\sigma_n = [1 / \phi_2] \dot{\epsilon}_n$$

$$\sigma_z = \{ 1 / [a / (b+t)] \} \dot{\epsilon}_z$$

Recordando que el esfuerzo en la Unidad de Zeevaert se reparte entre el amortiguador lineal y el amortiguador no lineal, de modo que:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_n$$

Substituyendo, tenemos:

$$\{ [(b+t)/a] (d\epsilon/dt) \} + [(1/\phi_2) (d\epsilon/dt)] = \sigma$$

$$(d\epsilon/dt) \{ [(b+t)/a] + (1/\phi_2) \} = \sigma$$

$$d\varepsilon/dt = \sigma / \left(\left[\frac{b+t}{a} \right] + \left(\frac{1}{\phi_2} \right) \right)$$

Integrando y considerando que $\sigma = \text{constante}$ se tiene que:

$$\varepsilon = a \sigma \ln \left(\left[\frac{b + (a/\phi_2) + t}{b + (a/\phi_2)} \right] \right) + C$$

Considerando las condiciones iniciales, que indican que para un tiempo igual a cero la deformación es igual a cero:

$$0 = a \sigma \ln \left(\left[\frac{b + (a/\phi_2)}{b + (a/\phi_2)} \right] \right) + C \quad \gg \quad C = 0$$

Por lo tanto

$$\varepsilon = a \sigma \ln \left(\left[\frac{b + (a/\phi_2) + t}{b + (a/\phi_2)} \right] \right) \quad (2)$$

Demostremos a continuación que $b = 0$. Lo que toma el amortiguador lineal es (ec 1):

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{\phi_2} \right) \dot{\varepsilon}_n \quad (3)$$

Pero $\varepsilon_n = \varepsilon_z = \varepsilon$

Por lo tanto, derivando la ec 2

$$\dot{\varepsilon}_n = a \sigma / \left[b + (a/\phi_2) + t \right] \quad (4)$$

Sustituyendo la ec 4. en la ec 3

$$\sigma_n = a \sigma / \phi_2 \left[b + (a/\phi_2) + t \right]$$

Para un tiempo igual a cero, todo el esfuerzo normal lo toma el amortiguador lineal, es decir, para $t = 0$, $\sigma_n = \sigma$

$$\sigma = a \sigma / \phi_2 \left[b + (a/\phi_2) \right] \quad \gg \quad b = 0$$

La ec 2 queda finalmente

$$c = a \sigma \ln \left\{ \left[\frac{(a/\phi_2) + t}{(a/\phi_2)} \right] \right\}$$

$$c = a \sigma \ln [1 + (\phi_2 / a) t] \quad (5)$$

Ahora bien, dado que : $\ln x = 2.31 \log_{10} x = 2.31 \log x$

$$c = a \sigma (2.31) \log [1 + (\phi_2/a) t]$$

La expresión anterior es válida para una sola Unidad de Zeevaert, pero en el suelo se tiene un número muy grande de Unidades Z. Por esa razón se trabaja con la siguiente expresión:

$$c = \bar{a} \sigma (2.31) \log [1 + (\bar{\phi}_2 / \bar{a}) t]$$

donde \bar{a} es el promedio de todas las a del suelo.

La expresión anterior se puede presentar de la manera siguiente:

$$c = 2.31 \bar{a} \sigma \log [1 + (\bar{\phi}_2 / \bar{a}) (H_e^2 / c_v) (c_v / H_e^2) t]$$

Si hacemos que:

$$2.31 \bar{a} = m_t, \quad \text{y también:}$$

$$(\bar{\phi}_2 / \bar{a}) (H_e^2 / c_v) = \xi$$

la ecuación queda como:

$$c_{vp} = m_t \sigma \log (1 + \xi T) \quad \text{Ecuación de Zeevaert para la consolidación secundaria.}$$

donde: c_{vp} es la deformación viscoplástica, la cual corresponde a la consolidación secundaria.

m_t y ξ son función de las curvas de consolidación y se

obtienen en el laboratorio.

Los valores típicos para la arcilla de la Ciudad de México, son aproximadamente:

ξ varía de 0.3 a 0.4

m_t varía de 0.003 a 0.004 (cm^2/kg)

Finalmente, la consolidación total (deformación total ϵ) es la suma de la deformación elastoplástica ϵ_{ep} (consolidación primaria) y la deformación viscoplástica ϵ_{vp} (consolidación secundaria). $\epsilon = \epsilon_{ep} + \epsilon_{vp}$.

Ahora bien, para trabajar en forma integral las consolidaciones primaria y secundaria se usará la expresión anterior.

Así pues en la Teoría de Terzaghi para la consolidación primaria se tiene que:

$\Delta H = m_v \Delta p H$ que corresponde al asentamiento total ϵ_{ep} , y

$S_t = \Delta H U = m_v \Delta p H U$ siendo S_t el asentamiento (la deformación), para un tiempo t . U = porcentaje de consolidación, que depende del factor tiempo T (tabla 1, Juárez Badillo y Rico 1976)

Esto se puede expresar en la siguiente forma

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U \quad (6)$$

Por otra parte se sabe que:

$\epsilon_{vp} = m_t \sigma \log (1 + \xi T)$ que corresponde a la deformación viscoplástica según Zeevaert.

Ahora bien, dado que por definición: $\epsilon_{vp} = \delta_{vp}/ H$, tenemos que:

$$\delta_{vp} = [m_t \sigma \log (1 + \xi T)] H \quad (7)$$

donde $\sigma = \Delta p =$ corresponde a un incremento de esfuerzo. O sea que es el σ_z de Boussinesq.

Sumando los efectos elastoplástico y viscoplástico tenemos que:

$$\delta_{total} = \delta_t = \delta_{ep} + \delta_{vp} = m_v \Delta p H U + [m_t \Delta p \log (1 + \xi T)] H$$

y llegamos a que:

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U \quad (8)$$

$$\delta_{vp} = m_t \Delta p H \log (1 + \xi T) \quad (9)$$

$$\delta_t = \Delta p H \{ (m_v U) + [m_t \log (1 + \xi T)] \} \quad (10)$$

donde: $T = (C_v t) / H e f^2$ y también $U =$ función del tiempo t .

Las ecs 8, 9 y 10 son las que se emplean para el cálculo de asentamientos por consolidación primaria y secundaria.

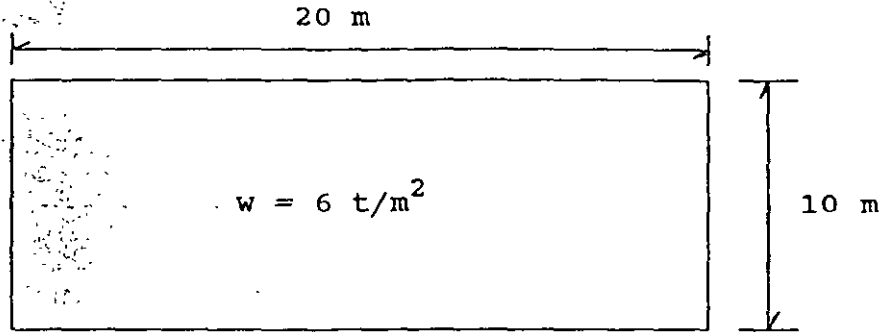
REFERENCIAS

Juárez Badillo, E y Rico, A, Mecánica de Suelos, tomo I, cap X, Limusa, 3ra edición, 1976

Zeevaert, L, "Consolidation in the intergranular viscosity of highly compressible soils", Consolidation of Soils: Testing and Evaluation, ASTM STP 892. R N Yong and F C Townsend, eds, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp 257-281, 1986

EJEMPLO DE CONSOLIDACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Determinar el asentamiento a 2, 5 y 10 años, del edificio de la figura, debidos a consolidación primaria y secundaria del estrato de arcilla de consistencia blanda.



La estratigrafía del subsuelo es la siguiente

		Estrato
4 m	Arena medianamente compacta	1
3 m	Arcilla de consistencia blanda	2
	Arena medianamente compacta	3

La arcilla del estrato 2 tiene las siguientes propiedades

$$m_v = 0.0052 \text{ cm}^2 / \text{kg}$$

$$m_t = 0.0048 \text{ cm}^2 / \text{kg}$$

$$\xi = 0.46$$

$$C_v = 2.7 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{seg}$$

SOLUCIÓN

Empleando la teoría de Boussinesq se obtiene el esfuerzo normal a la mitad del estrato de arcilla

$$\sigma_z = 4.58 \text{ t/m}^2 = \Delta p$$

Si el tiempo es de 2 años, se debe convertir a segundos para hacerlo compatible con los coeficientes obtenidos en el laboratorio:

$$t = 2 \text{ años}$$

$$t = 2 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 6.3072 \times 10^7 \text{ seg}$$

obteniendo el factor tiempo:

$$T = (C_v t) / (H_{ef}^2) = [(2.7 \times 10^{-4}) (6.3072 \times 10^7)] / [150^2]$$

$$T = 0.757$$

Nota: H_{ef} es en centímetros.

De la tabla 1 se tiene que, para $T = 0.757$ $U = 0.872$

Además: $4.58 \text{ ton/m}^2 \times 1000 \text{ kg/ton} \times 1 \text{ m}^2 / 10000 \text{ cm}^2 =$

$$0.458 \text{ kg/cm}^2$$

Substituyendo en las ecs 8, 9 y 10

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U \quad (8)$$

$$\delta_{vp} = m_t \Delta p H \log (1 + \xi T) \quad (9)$$

$$\delta t = \Delta p H ((m_v U) + [m_t \log (1 + \xi T)]) \quad (10)$$

$$\delta_{ep} = (0.0052) (0.458) (300) (0.872) = 0.623 \text{ cm}$$

$$\delta_{vp} = (0.0048) (0.458) (300) \log [1 + 0.46 (0.757)] = 0.086 \text{ cm}$$

$$\delta_t = (0.458) (300) \{ (0.0052) (0.872) + 0.0048 \log [1 + 0.46 (0.757)] \}$$

$$\delta_t = 0.709 \text{ cm}$$

Procediendo de manera análoga se obtienen los hundimientos para 5 y 10 años:

t años	t s	T	U	δ_{ep} cm	δ_{vp} cm	δ_t cm
2	6.307×10^7	0.757	0.872	0.623	0.086	0.709
5	1.6×10^8	1.892	1.0	0.714	0.179	0.893
10	3.2×10^8	3.784	1.0	0.714	0.289	1.003