

4. FUNDAMENTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE INVERSIÓN 2D

Nuestro sistema de estudio es la Tierra, la cual se puede considerar como un cuerpo, sistema físico, cuyas propiedades pueden ser parametrizadas.

Según Tarantola (2005) el procedimiento científico para el estudio de un sistema físico puede ser dividido en tres etapas:

- 1) Parametrización del sistema: obtener un conjunto mínimo de parámetros que lo caractericen completamente, desde un determinado punto de vista.
- 2) Modelado directo: conozco los parámetros del modelo m , se calculan los valores de dichos parámetros de un modelo conocido d .

$$\text{Respuesta} \Rightarrow d = f(m)$$

Para los valores dados de los parámetros del modelo, se pueden hacer predicciones sobre los resultados de las mediciones de acuerdo a algunos parámetros observables.

- 3) Modelado Inverso: utilizar resultados reales de algunas mediciones de parámetros observables, es decir la respuesta, d , para inferir los valores reales de los parámetros del modelo m .

$$\text{Parámetros} \Rightarrow m = F(d)$$

Los problemas inversos surgen en muchas ramas de las ciencias físicas en las que destacan, la tomografía médica, mejora de imágenes, ajuste de curvas, caracterización de un sismo, análisis de factores, de navegación por satélite, cartografía de las fuentes de radio celestes con la interferometría, y análisis de la estructura molecular por difracción de rayos X y la determinación de la estructura de la tierra a partir de datos geofísicos, entre otros.

Menke (1989) define a la Teoría de Inversión como un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas que permiten obtener información útil del mundo físico a partir de inferencias logradas a través de observaciones. La finalidad es encontrar un modelo que obtenga una respuesta similar a los valores reales medidos, bajo ciertas restricciones.

En este caso los datos de resistividades aparentes de la pseudosección son transformados en resistividades reales usando algún algoritmo de inversión que determina un modelo de resistividad verdadera bidimensional, conocido como imagen eléctrica que se presenta en falso color. Se pretende que el modelo sea congruente con el objetivo planteado y la geología del lugar.

4.1 Modelo Directo

Se obtiene un modelo directo de resistividades 2D a partir de resolver la ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) = I(x, y, z)$$

Donde V es el potencial eléctrico escalar, I (x,y,z) es la corriente eléctrica y σ es la conductividad eléctrica en función de (x,y,z).

Para discretizar la ecuación parcial se emplean métodos numéricos como el método de elementos finitos (Silvestre y Ferrari, 1990) y diferencias finitas (Dey y Morrison, 1979a, 1979b), estos permiten considerar variaciones punto a punto y en todas las direcciones en un volumen de tierra considerado, como la topografía.

4.2 Modelo Inverso

El problema inverso obtiene la distribución de resistividades del subsuelo a partir de las mediciones en superficie. Se calcula la distribución de las resistividades verdaderas a partir de un modelo teórico basado en una tierra compuesta por una serie de prismas bidimensionales contiguos (Figura 4.1) llamados dominios. (Loke y Barker, 1995,1996)

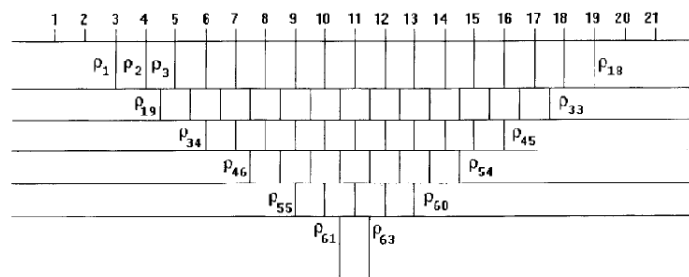


Figura 4.1. Arreglo de bloques rectangulares utilizado en el modelo 2D (Loke y Barker, 1996).

La aproximación convencional para determinar las resistividades de los bloques se logra con un método iterativo de optimización no-lineal (Barker, 1992).

Es decir si se tiene un problema no lineal, se linealiza suponiendo cambios de resistividad pequeños por lo que si se discretiza el subsuelo en celdas de resistividad constante (Figura 4.1) se obtiene la matriz de sensibilidad que relaciona todas las medidas de una configuración electrodica con las diferentes celdas.

El número de bloques es igual al de datos de resistividad en la pseudosección de resistividades aparentes y las profundidades a los centros del interior de los bloques son reemplazados en la profundidad media de investigación (Edwards, 1977) para los diferentes arreglos de electrodos.

Los métodos iterativos son lentos ya que a cada iteración han de calcular el problema directo y la matriz de sensibilidad mediante métodos numéricos.

Loke y Barker (1995,1996) desarrollaron el algoritmo matemático para calcular la imagen de resistividad. Esta técnica está basada en el método de mínimos cuadrados. Se hace referencia al proceso de inversión en varios artículos, Tejero et al (2002) lo describe brevemente.

La resistividad aparente (ρ_{app}) puede ser expresada en términos de primer orden de la expansión de Taylor:

$$\rho_{app} = F(p) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} \delta p_k \dots\dots\dots (4.1)$$

ρ es el vector de los parámetros de dimensión M. En este caso la resistividad verdadera del prisma k_{th} es ρ_k y $F(\vec{p})$ es la función que determina la resistividad aparente. Se define la diferencia entre la resistividad observada y la calculada hasta el elemento j_{th} observado de la ecuación (4.1).

$$\delta \rho_{appj} = \rho_{appj}^{obs} - \rho_{appj}^{est}$$

Donde *obs* es para la resistividad observada y *est* para la estimada. El error cuadrático de la función se define como:

$$E^2 = \sum_{j=1}^N \delta \rho_{appj}^2 = \sum_{j=1}^N (\rho_{appj}^{obs} - \rho_{appj}^{est})^2 = \sum_{j=1}^N \left(\rho_{appj}^{obs} - F_j(p) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(p)}{\partial p_k} \delta p_k \right)^2 \dots (4.2)$$

Donde N es el número de mediciones.

Simplificando la ecuación (4.2) con respecto al vector \vec{p} se tiene:

$$\frac{\partial E^2}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^N \left(\rho_{appj}^{obs} - F_j(p) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(p)}{\partial p_k} \delta p_k \right) \left(-\frac{\partial F_j(p)}{\partial p_i} \right) = 0 \dots\dots (4.3)$$

Donde $i= 1, \dots, M$. La expresión (4.3) está definida como un conjunto de ecuaciones normalizadas:

$$\sum_{k=1}^M \delta p_k \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_j} \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_i} \delta \rho_{appj} \dots\dots\dots (4.4)$$

La ecuación (4.4) es comúnmente expresada en forma matricial, la cual es modificada para obtener una solución en términos de $\delta(\vec{p})$ (Loke y Barker, 1995,1996), se tiene

$$\delta p = (J^T J + \lambda C^T C)^{-1} J \delta \rho_{app} \dots\dots\dots (4.5)$$

Los elementos de la matriz Jacobiana definidos en la ecuación (4.5) provienen de:

$$J_{jk} = \frac{\partial F_j(p)}{\partial p_k} \dots\dots\dots (4.6)$$

De la ecuación (4.5) κ es un factor de amortiguamiento y C es un filtro de suavizamiento para restringir el suavizamiento de las perturbaciones del modelo de parámetros a algún valor constante (Sasaki, 1992), el superíndice T indica la matriz transpuesta.

Loke y Barker (1995) resolvieron la ecuación (4.6) utilizando un método nombrado por ellos como Deconvolución de Mínimos Cuadrados (LSD). El valor de la función $F(\vec{p})$ es la derivada de la función potencial $U(\vec{r})$ con respecto a la resistividad verdadera en cada prisma. Para un cada arreglo de electrodos se encuentra una función de superposición. Por consiguiente para una fuente con coordenadas $(a, 0, 0)$, para un electrodo potencial con coordenadas $(x, 0, 0)$, la derivada de esa función potencial se expresa

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \rho_i} = \sum_{i=1}^L U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{v_i} \left[\frac{x'(x'-a)-y'^2-z'}{[x'^2+y'^2+z'^2]^{3/2} [(x-x')^2+y'^2+z'^2]^2} \right] dV_i \dots\dots\dots (4.7)$$

x', y', z' , son las coordenadas dentro del prisma, L es el número de prismas y dV_i es el volumen de cada dominio.

La ecuación (4.7) es válida para pequeños contrastes de resistividad de prismas contiguos. Loke y Barker (1996) mostraron la flexibilidad del método en ejemplos sintéticos, asumiendo contrastes de pequeñas resistividades.

Modelo inversión suavizada o Smooth-model

La función objetivo del modelo de inversión suavizada está dada por la ecuación:

$$S(m) = (d_{obs} - g(m))^T W_d (d_{obs} - g(m)) + \alpha m^T R m \dots\dots\dots (4.8)$$

Donde α es el multiplicador de Lagrange y un factor de estabilización lo que determina la rugosidad del modelo impuesto durante la inversión. R es la rugosidad (Butler, 2005).

Los problemas geofísicos son indeterminados por dos razones: la falta intrínseca de datos y los errores en los datos y en el modelo (Tarantola, 2005). Como resultado, el problema inverso no tiene una solución única, puede haber más de una solución (conjunto de parámetros) que satisfagan los datos con un error prescrito.

Es decir, el modelo inverso a diferencia del modelo directo, genera diversas soluciones presentando ambigüedad ya que se pueden generar diferentes modelos que satisfagan el problema planteado.

La no-linealidad del problema original se resuelve normalmente mediante los métodos iterativos. Si el modelo escogido (discretización del subsuelo) no es adecuado las imágenes pueden ser irreales, apareciendo, por ejemplo, resistividades negativas (Gasulla, M., 2006).

A pesar de que las resistividades reales no son comunes, pueden ocurrir. Tema que aún es de gran controversia, Wilkinson (2008) lo plantea de la siguiente manera:

La resistividad aparente ρ_a a menudo se describe como una medida ponderada de la distribución de resistividad a través de la cual la fluye la corriente, a pesar de que esto hace tiempo se sabe erróneo (Parasnis 1966). Más bien, se puede entender como la resistividad de un subsuelo homogéneo hipotético que daría la diferencia de potencial cuando se utiliza la misma corriente y la misma disposición de electrodos. Pero en cualquier interpretación es muy difícil entender el significado físico de las resistividades aparentes negativas. Esto comúnmente se atribuye al ruido o a los electrodos de corriente o potencial. Pero no es siempre el caso de que una resistividad negativa aparente es un indicador de error aleatorio o sistemático. Existen circunstancias en las cuales es posible $\rho_a < 0$, y es una medición válida. Esto fue señalado por primera vez por Carpenter y Habberjam (1965) para una tierra estratificada, por Kumar (1973) para un afloramiento en forma de dique vertical y recientemente ha sido redescubierto por Cho *et al.* (2002).

Wilkinson plantea la siguiente pregunta ¿Qué sucede si un error geométrico cambia significativamente a una medida resistividad aparente, o hace que se vuelva negativa? Si ρ_a no incrementa, entonces el concepto volumétrico promedio sugiere que las anomalías localizadas de alto contraste aparecerán en la tomografía de resistividad cerca de los electrodos afectados, afectando la resistividad aparente de esa medición en particular. Pero si ρ_a se convierte en negativo, esta interpretación no es válida. En este caso se debe considerar el problema en términos de fuertes campos secundarios. Esto también sugiere que altos contrastes en las anomalías aparecen cerca de los electrodos. Estas anomalías distorsionarán el campo principal, y si son lo suficientemente fuertes,

podría causar que la resistividad aparente llegara a ser negativa y por lo tanto, mejorar el ajuste a los datos observados que son negativos debido a un error geométrico.

En el artículo muestra algunos ejemplos de resistividad aparente negativa, en fallas y diques. La variación de ρ_a es función de la de la diferencia de resistividades. Demuestra que la resistencia puede cambiar drásticamente con el contraste de una falla, y de hecho puede llegar a ser negativa. Puesto que $\rho_a > \rho_1$, cuando $\rho_2 < \rho_1$ y $\rho_a < \rho_1$, cuando $\rho_2 > \rho_1$.

4.3 Criterios de Convergencia

Para obtener una solución óptima en el proceso de inversión se cuenta con conjunto de criterios para detener este proceso, llamados criterios de convergencia, entre los que destacan el error cuadrático medio, la norma L2 y el número de iteraciones.

El error cuadrático medio (RMS) es la diferencia entre los valores medidos y los valores predichos, el cual se define como:

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i - y_i}{y_i}\right)^2}{N}} \times 100\%$$

Donde N es el número total de mediciones, y son los datos medidos y q son los predichos. El error RMS depende del número de datos erróneos y cada cuanto se presenten entre sí.

Se espera que el valor de RMS se reduzca de iteración en iteración. Cuando el valor sea muy pequeño, se recomienda menor al 10 %, o vaya en aumento, la inversión debe ser terminada (Manual AGI, 2009).

4.4. Procesado de datos de resistividad

Se realiza el proceso de inversión con el objetivo de obtener un modelo de resistividad verdadera 2D, conocido como imagen eléctrica, el cual sea geológicamente interpretable.

El proceso de inversión comprende varios pasos: (1) el cálculo de la resistividad aparente utilizando el método de diferencias finitas o elemento finito, (2) seleccionar una técnica de optimización no-lineal, (3) evaluar los elementos de la matriz Jacobiana y (4) resolver el sistema de ecuaciones.

Para realizar el procesado de datos se utilizó el software de inversión EarthImager 2D de uso comercial creado por Advanced Geosciences Inc. (AGI, 2008). Éste cuenta con ajustes o parámetros de inversión para la TRE son: Ajustes iniciales, Modelado directo e Inversión de resistividad.

Las condiciones iniciales están en base a los valores de adquisición como la resistividad aparente máxima y mínima.

4.4.1 Formato de entrada .URF

Advanced Geosciences, Inc. (AGI) quien realizó el software de inversión, del cual se habló anteriormente, acepta diferentes formatos de datos de entrada por ejemplo el .STG formato que da el equipo Sting (características del equipo), para el cual fue hecho. También el formato .DAT el cual se desarrolla de acuerdo al programa de inversión de Loke (1995). Además del formato .URF (Universal Resistivity Files) que sugirió AGI para poder utilizar los datos adquiridos con otros equipos, como en nuestro caso el Syscal Pro.

En este caso el formato de entrada de los datos para el proceso de inversión fue .URF, con este formato los modelos de inversión son más verídicos que con el .DAT, de acuerdo a la comunicación oral de Tejero (2011), cuando se trabaja con este último tiende a convertir los valores de resistividad negativos a positivos.

Para hacer este último formato se trabaja con dos archivos obtenidos de los programas ELECTRE-PRO y PROSYS, en Excel de preferencia.



Electre Pro --- geometría [#, X, Y, Z; A, B, M, N]

Prosys II --- arreglo [V/In, In, Error (%)]

Se realiza escribiendo en las dos primeras líneas comentarios, en la tercera se define la unidad de longitud. Posteriormente la geometría del arreglo, se toma del archivo de EELECTRE PRO el ID, X, Y, Z. Finalmente siguen las mediciones, colocando primero la secuencia de medición [A, B, M, N], completándose con los valores de [V/In, In, Error (%)] del archivo de PROSYS II. Consultar el Manual del EarthImager (2008).

A manera de ejemplo, se presenta parte del archivo .URF del perfil 2A.

```
; Línea 2A con arreglo WS
; 220910
Unit: Meters
: Geometry
; ID, X, Y, Z
1,0,0,0
2,6,0,0
3, 12, 0, 0
4, 18, 0, 0
5, 24, 0, 0
...
: Measurements
; A, B, M, N, V/In, In, ERROR (%)
1, 4, 2, 3, 1.189943322, 41.286, 0.3
1, 6, 3, 4, 0.432851712, 107.069, 8.7
1, 8, 4, 5, 0.140593978, 365.67, 0.2
1, 10, 5, 6, 0.197801088, 267.405, 0.5
1, 12, 6, 7, -0.03559631, 1303.534, 0
...
```

4.4.2 Configuración del Modelo Directo

El modelado directo es parte esencial de cualquier programa de inversión, ya que es necesario calcular los valores teóricos de resistividad aparente para el modelo establecido y posteriormente saber si se está de acuerdo con los valores medidos.

El programa tiene la opción de resolver el modelo directo con el método de diferencias finitas o elemento finito, sin embargo según el Manual de AGI (2008), éste último produce una solución del modelo directo más preciso aceptando flexibilidad en la discretización y modelar mejor topografía irregular, por lo que se escogió este método por tener en algunos perfiles un desnivel de hasta 6 m.

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Éste permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferencial que caracterizan el comportamiento del problema dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados “elementos finitos”. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización.

Dentro de cada elemento se distinguen “nodos”. Dos nodos son adyacentes pertenecen al mismo elemento finito. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “malla”. Si se consideran particiones de elementos finitos más finos la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones (Carnicero, 2008)

Para resolver en el modelo directo se eligió la Descomposición de Cholesky sobre el de Gradiente Conjugado. Ambos son robustos y estables numéricamente pero el primero es más rápido para obtener los datos de resistividad con más de 20 electrodos porque necesita menos espacio de memoria.

4.4.3 Configuración del Modelo Inverso

Se realizó el ejercicio con los modelos de inversión Robusto y Suavizado, teniendo ligeras variaciones en la presentación de las anomalías, pero manteniendo la ubicación tanto lateral como a profundidad y rango de las resistividades de estos rasgos.

El RMS es más bajo con el modelo Suavizado, sin olvidar que no es el objetivo, para una buena inversión. En el manual del software Earth Imager 2D (2008) se enlistan los principales factores para tener un RMS grande, que son: datos ruidosos, error en el modelado numérico y escasos recursos de inversión.

Al hacer las comparaciones entre estos se llegó a la conclusión de escoger para la interpretación los modelos que se hicieron con la inversión suavizada también conocido como inversión de Occam busca el más suave modelo posible cuya respuesta se ajuste a los datos de un “a-priori” función estadística χ^2 . El verdadero modelo debe ser al menos igual, pero no menos complejo que el modelo suavizado obtenido por el modelo de inversión suavizada. El modelo de inversión suavizada está basado en una suposición de la distribución Gaussiana de los errores de datos (Butler, 2005).

Se trato de mantener homogeneidad en los parámetros de inversión utilizados, tales como:

Número de iteraciones = 15 (excepto Perfil DE con 30, que contiene el mayor número de datos)

Smoothnes factor =10 (Factor de suavizamiento)

Damping factor =100 (Factor de amortiguamiento)

ρ_a mín[$\Omega.m$] =1

ρ_a máx[$\Omega.m$] =10000

Horizontal/vertical roughness ratio= 1

Con los parámetros definidos, considerados los más óptimos para el objetivo planteado, se llevo a cabo la inversión de los 6 perfiles en las tres modalidades de adquisición (WW, WS y DD).

El perfil DE en el que se utilizó la técnica de roll – along se trabajo de manera conjunta y por separado, es decir, se realizó la inversión cada uno de los paquetes, por secciones, obteniendo cinco modelos diferentes semejantes a un “acercamiento” de cada parte del

perfil y se creó un archivo .URF con la información de los 5 eliminando los datos de traslape y obtener una continuación lateral.

Se trabajaron en total 87 modelos de inversión, comparando el formato de entrada, el tipo de inversión a utilizar y los diferentes tipos de arreglos electródicos de los cinco perfiles, con lo que se concluye interpretar 11, los cuales cumplen lo siguiente:

Archivo de entrada en formato .URF

Modelo de Inversión Suavizado (Smooth Model Inversion)

Arreglo electródico Wenner- Schlumberger