

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

HIDRÁULICA DE CANALES

Gilberto Sotelo Ávila

DIVISIÓN DE INGENIERÍA CIVIL, TOPOGRÁFICA Y GEODÉSICA
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA

APUNTE
106

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



612794

G.- 612794

SOTELO Ávila, Gilberto. *Hidráulica de canales*. México,
UNAM, Facultad de Ingeniería, 2002, 836 p.



Hidráulica de canales

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial de esta obra por cualquier medio o sistema electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados.

© 2002, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

ISBN-968-36-9433-0

Primera edición, 2002.

Impreso y hecho en México.

G- 612794

PRÓLOGO

Me ha tomado mucho tiempo lograr una versión formal y actualizada de los *Apuntes de hidráulica II*, que escribí hace más de veinte años sobre el mismo tema, y a pesar del tiempo transcurrido, tienen la misma demanda de cuando por primera vez aparecieron en la Facultad. Las razones más importantes de la tardanza fueron quizá los cambios que sufrieron los conocimientos y los planes de estudio.

El contenido de este libro forma la primera parte del que pienso publicar una vez que haya concluido su totalidad. La razón de esta edición parcial se debe a la necesidad de disponer del material para fines didácticos, no sólo en nuestra Facultad, sino en todo el país, como se detecta en opiniones recibidas.

Esta primera edición cubre la parte más importante en el contenido del curso actual de Hidráulica de canales que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. El nivel y profundidad de los conocimientos queda siempre a criterio del profesor. Sólo faltan los temas de Transporte de sedimentos y Transiciones y curvas que se agregarán en edición futura, una vez que sean concluidos.

Considero que para comprender los conocimientos que aquí se presentan es necesario haber cubierto un curso de Hidráulica básica, para entender y dominar los métodos de análisis integral y diferencial existentes, si bien el énfasis es mayor en el análisis diferencial. He tratado de reunir también la información más actualizada, acorde con los métodos empleados.

Se han corregido ya varios errores y he recibido sugerencias de mis colegas y alumnos para mejorar el texto. No obstante, ruego a todos me hagan llegar sus observaciones para mejorar futuras ediciones.

Una obra de este tamaño no puede ser de una sola persona y debo agradecer el apoyo que he tenido de las autoridades de esta Facultad, que han visto con benevolencia el tiempo que esto ha tomado. También agradezco a mis colegas profesores, en particular a la Mtra. María Cuairán Ruidíaz, a la Sra. Andrea Ayala Hernández, a la Srita. Ana María Sánchez Téllez y al Sr. Juan Guillermo Hernández Martínez de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad, por su infinita paciencia y dedicación para que la presente edición fuera digna de ser publicada por la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

GILBERTO SOTELO ÁVILA

CONTENIDO

Prólogo	iii
Capítulo 1. Conceptos básicos	
1.1 Flujo en un canal	1
1.2 Geometría de un canal	2
1.3 Tipos de flujo	7
1.4 Ecuaciones del flujo unidimensional permanente	11
1.4.1 Antecedentes	11
1.4.2 Ecuación de continuidad	11
1.4.3 Ecuación de la energía	12
1.4.4 Ecuación de la cantidad de movimiento	15
1.5 Distribución de la presión en la sección	16
1.5.1 Líneas de corriente de pequeña curvatura	16
1.5.2 Líneas de corriente de gran curvatura	18
1.6 Distribución de la velocidad en la sección	23
1.7 Pérdida de energía	38
1.8 Capa límite y rugosidad superficial	40
1.9 Flujo laminar	43
1.10 Flujo turbulento	46
1.10.1 Distribución de la velocidad	46
1.10.2 Velocidad media	49
1.10.3 Leyes de fricción en canales lisos	54
1.10.4 Leyes de fricción en canales rugosos	58
1.10.5 Factor de fricción equivalente	58
Referencias	64
Capítulo 2. Flujo uniforme	
2.1 Condiciones para que se establezca el flujo	65
2.2 La ecuación de Chezy	66
2.3 Factores de fricción en canales rugosos	69
2.3.1 Leyes generales de fricción	69
2.3.2 Rugosidad de la pared	78
2.3.3 Ecuaciones empíricas de fricción	78
2.3.4 Aspectos teóricos del coeficiente de Manning	85
2.4 Coeficiente de Manning	93
2.4.1 Antecedentes	93
2.4.2 Estimación a base de tablas y fotografías	94
2.4.3 Método del SCS (<i>Soil Conservation Service</i>)	98
2.4.4 Método de ecuaciones empíricas	100
2.4.5 Método de medición de la velocidad	105
2.4.6 Coeficiente n equivalente	107
2.5 Cálculo del flujo uniforme	110

2.5.1	Consideraciones generales	110
2.5.2	Gasto y velocidad	111
2.5.3	Tirante y velocidad	112
2.5.4	Dimensión de la sección y velocidad	119
2.5.5	Dimensión de la sección y tirante	120
2.5.6	Pendiente y velocidad	120
2.6	Conductos cerrados parcialmente llenos	133
2.7	Sección hidráulica del canal	137
2.7.1	Planteamiento	137
2.7.2	Sección hidráulica óptima	139
2.7.3	Criterios de selección.....	143
2.8	Velocidad permisible	147
2.9	Canales de sección compuesta	149
2.10	Método sección-pendiente para determinar el caudal de crecientes en un río.....	154
	Referencias	160

Capítulo 3. Principio de la energía y régimen crítico

3.1	Antecedentes	165
3.2	Energía específica	165
3.3	Régimen crítico	168
3.3.1	Condición de gasto constante	168
3.3.2	Condición de energía específica constante	170
3.3.3	Curva adimensional de la energía específica	176
3.4	Flujo en una transición	178
3.4.1	Definición del problema	178
3.4.2	Canal de ancho constante	178
3.4.3	Canal de ancho variable.....	182
3.5	Cálculo de las condiciones críticas cuando se conocen las dimensiones de la sección	186
3.5.1	Tirante crítico y energía específica mínima	186
3.5.2	Tirante crítico y gasto	187
3.5.3	Soluciones directas.....	187
3.6	Cálculo de la dimensión mínima de la sección o de los tirantes alternos, cuando se conocen el gasto y la energía específica	200
3.6.1	Dimensión mínima de la sección	200
3.6.2	Tirantes alternos.....	203
3.6.3	Soluciones directas.....	204
3.7	Pendiente crítica	226
3.8	Celeridad de una onda de translación y velocidad crítica	227
3.9	Tirante crítico en canales compuestos	231
3.9.1	Planteamiento del problema	231
3.9.2	Método de Blalock y Sturm	234
3.9.3	Métodos de Konemann y Shearman	250
3.9.4	Método de Chaudhry y Bhallamudi.....	251
	Referencias	269

Capítulo 4. Principio del momentum y su aplicación al salto hidráulico

4.1	Consideraciones generales	271
4.2	El momentum	274
4.3	El salto hidráulico	281
4.4	Tirantes conjugados del resalto en canales horizontales	282
4.4.1	Solución general	282
4.4.2	Ecuación general	283
4.4.3	Sección regular	284
4.4.4	Sección trapecial	288
4.4.5	Secciones abovedadas	291
4.4.6	Sección circular	294
4.4.7	Sección herradura	300
4.4.8	Sección triangular	303
4.4.9	Sección parabólica	306
4.4.10	Sección en forma de U	307
4.4.11	Solución gráfica general para secciones abiertas	308
4.5	Características básicas del salto hidráulico	308
4.5.1	Tipos de salto	308
4.5.2	Tirantes conjugados	311
4.5.3	Perfil del salto y longitud	314
4.5.4	Pérdida de energía	326
4.5.5	Altura	330
4.5.6	Eficiencia	330
4.5.7	Posición	330
4.6	Salto hidráulico normal	331
4.6.1	Después del vertedor	331
4.6.2	Después de la compuerta	333
4.7	Salto hidráulico sumergido	355
4.7.1	Aspectos generales	355
4.7.2	Análisis de Woycicky	356
4.7.3	Análisis de Govinda Rao y Rajaratnam	359
4.8	Control del salto hidráulico	375
4.8.1	Aspectos generales	375
4.8.2	Métodos de análisis	375
4.8.3	Control mediante un umbral de cresta delgada	376
4.8.4	Control mediante un umbral de cresta ancha	378
4.8.5	Control mediante escalón brusco ascendente	381
4.8.6	Control mediante escalón brusco descendente	382
	Referencias	389

Capítulo 5. Flujo gradualmente variado

5.1	Aspectos generales	393
5.2	Ecuación dinámica	393
5.3	Características y clasificación de los perfiles de flujo	396

5.4	Secciones de control	400
5.5	Perfiles compuestos	408
5.6	Cálculo del flujo en canales prismáticos	412
	5.6.1 Planteamiento	412
	5.6.2 Métodos de solución.....	413
	5.6.3 Método directo por pasos	419
	5.6.4 Funcionamiento de un canal que une dos almacenamientos	438
5.7	Cálculo del flujo en canales no prismáticos	446
	5.7.1 Planteamiento del problema	446
	5.7.2 Método estándar por pasos	448
5.8	Cálculo del flujo en canales de sección compuesta	481
	5.8.1 Antecedentes	481
	5.8.2 Condiciones en que ocurren los perfiles de flujo	482
	5.8.3 Tratamiento general.....	487
	5.8.4 Método gráfico de Ezra	499
	5.8.5 Modelos de flujo	505
5.9	Redes de canales.....	508
	5.9.1 Descripción.....	508
	5.9.2 Dos canales en paralelo	508
	5.9.3 Método de solución simultánea	511
	5.9.4 Redes de canales	522
5.10	Integración de la ecuación dinámica del flujo	531
	5.10.1 Métodos numéricos.....	531
	5.10.2 Método de Euler	532
	5.10.3 Método mejorado de Euler.....	533
	5.10.4 Método modificado de Euler	535
	5.10.5 Método de Runge-Kutta de cuarto orden	536
	5.10.6 Método pronosticador-corrector	536
	Referencias	538

Capítulo 6. Flujo espacialmente variado

6.1	Consideraciones generales.....	541
6.2	Canales de gasto creciente	542
	6.2.1 Ecuaciones básicas	542
	6.2.2 Perfiles del flujo.....	546
	6.2.3 Localización de la sección crítica intermedia.....	548
	6.2.4 Salto hidráulico	551
	6.2.5 Solución directa para canales trapeciales horizontales sin fricción	552
	6.2.6 Otras soluciones	555
	6.2.7 Método de integración numérica	567
	6.2.8 El vertedor de canal lateral	578
6.3	Canales de gasto decreciente	594
	6.3.1 Aspectos generales.....	594
	6.3.2 Ecuaciones básicas.....	596
	6.3.3 Perfiles del flujo.....	597

6.3.4 Integración numérica general	598
6.3.5 Canal con vertedor lateral	600
6.3.6 Canal con una reja de fondo	641
Referencias	658

Capítulo 7. Diseño de canales y cauces sin arrastre

7.1 Propósito	661
7.2 Propiedades de suelos y sedimentos	662
7.2.1 Importancia	662
7.2.2 Origen y clasificación	662
7.2.3 Características de las partículas	663
7.2.4 Propiedades de un conjunto de partículas en una muestra	671
7.2.5 Propiedades del agua con material en suspensión	671
7.2.6 Distribución del tamaño en un conjunto de partículas	675
7.2.7 Distribuciones teóricas	681
7.2.8 Parámetros estadísticos	690
7.2.9 Toma de muestras	695
7.3 Pérdidas de agua por filtración	697
7.3.1 Pérdidas de agua en el canal	697
7.3.2 Métodos directos de medición de la filtración	699
7.3.3 Ley de Darcy	700
7.3.4 Métodos analíticos	704
7.3.5 Permeabilidad en suelos estratificados	712
7.4 Trazo del canal y estructuras auxiliares	716
7.4.1 Trazo	716
7.4.2 Estructuras auxiliares	719
7.5 Criterios generales de diseño	725
7.5.1 Aspectos básicos	725
7.5.2 Selección del talud	729
7.5.3 Velocidad mínima	733
7.5.4 Velocidad máxima	734
7.5.5 Libre bordo	734
7.6 Canales recubiertos	742
7.6.1 Propósito de un recubrimiento	742
7.6.2 Tipos de recubrimiento	743
7.6.3 Aplicación de un recubrimiento	745
7.6.4 Secciones típicas	745
7.6.5 Dimensiones en términos del módulo de sección	746
7.6.6 Sección con revestimiento de costo mínimo	746
7.7 Canales no revestidos y cauces sin arrastre	756
7.7.1 Consideraciones de diseño	756
7.7.2 Distribución de la velocidad en canales de rugosidad no uniforme	760
7.7.3 Inicio del arrastre de sedimentos	761
7.7.4 Velocidad crítica de arrastre	762
7.7.5 Método de la velocidad media permisible	771

7.7.6	Esfuerzo tangencial crítico para materiales no cohesivos	778
7.7.7	Acorazamiento de un lecho con materiales bien graduados	788
7.7.8	Esfuerzo tangencial crítico para materiales cohesivos.....	801
7.7.9	Esfuerzo tangencial crítico en canales sinuosos	802
7.7.10	Método del esfuerzo tangencial permisible.....	802
7.7.11	Sección estable óptima	810
7.8	Canales con una cubierta vegetativa	819
7.8.1	Uso de una cubierta vegetativa	819
7.8.2	Criterios de diseño.....	820
7.8.3	Métodos de diseño	824
	Referencias	832

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 FLUJO EN UN CANAL

El flujo en un canal se produce, principalmente, por la acción de la fuerza de gravedad y se caracteriza porque expone una superficie libre a la presión atmosférica, siendo el fluido siempre un líquido, por lo general agua.

El movimiento de un líquido a superficie libre se ve afectado por las mismas fuerzas que intervienen en el flujo dentro de un tubo, a saber:

- La fuerza de gravedad, como la más importante en el movimiento.
- La fuerza de resistencia ocasionada en las fronteras rígidas por la fricción y la naturaleza casi siempre turbulenta del flujo.
- La fuerza producida por la presión que se ejerce sobre las fronteras del canal, particularmente en las zonas donde cambia su geometría.
- La fuerza debida a la viscosidad del líquido, de poca importancia si el flujo es turbulento.

A éstas se agregan, excepcionalmente, las siguientes:

- La fuerza de tensión superficial, consecuencia directa de la superficie libre.
- Las fuerzas ocasionales debidas al movimiento del sedimento arrastrado.

La superficie libre se considera como la intercara entre dos fluidos: el superior, que es aire estacionario o en movimiento, y el inferior, que usualmente es agua en movimiento. Las fuerzas de gravedad y de tensión superficial resisten cualquier fuerza tendiente a distorsionar la intercara, la cual constituye una frontera sobre la que se tiene un control parcial.

La aparente simplicidad resultante de la superficie libre es irreal, ya que su tratamiento es, en la práctica, más complejo que el de un conducto a presión. La interacción entre las fuerzas da lugar a la complejidad, y únicamente a base de simplificaciones y generalizaciones es posible entender su mecánica.

De acuerdo con su origen, los canales pueden ser naturales o artificiales. Los naturales son las conducciones hidráulicas que existen para el drenaje natural sobre la tierra, como arroyos, ríos, estuarios, etc. Los artificiales son los construidos por el hombre para fines de riego, drenaje, generación de energía, navegación, etc.

El flujo en un canal natural se aloja dentro de lo que se llama cauce, producido por el movimiento del agua al paso de los siglos. Su perfil longitudinal es sinuoso, su sección transversal es irregular, y tiene forma y dimensiones que varían continuamente a lo largo del mismo.

Los canales artificiales tienen, por lo general, secciones geométricas de forma y dimensiones constantes en tramos más o menos largos. Algunas definiciones particulares de dichos canales se indican a continuación.

Acueducto es un canal construido sobre el nivel del terreno a través de una depresión topográfica. Rápida es un canal de gran inclinación. Caída es una rápida muy corta (incluso de longitud cero), en la que el piso sigue la forma del perfil inferior de la lámina de agua cayendo libremente.

La superficie o línea generada en el fondo por la base o vértice más bajo de la sección, se conoce como plantilla o solera. Su inclinación, en el sentido de la corriente y respecto de la horizontal, puede ser constante en tramos largos.

Cuando el tramo de un canal tiene sección transversal e inclinación de plantilla constantes, se denomina prismático.

Un canal natural nunca es prismático. El flujo en un río por lo general arrastra material sólido (materia en suspensión, arena, grava e incluso grandes piedras), que modifica continuamente la forma, dimensiones de la sección y perfil del cauce e impide una definición precisa de su rugosidad. El movimiento visto con este enfoque es aún más complejo y se estudia con detenimiento en la hidráulica fluvial. En un capítulo posterior se exponen los conceptos básicos en la formación de las ondulaciones del fondo, la resistencia al flujo que ellas producen y el transporte de sedimentos.

1.2 GEOMETRÍA DE UN CANAL

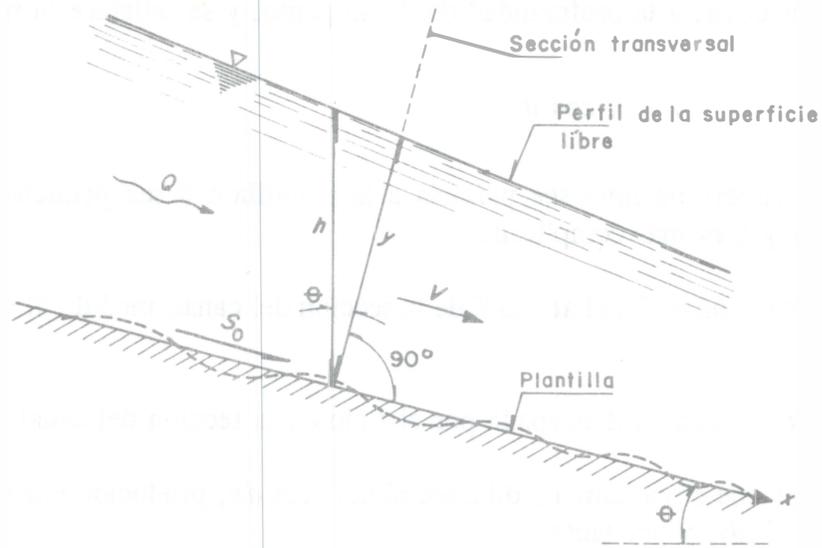
En lo relativo a la geometría en el sentido longitudinal, pendiente de un canal es el cociente S_0 del desnivel entre dos puntos sobre la plantilla y la distancia horizontal que los separa. De acuerdo con la figura 1.1a, $S_0 = \tan \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación de la plantilla respecto de la horizontal. En canales naturales la definición equivale a la pendiente media entre los dos puntos.

En la práctica es común que θ sea menor o igual a 0.14 rad (8°). Esto es, canales de pendiente pequeña, para los que $\tan \theta \leq 0.14054$ y $\sin \theta \leq 0.13917$, de modo que la pendiente se puede confundir con $\sin \theta$, sin incurrir en error mayor del uno por ciento.

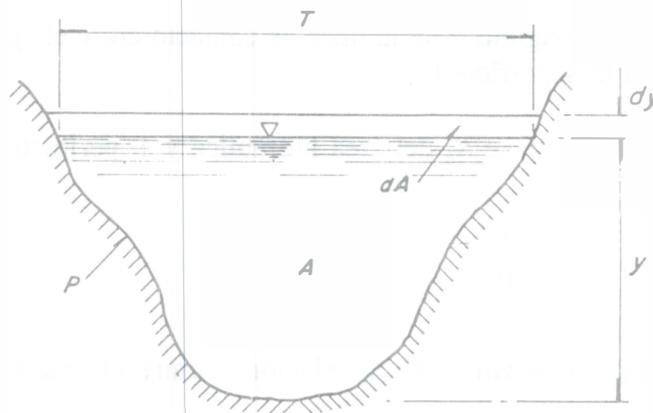
De acuerdo con la definición general de una conducción, la sección transversal de un canal se refiere a la sección perpendicular al fondo o a la línea de inclinación media de su plantilla (figura 1.1).

La sección de los canales naturales es de forma muy irregular y varía continuamente de un sitio a otro. Los artificiales con frecuencia se diseñan con secciones geométricas regulares, siendo las más comunes: la trapecial, la rectangular, la triangular y la semicircular. La parabólica se usa como aproximación en los naturales. En túneles donde el flujo sea a superficie libre, es frecuente encontrar las formas circular y de herradura.

La selección de la forma de la sección depende del tipo de canal que se va a construir, siendo la trapecial la más común en los revestidos y no revestidos, la rectangular en los revestidos con materiales estables (concreto, mampostería, madera, etc.), la triangular en los pequeños y en cunetas de carreteras, y la circular en alcantarillas, colectores y túneles. Existen formas compuestas de las anteriores que son de gran utilidad en conductos abovedados, como grandes alcantarillas y emisores, que por sus dimensiones se permite el paso del hombre a su interior.



a) Corte longitudinal



b) Sección transversal

Figura 1.1. Elementos geométricos de un canal

La sección transversal de un canal se localiza mediante la coordenada x sobre la plantilla según su eje. Los elementos geométricos más importantes de la sección se describen a continuación.

Tirante. Es la distancia y perpendicular a la plantilla, medida desde el punto más bajo de la sección hasta la superficie libre del agua. Es decir, es normal a la coordenada x . Algunos autores lo designan como d , que también se emplea en este libro, cuando y se usa como otro tipo de coordenada.

Se designa por h a la distancia vertical desde la superficie libre al punto más bajo de la sección (figura 1.1a), es decir, a la profundidad de dicho punto, y se satisface la relación

$$y = h \cos \theta \quad (1.1)$$

siempre que la superficie libre sea paralela a la plantilla o θ sea pequeño. De no ser así, la relación entre y y h es más complicada.

Ancho de superficie libre. Es el ancho T de la sección del canal, medido al nivel de la superficie libre.

Área hidráulica. Es el área A ocupada por el flujo en la sección del canal.

Es fácil observar que el incremento diferencial del área dA , producido por el incremento dy del tirante, es $dA = T dy$, y por tanto

$$T = \frac{dA}{dy} \quad (1.2)$$

Perímetro mojado. Es la longitud P de la línea de contacto entre el agua y las paredes del canal, es decir, no incluye a la superficie libre.

Radio hidráulico. Es el cociente R_h del área hidráulica y el perímetro mojado.

$$R_h = \frac{A}{P}$$

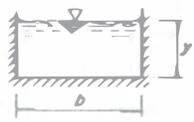
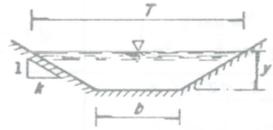
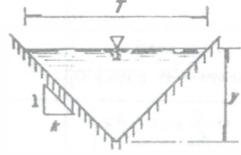
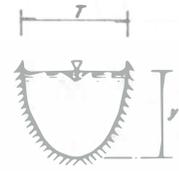
Tirante medio o tirante hidráulico. Es la relación Y entre el área hidráulica y el ancho de la superficie libre

$$Y = \frac{A}{T}$$

Talud. Designa la inclinación de las paredes de la sección y corresponde a la distancia k recorrida horizontalmente desde un punto sobre la pared, para ascender la unidad de longitud a otro punto sobre la misma. Por lo general se expresa como $k:1$, sin embargo, es suficiente con indicar el valor de k .

Las tablas 1.1 y 1.2 presentan los elementos geométricos de las secciones más comunes en canales artificiales, expresados en términos del tirante.

Tabla 1.1. Elementos geométricos de las secciones más comunes

SECCION ELEMENTO GEOMÉTRICO	RECTANGULAR	TRAPEZIAL	TRIANGULAR	PARABOLICA
				
Área, A	by	$(b+ky)y$	ky^2	$\frac{2}{3}Ty$
Perímetro mojado P	$b+2y$	$b+2\sqrt{1+k^2}y$	$2\sqrt{1+k^2}y$	$T+\frac{8}{3}\frac{y^2}{T}$ *
Radio hidráulico $R_h=A/P$	$\frac{by}{b+2y}$	$\frac{(b+ky)y}{b+2\sqrt{1+k^2}y}$	$\frac{ky}{2\sqrt{1+k^2}}$	$\frac{2T^2y}{3T^2+8y^2}$ *
Ancho de la superficie libre, T	b	$b+2ky$	$2ky$	$\frac{3}{2}\frac{A}{y}$
Tirante medio A/T	y	$\frac{(b+ky)y}{b+2ky}$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{2}{3}y$
dP/dy	2	$2\sqrt{1+k^2}$	$2\sqrt{1+k^2}$	$\frac{16}{3}\frac{y}{T}+(1-\frac{8}{3}\frac{y^2}{T^2})\frac{T}{2y}$ *
dT/dy	0	$2k$	$2k$	$\frac{T}{2y}$

* Aproximación satisfactoria para el intervalo $0 < x \leq 1$, donde $x = 4y/T$. Cuando $x > 1$, use la expresión exacta:

$$P = (T/2) \left[\sqrt{1+x^2} + (1/x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]$$

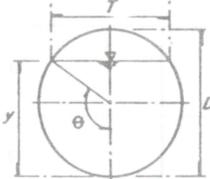
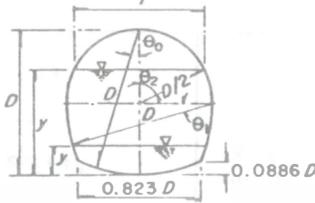
SECCIÓN				
	CIRCULAR	HERRADURA		
Tirante	$0 \leq \frac{y}{D} \leq 1$	$0 \leq \frac{y}{D} \leq 0.0886$	$0.0886 \leq \frac{y}{D} \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq \frac{y}{D} \leq 1$
Ángulo	$\theta = \arccos(1 - \frac{2y}{D})$	$\theta_0 = \arccos(1 - \frac{y}{D})$	$\theta_1 = \arcsin(\frac{1}{2} - \frac{y}{D})$	$\theta_2 = \arccos(\frac{2y}{D} - 1)$
Área, A	$\frac{1}{4} (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) D^2$	$(\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0) D^2$	$[0.43662 - \theta_1 + \sin \theta_1 (1 - \cos \theta_1)] D^2$	$(0.82932 - \frac{\theta_2}{4} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2) D^2$
Perímetro mojado, P	θD	$2 \theta_0 D$	$(1.69623 - 2\theta_1) D$	$(3.26703 - \theta_2) D$
Radio hidráulico, R _h	$\frac{1}{4} (1 - \frac{\sin 2\theta}{2\theta}) D$	$\frac{1}{2} (1 - \frac{\sin 2\theta_0}{2\theta_0}) D$	$[\frac{0.43662 - \theta_1 + \sin \theta_1 (1 - \cos \theta_1)}{1.69623 - 2\theta_1}] D$	$[\frac{0.82932 - 0.25\theta_2 + 0.5 \sin 2\theta_2}{3.26703 - \theta_2}] D$
Ancho de la superficie libre, T	$\frac{(\sin \theta) D}{2 \sqrt{y(D-y)}}$	$\frac{2(\sin \theta_0) D}{2 \sqrt{y(2D-y)}}$	$\frac{(2 \cos \theta_1 - 1) D}{[2 \sqrt{0.75 + \frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D}) - 1}]} D$	$\frac{D \sin \theta_2}{2 \sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}} D$
Tirante medio, A/T	$\frac{1}{4} (\frac{\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta}{\sin \theta}) D$	$(\frac{\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0}{2 \sin \theta_0}) D$	$[\frac{0.43662 - \theta_1 + \sin \theta_1 (1 - \cos \theta_1)}{2 \cos \theta_1 - 1}] D$	$[\frac{0.82932 - 0.25\theta_2 + 0.5 \sin 2\theta_2}{\sin \theta_2}] D$
dP/dy	$\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{2}{\sqrt{\frac{y}{D}(2 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{2}{\sqrt{0.75 + \frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$
dT/dy	$\frac{1 - \frac{2y}{D}}{\sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{2(1 - \frac{y}{D})}{\sqrt{\frac{y}{D}(2 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{1 - \frac{2y}{D}}{\sqrt{0.75 + \frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$	$\frac{1 - \frac{2y}{D}}{\sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{y}{D})}}$

Tabla 1.2. Elementos geométricos de las secciones circular y herradura

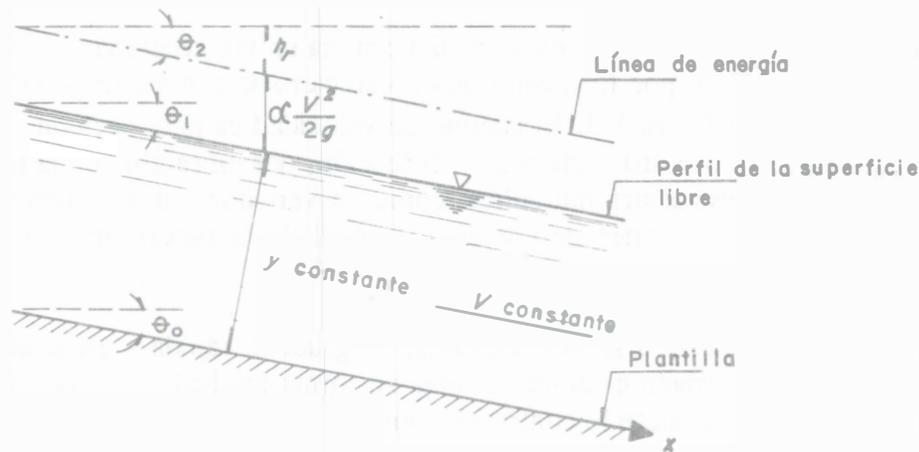
1.3 TIPOS DE FLUJO

La clasificación del flujo en un canal sigue los criterios generales indicados en el capítulo 3 del volumen 1. Los tipos que se indican a continuación tienen principal interés, sobre la base de que, en todos los casos, se trata de flujo unidimensional. Su importancia radica en que el comportamiento hidráulico se analiza bajo distintas concepciones o modelos de flujo, cuyo grado de dificultad aumenta en la medida que las hipótesis se ajustan mejor a la realidad.

- a) Flujo permanente y no permanente. Esta clasificación obedece a la utilización del tiempo como criterio. Es permanente cuando la velocidad media V en una sección dada se mantiene constante en el tiempo o en un lapso especificado ($\partial V / \partial t = 0$). Lo contrario sucede cuando es no permanente o impermanente ($\partial V / \partial t \neq 0$).

El caso más común del flujo no permanente se presenta en los canales donde transita una onda de avenida, como en los ríos o en las cunetas o bordillos en carreteras.

- b) Flujo uniforme y variado. Esta clasificación obedece a la utilización del espacio como criterio. El flujo uniforme se presenta cuando la velocidad media permanece constante en cualquier sección del canal, es decir, $\partial V / \partial x = 0$. Esto significa que su área hidráulica y tirante también son constantes con x (figura 1.2). En el flujo variado ocurre lo contrario.



$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Figura 1.2. Flujo uniforme

Sobre la superficie libre del agua hay presión constante igual a la atmosférica pero dicha superficie no coincide con la línea de cargas piezométricas aun si el flujo es rectilíneo. Sin embargo, mediante la corrección adecuada, el valor de la carga de velocidad separa verticalmente dicha superficie libre de la línea de energía. Como consecuencia, dicha línea, el perfil de la superficie libre del agua y la plantilla del canal son paralelos cuando el flujo es uniforme. En este caso, el hecho de que la velocidad media permanezca constante se asocia estrictamente a que la velocidad en un mismo punto de cada sección también lo sea en toda

la longitud del canal, es decir, la distribución de la velocidad no se altera de una sección a otra.

Las características del flujo uniforme se satisfacen únicamente si el canal es prismático, esto es, sólo puede ocurrir en los artificiales y no en los naturales. Si la velocidad se incrementa a valores muy grandes (más de 6 m/s), se produce arrastre de aire al interior del flujo, y éste, en sentido estricto, adquiere un carácter no permanente y pulsatorio. De manera incidental, a velocidades excepcionales del orden de 30 m/s, el incremento de área hidráulica por el aire arrastrado puede llegar a ser hasta del 50 por ciento del área original.

En teoría es posible que un flujo uniforme sea permanente o no permanente. El uniforme permanente es el flujo más sencillo de la hidráulica de canales, donde el tirante no cambia con el tiempo. El uniforme no permanente necesitaría que la superficie libre fluctuara de un instante a otro permaneciendo siempre paralela a la plantilla del canal, lo que es difícil que ocurra en la práctica. Por tanto el flujo uniforme es casi siempre permanente.

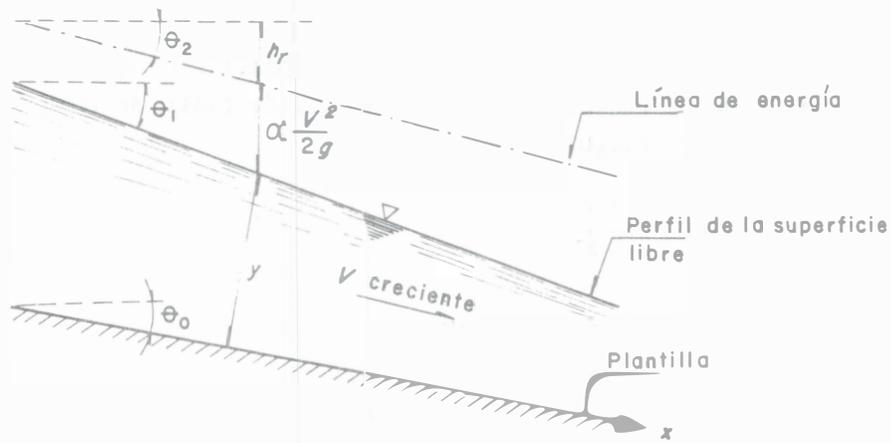
Debido a las razones antes mencionadas, así como a los cambios de sección y de pendiente, y a la presencia de estructuras de control, el flujo uniforme es un estado ideal que difícilmente se alcanza en la práctica. Es razonable suponerlo sólo en canales rectos y largos, de sección, pendiente, geometría y rugosidad constantes; es muy útil porque simplifica el análisis y sirve de base para la solución de otros problemas.

El flujo es variado cuando la velocidad media cambia en las secciones a lo largo del canal, es decir, $\partial V/\partial x \neq 0$, y por lo mismo posee características opuestas a las del uniforme, como se indica en la figura 1.3. El cambio de velocidad es para acelerar o desacelerar el movimiento y ocurre por una variación en la sección, por un cambio en la pendiente, o por la presencia de una estructura hidráulica, como un vertedor o una compuerta, interpuesta en la línea del flujo. La línea de energía, el perfil de la superficie y la plantilla tienen inclinaciones distintas entre sí.

El flujo variado se puede, a su vez, clasificar en gradual, rápida y espacialmente variado. En el gradualmente variado el tirante cambia en forma gradual a lo largo del canal. En el rápidamente variado acontece lo contrario, como en el salto hidráulico. En el espacialmente variado cambia además el gasto a lo largo del canal o en un tramo del mismo. La clasificación se indica a continuación:

Flujo permanente	{ uniforme	{	gradualmente
	{ variado	{	rápidamente
		{	espacialmente
Flujo no permanente variado		{	gradualmente
		{	rápidamente
		{	espacialmente

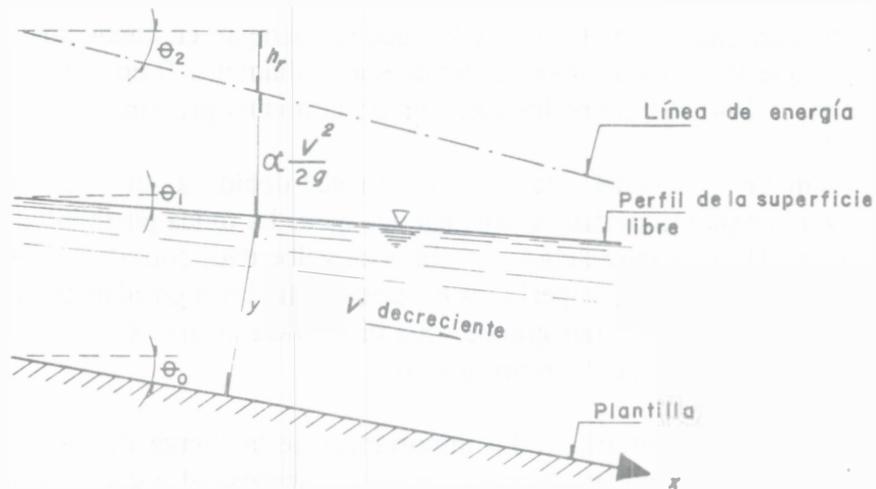
El tratamiento de los problemas que se presentan en este libro corresponde sólo a flujos permanentes, uniformes o variados.



$$\theta_0 < \theta_1, \theta_0 \neq \theta_2, \theta_1 > \theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} > 0$$

a) Acelerado



$$\theta_0 > \theta_1, \theta_0 \neq \theta_2, \theta_2 > \theta_1$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} < 0$$

b) Desacelerado

Figura 1.3. Flujo variado

- c) Flujo laminar y turbulento. El movimiento del agua en un canal se rige por la importancia de las fuerzas viscosa o de gravedad, respecto a la de inercia. La tensión superficial del agua afecta el comportamiento en el caso de velocidad y tirante (o sección transversal) pequeños, pero no tiene una función importante en la mayoría de los problemas.

En relación con el efecto de la viscosidad, el flujo puede ser laminar, de transición o turbulento, de manera semejante a los conductos a presión. La importancia de la fuerza de inercia respecto de la viscosa, ambas por unidad de masa, se mide con el número de Reynolds, definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}_e = \frac{V R_h}{\nu} \quad (1.3)$$

donde

- R_h radio hidráulico de la sección en m,
- V velocidad media en la sección en m/s,
- ν viscosidad cinemática del agua en m^2/s .

En canales se han comprobado resultados semejantes a los de los conductos a presión. Para fines prácticos se tiene:

- flujo laminar, cuando $\mathbf{R}_e \leq 500$;
- flujo de transición, cuando $500 \leq \mathbf{R}_e \leq 12500$;
- flujo turbulento, cuando $\mathbf{R}_e \geq 12500$.

Las diferencias entre estos valores y los que se manejan en conductos circulares a presión se deben a que \mathbf{R}_e en los últimos se define con el diámetro D en lugar del radio hidráulico, y siendo $R_h = D/4$, los intervalos cambian en la misma proporción.

El flujo laminar en canales ocurre muy rara vez debido a sus dimensiones relativamente grandes y a la baja viscosidad cinemática del agua. La única posibilidad se presenta cuando el flujo es en láminas muy delgadas, con poca velocidad, como en el movimiento del agua de lluvia sobre cubiertas y superficies pavimentadas. La rugosidad de la frontera en canales naturales es normalmente tan grande, que ni siquiera ocurre el de transición. Por ello, el énfasis en este libro es en flujo turbulento.

- d) Flujo subcrítico y supercrítico. La importancia de la fuerza de inercia respecto de la de gravedad, ambas por unidad de masa, se mide a través del número de Froude, definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{(g \cos \theta / \alpha) (A/T)}} = \frac{V}{\sqrt{g' A/T}} \quad (1.4)$$

donde

- g' $g \cos \theta / \alpha$
- g aceleración de gravedad en m/s^2 ,
- A área hidráulica de la sección en m^2 ,
- T ancho de superficie libre de la sección en m,
- V velocidad media en la sección en m/s,
- α coeficiente de corrección de la energía cinética, adimensional,
- θ ángulo de inclinación de la plantilla respecto de la horizontal.

El término A/T es también el tirante hidráulico y sólo en canales rectangulares es igual al tirante.

Si $\theta \leq 8^\circ$, $\cos \theta \geq 0.99027$, es decir, $\cos \theta \approx 1$ con error menor del uno por ciento. Además, con $\alpha = 1$, $g' = g$ y resulta

$$F = \frac{V}{\sqrt{g A/T}}$$

Cuando $F = 1$, $V = \sqrt{g A/T}$, el flujo es en régimen crítico.

Cuando $F < 1$, $V < \sqrt{g A/T}$, el régimen es subcrítico, siendo entonces más importante la fuerza de gravedad que la de inercia, ya que el flujo ocurre con poca velocidad, es decir, tranquilo.

Por último, cuando $F > 1$, $V > \sqrt{g A/T}$, el régimen es supercrítico y la fuerza de inercia domina sobre la de gravedad, toda vez que ocurre a gran velocidad, es decir, rápido o torrencial.

En el capítulo 3 se expone ampliamente acerca de la definición del número de Froude y los distintos tipos de régimen en que un flujo se produce.

1.4 ECUACIONES DEL FLUJO UNIDIMENSIONAL PERMANENTE

1.4.1 Antecedentes

En el capítulo 4 del volumen 1 fueron derivadas las ecuaciones fundamentales de la hidráulica en su forma general para un volumen finito de control, así como su particularización para el flujo unidimensional permanente. Enseguida se presenta un resumen de las mismas.

1.4.2 Ecuación de continuidad

El flujo de masa del agua a través de la sección de un canal es ρVA , donde ρ es la densidad del líquido, V la velocidad media en la sección y A su área hidráulica. Cuando el flujo sigue la dirección del eje del canal según la coordenada curvilínea x sobre el fondo (figura 1.4), y no hay aportaciones o salidas de líquido en el trayecto, la forma matemática de la ecuación de continuidad para el flujo unidimensional permanente en toda su longitud es

$$\frac{\partial (\rho V A)}{\partial x} = 0$$

es decir, el flujo de masa no cambia al variar x . En un flujo a superficie libre ρ es constante (incompresible) y se puede eliminar en la ecuación anterior, es decir

$$\frac{\partial (VA)}{\partial x} = 0 \quad (1.5a)$$

que al integrar entre dos secciones 1 y 2 que limitan al volumen de control de la figura 1.4, resulta

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = \text{constante} \quad (1.5b)$$

es decir, el gasto o caudal $Q = VA$ se mantiene constante en todo el canal. Cuando haya condiciones de flujo diferentes se debe establecer la ecuación de continuidad particular del caso que se trate (ver capítulo 6 y final del capítulo 9).

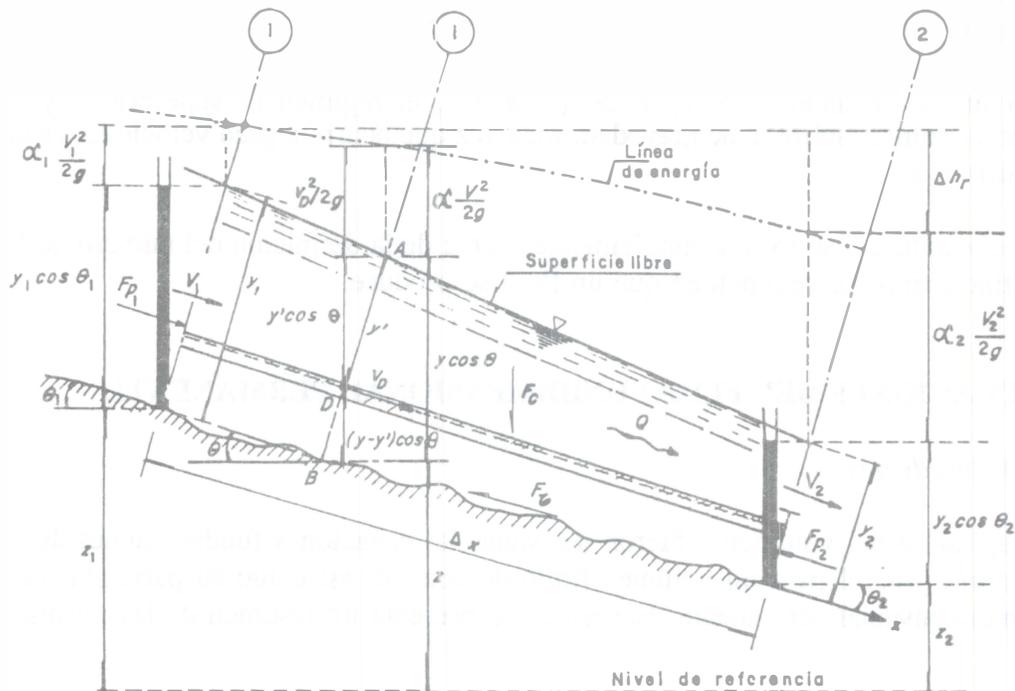


Figura 1.4. Aplicación de las ecuaciones básicas a un volumen finito de control en un canal

1.4.3 Ecuación de la energía

La energía total por unidad de peso que posee el agua en su movimiento, medida en el punto de intersección D de cualquier línea de corriente con el plano de la sección de un canal, se expresa como la suma de su elevación z_D desde un plano de referencia, la carga de presión $p/g\rho$,

y la energía cinética local $v^2/2g$, donde v es la velocidad local, es decir, en el punto. Por ejemplo, en el canal de gran pendiente de la figura 1.4, la energía total de las partículas sobre la línea de corriente que pasa por el punto D en la sección i está dada por

$$H = z + (y - y') \cos \theta + \frac{P}{g\rho} + \frac{v^2}{2g}$$

donde z es la elevación del fondo de la sección y y' la distancia de la superficie libre al punto D en el plano de la sección. Los términos corresponden a la energía por unidad de peso del líquido fluyente en la unidad de tiempo y la suma H se conoce también como carga total, se mide en m.

El término de energía cinética o carga de velocidad es idéntico en todos los puntos de la sección cuando se trata de un flujo ideal paralelo, donde la distribución de la velocidad es uniforme. Esto no ocurre en un flujo real, ya que la viscosidad y la fricción en las paredes modifica dicha distribución. Para fines prácticos, se acepta que la carga de velocidad en la sección de un flujo real se calcule con la velocidad media pero se afecta por el coeficiente de energía cinética α . Éste corrige el defecto de utilizar el valor medio en lugar de la distribución real no uniforme de la velocidad (ver capítulo 4 del volumen 1). Esto significa que, cualquiera que sea el punto D , la suma de los términos

$$z + (y - y') \cos \theta + \frac{P}{g\rho} = H - \alpha \frac{V^2}{2g}$$

es constante y define la altura de la línea de niveles piezométricos. En el punto A sobre la superficie libre ($y' = 0$) actúa la presión atmosférica, esto es, $p_A = 0$, y el valor de la suma es

$$z + y \cos \theta = H - \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Esto significa que la carga de velocidad es la distancia vertical de la superficie libre a la línea de energía en cada sección transversal.

También, para el punto B en el fondo de la sección, $y' = y$, y la suma resulta

$$z + \frac{P_B}{g\rho} = z + y \cos \theta$$

es decir, la carga de presión en el fondo vale

$$\frac{p_B}{g\rho} = y \cos \theta \quad (1.6)$$

donde $\cos \theta$ es la corrección que antes se había mencionado.

En el caso que el ángulo θ sea pequeño ($\theta \leq 8^\circ$) se cumple que $\cos \theta \approx 1$.

La energía total del flujo en la sección i se calcula finalmente en la forma

$$H = z + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 se utiliza con frecuencia en el flujo variado. El término $y \cos \theta$ representa la carga de presión en el fondo de la sección y la velocidad V corresponde a la media calculada en la sección transversal al flujo.

Es necesario mencionar que los resultados anteriores se han obtenido para las condiciones de flujo rectilíneo sobre un fondo plano de gran inclinación. Mayores aclaraciones sobre esto, así como las correcciones que deben hacerse cuando no se cumplan las condiciones estipuladas, se presentan en el subcapítulo 1.5.

De acuerdo con lo anterior y lo indicado en la figura 1.4, la forma matemática del principio de la energía para el flujo unidimensional permanente e incompresible se establece en la forma

$$\frac{d}{dx} \left[z + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right] = - \frac{dh_r}{dx} \quad (1.8)$$

donde

- h_r pérdida de energía;
- y tirante;
- z carga de posición, medida desde el plano de referencia hasta la plantilla de la sección;
- V velocidad media en la sección;
- α coeficiente de Coriolis, para considerar el efecto de la distribución irregular de la velocidad en la sección, sin dimensiones (ver ecuación 1.16a y el volumen 1);
- θ ángulo de inclinación de la plantilla en la sección.

Los términos restantes son como se han definido antes.

La integración de la ecuación 1.8, entre las secciones 1 y 2 del volumen de control de la figura 1.4, conduce a

$$z + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} + h_r = \text{constante} \quad (1.9a)$$

O bien

$$z_1 + y_1 \cos \theta_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos \theta_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_r \quad (1.9b)$$

donde Δh_r es la pérdida de energía entre las dos secciones. Cuando dicha pérdida se debe sólo a la fricción, es proporcional a la longitud Δx del tramo en que se produce y el cociente $\bar{S} = \Delta h_f / \Delta x$ se conoce como pendiente hidráulica media o pendiente media de fricción en el tramo. El valor de su límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es $S = dh_f / dx$ y equivale a la pendiente hidráulica local o pendiente de fricción local (en una sección); suele también designarse como gradiente hidráulico local.

La designación como pendiente no tiene más significado físico que el cociente que representa, es decir, no significa ni la tangente ni el seno del ángulo local θ de inclinación de la plantilla, ni tampoco de la línea de energía, con excepción del flujo uniforme, donde $S = \sin \theta$, ya que la plantilla y la línea de energía son paralelas.

1.4.4 Ecuación de la cantidad de movimiento

Se considera el volumen de control limitado por las secciones 1 y 2, las paredes y la superficie libre de un flujo unidimensional permanente e incompresible (figura 1.4), cuyo gasto no cambia en toda su longitud. La ecuación de la cantidad de movimiento para dicho volumen resulta de eliminar el término correspondiente al tiempo en la ecuación general obtenida en el volumen 1, y en la forma vectorial resulta

$$F_p + F_\tau + F_c = \rho [(Q \beta V)_2 - (Q \beta V)_1] \quad (1.10)$$

donde

- F_p fuerza resultante de la presión ejercida sobre las superficies de frontera del volumen de control;
- F_τ fuerza resultante producida por el esfuerzo tangencial generado sobre el fondo y paredes del volumen de control;
- F_c fuerza de cuerpo debida al peso del volumen de control;
- Q gasto en la sección;
- V vector velocidad media en la sección;
- β coeficiente de Boussinesq, para considerar el efecto que tiene la distribución irregular de la velocidad en la sección en el cálculo de la cantidad de movimiento con la velocidad media, sin dimensiones (ver ecuación 1.16b y el volumen 1).

Las fuerzas F_p y F_τ son las acciones que desde el exterior se aplican al volumen de control. La cantidad de movimiento en una sección es igual a $\rho Q\beta V$ y el último término de la ecuación representa el cambio en la cantidad de movimiento entre el flujo que entra y el que sale, con las mismas reglas establecidas en el volumen 1, es decir, Q es positivo cuando sale y negativo cuando entra al volumen de control.

Es importante destacar el carácter vectorial de la ecuación de la cantidad de movimiento, a diferencia de la de energía que es escalar. Como las ecuaciones de continuidad y energía, la 1.10 adopta formas particulares cuando se aplica en cada problema. El valor de β se trata en el subcapítulo 1.6 (ecuación 1.16b).

1.5 DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN EN LA SECCIÓN

1.5.1 Líneas de corriente de pequeña curvatura

La presión en cualquier punto D de la sección del flujo en un canal se mide por la altura de la columna de agua en un tubo piezométrico instalado en el punto, como se aprecia en la figura 1.5. Si se ignoran los disturbios menores debidos a la turbulencia, la distorsión del perfil de distribución de la velocidad, etc., la columna de agua en el punto de medición puede alcanzar, cuando más, un nivel hasta la línea de energía.

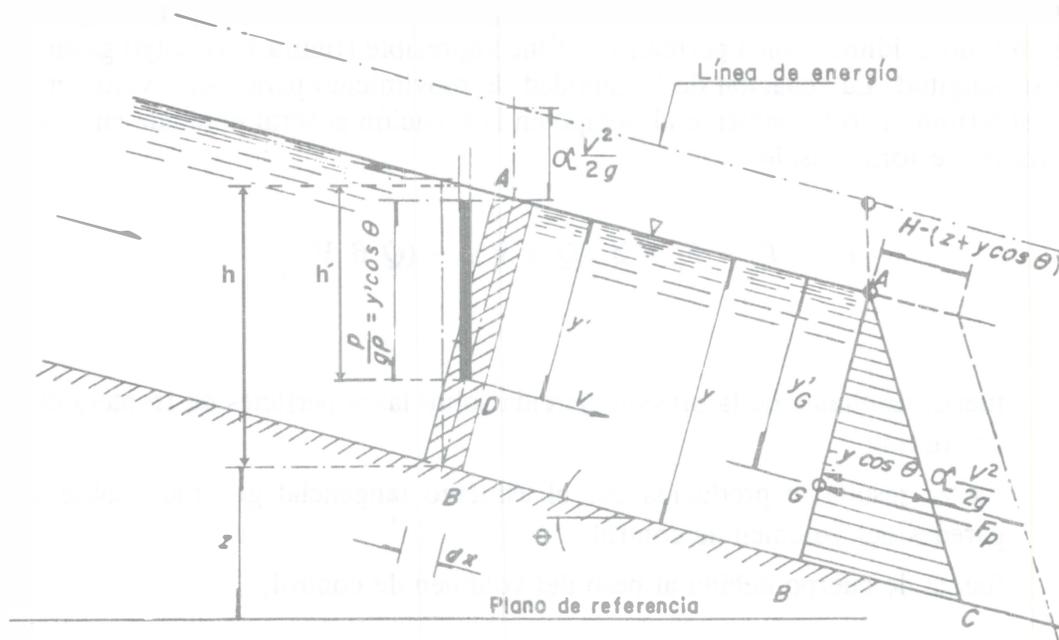


Figura 1.5. Distribución de la presión para el flujo paralelo en canales de fondo plano y gran pendiente

Considérese un canal de eje recto, ancho unitario y fondo plano, con ángulo de inclinación θ respecto de la horizontal (figura 1.5). El peso del elemento sombreado, de longitud dx , es igual a $g\rho y' dx$, y el componente normal a la plantilla es $g\rho y' \cos \theta dx$. Por tanto, la presión en el punto D es

$$p = \frac{g\rho y' \cos \theta dx}{dx} = g\rho y' \cos \theta$$

y la distribución de la carga de presión correspondiente se puede expresar en la forma

$$\frac{p}{g\rho} = y' \cos \theta$$

donde y' es la distancia desde la superficie libre al punto D , medida en la dirección perpendicular a la plantilla. Por tanto, la distribución de la presión es lineal (casi hidrostática) en dicha dirección, como se representa por la línea AC de la figura 1.5.

Cuando el flujo es uniforme o el ángulo θ es pequeño se cumple que $y' = h' \cos \theta$ y por tanto $p/g\rho = h' \cos^2 \theta$. Esto significa que la presión en cualquier punto de la sección es directamente proporcional a la profundidad h' del punto, es decir, es igual a la presión hidrostática correspondiente a dicha profundidad pero corregida por el término $\cos^2 \theta$.

La carga de presión en el punto B sobre el fondo del canal se obtiene a partir de alguna de las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{p_B}{g\rho} = y \cos \theta$$

$$\frac{p_B}{g\rho} = h \cos^2 \theta$$

la primera idéntica a la ecuación 1.6, la última con validez sólo en flujo uniforme. Por tanto, la carga de velocidad es igual en cualquier punto del flujo, como resulta de la ecuación 1.7 y se representa en la figura 1.5.

En un canal de pendiente pequeña ($\theta \leq 8^\circ$), $\cos \theta \approx 1$ y la distribución de la presión coincide con la hidrostática, es decir, se puede considerar que $p_B/g\rho = h$, sin incurrir en error mayor del uno por ciento. Este resultado pierde validez en canales de gran pendiente como el de descarga de un vertedor o una rápida, donde sólo valen las expresiones en términos de y .

La magnitud de la fuerza resultante F_p que interviene en la ecuación 1.10 de la cantidad de movimiento se debe a la presión ejercida sobre las secciones donde hay flujo y, en las condiciones de la figura 1.5, se calcula como el producto de la presión en el centroide G del área por la propia área, es decir, $F_p = g\rho A y'_G \cos \theta$, en cada sección donde

$$y'_G = \frac{1}{A} \iint_A y' dA$$

Los resultados anteriores son aplicables al flujo rectilíneo o cuando las líneas de corriente no tienen curvatura grande ni divergen entre sí, lo cual ocurre en muchos problemas reales. Los flujos uniforme y gradualmente variado se consideran rectilíneos, ya que el cambio de tirante es tan suave y la curvatura y divergencia de las líneas de flujo son tan pequeñas, que el efecto de los componentes de la aceleración en el plano de la sección es despreciable.

1.5.2 Líneas de corriente de gran curvatura

El flujo sobre un canal de fondo curvo es diferente ya que la curvatura de las líneas de corriente es de consideración y produce un componente importante de la aceleración normal a la dirección del flujo, es decir, la fuerza centrífuga modifica la distribución de la presión obtenida para el flujo rectilíneo.

El fondo puede ser cóncavo o convexo, como se muestra en las figuras 1.6a y b respectivamente; en ambos casos, la distribución de la presión está representada por la línea AC' , en lugar de la recta AC del flujo rectilíneo. La fuerza centrífuga actúa hacia el exterior de la curva en ambos, pero en el cóncavo se manifiesta por una presión mayor y en el convexo por una presión menor. La distribución hidrostática de la carga de presión $y' \cos \theta$ cambia en cualquier punto D debido a la desviación $\Delta p/g\rho$, que se suma o resta según que el flujo sea cóncavo o convexo, respectivamente. De este modo, la energía H en dicho punto se calcula como sigue

$$H = z_D + y' \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} = z + y \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g}$$

donde se ha sustituido $z_D + y' \cos \theta = z + y \cos \theta$ por razones geométricas. Sin embargo, en el punto A sobre la superficie libre $\Delta p/g\rho = 0$, $v = v_A$, y por tanto

$$\frac{v_A^2}{2g} = H - (z + y \cos \theta)$$

Es decir, la carga de velocidad de las partículas en la superficie libre es la distancia vertical que separa a la línea de energía de dicha superficie, como aparece en la figura 1.6.

Para cualquier otro punto

$$\frac{v^2}{2g} = H - (z + y \cos \theta) \pm \frac{\Delta p}{g\rho}$$

es decir, la carga de velocidad en cada punto depende sólo de la desviación $\Delta p/g\rho$ en el mismo punto, como también se muestra en la figura 1.6.

Si se elimina el término $H - (z + y \cos \theta)$ de las dos últimas ecuaciones, resulta

$$\frac{\Delta p}{g\rho} = \left[\left(\frac{v}{v_A} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_A^2}{2g}$$

lo que significa que la desviación $\Delta p/g\rho$ en cada punto de la sección depende de la distribución de la velocidad en ella y de la velocidad en la superficie libre.

Las expresiones anteriores no son útiles para el flujo unidimensional porque usan valores locales de la velocidad, siendo necesario utilizar nuevamente el concepto de valores medios. Por simplicidad, la carga de presión media en la sección del canal se define por $\alpha' y \cos \theta$, donde α' es un nuevo coeficiente de corrección, esta vez de la carga de presión hidrostática, que toma en cuenta su verdadera distribución. Esto significa que la energía total en flujo curvilíneo queda expresada en la forma

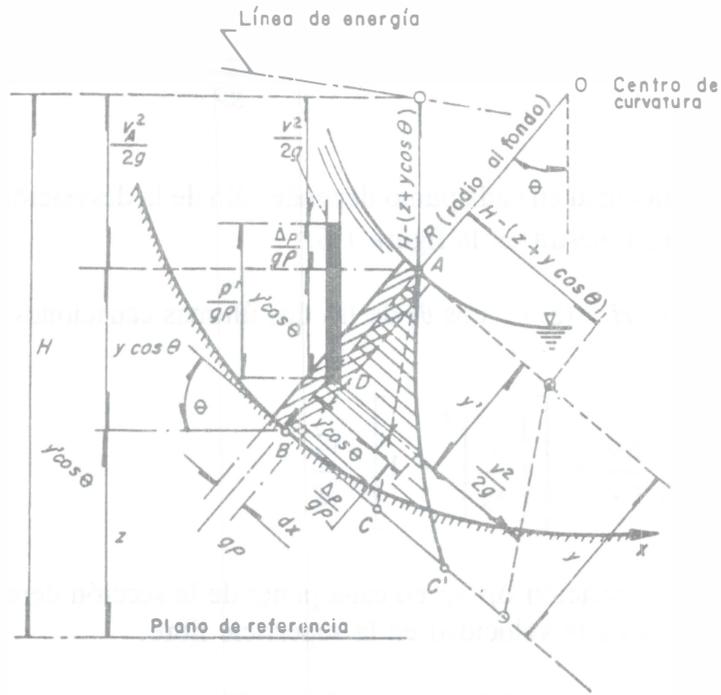
$$H = z + \alpha' y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (1.11)$$

Los términos de esta ecuación se refieren a la energía por unidad de peso del líquido fluyente, de modo que la correspondiente a la carga de presión en toda la sección es

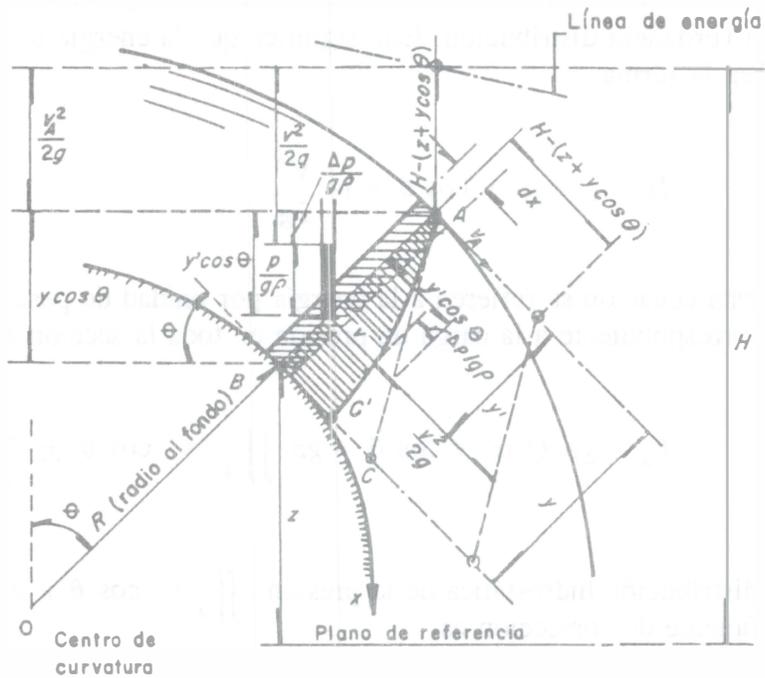
$$E_p = g\rho Q \alpha' y \cos \theta = g\rho \iint_A (y' \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho}) v dA$$

Para la parte de distribución hidrostática de la presión $\iint_A y' \cos \theta v dA = Q y \cos \theta$, por tanto, el coeficiente de corrección es

$$\alpha' = 1 \pm \frac{1}{Q y \cos \theta} \iint_A \frac{\Delta p}{g\rho} v dA \quad (1.12)$$



a) Flujo cóncavo



b) Flujo convexo

Figura 1.6. Distribución de la presión en flujo curvilíneo (fondo curvo)

La desviación $\Delta p/g\rho$ de la carga de presión en flujo cóncavo es positiva, $\alpha' > 1$, y la suma $z + \alpha' y \cos \theta$ en la ecuación 1.11 alcanza un nivel mayor que el de la superficie libre. La desviación $\Delta p/g\rho$ es negativa en flujo convexo, $\alpha' < 1$, y la suma $z + \alpha' y \cos \theta$ alcanza un nivel menor que el de la superficie libre e inclusive puede quedar debajo del nivel del piso. Esto significa que en ambos casos $\alpha V^2/2g$ ya no es la distancia vertical que separa a la línea de energía de la superficie libre y que $\alpha' y \cos \theta$ tampoco es la carga de presión en el fondo, como ocurre en flujo rectilíneo. Para éste, $\Delta p/g\rho = 0$, $\alpha' = 1$, y la ecuación 1.11 coincide con la 1.7.

En la misma forma, para calcular la fuerza resultante de la presión sobre las secciones donde hay flujo curvilíneo se utiliza también un coeficiente de corrección β' que afecta el valor de la fuerza $g\rho A y'_G \cos \theta$ en el rectilíneo, donde y'_G ubica el centroide de la sección. Es decir

$$g\rho A \beta' y'_G \cos \theta = \iint_A p \, dA = g\rho \iint_A \left[y' \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho} \right] dA$$

O bien

$$\beta' = 1 \pm \frac{1}{A y'_G \cos \theta} \iint_A \frac{\Delta p}{g\rho} dA \quad (1.13)$$

expresión que aclara el significado de β' ya que depende de $\Delta p/g\rho$, es decir, del efecto que tiene la curvatura de las líneas de corriente en la fuerza que la presión produce sobre el área de flujo.

En fondos curvos más complicados, la distribución aproximada de la presión se obtiene por el método de la red de flujo o, con más precisión, por un modelo de prueba. En un flujo rápidamente variado el cambio en el tirante es tan rápido y brusco que las líneas de corriente poseen curvatura y divergencia apreciables, y no es posible aceptar una distribución de la presión similar a la del flujo rectilíneo.

Otro tratamiento aproximado consiste en considerar que el flujo cóncavo de la figura 1.6a es bidimensional de gran radio de curvatura y que las líneas de corriente asumen la forma del piso del canal. La velocidad sobre cualquiera de ellas en la sección AB es uniforme y se supone igual a la media. Esto no es rigurosamente cierto pero es sencillo y tiene la suficiente precisión en las aplicaciones prácticas.

Se considera el elemento sombreado, de ancho unitario y ángulo θ de inclinación, que se muestra en la figura 1.6a. Su peso, desde los puntos A a D es igual a $g\rho y' dx$ y su componente normal al fondo es $g\rho y' \cos \theta \, dx$. A dicho componente se agrega la fuerza P_c debida a la aceleración centrífuga, que es igual al producto de la masa de agua contenida en el elemento, de velocidad

constante igual a la media V , por la aceleración centrífuga V^2/r , donde r es el radio de curvatura de la línea de flujo en el punto D . Es decir

$$P_c = \rho y' dx \frac{V^2}{r}$$

La fuerza resultante en dirección perpendicular al flujo vale

$$g\rho y' \cos \theta dx + \rho y' dx \frac{V^2}{r}$$

la cual, al dividir por dx , da la presión en el punto D , de magnitud

$$p' = g\rho y' \cos \theta + \rho y' \frac{V^2}{r}$$

y la carga de presión correspondiente se expresa en la forma

$$\frac{p'}{g\rho} = y' \cos \theta + \frac{V^2 y'}{g r} \quad (1.14)$$

El término $y' \cos \theta$ equivale a la carga de presión de acuerdo con la ley casi hidrostática; el último es la desviación $\Delta p/g\rho$ que hay que agregar por efecto de la fuerza centrífuga. Dicha desviación es negativa si se trata del flujo convexo, lo cual se puede demostrar por un desarrollo análogo.

Para obtener la carga de presión en el punto B sobre el fondo, es suficiente que $y' = y$ y $r = R$ (radio al fondo), de modo que

$$\frac{p_B}{g\rho} = y \cos \theta \pm \frac{V^2 y}{g R} \quad (1.15)$$

donde el término $\pm V^2 y/gR$ es la desviación de la carga de presión por efecto de curvatura de las líneas de flujo. Tiene signo positivo cuando el flujo es cóncavo y negativo cuando es convexo.

Se hace notar que no es suficiente conocer la carga de presión en el fondo de la sección para calcular la energía total H ; más bien se necesita α' , como lo señala la ecuación 1.11.

Si el canal es de gran pendiente, la velocidad es grande y cuando alcanza cierta magnitud, el agua arrastra aire al interior del flujo, produce un aumento de su volumen y un incremento en

el tirante. Por esta razón, la presión calculada con alguna de las ecuaciones antes obtenidas es mayor en muchos casos que la presión real medida en pruebas con un modelo, lo cual se debe a que la densidad de la mezcla de agua y aire disminuye pero el tirante aumenta. Si se conoce dicha densidad, se debe reemplazar en los cálculos en lugar de la del agua pura, para tomar en cuenta el arrastre de aire que se espera. La densidad real de la mezcla varía del fondo a la superficie libre, pero para cálculos preliminares se supone constante, con errores del lado de la seguridad.

En un capítulo posterior se expone un tratamiento más amplio y preciso del flujo sobre canales de fondo curvo.

1.6 DISTRIBUCIÓN DE LA VELOCIDAD EN LA SECCIÓN

La presencia de la superficie libre, la forma y cambios de la sección, la rugosidad de las paredes, el gasto y la acción de corrientes secundarias en tramos curvos afectan la distribución de la velocidad en la sección de un canal. En la figura 1.7 se ilustra su aspecto típico en un río, con base en las curvas que unen puntos de igual magnitud de la velocidad, interpoladas de mediciones con molinete en diferentes puntos, como los indicados en la misma figura.

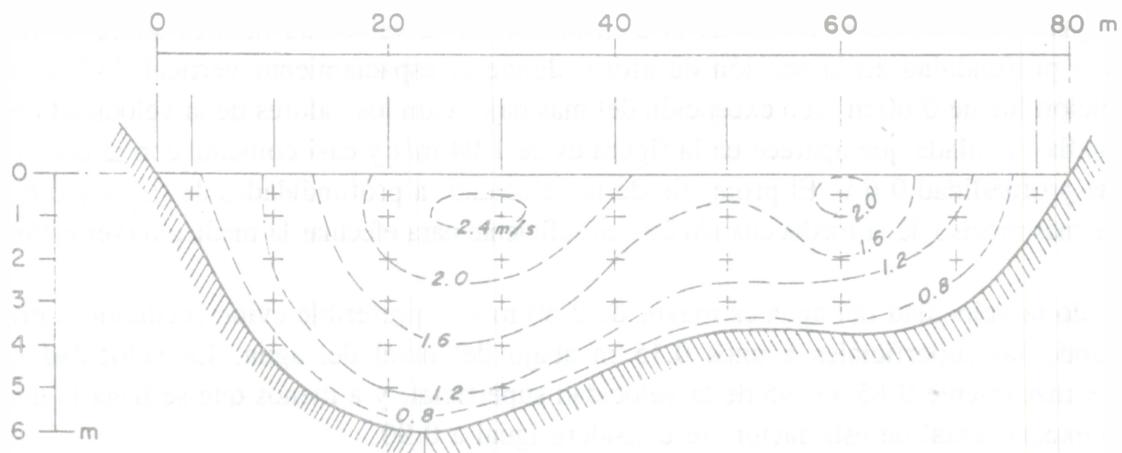


Figura 1.7. Aspecto de la distribución de la velocidad en la sección transversal de un río

En la figura se observa que la velocidad mínima ocurre en la proximidad de la pared y que aumenta hacia la superficie libre. El punto de velocidad máxima queda ligeramente abajo de dicha superficie, lo que se atribuye al movimiento circulatorio secundario inducido por la proximidad de las orillas. La zona donde ocurre se localiza prácticamente sobre la vertical de mayor profundidad.

En la figura 1.8a se muestra la geometría de la sección de aforo en un río sobre la que se han trazado una serie de líneas verticales, localizadas por su distancia a una de las márgenes mediante una serie de marcas en un cable, sobre las que se mide la profundidad del fondo. Cada tercer línea divide a la sección en subsecciones verticales y su localización se elige de manera que en cada subsección fluya no más del 10 por ciento del gasto total. La vertical intermedia (marcada con asterisco en la figura) coincide en forma aproximada con el centroide de la subsección y las mediciones que sobre ella se realicen tienen como área de influencia a la de la subsección.

El arreglo antes descrito hace que el número de líneas verticales sea entre 20 y 30, lo cual queda también limitado por el número de mediciones de la velocidad que pueda hacerse en un intervalo de tiempo razonable, de acuerdo con la rapidez de cambio en el nivel del agua con el caudal.

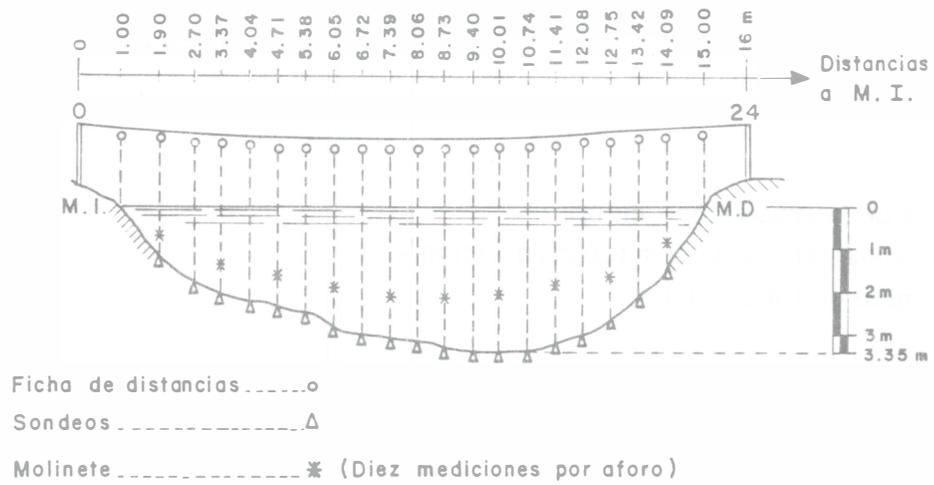
Cuando se desea buena precisión en el aforo de corrientes donde la profundidad sea mayor de 3.0 m y las condiciones del flujo lo permitan, un buen número de mediciones se practica sobre la vertical intermedia en cada subsección, efectuando una cerca de la superficie, otra cerca del fondo y entre una y otra un cierto número de observaciones, de tal manera que los intervalos sean de 0.25 y a 0.1 y, donde y es el tirante de la subsección sobre la vertical central, pero sin que el espaciamiento entre ellas exceda de 1 m.

La figura 1.8b ilustra la forma de la distribución de la velocidad medida sobre la vertical de mayor profundidad en la sección de aforo, donde el espaciamiento vertical de los puntos de medición fue de 0.60 m, con excepción del más bajo. Con los valores de la velocidad obtenidos, la media calculada que aparece en la figura es de 1.04 m/s y casi coincide con la que se obtiene a una profundidad 0.6 y . El promedio de la velocidad, a profundidades de 0.2 y y 0.8 y , es un valor más preciso de la media cuando ésta es suficiente para efectuar la medición (ver ejemplo 1.5).

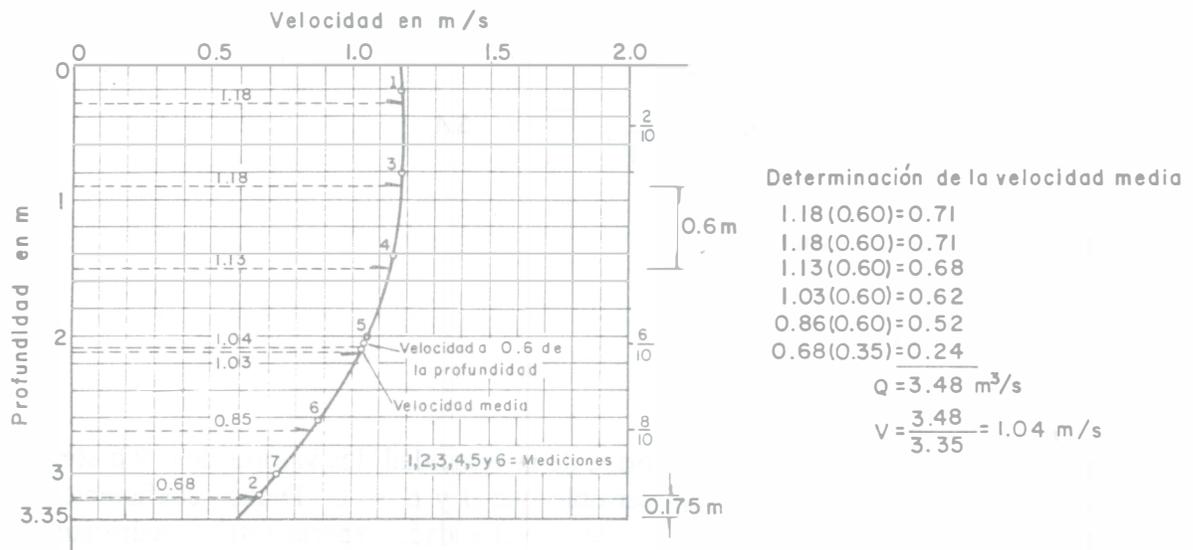
Cuando la velocidad del agua es mayor de 2.50 m/s es preferible evitar mediciones profundas, bastando las superficiales a unos 0.15 m abajo del nivel del agua. La velocidad media es aproximadamente 0.85 a 0.95 de la velocidad superficial, y a menos que se haga la determinación experimental de este factor, se considera igual a 0.90.

En un canal ancho, con agua a gran velocidad y poco tirante, o bien en uno liso, la máxima ocurre con frecuencia al nivel de la superficie libre. En general la rugosidad aumenta la curvatura del perfil de distribución, y la máxima puede presentarse a una profundidad de 0.05 a 0.25 del tirante. Es preciso medirla a 0.15 m abajo de la superficie libre, cuando el tirante es mayor de 3 m y no es posible utilizar molinete en toda la sección.

La distribución de la velocidad se modifica bastante en los lados interior y exterior de una curva, por la acción de las corrientes secundarias. En la región central de secciones muy anchas es prácticamente la misma que en las rectangulares de ancho infinito, esto es, las paredes verticales no afectan en su mayor parte al flujo. Cuando el ancho es mayor de 5 a 10 veces el tirante, el movimiento se considera bidimensional.



a) Sección de aforo



b) Distribución de la velocidad en la vertical de mayor profundidad

Figura 1.8. Medición de la velocidad en una sección de aforo

El gasto total en la sección de aforo es

$$Q = \iint_A v \, dA \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta A_i$$

donde

- ΔA_i área de la subsección i en m^2 ,
- v_i velocidad media en la subsección i en m/s ,
- n número de subsecciones.

La velocidad media en toda la sección es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\sum \Delta A_i v_i}{\sum \Delta A_i} = \frac{Q}{A}$$

donde A es el área total de la sección.

De acuerdo con la definición de los coeficientes α y β que se expuso en el capítulo 4 del volumen 1, su valor se obtiene de las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \approx \frac{1}{A V^3} \sum_{i=1}^n v_i^3 \Delta A_i \quad (1.16a)$$

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA \approx \frac{1}{A V^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \Delta A_i \quad (1.16b)$$

En el volumen 1 se demuestra que

$$\beta \approx 1 + \frac{\alpha - 1}{3} \quad (1.17)$$

Como resultado de la distribución no uniforme de la velocidad, los valores de α y β son siempre mayores o iguales a uno, siendo α más sensible que β y $\beta < \alpha$. Dichos coeficientes pueden valuarse sólo si se conoce la distribución de la velocidad, experimental o teóricamente. La valuación en el primer caso es posible sólo si el canal existe, como en el río antes analizado, o si se experimenta en un modelo del canal por diseñar. En ambos casos la solución es costosa y se acude entonces a criterios simplificados pero menos precisos.

En la tabla 1.3 se muestran algunos valores de α y β propuestos por diferentes autores. Para obtener resultados aproximados en canales anchos y rugosos, se utilizan las siguientes expresiones:

$$\alpha = 1 + 3 \epsilon^2 - 2 \epsilon^3 \quad (1.18a)$$

$$\beta = 1 + \epsilon^2 \quad (1.18b)$$

donde $\epsilon = (v_{m\acute{a}x}/V) - 1$. Algunos valores de ϵ , obtenidos por Rehbock (referencia 1), se presentan en la tabla 1.4.

Según Bazin, α se puede calcular a través de alguna de las siguientes expresiones:

$$\alpha = 1 + 150/C^2, \text{ en secciones de ancho infinito;} \quad (1.19a)$$

$$\alpha = 1 + 210/C^2, \text{ en secciones rectangulares muy anchas;} \quad (1.19b)$$

$$\alpha = 1 + 240/C^2, \text{ en secciones semicirculares.} \quad (1.19c)$$

donde C es el factor de fricción de Chezy (subcapítulo 2.2). El coeficiente β se obtiene de la ecuación 1.17.

En canales de sección compuesta (subcapítulo 2.9), que consisten en uno principal al centro y subcanales laterales, bermas o planicies de inundación, los coeficientes α y β de toda la sección son siempre mayores de 1, aunque se considere que valen uno en las distintas subsecciones que lo componen.

En canales de sección sencilla, es decir, con la forma de las que se usan tradicionalmente (rectangular, trapecial, circular, etc.), es común considerar que $\alpha \approx \beta \approx 1$ cuando no se dispone de mejor información.

Ejemplo 1.1. La estimación del gasto máximo que se ha presentado en un río durante alguna avenida es factible si se dispone de las marcas dejadas por el agua sobre los bordos. Para ello es necesario elegir un tramo, casi recto, donde la sección transversal se mantenga más o menos uniforme. La figura 1.9 muestra las condiciones generales del flujo dentro de dicho tramo, para el que se miden en campo las características geométricas de las secciones que lo limitan y la distancia existente entre ellas. Se considera que $\cos \theta \approx 1$.

a) Obtener una ecuación que relacione el desnivel $\Delta y'$ de la superficie libre del agua, la pérdida de energía Δh_r y la velocidad en las dos secciones indicadas. b) Determinar la ecuación que relacione el gasto en el río con $\Delta y'$ y Δh_r .

Tabla 1.3. Coeficientes α y β en canales

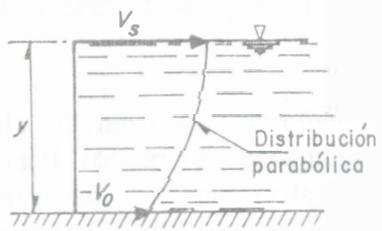
Canales	α			β		
	mín	medio	máx	mín	medio	máx
Rectos sin obstáculos.	1.01	1.05	1.10	1.00	1.02	1.03
Rectangulares con paredes de madera (Darcy y Bazin).	—	1.05	—	—	1.02	—
Rectangulares con obstáculos (O'Brien).	—	1.41	—	—	1.14	—
Trapeziales con paredes de madera (Darcy y Bazin).	—	1.05	—	—	1.02	—
Trapeziales con paredes de mampostería (Darcy y Bazin).	—	1.07	—	—	1.02	—
Trapeziales excavados en tierra (Darcy y Bazin).	—	1.10	—	—	1.03	—
Semicirculares revestidos de cemento (Darcy y Bazin).	—	1.025	—	—	1.01	—
Semicirculares con fondo de arena y grava (Darcy y Bazin).	—	1.09	—	—	1.03	—
De forma de herradura (O'Brien).	—	1.07	—	—	1.02	—
De descarga de turbina Kaplan (Favre).	—	1.74	—	—	1.25	—
Regulares, acueductos y de descarga en vertederos (Kolupaila, referencia 2).	1.10	1.15	1.20	1.03	1.05	1.07
Corrientes naturales y torrentes (Kolupaila, referencia 2).	1.15	1.30	1.50	1.05	1.10	1.17
Ríos de valle después de un meandro.	—	1.35	—	—	1.12	—
Ríos bajo una cubierta de hielo (Kolupaila, referencia 2).	1.20	1.50	2.00	1.07	1.17	1.33
Ríos de valle desbordados en planicie (Kolupaila, referencia 2).	1.50	1.75	2.00	1.17	1.25	1.33
 <p>(Según Scimemi)</p>	$\frac{v_0}{v_s}$	1.00	1.00	1.00		
		0.67	1.04	1.01		
		0.50	1.09	1.03		
		0.20	1.31	1.10		
	$v_0 = 0$ $v_s = 2 V$		2.00	1.33		

Tabla 1.4. Valores de $v_{m\acute{a}x}/V$ según el material en las paredes del canal, propuestos por Rehbock (referencia 1)

Material	$v_{m\acute{a}x}/V$
Cemento.	1.20
Madera en duelas.	1.22
Grava fina.	1.30
Grava gruesa.	1.41
Roca con grandes cantos.	2.5 a 1.92
Grava con pasto y arbustos.	2.17 a 1.33
Grava gruesa y piedras.	1.72 a 1.43
Grava.	1.61 a 1.33
Limo y arena.	1.54 a 1.21
Madera, concreto y ladrillo.	1.43 a 1.09

Solución a. La aplicación de la ecuación de energía 1.9b entre las secciones 1 y 2 conduce a

$$\Delta z + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_r$$

Por otra parte, de la geometría de la figura se tiene

$$\Delta y' = \Delta z + y_1 - y_2$$

Esta ecuación, sustituida en la anterior, da como resultado

$$\Delta h_r = \Delta y' + \left[\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right] \quad (a)$$

que es la solución buscada. La pérdida de energía Δh_r incluye la pérdida de fricción y la que corresponde al cambio de velocidad en el tramo, llamada también de convexión.

Solución b. De la ecuación de continuidad: $V_1 = Q/A_1$ y $V_2 = Q/A_2$. Por tanto, resulta

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2g (\Delta y' - \Delta h_r)}{\alpha_2 - \alpha_1 (A_2/A_1)^2}} \quad (b)$$

Con esta ecuación es posible calcular, de manera aproximada, el gasto de una gran avenida en un río, si se determina $\Delta y'$ a partir de las huellas dejadas por el agua en las orillas, y la pérdida Δh_r . Para complementar la solución es necesario consultar el subcapítulo 2.10.

Ejemplo 1.2. Una onda de translación es una sobrelevación del nivel del agua (onda positiva) o una depresión (onda negativa), que se propaga sobre la superficie libre conservando su forma geométrica (figuras 1.10 a y b).

En el primer caso se origina por la adición brusca de un volumen de agua o la introducción también brusca de un cuerpo sólido; en el segundo, por la extracción repentina de una parte de agua. La velocidad con que se propaga se conoce como celeridad o rapidez de translación, para no confundirla con la de la velocidad propia del agua en el canal. En su translación, la onda se extingue por efecto de las resistencias pasivas en su movimiento.

Estableciendo con claridad las consideraciones que se hagan, determinar la expresión que permita calcular la celeridad de una onda elemental en un canal de pendiente pequeña, sección cualquiera y agua en reposo, a partir de:

- a) las ecuaciones de continuidad y energía, y
- b) las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.

Solución a. En apariencia el flujo no es permanente, sin embargo, de la observación de las figuras 1.10 c y d para el caso de la onda positiva, se concluye que las condiciones no cambian con el tiempo si el observador se mueve con la misma celeridad de la onda. Esto permite utilizar las ecuaciones fundamentales de flujo permanente antes enunciadas.

De la ecuación diferencial de continuidad 1.5a a lo largo del canal se obtiene

$$V \frac{dA}{dx} + A \frac{dV}{dx} = 0$$

Pero de la ecuación 1.2, $dA = T dy$, por tanto, la anterior también es

$$V T dy + A dV = 0$$

$$dV = - \frac{V T}{A} dy \tag{a}$$

De la misma manera, con $z = \text{const.}$, $\cos \theta = 1$, $\alpha = 1$ y $h_r = 0$, de la ecuación diferencial de la energía 1.8 se obtiene

$$dy + d \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

$$dy + \frac{V}{g} dV = 0 \tag{b}$$

Si se sustituye la a en la b, resulta

$$dy - \frac{V^2 T}{g A} dy = 0$$

y con $V = c$, también resulta

$$c = \sqrt{g A/T} \tag{c}$$

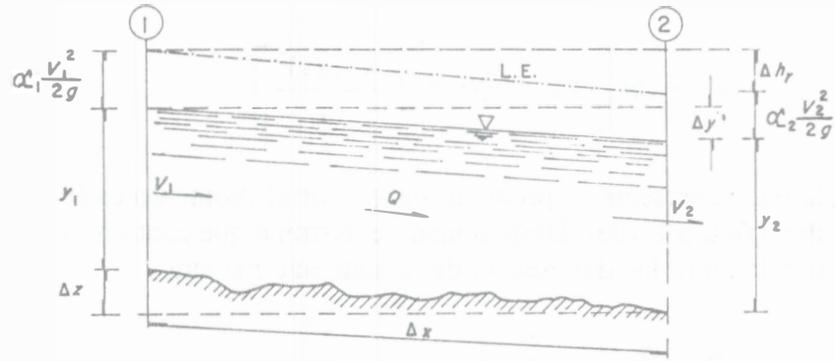


Figura 1.9. Tramo de un río en el ejemplo 1.1

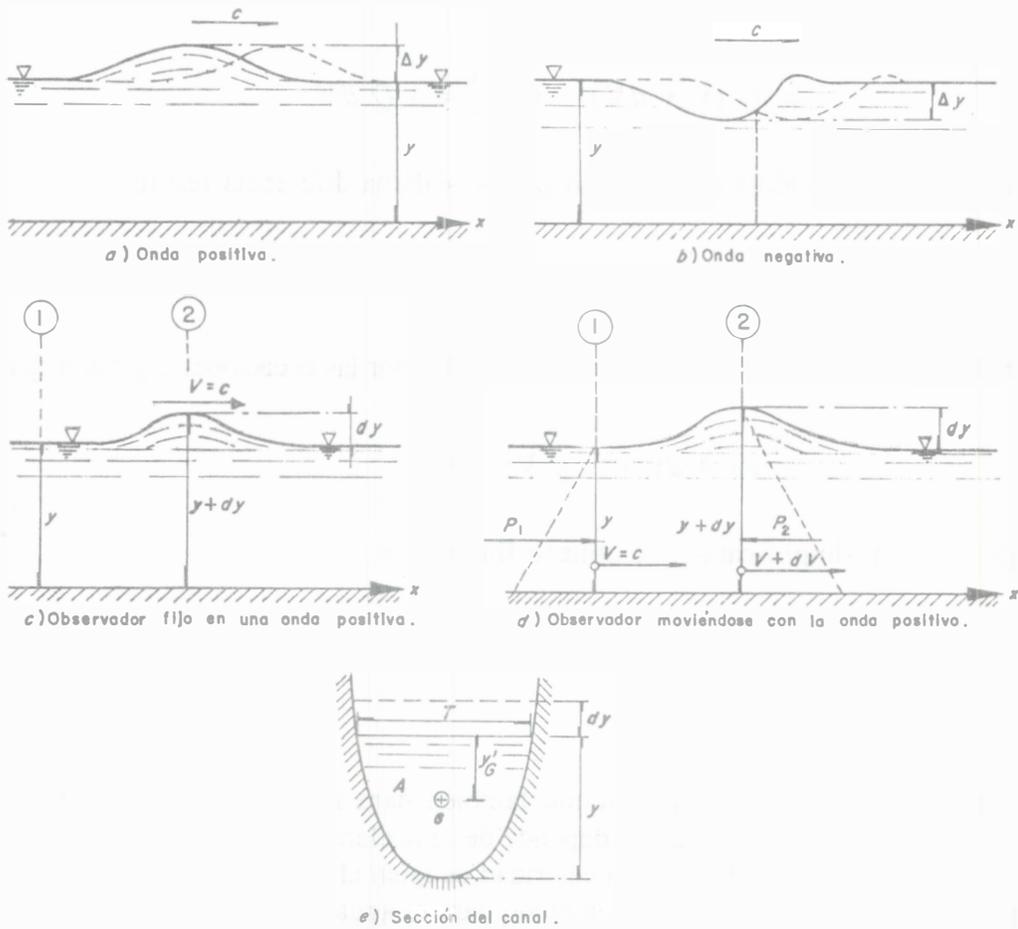


Figura 1.10. Onda elemental de translación

Solución b. Con las mismas consideraciones del caso anterior, las fuerzas debidas a la presión hidrostática en las secciones 1 y 2 son respectivamente:

$$P_1 = g\rho y'_G A$$

$$P_2 = g\rho \left[(y'_G + dy) A + \frac{T (dy)^2}{2} \right]$$

toda vez que cada una representa el producto de $g\rho$ por el momento estático del área respecto de la superficie libre (figura 1.10e). Despreciando el término que contiene diferenciales de orden superior, la diferencia entre las dos resulta de la siguiente manera

$$P_1 - P_2 = - g\rho A dy \quad (d)$$

El gasto que entra por la sección 1 es Q y con $\beta = 1$ la cantidad de movimiento $\rho Q V$ en la misma dirección horizontal. El gasto que sale por la sección 2 es también Q , pero su cantidad de movimiento $\rho Q (V + dV)$. La diferencia entre las dos es

$$\rho [Q (V + dV) - Q V] = \rho Q dV \quad (e)$$

Si se sustituye la ecuación a en la e, con $Q = A V$ dicha diferencia resulta

$$- \rho V^2 T dy \quad (f)$$

De acuerdo con la ecuación 1.10, las cantidades dadas por las ecuaciones d y f son iguales, esto es

$$- g\rho A dy = - \rho V^2 T dy$$

Haciendo $V = c$ y simplificando, se obtiene finalmente

$$c = \sqrt{g \frac{A}{T}} \quad (g)$$

idéntico resultado a la ecuación c, válido también para la onda negativa. Esto indica que la celeridad de una onda de translación depende de la aceleración de gravedad y del valor de A/T del canal en que se mueve. Esto es, la celeridad es igual al denominador del cociente que define al número de Froude y aunque se ha obtenido para el agua sin movimiento, se superpone a éste

cuando lo tenga. Con esta observación la siguiente interpretación puede aplicarse a los flujos en régimen subcrítico y supercrítico antes enunciados:

- Cuando el régimen es subcrítico, $F < 1$, la velocidad del flujo es menor que la celeridad de la onda y ésta puede propagarse contra el flujo, de modo que la zona del canal aguas arriba está afectada por las condiciones hidráulicas de aguas abajo.
- Cuando el régimen es supercrítico, $F > 1$, la velocidad del flujo es, por el contrario, mayor que la celeridad de la onda y ésta no puede propagarse contra el flujo, de modo que la zona del canal aguas arriba no está afectada por las condiciones hidráulicas de aguas abajo.

Ejemplo 1.3. La figura 1.11 muestra un canal horizontal ($\theta = 0$) y sección rectangular, que tiene un umbral largo de altura w y ancho b . Utilizando la ecuación de la cantidad de movimiento, derivar una expresión para el gasto que vierte sobre el umbral, considerando las siguientes hipótesis: a) se desprecian las fuerzas de fricción ($F_f' = F_f'' = 0$); b) de acuerdo con resultados experimentales, se acepta que $y_2 = (y_1 - w)/2$; c) el empuje debido a la presión sobre la cara vertical del umbral es igual al que resulta de la hidrostática para la superficie libre aguas arriba; d) se supone flujo paralelo y distribución hidrostática de la presión en las fronteras restantes.

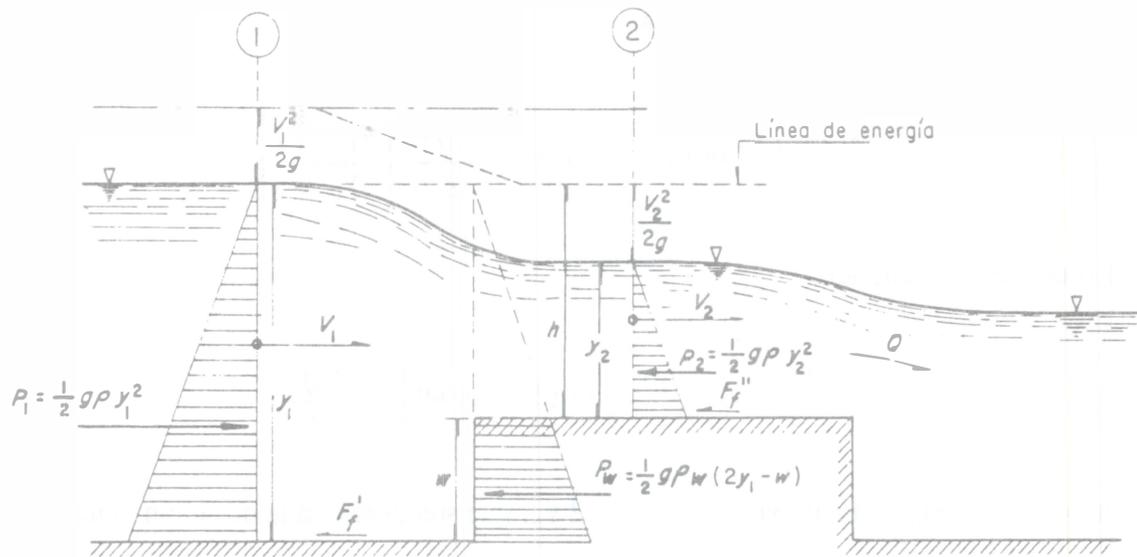


Figura 1.11. Vertedor de cresta ancha del ejemplo 1.3

Solución. El volumen de control que se considera está limitado por las secciones 1 y 2, el piso del canal, la pared vertical del umbral y la superficie libre. Las fuerzas horizontales (por unidad de ancho) sobre las superficies verticales que lo limitan se puede calcular, de acuerdo con las hipótesis propuestas, como sigue:

$$P_1 = \frac{1}{2} g \rho y_1^2$$

$$P_2 = \frac{1}{2} g \rho y_2^2$$

$$P_w = \frac{1}{2} g \rho w [(y_1 - w) + y_1] = \frac{1}{2} g \rho w (2 y_1 - w)$$

Por tanto, según la ecuación de la cantidad de movimiento resulta

$$\frac{1}{2} g \rho y_1^2 - \frac{1}{2} g \rho y_2^2 - \frac{1}{2} g \rho w (2 y_1 - w) = \rho q (V_2 - V_1)$$

donde $q = Q/b$ es el gasto por unidad de ancho del vertedor.

Por otra parte, de la ecuación de continuidad: $V_1 = q/y_1$ y $V_2 = q/y_2$. La sustitución de estos valores en la ecuación anterior conduce a

$$y_1^2 - y_2^2 - w (2 y_1 - w) = \frac{2 q^2}{g} \left[\frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2} \right]$$

que al ordenarla es también

$$\frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} [y_1^2 - y_2^2 - w (2 y_1 - w)] = \frac{2 q^2}{g}$$

De acuerdo con la segunda hipótesis, $w = y_1 - 2 y_2$, que sustituida en la ecuación anterior resulta

$$\frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} [y_1^2 - y_2^2 - (y_1 - 2 y_2) (y_1 + 2 y_2)] = \frac{2 q^2}{g}$$

y al simplificar se obtiene

$$\frac{3 y_1 y_2^3}{y_1 - y_2} = \frac{2 q^2}{g}$$

Si se sustituye nuevamente $y_2 = (y_1 - w)/2$, quedaría

$$\frac{3 y_1 (y_1 - w)^3}{4 (y_1 + w)} = \frac{2 q^2}{g}$$

y con $h = y_1 - w$ el gasto unitario resulta entonces

$$q = \sqrt{\frac{3}{16}} \sqrt{2g} \sqrt{\frac{y_1}{y_1 + w}} h^{3/2}$$

siendo el gasto total

$$Q = q b = 0.433 \sqrt{2g} \sqrt{\frac{y_1}{y_1 + w}} b h^{3/2} = C b h^{3/2}$$

Si $w = 0$, $C = 1.918 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$; y si $w \rightarrow \infty$, $y_1 \rightarrow \infty$, $\sqrt{y_1/(y_1 + w)} = 0.7071$ y $C = 1.356 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$. De observaciones experimentales se ha encontrado que C varía de 1.684 a 1.474 $\text{m}^{1/2}/\text{s}$.

Ejemplo 1.4. Al pie del cimacio de la figura 1.12 se tiene una cubeta deflectora de 18.30 m de radio, que sirve para cambiar la dirección del flujo de la inclinación de su espalda a la horizontal, descargando libremente entre muros divisorios separados 24.40 m. Para el gasto de 1600 m^3/s , la superficie del agua en la sección vertical OB se encuentra a una elevación de 2.6 m.

a) Calcular la distribución de la presión que actúa sobre el muro divisorio en la sección OB , con base en la ecuación 1.15 y la suposición de que el flujo arrastra aire, cuya concentración media en la mezcla se puede estimar mediante la ecuación de Douma (referencia 2) de la siguiente manera

$$C = 10 \sqrt{\frac{0.2 V^2}{g R_h} - 1}$$

donde

C concentración media de aire, considerada como el cociente del volumen de aire arrastrado y el de la mezcla en por ciento.

- b) Calcular el coeficiente α' de la ecuación 1.12 y la energía total en la misma sección *OB*.
- c) Comparar los resultados de la distribución de la presión con los experimentales que se muestran en la figura 1.12, dados en términos de altura de columna de agua.

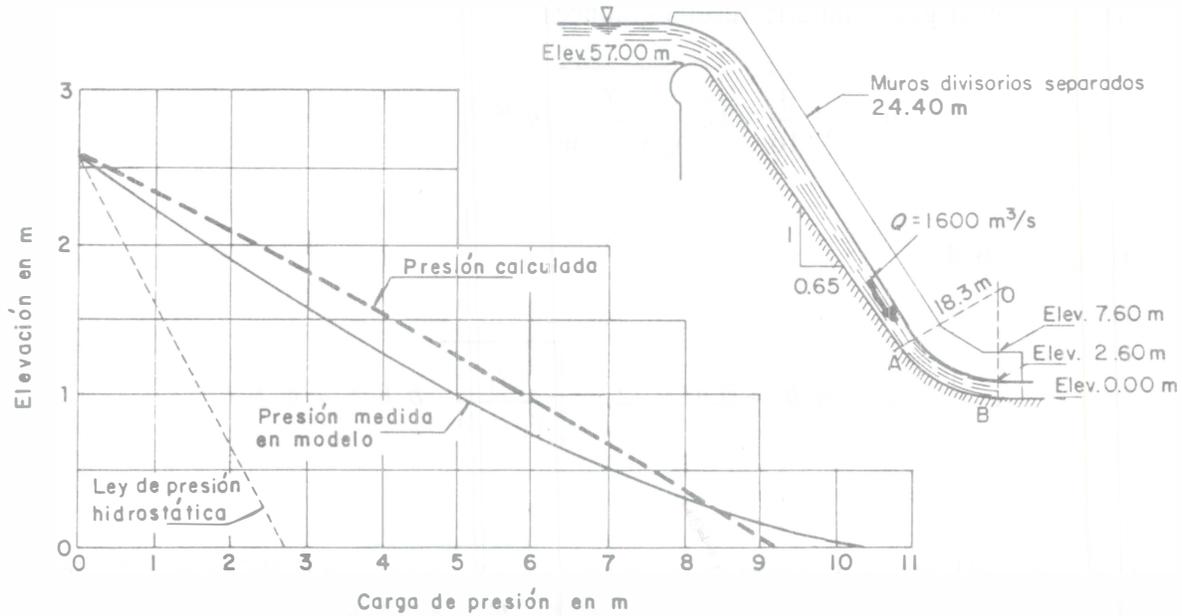


Figura 1.12. Geometría de la estructura y resultados del ejemplo 1.4

Solución a. El radio hidráulico y la velocidad media en la sección son:

$$R_h = \frac{24.4 (2.6)}{24.4 + 2 (2.6)} = 2.14 \text{ m}$$

$$V = \frac{1600}{24.4 (2.6)} = 25.2 \text{ m/s}$$

El porcentaje de aire arrastrado es

$$C = 10 \sqrt{\frac{0.2 (25.2)^2}{9.81 (2.14)} - 1} = 22.45 \text{ por ciento}$$

Por tanto, la densidad de la mezcla resulta

$$\rho_m = (1 - 0.2245) \rho = 0.7755 \rho$$

donde ρ es la densidad del agua ($\rho_m/\rho = 0.7755$).

Debido a que la sección OB es vertical, $\theta = 0$ y $\cos \theta = 1$. Si z es la altura de cualquier punto de dicha sección, el radio de curvatura hasta ese punto es $r = 18.30 - z$, $y' = 2.60 - z$. De la ecuación 1.14, con $V = 25.2$ m/s se tiene

$$\frac{P}{g\rho_m} = y' + \frac{V^2 y'}{g r} = y' + 64.7339 \frac{y'}{r}$$

La tabla 1.5 presenta los cálculos correspondientes a la ecuación anterior, donde se designa por $\Delta p/g\rho_m = V^2 y'/g r$ a la desviación de la presión en cada punto.

Solución b. Un valor aproximado de α' se obtiene de la ecuación 1.12 al considerar que $v = V$ en cualquier punto de la sección y que la integral se valúa con $\Sigma (\Delta p_i / g\rho_m) \Delta A_i$, donde $\Delta A_i = 24.4 \Delta z_i$. Su cálculo aparece en la tabla 1.5. De este modo

$$\alpha' = 1 + \frac{25.2 (24.4) (12.7145)}{1600 (2.6)} = 2.879$$

La energía del flujo en la sección a partir de la elevación cero y con $\alpha = 1$, de la ecuación 1.11 resulta

$$H = 2.879 (2.6) + \frac{(25.2)^2}{19.62} = 39.853 \text{ m}$$

la que equivale al flujo de un líquido cuya densidad ha disminuido por la inclusión del aire.

Solución c. La tabla 1.5 presenta los cálculos correspondientes a $\Delta p/g\rho = (\rho_m/\rho) (\Delta p/g\rho_m)$, y la figura 1.12 los resultados en forma gráfica. Estos, comparados con los obtenidos en un modelo hidráulico, tienen buena concordancia. Dichos resultados corresponden a la distribución de la presión sobre una vertical y sobre la cara del muro divisorio.

La carga de presión sobre el fondo es la correspondiente a $z = 0$, y en la tabla 1.5 es de 9.149 m que, comparada con el valor experimental de 10.3 m, presenta una diferencia de 11 por ciento. Utilizando la ecuación 1.15 resulta el mismo valor de 9.149 m.

Tabla 1.5. Cálculo de la distribución de la presión en la sección OB de la estructura en el ejemplo 1.4

z en m	r en m	y' en m	$\Delta p / g\rho_m$ en m	$p/g\rho_m$ en m *	Δz en m	$\frac{\Delta p}{g\rho_m} \Delta z$	$p/g\rho$ en m * *
0	18.30	2.60	9.197	11.797	0.20	1.8394	9.149
0.40	17.90	2.20	7.956	10.156	0.40	3.1824	7.875
0.80	17.50	1.80	6.658	8.458	0.40	2.6633	6.559
1.20	17.10	1.40	5.3	6.7	0.40	2.12	5.196
1.60	16.70	1.00	3.876	4.876	0.40	1.5505	3.782
2.00	16.30	0.60	2.383	2.983	0.40	0.9531	2.313
2.35	15.95	0.25	1.015	1.265	0.40	0.4058	0.981
2.60	15.70	0.0	0	0	----	----	----

* de la mezcla de agua-aire

$$\Sigma = 12.7145$$

** de columna de agua

1.7 PÉRDIDA DE ENERGÍA

El concepto de pérdida en la ecuación de energía 1.9b es igual al que se utiliza en el cálculo de conductos a presión, es decir, en un canal existen también pérdidas por fricción y locales. En lo relativo a la fricción, la pendiente hidráulica en los conductos a presión es constante debido a que el diámetro también lo es en tramos largos y, por lo mismo, la velocidad. En cambio, en un canal, aún de sección y rugosidad constantes, el flujo puede ser variado, lo que hace que la pendiente hidráulica cambie continuamente de una sección a otra. Sólo en flujo uniforme se encuentra la misma inclinación en plantilla, superficie libre y línea de energía.

Por estas razones, es más común en canales asociar la pérdida de fricción en un tramo con la pendiente media de fricción en el mismo y efectuar el cálculo de dicha pendiente. Se considera a la ecuación de Darcy-Weisbach como la básica para el cálculo de la pérdida por fricción en cualquier conducción y para conductos a presión de sección circular se expresa en la forma

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

donde

- f factor de fricción dependiente del número de Reynolds y de la rugosidad absoluta, sin dimensiones,
- L longitud del conducto en m,
- D diámetro del conducto en m,
- V velocidad media del flujo en m/s.

El radio hidráulico de la sección circular es $R_h = D/4$, por tanto, con $D = 4 R_h$ y $S = h_f/L$ (pendiente de fricción), la ecuación aplicable al flujo uniforme en canales de cualquier sección se expresa mejor en la forma

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h S} \quad (1.20)$$

cuya aplicación también se acepta en una sección de un flujo variado si f y R_h corresponden a los valores locales en la misma, en cuyo caso S es también la pendiente local de fricción. Se ve que ésta depende de V , R_h y f , por lo cual es muy frecuente que cambie continuamente a lo largo del canal.

Al principio del capítulo de flujo uniforme se deriva la ecuación de Chezy, de igual estructura a la anterior pero obtenida en canales; también se demuestra que el esfuerzo tangencial medio en la pared debido a la fricción y que se opone al movimiento es

$$\tau_0 = g \rho R_h S$$

expresión que también se aplica a una sección aunque el flujo no sea uniforme.

El término

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h S} \quad (1.21)$$

se conoce como velocidad de fricción por tener las dimensiones de una velocidad. De la ecuación 1.20, $\sqrt{g R_h S} = V \sqrt{f/8}$, que al sustituir en la anterior resulta

$$v_* = \sqrt{\frac{f}{8}} V \quad (1.22a)$$

O bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{V}{v_*} \quad (1.22b)$$

Esta expresión permite obtener distintas ecuaciones de f , llamadas leyes de fricción, cuando se conocen las correspondientes a la velocidad media, la velocidad de fricción y el valor de la rugosidad, de acuerdo con el tipo de flujo (laminar, de transición o turbulento) y el comportamiento de la pared.

En los siguientes subcapítulos se obtienen dichas leyes en el caso de los flujos laminar y turbulento, para el último, sólo en canales lisos. Las leyes de fricción en canales rugosos se presentan al inicio del capítulo 2.

1.8 CAPA LÍMITE Y RUGOSIDAD SUPERFICIAL

Un principio universalmente aceptado en la mecánica de fluidos es el que establece que la velocidad de las partículas en contacto con una frontera sólida estacionaria es cero. Esto significa que el perfil de distribución de la velocidad de cualquier flujo sobre dicha frontera es el resultado de que la fuerza de fricción, generada sobre la frontera, ejerce su influencia hacia el interior del flujo. Debido a que el agua tiene una viscosidad μ pequeña, es frecuente que su efecto se confine a una capa delgada en la inmediata vecindad de la frontera, conocida como subcapa laminar. En ésta la diferencia de presión en la dirección transversal es despreciable, debido a que su espesor es muy pequeño en comparación con las dimensiones típicas lineales del flujo. Fuera de la subcapa laminar el fluido se comporta como si no tuviera viscosidad.

Los conceptos anteriores han sido expuestos en el apéndice B del volumen 1. A continuación sólo se hace énfasis en los más importantes en canales muy anchos.

La figura 1.13a muestra el flujo sobre una frontera plana y lisa, de velocidad V_0 uniforme fuera de la capa límite. La evidencia teórica y experimental indica que el espesor δ de la capa límite depende de V_0 , ρ , μ , y x , donde x es la distancia desde el extremo inicial de la frontera. Desde éste comienza la formación de una capa límite, llamada laminar, cuyo espesor, de acuerdo con la solución de Blasius, sigue la ley

$$\delta = \frac{5 x}{\sqrt{\mathbf{R}_{ex}}} \quad (1.23)$$

donde

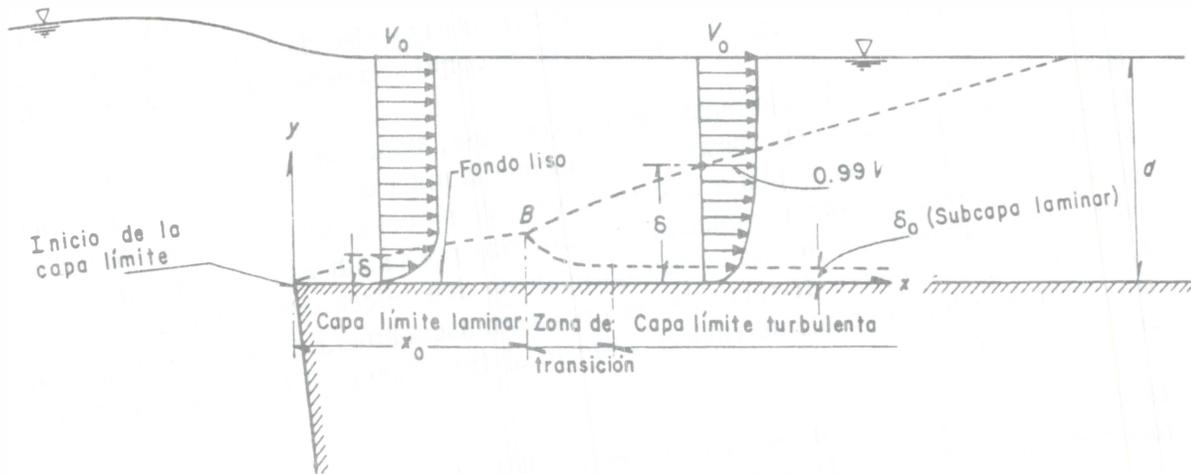
$$\mathbf{R}_{ex} = \frac{\rho V_0 x}{\mu} = \frac{V_0 x}{\nu}$$

es el número de Reynolds basado en la distancia longitudinal x y $\nu = \mu/\rho$.

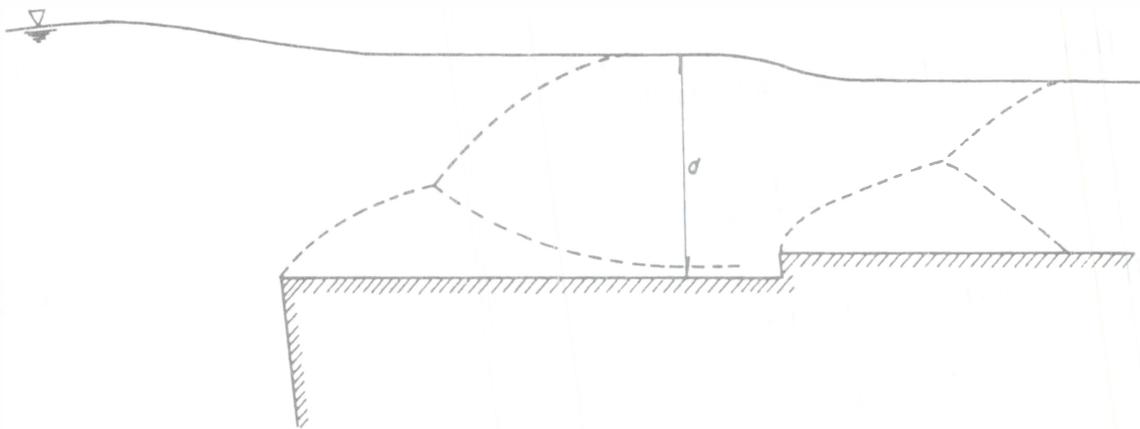
Dicho espesor se mide de la pared hasta el punto en que $v/V_0 = 0.99$. Si V_0 y el tirante de flujo son pequeños, δ alcanza fácilmente el valor de dicho tirante y todo el flujo es laminar con efecto exclusivo de la viscosidad.

La ecuación 1.23 indica que δ crece con \sqrt{x} . En la medida en que aumenta su espesor, la capa límite laminar se vuelve inestable y se transforma en una capa límite turbulenta. Esta transición ocurre en el intervalo

$$500\,000 < \mathbf{R}_{ex} < 1\,000\,000$$



a) Formación de la capa límite.



b) Crecimiento de una capa límite dentro de otra capa límite.

Figura 1.13. Etapas de la formación de la capa límite

Con la misma consideración de que $v/V_0 = 0.99$, el espesor de la capa límite turbulenta sobre la frontera lisa está dado por la ecuación

$$\delta = \frac{0.37 x}{R_{ex}^{0.2}} \quad (1.24)$$

Aunque se produzca la capa límite turbulenta, persiste una capa muy delgada, de espesor teórico $\delta' = 5\nu/v_*$, cerca de la frontera, que permanece laminar y que se conoce como subcapa laminar o viscosa, donde el efecto es puramente viscoso.

Es muy frecuente que una o varias capas límite turbulentas crezcan dentro de otras y que lleguen a intersecar la superficie libre, al grado que el tirante en el canal se convierta en el espesor de la capa límite turbulenta. Un cambio en la geometría o rugosidad de la frontera puede generar la formación y crecimiento de una nueva capa límite como se muestra en la figura 1.13b.

La superficie de frontera del flujo puede ser lisa o rugosa, siendo esta última la más común en la práctica. La comparación del espesor de la subcapa laminar con la altura de la rugosidad de la superficie de frontera, da origen a la clasificación de su comportamiento hidráulico. Si los elementos de rugosidad quedan completamente cubiertos por la subcapa laminar, la frontera se comporta como hidráulicamente lisa, y la rugosidad no tiene efecto en el flujo de la subcapa. Sin embargo, si los elementos de rugosidad se proyectan hacia afuera de la subcapa, la frontera se comporta como hidráulicamente rugosa y afecta al flujo fuera de la subcapa (figura B.4, apéndice B, volumen 1).

Utilizando superficies planas y tubos, Schlichting, en 1968, determinó los criterios para clasificar el comportamiento hidráulico de la frontera rugosa de la siguiente manera:

a) Hidráulicamente lisa cuando

$$0 < \frac{v_* k_s}{\nu} \leq 5 \quad (1.25a)$$

b) Hidráulicamente de transición cuando

$$5 < \frac{v_* k_s}{\nu} \leq 70 \quad (1.25b)$$

c) Hidráulicamente rugosa cuando

$$\frac{v_* k_s}{\nu} > 70 \quad (1.25c)$$

En estas expresiones, v_* es la llamada velocidad de fricción, definida por la ecuación 1.21.

La rugosidad absoluta k_s que aparece en las ecuaciones anteriores es un parámetro que caracteriza no sólo la altura vertical de los elementos de rugosidad, sino también su orientación, arreglo geométrico y espaciamiento. En el volumen 1 se presentan valores generales de dicha rugosidad, y en la [tabla 2.2](#) de este texto valores específicos en canales.

Un cuerpo inmerso en un flujo, por ejemplo, una esfera, generalmente tiene un comportamiento similar al que se analizó para la frontera en la zona próxima al punto inicial del lado aguas arriba, pero en la medida en que su curvatura superficial se aleja más bruscamente del flujo, la capa límite se separa. En estas condiciones, el flujo produce un empuje sobre el cuerpo, conocido como fuerza de arrastre total, como se explicó en el volumen 1, a saber:

$$F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \quad (1.26)$$

donde

- F_D fuerza de arrastre total sobre el cuerpo,
- C_D coeficiente de arrastre,
- A área del cuerpo proyectada sobre un plano normal al flujo.

La fuerza de arrastre total sobre cualquier cuerpo es una combinación del arrastre de superficie (fricción) y del arrastre de forma. Para valores del número de Reynolds suficientemente elevados predomina el arrastre de forma y C_D llega a ser virtualmente independiente de dicho número; el arrastre se debe, en ese caso, a la distribución de la presión alrededor del cuerpo.

1.9 FLUJO LAMINAR

El flujo uniforme formado sólo en la capa límite laminar ocurre a superficie libre con números de Reynolds inferiores a 500 y efectos sólo de viscosidad. La distribución de la velocidad para este flujo, considerado permanente e incompresible, se obtiene de las condiciones de equilibrio del prisma de líquido mostrado en la figura 1.14 en un canal rectangular muy ancho. La longitud del prisma es Δx , su ancho igual a uno y su altura $d - y$, donde d es ahora el tirante del flujo y y la distancia perpendicular al fondo.

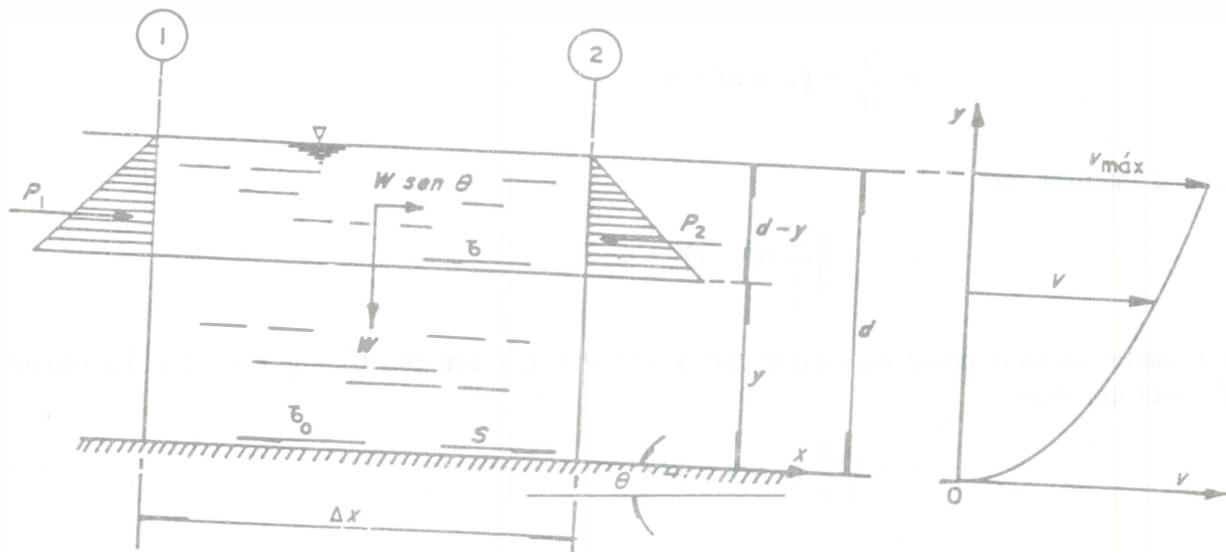


Figura 1.14. Distribución de la velocidad en flujo laminar

El peso del prisma es $W = g\rho (d - y) \Delta x$ y su componente en el sentido del movimiento es $W \sin \theta$, pero $\sin \theta \approx S$ (pendiente del fondo), por tanto, $W \sin \theta = g\rho S (d - y) \Delta x$.

Sobre la superficie de contacto entre el prisma y el líquido subyacente se produce el esfuerzo tangencial $\tau = \mu dv/dy$ debido a la viscosidad μ del agua, de modo que la fuerza que se opone al movimiento es $\tau \Delta x$.

Las fuerzas P_1 y P_2 debidas a la presión del líquido antes y después del prisma son iguales y de sentido opuesto. Por tanto, la ecuación de cantidad de movimiento se simplifica a la forma

$$g\rho S (d - y) \Delta x - \tau \Delta x = 0$$

toda vez que no hay variación de la velocidad al pasar de la sección 1 a la 2 y, por lo mismo, no hay cambio en la cantidad de movimiento. Resulta así que

$$\tau = g\rho S (d - y)$$

Esta expresión muestra que el esfuerzo τ varía linealmente desde cero en la superficie ($y = d$) a su máximo

$$\tau_0 = g\rho S d \quad (1.27)$$

en el fondo ($y = 0$). El valor de τ_0 es igual al que se expresa en la ecuación 1.21 para $d = R_h$.

Se sustituye el valor de $\tau = \mu dv/dy$ y se obtiene

$$\mu \frac{dv}{dy} = g\rho S (d - y)$$

que al integrar, es

$$v = -\frac{g S}{2 \nu} (d - y)^2 + C_1$$

La condición en la pared indica que para $y = 0$, $v = 0$, y con ello $C_1 = g S d^2 / 2 \nu$. La solución final es entonces

$$v = \frac{g S}{2 \nu} (2 d y - y^2) \quad (1.28)$$

La ecuación 1.28 representa una ley parabólica de distribución de la velocidad, semejante a la de los tubos a presión, donde S corresponde a la pendiente de fricción y también a la del canal. La velocidad máxima se alcanza para $y = d$, y es

$$v_{m\acute{a}x} = \frac{g S d^2}{2 \nu}$$

La velocidad media resulta de su definición

$$V = \frac{1}{A} \iint_A v \, dA = \frac{1}{d} \frac{g S}{2 \nu} \int_0^d (2 d y - y^2) \, dy$$

Al integrar y tomar límites, se obtiene

$$V = \frac{g S d^2}{3 \nu} \quad (1.29)$$

esto es, $V = (2/3) v_{m\acute{a}x}$.

Un cálculo sencillo muestra que la velocidad media se localiza a la distancia $y = 0.423 d$, perpendicular al fondo (problema 1.42).

Aquí nuevamente, como en los conductos a presión, la pérdida de fricción es proporcional a la primera potencia de la velocidad. Si se despeja S de la ecuación 1.29 y se sustituye en la 1.20 considerando que $d = R_h$, se obtiene

$$V = \frac{8}{f} \frac{3 \nu}{R_h}$$

Al despejar f de la ecuación anterior resulta

$$f = \frac{24}{\mathbf{R}_e}$$

donde $\mathbf{R}_e = V R_h / \nu$. En esta ecuación se observa que, de manera similar a un conducto a presión (ecuación de Poiseuille), el factor de fricción f para el flujo laminar en un canal rectangular muy ancho depende exclusivamente del número de Reynolds, si bien el numerador es diferente. Con desarrollos similares para otras formas de sección se concluye que f queda expresado por la ley general de fricción para flujo laminar

$$f = \frac{K}{\mathbf{R}_e} \quad (1.30)$$

donde K depende de la forma de la sección. Esta ecuación ha sido verificada experimentalmente en canales lisos, y en la referencia 2 se mencionan los resultados obtenidos en la Universidad de Minnesota para los de sección muy ancha, de los que se deduce que $K = 24$, idéntico al valor antes obtenido. En canales triangulares, con ángulos centrales que varían entre 30° y 150° y paredes pulidas, se ha encontrado también buena concordancia con $K = 14$.

En canales rugosos el factor f sigue la ley dada por la ecuación 1.30, pero K adquiere valores mayores que los logrados en canales lisos, variando entre 33 y 60 según la forma de la sección y la rugosidad (referencia 2).

1.10 FLUJO TURBULENTO

1.10.1 Distribución de la velocidad

Canales de fondo liso

El flujo a superficie libre en capa límite turbulenta ocurre cuando el número de Reynolds es superior a 500. En la sección transversal del flujo producido sobre un fondo liso, de ancho infinito, se distinguen las tres zonas de distinto comportamiento en la distribución de la velocidad, las cuales se señalan en la figura 1.15, acotadas entre los siguientes límites:

- Subcapa laminar (inmediata a la pared) para $0 < y \leq (5 \nu/v_*)$,
- transición o de amortiguamiento (próxima a la pared) para $(5 \nu/v_*) \leq y \leq (30 \nu/v_*)$,
- turbulenta (ocupando casi toda la sección), para $(30 \nu/v_*) \leq y < d$,

donde y es la distancia desde la plantilla, en dirección perpendicular a ésta y hasta el punto en consideración, y d el tirante correspondiente a la sección.

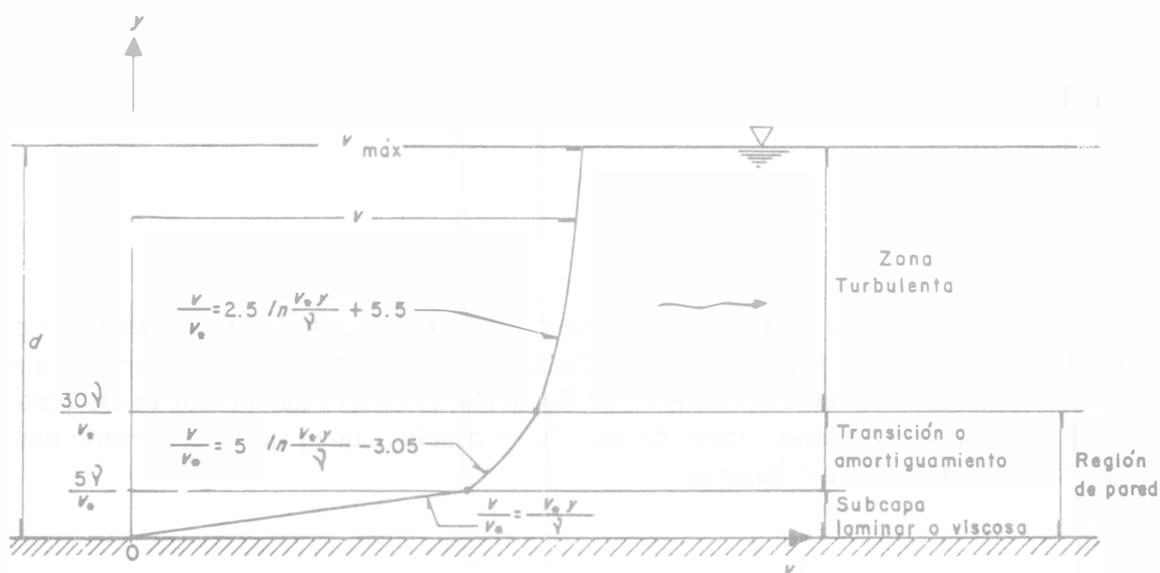


Figura 1.15. Distribución de la velocidad en flujo turbulento.
Canal liso

- Dentro de la subcapa laminar y para $v_* y/\nu < 5$, la distribución de la velocidad en canales anchos sigue la misma ley lineal dada por la ecuación B.26b del citado apéndice, a saber

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \quad (1.31)$$

- b) Dentro de la zona de transición y en el intervalo $5 \leq (v_* y/\nu) \leq 30$ es válido aplicar a canales la ecuación de von Kármán (B.33 del citado apéndice), obtenida para tuberías, y que ahora, en términos de logaritmos naturales, se escribe de la siguiente manera

$$\frac{v}{v_*} = 5 \ln \frac{v_* y}{\nu} - 3.05 \quad (1.32)$$

- c) Dentro de la zona turbulenta, para $(v_* y/\nu) \geq 30$, la ley universal de distribución de la velocidad de Prandtl-von Kármán en tuberías lisas (ecuación B.30a del citado apéndice) se aplica a canales muy anchos y lisos, y es

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5.5 \quad (1.33)$$

La intersección de la curva generada por la ecuación 1.32 con la de la 1.31 ocurre en $(v_* y/\nu) = 5.18$, y con la de la 1.33 en $(v_* y/\nu) = 30.5$. La intersección de las curvas dadas por las ecuaciones 1.31 y 1.33 ocurre a su vez en $v_* y/\nu = 11.64$, es decir, para $y = \delta_0$, donde

$$\delta_0 = 11.64 \frac{\nu}{v_*}$$

el cual muchos autores consideran como el espesor de la subcapa laminar para fines prácticos.

Canales de fondo rugoso

El flujo turbulento a superficie libre sobre un fondo rugoso se comporta de manera distinta al de fondo liso. En el primer caso se distingue únicamente la zona de flujo turbulento que abarca la totalidad de la sección, ya que las asperezas de la pared emergen más allá de la subcapa viscosa, inducen mayor turbulencia y eliminan las zonas restantes (figura 1.16).

La ley universal de distribución de la velocidad en tubos rugosos (ecuación B.44a, apéndice B, volumen 1) también vale en canales rugosos muy anchos, y es

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + B \quad (1.34)$$

donde k_s representa la rugosidad del fondo del canal. El coeficiente B varía como se muestra en la figura B.12 del apéndice ya citado, donde se manifiestan los tres tipos de comportamiento para la zona turbulenta que se explican a continuación.

- a) Cuando $(v_* k_s / \nu) \leq 5$, el fondo rugoso se comporta igual que uno liso. En efecto, para este caso, el coeficiente B sigue la ecuación

$$B = 2.5 \ln \frac{v_* k_s}{\nu} + 5.5 \quad (1.35)$$

que sustituida en la 1.34 conduce a la 1.33.

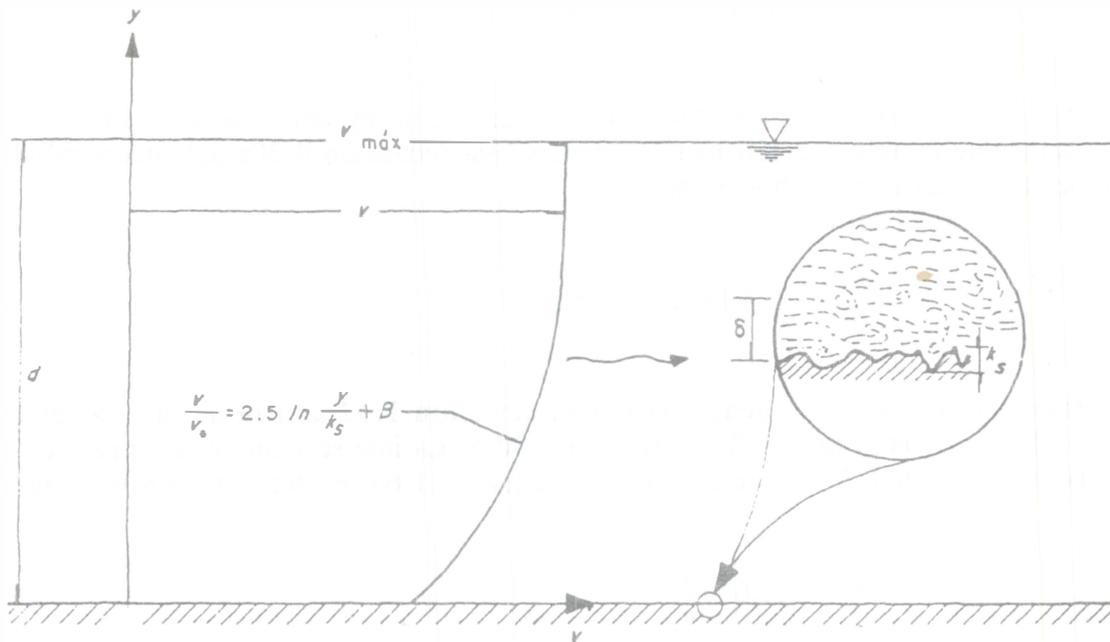


Figura 1.16. Distribución de la velocidad en flujo turbulento.
Canal rugoso

- b) Cuando el flujo turbulento en un fondo rugoso cumple que $5 < (v_* k_s / \nu) \leq 70$, o que $(5 \nu / v_*) \leq k_s \leq (70 \nu / v_*)$, se comporta como hidráulicamente de transición, y B sigue la ley que muestra la figura B.12 del apéndice citado, o bien la dada por la ecuación de Fuentes y Carrasquel (referencia 3), que es

$$B = - 2.5 \ln \left[\frac{1}{9.025 \frac{v_* k_s}{\nu}} + \frac{1}{30} \exp (-10.78 \nu / v_* k_s) \right] \quad (1.36)$$

la cual proporciona el valor $B = 8.753$ para $v_* k_s / \nu = 70$, es decir, un error de + 3 por ciento del correcto ($B = 8.5$).

- c) Cuando $(v_* k_s/\nu) > 70$, el fondo del canal se comporta como hidráulicamente rugoso y B adquiere un valor constante, aproximadamente igual a 8.5, independiente de $(v_* k_s/\nu)$, es decir, de la viscosidad del líquido. Si se sustituye $B = 8.5$ en la ecuación 1.34, la velocidad es cero cuando $y = k_s/30$.

Comentarios de los resultados

Las ecuaciones obtenidas para la distribución de la velocidad en flujo a superficie libre son de tipo unidimensional, es decir, consideran sólo su variación en la dimensión vertical. La mayoría de los canales que se encuentran en la práctica exhiben distribuciones de la velocidad fuertemente bidimensionales y, en muchos casos, tridimensionales. Por ejemplo, la ley universal de Prandtl-von Kármán (ecuación 1.33) predice que la velocidad máxima ocurre sobre la superficie libre. Sin embargo, como se ha mencionado en el subcapítulo 1.6, las mediciones en campo y laboratorio demuestran que la velocidad máxima por lo general se presenta abajo de la superficie libre, si bien, en flujos anchos, rápidos y de poco tirante o en canales muy lisos, puede ocurrir al nivel de dicha superficie. Esto indica que una ley unidimensional de distribución de la velocidad no puede describir completamente los flujos que son bi o tridimensionales. Se han hecho varios intentos para tomar en cuenta el efecto de corrientes secundarias, pero su presentación está fuera del alcance de este texto.

1.10.2 *Velocidad media*

La velocidad media en canales rectangulares muy anchos se expresa también mediante ecuaciones semejantes a la B.36 y B.45 del multicitado apéndice.

- a) En canales de pared hidráulicamente lisa, la zona turbulenta ocupa casi la totalidad de la sección, por lo que la velocidad media puede determinarse a partir de la ley de distribución de la velocidad en dicha zona. Para canales de diversas formas de sección, Keulegan (referencia 4) encontró una expresión general para la velocidad media, semejante a la B.36, de la forma

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \left(A_l \frac{v_* R_h}{\nu} \right) \quad (1.37a)$$

o bien

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* R_h}{\nu} + A_l' \quad (1.37b)$$

donde A_l y A_l' son coeficientes variables de acuerdo con la forma de la sección, y en la tabla 1.6 se presentan los valores experimentales encontrados por diferentes autores.

- b) En canales de pared hidráulicamente rugosa, la velocidad media se obtiene a través de la siguiente expresión (referencia 4)

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{A_r R_h}{k_s} \quad (1.38a)$$

o bien

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{R_h}{k_s} + A_r' \quad (1.38b)$$

- c) En canales de pared hidráulicamente lisa o rugosa, operando o no en la zona de transición, la ecuación general (referencia 4) para la velocidad media es

$$\frac{V}{v_*} = -2.5 \ln \left[\frac{1}{A_l \frac{v_* R_h}{\nu}} + \frac{k_s}{A_r R_h} \right] \quad (1.39)$$

En estas ecuaciones, A_l , A_l' , A_r y A_r' son cantidades variables de acuerdo con la forma de la sección y la rugosidad de la pared.

En la tabla 1.6 se muestran los valores experimentales encontrados por diferentes autores.

Con base en la información experimental de varios investigadores, Iwagaki, en 1954, comprobó que la resistencia al flujo turbulento en un canal es mayor que en un tubo de igual rugosidad y radio hidráulico, y que crece a medida que aumenta el número de Froude. Esto lo atribuyó a la inestabilidad de la superficie libre, y encontró que la velocidad media en canales rectangulares muy anchos se determina de la ecuación 1.37b o de la 1.38b, según su pared sea lisa o rugosa respectivamente. En la figura 1.17 se muestran los valores de A_l' y A_r' en términos del número de Froude.

Tabla 1.6. Coeficientes de las ecuaciones 1.37, 1.38 y 1.39 para el cálculo de la velocidad media en canales lisos y rugosos

Comportamiento de la pared y forma de la sección del canal	A_l	A_l'	A_r	A_r'	Autor
1. Hidráulicamente lisa.					
a) Rectangular muy ancha	3.32	3.00	--	--	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926-1933), Keulegan (1938), adaptado del que se obtuvo en tubos.
b) Trapecial	3.67	3.25	--	--	Keulegan (1938) referencia 4.
c) Circular	4.05	3.50	--	--	Keulegan (1938) referencia 4.
2. Hidráulicamente rugosa.					
a) Rectangular muy ancha	--	--	11.02	6.0	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926-1933), adaptado del que se obtuvo en tubos circulares.
	--	--	11.10	6.02	Keulegan (1938) (referencia 4).
	--	--	14.8	6.63	Bretting (1948), Ackers (1958). El coeficiente que afecta a ln en la ec. 1.39 debe cambiar a 2.46 (en vez de 2.5).
b) Trapecial	--	--	12.27	6.27	Keulegan (1938), recomendable en pared fija.
c) Circular	--	--	13.5	6.51	Keulegan (1938), recomendable en pared fija.
3. Hidráulicamente lisa, rugosa y de transición.					
a) Rectangular muy ancha	3.32	--	11.02	--	Colebrook y White (1937-1938).
	3.73	--	12.2	--	Thijse (1949).
	3.32	--	$11.04 \exp \left(\frac{10.78}{R_{e*}} \right)$	--	Fuentes y Carrasquel (1978), donde $R_{e*} = v_* k_s / \nu$.
b) Trapecial	3.67	--	12.27	--	Colebrook y White, con base en las ecuaciones de Keulegan.
c) Circular	4.05	--	13.05	--	Colebrook y White, con base en las ecuaciones de Keulegan.

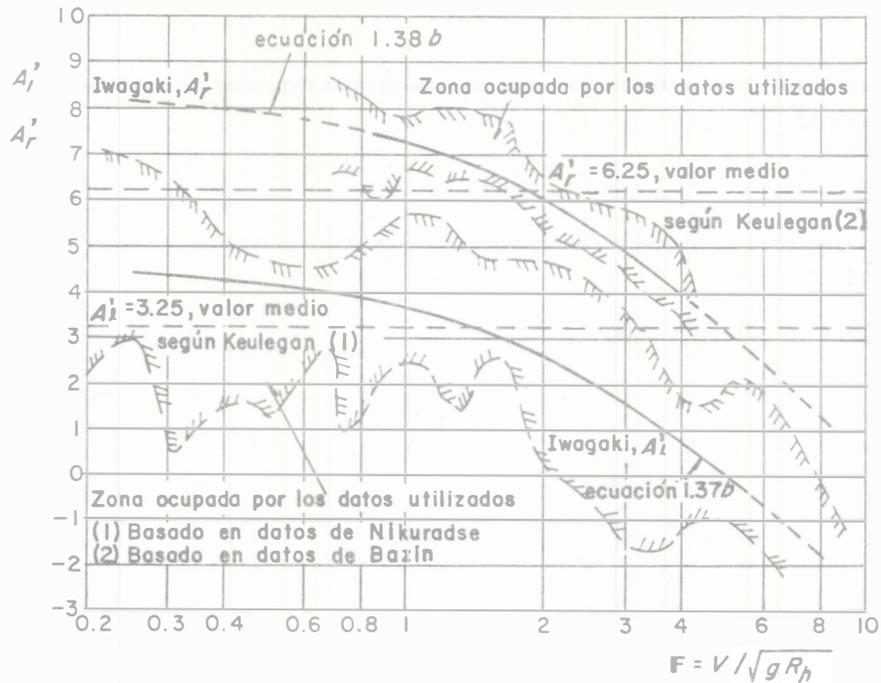


Figura 1.17. Relación entre A_i' y A_r' , de las ecuaciones 1.37b y 1.38b con el número de Froude, según Iwagaki (referencia 2)

Ejemplo 1.5. En un canal muy ancho de pared hidráulicamente rugosa, demostrar que la velocidad media se obtiene de modo aproximado: a) como el promedio de las velocidades a las distancias $0.2 d$ y $0.8 d$ desde la superficie libre, donde d es el tirante; b) como la velocidad a la distancia $0.6 d$.

Solución a. La ley de distribución de la velocidad y la media para el canal se determinan con las ecuaciones 1.34 ($B = 8.5$) y 1.38b. En la última el radio hidráulico se confunde con el tirante y se sustituye $A_r' = 6.0$ (de la tabla 1.6). Es decir

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (a)$$

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{d}{k_s} + 6 \quad (b)$$

Al restar la primera de la segunda se obtiene la llamada ley de déficit de la velocidad, en la forma

$$\frac{V - v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{d}{y} - 2.5 \quad (c)$$

que se escribe también como sigue

$$v = - 2.5 v_* \ln \frac{d}{y} + 2.5 v_* + V \quad (d)$$

Se asevera que la velocidad media está dada por

$$V = \frac{v_{0.2} + v_{0.8}}{2} \quad (e)$$

donde $v_{0.2}$ es la velocidad a la distancia $0.2 d$, es decir para $y = 0.8 d$, y $v_{0.8}$ a $0.8 d$ ($y = 0.2 d$). La aseveración se puede comprobar calculando dichas velocidades de la ecuación d, esto es:

$$v_{0.2} = - 2.5 v_* \ln \frac{d}{0.8 d} + 2.5 v_* + V$$

$$v_{0.2} = - 0.558 v_* + 2.5 v_* + V \quad (f)$$

$$v_{0.8} = - 2.5 v_* \ln \frac{d}{0.2 d} + 2.5 v_* + V$$

$$v_{0.8} = - 4.023 v_* + 2.5 v_* + V \quad (g)$$

Efectuando la operación indicada por la ecuación e, resulta

$$\frac{v_{0.2} + v_{0.8}}{2} = - 2.29 v_* + 2.5 v_* + V$$

Si la ecuación e es válida se debe cumplir que

$$V = - 2.29 v_* + 2.5 v_* + V$$

es decir

$$2.29 v_* \approx 2.5 v_*$$

y la aseveración expresada por la ecuación e es aproximadamente correcta.

Solución b. La distancia $0.6 d$ equivale a que $y = 0.4 d$ en la ecuación a, de modo que la velocidad en ese punto es

$$\frac{v_{0.6}}{v_*} = 2.5 \ln \frac{0.4 d}{k_s} + 8.5$$

o bien

$$\frac{v_{0.6}}{v_*} = 2.5 \ln \frac{d}{k_s} + 6.2$$

casi igual a la ecuación b que expresa a la velocidad media.

1.10.3 Leyes de fricción en canales lisos

Ha sido común que las leyes de fricción en canales se obtengan de las ecuaciones para conductos a presión, modificando simplemente el número de Reynolds en las últimas para referirlo al de canales del mismo radio hidráulico, de manera que $D = 4 R_h$. Es el caso de la ecuación de Blasius (mencionada en el volumen 1) para tubos lisos, que transformada para aplicarse a canales rectangulares de igual comportamiento es

$$f = \frac{0.2237}{\mathbf{R}_e^{0.25}} \quad (1.40)$$

válida en el intervalo $750 < \mathbf{R}_e < 25000$, donde $\mathbf{R}_e = V R_h / \nu$.

Cuando $\mathbf{R}_e \geq 25000$, se utiliza la ecuación experimental de Prandtl, von Kármán y Nikuradse (ecuación B.40 del volumen 1), que transformada de la misma manera que la anterior resulta como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left[\frac{\mathbf{R}_e \sqrt{f}}{a} \right] \quad (1.41a)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \mathbf{R}_e \sqrt{f} + a_0 \quad (1.41b)$$

Los valores de los coeficientes a y a_0 se presentan en la tabla 1.7.

Tabla 1.7. Coeficientes de las ecuaciones 1.41 y 1.43 para determinar el factor de fricción en canales lisos

Forma de la sección	a	a_0	c	c_0	Autor
	ecuación 1.41a	ecuación 1.41b	ecuación 1.43a	ecuación 1.43b	
1. Rectangular, de ancho b .					
a) Muy ancha	0.713	0.294	--	--	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926-1933), deducidos teóricamente en tubos circulares y adaptados a canales.
	0.6275	0.405	--	--	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926-1933); adaptación de los obtenidos experimentalmente en tubos circulares.
	--	--	0.852	0.14	Keulegan (1938), considerando que $A_f = 3.32$ (de la tabla 1.6) en la ec. 1.42 (referencia 4).
b) $b/d = 3.75$ a 150	0.85	0.14	--	--	Reinius (1961), experimental, (referencia 5).
c) $b/d = 6.94$ a 40.3	--	--	1.095	-0.08	Tracy y Lester (1961), experimental (referencia 7).
2. Trapecial.	--	--	0.771	0.23	Keulegan (1938), considerando que $A_f = 3.67$ (de la tabla 1.6) en la ec. 1.42 (referencia 4).
3. Circular.	--	--	0.698	0.316	Keulegan (1938), considerando que $A_f = 4.05$ (de la tabla 1.6) en la ec. 1.42 (referencia 4).

Reinius (referencia 5), en 1961, determinó experimentalmente que el número de Reynolds crítico, a partir del cual se inicia la zona de transición, disminuye hasta 400 y que los coeficientes de las ecuaciones 1.41 en canales rectangulares adquieren los valores mencionados en la tabla 1.7. Estos indican que la relación de aspecto (b/d) de la sección no tiene influencia importante sobre f , siendo b el ancho del canal.

De las ecuaciones 1.22b y 1.37a resulta

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8}} 2.5 \ln \left(A_l \frac{v_* R_h}{\nu} \right) = 2.03 \log \left(\frac{v_* R_h}{\nu} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8} / A_l} \right)$$

Si también se considera que

$$c = \sqrt{8} / A_l \quad (1.42)$$

la ecuación anterior se transforma en la siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{R_e \sqrt{f}}{c} \quad (1.43a)$$

o bien a la forma

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log R_e \sqrt{f} + c_0 \quad (1.43b)$$

Esta ecuación fue deducida por Keulegan (referencia 4) en 1938, a partir de la ley de distribución de Prandtl-von Kármán (ecuación 1.33), siendo un poco diferente de la ecuación 1.41b.

Si se utilizan los valores de A_l mostrados en la tabla 1.6, resultan los de c y c_0 mencionados en la tabla 1.7, además de los obtenidos por otros autores.

Diversas investigaciones (referencia 6) han permitido observar que por el efecto de la superficie libre y la interdependencia entre el radio hidráulico, gasto y pendiente, la relación $f - R_e$ no sigue precisamente la ley de fricción de los tubos. En efecto, Tracy y Lester (referencia 7) experimentaron en canales rectangulares lisos con relaciones de aspecto (ancho/tirante) entre 6.94 y 40.3, y encontraron que sus resultados se ajustaban muy bien a las ecuaciones 1.43 si las constantes adoptaban los valores indicados en la tabla 1.7.

Shih y Grigg (referencia 8) realizaron, en 1967, experimentos similares a los de Tracy y Lester, y concluyeron que los efectos de forma no quedan pienamente reflejados en el radio hidráulico, en especial para relaciones de aspecto pequeñas.

N. Nayarana (referencia 9) utilizó los resultados de Tracy y Lester, y de Shih y Grigg, y determinó que el radio hidráulico es muy útil, pero que para tomar en consideración el efecto de la forma de la sección es necesario el parámetro P/R_h (perímetro mojado/radio hidráulico), lo que en canales rectangulares equivale a una función de la relación de aspecto. En efecto, resulta

$$\frac{P}{R_h} = \frac{(2d + b)^2}{bd} = \frac{(2 + b/d)^2}{b/d} \quad (1.44)$$

En esta ecuación, para cada valor de P/R_h existen dos de b/d que la satisfacen, excepto para el mínimo, igual a 8, que ocurre para $b/d = 2$.

Con los resultados correspondientes a canales rectangulares hidráulicamente lisos, Narayana propuso un factor f' de fricción modificado, de manera que el factor real fuera

$$f = \frac{f'}{\phi(P/R_h)} \quad (1.45)$$

Por tanto, de la ecuación 1.20, el número de Reynolds es

$$R_e = \frac{V R_h}{\nu} = \sqrt{\frac{8 g R_h^3 S}{f \nu^2}} = \sqrt{\frac{8 g R_h^3 S \phi(P/R_h)}{f' \nu^2}}$$

o bien

$$R_e \sqrt{f'} = \sqrt{(8 g R_h^3 S / \nu^2) \phi(P/R_h)} \quad (1.46)$$

La ecuación 1.45 sería aplicable a la ecuación 1.41a. La función $\phi(P/R_h)$ obtenida por Narayana se presenta en la figura 1.18.

El método para calcular la velocidad del flujo en un canal rectangular liso tomando en consideración el efecto de forma, consistiría en determinar primero el parámetro P/R_h de acuerdo con el tirante existente, y con dicho parámetro el correspondiente a $\phi(P/R_h)$ de la figura 1.18. De la ecuación 1.46 se obtendría el valor de $R_e \sqrt{f'}$, el cual se usaría en la ecuación 1.41a (con $a = 0.6275$) para encontrar el de f' (en vez de f), y con éste el de $f = f' / \phi(P/R_h)$. El valor de f se sustituiría en la ecuación 1.20 para obtener el de la velocidad media.

Narayana sugirió determinar factores modificados similares para otras formas de sección.

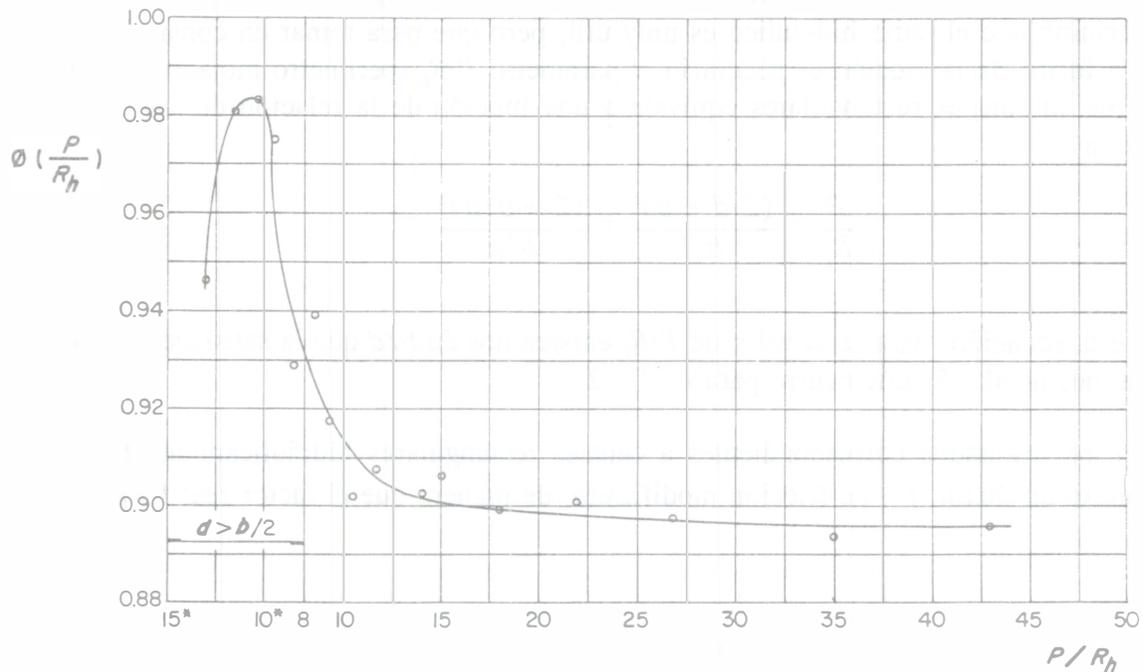


Figura 1.18. Variación de $\phi (P/R_h)$ con P/R_h en canales rectangulares hidráulicamente lisos (referencia 9)

1.10.4 Leyes de fricción en canales rugosos

Los problemas de fricción que se presentan en la práctica son en general en canales rugosos con flujo turbulento plenamente desarrollado y comportamiento de su pared como se ha discutido. Por esta razón es preferible presentar las leyes de resistencia para este tipo de canales en el subcapítulo 2.3 de flujo uniforme, al cual puede el lector referirse.

1.10.5 Factor de fricción equivalente

Un canal puede tener factores de fricción distintos en el fondo y en las paredes. Por ejemplo, el fondo de los canales de experimentación en laboratorio puede tener mayor rugosidad para simular condiciones naturales, pero sus paredes pueden ser lisas, constituidas por material transparente (vidrio o acrílico). El factor de fricción de la sección compuesta se determina comúnmente a partir de mediciones de la pendiente de la superficie libre del agua y del radio hidráulico; sin embargo, el correspondiente sólo al fondo permanecería desconocido. Para obtenerlo es indispensable conocer previamente el de las paredes.

Vanoni y Brooks (referencia 10), en 1957, desarrollaron un método para determinar el factor de fricción en el fondo de canales en esta condición, con base en las siguientes consideraciones:

- a) El área hidráulica se divide en dos partes: una en la que el flujo produce esfuerzo tangencial sobre el fondo y otra en que lo causa sobre las dos paredes (figura 1.19). Sobre la línea de frontera de ambas partes, el esfuerzo tangencial vale cero y el perímetro que corresponde a dichas líneas no se incluye en el mojado de la sección completa.
- b) La velocidad media V_b en la subsección del fondo es igual a la media V_w en la subsección de las paredes y, cualquiera que sea la distribución del área en dichas subsecciones, V_w es igual a la velocidad media V en toda la sección.
- c) Las subsecciones de flujo del fondo y paredes actúan como canales independientes, y sus rugosidades son homogéneas, si bien diferentes.



Figura 1.19. Definición de la sección de rugosidad compuesta, según Vanoni y Brooks (referencia 10)

Si se considera que las paredes son lisas, su factor de fricción f_w sería función únicamente del número de Reynolds de la sección que a ellas corresponde y, en principio, se desconoce. Esto es, de la segunda hipótesis

$$\mathbf{R}_{ew} = \frac{V_w R_{hw}}{\nu} = \frac{V R_h}{\nu} \frac{R_{hw}}{R_h} = \mathbf{R}_e \frac{R_{hw}}{R_h} \quad (1.47)$$

donde R_{hw} es el radio hidráulico de la subsección correspondiente a las paredes, R_h el de toda la sección y \mathbf{R}_e el número de Reynolds del flujo en esta última.

De la ecuación 1.20, de Darcy-Weisbach, para la pared resulta

$$f_w V_w^2 = 8 g R_{hw} S \quad (1.48)$$

y para toda la sección

$$f V^2 = 8 g R_h S \quad (1.49)$$

Al dividir la ecuación 1.48 entre la 1.49, con $V_w = V$ se obtiene

$$\frac{f_w}{f} = \frac{R_{hw}}{R_h} \quad (1.50)$$

que al sustituir en la ecuación 1.47 conduce a

$$\frac{R_{ew}}{f_w} = \frac{R_e}{f} \quad (1.51)$$

Como se conoce R_e y f de los experimentos, la ecuación 1.51 sólo permite obtener el parámetro R_{ew}/f_w , pero no los valores individuales de R_{ew} y f_w . En el caso de paredes lisas, las ecuaciones 1.40 de Blasius y 1.41a de Prandtl-von Kármán y Nikuradse complementan la solución. Es válido que

$$f_w = \frac{f_w}{(R_{ew}/f_w)^{0.2}} \frac{R_{ew}^{0.2}}{f_w^{0.2}} = \frac{f_w^{0.8} R_{ew}^{0.2}}{(R_{ew}/f_w)^{0.2}}$$

Sustituyendo esta ecuación en el segundo término de la 1.40, al simplificar resulta

$$f_w = \frac{0.3018}{(R_{ew}/f_w)^{0.2}} \quad (1.52)$$

válida para $R_{ew} < 25000$.

De la ecuación 1.41a se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f_w}} = 2 \log \left[\frac{R_{ew} \sqrt{f_w}}{a} \right] = 2 \log \left[\frac{R_{ew}}{f_w} \frac{f_w^{3/2}}{a} \right] \quad (1.53)$$

válida para $R_{ew} \geq 25000$, y en la cual el coeficiente a apropiado se elige de la tabla 1.7.

Así quedaría completa la solución. Esta se facilita mediante la figura 1.20, que es la representación gráfica continua de las ecuaciones 1.52 y 1.53, donde se ha utilizado $a = 0.6275$ en la ley de Prandtl-von Kármán, y $4 R_{ew}/f_w$ en lugar de R_{ew}/f_w .

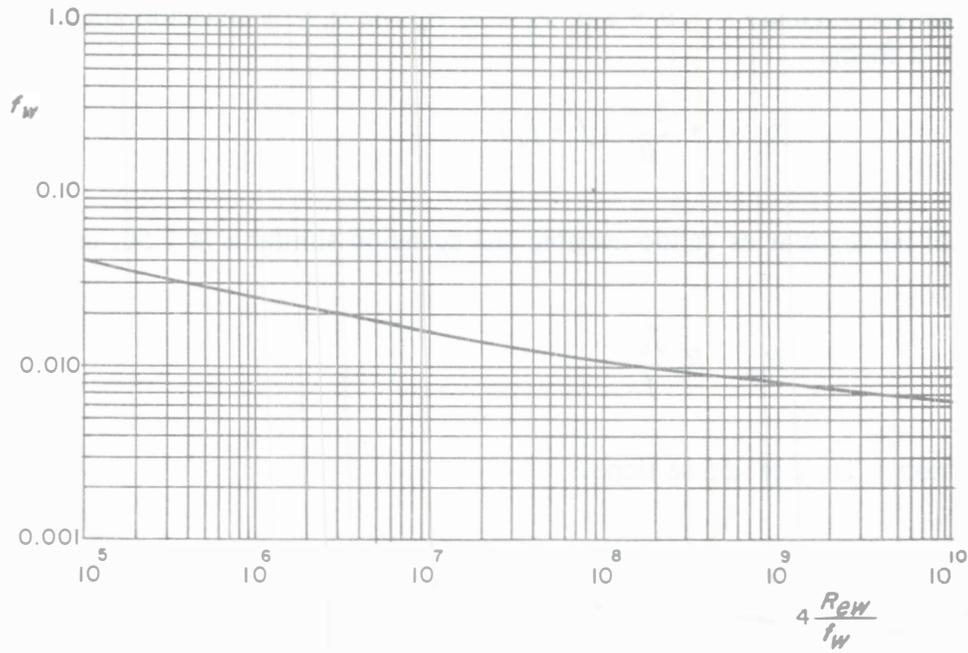


Figura 1.20. Representación gráfica de f_w en función de $4 \frac{R_{cw}}{f_w}$ (referencia 10)

Si se utiliza el subíndice b para el fondo del canal, el área hidráulica de las distintas partes de la sección se obtiene de la definición de radio hidráulico, de la misma manera que se obtuvieron las ecuaciones 1.48 y 1.49. Esto es, de la ecuación 1.20 de Darcy-Weisbach se tiene

$$A = \frac{P f V^2}{8 g S} \quad (1.54)$$

$$A_b = \frac{P_b f_b V^2}{8 g S} \quad (1.55)$$

$$A_w = \frac{P_w f_w V^2}{8 g S} \quad (1.56)$$

Debido a que $A = A_b + A_w$, de las ecuaciones anteriores se tiene que el factor de fricción para el fondo es

$$f_b = \frac{P}{P_b} f - \frac{P_w}{P_b} f_w \quad (1.57)$$

Para un canal rectangular: $P = b + 2 d$, $P_b = b$, $P_w = 2 d$, y la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$f_b = f + \frac{2 d}{b} (f - f_w) \quad (1.58)$$

Para el canal rectangular es válido escribir una ecuación similar a la 1.50, esto es

$$R_{hb} = R_h \frac{f_b}{f} \quad (1.59)$$

De la ecuación 1.21, también se tiene

$$v_{*b} = \sqrt{g R_{hb} S} \quad (1.60)$$

Ejemplo 1.6. Un canal de laboratorio es rectangular, de 0.60 m de ancho, paredes hidráulicamente lisas y fondo artificialmente rugoso. Cuando el gasto es de 0.02 m³/s, el tirante que se establece es de 0.10 m y la pendiente hidráulica de 0.0025. Estimar el factor f_b del fondo y su velocidad de fricción v_{*b} , para 20 °C de temperatura del agua.

Solución. De los datos pueden calcularse los siguientes valores:

$$A = 0.6 (0.1) = 0.06 \text{ m}^2$$

$$P = 0.6 + 2 (0.1) = 0.8 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{0.06}{0.80} = 0.075 \text{ m}$$

$$V = \frac{0.02}{0.06} = 0.333 \text{ m/s}$$

De la ecuación 1.21 se tiene $v_* = \sqrt{g R_h S}$ y vale

$$v_* = \sqrt{9.81 (0.075) (0.0025)} = 0.0429 \text{ m/s}$$

De la ecuación 1.22a

$$f = 8 \left(\frac{0.0429}{0.333} \right)^2 = 0.1324$$

De la figura 1.8 del volumen 1, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y el número de Reynolds en el canal es

$$R_e = \frac{0.333 (0.075)}{10^{-6}} = 2.5 (10)^4$$

y de la ecuación 1.51 resulta

$$\frac{R_{ew}}{f_w} = \frac{2.5 (10)^4}{0.1324} = 1.89 (10)^5$$

Con $4 R_{ew} / f_w = 7.56 (10)^5$, de la figura 1.20 se obtiene

$$f_w = 0.027$$

lo que significa que

$$R_{ew} = 1.89 (10)^5 (0.027) = 5103 < 25000$$

Por tanto, de la ecuación 1.52 un valor más preciso sería

$$f_w = \frac{0.3018}{[1.89 (10)^5]^{0.2}} = 0.0266$$

De la ecuación 1.58 se obtiene

$$f_b = 0.1324 + \frac{2 (0.1)}{0.6} (0.1324 - 0.0266) = 0.168$$

de la ecuación 1.59

$$R_{hb} = 0.075 \frac{0.168}{0.1324} = 0.095 \text{ m}$$

y de la ecuación 1.60

$$v_{*b} = \sqrt{9.81 (0.095) (0.0025)} = 0.048 \text{ m/s}$$

REFERENCIAS

1. Schmidt M. "Gerinnehydraulik", Bauverlag GMBH, Wiesbaden, 1957.
2. Ven te Chow. "Open-Channel Hydraulics", McGraw Hill-Kogakusha, Nueva York, 1959.
3. Fuentes R. y Carrasquel S. "Una ecuación empírica para zonas de transición", Publicación del Laboratorio Nacional de Hidráulica, número 78-10, Caracas, noviembre 1978.
4. Keulegan G.H. "Laws of Turbulent Flow in Open Channels", Journal of the National Bureau of Standards, Washington D.C., Research Paper 1151, volumen 21, diciembre 1938.
5. Reinius E. "Steady Uniform Flow in Open Channels", Transactions RIT, número 179, Estocolmo, 1961.
6. Zchiesche, Meissner y Blau. "Kritik der Abflussformeln", Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser-und Grundbau, Berlín, 1952.
7. Tracy H.J. y Lester C.M. "Resistance Coefficients and Velocity Distribution Smooth Rectangular Channel", Water-Supply Paper número 1592-A, Geological Survey, US Department of the Interior, Washington, 1961.
8. Shih C.C. y Grigg N.S. "A Reconsideration of the Hydraulic Radius as a geometrical quantity in Open-Channel Hydraulics", XII Congreso de la IAHR, Paper B-36, septiembre 1967.
9. Narayana N. "On uniform flow through smooth rectangular open channels", Journal of Hydraulic Research, IAHR, volumen 8, número 4, Delft, 1970.
10. Vanoni V. y Brooks N. H. "Laboratory Studies of the Roughness and suspended Load of alluvial Streams", Reporte número 11, California Institute of Technology, Pasadena, 1957.
11. Scimemi E. "Compendio di Idraulica", CEDAM, Casa Editrice Dott. Antonio Milani, Padua, 1959.
12. Knight D.W. y Hamed M.E. "Boundary shear in symmetrical compound channels", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, volumen 110, número 10, páginas 1412 a 1430, 1984.
13. Rhone T.J. Discusión del artículo: Gumensky D.B. "Design of side walls in chute and spillways", Transactions of the ASCE, volumen 119, páginas 368 a 371, 1954.

CAPÍTULO 2. FLUJO UNIFORME

2.1 CONDICIONES PARA QUE SE ESTABLEZCA EL FLUJO

El flujo uniforme rara vez ocurre en los canales naturales debido a que no son prismáticos. Aun en los prismáticos es poco frecuente por la existencia de controles, como vertedores, compuertas, etc., que dictan una relación gasto-tirante diferente de la apropiada al flujo, dificultando su establecimiento. Sin embargo, el flujo uniforme es una condición básica que debe considerarse en todos los problemas de diseño.

En un canal de cierta pendiente y rugosidad, que debe conducir un caudal conocido, el estado de flujo uniforme es el criterio que rige al área de la sección transversal mínima requerida. Aun cuando exista otra situación que determine sus dimensiones, éstas difícilmente serán menores que las de la sección mencionada, ya que la tendencia natural del flujo será tratar de alcanzar dicho estado. Por esta razón es conveniente exponer las condiciones hidráulicas que rigen el flujo uniforme, antes de las de cualquier otro que pudiera representar las condiciones reales del movimiento del agua en el canal por diseñar.

Por definición, el flujo uniforme se presenta cuando:

- La velocidad, y con ella el tirante y el área hidráulica, permanecen constantes en cada sección.
- La línea de energía, la superficie libre del agua y la plantilla del canal son paralelas (figura 2.1).

De acuerdo con lo anterior, el flujo uniforme ocurre sólo en estado permanente y en canales prismáticos de gran longitud. El flujo en corrientes naturales casi nunca alcanza una condición estricta de uniforme; cuando se supone en el cálculo, se entiende que los resultados obtenidos bajo esta suposición son aproximados, y a veces satisfactorios en algunos problemas prácticos.

El flujo uniforme puede ser laminar o turbulento, pero las dimensiones relativamente grandes de la mayoría de los canales, combinadas con la pequeña viscosidad del agua, obligan a que el laminar sea poco común en la práctica. Además, aunque la velocidad media sea suficientemente pequeña para permitirlo, factores secundarios, como los disturbios ocasionados por el viento, de manera habitual producen aceleraciones locales o corrientes que exceden la velocidad límite laminar cuando el tirante es bajo.

La única ocurrencia genuina del flujo laminar se presenta en el drenaje del agua de lluvia sobre cubiertas, techos y pavimentos de poca pendiente, debido a la pequeña magnitud del tirante. En los ríos, la rugosidad de la frontera es por lo general tan grande, que aun el flujo turbulento de pared hidráulicamente lisa rara vez ocurre.

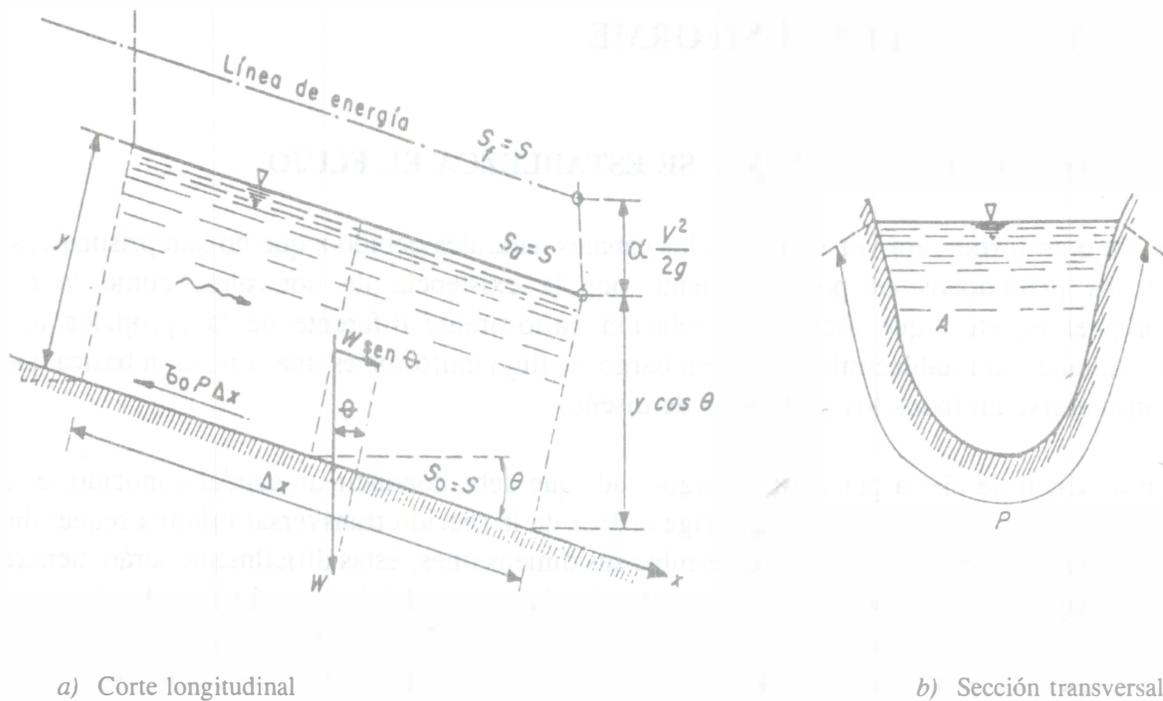


Figura 2.1. Volumen de control en flujo uniforme

Para que se establezca flujo uniforme es necesario que exista un balance dinámico entre el componente de la fuerza de peso en la dirección del flujo y la de fricción (figura 2.1a). Para alcanzar o alejarse de este equilibrio es forzosa la presencia de un flujo variado antes o después del uniforme, que sirva de transición entre un estado, por ejemplo de reposo, a otro de flujo uniforme, o entre dos uniformes distintos. Cuando la longitud del canal no es suficiente para alojar uno u otro tramo de transición, el flujo uniforme no alcanza a establecerse.

2.2 LA ECUACIÓN DE CHEZY

En un canal de sección cualquiera donde el flujo sea uniforme, como el que se muestra en la figura 2.1, la velocidad media y el tirante permanecen constantes. De ese modo, al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento al volumen de control de longitud Δx entre dos secciones, el componente de la fuerza de peso en la dirección del movimiento debe ser igual a la fuerza de fricción producida sobre el fondo y las paredes, valuada a través del esfuerzo tangencial medio τ_0 sobre dichas fronteras, toda vez que el cambio de cantidad de movimiento es cero. Es decir, se debe cumplir

$$g\rho A \Delta x \sin \theta - \tau_0 P \Delta x = 0$$

Siendo R_h el radio hidráulico de la sección y $\text{sen } \theta$ se representa por S , de la ecuación anterior se tiene que τ_0 no depende de x y resulta

$$\tau_0 = g\rho R_h S \quad (2.1)$$

Si θ es pequeño, S se confunde con la pendiente del canal ($\tan \theta$); en caso contrario debe interpretarse como $\text{sen } \theta$.

Debido a las características del flujo uniforme, θ es también el ángulo de inclinación de la línea de energía respecto de la horizontal y por tanto S también representa a la llamada pendiente hidráulica en el tramo Δx . Es decir

$$S = \frac{\Delta h_f}{\Delta x} = \text{sen } \theta$$

donde Δh_f es la pérdida por fricción que se produce en dicho tramo.

La ecuación 2.1 también se puede escribir como sigue

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h S} \quad (2.2)$$

Las dimensiones del término v_* corresponden a los de una velocidad, y por ello es común designarlo como velocidad de fricción. Equivale a una forma de representar a τ_0 relacionado con la densidad del agua.

El esfuerzo tangencial que produce el flujo turbulento se supone proporcional al cuadrado de la velocidad, esto es

$$\tau_0 = K \rho V^2$$

donde K es el factor de proporcionalidad (adimensional). Al sustituir esta expresión en la ecuación 2.2, resulta

$$V = C \sqrt{R_h S} \quad (2.3)$$

Esta ecuación la obtuvo experimentalmente Chezy, en 1775, donde $C = \sqrt{g/K}$ es un factor de resistencia o de fricción (con las dimensiones de \sqrt{g}), y es similar a f de la ecuación de Darcy-Weisbach empleada en los conductos a presión. En efecto, si esta última, con $D = 4 R_h$, se hace extensiva a canales, la velocidad media es

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h S} \quad (2.4)$$

Si se divide esta ecuación entre la 2.2 resulta

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (2.5)$$

Si se compara la ecuación 2.3 con la 2.4 se obtiene

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (2.6)$$

Esto es, los factores de fricción C de Chezy y f de Darcy-Weisbach (éste sin dimensiones) quedan relacionados por la ecuación 2.6. Ambos son dependientes del número de Reynolds y de la rugosidad relativa del canal.

De las ecuaciones 2.5 y 2.6 se obtiene

$$\frac{V}{v_*} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (2.7)$$

Estos resultados indican una gran analogía entre el problema de fricción en canales y el de conductos a presión, ya que sería suficiente que en las ecuaciones que se obtuvieron para los últimos se utilice $4 R_h$ en lugar del diámetro y se apliquen a canales. Sin embargo, para llegar a esta conclusión se ha tenido que aceptar un esfuerzo tangencial medio uniforme sobre toda la pared, dependiente sólo de R_h como único parámetro que caracteriza la forma de la sección (ecuación 2.1). Algunas investigaciones sobre el tema han permitido evaluar y corregir los pequeños errores que se encuentran en esta consideración.

2.3 FACTORES DE FRICCIÓN EN CANALES RUGOSOS

2.3.1 Leyes generales de fricción

Una investigación experimental exhaustiva y sistemática de los factores de fricción C o f , como la que se efectuó en tubos de pared lisa o rugosa, no ha sido posible en canales de pared similar; esto es, no se ha obtenido a la fecha un diagrama universal para canales, como el de Moody para tubos, que haya sido plenamente verificado de manera experimental y que tenga la misma amplitud en sus aplicaciones. Algunos autores, como Henderson (referencia 1), sólo han convertido el diagrama de Moody con base en la analogía señalada y la ecuación 2.6, pero sin verificación alguna.

Las principales dificultades que se encuentran en canales se atribuyen a la multitud de formas de sección, a la amplia variedad de dimensiones y tipos de rugosidad que se presentan en la práctica y a la de alcanzar en campo y laboratorio un flujo uniforme completamente desarrollado. En las distintas pruebas efectuadas se ha observado que el tipo de flujo en un canal cambia de laminar a turbulento de acuerdo con la rugosidad y en la medida que aumenta el número de Reynolds R_e (ecuación 1.3), a través de una zona de transición cuyos límites no están bien definidos. Para el inferior se acepta el valor de 500; el superior puede llegar hasta 12500.

El fondo y paredes de un canal rugoso, sobre los que ocurre flujo turbulento plenamente desarrollado, tiene tres tipos de comportamiento hidráulico, según la magnitud de la rugosidad k_s en las fronteras y el espesor δ_0 de la subcapa laminar (subcapítulo 1.8), que a continuación se explican.

- a) *Pared hidráulicamente lisa.* Los elementos de rugosidad quedan por completo cubiertos por la subcapa laminar ($k_s < \delta_0$), y la pared tiene un comportamiento idéntico al de pared lisa.
- b) *Pared hidráulicamente rugosa.* Los elementos de rugosidad se extienden fuera de la subcapa laminar y dominan el comportamiento del flujo ($k_s > \delta_0$), por lo que la resistencia a dicho flujo es por completo dependiente de la rugosidad e independiente del número de Reynolds. Es el caso más común en la práctica.

c) *Pared hidráulicamente de transición.* Entre los dos extremos anteriores hay una zona de transición, definida por los límites

$$5 \leq \frac{v_* k_s}{\nu} \leq 70 \quad (2.8)$$

el inferior define el final de la zona de comportamiento de pared lisa, y el superior el principio de la zona plenamente rugosa; v_* es la velocidad de fricción dada por la ecuación 2.2, k_s el parámetro de longitud que caracteriza a la llamada rugosidad equivalente, según se aclara más adelante, y ν la viscosidad cinemática del agua.

Con respecto al comportamiento del factor f dentro de la zona de transición, se observa un ascenso de su valor, más o menos brusco, a medida que aumenta R_e , para finalmente tender a uno constante que depende de la rugosidad relativa k_s/R_h en el estado de plena turbulencia.

La ecuación de Colebrook-White (capítulo 8 del volumen 1), aplicable a tubos en la zona de transición, se transforma en el caso de canales y adopta la siguiente forma general

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{C}{\sqrt{8g}} = -\alpha_1 \log \left[\frac{a}{R_e \sqrt{f}} + \frac{k_s/R_h}{c} \right] \quad (2.9)$$

donde α_1 , a y c son coeficientes, los dos últimos varían de acuerdo con el comportamiento de la pared y forma de la sección, como se indica en la tabla 2.1. En ésta también aparecen, con fines comparativos, los coeficientes correspondientes a tubos transformados a canales de igual radio hidráulico, de acuerdo con la definición de R_e (ecuación 1.3) que se ha usado para éstos últimos. Las discrepancias entre ambos son pequeñas.

En la misma tabla se observa que los valores de a son los aceptados en la ecuación 1.41a para canales lisos; dicha ecuación se convierte en una simplificación de la 2.9 cuando $\alpha_1 = 2$ y $k_s = 0$.

Investigaciones experimentales de de Marchi (referencia 6), en 1962, y de Bock (referencia 7), en 1966, demostraron que la forma de la sección influye en los coeficientes de la ecuación 2.9.

En la figura 2.2 se muestra la variación que experimentan dichos coeficientes en términos de la llamada relación de aspecto b/y , tanto en canales rectangulares como trapeziales, estos últimos de talud 1:1. Dicha figura ha sido obtenida por el autor de este libro atendiendo a los resultados experimentales antes señalados.

Tabla 2.1. Coeficiente α_1 , a y c de la ecuación 2.9, para canales rugosos

Comportamiento de la pared y forma de la sección	α_1	a	c	Autor
1. Hidráulicamente lisa, rugosa y de transición:				
a) Rectangular muy ancha.	2.00	0.713	13.44	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926, 1933); adaptación de los teóricos en tubos circulares.
	2.00	0.6275	14.84	Colebrook y White (1937); adaptación de los experimentales en tubos circulares
	2.035	0.853	11.02	Reinius (1961) y otros.
	2.00	0.850	12.40	Reinius (1961); experimental (referencia 2).
	2.035	0.758	12.2	Thijse (1949); experimental.
	2.035	0.852	$11.04 \exp \left(\frac{30.49 R_h}{k_s R_e \sqrt{f}} \right)$	Fuentes y Carrasquel (1978); (referencia 3).
b) Trapecial.	2.035	0.771	12.27	Colebrook y White, con base en la ec. 1.38 y el coeficiente de Keulegan.
c) Circular.	2.035	0.698	13.05	Colebrook y White, con base en la ec. 1.38 y el coeficiente de Keulegan.
d) Canales en general.	2.00	0.625	12.00	ASCE (1963) (referencia 4).
2. Hidráulicamente rugosa:				
a) Rectangular muy ancha.	2.035	----	11.02	Prandtl, von Kármán y Nikuradse (1926-1933); adaptación de los experimentales en tubos circulares.
	2.00	----	14.84	Nikuradse y Colebrook-White (1937); adaptación de los experimentales en tubos circulares.

Continúa

Tabla 2.1. (continuación)

Comportamiento de la pared y forma de la sección	α_1	a	c	Autor
2. Hidráulicamente rugosa:				
a) Rectangular muy ancha.	2.035	---	11.1	Keulegan (1938); teórico (referencia 5).
	2.00	---	12.64	Keulegan, Bazin; experimental.
	2.00	---	14.80	Bretting (1948), Ackers (1958); experimental.
	2.00	---	11.02	Reinius (1961); teórico (referencia 2).
	2.00	---	12.40	Reinius (1961); experimental (referencia 2).
$b/y = 4$	2.00	---	12.94	Reinius (1961); teórico (referencia 2).
$b/y = 2$	2.00	---	13.40	Reinius (1961); teórico (referencia 2).
b) Trapecial.	2.00	---	12.64	Keulegan, Bazin; experimental.
	2.03	---	12.27	Keulegan, Bazin; experimental.
c) Circular.	2.03	---	13.50	Keulegan, Bazin; experimental.
d) Canales en general.	2.0	---	12.2	Keulegan; teórico.
	2.0	---	12.0	ASCE (1963) (referencia 4).

El estado de plena turbulencia en los canales rugosos se caracteriza porque la forma de su sección tiene un efecto importante sobre f . Cuando el grado de rugosidad es constante, el factor de fricción decrece aproximadamente en orden del rectangular, al triangular, al trapecial y al circular. Es probable que esto se deba a la formación de corrientes secundarias en la sección transversal, que se mueven en la dirección longitudinal del canal y cuya intensidad cambia con la forma de la sección. Las curvas R_e-f se elevan a partir de la que representa a la de canales lisos, como resultado de la pérdida de energía adicional generada por los elementos de rugosidad, al grado que, cuando el número de Reynolds es grande y se alcanza el estado de plena turbulencia, algunas de las curvas se vuelven horizontales.

Para canales de pared hidráulicamente rugosa, la ecuación 2.9 se reduce a la forma conocida como ecuación de Nikuradse, que es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{C}{\sqrt{8g}} = \alpha_1 \log \frac{c}{k_s/R_h} \quad (2.10)$$

donde el coeficiente c adquiere los valores dados en la tabla 2.1.

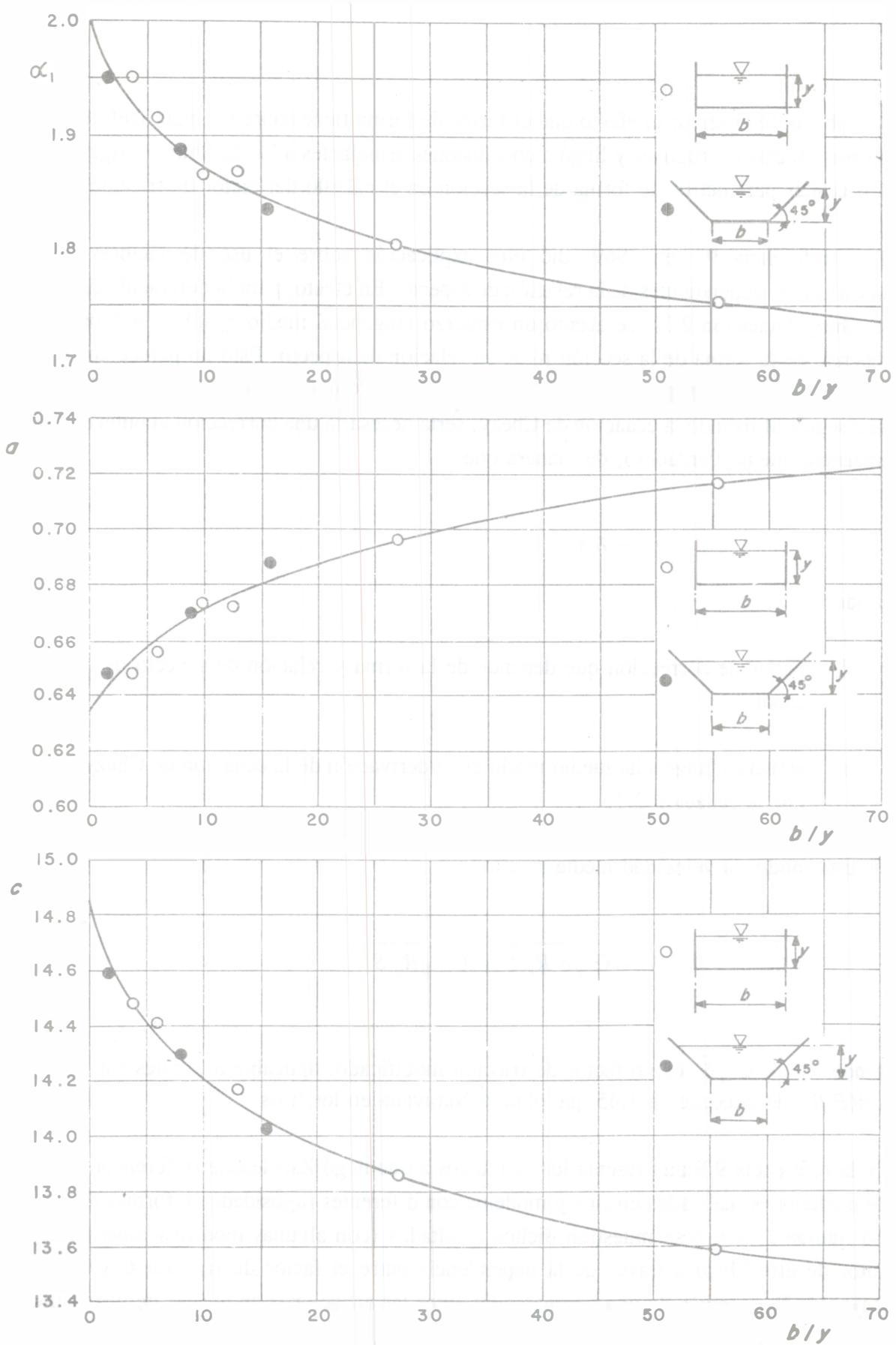


Figura 2.2. Coeficientes α_1 , a y c de la ecuacion 2.9, de acuerdo con los resultados experimentales de de Marchi (referencia 6) y de Bock (referencia 7)

Con objeto de observar el efecto que el factor de forma tiene sobre f , Unger (referencia 8) hizo ensayos en canales rugosos y llegó a conclusiones semejantes a las de Shih y Grigg en los lisos, al necesitar parámetros de forma de la sección en el cálculo del factor de fricción.

Blau (referencia 9), en 1969, dió otra explicación sobre el uso de factores de fricción modificados, dependientes de la relación de aspecto. En efecto, para la derivación de la ecuación de Chezy (ecuación 2.3), se aceptó un esfuerzo tangencial medio τ_o sobre la frontera, que no depende de la forma de la sección ni de su relación de aspecto. Esto no parece correcto por la distribución irregular que τ_o tiene sobre la pared de las muchas formas de sección, por lo que, para seguir utilizando la ecuación de Chezy, sería necesaria una corrección al obtener el esfuerzo tangencial medio verdadero, de manera que

$$\tau'_o = \delta \tau_o \quad (2.11)$$

donde

δ factor de corrección que depende de la forma y relación de aspecto de la sección del canal;

τ_o esfuerzo tangencial medio usado en la derivación de la ecuación de Chezy y expresado por la ecuación 2.1.

De este modo, la velocidad media resulta

$$V = C \sqrt{\delta R_h S} = C' \sqrt{R_h S} \quad (2.12)$$

donde $C' = C \sqrt{\delta}$ es un factor de fricción modificado, aplicable a canales rugosos y similar a $\phi(P/R_h)$ de la ecuación 1.45 que obtuvo Narayana en los lisos.

En la referencia 9 Blau presenta los resultados a que llegó Zschiesche (referencia 10), en 1952, de mediciones realizadas en ríos y modelos con diferentes rugosidades y formas de sección. En las figuras 2.3a y b se muestran dichos resultados (con algunas modificaciones hechas por el autor de este libro) a través de la dependencia entre el factor de fricción C y el número de Reynolds R_e , además de una comparación entre las ecuaciones empíricas de otros autores.

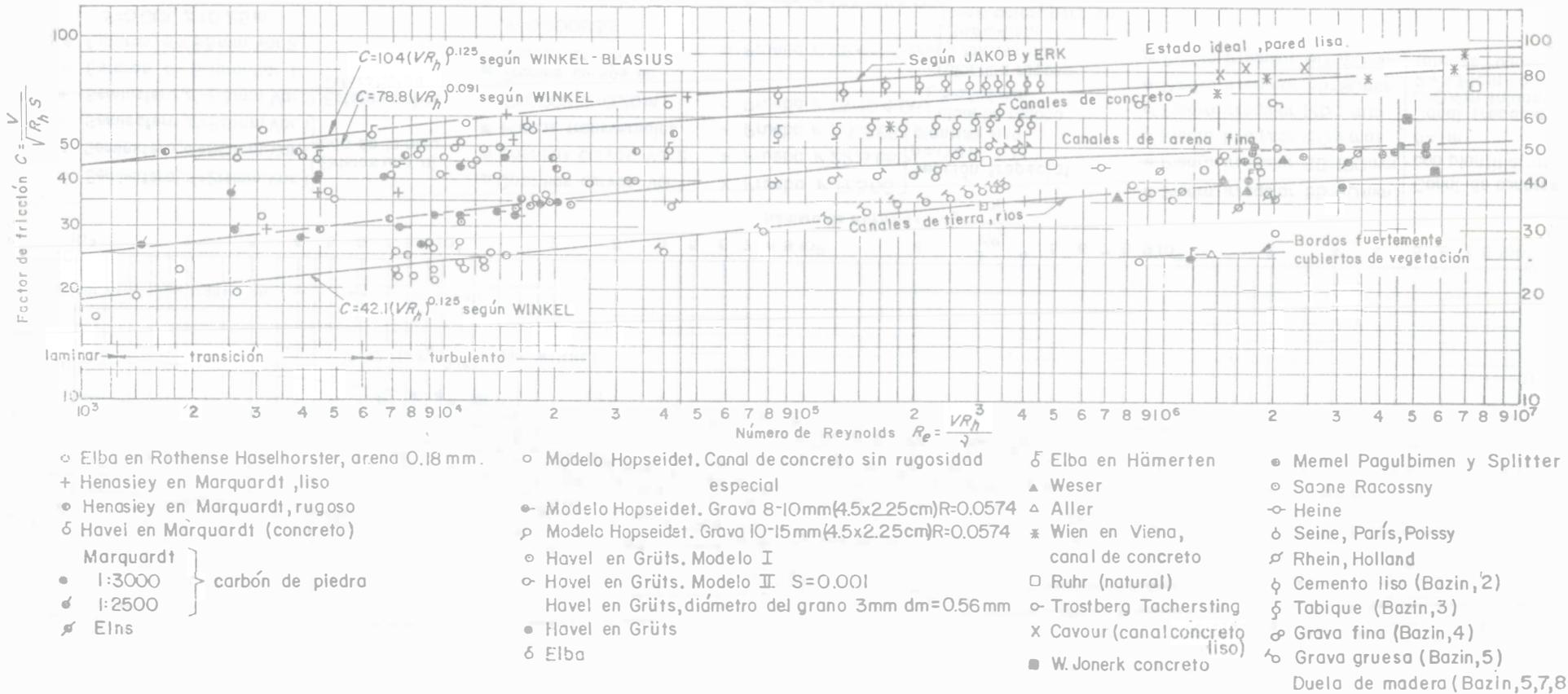


Figura 2.3a. Factor de fricción C en función del número de Reynolds, según Zschiesche (referencia 10)

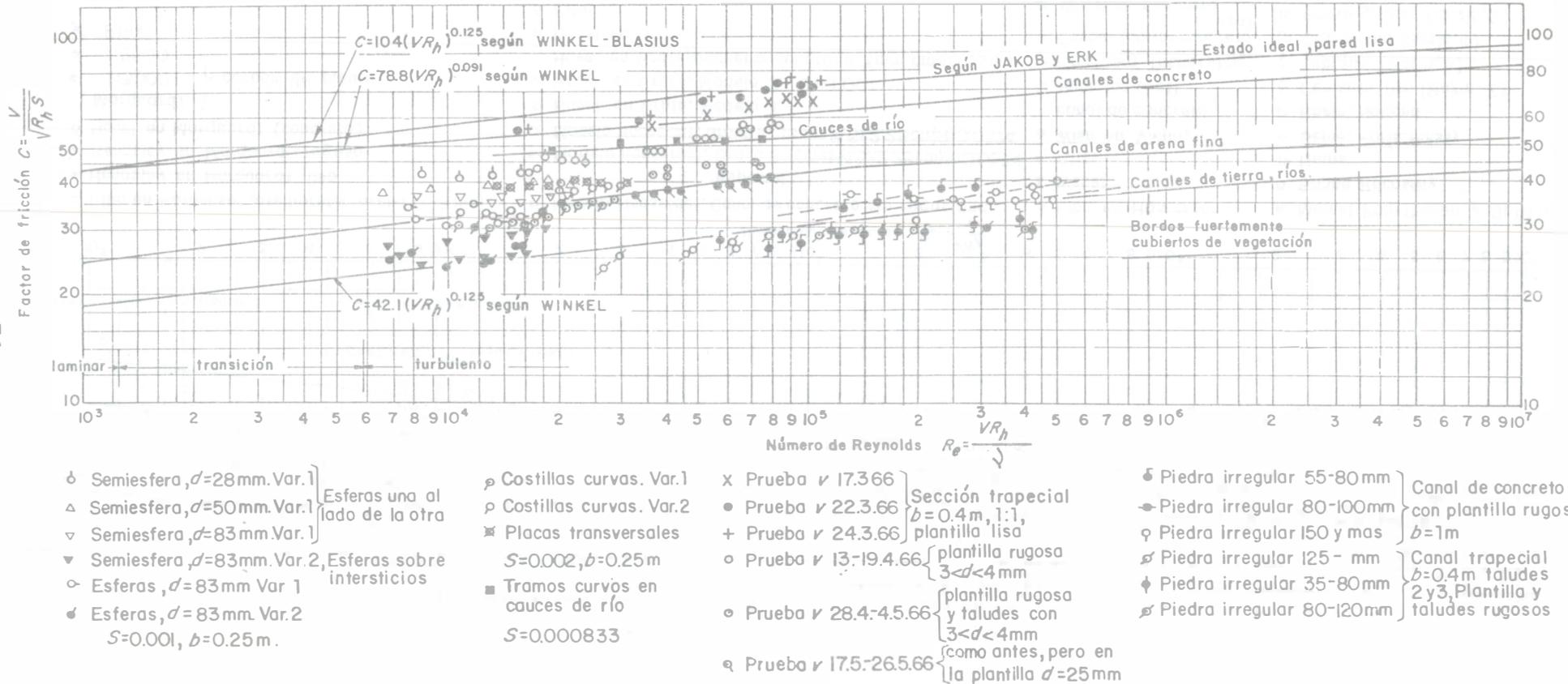


Figura 2.3b. Factor de fricción C en función del número de Reynolds, según Blau (referencia 9)

De acuerdo con sus investigaciones sobre la distribución del esfuerzo tangencial, Blau obtuvo el valor de δ para canales rectangulares en función de y/b , lo que le permitió corregir los valores de Zschiesche. Los resultados se presentan en las figuras 2.4.a, b y c, conseguidos en canales rectangulares de un metro de ancho de plantilla y diferentes rugosidades.

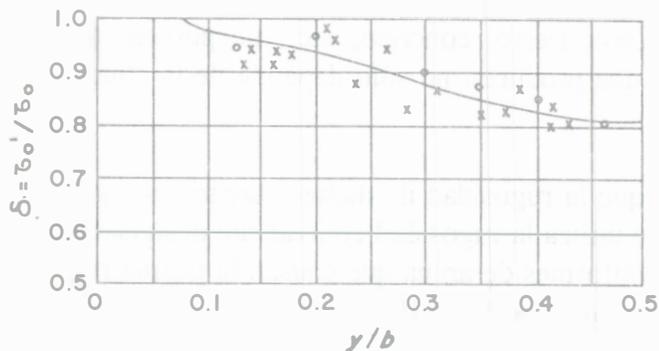


Figura 2.4a. $\delta = f(y/b)$ para canales rectangulares de cemento liso, $b = 1$ m, según Blau (referencia 9)

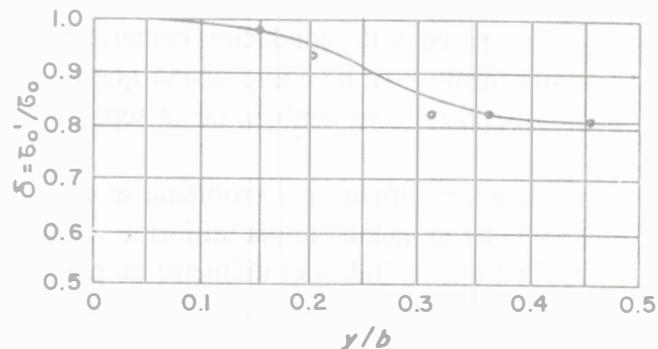


Figura 2.4b. $\delta = f(y/b)$ para canales rectangulares de concreto, $b = 1$ m, rugosidad $1 < k_s < 4$ mm, según Blau (referencia 9)

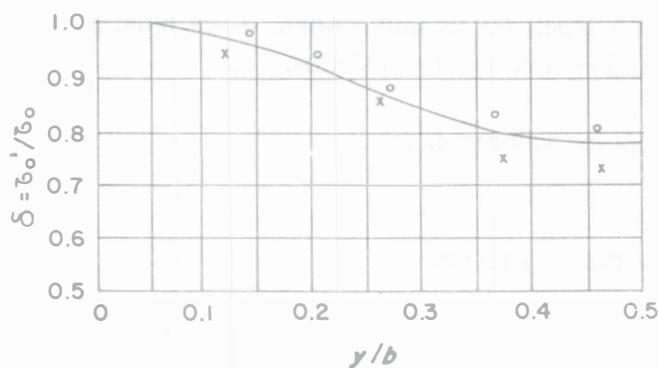


Figura 2.4c. $\delta = f(y/b)$ para canales rectangulares de concreto, $b = 1$ m, rugosidad $k_s = 28$ mm, según Blau (referencia 9)

En canales trapeciales, Blau encontró buena concordancia con los resultados de las figuras 2.3 sin la necesidad del factor correctivo. Esto se debe a que el esfuerzo tangencial en dichos canales se distribuye más uniformemente sobre el perímetro mojado.

Los trabajos de Blau y Zschiesche constituyen un intento de establecer un diagrama aplicable a canales similar al de Moody.

2.3.2 *Rugosidad de la pared*

Nikuradse realizó experimentos en conductos a presión adhiriendo granos de arena de tamaño uniforme a sus paredes, de modo que la altura de las asperezas la tomó como el diámetro medio de los granos. En las ecuaciones empíricas resultantes consideró como rugosidad de la pared a ese diámetro.

Las paredes de conductos comerciales de acero, fierro, concreto, etc., no poseen rugosidad uniforme y se ha comprobado que el efecto que producen no sólo depende de la altura de las asperezas, sino también de su separación.

Para simplificar este problema se considera que la rugosidad de dichas paredes es equivalente a la de granos de arena uniforme, es decir, se utiliza la rugosidad equivalente designada por k_s . Con ella se indica el diámetro de partículas uniformes de arena que causan la misma rugosidad que la pared considerada y, por tanto, igual pérdida por fricción.

El argumento anterior parece sencillo, sin embargo, la mayor dificultad en la aplicación de las ecuaciones de fricción en canales rugosos está en la determinación de la rugosidad equivalente de las fronteras. Los valores para distintas superficies se presentan en la tabla 2.2.

Varios autores han realizado experimentos con rugosidades artificiales, empleando cubos, esferas, conos, escalones rectangulares y triangulares, etc., para cuantificar no sólo el efecto de la altura de los obstáculos, sino también su separación o densidad de distribución.

Cuando la densidad de las asperezas es muy grande, k_s es igual al tamaño de la rugosidad, lo que no ocurre cuando se tienen elementos aislados.

La tabla 2.3 complementa los valores de k_s .

2.3.3 *Ecuaciones empíricas de fricción*

El uso de la ecuación de Chezy en canales tiene la dificultad de tener que hacer una estimación adecuada del factor de fricción, toda vez que éste depende del número de Reynolds.

Sin embargo, la mayor parte de los problemas de canales que se presentan en la práctica están dentro de la región hidráulicamente rugosa del flujo turbulento. Para esta condición se han obtenido de manera experimental una buena cantidad de ecuaciones que valúan el factor C , algunas de las cuales se presentan en la tabla 2.4 y los coeficientes de rugosidad respectivos en la tabla 2.5.

Las ecuaciones fueron obtenidas por distintos autores pero deben aplicarse para el mismo ámbito de condiciones de geometría del canal, rugosidad, número de Reynolds, etc., para el cual fueron obtenidas. Las rugosidades estudiadas han sido muy restringidas en la mayoría de los casos.

Tabla 2.2. Rugosidad equivalente en las paredes de un canal (referencia 11)

Grado de rugosidad	Tipo de superficie	k_s en mm
Técnicamente lisa	Metal no ferroso, estirado, galvanizado y pulido.	0.001
	Metal no ferroso estirado. Vidrio. Plexiglas.	0.003
Casi lisa	Asbesto-cemento, sin juntas.	0.015
	Asbesto-cemento, unido en tramos con juntas perfectamente terminadas. Acero estirado, nuevo.	0.025
	Con aislamiento bituminoso o de cemento centrifugado. Acero, no pintado, sin costuras y sin corrosión.	0.030
	Acero de construcción, acero forjado, nuevo.	0.045
	Acero con costuras soldadas, no pintado, nuevo. Acero con tratamiento cuidadoso de pintura anticorrosiva.	0.060
Medianamente rugosa	Fierro, galvanizado en caliente o electrolíticamente. Fierro con tratamiento asfáltico. Fierro fundido, pintado. Concreto en construcción monolítica, colado en moldes metálicos impregnados de aceite, sin juntas ni irregularidades superficiales (clase 4). Concreto centrifugado, sin juntas. Concreto de moldes al vacío, sin juntas.	0.15
	Terminado muy liso, bituminoso o a base de mortero de cemento, con juntas alineadas a la superficie y terminadas a mano. Madera cepillada, sin juntas, nueva. Acero soldado, con pocas hileras transversales de remaches, juntas hechas en el sitio de construcción, lámina de acero, remaches embutidos, sin traslapes, nuevo. Fierro colado, sin pintar. Cerámica vitrificada, con juntas perfectamente terminadas.	0.30
	Cemento liso, cuidadosamente terminado.	0.45
	Concreto colado en moldes metálicos lubricados, con irregularidades y juntas cuidadosamente alisadas.	0.49
	Madera cepillada, bien junteada. Acero soldado, oxidado. Fierro colado, nuevo. Concreto colado en moldes metálicos (clase 3). Conductos prefabricados de concreto. Concreto terminado con llana metálica. Conductos de cerámica vitrificada.	0.6



Continúa

Tabla 2.2. (continuación)

Grado de rugosidad	Tipo de superficie	k_s en mm
Rugosa	Madera sin cepillar. Acero remachado, espesor de pared < 6 mm, nuevo. Acero levemente corroído. Acero con las costuras longitudinales soldadas y las transversales remachadas, viejo pero sin incrustaciones. Acero colado, oxidado o ligeramente incrustado. Concreto de construcción monolítica colado en moldes rugosos (clase 2). Superficies terminadas con cemento lanzado de acabado liso (comúnmente llamado gunita o <i>shotconcrete</i>). Placas de cerámica vitrificada, bien colocadas. Mampostería de ladrillo vitrificado, bien terminada.	1.5
	Concreto colado en moldes de acabado liso, viejo. Mampostería de piedra labrada, cuidadosamente elaborada, con sus juntas bien terminadas.	1.8
	Asfalto rodillado.	2.0
	Conductos prefabricados de concreto, en tramos cortos y diámetro pequeño, sin terminado especial de sus juntas, empalmadas o a tope.	2.4
	Madera vieja, hinchada. Concreto colado en moldes de madera, sin terminar. Conductos prefabricados de concreto, con mortero en las juntas (clase 1). Mampostería de ladrillo, junteada con mortero de cemento. Mampostería de piedra sin labrar, bien elaborada.	3.0
	Gunita, sin terminado.	3 a 9
	Conductos prefabricados de concreto, acabado rugoso.	4.3
	Mampostería de ladrillo, sin acabado en las juntas. Mampostería de piedra sin labrar, medianamente elaborada. Mampostería de piedra pequeña. Canales de tierra bien terminados, rectos y uniformes.	6.0
	Concreto colado en moldes de madera vieja, sin acabado. Mampostería de ladrillo sobrepuesto.	8.5
Muy rugosa	Concreto mal moldeado, acabado burdo.	10
	Concreto mal moldeado, con juntas abiertas, viejo. Placas de concreto. Mampostería de piedra toscamente elaborada. Arena con algo de arcilla o grava.	20
	Grava fina, grava arenosa.	30
	Grava de fina a mediana.	50
	Grava mediana.	75
	Grava mediana a gruesa.	90

Continúa

Tabla 2.2. (continuación)

Grado de rugosidad	Tipo de superficie	k_s en mm
Extremadamente rugosa*	Material de tierra con piedras grandes.	hasta 200
	Cantos rodados, irregulares. Material de tierra con grandes salientes.	hasta 400
	Lechos cubiertos de piedra con gran tamaño. Desprendimientos de roca, acomodados.	hasta 500 (máx. aprox. $0.4 R_h$)
	Cantos rodados, irregulares, en abundancia.	hasta 650 (máx. aprox. R_h)
	Desprendimientos de roca, tamaño medio.	hasta 1500 (máx. aprox. $0.4 R_h$)
	Superficies con características de río torrencial, con fuerte arrastre de material. Material de tierra con gran cantidad de hierbas.	hasta 1500 (máx. aprox. R_h)
	Desprendimientos de roca muy irregular y grande.	hasta 3000 (máx. aprox. $0.8 R_h$)

* Los valores dados son orientadores, ya que no han sido suficientemente estudiados. R_h es el radio hidráulico del canal.

Tabla 2.3. Rugosidad equivalente aconsejable en diferentes condiciones del canal (referencia 12)

Condiciones del canal	k_s en mm
Canales revestidos, donde ϵ equivale al tamaño medio de las rugosidades en mm.	2ϵ
Lechos aluviales planos y sin arrastre, con material no uniforme. d_m es el diámetro medio de las partículas en mm (ecuación 2.27).	$2 d_m$
Lechos aluviales planos y sin arrastre, con material no uniforme. d_{90} es el diámetro 90 de las partículas en mm (sección 2.4.4).	$2 d_{90}$
Lechos arenosos sin arrastre. h es la altura de las ondulaciones en mm.	h
Superficies planas y rígidas, de rugosidad artificial muy densa y tamaño uniforme. h es la altura de la rugosidad, igual al diámetro si las partículas son esféricas en mm.	h
Canales con macrorugosidad: $0.03 \text{ m} < d_{84} < 0.47 \text{ m}$, $(R_h/d_{84}) < 20$; d_{84} es el diámetro 84 del material en mm (sección 2.4.4).	$3.5 d_{84}$

Tabla 2.4. Ecuaciones para el cálculo del factor de fricción C de Chezy, donde R_h es el radio hidráulico y S es la pendiente hidráulica. Son válidas para el sistema internacional de unidades

Autor	Ecuación	Observaciones
Ganguillet y Kutter	$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{S}}{1 + \left[23 + \frac{0.00155}{S} \right] \frac{n}{\sqrt{R_h}}}$	<p>Aconsejable en canales naturales, para los que usualmente conduce a resultados satisfactorios. Es compleja y tiene la desventaja de que ocurren cambios grandes en C para cambios pequeños en n. Este coeficiente depende de la rugosidad del canal, según la tabla 2.5.</p>
Kutter	$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}}$	<p>Es una simplificación de la de Ganguillet y Kutter, m es un coeficiente de rugosidad según la tabla 2.5.</p>
Bazin	$C = \frac{87}{1 + \frac{N_B}{\sqrt{R_h}}}$	<p>Está basada en una buena cantidad de experimentos y es relativamente sencilla, N_B es un coeficiente de rugosidad según la tabla 2.5.</p>
Kozeny	$C = 20 \log \frac{A}{T} + N_K$	<p>Es análoga a la de los conductos a presión y fue obtenida con base en los resultados experimentales de von Misses y Bazin. N_K es un coeficiente de rugosidad según la tabla 2.5.</p>
Martínez	$C = 17.7 \log \left(\frac{R_h}{d_m} \right) + 13.6$	<p>Se obtuvo de muchas mediciones en ríos de la exUnión Soviética. d_m es el diámetro medio del grano de material en el fondo del río en m. Es válida cuando $0.15 \leq R_h \leq 2.25$ m, $0.00004 \leq S \leq 0.0039$ y $0.004 \leq d_m \leq 0.25$ m (referencia 9).</p>
Manning	$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}$	<p>Originalmente fue obtenida a partir de siete ecuaciones diferentes basadas en ensayos de Bazin, y posteriormente verificada por observaciones. Es una de las más utilizadas por su sencillez. n es el mismo coeficiente que utilizó Ganguillet y Kutter, según la tabla 2.5.</p>
Pavlovski	$C = \frac{R_h^z}{n}$	<p>Considera que el exponente en la ecuación de Manning no es constante sino que varía con la forma del canal y la rugosidad, como sigue: $z = 1.5\sqrt{n}$, para $R_h < 1$ m, y $z = 1.3\sqrt{n}$, para $R_h > 1$ m. El valor de n es el mismo que el de Manning.</p>

Tabla 2.5. Coeficiente de rugosidad en las ecuaciones de la tabla 2.4

1. Conductos cerrados parcialmente llenos	Ganguillet y Kutter n	Kutter m	Bazin N_B	Kozeny N_K
Fierro fundido nuevo.	0.012	0.20	0.06	
Fierro fundido usado.		0.25	0.12	
Fierro colado.	0.012	0.20		
Barro vitrificado nuevo.		0.25		
Barro vitrificado usado.	0.017	0.30 a 0.35		
Tubos de alcantarillado.	0.017 a 0.020	0.30 a 0.35		
Túneles de concreto pulido.	0.011 a 0.013	0.20 a 0.25	0.22	
2. Canales abiertos	Ganguillet y Kutter n	Kutter m	Bazin N_B	Kozeny N_K
Madera cepillada.	0.010	0.15 a 0.20	0.06	
Madera de acabado rugoso.		0.30 a 0.35		
Mampostería de ladrillo bien acabada.	0.013	0.25	0.16	70 a 76
Cemento pulido.		0.20 a 0.25	0.10 a 0.16	84 a 90
Concreto pulido.	0.012	0.20	0.11 a 0.22	
Concreto rugoso.	0.017	0.65	0.45	58 a 62
Piedra brasa bien acabada.	0.017	0.65	0.46	60 a 70
En tierra, arroyos y ríos.	0.025	1.75	1.4 a 1.6	
En tierra con material grueso y plantas.	0.035	2.0 a 2.5	1.75	
Con cantos rodados.	0.04 a 0.5	3.5 a 5.0	hasta 3.5	
Con gran rugosidad de fondo y maleza tupida.	hasta 0.9			
Roca acomodada.				36 a 50
Roca a volteo.				28 a 36
Grava	$\left\{ \begin{array}{l} \text{gruesa (10 a 15 cm).} \\ \text{media (5 a 10 cm).} \\ \text{fina (2 a 3 cm).} \end{array} \right.$			32 a 38
				38 a 42
				42 a 46
Cantos rodados (15 a 20 cm).				28 a 32

2.3.4. Aspectos teóricos del coeficiente de Manning

En la tabla 2.4 destaca la ecuación conocida en los países de habla inglesa como ecuación de Manning, pero que en justicia debiera llamarse: de Gauckler-Manning-Strickler, por atribuirse su origen a estos tres autores. Dicha ecuación, de carácter netamente empírico, es la más conocida en todo el mundo y valúa el coeficiente de Chezy en la forma

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (2.13)$$

donde n es un nuevo factor de fricción, llamado coeficiente de Manning, que por ser aplicable a canales hidráulicamente rugosos, depende sólo de la rugosidad de la frontera y es independiente del número de Reynolds. Además, tiene dimensiones y de la ecuación 2.6 resulta

$$n = \sqrt{\frac{f}{8g}} R_h^{1/6} \quad (2.14a)$$

O bien

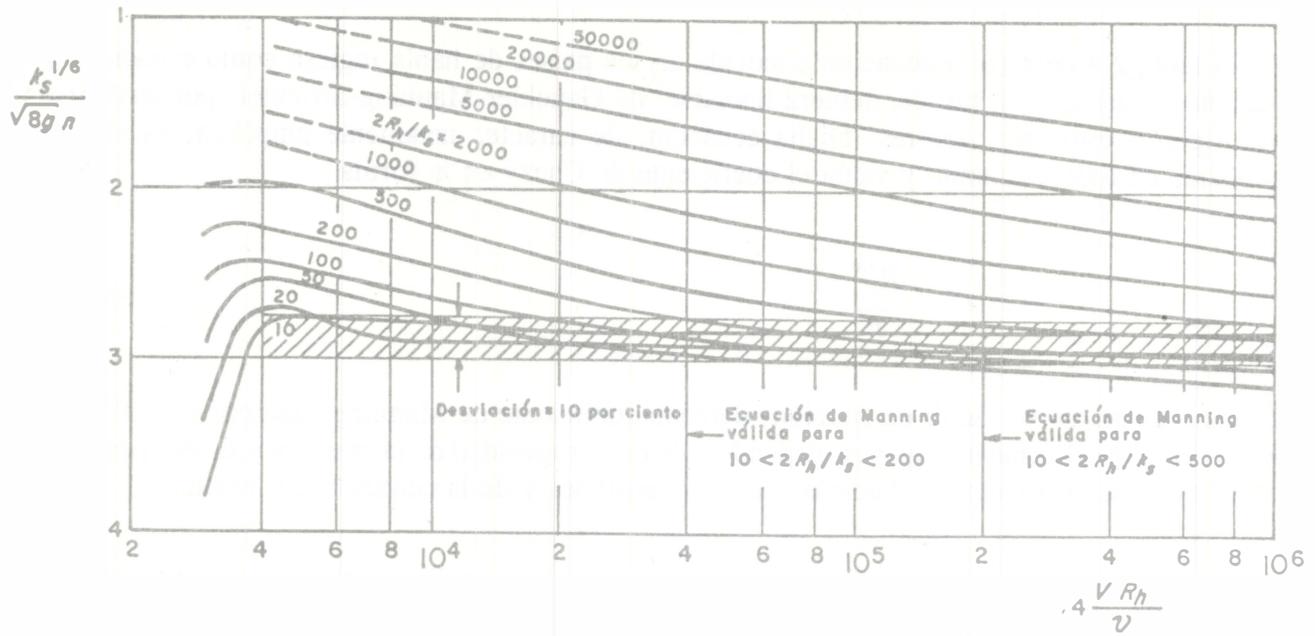
$$\frac{k_s^{1/6}}{\sqrt{8g} n} = \left[\frac{k_s}{R_h} \right]^{1/6} \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (2.14b)$$

En la misma forma, de las ecuaciones 2.7 y 2.13 se obtiene

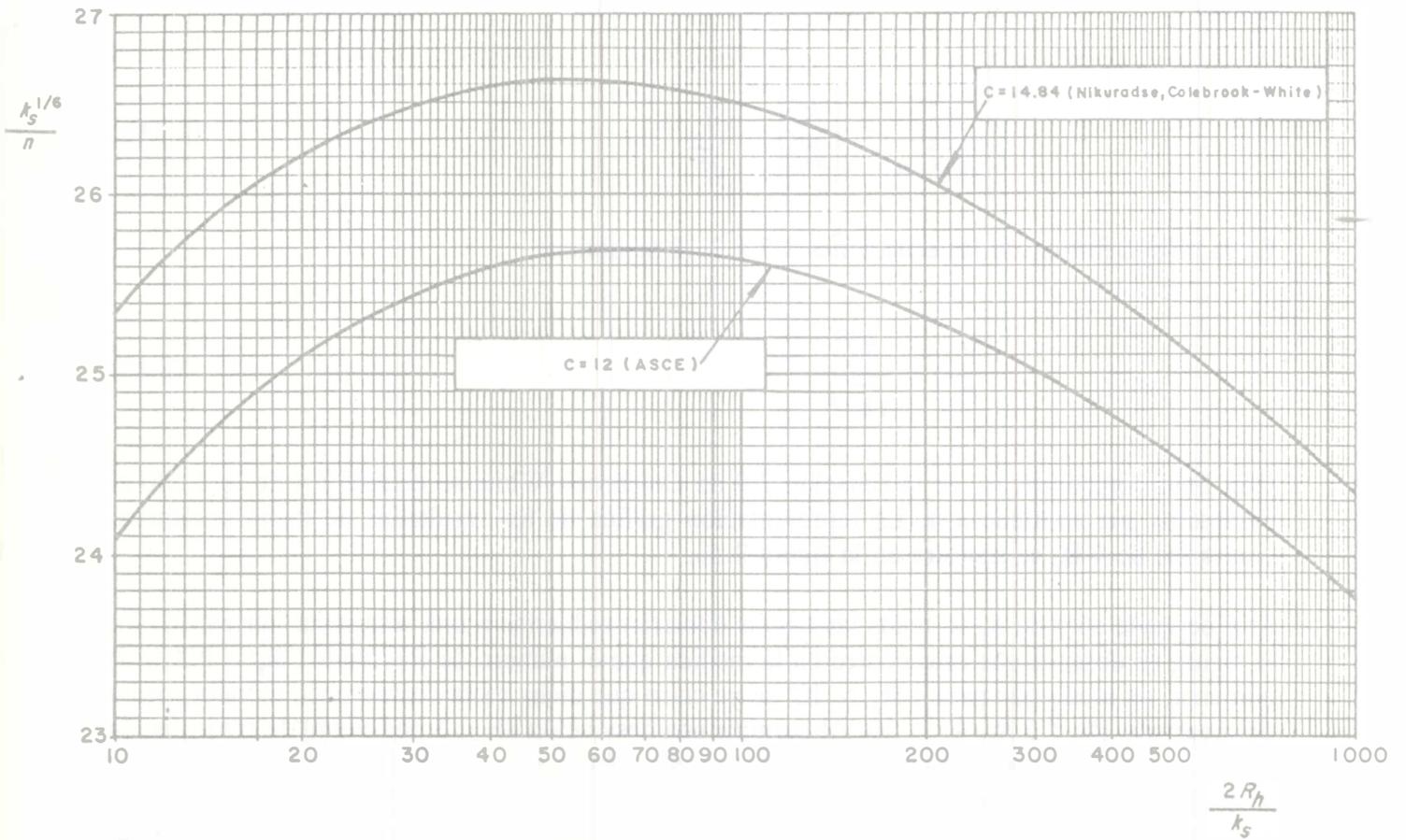
$$\frac{V}{v_*} = \frac{R_h^{1/6}}{\sqrt{g} n} \quad (2.15)$$

Con fines comparativos, de la ecuación 2.9 de Colebrook-White se calculó f y de la 2.14b el parámetro que contiene a n . La representación gráfica de los resultados de dicho parámetro contra los de $4 R_e$ se muestra en la figura 2.5a.

Si n depende sólo de R_h/k_s todas las curvas debieran reducirse a una sola recta horizontal. En la figura se observa que esto ocurre en la medida que el número de Reynolds ($R_e = V R_h / \nu$) aumenta, de modo que para $4 R_e > 10^4$ se ve claro que dicha recta corresponde al valor medio del intervalo $10 < 2 R_h/k_s < 20$. Al permitir una desviación de ± 5 por ciento de error (banda de desviación total de 10 por ciento) en la predicción del valor medio, dicha predicción es aceptable para $4 R_e > 4 \times 10^4$ en el intervalo $10 < 2 R_h/k_s < 200$, y para $4 R_e > 2 \times 10^5$ en el intervalo $10 < 2 R_h/k_s < 500$, siendo este último el más común en la práctica. Para llegar a estos resultados no se ha considerado la influencia de la geometría de la sección, ni la estructura de la rugosidad.



a) Con la ecuación de Colebrook-White, para $\alpha_1 = 2$, $a = 0.6275$, $c = 14.84$, según L. Fink



b) Con la ecuación de Nikuradse, para $\alpha_1 = 2$ y dos valores de c

Figura 2.5. Coeficiente de Manning calculado de las leyes generales de fricción en canales rugosos

En la misma forma, con la ecuación de Nikuradse (2.10) donde $\alpha_1 = 2$, de la 2.14a resulta

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{2 \sqrt{8g} \log (c R_h / k_s)} \quad (2.16)$$

O bien, de la 2.14b la forma adimensional

$$\frac{k_s^{1/6}}{\sqrt{8g} n} = \frac{2 \log (c R_h / k_s)}{(R_h / k_s)^{1/6}} \quad (2.17a)$$

que para el sistema internacional de unidades es

$$\frac{k_s^{1/6}}{n} = \frac{17.72 \log (c R_h / k_s)}{(R_h / k_s)^{1/6}} \quad (2.17b)$$

En las tres últimas expresiones c debe seleccionarse de la tabla 2.1 o de la figura 2.2 para pared hidráulicamente rugosa y de acuerdo con las ecuaciones 2.2 y 2.8, dichas expresiones tienen validez cuando

$$\frac{k_s \sqrt{g R_h S}}{\nu} \geq 70 \quad (2.18)$$

En la figura 2.5b se muestra la representación gráfica de la ecuación 2.17b para dos valores distintos de c . La curva superior corresponde a $c = 14.84$, dado por Colebrook-White, y para ella es posible estimar un valor constante del parámetro que aparece en el eje de ordenadas de la figura, para los valores de $2 R_h / k_s$ más frecuentes en la práctica. Esto es

$$\frac{k_s^{1/6}}{n} = 26 \quad (2.19a)$$

O bien

$$n = \frac{k_s^{1/6}}{26} = 0.0385 k_s^{1/6} \quad (2.19b)$$

sin incurrir en desviaciones superiores al 3 por ciento y con validez en el sistema internacional de unidades.

Strickler (referencia 13), en 1923, obtuvo experimentalmente la ecuación 2.19, que en su honor lleva su nombre. Cuando k_s está en mm, la ecuación de Strickler se convierte en

$$n = 0.0122 k_s^{1/6} \quad (2.19c)$$

De la sustitución de la ecuación 2.19b en la 2.14a se tiene

$$f = 0.1161 \left(\frac{k_s}{R_h} \right)^{1/3} \quad (2.20)$$

lo cual significa que f es constante para una rugosidad relativa k_s/R_h dada.

De la sustitución de la ecuación 2.19b en la 2.13 resulta

$$C = 26 (R_h/k_s)^{1/6} \quad (2.21)$$

en el sistema internacional de unidades.

Williamson (referencia 14), en 1951, realizó experimentos similares a los de Nikuradse con tubos de rugosidad artificial, y encontró un pequeño ajuste a la ecuación de Strickler, de modo que

$$n = 0.0119 k_s^{1/6} \quad (2.22)$$

donde k_s está en mm.

La curva inferior de la figura 2.5b corresponde a la misma ecuación 2.17b, pero con $c = 12$, valor dado por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE) (referencia 4). Con el mismo razonamiento de antes, se tiene ahora que

$$\frac{k_s^{1/6}}{n} = 25 \quad (2.23a)$$

o bien

$$n = \frac{k_s^{1/6}}{25} = 0.04 k_s^{1/6} \quad (2.23b)$$

también sin incurrir en desviaciones superiores a 3 por ciento, y donde k_s está en m.

Si se sustituye k_s de la ecuación de Strickler 2.19a, en la ecuación 2.18, el límite de aplicación de la de Manning, a las temperaturas comunes del agua, es

$$n^6 \sqrt{R_h S} \geq 8 \times 10^{-14} \quad (2.24)$$

para el sistema internacional de unidades.

De acuerdo con lo antes discutido, a continuación se resumen las limitaciones observadas en la aplicación de la ecuación de Manning.

- a) El coeficiente n no es adimensional. Cada valor es válido sólo para las dimensiones del canal en que se obtuvo.
- b) No considera la influencia de la viscosidad y por ello es válida sólo para números de Reynolds grandes ($R_e > 10000$).
- c) No sigue las leyes generales de fricción y por ello es válida sólo para rugosidades relativas medias (figura 2.5a).
- d) La forma de la sección no se considera y por ello un valor conocido de n es válido sólo para la forma de sección del canal en que se obtuvo (ver subcapítulo 2.6).
- e) No considera la influencia de distintas rugosidades en la misma sección y la de su distribución de acuerdo con el nivel del agua (ver sección 2.4.6 y subcapítulo 2.9).
- f) No considera la influencia de la formación de ondas y la inestabilidad que introducen cuando el régimen es supercrítico.
- g) No considera la influencia del arrastre de aire al interior del flujo cuando la velocidad es muy grande.
- h) No considera la influencia del transporte de sedimentos y de la forma variable de un lecho móvil.

Por las razones anteriores, el nombre de *coeficiente de rugosidad* que se atribuye al factor n tiene muchas restricciones. Por ello, aquí se le designa como coeficiente de Manning.

Ejemplo 2.1. Determinar el gasto que conduce en flujo uniforme un canal rectangular de concreto clase 2, de 6 m de ancho, 3 m de tirante, 0.001 de pendiente y agua a temperatura de 13°C, siguiendo los criterios de: a) Colebrook-White; b) Blau y c) Manning. d) Calcular la pendiente mínima que debiera tener el canal para considerar aplicable la ecuación de Manning, con la n obtenida en el inciso anterior.

Solución a. De la tabla 2.2 la rugosidad equivalente para el concreto clase 2 es $k_s = 1.5$ mm.

El radio hidráulico de la sección es

$$R_h = \frac{6(3)}{6 + 2(3)} = 1.5 \text{ m}$$

y de la ecuación de Chezy

$$V = C \sqrt{1.5 (0.001)} = 0.0387 C \quad (a)$$

Como C es función del número de Reynolds y éste a su vez de la velocidad, la solución tiene que ser por iteraciones; aquí se presenta sólo la final.

Se considera inicialmente $C = 73.12$ y de la ecuación 2.6 se tiene

$$f = \frac{8 (9.81)}{(73.12)^2} = 0.01468$$

De la ecuación a se obtiene

$$V = 0.0387 (73.12) = 2.8297 \text{ m/s}$$

Para conocer el comportamiento hidráulico de la pared, de la ecuación 2.5 resulta

$$v_* = \sqrt{\frac{0.01468}{8}} 2.8297 = 0.1212 \text{ m/s}$$

Con $k_s = 1.5 \text{ mm}$ y $\nu = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ para el agua a 13°C , se tiene el valor de

$$\frac{v_* k_s}{\nu} = \frac{0.1212 (0.0015) 10^6}{1.2} = 151.5 > 70$$

por tanto, la pared se comporta como hidráulicamente rugosa, siendo entonces válida la ecuación 2.10. Para ella, con $b/y = 2$, en la tabla 2.1 se eligen los coeficientes de Reinius: $\alpha_1 = 2$, $c = 13.4$; entonces resulta

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{13.4}{0.0015/1.5} = 8.2542$$

Por tanto, $f = 0.01468$ y $C = 73.12$ que comprueba el valor inicialmente supuesto, siendo el gasto

$$Q = 2.8297 (3) (6) = 50.93 \text{ m}^3/\text{s}$$

El número de Reynolds del flujo es

$$R_e = \frac{V R_h}{\nu} = \frac{2.8297 (1.5) (10^6)}{1.2} = 3.537 \times 10^6$$

Si se utiliza ahora el criterio de de Marchi y Bock, con $b/y = 2$, de la figura 2.2 se obtiene: $\alpha_1 = 1.95$, $a = 0.648$, $c = 14.6$. Con $R_e = 3.537 (10^6)$ y $f = 0.01468$, de la ecuación 2.9 resulta

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.95 \log \left[\frac{0.648}{3.537 (10^6) \sqrt{0.01468}} + \frac{0.0015/1.5}{14.6} \right] = 8.102$$

siendo $f = 0.01523$, valor distinto del supuesto, con el cual $C = 71.8$. De la ecuación a se obtiene un nuevo valor de

$$V = 0.0387 (71.8) = 2.78 \text{ m/s}$$

siendo el del número de Reynolds

$$R_e = \frac{2.78 (1.5) (10^6)}{1.2} = 3.475 (10^6)$$

y de la ecuación 2.9 el nuevo valor de f es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.95 \log \left[\frac{0.648}{3.475 (10^6) \sqrt{0.01523}} + \frac{0.0015/1.5}{14.6} \right] = 8.102$$

y $f = 0.01523$ igual que el valor inicial.

Por tanto, el gasto alcanza el valor de

$$Q = 2.78 (3) (6) = 50.04 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es 1.7 por ciento menor que el que se obtuvo antes.

Solución b. Para la relación $y/b = 3/6 = 0.5$, de la figura 2.4b $\delta = 0.81$. Además, con $R_h = 1.5 \text{ m}$ resulta entonces

$$V = C \sqrt{0.81 (1.5) (0.001)} = 0.0349 C$$

Debido a que la solución es por tanteos, de la figura 2.3b se estima $C = 80$. Por tanto, $V = 2.79$ m/s. El número de Reynolds resulta

$$R_e = \frac{2.79 (1.5) (10^6)}{1.2} = 3.49 \times 10^6$$

Para canales de concreto, de la figura 2.3b se obtiene $C = 79$ dentro de la zona de flujo turbulento, con el que se puede determinar un valor más preciso de la velocidad, que es

$$V = 0.0349 (79) = 2.75 \text{ m/s}$$

El nuevo número de Reynolds es $R_e = 3.442 (10^6)$, que conduce nuevamente a $C = 79$, y queda de esta manera hecho el ajuste.

Por último, el gasto alcanza el valor de

$$Q = 2.75 (3) (6) = 49.57 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es 1.8 por ciento menor que el que se obtuvo con la ecuación de Colebrook-White.

Solución c. Con $k_s = 0.0015$ m y $c = 13.4$ de Reinius, de la ecuación 2.17b se obtiene

$$n = \frac{(1.5)^{1/6}}{17.72 \log [13.4 (1.5)/0.0015]} = 0.01463$$

Con este valor, de la ecuación 2.13 resulta

$$C = \frac{(1.5)^{1/6}}{0.01463} = 73.13$$

que es el mismo resultado con la ecuación de Nikuradse.

Los cálculos realizados hasta ahora indican una excelente concordancia cuando se eligen los coeficientes adecuados en cada caso. En cambio, de la ecuación 2.19b de Strickler se tiene

$$n = 0.0385 (0.0015)^{1/6} = 0.013$$

Con este segundo valor de n se obtiene:

$$C = \frac{(1.5)^{1/6}}{0.013} = 82.3$$

$$V = 0.0387 (82.3) = 3.185 \text{ m/s}$$

$$Q = 3.185 (3)(6) = 57.33 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es 12.6 por ciento mayor que el que se obtuvo de la ecuación de Nikuradse.

Para obtener el mismo resultado de $C = 73.13$, debe ser

$$n = \frac{(1.5)^{1/6}}{73.13} = 0.0146$$

lo que significa que es muy importante seleccionar el valor adecuado de n , como se verá en el siguiente subcapítulo, toda vez que el resultado final es muy sensible a dicho valor.

Solución d. Considerando $n = 0.0148$, de la ecuación 2.24 la pendiente mínima es

$$S = \left[\frac{8}{(0.0148)^6 \sqrt{1.5} (10^{14})} \right]^2 = 0.00004$$

2.4 COEFICIENTE DE MANNING

2.4.1 Antecedentes

Gran cantidad de ecuaciones experimentales han sido obtenidas para valorar el factor C de Chezy y resolver los problemas en la práctica. Algunas de las más comunes se mencionan en la tabla 2.4 y los coeficientes de rugosidad respectivos en la tabla 2.5.

Como ya se ha explicado, la ecuación de Manning es la más conocida y expresa al factor de Chezy en la forma: $C = R_h^{1/6}/n$, que sustituido en la ecuación 2.3 resulta

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2} \quad (2.25)$$

Esta es propiamente la ecuación de fricción llamada de Manning, la más conocida y utilizada en la mayoría de los países occidentales y será la que se emplee en este libro. Sin embargo, como se ha explicado en la sección 2.3.4, su aplicación se restringe a flujo turbulento en canales

rugosos cuyo fondo no cambia sustancialmente a ondulaciones pronunciadas cuando es móvil. Además, su precisión depende en mucho de una selección cuidadosa de n , coeficiente que por lo general se considera dependiente sólo de la rugosidad en las paredes y fondo del canal. Sin embargo, n es propiamente un factor de fricción, esto es, depende también de la geometría de la sección y características hidráulicas del flujo.

Este subcapítulo tiene por objeto exponer los distintos criterios que pueden seguirse para elegir el valor de n con el mayor cuidado posible.

2.4.2 Estimación a base de tablas y fotografías

Los resultados de la sección 2.3.4 muestran que, entre ciertos límites, n es constante para cada rugosidad equivalente del canal. En la práctica, n es función de diferentes variables, y la estimación de un valor adecuado precisa del conocimiento cualitativo y cuidadoso de los factores que más influyen.

La rugosidad del canal proporciona un punto crítico de partida en la selección de n . En la tabla 2.6 se presentan los valores mínimo, normal y máximo para canales de varias clases, que han sido propuestos por Chow (referencia 15) y que son de gran utilidad para una selección preliminar.

Cuando se realizan estudios de canales naturales para distintos fines, pueden obtenerse fotografías de campo en partes estratégicas para compararlas con las de canales de resistencia conocida, junto con un resumen de los parámetros geométricos e hidráulicos que permitan una definición más adecuada de las condiciones del flujo.

Con este objeto, en la referencia 15 Chow presenta una serie de fotografías de canales principalmente naturales de coeficiente de rugosidad conocido, útiles para realizar la comparación.

Barnes realizó en 1967 un estudio de canales naturales y obtuvo otra serie de fotografías y tablas con un intervalo amplio del coeficiente de Manning, que pueden consultarse en las referencias 16 y 33. En este sentido, las oficinas que intervienen en estos proyectos deberían mantener un programa de entrenamiento con sus ingenieros para estimar los coeficientes de rugosidad, que podría complementarse con diapositivas (*slides*) que permitan la observación tridimensional de las características de los canales.

Programas similares mantiene el U.S. Geological Survey, siendo posible por este camino estimar los coeficientes de Manning con una aproximación de ± 15 por ciento en la mayoría de los casos.

Tabla 2.6a. Valores del coeficiente n en la ecuación de Manning, según Chow (referencia 15)

Conductos cerrados operando parcialmente llenos.

Tipo y descripción del canal	Mínimo	Normal	Máximo
A. Metales:			
a) Latón, liso.	0.009	<u>0.010</u>	0.013
b) Acero:			
1. Con bridas y soldado.	0.010	0.012	0.014
2. Remachado y espiral.	0.013	0.016	0.017
c) Hierro fundido:			
1. Con recubrimiento superficial.	0.010	0.013	0.014
2. Sin recubrimiento.	0.011	0.014	0.016
d) Hierro forjado:			
1. Negro.	0.012	0.014	0.015
2. Galvanizado.	0.013	0.016	0.017
e) Metal corrugado:			
1. Subdren.	0.017	0.019	0.021
2. Dren pluvial.	0.021	<u>0.024</u>	0.030
B. No metales:			
a) Acrílico.	0.008	0.009	0.010
b) Vidrio.	0.009	<u>0.010</u>	0.013
c) Cemento:			
1. Pulido.	0.010	0.011	0.013
2. En mortero.	0.011	0.013	0.015
d) Concreto:			
1. Alcantarilla recta y libre de azolve.	0.010	0.011	0.013
2. Alcantarilla con curvas, conexiones y algunos azolvamientos.	0.011	<u>0.013</u>	0.014
3. Terminado.	0.011	0.012	0.014
4. Alcantarilla recta, con pozos de visita, entradas, etc.	0.013	0.015	0.017
5. Colado en molde de acero, sin acabado.	0.012	0.013	0.014
6. Colado en molde de madera, sin acabado.	0.012	<u>0.014</u>	0.016
7. Colado en molde de madera rugosa, sin acabado.	0.015	0.017	0.020
e) Madera:			
1. Machihembrada.	0.010	0.012	0.014
2. Laminada y tratada.	0.015	0.017	0.020
f) Arcilla:			
1. Tubos de barro cocido, común.	0.011	<u>0.013</u>	0.017
2. Tubos de albañal vitrificado.	0.011	0.014	0.017
3. Tubos de albañal vitrificado para drenes, con pozos de visita, accesos, etc.	0.013	0.015	0.017
4. Tubo vitrificado para subdrenes, con juntas abiertas.	0.014	0.016	0.018
g) Mampostería de ladrillo:			
1. De vitricota.	0.011	0.013	0.015
2. Revestida con mortero de cemento.	0.012	0.015	0.017
h) Alcantarillado sanitario, cubierto de lama de desechos, con curvas y conexiones.	0.012	0.013	0.016
i) Drenaje con fondo liso, pavimentado en el fondo.	0.016	0.019	0.020
j) Mampostería de piedra pequeña cementada en las juntas.	0.018	0.025	0.030

Tabla 2.6b. Valores del coeficiente n en la ecuación de Manning. Canales recubiertos o revestidos, según Chow (referencia 15)

Tipo y descripción del canal	Mínimo	Normal	Máximo
A. Metal:			
a) Superficie de acero, lisa:			
1. No pintada.	0.011	<u>0.012</u>	0.014
2. Pintada.	0.012	0.013	0.017
b) Corrugado.	0.021	0.025	0.030
B. No metal:			
a) Cemento:			
1. Superficie lisa.	0.010	0.011	0.013
2. En mortero.	0.011	0.013	0.015
b) Madera:			
1. Cepillada, no tratada.	0.010	0.012	0.014
2. Cepillada, creosotada.	0.011	0.012	0.015
3. No cepillada.	0.011	0.013	0.015
4. Entablada con listones.	0.012	0.015	0.018
5. Cubierta de papel impermeable.	0.010	0.014	0.017
c) Concreto:			
1. Acabado con llana metálica.	0.011	<u>0.013</u>	0.015
2. Acabado con llana de madera.	0.013	0.015	0.016
3. Acabado, con grava en el fondo.	0.015	0.017	0.020
4. Sin acabado.	0.014	0.017	0.020
5. Guniteado, buena sección.	0.016	0.019	0.023
6. Guniteado, sección ondulada.	0.018	0.022	0.025
7. Sobre roca bien excavada.	0.017	0.020	
8. Sobre roca de excavado irregular.	0.022	0.027	
d) Fondo de concreto acabado con llana, bordos de:			
1. Piedra acomodada sobre mortero.	0.015	0.017	0.020
2. Mampostería de piedra mal acomodada sobre mortero.	0.017	0.020	0.024
3. Mampostería de piedra pequeña, cementada y revocada.	0.016	0.020	0.024
4. Mampostería de piedra pequeña cementada.	0.020	0.025	0.030
5. Mampostería seca de piedra pequeña, o zampeado.	0.020	0.030	0.035
e) Fondo de grava con taludes de:			
1. Concreto colado en moldes.	0.017	0.020	0.025
2. Piedra mal acomodada en mortero.	0.020	0.023	0.026
3. Mampostería seca de piedra pequeña, o zampeado.	0.023	0.033	0.036
f) Ladrillo:			
1. Vitricota.	0.011	<u>0.013</u>	0.015
2. Con mortero de cemento.	0.012	<u>0.015</u>	0.018
g) Mampostería de piedra:			
1. Pequeña, cementada.	0.017	0.025	0.030
2. Pequeña, seca.	0.023	0.032	0.035
h) Piedra labrada.			
1. Liso	0.013	0.013	
2. Rugoso.	0.016	0.016	
j) Cubierta vegetal.			
1. Liso	0.030		0.500
k) Suelo-cemento.			
1. Liso	0.015	0.016	0.017

Tabla 2.6c. Valores del coeficiente n en la ecuación de Manning. Canales excavados o dragados en diferentes tipos de suelo, según Chow (referencia 15)

Tipo y descripción del canal	Mínimo	Normal	Máximo
a) Tierra, recto y uniforme:			
1. Limpio, recientemente terminado.	0.016	0.018	0.020
2. Limpio, después de intemperizado.	0.018	<u>0.022</u>	0.025
3. Grava, sección uniforme y limpia.	0.022	0.025	0.030
4. Con poco pasto y poca hierba.	0.022	<u>0.027</u>	0.033
b) Tierra, sinuoso, flujo con poca velocidad:			
1. Sin vegetación.	0.023	0.025	0.030
2. Pasto, algo de hierba.	0.025	0.030	0.033
3. Hierba densa o plantas acuáticas en canales profundos.	0.030	0.035	0.040
4. Fondo de tierra y mampostería en los bordos.	0.028	0.030	0.035
5. Fondo rocoso y hierba en los bordos.	0.025	0.035	0.040
6. Fondo empedrado y bordos limpios.	0.030	0.040	0.050
c) Excavado o dragado en línea recta:			
1. Sin vegetación	0.025	0.028	0.033
2. Pocos arbustos en los bordos.	0.035	0.050	0.060
d) Cortado en roca:			
1. Liso y uniforme.	0.025	0.035	0.040
2. Con salientes agudas e irregulares.	0.035	0.040	0.050
e) Canales abandonados, hierbas y arbustos sin cortar:			
1. Hierba densa, tan alta como el nivel del agua.	0.050	0.080	0.120
2. Fondo limpio, arbustos en las orillas.	0.040	0.050	0.080
3. Igual al anterior, con máximo nivel del agua.	0.045	0.070	0.110
4. Arbustos densos, altos niveles del agua.	0.080	0.100	0.140

Tabla 2.6d. Valores del coeficiente n en la ecuación de Manning. Cauces naturales, según Chow (referencia 15)

Tipo y descripción del canal	Mínimo	Normal	Máximo
A. Arroyos (ancho de la superficie libre del agua en avenidas < 30 m):			
a) Corrientes en planicie:			
1. Limpios, rectos, sin deslaves ni estancamientos profundos, tirante alto.	0.025	<u>0.030</u>	0.033
2. Igual al anterior, pero más rocoso y con hierba.	0.030	0.035	0.040
3. Limpios, sinuosos, algunas irregularidades del fondo.	0.033	0.040	0.045
4. Igual al anterior, algo de hierba y rocas.	0.035	0.045	0.050
5. Igual al anterior, pero menor profundidad y secciones poco eficaces.	0.040	0.048	0.055
6. Igual que el 4, pero con más piedras.	0.045	0.050	0.060
7. Tramos irregulares con hierba y estancamientos profundos.	0.050	0.070	0.080
8. Tramos con mucha hierba, estancamientos profundos, cauces de inundación con raíces y plantas subacuáticas.	0.075	0.100	0.150

Continúa

Tabla 2.6d. (continuación)

Tipo y descripción del canal	Mínimo	Normal	Máximo
b) Corrientes de montaña, sin vegetación en el cauce, bordos muy inclinados, árboles y arbustos a lo largo de las márgenes, que quedan sumergidos durante las inundaciones:			
1. Fondo de grava, boleó y algunos cantos rodados.	0.030	0.040	0.050
2. Fondo de boleó y grandes rocas.	0.040	0.050	0.070
B. Planicies de inundación:			
a) Pastura sin arbustos:			
1. Pasto bajo.	0.025	0.030	0.035
2. Pasto alto.	0.030	0.035	0.050
b) Areas de cultivo:			
1. Sin cultivo.	0.020	0.030	0.040
2. Cultivo maduro en surcos.	0.025	0.035	0.045
3. Cultivo maduro en campo.	0.030	0.040	0.050
c) Arbustos:			
1. Arbustos escasos y mucha hierba.	0.035	0.050	0.070
2. Pocos arbustos y árboles, en invierno.	0.035	0.050	0.060
3. Pocos arbustos y árboles, en verano.	0.040	0.060	0.080
4. Mediana a densa población de arbustos, en invierno.	0.045	0.070	0.110
5. Mediana a densa población de arbustos, en verano.	0.070	0.100	0.160
d) Árboles:			
1. Población densa de sauces en verano, rectos.	0.110	0.150	0.200
2. Terrenos talados con troncos muertos.	0.030	0.040	0.050
3. Igual al anterior, pero con troncos retoñados.	0.050	0.060	0.080
4. Gran concentración de madera, algunos árboles caídos, pocos de escaso crecimiento, nivel de inundación abajo de las ramas.	0.080	0.100	0.120
5. Igual al anterior, pero el nivel de inundación alcanza a las ramas.	0.100	0.120	0.160
C. Ríos (ancho de la superficie libre del agua en avenidas > 30 m). El valor de n es menor que en los arroyos de igual descripción, pero donde los bordos ofrecen menor resistencia:			
a) Secciones regulares sin cantos rodados ni arbustos.	0.025		0.060
b) Secciones rugosas e irregulares.	0.035		0.100

Nota: Los valores subrayados son los recomendables para diseño.

2.4.3 Método del SCS (Soil Conservation Service)

La selección de n significa realmente estimar la resistencia al flujo en un canal. Es frecuente que el ingeniero piense que hay un solo valor para cada rugosidad en la pared, pero en realidad n es muy variable y depende de un gran número de factores cuyo conocimiento es de gran utilidad para las diferentes condiciones de diseño. Los que ejercen mayor influencia, tanto en canales naturales como artificiales, se detallan en la referencia 17, y aquí se hace un breve resumen de ellos.

a) *Rugosidad superficial.* Queda representada por el tamaño y forma de la rugosidad en la pared y, a menudo, se considera el único factor en la selección de n . Una misma sección de un canal natural puede tener partes de rugosidad diferente, debido por lo general a la presencia de gravas gruesas en el fondo y finas en las orillas. Cuando el material en el

perímetro mojado es fino, n es pequeño y se ve poco afectado por los cambios de tirante; sin embargo, cuando está compuesto de gravas y cantos rodados, n es mayor y varía mucho con el tirante. Por ejemplo, los cantos rodados de gran tamaño comúnmente se depositan en el lecho y producen valores grandes de n con niveles bajos del agua, o viceversa.

- b) *Irregularidades del canal.* Comprende las del perímetro mojado y las variaciones de la sección transversal en dimensiones y forma a lo largo del canal. En los ríos, dichas irregularidades son comúnmente resultado de depósitos y socavación. En general, las graduales tienen poco efecto sobre n , en cambio las bruscas tienen efectos más pronunciados que los que se esperan al considerar sólo la rugosidad superficial.
- c) *Obstrucciones.* La presencia de árboles caídos, basura, azolves y follaje en los ríos, o bien, de pilas de puente, rejillas, etc., en los canales artificiales, tiende a incrementar a n en una cantidad que depende del tamaño, forma, número y distribución de las obstrucciones.
- d) *Vegetación.* Se considera como rugosidad superficial que reduce también la capacidad del canal, retarda el flujo e incrementa a n . Su acción depende del nivel de agua, tipo de vegetación, altura, densidad, distribución, etc., y es determinante en el diseño de pequeños canales de drenaje.
- e) *Sinuosidad.* Las curvas de gran radio y poco frecuentes en la dirección del flujo, esto es, poco meandro, proporcionan incrementos de n relativamente pequeños, mientras que un meandro mayor, con curvas de radio pequeño, lo incrementa. Scobey sugiere que n aumente en 0.001 por cada 20° de deflexión en la curva.
- f) *Sedimentación y socavación.* En general, la sedimentación activa cambia de un canal muy irregular a otro relativamente uniforme y puede reducir a n , mientras que la socavación produce lo contrario, esto es, modifica las irregularidades y la rugosidad superficial del canal. Urquhart (1976) observó que es importante que dichos procesos sean activos o que lleguen a serlo en el futuro.
- g) *Tirante y caudal.* En la mayoría de los canales n disminuye al aumentar el tirante y el caudal. Cuando el tirante disminuye, emergen las irregularidades de la pared y tienen un efecto más pronunciado. Sin embargo, los incrementos de tirante, íntimamente relacionados con los del caudal, aumentan a n si las márgenes son rugosas, cubiertas de pasto o de arbustos, o si el nivel se incrementa lo suficiente para cubrir planicies de inundación. Puede decirse que el coeficiente n varía con el tirante que sumerge o no a las rugosidades, debiendo calcularse a partir de un valor compuesto equivalente.

Con el fin de tomar en cuenta los diferentes elementos que influyen en el coeficiente de Manning, Cowan (referencia 15) desarrolló una ecuación para estimar a n , que es

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) m_5 \quad (2.26)$$

donde n_0 es el coeficiente base para un canal recto, uniforme y regular, con el material del sitio y libre de vegetación, obstrucciones, cambios de forma y alineación. El coeficiente n_1 considera el efecto de las irregularidades del canal, n_2 las variaciones en forma y tamaño de la sección, n_3 las obstrucciones del área hidráulica, n_4 la densidad, tipo de vegetación en márgenes y fondo, y las características del flujo, y m_5 es un factor de corrección por efecto de las sinuosidades o curvas que muestra el curso del río o canal. Los factores mencionados se estiman por la importancia de su efecto crítico y deben evaluarse de manera independiente.

La entidad denominada *Soil Conservation Service* (SCS) de Estados Unidos de Norteamérica sugiere que la turbulencia del flujo se puede usar como una medida o indicador del grado de retardamiento, esto es, los factores que inducen un mayor grado de turbulencia producen también un incremento mayor de n .

El valor básico de n_0 puede tomarse de la tabla 2.6c o d con las condiciones mencionadas y en canales naturales se complementa con los valores dados en la tabla 2.7, sugeridos por el SCS.

Los factores restantes se estiman de la misma tabla 2.7.

2.4.4 Método de ecuaciones empíricas

Un gran número de ecuaciones han sido obtenidas experimentalmente para estimar el coeficiente de Manning. Quizá la que más se utiliza es la propuesta por Strickler (ecuación 2.19), aunque no se conoce con precisión la manera en que efectuó sus experimentos ni las dimensiones que tuvo la rugosidad equivalente en el canal, por consecuencia, tampoco el valor del coeficiente que obtuvo en su ecuación.

El método de ecuaciones empíricas tiene mayor utilidad en canales naturales y artificiales sin recubrimiento, donde la rugosidad equivalente se sustituye por el diámetro de las partículas que constituyen su lecho. En este sentido, después de hacer un análisis granulométrico de dicho material (ver sección 7.2.6) se establecen los términos siguientes:

d_i diámetro de las partículas para el que i por ciento en peso de la muestra del material tiene un tamaño igual o menor que d_i .

P_i por ciento en peso de la muestra del material cuyo tamaño es igual o menor que d_i . También es igual al por ciento i que se utiliza en la definición de d_i .

Por ejemplo, d_{65} es el diámetro del material para el que el 65 por ciento en peso de la muestra tiene un tamaño igual o menor que dicho diámetro.

De la misma manera, el diámetro medio d_m del material se define como sigue

$$d_m = \frac{\Sigma(d_i P_i)}{100} \quad (2.27)$$

Tabla 2.7. Factores correctivos de n (ecuación 2.26), según el *Soil Conservation Service* (referencia 17)

Condiciones del cauce o canal	Valor del coeficiente
1. Características del canal:	n_0
a) En tierra.	0.02
b) Cortados en roca.	0.025
c) En grava fina.	0.024
d) En grava gruesa.	0.028
2. Grado de irregularidad:	n_1
a) Fronteras lisas. Lo mejor que se obtiene para los materiales que se utilizan.	0
b) Irregularidades menores. Por ejemplo, canal bien dragado o excavado, o ligeramente socavado en las orillas, o canales de drenaje.	0.005
c) Irregularidades moderadas. Canal mal dragado o excavado. Ligera socavación en las márgenes.	0.01
d) Muy irregular. Salientes o entrantes continuas del mismo orden de magnitud que el tirante. Erosiones muy irregulares en las márgenes.	0.02
3. Variaciones de la sección transversal en forma y tamaño:	n_2
a) Graduales.	0
b) Secciones grandes y pequeñas alternadas ocasionalmente. Se alternan secciones amplias y estrechas por cambio de forma o del ancho de la plantilla, causando desviación ocasional desde el cauce principal a ambos lados.	0.005
c) Secciones grandes y pequeñas alternadas frecuentemente o bien cambios de forma que causan desviación ocasional desde el cauce principal a ambos lados.	0.01 a 0.015
4. Obstrucciones al área hidráulica debidas a grandes rocas troncos, depósitos de desperdicios o de rocas (conviene hacer mediciones directas en tramos representativos):	n_3
	0
a) Sin obstrucción.	0.01 a 0.015
b) Menores.	0.02 a 0.03
c) Apreciables.	0.04 a 0.06
d) Severas.	
5. Cantidad y tipo de vegetación (conviene hacer mediciones directas):	n_4
a) Poca densidad. Márgenes cubiertas de pasto o hierbas. Tirante 2 a 3 veces mayor que la altura de la vegetación.	0.005 a 0.1
b) Moderada. Matorral o pastos. El tirante de agua es de 2 a 3 veces mayor que la altura media de la vegetación. Troncos delgados sin hojas.	0.01 a 0.25
c) Densa. Igual a la anterior pero con tirantes similares a la altura de la vegetación. Arbustos.	0.025 a 0.05
d) Muy densa. Los tirantes son del orden de la mitad de la altura de la vegetación.	0.05 a 0.1

Continúa

Tabla 2.7. (continuación)

Condiciones del cauce o canal	Valor del coeficiente
6. Grado de sinuosidad. Se define como el cociente s de la distancia entre dos puntos siguiendo el eje del cauce y la distancia en la línea recta entre los mismos puntos. Puede ser:	m_s
a) Menor, si $s < 1.2$;	1.0
b) Apreciable, si $1.2 \leq s < 1.5$;	1.15
c) Severo, si $s \geq 1.5$.	1.3
James (referencia 18), en 1994, propuso que:	
$m_s = 0.43 s + 0.57$, si $s < 1.7$;	
$m_s = 1.3$, si $s \geq 1.7$;	
a fin de eliminar las discontinuidades en los límites de los intervalos de s considerados por el SCS.	

Una de las primeras ecuaciones experimentales se debe a Strickler (referencia 13, 1923), quien obtuvo la ecuación 2.19 para determinar el coeficiente n de Manning en función de la rugosidad k_s del canal.

Cuando se trata de canales excavados en material no cohesivo, se acostumbra sustituir k_s en la ecuación de Williamson (referencia 14) por el diámetro d_{75} del canal, en mm, de manera que la ecuación 2.22 se expresa en la forma

$$n = 0.0119 d_{75}^{1/6} \quad (2.28)$$

Henderson (referencia 1) indicó que los resultados de Strickler se obtuvieron de experimentos en ríos de fondo plano, es decir, sin ondulaciones, constituidos por un lecho de grava, y que por tratarse de un material no cohesivo, la rugosidad k_s podría sustituirse por el diámetro medio d_m del material. La ecuación publicada por Henderson, en 1966, atribuida a Strickler, fue

$$n = 0.034 d_m^{1/6} \quad (2.29a)$$

sin especificar las dimensiones de d_m . Suponiendo que éstas fueran en pies, como sugiere Chow, la conversión correspondiente con d_m en mm sería

$$n = 0.0132 d_m^{1/6} \quad (2.29b)$$

que difiere de la ecuación 2.19c si k_s coincide con d_m .

Sin embargo, Henderson argumentó que el valor efectivo de d_m , desde el punto de vista de resistencia al flujo, equivale al de un tamaño mayor (dos a tres veces el medio) con el cual el lecho tiende a acorazarse. De ahí que el coeficiente de la ecuación 2.29b tendría que disminuirse por el factor resultante de la raíz sexta de un número entre 1/2 y 1/3, esto es, entre 11 y 17 por ciento menor, o bien, un valor del coeficiente en dicha ecuación entre 0.0117 y 0.0109, que lo asemeja al de la ecuación 2.28.

En cambio, Simons y Senturk (referencia 19), en 1976, consideraron que los experimentos de Strickler habían sido realizados en un canal excavado sobre la superficie del terreno, recubierto en el fondo y márgenes con arena de tamaño uniforme, y además que su ecuación no se aplicaba a canales de fondo móvil.

Raudkivi (referencia 20), en 1976, estableció que la ecuación de Strickler era

$$n = 0.042 d_m^{1/6} \quad (2.30)$$

donde d_m en m, o bien

$$n = 0.0133 d_{65}^{1/6} \quad (2.31)$$

donde d_{65} en mm. Esta última es prácticamente igual a la ecuación 2.29b sugerida por Henderson. Raudkivi propuso utilizar la ecuación 2.31 en el cálculo de la rugosidad en modelos hidráulicos de fondo fijo.

Garde y Raju (referencia 21), en 1978, establecieron que los datos analizados por Strickler provenían de varios ríos en Suiza, con lechos formados de material grueso, libres de ondulaciones. La ecuación dada por estos autores y atribuida a Strickler fue

$$n = 0.015 d_{50}^{1/6} \quad (2.32)$$

donde d_{50} en mm.

Subramanya (referencia 22), en 1982, propuso la ecuación de Strickler en la forma

$$n = 0.0149 d_{50}^{1/6} \quad (2.33)$$

prácticamente igual a la de Garde y Raju, donde d_{50} en mm.

El debate anterior muestra las distintas interpretaciones que se han dado a los resultados de Strickler y que a la fecha permanecen todavía sin aclaración confiable.

Meyer-Peter y Müller (referencia 23), en 1948, obtuvieron la siguiente ecuación

$$n = 0.0122 d_{90}^{1/6} \quad (2.34)$$

donde d_{90} en mm, para mezclas de material en el lecho con una proporción importante de granos gruesos.

Mediante experimentos en canales pavimentados con piedra redondeada, Lane y Carlson (referencia 24), en 1953, determinaron que

$$n = 0.0152 d_{75}^{1/6} \quad (2.35)$$

donde d_{75} en mm.

Con las ecuaciones empíricas se calcula n dentro de un intervalo amplio de diámetros de material no cohesivo.

Ejemplo 2.2. Un canal de drenaje de un área natural fue dragado hasta conformar una sección que se asemeja a un trapecio de 3.50 m de ancho de plantilla y taludes de 1.5:1. Para el nivel máximo del agua, el tirante medio es de 2.50 m y el cauce acusa un grado apreciable de sinuosidad. Si bien los taludes de sus márgenes son bastante regulares, su plantilla no es plana y sigue un perfil irregular; asimismo, la variación del área a lo largo del cauce es moderada. El material del fondo está constituido por grava media cuyo diámetro d_{50} es del orden de 16 mm. En verano, el crecimiento de vegetación llega a cubrir el fondo y las márgenes y puede clasificarse como muy densa. *a)* Determinar el coeficiente n de Manning del canal para la época de estiaje, suponiendo que el cauce sea recto y uniforme. *b)* Estimar el mismo coeficiente para las condiciones reales del canal en época de lluvias.

Solución a. De acuerdo con la tabla 2.6c, el canal quedaría clasificado como a.3, con el valor normal de $n = 0.025$. Por otra parte, de la ecuación 2.32, n resulta

$$n = 0.015 (16)^{1/6} = 0.0238$$

que queda dentro del intervalo de valores de la tabla.

Solución b. Siguiendo el método SCS, los factores que afectan a n se obtienen de la tabla 2.7 y de las siguientes consideraciones:

— Valor básico de n_0 .	0.026
— La descripción de la variación de la sección en forma y tamaño sugiere que es insignificante.	0.00
— La descripción indica un grado moderado de irregularidades.	0.01
— No hay obstrucciones en el canal.	0.00
— La vegetación que crece es muy densa.	0.08
— La sinuosidad es apreciable.	1.15

Se aplica la ecuación 2.26 y resulta

$$n = (0.026 + 0.01 + 0.08) 1.15 = 0.133$$

valor bastante mayor que el obtenido en el inciso a.

2.4.5 Método de medición de la velocidad

Como se indicó en la sección 1.10.1, la ley de distribución de la velocidad sobre una vertical, en un flujo turbulento sobre un fondo hidráulicamente rugoso, se obtiene de la ecuación 1.34 haciendo $B = 8.5$. Así, resulta la ecuación

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (2.36a)$$

o bien

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{30 y}{k_s} \quad (2.36b)$$

donde y es la distancia del fondo al punto en consideración, k_s la rugosidad de la frontera y v_* la velocidad de fricción definida por la ecuación 2.2. De esta manera, designando por $v_{0.2}$ a la velocidad a $0.2 d$ de profundidad, esto es, $y = 0.8 d$ desde el fondo, y $v_{0.8}$ a la correspondiente a una profundidad de $0.8 d$, es decir, $y = 0.2 d$ desde el fondo, de la ecuación 2.36b se obtiene:

$$v_{0.2} = 2.5 v_* \ln (24 d/k_s) \quad (2.37)$$

$$v_{0.8} = 2.5 v_* \ln (6 d/k_s) \quad (2.38)$$

donde d es el tirante del flujo.

Se divide la ecuación 2.37 entre la 2.38 y se designa x al cociente $v_{0.2}/v_{0.8}$, así resulta

$$x = \frac{\ln (24 d/k_s)}{\ln (6 d/k_s)} = \frac{\ln (d/k_s) + 3.1781}{\ln (d/k_s) + 1.7918}$$

o bien

$$\ln (d/k_s) = \frac{1.7918 x - 3.1781}{1 - x} \quad (2.39)$$

La ecuación para la velocidad media en canales hidráulicamente rugosos se obtiene de la ecuación 1.38b, con $A_r' = 6.25$ y $d \approx R_h$; esto es

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{d}{k_s} + 6.25$$

Al sustituir en esta ecuación a la 2.39, resulta

$$\frac{V}{v_*} = \frac{1.771 (x + 0.957)}{x - 1} \quad (2.40)$$

y con la ecuación 2.15 se obtiene finalmente

$$n = \frac{(x - 1) d^{1/6}}{5.546 (x + 0.957)} \quad (2.41)$$

en el sistema internacional de unidades.

Con la ecuación 2.41 se estiman valores de n para el flujo en canales hidráulicamente rugosos y anchos, donde ocurre una distribución logarítmica de la velocidad sobre una vertical. En el caso de un canal de sección cualquiera se sustituye d por el tirante medio (A/T).

Chow (referencia 15) desarrolló este método, pero advirtió que debe utilizarse con precaución debido a que no ha sido verificado. En 1977 French y McCutcheon (referencia 25) aplicaron el método a un estudio del río Cumberland, Tennessee, encontrando estimaciones razonables de n , aunque también advirtieron que todavía es necesaria la verificación adicional.

Ejemplo 2.3. El río, cuya sección se muestra en la figura 1.8, tiene un área hidráulica de 33.7 m^2 cuando el tirante máximo es de 3.35 m y el ancho de la superficie libre de 14 m . La velocidad medida sobre la vertical de máximo tirante, a la profundidad $0.2 d$, es de 1.18 m/s , y a $0.8 d$, de 0.85 m/s . Determinar el coeficiente n de Manning que tendría el río en el tramo de mediciones.

Solución. El tirante medio del río es

$$\frac{A}{T} = \frac{33.7}{14} = 2.41 \text{ m}$$

Asimismo, el valor de x en la ecuación 2.41 resulta

$$x = \frac{1.18}{0.85} = 1.388$$

Por lo tanto, de la ecuación 2.41 se obtiene

$$n = \frac{(1.388 - 1) (2.41)^{1/6}}{5.546 (1.388 + 0.957)} = 0.0346$$

2.4.6 Coeficiente n equivalente

En ocasiones, la sección puede tener partes del perímetro mojado con rugosidades distintas, lo que trae como consecuencia diferentes valores de n para cada una. En este caso, para seguir aplicando la ecuación de Manning, es necesario calcular un valor n_e equivalente y representativo de todo el perímetro mojado, y para ello existen diferentes criterios.

Se puede suponer que cada parte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ del perímetro mojado, con coeficientes $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, define subsecciones de área hidráulica $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, mediante las verticales que se indican en la figura 2.6.

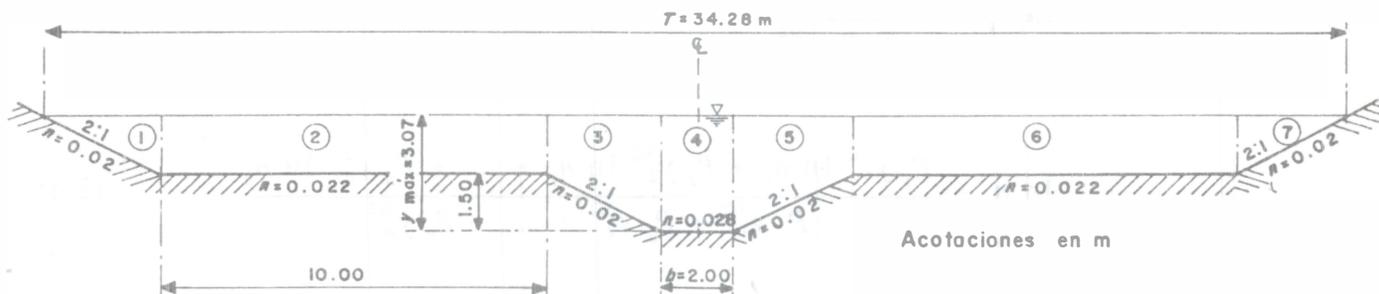


Figura 2.6. Sección del canal del ejemplo 2.4

Horton (referencia 26), en 1933, y Einstein (referencia 27), en 1934, supusieron que en cada subsección hay la misma velocidad media que en la sección completa, esto es, $V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_n = V$, y que entonces el coeficiente de Manning equivalente se obtiene de la ecuación

$$n_e = \left[\frac{\sum (P_i n_i^{1.5})}{P} \right]^{2/3} = \left[\frac{P_1 n_1^{1.5} + P_2 n_2^{1.5} + \dots + P_n n_n^{1.5}}{P} \right]^{2/3} \quad (2.42)$$

Mühlhofer (referencia 28), en 1933, y Einstein y Banks (referencia 29), en 1951, consideraron que la fuerza total resistente al flujo es igual a la suma de las fuerzas desarrolladas sobre cada parte del perímetro, obteniendo

$$n_e = \left[\frac{\sum (P_i n_i^2)}{P} \right]^{1/2} = \left[\frac{P_1 n_1^2 + P_2 n_2^2 + \dots + P_n n_n^2}{P} \right]^{1/2} \quad (2.43)$$

Lotter (referencia 30), en 1933, asumió que el gasto total es la suma de los gastos de cada parte del área, y que

$$n_e = \frac{P R_h^{5/3}}{\sum \left[\frac{P_i R_{hi}^{5/3}}{n_i} \right]} = \frac{P R_h^{5/3}}{\frac{P_1 R_{h1}^{5/3}}{n_1} + \frac{P_2 R_{h2}^{5/3}}{n_2} + \dots + \frac{P_n R_{hn}^{5/3}}{n_n}} \quad (2.44)$$

donde R_{h1} , R_{h2} , ..., R_{hn} son los radios hidráulicos de las subsecciones y R_h el de toda la sección.

Krishnamurthy y Christensen (referencia 31), en 1972, supusieron una distribución logarítmica de la velocidad y derivaron la siguiente ecuación:

$$\ln n_e = \frac{\sum P_i y_i^{3/2} \ln n_i}{\sum P_i y_i^{3/2}}$$

$$\ln n_e = \frac{P_1 y_1^{3/2} \ln n_1 + P_2 y_2^{3/2} \ln n_2 + \dots + P_n y_n^{3/2} \ln n_n}{P_1 y_1^{3/2} + P_2 y_2^{3/2} + \dots + P_n y_n^{3/2}} \quad (2.45)$$

donde y_i es el tirante al centro de la subsección i .

Motayed y Krishnamurthy (referencia 32), en 1980, utilizaron los datos de 36 secciones en canales naturales obtenidos por la entidad *U.S. Geological Survey* y demostraron que la rugosidad equivalente calculada mediante la ecuación 2.42, de Horton y Einstein, proporciona el error mínimo de las cuatro ecuaciones mencionadas para el cálculo de n_e .

Otros métodos, como el de Cox (1973) y el de Colebatch (1973), utilizan expresiones más sencillas para calcular n_e , pero es necesario determinar las áreas de las subsecciones de manera más elaborada sin aumentar la precisión del resultado. Pueden consultarse en la referencia 33.

Ejemplo 2.4. La sección del canal descrita en la figura 2.6 tiene coeficientes n distintos de acuerdo con las subsecciones que se señalan. Determinar: *a)* el coeficiente de Manning equivalente en toda la sección: *b)* la velocidad media del agua si el caudal es de $100 \text{ m}^3/\text{s}$.

Solución a. Los cálculos para solucionar este ejemplo con las ecuaciones 2.42 a 2.44 se resumen en la siguiente tabla.

Subsección	n	A en m^2	P en m	R_h en m	$P n^{1.5}$	$P n^2$	$PR_h^{5/3}/n$
1	0.02	2.4649	3.5106	0.7021	0.00993	0.0014	97.3531
2	0.022	15.70	10.00	1.57	0.03263	0.00484	963.9993
3	0.02	6.96	3.3541	2.0751	0.00949	0.00134	566.1668
4	0.028	6.14	2.00	3.07	0.00937	0.00157	463.2008
5	0.02	6.96	3.3541	2.0751	0.00949	0.00134	566.1668
6	0.022	15.70	10.00	1.57	0.03263	0.00484	963.9993
7	0.02	2.4649	3.5106	0.7021	0.00993	0.0014	97.3531
$\Sigma =$		56.3898	35.7294		0.11347	0.01673	3718.2392

Con $R_h = 56.3898 / 35.7294 = 1.5782 \text{ m}$, de la ecuación 2.42 resulta

$$n_e = \left(\frac{0.11347}{35.7294} \right)^{2/3} = 0.0216$$

De la ecuación 2.43, se obtiene

$$n_e = \left(\frac{0.01673}{35.7294} \right)^{1/2} = 0.02164$$

Por último, de la ecuación 2.44 se tiene

$$n_e = \frac{35.7294 (1.5782)^{5/3}}{3718.2392} = 0.0206$$

Como se observa, las diferencias de los resultados son muy pequeñas y de acuerdo con la discusión, el primero es el más preciso.

Solución b. La velocidad media en el canal es

$$V = \frac{100}{56.3898} = 1.7734 \text{ m/s}$$

2.5 CÁLCULO DEL FLUJO UNIFORME

2.5.1 Consideraciones generales

En el cálculo del flujo uniforme intervienen seis variables: el gasto, la velocidad, el tirante que se establece, el coeficiente de Manning, la pendiente y la dimensión de la sección (de forma conocida), esto es, el ancho de la plantilla y el talud si la sección es trapezoidal o rectangular, o el diámetro si es circular o de herradura.

Son dos las ecuaciones con las que se puede hacer el cálculo, independientemente del tipo de problema: la ecuación de continuidad

$$Q = A V$$

y la ecuación de Manning para la fricción

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

El gasto se expresa entonces de la siguiente manera

$$Q = \frac{A}{n} R_h^{2/3} S^{1/2} = K S^{1/2} \quad (2.46)$$

donde

$$K = \frac{A R_h^{2/3}}{n} \quad (2.47)$$

se conoce como el factor de conducción de la sección y es una medida de la capacidad del canal para conducir el agua.

La cantidad

$$A R_h^{2/3} = n K \quad (2.48)$$

se conoce como módulo de sección, y tomando en cuenta la ecuación 2.46 también se expresa en la forma

$$A R_h^{2/3} = \frac{n Q}{\sqrt{S}} \quad (2.49)$$

El término de la derecha de esta ecuación depende de n , Q y S , pero el de la izquierda exclusivamente de la geometría de la sección. Esto indica que para una combinación particular de n , Q y S hay un tirante único y , llamado normal, que se establece en flujo uniforme siempre que el módulo de sección sea función continua y creciente del tirante. La condición recíproca también se cumple, es decir, dados y , n y S , hay un valor de Q para el cual se establece el flujo uniforme, que se conoce como gasto normal.

En la práctica se presentan problemas de revisión o de diseño, en los que debe haber, cuando más, dos incógnitas. Los problemas de revisión consisten en calcular:

- a) El gasto y la velocidad cuando se conocen la pendiente, el coeficiente de Manning, el tirante y la geometría de la sección.
- b) El tirante y la velocidad cuando se conocen el gasto, el coeficiente de Manning, la pendiente y la geometría de la sección.

Los problemas de diseño consisten en calcular:

- a) La dimensión de la sección y la velocidad cuando se conocen el gasto, el coeficiente de Manning, el tirante, la pendiente y la forma de la sección.
- b) La dimensión de la sección y el tirante cuando se conocen el gasto, la velocidad, el coeficiente de Manning, la pendiente y la forma de la sección.
- c) La pendiente y la velocidad cuando se conocen el gasto, el tirante, el coeficiente de Manning y la geometría de la sección.

El talud de un canal de sección trapezoidal depende, principalmente, de las propiedades mecánicas del material en que se excava, y que sea o no revestido. En la sección 2.7.1 se mencionan lineamientos que deben considerarse y las tablas 7.1 y 7.2 indican los valores sugeridos para un diseño preliminar.

Cualquiera que sea el problema que se maneje, la velocidad conocida o calculada no debe rebasar la máxima permisible, ya sea que se trate de un canal revestido o excavado en un material resistente a la erosión (por ejemplo roca sana), o de uno no revestido donde el material resultante de la excavación debe resistir el efecto erosivo del agua. Al respecto, en los subcapítulos 7.6 y 7.8 se indican los lineamientos que deben tomarse en cuenta en cualquiera de los dos casos, con el fin de tener un canal de sección estable.

2.5.2 Gasto y velocidad

Conocidos S , n , y , b , y el talud k si la sección es trapezoidal o rectangular, o el diámetro D si es circular o herradura, el cálculo del gasto se hace directamente de la ecuación 2.46, con la ayuda de las tablas 1.1 y 1.2 para la obtención de los elementos geométricos de la sección. Para las secciones circular y herradura se presentan, además, las tablas 2.8 y 2.9 respectivamente, que proporcionan de manera directa dichos elementos. La interpolación lineal entre valores sucesivos de las tablas es suficiente en la mayoría de los casos.

La velocidad se obtiene dividiendo el gasto entre el área de la sección.

2.5.3 Tirante y velocidad

Además de Q , n y S , se conocen b y k si la sección es rectangular o trapecial, o D si es circular o herradura. Por tanto, se puede determinar el módulo de sección $n K = n Q / \sqrt{S}$ necesario.

Una solución explícita de y en la ecuación 2.49 no es posible, por lo que el problema debe resolverse por cualquiera de los caminos siguientes: por iteraciones o por medio de gráficas.

La solución por iteraciones se refiere a la ecuación 2.49, donde el término de la derecha es el módulo de la sección, que es función de su geometría y del tirante normal. Nuevamente las tablas 1.1, 1.2, 2.8 y 2.9 son útiles en la solución.

Con el fin de tener una relación sin dimensiones, es conveniente dividir ambos términos de la ecuación 2.49 entre una dimensión característica de la sección, que puede ser el ancho de plantilla si es trapecial o rectangular, o el diámetro si es circular o herradura que trabaja parcialmente llena. La dimensión característica debe tener como exponente a $8/3$ para lograr la relación sin dimensiones.

Para las secciones rectangular y trapecial se tiene entonces

$$\frac{A R_h^{2/3}}{b^{8/3}} = \frac{n Q}{b^{8/3} S^{1/2}} \quad (2.50)$$

y para las secciones circular y herradura

$$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}} = \frac{n Q}{D^{8/3} S^{1/2}} \quad (2.51)$$

Para tener una solución gráfica, en la figura 2.7 se presentan las curvas que relacionan cualquiera de los dos términos de las ecuaciones 2.50 y 2.51 con los valores de y/b o y/D . La solución para las secciones circular y herradura se presenta también en las tablas 2.8 y 2.9.

Dependiendo del tipo de sección se calcula $n K/b^{8/3}$ o $n K/D^{8/3}$. Con la ayuda de la figura 2.7 (o las tablas 2.8 y 2.9 para las secciones circular y herradura) se obtiene y/b o y/D .

Cuando se desea calcular el tirante normal por tanteos, puede utilizarse como primera aproximación el valor obtenido gráficamente.

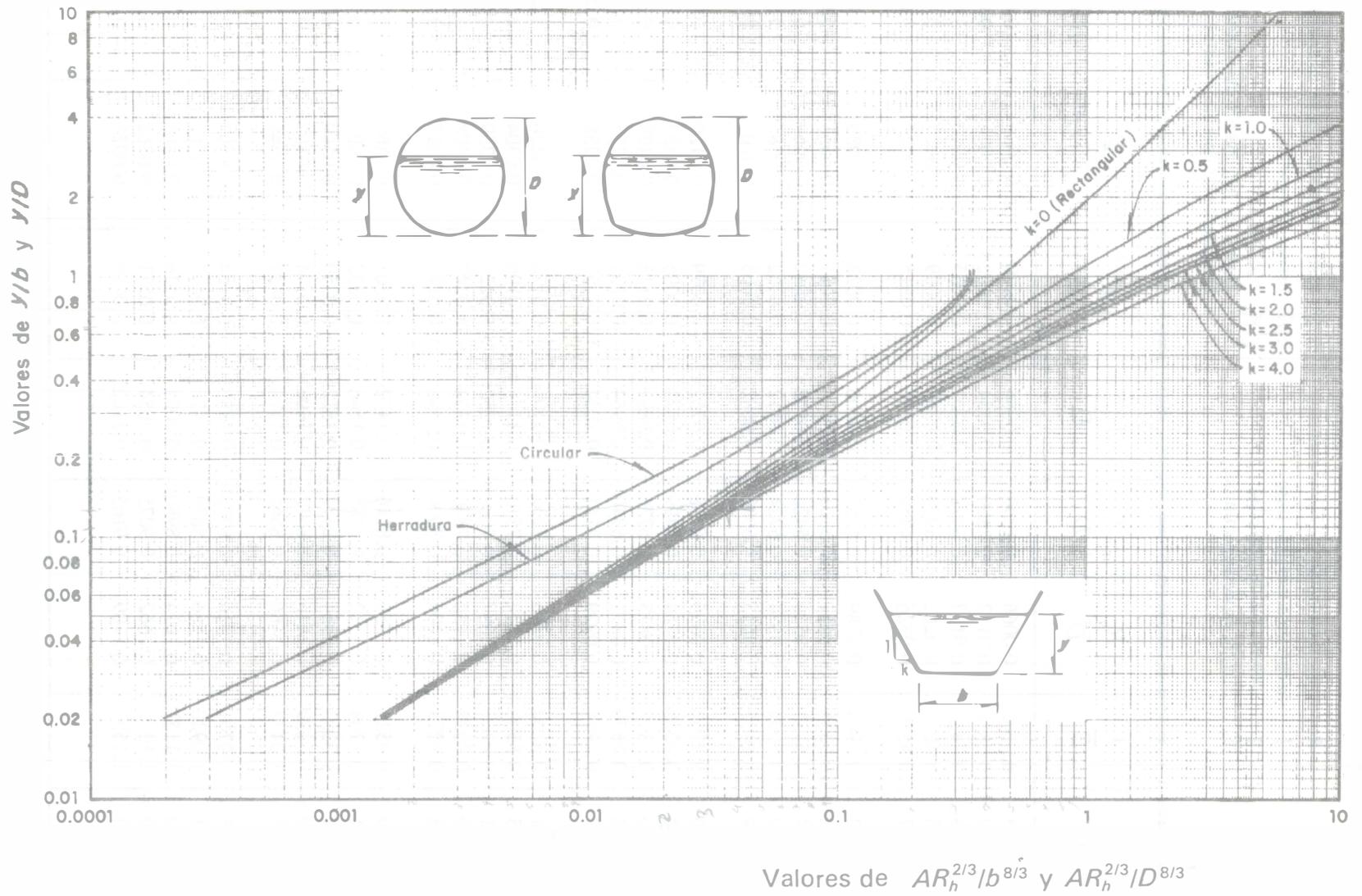


Figura 2.7. Curvas para determinar el tirante normal, según Chow (referencia 15) y el autor

Tabla 2.8. Elementos geométricos en canales de sección circular

D diámetro	R_h radio hidráulico	Q gasto cuando el tirante es crítico
y tirante	T ancho de superficie libre	A/T tirante hidráulico
A área hidráulica	g aceleración de gravedad	$g' = g \cos \theta/\alpha$
P perímetro mojado	E_c energía específica mínima	θ ángulo de inclinación del fondo
		α coeficiente de energía cinética

$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{D^2}$	$\frac{P}{D}$	$\frac{R_h}{D}$	$\frac{T}{D}$	$\frac{A/T}{D}$	$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}}$	$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{5/2}}$	$\frac{E_c}{D \cos \theta}$
0.01	0.0013	0.2003	0.0066	0.1990	0.0066	0.0000	0.0001	0.0133
0.02	0.0037	0.2838	0.0132	0.2800	0.0134	0.0002	0.0004	0.0267
0.03	0.0069	0.3482	0.0197	0.3412	0.0202	0.0005	0.0010	0.0401
0.04	0.0105	0.4027	0.0262	0.3919	0.0268	0.0009	0.0017	0.0534
0.05	0.0147	0.4510	0.0326	0.4359	0.0336	0.0015	0.0027	0.0668
0.06	0.0192	0.4949	0.0389	0.4750	0.0406	0.0022	0.0039	0.0803
0.07	0.0242	0.5355	0.0451	0.5103	0.0474	0.0031	0.0053	0.0937
0.08	0.0294	0.5735	0.0513	0.5426	0.0542	0.0040	0.0069	0.1071
0.09	0.0350	0.6094	0.0574	0.5724	0.0612	0.0052	0.0087	0.1206
0.10	0.0409	0.6435	0.0635	0.6000	0.0682	0.0065	0.0107	0.1341
0.11	0.0470	0.6761	0.0695	0.6258	0.0752	0.0079	0.0129	0.1476
0.12	0.0534	0.7075	0.0754	0.6499	0.0822	0.0095	0.0153	0.1611
0.13	0.0600	0.7377	0.0813	0.6726	0.0892	0.0113	0.0179	0.1746
0.14	0.0668	0.7670	0.0871	0.6940	0.0964	0.0131	0.0217	0.1882
0.15	0.0739	0.7954	0.0929	0.7141	0.1034	0.0152	0.0238	0.2017
0.16	0.0811	0.8230	0.0986	0.7332	0.1106	0.0173	0.0270	0.2153
0.17	0.0885	0.8500	0.1042	0.7513	0.1178	0.0196	0.0304	0.2289
0.18	0.0961	0.8763	0.1097	0.7684	0.1252	0.0220	0.0339	0.2426
0.19	0.1039	0.9020	0.1152	0.7846	0.1324	0.0247	0.0378	0.2562
0.20	0.1118	0.9273	0.1206	0.8000	0.1398	0.0273	0.0418	0.2699
0.21	0.1199	0.9521	0.1259	0.8146	0.1472	0.0301	0.0460	0.2836
0.22	0.1281	0.9764	0.1312	0.8285	0.1546	0.0333	0.0503	0.2973
0.23	0.1365	1.0003	0.1364	0.8417	0.1622	0.0359	0.0549	0.3111
0.24	0.1449	1.0239	0.1416	0.8542	0.1696	0.0394	0.0597	0.3248
0.25	0.1535	1.0472	0.1466	0.8660	0.1774	0.0427	0.0646	0.3387
0.26	0.1623	1.0701	0.1516	0.8773	0.1850	0.0464	0.0697	0.3525
0.27	0.1711	1.0928	0.1566	0.8879	0.1926	0.0497	0.0751	0.3663
0.28	0.1800	1.1152	0.1614	0.8980	0.2004	0.0536	0.0805	0.3802
0.29	0.1890	1.1373	0.1662	0.9075	0.2084	0.0571	0.0862	0.3942
0.30	0.1982	1.1593	0.1709	0.9165	0.2162	0.0610	0.0921	0.4021

Continúa

Tabla 2.8. (continuación)

$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{D^2}$	$\frac{P}{D}$	$\frac{R_h}{D}$	$\frac{T}{D}$	$\frac{A/T}{D}$	$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}}$	$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{2.5}}$	$\frac{E_c}{D \cos \theta}$
0.31	0.2074	1.1810	0.1755	0.9250	0.2242	0.0650	0.0981	0.4221
0.32	0.2167	1.2025	0.1801	0.9330	0.2322	0.0690	0.1044	0.4361
0.33	0.2260	1.2239	0.1848	0.9404	0.2404	0.0736	0.1107	0.4502
0.34	0.2355	1.2451	0.1891	0.9474	0.2486	0.0776	0.1172	0.4643
0.35	0.2450	1.2661	0.1935	0.9539	0.2568	0.0820	0.1241	0.4784
0.36	0.2546	1.2870	0.1978	0.9600	0.2652	0.0864	0.1310	0.4926
0.37	0.2642	1.3078	0.2020	0.9656	0.2736	0.0909	0.1381	0.5068
0.38	0.2739	1.3284	0.2061	0.9708	0.2822	0.0955	0.1453	0.5211
0.39	0.2836	1.3490	0.2102	0.9755	0.2908	0.1020	0.1528	0.5354
0.40	0.2934	1.3694	0.2142	0.9798	0.2994	0.1050	0.1603	0.5497
0.41	0.3032	1.3898	0.2181	0.9837	0.3082	0.1100	0.1682	0.5641
0.42	0.3132	1.4101	0.2220	0.9871	0.3172	0.1147	0.1761	0.5786
0.43	0.3229	1.4303	0.2257	0.9902	0.3262	0.1196	0.1844	0.5931
0.44	0.3328	1.4505	0.2294	0.9928	0.3352	0.1245	0.1927	0.6076
0.45	0.3428	1.4706	0.2331	0.9950	0.3446	0.1298	0.2011	0.6223
0.46	0.3527	1.4907	0.2366	0.9968	0.3538	0.1348	0.2098	0.6369
0.47	0.3627	1.5108	0.2400	0.9982	0.3634	0.1401	0.2186	0.6517
0.48	0.3727	1.5308	0.2434	0.9992	0.3730	0.1452	0.2275	0.6665
0.49	0.3827	1.5508	0.2467	0.9998	0.3828	0.1505	0.2366	0.6814
0.50	0.3927	1.5708	0.2500	1.0000	0.3928	0.1558	0.2459	0.6964
0.51	0.4027	1.5908	0.2531	0.9998	0.4028	0.1610	0.2553	0.7114
0.52	0.4127	1.6108	0.2561	0.9992	0.4130	0.1664	0.2650	0.7265
0.53	0.4227	1.6308	0.2591	0.9982	0.4234	0.1715	0.2748	0.7417
0.54	0.4327	1.6509	0.2620	0.9968	0.4340	0.1772	0.2848	0.7570
0.55	0.4426	1.6710	0.2649	0.9950	0.4448	0.1825	0.2949	0.7724
0.56	0.4526	1.6911	0.2676	0.9928	0.4558	0.1878	0.3051	0.7879
0.57	0.4625	1.7113	0.2703	0.9902	0.4670	0.1933	0.3158	0.8035
0.58	0.4723	1.7315	0.2728	0.9871	0.4786	0.1987	0.3263	0.8193
0.59	0.4822	1.7518	0.2753	0.9837	0.4902	0.2041	0.3373	0.8351
0.60	0.4920	1.7722	0.2776	0.9798	0.5022	0.2092	0.3484	0.8511
0.61	0.5018	1.7926	0.2797	0.9755	0.5144	0.2146	0.3560	0.8672
0.62	0.5115	1.8132	0.2818	0.9708	0.5270	0.2199	0.3710	0.8835
0.63	0.5212	1.8338	0.2839	0.9656	0.5398	0.2252	0.3830	0.8999
0.64	0.5308	1.8546	0.2860	0.9600	0.5530	0.2302	0.3945	0.9165
0.65	0.5404	1.8755	0.2881	0.9539	0.5666	0.2358	0.4066	0.9333

Continúa

Tabla 2.8. (continuación)

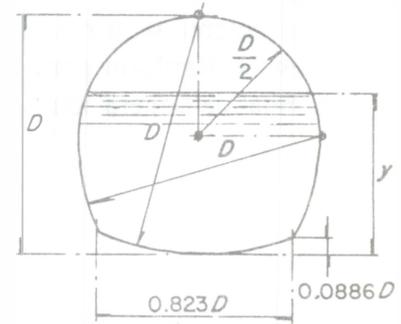
$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{D^2}$	$\frac{P}{D}$	$\frac{R_h}{D}$	$\frac{T}{D}$	$\frac{A/T}{D}$	$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}}$	$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{2.5}}$	$\frac{E_c}{D \cos \theta}$
0.66	0.5499	1.8965	0.2899	0.9474	0.5804	0.2407	0.4188	0.9502
0.67	0.5594	1.9177	0.2917	0.9404	0.5948	0.2460	0.4309	0.9674
0.68	0.5687	1.9391	0.2935	0.9330	0.6096	0.2510	0.4437	0.9848
0.69	0.5780	1.9606	0.2950	0.9250	0.6250	0.2560	0.4566	1.0025
0.70	0.5872	1.9823	0.2962	0.9165	0.6408	0.2608	0.4694	1.0204
0.71	0.5964	2.0042	0.2973	0.9075	0.6572	0.2653	0.4831	1.0386
0.72	0.6054	2.0264	0.2984	0.8980	0.6742	0.2702	0.4964	1.0571
0.73	0.6143	2.0488	0.2995	0.8879	0.6918	0.2751	0.5100	1.0759
0.74	0.6231	2.0714	0.3006	0.8773	0.7104	0.2794	0.5248	1.0952
0.75	0.6318	2.0944	0.3017	0.8660	0.7296	0.2840	0.5392	1.1148
0.76	0.6404	2.1176	0.3025	0.8542	0.7498	0.2888	0.5540	1.1349
0.77	0.6489	2.1412	0.3032	0.8417	0.7710	0.2930	0.5695	1.1555
0.78	0.6573	2.1652	0.3037	0.8285	0.7934	0.2969	0.5850	1.1767
0.79	0.6655	2.1895	0.3040	0.8146	0.8170	0.3008	0.6011	1.1985
0.80	0.6736	2.2143	0.3042	0.8000	0.8420	0.3045	0.6177	1.2210
0.81	0.6815	2.2395	0.3044	0.7846	0.8686	0.3082	0.6347	1.2443
0.82	0.6893	2.2653	0.3043	0.7684	0.8970	0.3118	0.6524	1.2685
0.83	0.6969	2.2916	0.3041	0.7513	0.9276	0.3151	0.6707	1.2938
0.84	0.7043	2.3186	0.3038	0.7332	0.9606	0.3182	0.6897	1.3203
0.85	0.7115	2.3462	0.3033	0.7141	0.9964	0.3212	0.7098	1.3482
0.86	0.7186	2.3746	0.3026	0.6940	1.0354	0.3240	0.7307	1.3777
0.87	0.7254	2.4038	0.3017	0.6726	1.0784	0.3264	0.7528	1.4092
0.88	0.7320	2.4341	0.3008	0.6499	1.1264	0.3286	0.7754	1.4432
0.89	0.7380	2.4655	0.2996	0.6258	1.1800	0.3307	0.8016	1.4800
0.90	0.7445	2.4981	0.2980	0.6000	1.2408	0.3324	0.8285	1.5204
0.91	0.7504	2.5322	0.2963	0.5724	1.3110	0.3336	0.8586	1.5655
0.92	0.7560	2.5681	0.2944	0.5426	1.3932	0.3345	0.8917	1.6166
0.93	0.7612	2.6061	0.2922	0.5103	1.4918	0.3350	0.9292	1.6759
0.94	0.7662	2.6467	0.2896	0.4750	1.6130	0.3353	0.9725	1.7465
0.95	0.7707	2.6906	0.2864	0.4359	1.7682	0.3349	1.0242	1.8341
0.96	0.7749	2.7389	0.2830	0.3919	1.9770	0.3340	1.0888	1.9485
0.97	0.7785	2.7934	0.2787	0.3412	2.2820	0.3322	1.1752	2.1110
0.98	0.7816	2.8578	0.2735	0.2800	2.7916	0.3291	1.3050	2.3758
0.99	0.7841	2.9412	0.2665	0.1990	3.9400	0.3248	1.5554	2.9600
1.00	0.7854	3.1416	0.2500	0.0000	∞	0.3117	∞	∞

Tabla 2.9. Elementos geométricos en canales de sección herradura

D diámetro
 y tirante
 A área hidráulica
 R_h radio hidráulico
 g aceleración de gravedad
 Q gasto cuando el tirante es el crítico
 E_c energía específica mínima

$$g' = \frac{g \cos \theta}{\alpha}$$

θ ángulo de inclinación del fondo
 α coeficiente de energía cinética



$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{D^2}$	$\frac{R_h}{D}$	$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}}$	$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{5/2}}$	$\frac{E_c}{D \cos \theta}$	$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{D^2}$	$\frac{R_h}{D}$	$\frac{A R_h^{2/3}}{D^{8/3}}$	$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{5/2}}$	$\frac{E_c}{D \cos \theta}$
0.01	0.0019	0.0066	0.00007	0.0002	0.0133	0.51	0.4466	0.2602	0.18202	0.2983	0.7334
0.02	0.0053	0.0132	0.00030	0.0005	0.0267	0.52	0.4566	0.2630	0.18743	0.3085	0.7485
0.03	0.0097	0.0198	0.00071	0.0014	0.0400	0.53	0.4666	0.2657	0.19284	0.3188	0.7637
0.04	0.0150	0.0264	0.00133	0.0025	0.0534	0.54	0.4766	0.2683	0.19826	0.3293	0.7791
0.05	0.0209	0.0329	0.00215	0.0038	0.0668	0.55	0.4865	0.2707	0.20358	0.3400	0.7945
0.06	0.0275	0.0394	0.00318	0.0055	0.0801	0.56	0.4965	0.2733	0.20910	0.3509	0.8100
0.07	0.0346	0.0459	0.00443	0.0075	0.0935	0.57	0.5064	0.2757	0.21451	0.3619	0.8257
0.08	0.0421	0.0524	0.00589	0.0098	0.1069	0.58	0.5163	0.2781	0.21997	0.3731	0.8415
0.09	0.0502	0.0590	0.00761	0.0124	0.1205	0.59	0.5261	0.2804	0.22538	0.3845	0.8574
0.10	0.0585	0.0670	0.00965	0.0155	0.1351	0.60	0.5359	0.2824	0.23067	0.3961	0.8735
0.11	0.0670	0.0748	0.01190	0.0188	0.1497	0.61	0.5457	0.2844	0.23600	0.4079	0.8897
0.12	0.0753	0.0823	0.01425	0.0224	0.1643	0.62	0.5555	0.2864	0.24136	0.4199	0.9061
0.13	0.0839	0.0895	0.01679	0.0262	0.1789	0.63	0.5651	0.2884	0.24667	0.4321	0.9226
0.14	0.0925	0.0964	0.01945	0.0302	0.1934	0.64	0.5748	0.2902	0.25195	0.4445	0.9394
0.15	0.1012	0.1031	0.02225	0.0344	0.2079	0.65	0.5843	0.2920	0.25717	0.4571	0.9563
0.16	0.1100	0.1097	0.02521	0.0388	0.2224	0.66	0.5938	0.2937	0.26237	0.4699	0.9734
0.17	0.1188	0.1161	0.02827	0.0434	0.2369	0.67	0.6033	0.2953	0.26753	0.4829	0.9908
0.18	0.1277	0.1222	0.03145	0.0482	0.2514	0.68	0.6126	0.2967	0.27251	0.4962	1.0083
0.19	0.1367	0.1282	0.03476	0.0532	0.2658	0.69	0.6219	0.2981	0.27752	0.5097	1.0262
0.20	0.1457	0.1341	0.03817	0.0584	0.2803	0.70	0.6312	0.2994	0.28249	0.5234	1.0443
0.21	0.1549	0.1398	0.04172	0.0637	0.2947	0.71	0.6403	0.3006	0.28733	0.5375	1.0628
0.22	0.1640	0.1454	0.04535	0.0692	0.3091	0.72	0.6493	0.3018	0.29214	0.5518	1.0815
0.23	0.1733	0.1508	0.04910	0.0749	0.3236	0.73	0.6582	0.3028	0.29680	0.5664	1.1007
0.24	0.1825	0.1560	0.05289	0.0808	0.3380	0.74	0.6671	0.3036	0.30134	0.5813	1.1202
0.25	0.1919	0.1611	0.05682	0.0868	0.3524	0.75	0.6758	0.3044	0.30581	0.5966	1.1402
0.26	0.2013	0.1662	0.06085	0.0930	0.3669	0.76	0.6844	0.3050	0.31011	0.6122	1.1606
0.27	0.2107	0.1710	0.06491	0.0994	0.3813	0.77	0.6929	0.3055	0.31430	0.6282	1.1816
0.28	0.2202	0.1758	0.06910	0.1059	0.3958	0.78	0.7012	0.3060	0.31841	0.6447	1.2032
0.29	0.2297	0.1804	0.07334	0.1126	0.4102	0.79	0.7094	0.3064	0.32242	0.6616	1.2254
0.30	0.2393	0.1850	0.07769	0.1194	0.4247	0.80	0.7175	0.3067	0.32631	0.6791	1.2484
0.31	0.2489	0.1895	0.08212	0.1264	0.4392	0.81	0.7254	0.3067	0.32990	0.6971	1.2723
0.32	0.2586	0.1938	0.08660	0.1336	0.4537	0.82	0.7332	0.3066	0.33338	0.7158	1.2971
0.33	0.2683	0.1981	0.09118	0.1409	0.4682	0.83	0.7408	0.3064	0.33669	0.7351	1.3230
0.34	0.2780	0.2023	0.09580	0.1484	0.4827	0.84	0.7482	0.3061	0.33983	0.7554	1.3502
0.35	0.2878	0.2063	0.10048	0.1560	0.4972	0.85	0.7554	0.3056	0.34273	0.7765	1.3789
0.36	0.2975	0.2103	0.10521	0.1638	0.5118	0.86	0.7625	0.3050	0.34549	0.7987	1.4094
0.37	0.3074	0.2142	0.11005	0.1718	0.5263	0.87	0.7693	0.3042	0.34796	0.8223	1.4419
0.38	0.3172	0.2181	0.11493	0.1798	0.5409	0.88	0.7759	0.3032	0.35018	0.8473	1.4769
0.39	0.3271	0.2217	0.11982	0.1881	0.5555	0.89	0.7823	0.3020	0.35214	0.8742	1.5151
0.40	0.3370	0.2252	0.12474	0.1965	0.5702	0.90	0.7884	0.3005	0.35371	0.9033	1.5570
0.41	0.3469	0.2287	0.12973	0.2050	0.5849	0.91	0.7943	0.2988	0.35501	0.9351	1.6039
0.42	0.3568	0.2322	0.13479	0.2137	0.5995	0.92	0.7999	0.2969	0.35599	0.9706	1.6571
0.43	0.3667	0.2356	0.13988	0.2225	0.6143	0.93	0.8052	0.2947	0.35658	1.0107	1.7189
0.44	0.3767	0.2390	0.14508	0.2315	0.6290	0.94	0.8101	0.2922	0.35672	1.0573	1.7928
0.45	0.3867	0.2422	0.15025	0.2406	0.6438	0.95	0.8146	0.2893	0.35632	1.1130	1.8845
0.46	0.3966	0.2454	0.15545	0.2499	0.6586	0.96	0.8188	0.2858	0.35527	1.1827	2.0046
0.47	0.4066	0.2484	0.16067	0.2593	0.6735	0.97	0.8224	0.2816	0.35332	1.2762	2.1753
0.48	0.4166	0.2514	0.16594	0.2688	0.6884	0.98	0.8256	0.2766	0.35049	1.4255	2.4542
0.49	0.4266	0.2544	0.17128	0.2785	0.7033	0.99	0.8280	0.2696	0.34555	1.6879	3.0704
0.50	0.4366	0.2574	0.17667	0.2883	0.7183	1.00	0.8293	0.2538	0.33243	∞	

Cuando se desea resolver un gran número de problemas de cálculo del tirante normal, es conveniente seguir un procedimiento numérico de iteraciones en las que se utiliza el método de Newton-Raphson para lograr mayor rapidez en la convergencia. En efecto, sea $(y)_i$ el tirante normal de la iteración i , para el cual existe el valor de la función dada por la ecuación 2.49 que es

$$F = A R_h^{2/3} - \frac{n Q}{\sqrt{S}} \quad (2.52)$$

Siendo $R_h = A/P$, la derivada de F resulta

$$F' = \frac{d}{dy} (A^{5/3} P^{-2/3}) = A^{5/3} \left[-\frac{2}{3} P^{-5/3} \frac{dP}{dy} \right] + P^{-2/3} \frac{5}{3} A^{2/3} \frac{dA}{dy}$$

toda vez que $n Q / \sqrt{S}$ es constante.

Si se considera la ecuación 1.2 se tiene

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left[5 T - 2 R_h \frac{dP}{dy} \right] \quad (2.53)$$

De este modo el tirante en la iteración $i + 1$ se obtiene de

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \left[\frac{F}{F'} \right]_i \quad (2.54)$$

En las ecuaciones anteriores dP/dy es la variación del perímetro mojado con el tirante, de modo que para la sección trapezoidal (tabla 1.1) $dP/dy = 2 \sqrt{1+k^2}$. Por tanto, se obtiene

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left(5 T - 4 R_h \sqrt{1+k^2} \right) \quad (2.55)$$

De la misma manera, de la tabla 1.2 para la sección circular se tiene

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{D} \left[1 - \frac{y}{D} \right]}}$$

Por tanto, resulta

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left[5 T - \frac{2 R_h}{\sqrt{\frac{y}{D} \left[1 - \frac{y}{D} \right]}} \right] \quad (2.56)$$

Ya obtenido el tirante normal se conoce el área de la sección, y la velocidad resulta de dividir el gasto entre el área.

2.5.4 Dimensión de la sección y velocidad

El tirante se conoce y lo más común es determinar el ancho de la sección trapezoidal, ya que el talud se escoge, generalmente, por razones constructivas o de estabilidad del material de las paredes (secciones 2.7.1 y 7.6.2). En sección circular y herradura se determina el diámetro.

La solución consiste en resolver la ecuación 2.49 por iteraciones, de la misma manera que para el tirante normal. Para el cálculo numérico son también válidas las ecuaciones 2.54 y 2.52, donde b es la dimensión buscada pero ahora

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left[5 \frac{dA}{db} - 2 R_h \frac{dP}{db} \right]$$

si la sección es trapezoidal, o bien

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left[5 \frac{dA}{dD} - 2 R_h \frac{dP}{dD} \right]$$

si la sección es circular.

Para la sección trapezoidal, $dA/db = y$, y $dP/db = 1$, por tanto

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} (5 y - 2 R_h) \quad (2.57)$$

Si el tirante se confunde con el radio hidráulico, se obtiene

$$F' = y^{5/3} \quad (2.58)$$

resultado que se justifica para simplificar los cálculos, ya que el ancho se ajusta al valor más próximo que se emplee por razones constructivas.

Para la sección circular, $dP/dD = \theta + d\theta/dD$ y las ecuaciones 3.42 y 3.44 del capítulo 3 expresan los valores de $d\theta/dD$ y dA/dD . Por tanto

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} \left[5 \left(2 \frac{A}{D} - y \operatorname{sen} \theta \right) - 2 R_h \left(\theta - \frac{2}{\operatorname{sen} \theta} \frac{y}{D} \right) \right]$$

También el diámetro se ajusta por razones constructivas o al comercial más adecuado.

Obtenida la dimensión de la sección, con el tirante se conoce el área hidráulica, y la velocidad resulta de dividir el gasto entre el área.

2.5.5 Dimensión de la sección y tirante

Cuando la dimensión de la sección y el tirante se desconocen hay infinidad de soluciones, toda vez que la expresión: $A = Q/V$ proporciona tan solo el área mínima que debe tener la sección del canal cuando V es la velocidad permisible, pudiendo haber distintas combinaciones de A y R_h en la ecuación 2.49. En este caso, la dimensión de la sección y el tirante se eligen por razones económicas y constructivas, que de cualquier modo satisfagan dicha ecuación.

Cuando el diámetro del conducto se desconoce, lo más práctico es fijar una relación de llenado y/D , y calcular el diámetro y tirante de las tablas 2.8 ó 2.9 y la ecuación 2.49. Si se trata de túneles de descarga en vertedores es recomendable que la relación de llenado máxima sea de 0.75 a 0.8 para evitar su llenado. En conductos de alcantarillado es común considerar el lleno total para el gasto máximo de diseño.

Cuando la sección es circular, el gasto máximo en flujo uniforme resulta para $y/D = 0.938$, y la velocidad máxima para $y/D = 0.81$ (subcapítulo 2.6).

2.5.6 Pendiente y velocidad

Conocidos Q , n , y , b , y k o D según el caso, la ecuación 2.46 puede resolverse explícitamente para la pendiente necesaria, de modo que el flujo uniforme ocurra. La pendiente así obtenida se conoce como pendiente normal. La velocidad resulta de dividir el gasto entre el área.

En un canal cuya rugosidad, geometría y caudal sean conocidos, es posible encontrar una pendiente para la que el tirante en flujo uniforme ocurre en régimen crítico, esto es, con número de Froude $F = 1$. La pendiente así obtenida es, por definición, la pendiente crítica S_c , si bien no deja de ser pendiente normal. Es también la más pequeña de las que resultan con caudales menores que Q , y por esta razón se conoce como pendiente crítica límite.

También es posible determinar una pendiente crítica y un caudal que correspondan a un tirante normal prestablecido en un canal de rugosidad y sección conocidas, en el que se establezca flujo uniforme en régimen crítico. La pendiente resultante sería también la necesaria para mantener el flujo uniforme crítico, pero con el tirante normal prestablecido. Si el caudal así obtenido es el mismo que se utiliza en la definición anterior, las pendientes críticas calculadas coinciden.

Ejemplo 2.5. Un canal rectangular tiene 2 m de ancho y está revestido de cemento en superficie lisa ($n = 0.011$). Calcular: *a)* el gasto Q que conduce cuando el tirante normal es de 1.50 m y la pendiente de 0.000126 ; *b)* el tirante normal cuando $Q = 4 \text{ m}^3/\text{s}$ y $S = 0.008$; *c)* la pendiente normal cuando $y = 1.0 \text{ m}$ y $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$; *d)* la pendiente crítica límite y el tirante normal cuando $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$; *e)* la pendiente crítica cuando $y = 1 \text{ m}$ y el caudal sea el que corresponda a este tirante y pendiente.

Solución a. El área, el perímetro y el radio hidráulico son:

$$A = 2 (1.5) = 3 \text{ m}^2$$

$$P = 2 + 2 (1.5) = 5 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning se tiene que la velocidad es

$$V = \frac{1}{0.011} (0.60)^{2/3} (0.000126)^{1/2} = 0.726 \text{ m/s}$$

y el gasto

$$Q = 3 (0.726) = 2.178 \text{ m}^3/\text{s}$$

Solución b. De la ecuación 2.49 resulta

$$A R_h^{2/3} = \frac{0.011 (4)}{\sqrt{0.008}} = 0.49193$$

De la ecuación 2.50

$$\frac{A R_h^{2/3}}{b^{8/3}} = \frac{0.49193}{(2)^{8/3}} = 0.0775$$

De la figura 2.7, $y/b = 0.25$, por tanto, $y = 0.25 (2) = 0.50$ m.

Este resultado se puede afinar mediante un procedimiento de iteraciones como se indica a continuación.

y	A	P	R_h	$A R_h^{2/3}$		
0.5	1.0	3.0	0.333	0.4807	<	0.49193
0.51	1.02	3.02	0.338	0.4947	>	0.49193
0.508	1.016	3.016	0.337	0.49189	≈	0.49193

El tirante normal es de 0.508 m , siendo la velocidad

$$V = \frac{4.0}{1.016} = 3.932 \text{ m/s}$$

Solución c. Con $y = 1.0$ m , $A = 2$ m², $P = 4$ m , $R_h = 0.5$ m , $V = 3/2 = 1.5$ m/s , de la ecuación de Manning resulta

$$S = \left[\frac{V n}{R_h^{2/3}} \right]^2 = \left[\frac{1.5 (0.011)}{(0.5)^{2/3}} \right]^2 = 0.000686$$

Esta pendiente mantendrá un flujo uniforme de 3 m³/s con tirante normal de 1 m.

Solución d. El tirante con el que se establece el flujo crítico resulta de la condición $F = 1$ en el canal, que para la sección rectangular es

$$\frac{V_c}{\sqrt{g y_c}} = 1$$

Siendo también $V_c = Q / b y_c$, resulta entonces

$$\frac{Q}{\sqrt{g} b y_c^{3/2}} = 1$$

de manera que

$$y = y_c = \left[\frac{Q^2}{g b^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{(3)^2}{9.81 (2)^2} \right]^{1/3} = 0.6121 \text{ m}$$

Por tanto: $A = 1.2242 \text{ m}^2$, $P = 3.2242 \text{ m}$, $R_h = 0.3797 \text{ m}$, $V = 3/1.2242 = 2.4505 \text{ m/s}$, y

$$S_c = \left[\frac{2.4505 (0.011)}{(0.3797)^{2/3}} \right]^2 = 0.002643$$

Esta pendiente mantendrá un flujo uniforme crítico de $3 \text{ m}^3/\text{s}$ en el canal y es la límite para dicho caudal.

Solución e. Los valores de A , P y R_h son los mismos del caso c). La velocidad se obtiene de la definición de flujo crítico; esto es

$$F_c = \frac{V_c}{\sqrt{g y_c}} = 1$$

$$V_c = \sqrt{9.81 (1)} = 3.1321 \text{ m/s}$$

Por tanto, la pendiente crítica necesaria es

$$S_c = \left[\frac{V n}{R_h^{2/3}} \right]^2 = \left[\frac{3.1321 (0.011)}{(0.5)^{2/3}} \right]^2 = 0.002991$$

la cual mantendrá flujo uniforme crítico con tirante normal de 1.0 m en el canal, y para el gasto

$$Q = V A = 3.1321 (2) = 6.2642 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ejemplo 2.6. Un canal es de sección trapecial, 2 m de ancho de plantilla, taludes $2:1$ y está revestido de concreto rugoso.

- Calcular el caudal que conduce para un tirante de 1.20 m y pendiente de 0.000667 , utilizando las ecuaciones de Kutter, Bazin, Kozeny y Manning para comparar resultados.
- Determinar una curva que relacione a Q con S_c (pendiente crítica), usando la de Manning.

Solución a. Los elementos geométricos de la sección son:

$$A = [2 + 2 (1.2)] 1.2 = 5.28 \text{ m}^2$$

$$P = 2 + 2 \sqrt{1 + (2)^2} 1.2 = 7.367 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{5.28}{7.367} = 0.717 \text{ m}$$

$$R_h^{1/2} = 0.847$$

$$R_h^{1/6} = 0.946$$

$$S^{1/2} = (0.000667)^{1/2} = 0.02583$$

De la ecuación de Chezy se tiene

$$V = C \sqrt{0.717 (0.000667)} = 0.021865 C \quad (\text{a})$$

$$Q = 5.28 (0.021865) C = 0.11545 C \quad (\text{b})$$

a) De la tabla 2.4 y con la ecuación de Kutter ($m = 0.65$ de la tabla 2.5) se obtiene

$$C = \frac{100 (0.847)}{0.65 + 0.847} = 56.57$$

b) De la ecuación de Bazin ($N_b = 0.45$ de la tabla 2.5) resulta

$$C = \frac{87}{1 + \frac{0.45}{0.847}} = 56.81$$

c) El ancho de la superficie libre en la sección tiene el valor

$$T = b + 2 k y = 2 + 2 (2) (1.2) = 6.80 \text{ m}$$

de manera que

$$\frac{A}{T} = \frac{5.28}{6.8} = 0.776 \text{ m}$$

De la ecuación de Kozeny (tabla 2.4) ($N_K = 60$ de la tabla 2.5) se obtiene

$$C = 20 \log 0.776 + 60 = 57.8$$

d) Con la ecuación de Manning y $n = 0.017$ (tabla 2.4, concreto sin acabado) resulta

$$C = \frac{0.946}{0.017} = 55.648$$

Los valores de V y Q se obtienen de las ecuaciones a y b, utilizando los de C antes calculados y que se resumen a continuación:

	Kutter	Bazin	Kozeny	Manning
C	56.57	56.81	57.8	55.648
V en m/s	1.237	1.242	1.264	1.217
Q en m ³ /s	6.531	6.559	6.673	6.424

Solución b. La condición de flujo crítico establece

$$F_c = \frac{V_c}{\sqrt{g A_c / T_c}} = 1$$

Los elementos geométricos son

$$\begin{aligned} A_c &= (2 + 2y_c) y_c \\ T_c &= 2 + 2(2y_c) = 2 + 4y_c \\ P_c &= 2 + 2\sqrt{5}y_c \\ R_{hc} &= A_c / P_c \end{aligned}$$

de modo que al sustituir en la ecuación de flujo en régimen crítico, se obtiene la expresión

$$V_c = \sqrt{g A_c / T_c} = \left[\frac{g (2 + 2y_c) y_c}{2 + 4y_c} \right]^{1/2}$$

que indica que para cada y_c hay un valor de V_c y de $Q = V_c A_c$. De la ecuación de Manning (con $n = 0.017$) se tiene también una pendiente

$$S_c = \left(\frac{V_c n}{R_{hc}^{2/3}} \right)^2$$

La tabla siguiente muestra los cálculos relativos y la figura 2.8 la representación gráfica $Q - S_c$ que limita las zonas de operación entre flujo subcrítico y supercrítico.

y_c en m	A_c en m ²	T_c en m	P_c en m	R_{hc} en m	V_c en m/s	Q_c en m ³ /s	S_c
0.25	0.625	3.00	3.1180	0.2004	1.4296	0.8935	0.005037
0.50	1.500	4.00	4.2361	0.3541	1.9180	2.8770	0.004244
0.75	2.625	5.00	5.3541	0.4903	2.2694	5.9572	0.003850
1.00	4.000	6.00	6.4721	0.6180	2.5573	10.2294	0.003590
1.25	5.625	7.00	7.5902	0.7411	2.8077	15.7932	0.003397
1.50	7.500	8.00	8.7082	0.8613	3.0326	22.7448	0.003243
1.75	9.625	9.00	9.8262	0.9795	3.2390	31.1756	0.003117
2.00	12.000	10.00	10.9443	1.0965	3.4310	41.1724	0.003009
2.25	14.625	11.00	12.0623	1.2125	3.6115	52.8180	0.002915
2.50	17.500	12.00	13.1803	1.3277	3.7824	66.1913	0.002833
2.75	20.625	13.00	14.2984	1.4425	3.9451	81.3680	0.002760
3.00	24.000	14.00	15.4164	1.5568	4.1009	98.4209	0.002694

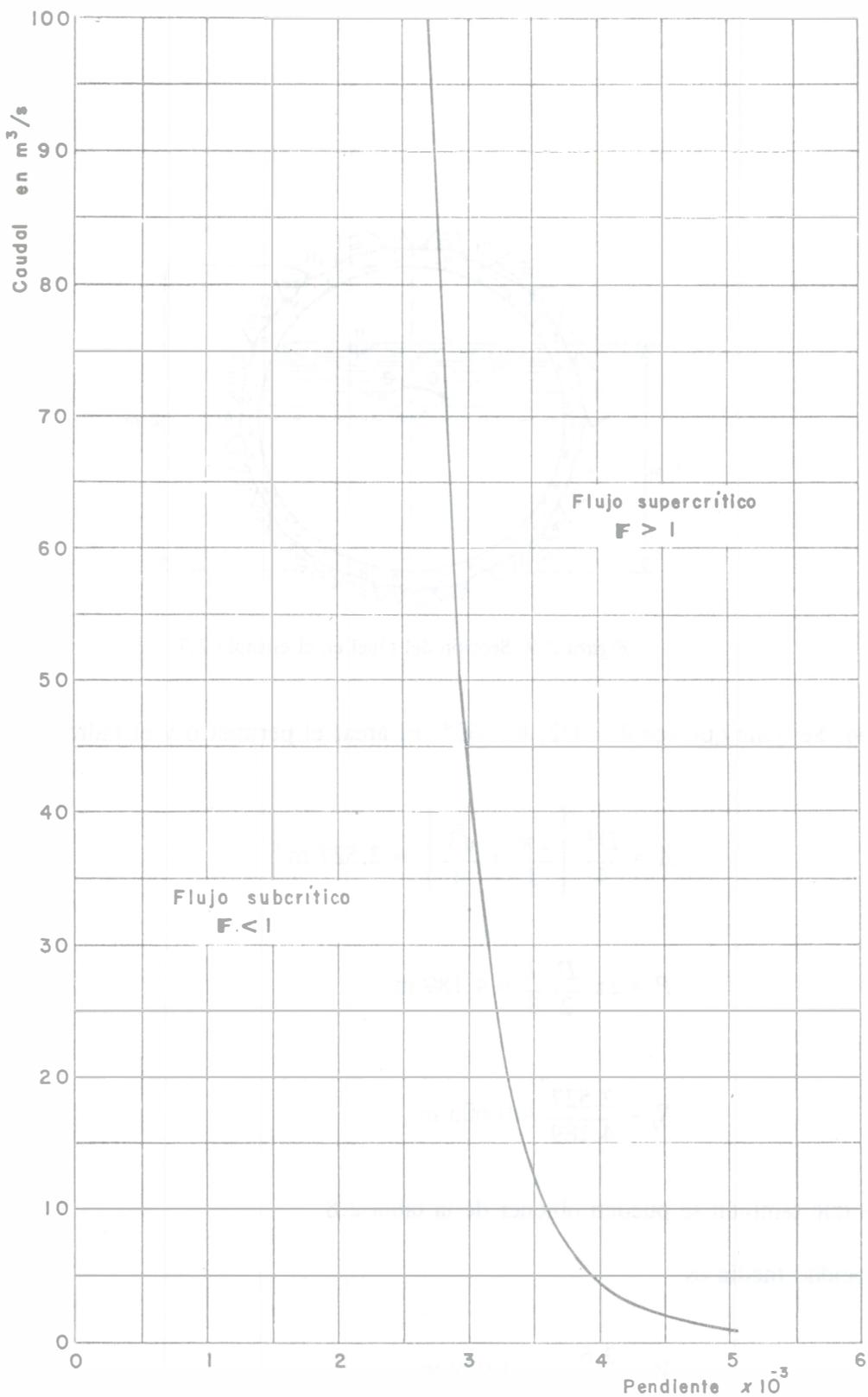


Figura 2.8. Curva que define las zonas de flujo uniforme en régimen subcrítico y supercrítico para el canal del ejemplo 2.6, en función del caudal y la pendiente

Ejemplo 2.7. Un túnel circular (figura 2.9), de 2 m de diámetro, 1.50 m de tirante y revestida de concreto colado en molde metálico debe conducir $2.6 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcular la pendiente necesaria para que el flujo sea uniforme y el tipo de régimen en el canal.



Figura 2.9. Sección del túnel en el ejemplo 2.7

Solución. Se tiene que $\cos \theta = 1/2$, $\theta = 60^\circ$. El área, el perímetro y el radio hidráulico son:

$$A = \frac{D^2}{4} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2.527 \text{ m}^2$$

$$P = 2\pi \frac{D}{2} \frac{2}{3} = 4.189 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{2.527}{4.189} = 0.603 \text{ m}$$

valores que también se pueden obtener de la tabla 2.8.

La velocidad media es

$$V = \frac{2.6}{2.527} = 1.029 \text{ m/s}$$

De la tabla 2.6a, con $n = 0.013$ en la ecuación de Manning, la pendiente debe ser

$$S = \left[\frac{V n}{R_h^{2/3}} \right]^2 = \left[\frac{1.029 (0.013)}{(0.603)^{2/3}} \right]^2 = 0.000351$$

De la tabla 1.2, el ancho de la superficie libre resulta

$$T = \sqrt{1.5 (2 - 1.5)} = 1.7321 \text{ m}$$

que también se puede obtener de la tabla 2.8.

Por último, el número de Froude

$$F = \frac{1.029}{\sqrt{9.81 (2.527 / 1.7321)}} = 0.272 < 1$$

Por tanto, el régimen es subcrítico.

Ejemplo 2.8. El canal mostrado en la figura 2.10 es de sección rectangular, de 3.00 m de ancho, 0.0135 de coeficiente de Manning, 0.001 de pendiente y 1.075 m de tirante normal. Para salvar una cañada se utiliza un sifón invertido de 200 m de longitud, 1.50 m de diámetro, concreto bien acabado ($n = 0.012$) y la geometría indicada en la figura. Determinar el desnivel Δz necesario para que el caudal fluya en el conducto sin producir alteraciones del flujo en el canal, ni aguas arriba, ni aguas abajo.

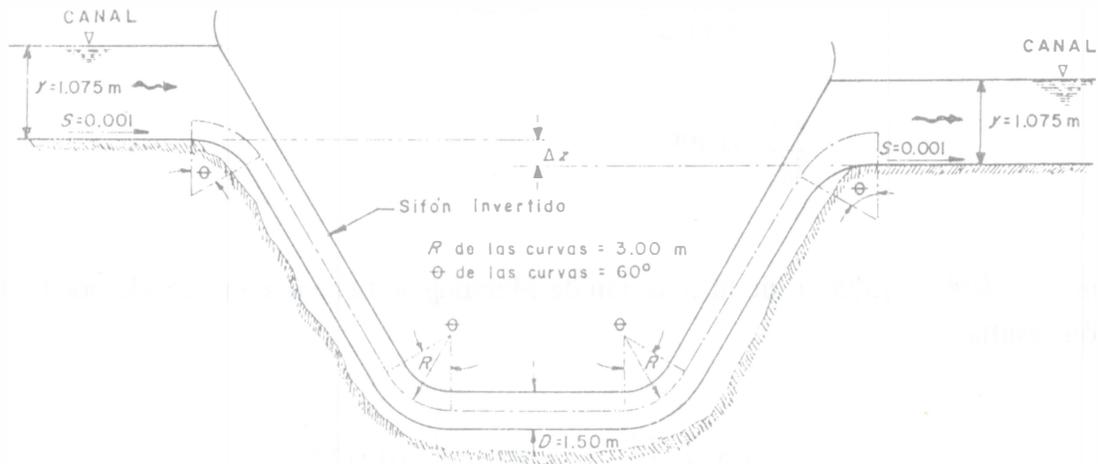


Figura 2.10. Sifón invertido del ejemplo 2.8

Solución. Los elementos geométricos del canal son:

$$A = 3.00 (1.075) = 3.225 \text{ m}^2$$

$$P = 3.00 + 2 (1.075) = 5.15 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{3.225}{5.15} = 0.626 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning se obtiene

$$Q = \frac{3.225 (0.626)^{2/3} (0.001)^{1/2}}{0.0135} = 5.529 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es el gasto que debe pasar por el sifón. De la ecuación de energía, aplicada entre una sección antes del sifón y otra después, se tiene

$$\Delta z + y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{V^2}{2g} + \Sigma h_r$$

$$\Delta z = \Sigma h_r$$

Esto es, el desnivel Δz debe ser igual a las pérdidas en el sifón. La velocidad y carga de velocidad en el mismo son

$$V = \frac{4 (5.529)}{\pi (1.5)^2} = 3.129 \text{ m/s}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.499 \text{ m}$$

Con $R_h = D/4 = 0.375 \text{ m}$, de la ecuación de Manning se tiene que la pérdida por fricción en el sifón resulta

$$h_f = \left[\frac{V n}{R_h^{2/3}} \right]^2 L = \left[\frac{3.129 (0.012)}{(0.375)^{2/3}} \right]^2 200 = 1.043 \text{ m}$$

La pérdida en los cuatro cambios de dirección (ver volumen 1) es

$$h_c = 4 (0.24) \frac{60}{90} (0.499) = 0.319 \text{ m}$$

y el desnivel

$$\Delta z = 1.043 + 0.319 = 1.36 \text{ m}$$

Ejemplo 2.9. Un canal de sección trapezoidal revestido de concreto ($n = 0.015$) tiene un ancho de plantilla de 2.50 m, taludes 1.5:1 y pendiente de 0.00075. Calcular el tirante para que conduzca $20 \text{ m}^3/\text{s}$ en flujo uniforme.

Solución. De los datos se obtiene

$$A = (2.5 + 1.5 y) y$$
$$P = 2.5 + 3.6 y$$

De la ecuación de Manning resulta

$$\frac{n Q}{\sqrt{s}} = \frac{0.015 (20)}{\sqrt{0.00075}} = 10.9545$$

Por lo tanto

$$A R_h^{2/3} = 10.9545$$

$$\frac{A R_h^{2/3}}{b^{8/3}} = \frac{10.9545}{(2.5)^{8/3}} = 0.952$$

De la figura 2.7, con $k = 1.5$, $y/b = 0.76$; por lo que

$$y = 0.76 (2.5) = 1.90 \text{ m}$$

sería el tirante normal con la aproximación dada por la figura 2.7. Mediante un procedimiento de iteraciones se precisa dicho resultado, como se indica a continuación. De las ecuaciones 2.52 y 2.55

$$F = A R_h^{2/3} - 10.9545$$

$$F' = \frac{R_h^{2/3}}{3} (5 T - 7.2111 R_h)$$

y se elige el valor inicial $y = 2 \text{ m}$.

y en m	A en m ²	T en m	P en m	R _h en m	F	F'	$\frac{F}{F'}$
2.00	11.000	8.5000	9.7111	1.1327	0.9985	12.4354	0.0803
1.9197	10.3271	8.2591	9.4216	1.0961	0.0242	11.8327	0.002
1.9177	10.3106	8.2531	9.4144	1.0952	0.0005	11.8178	0.0000

El tirante correcto es $y = 1.9177$ m y la velocidad resulta

$$V = \frac{20}{10.3106} = 1.9397 \text{ m/s}$$

Ejemplo 2.10. Un canal trapecial excavado en tierra tiene un tirante de 1.4 m, talud 2:1, pendiente de 0.0004 y debe conducir 8 m³/s. Calcular su ancho de plantilla.

Solución. Los elementos geométricos son:

$$A = [b + 2 (1.4)] 1.4 = (b + 2.8) 1.4$$

$$P = b + 2 \sqrt{1+4} 1.4 = b + 6.261$$

Para un canal en tierra $n = 0.025$, y se obtiene

$$\frac{n Q}{\sqrt{S}} = \frac{0.025 (8)}{\sqrt{0.0004}} = 10$$

De la ecuación 2.52

$$F = AR_h^{2/3} - 10$$

y vale la ecuación 2.57 para F' , siendo

$$(b)_{i+1} = (b)_i - \left[\frac{F}{F'} \right]_i$$

El procedimiento de solución es por iteraciones y se elige $b = 4.5$ m como valor inicial, según se muestra a continuación.

b en m	A en m ²	P en m	R_h en m	F	F'	$\frac{F}{F'}$
4.5	10.2200	10.761	0.9497	0.1255	1.6427	- 0.0764
4.5764	10.3270	10.8374	0.9529	0.0001	1.6443	0.0001
4.5763	10.3268	10.8373	0.9529	0.0000	1.6443	0.0000

Luego entonces se ajusta al valor $b = 4.60$ m, siendo el tirante normal $y = 1.3972$ m y el área hidráulica $A = 10.3315$ m². Por tanto, la velocidad es

$$V = \frac{8.0}{10.3315} = 0.7743 \text{ m/s}$$

2.6 CONDUCTOS CERRADOS PARCIALMENTE LLENOS

Las ecuaciones de fricción, como la de Manning, utilizan exclusivamente el radio hidráulico para caracterizar la forma de la sección y en la circular proporcionan el mismo valor de la velocidad para un lleno parcial a la mitad y para el lleno total. Esto se debe a que el radio hidráulico, en ambos casos, posee la misma magnitud: $D/4$.

Las curvas con líneas de puntos, Q/Q_0 y V/V_0 , mostradas en la figura 2.11 para la circular y en la 2.12 para la herradura, han sido obtenidas de la ecuación de Manning (tablas 2.8 y 2.9). En éstas, el subíndice cero corresponde a las condiciones de lleno total para hacer los resultados adimensionales en ambas secciones. Dichas curvas muestran valores máximos; en la circular: para el gasto, con índice de llenado $y/D = 0.938$; para la velocidad, con $y/D = 0.81$ (problema 2.35). Es más, cuando y/D es mayor de 0.81 se tienen dos tirantes distintos para un mismo gasto, uno arriba y otro abajo del valor $0.938 D$. De manera análoga la curva adimensional V/V_0 muestra que hay dos tirantes distintos para la misma velocidad cuando $y/D > 0.5$, uno mayor y otro menor que $0.81 D$. Lo anterior es válido bajo la suposición de que el coeficiente n_0 de Manning permanece constante para cualquier valor de y/D . En la sección herradura se observan comportamientos similares en las curvas.

Para la circular, Yarnell-Woodward y Büllow determinaron experimentalmente un crecimiento constante del gasto hasta llegar a un máximo, que corresponde a $y/D = 0.95$, y después disminuye. Straub hizo mediciones en conductos de concreto y obtuvo el máximo de Q para y/D un poco menor de 1.

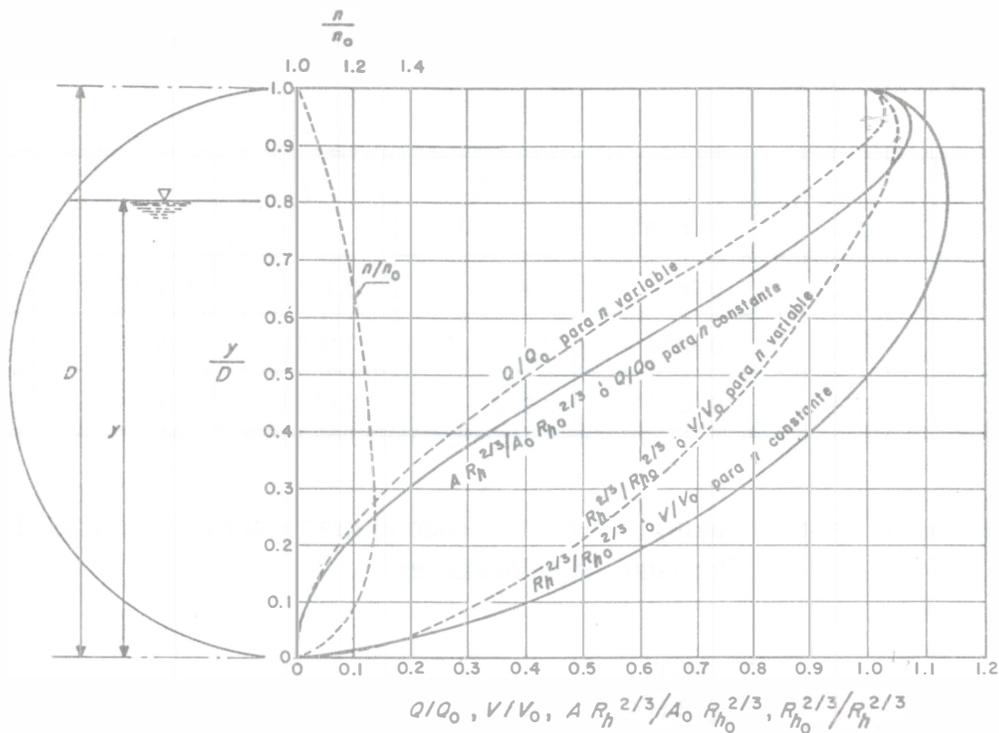


Figura 2.11. Características del flujo en un conducto circular parcialmente lleno, según la ecuación de Manning y los resultados de Camp (referencia 34). El subíndice 0 indica condición de lleno total

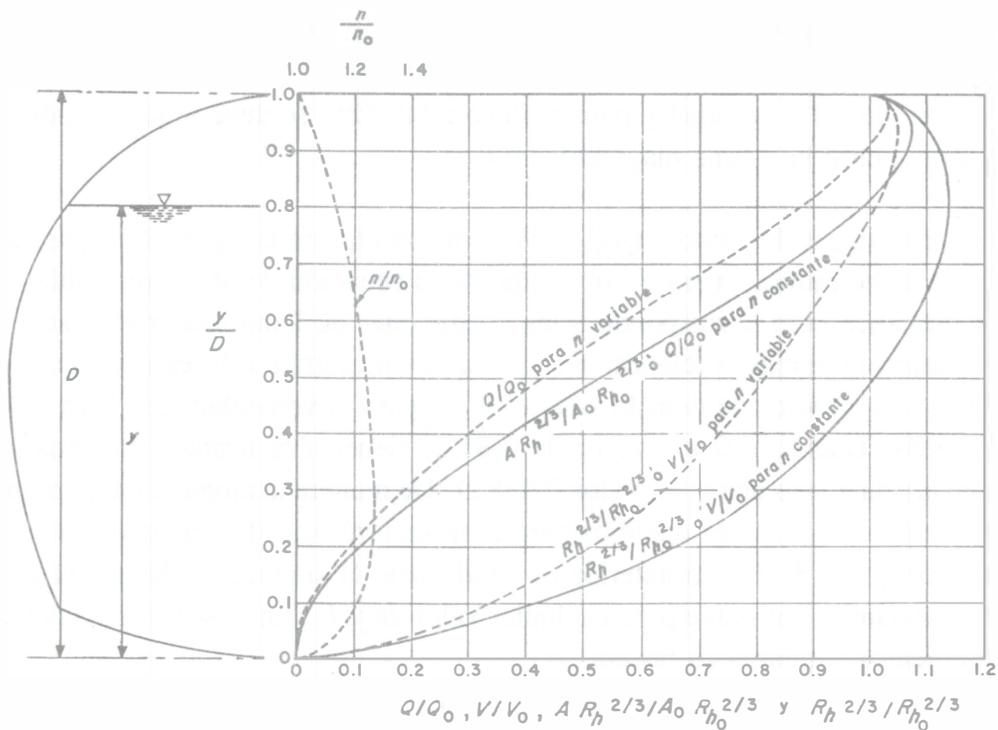


Figura 2.12. Características del flujo en un conducto herradura parcialmente lleno, según la ecuación de Manning. Las curvas para n variable se calcularon aceptando la misma variación n/n_0 de un conducto circular. El subíndice 0 indica condición de lleno total

Las discrepancias señaladas se explican por el hecho de que también en las secciones cerradas la resistencia al movimiento depende de la relación de aspecto, en este caso de y/D , como fue expuesto en el subcapítulo 2.3. Se han hecho varios intentos por considerar este efecto. Utilizando un coeficiente de Manning n variable con y/D , Camp (referencia 34) corrigió las curvas que se muestran en la figura 2.11 para obtener la verdadera variación de $Q - y$ y $V - y$. Sus resultados experimentales se muestran también en la misma figura. El autor de este libro ha extendido estos resultados a los conductos herradura como se presenta en la figura 2.12, considerando la misma variación de n obtenida por Camp en los circulares.

Para tomar en cuenta los mismos efectos en conductos circulares parcialmente llenos, Kozeny (referencia 35) modificó su ecuación original (ver volumen 1) para conductos circulares a presión, cambiándola a la forma

$$V = (8.86 \log y + N_K) \left(\frac{y}{D} \right)^{1/6} \sqrt{D S} \quad (2.59)$$

Christensen (referencia 36), en 1984, ajustó los resultados experimentales que obtuvo en conductos circulares y obtuvo la ecuación

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.46 - 0.5 \cos \left[\frac{\pi y}{D} \right] + 0.04 \cos \left[\frac{2\pi y}{D} \right] \quad (2.60)$$

→ Poner 180 en lugar de π
→ Poner 180 en vez de π

donde el ángulo es en radianes.

Cuando el conducto es de asbesto-cemento y trabaja parcialmente lleno, se recomienda la ecuación de Ludin (referencia 37)

$$V = K_L R_h^{0.65} S^{0.54}$$

en que K_L vale 134 para $V \geq 0.8$ m/s, y 122 para $V \leq 0.8$ m/s.

Ejemplo 2.11. Una alcantarilla de concreto de sección circular debe conducir 450 l/s cuando su pendiente es de 0.001125. Calcular el diámetro necesario de manera que el tirante sea $0.8 D$.

Solución. Se elige $n_0 = 0.013$ para la ecuación de Manning. Con $y/D = 0.8$, de la figura 2.11 se obtiene $Q/Q_0 = 0.869$ para n variable. De la ecuación 2.60, resulta $Q/Q_0 = 0.8769$.

El gasto para el lleno total es entonces

$$Q_0 = \frac{0.45}{0.8769} = 0.5132 \text{ m}^3/\text{s}$$

siendo el área y el radio hidráulico: $A_0 = \pi D^2/4$; $R_{h0} = D/4 = 0.25 D$.

De la ecuación de Manning para lleno total, al igualar con Q_0 se tiene

$$\frac{\pi D^2}{4 (0.013)} (0.25 D)^{2/3} (0.001125)^{1/2} = 0.5132$$

y por tanto

$$D = 0.845 \text{ m}$$

pudiéndose utilizar un tubo comercial de 91 cm de diámetro.

Ejemplo 2.12. Un túnel revestido de concreto bien acabado tiene la forma que se muestra en la figura 2.13, pendiente de 0.0004 y diámetro de 1.60 m . a) Calcular la velocidad media y el gasto que conduce a lleno total. b) Determinar el tirante que se establecería si el túnel fuese de sección herradura y diámetro de 1.60 m , para el mismo gasto y pendiente.

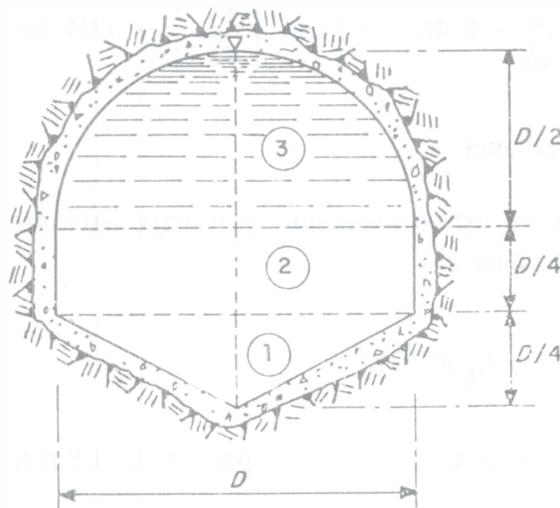


Figura 2.13. Sección del túnel en el ejemplo 2.12

Solución a. Los elementos geométricos de la sección se calculan dividiendo la figura en tres partes, de la siguiente manera:

$$A = \frac{D^2}{8} + \frac{D^2}{4} + \frac{\pi}{8} D^2 = 0.768 D^2 = 0.768 (1.6)^2 = 1.965 \text{ m}^2$$

$$P = 2 \left[\sqrt{(D/2)^2 + (D/4)^2} + \frac{D}{4} + \frac{\pi D}{4} \right] = 2 \left(\sqrt{0.3125} + 0.25 + 0.7854 \right) 1.6$$

$$P = 5.102 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{1.965}{5.102} = 0.385 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning, para $n = 0.013$ la velocidad media y el gasto son

$$V = \frac{(0.385)^{2/3} \sqrt{0.0004}}{0.013} = 0.814 \text{ m/s}$$

$$Q = 1.965 (0.814) = 1.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Solución b. De la tabla 2.9 se tiene que el área y el radio hidráulico de la sección herradura llena son

$$A = 0.8293 (1.6)^2 = 2.123 \text{ m}^2$$

$$R_h = 0.2538 (1.6) = 0.406 \text{ m}$$

El gasto a lleno total resulta entonces

$$Q_0 = \frac{2.123 (0.406)^{2/3} 0.02}{0.013} = 1.791 \text{ m}^3/\text{s}$$

El cociente del gasto a lleno parcial al del lleno total es

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1.6}{1.791} = 0.893$$

De la figura 2.12 se obtiene que $y/D = 0.81$, siendo entonces el tirante

$$y = 0.81 (1.6) = 1.296 \text{ m}$$

2.7 SECCIÓN HIDRÁULICA DEL CANAL

2.7.1 Planteamiento

La sección hidráulica del canal es la estrictamente necesaria para conducir el agua. Su diseño por lo general se plantea teniendo conocidos el gasto que debe conducir, el coeficiente de Manning y la pendiente longitudinal disponible de acuerdo con la topografía del terreno. Con éstos se determina un valor único para el módulo de sección $A R_h^{2/3}$, pero éste se puede satisfacer (figura 2.7) con distintas formas de la sección, unas más eficientes que otras, lo que trae como consecuencia una enorme cantidad de soluciones. Sin embargo, si se considera que el canal debe ser capaz de conducir el agua entre dos puntos de manera eficaz, segura y a costo efectivo, el número se reduce.

Esto significa que tendría gran importancia buscar el mejor balance en las dimensiones de la sección, de modo que el canal conduzca un gasto dado con el módulo de sección máximo (o para un área dada el máximo de Q), para la pendiente y rugosidad previamente conocidas. En flujo uniforme, la aplicación del criterio usual de máximos y mínimos a la ecuación del módulo de sección para obtener el gasto dado o el máximo, con el tirante como variable independiente, conduce a encontrar el módulo de sección máximo

$$\frac{d}{dy} (A R_h^{2/3}) = \frac{d}{dy} (A^{5/3} P^{-2/3}) = 0$$

esto es

$$5 \frac{dA}{dy} - 2 R_h \frac{dP}{dy} = 0$$

El módulo de sección es máximo cuando el área es también máxima con el mínimo perímetro mojado, es decir, $dA/dy = 0$ y $dP/dy = 0$. Para un área hidráulica conocida, $dA/dy = 0$ y el módulo de sección máximo se obtiene también cuando $dP/dy = 0$, es decir, cuando el perímetro mojado es mínimo y el radio hidráulico es máximo. En ambos casos resulta una sección de resistencia mínima al movimiento. Idéntica condición se tendría si se desea la pendiente mínima para el gasto, rugosidad y área conocidos.

La optimización del área y del perímetro conduce al diseño de la sección hidráulica óptima, la cual sólo toma en cuenta las dimensiones del área de paso del agua pero no el resto de la sección constructiva y mucho menos la economía de la obra.

De acuerdo con lo anterior, la forma de la sección más eficaz es el semicírculo que puede aplicarse a conductos prefabricados o construidos en el sitio. En canales excavados dicha forma de sección no es práctica para su construcción y mantenimiento, pero sí lo es la trapecial y en ocasiones la rectangular.

Uno de los primeros elementos por seleccionar en una sección trapecial es el talud. Lo mejor sería que las paredes tuvieran el mayor ángulo de inclinación posible, esto es, el menor talud; sin embargo, el que se utilice depende de las propiedades mecánicas del material en que se excave el canal. Si éste no se reviste, el talud se debe seleccionar de modo que sea estable durante su excavación y en las condiciones de operación normal.

Si el canal se reviste, la misma estabilidad debe buscarse al término de su excavación; el revestimiento proporcionará mejores condiciones de estabilidad pero sólo hasta que se haya colocado. Además, no es conveniente diseñarlo para resistir el empuje activo del suelo, lo que obliga a utilizar el talud estable natural. Por otra parte, su colocación debe evitar en lo posible el uso de moldes, a menos que sea inevitable y económico hacerlo.

Los taludes 1.5:1 a 2.5:1 son prácticamente la norma para canales excavados en tierra en condiciones ordinarias, aunque puede disminuir en localizaciones en balcón de ladera si el

material es resistente, para evitar excavación excesiva. Valores más precisos del talud se seleccionan cuando se conocen mejor las características del material, como se presenta en la tabla 7.1.

En canales revestidos de concreto el talud típico es 1.5:1 . Sin embargo, en canales más pequeños, hasta de 2 m³/s de capacidad, suele adoptarse el talud 1:1. Valores menores necesitan del uso de moldes y seguramente el revestimiento debe resistir el empuje lateral de los suelos.

El talud definitivo sólo se obtiene a partir de las propiedades mecánicas del material, del tipo de revestimiento en su caso y del procedimiento constructivo.

El diseño de la sección de un canal no revestido debe considerar que el área hidráulica sea la mínima para reducir el costo de la excavación, al menos en el área de paso del agua, pero también que tenga el perímetro mojado mínimo para que se produzca el mínimo de infiltración a través de las paredes y el fondo, y reducir con ello las pérdidas de agua por este concepto.

Un canal revestido adopta la menor superficie de revestimiento cuando el perímetro mojado es mínimo.

En la mayoría de los problemas de diseño el trazo en planta del canal queda determinado por la topografía local, pero el desnivel necesario para conducir el caudal de diseño está fijado por el propósito de la conducción. Por ejemplo, en un canal de fuerza, empleado para llevar agua a una planta hidroeléctrica, es deseable alcanzar una carga elevada en el punto de entrega para fines de generación; en ese caso, la pendiente mínima sería la mejor alternativa. Una exigencia similar ocurriría en un canal de conducción para fines de riego, con el fin de dominar la mayor parte de la superficie cultivable.

En otras palabras, la sección hidráulica óptima satisface los requisitos antes señalados, si bien sólo toma en cuenta el área de paso del agua, pero no el resto de la sección.

2.7.2 Sección hidráulica óptima

A manera de ejemplo se señalan a continuación las propiedades geométricas de la sección trapecial hidráulicamente óptima.

Con la nomenclatura usada en la figura 2.14 se obtiene

$$\begin{aligned}x &= y \cot \theta \\s &= \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}\end{aligned}\tag{2.61}$$

Por tanto, el área hidráulica, el perímetro mojado y el radio hidráulico son:

$$A = b y + x y = by + y^2 \cot \theta\tag{2.62}$$

$$P = b + \frac{2y}{\operatorname{sen} \theta} \quad (2.63)$$

$$R_h = \frac{by + y^2 \cot \theta}{b + \frac{2y}{\operatorname{sen} \theta}} \quad (2.64)$$

De la ecuación 2.63 se tiene que el ancho de plantilla es

$$b = P - \frac{2y}{\operatorname{sen} \theta}$$

que substituido en la ecuación 2.62 resulta

$$A = Py - \frac{2y^2}{\operatorname{sen} \theta} + y^2 \cot \theta \quad (2.65)$$

Siendo θ constante, para obtener el área máxima o un área dada con el perímetro mojado mínimo será necesario que simultáneamente $dA/dy = 0$ y $dP/dy = 0$. Al satisfacer estas condiciones, de la ecuación 2.65 se tiene

$$P - \frac{4y}{\operatorname{sen} \theta} + 2y \cot \theta = 0$$

O bien, substituyendo en ésta a P de la ecuación 2.63, se obtiene

$$b - \frac{2y}{\operatorname{sen} \theta} + 2y \cot \theta = 0$$

y al despejar

$$b = 2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right] y \quad (2.66)$$

que es la condición deseada. La substitución de la ecuación 2.66 en la 2.62 conduce a

$$\frac{A}{y} = \frac{2y}{\operatorname{sen} \theta} - y \cot \theta \quad (2.67)$$

Además, de la geometría de la figura 2.14 se puede escribir que

$$\frac{A}{y} = T - y \cot \theta \quad (2.68)$$

Por último, comparando los términos de las ecuaciones 2.67, 2.68 y 2.61 resulta

$$T = \frac{2y}{\sin \theta} = 2s \quad (2.69)$$

Es decir, en la sección trapezoidal óptima la mitad del ancho de la superficie libre es igual a la longitud del lado inclinado.

En el caso de que sea factible elegir el ángulo óptimo, de la ecuación 2.65 se establecen las condiciones: $dA/d\theta = 0$ y $dP/d\theta = 0$ (y constante) y se demuestra que el ángulo óptimo es $\theta = 60^\circ$; esto es, la sección trapezoidal óptima es la mitad de un hexágono regular cuando el talud se puede elegir libremente.

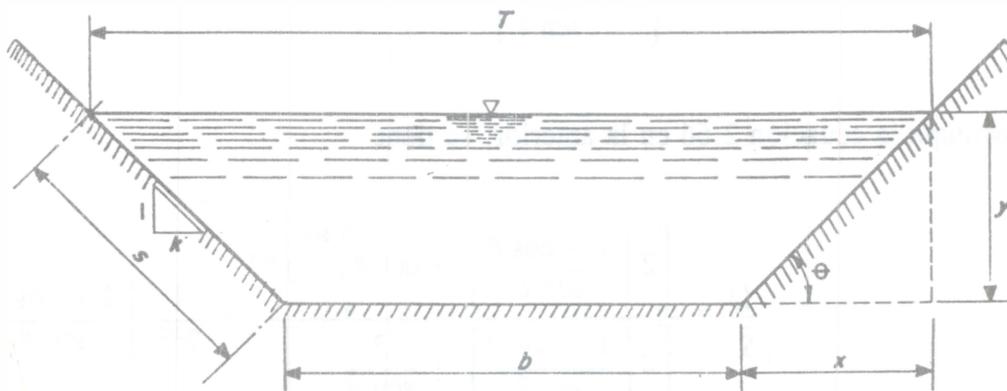


Figura 2.14. Sección trapezoidal

Con $\theta = 90^\circ$ en la ecuación 2.69, se encuentra que $T = 2y$, por lo que la sección rectangular óptima es la mitad de un cuadrado. La triangular óptima es la mitad de un cuadrado, pero con una diagonal vertical y cortado por la otra.

La sección circular óptima es el semicírculo.

La parabólica óptima es la que tiene un ancho de superficie libre, área hidráulica, perímetro mojado, radio hidráulico y tirante hidráulico como sigue:

$$T = 2 \sqrt{2} y$$

$$A = \frac{4}{3} \sqrt{2} y^2$$

$$P = \frac{8}{3} \sqrt{2} y$$

$$R_h = 0.5 y$$

$$\frac{A}{T} = \frac{2}{3} y$$

respectivamente, donde y es el tirante

Volviendo a la sección trapezoidal, con las ecuaciones 2.62, 2.63 y 2.64, la ecuación de Manning resulta

$$\frac{n Q}{\sqrt{S}} = \frac{(b y + y^2 \cot \theta)^{5/3}}{\left[b + \frac{2 y}{\operatorname{sen} \theta} \right]^{2/3}}$$

Si se sustituye la ecuación 2.66 en la anterior, se tiene

$$\frac{n Q}{\sqrt{S}} = \frac{\left[2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right] + \cot \theta \right]^{5/3} y^{8/3}}{\left[2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right] + \frac{2}{\operatorname{sen} \theta} \right]^{2/3}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left[\frac{2 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right] y^{8/3}$$

y al despejar y , se obtiene finalmente

$$y = 2^{1/4} \left[\frac{\operatorname{sen} \theta}{2 - \cos \theta} \right]^{3/8} \left[\frac{n Q}{\sqrt{S}} \right]^{3/8} \quad (2.70)$$

Con la ecuación 2.70 se calcula el tirante normal de la sección trapezoidal óptima en función del factor de conducción y del talud permisible. Obtenido el tirante, con la ecuación 2.66 se obtiene el ancho de plantilla.

2.7.3 Criterios de selección.

La solución con base en la sección óptima es una simplificación del problema, toda vez que la resistencia al flujo no es la única consideración importante en el diseño. El área hidráulica es únicamente la que utiliza el agua en su movimiento, pero la sección total del canal debe tomar en cuenta el libre bordo y otros factores dependientes de la topografía y de las necesidades de construcción, operación y mantenimiento, que modifican sus dimensiones e incrementan el costo. Por estas razones, sólo en un sentido muy restringido se puede decir que la sección hidráulica óptima debe ser la utilizada.

La elección de las dimensiones de la sección definitiva debe basarse, finalmente, en un estudio económico que analice las distintas variables que intervienen en el costo. Algunos criterios pueden consultarse en el capítulo 7. Sin embargo, la experiencia de algunas dependencias es de particular importancia en la elección de dichas dimensiones. En general, el ancho de la base en canales trapeciales no revestidos varía de 2 veces el tirante con caudales pequeños, a 8 veces con caudales hasta de 280 m³/s, dependiendo también de la finalidad que se confiera a los canales.

El *US Bureau of Reclamation* (USBR) recomienda elegir el ancho de plantilla o el tirante en canales no revestidos de acuerdo con su capacidad, y la figura 2.15 permite seleccionar alguno de los dos. El otro debe quedar supeditado al cálculo por medio de una ecuación de fricción.

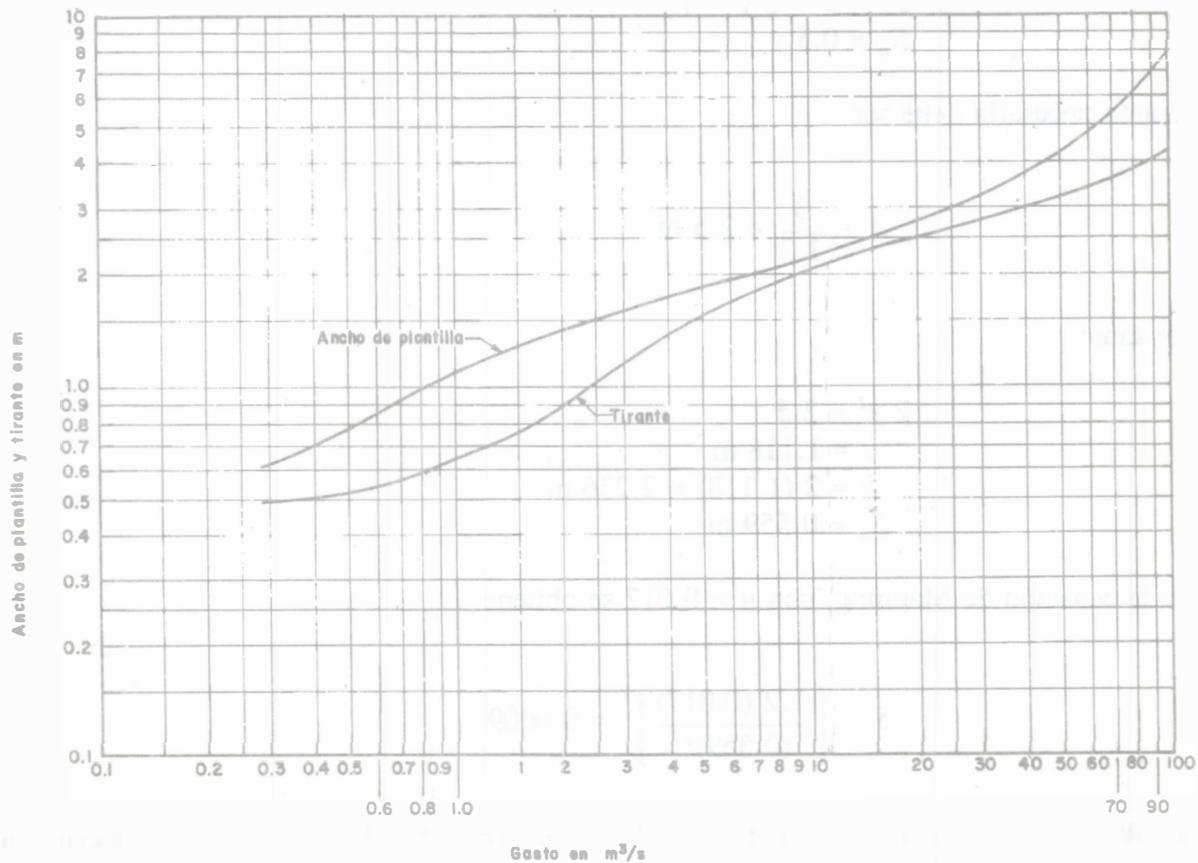


Figura 2.15. Ancho de plantilla o tirante recomendable en canales revestidos, según *US Bureau of Reclamation*

En canales recubiertos con superficie dura (concreto, asfalto, piedra, etc.) el ancho de la base es entre 1 y 2 veces el valor del tirante, cualquiera que sea la capacidad.

La sección del canal debe incluir un libre bordo para absorber las fluctuaciones del nivel del agua por diversos factores, y que generalmente varía entre 5 a 30 por ciento del tirante del canal. Una ecuación empírica general es

$$L_b = 0.30 + 0.25 y \quad (2.71)$$

donde y tirante y L_b libre bordo, ambos en metros, el último con un máximo de 1.20 m. Valores más precisos pueden consultarse en el capítulo 7.

Ejemplo 2.13. Un canal de fuerza de sección rectangular debe conducir 3 m³/s con velocidad de 1.2 m/s. Calcular las dimensiones de la sección hidráulica óptima y la pendiente necesaria si se reviste de concreto ($n = 0.017$).

Solución. La sección rectangular óptima es la de ancho igual al doble del tirante. Sus elementos geométricos son:

$$\begin{aligned} A &= b y = 2 y^2 \\ P &= b + 2 y = 4 y \\ R_h &= 0.5 y \end{aligned}$$

El área necesaria debe ser

$$A = \frac{3}{1.2} = 2.5 \text{ m}^2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 2 y^2 &= 2.5 \\ y &= 1.118 \text{ m} \\ b &= 2 (1.118) = 2.236 \text{ m} \\ R_h &= 0.559 \text{ m} \end{aligned}$$

De la ecuación de Manning, con $n = 0.017$ se obtiene

$$S = \left[\frac{1.2 (0.017)}{(0.559)^{2/3}} \right]^2 = 0.0009$$

Ejemplo 2.14. Un canal de fuerza revestido de concreto ($n = 0.017$) sección trapecial y talud 1.5:1, debe conducir 50 m³/s con pendiente de 0.00026. a) Obtener las dimensiones de la sección hidráulica óptima. b) Obtener las dimensiones de otra sección siguiendo el criterio del USBR, eligiendo como libre bordo el 30 por ciento del tirante.

Solución a. Siendo el talud permisible en el canal $k = 1.5$, las funciones dependientes del ángulo de inclinación del talud son:

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{3.25}} = 0.5547$$

$$\text{cos } \theta = \frac{1.5}{\sqrt{3.25}} = 0.83205$$

Por tanto, con $n = 0.017$, de la ecuación 2.70 resulta

$$y = 2^{1/4} \left[\frac{0.5547}{2 - 0.83205} \right]^{3/8} \left[\frac{0.017 (50)}{\sqrt{0.00026}} \right]^{3/8} = 3.979 \text{ m}$$

De la ecuación 2.66, el ancho de plantilla es entonces

$$b = 2 \left[\frac{1 - 0.83205}{0.5547} \right] 3.979 = 2.409 \text{ m}$$

esto es, menor que el tirante.

El área hidráulica se obtiene de

$$A = [2.409 + 1.5 (3.979)] 3.979 = 33.3277 \text{ m}^2$$

y la velocidad media de la expresión

$$V = \frac{50}{33.3277} = 1.5 \text{ m/s}$$

Solución b. De la figura 2.15, el ancho de plantilla recomendable es de 4.20 m. Por tanto, el factor de conducción en términos adimensionales es,

$$\frac{A R_h^{2/3}}{b^{8/3}} = \frac{n Q}{b^{8/3} S^{1/2}} = \frac{0.017 (50)}{(4.20)^{8/3} \sqrt{0.00026}} = 1.148$$

De la figura 2.7, la relación y/b resulta ser 0.843, por tanto, el tirante, área hidráulica y velocidad son

$$y = 0.843 (4.20) = 3.541 \text{ m}$$

$$A = [4.20 + 1.5 (3.541)] 3.541 = 33.6743 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{50}{33.6743} = 1.485 \text{ m/s}$$

El libre bordo es entonces

$$L_b = 0.30 (3.541) = 1.06 \text{ m}$$

De la ecuación 2.71 sería

$$L_b = 0.30 + 0.25 (3.541) = 1.19 \text{ m}$$

Ejemplo 2.15. Determinar el diámetro de un canal circular, revestido de cemento ($n = 0.0125$), que conduzca $5 \text{ m}^3/\text{s}$ con pendiente de 0.00161, de manera que opere con la sección óptima parcialmente lleno.

Solución. Los elementos geométricos son

$$A = \frac{\pi}{8} D^2$$

$$R_h = \frac{D}{4}$$

De la ecuación de Manning se obtiene

$$5 = \frac{1}{0.0125} \frac{\pi}{8} D^2 \frac{D^{2/3}}{4^{2/3}} (0.00161)^{1/2}$$

$$D = \left[\frac{5 (0.0125) (8) (4)^{2/3}}{\pi (0.0401)} \right]^{3/8} = 2.371 \text{ m}$$

y la velocidad resulta

$$V = \frac{8 (5)}{\pi (2.371)^2} = 2.265 \text{ m/s}$$

2.8 VELOCIDAD PERMISIBLE

El término velocidad mínima permisible se refiere a la menor velocidad del flujo con la cuál se previene la sedimentación del material suspendido en el agua y el crecimiento de vegetación. En general, una velocidad media de 0.60 m/s en canales pequeños a 0.90 m/s en los grandes evita la sedimentación de la carga de material en suspensión. Una velocidad de 0.75 m/s es normalmente suficiente para evitar el crecimiento de vegetación que pudiera afectar de manera importante la capacidad de conducción del canal. Algunos autores recomiendan no descender abajo de 0.50 m/s para evitar depósitos de arenas y de 0.30 m/s para evitar el depósito de limos. Sin embargo, se debe reconocer que estos valores son, en el mejor de los casos, estimaciones burdas de la velocidad mínima permisible real.

Criterios más precisos se mencionan en el capítulo 7, pero necesitan mayor información de las características del sedimento transportado.

El diseño de un canal erosionable es esencialmente un problema de estabilidad de la sección, en el que intervienen factores muy complejos. Si las paredes y fondo están terminados con un material factible de erosión, el criterio de diseño debe enfocarse a que aquélla no ocurra, esto es, alcanzar el equilibrio entre la capacidad de arrastre del flujo y la resistencia del material a la erosión. Para ello se tiene que limitar la velocidad y así impedir la erosión.

El criterio de la velocidad máxima permisible surgió teniendo como bases teóricas los trabajos pioneros de Fortier y Scobey (referencia 39), publicados en 1926, y cuyos resultados se resumen en la tabla 2.10. Para su utilización es conveniente hacer los siguientes comentarios:

- Los valores corresponden a canales con tangentes largas; cuando se trata de canales sinuosos, Lane (referencia 40), en 1955, recomendó las siguientes reducciones:

levemente sinuosos	5 por ciento,
moderadamente sinuosos	13 por ciento,
muy sinuosos	22 por ciento;

- los valores corresponden a tirantes menores de 0.91 m; para tirantes mayores los valores deben incrementarse en el orden de 0.15 m/s. Según Mehotra (referencia 41), en 1983, los valores se deben multiplicar por un factor, que en canales muy anchos es $y^{1/6}$;
- cuando el canal transporte sedimento abrasivo la velocidad se debe reducir en el orden de 0.15 m/s ;
- si el canal deriva el flujo desde un río con cargas de sedimento elevadas, se debe diseñar con una velocidad media 0.30 a 0.61 m/s mayor que la permitida para el mismo material, y considerar como si el agua no fuera a transportar sedimento.

El criterio del esfuerzo tangencial permisible consiste en limitar el valor medio τ_0 que produce el flujo en las paredes y plantilla del canal (obtenido de la ecuación 2.1) al permisible de acuerdo con el material, según la tabla 2.10.

Tabla 2.10. Velocidad y esfuerzo tangencial máximos permisibles recomendados por Fortier y Scobey (1926) para distintos materiales en canales rectos de pendiente pequeña y después de años en uso

Material	n	Agua limpia		Agua que transporta sedimento coloidal	
		V en m/s	τ en N/m ² *	V en m/s	τ en N/m ² *
Arena fina, coloidal.	0.020	0.46	1.295	0.76	3.597
Marga arenosa, no coloidal.	0.020	0.53	1.774	0.76	3.597
Sedimento margoso, no coloidal.	0.020	0.61	2.302	0.91	5.275
Sedimento aluvial, no coloidal.	0.020	0.61	2.302	1.07	7.193
Tierra común, firme.	0.020	0.76	3.597	1.07	7.193
Arena volcánica.	0.020	0.76	3.597	1.07	7.193
Arcilla dura, muy coloidal.	0.025	1.14	12.469	1.52	22.06
Limo aluvial, coloidal.	0.025	1.14	12.469	1.52	22.06
Pizarras, arena cementada con fango o con roca volcánica.	0.025	1.83	32.131	1.83	32.131
Grava fina.	0.020	0.76	3.597	1.52	15.346
Tierra graduada de arcilla a guijarros, no coloidal.	0.030	1.14	18.223	1.52	31.651
Limos graduados hasta piedrillas, coloidal.	0.030	1.22	20.621	1.68	38.365
Grava gruesa, no coloidal.	0.025	1.22	14.387	1.83	32.131
Piedrillas y guijarros.	0.035	1.52	43.64	1.68	52.752

* Los valores de τ se multiplican por 0.10197 para convertirlos en kgf/m².

Los trabajos de Fortier y Scobey se han utilizado por muchos años, como básicos en el diseño de canales.

Otras investigaciones y resultados más precisos se describen en el capítulo 7, pero necesitan de mayor información.

El método de la velocidad máxima permisible se basa, principalmente, en la observación más que en principios físicos. El método de la velocidad y esfuerzo tangencial críticos que se presentan en el subcapítulo 7.8 constituyen en la actualidad procedimientos más precisos que conjugan los principios físicos y la observación, y suplen a los anteriores.

Ejemplo 2.16. El material en que se excava en el canal del ejemplo 2.14 resiste una velocidad máxima de 1.12 m/s con tirantes superiores a 0.91 m, siendo el coeficiente de Manning $n = 0.025$. El mismo caudal de 50 m³/s se desea conducir, pero con pendiente de 0.000336. Obtener las dimensiones de la sección dejando un libre bordo de 30 por ciento del tirante.

Solución. De la ecuación de Manning se debe cumplir .

$$A R_h^{2/3} = \frac{0.025 (50)}{\sqrt{0.000336}} = 68.193$$

El procedimiento de cálculo consiste en suponer anchos de plantilla y con ellos determinar el tirante necesario que satisfaga la ecuación anterior así como la velocidad del flujo, de modo que ésta sea menor que la permisible. La solución de menor área sería, en principio, la más económica.

A continuación se presenta un resumen de los cálculos donde se observa que con 15 m de ancho y 2.401 m de tirante se obtiene una solución adecuada. El libre bordo sería de 0.72 m.

b en m	$\frac{A R_h^{2/3}}{b^{8/3}}$	$\frac{y}{b}$	y en m	A en m ²	P en m	R_h en m	$A R_h^{2/3}$	V en m/s
14	0.06	0.177	2.48	43.946	22.942	1.916	67.781	
			2.489	44.139	22.974	1.921	<u>68.214</u>	1.132
15	0.05	0.16	2.40	44.640	23.653	1.887	68.173	
			2.401	44.662	23.657	1.888	<u>68.222</u>	1.12
16	0.048	0.145	2.32	45.194	24.365	1.855	<u>68.226</u>	1.106

Con las dimensiones elegidas y $g\rho = 9810 \text{ N/m}^3$, el esfuerzo tangencial medio que produce el flujo se obtiene de la ecuación 2.1 y vale

$$\tau_0 = 9810 (1.888) (0.000336) = 6.223 \text{ N/m}^2$$

el cual debe compararse con el permisible.

2.9 CANALES DE SECCIÓN COMPUESTA

En ocasiones la sección de un canal puede estar compuesta de varias subsecciones de forma y rugosidad distinta. Por ejemplo, la de un canal aluvial o la de rectificación de un río en una ciudad, ambos expuestos a fluctuaciones importantes del caudal, comúnmente consiste de un cauce principal, por lo general menos rugoso, más profundo y de velocidad media mayor, y los laterales (figura 2.16), donde la velocidad media es menor y a veces, con rugosidad más grande.

Estas diferencias no son tomadas en cuenta si el análisis se realiza por el camino que hasta aquí se ha seguido, ya que realmente se trata de varios canales de características distintas que sólo tienen en común la misma pendiente.

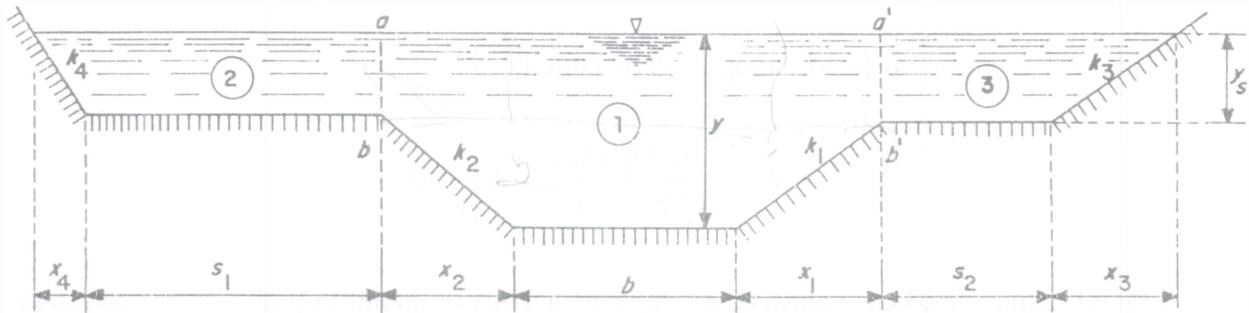


Figura 2.16. Canal de sección compuesta

La experiencia en campo y laboratorio obtenida por Posey (referencia 42), en 1967, indica que es posible calcular dicha sección por el camino usual cuando $y_s \geq 0.5 y$, esto es, tratar el flujo uniforme en el canal con base en una sección sencilla, con el valor total de A , de P , de R_h y del coeficiente de Manning equivalente (sección 2.4.6) para el tirante normal y que se establecería.

Cuando $y_s < 0.5 y$, se acusa una fuerza de fricción en los canales laterales distinta de la del canal central, por lo que es necesario dividir la sección en varias subsecciones, como las que se indican en la figura 2.16, esto es, tratarlo como de sección compuesta, considerando que:

A_1 área de la parte central, limitada por plantilla, taludes y las líneas ab y $a'b'$;

A_2 al área de la parte izquierda, hasta la línea ab ;

A_3 al área de la parte derecha, hasta la línea $a'b'$.

Según Posey, el perímetro mojado de la parte central de la sección debe incluir a las líneas ab y $a'b'$, debido a que el esfuerzo tangencial sobre ellas no es cero, pero dichas líneas no tienen que afectar al perímetro de las partes laterales; esto es, no deben incluirse en el perímetro mojado de dichas partes. Esto no ha sido demostrado lo suficiente, por lo que la mayoría de los autores no consideran el perímetro dado por las líneas ab y $a'b'$, ni en el perímetro mojado de la parte central ni en el de las laterales. Por ello queda a criterio del lector el camino que quiera seguir.

El cálculo de la sección compuesta se realiza aplicando por separado la ecuación de Manning para cada subsección, obteniendo la velocidad media en dicha sección y el gasto correspondiente. La suma de estos gastos proporciona el total.

Si A_1, A_2, \dots, A_n representan las áreas de cada subsección, de la ecuación 2.46 las velocidades medias respectivas son

$$V_1 = \frac{K_1}{A_1} S^{1/2}$$

$$V_2 = \frac{K_2}{A_2} S^{1/2}$$

$$V_n = \frac{K_n}{A_n} S^{1/2}$$

El gasto total es

$$Q = V A = \sum (V_i A_i)$$

pero siendo S la misma para todas las subsecciones resulta

$$Q = (\sum K_i) S^{1/2} \quad (2.72)$$

y la velocidad media en la sección

$$V = \frac{\sum K_i}{\sum A_i} S^{1/2} = \frac{\sum K_i}{A} S^{1/2}$$

Los coeficientes α y β de distribución de la velocidad en la sección total se calculan a partir de la velocidad media en cada subsección. En efecto, considerando incrementos de área $\Delta A = A_i$, de su definición (ecuación 1.16a) y el resultado anterior, se tiene

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \frac{v^3}{V^3} dA \approx \frac{1}{A} \frac{\sum (\alpha_i K_i^3 / A_i^2)}{[(\sum K_i) / A]^3}$$

$$\alpha = A^2 \left[\frac{\sum (\alpha_i K_i^3 / A_i^2)}{(\sum K_i)^3} \right] \quad (2.73)$$

En la misma forma, de la ecuación 1.16b se obtiene

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \frac{v^2}{V^2} dA = A \left[\frac{\sum (\beta_i K_i^2 / A_i)}{(\sum K_i)^2} \right] \quad (2.74)$$

Ejemplo 2.17. La rectificación de un río que atraviesa una ciudad se piensa realizar mediante un canal cuya sección tiene la forma que se muestra en la figura 2.16 y la siguiente geometría: $b = 40$ m, $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = k_4 = 3$, $y = 3.2$ m y $y_s = 1$ m. En época de lluvias el canal debe conducir un caudal máximo de $320 \text{ m}^3/\text{s}$, con tirante total de 3.20 m y pendiente de 0.00035 . a) Calcular el ancho de las ampliaciones laterales: s_1 y s_2 , considerando para ellas un coeficiente de Manning $n_2 = 0.035$; para la zona central $n_1 = 0.025$. b) Determinar el caudal que conduce el canal con estas ampliaciones pero con tratamiento de sección sencilla. c) Obtener los coeficientes α y β de la sección suponiendo que $\alpha = \beta = 1$ en las subsecciones.

Solución a. $y_s < 0.5$ y , por lo que el canal debe calcularse como de sección compuesta.

Zona central. Los elementos geométricos son:

$$A_1 = [40 + 2 (2.2)] 2.2 + [40 + 2 (2) (2.2)] 1$$

$$A_1 = 146.48 \text{ m}^2$$

$$P_1 = 40 + 2 \sqrt{1 + 2^2} (2.2) = 49.839 \text{ m}$$

$$R_{h1} = \frac{146.48}{49.839} = 2.939 \text{ m}$$

$$K_1 = 146.48 (2.939)^{2/3} / 0.025 = 12021.9$$

Luego, el gasto que conduce la parte central es

$$Q_1 = 12021.9 \sqrt{0.00035} = 224.91 \text{ m}^3/\text{s}$$

Por tanto, el de las ampliaciones debe ser

$$320 - 224.91 = 95.09 \text{ m}^3/\text{s}$$

Zonas laterales. Haciendo $s_1 + s_2 = 2 s$, su área es

$$A = [2 s + 3 (1)] 1 = 2 s + 3$$

Con $R_h \approx 1$ m se obtiene

$$Q = \frac{2 s + 3}{0.035} (1) (0.00035)^{1/2} = 95.09$$

$$s = \frac{1}{2} \left[\frac{95.09 (0.035)}{0.0187} - 3 \right] = 87.49 \text{ m}$$

Este es un valor aproximado; cada ampliación debe tener un ancho de 88.50 m. En efecto,
 $A = [2 (88.5) + 3 (1)] 1 = 180 \text{ m}^2$; $P = [2 (88.5) + 2 \sqrt{10} (1)] = 183.3246$; $R_h = 0.9819 \cdot \text{m}$.

Por tanto

$$K_2 = 180 (0.9819)^{2/3} / 0.035 = 5080.6$$

y el caudal es

$$Q_2 = 5080.6 (0.00035)^{1/2} = 95.05 \text{ m}^3/\text{s}$$

Solución b. Los elementos geométricos del canal son:

zona central:	$A_1 = 146.48 \text{ m}^2$, $P_1 = 49.839 \text{ m}$
zonas laterales:	$A_2 = 180 \text{ m}^2$, $P_2 = 183.3246 \text{ m}$
sección total:	$A = 146.48 + 180 = 326.48 \text{ m}^2$
	$P = 49.839 + 183.3246 = 233.1636 \text{ m}$
	$R_h = 1.40 \text{ m}$

Con la ecuación de Horton y Einstein, el coeficiente de Manning equivalente se obtiene de la 2.42 como sigue

$$n_e = \left[\frac{49.839 (0.025)^{1.5} + 183.3246 (0.035)^{1.5}}{233.1636} \right]^{2/3} = 0.033$$

El caudal total resulta

$$Q = \frac{326.48}{0.033} (1.40)^{2/3} (0.00035)^{1/2} = 231.63 \text{ m}^3/\text{s}$$

bastante menor que el de diseño.

Solución c. De la ecuación 2.73 resulta

$$\alpha = (326.48)^2 \left[\frac{1.0 (12021.9)^3 / (146.48)^2 + 1.0 (5080.6)^3 / (180)^2}{(12021.9 + 5080.6)^3} \right] = 1.812$$

y de la ecuación 2.74

$$\beta = (326.48) \left[\frac{1.0 (12021.9)^2 / (146.48) + 1.0 (5080.6)^2 / (180)}{(12021.9 + 5080.6)^2} \right] = 1.261$$

Estos resultados indican que a pesar de que α y β valen uno para las subsecciones, son mayores de uno para la sección compuesta.

2.10 MÉTODO SECCIÓN-PENDIENTE PARA DETERMINAR EL CAUDAL DE CRECIENTES EN UN RÍO

En rigor no puede ocurrir flujo uniforme en un río, sin embargo, para la condición normal con caudales pequeños (no de crecientes) el cambio en la velocidad dentro de un tramo corto no es apreciable y la línea de energía se podría considerar aproximadamente paralela a la media del lecho del río y a la de la superficie libre del agua. Esto es, sería válido aplicar el criterio de flujo uniforme con el área y pendiente medias para esta condición y obtener resultados cercanos a la realidad, lo que constituye una primera versión del método sección-pendiente.

Por el contrario, durante el paso de una avenida, la velocidad del agua en el río varía de manera importante, y con ella la carga de velocidad. De hecho el flujo es gradualmente variado y no permanente; sin embargo, considerando que en un tramo haya cambios graduales del perfil longitudinal del agua y del caudal con el tiempo, la pendiente hidráulica media en el tramo se podría ajustar de manera sucesiva como se indica a continuación.

La pérdida total de energía es $\Delta h_r = \Delta h_f + \Delta h_c$, donde Δh_f es la pérdida por fricción y Δh_c es la pérdida por convección, de manera que $\Delta h_f = \Delta h_r - \Delta h_c$. La pérdida Δh_r que ocurre en el tramo se obtiene de la ecuación a del ejemplo 1.1, pero para incluir el efecto de la pérdida por convección (cambio de velocidad), el término que corresponde a la variación de energía cinética suele afectarse de un coeficiente $k_t = 1 - k_e$, donde k_e es el coeficiente de pérdida por convección, en la forma

$$\Delta h_f = \Delta y' + k_t \left[\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right] \quad (2.75)$$

dicho coeficiente adopta los siguientes valores: $k_t = 0.7$, si hay expansión gradual en el tramo, $k_t = 0.5$ si es brusca ($A_1 < A_2$, $V_1 > V_2$); $k_t = 1.0$, si no hay cambio del área o no se considera la pérdida; $k_t = 1.2$ si hay contracción gradual; $k_t = 1.5$ si es brusca ($A_1 > A_2$, $V_1 < V_2$). Los subíndices 1 y 2 corresponden a las secciones en el extremo aguas arriba y aguas abajo del tramo respectivamente. Además, α_1 y α_2 son los coeficientes de energía cinética en las dos secciones.

La ecuación 2.75 indica que la pérdida Δh_f depende del desnivel $\Delta y'$ entre dos marcas dejadas por el agua sobre las márgenes de las dos secciones que limitan al tramo, y de la velocidad en dichas secciones. Dicha velocidad no se puede calcular hasta que se conoce el caudal, pero un procedimiento de iteraciones elimina este obstáculo.

En efecto, un valor inicial de Δh_f en el tramo se estima considerándolo, por ejemplo, igual a $\Delta y'$, para después dividirlo entre su longitud y obtener la pendiente media de fricción en el tramo, $\bar{S} = \Delta h_f / \Delta x$, en lugar de tomar la pendiente media del lecho. Con los elementos geométricos de las secciones que limitan el tramo (obtenidos de los niveles máximos alcanzados por el agua durante la avenida), se determinan los factores K de conducción en cada sección y se obtiene el medio \bar{K} en el tramo. Después, se aplica la ecuación 2.46 para determinar un primer valor del caudal: $Q = \bar{K} \sqrt{\bar{S}}$. Con éste y con la ecuación 2.75 se calculan sucesivamente valores más precisos de Δh_f , S y Q .

El procedimiento equivale a aceptar flujo uniforme en el tramo pero con los valores medios \bar{K} y \bar{S} .

Con el método de sección-pendiente se simplifican métodos de solución más refinados que necesitan más tiempo y mayor información, muchas veces inexistente. El método es por tanto económico y de gran utilidad en la extrapolación de niveles y caudales máximos en ríos principales y tributarios para el proyecto de puentes, bordos marginales, obras de defensa contra inundaciones, pequeños aprovechamientos y presas de derivación. A pesar de ello, el procedimiento se justifica sólo cuando el cambio en los factores K de conducción de las secciones que limitan al tramo es menor del 30 por ciento.

Para aplicar el método debe seleccionarse una parte del río más o menos recta, de longitud no menor de 6 veces el ancho del cauce, y sección casi uniforme, y dividirla en diez tramos aproximadamente iguales; o bien, seleccionar diez tramos independientes a lo largo del cauce.

Para la selección de los tramos es conveniente seguir algunos lineamientos, como se indica a continuación:

- a) Es necesario cerciorarse de la existencia de marcas dejadas por el agua sobre las márgenes e identificar lo más pronto posible la línea de aguas máximas, definida por las huellas que dejó el paso de la avenida. Dichas huellas deben ser abundantes y precisas; lo contrario cuestiona la utilidad del método.
- b) En lo posible, los tramos tienen que ser rectos, uniformes y sin contrapendientes. Hay que evitar los que contengan cambios importantes en la forma de la sección del cauce y de la pendiente, debido a la incertidumbre en la consideración de la pérdida de energía entre las secciones. Cuando exista la opción, debe preferirse un tramo en que el flujo se contraiga, a otro en que se expanda.
- c) El método supone que el total del área en cada sección del tramo es efectiva en la conducción del agua. Por lo tanto, deben evitarse tramos en que las condiciones provoquen una distribución desbalanceada del flujo; por ejemplo, puentes, meandros, árboles en las márgenes, construcciones y en general toda clase de obstáculos.
- d) Los tramos no deben incluir caídas de agua y rápidas, ni sitios donde haya habido desbordamientos.
- e) Las condiciones de uniformidad generalmente no se mantienen en tramos muy largos. Sin embargo, su longitud debe ser suficiente para desarrollar un desnivel apreciable en la superficie del agua entre las dos secciones y una determinación satisfactoria de la pendiente general del cauce. Además, la precisión general del método mejora en la medida en que la longitud del tramo aumenta.

Pueden utilizarse uno o más de los siguientes criterios para seleccionar la longitud del tramo:

- debe ser mayor o igual que 75 veces el tirante medio del flujo (A/T) y nunca menor que 0.6 veces el ancho del cauce;
- el desnivel del agua entre las dos secciones límite debe ser igual o mayor que la carga media de velocidad en el tramo, e igual o mayor de 0.15 m.

La precisión del método depende, en gran parte, del cuidado con que se haga el levantamiento topográfico, de la estimación del coeficiente de Manning en cada tramo y del alcance de la información recabada.

Los estudios de campo que tienen que realizarse consisten en:

- a) Establecer puntos de control o apoyo por medio de una poligonal abierta que quede localizada arriba del nivel máximo del agua, aproximadamente paralela al eje de la corriente (figura 2.17). Las secciones de cada tramo se ubicarán por medio de monumentos de concreto nivelados, en los que se graben la elevación y el cadenamiento, con el fin de que los mismos puntos puedan utilizarse para la determinación de todos los caudales extraordinarios que ocurran en ese sitio.
- b) Levantar las secciones transversales, normales al eje de la corriente, en cada uno de los puntos de control establecidos, que deberán abarcar niveles superiores al máximo del agua y los correspondientes a las aguas máximas y a las normales en cada una de las márgenes.
- c) Medir todas las huellas de aguas máximas que haya dejado la creciente en ambas márgenes por medio de poligonales que se ligarán con la de apoyo, nivelando con nivel montado todos los puntos estacados previamente.
- d) Inspeccionar de manera detallada el cauce para estimar los coeficientes de Manning necesarios en los cálculos. Por lo general es difícil fijar un valor medio del coeficiente en cada tramo, y con más razón en cada sección, por lo que es suficiente elegirlo en el tramo. Como suplemento, es conveniente tomar una serie de fotografías de los diferentes tramos del cauce para posteriormente confirmar los valores seleccionados. Estas actividades permiten calcular los factores de conducción en cada sección. De ser el caso, hay que estimar los coeficientes de distribución de la velocidad en las secciones.

El procedimiento de cálculo se expone enseguida, utilizando como referencia la figura 1.9 y el resultado del ejemplo 1.1.

1. Conocidos los elementos A y R_h en las secciones que limitan al tramo y el coeficiente n en el mismo, se calculan los factores de conducción mediante la ecuación 2.47: $K = A R_h^{2/3} / n$. Debido a que una misma sección puede ser común a dos tramos de n diferente, es conveniente diferenciar entre los valores: K_u para la sección aguas arriba y K_d para la de aguas abajo en cada uno.

2. Suele obtenerse el factor medio \bar{K} en el tramo, a partir del promedio geométrico de los valores en las secciones extremas; esto es

$$\bar{K} = \sqrt{K_u K_d}$$

3. Para tener un valor inicial del gasto se necesita uno aproximado de la pérdida de fricción Δh_f , por ejemplo, el desnivel $\Delta y'$ de la superficie del agua que se midió en el tramo, de modo que el valor inicial de \bar{S} es

$$(\bar{S})_0 = \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

4. Una primera aproximación del gasto es

$$(Q)_0 = \bar{K} \sqrt{(\bar{S})_0}$$

5. Conocido el valor aproximado de Q , se calculan las cargas de velocidad en las dos secciones y se utiliza la ecuación 2.75 para determinar la pérdida Δh_f , de manera que en la iteración $i+1$

$$(\bar{S})_{i+1} = \frac{\left[\Delta y' + k_t \left[\alpha_u (V_u^2 / 2g) - \alpha_d (V_d^2 / 2g) \right] \right]_i}{\Delta x}$$

y de ahí

$$(Q)_{i+1} = \bar{K} \sqrt{(\bar{S})_{i+1}}$$

6. El paso 5 se reitera hasta que $(Q)_{i+1} = (Q)_i$
7. El procedimiento se repite para obtener el caudal en los tramos restantes del río y se determina el definitivo, promediando como las circunstancias lo indiquen. Es común eliminar los gastos que difieren más del 10 por ciento del promedio y efectuar un segundo ajuste de éste con los restantes.

Ejemplo 2.18. Con el estudio topohidráulico efectuado en un tramo de río de longitud $\Delta x = 322$ m, se obtuvieron los siguientes datos para las secciones en los extremos; $A_u = 4874$ m², $R_{hu} = 9.62$ m, $\alpha_u = 1.12$; $A_d = 3835$ m², $R_{hd} = 8.20$ m, $\alpha_d = 1.17$; siendo el coeficiente de Manning en el tramo $n = 0.040$. El desnivel de la superficie libre del agua entre las dos secciones, medido a través de las huellas dejadas por el agua sobre las márgenes, fue $\Delta y' = 0.31$ m. Calcular el caudal de la avenida registrada.

Solución. De la ecuación 2.47 resulta

$$K_u = \frac{4874 (9.62)^{2/3}}{0.04} = 551157$$

$$K_d = \frac{3835 (8.20)^{2/3}}{0.04} = 389865 > 0.7 K_u$$

y el promedio geométrico es

$$\bar{K} = \sqrt{K_u K_d} = 463548$$

En este caso, $V_u < V_d$ para cualquier valor de Q , de modo que $(\bar{S})_1 < (\bar{S})_0$, y para acelerar la convergencia se considera aquí que $\Delta h_f < \Delta y'$, por ejemplo, $\Delta h_f = 0.15$ m, entonces $(\bar{S})_0 = 0.15/322 = 0.000466$ y el gasto

$$(Q)_0 = 463548 \sqrt{0.000466} = 10005 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocidad y carga de velocidad en las secciones son:

$$V_u = \frac{10005}{4874} = 2.053 \text{ m/s}; \quad \frac{V_u^2}{2g} = 0.215 \text{ m}$$

$$V_d = \frac{10005}{3835} = 2.609 \text{ m/s}; \quad \frac{V_d^2}{2g} = 0.347 \text{ m}$$

Debido a que $A_u > A_d$, $k_t = 1.2$, por tanto, de la ecuación 2.75 se obtiene

$$(\bar{S})_1 = \frac{0.31 + 1.2 [1.12 (0.215) - 1.17 (0.347)]}{322} = 0.00034712$$

y también

$$(Q)_1 = 463548 \sqrt{0.00034712} = 8636 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para la siguiente iteración sería conveniente elegir el promedio de los caudales, del inicialmente supuesto y el calculado; esto es, $Q = (10005 + 8636)/2 = 9321$.

Después de otra iteración se encuentra que $Q = 9437 \text{ m}^3/\text{s}$. En efecto:

$$V_u = \frac{9437}{4874} = 1.9362 \text{ m/s}; \quad \frac{V_u^2}{2g} = 0.1911 \text{ m}$$

$$V_d = \frac{9437}{3835} = 2.4608 \text{ m/s}; \quad \frac{V_d^2}{2g} = 0.3086 \text{ m}$$

$$\Delta h_f = 0.31 + 1.2 [1.12 (0.1911) - 1.17 (0.3086)] = 0.1335 \text{ m}$$

$$\bar{S} = \frac{0.1335}{322} = 0.0004146$$

$$Q = 463548 \sqrt{0.0004146} = 9438 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es casi el caudal supuesto.

En la figura 2.17 se muestra un ejemplo del cálculo de una avenida para los estudios de una presa derivadora, realizados por la entonces Secretaría de Recursos Hidráulicos de México (referencia 43).

REFERENCIAS

1. Henderson F.M. "Open Channel Flow", the Mc. Millan Co, Nueva York, 1966.
2. Reinius E. "Steady Uniform Flow in Open Channels", Transactions RIT, número 179, Estocolmo, 1961.
3. Fuentes R. y Carrasquel S. "Una ecuación empírica para zonas de transición", Publicación del Laboratorio Nacional de Hidráulica, número 78-10, Caracas, noviembre 1978.
4. Report ASCE. "Task Force on Friction Factors in Open Channels", Proceedings of the ASCE volumen 89, número HY2, marzo 1963, página 67.
5. Keulegan G. H. "Laws of Turbulent Flow in Open Channels", Journal of the National Bureau of Standards, Washington D.C., Research Paper 1151, volumen 21, diciembre 1938.
6. De Marchi E. "Il calcolo della resistenza al moto uniforme nei canali", L' Energia Elettrica H. 11, 1962.
7. Bock J. "Einfluß der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne", Institut für Hydromechanik und Wasserbau, Technische Bericht número 2, T.H. Darmstadt, 1966.
8. Unger. "Berechnung instationärer Abflüsse in natürlichen Gerinne unter Verwendung eines von der Querschnittsform unabhängigen Rauigkeitsmasses, T.H. Darmstadt, H. 3. 1967.
9. Blau E. "Beitrag zur Frage einer einheitlichen Geschwindigkeitsformel", Mitteilungen der Forschungsanstalt für Schifffahrt Wasser-und Grundbau, Berlín, 1969.
10. Zchiesche, Meissner y Blau. "Kritik der Abflussformeln", Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser-und Grundbau, Berlín, 1952.
11. Schröder R. "Einheitliche Berechnung gleichförmige turbulenter Strömungen in Rohren und Gerinnen", Der Bauingenieur, Heft 5, páginas 191 a 195, 1965.
12. Maza J.A. y García M. "Hidrodinámica. Bases para Hidráulica Fluvial", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, número D-20, México, 1984.

13. Strickler A. "Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformeln und der Rauheitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen", Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, número 16, Berna, 1923.
14. Williamson J. "The Laws of Flow in Rough Pipes", La Houille Blanche, volumen 6, número 5, septiembre-octubre 1951.
15. Ven te Chow. "Open-Channel Hydraulics", McGraw Hill-Kogakusha, Nueva York, 1959.
16. Barnes H. H. Jr. "Roughness characteristics of natural channels", U. S. Geological Survey, Washington, 1967.
17. Anónimo. "Guide for selecting roughness coefficient n values for channels", U. S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Washington, diciembre 1963.
18. James C.S. "Evaluation of methods for predicting bend loss in meandering channels", nota técnica en el Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, volumen 120, número 2, febrero 1994.
19. Simons D.B. y Senturk F. "Sediment Transport Technology", Water Resources Publication", Fort Collins, Col., 1976.
20. Raudkivi A.J. "Loose Boundary Hydraulics", segunda edición, Pergamon Press, Nueva York, 1976.
21. Garde R.J. y Ranga Raju K.G. "Mechanics of Sediment Transportation and Alluvial Stream Problems", Wiley Eastern, Nueva Delhi, 1978.
22. Subramanya K. "Flow in Open Channels", volumen 1, Tata McGraw-Hill Publishing Company, Nueva Delhi, 1982.
23. Meyer-Peter E. y Müller R. "Formulas for Bed-Load Transport", Proceedings of the 3rd Meeting of IAHR, páginas 39 a 64, Estocolmo, 1948.
24. Lane E.W. y Carlson E.J. "Some Factors Affecting the Stability of Canals Constructed in Coarse Granular Materials", Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Convention, septiembre 1953.
25. French R.H. y McCutcheon S.C. "The Stability of a two Layer Flow without Shear in the Presence of Boundary Generated Turbulence: field verification", Reporte técnico número 23, Environmental and Water Resources Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tenn., octubre 1977.

26. Horton R.A. "Separate roughness coefficients for channel bottom and sides", Engineering News Record III, número 22, páginas 652 a 653, noviembre 30 de 1933.
27. Einstein H.A. "Der Hydraulische oder profil-radius", Schweizerische Bauzeitung 108, número 103, páginas 89 a 91, Zurich, febrero 24 de 1934.
28. Mühlhofer L. "Rauhigkeitsuntersuchungen in einem Stollen mit betonierter Sohle und unverkleideten Wänden", Wasserkraft und Wasserwirtschaft, volumen 28, número 8, páginas 85 a 88, 1933.
29. Einstein H.A. y Banks R.B. "Fluid resistance of composite roughness", Transactions of the American Geophysical Union, volumen 31, número 4, páginas 603 a 610, 1951.
30. Lotter G.K. "Considerations on hydraulic design of channels with different roughness of walls", Transactions All Union Scientific Research, Institute of Hydraulic Engineering , páginas 238 a 241, Leningrado, 1933.
31. Krishnamurthy M. y Christensen B.A. "Equivalent Roughness for shallow channels", Journal of the Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 98, número 12, páginas 2257 a 2263, 1972.
32. Motayed A.K. y Krishnamurthy M. "Composite roughness of natural channels", Journal of the Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 106, número 6, páginas 1111 a 1116, 1980.
33. French R.H. "Open-Channel Hydraulics", Mc-Graw Hill Book Company, Nueva York, 1985.
34. Camp T.R. "Design of sewers to facilitate flow", Sewage Works Journal, volumen 18, páginas 1 a 16, enero-diciembre, 1946.
35. Kozeny J. "Hydraulik", Springer Verlag, Viena, 1953.
36. Christensen B.A. Discussion of: "Flow Velocities in Pipelines", Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, volumen 110, número 10, páginas 1510 a 1512, 1984.
37. Ludin A. "Ermittlung des Fließwiderstandes in Asbestzementrohren", Mitteilungen der Technischen Hochschule Berlín, 1937.
38. Anónimo. "Linings for Irrigation Canals", U.S. Bureau of Reclamation, Washington, 1963.
39. Fortier S. y Scobey F.C. "Permissible canal velocities" Transactions, American Society of Civil Engineers, volumen 89, páginas 940 a 956, 1926.

40. Lane E.W. "Design of Stable Channels", Transactions, American Society of Civil Engineers, volumen 120, páginas 1234 a 1279, 1955.
41. Mehotra S.C. "Permissible Velocity Correction Factors", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering, volumen 109, número 10, páginas 305 a 308, febrero 1983.
42. Posey C.J. "Computation of Discharge Including Over-Bank Flow", Civil Engineering, American Society of Civil Engineers, páginas 62 a 63, abril 1967.
43. Anónimo. "Presas de Derivación, Plan Nacional de Obras Hidráulicas para el Desarrollo Rural, Secretaría de Recursos Hidráulicos, México, 1976.

CAPÍTULO 3. PRINCIPIO DE LA ENERGÍA Y RÉGIMEN CRÍTICO

3.1 ANTECEDENTES

Las ecuaciones de la energía y continuidad permiten resolver, con relativa sencillez, los problemas de flujo a superficie libre en que se conoce el tirante en dos secciones extremas de un tramo corto al que se aplican y se quiere determinar el caudal (ejemplo 1.1). Esta situación es, en esencia, similar a la del cálculo del gasto en un conducto a presión, a partir de la presión medida aguas arriba de un venturímetro y en la garganta de éste.

Cuando se tiene un cambio de área en el conducto a presión y se conoce el gasto, con la ecuación de continuidad se calcula el cambio en la velocidad y la carga correspondiente, y con la de la energía, el cambio de presión. Sin embargo, el mismo problema en un canal se torna más complicado cuando se desconoce el tirante en alguna de las secciones, para calcularlo a partir de los cambios en la sección transversal. Esto conduce a dificultades especiales de gran interés, debido a que el tirante juega un doble papel al influir simultáneamente en ambas ecuaciones. El propósito del presente capítulo es analizar con cuidado la ecuación de la energía en flujo rectilíneo para encontrar soluciones adecuadas de ella, pero que carecen de validez en el flujo curvilíneo.

3.2 ENERGÍA ESPECÍFICA

El análisis de la ecuación de la energía en un flujo rectilíneo a superficie libre es suficiente si se realiza con los términos de carga de presión y energía cinética. En flujo curvilíneo habría que incluir el coeficiente de corrección α' de la carga de presión, cuyo valor se debe conocer previamente. En ambos casos, la energía de posición no interviene porque es constante, una vez elegido el nivel de referencia.

La energía específica en una sección de un canal es la que corresponde al flujo por unidad de peso del líquido a través de ella, y se mide con respecto al fondo de ésta. Para una sección de forma cualquiera y área hidráulica A , donde fluye el gasto Q , con $V = Q/A$ y $z = 0$ en la ecuación 1.7, la energía específica queda expresada en la forma:

$$E = y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} = y \cos \theta + \alpha \frac{Q^2}{2g A^2} \quad (3.1)$$

Es decir, equivale a la suma de la carga de presión en el fondo y la carga de velocidad. El valor de θ corresponde al ángulo de inclinación del fondo de la sección respecto de la horizontal. Si θ es pequeño $\cos \theta \approx 1$.

Siendo A función únicamente del tirante, la energía específica lo es también de él si Q es constante. En la figura 3.1b se presenta de manera gráfica la ecuación 3.1 mediante la curva ACB con dos ramas. La abscisa de cualquier punto P sobre la curva representa la energía específica en la sección donde ocurre la carga de presión y $\cos \theta$, ésta a su vez representada por la ordenada. La rama AC se aproxima asintóticamente al eje horizontal, y la BC a la línea OD

que pasa por el origen con inclinación de 45° . Existe una tercera rama de la curva, no mostrada en la figura, que corresponde a las soluciones con tirante negativo sin interés práctico.

La curva muestra que, para una determinada energía específica, existen dos valores del tirante, llamados tirantes alternos, el menor y_1 y el mayor y_2 , así como dos valores de la velocidad: V_1 y V_2 . En el punto C la energía específica E_c es la mínima con la que puede pasar el gasto a través de la sección y , por consecuencia, existe un solo tirante $y = y_c$ y una sola velocidad $V = V_c$, de modo que

$$E_c = y_c \cos \theta + \alpha \frac{V_c^2}{2g}$$

Esta equivale también a la condición de flujo en régimen o estado crítico, como se demuestra en el siguiente subcapítulo.

Cuando el tirante es mayor que y_c , la velocidad es menor que V_c para el gasto dado, esto es, la rama superior de la curva E - $y \cos \theta$ corresponde a un régimen de flujo con tirante grande y velocidad pequeña, conocido como subcrítico o tranquilo. Por el contrario, cuando el tirante es menor que y_c , la velocidad es mayor que V_c , es decir, un régimen de flujo con tirante pequeño y gran velocidad, conocido como supercrítico o rápido, representado por la rama inferior de la curva. El tirante o la velocidad en cada régimen adquieren el nombre que corresponda: subcrítico o supercrítico.

Si el gasto adquiere otro valor (pero de todos modos se mantiene constante), la curva de energía específica cambia a las posiciones $A' C' B'$ y $A'' C'' B''$, según el gasto sea menor o mayor, respectivamente, que el usado para la construcción de la curva ACB . Por otra parte, debido a que la carga de velocidad depende del gasto pero también de las dimensiones de la sección, un cambio de alguna de éstas tiene un efecto similar de desplazamiento de la curva de energía específica representada, que el de un cambio del gasto. Por ejemplo, en un canal rectangular

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g b^2 y^2} = \frac{q^2}{2g y^2}$$

donde $q = Q/b$ es el gasto unitario. Al disminuir b aumenta q y aunque el gasto total se mantenga constante, el efecto en el desplazamiento de las curvas es idéntico al que ocurre cuando Q aumenta y b permanece constante. En canales no rectangulares cualquier cambio en alguna de las dimensiones de su sección tiene efectos similares, si bien no es posible definir propiamente un gasto unitario.

También se observa que al elegir una energía específica E_0 constante, el punto C'' indica la última curva E - $y \cos \theta$ intersecada por la vertical de abscisa E_0 . Puesto que el gasto para cada curva crece o las dimensiones de la sección disminuyen a medida que la curva se desplaza a la derecha, dicho punto señala la condición correspondiente al gasto máximo que podría fluir con energía específica mínima igual a E_0 , esto es, $E_0 = E_c$ para el gasto Q_c que corresponde a la curva que pasa por C'' . Idéntico razonamiento se sigue si la dimensión de la sección disminuye, en cuyo caso, se obtiene la dimensión mínima con la misma E_c .

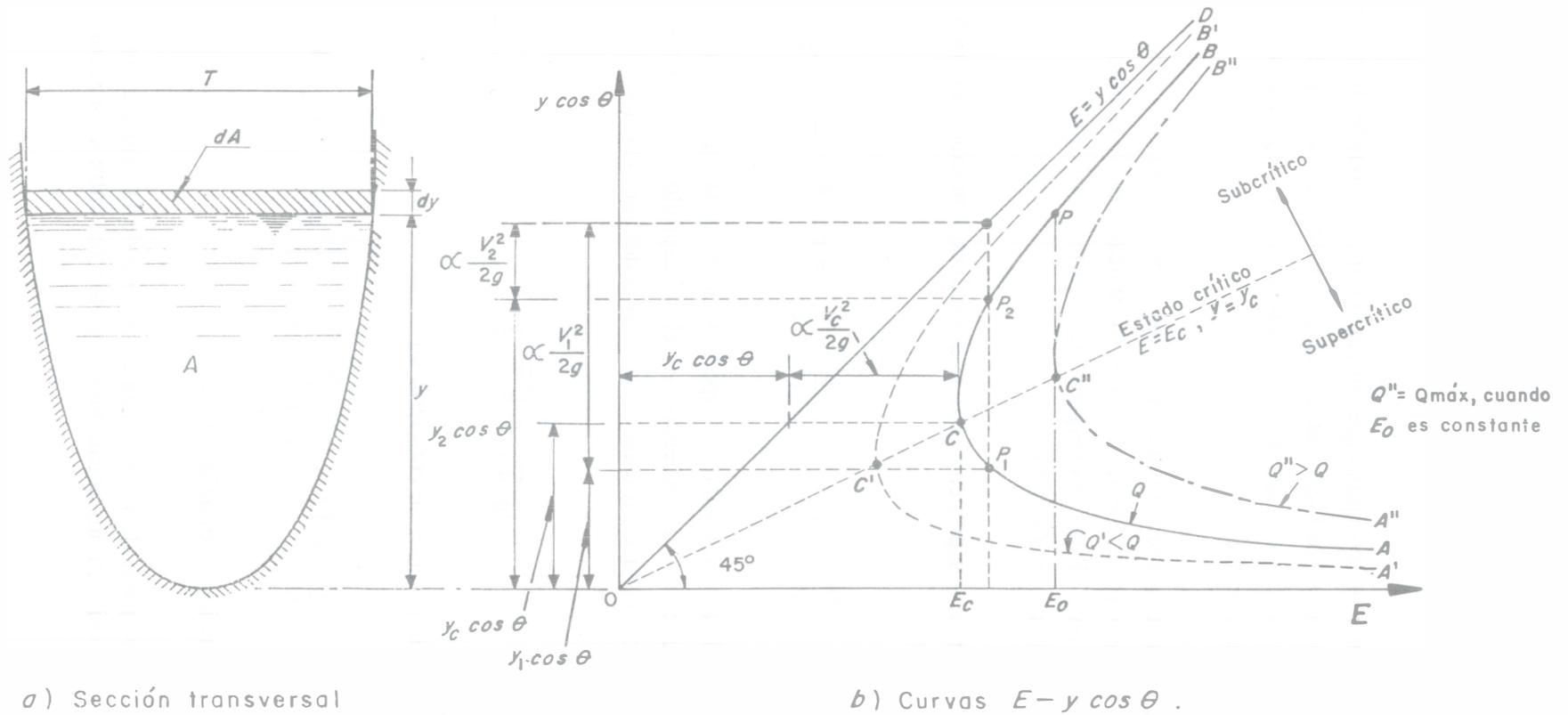


Figura 3.1. Curvas energía específica-tirante para gasto constante, en la sección de un canal con pendiente.
Si θ es pequeño, $\cos \theta \approx 1$

3.3 RÉGIMEN CRÍTICO

3.3.1 Condición de gasto constante

En el subcapítulo anterior se expuso que un gasto conocido puede fluir a través de una sección dada de un canal con dos posibles tirantes, característicos de dos tipos diferentes de régimen, y la misma energía específica; es decir, que alguno de los dos regímenes puede ocurrir para cada valor de la energía específica.

Un cambio lógico para explorar la diferencia entre los dos tirantes consiste en analizar primero el que representa el punto *C* de la figura 3.1b, ubicado en la condición límite entre los dos regímenes alternos, para el que la energía específica es la mínima con que puede fluir el gasto conocido a través de la sección del canal.

Para un gasto constante y suponiendo que α es también constante, la derivada con respecto a y de la ecuación 3.1 es

$$\frac{dE}{dy} = \cos \theta - \frac{Q^2}{g A^3 / \alpha} \frac{dA}{dy} = \cos \theta - \frac{V^2}{g A / \alpha T}$$

donde el elemento de área dA sobre la superficie libre en la figura 3.1a es igual a $T dy$; por lo que $T = dA/dy$ (ecuación 1.2). Además, en el subcapítulo 1.3 se propuso la definición más amplia del número de Froude en canales de gran pendiente (ecuación 1.4) que es

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{g A \cos \theta / \alpha T}} \quad (3.2)$$

Con ésta, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{dE}{dy} = \left[1 - \frac{Q^2 T}{g A^3 \cos \theta / \alpha} \right] \cos \theta = (1 - \mathbf{F}^2) \cos \theta \quad (3.3)$$

Si el canal es de pendiente pequeña, $\cos \theta \approx 1$.

Para determinar el mínimo de E se utiliza el criterio de la primera derivada ($dE/dy = 0$) y de la ecuación 3.3 se obtienen dos ecuaciones equivalentes entre sí, a saber

$$\mathbf{F}_c = \frac{V_c}{\sqrt{g A_c \cos \theta / \alpha T_c}} = 1 \quad (3.4a)$$

$$\frac{Q^2}{g \cos \theta / \alpha} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (3.4b)$$

La última también se puede escribir en la forma

$$\alpha \frac{Q^2}{2g A_c^2} = \alpha \frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{A_c}{T_c} \cos \theta \quad (3.4c)$$

La ecuación 3.4, en cualquiera de sus formas, impone las condiciones del flujo en régimen crítico, coincidentes con el punto de energía específica mínima o crítica. La ecuación 3.4a corresponde a la misma condición del flujo en régimen crítico presentada en el subcapítulo 1.3, a través de la definición general del número de Froude en canales de gran pendiente. La ecuación 3.4b indica una clara relación entre el gasto en la sección, sus elementos geométricos y el ángulo θ de inclinación del canal en dicha sección.

Por todo lo anterior, es válido considerar que la rama superior de la curva E -y $\cos \theta$ en la figura 3.1b corresponde al régimen subcrítico o tranquilo y la inferior, al supercrítico o rápido, y que en cada régimen el tirante o la velocidad adquieren el nombre que corresponda: subcrítico o supercrítico.

Si el canal es de pendiente pequeña, las ecuaciones 3.4 a, b, y c, se convierten de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_c = \frac{V_c}{\sqrt{g A_c / \alpha T_c}} = 1 \quad (3.5a)$$

$$\frac{Q^2}{g / \alpha} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (3.5b)$$

$$\alpha \frac{V_c^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{A_c}{T_c} \quad (3.5c)$$

De acuerdo con la ecuación 3.4c, la energía específica mínima en un canal se obtiene de la expresión

$$E_c = \left[y_c + \frac{1}{2} \frac{A_c}{T_c} \right] \cos \theta \quad (3.6)$$

Si el canal es de pendiente pequeña, $\cos \theta = 1$.

Todas las ecuaciones anteriores son válidas cualquiera que sea la geometría de la sección del canal. Sin embargo, se debe mencionar que el coeficiente α varía realmente con el tirante. Por tanto, considerarlo constante en la derivación de la ecuación 3.3 significa que las ecuaciones resultantes no son del todo exactas, pero su grado de precisión es suficiente en la práctica. El desarrollo del subcapítulo 3.9 está dedicado a corregir el error cometido al definir el régimen crítico en canales de sección compuesta, donde la corrección adquiere mayor importancia.

3.3.2 Condición de energía específica constante

En las curvas de la figura 3.1b se considera el caso de energía específica E_0 constante, para encontrar con ella la variación de Q y la magnitud del gasto máximo que podría fluir a través de la sección de dimensión conocida con dicha energía específica. El valor máximo de Q corresponde al de la última curva E -y $\cos \theta$ intersecada en el punto C'' por la vertical de abscisa E_0 .

Como antes se explicó, también aquí es válida la aclaración de que el cambio en la dimensión de la sección con gasto constante tiene un efecto equivalente al cambio de gasto con dimensión constante de la sección, y que la determinación del máximo es igual a obtener la dimensión mínima.

De la ecuación 3.1 se tiene

$$Q = \sqrt{2g/\alpha} A (E_0 - y \cos \theta)^{1/2}$$

En ésta, para $y = 0$, $Q = 0$, y para $y \cos \theta = E_0$, $Q = 0$, existe un máximo de Q entre estos dos valores. En efecto, la curva Q -y $\cos \theta$ que se muestra en la figura 3.2 representa el lugar geométrico de la ecuación anterior con la forma general para las secciones más usuales, donde se observan dos valores de y para cada valor de Q , excepto en el máximo. Para obtener el tirante único correspondiente al gasto máximo, se puede acudir nuevamente al criterio de la primera derivada

$$\frac{dQ}{dy} = \sqrt{2g/\alpha} \left[\frac{A}{2} (E_0 - y \cos \theta)^{-1/2} (-\cos \theta) + \frac{dA}{dy} (E_0 - y \cos \theta)^{1/2} \right] = 0$$

Con $dA/dy = T$, se obtiene

$$E_0 - y \cos \theta = \frac{A}{2T} \cos \theta$$

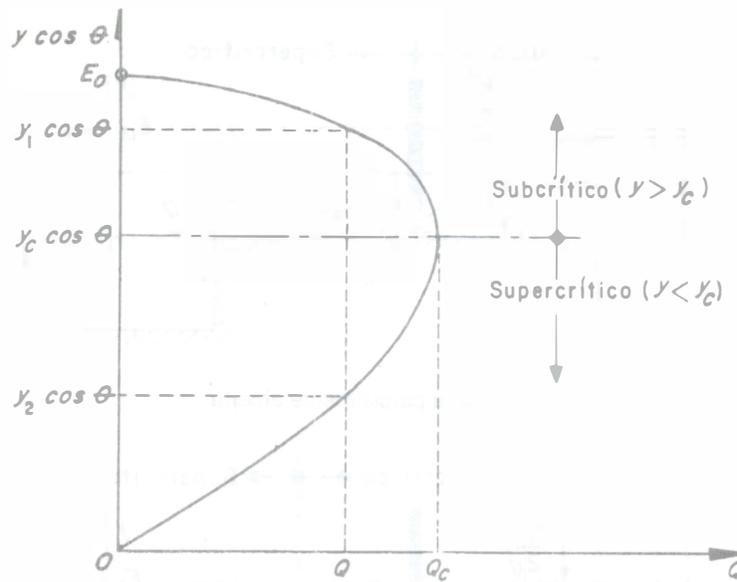


Figura 3.2. Curva gasto-tirante para energía específica constante, en un canal con pendiente. Si θ es pequeño, $\cos \theta \approx 1$

Por otra parte, de la ecuación 3.1, $E_0 - y \cos \theta = \alpha Q^2/2g A^2$, por tanto, resulta

$$\frac{Q^2}{g \cos \theta / \alpha} = \frac{A^3}{T}$$

que es idéntica a la ecuación 3.4b e indica que el gasto máximo o crítico $Q = Q_c$ ocurre para el régimen crítico de energía específica mínima $E_c = E_0$, esto es

$$\frac{Q_c^2}{g \cos \theta / \alpha} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

Queda establecida así otra propiedad importante del régimen crítico: no sólo define la energía específica mínima para fluir un gasto conocido, sino también dicho gasto es el máximo que puede fluir con dicha energía específica mínima. Ésta corresponde también a la dimensión mínima de la sección si el gasto permanece constante.

El caso de energía específica constante se puede ilustrar con el comportamiento del flujo antes y después de una compuerta deslizante, situada cerca del punto medio de una parte sobreelevada del fondo en un canal rectangular de pendiente pequeña u horizontal (figuras 3.3 a y b), donde la energía específica E_0 antes de la compuerta, queda referida al nivel de la parte sobreelevada y se considera constante sobre ella para cualquier valor del gasto.

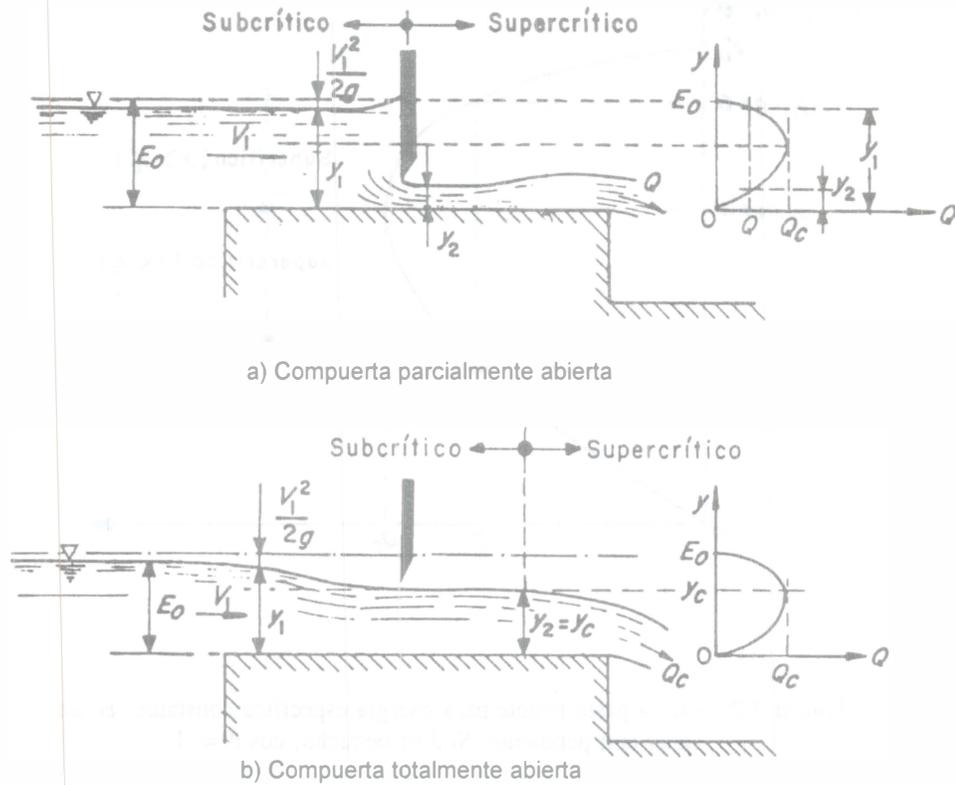


Figura 3.3. Compuerta deslizante actuando o no como control en un canal horizontal

Cuando la compuerta se cierra, el tirante y_1 aguas arriba es igual a E_0 , mientras que el de aguas abajo y_2 es cero. Si la compuerta se abre parcialmente una cantidad menor que y_c , el perfil del flujo adopta la condición $y_1 > y_c$, y $y_2 < y_c$, como se muestra en la figura 3.3a.

Si la compuerta se abre totalmente, los niveles aguas arriba y aguas abajo deben ser iguales: $y_1 = y_2 = y_c$, como se muestra en la figura 3.3b, y el gasto debe ser el máximo, creando las condiciones de flujo sobre un vertedor de cresta ancha. En esta situación, con $A_c/T_c = y_c$ en la sección rectangular, de la ecuación 3.5c: $\alpha V_c^2/2g = y_c/2$; $E_0 = E_c = 3y_c/2$; $y_c = 2E_c/3$, y el gasto unitario que descarga el vertedor es el máximo, de magnitud

$$q = \left[\frac{2}{3} \right]^{3/2} \sqrt{g/\alpha} E_0^{3/2} = C E_0^{3/2} \quad (3.7)$$

donde E_0 es la energía específica del flujo sobre la cresta. Con $\alpha = 1$, el coeficiente C en el sistema internacional de unidades resulta $1.7049 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$. La ecuación 3.7 es válida con la condición de que se forme el tirante crítico en alguna sección sobre la cresta del vertedor, ya que los experimentos han mostrado que y_c no ocurre al final de la cresta, sino un poco antes (ejemplo 3.8).

Es necesario destacar que las condiciones de flujo rectilíneo crítico utilizadas en la discusión anterior se logran sólo si el vertedor es de cresta ancha (fondo plano). Un fondo curvo en dicho vertedor puede significar condiciones de flujo curvilíneo y de régimen crítico distintas, y la invalidez del valor $C = 1.7049$ en la ecuación 3.7. En el capítulo 8 se presenta el análisis del flujo sobre fondos curvos y sus condiciones en régimen crítico.

Para entender mejor lo hasta aquí expuesto, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Un canal rectangular de 2.25 m de ancho y pendiente pequeña conduce un caudal de 4.5 m³/s con energía específica de 1.68 m ($\alpha = 1$). *a)* Determinar los tirantes alternos y el régimen del flujo en que se encuentran para la E prescrita. *b)* Calcular y dibujar la curva E - y , con el fin de verificar los resultados del caso anterior, obteniendo también la energía específica mínima y el tirante correspondiente a ella. *c)* Resolver la misma situación del caso anterior cuando el ancho del canal cambia a 3 m y a 1.8 m. *d)* Calcular el gasto máximo que puede fluir por la sección del canal cuando $E_c = 1.68$ m.

Solución a. La energía específica debe ser

$$y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{q^2}{2g y^2} = 1.68 \quad (\text{a})$$

Siendo el gasto unitario $q = 4.5/2.25 = 2$ m²/s, la ecuación anterior se convierte en

$$y^3 - 1.68 y^2 + 0.2039 = 0$$

De su análisis se deduce que existen tres valores de y (dos positivos y uno negativo) que la satisfacen. Éstos son: 1.60 m, 0.399 m, - 0.319 m. Desde el punto de vista matemático, los tres resuelven el problema, pero sólo los valores positivos pueden ser físicamente posibles. El primero corresponde al tirante alterno mayor; el segundo, al menor.

Solución b. La ecuación *a* resulta

$$E = y + \frac{(2)^2}{2g y^2} = y + \frac{0.2039}{y^2}$$

La tabla 3.1 muestra los valores de y y E obtenidos de esta ecuación

Tabla 3.1. Valores de y y E , en metros, en la solución b del ejemplo 3.1

y	E	y	E	y	E
0.3	2.565	0.742	1.113	1.3	1.421
0.35	2.014	0.8	1.119	1.4	1.504
0.4	1.674	0.9	1.152	1.5	1.591
0.5	1.315	1.0	1.204	1.6	1.680
0.6	1.166	1.1	1.268	1.7	1.771
0.7	1.116	1.2	1.342		

La figura 3.4 muestra la curva E - y y la verificación solicitada. La energía específica mínima es de 1.113 m y el tirante crítico correspondiente de 0.742 m. En efecto, con $y_c = 0.742$ m, $V_c = 2/0.742 = 2.6954$ m/s, $F_c = 2.6954/\sqrt{9.81 (0.742)} = 1$, $E_c = 0.742 + (2.6954)^2/19.62 = 1.113$ m. Esto significa que el gasto unitario de 2 m²/s requiere de una energía específica mínima de 1.113 m para poder fluir en el canal de 2.25 m de ancho.

Solución c. Aunque el gasto total es constante, los unitarios cambian a los valores

$$q' = \frac{4.5}{3} = 1.5 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$q'' = \frac{4.5}{1.8} = 2.5 \text{ m}^2/\text{s}$$

y las ecuaciones resultan distintas para cada gasto unitario, a saber

$$E = y + \frac{0.1147}{y^2}$$

$$E = y + \frac{0.3186}{y^2}$$

cuya representación gráfica se muestra también en la figura 3.4, donde se señalan los valores de y_c y E_c para ambas. Como ya se había mencionado, lo anterior muestra que es suficiente cambiar la dimensión horizontal de la sección del canal para que haya un cambio de ubicación de la curva E - y , aunque el gasto total sea constante.

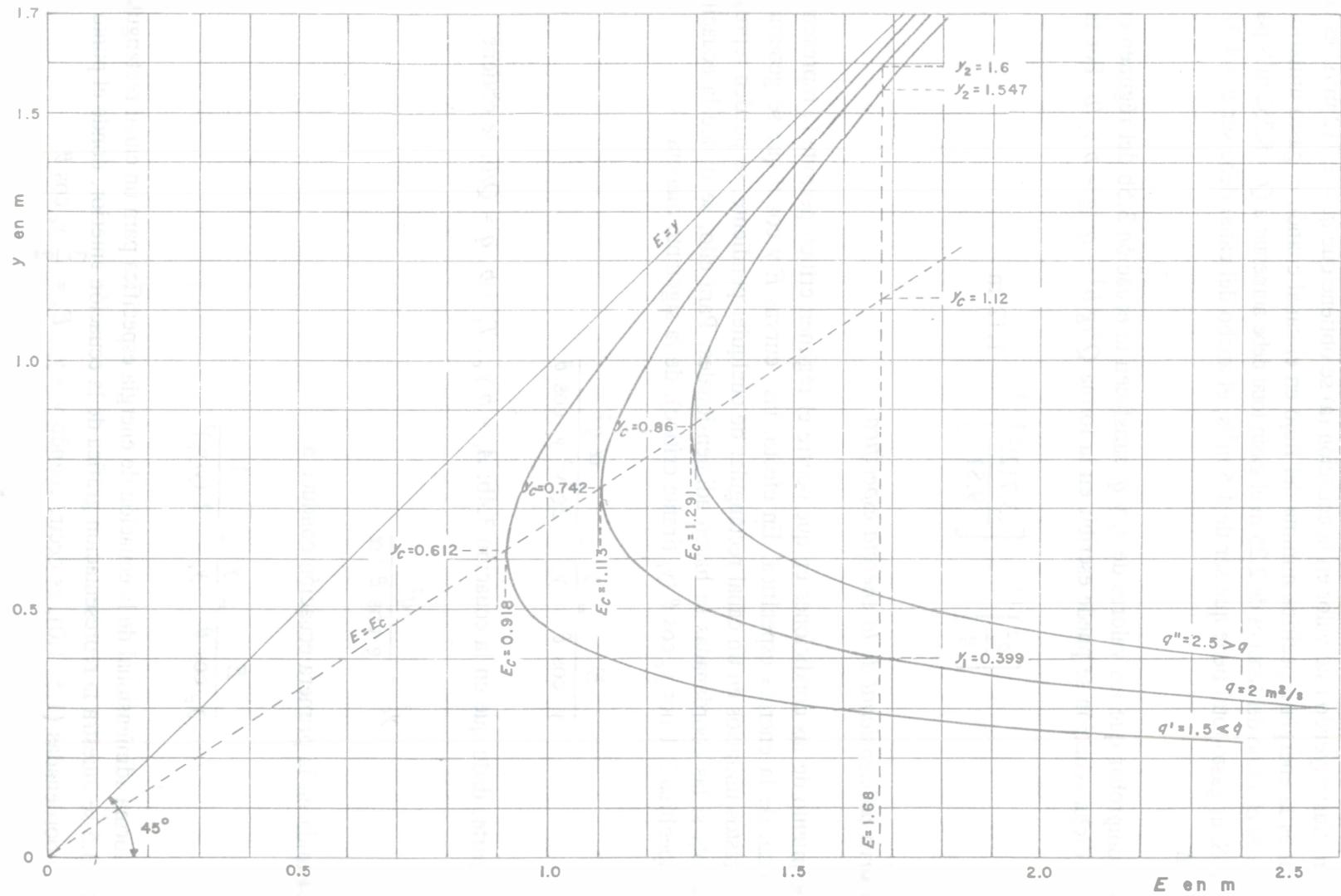


Figura 3.4. Curvas energía específica-tirante del canal en el ejemplo 3.1

Solución d. La intersección de las rectas $E = 1.68$ m y $y = y_c$ en la figura 3.4 ocurre para $y_c = 1.12$ m. Sustituyendo este valor en la ecuación (a) se obtiene que $q_c = 3.712$ m²/s, es decir, $E = 1.68$ m es la energía específica mínima del flujo en el canal cuando el gasto unitario es de 3.712 m²/s. Si el ancho del canal es de 2.25 m el gasto total debe aumentar a $Q = 8.352$ m³/s para que esto ocurra. Si el gasto total tiene que ser de 4.5 m³/s, el ancho del canal debe ser $b = 4.5/3.712 = 1.2123$ m.

Se puede comprobar que los valores de y_c y q_c satisfacen la ecuación 3.5b del régimen crítico. En efecto, dicha ecuación se puede escribir en la forma $Q^2/g b^2 = q^2/g = b y_c^3/b$. Por tanto

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left[\frac{(3.712)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 1.12 \text{ m}$$

3.3.3 Curva adimensional de la energía específica

El conocimiento de las condiciones en que ocurre el régimen crítico permite la representación adimensional de la energía específica. En efecto, las curvas E -y con θ que se generan para distintos gastos unitarios en un canal rectangular de cualquier pendiente, se pueden representar por una sola si las coordenadas se hacen adimensionales. Para ello, se divide la ecuación de energía específica 3.1 por $y_c \cos \theta$ (y_c tirante crítico), de la siguiente manera

$$\frac{E}{y_c \cos \theta} = \frac{y}{y_c} + \frac{\alpha q^2}{2g y^2 y_c \cos \theta}$$

Por otra parte, dado que en la ecuación 3.4b: $A_c = b y_c$, $T_c = b$, $q = Q/b$, se obtiene

$$y_c^3 = \frac{q^2}{g \cos \theta / \alpha}$$

que sustituida en la primera ecuación conduce a

$$\frac{E}{y_c \cos \theta} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2 (y/y_c)^2}$$

que es la forma adimensional de la ecuación de energía específica para un canal rectangular. En la figura 3.5 se muestra la representación gráfica de la ecuación anterior, donde el punto crítico tiene las coordenadas (1.5, 1.0), es decir, cuando $y = y_c$, $E_c = \frac{3}{2} y_c \cos \theta$.

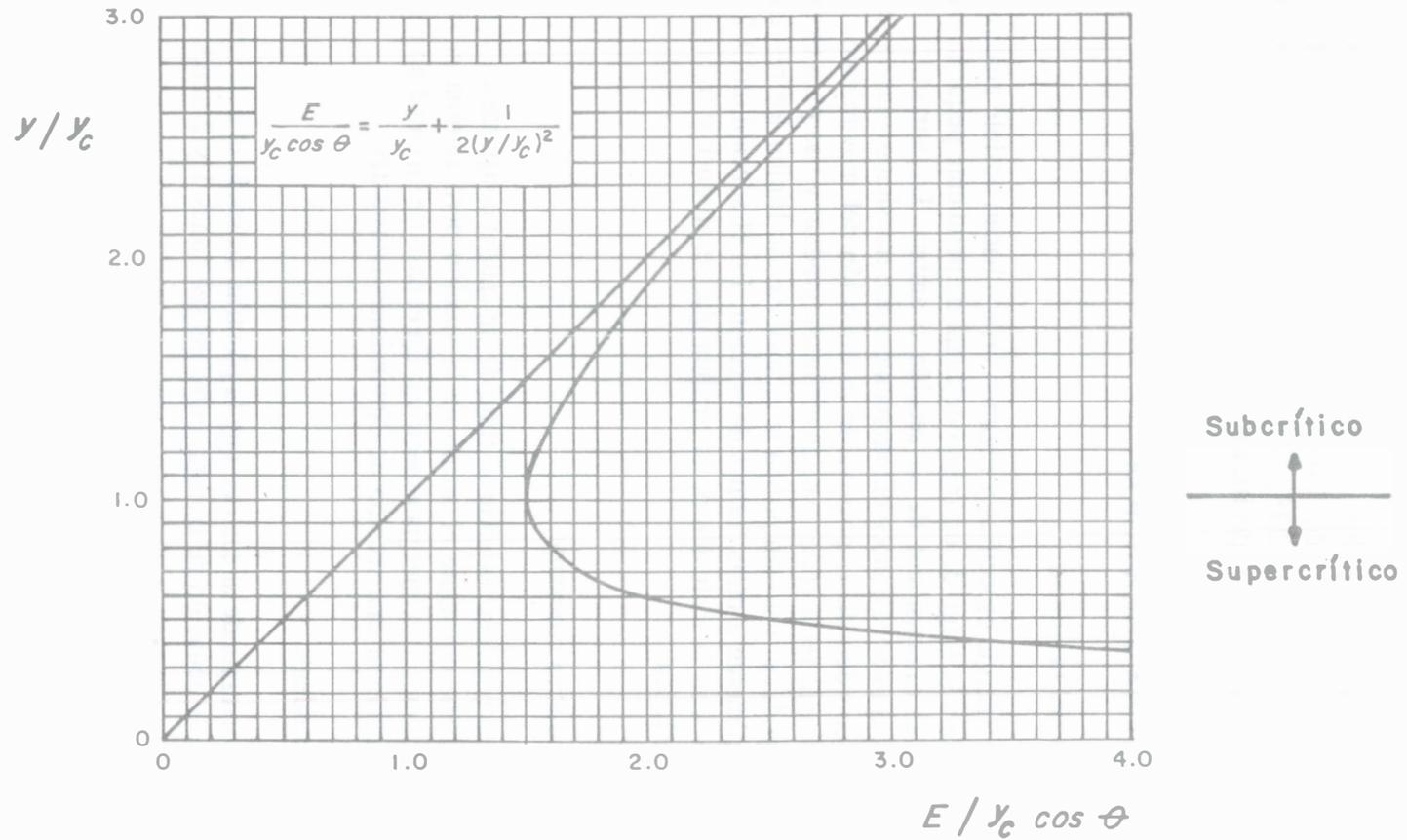


Figura 3.5. Curva adimensional energía específica-tirante en un canal rectangular

Ejemplo 3.2. Determinar los valores de y para $E_0 = 1.68$ m, $q = 2$ m²/s, en el ejemplo 3.1a, utilizando la curva adimensional de energía específica ($\alpha = 1$). Obtener también la energía específica mínima.

Solución. El tirante crítico resultó $y_c = 0.742$ m (también puede calcularse de la ecuación 3.5b). Por tanto, $E/y_c = 1.68/0.742 = 2.2656$. Con este resultado y la figura 3.5, se obtiene; $y/y_c = 2.158$, $y = 1.60$ m; y también: $y/y_c = 0.538$, es decir, $y = 0.399$ m, valores iguales a los obtenidos en el ejemplo citado. La energía específica mínima es: $E_c = 3(0.742)/2 = 1.113$ m.

3.4 FLUJO EN UNA TRANSICIÓN

3.4.1 Definición del problema

Los conceptos de energía específica y régimen crítico hacen posible analizar el comportamiento del perfil del flujo a lo largo de un tramo de canal de pendiente pequeña donde cambia el nivel de su plantilla, las dimensiones de su sección o ambas. La estructura hidráulica en que se producen dichos cambios se conoce comúnmente como transición y las variaciones se cuantifican a lo largo de la coordenada x , positiva en la dirección del movimiento. Aquí se considera la transición en un canal rectangular, suficientemente gradual y lisa para despreñar la pérdida de energía que se produce. Esto simplifica la exposición sin limitar los resultados, ya que pueden generalizarse fácilmente a otras formas de sección. En el subcapítulo 9.2 se trata de nuevo el mismo problema, con la inclusión de la pérdida que se produce y los cambios de sección más comunes en la práctica.

3.4.2 Canal de ancho constante

En primer término conviene estudiar el flujo de un caudal constante en una transición en la cual también se mantiene constante el ancho de la sección pero cambia el nivel de su plantilla e induce modificaciones a su energía específica. En el caso de un canal no rectangular la discusión equivaldría a considerar una sección de dimensiones constantes.

a) Plantilla ascendente

La figura 3.6a corresponde al caso en que la plantilla asciende el desnivel total Δz ($dz/dx > 0$). La aplicación de la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 conduce a

$$E_2 = E_1 - \Delta z \quad (3.8)$$

Las modificaciones que experimenta el tirante pueden analizarse a partir de los cambios de energía específica en la curva E - y relativa al gasto del canal, de manera que para un valor de E_1 conocido, existen dos posibles tirantes y_1 , representados por los puntos A y A' en la figura 3.6b.

Debido a que $E_2 = E_1 - \Delta z$, existen también dos posibles valores de y_2 , representados en esa misma figura por los puntos B y B' , que corresponden a dos soluciones físicamente posibles.

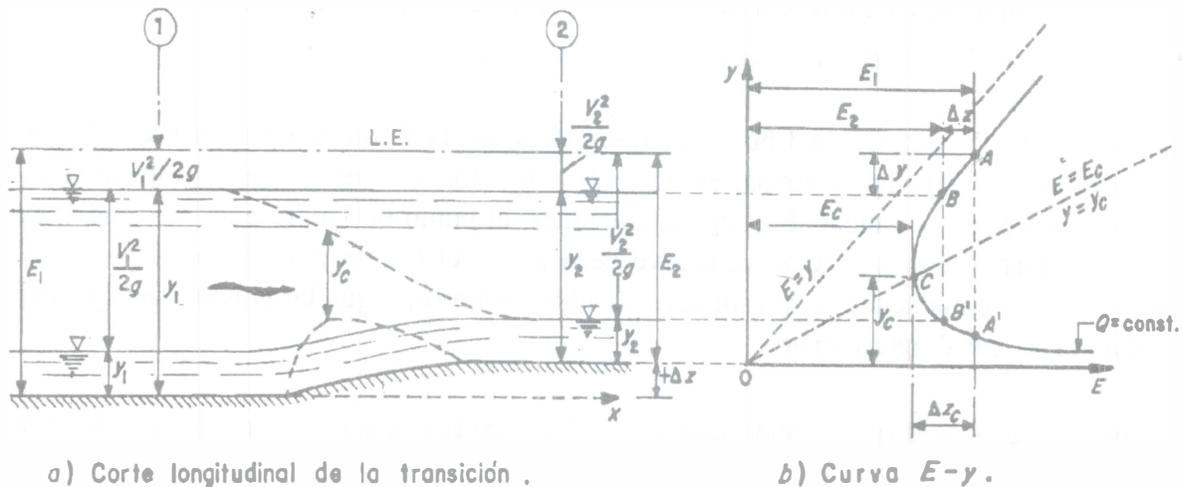


Figura 3.6. Comportamiento del flujo en una transición de un canal rectangular de ancho constante, cuando hay ascenso de la plantilla (escalón positivo)

El punto A reproduce la situación del flujo cuando $y_1 > y_c$, de manera que habría que pasar a B o B' . Para encontrar la solución correcta es necesario analizar los recorridos posibles de A a B o de A a B' . El primero es factible siguiendo la curva $E-y$, lo que trae como consecuencia la solución $y_2 < y_1$. Para el segundo, si se pasara de A a B siguiendo la curva $E-y$, y después de B a B' sobre la vertical, esto significaría que cambiara el ancho de la sección para poder cruzar curvas $E-y$ de gasto distinto al de la sección 1, lo que estaría en contra de la hipótesis de partida (gasto y ancho constantes). El recorrido de B a B' siguiendo la misma curva $E-y$ indicaría que la energía específica a lo largo de la transición tendría que disminuir por abajo de E_2 hasta llegar a la mínima (punto C), y después aumentar de nuevo hasta el mismo valor de E_2 . Esto podría acontecer únicamente si el fondo de la transición se eleva por encima del de la sección 2, lo suficiente para llegar a C , formar el tirante crítico y después volver al nivel de la sección 2, lo cual queda representado en la figura 3.6a con línea discontinua. Al no tener una transición con esta geometría, el punto B' sería inaccesible y no representaría una solución del problema.

Por tanto, si $y_1 > y_c$, el único tirante posible en la sección 2 es el representado por el punto B , donde $y_c < y_2 < y_1$. Esto significa que siempre hay un decremento del tirante al pasar de 1 a 2, pero se mantiene el régimen subcrítico, lo que es sorprendente, toda vez que sería de esperarse más bien un incremento del tirante por la presencia del escalón.

El punto A' reproduce la situación del flujo cuando $y_1 < y_c$, y la primera solución ocurre si y_2 queda representado por B' , también en régimen supercrítico, al seguir el recorrido en la curva de A' a B' . En este caso $y_2 > y_1$, lo que equivale a un incremento del tirante al pasar de 1 a 2.

El punto B es inaccesible desde B' , a menos que hubiese cambios en el nivel del piso de la transición semejantes a los discutidos en el recorrido de B a B' . Es decir, el único y_2 factible es el representado por B' , de modo que $y_1 < y_2 < y_c$.

Cuando $y_1 > y_c$, en la figura 3.6b también se indica que la altura máxima del escalón, que evita alteraciones del flujo aguas arriba, es $\Delta z_c = E_1 - E_c$, donde E_c es la energía específica mínima posible para pasar el caudal. En estas condiciones, el punto que representa las condiciones del flujo a lo largo de la transición se mueve de A a C y el tirante y_c ocurre en la sección 2. El tirante crítico se mantendrá hacia adelante o cambiará a otro, según las condiciones que imponga el flujo en el canal aguas abajo.

Un razonamiento análogo es válido cuando $y_1 < y_c$, excepto que el punto se mueve de A' a C .

Cuando la altura del escalón de ascenso es $\Delta z = \Delta z_c$ y después el nivel de la plantilla de la transición vuelve al original de la sección 1 (figura 3.7a), el punto que representa al flujo del lado aguas arriba (figura 3.7b) se mueve de A a C , o de A' a C , y después queda libre de volver a la rama de régimen subcrítico o de continuar hacia la de supercrítico, según las condiciones que imponga el canal aguas abajo. Si existe algún control, o si la pendiente del canal obliga a un tirante normal mayor que el crítico, la tendencia será hacia el régimen subcrítico, en caso contrario, hacia el supercrítico. Así se concluye que cualquiera de los regímenes en el lado aguas arriba puede pasar a cualquier otro en el lado aguas abajo cuando Δz sea el máximo, Δz_c , sin que ocurran alteraciones en las condiciones del flujo aguas arriba de la transición.

Si Δz es suficientemente grande para hacer que E_2 sea menor que la energía específica mínima, no existe solución posible; es decir, los tres valores prescritos de Q , E_1 y Δz no pueden existir de manera simultánea en la transición. En efecto, si $\Delta z > \Delta z_c$ el gasto Q no puede fluir con la energía específica E_2 resultante sin alterar las condiciones de tirante y energía específica aguas arriba. Para ello se tendría que establecer un nuevo estado permanente que obligara a aumentar a y_1 , y con éste alterar E_1 a un nuevo valor compatible con la altura Δz y la energía específica $E_2 = E_c$, es decir, $E_1 = E_c - \Delta z$.

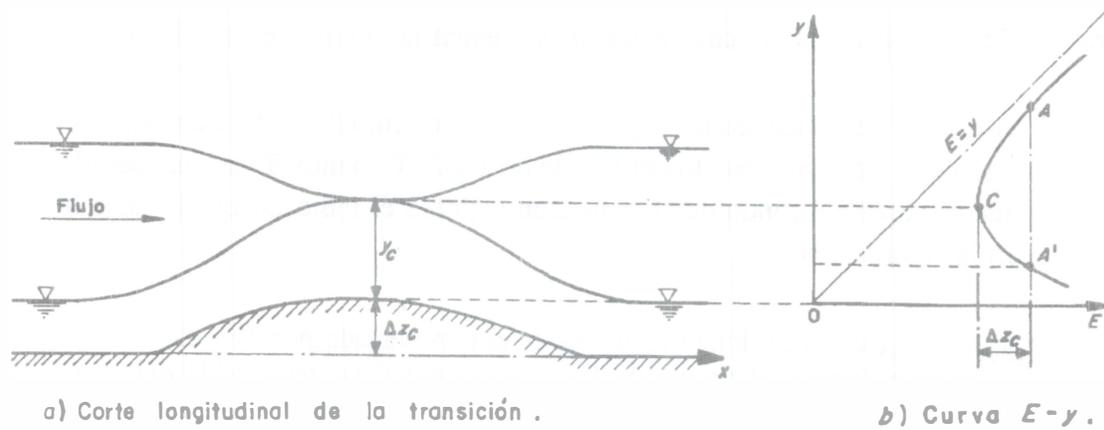


Figura 3.7. Efecto de un escalón ascendente de altura crítica

b) Plantilla descendente

En la figura 3.8a se presenta el caso en que la plantilla desciende ($dz/dx < 0$) el desnivel total $-\Delta z$, de manera que

$$E_2 = E_1 + \Delta z \quad (3.9)$$

Los puntos A y A' de la figura 3.8b representan los dos posibles tirantes y (alternos de la energía específica E_1), y B y B' , los respectivos de E_2 .

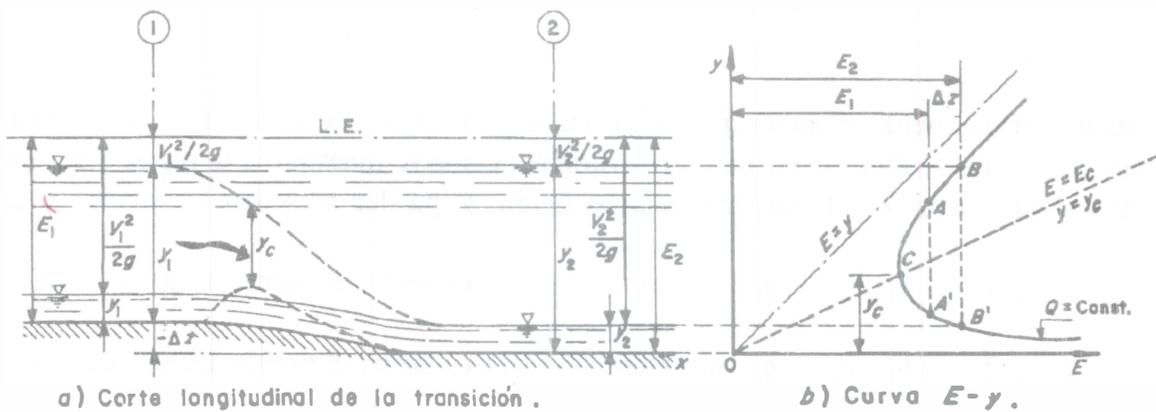


Figura 3.8. Comportamiento del flujo en una transición de ancho constante, cuando hay descenso de la plantilla (escalón negativo)

Reiterando el mismo análisis del caso anterior, se tienen las siguientes conclusiones:

- Si $y_1 > y_c$, el único tirante y_2 posible es el representado por B , esto es, $y_2 > y_1 > y_c$ y siempre hay crecimiento del tirante de 1 a 2. El punto B' es inaccesible, a menos que el perfil del fondo de la transición siguiera el indicado por la línea discontinua en la figura 3.8a.
- Si $y_1 < y_c$, el único tirante y_2 posible es el representado por B' , esto es, $y_2 < y_1 < y_c$ y siempre decrece el tirante de 1 a 2. El punto B es inaccesible desde A'

3.4.3 Canal de ancho variable

Una transición en que cambia el ancho de la sección pero no el nivel del fondo y el gasto total se mantiene constante, se tiene que tratar como de energía específica también constante. O sea, nuevamente si 1 es la sección aguas arriba y 2 la de aguas abajo se debe cumplir que

$$E_1 = y_2 + \frac{\alpha Q^2}{2g A_2^2} \quad (3.10)$$

Las raíces de la ecuación 3.10 corresponden a los posibles tirantes y_2 , y para elegir el correcto es necesario analizar el comportamiento del flujo. Con el fin de simplificar el análisis, conviene referirse al caso de una sección rectangular, figura 3.9a, donde b_2 es el ancho en la sección 2 y $q_2 = Q/b_2$ el gasto unitario en la misma. La ecuación 3.10 se convierte en

$$E_1 = E_2 = y_2 + \frac{\alpha q_2^2}{2g y_2^2} \quad (3.11)$$

existiendo inicialmente el gasto $q_1 = Q/b_1$ en la sección 1. De este modo, el problema se convierte en uno de E constante pero de q variable, como se muestra en la figura 3.9d. De esta manera y de acuerdo con lo que indica dicha figura, se pueden presentar los siguientes casos:

- a) $y_1 > y_c, b_2 > b_1, q_2 < q_1$, por tanto $y_2 > y_1$; es decir, el tirante crece de 1 a 2.
- b) $y_1 > y_c, b_2 < b_1, q_2 > q_1$, por tanto $y_2 < y_1$; es decir, el tirante decrece de 1 a 2.
- c) $y_1 < y_c, b_2 > b_1, q_2 < q_1$, por tanto $y_2 < y_1$; es decir, el tirante decrece de 1 a 2.
- d) $y_1 < y_c, b_2 < b_1, q_2 > q_1$, por tanto $y_2 > y_1$; es decir, el tirante crece de 1 a 2.

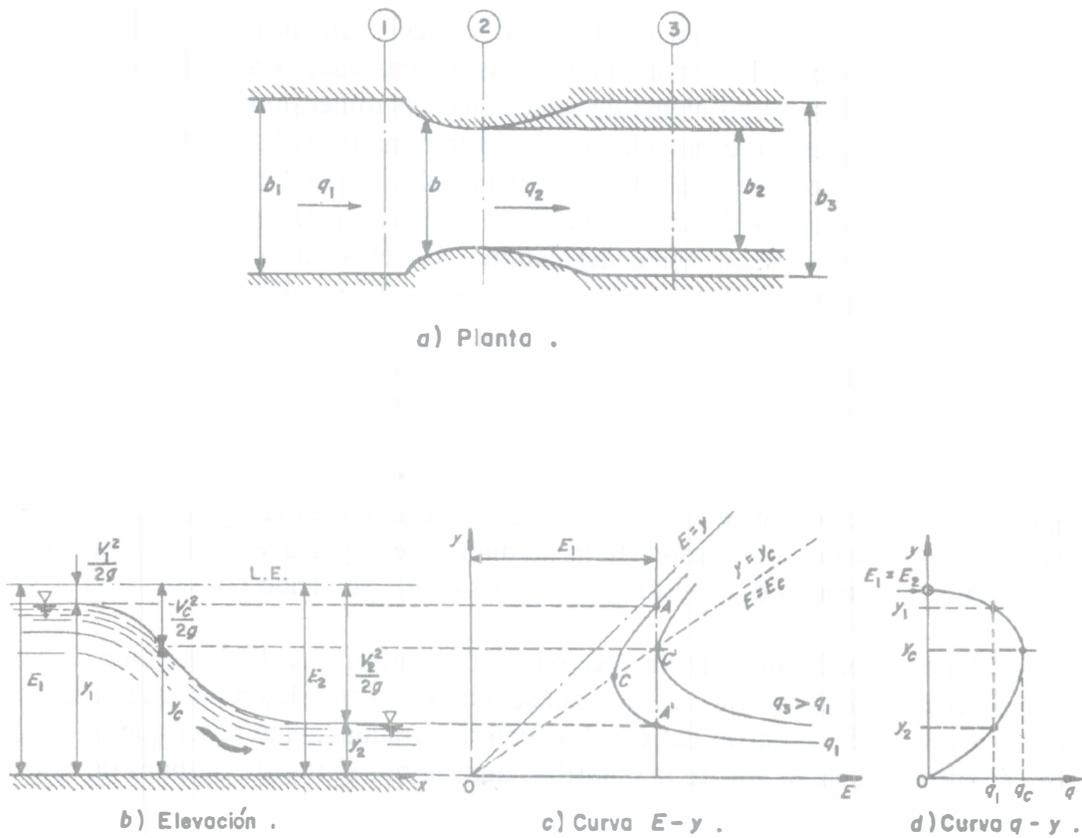


Figura 3.9. Cambio de régimen al disminuir el ancho del canal

Los casos b) y d) necesitan de algunas aclaraciones adicionales. La disminución de b no puede ser mayor que la correspondiente a q_c , de manera que el ancho mínimo es

$$b_c = \frac{Q}{q_c} \quad (3.12)$$

toda vez que si $b_2 < b_c$, en el caso b origina una contracción que altera las condiciones del flujo en la sección 1, modifica el tirante y_1 y con éste a E_1 . En este caso, la contracción influye de manera importante en las condiciones del flujo aguas arriba y se convierte en un tipo especial de control llamado estrangulamiento, por la forma en que actúa. Para este mismo caso, si $b_2 = b_c$ en la sección 2 y después se amplía al ancho final $b_3 = b_1$ (figura 3.9a), el tirante en 2 es y_c para q_c y después disminuye cambiando el régimen a supercrítico y ubicándose la solución en la rama inferior correspondiente a $q_2 = q_1$ (figura 3.9 b y c).

Si $b_2 < b_c$, en el caso d origina un cambio de régimen supercrítico a subcrítico, que sólo se produce mediante un salto hidráulico (capítulo 4).

En la práctica las transiciones son combinadas, es decir, en forma simultánea hay escalón y cambio de sección tanto en la forma como en sus dimensiones, y su análisis se hace siguiendo razonamientos similares. El problema de seleccionar las dimensiones mínimas de la sección se puede plantear en canales no rectangulares y es de gran interés práctico. A menudo acontece que una contracción local se tiene que introducir para reducir, por ejemplo, el costo de un puente cuando el canal pasa abajo de un camino, o bien, para pasar de un canal trapecial a una alcantarilla de sección circular abajo del camino. En esos casos resulta esencial conocer la magnitud tolerable de la contracción y la altura máxima del escalón para que no haya alteración de las condiciones del flujo aguas arriba, eligiendo la sección más pequeña capaz de sostener el mismo gasto para una energía específica dada, con velocidad de flujo mayor pero un costo menor. Dicha sección será la que opere en régimen crítico como aquí se ha expuesto. En el subcapítulo 3.6 se presenta el análisis con mayor detalle.

Ejemplo 3.3. La contracción en el canal rectangular mostrado en la figura 3.10 es suficientemente gradual y lisa como para despreciar la pérdida de energía que pudiera ocurrir. En ella no existe cambio en el ancho de plantilla, sólo en su nivel, pudiendo considerar $\alpha = 1$.

- Conocidas las condiciones en la sección 1, determinar las de la sección 2 para el gasto unitario indicado.
- Encontrar Δz_c que puede admitir la transición sin que se altere el tirante en la sección 1.
- Si el ancho del canal se contrae gradualmente hasta que $q = 2.5 \text{ m}^2/\text{s}$, sin existir cambio en la elevación de la plantilla, determinar el tirante después de la contracción.
- ¿Cuál sería el ancho mínimo en la contracción sin que se alteren las condiciones aguas arriba?

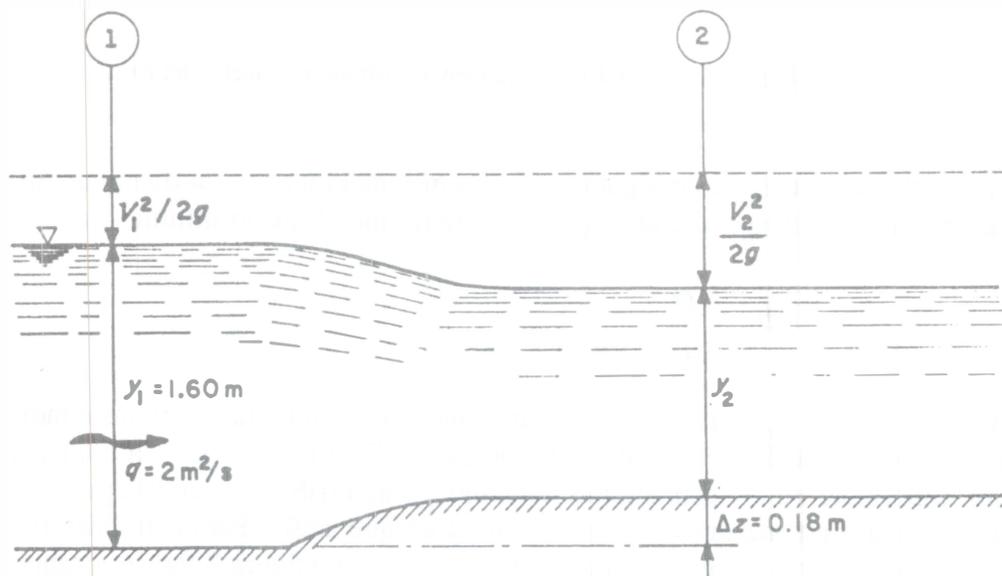


Figura 3.10. Transición en el canal del ejemplo 3.3

Solución a. Siendo el gasto por unidad de ancho $q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, y $y_1 = 1.60 \text{ m}$, la energía específica en la sección 1 es la misma del ejemplo 3.1; esto es, $E_1 = 1.68 \text{ m}$.

De la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 resulta

$$E_1 - \Delta z = y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

o bien, sustituyendo los valores numéricos, se tiene

$$y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = 1.50$$

Además, con $V_2 = 2/y_2$, al ordenar los términos se obtiene la ecuación

$$y_2^3 - 1.5 y_2^2 + 0.204 = 0$$

De su análisis se deduce que existen tres valores de y_2 , dos positivos y uno negativo, que la satisfacen. Estos son: 1.395 m, 0.439 m y - 0.334 m, sin embargo, físicamente existe un solo tirante en la sección 2 que satisface las condiciones de la sección 1 y que se debe elegir entre los dos valores positivos.

La curva de energía específica del canal aclara el valor correcto del tirante. En la figura 3.4 se muestra la curva E - y correspondiente al gasto unitario q constante, debido a que no cambia el ancho del canal. En la sección aguas arriba del escalón el flujo tiene energía específica E_1 mayor que la mínima, toda vez que el tirante es mayor que el crítico y queda representado por el punto A sobre la rama superior de la figura 3.6b, esto es, en régimen subcrítico. A su vez, el punto A' representa el valor $y_1 = 0.399 \text{ m}$ obtenido en el caso a del ejemplo 3.1.

De acuerdo con el análisis de la sección 3.4.2 (plantilla ascendente), las condiciones en la sección 2 corresponden a la energía específica: $E_2 = E_1 - \Delta z$, y los tirantes posibles quedan representados por los puntos B y B' en las intersecciones de la línea $E = E_2$ con la curva E - y . Sin embargo, el único tirante posible en la sección 2 es el representado por B , para el que $y_2 = 1.395 \text{ m}$. Esto es, la superficie del agua desciende en la dirección del flujo.

Solución b. El valor Δz_c corresponde al que obligue al tirante crítico en la sección 2. De acuerdo con la figura 3.4, $y_c = 0.742 \text{ m}$, y $E_c = 1.113 \text{ m}$, por tanto, de la ecuación 3.8 se obtiene

$$\Delta z_c = 1.68 - 1.113 = 0.567 \text{ m}$$

Solución c. La energía específica $E_1 = 1.68 \text{ m}$ se mantiene constante, pero q cambia a $2.5 \text{ m}^2/\text{s}$. Se tiene que

$$y_2 + \frac{(2.5)^2}{2g y_2^2} = 1.68$$

Esto significa moverse sobre una vertical, desde el punto de abscisa $E_1 = 1.68$ m, a la curva $q'' = 2.5$ m²/s sobre la rama superior de las dibujadas en la figura 3.4, siendo $y_2 < y_1$. La solución $y_2 = 1.547$ m es la única posible.

Solución d. En la figura 3.4, la intersección de la vertical de abscisa $E = 1.68$ m y la línea inclinada que señala la ubicación de y_c en las distintas curvas indica que $y_c = 1.12$ m, de modo que debe cumplirse

$$1.12 + \frac{q_c^2}{2g (1.12)^2} = 1.68$$

y de aquí, $q_c = 3.712$ m²/s. Dado que $Q = 4.5$ m³/s en el ejemplo 3.1, de la ecuación 3.12 se obtiene

$$b_c = \frac{4.5}{3.712} = 1.212 \text{ m}$$

Esto es, el ancho debe cambiar de 2.25 m en la sección 1 al mínimo de 1.212 m en la 2.

3.5 CÁLCULO DE LAS CONDICIONES CRÍTICAS CUANDO SE CONOCEN LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN

3.5.1 Tirante crítico y energía específica mínima

Las condiciones en que se desarrolla el régimen crítico en un canal deben satisfacer las ecuaciones 3.4b y 3.6, cualquiera que sea la forma y dimensiones de su sección. Elegida la geometría de ésta, para un gasto o energía específica mínima conocida existe un tirante crítico único y viceversa.

El problema más común consiste en determinar el tirante crítico y la energía específica mínima cuando se conocen las dimensiones de la sección y el gasto. Para determinar dicho tirante es suficiente con probar distintos valores en la ecuación 3.4b hasta que ésta se verifique. Cuando se trabaja con computadora se sigue el método de Newton-Raphson para acelerar la convergencia de las iteraciones, de manera que el valor para la $i+1$ sea

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \left[\frac{G}{G'} \right]_i \quad (3.13)$$

donde $(y)_i$ es el tirante crítico en la iteración i , y de la ecuación 3.4b:

$$G = \frac{A^3}{T} - \frac{Q^2}{g \cos \theta / \alpha} \quad (3.14)$$

$$G' = 3 A^2 - \frac{A^3}{T^2} \frac{dT}{dy} \quad (3.15)$$

siendo dT/dy la variación del ancho de la superficie libre con respecto al tirante. En las tablas 1.1 y 1.2 se encuentran las expresiones de dT/dy , correspondientes a las distintas formas de sección.

La energía específica mínima se calcula directamente de la ecuación 3.6.

3.5.2 Tirante crítico y gasto

El segundo problema consiste en calcular el tirante crítico y el gasto cuando se conoce la geometría de la sección y la energía específica mínima E_c . La convergencia de las iteraciones sigue siendo a través de la ecuación 3.13, pero ahora, de acuerdo con la 3.6, las funciones son:

$$G = y + \frac{1}{2} \frac{A}{T} - \frac{E_c}{\cos \theta} \quad (3.16)$$

$$G' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{A}{T^2} \frac{dT}{dy} \quad (3.17)$$

con las mismas aclaraciones de antes para dT/dy .

Una vez conocido el tirante crítico, el gasto se calcula de la ecuación 3.4b.

3.5.3 Soluciones directas

Para las secciones más comunes en canales artificiales se han desarrollado ecuaciones más sencillas, o bien diagramas que permiten la solución directa de los problemas anteriores. A continuación se exponen los desarrollos donde se introdujo $g' = g \cos \theta/\alpha$, constante.

a) Sección rectangular

Para el ancho b , la ecuación 3.4b resulta

$$\frac{Q}{\sqrt{g'}} = \frac{b^{3/2} y_c^{3/2}}{b^{1/2}}$$

y al hacer $q = Q/b$, el tirante crítico es

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g'} \right)^{1/3} \quad (3.18)$$

lo que permite su cálculo directo.

Con $A_c/T_c = y_c$, de la ecuación 3.6 se obtiene

$$E_c = \left[y_c + \frac{y_c}{2} \right] \cos \theta = \frac{3}{2} y_c \cos \theta \quad (3.19)$$

Esto es, $\alpha V_c^2/2g = (y_c \cos \theta)/2$

b) *Sección trapezoidal*

Con ancho de plantilla b y talud k , la ecuación 3.4b se convierte en

$$\frac{Q}{\sqrt{g'}} = \left[\frac{(b + k y_c)^3}{b + 2 k y_c} \right]^{1/2} y_c^{3/2} \quad (3.20a)$$

o bien, multiplicando ambos términos por $k^{3/2}/b^{5/2}$, se tiene

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g'} b^{5/2}} = \left[\frac{[1 + (k y_c/b)]^3}{1 + (2 k y_c/b)} \right]^{1/2} \left[k \frac{y_c}{b} \right]^{3/2} \quad (3.20b)$$

En la figura 3.11 se presenta la curva que relaciona los términos a ambos lados de la ecuación 3.20b, y permite una determinación suficientemente precisa del tirante crítico cuando se conoce el gasto y la geometría de la sección.

De la ecuación 3.6 se tiene

$$\frac{E_c}{\cos \theta} = y_c + \frac{(b + k y_c) y_c}{2 (b + 2 k y_c)} = \frac{2 (b + 2 k y_c) y_c + (b + k y_c) y_c}{2 (b + 2 k y_c)}$$

que simplificada y escrita en términos adimensionales queda

$$\frac{k E_c}{b \cos \theta} = \frac{3 + 5 (k y_c/b)}{2 / [(k y_c/b) + 4]} \quad (3.21)$$

En la figura 3.11 se presenta gráficamente la ecuación 3.21 y permite la determinación suficientemente precisa de la energía específica mínima cuando se conoce el tirante crítico o viceversa. El gasto también se obtiene a través de la otra curva dibujada, al conocer a $k y_c/b \cos \theta$.

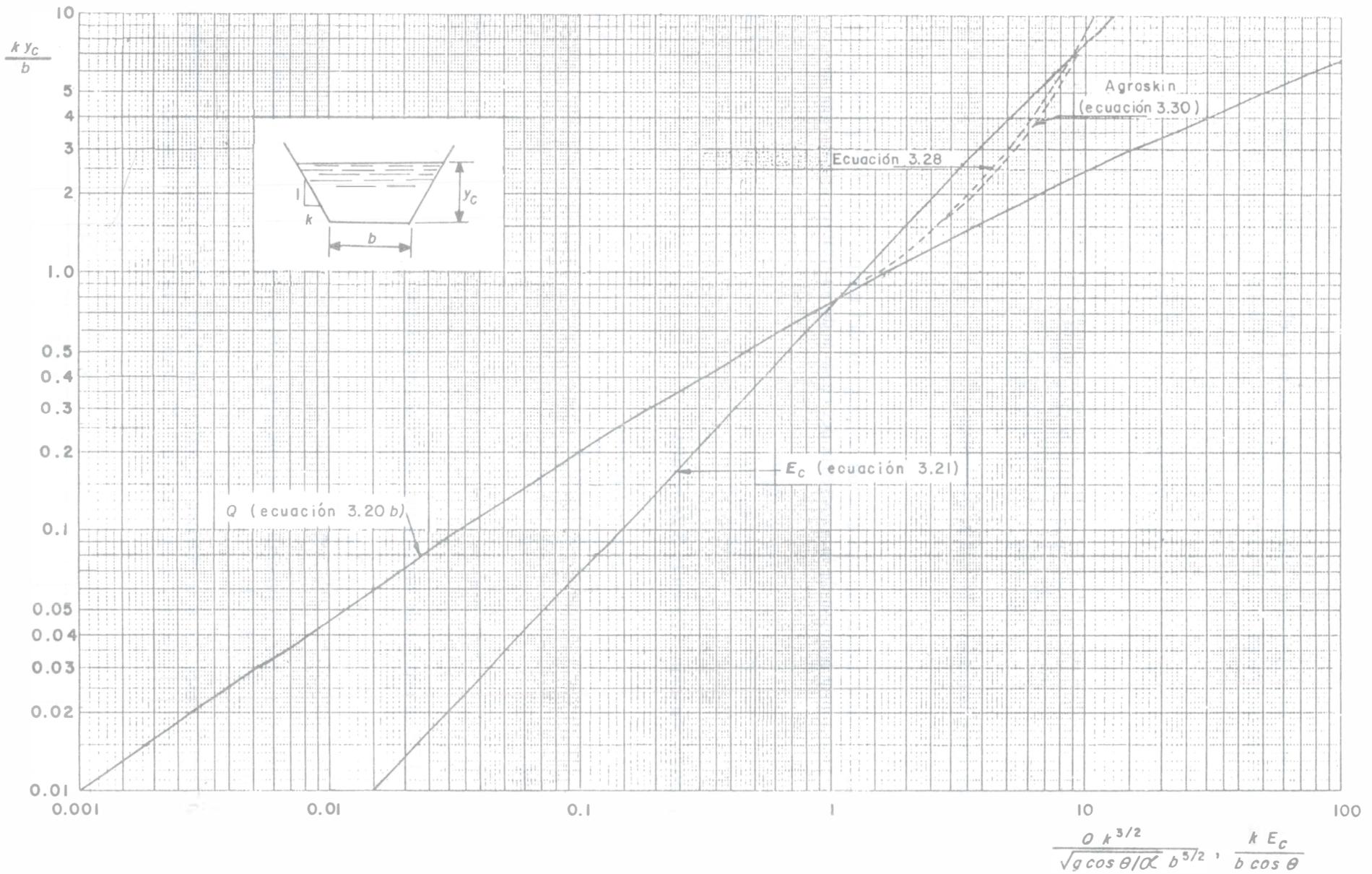


Figura 3.11. Curvas para determinar el tirante crítico y la energía específica mínima en secciones trapeciales

Para tener otro procedimiento alternativo de cálculo, el autor ha derivado ecuaciones aproximadas con este propósito. De la ecuación 3.20a se obtiene

$$\frac{Q^2}{g' b^2} = \frac{(b + k y_c)^3 y_c^3}{b^2 (b + 2 k y_c)} = \frac{[1 + (k y_c / b)]^3 y_c^3}{1 + 2 (k y_c / b)}$$

o bien

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{g' b^2} \right)^{1/3} \left[\frac{[1 + 2 (k y_c / b)]^{1/3}}{1 + (k y_c / b)} \right] \quad (3.22)$$

Al comparar las ecuaciones 3.18 y 3.22 se deduce

$$y_c = y_{cr} f \quad (3.23)$$

donde y_{cr} es el tirante crítico en una sección rectangular del mismo ancho de plantilla que la trapecial, y $f \leq 1$ una función de la geometría del canal y de su tirante crítico, que es

$$f = \frac{[1 + 2(k y_c / b)]^{1/3}}{1 + (k y_c / b)} \quad (3.24)$$

Sustituyendo la ecuación 3.23 en la 3.24 resulta

$$f = \frac{[1 + 2(k y_{cr} / b) f]^{1/3}}{1 + (k y_{cr} / b) f} \quad (3.25)$$

Además, con

$$\sigma = \frac{k y_{cr}}{b} \quad (3.26)$$

la ecuación 3.25 se escribe de manera más sencilla como sigue

$$f = \frac{(1 + 2 \sigma f)^{1/3}}{1 + \sigma f} \quad (3.27)$$

y permite calcular a f por un procedimiento iterativo. Con el valor de f y la ecuación 3.23 se obtiene el tirante crítico buscado.

Para eliminar las iteraciones u obtener un valor inicial de f en las mismas, es posible un desarrollo en serie del binomio en la ecuación 3.27, como se indica a continuación

$$f = \frac{1 + \frac{2}{3} \sigma f - \frac{4}{9} \sigma^2 f^2 + \frac{40}{81} \sigma^3 f^3 - \frac{160}{243} \sigma^4 f^4 + \dots}{1 + \sigma f}$$

Efectuando la división resulta

$$f = 1 - \frac{1}{3} \sigma f - \frac{1}{9} \sigma^2 f^2 + \frac{49}{81} \sigma^3 f^3 - \frac{307}{243} \sigma^4 f^4 + \dots$$

Puesto que $f \leq 1$ y para las geometrías usuales $\sigma < 1$, los productos σf de orden superior (del cuadrático en adelante) son despreciables. Por tanto, al despejar f se obtiene

$$f \approx \frac{1}{1 + (\sigma/3)} \quad (3.28)$$

La ecuación 3.28 es sencilla y fácil de recordar, pero es válida siempre que haya convergencia en la serie binominal, lo que se consigue si $2 \sigma f < 1$, o bien de la ecuación 3.26 si $\sigma < 0.6$, o también de la ecuación 3.26 si

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g'} b^{5/2}} < 0.4648 \quad (3.29)$$

Agroskin obtuvo, por su parte, otra ecuación que es

$$f = 1 - \frac{\sigma}{3} + 0.105 \sigma^2 \quad (3.30)$$

En la figura 3.11 se comparan las gráficas de las ecuaciones 3.28 y 3.30 con la correcta de la ecuación 3.20b. En ella se observa que las dos primeras tienen una precisión aceptable si $Q k^{3/2} / \sqrt{g'} b^{5/2} \leq 1$. Con valores mayores, los resultados se apartan bastante de los correctos.

Para hacer esta comparación, se transformó la ecuación 3.23 utilizando los parámetros adimensionales de dicha figura, como sigue

$$\frac{k y_c}{b} = \left[\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g'} b^{5/2}} \right]^{2/3} f \quad (3.31)$$

Straub considera que cuando $Q/b^{2.5} < 0.1$, puede usarse la ecuación correspondiente a canal rectangular en el cálculo del tirante crítico en un trapecial.

c) Sección circular y herradura

De la ecuación 3.5b se puede plantear una semejante a la 3.20a, que es

$$\frac{Q}{\sqrt{g'} D^{5/2}} = f \left(\frac{y_c}{D} \right)$$

donde el segundo término es una función del parámetro y_c/D .

En la figura 3.12 se presentan las curvas para obtener el tirante crítico en estas secciones cuando se conoce el gasto en el canal. Las tablas 2.8 y 2.9 tienen el mismo propósito.

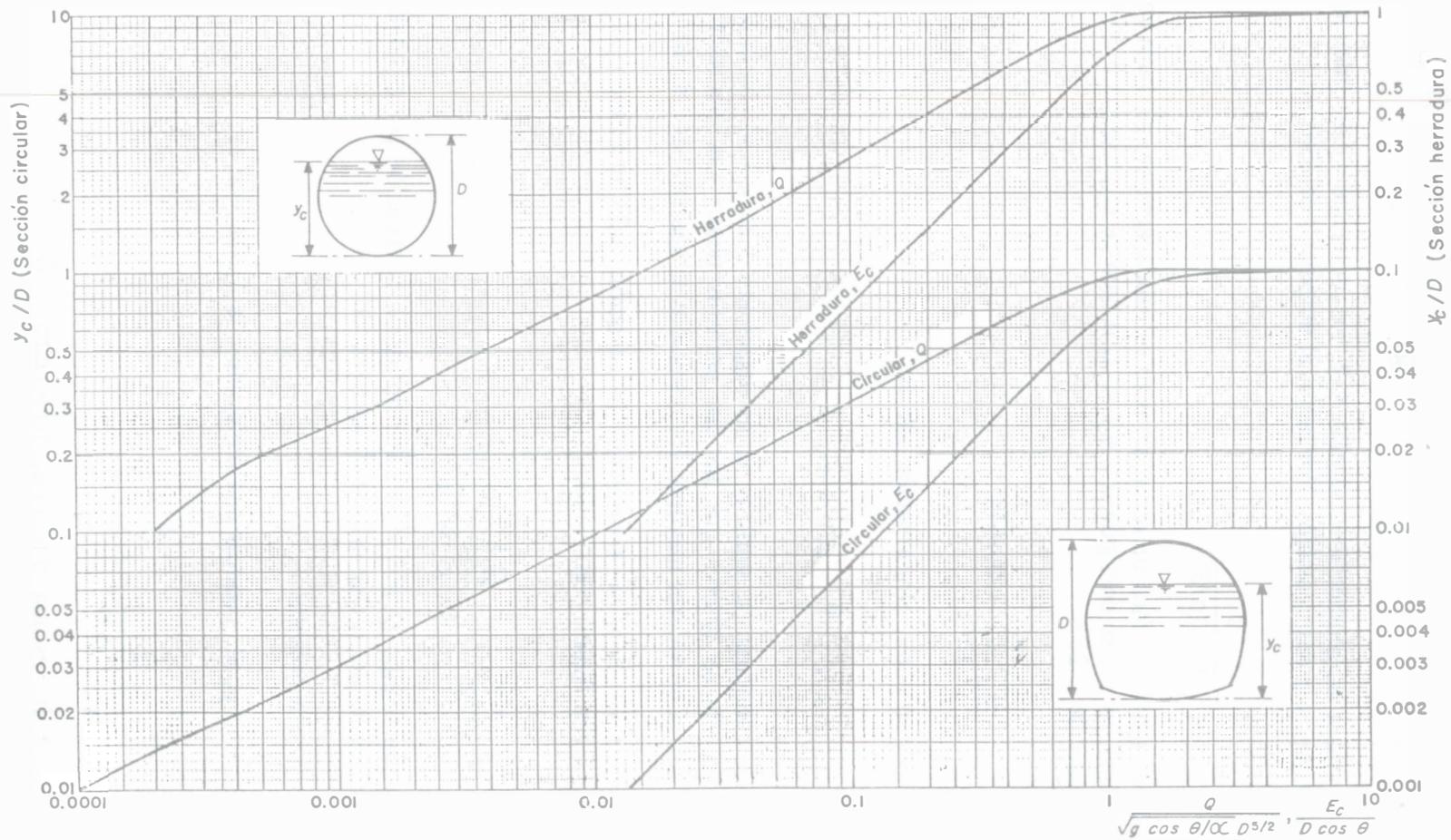


Figura 3.12. Curvas para determinar el tirante crítico y la energía específica mínima en secciones circular y herradura

Para la sección circular, Straub, en 1982, propuso una ecuación semiempírica para el tirante crítico

$$y_c = \frac{\sqrt{Q}}{(g' D)^{0.25}} \quad (3.32)$$

válida cuando: $0.02 \leq \frac{y_c}{D} \leq 0.85$

De manera semejante al canal trapecial se puede derivar una ecuación del tipo

$$\frac{E_c}{D \cos \theta} = F \left[\frac{y_c}{D} \right]$$

con la que se obtiene la energía específica mínima en un canal circular o herradura cuando se conoce el tirante crítico. En la figura 3.12 se muestran las curvas que representan la ecuación anterior para ambas secciones. A partir de ellas se obtiene el gasto en el canal con las otras curvas, una vez conocida la relación y_c/D . En las tablas 2.8 y 2.9 se encuentran también los mismos valores.

Ecuaciones como la 3.32, o la misma figura 3.12, muestran que cuando $y_c = D$, $Q = \infty$, toda vez que en la ecuación general 3.4b, $T_c = 0$. Ésta es una propiedad general de todos los conductos abovedados, en los que el tirante crítico de cualquier gasto, por grande que éste sea y pequeño aquél, es menor que la altura total del conducto.

d) Sección triangular

Con talud k en las orillas, se hace $b = 0$ en la ecuación 3.20a y se obtiene

$$\frac{Q}{\sqrt{g'}} = \left[\frac{k^3 y_c^6}{2 k y_c} \right]^{1/2} = \left[\frac{k^2 y_c^5}{2} \right]^{1/2} \quad (3.33a)$$

Al despejar resulta

$$y_c = \left[\frac{2 Q^2}{g' k^2} \right]^{1/5} \quad (3.33b)$$

que permite el cálculo directo del tirante crítico.

Sustituyendo $A_c/T_c = y_c/2$ (de la tabla 1.1) en la ecuación 3.6, se obtiene

$$E_c = \left[y_c + \frac{y_c}{4} \right] \cos \theta$$

esto es

$$E_c = \frac{5}{4} y_c \cos \theta \quad (3.34)$$

con lo que también se tiene el cálculo directo de la energía específica mínima cuando se conoce el tirante crítico. Es factible también la solución en que se conoce E_c , se determina y_c y de éste el gasto.

e) *Sección parabólica*

Ésta se considera simétrica respecto a un eje vertical donde $y = aT^2/4$. De la tabla 1.1 el área hidráulica y el ancho T se determinan de la siguiente manera

$$A = \frac{2}{3} T y = \frac{4 y^{3/2}}{3 a^{1/2}} = c y^{3/2}$$

$$T = \frac{3 A}{2 y} = \frac{3}{2} c y^{1/2}$$

$$\frac{A}{T} = \frac{2}{3} y$$

donde $c = 4/(3 a^{1/2})$ es una constante que depende de la forma de la parábola. La ecuación 3.4b se convierte en

$$\frac{Q^2}{g'} = \frac{c^3 y_c^{9/2}}{\frac{3}{2} c y_c^{1/2}} = \frac{2 c^2 y_c^4}{3}$$

Si se despeja al tirante crítico

$$y_c = \left(\frac{3 Q^2}{2 g' c^2} \right)^{1/4} = \frac{3}{2} \left[\frac{(Q/T_c)^2}{g'} \right]^{1/3} \quad (3.35)$$

También, de la ecuación 3.6 resulta

$$E_c = \left[y_c + \frac{y_c}{3} \right] \cos \theta$$
$$E_c = \frac{4}{3} y_c \cos \theta \quad (3.36)$$

que representan soluciones similares a las ya mencionadas para la sección triangular.

Ejemplo 3.4. Un canal rectangular de pendiente pequeña y 2 m de ancho debe conducir 3 m³/s. Calcular la energía específica mínima necesaria para conducir dicho gasto considerando $\alpha = 1$ ($g' = g$).

Solución. El gasto por unidad de ancho es $q = 3/2 = 1.5$ m²/s. De la ecuación 3.18 el tirante crítico resulta

$$y_c = \left[\frac{(1.5)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 0.612 \text{ m}$$

La velocidad crítica y su correspondiente carga de velocidad son

$$V_c = \frac{1.5}{0.612} = 2.45 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = 0.306 \text{ m}$$

y la energía específica mínima

$$E_c = 0.612 + 0.306 = 0.918 \text{ m}$$

El número de Froude crítico es

$$F_c = 2.45 / \sqrt{9.81(0.612)} = 1$$

que comprueba la ecuación 3.5a.

Ejemplo 3.5. Un canal trapecial de pendiente pequeña tiene taludes $k = 1.5$ y debe conducir 20 m³/s para $\alpha = 1$ ($g' = g$). Calcular el tirante crítico y la energía específica mínima para los siguientes anchos de plantilla: a) 4.00 m, b) 1.60 m. Calcular dichos tirantes por diferentes métodos y, en cada caso, el porcentaje de error respecto del valor exacto.

Solución a. Método exacto. Utilizando iteraciones en la solución de la ecuación 3.4b de acuerdo con el procedimiento indicado en la sección 3.5.1, se tiene

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(20)^2}{9.81} = 40.77472$$

El área hidráulica crítica y el ancho crítico de la superficie libre son:

$$A_c = (4 + 1.5 y_c) y_c$$

$$T_c = 4 + 3 y_c$$

G resulta de la ecuación 3.14 y G' corresponde a la sección trapecial en la ecuación 3.15, con ayuda de la tabla 1.1. Las iteraciones se resumen en la tabla 3.2.

El tirante crítico exacto es $y_c = 1.17105$ m.

Tabla 3.2. Resumen de iteraciones en la solución *a* del ejemplo 3.5.

y_c en m	A en m ²	T en m	G	G'	G/G'
1.00	5.5	7.0	- 17.0069	80.56	- 0.21
1.21	7.0362	7.63	4.8795	130.57	0.037
1.1726	6.7529	7.5178	0.1869	120.46	0.0016
1.171	6.7409	7.513	- 0.0055	120.04	- 0.00005
1.17105	6.7412	7.5132	0.0005	120.05	0.00000

Solución gráfica utilizando la figura 3.11.

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g} b^{5/2}} = \frac{20 (1.5)^{3/2}}{\sqrt{9.81} (4)^{5/2}} = 0.367$$

De la curva Q : $k y_c / b = 0.44$, por tanto

$$y_c = \frac{0.44 (4)}{1.5} = 1.1733 \text{ m}$$

Con error $\varepsilon = + 0.2$ por ciento respecto del valor exacto.

Métodos aproximados. El tirante crítico en sección rectangular del mismo ancho resulta

$$y_{cr} = \left[\frac{(20)^2}{9.81 (4)^2} \right]^{1/3} = 1.36591 \text{ m}$$

De la ecuación 3.26

$$\sigma = \frac{1.5 (1.36591)}{4} = 0.51222 < 0.6$$

y de la 3.28

$$f \approx \frac{1}{1 + 0.51222/3} = 0.85416$$

Por tanto, de la ecuación 3.23

$$y_c = 1.36591 (0.85416) = 1.167 \text{ m}; \quad \varepsilon = - 0.35 \text{ por ciento}$$

Según Agroskin, de la ecuación 3.30 se tiene

$$f = 1 - \frac{0.51222}{3} + 0.105 (0.51222)^2 = 0.85681$$

Por tanto, de la ecuación 3.23

$$y_c = 1.170 \text{ m}; \varepsilon = - 0.09 \text{ por ciento de error}$$

Con $f = 0.85416$ obtenido de la ecuación 3.28, un valor más preciso se determina de la ecuación 3.27 de la siguiente manera

$$f = \frac{[1 + 2 (0.51222) (0.85416)]^{1/3}}{1 + 0.51222 (0.85416)} = 0.85781$$

por lo que $y_c = 1.36591 (0.85781) = 1.1717$, $\varepsilon = + 0.06$ por ciento de error.

Con $y_c = 1.171$ m, la velocidad crítica resulta

$$V_c = \frac{20}{6.7409} = 2.967 \text{ m/s}$$

y de la ecuación 3.5a, el número de Froude crítico es

$$F_c = 2.967 / \sqrt{9.81 (6.7409 / 7.513)} = 1$$

que comprueba el resultado. La carga de velocidad crítica es

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{(2.967)^2}{2 (9.81)} = 0.449 \text{ m}$$

y la energía específica mínima

$$E_c = 1.171 + 0.449 = 1.62 \text{ m}$$

o bien, para $k y_c / b = 1.5 (1.171) / 4 = 0.439$, de la misma figura 3.11 resulta que $k E_c / b = 0.61$, y por tanto

$$E_c = \frac{0.61 (4)}{1.5} = 1.6267 \approx 1.623 \text{ m}$$

Solución b. Con el mismo desarrollo de la solución *a*, resulta como valor exacto $y_c = 1.599$ m.

De la figura 3.11

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g} b^{5/2}} = 3.6227; \frac{k y_c}{b} = 1.5; y_c = 1.60 \text{ m}$$

Con la ecuación 3.28, $y_c = 1.4088$ m, $\varepsilon = - 11.89$ por ciento de error.

Con el método de Agroskin, $y_c = 2.0087$ m, $\varepsilon = + 25.62$ por ciento de error.

Para el valor correcto del tirante, $E_c = 2.0982$ m.

Ejemplo 3.6. Una galería circular de pendiente pequeña y 2.50 m de diámetro debe conducir $15 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcular el tirante crítico y la energía específica mínima aceptando que $\alpha = 1.05$.

Solución. Tomando en cuenta a α , ($g' = g/\alpha$), se calcula el parámetro

$$\frac{Q}{\sqrt{g/\alpha} D^{5/2}} = \frac{15}{\sqrt{9.81/1.05} (2.5)^{5/2}} = 0.4966$$

De la figura 3.12 o la tabla 2.8 resulta $y_c/D = 0.72$; es decir

$$y_c = 0.72 (2.5) = 1.8 \text{ m}$$

Para $y_c/D = 0.72$, de la figura 3.12 o la tabla 2.8, $E_c/D = 1.06$; es decir

$$E_c = 1.06 (2.5) = 2.65 \text{ m}$$

Utilizando la ecuación 3.32, el tirante crítico resulta

$$y_c = \frac{\sqrt{15}}{[9.81 (2.5) / 1.05]^{0.25}} = 1.762 \text{ m} < 1.8 \text{ m}$$

Ejemplo 3.7. Las condiciones del flujo aguas arriba de una transición en un canal rectangular de pendiente pequeña imponen un caudal de $80 \text{ m}^3/\text{s}$ con energía específica de 2.50 m ($\alpha = 1$, $g' = g$), cuando el ancho del canal es de 18 m. ¿Cuánto debe reducirse el ancho o cambiar la elevación del piso aguas abajo de la transición para producir un cambio de régimen?

Solución. Al obligar a que 2.50 m sea la energía específica mínima con que fluye el gasto dado, de las ecuaciones 3.18 y 3.19 resulta

$$E_c = \frac{3}{2} \left[\frac{Q^2}{g b_c^2} \right]^{1/3} = 2.50 \text{ m}$$

Por tanto, el ancho mínimo es

$$b_c = \frac{(1.5)^{3/2} Q}{\sqrt{g} E_c^{3/2}} = \frac{(1.5)^{3/2} (80)}{\sqrt{9.81} (2.5)^{3/2}} = 11.871 \text{ m}$$

Si en lugar de reducir el ancho se construye un escalón, se tiene

$$E_c = 1.5 \left[\frac{Q^2}{g b^2} \right]^{1/3} = 1.5 \left[\frac{(80)^2}{9.81 (18)^2} \right]^{1/3} = 1.894 \text{ m}$$

siendo la altura del escalón.

$$\Delta z_c = 2.50 - 1.894 = 0.606 \text{ m}$$

positivo o ascendente en el sentido del flujo.

Ejemplo 3.8. Con la ecuación de cantidad de movimiento, determinar el tirante que se presenta en la sección final de un canal rectangular horizontal ($\alpha = 1$), después de la cual se inicia una caída libre (figura 3.13). Suponer que en dicha sección la presión en el fondo es cero y que la sección crítica se presenta a la distancia x hacia aguas arriba.

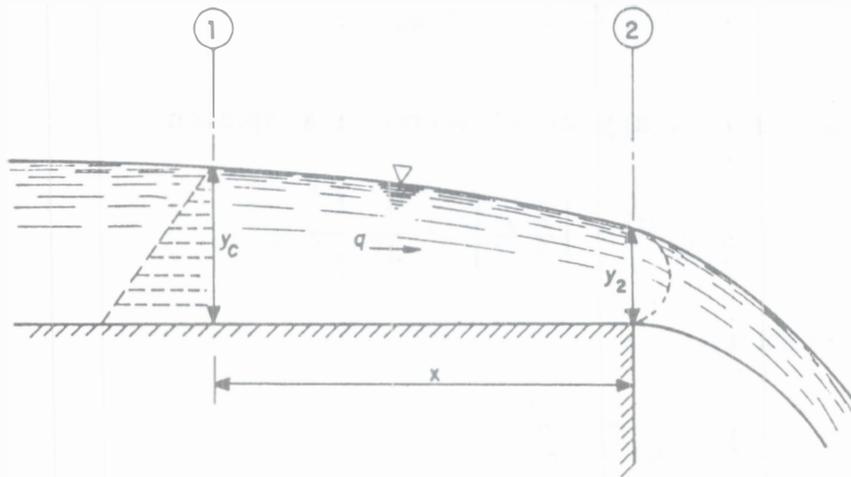


Figura 3.13. Tirante al inicio de una caída libre, del ejemplo 3.8

Solución. Siendo q el gasto por unidad de ancho, la ecuación de la cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2 (suponiendo que el empuje hidrostático en 2 es cero y $\beta = 1$) conduce a

$$\frac{g\rho y_c^2}{2} = \frac{\rho q}{g} (V_2 - V_c) \quad (a)$$

Con la ecuación de continuidad se obtiene

$$q = V_c y_c = V_2 y_2 \quad (b)$$

y resulta

$$\frac{y_c^2}{2} + \frac{V_c^2}{g} y_c = \frac{V_2^2}{g} y_2 \quad (c)$$

Siendo 1 la sección crítica, la energía específica en dicha sección es E_c , y además

$$y_c = \frac{2}{3} E_c = \frac{V_c^2}{g} \quad (d)$$

Por tanto, de la ecuación (b)

$$\frac{V_2^2}{g} = \frac{V_c^2}{g} \frac{y_c^2}{y_2^2}$$
$$\frac{V_2^2}{g} = \frac{2}{3} E_c \frac{4}{9} \frac{E_c^2}{y_2^2} = \frac{8}{27} \frac{E_c^3}{y_2^2} \quad (e)$$

Sustituyendo las ecuaciones (d) y (e) en la (c) resulta la expresión

$$\frac{4}{2(9)} E_c^2 + \left[\frac{2}{3} E_c \right]^2 = \frac{8}{27} \frac{E_c^3}{y_2^2} y_2$$

Despejando y_2 se obtiene

$$y_2 = \frac{4}{9} E_c$$

o bien, de la ecuación (d)

$$y_2 = \frac{2}{3} y_c = 0.667 y_c$$

Rouse determinó experimentalmente que $y_2 = 0.715 y_c$, 7 por ciento mayor que el aquí encontrado. Henderson también obtuvo $x = 3$ a $4 y_c$, la cual corresponde a la longitud del tramo de aceleración del flujo, desde el crítico hasta el tirante en la sección de despegue.

3.6 CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN MÍNIMA DE LA SECCIÓN O DE LOS TIRANTES ALTERNOS, CUANDO SE CONOCEN EL GASTO Y LA ENERGÍA ESPECÍFICA

3.6.1 Dimensión mínima de la sección

Otro problema que también suele presentarse consiste en calcular la dimensión mínima que debe tener la sección para que el flujo ocurra en régimen crítico, cuando se conocen el gasto y la energía específica mínima. En este caso, también es factible plantear una solución empleando computadora pero con base en un sistema de doble iteración, el cual consiste en los siguientes pasos.

1. Se supone la dimensión x de la sección, es decir, b en sección trapecial (k se elige por razones constructivas) o D en sección circular o herradura.
2. La energía específica mínima se conoce y para la dimensión supuesta la primera etapa se inicia calculando el tirante crítico mediante el proceso iterativo de la sección 3.5.2, con base en las ecuaciones 3.13, 3.16 y 3.17, que son

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \left[\frac{G_1}{G_1'} \right]_i$$

$$G_1 = y + \frac{1}{2} \frac{A}{T} - \frac{E_c}{\cos \theta}$$

$$G_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{A}{T^2} \frac{dT}{dy}$$

3. Si la dimensión x es correcta se debe anular la función expresada por la ecuación 3.14

$$G_2 = \frac{A^3}{T} - \frac{Q^2}{g \cos \theta / \alpha}$$

donde Q es el gasto conocido. Si no se satisface la ecuación, la segunda etapa de iteración se inicia con el siguiente paso.

4. Para continuar se requiere la función derivada de G_2 pero ahora respecto de la dimensión x , es decir, $G_2' = dG_2/dx$. Con $\alpha Q^2/g \cos \theta = \text{constante}$, se obtiene

$$G_2' = \frac{A^2}{T} \left[3 \frac{dA}{dx} - \frac{A}{T} \frac{dT}{dx} \right] \quad (3.37)$$

de modo que el valor de x para la siguiente iteración es

$$(x)_{i+1} = (x)_i - \left[\frac{G_2}{G_2'} \right]_i \quad (3.38)$$

con la cual se inicia un nuevo ciclo desde el paso 1.

En el proceso anterior existe solución si el área de la sección tiende a cero cuando x tiende a cero. Esto no ocurre en la sección trapecial ya que k permanece constante por razones constructivas y si $b = 0$, $A = k y^2$. Cuando la sección es trapecial hay solución sólo si la energía específica E_{cr} para la sección triangular (obtenida de las ecuaciones 3.33b y 3.34) es mayor que E_c conocida.

Las funciones derivadas que intervienen en la ecuación 3.37 se obtienen de los desarrollos que siguen.

Si la sección es trapecial, $x = b$, y de la tabla 1.1 se obtienen

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{db} = 1 \quad (3.39)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{db} = y \quad (3.40)$$

y la ecuación 3.37 debe ser

$$G_2' = \frac{A^2}{T} \left[3y - \frac{A}{T} \right] \quad (3.41)$$

Si la sección es circular, $x = D$ y de la tabla 1.2 (ver figura en el recuadro para interpretar θ)

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dD} (D \operatorname{sen} \theta) = D \cos \theta \frac{d\theta}{dD} + \operatorname{sen} \theta$$

También, $\frac{d\theta}{dD} = \frac{d}{dD} \left[\operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{2y}{D} \right) \right]$ y por tanto

$$\frac{d\theta}{dD} = - \frac{\frac{d}{dD} \left(1 - \frac{2y}{D} \right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{D} \right)^2}} = - \frac{\frac{y}{D^2}}{\sqrt{\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2}}$$

y con: $\operatorname{sen} \theta = 2 \sqrt{y/D - (y/D)^2}$, resulta

$$\frac{d\theta}{dD} = - \frac{2y}{D^2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \quad (3.42)$$

Por lo tanto

$$\frac{dT}{dx} = \operatorname{sen} \theta - \frac{2y}{D} \cot \theta \quad (3.43)$$

Por otra parte, también de la tabla 1.2

$$\frac{dA}{dD} = \frac{d}{dD} \left[\frac{1}{4} \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) D^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) D + \frac{D^2}{4} \left(\frac{d\theta}{dD} - \cos 2\theta \frac{d\theta}{dD} \right)$$

pero: $2 A/D = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right] D$, y $d\theta/dD$ se obtiene de la ecuación 3.42, por tanto

$$\frac{dA}{dD} = 2 \frac{A}{D} + \frac{D^2}{4} (1 - \cos 2\theta) \left(-\frac{2}{D^2} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \right)$$

y siendo: $\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$, resulta

$$\frac{dA}{dD} = 2 \frac{A}{D} - y \operatorname{sen} \theta \quad (3.44)$$

Con las ecuaciones 3.43 y 3.44, la 3.37 se convierte en

$$G_2' = \frac{A^2}{T} \left[3 \left(2 \frac{A}{D} - y \operatorname{sen} \theta \right) - \frac{A}{T} \left(\operatorname{sen} \theta - \frac{2y}{D} \cot \theta \right) \right]$$

o bien

$$G_2' = \frac{A^2}{T} \left[3 D \left(2 \frac{A}{D^2} - \frac{y}{D} \operatorname{sen} \theta \right) - \frac{A}{T} \left(\operatorname{sen} \theta - \frac{2y}{D} \cot \theta \right) \right] \quad (3.45)$$

3.6.2 Tirantes alternos

Cuando se usa la ecuación de la energía en un flujo a superficie libre, por ejemplo, en transiciones, es frecuente tener que calcular el o los tirantes alternos que pueden ocurrir cuando se conocen la geometría de la sección, el gasto y la energía específica con que se produce el flujo.

Para este caso es posible establecer un procedimiento general de solución, adaptable al uso de computadora, que consiste en el cálculo por iteraciones del o los tirantes alternos con un criterio de convergencia basado nuevamente en el método de Newton-Raphson.

Se designa por E_0 a la energía específica correspondiente a un gasto Q , ambos conocidos, y la función cuyo valor debe ser cero es

$$J = \left(y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2g A^2} \right) - E_0 = E - E_0 \quad (3.46)$$

Puesto que E_0 es constante, la ecuación 3.3 indica que dJ/dy es

$$J' = (1 - F^2) \cos \theta \quad (3.47)$$

Por lo tanto, si i es el índice por iteración, finalmente resulta

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \left[\frac{E - E_0}{(1 - F^2) \cos \theta} \right]_i \quad (3.48)$$

En régimen subcrítico es conveniente iniciar los tanteos con $y = 0.9 E_0$. Por el contrario, en régimen supercrítico con $y = 0.1 E_0$.

Antes de efectuar el proceso de iteración es conveniente asegurarse que $E_0 > E_c$ mediante el cálculo mencionado en la sección 3.5.1, ya que de no satisfacer esta condición, no hay solución.

3.6.3 Soluciones directas

N. Vittal (referencia 1), en 1978, propuso soluciones directas sencillas para distintas formas de sección del canal, que cubren todos los casos resueltos con el criterio general.

El procedimiento se basa en relaciones adimensionales gasto-tirante para canales exponenciales, trapeziales y circulares, que facilitan la solución directa de los problemas previamente analizados y que en algunos casos puede presentar ventajas. A continuación se hace una síntesis de dicho procedimiento para canales de pendiente pequeña y $\alpha = 1$, pero las soluciones se pueden extender fácilmente a canales de características distintas a través de las correcciones a g y E antes mencionadas, que las convierte en $g \cos \theta / \alpha$ y en $E / \cos \theta$.

Los canales exponenciales son aquellos para los que el área hidráulica se calcula mediante la ecuación

$$A = c y^n \quad (3.49)$$

donde c es una constante y n un exponente variable. Los ejemplos más comunes son el rectangular, el triangular y el parabólico.

De la ecuación de energía específica resulta

$$Q^2 / gA^2 = 2 (E - y) \quad (3.50)$$

donde se sustituye la ecuación 3.49 y se multiplica por y^{2n}/E^{2n+1} , obteniendo

$$\frac{Q^2}{g c^2 E^{2n+1}} = 2 \left[\frac{y}{E} \right]^{2n} - 2 \left[\frac{y}{E} \right]^{2n+1} = \left[\frac{y}{E} \right]^{2n} \left[2 \left(1 - \frac{y}{E} \right) \right] \quad (3.51a)$$

O bien

$$Q_* = y_*^n \sqrt{2 (1 - y_*)} \quad (3.51b)$$

donde

$$Q_* = \frac{Q}{\sqrt{g} c E^{n+0.5}} \quad (3.52)$$

$$y_* = \frac{y}{E} \quad (3.53)$$

La ecuación 3.51b es una relación adimensional general gasto-tirante para todos los canales exponenciales y adopta formas particulares de acuerdo con la geometría de cada sección como se presenta a continuación.

a) *Rectangular*: $c = b$; $n = 1$, donde b es el ancho. La ecuación 3.51b se convierte en

$$Q_* = \frac{Q}{\sqrt{g} b E^{3/2}} = y_* \sqrt{2(1 - y_*)} \quad (3.54)$$

b) *Triangular*: $c = k$; $n = 2$. De la ecuación 3.51b

$$Q_* = \frac{Q}{\sqrt{g} k E^{5/2}} = y_*^2 \sqrt{2(1 - y_*)} \quad (3.55)$$

c) *Parabólica*: $c = 4/(3\sqrt{a})$; $n = 3/2$. De la ecuación 3.51b

$$Q_* = \frac{3 a Q}{4 \sqrt{g} E^2} = y_*^{3/2} \sqrt{2(1 - y_*)} \quad (3.56)$$

donde a es el parámetro de la parábola según la ecuación $y = a x^2$.

Las ecuaciones 3.54 a 3.56 se representan gráficamente en la figura 3.14 mediante curvas adimensionales gasto-tirante ($Q_* - y_*$) para cada sección, cubriendo cualquier caudal y los casos de régimen subcrítico y supercrítico. Para establecer las condiciones críticas hay que derivar el primer término respecto de y_* e igualar a cero, lo que significa que dichas condiciones ocurren para los valores que siguen.

$$\text{Rectangular: } Q_{*c} = 0.5443; y_{*c} = 2/3$$

$$\text{Triangular: } Q_{*c} = 0.4048; y_{*c} = 4/5$$

$$\text{Parabólica: } Q_{*c} = 0.4593; y_{*c} = 3/4$$

Las relaciones gráficas de la figura 3.14 para estas secciones, facilitan la solución de todos los problemas enunciados en las secciones 3.5.1, 3.5.2, 3.6.1 y 3.6.2.

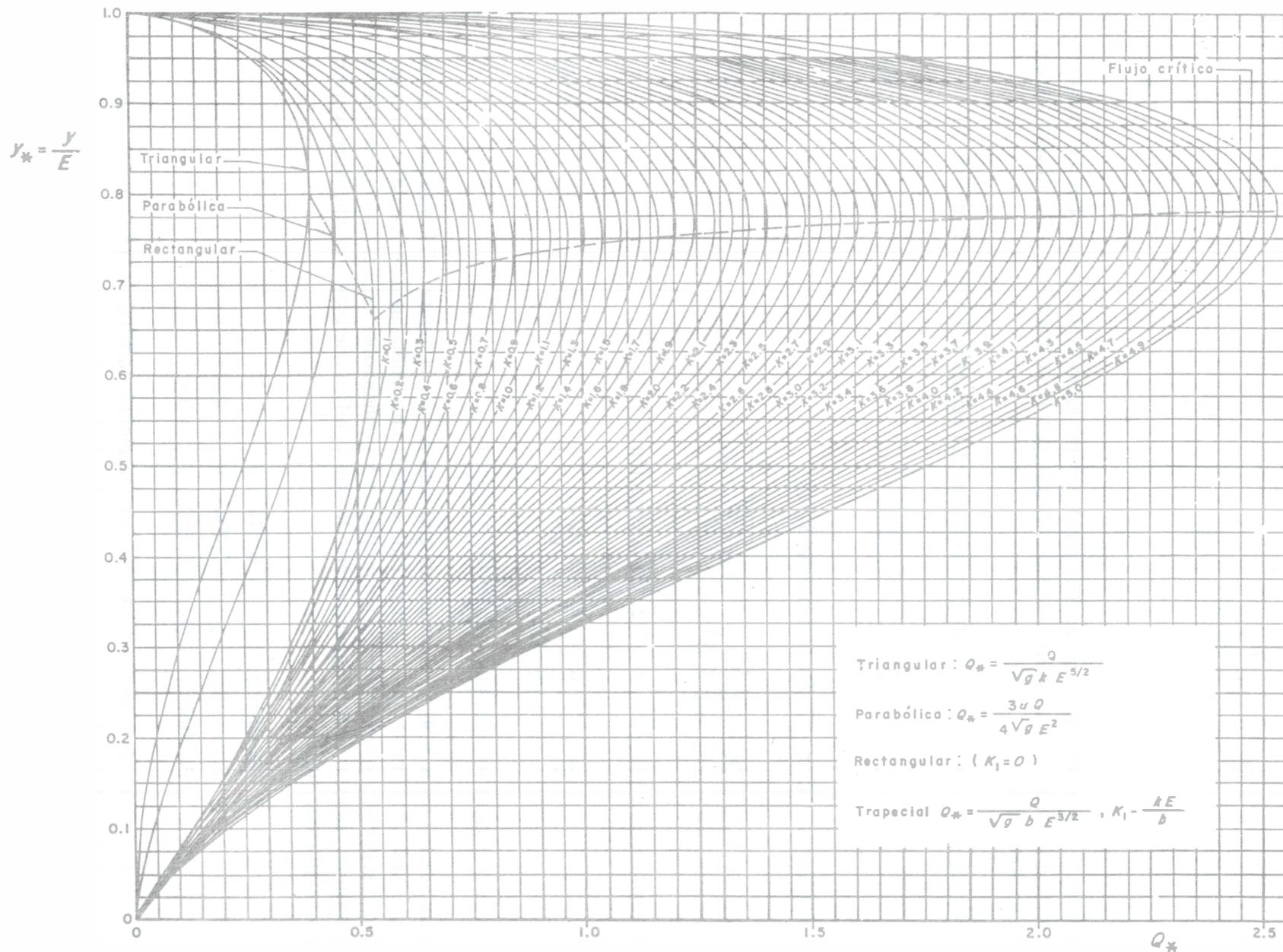


Figura 3.14. Relación entre parámetros adimensionales Q_* - y_* en canales rectangulares, trapeziales, triangulares y parabólicos

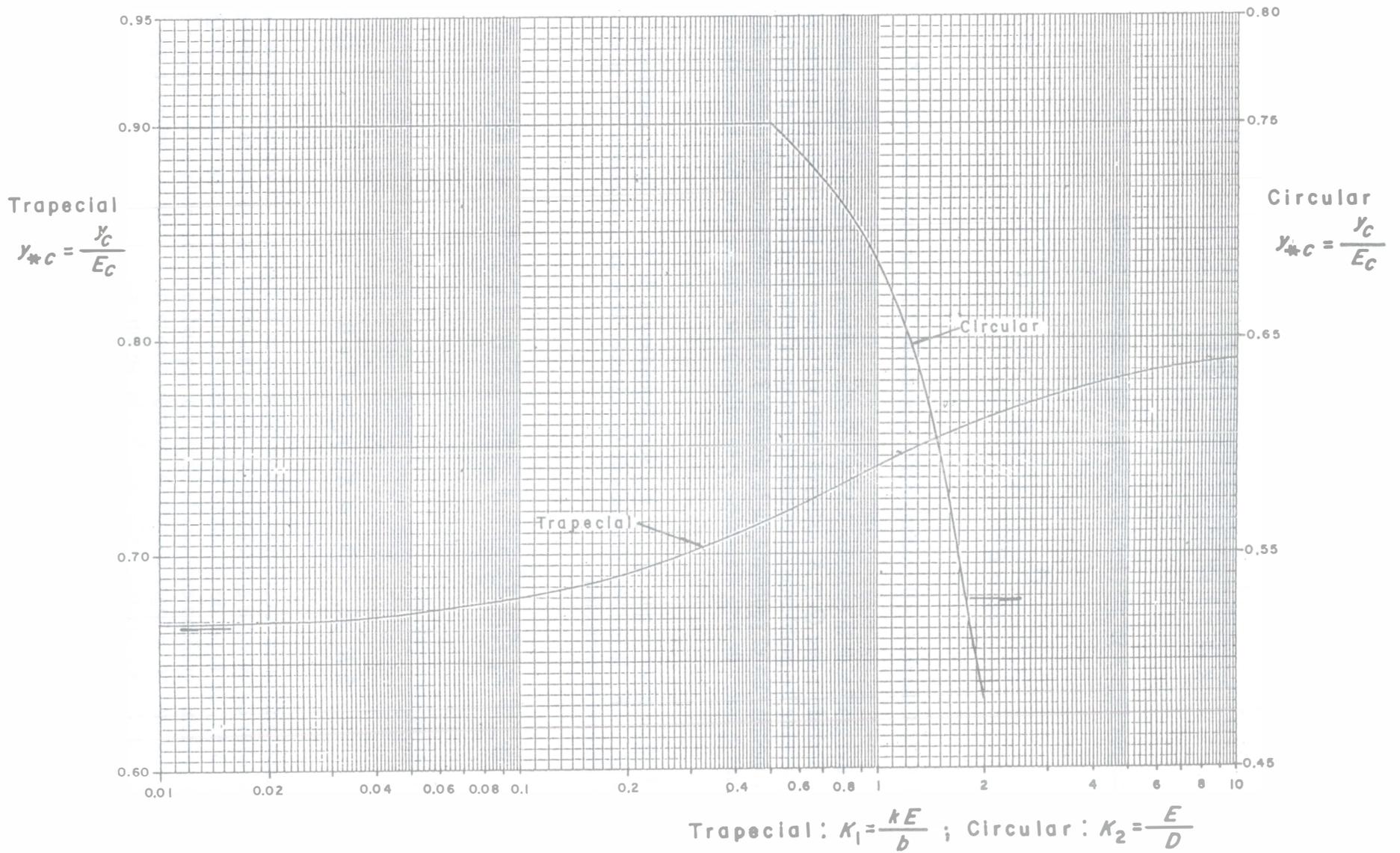


Figura 3.15. Relación entre parámetros adimensionales $K_1 - y_c$ en canales trapeciales y $K_2 - y_c$ en canales circulares

Trapezoidal. Al sustituir su área en la ecuación 3.50, se obtiene

$$\frac{Q^2}{g (b + k y)^2 y^2} = 2 E \left[1 - \frac{y}{E} \right]$$

y al multiplicar por $(b + k y)^2 y^2 / (b^2 E^3)$, la forma adimensional resulta

$$Q_* = \frac{Q}{\sqrt{g} b E^{3/2}} = (1 + K_1 y_*) y_* \sqrt{2 (1 - y_*)} \quad (3.57)$$

donde $K_1 = k E/b$. Cuando $k = 0$ (rectangular), la ecuación 3.57 se convierte en la 3.54.

La representación gráfica de la ecuación 3.57 se muestra también en la figura 3.14 para distintos valores de K_1 . Debido a que Q_* y K_1 incluyen tanto a E como a b , las curvas se utilizan para resolver directamente los problemas de cálculo de tirantes alternos (sección 3.6.2) en que dichas variables se conocen. En el problema de la sección 3.6.1 las condiciones de régimen crítico ocurren después o antes de una transición y su solución se obtiene con los desarrollos que siguen.

En la figura 3.14 se observa que Q_{*c} y y_{*c} son dependientes de K_1 . A fin de establecer una relación entre Q_{*c} y K_1 , la primera derivada de Q_* respecto de y_* en la ecuación 3.57 se iguala con cero y se obtiene la expresión

$$-(y_{*c} + K_1 y_{*c}^2) \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - y_{*c})^{-1/2} + \sqrt{2} (1 - y_{*c})^{1/2} (1 + 2 K_1 y_{*c}) = 0$$

que al simplificar se convierte en

$$5 K_1 y_{*c}^2 + (3 - 4 K_1) y_{*c} - 2 = 0 \quad (3.58)$$

La representación gráfica de la ecuación 3.58 se presenta en la figura 3.15 y puede usarse para obtener y_{*c} a partir de un valor conocido de K_1 . La sustitución de los valores de y_{*c} obtenidos de la ecuación 3.58, en lugar de y_* en la 3.57, establece una relación matemática entre Q_{*c} y K_1 que se representa gráficamente con la curva correspondiente mostrada en la figura 3.16. Sin embargo, con esto no se logra todavía la solución directa de E_c o de b_c , debido a que los parámetros Q_{*c} y K_1 las contienen y sólo una de ellas se conoce.

Para vencer esta dificultad es necesario definir un nuevo parámetro combinando Q_* y K_1 y eliminando a b_c o a E_c . Cuando b_c se conoce pero no E_c , ésta última se elimina y el parámetro resulta

$$Q'_{*c} = Q_{*c} K_1^{3/2} = \frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g} b^{5/2}} \quad (3.59)$$

que permite el cálculo de Q'_{*c} a partir de los valores conocidos de Q , k y b .

Cuando E_c se conoce pero no b_c , ésta se elimina y el parámetro se convierte en

$$Q''_{*c} = \frac{Q_{*c}}{K_1} = \frac{Q}{\sqrt{g} k E_c^{5/2}} \quad (3.60)$$

con la cual se calcula Q''_{*c} a partir de los valores conocidos de Q , k y E_c .

Las relaciones Q'_{*c} con K_1 , y de Q''_{*c} con K_1 , se obtienen de las ecuaciones 3.59 y 3.60 y la relación de Q_{*c} con K_1 de la curva mostrada en la figura 3.16. Conocidos Q'_{*c} o Q''_{*c} , el parámetro K_1 se determina de dicha figura. El parámetro Q'_{*c} permite obtener la energía específica mínima E_c para el flujo en las condiciones iniciales dadas y con ello la solución cuando se desconocen y_c y E_c . El parámetro Q''_{*c} permite determinar el ancho b_c de plantilla cuando se desconoce la dimensión mínima de la sección.

Las relaciones transformadas de la figura 3.16 también permiten la solución del problema en que se conocen las condiciones críticas E_c y b_c , para deducir las condiciones subcríticas alteradas aguas arriba o aguas abajo de una transición a partir de la figura 3.14.

Circular. La expresión del área hidráulica para una sección de diámetro D presentada en la tabla 1.2, se escribe también en la forma

$$A = \frac{D^2}{4} (\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) \quad (3.61)$$

donde θ y $\cos \theta$ se obtienen de la misma tabla (ver recuadro para interpretar θ). Además

$$\text{sen } \theta = 2 \sqrt{\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D}\right)^2} \quad (3.62)$$

de modo que

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\arccos \left(1 - \frac{2y}{D} \right) + 2 \sqrt{\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2} \left(\frac{2y}{D} - 1 \right) \right] \quad (3.63)$$

Por otra parte, de la ecuación 3.50, $Q/\sqrt{g}\sqrt{E} = \sqrt{2(1-y/E)} A$, donde se sustituye la ecuación 3.63 y se obtiene

$$\frac{Q}{\sqrt{g} D^2 \sqrt{E}} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{y}{E} \right)} \frac{1}{4} \left[\arccos \left(1 - \frac{2y}{D} \right) + 2 \sqrt{\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2} \left(\frac{2y}{D} - 1 \right) \right]$$

Pero $y/D = (E/D)(y/E) = K_2 y_*$, donde $K_2 = E/D$ y $y_* = y/E$. Por tanto, la ecuación anterior en términos adimensionales resulta

$$\begin{aligned} Q_* &= \frac{Q}{\sqrt{g} D^2 \sqrt{E}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2(1-y_*)} \left[\arccos(1 - 2K_2 y_*) + 2 \sqrt{K_2 y_* - K_2^2 y_*^2} (2K_2 y_* - 1) \right] \quad (3.64) \end{aligned}$$

La representación gráfica de la ecuación 3.64 se muestra en la figura 3.17 para distintos valores del parámetro K_2 y se puede usar de manera directa para la solución del problema en que se conocen E y D y se buscan el o los tirantes alternos.

Como en el caso del canal trapecial, las condiciones críticas del flujo Q_{*c} y y_{*c} en el canal circular dependen nuevamente de K_2 , pero no es posible establecer una relación similar a la ecuación 3.58 entre y_{*c} y K_2 . Por tanto, los valores de y_{*c} y Q_{*c} para canales circulares se leen directamente de la figura 3.16 para cada valor de K_2 . En la figura 3.15 también se incluye la relación entre y_{*c} y K_2 para los mismos canales, que se puede usar para predecir el tirante crítico cuando se conocen la energía específica mínima o viceversa.

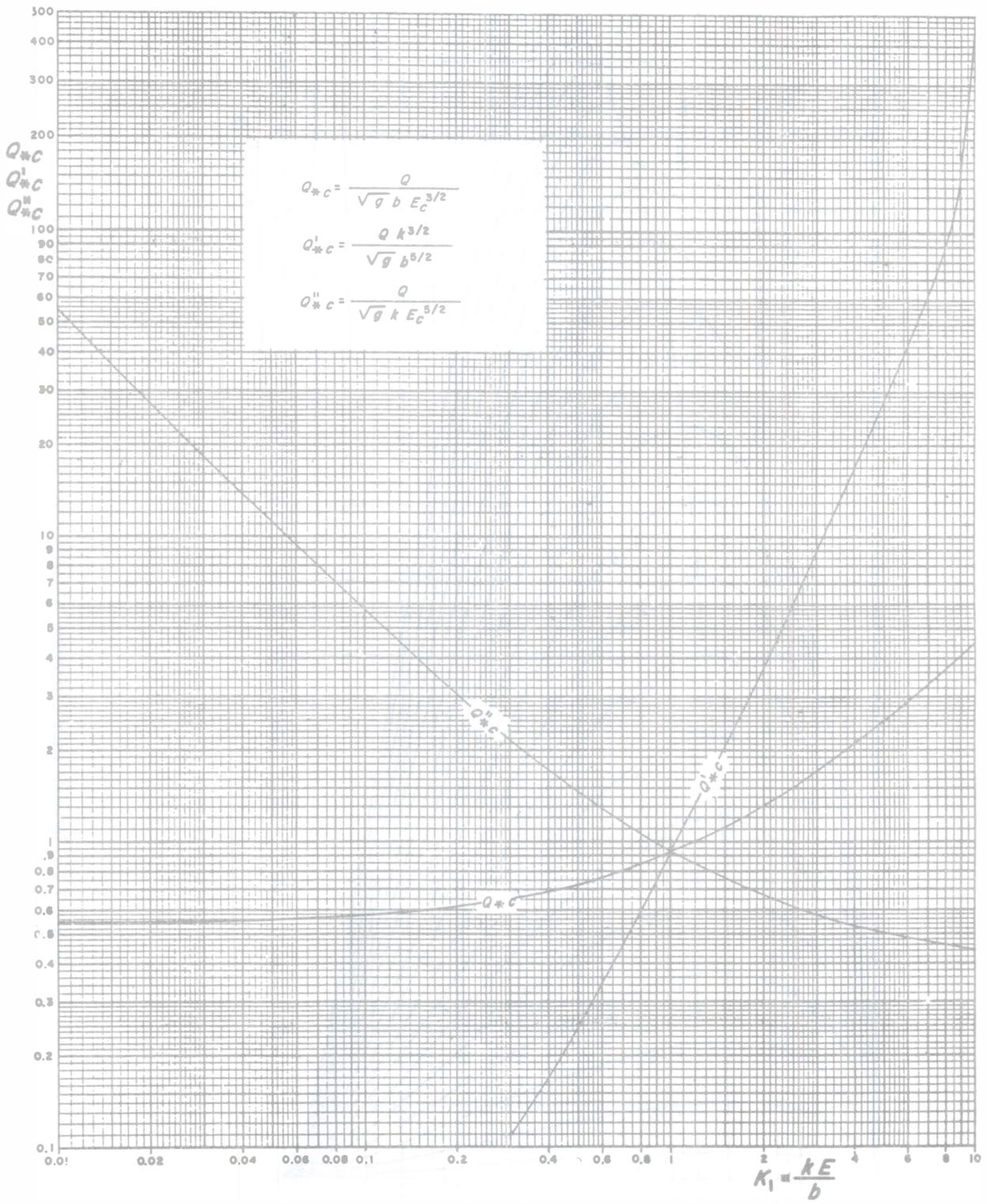


Figura 3.16. Relación entre parámetros adimensionales $K_1 - Q_{*c}, Q_{*c}', Q_{*c}''$ en canales trapeciales

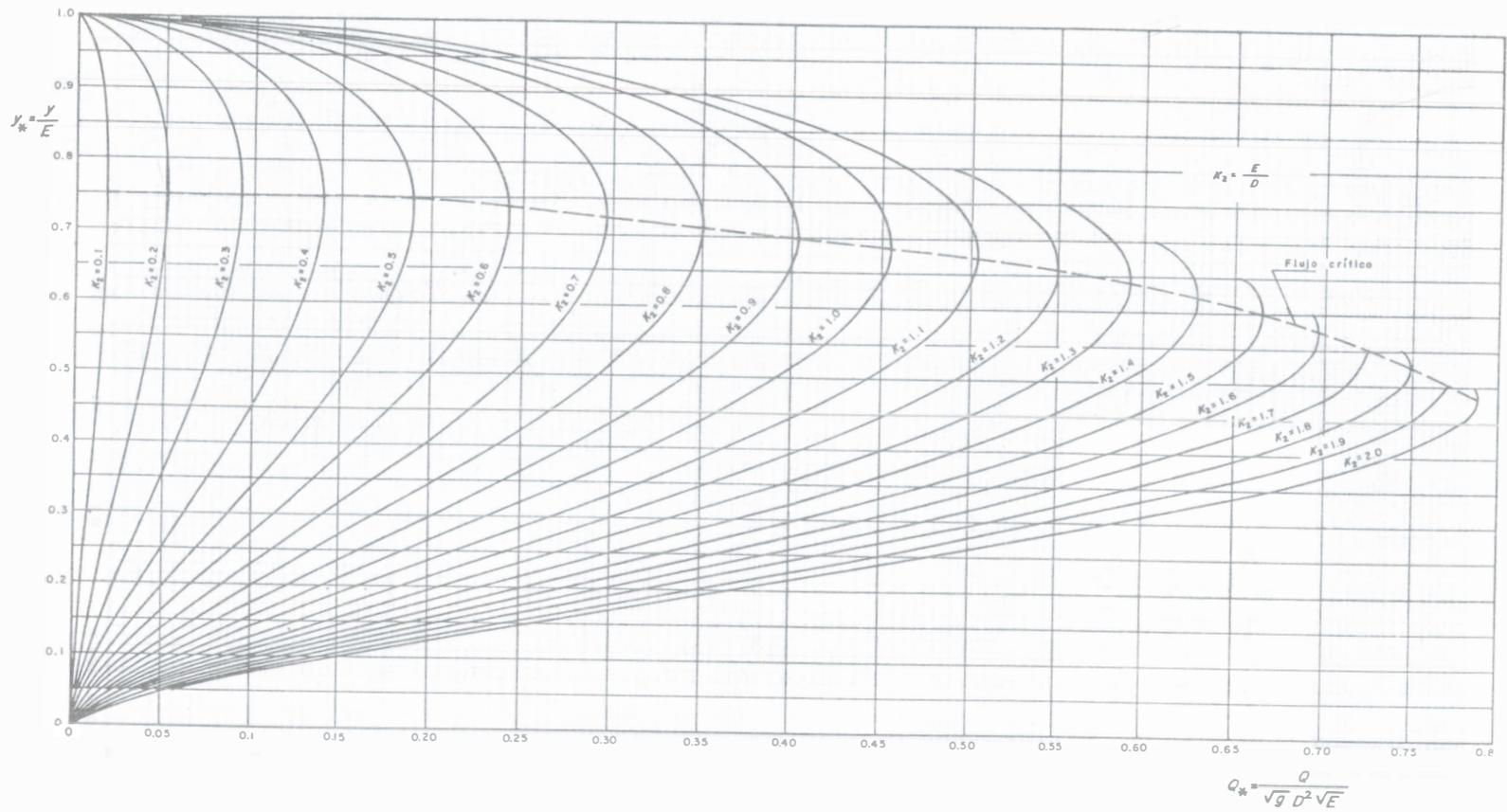


Figura 3.17. Relación entre parámetros adimensionales Q_* - y_* en canales circulares

La variación de Q_{*c} y K_2 para canales circulares se muestra en la figura 3.18. Por las razones explicadas para el canal trapecial, el eje de Q_{*c} en dicha figura también incluye dos parámetros que se pueden calcular de información conocida. En efecto, si D se conoce pero no E_c , resulta

$$Q'_{*c} = Q_{*c} \sqrt{K_2} = \frac{Q}{\sqrt{g} D^{5/2}} \quad (3.65)$$

y si E_c se conoce, pero no D_c

$$Q''_{*c} = \frac{Q_{*c}}{K_2} = \frac{Q}{\sqrt{g} E_c^{5/2}} \quad (3.66)$$

Las relaciones gráficas de Q'_{*c} con K_2 y de Q''_{*c} con K_2 , mostradas en la figura 3.18, se derivaron de las ecuaciones 3.65 y 3.66 y de la relación de Q_{*c} con K_2 . Las primeras permiten determinar E_c para el flujo en las condiciones iniciales dadas y con ello una solución del problema en que se conocen E y D , siendo $D > D_c$; la última proporciona el diámetro mínimo D_c y con éste la solución del problema en que se conocen E_c y Q_c y se desea D_c .

Ejemplo 3.9. Un canal trapecial excavado en tierra ($n = 0.025$, Manning) tiene un ancho de 5 m, talud $k = 2$, pendiente 0.00034 y conduce un gasto de 50 m³/s para $\alpha = 1$. Calcular: a) el tirante normal y la energía específica con que opera; b) el tirante y pendiente críticos para $n = 0.015$ y energía específica mínima para el gasto que conduce; c) el tirante alterno que corresponde a la energía específica del inciso a); d) el ancho mínimo de plantilla que requiere el canal para operar con energía específica mínima igual a la que resulte en el inciso a); en su defecto, con la que se obtenga al restar 1.0 m, lo que equivale a un desnivel de plantilla de igual magnitud.

Solución a. El tirante normal es $y_n = 3.5091$ m. En efecto: $A = [5 + 2(3.5091)] 3.5091 = 42.1731$ m²; $R_h = 2.038$ m; $V = (2.038)^{2/3} \sqrt{0.00034} / 0.025 = 1.1856$ m/s; $Q = 50$ m³/s. Por tanto

$$E = 3.5091 + \frac{(1.1856)^2}{19.62} = 3.5807 \text{ m}$$

Solución b. Se calcula el valor de $Q^2/g = (50)^2/9.81 = 254.842$, el cual se satisface con $y_c = 1.7151$ m. En efecto: $A_c = 14.4586$ m²; $T_c = 11.8604$ m; $A_c^3/T_c = 254.849$. Además, $V_c = 50/14.4586 = 3.4581$ m/s y por tanto, $E_c = 1.7151 + 0.6095 = 2.3246$ m. También, $R_{hc} = 1.1412$ m, siendo la pendiente crítica

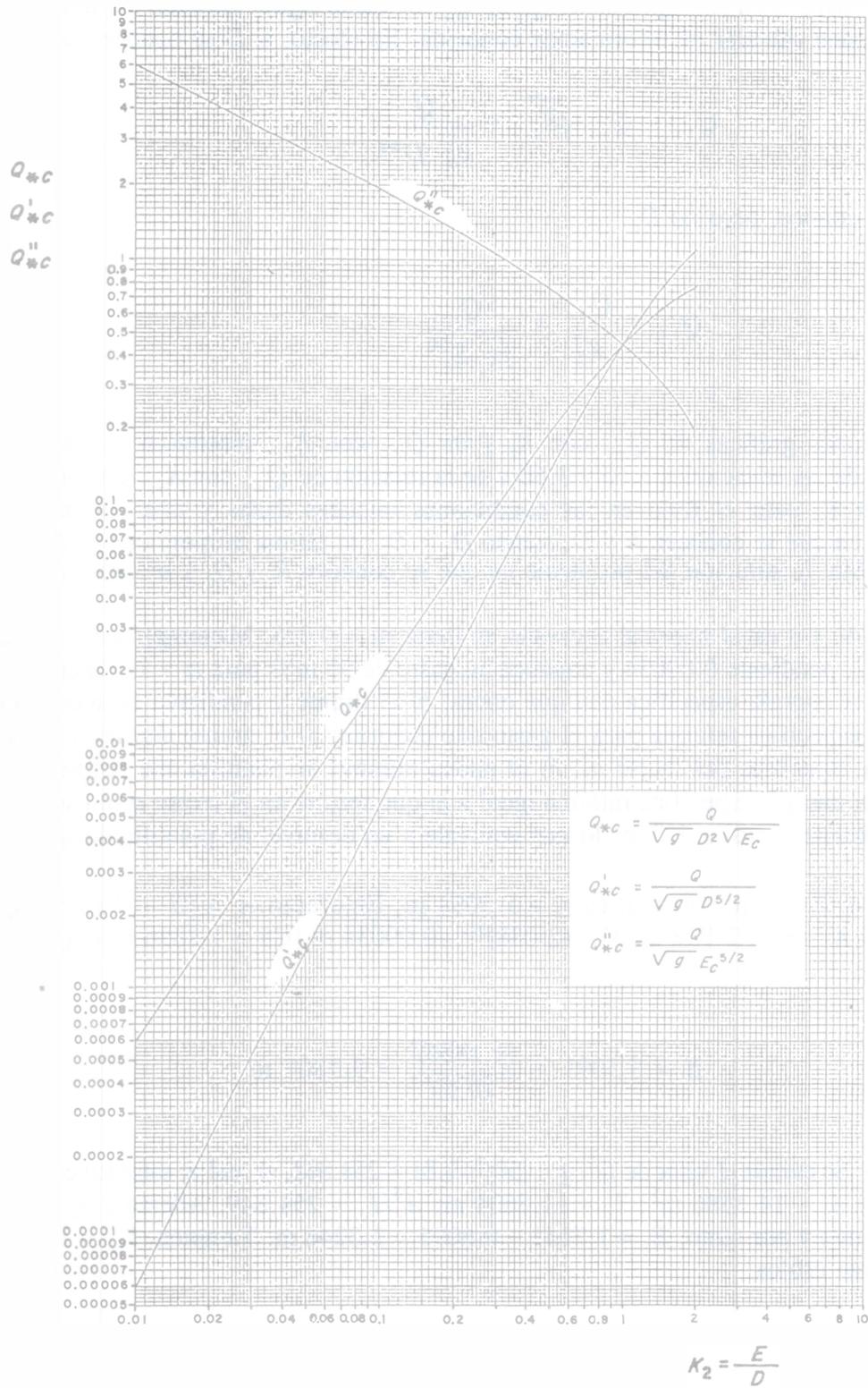


Figura 3.18. Relación entre parámetros adimensionales $K_2 - Q_{*c}, Q'_{*c}, Q''_{*c}$, en canales circulares

$$S_c = \left[\frac{3.4581 (0.015)}{(1.1412)^{2/3}} \right]^2 = 0.002256$$

Solución c. Es necesario calcular el tirante en régimen supercrítico cuando $E_0 = 3.5807$ m. Para ello se sigue el procedimiento presentado en la sección 3.6.2, en el cual debe primero verificarse que $E > E_c$. El valor de E_c se calculó en el inciso anterior y puede verse que dicha condición se cumple.

En la tabla 3.3 se presenta un resumen de los cálculos con $y_0 = 0.1 E_0 = 0.358$ m como valor inicial, y se obtuvo $y = 1.0035$ m como valor final.

Tabla. 3.3. Cálculo del tirante alterno para $E = 3.5807$ m en el ejemplo 3.9c

y en m	A en m ²	y en m	V en m/s	E en m	J	F^2	J'	$\frac{J}{J'}$
0.358	2.0463	0.3181	24.4345	30.7872	27.2065	169.996	- 168.996	- 0.161
0.519	3.1337	0.4429	15.9555	13.4944	9.9137	58.5973	- 57.597	- 0.172
0.6911	4.4107	0.5681	11.3360	7.2408	3.6601	18.9543	- 17.9543	- 0.2039
0.8950	6.0771	0.7083	8.2277	4.3453	0.7646	9.7427	- 8.7427	- 0.0875
0.9825	6.8431	0.7663	7.3066	3.7035	0.1228	7.1017	- 6.1017	- 0.0201
1.0026	7.0234	0.7795	7.1190	3.5857	0.0050	6.6278	- 5.6278	- 0.0009
1.0035	7.0315	0.7801	7.1108	3.5807	0.0	6.6075	- 5.6075	0.0

Otro procedimiento es mediante los parámetros descritos en la sección 3.6.3:

$$Q_* = \frac{50}{\sqrt{9.81} \cdot 5 (3.5807)^{3/2}} = 0.4712$$

$$K_1 = \frac{2 (3.5807)}{5} = 1.4323$$

de modo que se debe satisfacer la ecuación 3.57 en la forma

$$0.4712 = (1 + 1.4323 y_*) y_* \sqrt{2 (1 - y_*)}$$

cuya solución es $y_* = 0.28025$, es decir, $y = 1.0035$ m.

También, en la figura 3.14 se lee $y_* = y/E = 0.28$, prácticamente el mismo calculado.

Solución d. La sección es trapezoidal y conviene verificar la energía específica mínima cuando $b = 0$. De las ecuaciones 3.33b y 3.34 resulta

$$y_c = \left[\frac{2 (50)^2}{9.81 (2)^2} \right]^{1/5} = 2.6366 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{5}{4} (2.6366) = 3.2958 \text{ m} < 3.5807 \text{ m}$$

por tanto, no hay solución para $E_c = 3.5807 \text{ m}$, pero sí para la que resulta al restar 1.00 m, y su valor es $E_c = 2.5807 \text{ m}$. Esto equivaldría a utilizar un escalón positivo de altura $\Delta z = 1.0 \text{ m}$.

Se sigue el procedimiento expuesto en la sección 3.6.1 cuyo resumen se presenta en la tabla 3.4. Las ecuaciones utilizadas en la primera etapa de iteración son:

$$G_1 = y + \frac{1}{2} \frac{A}{T} - 2.5807 \quad (\text{a})$$

$$G_1' = \frac{3}{2} - \frac{A}{T^2} k \quad (\text{b})$$

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \left[\frac{G_1}{G_1'} \right]_i \quad (\text{c})$$

y con $x = b$, para la segunda etapa (ecuaciones 3.14, 3.41 y 3.38):

$$G_2 = \frac{A^3}{T} - \frac{(50)^2}{9.81} = \frac{A^3}{T} - 254.842 \quad (\text{d})$$

$$G_2' = \frac{A^2}{T} \left[3 y - \frac{A}{T} \right] \quad (\text{e})$$

$$(b)_{i+1} = (b)_i - \left[\frac{G_2}{G_2'} \right]_i \quad (\text{f})$$

Los resultados finales son $b_c = 3.389 \text{ m}$, $y_c = 1.9465 \text{ m}$.

Tabla 3.4. Cálculo del ancho mínimo del canal trapecial del ejemplo 3.9d, para $E_c = 2.5807$ m, $Q = 50$ m³/s

b en m ec. (f)	y en m ec. (c)	Primera etapa					Segunda etapa		
		A en m ²	T en m	G_1 ec. (a)	G'_1 ec. (b)	$\frac{G_1}{G'_1}$	G_2 ec. (d)	G'_2 ec. (e)	$\frac{G_2}{G'_2}$
4.0	2.0	16.00	12.00	0.086	1.2778	0.0673			
	1.9327	15.2015	11.7308	- 0.0001	1.2791	- 0.0001			
	1.9328	15.2026	11.7312	0.00		0.00	44.6698	88.70*	0.5036
3.4964	1.9328	14.2293	11.2276	- 0.0142	1.2742	- 0.0112			
	1.9440	14.3553	11.2724	0.00		0.00	7.5908	83.34	0.0911
3.4053	1.9440	14.1782	11.1813	- 0.0027	1.2732	- 0.0021			
	1.9461	14.2017	11.1897	0.00		0.0	1.1340	82.36	0.0138
3.3915	1.9461	14.1748	11.1759	- 0.0004	1.2730	- 0.0003			
	1.9464	14.1782	11.1771	0.00		0.00	0.1524	82.20	0.0019
3.3896	1.9464	14.1745	11.1752	- 0.0001	1.2730	- 0.0001			
	1.9465	14.1756	11.1756	0.00		0.00	0.0474	82.19	0.0006
3.3890	1.9465	14.1744	11.175	0.00		0.00	- 0.0019	82.18	0.00

Para efectuar un cálculo directo se utiliza la ecuación 3.60

$$Q''_c = \frac{50}{\sqrt{9.81} \cdot 2 (2.5807)^{5/2}} = 0.746$$

Con este valor, en la figura 3.16 se lee: $K_1 = 1.52$, y de la definición de K_1

$$b_c = \frac{2 (2.5807)}{1.52} = 3.39 \text{ m}$$

casi igual al obtenido por el método de iteraciones.

Ejemplo 3.10. Un túnel revestido de concreto ($n = 0.015$) de sección portal (figura 3.19) tiene 5 m de ancho y 2.50 m de altura en la zona rectangular y remata en una bóveda semicircular de 5 m de diámetro. Tiene una pendiente $S = 0.001$ y antecede al canal trapecial del ejemplo 3.9, existiendo una transición entre ambos de longitud $L = 12$ m que cambia gradualmente las dimensiones de la sección y la elevación de plantilla. En la transición ocurre una pérdida que se obtiene de la ecuación $h_c = 0.3 (V_T^2 - V_C^2)/2g$, donde V_T es la velocidad en el túnel y V_C en el canal.

- a) Determinar el intervalo del desnivel Δz que puede haber entre la plantilla del túnel y la del canal sin que haya cambio de régimen ni alteración de las características del flujo en el túnel (excepto en un tramo al final de éste). b) Si se elige $\Delta z = -0.50$ m calcular el tirante que hay a lo largo de la transición considerando que el desnivel, el talud y la pérdida varían en forma lineal en toda su longitud. c) Calcular el ancho mínimo que debe tener el túnel si $\Delta z = -1.0$ m y no se desea cambio de régimen en la transición. d) Obtener el desnivel Δz_c si el túnel cambia a sección circular de 5 m de diámetro y hay régimen crítico al terminar el túnel. e) Calcular el diámetro mínimo del túnel circular cuando $\Delta z = 0.30$ m.

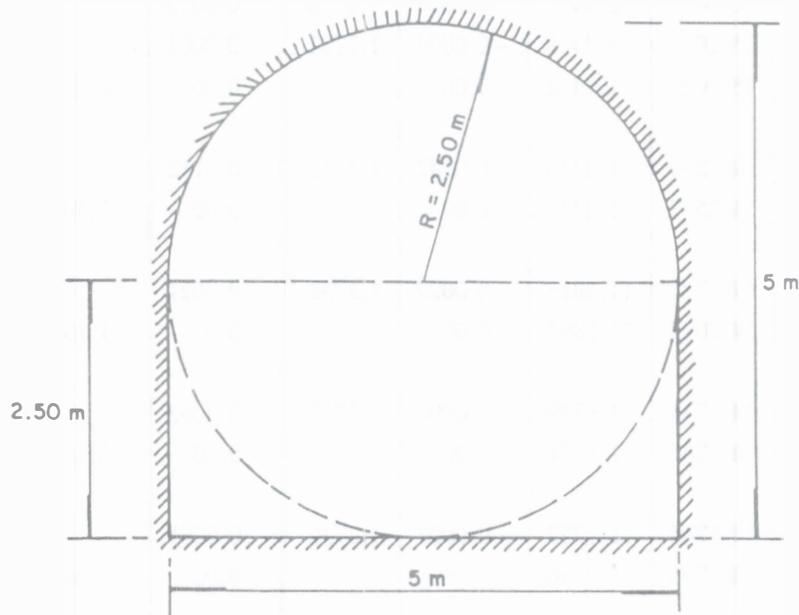


Figura 3.19. Sección del túnel en el ejemplo 3.10

Solución a. El tirante normal en el túnel para la pendiente elegida es $y_n = 3.7329$ m. En efecto, el área de la parte rectangular inferior es

$$A_r = 5 (2.5) = 12.5 \text{ m}^2$$

Para obtener el área en la parte semicircular se supone que el túnel es circular ($D = 5$ m) y dicha área se calcula con la tabla 2.8. La relación de llenado vale $y_0/D = 3.7329/5 = 0.74658$ y para ésta: $A_0/D^2 = 0.6288$, de manera que $A_0 = 15.7206 \text{ m}^2$. El área hidráulica es finalmente

$$A = 12.5 + \left[15.7206 - \frac{\pi}{8} (5)^2 \right] = 18.4031 \text{ m}^2$$

Para el perímetro mojado se procede en la misma forma, siendo $P_0/D = 2.0865$; $P_0 = 10.4327$ m; por tanto

$$P = 5 + 2 (2.5) + \left[10.4327 - \frac{\pi}{2} (5) \right] = 12.5787 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{18.4031}{12.5787} = 1.463 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning

$$V = \frac{1}{0.015} (1.463)^{2/3} (0.001)^{1/2} = 2.7169 \text{ m/s}$$

y resulta $Q = 2.7169 (18.4031) = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, lo cual comprueba que $y_n = 3.7329 \text{ m}$. Con $V^2/2g = 0.3762 \text{ m}$, la energía específica en el túnel es

$$E_T = 3.7329 + 0.3762 = 4.1091 \text{ m}$$

y la del canal en flujo uniforme se calculó en la solución del ejemplo 3.9a y resultó $E_C = 3.5807 \text{ m}$, para $V_C = 1.1856 \text{ m/s}$ y $V_C^2/2g = 0.0716 \text{ m}$. La pérdida en la transición es entonces

$$h_c = 0.3 (0.3762 - 0.0716) = 0.0914 \text{ m}$$

La ecuación de energía aplicada entre las secciones inicial y final de la transición resulta

$$4.1091 = \Delta z + 3.5807 + 0.0914$$

es decir, $\Delta z = 0.437 \text{ m}$, lo que significa que el fondo del canal debe quedar por encima del fondo del túnel (escalón positivo).

Para calcular el otro valor extremo de Δz se debe presentar régimen crítico en la sección final del túnel. Se supone que $y_c \leq 2.50 \text{ m}$, es decir, que dicho régimen ocurre en la zona rectangular inferior. Siendo $q = 50/5 = 10 \text{ m}^2/\text{s}$, el tirante crítico vale

$$y_c = \left[\frac{(10)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 2.1683 \text{ m} < 2.50 \text{ m}$$

por consiguiente

$$V_c = \frac{10}{2.1683} = 4.612 \text{ m/s}; \quad \frac{V_c^2}{2g} = 1.0841 \text{ m}$$

$$E_c = 2.1683 + 1.0841 = 3.2524 \text{ m}$$

La pérdida es

$$h_c = 0.3 (1.0841 - 0.0716) = 0.3037 \text{ m}$$

En la misma forma de antes, de la ecuación de energía

$$3.2524 = \Delta z_c + 3.5807 + 0.3037$$

$$\Delta z_c = - 0.6320 \text{ m}$$

lo que significa que el fondo del canal debe quedar debajo del fondo del túnel (escalón negativo). El flujo uniforme varía gradualmente en un tramo al final del túnel hasta el crítico en la última sección.

El intervalo de valores de Δz es de $- 0.6320$ a 0.437 m.

Solución b. Si se elige $\Delta z = - 0.50$ m, la energía específica en la sección final del túnel resulta de la ecuación de energía entre las dos secciones extremas de la transición, como sigue

$$y_T + \frac{V_T^2}{2g} = - 0.50 + 3.5807 + 0.3 \left[\frac{V_T^2}{2g} - 0.0716 \right]$$

$$y_T + 0.7 \frac{V_T^2}{2g} = 3.0592$$

Si se considera $y_T < 2.50$ m (zona rectangular), la solución de la ecuación anterior es $y_T = 2.4783$ m, siendo $V_T = 4.0355$ m/s, $V_T^2/2g = 0.8299$ m y $E_T = 3.308$ m. La pérdida en la transición es

$$h_c = 0.3 (0.8299 - 0.0716) = 0.2275 \text{ m}$$

El perfil de la línea de energía y de la superficie libre del agua en la transición se determina utilizando 5 tramos de 2.40 m de longitud, considerando que la pérdida total se distribuye proporcionalmente en cada uno. Esta hipótesis se justifica sólo para evitar las iteraciones en secciones intermedias, ya que debe calcularse con la misma ecuación de h_c entre secciones consecutivas. El ancho de plantilla es constante (5 m) pero el talud varía linealmente a lo largo de la transición. La figura 3.20 muestra estas consideraciones.

De esta manera, la línea de energía desciende uniformemente una cantidad igual a $0.2275/5 = 0.0455$ m y la tabla de la figura 3.20 muestra la altura H de la línea de energía, medida desde el nivel de plantilla del canal.

Conocida la altura z del piso de la transición en cada sección (medida desde el nivel de plantilla del canal), se calcula la energía específica en dicha sección: $E = H - z$. Mediante un proceso iterativo se determina el tirante en cada sección que satisface a la energía específica existente en ella. Por último, el ancho de la superficie libre en cada sección se calcula de $T = b + 2 k y$. Los resultados se muestran en la tabla de la figura 3.20.

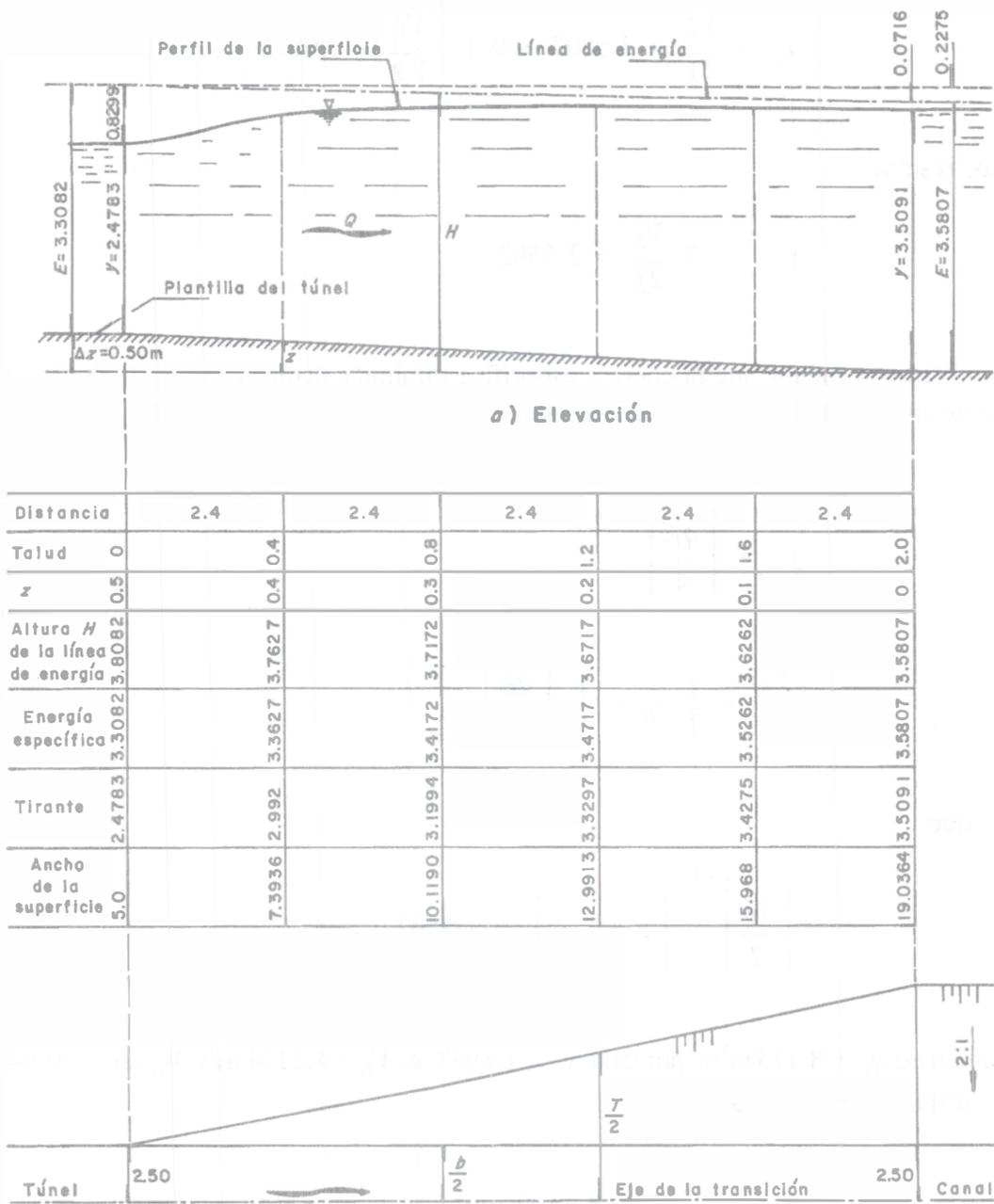


Figura 3.20. Transición del ejemplo 3.10b

Solución c. Si $\Delta z = -1.0$ m, la energía específica mínima en la sección final del túnel es

$$y_{Tc} + \frac{V_{Tc}^2}{2g} = 3.5807 + 0.3 \left(\frac{V_{Tc}^2}{2g} - 0.0716 \right) - 1.00$$

Por tanto, resulta

$$y_{Tc} + 0.7 \frac{V_{Tc}^2}{2g} = 2.5592$$

donde 2.5592 m es menor que la energía específica mínima calculada en el inciso *a*, por tanto, es necesario modificar las dimensiones del túnel. En la ecuación anterior se debe cumplir

$$y_{Tc} = \left(\frac{q_{Tc}^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\frac{V_{Tc}^2}{2g} = \frac{1}{2} y_{Tc} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{Tc}^2}{g} \right)^{1/3}$$

de modo que

$$\left(\frac{q_{Tc}^2}{g} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{0.7}{2} \right) = 2.5592$$

cuya solución es: $q_{Tc} = 8.175$ m²/s, por tanto $y_{Tc} = 1.8957$ m, $V_{Tc} = 4.3124$ m/s, $V_{Tc}^2/2g = 0.9478$ m. El ancho mínimo del túnel debe ser

$$b_{Tc} = \frac{50}{8.175} = 6.1162 \text{ m}$$

Solución d. Se calcula el tirante crítico para una sección circular de 5 m de diámetro y el mismo gasto, siguiendo cualquiera de los procedimientos mencionados en la sección 3.5.3c. Con el parámetro

$$\frac{Q}{\sqrt{g} D^{5/2}} = \frac{50}{\sqrt{9.81} (5)^{2.5}} = 0.2856$$

se interpola en la tabla 2.8 y resulta $y_c/D = 0.5405$, es decir, $y_c = 2.7025$ m; siendo $E_c/D = 0.7582$, es decir, $E_c = 3.7889$ m, $V_c^2/2g = 1.0864$ m, $V_c = 4.6169$ m/s y la pérdida en la transición vale

$$h_c = 0.3 (1.0864 - 0.0716) = 0.3044 \text{ m}$$

De la ecuación de energía

$$3.7889 = \Delta z_c + 3.5807 + 0.3044$$

$$\Delta z_c = - 0.0962 \text{ m}$$

muy distinta de $\Delta z_c = - 0.632$ m obtenida para la sección portal.

Solución e. Se observa que $\Delta z_c = 0.30$ m es mayor que $\Delta z_c = - 0.0962$ m calculado en el inciso anterior, y para que haya régimen crítico con la energía específica que resulte, el diámetro del túnel debe ser menor de 5 m. La solución se obtiene mediante un proceso de iteración como el propuesto en la sección 3.6.1, aplicado como se muestra en la tabla 3.4. Otra alternativa consiste en hacer tanteos y ajustar los errores mediante interpolaciones lineales en la tabla 2.8.

De manera similar al inciso c, se debe cumplir

$$y_c + \frac{V_c^2}{2g} = 3.5807 + 0.3 \left[\frac{V_c^2}{2g} - 0.0716 \right] + 0.30$$

$$y_c + 0.7 \frac{V_c^2}{2g} = 3.8592 \quad (\text{a})$$

Además $Q^2/g = 254.842$, por lo tanto se debe satisfacer que

$$\frac{A_c^3}{T_c} = 254.842 \quad (\text{b})$$

Se supone $D_c = 3.947$ m, y con el parámetro

$$\frac{Q}{\sqrt{g} D^{5/2}} = \frac{50}{\sqrt{9.81} (3.947)^{2.5}} = 0.5158$$

en la tabla 2.8 se lee $y_c/D = 0.7334$, $y_c = 2.8947$ m; también: $A_c = 9.6167$ m²; $T_c = 3.4903$ m; $A_c^3/T_c = 254.8$, que satisface a la ecuación (b). Se tiene entonces: $V_c = 50/9.6167 = 5.1993$ m/s; $V_c^2/2g = 1.3778$ m, por tanto

$$y_c + 0.7 \frac{V_c^2}{2g} = 2.8947 + 0.7 (1.3778) = 3.8592 \text{ m}$$

y se satisface la ecuación (a); por tanto, la solución final es $D_c = 3.947$ m.

La solución por el procedimiento de Vittal necesita de iteraciones ya que se incluye la pérdida, y por eso no se utiliza.

Ejemplo 3.11. Transición de un canal circular a un acueducto rectangular. Un conducto circular de pendiente pequeña y de 2.80 m de diámetro conduce 5.66 m³/s ($\alpha = 1$), con una relación de llenado $y/D = 0.8$. Termina en un acueducto rectangular de 2 m de ancho, cuya plantilla queda 1.0 m por encima de la del canal circular a fin de permitir suficiente espacio para pasar el caudal del drenaje inferior. Predecir las condiciones del flujo en el acueducto y determinar si el flujo en el canal aguas arriba se altera por algún efecto de la transición, sin considerar pérdidas en ella.

Solución. Se trata de una transición combinada (horizontal-vertical) con cambio en la forma de los canales. Primero es necesario estimar el desnivel crítico entre plantillas con el ancho dado del acueducto, para compararlo después con el propuesto.

Para $y/D = 0.8$, de la tabla 2.8: $A/D^2 = 0.6736$; es decir: $y_1 = 2.24$ m, $A_1 = 0.6736 (2.8)^2 = 5.281$ m²; $V_1 = 1.0718$ m/s; $V_1^2/2g = 0.0585$ m; por tanto, $E_1 = 2.2985$ m.

Se calcula E_c en la sección 2 al igualar Q_{*c} (ecuación 3.54) con 0.5443 para el canal rectangular y despejar a E_c

$$E_c = \left[\frac{5.66}{0.5443 \sqrt{9.81} \cdot 2} \right]^{2/3} = 1.402 \text{ m}$$

que sería la energía específica mínima necesaria en el acueducto.

De la ecuación 3.8

$$\Delta z_c = 2.2985 - 1.402 = 0.8965 \text{ m} < 1.0 \text{ m}$$

por tanto, $\Delta z > \Delta z_c$ y el flujo en el canal circular de aproximación queda afectado por las condiciones aguas abajo, alterando sus características.

El tirante crítico en el acueducto es $y_c = \frac{2}{3} (1.402) = 0.9347$ m de manera que la energía específica antes de la transición es

$$E_1' = 1.402 + 1.0 = 2.402 \text{ m}$$

que es la energía específica alterada en el canal circular, de modo que, en la ecuación 3.64, resulta

$$Q_* = \frac{5.66}{\sqrt{9.81} (2.8)^2 \sqrt{2.402}} = 0.1487$$

además

$$K_2 = \frac{2.402}{2.8} = 0.8578$$

y de la figura 3.17, el tirante en flujo subcrítico es $y_* = 0.97$ y siendo $y_* = y_1' / E_1'$, se obtiene

$$y_1' = 0.97 (2.402) = 2.3296 \text{ m}$$

La inclusión de la pérdida de energía alteraría más el flujo aguas arriba.

Ejemplo 3.12. Se trata de la transición de entrada de un canal trapecial de pendiente pequeña al conducto circular de una alcantarilla. El canal es de 1.50 m de ancho, taludes 1:1 y conduce un caudal de 5.625 m³/s ($\alpha = 1$), con un tirante de 1.50 m. El canal entra a un conducto circular que funciona a superficie libre con el mismo nivel de plantilla en ambos. Para autolavar el sedimento que se deposite es deseable que el flujo en el conducto sea el más rápido posible, sin afectar las condiciones hidráulicas en el canal de aproximación. Determinar el tamaño necesario del conducto considerando que la pérdida en la transición sea cero.

Solución. Se trata del problema de una transición horizontal que cambia las dimensiones y forma de la sección trapecial a la circular y en la última se solicita el diámetro mínimo. El área hidráulica, velocidad, carga de velocidad y energía específica del flujo en el canal son

$$A_1 = [1.50 + 1 (1.50)] 1.5 = 4.50 \text{ m}^2$$

$$V_1 = \frac{5.625}{4.50} = 1.25 \text{ m/s} ; \frac{V_1^2}{2g} = 0.08 \text{ m}$$

$$E_1 = 1.50 + 0.08 = 1.58 \text{ m}$$

Siendo $\Delta z = 0$ y $E_1 = E_2 = E_c$, entonces

$$E_c = 1.58 \text{ m}$$

De la ecuación 3.66

$$Q''_c = \frac{5.625}{\sqrt{9.81} (1.58)^{2.5}} = 0.5724$$

Con este valor, en la figura 3.18 se lee $K_2 = 0.756$ y siendo $K_2 = E_c / D_c$, el diámetro del conducto resulta

$$D_c = \frac{E_c}{K_2} = \frac{1.58}{0.756} = 2.09 \text{ m}$$

con el cual, de la ecuación 3.64 se obtiene

$$Q_* = \frac{5.625}{\sqrt{9.81} (2.09)^2 \sqrt{1.58}} = 0.3261$$

Siendo $K_2 = 0.756$, de la figura 3.17 $y_* = 0.73$, y $y_c = 0.73 (1.58) = 1.153 \text{ m}$. Es decir, $y_c / D_c = 0.55$, para el cual $A_c / D_c^2 = 0.4426$, de modo que $A_c = 1.9333 \text{ m}^2 < 4.50 \text{ m}^2$, $V_c = 2.9095 \text{ m/s}$ y $V_c^2 / 2g = 0.4314 \text{ m}$. Sólo al llegar a este punto es posible valorar la pérdida y repetir el proceso.

3.7 PENDIENTE CRÍTICA

La definición de régimen crítico para un gasto dado impone las condiciones para que ocurra en alguna sección de un canal. Si la definición se hace extensiva a lo largo de uno prismático, equivale a que en éste se establezca flujo uniforme de tirante normal igual al crítico. La pendiente de plantilla S_c necesaria para que ello ocurra recibe el nombre de crítica, definición que coincide con la dada en la sección 2.5.6 y en el ejemplo 3.9, inciso *b*.

Si el flujo uniforme ocurre en un canal de pendiente S_0 menor que la crítica ($S_0 < S_c$), el régimen es subcrítico y la pendiente se llama también subcrítica o suave. Por el contrario, si el flujo uniforme ocurre en un canal con pendiente mayor que la crítica ($S_0 > S_c$), el régimen es supercrítico y la pendiente se llama supercrítica o pronunciada.

Un flujo uniforme con tirante normal cerca del crítico es inestable, debido a que un cambio menor en la energía específica causa un cambio grande del tirante, como se observa en la figura 3.1. El cambio en la energía específica puede deberse a cambios de rugosidad de una sección a otra, depósito de sedimentos o modificaciones locales de la geometría.

Los conceptos de energía específica y régimen crítico juegan un papel muy importante en el flujo a superficie libre. En particular, la relación única que existe entre velocidad y tirante para la condición crítica es de gran utilidad en aplicaciones prácticas, como la medición del gasto y el establecimiento de secciones de control.

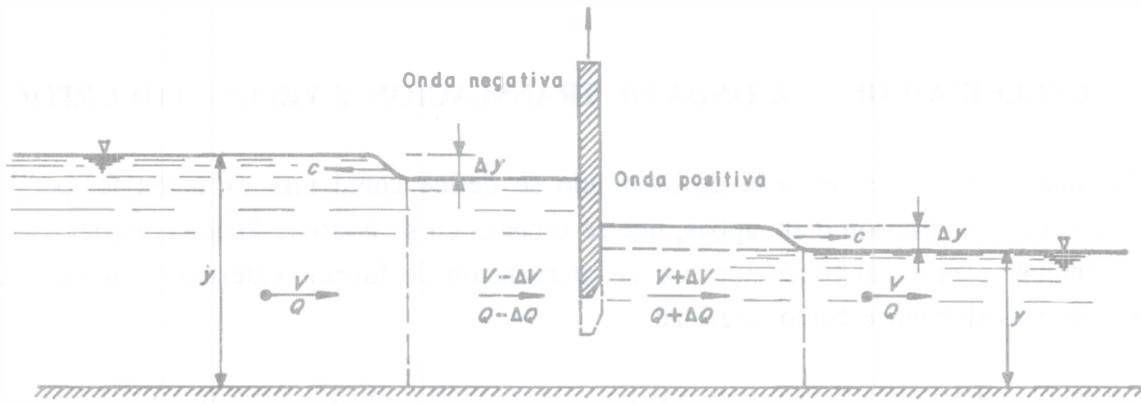
3.8 CELERIDAD DE UNA ONDA DE TRANSLACIÓN Y VELOCIDAD CRÍTICA

Una onda formada en el seno de un fluido se define como una variación temporal en la velocidad, en la presión o en ambas, que se propaga en su interior. Puede considerarse que es un fenómeno temporal producido por la intervención de fuerzas externas y su velocidad de propagación se conoce como celeridad.

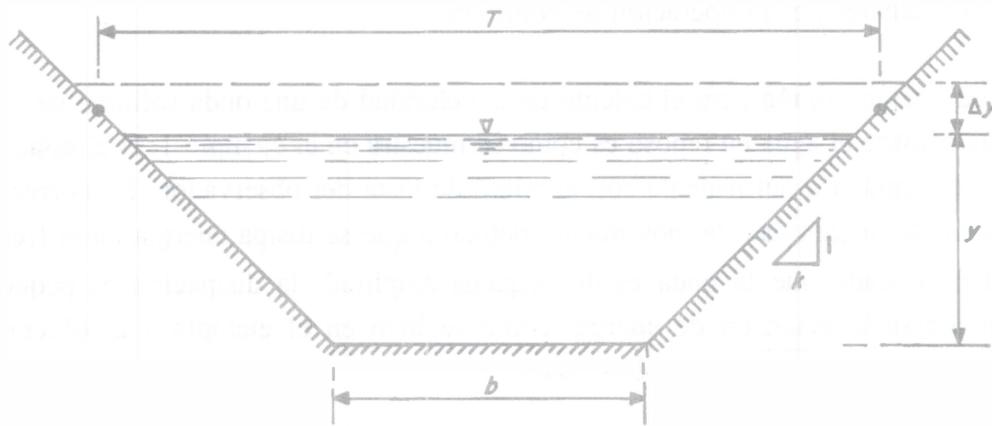
En el caso del agua a superficie libre se producen las llamadas ondas de gravedad o de translación, que se caracterizan porque se reconoce a la de gravedad como la fuerza principal. Existen dos tipos: las oscilatorias, que se forman en el mar a cierta distancia de la costa, de gran longitud en comparación con la profundidad en que se mueven, y las ondas de pequeña amplitud o de choque, cuya formación más sencilla fue presentada en el ejemplo 1.2. Las primeras se propagan sin pérdida sustancial de energía, por el contrario, las segundas tienen frentes turbulentos que rompen con pérdida importante de energía y son las que se generan más a menudo en canales por la operación de controles.

El procedimiento común para el cálculo de la celeridad de una onda solitaria de translación (o de choque) sobre el agua en reposo es como se muestra en el ejemplo 1.2: el estado de flujo no permanente cambia a permanente con el punto de vista del observador. Lo correcto es aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento debido a que se disipa energía en el frente de onda; sin embargo, dado que la onda es de pequeña amplitud, la disipación es pequeña y puede también usarse la ecuación de energía como se hizo en el ejemplo 1.2, obteniendo que la celeridad es $c = \sqrt{g A/T}$ en ambos casos.

La misma onda se puede generar en un canal con agua en movimiento cuando se produce un incremento brusco del caudal por la apertura también brusca de una compuerta, o bien por la maniobra de rechazo de una turbina en su extremo final. El caso de apertura brusca de la compuerta se muestra en la figura 3.21, donde se crea una onda negativa que avanza en dirección contraria al flujo y una positiva que lo hace en la dirección del flujo, ambas con velocidad de propagación o celeridad c y altura del frente Δy . Dichas ondas imponen en cada sección las nuevas condiciones de velocidad $V + \Delta V$ y de gasto $Q + \Delta Q$ en la dirección de avance de la onda positiva, o bien, $V - \Delta V$ y $Q - \Delta Q$ en el avance de la negativa.



a) Elevación



b) Sección del canal

Figura 3.21. Propagación de una onda de pequeña amplitud

Se puede demostrar que la celeridad absoluta de propagación se obtiene al superponer el movimiento de la onda para el agua en reposo (ejemplo 1.2) con el existente en el canal, es decir, la celeridad absoluta de la onda es

$$c = V \pm \sqrt{g A/T} \quad (3.67)$$

El signo positivo se utiliza cuando la dirección de ambos movimientos coinciden (como la onda positiva de la figura 3.21a) y el negativo cuando difieren (como la onda negativa de la misma figura).

El incremento de gasto ΔQ que impone la onda positiva cuando se dirige en la dirección del flujo se calcula como $c T_0 \Delta y$, de modo que la altura de la onda vale

$$\Delta y = \frac{\Delta Q}{(V + \sqrt{g A/T}) T_0} \quad (3.68)$$

donde T_0 es el ancho medio de la superficie libre, como se muestra en la figura 3.21b.

Cuando el régimen en el canal es subcrítico, la velocidad del agua es $V < \sqrt{g A/T}$, ($F < 1$) y la onda negativa de la figura 3.21a avanza en dirección contraria al flujo con celeridad absoluta $\sqrt{g A/T} - V$ y la positiva en la dirección del flujo con celeridad $\sqrt{g A/T} + V$.

Cuando el flujo en el canal es en régimen crítico, la velocidad del agua es $V_c = \sqrt{g A_c/T_c}$ ($F_c = 1$) y la celeridad de la onda negativa es $c = 0$, es decir, el frente de onda parecería estacionario a un observador colocado sobre la orilla. La onda positiva avanza con celeridad $c = 2 V_c$. Por ello, las ondas estacionarias son típicas del flujo que pasa por el régimen crítico o cerca de él, como en un salto hidráulico.

Con régimen supercrítico en el canal, la velocidad del agua es $V > \sqrt{g A/T}$ ($F > 1$) lo que elimina el avance del frente de onda negativa y ésta es arrastrada hacia aguas abajo sin propagar su influencia en dirección contraria al flujo.

De acuerdo con estas consideraciones, las condiciones que se presentan aguas abajo de un flujo a régimen subcrítico propagan sus efectos hacia aguas arriba y controlan las condiciones totales del flujo en el tramo que se estudia. Si el régimen es supercrítico, las condiciones en que se produce el flujo no pueden quedar influidas por ninguna alteración de sus características en el lado aguas abajo, quedando controlado desde aguas arriba. Por estas razones, entre los ingenieros prácticos se acostumbra decir que en régimen subcrítico, el agua *sabe* lo que está ocurriendo en el lado aguas abajo; no así en régimen supercrítico.

Lo anterior es muy importante para el análisis de los perfiles de flujo variado y para elegir el sentido en que debe efectuarse el cálculo de ellos. Esto se expone en el capítulo 5.

Ejemplo 3.13. Un canal trapezoidal de 10 m de ancho y talud 1.5 ($\cos \theta \approx 1$) conduce un caudal $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ con tirante $y = 3.10 \text{ m}$. Determinar la altura y celeridad de una onda generada por un incremento brusco que duplica el caudal original.

Solución. El área hidráulica, ancho de superficie libre y velocidad del flujo en las condiciones originales son:

$$A = [10 + 1.5 (3.10)] 3.10 = 45.415 \text{ m}^2$$

$$T = 10 + 2 (1.5) (3.1) = 19.3 \text{ m}$$

$$V = 50/45.415 = 1.101 \text{ m/s}$$

De la ecuación 3.67, la celeridad de la onda es

$$c = V + \sqrt{g A/T} = 1.101 + \sqrt{9.81 (45.415 / 19.3)} = 5.9056 \text{ m/s}$$

Se supone la altura $\Delta y = 0.40 \text{ m}$ del frente de onda, por tanto

$$T_0 = T + k \Delta y = 19.3 + 1.5 (0.40) = 19.90 \text{ m}$$

y de la ecuación 3.68, con $\Delta Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$

$$\Delta y = \frac{50}{5.9056 (19.90)} = 0.425 \text{ m} \neq 0.40 \text{ m}$$

Se supone ahora $\Delta y = 0.425 \text{ m}$, por tanto

$$T_0 = 19.3 + 1.5 (0.425) = 19.9375 \text{ m}$$

$$\Delta y = \frac{50}{5.9056 (19.9375)} = 0.425 \text{ m}$$

igual al valor supuesto, por tanto la altura del frente de onda es $\Delta y = 0.425 \text{ m}$.

3.9 TIRANTE CRÍTICO EN CANALES COMPUESTOS

3.9.1 Planteamiento del problema

Un canal compuesto consiste de un canal principal que conduce caudales pequeños en la parte más profunda de la sección y de canales laterales más elevados que se inundan al desbordarse el primero, para conducir los caudales de avenidas en conjunto. La figura 3.22 muestra algunas secciones compuestas, donde las subsecciones laterales suelen designarse como bermas, que pueden ser simétricas o asimétricas.

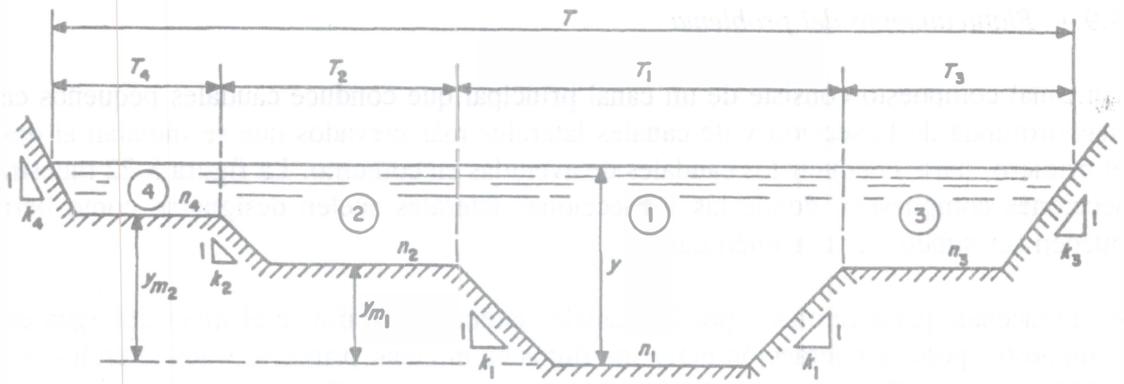
El almacenaje proporcionado por los canales laterales disminuye el nivel del agua en el canal compuesto, pero la interacción entre los flujos en el canal principal y los laterales se complica debido a la transferencia del momentum en las intercaras. Las investigaciones realizadas han establecido que existe un gasto total menor para el mismo nivel del agua que el que se esperaría si los gastos en cada subcanal se calcularan por separado y después se sumaran, como si no hubiera interacción. Varios intentos se han hecho para cuantificar la transferencia de momentum antes mencionada usando conceptos de intercaras imaginarias canal principal - canales laterales que se incluyen o se excluyen como perímetro mojado y que se definen en distintos sitios, con o sin la consideración de un esfuerzo tangencial aparente actuando sobre ellas. Sin embargo, no hay duda que la distribución del gasto entre los canales se debe predecir correctamente en cualquier condición de flujo (uniforme o variado), ya que se pueden inducir grandes errores en el coeficiente α de corrección del flujo de energía cinética, el cual se incluye en la ecuación de energía cuando se aplica al flujo unidimensional.

Por otra parte, la variación del coeficiente de Manning con el tirante complica aún más la situación, ya que el tirante puede variar de manera significativa con el gasto dentro de un perfil de flujo variado.

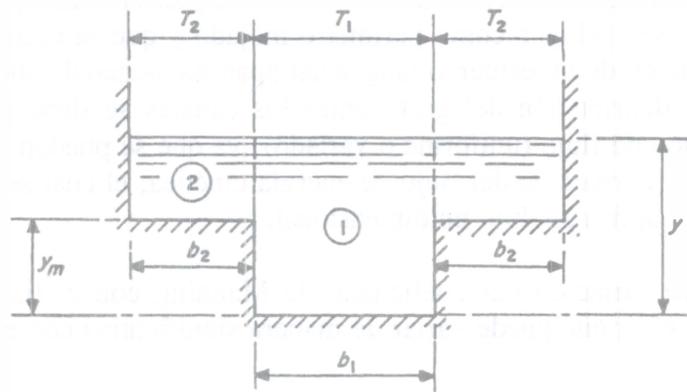
El comportamiento del flujo uniforme en un canal compuesto ha sido presentado en el subcapítulo 2.9, con énfasis en la importancia que tiene la no uniformidad de la velocidad media en la sección completa y en las distintas subsecciones. Las consecuencias resultantes de su comportamiento tienen gran relevancia en el cálculo de la energía específica, del tirante crítico de la sección y de los perfiles de flujo variado a lo largo del canal.

El comportamiento de las curvas E -y y F -y (F número de Froude) en dicho canal debiera examinarse con las ecuaciones 3.1 y 3.2, tomando en cuenta los distintos valores que adquiere α en las subsecciones. Sin embargo, es necesario aclarar algunas incongruencias en los resultados, que pueden dar lugar a errores y confusiones.

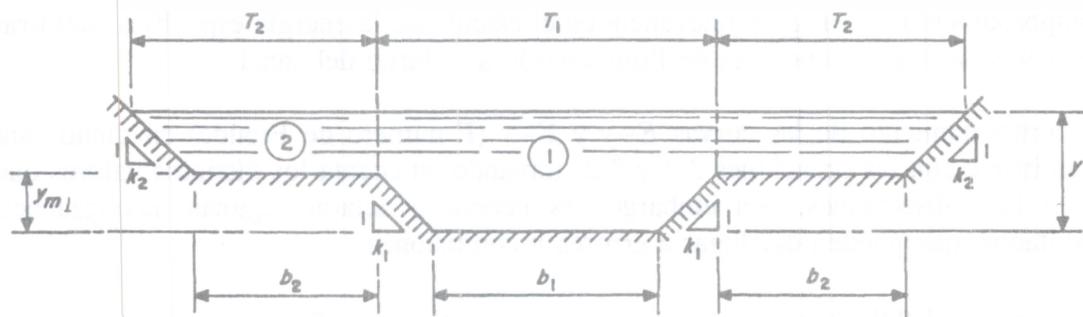
En la figura 3.23b se muestra la forma típica de la curva E -y para el canal compuesto cuya sección se presenta en la figura 3.23a, calculada con la ecuación 3.1 ($\cos \theta = 1$) para $Q = 141.58 \text{ m}^3/\text{s}$, aceptando la variación que experimenta α con el tirante según la ecuación 2.73, y valores de $\alpha_i = 1$ en cada subsección. La curva muestra que en el punto C_1 ocurre la energía específica mínima del flujo en el canal principal, y en el C_2 la mínima en toda la sección compuesta. El número de Froude en ambos puntos debiera ser uno.



a) Sección general

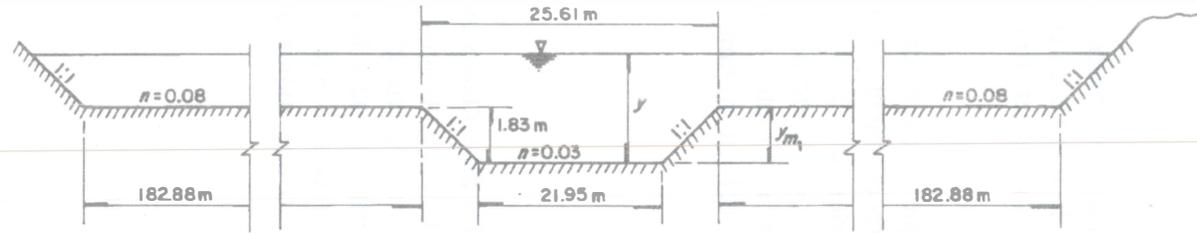


b) Sección simétrica A

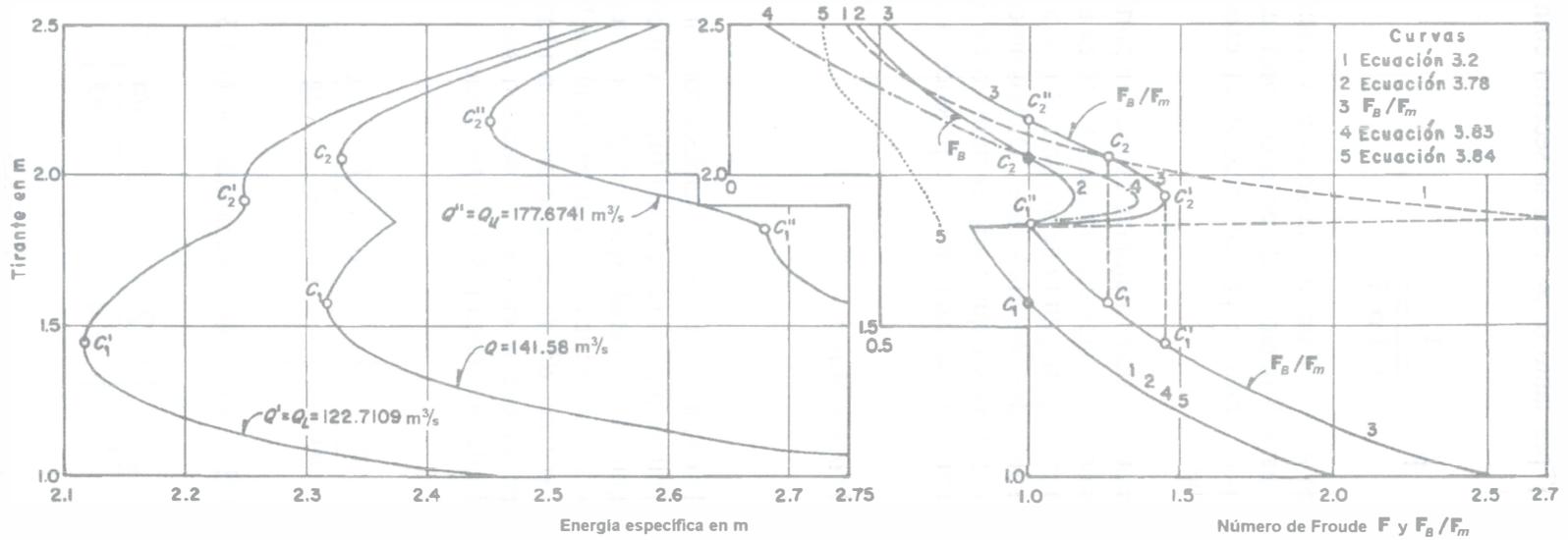


c) Sección simétrica B

Figura 3.22. Secciones transversales de canales compuestos



a) Sección del canal



b) Curvas E - y para los gastos intermedio y límites

c) Curvas F - y y (F_B/F_m) - y obtenidas para $Q = 141.58 \text{ m}^3/\text{s}$

Figura 3.23. Curvas energía específica-tirante, número de Froude-tirante para un canal compuesto de pendiente pequeña

La curva 1 de la figura 3.23c ha sido elaborada para el mismo gasto $Q = 141.58 \text{ m}^3/\text{s}$ y la misma definición del número de Froude dada por la ecuación 3.2 ($\cos \theta = 1$), pero haciendo $\alpha_i = 1$ en las subsecciones y por tanto $\alpha \neq 1$ en la sección compuesta (según la ecuación 2.73), es decir

$$\mathbf{F} = \frac{V}{\sqrt{g A/\alpha T}}$$

calculado con base en A , T y V de toda la sección, y función de y . La curva muestra un valor de \mathbf{F} distinto de uno para el punto C_2 de energía específica mínima, lo que va en contra de lo hasta ahora concluido; inclusive parece mostrar la existencia de un tercer tirante crítico intermedio para el que $\mathbf{F} = 1$.

La posibilidad de tirantes críticos múltiples es muy importante, ya que afecta el cálculo de los perfiles de flujo variado en canales compuestos, y obliga a buscar procedimientos más seguros en la obtención del número y magnitud de los tirantes críticos que pueden ocurrir, y así subsanar las deficiencias de los métodos convencionales. Dichos procedimientos deben permitir una mejor representación de la manera en que varía el número de Froude con el tirante, y ubicar con precisión el o los puntos en que vale uno y se produce la energía específica mínima.

3.9.2 Método de Blalock y Sturm

Ecuaciones básicas

Blalock y Sturm (referencia 2), en 1981, establecieron con claridad las dificultades asociadas a varios métodos disponibles para el cálculo del tirante crítico, y definieron un número de Froude para la sección compuesta del canal, que corrige localmente los puntos de energía específica mínima cuando $\mathbf{F} = 1$ e identifica los tirantes, también llamados críticos, para los que esto ocurre. Para ello, al obtener dE/dy , es necesario considerar que α en toda la sección también es función del tirante aunque α en cada subsección sea constante, lo que indica un camino diferente al desarrollo de la ecuación 3.3, como sigue

$$\frac{dE}{dy} = \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha Q^2 T}{g' A^3} - \frac{Q^2}{2g' A^2} \frac{d\alpha}{dy} \right] \right\} \cos \theta \quad (3.69)$$

donde $g' = g \cos \theta$. Esta ecuación, comparada con la 3.3, conduce a que

$$\mathbf{F}_B = \left[\frac{\alpha Q^2 T}{g' A^3} - \frac{Q^2}{2g' A^2} \frac{d\alpha}{dy} \right]^{1/2} \quad (3.70)$$

sea el número de Froude de la sección compuesta, el cual debe tener el valor de uno para el tirante crítico con el que ocurre la energía específica mínima.

Considerando que α se expresa por la ecuación 2.73, en términos de las variables de cada subsección i en que se subdivide el canal, en la forma

$$\alpha = \frac{A^2}{K^3} \sum \left(\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right) = \frac{A^2}{(\sum K_i)^3} \sum \left(\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right)$$

donde el símbolo \sum es para el total de subsecciones del canal y $K = \sum K_i$. El término $d\alpha/dy$ de la ecuación 3.70, considerando α_i constante, resulta

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{A^2}{K^3} \frac{d}{dy} \sum \left(\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right) + \sum \left(\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right) \frac{d}{dy} \frac{A^2}{(\sum K_i)^3}$$

Esto es

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} &= \frac{A^2}{K^3} \sum \left[\alpha_i \left(\frac{K_i}{A_i} \right)^2 3 \frac{dK_i}{dy} - 2 \alpha_i \left(\frac{K_i}{A_i} \right)^3 T_i \right] \\ &+ \sum \left(\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right) \left[\frac{2 A T}{K^3} - \frac{A^2}{K^4} 3 \sum \frac{dK_i}{dy} \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Pero de la ecuación 2.47, $K_i = (A_i R_{hi}^{2/3}/n_i)$, donde n_i también varía con y por lo que

$$\frac{dK_i}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{A_i R_{hi}^{2/3}}{n_i} \right) = \frac{2}{3} \frac{A_i}{n_i R_{hi}^{1/3}} \frac{dR_{hi}}{dy} + \frac{R_{hi}^{2/3} T_i}{n_i} - \frac{A_i R_{hi}^{2/3}}{n_i^2} \frac{dn_i}{dy}$$

donde

$$\frac{dR_{hi}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{A_i}{P_i} \right) = \frac{P_i T_i - A_i (dP_i/dy)}{P_i^2} = \frac{T_i}{P_i} - \frac{R_{hi}}{P_i} \frac{dP_i}{dy}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{dK_i}{dy} = \frac{2}{3} \frac{A_i}{n_i R_{hi}^{1/3}} \left(\frac{T_i}{P_i} - \frac{R_{hi}}{P_i} \frac{dP_i}{dy} \right) + \frac{R_{hi}^{2/3} T_i}{n_i} - \frac{A_i R_{hi}^{2/3}}{n_i^2} \frac{dn_i}{dy}$$

o bien, con $R_{hi} = A_i/P_i$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{dK_i}{dy} &= \frac{5}{3} \frac{R_{hi}^{2/3} T_i}{n_i} - \frac{2}{3} \frac{R_{hi}^{5/3}}{n_i} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i R_{hi}^{2/3}}{n_i^2} \frac{dn_i}{dy} \\ \frac{dK_i}{dy} &= \frac{5}{3} \frac{K_i T_i}{A_i} - \frac{2}{3} \frac{K_i R_{hi}}{A_i} \frac{dP_i}{dy} - \frac{K_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \\ \frac{dK_i}{dy} &= \frac{1}{3} \left[\frac{K_i}{A_i} \right] \left[5 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \right]\end{aligned}\quad (3.72)$$

donde $dn_i/dy = 0$ cuando n_i se considera constante.

La sustitución de la ecuación 3.72 en la 3.71 conduce a

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{A^2}{K^3} \sum \left[\alpha_i \left(\frac{K_i}{A_i} \right)^3 \left(3 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \right) \right] \\ &+ \sum \left[\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right] \left\{ \frac{2 AT}{K^3} - \frac{A^2}{K^4} \sum \left[\frac{K_i}{A_i} \left(5 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (3.73)$$

Designando a

$$\sigma_1 = \sum \left[\alpha_i \left(\frac{K_i}{A_i} \right)^3 \left(3 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \right) \right]\quad (3.74)$$

$$\sigma_2 = \sum \left[\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right]\quad (3.75)$$

$$\sigma_3 = \sum \left[\frac{K_i}{A_i} \left(5 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} \right) \right]\quad (3.76)$$

la ecuación 3.73 se puede escribir de manera más sencilla como sigue

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{A^2 \sigma_1}{K^3} + \sigma_2 \left[\frac{2AT}{K^3} - \frac{A^2 \sigma_3}{K^4} \right] \quad (3.77)$$

Considerando que $\alpha = A^2 \sigma_2 / K^3$, por la sustitución de la ecuación 3.77 en la 3.70 se obtiene finalmente

$$F_B = \left[\frac{Q^2}{2g' K^3} \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.78)$$

En las ecuaciones 3.74 y 3.76, los términos dP_i/dy y dn_i/dy representan la magnitud del cambio del perímetro mojado y de n en la subsección i respecto del tirante, siendo $g' = g$, cuando θ es pequeño.

La ecuación 3.78 representa una nueva definición del número de Froude, que para $F_B = 1$ satisface la condición de energía específica mínima en un canal compuesto. Las ecuaciones 3.74 a 3.76 admiten valores de α_i distintos de uno en cada subsección y que el coeficiente de Manning en ellas varíe con el tirante. Se recomienda que las intercaras entre las subsecciones sean verticales por sencillez en los cálculos, pero pueden emplearse otros criterios.

Blalock y Sturm (referencia 3) en 1983 argumentaron que debido a que la condición de momentum mínimo también conduce al tirante crítico (sección 4.2), éste debiera ser el mismo con ambas formulaciones, lo cual confirmaron experimentalmente.

Variación de n con el tirante

La influencia que tiene la variación del coeficiente de Manning con el tirante es la única considerada en el método de Blalock y Sturm y es más importante en las subsecciones laterales con flujo de poca profundidad en ellas. Cuando la pared se comporta como hidráulicamente rugosa, la variación de n se puede incluir con la ecuación 2.10 de Nikuradse para el factor de fricción de Darcy-Weisbach en cada subsección.

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = \alpha_N \log \frac{c R_{hi}}{k_{si}}$$

donde R_{hi} es el radio hidráulico de la subsección i , k_{si} la rugosidad equivalente de su pared y c un coeficiente que depende de la geometría de la subsección (tabla 2.1). Mediante la ecuación 2.14b, la anterior se convierte para obtener n_i en la forma

$$n_i = \frac{R_{hi}^{1/6}}{\sqrt{8g} \alpha_N \log \frac{c R_{hi}}{k_{si}}} \quad (3.79)$$

donde n_i aumenta al disminuir la profundidad del fondo (y con ella R_{hi}).

La derivada resulta

$$\frac{dn_i}{dy} = \frac{1}{\sqrt{8g} \alpha_N} \left[\frac{dR_{hi}/dy}{6 R_{hi}^{5/6} \log \frac{c R_{hi}}{k_{si}}} - \frac{R_{hi}^{1/6} (\log e)(dR_{hi}/dy)}{R_{hi} \left[\log \frac{c R_{hi}}{k_{si}} \right]^2} \right]$$

O bien

$$\frac{dn_i}{dy} = \frac{1}{R_{hi}} \frac{R_{hi}^{1/6}}{\sqrt{8g} \alpha_N \log \frac{c R_{hi}}{k_{si}}} \left[\frac{1}{6} - \frac{0.434294 \alpha_N}{\alpha_N \log \left[\frac{c R_{hi}}{k_{si}} \right]} \right] \frac{dR_{hi}}{dy}$$

Con $R_{hi} = A_i/P_i$, su derivada es

$$\frac{dR_{hi}}{dy} = \frac{T_i}{P_i} - \frac{A_i}{P_i^2} \frac{dP_i}{dy}$$

Por tanto, sustituyendo también la ecuación 3.79 en la anterior se obtiene finalmente

$$\frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy} = \left[\frac{1}{6} - 0.434294 \alpha_N \sqrt{8g} \frac{n_i}{R_{hi}^{1/6}} \right] \left[T_i - R_{hi} \frac{dP_i}{dy} \right] \quad (3.80)$$

expresión que se usa en el cálculo de σ_1 y σ_3 con las ecuaciones 3.74 y 3.76.

Experimentos de Sturm y Sadiq

Sturm y Sadiq (referencia 4) en 1996 usaron los coeficientes de Keulegan de la tabla 2.1 ($\alpha_N = 2$, $c = 12.64$) en la ecuación 3.79, para aplicarla al canal compuesto que utilizaron en sus experimentos, el cual tenía una subsección central y dos laterales simétricas de ampliación, como

en la figura 3.22b. Los autores obtuvieron las rugosidades absolutas mediante pruebas de calibración, una para el canal principal y otra común para las dos laterales. Los resultados más importantes de resistencia al flujo se abrevian a continuación.

- a) El valor de n para el canal central se predice muy bien con la ecuación 3.79, mientras el tirante del flujo sea menor que el nivel de desbordamiento hacia los laterales. Una vez rebasado dicho nivel, el valor de n en dicho canal resultó 1.19 veces el que se predice con la ecuación mencionada para cualquier valor del tirante.
- b) El valor de n para los canales laterales se ajustó también al obtenido con la ecuación 3.79 para la profundidad existente en ellos una vez que el flujo rebasa el nivel de desbordamiento lateral.

El factor 1.19 observado en la predicción de n en el canal principal se atribuye a la interacción del flujo en las intercaras existentes con las de los laterales. Sturm y Sadiq consideran que con dicho factor es factible predecir la distribución real del gasto entre los canales que constituyen al compuesto, sin modificar el criterio de perímetro mojado cero en las intercaras verticales del flujo. Esto contribuye a refinar el procedimiento de cálculo del tirante normal presentado en el subcapítulo 2.9 con un criterio más sencillo que los formulados por otros autores, quienes usan conceptos de intercaras imaginarias, que se incluyen o se excluyen como perímetro mojado y se definen en varios sitios, con o sin la consideración de un esfuerzo tangencial aparente actuando en la intercara. A esto se agrega la importancia que tiene la distribución correcta del gasto en los subcanales para el cálculo de los perfiles del flujo gradualmente variado en el canal compuesto.

Aunque Sturm y Sadiq recomiendan el factor 1.19 para otros canales simétricos en sustitución de procedimientos más complicados, sería conveniente esperar otros resultados antes de considerarlo como un procedimiento general de cálculo.

Tirantes críticos múltiples

Con objeto de comparar los resultados con otros métodos, el análisis del canal mostrado en la figura 3.23a se realiza considerando que $\alpha_i = 1$ y que n_i es constante (dn_i/dy) = 0. Así, la curva 2 de la figura 3.23c muestra la variación que experimenta F (para $Q = 141.58 \text{ m}^3/\text{s}$), al quedar definido por la ecuación 3.78. En ella se observa que los tirantes críticos de los puntos C_1 y C_2 obtenidos para $F = 1$ coinciden con los de energía específica mínima en la figura 3.23b. Los dos valores del tirante crítico resultan $y_{c1} = 1.5792 \text{ m}$ y $y_{c2} = 2.0574 \text{ m}$. Según Blalock y Sturm, el valor $y = 1.853 \text{ m}$ no debe considerarse crítico a pesar de que $F = 1$ ya que más bien corresponde a un máximo de la energía específica.

En el canal compuesto analizado hay entonces dos tirantes críticos para el gasto considerado: el primero dentro de la subsección central y el segundo dentro de la subsección inmediata superior. Sin embargo, no siempre existe más de un tirante crítico en un mismo canal para cualquier gasto; puede haber uno solo dentro de la subsección central para un gasto pequeño o uno solo por encima de dicha subsección para un gasto grande, así como tirantes críticos múltiples para gastos intermedios o cuando existen varias subsecciones con distintos niveles de desbordamiento

lateral. Esto significa que antes de calcular el o los tirantes críticos que pueden ocurrir para un determinado gasto Q , conviene detectar el número de tirantes críticos que dicho gasto puede producir en el canal compuesto que se analiza, lo cual es sencillo de efectuar si se elimina la influencia de Q en la definición del número de Froude según la ecuación 3.78. Esto se puede lograr, como lo propusieron Sturm y Sadiq (referencia 4) en 1996, dividiendo dicha ecuación entre el número de Froude F_m del flujo, cuando ocurre sólo en la subsección más profunda, calculado en la forma convencional con el tirante $y = y_{m1}$ que corresponde al nivel máximo del agua en dicha subsección antes de desbordarse, es decir

$$F_m = \left[\frac{\alpha_m Q^2 T_m}{g' A_m^3} \right]^{1/2}$$

donde T_m y A_m son el ancho de la superficie libre y el área hidráulica, respectivamente, de la subsección central cuando $y = y_{m1}$, y α_m es el coeficiente de corrección del flujo de energía cinética en dicha subsección.

El número de Froude para el mismo gasto pero tirantes superiores a y_{m1} , se define con la ecuación 3.78, que al dividirla entre la anterior resulta

$$\frac{F_B}{F_m} = \frac{A_m^{3/2}}{\sqrt{2 \alpha_m T_m}} \left[\frac{1}{K^3} \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.81)$$

donde no aparece el gasto. La función F_B/F_m en el canal compuesto depende únicamente de la geometría de su sección, de la distribución de rugosidades y coeficientes α_i en las subsecciones, y del tirante y . La curva resultante $F_B/F_m - y$ pasa por el punto $(F_B/F_m = 1, y = y_{m1})$, donde se produce un quiebre brusco y después llega a otro punto donde la función alcanza el máximo $(F_B/F_m)_{máx}$.

Al establecer que el tirante crítico ocurre cuando $F_B = 1$, existe un intervalo de valores de $1/F_m$ y por tanto un intervalo de gastos, dentro del cual hay dos tirantes críticos, uno inferior en la subsección más profunda ($y_{c1} < y_{m1}$) y uno superior ($y_{c2} > y_{m1}$) mayor que el valor de y con el que se alcanza el máximo en la curva. El gasto límite superior Q_u del intervalo es el máximo para el cual ocurre el crítico $y_{c1} = y_{m1}$, es decir, $F_m = F_B = 1$ y $F_B/F_m = 1$ para $Q = Q_u$, lo que corresponde al punto de quiebre en la curva. Por tanto, de la definición $F_m = 1$, se tiene

$$Q_u = \left[\frac{g' A_m^3}{\alpha_m T_m} \right]^{1/2}$$

El gasto límite inferior Q_L del intervalo es el último para el cual ocurre el crítico $y_{c2} = y_{m1}$, es decir $F_m < 1$, $F_B = 1$ y $(F_B/F_m)_{\text{máx}}$ para $Q = Q_L$, de modo que

$$Q_L = \frac{Q_u}{(F_B/F_m)_{\text{máx}}}$$

Para una mayor claridad, se aplica la ecuación 3.81 al canal de la figura 3.23a sin considerar la variación de n con y ($dn_i/dy = 0$) en el cálculo de σ_1 y σ_3 , y con $\alpha_m = 1$. Se obtiene así la curva 3 de la figura 3.23c que tiene las mismas tendencias de la curva 2, donde los tirantes críticos corresponden a los puntos C_1 y C_2 en ambas curvas. Para $y = y_m = 1.83$ m (o $F_B/F_m = 1$ en la curva 3), se produce el mismo quiebre brusco en las dos curvas; para $y = 1.923$ m, $F_B = 1.1538$ en la curva 2, o $F_B/F_m = 1.4479$ en la curva 3 se produce un máximo en las dos curvas. Por tanto, con $A_m = (21.95 + 1.83) = 43.5174$ y $T_m = 21.95 + 2(1.83) = 25.61$ m, resulta

$$Q_u = \left[\frac{g A_m^3}{T_m} \right]^{1/2} = 177.6741 \text{ m}^3/\text{s}$$

Debido a que Q es proporcional a F_B/F_m y esta función varía de 1 al valor máximo, se tendrá que

$$Q_L = 177.6741/1.4479 = 122.7109 \text{ m}^3/\text{s}$$

De este modo, para que exista más de un tirante crítico en el canal, el gasto debe quedar dentro del intervalo Q_L a Q_u , es decir, $Q_L \leq Q \leq Q_u$. En efecto, $Q = 141.58 \text{ m}^3/\text{s}$ es mayor de $122.7109 \text{ m}^3/\text{s}$ y menor de $177.6741 \text{ m}^3/\text{s}$, y existen las dos tirantes críticos ya mencionados, coincidentes con las abscisas de los puntos de intersección de una misma vertical con la curva F_B/F_m (puntos C_1 y C_2 en la curva 3).

Cuando $Q = Q_L$ existen los tirantes críticos $y_{c1} < y_{m1}$ y $y_{c2} = y_{m1}$ y cuando $Q = Q_u$ existen $y_{c1} = y_{m1}$ y $y_{c2} > y_{m1}$. Esto puede constatarse mediante las curvas E - y que se muestran en la figura 3.23b, obtenidas para los gastos límite Q_L y Q_u antes calculados, donde existen los tirantes críticos: $y_{c1} = 1.439$ m, $y_{c2} = 1.923$ m, para $Q = 122.7109 \text{ m}^3/\text{s}$; $y_{c1} = 1.83$ m, $y_{c2} = 2.18$ m para $Q = 177.6741 \text{ m}^3/\text{s}$, cada uno para los mínimos de energía específica correspondientes. Si $Q < Q_L$ existe únicamente $y_{c1} < y_{m1}$ y si $Q > Q_u$ existe únicamente $y_{c2} > y_{m1}$.

El procedimiento vale para cualquier canal compuesto, donde se conozca la geometría y distribución de la rugosidad en la sección, el gasto Q que conduce y que en el cálculo de F_B se incluya también la variación del coeficiente de Manning con el tirante. Algunas conclusiones importantes se exponen a continuación.

- 1) La curva F_B/F_m contra y depende únicamente de la geometría de la sección, de la distribución de rugosidades equivalentes en la pared y por supuesto del tirante.

- 2) La curva tiene un primer punto de quiebre brusco al nivel en que se amplía la subsección más profunda y un máximo un poco arriba de dicho nivel. Ambos puntos acotan el intervalo de gastos: Q_L (límite inferior) a Q_u (límite superior), para el que puede haber más de un tirante crítico.
- 3) De acuerdo con el valor Q del gasto y la posición de los puntos de quiebre y de máximo en la curva F_B/F_m contra y , hay tres posibilidades de que existan uno o dos tirantes críticos, de acuerdo con los valores límite Q_L y Q_u del gasto, como se expone a continuación.
 - a) Si $Q < Q_L$, existe únicamente el tirante crítico $y_{c1} < y_{m1}$ dentro de la subsección de mayor profundidad y su magnitud coincide con la abscisa del punto de intersección de una vertical a la derecha del máximo de la curva y su rama inferior. El tirante y_{c2} no existe, porque no hay solución de la ecuación 3.78 para un valor de $y_{c2} \geq y_{m1}$.
 - b) Si $Q_L \leq Q \leq Q_u$, existen dos tirantes críticos. Uno dentro de la subsección de mayor profundidad ($y_{c1} < y_{m1}$), que coincide con la abscisa del punto C_1 en la figura 3.22c sobre la rama inferior de la curva F_B/F_m . El otro ($y_{c2} > y_{m1}$) es de magnitud igual a la abscisa del punto C_2 de intersección de la vertical que pasa por C_1 y la rama de la curva por encima del máximo. El punto de intersección intermedio no se detecta en la solución de la ecuación 3.78 ($F_B = 1$) y no representa un tirante crítico, ya que más bien corresponde a un máximo en la curva de energía específica. El flujo en estas condiciones pasa rápidamente de un régimen subcrítico para $y = y_{m1}$, a uno supercrítico para y un poco mayor que y_{m1} en condiciones muy inestables.
 - c) Si $Q > Q_u$, existe un solo tirante crítico $y_{c2} > y_{m1}$, igual a la abscisa del punto de intersección de una vertical que pasa a la izquierda del punto de quiebre y la rama superior de la curva. El crítico y_{c1} no existe, porque el valor que se obtiene al resolver la ecuación 3.2 en la subsección más profunda para el gasto Q , es mayor que y_{m1} .
- 4) Cuando hay una segunda o más ampliaciones de la sección a niveles superiores a la primera, se producen nuevos quiebres y máximos de la curva F_B/F_m , que acotan nuevos intervalos del gasto, más cortos o más amplios que el primero, y la posibilidad de más tirantes críticos. En este caso el procedimiento se reitera en el entendido de que los tirantes críticos posibles siempre se alojan sobre la misma vertical de los dos primeros y en las intersecciones de dicha vertical con las ramas extendidas de la curva. El número de puntos de intersección que ocurran es igual al de tirantes críticos que existen y la abscisa de dichos puntos es el valor que cada uno adquiere. Los tirantes críticos en cada subsección quedan eliminados si su magnitud es mayor que el nivel de la ampliación superior inmediata siguiente, pero subsisten los restantes.

Algoritmo

El tirante crítico $y_{c1} \leq y_{m1}$, se determina con el procedimiento convencional tratando el canal más profundo como un canal sencillo mediante la ecuación 3.2, como en el caso de $y_{c1} = 1.5792$ m, para $Q = 141.58$ m³/s, en el canal analizado.

Para determinar cualquier otro tirante crítico ($y_{ci} > y_{m1}$) es necesario un procedimiento de iteraciones como el propuesto por G. Sotelo y que se presenta a continuación.

De la ecuación 3.78 se debe cumplir que

$$F_B^2 = \frac{Q^2}{2g' K^3} \left[\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right] = 1$$

Al multiplicar por $\alpha K^3/A^2$, resulta

$$\frac{\alpha Q^2}{2g' A^2} \left[\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right] = \frac{\alpha K^3}{A^2}$$

Pero $\alpha Q^2/2g' A^2 = E - y$, y $\alpha K^3/A^2 = \sigma_2$, por tanto

$$E - y = \frac{\sigma_2}{\left[\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right]}$$

de manera que el tirante en la iteración $i + 1$ resulta

$$(y)_{i+1} = E_i - \left[\frac{\sigma_2}{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1} \right]_i \quad (3.82)$$

donde $E_i = y_i + \alpha_i Q^2/(2g A_i^2)$.

Por ejemplo, si se desea calcular el tirante crítico $y_{c2} = 2.0574$ m, en el canal de la figura 3.23a para $Q = 141.58$ m³/s, los valores para $y_i = 2$ m son: $E_i = 2.33303$ m; $\sigma_{2i} = 5\,525\,352.7$ y $[(\sigma_2 \sigma_3/K) - \sigma_1]_i = 19\,676\,782.3$.

Por tanto, el tirante en la siguiente iteración resulta

$$(y)_{i+1} = 2.33303 - \frac{5\,525\,352.7}{19\,676\,782.3} = 2.0522 \text{ m}$$

valor más cercano al real, $y_{c2} = 2.0574$ m, el cual se obtendría con una o dos iteraciones adicionales.

Sea un canal compuesto de cualquier geometría y distribución de rugosidades en las subsecciones, donde los niveles de ampliación lateral de la sección se localizan a las alturas $y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mj}$, medidas desde el fondo de la subsección más profunda, y donde fluye un gasto Q conocido. Se desea determinar el número y magnitud de los tirantes críticos posibles $y_{c1}, y_{c2}, \dots, y_{c(j+1)}$; el primero en la subsección más profunda, el segundo en la subsección superior inmediata siguiente, etc.

El algoritmo consiste de los siguientes pasos.

- 1) Se determina un valor y_{c1} del tirante crítico con las dimensiones de la subsección más profunda, utilizando el método convencional de solución presentado en la sección 3.5.1.
- 2) Se hace la comparación:
 - a) Si $y_{c1} \leq y_{m1}$, el tirante crítico y_{c1} existe y queda con el valor calculado.
 - b) Si $y_{c1} > y_{m1}$, el tirante crítico y_{c1} no existe y queda cancelado.
- 3) Se elige un valor inicial del tirante y_0 . El primer valor debe ser mayor pero cercano a y_{m1} .
- 4) Se calculan los valores de $K, \alpha, E, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 para el tirante elegido en el paso 3 y con ellos se determina un nuevo valor

$$(y)_{i+1} = \left[E - \frac{\sigma_2}{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1} \right]_i$$

- 5) Se establece la comparación:
 - a) Si $(y)_{i+1} \geq y_{m1}$, se sigue con el paso 6.
 - b) Si $(y)_{i+1} < y_{m1}$, el tirante crítico y_{c2} no existe y queda cancelado. Se sigue con el paso 7.
- 6) Se establece la comparación:

Si $(y)_{i+1} = y_0$ dentro de la tolerancia deseada, el tirante crítico y_{c2} existe con el valor calculado y se sigue con el paso 7. En caso contrario, se repite el proceso desde el paso 3.
- 7) El proceso concluye si no existen más ampliaciones de la sección, o sea más valores de y_{mj} , y los valores de y_c que existen son los que se hayan detectado en los pasos anteriores. En caso contrario, se sigue con el paso 8.
- 8) Se repite el proceso desde el paso 2, pero ahora con el tirante y_{c2} , en lugar de y_{c1} , y y_{m2} en lugar de y_{m1} .

El algoritmo es de gran utilidad cuando se desea obtener el o los tirantes críticos para un valor del caudal y siempre conduce a una solución rápida cuando se procede con un cálculo manual o con computadora. El conocimiento del intervalo del gasto en que ocurren dos tirantes críticos, con el criterio propuesto por Sturm y Sadiq, es útil cuando dichos tirantes se desean para varios valores del gasto. Sin embargo, el cálculo del tirante crítico en la subsección más profunda con

el procedimiento convencional de sección sencilla y el cálculo de los otros tirantes críticos en el resto de la sección usando el algoritmo, eliminan tener que conocer dicho intervalo, ya que pueden compararse con los valores de y_{mi} en donde ocurren las ampliaciones, desechando aquellos tirantes críticos que los rebasen.

El ejemplo que se resuelve a continuación aclara la aplicación del procedimiento.

Ejemplo 3.14. Un canal compuesto tiene la geometría y características hidráulicas que muestra la figura 3.24a. La subsección central tiene una rugosidad equivalente $k_{s1} = 0.0015$ m y $\alpha_1 = 1.1$, mientras que en las laterales, $k_{s2} = 0.03$ m y $\alpha_2 = 1.05$. Se desea determinar la variación de n con el tirante utilizando los coeficientes de Keulegan: $\alpha_N = 2$; $c = 12.64$ (tabla 2.1) en las ecuaciones 3.79 y 3.80, así como el factor 1.19 de Sturm y Sadiq como incremento en el coeficiente de Manning obtenido para el canal central. El canal conduce un gasto de 24.5 m³/s y su pendiente es pequeña ($g' = g$).

- Determinar número y magnitud de los tirantes críticos que pueden ocurrir para el gasto dado y los valores de la energía específica mínima correspondientes.
- Calcular el intervalo del gasto en que ocurren dos tirantes críticos.
- Obtener los valores del gasto para los que se presentan los tirantes críticos $y_{c1} = 1.45$ m y $y_{c2} = 2.0$ m.

Solución a. El tirante crítico en la subsección central se calcula en la forma convencional con la ecuación 3.5b: $Q^2/(g/\alpha_1) = A_c^3/T_c$, donde

$$\frac{Q^2}{g/\alpha} = \frac{(24.5)^2}{9.81/1.1} = 67.30632$$

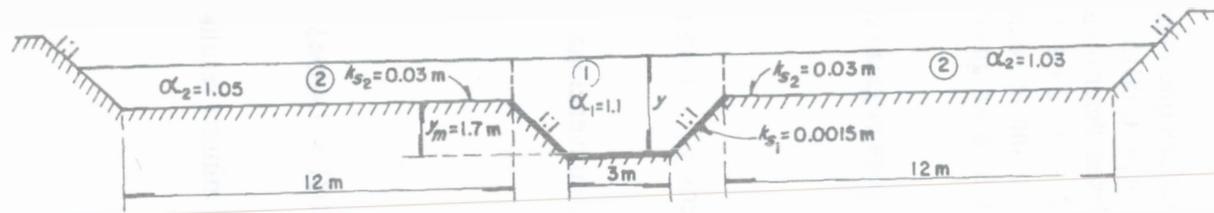
valor que se satisface con $y_{c1} = 1.62081$ m. En efecto, $A_{c1} = (3 + 1.62081)1.62081 = 7.48946$ m², $T_{c1} = 3 + 2(1.62081) = 6.24162$ m y $A_{c1}^3/T_{c1} = 67.30593 \approx 67.30632$.

Puesto que $y_{c1} < y_m = 1.7$ m, el tirante crítico existe y la energía específica mínima resulta

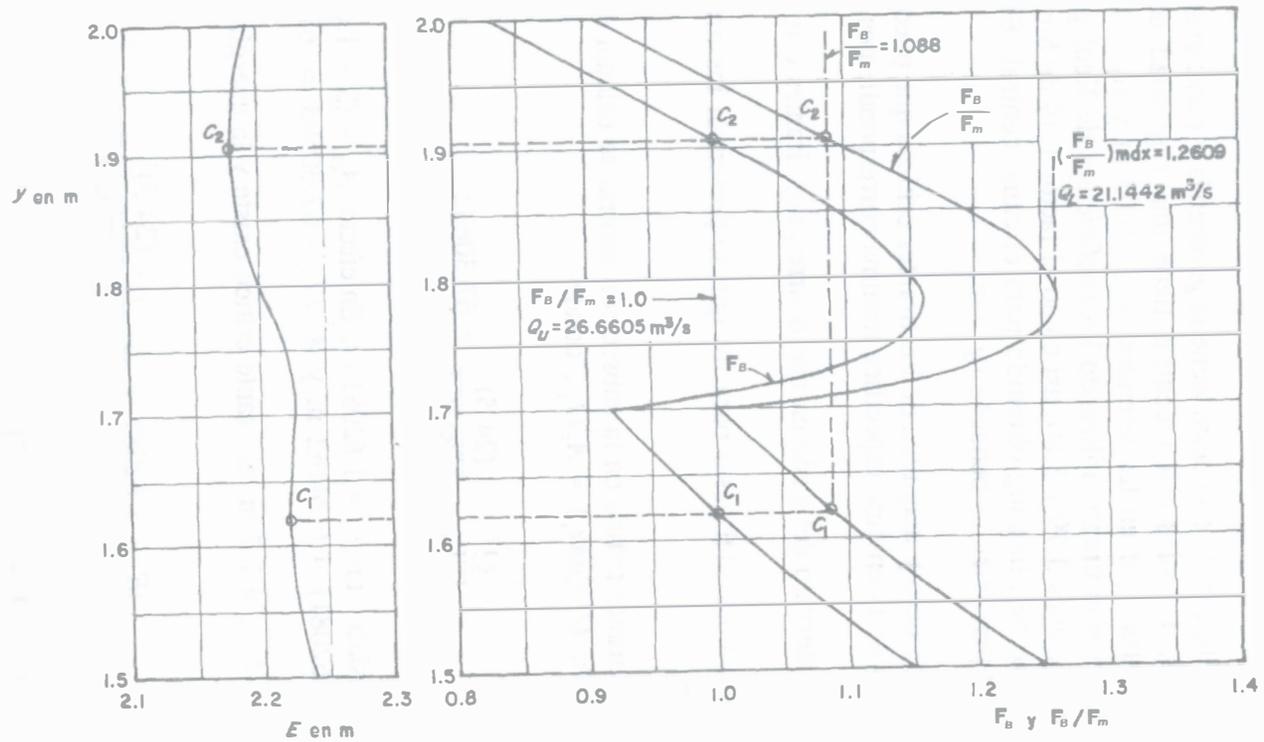
$$E_{c1} = 1.62081 + \frac{1.1(24.5)^2}{2(9.81)(7.48946)^2} = 2.2207 \text{ m}$$

Para que exista el tirante crítico superior $y_{c2} > y_m$, debe haber solución de la ecuación 3.82 con el algoritmo propuesto, para ello se elige el valor inicial $y = 2.0$ m y se calculan todas las variables que intervienen como se resume en el primer renglón de la tabla 3.5, donde los valores más importantes son:

$$E = 2.19292 \text{ m}; \sigma_2 = 3\,422\,334.477; \frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1 = 12\,247\,557.24.$$



a) Geometría de la sección



b) Curva $E-y$ para $Q = 24.5 \text{ m}^3/\text{s}$ c) Curvas $F_B/F_m - y$ y $F_B - y$ para $Q = 24.5 \text{ m}^3/\text{s}$

Figura 3.24. Tirantes críticos en el canal compuesto del ejemplo 3.14

Cabe aclarar que las dos subsecciones laterales se integraron en una sola que se designó con el número 2. Con estos valores, el tirante en la siguiente iteración de la ecuación 3.82 resulta

$$y = 2.19292 - \frac{3\,422\,334.477}{12\,247\,557.24} = 1.9135 \text{ m}$$

Con este tirante se obtienen nuevos valores de E , σ_2 y $\left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1\right)$, como se ve en el segundo renglón de la tabla, y un nuevo valor $y = 1.9067$ m. Como resultado de la siguiente iteración se obtiene finalmente el valor del segundo tirante crítico, $y_{c2} = 1.9065$ m, para el cual $E_{c2} = 2.17926$ m.

Solución b. Es necesario obtener el valor de $(F_B/F_m)_{\text{máx}}$. Para ello, se calcula F_B/F_m con la ecuación 3.81 para distintos valores de $y > 1.7$ m, como se presenta en la segunda parte de la tabla 3.5, hasta encontrar el máximo, que resulta $(F_B/F_m)_{\text{máx}} = 1.26089$ para $y = 1.78$ m, como se muestra con la curva de la figura 3.24c.

Con $A_m = (3 + 1.7)1.7 = 7.99$ m y $T_m = 3 + 2(1.7) = 6.4$ m, el gasto que corresponde al punto de quiebre de la curva F_B/F_m es

$$Q_u = \left[\frac{g A_m^3}{\alpha_m T_m} \right]^{1/2} = \left[\frac{9.81 (7.99)^3}{1.1 (6.4)} \right]^{1/2} = 26.6605 \text{ m}^3/\text{s}$$

y el que corresponde al punto donde F_B/F_m es máxima vale

$$Q_L = \frac{Q_u}{(F_B/F_m)_{\text{máx}}} = \frac{26.6605}{1.26089} = 21.1442 \text{ m}^3/\text{s}$$

Es decir, cuando $21.1442 \text{ m}^3/\text{s} \leq Q \leq 26.6605 \text{ m}^3/\text{s}$ existen dos tirantes críticos, que es el caso de $Q = 24.5 \text{ m}^3/\text{s}$ resuelto en el inciso anterior. Cuando $Q < 21.1442 \text{ m}^3/\text{s}$ sólo existe el tirante crítico y_{c1} en la subsección más profunda; cuando $Q > 26.6605 \text{ m}^3/\text{s}$ sólo existe $y_{c2} > y_m$ en la sección compuesta, siempre que no haya una nueva ampliación de la sección a la altura $y_{m2} > y_{m1}$, en cuyo caso se restringe a que $y_{c2} \leq y_{m2}$.

En la tabla 3.6 se complementan los valores de F_B y F_B/F_m para la subsección central y las curvas de las figuras 3.24b y c los representan gráficamente.

Tabla 3.5. Solución numérica del canal compuesto en el ejemplo 3.14, donde E y F_B se calcularon para $Q = 24.5 \text{ m}^3/\text{s}$

y en m	A_1 en m^2	R_{h1} en m	n_1 1.19	K_1 en m^3/s	A_2 en m^2	R_{h2} en m	n_2	K_2 en m^3/s	K	σ_2	α	E en m
2.00	9.91	1.269158	0.017353	669.4551	7.29	0.293378	0.02201	146.238	815.6931	3422334	1.865516	2.192919
1.9135	9.3564	1.198259	0.017294	610.3426	5.169582	0.210113	0.022370	81.6741	692.0167	2878313	1.832649	2.179218
1.9067	9.31288	1.192686	0.01729	605.7826	5.003525	0.203522	0.022411	77.2475	683.0301	2838851	1.82596	2.179256
1.9065	9.3116	1.192522	0.017289	605.6486	4.998642	0.203329	0.022413	77.1188	682.7674	2837698	1.825752	2.179260
1.74	8.246	1.056052	0.017169	498.0593	0.9616	0.039879	0.026961	4.16314	502.2224	1998789	1.337739	2.222738
1.75	8.31	1.064249	0.017177	504.2975	1.2025	0.049811	0.025932	6.27763	510.5751	2043099	1.388992	2.219617
1.76	8.374	1.072445	0.017184	510.5647	1.4436	0.059728	0.025222	8.74538	519.3101	2088091	1.437076	2.216144
1.77	8.438	1.080641	0.017192	516.8609	1.6849	0.06963	0.024699	11.54565	528.4065	2133784	1.482026	2.212465
1.78	8.502	1.088838	0.017199	523.1859	1.9264	0.079517	0.024296	14.66163	537.8475	2180199	1.523892	2.208698
1.79	8.566	1.097034	0.017207	529.5396	2.1681	0.089389	0.023975	18.07931	547.6189	2227354	1.562735	2.204942
1.85	8.95	1.146212	0.01725	568.2604	3.6225	0.148316	0.022888	44.34551	612.6059	2526909	1.737359	2.186263

y en m	T_2 en m	$\frac{A_1}{n_1} \frac{dn_1}{dy}$	$\frac{A_2}{n_2} \frac{dn_2}{dy}$	σ_1	σ_3	$\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1$	F_B	$\frac{F_B}{F_m}$
2.00	24.6	0.245402	-0.976934	7047364	4598.8298	12247557	0.830905	0.904177
1.9135	24.427	0.240279	-1.348521	6093309	4003.9052	10560181	0.987364	1.074434
1.9067	24.4134	0.239861	-1.386938	6024168	3954.1113	10410151	0.999736	1.087897
1.9065	24.4130	0.239848	-1.388096	6024365	3952.6388	10403474	0.999992	1.088175
1.74	24.08	0.228794	-4.512043	4604857	2458.8000	5180892	1.1186	1.217242
1.75	24.10	0.229506	-3.888417	4675020	2575.9088	5632641	1.137845	1.238185
1.76	24.12	0.230211	-3.443038	4747047	2686.4218	6054769	1.150072	1.25149
1.77	24.14	0.23091	-3.104062	4820968	2791.6413	6452096	1.156684	1.258685
1.78	24.16	0.231602	-2.834558	4896802	2892.4719	6828017	1.158711	1.26089
1.79	24.18	0.232288	-2.613370	4974560	2989.5753	7185070	1.15695	1.258974
1.85	24.30	0.236278	-1.80073	5481637	3515.9052	9020955	1.095648	1.192267

Tabla 3.6. Valores de E , F_B y F_B/F_m para tirantes dentro de la subsección más profunda del canal en el ejemplo 3.14. para $Q = 24.5 \text{ m}^3/\text{s}$

y en m	A_1 en m^2	T_1 en m	α_1	E en m	F	$\frac{F}{F_m}$
1.50	6.75	6.0	1.10	2.238615	1.145903	1.246953
1.55	7.0525	6.1	1.10	2.226612	1.081878	1.177282
1.60	7.36	6.2	1.10	2.221255	1.023074	1.113293
1.65	7.6725	6.3	1.10	2.221679	0.968931	1.054375
1.70	7.99	6.4	1.10	2.227148	0.918962	1.000000

Solución c. Haciendo $F_B = 1$, de la ecuación 3.78 se obtiene

$$Q_c = \left[\frac{2g K^3}{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{K} - \sigma_1} \right]^{1/2}$$

que es la expresión para calcular el gasto crítico cuando las variables se calculan para el tirante $y = y_c$. De este modo, en la tabla 3.5 se leen los valores del primer renglón cuando se utilizó $y = 2.0 \text{ m}$ como valor inicial en las iteraciones de la solución a. Por tanto

$$Q_c = \left[\frac{2 (9.81) (815.6930825)^3}{12 \ 247 \ 557.24} \right]^{1/2} = 29.4859 \text{ m}^3/\text{s}$$

es el gasto que debe conducir el canal para que $y_{c2} = 2.0 \text{ m}$. Toda vez que $Q_c > Q_L$, sólo existe dicho tirante crítico.

Para $y_c = 1.45 \text{ m} < y_m$ se utiliza la forma convencional del número de Froude, ya que se trata de la subsección más profunda. Para dicho tirante, $A_{c1} = (3 + 1.45) 1.45 = 6.4525 \text{ m}^2$; $T_{c1} = 3 + 2 (1.45) = 5.90 \text{ m}$, por tanto

$$Q_c = \left[\frac{g}{\alpha_1} \frac{A_{c1}^3}{T_{c1}} \right]^{1/2} = \left[\frac{9.81}{1.1} \frac{(6.4525)^3}{5.90} \right]^{1/2} = 20.1514 \text{ m}^3/\text{s}$$

es el gasto que debe conducir el canal para que $y_{c1} = 1.45 \text{ m}$. Toda vez que $Q_c < Q_L$, sólo existe dicho tirante crítico.

3.9.3 Métodos de Konemann y Shearman

Por un camino análogo al de Blalock y Sturm, Konemann (referencia 5), en 1982, obtuvo la siguiente definición para el número de Froude en la sección compuesta de canales de pendiente pequeña.

$$F_K = \left[\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{3 B dM - M dB}{M^4} \right) \right]^{1/2} \quad (3.83)$$

donde

$$B = \sum \left[\left(\frac{1}{n_i} R_{hi}^{2/3} \right)^3 A_i \right]$$

$$dB = 3 \sum \left[\left(\frac{1}{n_i} R_{hi}^{2/3} \right)^3 T_i \right]$$

$$M = \sum \left[\frac{1}{n_i} R_{hi}^{2/3} A_i \right]$$

$$dM = \frac{5}{3} \sum \left[\frac{1}{n_i} R_{hi}^{2/3} T_i \right]$$

y n_i el coeficiente de Manning asociado a la subsección i .

Las ecuaciones 3.78 y 3.83 producen resultados parecidos para $F = 1$, en la obtención del segundo tirante crítico, como indica la curva 4 de la figura 3.23c para el mismo canal compuesto, si bien la última ecuación es un poco más sencilla de manejar desde el punto de vista computacional.

Shearman (referencia 6), en 1976, propuso también otro procedimiento que considera que la distribución de los caudales en las distintas subsecciones es proporcional al factor de conducción con lo cual obtuvo que el número de Froude índice está dado por

$$F_t = \frac{K_m}{K A_m} \frac{Q}{\sqrt{g A_m / T_m}} \quad (3.84)$$

donde el subíndice m se refiere a las variables calculadas para la subsección de mayor factor de conducción. La curva 5 de la figura 3.23c muestra la variación de F , definido por la ecuación 3.84, para el mismo canal compuesto de la figura 3.23a, pero se aparta bastante de las otras curvas y no predice ningún tirante crítico en este caso particular.

Schoellhamer, Peters y Larock (referencia 7), en 1985, estudiaron experimentalmente el problema de los canales compuestos utilizando números de Froude separados, uno para el canal principal y otros para los destinados a contener flujos de inundación por avenidas. Así demostraron que el número de Froude para el canal principal era igual a uno para dos tirantes diferentes, y concluyeron que hay más de un tirante crítico.

3.9.4 Método de Chaudhry y Bhallamudi

Derivación de las ecuaciones generales

Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8), en 1988, presentaron un método basado en el principio del momentum y propusieron la existencia de un tirante crítico en canales compuestos aun cuando la energía específica no sea mínima, (en contra de lo que afirman Blalock y Sturm), ajustándose estrictamente a la definición de que el número de Froude crítico, establecido por ellos, fuera igual a uno. Su método sirve también para determinar el número de tirantes críticos posibles para un gasto conocido en un canal compuesto simétrico y para calcular sus valores de manera eficaz, siempre que n_i no cambie con el tirante. Asimismo, los autores presentan un procedimiento para diseñar un canal de sección compuesta para que ocurra un solo tirante crítico y reducir el intervalo dentro del cual pueden tenerse condiciones de flujo muy inestables. Sin embargo, la formulación conduce a los mismos tirantes críticos que se obtienen con el método de Blalock y Sturm para $n_i = \text{constante}$, debido a la correspondencia entre los mínimos de las funciones de energía específica y momentum.

Chaudhry y Bhallamudi incorporaron una definición general del número de Froude, basada en las ecuaciones de continuidad y momentum obtenidas por Yen (referencia 9), en 1973, para describir el flujo unidimensional gradualmente variado no permanente. En un canal de pendiente pequeña, dicho número queda expresado como sigue

$$F_y = \frac{\beta V}{\sqrt{g A/T + V^2 [\beta^2 - \beta + (A \beta'/T)]}} \quad (3.85)$$

En esta ecuación, A , T y V tienen el mismo significado que el propuesto en la 3.69, y se introduce el coeficiente β de la sección compuesta calculado con la ecuación 2.74, siendo β' un nuevo término que es

$$\beta' = \frac{d\beta}{dy} \quad (3.86)$$

Para que haya régimen crítico, $F_y = 1$, y de la ecuación 3.85 se tiene

$$\beta^2 V^2 = \frac{g A}{T} + \beta^2 V^2 - V^2 \left[\beta - \frac{A \beta'}{T} \right]$$

Al simplificar, ordenar los términos y multiplicar por $T/(A^2 V^2) = T/Q^2$, se obtiene

$$\frac{g A}{Q^2} = \frac{T}{A^2} \beta - \frac{\beta'}{A} \quad (3.87)$$

que sería condición general de régimen crítico en canales de sección compuesta. Cuando $\beta = 1$, $\beta' = 0$, y la ecuación 3.87 se convierte en la 3.5b si $\alpha = 1$.

Se considera $\beta_i = 1$ en la ecuación 2.74 y resulta

$$\beta = \frac{A \Sigma(K_i^2/A_i)}{(\Sigma K_i)^2} = A \Sigma \left[\left(\frac{K_i}{K} \right)^2 \frac{1}{A_i} \right] \quad (3.88)$$

donde $K = \Sigma K_i$ y $A = \Sigma A_i$.

De la ecuación 3.86

$$\beta' = \frac{dA}{dy} \Sigma \left[\frac{K_i^2}{K^2 A_i} \right] - A \Sigma \left[\left[\left(\frac{K_i}{K A_i} \right)^2 \frac{dA_i}{dy} \right] + 2 A \Sigma \left[\frac{K_i}{K A_i} \frac{d}{dy} \left(\frac{K_i}{K} \right) \right] \right]$$

Con $T = dA/dy$ y la ecuación 3.88, se tiene

$$\beta' = \frac{T}{A} \beta - A \Sigma \left[\left[\left(\frac{K_i}{K A_i} \right)^2 \frac{dA_i}{dy} \right] + 2 A \Sigma \left[\frac{K_i}{K A_i} \frac{d}{dy} \left(\frac{K_i}{K} \right) \right] \right]$$

la cual se sustituye en la ecuación 3.87 y resulta

$$\frac{gA}{Q^2} = \Sigma \left[\left[\left(\frac{K_i}{K A_i} \right)^2 \frac{dA_i}{dy} \right] - 2 \Sigma \left[\frac{K_i}{K A_i} \frac{d}{dy} \left(\frac{K_i}{K} \right) \right] \right] \quad (3.89)$$

que es la ecuación general del régimen crítico en canales de sección compuesta de cualquier geometría, donde

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{K_i}{K} \right] = \frac{1}{K} \frac{dK_i}{dy} - \frac{K_i}{K^2} \frac{dK}{dy} \quad (3.90)$$

y el término dK_i/dy se obtiene de la ecuación 3.72, siendo $dK/dy = \Sigma (dK_i/dy)$.

Cuando la subsección más profunda tiene el mismo nivel de desbordamiento en las bermas a ambos lados, como se muestra en la figura 3.22a, la valuación del término después del signo igual en la ecuación 3.89 se realiza para $y > y_m$. En dicha subsección ocurre un primer tirante crítico y_{c1} , (calculado con la ecuación 3.5b) siempre que $y_{c1} \leq y_m$; los restantes se obtienen de la 3.89. También, el área A_m (para $y = y_m$) y el ancho T_1 de la subsección más profunda permanecen constantes, de modo que al multiplicar la ecuación 3.89 por $A_m^3 / A T_1$, el término antes del signo igual:

$$\frac{g A_m^3}{Q^2 T_1} = C \quad (3.91)$$

se vuelve adimensional, donde

$$C = \frac{A_m^3}{A T_1} \left\{ \sum \left[\left[\frac{K_i}{K A_i} \right]^2 \frac{dA_i}{dy} \right] - 2 \sum \left[\frac{K_i}{K A_i} \frac{d}{dy} \left[\frac{K_i}{K} \right] \right] \right\}$$

la cual se multiplica por $A A_1^2 / A_m^3$ y resulta

$$\frac{A A_1^2}{A_m^3} C = \sum \left[\left[\frac{K_i}{K} \right]^2 \left[\frac{A_1}{A_i} \right]^2 \frac{dA_i / dy}{T_1} \right] - 2 \sum \left[\frac{K_i}{K} \frac{A_1}{T_1} \frac{A_1}{A_i} \frac{d}{dy} \left[\frac{K_i}{K} \right] \right] \quad (3.92)$$

El factor C es función de la geometría de la sección y del tirante $y > y_m$, de manera que al conocer el caudal y dicha geometría, las ecuaciones 3.91 y 3.92 se resuelven en forma simultánea mediante un esquema iterativo para obtener los valores de $y = y_c$ que corresponden a los tirantes críticos.

Las ecuaciones son generales y se aplican a cualquier canal compuesto, con una subsección más profunda de igual altura en sus bordos y subsecciones laterales que se inundan al crecer el caudal.

Cuando la sección compuesta es simétrica, como las mostradas en las figuras 3.22b y c, se compone de tres subsecciones: la central (subíndice 1) y dos laterales iguales (subíndice 2) y la valuación de C es más sencilla a través de los valores:

$$A = A_1 + 2A_2$$

$$P = P_1 + 2P_2$$

$$K = K_1 + 2K_2$$

$$\frac{dA_1}{dy} = T_1$$

$$\frac{dA_2}{dy} = T_2$$

y el parámetro

$$m = \frac{K_1}{K} = \frac{K_1}{K_1 + 2K_2} \quad (3.93a)$$

del cual, resulta

$$K_2 = \frac{1-m}{2m} K_1$$

O bien

$$\frac{K_2}{K} = \frac{1-m}{2} \quad (3.93b)$$

También se usan los parámetros

$$c_1 = \frac{T_2}{T_1} \quad (3.94)$$

$$c_2 = \frac{A_1}{A_2} \quad (3.95)$$

$$c_3 = \frac{A_1}{T_1} \frac{dP_2/dy}{P_2} \quad (3.96)$$

Con $T_i = dA_i/dy$, la ecuación 3.92 se desarrolla como sigue

$$\frac{A A_1^2}{A_m^3} C = \left[\left(\frac{K_1}{K} \right)^2 + 2 \left(\frac{K_2}{K} \right)^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{T_2}{T_1} - 2 \left[\frac{K_1}{K} \frac{A_1}{T_1} \frac{d}{dy} \left(\frac{K_1}{K} \right) + 2 \frac{K_2}{K} \frac{A_1}{A_2} \frac{A_1}{T_1} \frac{d}{dy} \left(\frac{K_2}{K} \right) \right] \right]$$

y con los parámetros antes definidos, en la forma

$$\frac{A A_1^2}{A_m^3} C = m^2 + \frac{(1-m)^2}{2} c_1 c_2^2 - 2 \left[m \frac{dm}{dy} + (1-m) c_2 \frac{d}{dy} \left(\frac{1-m}{2} \right) \right] \frac{A_1}{T_1}$$

Pero

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1-m}{2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{dm}{dy}$$

Por tanto

$$\frac{A A_1^2}{A_m^3} C = \left[m^2 + \frac{(1-m)^2}{2} c_1 c_2^2 \right] - 2 \left[m - \frac{1-m}{2} c_2 \right] \frac{A_1}{T_1} \frac{dm}{dy} \quad (3.97)$$

Por otra parte

$$\frac{dm}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{K_1}{K} \right) = \frac{1}{K} \frac{dK_1}{dy} - \frac{K_1}{K^2} \frac{dK}{dy} = \frac{1}{K} \frac{dK_1}{dy} - \frac{K_1}{K^2} \sum \frac{dK_i}{dy} \quad (3.98)$$

Con $dP_1/dy = 0$, de las ecuaciones 3.72 y 3.93a resulta:

$$\frac{1}{K} \frac{dK_1}{dy} = \frac{1}{K} \left[\frac{5}{3} \frac{K_1 T_1}{A_1} \right] = \frac{m}{3} 5 \frac{T_1}{A_1}$$

y para toda la sección compuesta

$$\frac{K_1}{K^2} \sum \frac{dK_i}{dy} = \frac{K_1}{K^2} \left[\frac{5}{3} \frac{K_1 T_1}{A_1} + 2 \left[\frac{5}{3} \frac{K_2 T_2}{A_2} - \frac{2}{3} K_2 \frac{R_{h2}}{A_2} \frac{dP_2}{dy} \right] \right]$$

O bien, de las ecuaciones 3.93 a 3.96

$$\frac{K_1}{K^2} \sum \frac{dK_i}{dy} = \frac{m}{3} \left[5 m + 5 (1-m) c_1 c_2 - 2 (1-m) c_3 \right] \frac{T_1}{A_1}$$

Por lo tanto, la ecuación 3.98 se transforma en

$$\frac{dm}{dy} = \frac{m}{3} 5 \frac{T_1}{A_1} + \frac{m}{3} \left[-5 m - 5 (1-m) c_1 c_2 + 2 (1-m) c_3 \right] \frac{T_1}{A_1}$$

que al factorizar, también es

$$\frac{dm}{dy} = \frac{m}{3} (1-m) \left[5 (1 - c_1 c_2) + 2 c_3 \right] \frac{T_1}{A_1}$$

Con este resultado, la ecuación 3.97 se convierte en

$$\frac{A A_1^2}{A_m^3} C = \left[m^2 + \frac{(1-m)^2}{2} c_1 c_2^2 \right] - \frac{2}{3} m (1-m) \left[5 (1 - c_1 c_2) + 2 c_3 \right] \left[m - \frac{1-m}{2} c_2 \right]$$

O bien, si se multiplica por $c_2/(2 + c_2)$, también es

$$C \frac{A A_1^2}{A_m^3} \frac{c_2}{2 + c_2} = \frac{c_2}{2 + c_2} \left[m^2 + \frac{1}{2} (1-m)^2 c_1 c_2^2 \right] - \frac{2 m (1-m) c_2}{3 (2 + c_2)} \left[5 (1 - c_1 c_2) + 2 c_3 \right] \left[m - \frac{1}{2} (1-m) c_2 \right] \quad (3.99)$$

En el primer término de la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{c_2}{2 + c_2} = \frac{A_1/A_2}{2 + (A_1/A_2)} = \frac{A_1}{A_1 + 2 A_2} = \frac{A_1}{A} \quad (3.100)$$

Por tanto, dicha ecuación se convierte en

$$\left(\frac{A_1}{A_m} \right)^3 C = \frac{c_2}{2 + c_2} \left[m^2 + \frac{1}{2} (1-m)^2 c_1 c_2^2 \right] - \left[\frac{2 m (1-m) c_2}{3 (2 + c_2)} \right] \times \left[5 (1 - c_1 c_2) + 2 c_3 \right] \left[m - \frac{1}{2} (1-m) c_2 \right] \quad (3.101)$$

Por otra parte

$$\left(\frac{A_1}{A_m} \right)^3 = \left[\frac{A_m + T_1 (y - y_m)}{A_m} \right]^3 = \left[1 + \frac{T_1 y_m}{A_m} \left(\frac{y}{y_m} - 1 \right) \right]^3$$

donde T_1 es el ancho del canal principal al nivel de inundación lateral ($y = y_m$). Así, la ecuación 3.101 adquiere finalmente la forma

$$\begin{aligned}
C \left[1 + \frac{T_1 y_m}{A_m} \left(\frac{y}{y_m} - 1 \right) \right]^3 &= \frac{c_2}{2 + c_2} \left[m^2 + \frac{1}{2} (1-m)^2 c_1 c_2^2 \right] \\
&\quad - \frac{2 m (1-m) c_2}{3 (2 + c_2)} \left[5 (1 - c_1 c_2) + 2 c_3 \right] \\
&\quad \times \left[m - \frac{1}{2} (1-m) c_2 \right] \tag{3.102}
\end{aligned}$$

Esto significa que C es función de la geometría de la sección y del tirante y , de manera que conocidos el caudal y dicha geometría, las ecuaciones 3.91 y 3.102 se resuelven simultáneamente mediante un esquema iterativo, hasta obtener los valores de los tirantes críticos.

Con el fin de comprender el detalle del procedimiento de cálculo, las conclusiones más importantes, así como establecer un algoritmo para la determinación del tirante crítico, es conveniente revisar con cuidado el ejemplo numérico usado por Chaudhry (referencia 8) que a continuación se presenta.

Ejemplo 3.15. La sección de un canal compuesto tiene la geometría que se muestra en la figura 3.25a. *a)* Derivar las ecuaciones particulares de k_a y C para dicha sección. *b)* Calcular y dibujar la curva de variación de C con y . *c)* Obtener el o los tirantes críticos posibles para valores de $Q = 1.7, 2.5$ y $3.5 \text{ m}^3/\text{s}$.

Solución a. De acuerdo con la simbología de la sección mostrada en la figura 3.22b, se tiene

$$A_1 = T_1 y ; dA_1/dy = T_1$$

$$P_1 = T_1$$

$$A_m = T_1 y_m$$

$$A_2 = T_2 (y - y_m) ; dA_2/dy = T_2$$

$$P_2 = T_2 + y - y_m ; dP_2/dy = 1$$

Para cada valor de Q , de la ecuación 3.91 se obtiene la constante

$$k_a = \frac{g T_1^2 y_m^3}{Q^2} \quad (3.103)$$

De las ecuaciones 3.94 a 3.96 también resultan:

$$c_1 = T_2/T_1 = T_r \quad (a)$$

$$c_2 = \frac{T_1 y}{T_2 (y - y_m)} = \frac{y/y_m}{(T_2/T_1) (y/y_m - 1)} = \frac{y_r}{T_r (y_r - 1)} \quad (b)$$

$$c_3 = \frac{T_1 y}{(T_2 + y - y_m) T_1} = \frac{y}{T_2 + y - y_m} = \frac{y_r}{T_m + y_r - 1} \quad (c)$$

donde $y_r = y/y_m$ y $T_m = T_2/y_m$.

De las ecuaciones (a), (b), y (c), otros términos son:

$$\frac{c_2}{2 + c_2} = \frac{1}{1 + (2/c_2)} = \frac{1}{1 + [2 T_r (y_r - 1)/y_r]} = \frac{y_r}{y_r + 2 T_r (y_r - 1)}$$

$$c_1 c_2 = \frac{y_r}{y_r - 1}$$

$$c_1 c_2^2 = \frac{T_r y_r^2}{T_r^2 (y_r - 1)^2} = \frac{1}{T_r} \left[\frac{y_r}{y_r - 1} \right]^2$$

Por tanto, la ecuación 3.102 se reduce a

$$\begin{aligned}
C y_r^3 &= \frac{y_r}{y_r + 2 T_r (y_r - 1)} \left[m^2 + \frac{1}{2} (1 - m)^2 \left(\frac{y_r}{y_r - 1} \right)^2 \frac{1}{T_r} \right] \\
&- \frac{2 m (1 - m) y_r}{3 [y_r + 2 T_r (y_r - 1)]} \left[5 \left(1 - \frac{y_r}{y_r - 1} \right) + \frac{2 y_r}{T_m + y_r - 1} \right] \\
&\times \left[m - \frac{1}{2} (1 - m) \frac{y_r}{T_r (y_r - 1)} \right] \\
C &= \frac{1}{y_r + 2 T_r (y_r - 1)} \left[\left(\frac{m}{y_r} \right)^2 + \left(\frac{1 - m}{y_r - 1} \right)^2 \frac{1}{2 T_r} \right] \\
&+ \frac{2 m (1 - m)}{3 [y_r + 2 T_r (y_r - 1)]} \left[\frac{5}{y_r (y_r - 1)} - \frac{2}{T_m + y_r - 1} \right] \\
&\times \left[\frac{m}{y_r} - \left(\frac{1 - m}{y_r - 1} \right) \frac{1}{2 T_r} \right] \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 3.103 y 3.104 expresan la forma simplificada de las generales 3.91 y 3.102 en el caso particular aquí tratado, y se resuelven con el auxilio de las ecuaciones (a), (b) y (c).

Solución b. De acuerdo con las dimensiones de la sección mostrada en la figura 3.25a, se tiene que: $T_1 = 1 \text{ m}$, $T_2 = 3 \text{ m}$, $P_1 = 3 \text{ m}$, $y_m = 1.0 \text{ m}$, $T_m = 3$, $A_m = 1 \text{ m}^2$, $A_1 = y$, $A_2 = 3 (y - 1)$, $P_2 = 2 + y$, $n_1/n_2 = 0.013/0.0144 = 0.9$, $T_r = 3$, $y_r = y$.

Por tanto, la ecuación 3.104 se simplifica a la forma

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{y + 6 (y - 1)} \left[\left(\frac{m}{y} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1 - m}{y - 1} \right)^2 \right] + \left[\frac{2 m (1 - m)}{3 [y + 6 (y - 1)]} \right] \\
&\times \left[\frac{5}{y (y - 1)} - \frac{2}{2 + y} \right] \left[\left(\frac{m}{y} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1 - m}{y - 1} \right) \right] \tag{d}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 3.103 y la (d) anterior permiten obtener los valores de C para distintas magnitudes de y . Cuando $y \rightarrow 1$, $m \rightarrow 1$ y $C \rightarrow 0$. Cuando $y \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$ y $C \rightarrow 0$. Con diferentes valores de y en el intervalo de 1 a 1.3, la figura 3.25b muestra la variación de C , con un máximo igual a 2.866 cuando $y = 1.033$. En efecto, para $y = 1.033$ m, $P_2 = 3.033$ m, $A_2 = 3 (0.033) = 0.099 \text{ m}^2$ y de la ecuación 3.93a resulta

$$m = \frac{1}{1 + 2 (0.9) (3/3.033)^{2/3} [3 (0.033)/1.033]^{5/3}} = 0.9654$$

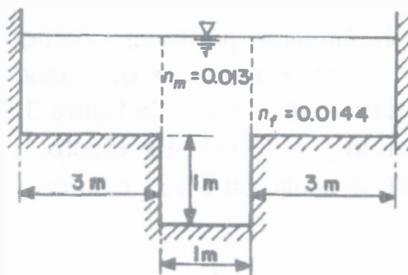
y de la ecuación (d)

$$C = \frac{1}{1.033 + 6 (0.033)} \left[\left(\frac{0.9654}{1.033} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{0.0346}{0.033} \right)^2 \right]$$

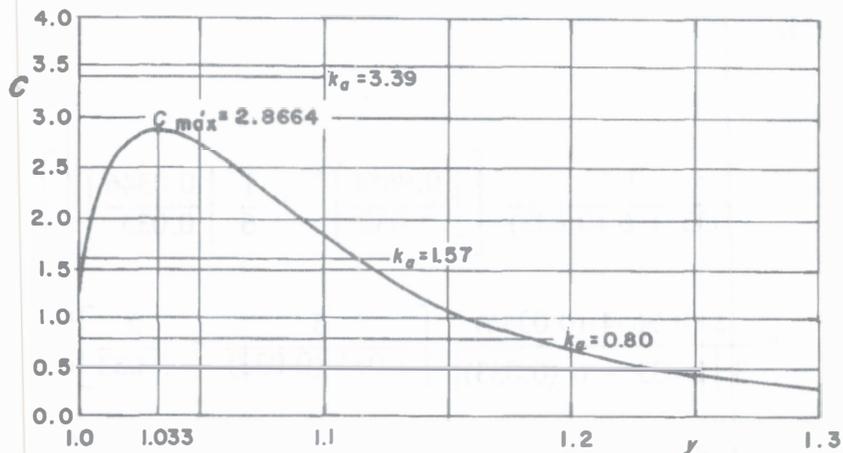
$$+ \frac{2 (0.9654)(0.0346)}{3 [1.033 + 6 (0.033)]} \left[\frac{5}{1.033 (0.033)} - \frac{2}{3.033} \right]$$

$$\times \left[\frac{0.9654}{1.033} - \frac{1}{6} \frac{(0.0346)}{0.033} \right]$$

$$C = 2.8664$$



a) Sección del canal



b) Curva $y-C$

Figura 3.25. Canal compuesto del ejemplo 3.15, según Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8)

Solución c. Para $Q = 1.7 \text{ m}^3/\text{s}$, de la ecuación 3.103 se obtiene el valor de

$$k_a = \frac{9.81 (1) 1}{(1.7)^2} = 3.3945$$

La línea horizontal correspondiente a $k_a = 3.39$ no interseca a la curva $y-C$ de la figura 3.25b, y por tanto no hay solución para la ecuación 3.91; esto es, no puede ocurrir régimen crítico para este gasto si el tirante $y > y_m$. Sin embargo, hay tirante crítico sólo en el caso de flujo en el canal principal cuando $y < y_m$.

Dicho tirante se determina de la ecuación 3.18 ($\cos \theta = \alpha = 1$) de la siguiente manera

$$y_c = \left[\frac{Q^2}{g T_1^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{(1.7)^2}{9.81 (1)} \right]^{1/3} = 0.6654 \text{ m}$$

el cual corresponde al punto C de energía específica mínima sobre la curva 1 de la figura 3.26.

Para $Q = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$, de la ecuación 3.103 se obtiene el valor de

$$k_a = \frac{9.81 (1) (1)}{(2.5)^2} = 1.5696$$

Esto es, k_a resulta mayor de 1.0 pero menor que $C_{m\acute{a}x}$, y la línea horizontal correspondiente a $k_a = 1.57$ interseca a la curva $y - C$ de la figura 3.25c en dos puntos, lo que indica dos tirantes críticos: $y_{c2} = 1.002 \text{ m}$ y $y_{c3} = 1.12 \text{ m}$.

Debido a que $k_a > 1$, hay tirante crítico cuando existe flujo sólo en el canal principal, siendo su valor

$$y_{c1} = \left[\frac{(2.5)^2}{9.81 (1)} \right]^{1/3} = 0.8605 \text{ m}$$

Como se muestra en la figura 3.26, la energía específica es localmente mínima sólo para dos de los tres tirantes críticos; es decir, en los puntos C_1 ($y_{c1} = 0.86 \text{ m}$) y C_3 ($y_{c3} = 1.12 \text{ m}$), ubicados sobre la curva 2. En otras palabras, en opinión de Chaudhry y Coautor, uno de los posibles tirantes críticos no se hubiera detectado si se utiliza únicamente el criterio de la energía específica mínima.

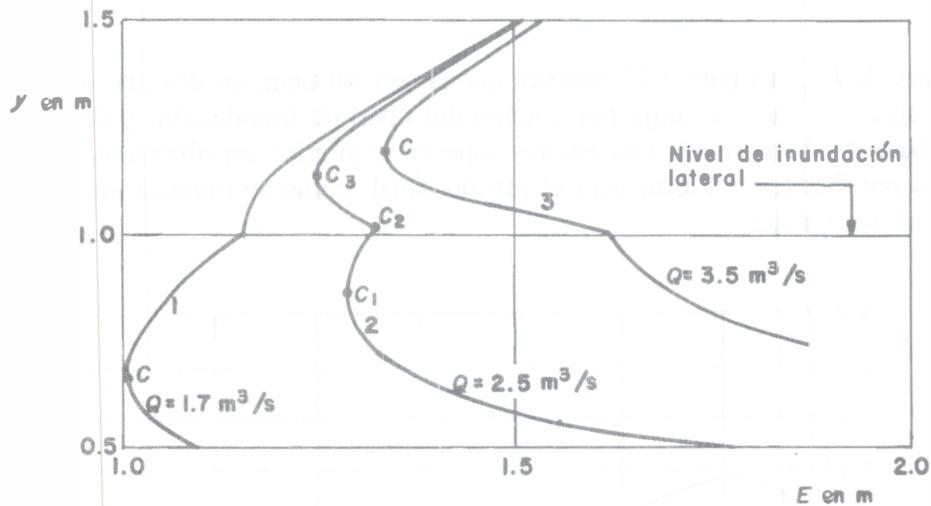


Figura 3.26. Curvas de energía específica-tirante para el canal compuesto con la sección de la figura 3.25a, según Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8)

Para $Q = 3.5 \text{ m}^3/\text{s}$, de la ecuación 3.103 se obtiene el valor

$$k_a = \frac{9.81 (1) (1)}{(3.5)^2} = 0.8008$$

Siendo $k_a < 1$, el tirante crítico no puede ocurrir cuando existe flujo sólo en el canal principal. Sin embargo, la línea horizontal correspondiente a $k_a = 0.8$ interseca la curva $y-C$ de la figura 3.25b en un solo punto, dando el tirante crítico $y_c = 1.18$ m. Esto queda ilustrado por el punto único C de la curva 3 en la figura 3.26, para el cual la energía específica es mínima, presentándose cuando el flujo ocurre arriba del nivel de inundación ($y > y_m$).

Por un procedimiento similar al del ejemplo anterior, Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8) obtuvieron la curva $y-C$ para la sección trapecial del canal compuesto de la figura 3.23a, usando las ecuaciones generales 3.91 y 3.102 y el mismo valor de $Q = 141.6$ m³/s que utilizaron Blalock y Sturm para el cálculo de las curvas $E-y$ y $F-y$ de las figuras 3.23b y c. En la figura 3.27 se presenta la curva $y-C$ resultante, que muestra las mismas tendencias que la obtenida en el ejemplo anterior (figura 3.25b).

En este caso, se tiene

$$A_m = [21.9 + 1 (1.83)] 1.83 = 43.4259 \text{ m}^2$$

$$T_1 = 21.9 + 2 (1) (1.83) = 25.56 \text{ m}$$

y de la ecuación 3.91

$$k_a = \frac{9.81 (43.4259)^3}{(141.6)^2 (25.56)} = 1.5675$$

Para este valor de k_a , la figura 3.27 muestra que la sección tiene los dos tirantes críticos: 1.833 m y 2.10 m, cuando el flujo se aloja por encima del nivel de inundación, y de 1.62 m cuando lo hace por debajo de dicho nivel. Los valores superior e inferior así obtenidos se aproximan a los determinados por Blalock y Sturm para el mismo canal, como se muestra en la figura 3.23c. En rigor, debieran ser iguales.

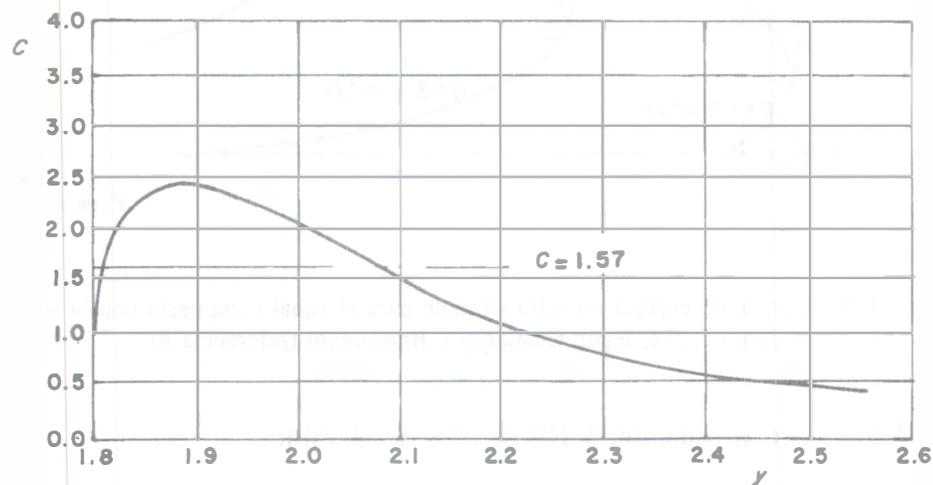


Figura 3.27. Curva $y - C$ del canal compuesto con la sección de la figura 3.23a, según Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8)

Como ya se había anticipado, el valor intermedio y_{c2} del tirante crítico ocurre cuando el de la energía específica es localmente máxima. Este valor máximo se debe a la discontinuidad en el área al nivel de inundación de las subsecciones laterales. El análisis de otras curvas $y-C$ de secciones compuestas con diferentes geometrías muestra que y_{c2} es siempre ligeramente mayor que el tirante y_m correspondiente al nivel de inundación lateral, pudiendo ser reemplazado por éste, es decir $y_{c2} \approx y_m$.

De este modo, el flujo correspondiente a este tirante no puede permanecer unidimensional en la naturaleza y dicho tirante crítico puede ser imposible de obtener en laboratorio o en campo. Sin embargo, la opinión de los autores es que y_{c2} debe ser conceptualmente considerado como un tirante crítico, toda vez que implica una transición entre dos regímenes de flujo. Esto es, el régimen es subcrítico si $y > y_{c1}$, y supercrítico si $y < y_{c3}$, existiendo una transición entre ambos para algún tirante tal que $y_{c3} > y > y_{c1}$, explicable al menos en teoría.

De los casos típicos analizados es posible extraer las siguientes conclusiones:

- Si $k_a > C_{máx}$ hay un solo tirante crítico, menor que aquél para el que ocurre la inundación de las subsecciones laterales ($y_c < y_m$).
- Si $1 \leq k_a < C_{máx}$, hay tres tirantes críticos posibles. Dos de ellos ocurren cuando el flujo se aloja dentro de las subsecciones laterales, y el tercero cuando lo hace sólo en la subsección central.
- Si $k_a < 1$ hay un solo tirante crítico y es mayor que el tirante y_m para el que ocurre la inundación lateral.

Algoritmo para el cálculo de los tirantes críticos

Chaudhry y Ballamudi, propusieron también un algoritmo para determinar primero el número de tirantes críticos en una sección para un gasto dado, y después para calcular uno a uno todos los valores posibles. Aunque la presentación se refiere a las ecuaciones particulares obtenidas en el ejemplo 3.15, es posible extenderla a la forma general expresada por las ecuaciones 3.91 y 3.102.

La ecuación 3.104 se puede reescribir en la forma

$$\begin{aligned}
 C \left[y_r (2 T_r + 1) - 2 T_r \right] &= \left[\frac{m}{y_r} \right]^2 + \left[\frac{1-m}{y_r - 1} \right]^2 \frac{1}{2 T_r} \\
 &+ \frac{2}{3} m (1-m) \left[\frac{5}{y_r (y_r - 1)} - \frac{2}{T_m + y_r - 1} \right] \\
 &\times \left[\frac{m}{y_r} - \left[\frac{1-m}{y_r - 1} \right] \frac{1}{2 T_r} \right]
 \end{aligned}$$

Para establecer una solución iterativa, se despeja y_r y la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 y_{r*} = & \frac{2 T_r}{2 T_r + 1} + \frac{1}{C (2 T_r + 1)} \left[\left(\frac{m}{y_r} \right)^2 + \left(\frac{1-m}{y_r - 1} \right)^2 \frac{1}{2 T_r} \right] \\
 & + \frac{2 m (1-m)}{3 C (2 T_r + 1)} \left[\frac{5}{y_r (y_r - 1)} - \frac{2}{T_m + y_r - 1} \right] \\
 & \times \left[\frac{m}{y_r} - \left(\frac{1-m}{y_r - 1} \right) \frac{1}{2 T_r} \right] \quad (3.105)
 \end{aligned}$$

Para determinar un valor de y_r , con la ecuación 3.105 se obtiene un valor más preciso de y_{r*} . Si $|y_{r*} - y_r|$ es menor que una tolerancia acordada, entonces y_{r*} es el valor correcto de y_r . En caso contrario, el nuevo valor se toma igual al y_{r*} obtenido y se repiten las iteraciones hasta tener la solución correcta.

Asimismo, puede establecerse un procedimiento por pasos para calcular de modo eficaz el tirante crítico para un gasto conocido en un canal compuesto de sección rectangular simétrica; esto es, se conocen: Q , T_1 , T_2 , y_m , n_1 y n_2 .

1. Calcular k_a de la ecuación 3.103.
2. Si k_a es menor de uno, se resuelve la ecuación 3.105 para y_r usando un procedimiento iterativo, hasta obtener $y_c = y_{r*} y_m$.
3. Si k_a es mayor o igual a uno, seguir con los pasos 4 a 9.
4. Calcular $C_{m\acute{a}x}$ determinando la magnitud de C mediante la ecuación 3.104 para distintos valores de y_r , a partir de uno inicial próximo a 1.0 y terminarlo hasta que se alcance el valor máximo de C .
5. Si k_a es mayor que $C_{m\acute{a}x}$, entonces: $y_c = (Q^2 / g T_1^2)^{1/3}$.
6. Si k_a es menor que $C_{m\acute{a}x}$, seguir con los pasos 7 a 9.
7. Calcular y_{c1} de la ecuación: $y_{c1} = (Q^2 / g T_1^2)^{1/3}$.

8. Resolver la ecuación 3.105 para y_r utilizando un procedimiento iterativo de modo que $y_{c3} = y_r * y_m$.
9. Determinar y_{c2} , para lo cual C se obtiene de la ecuación 3.104 para distintos valores de y_r , empezando con uno próximo a 1.0 y continuando hasta que el calculado sea igual a k_a . Con este último $y_{c2} = y_r y_m$.

El algoritmo se puede aplicar a otros canales compuestos de sección simétrica, utilizando una ecuación para las iteraciones basada en la 3.102.

Secciones compuestas con un solo tirante crítico

Como se ha analizado, una sección de un canal compuesto tiene más de un tirante crítico si $1 < k_a < C_{m\acute{a}x}$. Por tanto, es útil conocer la variación de $C_{m\acute{a}x}$ con los diferentes parámetros adimensionales: T_1/y_m , T_2/y_m y n_1/n_2 . Asimismo, si una sección compuesta tiene más de un tirante crítico para un gasto conocido, se amplía el intervalo de tirantes dentro del cual el flujo es muy inestable. De este modo, si es necesario diseñar un canal de sección compuesta, es ventajoso que la sección tenga un solo tirante crítico. Para este efecto es conveniente elaborar diagramas adimensionales, como los que a continuación se presentan para la sección rectangular simétrica, con el fin de exponer cómo puede diseñarse dicha sección.

La figura 3.28 muestra curvas de la variación que experimenta $C_{m\acute{a}x}$ con T_2/y_m , para distintos valores de T_1/y_m y uno constante de $n_1/n_2 = 0.9$, si bien pueden elaborarse, de modo similar, diagramas para otros valores de n_1/n_2 . En la figura mencionada se observa que $C_{m\acute{a}x}$ tiende a aumentar cuando T_1/y_m disminuye o cuando T_2/y_m aumenta. Para valores dados de T_1 , y_m y Q , de la ecuación 3.103 es posible calcular el parámetro.

$$C_k = \frac{g T_1^2 y_m^3}{Q^2} \quad (3.106)$$

Igualando C_k con $C_{m\acute{a}x}$ y utilizando la curva para el valor dado de T_1/y_m , en la figura 3.28 se lee el de T_1/y_m que a su vez proporciona un valor crítico de T_2/y_m . Si el ancho T_2 de la subsección lateral proporciona un valor T_2/y_m menor que dicho crítico, la ecuación 3.91 no tiene solución, en consecuencia, la sección compuesta elegida tiene un solo tirante crítico.

De manera similar, si se conocen tres de los cuatro elementos: T_1 , T_2 y Q , el cuarto puede seleccionarse de modo que la sección compuesta tenga un solo tirante crítico. Con este objeto, la figura 3.28 también muestra la variación de $C_{m\acute{a}x}$ con T_2/y_m para distintos valores de T_2/T_1 .

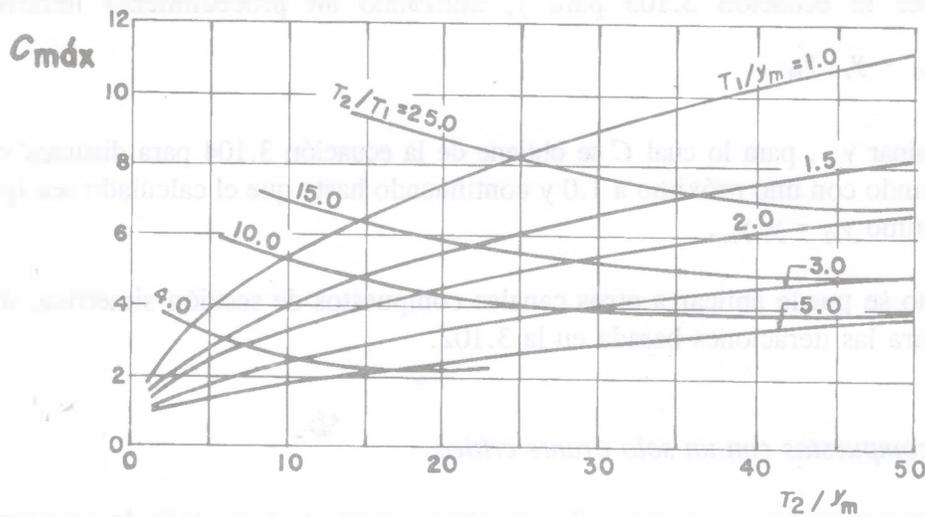


Figura 3.28. Variación de $C_{máx}$ con las dimensiones de la sección de un canal compuesto mostradas en la figura 3.25a, para un valor de $n_1 / n_2 = 0.9$, según Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8)

En la figura 3.29 se presenta la variación de $C_{máx}$ con T_2 / y_m , para distintos valores del parámetro de coeficientes n_1 / n_2 y uno constante de $T_1 / y_m = 3.0$. En ella se observa que $C_{máx}$ decrece al aumentar el coeficiente n_2 de la subsección lateral; en consecuencia, la sección compuesta puede tener un solo tirante crítico. Con esto se concluye que un aumento en la rugosidad de las áreas de inundación es un camino para diseñar secciones compuestas con un solo tirante crítico.

Aunque los diagramas adimensionales presentados fueron obtenidos para una sección compuesta rectangular simétrica, otros similares pueden elaborarse para otras formas de sección.

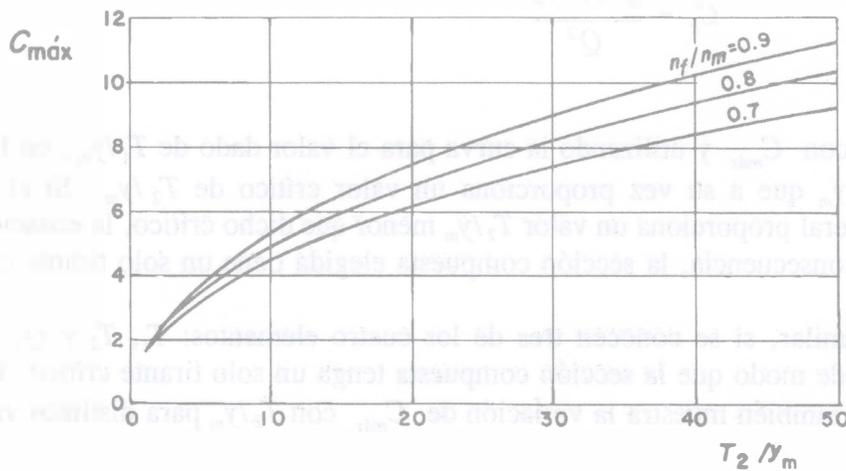


Figura 3.29. Variación de $C_{máx}$ con la rugosidad, para $T_1 / y_m = 3.0$, en la sección del canal compuesto mostrada en la figura 3.25a, según Chaudhry y Bhallamudi (referencia 8)

REFERENCIAS

1. Vittal N. "Direct Solution to Problems of Open Channel Transitions", ASCE, Journal of Hydraulic Engineering, volumen 104, número HY11, páginas 1485 a 1494, noviembre de 1978.
2. Blalock M.E. y Sturm T.W. "Minimum Specific Energy in Compound Open Channel", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division, volumen 107, número HY6, páginas 699 a 717, junio 1981.
3. Blalock M. E., Sturm T.W. Closure to "Minimum Specific Energy in Compound Open Channel", ASCE, Journal of Hydraulic Division, volumen 109 (3), páginas 483 a 487, 1983.
4. Sturm T. W., Sadiq A. "Water Surface Profiles in Compound Channel with Multiple Critical Depths", ASCE, Journal of Hydraulic Engineering, volumen 122, número 12, páginas 703 a 709, diciembre de 1996.
5. Konemann N. "Discussion of Minimum Specific Energy in Compound Open Channel", Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Journal of the Hydraulics Division, volumen 108, número HY3, páginas 462 a 464, marzo 1982.
6. Shearman J.O. "Computer Applications of Step-Backwater and Floodway Analysis", Open File report 76499, US Geological Survey, Washington, DC, 1976.
7. Schoellhamer D.H., Peters J.C. y Larock B.E. "Subdivision Froude number", ASCE, Journal of Hydraulic Engineering, volumen III, páginas 1099 a 104, 1985.
8. Chaudhry M. Hanif y Bhallamudi S. Murty. "Computation of Critical Depth in Symmetrical Compound Channels", Journal of Hydraulic Research, IARH, volumen 26, número 4, 1988.
9. Yen Ben Chie. "Open Channel Flow Equations Revisited", ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, volumen 99, número EM5, octubre 1973.

CAPÍTULO 4. PRINCIPIO DEL MOMENTUM Y SU APLICACIÓN AL SALTO HIDRÁULICO

4.1 CONSIDERACIONES GENERALES

El principio del impulso y la cantidad de movimiento es de gran importancia en el análisis del flujo a superficie libre, sobre todo si el desconocimiento de la pérdida que ocurre en el fenómeno que se analiza impide utilizar el principio de la conservación de la energía.

Cuando el principio del impulso y la cantidad de movimiento se expresa en una forma más adecuada para el análisis del flujo a superficie libre, se conoce como principio del momentum, siendo varios los casos que deben tratarse con dicho principio. Entre ellos se pueden mencionar el salto hidráulico, el flujo espacialmente variado de gasto creciente, los obstáculos y obstrucciones, unión y separación de canales y, en general, situaciones locales de flujo.

En este capítulo se presenta el principio del momentum y después se aplica ampliamente al fenómeno conocido como resalto o salto hidráulico, con énfasis al formado en canales prismáticos horizontales que, por su significación ocupa casi la totalidad del capítulo. Otras aplicaciones, que incluyen las del resalto en canales no prismáticos o con pendiente, se presentan en capítulos posteriores.

Antes de presentar el principio del momentum es conveniente definir al resalto, a fin de entender la aplicación de dicho principio al mismo. Para ello, la reflexión presentada en el capítulo 3, relativa al control que una sección crítica ejerce sobre el régimen en un canal, permite derivar algunas conclusiones que se exponen a continuación y que se amplían en capítulos posteriores a medida que se avanza en su aplicación.

- a) En una sección crítica se establece una relación conocida entre el gasto y el tirante.
- b) Cuando una sección crítica ocurre, ésta controla el tipo de régimen a ambos lados, subcrítico en el lado aguas arriba y supercrítico en el de aguas abajo, lo modifica de un lado a otro en ese mismo orden con pérdida de energía insignificante, y extiende su influencia hasta cierta distancia en ambas direcciones.

Para explicar mejor lo anterior, considérese el comportamiento del flujo en un canal de sección uniforme, cuya pendiente se incrementa gradualmente de subcrítica a supercrítica (figura 4.1a). Siendo el gasto constante, la línea que señala el tirante crítico en cada sección es paralela a la plantilla. En la parte superior del tramo de descenso, el perfil de la superficie libre queda arriba de la línea de tirante crítico y la energía específica es mayor que la mínima. El tirante, y con él la energía específica, disminuyen de manera continua a medida que aumenta la pendiente, alcanzando los valores críticos en el punto en que dicha pendiente se iguala con la crítica ($S_0 = S_c$). La reducción que experimenta la energía específica, desde el valor inicial en el canal aguas arriba hasta la mínima en la sección crítica, se debe principalmente a los efectos de fricción y

conversión. De dicha sección en adelante, el tirante continúa disminuyendo con el incremento de la pendiente, la cual abastece de mayor energía al flujo que la que se disipa por fricción.

En el caso de intersección brusca de las dos pendientes (nuevamente de subcrítica a supercrítica) (figura 4.1b), el comportamiento general es muy similar al del caso anterior, aunque es factible que el perfil de la superficie se altere todavía más en la zona de transición. Esto es, en ambos casos la sección crítica actúa como control permitiendo un cambio gradual de régimen, del subcrítico aguas arriba al supercrítico aguas abajo, acompañado de poca turbulencia y pérdida de energía más bien debida al efecto de fricción en el movimiento. El proceso se sigue al recorrer la curva E - y de la figura 3.1 desde un punto de la rama superior correspondiente a la condición original de régimen subcrítico en el canal, a otro sobre la inferior para el supercrítico aguas abajo.

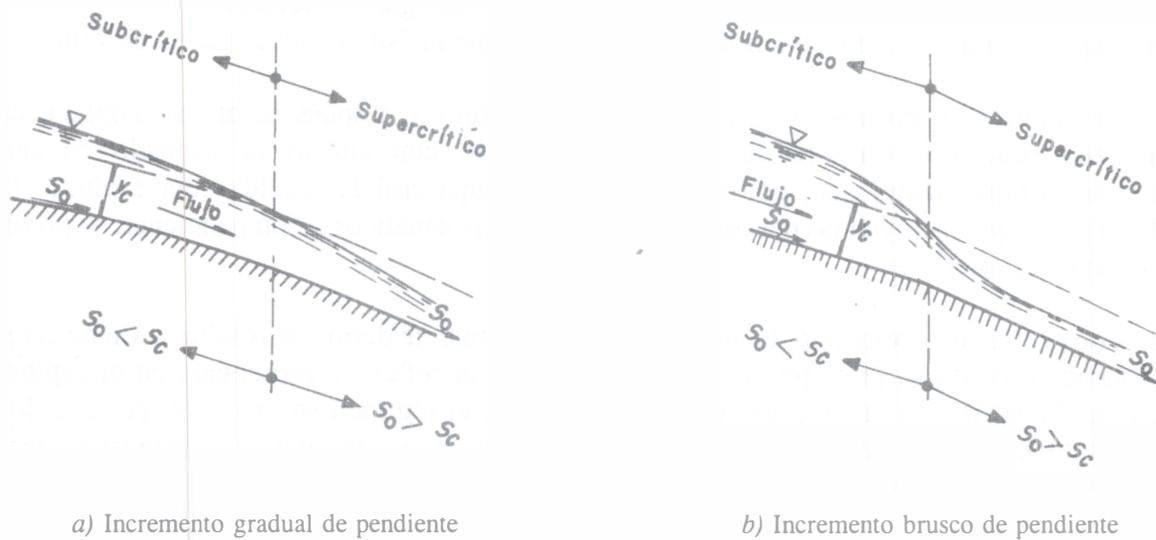


Figura 4.1. Transición de régimen subcrítico a supercrítico

Considérese ahora el proceso inverso de transición, de supercrítico a subcrítico. En el subcapítulo 3.4 se ha visto que éste puede ocurrir cuando se reduce el ancho del canal, pero también cuando la pendiente cambia de supercrítica a subcrítica; por ejemplo, al pie de una rápida o caída (figura 4.2). El régimen aguas arriba de la intersección es supercrítico, mientras que aguas abajo la pendiente impone un tirante normal y un régimen subcrítico, presentándose en algún punto intermedio la transición entre ambos.

Para explicar este proceso se efectúa un análisis semejante al del caso anterior: el flujo inicial reduce su velocidad por efecto de la fricción y decremento de la pendiente, aumenta gradualmente su tirante y disminuye su energía específica tratando de alcanzar la mínima. Toda vez que aguas abajo existe régimen subcrítico, el tirante debe ser mayor que el crítico y la energía específica mayor que la mínima; sin embargo, si el flujo inicial alcanzara el tirante crítico no habría después posibilidad de que la energía específica creciera más allá de la mínima, debido a que la pequeña pendiente del canal no le agregaría energía adicional.

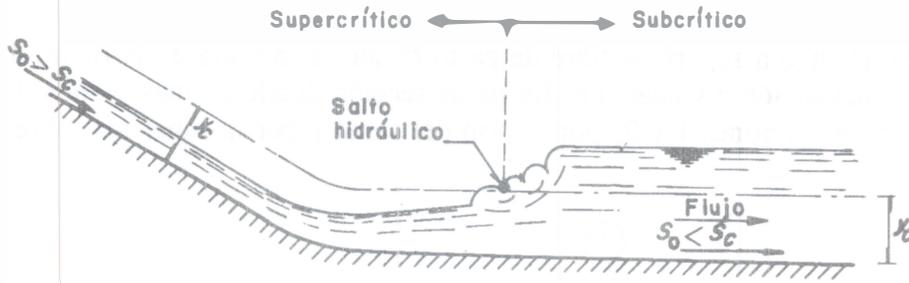


Figura 4.2. Transición de régimen supercrítico a subcrítico

Esto impide continuar con una explicación del cambio de régimen, similar a la del caso anterior, pero al recurrir a la experimentación se observa que el cambio de régimen de supercrítico a subcrítico es brusco. Esto significa que a cierta distancia aguas arriba del punto hipotético de intersección entre el perfil de la superficie libre que se va elevando y la línea de tirante crítico, la energía específica excede ya a la del flujo uniforme de aguas abajo, se ocasiona la discontinuidad y la superficie libre se eleva rápidamente hasta el tirante normal, a través del fenómeno conocido como salto hidráulico.

La doble influencia del control también queda ilustrada por la compuerta de la figura 3.3a. En el espacio intermedio entre las dos compuertas ubicadas en un canal (figura 4.3) hay dos tipos de régimen; el supercrítico, producido hacia aguas abajo de la primera, y el subcrítico, ocasionado hacia aguas arriba de la segunda. Esto tiene como consecuencia una incongruencia o la necesidad del cambio o transición de un régimen a otro. De nuevo, la evidencia experimental muestra que el cambio de régimen de supercrítico a subcrítico sólo es posible a través del salto hidráulico.

Una situación similar también puede presentarse en otros tipos de control, pero también en ausencia de los mismos, como se verá más adelante.

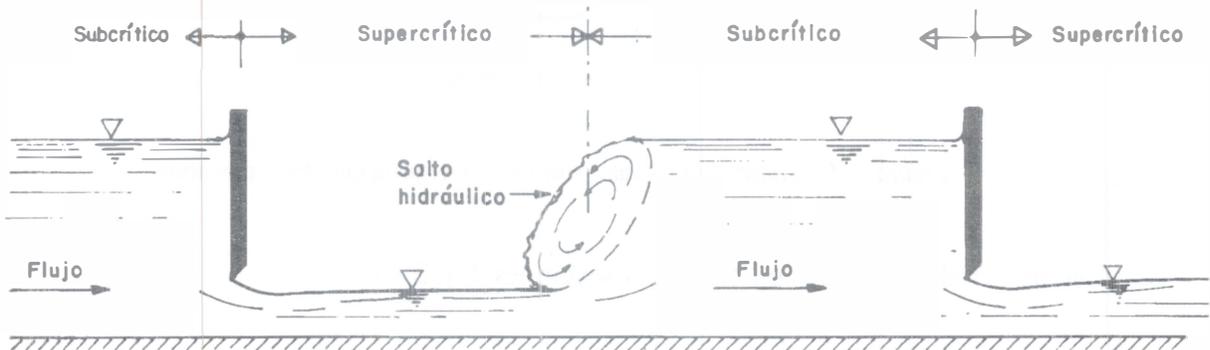
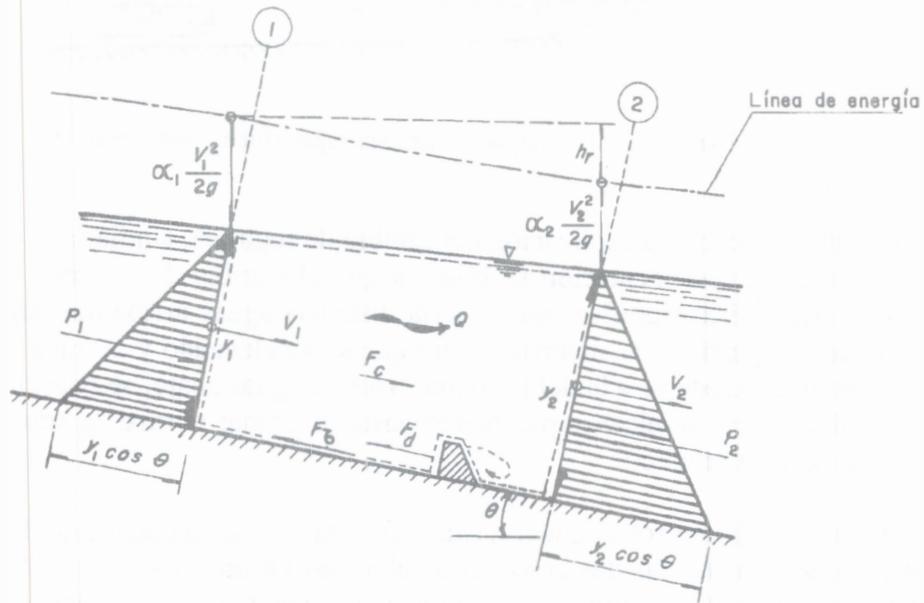


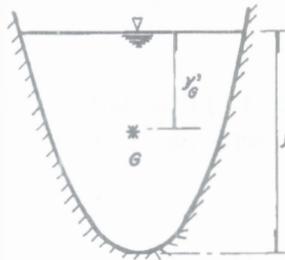
Figura 4.3. Cambios de régimen originados por dos compuertas

4.2 EL MOMENTUM

Considérese el flujo a superficie libre de gasto Q que se muestra en la figura 4.4, en un tramo de canal de inclinación θ y cualquier forma de sección donde se analiza un volumen de control limitado por las secciones 1 y 2, por el piso del canal y por la superficie libre.



a) Corte longitudinal



b) Sección transversal

Figura 4.4. Tramo de un canal para derivar el principio del momentum

Las fuerzas debidas a la presión sobre las secciones 1 y 2 son

$$P_1 = g\rho y'_{G1} A_1 \cos \theta$$

$$P_2 = g\rho y'_{G2} A_2 \cos \theta$$

la primera en la dirección del flujo; la segunda en dirección opuesta.

Entre las dos secciones hay una fuerza de fricción F_f en dirección contraria al movimiento, un componente F_c del peso del agua contenida en el volumen de control en la misma dirección del movimiento, y puede existir o no un obstáculo sobre el piso y paredes, un cambio en la alineación de las mismas o un escalón, que producen una fuerza F_d en la misma dirección o contraria al flujo.

Considerando que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ (*constante*), al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del flujo y dividir por $g\rho$, se obtiene

$$(y'_{G1} A_1 - y'_{G2} A_2) \cos \theta + \frac{1}{g\rho} (-F_f + F_c - F_d) = \frac{\beta Q}{g} (V_2 - V_1) \quad (4.1a)$$

donde se ha supuesto a F_d en dirección contraria al flujo.

De la ecuación de continuidad, $V_1 = Q/A_1$, $V_2 = Q/A_2$, de modo que la ecuación de cantidad de movimiento se convierte en

$$\frac{F_R}{g\rho} = \left[\frac{\beta}{g} \frac{Q^2}{A_2} + y'_{G2} A_2 \cos \theta \right] - \left[\frac{\beta}{g} \frac{Q^2}{A_1} + y'_{G1} A_1 \cos \theta \right] \quad (4.1b)$$

donde

$$\frac{F_R}{g\rho} = \frac{1}{g\rho} (-F_f + F_c - F_d)$$

es la resultante de las fuerzas de resistencia, de cuerpo y la creada por alguna obstrucción, ésta considerada en dirección contraria al flujo.

La ecuación 4.1b expresa al principio llamado del momentum que de manera más sencilla se escribe en la forma

$$\frac{F_R}{g\rho} = M_2 - M_1 \quad (4.1c)$$

y que resulta al definir a la función llamada momentum

$$M = \frac{\beta}{g} \frac{Q^2}{A} + y'_G A \cos \theta \quad (4.2.a)$$

compuesta de dos términos: el primero es la cantidad de movimiento del flujo a través de una sección del canal; el segundo es el empuje debido a la presión sobre el área de la sección.

Debido a que ambos tienen las dimensiones de una fuerza por peso de la unidad de volumen, es decir $[L^3]$, a la función M se le conoce también como momentum específico o fuerza específica y realmente es una cantidad vectorial asociada con una sección de flujo.

Si la pendiente del canal es suficientemente pequeña, se considera $\cos \theta \approx 1$. También, si las secciones 1 y 2 se eligen de manera que exista una distribución uniforme de la velocidad, $\beta = 1$. De este modo, la función momentum en la dirección del flujo se simplifica como sigue

$$M = \frac{Q^2}{g A} + y'_G A \quad (4.2b)$$

En esta ecuación, para una sección y gasto dados, M es función sólo del tirante, de manera análoga a la energía específica. Su representación gráfica en un plano $M - y$ (figura 4.5b) consiste en una curva similar a la de $E - y$ (figura 4.5c), con la rama inferior también asintótica al eje horizontal, pero la superior se eleva y extiende de manera indefinida a la derecha. Asimismo, para un valor único de M , la curva tiene dos posibles tirantes y_1 y y_2 (puntos 1 y 2) que reciben el nombre de conjugados, menor y mayor respectivamente.

El punto C de la figura 4.5b corresponde al mínimo de momentum y sus condiciones se obtienen del criterio de la primera derivada de M en la ecuación 4.2a, como sigue

$$\frac{dM}{dy} = - \frac{\beta Q^2}{g A^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy} (y'_G A \cos \theta)$$

A un cambio dy en el tirante corresponde un cambio $d(y'_G A \cos \theta)$ en el momento estático del área hidráulica respecto de la superficie libre (figura 4.4b), el cual es

$$d(y'_G A \cos \theta) = \left[(y'_G + dy) A + T (dy)^2/2 \right] \cos \theta - y'_G A \cos \theta$$

Despreciando diferenciales de orden superior $(dy)^2 = 0$, el cambio en el momento estático es $d(y'_G A \cos \theta) = A dy \cos \theta$, y resulta

$$\frac{dM}{dy} = A \cos \theta - \frac{\beta Q^2 T}{g A^2} = A \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} F^2 \right) \cos \theta \quad (4.3)$$

donde $T = dA/dy$ y F el número de Froude. Siendo $dM/dy = 0$, la ecuación se simplifica y resulta $F_c = \sqrt{\alpha/\beta}$, que es la condición de estado crítico. Esto significa que, para un gasto dado, el momentum mínimo ocurre también con el tirante crítico (figura 4.5b) cuando $\alpha = \beta = 1$.

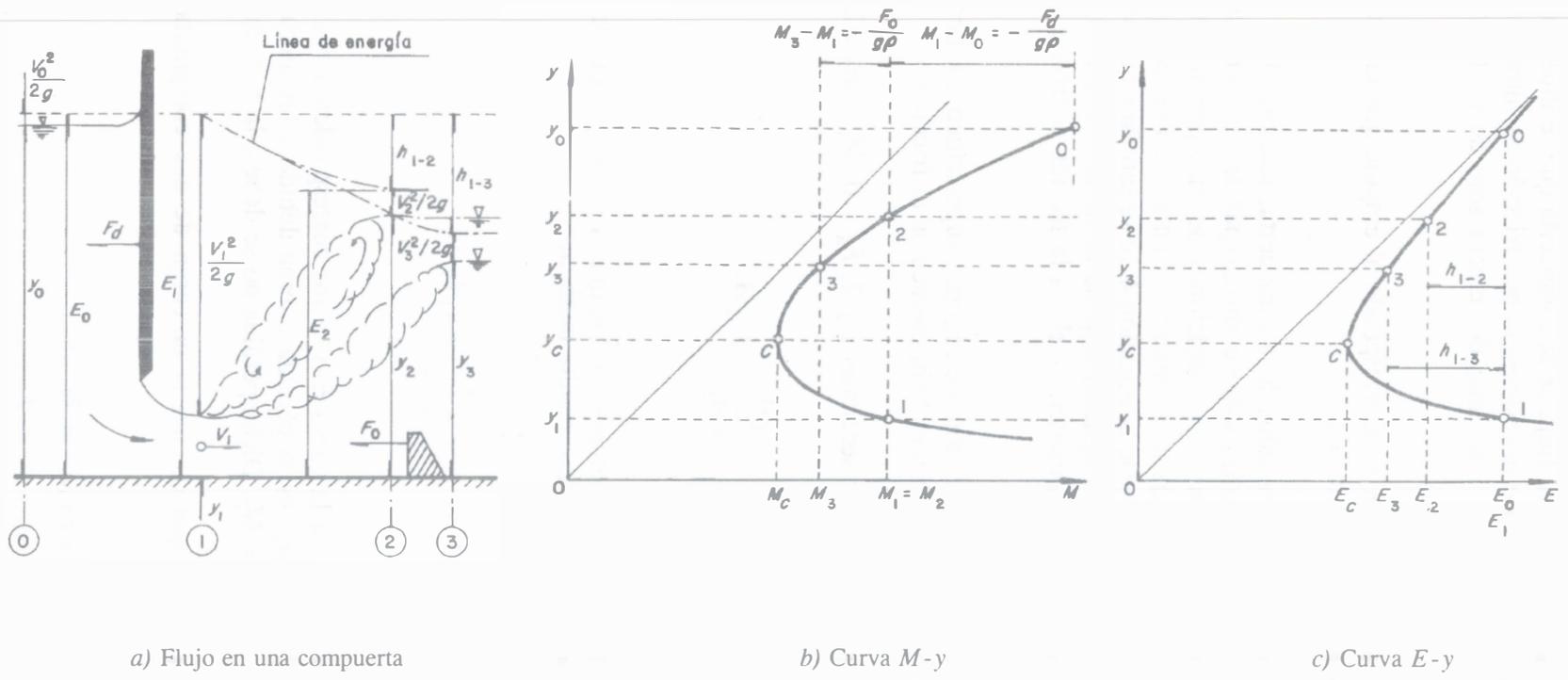


Figura 4.5. Funciones momentum y energía específica del flujo después de una compuerta

A continuación se detallan algunos de los casos particulares que pueden ser tratados con el principio del momentum al aplicarse al flujo de la compuerta que se muestra en la figura 4.5a, en un canal horizontal ($F_c = 0$) donde la resistencia por fricción es muy pequeña ($F_f = 0$), de manera que $F_R = -F_d$ es la fuerza resultante del efecto sólo de obstrucción, en dirección contraria al flujo.

a) Pérdida de energía $h_r = 0$ y $F_d \neq 0$. Corresponde al empuje que la compuerta impone al flujo, como fue tratada en el volumen 1.

La ecuación 4.1c se aplica entre ambos lados de la compuerta, secciones 0 y 1 de la figura 4.5a, y el comportamiento del flujo se visualiza sobre el mismo par de curvas de las figuras b y c. El punto 0 de la curva $M - y$ representa las condiciones de momentum y tirante en régimen subcrítico de la sección aguas arriba de la compuerta; el punto 1, a las condiciones de régimen supercrítico aguas abajo de la misma. De la ecuación 4.1c se satisface que $M_1 - M_0 = -F_d/g\rho$, donde F_d es el empuje total que la compuerta impone al flujo. En la curva $E - y$, el punto 0 corresponde a la sección antes de la compuerta y el 1 a la sección contracta del chorro después de la misma.

b) Pérdida $h_r \neq 0$, $F_R = 0$. Hay un cambio de régimen supercrítico a subcrítico, es decir, un salto hidráulico sobre un canal horizontal sin obstáculos ni fricción.

El cambio de régimen ocurre entre las secciones 1 y 2, $F_R = 0$, $M_1 = M_2$ y la ecuación 4.1b se reduce a

$$\frac{Q^2}{g A_1} + y'_{G1} A_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + y'_{G2} A_2 \quad (4.4a)$$

Para cualquier forma de sección, es siempre posible que $y'_G = k' y$, donde k' es función de la geometría de dicha sección. Por tanto, resulta también

$$\frac{Q^2}{g A_1} + A_1 k'_1 y_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + A_2 k'_2 y_2 \quad (4.4b)$$

Al referir los conjugados y_1 y y_2 a la curva $E - y$, éstos corresponden a energías específicas E_1 y E_2 distintas, cuya diferencia h_{1-2} es la pérdida interna debida a las turbulencias propias del fenómeno cuando $F_R = 0$ y $M_1 = M_2$. Dicha pérdida no se debe a la fricción ya que $F_f = 0$.

La explicación anterior indica que cuando la descarga de una compuerta produce un salto hidráulico ocurre que

$$E_0 = E_1, \text{ pero } M_0 \neq M_1$$

$$M_1 = M_2, \text{ pero } E_1 \neq E_2$$

El salto hidráulico formado entre las secciones 1 y 2 satisface la ecuación 4.4a en el tramo intermedio entre las dos compuertas de la figura 4.3, y obliga a tener valores claramente definidos de M_1 , a través de y_1 y V_1 (o de Q), y de M_2 , a través de y_2 y V_2 (o de Q). Si por algún cambio en el control de aguas abajo y_2 aumenta, y con éste M_2 , el salto se mueve hacia aguas arriba hasta encontrar otra sección en que se satisfaga la condición $M_1 = M_2$, pudiendo llegar al ahogamiento de la descarga de la compuerta. Por el contrario, si y_2 disminuye, y con éste M_2 , el salto se mueve hacia aguas abajo y el flujo supercrítico de la primera compuerta podría llegar a alcanzar a la segunda sin que haya salto. Si la distancia entre las dos compuertas es corta y existe un valor de y_2 que sea el conjugado de y_1 , el salto se forma en cualquier sitio dentro del tramo intermedio sin alcanzar una posición estable, con desplazamientos hacia adelante o hacia atrás. Esto se observa en canales de laboratorio donde la resistencia por fricción no es apreciable. En canales de campo se logra un salto hidráulico más estable cuando dicha resistencia se torna más importante, o bien mediante dispositivos especiales que lo fuerzan cuando esto sea deseable.

- c) Pérdida $h_r \neq 0$, $F_d \neq 0$. Salto hidráulico formado por la intervención de algún obstáculo en el flujo, como un umbral dentado sobre el piso, con o sin pendiente en el canal.

El cambio de régimen ocurre entre las secciones 1 y 3 aunque M_3 sea menor que M_1 , gracias al empuje F_0 ejercido por algún obstáculo o cambio geométrico entre las dos secciones, de modo que

$$-\frac{F_0}{g\rho} = M_3 - M_1$$

con una pérdida $h_{1,3}$ mayor que $h_{1,2}$, tampoco debida a la fricción.

Este fenómeno corresponde al considerado para la obtención de la ecuación 4.1 y en el subcapítulo 4.8 se hace mayor énfasis en el mismo.

La exposición anterior permite llegar a las conclusiones que siguen.

- La ecuación general del momentum 4.1 se aplica igualmente al cambio de régimen de subcrítico a supercrítico o viceversa, haya o no pérdida.
- El cambio de subcrítico a supercrítico ocurre con frecuencia en forma gradual, sin salto y sin pérdida apreciable. El cambio de régimen supercrítico a subcrítico se produce de manera brusca, únicamente a través del salto hidráulico, y con pérdida apreciable.
- El salto hidráulico se produce en el sitio en que se iguala el momentum de las secciones antes y después del mismo. Si el conjugado menor y_1 aumenta, el mayor y_2 disminuye o viceversa. Este hecho es importante en la localización del salto.
- El salto hidráulico se forma en el sitio elegido, con el auxilio de algún obstáculo que lo controle.

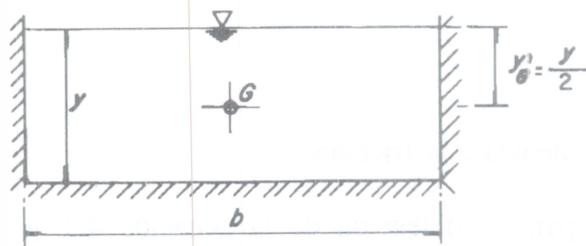
El principio del momentum es aplicable al cálculo del empuje total sobre la compuerta deslizante, la fuerza sobre un escalón o sobre la contracción lateral de las paredes en un canal, como se presenta en el capítulo 8. También se aplica a problemas en que hay pérdida e interviene una fuerza sobre un obstáculo intermedio, como en el flujo a través de las pilas de un puente, de un escalón o de un umbral dentado para forzar la formación del salto hidráulico, y que serán tratados en subcapítulos posteriores.

En la aplicación del principio de la cantidad de movimiento al flujo a superficie libre (principio del momentum) puede parecer que hay incompatibilidad con la de la energía, de la misma manera que en los conductos a presión. Sin embargo, esto se elimina por un análisis cuidadoso del objetivo y aplicabilidad de dicha ecuación.

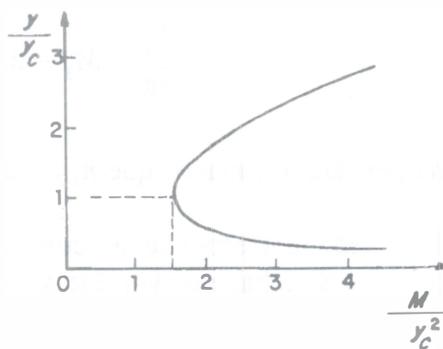
La función momentum en un canal rectangular horizontal adquiere la siguiente forma

$$M = \frac{q^2}{g y} + \frac{y^2}{2}$$

toda vez que $y'_G = y/2$ en la ecuación 4.2b (figura 4.6a), y para un ancho unitario $A = y$, $Q = q$.



a) Sección rectangular



b) Curva adimensional de la función M

Figura 4.6. Forma adimensional de la función momentum en canales rectangulares

Como fue el caso de la energía específica, la función momentum se reduce a una forma adimensional si se divide entre y_c^2 , obteniendo que

$$\frac{M}{y_c^2} = \frac{q^2}{g y y_c^2} + \frac{y^2}{2 y_c^2}$$

De la ecuación 3.18, con $g' = g$, $q^2/g = y_c^3$, y la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{M}{y_c^2} = \frac{1}{y/y_c} + \frac{1}{2} \left[\frac{y}{y_c} \right]^2$$

cuyo lugar geométrico queda representado sobre un plano cartesiano ($M/y_c^2 - y/y_c$), como se muestra en la figura 4.6b, que puede ser usado de la misma manera que la curva ($E/y_c - y/y_c$). Al comparar con la ecuación adimensional de la energía específica (sección 3.3.3), es interesante comprobar que M/y_c^2 es función de y_c/y , pero E/y_c lo es de y/y_c .

4.3 EL SALTO HIDRÁULICO

La evidencia experimental muestra con toda claridad que la transferencia del régimen supercrítico a subcrítico es en forma brusca, acompañada de mucha turbulencia y gran pérdida de energía. Al entrar el agua a la zona del resalto, se reduce rápidamente la gran velocidad del flujo, ocurre un incremento brusco del tirante que virtualmente rompe el perfil del flujo, y se produce un estado de gran turbulencia y pérdida de energía propia del fenómeno. El salto hidráulico ocurre con fuertes pulsaciones, como si el agua entrara en ebullición, indicación visible de la inclusión de aire. Después de un incremento irregular y brusco de la superficie del agua, la energía específica final es con frecuencia la apropiada para establecer un tirante casi igual al normal en un tramo relativamente corto del canal aguas abajo, el frente turbulento se regulariza de manera inmediata y continúa libremente en régimen subcrítico.

La rápida variación del tirante toma lugar en un tramo relativamente corto; con ella, la pérdida de fricción en la frontera es relativamente pequeña y, en muchos casos, insignificante, si se compara con la pérdida por la expansión turbulenta y desaceleración de la corriente de gran velocidad desarrollada en el fenómeno.

El salto hidráulico constituye la única manera posible de cambiar el régimen supercrítico a subcrítico. Con frecuencia ocurre al pie de la descarga de una compuerta reguladora, de un cimacio, o de un cambio de pendiente como el de la figura 4.2.

Algunos autores consideran más adecuado el nombre de onda estacionaria que el de salto hidráulico. Para ello argumentan dos razones: en primer lugar, las partículas de agua tienen un movimiento como el de una onda giratoria abajo del remolino superficial que se forma (figura 4.3); en segundo lugar, el remolino es estacionario, debido a que la corriente misma en el extremo aguas arriba del salto arremete constantemente contra la superficial que regresa, sin existir movimiento del conjunto hacia aguas arriba; esto es, la velocidad de viaje de la onda hacia aguas arriba es igual a la velocidad del flujo hacia aguas abajo.

Además de su gran mérito como disipador natural de energía, el salto hidráulico tiene muchos otros usos prácticos, entre los cuales se pueden mencionar:

- a) Prevención o confinamiento de la socavación aguas abajo de las estructuras hidráulicas donde sea necesario disipar energía.

- b) El mezclado eficiente de líquidos o de sustancias químicas usadas en la purificación de aguas, debido a la naturaleza fuertemente turbulenta del fenómeno. Este atributo tiene ventajas particulares cuando interviene la dilución de sustancias.
- c) La recuperación de carga aguas abajo de un aforador y el mantenimiento de niveles altos del agua en un canal de riego o de distribución.
- d) El aireamiento del agua destinada al abastecimiento de ciudades.
- e) Remoción de burbujas del aire atrapado en conductos abovedados parcialmente llenos y la prevención de su atrape.
- f) La identificación de condiciones especiales de flujo, como la presencia del supercrítico o la existencia de una sección de control para una medición económica del gasto.

Debido a que en principio se desconoce la pérdida de energía asociada con el resalto, la aplicación de la ecuación de energía no proporciona un medio adecuado de análisis. Por otra parte, debido también a la gran diferencia de la velocidad media en sus secciones extremas, es más adecuada la aplicación del principio del momentum. La concordancia general entre los resultados teóricos y los experimentales confirman la seguridad del análisis general del fenómeno con base en este principio.

Cuando el salto hidráulico se produce en un canal horizontal prismático, sin obstáculos y obstrucciones, donde la fuerza de fricción es despreciable, es válida la ecuación 4.4a de igualdad del momentum entre las dos secciones que lo limitan. El fenómeno así formado se conoce como salto hidráulico clásico o convencional y en el siguiente subcapítulo se tratan las distintas ecuaciones para obtener los tirantes conjugados.

4.4 TIRANTES CONJUGADOS DEL RESALTO EN CANALES HORIZONTALES

4.4.1 Solución general

La ecuación 4.4 es la general del salto hidráulico en un canal horizontal o de pendiente pequeña, cualquiera que sea la forma de la sección, pero es posible desarrollar ecuaciones particulares para las secciones más comunes, que aunadas a sus representaciones gráficas permiten el cálculo directo del tirante conjugado mayor a partir de las condiciones en la sección de conjugado menor o viceversa.

En canales de cualquier sección, el cálculo de los tirantes conjugados del resalto se efectúa, de modo general, por medio del método de aproximación de Newton-Raphson. Conocido el momentum M_0 en uno de sus extremos (aguas arriba o aguas abajo del salto), el tirante del otro extremo en cualquier iteración i es

$$(y)_{i+1} = (y)_i - \frac{(M)_i - M_0}{\left[A - \frac{Q^2 T}{g A^2} \right]_i} \quad (4.5)$$

donde el numerador del último término es la diferencia entre el momentum encontrado en la iteración i y el conocido, y el denominador es dM/dy , como se demostró con la ecuación 4.3 ($\cos \theta = 1$). Se elige el tirante inicial $y_0 > y_c$ si se desea el conjugado mayor, o $y_0 < y_c$ si es el menor.

4.4.2 Ecuación general

La ecuación 4.4b se escribe mejor en la forma

$$k'_2 A_2 y_2 - k'_1 A_1 y_1 - \frac{Q^2}{g} \left[\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right] = 0 \quad (4.6a)$$

Multiplicando la ecuación anterior por A_2 , se obtiene

$$k'_2 A_2^2 y_2 - k'_1 A_1 A_2 y_1 - \frac{Q^2}{g} \left[\frac{A_2}{A_1} - 1 \right] = 0 \quad (4.6b)$$

o bien, al dividir entre $k'_2 A_1^2 y_1$, y con $F_1^2 = Q^2 T_1 / g A_1^3$ resulta

$$\frac{A_2}{A_1} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{y_2}{y_1} - \frac{k'_1}{k'_2} \right] - \frac{F_1^2}{k'_2} \frac{A_1}{T_1 y_1} \left[\frac{A_2}{A_1} - 1 \right] = 0 \quad (4.6c)$$

Las ecuaciones 4.6 b y c son adecuadas cuando se conocen las condiciones del régimen supercrítico antes del salto: F_1 y y_1 , quedando el tirante y_2 después del mismo en términos de dichos valores.

De la misma manera, la ecuación 4.6a se multiplica por A_1 y se obtiene

$$k'_2 A_1 A_2 y_2 - k'_1 A_1^2 y_1 - \frac{Q^2}{g} \left[1 - \frac{A_1}{A_2} \right] = 0 \quad (4.6d)$$

o bien, al dividir la ecuación anterior entre $k_1' A_2^2 y_2$, con $F_2^2 = Q^2 T_2 / g A_2^3$, resulta

$$\frac{A_1}{A_2} \left[\frac{k_2'}{k_1'} - \frac{A_1}{A_2} \frac{y_1}{y_2} \right] - \frac{F_2^2}{k_1'} \frac{A_2}{T_2 y_2} \left[1 - \frac{A_1}{A_2} \right] = 0 \quad (4.6e)$$

Las ecuaciones 4.6d y e son en cambio adecuadas cuando se conocen las condiciones del régimen subcrítico después del salto: F_2 y y_2 , quedando el tirante y_1 antes del mismo en términos de dichos valores.

A continuación se presentan soluciones particulares para las secciones más comunes (referencia 1).

4.4.3 Sección rectangular

a) Régimen supercrítico conocido. Para esta sección, de ancho b (figura 4.6a), se había establecido que

$$A = b y$$

$$k' = \frac{1}{2}$$

y la ecuación 4.4b resulta

$$M = \frac{Q^2}{g b y} + \frac{b y^2}{2} \quad (4.7)$$

De la ecuación 4.6c también se obtiene

$$\frac{y_2}{y_1} \left[\left[\frac{y_2}{y_1} \right]^2 - 1 \right] - 2 F_1^2 \left[\frac{y_2}{y_1} - 1 \right] = 0$$

Toda vez que

$$\left[\frac{y_2}{y_1} \right]^2 - 1 = \left[\frac{y_2}{y_1} + 1 \right] \left[\frac{y_2}{y_1} - 1 \right]$$

la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2 F_1^2 = 0 \quad (4.8a)$$

cuya solución es

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right) \quad (4.8b)$$

conocida como ecuación de Belanger.

Con la ecuación 4.8b se calcula el tirante conjugado mayor y_2 , conocido el menor y_1 y el número de Froude F_1 antes del salto.

b) Régimen subcrítico conocido. De la ecuación 4.6e se obtiene ahora

$$\frac{y_1}{y_2} \left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 \right] - 2 F_2^2 \left[1 - \frac{y_1}{y_2} \right] = 0$$

Simplificando en la misma forma que antes, resulta

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 + \frac{y_1}{y_2} - 2 F_2^2 = 0 \quad (4.9a)$$

cuya solución es

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 F_2^2} - 1 \right) \quad (4.9b)$$

Con la ecuación 4.9b se calcula el tirante conjugado menor y_1 , conocido el mayor y_2 y el número de Froude F_2 después del salto.

Las figuras 4.7 y 4.8 muestran las curvas que representan a las ecuaciones 4.8 y 4.9 respectivamente, con las cuales se obtienen de manera directa los tirantes conjugados en canales rectangulares.

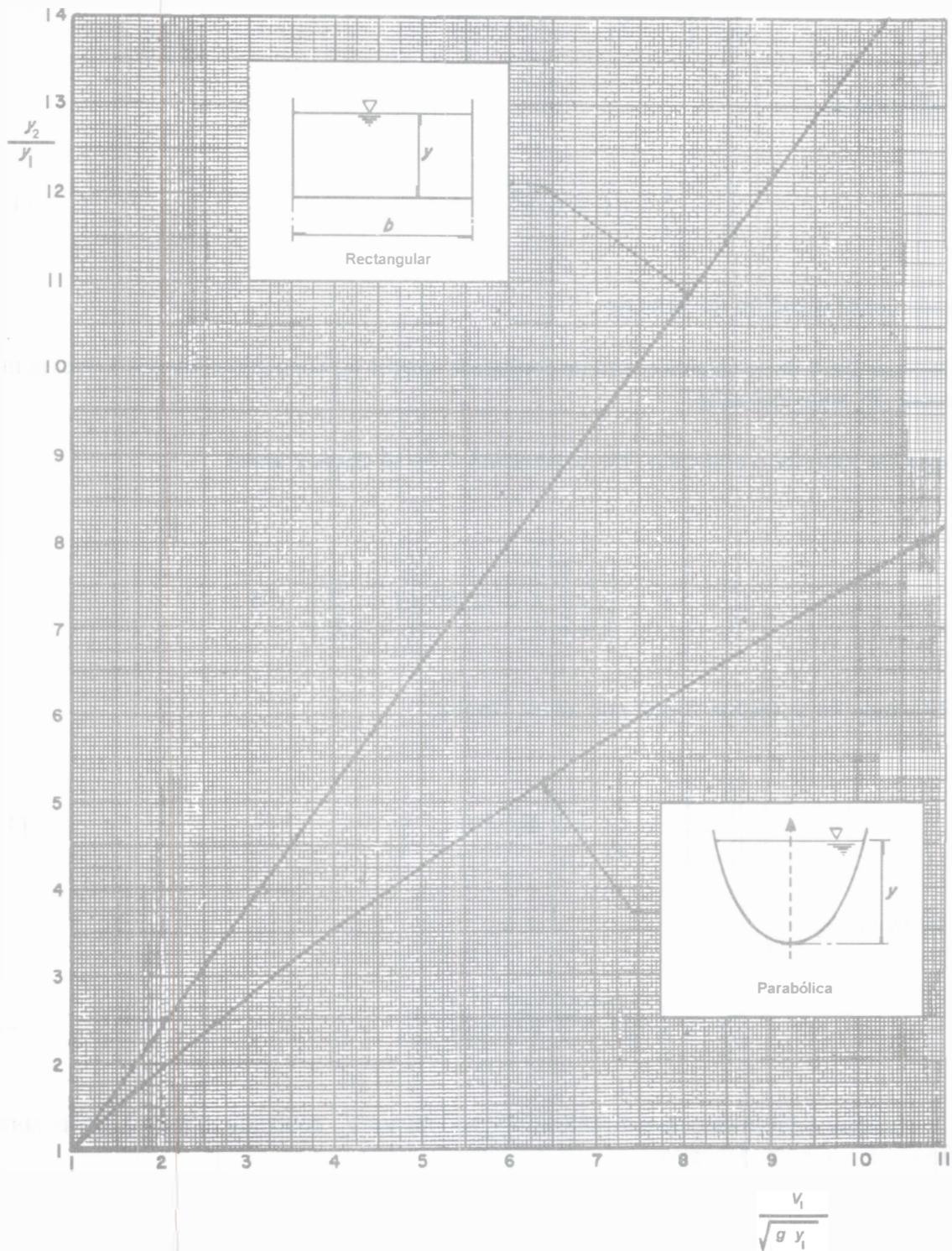


Figura 4.7. Salto hidráulico en canales de sección rectangular y parabólica. Determinación del tirante subcrítico, conocido el régimen supercrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

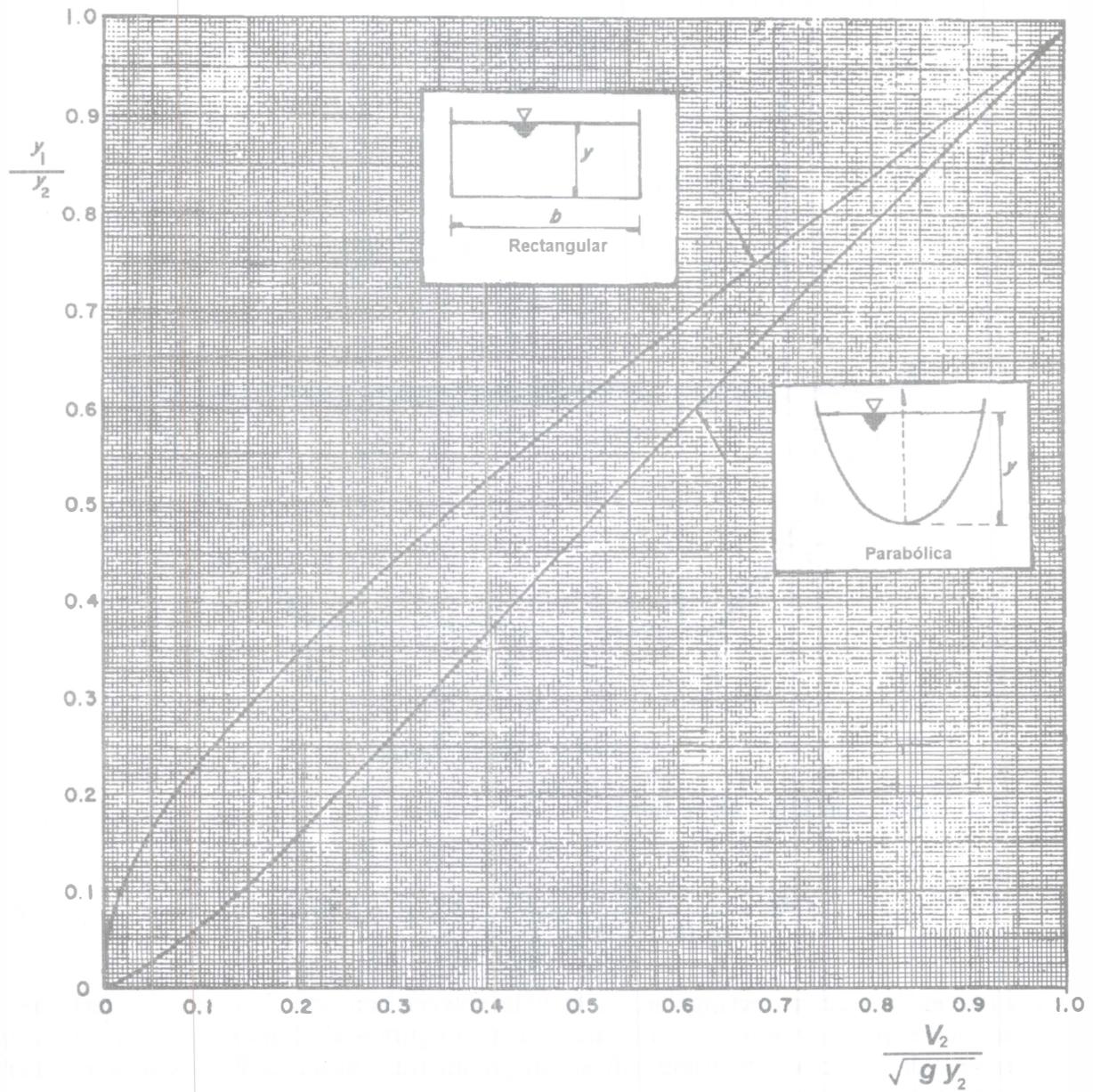


Figura 4.8. Salto hidráulico en canales de sección rectangular y parabólica. Determinación del tirante supercrítico, conocido el régimen subcrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

4.4.4. Sección trapecial

a) Régimen supercrítico conocido. Para una sección, asimétrica de taludes k_1 y k_2 (figura 4.9), se tiene los siguientes valores

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$A = by + ky^2$$

$$k' = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{b}{b + ky} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{by}{A}$$

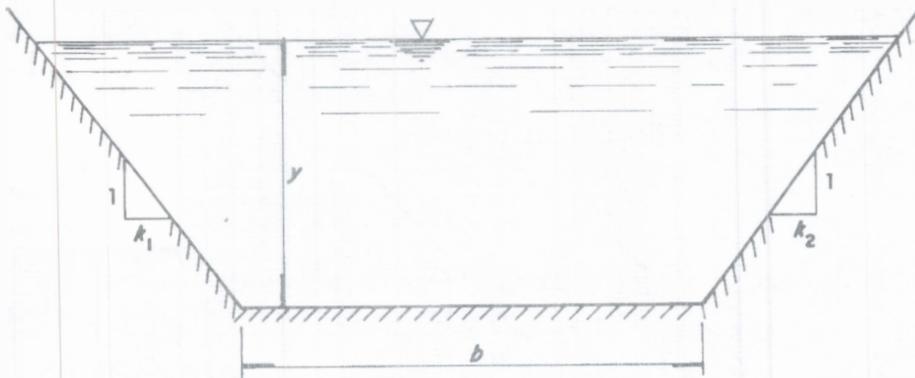


Figura 4.9. Sección trapecial

Por tanto, en la ecuación 4.4b se tiene

$$M = \frac{Q^2}{g (by + ky^2)} + (2ky + 3b) \frac{y^2}{6} \quad (4.10)$$

Igual que en la sección rectangular, es factible obtener una ecuación de y_2 en términos del número de Froude F_1 y de y_1 , como se muestra en la figura 4.20. Sin embargo, para efectos de la presentación gráfica es preferible utilizar otro parámetro, función de F_1 , que separa las curvas y hace más clara su lectura.

Por tanto, sustituyendo en la ecuación 4.6b se tiene

$$\frac{(by_2 + ky_2^2)^2 y_2}{3} + \frac{b(by_2 + ky_2^2) y_2^2}{6} - \frac{(by_1 + ky_1^2)(by_2 + ky_2^2) y_1}{3} - \frac{b(by_2 + ky_2^2) y_1^2}{6} - \frac{Q^2}{g} \left[\frac{(by_2 + ky_2^2) - (by_1 + ky_1^2)}{by_1 + ky_1^2} \right] = 0$$

Al multiplicar la ecuación por $3/(k^2 y_1^5)$ y simplificar, designando por

$$F_{M1} = \frac{Q}{\sqrt{g} k y_1^{5/2}}$$

$$t_1 = \frac{b}{k y_1}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^5 + \frac{5}{2} t_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^4 + \frac{3}{2} t_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 - \left(\frac{3}{2} t_1 + \frac{3 F_{M1}^2}{t_1 + 1} + 1\right) \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \\ - \left(\frac{3}{2} t_1^2 + t_1 + \frac{3 t_1 F_{M1}^2}{t_1 + 1}\right) \frac{y_2}{y_1} + 3 F_{M1}^2 = 0 \end{aligned}$$

La solución trivial es $y_2/y_1 = 1$, por tanto, el grado de la ecuación se reduce al dividir entre

$$\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right), \text{ resultando finalmente}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^4 + \left[\frac{5}{2} t_1 + 1\right] \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 + \left[\frac{3}{2} t_1^2 + \frac{5}{2} t_1 + 1\right] \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \\ + \left[\frac{3}{2} t_1^2 + t_1 - \frac{3 F_{M1}^2}{t_1 + 1}\right] \left(\frac{y_2}{y_1}\right) - 3 F_{M1}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 es de cuarto grado, con una sola raíz positiva útil, cuyo valor permite obtener al conjugado mayor, cuando se conocen el menor, el parámetro de Massey F_{M1} y t_1 . Para simplificar la solución se recurre a la figura 4.10, que muestra la representación gráfica de la ecuación 4.11 (referencia 1).

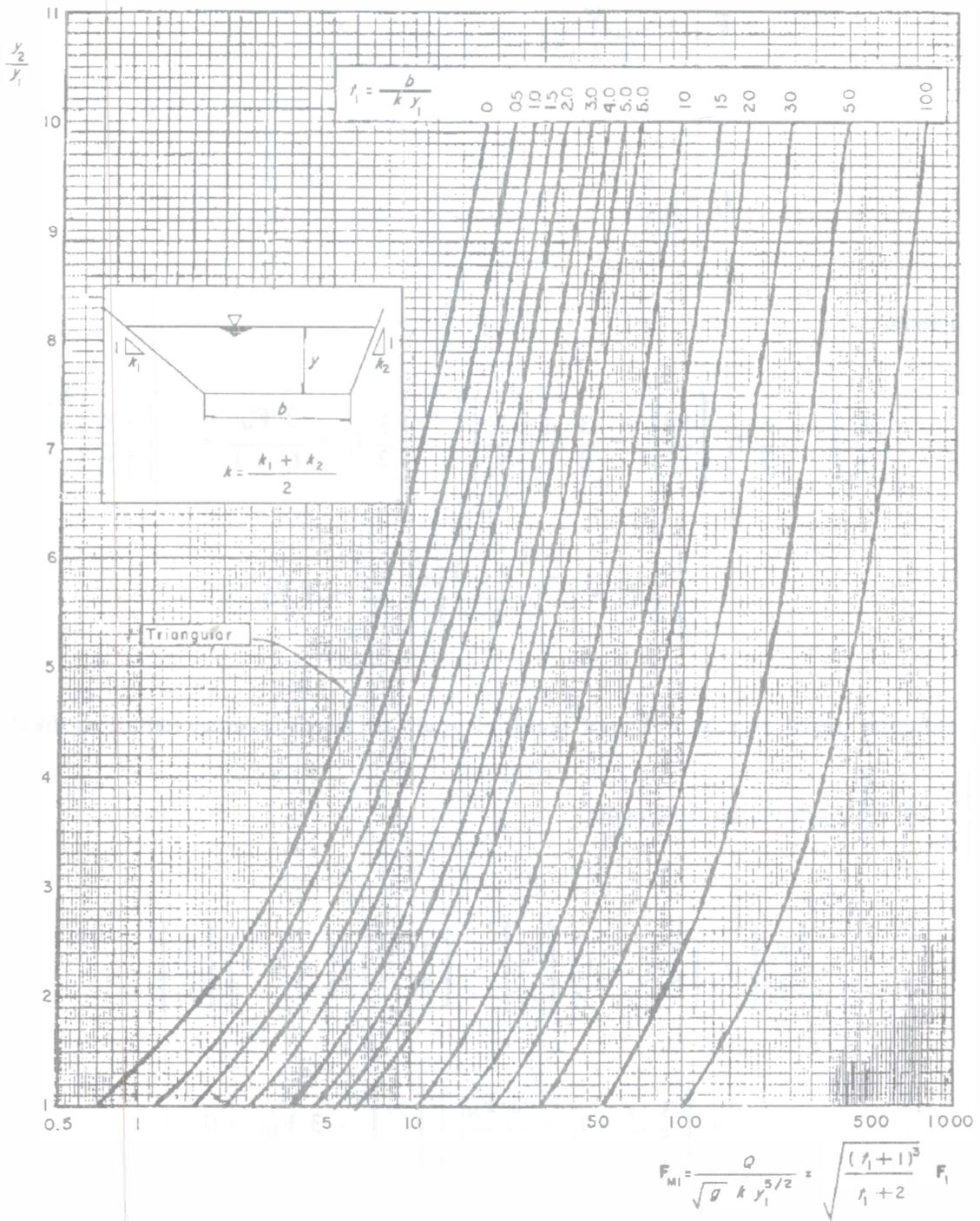


Figura 4.10. Salto hidráulico en canales de sección trapecial (triangular incluida). Determinación del tirante subcrítico, conocido el régimen supercrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

Siendo en lo general que

$$t_i = \frac{b}{k y_i} \quad (4.12)$$

se puede demostrar que

$$\mathbf{F}_{Mi} = \frac{Q}{\sqrt{g} k y_i^{5/2}} = \frac{(t_i + 1)^{3/2}}{(t_i + 2)^{1/2}} \mathbf{F}_i \quad (4.13)$$

donde \mathbf{F}_i es el número de Froude de la sección. Por ejemplo, en la ecuación 4.11, el subíndice i es 1 en las dos ecuaciones anteriores.

b) Régimen subcrítico conocido. Para determinar las condiciones del régimen supercrítico antes del salto, conocidas las del subcrítico, se efectúan sustituciones y desarrollos análogos con la ecuación 4.6d hasta obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^4 + \left(\frac{5}{2} t_2 + 1\right) \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2} t_2^2 + \frac{5}{2} t_2 + 1\right) \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 \\ + \left(\frac{3}{2} t_2^2 + t_2 - \frac{3 \mathbf{F}_{M2}^2}{t_2 + 1}\right) \frac{y_1}{y_2} - 3 \mathbf{F}_{M2}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde t_2 y \mathbf{F}_{M2} se obtienen de las ecuaciones 4.12 y 4.13 con $i = 2$.

La solución gráfica de la ecuación 4.14 se muestra en la figura 4.11 para facilitar el cálculo (referencia 1).

4.4.5 Secciones abovedadas

Como se ha indicado en la sección 3.5.3, inciso c, para cualquier gasto que fluya en todo conducto abovedado hay un tirante crítico menor que su altura total. Luego, cualquiera que sea el gasto, la función momentum adopta el valor mínimo para $y = y_c$ y los demás corresponden a las dos ramas de la curva M - y (figura 4.5b). Para el régimen supercrítico, la rama inferior se desarrolla completa toda vez que, para $y = 0$, es siempre $M = \infty$; para el subcrítico, la superior se desarrolla siempre en parte. Al llenarse el conducto se produce un valor finito de M , de magnitud

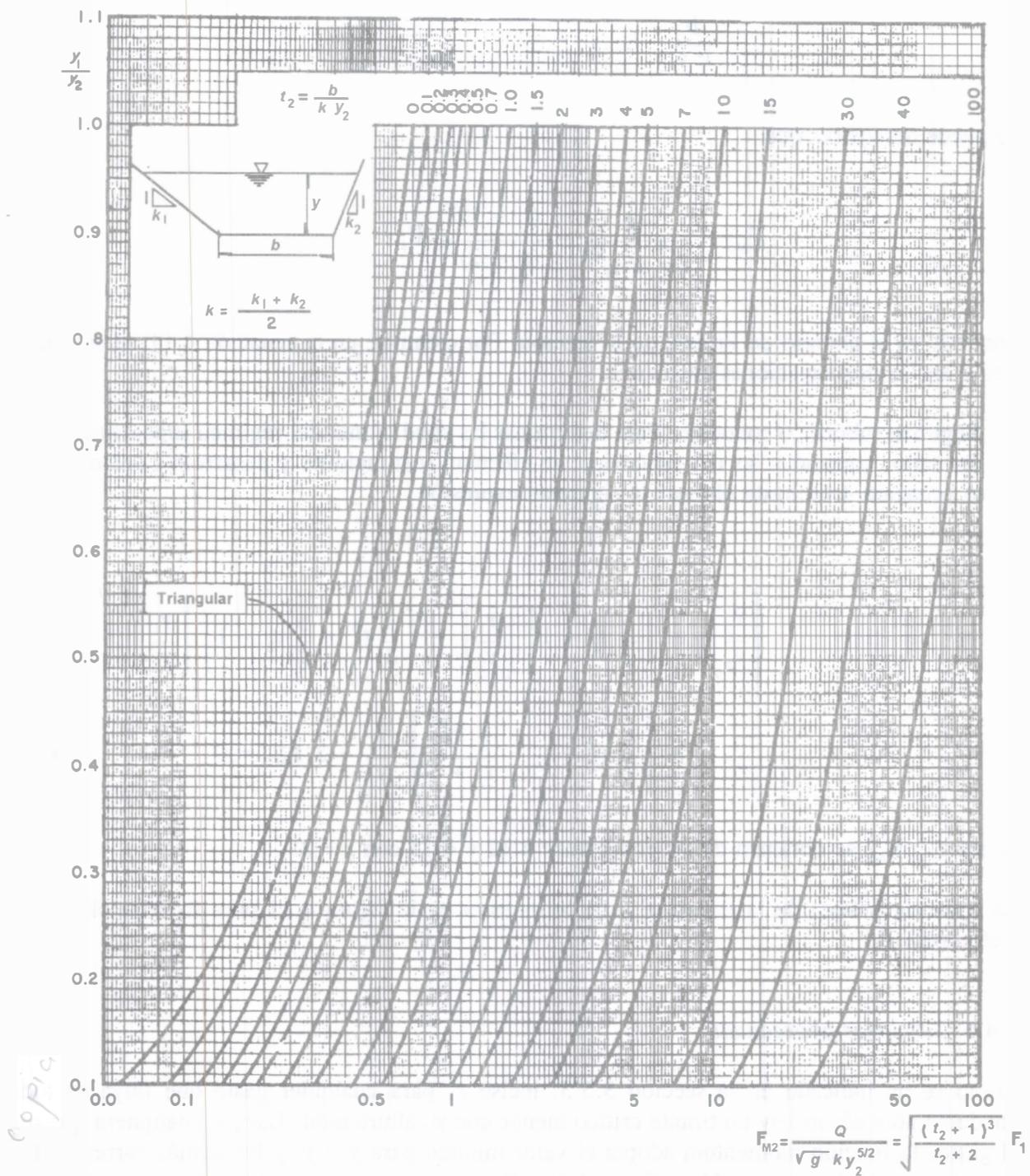


Figura 4.11. Salto hidráulico en canales de sección trapezoidal (triangular incluida). Determinación del tirante supercrítico, conocido el régimen subcrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

$$M_0 = \frac{Q^2}{g A_0} + y'_{G0} A_0$$

donde

- h_0 altura total de la sección del conducto,
- y'_{G0} profundidad del centro de gravedad de la sección totalmente llena,
- A_0 área de la sección cuando $y = h_0$,
- M_0 momentum al llenarse el conducto.

Cuando el flujo supercrítico aguas arriba del salto adopta valores de M_1 menores o iguales que M_0 , se forma resalto completo con tirante conjugado y_2 menor o igual que h_0 respectivamente. Sin embargo, es evidente que en régimen supercrítico también puede adoptar valores mayores que M_0 , de modo que para ocurrir el resalto ($M_1 = M_2$), es necesario que también M_2 sea mayor que M_0 , lo que es posible sólo si el término $y'_G A$ de la ecuación 4.2 es superior al que corresponde al conducto lleno ($y'_{G0} A_0$). Esto es, debe haber una presión sobre la bóveda capaz de igualar al momentum del flujo que antecede al salto con el fin de satisfacer la condición básica: igualdad de momentum en las dos secciones terminales.

El resalto en estas condiciones es incompleto; esto es, en la sección inicial hay superficie libre y en la final el conducto está lleno y sometido a una carga de presión H (figura 4.12), de manera que la igualdad de momentum (ecuación 4.4b) resulta como sigue

$$\frac{Q^2}{g A_1} + k'_1 y_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_0} + H A_0 \quad (4.15)$$

donde H es la única incógnita.

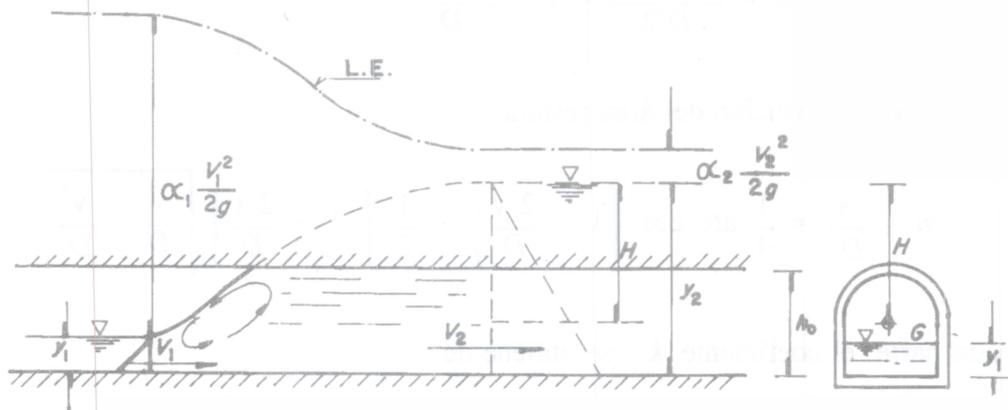


Figura 4.12. Salto hidráulico incompleto en un conducto abovedado

Kalinske y Robertson, Ibañez y Fernández (referencia 2) observaron experimentalmente que cuando el conducto es llenado por el resalto, el enorme arrastre de aire del remolino superficial produce burbujas que al situarse en la clave superior disminuyen la sección teórica aumentando la velocidad final. Este fenómeno hace necesario corregir la ecuación 4.15 en la forma

$$\frac{Q^2}{g A_1} + k'_1 y_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_0} (1 + \delta) + H A_0 \quad (4.16)$$

donde

$$\delta = 0.0066 (F_1 - 1)^{1.4}$$

y F_1 el número de Froude de la sección inicial del salto. La ecuación 4.16 se aplica a las secciones circular y herradura, pero su uso se extiende a otras similares.

4.4.6 Sección circular

En un conducto de sección circular parcialmente lleno, el área hidráulica para cualquier valor del tirante, de la figura 4.13 y la tabla 1.2, es

$$A = (\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) \frac{D^2}{4}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{2 \sqrt{D y - y^2}}{D} = 2 \sqrt{\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D}\right)^2} = 2 \left(\frac{y}{D}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{y}{D}\right)^{1/2} \\ \cos \theta &= \frac{D/2 - y}{D/2} = 1 - 2 \frac{y}{D} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación del área resulta

$$m = \frac{A}{D^2} = \frac{1}{4} \text{arc cos} \left[1 - \frac{2y}{D} \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2y}{D} \right] \sqrt{\frac{y}{D} - \frac{y^2}{D^2}} \quad (4.17)$$

Por otra parte, el coeficiente k' se obtiene de

$$k'y = \bar{y} - \left[\frac{D}{2} - y \right] = \bar{y} - \frac{D}{2} \cos \theta$$

donde

$$\bar{y} = \frac{2 R^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{3 A} = \frac{D^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{12 A} = \frac{2 D \left(\frac{y}{D} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{y}{D} \right)^{3/2}}{3 m}$$

Esto es

$$k'y = \frac{D^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{12 A} - \frac{D}{2} \cos \theta = y - \frac{D}{2} + \frac{2D \left(\frac{y}{D} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{y}{D} \right)^{3/2}}{3 m}$$

Por tanto, se tiene

$$k' = 1 - \frac{1}{2} \frac{D}{y} + \frac{2 \left(1 - \frac{y}{D} \right)^{3/2} \left(\frac{y}{D} \right)^{1/2}}{3 m} \quad (4.18)$$

y con ello

$$A'k'y = \frac{D^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{12} + \frac{D^3}{8} (\operatorname{sen} \theta \cos \theta - \theta) \cos \theta$$

$$A'k'y = \frac{D^3}{24} (2 \operatorname{sen}^3 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 3 \theta \cos \theta)$$

O bien, con $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$, también se obtiene

$$A'k'y = \frac{D^3}{24} (3 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta - 3 \theta \cos \theta)$$

Por tanto, en la ecuación 4.4b el momentum es

$$M = \frac{Q^2}{g (\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) D^2/4} + \frac{D^3}{24} (3 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta - 3 \theta \cos \theta) \quad (4.19)$$

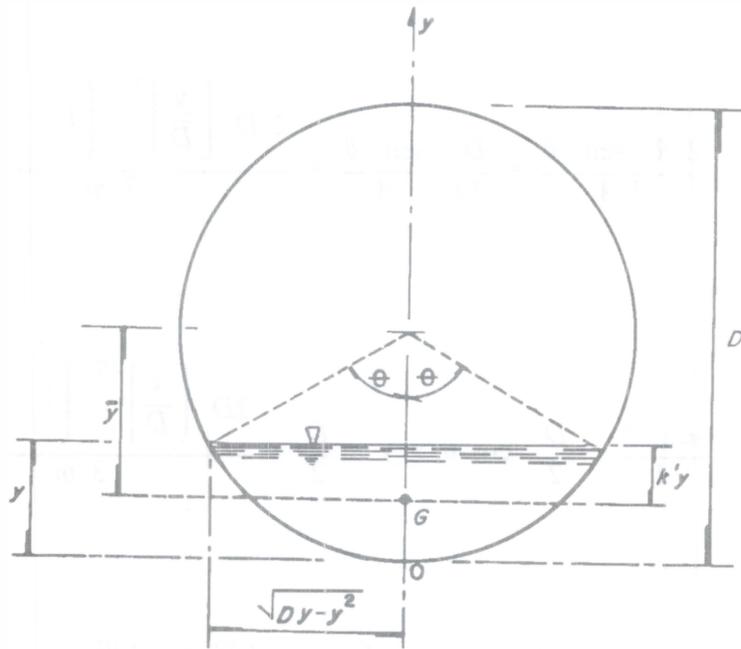


Figura 4.13. Sección circular

a) Régimen supercrítico conocido. De la ecuación 4.6b se tiene

$$m_2^2 D^4 k_2' y_2 - m_1 m_2 D^4 k_1' y_1 = \frac{Q^2}{g} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1} \right)$$

Al dividir entre y_1^5 , resulta

$$\frac{Q^2}{g y_1^5} = \frac{m_1 m_2 k_2' \left(\frac{y_2}{y_1} \right) - m_1^2 k_1'}{\left(\frac{y_1}{D} \right)^4 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right)} \quad (4.20)$$

donde m_1 , m_2 , k_1' y k_2' están dados por las ecuaciones 4.17 y 4.18, eligiendo para y el subíndice que corresponda, esto es, y_1 si se trata de m_1 y k_1' , y_2 si se trata de m_2 y k_2' .

Straub (referencia 3), en 1978, determinó que el número de Froude aguas arriba se puede aproximar al dado por la ecuación

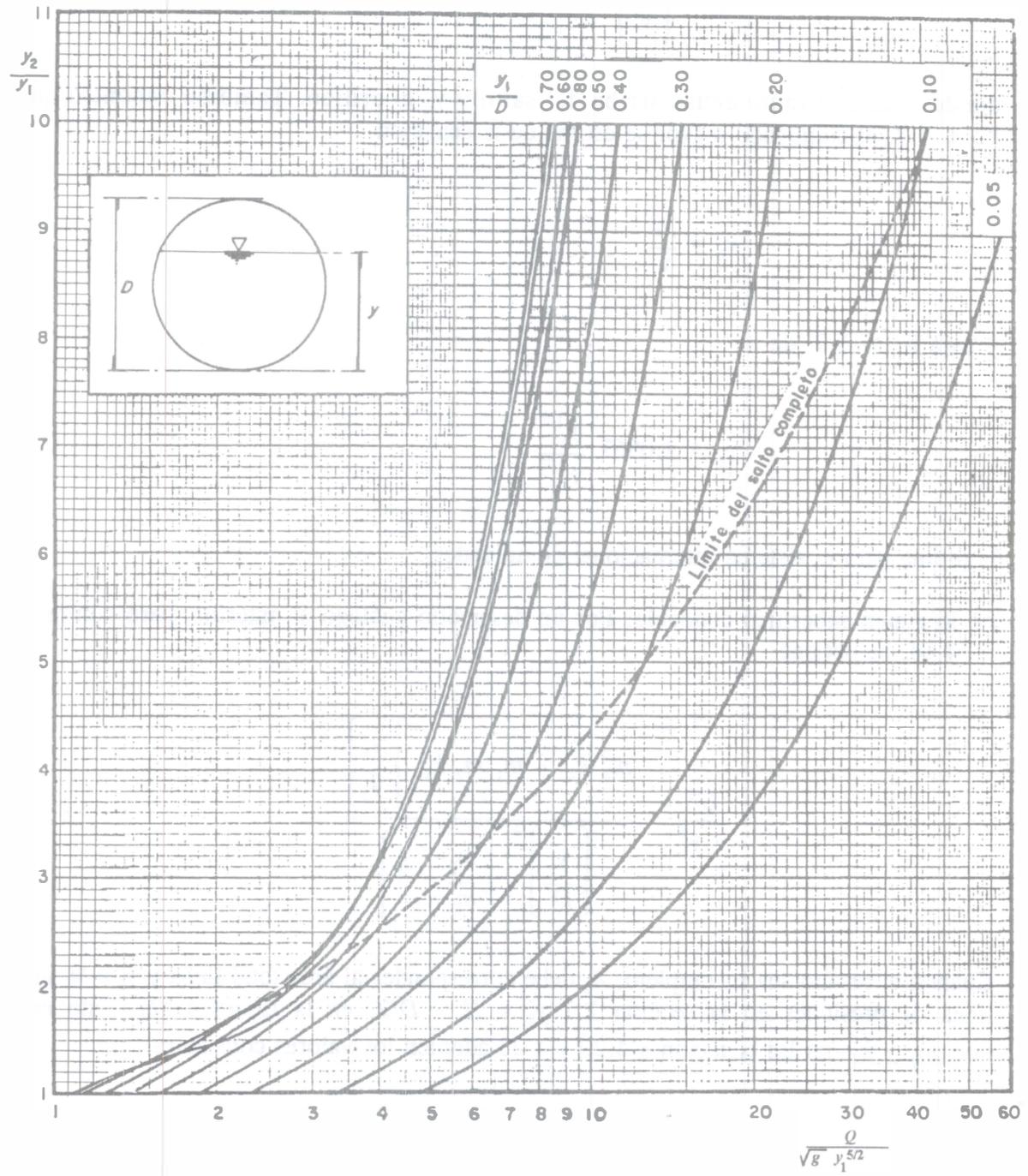


Figura 4.14. Salto hidráulico en canales de sección circular. Determinación del tirante subcrítico, conocido el régimen supercrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

$$F_1 = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{1.93} \quad (4.21)$$

donde y_1 es el tirante aguas arriba del salto y y_c el crítico. También encontró que, para $F_1 < 1.7$, el conjugado mayor se estima de la ecuación

$$y_2 = \frac{y_c^2}{y_1} \quad (4.22a)$$

y para $F_1 > 1.7$, de

$$y_2 = 1.0867 \frac{y_c^{1.8}}{y_1^{0.73}} \quad (4.22b)$$

la última para el sistema internacional de unidades.

b) Régimen subcrítico conocido. Por un desarrollo análogo al anterior, pero con la ecuación 4.6d, se obtiene

$$\frac{Q^2}{g y_2^5} = \frac{m_2^2 k_2' - m_1 m_2 k_1' \left(\frac{y_1}{y_2} \right)}{\left(\frac{y_2}{D} \right)^4 \left[\frac{m_2}{m_1} - 1 \right]} \quad (4.23)$$

Cuando el resalto sea incompleto, A_2 debe corresponder al área total llena y y_2 a la altura de la línea de presiones en la sección 2 ($y_2 = H + D/2$, en la figura 4.12). Esto equivale a que m_2 y k_2' en las ecuaciones 4.20 y 4.23 adopten los valores constantes

$$m_2 = \frac{\pi}{4} \quad (4.24)$$

$$k_2' = 1 - 0.5 (D/y_2) \quad (4.25)$$

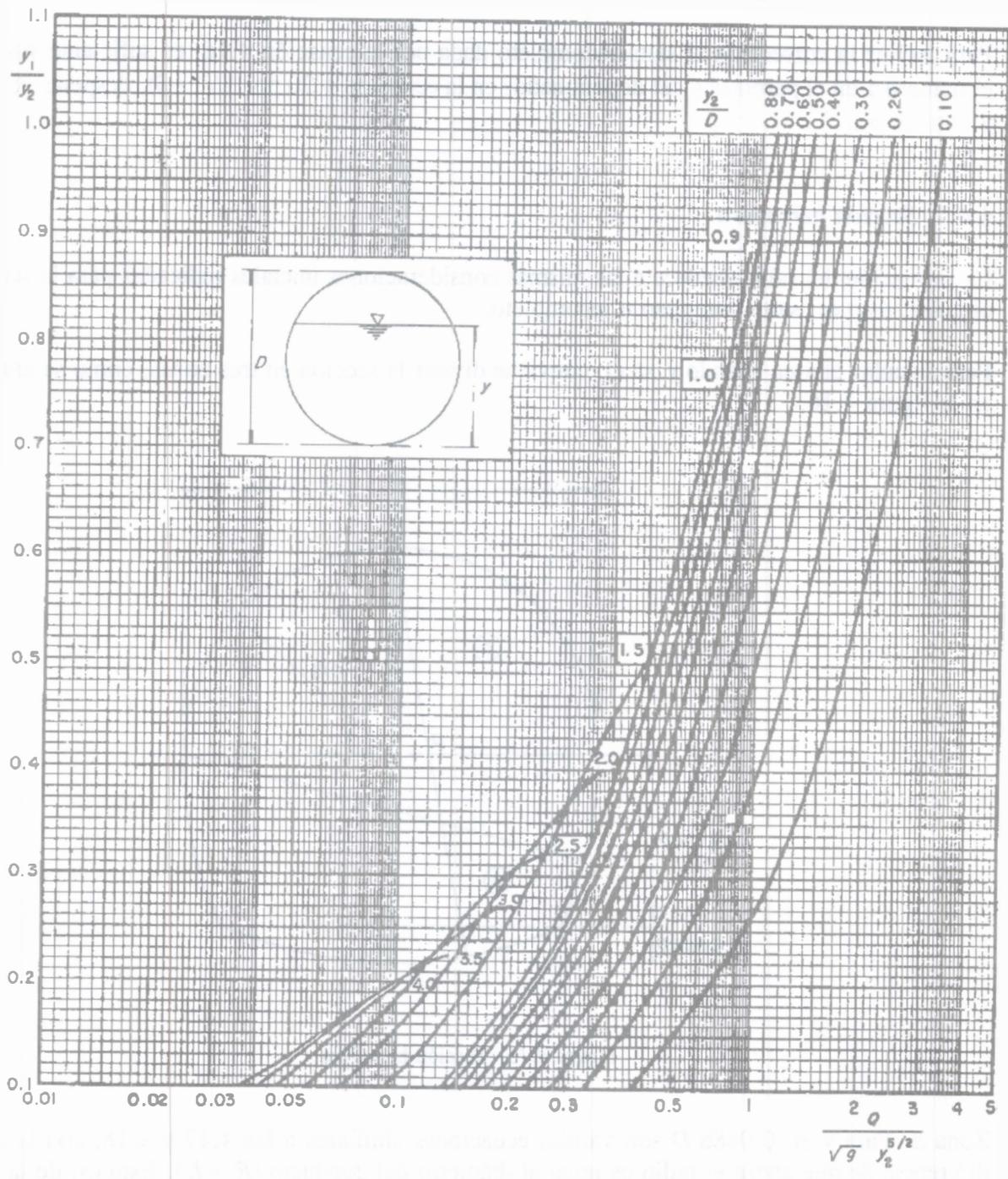


Figura 4.15. Salto hidráulico en canales de sección circular. Determinación del tirante supercrítico, conocido el régimen subcrítico, según Sotelo y Rodríguez(referencia 1)

Las figuras 4.14 y 4.15 permiten una solución gráfica sencilla para los casos antes analizados, donde se utiliza el parámetro $Q/\sqrt{g} y^{5/2}$ en lugar del número de Froude (referencia 1), por las mismas razones expuestas en el caso de la sección trapecial y por sencillez en el cálculo.

Para incluir la corrección al salto incompleto dada por la ecuación 4.16, es suficiente sustituir el número 1 en el paréntesis del denominador en la ecuación 4.20 por $1/(1+\delta)$, despejar $k'_2 y_2$ y obtener y_2 .

4.4.7 Sección herradura

La formación del salto obedece a las mismas consideraciones iniciales indicadas para la sección circular, esto es, salto completo e incompleto.

Para calcular el área cuando $y < D$, conviene dividir la sección en tres zonas, como se muestra en la figura 4.16.

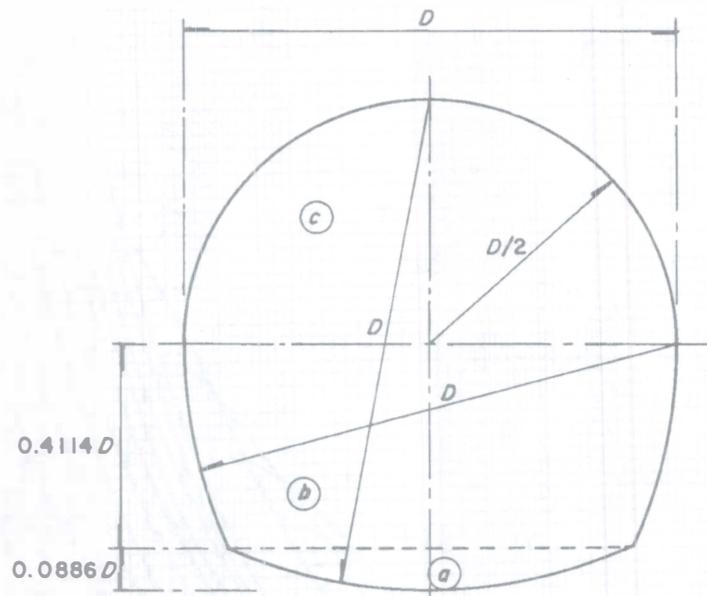


Figura 4.16. Sección herradura

Zona *a*. Para $y \leq 0.0886 D$ son válidas ecuaciones similares a las 4.17 y 4.18, con la única diferencia de que ahora el radio es igual al diámetro del conducto ($R = D$). Esto es, de la tabla 1.2 se tiene

$$m_a = \frac{A_a}{D^2} = \arccos \left[1 - \frac{y}{D} \right] - 2 \left[1 - \frac{y}{D} \right] \sqrt{\frac{y}{2D} - \frac{y^2}{4D^2}} \quad (4.26)$$

$$k'_a = 1 - \frac{D}{y} + \frac{2 \left[1 - \frac{y}{2D} \right]^{3/2} \left[\frac{y}{2D} \right]^{1/2}}{\frac{3}{4} m_a} \quad (4.27)$$

cuando $y = 0.0886 D$, $m_a = 0.04906$ y $k'_a = 0.40203$.

Zona *b*. Para $0.886 D \leq y \leq 0.5 D$, el área hidráulica y el coeficiente k'_b son ahora

$$m_b = \frac{A_b}{D^2} = 0.9366240398 - \frac{y}{D} - \left[0.5 - \frac{y}{D} \right] \sqrt{0.75 + \frac{y}{D} - \left[\frac{y}{D} \right]^2} - \text{arc sen} \left[0.5 - \frac{y}{D} \right] \quad (4.28)$$

$$k'_b = \frac{1}{m_b \left[\frac{y}{D} \right]} \left\{ 0.9366240398 \frac{y}{D} - 0.5 \left[\frac{y}{D} \right]^2 - 0.9107993196 + \frac{1}{3} \left[2.25 + \left[\frac{y}{D} \right]^2 - \frac{y}{D} \right] \sqrt{0.75 + \frac{y}{D} - \left[\frac{y}{D} \right]^2} + \left[0.5 - \frac{y}{D} \right] \text{arc sen} \left[0.5 - \frac{y}{D} \right] \right\} \quad (4.29)$$

Zona c. Para $0.5 \leq y \leq D$, se tiene

$$m_c = \frac{A_c}{D^2} = 0.043924958 + 0.25 \arccos \left[1 - 2 \frac{y}{D} \right] - 0.5 \left[1 - 2 \frac{y}{D} \right] \left[\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.30)$$

$$k'_c = \frac{1}{m_c \frac{y}{D}} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{y}{D} - 0.5 \right] \arccos \left[1 - \frac{2y}{D} \right] + \left(\frac{y}{D} - 0.5 \right)^2 \sqrt{ \frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 } + \frac{2}{3} \left[\frac{y}{D} - \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right]^{3/2} - 0.006116445 + 0.043924958 \frac{y}{D} \right\} \quad (4.31)$$

Cuando la sección se llena totalmente, el área y k' son

$$A = 0.829323 D^2 \quad (4.32)$$

$$k' = 0.519107 \quad (4.33)$$

- a) Régimen supercrítico conocido. Para la sección herradura también vale la ecuación 4.20, pero m y k' se obtienen de las ecuaciones 4.26 a 4.31.
- b) Régimen subcrítico conocido. Vale también la ecuación 4.23, pero m y k' se obtienen de las ecuaciones 4.26 a 4.31.

Cuando el salto sea incompleto, se utiliza la ecuación 4.20 para régimen supercrítico conocido y la 4.23 para régimen subcrítico conocido, siempre que m_1 y k'_1 se calculen con las ecuaciones

que correspondan a la zona de la sección en estudio. Invariablemente m_2 y k_2' adoptan los siguientes valores constantes

$$m_2 = 0.829323 \quad (4.34)$$

$$k_2' = 1 - 0.480893 (D/y_2) \quad (4.35)$$

donde y_2 es la altura de la línea piezométrica en la sección 2, según indica la figura 4.12.

La solución gráfica del salto se presenta en las figuras 4.17 y 4.18 para los casos antes analizados, donde se utiliza el parámetro $Q/\sqrt{g} y^{5/2}$ (referencia 1).

No se conocen las características del salto hidráulico en secciones circular y herradura cuando $(y_1/D) > 0.8$. Por esta razón, en las figuras correspondientes se consideraron solamente valores $0 \leq y_1/D \leq 0.8$. En las de régimen subcrítico conocido, algunas curvas no alcanzan el valor $y_1/y_2 = 1$ debido a la limitación de la variable $(y_1/D)_{m\acute{a}x} = 0.8$. En las curvas de régimen supercrítico conocido se indica el lugar geométrico de los puntos límite del salto completo; en las de régimen subcrítico conocido, la curva límite es $y_2/D = 1$.

4.4.8 Sección triangular

Para esta sección es suficiente que $t = 0$ ($b = 0$) en las soluciones para el canal trapecial, manteniendo la misma definición para el talud en las orillas.

Para el régimen supercrítico conocido, la ecuación 4.11 se convierte en

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^4 + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^3 + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 3 F_{M1}^2 \left(\frac{y_2}{y_1} \right) - 3 F_{M1}^2 = 0 \quad (4.36)$$

cuya solución gráfica se muestra en la figura 4.10.

Si se desea esta ecuación en términos de F_1 , de la 4.13 $F_{M1}^2 = F_1^2/2$ se puede sustituir en la anterior.

Para el régimen subcrítico conocido, la ecuación 4.14 se convierte en

$$\left(\frac{y_1}{y_2} \right)^4 + \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^3 + \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 - 3 F_{M2}^2 \left(\frac{y_1}{y_2} \right) - 3 F_{M2}^2 = 0 \quad (4.37)$$

siendo entonces: $F_{M2}^2 = F_2^2/2$. La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 4.11.

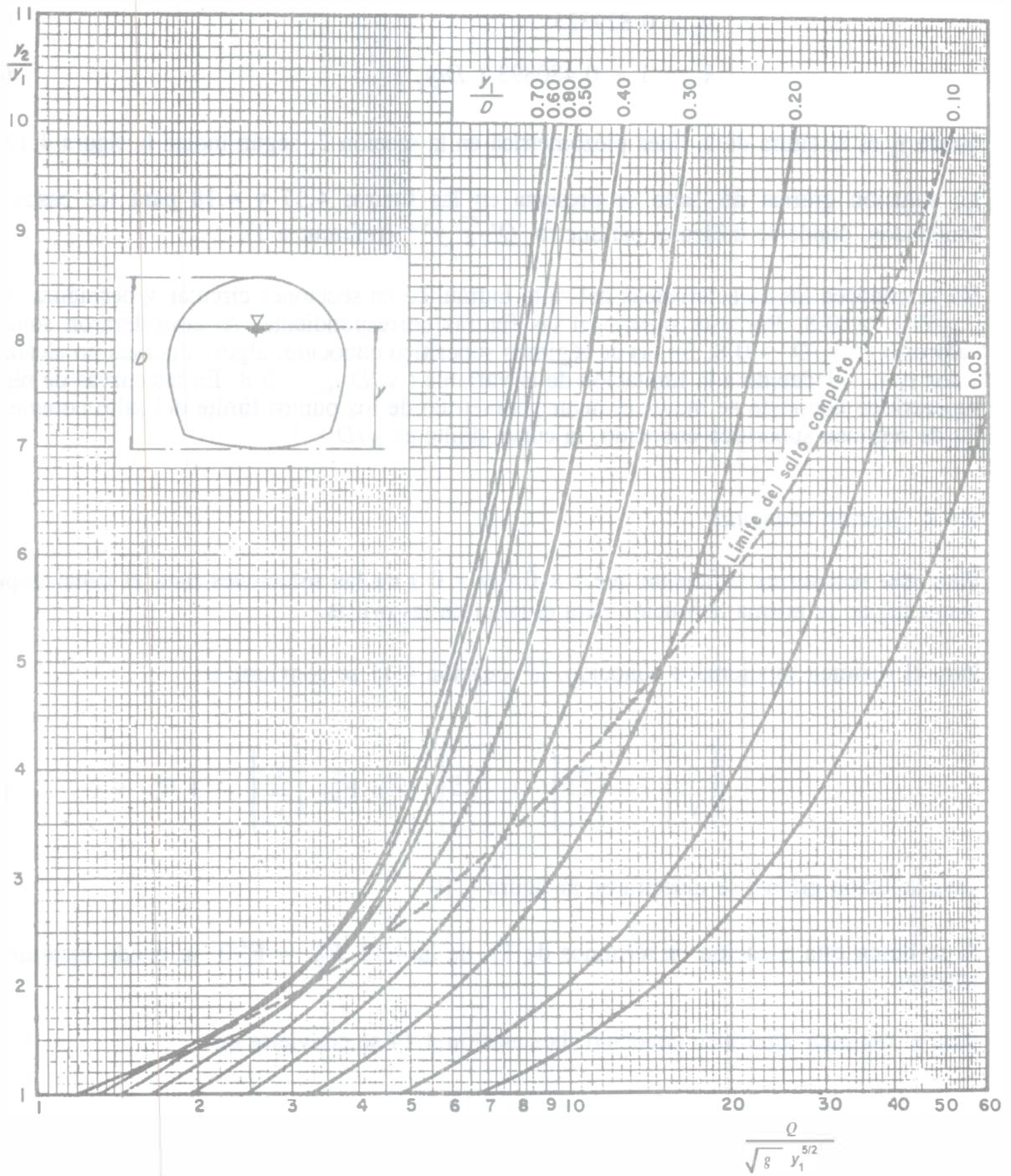


Figura 4.17. Salto hidráulico en canales de sección herradura. Determinación del tirante subcrítico, conocido el régimen supercrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

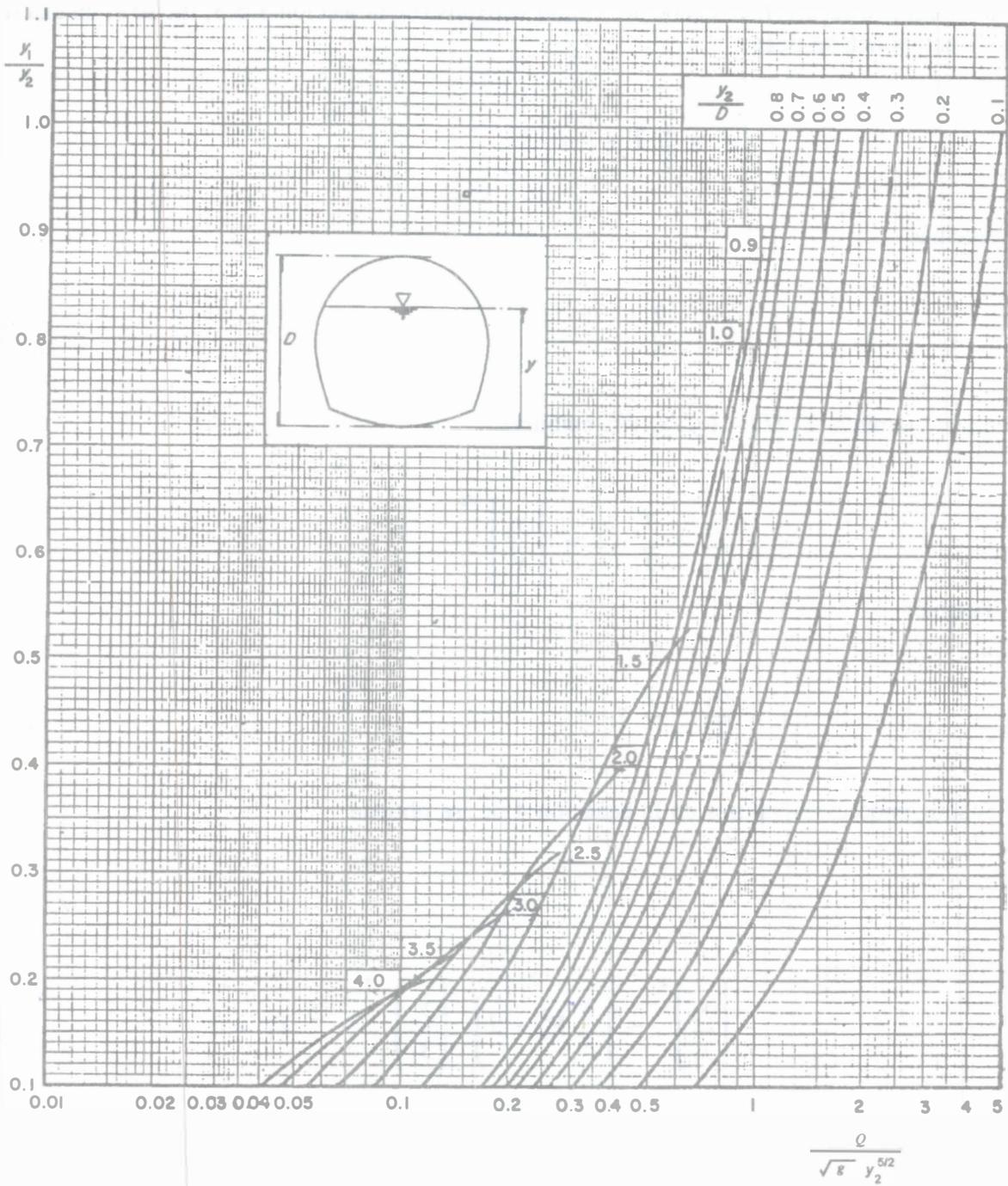


Figura 4.18. Salto hidráulico en canales de sección herradura. Determinación del tirante supercrítico, conocido el régimen subcrítico, según Sotelo y Rodríguez (referencia 1)

4.4.9 Sección parabólica

a) Régimen supercrítico conocido. Como se expuso en la sección 3.5.3, inciso e, en una sección parabólica se tiene

$$A = \frac{2}{3} T y$$

Además

$$k' = \frac{2}{5} \tag{4.38}$$

Siendo también $T_2 / T_1 = (y_2 / y_1)^{1/2}$, entonces

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{3/2}$$

También

$$\frac{A_1}{T_1} = \frac{2}{3} y_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4.6c, se obtiene

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^4 - \left[\frac{5}{3} \mathbf{F}_1^2 + 1 \right] \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{3/2} + \frac{5}{3} \mathbf{F}_1^2 = 0 \tag{4.39}$$

donde

$$\mathbf{F}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g A_1 / T_1}} = \frac{V_1}{\sqrt{\frac{2}{3} g y_1}}$$

y cuya representación gráfica se muestra en la figura 4.7 (referencia 1).

b) Régimen subcrítico conocido. Por un desarrollo similar con la ecuación 4.6e, se demuestra la siguiente ecuación

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^4 - \left(\frac{5}{3} F_2^2 + 1\right) \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{3/2} + \frac{5}{3} F_2^2 = 0 \quad (4.40)$$

donde

$$F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g A_2 / T_2}} = \sqrt{\frac{2}{3} g y_2}$$

En la figura 4.8 se presenta la solución gráfica de la ecuación 4.40 (referencia 1).

4.4.10 Sección en forma de U

W. Hager (1989)(referencia 4) utilizó una sección en forma de U como una vía para un acceso más fácil al estudio de algunos aspectos básicos del salto hidráulico completo en secciones circulares. La sección es de forma semicircular en el fondo y después continúa con paredes verticales; esto es, si el tirante es $y \leq D/2$, el flujo es en un canal circular y si $y > D/2$, el ancho de superficie libre es constante e igual al diámetro D .

Al no existir ecuaciones explícitas para el área A de la sección y la fuerza P de presión hidrostática, Hager propuso las siguientes ecuaciones aproximadas

$$\frac{A}{D^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{y}{D}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{y}{D}\right] \quad (4.41)$$

$$\frac{P}{g\rho D^3} = \frac{8}{15} \left(\frac{y}{D}\right)^{5/2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{y}{D}\right] \quad (4.42)$$

que producen resultados con desviaciones menores del 4 por ciento con respecto de las relaciones exactas.

La ecuación del momentum en la dirección del flujo conduce a una relación aproximada entre los tirantes conjugados como sigue

$$\frac{8}{15} \left(\frac{y_1}{D} \right)^{5/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{y_1}{D} \right) + \frac{Q^2}{g D^5 \frac{4}{3} \left(\frac{y_1}{D} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_1}{D} \right)} =$$

$$\frac{8}{15} \left(\frac{y_2}{D} \right)^{5/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{y_2}{D} \right) + \frac{Q^2}{g D^5 \frac{4}{3} \left(\frac{y_2}{D} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_2}{D} \right)} \quad (4.43)$$

Hager demostró que la ecuación 4.43 también produce resultados bastante precisos en la predicción de los tirantes conjugados en conductos circulares, siempre que haya un salto hidráulico completo. Esto puede observarse al comparar las curvas de trazo continuo de ambas secciones en la figura 4.19.

4.4.11 Solución gráfica general para secciones abiertas

Con fines comparativos es útil conocer la variación conjunta que experimentan los tirantes conjugados del salto en secciones rectangular, trapezoidal, triangular y parabólica, a partir de las condiciones conocidas en alguno de sus dos extremos. Para este efecto es suficiente mostrar la variación del tirante y_2 , cuando se conocen el número de Froude F_1 y el tirante y_1 antes del salto, lo que conlleva a la solución de la ecuación 4.6c para dichas secciones.

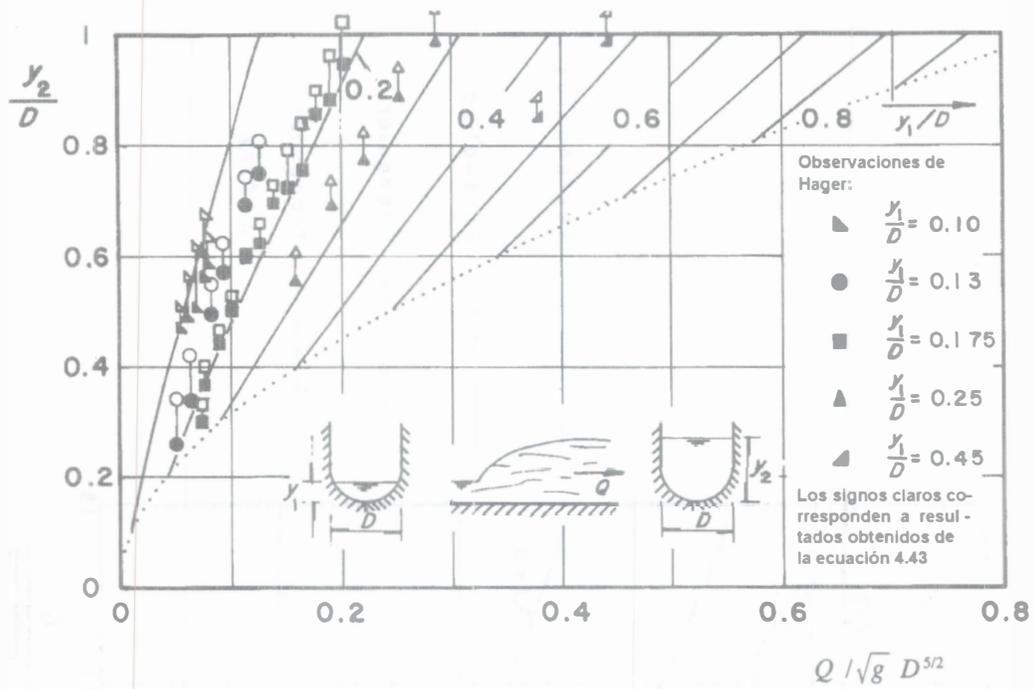
En la figura 4.20 se muestra la representación gráfica de dicha solución (referencia 5) para las secciones abiertas más comunes, y que explica por sí misma la comparación, si bien las soluciones gráficas particulares antes expuestas son más precisas.

4.5 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DEL SALTO HIDRÁULICO

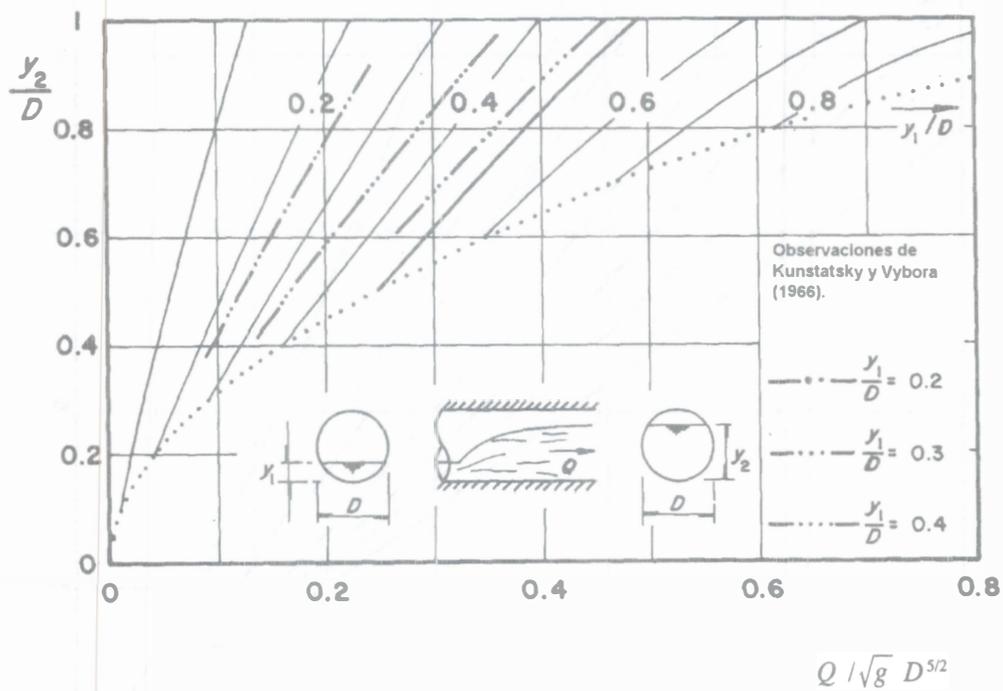
4.5.1 Tipos de salto

Según Peterka (1963)(US Bureau of Reclamation)(referencia 6) y otros autores, el salto adquiere diferentes formas dependiendo del valor del número de Froude F_1 del flujo aguas arriba. Aunque la clasificación se aplica a canales rectangulares se extiende a otras formas de sección.

- Quando $F_1 = 1$ a 1.7, el salto se produce en forma de ondulaciones como se indica en la figura 4.21a y recibe el nombre de salto ondular.
- Quando $F_1 > 1.7$, ocurre el llamado salto directo, con las variantes que a continuación se indican:



a) Salto en la sección U



b) Salto en la sección circular

Figura 4.19. Tirantes conjugados del salto hidráulico en conductos de sección U y circular, según Hager (referencia 4)

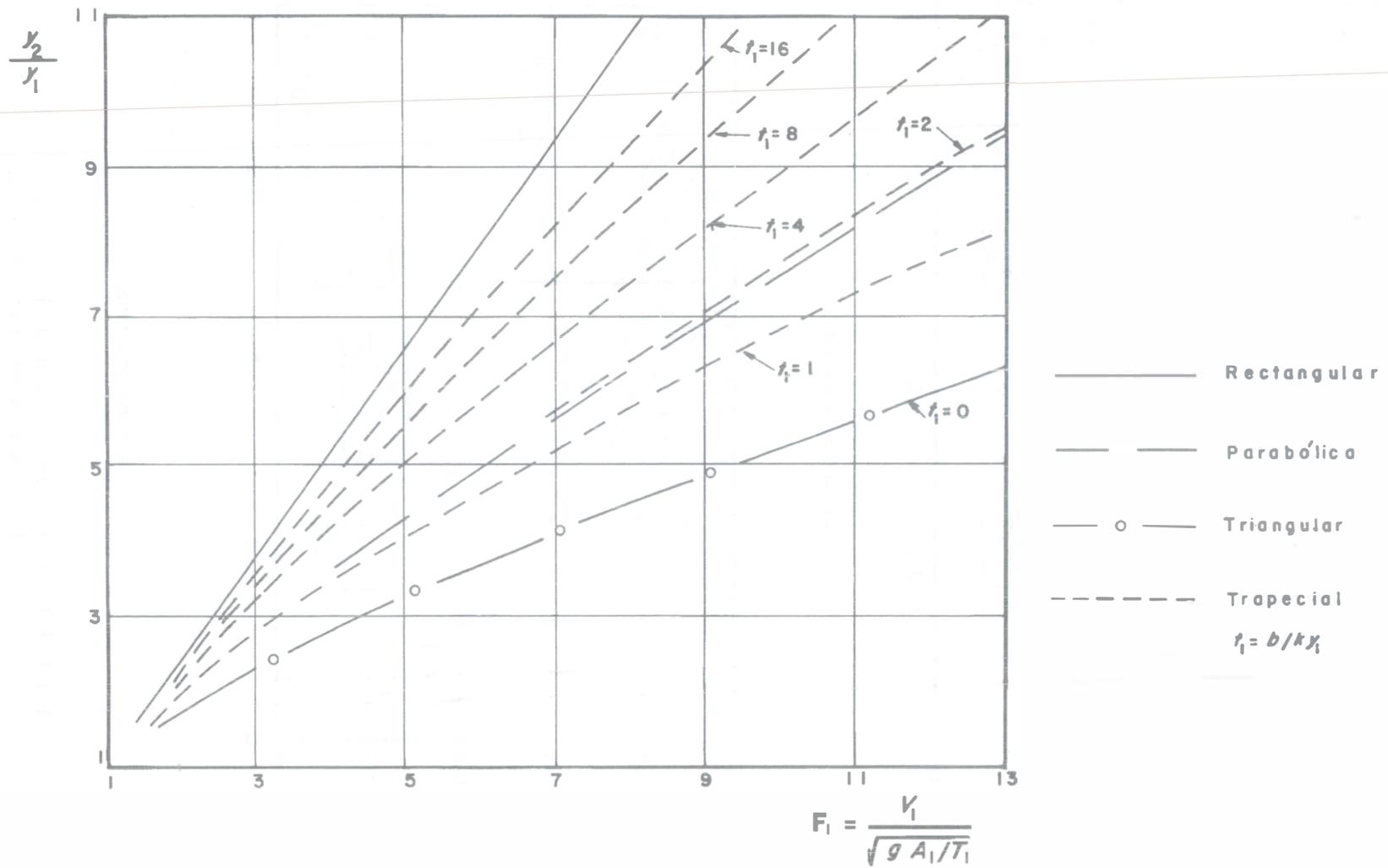


Figura 4.20. Solución gráfica general del salto hidráulico en los canales abiertos, más comunes, cuando se conocen las características en régimen supercrítico (referencia 5)

- Si $F_1 = 1.7$ a 2.5 , se inicia el desarrollo de una serie de remolinos de eje horizontal sobre la superficie del salto (sin perturbaciones sobre la misma en el lado aguas abajo), una distribución de la velocidad prácticamente uniforme y poca pérdida de energía. Se conoce como salto débil y se muestra en la figura 4.21b.
- Si $F_1 = 2.5$ a 4.5 , se produce un chorro oscilante que entra a la zona del fondo del salto, se amplía hacia la superficie y regresa sin periodicidad. Cada oscilación origina una onda de gran longitud y período irregular, que comúnmente se traslada a grandes distancias hacia aguas abajo dañando los bordos de tierra y zampeados en los canales de riego. Este salto se conoce como oscilante y se muestra en la figura 4.21c.
- Si $F_1 = 4.5$ a 9.0 , el extremo aguas abajo del remolino superficial coincide con la sección en la que termina la difusión del chorro de gran velocidad. El tirante de aguas abajo tiene menos influencia sobre la acción y posición del salto. Este se produce de manera balanceada, alcanza su mejor funcionamiento y una disipación que varía del 45 al 70 por ciento de la energía aguas arriba. Esta formación se conoce como salto estable y se muestra en la figura 4.21d.
- Si $F_1 \geq 9$, el flujo de gran velocidad de aguas arriba penetra bajo el remolino del salto, emerge adelante y genera ondas hacia aguas abajo, prevaleciendo una superficie libre muy irregular. En esta situación el salto tiene una acción muy efectiva al disipar hasta el 85 por ciento de la energía del flujo aguas arriba, por lo cual se conoce como salto fuerte y se muestra en la figura 4.21e.

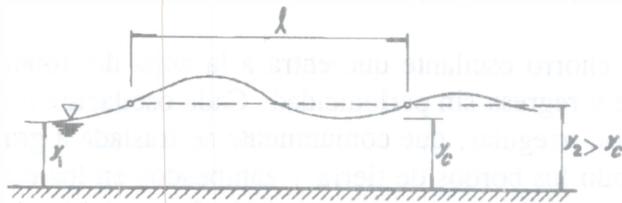
Hager (1989)(referencia 4) encontró que el salto ondular en conductos circulares desaparece hasta que F_1 es mayor de 3.5.

4.5.2 Tirantes conjugados

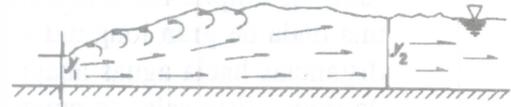
La bondad de la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento para determinar los tirantes conjugados en canales de cualquier sección ha sido comprobada de manera experimental en multitud de ocasiones, particularmente en sección rectangular. En la figura 4.22 se presenta la comprobación experimental de Peterka (referencia 6), en 1964, para el salto hidráulico en canales rectangulares.

Investigaciones recientes (referencia 7) llevadas a cabo por las vías teórica y experimental han mostrado que la relación y_2 / y_1 entre tirantes conjugados en canales rectangulares dependen no sólo del número de Froude en el flujo antes del salto, sino también del número de Reynolds y de la relación de aspecto en dicho flujo. En el ámbito de problemas de la práctica esto ocurre si el gasto unitario es menor de $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$.

Ha habido poca investigación experimental para comprobar la predicción teórica de tirantes conjugados en conductos circulares parcialmente llenos. Sylvester (1965)(referencia 8) reportó observaciones de saltos hidráulicos completos e incompletos para distintas condiciones del nivel de aguas abajo. Además, encontró que los tirantes conjugados calculados con el principio del



a) F_1 entre 1 y 1.7. Salto ondular .



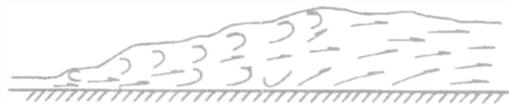
b) F_1 entre 1.7 y 2.5 . Salto débil .



c) F_1 entre 2.5 y 4.5 . Salto oscilante .



d) F_1 entre 4.5 y 9.0 . Salto estable .



e) $F_1 > 9.0$ Salto fuerte .

Figura 4.21 Distintos tipos de salto hidráulico

momentum son ligeramente mayores que los observados. Los únicos experimentos completos en conductos circulares parcialmente llenos se deben a Kunstatsky y Vyborá (1966) (referencia 4), sin embargo, ellos no reportan detalles de cómo los realizaron ni información básica de los mismos.

Los resultados de aplicar el principio del momentum en la predicción de tirantes conjugados en canales circulares se presentan de manera gráfica en la figura 4.19 (referencia 4). En el diagrama inferior se comparan las curvas calculadas en secciones circulares parcialmente llenas con las experimentales observadas por Kunstatsky y Vyborá. En efecto, se aprecia que los tirantes calculados son siempre mayores que los observados, con diferencias hasta del 12 por

ciento. En el diagrama superior se presenta la misma comparación para la sección U; los tirantes mayores calculados con la ecuación 4.43 y los observados por Hager (referencia 4). En el caso de secciones U se observa la misma tendencia de la circular pero diferencias más pequeñas; que Hager atribuye a que se desprecian las fuerzas de fricción en la aplicación del principio del momentum.

Comprobaciones similares se han realizado para otras formas de sección. Entre ellas pueden citarse las verificaciones de Silvester (referencia 8), en 1964 y 1965, utilizando los resultados experimentales de Hsing (1937), Press (1961) y Sandover y Holmes (1962) en canales triangulares y trapeciales, y de Argyropoulos (1957 y 1961) en canales parabólicos. En los ensayos de laboratorio en canales triangulares, el valor de F_1 no excedió de 4 y todas las pruebas se hicieron en un canal cuyo ángulo en el vértice fue de 47.3° , esto es, más bien angosto y profundo, observándose cierta desviación entre los resultados teóricos y experimentales. En canales trapeciales se observó mayor desviación, pero Silvester la atribuyó a distintos problemas y limitaciones que hubo en los experimentos. En canales parabólicos la concordancia fue en general excelente.

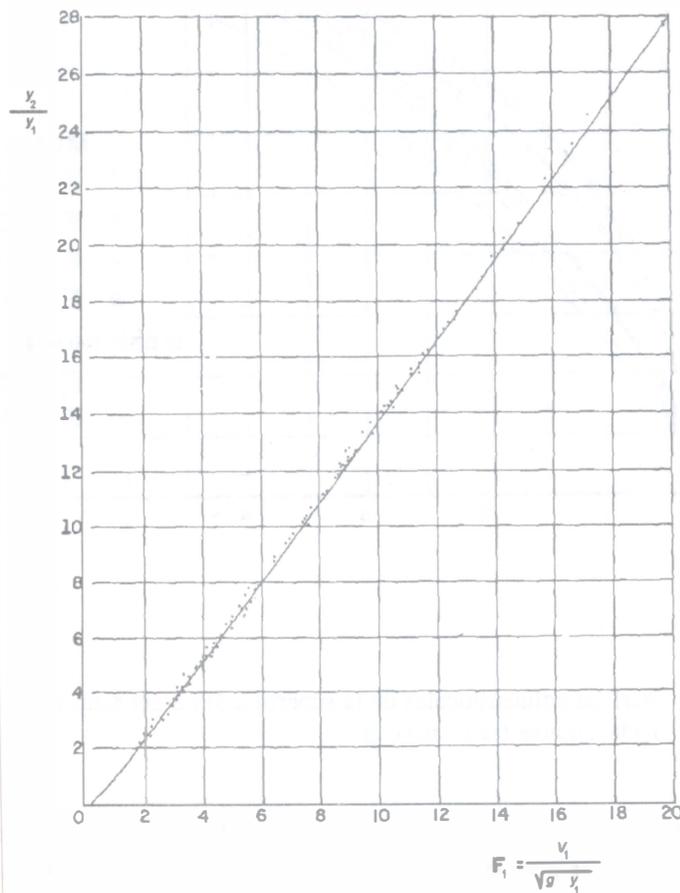


Figura 4.22. Tirantes conjugados del salto hidráulico en canales rectangulares, según Peterka (referencia 6)

Puede decirse que los criterios teóricos de cálculo con base en la ecuación de momentum, proporcionan un método adecuado y seguro, en todo caso conservador, para obtener los tirantes conjugados en un sentido o en otro, en términos del número de Froude o equivalente.

4.5.3 Perfil del salto y longitud

Con base en resultados experimentales, Bakhmeteff y Matzke (referencia 9) encontraron que el perfil de la superficie libre de un salto hidráulico puede representarse mediante curvas adimensionales para distintos valores de F_1 , como se indica en la figura 4.23 en el caso de un canal rectangular.

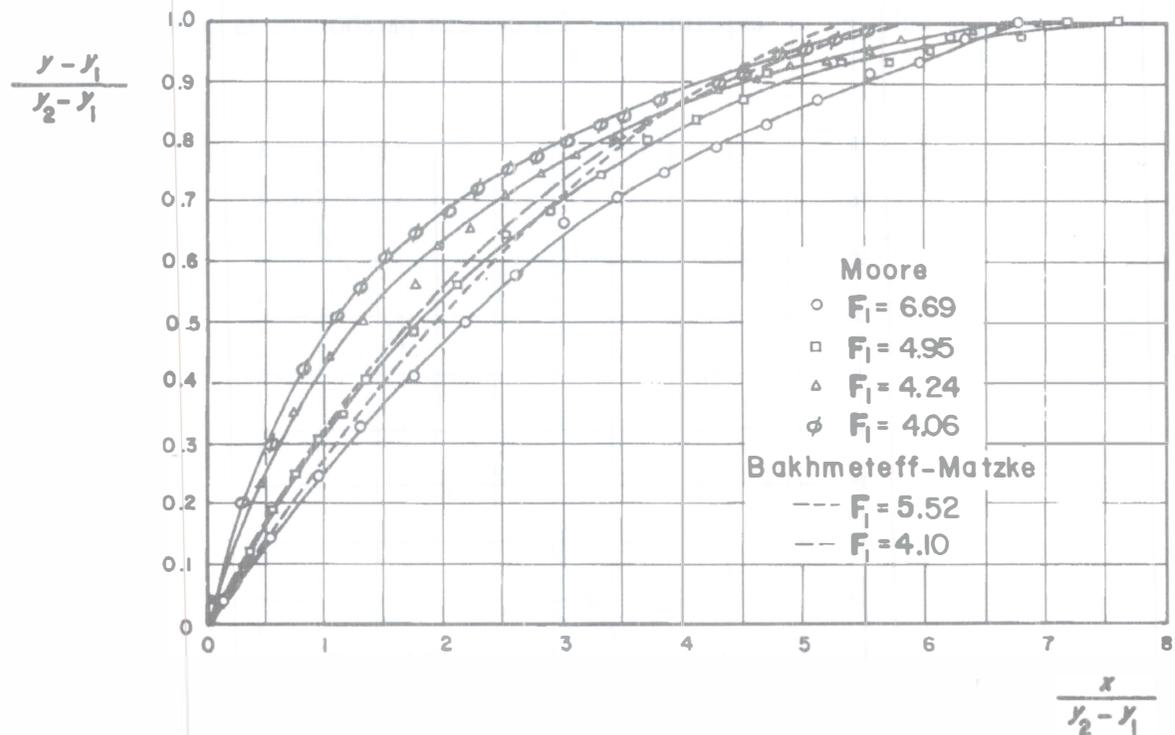


Figura 4.23. Perfiles adimensionales de la superficie libre del salto hidráulico en canales rectangulares (referencia 9)

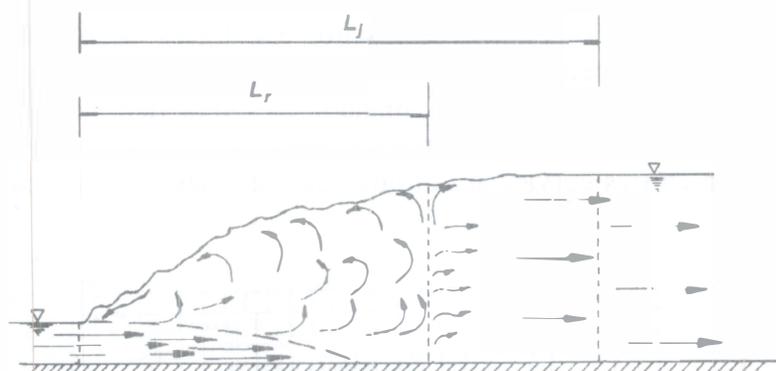
Otros autores, como Moore, han realizado experimentos similares y obtenido diferencias hasta del 20 por ciento en las distancias horizontales. Esto se atribuye a que los experimentos se efectuaron en condiciones distintas y produjeron perfiles diferentes de distribución de la velocidad del flujo supercrítico entrante debajo del salto.

El conocimiento del perfil de la superficie del fenómeno es de interés en la obtención del libre bordo y en el cálculo de la presión del agua en las paredes y plantilla para el diseño estructural de los muros de contención o recubrimientos en las fronteras del canal. Los experimentos han

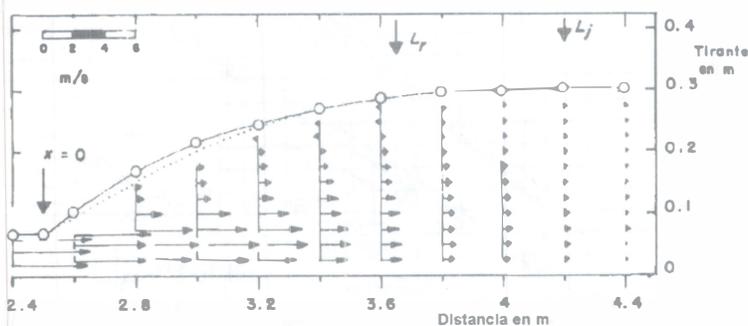
demostrado que la presión vertical sobre el fondo horizontal abajo de un salto hidráulico es prácticamente la misma obtenida a partir del perfil de su superficie libre.

Para fines de diseño es muy importante conocer la longitud en que se desarrolla, con objeto de prever la extensión del recubrimiento que proteja las fronteras del canal contra los efectos erosivos provocados por la turbulencia.

La longitud L_r del remolino turbulento característico del salto se define como la distancia entre la sección donde inicia su cara frontal y otra que corresponde a la superficie de estancamiento, es decir, la de separación del flujo en las direcciones de avance y retroceso. Como se observa en la figuras 4.24a y b, el final del remolino se extiende sobre el total de la sección. En contraste, la longitud L_j del salto es la distancia desde la misma sección inicial hasta aquella en que se alcanza la máxima altura de la superficie del agua y se estabiliza la distribución de la velocidad. En general, $L_r < L_j$.



a) Configuración esquemática del salto hidráulico



b) Distribución de la velocidad horizontal medida en un modelo hidráulico de un resalto (→) $V \geq 1$ m/s, (⇨) $V < 1$ m/s
 (...) perfil de la superficie libre en las orillas
 (—) perfil de la superficie libre en el eje

Figura 4.24. Definición de la longitud de remolino y del salto hidráulico

Otros autores consideran la longitud L_e del salto, desde la misma sección inicial hasta aquella en que no aparece erosión en la plantilla, porque las fuerzas tangenciales se han reducido de manera importante. Sin embargo, esta definición es menos común.

La determinación de la longitud del resalto ha recibido gran atención de los investigadores por su importancia en el diseño, pero hasta ahora no se ha desarrollado ningún procedimiento teórico satisfactorio para su cálculo. Por otra parte, los resultados experimentales mostraron al principio serias contradicciones, por la confusión existente en la definición clara de su longitud y por las complicaciones prácticas derivadas de la inestabilidad del fenómeno.

La longitud del resalto en canales rectangulares ha sido la más estudiada. La tabla 4.1 presenta las ecuaciones experimentales más conocidas para el cálculo de L_r y L_j , que en todos los casos fue posible expresar en términos del número de Froude F_1 . La figura 4.25 muestra una comparación gráfica de la mayoría de las ecuaciones, donde las curvas que representan los resultados del US Bureau of Reclamation (USBR) (referencia 21) son un compendio de los obtenidos por Peterka (referencia 6) y muy parecidos a los de Macha (referencia 22), y se recomiendan para calcular la longitud del salto. La figura 4.26 presenta los resultados experimentales del USBR (referencia 21), pero con la longitud L_j expresada en términos de y_2 , y es muy conocida y utilizada en todo el mundo. La curva tiene una parte casi recta en el intervalo de F_1 en que ocurre el mejor funcionamiento. Los resultados para la longitud L_r del remolino se muestran en tres curvas, según otros autores, bastante diferentes una de otra.

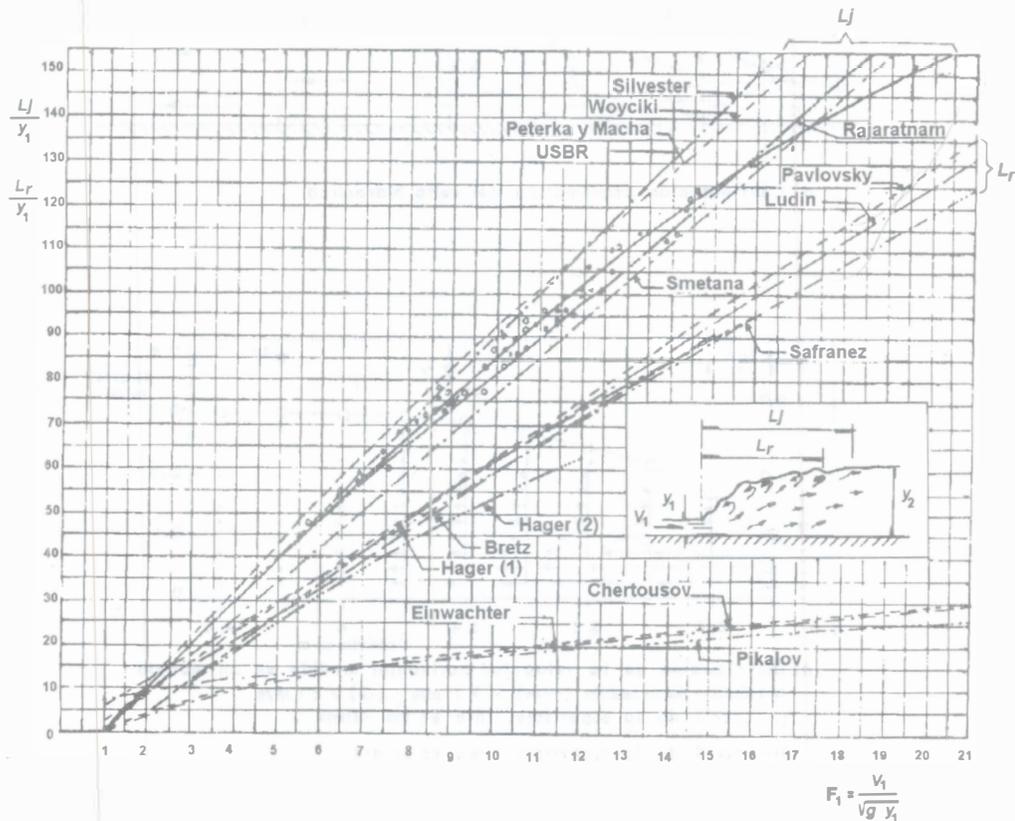


Figura 4.25. Longitud de remolino y del salto hidráulico en canales rectangulares horizontales, según ecuaciones de la tabla 4.1

Tabla 4.1. Ecuaciones experimentales más comunes para el cálculo de la longitud del salto hidráulico en canales rectangulares horizontales

Autor	Ecuación	Observaciones
Fawer	$l = \frac{1.2 (2 \pi) y_2}{\sqrt{2.5 [(y_2/y_1)^3 - 1]}}$	Longitud de la onda en un salto ondular, según figura 4.21a, referencia 10.
Silvester	$L_j / y_1 = 9.75 (F_1 - 1)^{1.01}$	Ecuación original (referencia 8).
Peterka	$L_j / y_2 = 3.491 + 0.73 F_1 - 0.06 F_1^2 + 0.001441 F_1^3$	Ecuación aproximada (referencia 6).
Woyciki	$L_j / (y_2 - y_1) = 8 - 0.05 (y_2/y_1)$	Ecuación original (referencia 11).
	$L_j / y_1 = 4.05 \sqrt{1 + 8 F_1^2} - 0.1 F_1^2 - 12.05$	Ecuación deducida de la original.
Smetana y Tizon	$L_j / y_1 = 6 [(y_2/y_1) - 1]$	Ecuación original (referencia 12).
	$L_j / y_1 = 3 \left[\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 3 \right]$	Ecuación deducida de la original.
Pavlovsky	$L_r / y_1 = 2.5 [1.9 (y_2/y_1) - 1]$	Ecuación original (referencia 13).
	$L_r / y_1 = 2.375 \sqrt{1 + 8 F_1^2} - 4.875$	Ecuación deducida de la original.
Ludin	$(y_2 - y_1) / L_r = [1/4.5] - [1/(6F_1)]$	Ecuación original (referencia 12).
	$L_r / y_1 = [13.5 F_1 / (6F_1 - 4.5)] \left[\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 3 \right]$	Ecuación deducida de la original.
Safranez	$L_r / y_1 = 6 F_1$	Ecuación original (1929) para $1.72 < F_1 < 19.1$ (referencia 14).
Pietrkowsky	$L_r / y_1 = 5.9 F_1$	Ecuación original (1932) para $5.5 < F_1 < 19.8$ (referencia 15).
Chertousov	$L / y_1 = 10.3 \left(\sqrt{F_1} - 1 \right)^{0.81}$	Ecuación original (referencia 16). Se desconoce el significado de L .
Einwachter	$L / y_1 = 8.3 \left(\sqrt{F_1} - 1 \right)$	Ecuación original (1932) para $2.5 < F_1 < 6.95$, (referencia 17). Se desconoce el significado de L .
Pikalov	$L / y_1 = 4 \sqrt{1 + 2 F_1}$	Ecuación original (referencia 12). Se desconoce el significado de L .
Rajaratnam	$L_j / y_2 = 6.2 \tanh (F_1/3)$	Ecuación original, para $2 < F_1 < 12$.
	$L_j / y_2 \approx 6$	Ecuación aproximada, para $4 < F_1 < 16$.
	$L_j / y_1 \approx 3 \left(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right)$	Ecuación deducida, para $4 < F_1 < 16$. Referencia 18 (1967).
Sarma y Newnham	$L_r / y_1 = 6.73 (F_1 - 1)$	Ecuaciones originales, para $1.21 < F_1 < 3.79$. Referencia 19 (1973).
	$L_j / L_r = 1.3$	

Continúa

Tabla 4.1. (continuación)

Autor	Ecuación	Observaciones
Malik	$L_r/y_1 = 6.2 F_1 - 10.4$ $+ \left[5 F_1 - 7.5 + 0.17 (F_1 - 3)^4 \right] \frac{y_1}{b}$	Ecuación deducida a partir de observaciones, para $3 \leq F_1 \leq 6$, (referencia 20) (1972).
Bretz	$L_r/y_1 = 6.29 F_1 - 3.59$	Ecuación original, para $3.3 < F_1 < 15.3$. Referencia 7 (1987).
Hager, Bremen y Kawagoshi	$L_r/y_1 = 160 \tanh (F_1/20) - 12$ $L_r/y_1 = 100 \tanh (F_1/12.5) - 12$ $L_r/y_1 \approx 8 (F_1 - 1.5)$ $L_r = 6 y_2$	Para $2 < F_1 < 16$, y $y_1/b < 0.10$. Para $2 < F_1 < 12$, y $0.10 < y_1/b < 0.7$. Para $2.5 < F_1 < 8$. Para $4 < F_1 < 12$. Ecuaciones originales (referencia 20) (1990).
Leutheusser, Kartha	$L_* / y_2 \approx 15.7$ después de una rápida $L_* / y_2 \approx 12$ después de una compuerta	Para $3 < F_1 < 14$. L_* distancia hasta la sección en que termina la influencia del salto en la distribución de la velocidad. ASCE, JHD, vol. 98, HY8 (1972).

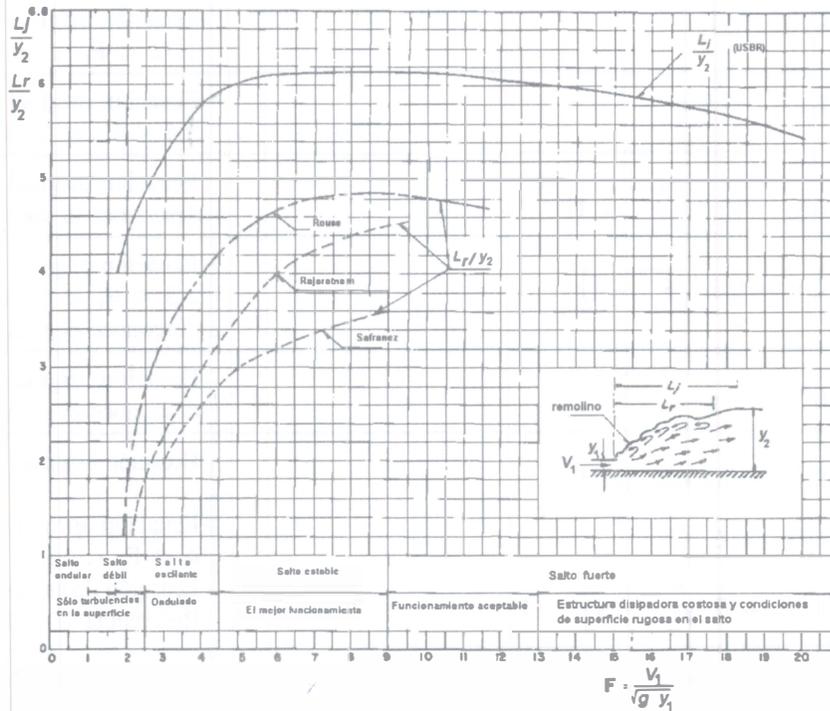


Figura 4.26. Longitud del salto hidráulico en canales rectangulares horizontales, con base en resultados de USBR y otros

La longitud del resalto en canales trapeciales también ha sido estudiada por varios investigadores. La tabla 4.2 contiene las ecuaciones más importantes de la longitud del resalto y la tabla 4.3 la complementa. Se vuelven a observar distintos criterios para definir dicha longitud.

Un aspecto sobresaliente de los saltos hidráulicos estudiados por Posey y Hsing (referencia 23), y Press (referencia 25) consistió en que el flujo inverso del remolino ocasiona un aumento del tirante en los lados del canal y el descenso correspondiente a lo largo del eje; es decir, en lugar de un frente recto, como ocurre en un canal rectangular, se produce un frente en forma de cuña con *alas* en la proximidad de los taludes. Esta variación transversal del tirante pudo originar problemas en la determinación segura de la longitud del salto al quedar menos definido que en el canal rectangular.

Silvester (1965)(referencia 8) se apoyó en las pruebas de Posey y Hsing y en las propias, pero éstas cubrieron el intervalo $4 < F_1 < 8$, teniendo dificultad para comprobar el principio del momentum y definir la longitud del resalto.

Un estudio experimental muy detallado de la longitud del resalto en canales trapeciales se debe a C. Andreani y M. Iglesias (referencia 2), en 1964, con taludes variando de 0.5 a 1.0, quienes comprobaron además la validez de la ecuación del momentum en el cálculo de los tirantes conjugados. En la figura 4.27 se presentan sus resultados, donde se utilizan los parámetros y_1/y_c , L_j/y_c , así como el talud (y_c representa al tirante crítico).

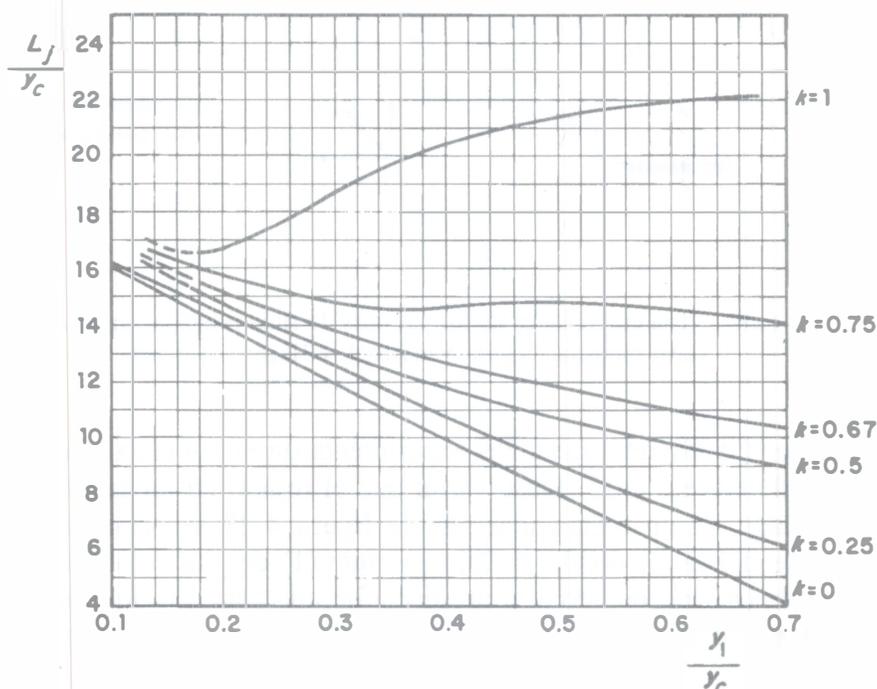


Figura 4.27. Longitud L_j del salto hidráulico en canales trapeciales, según Andreani e Iglesias (referencia 2). y_c es el tirante crítico

Según Wanoschek y Hager (1989)(referencia 26), Ohtsu clasificó al salto hidráulico en canales trapeciales, en cuatro tipos, utilizando un criterio que toma en cuenta la simetría de la corriente

principal y la permanencia de la misma. Cada tipo de salto quedó dentro de distintos dominios del talud k y de F_1 , variando desde el tipo 1 equivalente al rectangular, donde el flujo avanza de modo simétrico respecto al eje del canal sin deflectar hacia los taludes, hasta el tipo 4, para $k = 1$ y F_1 un poco menor de 5.6 a 6.0; para éste el flujo en su avance deflecta hacia los taludes y el salto es asimétrico.

Ohtsu consideró que el extremo inicial del resalto coincide con la sección en que ya no existe retroceso del flujo en los taludes y que su longitud llega hasta la sección en que se ha disipado toda la energía posible en el fenómeno. De acuerdo con la figura 4.28, la longitud del resalto, según Ohtsu, empieza en el extremo aguas arriba del *ala* que se forma en el frente, como fue en principio observado por Posey y Hsing.

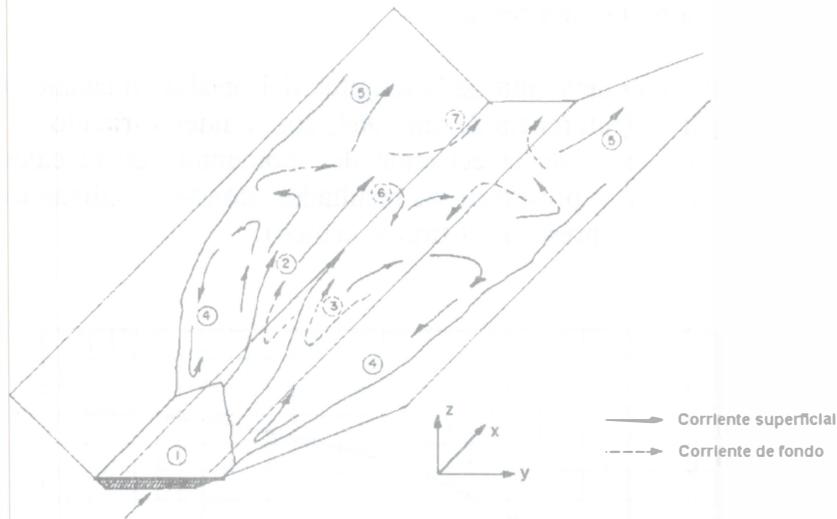


Figura 4.28. Vista esquemática de los patrones de flujo principal en un resalto en canal trapecial, según Wanoschek y Hager (referencia 26)

Wanoschek y Hager (1989)(referencia 26) experimentaron en un canal trapecial de talud $k = 1$ y número de Froude entre 3 y 13. Observaron que el resalto en un canal trapecial es bastante diferente del formado en un rectangular. En la figura 4.28 se presenta un esquema de los aspectos principales del salto, donde el flujo entrante (1) de alta velocidad se levanta y forma una zona (2) de salpicadura, debido a la presencia de una zona (3) de separación del fondo, la que designaron como remolino de fondo. De este modo, la corriente principal se mueve cerca de la superficie y diverge lentamente hacia los taludes, lo que se atribuye a la concentración de la corriente entrante (1) hacia la parte central de la sección y a la depresión resultante a lo largo de los taludes. Una primera parte del flujo lateral se regresa y forma las zonas (4) del flujo de retroceso sobre ambos taludes, que incluyen las alas de la cuña formada al frente del salto; una segunda parte (5) se mantiene sobre la superficie y continúa hacia aguas abajo; la tercera parte (6) se introduce en el cuerpo líquido a lo largo de los taludes y alimenta al remolino del fondo. Más adelante, esta corriente ya no es arrastrada por el remolino de fondo sino continúa directamente hacia el flujo de salida después del salto.

Con base en observaciones detalladas en tres dimensiones, Wanoschek y Hager concluyeron que el salto hidráulico en un canal trapecial es un fenómeno de flujo netamente tridimensional. La presencia del remolino en el fondo produce diferencias importantes respecto del resalto clásico, como son:

- la velocidad en el fondo se reduce en forma importante,
- la corriente principal se levanta hacia la superficie pero diverge a ambos lados del canal,
- por tanto, la velocidad máxima ocurre a lo largo de los taludes, cerca de la superficie.

En la figura 4.28 se observa que el salto es asimétrico, desviado hacia la orilla izquierda, lo que parece ser típico con números de Froude $F_1 < 6$ relativamente bajos. Además, el salto se levanta en forma espontánea de la margen izquierda a la derecha a intervalos irregulares.

La comparación entre el cociente y_2/y_1 de tirantes conjugados obtenidos del principio del momentum con los experimentales, indica que los primeros son siempre más altos que los segundos, por tanto, el diseño queda del lado de la seguridad.

Un aspecto particular del resalto en un canal trapecial es la aparición de un remolino interno sobre el fondo cuando $F_1 > 4$. Sus características más importantes se muestran en la figura 4.29d. En las figuras a, b y c se muestra la dependencia de los parámetros L_u/y_2 , L_b/y_2 y h_b/y_2 de F_1 y b/ky_1 . Estas figuras revelan que existen relaciones definidas para los tres parámetros con F_1 y b/ky_1 , a pesar de que fue complicada la definición experimental de las posiciones exactas del principio y fin de cada dimensión, por la gran turbulencia del flujo.

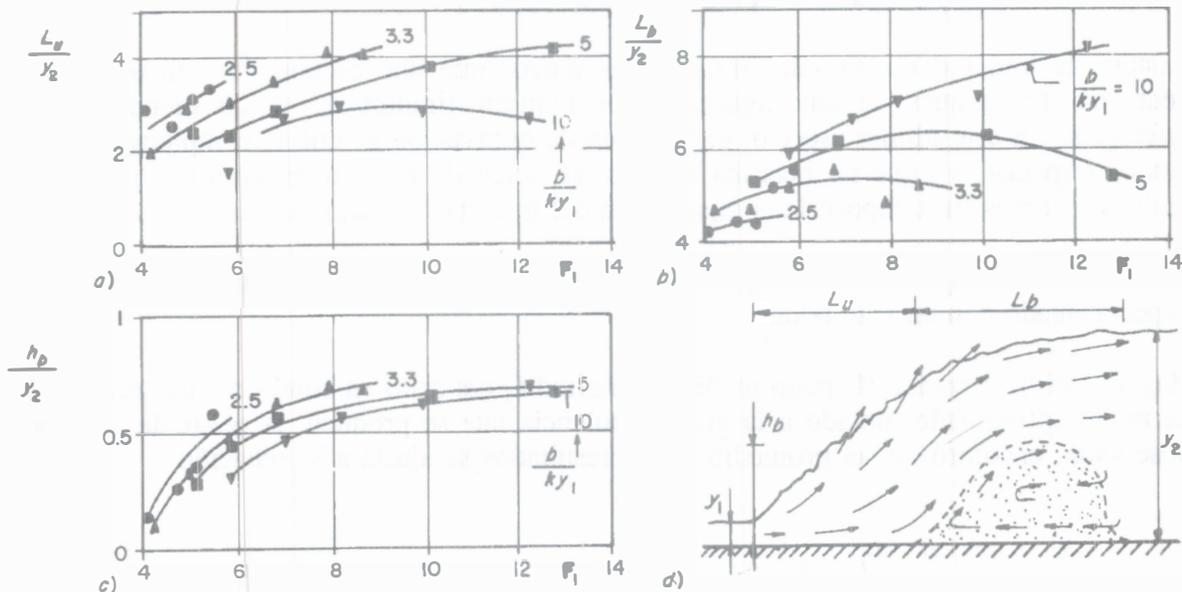


Figura 4.29. Características principales del remolino en el fondo de un resalto formado en un canal trapecial, según Wanoschek y Hager (referencia 26)

Conviene destacar la gran extensión del remolino del fondo en el sentido longitudinal, que sorprende no hubiera sido detectado anteriormente, como un componente típico de saltos hidráulicos trapeciales. La presencia del remolino se refleja en la distribución irregular de la velocidad aguas abajo, en la cual los máximos se localizan lateralmente y cerca de la superficie. También se detecta una oscilación del salto en el sentido longitudinal que lo desvía hacia un lado o hacia otro y produce una inestabilidad que se atribuye a las características turbulentas del fenómeno.

En la figura 4.28 es evidente que no existe remolino superficial en un salto trapecial; en su lugar, ocurre un flujo inverso en la zona lateral del flujo de retorno. Para números de Froude F_1 bajos, el flujo de retorno se concentra en el lado opuesto al de la corriente principal. Para números de Froude mayores, el salto se hace menos asimétrico y el flujo de retorno ocurre a lo largo de los dos taludes, formándose alas más simétricas en el frente.

Se designa por L_s a la longitud del flujo lateral de retorno, medido desde el punto de intersección del *ala* hasta el punto de estancamiento sobre la pared inclinada. En el experimento, la medición de L_s siempre se efectuó sobre el talud del lado derecho, mientras que la corriente principal se concentraba en el lado opuesto. En la figura 4.30a se muestra la relación experimental encontrada entre L_s/y_2 , F_1 y b/ky_1 . Los resultados para salto ondular se dibujaron con signos claros, observando que la transición hacia el salto ordinario es continua.

Wanoschek y Hager consideraron que el inicio del salto coincide con el punto de intersección del ala y el talud, en la misma forma que en la definición de L_n del remolino de fondo. También, que el final corresponde a la sección donde desaparece la ebullición superficial y las bolsas de burbujas de aire se elevan hasta la superficie, claro indicio del final de la zona de aireación; a partir de ella hay un nivel de turbulencia insignificante y poco transporte de aire hacia aguas abajo. La distancia L_j entre las dos secciones así definidas fue llamada longitud del salto y en la figura 4.30b se presentan los resultados de L_j/y_2 , F_1 y b/ky_1 .

Aunque la longitud de un salto trapecial es mayor que uno rectangular, su uso puede ser ventajoso en tanques de amortiguación por requerir tirantes de salida menores y costos inferiores. En este último aspecto, el volumen de excavación se utiliza completamente para el tanque trapecial, ya que no necesita espacio adicional de excavación como el rectangular ni moldes externos, ni tampoco la compactación del material cercano al muro.

Wanoschek y Hager advierten que sus conclusiones no son todavía definitivas por haber experimentado con un solo talud.

Hager (1989)(referencia 4) pudo medir la longitud L_j del salto en conductos de sección U pero de modo aproximado, debido a la gran turbulencia que se produce. A pesar de la dispersión observada, encontró que el promedio de los resultados se ajusta a la ecuación

$$\frac{L_j}{y_2} = 6 \quad (4.44)$$

para valores del número de Froude antes del salto entre 2 y 9, comparable a la ecuación aproximada de Rajaratnam (referencia 18) para canales rectangulares (tabla 4.1). Hager indica que la ecuación es preliminar y que no incluye el posible efecto que y_1 puede tener sobre L_j/y_2 .

Debido a la semejanza en los valores de los conjugados del salto en las sección U y circular, se espera la misma semejanza en su longitud.

En canales triangulares, la ecuación obtenida por Silvester (referencia 8), en 1964, fue

$$\frac{L_j}{y_1} = 4.26 (F_1 - 1)^{0.695} \quad (4.45)$$

basada en observaciones en el canal de 47.3° de ángulo en el vértice ($k = 0.44$), utilizado por Argyroupoulos (1957) en sus experimentos y que probablemente no sea válida para otros taludes.

Tabla 4.2. Ecuaciones experimentales para el cálculo de la longitud del salto hidráulico en canales trapeciales horizontales

Autor	Ecuación	Observaciones
Posey y Hsing (1938)	$\frac{L_j}{y_2} = 5 \left[1 + 4 \left(\frac{2 y_2/y_1 + b/ky_1}{2 + b/ky_1} - 1 \right)^{1/2} \right]$	Representa la media con variaciones de $\pm 5\%$. Conduce a valores de L_j mayores que en un canal rectangular (referencia 23).
Sieñchin (1958)	$\frac{L_j}{y_1} = A \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right)$	A depende del talud como se indica en la tabla 4.3a. Conduce a valores exagerados de L_j (referencia 24).
Press (1961)	$\frac{L_j}{y_1} = a (F_1 - 1)^c$	a y c dependen del talud como se indica en la tabla 4.3b (referencia 25).
Silvester (1964)	$\frac{L_j}{y_2 - y_1} = 7.1 \left(1 + \frac{10}{b/ky_1} \right)$	Vale para $b/ky_1 > 4$. Produce valores de L_j mayores que la ecuación de Posey y Hsing, $4 < F_1 < 8$ (referencia 8).
Andreani e Iglesias (1964)	No hay	Los resultados experimentales se presentan en la figura 4.27 (referencia 2).
Ohtsu (1976)	$\log \left(\frac{L_0}{h_s} \right) = 1.71 \eta + 0.315 k + 1.58$	L_0 longitud definida hasta la sección en que se ha producido toda la pérdida de energía h_s del resalto, η eficiencia del mismo. Vale para $2 < F_1 < 8$. (referencia 26).
Wanoschek y Hager (1989)	No hay	Los resultados experimentales se presentan en la figura 4.30.

Hager y Wanoschek (referencia 27), en 1987, con base en resultados de Argyroupoulos, Rajaratnam y los propios en canales triangulares, obtuvieron las siguientes expresiones

$$\frac{L_r}{y_2} = 1.8 \sqrt{k} F_1^{(0.4/k)} \quad (4.46a)$$

$$\frac{L_j}{y_2} = 2.4 \sqrt{k} F_1^{(0.4/k)} \quad (4.46b)$$

con validez en el intervalo $0.4 < k \leq 1$.

Tabla 4.3. Coeficientes y exponentes en las ecuaciones de la tabla 4.2.

a. Coeficiente A en la ecuación de Siëñchin.

Talud	0	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
A	5	7.9	9.2	10.6	12.6	15.0

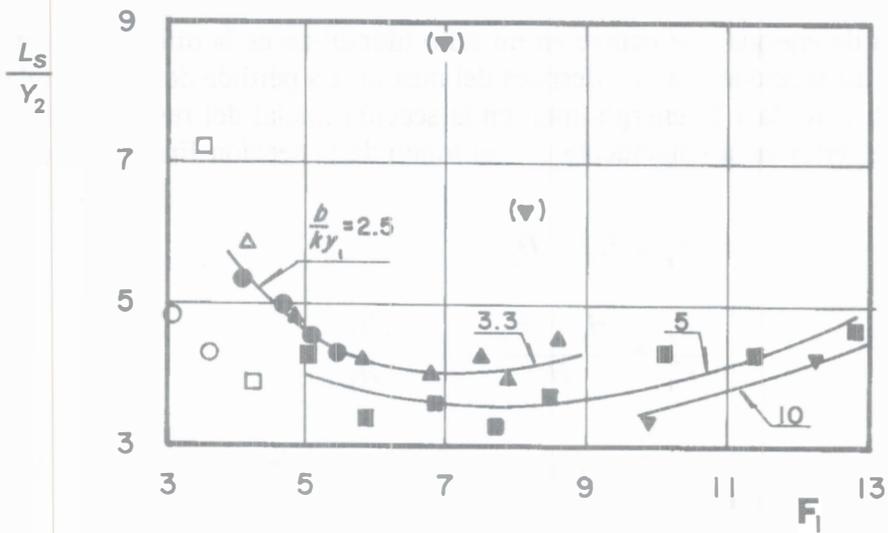
b. Valores de a y c en la ecuación de Press.

Talud	0.5	1.0	2.0
b/ky_1	4.0	8.0	16.0
a	35.0	23.0	17.6
c	0.836	0.885	0.905

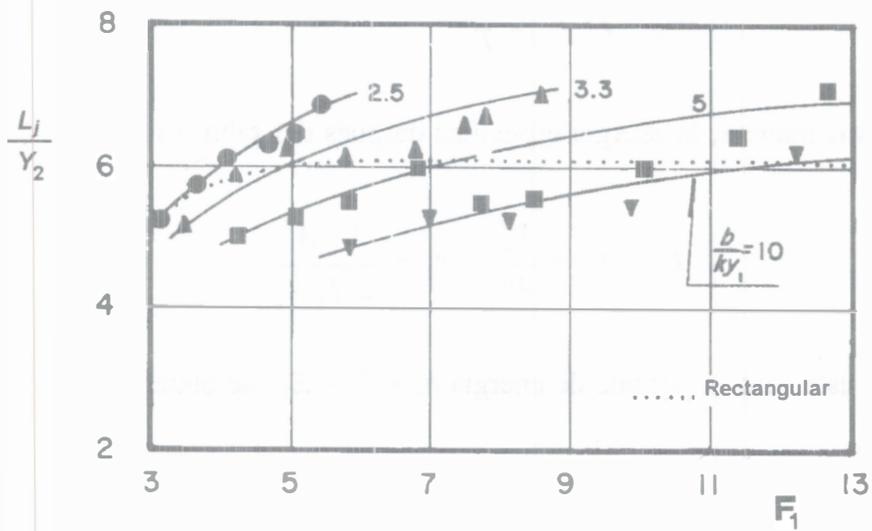
El análisis de Silvester con canales parabólicos y las observaciones de Argyroupoulos, en 1957, condujeron a la ecuación

$$\frac{L_j}{y_1} = 11.7 (F_1 - 1)^{0.832} \quad (4.47)$$

que proporciona un ajuste insuficiente de los datos disponibles cuando F_1 excede de 3.



a) Longitud de la corriente lateral de retorno



b) Longitud relativa del resalto

Figura 4.30. Longitudes relativas de un resalto en canal trapecial, según Wanoschek y Hager (referencia 26)

4.5.4 Pérdida de energía

La pérdida de energía que ocurre en un salto hidráulico es la diferencia h_s entre los niveles de energía en las secciones antes y después del mismo. La pérdida de energía relativa es el cociente h_s/H_1 de la pérdida y la energía total en la sección inicial del resalto; la última se mide desde un plano de referencia coincidente con el fondo de la sección final. Esto es

$$h_s = H_1 - H_2 \quad (4.48)$$

$$\frac{h_s}{H_1} = \frac{H_1 - H_2}{H_1} = 1 - \frac{H_2}{H_1} \quad (4.49)$$

Cuando se trata de un salto hidráulico sobre un canal horizontal, $H = E$, y con la ecuación de continuidad, la energía específica antes del salto es

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_1 + \frac{Q^2}{2g A_1^2} = y_1 + \frac{Q^2 A_1 T_1}{2g A_1^3 T_1}$$

o bien

$$E_1 = y_1 + \frac{F_1^2 A_1}{2 T_1} \quad (4.50)$$

De la misma manera, la energía específica después del salto resulta

$$E_2 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_2 + \frac{F_1^2 A_1^3}{2 T_1 A_2^2}$$

Siendo en este caso la pérdida de energía $h_s = E_1 - E_2$, se obtiene

$$h_s = y_1 - y_2 + \frac{F_1^2 A_1}{2 T_1} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad (4.51)$$

esto es, función de F_1 y de los tirantes conjugados.

La relación h_s/E_1 se conoce como pérdida relativa y de las ecuaciones 4.51 y 4.50 es

$$\frac{h_s}{E_1} = \frac{\left[2 y_1 T_1 / A_1 \right] \left[1 - (y_2 / y_1) \right] + F_1^2 \left[1 - (A_1 / A_2)^2 \right]}{(2 y_1 T_1 / A_1) + F_1^2} \quad (4.52)$$

Con las figuras 4.7 y 4.10 se obtienen los valores de y_2/y_1 en las secciones rectangular, trapecial, triangular y parabólica, para cualquier valor de F_1 especificado. Asimismo, la tabla 1.1 proporciona los valores de A y A/T , por lo que es posible la solución gráfica generalizada de la ecuación 4.52 que se muestra en la figura 4.31 para dichas secciones. Aunque es posible también obtener la solución general para las secciones circular y herradura, generalmente es más sencillo calcular la pérdida con la ecuación de energía caso por caso.

En la figura 4.31 se observa que todas las formas de sección conducen a una pérdida relativa de energía mayor que en la rectangular, para el mismo número de Froude. Este resultado era de esperarse ya que los canales con talud proporcionan una circulación secundaria mayor y con ello más disipación de energía. Silvester y Hager observaron la disipación máxima de energía en canales triangulares, para un mismo gasto, igual velocidad y tirante aguas arriba.

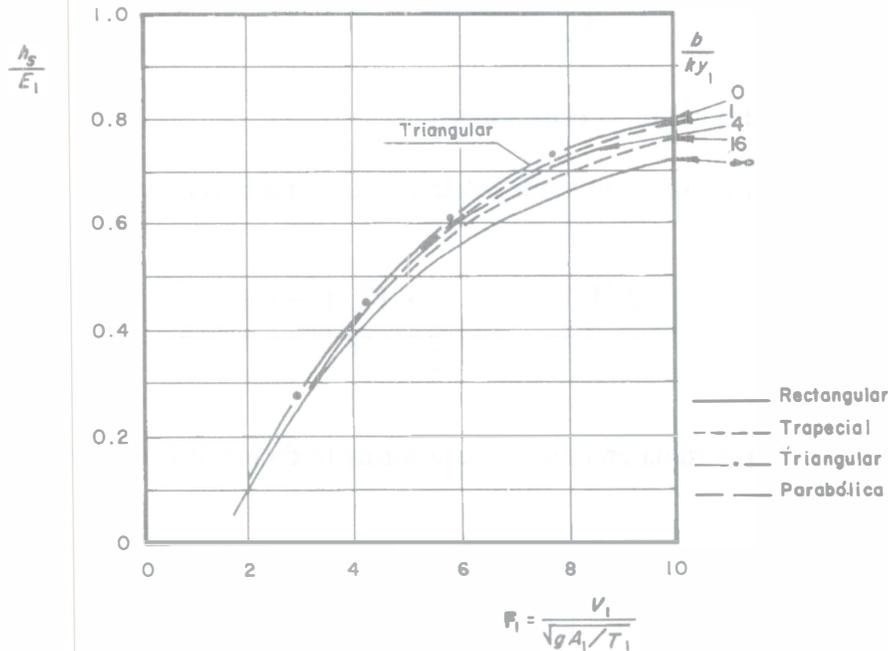


Figura 4.31. Eficiencia del salto hidráulico en canales horizontales abiertos de distintas formas de sección (referencia 5)

En un canal rectangular, de la ecuación 4.8a se tiene

$$\frac{F_1^2}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{y_2}{y_1} \quad (4.53)$$

que sustituida en la ecuación 4.51 conduce a

$$h_s = y_1 - y_2 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{y_2}{y_1} \right] \left[y_1 - \frac{y_1^3}{y_2^2} \right]$$

Efectuando operaciones y simplificando, el valor teórico de la pérdida es

$$h_s = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \quad (4.54a)$$

o bien

$$\frac{h_s}{y_1} = \frac{(y_2/y_1 - 1)^3}{4 y_2/y_1} \quad (4.54b)$$

donde y_2/y_1 está expresado por la ecuación 4.8b.

Asimismo, de la ecuación 4.52, el valor teórico de la pérdida relativa es

$$\frac{h_s}{E_1} = \frac{2 \left[1 - (y_2/y_1) \right] + F_1^2 \left[1 - (y_1/y_2)^2 \right]}{2 + F_1^2} \quad (4.55)$$

Si se desea expresar la pérdida en el salto en la forma tradicional: $h_s = K V_2^2/2g$, de la ecuación de energía se tiene

$$h_s = y_1 - y_2 + \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 - 1 \right] \frac{V_2^2}{2g}$$

O bien, como sigue

$$h_s = \left[\frac{y_1 - y_2}{V_2^2/2g} + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.56)$$

Además, por definición es

$$\frac{F_1^2}{2} = \frac{V_1^2}{2g y_1} = \frac{Q^2}{2g b^2 y_2^2} \frac{y_2^2}{y_1^3} = \frac{V_2^2}{2g} \frac{y_2^2}{y_1^3}$$

que sustituida en la ecuación 4.53 resulta

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{y_1}{4} + \frac{1}{4} \frac{y_1^2}{y_2} = \frac{y_1}{4 y_2} (y_2 + y_1) \quad (4.57)$$

Sustituyendo $(y_1 - y_2)/(V_2^2/2g)$ de la ecuación anterior en la 4.56 y simplificando se obtiene

$$K = \frac{4 y_2}{y_1} \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 = 4 \frac{y_2}{y_1} \left[\frac{1 - (y_2/y_1)}{1 + (y_2/y_1)} \right] + \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1$$

$$K = \frac{(y_2/y_1 - 1)^3}{y_2/y_1 + 1} \quad (4.58)$$

donde y_2/y_1 corresponde al obtenido de la ecuación 4.8b, esto es, K depende de F_1 .

Finalmente es interesante comparar el valor de la pérdida con la calculada de la ecuación de Borda. De esta última sería

$$(h_s)_B = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{b y_1} - \frac{Q}{b y_2} \right)^2 = \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right)^2$$

Sustituyendo la ecuación 4.57 en la anterior, resulta

$$(h_s)_B = \frac{y_1}{4 y_2} (y_2 + y_1) \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1} \right)^2$$

Por tanto, se obtiene

$$(h_s)_B = \frac{(y_2 + y_1) (y_2 - y_1)^2}{4 y_1 y_2} \quad (4.59)$$

y de las ecuaciones 4.54a y 4.59, finalmente

$$\frac{h_s}{(h_s)_B} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1}$$

Debido a que $y_2 > y_1$, entonces $h_s / (h_s)_B < 1$. Esto significa que la ecuación de Borda proporciona resultados de pérdida en el salto rectangular mayores que los reales.

4.5.5 Altura

La diferencia $\Delta y = y_2 - y_1$ es conocida como altura del salto y suele también expresarse como la altura relativa en la forma

$$\frac{\Delta y}{H_1} = \frac{y_2 - y_1}{H_1} \quad (4.60)$$

4.5.6 Eficiencia

El parámetro H_2 / H_1 se conocía antiguamente como eficiencia del salto, es decir, una medida de su eficacia como disipador natural de energía. En la actualidad se acepta que queda mejor representada por la relación $\eta = h_s / H_1 = 1 - H_2 / H_1$, esto es, idéntica a la pérdida relativa expresada por la ecuación 4.49. En la figura 4.31 se compara la misma en canales horizontales con diferentes formas de sección. Se observa que el salto hidráulico rectangular es el menos eficiente como disipador de energía.

4.5.7 Posición

La posición del salto hidráulico en un canal está supeditada al tirante de salida y_t que exista aguas abajo del mismo. Dicho tirante es independiente del conjugado mayor y_2 y más bien está regido por las condiciones o tipo de control que imponga el canal o las estructuras que éste tenga aguas abajo.

De acuerdo con la diferencia que haya entre y_2 y y_t , se forman al pie de un vertedor o de una compuerta los tres casos y tipos de salto mostrados en la figura 4.32.

El caso 1 ocurre cuando se presenta la condición de salto normal en que $y_t = y_2$, satisfaciendo la ecuación 4.4 del momentum entre las secciones 1 y 2 y formándose el salto inmediatamente al pie de la estructura. Para efectos de protección contra la socavación producida por el fenómeno, éste sería el caso ideal, sin embargo, cualquier variación de y_t puede moverlo de la posición estimada, lo que obliga a utilizar siempre algún dispositivo de control, como un umbral dentado, para estabilizar su posición.

El caso 2 ocurre cuando $y_1 > y_2$ (y_2 calculado de las condiciones del caso 1). El resalto se mueve hacia aguas arriba forzando al llamado salto sumergido, un diseño más seguro que el del caso 1. Su posición puede controlarse con más facilidad, si bien es menos conveniente, ya que al formarse aguas abajo de la compuerta o después de un conducto a presión, produce descarga sumergida y la reducción consabida del caudal. Además, la velocidad del chorro que emerge de la compuerta se propaga más allá de la sección final del resalto.

Cuando el salto sumergido ocurre en un canal de gran pendiente que precede a uno de menor pendiente, tiene efectos menos importantes y constituye el caso del salto en canales de pendiente mixta que se trata en un capítulo posterior. Si se desea controlar su posición y convertirlo en un salto normal, se recurre al tipo de control indicado en el subcapítulo 4.8 y con más amplitud, en el capítulo de disipadores de energía.

El caso 3 ocurre cuando $y_1 < y_2$, donde y_2 se calcula en las condiciones del caso 1. Esto significa que el salto se mueve realmente hacia aguas abajo hasta una sección de tirante y_1' , cuyo conjugado mayor sea de nuevo igual a y_1 . Este tipo de salto se llama libre y para determinar su ubicación se necesita calcular el perfil de flujo gradualmente variado antes del mismo (ver subcapítulo 5.5). En lo posible debe evitarse en el diseño, ya que se forma en un sitio adelante de la zona revestida, pudiendo producir erosiones severas en un canal no protegido. Para remediar estos efectos se debe controlar su posición forzándolo al caso normal (subcapítulo 4.8), mediante un umbral vertical, la profundización del piso, un umbral dentado, la modificación en el ancho de la sección, o una combinación de los mismos.

Cualquiera que sea el caso de que se trate, el espacio y dispositivos que se utilizan para estabilizar al salto constituyen una estructura disipadora de energía conocida como tanque amortiguador. Su diseño se expone en el subcapítulo 4.8 y con más detalle en el capítulo de disipadores de energía.

4.6 SALTO HIDRÁULICO NORMAL

4.6.1 Después del vertedor

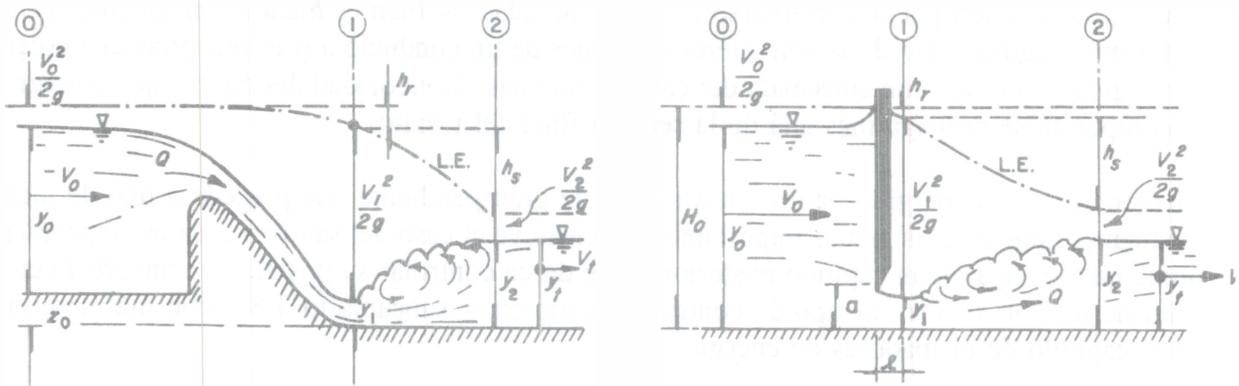
Para el análisis del salto normal se utilizan las secciones señaladas en la figura 4.32a, donde también aparecen los distintos niveles que adquiere la línea de energía.

La ecuación de energía entre las secciones 0 y 1 del vertedor establece

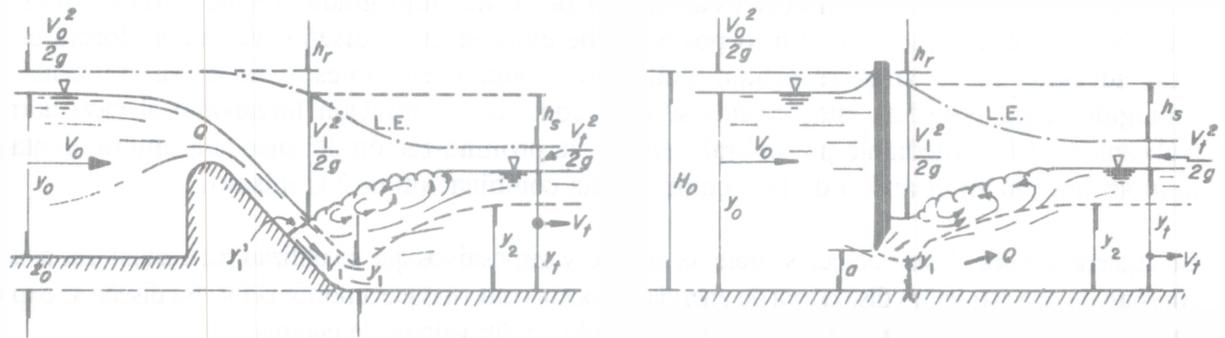
$$z_0 + y_0 + \frac{V_0^2}{2g} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + h_r \quad (4.61a)$$

donde h_r es la pérdida entre las dos secciones, que puede calcularse de la expresión

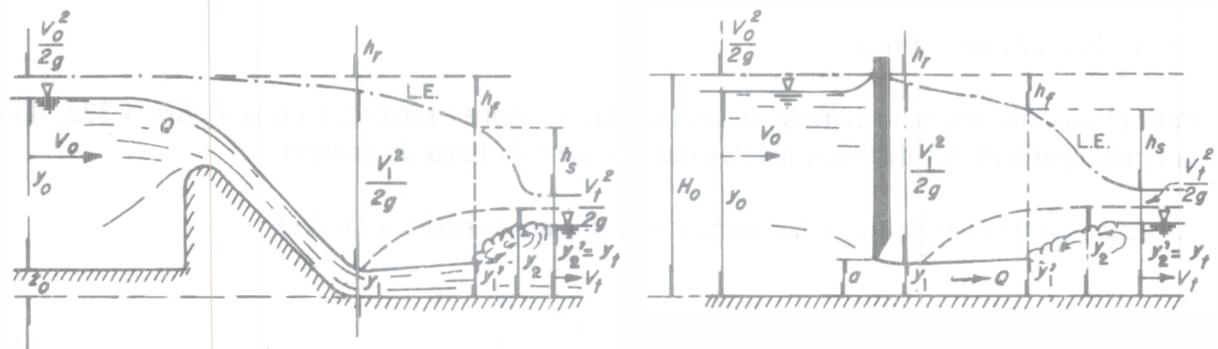
$$h_r = K \frac{V_1^2}{2g}$$



a) Caso 1. $y_1 = y_2$; salto hidráulico normal.



b) Caso 2. $y_1 > y_2$; salto hidráulico ahogado o sumergido.



c) Caso 3. $y_1 < y_2$; salto hidráulico libre.

Figura 4.32. Efecto del tirante de salida en la posición del salto hidráulico

siendo $K \approx 0.1$, a reserva de presentar después criterios más precisos. Por tanto, la ecuación 4.61a se convierte en

$$z_0 + y_0 + \frac{V_0^2}{2g} = y_1 + (1 + K) \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.61b)$$

Esta ecuación se resuelve para y_1 y V_1 con el auxilio de la de continuidad.

En el canal se mantiene el mismo ancho y el tirante conjugado mayor se obtiene de la ecuación 4.8b

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right]$$

con el número de Froude F_1 previamente calculado, debiendo cumplirse que $y_2 = y_1$.

4.6.2 Después de la compuerta

La compuerta de la figura 4.32a puede ser plana o radial sin afectar los desarrollos que aquí se presentan. Tiene el ancho b igual al del canal, como se muestra en la figura 4.33a. Su descarga es libre si se produce un salto libre o normal. El normal constituye el límite superior de descarga libre antes de ocurrir la sumergida; se forma con el conjugado menor igual a y_1 en la sección contracta, de acuerdo al tipo de compuerta y el caudal descargado. Un criterio para definir dicho límite se propone al final de esta sección.

Con $z_0 = 0$ y $H_0 = y_0 + V_0^2/2g$, la ecuación 4.61b aplicada a las secciones 0 y 1 de la compuerta resulta

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + K}} \sqrt{2g (H_0 - y_1)}$$

$$V_1 = C_v \sqrt{2g (H_0 - y_1)} \quad (4.62a)$$

O bien

$$\frac{V_1^2}{2g} = C_v^2 (H_0 - y_1) \quad (4.62b)$$

donde

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1 + K}} \quad (4.63a)$$

es el llamado coeficiente de velocidad de valor igual o menor de uno. También es

$$K = \frac{1}{C_v^2} - 1 \quad (4.63b)$$

Al sustituir la ecuación 4.62b en la 4.61a ($z_0 = 0$), se obtiene

$$h_r = (1 - C_v^2) (H_0 - y_1)$$

que muestra la dependencia de h_r con C_v . Si $C_v = 1$, $h_r = 0$.

Con $y_1 = C_c a$, el área hidráulica de la sección contracta es $A_1 = C_c a b$ y de la ecuación de continuidad se cumple

$$\frac{V_0^2}{2g} = \phi^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.64)$$

donde

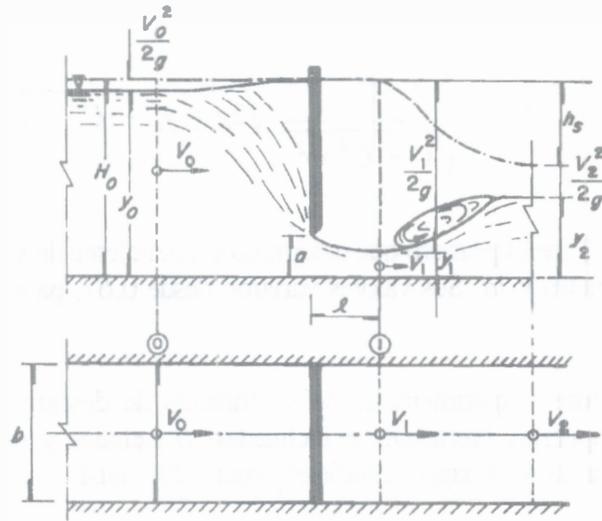
$$\phi = \frac{C_c a}{y_0} \quad (4.65)$$

representa al cociente de las áreas hidráulicas de la sección contracta y del canal antes de la compuerta. Por tanto, la ecuación 4.62b se escribe en la forma

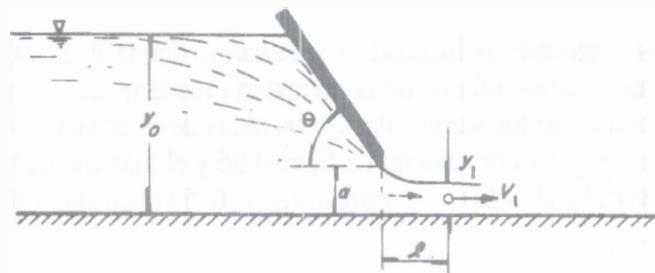
$$\frac{1}{C_v^2} \frac{V_1^2}{2g} = y_0 + \phi^2 \frac{V_1^2}{2g} - C_c a$$

O bien

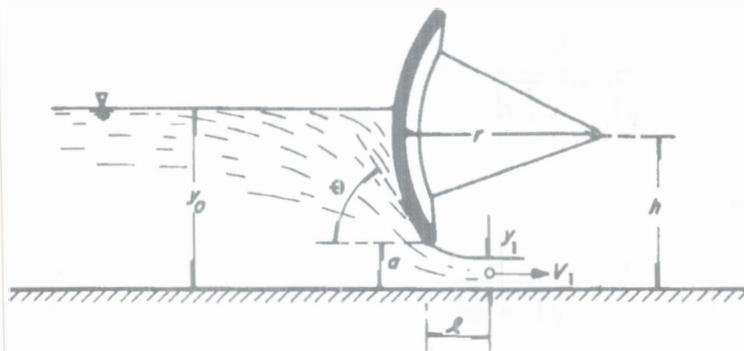
$$\frac{V_1^2}{2g} \left[\frac{1}{C_v^2} - \phi^2 \right] = y_0 - C_c a$$



a) Comportamiento general de la descarga



b) Compuerta plana inclinada



c) Compuerta radial; $\cos \theta = \frac{h}{r} - \frac{a}{r}$

Figura 4.33. Descarga libre de compuertas

Al despejar, resulta

$$V_1 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - C_v^2 \phi^2}} \sqrt{2g (y_0 - C_c a)} \quad (4.66)$$

Gibson (referencia 28) fue el primero que determinó el coeficiente de velocidad C_v por la vía experimental en función del parámetro y_0/a . Sus valores variaron desde 0.67, para $y_0/a = 0.16$, a 0.95, para $y_0/a = 6$.

Con base en los valores experimentales del coeficiente de descarga C_d obtenidos por Gentilini (ver volumen 1) en compuertas (verticales e inclinadas) o radiales y en resultados teóricos propios del coeficiente de contracción, Knapp (1960)(referencia 29) ajustó los valores obtenidos y encontró la expresión

$$C_v = 0.96 + (0.0017 \theta^0 - 0.05) \frac{a}{H_0} \quad (4.67)$$

para compuertas planas (verticales o inclinadas) y radiales, donde $\theta \leq 90^\circ$; siendo θ° el ángulo de inclinación de la tangente al labio inferior de la compuerta respecto de la horizontal, en grados (figuras 4.33b y c). Knapp encontró que los valores de C_v obtenidos de la ecuación 4.67 difieren ± 1 a 1.5 por ciento de los experimentales. El valor mínimo de C_v es 0.96 y el máximo debe ser 1; éste se alcanza con $a/H_0 = 0.388$ cuando $\theta = 90^\circ$, y con $a/H_0 = 0.516$ cuando $\theta = 75^\circ$, es decir, cuando la abertura es grande.

Como se detalla en el capítulo de compuertas, Rajaratnam y Subramanya (referencia 30) midieron la velocidad en la sección contracta de compuertas con descarga libre y sumergida. Para hacer congruente la ecuación 4.66 con sus resultados experimentales es necesario que

$$\frac{C_v}{\sqrt{1 - C_v^2 \phi^2}} = 1$$

lo que equivale a

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} \quad (4.68)$$

con validez en el intervalo $0.0425 \leq a / y_0 \leq 0.103$. Considerando que $C_c \approx 0.61$, de la ecuación 4.65 el intervalo anterior en términos de ϕ equivale a $0.026 \leq \phi \leq 0.063$, de modo que $0.998 \leq C_v \leq 1.0$; nuevamente un valor muy próximo a 1. Si se compara la ecuación 4.68 con la 4.63a resulta $K = \phi^2$ de modo que $0.0007 \leq K \leq 0.004$. Por último, dentro del intervalo señalado, de la ecuación 4.64 la pérdida de energía es igual a la carga de velocidad de aproximación, es decir, disminuye en la medida que y_0/a aumenta.

Lo antes expuesto comprueba que la pérdida de energía (entre las secciones 0 y 1) por efecto de la descarga libre o sumergida de una compuerta es pequeña, lo que verifica lo establecido para la ecuación del momentum en el caso de la figura 4.5a; también explica la razón de considerar $C_v = 1$, al tener más influencia otras variables. En todo caso, el error se corrige al usar un valor experimental del coeficiente de gasto.

La ecuación 4.66 se escribe también en la forma

$$V_1 = C_v \sqrt{\frac{1 - (C_c a / y_0)}{1 - C_v^2 \phi^2}} \sqrt{2g y_0}$$

O bien, con $\phi = C_c a / y_0$

$$V_1 = \frac{C_v}{\sqrt{\frac{1 - (C_v C_c a / y_0)^2}{1 - (C_c a / y_0)}}} \sqrt{2g y_0}$$

Finalmente, considerando que $Q = C_c a b V_1$ y haciendo

$$C_d = \frac{C_v C_c}{\sqrt{\frac{1 - (C_v C_c a / y_0)^2}{1 - (C_c a / y_0)}}} \quad (4.69)$$

la ecuación del gasto resulta

$$Q = C_d a b \sqrt{2g y_0} \quad (4.70)$$

donde C_d es un coeficiente de gasto, sin dimensiones, cuyo valor experimental fue discutido en el subcapítulo de compuertas del volumen 1. Cuando se considera $C_v = 1$, resulta

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 + (C_c a / y_0)}} \quad (4.71)$$

Con $q = Q/b$, de la ecuación 4.70

$$q^2 = C_d^2 a^2 2g y_0$$

y el cuadrado del número de Froude en la sección contracta es

$$F_1^2 = \frac{q^2}{g C_c^3 a^3} = 2 \left[\frac{C_d}{C_c} \right]^2 \frac{y_0}{C_c a}$$

O bien, de la ecuación 4.71 como sigue

$$F_1^2 = \frac{2 y_0 / C_c a}{1 + (C_c a / y_0)}$$

Para que ocurra salto normal se debe cumplir la ecuación 4.8b, donde se sustituyen F_1^2 y $y_1 = C_c a$, y queda en la forma

$$\frac{y_2}{C_c a} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 16 \left[\frac{y_0 / C_c a}{1 + (C_c a / y_0)} \right]} - 1 \right] \quad (4.72)$$

Con la ecuación 4.72 se determina el valor límite $y_1 = y_2$ hasta el cual la descarga es libre. Si $y_1 > y_2$ la descarga es sumergida. Dicha ecuación es válida siempre que el canal sea rectangular y de ancho constante antes y después de la compuerta. En la figura 4.34 se muestra la curva límite para cualquier tipo de compuerta, obtenida por el autor a partir de la ecuación 4.72.

El valor de C_c ha sido investigado por las vías teórica y experimental, y una discusión amplia sobre el mismo se presenta en el capítulo de compuertas. El trabajo experimental de Brooke Benjamín con compuertas planas verticales es seguramente el más reconocido; al descontar el efecto de viscosidad que induce el crecimiento de la capa límite en el sentido del flujo después de la compuerta, sus resultados se ajustan bien a la ecuación

$$C_c = 0.611 \left[1 - 0.0895 \frac{a}{y_0} + 0.0893 \left(\frac{a}{y_0} \right)^2 + 0.0074 \left(\frac{a}{y_0} \right)^3 \right] \quad (4.73)$$

que da valores próximos a 0.61, que es el más comúnmente aceptado. Ecuaciones similares para compuertas planas con diferentes inclinaciones se presentan en el capítulo *descarga de compuertas* de este libro. Una ecuación experimental aproximada para compuertas radiales se debe a Toch (ver volumen 1) y es

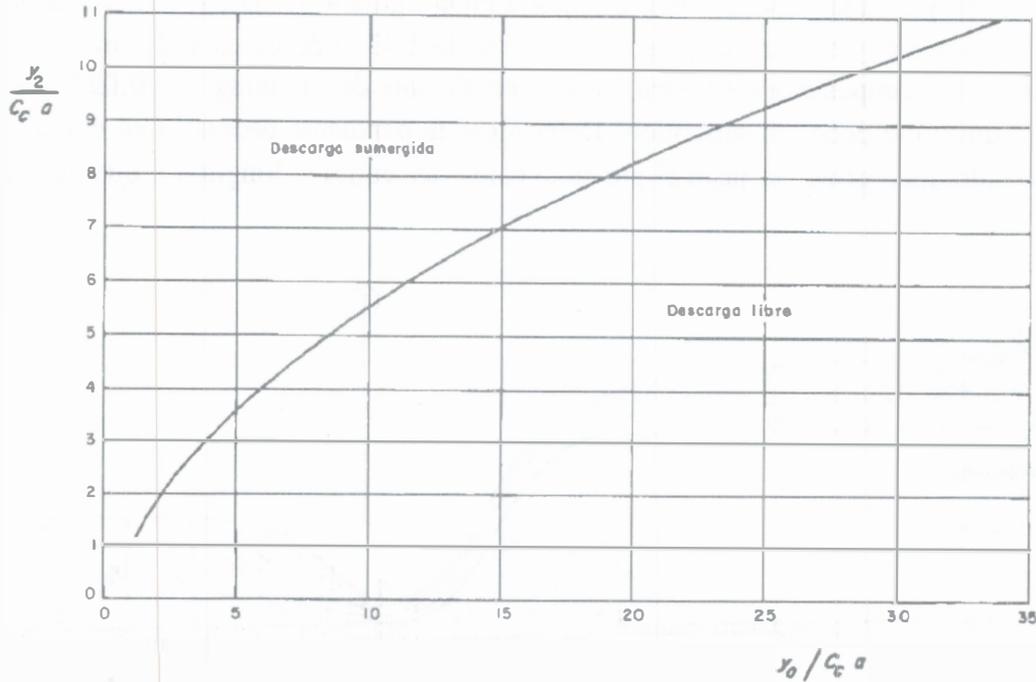


Figura 4.34. Curva límite entre descarga libre y sumergida de compuertas en un canal rectangular de ancho constante, según G. Sotelo

$$C_c = 1 - 0.75 \frac{\theta^0}{90} + 0.36 \left(\frac{\theta^0}{90} \right)^2 \quad (4.74)$$

A partir de la teoría de la red de flujo, la distancia l que hay desde el plano de una compuerta vertical hasta la sección contracta, se aproxima a la obtenida mediante la ecuación

$$l = \frac{a}{C_c}$$

Shukowsky y Vedernikow (referencia 13) y Franke (1969)(referencia 31) obtuvieron en forma experimental la ecuación

$$l = 2 a \quad (4.75)$$

para la misma compuerta vertical, siendo ésta la expresión más recomendable.

Ejemplo 4.1. Un canal rectangular de 15 m de ancho se inicia al pie de un cimacio de 4.27 m de altura (del piso a la cresta), como se muestra en la figura 4.35. Dicho cimacio tiene el mismo ancho que el canal y con una carga sobre la cresta de 2.43 m descarga 112.5 m³/s. El canal está recubierto de mampostería de piedra, con un coeficiente de Manning $n = 0.025$, y su régimen en flujo uniforme debe ser subcrítico. Determinar la pendiente necesaria en el canal para que el salto hidráulico principie justo al pie de la caída, así como la longitud L que debe revestirse.

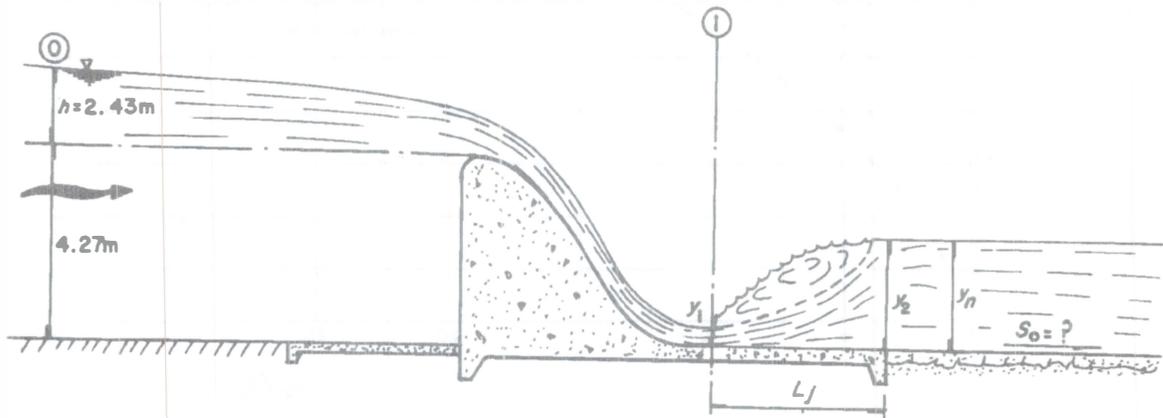


Figura 4.35. Estructura hidráulica del ejemplo 4.1

Solución. El tirante y_1 en la sección al pie del cimacio queda obligado por el gasto y la altura de caída. Dicho tirante debe ser el conjugado menor del salto para que éste se inicie en dicha sección. Su conjugado mayor y_2 debe ser el tirante normal en el canal si se quiere impedir que se mueva a otra posición.

Siendo el gasto unitario $q = 112.5/15 = 7.5 \text{ m}^2/\text{s}$, la velocidad con que el agua se aproxima al cimacio es

$$V_0 = \frac{7.5}{6.7} = 1.119 \text{ m/s}$$

y la carga de velocidad $V_0^2/2g = 0.064 \text{ m}$. El tirante crítico tiene el valor

$$y_c = \left[\frac{(7.5)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 1.79 \text{ m}$$

Considerando $K = 0.1$, de la ecuación 4.61b se tiene

$$4.27 + 2.43 + 0.064 = y_1 + 1.1 \frac{V_1^2}{2g}$$

o bien

$$6.764 = y_1 + \frac{1.1 (7.5)^2}{2g y_1^2}$$

cuya solución en régimen supercrítico es $y_1 = 0.7225$ m.

La velocidad y la carga de velocidad en la sección 1 son entonces

$$V_1 = \frac{7.5}{0.7225} = 10.3806 \text{ m/s}; \frac{V_1^2}{2g} = 5.4922 \text{ m}; E_1 = 6.2147 \text{ m}$$

El número de Froude en la misma sección resulta

$$F_1 = \frac{10.3806}{\sqrt{9.81 (0.7225)}} = 3.8992$$

De la ecuación 4.8b el conjugado mayor es

$$y_2 = \frac{0.7225}{2} \left(\sqrt{1 + 8 (3.8992)^2} - 1 \right) = 3.6391 \text{ m}$$

La velocidad y carga de velocidad respectivamente son

$$V_2 = \frac{7.5}{3.6391} = 2.0609 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0.2165 \text{ m}$$

La pérdida de energía en el salto resulta

$$h_s = E_1 - E_2 = 6.2147 - (3.6391 + 0.2165) = 2.3591 \text{ m}$$

El tirante normal en el canal debe ser $y_n = 3.6391$ m, con el cual se obtienen los elementos geométricos de su sección, como sigue

$$A = 15 (3.6391) = 54.5865 \text{ m}^2$$

$$P = 15 + 2 (3.6391) = 22.2782 \text{ m}$$

$$R_n = \frac{54.5865}{22.2782} = 2.4502 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning, la pendiente necesaria es

$$S_0 = \left(\frac{2.0609 (0.025)}{(2.4502)^{2/3}} \right)^2 = 0.0008$$

De acuerdo con el USBR, de la figura 4.26 resulta $L_j/y_2 = 5.75$ y la longitud del salto es

$$L_j = 5.75 (3.6391) = 20.925 \text{ m} \approx 21 \text{ m}$$

Si S_0 es menor que la pendiente calculada se forma un tirante normal $y_n > y_2$, y el salto se mueve hacia aguas arriba ahogando el pie del vertedor (figura 4.32b). Por el contrario, si S_0 es mayor que la calculada ($y_n < y_2$), el salto se mueve hacia aguas abajo y se forma un salto libre en el sitio en que se iguala el momentum en las secciones que lo limitan (figura 4.32c) (ver también el ejemplo 5.3).

Ejemplo 4.2. El canal aguas arriba y la compuerta deslizante que se muestran en la figura 4.36 son rectangulares, de 3 m de ancho; la abertura es de 0.51 m y el tirante aguas arriba de 1.90 m. Dicha compuerta regula las descargas a un canal trapecial excavado en tierra ($n = 0.025$), del mismo ancho de plantilla y taludes 1.5:1, existiendo una transición gradual para cambiar el talud después del salto hidráulico. Calcular la pendiente necesaria en el canal de manera que haya flujo uniforme subcrítico y descarga libre de la compuerta (salto normal), así como la longitud L que debe tener el tramo revestido para alojar el resalto e impedir la erosión del canal aguas abajo.

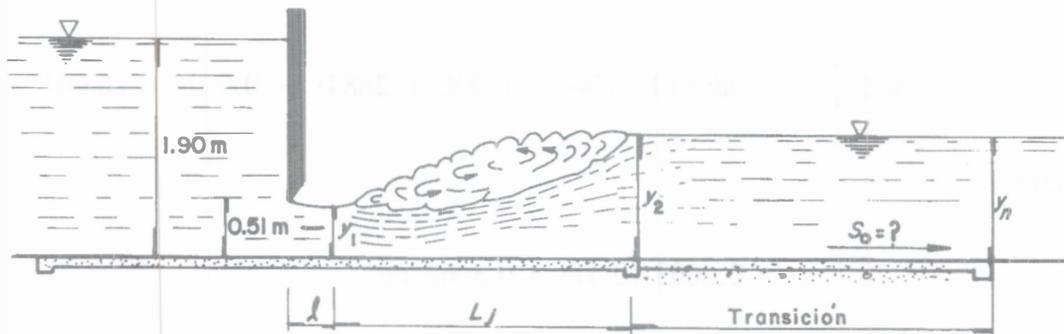


Figura 4.36. Descarga de la compuerta deslizante del ejemplo 4.2

Solución. Es necesario calcular el gasto descargado. Debido a que todo el canal y la propia compuerta tienen el mismo ancho, se utiliza la ecuación 4.70 y los criterios presentados en el subcapítulo de compuertas del volumen 1, para valorar C_d en las deslizantes verticales.

Con $y_0/a = 1.9/0.51 = 3.725$, el coeficiente C_d de descarga libre es 0.56. Por tanto, el gasto unitario y el total resultan

$$q = 0.56 (0.51) \sqrt{19.62 (1.9)} = 1.7438 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Q = 3 (1.7438) = 5.2313 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocidad y la carga de velocidad del flujo de aproximación son

$$V_0 = \frac{1.7438}{1.9} = 0.9178 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = 0.0429 \text{ m}$$

Por tanto

$$H_0 = 1.9 + 0.0429 = 1.9429 \text{ m}$$

Con $a/y_0 = 0.2684$, de la ecuación 4.73

$$C_c = 0.611 [1 - 0.0895(0.2684) + 0.0893(0.2684)^2 + 0.0074(0.2684)^3] = 0.6003$$

Por tanto

$$y_1 = 0.6003 (0.51) = 0.3062 \text{ m}$$

y de la 4.71

$$C_d = \frac{0.6003}{\sqrt{1 + \frac{0.3062}{1.9}}} = 0.5571 \approx 0.56$$

$$V_1 = \frac{1.7438}{0.3062} = 5.6955 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 1.6533 \text{ m}$$

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1.9595 \text{ m}$$

Si $y_1 = 0.3062 \text{ m}$ hay más energía en la sección contracta que aguas arriba de la compuerta, lo cual no puede ocurrir; se debe a imperfecciones de la teoría y los experimentos. Esto se evita si se utiliza $C_d = 0.555$ y los resultados que éste genera, es decir, el valor de Q , V_1 , etc. En los restantes cálculos se ha preferido continuar con el valor de C_d experimental ya que no hay diferencias importantes.

Para que ocurra descarga libre y salto hidráulico normal, éste se debe iniciar en la sección contracta, de modo que y_1 sea el conjugado menor. En dicha sección, el número de Froude es

$$F_1 = \frac{5.6955}{\sqrt{9.81 (0.3062)}} = 3.2863$$

De la ecuación 4.8b se obtiene el conjugado mayor

$$y_2 = \frac{0.3062}{2} \left(\sqrt{1 + 8 (3.2863)^2} - 1 \right) = 1.2781 \text{ m}$$

que debe ser el tirante al final del tramo revestido, es decir $y_2 = y_f$. En esta sección, la velocidad y energía específica son

$$V_2 = \frac{1.7438}{1.2781} = 1.3644 \text{ m/s}$$

$$E_2 = 1.2781 + \frac{(1.3644)^2}{19.62} = 1.3730 \text{ m}$$

El tirante después de la transición es igual al normal y_n en el canal, distinto de y_f . Al despreciar la pérdida de energía en la transición, se debe cumplir

$$1.373 = y_n + \frac{V_n^2}{2g}$$

Con la sección que tiene el canal, esta ecuación se verifica con $y_n = 1.3422 \text{ m}$. En efecto

$$A = [3 + 1.5 (1.3422)] 1.3422 = 6.7289 \text{ m}^2$$

$$V = 5.2313/6.7289 = 0.7774 \text{ m/s}; \frac{V^2}{2g} = 0.0308 \text{ m}$$

$$E = 1.373 \text{ m}$$

Además

$$P = 3 + 2 \sqrt{3.25} 1.3422 = 7.8394 \text{ m}$$

$$R_h = 6.7289/7.8394 = 0.8583 \text{ m}$$

Para $y_n = 1.3452 \text{ m}$, la pendiente del canal debe ser entonces

$$S_0 = \left[\frac{0.7774 (0.025)}{(0.8583)^{2/3}} \right]^2 = 0.000463$$

Con $F_1 = 3.29$, de la figura 4.26 resulta $L_j/y_2 = 5.4$ y la longitud del salto de 6.90 m. De acuerdo con la ecuación 4.75, se debe revestir por lo menos la distancia $l + L_j = 2(0.51) + 6.90 = 7.92$ m, además de la longitud de la transición.

Ejemplo 4.3. Un canal trapecial tiene 5 m de ancho de plantilla, taludes $k = 1$, y para una pendiente de 0.0004 el flujo establece un tirante normal de 1.75 m cuando $n = 0.025$ (Manning). Debido a razones topográficas existe un tramo intermedio en el canal con suficiente longitud y pendiente para que también se establezca flujo uniforme, pero supercrítico. Calcular la pendiente del tramo intermedio de manera que se produzca un salto normal inmediatamente después de que termina (figura 4.37). Dicho tramo debe revestirse de concreto ($n = 0.015$) por el aumento de velocidad que se produce.

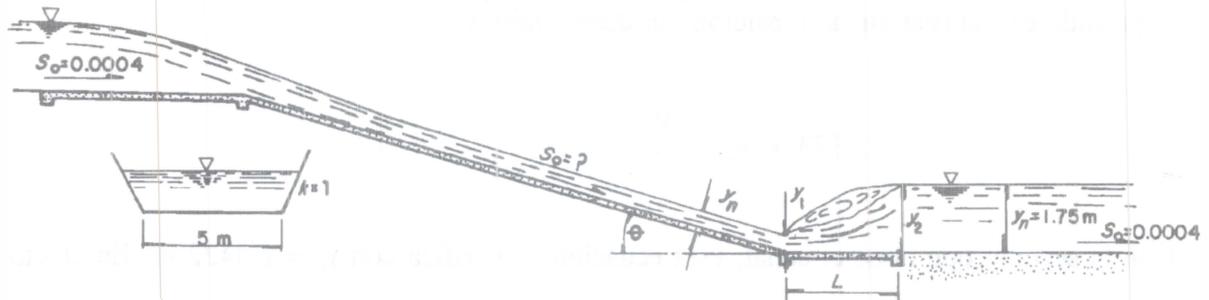


Figura 4.37. Esquema ilustrativo del ejemplo 4.3

Solución. Para calcular el gasto en el canal se determinan a continuación los elementos geométricos de la sección para el tirante normal de 1.75 m.

$$A = [5 + 1(1.75)] 1.75 = 11.8125 \text{ m}^2$$

$$P = 5 + 2\sqrt{2}(1.75) = 9.9497 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{11.8125}{9.9497} = 1.1872 \text{ m}$$

La velocidad media y el gasto resultan

$$V = \frac{1}{0.025} (1.1872)^{2/3} (0.0004)^{1/2} = 0.897 \text{ m/s}$$

$$Q = 11.8125 (0.897) = 10.5954 \text{ m}^3/\text{s}$$

Es conveniente calcular el tirante crítico, para lo cual se obtiene el valor del parámetro

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g} b^{5/2}} = \frac{10.5954 (1)}{\sqrt{9.81} (5)^{5/2}} = 0.0605$$

De la figura 3.11 resulta que $k y_c / b = 0.146$, y por lo tanto

$$y_c = \frac{0.146 (5)}{1} = 0.73 \text{ m}$$

que es menor que el tirante normal en el canal, por tanto el flujo uniforme es con régimen subcrítico.

Para obligar a que el salto hidráulico se inicie en la sección donde se efectúa el cambio de pendiente, el conjugado mayor debe ser igual al tirante normal en el canal. Para determinar el menor se necesitan los siguientes parámetros

$$F_{M2} = \frac{Q}{\sqrt{g} k y_2^{5/2}} = \frac{10.5954}{\sqrt{9.81} (1) (1.75)^{5/2}} = 0.835$$

$$t_2 = \frac{b}{k y_2} = \frac{5}{(1) (1.75)} = 2.8571$$

De la figura 4.11, $y_1/y_2 = 0.128$, y por tanto el conjugado menor resulta

$$y_1 = 0.128 (1.75) = 0.224 \text{ m}$$

Si se desea un valor más preciso, se puede recurrir a la ecuación 4.14 la cual, al substituir los diferentes términos, se convierte en

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^4 + 8.1428 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 + 20.3873 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 + 14.5588 \frac{y_1}{y_2} - 2.0937 = 0$$

La solución correcta es $y_1/y_2 = 0.122$, esto es

$$y_1 = 0.122 (1.75) = 0.2135 \text{ m}$$

Este tirante es casi igual al normal y_n para el tramo intermedio, por tanto, los elementos hidráulicos de la sección son

$$A = [5 + 1 (0.2135)] 0.2135 = 1.1131 \text{ m}^2$$

$$T = 5 + 2 (0.2135) = 5.427 \text{ m}$$

$$\frac{A}{T} = \frac{1.1131}{5.427} = 0.2051 \text{ m}$$

$$P = 5 + 2 \sqrt{2} (0.2135) = 5.6039 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{1.1131}{5.6039} = 0.199 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{10.5954}{1.1131} = 9.5188 \text{ m/s} ; \frac{V_1^2}{2g} = 4.6181 \text{ m}$$

$$E_1 = 0.2135 + 4.6181 = 4.8316 \text{ m}$$

$$F_1 = \frac{9.5188}{\sqrt{9.81 (0.2051)}} = 6.71$$

Para $n = 0.015$, la pendiente necesaria en el tramo intermedio debe ser

$$S_0 = \text{sen } \theta = \left[\frac{Vn}{R_h^{2/3}} \right]^2 = \left[\frac{9.5188 (0.015)}{(0.199)^{2/3}} \right]^2 = 0.17592$$

$$\theta = 10.13^\circ > 8^\circ$$

Con este valor preliminar de θ se debe calcular un nuevo valor de y_n haciendo que se cumpla la igualdad de energía específica

$$y_n \cos \theta + \frac{V_n^2}{2g} = 4.8316$$

para proceder después al cálculo de un nuevo valor de θ . Sin embargo, en este caso la diferencia obtenida de este ajuste es muy pequeña.

La longitud L_j del revestimiento debe ser, como mínimo, la del salto hidráulico, que de acuerdo con la figura 4.27 y para $y_1/y_c = 0.2135 / 0.73 = 0.2925$, su magnitud resulta

$$L_j = 18.6 (0.73) = 13.58 \text{ m}$$

Según Sieñchin (tabla 4.2) es

$$L_j = 10.6 (1.75 - 0.2135) = 16.29 \text{ m}$$

Según Silvester (tabla 4.2) también es

$$L_j = 7.1 (1 + 10/23.42) (1.75 - 0.2135) = 15.57 \text{ m}$$

Con $b/ky_1 = 23.42$ y $F_1 = 6.71$, en la figura 4.30 como último valor se lee $L_j/y_2 = 5.2$ y por tanto

$$L_j = 5.2 (1.75) = 9.10 \text{ m}$$

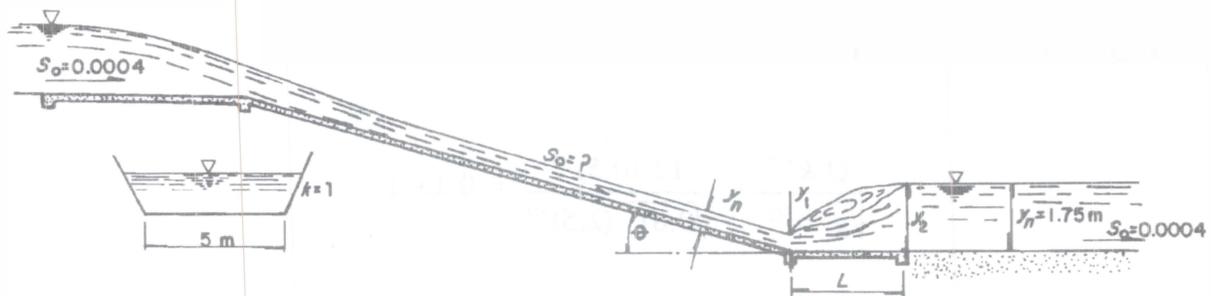


Figura 4.37. Esquema ilustrativo del ejemplo 4.3

Ejemplo 4.4. Un canal trapecial de 2.50 m de ancho de plantilla, talud 0.5:1 y pendiente $S_1 = 0.02$, conduce $12 \text{ m}^3/\text{s}$ en un tramo muy largo y continúa a través de la montaña por un túnel de sección herradura de 3 m de diámetro (figura 4.38). El canal está revestido de concreto con acabado liso ($n_1 = 0.013$) y el túnel, de concreto con acabado regular ($n_2 = 0.018$). a) Calcular la pendiente S_2 necesaria en el túnel para que se inicie un salto hidráulico en el portal de entrada. b) Si $S_2 = 0.01$, indicar qué ocurriría con el salto hidráulico. c) Determinar S_2 mínima que elimine el salto hidráulico. d) Obtener el desnivel Δz entre las dos secciones que limitan la transición, así como la pendiente S_2 necesaria, de manera que se mantenga el mismo tirante normal en el canal, a lo largo de la transición y el túnel.

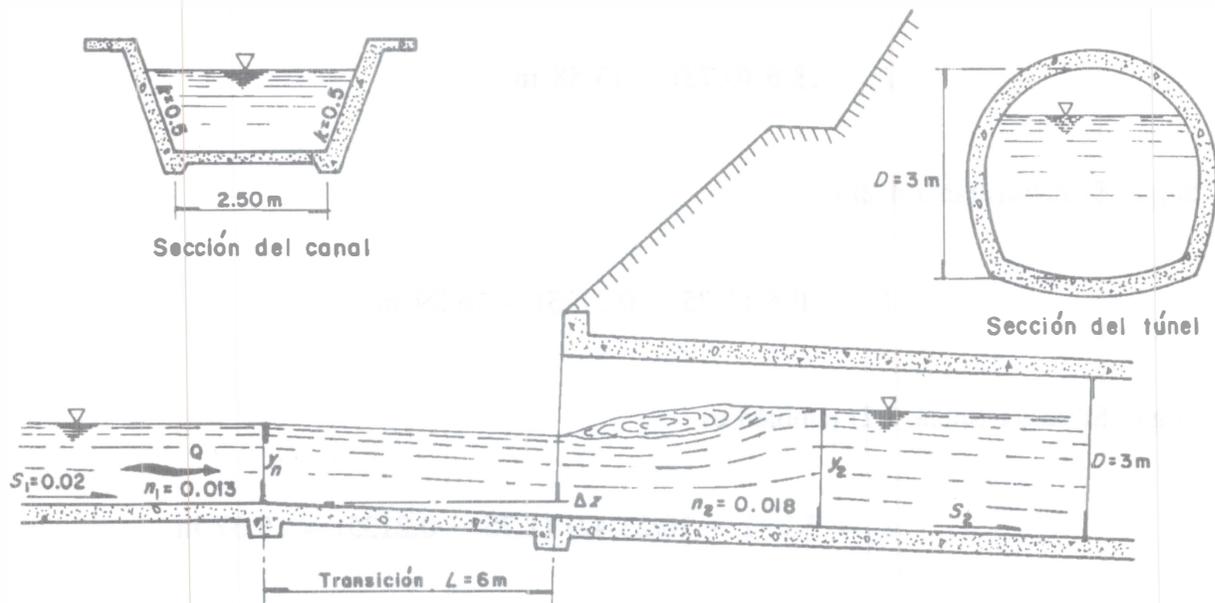


Figura 4.38. Esquema ilustrativo del ejemplo 4.4

Solución a. Es conveniente calcular inicialmente el tirante crítico en el canal y en el túnel, así como el tirante normal en el primero.

Tirante crítico en el canal. Con el parámetro

$$\frac{Q k^{3/2}}{\sqrt{g} b^{5/2}} = \frac{12 (0.5)^{3/2}}{\sqrt{9.81} (2.5)^{5/2}} = 0.1371$$

de la figura 3.11 resulta que $k y_c / b = 0.255$. Por tanto

$$y_c = \frac{0.255 (2.5)}{0.5} = 1.275 \text{ m}$$

Tirante crítico en el túnel. Con el parámetro

$$\frac{Q}{\sqrt{g} D^{5/2}} = \frac{12}{\sqrt{9.81} (3)^{5/2}} = 0.2458$$

y de la figura 3.12, o de la tabla 2.9, resulta que $y_c/D = 0.456$. Por tanto

$$y_c = 0.456 (3) = 1.368 \text{ m}$$

Tirante normal en el canal. Su módulo de sección es

$$\frac{Q n_1}{b^{8/3} S_1^{1/2}} = \frac{12 (0.013)}{(2.5)^{8/3} \sqrt{0.02}} = 0.0958$$

De la figura 2.7 resulta que $y_n/b = 0.27$ y por tanto el tirante normal vale

$$y_n = 0.27 (2.5) = 0.675 \text{ m}$$

que es menor que el crítico y el régimen en el canal es supercrítico. El área hidráulica, velocidad y carga de velocidad en el canal son

$$A = [2.5 + 0.5 (0.675)] 0.675 = 1.9153 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{12}{1.9153} = 6.265 \text{ m/s}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 2.001 \text{ m}$$

A partir de la ecuación de la energía se calcula el tirante y_1 que se presentaría en el portal de entrada al túnel. Despreciando las pérdidas en el tramo de transición y considerando que en éste se mantiene la misma pendiente que en el canal, se tiene

$$0.02 (6) + 0.675 + 2.001 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

o sea que

$$2.796 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} \quad (a)$$

Se debe cumplir también la ecuación de continuidad

$$A_1 V_1 = 12 \quad (b)$$

La solución del sistema de ecuaciones (a) y (b) es por tanteos. Por ejemplo, con $y_1/D = 0.27$, $y_1 = 0.81$ m, y de la tabla 2.9, $A_1/D^2 = 0.2107$, $A_1 = 1.8963$ m², siendo la velocidad y carga de velocidad respectivamente

$$V_1 = \frac{12}{1.8963} = 6.328 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 2.041 \text{ m}$$

y la energía específica

$$E_1 = 0.81 + 2.041 = 2.851 \text{ m} > 2.83 \text{ m}$$

Después de una serie de tanteos adicionales se tiene para $y_1/D = 0.2715$, $y_1 = 0.8145$ m, e interpolando en la tabla 2.9, $A_1/D^2 = 0.212125$ y $A_1 = 1.9091$ m², siendo la velocidad y la carga de velocidad respectivamente

$$V_1 = \frac{12}{1.9091} = 6.286 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 2.014 \text{ m}$$

y la energía específica

$$E_1 = 0.8145 + 2.014 = 2.828 \text{ m}$$

que es el valor requerido. Por tanto, el tirante a la entrada del túnel es $y_1 = 0.8145$ m, menor que el crítico de 1.36 m dentro del mismo, siendo factible que se produzca el salto hidráulico.

El conjugado menor de dicho salto debe ser $y_1 = 0.8145$ m. Para determinar el mayor se calculan los siguientes parámetros

$$\frac{Q}{\sqrt{g y_1^3}} = \frac{12}{\sqrt{9.81 (0.8145)^3}} = 6.399$$

$$\frac{y_1}{D} = \frac{0.8145}{3} = 0.2715$$

De la figura 4.17 resulta que $y_2/y_1 = 2.62$, y por tanto el conjugado mayor tiene el valor

$$y_2 = 2.62 (0.8145) = 2.134 \text{ m} < 3 \text{ m}$$

y el túnel no se ahoga.

Para que el salto se inicie en la sección del portal de entrada se necesita que el tirante conjugado mayor calculado sea el normal en el túnel. Los elementos geométricos para dicho tirante se calculan de la tabla 2.9 para $y_2/D = 2.134/3 = 0.7113$. Mediante interpolaciones lineales resulta que $A_2/D^2 = 0.64147$, $R_{h2}/D = 0.300756$ y por tanto se obtiene

$$A_2 = 0.64147 (3)^2 = 5.7732 \text{ m}^2$$

$$R_{h2} = 0.300756 (3) = 0.9023 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{12}{5.7732} = 2.0786 \text{ m/s}$$

De la ecuación de Manning, la pendiente en el túnel debe ser

$$S_2 = \left[\frac{2.0786 (0.018)}{(0.9023)^{2/3}} \right]^2 = 0.001606$$

Solución b. Para $S_2 = 0.01$ en el túnel, es necesario determinar el tirante normal que se produce. Para ello es preciso el siguiente parámetro

$$\frac{Q n_2}{D^{8/3} S_2^{1/2}} = \frac{12 (0.018)}{(3)^{8/3} \sqrt{0.01}} = 0.11538$$

De la figura 2.7 (o de la tabla 2.9) resulta que $y/D = 0.381$, o sea que el tirante normal en el túnel es

$$y_n = 0.381 (3) = 1.143 \text{ m} < (y_c = 1.368 \text{ m})$$

Es decir, para $S_2 = 0.01$ en el túnel, el flujo uniforme se produce a régimen supercrítico, igual que en el canal. Por tanto, no ocurre el salto hidráulico en ninguna sección.

Solución c. Para eliminar el salto hidráulico basta que la pendiente del túnel sea mayor o igual a la crítica. La crítica sería la mínima para evitar el salto. De este modo, se debe tener

$$\frac{y_n}{D} = \frac{y_c}{D} = \frac{1.368}{3} = 0.456$$

De la tabla 2.9 resulta que $A_c/D^2 = 0.39264$, $R_{h2}/D = 0.24412$, y por tanto

$$A_c = 0.39264 (3)^2 = 3.5338 \text{ m}^2$$

$$R_{hc} = 0.24412 (3) = 0.7324 \text{ m}$$

Siendo la velocidad crítica

$$V_c = \frac{12}{3.5338} = 3.396 \text{ m/s}$$

y la pendiente crítica

$$S_c = \left[\frac{3.396 (0.018)}{0.7324^{2/3}} \right]^2 = 0.00566$$

Solución d. De acuerdo con la solución *a*, la energía específica para el flujo uniforme en el canal debe ser

$$E = 0.675 + 2.001 = 2.676 \text{ m}$$

Si se desea el mismo tirante dentro del túnel ($y_1 = 0.675 \text{ m}$), es necesario calcular la energía específica para dicho tirante. De este modo

$$\frac{y_1}{D} = \frac{0.675}{3} = 0.225$$

Para este parámetro, de la tabla 2.9 resulta que $A_2/D^2 = 0.16865$ y $R_{h2}/D = 0.1481$, obteniendo así los siguientes valores

$$A_1 = 0.16865 (3) = 1.5179 \text{ m}$$

$$R_{h1} = 0.1481 (3) = 0.4443 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{12}{1.5179} = 7.906 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 3.186 \text{ m}$$

$$E_1 = 0.675 + 3.186 = 3.861 \text{ m}$$

Si Δz representa el desnivel entre las secciones inicial y final de la transición y además se desprecian las pérdidas en la misma, la ecuación de energía entre las dos secciones resulta

$$\Delta z + 2.676 = 3.861$$

Por tanto, $\Delta z = 1.185 \text{ m}$.

Esto es, para que se presente el mismo tirante $y_n = 0.675 \text{ m}$ en la sección de entrada al túnel, dicha sección debe quedar 1.185 m abajo de aquella en que se inicia la transición. Esto se aclara en la figura 4.38.

Finalmente, para conservar el mismo tirante a lo largo del túnel, es necesario calcular la pendiente que garantice el flujo uniforme con el tirante normal. Aplicando la ecuación de Manning, dicha pendiente tiene el valor de

$$S_2 = \left[\frac{7.906 (0.018)}{(0.4443)^{2/3}} \right]^2 = 0.05973$$

4.7 SALTO HIDRÁULICO SUMERGIDO

4.7.1 Aspectos generales

El salto sumergido se produce en las condiciones del caso 2 en la figura 4.32b. Cuando ocurre sobre la espalda del vertedor su presencia no es grave si no alcanza a ahogar la cresta del mismo y su estudio queda comprendido en el capítulo destinado al salto en canales de pendiente mixta. Lo contrario acontece después de una compuerta o a la salida de un conducto a presión, ya que la sumergida disminuye el caudal descargado.

Woycicky (referencia 11 o 32) fue el primero que analizó el salto hidráulico sumergido a fin de predecir el tipo de descarga en compuertas planas verticales. Para ello consideró la disposición del flujo que ocurre en la descarga sumergida de una compuerta alojada en un canal prismático,

como se muestra en la figura 4.39. El tirante y_1 corresponde al de una sección contracta similar a la que ocurre en descarga libre; y_3 es el tirante de salida producido por las condiciones hidráulicas y geométricas del canal aguas abajo, del cual depende que exista o no ahogamiento.

Cuando el salto normal retrocede, parte de su remolino superficial se superpone a la zona de contracción del chorro descargado y lo sumerge dentro de una masa turbulenta de agua, formando así el salto hidráulico sumergido. Se establece un tirante y , mayor que y_1 , sobre el área de contracción del chorro, que es directamente responsable de la reducción del gasto descargado. Su valor depende de y_3 y es muy importante establecer ecuaciones que relacionen a ambos.

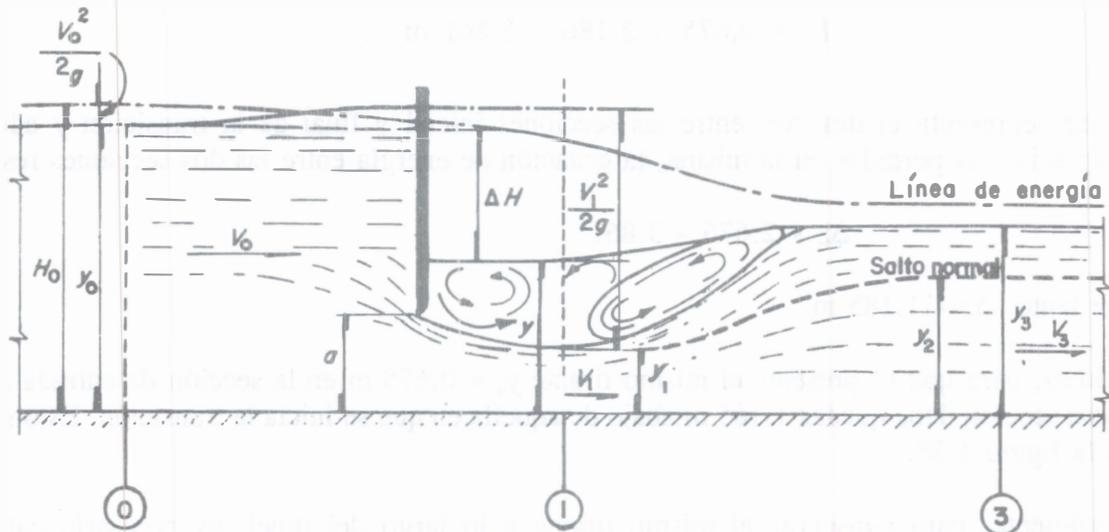


Figura 4.39. Salto hidráulico sumergido después de una compuerta

4.7.2 Análisis de Woycicky

El análisis del fenómeno se efectúa tratándolo como un flujo dividido, esto es, parte de la sección del flujo ocupada por el agua en movimiento y parte por agua estancada. La pérdida de energía h_r que ocurre entre las secciones 0 y 1 se debe al efecto de descarga de la compuerta y de nuevo es muy pequeña. La producida entre las secciones 1 y 3 del salto sumergido en principio se desconoce. En la sección 1 la velocidad efectiva es la correspondiente a la sección contracta, si bien la carga de presión es igual al tirante de ahogamiento y .

La ecuación 4.4a iguala el momentum en las secciones 1 y 3 de la figura 4.39, en la forma

$$\frac{q^2}{g y_1} + \frac{1}{2} y^2 = \frac{q^2}{g y_3} + \frac{1}{2} y_3^2 \quad (4.76)$$

donde y_1 es la dimensión vertical del área efectiva del chorro en la sección donde termina su contracción y $y'_G = y/2$. Multiplicando por $2/y_3^2$, al despejar resulta

$$\left(\frac{y}{y_3}\right)^2 = 1 - \frac{2 q^2}{g y_3^3} \left(\frac{y_3}{y_1} - 1\right) \quad (4.77a)$$

Siendo $F_3^2 = q^2/g y_3^3$ el número de Froude en la sección 3, la relación de sumergencia es

$$\frac{y}{y_3} = \sqrt{1 - 2 F_3^2 \left(\frac{y_3}{y_1} - 1\right)} \quad (4.77b)$$

Debido a que $0 < F_3 \leq 1$ y $(y_3/y_1) > 1$, para que haya solución de la ecuación 4.77b es necesario que

$$F_3^2 < \frac{0.5}{y_3/y_1 - 1}$$

La ecuación 4.77b proporciona el tirante de sumergencia con que descarga la compuerta. Si $y > y_1$ se produce el ahogamiento y la consiguiente reducción del caudal. Con el límite de solución $y = y_1$ la descarga es libre y dicha ecuación se convierte en la 4.9b.

Por desarrollos similares (capítulo de compuertas) se demuestra que la ecuación 4.70 es también válida para descarga sumergida, pero C_d tiene una definición diferente de la dada por la 4.71.

De la ecuación de energía entre las secciones 0 y 1 de la figura 4.39 y $H_0 = y_0 + V_0^2/2g$, se obtiene $H_0 = y + V_1^2/2g + h_r$, de manera que con $q = y_1 V_1$, se escribe

$$q = y_1 \sqrt{2g (H_0 - h_r - y)}$$

De esta ecuación

$$\frac{q^2}{g y_3^2} = 2 \left(\frac{y_1}{y_3}\right)^2 \left(\frac{H_0 - h_r}{y_3} - \frac{y}{y_3}\right)$$

que sustituida en la ecuación 4.77a, conduce a la expresión

$$\left(\frac{y}{y_3}\right)^2 - 4 \left(\frac{y_1}{y_3}\right)^2 \left(\frac{y_3}{y_1} - 1\right) \left(\frac{y}{y_3} - \frac{H_0 - h_r}{y_3}\right) - 1 = 0$$

Al efectuar las operaciones y simplificar, resulta

$$\left(\frac{y}{y_3}\right)^2 - 4 \frac{y_1}{y_3} \left[1 - \frac{y_1}{y_3}\right] \frac{y}{y_3} + 4 \frac{y_1}{y_3} \left[1 - \frac{y_1}{y_3}\right] \left[\frac{H_0 - h_r}{y_3}\right] - 1 = 0$$

Introduciendo el parámetro

$$N = 2 \frac{y_1}{y_3} \left[1 - \frac{y_1}{y_3}\right]$$

se obtiene la solución

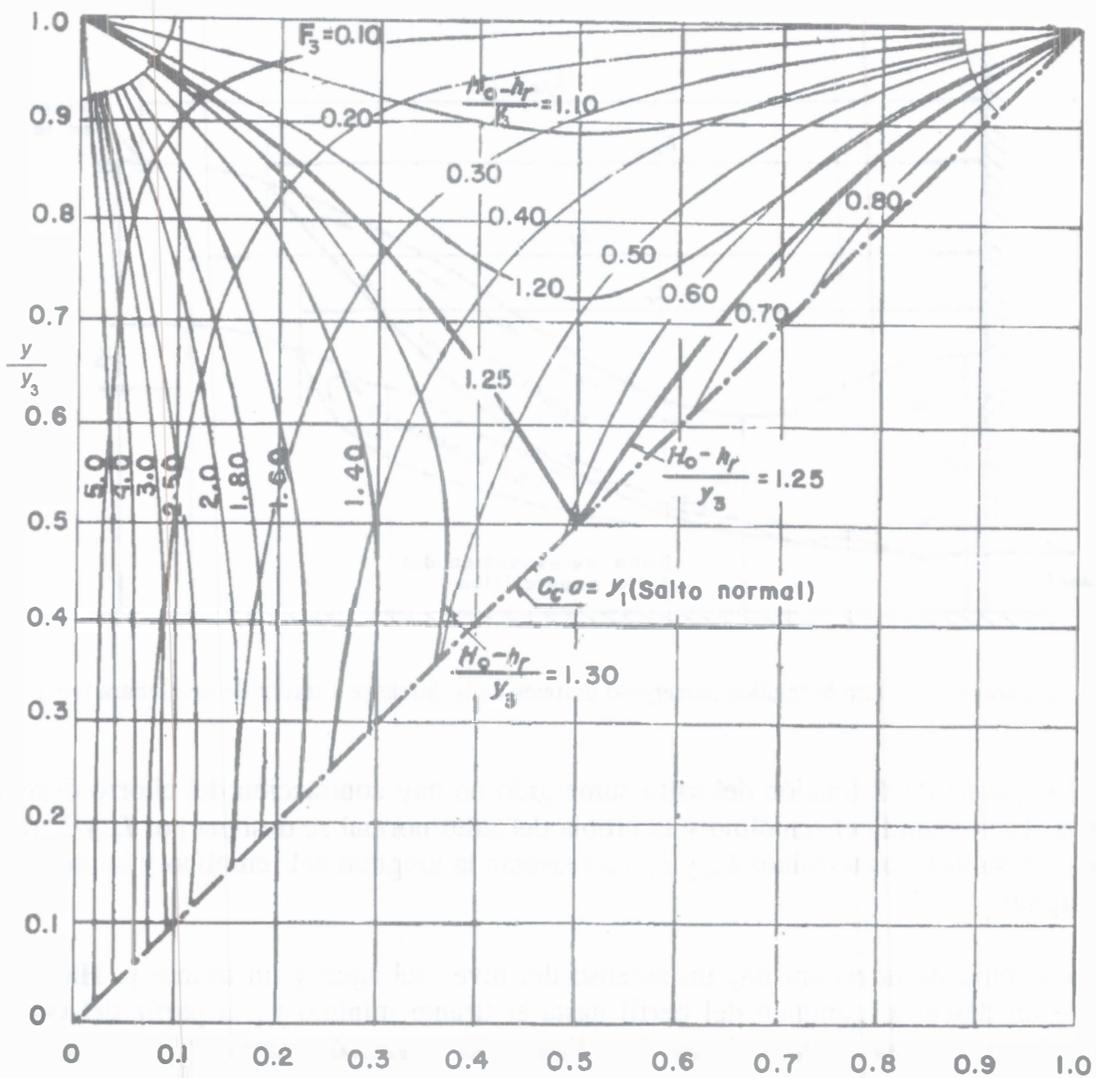
$$\frac{y}{y_3} = N \pm \sqrt{N^2 - 2 N \frac{H_0 - h_r}{y_3} + 1} \quad (4.78)$$

Las ecuaciones 4.77b y 4.78 son dos maneras de encontrar el índice de ahogamiento y/y_3 , en términos de y_3/y_1 y F_3 la primera, y de y_1/y_3 y $(H_0 - h_r)/y_3$ la segunda.

En la figura 4.40 se presenta la solución gráfica de las dos ecuaciones, con los mismos parámetros y_1/y_3 y y/y_3 sobre los ejes coordenados, y F_3 o $(H_0 - h_r)/y_3$ identificando a las curvas. Dicha figura permite conocer las características físicas de la descarga. El punto de coordenadas $y/y_3 = y_3/y_1 = 1$ equivale a $y/y_1 = 1$ y a que el ahogamiento desaparezca, por lo cual todas las curvas de parámetro F_3 convergen a dicho punto. El límite inferior del conjunto de curvas corresponde a una línea recta con inclinación de 45° , que pasa por el origen y satisface la condición $y = y_1$ para el salto normal. Las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas con dicha recta proporcionan los valores de F_3 o de $(H_0 - h_r)/y_3$, para lograr descarga libre. La pérdida h_r es siempre muy pequeña y puede despreciarse; para ello basta hacer $h_r = 0$ en los desarrollos anteriores y en el parámetro correspondiente de la figura 4.40.

Woycicky obtuvo una ecuación experimental para la longitud del salto sumergido, que es

$$\frac{L_j}{y_3 - y_1} = 6 - 0.05 \frac{y_3}{y_1} \quad (4.79)$$



$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{C_c a}{y_3}$$

Figura 4.40. Solución gráfica de las ecuaciones 4.77b y 4.78 para determinar el índice de ahogamiento en una compuerta, según Knapp (referencia 29)

4.7.3 Análisis de Govinda Rao y Rajaratnam

Govinda Rao y Rajaratnam (referencia 33) analizaron el salto hidráulico sumergido de manera más amplia y obtuvieron ecuaciones teóricas y experimentales para calcular el factor de sumergencia y los parámetros principales de flujo. Para ello experimentaron con la descarga de un chorro supercrítico proveniente de una ranura rectangular, de altura y_1 y número de Froude F_1 , hacia un canal también rectangular del mismo ancho (figura 4.41), donde se forma el tirante de salida y_3 según el gasto que se descarga.

En condiciones de salto normal, el tirante conjugado mayor y_2 se obtiene de la ecuación clásica de Belanger 4.8b; su perfil se presenta con línea discontinua y termina con el tirante y_2 .

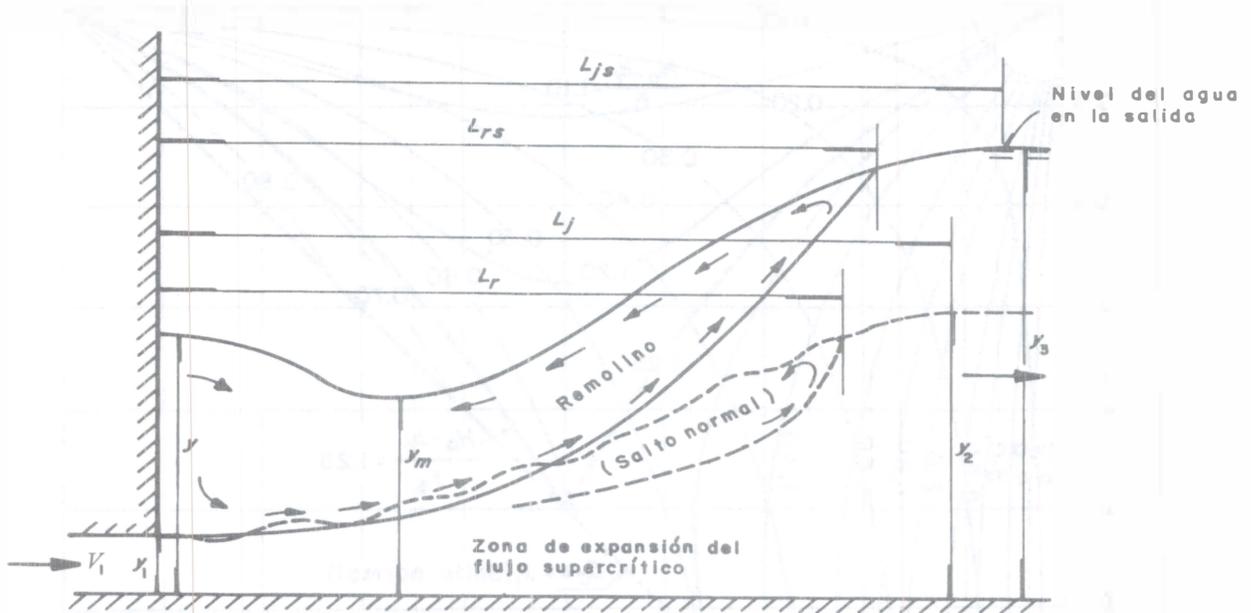


Figura 4.41. Salto hidráulico sumergido después de la descarga a través de una ranura horizontal

En el esquema de definición del salto sumergido no hay contracción del chorro después de la ranura. La longitud del remolino y la propia del salto normal se designa por L_r y L_j respectivamente. A su vez, los términos L_{rs} y L_{js} representan la longitud del remolino y la propia del salto sumergido.

En la sección de la ranura hay un ascenso del nivel del agua y un tirante y . Hacia adelante, ocurre un descenso continuo del perfil hasta el tirante mínimo y_m , a partir del cual, hay un crecimiento continuo hasta el tirante de salida y_3 . El descenso intermedio de la superficie libre del agua es más rápido para sumergencias relativamente pequeñas y más lento para las grandes, llegando a ser casi horizontal cuando el factor de sumergencia es infinito.

El factor de sumergencia se define en la forma

$$s = \frac{y_3 - y_2}{y_2} \quad (4.80)$$

el cual vale cero para un salto libre o normal y tiende a infinito para el chorro plenamente sumergido. El cociente y/y_1 se conoce como factor de admisión y se representa por ψ .

La ecuación 4.76 del momentum se escribe en la forma

$$\left(\frac{y}{y_1} \right)^2 = \frac{2 q^2}{g y_1^2 y_3} - \frac{2 q^2}{g y_1^3} + \left(\frac{y_3}{y_1} \right)^2$$

pero, de la ecuación 4.80, $y_3 = (1 + s) y_2$, que sustituida en la anterior resulta

$$\psi^2 = (1 + s)^2 \left[\frac{y_2}{y_1} \right]^2 - \frac{2 q^2}{g y_1^3} + \frac{2 q^2}{g (1 + s) y_1^2 y_2}$$

Por otra parte, se representa por λ a

$$\lambda = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right) \quad (4.81)$$

y con $F_1^2 = q^2/g y_1^3$, resulta finalmente

$$\psi = \left[(1 + s)^2 \lambda^2 - 2 F_1^2 + \frac{2 F_1^2}{(1 + s) \lambda} \right]^{1/2} \quad (4.82)$$

La ecuación 4.82 es otra forma de expresar la del momentum (4.76). Fue verificada experimentalmente y se encontró buena concordancia para valores de F_1 hasta 10 y de s hasta 5. Con ella se elaboró el diagrama de la figura 4.42 a fin de obtener el tirante y de sumergencia para cualquier valor de F_1 y s .

La caída de la superficie del agua antes de la sección de tirante mínimo es grande para sumergencias bajas y casi desaparece con las altas, al confundirse y_m con y . La variación de y_m/y_1 con F_1 es casi lineal y se muestra en la figura 4.43. Para un número de Froude de 10 y $s = 1$ ($y_3 = 2 y_2$), y_m/y_1 es igual a 24.

Los experimentos mostraron claramente que la longitud del remolino aumenta de manera continua con la sumergencia para cualquier valor de F_1 . Si R es el cociente entre la longitud del remolino del salto sumergido y la correspondiente al salto normal, la variación de R con F_1 y s se muestra en la figura 4.44. Por ejemplo, para $F_1 = 2.94$ y $s = 3.98$, R alcanza el valor de 13.8. Para una sumergencia dada, R disminuye en la medida que F_1 aumenta.

La variación experimental de L_{js}/y_2 se ajusta bien a la ecuación

$$\frac{L_{js}}{y_2} = 6.1 + 4.9 s \quad (4.83)$$

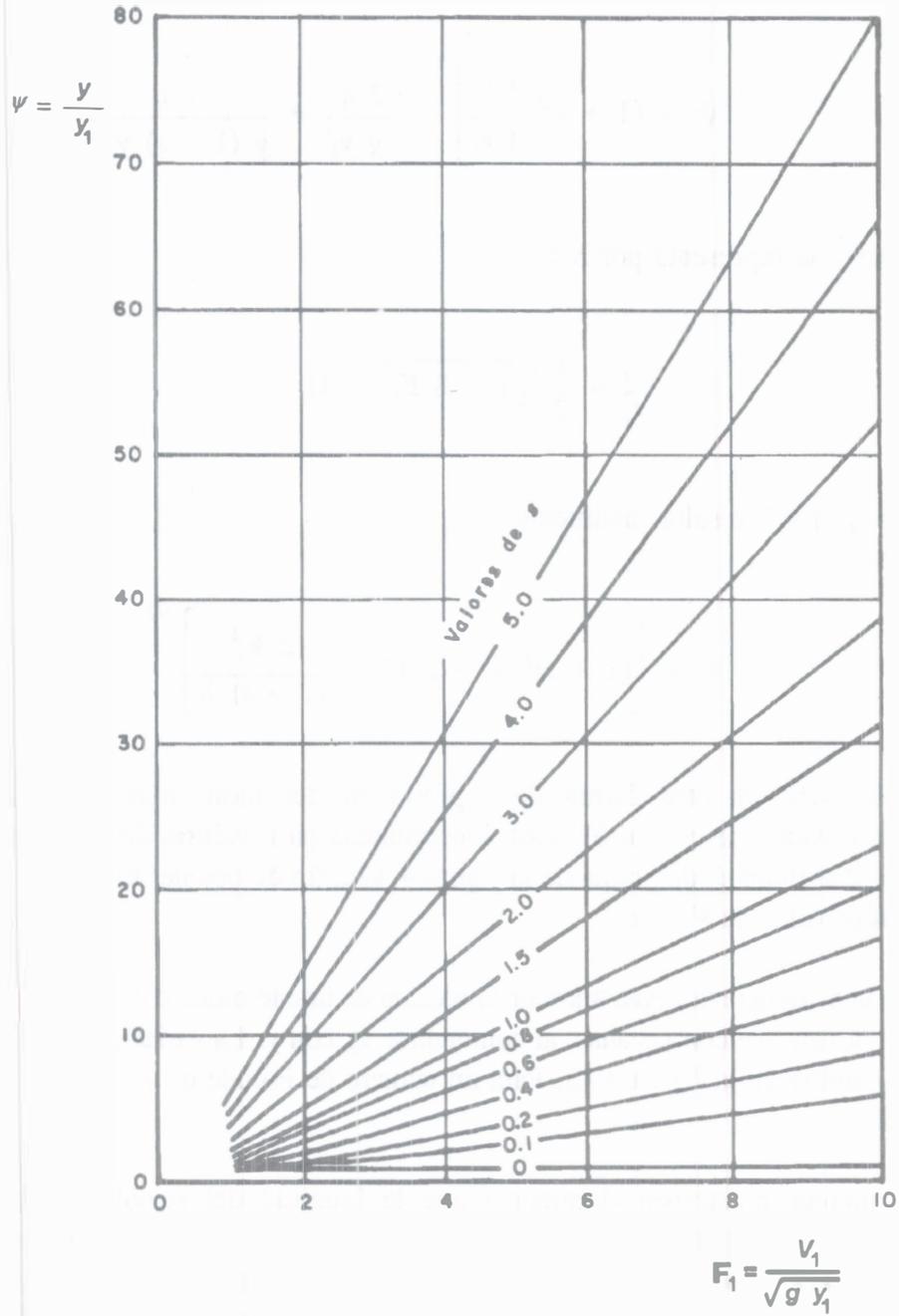


Figura 4.42. Factor de admisión en función de F_1 en un salto hidráulico sumergido, según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

válida en los intervalos $F_1 \leq 10$, $0 \leq s \leq 4$.

Cuando $y_3 = 5 y_2$, y $s = 4$, el parámetro L_{js}/y_2 alcanza el valor de 25.7; bastante mayor que el del salto normal.

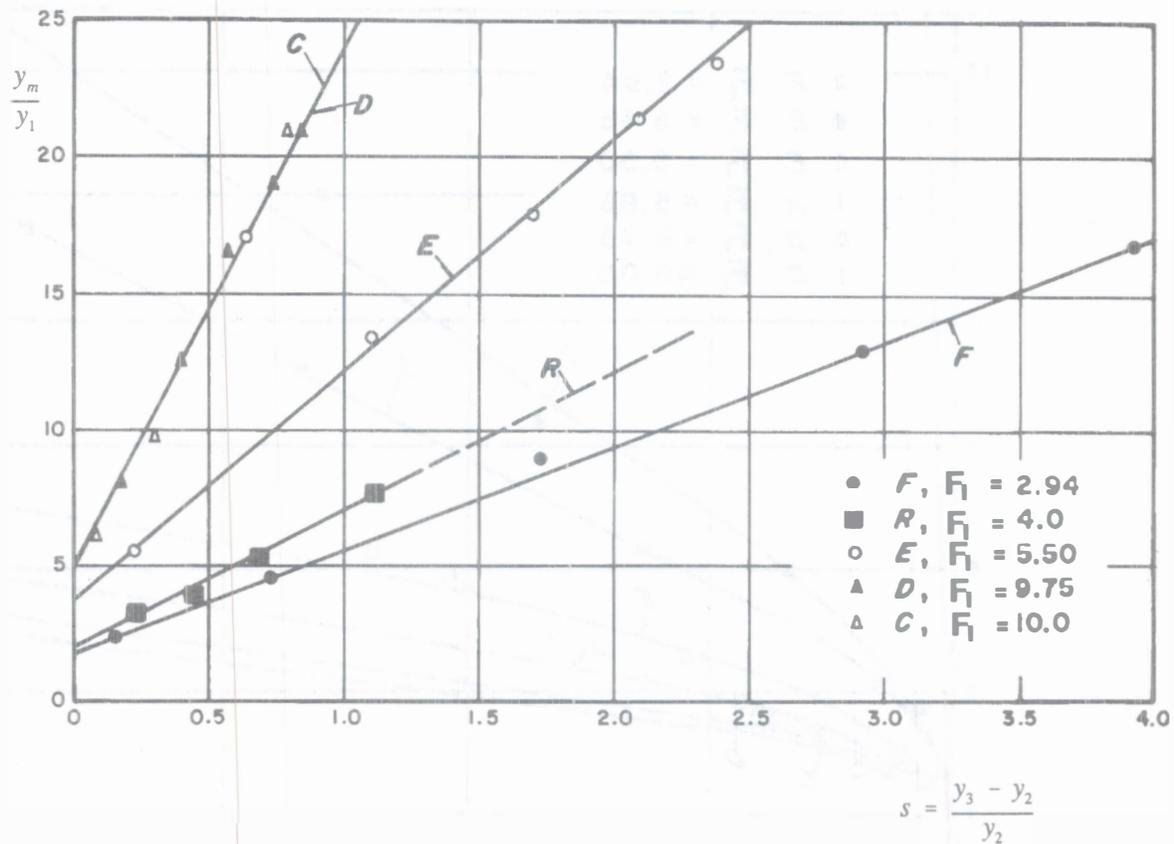


Figura 4.43. Valores experimentales de y_m / y_1 en función del factor de sumergencia s , según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

La energía del flujo en la sección de salida se escribe en la forma

$$E_1 = y + \frac{V_1^2}{2g}$$

donde V_1 es la velocidad con que descarga el chorro. Introduciendo el factor ψ de admisión se tiene

$$\frac{E_1}{y_1} = \psi + \frac{F_1^2}{2} \quad (4.84)$$

La energía al final del salto es

$$E_3 = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} \quad (4.85)$$

$$R = \frac{L_{rs}}{L_r}$$

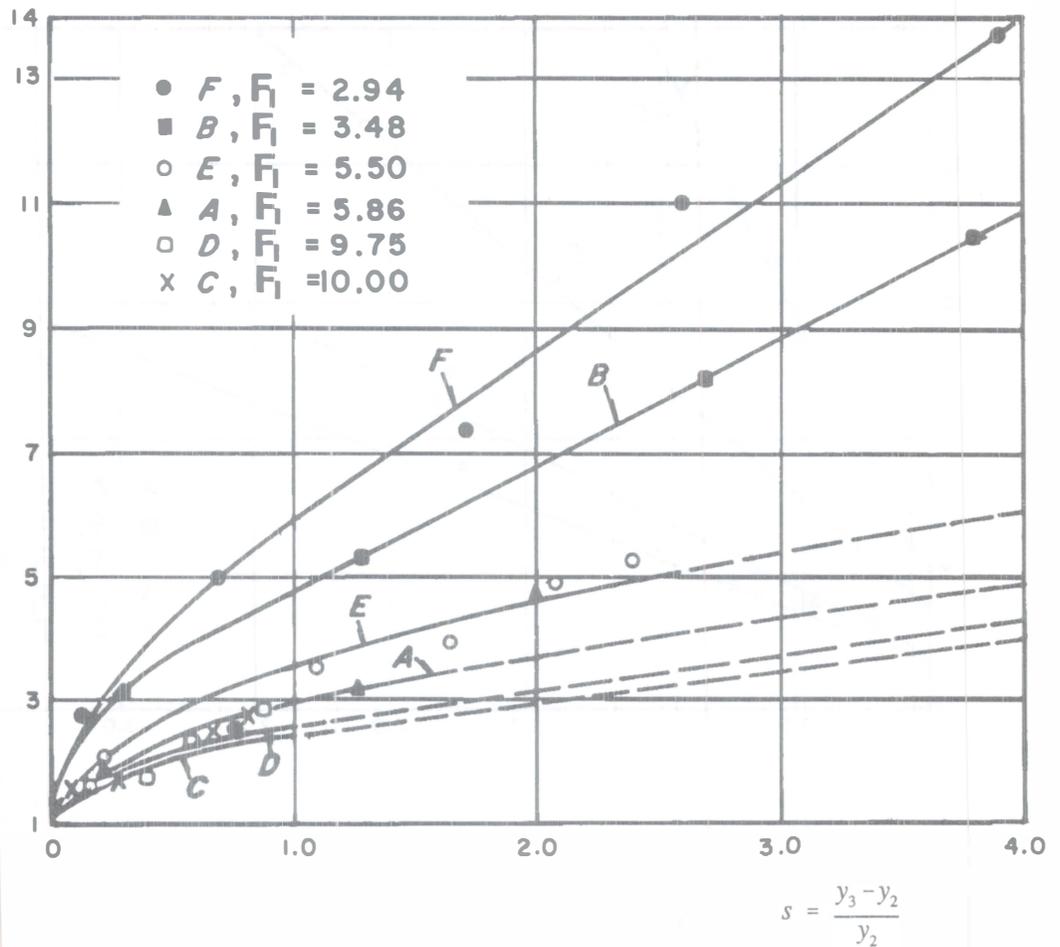


Figura 4.44. Relación experimental de L_{rs} / L_r con el factor de sumergencia s , según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

y la pérdida relativa de energía o eficiencia del salto

$$\frac{\Delta H}{E_1} = 1 - \frac{E_3}{E_1}$$

donde la sustitución de las ecuaciones 4.84 y 4.85 conduce a

$$\frac{\Delta H}{E_1} = 1 - \frac{(1 + s) \lambda + \frac{F_1^2}{2(1 + s)^2 \lambda^2}}{\psi + \frac{F_1^2}{2}}$$

la cual, con un denominador común, resulta

$$\frac{\Delta H}{E_1} = \frac{\psi + \frac{F_1^2}{2} - (1+s)\lambda - \frac{F_1^2}{2(1+s)^2\lambda^2}}{\psi + \frac{F_1^2}{2}}$$

O bien

$$\frac{\Delta H}{E_1} = \frac{\psi - (1+s)\lambda + \frac{F_1^2}{2} \left[1 - \frac{1}{(1+s)^2\lambda^2} \right]}{\psi + \frac{F_1^2}{2}} \quad (4.86)$$

Puesto que ψ y λ son funciones de F_1 y s , $\Delta H/E_1$ también lo es.

Los valores teóricos de la ecuación 4.86 y los experimentales, (figura 4.45) corresponden más o menos a los del salto normal, dependiendo de los valores particulares de F_1 y s .

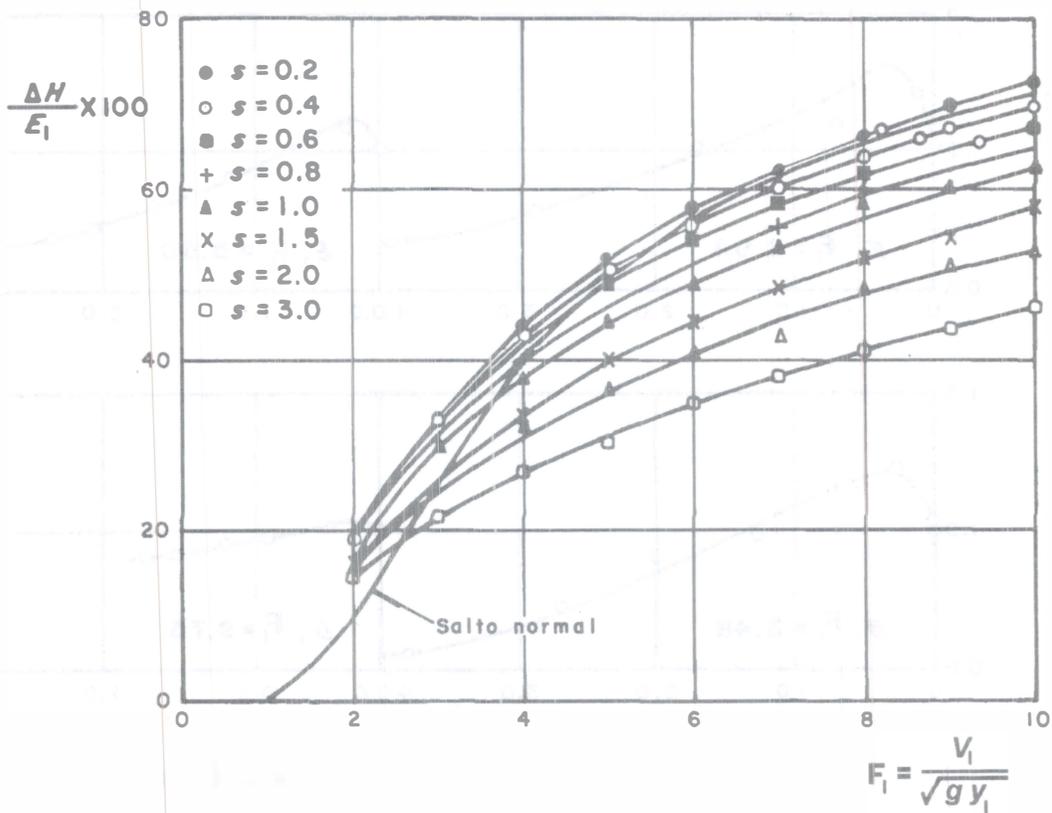


Figura 4.45. Eficiencia del salto sumergido comparada con la del normal, en función del número de Froude supercrítico, según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

Se designa por ω a un índice de disipación relativa entre las condiciones de salto sumergido y salto libre, es decir

$$\omega = \frac{(\Delta H/E_1)_s}{(\Delta H/E_1)_L} \quad (4.87)$$

Para cualquier valor de F_1 , ω puede considerarse igual más o menos a uno dependiendo de F_1 y s , lo cual se observa claramente con los resultados experimentales mostrados en la figura 4.46. En el intervalo analizado, ω varía entre 1.25 y 0.55.

Se designa por s_0 al valor óptimo de s para el cual ω es el máximo ω_0 , para cualquier valor de F_1 . El valor s_0 se obtiene derivando la ecuación 4.87 respecto de s (F_1 constante), e igualando con cero para despejar a s_0 . Esto conduce a una ecuación complicada que fue resuelta por un método indirecto y los resultados se muestran en forma gráfica en la figura 4.47. En ella se observa que s_0 decrece rápidamente de 0.7 para $F_1 = 2$, a 0.1 para $F_1 = 7$; después permanece constante para valores mayores de F_1 . El valor de ω_0 también decrece rápidamente de 2.75 para $F_1 = 2$, a 1.05 para $F_1 = 6$, después del cual es casi constante. Esto significa que, cuando un salto normal se convierte en sumergido, la disipación de energía se reduce aunque el factor de sumergencia exceda el valor óptimo.

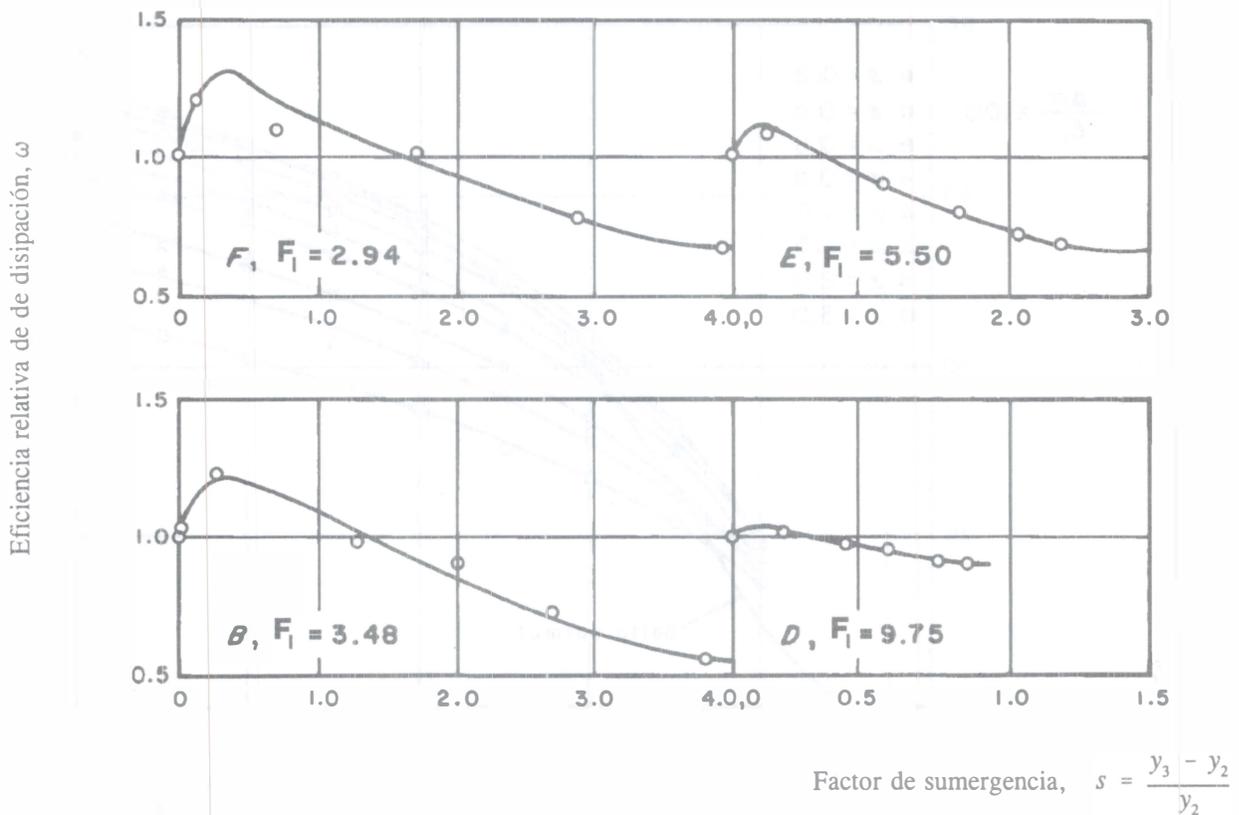


Figura 4.46. Eficiencia relativa de los saltos sumergido y normal para distintos factores de sumergencia s y números de Froude F_1 , según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

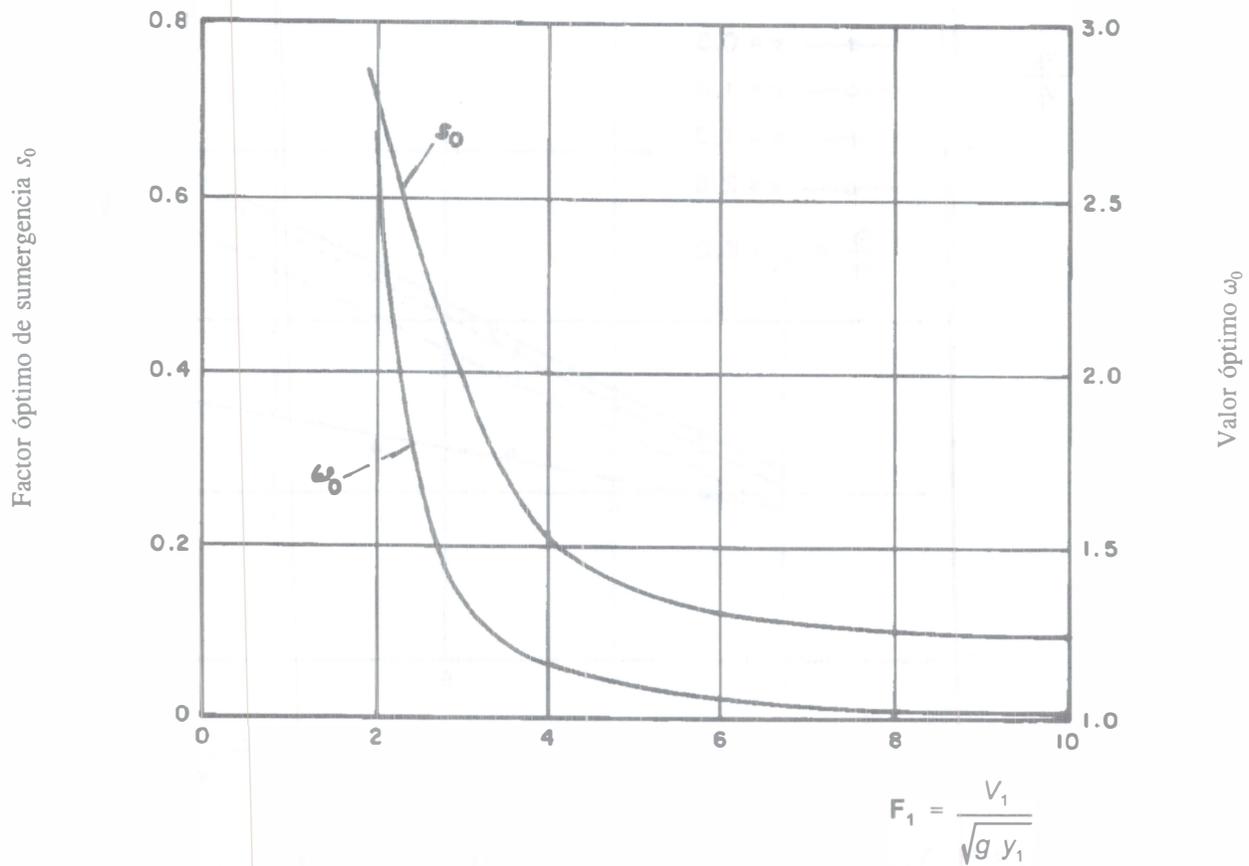


Figura 4.47. Factores óptimos de sumergencia y de eficiencia relativa con el número de Froude, según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

De las consideraciones anteriores se infiere que no debe preferirse al salto sumergido respecto del normal con el propósito de disipar más energía, a menos que el factor de sumergencia sea menor de aproximadamente 10 por ciento y el número de Froude mayor de 5.

Para estudiar la existencia de altas velocidades a distancias considerables a lo largo del fondo del salto sumergido, fue necesario definir el término velocidad en el fondo v_b . Debido a que sólo se pretendía un estudio comparativo, dicha velocidad se definió de manera arbitraria, como la que ocurre a una altura de 32 mm desde el fondo del canal. Esta se asoció con la velocidad V_2 que hay al final del salto normal correspondiente. Se representó por x a la distancia de recorrido dentro del salto, desde la ranura hasta sección final.

Govinda Rao y coautor consideraron $x/y_2 = 5$ como casi el final del salto normal correspondiente, y para analizar la presencia de altas velocidades a esta distancia, elaboraron la figura 4.48, donde se observa que para $s = 1$, $x/y_2 = 5$ y $F_1 = 10$, v_b/V_2 alcanza el valor de 5.6, en lugar de uno para el salto normal obtenido por otros autores. Dicho valor de 5.6 es todavía mayor si aumenta el factor de sumergencia. Esto significa que en un salto sumergido se mantienen velocidades de fondo elevadas a lo largo del fondo del canal a distancias grandes, de magnitud casi seis veces mayor que las que ocurren en el salto normal correspondiente. Es decir, existe el peligro de erosión más allá de la distancia en que termina el salto sumergido.

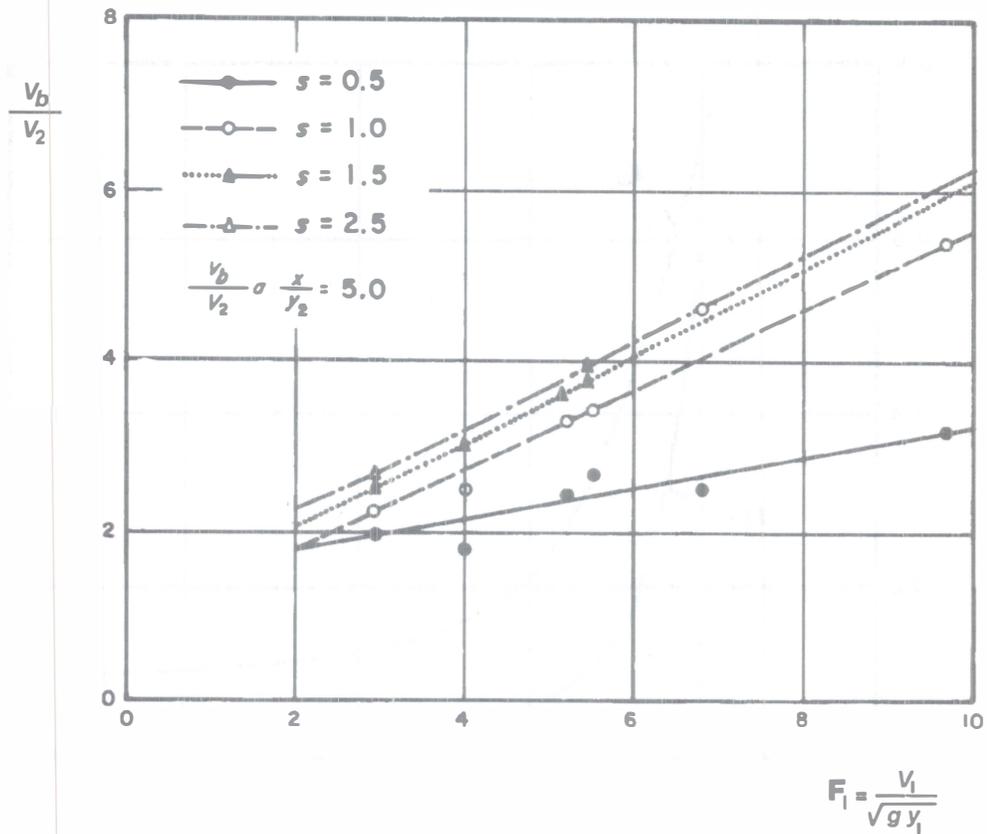


Figura 4.48. Velocidad en el fondo de un salto sumergido a la distancia en que termina el salto normal correspondiente, según Rao y Rajaratnam (referencia 32)

Stepanov (referencia 34) propuso una ecuación empírica para predecir la longitud del remolino del salto sumergido, que es

$$\frac{L_{rs}}{y_c} = \frac{3.31}{\left[\frac{y_3 - y}{y_c F_1} \right]^{0.885}} \quad (4.88)$$

donde y_c es el tirante crítico. Govinda Rao y Rajaratnam comprobaron que esta ecuación concuerda bien con los experimentos para $s \leq 2$ y $F_1 \leq 8$.

Ejemplo 4.5. Con la compuerta y los datos del ejemplo 4.2, el canal reduce su pendiente a 0.000216. Determinar: a) la reducción del gasto descargado si se mantiene el mismo tirante de 1.90 m aguas arriba y la misma abertura; b) el tirante aguas arriba si se desea mantener el gasto original de 5.23 m³/s al producirse el ahogamiento con la nueva pendiente.

Solución a. Al reducir la pendiente del canal, el tirante normal aumenta forzando a una descarga ahogada, que a su vez reduce el gasto y con éste el tirante normal, el grado de sumergencia, etc.

La solución tendría que ser entonces por tanteos. El comportamiento de la descarga sería como se ilustra en la figura 4.39, de manera que $y_0 = 1.90$ m, $a = 0.51$ m y $S_0 = 0.000216$.

Los tanteos consisten en proponer un gasto menor que el de descarga libre, y hacer el cálculo completo para después verificarlo. Aquí se explica sólo el tanteo definitivo.

Se supone $Q = 3.845$ m³/s. Para este caudal el tirante normal en el canal es $y_n = 1.3943$ m, que se verifica con los siguientes cálculos

$$A = [3 + 1.5 (1.3943)] 1.3943 = 7.0990 \text{ m}^2$$

$$P = 3 + 2 \sqrt{3.25} (1.3943) = 8.0272 \text{ m}$$

$$R_h = 0.8844 \text{ m}$$

$$V = 3.845/7.0990 = 0.5416 \text{ m/s}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.015 \text{ m}$$

$$E = 1.4093 \text{ m}$$

$$Q = \frac{7.0990}{0.025} (0.8844)^{2/3} (0.000216)^{1/2} = 3.8451 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación de energía entre las dos secciones que limitan la transición, se debe cumplir que

$$y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 1.4093$$

cuya solución es $y_3 = 1.3643$ m, $V_3 = 0.9394$ m/s, para la sección rectangular.

Para determinar el coeficiente de descarga de la compuerta son necesarios los parámetros: $y_0/a = 3.725$; $y_3/a = 1.3643/0.51 = 2.675$.

Obsérvese que el último parámetro caracteriza la influencia del ahogamiento (sin intervenir y).

Con estos valores, del volumen 1 resulta que $C_d = 0.41$ y de la ecuación 4.70 el gasto es

$$Q = 0.41 (3) (0.51) \sqrt{2 (9.81) (1.90)} = 3.830 \text{ m}^3/\text{s}$$

casi igual al valor supuesto, siendo $q = 3.83/3 = 1.2767$ m²/s.

Con $a/y_0 = 0.51/1.90 = 0.2684$, de la ecuación 4.73 el coeficiente de contracción resulta

$$C_c = 0.611 [1 - 0.0895(0.2684) + 0.0893(0.2684)^2 + 0.0074(0.2684)^3] = 0.6003$$

Por tanto

$$y_1 = C_c a = 0.6003 (0.51) = 0.3062 \text{ m}$$

$$F_1^2 = \frac{(1.2767)^2}{9.81 (0.3062)^3} = 5.7899$$

$$F_3^2 = \frac{(1.2767)^2}{9.81 (1.3643)^3} = 0.0654$$

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{1.3643}{0.3062} = 4.4563$$

De la ecuación 4.77b

$$y = 1.3643 \sqrt{1 - 2 (0.0654)(4.4563)} = 1.0097 \text{ m}$$

Si se desea aplicar la ecuación 4.82, se empieza con λ de la 4.81

$$\lambda = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 (5.7899)} - 1 \right] = 2.9394$$

$$y_2 = 2.9394 (0.3062) = 0.8999 \text{ m} < y_3$$

También, de la 4.80

$$s = \frac{1.3643}{0.8999} - 1 = 0.516$$

Por tanto

$$y = 0.3062 \left[(1.516)^2 (2.9394)^2 - 2 (5.7899) + \frac{2 (5.7899)}{(1.516)(2.9394)} \right]^{1/2}$$

$$y = 1.0097 \text{ m}$$

valor idéntico al antes obtenido.

De la ecuación 4.79, la longitud del salto es

$$L_j = \left[6 - 0.05 \frac{1.3643}{0.3062} \right] (1.3643 - 0.3062) = 6.11 \text{ m}$$

y de la ecuación 4.83, también es

$$L_j = [6.1 + 4.9 (0.516)] 0.8999 = 7.765 \text{ m}$$

Solución b. Para mantener el gasto de $5.23 \text{ m}^3/\text{s}$ es necesario calcular el nuevo tirante normal para $S_0 = 0.000216$. Este resulta $y_n = 1.6323 \text{ m}$, que se verifica de la manera ya indicada; la velocidad es de 0.588 m/s y la energía específica de 1.6499 m , debiendo cumplirse

$$y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 1.6499$$

cuya solución es: $y_3 = 1.5885 \text{ m}$, $V_3 = 1.0977 \text{ m/s}$.

Siendo $q = 5.23/3 = 1.7438 \text{ m}^2/\text{s}$, el cuadrado del número de Froude es

$$F_3^2 = \frac{q^2}{g y_3^3} = \frac{(1.7438)^2}{9.81 (1.5885)^3} = 0.0773$$

Sustituyendo en la ecuación 4.77b, resulta

$$y = 1.5885 \sqrt{1 - 2 (0.0773) [(1.5885/0.3062) - 1]} = 0.9390 \text{ m}$$

que es mayor que y_1 y menor que y_3 ; por tanto, la descarga es sumergida.

Por el procedimiento tradicional, el cálculo de y_0 es por tanteos y aquí sólo se presenta el tanteo final. El parámetro y_3/a es

$$\frac{y_3}{a} = \frac{1.5885}{0.51} = 3.1147$$

Se supone $y_0 = 2.55 \text{ m}$; $y_0/a = 5$. Con los dos parámetros, del volumen 1 se obtiene $C_d = 0.485$ y de la ecuación 4.70

$$y_0 = \left[\frac{q}{C_d a \sqrt{2g}} \right]^2 = \left[\frac{1.7438}{0.485 (0.51) \sqrt{19.62}} \right]^2 = 2.533 \text{ m}$$

que es casi el valor supuesto. El tirante antes de la compuerta cambia de 1.90 a 2.533 m por efecto del ahogamiento.

Ejemplo 4.6. La obra de desviación de un río para la construcción de una presa consiste de dos túneles circulares de 3 m de diámetro y 300 m de longitud, revestidos de concreto (rugosidad absoluta de 2 mm), que descargan al río aguas abajo a través de un tajo de sección trapecial, talud 0.5:1 y 9 m en la base. El nivel del agua en el río alcanza la elevación 13.00 m, constante. Si el nivel de aguas arriba de la ataguía rebasa la elevación 28.00 m, funciona el vertedor de excedencias de 25 m de longitud de cresta, cuya ley de descarga es $Q_v = 2 L H^{3/2}$. Determinar las condiciones de funcionamiento cuando el gasto total en los túneles es de $160 \text{ m}^3/\text{s}$ (figura 4.49).

Solución. El tirante $y_3 = 8 \text{ m}$ en el tajo de salida de los túneles es mayor que el diámetro de los mismos, por lo cual la descarga es seguramente sumergida, siendo necesario conocer el tirante de sumergencia. La solución con base en la ecuación del momentum puede generalizarse para este problema, si se acepta que en la sección de salida de los túneles la velocidad efectiva del flujo es la misma que en el interior de los mismos, si bien la carga de presión corresponde al tirante de sumergencia.

El área de los dos túneles es

$$A_T = 2 \frac{\pi}{4} (3)^2 = 14.1372 \text{ m}^2$$

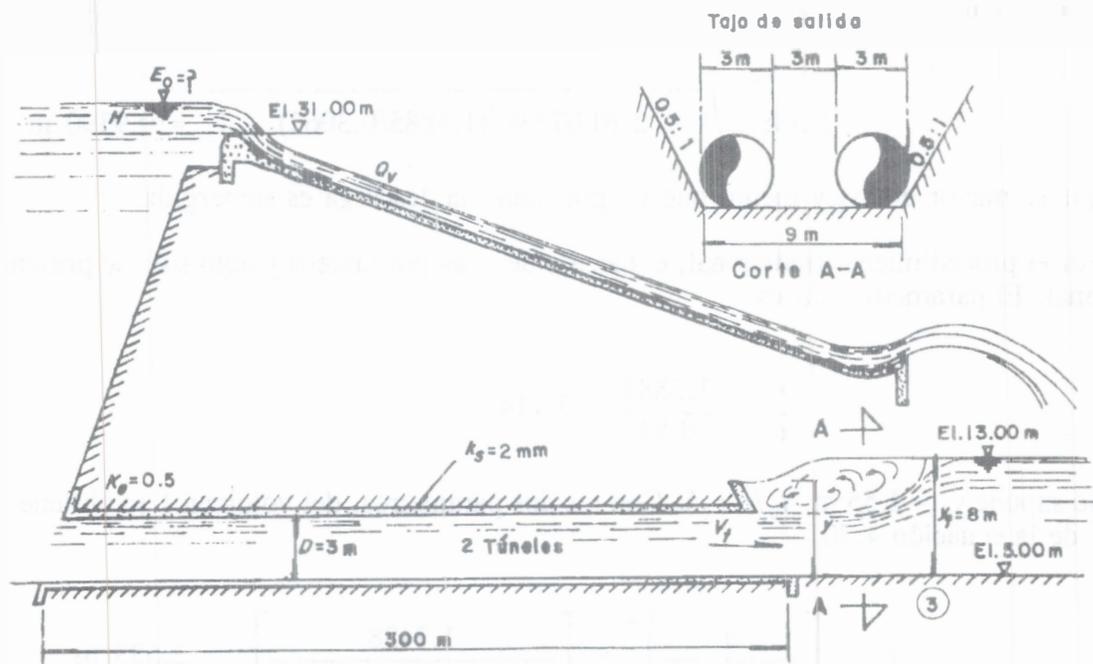


Figura 4.49. Obra de desvío del ejemplo 4.6

y la velocidad y carga de velocidad

$$V_T = \frac{160}{14.1372} = 11.318 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_T^2}{2g} = 6.5285 \text{ m}$$

La presencia de un salto hidráulico sumergido en el tajo de salida obliga a la igualdad del momentum entre la sección inicial y la 3. Esto es, según la ecuación 4.4a se tiene

$$\frac{Q^2}{g A_T} + y'_G A = \frac{Q^2}{g A_3} + y'_{G3} A_3$$

De acuerdo con la figura 4.49, el área de la sección 3 es

$$A_3 = [9 + 0.5 (8)] 8 = 104 \text{ m}^2$$

y la profundidad del centro de gravedad

$$y'_{G3} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{9y_3}{104} \right] y_3$$

el cual, para $y_3 = 8 \text{ m}$, resulta $y'_G = 3.5897 \text{ m}$

Por lo tanto, el momentum en la sección 3 alcanza el valor de

$$M_3 = \frac{Q^2}{g A_3} + y'_{G3} A_3 = \frac{(160)^2}{9.81 (104)} + 3.5897 (104) = 398.4209 \text{ m}^3$$

De manera análoga, el momentum en la sección de salida tiene el valor

$$M_1 = \frac{Q^2}{g A_T} + y'_G A = \frac{(160)^2}{9.81(14.1372)} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{9y}{(9+0.5y)y} \right] (9 + 0.5y) y^2$$

Simplificando se tiene

$$M_1 = 184.5902 + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6 + (y/3)} \right] (9 + 0.5 y) y^2$$

Por tanteos se puede calcular el tirante y que produce el momentum $M_1 = M_3 = 398.4209$. Dicho valor es $y = 6.215$ m.

En efecto

$$M_1 = 184.5902 + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6 + (6.215/2)} \right] (9 + 0.5 (6.215)) (6.215)^2 = 398.419$$

que es prácticamente el valor de M_3 . Por tanto, $y = 6.215$ m.

Para calcular el nivel en el almacenamiento es necesario aplicar la ecuación de energía entre una sección antes de la entrada al túnel y la de salida, utilizando como nivel de referencia la elevación cero. Debe recordarse que en la sección de salida de los túneles la energía disponible es la suma de la carga de presión y en el fondo, y la carga de velocidad $V_T^2/2g$ en los túneles. El coeficiente de pérdida por entrada es $K_e = 0.5$ y para la pérdida por fricción se aplica la ecuación de Darcy-Weisbach. Para ello, con $\nu = 0.011$ cm²/s, el número de Reynolds en el túnel resulta

$$R_e = \frac{V_T D}{\nu} = \frac{11318 (300)}{0.011} = 3.087 (10)^8$$

esto es, el flujo es turbulento. La rugosidad relativa vale

$$\frac{0.002}{3} = 0.00067$$

Del diagrama universal de Moody (volumen 1) resulta $f = 0.018$ y de la ecuación de energía se tiene

$$E_0 = 5 + y + \frac{V_T^2}{2g} + \left[K_e + f \frac{L}{D} \right] \frac{V_T^2}{2g}$$

Sustituyendo, resulta entonces

$$E_0 = 5 + 6.215 + \left[1 + 0.5 + 0.018 \frac{300}{3} \right] 6.5285 = 32.759 \text{ m}$$

que es la elevación en el embalse, superior a la de la cresta del vertedor. Por tanto, la carga sobre el mismo es

$$H = 32.759 - 31.0 = 1.759 \text{ m}$$

y el gasto que descarga

$$Q_v = 2 (25)(1.759)^{3/2} = 116.646 \text{ m}^3/\text{s}$$

Finalmente, el gasto total desviado por las obras alcanza el valor

$$Q = 160 + 116.646 = 276.646 \text{ m}^3/\text{s}$$

4.8 CONTROL DEL SALTO HIDRÁULICO

4.8.1 Aspectos generales

Cuando un salto hidráulico ocurre sobre un fondo plano horizontal puede haber tendencia a que se desplace en la dirección del flujo o en dirección opuesta, a menos que se fije su oposición mediante algún arreglo estructural especial, por ejemplo, un umbral de cresta delgada, uno de cresta ancha, o un escalón brusco ascendente o descendente. La estructura controla la posición del salto, lo estabiliza, fija su posición dentro de una zona protegida de la erosión para distintas condiciones de operación, y convierte a los saltos libre y sumergido en saltos ubicados en la posición deseada. Dicha estructura se convierte en un dissipador de energía conocido como tanque amortiguador.

En este subcapítulo se expone el diseño de estructuras en canales rectangulares con base en criterios de tipo experimental, que son los más sencillos cuando se requieren resultados razonablemente seguros. Los aspectos teóricos de dicho diseño y aportaciones recientes al tema se presentan en capítulos posteriores, en los que además se incluyen variantes más complicadas, como umbrales dentados, cambio en dimensiones de la sección u otros dispositivos, incluso en canales distintos del rectangular, para aclarar al lector aspectos que aquí no se tratan y para enriquecer los conocimientos del tema.

4.8.2 Métodos de análisis

El control del salto mediante umbrales se analiza por el principio del momentum. En todos los casos el tratamiento consiste en agregar la fuerza F_d que produce el umbral en cualquiera de sus formas, contra el flujo o en la dirección del mismo según el caso, y con la magnitud necesaria para compensar el desequilibrio existente entre el valor del momentum en la sección deseable para que se inicie el salto y el existente al final del mismo, de acuerdo con las condiciones disponibles del flujo de salida. Esto es, satisfacer en cualquier caso la ecuación 4.1.

Los experimentos han mostrado que la fuerza F_d decrece rápidamente en la medida que el extremo final del salto se mueve hacia aguas arriba, alcanza su valor mínimo cuando queda más o menos sobre el umbral y después aumenta gradualmente hasta uno constante cuando continúa su movimiento en la misma dirección.

La posición más interesante es cuando la sección final del salto coincide con el umbral, ya que se produce el valor mínimo de la fuerza. Esta posición es suficiente para garantizar el desarrollo pleno de su longitud aguas arriba y normalmente es la que se adopta en el diseño.

Por otra parte, la distribución no uniforme de la velocidad a lo largo del salto (figura 4.24) es la característica principal del fenómeno que, agravada por la presencia del umbral, incrementa bastante la magnitud del momentum a través del coeficiente β , de valor mayor de uno y difícil de cuantificar. Por tanto, el análisis teórico no permite predecir un resultado cuantitativo con suficiente aproximación, de modo que la posición precisa del salto controlado sólo se determina por la vía experimental.

El análisis dimensional y los experimentos realizados por Forster y Skrinde (1950)(referencia 35) indican que es posible obtener, cualitativa y cuantitativamente, una función de la forma

$$\frac{s}{y_1} = \phi \left[F_1, \frac{y_3}{y_1}, \frac{X}{y_2} \right] \quad (4.89)$$

donde

- s altura del umbral
- y_1 tirante del flujo supercrítico de aproximación
- y_2 tirante conjugado después del salto, aguas arriba del umbral
- y_3 tirante de salida, aguas abajo del umbral
- F_1 número de Froude del flujo supercrítico de aproximación
- X distancia desde el inicio del salto hasta el umbral.

En los estudios de laboratorio, la relación X/y_2 se consideró constante en cada ensaye, existiendo una longitud suficiente para asegurar un salto completo, congruente con el tirante y_2 que se espera de la ecuación 4.8b.

Para el diseño, la longitud del salto debería ser por lo menos igual a X ; sin embargo, por razones económicas, es común elegir una longitud menor, siempre que la gran velocidad en el fondo al final del salto haya alcanzado un valor seguro para las condiciones en el canal aguas abajo.

4.8.3 Control mediante un umbral de cresta delgada

Forster y Skrinde (1950)(referencia 35) obtuvieron de manera experimental el diagrama mostrado en la figura 4.50, que representa gráficamente los resultados de la función expresada por la

ecuación 4.89, y que permite analizar el efecto de un umbral de cresta delgada en el control del salto cuando el tirante y_3 de salida no ahoga al vertido sobre la cresta. Esto ocurre si

$$y_3 < (y_2 - 0.75 s) \quad (4.90)$$

lo que es normal dentro de un intervalo amplio del gasto, eliminando con ello la influencia de y_3 / y_1 en el fenómeno y, por consecuencia en la ecuación 4.89. De ocurrir ahogamiento en el vertido, el salto se mueve hacia aguas arriba y puede convertirse, en su caso, en uno sumergido.

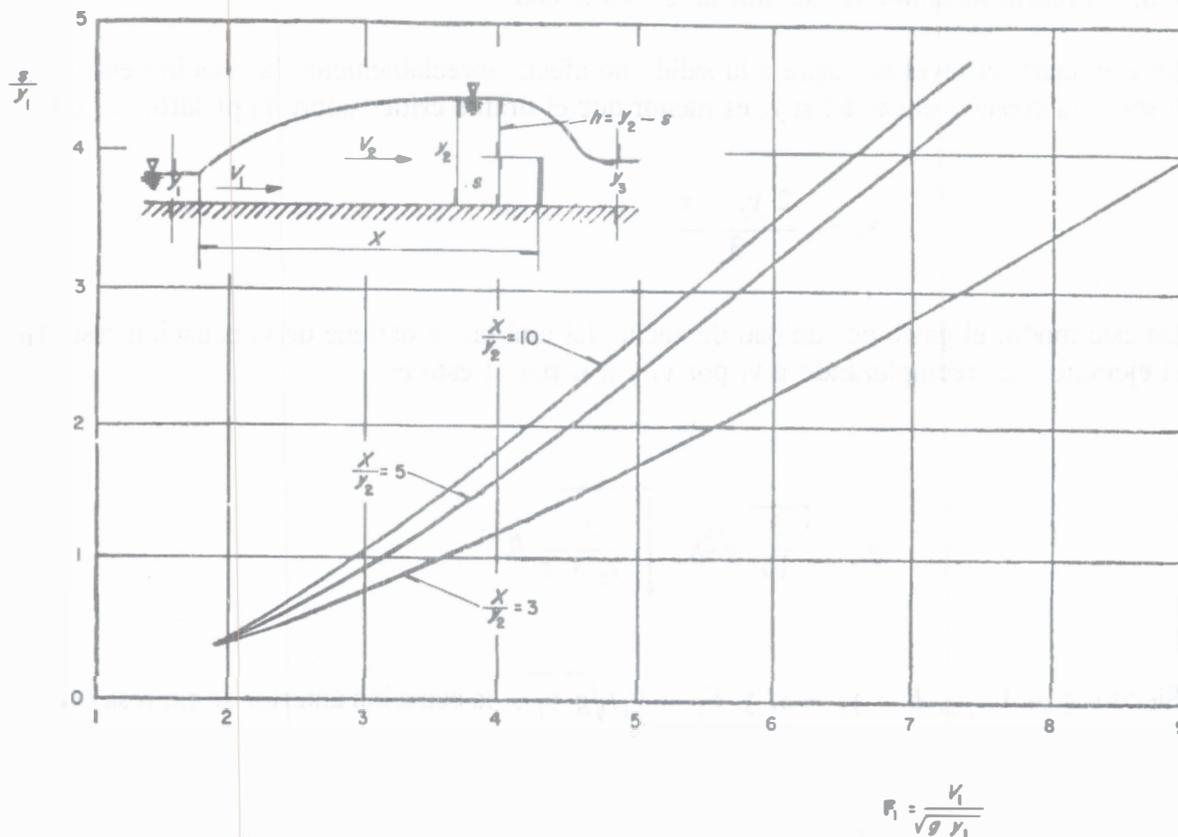


Figura 4.50. Salto hidráulico antes de un umbral de cresta delgada. Relación experimental entre F_1 , s / y_1 y X / y_2 , según Forster y Skrinde (referencia 35)

Cualquier punto sobre el diagrama tiene las coordenadas $(F_1, s/y_1)$. Si el punto queda entre las curvas, el salto se produce con la posición relativa indicada por el valor interpolado correspondiente a X/y_2 . Los puntos que resulten a la izquierda de la curva interpolada representan las condiciones de funcionamiento con un umbral demasiado alto, que forzarían al desplazamiento del salto hacia aguas arriba y, en su caso, a uno sumergido. Por el contrario, los puntos a la derecha representan las condiciones con un umbral demasiado bajo y un salto incompleto desplazado en la dirección del flujo, pudiendo llegar al extremo de constituirse en una sobrelevación ondular en la superficie, difícil de predecir cuantitativamente.

Para fines de diseño, Forster y Skrinde proponen utilizar la curva $X/y_2 = 5$ como suficiente para calcular la longitud del salto antes del vertedor y, por consecuencia, de la estructura que lo estabiliza. Esto es

$$L_j = 5 y_2 \quad (4.91)$$

Por otra parte, la experiencia de laboratorio muestra que la altura máxima del umbral no resulta para el gasto máximo, si no para uno intermedio, dentro del intervalo de variación del mismo.

4.8.4 Control mediante un umbral de cresta ancha

En este caso, el nivel del agua a la salida no afecta apreciablemente la relación entre la carga h sobre la cresta y el caudal si y_3 es menor que el tirante crítico sobre la plataforma, esto es, si

$$y_3 < \frac{2 y_2 + s}{3} \quad (4.92)$$

De este modo, el gasto por unidad de ancho del umbral se obtiene de la ecuación resultante en el ejemplo 1.3, reemplazando a y_1 por y_2 y a w por s ; esto es

$$q = \sqrt{\frac{3}{16}} \sqrt{2g} \sqrt{\frac{y_2}{y_2 + s}} h^{3/2}$$

Siendo $q = V_1 y_1$, $h = y_2 - s$, y $\mathbf{F}_1 = V_1/\sqrt{g y_1}$, la ecuación anterior se expresa como sigue

$$\frac{8}{3} \mathbf{F}_1^2 \left(1 + \frac{s/y_1}{y_2/y_1} \right) = \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{s}{y_1} \right)^3$$

Debido a que el umbral afecta y controla al salto, y_2/y_1 se relaciona sólo con \mathbf{F}_1 a través de la ecuación 4.8b para un canal rectangular, de modo que la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{(64/3) \mathbf{F}_1^2}{\sqrt{1 + 8 \mathbf{F}_1^2} - 1} = \frac{\left(\sqrt{1 + 8 \mathbf{F}_1^2} - 1 - \frac{2 s}{y_1} \right)^3}{\sqrt{1 + 8 \mathbf{F}_1^2} - 1 + \frac{2 s}{y_1}} \quad (4.93)$$

que expresa a la altura s del escalón en función sólo de y_1 y F_1 , y cuya representación gráfica se muestra en la figura 4.51.

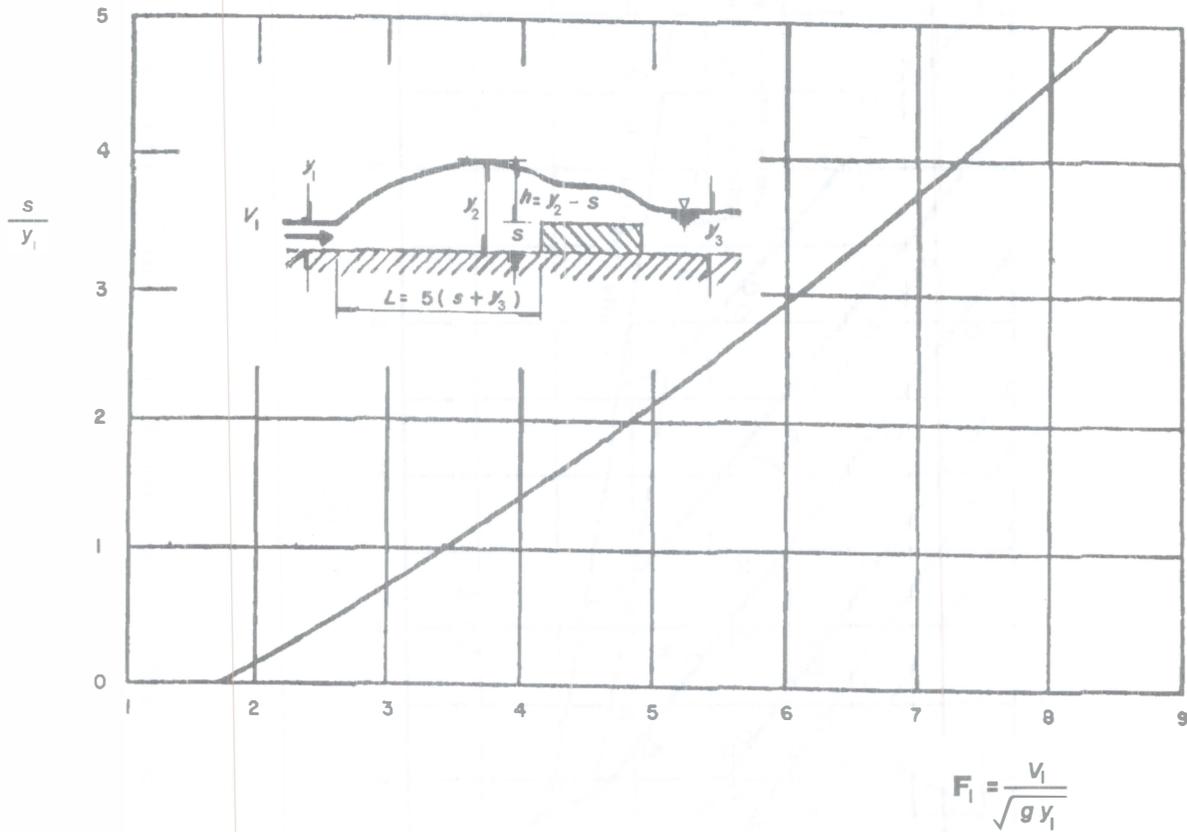


Figura 4.51. Salto hidráulico antes de un umbral de cresta ancha. Relación analítica entre F_1 y s / y_1 , según Forster y Skrinde (referencia 35)

Foster y Skrinde (1950)(referencia 35) encontraron que la curva se aproxima a la que describe la situación resultante de aplicar los resultados experimentales del estudio de un escalón brusco ascendente cuando $y_3 = y_c$. También observaron que la longitud del salto antes de un umbral de cresta ancha es

$$L_j = 5 (s + y_3) \tag{4.94}$$

Los resultados se usan para dimensionar un tanque de amortiguación, con un umbral de cresta ancha actuando en su extremo aguas abajo como dispositivo de control del salto, siempre que $y_3 < (2 y_2 + s)/3$. Dicho tanque tiene algunas ventajas en comparación con otro tipo de control, ya que adquiere mejores condiciones estructurales que uno de cresta delgada y comúnmente resulta de menor excavación que el formado con un escalón brusco ascendente.

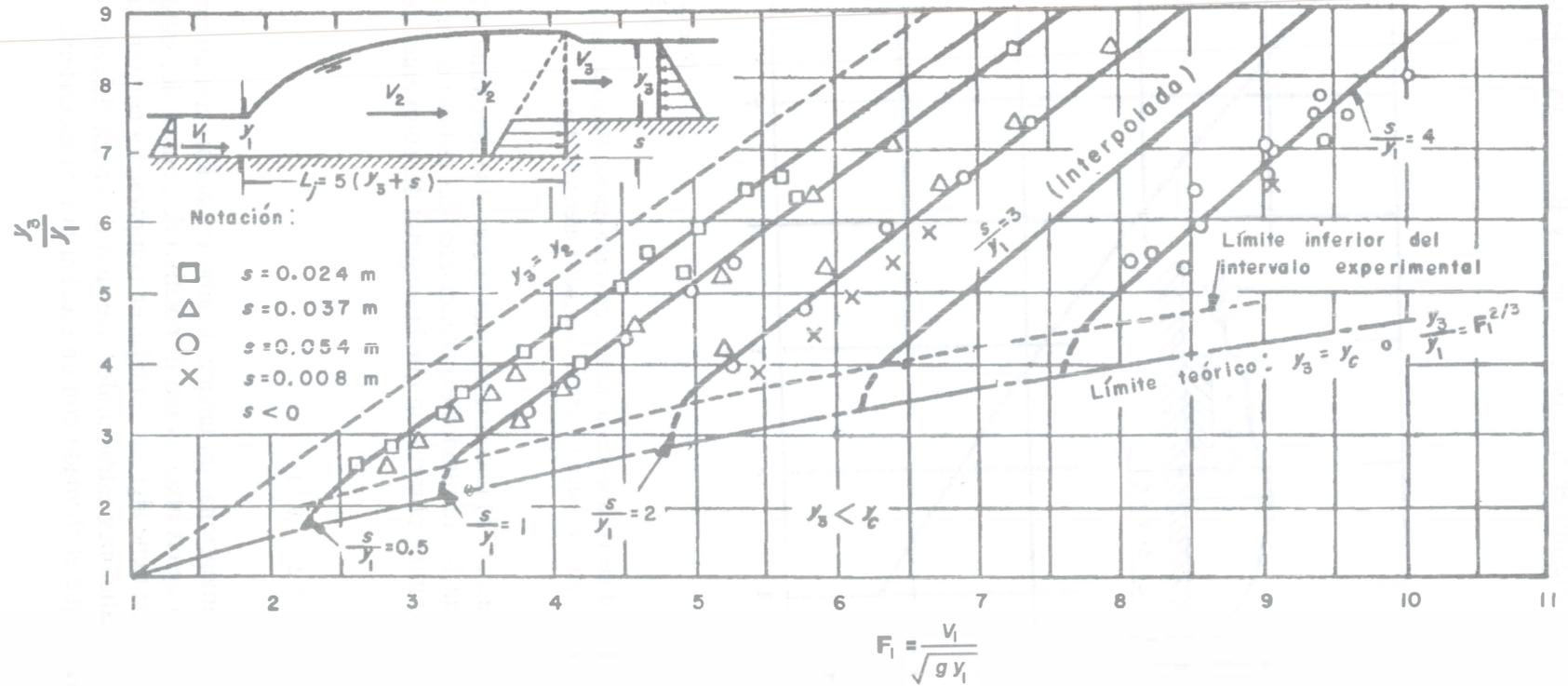


Figura 4.52. Salto hidráulico antes de un escalón brusco ascendente. Relación experimental entre F_1 , y_3 / y_1 , según Forster y Skrinde (referencia 35)

4.8.5 Control mediante escalón brusco ascendente

El procedimiento más común para controlar el salto libre es mediante un escalón brusco ascendente en el fondo, al final del salto.

Forster y Skrinde (1950)(referencia 35) investigaron experimentalmente el control del salto hidráulico en un canal rectangular mediante un escalón ascendente y sus resultados se presentan en la figura 4.52, en términos de los parámetros F_1 , y_3/y_1 y s/y_1 ; el último identifica a las curvas.

Las dos líneas que pasan por el origen dividen al diagrama de la figura 4.52 en tres regiones principales. La línea $s/y_1 = 0$ representa a la ecuación 4.8b para el salto convencional en un canal rectangular horizontal, y equivale a las condiciones de igualdad del tirante y_3 y el conjugado y_2 en flujo subcrítico. La región a la izquierda de esta línea corresponde a situaciones en que $s < 0$, para las cuales se necesita una caída en el fondo del canal (escalón negativo) para estabilizar el salto hidráulico en lugar de un ascenso brusco. La región intermedia a la derecha de la línea contiene las curvas $s/y_1 = constante$, todas pasando por los valores mínimos de F_1 que, según Forster y Skrinde, resultan de la ecuación $y_3 = y_c$, o bien $y_3/y_1 = F_1^{2/3}$, la cual queda representada por la segunda línea que pasa por el origen. Dicha condición límite equivale al caso de que y_3 sea igual al tirante crítico y corresponde a una sección crítica creada sobre la parte alta del escalón que de ese modo actúa como un umbral de cresta ancha, utilizando entonces el diagrama de diseño de la figura 4.51.

La región entre las dos líneas definidas por $s/y_1 = 0$ y la ecuación $y = y_c$ abarca las soluciones con las que se forma un salto hidráulico completo justo aguas arriba del escalón positivo. El tirante y_1 medido en los experimentos de Forster y Skrinde para lograr dicho salto fue a la distancia $20 s$ desde el escalón y su longitud obtenida de la expresión

$$L_j = 5 (y_3 + s) \quad (4.95)$$

La región abajo de la línea definida por la ecuación $y_3 = y_c$ corresponde al caso en que $y_3 < y_c$, para el que no se forma el salto y el flujo supercrítico rebasa al escalón.

En el diagrama, un punto $(F_1, y_3/y_1)$ ubicado entre las líneas $y_3 = y_2$ y $y_3 = y_c$, con su posición relacionada por la curva s/y_1 correspondiente, indica el efecto del escalón en la conformación del flujo. De este modo, si el punto queda sobre la curva, un salto hidráulico se forma con longitud L_j .

Si el punto queda a la izquierda y arriba de la curva, la altura del escalón es demasiado grande y el salto será forzado a desplazarse hacia aguas arriba y a convertirse posiblemente en salto sumergido u otro de mayor longitud. Si el punto queda a la derecha de la curva, la altura del escalón es demasiado pequeña, y el salto será forzado a desplazarse hacia aguas abajo hasta la proximidad del escalón e incluso rebasarlo.

Si un punto en el diagrama queda debajo de la línea $y_3 = y_c$, el flujo es supercrítico antes y después del escalón y no existe solución a base de resalto.

Los fundamentos teóricos del tema y las aportaciones recientes al mismo se presentan en el capítulo de disipadores de energía.

4.8.6 Control mediante escalón brusco descendente

El procedimiento más común para controlar al salto hidráulico sumergido consiste en utilizar una caída o descenso brusco del nivel del piso al final o antes del salto, esto es, un escalón brusco descendente.

Rouse, Bhoota y Hsu (referencia 36) en 1949, realizaron experimentos en canales rectangulares con el fin de analizar la formación del salto en presencia de un escalón brusco descendente. Sus resultados se muestran en la figura 4.53 donde se relacionan los parámetros F_1 y y_3/y_1 , y cada curva corresponde a un valor de s/y_1 para los dos casos A y B de formación del salto que identificaron y que aparecen en los recuadros de dicha figura. El caso A ocurre con un resalto completo sobre el canal antes del escalón, es decir, cuando el extremo final de su remolino coincide con la sección del escalón. El caso B corresponde al salto que se inicia en la sección del escalón y su remolino se desarrolla después del mismo con una zona de transición entre ambos. La formación del salto en cada caso se plantea con base en la distribución hidrostática de la presión en las distintas secciones, como aparece en los recuadros mencionados.

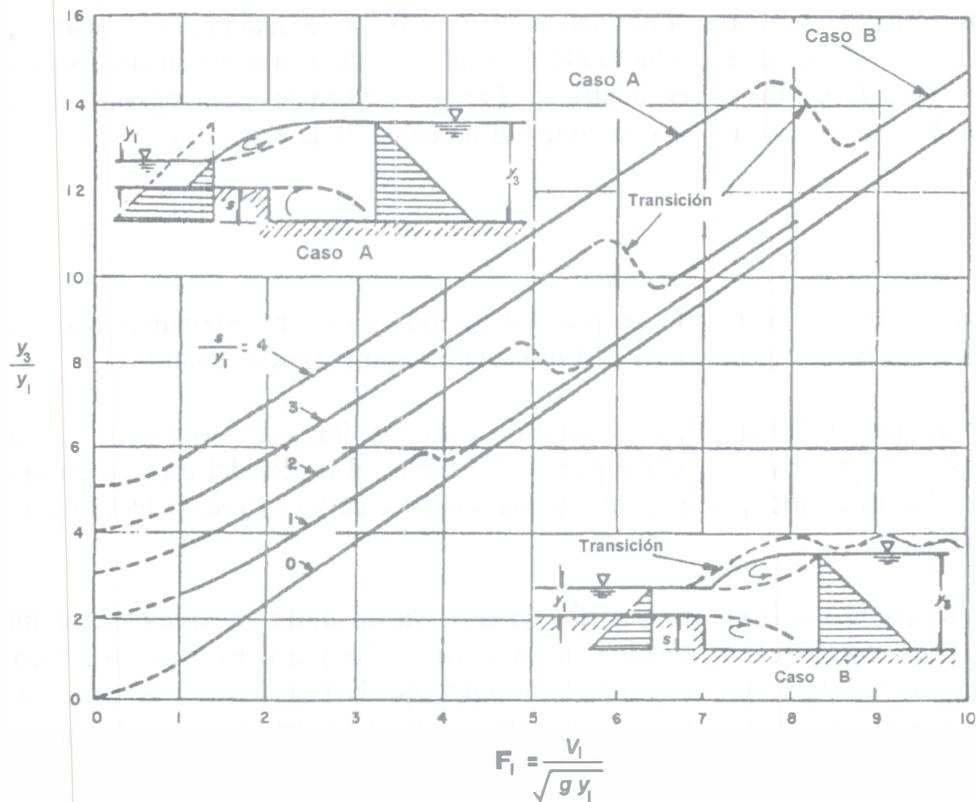


Figura 4.53. Salto hidráulico antes o después de un escalón brusco descendente. Relación experimental entre F_1 , y_3/y_1 y s/y_1 , según Rouse, Bhoota y Hsu (referencia 36)

Los aspectos teóricos de la solución y aportaciones recientes muy amplias en el conocimiento de los distintos fenómenos que ocurren por la presencia del escalón, se presentan en el capítulo posterior, ya mencionado, que amplía mucho los conocimientos del tema por lo que se recomienda su lectura.

Ejemplo 4.7. La estructura indicada en la figura 4.35 descarga un gasto de 112.5 m³/s con una longitud de cresta de 15.00 m en el cimacio. De acuerdo con los cálculos del ejemplo 4.1, cuando el canal rectangular aguas abajo mantiene el mismo ancho y tiene pendiente de 0.0008 ($n = 0.025$), se forma un salto normal al pie del mismo. Sin embargo, es deseable reducir el ancho del canal a 12.00 m, mejorando el recubrimiento hasta alcanzar un coeficiente $n = 0.017$, y aumentar su pendiente a 0.00134, si bien debe mantener el mismo nivel inicial de plantilla. a) Determinar el efecto que producen estas modificaciones en la formación del salto. b) Diseñar la estructura amortiguadora necesaria antes de iniciar el canal, para forzar al salto dentro de ella.

Solución a. Es conveniente calcular el tirante normal en el canal para la nueva geometría y pendiente. Dicho tirante es $y_n = 2.82$ m. En efecto, para éste los elementos geométricos e hidráulicos son

$$A = 12 (2.82) = 33.84 \text{ m}^2$$

$$P = 12 + 2 (2.82) = 17.64 \text{ m}$$

$$R_h = 1.9184 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{0.017} (1.9184)^{2/3} (0.00134)^{1/2} = 3.3245 \text{ m/s}$$

$$Q = 33.84 (3.3245) = 112.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Debe existir una transición para cambiar el ancho de 15.00 a 12.00 m sin que haya desnivel en la plantilla. Llamando sección 3 a la del inicio de la transición y despreciando la pérdida en la misma, de la ecuación de energía se debe cumplir que $E_3 = E_n$; esto es

$$y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 2.82 + \frac{(3.3245)^2}{19.62} = 3.3833 \text{ m}$$

Esta condición se satisface con $y_3 = 3.0811$ m. En efecto, con $q = 7.5$ m³/s en el ancho de 15.00 m, resulta

$$V_3 = 2.4342 \text{ m/s}; V_3^2/2g = 0.302 \text{ m}$$

$$y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 3.3831 \text{ m} \approx 3.3833 \text{ m}$$

El tirante y_3 es menor que $y_2 = 3.6391$ m, calculado en el ejemplo 4.1 para el conjugado mayor en las condiciones originales de la estructura; por tanto, se produce un salto libre.

Solución b. Para evitar el salto libre se necesita una estructura amortiguadora del tipo de escalón brusco ascendente sin modificar el nivel del fondo del canal de salida, esto es, manteniendo el mismo desnivel de 4.27 m entre la cresta del cimacio y dicho fondo.

Un valor aproximado de la profundidad del tanque se obtiene con los parámetros $F_1 = 3.9$ y con $y_1 = 0.7225$ m determinados en la solución del ejemplo 4.1, o sea, $y_3/y_1 = 3.081/0.7225 = 4.26$.

De la figura 4.52, $s/y_1 = 0.58$, por tanto $s = 0.42$ m. Sin embargo, un valor más preciso sólo se obtiene por tanteos, ya que dicha profundización aumentaría a V_1 y a F_1 , disminuyendo y_1 .

Aquí se presenta sólo el definitivo para fines de aclaración.

1. Se supone $s = 0.54$ m.

2. Con éste, de la ecuación de energía entre las secciones 0 y 1 (figura 4.35) se tiene que

$$0.54 + 4.27 + 2.43 + 0.064 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + 0.1 \frac{V_1^2}{2g}$$

Esto es

$$y_1 + 1.1 \frac{V_1^2}{2g} = 7.304 \text{ m}$$

cuya solución se obtiene con $y_1 = 0.691$ m. En efecto

$$V_1 = \frac{7.5}{0.691} = 10.854 \text{ m/s}; \frac{V_1^2}{2g} = 6.0044 \text{ m}$$

$$0.691 + 1.1 (6.0044) = 7.296 \text{ m} \approx 7.304 \text{ m}$$

3. Por tanto, los parámetros de diseño son

$$F_1 = \frac{10.854}{\sqrt{9.81 (0.691)}} = 4.169$$

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{3.0811}{0.691} = 4.459$$

De la figura 4.52 se obtiene $s/y_1 = 0.77$. Por tanto

$$s = 0.77 (0.691) = 0.532 \text{ m}$$

que casi satisface el valor supuesto en el paso 1 y con éste el tanteo.

De la ecuación 4.95 la longitud del salto es

$$L_j = 5 (3.0811 + 0.532) = 18.07 \text{ m}$$

que puede redondearse a 18 m. La estructura diseñada se muestra en la figura 4.54.

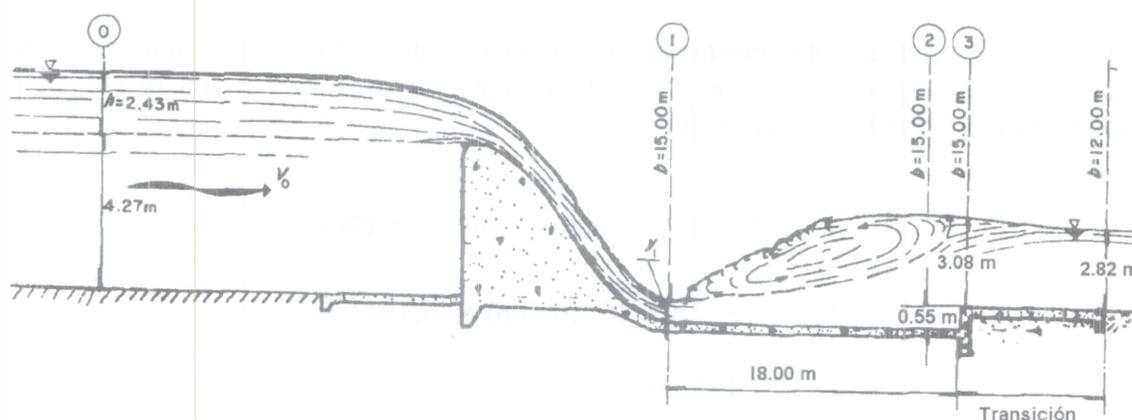


Figura 4.54. Tanque amortiguador del ejemplo 4.7

Aunque las soluciones basadas en un umbral de cresta delgada o ancha no son aquí las más adecuadas, se aclara su proceso de cálculo.

Para el umbral de cresta delgada se usa la figura 4.50 y la curva recomendada $X/y_2 = 5$, pero con el nivel original del piso, esto es, $F_1 = 3.9$ y $y_1 = 0.7225 \text{ m}$. De la figura se obtiene $s/y_1 = 1.5$, por tanto

$$s = 1.5 (0.7225) = 1.08 \text{ m}$$

El tirante y_2 corresponde al del salto normal y fue calculado en el ejemplo 4.1 con un valor de 3.6391 m , de este modo

$$y_2 - 0.75 s = 3.6391 - 0.75 (1.08) = 2.829 \text{ m}$$

que es menor de $y_3 = 3.081$ m, por tanto no se satisface la desigualdad indicada por la ecuación 4.90 y se produce ahogamiento en la estructura, lo que impide su aplicación.

Para el umbral de cresta ancha se usa la figura 4.51 (o la ecuación 4.93) y se obtiene $s/y_1 = 1.33$, siendo $s = 0.961$ m. El valor de

$$\frac{2 y_2 + s}{3} = \frac{2 (3.6391) + 0.961}{3} = 2.7464 \text{ m}$$

es menor que y_3 , por tanto habría también ahogamiento.

Ejemplo 4.8. El gasto descargado por la compuerta en las condiciones del ejemplo 4.2 (figura 4.36) resultó de $5.2313 \text{ m}^3/\text{s}$, presentándose salto normal para una pendiente de 0.000463 en el canal aguas abajo. *a)* Encontrar el efecto en la posición del salto que habría al aumentar la pendiente del canal a 0.001124 . *b)* Diseñar la estructura necesaria para forzar a un salto normal.

Solución a. Es conveniente determinar la pendiente crítica para asegurar que con la nueva no ocurra régimen supercrítico en el canal. El tirante crítico es $y_c = 0.608$ m y los elementos geométricos e hidráulicos críticos son

$$A_c = [3 + 1.5 (0.608)] 0.608 = 2.3785 \text{ m}^2$$

$$P_c = 3 + 2 \sqrt{3.25} (0.608) = 5.1922 \text{ m}$$

$$R_{hc} = 0.4581 \text{ m}$$

$$V_c = 2.1994 \text{ m/s}$$

$$S_c = \left[\frac{2.1994 (0.025)}{(0.4581)^{2/3}} \right]^2 = 0.00856 > 0.001124$$

Por tanto, el régimen en el canal sigue siendo subcrítico.

El tirante normal para la nueva pendiente es $y_n = 1.0625$ m. En efecto

$$A = [3 + 1.5 (1.0625)] 1.0625 = 4.8809 \text{ m}^2$$

$$R_h = 0.7145 \text{ m}$$

$$V = \frac{(0.7145)^{2/3}}{0.025} (0.001124)^{1/2} = 1.0718 \text{ m/s}; \quad \frac{V^2}{2g} = 0.0586 \text{ m}$$

$$E = 1.1211 \text{ m}$$

$$Q = 1.0718 (4.8809) = 5.2314 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación de energía entre las dos secciones extremas de la transición se tiene

$$y_t + \frac{V_t^2}{2g} = 1.1211 \text{ m}$$

cuya solución es $y_t = 0.949 \text{ m}$.

Debido a que y_t es menor de $y_2 = 1.2781 \text{ m}$, calculado en el ejemplo 4.2, el salto se convierte en libre.

Solución b. En el ejemplo 4.2 se obtuvo que $C_c = 0.6003$, siendo

$$y_1 = 0.6003 (0.51) = 0.3062 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{5.2313}{3 (0.3062)} = 5.6957 \text{ m/s}$$

$$F_1 = \frac{5.6957}{\sqrt{9.81 (0.3062)}} = 3.2863$$

Para controlar el salto, el tirante y_t se convierte en el tirante de salida, esto es, $y_3 = 0.949 \text{ m}$. Con éste resulta que

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{0.949}{0.3062} = 3.0993$$

Se elige un escalón brusco ascendente para controlar el salto y es aplicable la figura 4.52, de la cual se obtiene $s/y_1 = 0.7$, siendo

$$s = 0.7 (0.3062) = 0.2143 \text{ m}$$

De la ecuación 4.95, la longitud del salto es

$$L_j = 5 (0.949 + 0.2143) = 5.82 \text{ m}$$

En la figura 4.55 se muestran las dimensiones del tanque amortiguador resultante.

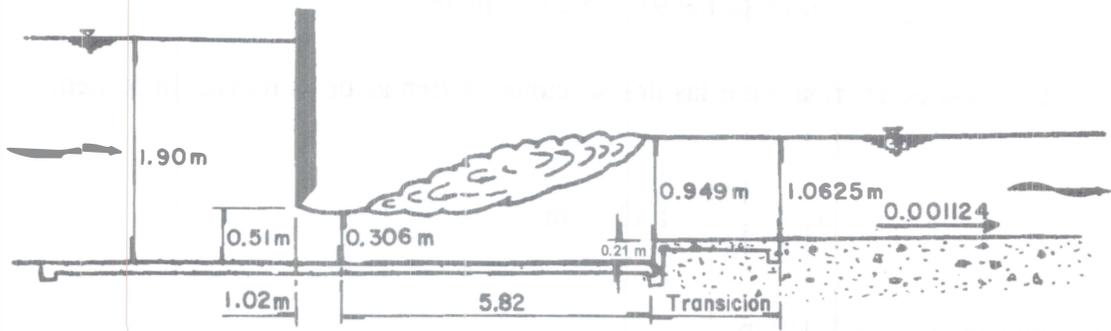


Figura 4.55. Dimensiones del tanque amortiguador del ejemplo 4.8

REFERENCIAS

1. Sotelo G. y Rodríguez E. "Salto hidráulico en canales de sección geométrica sencilla", Revista Ingeniería, UNAM, número 1, volumen XL, México, página 1116, enero 1970.
2. Domínguez F. J. "Hidráulica", Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Editorial Universitaria, Cuarta Edición, 1974.
3. Straub W. O. "A Quick and Easy Way to Calculate Critical and Conjugate Depths in Circular Open channels", Civil Engineering, páginas 70 a 71, diciembre 1978.
4. Hager W. H. "Hydraulic Jump in U-Shaped Channel", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, volumen 115, número 5, nota técnica, mayo 1989.
5. French R. H. "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1985.
6. Peterka A. J. "The Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators", US Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Engineering Monograph número 25, Washington, 1963.
7. Hager W. H. y Bremen R. "Classical hydraulic jump: sequent depths", Journal of Hydraulic Research, IARH, volumen 27, número 5, 1989.
8. Silvester R. "Theory and Experiment on the Hydraulic Jump", Segunda Conferencia Australoasiática de Hidráulica y Mecánica de Fluidos, páginas A 25 a A 39, 1965.
9. Bakhmeteff B. A. y Matzke A. E. "The hydraulic jump in terms of dynamica similarity", Transaction ASCE, volumen 101, 1936.
10. Ven te Chow. "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Kogakusha, Nueva York, 1959.
11. Woycicki E., "Wassersprung, Deckwalze und Ausfluss unter einer Schütze", Varsovia, 1931.
12. Smetana J. "Hydraulika", volumen 2, Nalkadatelství Československé Akademie, VED, Praga, 1931.
13. Mostkow M. A. "Handbuch der Hydraulik", VEB Verlag Technik, Berlín, 1956.

14. Safranez K. "Untersuchungen über den Wechselsprung", Der Bauingenieur, números 37 y 38, 1929.
15. Pietrkowski J. "Beitrag zur Kenntnis des Wechselsprunges", Die Wasserwirtschaft, números 25, 26, 27 y 28, 1932.
16. Kisieliev P. G. "Manual de Cálculos Hidráulicos", GEIL, Moscú, 1961.
17. Einwachter J. "Wassersprung und Deckwalzenlänge", Wasserkraft und Wasserwirtschaft, volumen 30, páginas 85 a 88, 1935.
18. Rajaratnam N. "Hydraulic Jumps", Advances in Hydrosience, volumen 4, páginas 197 a 280, Academic Press, Nueva York, 1967.
19. Sarma K. V. N. y Newnham D. A. "Surface Profiles of Hydraulic Jump for Froude Numbers less than four", Water Power, páginas 139 a 142, abril 1973.
20. Hager W. H., Bremen R. y Kawagoshi N., "Classical Hydraulic Jump: length of roller", Journal of Hydraulic Research, IARH, volumen 28, número 5, 1990.
21. US Department of the Interior, Bureau of Reclamation. "Design of Small Dams", United States Government Printing Office, Segunda edición, Washington, 1974.
22. Macha L. "Untersuchungen über die Wirksamkeit von Tosbecken", Mitteilungen der Institut für Wasserbau und Wirtschaft, Technische Universität Berlín, número 61, 1963.
23. Posey C. J. y Hsing P. S. "Hydraulic Jump in trapezoidal channel", Engineering News Record, volumen 121, páginas 797 a 798, diciembre 1938.
24. Sotelo G. "Cálculo de tanques de amortiguación de sección trapecial", Revista Ingeniería Hidráulica en México, número 1, volumen XV, México, enero 1961.
25. Press M. J. "The hydraulic Jump". Tesis presentada a la Universidad de Australia, Nedlands, Australia, 1961.
26. Wanoschek R. y Hager W. C. "Hydraulic jump in trapezoidal channel", Journal of Hydraulic Research, IARH, volumen 27, número 3, páginas 429 a 445, 1989.

27. Hager W. H. y Wanoschek R. "Hydraulic jump in triangular channel", *Journal of Hydraulic Research, International Association for Hydraulic Research*, volumen 25, número 5, 1987.
28. Gibson A. H. "Experiments on the coefficients of discharge under rectangular sluiceways", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, CC VII, parte I, Londres, 1918-1919*.
29. Knapp F. H. "Ausfluß, Überfall und Durchfluß im Wasserbau", Verlag G Braun, Karlsruhe, 1960.
30. Rajaratnam N., Subramanya K. "Flow immediately below submerged sluice gate", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, volumen 103, número HY4, páginas 57 a 77, abril 1957.
31. Franke P. G., Valentin F. "The determination of discharge below gates in case of variable tailwater conditions", *Journal of Hydraulic Research, IARH*, volumen 7, número 4, 1969.
32. Woycicky K. "The hydraulic jump and its top roll and the discharge of sluice gates", Traducción de J. B. Hosig, Technical memorandum 432, United States Bureau of Reclamation, Denver, Colorado, enero 1934.
33. Govinda Rao N. S. y Rajaratnam N. "The Submerged Hydraulic Jump", *Proceedings of the Hydraulic Division*, volumen 89, número HY1, páginas 139 a 162, enero 1963.
34. Stepanov P. M. "The Submerged Hydraulic Jump", *Gidrotekni Melioratsiya*, volumen 10, Moscú 1958, traducción al inglés por Israel Programme for Scientific Translations, 1952.
35. Forster J. W. y Skrinde R. A. "Control of the Hydraulic Jump by Sills", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, volumen 115, páginas 973 a 987, 1950.
36. Rouse H., Bhoota B. V. y Hsu E. Y. "Design of Channel Expansions", *Proceedings of the ASCE*, noviembre 1949.

CAPITULO 5. FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

5.1 ASPECTOS GENERALES

El flujo uniforme en un canal satisface la condición ideal de equilibrio dinámico entre el componente de la fuerza de peso del líquido en la dirección del movimiento y la fuerza de fricción generada sobre la frontera sólida de la conducción, lo que equivale a la igualdad de la pérdida por fricción entre dos secciones cualesquiera con el desnivel entre ellas. Esto se logra cuando la velocidad del flujo se mantiene constante a lo largo del canal, lo que es posible únicamente si las dimensiones de la sección y el tirante son constantes. Esto significa que el flujo uniforme puede ocurrir sólo en un canal prismático donde el gasto sea constante.

Cualquier otro flujo, aun en un canal prismático, que no satisfaga las condiciones de equilibrio del uniforme, se convierte en variado dentro de un tramo del canal o en toda su longitud. En un canal prismático puede producirse en uno o varios tramos antes o después del uniforme, como resultado de cambios en la rugosidad, en la pendiente, en las dimensiones de la sección, o por efecto de estructuras construídas en el canal para controlar niveles del agua o el gasto, como un vertedor o una compuerta.

El flujo variado puede ocurrir en cualquier canal (prismático o no) pero su tendencia será tratar de alcanzar las condiciones del uniforme en los tramos prismáticos de la conducción. Esto puede o no lograrse plenamente dependiendo de la rugosidad del canal y de la longitud que tenga.

Como el uniforme, el flujo gradualmente variado se produce en un canal de gasto constante y está íntimamente relacionado con la pérdida por fricción, la cual es factible de valuar previamente. Cualquier otra pérdida es secundaria pero puede tomarse en cuenta localmente o a lo largo del canal si se valúa previamente. Es el caso de la pérdida por cambios bruscos o graduales de la sección, como resultado de la separación del flujo de las paredes y plantilla, o por la turbulencia inducida al cambiar la velocidad de una sección a otra en un tramo o en todo el canal. Es pues, un problema que se analiza con la ecuación de energía, lo que elimina a flujos rápidamente variados, como el salto hidráulico, o el espacialmente variado de gasto creciente, donde las pérdidas se valúan con el principio del momentum.

5.2 ECUACIÓN DINÁMICA

En el tratamiento del flujo gradualmente variado se considera que ocurren cambios pequeños del tirante en la dirección del movimiento, si se comparan con la distancia en que se producen. También que no ocurre entrada o salida del agua a lo largo del tramo que se analiza.

Para el desarrollo de la teoría se establecen las siguientes hipótesis:

- a) El fondo del canal es plano y de pendiente uniforme e induce sólo pequeñas curvaturas en el perfil longitudinal del flujo, y líneas de corriente prácticamente paralelas; por lo mismo, la distribución hidrostática de la presión prevalece en cada sección. Esta suposición no implica eliminar pendientes supercríticas.

- b) La distribución de la velocidad en una sección es fija, por tanto, los coeficientes que dependen de dicha distribución son constantes en todo el canal.
- c) La pérdida de energía más importante es la de fricción. Para el cálculo de la pendiente local de fricción (en una sección del canal) se utiliza una ecuación igual que en flujo uniforme, con la velocidad, área, radio hidráulico y factor de fricción que haya en la sección; este último independiente del tirante. Esta suposición no ha sido verificada ni teórica ni experimentalmente, sin embargo, los errores que induce son pequeños si se comparan con los que se incurre al seleccionar el factor de fricción. La suposición es probablemente más precisa cuando el flujo se contrae que cuando se expande, debido a que en el primero la pérdida de energía es causada casi enteramente por fricción; en el segundo, pueden existir además pérdidas por turbulencia en gran escala.
- d) En los desarrollos no se considera el efecto del arrastre de aire al interior del flujo. Cuando dicho arrastre sea importante, el problema se resuelve como si no lo hubiera; después, el perfil resultante se corrige para tomar en cuenta dicho efecto.

Las dos primeras hipótesis limitan la aplicación de la ecuación dinámica sólo al caso de canales artificiales de pendiente y rugosidad uniforme, pero simplifican la discusión de los resultados. Sin embargo, las consideraciones que se introducen en los subcapítulos 5.7 y 5.8 eliminan la segunda hipótesis, permiten generalizar resultados y utilizar métodos de cálculo válidos para cualquier canal y característica del perfil del flujo que se produzca.

La ecuación diferencial de la energía 1.8 es aplicable al flujo gradualmente variado de la figura 5.1, considerando que α es constante y $h_r = h_f$ (pérdida de fricción). Se obtiene

$$\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \left[y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right] + \frac{dh_f}{dx} = 0 \quad (5.1a)$$

De acuerdo con la ecuación 3.1, la energía específica es $E = y \cos \theta + \alpha V^2/2g$.

Por tanto, resulta

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dE}{dx} + \frac{dh_f}{dx} = 0 \quad (5.1b)$$

El término dz/dx es igual al seno del ángulo θ de inclinación de la plantilla respecto de la horizontal. El valor $S_0 = \sin \theta$ se designó en el capítulo de flujo uniforme como la pendiente longitudinal del canal y se supone positiva si la inclinación es descendente en la dirección del flujo, pero entonces z decrece cuando x crece y $dz/dx < 0$; en caso contrario S_0 es negativa pero $dz/dx > 0$. Es decir, para la pendiente positiva

$$\frac{dz}{dx} = - S_0 \quad (5.2)$$

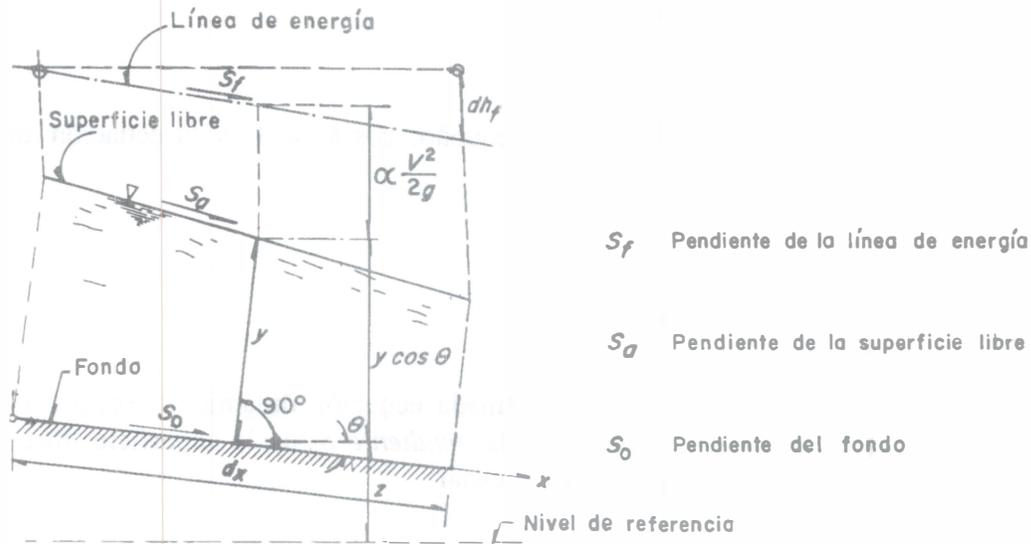


Figura 5.1. Volumen de control diferencial para la derivación de la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado

Es necesario destacar que S_0 siempre representa a $\sin \theta$. Sólo en el caso de pendiente pequeña se puede confundir con $\tan \theta$, que es la pendiente constructiva del canal.

Por definición la pendiente de la línea de energía (en este caso sólo de fricción) es

$$\frac{dh_f}{dx} = S_f \quad (5.3)$$

Siendo además: $dE/dx = (dE/dy)(dy/dx)$, de la ecuación 3.3 resulta

$$\frac{dE}{dx} = (1 - F^2) \cos \theta \frac{dy}{dx} \quad (5.4)$$

donde

$$F = \frac{V}{\sqrt{g A \cos \theta / \alpha T}}$$

es el número de Froude en la sección (ecuación 3.2).

Sustituyendo las ecuaciones 5.2, 5.3 y 5.4 en la 5.1b, al despejar se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{(1 - F^2) \cos \theta} \quad (5.5)$$

Si el ángulo de inclinación de la plantilla es pequeño, $\cos \theta \approx 1$, y la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F^2} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones 5.5 y 5.6 son formas de la llamada ecuación dinámica o ecuación del flujo gradualmente variado, donde dy/dx representa la *pendiente* S_a de la superficie libre del agua referida al eje x coincidente con la plantilla del canal.

5.3 CARACTERÍSTICAS Y CLASIFICACIÓN DE LOS PERFILES DE FLUJO

El perfil que adopta la superficie libre del agua en cualquier condición de flujo en un canal se conoce como perfil del flujo o perfil hidráulico.

La primera clasificación de los perfiles del flujo variado fue hecha por Bakhmeteff (referencia 1) y está basada en la pendiente del canal y la zona en que se aloja el perfil.

Para un valor dado de Q en un canal de pendiente pequeña y sección transversal de forma cualquiera, S_f y F^2 no son funciones sencillas de y , de modo que la ecuación diferencial 5.6 no tiene una solución explícita inmediata. Aún sin ella, es posible analizar el aspecto semicuantitativo de la variación de y con x en diferentes circunstancias, esto es, la forma cualitativa que adopta el perfil del flujo. Para este fin, es necesario considerar los signos del numerador y denominador de la ecuación 5.6, y de éstos el de dy/dx , a fin de conocer el incremento o decremento de y en la dirección del flujo.

La forma que adopta el perfil del flujo está directamente asociada con la pendiente de la plantilla S_0 y con los valores de S_f y F^2 . Para ello, la discusión se simplifica si se acepta que el canal sea prismático y de pendiente pequeña.

Por lo que respecta a la pendiente de la plantilla, S_0 es positiva si desciende en la dirección del flujo, negativa si asciende y cero si es horizontal. Un flujo uniforme de tirante y_n se puede establecer sólo sobre una pendiente positiva, por lo que dicha pendiente y los perfiles del flujo resultantes se designan como:

Subcrítica si $y_n > y_c$; perfiles tipo M.

Crítica si $y_n = y_c$; perfiles tipo C.

Supercrítica si $y_n < y_c$; perfiles tipo S.

La clasificación de la pendiente con alguna de estas designaciones depende de su magnitud, de la rugosidad del canal y , en menor grado, del gasto.

En algunos casos la pendiente puede ser:

Horizontal, $y_n = \infty$; perfiles tipo H.

Negativa o adversa, y_n no existe; perfiles tipo A.

En el caso de pendiente cero no existe posibilidad de flujo uniforme; en efecto, para $S_0 = 0$ el tirante normal es $y_n = \infty$. Para $S_0 < 0$, el flujo uniforme y un valor de y_n son físicamente imposibles.

De la ecuación de Manning, la pendiente de fricción es

$$S_f = \left[\frac{Vn}{R_h^{2/3}} \right]^2$$

Por otra parte, el número de Froude adopta el valor de uno para el régimen crítico, mayor de 1 si los tirantes del perfil del flujo variado son menores que el crítico y menor de 1 en caso contrario.

Para un gasto dado y la mayoría de las secciones usuales, S_f y F^2 son decrecientes en forma continua a medida que el tirante crece. Esto es evidente en secciones anchas, donde al crecer el tirante, R_h y A también crecen, pero T prácticamente no cambia.

Por definición de flujo uniforme, $S_f = S_0$ cuando $y = y_n$, por lo cual se concluye:

$S_f \geq S_0$, según que $y \leq y_n$,

$F^2 \geq 1$, según que $y \leq y_c$

Con la ayuda de estas desigualdades se puede observar fácilmente cómo se afecta el comportamiento de dy/dx , al cambiar las magnitudes de y , y_n y y_c .

Cualquiera que sea la pendiente, el gasto y la sección del canal, las líneas que indican la altura del tirante normal y del crítico respecto de la plantilla, dividen al espacio en que puede desarrollarse el perfil del flujo en tres zonas, llamadas:

Zona 1. El espacio arriba de la línea superior.

Zona 2. El espacio entre las dos líneas.

Zona 3. El espacio abajo de la línea inferior.

En ciertos casos, alguna de las zonas puede desaparecer, por ejemplo, la 2 cuando la pendiente es crítica y $y_n = y_c$. Sin embargo, las restantes mantienen el número de la zona antes asignado.

Dentro de cada zona queda alojado cualquier perfil, de modo que si:

$\frac{dy}{dx} > 0$, el perfil de la superficie libre diverge de la plantilla.

$\frac{dy}{dx} = 0$, el perfil de la superficie libre es paralelo a la plantilla.

$\frac{dy}{dx} < 0$, el perfil de la superficie libre converge con la plantilla.

Esto significa que existen diferentes formas para el perfil del flujo gradualmente variado (doce en total), que se muestran en la figura 5.2. La forma o tipo del perfil de flujo depende de las condiciones particulares en el canal; es decir, el incremento o disminución del tirante depende del signo que resulte de dichas condiciones al imponerlas en la ecuación 5.6.

En cada zona existe un perfil distinto, válido dentro de los límites de la zona. La forma del perfil en la proximidad de las fronteras de la zona se puede estudiar como sigue:

- a) Cuando y tiende a ∞ , F^2 y S_f tienden a cero y de la ecuación 5.6, dy/dx tiende a S_0 . Esto significa que la superficie del agua es asintótica a la horizontal (perfiles H2, A2). Cuando y tiende a y_n es porque S_f tiende a S_0 , dy/dx tiende a 0, y el perfil del flujo se vuelve paralelo a la plantilla del canal, es decir, tiende al flujo uniforme (perfiles M1, M2, C2, C3, S2 y S3).
- b) Cuando y tiende a y_c , F tiende a uno y dy/dx tiende a ∞ ; es decir, el perfil del flujo tiende a la vertical en la proximidad del tirante crítico. Esto significa que cuando el perfil se desarrolla en régimen supercrítico se presenta un salto hidráulico antes de que y alcance el valor y_c (perfiles M3, H3, A3); por el contrario, si el perfil se desarrolla en régimen subcrítico se genera una gran curvatura al aproximarse al valor y_c , para volverse vertical en el punto en que $y = y_c$ (perfiles M2, H2, A2). En ambos casos se presenta localmente un flujo rápidamente variado curvilíneo, que no puede tratarse con la teoría aquí presentada.
- c) Cuando y tiende a 0, tanto S_f como F^2 tienden a ∞ , de manera que dy/dx tiende a un límite positivo finito, cuya magnitud depende de la sección particular de que se trate. Este resultado es de poco interés debido a que no puede existir un tirante igual a cero para un gasto mayor de cero.

En la figura 5.3 se presentan algunos ejemplos prácticos de los perfiles mostrados en la figura 5.2 y a continuación algunos comentarios acerca de dichos perfiles.

Tipo M. El perfil M1 es muy común. La presencia de estructuras de control, como vertederos y compuertas, u otros accidentes naturales como estrechamientos y curvas, sobreelevan la superficie del agua en un canal o río y se produce un perfil del tipo M1 que puede extenderse varios kilómetros hacia aguas arriba, donde es asintótico al perfil en flujo uniforme. El perfil M2 ocurre cuando el tirante disminuye, por ejemplo, antes de un cambio de pendiente subcrítica a supercrítica, de un estrechamiento de la sección o en la proximidad de una caída. El perfil M3 se encuentra aguas abajo de un cambio de pendiente de supercrítica a subcrítica, o después de la descarga de una compuerta y su longitud está regida por las condiciones de aguas abajo, ya que termina normalmente en un salto hidráulico. Los perfiles M2 y M3 son más cortos en comparación con el M1.

	Perfiles en la zona 1 $y > y_n ; S_0 > S_f$ $y > y_c ; F^2 < 1$	Perfiles en la zona 2 $y_n \geq y \geq y_c ; S_0 \leq S_f ; F^2 \leq 1$ $y_c \geq y \geq y_n ; S_0 \geq S_f ; F^2 \geq 1$	Perfiles en la zona 3 $y < y_n ; S_0 < S_f$ $y < y_c ; F^2 > 1$
Pendiente positiva $S_0 > 0$	Subcrítica: $y_n > y_c$ $\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ 	M2 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ 	M3 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$
Pendiente positiva $S_0 > 0$	Crítica: $y_n = y_c$ $\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ 	C2 $\frac{dy}{dx} = 0$ 	C3 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$
	Supercrítica: $y_n < y_c$ $\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = +$ 	S2 $\frac{dy}{dx} = \frac{+}{-} = -$ 	S3 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$
Pendiente horizontal $S_0 = 0$ $y_n > y_c$	$\frac{dy}{dx}$ no existe Ninguno 	H2 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ 	H3 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$
Pendiente negativa $S_0 < 0$	$\frac{dy}{dx}$ no existe Ninguno 	A2 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = -$ 	A3 $\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = +$

Figura 5.2. Clasificación de los perfiles de un flujo gradualmente variado

- Tipo S. El perfil S1 se produce antes de una estructura de control, como una presa o una compuerta, situada en un canal de gran pendiente. Principia después de un salto hidráulico y termina en la obstrucción. El perfil S2 es generalmente muy corto y es común en la entrada de un canal de gran pendiente o después de un cambio de pendiente subcrítica a supercrítica. El perfil S3 se produce aguas abajo de una compuerta en un canal de gran pendiente, o aguas abajo de su intersección con otro de menor pendiente.
- Tipo C. Como los tirantes normal y crítico coinciden, hay sólo dos perfiles. Estos son aproximadamente horizontales y la inestabilidad propia del estado crítico se manifiesta en la forma de una ondulación superficial apreciable.
- Tipo H. El tirante normal es infinito y se forman sólo los perfiles H2 y H3. El perfil H2 se produce después de que un canal de pendiente subcrítica cambia a horizontal. El perfil H3 ocurre después de una compuerta o de un cambio de pendiente supercrítica a horizontal.
- Tipo A. La pendiente negativa en un canal es poco común. El tirante normal no existe y los perfiles que se forman tienen las mismas tendencias que los H2 y H3. Los perfiles A2 y A3 son extremadamente cortos.

El flujo variado puede formarse con uno o más de los tipos de perfil que se han expuesto y resulta conveniente familiarizarse con su clasificación.

5.4 SECCIONES DE CONTROL

La sección de un canal en la que sea posible establecer una relación definida entre el nivel de la superficie libre del agua y el gasto correspondiente, se conoce como sección de control. Dicha sección impone sus condiciones al perfil del flujo y puede actuar tanto en la dirección del flujo como en la dirección contraria. Por sus propiedades, una estación de aforos es el sitio adecuado para una sección de control viceversa.

Una sección de control proporciona el tirante inicial para el cálculo del perfil de un flujo variado. Se procede hacia aguas arriba de la sección de control o hacia aguas abajo según sea el régimen en que se desarrolla el perfil, subcrítico o supercrítico respectivamente, de acuerdo con la pendiente del canal. La dirección en que se efectúa el cálculo se indica en la figura 5.2 para todos los tipos de perfil.

Algunos ejemplos de secciones de control son las presas, vertedores y compuertas, debido a que el gasto está gobernado por el tirante necesario aguas arriba a través de una relación clara entre ambos; por ejemplo, en un vertedor mediante la ley de vertido, es decir, la ecuación del gasto que vierte para cada valor de la carga respecto de su cresta.

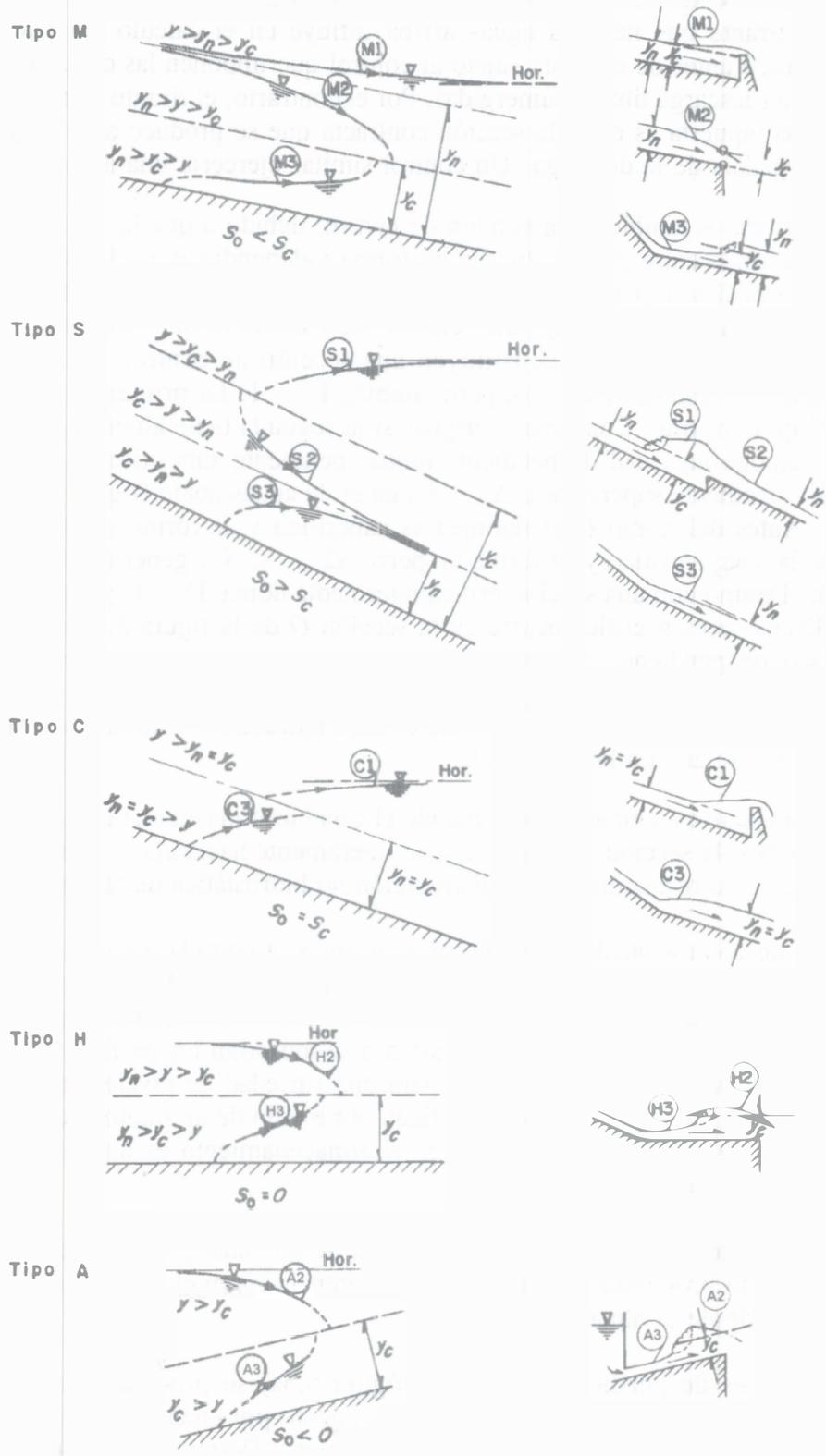


Figura 5.3. Ejemplos de ocurrencia de perfiles de flujo

Un mecanismo de control, como una compuerta (figura 4.3), impone la ley de gastos que descarga y el tirante que necesita aguas arriba influye en el cálculo del perfil, es decir, el régimen subcrítico antes de ella está sujeto al control que imponen las condiciones aguas abajo de la compuerta (descarga libre o sumergida). Por el contrario, el tirante en régimen supercrítico después de la compuerta es el de la sección contracta que se produce después de ella mientras no haya sumergencia de la descarga. Un control similar ejercería una alcantarilla.

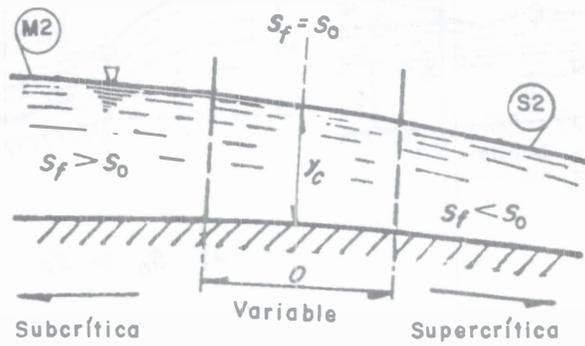
Una sección crítica es también una sección de control debido a que la ecuación 3.4b establece una relación definida entre gasto y tirante en forma independiente de la rugosidad del canal y de otras circunstancias imprevistas. Como el tirante crítico depende únicamente del gasto y de la forma de la sección, cualquier intersección bien definida del perfil del flujo y la línea correspondiente al tirante crítico constituyen una sección de control. En efecto, si $S_0 = S_f$; de la ecuación 5.6 resulta $dy/dx = 0$, pero también $F^2 = 1$. La primera condición ($dy/dx = 0$) equivale al flujo uniforme. Conviene averiguar si la segunda tiene algún significado físico real. Para ello se supone un canal de pendiente mixta: pendiente subcrítica ($S_0 < S_c$) en el tramo aguas arriba y pendiente supercrítica ($S_0 > S_c$) en el de aguas abajo (figura 5.4a), con un tramo O de unión. Antes del tramo O el régimen es subcrítico y se forma un perfil M2 ($S_f > S_0$); después cambia a supercrítico y se forma un perfil S2 ($S_f < S_0$), generándose un perfil corto de transición en el tramo con una sección crítica intermedia donde $F^2 = 1$, ya que no es posible que $dy/dx = 0$. Dicha sección crítica ocurre en la sección O de la figura 5.4b donde se produce el cambio brusco de pendiente. En ambos casos, actúa como un control en la transición del régimen subcrítico al supercrítico, pero no se presenta cuando ocurre el proceso inverso (de supercrítico a subcrítico) porque antes ocurre el salto hidráulico. Esto demuestra la discusión en el subcapítulo 4.1 relativa a la figura 4.1.

Un análisis semejante es también válido cuando el canal termina en una caída libre (figura 3.13), si bien en este caso la sección crítica se mueve ligeramente hacia aguas arriba de aquella donde inicia la caída, como resultado de una distribución no hidrostática de la presión en esta última.

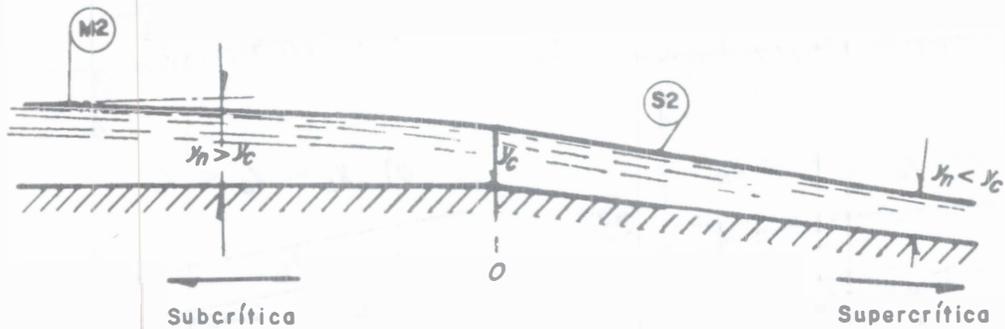
Las secciones de control pueden también presentarse a la entrada o salida de un canal, donde es importante conocer las características del perfil en el entorno. Para ilustrarlas, se considera un canal prismático que conecta dos almacenamientos y por su gran longitud, se produce la tendencia hacia el flujo uniforme. En la figura 5.5 se muestran los perfiles a la entrada y salida para pendientes subcrítica y supercrítica y para una variedad de niveles en el almacenamiento de salida. Las secciones de control se identifican por medio de un punto encerrado dentro de un cuadrado. En los casos restantes, el nivel en el almacenamiento es una condición de frontera para cualquier valor del gasto.

Para analizar las condiciones del flujo a la entrada de un canal y obtener el gasto que ingresa, se utiliza el criterio propuesto por Henderson (referencia 2) en el que se considera que el agua entra libremente desde el almacenamiento.

Cuando el canal es de pendiente subcrítica (figura 5.5a) se produce una caída brusca de la superficie del agua en la proximidad de la sección inicial, por efecto de la conversión de energía potencial en cinética y en pérdidas por turbulencia. Después se producen varias ondas superficiales dentro de un tramo de estabilización hasta que se alcanza el tirante y_e , que puede ser el inicio de un flujo uniforme, de tirante normal $y_n = y_e$, o de uno gradualmente variado, cuyo perfil sería controlado desde aguas abajo.



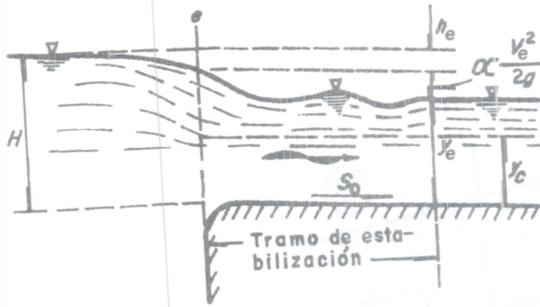
a) Incremento gradual de pendiente



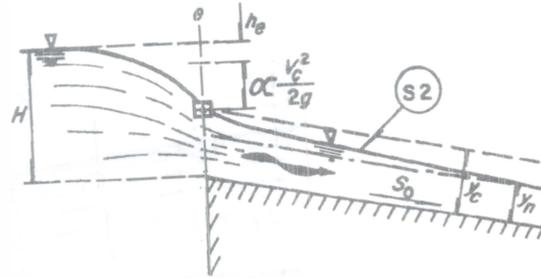
b) Cambio brusco de pendiente

Figura 5.4. Sección crítica en un cambio de pendiente

1. Entrada

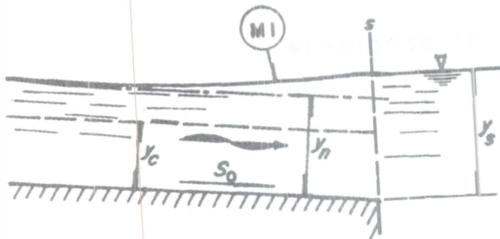


a) $S_0 < S_c$

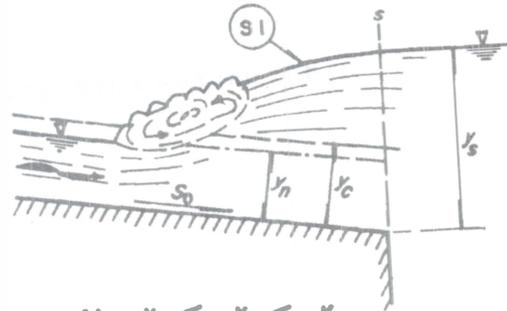


b) $S_0 > S_c$

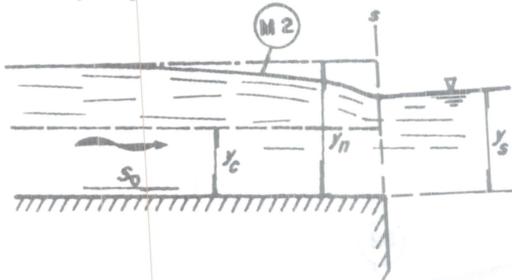
2. Salida



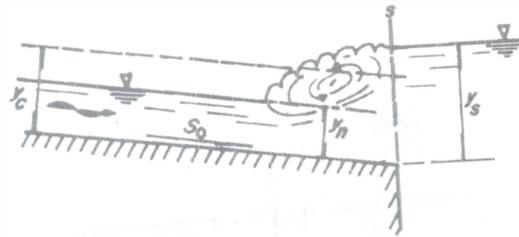
c) $y_c < y_n < y_s$



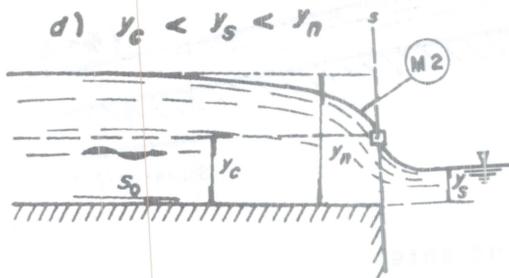
f) $y_n < y_c < y_s$



d) $y_c < y_s < y_n$

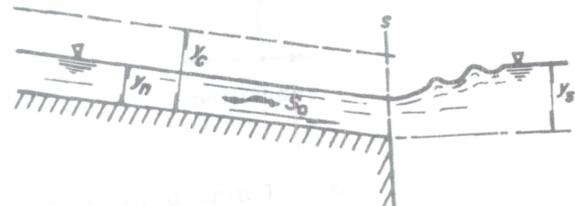


g) $y_n < y_c < y_s$



e) $y_s \leq y_c < y_n$

Pendiente subcrítica $S_0 < S_c$



h) $y_n < y_c, y_s \leq y_c$

Pendiente supercrítica $S_0 > S_c$

Figura 5.5. Perfiles del flujo en la entrada y salida de un canal

En el tramo de estabilización se cumple la ecuación de energía (condición de frontera)

$$H = y_e + \alpha \frac{Q^2}{2g A_e^2} + h_e \quad (5.7)$$

donde H representa la energía disponible en el almacenamiento respecto del nivel del fondo y h_e la pérdida por entrada, que para el régimen subcrítico se expresa como sigue

$$h_e = K_e \frac{V_e^2}{2g} = K_e \frac{Q^2}{2g A_e^2} \quad (5.8)$$

donde K_e es un coeficiente que depende de la forma de la entrada y algunos valores son:

- 0.5 a 0.6, en paredes y fondo con cantos agudos;
- 0.3 a 0.4, en paredes con cantos agudos y fondo abocinado;
- 0.06 a 0.10, en paredes y fondo abocinados con una pila intermedia.

Como antes se explicó, el tirante y_e puede ser igual al normal si ocurre flujo uniforme aguas abajo del tramo de estabilización o ser el de inicio de un perfil de flujo variado. Es decir, la ecuación 5.7 no representa una ley directa entre H, y_e y Q dependiente sólo de la geometría de la sección en la entrada, ya que dichas variables también están sujetas a la pendiente, sección, rugosidad y otras condiciones de control en el canal aguas abajo. El gasto Q es más bien menor que el máximo obtenido con la condición crítica en dicha sección (ecuación 3.7). Puede decirse que no hay una relación directa entre y_e y Q , ya que y_e depende de la capacidad de conducción del canal después de la sección o de las condiciones del flujo en el mismo y $y_e > y_c$.

Cuando el canal es de pendiente supercrítica (figura 5.5b), el perfil cae hasta alcanzar el tirante crítico en la sección de entrada y después tiende hacia la línea de tirante normal en el canal para el gasto que ingresa, a través de un perfil corto tipo S2. En este caso, la sección crítica sí ocurre en la entrada y, por ende, es de control. En ella se cumple que

$$H = y_c + \frac{Q^2}{2g A_c^2} + h_e = E_c + h_e \quad (5.9)$$

Es decir, para cada valor de H hay uno de Q y del tirante crítico que satisfacen la ecuación 5.9. El caudal Q es el máximo, obtenido de la ecuación 3.4b para cada valor de la energía específica E_c (ecuación 3.6a) en la entrada cualquiera que sea la pendiente y rugosidad del canal, pero siempre que $S_0 > S_c$.

Por lo que respecta a las condiciones de salida, un nivel alto en el almacenamiento al que descarga un canal de pendiente subcrítica (figura 5.5c) produce un perfil M1 que termina en su lado aguas abajo con el nivel horizontal del almacenamiento. En rigor, debe haber un ligero

ascenso del nivel de la superficie del agua en la sección de salida, de valor igual a la carga de velocidad en dicha sección, pero en la práctica no hay recuperación de energía debido a que se disipa por turbulencia. El tirante y_s respecto del nivel en el almacenamiento controla desde aguas abajo el perfil del flujo en el canal para cualquier valor del gasto.

Si el nivel en el depósito está abajo de la línea de tirante normal (figura 5.5d), se produce un perfil M2 en el canal. Cuando el tirante y_s adopta el valor crítico en la sección final ésta es de control. Cualquier descenso del nivel en el almacenamiento debajo del crítico (figura 5.5e) y_s ya no tiene influencia sobre el perfil del flujo en el canal y la sección crítica se mantiene en el extremo final.

Un nivel alto en el almacenamiento en que descarga un canal de pendiente supercrítica (figura 5.5f) produce un perfil S1, que se inicia después de un salto hidráulico, localizado donde el tirante del perfil es conjugado mayor del normal, y termina con el nivel en el almacenamiento a la salida. El perfil descende con el nivel en el almacenamiento haciendo que el salto se mueva hacia adelante (figura 5.5g). Dicho salto puede llegar a tener una forma imperfecta para diferencias pequeñas entre los niveles aguas arriba y aguas abajo. El tirante y_s controla el perfil S1 del flujo en el canal y la posición del salto para cualquier valor del gasto, hasta que desaparecen.

Finalmente, cuando el nivel del almacenamiento esté abajo del tirante normal (figura 5.5h), el flujo uniforme persiste hasta la salida. Siendo el flujo supercrítico, las condiciones de aguas arriba no quedan afectadas por los niveles en el almacenamiento de aguas abajo. La capacidad de conducción del canal en flujo uniforme mantiene el tirante y_n hasta la sección final.

Ejemplo 5.1. Un canal de sección rectangular de 12 m de ancho, coeficiente de Manning $n = 0.015$ y pendiente $S_0 = 0.001$, se alimenta de un almacenamiento cuyo nivel del agua se encuentra 3 m arriba de la plantilla a la entrada (figura 5.6). a) Calcular el gasto que entra al canal para un coeficiente de pérdida por entrada $K_e = 0.2$. b) Calcular dicho gasto, para el mismo $K_e = 0.2$, cuando la pendiente aumenta a $S_0 = 0.004$.

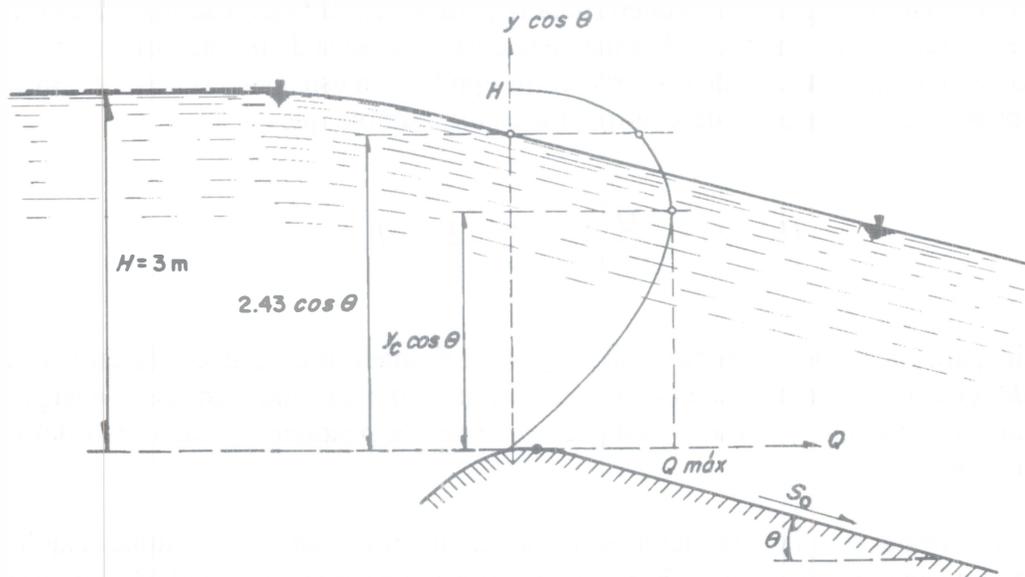


Figura 5.6. Canal del ejemplo 5.1

Solución a. El problema se resuelve por el criterio de Henderson antes expuesto mediante iteraciones.

Conviene calcular primero el gasto máximo que puede entrar al canal. Para ello, la energía específica en el almacenamiento es constante y de las ecuaciones 5.9 y 3.19 resulta $y_c = 1.875$ m. En efecto, la carga de velocidad crítica es: $V_c^2/2g = y_c/2 = 0.9375$ m y la ecuación 5.9 es

$$H = 1.875 + 1.2 (0.9375) = 3 \text{ m}$$

Siendo $V_c = 4.2888$ m/s, el gasto máximo que puede entrar al canal vale

$$Q_{m\acute{a}x} = b y_c V_c = 12 (1.875) (4.2888) = 96.498 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para el tirante crítico, el área hidráulica, perímetro mojado y radio hidráulico son

$$A = 12 (1.875) = 22.5 \text{ m}^2$$

$$P = 12 + 2 (1.875) = 15.75 \text{ m}$$

$$R_h = 22.5 / 15.75 = 1.4286 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning, la pendiente crítica resulta

$$S_c = \left[\frac{4.2888 (0.015)}{(1.4286)^{2/3}} \right]^2 = 0.002572$$

que es el valor de la pendiente crítica límite. Para cualquier gasto inferior a $Q_{m\acute{a}x}$, la pendiente crítica es inferior a dicho valor.

Este examen preliminar indica que $S_0 < S_c$, por lo cual la pendiente es subcrítica y el gasto que entra al canal es menor que el máximo, es decir, el tirante a la entrada es mayor que el crítico.

El tirante normal se presenta casi a la entrada y se cumple la ecuación 5.7

$$H = y_n + 1.2 \frac{V_n^2}{2g} = 3 \text{ m}$$

donde se consideró $K_e = 0.2$, como valor del coeficiente de pérdida. Se prueban diferentes tirantes normales, hasta que se satisfaga la ecuación de Manning y también a la ecuación anterior. Los cálculos se resumen en la tabla 5.1 donde se utiliza la ecuación de Manning ($S_0 = 0.001$) en la forma

$$V_n = \sqrt{0.001} R_h^{2/3} / 0.015 = 2.1082 R_h^{2/3}$$

Tabla 5.1. Cálculo del gasto que ingresa al canal del ejemplo 5.1a

y_n en m	A en m ²	P en m	R_h en m	V_n en m	Q en m ³ /s	$\frac{V_n^2}{2g}$ en m	H en m
2.00	24.00	16.00	1.500	2.763	66.300	0.389	2.467
2.40	28.80	16.80	1.714	3.02	86.967	0.465	2.958
2.43	29.16	16.86	1.73	3.038	88.576	0.470	2.994 \approx 3

Los resultados del último renglón de la tabla 5.1 muestran que el gasto que entra al canal es 88.576 m³/s, la velocidad es menor que la crítica y el tirante normal mayor que el crítico.

Solución b. Puesto que $S_0 = 0.004 > S_c$, el gasto que queda determinado por la condición de régimen crítico en la sección de entrada corresponde al máximo ya calculado. La sección en la entrada es de control y el tirante normal para el gasto máximo es menor que el crítico y se presenta aguas abajo, al terminar el perfil S2 que se inicia con dicho crítico.

5.5 PERFILES COMPUESTOS

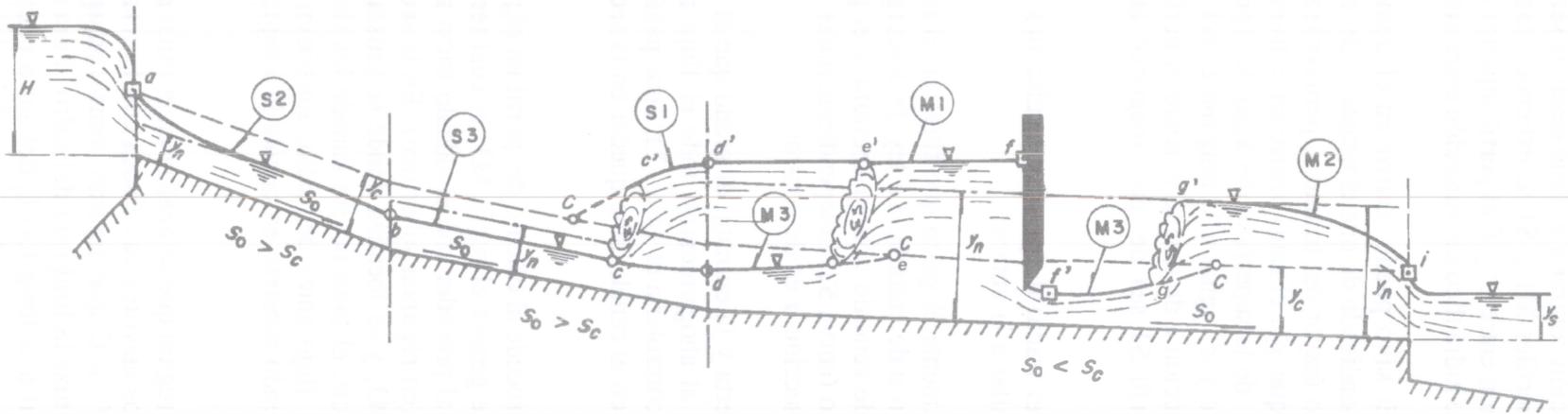
Es frecuente que en un canal haya más de un perfil de flujo variado y las explicaciones dadas anteriormente permiten interpretar cualitativamente los perfiles compuestos que se generan en un canal largo con una gran variedad de pendientes, secciones de control y tipos de perfil.

Para ilustrar el análisis, las figuras 5.7 a y b muestran dos canales de sección constante y gasto conocido, cada uno con una compuerta deslizante ubicada en algún punto intermedio del tramo final y cuya abertura también se conoce. Ambos canales empiezan y terminan en almacenamientos.

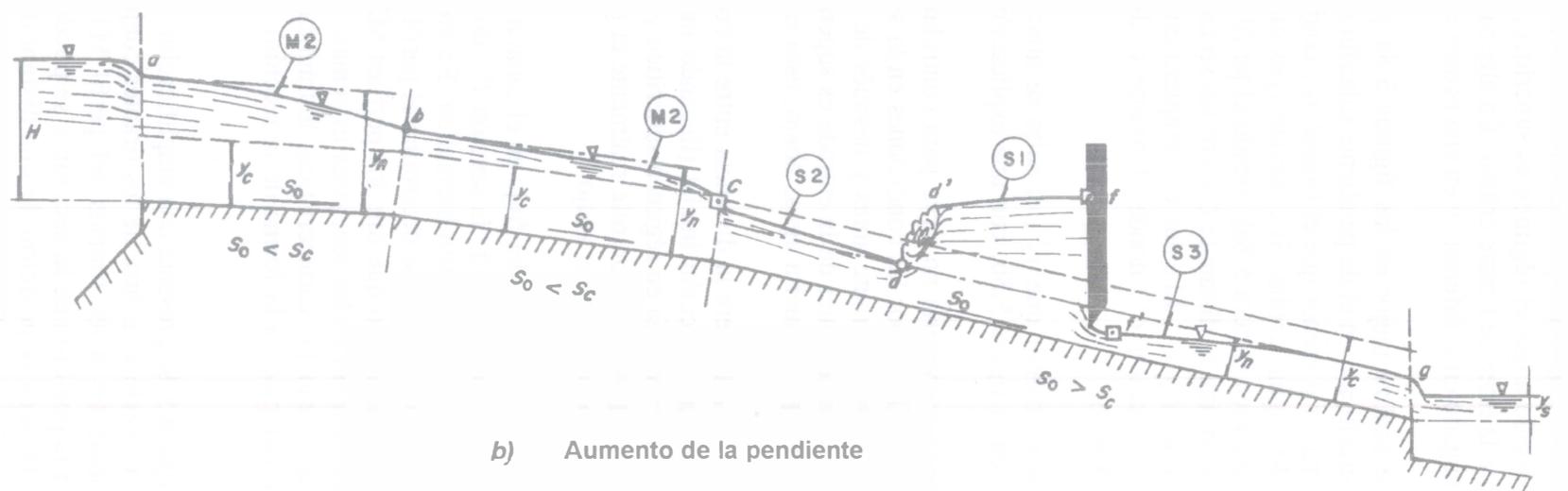
El primer paso consiste en calcular los tirantes crítico y normal en cada tramo del canal, para definir si su pendiente es subcrítica o supercrítica y sobre todo decidir el tipo de flujo en el tramo inicial (ejemplo 5.1). El tirante crítico es el mismo en toda la longitud del canal por ser de sección constante. Después se dibujan las líneas de tirante normal y crítico en cada tramo, ambas paralelas a la plantilla, y se localizan las secciones de control en los sitios apropiados de entrada y salida, en los cambios de pendiente de subcrítica a supercrítica, y en la compuerta; ésta última influye en ambas direcciones, debido a que los tirantes del flujo están gobernados por las condiciones en que se efectúa la descarga.

Un análisis de las condiciones del flujo en cada canal se hace a continuación, de acuerdo a lo antes expuesto.

Canal a. La sección *a* en la entrada y la compuerta son de control, debido a que el régimen aguas abajo de cada una es supercrítico. Se procede al cálculo en la dirección del flujo y se trazan los perfiles S2, S3 y M3 hasta la sección *C*, en la intersección con la línea de tirante



a) Disminución de la pendiente



b) Aumento de la pendiente

Figura 5.7. Identificación de secciones de control y perfiles del flujo en dos canales

crítico. De manera análoga se procede al cálculo en dirección contraria al flujo desde la sección de control f , debido a que el régimen es subcrítico; los perfiles M1 y S1 se extienden hasta la sección C sobre la línea de tirante crítico. En alguna sección entre c' y f , el perfil superior tiene un tirante conjugado en el inferior, y en ella ocurre el salto hidráulico de transición entre ambos.

Lo anterior se analiza mejor en las figuras 5.8a y b. El salto puede ocurrir en el tramo de pendiente supercrítica o en el de pendiente subcrítica, dependiendo de que el tirante y_2 del perfil S1 o M1 sea mayor o menor que el tirante y_2' , conjugado mayor del tirante y_1 perteneciente al perfil S3 o al M3 aguas arriba. Si el tirante y_2 es mayor que y_2' , el salto ocurre en el tramo de pendiente supercrítica (figura 5.8a), siendo el perfil $c'd'$ de la superficie del agua del tipo S1. Con ello se determina la distancia L entre las secciones c y c' igual a la longitud L_j del salto entre las secciones c y c' . El salto cc' empieza en la sección c de tirante y_1 sobre el perfil S3 y termina en la sección c' , donde el tirante y_2 del perfil S1 sea de igual magnitud que el conjugado mayor y_2' .

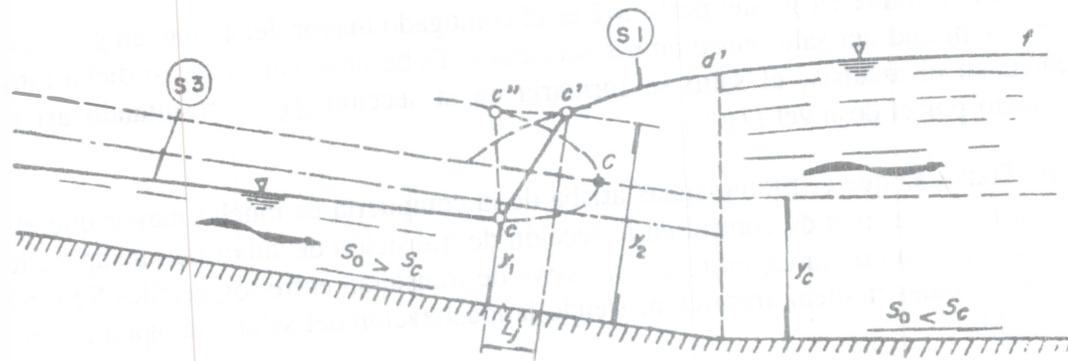
Si el tirante y_2 es menor que y_2' , el salto se ubica en el tramo de pendiente subcrítica y se localiza como en la figura 5.8b, con una explicación similar a la anterior.

Se deduce que la compuerta no sirve para controlar realmente el gasto que fluye en el canal; queda más bien definido por las condiciones en la sección a de entrada. La ley de descarga de la compuerta impone el tirante antes y después de ella de acuerdo con su abertura y el gasto admitido. El régimen después de la entrada es supercrítico (curva S2) independientemente de la presencia o no de la compuerta aguas abajo, esto es, la sección a es de control.

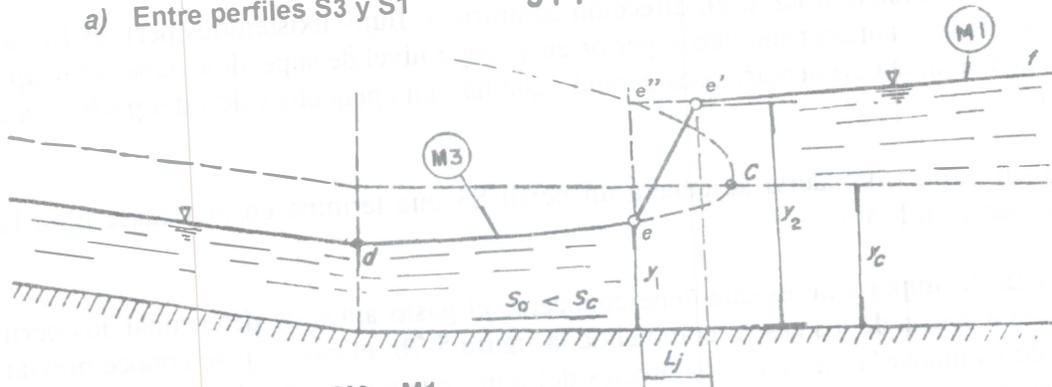
Sin embargo, si disminuyera la distancia entre la compuerta y la entrada, al grado que el salto hidráulico alcanzara la sección inicial (llegando incluso al ahogamiento), todo el flujo aguas arriba de la compuerta sería en régimen subcrítico y ella controlaría el gasto. En otras palabras, si se desea que la compuerta controle realmente el gasto en el canal, debe quedar en la sección a , o a una distancia corta aguas abajo.

Para terminar con los perfiles del flujo en el canal a , se procede al cálculo del perfil en régimen supercrítico hacia aguas abajo de la sección f' , donde se genera el perfil M3, el cual termina en la sección donde inicia el salto hidráulico. En efecto, al proceder con el cálculo hacia aguas arriba de la sección crítica i , se determina el perfil M2 (en régimen subcrítico). En la sección g ocurre el salto hidráulico que une los perfiles M2 y M3, y se localiza donde se satisface la igualdad de momentum en las secciones extremas, es decir, el salto ocurre cuando los tirantes conjugados, así como las características hidráulicas del flujo antes del salto, satisfacen a la ecuación 4.4a (adaptada a la forma de la sección), debiendo tomarse en cuenta la longitud de dicho salto.

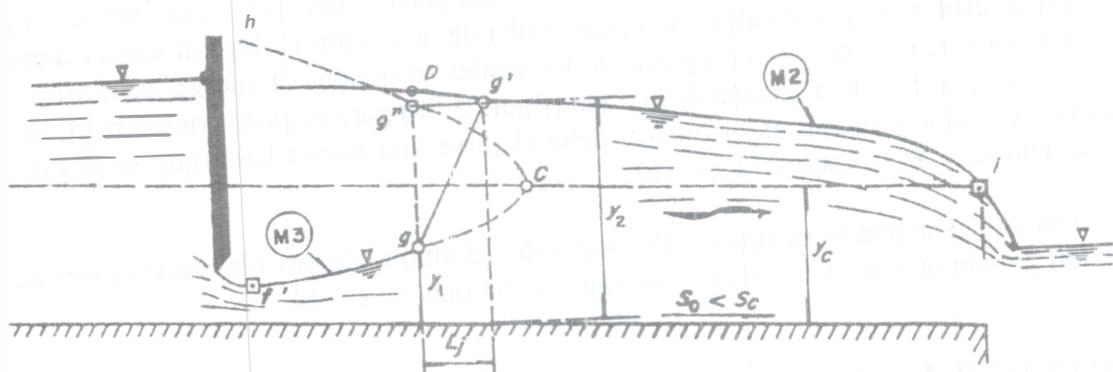
Para ello, la figura 5.8c presenta una ampliación de la región que se analiza en el canal a . La curva hC corresponde a la línea de los tirantes conjugados mayores calculados con la ecuación 4.6, correspondientes a los tirantes del perfil M3 de f' a C que figuran como conjugados menores. Con la posición de la sección g se puede estimar la longitud del salto. Para ello, se busca por tanteos la posición de una distancia igual a la longitud L_j del salto entre las secciones g a C y g'' a C . Por ejemplo, la distancia gg' es igual a la longitud del salto correspondiente al tirante y_2 en la curva hC . De este modo, el salto se forma de g a g'



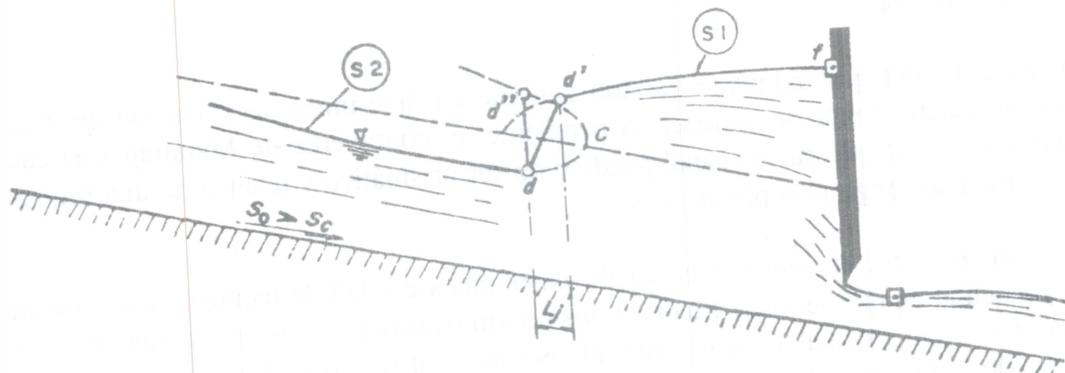
a) Entre perfiles S3 y S1



b) Entre perfiles M3 y M1



c) Entre perfiles M3 y M2



d) Entre perfiles S2 y S1

Figura 5.8. Localización del salto hidráulico en los canales de la figura 5.7.

debido a que el tirante en g' del perfil M2 es el conjugado mayor del tirante en g , y la distancia L_j mide la longitud del salto entre ambas secciones. Debe observarse que si dicha longitud no se incluye en el análisis, el salto se formaría en la sección gg'' , resultando así un error representado por el desnivel Dg'' .

Canal b. Toda vez que el tirante aguas arriba de la compuerta es mucho mayor que el crítico, se encuentra una sección de control en f , sección de transición de subcrítico a supercrítico. De este modo, un salto hidráulico entre d y d' sirve de transición entre los perfiles S2 y S1. En la figura 5.8d se muestra dicha transición, siendo la localización del salto análoga a la del caso en la figura 5.8b.

Procediendo al cálculo desde C en dirección contraria al flujo, existen dos perfiles M2 distintos que llegan hasta el almacenamiento superior en a , cuyo nivel de superficie debe ser el apropiado al gasto que se desea alimentar, considerando que hay una pequeña caída del perfil a la entrada del canal.

Aguas abajo de la compuerta se genera un perfil S3 que termina en una caída libre hacia el almacenamiento inferior.

Una conclusión importante es que debe conocerse el gasto antes de determinar los perfiles de flujo. En la mayoría de los casos, como el de la figura 5.7b, el gasto no se conoce previamente, pero puede estimarse a partir de los niveles del almacenamiento, pendientes, etc. Para ello se supone un cierto valor del gasto, se calculan y_n , y_c y los perfiles del flujo aguas arriba y aguas abajo de los controles. El perfil calculado aguas arriba de la sección C llega al almacenamiento con determinados valores de y y V , a partir de los cuales se obtiene la energía específica, que debiera ser la disponible en la sección de entrada (figura 5.7b) para el gasto considerado. Si esto no es cierto, el valor supuesto es erróneo y debe elegirse uno nuevo hasta que se llegue a la sección de entrada con la energía disponible.

El tratamiento antes expuesto es típico. Por supuesto, el ámbito de posibles condiciones de un canal es tan grande que no tiene objeto una explicación más detallada.

5.6 CÁLCULO DEL FLUJO EN CANALES PRISMÁTICOS

5.6.1 Planteamiento

El cálculo del flujo gradualmente variado consiste en determinar la variación del tirante a lo largo de un canal, donde se conocen la pendiente, el coeficiente de Manning y el caudal que conduce. En el caso general, el canal puede o no ser prismático y tener o no una rugosidad uniforme en toda su longitud o por tramos.

Para calcular el perfil del flujo en el canal, existe una variedad de técnicas, cada una adecuada al caso particular de que se trate. En éste y los próximos subcapítulos se exponen procedimientos de cálculo de tipo manual o adaptables al uso de computadora. Los que utilizan tablas de funciones de flujo gradualmente variado o los de tipo gráfico han caído en desuso. Los procedimientos actuales varían desde la aplicación reiterada de la ecuación de la energía a

distintos tramos del canal hasta la integración numérica de la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado. El lector debe analizarlos para decidirse por alguno en particular tomando en cuenta la herramienta de cálculo que disponga.

Cualquiera que sea la técnica elegida, el cálculo se inicia en alguna sección de control y continúa en la dirección contraria al flujo cuando éste es subcrítico, o en la misma dirección del flujo cuando es supercrítico. El cálculo termina en el otro extremo en alguna sección en que se debe satisfacer alguna condición particular (salto hidráulico, energía constante, etc.), o bien aproximarse asintóticamente al tirante normal de un flujo uniforme, en cuyo caso se debe establecer un criterio razonable de convergencia para evitar el resultado de longitud infinita.

En este subcapítulo se presenta el cálculo del flujo gradualmente variado en canales prismáticos de rugosidad uniforme en toda su longitud o por tramos. En los restantes subcapítulos se tratan los canales no prismáticos.

5.6.2 Métodos de solución

La ecuación 5.6 es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que describe la variación del tirante y (variable dependiente) con la distancia x (variable independiente) y que se integra en un canal de pendiente pequeña, rugosidad y gasto conocidos. Si también se conoce la geometría de la sección, las propiedades como el área hidráulica, el ancho de la superficie libre, etc., son función sólo de y , pero éste a su vez es función de x y el término a la derecha es realmente función de x y y ; es decir, dicho término se expresa en cualquiera de las formas:

$$\frac{S_0 - S_f}{1 - F^2} = \phi(x, y) \quad (5.10a)$$

$$\frac{1 - F^2}{S_0 - S_f} = f(x, y) \quad (5.10b)$$

La ecuación 5.6 se expresa también como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y) \quad (5.11a)$$

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y) \quad (5.11b)$$

La solución de la ecuación diferencial permite determinar el perfil del flujo a lo largo del canal mediante una función continua de x y y , pero se ha obtenido sólo para casos muy simplificados, ya que $\phi(x, y)$ o su recíproca son funciones no lineales. En cambio, el cálculo por tramos o por

métodos numéricos es factible en todos los casos pero proporciona el valor de y en localizaciones discretas.

El cálculo se inicia a partir de una sección ubicada a la distancia x_1 , donde se conoce el tirante y_1 . Para determinar las condiciones del flujo en otra sección 2 se sigue alguno de los procedimientos alternos siguientes: se calcula la distancia x_2 donde ocurre un tirante y_2 preestablecido, o bien el tirante y_2 que ocurre a la distancia x_2 preestablecida.

El primer procedimiento no es más general pero sí más expedito. Para seguirlo se utiliza la integral de la ecuación 5.11b donde f se puede describir como función sólo de y ; es decir

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy$$

Al aplicar los límites de integración resulta

$$x_2 = x_1 + \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy \quad (5.12)$$

de modo que x_2 se obtiene después de valuar el término integral entre y_1 y y_2 .

La integral de la ecuación 5.11a en el segundo procedimiento conduce de modo semejante a

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} \phi(x, y) dx \quad (5.13)$$

donde $\phi(x, y)$ se valúa por algún procedimiento semejante pero ahora entre x_1 y x_2 .

La valuación de la integral en la ecuación 5.12 siempre es posible por un procedimiento gráfico si se obtienen los valores de $f(y)$ para distintos de y y se dibuja la curva y contra $f(y)$, como se muestra en la figura 5.9. El valor de la integral es igual al área sombreada bajo la curva comprendida entre las abscisas y_1 y y_2 , la cual se determina por medios analíticos (regla de Simpson), mediante un planímetro o mediante una computadora.

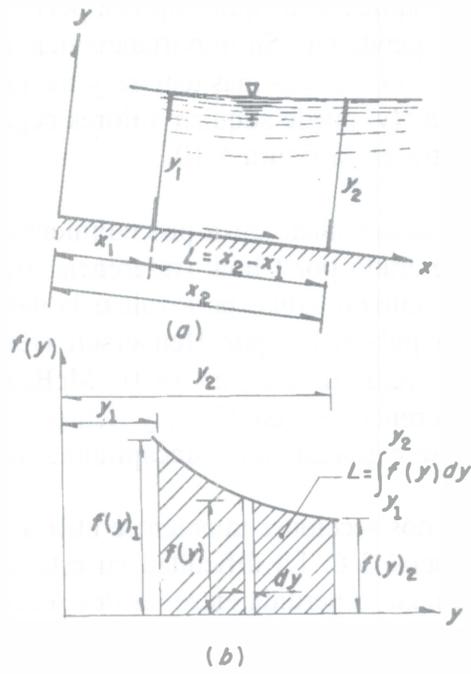


Figura 5.9. Integración de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado

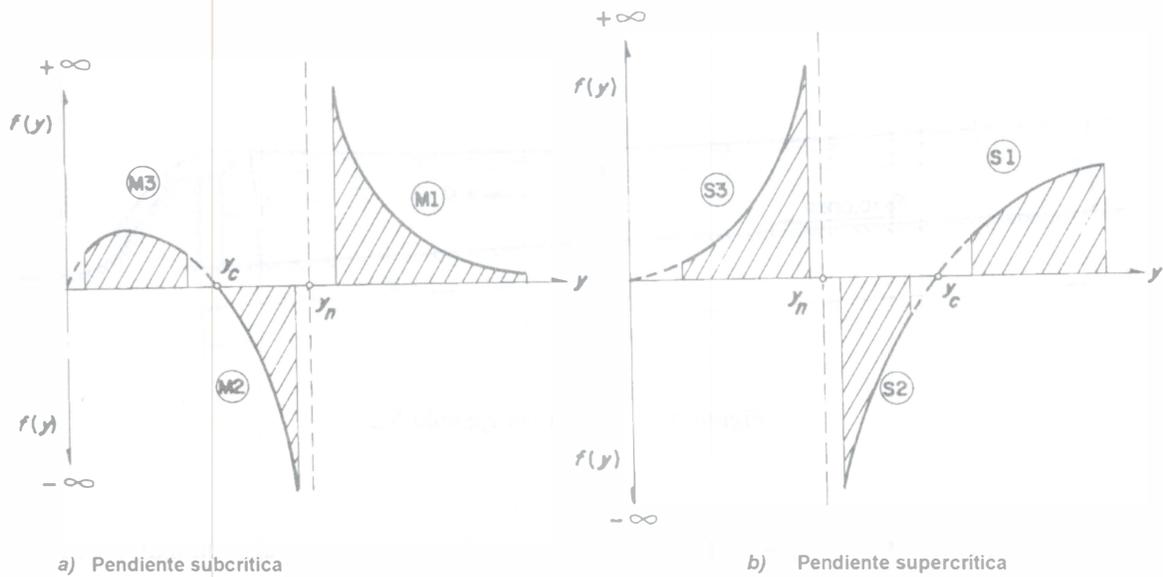


Figura 5.10 Curvas $y - f(y)$ para diferentes tipos de perfil

El método es fácil de seguir y se aplica a cualquier tipo de perfil de flujo en canales prismáticos de cualquier forma de sección y pendiente. Su importancia depende de la relativa facilidad con que se pueda calcular la función $f(y)$, pero es más tedioso y menos satisfactorio que los métodos numéricos por pasos. La función $f(y)$ puede adquirir valores negativos y distintas formas según el tipo de perfil, como se muestra en la figura 5.10.

Para valuar las integrales se han desarrollado otros procedimientos como el de Bakhmeteff (referencia 1), en 1932, que fue mejorado por Chow (referencia 3), en 1959 y por Kiefer y Chu (referencia 4), en 1955, quienes utilizan tablas para valuar la llamada función de flujo variado. Otros procedimientos han sido publicados por Henderson (referencia 2), en 1966; Eichert (referencia 5), en 1970; Prasad (referencia 6), en 1970; McBean y Perkins (referencia 7), en 1975; Chaudhry y Schulte (referencia 8), en 1985; y Schulte y Chaudhry (referencia 9), en 1987. Algunos procedimientos se exponen en el subcapítulo 5.10.

La ecuación de la energía entre dos secciones también se utiliza para calcular el perfil del flujo en lugar de la ecuación diferencial 5.6. La dificultad en este caso consiste en seleccionar la expresión adecuada para determinar la pérdida entre las dos secciones, pero una vez elegida, se resuelve una ecuación algebraica no lineal para localizar la sección donde ocurre un tirante preestablecido o para determinar el tirante que se presenta en una sección preestablecida. Esto se discute en las siguientes secciones.

Ejemplo 5.2. Un canal de sección trapezoidal, ancho de plantilla de 8 m y taludes 1.5:1, está excavado en tierra (coeficiente de Manning $n = 0.025$) con una pendiente de plantilla $S_0 = 0.0009$, y debe conducir un gasto de $15 \text{ m}^3/\text{s}$ (figura 5.11). Con objeto de dar carga sobre una serie de orificios laterales, se utiliza un cimacio vertedor con longitud de cresta $b = 12 \text{ m}$. La ley de gastos de vertido sobre el mismo es $Q = 2 b h^{3/2}$ (capítulo 7 volumen 1) y la altura de la cresta al fondo es $w = 1.77 \text{ m}$.

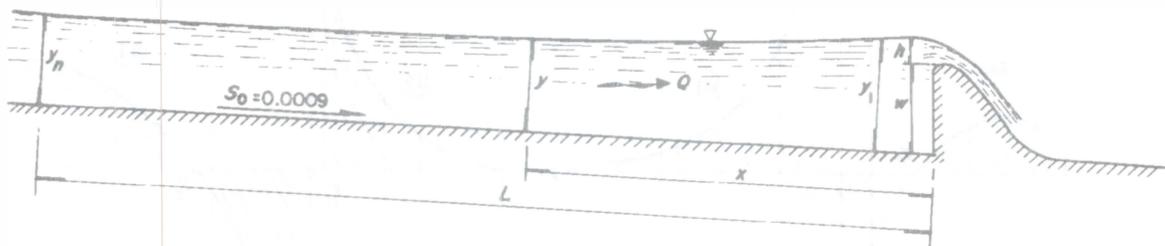


Figura 5.11. Canal del ejemplo 5.2

Determinar el perfil del flujo y su longitud, considerando que termina al alcanzar un tirante que sea 3 por ciento mayor que el normal. Considerar que $\alpha = 1$.

Solución. Antes de determinar el perfil del flujo se requieren algunos cálculos preliminares, como el del tirante normal y crítico. El primero resulta de 1.265 m, y puede verificarse como sigue. El área hidráulica, perímetro mojado y radio hidráulico son:

$$A = [8 + 1.5(1.265)]1.265 = 12.5203 \text{ m}^2$$

$$P = 8 + 2 \sqrt{1 + 2.25} 1.265 = 12.561 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{12.5203}{12.561} = 0.9968 \text{ m}$$

siendo el gasto

$$Q = \frac{12.5203}{0.025} (0.9968)^{2/3} (0.0009)^{1/2} = 14.992 \text{ m}^3/\text{s}$$

casi igual al que debe conducir el canal.

Tabla 5.2. Cálculo de la función $f(y)$ del ejemplo 5.2

y en m	A ($8+1.5y$) y en m^2	T ($8+3y$) en m	R_h en m	A/T en m	V en m/s	S_f (por 10^{-4})	F^2	$f(y)$
1.265	12.520	11.795	0.997	1.062	1.198	9.01	0.116	∞
1.30	12.935	11.900	1.019	1.087	1.160	8.191	0.106	11056
1.305	12.995	11.915	1.023	1.091	1.154	8.082	0.104	9758
1.31	13.054	11.930	1.026	1.094	1.149	7.974	0.103	8744
1.325	13.233	11.975	1.036	1.105	1.134	7.662	0.099	6734
1.35	13.534	12.050	1.052	1.123	1.108	7.178	0.093	4979
1.40	14.140	12.200	1.084	1.159	1.061	6.319	0.082	3424
1.50	15.375	12.500	1.147	1.23	0.976	4.956	0.065	2317
1.60	16.640	12.800	1.209	1.3	0.901	3.945	0.052	1876
1.70	17.935	13.100	1.269	1.369	0.836	3.181	0.042	1646
1.80	19.260	13.400	1.329	1.437	0.779	2.594	0.034	1507
1.90	20.615	13.700	1.388	1.505	0.728	2.137	0.028	1416
2.00	22.000	14.000	1.446	1.571	0.682	1.776	0.024	1351
2.10	23.415	14.300	1.504	1.637	0.641	1.489	0.02	1305
2.20	24.860	14.600	1.560	1.703	0.603	1.257	0.017	1270
2.30	26.335	14.900	1.616	1.767	0.570	1.069	0.014	1243
2.40	27.840	15.200	1.672	1.837	0.539	0.915	0.012	1222
2.50	29.375	15.500	1.727	1.895	0.511	0.786	0.011	1205

El tirante de magnitud 3 por ciento mayor que el normal es de 1.30 m. El tirante crítico resulta de 0.678 m, valor que se obtiene resolviendo la ecuación 3.5b.

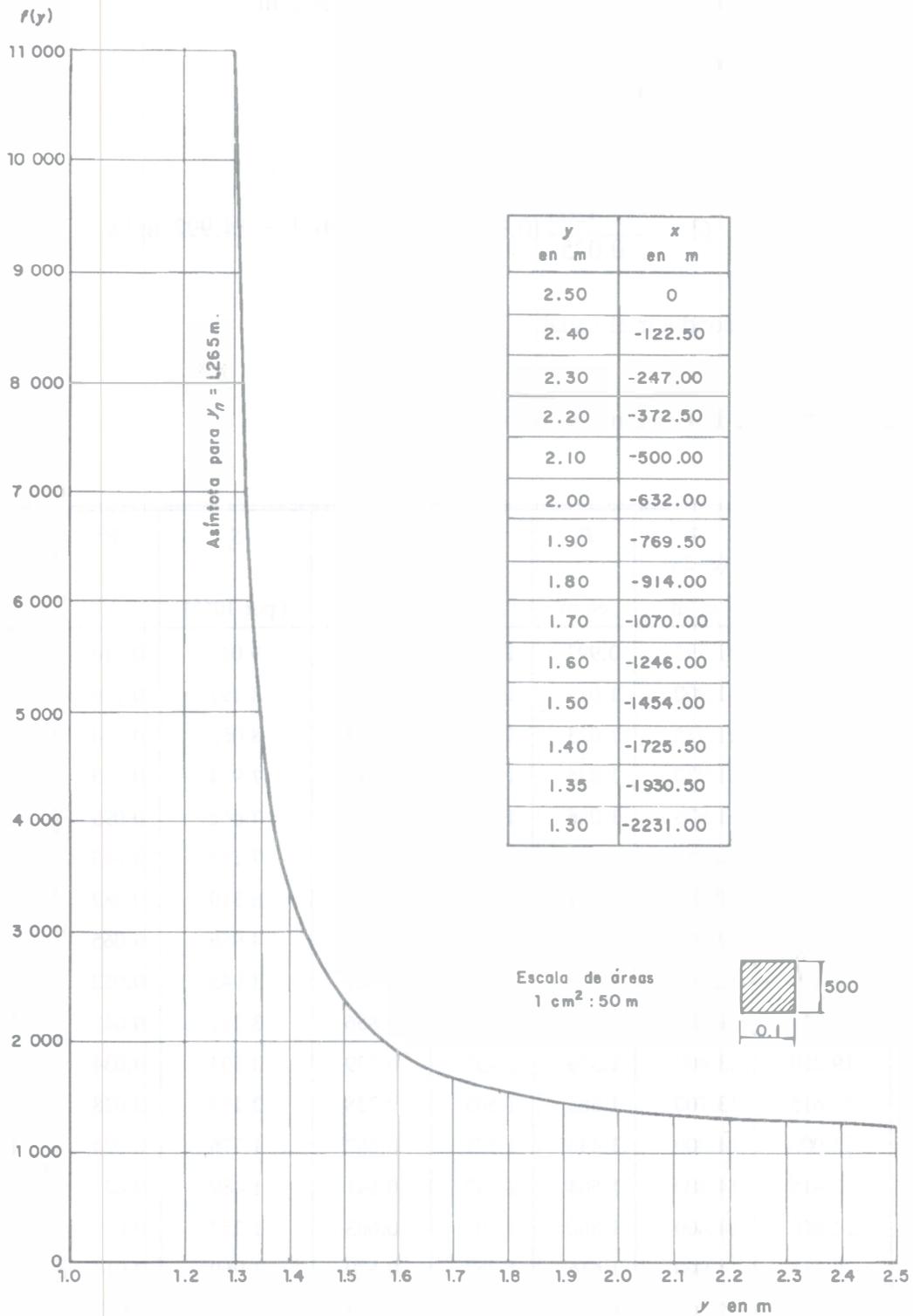


Figura 5.12 Curva $y - f(y)$ del ejemplo 5.2 y tabla de tirantes

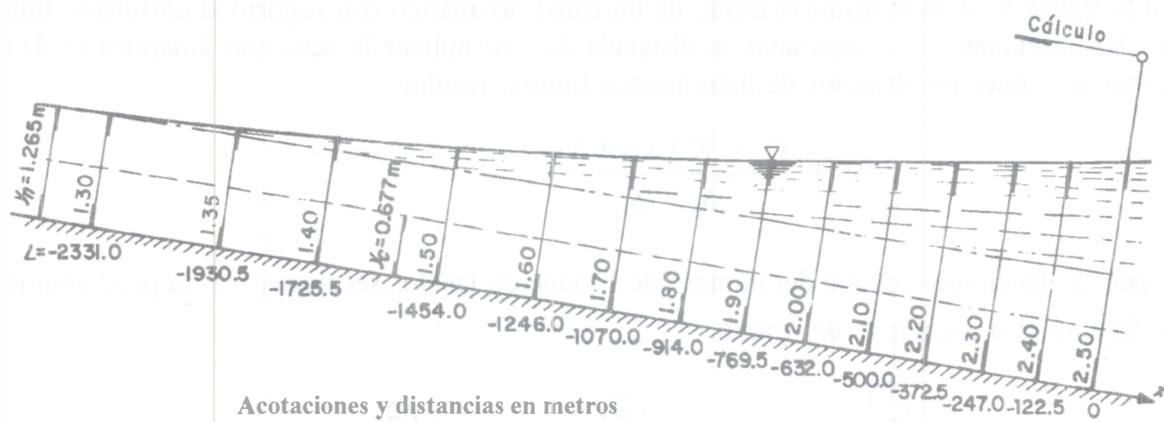


Figura 5.13. Perfil del flujo en el canal del ejemplo 5.2

Carga sobre la cresta. De acuerdo con la ley de vertido, la carga h sobre la cresta es

$$h = \left(\frac{Q}{2b} \right)^{2/3} = \left(\frac{15}{24} \right)^{2/3} = 0.731 \text{ m}$$

Por tanto, el tirante aguas arriba del vertedor es $y_1 = 1.77 + 0.73 = 2.50$ m. El perfil del flujo debe ser del tipo M1, con tirantes comprendidos en el intervalo $y > y_n > y_c$, y un tirante inicial $y_0 > y_n$, debiendo realizar el cálculo en dirección contraria al flujo.

Para obtener los valores de la función $f(y)$ a partir de la ecuación 5.10b, se utilizan tirantes mayores de $y_n = 1.265$ m con incrementos de 0.10 m, excepto los valores próximos a y_n para mejorar precisión, hasta el límite superior de 2.50 m. Los cálculos se resumen en la tabla 5.2.

En la figura 5.12 se presenta la curva $y - f(y)$, dibujada con los resultados de la tabla. Por medio de un planímetro se obtuvieron las áreas bajo la curva que dieron los valores de x (a la escala adecuada) para los diferentes tirantes, mismos que se presentan en la misma figura 5.12, ubicando el origen de x en el vertedor. En la figura 5.13 se muestra un esquema del perfil del flujo en la que los valores que aparecen debajo de la plantilla corresponden a x , como se acotan en la figura 5.11.

5.6.3 Método directo por pasos

El método es similar al de la solución de la ecuación 5.12 pero se utiliza la ecuación de energía aplicada entre dos secciones de un canal prismático de rugosidad uniforme y admite fácilmente el uso de computadora. Permite el cálculo directo de la distancia que separa dos secciones: una de tirante previamente calculado y la otra de tirante estimado dentro del intervalo en que varía. La distancia entre las dos secciones debe ser pequeña, de acuerdo con la longitud del tramo en que deba efectuarse el cálculo.

En la figura 5.14 se muestra el tramo de un canal prismático con rugosidad uniforme, limitado por las secciones 1 y 2 separadas la distancia Δx . Al aplicar la ecuación dinámica (5.5) entre ambas secciones en términos de incrementos finitos, resulta

$$\Delta x = \frac{(1 - \bar{F}^2) \cos \theta \Delta y}{S_0 - \bar{S}_f}$$

donde \bar{F} es el valor medio del número de Froude en las dos secciones y \bar{S}_f la pendiente media de fricción representativa del tramo.

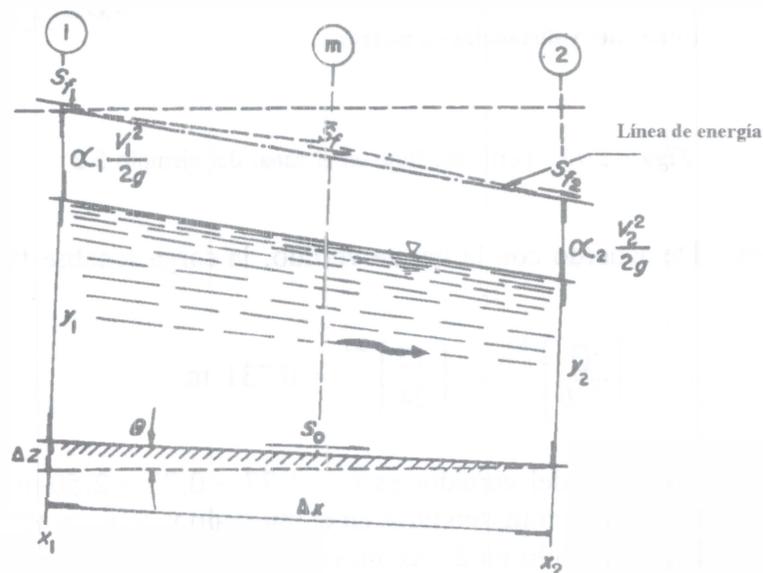


Figura 5.14. Tramo corto en un canal prismático

Si se sustituye $E_2 - E_1 = \Delta E = (1 - \bar{F}^2) \cos \theta \Delta y$ (según la ecuación 3.3) en la anterior, se obtiene

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - \bar{S}_f} \quad (5.14a)$$

donde la energía específica debe calcularse con la ecuación 3.1 en cada sección.

La ecuación 5.14a también se expresa en la forma

$$x_2 = x_1 + \frac{E_2 - E_1}{S_0 - \bar{S}_f} \quad (5.14b)$$

O bien, en la forma original de la ecuación dinámica

$$x_2 = x_1 + \frac{(1 - \bar{F}^2) \cos \theta}{S_0 - \bar{S}_f} (y_2 - y_1) \quad (5.14c)$$

que equivale a resolver la ecuación 5.5 en términos de diferencias finitas, donde \bar{F} es el número de Froude medio entre las dos secciones.

Existen distintas expresiones para seleccionar un valor representativo de la pendiente media de fricción en el tramo. Las que se presentan a continuación fueron empleadas por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército (referencia 10), en 1982.

Pendiente media aritmética

$$\bar{S}_f = \frac{1}{2} (S_{f1} + S_{f2}) \quad (5.15)$$

Pendiente media geométrica

$$\bar{S}_f = \sqrt{S_{f1} S_{f2}} \quad (5.16)$$

Pendiente media armónica

$$\bar{S}_f = \frac{2S_{f1} S_{f2}}{S_{f1} + S_{f2}} \quad (5.17)$$

Al expandir el término a la derecha de las ecuaciones precedentes mediante una serie de Taylor, se demuestra que las tres proporcionan resultados idénticos cuando se desprecian los términos del orden $(\Delta S_f / S_{f1})^2$ o mayores, donde $\Delta S_f = S_{f2} - S_{f1}$.

Laurenson (referencia 11), en 1986, demostró que la pendiente media de la ecuación 5.15 da el error máximo menor, si bien no siempre es el más pequeño de los tres. Además, si la distancia entre las secciones 1 y 2 es corta o los tirantes y_1 y y_2 no son muy diferentes, dicha ecuación es la más sencilla de las tres y la más recomendable ya que conduce a resultados satisfactorios.

La pendiente de fricción en cada sección se calcula mediante la ecuación de Manning, como sigue:

$$S_{f1} = \left[\frac{V_1 n}{R_{h1}^{2/3}} \right]^2 \quad (5.18)$$

$$S_{f2} = \left[\frac{V_2 n}{R_{h2}^{2/3}} \right]^2 \quad (5.19)$$

Conocido el tipo de perfil y la dirección en que se efectúa el cálculo, se conocen las características hidráulicas en alguna de las dos secciones: en la 1 si el cálculo es en la dirección del flujo, o en la 2 si es en la dirección opuesta. A partir de una sección de control de tirante conocido, se procede a seleccionar un tirante en la sección próxima, y con alguna de las ecuaciones 5.14 se calcula la distancia que las separa. El tirante que se utiliza en la sección cuya ubicación se desconoce debe ser cercano al conocido, principalmente en las zonas donde haya cambios importantes del perfil de flujo que se calcula, a fin de no perder precisión en el resultado, toda vez que el error se acumula en la distancia total que se maneja.

De este modo, se conoce la localización de la sección cuyo tirante se estimó, el cual pasa a ser el tirante conocido en el siguiente paso. Asimismo, el incremento o decremento sucesivo del tirante y el cálculo de la posición de la sección donde ocurre, permiten conocer el perfil del flujo en la longitud deseada del canal.

Una dificultad secundaria se presenta cuando S_f tiende a S_0 , debido a que la diferencia $S_0 - S_f$ resulta muy pequeña y Δx tiende a ∞ ; esto ocurre en la zona donde el perfil tiende asintóticamente al del flujo uniforme. Basta entonces utilizar un tirante que tenga una diferencia pequeña respecto del normal (es común el 1%) para dar por terminado el cálculo, evitando así la singularidad de un caso en donde un cálculo más refinado carece de interés en la práctica.

El procedimiento antes expuesto constituye la primera variante de un método propiamente de diferencias finitas, que tiene la ventaja de permitir el cálculo directo del perfil del flujo sin requerir de iteraciones. Sin embargo, es factible proceder por tanteos, cuando se necesita el tirante en secciones previamente elegidas o no se desea perder precisión en los cálculos al usar valores pequeños de Δx (constantes o variables según se desee), o también si ocurren cambios de rugosidad en el tramo.

En el último caso es más ventajoso el método estándar por pasos de programación en computadora más general (subcapítulo 5.7), aplicable a canales no prismáticos.

Ejemplo 5.3. Un canal trapecial tiene 5 m de ancho, talud 1:1, sin revestimiento y coeficiente de Manning $n = 0.025$ (figura 5.15). Con la pendiente $S_0 = 0.0004$ el flujo uniforme adopta un tirante normal de 1.75 m, pero a partir de cierta sección es necesario aumentar dicha pendiente a $S_0 = 0.17592 > S_c$ (ver ejemplo 4.3). *a)* Calcular la distancia l que debe revestirse de concreto ($n = 0.015$) en el canal aguas arriba, suponiendo que el material en que se excava resiste una velocidad hasta de 1.50 m/s. *b)* Determinar la distancia en la que se deja sentir la influencia del cambio de pendiente. *c)* Obtener la longitud que necesita el tramo 2 del canal aguas abajo del cambio de pendiente para establecer el tirante normal $y_n = 0.2135$ m, obtenido en la solución del ejemplo 4.3, para que el flujo al pie de la rápida llegue a las condiciones establecidas en la solución de dicho ejemplo. *d)* La longitud del tramo 3 se limita a 933.6 m, ya que por razones topográficas es necesario cambiar nuevamente su pendiente a una mayor que la crítica. Localizar la posición del salto hidráulico (figura 5.17). *e)* Definir las longitudes x_1 y x_2 de la zona que debe revestirse para la velocidad permisible que admite el material (figura 5.18).

Solución a. Para $y_n = 1.75$ m, el área hidráulica, perímetro mojado y radio hidráulico son: $A = 11.8125 \text{ m}^2$, $P = 9.9497 \text{ m}$ y $R_h = 1.1872 \text{ m}$. Asimismo la velocidad media y el gasto son: $V = 0.897 \text{ m/s}$, $Q = 10.5954 \text{ m}^3/\text{s}$, valores ya obtenidos en el ejemplo 4.3.

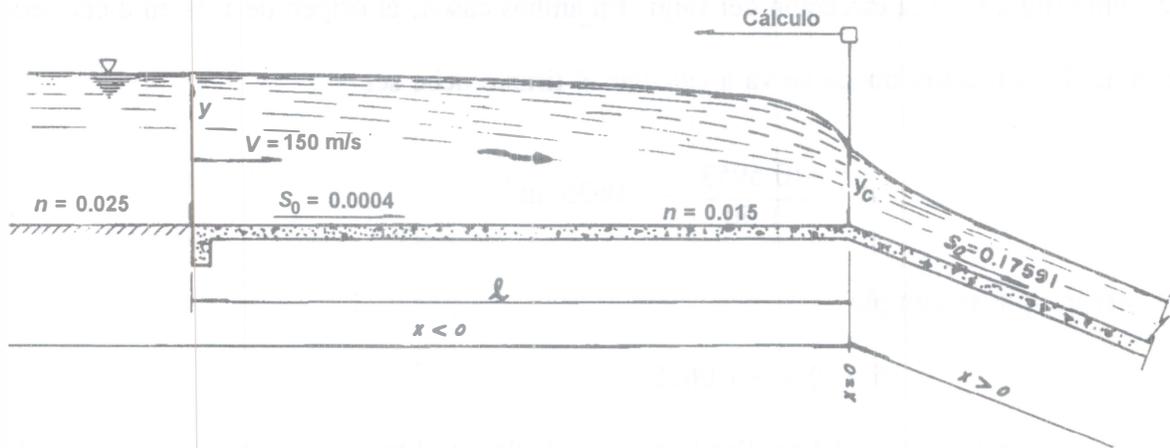


Figura 5.15. Esquema del canal en el ejemplo 5.3

Cálculo del tirante crítico. Siguiendo el procedimiento normal, resulta $y_c = 0.733$ m y la velocidad crítica

$$V_c = \frac{10.5954}{(5 + 0.733) 0.733} = 2.521 \text{ m/s}$$

Es necesario calcular la pendiente crítica para $n = 0.015$. Siendo el perímetro mojado $P_c = 5 + 2 \sqrt{2} 0.733 = 7.0732$ m y el radio hidráulico $R_{hc} = 4.2022/7.0732 = 0.594$ m, la pendiente crítica resulta

$$S_c = \left[\frac{2.521 (0.015)}{(0.594)^{2/3}} \right]^2 = 0.002864 > S_0$$

para el tramo revestido, y

$$S_c = \left[\frac{2.521 (0.025)}{(0.594)^{2/3}} \right]^2 = 0.007956 > S_0$$

para el tramo no revestido.

Se deduce que $y_n > y_c$ y $S_0 < S_c$ en el tramo 1 aguas arriba del cambio de pendiente, y $y_0 < y_c$, $S_0 > S_c$ en el tramo 2 aguas abajo, formándose el tirante crítico en dicho cambio. Por tanto, el perfil en el tramo 1 es del tipo M2 y el cálculo se inicia en la sección crítica, en

dirección contraria al flujo. El perfil en el tramo 2 es del tipo S2 y el cálculo se inicia desde la sección crítica y en la dirección del flujo. En ambos casos, el origen de x es en dicha sección.

El área de la sección donde se va a calcular el tirante debe ser

$$A = \frac{10.5953}{1.50} = 7.0635 \text{ m}^2$$

de manera que se cumple

$$(5 + y) y = 7.0635$$

de donde resulta $y = 1.149$ m. Por tanto, el cálculo en el tramo 1 se inicia con $y_c = 0.733$ m ($x = 0$) y termina al encontrar la distancia ℓ que separa la sección crítica de otra cuyo tirante es 1.149 m.

Mediante la ecuación 5.14a se encuentran los intervalos Δx que separan las secciones cuyos tirantes se preestablecen. Estos se pueden definir de un crecimiento lineal sencillo, con un incremento uniforme de magnitud.

$$\Delta y = \frac{1.149 - 0.733}{5} = 0.0832 \text{ m}$$

lo que da los tirantes: $y_c = 0.733$ m, $y = 0.816$, 0.8994 , 0.9826 , 1.0658 y 1.149 m. Sin embargo, debido a que la curvatura del perfil es mayor en la proximidad de la sección crítica, conviene que en dicha zona se elijan incrementos mayores para obtener distancias Δx no muy pequeñas.

Se proponen, por ejemplo, los siguientes tirantes $y_c = 0.733$ m, $y = 0.91$, 0.99 , 1.06 , 1.11 y 1.149 m.

A continuación se procede al cálculo de la distancia Δx que separa la sección 2, de tirante $y_c = 0.733$ m, y la sección 1 donde $y_1 = 0.91$ m. Los elementos geométricos e hidráulicos de cada una son como sigue:

Sección 2, $y_2 = 0.733$ m

$$A_2 = (5 + 0.733) 0.733 = 4.2023 \text{ m}^2$$

$$P_2 = 5 + 2 \sqrt{2} 0.733 = 7.0732 \text{ m}$$

$$R_{h2} = \frac{4.2023}{7.0732} = 0.594 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{10.5953}{4.2023} = 2.521 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0.324 \text{ m}$$

$$E_2 = 1.05734 \text{ m}$$

$$S_{f2} = \left[\frac{V_2 n}{R_{h2}^{2/3}} \right]^2 = \left[\frac{2.521 (0.015)}{(0.594)^{2/3}} \right]^2 = 0.0028638$$

Sección 1, $y_1 = 0.91 \text{ m}$

$$A_1 = (5 + 0.91) 0.91 = 5.3781 \text{ m}^2$$

$$P_1 = 5 + 2 \sqrt{2} 0.91 = 7.5739 \text{ m}$$

$$R_{h1} = \frac{5.3781}{7.5739} = 0.7101 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{10.5953}{5.3781} = 1.9701 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 0.1980 \text{ m}$$

$$E_1 = 1.1080 \text{ m}$$

$$S_{f1} = \left[\frac{1.9701 (0.015)}{(0.7101)^{2/3}} \right]^2 = 0.001378$$

La pendiente media de fricción tiene el valor

$$\bar{S}_f = \frac{0.0028638 + 0.001378}{2} = 0.002121$$

De la ecuación 5.14a, la distancia entre las dos secciones resulta

$$\Delta x = \frac{1.05734 - 1.1080}{0.0004 - 0.002121} = \frac{-0.05068}{-0.001721} = 29.45 \text{ m}$$

y la coordenada x_1 se obtiene de la ecuación: $x_1 = x_2 - \Delta x = -29.45 \text{ m}$.

Por un procedimiento semejante se calcula la distancia entre las secciones de tirante $y_1 = 0.99 \text{ m}$ y $y_2 = 0.91 \text{ m}$, en el tramo que sigue así como la correspondiente x_1 .

Los cálculos se resumen en la tabla 5.3 para el total de las secciones, donde los resultados muestran que debe revestirse una longitud $\ell = 383.1$ m.

En la figura 5.16 se presenta un esquema del perfil en el tramo revestido, de acuerdo con los resultados obtenidos.

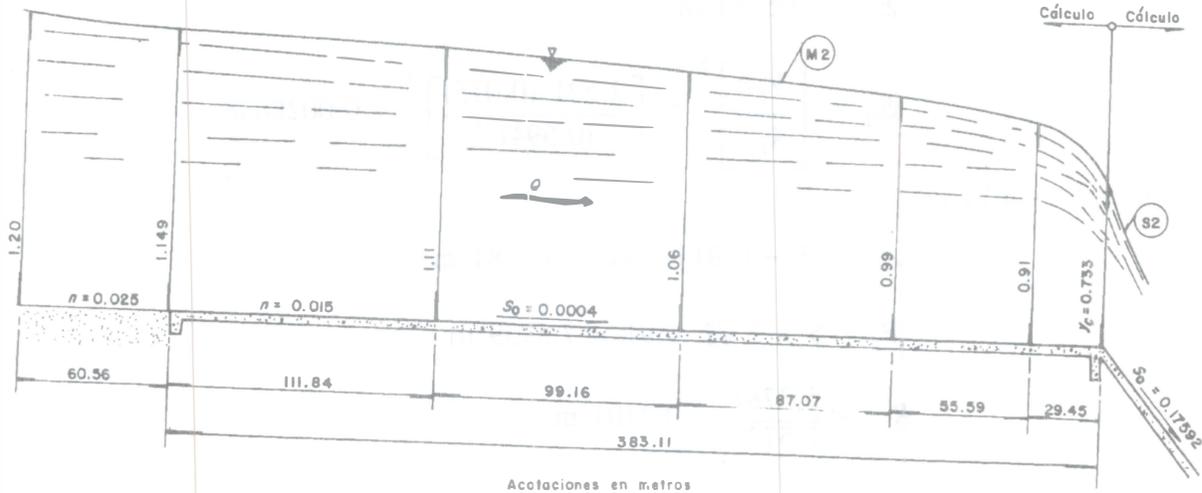


Figura 5.16 Perfil del flujo en el canal del ejemplo 5.3a

Solución b. Por un procedimiento similar, el cálculo continúa hacia el tramo no revestido, con la única diferencia de que n cambia a 0.025. En la tabla 5.4 se muestra la continuación de los cálculos hasta el último tirante de valor: $0.99 (1.75) = 1.73$ m, 1 % menor que el normal para efectos de convergencia. La distancia solicitada resulta $L = 3373.6$ m hacia aguas arriba del cambio de pendiente.

Solución c. Aguas abajo de la sección crítica se genera un perfil S2, toda vez que $S_0 > S_c$ y $y_n < y < y_c$. Para efectos de convergencia, el tirante final es 0.216 m, uno por ciento mayor que el normal ($y_n = 0.214$ m), de modo que el perfil se desarrolla entre los tirantes 0.733 m y 0.216 m. En la tabla 5.5 se muestra un resumen de los cálculos ahora en la dirección del flujo y con el mismo origen $x = 0$ en la sección crítica. Los valores de x se obtuvieron con la ecuación 5.14b. La longitud buscada es de 61.5 m, mucho menor que la del perfil M2 del inciso anterior.

Solución d. De acuerdo con los resultados del ejemplo 4.3, para que el salto se presente al inicio del tramo 3 debe haber un tirante conjugado mayor igual al normal de 1.75 m. Sin embargo, por la longitud impuesta al tramo, no se alcanza a producir dicho tirante lo que obliga a que el salto se mueva hacia aguas abajo. Puesto que el tramo 3 tiene igual pendiente que el 1, se forma el mismo perfil de flujo M2 con el origen $x = 0$ al final del tramo 3. Resulta la longitud revestida $x_4 = 383.1$ m, siendo el resto del perfil como en la tabla 5.4 pero limitado a la longitud impuesta. En la tabla 5.6 se presenta el cálculo de y para $x < -757.8$ m y secciones más próximas entre sí, hasta completar la distancia de 933.1 m, casi igual a la que tiene el tramo 3. Después se obtiene el tirante en la parte inicial del mismo (perfil M3) y se compara con los

conjugados mayores sobre el perfil M2, según el procedimiento expuesto en el subcapítulo 5.5 (figura 5.8c). El tirante del perfil M3 al inicio del tramo 3 es el normal al final del tramo 2 : $y = 0.214$ m, menor que el que se necesita para producir el salto hidráulico, y éste se mueve hacia aguas abajo.

Para localizarlo, se calcula en la tabla 5.6 el perfil del flujo M3 (para $n = 0.015$ en la parte inicial del tramo 3, que principia con el tirante $y_n = 0.214$ m del tramo 2, y corresponde a la curva $f'g$ de la figura 5.8c. Asimismo, mediante la ecuación 4.11 y con la ayuda de la figura 4.10, se calculan en la misma tabla conjugados mayores para cada uno de los tirantes de dicho perfil, así como las longitudes del salto correspondientes, éstas con ayuda de la ecuación de Sieñchin: $L_j = 10.6 (y_2 - y_1)$ (tabla 4.2).

En la figura 5.17 se presentan los perfiles de flujo obtenidos en las tablas 5.6 y 5.7 y de ella se deduce que a una distancia $x = -916.5$ m se presenta un tirante de 0.28 m en el perfil M3. Para dicho tirante existe un conjugado mayor de 1.503 m, con longitud del salto de 13 m. Esto es, el salto termina a una distancia $x = -916.5 + 13 = -903.5$ m, de manera que a la misma x debe existir un tirante de 1.503 m dentro del perfil M2 para que el salto ocurra. En efecto, en la tabla 5.6 se ve que el tirante de 1.503 m ocurre para $x = -903.5$ m.

Solución e. La longitud x_1 del revestimiento debe ser por lo menos de 30.1 m y la longitud x_2 , igual a l calculada en el inciso a, de 383.1 m, como se muestra en la figura 5.18.

Debe aclararse que estos resultados son válidos para el gasto usado en los cálculos. Con otro gasto, los resultados cambian y con ellos las longitudes por revestir.

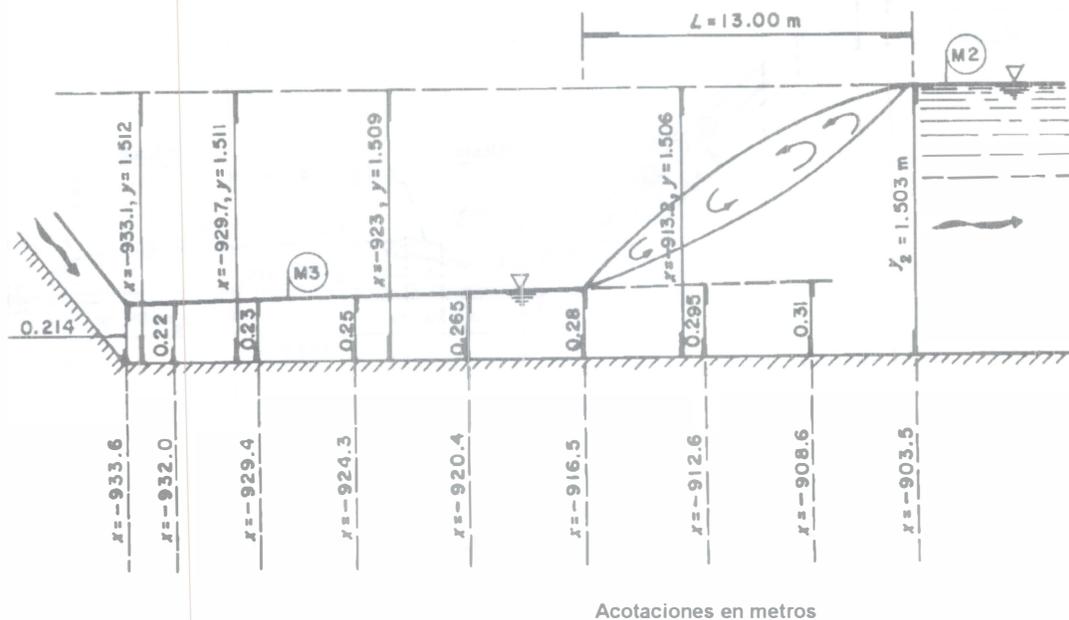


Figura 5.17. Localización del salto hidráulico en el tramo 3 del canal en el ejemplo 5.3d

Tabla 5.3. Cálculo de tirantes-distancias en el ejemplo 5.3a, con el método directo por pasos. Perfil M2 en el tramo 1 ($n = 0.015$)

y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f (por 10^{-3})	\bar{S}_f (por 10^{-3})	Δx en m	x en m
0.733	4.202	0.594	2.521	0.324	1.0573	2.864			0
0.91	5.378	0.710	1.970	0.198	1.1080	1.378	2.121	29.4	- 29.4
0.99	5.930	0.760	1.787	0.163	1.1529	1.035	1.207	55.6	- 85.0
1.06	6.424	0.803	1.649	0.139	1.1988	0.8200	0.9276	87.1	- 172.1
1.11	6.782	0.833	1.562	0.125	1.2345	0.7004	0.7602	99.2	- 271.3
1.149	7.065	0.856	1.500	0.115	1.2637	0.6222	0.6613	111.8	- 383.1

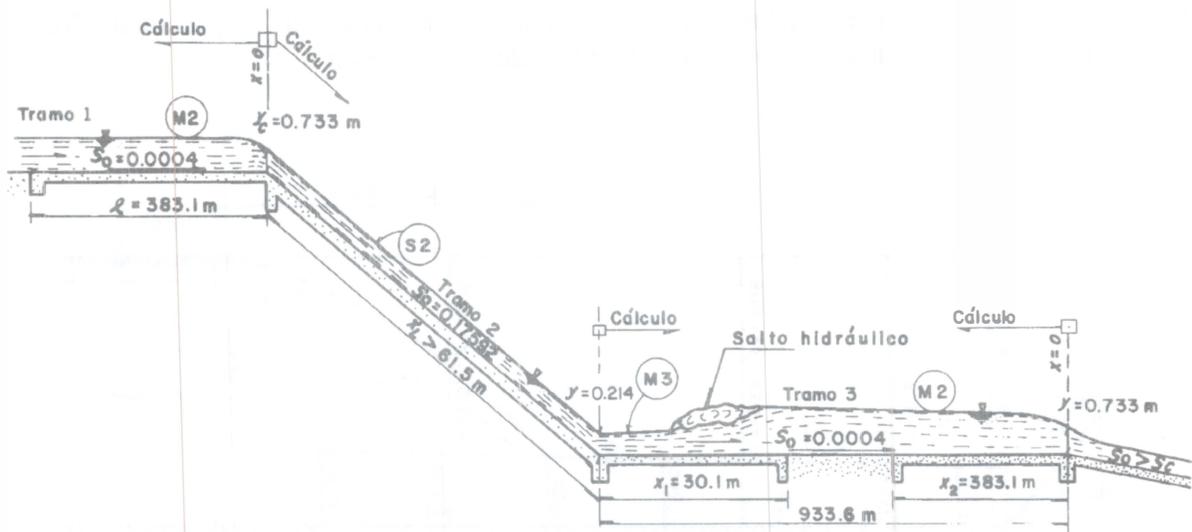


Figura 5.18. Esquema del canal en el ejemplo 5.3

Ejemplo 5.4. En el ejemplo 4.1 se calculó la pendiente de 0.0008 como la necesaria para formar el salto hidráulico al pie del cimacio mostrado en la figura 4.35. Determinar la posición del salto si dicha pendiente aumenta a 0.0009.

Tabla 5.4. Cálculo de tirantes-distancias en el ejemplo 5.3b, con el método directo por pasos. Perfil M2 en el tramo 1 ($n = 0.025$)

y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f (por 10^{-3})	\bar{S}_f (por 10^{-3})	Δx en m	x en m
1.149	7.065	0.856	1.500	0.115	1.2637	1.7289			- 383.1
1.20	7.440	0.886	1.424	0.103	1.3034	1.489	1.609	32.9	- 416.0
1.25	7.813	0.915	1.356	0.094	1.3437	1.294	1.391	40.7	- 456.7
1.30	8.190	0.944	1.294	0.085	1.3853	1.130	1.212	51.2	- 507.9
1.35	8.573	0.972	1.236	0.078	1.4279	0.991	1.061	64.5	- 572.4
1.40	8.960	1.000	1.183	0.071	1.4713	0.874	0.933	81.4	- 653.8
1.45	9.353	1.028	1.133	0.065	1.5154	0.774	0.824	104.0	- 757.8
1.50	9.750	1.055	1.087	0.060	1.5602	0.687	0.731	135.4	- 893.2
1.55	10.153	1.120	1.044	0.056	1.6055	0.585	0.636	192.0	- 1085.2
1.60	10.560	1.109	1.003	0.051	1.6513	0.548	0.567	274.3	- 1359.5
1.65	10.973	1.135	0.966	0.048	1.6975	0.492	0.520	385.0	- 1744.5
1.70	11.390	1.161	0.930	0.044	1.7441	0.443	0.468	685.3	- 2429.8
1.73	11.643	1.177	0.910	0.042	1.7722	0.417	0.430	943.8	- 3373.6

Solución. De acuerdo con el análisis de la sección 4.5.7, la nueva pendiente forma un salto libre que se inicia en alguna sección del perfil M3 formado después del cambio de pendiente. El tirante normal en el canal para la nueva pendiente es de 3.48 m, menor que el conjugado mayor que se forma si el salto es al pie del vertedor, por lo cual se mueve efectivamente hacia aguas abajo (figura 4.32c) hasta la sección en que se produce un tirante conjugado mayor igual al normal, esto es, $y_2 = y_n$. La velocidad, carga de velocidad, energía específica y número de Froude en dicha sección son:

$$V_2 = \frac{7.5}{3.48} = 2.155 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{(2.155)^2}{19.62} = 0.237 \text{ m}$$

Tabla 5.5. Cálculo de tirantes-distancias en el ejemplo 5.3c, con el método directo por pasos. Perfil S2 en el tramo 2 ($n = 0.015$)

y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f (por 10^{-3})	\bar{S}_f (por 10^{-3})	Δx en m	x en m
0.733	4.202	0.594	2.521	0.324	1.0573	2.864			0
0.60	3.360	0.502	3.153	0.507	1.1068	5.612	4.238	0.3	0.3
0.48	2.630	0.414	4.028	0.827	1.3070	11.841	8.727	1.2	1.5
0.37	1.987	0.329	5.333	1.449	1.8194	28.216	20.029	3.3	4.8
0.31	1.646	0.280	6.437	2.112	2.4216	50.864	39.540	4.4	9.2
0.28	1.478	0.255	7.167	2.618	2.8978	71.373	61.119	4.2	13.4
0.26	1.368	0.238	7.747	3.059	3.3192	91.333	81.353	4.5	17.9
0.245	1.285	0.226	8.245	3.465	3.7101	111.303	101.318	5.2	23.1
0.235	1.230	0.217	8.613	3.781	4.0157	127.853	119.578	5.4	28.5
0.23	1.203	0.213	8.808	3.954	4.1843	137.329	132.591	3.9	32.4
0.226	1.181	0.209	8.971	4.102	4.3278	145.582	141.456	4.2	36.6
0.223	1.165	0.207	9.097	4.218	4.4407	152.200	148.891	4.2	40.8
0.220	1.148	0.204	9.226	4.339	4.5585	159.213	155.707	5.8	46.6
0.218	1.138	0.203	9.314	4.422	4.6399	164.124	161.668	5.7	52.3
0.217	1.132	0.202	9.359	4.464	4.6814	166.653	165.389	3.9	56.2
0.216	1.127	0.201	9.404	4.508	4.7236	169.233	167.943	5.3	61.5

$$E_2 = 3.48 + 0.237 = 3.717 \text{ m}$$

$$F_2 = \frac{2.155}{\sqrt{9.81 (3.48)}} = 0.369$$

Aplicando la ecuación 4.9b, el tirante conjugado menor resulta

$$y_1' = \frac{3.48}{2} \left(\sqrt{1 + 8 (0.369)^2} - 1 \right) = 0.775 \text{ m}$$

Tabla 5.6. Cálculo de tirantes-distancias en el ejemplo 5.3d, ($n = 0.025$) con el método directo por pasos. Perfil M2 en el tramo 3

y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f (por 10^{-3})	\bar{S}_f (por 10^{-3})	Δx en m	x en m
1.45	9.353	1.028	1.133	0.066	1.5155	0.7736			- 757.8
1.49	9.670	1.050	1.096	0.061	1.5513	0.7035	0.7385	105.7	- 863.5
1.50	9.750	1.055	1.087	0.060	1.5603	0.6873	0.6954	30.5	- 894.0
1.503	9.774	1.057	1.084	0.060	1.5630	0.6825	0.6849	9.5	- 903.5
1.506	9.798	1.058	1.081	0.060	1.5657	0.6778	0.6802	9.7	- 913.2
1.509	9.822	1.060	1.079	0.059	1.5684	0.6731	0.6755	9.8	- 923.0
1.511	9.838	1.061	1.077	0.059	1.5702	0.6700	0.6716	6.7	- 929.7
1.512	9.846	1.061	1.076	0.059	1.5711	0.6685	0.6692	3.4	- 933.1

Nota. Los valores para $y = 1.149$ m hasta $y = 1.45$ m son los mismos de la tabla 5.4 y por eso no se presentan

La velocidad, carga de velocidad, energía específica y número de Froude, respectivamente, son:

$$V_1 = \frac{7.5}{0.775} = 9.683 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{(9.683)^2}{19.62} = 4.779 \text{ m}$$

$$E_1 = 0.775 + 4.779 = 5.554 \text{ m}$$

$$F_1 = \frac{9.683}{\sqrt{9.81 (0.775)}} = 3.512$$

De la figura 4.26 se obtiene $L_j/y_2 = 5.55$, es decir, la longitud del salto adquiere el valor

$$L_j = 5.55 (3.48) = 19.31 \text{ m}$$

La pérdida de energía que se produce en el salto es

$$\Delta E = 5.554 - 3.717 = 1.837 \text{ m}$$

Tabla 5.7. Cálculo de tirantes-distancias en el ejemplo 5.3d, ($n = 0.015$), así como los conjugados mayores correspondientes. Perfil del flujo M3 en el tramo 3

y	A	R_h	V	$\frac{V^2}{2g}$	E	S_f	\bar{S}_f	Δx	x	F_{M1}	t_1	y_2/y_1	y_2	L_j
en m	en m ²	en m	en m/s	en m	en m	(por 10 ⁻²)	(por 10 ⁻²)	en m	en m				en m	en m
0.214	1.113	0.199	9.519	4.623	4.8364	17.591	16.756	1.64	- 933.6	160.7	23.4	8.20	1.75	16.3
0.22	1.148	0.204	9.226	4.343	4.5629	15.921	14.827	2.53	- 932.0	149.1	22.7	7.82	1.721	15.9
0.23	1.203	0.213	8.808	3.958	4.1883	13.733	12.070	5.10	- 929.4	133.4	21.7	7.31	1.680	15.4
0.25	1.313	0.230	8.073	3.325	3.5748	10.406	9.489	3.89	- 924.3	108.3	20.0	6.42	1.604	14.4
0.265	1.395	0.243	7.594	2.942	3.2073	8.572	7.855	3.93	- 920.4	93.6	18.9	5.86	1.552	13.6
0.28	1.478	0.255	7.167	2.621	2.9005	7.137	6.568	3.95	- 916.5	81.6	17.9	5.37	1.503	13.0
0.295	1.562	0.268	6.783	2.347	2.6424	5.999	5.543	3.97	- 912.6	71.6	16.9	4.94	1.458	12.3
0.31	1.646	0.280	6.437	2.114	2.4238	5.086			- 908.6	63.3	16.1	4.56	1.415	11.7

Antes del salto se forma un perfil M3, siendo necesario calcular la distancia que separa la sección al pie del cimacio, de tirante $y_1 = 0.7225$ m (ejemplo 4.1), de aquella correspondiente al conjugado menor. En el ejemplo 4.1 se obtuvo que la energía al pie del cimacio es $E_1 = 6.215$ m, la velocidad $V_1 = 10.381$ m/s y el radio hidráulico

$$R_{h1} = \frac{15 (0.7225)}{15 + 2(0.7225)} = 0.659 \text{ m}$$

Para un coeficiente de Manning $n = 0.015$ en la zona revestida, la pendiente de fricción en dicha sección es

$$S_{f1} = \left[\frac{10.331 (0.015)}{(0.659)^{2/3}} \right]^2 = 0.04188$$

De manera análoga, para la sección de conjugado menor se tiene

$$R'_{h1} = \frac{15 (0.775)}{15 + 2 (0.775)} = 0.702 \text{ m}$$

$$S'_{f1} = \left[\frac{9.683 (0.015)}{(0.702)^{2/3}} \right]^2 = 0.03379$$

siendo la pendiente media

$$\bar{S}_f = \frac{0.04188 + 0.03379}{2} = 0.03783$$

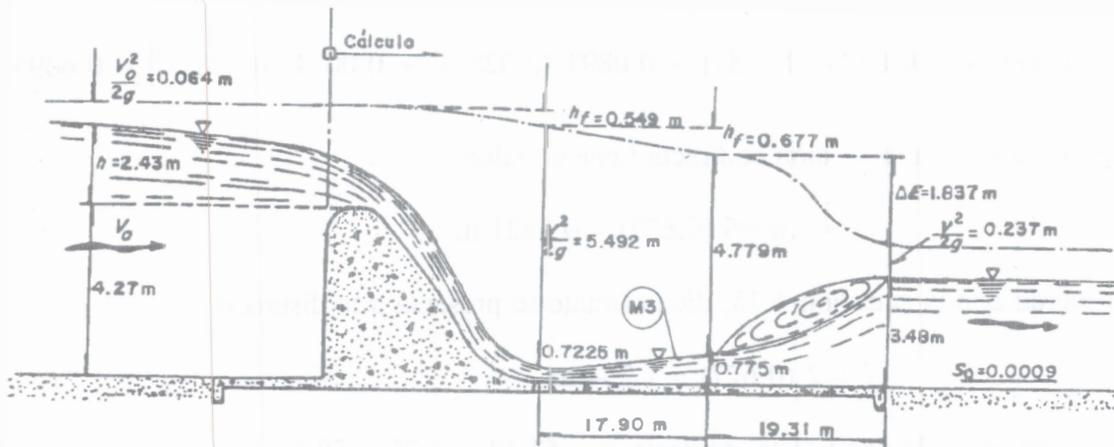


Figura 5.19. Perfil hidráulico en la estructura del ejemplo 5.4

Aplicando la ecuación 5.14a, la distancia entre las dos secciones es

$$\Delta x = \frac{5.554 - 6.215}{0.0009 - 0.03783} = 17.90 \text{ m}$$

En la figura 5.19 se presenta un esquema del perfil del flujo resultante. Se observa que aun cuando el cambio de pendiente en el canal fue pequeño, hay un movimiento apreciable del salto hacia aguas abajo.

Ejemplo 5.5. En la obra de toma, cuya geometría se muestra en la figura 5.20a, las extracciones desde la presa se controlan mediante dos compuertas de servicio, que obturan dos orificios de 1 m de ancho cada uno dentro del intervalo de niveles de embalse mostrados. La abertura de las compuertas es $a = 0.627$ m y la sección en el plano de las mismas tiene la forma indicada en la figura 5.20b. El túnel es circular de 2.50 m de diámetro y revestido de concreto (coeficiente de Manning $n = 0.015$). El valor de x coincide con el de la estación indicada en la figura. Suponiendo despreciable la pérdida de energía en la rejilla y descarga libre hacia el túnel, calcular el perfil del flujo que se establece en su interior para el nivel máximo en el embalse, considerando que $\alpha = 1$.

Solución. Es necesario calcular el gasto descargado por las compuertas. La carga con que operan es $y_0 = 83.11 - 62.75 = 20.36$ m y la relación entre dicha carga y la abertura es $y_0/a = 20.36/0.627 = 32.5$. De la figura correspondiente en el volumen 1, el coeficiente de descarga es asintótico al valor $C_d = 0.60$. De la ecuación 4.71, el gasto descargado por las dos compuertas resulta

$$Q = 0.6 (2) (0.627) \sqrt{2 (9.81) (20.36)} = 15.037 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación 4.73, con $a/y_0 = 0.0281$, el coeficiente de contracción resulta

$$C_c = 0.611 [1 - 0.0895 (0.0281) + 0.0893 (0.0281)^2 + 0.0074 (0.0281)^3] = 0.6095$$

Luego el tirante en la sección contracta tiene el valor

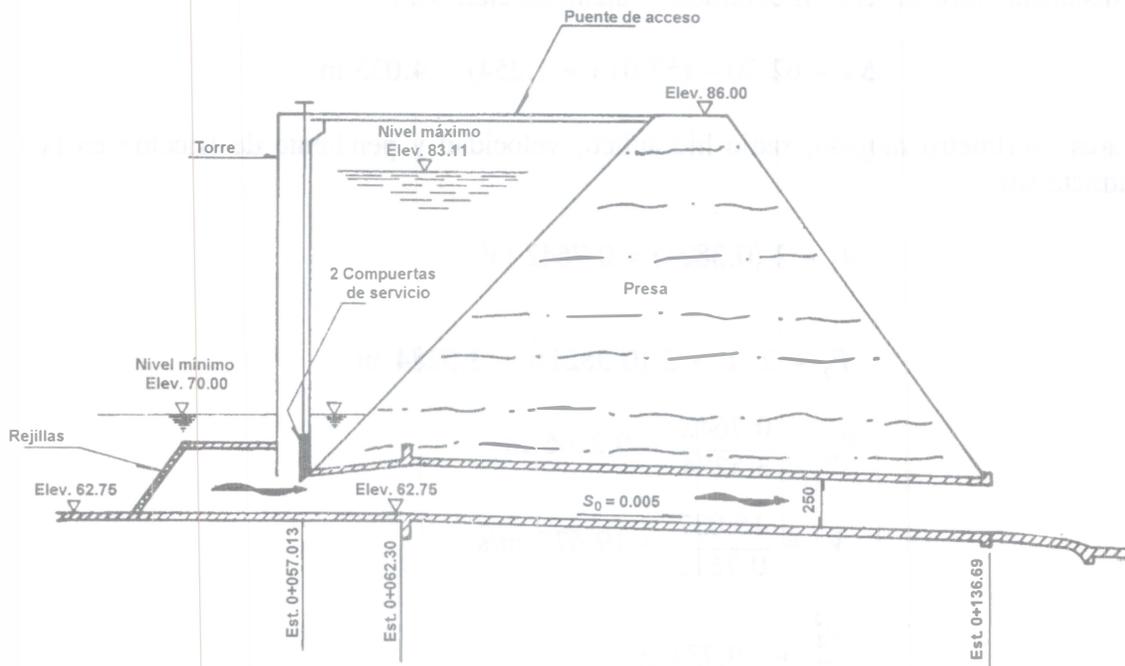
$$y_2 = 0.6095 (0.627) = 0.3821 \text{ m}$$

De acuerdo con la ecuación 4.75, dicho tirante se presenta a la distancia

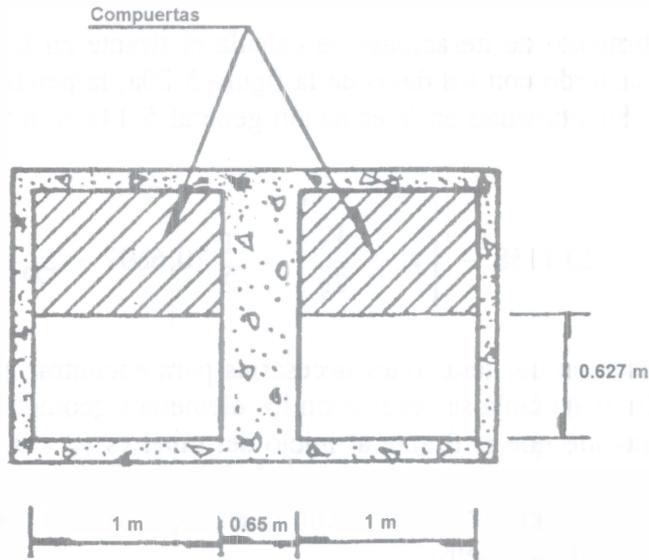
$$\ell = 2 (0.627) = 1.254 \text{ m}$$

desde el plano de la compuerta, es decir, $x = 57.13 + 1.25 = 58.38$ m.

De la ecuación 5.14b se determina el tirante en la estación $x = 62.30$ m (sección que se designa por 3), en que se inicia el túnel.



a) Corte longitudinal



b) Sección en el plano de compuertas

Figura 5.20. Obra de toma del ejemplo 5.5

La distancia entre la sección contracta y dicha sección 3 es

$$\Delta x = 62.30 - (57.013 + 1.254) = 4.033 \text{ m}$$

El área, perímetro mojado, radio hidráulico, velocidad y pendiente de fricción en la sección contracta son:

$$A_2 = 2 (0.3821) = 0.7642 \text{ m}^2$$

$$P_2 = 2 [1 + 2 (0.3821)] = 3.5284 \text{ m}$$

$$R_{h2} = \frac{0.7642}{3.5284} = 0.2166 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{15.037}{0.7642} = 19.677 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 19.734 \text{ m}$$

$$E_2 = 0.3821 + 19.734 = 20.1158 \text{ m}$$

$$S_{f2} = \left[\frac{19.677 (0.015)}{(0.2166)^{2/3}} \right]^2 = 0.6697$$

Mediante un procedimiento de iteraciones se calcula el tirante en la sección $x = 62.30 \text{ m}$ (de forma circular). De acuerdo con los datos de la figura 5.20a, la pendiente del piso entre las dos secciones es $S_0 = 0$. Sustituyendo en la ecuación general 5.14a resulta

$$20.1158 - \left[y_3 + \frac{V_3^2}{2g} \right] = \frac{1}{2} (0.6697 + S_{f3}) 4.033$$

En la tabla 5.8 se resumen las iteraciones necesarias para encontrar el tirante y_3 que verifica la ecuación anterior. En dicha tabla se obtuvieron los elementos geométricos de la sección circular de la tabla 2.8, resultando que el tirante al inicio del túnel es $y_3 = 0.555 \text{ m}$.

Es necesario calcular el tirante crítico en dicho túnel, siguiendo el procedimiento ya conocido. Para ello, se determina el parámetro

$$\frac{Q}{\sqrt{g} D^{5/2}} = \frac{15.03}{\sqrt{9.81} (2.5)^{5/2}} = 0.4858$$

Con este valor, de la figura 3.12 resulta $y_c/D = 0.712$; por tanto, $y_c = 1.78$ m. Para $y_c/D = 0.712$, de la tabla 2.8 se obtiene que: $A_c = 3.7388$ m², $R_{hc} = 0.7438$ m, $V_c = 15.03/3.7388 = 4.0201$ m/s. Por tanto, la pendiente crítica resulta

$$S_c = \left(\frac{4.0201 (0.015)}{(0.7438)^{2/3}} \right)^2 = 0.005396$$

Debido a que $S_c > 0.005$, el perfil del flujo es del tipo M3 y el cálculo se realiza en la dirección del flujo.

El perfil del flujo dentro del túnel se calcula utilizando la ecuación 5.14a. En la tabla 5.9 (similar a la 5.7) se resumen los cálculos. La primera y segunda columna muestran los tirantes que se preestablecen; las dos últimas presentan la distancia que separa las secciones y la x de cada una calculada con la ecuación 5.14b.

De acuerdo con estos resultados, en la figura 5.21 se muestra un esquema del perfil del flujo donde se muestra también la línea de energía (LE), que señala el nivel total de energía a lo largo del túnel, de acuerdo con los valores E de la tabla 5.9.

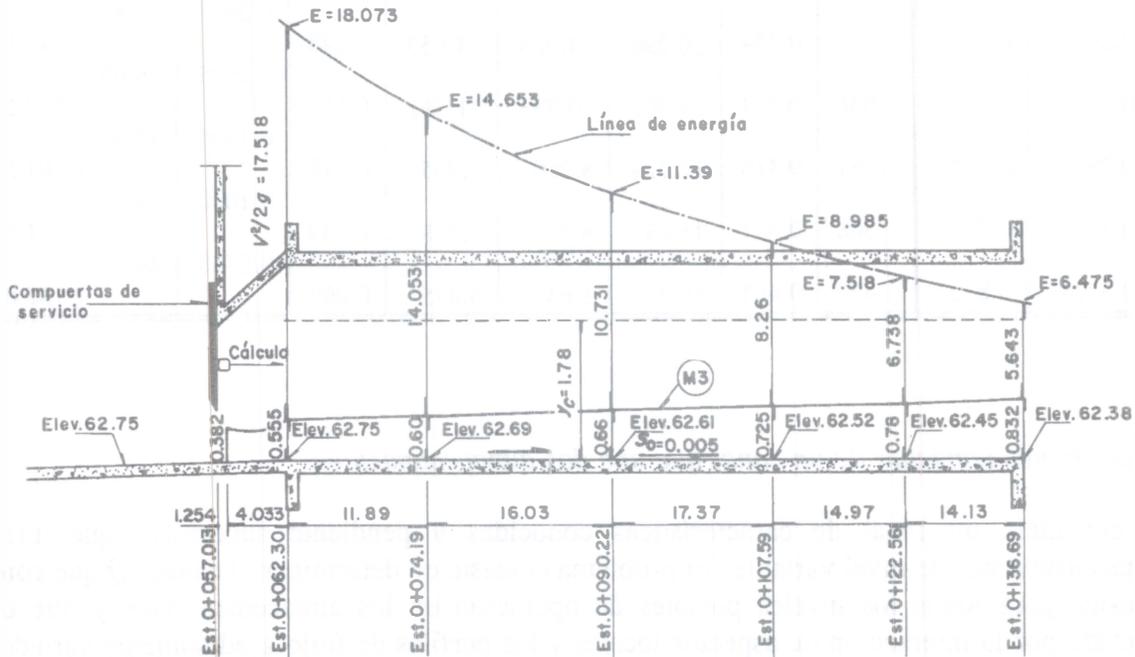


Figura 5.21. Perfil del flujo y línea de energía dentro del túnel en el ejemplo 5.5

Tabla 5.8. Cálculo por iteraciones para determinar y_3 en el ejemplo 5.5

y_3 en m	$\frac{y_3}{D}$	A_3 en m ²	R_{h3} en m	V_3 en m/s	$\frac{V_3^2}{2g}$ en m	E_3 en m	$(E_2 - E_3)$ en m	S_{f3}	$\bar{S}_f \Delta x$ en m
0.5	0.2	0.699	0.302	21.508	23.602	24.1024	-3.9864	0.5149	2.3887
0.55	0.22	0.801	0.328	18.773	17.981	18.5306	1.5854	0.3506	2.0574
0.5525	0.221	0.806	0.329	18.651	17.747	18.2996	1.8164	0.3441	2.0443
0.555	0.222	0.811	0.331	18.530	17.518	18.0731	2.0429	0.3379	2.0318
							2.0429 =	2.0318	

Tabla 5.9. Cálculo del perfil de flujo M3 en el túnel del ejemplo 5.5

$\frac{y}{D}$	y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f	\bar{S}_f	Δx en m	x en m
0.222	0.555	0.811	--	--	--	18.073	0.338			62.30
								0.2927	11.89	
0.24	0.60	0.906	0.354	16.596	14.053	14.653	0.248	0.2085	16.03	74.19
0.264	0.66	1.036	0.384	14.503	10.731	11.391	0.170	0.1435	17.37	90.22
0.29	0.725	1.181	0.416	12.724	8.260	8.985	0.118	0.1030	14.97	107.59
0.312	0.78	1.308	0.441	11.492	6.738	7.518	0.089	0.0788	14.13	122.56
0.3328	0.832	1.429	0.465	10.517	5.643	6.475	0.069			136.69

5.6.4 Funcionamiento de un canal que une dos almacenamientos

Se considera un canal de características conocidas y pendiente subcrítica, que une dos almacenamientos de nivel variable. El problema consiste en determinar el caudal Q que conduce el canal para todos los niveles posibles de operación en los almacenamientos y que queda afectado por la interacción de aspectos locales y los perfiles de flujo gradualmente variado que se generan. En cualquier caso, el comportamiento del flujo en el canal depende esencialmente de tres variables: el nivel del agua a la entrada, el nivel del agua en la salida y el gasto que conduce.

La figura 5.22a muestra el caso donde el nivel h_1 del almacenamiento superior es constante y el h_2 del inferior adquiere diferentes posiciones. El análisis se enfoca a obtener la variación que

experimente Q al cambiar h_2 , y para ello es necesario tener en mente lo indicado en el subcapítulo 5.4 y en el ejemplo 5.1 para el funcionamiento a la entrada y salida de un canal.

Desde el nivel $h_2 = S_0 L + h_1$ del almacenamiento superior, hasta $h_2 = y_n$ correspondiente a flujo uniforme en el canal, el gasto crece desde cero hasta el gasto normal Q_n para el flujo uniforme, figura 5.22b. Mientras esto ocurre, se desarrollan perfiles M1 que pueden calcularse para cada valor de h_2 , eligiendo valores de tanteo de Q hasta determinar aquel para el que el valor h_1 se encuentra a la distancia L .

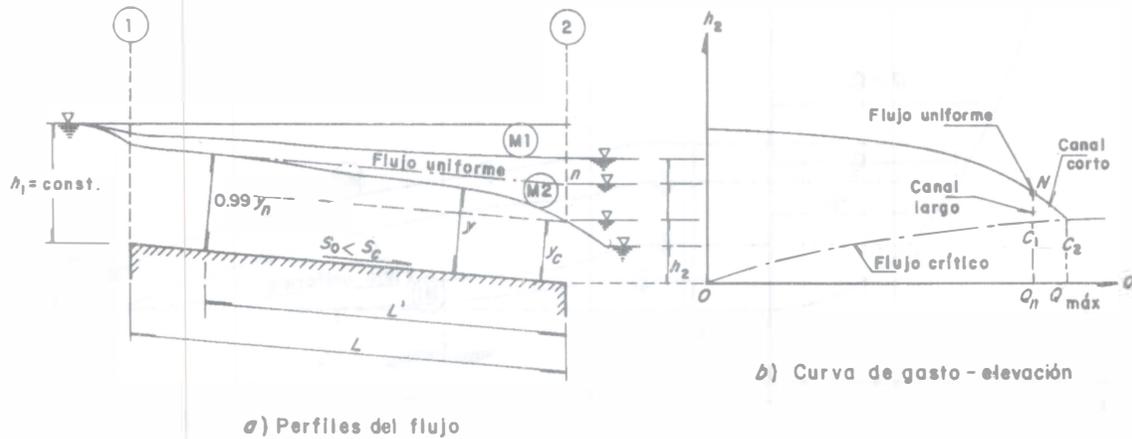


Figura 5.22. Canal que une dos almacenamientos. Nivel superior constante

Al disminuir h_2 por debajo del nivel de flujo uniforme, se inicia la formación de perfiles M2, que se mantienen hasta que h_2 alcanza el nivel del tirante crítico en la sección de salida del canal. El cálculo de Q se hace de la misma manera que antes, pero ahora con el perfil M2. El comportamiento de Q depende de que la longitud L' de dicho perfil pueda desarrollarse total o parcialmente a lo largo del canal. Si éste es de gran longitud ($L > L'$), el perfil M2 se desarrolla totalmente y por tanto no se alteran las condiciones en la entrada ni la magnitud del gasto Q_n . Esto implica moverse a lo largo de la línea NC_1 en la figura 5.22b. Si el canal es corto, ocurre lo contrario y Q excede a Q_n , incrementándose según la línea NC_2 hasta el valor Q_M .

Los puntos C_1 C_2 representan el tirante crítico en el extremo del canal para los dos gastos antes citados y quedan sobre la curva que tiene la ecuación de estado crítico: $Q = \sqrt{g} A_c^{3/2} / \sqrt{T_c}$. Si h_2 disminuye por debajo de C_1 o C_2 , el gasto conserva el valor máximo, Q_n o Q_M , y en la medida que el canal se acorta, Q_M tiende hacia el valor de Q_n que, para fines prácticos, puede considerarse la descarga máxima. Si el canal es demasiado corto, el control se mueve hacia la sección de entrada y el crítico se forma en alguna sección intermedia, como en la figura 3.13.

Se estudia ahora el caso donde el nivel h_2 permanece constante y h_1 cambia en el almacenamiento superior, figura 5.23. Desde el nivel $h_1 = h_2 - S_0 L$ igual al del almacenamiento inferior, hasta

$h_1 = y_n + V_n^2/2g + h_e$ (correspondiente al flujo uniforme), el gasto crece desde cero hasta el normal Q_n . Para esto se generan perfiles de flujo tipo M1 que pueden calcularse hasta el valor de h_1 con gastos comprendidos en el intervalo $0 < Q < Q_n$, a partir de $h_2 = \text{constante}$.

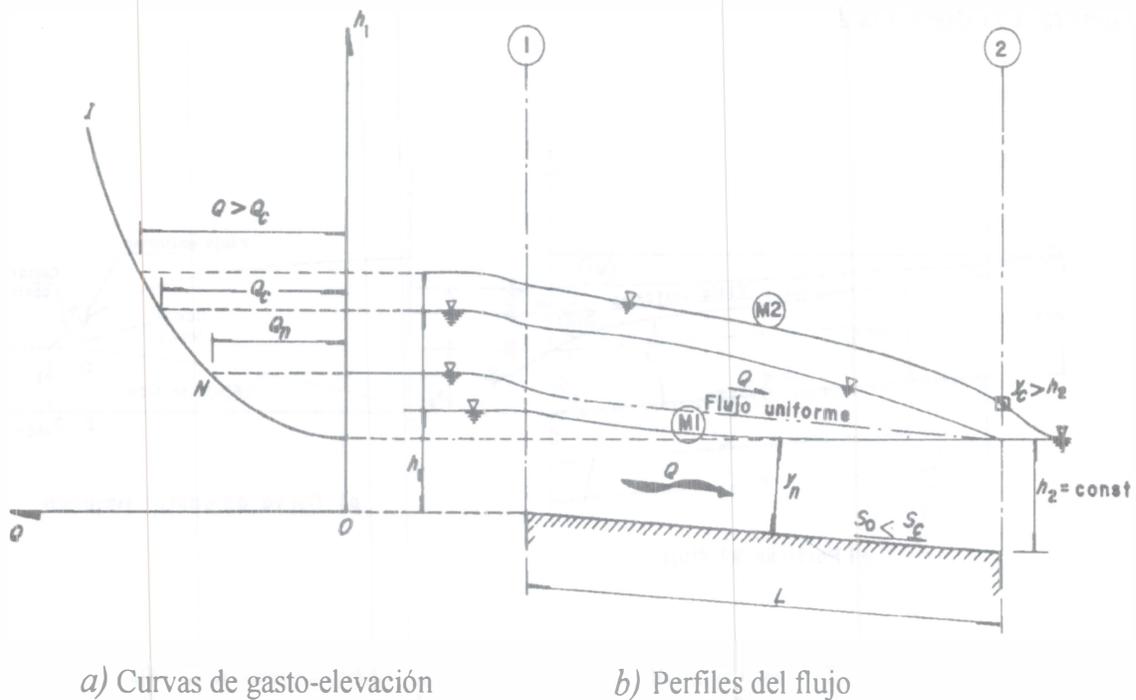


Figura 5.23. Canal que une dos almacenamientos. Nivel inferior constante

Para niveles h_1 mayores, se producen perfiles M2 cuya secuela de cálculo es igual que la anterior, con caudales $Q > Q_n$ hasta el valor Q_c . Este corresponde al nivel h_1 que resulta cuando $h_2 = \text{constante}$ sea igual al crítico en la sección final del canal. Cualquier gasto superior a Q_c formaría su propio tirante crítico al final del canal $y_2 = y_c > h_2$ y h_1 se determinaría con la misma secuela de cálculo, partiendo de y_2 .

La mejor manera de presentar los resultados de los dos casos anteriores, para que sirvan como base en los cálculos del caudal, es a través de curvas de Q constante sobre un plano h_1 contra h_2 , como se muestran en la figura 5.24. Aquí se considera sólo el caso en que el nivel h_1 del almacenamiento superior excede el nivel h_2 del inferior. De esta manera, todas las curvas quedan a la izquierda de la recta AB sobre el plano h_1 contra h_2 , a la distancia $S_0 L$. Las curvas Q se vuelven asintóticas a esta recta, lo que corresponde a la situación en que los niveles h_1 y h_2 son muy altos y tienden al mismo valor absoluto.

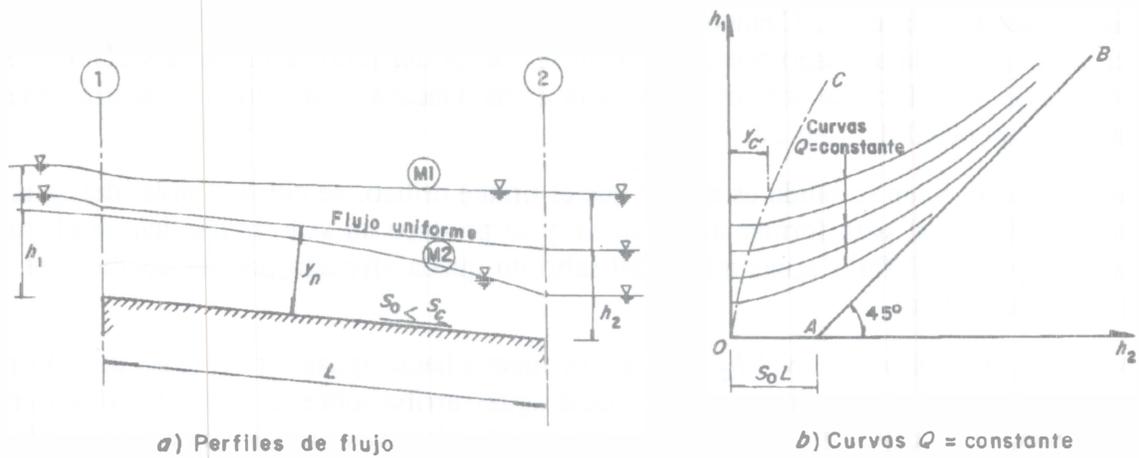


Figura 5.24. Canal que une dos almacenamientos de niveles variables, con gasto constante

La curva OC representa la condición de régimen crítico en la sección 2 del canal. Las curvas Q a la izquierda de esta línea se convierten en rectas paralelas al eje h_2 , como se encontró en la discusión de la figura 5.22b para el caso de canal largo.

Cuando la pendiente del canal es supercrítica el régimen del flujo es supercrítico, figura 5.25. En la práctica, los canales con dicha pendiente son usualmente cortos, como las rápidas usadas en vertedores y caídas. Si el canal es demasiado inclinado al grado que se desarrolla un flujo ultrarrápido, éste no llega a ser permanente y por tanto, no es objeto del tratamiento planteado.

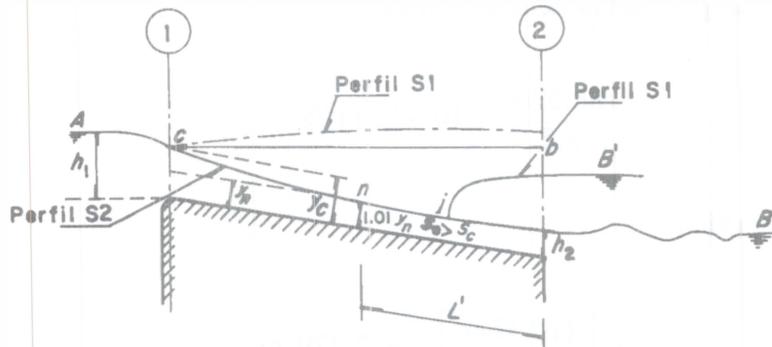


Figura 5.25. Entrada a un canal de pendiente supercrítica

Como la sección de control en un canal de pendiente supercrítica se encuentra en el extremo aguas arriba, el gasto del canal queda gobernado plenamente por el crítico en la sección 1, de acuerdo con la ecuación 5.9.

El tipo de perfil de flujo que se desarrolla en un canal de gran pendiente depende del nivel en el almacenamiento inferior. Cuando el nivel h_2 es menor que el tirante en la sección 2, el flujo en el canal no queda afectado por dicho nivel. El perfil del flujo cerca de la sección 1 pasa a través del tirante crítico de una forma convexa a una cóncava, y se aproxima al tirante normal a través de un perfil del tipo S2.

Cuando el nivel h_2 en la salida es mayor que el tirante crítico, se eleva el nivel del agua en la parte final del canal para formar un perfil S1 y se produce un salto hidráulico en el extremo inicial del perfil. El flujo aguas arriba del salto no queda afectado por las condiciones en su extremo aguas abajo.

A medida que se eleva el nivel h_2 , el salto se mueve hacia aguas arriba hasta que alcanza la sección n . Desde ahí, el salto se mueve hacia aguas arriba sobre la curva cn , disminuyendo gradualmente de altura hasta que llega a cero cuando alcanza el tirante crítico en c . Mientras esto no ocurra, el perfil del flujo alcanza su límite teórico cb del perfil S1. Más allá de este límite, el flujo que ingresa queda directamente sumergido. Para efectos prácticos, la línea horizontal cb se puede tomar como el límite del nivel en la sección 2 para evitar la sumergencia.

Ejemplo 5.6. En el canal rectangular del ejemplo 5.1 ($b = 12$ m, $n = 0.015$, $S_0 = 0.001$) se propone una contracción a un ancho de 8.5 m, que se ubica a una distancia de 1000 m aguas abajo de la entrada. Determinar si dicha contracción modifica el gasto de 88.576 m³/s que ingresa al canal, según los cálculos en el ejemplo 5.1. Si ese es el caso, obtener el nuevo gasto.

Solución. Es necesario establecer algunas suposiciones que serán aceptadas o rechazadas con base en los cálculos que se hagan.

- a) Se asume que la contracción no es suficientemente severa para reducir el gasto. Esto es, el flujo en el canal es uniforme, al menos en una distancia suficiente después de la entrada, de modo que no se modifique el gasto previamente obtenido.

El gasto unitario después de la contracción es

$$q = \frac{88.576}{8.5} = 10.421 \text{ m}^2/\text{s}$$

siendo el tirante crítico

$$y_c = \left[\frac{(10.421)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 2.229 \text{ m}$$

y la energía específica mínima

$$E_c = \frac{3}{2} (2.229) = 3.343 \text{ m}$$

que es mayor que la energía específica disponible aguas arriba si el flujo fuera uniforme. Esto significa que la contracción actúa como un estrangulamiento, afectando al flujo uniforme que debía formarse aguas arriba si no existiera. Esto genera un perfil de flujo M1 que puede influir en la magnitud del gasto que ingresa al canal si su longitud alcanza a ahogar la entrada y que es necesario comprobar.

- b) Se supone que el gasto que ingresa desde el almacenamiento no es afectado por la contracción; por tanto, el tirante justo aguas arriba de ella se obtiene de la ecuación

$$E = y + \frac{q^2}{2g y^2} = y + \frac{(88.576/12)^2}{2 (9.81) y^2} = y + \frac{2.777}{y^2} = 3.343 \text{ m}$$

donde se ha supuesto que no hay pérdida de energía en la entrada de la contracción. La solución de la ecuación anterior para régimen subcrítico es $y = 3.043 \text{ m}$.

El cálculo del perfil del flujo se resume en la tabla 5.10, donde se ha usado el método directo por pasos, procediendo desde la sección de tirante $y = 3.043 \text{ m}$ y en dirección contraria al flujo.

La última columna de la tabla indica que $x = -1016.8 < -1000 \text{ m}$, distancia entre la sección de entrada y la contracción; esto es, para $Q = 88.576 \text{ m}^3/\text{s}$, el perfil del flujo gradualmente variado se extiende más allá de la sección de entrada al canal y la contracción controla el flujo hacia aguas arriba. Para esta distancia, al considerar la pérdida por entrada resulta

$$H = 3.0108 + 0.2 (0.411) = 3.093 \text{ m} > 3 \text{ m}$$

- c) El gasto real que ingresa al canal debe calcularse por tanteos; es decir, se escoge un gasto y con el tirante inicial antes de la contracción se calcula el perfil del flujo, de modo que se llegue a la sección de entrada con la energía de 3.00 m disponible en la misma.

Se escoge $Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}$, para el cual el tirante normal es $y_n = 2.268 \text{ m}$; $1.01 y_n = 2.291 \text{ m}$. Los valores críticos en la contracción son:

$$y_c = \left[\frac{(80/8.5)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 2.082 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3}{2} (2.082) = 3.1236 \text{ m}$$

El tirante inicial antes de la contracción resulta de

$$E = y + \frac{(80/12)^2}{2 (9.81) y^2} = y + \frac{2.2653}{y^2} = 3.1236$$

Esto es, $y = 2.843 \text{ m}$.

En la tabla 5.11 se resumen los cálculos. En el último renglón la energía específica del flujo es 2.8041 m, y al considerar las pérdidas por entrada, la energía necesaria en el almacenamiento es $H = 2.882$, menor de 3 m.

Esto significa que es necesario un tercer tanteo de Q , que puede obtenerse mediante una interpolación lineal, como sigue

$$Q = 88.576 - \frac{3.093-3.0}{3.093-2.8817} (88.576 - 80) = 84.8 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para este gasto, el tirante normal es $y_n = 2.3594$ m y los valores críticos en la contracción:

$$y_c = \left[\frac{(84.8/8.5)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 2.165 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3}{2} (2.165) = 3.2473 \text{ m}$$

Tabla 5.10. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 5.6 para $Q = 88.576 \text{ m}^3/\text{s}$

y en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f por (10^{-3})	\bar{S}_f por (10^{-3})	Δx en m	x en m
3.043	36.516	2.019	2.426	0.300	3.3429	0.5188			0
3.000	36.000	2.000	2.460	0.309	3.3086	0.5406	0.5297	72.93	-72.9
2.95	35.400	1.978	2.502	0.319	3.2691	0.5675	0.5540	88.57	-161.5
2.90	34.800	1.955	2.545	0.330	3.2302	0.5963	0.5819	93.03	-254.5
2.85	34.200	1.932	2.590	0.342	3.1919	0.6271	0.6117	98.64	-353.2
2.80	33.600	1.909	2.636	0.354	3.1542	0.6602	0.6437	105.81	-459.0
2.75	33.000	1.886	2.684	0.367	3.1172	0.6958	0.6780	114.91	-573.9
2.70	32.400	1.862	2.734	0.381	3.0809	0.7341	0.7149	127.32	-701.2
2.65	31.800	1.838	2.785	0.395	3.0454	0.7753	0.7547	144.72	-845.9
2.60	31.200	1.814	2.839	0.411	3.0108	0.820	0.7975	170.86	-1016.8

$$H = 3.0108 + 0.2(0.411) = 3.093 > 3 \text{ m}$$

Tabla 5.11. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 5.6 para $Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}$

y en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f por (10^{-3})	\bar{S}_f por (10^{-3})	Δx en m	x en m
2.843	34.116	1.929	2.345	0.280	3.1233	0.5152			0
2.80	33.600	1.909	2.381	0.289	3.0889	0.5386	0.5822	82.3	-82.3
2.75	33.000	1.886	2.424	0.300	3.0495	0.5676	0.5531	88.2	-170.5
2.70	32.400	1.862	2.469	0.311	3.0107	0.5988	0.5832	93.1	-263.6
2.65	31.800	1.838	2.516	0.323	2.9726	0.6324	0.6156	99.1	-362.7
2.60	31.200	1.814	2.564	0.335	2.9351	0.6687	0.6506	107.3	-470.0
2.55	30.600	1.789	2.614	0.348	2.8984	0.7079	0.6883	117.7	-587.7
2.50	30.000	1.765	2.667	0.362	2.8624	0.7503	0.7291	132.9	-720.6
2.45	29.400	1.740	2.721	0.377	2.8274	0.7963	0.7733	154.4	-875.0
2.416	28.992	1.722	2.759	0.388	2.8041	0.8298	0.813	124.6	-999.6

$$H = 2.8041 + 0.2 (0.388) = 2.8817 \text{ m} < 3 \text{ m}$$

debiendo cumplirse que

$$E = y + \frac{(84.8/12)^2}{2 (9.81) y^2} = y + \frac{2.5452}{y^2} = 3.2473 \text{ m}$$

De esta ecuación, el tirante inicial antes de la contracción resulta $y = 2.956 \text{ m}$.

En la tabla 5.12 se presenta un resumen de los cálculos, donde se observa que la energía H es igual a 3 m, por lo que $Q = 84.8 \text{ m}^3/\text{s}$ es el correcto.

Tabla 5.12. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 5.6 para $Q = 84.8 \text{ m}^3/\text{s}$

y en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	E en m	S_f por (10^{-3})	\bar{S}_f por (10^{-3})	Δx en m	x en m
2.956	35.472	1.980	2.391	0.291	3.2473	0.5171			0
2.90	34.800	1.955	2.437	0.303	3.2026	0.5465	0.5318	95.5	-95.5
2.85	34.200	1.932	2.480	0.313	3.1634	0.5748	0.5607	89.2	-184.7
2.80	33.600	1.909	2.524	0.325	3.1246	0.6052	0.5916	95.0	-279.7
2.75	33.000	1.886	2.570	0.337	3.0866	0.6377	0.6215	100.4	-380.1
2.70	32.400	1.862	2.617	0.349	3.0491	0.6728	0.6553	108.8	-488.9
2.65	31.800	1.838	2.667	0.362	3.0124	0.7106	0.6917	119.0	-607.9
2.60	31.200	1.814	2.718	0.377	2.9765	0.7513	0.7310	133.4	-741.3
2.55	30.600	1.789	2.771	0.391	2.9414	0.7954	0.7733	154.9	-896.2
2.521	30.252	1.775	2.803	0.400	2.9215	0.8225	0.8090	104.2	-1000.4

$$H = 2.9215 + 0.2(0.4) = 3.002 \text{ m}$$

5.7 CÁLCULO DEL FLUJO EN CANALES NO PRISMÁTICOS

5.7.1 Planteamiento del problema

Un canal no prismático constituye realmente un sistema de canales en serie. Los cambios de geometría, pendiente, rugosidad y elevación del fondo en los artificiales ocurren en secciones asignadas normalmente por razones topográficas, hidráulicas o constructivas, como aparecen en la figura 5.26, donde se conocen la elevación de su plantilla y su geometría, y se desea conocer el nivel del agua en cada una de ellas.

En un canal natural se necesita un levantamiento topohidráulico similar al expuesto en el subcapítulo 2.10. La parte del río en estudio (figura 5.27) se divide en una serie de tramos de tal modo proporcionados, que las secciones que los limitan y el coeficiente de Manning sean aproximadamente uniformes. De este modo, se miden la ubicación, elevación y geometría de las secciones, así como la longitud de cada tramo y se estima dicho coeficiente.

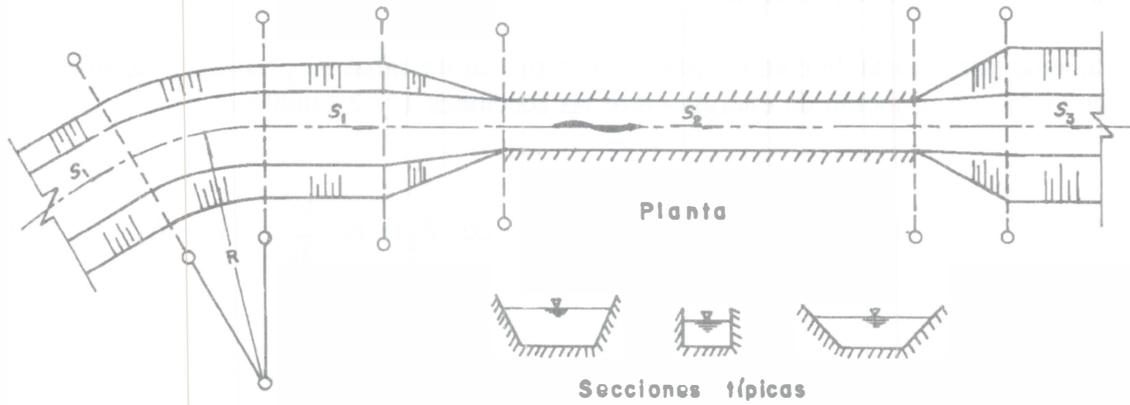


Figura 5.26. Esquema típico de secciones de un canal artificial no prismático

Para efectuar los cálculos en el río, conviene disponer de los elementos geométricos e hidráulicos A , P , R_h de las secciones medidas en campo para distintos valores del nivel h del agua, en forma tabular, gráfica, o mediante subrutinas cuando se utilice computadora. Además, se debe disponer de los valores del coeficiente de Manning equivalente n_e en cada tramo, si es el caso.

Las secciones preestablecidas invalidan el método directo y dan lugar al llamado método estándar por pasos de mayor generalidad, pero cuya solución requiere de iteraciones.

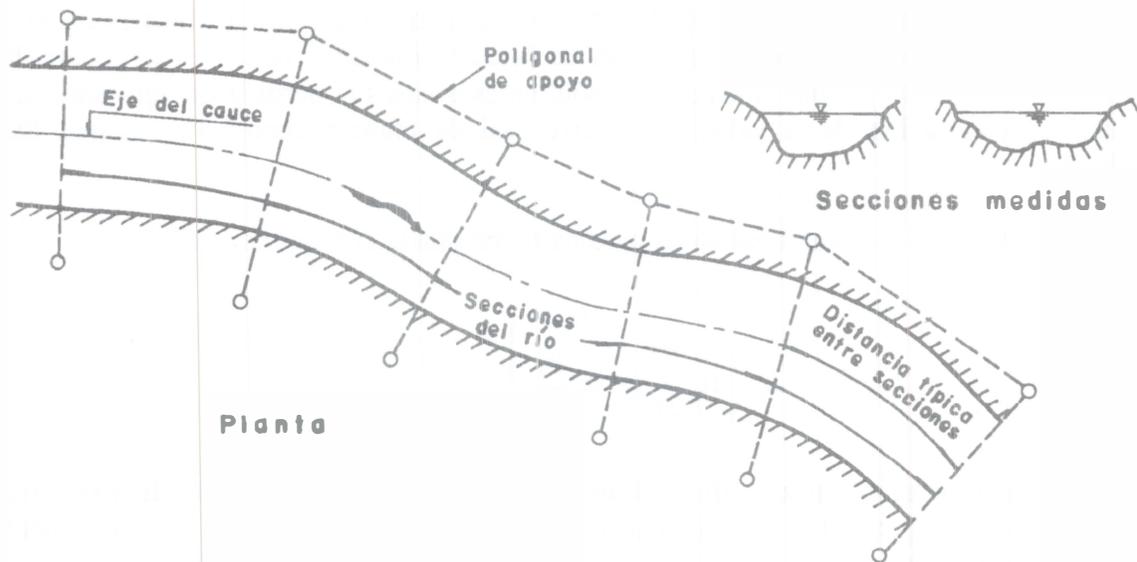


Figura 5.27. Levantamiento topohidráulico de un río

5.7.2 Método estándar por pasos

El esquema para el tratamiento de cualquier tramo en un canal no prismático se muestra en las figuras 5.28. La ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 establece

$$z_1 + y_1 \cos \theta_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos \theta_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f + h_e \quad (5.20a)$$

O bien

$$H_1 = H_2 + h_f + h_e \quad (5.20b)$$

donde $H = z + y \cos \theta + \alpha V^2 / 2g$ es el nivel de la energía en cada sección respecto del mismo plano de referencia.

La pérdida por fricción h_f es la más importante; se calcula con la longitud del tramo y la pendiente media representativa dada por la ecuación 5.15, es decir

$$h_f = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(S_{f1} + S_{f2}) \quad (5.21)$$

donde S_{f1} y S_{f2} se determinan en cada sección con el coeficiente de Manning medio del tramo y las ecuaciones 5.18 y 5.19.

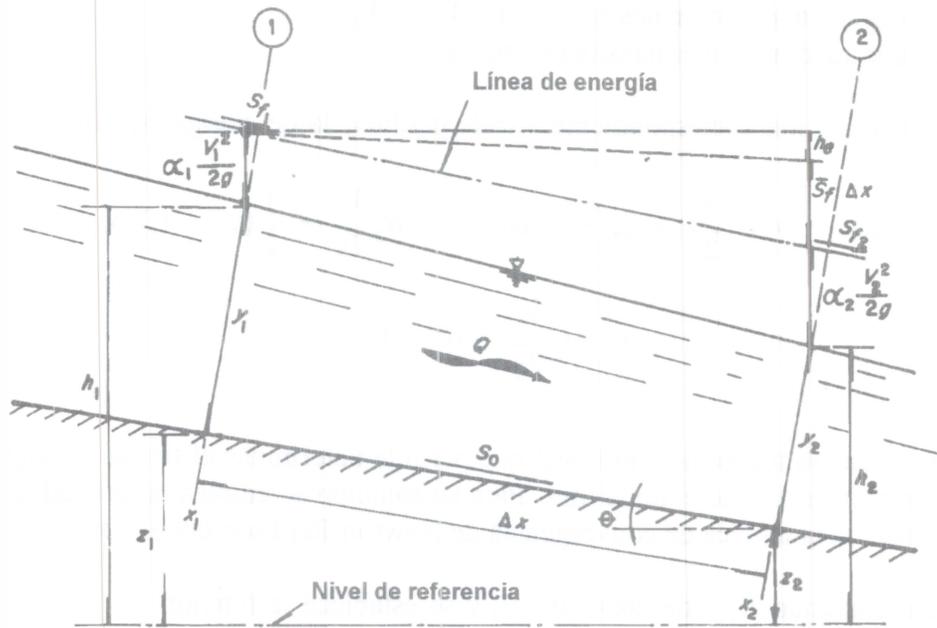
La pérdida h_e se debe a la turbulencia producida por el cambio de velocidad de una sección a la otra y también se conoce como pérdida por conversión. En canales artificiales dicho cambio ocurre por variaciones bruscas o graduales en la elevación del fondo o en la geometría de la sección, por ejemplo, en una transición, y sólo en esos casos la pérdida es significativa. En los naturales la variación de la velocidad ocurre casi de manera continua y es más frecuente incluirla.

En flujo subcrítico es común valorar la pérdida mencionada con la expresión

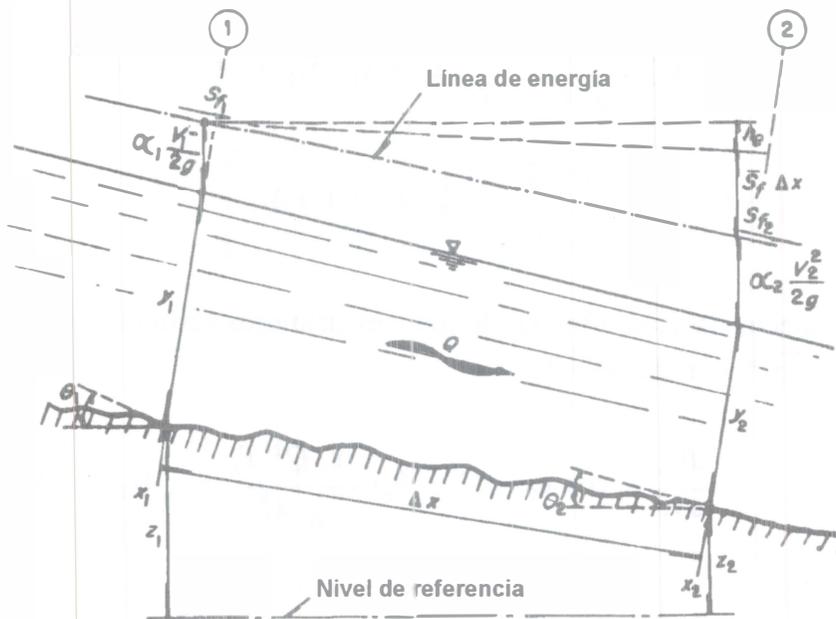
$$h_e = k_e \left[\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right] \quad (5.22)$$

donde k_e es un coeficiente que tiene signo positivo cuando el área hidráulica se contrae de 1 a 2 ($A_1 > A_2$, $V_1 < V_2$) y negativo cuando se expande ($A_1 < A_2$, $V_1 > V_2$). Si la pérdida no se considera $k_e = 0$.

Algunos valores de k_e son:



a) Tramo corto en un canal artificial



b) Tramo corto en un río de pendiente pequeña

Figura 5.28. Esquema de solución en canales no prismáticos

0 a 0.2, en contracciones graduales ($A_1 > A_2$, $V_1 < V_2$)

0.3, en expansiones graduales ($A_1 < A_2$, $V_1 > V_2$)

0.5, en contracciones o expansiones bruscas.

Al sustituir la ecuación correspondiente a cada pérdida, la de energía se convierte en

$$z_1 + y_1 \cos \theta_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos \theta_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) (S_{f1} + S_{f2}) + k_e \left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) \quad (5.23)$$

Esta es una ecuación algebraica no lineal que permite determinar el tirante en alguna de las dos secciones cuando se conoce el de la otra. Para su solución se emplea un procedimiento de iteraciones apoyado en la técnica de convergencia de Newton-Raphson que se expone a continuación.

Se considera conocido H_1 y desconocido H_2 y se establece la función

$$H_e = H_2 + h_f + h_e - H_1 \quad (5.24)$$

del tirante y_2 , la cual debe ser igual a cero una vez concluidas las iteraciones. Con la ecuación de continuidad, dicha función se ordena en la forma

$$H_e = y_2 \cos \theta_2 + (1 + k_e) \frac{\alpha_2 Q^2}{2g A_2^2} + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) S_{f2} + (z_2 - z_1) - \left[y_1 \cos \theta_1 + (1 + k_e) \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) S_{f1} \right] \quad (5.25)$$

Su derivada respecto de y_2 se obtiene de los tres primeros términos ya que los demás son constantes; con $T_2 = dA_2/dy_2$ resulta

$$\frac{dH_e}{dy_2} = \cos \theta_2 - (1 + k_e) \frac{\alpha_2 Q^2 T_2}{g A_2^3} + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \frac{dS_{f2}}{dy_2}$$

o bien

$$\frac{dH_e}{dy_2} = \left[1 - (1 + k_e) F_2^2 \right] \cos \theta_2 + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \frac{dS_{f2}}{dy_2} \quad (5.26)$$

donde $F_2^2 = \alpha_2 Q^2 T_2 / (g A_2^3 \cos \theta_2)$ es el número de Froude en la sección 2.

La derivada que aparece en la ecuación 5.26 se desarrolla a continuación

$$\frac{dS_{f2}}{dy_2} = \frac{d}{dy_2} \left[\frac{Q^2 n^2}{R_{h2}^{4/3} A_2^2} \right] = \left(-2 R_{h2}^{-4/3} A_2^{-3} \frac{dA_2}{dy_2} - \frac{4}{3} A_2^{-2} R_{h2}^{-7/3} \frac{dR_{h2}}{dy_2} \right) Q^2 n^2$$

y con $dA_2/dy_2 = T_2$, también es

$$\frac{dS_{f2}}{dy_2} = -2 \left(\frac{T_2}{A_2} + \frac{2}{3} \frac{1}{R_{h2}} \frac{dR_{h2}}{dy_2} \right) S_{f2}$$

Además

$$\frac{dR_{h2}}{dy_2} = \frac{d}{dy_2} (A_2 P_2^{-1}) = \frac{T_2}{P_2} - \frac{A_2}{P_2^2} \frac{dP_2}{dy_2} = \left(\frac{T_2}{A_2} - \frac{dP_2/dy_2}{P_2} \right) R_{h2}$$

de modo que

$$\frac{dS_{f2}}{dy_2} = -2 \left(\frac{T_2}{A_2} + \frac{2}{3} \frac{T_2}{A_2} - \frac{2}{3} \frac{1}{P_2} \frac{dP_2}{dy_2} \right) S_{f2}$$

O bien

$$\frac{dS_{f2}}{dy_2} = -2 \left(\frac{5}{3} \frac{T_2}{A_2} - \frac{2}{3} \frac{dP_2}{P_2 dy_2} \right) S_{f2}$$

Por lo tanto

$$\frac{dH_e}{dy_2} = \left[1 - (1 + k_e) F_2^2 \right] \cos \theta_2 - (x_2 - x_1) \left[\frac{5}{3} \frac{T_2}{A_2} - \frac{2}{3} \frac{dP_2}{P_2 dy_2} \right] S_{f2} \quad (5.27)$$

Esta ecuación es adecuada en canales artificiales para los cuales dP_2/dy_2 se obtiene de las tablas 1.1 y 1.2. Por ejemplo, para la sección rectangular $dP_2/dy_2 = 2$, y para la trapecial $dP_2/dy_2 = 2 \sqrt{1+k^2}$

Cuando existe una transición brusca en las dimensiones de la sección o en el nivel del piso (escalón), la sección 1 se elige inmediatamente antes de ella y la 2 después de la misma, por tanto, $x_1 = x_2$, lo que equivale a anular la pérdida por fricción mas no la de conversión.

Cuando el régimen es supercrítico la ecuación 5.22 pierde validez y la pérdida por turbulencia no se incluye porque la de fricción es más importante, por tanto, $k_e = 0$ aunque haya transición.

Cuando la pendiente es pequeña, se sustituye $\cos \theta_2 \approx 1$ en la ecuación 5.27, siendo $F_2^2 = \alpha_2 Q^2 T_2 / g A_2^3$.

En canales naturales se puede asumir que $P_2 \approx T_2$, $R_{h2} \approx A_2/T_2 \approx y_2$, de modo que

$$\frac{dP_2}{dy_2} = \frac{d}{dy_2} \left[\frac{A_2}{y_2} \right] = -\frac{A_2}{y_2^2} + \frac{T_2}{y_2} = -\frac{T_2}{y_2} + \frac{T_2}{y_2} = 0$$

Esto significa que es suficiente considerar $dP_2/dy_2 \approx 0$ en la ecuación 5.27.

El tirante para efectuar la iteración $i + 1$ es entonces

$$(y_2)_{i+1} = (y_2)_i - \left[\frac{H_e}{dH_e/dy_2} \right]_i \quad (5.28)$$

El procedimiento estándar por pasos para calcular y_2 se expone a continuación.

1. Se calcula H_1 y después S_{f1} de la ecuación 5.18 con los valores conocidos de Q , z_1 , y_1 , α_1 , x_1 , x_2 y n del tramo.
2. Se estima un valor inicial de y_2 . En un perfil a régimen supercrítico dicho valor inicial se puede establecer sin considerar el cambio en el tirante de la sección 1 a la 2 ($y_1 \cos \theta_1 \approx y_2 \cos \theta_2$) y que $h_f \approx (x_2 - x_1) S_{f1}$. De la ecuación 5.20a, el valor inicial de la velocidad es

$$V_2 = \left[\frac{2g}{\alpha_2} \left[z_1 - z_2 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - h_f \right] \right]^{1/2} \quad (5.29)$$

y con $A_2 = Q/V_2$ se obtiene $(y_2)_0$.

3. Se calculan A_2 , P_2 , R_{h2} , S_{f2} y H_2 , con el valor estimado de y_2 y la geometría de la sección 2, incluyendo h_e si es el caso. Para ésta última, se selecciona el signo adecuado de k_e de acuerdo con el cambio que experimenta el área hidráulica o la velocidad del flujo.

4. Se determina H_e de la ecuación 5.24 o de la 5.25 y su valor absoluto se compara con la tolerancia TOL elegida. Si $|H_e| \leq \text{TOL}$, y_2 es el valor final en la sección 2. En caso contrario, se sigue con el paso 5.
5. Se calculan T_2 , F_2 y el valor de dH_e/dy_2 de la ecuación 5.27. Si el canal es natural se hace $dP_2/dy_2 = 0$ en dicha ecuación. Un valor más preciso de y_2 para la siguiente iteración se obtiene de la ecuación 5.28 y se repiten los pasos 3 y 4 hasta lograr la tolerancia deseada.

El procedimiento es igualmente válido cuando el perfil es en régimen subcrítico, siendo entonces y_2 el tirante conocido y y_1 el que no se conoce. Con la misma diferencia H_e de la ecuación 5.25 su derivada respecto de y_1 resulta

$$-\frac{dH_e}{dy_1} = \left[1 - (1 + k_e) F_1^2\right] \cos \theta_1 + (x_2 - x_1) \left[\frac{5}{3} \frac{T_1}{A_1} - \frac{2}{3} \frac{P_1}{P_1} \frac{dP_1}{dy_1} \right] S_{f1}$$

o bien

$$\frac{dH_e}{dy_1} = - \left[\left[1 - (1 + k_e) F_1^2\right] \cos \theta_1 - (x_1 - x_2) \left[\frac{5}{3} \frac{T_1}{A_1} - \frac{2}{3} \frac{P_1}{P_1} \frac{dP_1}{dy_1} \right] S_{f1} \right] \quad (5.30)$$

La ecuación 5.30 muestra que $dH_e/dy_1 < 0$ y se obtiene también al cambiar el subíndice 2 por 1 (o viceversa) en la 5.27, anteponiendo el signo menos. Otro camino equivalente consiste en intercambiar igualmente los subíndices en las ecuaciones 5.25 y 5.27 y emplear las ecuaciones que resulten. En canales naturales se puede también asumir que $dP_1/dy_1 = 0$, por las razones ya explicadas.

En cualquier caso, la ecuación 5.28 es ahora

$$(y_1)_{i+1} = (y_1)_i - \left[\frac{H_e}{dH_e/dy_1} \right]_i$$

Para estimar el valor inicial en el paso 2, no se considera el cambio en la carga de velocidad y se acepta que $h_f \approx (x_2 - x_1) S_{f2}$ y que $\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2$. De este modo, de la ecuación 5.20a se obtiene

$$(y_1)_0 = z_2 - z_1 + y_2 + (x_2 - x_1) S_{f2} \quad (5.31)$$

en lugar de la ecuación 5.29.

Cuando un canal artificial contiene una curva vertical el flujo es curvilíneo y se debe tratar como se expone en un capítulo posterior. Una solución aproximada consiste en calcular el nivel de la energía en cualquier sección de la curva (excepto la inicial) con la expresión

$$H = z + y \cos \theta + \frac{1}{\lambda^2} \frac{V^2}{2g} \quad (5.32)$$

donde λ es el coeficiente de curvatura que para un canal rectangular está dado por la ecuación

$$\lambda = \left[1 \pm \frac{R}{y} \right] \ln \left[1 \pm \frac{y}{R} \right]$$

El signo positivo se usa si la curvatura es convexa (fondo en el lado interior de la curva) y negativo si es cóncava (fondo en el lado exterior de la curva), siendo R el radio de curvatura del fondo.

En los ríos suele considerarse un valor para el coeficiente α de acuerdo a lo señalado en el subcapítulo 1.6. En un primer intento se supone igual a uno y después se precisa con alguno de los criterios indicados en dicho subcapítulo.

El flujo en la mayoría de los ríos es subcrítico y su perfil queda supeditado a las condiciones de aguas abajo. Por ello es ventajoso, aunque no esencial, utilizar una sección de control en el extremo aguas abajo de la parte del río en estudio, formada por una estación hidrométrica (cuando ésta se encuentre en la proximidad), un vertedor o la unión con otro río, en la que se conozca el nivel del agua para cualquier gasto. Si ésto no es posible, se supone un nivel inicial en la sección extrema de aguas abajo, que quede por encima del crítico para el gasto en estudio, y se procede al cálculo en dirección contraria al flujo. Al reiterar el mismo procedimiento con otros valores iniciales, se encuentra con frecuencia que debido a la curvatura decreciente del perfil del flujo y a su gran longitud, se pierde gradualmente el efecto de variaciones pequeñas en el nivel tentativo de la sección inicial al avanzar con el cálculo una distancia relativamente grande. En el caso de que sea necesario optar por este criterio, la parte del río en estudio debe ser de suficiente longitud para alcanzar las condiciones mencionadas.

Ejemplo 5.7. La canalización de un río donde fluye un caudal de $15 \text{ m}^3/\text{s}$, se inicia con un tramo de 940 m de longitud, sección rectangular, ancho constante de 2.40 m y pendiente de 0.0042 también constante. Para descargar a otro río se dispone de una rápida que termina en una cubeta deflectora cuya geometría se muestra en la figura 5.29. Determinar el perfil del flujo a lo largo del canal hasta la estación 984.53, considerando $n = 0.015$ (Manning), $\alpha = 1.0$ y para k_e el valor adecuado en la transición.

Solución. Debido a su gran longitud, se espera que haya flujo uniforme en el primer tramo del canal, el cual debe ocurrir con tirante normal $y_n = 1.8006 \text{ m}$. En efecto, $A = 4.32144 \text{ m}^2$, $R_h = 0.7201 \text{ m}$, y la velocidad y gasto son

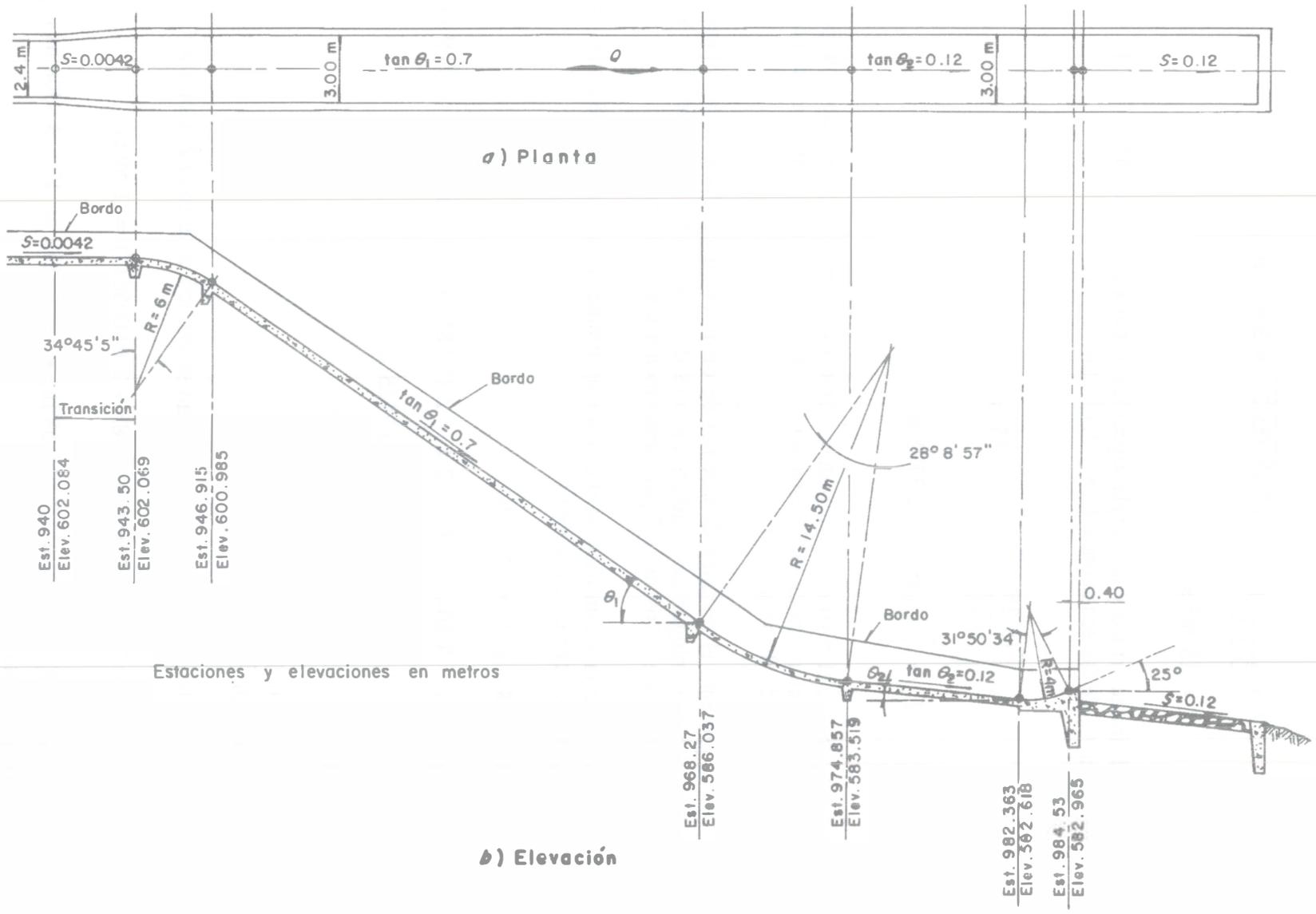


Figura 5.29. Canal del ejemplo 5.7

$$V = \frac{1}{0.015} (0.7201)^{2/3} \sqrt{0.0042} = 3.471 \text{ m/s}$$

$$Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$$

Conviene conocer el tirante crítico y la energía específica mínima para el ancho de 2.4 m. Con $q = 15/2.4 = 6.25 \text{ m}^2/\text{s}$, de las ecuaciones 3.18 y 3.19 ($\cos \theta \approx 1$) se tiene

$$y_c = \left[\frac{(6.25)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 1.585 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3}{2} (1.585) = 2.3775 \text{ m}$$

En virtud de que $y_n > y_c$, el régimen en el primer tramo es subcrítico, generándose un perfil M2 controlado por la sección crítica en la estación 0 + 940 m, cuyo cálculo es en dirección contraria al flujo a partir de dicha sección.

En la tabla 5.13 se presenta el resumen de cálculos de dicho perfil con base en secciones de distancias variables, que en ningún caso fueron mayores de 10 m, hasta la estación 0 + 900, donde se obtuvo el tirante de 1.769 m (1.7 por ciento menor que el normal).

A vía de ejemplo, se presenta a continuación el cálculo del tirante en la estación 938 m con base en los valores críticos que ocurren en la 940 m.

Con $z_2 = 2.084 (+ 600)$, y $y_2 = 1.585 \text{ m}$:

$$A_2 = 2.4 (1.585) = 3.804 \text{ m}; P_2 = 2.4 + 2 (1.585) = 5.57 \text{ m}; R_{h2} = 0.6829 \text{ m}$$

$$V_2 = 15/3.804 = 3.9432 \text{ m/s}; V_2^2/2g = 0.7925 \text{ m}$$

$$H_2 = 2.084 + 1.585 + 0.7925 = 4.4615 \text{ m}$$

$$S_{f2} = \left[\frac{3.9432 (0.015)}{(0.6829)^{2/3}} \right]^2 = 0.005817$$

El valor inicial de y_1 resulta de la ecuación 5.31, como se explicó en el paso 2. Con $\Delta x = 2 \text{ m}$

$$(y_1)_0 = 2.084 - 2.092 + 1.585 + 2 (0.005817) \approx 1.59 \text{ m}$$

para el cual: $A_1 = 2.4 (1.59) = 3.816 \text{ m}^2$; $P_1 = 5.58 \text{ m}$; $R_{h1} = 0.6839 \text{ m}$; $V_1 = 3.9308 \text{ m/s}$; $V_1^2/2g = 0.7875 \text{ m}$; por tanto

$$H_1 = 2.092 + 1.59 + 0.7875 = 4.4695 \text{ m}$$

$$S_{f1} = \left[\frac{3.9308 (0.015)}{(0.6839)^{2/3}} \right]^2 = 0.00577$$

$$h_f = 2 \left[\frac{0.00577 + 0.005817}{2} \right] = 0.0116 \text{ m}$$

De la ecuación 5.24

$$H_e = H_2 + h_f - H_1 = 4.4615 + 0.0116 - 4.4695 = 0.00356 \text{ m}$$

que en valor absoluto es mayor de TOL = 0.0005. Por tanto; con

$$F_1^2 = \frac{(3.9308)^2}{9.81(1.59)} = 0.9906$$

de la ecuación 5.30 ($k_e = 0$)

$$\frac{dH_e}{dy_1} = - \left[1 - 0.9906 - (938 - 940) \left[\frac{5}{3} \frac{2.4}{3.816} - \frac{2(2)}{3(5.58)} \right] 0.00577 \right] = -0.0187$$

El nuevo valor es

$$y_1 = 1.59 - \frac{0.00356}{-0.0187} = 1.7804 \text{ m}$$

Después de varias iteraciones, el tirante final es $y_1 = 1.644 \text{ m}$ como se verifica en la tabla 5.13.

En el tramo aguas abajo de la estación 0 + 940 m se produce un perfil S2 que se calcula en la dirección del flujo, en el cual quedan obligadas las secciones en las estaciones: 943.5, 946.915, 968.27, 974.857, 982.363 y 984.53, como mínimo. Además por tratarse de un canal de gran pendiente, el término H debe obtenerse incluyendo a $\cos \theta$ y agregando el término correctivo por curvatura del flujo cuando sea el caso.

Como ejemplo del procedimiento, se presenta a continuación el cálculo del tirante en las estaciones 943.5 y la 946.915. La estación 940 es la inicial, donde ocurre régimen crítico con las características presentadas en el primer renglón de la tabla 5.13.

Tabla 5.13. Cálculo del perfil del flujo en el ejemplo 5.7 aguas arriba de la estación 0 + 940 m, para $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$, $S_0 = 0.004$, $b = T = 2.40 \text{ m}$, $\alpha = 1$, $n = 0.015$, $k_e = 0$, $\cos \theta \approx 1$

Est. x en m	z (600+) en m	y en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	H (600+) en m	S_f $\times 10^{-3}$	h_f en m	H_e en m
940 $\Delta x = -2 \text{ m}$	2.084	1.585	3.804	0.683	3.943	0.7925	4.4615	5.817		
938	2.092	1.65	3.96	0.695	3.788	0.7313	4.4733	5.247	0.0111	-0.0007
938 $\Delta x = -3 \text{ m}$	2.092	1.644	3.946	0.694	3.802	0.7366	4.4726	5.296	0.0111	0
935	2.105	1.67	4.008	0.698	3.743	0.7139	4.4889	5.087	0.0156	-0.0007
935 $\Delta x = -6 \text{ m}$	2.105	1.665	3.996	0.697	3.754	0.7182	4.4882	5.126	0.0156	0
929	2.130	1.70	4.08	0.703	3.676	0.689	4.5189	4.861	0.03	-0.0008
929 $\Delta x = -10 \text{ m}$	2.130	1.696	4.07	0.703	3.685	0.6922	4.5182	4.89	0.03	0
919	2.172	1.726	4.142	0.708	3.621	0.6683	4.5663	4.677	0.0478	-0.0003
919 $\Delta x = -10 \text{ m}$	2.172	1.725	4.140	0.708	3.623	0.6691	4.5661	4.684	0.0479	0
909	2.214	1.745	4.188	0.711	3.582	0.6538	4.6128	4.548	0.0462	-0.0006
909 $\Delta x = -10 \text{ m}$	2.214	1.743	4.183	0.711	3.586	0.6553	4.6123	4.561	0.0462	0
900	2.252	1.77	4.248	0.715	3.531	0.6355	4.6575	4.387	0.0447	-0.0005
900	2.252	1.769	4.246	0.715	3.533	0.6362	4.6572	4.393	0.0448	-0.0001

Hay que estimar un valor inicial del tirante en la estación 943.5, el cual conviene que sea menor que el crítico para el ancho en dicha sección. Dicho crítico y la energía específica mínima son:

$$y_c = \left[\frac{(15/3)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 1.3659 \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3}{2} (1.3659) = 2.0489 \text{ m}$$

Siendo $z = 602.069 \text{ m}$, el nivel de energía mínima sería: $H_c = 602.069 + 2.0489 = 604.1179 \text{ m}$, menor que el nivel de energía específica mínima ($H_c = 604.4615 \text{ m}$, tabla 5.13) en la estación 940; es decir, en la última estación hay efectivamente régimen crítico.

Se estima el valor inicial $(y_2)_0 = 1 \text{ m}$ en la estación 943.5, para el cual las características geométricas e hidráulicas son: $\cos \theta_2 \approx 1$; $A_2 = 3 \text{ m}^2$; $P_2 = 5 \text{ m}$; $T_2 = 3 \text{ m}$; $R_{h2} = 0.6 \text{ m}$; $V_2 = 5 \text{ m/s}$; $V_2^2/2g = 1.2742 \text{ m}$; no se considera efecto de curvatura por ser la sección inicial de la curva, por tanto

Tabla 5.14. Cálculo del perfil del flujo aguas abajo de la estación 0 + 940 m para $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$, $\alpha = 1$, $n = 0.015$, $k_e = 0$, del ejemplo 5.7. En la estación 940 m, $b = 2.4 \text{ m}$ y en la 943.5 o más, $b = 3 \text{ m}$

Est. en m 900 +	z en m 500 +	$\cos \theta$	y en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	H en m 500 +	S_f ($\times 10^{-2}$)	h_f en m	H_e en m
40.00 $\Delta x = 3.5 \text{ m}$	102.084	1.000	1.585	3.804	0.683	3.9432	0.7925	104.4615	0.5817	-	-
43.50 $\Delta x = 3.639 \text{ m}$	102.069	1.000	1.0037	3.011	0.6013	4.9817	1.2649	104.3376	1.1002	$h_e = 0.0945$ 0.0294	0.0
46.915 $\Delta x = 4.987 \text{ m}$	100.985	0.819	0.6491	1.9474	0.4531	7.7026	3.024	104.2478*	3.8363	0.0898	0.0
51.00 $\Delta x = 4.884 \text{ m}$	98.126	"	0.4857	1.457	0.3669	10.295	5.402	103.9257	9.0795	0.3221	0.0
55.00 $\Delta x = 4.884 \text{ m}$	95.326	"	0.4077	1.223	0.3205	12.2651	7.6673	103.3272	15.4292	0.5985	0.0
59.00 $\Delta x = 4.884 \text{ m}$	92.526	"	0.3644	1.0933	0.2932	13.7205	9.5949	102.4194	21.7467	0.9078	0.0
63.00 $\Delta x = 6.434 \text{ m}$	89.726	"	0.3371	1.0114	0.2753	14.8312	11.2113	101.2134	27.6402	1.206	0.0
68.27 $\Delta x = 3.734 \text{ m}$	86.037	"	0.314	0.942	0.2597	15.9227	12.9222	99.2164	34.4361	1.997	0.0
71.57 $\Delta x = 3.389 \text{ m}$	84.31	0.938	0.3127	0.9381	0.2586	15.9897	13.0310	97.9221*	34.8872	1.2943	0.0
74.857 $\Delta x = 4.028 \text{ m}$	83.519	0.993	0.3174	0.9522	0.262	15.7533	12.6487	96.7665*	33.3125	1.1556	0.0
78.857 $\Delta x = 3.021 \text{ m}$	83.039	"	0.3244	0.9732	0.2667	15.4126	12.1074	95.4686	31.1303	1.2979	0.0
82.363 $\Delta x = 2.224 \text{ m}$	82.618	"	0.3313	0.9938	0.2713	15.0931	11.6107	94.5576	29.1766	0.9109	0.0
84.53	82.965	0.906	0.3408	1.0224	0.2777	14.6714	10.971	93.936**	26.7311	0.6217	0.0

* Incluye el efecto de curvatura vertical.

** Incluye el efecto de curvatura vertical y presión cero en el fondo.

$$H_2 = z_2 + y_2 + V_2^2/2g = 602.069 + 1 + 1.2742 = 604.3432 \text{ m}$$

$$S_{f2} = \left[\frac{5 (0.015)}{(0.6)^{2/3}} \right]^2 = 0.011115$$

De la ecuación 5.21

$$h_f = \frac{1}{2} (3.5) (0.005817 + 0.011115) = 0.0296 \text{ m}$$

Entre las dos estaciones hay una transición gradual y si bien hay régimen supercrítico en el tramo, la pérdida por conversión es seguramente mayor que la de fricción. Puesto que $A_1 > A_2$ (contracción, aunque $b_2 > b_1$), $k_e = 0.2$ (positivo) y de la ecuación 5.22

$$h_e = 0.2 (1.2742 - 0.7925) = 0.0963 \text{ m} > h_f$$

De la ecuación 5.24

$$H_e = 604.3432 + 0.0296 + 0.0963 - 604.4615 = 0.00764 \text{ m}$$

Con $F_2^2 = (5)^2/9.81 (1)^3 = 2.54842$, de la ecuación 5.27

$$\frac{dH_e}{dy_2} = 1 - (1 + 0.2) 2.54842 - 3.5 \left[\frac{5}{3} \frac{3}{3} - \frac{2(2)}{3(5)} \right] 0.011115 = - 2.1126$$

El tirante de la siguiente iteración vale

$$(y_2)_1 = 1 - \frac{0.00764}{-2.1126} = 1.00367 \text{ m}$$

Con dicho tirante, se obtienen los valores: $A_2 = 3.011 \text{ m}^2$; $P_2 = 5.0073 \text{ m}$; $R_{h2} = 0.6013 \text{ m}$; $V_2 = 4.98172 \text{ m/s}$; $V_2^2/2g = 1.2649 \text{ m}$; $H_2 = 604.3376 \text{ m}$; $S_{f2} = 0.011002$; $h_f = 0.0294 \text{ m}$; $h_e = 0.0945 \text{ m}$; $H_e \approx 0$. Por tanto, el tirante final en la estación 943.5 es $y = 1.00367 \text{ m}$.

El siguiente tramo es hasta la estación 946.915, sección final de la curva, donde $\cos \theta = 0.819$, siendo $x_2 - x_1 = 3.639 \text{ m}$. Con $h_f \approx 3.639 (0.011002) = 0.04 \text{ m}$, el valor inicial del tirante se obtiene de la ecuación 5.29

$$V_2 = [19.62 (602.069 - 600.985 + 1.2649 - 0.04)]^{1/2} = 6.7306 \text{ m/s}$$

donde z_2 se obtuvo de la figura 5.29. Por tanto, $(y_2)_0 = 15/[3 (6.7306)]$, es decir, $y_2 \approx 0.743$ m.

Con $y_2 = 0.743$ m, $A_2 = 2.229$ m², $P_2 = 4.486$ m, $R_{h_2} = 0.4969$ m, $V_2 = 6.7295$ m/s, $V_2^2/2g = 2.3081$ m. El coeficiente de curvatura, para el signo positivo y $R = 6$ m, vale

$$\lambda = \left[1 + \frac{6}{0.743} \right] \ln \left[1 + \frac{0.743}{6} \right] = 1.0595$$

De la ecuación 5.32

$$H_2 = 600.985 + 0.743 (0.819) + \frac{2.3081}{(1.0595)^2} = 603.6497 \text{ m}$$

También: $S_{f_2} = 0.02589$; $h_f = 0.0671$ m; $h_e = 0$; $H_e = -0.6208$ m.

Con $F_2^2 = (6.7295)^2 / [9.81 (0.743) (0.819)] = 7.5861$, de la ecuación 5.27

$$\frac{dH_e}{dy_2} = (1 - 7.5861) 0.819 - 3.639 \left[\frac{5}{3} \frac{3}{2.229} - \frac{2(2)}{3(4.486)} \right] 0.02589 = -5.5774$$

y el siguiente valor del tirante es

$$y_2 = 0.743 - \frac{-0.6208}{-5.5774} = 0.632 \text{ m}$$

Después de tres iteraciones más, el valor final es $y_2 = 0.6491$ m. El cálculo del resto del perfil del flujo se resume en la tabla 5.14.

En el canal se presenta un flujo ultrarrápido, cuyas condiciones especiales no han sido tomadas en cuenta, así como el arrastre de aire al interior del flujo.

Ejemplo 5.8. En la figura 5.30 se presenta el perfil longitudinal del cauce de un río, donde se aforó un gasto de 30 m³/s en la sección 3 y se midió un tirante $y_3 = 1.60$ m. Se estima un coeficiente de Manning $n = 0.035$. Las secciones medidas en campo se ajustan a la forma parabólica simétrica respecto del eje vertical, cuyo ancho de superficie varía con el tirante y vale $T_3 = 20$ m para $y = 1.60$ m. Calcular el nivel del agua en las secciones 1 o 5, según sea factible, considerando que existe la misma distancia de 100 m entre las secciones, ($\alpha = 1$ y $k_e = 0.1$).

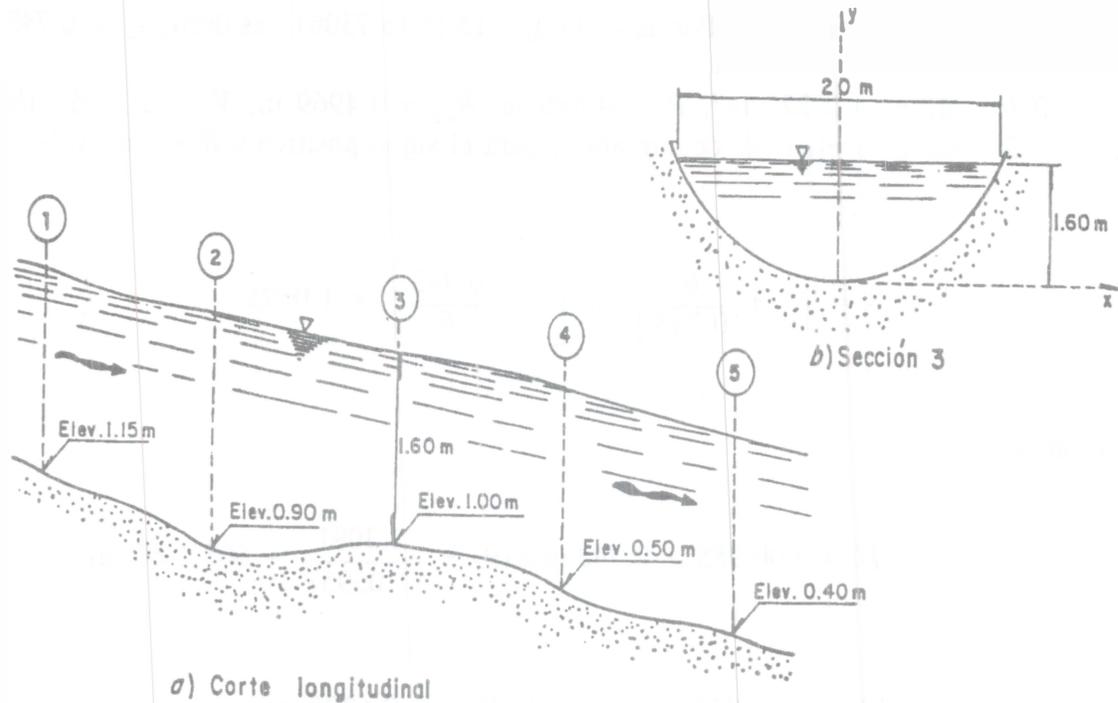


Figura 5.30. Esquema del río en el ejemplo 5.8

Solución. Se determina el tirante crítico en la sección 3 y se compara con el medido. De acuerdo con el sistema de ejes indicado en la figura 5.30b, la sección parabólica tiene una ecuación del tipo: $y = ax^2$, de manera que al sustituir los datos de la sección 3, resulta: $a = y/x^2$, $= 1.60/(10)^2 = 0.016$. Por tanto, con $T = 2x = 2\sqrt{y/a}$

$$T = 15.8114 y^{1/2}$$

De la tabla 1.1, el área hidráulica resulta

$$A = \frac{2}{3} T y = \frac{2}{3} (15.8114 y^{1/2}) y = 10.5409 y^{3/2}$$

Además, el radio hidráulico se puede calcular con una precisión satisfactoria a partir de la ecuación: $R_h = 2 T^2 y / (3 T^2 + 8 y^2)$, cuando $0 < 4 y / T \leq 1$. Siendo los tirantes del orden de 1.60 m, el término que valúa el intervalo adecuado es

$$\frac{4 y}{T} = \frac{4(1.6)}{20} = 0.32$$

Por tanto, es factible utilizar la ecuación aproximada; para cualquier valor y del tirante se obtiene

$$R_h = \frac{2 (250) y^2}{3 (250) y + 8 y^2} = \frac{500 y^2}{750 y + 8 y^2}$$

El tirante crítico en secciones parabólicas se calcula con la ecuación 3.35, y con $c = 10.5409$, resulta

$$y_c = \left[\frac{3 (30)^2}{2 (9.81) (10.5409)^2} \right]^{1/4} = 1.055 \text{ m} < 1.60 \text{ m}$$

Esto es, $y_c < y_3$ y el régimen es subcrítico. El cálculo se realiza hacia aguas arriba de la sección 3 para obtener y_2 y y_1 .

El área y radio hidráulico de la sección 3 valen:

$$A_3 = 10.5409 (1.60)^{3/2} = 21.3333 \text{ m}^2$$

$$R_{h3} = \frac{500 (1.6)^2}{750 (1.6) + 8 (1.6)^2} = 1.0488 \text{ m}$$

La velocidad y carga de velocidad en dicha sección resultan

$$V_3 = \frac{30}{21.3333} = 1.4063 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = 0.1008 \text{ m}$$

Por tanto, la pendiente de fricción en la sección 3 es

$$S_{f3} = \left[\frac{1.4063 (0.035)}{(1.0488)^{2/3}} \right]^2 = 0.0022735$$

El cálculo del tirante y_2 se efectúa con la ecuación 5.23 por el método estándar por pasos ($\cos \theta \approx 1$). Para utilizar el procedimiento, se proponen diferentes tirantes en la sección 2 y se calculan los elementos geométricos e hidráulicos necesarios hasta lograr aquel que satisfaga la ecuación mencionada. Los cálculos se resumen en la tabla 5.15 donde la pendiente de fricción se calculó con la ecuación de Manning y los niveles de energía con la 5.23. Los incrementos Δy se obtuvieron como en el primer tramo del ejemplo anterior.

El cálculo de y_4 y y_5 es factible, aunque el régimen sea subcrítico, siempre que se respeten a $y_3 = 1.60$ m y la ecuación de energía.

La ecuación 5.23 aplicada a las secciones 3 y 4 es

$$1.0 + 1.6 + 0.1008 = 0.5 + y_4 + \frac{V_4^2}{2g} + (0.0022735 + S_{f4}) 50 + h_e$$

O bien

$$2.7008 = 0.6137 + y_4 + \frac{V_4^2}{2g} + 50 S_{f4} + h_e$$

La incógnita es ahora y_4 aguas abajo de la 3. Los cálculos se presentan en la misma tabla 5.15, donde se encuentra que $y_4 = 1.9846$ m.

Tabla 5.15. Cálculo de los tirantes y_2 y y_1 en el ejemplo 5.8, $\cos \theta \approx 1$, $\alpha = 1$, $\Delta x = -100$ m, $H_e = H_2 - H_1$

Secc.	z en m	y en m	A en m ²	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	H en m	S_f ($\times 10^{-3}$)	h_f en m	h_e en m	H_e en m
3	1.00	1.60	21.333	1.049	1.406	0.1008	2.7008	2.2735	-	-	-
2	0.90	1.9123	27.875	1.250	1.076	0.0590	2.8713	1.0544	0.1664	0.0042	0
1	1.15	1.7758	24.944	1.162	1.203	0.0747	3.0005	1.4513	0.1253	0.0039	0
3	1.00	1.60	21.333	1.049	1.406	0.1008	2.7008	2.2735	-	-	-
4	0.50	1.9846	29.471	1.296	1.018	0.0528	2.5374	0.899	0.1586	0.0048	0
5	0.40	1.9968	29.7426	1.303	1.009	0.0519	2.4487	0.875	0.0887	0.0001	0.0001

En la misma forma, para las secciones 4 y 5 se tiene

$$0.50 + 1.9846 + 0.0528 = 0.4 + y_5 + \frac{V_5^2}{2g} + (0.000899 + S_{f5}) 50 + h_e$$

O bien

$$2.5374 = 0.445 + y_5 + \frac{V_5^2}{2g} + 50 S_{f5} + h_e$$

cuya solución es $y_5 = 1.9968$ m, como se comprueba en la tabla 5.15.

Debe observarse que estos resultados se obtienen igualmente si se suponen valores de y_5 y se efectúa el cálculo hacia aguas arriba, hasta encontrar aquel que permita llegar a la sección 3 con $y_3 = 1.60$ m. Sin embargo, los resultados así obtenidos son válidos siempre que en la sección 5 no haya influencia de las condiciones del flujo que hay después de ella, lo cual es difícil de saber si no hay mayor información.

Ejemplo 5.9. En previsión de la posible construcción de una presa de almacenamiento, se instaló una estación hidrométrica sobre un río a fin de recabar la información de los caudales y niveles del agua durante un período largo. Las mediciones efectuadas en dicha estación, llamada sección de aforo, permitieron establecer la curva gasto-elevación del agua en el río que se muestra en la figura 5.31, registrada durante el período.

El sitio de construcción de la presa quedó finalmente ubicado a una distancia aproximada de 3 500 m siguiendo el cauce del río, aguas arriba de la sección de aforo. A fin de diseñar la obra de desvío y la descarga de la obra de excedencias, se necesita conocer la misma curva gasto-elevación en el río pero en una sección aguas abajo de la presa y además en la inmediata proximidad de la misma. Para ello, es imprescindible determinar dicha curva calculando los perfiles de flujo para distintos gastos en el tramo comprendido entre la sección próxima a la presa y la sección de aforo, con el auxilio de la información obtenida en esta última.

Para lograr lo anterior, fue necesario efectuar un levantamiento topohidráulico del tramo en cuestión, consistente en medir la geometría tanto de la sección de aforo y la próxima a la presa, como en secciones intermedias. Asimismo, estimar en campo el coeficiente de Manning en el tramo y de ser posible, en las secciones intermedias.

En el levantamiento se ubicaron las dos secciones en los dos extremos del tramo, designadas como sección 6 y de aforo, y cinco secciones intermedias en distintos sitios, de acuerdo a la disposición y cadenamamiento que se indica en la figura 5.32.

Trabajos posteriores de gabinete permitieron representar la información obtenida en campo con términos de las propiedades hidráulicas de las secciones y en la forma de curvas área hidráulica-elevación y radio hidráulico-elevación, como se muestra en las figuras 5.33 a 5.39.

El coeficiente de Manning estimado en campo se consideró variable según el nivel que adquiriera el agua para cada gasto, y se representó en las mismas figuras de manera que para niveles comprendidos dentro de la zona *a* se estimó un valor $n = 0.025$; dentro de la zona *b*, $n = 0.035$; y dentro de la zona *c*, $n = 0.040$. Esto se explica al observar la tendencia que sigue la geometría de las secciones en las figuras 5.33 a 5.39: al aumentar la elevación del agua se alcanza una zona donde el perímetro mojado se incrementa rápidamente y por ello el radio hidráulico disminuye. Con esto se tiene el efecto combinado de la rugosidad del cauce y de la vegetación en la llanura. El radio hidráulico en la zona *c* de las figuras vuelve a aumentar, pero ya es claro el efecto de la vegetación.

A fin de verificar los coeficientes de Manning antes mencionados, se propuso realizar una serie de mediciones del nivel de agua y el gasto en la sección 6 durante un período de siete meses, simultáneas con las de la sección de aforo. Las mediciones de nivel en dicha sección se hicieron en instantes en que la variación del caudal en el tramo no era importante, aceptando con ello la existencia de flujo permanente en el mismo.

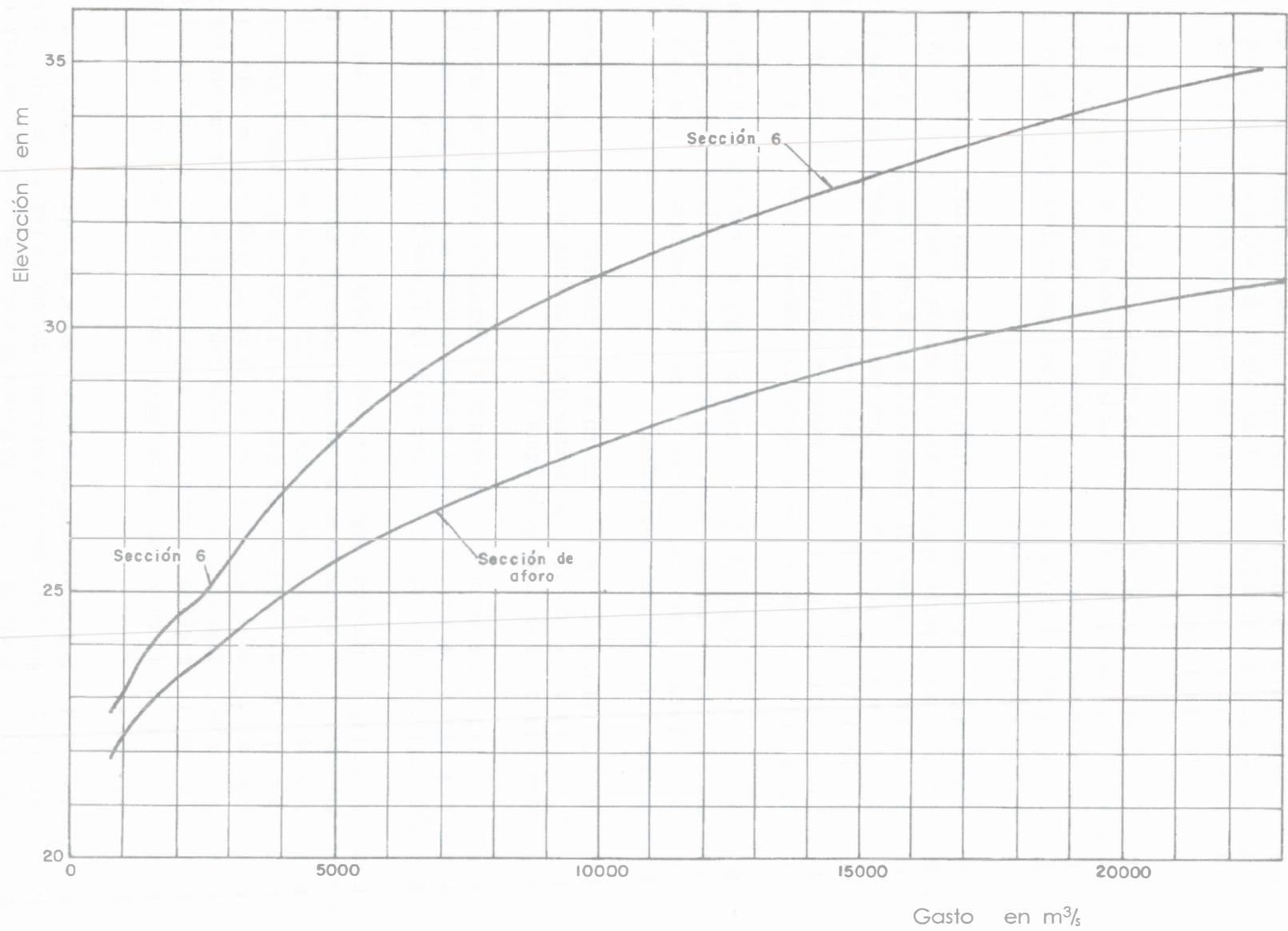


Figura 5.31. Curvas gasto-elevación en la sección de aforo y en la 6 del río en el ejemplo 5.9

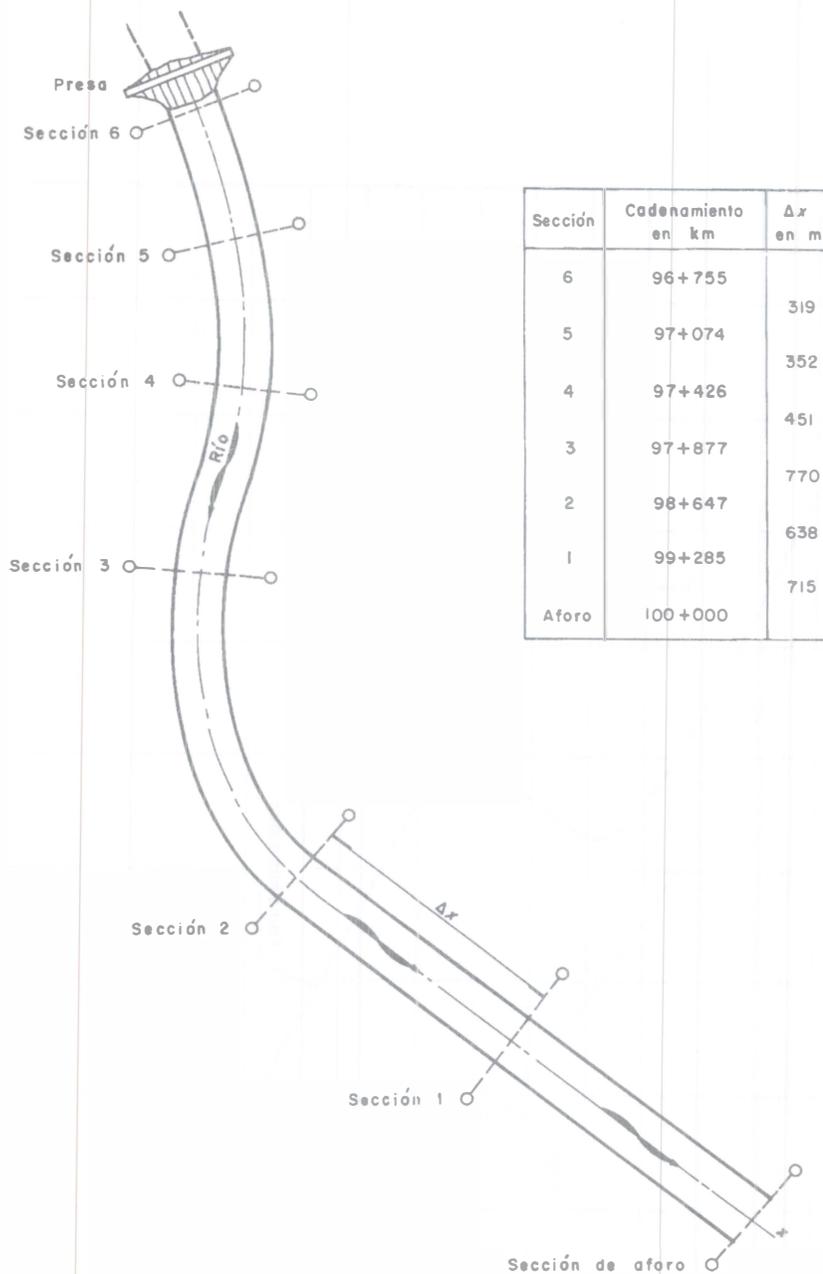


Figura 5.32. Secciones del levantamiento topohidráulico en el río del ejemplo 5.9

El gasto registrado en el río durante el período de mediciones sólo alcanzó un máximo de $2546.2 \text{ m}^3/\text{s}$, por lo que la verificación de coeficientes de Manning es posible sólo para niveles bajos del agua. Los resultados de dichas mediciones se presentan en la tabla 5.16, donde se muestran también el gasto aforado en la estación hidrométrica durante el período, así como el obtenido en otros años de registro.

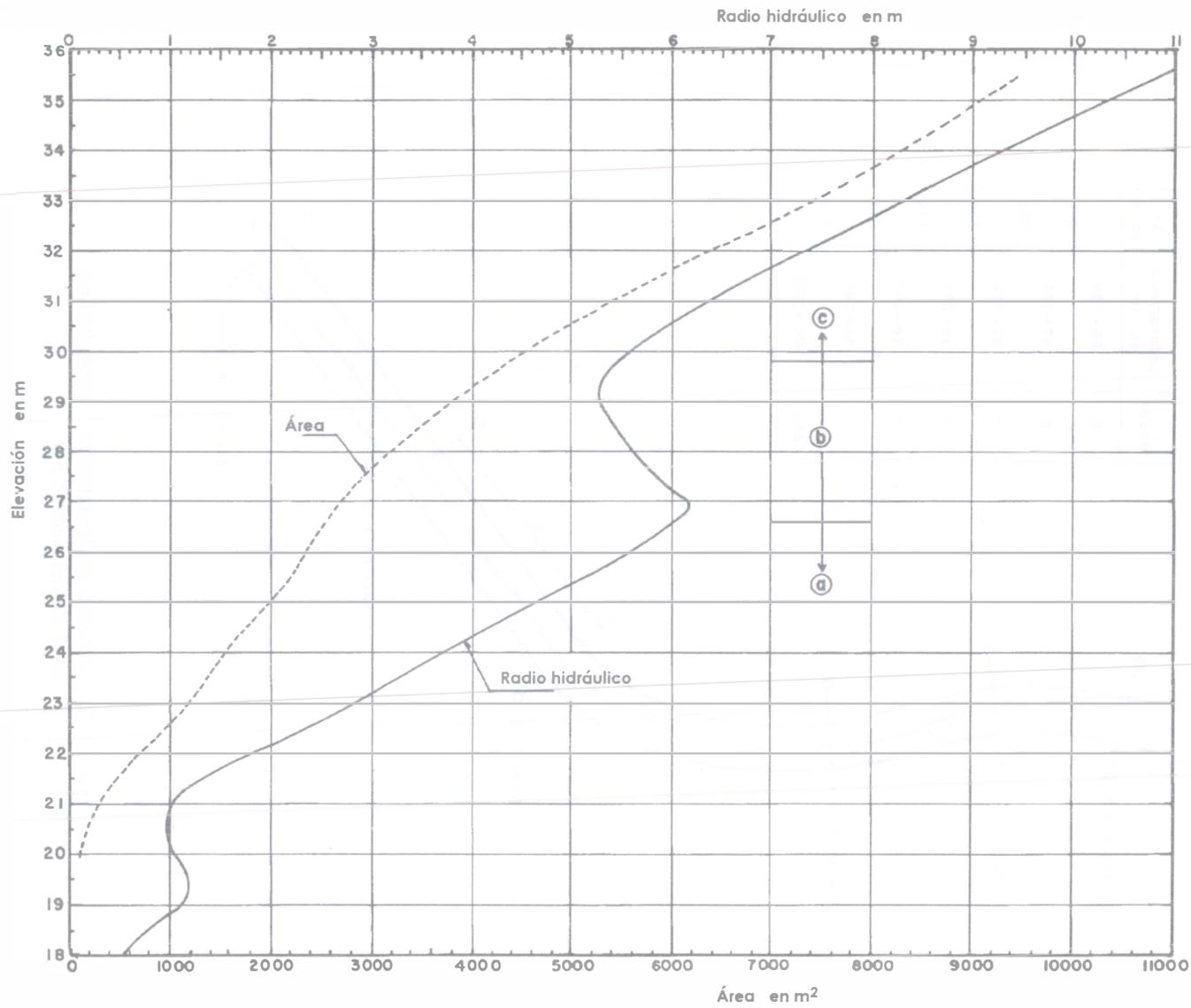


Figura 5.33. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 6, ejemplo 5.9

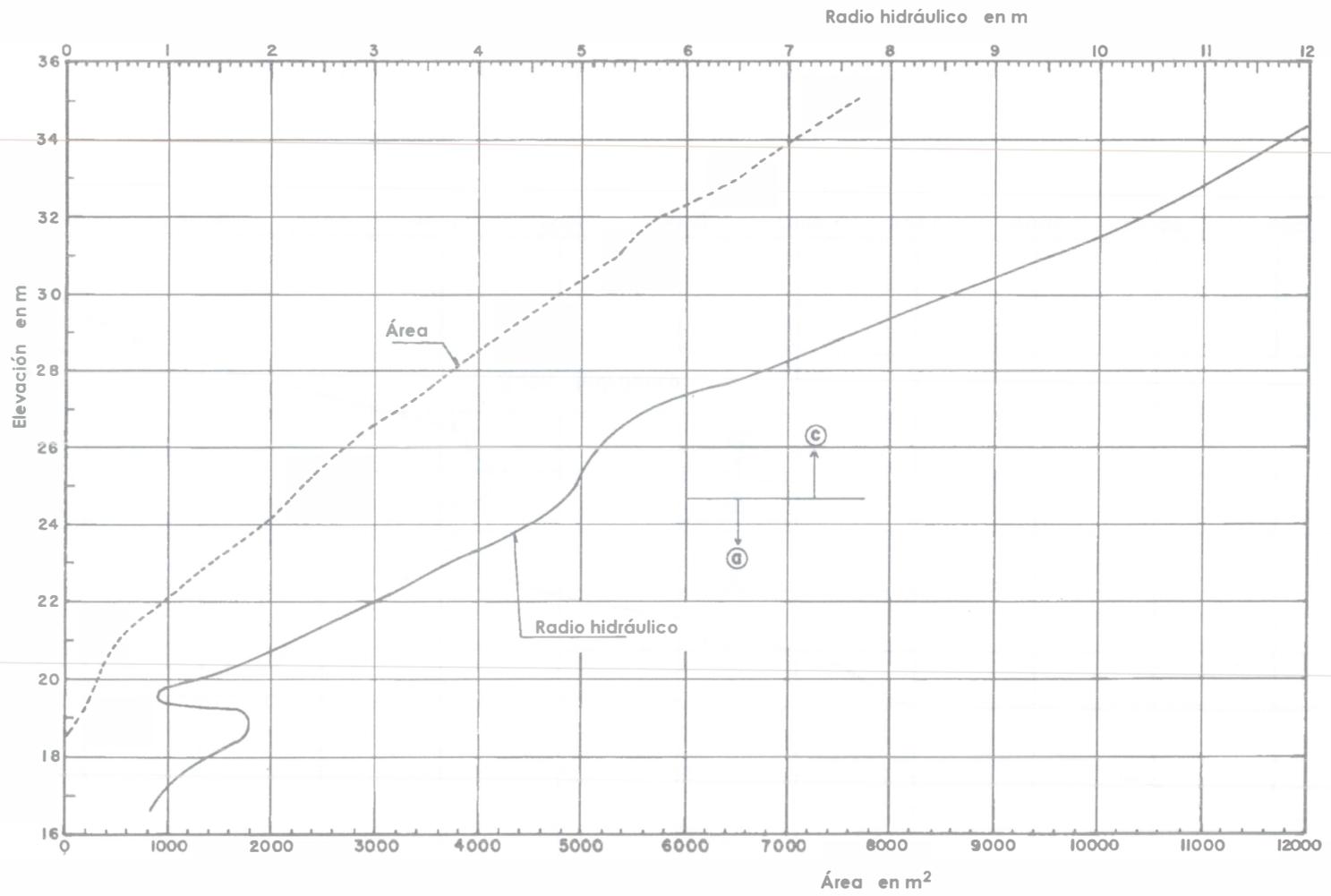


Figura 5.34. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 5, ejemplo 5.9

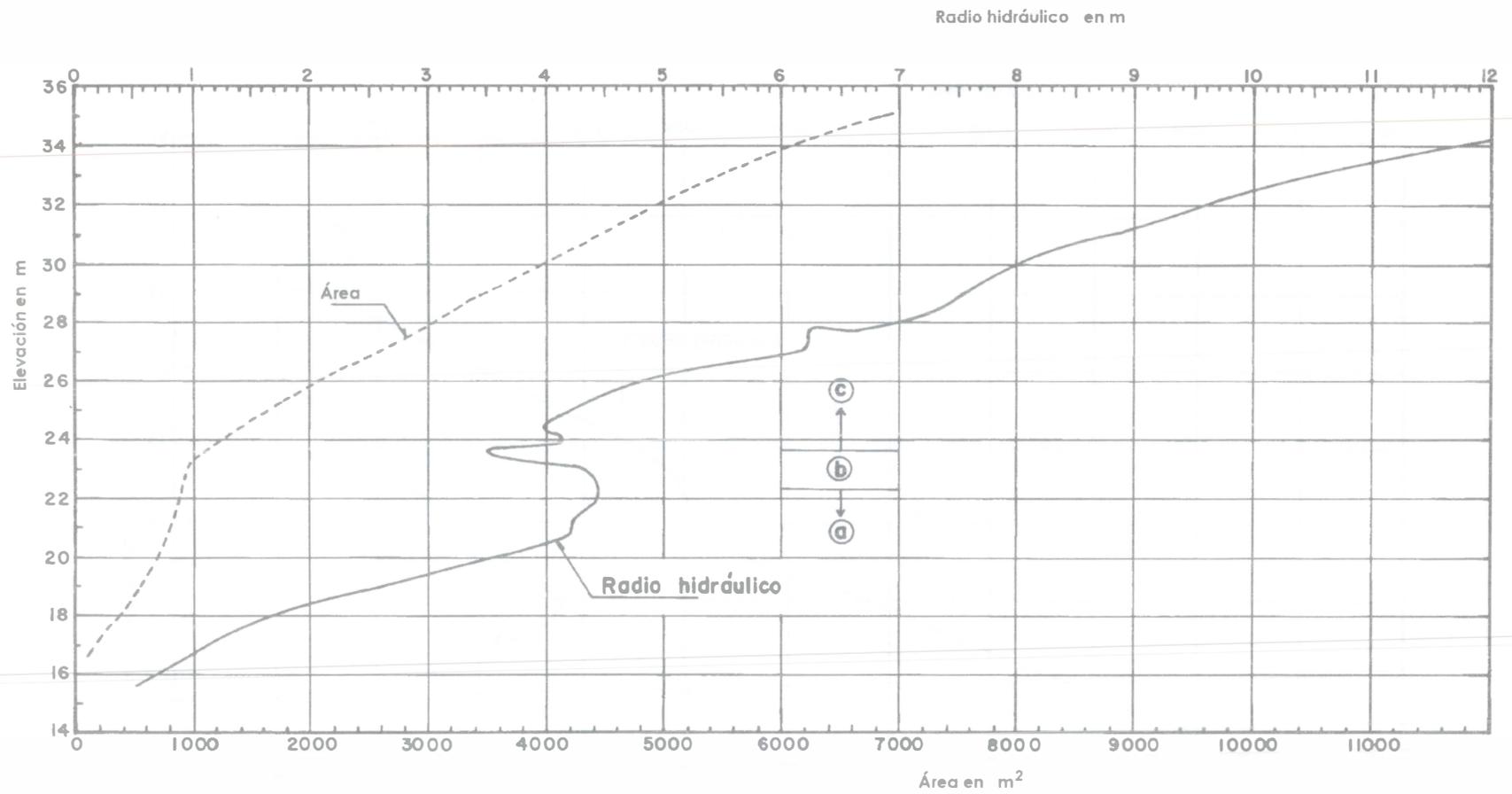


Figura 5.35. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 4, ejemplo 5.9

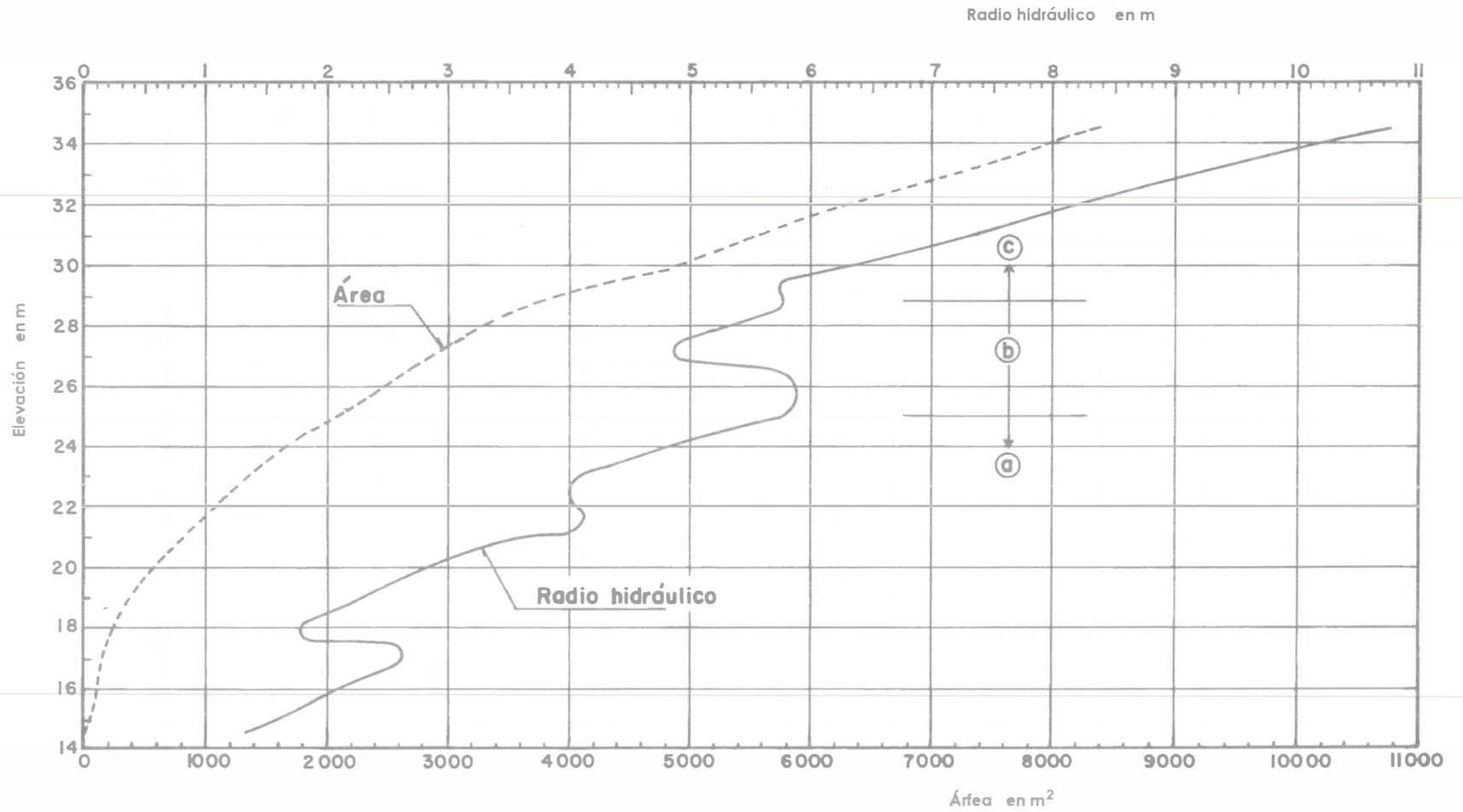


Figura 5.36. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 3, ejemplo 5.9

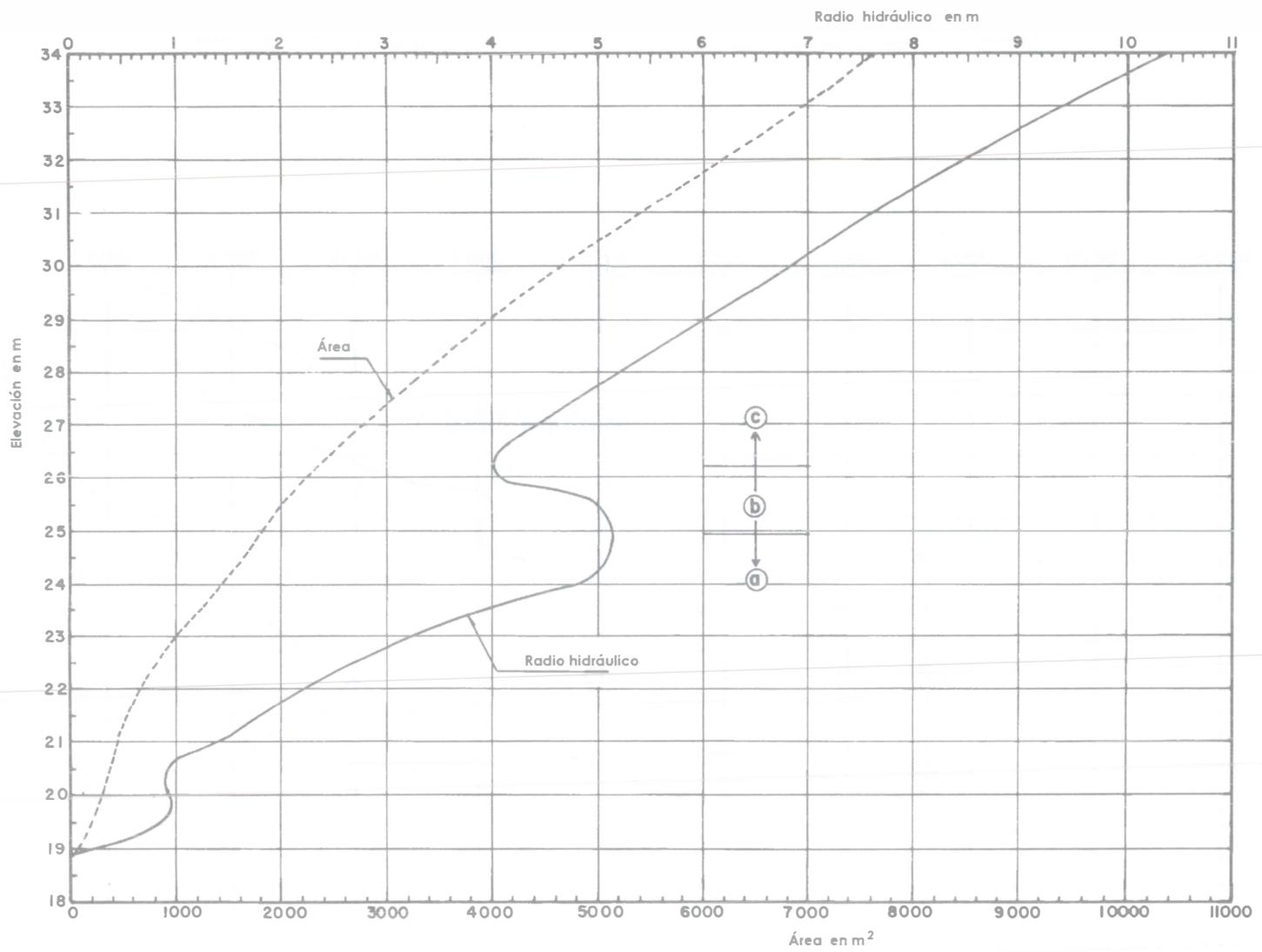


Figura 5.37. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 2, ejemplo 5.9

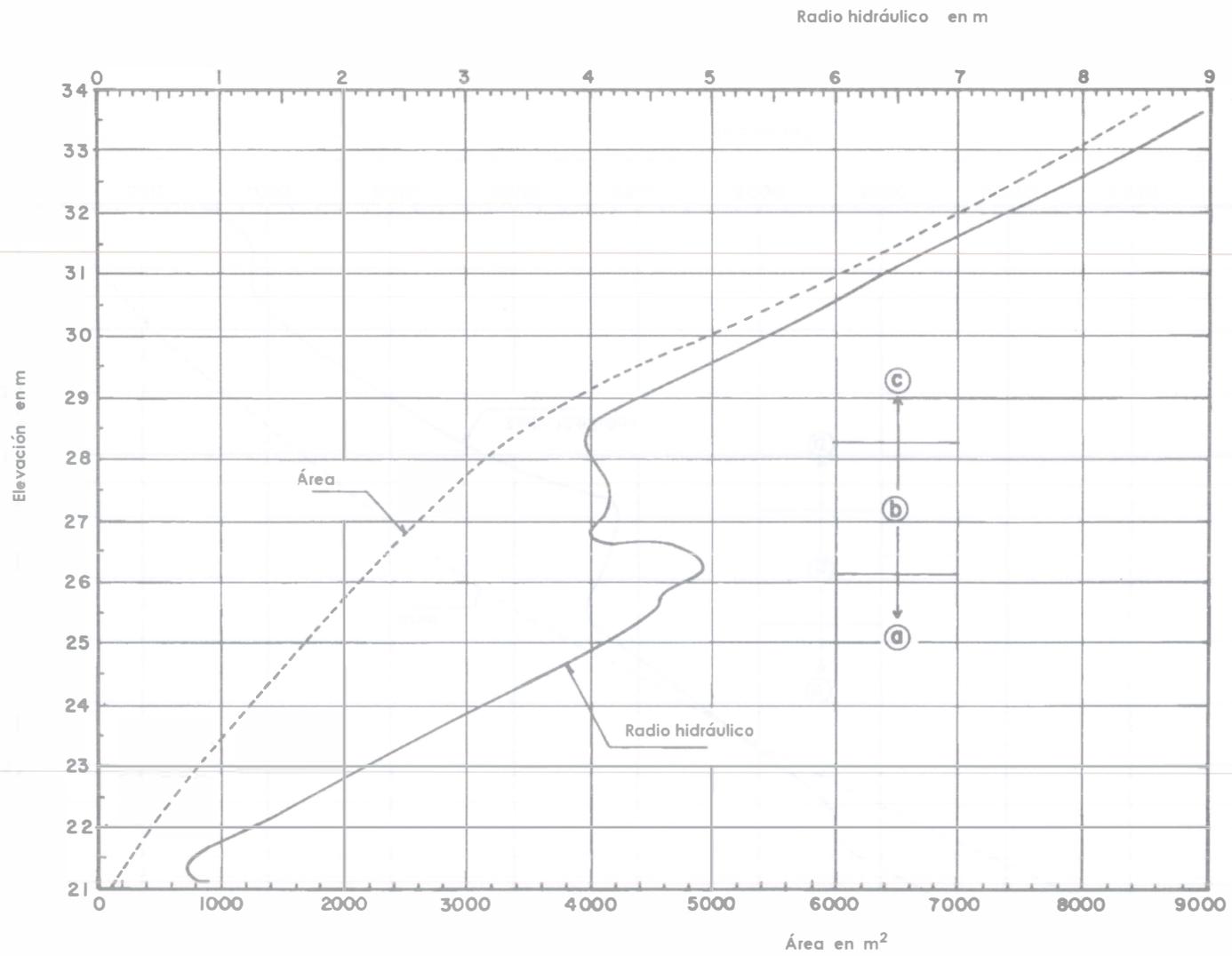


Figura 5.38. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección 1, ejemplo 5.9

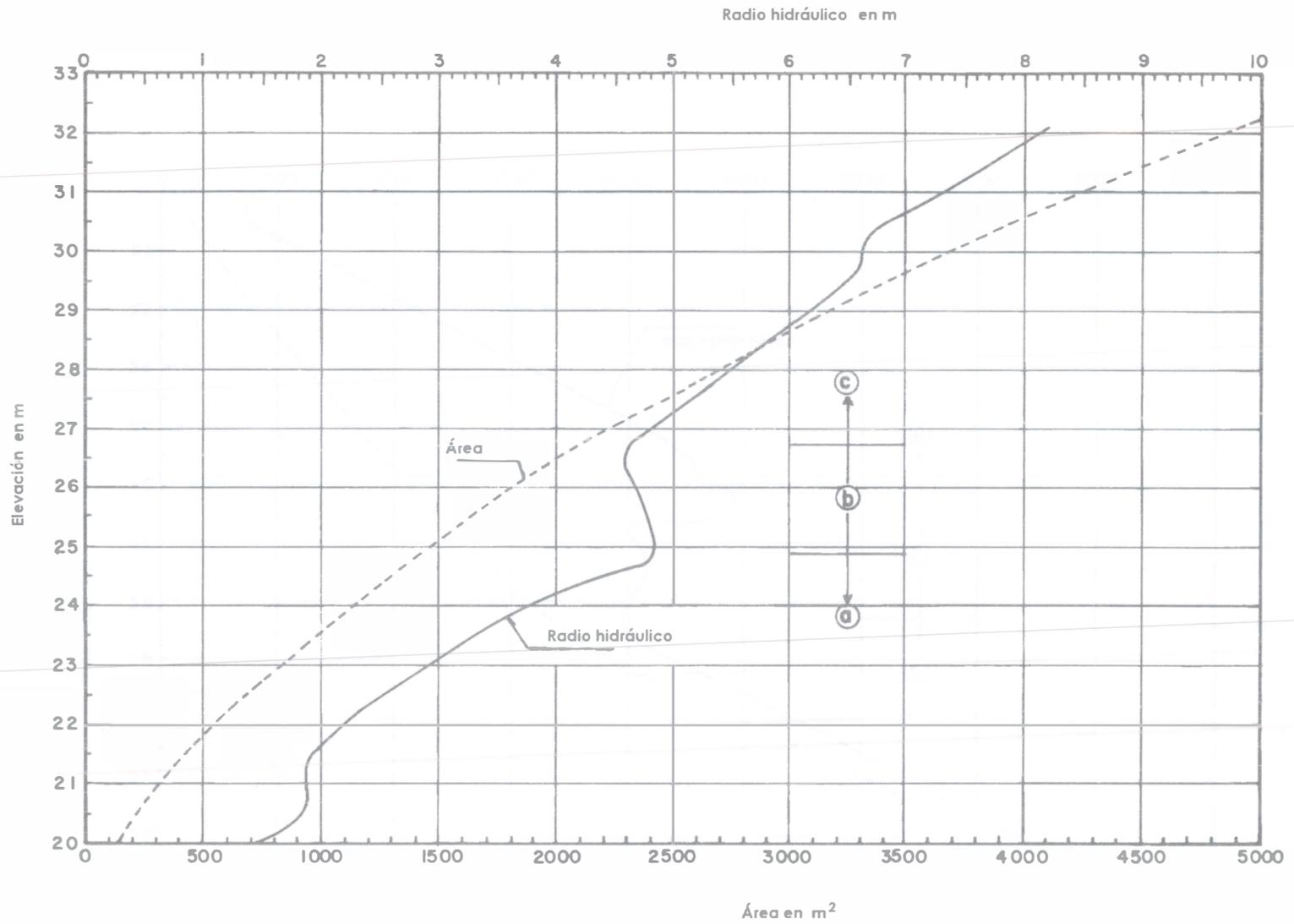


Figura 5.39. Curvas de área-elevación y radio hidráulico-elevación de la sección de aforo del ejemplo 5.9

a) Con base en la información recopilada, verificar el coeficiente de Manning estimado en campo, al menos para el gasto máximo registrado. b) Obtener la curva gasto-elevación en la sección 6 inmediatamente aguas abajo de la presa, a fin de definir el funcionamiento hidráulico de las obras de descarga durante el período de desvío del río y cuando funcione la obra de excedencias. Considérese $\alpha = 1$ y $k_e = 0$.

Solución a. Consiste en obtener el coeficiente de Manning por tanteos. Para ello, se selecciona uno de los gastos para el que se midió el nivel en la sección 6 y en la sección de aforo y con dicho gasto el nivel del agua que le corresponde en esta última; por ejemplo, el gasto aforado en campo. Se tantea un valor de n , por ejemplo, el estimado en campo, y se calcula el perfil del agua en la dirección contraria al flujo con el auxilio de las secciones intermedias, hasta llegar a la sección 6. El nivel calculado en esta sección debe ser el mismo que se midió en ella para el gasto escogido, siempre que el valor de tanteo de n sea el correcto. En caso contrario, se escoge otro valor de n , mayor o menor, de acuerdo al resultado que se obtenga, procediendo de la misma manera hasta que el nivel calculado en la sección 6 sea el mismo que se midió. Después, se escoge otro gasto para el que se haya medido el nivel del agua en la sección 6 y se procede de la misma manera con los tanteos del coeficiente de Manning. Esto significa que puede haber un valor de n distinto para cada caudal pero dentro del mismo orden de magnitud.

Tabla 5.16. Valores del gasto y elevación del agua en el ejemplo 5.9

Gasto en m ³ /s	Elevación en m	
	Sección de aforo	Sección 6
740	21.876	22.739
1010	22.217	23.058
1322	22.633	23.619
1347	22.635	23.564
1883	23.196	24.312
2395	23.669	24.774
2546	23.735	24.917
5000	25.60	---
7500	26.75	---
12500	28.63	---
17500	29.95	---
22500	30.90	---

Se selecciona por ejemplo el gasto máximo $Q = 2546 \text{ m}^3/\text{s}$ y se escoge el valor de tanteo $n = 0.026$.

Conviene utilizar el método estándar por pasos haciendo el cálculo en dirección contraria al flujo. El proceso de cálculo se ilustra en la tabla 5.17 con una presentación un poco diferente y a continuación se explica la manera como se realiza, sólo para los tres primeros renglones.

1. *Primer renglón.* Para el gasto de $2546 \text{ m}^3/\text{s}$, la elevación del agua en la sección de aforo es 23.735 m . Para esa elevación, en la figura 5.39 se obtiene el área $A = 1070 \text{ m}^2$ y el radio hidráulico $R_h = 3.52 \text{ m}$.

Tabla 5.17. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9. Gasto de $2546 \text{ m}^3/\text{s}$ y coeficiente de Manning $n = 0.026$

Sección	Elevación del agua en m	A en m^2	R_h en m	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S_f (por 10^{-3})	$S_f \frac{\Delta x}{2}$ en m	H_2 en m	H_1 en m
Aforo	23.735	1070	3.52	2.379	0.289	0.715	0.256	24.279	
1	24.266	1325	3.39	1.922	0.188	0.490	0.175		24.279
1	24.266				0.188		0.156	24.611	
2	24.547	1640	5.10	1.552	0.123	0.186	0.059		24.611
2	24.547				0.123			24.741	
3	24.697	1835	5.30	1.387	0.098	0.141	0.054		24.741
3	24.697				0.098		0.032	24.827	
4	24.750	1525	4.10	1.670	0.142	0.287	0.065		24.827
4	24.750				0.142		0.051	24.943	
5	24.897	2280	4.95	1.117	0.064	0.100	0.018		24.943
5	24.897				0.064		0.016	24.977	
6	24.917	1980	4.60	1.286	0.084	0.146	0.023		24.978

Se calculan la velocidad media y la carga de velocidad

$$V = \frac{2546}{1070} = 2.379 \text{ m/s}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.2886 \text{ m}$$

Se calcula la pendiente de fricción de la ecuación de Manning

$$S_f = \left[\frac{2.379 (0.026)}{(3.52)^{2/3}} \right]^2 = 0.000715$$

Se calcula $S_f \Delta x/2$, donde Δx es la distancia entre la sección de aforo y la de aguas arriba (sección 1 en este caso)

$$S_f \frac{\Delta x}{2} = 0.000715 (715) / 2 = 0.256 \text{ m}$$

Una cantidad constante en la sección de aforo (sección 2), según la ecuación 5.23 y con $h_2 = z_2 + y_2$, debe ser

$$H_2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + S_{f2} \frac{\Delta x}{2} = 23.735 + 0.289 + 0.256 = 24.279 \text{ m}$$

2. *Segundo renglón.* Se supone una elevación del agua en la sección siguiente, en este caso la 1, por ejemplo 24.266 m, y se repiten los mismos pasos del renglón 1 con la figura 5.38 que corresponde a la sección 1, como sigue:

$$A = 1325 \text{ m}^2$$

$$R_h = 3.39 \text{ m}$$

$$V = 2546/1325 = 1.922 \text{ m/s}$$

$$V^2/2g = 0.188 \text{ m}$$

$$S_f = \left[\frac{1.922 (0.026)}{(3.39)^{2/3}} \right]^2 = 0.00049$$

$$S_f \frac{\Delta x}{2} = 0.00049 (715)/2 = 0.175 \text{ m}$$

Una cantidad similar a H_2 en la sección 1, según la ecuación 5.23 resulta

$$H_1 = 24.266 + 0.188 - 0.175 = 24.279 \text{ m}$$

Se comparan H_1 y H_2 . Para ello, se fija una tolerancia, TOL, de modo que se compare $|H_2 - H_1|$ con TOL. Si $|H_2 - H_1| > \text{TOL}$ se debe corregir la elevación del agua en la sección 1 con la ecuación 5.30 y la que le sigue. Con el nuevo valor de y y h se regresa a calcular un nuevo

segundo renglón. Si H_2 es mayor que H_1 la elevación del agua en 1 debe ser menor a la que se había supuesto y viceversa.

Para el ejemplo se consideró que $TOL \leq 0.001$ m, por lo que el tanteo con la elevación 24.266 m es correcto y se pasa al siguiente tramo y se repite el razonamiento, siendo la sección 1 ahora la 2.

3. *Tercer renglón.* Se calcula el nuevo valor de H_2 para la elevación aceptada como correcta en el renglón anterior, pero ahora con la distancia $\Delta x = 638$ m del siguiente subtramo, de modo que

$$S_f \Delta x/2 = 0.00049 (638)/2 = 0.156 \text{ m}$$

$$H_2 = 24.266 + 0.188 + 0.156 = 24.611 \text{ m}$$

4. *Renglones siguientes.* Se pasa a la siguiente sección (2) y se repiten los pasos indicados para el segundo renglón. Deben utilizarse las figuras correspondientes a cada sección para el cálculo de las áreas y radios hidráulicos.
5. *Comparación de niveles.* Al llegar con el cálculo del perfil del flujo a la sección 6, el nivel de agua calculado en dicha sección resulta ser 24.917 m, que es igual al medido (24.917 m). En caso de que no hubiera resultado la misma elevación, debe escogerse una n mayor o menor según el resultado que se obtenga y se repiten los cálculos anteriores.
6. *Verificación para otros gastos.* Conviene hacer verificaciones similares para otros gastos, que ya no se explican y que se dejan al lector como ejercicio. Para dichos gastos se encuentra que n es del mismo orden de magnitud.

Se acepta que el coeficiente de Manning para el intervalo de gastos analizados es $n = 0.026$.

Solución b. Se escogen los gastos de 5000, 7500, 12500, 17500 y 22500 m³/s. El procedimiento de cálculo es el mismo que el de la solución *a*, excepto que ahora se dan por conocidos los valores: $n = 0.035$ cuando en cada sección haya niveles del agua en la zona *b*, y $n = 0.04$ cuando los haya en la zona *c*. Estos valores fueron estimados en campo.

1. *Cálculo para $Q = 5000$ m³/s.* En la tabla 5.18 se muestra dicho cálculo. La elevación del agua del primer renglón se obtiene de la curva de gasto-elevación, figura 5.31. Aunque no aparecen los cálculos de las correcciones en la tabla, éstas se hicieron utilizando la ecuación 5.30 en la misma forma que en el ejemplo 5.8. El nivel del agua en la sección resulta 27.953 m, que proporciona un punto en la figura 5.31.
2. *Cálculo para otros gastos.* En las tablas 5.19 a 5.22 se muestran los cálculos para otros gastos. Con las elevaciones del agua en la sección 6, se dibujó la curva gasto-elevación mostrada en la figura 5.31, que es la solicitada.

Tabla 5.18. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9.
Gasto de 5000 m³/s

Sección	Elevación del agua en m	A en m ²	R _h en m	n	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S _f (por 10 ⁻³)	S _f $\frac{\Delta x}{2}$ en m	H ₂ en m	H ₁ en m
Aforo	25.60	1660	4.75	0.035	3.012	0.462	1.392	0.498	26.56	
1	26.627	2400	4.12	0.035	2.083	0.221	0.805	0.288		26.56
1	26.627							0.257	27.105	
2	27.154	2880	4.58	0.040	1.736	0.154	0.634	0.202		27.105
2	27.154					0.154		0.244	27.552	
3	27.563	3040	5.00	0.035	1.645	0.138	0.388	0.149		27.552
3	27.563					0.138		0.087	27.788	
4	27.731	2920	6.20	0.040	1.712	0.149	0.412	0.093		27.788
4	27.731					0.149		0.072	27.953	
5	27.901	3700	6.70	0.040	1.351	0.093	0.231	0.041		27.953
5	27.901					0.093		0.037	28.031	
6	27.953	3180	5.62	0.035	1.572	0.126	0.303	0.048		28.031

Tabla 5.19. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9. Gasto de 7500 m³/s

Sección	Elevación del agua en m	A en m ²	R _h en m	n	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S _f (por 10 ⁻³)	S _f $\frac{\Delta x}{2}$ en m	H ₂ en m	H ₁ en m
Aforo	26.75	2120	4.62	0.04	3.538	0.638	2.602	0.930	28.318	
1	28.50	3500	3.98	0.04	2.143	0.234	1.165	0.416		28.318
1	28.50					0.234		0.372	29.106	
2	29.09	4030	6.05	0.04	1.861	0.177	0.503	0.160		29.106
2	29.09					0.177		0.194	29.460	
3	29.487	4400	5.72	0.04	1.705	0.148	0.454	0.175		29.460
3	29.487					0.148		0.102	29.738	
4	29.627	3750	7.80	0.04	2.000	0.204	0.414	0.093		29.738
4	29.627					0.204		0.073	29.904	
5	29.816	4700	8.47	0.04	1.596	0.130	0.236	0.042		29.904
5	29.816					0.130		0.038	29.983	
6	29.913	4470	5.52		1.678	0.143	0.462	0.074		29.983

Tabla 5.20. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9.
Gasto de 12500 m³/s

Sección	Elevación del agua en m	A en m ²	R _h en m	n	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S _f (por 10 ⁻³)	S _f $\frac{\Delta x}{2}$ en m	H ₂ en m	H ₁ en m
Aforo	28.630	3000	5.90	0.04	4.167	0.885	2.606	0.931	30.446	
1	30.458	5500	5.93	0.04	2.273	0.263	0.770	0.275		30.446
1	30.458					0.263		0.246	30.967	
2	30.878	5370	7.55	0.04	2.328	0.276	0.585	0.187		30.967
2	30.878					0.276		0.225	31.380	
3	31.331	5730	7.68	0.04	2.182	0.243	0.503	0.193		31.380
3	31.331					0.243		0.113	31.687	
4	31.459	4700	9.18	0.04	2.660	0.361	0.589	0.133		31.687
4	31.459					0.361		0.104	31.923	
5	31.732	5590	10.16	0.04	2.236	0.255	0.364	0.064		31.923
5	31.732					0.255		0.058	32.045	
6	31.916	6320	7.28	0.04	1.978	0.199	0.444	0.071		32.045

Tabla 5.21. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9.
Gasto de 17500 m³/s

Sección	Elevación del agua en m	A en m ²	R _h en m	n	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S _f (por 10 ⁻³)	S _f $\frac{\Delta x}{2}$ en m	H ₂ en m	H ₁ en m
Aforo	29.95	3670	6.62	0.04	4.768	1.159	2.927	1.046	32.155	
1	32.085	7020	7.40	0.04	2.493	0.317	0.690	0.247		32.155
1	32.085					0.317		0.220	32.622	
2	32.454	6500	8.87	0.04	2.692	0.369	0.632	0.201		32.622
2	32.454					0.369		0.243	33.067	
3	32.958	7180	9.07	0.04	2.437	0.303	0.503	0.193		33.067
3	32.958					0.303		0.081	33.341	
4	32.977	5440	10.47	0.04	3.217	0.527	0.723	0.163		33.341
4	32.977					0.527		0.127	33.632	
5	33.360	6700	11.32	0.04	2.612	0.348	0.429	0.076		33.632
5	33.360					0.348		0.068	33.776	
6	33.595	7920	8.83	0.04	2.210	0.249	0.428	0.068		33.776

Tabla 5.22. Cálculo del perfil del flujo en el tramo del río del ejemplo 5.9.
Gasto de 22500 m³/s

Sección	Elevación del agua en m	A en m ²	R_h en m	n	V en m/s	$\frac{V^2}{2g}$ en m	S_f (por 10 ⁻³)	$S_f \frac{\Delta x}{2}$ en m	H_2 en m	H_1 en m
Aforo	30.9	4200	7.27	0.04	5.357	1.463	3.260	1.166	33.528	
1	33.385	8300	8.80	0.04	2.711	0.375	0.647	0.231		33.528
1	33.385					0.375		0.206	33.966	
2	33.711	7450	10.22	0.04	3.020	0.465	0.658	0.210		33.966
2	33.711					0.465		0.253	34.429	
3	34.241	8180	10.70	0.04	2.751	0.386	0.513	0.198		34.429
3	34.241					0.386		0.116	34.742	
4	34.237	6170	12.10	0.04	3.647	0.678	0.766	0.172		34.742
4	34.237					0.678		0.135	35.050	
5	34.683	7500	12.10	0.04	3.000	0.459	0.518	0.091		35.050
5	34.683					0.459		0.083	35.224	
6	34.981	9080	10.32	0.04	2.478	0.313	0.437	0.070		35.224

5.8 CÁLCULO DEL FLUJO EN CANALES DE SECCIÓN COMPUESTA

5.8.1 Antecedentes

Es común que la canalización de ríos que atraviesan las ciudades o de emisores de aguas residuales o combinadas, se realicen mediante canales artificiales de sección compuesta. También los ríos de planicie tienen secciones del mismo tipo cuando se presentan avenidas cuyo caudal excede la capacidad del cauce principal.

Cuando ocurre una avenida en un canal compuesto, el agua rebasa usualmente el nivel de desbordamiento de la subsección más profunda e inunda las subsecciones laterales más elevadas. Esto modifica sustancialmente el comportamiento del flujo en cada parte de la sección, toda vez que la velocidad media en ellas difiere, a veces, notablemente, así como los valores del coeficiente α de una sección a otra. La sección hidráulica del canal se compone de varias subsecciones que forman sistemas paralelos de flujo con características hidráulicas distintas; esto es, pérdidas de energía, velocidad, tirante, etc., diferentes, produciéndose intercambio de momentum entre las subsecciones central y de inundación lateral.

El flujo uniforme en canales compuestos ha sido tratado en el subcapítulo 2.9 y las características del régimen crítico en el 3.9. Para su estudio en flujo uniforme, la sección transversal se dividió en subsecciones con intercaras verticales y características de flujo diferentes en tirante, rugosidad y velocidad, habiéndose definido la velocidad media y los coeficientes α y β en toda

la sección. Para el cálculo del flujo crítico en secciones compuestas fue necesario interpretar nuevas formas del número de Froude para encontrar congruencia con el concepto de energía específica mínima, resultando la definida por Blalock y Sturm como la más recomendable por su sencillez y precisión, y porque admite la variación de n con el tirante. Otra variante es la de Chaudhry (referencia 13).

El tratamiento riguroso del flujo gradualmente variado en canales compuestos, siguiendo los mismos lineamientos del flujo uniforme, es extremadamente complicado y poco útil en la práctica si no se hacen hipótesis simplificadoras, debiendo considerar además las condiciones en que ocurren los perfiles de flujo al poder existir más de un tirante crítico para un mismo gasto. Por tanto, es de interés hacer las consideraciones que a continuación se presentan.

5.8.2 Condiciones en que ocurren los perfiles de flujo

La identificación de perfiles de la superficie del agua en canales de sección compuesta debe ser cuidadosa debido a que hay más de un tirante crítico dentro de un intervalo del gasto, como se demostró en el subcapítulo 3.9.

En canales prismáticos de rugosidad uniforme y sección compuesta, donde la pendiente cambia de subcrítica a supercrítica, ocurre flujo gradualmente variado cuando el tirante normal y_n en el tramo de pendiente subcrítica es mayor que el tirante crítico más alto, y y_n en el tramo de pendiente supercrítica es menor que el crítico más bajo. Sin embargo, existe la posibilidad de que el tirante normal quede comprendido entre ambos valores del crítico, en cuyo caso, puede haber confusiones en la caracterización del perfil. Lo mismo ocurre cuando se analiza el perfil del flujo en un canal similar de pendiente constante y el tratamiento puede extenderse a canales naturales.

Los efectos de la posibilidad de tirantes críticos múltiples sobre el perfil del flujo se explican mejor mediante dos ejemplos numéricos. En el primero se considera un canal compuesto de gran longitud que termina en una caída libre en el extremo aguas abajo. El segundo trata también un canal compuesto largo que principia en un embalse en el extremo aguas arriba.

Ejemplo 5.10. Un canal prismático de sección compuesta y gran longitud termina en una caída libre en su extremo aguas abajo. Conduce un caudal de $2.5 \text{ m}^3/\text{s}$, y tiene una rugosidad $k_s = 0.001 \text{ m}$ en la subsección central y $k_s = 0.0026 \text{ m}$ en las subsecciones laterales (figura 5.40). Discutir y esquematizar los perfiles del flujo cuando la pendiente S_0 del canal adquiere los valores: 0.0094, 0.0049, 0.0040 y 0.013.

Solución. La variación de la energía específica y el número de Froude F_B (ecuación 3.78) con el tirante en la sección para el gasto especificado, se representa mediante las curvas mostradas en la figura 5.41b, en las que se ha tomado en cuenta el factor 1.19 de incremento en el valor de n en la subsección más profunda, cuando $y > y_m$ (subcapítulo 3.9). Hay dos tirantes críticos: $y_{c1} = 0.8605 \text{ m}$, $y_{c2} = 1.1266 \text{ m}$, que corresponden a $F_B = 1$.

El tirante normal en el canal depende de la pendiente y se obtiene de la ecuación de Manning, donde n se calculó con la ecuación de Keulegan.

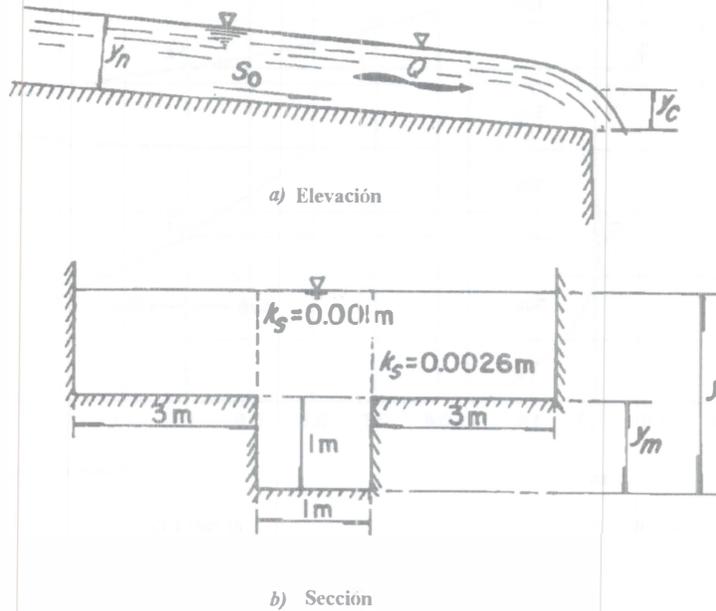


Figura 5.40 Canal compuesto del ejemplo 5.10

El esquema de los perfiles de la superficie libre del agua para las distintas pendientes del canal se muestran en la figura 5.42 y se explican en los siguientes párrafos.

- $S_0 = 0.0094$. El tirante normal es $y_n = 0.744$ m, menor que y_{c1} . El perfil de la superficie del agua se calcula en la dirección del flujo, como se deduce de la figura 5.41b, ya que se produce con número de Froude F_B mayor de uno, esto es, en régimen supercrítico y queda controlado desde aguas arriba. Por tanto, la caída libre no afecta al flujo y éste se mantiene uniforme, con tirante igual al normal, cambiando ligeramente sólo en la proximidad de la caída. El esquema del perfil se muestra en la figura 5.42a.
- $S_0 = 0.0049$. El tirante normal es $y_n = 0.97$ m; esto es, $y_{c1} < y_n < y_m$ y $F_B < 1$. Por tanto, el perfil del flujo se desarrolla en régimen subcrítico, como se deduce de la figura 5.41b, y el control queda en el extremo aguas abajo. El perfil de la superficie del agua se calcula en dirección contraria al flujo, con el tirante inicial cerca del extremo final igual a y_{c1} . El esquema del perfil se muestra en la figura 5.42b.
- $S_0 = 0.0040$. El tirante normal es $y_n = 1.069$ m; esto es, $y_m < y_n < y_{c2}$. La figura 5.41b muestra que el número de Froude F_B para este tirante normal es mayor de 1, por tanto, el flujo se produce en régimen supercrítico. El control se encuentra en el extremo aguas arriba, y la caída libre en el de aguas abajo no afecta significativamente el flujo en el canal, cuyo perfil se presenta en la figura 5.42c. Sturm y Sadiq (1996) demostraron experimentalmente para estas condiciones, que hay valores de y en el perfil cercanos a y_m que ocasionan flujos independientes en las subsecciones, lo que viola la condición de unidimensionalidad.

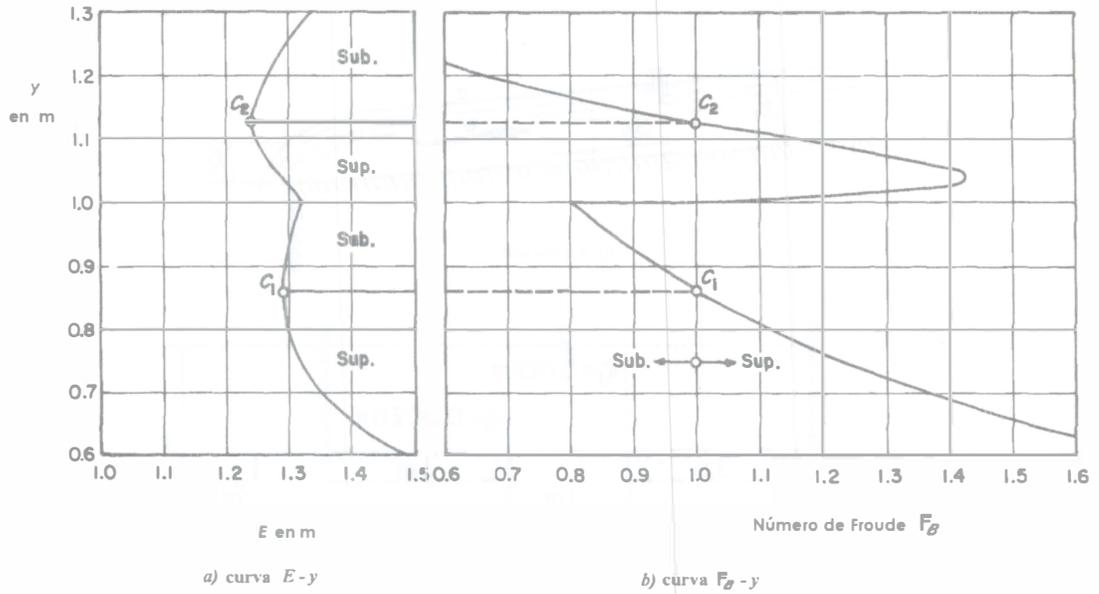


Figura 5.41 Curvas $E-y$ y F_B-y del canal compuesto del ejemplo 5.10, para $Q = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$

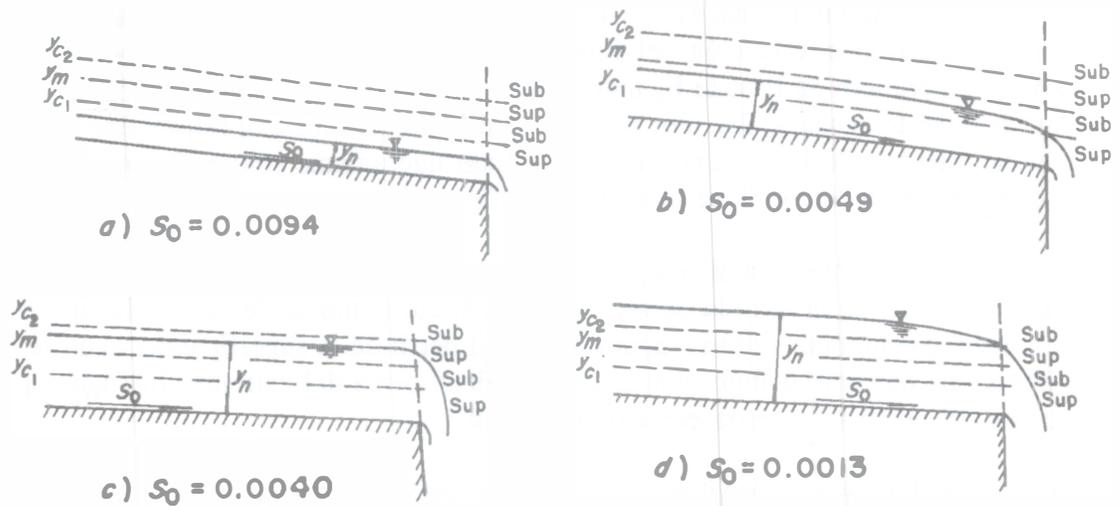


Figura 5.42. Perfiles de la superficie del agua producidos en el canal del ejemplo 5.10

d) $S_0 = 0.0013$. El tirante normal es $y_n = 1.201$ m; esto es, $y_n > y_{c2}$ y el régimen es subcrítico, como se indica en la figura 5.41b. El cálculo del perfil de la superficie del agua se inicia con el tirante en el extremo aguas abajo, el cual es aproximadamente igual a y_{c2} . El tirante varía desde el normal y_n en alguna sección aguas arriba, hasta el crítico y_{c2} cerca del extremo aguas abajo. El perfil de la superficie del agua se muestra esquemáticamente en la figura 5.42d.

Ejemplo 5.11. Un canal de sección compuesta y gran longitud deriva el agua de un embalse, como se presenta en la figura 5.43. La elevación H de la superficie del agua en la presa es de 1.20 m, desde el fondo a la entrada del canal. a) Determinar la variación del gasto que ingresa al canal y el número de Froude que ocurre a la entrada, de acuerdo con los distintos valores posibles que puede adquirir el tirante. b) Determinar el gasto que entra al canal y hacer el esquema del perfil de flujo que se produce para valores de la pendiente S_0 en el canal, como sigue: 0.008, 0.0035, 0.002 y 0.001.

Solución a. Para determinar el gasto que ingresa a un canal de sección sencilla se sigue el criterio de Henderson expuesto en el subcapítulo 5.4. Para ello, se calcula primero la pendiente crítica y si ésta es menor que la del canal, el régimen es supercrítico; por el contrario, si es mayor, el régimen es subcrítico.

Sin embargo, es factible que haya más de un tirante crítico en un canal compuesto, siendo necesario considerar esta posibilidad en el análisis de acuerdo con la discusión que a continuación se presenta.

Si no se incluye la pérdida a la entrada, se satisface la ecuación de energía en la forma

$$H = y + \frac{Q^2}{2g A^2/\alpha}$$

Esto es

$$Q = A \sqrt{2g (H - y) / \alpha} \quad (5.33)$$

donde y es el tirante y A el área hidráulica para el mismo tirante.

Para distintos valores de y se obtienen los correspondientes de Q , a partir de la ecuación 5.33, y su representación gráfica es la variación $Q - y$ que se muestra en la figura 5.44a. El número de Froude F_B se calcula de la ecuación 3.78 para cada valor de Q , y la figura 5.44b muestra la curva de variación $F_B - y$.

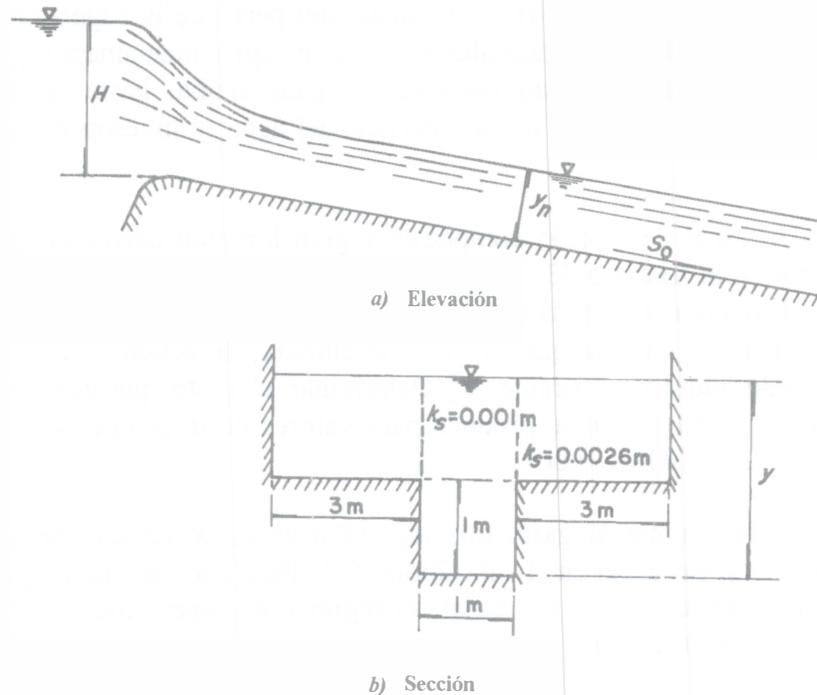


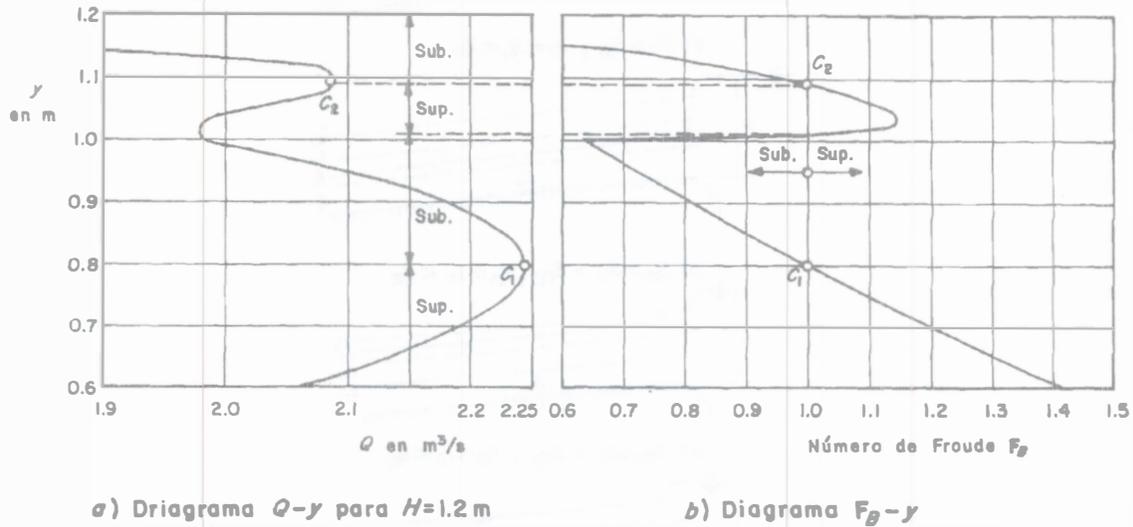
Figura 5.43. Canal compuesto del ejemplo 5.11

Las condiciones de régimen crítico ocurren para $F_B = 1$. En el diagrama $F_B - y$ se localizan dos tirantes críticos: $y_{c1} = 0.8$ m y $y_{c2} = 1.09$ m, que en el diagrama $Q - y$ corresponden a dos gastos críticos: $Q_{c1} = 2.241$ m³/s y $Q_{c2} = 2.087$ m³/s respectivamente. Es claro que el gasto adquiere un valor máximo local para cada tirante crítico.

Solución b. La pendiente crítica que resulta de la ecuación de Manning para las dos situaciones de estado crítico es: $S_{c1} = 0.0063$ y $S_{c2} = 0.00233$ respectivamente. De acuerdo con la pendiente S_0 que adopta el canal, son posibles los cuatro casos siguientes:

- 1) $S_0 = 0.008$ ($S_0 > S_{c1}$). Esta pendiente es mayor que cualquiera de las dos pendientes críticas y el régimen en el canal es supercrítico. El tirante varía rápidamente desde el nivel del embalse hasta el tirante crítico y_{c1} , pasando a través del otro crítico y_{c2} , y se aproxima al tirante normal como se indica en la figura 5.45a. El gasto en el canal es el que corresponde a y_{c1} , esto es, $Q = Q_{c1} = 2.241$ m³/s y permanece constante para cualquier valor de S_0 mayor de 0.0063.
- 2) $S_0 = 0.0035$ ($S_{c1} > S_0 > S_{c2}$). Para esta pendiente, el tirante normal y_n es mayor que y_{c1} pero menor que y_m , y como muestra la figura 5.44b, el número de Froude es menor de 1, por ende, el régimen es subcrítico. En estas condiciones, el gasto en el canal depende del valor numérico que adquiera la pendiente del canal y puede ser obtenido resolviendo simultáneamente las ecuaciones de energía y de Manning para flujo uniforme, en la

misma forma que en el ejemplo 5.1. En el ejemplo aquí tratado, para $S_0 = 0.0035$, $Q = 2.087 \text{ m}^3/\text{s}$, y el tirante normal es igual a 0.96 m . El esquema del perfil del flujo se muestra en la figura 5.45b.



a) Diagrama $Q-y$ para $H=1.2 \text{ m}$

b) Diagrama F_Fr-y

Figura 5.44. Variación del gasto y número de Froude (Blalock - Sturm) con el tirante en el canal del ejemplo 5.11

- 3) $S_0 = 0.002$ ($S_{c1} > S_0 > S_{c2}$). Para esta pendiente, el tirante normal es mayor que y_{c1} pero mayor que y_m y menor que y_{c2} . De este modo, como se presenta en la figura 5.44b, el número de Froude es mayor de 1 y el régimen es supercrítico. El tirante pasa a través del crítico y_{c2} y tiende al normal. El gasto que ingresa al canal para la pendiente solicitada, y para cualquier otra comprendida en el intervalo aquí estudiado, es igual al que corresponde a y_{c2} , esto es, $2.087 \text{ m}^3/\text{s}$. El esquema del perfil del flujo se presenta en la figura 5.45c.
- 4) $S_0 = 0.001$ ($S_0 < S_{c2}$). La pendiente es menor que todas las posibles pendientes críticas, $y_n > y_{c2}$ y el régimen es subcrítico. El gasto se puede calcular como se indicó en el caso 2 y se obtiene $Q = 1.803 \text{ m}^3/\text{s}$ para $y_n = 1.153 \text{ m}$. El esquema del perfil del flujo se muestra en la figura 5.45d.

5.8.3 Tratamiento general

El flujo gradualmente variado en un canal compuesto se produce como el uniforme: dividido en sistemas paralelos de flujo constituidos por las subsecciones del canal, cada uno con esfuerzos de fricción, pérdidas de energía, velocidad, etc., distintos. El tratamiento en estas condiciones implicaría complicaciones exageradas y sería poco práctico.

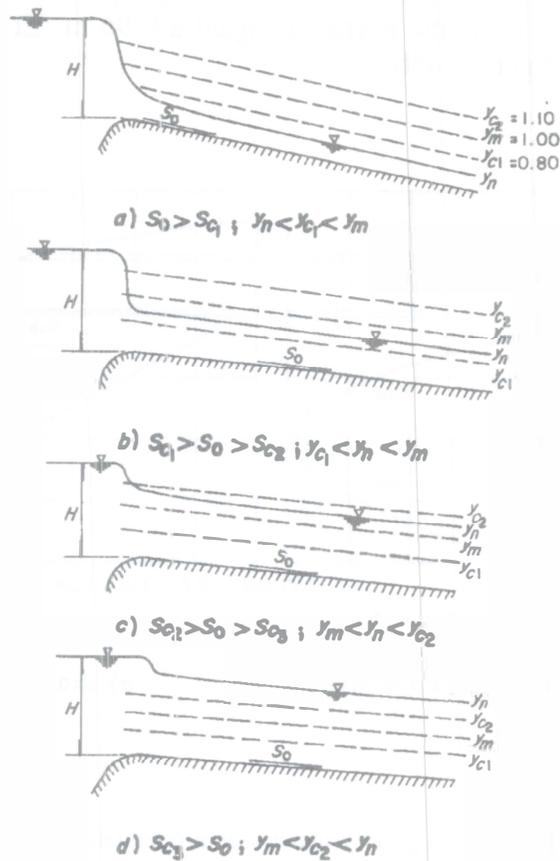


Figura 5.45. Perfiles de la superficie del agua en el canal del ejemplo 5.11

El canal compuesto puede ser prismático o no, y para recurrir a los métodos directo o estándar por pasos son necesarias algunas consideraciones particulares.

Si el canal compuesto es recto, el nivel de la superficie del agua y con éste la presión hidrostática, se mantiene esencialmente constante a través de toda la sección; sin embargo, la velocidad media y la carga de velocidad es diferente en cada región del flujo, ocurriendo incluso intercambio de masa del agua y de momentum entre una y otra, y energía específica distinta en ellas (figura 5.46).

Conviene desde luego utilizar el mismo valor de la energía en toda la sección compuesta, de manera que la línea de energía y cualquier pérdida asociada a ella sean comunes a toda la sección, así como a cada una de las subsecciones individuales. Esta consideración no es estrictamente verdadera pero simplifica el problema y hace práctico el tratamiento.

Para ello, la línea de energía total se ubica a la distancia $\alpha V^2/2g$ por encima de la superficie, como se indica en la figura 5.46. La velocidad media V corresponde a toda la sección compuesta y el coeficiente α se obtiene de la ecuación 2.73, como sigue

$$\alpha = A^2 \left[\frac{\Sigma (\alpha_i K_i^3 / A_i^2)}{(\Sigma K_i)^3} \right] \quad (5.34)$$

donde α_i , K_i , A_i son el coeficiente de energía, el factor de conducción y el área de cada subsección respectivamente, y A el área total de la sección.

Por otra parte, la pendiente de fricción en cada sección que limita al tramo, se obtiene de la ecuación

$$S_f = \left[\frac{Q}{K} \right]^2 \quad (5.35)$$

donde Q es el gasto total y $K = \Sigma K_i$ el factor de conducción de la sección. De esta manera, los valores de α y S_f , de importancia crucial en el análisis, se pueden calcular sin la valuación explícita de los gastos Q_1 , Q_2 , ..., etc., en las subsecciones, a partir únicamente de los factores K_i de conducción en las mismas, obtenidos de la ecuación 2.47, considerando o no el cambio de n con el tirante.

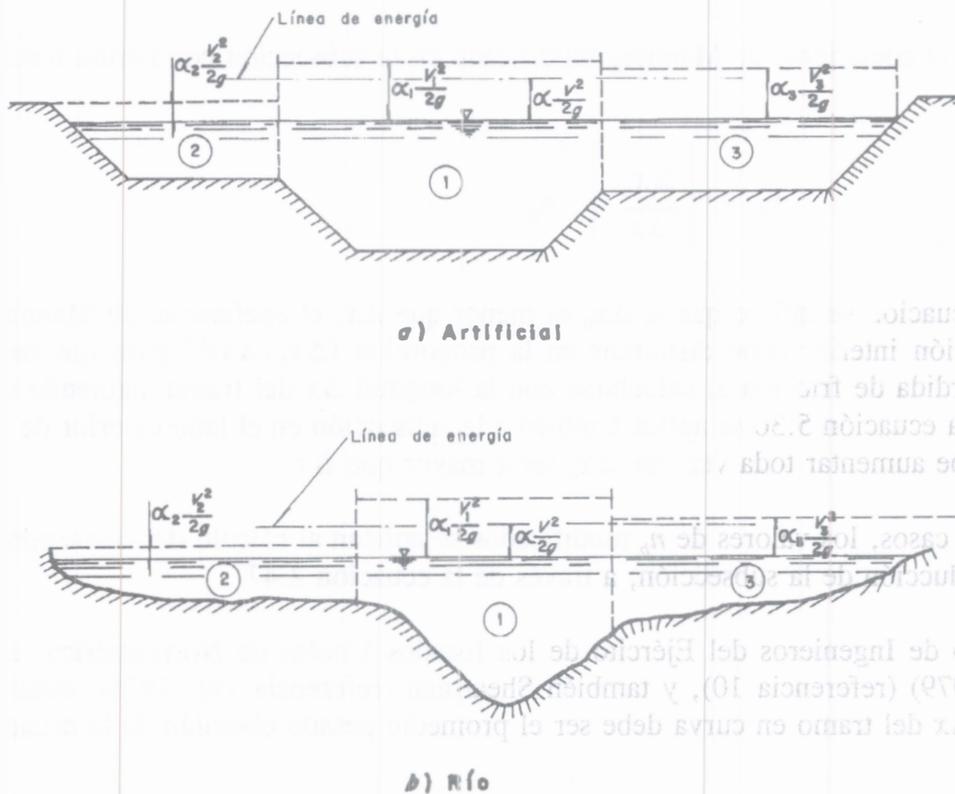


Figura 5.46. Definición de la línea de energía en canales de sección compuesta

Si el canal es recto, la longitud Δx del tramo en estudio es evidentemente la distancia que separa a las dos secciones contiguas siguiendo el eje. Cuando el tramo del canal queda sobre una curva, su longitud puede ser muy distinta si se mide siguiendo el eje de la subsección principal que siguiendo el de las subsecciones en las dos márgenes. En este caso, el criterio más sencillo para incluir el efecto de pérdida en la curva fue propuesto por Henderson y consiste en modificar el coeficiente de Manning de las subsecciones con berma, de modo que la pendiente media de fricción siga siendo representativa del tramo como si fuera recto. Para ello, en cada subsistema del canal compuesto se debe producir la misma pérdida de fricción si se calcula con las características reales de longitud del tramo y coeficiente de Manning, que si se hace con la longitud siguiendo el subsistema central y un coeficiente de Manning modificado.

Para mayor claridad, considérese un tramo curvo de canal cuya sección está compuesta de la subsección central (más profunda) y dos subsecciones con berma. La longitud del tramo siguiendo la subsección central es Δx y la correspondiente a la subsección con berma en el lado interior de la curva es Δx_b , más pequeña que Δx . La subsección en el lado interior de la curva tiene un coeficiente de Manning n_b en el tramo, cuyo valor modificado es n'_b .

Para que haya la misma pérdida de fricción en ambos, se debe cumplir

$$\left[\frac{V_b n_b}{R_{hb}^{2/3}} \right]^2 \Delta x_b = \left[\frac{V_b n'_b}{R_{hb}^{2/3}} \right]^2 \Delta x$$

Por tanto, el coeficiente de Manning modificado en la subsección con berma resulta

$$n'_b = \left[\frac{\Delta x_b}{\Delta x} \right]^{1/2} n_b \quad (5.36)$$

De esta ecuación se infiere que si Δx_b es menor que Δx , el coeficiente de Manning real n_b de la subsección interior debe disminuir en la proporción $(\Delta x_b / \Delta x)^{1/2}$ para que se produzca la misma pérdida de fricción al calcularse con la longitud Δx del tramo siguiendo la subsección central. La ecuación 5.36 se aplica también a la subsección en el lado exterior de la curva sólo que n_b debe aumentar toda vez que Δx_b sería mayor que Δx .

En ambos casos, los valores de n_b modificados se aplican al cálculo del correspondiente factor K_i de conducción de la subsección, a través de la ecuación 2.47.

El Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los Estados Unidos de Norteamérica, en su modelo HEC2 (1979) (referencia 10), y también Shearman (referencia 14) (1976), consideran que la longitud Δx del tramo en curva debe ser el promedio pesado obtenido de la ecuación

$$\Delta x = \frac{\Sigma (K_i \Delta x_i)}{\Sigma K_i} \quad (5.37)$$

donde Δx_i es la distancia curva entre las subsecciones.

Cuando el canal es prismático se aplica el método directo por pasos con la ecuación 5.14 c, donde \bar{F} se interpreta como el número de Froude de Blalock - Sturm medio y la pendiente S_f representativa del tramo se calcula de la media entre las dos secciones. Cuando el canal no es prismático se aplica el método estándar por pasos y son válidas las ecuaciones 5.23 a 5.25 para el cálculo de H_1 y H_2 considerando $\cos \theta \approx 1$. En ambas se sustituye la pendiente de fricción en la sección (ecuación 5.35). También

$$H_1 = z_1 + y_1 + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} \quad (5.38)$$

$$H_2 + h_f + h_e = z_2 + y_2 + \frac{\alpha_2 Q^2}{2g A_2^2} + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \left[\frac{Q^2}{K_1^2} + \frac{Q^2}{K_2^2} \right] + k_e \left[\frac{\alpha_2 Q^2}{2g A_2^2} - \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} \right] \quad (5.39)$$

donde $K_1 = \Sigma_1 K_i$, $K_2 = \Sigma_2 K_i$, α_1 y α_2 (ecuación 5.34) son funciones del tirante en la sección 1 y A_1 y A_2 las áreas totales en las secciones 1 y 2.

Con flujo subcrítico en el canal, el cálculo de su perfil es hacia aguas arriba y H_2 es constante, de manera que con

$$H_e = H_1 - (H_2 + h_f + h_e) \quad (5.40)$$

su derivada respecto de y_1 es

$$\frac{dH_e}{dy_1} = 1 - (1 + k_e) \left[\frac{\alpha_1 Q^2 T_1}{g A_1^3} - \frac{Q^2}{2g A_1^2} \frac{d\alpha_1}{dy_1} \right] + (x_2 - x_1) \left[\Sigma_1 \frac{dK_i}{dy_1} \right] \frac{Q^2}{K_1^3} \quad (5.41)$$

De acuerdo con la definición de número de Froude en canales de sección compuesta obtenida por Blalock y Sturm (ecuación 3.78) y el valor de dK_i/dy_1 dado por la ecuación 3.72, la anterior se convierte en

$$\frac{dH_e}{dy_1} = 1 - (1 + k_e) F_{B1}^2 - \frac{1}{3} (x_1 - x_2) \Sigma_1 \left[\left[\frac{K_i}{K} \right] \left[5 \frac{T_i}{A_i} - \frac{2}{P_i} \frac{dP_i}{dy_1} \right] \right] S_{f1} \quad (5.42)$$

donde Σ_1 es la sumatoria de términos en la sección 1 y F_{B1} se obtiene de la ecuación 3.78 ($g' = g$), que es

$$F_{B1} = \left[\frac{Q^2}{2g (\Sigma_1 K_i)^3} \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{\Sigma_1 K_i} - \sigma_1 \right) \right]^{1/2} \quad (5.43)$$

y σ_1 , σ_2 y σ_3 se calculan de las ecuaciones 3.74 a 3.76 en la sección 1, como sigue

$$\sigma_1 = \Sigma_1 \left[\alpha_i \left(\frac{K_i}{A_i} \right)^3 \left[3 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy_1} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy_1} \right] \right] \quad (5.44)$$

$$\sigma_2 = \Sigma_1 \left[\alpha_i \frac{K_i^3}{A_i^2} \right] \quad (5.45)$$

$$\sigma_3 = \Sigma_1 \left[\frac{K_i}{A_i} \left[5 T_i - 2 R_{hi} \frac{dP_i}{dy_1} - \frac{A_i}{n_i} \frac{dn_i}{dy_1} \right] \right] \quad (5.46)$$

De este modo, se aplica la técnica de convergencia de Newton-Raphson, utilizando la ecuación

$$(y_1)_{i+1} = (y_1)_i - \left[\frac{H_e}{dH_e/dy_1} \right]_i \quad (5.47)$$

y un programa de cómputo para cualquier gasto.

El procedimiento de solución es por tanto idéntico al ya descrito en el método estándar por pasos con algunos cálculos particulares que a continuación se detallan.

1. Si el cálculo debe ser en dirección contraria al flujo, se tienen que conocer los datos necesarios para determinar todas las variables que aparecen en las ecuaciones 5.34, 5.35 y 5.39 para obtener H_2 . Si el tramo en cuestión está en curva, se deben modificar los coeficientes de Manning en las subsecciones laterales o la longitud del tramo, siguiendo alguno de los criterios representados por las ecuaciones 5.36 o 5.37.
2. Se supone un valor inicial de y_1 .
3. Con el valor de y_1 supuesto se obtienen las variables como en el paso 1, pero ahora para la sección 1. Se procede entonces a calcular H_1 con la ecuación 5.38.

4. Se debe cumplir que $|H_e|$ (ecuación 5.40) sea menor que la tolerancia TOL que se desee, en cuyo caso termina el cálculo en el tramo en cuestión, y se continúa con el siguiente aguas arriba. El valor de TOL suele ser entre 0.01 y 0.001 m.
5. Si $|H_e| > \text{TOL}$, se determina un nuevo valor de tanteo de y_1 a partir de las ecuaciones 5.42a y 5.47.

Con este nuevo valor de y_1 se repite el cálculo desde el paso 3 hasta satisfacer la tolerancia deseada.

Cuando el cálculo es manual son posibles algunas simplificaciones. Con $h_1 = z_1 + y_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_d$, al igualar las ecuaciones 5.38 y 5.39 se obtiene el término

$$X_1 = h_1 + Q^2 \left[(1 + k_e) \frac{\alpha_1}{2g A_1^2} - \frac{\Delta x_d}{2 (\Sigma_1 K_i)^2} \right] \quad (5.48)$$

Se sustituye α_1 de la ecuación 5.34 y resulta

$$X_1 = h_1 + Q^2 F_d(h_1)$$

donde

$$F_d(h_1) = (1 + k_e) \frac{\Sigma_1 (\alpha_i K_i^3 / A_i^2)}{2g (\Sigma_1 K_i)^3} - \frac{\Delta x_d}{2 (\Sigma_1 K_i)^2} \quad (5.49)$$

Con $x_2 - x_1 = \Delta x_u$ y el mismo desarrollo, el segundo término es

$$X_2 = h_2 + Q^2 F_u(h_2)$$

donde

$$F_u(h_2) = (1 + k_e) \frac{\Sigma_2 (\alpha_i K_i^3 / A_i^2)}{2g (\Sigma_2 K_i)^3} + \frac{\Delta x_u}{2 (\Sigma_2 K_i)^2} \quad (5.50)$$

siendo Σ_2 la sumatoria de términos en la sección 2.

Toda vez que $X_1 = X_2$, se debe cumplir

$$h_1 + Q^2 F_d(h_1) = h_2 + Q^2 F_u(h_2) \quad (5.51)$$

Debido a que cada sección corresponde al extremo aguas abajo de un tramo o al de aguas arriba del tramo que sigue (en la dirección del flujo), $F_u(h)$ y $F_d(h)$ se deben calcular para cada una. Es decir, Δx no es igual para cada función en la misma sección. En efecto, Δx_d en $F_d(h)$ identifica a la longitud del tramo entre una sección y la que existe inmediatamente aguas abajo y Δx_u , en $F_u(h)$, a la longitud del tramo entre la sección y la que existe inmediatamente aguas arriba. Cada tramo puede tener además una rugosidad distinta. De este modo la función $F_d(h)$ se aplica a la sección en el extremo aguas arriba de un cierto tramo y $F_u(h)$ a la que se encuentra en el extremo aguas abajo.

Para facilitar los cálculos, conviene determinar previamente las funciones $F_u(h)$ y $F_d(h)$ para diferentes valores de h adoptados en cada sección y representarlas gráficamente. De esta manera, para cada sección se obtienen dos curvas distintas, una para cada función.

Siendo $F_u(h)$ y $F_d(h)$ independientes del gasto, una vez valuadas se utilizan para obtener los perfiles de flujo en el canal o río para gastos distintos. Cuando se analiza el perfil de flujo para un solo gasto, o se desean los perfiles para diferentes niveles h en la sección en que se inicia el cálculo (también para un mismo gasto), conviene incluir Q^2 dentro del valor de las funciones.

Ejemplo 5.12. Para impedir las inundaciones de un río que atraviesa una ciudad, se proyecta construir bordos laterales (talud 1:1) de tal manera que los gastos de estiaje queden contenidos dentro del cauce central principal y que al ocurrir avenidas se inunden las subsecciones laterales limitadas por los bordos en las márgenes del río. Las inundaciones se deben a insuficiencia en la capacidad de la sección y al efecto de alteración hacia aguas arriba que ocasiona el nivel que se alcanza en un río de mayores dimensiones (principal), al cual confluye el primero (figura 5.47a). Se ha hecho un levantamiento topográfico de las secciones transversales del río secundario en las estaciones marcadas en dicha figura. Para simplificar su geometría se puede considerar que la forma esquematizada en la figura 5.47b se adapta a la totalidad de las secciones del canal variando exclusivamente las distancias s_2 y s_3 en cada una de ellas. En la figura 5.47c se muestra la geometría del cauce principal. Se estimó que los coeficientes de Manning son $n = 0.025$ para el cauce principal y 0.04 para los laterales, siendo además, $\alpha = 1.15$ para el cauce principal y 1.10 para los laterales. En la tabla 5.23 se presentan la elevación del fondo del cauce principal y los anchos s_2 y s_3 para cada estación.

Tabla 5.23. Dimensiones de las secciones en el ejemplo 5.12

Sección	Estación en km	Elev. fondo cauce principal en m	s_2 en m	s_3 en m
1	2 + 950	247.57	57	70
2	2 + 676	247.77	52	67
3	2 + 327	248.27	50	65
4	2 + 035	248.47	48	64
5	1 + 757	248.84	46	64
6	1 + 428	249.14	45	63
7	1 + 162	249.37	42	62

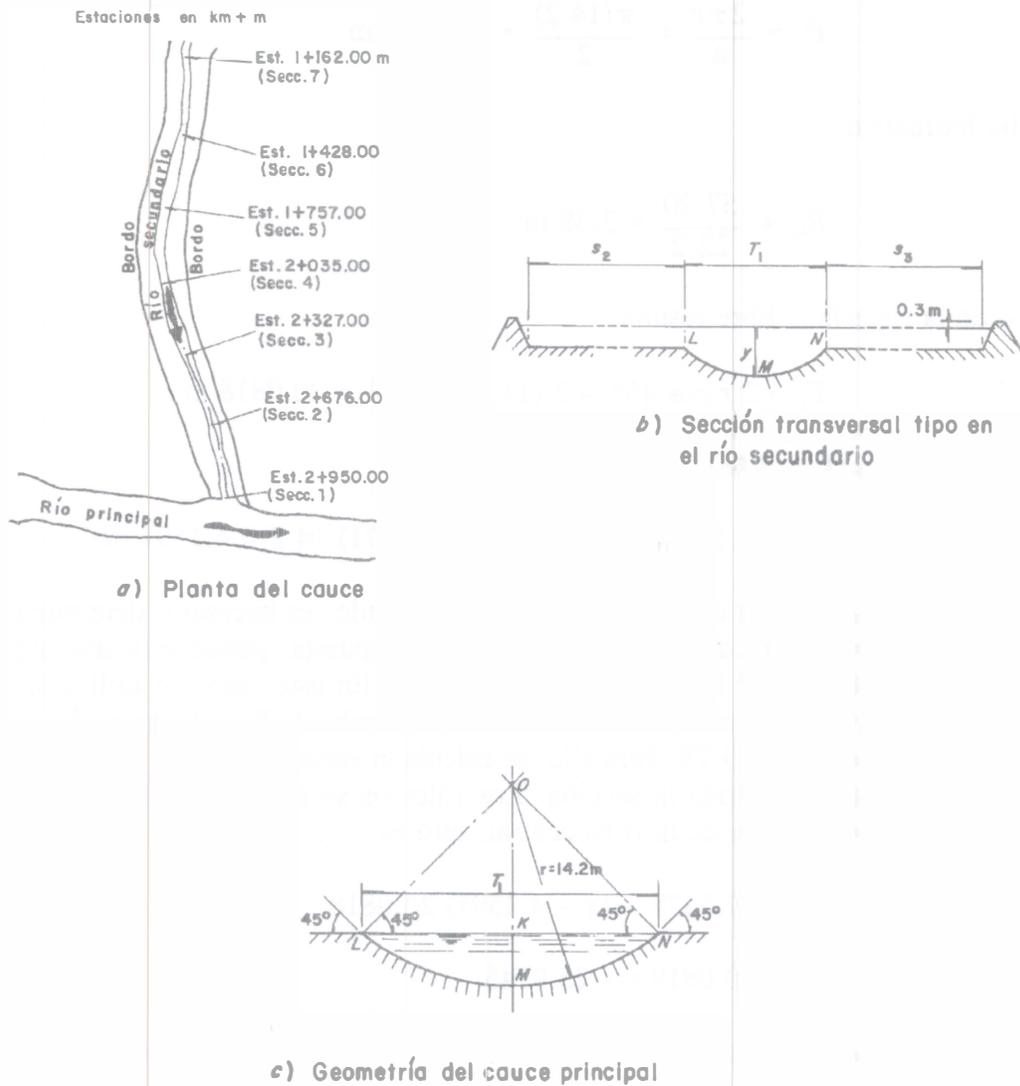


Figura 5.47. Disposición geométrica del río secundario en el ejemplo 5.12

Para un gasto de avenida en el río secundario de $300 \text{ m}^3/\text{s}$, el nivel del agua en la estación $2 + 950$ del río principal alcanza la elevación 255.22 m . Calcular la elevación de la superficie del agua en cada una de las secciones y la altura de la corona de bordos, con un libre bordo de 0.30 m . Considerar que las pérdidas por conversión son despreciables ($k_e = 0$).

Solución. Conviene calcular los elementos geométricos e hidráulicos de la sección del cauce principal mostrada en la figura 5.47c. El área del sector $OLMN$ es igual a $\pi r^2/4 = 0.7854 r^2$; el área del triángulo OLN es igual a $0.5 r^2$. Por tanto, el área del segmento $LKNM$ es $A_0 = 0.2854 r^2$. Esto es

$$A_0 = 0.2854 (14.2)^2 = 57.5477 \text{ m}^2$$

El perímetro mojado resulta

$$P_1 = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi(14.2)}{2} = 22.3053 \text{ m}$$

y el radio hidráulico

$$R_{h1} = \frac{57.20}{22.2} = 2.58 \text{ m}$$

El ancho de la superficie libre resulta

$$T_1 = 2 r \cos 45^\circ = 2 (14.2) 0.7071 = 20.0818 \text{ m}$$

Finalmente, la dimensión KM es

$$KM = (1 - \cos 45^\circ) r = (1 - 0.7071) 14.2 = 4.1591 \text{ m}$$

Para conocer la dirección en que debe efectuarse el cálculo, es necesario determinar el tirante crítico en la sección 1. Debido a que la sección es compuesta, puede aplicarse alguno de los métodos del subcapítulo 3.9 incluyendo el valor de α . En este caso, se utiliza el criterio de Blalock y Sturm para el cual el tirante crítico es el que resulta de $F_B = 1$, donde F_B es el número de Froude según la ecuación 3.78. Para ello, se calcula la variación de $E - y$, utilizando la ecuación 5.34 para valorar α en toda la sección. Los cálculos se resumen en las tablas 5.24a y b, donde A_1 corresponde al área de la zona central, esto es

$$A_1 = 57.5477 + (y - 4.1591) 20.0818$$

$$A_1 = 20.0818 y - 25.9745 \tag{a}$$

El área A_2 corresponde a la subsección lateral de ancho s_2 y su magnitud es

$$A_2 = s_2 (y - 4.1591) + 0.5 (y - 4.1591)^2 \tag{b}$$

Con $s_2 = 57$ m, la ecuación b resulta

$$A_2 = 57 (y - 4.1591) + 0.5 (y - 4.1591)^2$$

Asimismo, el área A_3 resulta

$$A_3 = s_3 (y - 4.1591) + 0.5 (y - 4.1591)^2 \tag{c}$$

y en la sección 1, $s_3 = 70$ m, por tanto

$$A_3 = 70 (y - 4.1591) + 0.5 (y - 4.1591)^2$$

De la tabla 5.24b, se concluye que $y_c \approx 4.797$ m para el cual se obtiene $F_B \approx 1$ y energía específica mínima $E_c = 5.352$ m. Se empleará el método simplificado.

Tabla 5.24a. Valores $E - y$ para la sección 1 del ejemplo 5.12

y en m	A_1 en m ²	R_{h1} en m	K_1 ($n_1 = 0.025$)	A_2 en m ²	R_{h2} en m	K_2 ($n_2 = 0.04$)	A_3 en m ²	R_{h3} en m	K_3 ($n_3 = 0.04$)	A en m ²	α	V en m/s	$\alpha \frac{V^2}{2g}$ en m	E en m
4.50	64.394	2.887	5222.2	19.489	0.339	236.9	23.921	0.339	291.0	107.804	2.420	2.783	0.956	5.4562
4.60	66.402	2.977	5496.6	25.224	0.438	363.7	30.960	0.438	446.7	122.591	2.606	2.447	0.796	5.3962
4.70	68.410	3.067	5776.4	30.978	0.536	511.2	38.009	0.537	627.9	137.397	2.723	2.184	0.662	5.3623
4.75	69.414	3.112	5918.4	33.856	0.585	592.3	41.538	0.586	727.5	144.808	2.761	2.072	0.605	5.3545
4.80	70.418	3.157	6061.7	36.737	0.634	678.1	45.068	0.636	832.9	152.223	2.787	1.971	0.552	5.3522
4.83	71.021	3.184	6148.4	38.466	0.664	731.8	47.188	0.665	898.9	156.675	2.797	1.915	0.523	5.3533
4.85	71.422	3.202	6206.4	39.620	0.683	768.5	48.602	0.685	944.0	159.644	2.803	1.879	0.505	5.3549
4.90	72.426	3.247	6352.5	42.506	0.732	863.3	52.138	0.734	1060.4	167.067	2.810	1.796	0.462	5.3623
5.00	74.435	3.337	6648.8	48.285	0.830	1065.9	59.217	0.832	1309.4	181.936	2.813	1.649	0.390	5.3903
5.10	76.443	3.427	6950.5	54.074	0.927	1285.2	66.306	0.930	1578.9	196.822	2.781	1.524	0.330	5.4296
5.20	78.451	3.517	7257.4	59.873	1.024	1520.7	73.405	1.027	1868.0	211.729	2.743	1.417	0.281	5.4810

Tabla 5.24 b. Valores F_B - y para la sección 1 del ejemplo 5.12

y en m	σ_1 (por 10^6)	σ_2 (por 10^6)	σ_3	K	F_B
4.50	37.7078	39.5832	15883.3	5750.15	1.3146
4.60	40.5578	43.4984	17497.0	6306.90	1.2104
4.70	43.6016	47.7037	19002.2	6915.45	1.1015
4.75	45.1984	49.9234	19722.6	7238.17	1.0482
4.80	46.8431	52.2222	20424.4	7572.73	0.9965
4.83	47.8542	53.6422	20837.6	7779.10	0.9664
4.85	48.5383	54.6054	21110.3	7918.89	0.9467
4.90	50.2822	57.0751	21780.4	8276.25	0.8992
5.00	53.9178	62.2817	23081.6	9024.08	0.8111
5.10	57.7513	67.8635	24336.7	9814.58	0.7323
5.20	61.7766	73.8338	25698.67	10646.1	0.6654

El tirante en la sección 1 tiene el valor

$$y_1 = 255.22 - 247.57 = 7.65 \text{ m}$$

el cual es mayor que el crítico, por tanto, el cálculo debe realizarse hacia aguas arriba de la sección 1, haciendo que se verifique la ecuación 5.51. Para ello, es necesario calcular las funciones $F_u(h)$ y $F_d(h)$ para cada sección, a partir de las ecuaciones 5.49 y 5.50. Para la sección 1 se calcula sólo la función $F_u(h_1)$ y en especial la que corresponde a $h_1 = 255.22$ m, con elevación en el fondo de 247.57 m. En la tabla 5.25 se presenta el cálculo de dichas funciones para todas las secciones y en las figuras 5.48a y b su representación gráfica.

Para la elevación del agua 255.22 en la sección 1, de la figura 5.48a se tiene

$$h_1 + F_u(h_1) = 255.22 + 0.0320 = 255.252$$

Con $k_e = 0$, de la ecuación 5.51 se obtiene

$$h_2 + F_d(h_2) = 255.252$$

Siguiendo un procedimiento de tanteos, para $h_2 = 255.23$ m, de la figura 5.48a se obtiene $F_d(h_2) = 0.0233$, que satisface la ecuación anterior; esto es

$$255.23 + 0.0233 = 255.2523 \approx 255.252$$

Por tanto, la elevación del agua en la sección 2 sería 255.23 m.

Repitiendo el procedimiento, pero ahora con las secciones 2 y 3, resulta

$$h_2 + F_u(h_2) = 255.23 + 0.0424 = 255.2724$$

Después de varios tanteos se cumple que

$$h_3 + F_d(h_3) = 255.245 + 0.0273 = 255.2723$$

Por tanto, $h_3 = 255.245$ m.

Siguiendo el procedimiento de cálculo propuesto, se obtuvieron las elevaciones del agua en las restantes secciones de la canalización, así como la elevación de la corona de los bordos. Los resultados finales se muestran en la tabla 5.26.

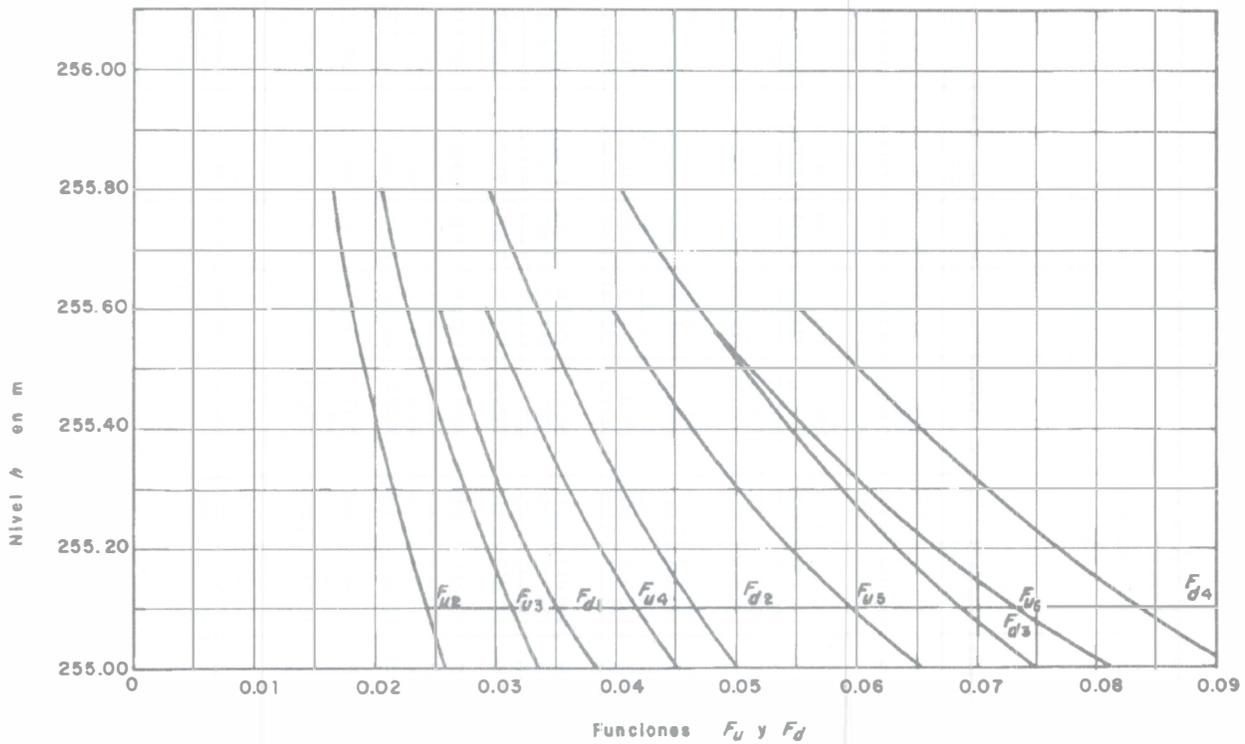


Figura 5.48a. Valores de las funciones F_u y F_d de las diferentes secciones en el canal del ejemplo 5.12

5.8.4. Método gráfico de Ezra

Los métodos híbridos o por computadora antes expuestos pueden ser de costo excesivo, a menos que se deseen los perfiles de una gran cantidad de problemas. Los métodos gráficos pueden ser una alternativa en ciertos casos.

El método de Ezra (referencia 15) se basa en dibujar las curvas $h + F_u(h)$ y $h + F_d(h)$ contra h para las secciones del río, mostradas en las figuras 5.48 a y b, como se presenta en la figura 5.49.

Tabla 5.25. Cálculo de las funciones $F_u(h)$ y $F_d(h)$ en las secciones del canal en el ejemplo 5.12

Sección	h en m	y en m	A ₁ en m ²	R _{h1} en m	K ₁ (n = 0.025)	A ₂ en m ²	R _{h2} en m	K ₂ (n = 0.04)	A ₃ en m ²	R _{h3} en m	K ₃ (n = 0.04)	Σ K _i	$\left[\frac{\Sigma \left[\frac{\alpha_i K_i^3}{A_i^2} \right]}{2g (\Sigma K_i)^3} \right]$ (por 10 ⁻⁷)	$\frac{\Delta x_d}{2(\Sigma K_i)^2}$ (por 10 ⁻⁷)	F _d (h)	$\frac{\Delta x_u}{2(\Sigma K_i)^2}$ (por 10 ⁻⁷)	F _u (h)
1 E.F. = 247.57 Δx _d = 274 m	255.00	7.43	123.233	5.525	15405.2	191.791	2.841	9618.0	234.312	3.140	12560.5	37583.7	3.2979	—	—	0.9699	0.0384
	255.22	7.65	127.651	5.723	16336.7	205.075	3.311	11389.2	250.456	3.342	13996.8	41722.7	2.7708	—	—	0.7870	0.0320
	255.40	7.83	131.266	5.885	17114.9	215.979	3.473	12382.4	263.701	3.507	15217.6	44715.0	2.4830	—	—	0.6852	0.0285
	255.60	8.03	135.282	6.065	17996.6	228.133	3.652	13524.5	278.455	3.689	16621.3	48142.4	2.2117	—	—	0.5911	0.0252
2 E.F. = 247.77 Δx _d = 274 m Δx _u = 349 m	255.00	7.23	119.217	5.345	14577.6	164.402	2.918	8392.5	210.466	2.950	10822.8	33792.9	4.0482	1.1997	0.0256	1.528	0.0502
	255.20	7.43	123.233	5.525	15405.1	175.436	3.098	9321.0	224.500	3.134	12020.4	36746.6	3.5340	1.0146	0.0227	1.292	0.0434
	255.40	7.63	127.250	5.705	16251.1	186.510	3.277	10287.9	238.574	3.318	13267.6	39806.5	3.1091	0.8646	0.0202	1.101	0.0379
	255.60	7.83	131.266	5.886	17115.0	197.625	3.456	11292.4	252.688	3.500	14563.2	42970.7	2.7545	0.7420	0.0181	0.945	0.0333
255.80	8.03	135.282	6.065	17996.5	208.779	3.633	12333.9	266.842	3.682	15906.5	46237.0	2.4557	0.6408	0.0163	0.816	0.0294	
3 E.F. = 248.27 Δx _d = 349 m Δx _u = 292 m	255.00	6.73	109.176	4.895	12589.3	131.850	2.458	6003.9	170.413	2.483	7811.7	26404.9	6.2149	2.5028	0.0334	2.094	0.0748
	255.20	6.93	113.192	5.075	13370.6	142.384	2.641	6800.6	183.947	2.669	8848.5	29019.8	5.3054	2.0721	0.0291	1.734	0.0634
	255.40	7.13	117.209	5.255	14170.5	152.958	2.822	7636.4	197.522	2.854	9936.2	31743.1	4.5747	1.7318	0.0256	1.449	0.0542
	255.60	7.33	121.225	5.435	14989.1	163.572	3.002	8510.2	211.136	3.039	11073.5	34572.8	3.9728	1.4599	0.0226	1.221	0.0467
255.80	7.53	125.242	5.615	15825.9	174.227	3.181	9421.4	224.790	3.222	12259.4	37506.7	3.4910	1.2404	0.0203	1.038	0.0408	
4 E.F. = 248.47 Δx _d = 292 m Δx _u = 278 m	255.00	6.53	105.16	4.715	11826.9	116.614	2.271	5036.7	154.548	2.295	6721.6	23585.2	7.6359	2.6247	0.0451	2.499	0.0912
	255.20	6.73	109.176	4.895	12589.3	126.708	2.454	5763.0	167.842	2.482	7691.2	26043.4	6.4522	2.1526	0.0387	2.049	0.0765
	255.40	6.93	113.192	5.075	13370.6	136.842	2.636	6527.7	181.177	2.668	8712.0	28610.2	5.5128	1.7837	0.0336	1.698	0.0649
	255.60	7.13	117.209	5.255	14170.6	147.016	2.816	7329.8	194.551	2.853	9782.9	31283.3	4.7571	1.4919	0.0294	1.420	0.0556
5 E.F. = 248.84 Δx _d = 278 m Δx _u = 329 m	255.00	6.16	97.729	4.381	10467.2	94.043	1.926	3639.4	130.059	1.946	5068.3	19174.9	11.039	3.7805	0.0653	4.474	0.1396
	255.20	6.36	101.746	4.562	11193.9	103.663	2.111	4264.4	143.280	2.135	5939.0	21397.2	9.1128	3.0360	0.0547	3.593	0.1144
	255.40	6.56	105.762	4.742	11940.0	113.324	2.294	4928.1	156.540	2.323	6863.7	23731.9	7.6258	2.4680	0.0464	2.921	0.0949
	255.60	6.76	109.779	4.922	12705.3	123.024	2.476	5629.6	169.840	2.510	7841.0	26175.9	6.4592	2.0287	0.0399	2.401	0.0797
6 E.F. = 249.14 Δx _d = 329 m Δx _u = 266 m	255.00	5.86	91.705	4.111	9414.0	77.987	1.645	2717.0	108.603	1.661	3807.2	15938.2	15.483	6.4757	0.0811	5.2357	0.1865
	255.20	6.06	95.721	4.291	10111.2	87.347	1.832	3269.0	121.563	1.851	4580.9	17961.1	12.498	5.0992	0.0666	4.1227	0.1496
	255.40	6.26	99.738	4.472	10828.1	96.747	2.017	3860.9	134.564	2.040	5410.7	20099.6	10.251	4.0718	0.0556	3.2921	0.1219
	255.60	6.46	103.754	4.652	11564.6	106.188	2.201	4491.3	147.604	2.228	6294.5	22350.4	8.5296	3.2930	0.0471	2.6625	0.1007
7 E.F. = 249.37 Δx _d = 266 m	255.00	5.63	87.086	3.904	8637.1	62.860	1.426	1991.0	92.278	1.440	2941.8	13569.9	21.069	7.2227	0.1246	—	—
	255.20	5.83	91.102	4.084	9311.2	71.574	1.613	2461.4	104.992	1.631	3637.3	15409.8	16.712	5.6009	0.1000	—	—
	255.40	6.03	95.119	4.264	10005.3	80.328	1.799	2970.7	117.746	1.821	4390.3	17366.3	13.491	4.4100	0.0817	—	—
	255.60	6.23	99.135	4.445	10719.3	89.122	1.984	3517.5	130.540	2.011	5198.6	19435.4	11.065	3.5210	0.0679	—	—

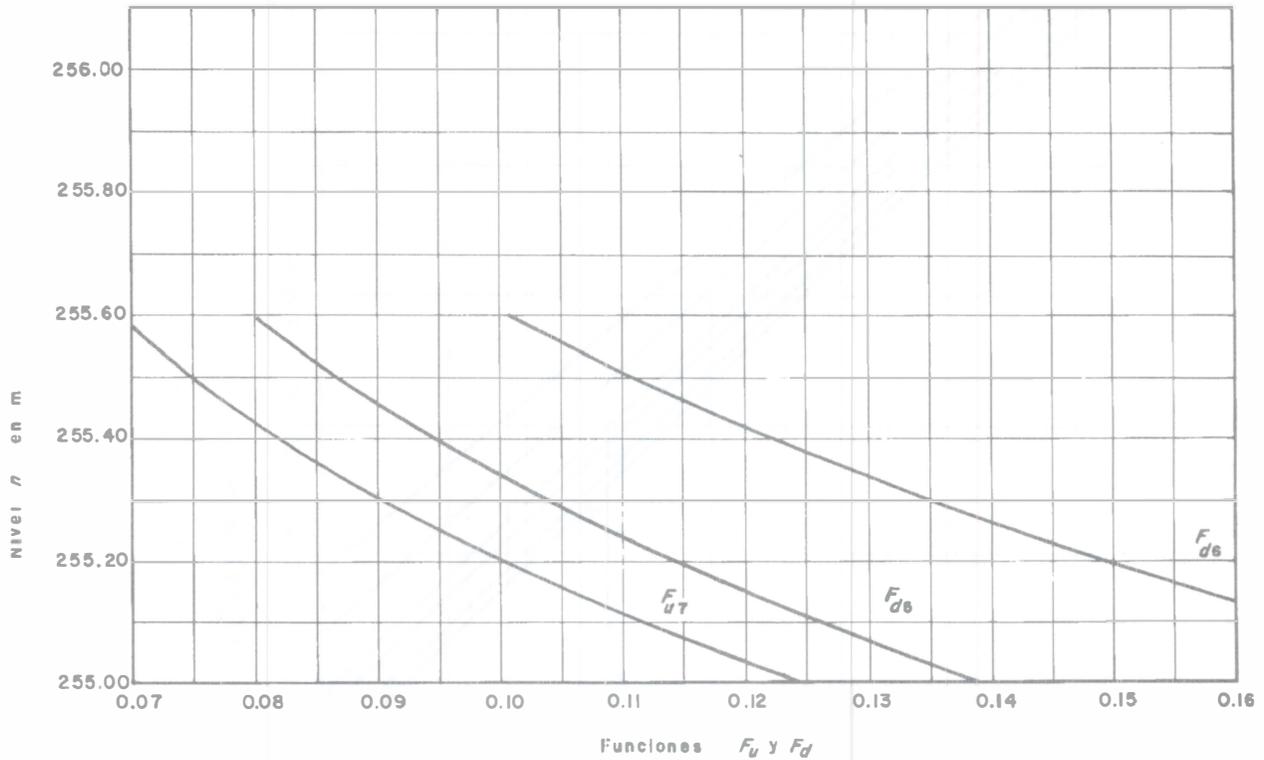


Figura 5.48 b. Valores de las funciones F_u y F_d de las diferentes secciones en el canal del ejemplo 5.12

Tabla 5.26. Elevación del agua y de la corona de bordos en el canal del ejemplo 5.12

Sección	Elev. agua en m.	Tirante y en m.	F_u	F_d	Elev. corona bordos
1	255.22	7.65	—	0.0320	255.52
2	255.23	7.46	0.0223	0.0424	255.53
3	255.245	6.975	0.0273	0.0611	255.545
4	255.269	6.799	0.0370	0.0723	255.569
5	255.291	6.451	0.0505	0.105	255.591
6	255.337	6.197	0.0588	0.1307	255.637
7	255.385	6.015	0.083	—	255.685

El flujo es comúnmente subcrítico en los ríos y el cálculo se realiza en dirección contraria al flujo, pero con el sistema de curvas se trabaja exactamente en la misma forma si el flujo fuera supercrítico y el cálculo se realizara en la dirección del flujo.

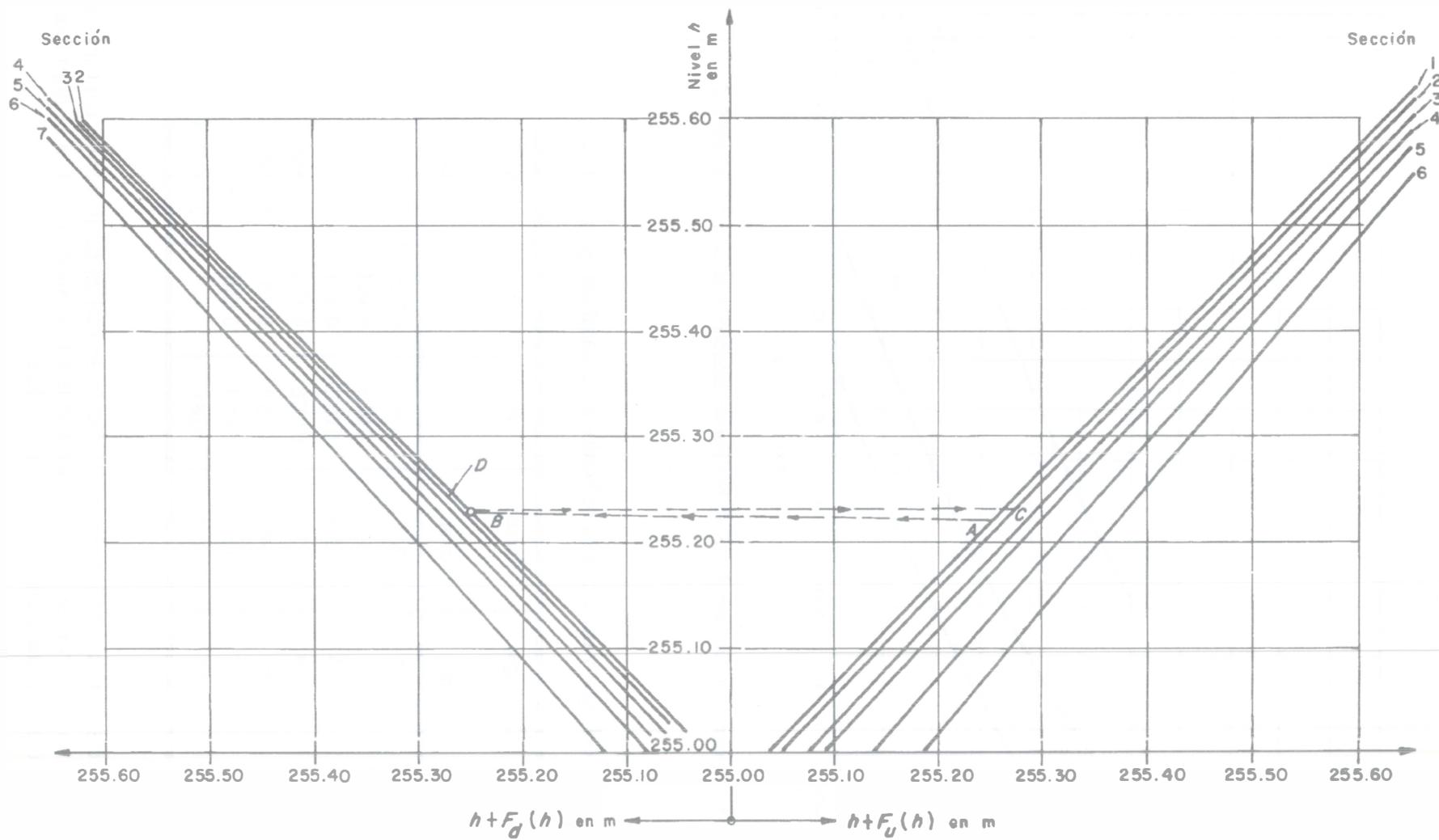


Figura 5.49. Método gráfico de Ezra aplicado al canal del ejemplo 5.13

Las condiciones hidráulicas en la sección 1 (inicial) están representadas por el punto A en el diagrama del lado derecho, sobre la curva $F_u(h)$. Las condiciones en la sección 2 (aguas arriba de la 1) quedan representadas por el punto B sobre el diagrama $F_d(h)$, teniendo la misma abscisa del punto A . De esta manera queda satisfecha la ecuación 5.51. Para ir de la sección 2 a la 3 (aguas arriba de 2), se debe regresar al diagrama $F_d(h)$ mediante una línea horizontal hasta el punto C . Los puntos B y C representan las condiciones en la sección 2, por lo cual deben tener la misma ordenada h_2 . Para pasar de la función $F_d(h)$ a la $F_u(h)$ en la sección 3, se procede en la misma forma que antes. Del punto C se transfiere al D , que representa la sección 3, y así sucesivamente.

Para una mejor explicación se resuelve a continuación un ejemplo.

Ejemplo 5.13. Resolver el ejemplo 5.12 aplicando el método gráfico de Ezra.

Solución. Con los resultados de la tabla 5.25, se dibujaron en la figura 5.49 las curvas correspondientes de acuerdo a la explicación del método. Este se inicia con la elevación 255.22 del agua en la sección 1, que corresponde al punto A indicado en la figura 5.49, de abscisa 255.252.

Se debe satisfacer que $h_2 + F_d(h) = 255.252$. Con esta misma abscisa se busca el punto B sobre la curva de la sección 2, para el cual la elevación del agua 255.23 es la ordenada. Con ésta se busca el punto C que debe quedar ahora sobre la curva 2 en el primer cuadrante; su abscisa es 255.272. Esta misma abscisa debe tener el punto D sobre la curva de la sección 3 en el segundo cuadrante, que a su vez tiene como ordenada 255.245 m.

El procedimiento continúa en la misma forma con las restantes secciones, eliminando los tanteos que fueron necesarios en la solución del ejemplo 5.12. Los resultados concuerdan dentro de la precisión que tiene un método gráfico.

Cuando es necesario calcular los perfiles de flujo del mismo río para diferentes gastos, es posible mejorar el método de Ezra si se observa que las funciones F_u y F_d varían con el cuadrado del gasto lo cual sugiere que se pueden usar las curvas de dichas funciones calculadas con un determinado gasto, para otros gastos, variando la escala de F_u y F_d . En la figura 5.50 se muestra la posibilidad de dicho procedimiento, donde se utiliza como ordenada el nivel h , como se hizo en la figura 5.49. Una vez calculadas las funciones F_u y F_d para un determinado gasto Q_0 , conviene utilizar ahora como abscisa la variable k definida por la ecuación

$$k = \frac{Q_0^2}{Q^2} F(h) \quad (5.52)$$

donde Q_0 es algún gasto representativo, elegido cerca de la media del intervalo en que varían los gastos. Haciendo $Q = Q_0$ en la ecuación 5.52, la función $k = F(h)$ se representa en el primer cuadrante de la figura 5.50 mediante las curvas $k = F(h)$ (calculadas para el gasto Q_0) contra los niveles h , conservando la misma escala en los dos ejes.

La presentación de estas curvas difiere un poco de la que se muestra en la figura 5.49 para un gasto único. Sin embargo, con la presentación de la figura 5.50 es posible obtener la solución

para $Q = Q_0$ cuando $k = F(h)$. El punto A sobre la curva k_u , correspondiente a la sección 1, representa las condiciones existentes en dicha sección al quedar satisfecha la ecuación $H_1 = H_2$. Al moverse a lo largo de una línea a 45° respecto de la horizontal, de ecuación: $h + F(h) = \text{constante}$, se llega al punto B sobre la curva k_d correspondiente a la sección 2, que representa las condiciones existentes en dicha sección, al quedar satisfecha la ecuación $H_1 = H_2$. Después, el trazo es de B a C sobre una línea horizontal, de allí a D a lo largo de una línea a 45° y así sucesivamente.

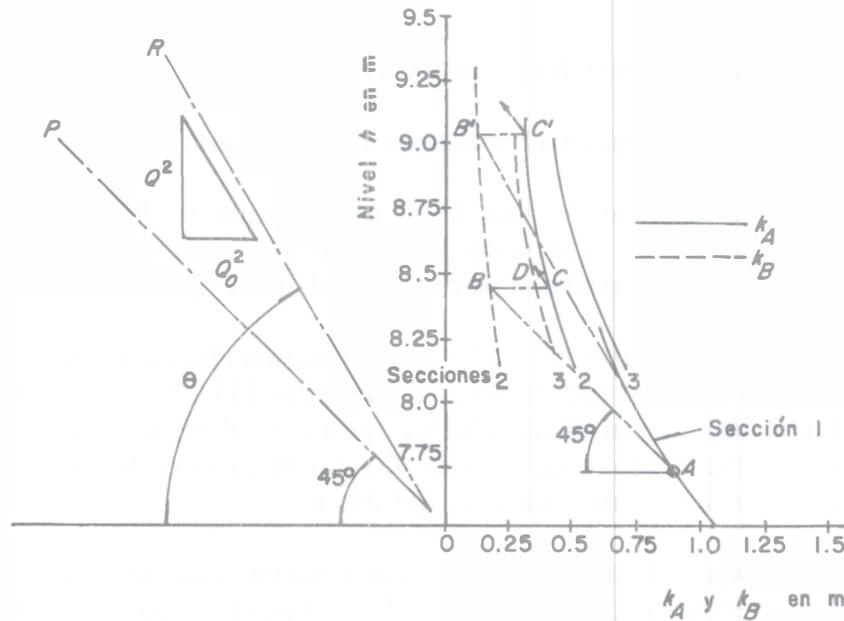


Figura 5.50. Método gráfico de Ezra modificado

El procedimiento hasta aquí presentado equivale precisamente al indicado en la figura 5.49 para un gasto único. Para trazar una solución con cualquier otro gasto, se procede a hacer $r = Q^2/Q_0^2$ y de la ecuación 5.52 resulta

$$F(h) = \frac{Q^2}{Q_0^2} k = r k \quad (5.53)$$

Para ir de un punto inicial A' , que representa las condiciones en la sección 1, al punto B' , que representa las condiciones en la sección 2, el movimiento debe ser a lo largo de una línea que tenga la ecuación

$$h + r k = \text{constante}$$

esto es, una línea con ángulo de inclinación, $\theta = \arctan(-r)$, respecto del eje k . Para ello es posible trazar la línea de referencia OR en el segundo cuadrante de la figura 5.50, con un ángulo de inclinación θ respecto del eje k , de magnitud

$$\theta = \arctan r = \frac{Q^2}{Q_0^2} \quad (5.54)$$

Esto implica cambiar sólo el ángulo θ de inclinación de la línea de referencia para el gasto que se desee determinar en el perfil de flujo; ello incluye la línea OP (para $Q = Q_0$) dibujada para $\theta = 45^\circ$. Esto permite que el conjunto de curvas k sirvan para cualquier gasto que se desee.

La preparación de las curvas mostradas en las figuras 5.49 y 5.50 requieren tanto trabajo como los procedimientos de tabulación de la sección 5.7.3. Por tanto, como se ha presentado en la figura 5.49, el método de Ezra tiene valor únicamente cuando se requieren varios perfiles de flujo para el mismo gasto, por ejemplo, perfiles de flujo hacia aguas arriba para diferentes alturas de una misma presa. En cambio, el método modificado de la figura 5.50 es adecuado cuando se requieren perfiles para varios gastos, por ejemplo perfiles de flujo aguas arriba de una presa de cierta altura con distintos gastos en el río.

Otros métodos gráficos simplificados se pueden consultar en las referencias 16 y 17.

5.8.5. Modelos de flujo

La formulación de modelos de flujo gradualmente variado en canales artificiales y naturales tiene gran importancia en el logro de los objetivos siguientes:

1. Determinar áreas inundables para diferentes gastos de avenida y la apreciación de sus daños.
2. Analizar los efectos en el uso del suelo sobre llanuras de inundación, desde el punto de vista de los daños causados por una avenida.
3. Decidir cómo mitigar los daños mediante distintas mejoras en el canal o en el río.

Un modelo de flujo se puede elaborar adoptando la metodología general planteada en el método estándar por pasos y la técnica de convergencia de Newton-Raphson.

Algunos modelos elaborados por dependencias de los Estados Unidos de Norteamérica utilizan la pendiente media aritmética para valuar la pendiente de fricción representativa del tramo, pero también los criterios expresados por las ecuaciones 5.16 y 5.17.

Cuando existe ingreso de gasto en el tramo, la pendiente media de la conducción se calcula considerando el promedio $(Q_1 + Q_2)/2$ de los gastos en las dos secciones y el promedio $(K_1 + K_2)/2$ de los factores de conducción en las mismas. De la ecuación 2.72 resulta la pendiente media en el tramo

$$\bar{S}_f = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2} \right)^2 \quad (5.55)$$

Cualquiera de los criterios antes mencionados proporcionan una estimación satisfactoria de la pendiente de fricción representativa siempre que el tramo no sea demasiado largo, pero es atractiva la idea de utilizar expresiones alternativas dentro del modelo, que permitan utilizar longitudes mayores de dicho tramo y reducir el costo, así como criterios de convergencia más adecuados a la expresión de la pendiente representativa que se utilice.

La ecuación 5.20a se expresa a través del nivel h del agua desde un plano de referencia en la forma.

$$h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_r \quad (5.56)$$

La pérdida total es

$$h_r = \bar{S}_f \Delta x + k_e \frac{|\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2|}{2g} \quad (5.57)$$

donde

- h_r pérdida total de energía entre las dos secciones,
- k_e coeficiente de pérdida por expansión o contracción,
- \bar{S}_f pendiente de fricción representativa en el tramo,
- Δx longitud promedio pesado del tramo, definida por la ecuación 5.36 o la 5.37.

Para el cálculo de \bar{S}_f se puede optar por la media aritmética o por la 5.55, según el caso.

El esquema de cómputo en el modelo es de acuerdo a los pasos siguientes:

1. Si el cálculo debe ser en dirección contraria al flujo, se conocen los datos necesarios para determinar todas las variables con subíndice 2 en la ecuación 5.56.
2. Se supone una elevación h_1 del agua en la sección 1.
3. Con base en la elevación h_1 supuesta se obtienen los factores de conducción, α y la carga de velocidad en dicha sección.
4. Con los valores del paso 3, \bar{S}_f queda determinada y de la ecuación 5.57 se obtiene h_r .
5. De la ecuación 5.56 se determina h_1 a partir de los valores obtenidos en los pasos 3 y 4.
6. El valor de h_1 calculado en el paso 5 se compara con el valor supuesto en el paso 2. Los pasos 2 a 5 se repiten con h_1 del paso 5 hasta que los valores de h_1 supuesto y calculado coinciden, admitiendo discrepancias hasta de 0.003 m.

El procedimiento iterativo antes descrito varía según el número de tanteos previos. Considerando que existe la sección 3, aguas abajo de la 2, y que S_{f2-3} fuera la pendiente media de fricción en el tramo de 2 a 3, el valor inicial de tanteo en 1 se puede suponer igual al obtenido de extender la validez de dicha pendiente en el tramo de 1 a 2. Esto es

$$h_1 = h_2 + \bar{S}_{f2-3} \Delta x$$

donde Δx es la distancia que separa las secciones 1 y 2.

El segundo valor de tanteo se estima de la media aritmética de las elevaciones h_1 supuesta y calculada. El tercero y subsecuentes se estiman de manera que el cambio que haya entre las diferencias de los valores supuesto y calculado en los dos tanteos previos se reduzca a cero, restringiendo arbitrariamente el incremento que se asigne para obtener el nuevo valor de tanteo a un máximo de ± 50 por ciento de la elevación supuesta del agua en el tanteo previo.

Una vez obtenida la elevación correcta de la superficie del agua, es necesario verificar que quede también en el lado correcto de la que corresponde al tirante crítico en la sección; esto es, para un perfil subcrítico, la elevación de la superficie del agua debe ser mayor que la elevación respectiva del tirante crítico. Si la elevación calculada queda en el lado equivocado, el usuario del programa debe ser notificado del error cometido. Este tipo de error resulta comúnmente cuando la longitud de los tramos es muy grande, o bien de una representación equivocada del área de flujo en la sección.

Existen otros criterios de iteración que se pueden consultar en la referencia 12.

Conviene advertir que la técnica que se utilice para estimar el tirante en un nuevo modelo de flujo no debe conducir a errores cuando se aplique a canales de sección compuesta, eligiendo la definición adecuada del número de Froude. Es común que el tirante crítico se encuentre suponiendo elevaciones de la superficie del agua, calculando el valor correspondiente de la energía específica hasta encontrar su valor mínimo. Sin embargo, como se ha demostrado en el subcapítulo 3.9, puede haber más de un valor mínimo local de la energía específica. La metodología que se emplee debe garantizar que se encuentre el valor correcto del tirante crítico en dicho canal. Esto es, en un nuevo modelo se puede también utilizar el criterio del número de Froude para la definición del tirante crítico, en cuyo caso, cada solución que se obtenga de la ecuación 5.56 debe ser verificada en su validez hidráulica; esto es, el usuario debe poder prefijar un número de Froude cuyo valor no sea excedido, para compararlo con el número de Froude calculado usando la elevación estimada de la superficie libre del agua. Aquí es importante el número de Froude en el canal de sección compuesta cuando se prescribe la elevación de la superficie libre del agua (ver subcapítulo 3.9).

Para una operación adecuada y segura del modelo es esencial que haya información adecuada de las secciones transversales del canal. Cuando existan cambios importantes en la geometría o en las características hidráulicas, es conveniente que se determinen una o más secciones transversales intermedias. Los cambios geométricos críticos involucran comúnmente contracciones o expansiones, tanto en canales artificiales o naturales, mientras que los cambios de pendiente, rugosidad o gasto se consideran como cambios importantes en las características.

En general, las secciones transversales proporcionadas deben ser perpendiculares a la dirección del flujo y se extienden completamente a través del canal hasta terrenos altos en ambas márgenes, cuidando de que se incluya únicamente el área efectiva de flujo.

La distancia entre secciones es función del grado de detalle hidráulico requerido y de los recursos humanos y financieros disponibles. En canales pequeños, no uniformes o de fuerte pendiente, son recomendables longitudes cortas del tramo, del orden de 60 m, mientras que en canales largos, uniformes y de pequeña pendiente, longitudes hasta de 3 km pueden ser adecuadas. Por otra parte,

el tipo de estudio por realizar influye en el detalle que se requiere; sin embargo, longitudes de 150 a 800 m se utilizan con frecuencia, dependiendo de las dimensiones de la sección y de la longitud total del canal en que se efectúan los estudios. En los tramos que contengan curvas es necesario determinar las longitudes del tramo en regiones donde existan ampliaciones de la sección (subsecciones con berma) sobre las márgenes izquierda y derecha del canal, además de la correspondiente al cauce principal. En este último, la distancia se mide siguiendo su eje si el canal es artificial o a lo largo del talweg si es natural, mientras que en las subsecciones con berma, la longitud del tramo debe seguir la trayectoria del centro de masa del agua moviéndose en dicha área. En este caso, habrá tres longitudes diferentes y en ocasiones es necesario calcular una longitud hipotética del tramo mediante la ecuación 5.36 o 5.37.

5.9 REDES DE CANALES

5.9.1 Descripción

Un sistema de canales en serie se conoce mejor como canal no prismático y se analiza con el método estándar por pasos.

Los sistemas de canales en paralelo se encuentran con frecuencia en la naturaleza principalmente en la forma de flujo alrededor de islas. Otro problema común consiste en el diseño de un nuevo canal que mejore el funcionamiento de un río con meandros para el control de las avenidas, donde los niveles del agua y los caudales tolerables en el viejo río dictan los criterios del diseño.

Las redes de canales no son tan comunes como los sistemas en paralelo, aunque pueden ocurrir en un sistema ramificado de un río, por ejemplo, en un delta. Es común que las industrias localizadas en la costa extraigan agua de dicho sistema, lo cual puede cambiar la dirección de los flujos en períodos prolongados y con ello producirse la intrusión de agua salada, así como generar efectos adversos a otros usuarios del agua en la vecindad del sistema. El modelado del flujo gradualmente variado en estas condiciones puede ser necesario para predecir y evitar dichos problemas o para determinar otros parámetros, como el coeficiente de Manning cuando se conocen los tirantes en distintos puntos del sistema para gastos conocidos.

5.9.2 Dos canales en paralelo

Pueden existir tramos en ríos en los que una o más islas dividen al flujo en dos o más canales en paralelo, de sección y pendiente distintas, donde se desconoce la manera en que se distribuye el gasto en cada uno.

En la figura 5.51 se muestra el caso de dos canales en paralelo, donde los gastos Q_1 y Q_2 en cada rama satisfacen la ecuación de continuidad

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (5.58)$$

donde Q es el gasto total.

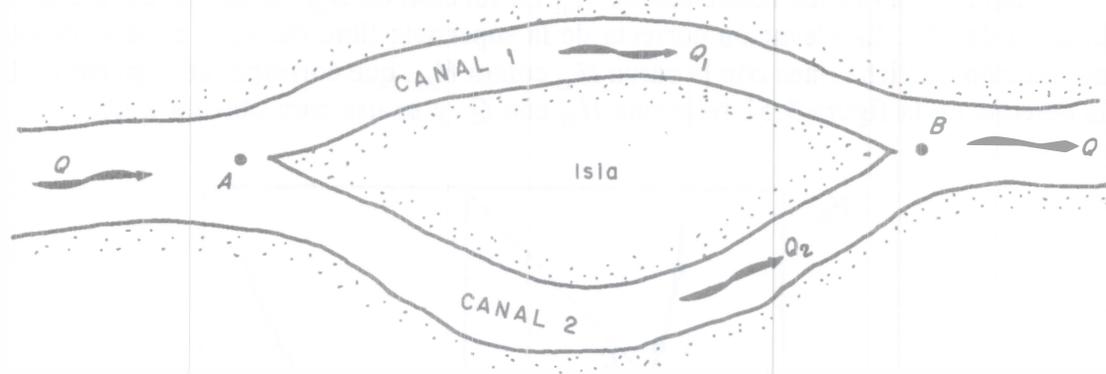


Figura 5.51. Dos canales en paralelo

El flujo gradualmente variado queda influenciado por las condiciones de frontera en los puntos A o B , según el régimen. Si es subcrítico, el cálculo se realiza con el gasto Q en dirección contraria al flujo, partiendo de alguna sección de control conocida aguas abajo hasta llegar a B con algún nivel del agua y de energía. Para continuar el cálculo hasta A , se sigue a lo largo de cualquiera de los ramales 1 o 2, pero debe conocerse la distribución correcta Q_1 y Q_2 de los gastos en los mismos, debiendo cumplirse la ecuación 5.58 y también la igualdad de los niveles de energía.

$$H_{A1} = H_{A2} \quad (5.59)$$

donde H_{A1} y H_{A2} son las elevaciones de la línea de energía del agua en A , la primera calculada con Q_1 siguiendo el canal 1, la segunda calculada con Q_2 siguiendo el canal 2.

Para conocer la distribución del gasto en cada canal, se sigue un procedimiento de tanteos que puede resumirse en los pasos que enseguida se presentan.

1. Se escoge un valor de tanteo Q_1 . El gasto en el otro canal debe ser $Q_2 = Q - Q_1$.
2. Se calcula el perfil del flujo y la elevación de la línea de energía H_{A1} con el gasto Q_1 elegido siguiendo el método estándar por pasos a lo largo del canal.
3. En la misma forma se calcula H_{A2} a lo largo del canal 2 utilizando Q_2 del paso 1.
4. Si el valor de Q_1 es el correcto, se debe satisfacer la ecuación 5.59. En caso contrario, se regresa al paso 1 hasta satisfacer dicha ecuación.

En general, se requiere un buen número de tanteos hasta lograr la solución correcta, pero se puede reducir con el auxilio de dos gráficas, como las que se muestran en la figura 5.52.

En la primera se llevan los resultados de H_{A1} en función de H_{A2} , donde se traza una línea con inclinación de 45° . La elevación correcta de la superficie libre del agua en A se determina de la intersección de dicha línea con la curva H_{A2} contra H_{A1} , que corresponde al punto C . La curva de la derecha en la figura 5.52 relaciona H_{A1} con Q_1 y se usa para obtener a Q_1 .

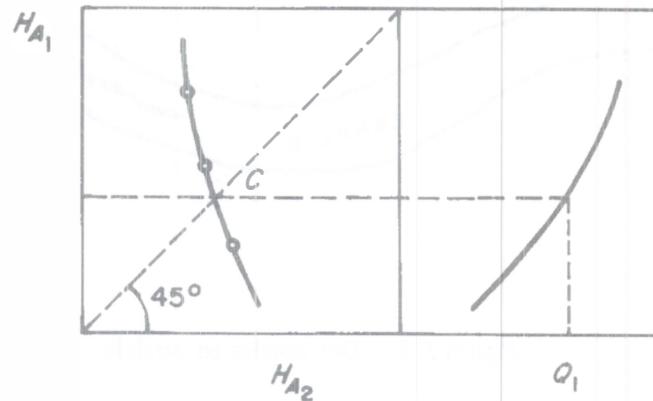


Figura 5.52. Cálculo de la distribución del gasto en un sistema de dos canales en paralelo

Una vez obtenida la solución, el cálculo del perfil del flujo continúa hacia aguas arriba de la bifurcación por el método de pasos apropiado al tipo de canal.

Si el régimen en el canal es supercrítico, el gasto que entra a cada canal depende de las dimensiones de la sección y de los fenómenos de ondas oblicuas en la bifurcación más que del perfil del flujo en los canales.

El procedimiento descrito consume mucho tiempo y es adecuado para determinar el flujo cuando se trata de dos canales en paralelo, pero no se puede aplicar fácilmente a un sistema de tres o más canales, como el que muestra la figura 5.53, si se mantiene el procedimiento manual. El que se presenta a continuación constituye una técnica más poderosa cuando el problema es más complejo.

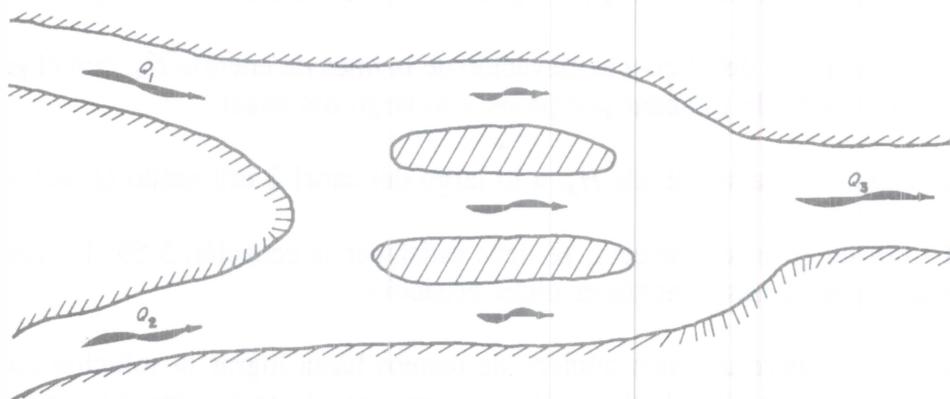
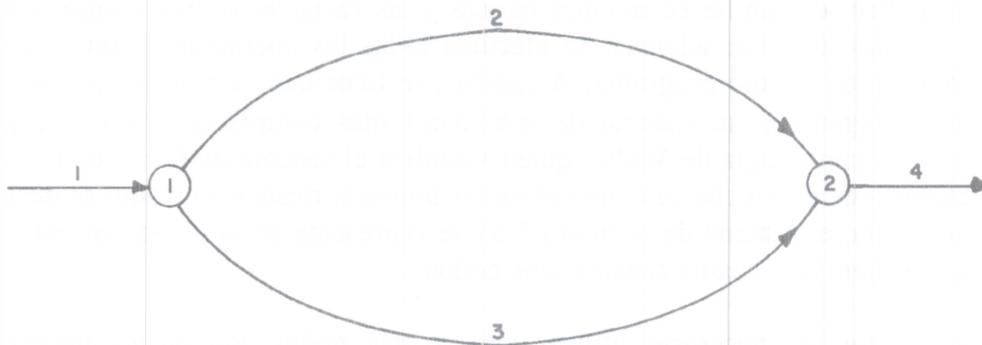


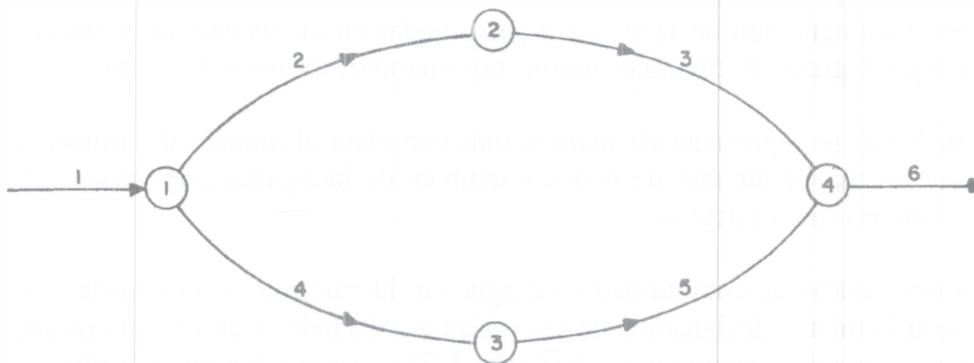
Figura 5.53. Tres canales en paralelo

5.9.3 Método de solución simultánea

Los métodos directo y estándar por pasos son adecuados en los modelos de flujo de un canal prismático y de un sistema de canales en serie (canal no prismático), respectivamente. Sin embargo, cuando hay dos o más canales en paralelo, el cómputo tiene que interrumpirse para seguir un tratamiento manual a base de iteraciones independientes, como se expuso en el inciso 5.9.2, para obtener la distribución del gasto en los ramales.



a) Modelo simplificado



b) Modelo más completo

Figura 5.54. Modelos del sistema de dos canales en paralelo

A fin de evitar estos inconvenientes, Wylie (referencia 18), en 1972 utilizó por primera vez el procedimiento de solución simultánea, más poderoso que los antes mencionados. Consiste en el planteamiento simultáneo de las ecuaciones básicas del flujo en distintas secciones de un mismo

canal o de una red de canales, lo que genera un sistema de ecuaciones no lineales que se complementa con las resultantes de las condiciones de frontera en los extremos del canal.

Para su solución existen distintas técnicas, por ejemplo, la de relajaciones, la de sustitución cuando el sistema es sencillo y la de convergencia de Newton-Raphson. La última fue empleada por Wylie y después ampliada y sistematizada por Schulte y Chaudhry (referencia 9), en 1987, para aplicarla a canales prismáticos, sistemas en serie y redes. En el procedimiento seguido por Schulte y Chaudhry se usan las ecuaciones básicas y las variables tirante y gasto sin necesidad de eliminar algunas de ellas; además, se efectúan todas las operaciones con el algoritmo de solución dentro de un mismo programa. A cambio, se tiene que manejar un mayor número de ecuaciones e incógnitas y un sistema de subíndices más complicado. Para la exposición se prefiere utilizar la simbología de Wylie, quien visualiza el sistema de flujo como una malla de canales (elementos de flujo) que se conectan en las uniones, mismas que aquí se designan como nodos. Por ejemplo, el sistema de la figura 5.51 se representa en la 5.54a con esta simbología en su forma más sencilla: cuatro canales, dos nodos.

Sin embargo, suele ser necesario utilizar uno o más nodos adicionales intermedios para subdividir los canales largos en tramos más cortos y lograr mejor precisión en el cálculo de la pérdida de fricción, o bien, para incluir secciones donde haya cambios bruscos de su geometría, de la elevación del fondo, de la rugosidad, o de aquellas donde se inicien o terminen los cambios de geometría pero de manera gradual, lo que permite tomar en cuenta el efecto de las pérdidas locales que se producen. La que corresponde a las uniones se toma en cuenta de manera similar sin necesidad de nodos adicionales.

En un nodo pueden entrar o salir gastos nodales desde o hacia otras redes y ocurren en los extremos de sistemas de canales naturales o artificiales. Su magnitud se conoce a priori y no depende del funcionamiento de la red. Un gasto nodal en un sistema de alcantarillado pluvial puede ser el que ingresa en cualquier unión, por ejemplo, un pozo de visita.

En la figura 5.54b se representa de manera más completa el modelo del mismo sistema de la 5.51, al crear un mayor número de nodos y también de incógnitas por resolver, pero se logra mayor precisión en los resultados.

Las ecuaciones básicas de continuidad y energía son idénticas a las empleadas en los métodos por pasos, con la misma designación de las variables. Cuando la de energía (ecuación 5.23) se aplica al canal i que une los nodos j y k (figura 5.55a), se expresa en la forma

$$z_{ij} + y_{ij} + \frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ij}^2} = z_{ik} + y_{ik} + \frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ik}^2} + \frac{1}{2} L_i \left[\frac{Q_i^2 n_i^2}{A_{ij}^2 R_{hij}^{4/3}} + \frac{Q_i^2 n_i^2}{A_{ik}^2 R_{hik}^{4/3}} \right] + k_e \left[\frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ik}^2} - \frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ij}^2} \right] \quad (5.60)$$

donde α_i , Q_i y n_i corresponden al canal i y L_i representa su longitud. El doble subíndice ij o ik se adjudica a z y a las variables y , A y R_h , a fin de designar la sección a la que pertenecen (vecina al nodo): del canal con el primer subíndice y del nodo con el segundo.

El coeficiente de pérdida por conversión k_e adopta la misma convención de signos del método estándar por pasos, es decir, $k_e > 0$ cuando $A_{ij} > A_{ik}$, y $k_e < 0$ cuando $A_{ij} < A_{ik}$. Si no es necesario incluir dicha pérdida, $k_e = 0$.

Cuando se desea omitir la pérdida por fricción basta considerar $L_i = 0$ en la ecuación 5.60.

El análisis que se presenta es sólo para el caso de régimen subcrítico en todos los canales del sistema. En el supercrítico ocurren restricciones adicionales debidas a la geometría del canal en los nodos, que producen una ecuación adicional. El análisis de esta situación queda fuera del alcance del tratamiento que aquí se expone.

La aplicación reiterada de la ecuación 5.60, a todos los canales de la malla representativa, proporciona un sistema de tantas ecuaciones como canales tenga la malla. Dichas ecuaciones tienen la forma típica.

$$F_{Ci} = y_{ik} - y_{ij} + \left[\alpha_i \left(\frac{1 + k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{ik}^2} - \frac{1}{A_{ij}^2} \right) + \frac{1}{2} L_i n_i^2 \left(\frac{P_{ij}^{4/3}}{A_{ij}^{10/3}} + \frac{P_{ik}^{4/3}}{A_{ik}^{10/3}} \right) \right] Q_i^2 + (z_{ik} - z_{ij}) = 0 \quad (5.61)$$

donde el valor F_{Ci} representa el desbalance de energía entre los nodos que conecta el canal i .

En cualquiera de los nodos se satisfacen dos principios básicos:

- 1) El de continuidad.
- 2) El nivel de energía es común a todas las secciones en los canales que llegan o salen del nodo cuando se desprecia la pérdida en dicho nodo.

Estos constituyen las condiciones de frontera en los extremos de cada canal y aportan las ecuaciones faltantes en el sistema simultáneo hasta igualar su número con el de las incógnitas.

La ecuación de continuidad típica en el nodo j es

$$f_{Nj} = \sum_{i=1}^M Q_i + Q_{Nj} = 0 \quad (5.62)$$

donde M es el número de canales que se conectan al nodo y el término Q_{Nj} representa el gasto nodal que entra o sale de la red, el cual puede o no existir pero debe conocerse.

Para efectuar la suma algebraica se establece una convención de signos en los gastos; por ejemplo, positivo si el gasto sale del nodo y negativo si entra. El valor de f_{Nj} representa el desbalance de gastos en el nodo según los valores que se atribuyan a Q_i en cada canal.

Habrán tantas ecuaciones del tipo 5.62 como nodos tenga la malla que se analiza.

La ecuación de energía en cualquiera de los nodos debe ser

$$\sum_{i=1}^M H_i Q_i = 0$$

con la misma convención de signos aceptada para la de continuidad y donde se han despreciado las pérdidas en las uniones o separaciones.

La expresión anterior equivale a que la energía total $H_i = z_i + y_i + (\alpha_i Q_i^2 / 2g A_i^2)$ sea la misma en todos los canales que confluyen al nodo, para que sea válida simultáneamente con el principio de continuidad. Sin embargo, la pérdida que se produce en el nodo se puede determinar mediante una expresión adecuada y quedar incluida en la propia ecuación de energía. Por ejemplo, en un nodo al que llega y sale un solo canal, como el de la figura 5.55b, la expresión para valuar la pérdida por conversión contenida en la ecuación 5.60, es la más común y la ecuación de energía en el nodo resulta

$$F_{Nj} = y_{i+1,j} - y_{ij} + \left(\frac{1+k_e}{2g} \right) \left(\frac{\alpha_{i+1}}{A_{i+1,j}^2} - \frac{\alpha_i}{A_{ij}^2} \right) Q_{i+1}^2 + (z_{i+1,j} - z_{ij}) = 0 \quad (5.63)$$

En un nodo al que confluyen tres o más canales, como el de la figura 5.55c, la pérdida por unión o separación en cada canal, es el producto de un coeficiente K por la carga de velocidad en el que está aguas abajo del nodo. La ecuación de energía para el canal $i + 1$ es

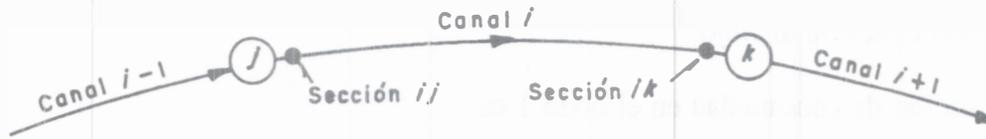
$$F_{Nj} = y_{i+1,j} - y_{ij} + \left(\frac{\alpha_{i+1} + K_{i+1}}{2g A_{i+1,j}^2} \right) Q_{i+1}^2 - \frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ij}^2} + (z_{i+1,j} - z_{ij}) = 0 \quad (5.64a)$$

En la misma forma, para el canal $i + 2$

$$F_{Nj} = y_{i+2,j} - y_{ij} + \left(\frac{\alpha_{i+2} + K_{i+2}}{2g A_{i+2,j}^2} \right) Q_{i+1}^2 - \frac{\alpha_i Q_i^2}{2g A_{ij}^2} + (z_{i+2,j} - z_{ij}) = 0 \quad (5.64b)$$

Este segundo modo de expresar la pérdida en el nodo es más adecuada según las investigaciones sobre el tema (véase subcapítulo de uniones y separaciones), pero complica la selección de los coeficientes K_{i+1} y K_{i+2} , ya que dependen de la geometría con que se produce la unión o

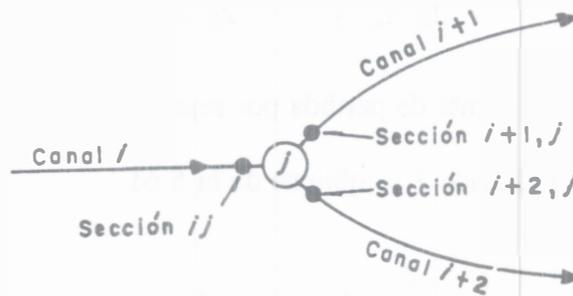
separación y de la relación de gastos: Q_{i+1}/Q_i para el primero y Q_{i+2}/Q_i para el segundo. Algunos autores prefieren optar por expresiones similares a la ecuación 5.63 para los nodos que unen dos canales.



a) Entre dos nodos



b) Entre dos secciones de un nodo al que confluyen dos canales



c) Entre dos secciones de un nodo al que confluyen tres o más canales

Figura 5.55. Aplicación de la ecuación de energía en la proximidad de un nodo

A fin de exponer el planteamiento se considera el modelo de la figura 5.54b, donde existen 4 canales con nodos en sus dos extremos y por lo tanto, cuatro ecuaciones del tipo 5.61 con ocho valores desconocidos de la variable y y dos de Q , es decir, diez incógnitas. Las ecuaciones de continuidad (del tipo 5.62) y las de energía (del tipo 5.63 o 5.64) en los nodos, proporcionan 10 ecuaciones más pero sólo seis incógnitas adicionales; en total 14 ecuaciones con 14 incógnitas, ya que el gasto $Q_1 = Q_6$ se conoce y el tirante en el canal 6, después del nodo 4, se determina a partir de cálculos efectuados del flujo gradualmente variado en dicho canal, en dirección contraria al flujo.

La ecuación de continuidad en el nodo 1 es

$$F_1 = Q_2 + Q_4 - Q_1 = 0 \quad (5.65a)$$

donde el subíndice en F es el número de orden de la ecuación.

La ecuación de energía en el nodo 1, entre los canales 1 y 2, es del tipo 5.64a y se expresa en la forma

$$F_2 = y_{21} - y_{11} + \left[\frac{\alpha_2 + K_2}{2g A_{21}^2} \right] Q_2^2 - \frac{\alpha_1 Q_1^2}{2g A_{11}^2} + (z_{21} - z_{11}) = 0 \quad (5.65b)$$

donde K_2 es el coeficiente de pérdida por separación en el canal 2.

La ecuación de energía en el nodo 1, pero entre los canales 1 y 4, es del tipo 5.64b

$$F_3 = y_{41} - y_{11} + \left[\frac{\alpha_4 + K_4}{2g A_{41}^2} \right] Q_4^2 - \frac{\alpha_1 Q_1^2}{2g A_{11}^2} + (z_{41} - z_{11}) = 0 \quad (5.65c)$$

donde K_4 es a su vez el coeficiente de pérdida por separación en el canal 4.

La ecuación de energía en el canal 2 se obtiene de la 5.61

$$F_4 = y_{22} - y_{21} + \left[\alpha_2 \left[\frac{1 + k_e}{2g} \right] \left[\frac{1}{A_{22}^2} - \frac{1}{A_{21}^2} \right] + \frac{1}{2} L_2 n_2^2 \left[\frac{P_{21}^{4/3}}{A_{21}^{10/3}} + \frac{P_{22}^{4/3}}{A_{22}^{10/3}} \right] \right] Q_2^2 + (z_{22} - z_{21}) = 0 \quad (5.65d)$$

En la misma forma, la de energía en el canal 4 resulta

$$F_5 = y_{43} - y_{41} + \left[\alpha_4 \left(\frac{1 + k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{43}^2} - \frac{1}{A_{41}^2} \right) + \frac{1}{2} L_4 n_4^2 \left(\frac{P_{41}^{4/3}}{A_{41}^{10/3}} + \frac{P_{43}^{4/3}}{A_{43}^{10/3}} \right) \right] Q_4^2 + (z_{43} - z_{41}) = 0 \quad (5.65e)$$

Continuidad en el nodo 2

$$F_6 = Q_3 - Q_2 = 0 \quad (5.65f)$$

Continuidad en el nodo 3

$$F_7 = Q_5 - Q_4 = 0 \quad (5.65g)$$

Energía en el nodo 2 (del tipo 5.63)

$$F_8 = y_{32} - y_{22} + \left[\frac{1 + k_e}{2g} \right] \left[\frac{\alpha_3}{A_{32}^2} - \frac{\alpha_2}{A_{22}^2} \right] Q_3^2 + (z_{32} - z_{22}) = 0 \quad (5.65h)$$

Energía en el nodo 3 (del tipo 5.63)

$$F_9 = y_{53} - y_{43} + (1 + k_e) \frac{\alpha_5 Q_5^2}{2g A_{53}^2} - \frac{\alpha_4 Q_4^2}{2g A_{43}^2} + (z_{53} - z_{43}) = 0 \quad (5.65i)$$

Energía en el canal 3 (del tipo 5.61)

$$F_{10} = y_{34} - y_{32} + \left[\alpha_3 \left(\frac{1 + k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{34}^2} - \frac{1}{A_{32}^2} \right) + \frac{1}{2} L_3 n_3^2 \left(\frac{P_{34}^{4/3}}{A_{34}^{10/3}} + \frac{P_{32}^{4/3}}{A_{32}^{10/3}} \right) \right] Q_3^2 + (z_{34} - z_{32}) = 0 \quad (5.65j)$$

Energía en el canal 5 (del tipo 5.61)

$$F_{11} = y_{54} - y_{53} + \left[\alpha_5 \left(\frac{1 + k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{54}^2} - \frac{1}{A_{53}^2} \right) + \frac{1}{2} L_5 n_5^2 \left(\frac{P_{53}^{4/3}}{A_{53}^{10/3}} + \frac{P_{54}^{4/3}}{A_{54}^{10/3}} \right) \right] Q_5^2 + (z_{54} - z_{53}) = 0 \quad (5.65k)$$

Continuidad en el nodo 4

$$F_{12} = Q_6 - Q_3 - Q_5 = 0 \quad (5.65l)$$

Energía en el nodo 4, canales 3 y 6 (del tipo 5.64)

$$F_{13} = y_{64} - y_{34} + \left[\frac{\alpha_6 + K_6}{2g A_{64}^2} \right] Q_6^2 - \frac{\alpha_3 Q_3^2}{2g A_{34}^2} + (z_{64} - z_{34}) = 0 \quad (5.65m)$$

donde K_6 es el coeficiente de pérdida por unión.

Energía entre canales 5 y 6, nodo 4 (del tipo 5.64)

$$F_{14} = y_{64} - y_{54} + (\alpha_6 + K_6) \frac{Q_6^2}{2g A_{64}^2} - \frac{\alpha_5 Q_5^2}{2g A_{54}^2} + (z_{64} - z_{54}) = 0 \quad (5.65n)$$

Las 14 ecuaciones anteriores forman un sistema simultáneo cuya solución debe proporcionar 10 valores de y_{ij} y 6 de Q_i , es decir, 16 incógnitas. Las dos ecuaciones faltantes resultan al conocer

y_d por el cálculo del flujo en el canal 6 hasta llegar a dicho tirante en la proximidad del nodo 4. La ecuación es

$$F_{15} = y_{64} - y_d = 0 \quad (5.65o)$$

Además, se debe cumplir que $Q_1 = Q_6$, es decir

$$F_{16} = Q_6 - Q_1 = 0 \quad (5.65p)$$

Schulte y Chaudhry proponen que el planteamiento del sistema sea como hasta aquí se ha expuesto, es decir, un conjunto de ecuaciones básicas en los distintos elementos del modelo de flujo. Wylie, en cambio, propone simplificar el mismo sistema de ecuaciones a base de reducir su número mediante un proceso de sustitución que elimine las incógnitas Q_j . Sin embargo, dicho proceso suele complicar aun más algunas de las ecuaciones y se puede generar algún error en el proceso.

El sistema de ecuaciones 5.65 se resuelve mediante la técnica de Newton-Raphson encontrando las correcciones al primer término de una expansión en serie de Taylor. Los valores iniciales de una serie e de variables: $y_{11}, y_{21}, \dots, y_{54}, Q_1, Q_2, \dots, Q_5$, etc., en dos iteraciones consecutivas se relacionan con una serie de incrementos Δe en ellas. Los valores de las incógnitas en la siguiente iteración se obtienen de

$$e_{(1)} = e_{(0)} + \Delta e_{(0)} \quad (5.66)$$

La serie Δe de términos correctivos se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$F_j (e_1, \dots, e_n)_{(0)} + \left[\frac{\partial F_j}{\partial e_i} \right]_{(0)} \Delta e_i = 0 \quad (5.67)$$

donde $F_j (e_1, \dots, e_n)_{(0)}$ y $(\partial F_j / \partial e_i)_{(0)}$ representan el valor numérico de desbalance en el sistema original de ecuaciones y en el de ecuaciones derivadas, respectivamente, obtenido con los valores elegidos de las variables, donde $j = 1, \dots, n$, siendo n el número de ecuaciones.

Las correcciones encontradas con la ecuación 5.67 se aplican a la 5.66 y el procedimiento se repite hasta que dichas correcciones sean menores a la tolerancia deseada o, de preferencia, hasta que los valores de las funciones F_j de desbalance nodal sean menores que alguna tolerancia deseada.

Se observa que el sistema original de ecuaciones no lineales no es el que realmente se resuelve, ya que se reemplaza por otro de ecuaciones lineales con las variables Δe_i como incógnitas, que tiene la forma

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} & \frac{\partial F_1}{\partial e_4} & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{\partial F_2}{\partial e_1} & \frac{\partial F_2}{\partial e_2} & \frac{\partial F_2}{\partial e_3} & \frac{\partial F_2}{\partial e_4} & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{\partial F_3}{\partial e_1} & \frac{\partial F_3}{\partial e_2} & \frac{\partial F_3}{\partial e_3} & \frac{\partial F_3}{\partial e_4} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\partial F_4}{\partial e_2} & \frac{\partial F_4}{\partial e_3} & \frac{\partial F_4}{\partial e_4} & \frac{\partial F_4}{\partial e_5} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial e_{n-3}} & \frac{\partial F_n}{\partial e_{n-2}} & \frac{\partial F_n}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial e_n}
 \end{bmatrix}^{(0)}
 \begin{bmatrix}
 \Delta e_1 \\
 \Delta e_2 \\
 \Delta e_3 \\
 \Delta e_4 \\
 \vdots \\
 \Delta e_n
 \end{bmatrix}^{(0)}
 =
 \begin{bmatrix}
 -F_1 \\
 -F_2 \\
 -F_3 \\
 -F_4 \\
 \vdots \\
 -F_n
 \end{bmatrix}^{(0)}
 \quad (5.68)$$

donde los valores numéricos de la primera matriz y de F_j en el lado derecho del sistema varían en cada iteración, ya que se calculan cada vez que cambian los que corresponden a la serie de incógnitas.

La primera matriz en el sistema 5.68 se conoce como matriz jacobiana o simplemente jacobiano del sistema (matriz de derivadas parciales) y en ella se puede observar una característica importante: en las ecuaciones de energía sólo existen derivadas parciales con respecto del tirante en las secciones extremas del canal y del gasto, siendo nulas las restantes derivadas; en las de continuidad sólo existen derivadas parciales con respecto del gasto y las restantes son nulas.

Las derivadas parciales con respecto a los tirantes en ecuaciones de energía como la 5.61, se obtienen de desarrollos similares al efectuado para las ecuaciones 5.27 y 5.30 del método estándar por pasos y son:

$$\frac{\partial F_{Ci}}{\partial y_{ij}} = -1 + \left[(1 + k_e) \frac{\alpha_i T_{ij}}{g A_{ij}^3} - \frac{L_i n_i^2}{A_{ij}^2 R_{hi}^{4/3}} \left(\frac{5 T_{ij}}{3 A_{ij}} - \frac{2}{3 P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial y_{ij}} \right) \right] Q_i^2 \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial F_{Ci}}{\partial y_{ik}} = 1 - \left[(1 + k_e) \frac{\alpha_i T_{ik}}{g A_{ik}^3} - \frac{L_i n_i^2}{A_{ik}^2 R_{hik}^{4/3}} \left(\frac{5 T_{ik}}{3 A_{ik}} - \frac{2}{3 P_{ik}} \frac{\partial P_{ik}}{\partial y_{ik}} \right) \right] Q_i^2 \quad (5.70)$$

donde se han sustituido el número de Froude y la pendiente de fricción de acuerdo con su significado.

La derivada con respecto al gasto es

$$\frac{\partial F_{Ci}}{\partial Q_i} = 2 \left[\alpha_i \left(\frac{1+k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{ik}^2} - \frac{1}{A_{ij}^2} \right) + \frac{1}{2} L_i n_i^2 \left(\frac{P_{ij}^{4/3}}{A_{ij}^{10/3}} + \frac{P_{ik}^{4/3}}{A_{ik}^{10/3}} \right) \right] Q_i \quad (5.71)$$

La derivada de F_{Ci} con respecto de cualquier otra variable es nula.

En el caso de ecuaciones de energía como la 5.63 es suficiente hacer $L_i = 0$ en la 5.69 y 5.70, es decir

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial y_{ij}} = -1 + (1 + k_e) \frac{\alpha_i T_{ij}}{g A_{ij}^3} Q_i^2 \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial y_{ik}} = 1 - (1 + k_e) \frac{\alpha_i T_{i+1,j}}{g A_{i+1,j}^3} Q_i^2 \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_{i+1}} = - (1 + k_e) \left(\frac{\alpha_i + 1}{A_{i+1,j}^2} - \frac{\alpha_i}{A_{ij}^2} \right) Q_{i+1} \quad (5.74)$$

La derivada de F_{Nj} respecto de cualquier otra variable es nula.

En la misma forma, para ecuaciones de energía como la 5.64a, se obtienen:

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial y_{ij}} = -1 + \frac{\alpha_i T_i}{g A_{ij}^3} Q_i^2 \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial y_{i+1,j}} = 1 - (\alpha_{i+1} + K_{i+1}) \frac{T_{i+1} Q_{i+1}^2}{g A_{i+1,j}^3} \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_i} = - \frac{\alpha_i Q_i}{g A_{ij}^2} \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_{i+1}} = \frac{\alpha_{i+1} + K_{si+1}}{g A_{i+1,j}^2} Q_{i+1} \quad (5.78)$$

Expresiones similares resultan con la ecuación 5.64 b.

De la ecuación de continuidad (5.62) en los nodos, se tiene

$$\frac{\partial f_{Nj}}{\partial Q_i} = \pm 1 \quad (5.79)$$

donde el signo se elige de acuerdo al sentido de Q_i y la convención adoptada.

Mediante un arreglo adecuado, las ecuaciones en derivadas que no se anulan quedan sobre o cerca de la diagonal principal de la matriz jacobiana, la cual tiene hasta cuatro diagonales con elementos que no son cero y se conoce como matriz en banda de ancho hasta siete, la cual tiene la ventaja de no necesitar almacenamiento en la computadora durante el proceso de solución, además de reducir de manera importante el tiempo de cómputo. Por otra parte, la mayoría de las computadoras, vienen equipadas con subprogramas que resuelven dichas matrices. Un método de eliminación gaussiana también se puede usar en la solución.

El algoritmo consiste en los pasos que siguen.

1. Se estima un valor inicial de los tirantes y gastos que sean incógnitas en el problema y con ellos se calculan los valores de las funciones F_j del sistema original y los de las funciones derivadas en el jacobiano del sistema 5.68.
2. Se resuelve el sistema 5.68 para obtener las correcciones Δe_i de las variables por resolver. Un valor mejorado de dichas variables se obtienen de

$$e_i^{(1)} = e_i^{(0)} + \Delta e_i^{(0)} \quad (5.80)$$

3. Si el valor absoluto máximo de cualquiera de las correcciones es menor que la tolerancia elegida, las incógnitas obtenidas de la ecuación anterior son los valores finales; en caso contrario, dichos valores se utilizan para resolver nuevamente el sistema de ecuaciones 5.68 y el procedimiento se repite hasta obtener la solución con la tolerancia deseada.

Es esencial una buena estimación del valor inicial que se elija para las incógnitas, a fin de lograr una convergencia rápida de las iteraciones. El tirante y_d calculado para el extremo aguas abajo del sistema de canales se puede usar como valor inicial de los tirantes desconocidos. Asimismo, se debe satisfacer el principio de continuidad en cada nodo eligiendo estimaciones adecuadas de los gastos así como el sentido correcto de los mismos, el cual es fácil establecer en los casos sencillos.

5.9.4 Redes de canales

La solución de una red de canales es probablemente la aplicación más prometedora del procedimiento de solución simultánea, en la cual se considera sólo el caso de flujo subcrítico.

En el supercrítico se presentan incomodidades adicionales derivadas de la geometría de los canales en las uniones y separaciones, que se traducen en una ecuación adicional.

Se considera la red mostrada en la figura 5.56a donde hay flujo subcrítico en todos los canales. Además de los tirantes, no se conoce a priori la distribución de los gastos en cada ramal, pero se puede hacer una suposición con los sentidos que se señalan en dicha figura.

En la figura 5.56b se muestra la simbología adoptada donde se han considerado cuatro canales, con tres nodos intermedios entre aquellos donde hay unión o separación.

El planteamiento del sistema original es a base de las ecuaciones típicas 5.61 a 5.64, de la misma manera que en sistemas más sencillos. Se resuelve con la misma técnica de Newton-Raphson, siendo deseable estimar valores iniciales razonables de los tirantes, que pueden ser iguales al tirante y_d calculado previamente en el extremo aguas abajo. Asimismo, es deseable satisfacer el principio de continuidad en cada nodo eligiendo estimaciones adecuadas de los gastos, así como los sentidos respectivos del flujo. Sin embargo, también se obtiene una solución correcta aunque la estimación inicial no satisfaga el principio mencionado. Para tomar en cuenta la inversión del flujo dentro del proceso de cálculo, es decir, sentidos de flujo contrarios a los supuestos, la ecuación de energía 5.61, entre los nodos j y k del canal i , se puede plantear en la forma

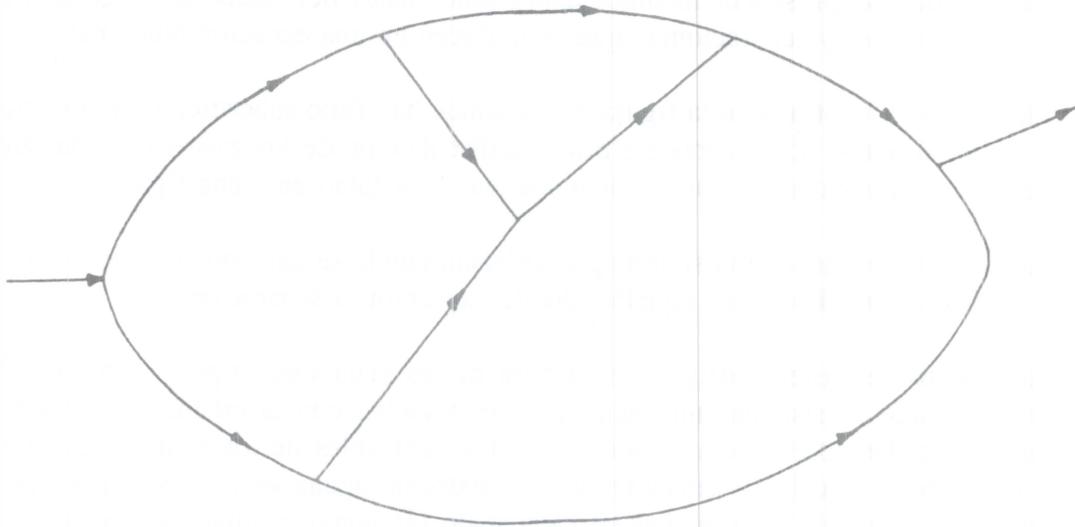
$$F_{Ci} = y_{ik} - y_{ij} + \left[\alpha_i \left(\frac{1+k_e}{2g} \right) \left(\frac{1}{A_{ik}^2} - \frac{1}{A_{ij}^2} \right) + \frac{1}{2} L_i n_i^2 \left(\frac{P_{ij}^{4/3}}{A_{ij}^{10/3}} + \frac{P_{ik}^{4/3}}{A_{ik}^{10/3}} \right) \right] Q_i |Q_i| + (z_{ik} - z_{ij}) = 0 \quad (5.81)$$

en aquellos nodos donde haya unión o separación de canales, es decir, en los que haya posibilidad de inversión del flujo.

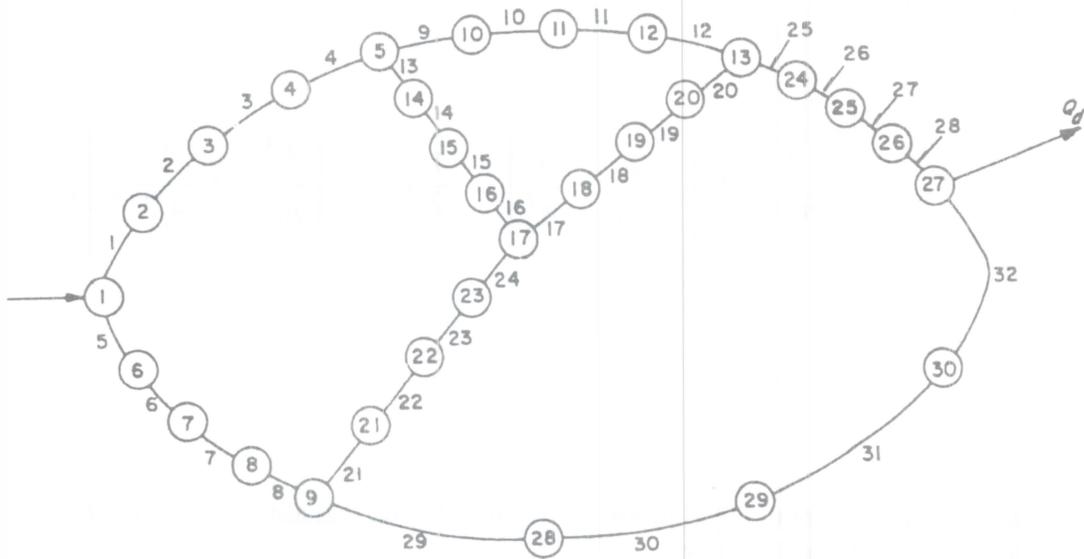
La sustitución de Q_i^2 por $Q_i |Q_i|$ preserva el signo correcto asignado a cada gasto particular y a las pérdidas. Si el sentido del flujo es contrario al supuesto, el valor resultante queda precedido por un signo negativo.

La expansión en forma de serie de Taylor conduce a un sistema matricial similar al 5.68, con ecuaciones derivadas iguales a las dadas por las ecuaciones 5.69 a 5.79.

Cuando las ecuaciones para la red de canales se plantean con un arreglo arbitrario, los términos no nulos de la matriz jacobiana no quedan necesariamente sobre o cerca de la diagonal principal, lo que significa un incremento en las necesidades de almacenaje, en el tiempo de cómputo y muy probablemente menor seguridad en la solución.



a) Esquema y sentido del flujo



b) Simbología utilizada

Figura 5.56. Red de canales

Las limitaciones antes mencionadas se evitan mediante un acomodo alternado de las ecuaciones básicas, con el orden en que se plantearon para la red de canales de la figura 5.54, a través del sistema de ecuaciones 5.65, pero se requiere el mismo número de nodos intermedios entre las uniones o separaciones. El ordenamiento se puede generalizar a redes más complejas, como la

que se muestra en la figura 5.56, para tratar de reducir el ancho de banda del jacobiano a un mínimo; sin embargo, no existe un procedimiento sencillo para el arreglo de las ecuaciones, debido a que el sistema es en general asimétrico. La numeración manual de cada canal y cada nodo del extremo aguas arriba al de aguas abajo de manera semisistemática, puede conducir a una matriz con ancho de banda pequeño, que no es necesariamente el mínimo. Existen algunos procedimientos para reducir el ancho de banda en matrices asimétricas, pero son demasiado complejos y poco prácticos, aun utilizando computadora en los cálculos.

En cualquier caso, el algoritmo de solución es el de Newton-Raphson, en la forma ya expuesta.

Una exposición completa del procedimiento a través de un ejemplo numérico sería muy extensa; sin embargo, los siguientes casos han sido resueltos en diferentes publicaciones y pueden orientar al lector en la solución de nuevos problemas.

Ejemplo 5.14. La red de canales en paralelo de la figura 5.51 son rectangulares y su modelo en la 5.54b tiene las siguientes características: $Q_1 = Q_6 = 67.96 \text{ m}^3/\text{s}$; $z_{11} = z_{21} = z_{41} = 0.061 \text{ m}$; $L_2 = 121.92 \text{ m}$, $b_2 = 14.63 \text{ m}$, $n_2 = 0.028$; $z_{22} = 0.061 \text{ m}$, $z_{32} = 0.03 \text{ m}$; $L_3 = 182.88 \text{ m}$, $b_3 = 14.63 \text{ m}$, $n_3 = 0.028$; $L_4 = 121.92 \text{ m}$, $b_4 = 10.668 \text{ m}$, $n_4 = 0.02$; $z_{43} = z_{53} = 0$; $L_5 = 121.92 \text{ m}$, $b_5 = 10.668 \text{ m}$, $n_5 = 0.02$; $z_{34} = z_{54} = z_{64} = 0.03 \text{ m}$. A una distancia $L_6 = 152.4 \text{ m}$ sobre el canal 6, aguas abajo del nodo 4, se ubica una sección a la elevación $z = 0$, cuyo tirante es $y = 2.368 \text{ m}$. El ancho en todo el canal 6 es $b_6 = 24.384 \text{ m}$ y su coeficiente de Manning $n_6 = 0.028$. Analizar las condiciones del flujo en la red y determinar el tirante en una sección del canal 1 a una distancia de 152.4 m aguas arriba del nodo 1, cuya elevación es $z = 0.091 \text{ m}$, siendo $b_1 = 24.384 \text{ m}$ en todo el canal 1 y $n_1 = 0.018$.

El problema fue resuelto por Wylie en la referencia 18 considerando que la pérdida en los nodos y por turbulencia es cero ($k_e = K = 0$), que el radio hidráulico se confunde con el tirante y que el coeficiente $\alpha = 1$ es el mismo en todos los canales.

Solución. Las hipótesis de Wylie simplifican el planteamiento de las ecuaciones básicas, ya que despreciar la pérdida en los nodos significa considerar una energía común para todos los canales que concurren a dicho nodo.

El conocimiento del tirante sobre el canal 6, aguas abajo del nodo 4, puede significar la adopción de un nuevo nodo 5, o bien, el cálculo separado del tirante y_{64} . Idéntico razonamiento se puede seguir para el cálculo del tirante en la sección sobre el canal 1, aguas arriba del nodo 1.

1. Se prefiere utilizar la segunda opción en los dos casos, a fin de no modificar el modelo previsto en la figura 5.54b.

Se designa con el subíndice 65 a la sección conocida en el canal 6 y se calculan los siguientes valores:

$$A_{65} = 24.384 (2.368) = 57.7413 \text{ m}^2$$

$$V_{65} = \frac{67.96}{57.7413} = 1.177 \text{ m/s}; \quad \frac{V_{65}^2}{2g} = 0.0706 \text{ m}$$

$$E_{65} = 2.368 + 0.0706 = 2.4386 \text{ m}$$

$$S_{f65} = \left[\frac{1.177 (0.028)}{(2.368)^{2/3}} \right]^2 = 0.00034411$$

Se establece la ecuación de energía 5.60 en el tramo del canal 6 en la forma

$$0.03 + y_{64} + \frac{(67.96)^2}{19.62(24.384)^2 y_{64}^2} = 2.4386 + \frac{152.4}{2} \left[\frac{(67.96)^2 (0.028)^2}{(24.384)^2 y_{64}^{10/3}} + 0.00034411 \right]$$

o bien

$$y_{64} + \frac{0.39591}{y_{64}^2} = 2.4348 + \frac{0.46405}{y_{64}^{10/3}}$$

cuya solución es $y_{64} = 2.3902 \text{ m}$. Además: $A_{64} = 58.2826 \text{ m}^2$; $V_{64} = 1.166 \text{ m/s}$; $V_{64}^2/2g = 0.0693 \text{ m}$; $E_{64} = 2.4595 \text{ m}$.

A continuación se establecen las ecuaciones básicas del flujo de acuerdo con el modelo de la figura 5.54b y las hipótesis consideradas para el análisis, siguiendo el orden del sistema 5.65.

$$F_1 = Q_2 + Q_4 - Q_1 = 0 \quad (\text{a})$$

$$F_2 = y_{21} - y_{11} + \frac{0.0002381}{y_{21}^2} Q_2^2 - \frac{0.00008572}{y_{11}^2} Q_1^2 = 0 \quad (\text{b})$$

$$F_3 = y_{41} - y_{11} + \frac{0.0004479}{y_{41}^2} Q_4^2 - \frac{0.00008572}{y_{11}^2} Q_1^2 = 0 \quad (\text{c})$$

Con $P^{4/3}/A^{10/3} \approx 1/(b^2 y^{10/3})$, las ecuaciones de energía 5.65d y e resultan

$$F_4 = y_{22} - y_{21} + \left[0.0002381 \left(\frac{1}{y_{22}^2} - \frac{1}{y_{21}^2} \right) + 0.0002233 \left(\frac{1}{y_{21}^{10/3}} + \frac{1}{y_{22}^{10/3}} \right) \right] Q_2^2 = 0 \quad (\text{d})$$

$$F_5 = y_{43} - y_{41} + \left[0.0004479 \left(\frac{1}{y_{43}^2} - \frac{1}{y_{41}^2} \right) + 0.0002143 \left(\frac{1}{y_{41}^{10/3}} + \frac{1}{y_{43}^{10/3}} \right) \right] Q_4^2 - 0.061 = 0 \quad (e)$$

$$F_6 = Q_3 - Q_2 = 0 \quad (f)$$

$$F_7 = Q_5 - Q_4 = 0 \quad (g)$$

$$F_8 = y_{32} - y_{22} + 0.0002381 \left(\frac{1}{y_{32}^2} - \frac{1}{y_{22}^2} \right) Q_3^2 - 0.03 = 0 \quad (h)$$

$$F_9 = y_{53} - y_{43} + \frac{0.0004479}{y_{53}^2} Q_5^2 - \frac{0.0004479}{y_{43}^2} Q_4^2 = 0 \quad (i)$$

$$F_{10} = y_{34} - y_{32} + \left[0.0002381 \left(\frac{1}{y_{34}^2} - \frac{1}{y_{32}^2} \right) + 0.0003349 \left(\frac{1}{y_{32}^{10/3}} + \frac{1}{y_{34}^{10/3}} \right) \right] Q_3^2 = 0 \quad (j)$$

$$F_{11} = y_{54} - y_{53} + \left[0.0004479 \left(\frac{1}{y_{54}^2} - \frac{1}{y_{53}^2} \right) + 0.0002143 \left(\frac{1}{y_{53}^{10/3}} + \frac{1}{y_{54}^{10/3}} \right) \right] Q_5^2 + 0.03 = 0 \quad (k)$$

$$F_{12} = 67.96 - Q_3 - Q_5 = 0 \quad (l)$$

$$F_{13} = 2.4595 - y_{34} - 0.0002381 Q_3^2 = 0 \quad (m)$$

$$F_{14} = 2.4595 - y_{54} - 0.0004479 Q_5^2 = 0 \quad (n)$$

Las incógnitas del sistema son nueve tirantes a saber: y_{11} , y_{21} , y_{41} , y_{22} , y_{43} , y_{32} , y_{34} , y_{53} , y_{54} , y cinco gastos: Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 , Q_5 ; un total de 14 ecuaciones y el mismo número de incógnitas.

Las ecuaciones 5.65 o y p ya fueron incluidas en el planteamiento.

Las ecuaciones en derivadas parciales son

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = -1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} = 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_4} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_1} = -0.00017144 \frac{Q_1}{y_{11}^2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} = 0.0004762 \frac{Q_2}{y_{21}^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_{11}} = 0.00017144 \frac{Q_1^2}{y_{11}^3} - 1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_{21}} = 1 - 0.0004762 \frac{Q_2^2}{y_{21}^3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = -0.00017144 \frac{Q_1}{y_{11}^2}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_4} = 0.0008958 \frac{Q_4}{y_{41}^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_{11}} = 0.00017144 \frac{Q_1^2}{y_{11}^3} - 1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial y_{41}} = 1 - 0.0008958 \frac{Q_4^2}{y_{41}^3}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_2} = 2 \left[0.0002381 \left(\frac{1}{y_{22}^2} - \frac{1}{y_{21}^2} \right) + 0.0002233 \left(\frac{1}{y_{21}^{10/3}} + \frac{1}{y_{22}^{10/3}} \right) \right] Q_2$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_{21}} = -1 + \left[\frac{0.0004762}{y_{21}^3} - \frac{0.00074433}{y_{21}^{13/3}} \right] Q_2^2$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_{22}} = 1 - \left[\frac{0.0004762}{y_{22}^3} + \frac{0.00074433}{y_{22}^{13/3}} \right] Q_2^2$$

y en la misma forma las restantes.

Se establecen los siguientes valores iniciales: todos los tirantes $y = y_d = 2.3902$ m y los gastos $Q_1 = 67.96$ m³/s; $Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_1/2 = 33.98$ m³/s.

Con estos valores resultan:

$$F_1 = 0; F_2 = -0.02118; F_3 = 0.02123; F_4 = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_1} = -0.00204; \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} = 0.00283; \frac{\partial F_2}{\partial y_{11}} = -0.94201$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_{21}} = 0.95973$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = -0.00204; \frac{\partial F_3}{\partial Q_4} = 0.00533$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_{11}} = -0.94201; \frac{\partial F_3}{\partial y_{41}} = 0.81895$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q_2} = 0.0007; \frac{\partial F_4}{\partial y_{21}} = -0.97943; \frac{\partial F_4}{\partial y_{22}} = 0.94004$$

El sistema de ecuaciones queda en la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0.00204 & 0.00283 & 0 & -0.94201 & 0.95973 & 0 & \dots & 0 \\ -0.00204 & 0 & 0.00533 & -0.94201 & 0 & 0.81895 & \dots & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0 & 0 & -0.97943 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta y_{11} \\ \Delta y_{21} \\ \Delta y_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02118 \\ -0.02123 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

La solución del sistema proporciona los incrementos de las distintas variables para obtener valores más precisos de las mismas.

Los valores finales obtenidos por Wylie después de varias iteraciones los expresó en términos del nivel de energía en cada nodo, como sigue:

$$H_1 = 2.5493 \text{ m}; H_2 = 2.5259 \text{ m}; H_3 = 2.5201 \text{ m}; H_4 = 2.49 \text{ m}$$

Los gastos resultaron:

$$Q_1 = 67.96 \text{ m}^3/\text{s}, Q_2 = Q_3 = 32.256 \text{ m}^3/\text{s}; Q_4 = Q_5 = 35.705 \text{ m}^3/\text{s}$$

El tirante desconocido en el canal 1, aguas arriba del nodo 1, se obtiene mediante un cálculo separado y resulta $y = 2.41 \text{ m}$.

Ejemplo 5.15. La red mostrada en la figura 5.56a fue analizada por Shulte y Chaudhry (referencia 9) con el procedimiento antes descrito y el sentido supuesto del flujo que señalan las flechas. El modelo correspondiente a la simbología aquí empleada se muestra en la figura 5.56b.

Todos los canales son de sección trapezoidal de distintos anchos, talud 1.5:1 y se consideró $\alpha = 1$ y un coeficiente de pérdida $K = 0.2$ en los nodos que unen más de dos canales, incluyendo las diferencias en cargas de velocidad en todos ellos. El flujo en todos los canales es subcrítico y las condiciones en el nodo 29 del extremo aguas abajo son $y_d = 5 \text{ m}$ y $Q_d = 250 \text{ m}^3/\text{s}$. Las características de la red se presentan en la tabla 5.27 de acuerdo con la numeración de los canales elegida.

Determinar la distribución del gasto y los valores del tirante en los nodos de la red.

Solución. El procedimiento de iteración se inició suponiendo todos los tirantes iguales a 5 m; para los gastos se eligieron valores al azar (sin satisfacer el principio de continuidad). Se eligió una tolerancia de 0.0005 para y_{ij} y Q_{ij} en el proceso de convergencia hasta llegar a la solución. Los valores finales se alcanzaron después de doce iteraciones y se presentan en la tabla 5.28. El tirante aguas arriba del nodo 1 fue de 2.507 m para $Q = 250 \text{ m}^3/\text{s}$.

Los resultados se verificaron con el método de Runge-Kutta en cada canal individual y fueron idénticos a los mostrados en la tabla 5.28 dentro de la tolerancia elegida.

Tabla 5.27. Datos de la red de canales del ejemplo 5.15

Canales	Longitud en m	Ancho en m	n (Manning)	S_0
1 a 4	50.0	30.0	0.013	0.005
5 a 8	50.0	40.0	0.013	0.005
9 a 12	50.0	20.0	0.012	0.005
13 a 16	25.0	20.0	0.014	0.005
17 a 20	25.0	20.0	0.013	0.005
21 a 24	25.0	25.0	0.013	0.005
25 a 28	25.0	30.0	0.014	0.005
29 a 32	75.0	50.0	0.014	0.005

Tabla 5.28. Valores finales del gasto y tirante en la red de canales del ejemplo 5.15

Canales	Sección	Tirante en m	Canales	Sección	Tirante en m
1 a 4 $Q = 104.9785 \text{ m}^3/\text{s}$	1, 1	2.4553	17 a 20 $Q = 51.0382 \text{ m}^3/\text{s}$	17, 17	4.0077
	1, 2; 2, 2	2.7176		17, 18; 18, 18	4.1334
	2, 3; 3, 3	2.9767		18, 19; 19, 19	4.2590
	3, 4; 4, 4	3.2336		19, 20; 20, 20	4.3846
	4, 5	3.4889		20, 13	4.5101
5 a 8 $Q = 145.0214 \text{ m}^3/\text{s}$	5, 1	2.4405	21 a 24 $Q = 5.7463 \text{ m}^3/\text{s}$	21, 9	3.5222
	5, 6; 6, 6	2.7047		21, 21; 22, 21	3.6472
	6, 7; 7, 7	2.9651		22, 22; 23, 22	3.7722
	7, 8; 8, 8	3.2230		23, 23; 24, 23	3.8973
	8, 9	3.4791		24, 17	4.0223
9 a 12 $Q = 59.6867 \text{ m}^3/\text{s}$	9, 5	3.4982	25 a 28 $Q = 110.7249 \text{ m}^3/\text{s}$	25, 13	4.4916
	9, 10; 10, 10	3.7510		25, 24; 26, 24	4.6177
	10, 11; 11, 11	4.0033		26, 25; 27, 25	4.7437
	11, 12; 12, 12	4.2552		27, 26; 28, 26	4.8696
	12, 13	4.5067		28, 27	4.9954
13 a 16 $Q = 45.2919 \text{ m}^3/\text{s}$	13, 5	3.5101	29 a 32 $Q = 139.2751 \text{ m}^3/\text{s}$	29, 9	3.4905
	13, 14; 14, 14	3.6359		29, 28; 30, 28	3.8694
	14, 15; 15, 15	3.7616		30, 29; 31, 29	4.2473
	15, 16; 16, 16	3.8872		31, 30; 32, 30	4.6246
	16, 17	4.0128		32, 27	5.0013

5.10 INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO

5.10.1 Métodos numéricos

En la sección 5.6.2 se explicó que el cálculo del perfil del flujo en un canal prismático se puede hacer mediante la integración de la ecuación diferencial 5.11a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F^2} = \phi(x, y)$$

por métodos gráficos o numéricos, ya que $\phi(x, y)$ es una función no lineal.

Algunos métodos numéricos se han usado en el pasado para integrar ecuaciones similares (referencias 19 y 20), pero otros se han introducido para la ecuación anterior (referencia 21). Se conocen como métodos de pasos individuales y son similares a los métodos por pasos discutidos en los subcapítulos previos. El tirante desconocido en una sección se expresa en términos de la función $\phi(x, y)$ en un punto cercano donde se conoce un tirante inicial de frontera o bien se ha calculado en un paso previo.

Existen varios métodos de pasos individuales (referencia 19) pero sólo cuatro de ellos se presentan. Para ello, se considera conocido el tirante y_i a la distancia x_i (figura 5.57) y se desea determinar el tirante a la distancia x_{i+1} . Sea $y = y(x)$ la solución exacta de la ecuación diferencial 5.11a que se representa mediante la curva mostrada en la figura 5.57.

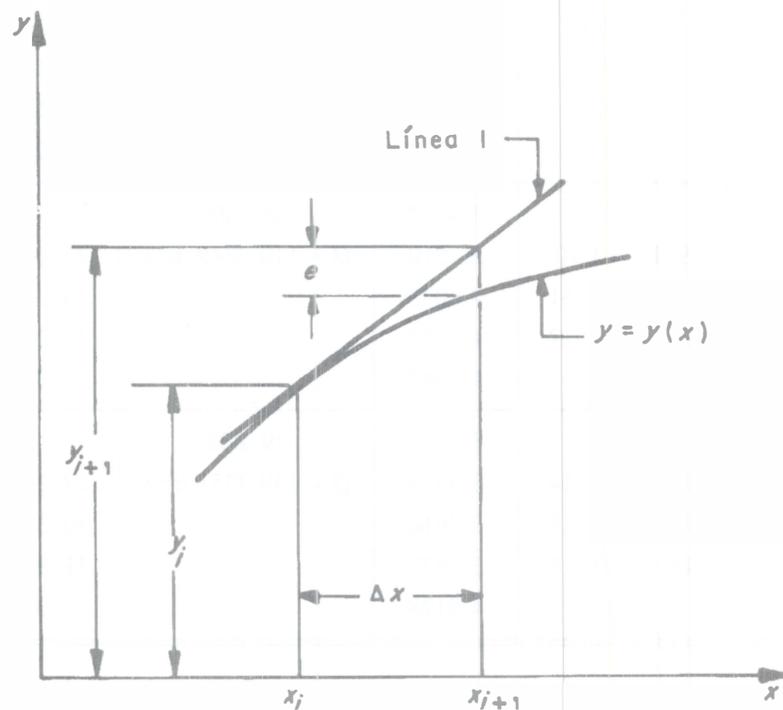


Figura 5.57. Representación geométrica del método de Euler

5.10.2 Método de Euler

El monto de la variación de y con respecto a x , a la distancia x_i , se obtiene de la ecuación 5.11a

$$y'_i = \left. \frac{dy}{dx} \right|_i = \phi(x_i, y_i) \quad (5.82)$$

donde el subíndice i se aplica a las variables a la distancia x_i . El supra índice prima en y significa la derivada de y con respecto a x , y

$$\phi(x_i, y_i) = \frac{S_0 - S_{fi}}{1 - F_i^2} \quad (5.83)$$

Todas las variables a la derecha de la ecuación anterior se conocen y es posible calcular $\phi(x_i, y_i)$. Si el monto de variación de y en el punto (x_i, y_i) se considera constante en el intervalo de x_i a x_{i+1} , es posible determinar el tirante en x_{i+1} de la ecuación

$$y_{i+1} = y_i + y_i' \Delta x \quad (5.84)$$

donde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Al sustituir la ecuación 5.82 en la anterior, resulta

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i) \Delta x \quad (5.85)$$

Conocido el valor de y_{i+1} , se puede determinar y_{i+2} a la distancia x_{i+2} al reiterar el mismo procedimiento, el cual se conoce como método de Euler. Su precisión se discute brevemente al expandir y_{i+1} en forma de una serie de Taylor, como sigue

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x + O(\Delta x)^2 \quad (5.86)$$

donde $O(\Delta x)^2$ representa a los términos del orden $(\Delta x)^2$ o más pequeños.

La comparación de las ecuaciones 5.84 y 5.86 muestra que la solución incluye sólo términos hasta la primera potencia de Δx , por lo cual, se considera que el método de Euler es con precisión de primer orden.

La ecuación 5.84 se representa por la línea recta 1 en la figura 5.57 y toda vez que no es constante en el intervalo x_i a x_{i+1} , se introduce un error e en cada paso, a menos que la superficie del agua sea también recta, ya que entonces $e = 0$. Al introducir el error en cada paso, el valor numérico calculado diverge de la solución correcta. Además, el método es comúnmente inestable, es decir, un error pequeño (redondeo o truncamiento) se magnifica a medida que x se incrementa.

En el método de Euler se usa la pendiente de la curva en el punto (x_i, y_i) para calcular el valor de y_{i+1} , pero la precisión se puede mejorar si se usa la pendiente en más de un punto. Con esta idea se presentan a continuación los métodos mejorado y modificado de Euler.

5.10.3 Método mejorado de Euler

Sea el tirante obtenido en x_{i+1} mediante el método de Euler, es decir

$$y_{i+1}^* = y_i + y_i' \Delta x \quad (5.87)$$

Con este valor se calcula la pendiente de la curva $y = y(x)$ en $x = x_{i+1}$, de magnitud y_{i+1}' . Un valor más preciso de y_{i+1} se obtiene con la media de las pendientes de la curva en x_i y x_{i+1} , en la forma

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (y_i' + y_{i+1}') \Delta x \quad (5.88)$$

Esta ecuación se expresa también como sigue

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} [\phi(x_i, y_i) + \phi(x_{i+1}, y_{i+1}^*)] \Delta x \quad (5.89)$$

El procedimiento se conoce como método mejorado de Euler y es con precisión de segundo orden. En la figura 5.58 se muestra una representación gráfica del método, donde la línea 1 es tangente en (x_i, y_i) y tiene la pendiente y_i' , mientras que la línea 2 es tangente en (x_{i+1}, y_{i+1}') y tiene la pendiente y_{i+1}' . La línea 3 se traza en el punto (x_i, y_i) con pendiente $(1/2)(y_i' + y_{i+1}')$.

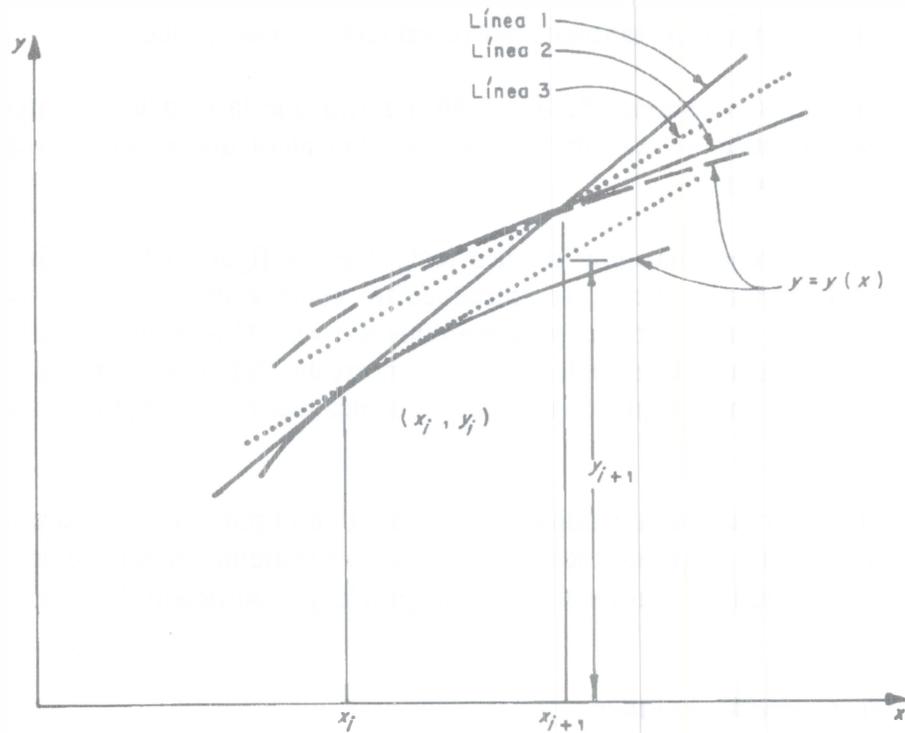


Figura 5.58. Representación geométrica del método mejorado de Euler

5.10.4 Método modificado de Euler

La precisión del método de Euler también se mejora si se usa la pendiente de la curva $y = y(x)$ en $x = x_{i+1/2}$ y $y = y_{i+1/2}$, donde $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$ y $y_{i+1/2} = y_i + y'(\Delta x/2)$. La pendiente en el último punto es $y'_{i+1/2}$ y entonces

$$y_{i+1} = y_i + y'_{i+1/2} \Delta x \quad (5.90)$$

O bien

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \Delta x \quad (5.91)$$

El procedimiento se conoce como método modificado de Euler y tiene precisión de segundo orden. En la figura 5.59 se muestra una representación geométrica del método, donde la línea 1 es tangente a la curva en (x_i, y_i) y tiene la pendiente y'_i , mientras que la línea 2 es tangente en $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ y tiene la pendiente $y'_{i+1/2}$. La línea 3 pasa por el punto (x_i, y_i) y su pendiente es $y'_{i+1/2}$.

Mediante la expansión de la solución numérica en serie de Taylor, se demuestra que los métodos mejorado y modificado de Euler tienen precisión de segundo orden.

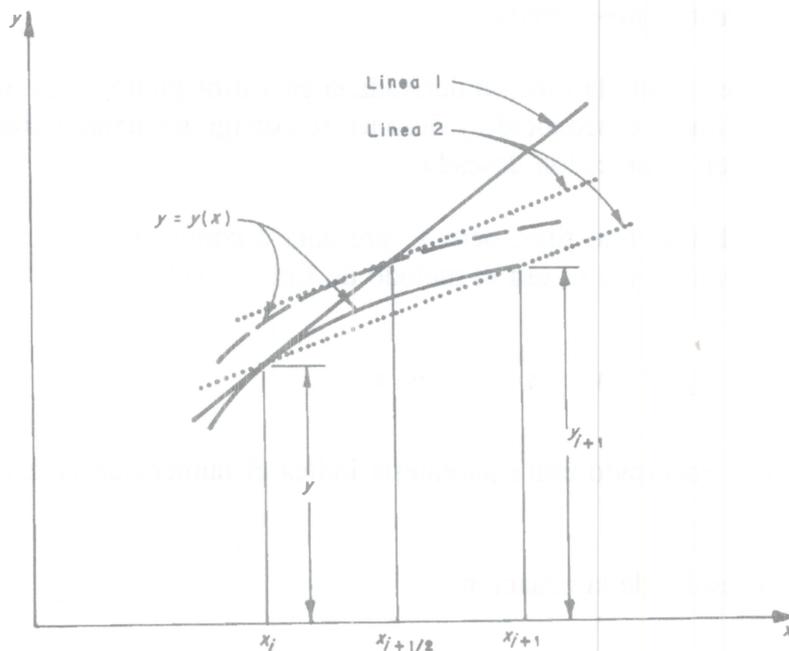


Figura 5.59. Representación geométrica del método modificado de Euler

5.10.5 Método de Runge-Kutta de cuarto orden

La pendiente de la curva $y = y(x)$ se determina a partir de las ecuaciones:

$$k_1 = \phi(x_i, y_i) \quad (5.92a)$$

$$k_2 = \phi\left(x_i + \frac{1}{2} \Delta x, y_i + \frac{1}{2} k_1 \Delta x\right) \quad (5.92b)$$

$$k_3 = \phi\left(x_i + \frac{1}{2} \Delta x, y_i + \frac{1}{2} k_2 \Delta x\right) \quad (5.92c)$$

$$k_4 = \phi(x_i + \Delta x, y_i + k_3 \Delta x) \quad (5.92d)$$

de modo que

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \Delta x \quad (5.93)$$

El método se ha aplicado al cálculo de perfiles de flujo mediante programas de computadora.

5.10.6 Método pronosticador-corrector

En este método no se calcula la función derivada ϕ en varios puntos, sino más bien se predice un primer valor del tirante desconocido y después se corrige mediante iteraciones hasta que se obtiene la solución con la precisión deseada.

Existen varios métodos de este tipo, pero se presenta a continuación sólo uno de ellos. Para predecir el valor inicial de y_{i+1} se usa el método de Euler y vale

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \phi(x_i, y_i) \Delta x \quad (5.94)$$

donde el supraíndice encerrado entre paréntesis indica el número de la iteración (cero para el valor inicial).

El valor corregido resulta de la ecuación

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{1}{2} [\phi(x_i, y_i) + \phi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})] \Delta x \quad (5.95)$$

Una nueva corrección es

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + \frac{1}{2} [\phi(x_i, y_i) + \phi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)})] \Delta x \quad (5.96)$$

y en la iteración j

$$y_{i+1}^{(j)} = y_i + \frac{1}{2} [\phi(x_i, y_i) + \phi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(j-1)})] \Delta x \quad (5.97)$$

El procedimiento continúa hasta que $|y_{i+1}^{(j)} - y_{i+1}^{(j-1)}| \leq \text{TOL}$, donde TOL es la tolerancia deseada.

Un método similar fue usado por Prasad (referencia 21) para calcular perfiles de flujo excepto que él compara la derivada y'_{i+1} entre dos iteraciones sucesivas en vez de los tirantes.

REFERENCIAS

1. Bakhmeteff B. A. "Hydraulics of Open Channels", McGraw-Hill Book Company Inc., Nueva York, 1932.
2. Henderson F. M. "Open Channel Flow", the McMillan Co, Nueva York, 1966.
3. Chow Ven te. "Open-Channel Hydraulics", McGraw Hill-Kogakusha, Nueva York, 1959.
4. Kiefer C. J. y Chu H. H. "Backwater Functions by Numerical Integration", Transactions of the American Society of Civil Engineers, volumen 120, páginas 429 a 442, 1955.
5. Eichert B. S. "Survey of Programs for Water-Surface Profiles", Journal of Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 96, número 2, páginas 547 a 563, 1970.
6. Prasad R. "Numerical Method of computing flow profiles", Journal of Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 96, número 1, páginas 75 a 86, 1979.
7. McBean E., Perkins F. "Numerical errors in water profile computation", Journal of Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 101, número 11, páginas 1389 a 1403, 1975.
8. Chaudhry M. H., Schulte A. "Computation of steady-state, gradually varied flows in parallel channels", Canadian Journal of Civil Engineering, volumen 13, número 1, páginas 39 a 45, 1986.
9. Schulte A. M., Chaudhry M. H. "Gradually varied flows in open channel networks", Journal of Hydraulic Research, International Asociation for Hydraulic Research, volumen 25, número 3, páginas 357 a 371, 1987.
10. U.S. Army Corps of Engineers. "HEC-2, Water-surface Profiles, User's Manual", Hydrologic Engineering Center, Davis, California, 1982.
11. Laurenson E.M. "Friction slope averaging in backwater calculations", Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, volumen 112, número 12, páginas 1151 a 1163, 1986.
12. French R. H. "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1985.

13. Chaudhry M. Hanif y Bhallamudi S. Murty, "Computation of critical Depth in symmetrical compound Channels", Journal of Hydraulic Research, IARH, volumen 26, número 4, 1988.
14. Shearman J. O. "User's Guide Step Backwater and Floodway Analyses", U. S. Geological Survey, Water Resources Division, Reston, Va., mayo 1977.
15. Ezra A. A. "A Direct Step Method for Computing Water Surfaces Profiles", Transactions of the American Society of Civil Engineers, volumen 119, páginas 453 a 462, 1954.
16. Grimm C. I. "Backwater Slopes above Dams", Engineering News-Record, volumen 100, número 23, página 902, junio 7, 1928.
17. Escoffier F. F. "Graphic Calculation of Backwater eliminates Solution by Trial", Engineering News-Record, volumen 136, número 26, página 71, junio 27, 1946.
18. Wylie E. B. "Water Surface Profiles in Divided Channels", Journal of Hydraulic Research (IARH), volumen 96, número HY3, páginas 801 a 814, marzo 1970.
19. McCracken D. D., Dorn W. S. "Numerical Methods and FORTRAN programming", John Wiley, Nueva York, NY., 1964.
20. Chapra S.C., Canale R.P. "Numerical methods for engineers", segunda edición, McGraw-Hill, Nueva York NY., 1988.
21. Prasad R. "Numerical method of computing flow profiles", Journal of Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, volumen 96, numero 1, páginas 75 a 86, 1970.

CAPÍTULO 6. FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

6.1 CONSIDERACIONES GENERALES

En el flujo gradualmente variado del capítulo anterior siempre se consideró que el gasto permanece constante en la dirección del movimiento. En la práctica ocurre también otro flujo variado en que el caudal del canal aumenta o disminuye en la dirección del movimiento, por la entrada o salida de un gasto que se aporta o se desvía del mismo. Estas son las condiciones en que ocurre el llamado flujo espacialmente variado, es decir, uno gradualmente variado en el que el gasto varía en la dirección del flujo y se generan o no modificaciones en su cantidad de movimiento y energía, con un comportamiento más complicado que el de gasto constante.

En el flujo espacialmente variado de gasto creciente el agua que se agrega a la que originalmente fluye en el canal produce fuertes corrientes transversales, un mezclado turbulento y un flujo de forma espiral. Estos efectos se transmiten hacia aguas abajo, incluso más allá de la última sección en que se aporta gasto al canal, e inducen una pérdida de energía mayor que la de fricción, conocida como pérdida por impacto, que sólo se puede cuantificar por medio del principio del momentum, más conveniente para su análisis que el de la energía. En dicho análisis no se consideran los efectos de la inclinación transversal de la superficie libre en el canal, resultante de los fenómenos antes mencionados cuando el agua entra por un solo lado, siendo más notable cuando el canal es angosto.

El modelo de flujo espacialmente variado de gasto creciente es útil en el diseño de estructuras como el vertedor de canal lateral utilizado para eliminar las excedencias en un almacenamiento; también en cunetas, bordillos y canales de drenaje en carreteras, aeropuertos y tierras agrícolas, permeables o impermeables. Además, en sistemas de aguas residuales, plantas de tratamiento y sistemas de drenaje de áreas pavimentadas y cubiertas de techo.

La observación experimental del flujo de gasto decreciente muestra que la desviación de caudal hacia el exterior no produce cambios importantes en la energía específica del flujo, siendo el principio de energía más conveniente en su análisis. El modelo de flujo tiene utilidad en el diseño de vertedores laterales construidos en los bordos de un canal para eliminar las excedencias del gasto que conduce, en los cauces de alivio de ríos, en la desviación de caudal mediante rejas en el fondo, o bien, en el de drenes porosos o permeables para infiltrar aguas en el subsuelo.

Para el análisis del flujo espacialmente variado se establecen hipótesis similares a las del gradualmente variado que se mencionan al inicio del capítulo 5 pero que no son limitativas, ya que es posible corregir algunos de sus efectos cuando las condiciones se aparten demasiado de las supuestas. Aun en este nuevo flujo variado, el tratamiento es como si fuera unidimensional, es decir, las características de tirante y velocidad del movimiento corresponden a los valores

sobre el eje del canal aun cuando haya asimetría del flujo que entra o sale, es decir, que éste fuera por uno solo de los lados. Un resumen de las hipótesis se presenta a continuación.

- a) La pendiente del canal es uniforme y el caudal que entra o sale induce sólo pequeñas curvaturas en el perfil del flujo y líneas de corriente casi paralelas. Hay distribución hidrostática de la presión en cada sección, sin eliminar con ello pendientes supercríticas.
- b) La distribución de la velocidad se mantiene igual en cada sección y los coeficientes α de energía cinética y β de cantidad de movimiento son constantes.
- c) La pérdida de fricción en un tramo se incluye mediante el cálculo de la pendiente de fricción resultante en cada sección.
- d) El efecto de arrastre de aire no se incluye en el tratamiento.
- e) El momentum del caudal que entra se forma sólo del componente de cantidad de movimiento; la asimetría que pueda tener dicho caudal en la dirección transversal no influye en las características del flujo. Cuando el caudal sale lo hace a sitios más bajos sin restarle energía específica al flujo principal.

Las diferencias anotadas en la última hipótesis obligan a que el análisis sea distinto en gasto creciente que en gasto decreciente, por lo que ambos se tratan por separado.

6.2 CANALES DE GASTO CRECIENTE

6.2.1 Ecuaciones básicas

En la figura 6.1 se muestra un canal no prismático, de pendiente S_0 y cualquier forma de sección, al que entra un gasto q_* por unidad de longitud, con velocidad U e inclinación δ respecto de la dirección del flujo principal. El volumen de control está limitado por las secciones 1 y 2 separadas la distancia dx , en la que ingresa el gasto dQ . De este modo, la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx}(VA) = V \frac{dA}{dx} + A \frac{dV}{dx} = q_* \quad (6.1)$$

donde Q es el gasto en la sección x del canal y q_* función de x .

Al considerar que no hay obstáculos en el piso y paredes, P incluye sólo las fuerzas de fricción y de cuerpo, y el principio del momentum (ecuación 4.1b) aplicado en la dirección del flujo se convierte en

$$\frac{1}{g\rho} (-F_r + F_c) = M_2 - M_1 - M_L \quad (6.2)$$

donde M_L es el momentum del gasto lateral que entra al volumen de control, por lo mismo, de signo negativo.

Si se desprecian los efectos de separaciones y tensión superficial, los componentes de las fuerzas en la dirección del flujo son: el de resistencia por fricción en las fronteras sólidas y el de gravedad del líquido contenido en el volumen de control. El primero es en la dirección opuesta al flujo; el segundo, en la dirección del mismo.

La fuerza de resistencia en el tramo tiene el valor

$$F_\tau = \tau_0 P_m dx$$

donde τ_0 es el esfuerzo tangencial medio de fricción sobre la frontera sólida y P_m el perímetro mojado medio de las dos secciones.

De la ecuación 2.1, $\tau_0 = g\rho R_{hm} S_{fm}$, donde $R_{hm} = A_m/P_m$ y S_{fm} es la pendiente media de fricción en el tramo. Por lo tanto, al eliminar diferenciales de orden superior, se tiene

$$F_\tau = g\rho A_m S_{fm} dx = g\rho \left[A + \frac{dA}{2} \right] \left[S_f + \frac{dS_f}{2} \right] dx = g\rho A S_f dx$$

En la misma forma, el componente de la fuerza de gravedad es

$$F_c = W \text{ sen } \theta = g\rho \left[A + \frac{dA}{2} \right] \text{ sen } \theta dx = g\rho A \text{ sen } \theta dx$$

Por tanto, el primer término de la ecuación 6.2 resulta

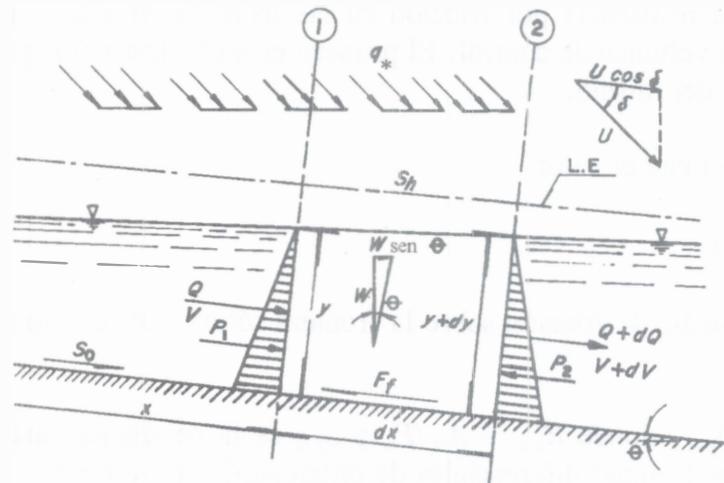
$$\frac{1}{g\rho} (-F_\tau + F_c) = (\text{sen } \theta - S_f) A dx \quad (6.3)$$

El momentum en la sección 2 es $M_2 = M_1 + dM$, donde M_1 es el de la sección 1. El flujo que entra en el tramo es con velocidad U y la cantidad de movimiento es el único componente de su momentum; es decir, $M_L = dQ U \cos \delta/g$. De este modo, al sustituir estos valores y la ecuación 6.3 en la 6.2 y dividir entre $A dx$, la ecuación del momentum se convierte en

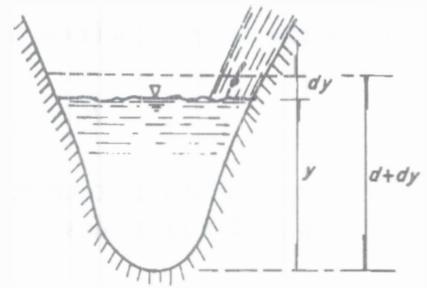
$$\text{sen } \theta - S_f = \frac{1}{A} \frac{dM}{dx} - \frac{1}{gA} \frac{dQ}{dx} U \cos \delta \quad (6.4)$$

Por otra parte, la ecuación 4.2a define a la función momentum y su derivada es

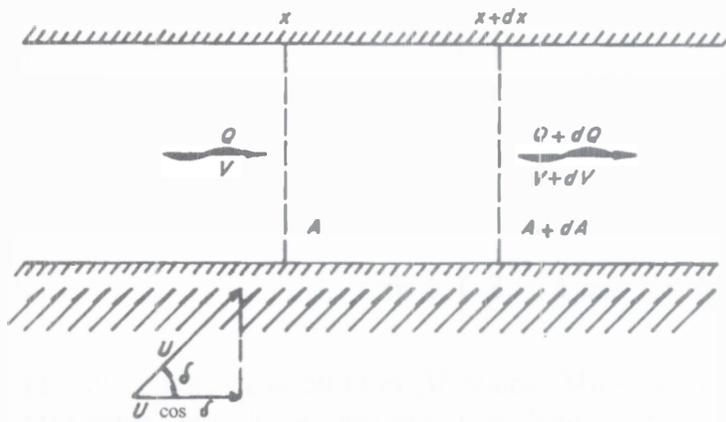
$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\beta}{g} \frac{Q^2}{A} + y'_G A \cos \theta \right] = \frac{\beta}{g} \frac{d}{dx} (QV) + \frac{d}{dy} (y'_G A \cos \theta) \frac{dy}{dx}$$



a) Elevación



b) Sección



c) Planta

Figura 6.1. Análisis del flujo espacialmente variado de gasto creciente

toda vez que A y y'_G son funciones de y y de x . Por otra parte, según el teorema de los ejes paralelos, el incremento diferencial del momento estático del área respecto de la superficie libre se desarrolla como sigue:

$$d(y'_G A \cos \theta) = \left\{ \left[(y'_G + dy) A + \frac{1}{2} dA dy \right] - y'_G A \right\} \cos \theta = A dy \cos \theta$$

$$\frac{d}{dy} (y'_G A \cos \theta) = A \cos \theta$$

Además, siendo Q variable resulta

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\beta}{g} \left[Q \frac{dV}{dx} + V \frac{dQ}{dx} \right] + A \frac{dy}{dx} \cos \theta$$

Por tanto, la ecuación 6.4 se transforma en

$$\sin \theta - S_f = \frac{\beta}{g} \left[V \frac{dV}{dx} + \frac{V}{A} \frac{dQ}{dx} \right] + \frac{dy}{dx} \cos \theta - \frac{1}{gA} \frac{dQ}{dx} U \cos \delta$$

O bien, con $S_0 = \sin \theta$ y $V = Q/A$, al despejar se obtiene

$$\frac{dy}{dx} \cos \theta = S_0 - S_f - \frac{\beta}{g} \left[V \frac{dV}{dx} + \frac{V}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{A^2} \frac{dQ}{dx} \frac{U}{\beta V} \cos \delta \right] \quad (6.5)$$

Por otra parte, siendo : $dA/dx = (\partial A/\partial y)(dy/dx) + \partial A/\partial x = T(dy/dx) + \partial A/\partial x$; resulta

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{Q}{A} \right] = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{A^2} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{VT}{A} \frac{dy}{dx} - \frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x}$$

Al sustituir en la ecuación 6.5, se convierte en

$$\frac{dy}{dx} \cos \theta = S_0 - S_f - \frac{\beta}{g} \left[-\frac{Q^2}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} + 2 \frac{V}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{A^2} \frac{dQ}{dx} \frac{U}{\beta V} \cos \delta \right] + \frac{\beta V^2 T}{g A} \frac{dy}{dx}$$

Pero

$$\frac{\beta V^2 T}{g A} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{V^2 T \cos \theta}{g \cos \theta A/\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{F}^2 \cos \theta$$

donde \mathbf{F} es el número de Froude de acuerdo con la ecuación 3.2a; por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f + \frac{\beta Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2 \beta Q}{g A^2} \frac{dQ}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{\beta V} \cos \delta \right)}{\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{F}^2 \right) \cos \theta} \quad (6.6)$$

que es la ecuación dinámica del flujo espacialmente variado de gasto creciente.

Con $\alpha \approx \beta \approx 1$, la ecuación 6.6 se reduce a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f + \frac{Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2 Q}{g A^2} \frac{dQ}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V} \cos \delta \right)}{(1 - \mathbf{F}^2) \cos \theta} \quad (6.7)$$

Cuando el canal es prismático, $\partial A/\partial x = 0$, de pendiente pequeña, $\cos \theta \approx 1$ y con el caudal que ingresa en dirección perpendicular al eje del canal, $\delta = 90^\circ$, $\cos \delta = 0$, la ecuación 6.7 resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{2 Q}{g A^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - \mathbf{F}^2} \quad (6.8)$$

que es una expresión más común en los libros de texto.

Es importante mencionar que S_f en las ecuaciones 6.6 a 6.8 es la pendiente de la línea de energía que corresponde sólo a la fricción. El último término del numerador equivale a la pendiente debida a la pérdida por impacto del gasto que ingresa al canal.

Cuando $dQ/dx = 0$, la ecuación 6.8 se convierte en la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado de gasto constante (ecuación 5.5).

6.2.2 Perfiles del flujo

Mediante una solución numérica de la ecuación 6.8, Li (1955) (referencia 1) hizo el análisis de los perfiles del flujo espacialmente variado en canales cortos con sección transversal de distintas

formas, gasto cero en su inicio, pérdida por fricción también cero y aporte lateral con inclinación $\delta = 90^\circ$ ($\cos \delta = 0$). Sus resultados se han extendido a la clasificación de los perfiles de flujo casi en cualquier canal, con base en la relación que hay entre el número de Froude F_L y el parámetro $G = S_0 L / (A_L / T_L)$. El subíndice L identifica a los valores que corresponden a la sección del extremo final aguas abajo ($x = L$) donde termina el crecimiento del gasto y existe un tirante hidráulico A_L / T_L conocido.

Para pendientes positivas y valores $S_f = 0$, $dQ/dx > 0$, el numerador de la ecuación 6.8 es siempre positivo. De esta manera, si $F < 1$, $dy/dx > 0$; por el contrario, si $F > 1$, $dy/dx < 0$.

En el diagrama de la figura 6.2 se muestran los perfiles de flujo dentro de cuatro regiones, una para cada condición de pendiente S_0 , longitud L y tirante y_L .

Región A. El flujo es subcrítico en todo el canal y queda controlado por el tirante y_L en el extremo final. El valor de F aumenta en la dirección del flujo, es decir, $dF/dx > 0$. Li demostró que cuando $dF/dx > 0$, la región A queda limitada por la curva de ecuación

$$G = \frac{2}{3} (1 + 2 F_L^2) \tag{6.9}$$

que separa las regiones A y B en la figura 6.2.

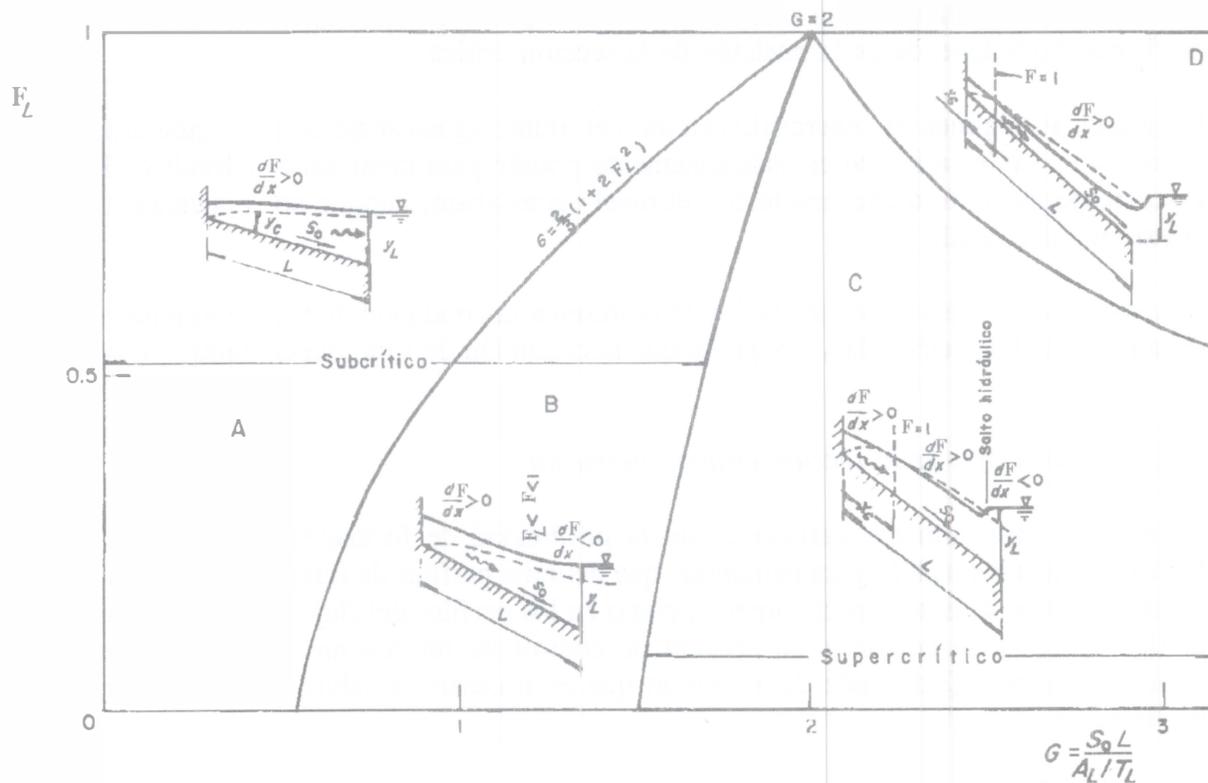


Figura 6.2. Perfiles de flujo espacialmente variado de gasto creciente, según Li (1955)

La condición de flujo en la región A es la más común y se adopta en el diseño de vertedores de canal lateral usados como obras de excedencia.

Región B. El régimen es subcrítico en todo el canal y queda controlado por y_L en el extremo final, pero F se incrementa desde el inicio hasta alcanzar un valor máximo menor de uno y después disminuye. La curva que divide las regiones B y C en los canales rectangulares se representa por la ecuación

$$G = 1 + F_L \quad (6.10)$$

pero puede usarse como aproximación en otras formas de sección.

Dicha curva abarca todos los casos hasta que el valor máximo de F_L es uno. En otras palabras, se produce el ahogamiento de la sección crítica con un perfil controlado por el tirante de aguas abajo. En un canal triangular el límite ocurre cuando $G = 2$ para cualquier valor de F_L .

Cuando la sección crítica no se ahoga, su ubicación está dada por la ecuación 6.12.

Región C. El régimen es supercrítico en el tramo del canal aguas abajo de la sección crítica y existe un salto hidráulico en alguna sección intermedia. La ubicación de dicha sección está dada por la ecuación 6.12.

El salto hidráulico ocurre sólo si la descarga en la sección final queda suficientemente sumergida. El tirante en dicha sección no afecta al perfil del flujo aguas arriba del salto; dicho perfil más bien depende de la posición de la sección crítica.

Región D. El régimen es supercrítico en todo el tramo aguas abajo de la sección crítica cuando el tirante en la de salida no es suficientemente grande para crear salto hidráulico. El valor de F_L corresponde al de dicho tirante con el nivel aguas abajo, aunque no se alcance a formar en el extremo del canal.

La curva que divide a las regiones C y D representa la condición de tirante mínimo y_L para que el salto hidráulico retroceda y obligue a que la condición de flujo quede dentro de la región C.

6.2.3 Localización de la sección crítica intermedia

En el flujo espacialmente variado existe la posibilidad de formación de una sección crítica intermedia en un canal de gran pendiente, que delimita perfiles de flujo subcrítico y supercrítico antes y después de ella respectivamente, como en los perfiles del flujo en las regiones C y D de la figura 6.2, y se convierte en sección de control de los mismos. Su identificación no es inmediata ya que Q depende de x , por lo que es necesario establecer algún criterio para su localización.

Según el argumento original de Keulegan (referencia 2), existe una sección crítica intermedia en el canal cuando $F = 1$, en cuyo caso, el numerador de la ecuación 6.7 es cero, es decir

$$S_0 - S_{fc} = \frac{2 Q_c}{g A_c^2} \frac{dQ}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V_c} \cos \delta \right)$$

Se considera que el gasto que entra es uniforme, es decir, que $dQ/dx = q_*$ es constante; por otra parte, de la condición de régimen crítico (ecuación 3.4b): $A_c^2 = (Q_c^2 T_c / g \cos \theta)^{2/3}$, por tanto, la ecuación anterior es

$$S_0 - S_{fc} = \frac{2 Q_c}{g} \left(\frac{g \cos \theta}{Q_c^2 T_c} \right)^{2/3} q_* \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V_c} \cos \delta \right)$$

Al simplificar, se obtiene

$$S_0 - S_{fc} = 2 \frac{q_*}{Q_c^{1/3}} \left(\frac{\cos^2 \theta}{g T_c^2} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V_c} \cos \delta \right)$$

de modo que

$$Q_c = \frac{8 q_*^3 \cos^2 \theta}{g T_c^2 (S_0 - S_{fc})^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V_c} \cos \delta \right)^3$$

Si Q_0 es el gasto donde inicia el flujo espacialmente variado ($x = 0$) y x_c la distancia a la que se encuentra la sección crítica, el gasto en dicha sección es $Q_c = Q_0 + q_* x_c$, por tanto

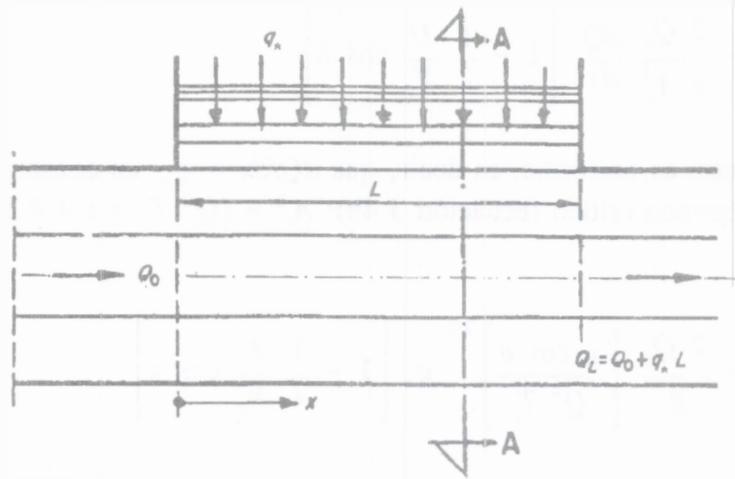
$$x_c = \frac{8 q_*^2 \cos^2 \theta}{g T_c^2 (S_0 - S_{fc})^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{V_c} \cos \delta \right)^3 - \frac{Q_0}{q_*} \quad (6.11)$$

Cuando $\delta = 90^\circ$ ($\cos \delta = 0$) y si $Q_0 = 0$, la ecuación 6.11 se convierte en

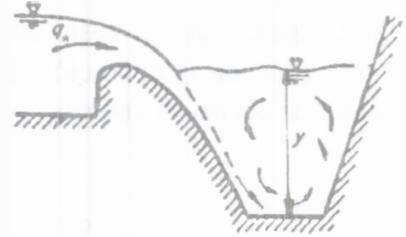
$$x_c = \frac{8 q_*^2 \cos^2 \theta}{g T_c^2 (S_0 - S_{fc})^3} \quad (6.12)$$

En el caso del canal rectangular, $T_c = b$ (ancho), siendo el tirante crítico

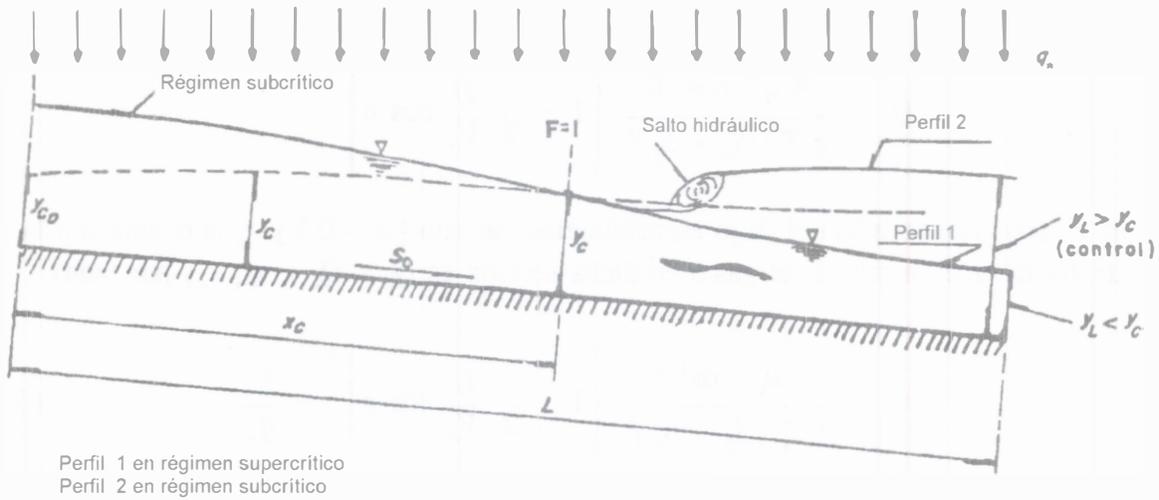
$$y_c = (Q^2 / g \cos \theta b^2)^{1/3} = (q_*^2 x_c^2 / g \cos \theta b^2)^{1/3}$$



a) Planta



b) Corte A-A



Perfil 1 en régimen supercrítico
 Perfil 2 en régimen subcrítico

c) Perfil longitudinal

Figura 6.3. Localización de la sección crítica en un flujo espacialmente variado de gasto creciente

donde la sustitución de x_c de la ecuación 6.12 resulta

$$y_c = \frac{4 q_*^2 \cos \theta}{g b^2 (S_0 - S_{fc})^2} \quad (6.13)$$

Las ecuaciones 6.11 o 6.12, según el caso, permiten calcular la distancia x_c a la que se encuentra la sección crítica, cuyas características A_c , T_c , R_{hc} y S_{fc} dependen del gasto Q_c en dicha sección, el que a su vez depende de x_c (figura 6.3). Por tanto, es necesario seguir un procedimiento de iteraciones en la solución de la ecuación adecuada.

La sección crítica ocurre siempre que el valor de x_c no sea mayor que la longitud L del canal con flujo espacialmente variado. Si $x_c \geq L$, el flujo es subcrítico en toda esa longitud y queda sujeto al control que ejerza el tirante en su extremo final. Por el contrario, si $x_c < L$ se presenta una sección crítica; el flujo es subcrítico antes de la misma y supercrítico después de ella, como se señala en el perfil 1 de la figura 6.3c. Si con dicho perfil existe un tirante de salida suficientemente grande en el extremo aguas abajo ($x = L$), se obliga a un salto hidráulico después de la sección crítica, como se señala en el perfil 2 de la figura 6.3c.

La segunda opción para obtener otra versión de la ecuación 6.11 considera que $F \neq 1$ pero $dy/dx = 0$. En teoría, ésto es posible, pero los experimentos realizados por Bleij (referencia 3) con canaletas de fuerte pendiente para el desagüe de grandes cubiertas de techo, indican que al satisfacer la ecuación 6.11, $dy/dx > 0$. Por tanto, sólo existe una sección crítica cuando $F = 1$, pero se mantiene la posibilidad teórica de que dy/dx pueda ser cero en ciertos casos.

6.2.4. Salto hidráulico

El resalto en el flujo aquí tratado se analiza también con la ecuación de momentum, considerando que ocurre con longitud L_j en canales de pendiente pequeña donde la pérdida de fricción es despreciable en comparación con la propia del fenómeno. Si la sección 1 es antes del salto y la 2 después del mismo, de la ecuación 6.2 se obtiene

$$M_1 + M_L = M_2 \quad (6.14)$$

donde

$$M_L = \frac{\Delta Q}{g} U \cos \delta \quad (6.15)$$

es el momentum del gasto $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ que ingresa con velocidad U en el tramo con la longitud L_j del salto hidráulico. También, con $\beta \approx 1$ y $\cos \theta \approx 1$

$$M_1 = \frac{Q_1^2}{g A_1} + y'_{G1} A_1 \quad (6.16)$$

$$M_2 = \frac{Q_2^2}{g A_2} + y'_{G2} A_2 \quad (6.17)$$

son las funciones momentum en las secciones 1 y 2, la primera en la rama de régimen supercrítico y la segunda, en subcrítico.

Si el flujo entrante es perpendicular al del canal, $\delta = 90^\circ$, $\cos \delta = M_L = 0$, y resulta

$$M_1 = M_2 \quad (6.18)$$

igual que la ecuación del salto hidráulico convencional en canales horizontales, sólo que con valores Q_1 y Q_2 distintos.

6.2.5 Solución directa para canales trapeciales horizontales sin fricción

El grado de dificultad en la solución directa de las ecuaciones 6.7 o 6.8 depende de las condiciones particulares del problema que se trata. En general, el gasto que ingresa es una función conocida de x , usualmente lineal o constante, lo que simplifica el análisis. Aún así, las soluciones analíticas existen sólo para canales prismáticos trapeciales de pendiente cero y para los no prismáticos rectangulares casi horizontales. Algunas fueron obtenidas por Hager (referencia 4) en canales prismáticos y no prismáticos para condiciones arbitrarias aguas arriba y aguas abajo, incluyendo la fricción.

Un caso de integración fue resuelto por Sotelo G., para un canal trapecial prismático horizontal y fricción despreciable, (o bien de pendiente tal que $S_0 \approx S_f$), en el que $q_* = dQ/dx$ es constante en toda su longitud e ingresa en dirección perpendicular a su eje. El canal está cerrado en el extremo aguas arriba ($x = 0$) (gasto cero) y tiene una longitud L en la cual se incrementa el caudal. En la sección final hay un tirante y_L que controla el flujo. El perfil del flujo pertenece a la región A de la figura 6.2, ya que los perfiles de la B, C y D son para canales de gran pendiente.

Siendo $q_* = Q_L / L$, donde Q_L es el gasto en la sección final, el gasto en cualquier sección es $Q = q_* x$, y el cuadrado del número de Froude es

$$F^2 = \frac{Q^2 T}{g A^3} = \frac{q_*^2 x^2 T}{g A^3}$$

La ecuación 6.8 es aplicable y se simplifica como sigue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 q_*^2 x}{g A^2 \left[1 - \frac{q_*^2 x^2 T}{g A^3} \right]} = \frac{-2 x}{\frac{g A^2}{q_*^2} - \frac{x^2 T}{A}}$$

Pero $dx^2 = 2x dx$, por tanto

$$\frac{dx^2}{dy} - \frac{T}{A} x^2 = - \frac{g A^2}{q_*^2}$$

Si se hace: $M(y) = -T/A$; $N(y) = -gA^2/q_*^2$, se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución general es

$$x^2 = e^{-\int M dy} \int N e^{\int M dy} dy + C e^{-\int M dy}$$

Para el canal trapecial, de ancho b y talud medio k , se cumple que $A = by + ky^2$ y $T = b + 2ky$. Con $T = dA/dy$, las integrales resultan

$$\int M dy = -\int \frac{T}{A} dy = -\int \frac{1}{A} \frac{dA}{dy} dy = -\ln A$$

$$e^{-\int M dy} = e^{\ln A} = A; \quad e^{\int M dy} = e^{-\ln A} = 1/A$$

$$\int N e^{\int M dy} dy = -\frac{g}{q_*^2} \int A^2 \frac{1}{A} dy = -\frac{g}{q_*^2} \int (by + ky^2) dy$$

$$\int N e^{\int M dy} dy = -\frac{g}{q_*^2} \left[\frac{b}{2} y^2 + \frac{k}{3} y^3 \right] = -\frac{gb}{2q_*^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky}{b} \right] y^2$$

Al dividir la ecuación diferencial entre L^2 y sustituir el resultado de las integrales, la solución se convierte en

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \frac{C}{L^2} A - \frac{gbA}{2q_*^2 L^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky}{b} \right] y^2$$

donde C es la constante de integración. Se obtiene de la condición de frontera en la sección final del canal: $x = L$, $y = y_L$, $A = A_L$ y resulta

$$\frac{C}{L^2} = \frac{1}{A_L} + \frac{gb}{2q_*^2 L^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} \right] y_L^2$$

de modo que la solución se transforma en

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \frac{A}{A_L} + \frac{gbA}{2q_*^2 L^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} \right] y_L^2 - \frac{gbA}{2q_*^2 L^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky}{b} \right] y^2$$

O bien

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{gbA_L y_L^2}{2q_*^2 L^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} - \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} \frac{y}{y_L} \right] \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 \right] \right\} \frac{A}{A_L}$$

Son posibles las siguientes transformaciones

$$\frac{gbA_L y_L^2}{2q_*^2 L^2} = \frac{1}{2} \frac{gA_L^3}{q_*^2 L^2 T_L} \frac{T_L b y_L^2}{A_L^2} = \frac{1}{2\mathbf{F}_L^2} \frac{(b + 2ky_L)b}{(b + ky_L)^2} = \frac{1}{2\mathbf{F}_L^2} \frac{1 + 2(ky_L/b)}{[1 + (ky_L/b)]^2}$$

$$\frac{A}{A_L} = \frac{(b + ky)y}{(b + ky_L)y_L} = \left[\frac{1 + \left[\frac{ky_L}{b} \right] \frac{y}{y_L}}{1 + \frac{ky_L}{b}} \right] \frac{y}{y_L}$$

donde \mathbf{F}_L es el número de Froude en la sección final.

Por tanto, la solución en la forma adimensional resulta finalmente

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{1}{2\mathbf{F}_L^2} \frac{1 + 2(ky_L/b)}{[1 + (ky_L/b)]^2} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} - \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{ky_L}{b} \left(\frac{y}{y_L} \right)^3 \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{1 + \frac{ky_L}{b} \frac{y}{y_L}}{1 + \frac{ky_L}{b}} \right] \frac{y}{y_L} \quad (6.19)$$

Esta ecuación muestra que el perfil del flujo depende de la longitud L del canal, del tirante y_L y los parámetros \mathbf{F}_L y ky_L/b en su sección final. Permite localizar la sección donde el tirante es y , el cual debe ser mayor que y_L ($y/y_L > 1$) y que y_c para que la solución sea correcta, ya que la energía tiene que disminuir en la dirección del flujo por efecto de la pérdida por impacto.

Cuando el canal es triangular, $b = 0$, y la ecuación 6.19 se simplifica a la forma

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left[1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\mathbf{F}_L^2} \right] \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{1}{\mathbf{F}_L^2} \left(\frac{y}{y_L} \right)^5 \quad (6.20)$$

Si en el extremo final se presenta el tirante crítico ($y_L = y_c$, $\mathbf{F}_L = 1$), el del extremo inicial y_0 se obtiene para $x = 0$ y resulta

$$y_0 = \left(\frac{5}{2} \right)^{1/3} y_c = 1.3572 y_c$$

Cuando el canal es rectangular, $k = 0$ y la ecuación 6.19 se convierte en

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left[1 + \frac{1}{2 F_L^2} \right] \frac{y}{y_L} - \frac{1}{2 F_L^2} \left(\frac{y}{y_L} \right)^3 \quad (6.21)$$

donde y_L y $F_L = q_* L / \sqrt{g b^2 y_L^3}$ son los valores del tirante y número de Froude en el extremo final del canal. Cuando en dicho extremo se presenta el tirante crítico ($y_L = y_c$), el del extremo inicial resulta de la ecuación 6.21, a partir de las condiciones: $F_L = 1$ y $x = 0$, como sigue

$$y_0 = \sqrt{3} y_c \quad (6.22)$$

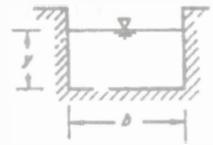
Debido a que $Q_0 = 0$, la energía específica en la sección inicial es $E_0 = y_0$ y al final es la mínima, por lo tanto, la pérdida total por impacto resulta

$$\Delta h_i = \sqrt{3} y_c - \frac{3}{2} y_c = 0.232 y_c$$

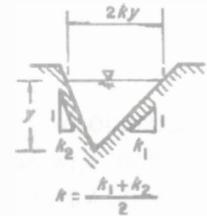
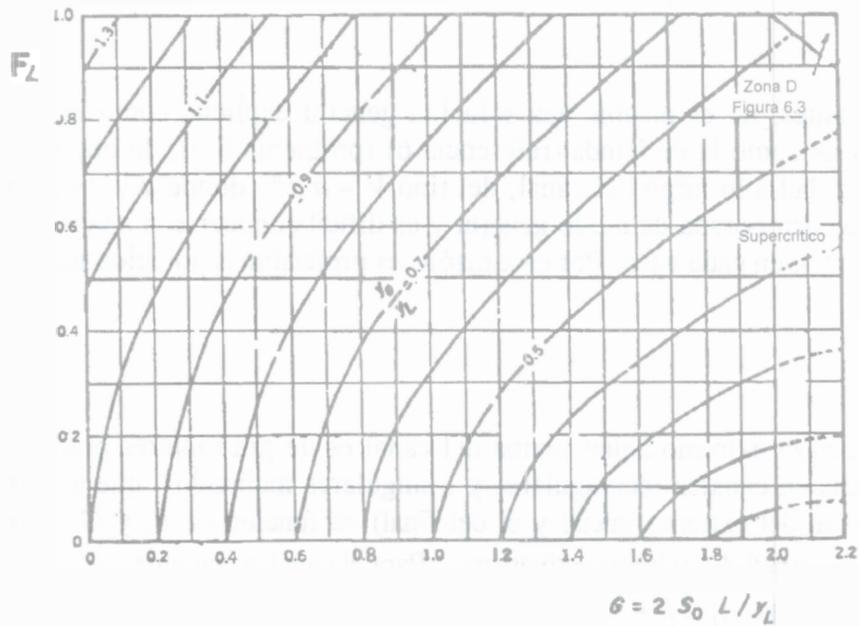
Cuando S_0 y S_f son importantes, no es posible una solución general explícita como la 6.19, a menos que se hagan hipótesis como la de Hinds (referencia 6) (problema 6.3), de imponer una ley de variación de la velocidad a lo largo del canal, del tipo $V = a x^n$, donde a y n varían en cada canal. Esta no ha sido corroborada de modo general y es difícil conocer con antelación los valores más adecuados de a y n en cada caso. Por esta razón, es preferible la solución numérica.

6.2.6 Otras soluciones

La magnitud del tirante y_0 en el extremo aguas arriba del canal es de gran interés práctico. Li obtuvo soluciones numéricas en canales rectangulares y triangulares inclinados, que definen la relación y_0/y_L (entre el tirante del extremo inicial y el del final) en función de F_L y G , y cuyos resultados se muestran en la figura 6.4 a y b respectivamente. Para el canal rectangular, $A_L/T_L = y_L$ y $G = S_0 L/y_L$; para el triangular $A_L/T_L = (1/2 k y_L^2) / k y_L = y_L/2$ y $G = 2 S_0 L/y_L$. Si bien Li despreció la pérdida por fricción en sus cálculos, los resultados presentados en dicha figura tuvieron buena coincidencia con mediciones efectuadas en canaletas colectoras cortas. En canales más largos se debe considerar que la pérdida por fricción Δh_f en la distancia L aumenta el tirante y_0 hasta en 10 por ciento, como se observa en la figura 6.5 obtenida por Li. Ésta muestra la influencia de dicha pérdida sobre el porcentaje de aumento de y_0 en canales rectangulares horizontales.



a) Canal rectangular



b) Canal triangular

Figura 6.4. Comportamiento de la relación del tirante en los extremos inicial y final del flujo espacialmente variado de gasto creciente en canales inclinados, según Li (1955)

Los resultados de Li tienen aplicación en canales cortos al lado de un vertedor, como el de la figura 6.3, en las canaletas utilizadas en grandes tanques de reacción para el tratamiento de aguas, como el que se muestra en la figura 6.6, y en tanques de desagüe como los que se presentan en la figura 6.7.

Por ejemplo, se considera que la canaleta colectora para el desagüe del tanque circular de la figura 6.6 es horizontal de sección triangular, y desaloja el gasto total Q . Al haber una pequeña caída en la sección c de salida, se produce el tirante crítico y $F_L = 1$. Toda vez que $S_0 = 0$, $G = 0$ y de la figura 6.4b resulta $y_0 / y_L = 1.36$, donde el tirante $y_L = y_c$ se obtiene de la ecuación 3.33b ($\alpha = 1$)

$$y_c = \left[\frac{2 Q^2}{g k^2} \right]^{1/5}$$

El mismo resultado se obtiene de la aplicación directa del principio del momentum en la dirección del flujo entre las secciones 0 y C , es decir, $M_0 = M_c$. En efecto, se tiene

$$\left(k y_0^2 \right) \frac{y_0}{3} = \left(k y_c^2 \right) \frac{y_c}{3} + \frac{Q^2}{g k y_c^2}$$

ya que $Q_0 = 0$.

Al sustituir $Q^2/g k y_c^2$ como el valor del tirante crítico en la anterior y simplificar, resulta

$$y_0^3 = y_c^3 + \frac{3}{2} k y_c^3$$

O bien

$$y_0 = \left[\frac{5}{2} \right]^{1/3} y_c = 1.3572 y_c$$

valor que también se obtuvo de la ecuación 6.20.

La energía específica en la sección 0 es $E_0 = y_0$, ya que $V_0 = 0$. En la sección c la energía específica es la mínima $E_c = 1.25 y_c$, como indica la ecuación 3.34. De este modo, al no considerar la pérdida por fricción, la de impacto vale

$$\Delta h_i = E_0 - E_c = 1.3572 y_c - 1.25 y_c = 0.1072 y_c$$

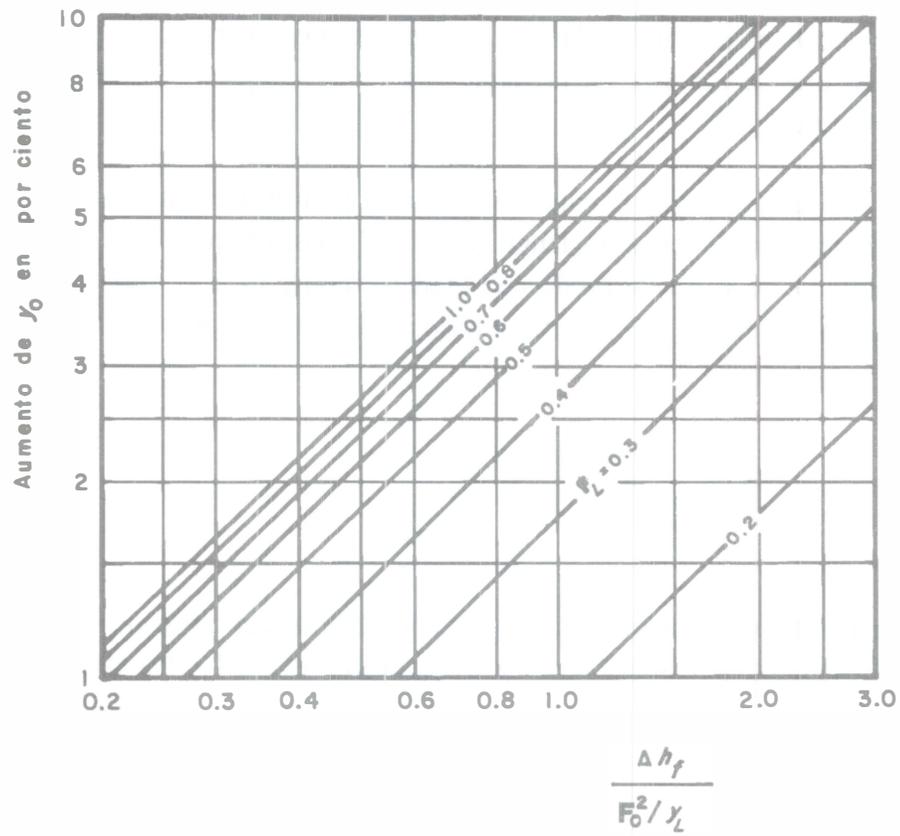


Figura 6.5. Porcentaje de aumento de y_0 al incluir la pérdida por fricción Δh_f en el tramo L , en un canal rectangular horizontal, según Li, (1955)

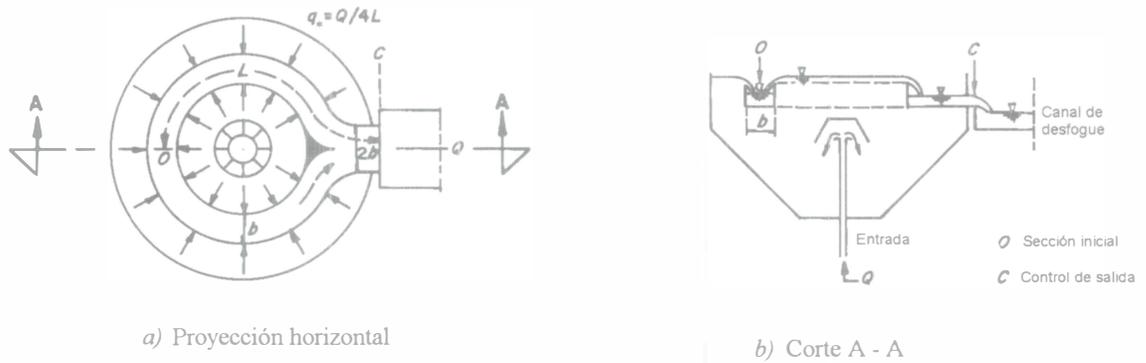


Figura 6.6. Canaleta de desagüe en grandes tanques de reacción para el tratamiento de aguas en la industria química, según Naudascher (1992)

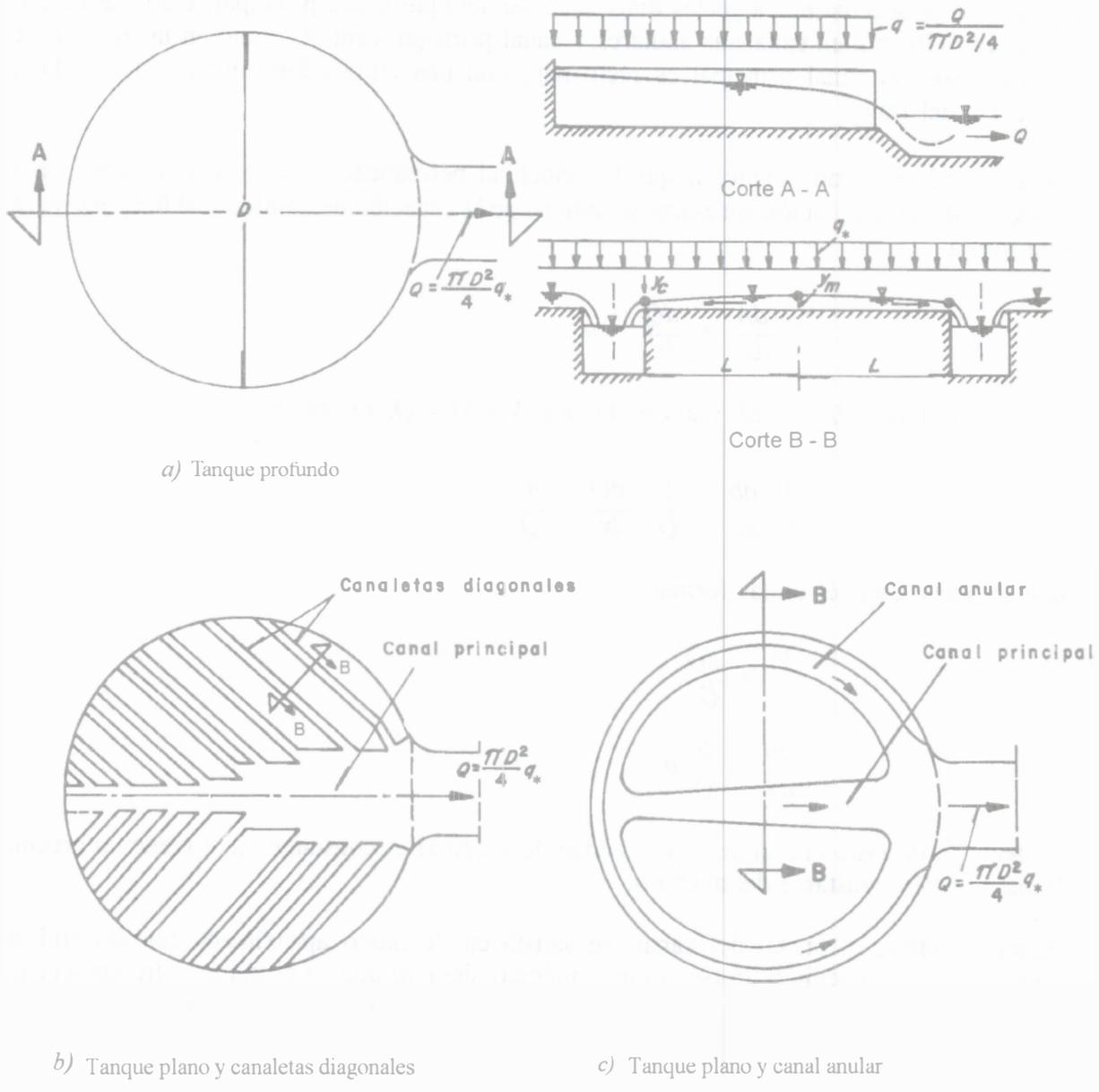


Figura 6.7. Tanques de desagüe (por ejemplo, torres de enfriamiento), según Naudascher (1992)

El efecto de tirantes y_0 grandes en canales de gasto creciente se reduce de modo importante mediante una ampliación continua de su ancho en la dirección del flujo. Por ejemplo, si se desea minimizar el tiempo de permanencia del agua en el tanque de una torre de enfriamiento, en lugar del tanque profundo de la figura 6.7a, es más recomendable (referencia 5) diseñar un tanque plano con un sistema de canaletas diagonales de desagüe y una principal, como se muestra en la figura 6.7b, o bien canaletas anulares y canal principal central, como en la figura 6.7c. En ambos casos, el canal principal es recto pero con una ampliación continua del ancho en la dirección del flujo.

Si se introduce como condición que la velocidad permanezca constante a lo largo del canal ($dV/dx = 0$), la ampliación necesaria se obtiene de la ecuación de continuidad 6.1, que se reduce a la forma

$$V \frac{dA}{dx} = \frac{dQ}{dx} = q_*$$

si $y \approx$ constante, $dA = y db$ y al dividir por $(V y b) = Q$, se obtiene

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dx} = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} = \frac{q_*}{Q}$$

que se puede escribir en las formas:

$$\frac{db}{b} = \frac{dQ}{Q}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{b}{Q} q_*$$

es decir, si el gasto que ingresa por unidad de longitud es constante, se obtiene un crecimiento lineal también constante del ancho b .

Aunque cambie el ancho del canal, se satisfacen de modo aproximado los desarrollos que conducen a la ecuación 6.26 (solución numérica) siempre que en el tramo entre las secciones 1 y 2 (figura 6.9) se utilice el ancho b_1 , en ambas, para compensar el componente de la fuerza en la dirección x debida a la presión sobre las paredes por el aumento del ancho de 1 a 2.

Un análisis similar al anterior se puede hacer para canales trapeciales sin pendiente.

Ejemplo 6.1. Un canal colector, como el mostrado en la figura 6.3a, es de sección trapecial, de 7.15 m de ancho, taludes desiguales $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 2/3$, pendiente $S_0 = 0.0079$, recibe un gasto lateral unitario constante $q_* = 7.3 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ en la longitud $L = 46.50 \text{ m}$. El extremo inicial aguas arriba está cerrado ($Q_0 = 0$) y en el final principia una transición, para cambiar los taludes a $k_1 = 1/3$ y $k_2 = 0.43$ en una distancia de 7 m ($x = 53.50 \text{ m}$), sin variar el ancho de la sección. Al terminar la transición existe un escalón ascendente de 0.90 m de altura, en cuyo nivel superior se presenta el tirante crítico. Todo el canal está revestido de concreto ($n = 0.016$, Manning).

Se construyó un modelo hidráulico de la obra a escala 1:50, con acabados de cemento pulido sin pretender semejanza en fricción.

En el modelo se reprodujo el funcionamiento para el gasto dado y se midió el perfil del flujo cuyas coordenadas, según el sistema de ejes de la figura 6.3, se presentan a continuación

x en m	1.5	6.5	11.5	16.5	21.5	26.5	31.5	36.5	41.5	46.5	53.5
y en m	9.075	9.05	9.035	9.03	8.93	8.835	8.76	8.5	8.275	8.075	7.89

- Determinar el perfil del flujo mediante la ecuación 6.19 y comparar con el medido experimentalmente.
- Calcular la pendiente que necesita el canal colector para formar el tirante crítico en la sección $x = L$, sin necesidad del escalón y con pendiente supercrítica aguas abajo. Para estas condiciones, obtener también el valor aproximado del tirante al inicio del canal.
- Determinar la posición de la sección crítica intermedia cuando se elimina el escalón y la pendiente del canal colector aumenta a $S_0 = 0.24$ manteniéndose hacia aguas abajo.

Solución a. Para $x \geq 46.50$ m, el gasto en el canal es $Q = 7.3 (46.50) = 339.45 \text{ m}^3/\text{s}$. Para $Q^2/g = 11745.8$, el tirante crítico vale $y_c = 5.5208$ m. En efecto, para el talud medio

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + 0.43 \right] = 0.3817, \text{ se obtiene:}$$

$$A_c = [7.15 + 0.3817 (5.5208)] 5.5208 = 51.10663 \text{ m}^2$$

$$T_c = 7.15 + 2 (0.3817)(5.5208) = 11.36421 \text{ m}$$

$$A_c^3/T_c = 11746.06 \approx 11745.8$$

$$V_c = 339.45/51.10663 = 6.642 \text{ m/s}; V_c^2/2g = 2.2485 \text{ m}$$

$$E_c = 5.5208 + 2.2485 = 7.7693 \text{ m}$$

El tirante crítico se forma sobre el escalón (de altura 0.90 m), de manera que el tirante antes del mismo resulta de la ecuación de la energía (sin considerar pérdidas)

$$y + \frac{V^2}{2g} = 0.9 + 7.7693 = 8.6693$$

y la de continuidad. La solución es: $y = 7.6943$ m, $V = 4.3738$ m/s. En la misma forma, se aplica la ecuación de la energía entre las secciones 1 ($x_1 = L = 46.5$ m) y 2 ($x_2 = 53.50$ m), sin considerar pérdidas

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 8.6693 - 0.0079 (7) = 8.614$$

cuya solución es $y_L = 7.9438$ m. En efecto, para el talud medio $k = 0.5833$, $A_L = 93.60881$ m²; $V_L = 3.62626$ m/s; $V_L^2/2g = 0.67022$ m; $E_L = 8.61402$ m, que confirma la solución.

Otros valores de interés son: $T_L = 16.41777$ m; $R_{hL} = 3.65964$ m;

$$S_{fL} = \left[\frac{3.62626 (0.016)}{(3.65964)^{2/3}} \right]^2 = 0.0005969$$

$F_L^2 = 0.2351$; $ky_L/b = 0.6480$; $1 + (ky_L/b) = 1.64811$; $[1 + (ky_L/b)]^2 = 2.71622$; $1 + 2(ky_L/b) = 2.29619$.
El parámetro

$$G = \frac{0.0079 (46.5)}{93.60881/16.41777} = 0.0644$$

es menor que el valor límite

$$\frac{2}{3} (1 + 2F_L^2) = \frac{2}{3} [1 + 2 (0.2351)] = 0.9801$$

lo que ubica las condiciones del flujo dentro de la región A de la figura 6.2. Esto permite aplicar la ecuación 6.19 de integración directa, donde se sustituyen las distintas variables y resulta

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{2.29619}{2(0.2351)(2.71622)} \left[1 + \frac{2}{3} (0.6481) - \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 - \frac{2}{3} (0.6481) \left(\frac{y}{y_L} \right)^3 \right] \right\} \times \left[\frac{1 + 0.6481 \frac{y}{y_L}}{1.6481} \right] \frac{y}{y_L}$$

O bien

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left[3.57471 - 1.7979 \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 - 0.7768 \left(\frac{y}{y_L} \right)^3 \right] \left[0.60676 + 0.39323 \frac{y}{y_L} \right] \frac{y}{y_L} \quad (a)$$

Con la ecuación anterior se calculan a continuación los valores de y en las mismas secciones en que se efectuaron las mediciones, con el fin de comparar los resultados y obtener el error correspondiente.

x en m	1.5	6.5	11.5	16.5	21.5	26.5	31.5	36.5	41.5	46.5	53.5
y (teórico)	9.1515	9.1346	9.0964	9.036	8.9511	8.8375	8.6921	8.5054	8.2647	7.9438	
y (exp.)	9.075	9.05	9.035	9.03	8.93	8.835	8.76	8.5	8.275	8.075	7.89
ε en %	- 0.84	- 0.93	- 0.68	- 0.07	- 0.24	- 0.03	+ 0.775	- 0.06	+ 0.12	+ 1.63	

Un ejemplo de comprobación de los cálculos se presenta a continuación. Con $y = 8.8375$ m; $y/y_L = 8.8375/7.9438 = 1.1125$, de la ecuación (a) se obtiene $x/L = 0.5699$ y por tanto $x = 0.5699 (46.5) = 26.5$ m. En dicha sección se midió $y = 8.835$ m y el error es: $\varepsilon = (8.835 - 8.8375)/8.835 = - 0.00028$ (- 0.03%).

Es importante destacar que si se exceptúa el valor de y_L con el cual $\varepsilon = 1.63\%$, el error en los restantes tirantes nunca es mayor del 1%, lo que significa una buena predicción. El tirante al inicio del canal resulta de la ecuación (a) para $x = 0$, que conduce a

$$3.57471 - 1.79791 (y/y_L)^2 - 0.77681 (y/y_L)^3 = 0$$

O bien, $y_0/y_L = 1.15215$, es decir, $y_0 = 9.1525$ m.

Ya que $S_{fL} = 0.0005969$ y $S_{f0} = 0$ al inicio del canal ($V_0 = 0$), la pendiente media de fricción en todo el canal es 0.000298454; de manera que $S_0 - S_f = 0.0076$; diferencia que se consideró igual a cero en el proceso de integración de la ecuación 6.19.

Solución b. De acuerdo con la figura 6.2, el funcionamiento del canal cambia a la región C con el aumento de la pendiente S_0 , de manera que se debe cumplir que $F_L = 1$ y $G = 2$. Es decir, que en este caso, para $x_c = L = 46.50$, $y = y_c$ y $F_L = 1$.

Las variables críticas son diferentes de las calculadas en el inciso a, ya que se trata de un talud medio distinto ($k = 0.5833$) en la sección $x = 46.50$ m, si bien el gasto $Q = 339.45$ m³/s es el mismo. Para $Q^2/g = 11745.8$, el tirante crítico vale $y_c = 5.2678$ m. En efecto, se tiene

$$A_c = [7.15 + 0.5833(5.2678)] 5.2678 = 53.85157 \text{ m}^2$$

$$T_c = 7.15 + 2(0.5833)(5.2678) = 13.29572 \text{ m}$$

$$A_c^3/T_c = 11745.82 \approx 11745.8$$

$$V_c = 339.45/53.85157 = 6.30344 \text{ m/s}$$

$$V_c^2/2g = 2.02514 \text{ m}$$

$$E_c = 7.2929 \text{ m/s}$$

$$P_c = 7.15 + 5.2678 \left(\sqrt{1.25} + \sqrt{1.4444} \right) = 19.37059 \text{ m}$$

$$R_{hc} = 53.85157/19.37059 = 2.78007 \text{ m}$$

$$S_{fc} = \left[\frac{6.30344 (0.016)}{(2.78007)^{2/3}} \right]^2 = 0.0026021$$

De la ecuación 6.12 y $\cos \theta \approx 1$, la pendiente necesaria en el canal resulta

$$S_0 = \left[\frac{8 q_*^2 \cos^2 \theta}{g T_c^2 L} \right]^{1/3} + S_{fc} = \left[\frac{8 (7.3)^2 (1)}{9.81 (13.29572)^2 (46.5)} \right]^{1/3} + 0.0026021 = 0.176808$$

Esta pendiente significa que $\sin \theta = 0.176808$; $\cos \theta = 0.98424533$ y un valor más preciso es

$$S_0 = \left[\frac{8 (7.3)^2 (0.984245)^2}{9.81 (13.29572)^2 (46.5)} \right]^{1/3} + 0.0026021 = 0.174974$$

Con dos iteraciones más, la pendiente que necesita el canal es $S_0 = 0.175011$.

Para dicho valor, en efecto se obtiene

$$G = \frac{0.175011 (46.5)}{53.85157/13.29572} = 2.009 \approx 2.0$$

Los valores que adquieren los parámetros en la ecuación 6.19 son: $y_L = 5.2678 \text{ m}$; $F_L = 1$; $ky_L/b = 0.42977$; $1 + (ky_L/b) = 1.4298$; $[1 + (ky_L/b)]^2 = 2.04424$; $1 + 2(ky_L/b) = 1.85954$; de modo que dicha ecuación se convierte en

$$\left(\frac{x}{L} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{1.85954}{2 (2.04424)} \left[1 + \frac{2}{3} (0.42977) - \left(\frac{y}{y_L} \right)^2 - \frac{2}{3} (0.42977) \left(\frac{y}{y_L} \right)^3 \right] \right\} \frac{1 + 0.42977 (y/y_L)}{1.42977} \frac{y}{y_L}$$

O bien

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \left[1.58514 - 0.45482 \left(\frac{y}{y_L}\right)^2 - 0.13031 \left(\frac{y}{y_L}\right)^3 \right] \left[0.69941 + 0.30058 \frac{y}{y_L} \right] \frac{y}{y_L}$$

Para $x = 0$, se obtiene

$$1.58514 - 0.45482 \left(\frac{y_0}{y_L}\right)^2 - 0.13031 \left(\frac{y_0}{y_L}\right)^3 = 0$$

cuya solución es $y_0/y_L = 1.553$; es decir, $y_0 = 8.1808$ m, valor menor que el obtenido en el inciso anterior pero que debe tomarse con reservas, dada la magnitud de la pendiente que tendría el canal al usar el método de integración directa.

Solución c. La posición de la sección crítica queda determinada por la ecuación 6.12, pero debido a que el procedimiento es iterativo, es necesario suponer un valor inicial de x_c , por ejemplo, a la mitad del canal. El gasto y el tirante crítico en la sección $x_c = 24$ m son

$$Q_c = 24 (7.3) = 175.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

para el cual

$$y_c = 3.5578 \text{ m}$$

Además

$$A_c = 32.8223 \text{ m}^2$$

$$R_{hc} = 2.1308 \text{ m}$$

$$T_c = 11.3008 \text{ m}$$

$$S_{fc} = \left[\frac{175.2 (0.016)}{38.8223 (2.1308)^{2/3}} \right]^2 = 0.0026602$$

De la ecuación 6.12, con $\sin \theta = 0.24$ y $\cos \theta = 0.97077$, resulta

$$x_c = \frac{8 (7.3)^2 (0.97077)^2}{9.81 (11.3008)^2 (0.24 - 0.0026602)^3} = 23.9868 \text{ m}$$

Este es el nuevo valor de tanteo. Después de reiterar el proceso una vez más, se concluye que $x_c = 23.99$ m. En efecto, $Q_c = 175.127$ m³/s, $y_c = 3.5569$ m, $T_c = 11.2998$ m, $S_{fc} = 0.0026602$, y finalmente

$$x_c = \frac{8 (7.3)^2 (0.97077)^2}{9.81 (11.2998)^2 (0.24 - 0.0026602)^3} = 23.991 \text{ m}$$

Debido a que después del extremo final del canal colector hay pendiente supercrítica, la sección crítica antes calculada controla el flujo antes y después de ella. Por tanto, el perfil queda comprendido dentro de la región D de la figura 6.2. El tirante en el extremo final es menor que el crítico.

Ejemplo 6.2. Una superficie pavimentada para estacionamiento de vehículos es cuadrada, de 60 m de lado, y tiene pendiente transversal en una sola dirección ($S_0 = 0.0025$) para drenar hacia un canal rectangular de 0.60 m de ancho paralelo al borde del predio, con la misma pendiente $S_0 = 0.0025$, y que termina en una caída libre (figura 6.8). Si la lluvia cae sobre el terreno con una intensidad constante de 7.2 cm/h, calcular: a) El tirante máximo del agua sobre el pavimento; b) La profundidad mínima aceptable de la plantilla del canal por debajo de la superficie del terreno para evitar que se desborde. En los cálculos considerar que la pendiente es pequeña.



Figura 6.8. Área pavimentada y canal de drenaje del ejemplo 6.2

Solución a. El gasto que produce la lluvia que cae sobre una franja de ancho unitario del predio es

$$q = \frac{0.072 (1) (1)}{60 (60)} = 0.00002 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

Por tanto, el gasto que ingresa al canal por unidad de longitud del mismo alcanza el valor

$$q_L = 0.00002 (60) = 0.0012 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

El tirante crítico del flujo sobre el pavimento al caer al canal resulta

$$y_c = \left[\frac{(0.0012)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 0.0053 \text{ m}$$

De la ecuación 6.22, el tirante máximo ocurre en el lado opuesto al canal, de valor

$$y_0 = \sqrt{3} (0.0053) = 0.0091 \text{ m}$$

Solución b. De la misma manera, el gasto al final del canal es

$$Q_L = 0.0012 (60) = 0.072 \text{ m}^3/\text{s}$$

y el crítico

$$y_c = y_L = \left[\frac{(0.072/0.6)^2}{9.81} \right]^{1/3} = 0.1136 \text{ m}$$

De la ecuación 6.22 el tirante en el extremo inicial resulta

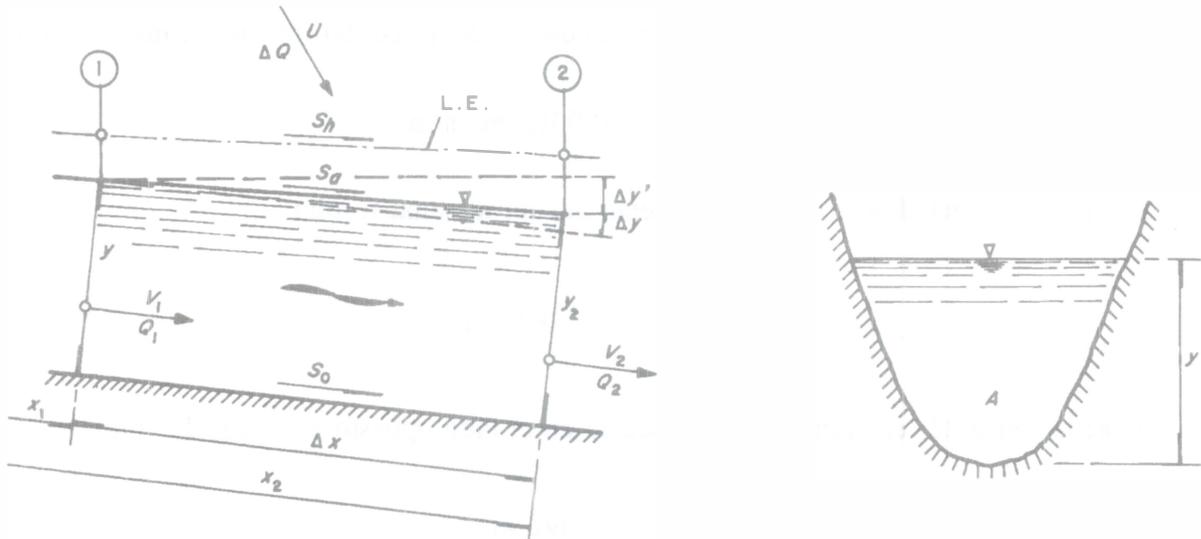
$$y_0 = \sqrt{3} (0.1136) = 0.1968 \text{ m}$$

que es la profundidad mínima tolerable para que no haya desbordamiento. Puede preverse un libre bordo adicional para mayor seguridad.

6.2.7 Método de integración numérica

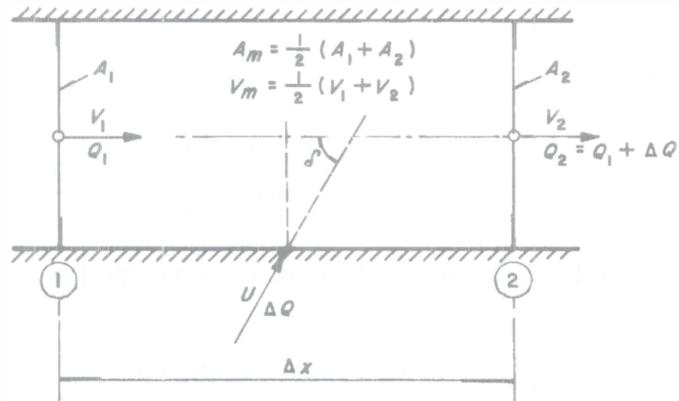
Este método es el más general ya que puede aplicarse a cualquier problema práctico en canales no prismáticos sin necesidad de hipótesis simplificadoras. Para su derivación es necesario

considerar un tramo de longitud Δx , limitado por las secciones 1 y 2 como se indica en la figura 6.9, en el cual el canal es prismático. La ecuación 6.5 se integra en dicho tramo como sigue



a) Elevación

b) Sección



c) Planta

Figura 6.9. Tramo de un canal con flujo espacialmente variado de gasto creciente para la aplicación del método numérico de solución

$$\cos \theta \int_1^2 dy = - \frac{\beta}{g} \int_1^2 \left[V dV + \frac{1}{A^2} \left(1 - \frac{U}{\beta V} \cos \delta \right) Q dQ \right] + \int_1^2 (S_0 - S_f) dx$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = - \frac{\beta (V_2^2 - V_1^2)}{2g \cos \theta} - \left(1 - \frac{U_m}{\beta V_m} \cos \delta \right) \frac{\beta (Q_2^2 - Q_1^2)}{2g \cos \theta A_m^2} + (S_0 - S_{fm}) \frac{\Delta x}{\cos \theta}$$

donde el subíndice m representa los valores medios en el tramo. El del área es $A_m = (Q_1 + Q_2) / (V_1 + V_2)$. Al sustituir, desarrollar la diferencia de cuadrados y simplificar, se obtiene

$$\Delta y = - \frac{\beta (V_1 + V_2)}{2g \cos \theta} \left[\Delta V + \left(1 - \frac{U_m}{\beta V_m} \cos \delta \right) \frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \Delta Q \right] + \left(S_0 - \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right) \frac{\Delta x}{\cos \theta}$$

donde $\Delta V = V_2 - V_1$ y $\Delta Q = Q_2 - Q_1$.

La diferencia de niveles del agua entre ambas secciones de la figura 6.9 se expresa en la forma

$$S_0 \Delta x + y_1 \cos \theta = y_2 \cos \theta + \Delta y' \quad (6.23a)$$

$$\Delta y' = - \Delta y \cos \theta + S_0 \Delta x \quad (6.23b)$$

de manera que la ecuación que antecede se convierte en

$$\Delta y' = \frac{\beta (V_1 + V_2)}{2g} \left[\Delta V + \left(1 - \frac{U_m}{\beta V_m} \cos \delta \right) \frac{(V_1 + V_2) \Delta Q}{Q_1 + Q_2} \right] + \left(\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right) \Delta x \quad (6.24)$$

cualquiera que sea la pendiente del canal.

Cuando $\delta = 90^\circ$, $\cos \delta = 0$, y la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$\Delta y' = \frac{\beta (V_1 + V_2)}{2g} \left[\Delta V + \frac{(V_1 + V_2) \Delta Q}{Q_1 + Q_2} \right] + \left[\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right] \Delta x \quad (6.25)$$

Cuando se acepta que el gasto medio en el tramo sea $Q_1 = (Q_1 + Q_2)/2$ y que la velocidad media sea V_2 , la ecuación 6.25 se convierte en

$$\Delta y' = \frac{\beta Q_1 (V_1 + V_2)}{g (Q_1 + Q_2)} \left[\Delta V + \frac{V_2 \Delta Q}{Q_1} \right] + \left[\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right] \Delta x \quad (6.26)$$

expresión más común en los libros que tratan del tema (referencias 7 y 8).

Las ecuaciones 6.23 y 6.24 o 6.25 permiten calcular el perfil del flujo en régimen subcrítico o supercrítico utilizando tramos de longitud Δx preestablecida, donde el canal sea prismático. El primer término después del signo igual representa la pérdida por impacto por la admisión del caudal lateral; el segundo es la pérdida por fricción.

Es importante destacar que el método es aplicable también a canales no prismáticos, siempre que las secciones con cambio en las dimensiones, en la pendiente y en la rugosidad sean obligadas, ya que el principio del momentum se aplicó a un tramo Δx donde el canal debe ser prismático. Por supuesto, pueden también elegirse secciones intermedias a las ya mencionadas.

Para aplicar el método es necesario iniciar desde una sección de control y establecer una dirección del cálculo, con las mismas reglas del flujo gradualmente variado en cuanto al régimen en que se desarrolla el perfil del flujo. La solución sigue, desde luego, un procedimiento iterativo en el que, para un tramo Δx , se conocen Q_1 y Q_2 . Al conocer el tirante en un extremo del tramo, se tantea el del otro, de manera que el valor geométrico obtenido de la ecuación 6.23b sea igual al calculado de la ecuación 6.24 o de la 6.25, según sea el caso.

Se considera que el cálculo se efectúa en la dirección del flujo y por tanto se conocen los valores de Q_1 , V_1 y S_{f1} (la última, de alguna ecuación de fricción). El procedimiento se resume en los siguientes pasos.

1. Se elige la longitud Δx del tramo donde el canal sea prismático y con ésta se calculan $\Delta Q = q_* \Delta x$ y $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$.
2. Se supone el valor inicial de y_2 . Con $\Delta y'_0 \approx 0$ en la ecuación 6.23a, dicho valor puede ser: $y_{2(0)} = S_0 \Delta x + y_1$. Con y_2 supuesto se calculan A_2 , P_2 , R_{h2} , $V_2 = Q_2/A_2$, $\Delta V = V_2 - V_1$ y de la ecuación de Manning

$$S_{f2} = \left[\frac{V_2 n}{R_{h2}^{2/3}} \right]^2$$

3. De la ecuación 6.24 o 6.25 se determina $\Delta y'$ y de la 6.23a se calcula

$$y_2 = S_0 \Delta x + y_1 - \Delta y'$$

El valor de y_2 se compara con el valor inicial supuesto en el paso 2. Cuando son iguales (dentro de la tolerancia deseada), se procede nuevamente al paso 1 para un nuevo tramo. Cuando son diferentes se toma como valor inicial de y_2 el valor calculado y se repite el proceso desde el paso 2.

Un proceso similar se usa cuando el cálculo es en la dirección contraria al flujo y el tirante desconocido es y_1 .

Cuando $\Delta Q = S_{f1} = S_{f2} = 0$, o bien $Q_1 = Q_2$, la ecuación 6.25 se simplifica a la forma: $\Delta y' = \alpha (V_2^2 - V_1^2)/2g$, que es la ecuación de energía para el flujo gradualmente variado de gasto constante en el que se desprecia la fricción.

Ejemplo 6.3. Un canal trapecial tiene 2.50 m de ancho, taludes 0.5:1 y está revestido de concreto en su totalidad, con $n = 0.015$ (Manning). El canal se inicia en la estación 0+000, con el fondo a la elevación 10.0 m y se utiliza como colector de alivio de las descargas de un lago, con una aportación lateral de $0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ en los primeros 150 m; después continúa como canal de descarga manteniendo las mismas dimensiones de la sección (figura 6.10) y con pendiente supercrítica. Analizar y calcular el perfil del flujo en el canal para los siguientes casos: a) Pendiente constante $S_0 = 0.06$, altura $\Delta z = 0$; b) Pendiente constante $S_0 = 0.06$ y un escalón ascendente en la estación 0+150.00 m, de altura $\Delta z = 1.60$ m; c) Pendiente constante $S_0 = 0.035$ y escalón ascendente en la misma estación, de altura $\Delta z = 0.30$ m; d) Pendiente constante $S_0 = 0.025$ y en la misma estación un escalón ascendente de altura $\Delta z = 0.30$ m. Las pendientes consideradas son pequeñas, de manera que $\cos \theta \approx 1$.

Solución a. Es conveniente calcular la línea de tirante crítico a lo largo del canal. Para ello hay que satisfacer la ecuación general del régimen crítico en cada sección x donde el gasto $Q = q_* x$. Con excepción de la sección $x = L$, los tanteos para obtener y_c se eliminan al seleccionar una serie de tirantes -empezando desde cero- para determinar con ellos el valor de Q_c al que corresponden a partir de la ecuación de régimen crítico, y con Q_c el de x . En la tabla 6.1 se presentan los resultados de estos cálculos y en la figura 6.11 el perfil de la línea de tirante crítico.

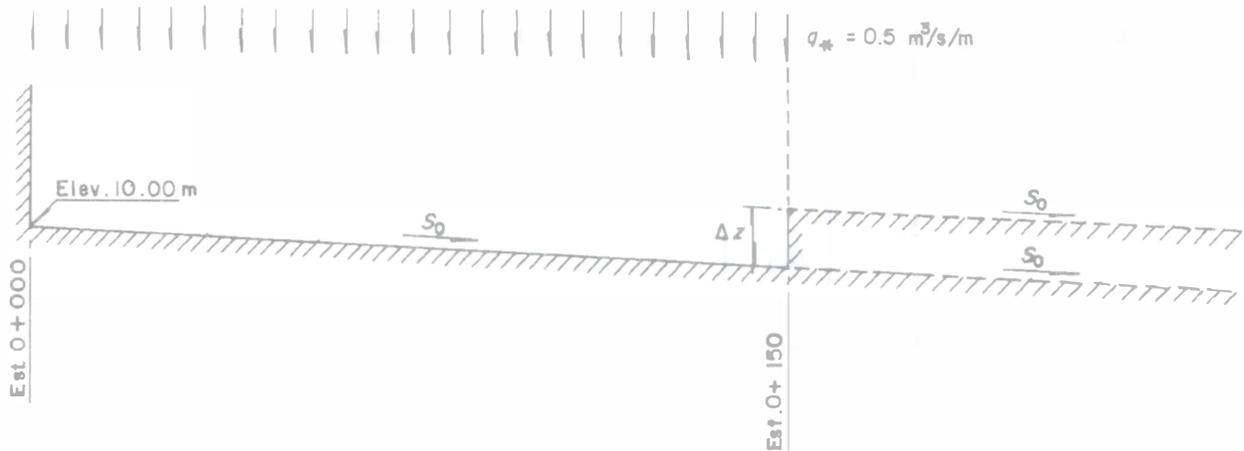


Figura 6.10. Canal colector del ejemplo 6.3

Las características de régimen crítico en la sección final son: $Q_c = 75 \text{ m}^3/\text{s}$; $y_c = 3.5427 \text{ m}$; $A_c = 15.1321 \text{ m}^2$; $T_c = 6.0427 \text{ m}$ y $R_{hc} = 1.452 \text{ m}$. El valor de G (figura 6.2) es

$$G = \frac{0.06 (150)}{15.1321/6.0427} = 3.594$$

que es mayor que $(1 + F_L) = (1 + 1) = 2$, por tanto, el perfil del flujo queda en alguna de las regiones C o D de dicha figura y puede haber una sección crítica en algún punto intermedio del canal. Con los valores críticos en la sección final, de la ecuación 6.12 resulta $x_c = 30.73 \text{ m} < 150 \text{ m}$, por lo cual existe una sección de control en un punto intermedio del canal. Para localizarla es necesario efectuar diferentes tanteos de x_c con las características de la sección crítica haciendo que se satisfaga la ecuación 6.12.

En efecto, para el tanteo final, se supone $x_c = 55.266 \text{ m}$, para la cual $Q_c = 27.633 \text{ m}^3/\text{s}$, $y_c = 2.0123 \text{ m}$; $A_c = 7.0555 \text{ m}^2$; $T_c = 4.5123 \text{ m}$; $R_{hc} = 1.008 \text{ m}$, $V_c = 3.9165 \text{ m/s}$ y

$$S_{fc} = \left(\frac{3.9165 (0.015)}{(1.008)^{2/3}} \right)^2 = 0.003415$$

Tabla 6.1. Cálculo de la línea de tirante crítico en el canal del ejemplo 6.3 ($b = 2.5$ m, $k = 0.5$)

y_c en m	A_c en m ²	T_c en m	Q_c en m ³ /s	V_c en m/s	x en m
0.1	0.255	2.6	0.2501	0.9809	0.5003
0.2	0.520	2.7	0.7148	1.3745	1.4295
0.3	0.795	2.8	1.3268	1.6689	2.6536
0.4	1.080	2.9	2.0643	1.9114	4.1286
0.5	1.375	3.0	2.9156	2.1204	5.8312
0.6	1.680	3.1	3.8736	2.3057	7.7473
0.7	1.995	3.2	4.9337	2.4730	9.8674
0.8	2.320	3.3	6.0927	2.6262	12.1854
0.9	2.655	3.4	7.3484	2.7678	14.6968
1.0	3.000	3.5	8.6993	2.8998	17.3985
1.1	3.355	3.6	10.1443	3.0236	20.2886
1.2	3.720	3.7	11.6828	3.1405	23.3657
1.3	4.095	3.8	13.3145	3.2514	26.6289
1.4	4.480	3.9	15.0390	3.3569	30.0780
1.5	4.875	4.0	16.8565	3.4577	33.7129
1.6	5.280	4.1	18.7669	3.5543	37.5339
1.7	5.695	4.2	20.7707	3.6472	41.5413
1.8	6.120	4.3	22.8680	3.7366	45.7359
1.9	6.555	4.4	25.0592	3.8229	50.1184
2.0	7.000	4.5	27.3448	3.9064	54.6897
2.1	7.455	4.6	29.7254	3.9873	59.4507
2.2	7.920	4.7	32.2013	4.0658	64.4026
2.3	8.395	4.8	34.7732	4.1421	69.5464
2.4	8.880	4.9	37.4417	4.2164	74.8835
2.5	9.375	5.0	40.2074	4.2888	80.4149
2.6	9.880	5.1	43.0710	4.3594	86.1420
2.7	10.395	5.2	46.0330	4.4284	92.0661
2.8	10.920	5.3	49.0942	4.4958	98.1885
2.9	11.455	5.4	52.2553	4.5618	104.5106
3.0	12.000	5.5	55.5169	4.6264	111.0338
3.1	12.555	5.6	58.8797	4.6897	117.7594
3.2	13.120	5.7	62.3445	4.7519	124.6889
3.3	13.695	5.8	65.9119	4.8128	131.8237
3.4	14.280	5.9	69.5826	4.8727	139.1653
3.5	14.875	6.0	73.3575	4.9316	146.7149
3.5427	15.1319	6.0427	75.0000	4.9564	150.0000

De la ecuación 6.12 resulta

$$x_c = \frac{8 (0.5)^2}{9.81 (4.5123)^2 (0.06 - 0.003415)^3} = 55.266 \text{ m}$$

igual al valor supuesto.

El perfil del flujo resultante queda dentro de la región D de la figura 6.2 debido a que no hay salto hidráulico, ya que $y_L < y_c$. La parte del perfil en flujo subcrítico se calcula desde $x_c = 55.266$ m en dirección contraria al flujo y la de supercrítico en la dirección del mismo. El cálculo se efectúa con el método numérico mediante las ecuaciones 6.23a y 6.25.

En la tabla 6.2 se muestran los resultados finales obtenidos por computadora para las dos direcciones mencionadas, a partir de la sección de control. En la figura 6.11 se presenta el perfil del flujo en el que se distinguen las dos partes del perfil típico de la región C en la figura 6.2.

Aguas abajo de la estación 0+150.00 el comportamiento y cálculo del perfil sigue los lineamientos de un flujo gradualmente variado de gasto constante.

Solución b. Al utilizar el escalón ascendente se forma el tirante crítico sobre el mismo para el gasto total, esto es, $y_c = 3.5427$ m. De la ecuación de energía, sin pérdidas, para la zona del escalón se tiene

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 1.60 + 3.5427 + \frac{(4.9564)^2}{2g} = 6.3948 \text{ m}$$

También, para $A_L = 75/V_L$, la solución resulta $y_L = 6.151$ m. En efecto: $A_L = 34.2949 \text{ m}^2$; $T_L = 8.651$ m; $A_L/T_L = 3.9643$ m; $V_L = 2.1869$ m/s; $V_L^2/2g = 0.2438$ m. Por tanto

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 6.3948 \text{ m}$$

Tabla 6.2. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso a. $q_* = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $S_0 = 0.06$

Régimen subcrítico

x en m	y en m	Q en m^3/s	V en m/s	$\Delta y'$ en m	$y_2 + \Delta y'$ en m	$S_0 \Delta x$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m
55.266	2.0123	27.633	3.9165				
50	1.9442	25.0	3.7035	0.2480	2.2603	0.316	2.2602
45	1.8823	22.5	3.4737	0.2372	2.1814	0.3	2.1823
40	1.8104	20.0	3.2443	0.2274	2.1097	0.3	2.1104
35	1.7347	17.5	2.9958	0.2234	2.0338	0.3	2.0347
30	1.6526	15.0	2.7287	0.2170	1.9517	0.3	1.9526
25	1.5621	12.5	2.4389	0.2091	1.8617	0.3	1.8621
20	1.4623	10.0	2.1165	0.1998	1.7619	0.3	1.7623
15	1.3495	7.5	1.7506	0.1867	1.6490	0.3	1.6495
10	1.2176	5.0	1.3209	0.1674	1.5169	0.3	1.5176
5	1.0529	2.5	0.7846	0.1350	1.3526	0.3	1.3529
0	0.8163	0	0	0.0634	1.1163	0.3	1.1163

Régimen supercrítico

x en m	y en m	Q en m^3/s	V en m/s	$S_0 \Delta x$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m	$\Delta y'$ en m	$y_2 + \Delta y'$ en m	M^* en m^3
55.266	2.0123	27.633	3.9165					
60	2.0750	30.0	4.0870	0.284	2.2963	0.2203	2.2953	
65	2.1220	32.5	4.3010	0.3	2.3750	0.2538	2.3758	
70	2.1780	35.0	4.4775	0.3	2.4220	0.2447	2.4227	
75	2.2300	37.5	4.6518	0.3	2.4780	0.2490	2.4790	
80	2.2807	40.0	4.8177	0.3	2.5300	0.2501	2.5309	
85	2.3303	42.5	4.9760	0.3	2.5807	0.2509	2.5812	
90	2.3776	45.0	5.1308	0.3	2.6303	0.2533	2.6309	
95	2.4228	47.5	5.2824	0.3	2.6776	0.2557	2.6786	35.29
96	2.4306	48.0	5.3155	0.06	2.4828	0.0531	2.4837	35.79
97	2.4385	48.5	5.3477	0.06	2.4906	0.0530	2.4914	36.29
98	2.4465	49.0	5.3793	0.06	2.4985	0.0528	2.4993	36.79
99	2.4546	49.5	5.4103	0.06	2.5065	0.0526	2.5073	37.30
100	2.4628	50.0	5.4408	0.06	2.5146	0.0525	2.5153	37.80
105	2.5080	52.5	5.5761	0.3	2.7628	0.2550	2.7630	40.33
110	2.5508	55.0	5.7110	0.3	2.8080	0.2577	2.8086	42.92
115	2.5927	57.5	5.8420	0.3	2.8508	0.2583	2.8510	
120	2.6337	60.0	5.9687	0.3	2.8927	0.2586	2.8924	
125	2.6730	62.5	6.0945	0.3	2.9337	0.2607	2.9337	
130	2.7110	65.0	6.2186	0.3	2.9730	0.2622	2.9733	
135	2.7477	67.5	6.3414	0.3	3.0110	0.2640	3.0118	
140	2.7846	70.0	6.4584	0.3	3.0477	0.2628	3.0474	
145	2.8208	72.5	6.5726	0.3	3.0846	0.2632	3.0840	
150	2.8555	75.0	6.6870	0.3	3.1208	0.2656	3.1211	

* Representa el momentum en la sección

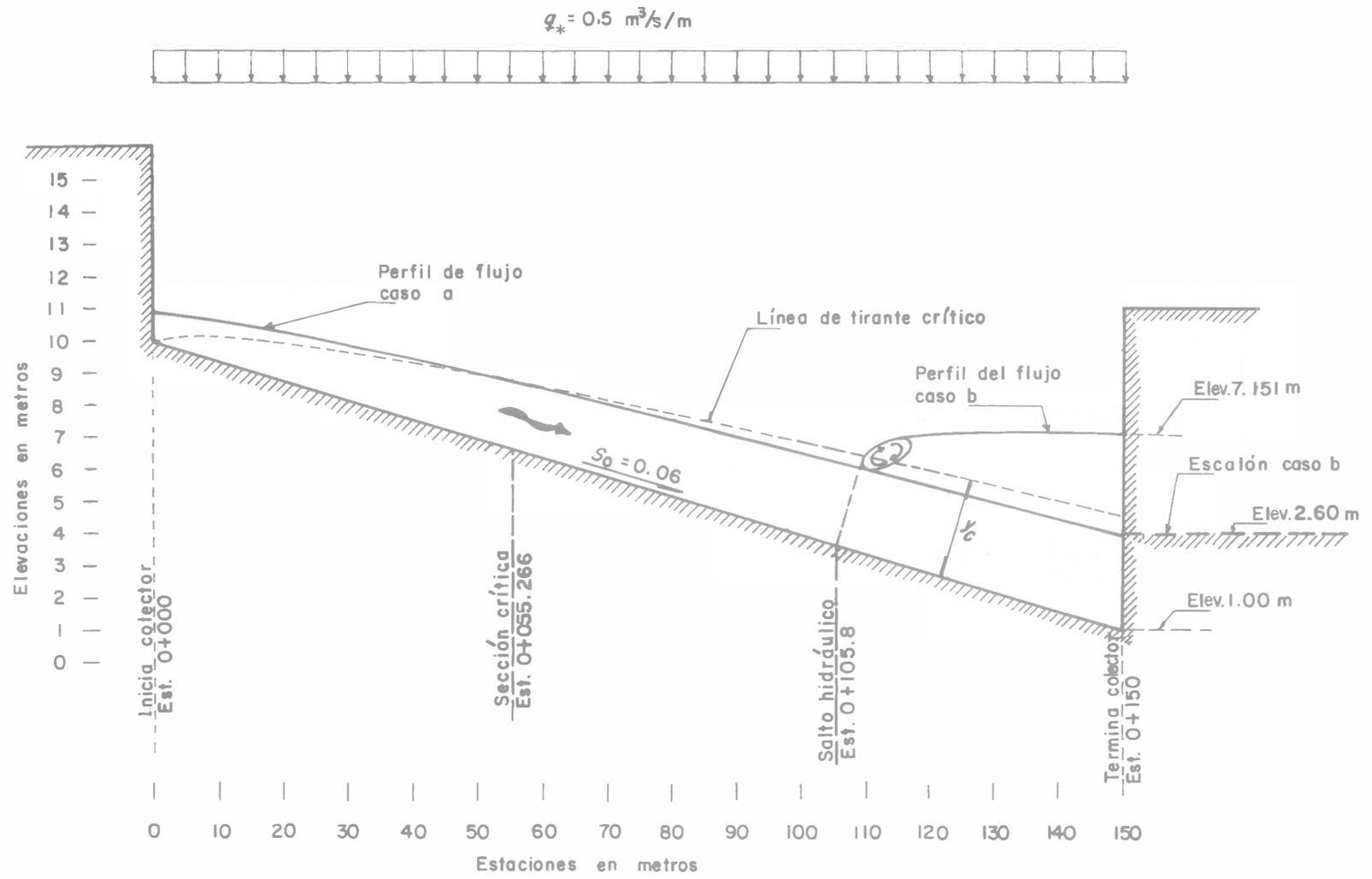


Figura 6.11. Perfil de flujo en el canal del ejemplo 6.3, incisos a y b

Los parámetros de la figura 6.2 son

Se cumple que $G \gg (1 + F_L)$, por lo cual el perfil se encuentra en la región C de la figura 6.2, con salto hidráulico en el tramo de régimen supercrítico y después subcrítico.

Tabla 6.3. Cálculo de los perfiles de flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso b. $q_* = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $S_0 = 0.06$

x en m	y en m	Q en m^3/s	V en m/s	$\Delta y'$ en m $\times 10^{-2}$	$y_2 + \Delta y'$ en m	$S_0 \Delta x$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m	M^* en m^3
150	6.1510	75.0	2.1869					
145	5.8486	72.5	2.2853	- 0.3	6.1480	0.30	6.1486	
140	5.5456	70.0	2.3939	- 0.39	5.8447	0.30	5.8456	
135	5.2406	67.5	2.5155	- 0.53	5.5403	0.30	5.5406	
130	4.9340	65.0	2.6523	- 0.7	5.2336	0.30	5.2340	
125	4.6251	62.5	2.8079	- 0.96	4.9244	0.30	4.9251	
120	4.3117	60.0	2.9888	- 1.38	4.6113	0.30	4.6117	
115	3.9913	57.5	3.2045	- 2.07	4.2910	0.30	4.2913	
110	3.6581	55.0	3.473	- 3.37	3.9576	0.30	3.9581	44.36
109	3.5894	54.5	3.5354	- 0.92	3.6489	0.06	3.6494	43.45
108	3.5197	54.0	3.6016	- 1.04	3.5790	0.06	3.5797	42.58
107	3.4488	53.5	3.6721	- 1.18	3.5079	0.06	3.5088	41.73
106	3.3753	53.0	3.7496	- 1.42	3.4346	0.06	3.4353	40.91
105	3.2987	52.5	3.8357	- 1.73	3.3580	0.06	3.3587	40.11
104	3.2178	52.0	3.933	- 2.16	3.2771	0.06	3.2778	39.34

* Momentum en la sección

En la tabla 6.3 se presentan los cálculos del perfil del flujo en régimen subcrítico, partiendo de $y_L = 6.151 \text{ m}$, pero ahora controlado desde la sección $x_L = 150 \text{ m}$ y hacia aguas arriba. Desde la estación 110 hasta la 104 los cálculos se hicieron con $\Delta x = 1.0 \text{ m}$, incluyendo los valores del momentum de acuerdo con los de y y Q en cada sección.

Con los valores de x en el eje horizontal y de y y M en el vertical, en la figura 6.12 se presentan las curvas de variación de M_1 y M_2 ; la primera corresponde al flujo supercrítico del perfil en la tabla 6.2, la segunda, al subcrítico de la tabla 6.3. Se observa que $M_1 = M_2$ cuando $x = 105.80 \text{ m}$, en el supuesto que la longitud del salto fuese cero. Dicha sección se encuentra próxima a la intersección del flujo subcrítico con la línea de tirante crítico, como se aprecia en la figura 6.11, por tanto hay un resalto de tipo ondulado carente de una longitud. Por otra parte, no hay investigaciones que definan la longitud del salto en el flujo espacialmente variado, por lo que no es necesaria mayor precisión en su localización.

Solución c. Es necesario repetir cálculos similares a los del inciso anterior para el escalón positivo, ahora de 0.30 m de altura, como sigue

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 0.30 + 3.5427 + \frac{(4.9564)^2}{19.62} = 5.0948 \text{ m}$$

Esta condición se satisface para $y_L = 4.4435$ m, $A_L = 20.9811$ m², $T_L = 6.9435$ m, $A_L/T_L = 3.0217$ m, $V_L = 3.5746$ m/s, $F_L = 0.6566$; la sección final nuevamente es de control. Debido a que la pendiente es ahora más pequeña y el tirante $y_L > y_c$, el perfil es seguramente subcrítico y por tanto se calcula desde la sección final hacia aguas arriba. En la tabla 6.4 se muestran los cálculos del perfil del flujo donde se observa que F crece desde la estación cero hasta un máximo en la 110 y después disminuye. Esto es congruente con un perfil ubicado en la región B de la figura 6.2 para la cual los parámetros son: $F_L = 0.6566$, $G = [0.035 (150)] / 3.0217 = 1.737$ y se presenta en la figura 6.13. Es fácil verificar que no existe sección de control intermedia y el escalón obliga al perfil mencionado.

Solución d. Debido a que la altura del escalón es igual que en el inciso c, el tirante y_L debe ser de 4.4435 m. En la tabla 6.5 se muestran los cálculos del perfil del flujo donde se observa que F crece desde la estación cero hasta un máximo en la final, lo que es congruente con un perfil en la región A de la figura 6.2, y se presenta en la figura 6.14.

6.2.8 El vertedor de canal lateral

El vertedor de canal lateral se utiliza con muchas ventajas como obra de excedencias en almacenamientos grandes y pequeños y su funcionamiento es un ejemplo típico de flujo espacialmente variado de gasto creciente.

La estructura de control está formada por un vertedor tipo cimacio, de cresta recta o curva, que vierte hacia un canal colector paralelo a ella, que a su vez conduce los volúmenes vertidos en dirección perpendicular a la que llegan. El agua continúa después a un canal o un túnel que la conduce hacia aguas abajo del almacenamiento y la descarga al lecho del río.

Debido a su geometría, el vertedor de canal lateral se considera una buena solución en boquillas con laderas de poca inclinación, donde la obra se aloja en una de ellas en dirección paralela al río para reducir las excavaciones.

En la figura 6.15 se muestra la forma y disposición típica del vertedor. En el caso general la cresta vertedora es recta pero también puede ser de forma compuesta. Lo más común es que el vertido sea por un solo lado del colector pero puede ser por ambos lados; en todo caso el eje del colector se mantiene paralelo a la cresta y forma parte de la estructura de control. El canal capta la totalidad del volumen vertido, disipa la energía ganada en la caída y cambia el movimiento a la dirección de su eje, lo que propicia que dicha energía no se aproveche para acelerar el agua a lo largo del canal. La velocidad axial en el canal se considera una vez que el líquido que entra se une a la corriente principal.

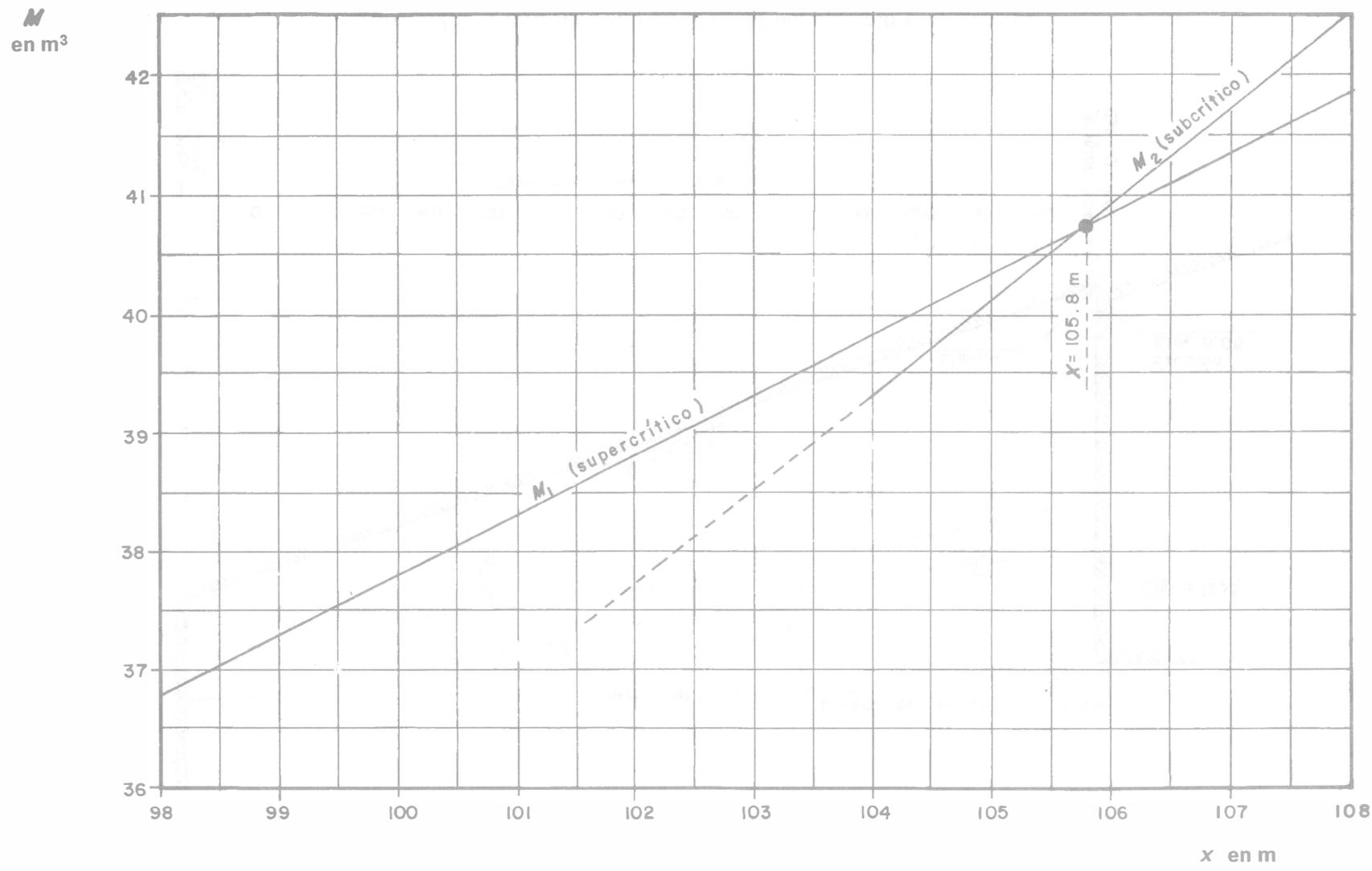


Figura 6.12. Variación $x - M$ en la zona de ubicación del salto en el ejemplo 6.3, inciso b

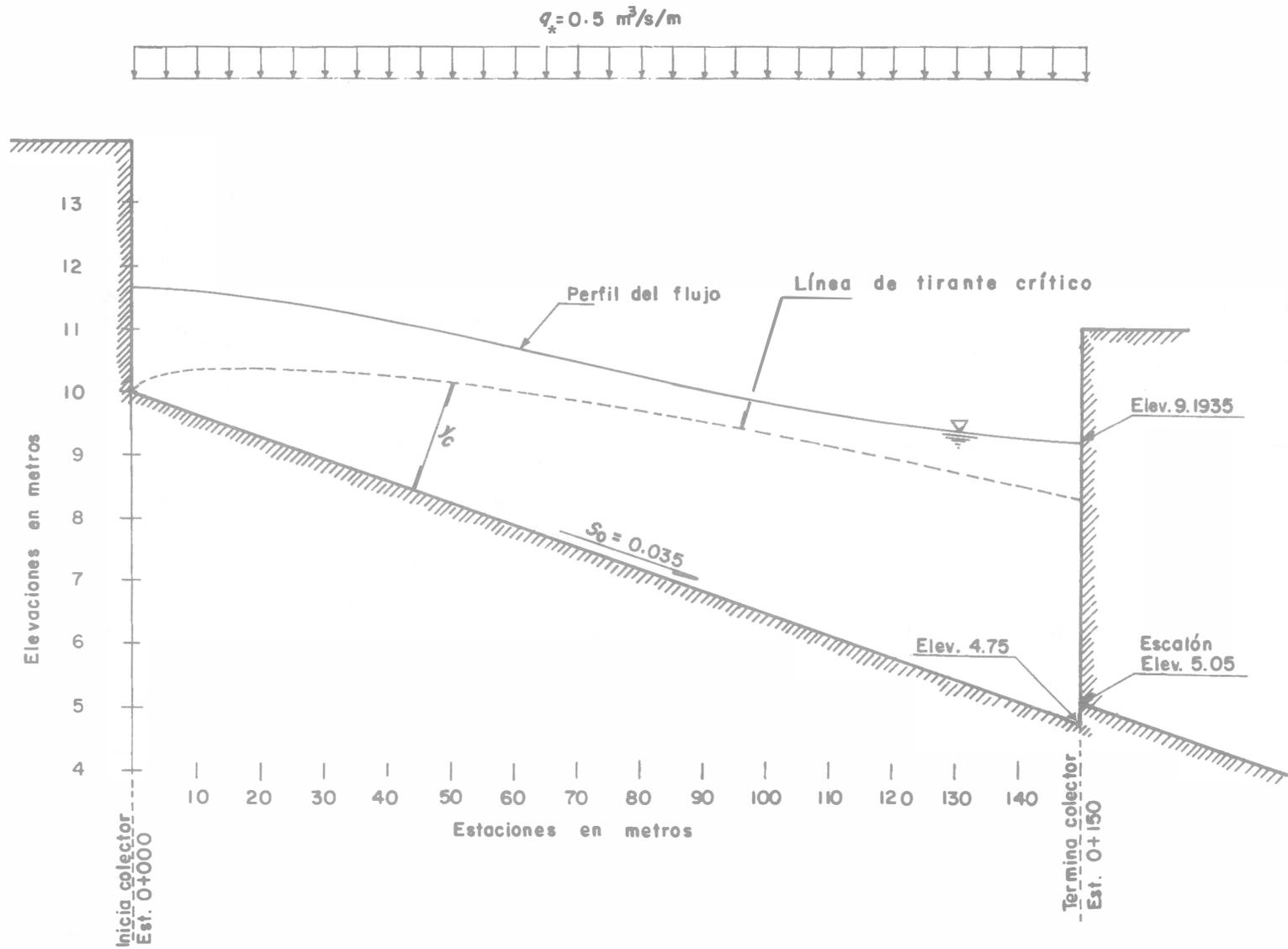


Figura 6.13. Perfil del flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso c

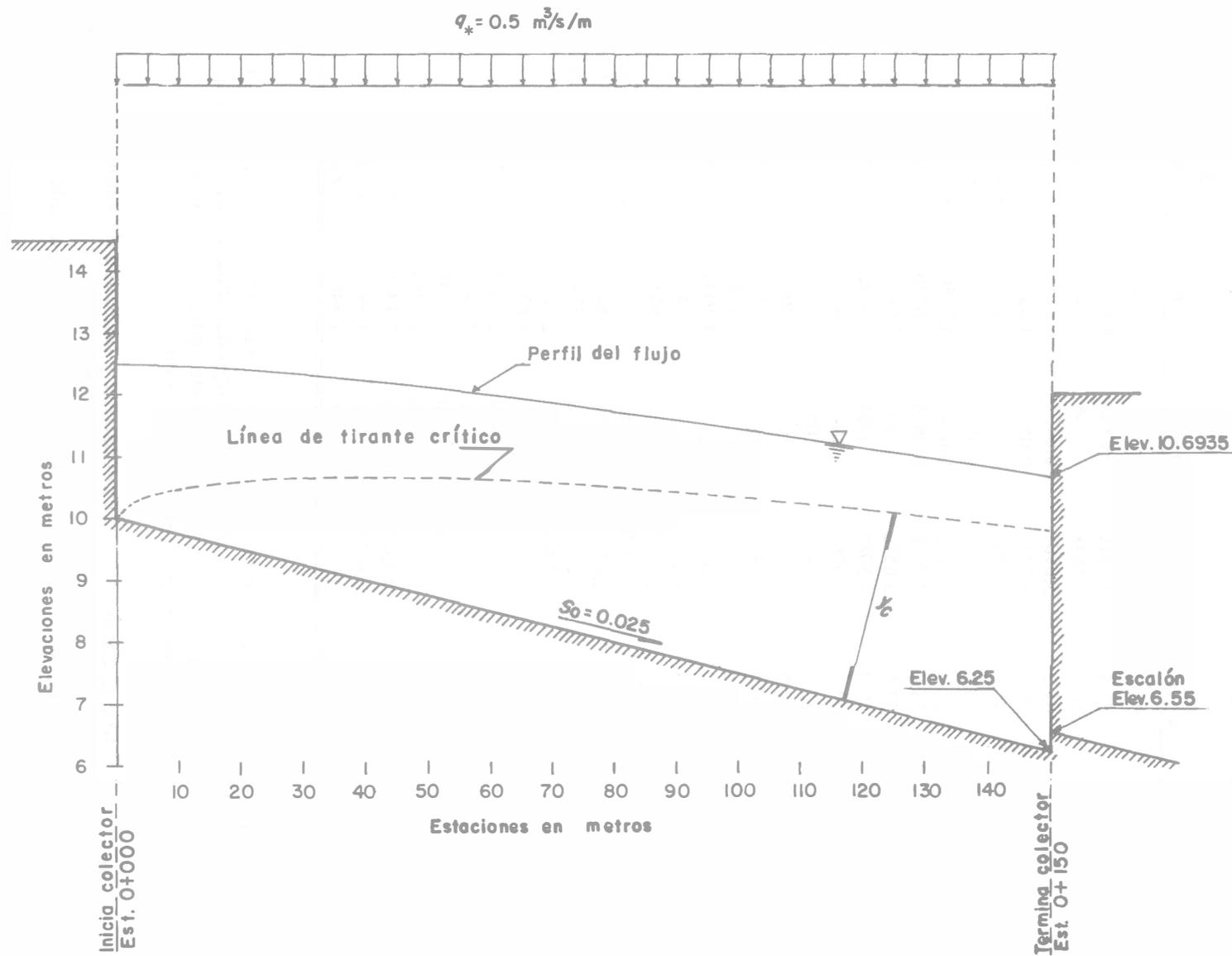


Figura 6.14. Perfil del flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso d

Tabla 6.4. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso c. $q_* = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $S_0 = 0.035$

x en m	y en m	Q en m^3/s	V en m/s	$\Delta y'$ en m	$y_2 + \Delta y'$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m	F
150	4.4435	75.0	3.5746	—	4.4783	—	0.6566
145	4.3033	72.5	3.6219	0.0348	4.4773	4.4783	0.6741
140	4.1679	70.0	3.6638	0.0396	4.3429	4.3429	0.6911
135	4.0382	67.5	3.6989	0.0453	4.2132	4.2132	0.7069
130	3.9149	65.0	3.7249	0.0517	4.0899	4.0899	0.7211
125	3.7987	62.5	3.7398	0.0588	3.9737	3.9737	0.7330
120	3.6903	60.0	3.7418	0.0666	3.8653	3.8653	0.7423
115	3.5900	57.5	3.7292	0.0747	3.7650	3.7650	0.7483
110	3.4976	55.0	3.7010	0.0826	3.6726	3.6726	0.7507
105	3.4127	52.5	3.6573	0.0901	3.5877	3.5877	0.7494
100	3.3342	50.0	3.5986	0.0965	3.5092	3.5092	0.7445
95	3.2610	47.5	3.5264	0.1018	3.4360	3.4360	0.7363
90	3.1919	45.0	3.4419	0.1059	3.3669	3.3669	0.7251
85	3.1257	42.5	3.3466	0.1088	3.3007	3.3007	0.7112
80	3.0614	40.0	3.2417	0.1106	3.2363	3.2364	0.6948
75	2.9980	37.5	3.1279	0.1116	3.1730	3.1730	0.6763
70	2.9347	35.0	3.0061	0.1117	3.1097	3.1097	0.6557
65	2.8709	32.5	2.8765	0.1112	3.0459	3.0459	0.6332
60	2.8060	30.0	2.7392	0.1101	2.9810	2.9810	0.6087
55	2.7395	27.5	2.5940	0.1085	2.9145	2.9145	0.5822
50	2.6709	25.0	2.4404	0.1064	2.8459	2.8459	0.5536
45	2.5997	22.5	2.2777	0.1038	2.7747	2.7747	0.5225
40	2.5252	20.0	2.1049	0.1005	2.7002	2.7002	0.4888
35	2.4468	17.5	1.9209	0.0966	2.6218	2.6218	0.4519
30	2.3637	15.0	1.7236	0.0919	2.5387	2.5387	0.4114
25	2.2749	12.5	1.5106	0.0862	2.4499	2.4499	0.3664
20	2.1789	10.0	1.2786	0.0790	2.3539	2.3539	0.3157
15	2.0739	7.5	1.0224	0.0700	2.2489	2.2489	0.2578
10	1.9570	5.0	0.7345	0.0581	2.1320	2.1320	0.1897
5	1.8236	2.5	0.4018	0.0416	1.9986	1.9986	0.1069
0	1.6652	0	0	0.0166	1.8402	1.8402	0

Cuando el vertido es en un solo lado se produce un movimiento helicoidal de gran turbulencia en la dirección del eje del colector, que se propaga a lo largo del canal de descarga y que es una clara manifestación de la tridimensionalidad del flujo. Esto induce vibraciones en la estructura que requieren de una cimentación firme, preferentemente en roca.

El gasto unitario que ingresa al canal colector es constante y uniforme de valor $q_* = Q/L$, donde Q es el gasto total vertido y L la longitud de la cresta. Si el vertido es por un solo lado, la longitud de cresta coincide con la del canal colector con flujo espacialmente variado.

El perfil del cimacio se ajusta al que debe tener para la carga máxima y es común que termine en el punto de tangencia elegido de acuerdo al talud de la sección trapezoidal del canal colector, generalmente no mayor de 0.5:1. En principio, es difícil la selección de su ancho y pendiente longitudinal, ya que se deben satisfacer condiciones topográficas y de buen funcionamiento hidráulico.

Tabla 6.5. Cálculo del perfil del flujo en el canal del ejemplo 6.3, inciso d ($S_0 = 0.025$)

x en m	y en m	Q en m^3/s	V en m/s	$\Delta y'$ en m	$y_2 + \Delta y'$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m	F
150	4.4435	75.0	3.5746				0.6566
145	4.3895	72.5	3.5181	0.0710	4.5145	4.5145	0.6495
140	4.3363	70.0	3.4581	0.0718	4.4613	4.4613	0.6416
135	4.2838	67.5	3.3946	0.0725	4.4088	4.4088	0.6330
130	4.2317	65.0	3.3277	0.0729	4.3567	4.3567	0.6237
125	4.1800	62.5	3.2576	0.0733	4.3050	4.3050	0.6137
120	4.1284	60.0	3.1842	0.0734	4.2534	4.2534	0.6030
115	4.0768	57.5	3.1077	0.0734	4.2018	4.2018	0.5916
110	4.0251	55.0	3.0281	0.0733	4.1501	4.1501	0.5795
105	3.9731	52.5	2.9452	0.0730	4.0981	4.0981	0.5667
100	3.9207	50.0	2.8592	0.0726	4.0457	4.0457	0.5531
95	3.8677	47.5	2.7698	0.0720	3.9927	3.9927	0.5389
90	3.8140	45.0	2.6772	0.0713	3.9390	3.9390	0.5239
85	3.7595	42.5	2.5811	0.0705	3.8845	3.8845	0.5081
80	3.7040	40.0	2.4814	0.0695	3.8290	3.8290	0.4915
75	3.6474	37.5	2.3779	0.0684	3.7724	3.7724	0.4740
70	3.5895	35.0	2.2704	0.0671	3.7145	3.7145	0.4556
65	3.5301	32.5	2.1586	0.0656	3.6551	3.6551	0.4362
60	3.4690	30.0	2.0422	0.0639	3.5940	3.5940	0.4156
55	3.4061	27.5	1.9209	0.0621	3.5311	3.5311	0.3939
50	3.3411	25.0	1.7942	0.0600	3.4661	3.4661	0.3709
45	3.2737	22.5	1.6614	0.0576	3.3987	3.3987	0.3463
40	3.2036	20.0	1.5220	0.0549	3.3286	3.3286	0.3202
35	3.1304	17.5	1.3752	0.0518	3.2554	3.2554	0.2920
30	3.0536	15.0	1.2199	0.0482	3.1786	3.1786	0.2617
25	2.9727	12.5	1.0548	0.0441	3.0977	3.0977	0.2289
20	2.8870	10.0	0.8784	0.0393	3.0120	3.0120	0.1929
15	2.7956	7.5	0.6883	0.0336	2.9206	2.9206	0.1532
10	2.6972	5.0	0.4817	0.0266	2.8222	2.8222	0.1088
5	2.5901	2.5	0.2543	0.0179	2.7151	2.7151	0.0584
0	2.4717	0	0	0.0066	2.5967	2.5967	0

Esto implica varias soluciones técnicamente factibles y un estudio económico para seleccionar la alternativa de menor costo, donde la experiencia del proyectista es muy importante para disminuir el trabajo en la selección. De cualquier manera, conviene exponer algunas consideraciones de interés para una selección más adecuada.

La relación entre el ancho del canal y su tirante es un elemento importante en la selección de dicho ancho. Si dicha relación es grande el tirante en el canal es pequeño, con una sección similar a la representada por *abfg* de la figura 6.16. Para esta situación es evidente que resulta una difusión pobre del flujo entrante dentro del que se produce en el canal. Si la relación ancho/tirante es la mínima se logra el mejor funcionamiento hidráulico, lo que indica que la sección que se aproxime a la representada por *adj* en la misma figura es la ideal desde el punto de vista hidráulico y económico.

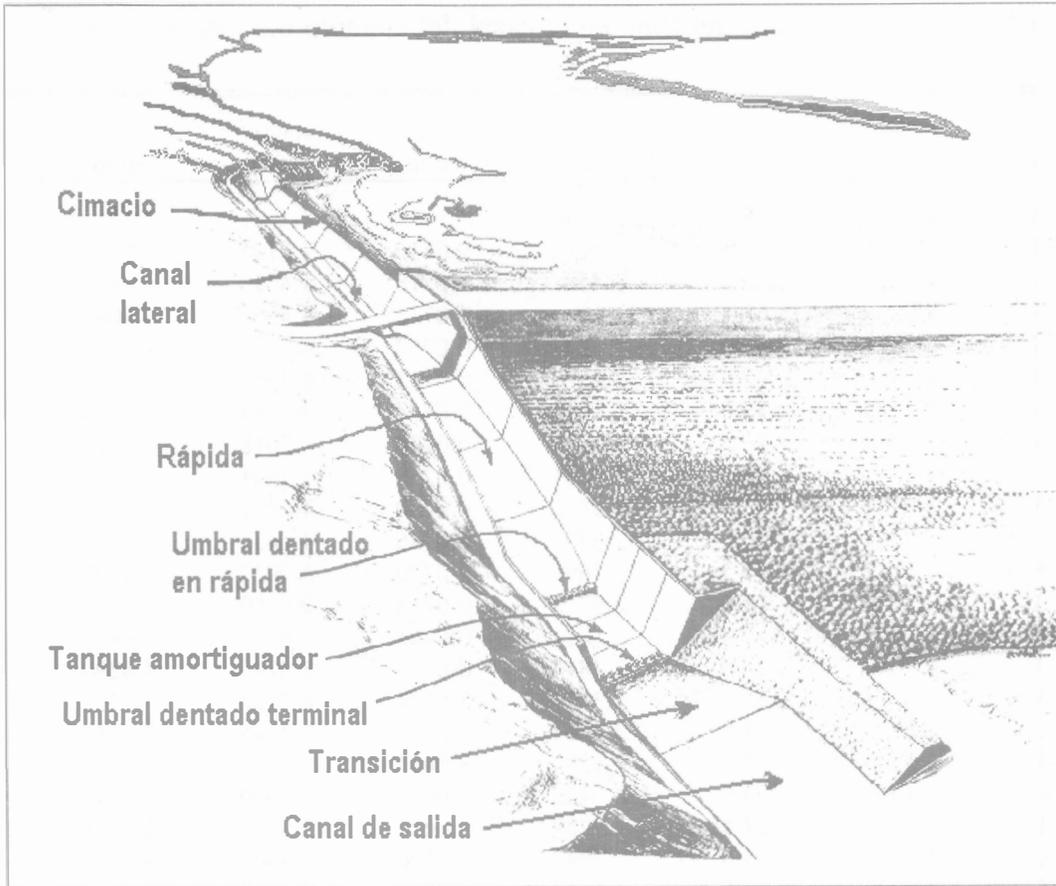


Figura 6.15. Disposición general de un vertedor de canal lateral, según USBR (1960)

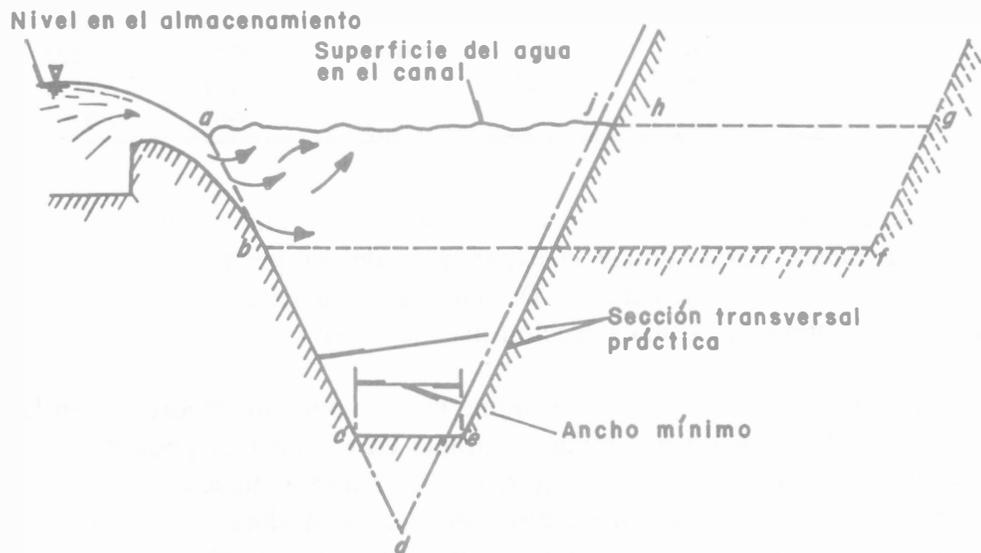


Figura 6.16. Selección de las dimensiones de la sección, según USBR (1960)

Sin embargo, es necesario elegir un ancho razonablemente pequeño que evite las dificultades constructivas inherentes al confinamiento del espacio de trabajo. Por otra parte, se debe también considerar que la estabilidad de la estructura y la ladera se comprometen al realizar un corte extremadamente profundo para la cimentación, de modo que el ancho mínimo se debe también elegir de acuerdo con los aspectos prácticos y estructurales del problema.

Cuando la pendiente longitudinal del canal colector es grande y no se establece una sección de control en su extremo final, el flujo supercrítico prevalece a lo largo del canal, del tipo que hay dentro de las regiones C y D de la figura 6.2. Las velocidades son grandes y los tirantes pequeños, resultando una caída relativamente importante desde el nivel del almacenamiento hasta la superficie del agua en casi toda la longitud. Por el contrario, si se elige una pendiente más pequeña y se establece una sección de control al final del canal, los tirantes en el mismo crecen y las velocidades son menores que la crítica en cada sección, resultando una caída más pequeña y perfiles en flujo subcrítico dentro de las regiones A y B de la figura 6.2.

El efecto de la altura de caída desde el nivel del almacenamiento a la superficie del agua en el colector se muestra en la figura 6.17, donde se observa que con tirantes bajos en el caso supercrítico y grandes caídas, las velocidades son grandes, con un intermezclado turbulento del flujo transversal de gran energía y la corriente en el canal, produciendo grandes alteraciones en la superficie, la tendencia a una inclinación más pronunciada hacia el lado opuesto y la acción de ondas y vibraciones consecuentes. Con tirantes mayores y régimen subcrítico, el flujo que ingresa incide antes en el del canal y debido a la poca caída no se desarrollan velocidades transversales elevadas y se efectúa una buena difusión en el cuerpo del agua dentro del canal. Debido a que las velocidades tanto del flujo entrante como en el canal son relativamente pequeñas, se realiza un intermezclado intenso y se produce una superficie libre más uniforme y tersa.

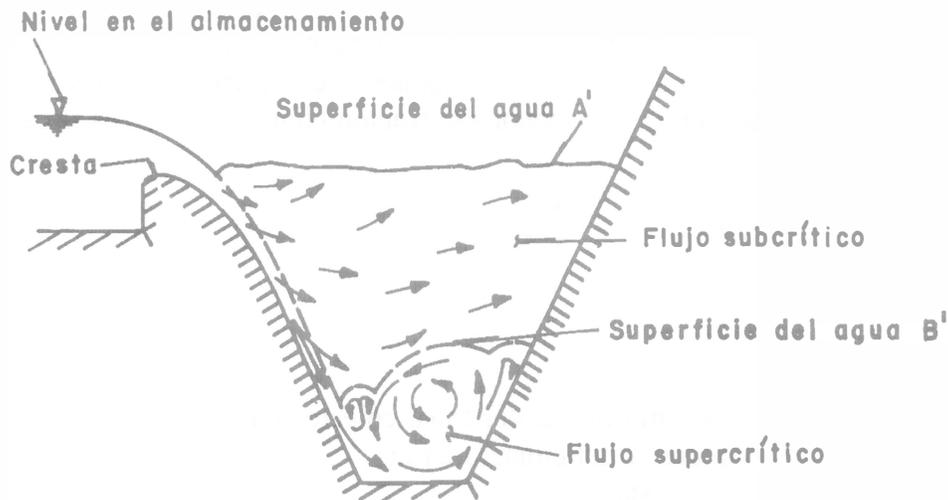


Figura 6.17. Funcionamiento del canal colector para flujo supercrítico y subcrítico, según USBR (1960)

Por tanto, es evidente que el flujo en el canal colector debe ser subcrítico para tener un buen funcionamiento hidráulico, lo cual se logra estableciendo una sección crítica en su extremo final, sobrelevando el fondo para producir un escalón positivo, mediante una contracción de la sección o ambos. El escalón, como se muestra en la figura 6.18a, es el más usado en México, de modo que al aplicar la ecuación de energía entre dos secciones antes y después del mismo resulta

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = \Delta z + y_c + \frac{V_c^2}{2g} + k_e \left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_L^2}{2g} \right) \quad (6.27)$$

donde y_c y V_c son el tirante y velocidad críticos para el gasto total ($Q = q_* L$). El último término representa la pérdida debida al cambio de velocidad en la transición, donde k_e es el coeficiente de pérdida en la misma. En el caso de un escalón positivo k_e varía de 0.3 a 0.4; cuando se trata de una contracción de la sección y $\Delta z = 0$, $k_e = 0.2$ (según el USBR referencia 8).

La solución de la ecuación anterior junto con la de continuidad permite conocer el tirante y_L y la velocidad V_L al final del canal colector, acorde con la altura Δz seleccionada. La pendiente S_0 de dicho canal se debe elegir de modo que haya flujo subcrítico en el mismo dentro de las regiones A o B de la figura 6.2. Una mayor seguridad de buen funcionamiento se logra en la región A, es decir, cuando se cumple la condición de Li.

$$\frac{S_0 L}{A_L/T_L} \leq \frac{2}{3} (1 + 2 F_L^2)$$

El perfil del flujo se calcula mediante la ecuación 6.25 partiendo de la sección final de tirante y_L hacia aguas arriba hasta el extremo inicial de tirante y_0 , donde se alcanza el nivel máximo del agua. Dicho nivel no debe ser superior al de sumergencia máxima $2H/3$ tolerable por arriba de la cresta del cimacio, para evitar un ahogamiento excesivo de la descarga en el mismo, alcanzar la mínima caída del agua y menor excavación (figura 6.18a). Es decir

$$NF = NC + \frac{2}{3} H - y_0$$

donde

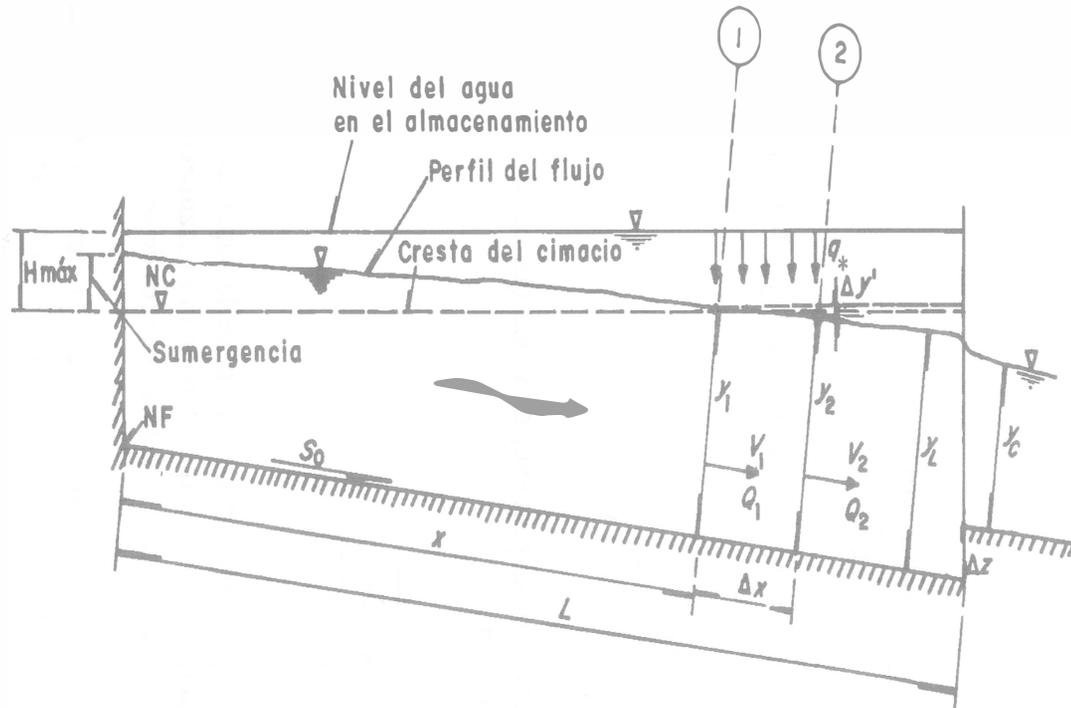
y_0 tirante en el extremo inicial del canal colector en m

H carga sobre la cresta del cimacio en m

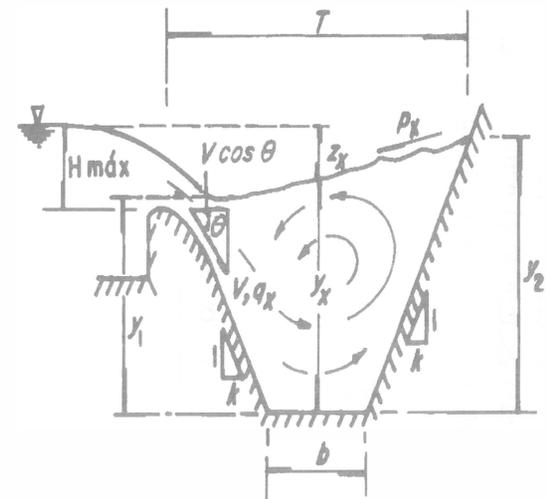
NC elevación de la cresta en m

NF elevación del piso del canal en la sección inicial en m.

La elevación del fondo en la sección final del canal y de inicio del canal de descarga se calculan con los valores de S_0 y Δz elegidos.



a) Movimiento según el eje del canal colector



b) Sección del canal colector

Figura 6.18. Simbología para el movimiento del agua en un canal colector

Viparelli, en 1956, al diseñar el vertedor de la presa Barrea en Italia, estableció una ecuación para determinar la pendiente transversal de la superficie libre del agua en un canal trapecial cuando el ingreso es por un solo lado. Para ello estableció el principio del momentum entre los dos lados de la sección mostrada en la figura 6.18b en un ancho igual a uno, resultando

$$\frac{q_* V \cos \theta}{g} + \frac{y_1^2}{2} = \frac{y_2^2}{2}$$

O bien

$$\frac{y_2 + y_1}{2} (y_2 - y_1) = \frac{q_* V \cos \theta}{g}$$

pero

$$y = \frac{1}{2} (y_1 + y_2); \quad V = \sqrt{2g z}$$

de manera que

$$y_2 - y_1 = \frac{q_* \sqrt{2g z} \cos \theta}{g y}$$

Además, $T = b + 2 k y$, y la pendiente transversal $p = (y_2 - y_1)/T$, de manera que

$$p = \frac{q_* \sqrt{2g z} \cos \theta}{g (b + 2 k y) y}$$

El ángulo θ es factible de valor pero es pequeño, de modo que $\cos \theta \approx 1$ y para una sección a la distancia x se obtiene finalmente

$$p_x = \frac{q_* \sqrt{2g z_x}}{g (b + 2 k y_x) y_x} \quad (6.28)$$

con la cual se puede calcular la pendiente transversal p_x de la superficie del agua en cualquier sección. Viparelli encontró experimentalmente que un buen funcionamiento se logra si $p_x \leq 0.08$ en cualquier sección del canal, lo que acota el ámbito de valores de las variables que intervienen.

Ejemplo 6.4. Un vertedor de canal lateral tiene su cresta a la elevación 65.50 m, con nivel de acceso a la 63.50 m. Debe evacuar un gasto máximo de 254 m³/s con una longitud de cresta $L = 75.00$ m y coeficiente de descarga $C_d = 2$. Se propone que el ancho de la base en el canal colector sea de 6.15 m, taludes 0.5:1 y pendiente longitudinal de 0.055. La sección de control

se forma mediante un escalón ascendente de 0.25 m de altura, reduciendo el ancho del canal de descarga a 6.00 m y taludes 0.5:1. Dicha sección se localiza al final del canal colector en la estación 90.437 m. La elevación del fondo antes del escalón es la 57.80 m, de manera que la que hay después del mismo es la 58.05 m. Determinar el perfil del flujo a lo largo del colector y el grado máximo de sumergencia del vertido.

Solución. De la ecuación de descarga del cimacio: $Q = C_d LH^{3/2}$, la carga máxima resulta

$$H = \left[\frac{254}{2 (75)} \right]^{2/3} = 1.42 \text{ m}$$

por lo cual, el nivel en el almacenamiento es a la elevación $65.50 + 1.42 = 66.92$ m. El gasto por unidad de longitud es

$$q_* = \frac{254}{75} = 3.3867 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

La sección crítica se debe obtener para el gasto total y $Q^2/g = 6576.55$. Si el ancho del canal después del escalón es de 6 m, el tirante crítico es $y_c = 4.914$ m. En efecto:

$$A_c = [6 + 0.5 (4.914)] 4.914 = 41.5577 \text{ m}^2$$

$$T_c = 6 + 2 (0.5) (4.914) = 10.914 \text{ m}$$

$$\frac{A_c^3}{T_c} = 6576.13 \approx 6576.55$$

$$V_c = \frac{254}{41.5577} = 6.112 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = 1.904 \text{ m}$$

$$E_c = 4.914 + 1.904 = 6.818 \text{ m}$$

Se debe cumplir la ecuación 6.27

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 0.25 + 6.818 + 0.3 \frac{V_c^2 - V_L^2}{2g}$$

$$y_L + 1.3 \frac{V_L^2}{2g} = 7.6392$$

cuya solución es $y_L = 6.489$ m, siendo

$$A_L = [6.15 + 0.5 (6.489)] 6.489 = 60.9609 \text{ m}^2$$

$$T_L = 6.15 + 2 (0.5) (6.489) = 12.639 \text{ m}$$

$$\frac{A_L}{T_L} = \frac{60.9609}{12.639} = 4.8232 \text{ m}$$

$$V_L = \frac{254}{60.9609} = 4.1666 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_L^2}{2g} = 0.8848 \text{ m}$$

$$y_L + 1.3 \frac{V_L^2}{2g} = 7.6393 \text{ m}$$

$$F_L = \frac{4.1666}{\sqrt{9.81 (4.8232)}} = 0.6057 < 1$$

Por tanto

$$\frac{2}{3} (1 + 2 F_L^2) = 1.1559$$

$$\frac{S_0 L}{A_L/T_L} = \frac{0.055 (75)}{4.8232} = 0.8552 < 1.1559$$

Esto significa que se satisface la condición de L_i y se garantiza flujo subcrítico en el canal colector. El nivel del agua en su sección final es a la elevación: $57.80 + 6.489 = 64.289$ m. Por tanto, la altura de caída es

$$z_L = 66.92 - 64.289 = 2.631 \text{ m}$$

De la ecuación 6.28, la pendiente transversal en la sección $x = L$ es

$$P_L = \frac{3.3867 \sqrt{19.62 (2.631)}}{9.81 (12.639) 6.489} = 0.0302 < 0.08$$

El cálculo del perfil del flujo se efectúa con la ecuación 6.25 haciendo que se satisfaga la ecuación 6.23b en cada sección, a partir de $x = L$ hacia aguas arriba y utilizando incrementos $\Delta x = 5.00$ m. En la tabla 6.6 se muestra un resumen de los cálculos, donde se observa que en

todas las secciones $p_x < 0.08$ y en la inicial ($x = 015.437$ m), $y_0 = 4.3886$ m y la elevación máxima del agua es 66.3136 m. Ésta produce una sumergencia máxima

$$s = \frac{66.3136 - 65.50}{1.42} = 0.573 < \frac{2}{3}$$

es decir, no rebasa el grado de ahogamiento permisible en el cimacio.

Tabla 6.6. Perfil del flujo y pendiente transversal de la superficie del agua en el canal colector del ejemplo 6.4, considerando $\Delta x = 5.00$ m, $n = 0.015$, $k = 0.5$ y $S_0 = 0.055$

Estación en m	y en m	Q en m ³ /s	V en m/s	$\Delta y'$ en m	$y_2 + \Delta y'$ en m	$y_1 + S_0 \Delta x$ en m
090.437	6.489	254.0	4.1666		—	—
085.437	6.4281	237.0667	3.9384	0.2141	6.7031	6.7031
080.437	6.3553	220.1333	3.7134	0.2022	6.6303	6.6303
075.437	6.272	203.2	3.4889	0.1917	6.547	6.547
070.437	6.179	186.2667	3.2626	0.182	6.454	6.454
065.437	6.0767	169.3333	3.0327	0.1727	6.3517	6.3517
060.437	5.9652	152.4	2.7975	0.1635	6.2402	6.2402
055.437	5.8443	135.4667	2.555	0.1541	6.1193	6.1193
050.437	5.7135	118.5333	2.3034	0.1442	5.9885	5.9885
045.437	5.5721	101.6	2.0405	0.1336	5.8471	5.8471
040.437	5.419	84.6667	1.7636	0.1219	5.694	5.694
035.437	5.2525	67.7333	1.4694	0.1085	5.5275	5.5275
030.437	5.0704	50.8	1.1536	0.0929	5.3454	5.3454
025.437	4.8694	33.8667	0.8102	0.074	5.1444	5.1444
020.437	4.6447	16.9333	0.4303	0.0503	4.9197	4.9197
015.437	4.3886	0.0	0.0	0.0189	4.6636	4.6636

Estación en m	F	Elev. agua en m	p_x
090.437	0.6057	64.289	0.0304
085.437	0.5748	64.5031	0.0296
080.437	0.5445	64.7053	0.0288
075.437	0.5144	64.897	0.0281
070.437	0.4841	65.079	0.0274
065.437	0.4531	65.2517	0.0267
060.437	0.4212	65.4152	0.0261
055.437	0.388	65.5693	0.0255
050.437	0.3531	65.7135	0.0249
045.437	0.3161	65.8471	0.0244
040.437	0.2764	65.969	0.0239
035.437	0.2333	66.0775	0.0236
030.437	0.1859	66.1704	0.0234
025.437	0.1328	66.2444	0.0235
020.437	0.072	66.2947	0.0242
015.437	0.0	66.3136	0.0259

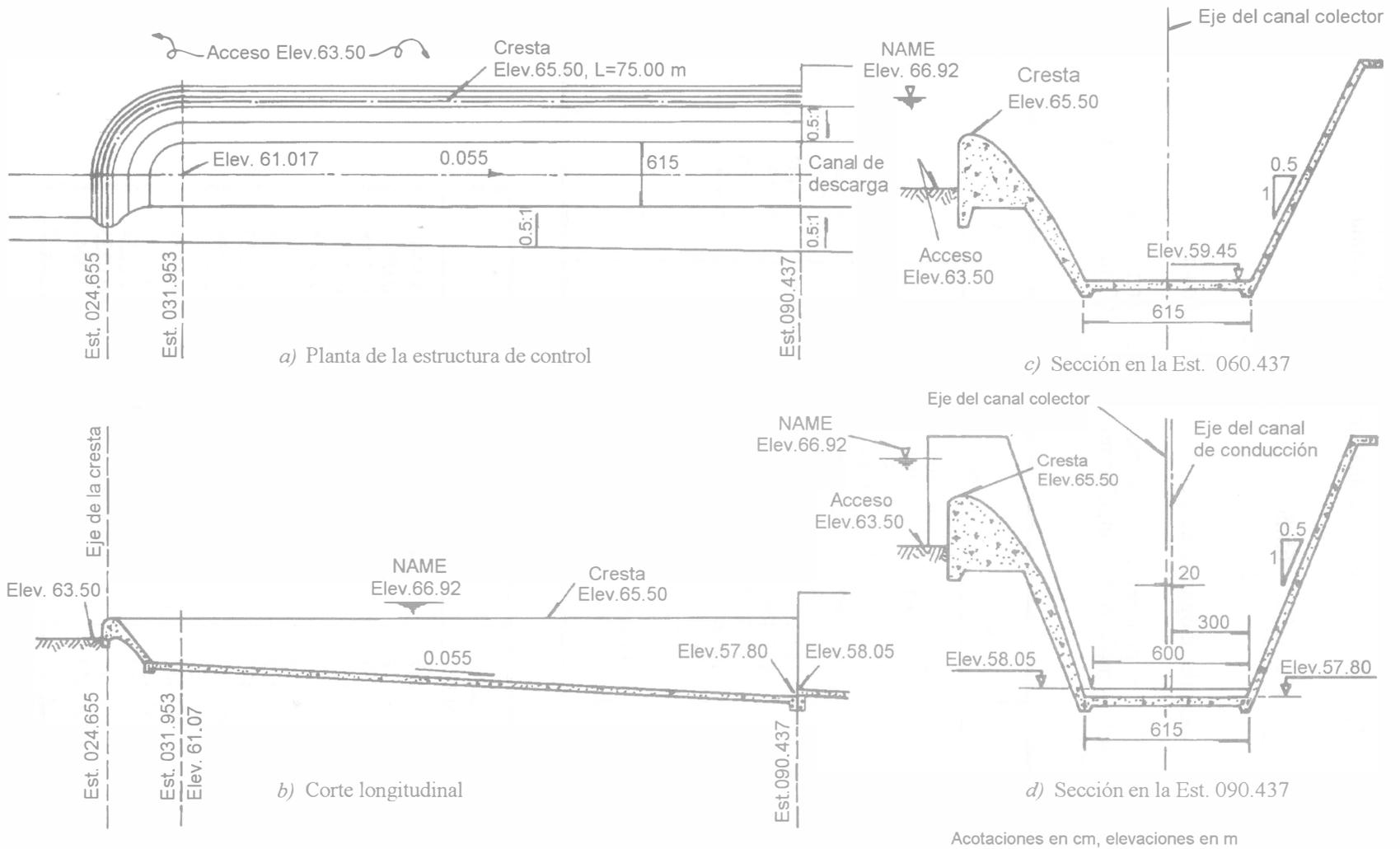


Figura 6.19. Geometría del vertedor de canal lateral del ejemplo 6.4

Se observa también un crecimiento continuo de F en la dirección del flujo, es decir, el perfil se aloja en la región A de la figura 6.2.

Con objeto de economizar espacio, dirigir mejor el flujo en el canal de aproximación al cimacio y eventualmente disminuir excavaciones, es común en México desarrollar la planta del cimacio en su inicio en una parte recta y después curva, como se muestra en la figura 6.19a, siempre conservando la longitud total de la cresta. Esto significa que en la sección inicial del colector el flujo espacialmente variado empieza con un gasto distinto de cero; sin embargo, no se considera necesario realizar modificaciones en los cálculos previamente realizados.

6.3 CANALES DE GASTO DECRECIENTE

6.3.1 Aspectos generales

Un ejemplo tradicional del flujo en canales de gasto decreciente es el vertedor lateral que se construye sobre el bordo de un canal o de un conducto colector o alcantarilla, paralelo al flujo principal (figura 6.20). Se ha usado ampliamente para controlar los niveles del agua en irrigación y en sistemas de canales de drenaje, como un medio de desviar el exceso del gasto a canales de alivio en las obras de protección contra avenidas. Se utiliza con frecuencia para desalojar el gasto excedente al de diseño que se acumula en un canal de conducción por el ingreso del agua de lluvia sobre la superficie o por entradas accidentales en su curso. También se usa en sistemas urbanos de alcantarillado, donde es costumbre desviar el gasto que excede de 6 veces el de la época de estiaje hacia un río o corriente y tratar el resto en plantas de tratamiento. En algunos casos, el vertedor ha caído en desuso por la eficacia de otras estructuras, como los sifones de cebado automático.

Derivaciones laterales como la mostrada en la figura 6.20b se convierten en bifurcaciones de canales y se analizan al final del capítulo de transiciones y curvas.

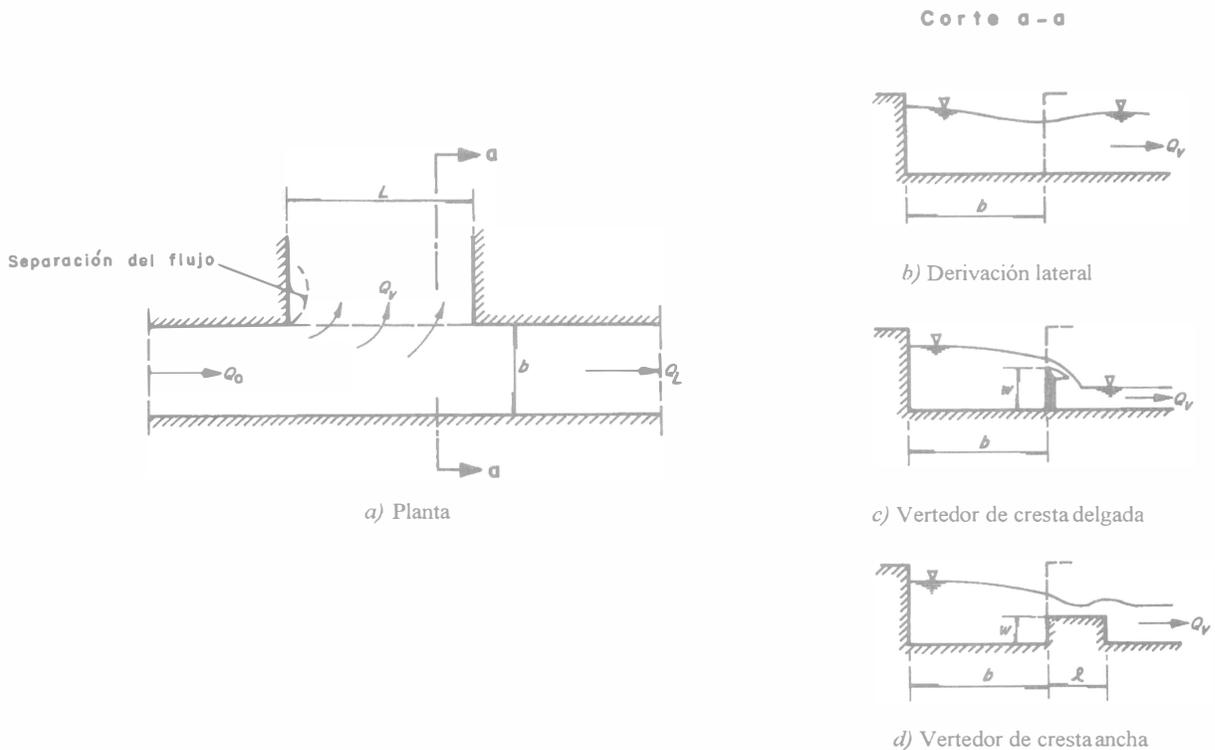
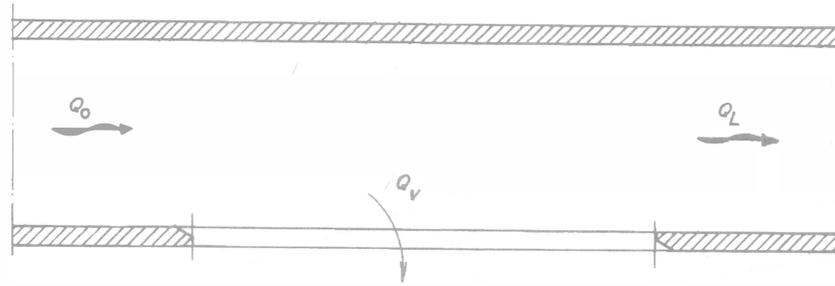
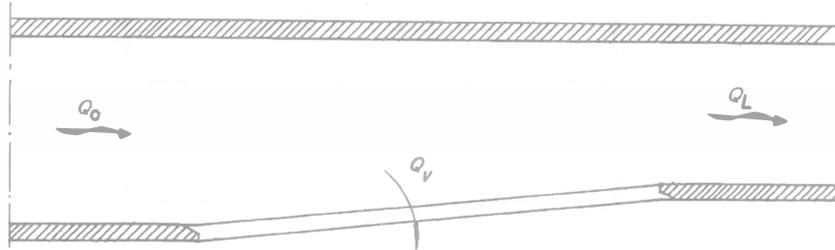


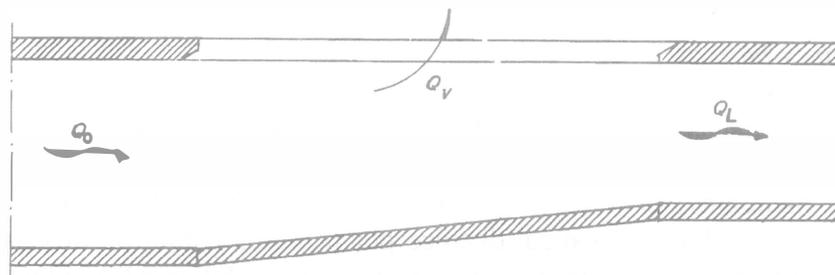
Figura 6.20. Flujo en un canal con descarga lateral



a) Paredes paralelas



b) Vertedor en la pared convergente



c) Vertedor en la pared recta de un canal convergente

Figura 6.21. Disposiciones distintas de un vertedor lateral

En la figura 6.21 se presenta la vista en planta de tres variantes de vertedor lateral, donde puede ocurrir que la totalidad del gasto en el canal se desvíe hacia dicho vertedor. Otro ejemplo del flujo de gasto decreciente lo constituye el desbordamiento desde un canal principal o río hacia un cauce de alivio, o sobre un bordo marginal en un río cuando se produce una avenida extraordinaria que rebasa la capacidad del cauce.

En otros casos, el gasto en el canal puede también decrecer por la existencia de una toma lateral o por una reja en el fondo. En la figura 6.22 se muestra la disposición de una reja en el fondo de un canal para extraer una parte o el total del caudal, así como la conformación del flujo a lo largo de la misma.

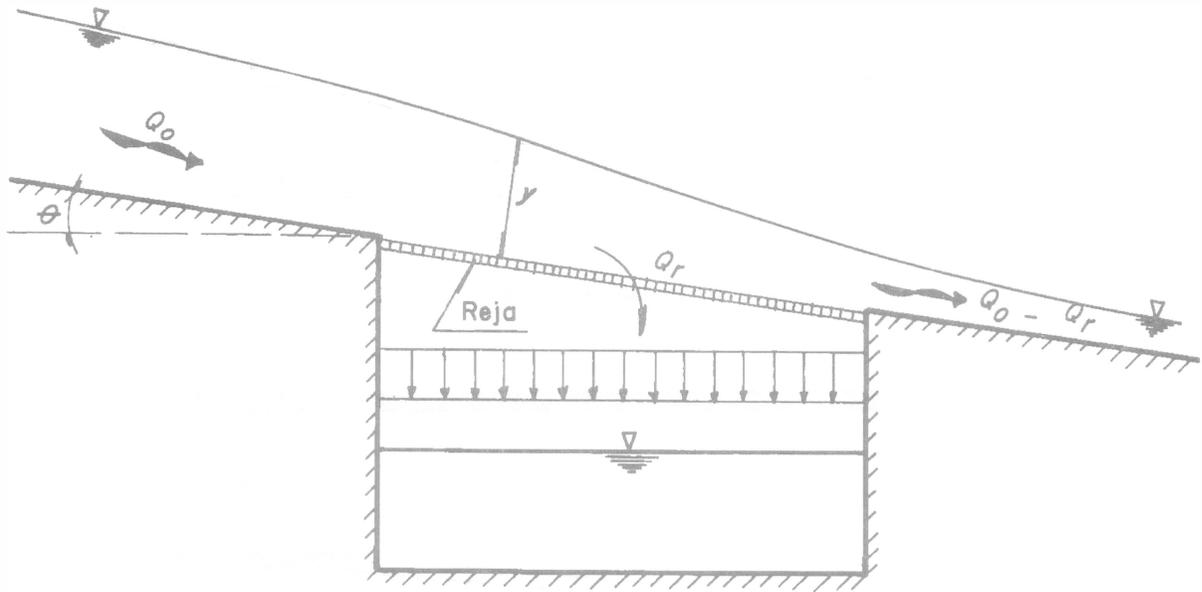


Figura 6.22. Flujo sobre una reja de fondo

6.3.2 Ecuaciones básicas

La ecuación de continuidad es la misma 6.1, excepto que dQ/dx es ahora negativo.

Como antes se mencionó, la ecuación de la energía es la más adecuada para analizar el flujo espacialmente variado donde el caudal decrece por la salida lateral de una parte o del total del gasto. La energía total del flujo en una sección transversal del canal, medida desde un nivel de referencia cualquiera, es

$$H = z + y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2g A^2}$$

donde y es el tirante en la sección perpendicular a la plantilla. Al derivar esta ecuación con respecto a x con Q variable, se obtiene

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \cos \theta + \frac{\alpha}{2g} \left[\frac{2Q}{A^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^3} \frac{dA}{dx} \right]$$

Pero: $dH/dx = -S_f$; $dz/dx = -\text{sen } \theta = -S_0$;

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial A}{\partial x} = T \frac{dy}{dx} + \frac{\partial A}{\partial x}$$

donde T es el ancho de la superficie libre de la sección. Siendo F el número de Froude, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{(1 - F^2) \cos \theta} \quad (6.29a)$$

Para un canal prismático, $\partial A/\partial x = 0$, y cuando el ángulo θ de inclinación de su plantilla es pequeño, $\cos \theta \approx 1$, y la ecuación 6.29a se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - F^2} \quad (6.29b)$$

La ecuación dinámica del flujo espacialmente variado de gasto decreciente se expresa en alguna de las formas 6.29 a o b. La última difiere de la ecuación 6.8 sólo en el coeficiente del tercer término en el numerador. Sin embargo, si se aplica la ecuación del momentum 6.7 al canal de gasto decreciente, con $\delta = 0$ ($\beta = 1$) y la velocidad U del flujo de salida igual a la media V sobre el eje del canal, dicha ecuación coincide con la 6.29b si $\alpha = 1$.

El salto hidráulico para este tipo de flujo se calcula con las ecuaciones 6.16 a 6.18 toda vez que M_L vale cero, pero ahora $\Delta Q = Q_1 - Q_2$.

6.3.3 Perfiles del flujo

Los perfiles del flujo espacialmente variado de gasto decreciente fueron analizados por de Marchi (referencia 9) y por Schmidt (referencia 10). En dicho flujo ocurre que $dQ/dx < 0$ y, en ausencia de fricción, el numerador de la ecuación 6.29a es siempre positivo. El signo de dy/dx es igual al que tiene el denominador, según que F sea menor o mayor de 1.

Esto se presenta en la figura 6.23 donde se muestran los tres tipos principales de perfil del flujo que ocurren en el canal cuando hay desviación hacia un vertedor lateral de longitud L .

Perfiles similares ocurren en el caso que la desviación sea hacia una reja en el fondo.

Las características de los perfiles se explican a continuación.

- a) Subcrítico. El régimen antes y después del flujo espacialmente variado es subcrítico y el tirante y_0 en el inicio es mayor que el crítico. El tirante aumenta después en forma gradual hacia aguas abajo manteniendo el tipo de régimen, para aproximarse asintóticamente al tirante normal correspondiente al gasto Q_L (figura 6.23a). En efecto, siendo $F < 1$, de la ecuación 6.29a, $dy/dx > 0$. El perfil del flujo afecta sólo en la dirección aguas arriba del vertedor, aproximándose asintóticamente al tirante normal asociado a Q_0 mediante un perfil M2.
- b) Supercrítico. El flujo uniforme después del vertedor es supercrítico. El tirante del canal en la sección inicial es igual (perfil 1) o menor (perfil 2) que el crítico para el gasto aguas arriba y disminuye gradualmente hacia aguas abajo, con la presencia de régimen supercrítico en el tramo L . Ambos perfiles se muestran en la figura 6.23b. En efecto, siendo $F > 1$, de la ecuación 6.29a resulta que $dy/dx < 0$.

El perfil 1 ocurre en canales de pendiente pequeña, altura w del vertedor menor que y_c y L suficientemente grande. Se genera también un perfil del tipo M2, aguas arriba del vertedor, que se inicia en y_c para el gasto Q_0 , ya que el régimen es subcrítico.

El perfil 2 ocurre en canales de pendiente supercrítica (donde hay flujo uniforme supercrítico aguas arriba) y tiene influencia sólo hacia aguas abajo. En ambos perfiles el tirante disminuye gradualmente a lo largo del tramo L manteniendo el régimen supercrítico, para después alcanzar el tirante normal que corresponde a Q_L . Esto ocurre de manera gradual en el perfil 2 si se mantiene aguas abajo la pendiente supercrítica. Los perfiles están controlados desde aguas arriba.

- c) Mixto. El flujo aguas arriba es supercrítico y aguas abajo subcrítico. El tirante del canal en la sección inicial es menor que el crítico (perfil 2 de la figura 6.23b), disminuye gradualmente hacia aguas abajo hasta formar un resalto dentro del tramo L y después aumenta gradualmente (figura 6.23c). El perfil es de tipo supercrítico (2) antes del resalto y subcrítico después del mismo, lo que combina los tipos de perfil de la figura 6.23b y de la 6.23a. El primero está controlado desde aguas arriba y el segundo desde aguas abajo.

6.3.4 Integración numérica general

Las soluciones directas de las ecuaciones 6.29 a o b son a veces imposibles, debido a que se desconoce cómo varía Q con x . A esto hay que agregar la variabilidad con que el agua se desvía hacia un vertedor lateral o una reja de fondo. En los casos que se analizan se considera que dicha desviación es en dirección perpendicular al flujo pero es más difícil predecirlo en otros.

La solución numérica puede obtenerse fácilmente si se considera que el decremento ΔQ del gasto en un tramo Δx no produce cambio en la cantidad de movimiento. Esto significa que puede aplicarse la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 de la figura 6.24a. De este modo

$$S_0 \Delta x + y_1 \cos \theta + \alpha \frac{V_1^2}{2g} = y_2 \cos \theta + \alpha \frac{V_2^2}{2g} + \left[\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right] \Delta x$$

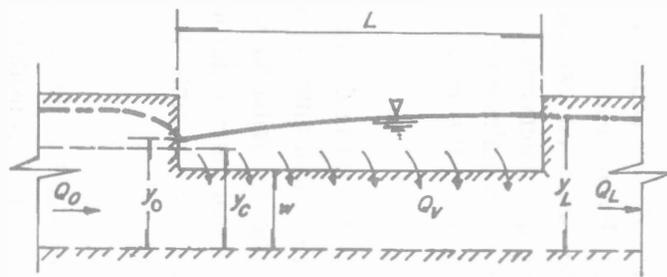
O bien

$$\Delta y \cos \theta = (y_2 - y_1) \cos \theta = -\alpha \left[\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right] + S_0 \Delta x - \left[\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right] \Delta x$$

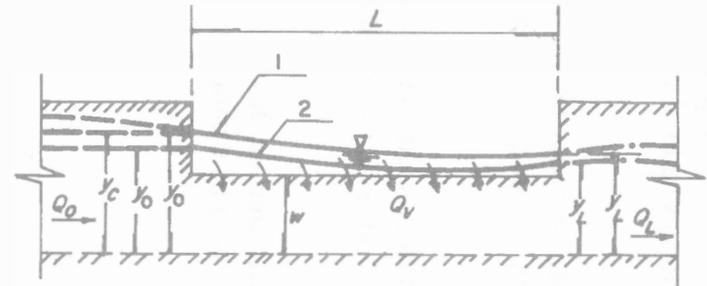
Al sustituir $\Delta y \cos \theta$ en la ecuación 6.23b: $\Delta y' = -\Delta y \cos \theta + S_0 \Delta x$, se obtiene el desnivel de la superficie del agua entre las dos secciones

$$\Delta y' = \alpha \left[\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right] + \left[\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \right] \Delta x \quad (6.30)$$

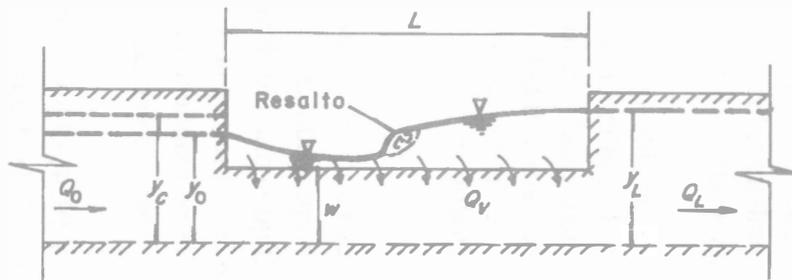
cualquiera que sea la pendiente del canal.



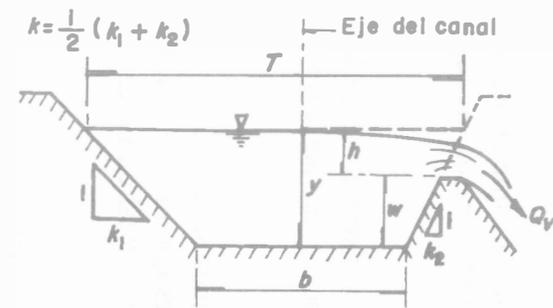
a) Subcrítico



b) Supercrítico



c) Mixto



d) Sección transversal

Figura 6.23. Perfiles de flujo en canales de gasto decreciente

En la ecuación 6.30 la velocidad en cada sección debe calcularse con el gasto que pasa por ella; esto es, $V_1 = Q_1/A_1$, $V_2 = Q_2/A_2$, $Q_2 = Q_1 - \Delta Q$, siendo ΔQ el gasto desviado al exterior del canal en el tramo Δx .

El decremento ΔQ depende de que la desviación se realice a través del vertedor lateral o de la reja de fondo, pero en ambos casos, es función del tirante y del ángulo con que se efectúe la desviación.

Por lo que se refiere a la distribución de la velocidad, ésta varía en la sección transversal del canal y el valor de α puede ser hasta de 1.30, según Schmidt, pero en general se mantiene próximo a 1.0.

En las siguientes secciones se explica la manera de obtener el coeficiente de descarga y los resultados experimentales que intervienen, así como un procedimiento de ajuste para el valor de α en el caso del vertedor lateral en un canal rectangular.

6.3.5 Canal con vertedor lateral

El vertedor lateral en canales rectangulares fue probado experimentalmente por Schaffernak de 1915 a 1918, Engels de 1917 a 1918, Ehrenberger en 1934 (referencia 11) y Coleman y Smith en 1957 (referencia 12), entre otros. El interés general fue determinar la relación entre el gasto que sale del canal, la longitud del vertedor, los tirantes al inicio y final del mismo y el coeficiente de descarga. Sin embargo, los resultados tuvieron poca utilidad debido principalmente al desconocimiento de los intervalos y forma del perfil a los que se aplicaban.

Se ha confirmado que no es posible una solución analítica completa de las ecuaciones que gobiernan el flujo en canales de cualquier sección con vertedor lateral. Es por eso que, aún en tiempos muy recientes, se han usado métodos aproximados que se basan en experimentos realizados dentro de un intervalo limitado de las muchas variables que intervienen. En la mayoría de los casos, el uso de dichos métodos ha significado errores sustanciales en el cálculo del gasto vertido. Otros métodos se han desarrollado para ciertos casos, a fin de dar mayor seguridad en los cálculos.

Cuando el vertedor lateral es recto, el tirante sobre el eje del canal varía con la distancia a lo largo de dicho eje. Se ha comprobado que con régimen subcrítico en el canal antes y después del vertedor, el perfil del flujo siguiendo dicho eje asciende del lado aguas arriba hacia aguas abajo, como se muestra en la figura 6.23a. Cuando el régimen en el canal antes y después del vertedor es supercrítico, éste se mantiene en todo el tramo del vertedor y el tirante desciende de aguas arriba hacia aguas abajo, como se observa en la figura 6.23b.

De Marchi (referencia 9) en 1934, obtuvo por primera vez la solución analítica de la ecuación 6.29b para determinar el perfil del flujo en canales rectangulares. Para ello consideró que el canal era de pendiente pequeña y el vertedor no demasiado largo, lo cual significó igualar dicha pendiente con la de fricción, es decir, $S_0 = S_f$. Si se observa el desarrollo de la ecuación

mencionada, esto equivale a considerar constante la energía específica en el tramo de canal donde se aloja el vertedor.

Los perfiles del flujo obtenidos con la solución de de Marchi han sido plenamente comprobados experimentalmente cuando se sustituye el valor adecuado del coeficiente de vertido. Esto mismo se ha comprobado con soluciones para canales circulares y en forma de U , al grado que se acepta que los perfiles analíticos del flujo son más precisos que los experimentales, por las dificultades en la medición.

Al agregar nuevos conocimientos en el comportamiento de los perfiles del flujo y el coeficiente de vertido, es válido aceptar que el flujo en un canal de gasto decreciente y cualquier forma de sección se analiza con base en las siguientes consideraciones:

1. El flujo en el canal es aproximadamente bidimensional y la distribución de la presión es casi hidrostática, si se desprecia la curvatura e irregularidades de la superficie libre.
2. La pendiente del canal es pequeña ($\cos \theta = 1$) e igual a la pendiente de fricción ($S_0 = S_f$). Por tanto, la energía específica E en el tramo del canal que contiene al vertedor y el coeficiente α permanecen constantes. Es decir, de la ecuación 3.1 de energía específica el gasto en cualquier sección vale

$$Q = A \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E - y)} \quad (6.31)$$

donde A es el área hidráulica en la sección a la distancia x y función del tirante y en la misma, como se muestra en la figura 6.24.

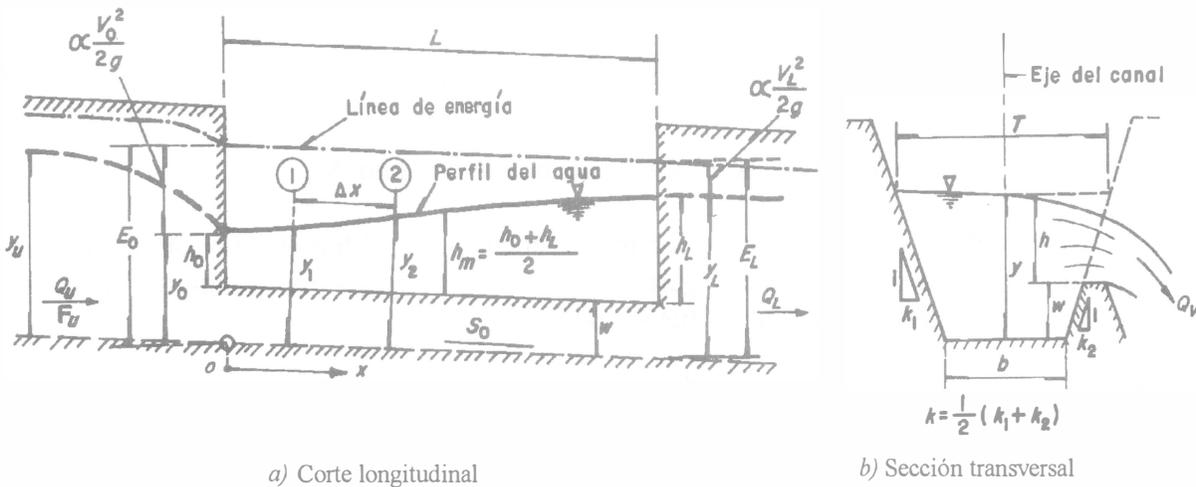


Figura 6.24. Flujo subcrítico en un canal con vertedor lateral

3. El tirante y varía sólo con la distancia x sobre el eje del canal, ya que se desprecia la variación en la dirección lateral, debido al comportamiento extremadamente complejo en esa dirección. El flujo sobre el vertedor lateral forma un ángulo próximo a $\pi/2$ con la cresta y se asume la ecuación convencional del gasto por unidad de longitud

$$-\frac{dQ}{dx} = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} (y - w)^{3/2} \quad (6.32)$$

donde w es la altura de la cresta respecto del fondo del canal y μ es el coeficiente de descarga (adimensional) que permanece constante, ya que depende de las condiciones del flujo en la sección del canal donde inicia el vertedor.

El gasto total desviado por un vertedor lateral de longitud L se obtiene al integrar la ecuación anterior en la forma

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \int_0^L (y - w)^{3/2} dx = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} L \bar{h}^{3/2} \quad (6.33)$$

donde \bar{h} es la carga media en la distancia L y se define por la expresión

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L (y - w) dx \approx \frac{1}{L} \sum (y_m - w) \Delta x \quad (6.34)$$

ya que y varía con x y debe conocerse previamente; y_m es el tirante medio en el tramo Δx .

Cuando el cálculo del perfil del flujo se efectúa por el método numérico de integración, la ecuación 6.32 se expresa en diferencias finitas y el decremento del gasto entre las dos secciones contiguas 1 y 2 de la figura 6.24 es

$$-\Delta Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} (y_m - w)^{3/2} \Delta x \quad (6.35)$$

donde $y_m = 0.5 (y_1 + y_2)$ es el tirante medio en el tramo Δx .

4. La longitud del vertedor no debe ser muy grande. Según diferentes investigadores, se debe cumplir que la proporción del gasto total vertido al gasto en el canal de aproximación (antes del vertedor) sea igual o menor de 0.75.

Con las ecuaciones 6.31 y 6.32, el numerador y denominador de la ecuación 6.29b respectivamente, resultan

$$-\frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} = \frac{\alpha A \sqrt{2g/\alpha} \sqrt{E-y}}{gA^2} \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} (y-w)^{3/2} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\alpha}}{A} \mu \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}$$

$$1 - F^2 = 1 - \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} = 1 - \frac{A^2 (2g)(E-y)T}{gA^3} = 1 - \frac{2T}{A} (E-y) = \frac{A - 2T(E-y)}{A}$$

Por tanto, dicha ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\alpha} \mu \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}}{A - 2T(E-y)} \quad (6.36)$$

y es válida para régimen subcrítico y supercrítico. La misma ecuación se obtiene al derivar la ecuación 6.31, considerando E constante, y sustituir en la ecuación 6.32. La solución directa es posible en canales trapeciales (incluida la rectangular y la triangular); la numérica es factible en cualquier sección.

a) Canales trapeciales

Sotelo, en 1997, obtuvo la solución analítica de la ecuación 6.36 en canales trapeciales de taludes desiguales, k_1 y k_2 , de manera que con el talud medio $k = 0.5 (k_1 + k_2)$; $A = by + ky^2$ y $T = b + 2ky$. La solución cubre también los casos de canales rectangulares ($k = 0$) (solución de de Marchi) y de canales triangulares ($b = 0$). Sustituyendo A y T , el denominador de la ecuación 6.36 resulta

$$\begin{aligned} A - 2T(E-y) &= by + ky^2 - 2(b + 2ky)(E-y) = by + ky^2 - 2bE + 2by - 4kEy + 4ky^2 \\ A - 2T(E-y) &= b(3y - 2E) + k(5y^2 - 4Ey) \end{aligned}$$

de manera que dicha ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b(3y - 2E) + k(5y^2 - 4Ey)}{\frac{4}{3} \sqrt{\alpha} \mu \sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} \quad (6.37a)$$

De este modo

$$x = \frac{3}{4} \frac{b}{\sqrt{\alpha} \mu} \int \frac{(3y - 2E) dy}{\sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} + \frac{3k}{4\sqrt{\alpha} \mu} \int \frac{(5y^2 - 4Ey) dy}{\sqrt{E-y} (y-w)^{3/2}} + \text{constante} \quad (6.37b)$$

La solución de la primera integral es válida para el canal rectangular cuando $k = 0$. Fue obtenida por de Marchi en 1934 y es

$$I_1 = \frac{3}{2} \frac{b}{\sqrt{\alpha} \mu} \left[\frac{2E - 3w}{E - w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} - 3 \arcsen \sqrt{\frac{E-y}{E-w}} \right]$$

El desarrollo de la segunda integral resulta

$$I_2 = \frac{3k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \int \frac{(5y^2 - 4Ey)dy}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}(y-w)} = \frac{15k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left[\int \frac{y dy}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \int \frac{1 + [w/(y-w)]}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} dy \right]$$

donde se ha sustituido la división

$$\frac{5y^2 - 4Ey}{y-w} = 5y + (5w - 4E) + \frac{(5w - 4E)w}{y-w} = 5 \left[y + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \left(1 + \frac{w}{y-w} \right) \right]$$

La primera integral que aparece en I_2 se desarrolla como sigue

$$I_3 = \int \frac{y dy}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{Ey - Ew - y^2 + wy}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{-y^2 + (E+w)y - Ew}}$$

Haciendo: $Y = -y^2 + (E+w)y - Ew$; $a = -1$; $b = E+w$; $c = -Ew$; $q = (E+w)^2 - 4Ew = (E-w)^2$, la solución es

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{a} - \frac{b}{2a} \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsen \frac{(-2ay - b)}{\sqrt{q}}$$

Con $\sqrt{Y} = \sqrt{E-y}\sqrt{y-w} = (y-w)\sqrt{(E-y)/(y-w)}$, resulta

$$I_3 = -(y-w) \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} + \frac{E+w}{2} \arcsen \left(\frac{2y - (E+w)}{E-w} \right)$$

La segunda integral que aparece en I_2 se divide en dos partes

$$\int \frac{1 + [w/(y-w)]}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} dy = \int \frac{dy}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} + \int \frac{w/(y-w)}{\sqrt{E-y}\sqrt{y-w}} dy$$

Siguiendo el mismo desarrollo de I_3 , la primera parte es

$$I_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} = \text{arc sen} \left(\frac{2y - (E+w)}{E-w} \right)$$

y la segunda parte resulta

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{w/(y-w)}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} dy = \frac{w}{E-w} \int \frac{1}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} \frac{(E-w)+y-y}{(y-w)} dy \\ &= \frac{w}{E-w} \int \frac{1}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} \frac{y-w+E-y}{(y-w)} dy \end{aligned}$$

O bien

$$I_5 = -\frac{w}{E-w} \int \frac{y-w}{\sqrt{E-y} \sqrt{y-w}} \frac{(y-w)(-dy) - (E-y)dy}{(y-w)^2} = -\frac{w}{E-w} \int \left(\frac{E-y}{y-w} \right)^{-\frac{1}{2}} d \left(\frac{E-y}{y-w} \right)$$

cuya solución es

$$I_5 = -\frac{2w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}}$$

Con los resultados de I_3 , I_4 e I_5 , la I_2 se convierte en

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{15k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left\{ -(y-w) \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} + \frac{E+w}{2} \text{arc sen} \left(\frac{2y - (E+w)}{E-w} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(w - \frac{4E}{5} \right) \left[\text{arc sen} \left(\frac{2y - (E+w)}{E-w} \right) - \frac{2w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} \right] \right\} \end{aligned}$$

O bien

$$I_2 = \frac{15k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left\{ \left[\frac{E+w}{2} + w - \frac{4E}{5} \right] \text{arc sen} \left[\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right] - \left[\left(w - \frac{4E}{5} \right) \left[\frac{2w}{E-w} \right] + (y-w) \right] \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} \right\}$$

Pero

$$\frac{E+w}{2} + w - \frac{4E}{5} = \frac{5E+5w+10w-8E}{10} = \frac{15w-3E}{10} = \frac{3}{10} (5w-E)$$

$$\begin{aligned} \left(w - \frac{4E}{5} \right) \frac{2w}{E-w} + y - w &= \frac{2w^2 - \frac{8}{5}wE + (E-w)y - wE + w^2}{E-w} = \frac{3w^2 - \frac{13}{5}wE + (E-w)y}{E-w} \\ &= - \left[\frac{(13E-15w)w}{5(E-w)} - y \right] \end{aligned}$$

Por tanto

$$I_2 = \frac{9k}{8\sqrt{\alpha}\mu} (5w-E) \text{arc sen} \left[\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right] + \frac{3k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left[\frac{(13E-15w)w}{E-w} - 5y \right] \sqrt{\frac{E-y}{y-w}}$$

Sustituyendo los resultados de I_1 e I_2 en la ecuación 6.37b, se obtiene

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha}\mu} \left[\frac{2E-3w}{E-w} \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} - 3 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{E-y}{E-w}} \right] + \frac{3k}{4\sqrt{\alpha}\mu} \left[\left(\frac{(13E-15w)w}{E-w} - 5y \right) \sqrt{\frac{E-y}{y-w}} + \frac{3}{2} (5w-E) \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{2y-(E+w)}{E-w} \right) \right] + \text{const.} \quad (6.38)$$

Los términos dentro de los paréntesis rectangulares se pueden adimensionalizar dividiéndolos entre E , para definirlos como las funciones:

$$\phi_M \left(\frac{y}{E} \right) = \frac{2-3 \left(\frac{w}{E} \right)}{1-\frac{w}{E}} \sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{\frac{y}{E}-\frac{w}{E}}} - 3 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{1-\frac{w}{E}}} \quad (6.39)$$

$$\phi_S \left(\frac{y}{E} \right) = \left[\frac{\left(\frac{13-15 \frac{w}{E}}{1-\frac{w}{E}} \right) \frac{w}{E} - 5 \frac{y}{E}}{\sqrt{\frac{1-\frac{y}{E}}{\frac{y}{E}-\frac{w}{E}}} + \frac{3}{2} \left(5 \frac{w}{E} - 1 \right) \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{2 \frac{y}{E} - \left(1 + \frac{w}{E} \right)}{1-\frac{w}{E}} \right)} \right] \quad (6.40)$$

donde $\phi_M(y/E)$ es la misma función de de Marchi y $\phi_S(y/E)$ la de Sotelo. La primera función se representa con el conjunto de curvas mostradas en la figura 6.25 y la segunda con el conjunto de la figura 6.26; en ambas, cada curva se identifica con un valor de w/E .

Con estas funciones, la ecuación 6.38 se convierte en

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha}\mu} \phi_M \left(\frac{y}{E} \right) + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha}\mu} \phi_S \left(\frac{y}{E} \right) + \text{const.}$$

donde la constante de integración se obtiene al considerar que $y = y_0$ cuando $x = 0$. La solución final resulta

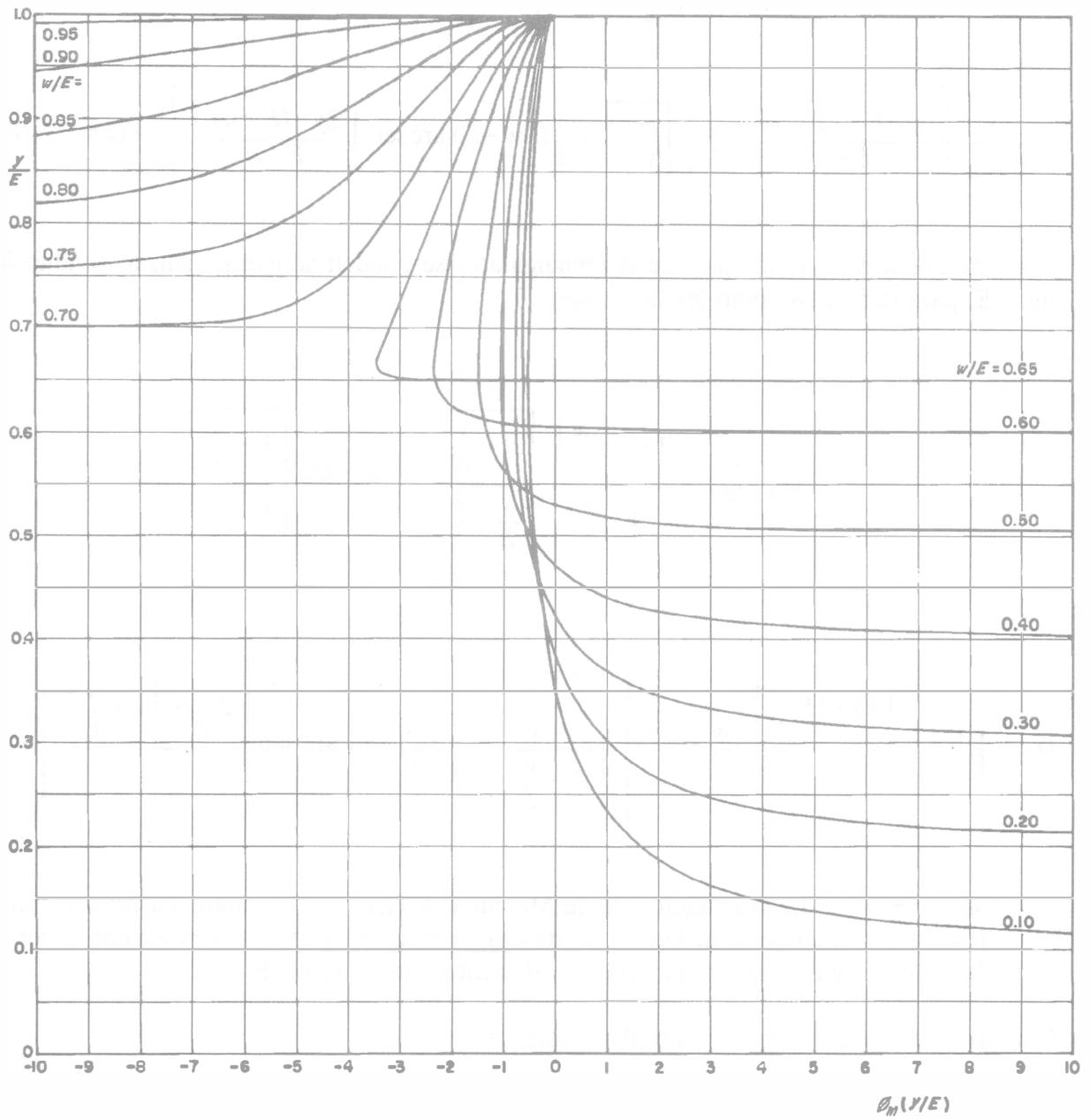


Figura 6.25. Función $\phi_M (y/E)$ de de Marchi (1934) para el canal rectangular con vertedor lateral

$$x = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha} \mu} \left[\phi_M \left(\frac{y}{E} \right) - \phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) \right] + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha} \mu} \left[\phi_S \left(\frac{y}{E} \right) - \phi_S \left(\frac{y_0}{E} \right) \right] \quad (6.41)$$

con la cual se calcula el perfil del flujo sobre el eje del canal, sea el régimen subcrítico o supercrítico.

La longitud del vertedor se obtiene de la ecuación anterior con la condición de que $y = y_L$ para $x = L$ y su valor es

$$L = \frac{3b}{2\sqrt{\alpha} \mu} \left[\phi_M \left(\frac{y_L}{E} \right) - \phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) \right] + \frac{3kE}{4\sqrt{\alpha} \mu} \left[\phi_S \left(\frac{y_L}{E} \right) - \phi_S \left(\frac{y_0}{E} \right) \right] \quad (6.42)$$

Para obtener las ecuaciones equivalentes a la 6.41 y 6.42 en canales rectangulares o triangulares, es suficiente hacer $k = 0$ o $b = 0$, respectivamente, en dichas ecuaciones.

En los problemas de la práctica el canal mantiene o no la misma sección, pendiente y rugosidad en toda su longitud. Se conoce o se calcula el tirante normal para el gasto que habrá en los tramos del canal antes y después del vertedor, así como: la energía específica en flujo uniforme, las condiciones críticas y_c y E_c correspondientes al gasto en cada tramo, y el tipo de régimen. El gasto vertido es $Q_v = Q_L - Q_u$ (ver figura 6.24).

1. Cuando el flujo uniforme es subcrítico antes y después del vertedor, se puede presentar alguno de los siguientes casos.

a) $E_L > E_{cu}$. La energía específica que se mantiene constante en el tramo del vertedor es $E = E_L$, correspondiente al flujo uniforme aguas abajo, y se forma el perfil del flujo que se muestra en la figura 6.23a. De la ecuación 6.31 se obtiene y_0 el cual debe ser menor que el crítico para Q_0 en dicha sección. La longitud necesaria del vertedor se determina de la ecuación 6.42.

b) $E_L < E_{cu}$. No existe solución para el tirante y_0 , ya que el gasto que se pretende extraer por el vertedor es muy grande. El gasto en el canal antes del vertedor debe ser menor que el dado por la ecuación 6.31, para $E = E_L$ y $y = y_{cu}$, es decir

$$Q_0 < A \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E_L - y_{cu})}$$

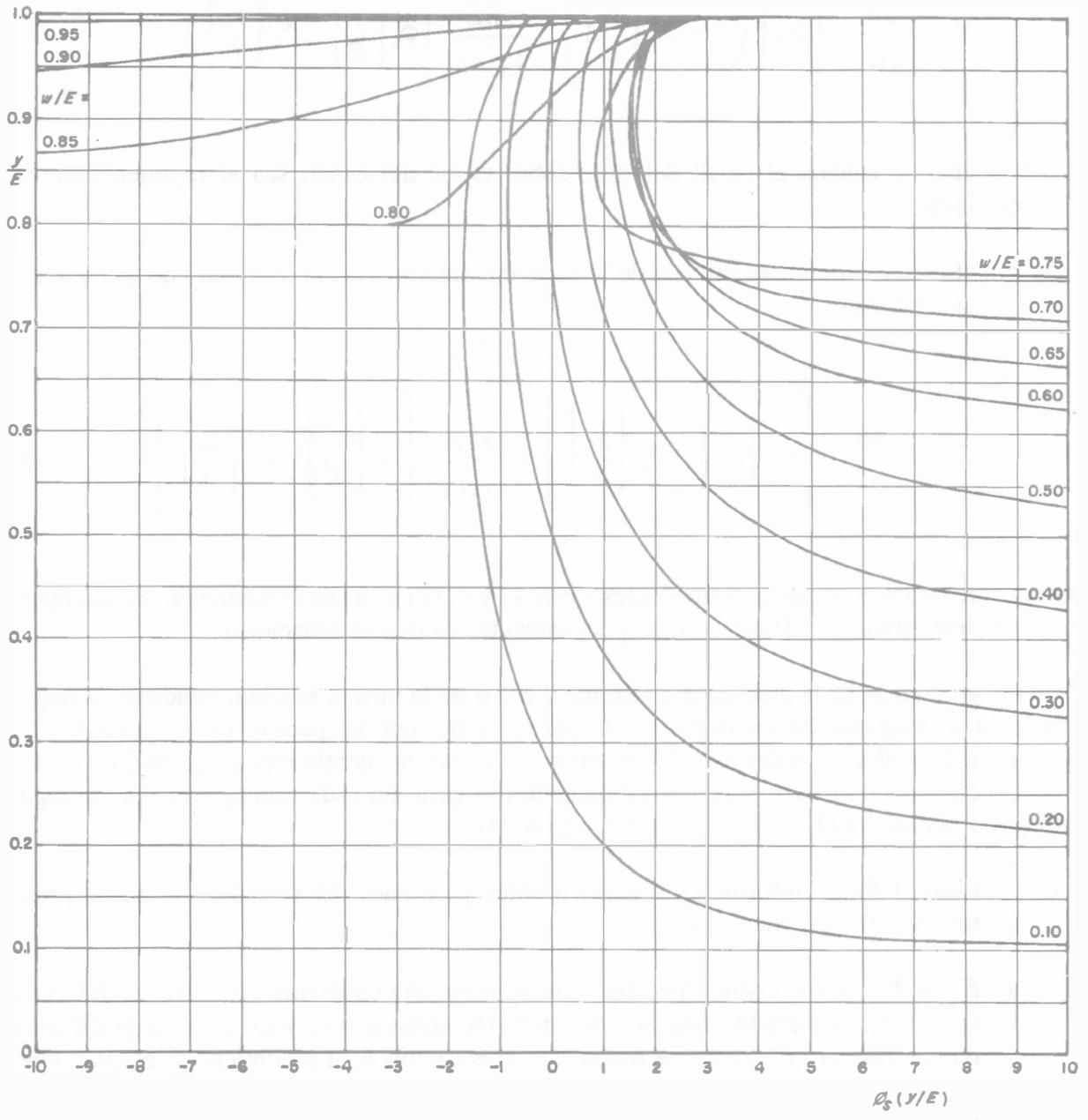


Figura 6.26. Función $\phi_s(y/E)$ de Sotelo para el canal trapecial con vertedor lateral

De acuerdo con los resultados experimentales, Q_0 debe alcanzar cuando más un valor que produzca un número de Froude al inicio del vertedor tal que

$$F_0 = \frac{Q_0 / A_0}{\sqrt{g A_0 / \alpha T_0}} \leq 0.8$$

2. Cuando el flujo uniforme antes del vertedor es en régimen subcrítico, pero después del mismo es supercrítico, la energía específica E_L del último debe ser mayor o igual que la mínima E_{cu} del primero. Esta última es la que se mantiene constante ($E = E_{cu}$) en el tramo en que se aloja el vertedor y se forma el perfil 1 del flujo mostrado en la figura 6.23b, el cual se inicia con el tirante $y_0 = y_{cu}$ y termina con $y = y_L$, calculado de la ecuación 6.31 con $Q = Q_L$. Después, el tirante varía hasta adaptarse al tirante normal aguas abajo.
3. Cuando el flujo uniforme es en régimen supercrítico antes y después del vertedor, E_u es la energía específica E que se mantiene constante en el tramo intermedio y se forma el perfil 2 del flujo, mostrado en la figura 6.23b. El tirante normal aguas arriba del vertedor es y_0 y de la ecuación 6.31 se obtiene y_L , el cual después varía hasta ajustarse al valor del tirante normal aguas abajo.
4. El perfil mixto de la figura 6.23c es poco frecuente en la práctica. Ocurre cuando hay régimen supercrítico con energía específica E_u antes del vertedor y subcrítico con energía específica E_L después del mismo. La primera es la que se mantiene constante en la parte supercrítica del perfil y la segunda constante en la parte subcrítica, existiendo un salto hidráulico de transición entre ambas.

En cualquiera de los casos, cuando se conocen la longitud L del vertedor y Q_0 o Q_L , se desconocen y_0 y Q_L o y_L y Q_L . Entonces se iteran valores de y_0 o de y_L con la ecuación 6.42, de manera que se satisfaga el valor de L . Conocido y_0 o y_L , de la ecuación 6.31 se calcula Q_0 o Q_L y $Q_v = Q_0 - Q_L$.

Cuando no se disponía de procedimientos de cálculo del perfil del flujo en el tramo del canal en que se aloja el vertedor, algunos autores consideraron suficiente determinar la carga media \bar{h} sobre el vertedor con el promedio aritmético de la que había en los dos extremos, es decir

$$\bar{h} = 0.5 (h_0 + h_L) = 0.5 (y_0 + y_L) - w$$

Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que esto suele ser impreciso.

b) Canales rectangulares

Existen resultados experimentales del coeficiente μ de descarga sólo en canales rectangulares y son los que se presentan a continuación.

Zschiesche, en 1954, (referencia 13) encontró los valores experimentales siguientes:

$$\mu = 0.6976 \text{ con cresta de pared delgada;}$$

$$\mu = 0.7365 \text{ con cresta redondeada;}$$

$$\mu = 0.5581 \text{ con cresta de forma trapecial y estrechamiento en el canal aguas abajo;}$$

todos válidos para $\bar{h} = 0.5 (h_0 + h_L)$ en canales rectangulares.

Los experimentos de Frazer (referencia 14), en 1957 indican que $\mu = 0.7665$ sólo cuando el número de Froude en el canal rectangular es pequeño y que más bien varía según la ecuación

$$\mu = 0.7759 - 0.3384 \frac{y_c}{y} - 0.0262 \frac{y_c}{L} \quad (6.43)$$

donde L es la longitud del vertedor y y el tirante local.

En épocas más recientes otros autores han usado ya las soluciones directas. Utilizando $\mu = 0.625$ en la solución de de Marchi en canales rectangulares (ecuación 6.42 con $k = 0$), Ackers en 1957 (referencia 15) determinó experimentalmente que la longitud obtenida debe incrementarse multiplicándola por el factor de corrección

$$\kappa = \frac{3.1}{2.8 - F_0} \quad (6.44)$$

donde F_0 es el número de Froude en la sección al inicio del vertedor, y debe aplicarse cuando el flujo es en régimen subcrítico.

En el caso de vertedores laterales y del perfil 1 de flujo supercrítico en el canal mostrado en la figura 6.23b, se expone el método de análisis propuesto por Ackers en 1957 (referencia 15). Un esquema de las características del flujo supercrítico se presenta en la figura 6.27 y se puede demostrar que ocurre cuando la relación $w/H_0 < 0.6$.

Ackers obtuvo una ecuación general para el cálculo de la longitud del vertedor mediante la ecuación de energía, con la consideración de distribución de la velocidad en el canal y el auxilio de la ecuación de descarga de vertedores. Dicha ecuación, en su forma general, es

$$L = 2.03 b \left\{ 2 \sqrt{2} \left[\sqrt{k-0.4} \left(1 - 0.4 \frac{w}{H_0} \right) + 0.31 \frac{w}{H_0} - 0.948 \arccos \sqrt{\frac{0.4}{k}} + 0.065 \right] \right\} \quad (6.45)$$

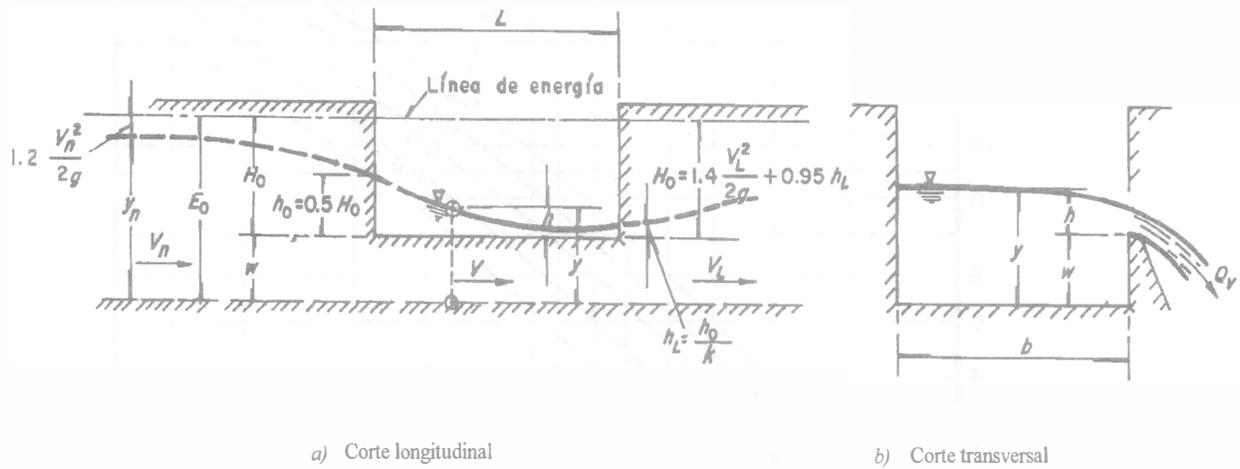


Figura 6.27. Flujo supercrítico en un canal rectangular con vertedor lateral, según Ackers, (1957)

donde

- L longitud del vertedor en m
- b ancho del canal en m
- k h_0/h_L
- h_0 carga sobre el vertedor en el extremo aguas arriba en m
- h_L carga sobre el vertedor en el extremo aguas abajo en m
- w altura de la cresta del vertedor desde la plantilla del canal en m
- H_0 altura de la energía del flujo, medida a partir de la cresta del vertedor, en m.

En la figura 6.28 se muestra la representación gráfica adimensional de la ecuación 6.45, relacionando k con L/b a través del parámetro w/H_0 .

Utilizando diferentes valores de k , la ecuación 6.45 se simplifica a expresiones más sencillas, algunas de las cuales se presentan en la tabla 6.7.

Para el cálculo de la energía específica del flujo aguas arriba del vertedor, la carga de velocidad se determina como $\alpha V_n^2/2g$, donde α es el coeficiente de corrección por distribución de la velocidad que Ackers determinó experimentalmente de valor 1.2. Por tanto, la altura de la energía referida a la cresta del vertedor es

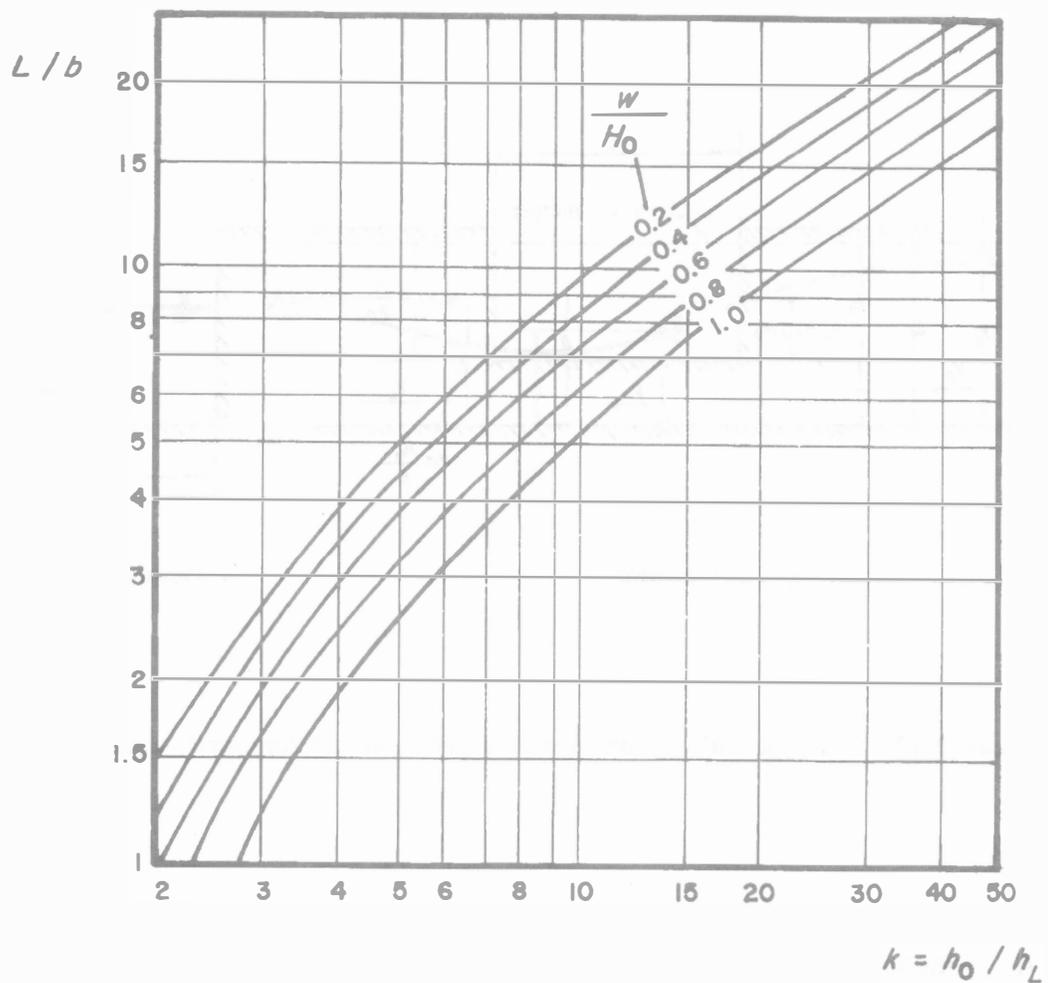


Figura 6.28. Representación gráfica de la ecuación 6.45 para canales rectangulares, según Ackers (1957)

$$H_0 = \alpha' (y - w) + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (6.46)$$

donde α' es un coeficiente de corrección a la carga de presión.

Tabla 6.7. Expresiones simplificadas de la ecuación 6.45, según Ackers (1957)

k	Ecuación para la longitud del vertedor
5	$L = 2.03 b (2.81 - 1.55 w/H_0)$
7	$L = 2.03 b (3.90 - 2.03 w/H_0)$
10	$L = 2.03 b (5.28 - 2.63 w/H_0)$
15	$L = 2.03 b (7.23 - 3.45 w/H_0)$
20	$L = 2.03 b (8.87 - 4.13 w/H_0)$

Por otra parte, Ackers obtuvo también que la carga sobre la cresta al inicio del vertedor debe ser $h_0 = 0.5 H_0$, $\alpha' = 1$ y al final $h_L = H_0/2k$; para el extremo aguas abajo $\alpha = 1.4$ y $\alpha' = 0.95$.

En lo relativo al cálculo del coeficiente α se presenta el método propuesto por Schmidt (referencia 10) en 1957, quien realizó experimentos en vertedores laterales y determinó que $\mu = 0.95 \mu_0$, cuando $\bar{h} = 0.5 (h_0 + h_L)$ es la carga media sobre el vertedor, siendo μ_0 el coeficiente de descarga para un vertedor recto de la misma longitud que el real y flujo perpendicular a la cresta.

Para calcular la longitud L necesaria del vertedor que desvía un gasto Q_v dado, Schmidt también utilizó la ecuación de energía entre la sección inicial y final del vertedor (figura 6.24a) como sigue

$$S_0 L + y_0 + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = y_L + \alpha_L \frac{V_L^2}{2g} + S_f L$$

Schmidt experimentó en canales rectangulares donde $S_0 \approx S_f$; con excepción del caso límite $Q_L = 0$, encontró que α_L es un poco mayor que α_0 . Es suficientemente aproximado considerar que $\alpha_0 = \alpha_L = \alpha$, por tanto se obtiene

$$y_0 = y_L - \alpha \left[\frac{V_0^2 - V_L^2}{2g} \right]$$

o bien, con $V_0 = Q_0/b y_0$, $E_L = y_L + \alpha V_L^2/2g$, resulta

$$y_0^3 - E_L y_0^2 + \alpha \frac{Q_0^2}{2g b^2} = 0 \quad (6.47)$$

La ecuación 6.47 permite calcular y_0 cuando se conocen el gasto inicial, la energía específica E_L al final del vertedor y el ancho del canal. Con ellos se determina $h_0 = y_0 - w$ y también \bar{h} .

En la ecuación 6.47 se debe conocer el valor de α . Para iniciar los cálculos, Schmidt propone como valor inicial $\alpha_i = 1.1$, que debe corregirse mediante un coeficiente n de manera que $\alpha_{i+1} = n \alpha_i$ depende de la relación $\bar{h}/(h + w)$ como se indica en la figura 6.29, debiendo repetirse el cálculo de y_0 hasta que los valores inicial y final de α coincidan. El coeficiente n no debe confundirse con el de Manning. La longitud L del vertedor resulta de la ecuación 6.33, utilizando $\bar{h} = 0.5(h_0 + h_L)$.

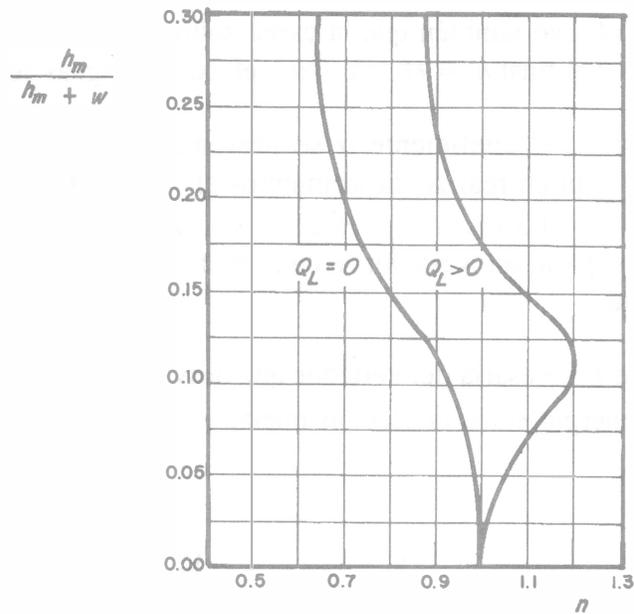


Figura 6.29. Coeficiente n para el cálculo de α en la ecuación 6.47, según Schmidt (1957)

El método de cálculo antes expuesto es válido hasta números de Froude $F_0 = V_0 / \sqrt{g y_0} = 0.75$. Si $F_0 > 0.75$ se presenta un cambio de régimen al principio del vertedor y un salto hidráulico a lo largo del mismo, como en la figura 6.23c. El comportamiento en este caso es muy complicado, pero se puede señalar que la eficacia del vertido, como función de la carga, disminuye bastante y el gasto desviado poco aumenta con la longitud.

Subramanya y Awasthy, en 1972, (referencia 16) demostraron que al usar la solución de de Marchi para un canal rectangular, μ es función principalmente del número de Froude F_0 del flujo al inicio del vertedor. Para el flujo subcrítico ellos determinaron experimentalmente que $\alpha \approx 1.04$ en la sección de inicio del vertedor. También que μ no depende de la proporción L/b y que se ajusta a la ecuación

$$\mu = 0.611 \sqrt{1 - \frac{3F_0^2}{F_0^2 + 2}} \quad (6.48)$$

hasta el valor $F_0 \leq 0.8$. Para el flujo supercrítico, la expresión cambia a

$$\mu = 0.36 + 0.08 F_0 \quad (6.49)$$

cuando $F_0 \geq 1.6$.

El coeficiente μ de un vertedor de altura w finita es prácticamente el mismo que si $w = 0$.

Utilizando también la solución de de Marchi, pruebas en modelo con vertedores laterales de cresta delgada en canales rectangulares fueron realizadas por Ranga Raju y coautores (referencia 17), en 1979, y los resultados de la dependencia de μ con el número de Froude F_0 del flujo al inicio del vertedor se presentan en la figura 6.30a. El ajuste de los puntos experimentales se obtuvo a través de la ecuación

$$\mu = 0.81 - 0.6 F_0 \quad (6.50)$$

válida para $F_0 < 0.5$ y cantos redondeados en los extremos del vertedor. Cuando éste último no ocurre, se producen contracciones laterales que incrementan la longitud en sólo 0.05 m. Los autores recomiendan que $L \leq b$, para su intervalo experimental.

Los mismos autores probaron vertedores de cresta ancha con las mismas condiciones geométricas e hidráulicas y encontraron que el coeficiente μ de los de cresta delgada debe reducirse por el factor K dependiente del parámetro $(y_0 - w)/l$ para obtener el de cresta ancha, donde l es el espesor de la cresta (figura 6.20d). Es decir

$$\mu = K (0.81 - 0.6 F_0) \quad (6.51)$$

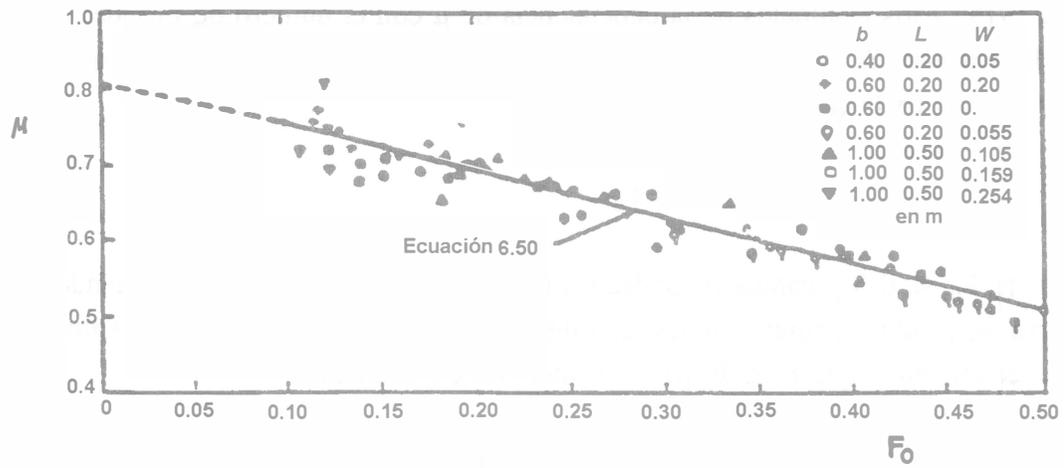
válida para $F_0 < 0.5$. El factor K se obtiene de la figura 6.30b o bien de la ecuación

$$K = 0.8 + 0.1 \left(\frac{y_0 - w}{l} \right) \quad (6.52)$$

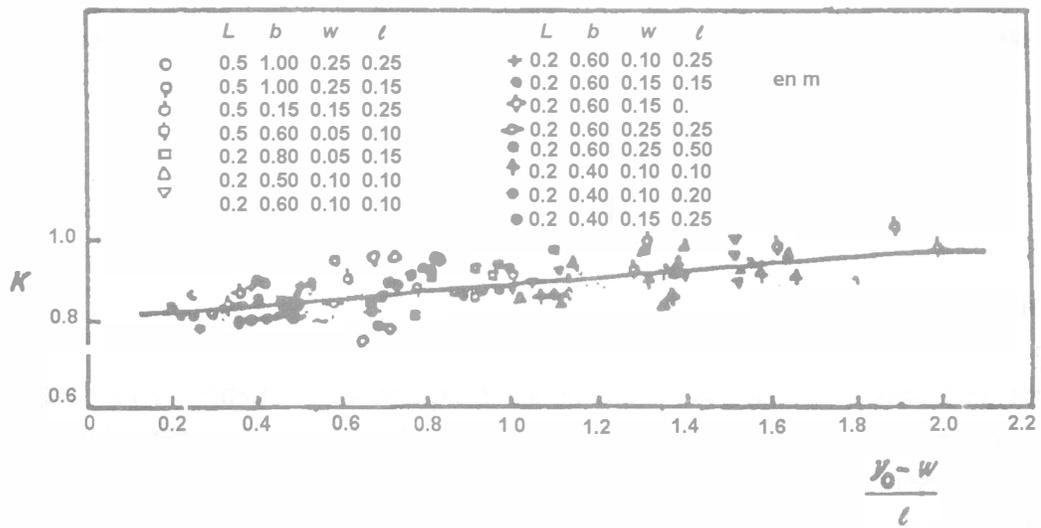
hasta valores $(y_0 - w/l) < 2$.

Es importante considerar que los resultados antes expuestos sólo tienen validez en el intervalo indicado y para flujo subcrítico en el canal. No es posible extrapolar más allá de dicho intervalo debido a la presencia de zonas de separación del flujo, como las mostradas en la figura 6.20a, y fenómenos más complejos no considerados en los resultados expuestos que pueden producir desviaciones importantes.

No existen resultados experimentales para vertedores laterales en canales trapeciales ni triangulares. La falta de dicha información obliga a utilizar los de los rectangulares, por ejemplo, los resultados de Subramanya y Awasthy, con F_0 como número de Froude en el canal trapecial o triangular al inicio del vertedor.



a) Vertedores laterales de cresta delgada



b) Factor de reducción para vertedores de cresta ancha

Figura 6.30. Resultados experimentales de vertedores laterales en canales rectangulares, según Ranga Raju y coautores (1979)

Para el cálculo de la descarga sobre un vertedor lateral relativamente corto en canales rectangulares, Ramamurthy y Carballada (referencia 18) en 1980, propusieron dividir el chorro de salida en franjas horizontales de altura dh y longitud L . Para cada uno de los chorros así divididos aceptaron una velocidad del chorro $V_s = \sqrt{V_u^2 + 2g h}$ y un coeficiente de contracción C_c (figura 6.31a). El gasto de la descarga lateral resulta en la forma

$$Q_v = K \int_0^{h_u} V_s C_c L dh \quad (6.53)$$

donde $h_u = y_u - w$; y_u y V_u son el tirante y velocidad media del flujo en el canal antes del vertedor lateral. Además, L es la longitud de dicho vertedor, h la altura de la superficie del agua sobre la franja de chorro considerada y K un factor de reducción para tomar en cuenta la viscosidad y los efectos tridimensionales. Se obtiene así la velocidad media del chorro descargado en la forma

$$\bar{V}_s = \frac{1}{h_u} \int_0^{h_u} \sqrt{V_u^2 + 2g h} dh = V_u \left[\frac{F_u^2}{3} \right] \left[\left[1 + \frac{2}{F_u^2} \right]^{3/2} - 1 \right]$$

donde F_u es el número de Froude del flujo antes del vertedor, de modo que el gasto descargado vale

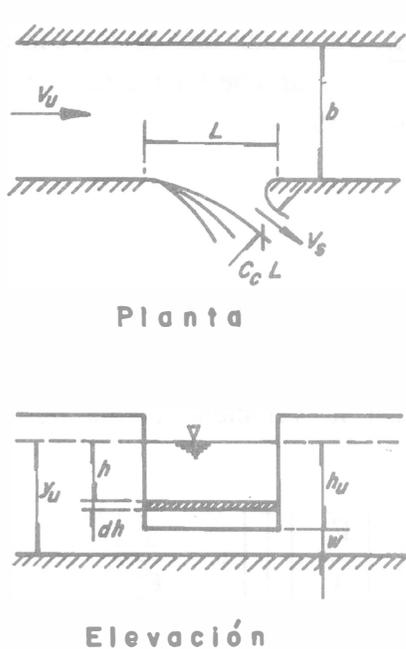
$$Q_v = K C L h_u \bar{V}_s = K C_c L h_u V_u \frac{F_u^2}{3} \left[\left[1 + \frac{2}{F_u^2} \right]^{3/2} - 1 \right] \quad (6.54)$$

donde

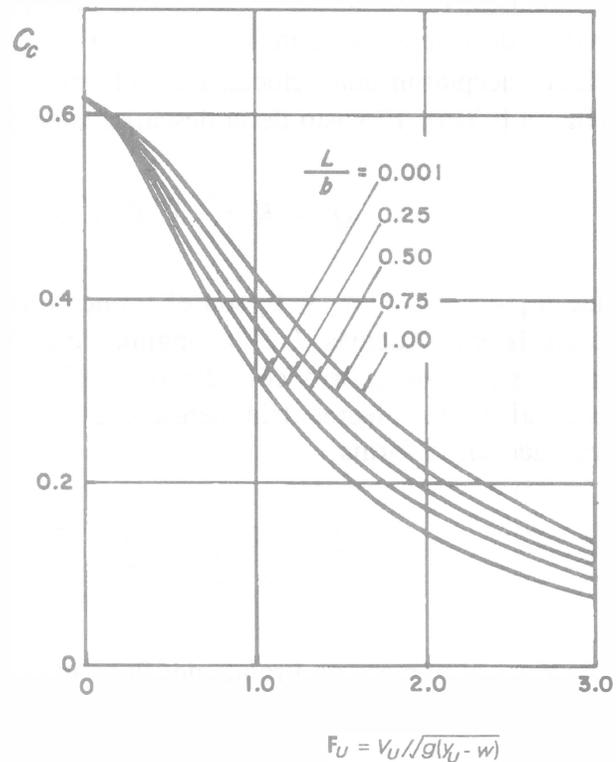
$$F_h = V_u / \sqrt{g h_u} = V_u / \sqrt{g (y_u - w)} \quad (6.55)$$

Los resultados del cálculo según la ecuación 6.53, con los valores de C_c según la teoría de Mc Nown y Hsu (1951), se presentan en la figura 6.31b en la forma del coeficiente de descarga C_c según la ecuación 6.54. De acuerdo con las mediciones efectuadas en un canal rectangular de 12.4 cm de ancho y diferentes longitudes del vertedor ($L/b = 10.5$; $w/L = 0.2, 0.4, 0.6$), se obtuvo un factor de reducción $K \approx 0.95$ para $L/b \leq 1.0$. Esto significa que la teoría antes presentada permite una buena predicción a pesar de que se desprecien el efecto de viscosidad y la tridimensionalidad del flujo.

En los resultados hasta aquí presentados se han considerado vertedores laterales relativamente cortos, donde se han despreciado las pérdidas por fricción. Los vertedores relativamente largos han sido investigados por El-Khashab y Smith (referencia 19) en 1976, Hager y coautores (referencia 20) en 1983 e Ishikawa (referencia 21) en 1984. En estos últimos trabajos las soluciones teóricas basadas en la ecuación del momentum para el perfil del flujo concuerdan muy bien con los resultados de las mediciones. Para los vertedores inclinados en la dirección del flujo, Jain y Fisher (referencia 22) obtuvieron soluciones en 1982, así como Hager y coautores (referencia 20) en 1983.



a) Geometría



b) Resultados experimentales

Figura 6.31. Vertedores laterales cortos en canales rectangulares, según Ramamurthy y Carballada, (1980)

Ejemplo 6.5. Un canal rectangular de 4 m de ancho, pendiente 0.0005 y coeficiente de Manning $n = 0.014$, descarga en una estación de bombeo. Por razones de operación es necesario construir un vertedor lateral que elimine los excedentes, de modo que en condiciones normales de servicio la estación entregue un gasto de $10 \text{ m}^3/\text{s}$. En períodos de lluvias intensas el gasto en el canal crece hasta $16 \text{ m}^3/\text{s}$, pero después del vertedor el tirante no debe ser mayor de 2 m y el gasto que llegue a la estación de bombeo será el que resulte en flujo uniforme con dicho tirante en el canal. a) Calcular la longitud necesaria en el vertedor lateral mediante los métodos de de Marchi y de Schmidt. b) Determinar el perfil del flujo en la zona del vertedor mediante el método numérico. Se propone un vertedor de cresta delgada.

Solución. El tirante normal en el canal para $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ es $y_n = 1.668 \text{ m}$. Por tanto, la altura mínima de la cresta del vertedor al fondo del canal debe ser igual a y_n ; se acepta $w = 1.67 \text{ m}$.

El tirante normal para $Q_0 = 16 \text{ m}^3/\text{s}$ es $y_u = 2.37177$, $F_u = 0.34964$ (subcrítico), $y_{cu} = 1.1771 \text{ m}$ y $E_{cu} = 1.7657 \text{ m}$.

El gasto en el canal después del vertedor se calcula con $y_n = y_L = 2$ m, para el cual, $A = 8$ m², $R_h = 1.0$ m, y de la ecuación de Manning

$$V_L = \frac{\sqrt{0.0005}}{0.014} = 1.5972 \text{ m/s}; Q_L = 12.7775 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{V_L^2}{2g} = 0.13 \text{ m}; E_L = 2.13 \text{ m}; y_L/E = 0.939$$

Debido a que $E_L > E_{cu}$, la energía específica constante en el tramo del vertedor es $E_0 = E_L = 2.13$ m; es decir, con $\alpha = 1$

$$y_0 + \frac{Q_0^2}{2g y_0^2 b^2} = 2.13$$

Con $Q_0 = 16$ m³/s, se obtiene $y_0 = 1.905$ m; $V_0 = 2.0997$ m/s ; $F_0 = 0.4857$; $y_0/E = 0.8944$. Para un vertedor lateral de cresta delgada, de la ecuación 6.50 se obtiene

$$\mu = 0.81 - 0.6 (0.4857) = 0.5186$$

Con $[2 - 3(w/E)]/[1 - (w/E)] = - 1.6304$, los valores de la función $\phi_M (y/E)$ en la ecuación 6.42 para $k = 0$, se obtienen de la 6.39 y son

$$\phi_M \left(\frac{y_L}{E} \right) = \phi_M(0.939) = - 1.6304 (0.6276) - 3 \text{ arc sen } (0.5316) = - 2.7048$$

$$\phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) = \phi_M(0.8944) = - 1.6304 (0.9785) - 3 \text{ arc sen } (0.6994) = - 3.9189$$

De la ecuación 6.42, con $k = 0$ y $\alpha = 1$ se obtiene

$$L = \frac{3}{2} \frac{4.0}{0.5186} (- 2.7048 + 3.9189) \approx 14.05 \text{ m}$$

El gasto vertido es $Q_v = 16 - 12.7775 = 3.2225$ m³/s.

Para usar el método de Schmidt, con $\alpha = 1.1$ resultan

$$\alpha \frac{V_L^2}{2g} = 1.1 (0.13) = 0.143 \text{ m}$$

$$E_L = 2 + 0.143 = 2.143 \text{ m}$$

$$\alpha \frac{Q_0^2}{2g b^2} = 1.1 \frac{(16)^2}{19.62 (4)^2} = 0.897 \text{ m}$$

La ecuación 6.47 se reduce a

$$y_0^3 - 2.143 y_0^2 + 0.897 = 0$$

cuya solución es $y_0 = 1.8926 \text{ m}$. Las cargas sobre el vertedor son entonces

$$h_0 = 1.8926 - 1.67 = 0.2226 \text{ m}$$

$$h_L = 2 - 1.67 = 0.33 \text{ m}$$

$$\bar{h} = 0.2763 \text{ m}$$

$$\frac{\bar{h}}{\bar{h} + w} = \frac{0.2763}{0.2763 + 1.67} = 0.142$$

y para $Q_L > 0$, de la figura 6.29, $n = 1.125$. Con éste, el nuevo valor es $\alpha = 1.1 (1.125) \approx 1.24$, y en la ecuación 6.47 los nuevos valores son: $E_L = 2.1612 \text{ m}$; $\alpha \frac{Q_0^2}{2g b^2} = 1.0112 \text{ m}$ y $y_0 = 1.8729 \text{ m}$.

Por tanto, $h_0 = 0.2029 \text{ m}$; $h_L = 0.33 \text{ m}$; $\bar{h} = 0.2665 \text{ m}$; $\bar{h} / (\bar{h} + w) = 0.1376$; $n = 1.15$; $\alpha = 1.1 (1.15) = 1.265$; $E_L = 2.1645 \text{ m}$; $\alpha \frac{Q_0^2}{2g b^2} = 1.0316$; $y_0 = 1.8693 \text{ m}$; $h_0 = 0.1993 \text{ m}$; $\bar{h} = 0.2647 \text{ m}$. De la ecuación 6.33

$$L = \frac{3 (3.2225)}{2 (0.5186) \sqrt{19.62} (0.2647)^{3/2}} = 15.45 \text{ m}$$

Para efectos de validez de los cálculos, la velocidad al inicio del vertedor es $V_0 = 16 / [4 (1.8693)] = 2.1398 \text{ m/s}$ y $F_0 = 0.4997$ menor de 0.75.

Solución b. Para determinar el perfil del flujo por el procedimiento numérico se utilizan las ecuaciones 6.30 y 6.35. La última, con $\mu = 0.5186$, resulta

$$\Delta Q = \frac{2}{3} (0.5186) \sqrt{19.62} (y_m - 1.67)^{3/2} \cdot \Delta x = 1.5314 (y_m - 1.67)^{3/2} \Delta x$$

Los cálculos se inician en la sección final, donde el gasto es $12.7775 \text{ m}^3/\text{s}$, tirante de 2.0 m , y hacia aguas arriba, con incrementos $\Delta x = 1 \text{ m}$. El coeficiente es $\alpha = 1.265$ (según Schmidt) y el vertedor debe tener la longitud necesaria para que $Q_0 = 16 \text{ m}^3/\text{s}$. En la tabla 6.8 se presenta un resumen de los cálculos donde se obtiene y para cada valor de x . En la sección inicial $y_0 = 1.8738 \text{ m}$ y la longitud del vertedor es de 15.38 m , similar al obtenido por el método de Schmidt y un poco mayor que el dado por el método de de Marchi, para el cual se usó $\alpha = 1$.

Con el nuevo valor de y_0 , μ debe corregirse y repetir los cálculos de la tabla 6.8. En rigor, dichos cálculos deben hacerse con $\alpha = 1$ para que se asemejen a los realizados con la solución de de Marchi.

Ejemplo 6.6. Un colector de sección cuadrada, 0.50 m de lado y $n = 0.013$ (Manning), tiene pendiente de 0.001 y debe conducir un gasto máximo de $0.12 \text{ m}^3/\text{s}$ a la planta de tratamiento del agua. Determinar el gasto que conduce el colector aguas arriba de un vertedor lateral de 3 m de longitud, eligiendo la altura de cresta adecuada.

Solución. El perfil del flujo es seguramente del tipo subcrítico (figura 6.23a). El tirante normal aguas abajo del vertedor es de 0.355 m . En efecto, resulta $A = 0.1775 \text{ m}^2$; $P = 1.21 \text{ m}$; $R_h = 0.1467 \text{ m}$. Por lo tanto, de la ecuación de Manning

$$Q = [0.1775 (0.1467)^{2/3} (0.001)^{1/2}] / 0.013 = 0.1201 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V = 0.6766 \text{ m/s}$$

$$y_c = \left[\frac{(0.12)^2}{9.81 (0.5)^2} \right]^{1/3} = 0.18 \text{ m} < 0.355 \text{ m}$$

La energía específica del flujo uniforme es

$$E_L = 0.355 + \frac{(0.6766)^2}{19.62} = 0.3783 \text{ m}$$

que se supone, en principio, mayor que E_{cu} y constante en el tramo del vertedor.

Tabla 6.8. Perfil del flujo para el caso *b* del ejemplo 6.5; $\alpha = 1.265$, $n = 0.014$ (Manning), $\mu = 0.5186$

$L - x$ en m	y en m	ΔQ en m ³ /s	Q en m ³ /s	V en m/s	$\alpha V^2/2g$ en m	S_f $\times 10^{-4}$	\bar{S}_f $\times 10^{-4}$	$\Delta y'$ en m	Δy en m
0.0	2.0000	—	12.7775	1.597	0.164	5.000			
1.0	1.9910	0.2844	13.0619	1.6401	0.1734	5.2883	5.1441	- 0.0085	0.0090
2.0	1.982	0.2727	13.3346	1.6820	0.1824	5.5784	5.4334	- 0.0085	0.0090
3.0	1.9732	0.2613	13.5959	1.7226	0.1913	5.8685	5.7234	- 0.0083	0.0088
4.0	1.9644	0.2501	13.8460	1.7621	0.2002	6.1596	6.0140	- 0.0083	0.0088
5.0	1.9557	0.2392	14.0852	1.8005	0.2090	6.4503	6.3050	- 0.0082	0.0087
6.0	1.9471	0.2286	14.3138	1.8378	0.2178	6.7404	6.5953	- 0.0081	0.0086
7.0	1.9386	0.2183	14.5321	1.8740	0.2265	7.0293	6.8849	- 0.0081	0.0085
8.0	1.9303	0.2083	14.7404	1.9091	0.2350	7.3158	7.1726	- 0.0078	0.0083
9.0	1.9221	0.1986	14.9390	1.9431	0.2434	7.6005	7.4582	- 0.0077	0.0082
10.0	1.9140	0.1892	15.1282	1.9760	0.2517	7.8830	7.7417	- 0.0076	0.0081
11.0	1.9061	0.1801	15.3083	2.0078	0.2599	8.1630	8.0224	- 0.0074	0.0079
12.0	1.8984	0.1714	15.4797	2.0385	0.2679	8.4368	8.2999	- 0.0072	0.0077
13.0	1.8909	0.1631	15.6428	2.0682	0.2758	8.7075	8.5722	- 0.0070	0.0075
14.0	1.8836	0.1551	15.7979	2.0968	0.2835	8.9738	8.8407	- 0.0068	0.0073
15.0	1.8765	0.1474	15.9453	2.1243	0.2910	9.2354	9.1046	- 0.0066	0.0071
15.38	1.8738	0.0541	15.9994	2.1346	0.2938	9.3341	9.2848	- 0.0024	0.0027

Con el fin de que el tirante crítico no ocurra al inicio del vertedor, la altura de la cresta debe ser mayor que $2E/3$ y por tanto se considera $w = 0.7 E$ como valor práctico mínimo; esto es, $w = 0.7 (0.3783) = 0.265$ m.

Para el cálculo se sigue la solución de de Marchi, complementada con los resultados de Subramanya y Awasthy. Con $w/E = 0.7$, $y_L/E = 0.355/0.3783 = 0.9384$, se obtiene $\phi_M (y_L/E) = - 1.5844$. Con valores de $\mu = 0.4024$, $k = 0$ y $\alpha = 1$, de la ecuación 6.42 resulta

$$3.0 = \frac{3}{2} \frac{0.5}{0.4024} \left[-1.5844 - \phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) \right]$$

$$\phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) = -1.5844 - \frac{3.0 (2) (0.4024)}{0.5 (3)} = -3.194$$

Con este valor, por iteraciones se obtiene $y_0 = 0.3069$ m, de modo que la ecuación de energía específica debe ser

$$0.3783 = 0.3069 + \frac{V_0^2}{2g}$$

Por tanto, $V_0 = 1.1836$ m/s

$$Q_0 = 0.3069 (0.5) (1.1836) = 0.18162 \text{ m}^3/\text{s}$$

y el número de Froude

$$F_0 = 1.1836 / \sqrt{9.81 (0.3069)} = 0.6821$$

De la ecuación 6.48

$$\mu = 0.611 \sqrt{1 - \frac{3(0.6821)^2}{(0.6821)^2 + 2}} = 0.4024$$

igual al supuesto, por lo cual, el tanteo es correcto. Para $Q_0 = 0.18162 \text{ m}^3/\text{s}$, $y_{cu} = 0.2378$ m y $E_{cu} = 0.3567$ m, la cual es menor que E_L y la suposición de que $E_L > E_{cu}$ queda satisfecha.

El gasto vertido es: $Q_v = 0.1816 - 0.12 = 0.0616 \text{ m}^3/\text{s}$, es decir, el 33.9 por ciento del gasto que llega. Si la longitud del vertedor aumenta a 6 m, el gasto vertido crece aproximadamente en un 5 por ciento, lo que demuestra que la estructura es poco eficaz como obra de desvío de caudales.

Ejemplo 6.7. Un colector tiene una sección portal como la que se muestra en la figura 3.19, rectangular en su base con ancho de 1.20 m y altura total de 1.20 m (semicírculo en la parte superior). La pendiente es de 0.018 y el coeficiente de Manning de 0.013. Conduce el agua a una planta de tratamiento que admite sólo $0.7 \text{ m}^3/\text{s}$. En época de lluvias el colector conduce un

gasto máximo de 1.9 m³/s y en estiaje de 0.322 m³/s. Diseñar el vertedor lateral necesario que elimine el gasto excedente, siguiendo la solución de de Marchi.

Solución. El tirante normal para $Q = 0.322$ m³/s define la elevación de la cresta del vertedor. Su valor es $y_n = 0.1205$ m; en efecto, $A = 0.1445$ m², $R_h = 0.10031$ m; $V = 2.22809$ m/s, $Q = 0.322$ m³/s. Se elige $w = 0.12$ m como altura de la cresta del vertedor desde el fondo del canal.

El gasto en el canal aguas abajo del vertedor debe ser $Q_L = 0.7$ m³/s, para el cual, el tirante normal es $y_n = 0.20014$ m, $A = 0.24017$ m², $R_h = 0.15008$ m; $V = 2.91458$ m/s; $E = 0.63311$ m; $Q = 0.7$ m³/s, $F = 2.08$ (régimen supercrítico), $y_c = 0.3261$ m.

Para $Q = 1.9$ m³/s aguas arriba del vertedor, el tirante normal es $y_n = 0.39804$ m; $A = 0.47765$ m²; $R_h = 0.23929$ m; $V = 3.97783$ m/s; $Q = 1.9$ m³/s; $E = 1.20452$ m; $F = 2.013$ (régimen supercrítico).

Puesto que el régimen es supercrítico antes y después del vertedor, se desarrolla el perfil 2 de la figura 6.23b, el cual se inicia con $y_0 = 0.39804$ m y la energía que permanece constante es $E = 1.20452$ m. El tirante y_L se obtiene de la ecuación

$$y_L + \frac{(0.7)^2}{2 (9.81)(1.2)^2 y_L^2} = 1.20452$$

cuya solución es $y_L = 0.12686$ m; $V_L = 4.59824$ m/s.

Los valores de los parámetros para el cálculo de la función de de Marchi son: $w/E = 0.12/1.20452 = 0.1$; $y_0/E = 0.39804/1.20452 = 0.330455$; $y_L/E = 0.12686/1.20452 = 0.10532$. De este modo, con el valor de

$$\frac{2-3 (w/E)}{1-(w/E)} = \frac{2-3 (0.1)}{1-0.1} = 1.88889$$

$$\phi_M \left(\frac{y_L}{E} \right) = 1.88889 \sqrt{\frac{1-0.10532}{0.10532-0.1}} - 3 \text{ arc sen } \sqrt{\frac{1-0.10532}{1-0.1}} = 20.0139$$

$$\phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) = 1.88889 \sqrt{\frac{1-0.330455}{0.330455-0.1}} - 3 \text{ arc sen } \sqrt{\frac{1-0.330455}{1-0.1}} = 0.0989$$

Para $F_0 = 2.013$, de la ecuación 6.49

$$\mu = 0.36 + 0.08 (2.013) = 0.521$$

Con $k = 0$, de la ecuación 6.42 se obtiene la longitud del vertedor

$$L = \frac{3(1.2)}{2(0.521)} [20.0139 - 0.0989] = 68.8 \text{ m}$$

Esta longitud es muy grande y muestra lo poco efectivo que es el vertedor en este caso por tener cargas sobre la cresta muy pequeñas al final del mismo. Pueden usarse dos vertedores a ambos lados con longitud de la mitad antes calculada. También puede reducirse un poco la pendiente del canal para disminuir la energía específica del flujo uniforme aguas arriba.

Ejemplo 6.8. Un canal trapecial de 5 m de ancho, talud $k = 1$ y $n = 0.0015$ (Manning), tiene una pendiente de 0.0006 y puede conducir un gasto máximo de $27 \text{ m}^3/\text{s}$. Diseñar un vertedor lateral que elimine $4 \text{ m}^3/\text{s}$ de excedentes considerando $\alpha = 1$, para alturas de la cresta al fondo: a) $w = 1.40 \text{ m}$; b) $w = 1.60 \text{ m}$.

Solución a. El tirante normal para el gasto aguas abajo del vertedor lateral es $y_L = 1.9827 \text{ m}$. En efecto, resulta: $A = 13.8446 \text{ m}^2$; $R_h = 1.3051 \text{ m}$; $V = 1.9502 \text{ m/s}$; $Q = 27 \text{ m}^3/\text{s}$; y la energía específica vale

$$E_L = 1.9827 + \frac{(1.9502)^2}{19.62} = 2.17655 \text{ m}$$

El tirante crítico es $y_{cL} = 1.31102 \text{ m} < y_n$; por tanto, el régimen en el canal después del vertedor es subcrítico.

El gasto aguas arriba del vertedor es $Q_0 = 31 \text{ m}^3/\text{s}$, el flujo es con tirante normal $y_u = 2.1414 \text{ m}$ y energía específica $E_u = 2.35084 \text{ m}$. Los valores críticos son $y_{cu} = 1.4259 \text{ m}$, $E_{cu} = 2.00932 < 2.17655$ y el régimen es subcrítico.

La energía específica en todo el tramo del canal con vertedor es E_L , pero en su inicio corresponde al gasto de $31 \text{ m}^3/\text{s}$. Es decir, debe cumplirse

$$y_0 + \frac{(31)^2}{2gA_0^2} = 2.17655$$

que junto con la ecuación de continuidad: $31 = A_0V_0$, conduce a la solución: $y_0 = 1.8862 \text{ m} > y_{cu}$; $V_0 = 2.38677 \text{ m/s}$; $A_0 = 12.98875 \text{ m}^2$; $T_0 = 8.7724 \text{ m}$, $F_0 = 0.626255$. Aceptando los resultados de Subramanya y Awasthy para canales rectangulares, de la ecuación 6.41: $\mu = 0.43555$.

Con $E = 2.17655$ m, $w/E = 1.4/2.17655 = 0.64322$, $y_L/E = 1.9827/2.17655 = 0.910937$, $y_0/E = 1.8862/2.17655 = 0.866601$, se calculan a continuación las definidas por las ecuaciones 6.39 y 6.40

$$\phi_M \left(\frac{y_L}{E} \right) = \frac{2 - 3(0.64322)}{1 - 0.64322} \sqrt{\frac{1 - 0.910937}{0.910937 - 0.64322}} - 3 \arcsin \sqrt{\frac{1 - 0.910937}{1 - 0.64322}} = -1.4558$$

$$\phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) = \frac{2 - 3(0.64322)}{1 - 0.64322} \sqrt{\frac{1 - 0.866601}{0.866601 - 0.64322}} - 3 \arcsin \sqrt{\frac{1 - 0.866601}{1 - 0.64322}} = -1.8214$$

$$\begin{aligned} \phi_S \left(\frac{y_L}{E} \right) &= \left[\frac{[13 - 15(0.64322)]0.64322}{1 - 0.64322} - 5(0.910937) \right] \sqrt{\frac{1 - 0.910937}{0.910937 - 0.64322}} \\ &+ \frac{3}{2} [5(0.64322) - 1] \arcsin \left[\frac{2(0.910937) - (1 + 0.64322)}{1 - 0.64322} \right] = 2.6016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_S \left(\frac{y_0}{E} \right) &= \left[\frac{[13 - 15(0.64322)]0.64322}{1 - 0.64322} - 5(0.866601) \right] \sqrt{\frac{1 - 0.866601}{0.866601 - 0.64322}} \\ &+ \frac{3}{2} [5(0.64322) - 1] \arcsin \left[\frac{2(0.866601) - (1 + 0.64322)}{1 - 0.64322} \right] = 2.1687 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las funciones en la ecuación 6.42 y $\mu = 0.43555$ (según Subramanya y Awasthy), resulta

$$L = \frac{3(5)}{2(0.43555)} [-1.4558 + 1.8214] + \frac{3(1)(2.17655)}{4(0.43555)} [2.6016 - 2.1687]$$

$$L = 6.2953 + 1.6225 = 7.9178 \text{ m}$$

donde el segundo término representa la influencia del talud. No se utiliza el criterio de Ranga Raju y coautores para calcular μ , ya que $F_0 > 0.5$.

Solución b. Cuando se utiliza $w = 1.60 \text{ m} > y_{cu}$, sólo cambia $w/E = 1.6/2.17655 = 0.7351$ y los valores de las funciones resultan

$$\phi_M \left(\frac{y_L}{E} \right) = -2.4073; \phi_M \left(\frac{y_0}{E} \right) = -3.1477$$

$$\phi_s \left(\frac{y_L}{E} \right) = 1.9952; \phi_s \left(\frac{y_0}{E} \right) = 1.1227$$

siendo

$$L = \frac{3 (5)}{2(0.43555)} [-2.4073 + 3.1477] + \frac{3 (1) 2.17655}{4 (0.43555)} [1.9952 - 1.1227]$$

$$L = 16.0195 \text{ m}$$

lo que muestra la influencia que tiene el valor de w . Éste valor se debe elegir igual al tirante normal que se produzca para el gasto mínimo que se desee en el canal.

En los cálculos se usó el valor de μ para canal rectangular, al no disponer de valores experimentales para el trapecial.

c) Canales circulares

Uyumaz y Muslu en 1985 (referencia 23) obtuvieron una solución numérica general en canales circulares con vertedor lateral. La ecuación 6.36 se escribe en forma adimensional como sigue

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{A}{D^2} - \frac{2T}{D} \left[\frac{E}{D} - \frac{y}{D} \right]}{\frac{4}{3} \sqrt{\alpha} \mu \left[\frac{E}{D} - \frac{y}{D} \right] \left[\frac{y}{D} - \frac{w}{D} \right]^{3/2}}$$

donde D representa al diámetro del canal.

Multiplicando y dividiendo por $4 \pi D$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\pi D}{8\sqrt{\alpha} \left(\frac{2}{3}\mu\right)} \frac{\frac{4A}{\pi D^2} - \frac{8}{\pi} \frac{T}{D} \left(\frac{E}{D} - \frac{y}{D}\right)}{D \sqrt{\frac{E}{D} - \frac{y}{D}} \left(\frac{y}{D} - \frac{w}{D}\right)^{3/2}}$$

Al integrar

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\pi D}{8\sqrt{\alpha} \left(\frac{2}{3}\mu\right)} \int_{y_0/D}^{y_L/D} \frac{\frac{4A}{\pi D^2} - \frac{8}{\pi} \frac{T}{D} \left(\frac{E}{D} - \frac{y}{D}\right)}{\sqrt{\frac{E}{D} - \frac{y}{D}} \left(\frac{y}{D} - \frac{w}{D}\right)^{3/2}} d\left(\frac{y}{D}\right)$$

O bien

$$x_2 - x_1 = - \frac{\pi D}{8\sqrt{\alpha} \left(\frac{2}{3}\mu\right)} \int_{y_0/D}^{y_L/D} \frac{\frac{4A}{\pi D^2} - \frac{8}{\pi} \frac{T}{D} \left(\frac{E}{D} - \frac{y}{D}\right)}{\sqrt{\frac{E}{D} - \frac{y}{D}} \left(\frac{y}{D} - \frac{w}{D}\right)^{3/2}} d\left(\frac{y}{D}\right)$$

$$x_2 - x_1 = - \frac{\pi D}{8\sqrt{\alpha} \left(\frac{2}{3}\mu\right)} \int_{y_0/D}^{y_L/D} F\left(\frac{y}{D}\right) d\left(\frac{y}{D}\right)$$

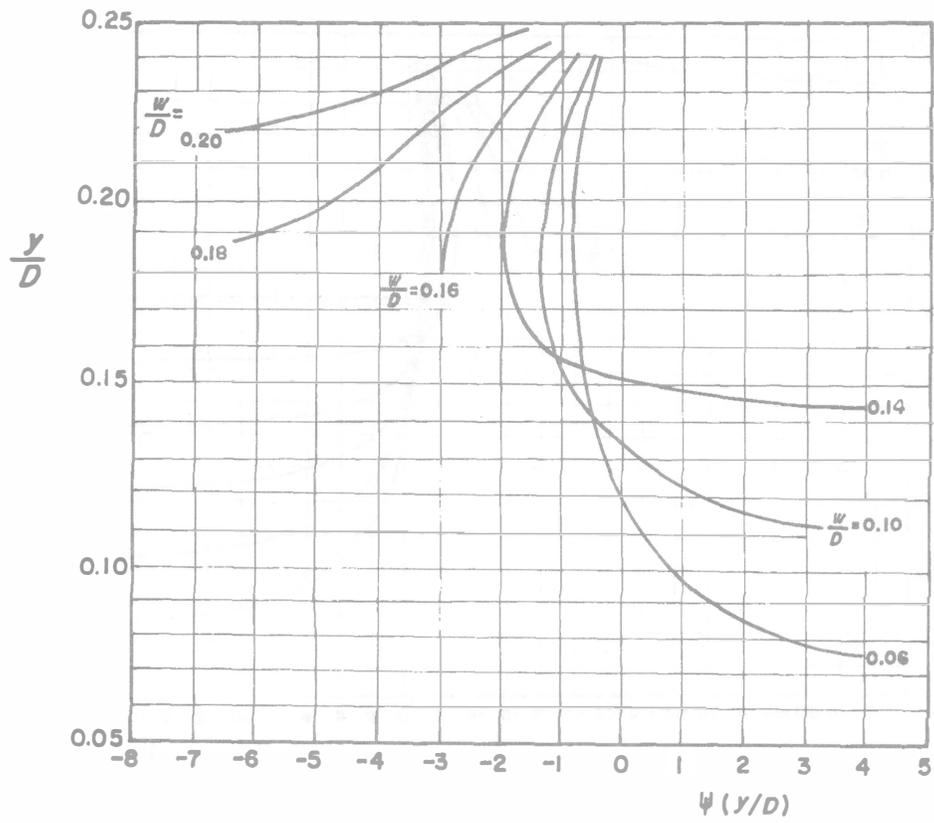
ya que los términos del integrando son funciones de y/D , como puede verificarse en la tabla 1.2 para A y T .

También se puede escribir

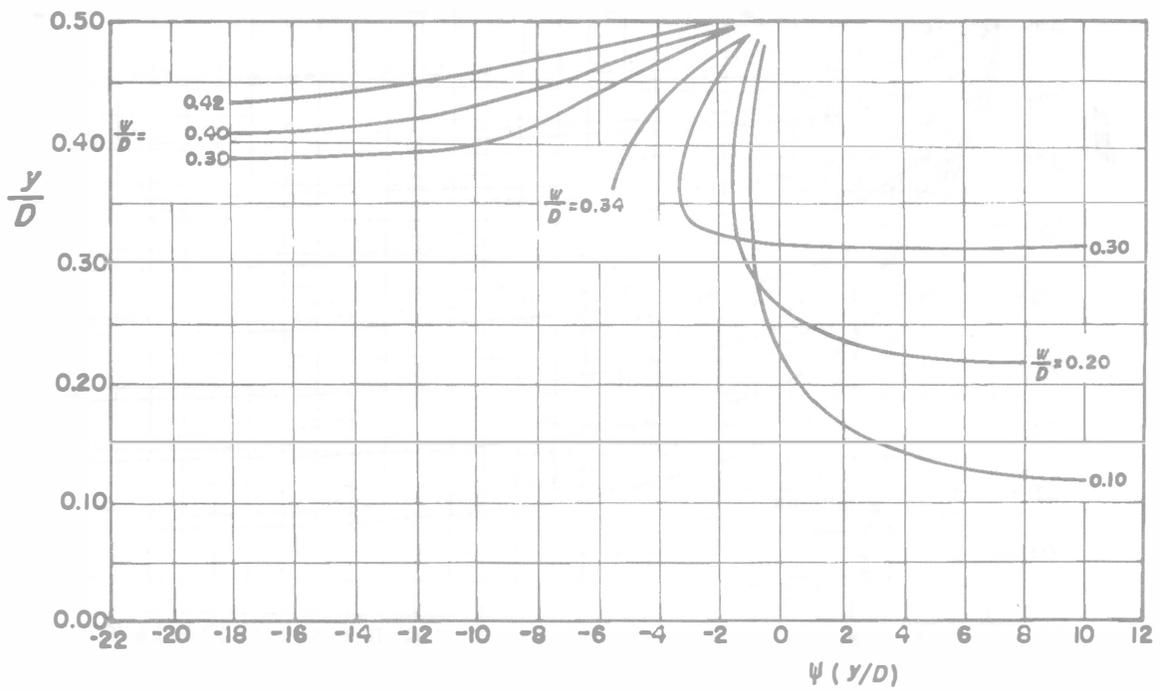
$$x_2 - x_1 = \frac{3\pi D}{16\sqrt{\alpha}\mu} \left[-\phi\left(\frac{y}{D}\right) \right]_{y_0/D}^{y_L/D} = \frac{3\pi D}{16\sqrt{\alpha}\mu} \left[\psi\left(\frac{y}{D}\right) \right]_{y_0/D}^{y_L/D}$$

y finalmente

$$x_2 - x_1 = \frac{3\pi D}{16\sqrt{\alpha}\mu} \left[\psi\left(\frac{y_2}{D}\right) - \psi\left(\frac{y_1}{D}\right) \right] \quad (6.56)$$

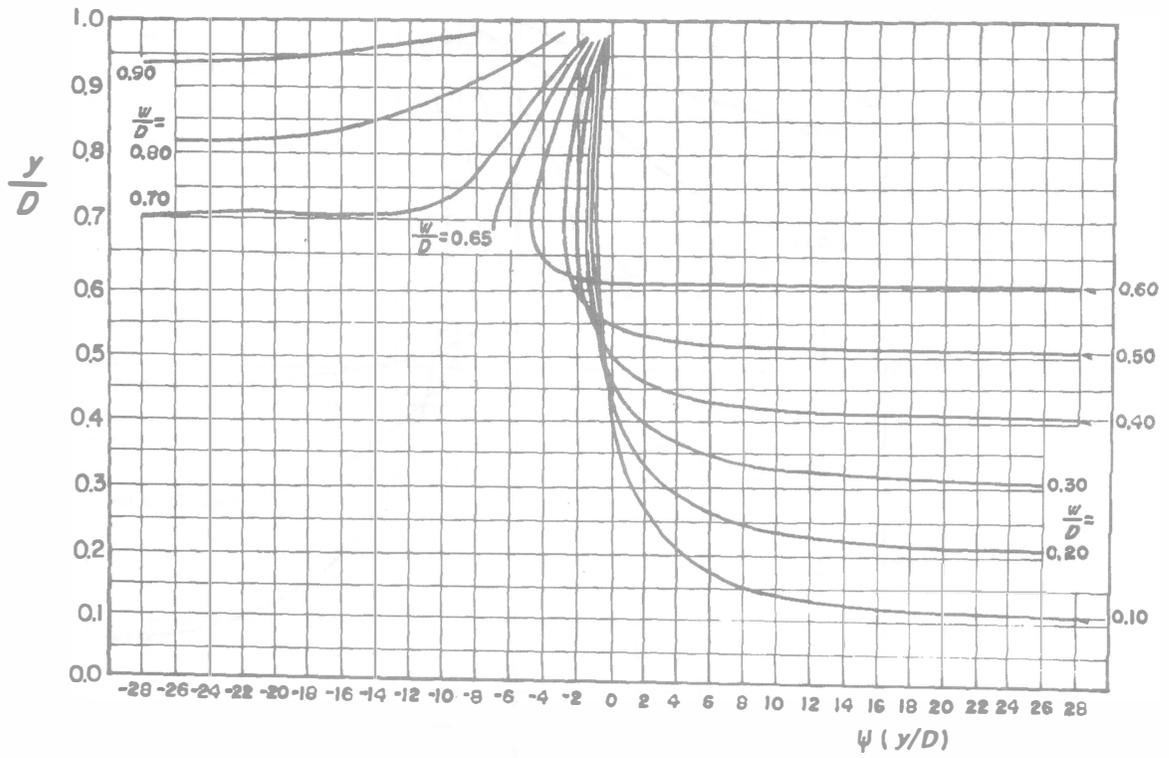


a) Para $E/D = 0.25$

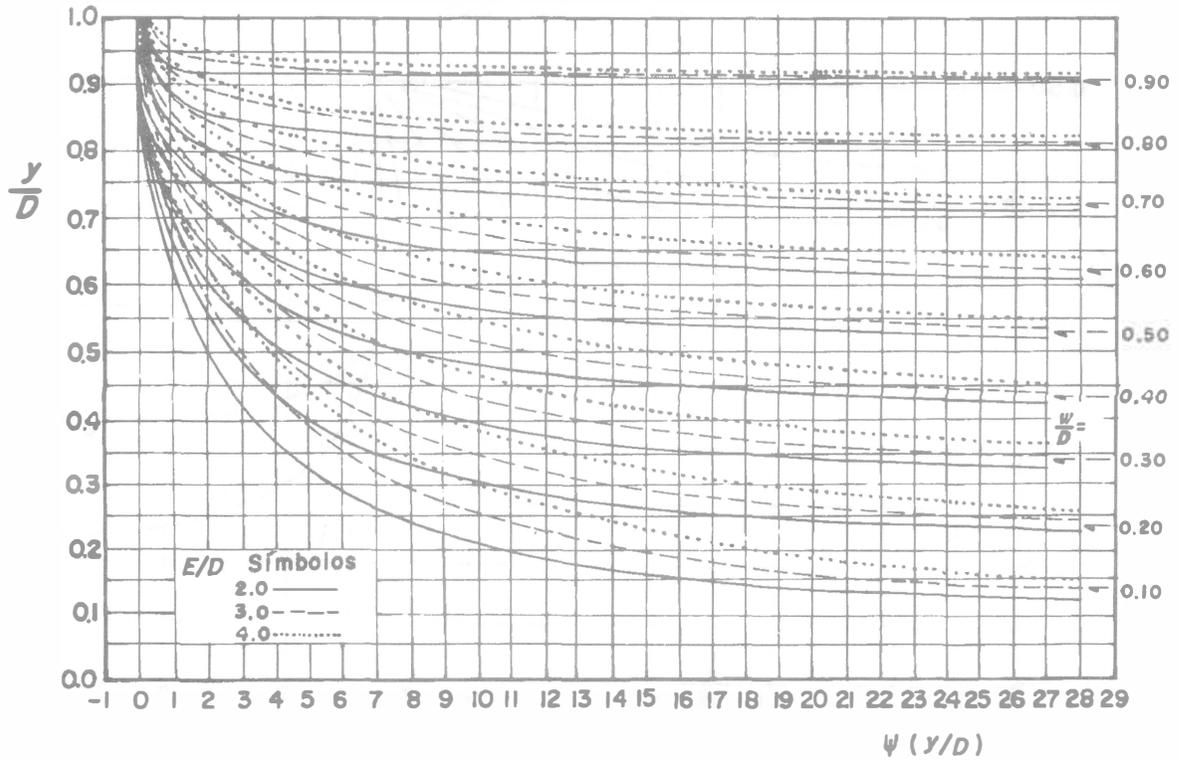


b) Para $E/D = 0.50$

Figura 6.32. Soluciones numéricas de Uyumaz y Muslu (1985) para canales circulares



c) Para $E/D = 1.0$



d) Para $E/D = 2.0, 3.0 \text{ y } 4.0$

Figura 6.32. Soluciones numéricas de Uyumaz y Muslu (1985) para canales circulares

En la expresión anterior $\psi(y/D)$ es el área integral bajo la curva $F(y/D)$ contra y/D y fue resuelta por Uyumaz y Muslu con un método de diferencias finitas, ya que no existe solución directa. Sus resultados se presentan en la figura 6.32 para distintos valores de E/D (figuras a a la d). Con la expresión 6.56 se puede calcular el perfil del flujo con tirantes y_1 y y_2 en las secciones 1 y 2, siendo x_2-x_1 la distancia que las separa.

Para determinar la longitud del vertedor es suficiente utilizar los valores en los extremos, es decir

$$L = \frac{3 \pi D}{16 \sqrt{\alpha} \mu} \left[\psi \left[\frac{y_L}{D} \right] - \psi \left[\frac{y_0}{D} \right] \right] \quad (6.57)$$

Investigaciones experimentales muy detalladas fueron realizadas por Uyumaz y Muslu en 1985 (referencia 23) sobre los diversos factores que influyen en la descarga de vertedores laterales. Ellos hicieron una gran cantidad de experimentos con vertedores en canales circulares parcialmente llenos, que cubrieron desde flujo subcrítico al supercrítico, pendientes $0 < S_0 < 0.02$, y un diámetro del canal $D = 0.25$ m. Para el caso subcrítico, los autores observaron perfiles del flujo de tirante creciente a lo largo del vertedor, como en la figura 6.23a, y en el supercrítico perfiles de tirante decreciente como en la figura 6.23b; en ambos casos, casi idénticos a los teóricos con el principio de energía específica constante en el canal. Para $w/D \geq 0.48$, las pruebas de laboratorio no admitieron flujo supercrítico.

Considerando que

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L (y - w) dx$$

en la ecuación 6.33, el coeficiente μ depende de tres parámetros, en la forma

$$\mu = f \left[\mathbf{F}_0, \frac{w}{D}, \frac{L}{D} \right]$$

donde $\mathbf{F}_0 = V_0/\sqrt{g A_0/T_0}$ es el número de Froude en el canal al inicio del vertedor, A_0 y T_0 el área hidráulica y ancho de la superficie libre respectivamente. Una representación conjunta de los resultados experimentales de Uyumaz y Muslu se muestra en las figuras 6.33, donde el coeficiente μ se aplica a la solución dada por las ecuaciones 6.56 o 6.57.

Los autores obtuvieron también ecuaciones que se ajustan a las curvas mostradas en las figuras 6.33a a la d, con errores menores del 5 por ciento, y que son:

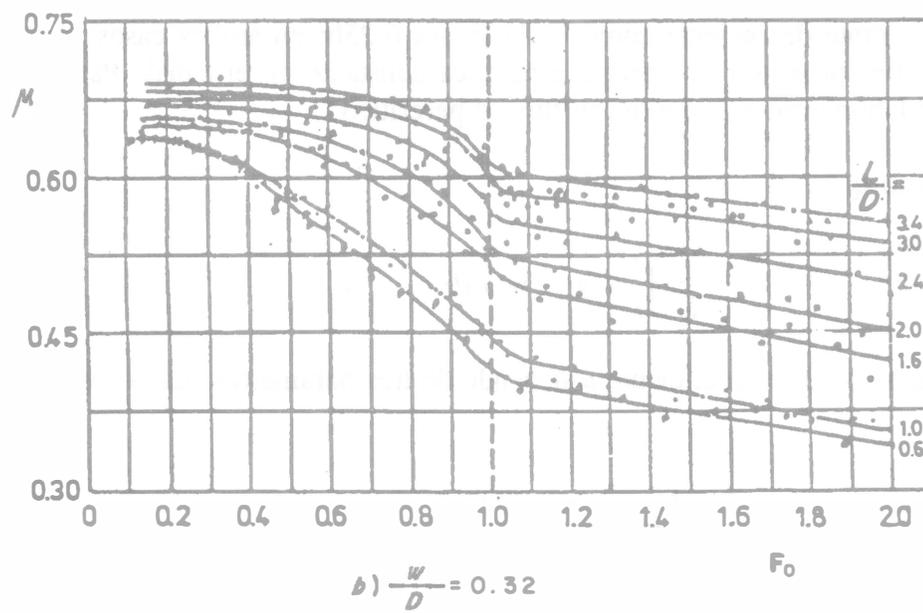
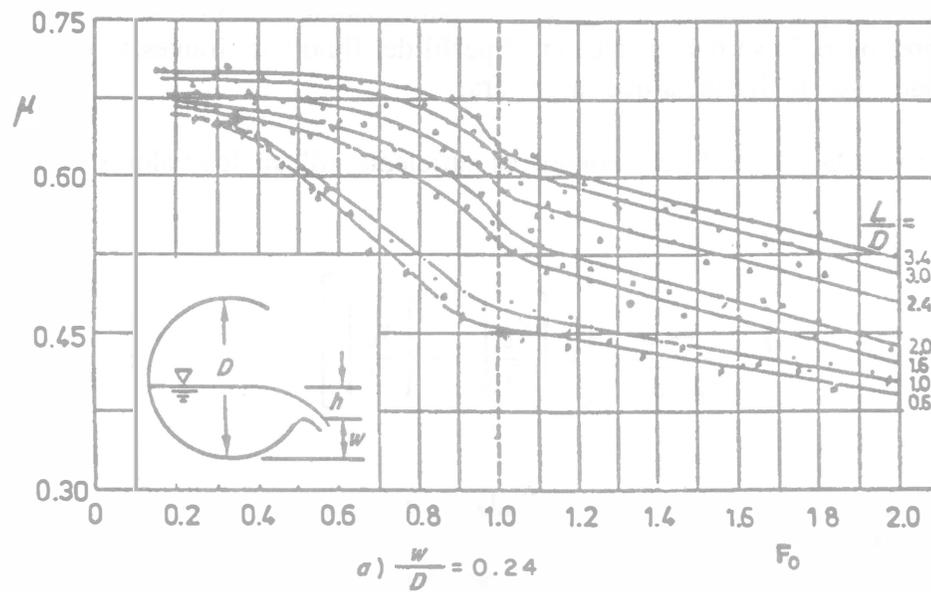


Figura 6.33. Coeficiente de descarga μ de vertedores laterales en conductos circulares, según Uyumaz y Muslu (1985)

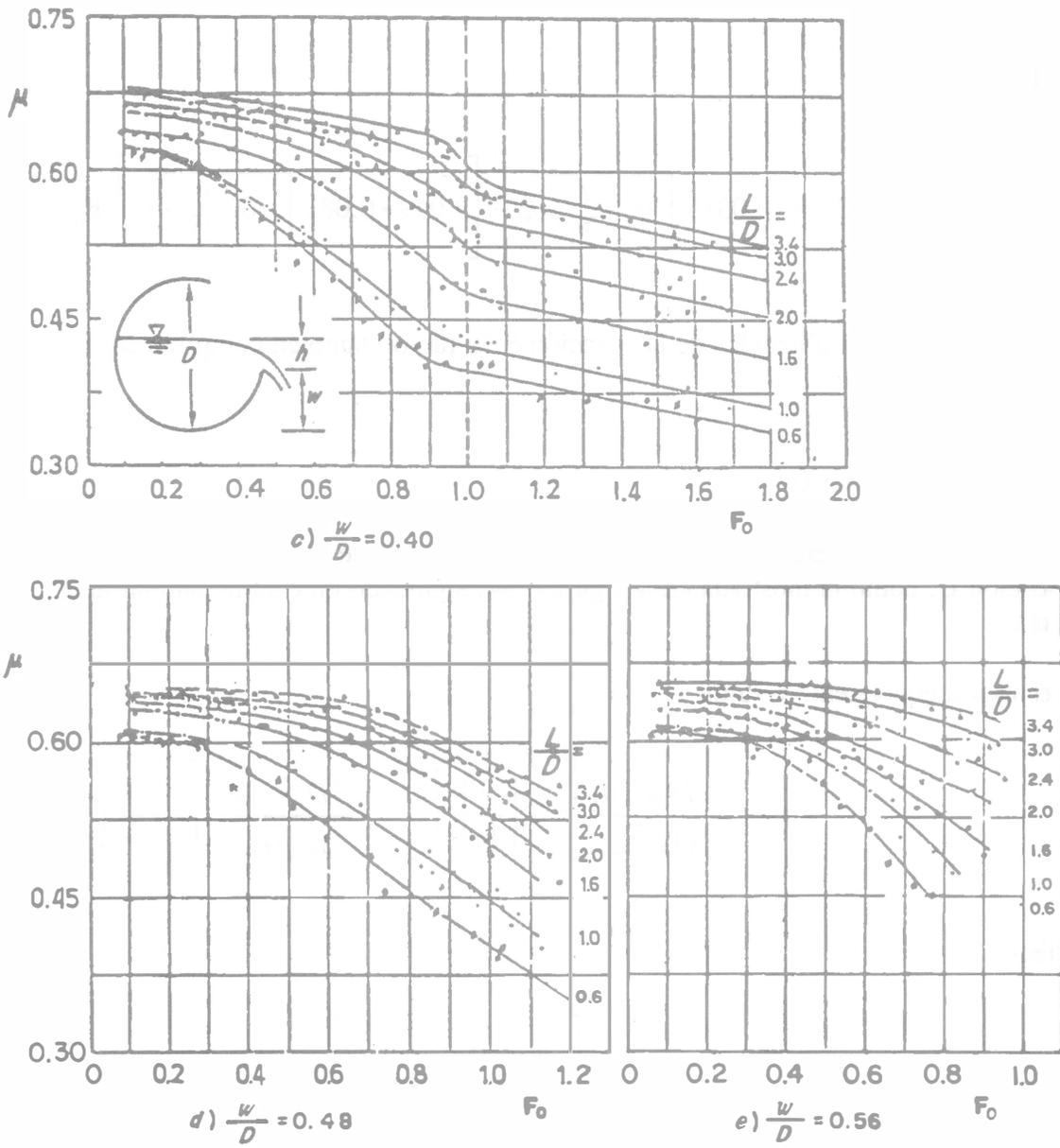


Figura 6.33. Coeficiente de descarga μ de vertedores laterales en conductos circulares, según Uyumaz y Muslu (1985)

Para $F_0 < 1$

$$\mu = 0.315 + 0.141 \sqrt{1.75 \frac{L}{D} - 1} + \left[0.33 - 0.12 \sqrt{1.68 \frac{L}{D} - 1} \right] \sqrt{1 - F_0} \quad (6.58)$$

y para $F_0 > 1$

$$\mu = 0.36 + 0.0315 \sqrt{35.3 \frac{L}{D} + 1} - \left[0.069 + 0.081 \sqrt{1.67 \frac{L}{D} - 1} \right] F_0 \quad (6.59)$$

Los perfiles del flujo obtenidos de la ecuación 6.56 fueron también comprobados experimentalmente.

d) Canales de sección U

Uyumaz en 1997 (referencia 24) siguió un procedimiento de solución numérica para un canal de sección U, como la mostrada en la figura 6.34, siguiendo un camino similar al de la sección circular.

La ecuación equivalente resultó

$$x_2 - x_1 = \frac{3D(\pi + 4)}{32\sqrt{\alpha}\mu} \left[-\phi \left(\frac{y}{D} \right) \right]_{y_0/D}^{y_L/D} = \frac{3D(\pi + 4)}{32\sqrt{\alpha}\mu} \left[\psi \left(\frac{y}{D} \right) \right]_{y_0/D}^{y_L/D}$$

O bien

$$x_2 - x_1 = \frac{3D(\pi + 4)}{32\sqrt{\alpha}\mu} \left[\psi \left(\frac{y_2}{D} \right) - \psi \left(\frac{y_1}{D} \right) \right] \quad (6.60)$$

donde el manejo de las variables es similar al de la ecuación 6.56. La función $\psi (y/D)$ se representa a través del conjunto de curvas presentadas en las figuras 6.35a a la d, donde cada figura corresponde a un valor de E/D .

La longitud del vertedor resulta de los valores en los extremos, mediante la expresión

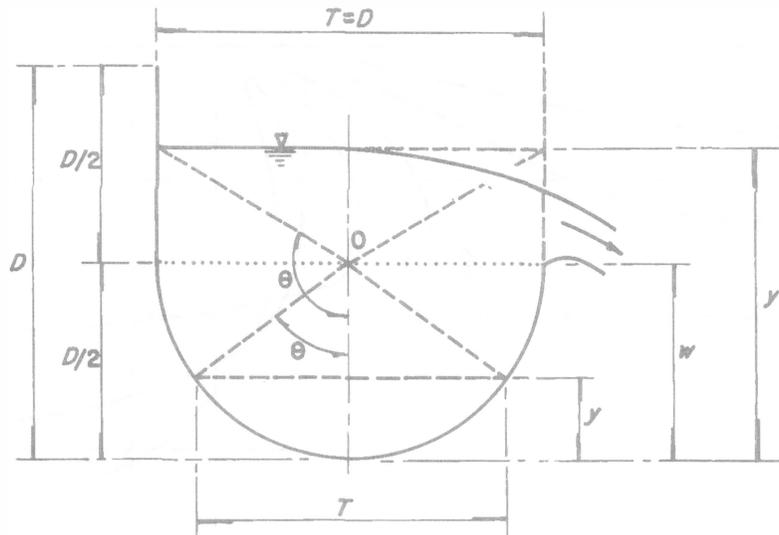


Figura 6.34. Sección transversal U

$$L = \frac{3D(\pi + 4)}{32\sqrt{\alpha}\mu} \left[\psi \left(\frac{y_L}{D} \right) - \psi \left(\frac{y_0}{D} \right) \right] \quad (6.61)$$

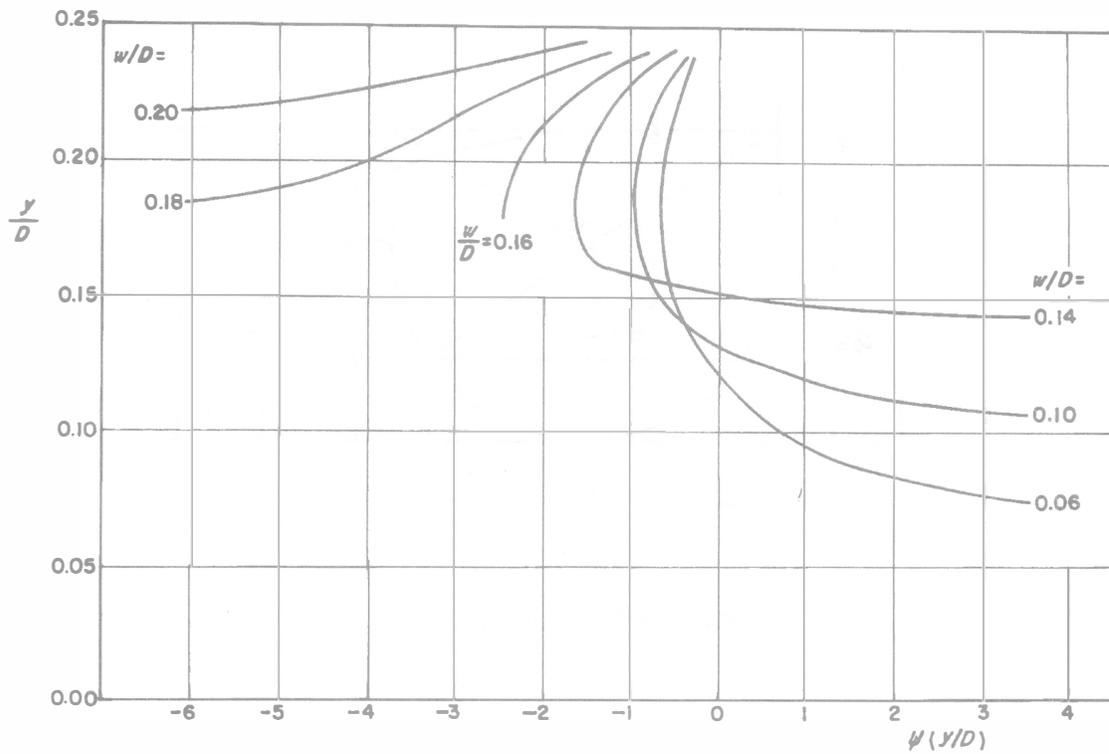
El coeficiente μ es el de descarga del vertedor lateral en canales de sección U. Para conocer su valor, Uyumaz utilizó los resultados experimentales de Uyumaz y Muslu (1985) para la parte circular de la sección y de Subramanya y Awasthy (1972) para la rectangular.

Para régimen subcrítico ($F_0 < 1$), Uyumaz propuso utilizar la ecuación 6.58 cuando $y/D \leq 0.5$ y la ecuación 6.48 cuando $y/D \geq 0.5$. Para régimen supercrítico ($F_0 > 1$), Uyumaz propuso la ecuación 6.59 cuando $y/D \leq 0.5$ y la ecuación 6.49 cuando $y/D \geq 0.5$.

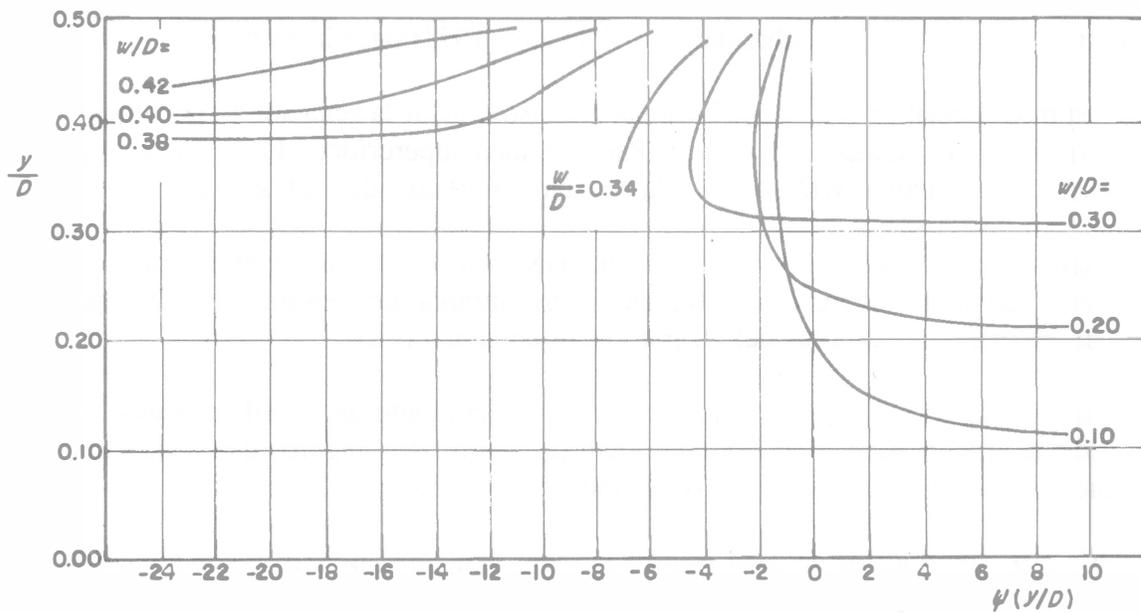
Las expresiones así derivadas fueron comparadas con resultados experimentales obtenidos de vertedores laterales en canales de sección U, encontrando errores menores de 4 por ciento en régimen subcrítico y menores del 10 por ciento en supercrítico.

Uyumaz comprobó una vez más que las técnicas de cómputo del perfil del flujo, basadas en la hipótesis de energía específica constante, dan resultados más seguros que las curvas numéricas o ecuaciones basadas en experimentos de intervalos limitados.

Ejemplo 6.9. Un colector de 2.44 m de diámetro, pendiente 0.0025 y coeficiente de Manning $n = 0.014$, conduce un caudal de $5.4 \text{ m}^3/\text{s}$ en condiciones normales de servicio. En períodos de lluvias intensas el caudal crece hasta llenar prácticamente el total de la sección. Es deseable extraer el máximo caudal mediante un vertedor lateral eficaz que elimine el excedente, de manera que el colector mantenga cierta capacidad para ingresos más adelante. Calcular la longitud necesaria en el vertedor lateral para eliminar el caudal excedente.

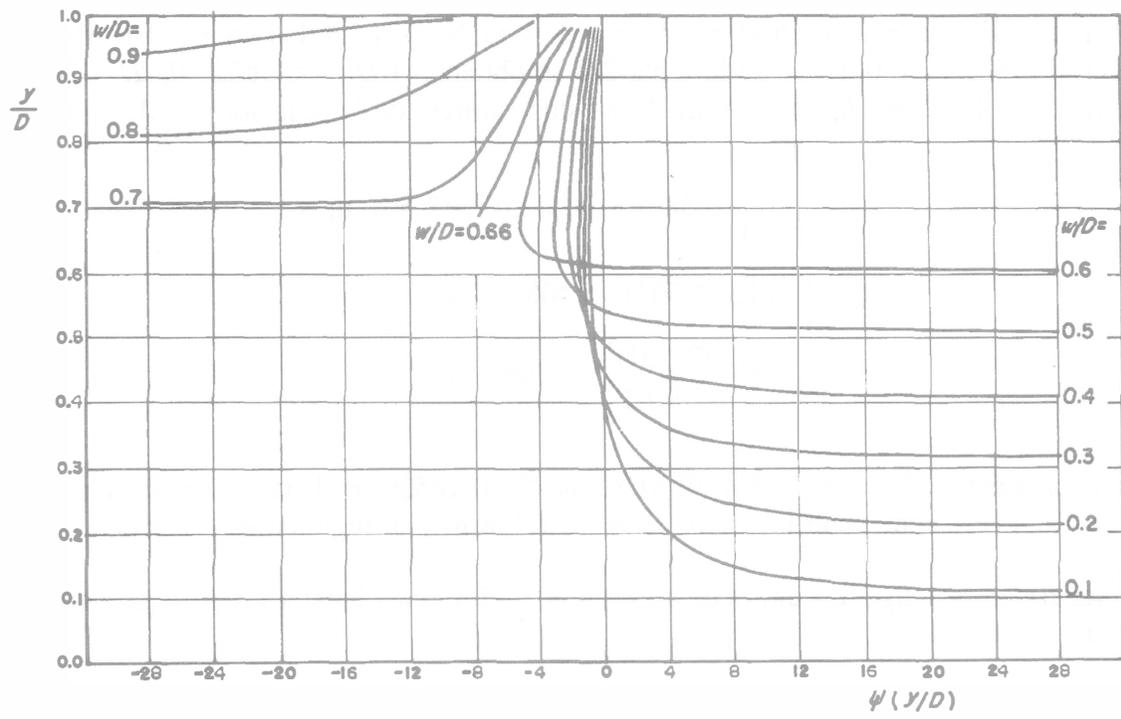


a) Para $E/D = 0.25$

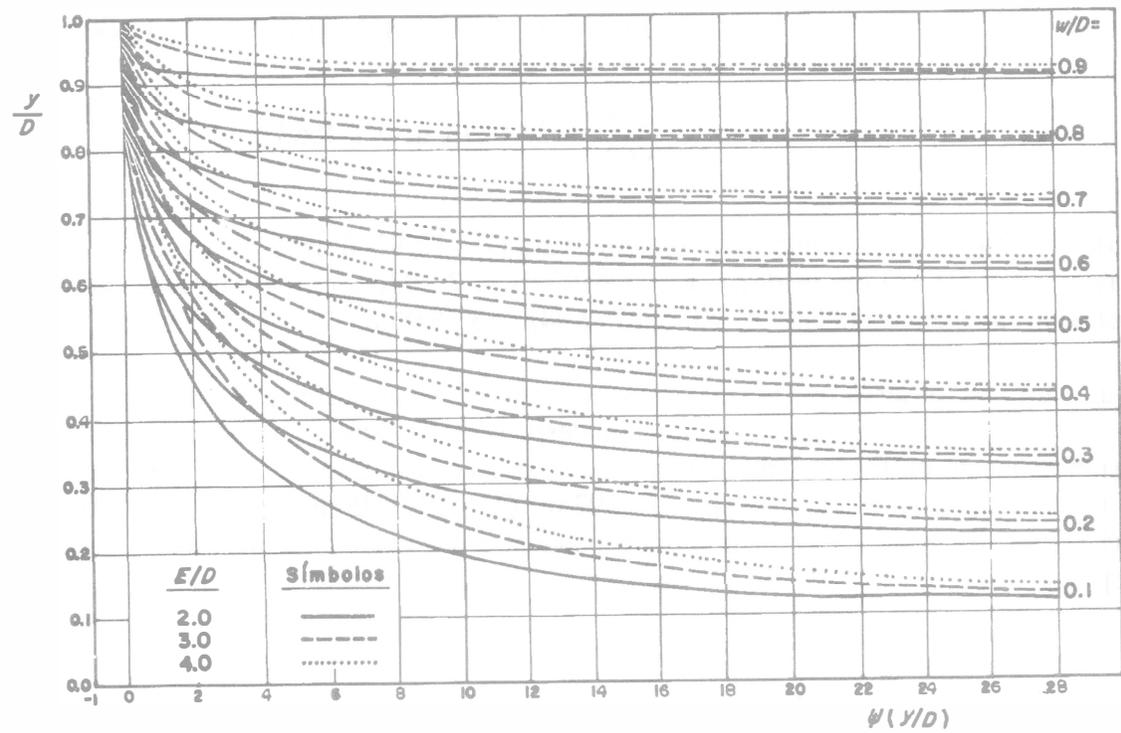


b) Para $E/D = 0.5$

Figura 6.35. Función $\psi (y / D)$ para canales de sección U, según Uyumaz (1997)



c) Para $E/D = 1.0$



d) Para $E/D = 2.0, 3.0$ y 4.0

Figura 6.35. Función $\psi (y / D)$ para canales de sección U, según Uyumaz (1997)

Solución. El tirante normal para $Q = 5.4 \text{ m}^3/\text{s}$ es $y_n = 1.148 \text{ m}$. En efecto, para $y/D = 1.148/2.44 = 0.4705$, de la tabla 2.8 se obtiene: $A/D^2 = 0.3632$; $R_h/D = 0.2402$. Por tanto, $A = 2.1623 \text{ m}^2$, $R_h = 0.586 \text{ m}$. Con estos valores, de la ecuación de Manning

$$V = \frac{1}{0.014} (0.586)^{2/3} (0.0025)^{1/2} = 2.501 \text{ m/s}$$

$$Q = 2.1623 (2.501) = 5.408 \approx 5.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$E = 1.148 + \frac{(2.501)^2}{19.62} = 1.4668 \text{ m}$$

Con el parámetro $Q/\sqrt{g} D^{5/2} = 5.4/\sqrt{9.81} (2.44)^{5/2} = 0.18539$, en la tabla 2.8 se interpola el valor $y_c/D = 0.43119$, por tanto $y_c = 1.0521 \text{ m} < 1.148 \text{ m}$ y el régimen es subcrítico.

Por seguridad, se elige una altura de cresta $w = 1.17 \text{ m}$, casi igual a y_n , para garantizar el gasto de servicio, siendo $w/D = 0.48$.

El gasto máximo que admite el colector ocurre cuando $y/D = 0.94$, para lo cual $A/D^2 = 0.7662$ y $R_h/D = 0.2896$, $T/D = 0.4750$; es decir: $A = 4.5616 \text{ m}^2$; $R_h = 0.7066 \text{ m}$; $T = 1.159 \text{ m}$; siendo $y = 2.2936 \text{ m}$ y de la ecuación de Manning

$$V = \frac{1}{0.014} (0.7066)^{2/3} (0.0025)^{1/2} = 2.8334 \text{ m/s}; Q = 12.9248 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$E = 2.2936 + \frac{(2.8334)^2}{19.62} = 2.70278 \text{ m} > 1.4668$$

valores en flujo uniforme antes del vertedor. Para $Q = 12.9248 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q/\sqrt{g} D^{5/2} = 0.4437$ y de la tabla 2.8, $y_c/D = 0.68$, es decir, $y_c = 1.6592 \text{ m} < 2.2936$ y el régimen antes del vertedor es subcrítico. También se obtiene: $A_c = 0.5687 (2.44)^2 = 3.3858 \text{ m}^2$; $V_c = 3.8173 \text{ m/s}$; $E_c = 2.4019 \text{ m}$.

Sin embargo, se observa que la energía específica en flujo uniforme antes del vertedor es mayor que la que existe en la misma condición después del mismo, no siendo posible extraer el excedente que se pretende. Una manera de lograrlo consistiría en admitir que el flujo al inicio del vertedor fuera el crítico, con: $y_0 = 1.6592 \text{ m}$, $Q_0 = 12.9248 \text{ m}^3/\text{s}$, $E_0 = 2.4019 \text{ m}$ (constante en el tramo del vertedor) y disminuir la pendiente del colector aguas abajo. Debe entonces cumplirse

$$y_L + \frac{V_L^2}{2g} = 2.4019$$

Si se utiliza una pendiente aguas abajo $S_0 = 0.00044$, el tirante normal para $Q = 5.4 \text{ m}^3/\text{s}$ es con $y/D = 0.96$ ($y = 2.3424 \text{ m}$). En efecto, de la tabla 2.8: $A = 0.7749 (2.44)^2 = 4.6134 \text{ m}^2$; $R_h = 0.283 (2.44) = 0.69052 \text{ m}$ y la velocidad, gasto y energía específica en flujo uniforme son

$$V = \frac{1}{0.014} (0.69052)^{2/3} (0.00044)^{1/2} = 1.1705 \text{ m/s}$$

$$Q = 4.6134 (1.1705) = 5.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$E = 2.3424 + \frac{(1.1705)^2}{19.62} = 2.4122 \text{ m} \approx 2.4019$$

lo que satisfaría la condición de energía específica constante. Esta solución tendría el inconveniente de que el gasto de servicio aguas abajo disminuiría si se deja la altura de cresta elegida $w = 1.17 \text{ m}$. Dicho gasto, con los valores antes calculados, se obtendría como sigue

$$V = \frac{1}{0.014} (0.586)^{2/3} (0.00044)^{1/2} = 1.0492 \text{ m/s}$$

$$Q = 2.1623 (1.0492) = 2.2687 \text{ m}^3/\text{s}$$

Continuando con la solución, para $F_0 = 1$, $w/D = 0.48$ y suponiendo $L/D = 1.8$, de la figura 6.33d, $\mu = 0.52$. Para $y_L/D = 0.96$; $y_0/D = 0.68$ y $E/D = 2.4019/2.44 = 0.984$, de la figura 6.32c se obtiene $\psi(y_L/D) = -1.2$; $\psi(y_0/D) = -2.8$. De la ecuación 6.57

$$L = \frac{3\pi (2.44)}{16 (0.53)} [-1.2 + 2.8] = 4.34 \text{ m}$$

siendo $L/D = 1.78 \approx 1.8$.

Si se elige $w = 1.37$ ($w/D = 0.56$), no habría valor de μ en la figura 6.33d y la solución tendría que plantearse en otras condiciones.

Otras soluciones serían con vertedores a ambos lados o con varios vertedores en serie que disminuyeran gradualmente el gasto excedente.

6.3.6 Canal con una reja de fondo

Otro caso de flujo espacialmente variado de gasto decreciente ocurre cuando se instala una reja en el fondo de un canal, a través de la cual se capta un caudal hacia un nivel inferior.

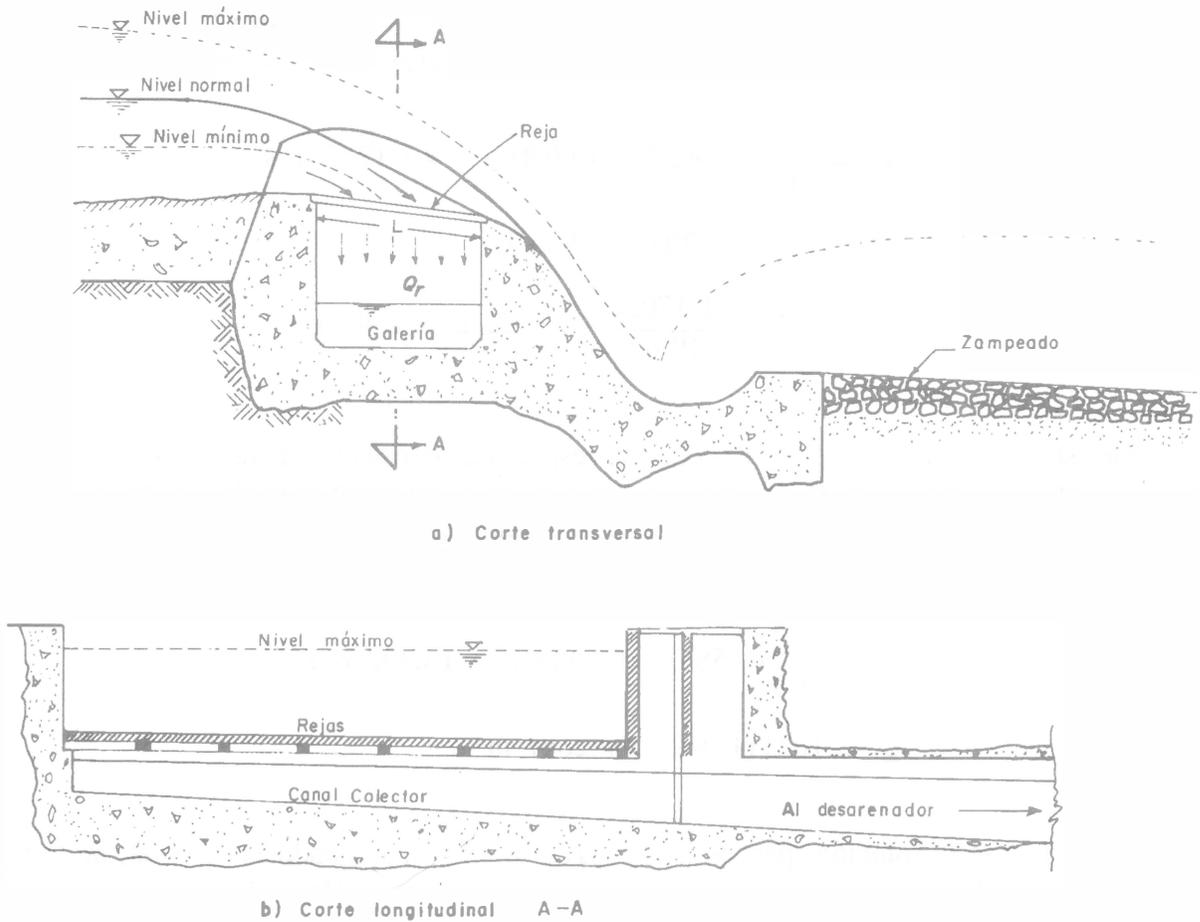


Figura 6.36. Vertedor tirolés

Tiene aplicación en algunos problemas de drenaje superficial y en captaciones realizadas en corrientes naturales de alta montaña. Dichas captaciones reciben el nombre genérico de vertedor tirolés (figura 6.36). Cuando se combinan con infiltraciones a través de la pared de una galería se conocen como tomas caucásicas.

Estas estructuras permiten desviar caudales hasta de $10 \text{ m}^3/\text{s}$, mediante rejas de fondo ubicadas en posición horizontal o con inclinación según el flujo, sobre una galería construida en el cuerpo de un vertedor a través del cauce. Las rejas se construyen con perfiles de acero alineados en dirección de la corriente, de longitud estructural no mayor de 1.25 m y separaciones que varían de 2 a 6 cm. Su pendiente es hasta del 20 por ciento ($\cos \theta = 0.98$), a fin de arrastrar el material grueso. Este tipo de toma compite con alguna otra convencional en un río debido a la poca altura (20 a 50 cm) que necesita el vertedor, lo que simplifica la obra disipadora a tan solo un zampeado aguas abajo.

El perfil del flujo sobre rejas tiene gran parecido con el del vertedor lateral, ya que el tirante disminuye en la dirección del movimiento y controla el gasto que cae a través de ellas, si bien con una ley distinta.

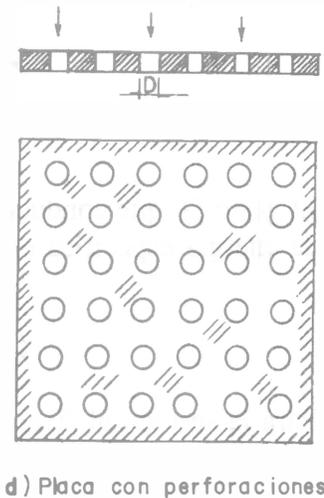
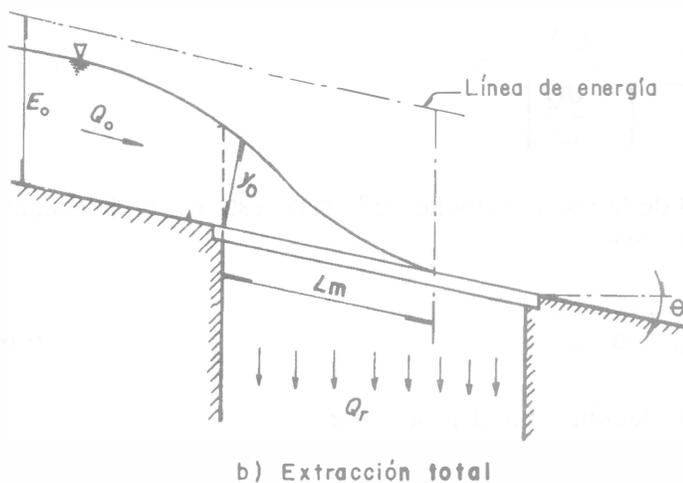
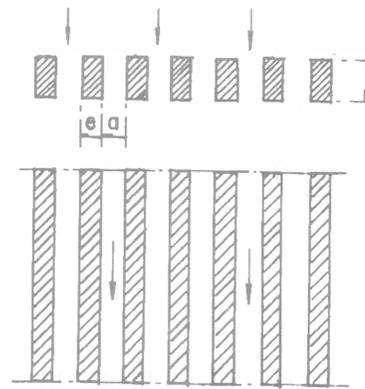
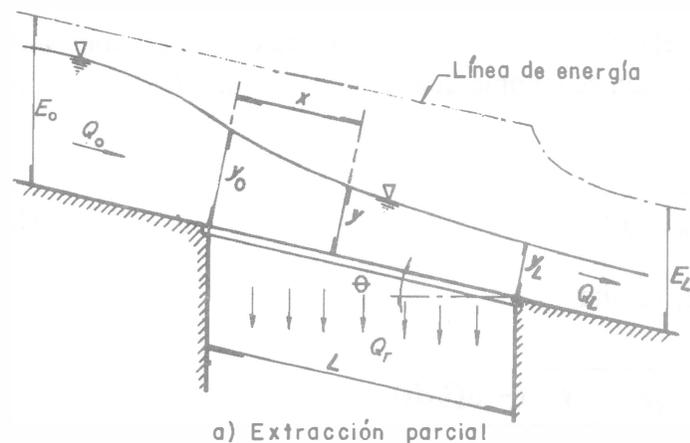


Figura 6.37. Flujo sobre una reja de fondo

La curvatura de las líneas de corriente al inicio de las rejillas es apreciable, como se muestra en la figura 6.37, lo que significa que la presión sobre el fondo no es hidrostática. Para tomar en cuenta este efecto se considera que la carga de presión real sobre el fondo al inicio de la reja es $p_0/g\rho = \alpha' y_0$, donde α' depende de muchos factores; cuando la presión corresponde a la hidrostática su valor es uno.

Para el caso que aquí se presenta se considera un canal rectangular de ancho b , longitud y pendiente pequeñas, donde $S_0 \approx S_f$ y $\alpha \approx 1$. Con $A = b y$, $F^2 = Q^2/(g b^2 y^3)$, la ecuación 6.29b se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q y (-dQ/dx)}{g b^2 y^3 - Q^2} \quad (6.62)$$

La energía específica al inicio de la reja $E_0 = \alpha' y_0 + V_0^2/2g$ es nuevamente constante en cualquier sección del canal. En dicha sección se cumple que $E_0 = y + Q^2/(2g b^2 y^2)$ y el gasto vale

$$Q = b y \sqrt{2g (E_0 - y)} \quad (6.63)$$

Al sustituir la ecuación 6.63 en la 6.62, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2g} b y^2 \sqrt{E_0 - y} (-dQ/dx)}{g b^2 y^3 - 2g b^2 y^2 (E_0 - y)} \quad (6.64a)$$

O bien

$$dx = \frac{\sqrt{g} b (3y - 2E_0)}{\sqrt{2} \sqrt{E_0 - y} \left[-\frac{dQ}{dx} \right]} dy \quad (6.64b)$$

El gasto Q_0 que conduce el río es igual al de la sección inicial de la reja; ésto es, de la ecuación de energía específica en dicha sección se tiene

$$Q_0 = b y_0 \sqrt{2g (E_0 - \alpha' y_0)} \quad (6.65)$$

Para la sección al final de la reja, de la ecuación 6.63 el gasto vale

$$Q_L = b y_L \sqrt{2g (E_0 - y_L)} \quad (6.66)$$

Por tanto, el gasto captado por una reja de longitud L es $Q_r = Q_0 - Q_L$, es decir

$$Q_r = Q_0 \left[1 - \frac{y_L \sqrt{1 - y_L/E_0}}{y_0 \sqrt{1 - \alpha' y_0/E_0}} \right] \quad (6.67)$$

Si se capta el total del gasto, entonces $y_L = 0$ y $Q_r = Q_0$ (figura 6.37b).

Según Mostkow (referencia 25), en el caso de rejas construídas con barras paralelas a la corriente, como en la figura 6.37c, el flujo a través de las aberturas es aproximadamente vertical, la pérdida de energía es despreciable y la carga efectiva sobre ellas es prácticamente igual a la energía específica E_0 con que el flujo llega a la reja. En cambio, en el caso de rejas

formadas a base de una retícula de perforaciones practicadas sobre una placa, como en la figura 6.37d, la dirección del flujo a través de los orificios tiene un ángulo apreciable con la vertical y se ve afectado por los cantos de las perforaciones, que producen una pérdida de energía apreciable por el cambio de dirección, de inclinada eventualmente a vertical. Dicha pérdida es casi igual a la carga de velocidad del flujo sobre la reja, por lo que la carga efectiva es igual a la carga estática o se puede confundir con el tirante.

Por estas razones, es necesario presentar por separado los dos tipos de flujo.

a) Reja de barras paralelas al flujo

En este caso, la carga efectiva sobre las aberturas de la reja es la energía específica del flujo sobre ellas y la variación del caudal desviado a través de la reja se expresa en la forma

$$- \frac{dQ}{dx} = \varepsilon C_d b \sqrt{2g E_0} = m b \sqrt{2g E_0} \quad (6.68)$$

donde

E_0 energía específica del flujo al iniciar la reja, constante a lo largo de ella

b ancho total de rejadas, medido en dirección perpendicular al flujo

m coeficiente global de descarga ($m = \varepsilon C_d$)

C_d coeficiente de descarga a través del espacio entre rejadas

$\varepsilon = (1 - f) \frac{A_n}{A_t}$, cociente del área de paso entre rejadas y su área total

A_n área neta de paso a través de rejadas

A_t área total de rejadas

f coeficiente de obstrucción producida por arenas y gravas que se incrustan entre las rejadas y que se toma de 15 a 30 por ciento (0.15 a 0.30).

En la reja de barras paralelas ocurre que

$$\varepsilon = (1 - f) \left[\frac{a}{a + e} \right] \quad (6.69)$$

donde a y e se acotan en la figura 6.37c.

Sustituyendo la ecuación 6.68 en la 6.64b, al simplificar resulta

$$dx = \frac{(3y - 2E_0)}{2m \sqrt{E_0} \sqrt{E_0 - y}} dy \quad (6.70a)$$

Esta ecuación puede escribirse como sigue

$$dx = \frac{\frac{3}{2} \frac{y}{E_0} - 1}{m \sqrt{1 - (y/E_0)}} dy \quad (6.70b)$$

Al integrar, se obtiene

$$x = C - \frac{y \sqrt{1 - (y/E_0)}}{m} \quad (6.71)$$

La constante C de integración se obtiene de la condición que para $x = 0$, $y = \alpha' y_0$, de manera que de la ecuación 6.71 resulta

$$x = \frac{1}{m} \left[y_0 \sqrt{1 - \alpha' \frac{y_0}{E_0}} - y \sqrt{1 - \frac{y}{E_0}} \right] \quad (6.72)$$

La ecuación 6.72 permite calcular el perfil del flujo sobre la reja. La longitud $x = L_m$ es la mínima necesaria para desviar todo el caudal Q_0 del río a través de la reja al alcanzar el tirante $y_L = 0$ (figura 6.37b); es decir

$$L_m = \frac{y_0}{m} \sqrt{1 - \alpha' \frac{y_0}{E_0}} \quad (6.73)$$

Por otra parte, para la sección inicial $y = y_0$ y de la ecuación 6.65, con $Q_0 = Q_r$ se tiene

$$Q_r = b \sqrt{E_0} y_0 \sqrt{2g \left[1 - \alpha' \frac{y_0}{E_0} \right]}$$

Al despejar y_0 y sustituir en la ecuación 6.73, resulta finalmente

$$L_m = \frac{Q_r}{m b \sqrt{2g E_0}} \quad (6.74)$$

donde Q_r es el gasto captado por la reja y Q_0 el de la sección inicial, igual al total captado.

Para una reja de longitud $x = L$ dada y gasto Q_0 mayor en el río, de la ecuación 6.72 se obtiene

el tirante $y = y_L$ al final de la reja y de la 6.67 se obtiene el gasto que se puede captar con la longitud L de la reja.

b) Placa con retícula de perforaciones

En este caso, la carga efectiva sobre las perforaciones es el tirante y la variación del caudal desviado a través de la placa se expresa como sigue

$$- \frac{dQ}{dx} = \varepsilon C_d b \sqrt{2g y} = m b \sqrt{2g y} \quad (6.75)$$

donde los términos tienen igual interpretación que la dada para la ecuación 6.68.

Sustituyendo la ecuación 6.75 en la 6.64b, al simplificar resulta

$$dx = \frac{\left[\frac{3}{2} y - E_0 \right] dy}{m \sqrt{E_0 - y} \sqrt{y}} = \frac{1}{m} \left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{y/E_0} dy}{\sqrt{1 - (y/E_0)}} - \frac{dy}{\sqrt{(y/E_0) - (y/E_0)^2}} \right] \quad (6.76)$$

La integración conduce a

$$x = \frac{E_0}{m} \left[\frac{1}{4} \arcsen \left[1 - 2 \frac{y}{E_0} \right] - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{y}{E_0} \left[1 - \frac{y}{E_0} \right]} \right] + C \quad (6.77)$$

La constante C se obtiene de la condición: $x = 0$, $y = \alpha' y_0$; por tanto

$$x = \frac{E_0}{m} \left\{ \frac{1}{4} \left[\arcsen \left[1 - 2 \frac{y}{E_0} \right] - \arcsen \left[1 - 2 \frac{\alpha' y_0}{E_0} \right] \right] - \frac{3}{2} \left[\sqrt{\frac{y}{E_0} \left[1 - \frac{y}{E_0} \right]} - \sqrt{\frac{\alpha' y_0}{E_0} \left[1 - \frac{\alpha' y_0}{E_0} \right]} \right] \right\} \quad (6.78)$$

Para $y_L = 0$, se obtiene $x = L_m$, longitud mínima necesaria para la captación del total de gasto;

es decir

$$L_m = \frac{E_0}{m} \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\alpha' y_0}{E_0} \left(1 - \frac{\alpha' y_0}{E_0} \right)} - \frac{1}{4} \arcsin \left(1 - 2 \frac{\alpha' y_0}{E_0} \right) + \frac{\pi}{8} \right] \quad (6.79)$$

En los dos casos analizados es importante conocer las características del flujo que llega a la reja. Para el vertedor tirolés existe una relación entre Q_0 y la energía específica E_0 del flujo que llega, a través de la ecuación de descarga de un vertedor de cresta ancha, a saber

$$Q_0 = C_v b E_0^{3/2} \quad (6.80)$$

donde el coeficiente C_v toma el valor medio de 1.55. Algunos valores de C_v aparecen en la tabla 6.9 así como los valores típicos de α' para las rejas.

La tabla 6.9 muestra también valores de la relación E_0/E_L de energía específica al principio y final de la reja en caso de captación parcial.

Tabla 6.9. Valores experimentales de algunos coeficientes para el flujo sobre rejas, según Mostkow (1995) (referencia 25)

Tipo de reja	Inclinación	C_v	y_0/E_0	α'	E_0/E_L	C_d
De barras paralelas	Horizontal	—	0.509	0.850	0.640	0.497
	Pendiente 1:5	—	0.449	0.615	0.609	0.435
De placa perforada	Horizontal	1.634	0.594	0.970	0.815	0.800
	Pendiente 1:5	1.528	0.496	0.750	1.130	0.750

El coeficiente C_d de gasto que interviene en m varía considerablemente con x . Valores típicos para los casos analizados se presentan en la tabla 6.9. En general, C_d es mayor para las placas con perforaciones que para la reja de barras paralelas, y también mayor en rejas horizontales que en las inclinadas. El coeficiente C_d aumenta con el tirante si la reja es de barras paralelas, pero disminuye si las barras son en dirección transversal al flujo principal.

Según Zamarin (1961) (referencia 26), el gasto captado por una reja de barras paralelas (figura 6.37a y c) se obtiene de la ecuación

$$Q_r = C_d \varepsilon b L \sqrt{2g y_m} \quad (6.81)$$

donde

$$C_d = (C_0 - 0.15 \tan \theta)$$

y θ es el ángulo de inclinación de la reja respecto de la horizontal.

El coeficiente ε tiene la misma interpretación dada con la ecuación 6.68, y

$$y_m = 0.405 (y_{c0} + y_{cL}) \tag{6.82}$$

siendo y_{c0} el tirante crítico en la sección inicial y y_{cL} el crítico en la final.

El coeficiente C_0 vale 0.60 a 0.65 cuando $h/a \geq 4$, y 0.5 cuando $h/a < 4$, siendo h el peralte de las barras y a el claro libre entre las mismas.

La ecuación 6.81 es válida para $\tan \theta \leq 0.2$ y también para placas perforadas, si en lugar de a se utiliza el diámetro de las perforaciones.

Cuando el agua llega desde un canal como en la figura 6.37, el tirante crítico ocurre en alguna sección antes de la reja, de manera similar al de la caída libre presentado en el ejemplo 3.8. En el caso de un vertedor tirolés con la geometría de la figura 6.38, el tirante crítico ocurre cerca de la sección inicial de la reja. La relación $\kappa = y_0/y_{c0}$, entre el tirante al inicio y el crítico, disminuye al aumentar ε y la pendiente de la reja. Además, $y_{c0} = \frac{2}{3} E_0$, por tanto $\kappa = 1.5 y_0/E_0$.

La tabla 6.10 muestra los valores experimentales de κ obtenidos por J. Frank (1956)(referencia 27) que dependen del ángulo de inclinación θ .

Tabla 6.10. Coeficiente $\kappa = y_0/y_{c0}$ para el cálculo del tirante al inicio de la reja, según Frank (1956)(referencia 27)

θ°	κ
0	1.000
2	0.980
4	0.961
6	0.944
8	0.927
10	0.910
12	0.894
14	0.879
16	0.865
18	0.851
20	0.837
22	0.825
24	0.812
26	0.800

Frank obtuvo una ecuación experimental para el cálculo de la longitud L necesaria en una reja de barras paralelas para la captación total del gasto (figura 6.38), que es

$$Q_r = \frac{2}{3} c \mu b L \sqrt{2g y_0} \quad (6.83)$$

El coeficiente c se obtiene de la ecuación

$$c = 0.6 (1 - f) \left[\frac{a}{a + e} \right] \cos^{3/2} \theta \quad (6.84)$$

El coeficiente μ depende de la forma de la sección transversal de las barras, como se indica en la figura 6.39.

La ecuación 6.83 es similar a la 6.68. En efecto, con $\Delta x = L$, $\Delta Q = Q_r$ y $E_0 = 3y_0/2\kappa$, la 6.68 resulta

$$Q_r = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \varepsilon C_d b L \sqrt{2g y_0}$$

de modo que $m = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \varepsilon C_d$, donde ε está dada por la ecuación 6.69.

Sustituyendo la ecuación 6.84 en la 6.83, al igualar los dos valores de m resulta

$$m = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} (1 - f) \frac{a}{a + e} C_d$$

$$m = \frac{2}{3} 0.6 (1 - f) \frac{a}{a + e} \mu \cos^{3/2} \theta \quad (6.85)$$

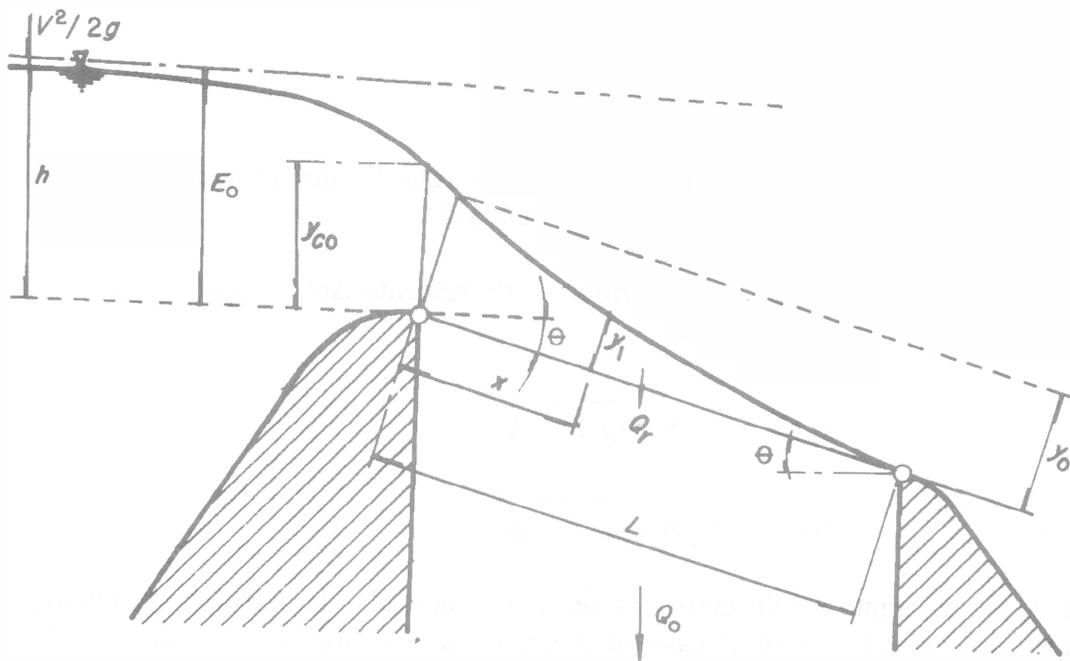


Figura 6.38. Flujo sobre una reja de fondo en un vertedor tirolés, según Frank (1956)

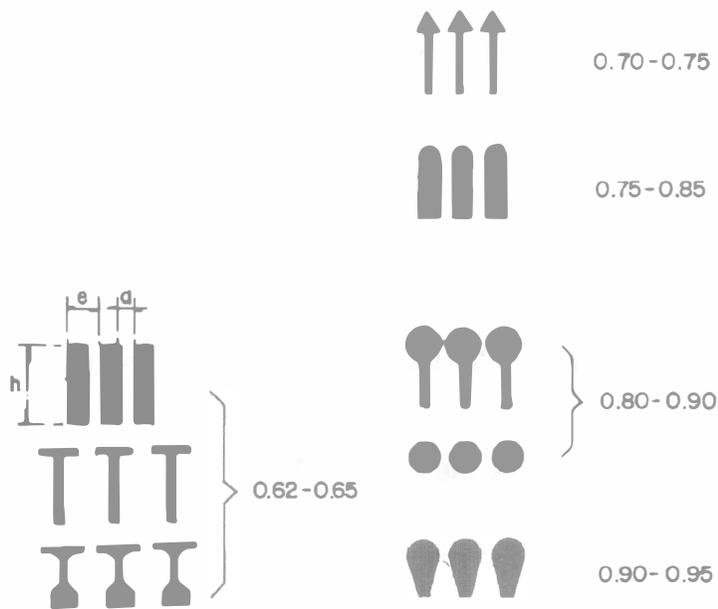


Figura 6.39. Coeficiente de contracción μ para rejas sobre un vertedor tirolés, según Frank (1956)

Esto significa que

$$(6.86)$$

Esta ecuación proporciona valores un poco menores que los que se usan en la ecuación 6.81 y del orden de la mitad de los obtenidos con la tabla 6.9.

De las ecuaciones 6.68 y 6.75 se determina el decremento ΔQ del gasto a usar en la solución numérica, en alguna de las formas

$$\Delta Q = \varepsilon C_d b \sqrt{2g E_0} \Delta x \quad (6.87)$$

$$\Delta Q = \varepsilon C_d b \sqrt{2g y_m} \Delta x \quad (6.88)$$

donde y_m es el tirante medio entre dos secciones separadas la distancia Δx (figura 6.38). La ecuación 6.87 o 6.88 según el caso se utiliza en la solución de la ecuación 6.30, donde el desnivel $\Delta y'$ sigue representando el que hay entre la superficie libre del agua de dos secciones separadas la distancia Δx .

Ejemplo 6.10. Una reja está formada de barras paralelas de sección rectangular, espesor e de 20 mm, peralte h de 80 mm y claro libre a entre las mismas de 40 mm. La reja está montada sobre un vertedor de tipo tirolés, a fin de captar el caudal total de un torrente, de magnitud $q = 0.92 \text{ m}^2/\text{s}$ (por unidad de ancho en dirección perpendicular al flujo). Considerando que la reja llega a obturarse hasta en 25 por ciento, determinar la longitud L que necesita la reja para captar el gasto q y el comportamiento del flujo cuando el gasto en el río aumenta hasta el máximo de $10 \text{ m}^2/\text{s}$ para los siguientes casos: a) reja horizontal; b) reja de inclinación $\tan \theta = 1/5$ ($\text{sen } \theta = 0.19612$).

Solución a. Con $b = 1 \text{ m}$ y $C_v = 1.55$, de la ecuación 6.80 la energía específica al inicio de la reja resulta

$$E_0 = \left[\frac{0.92}{1.55} \right]^{2/3} = 0.7063 \text{ m}$$

Utilizando el método de Mostkow, de la tabla 6.9 $y_0/E_0 = 0.509$, y el tirante al inicio de la reja tiene el valor

$$y_0 = 0.509 (0.7063) = 0.3595 \text{ m}$$

De la ecuación 6.69, el coeficiente ε es

$$\varepsilon = (1 - 0.25) \left[\frac{40}{40 + 20} \right] = 0.5$$

Con $C_d = 0.497$ de la misma tabla, se tiene

$$m = 0.5 (0.497) = 0.2485$$

De la ecuación 6.74 es

$$L_m = \frac{0.92}{0.2485 \sqrt{19.62 (0.7063)}} = 0.9945 \text{ m}$$

También de la tabla 6.9, $\alpha' = 0.85$, y de la ecuación 6.73

$$L_m = \frac{0.3595}{0.2485} \sqrt{1 - 0.85 \frac{0.3595}{0.7063}} = 1.0897 \text{ m}$$

La desviación respecto del valor anterior es + 9.6 por ciento.

Se elige la longitud de reja de 1.10 m.

Cuando el caudal en el río aumenta y se mantiene la longitud de reja de 1.10 m, el gasto captado resulta de las ecuaciones que siguen.

Para cualquier gasto q_0 antes de la reja, de la ecuación 6.80

$$E_0 = (q_0 / 1.55)^{2/3} = 0.7466 q_0^{2/3}$$

Además, de la tabla 6.9

$$y_0 = 0.509 E_0 = 0.38 q_0^{2/3}$$

siendo

$$V_0 = \frac{q_0}{y_0}$$

Sustituyendo $x = L = 1.10$, $m = 0.2485$, $\alpha' = 0.85$, $y_0 / E_0 = 0.509$, $y = y_L$ y los valores de y_0 y E_0 antes obtenidos en la ecuación 6.72, al despejar resulta

$$y_L \sqrt{1 - (1.3394 y_L) / q_0^{2/3}} = 0.2862 q_0^{2/3} - 0.2734$$

En esta ecuación existe un valor de y_L para cada uno de q_0 , con el cual se obtiene el gasto captado q_r de la ecuación 6.67, en la forma

$$q_r = q_0 \left[1 - \frac{y_L \sqrt{1 - 1.3394 (y_L / q_0^{2/3})}}{0.2862 q_0^{2/3}} \right]$$

Con las cinco últimas ecuaciones se hicieron los cálculos de la tabla 6.11.

Tabla 6.11. Cálculo de diferentes características en el ejemplo 6.10, inciso a, al variar el caudal del río, para $L = 1.10$ m

q_0 en m ² /s	E_0 en m	y_0 en m	V_0 en m/s	y_L en m	q_r en m ² /s	q_r/q_0
0.9337	0.7132	0.3630	2.5721	0.0	0.9337	1.0000
1.50	0.9783	0.4980	3.0121	0.1077	1.0935	0.729
2.00	1.1852	0.6033	3.3152	0.1983	1.2036	0.6018
2.50	1.3753	0.7000	3.5712	0.285	1.2966	0.5186
3.00	1.5531	0.7905	3.7950	0.3686	1.3778	0.4593
5.00	2.1832	1.1112	4.4995	0.6788	1.6334	0.3267
7.50	2.8608	1.4561	5.1506	1.0286	1.8701	0.2494
10.00	3.4656	1.7640	5.6690	1.3505	2.0581	0.2058

Como ejemplo, se determina el perfil del flujo para $q_0 = 3$ m²/s, $E_0 = 1.5531$ m, $y_0 = 0.7905$ m. Sustituyendo en la ecuación 6.72 resulta

$$x = \frac{1}{0.2485} \left[0.7905 \sqrt{1 - 0.85 (0.509)} - y \sqrt{1 - \frac{y}{1.5531}} \right]$$

$$x = \frac{1}{0.2485} \left(0.5954 - y \sqrt{1 - 0.6439 y} \right)$$

El cálculo se muestra en la tabla 6.12.

Tabla 6.12. Perfil de flujo en el ejemplo 6.10, inciso a

y en m	0.7905	0.70	0.60	0.50	0.40	0.3686
x en m	0	0.3084	0.5046	0.7392	1.0091	1.1000

Utilizando la ecuación 6.81 de Zamarin, con $C_0 = C_d = 0.65$, $\varepsilon = 0.5$, $\theta = 0$, el tirante crítico al inicio de la reja vale

$$y_{c0} = [(0.92)^2/9.81]^{1/3} = 0.4419 \text{ m}$$

y $y_{cL} = 0$; $y_m = 0.179$ m; la longitud necesaria de reja es $L_m = 1.5105$ m. Con $L = 1.10$ m y $q_0 = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ y la misma ecuación, después de varios tanteos resulta $q_L = 7.9642 \text{ m}^2/\text{s}$ y $q_r = 2.0358 \text{ m}^2/\text{s}$, valor casi igual al correspondiente en la tabla 6.11.

Si se utiliza el método de Frank para calcular L_m , de la tabla 6.10 $\kappa = 1$. De la figura 6.39 $\mu = 0.65$, y de la ecuación 6.84, $c = 0.3$. Siendo $y_{c0} = 0.4419$ m y $E_0 = 3 (0.4419)/2 = 0.6628$ m, de la ecuación 6.83 se obtiene $L_m = 2.4$ m, bastante mayor que la obtenida por el método de Mostkow.

Solución b. Con $\varepsilon = 0.5$, $b = 1$ m, $C_v = 1.55$, $E_0 = 0.7063$ m, y de la tabla 6.9 $y_0 = 0.449 (0.7063) = 0.3171$ m, $\alpha' = 0.615$, $C_d = 0.435$. Resulta

$$m = 0.435 (0.5) = 0.2175$$

De la ecuación 6.73 se obtiene

$$L_m = \frac{0.3171}{0.2175} \sqrt{1 - 0.615 (0.449)} = 1.2404 \text{ m}$$

De la ecuación 6.74

$$L_m = \frac{0.92}{0.2175 \sqrt{19.62 (0.7063)}} = 1.1363 \text{ m}$$

Esto significa que la inclinación de la reja aumenta su longitud. Se utiliza el valor máximo $L = 1.25$ m recomendado.

De la ecuación 6.80 se tiene que $E_0 = 0.7466 q_0^{2/3}$.

Una manera abreviada, pero menos precisa, de obtener el gasto captado por la reja consiste en considerar $\Delta Q = Q_r$ y $\Delta x = L$ en la ecuación 6.68, de manera que

$$q_r = 0.2175 (1.25) \sqrt{2g} (0.7466 q_0^{2/3})^{1/2} = 1.04055 q_0^{1/3}$$

siendo ahora $y_0 = 0.449 E_0 = 0.3352 q_0^{2/3}$. Esto permite que todos los cálculos dependan sólo de q_0 y eliminar las iteraciones.

En la tabla 6.13 se presenta la relación de gastos en el río y los captados por la reja de 1.25 m, equivalentes a los de la tabla 6.11.

Tabla 6.13. Cálculo de diferentes parámetros en el ejemplo 6.10, inciso b, al variar el caudal del río; $L = 1.25$ m

q_0 en m^2/s	q_r en m^2/s	q_r/q_0	E_0 en m	y_0 en m	V_0 en m/s
1.0614	1.0614	1	0.7769	0.3488	3.043
1.50	1.1911	0.7941	0.9783	0.4393	3.4148
2.00	1.3110	0.6555	1.1852	0.5321	3.7585
2.50	1.4122	0.5649	1.3752	0.6175	4.0487
3.00	1.5007	0.5002	1.553	0.6973	4.3024
5.00	1.7793	0.3559	2.1831	0.9802	5.1010
7.50	2.0368	0.2716	2.8606	1.2844	5.8392
10.00	2.2418	0.2242	3.4654	1.556	6.4269

El perfil del flujo para $q_0 = 3$ m^2/s , con el cual $E_0 = 1.553$ m y $y_0 = 0.6973$ m, se obtiene de la ecuación 6.72 como sigue

$$x = \frac{1}{0.2175} \left[0.6973 \sqrt{1 - 0.615 (0.449)} - y \sqrt{1 - \frac{y}{1.553}} \right]$$

$$x = \frac{1}{0.2175} \left[0.5933 - y \sqrt{1 - 0.6439 y} \right]$$

El perfil resulta como se muestra en la tabla 6.14. Para distintos valores de y se obtuvo x .

Tabla 6.14. Perfil del flujo en el ejemplo 6.10, inciso b

y en m	0.9607	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.3680
x en m	0	0.1666	0.3426	0.5668	0.8349	1.1432	1.2499

Ejemplo 6.11. Considerar que la reja del ejemplo 6.10 está constituida por una placa con perforaciones y se encuentra en posición horizontal. El diámetro de los orificios se realiza de manera que se mantiene $\varepsilon = 0.5$ para captar el gasto unitario mínimo de 0.92 m^2/s . Calcular la longitud necesaria y el comportamiento del flujo cuando el gasto unitario en el río aumenta a 2 m^2/s .

Solución. Con $b = 1$ m, de la ecuación 6.80 y la tabla 6.9, la energía específica y el tirante al inicio de la reja son

$$E_0 = \left(\frac{0.92}{1.634} \right)^{2/3} = 0.6819 \text{ m}$$

$$y_0 = 0.594 (0.6819) = 0.4050 \text{ m}$$

También, $\alpha' = 0.97$, y con $C_d = 0.8$, $m = 0.5 (0.8) = 0.4$. De la ecuación 6.79 resulta $L_m = 2.0$ m. Este valor es el doble del obtenido para la reja de barras paralelas y rebasa la longitud estructural recomendable de 1.25 m. En este caso es más conveniente aumentar la longitud de cresta del vertedor que resolver el problema de diseño estructural de las rejas mediante una estructura más pesada y costosa.

A vía de ejemplo, se continúa el resto de los cálculos utilizando la longitud de reja de 2.0 m. Para ésta, si el caudal unitario en el río aumenta a 3 m²/s, el gasto captado puede calcularse de la ecuación 6.67, obteniendo previamente y_L de la ecuación 6.78. En efecto, con $y_L = 0.1651$ m y $E_0 = 1.4994$ m, se satisface que $x = 2.0$ m en la ecuación 6.78, y con ello $q_r = 2.1942$ m²/s.

REFERENCIAS

1. Weh-Hsiung Li. "Open Channels with Nonuniform Discharge", Transactions of the American Society of Civil Engineers, volumen 120, páginas 255 a 274, 1955.
2. Keulegan G.H. "Determination of Critical Depth in Spatially Variable Flow", Proceedings of the 2d. Midwestern Conference of Fluid Mechanics, The Ohio State University, Engineering Experiment Station, Boletín 149, páginas 67 a 80, septiembre 1952.
3. Bleij K.H. "Flow in Roof Gutters", Journal Research del U.S. National Bureau of Standards, volumen 12, página 193, 1934.
4. Hager W.H. "Open Channel Hydraulics of Flows with Increasing Discharge", Journal of Hydraulic Research de IAHR, volumen 21, número 3, páginas 177 a 193, 1983.
5. Naudascher E. "Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke", Springer Verlag, Viena, Nueva York, segunda edición, 1992.
6. Hinds J. "Side Channel Spillways. Hydraulic Theory, Economic Factors and Experimental Determination of Losses", Transactions ASCE, volumen 89, 1926.
7. Chow Ven te. "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.
8. U.S. Bureau of Reclamation. "Design of Small Dams", U.S. Department of the Interior, primera edición, Washington, 1960.
9. De Marchi G. "Saggio di teoria del funzionamento degli stramassi laterali", L'Energia Elettrica, Milán, volumen II, número 11, página 849, noviembre, 1934.
10. Schmidt M. "Gerinnehydraulik", Bauverlag GMBH, Wiesbaden, 1957.
11. Ehrenberger R. "Streichwehre", Österreichische Wasserwirtschaft, Viena, 1934.
12. Coleman G.S., Smith D. "The Discharging Capacity of Side Weirs", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, volumen 6, página 305, Londres, 1957.
13. Zchiesche O. "Die Berechnung von Streichwehren auf Grund von Modellversuchen mit geraden und schraggestellten Streichwehren",

Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser-und Grundbau, Akademie Verlag, Berlin, 1954.

14. Frazer W. "The Behaviour of Side Weirs in Prismatic Rectangular Channels", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, volumen 6, página 305, Londres, 1957.
15. Ackers P. "A Theoretical Consideration of Side Weirs as Stormwater Overflows", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, volumen 6, páginas 250 a 269, Londres, febrero, 1957.
16. Subramanya K., Awasthy S.C. "Spatially Varied Flow Over Side Weirs", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, volumen 98, número HY1, 1972.
17. Ranja Raju K.G., Prasad B. y Gupta S. "Side weir in rectangular channel", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, volumen 105, número HY5, 1979.
18. Ramamurthy A.S. y Carballada L. "Lateral weir flow model", ASCE, Journal of the Irrigation and Drainage Division, volumen 106, número IR1, 1980.
19. El-Khashab A., Smith K.V.H. "Experiment investigation of flow over side weirs", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, volumen 102, número HY9, 1976.
20. Hager W.H., Hager K., Weyermann H. "Die hydraulische Berechnung von Streichwehren in Entlastungsbauwerken der Kanalisationstechnik"; Gas, Wasser, Abwasser, Jahrgang 63, número 7, páginas 309 a 329, 1983.
21. Ishikawa T. "Water surface profile of stream with side overflow", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, volumen 110, número 12, 1984.
22. Jain S.C., Fisher E.E. "Uniform flow over skew side-weir", ASCE, Journal of the Irrigation and Drainage Division, volumen 108, número IR2, 1982.
23. Uyumaz A., Muslu Y. "Flow over side weirs in circular channels", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, volumen III, número 1, páginas 144 a 160, enero, 1985.
24. Uyumaz A. "Side Weir in U-Shaped Channels", ASCE, Journal of Hydraulic Engineering, volumen 123, número 7, páginas 639 a 646, julio 1997.
25. Mostkow M.A. "Handbuch der Hydraulik", VEB Verlag Technik. Berlin, 1956.

26. Zamarin E.A., Popow K.W. y Fandjew W.W. "Wasserbau", VEB Verlag für Bauwesen, Berlín, 1961.
27. Frank J. "Hydraulische Untersuchungen für das tiroler Wehr", Der Bauingenieur, Heft 3, páginas 96 a 101, 1956.
28. Sassoli F. "Canali collettori laterali a forte pendeza", L'Energia elettrica, volumen 36, páginas 26 a 39, 1971.

CAPÍTULO 7. DISEÑO DE CANALES Y CAUCES SIN ARRASTRE

7.1 PROPÓSITO

La metodología existente para el diseño de canales cubre principalmente la selección adecuada de la sección hidráulica por donde fluye el agua, en condiciones de flujo uniforme y caudal máximo. Con este objeto, algunos criterios se han presentado en el subcapítulo 2.7, aplicables a canales con o sin recubrimiento y aunque los criterios de diseño se dedujeron para las condiciones de flujo uniforme, su aplicación se puede extender en buena medida a las de flujo variado en cualquiera de sus formas.

El contenido de este capítulo está dirigido a la solución de los problemas que se relacionan propiamente con la parte del canal donde se mueve el agua, también en flujo uniforme, donde la solución debe tomar también en cuenta los aspectos del trazo, construcción y economía, que igualmente influyen de modo importante en el diseño. Estudios cuidadosos en campo y en gabinete pueden abatir grandemente los costos, sobre todo cuando el canal es muy largo o cuando se localiza en terrenos muy accidentados.

Cualquiera que sea el canal por diseñar, el ingeniero debe conocer las propiedades del material que constituirá la plantilla y taludes después de efectuar la excavación. Dicho material formará el cuerpo del canal cuando no se recubre o servirá para soportar el recubrimiento cuando se utilice. También es importante conocer las propiedades del sedimento proveniente de otros sitios, que el agua va a transportar en suspensión. Estos aspectos son tratados con amplitud en este capítulo para entender mejor los métodos de diseño de canales no revestidos, así como el transporte de sedimentos que se expone en el siguiente capítulo.

Las pérdidas de agua a lo largo del canal son elementos cruciales en los estudios de factibilidad económica, para decidir la conveniencia o no de un recubrimiento que reduzca dichas pérdidas y proteja a su vez al canal de la acción erosiva del flujo. Por ello, también se exponen los criterios para estimar la pérdida por filtración a fin de decidir la conveniencia o no de un recubrimiento y su tipo.

Primero se exponen los procedimientos generales de diseño de los canales, recubiertos o no, consistentes en la selección del talud, las velocidades mínima y máxima del flujo y los criterios para estimar el libre bordo.

También se exponen los métodos de diseño de los canales recubiertos que minimizan el costo de los revestimientos de superficie dura, como el concreto, y establecen las dimensiones adecuadas de la sección.

Además, se presentan criterios para predecir las condiciones en que ocurre el inicio del arrastre de sedimentos en canales y cauces, hasta su acorazamiento en ciertos casos, con objeto de establecer métodos más confiables para el diseño de canales no revestidos.

Por último, se exponen los criterios tradicionales de diseño de canales con una cubierta vegetativa.

7.2 PROPIEDADES DE SUELOS Y SEDIMENTOS

7.2.1 *Importancia*

El conocimiento de las propiedades de suelos y sedimentos permite al ingeniero decidir varios aspectos relacionados con el diseño de las obras de captación y conducción. En este subcapítulo se presenta un breve resumen de las propiedades más importantes, el cual puede ampliarse en el libro de García Flores y Maza Álvarez (1996) (referencia 1) o en el de Graf (1971) (referencia 2).

7.2.2 *Origen y clasificación*

Los materiales resultantes de la desintegración mecánica y descomposición química de las rocas forman una gran variedad de suelos que pueden ser residuales o transportados. Los primeros quedan cerca del lugar en que se formaron o yacen sobre la roca de la cual se derivan. Los transportados han sido llevados por la acción del agua y el viento lejos de las rocas o suelos de los que proceden y se depositan en otro sitio. Los suelos y sedimentos son parte de las partículas transportadas, que después de cierto acarreo se depositan finalmente a lo largo de los cauces, lagos o lagunas, en el mar, o en las partes bajas de la cuenca. Están constituídos por una gran variedad de partículas que difieren entre sí en tamaño, forma y densidad, y se clasifican en suelos o sedimentos no cohesivos y cohesivos, según sea su comportamiento mecánico de resistencia a esfuerzos tangenciales y de la que oponen a ser arrastrados y transportados por una corriente de agua.

El suelo o sedimento no cohesivo friccionante se conoce también como material granular y se forma de granos gruesos o partículas sueltas, como las arenas y gravas. El peso de las partículas es la fuerza principal que resiste a las fuerzas de arrastre y sustentación producidas por el flujo. Cuando disminuyen las fuerzas que ejerce la corriente, las partículas se detienen, caen y se depositan dejando vacíos entre ellas. Por ello el comportamiento mecánico e hidráulico de suelos y sedimentos no cohesivos se define por el grado de acomodo de las partículas y por su orientación.

En cambio, el suelo o sedimento cohesivo se forma de partículas de grano muy fino (minerales de arcilla), que se mantienen unidas entre sí por la fuerza de cohesión, la cual se opone a que las partículas se separen del conjunto del que forman parte. Por su tamaño, el peso de la partícula es bastante menor que la fuerza de cohesión, pero ésta es capaz de resistir a las fuerzas de arrastre y sustentación causadas por el flujo. Cuando la cohesión ha sido vencida, las partículas desprendidas pueden comportarse como las no cohesivas y ser transportadas en suspensión con mayor facilidad por la casi nula influencia del peso. Cuando cesa el movimiento, muchas no se depositan (coloides), a menos que la presencia de sales facilite la formación de grumos o flóculos, proceso llamado de floculación.

Los sedimentos no cohesivos abundan a lo largo de las corrientes naturales, aun en el lecho de aquellos tramos de márgenes arcillosas.

7.2.3 Características de las partículas

La densidad, tamaño, forma y velocidad de caída son las características más importantes de las partículas aisladas de un sedimento no cohesivo cuando se expone a la acción de un flujo, pero no son suficientes. El comportamiento dinámico de la partícula individual es muy diferente del que muestra cuando forma parte de un gran conjunto. Por ello, es necesario conocer también las propiedades del conjunto, entre las que destacan: las relaciones entre densidades y volúmenes, la distribución de los tamaños, la velocidad de caída y el ángulo de fricción interna o de reposo.

Densidad de la partícula. Es el cociente ρ_s de la masa sólida de la partícula y el volumen que ocupa. Depende de la densidad que tienen los minerales que constituyen la partícula.

El granito es la roca madre o fuente de origen de los sedimentos, ya que forma aproximadamente el 95 por ciento de la parte superior de la corteza terrestre, si bien en su mayor parte no está al descubierto. Su desintegración mecánica la convierte en un conjunto de fragmentos o granos sueltos de feldespato y cuarzo, que acarrearán los ríos en forma de grava y arena. Después, por acción química, parte del feldespato se convierte finalmente en arcilla; el cuarzo en cambio es mucho más resistente.

Densidad relativa de la partícula. Los sedimentos aluviales tienen un alto contenido de cuarzo y se puede suponer que la llamada densidad relativa de sus partículas es

$$S_s = \frac{\rho_s}{\rho} = 2.65$$

donde ρ es la densidad del agua.

Las partículas de los sedimentos con materiales pesados poseen densidades relativas mayores de 4.5. Por ejemplo, la magnetita contiene gran cantidad de hierro y su densidad relativa promedio es de 5.1.

Densidad relativa de la partícula sumergida. Cuando una partícula de sedimento está dentro del agua el empuje hidrostático vertical disminuye su peso, de manera que el de la materia sólida sumergida es igual al peso del volumen v_s de sólidos menos el peso del mismo volumen de agua desalojada por ellos, es decir

$$W'_s = g \rho_s v_s - g \rho v_s$$

Un parámetro muy utilizado es el peso relativo de la partícula sumergida, la cual se expresa en la forma

$$\Delta = \frac{g \rho_s v_s - g \rho v_s}{g \rho v_s} = \frac{\rho_s}{\rho} - 1$$

es decir, equivale a

$$\Delta = S_s - 1$$

y por ello también se conoce como densidad relativa de la partícula sumergida.

Tamaño. El tamaño de la partícula es una de las propiedades más importantes del sedimento, pero no es fácil de definir con una sola dimensión, a menos que la partícula sea esférica o cúbica. Las partículas naturales tienen formas irregulares muy diversas y nunca alcanzan la forma esférica como para medir sólo su diámetro. Esto dificulta su clasificación, siendo necesario idear técnicas estadísticas y de laboratorio para describir adecuadamente su tamaño. Los principales criterios para precisarlo se basan en alguna de las definiciones que se mencionan a continuación.

El *diámetro nominal* de una partícula es el que tiene una esfera de igual volumen que la partícula. No interviene su forma ni su densidad y por ello, las que difieren en dichas propiedades pueden tener el mismo diámetro nominal. Esta definición es más útil en el estudio del transporte de partículas gruesas.

El *diámetro de cribado* es la amplitud que tiene la abertura de la malla por la cual se hace pasar la partícula, sin tomar en cuenta su forma real ni su densidad. Las partículas naturales muestran siempre desgaste o redondez y su diámetro de cribado es aproximadamente el 90 por ciento del diámetro nominal.

El diámetro de cribado se usa comúnmente para definir el tamaño de partículas mayores de 0.062 mm, como las arenas y gravas. Las mallas para el cribado se designan de acuerdo con su abertura exacta en mm, siendo muy importante que se ordenen para que las partículas pasen por aberturas de mayor a menor amplitud.

El *diámetro de sedimentación o equivalente* es el que tiene una esfera de igual densidad y velocidad de caída que la partícula de que se trata, al caer ambas en el mismo líquido a una temperatura conocida. Su valor estándar corresponde al obtenido con una densidad relativa de la esfera de 2.65, cayendo junto con la partícula en agua destilada a 24 °C de temperatura.

El diámetro de sedimentación se emplea con frecuencia para definir el tamaño de partículas muy finas, como las de los limos y arcillas y se determina a partir de su velocidad de caída mediante la ley de Stokes.

Se ha observado que el tamaño de 0.062 mm es el máximo que puede tener una partícula para caer dentro del agua siguiendo la ley de Stokes, ya que un tamaño mayor provoca turbulencias en la caída que alteran mucho el cumplimiento de dicha ley. El tamaño mencionado corresponde a un límite natural entre los limos y las arenas, y en muchos casos, define la frontera entre el material arrastrado y el transportado permanentemente en suspensión.

Las partículas de tamaño menor de 0.2 micras constituyen la ultra-arcilla o coloide y pueden permanecer en suspensión indefinidamente (excepto cuando forman grumos) ya que su peso influye poco. Por tanto, su proceso de sedimentación tampoco sigue la ley de Stokes.

Otra definición de tamaño se hace en términos de las dimensiones triaxiales de la partícula que representen su largo, ancho y espesor. La menor de ellas es comparable a la que se obtiene como tamaño al cribar la muestra.

En resumen, el tamaño de partículas sedimentarias, como las gravas y arenas, se obtiene normalmente midiéndolo en forma directa mediante la criba de muestras y cuando se trata de limos y arcillas, mediante el proceso de sedimentación.

Existen varios criterios para clasificar las partículas por su tamaño. En el caso de suelos es común el sistema unificado de clasificación (SUC) propuesto en la referencia 3. En el caso de sedimentos en ríos es más común la clasificación propuesta por la American Geophysical Union que se presenta en la tabla 7.1, en la cual los tamaños siguen una progresión geométrica que facilita su memorización.

Tabla 7.1. Clasificación de los materiales sedimentarios, según *American Geophysical Union* (referencia 3)

Grupo	Clase	Tamaño en mm	
Bolos	muy grandes	2048	- 4096
	grandes	1024	- 2048
	medianos	512	- 1024
	pequeños	256	- 512
Cantos	grandes	128	- 256
	pequeños	64	- 128
Grava	muy gruesa	32	- 64
	gruesa	16	- 32
	mediana	8	- 16
	finas	4	- 8
	muy fina	2	- 4
Arena	muy gruesa	1	- 2
	gruesa	0.5	- 1
	mediana	0.25	- 0.5
	finas	0.125	- 0.25
	muy fina	0.062	- 0.125
Limo		Stokes	
	grueso	0.031	- 0.062
	mediano	0.016	- 0.031
	fino	0.008	- 0.016
	muy fino	0.004	- 0.008
Arcilla	gruesa	0.002	- 0.004
	mediana	0.001	- 0.002
	finas	0.0005	- 0.001
	muy fina	0.00024	- 0.0005

Nota: Las partículas o fragmentos naturales de roca pueden ser angulosos o rodados, según el grado de abrasión o rodadura que hayan experimentado

Forma. Describe el aspecto o apariencia de la partícula a través del parámetro llamado *factor de forma*

$$SF = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

donde a , b y c son las dimensiones triaxiales de las partículas en orden de la mayor a la menor. Para una esfera $SF = 1$; para otras formas $SF < 1$ y en partículas naturales $SF \approx 0.7$.

El tamaño, densidad o composición mineralógica no intervienen en el factor de forma, pero éste influye de modo importante en el movimiento de las partículas que caen o se desplazan en el agua, así como en la determinación de las propiedades de otros sedimentos o suelos no cohesivos, como la compacidad o porosidad. Además, la forma influye en el poder abrasivo de las partículas en igualdad de tamaño o densidad.

La *esfericidad* de una partícula es el cociente de su diámetro nominal y la mayor de sus dimensiones triaxiales (a), es decir, compara el volumen de la partícula con el de la mayor esfera que la circunscribe, sin importar el tamaño. La esfericidad promedio de las partículas naturales varía entre 0.6 y 0.85.

La *redondez* es un parámetro que trata de medir el deterioro que ha sufrido la partícula al moverse desde su sitio de origen y tampoco está supeditada al tamaño. Cuando se dispone de la geometría que proyecta la partícula en su posición más estable (la menor dimensión triaxial orientada verticalmente), la redondez se define como el cociente del radio promedio de curvatura del contorno de la superficie proyectada y el radio del círculo máximo inscrito en dicha superficie. La redondez de la esfera vale 1 y la de las partículas minerales varía entre 0.3 y 0.8. Una partícula que muestra angulosidades tiene poca redondez porque ha viajado relativamente poco y no ha sufrido desgaste. En cambio, la partícula tiene gran redondez, aunque sea de forma alargada, cuando sus aristas, bordes y esquinas se han redondeado por el desgaste.

A pesar de no supeditarse al tamaño, la redondez en los sedimentos de los ríos crece al aumentar la esfericidad y ambas aumentan con el tamaño, si bien la redondez altera poco la esfericidad y en la práctica no influye en el comportamiento dinámico de las partículas. Un valor grande de la redondez aumenta el poder abrasivo del sedimento, lo cual tiene mayor importancia cuando el agua lo transporta en conductos cerrados.

Velocidad de caída. Es la velocidad máxima uniforme que alcanza una partícula al caer dentro del agua cuando se logra el equilibrio dinámico entre su peso sumergido y la fuerza de resistencia acorde con dicha velocidad que el agua opone en su caída.

La velocidad de caída depende del tamaño y forma de la partícula y la ecuación general para una de forma esférica es

$$\omega = \left[\frac{4}{3} \frac{1}{C_D} (S_s - 1) g d \right]^{1/2} \quad (7.2)$$

donde

- d diámetro de la partícula en m
- C_D coeficiente de arrastre (sin dimensiones)
- S_s densidad relativa de sólidos (sin dimensiones)
- ω velocidad de caída de la partícula en m/s.

El coeficiente de arrastre depende del número de Reynolds: $\mathbf{R}_\omega = \omega d/\nu$, donde ν es la viscosidad cinemática del agua en m^2/s . En flujo laminar ($\mathbf{R}_\omega < 1$) vale la ley de Stokes

$$C_D = \frac{24}{\mathbf{R}_\omega} \quad (7.3)$$

(aproximadamente para $d < 0.2$ mm) y la ecuación 7.2 se convierte en

$$\omega = \frac{1}{18 \nu} [S_s - 1] g d^2 \quad (7.4)$$

Cuando $\mathbf{R}_\omega < 800$, C_D se estima de la ecuación de Schiller

$$C_D = \frac{24}{\mathbf{R}_\omega} [1 + 0.15 \mathbf{R}_\omega^{0.687}] \quad (7.5)$$

y cuando $1000 < \mathbf{R}_\omega < 10000$, $C_D = 4$.

La velocidad de caída de las partículas naturales se determina en laboratorio, pero existen ecuaciones empíricas para estimarla, como la propuesta por Rubey

$$\omega = \left[\frac{2}{3} g (S_s - 1) d + \left(\frac{6 \nu}{d} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{6 \nu}{d} \quad (7.6a)$$

la cual tiene mayor aplicación cuando el factor de forma $SF = 0.7$ y es dimensionalmente homogénea.

La forma adimensional de dicha ecuación es

$$\mathbf{F}_\omega = \left[\frac{2 (S_s - 1)}{3 (1 + 12/\mathbf{R}_\omega)} \right]^{1/2} \quad (7.6b)$$

donde $\mathbf{F}_\omega = \omega / \sqrt{gd}$ y es útil para la similitud en modelos fluviales.

En la figura 7.1a se muestra la representación gráfica de la ecuación de Rubey (referencia 1) para granos de cuarzo ($S_s = 2.65$), pero puede utilizarse con la mayoría de los sedimentos en la práctica.

Cuando $d > 2$ mm, la velocidad de caída de las partículas se obtiene de la ecuación

$$\omega = 0.806 \sqrt{g (S_s - 1) d} \quad (7.7)$$

Otro procedimiento para estimar la velocidad de caída de las partículas naturales fue propuesto por la Inter-Agency Committee in Water Resources y toma en cuenta su factor de forma y la temperatura del agua, de acuerdo con la presentación gráfica de la figura 7.1b.

Ejemplo 7.1. Determinar la velocidad de caída de una partícula de cuarzo, cuya densidad relativa es $S_s = 2.65$ y su tamaño $d = 0.40$ mm, que cae en agua a 20°C de temperatura, considerándola: *a)* esférica; *b)* como partícula natural.

Solución a. La viscosidad cinemática del agua a la temperatura dada es $\nu = 1.007 \times 10^{-6}$ m²/s y su densidad de 978.9 N s²/m⁴. El diámetro de la partícula es $d = 0.0004$ m.

Debido a que C_D depende de \mathbf{R}_ω y éste al principio se desconoce, se supone $C_D = 8$ y de la ecuación 7.2.

$$\omega = \left[\frac{4}{3} \frac{1}{8} \left(\frac{2650}{978.9} - 1 \right) 9.81 (0.0004) \right]^{1/2} = 0.0334 \text{ m/s}$$

con la cual se obtiene

$$\mathbf{R}_\omega = \frac{0.0334 (0.0004)}{1.007 \times 10^{-6}} = 13.272$$

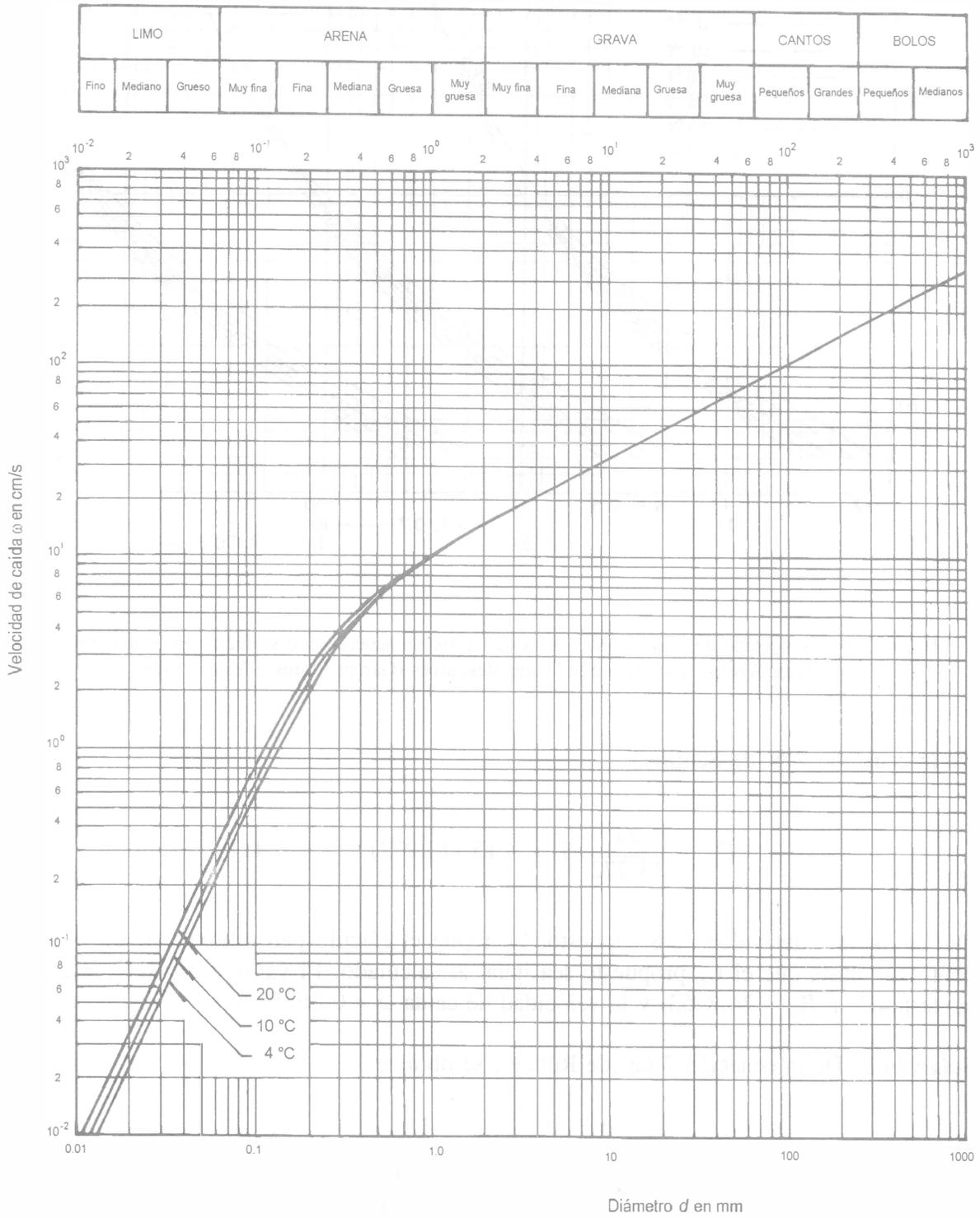


Figura 7.1a. Velocidad de caída de partículas naturales de cuarzo, según Rubey (García Flores y Maza, 1966)

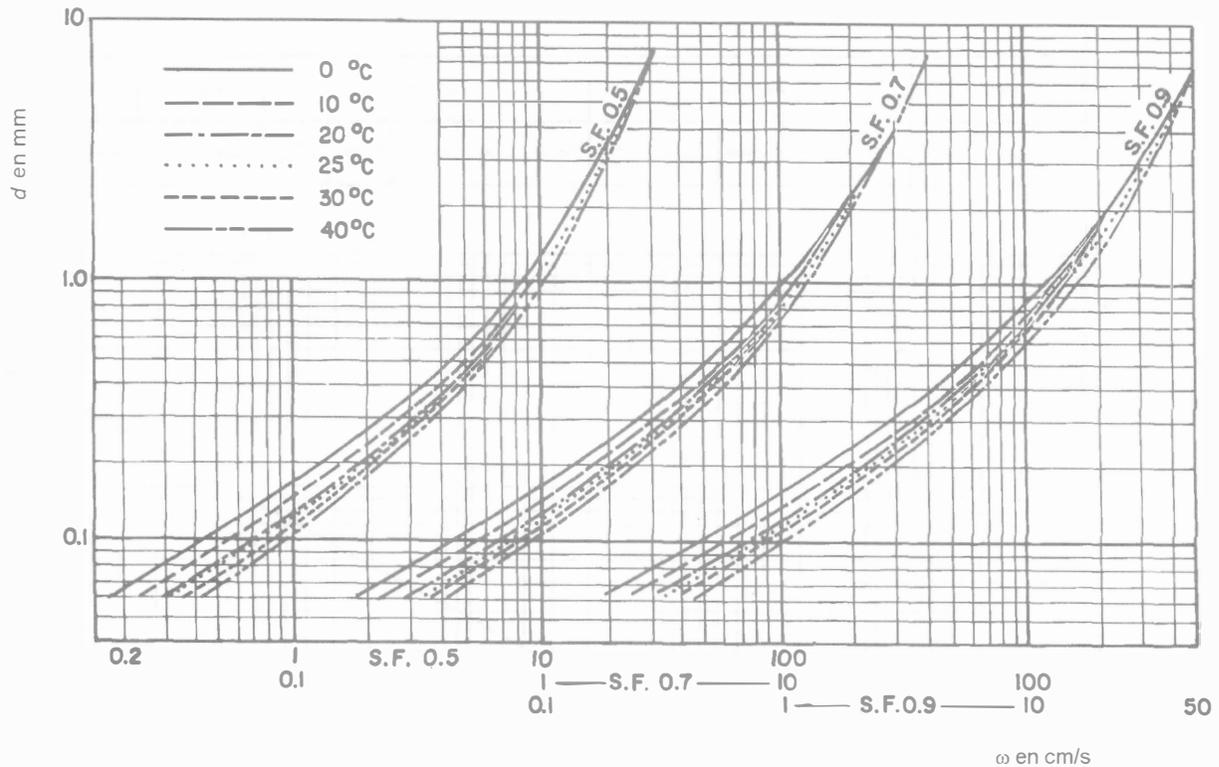


Figura 7.1b. Velocidad de caída de partículas de cuarzo de acuerdo con su factor de forma (SF), según Inter Agency Committee in Water Resources (García Flores y Maza, 1996)

De la ecuación 7.5 (de Schiller)

$$C_D = \frac{24}{13.272} [1 + 0.15 (13.272)^{0.687}] = 3.411$$

que es distinto del valor de 8 supuesto. Se repite el cálculo pero ahora con $C_D = 3.41$ y se continúa hasta que el C_D propuesto sea igual al calculado. El valor final es $C_D = 2.283$, que corresponde a $R_\omega = 24.8453$, y la velocidad de caída $\omega = 0.06255$ m/s.

Solución b. De la ecuación 7.6a (de Rubey), se obtiene

$$\omega = \left\{ \frac{2}{3} (9.81) (2.65 - 1) (0.0004) + \left[\frac{6 (1.007 \times 10^{-6})}{(0.0004)} \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{6 (1.007 \times 10^{-6})}{0.0004}$$

$$\omega = 0.05231 \text{ m/s}$$

de menor magnitud que el de la partícula esférica. El mismo valor se lee en la figura 7.1.

7.2.4 Propiedades de un conjunto de partículas en una muestra

El material que caracteriza un tramo de canal o río lo determina el promedio de las diversas muestras tomadas en distintos puntos de los perfiles transversal y longitudinal del tramo en cuestión, siendo necesario conocer las propiedades representativas de cada muestra.

El volumen total v_t de una muestra del suelo se forma de una parte v_s de sólidos, otra v_w ocupada por agua y otra v_v de vacíos ocupada por aire, a las que suele llamarse fase sólida, fase líquida y fase gaseosa en el suelo, respectivamente. La proporción entre ellas es variable; cuando $v_w = 0$, el volumen de vacíos crece y el aire ocupa totalmente el volumen ($v_w + v_v$), es decir, el material contenido en la muestra está seco. Cuando $0 < v_w < (v_v + v_w)$ el material de la muestra está parcialmente saturado; cuando $v_v = 0$, el agua ocupa totalmente el volumen ($v_w + v_v$) y el material de la muestra está totalmente saturado o sumergido.

En la tabla 7.2 se presenta el resumen de las propiedades más importantes del suelo en una muestra.

7.2.5 Propiedades del agua con material en suspensión

El agua de los ríos acarrea partículas finas en suspensión, como las arcillas y limos, cuyo análisis se efectúa para determinar las distintas fracciones del material fino contenido en una muestra. Las propiedades más importantes de la mezcla en dichas condiciones se exponen a continuación y con mayor detalle en la tabla 7.3.

Concentración de partículas. Cuantifica la cantidad de partículas de sedimento fino en suspensión contenido en una muestra de agua, sin incluir materia vegetal ni sólidos o minerales disueltos. Por ello, la muestra se tiene que filtrar o decantar para separar el material sólido, ya que si el agua se evapora quedarían las sales disueltas. Existen cuatro variantes de la concentración, como se presentan en la tabla 7.3.

Densidad de la mezcla. Es la densidad de la mezcla agua-material en suspensión y se obtiene de las cuatro expresiones distintas de la tabla 7.3, según la definición de concentración que se use, pero que obviamente conducen al mismo resultado. En el laboratorio se determina con un hidrómetro.

Viscosidad de la mezcla. Difiere de la del agua pura en la medida que aumenta la concentración, como se presenta en la tabla 7.3.

Ejemplo 7.2. En una muestra de un dm^3 de agua de río, se encontraron sedimentos cuyo peso seco fue de 1.88 N (191.7 g_f) y su densidad relativa de 2.65. a) Determinar la concentración de sedimentos, tanto en peso como en volumen, de acuerdo con las distintas definiciones empleadas en la tabla 7.3. b) Calcular la densidad y viscosidad cinemática de la muestra a 17 °C de temperatura.

Tabla 7.2. Propiedades del suelo en una muestra

Definición	Ecuación	Comentarios
<i>Densidad de sólidos.</i> Masa de sólidos entre volumen de sólidos.	$\rho_s = \frac{m_s}{v_s}$	Es la densidad de las partículas contenidas en la muestra en kg/m ³ o en N s ² /m ⁴ .
<i>Densidad relativa de sólidos.</i> Densidad de sólidos entre densidad del agua.	$S_s = \frac{\rho_s}{\rho}$	ρ es la densidad del agua a 4 °C.
<i>Densidad del suelo en la muestra.</i> Suma de la masa de sólidos y agua entre volumen total de la muestra.	$\rho_m = \frac{\rho_s v_s + \rho v_w}{v_m}$	Cambia según la proporción entre sólidos y agua. En kg/m ³ o en N s ² /m ⁴ .
<i>Densidad relativa del suelo en la muestra.</i> Similar a S_s .	$S_m = \frac{\rho_m}{\rho}$	ρ es la densidad del agua a 4 °C.
<i>Porosidad.</i> Volumen de vacíos entre el volumen total de la muestra.	$n = \frac{v_v}{v_m} = \frac{e}{1 + e}$	Es común expresarla en por ciento. e es la relación de vacíos.
<i>Relación de vacíos.</i> Volumen de vacíos entre volumen de sólidos.	$e = \frac{v_v}{v_s} = \frac{n}{1 - n}$	También se conoce como índice de poros de un suelo. n es la porosidad. En la ecuación, $v_s = v_m - v_v$.
<i>Grado de saturación de un suelo.</i> Volumen del agua entre volumen de vacíos.	$G_w = \frac{v_w}{v_v}$	Se expresa en por ciento y varía de 0 en un suelo seco a 100 por ciento en uno totalmente saturado.
<i>Contenido de agua o humedad de un suelo.</i> Masa del agua entre masa de sólidos.	$w = \frac{\rho v_w}{\rho_s v_s} = \frac{v_w}{S_s v_s}$	Suele expresarse en por ciento.
<i>Densidad del suelo seco.</i> El grado de saturación del suelo es cero, $G_w = 0$, es decir $v_w = 0$ y $\rho_m = \rho_d$.	$\rho_d = \rho_s \frac{v_s}{v_m}$ $\rho_d = (1 - n) \rho_s$ $\rho_d = \frac{\rho_s}{1 + e}$	Resulta de la ecuación de ρ_m . Resulta al considerar $v_s = v_m - v_v$ Resulta con $v_m = v_s + v_v$ en la definición de relación de vacíos.
<i>Densidad de un suelo saturado.</i> Es el valor de ρ_m cuando $G_w = 1$, (100 por ciento).	$\rho_{sat} = \frac{\rho_s v_s + \rho v_w}{v_m}$ $\rho_{sat} = \left(\frac{S_s + e}{1 + e} \right) \rho$	Resulta de la ecuación de ρ_m . Resulta con $v_v = v_w$ y la definición de relación de vacíos.
<i>Peso específico del suelo sumergido.</i> El empuje hidrostático vertical reduce el peso específico del material sólido.	$g \rho'_s = g (\rho_s - \rho)$ $g \rho'_d = g \left(\frac{\rho_s}{1 + e} - \rho \right)$	El empuje hidrostático neto es el peso del volumen del agua desalojada por los sólidos.
<i>Peso específico relativo de la materia sólida sumergida.</i>	$S'_s = S_s - 1$ $\Delta = S_s - 1$	Esta expresión se usa más en mecánica de suelos. Se usa más en hidráulica fluvial.

Tabla 7.3. Propiedades del agua con material en suspensión

Definición	Ecuación	Comentarios
1) <i>Concentración en volumen.</i> Volumen de sólidos en la muestra entre volumen total de la muestra.	$C_{s1} = \frac{v_s}{v_m}$	Se expresa en por ciento o en partes por millón (ppm) $1 \text{ ppm} = \frac{1 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3} = 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}$ $n\% \times 10^4 = n \text{ (ppm)}.$
2) <i>Concentración en masa (o en peso).</i> Hay dos variantes: a) Masa (o peso) de las partículas de sedimento entre suma de las masas (o pesos) del agua y del sedimento.(C_{s2}). b) Masa (o peso) de las partículas de sedimento entre la masa (o peso) de todo el volumen considerado como agua pura (C_{s3}).	$C_{s2} = \frac{\rho_s v_s}{\rho_s v_s + \rho v_w}$ $C_{s2} = \frac{S_s v_s}{S_s v_s + v_w}$ $C_{s3} = \frac{\rho_s v_s}{\rho (v_s + v_w)}$ $C_{s3} = \frac{S_s v_s}{v_s + v_w}$	En cualquier caso se expresa en por ciento. Cuando la concentración es muy baja, la masa (o peso) de la mezcla agua-sedimentos es casi igual a la del agua pura y $C_{s2} \approx C_{s3}$, siendo $1 \text{ ppm} = \frac{1 \text{ mg}}{1 \text{ kg}}$ $1 \text{ ppm} = 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{kg}} = 10^{-6} \frac{N}{N}$
3) <i>Concentración en masa (o peso) por unidad de volumen de la muestra.</i> Masa (o peso) de las partículas de sedimento contenido en la muestra entre el volumen total de la muestra. Cuando se expresa en por ciento de la densidad de materia sólida coincide con C_{s1} .	En masa: $C_{s4} = \frac{\rho_s v_s}{v_s + v_w}$ En peso: $C_{s4} = \frac{g \rho_s v_s}{v_s + v_w}$	Tiene las dimensiones de la densidad (o del peso específico). Suele también expresarse en partes por millón: $1 \text{ ppm} = \frac{1 \text{ mg}}{1 \text{ dm}^3}$ Cuando se conoce S_s $\frac{n \text{ (en ppm)} \times 10^{-4}}{S_s} = n \text{ en } \%$
4) <i>Densidad de la mezcla.</i> Depende de la densidad del agua, de las partículas suspendidas y de la concentración. Existen cuatro ecuaciones distintas para valorarla, según cada definición de la concentración.	$\rho_m = \rho + C_{s1} (\rho_s - \rho)$ $\rho_m = \frac{\rho}{1 - C_{s2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right)}$ $\rho_m = \rho \left[1 + C_{s3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \right]$ $\rho_m = \rho + C_{s4} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right)$	Todas las ecuaciones conducen al mismo resultado. En el laboratorio se mide con un hidrómetro.
5) <i>Viscosidad de la mezcla.</i> Cambia con la concentración en volumen C_{s1} . Cuando $C_{s1} < 0.03 \text{ m}^3/\text{m}^3$, vale la ecuación de Einstein (ecuación a). Cuando $C_{s1} > 0.03$ vale la ecuación de Ward (ecuación b).	$\mu_m = \mu (1 + 2.5 C_{s1}) \quad \text{(a)}$ $\mu_m = \mu (1 + 4.5 C_{s1}) \quad \text{(b)}$	μ_m es la viscosidad dinámica de la mezcla y μ la del agua. En ambos casos, la viscosidad cinemática es $\nu_m = \frac{\mu_m}{\rho_m} \text{ y } \nu = \frac{\mu}{\rho}$

Solución a. De acuerdo con los datos y símbolos empleados, se tiene:

$$v_m = 1 \text{ dm}^3 = 0.001 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

$$\rho_s = \rho S_s = 1000 (2.65) = 2650 \text{ N s}^2/\text{m}^4$$

$$m_s = \frac{W_s}{g} = \frac{1.88}{9.81} = 0.19164 \text{ N s}^2/\text{m}$$

$$v_s = \frac{m_s}{\rho_s} = \frac{0.19164}{2650} = 7.2317 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 0.072317 \text{ dm}^3$$

$$v_w = v_m - v_s = 1 - 0.072317 = 0.92768 \text{ dm}^3 = 92.768 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

donde m_s es la masa de sedimentos contenidos en la muestra. La masa efectiva de toda la muestra resulta

$$m_m = m_w + m_s = \rho v_w + \rho_s v_s = 1000 (92.768 \times 10^{-5}) + 2650 (7.2317 \times 10^{-5})$$

$$m_m = 1.11932 \text{ N s}^2/\text{m}$$

De la tabla 7.3, la concentración en volumen vale

$$C_{s1} = \frac{7.2317 \times 10^{-5}}{0.001} = 0.072317 = 7.2317 \%$$

O bien, $C_{s1} = 72317 \text{ ppm}$ (en volumen).

Las concentraciones en masa son

$$C_{s2} = \frac{2.65 (7.2317 \times 10^{-5})}{2.65 (7.2317 \times 10^{-5}) + 92.768 \times 10^{-5}} = 0.171211 = 17.1211 \% = 171211 \text{ ppm}$$

$$C_{s3} = \frac{2.65 (7.2317 \times 10^{-5})}{7.2317 \times 10^{-5} + 92.768 \times 10^{-5}} = 0.191641 = 19.1641 \% = 191641 \text{ ppm}$$

Finalmente, la concentración en masa por unidad de volumen

$$C_{s4} = \frac{2650 (7.2317 \times 10^{-5})}{7.2317 \times 10^{-5} + 92.768 \times 10^{-5}} = 191.6406 \text{ kg/m}^3 \text{ o } \text{N s}^2/\text{m}^4$$

O bien

$$C_{s4} = 0.1916406 \frac{\text{Mg}}{\text{m}^3} = 191640.6 \times 10^{-6} \frac{\text{Mg}}{\text{m}^3} = 191640.6 \text{ ppm}$$

la cual se puede transformar en por ciento

$$C_{s4} = \frac{191640.6 \times 10^{-4}}{2.65} = 7.2317 \% \text{ (en volumen)}$$

igual al valor de C_{s1} antes obtenido.

La densidad de la mezcla se obtiene de cualquiera de las ecuaciones en la tabla 7.3 con el mismo resultado. Por ejemplo, de la primera se obtiene

$$\rho_m = 1000 + 0.072317 (2650 - 1000) = 1119.323 \text{ kg/m}^3 \text{ o } \text{N s}^2/\text{m}^4$$

Puesto que $C_{s1} > 0.03$, la viscosidad de la mezcla se obtiene de la ecuación de Ward (tabla 7.3.) donde se considera $\mu = 1.08279 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$. Por tanto

$$\mu_m = 1.08279 \times 10^{-3} [1 + 4.5 (0.072317)] = 1.435159 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$$

O bien

$$\mu_m = 1.435159 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}$$

siendo la viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{1.435159 \times 10^{-3}}{1119.323} = 1.282167 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

O bien, $\nu = 0.012822 \text{ cm}^2/\text{s}$.

7.2.6 Distribución del tamaño en un conjunto de partículas

Cuando se analizan los fenómenos relacionados con sedimentos no cohesivos (gravas y arenas), tales como la mecánica de su transporte, inicio del arrastre, acorazamiento y resistencia al flujo, es más importante conocer la manera en que se distribuyen los tamaños de las partículas en el sedimento, que el que tiene cada partícula individual.

El análisis granulométrico de una muestra de sedimentos o de un suelo consiste en separarla en distintas fracciones que se identifican por su tamaño. Para ello se efectúa el cribado de la muestra seca, haciéndola pasar por un conjunto de por lo menos 6 cribas o mallas convenientemente espaciadas en su abertura, de mayor a menor, que retengan parte de la masa de partículas de acuerdo con dicha abertura. El peso del material retenido en cada malla permite obtener una tabla similar a la 7.4, donde se muestran los tamaños de las partículas y las frecuencias, éstas iguales a los porcentajes retenidos parciales respecto del peso total de la muestra cribada. Para formular la tabla 7.4, García Flores y Maza emplearon 18 mallas de acuerdo con las normas estadounidenses.

Tabla 7.4. Análisis granulométrico preliminar de una muestra superficial sobre el lecho de un río, realizado con 18 mallas, según García Flores y Maza (1996)

Malla No.	Abertura en mm	Peso retenido en g _f	Por ciento retenido acumulado en %	Por ciento retenido acumulado en %	Por ciento que pasa en %
1"	25.400	0.00	0.000	0.000	100.000
3/4"	19.100	21.05	0.645	0.645	99.355
1/2"	12.700	12.50	0.383	1.028	98.972
3/8"	9.520	16.09	0.493	1.521	98.479
1/4"	6.350	44.11	1.351	2.872	97.128
4	4.760	114.00	3.492	6.364	93.636
6	3.030	284.66	8.720	15.084	84.916
8	2.380	185.84	5.693	20.777	79.223
12	1.680	412.63	12.640	33.417	66.583
16	1.190	436.84	13.382	46.798	53.202
20	0.840	497.42	15.237	62.036	37.964
30	0.590	591.50	18.119	80.155	19.845
40	0.420	214.56	6.573	86.728	13.272
50	0.279	243.51	7.459	94.187	5.813
60	0.250	64.58	1.978	96.165	3.835
80	0.177	72.35	2.216	98.382	1.618
100	0.149	33.05	1.012	99.394	0.606
200	0.074	14.82	0.454	99.848	0.152
charola		1.60	0.049	100.000	0.000
		3264.47	100.000		

El porcentaje retenido por una malla determinada se calcula sumando el porcentaje retenido por la malla de que se trata con los retenidos en las mallas superiores. Se obtienen así las frecuencias relativas acumuladas (tabla 7.4).

También se determina el porcentaje de suelo o sedimentos que pasa por una cierta malla, o sea el por ciento del peso de la muestra que tiene partículas de tamaño menor o igual que la abertura de la malla en cuestión. El por ciento que pasa por una malla determinada se denomina también por ciento más fino y se calcula como la diferencia entre el 100% y el por ciento retenido acumulado correspondiente a la malla de que se trata. Se calculan así las frecuencias relativas acumuladas menores que una cierta magnitud.

La representación de la granulometría de la muestra analizada suele ser también en forma gráfica, la cual facilita la comparación de resultados de varias muestras y la selección de mallas, a través de la forma de distribución de frecuencias de los tamaños dentro de cada muestra.

Existen varias formas de representación gráfica, a saber: histograma, polígono de frecuencias relativas y polígono de frecuencias acumuladas. Las últimas son más comunes y también se conocen como curvas de distribución de frecuencias acumuladas o curvas acumulativas, pudiendo ser del tipo mayor o menor, según que la frecuencia relativa acumulada sea mayor o menor que cierto diámetro. La de tipo menor es la más empleada y se conoce comúnmente como *curva granulométrica*. Suele dibujarse con los tamaños de las partículas (aberturas de las mallas) como abscisas y la distribución de frecuencias o porcentajes como ordenadas.

El dibujo se realiza empleando distintos sistemas coordenados impresos en un papel, el cual adquiere los siguientes nombres:

- aritmético, cuando la escala de ambos ejes es aritmético;
- semilogarítmico, cuando la escala de abscisas es logarítmica y la de ordenadas es aritmética;
- logarítmico, cuando la escala de ambas coordenadas es logarítmica;
- probabilidad normal, cuando la escala de abscisas es aritmética y la de ordenadas sigue una ley de probabilidad normal o gaussiana;
- log-normal, cuando la escala de abscisas es logarítmica y la de ordenadas sigue una ley de probabilidad normal;
- de distribución circular, cuando la escala de abscisas es aritmética y la de coordenadas sigue una ley circular.

En las figuras 7.2 a 7.4 se presentan muestras sólo de los tres últimos tipos de papel, por ser los menos conocidos. Cada tipo de papel ayuda a encontrar la recta o distribución teórica que mejor se ajusta a los datos obtenidos en campo. En la figura 7.5 se comparan dos curvas de distribución obtenidas por García Flores y Maza (referencia 1), una la resultante de los datos de la tabla 7.4 con 18 mallas y la otra de la misma muestra pero con un cribado a través de sólo siete mallas. Para elaborar la figura se usó papel semilogarítmico (el más común de representación), donde las abscisas corresponden al tamaño de las partículas con los valores que aparecen en la columna 2 de las tablas y como ordenadas los de la columna 6. Los dos conjuntos de puntos que resultaron se unieron con segmentos de recta para formar dos polígonos que son parecidos entre sí.

Según García Flores y Maza, uno de los errores más comunes en el cribado consiste en emplear pocas mallas. Cuando se emplean muchas, el error resulta en la selección incorrecta de ellas. La técnica a seguir para suavizar las diferencias se puede consultar en la referencia 1, la cual permite también cerciorarse si el muestreo fue pobre o excesivo y llegar a establecer un polígono representativo de un grupo de muestras de un mismo sitio. Se llega así a la llamada *curva granulométrica característica o efectiva* del material que constituye el lecho en el tramo de un río y en la figura 7.6 se presenta con línea de trazo continuo la obtenida por García Flores y Maza con un mayor número de muestreos que el presentado en la tabla 7.4 y con su técnica de análisis. La tabla 7.5 muestra la distribución correspondiente.

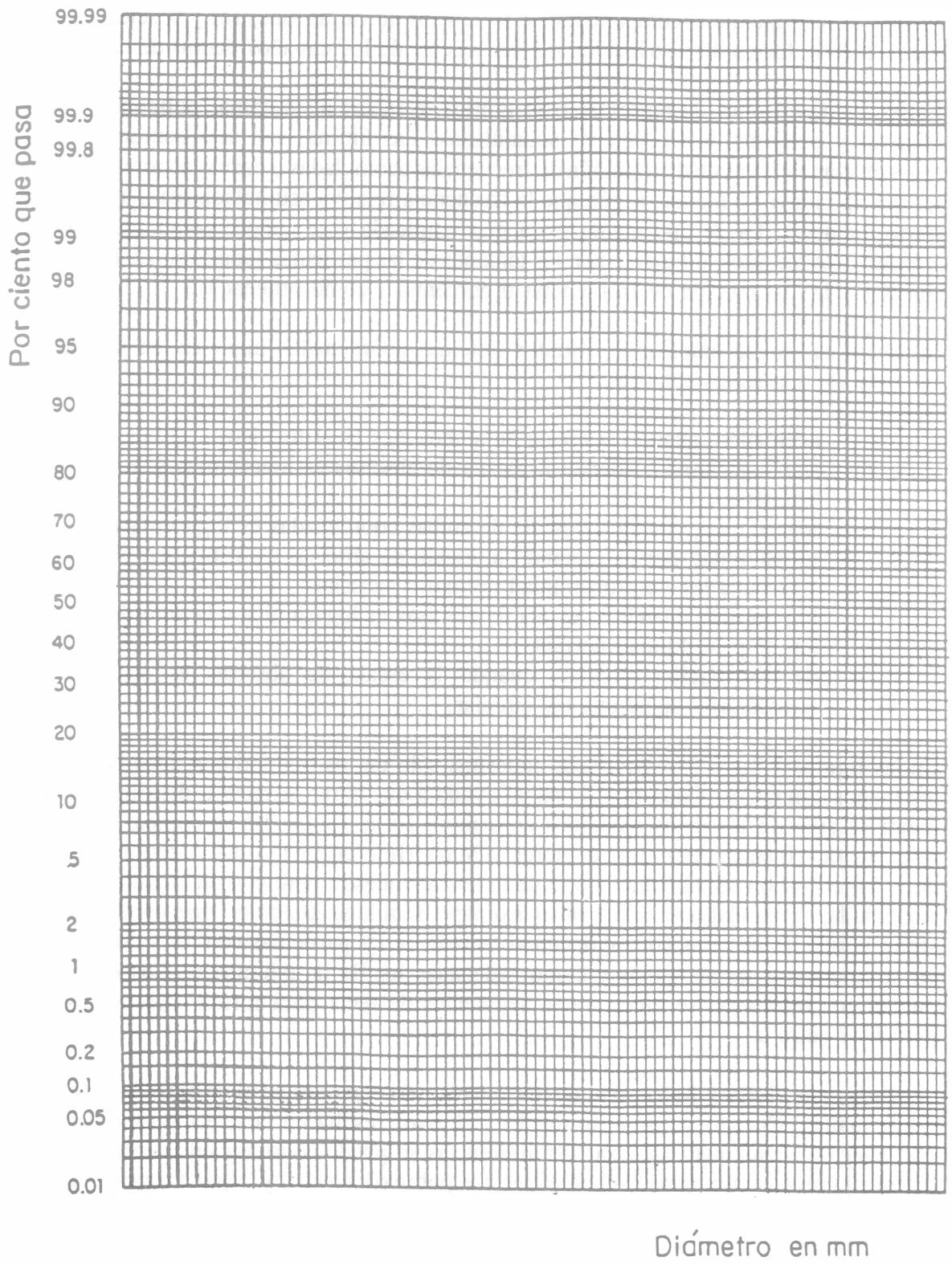


Figura 7.2. Papel para distribución de probabilidad normal

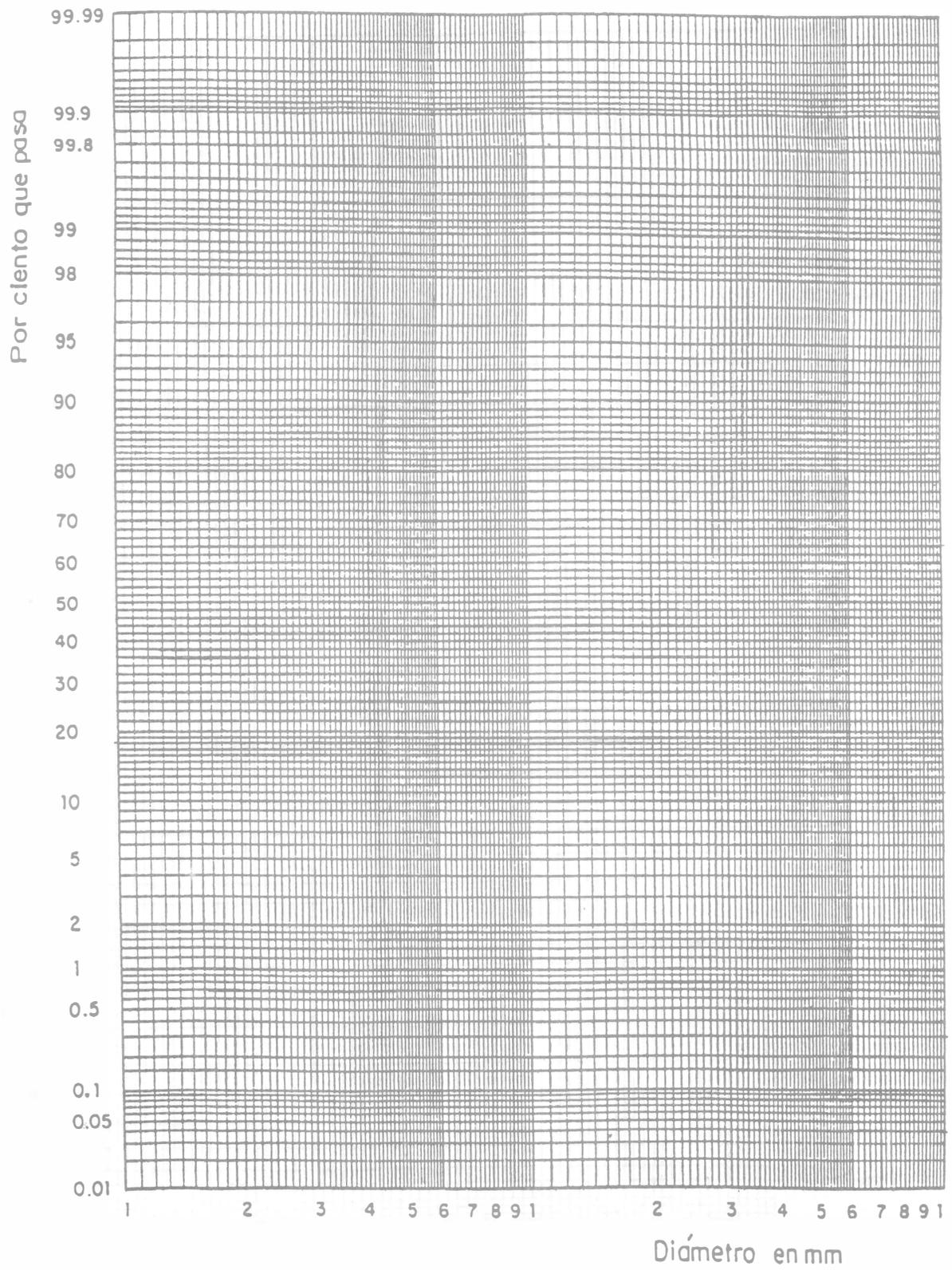


Figura 7.3. Papel para distribución de probabilidad log-normal

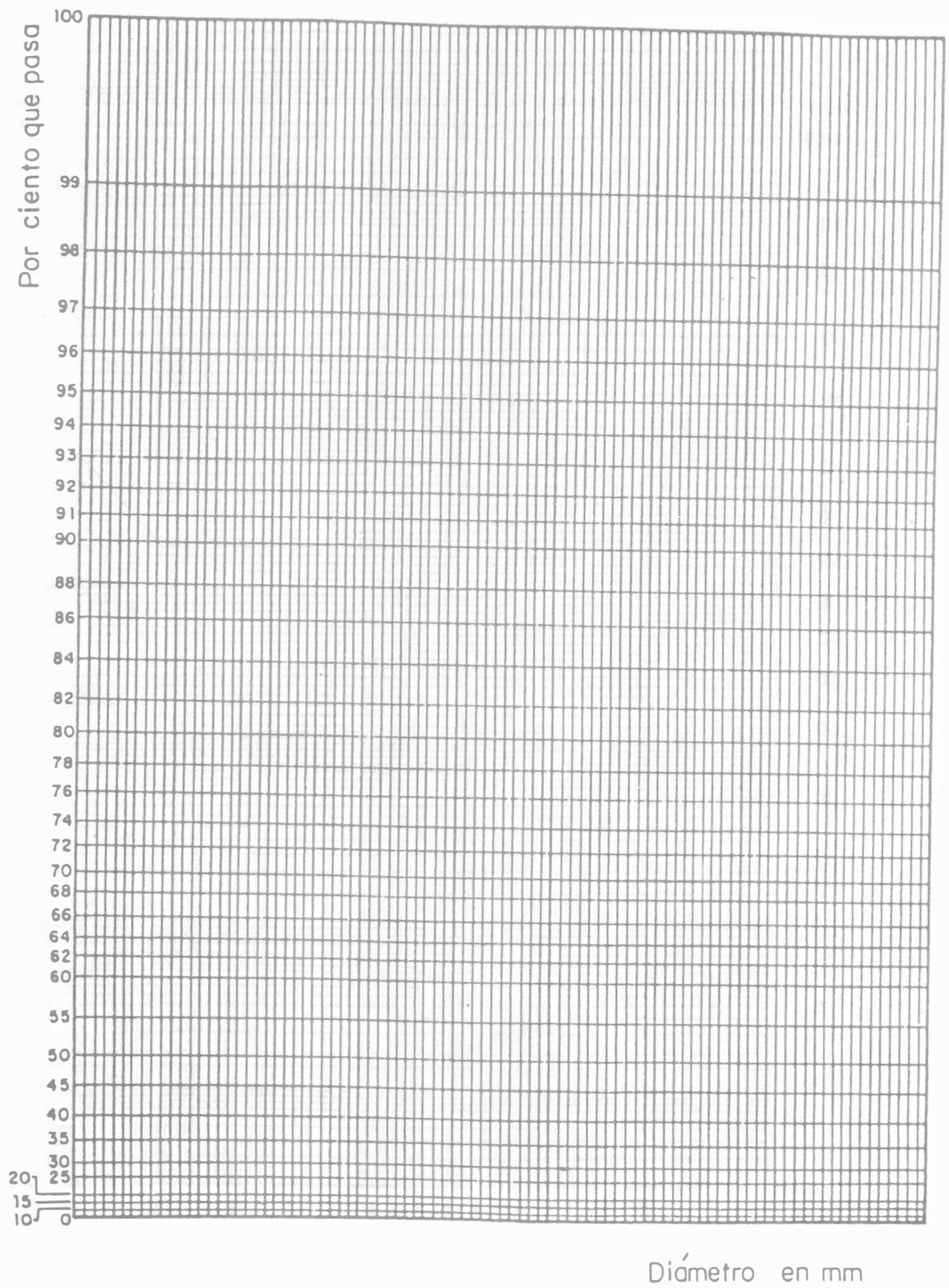


Figura 7.4. Papel para distribución circular

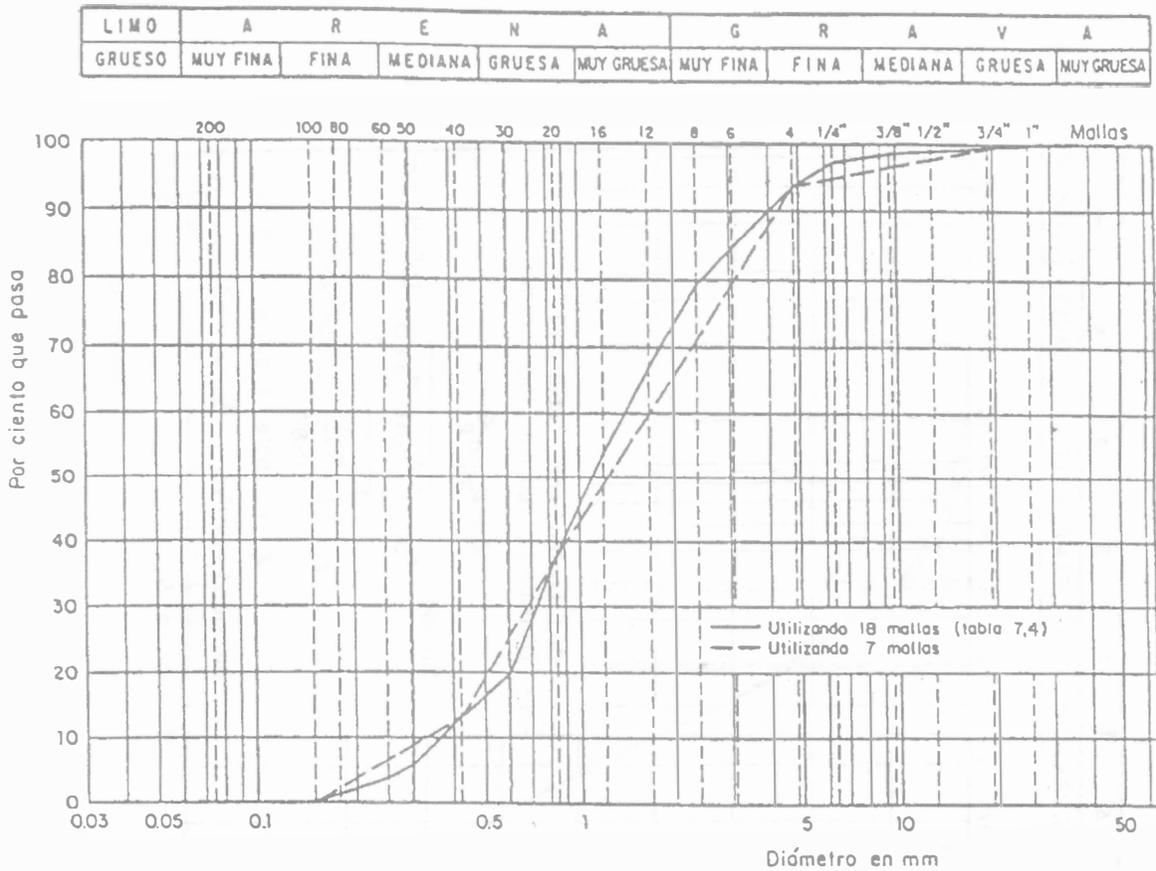


Figura 7.5. Análisis granulométrico preliminar. Selección de mallas, según García Flores y Maza (1996)

Con la notación d_i se representa al tamaño de las partículas cuyo porcentaje P_i del peso de los sedimentos o suelo tiene partículas de tamaño menor o igual a d_i . Así, por ejemplo, $d_{75} = 2.84$ mm en la figura 7.6 es un tamaño grande y significa que el 75 por ciento del peso del material tiene partículas con tamaños menores o iguales a 2.84 mm, mientras que $d_{10} = 0.49$ mm es un tamaño pequeño. Los diámetros así obtenidos se conocen como *diámetros característicos* del sedimento en cuestión. Cuando alguno de ellos se emplea para describir una ley, proceso o fenómeno determinado, se conoce como *diámetro efectivo* de las partículas que predominan en el proceso.

7.2.7 Distribuciones teóricas

Las curvas granulométricas no se distribuyen siguiendo una ley única, pero se dan abundantes casos de una tendencia definida hacia cierto tipo de *distribución teórica* de acuerdo al sedimento de que se trata, y según García Flores y Maza, los diámetros característicos obtenidos de dicha distribución son más precisos. Por ello, conviene conocer los distintos tipos de distribución teórica. La concordancia entre ambas difícilmente es perfecta, sobre todo en los extremos de la curva, lo que implica que las fracciones de material fino y / o muy grueso son las que más se

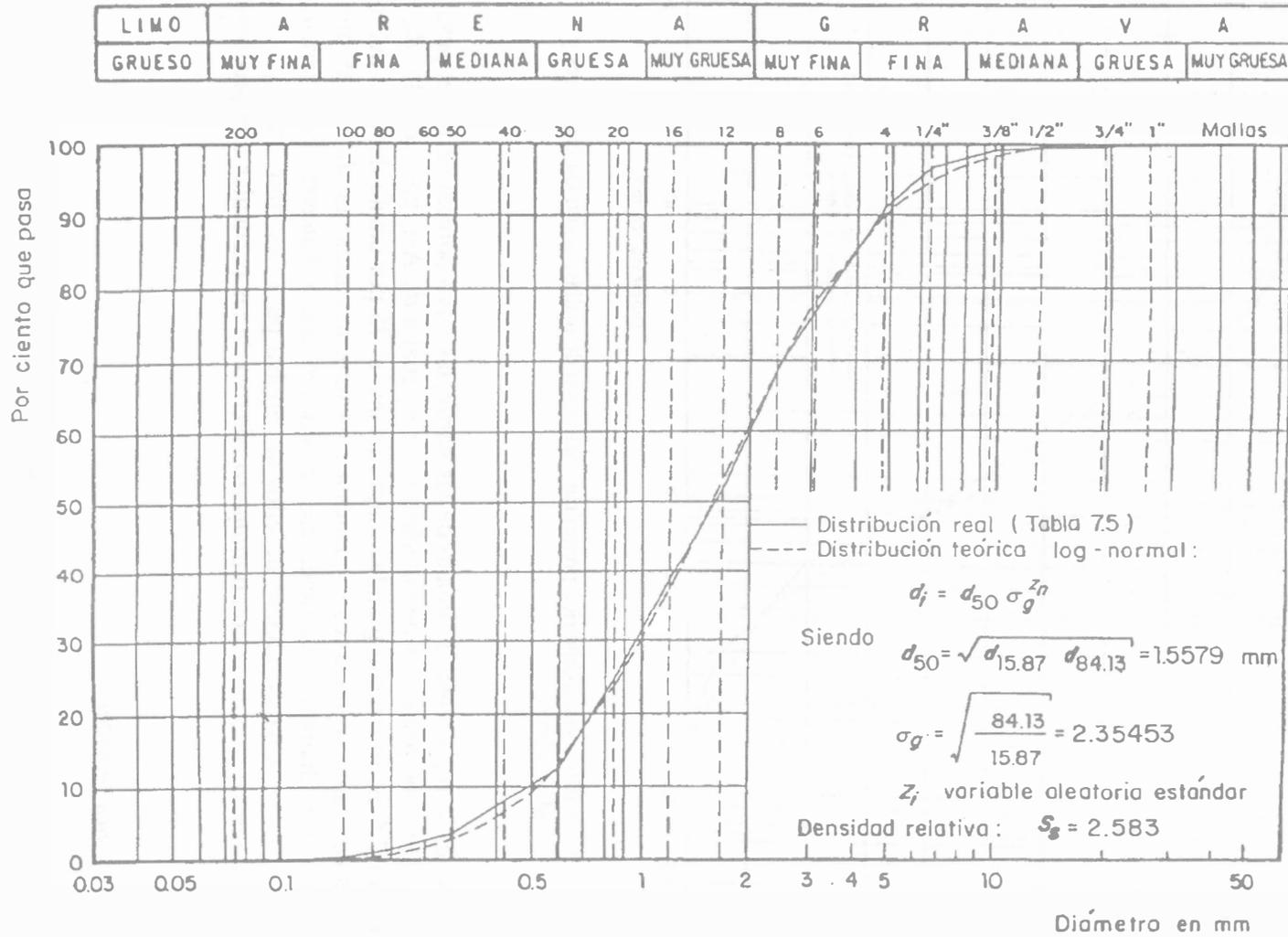


Figura 7.6. Curva granulométrica característica del sedimento de un río y la curva que corresponde a la distribución teórica de mejor ajuste, según García Flores y Maza (1996)

apartan del modelo teórico, pero muchas veces representan sólo una pequeña fracción o porcentaje del material. Por tanto, se puede hacer caso omiso de dichos extremos o colas de la curva y aceptar la validez completa del modelo, o bien acotar el intervalo en que se satisface.

Cuando los puntos no quedan exactamente alineados sobre una recta en un determinado tipo de papel (porque la distribución real se desvíe del modelo teórico), pero existe la tendencia, se está entonces ante una problema de regresión o ajuste de la recta que debe definirse siguiendo un criterio estándar, como el método de mínimos cuadrados o el de momentos.

En la tabla 7.6 se presenta las distribuciones teóricas más comunes para determinar cualquier diámetro característico de partículas de sedimento, cuando su granulometría se ajusta a alguna de ellas. Mayores detalles sobre las distribuciones teóricas se encuentran en la referencia 4. Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación de dichas distribuciones.

Tabla 7.5. Granulometría característica de todas las muestras tomadas en el lecho del mismo río de la tabla 7.4, según García Flores y Maza (1996)

Malla No.	Abertura en mm	Peso retenido en g_f	Por ciento retenido en %	Por ciento retenido acumulado en %	Por ciento que pasa en %
1"	25.400	0.00	0.000	0.000	100.000
3/4"	19.100	168.92	0.271	0.271	99.729
1/2"	12.700	200.98	0.323	0.594	99.406
3/8"	9.520	279.95	0.450	1.044	98.956
1/4"	6.350	1442.65	2.318	3.362	96.638
4	4.760	3466.24	5.569	8.931	91.069
6	3.030	8603.58	13.824	22.755	77.245
8	2.380	5230.70	8.404	31.159	68.841
12	1.680	10346.70	16.624	47.784	52.216
16	1.190	8089.95	12.998	60.782	39.218
20	0.840	9013.04	14.482	75.264	24.736
30	0.590	7641.17	12.277	87.541	12.459
40	0.420	2828.07	4.544	92.085	7.915
50	0.279	2965.99	4.766	96.851	3.149
60	0.250	561.34	0.902	97.753	2.247
80	0.177	776.22	1.247	99.000	1.000
100	0.149	345.67	0.555	99.555	0.445
200	0.074	181.73	0.292	99.847	0.153
charola		95.06	0.153	100.000	0.000
		62237.96	100.000		

Tabla 7.6. Distribuciones teóricas del tamaño de partículas en una muestra de sedimentos

Distribución y representación gráfica	Diámetro característico	Desviación estándar	d_{50} (mediana)	Comentarios
1) Normal o gaussiana. Una recta en papel de probabilidad normal. La curva de distribución es simétrica.	$d_i = d_{50} + Z_i \sigma$ <p>donde</p> Z_i variable aleatoria estándar con distribución normal, según tabla 7.7.	$\sigma = d_{84} - d_{50} = d_{50} - d_{16}$ $\sigma = \frac{1}{2} (d_{84} - d_{16}) *$	$d_{50} = \frac{1}{2} (d_{16} + d_{84}) *$	Es común en sedimentos de granos finos (limos y arenas finas uniformes) en ríos de planicie. Con los valores de d_{16} y d_{84} se genera cualquier valor de d_i . Por la simetría de la curva, media, mediana y modo coinciden: $d_{50} = d_m$.
2) Log normal. Una recta en papel log-normal. Los logaritmos de los diámetros se distribuyen según una ley normal o gaussiana, pero la curva de distribución es asimétrica.	$d_i = d_{50} (\sigma_g)^{Z_i}$ Z_i la misma variable aleatoria estándar de la tabla 7.7.	Geométrica $\sigma_g = \frac{d_{84}}{d_{50}} = \frac{d_{50}}{d_{16}}$ $\sigma_g = \left(\frac{d_{84}}{d_{16}} \right)^{1/2} *$	Geométrica $d_{50} = \sqrt{d_{16} d_{84}} *$	Es común en sedimentos con arenas y gravas en ríos de la zona intermedia. La curva de distribución es asimétrica y $d_m \neq d_{50}$ $d_m = d_{50} \exp \left[\frac{1}{2} (\ln \sigma_g)^2 \right]$ donde d_m es el diámetro medio.
3) Logarítmica. Una recta en papel semilogarítmico.	$d_i = d_{50} \sigma_g^{P_i}$	Geométrica $\sigma_g = \frac{d_{84}}{d_{50}} = \frac{d_{50}}{d_{16}}$ $\sigma_g = \left(\frac{d_{84}}{d_{16}} \right)^{1/2} *$	Geométrica $d_{50} = \sqrt{d_{16} d_{84}}$	P_i variable cuyo valor depende del porcentaje i que corresponda al diámetro por calcular $P_i = \frac{i - 50}{34}$
4) Log-log. Una recta en papel logarítmico.	$d_i = d_{50} \sigma_g^{q_i}$ $q_i = 4.43835 \log \left(\frac{i}{50} \right)$	Geométrica $\sigma_g = \frac{d_{84}}{d_{50}} = \left(\frac{d_{50}}{d_{16}} \right)^{0.45531}$ $\sigma_g = \left(\frac{d_{84}}{d_{16}} \right)^{0.31286}$	$d_{50} = d_{16}^{0.31286} d_{84}^{0.68714}$	q_i variable cuyo valor depende del porcentaje i que corresponde al diámetro por determinar $q_i = 4.43835 \log \left(\frac{i}{50} \right)$
5) Circular. Una recta en papel de distribución circular.	$d_i = d_M \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{i}{100} \right)^2} \right]$ d_M diámetro máximo de la partícula			Es común en sedimentos con materiales gruesos o rocosos, en cauces de zonas montañosas de pendiente muy grande y secciones relativamente estrechas.

* Se deben utilizar propiamente $d_{15,87}$ y $d_{84,13}$, que son los valores en la tabla 7.7 para $Z_i = -1$ y $Z_i = 1$, puntos de inflexión en la curva de Gauss.

Tabla 7.7. Función de distribución normal o de Gauss, valor de Z_i

q, P_i	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	q, P_i
0.00	∞	3.09023	2.87816	2.74778	2.65207	2.57583	2.51214	2.45726	2.40892	2.36562	2.32635	0.99
0.01	2.32635	2.29037	2.25713	2.22621	2.19729	2.17009	2.14441	2.12007	2.09693	2.07485	2.05375	0.98
0.02	2.05375	2.03352	2.01409	1.99539	1.97737	1.95996	1.94313	1.92684	1.91104	1.89570	1.88079	0.97
0.03	1.88079	1.86630	1.85218	1.83842	1.82501	1.81191	1.79912	1.78661	1.77438	1.76241	1.75069	0.96
0.04	1.75069	1.73920	1.72793	1.71689	1.70604	1.69540	1.68494	1.67466	1.66456	1.65463	1.64485	0.95
0.05	1.64485	1.63523	1.62576	1.61644	1.60725	1.59819	1.58927	1.58047	1.57179	1.56322	1.55477	0.94
0.06	1.55477	1.54643	1.53820	1.53007	1.52204	1.51410	1.50626	1.49851	1.49085	1.48328	1.47579	0.93
0.07	1.47579	1.46838	1.46106	1.45381	1.44603	1.43953	1.43250	1.42554	1.41865	1.41183	1.40507	0.92
0.08	1.40507	1.39838	1.39174	1.38517	1.37866	1.37220	1.36581	1.35946	1.35317	1.34694	1.34076	0.91
0.09	1.34076	1.33462	1.32854	1.32251	1.31652	1.31058	1.30469	1.29884	1.29303	1.28727	1.28155	0.90
0.10	1.28155	1.27587	1.27024	1.26464	1.25908	1.25357	1.24808	1.24264	1.23723	1.23186	1.22653	0.89
0.11	1.22653	1.22123	1.21596	1.21072	1.20553	1.20036	1.19522	1.19012	1.18504	1.18000	1.17499	0.88
0.12	1.17499	1.17000	1.16505	1.16012	1.15522	1.15035	1.14551	1.14069	1.13590	1.13113	1.12639	0.87
0.13	1.12639	1.12168	1.11699	1.11232	1.10768	1.10306	1.09847	1.09390	1.08935	1.08482	1.08032	0.86
0.14	1.08032	1.07584	1.07138	1.06694	1.06252	1.05812	1.05374	1.04939	1.04505	1.04073	1.03643	0.85
0.15	1.03643	1.03215	1.02789	1.02365	1.01943	1.01522	1.01103	1.00686	1.00271	0.99858	0.99446	0.84
0.16	0.99446	0.99036	0.98627	0.98220	0.97815	0.97411	0.97009	0.96609	0.96210	0.95812	0.95416	0.83
0.17	0.95416	0.95022	0.94629	0.94238	0.93848	0.93458	0.93072	0.92686	0.92301	0.91918	0.91537	0.82
0.18	0.91537	0.91156	0.90777	0.90399	0.90023	0.89647	0.89273	0.88901	0.88529	0.88159	0.87790	0.81
0.19	0.87790	0.87422	0.87055	0.86689	0.86325	0.85962	0.85600	0.85239	0.84879	0.84520	0.84162	0.80
0.20	0.84162	0.83805	0.83450	0.83095	0.82742	0.82390	0.82038	0.81687	0.81338	0.80990	0.80642	0.79
0.21	0.80642	0.80296	0.79950	0.79606	0.79262	0.78919	0.78577	0.78237	0.77897	0.77557	0.77219	0.78
0.22	0.77219	0.76882	0.76546	0.76210	0.75875	0.75542	0.75208	0.74876	0.74545	0.74214	0.73885	0.77
0.23	0.73885	0.73556	0.73228	0.72900	0.72574	0.72248	0.71923	0.71599	0.71275	0.70952	0.70630	0.76
0.24	0.70630	0.70309	0.69988	0.69668	0.69349	0.69031	0.68713	0.68396	0.68080	0.67764	0.67449	0.75
0.25	0.67449	0.67135	0.66821	0.66508	0.66196	0.65884	0.65573	0.65262	0.64952	0.64643	0.64335	0.74
0.26	0.64335	0.64027	0.63719	0.63412	0.63106	0.62801	0.62496	0.62191	0.61887	0.61584	0.61281	0.73
0.27	0.61281	0.60979	0.60678	0.60376	0.60076	0.59776	0.59477	0.59178	0.58879	0.58581	0.58284	0.72
0.28	0.58284	0.57987	0.57691	0.57395	0.57100	0.56805	0.56511	0.56217	0.55924	0.55631	0.55338	0.71
0.29	0.55338	0.55047	0.54755	0.54464	0.54174	0.53884	0.53594	0.53305	0.53016	0.52728	0.52440	0.70
0.30	0.52440	0.52153	0.51866	0.51579	0.51293	0.51007	0.50722	0.50437	0.50153	0.49869	0.49585	0.69
0.31	0.49585	0.49302	0.49019	0.48736	0.48454	0.48173	0.47891	0.47610	0.47330	0.47050	0.46770	0.68
0.32	0.46770	0.46490	0.46211	0.45933	0.45654	0.45376	0.45099	0.44821	0.44544	0.44268	0.43991	0.67
0.33	0.43991	0.43715	0.43440	0.43164	0.42889	0.42615	0.42340	0.42066	0.41793	0.41519	0.41246	0.66
0.34	0.41246	0.40974	0.40701	0.40429	0.40157	0.39886	0.39614	0.39343	0.39073	0.38802	0.38532	0.65
0.35	0.38532	0.38262	0.37993	0.37723	0.37454	0.37186	0.36917	0.36649	0.36381	0.36113	0.35846	0.64
0.36	0.35846	0.35579	0.35312	0.35045	0.34779	0.34513	0.34247	0.33981	0.33716	0.33450	0.33185	0.63
0.37	0.33185	0.32921	0.32656	0.32392	0.32128	0.31864	0.31600	0.31337	0.31074	0.30811	0.30548	0.62
0.38	0.30548	0.30286	0.30023	0.29761	0.29499	0.29237	0.28976	0.28715	0.28454	0.28193	0.27932	0.61
0.39	0.27932	0.27671	0.27411	0.27151	0.26891	0.26631	0.26371	0.26112	0.25853	0.25594	0.25335	0.60
0.40	0.25335	0.25076	0.24817	0.24559	0.24301	0.24043	0.23785	0.23527	0.23269	0.23012	0.22754	0.59
0.41	0.22754	0.22497	0.22240	0.21983	0.21727	0.21470	0.21214	0.20957	0.20701	0.20445	0.20189	0.58
0.42	0.20189	0.19934	0.19678	0.19422	0.19167	0.18912	0.18657	0.18402	0.18147	0.17892	0.17637	0.57
0.43	0.17637	0.17383	0.17128	0.16874	0.16620	0.16366	0.16112	0.15858	0.15604	0.15351	0.15097	0.56
0.44	0.15097	0.14843	0.14590	0.14337	0.14084	0.13830	0.13577	0.13324	0.13072	0.12819	0.12566	0.55
0.45	0.12566	0.12314	0.12061	0.11809	0.11556	0.11304	0.11052	0.10799	0.10547	0.10295	0.10043	0.54
0.46	0.10043	0.09791	0.09540	0.09288	0.09036	0.08784	0.08533	0.08281	0.08030	0.07778	0.07527	0.53
0.47	0.07527	0.07276	0.07024	0.06773	0.06522	0.06271	0.06020	0.05768	0.05517	0.05266	0.05015	0.52
0.48	0.05015	0.04764	0.04513	0.04263	0.04012	0.03761	0.03510	0.03259	0.03008	0.02758	0.02507	0.51
0.49	0.02507	0.02256	0.02005	0.01755	0.01504	0.01253	0.01003	0.00752	0.00501	0.00251	0.00000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	



$Z_i < 0$ si $P < 0.5$ y $Z_i > 0$ si $P > 0.5$

Ejemplo 7.3. La granulometría de un cauce sigue una ley de distribución normal y se conocen: $d_{84} = 0.33$ mm y $d_{50} = 0.25$ mm. Determinar los diámetros d_{16} y d_{65} de la muestra.

Solución. Para la distribución normal, de la tabla 7.6 se tiene

$$d_{16} = 2 d_{50} - d_{84} = 2 (0.25) - 0.33 = 0.17 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (0.33 - 0.17) = 0.08 \text{ mm}$$

Para obtener d_{65} , en la tabla 7.7 se busca el valor de Z_{65} que corresponde a 0.65 del área bajo la curva de Gauss y se encuentra que $Z_{65} = 0.38352$ y también $Z_{35} = -0.38532$, es decir, $Z_{65} = -Z_{35}$ por la simetría de la curva. Por tanto

$$d_{65} = d_{50} + Z_{65} \sigma = 0.25 + 0.3853 (0.08) = 0.281 \text{ mm}$$

$$d_{35} = 0.25 - 0.38532 (0.08) = 0.219 \text{ mm}$$

Se deja al lector calcular el valor d_{16} antes obtenido, pero mediante la ecuación del diámetro característico y explicar la diferencia de resultados, si la hay.

Ejemplo 7.4. El sedimento de un cauce tiene granulometría tipo log-normal con $d_{50} = 1.5$ mm y $\sigma_g = 2.8$. Determinar los diámetros d_{84} , d_{16} , d_{75} , d_{90} y d_m .

Solución. Para la distribución log-normal, de la tabla 7.6

$$d_{84} = \sigma_g d_{50} = 2.8 (1.5) = 4.2 \text{ mm}$$

$$d_{16} = d_{50} / \sigma_g = 1.5 / 2.8 = 0.5357 \text{ mm}$$

Para d_{75} , de la tabla 7.7, $Z_{75} = 0.67449$ y por tanto

$$d_{75} = d_{50} (\sigma_g)^{Z_{75}} = 1.5 (2.8)^{0.67449} = 3.004 \text{ mm}$$

Para d_{90} , de la tabla 7.7, $Z_{90} = 1.28155$ y por tanto

$$d_{90} = d_{50} (\sigma_g)^{Z_{90}} = 1.5 (2.8)^{1.28155} = 5.612 \text{ mm}$$

También, el diámetro medio vale

$$d_m = 1.5 \exp \left[\frac{1}{2} (\ln 2.8)^2 \right] = 2.549 \text{ mm}$$

Ejemplo 7.5. El sedimento de un cauce tiene granulometría de tipo logarítmico, con $d_{50} = 15$ mm y $\sigma_g = 5.5$. Determinar el diámetro d_{35} .

Solución. Para la distribución logarítmica (tabla 7.6), dado que $i = 35$

$$P_{35} = \frac{35 - 50}{34} = - \frac{15}{34} = - 0.4412$$

Por tanto

$$d_{35} = d_{50} (\sigma_g)^{P_{35}} = 15 (5.5)^{-0.4412} = 7.071 \text{ mm}$$

Ejemplo 7.6. La granulometría del sedimento de un canal sigue una ley log-log, con $d_{50} = 15$ mm y $\sigma = 5.5$. Determinar d_{75} y d_{35} .

Solución. Dado que $i = 75$ y 35 respectivamente, de la tabla 7.6 se tiene

$$q_{75} = 4.43835 \log \left(\frac{75}{50} \right) = 0.7816$$

$$q_{35} = 4.43835 \log \left(\frac{35}{50} \right) = - 0.6875$$

Por tanto

$$d_{75} = 15 (5.5)^{0.7816} = 56.854 \text{ mm}$$

$$d_{35} = 15 (5.5)^{-0.6875} = 4.646 \text{ mm}$$

Ejemplo 7.7. La granulometría de un cauce es con piedras cuyo diámetro máximo es de 60 cm y sigue una ley circular. Determinar d_{75} .

Solución. De la tabla 7.6

$$d_{75} = 60 \left[1 - \sqrt{1 - \left[\frac{75}{100} \right]^2} \right] = 20.31 \text{ cm}$$

Ejemplo 7.8. Los puntos de la granulometría característica mostrados en la tabla 7.5 o en la figura 7.6 siguen fielmente una distribución log-normal. *a)* Determinar el diámetro d_{50} , la desviación σ_g y la ecuación de diámetros característicos. *b)* Determinar d_m y d_{65} .

Solución a. Después de dibujar la distribución de tamaños presentada en la tabla 7.5 o en la figura 7.6 sobre distintos tipos de papel, García Flores y Maza encontraron que los puntos se alineaban más fielmente a una recta en el papel log-normal y que ésta era la distribución teórica de mejor ajuste. A continuación se presenta la técnica seguida por los autores antes mencionados.

Se trata de definir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos de la curva granulométrica (o de la tabla 7.5), que satisface la ecuación del modelo teórico (tabla 7.6). Según Otto, los dos puntos corresponden a $d_{15.87}$ y $d_{84.13}$. El primero se localiza entre los puntos cuyas coordenadas son (0.590 mm, 12.459%) y (0.840 mm, 24.736 %), ambos leídos en la tabla 7.5. Al sustituir las coordenadas del primer punto en la ecuación correspondiente de la tabla 7.6, resulta

$$0.590 = d_{50} (\sigma_g)^{Z_{12.459}} \quad (a)$$

donde el valor de Z que corresponde al 12.459 % del área bajo la curva normal (tabla 7.7) se obtiene interpolando los valores para 12.4 % ($Z_{0.124} = -1.15522$) y 12.5 % ($Z_{0.125} = -1.15035$) (negativos porque ambos porcentajes son menores de 50 %); se obtiene $Z_{0.12459} = -1.152347$. Al sustituir este valor en la ecuación (a), resulta

$$0.590 = d_{50} (\sigma_g)^{-1.152347} \quad (b)$$

Con las coordenadas del segundo punto se llega de manera análoga a la ecuación

$$0.840 = d_{50} (\sigma_g)^{-0.682822} \quad (c)$$

Las ecuaciones (b) y (c) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es $d_{50} = 1.40413$ mm y $\sigma_g = 2.12213$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos para $d = 0.590$ mm y $d = 0.840$ m es

$$d_i = (1.40413) (2.12213)^{Z_i} \quad (d)$$

y por tanto, con $Z_{0.1587} = -1$

$$d_{15.87} = (1.40413) (2.12213)^{-1} = 0.66166 \text{ mm} \quad (e)$$

El diámetro $d_{84.13}$ se encuentra entre los puntos (3.030 mm, 77.245 %) y (4.760 mm, 91.069 %). De manera análoga, la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos es

$$d_i = (1.72368) (2.12808)^{Z_i}$$

y por tanto

$$d_{84.13} = (1.72368) (2.12808)^{+1} = 3.66812 \text{ mm}$$

En caso de que la recta de mejor ajuste se hubiera obtenido en papel semilogarítmico, la ecuación del modelo teórico sería de distribución logarítmica en la tabla 7.6 y se procedería de manera similar.

Con los valores $d_{15.87}$ y $d_{84.13}$, los valores de σ_g , d_{50} así como la ecuación de la recta de mejor ajuste a la distribución log-normal se obtienen de las ecuaciones como sigue

$$\sigma_g = \left[\frac{3.66812}{0.66166} \right]^{1/2} = 2.35453$$

$$d_{50} = [0.66166 (3.66812)]^{1/2} = 1.5579 \text{ mm}$$

$$d_i = 1.5579 (2.35453)^{Z_i} \quad (f)$$

Solución b. El diámetro medio se obtiene de la ecuación correspondiente en la tabla 7.6

$$d_m = (1.5579) \exp \left[\frac{1}{2} (\ln 2.35453)^2 \right] = 2.24791 \text{ mm}$$

Con $Z_{65} = 0.38532$ (de la tabla 7.8), se usa la ecuación (f) y resulta

$$d_{65} = (1.5579) (2.35453)^{0.38532} = 2.16691 \text{ mm}$$

pudiendo generar cualquier otro diámetro característico de manera similar.

La comparación entre la curva granulométrica real y la distribución teórica de tamaños, ambas obtenidas por García Flores y Maza, se muestran en la figura 7.6, donde se observa la bondad del modelo teórico.

7.2.8 Parámetros estadísticos

Cuando la curva granulométrica característica no sigue una distribución teórica, los diámetros característicos de interés, así como los parámetros necesarios que ayudan a describir la granulometría, se pueden calcular por técnicas estadísticas aplicadas a los datos básicos del cribado. Dichas técnicas se aplican también cuando sólo se dispone de la curva granulométrica del cribado, como la mostrada en la figura 7.7.

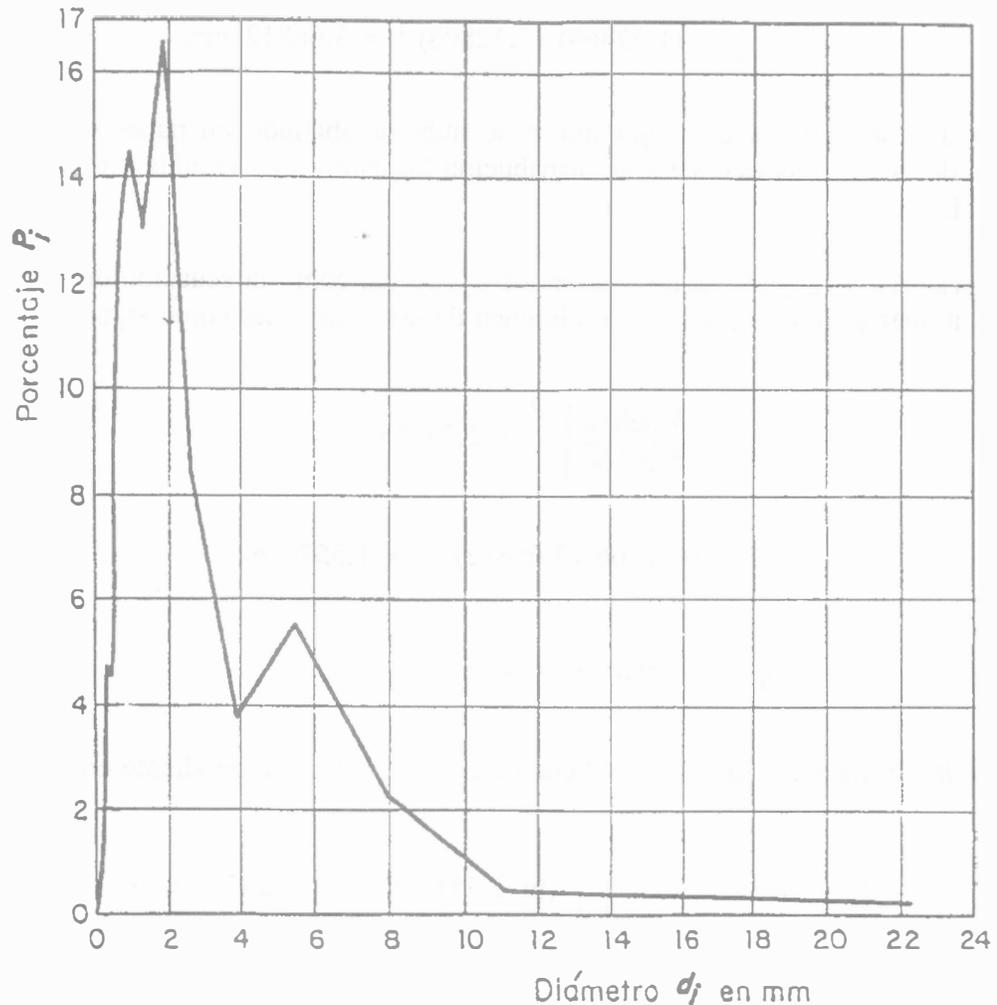


Figura 7.7. Distribución de tamaños de las partículas de sedimento a partir de la curva de distribución real mostrada en la figura 7.6, según García Flores y Maza (1996)

En la tabla 7.8 se describen los parámetros estadísticos de mayor interés cuando se dispone de la información básica del cribado, como la que se presenta en la tabla 7.5. Otros parámetros de tipo gráfico se pueden consultar en la referencia 1. Conviene para ello disponer de un dibujo de la distribución en papel aritmético que sirva para calcular parámetros estadísticos aritméticos y un papel semilogarítmico para calcular parámetros estadísticos geométricos.

Tabla 7.8. Parámetros estadísticos convenientes cuando se dispone de la información básica del cribado de una muestra, según García Flores y Maza A. (1996)

Parámetros de la distribución	Ecuación
<p>1) Media aritmética o diámetro medio. Es una medida de la tendencia central de los datos y se calcula como el primer momento respecto al origen. En la ecuación que aparece a la derecha: P_i por ciento de material retenido en cada malla; equivale a la frecuencia relativa de cada intervalo (cuarta columna de la tabla 7.5). d_i diámetro que identifica a la marca de clase de cada intervalo y es la semisuma de las aberturas de las dos mallas contiguas que definen cada intervalo.</p>	$d_m = \frac{\sum d_i P_i}{\sum P_i}$
<p>2) Mediana. También es una medida de la tendencia central de los datos y equivale al diámetro de las partículas para el cual la mitad de los datos son menores que dicho diámetro y la otra mitad mayores, es decir, d_{50}.</p>	d_{50}
<p>3) Variancia. Es una medida de dispersión de los datos y se calcula con el segundo momento respecto de la media.</p>	$\sigma^2 = \frac{\sum (d_i - d_m)^2 P_i}{\sum P_i}$
<p>4) Desviación estándar aritmética. Es la raíz cuadrada de la variancia</p>	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
<p>5) Sesgo. Mide la asimetría del conjunto de datos y define el lado donde se localiza la mayor frecuencia o cúspide de la distribución. La unimodal tiene mayor frecuencia (modo) hacia la derecha o hacia la izquierda del centro de distribución. Se calcula con el tercer momento respecto de la media y se compara con el que tiene la distribución normal (de Gauss). Cuando $a_3 = 0$ la distribución es simétrica o normal. $a_3 > 0$ la distribución está sesgada hacia la derecha y pocos valores extremos son más grandes que la mayoría de los restantes. $a_3 < 0$ la distribución está sesgada hacia la izquierda y los valores extremos se encuentran en la mitad inferior de la curva.</p>	$(S_k)_a = \frac{\sum (d_i - d_m)^3 P_i}{\sum P_i}$ <p>O bien</p> $a_3 = \frac{(S_k)_a}{\sigma^3}$
<p>6) Curtosis. Mide la esbeltez o agudeza de la distribución a través del cuarto momento respecto de la media, y se compara con el valor que tiene la distribución normal. Cuando $a_4 = 3$ distribución normal o mesocúrtica con esbeltez o agudeza moderada. $a_4 > 3$ distribución muy aguda o leptocúrtica $a_4 < 3$ distribución platicúrtica o aplanada</p>	$(K_q)_a = \frac{\sum (d_i - d_m)^4 P_i}{\sum P_i}$ $a_4 = \frac{(K_q)_a}{\sigma^4}$

Tabla 7.9 Cálculo de parámetros estadísticos de la tabla 7.8 utilizando los datos de la tabla 7.5, según García Flores y Maza (1996)

Abertura en mm	d_i en mm	P_i en %	$d_i (P_i)$ en mm	$P_i (d_i - d_m)^2$ en mm ²	$P_i (d_i - d_m)^3$ en mm ³	$P_i (d_i - d_m)^4$ en mm ⁴
25.400						
19.100	22.2500	0.271	6.0298	108.6664	2175.9958	43573.3530
12.700	15.9000	0.323	5.1357	60.3989	825.9283	11294.2037
9.520	11.1100	0.450	4.9995	35.5209	315.5876	2803.8558
6.350	7.9350	2.318	18.3933	75.5646	431.4403	2463.3332
4.760	5.5550	5.569	30.9358	61.7377	205.5591	684.4207
3.030	3.8950	13.824	53.8445	38.5333	64.3336	107.4086
2.380	2.7050	8.404	22.7328	1.9327	0.9268	0.4445
1.680	2.0300	16.624	33.7467	0.6350	- 0.1241	0.0243
1.190	1.4350	12.998	18.6521	8.1211	- 6.4193	5.0741
0.840	1.0150	14.482	14.6992	21.2186	- 25.6839	31.0889
0.590	0.7150	12.277	8.7781	28.0092	- 42.3063	63.9012
0.420	0.5050	4.544	2.2947	13.4499	- 23.1398	39.8106
0.279	0.3495	4.766	1.6657	16.7723	- 31.4639	59.0245
0.250	0.2645	0.902	0.2386	3.4685	- 6.8014	13.3372
0.177	0.2135	1.247	0.2662	5.0477	- 10.1558	20.4328
0.149	0.1630	0.555	0.0905	2.3608	- 4.8690	10.0420
0.074	0.1115	0.292	0.0326	1.3049	- 2.7584	5.8312
0.037	0.0555	0.153	0.0085	0.7204	- 1.5633	3.3922
Suma			222.5443	483.4629	3864.4863	61178.9787
$d_m = \frac{222.5443}{100} = 2.225 \text{ mm}$						
$\sigma^2 = \frac{483.4629}{100} = 4.835 \text{ mm}^2; \quad \sigma = 2.199 \text{ mm}$						
$a_3 = \frac{1}{100} \left[\frac{3864.4863}{(2.1988)^3} \right] = 3.635 > 0 \text{ hacia la derecha}$						
$a_4 = \frac{1}{100} \left[\frac{61178.9787}{(2.1988)^2} \right] = 26.173 > 3 \text{ leptocúrtica}$						

Tabla 7.10. Parámetros estadísticos convenientes cuando se cuente sólo con la curva granulométrica en papel semilogarítmico, según García Flores y Maza (1996)

Parámetros y descripción	Ecuación
1) Media aritmética o diámetro medio.	$d_m = \frac{\sum \Delta P_i d_i}{\sum \Delta P_i}$
2) Mediana. Es el diámetro d_{50} leído de la curva granulométrica.	
3) Desviación estándar.	$\sigma = \frac{d_{84} - d_{16}}{2}$
4) Sesgo. Se expresa en forma dimensional o adimensional, con las mismas consideraciones para el valor de a_3 expresadas en la tabla 7.8.	$(S_k)_a = \frac{1}{2} (d_{75} + d_{25} - 2d_{50})$ $S_k = \frac{(S_k)_a}{\sigma}$
5) Curtosis. Con las mismas consideraciones de la tabla 7.8, pero ahora, cuando: $(K_q)_a = 0.2631$ distribución normal o mesocúrtica con esbeltez o agudeza moderada. $(K_q)_a > 0.2631$ distribución leptocúrtica o puntiaguda, es decir, poca dispersión en los tamaños. $(K_q)_a < 0.2631$ distribución platicúrtica o aplanada.	$(K_q)_a = \frac{d_{75} - d_{25}}{2(d_{90} - d_{10})}$
6) Diámetro medio geométrico d_g . Es la media de los logaritmos de los diámetros.	$\ln d_g = \frac{\sum (\Delta P_i \ln d_i)}{\sum (\Delta P_i)}$
7) Desviación estándar geométrica. Cuando $\sigma_g \geq 3$ la granulometría es extendida, o sea hay gran dispersión de tamaños y el material es bien graduado. Cuando $\sigma_g < 3$ la granulometría es uniforme y el material es mal graduado. Cuando la distribución es log-normal se cumple la ecuación para σ_g que a ella corresponde (tabla 7.6).	$\sigma_g = \frac{1}{2} \left[\frac{d_{50}}{d_{16}} + \frac{d_{84}}{d_{50}} \right]$
8) Sesgo geométrico. Cuando $(S_k)_g = 1$ la distribución es log-normal.	$(S_k)_g = \frac{\sqrt{d_{25} d_{75}}}{d_{50}}$
9) Curtosis geométrica. Cuando $(K_q)_g = 1$ la distribución es log-normal.	$(K_q)_g = \left[\frac{d_{84} d_{16}}{d_{95} d_5} \right]^{1/2}$
10) Coeficiente de clasificación y dispersión.	$C_c = \left[\frac{d_{75}}{d_{25}} \right]^{1/2}$
11) Coeficiente de uniformidad de Hazen. Cuando $C_u = 1$ el material es completamente uniforme, cuando $C_u < 3$ es uniforme y con $C_u > 3$ es no uniforme o de geometría extendida.	$C_u = \frac{d_{60}}{d_{10}}$

Tabla 7.11. Cálculo de los diámetros medio aritmético y geométrico, según García Flores y Maza (1996)

Diámetro	d_i en mm	ΔP_i en %	$d_i (\Delta P_i)$ en mm	$\ln d_i$	$(\ln d_i) (\Delta P_i)$
d_5	0.33	10	3.3	- 1.107	-11.087
d_{15}	0.63	10	6.3	- 0.462	- 4.620
d_{25}	0.85	10	8.5	- 0.163	-1.625
d_{35}	1.08	10	10.8	0.077	0.770
d_{45}	1.39	10	13.9	0.329	3.293
d_{55}	1.78	10	17.8	0.577	5.766
d_{65}	2.20	10	21.9	0.788	7.885
d_{75}	2.84	10	28.4	1.044	10.438
d_{85}	3.90	10	39.0	1.361	13.610
d_{95}	5.83	10	58.3	1.763	17.630
Suma		100	208.3		42.060

$$d_m = \frac{208.25}{100} = 2.083 \text{ mm}$$

$$\ln d_g = \frac{42.06}{100} = 0.421 \quad ; \quad d_g = 1.523 \text{ mm}$$

Otros diámetros de la figura 7.6 son:

$$d_{10} = 0.49 \text{ mm}; \quad d_{50} = 1.58 \text{ mm}; \quad d_{84} = 3.794 \text{ mm}$$

$$d_{16} = 0.65 \text{ mm}; \quad d_{60} = 1.98 \text{ mm}; \quad d_{90} = 4.6 \text{ mm}$$

Por tanto

$$\sigma = \frac{1}{2} (3.794 - 0.65) = 1.572 \text{ mm}$$

$$(S_k)_a = \frac{1}{2} [2.84 + 0.85 - 2(1.58)] = 0.265 \text{ mm}$$

$$S_k = 0.265/1.572 = 0.169 > 0, \text{ sesgo a la derecha}$$

$$(K_q)_a = \frac{2.84 - 0.85}{2(4.6 - 0.49)} = 0.242 < 0.2631$$

$$\sigma_g = \frac{1}{2} \left[\frac{1.58}{0.65} + \frac{3.794}{1.58} \right] = 2.415$$

$$(S_k)_g = \frac{\sqrt{0.85 (2.84)}}{1.58} = 0.983 \text{ log-normal}$$

$$(K_q)_g = \left[\frac{3.79 (0.65)}{5.83 (0.33)} \right]^{1/2} = 1.132$$

Con base en la información que se presenta en la tabla 7.5, García Flores y Maza (referencia 1) calcularon la media, variancia, desviación estándar, sesgo y curtosis de la distribución de tamaños de las partículas, mediante la tabla 7.9, que muestra la manera de organizar los cálculos. La segunda columna corresponde al diámetro d_i de la marca de clase de cada intervalo obtenido de la semisuma de las aberturas de las dos mallas que definen un intervalo. La tercera columna corresponde al porcentaje P_i de material retenido por cada malla. Los encabezados de la cuarta a novena columna describen claramente las operaciones efectuadas con los datos.

Cuando se dispone únicamente de la curva granulométrica en papel semilogarítmico y no de los datos de cribado, se obtienen los parámetros estadísticos geométricos que ayudan a precisar las características de la distribución. Para ello, se divide el 100 por ciento que pasa (sobre la escala vertical) en 10 intervalos iguales (10%) de manera que el diámetro d_i leído en la curva al centro del intervalo (5, 15, 25, etc.) corresponde al intervalo de clase en la misma forma que antes. Un ejemplo es el de los diámetros que se leen en la figura 7.6 y se presentan en la tabla 7.11. Con los intervalos ΔP_i y el diámetro d_{50} , se determinan las características de la distribución según los parámetros estadísticos de la tabla 7.10, como se presenta en la tabla 7.11. Los resultados muestran que el valor de $(S_k)_g \approx 1$ y se trata de una distribución log-normal, con sesgo positivo (hacia la derecha), lo cual se puede ver al dibujar la curva en papel aritmético.

Los sedimentos se componen frecuentemente de una mezcla desde finos hasta gruesos. Como se observa en la tabla 7.10, el valor de la desviación estándar geométrica define qué tan bien graduada es la mezcla. La propiedad más importante de un material con geometría extendida o bien graduado es la posibilidad de que ocurra el fenómeno llamado *acorazamiento*, es decir, se produce una capa superficial más gruesa o *coraza* como resultado del barrido o lavado de las partículas más finas que ofrecen menos resistencia al movimiento y la permanencia de las gruesas que aparecen cuando se mueven capas de material mezclado. Algunos autores proponen un concepto dinámico del acorazamiento, según el cual, el movimiento generalizado en el lecho afecta a un cierto espesor y con mayor intensidad en la superficie.

El acorazamiento de un lecho influye en la rugosidad del cauce ya que la superficie presenta partículas de mayor tamaño; también influye en las técnicas de muestreo, ya que es necesario conocer la granulometría de la mezcla y no de la parte superficial.

7.2.9 Toma de muestras

El material que constituye el cuerpo de un canal artificial puede cambiar considerablemente en su trayecto y la mejor manera de caracterizarlo es mediante la toma de muestras. Antes de efectuarlas, es conveniente disponer de un trazo preliminar en el campo a fin de visualizar los distintos materiales que se encontrarán durante la excavación siguiendo el trazo y definir tipo, frecuencia y profundidad de los sondeos que deban efectuarse. El conocimiento de las características del material sirve para propósitos de diseño hidráulico, estructural, de procedimientos constructivos y de estudios económicos, entre otros, que adquieren gran importancia.

Cuando se trata de un río, la toma de muestras y el análisis del material son indispensables en los estudios de hidráulica fluvial. El río en la zona montañosa tiene una gran pendiente y el agua

alcanza velocidades grandes con tirantes relativamente más pequeños que en la zona intermedia o en la de planicie. Por ello, hay tramos del río que sufren el arrastre del agua con mayor o menor intensidad y por tanto se erosionan o azolvan más que otros. En las zonas de erosión el cauce puede experimentar diferentes grados de acorazamiento, transporte continuo de sedimentos sin descenso del fondo o degradación progresiva. Las zonas de las curvas o meandros sufren simultáneamente la erosión en la parte exterior de la curva y el depósito en la interior.

El acorazamiento se explica por el desplazamiento selectivo de las partículas más finas que se produce con el tiempo, a partir de un material originalmente bien graduado, pero con una frecuencia mayor de gruesos en la superficie.

El material acarreado desde las zonas de erosión se acumula en las zonas de depósito del río conforme la corriente pierde capacidad de arrastre. En general, una vez que el flujo inicia el transporte de sedimento, después de cierto acarreo lo deposita a lo largo de su recorrido según varía la velocidad media del flujo y con ella la capacidad de arrastre, de materiales más gruesos en la parte de montaña a material medio en la parte intermedia. El más fino viaja en suspensión y el que no logra sedimentarse continúa su recorrido hacia los cuerpos de agua o hacia el mar. Por estas razones, los diferentes tramos de un río poseen un sedimento o depósito que los caracteriza como si fuese el material original y es posible establecer algunas consideraciones:

- a) En cada tramo del río existe un material único o característico, denominado material original, con una curva granulométrica característica del cauce.
- b) Los procesos de erosión y sedimentación en un tramo del río producen la separación temporal y local de las partículas de distintos tamaños que constituyen el material característico, y que es más notable cuanto mayor es la variedad o dispersión de tamaños.
- c) La capa superficial más gruesa (o coraza) es el resultado del lavado de material fino o también la permanencia de las partículas gruesas cuando se mueven capas sucesivas de material mezclado. Debajo de la coraza de un lecho se encuentra siempre el material original o característico del cauce.

Lo anterior significa que es recomendable tomar muestras de las zonas de erosión y depósito del lecho, islas o barras, playas y márgenes.

Cuando la zona está en seco y sin cobertura vegetal, se toman muestras del que yace sobre la superficie del lecho y a diferentes profundidades mediante sondeos. Cuando existe vegetación las muestras deben ser profundas, recolectando adecuadamente el material grueso superficial de las zonas acorazadas así como el que se localiza a distintas profundidades.

La opinión de García Flores y Maza es que el tamaño mínimo de las muestras varía de 5 kg_f cuando se trata de material fino que contiene arenas, 10 kg_f con gravas o 20 kg_f con cantos rodados. Cuando estos no se pueden cribar, deben pesarse y medirse en el sitio cuando sea posible, para conocer su tamaño por la mayor de las dimensiones triaxiales.

Mengelsdorf propuso en 1990 (referencia 5) un método de muestreo muy completo, llamado volumétrico, que consiste en extraer del cauce un cierto volumen de material subsuperficial. Para

ello, se retira primero una capa superficial de espesor comparable al tamaño de la mayor partícula observada sobre la superficie. A continuación se extrae un volumen representativo del sedimento siguiendo el criterio de que la partícula extraída de mayor tamaño no represente más del uno por ciento en peso de toda la muestra (0.1 por ciento es más recomendable para aumentar la precisión). Por ejemplo, si el tamaño máximo fuera de 10 cm, seguir el criterio significaría tomar una muestra entre 100 y 1000 kg, lo que significa tener que usar equipos mecánicos importantes para extraer y manejar muestras en lechos de gravas.

Cuando interesa la granulometría de la coraza se emplea el llamado muestreo superficial, que consiste en marcar con pintura el material expuesto en la superficie y después retirarlo, quedándose únicamente con el no marcado. La mejor muestra representativa se obtiene cuando la mayor partícula marcada no representa más del uno por ciento del área muestreada, es decir, dicha área debe ser $100 d_{máx}^2$.

Las curvas granulométricas que resultan del cribado de muestras volumétricas y superficiales no son iguales. La curva de la muestra superficial se puede convertir a la de la volumétrica mediante la expresión

$$f_{vi} = \frac{f_{si} / d_i}{\Sigma (f_{si} / d_i)}$$

que proviene de la intuición, ya que cuanto mayor es una partícula de tamaño d , más presencia tiene proporcionalmente en el peso de la muestra superficial (frecuencia f_s), con respecto a su frecuencia verdadera f_v en el volumen. El subíndice i corresponde a las clases de los tamaños y d_i es el tamaño al centro del intervalo de clase.

También puede realizarse un muestreo por conteo del material superficial, tomando una partícula a distancias iguales (por ejemplo, pasos) y midiendo su tamaño. La curva granulométrica que resulta no es necesario convertirla a frecuencias volumétricas, pero queda truncada en el tamaño de 8 mm aproximadamente, ya que no contiene material inferior a dicho tamaño y ésto afecta a todas las medidas de posición y dispersión de la curva granulométrica.

7.3 PÉRDIDAS DE AGUA POR FILTRACIÓN

7.3.1 Pérdidas de agua en el canal

Hay pérdidas inevitables del agua en todas las formas de conducción; la excepción sería un conducto metálico cerrado, perfectamente construido y hermético. El costo del agua que se pierde es un factor importante en todos los problemas de economía del agua.

Las pérdidas del agua en canales abiertos se deben a la evaporación, a fugas en las estructuras que intervienen en su operación pero, sobre todo, a la filtración en el subsuelo. Ésta puede ser reducida de modo importante mediante un recubrimiento.

El porcentaje medio anual de pérdidas por evaporación en un canal abierto se estima a partir de la ecuación

$$e = \frac{1}{31.54 (10)^4} \frac{T L}{Q} h_e \quad (7.8)$$

donde

- h_e altura de evaporación media anual del sitio en mm
- L longitud del tramo de canal considerado en km
- T ancho de la superficie libre del agua en el canal en m
- Q gasto medio anual en el canal en m³/s.

La pérdida por fugas ocurre principalmente en compuertas, pero puede considerarse despreciable en la mayoría de los casos si se colocan buenos sellos y las compuertas quedan bien ensambladas e instaladas.

La pérdida por filtración es la más importante y depende de muchos factores, como el material que constituye el fondo y taludes del canal, las dimensiones de la sección, la graduación de dicho material y la posición del nivel freático en el lugar.

Es común que la filtración disminuya con la edad del canal, sobre todo si conduce agua cargada de sedimentos o éstos se agregan con dicho propósito. Ésto se debe a que las partículas finas en suspensión y las sales disueltas transportadas por el agua se depositan y sellan el perímetro mojado.

Cuando el agua está libre de sedimentos y el material en el fondo es granular grueso, se requieren métodos artificiales de impermeabilización como los que se mencionan a continuación.

1. Sellado del material en el fondo por el uso de aceites, materiales bituminosos, inyecciones de silicatos (u otros productos químicos), métodos electroquímicos, cemento, alquitrán o mezclas de resinas, filtros con suelos especialmente graduados, compactación mecánica, etc.
2. Uso de recubrimientos en plantilla, taludes, ambos, o bien de capas o cubiertas de material impermeable sobre o debajo del fondo y extendidas hacia los taludes del canal.
3. Pavimentación de los canales.

La filtración es una de las razones principales para recubrir el canal con materiales impermeables que en otras condiciones serían innecesarios. Pero aún con el concreto es prácticamente imposible evitar la pérdida por filtración al cien por ciento, ya que las fugas ocurren a través de juntas y grietas o por fallas en la operación y mantenimiento.

La importancia de estimar esta pérdida amerita que se le considere con más detalle dentro de este subcapítulo.

7.3.2 Métodos directos de medición de la filtración

La pérdida del agua por filtración es una de las principales razones para revestir un canal construido con materiales que por otras razones no necesiten revestimiento. Además del costo que tiene la pérdida del agua, la filtración puede saturar los terrenos adyacentes haciéndolos no aptos para el cultivo.

La pérdida por filtración en un canal no revestido depende de una variedad de factores que incluyen, a título indicativo, las dimensiones del canal, la graduación y características de los materiales que componen su entorno y las condiciones del nivel del agua en el subsuelo.

Lo más recomendable es medir la pérdida por filtración en el sitio mismo de la excavación. Cuando se trata de un nuevo proyecto, se utiliza un medidor de filtración como el que se muestra en la figura 7.8. Consiste en un tubo de acero hincado en el suelo, en el que se mide la caída del nivel del agua o el volumen necesario para mantener constante dicho nivel durante un período definido. Este procedimiento se puede sustituir por la excavación de tramos de prueba sobre la línea de trazo del nuevo canal, limitados por bordos perimetrales. En dichos tramos se siguen métodos de control similares al del tubo de acero, para medir el caudal que se infiltra en el subsuelo.

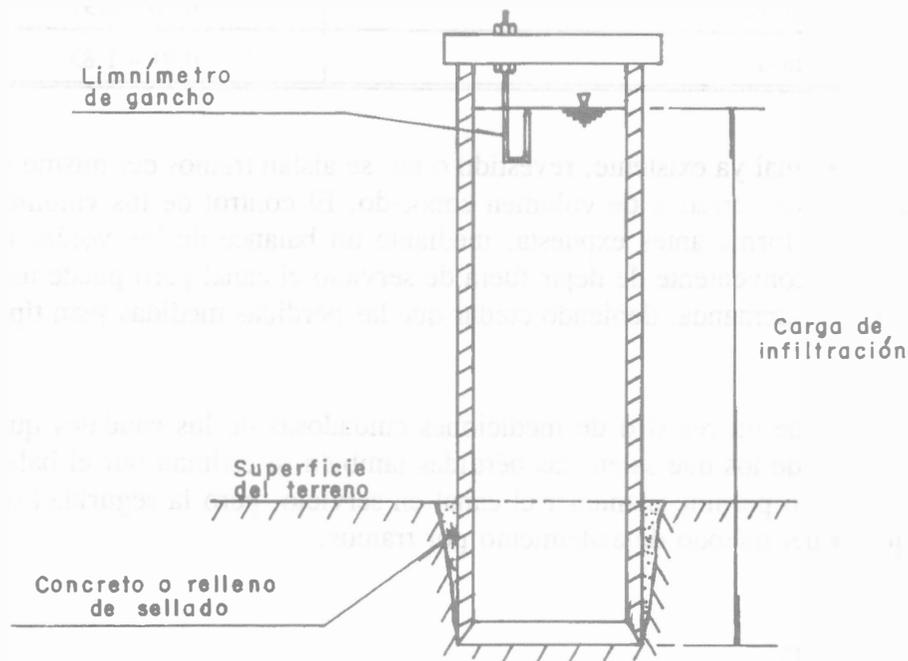


Figura 7.8. Medidor de infiltración

En la tabla 7.12 se muestran los valores obtenidos de una serie de mediciones en campo realizados por Etcheverry y Harding, y recopilados por Davis (referencia 6). Los valores mayores en la tabla corresponden a canales nuevos. Todos ellos son independientes del gasto que conduce el canal y del tirante que éste tiene, sin embargo, el efecto del tirante puede ser significativo.

Tabla 7.12. Pérdidas de agua por filtración en canales no afectados por el nivel freático, según Etcheverry y Harding (Davis, referencia 6)

Material en plantilla y paredes	Pérdida en m ³ por m ² de perímetro mojado en un período de 24 horas
Marga arcillosa impermeable	0.08 – 0.11
Marga semiarcillosa sobre una capa dura a una profundidad no mayor de 0.60 a 0.90 m	0.11 – 0.15
Marga arcillosa ordinaria, suelo aluvial y marga de ceniza volcánica	0.15 – 0.23
Marga arcillosa con grava o marga arcillo-arenosa, grava cementada, arena y arcilla	0.23 – 0.30
Marga arenosa	0.30 – 0.46
Suelos arenosos sueltos	0.46 – 0.53
Suelos arenosos con grava	0.61 – 0.76
Suelos porosos con grava	0.76 – 0.91
Suelos con mucha grava	0.91 – 1.83

En el caso de un canal ya existente, revestido o no, se aíslan tramos del mismo mediante diques para formar cuencos cerrados de volumen conocido. El control de los volúmenes filtrados se hace en la misma forma antes expuesta, mediante un balance de los volúmenes de agua. El método tiene el inconveniente de dejar fuera de servicio el canal pero puede usarse durante los períodos de menor demanda, debiendo cuidar que las pérdidas medidas sean típicas del período de interés.

Cuando se mantiene un registro de mediciones cuidadosas de los caudales que ingresan a un tramo del canal y de los que salen, las pérdidas también se estiman por el balance de masa de dicho registro. Esto permite mantener el canal en servicio, pero la seguridad de los resultados es menor que la del método de aislamiento por tramos.

7.3.3 Ley de Darcy

También hay métodos analíticos para valuar la pérdida por filtración mediante la solución de las ecuaciones relevantes de la teoría del flujo del agua en medios porosos, con una serie apropiada de condiciones de frontera. No es la intención presentar aquí cálculos rigurosos y detallados de dicha teoría, si no sólo algunas ecuaciones y diagramas sencillos con los cuales se determine la filtración en canales bajo condiciones cercanas a las que ocurren en la práctica.

La ley básica en que se apoya la teoría se debe a Darcy, en la cual, la velocidad de filtración depende del tipo de suelo y del gradiente hidráulico, a través de la ecuación

$$V = k i \quad (7.9)$$

donde k representa al coeficiente de permeabilidad del suelo o simplemente la permeabilidad, y expresa la capacidad que tiene para permitir el flujo del agua en su interior. El término i es el gradiente hidráulico, es decir, la diferencia de niveles piezométricos entre dos puntos, al principio y al final de la trayectoria, dividida entre la distancia que hay entre los dos puntos; por último, V es la velocidad media del flujo que, por supuesto, no es la real, debido a que el agua se mueve sólo a través de los poros del suelo y no a través del área que contiene al conjunto del suelo y espacios vacíos.

Puesto que i no tiene dimensiones, las de k son las mismas de la velocidad, es decir, $[L T^{-1}]$ y se expresa en m/año, m/día, m/h, m/s, cm/min, cm/s, etc. El valor de dicho coeficiente depende de las propiedades del suelo, pero también de su contenido de humedad, de la temperatura y de otros factores secundarios. Sin embargo, para el diseño de obras ordinarias de drenaje, se suele suponer que el coeficiente de permeabilidad en suelos saturados depende sólo del tipo a que éstos pertenezcan.

Si A es la sección transversal del suelo donde hay flujo, el gasto de filtración a través de ella es

$$Q = A k i \quad (7.10)$$

de modo que k puede interpretarse como el volumen de filtración a través del área A en la unidad de tiempo cuando el gradiente hidráulico es uno.

El valor de k se determina en laboratorio con el instrumento llamado permeámetro, utilizando una muestra inalterada del suelo. En condiciones de campo el valor de k varía de un punto a otro, debido a la presencia de pequeñas grietas, agujeros, raíces, piedras, etc. De este modo, cuando se habla de la capacidad del suelo para permitir el flujo de agua, no se trata de un valor puntual, sino de un valor representativo del suelo en su conjunto. En ese caso, el coeficiente k se conoce también como coeficiente de conductividad hidráulica. En las tablas 7.13, 7.14 y 7.15 se presentan algunos valores del coeficiente de permeabilidad.

Un suelo es homogéneo cuando la permeabilidad no cambia de un lugar a otro en todo su conjunto o en parte del mismo. Es isotrópico cuando la permeabilidad en un punto dado es la misma en cualquier dirección: horizontal, vertical o diagonal.

De acuerdo con estas definiciones hay cuatro tipos de suelos:

- a) homogéneo e isotrópico, en el que k no cambia de una dirección a otra ni de un punto a otro;
- b) homogéneo y no isotrópico, en el que k cambia de una dirección a otra, pero en una dirección dada la permeabilidad es la misma en todo el suelo;

Tabla 7.13. Coeficiente de permeabilidad (referencia 7)

Suelo	k en cm/s
Aluviones de bloques calcáreos	3×10^{-4}
Arcillas provenientes de los gneiss	10^{-5} a 10^{-7}
Concretos	10^{-6} a 10^{-8}
Calcáreas para construcción (según Macmillan)	2×10^{-4} a 5×10^{-6}
Roca de permeabilidad tolerable:	
Según Ehrenberg	3×10^{-8}
Según F.A.W.G. de Berlín	10^{-7}
Gravas y arenas de 0.1 a 25 mm	5×10^{-2} a 2×10^{-2}
Arena uniforme (0.77 mm) (según Darcy)	3×10^{-4}
Arena gruesa (0.1 a 5 mm)	10^{-4}
Arena media (0 a 2 mm)	2×10^{-5}
Arena fina (0 a 1 mm)	4×10^{-6}

Tabla 7.14. Coeficiente de permeabilidad (referencia 7)

Suelo	Permeabilidad por 10^{-5} cm/s
Muy arcilloso, no orgánico, alta plasticidad. Arcilloso orgánico, plástico.	$k < 3$
Poco arcilloso, no orgánico, de baja o media plasticidad, arcilloso-arenoso, arcilla de aluvión. Aluvión plástico, arena de aluvión. Aluvión orgánico, arcilla orgánica con sedimento y baja plasticidad. Arena arcillosa de mediana plasticidad. Arcilla con grava, arcilla-arena-grava.	$3 < k < 60$
Arena con sedimento, mal graduada, no plástica. Aluvión no orgánico, arena muy fina. Grava con sedimento, grava-sedimento-arena, mal gra- duada, no plástica.	$3 < k < 6$
Arena bien graduada (más de 5 por ciento de finos). Arena mal graduada (más de 5 por ciento de finos) Grava mal graduada (más de 5 por ciento de finos).	$60 < k < 700$
Grava mal graduada	$k > 700$

Tabla 7.15. Coeficiente de permeabilidad, según Terzaghi (referencia 3)

	10 ²	10	1.0	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹
Drenaje	Bueno						Pobre			Prácticamente impermeable		
Tipo de suelo	Grava limpia		Arenas limpias y mezclas limpias de arena y grava.			Arenas muy finas, limos orgánicos e inorgánicos, mezclas de arena, limo y arcilla, morenas glaciares, depósitos de arcilla estratificada.			Suelos "impermeables", es decir, arcillas homogéneas situadas por debajo de la zona de descomposición.			
							Suelos "impermeables" modificados por la vegetación o por descomposición.					
Determinación directa de k	Ensayo directo del suelo "in situ" por ensayos de bombeo. Se requiere mucha experiencia, pero bien realizados son bastante exactos.											
	Permeámetro de carga hidráulica constante. No se requiere mayor experiencia.											
Determinación indirecta de k			Permeámetro de carga hidráulica decreciente. No se requiere mayor experiencia y se obtienen buenos resultados.			Permeámetro de carga hidráulica decreciente. Resultados dudosos. Se requiere mucha experiencia.			Permeámetro de carga hidráulica decreciente. Resultados de regular a bueno. Se requiere mucha experiencia.			
	Por cálculo partiendo de la curva granulométrica. Sólo aplicable en el caso de arenas y gravas limpias sin cohesión.									Cálculos basados en los ensayos de consolidación. Resultados buenos. Se necesita mucha experiencia.		

- c) no homogéneo e isotrópico, en el que k en un punto dado permanece constante en todas direcciones, pero varía de un punto a otro;
- d) no homogéneo y no isotrópico, en el que k varía de un punto a otro y de una dirección a otra.

Cuando la permeabilidad cambia en distintos planos, el suelo se llama estratificado; si bien en una capa dada puede ser homogéneo (isotrópico o no), en su conjunto (con sus distintas capas) no es homogéneo ni isotrópico. Este caso es importante en el cálculo de la pérdida por filtración de canales revestidos con material más impermeable que el subyacente; por ejemplo, revestimiento de arcilla sobre suelos arenosos.

7.3.4 Métodos analíticos

Métodos analíticos para calcular la filtración han sido presentados por Pavlovsky, Kozeny, Vedernikov, Muskat, Harr y otros. Bouwer (1965, referencia 8) propone tres condiciones distintas del flujo de filtración desde un canal trapecial con taludes 1:1. Dichas condiciones y la simbología utilizada se presentan en la figura 7.9, y corresponden a los modelos básicos de filtración que enseguida se analizan.

Condición A

La filtración ocurre desde el canal excavado en un suelo homogéneo e isotrópico, limitado por una frontera inferior constituida por un material de menor permeabilidad que la del propio suelo. Un subcaso particular es cuando el nivel freático queda debajo de la frontera mencionada y se reduce a obtener la filtración hacia una capa de drenaje de profundidad $h = y + H$ (figura 7.9a). Este subcaso ha recibido gran atención dentro de la literatura (véase problemas 7.11 a 7.13) y se designa como la condición A' .

Condición B

La filtración ocurre desde el canal excavado en un suelo homogéneo e isotrópico que va limitado por una frontera inferior constituida por material impermeable (figura 7.9b).

Condición C

Se presenta en un suelo homogéneo e isotrópico de profundidad infinita, desde un canal que en su plantilla y taludes tienen un revestimiento delgado ligeramente permeable, natural o artificial (material arcilloso, sellos químicos, etc., figura 7.9b).

Los resultados de Bouwer se presentan en la figura 7.10. Valen para canales trapeciales con taludes 1:1 no revestidos y para las condiciones A y B . Las figuras a, b y c corresponden a tres distintos valores de la relación y/b ; en cada una se relaciona h/b con I_s/k mediante una familia de curvas cuyo parámetro es H/b , limitadas en la parte superior por otra curva que representa la solución para la condición A' . El significado de las literales es

- b ancho de plantilla del canal en m,
- H desnivel entre la plantilla del canal y la capa permeable (condición A) o impermeable (condición B) en m,
- h desnivel entre la superficie libre del agua en el canal y el nivel freático en el subsuelo en m,
- I_s gasto de filtración por metro de longitud del canal y por unidad de ancho de la superficie libre del mismo en m/d (metros por día),
- k coeficiente de permeabilidad del suelo, en m/d, obtenido de pruebas de permeabilidad en el sitio o en laboratorio. Se encuentran valores medios en las tablas 7.13, 7.14 y 7.15,
- y tirante del canal en m.

Para la condición de filtración C (figura 7.9b), el gasto de filtración según Bouwer resulta

$$I_s = \frac{k_r}{T} \left[(y - P_c) b + (y - 2 P_c) \frac{V}{\text{sen } \theta} \right] \quad (7.11)$$

donde

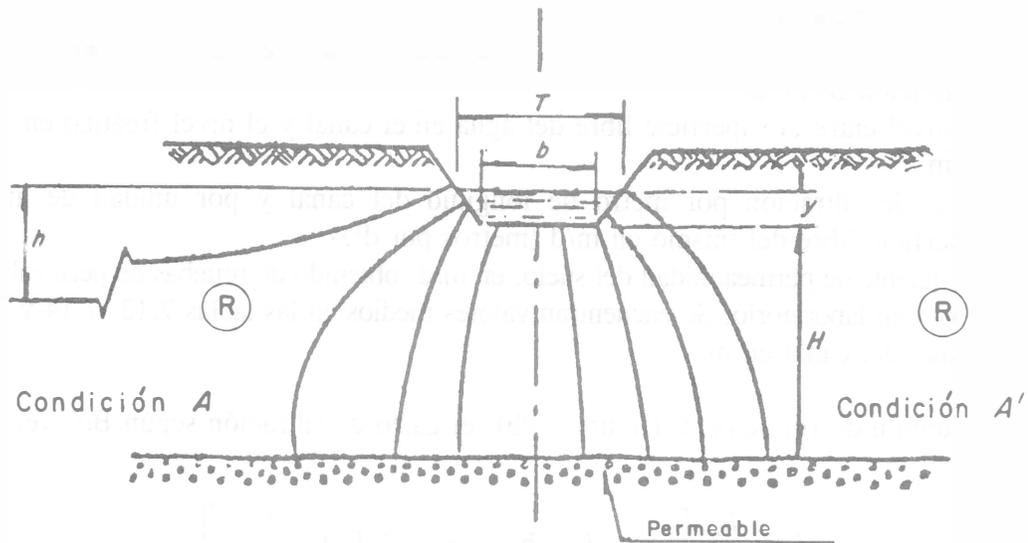
- T ancho de la superficie libre del canal en m,
- t espesor del revestimiento en m,
- k_r coeficiente de permeabilidad del revestimiento en m/d (metros por día). (Se presentan valores medios en las tablas 7.13, 7.14 y 7.15),
- V velocidad media en el canal en m/s,
- P_c carga de presión debajo de la capa de revestimiento, para la cual se satisface en forma aproximada que la permeabilidad del suelo sea prácticamente cero por efecto de la saturación del mismo. Se conoce como carga de presión crítica y se expresa en m de columna de agua,
- θ ángulo del talud del canal con la horizontal.

Las restantes variables se definieron antes.

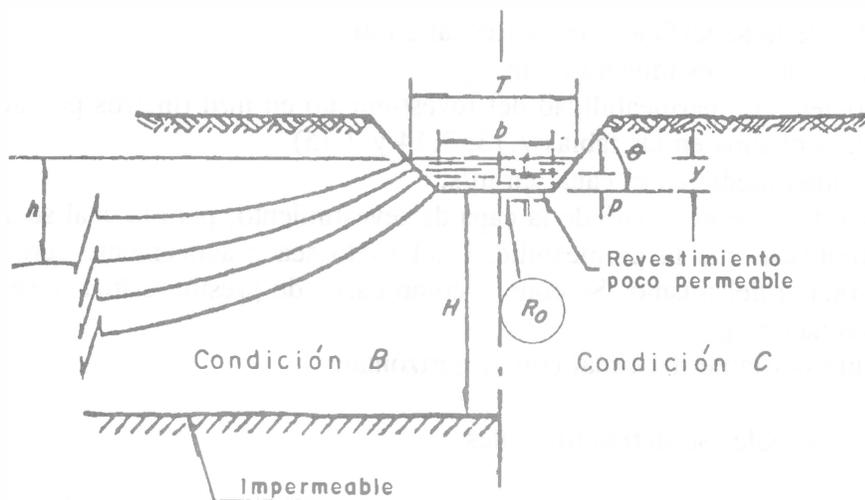
Los resultados de Bouwer extienden su validez a canales rectangulares haciendo $\theta = \pi/2$, y a triangulares haciendo $b = 0$.

El *Código Soviético de Construcciones Hidráulicas* (referencia 7) indica que el gasto de filtración en canales revestidos se calcule para la condición similar a la que corresponda a A o B suponiendo que no hubiese revestimiento, y que el resultado se reduzca por un coeficiente que depende del tipo de revestimiento, cuyos valores se presentan en la tabla 7.16.

Los resultados de Bouwer para canales no revestidos muestran que es suficiente realizar exploraciones por debajo del fondo del canal hasta profundidades cinco veces el ancho de la misma, con objeto de determinar la localización de capas permeables e impermeables. De encontrarse estas capas a profundidades mayores, la reducción en la filtración por dicho efecto es muy pequeña. La profundidad del manto freático se debe determinar por exploraciones alejadas a una distancia no mayor de diez veces el ancho de plantilla, pues la influencia en los



a) Según las condiciones A y A'



b) Según las condiciones B y C

Figura 7.9. Geometría y símbolos para la filtración en un canal, según Bouwer (1965)

cambios de profundidad a distancias mayores es despreciable. Si dicha profundidad es mayor de dos y media veces el ancho de la superficie libre del canal, la filtración es muy próxima a la que se tendría si el manto freático estuviera a una profundidad infinita.

Por lo que respecta a canales revestidos, los factores principales que controlan la filtración son la geometría del canal, espesor del revestimiento y la permeabilidad. El suelo afecta la filtración únicamente a través de la llamada carga de presión crítica P_c , que se define como la carga de presión producida debajo de la capa de revestimiento, para la cual se satisface en forma aproxi-

mada que la permeabilidad del suelo sea prácticamente cero por efecto de la saturación del mismo. Su valor debe obtenerse experimentalmente mediante tramos de prueba en el sitio mismo en que deberá construirse el canal. Los valores de P_c pueden variar de -15 cm de columna de agua o más para arenas, a -100 cm de columna de agua para margas sin estructura y arcillas. Para materiales estructurados con textura fina, P_c puede tener valores similares a los de suelos arenosos.

Otro método para estimar la filtración en canales parcialmente revestidos se debe a Subramanya y coautores (1973, referencia 9). En su análisis establecieron las siguientes hipótesis: 1) un revestimiento impermeable de espesor despreciable; 2) el material poroso debajo del canal se supone isotrópico, homogéneo y de profundidad infinita; 3) la acción de la capilaridad es despreciable.

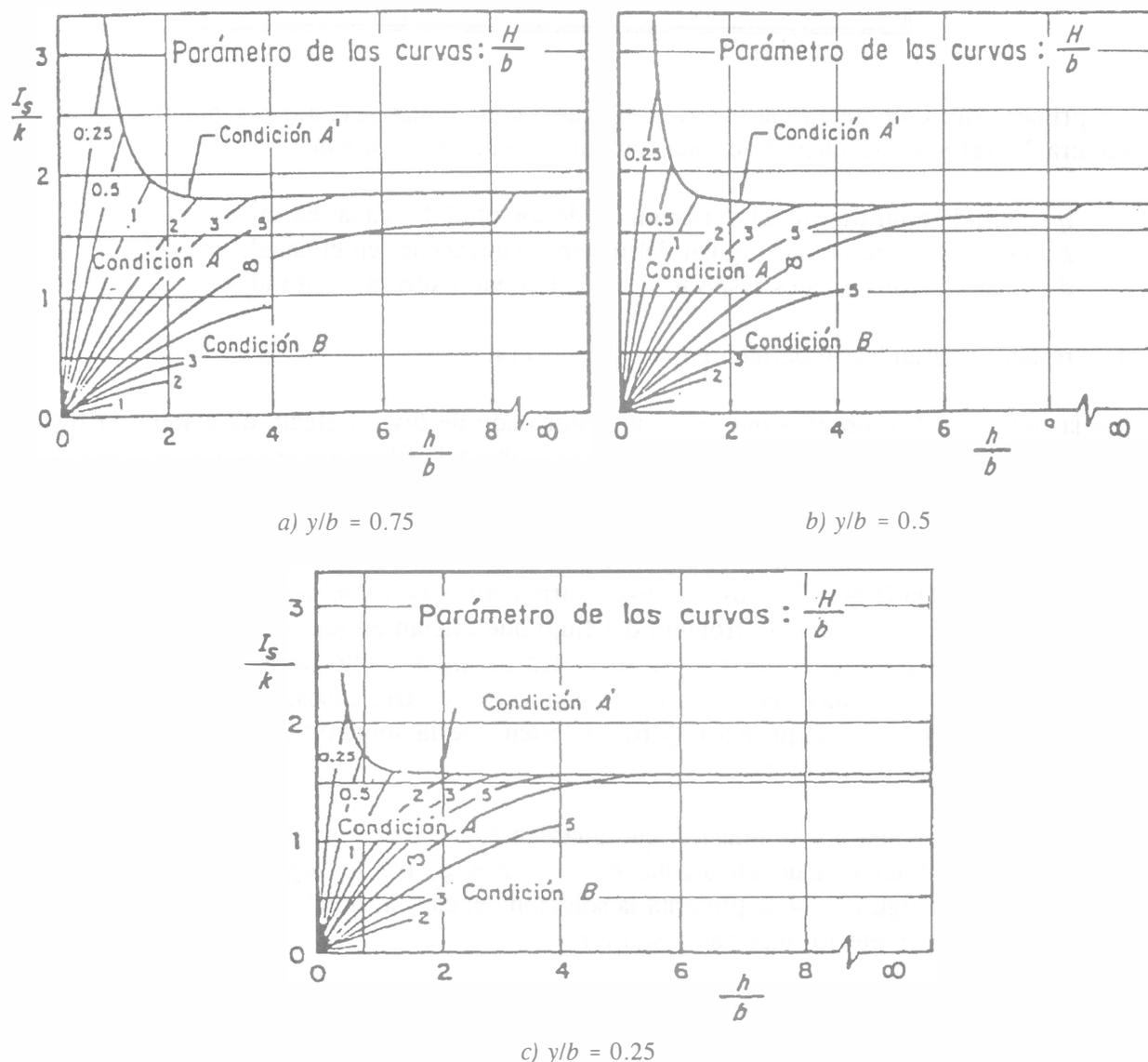


Figura 7.10. Curvas de Bouwer para valuar pérdidas por filtración en canales trapeciales con taludes 1:1. Condiciones A y B (1965)

Tabla 7.16. Coeficiente de reducción para canales revestidos, según el Código Soviético (referencia 7)

Tipo de revestimiento o sello	Coeficiente
Concreto, 7.5 cm de espesor.	0.13
Mortero de cal-cemento, 7.5 cm de espesor.	0.34
Mortero de cemento puro.	0.37
Tratamiento con aceite quemado, 20 dm ³ /m ²	0.50
16 dm ³ /m ²	0.62
13 dm ³ /m ²	0.73
Tratamiento con aceite limpio 13 dm ³ /m ²	0.93

La primera situación analizada fue la de un canal con taludes revestidos y plantilla sin revestir (figura 7.11a) y los resultados se muestran en la figura 7.12, donde

- q pérdida total de filtración por metro de longitud del canal en m²/d,
- k coeficiente de permeabilidad del material subyacente en el canal, en m/d,
- θ ángulo de los taludes respecto de la horizontal expresado en radianes.

Las restantes variables se definen en la figura 7.11a.

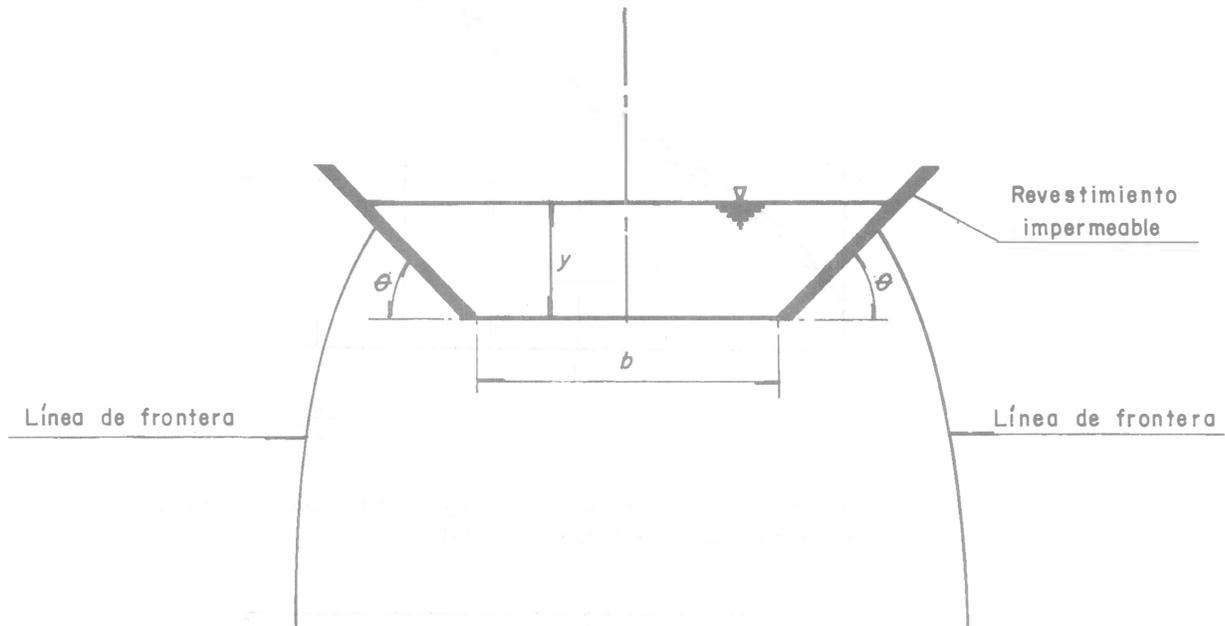
En la figura 7.12 se observa que, para un valor dado de b/y , el efecto de θ sobre la filtración es despreciable y cuando $\theta = 0$ la solución es aplicable a la filtración desde un terraplén de poca altura.

La segunda situación analizada corresponde a la de un canal en donde los taludes no se revisten pero sí la plantilla (figura 7.11b). En ésta ocurren tres casos que dependen del ancho relativo de la plantilla: *a*) las líneas de frontera del flujo que inician en los extremos de la plantilla no se juntan; *b*) las dos líneas de frontera se juntan en algún punto debajo del canal; *c*) las dos líneas de frontera se juntan en la plantilla misma. De los tres casos, Subramanya y coautores (1973) resolvieron sólo el primero, pero advierten que la solución de los otros dos se puede efectuar por técnicas analíticas.

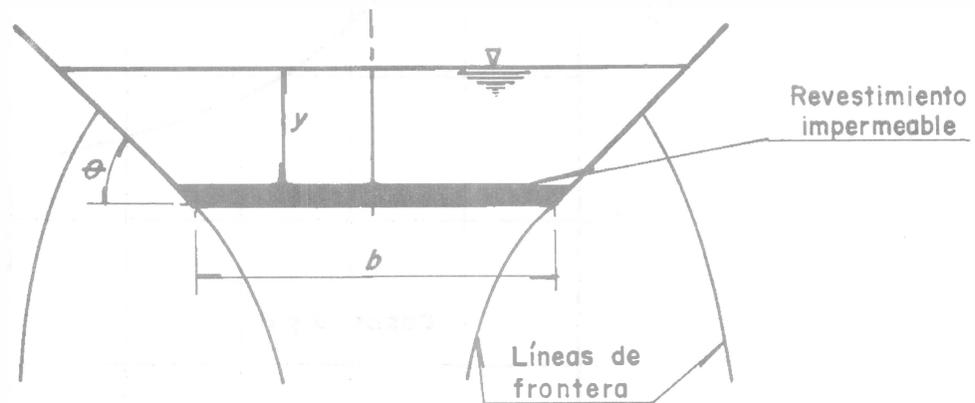
En la figura 7.13 aparece la relación que guardan b/y y θ/π , y permite la clasificación de un problema de filtración dado en alguno de los casos a, b y c según la posición del punto resultante. En la figura 7.14 se presenta la solución del caso a, donde se observa que los taludes del canal tienen un efecto importante sobre q .

En la figura 7.15 se muestra la variación en el porcentaje de reducción de la filtración como una función de b/y y θ/π en canales parcialmente revestidos. El cálculo de la pérdida por filtración q en un canal sin revestir fue realizado por el método de Vedernikov (referencia 10 y problemas 7.11 a 7.13). Las líneas discontinuas que aparecen en la figura indican la variación probable en el porcentaje de reducción de la filtración para los casos b y c cuando sólo se reviste la plantilla.

Se observa que, para un valor determinado de θ/π , hay un valor de b/y que lleva a una reducción igual en la filtración, independiente del tipo de revestimiento parcial. Para valores mayores de b/y que el antes obtenido, el revestimiento en la plantilla es más efectivo para reducir la filtración, mientras que para valores menores de b/y , el más efectivo es en los taludes.



a) Taludes revestidos



b) Plantilla revestida

Figura 7.11. Filtración en un canal parcialmente revestido según Subramanya y coautores (1973)

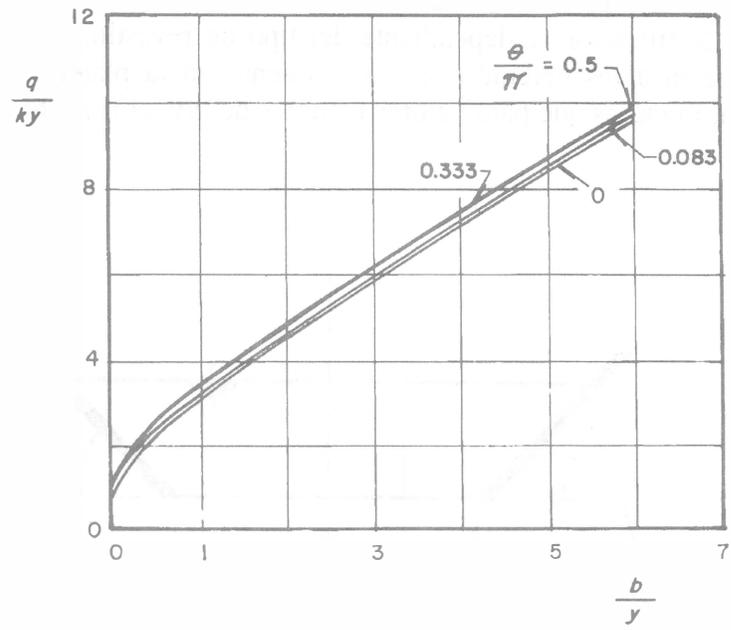


Figura 7.12. Variación de q/ky en función de b/y y θ/π en canales revestidos, según Subramanya y coautores (1973)

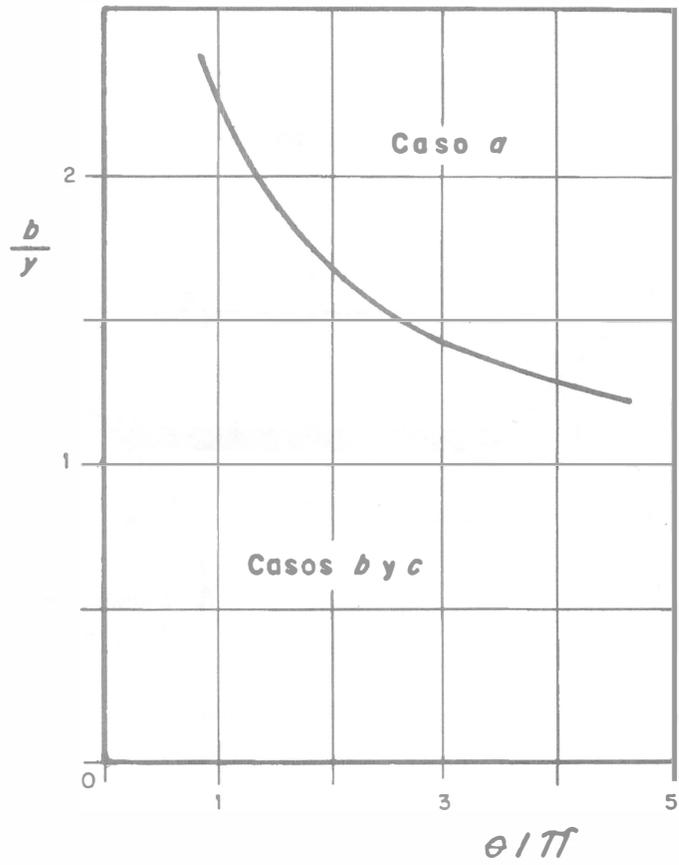


Figura 7.13. Curva de frontera entre los distintos casos de filtración en un canal con revestimiento en la plantilla, según Subramanya y coautores (1973)

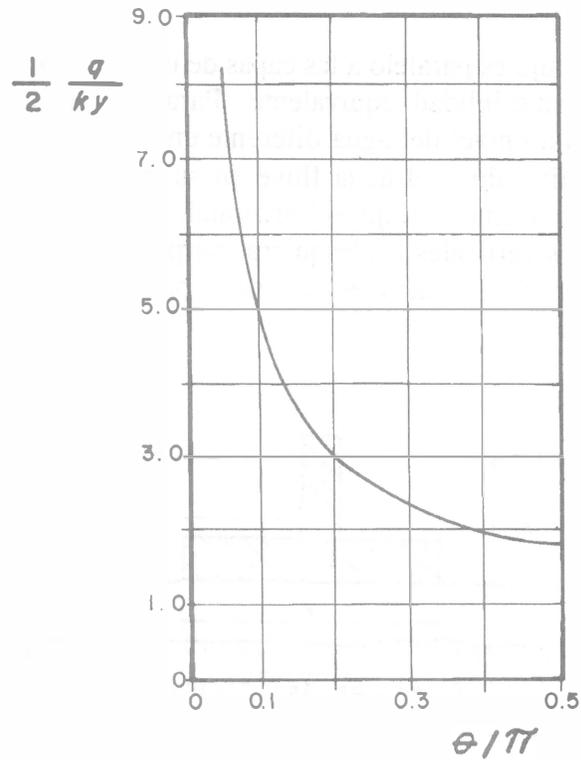


Figura 7.14. Variación de $(1/2)(q/ky)$ con θ/π para la filtración en un canal con taludes revestidos, según Subramanya y coautores (1973)

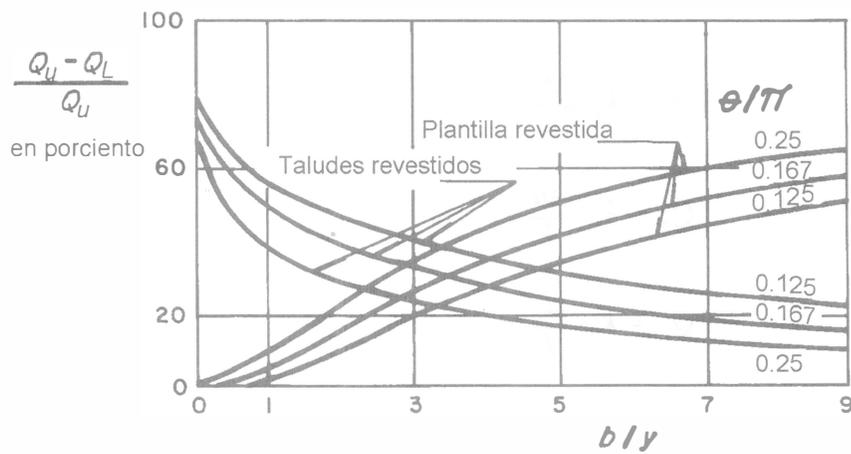


Figura 7.15. Variación del porcentaje de reducción de la filtración en canales con plantilla o taludes revestidos, según Subramanya y coautores (1973)

7.3.5 Permeabilidad en suelos estratificados

Cuando la dirección del flujo es paralelo a las capas de un suelo estratificado, es posible calcular el coeficiente k_h de permeabilidad equivalente. Para ello se considera, por ejemplo, una estructura hidráulica con un nivel del agua diferente en cada uno de sus lados. El suelo debajo de la estructura es estratificado y el agua fluye en su interior del lado de mayor nivel al de menor nivel (figura 7.16). Como el flujo es horizontal, la pérdida de carga es aproximadamente la misma entre dos planos verticales cualesquiera, perpendiculares a la dirección del flujo. Por tanto, el gradiente hidráulico $i = \Delta h/l$ es el mismo para todas las capas, las que se suponen homogéneas e isotrópicas.

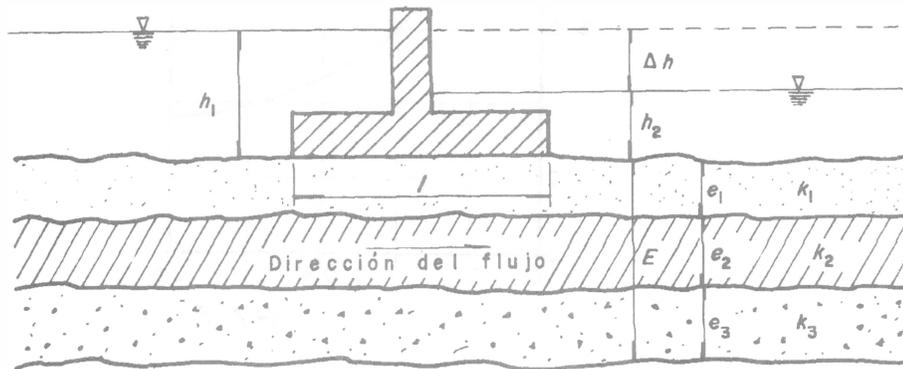


Figura 7.16. Filtración en un suelo estratificado. Flujo paralelo a las capas

El gasto de filtración es diferente en cada capa según su espesor, de acuerdo con los siguientes valores

$$Q_1 = k_1 \frac{\Delta h}{l} e_1$$

$$Q_2 = k_2 \frac{\Delta h}{l} e_2$$

$$Q_3 = k_3 \frac{\Delta h}{l} e_3$$

$$\Sigma Q = \frac{\Delta h}{l} (k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3)$$

El coeficiente de permeabilidad hidráulica horizontal equivalente es aquel con el cual pasa un gasto igual a la suma de los que pasan en cada capa individual, pero a través de una columna de suelo de espesor E igual a la suma de los espesores que tiene cada capa. Es decir

$$\Sigma Q = \frac{\Delta h}{l} k_h E$$

$$\bar{k}_h = \frac{l}{\Delta h} \frac{\Sigma Q}{E}$$

$$\bar{k}_h = \frac{k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3}{E} \quad (7.12)$$

También es posible calcular \bar{k}_v equivalente cuando la dirección del flujo es perpendicular a las capas del suelo. En la figura 7.17 se muestra que la pérdida de carga es diferente en cada capa pero el gasto a través de ellas es el mismo.

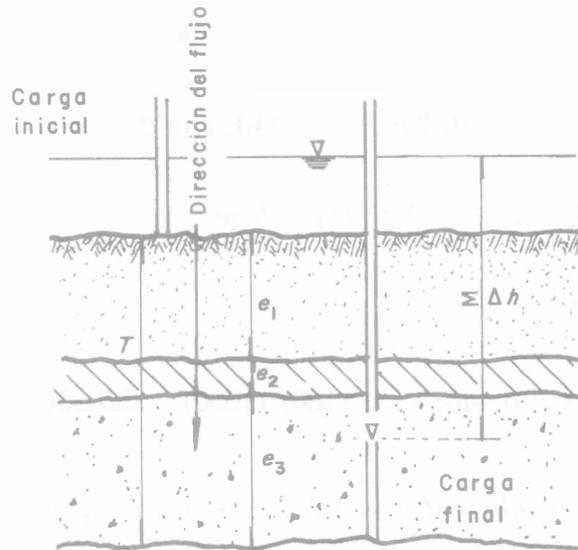


Figura 7.17. Filtración en un suelo estratificado. Flujo perpendicular a las capas

La pérdida de carga en cada capa es Δh_i y el gradiente hidráulico $\Delta h_i / e_i$. La pérdida de carga total (en todas las capas) es $\Sigma \Delta h$ y el gradiente medio $(\Sigma \Delta h) / E$. El gasto que pasa en la unidad de área es

$$k_1 \frac{\Delta h_1}{e_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{e_2} = k_3 \frac{\Delta h_3}{e_3} = \dots = \bar{k}_v \frac{\Sigma \Delta h}{E}$$

Por tanto

$$\bar{k}_v = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n}{e_1/k_1 + e_2/k_2 + e_3/k_3 + \dots + e_n/k_n} \quad (7.13)$$

Si se comparan las ecuaciones 7.12 y 7.13 se ve que una capa impermeable, aunque sea muy delgada, no tiene casi ningún efecto en la permeabilidad paralela a la capa, pero tiene un efecto decisivo en la permeabilidad perpendicular a la misma. Este hecho se utiliza en membranas de sellado de espesor pequeño.

Ejemplo 7.9. Un canal trapecial de 2 m de ancho, 1.0 m de tirante y taludes 1.5:1, se localiza sobre un suelo homogéneo e isotrópico de permeabilidad $k = 3 \times 10^{-6}$ m/s. Determinar la pérdida por filtración en un tramo de un km y un período de 100 días cuando : a) la profundidad del nivel freático es $H = 19$ m desde el fondo del canal; b) la profundidad $H = 2$ m; c) se revisten los taludes pero no la plantilla y $H = 19$ m; d) se reviste la plantilla pero no los taludes y $H = 19$ m.

Solución a. Corresponde a la condición A' de Bouwer (figura 7.9a). Aunque el talud es 1.5:1, se aplica la solución de Bouwer, dado que su influencia es despreciable. La relación $y/b = 1/2 = 0.5$ y $h/b = H/b = 19/2 = 9.5$. De la figura 7.10b, $I_s/k = 1.7$.

Siendo $k = 3 \times 10^{-6}$ (86400) = 0.2592 m/d, entonces

$$I_s = 1.7 (0.2592) = 0.44064 \text{ m/d}$$

$$T = 2 + 2 (1.5) (1) = 5 \text{ m}$$

El gasto de filtración es

$$Q = 0.44064 (5) (100) (1000) = 220320 \text{ m}^3/100 \text{ d/km}$$

Solución b. El parámetro $h/b = H/b = 2/2 = 1.0$. De la figura 7.10b, $I_s/k = 1.75$.

$$I_s = 1.75 (0.2592) = 0.4536 \text{ m/d}$$

$$Q = 0.4536 (5) (100) (1000) = 226800 \text{ m}^3/100 \text{ d/km}$$

prácticamente el mismo valor de la solución anterior.

Solución c. El ángulo del talud es

$$\theta = \text{arc tan} \left[\frac{1}{1.5} \right] = 0.588 \text{ rad}$$

$$\frac{\theta}{\pi} = 0.187$$

Para $b/y = 2$, de la figura 7.12, $q/ky = 4.7$

$$q = 4.7 (0.2592) (1) = 1.21824 \text{ m}^2/\text{d}$$

$$Q = 1.21824 (100) (1000) = 121824 \text{ m}^3/100 \text{ d/km}$$

es decir, una reducción del 55 por ciento respecto del no revestido.

Solución d. Con $b/y = 2$ y $\theta/\pi = 0.187$, de la figura 7.13 el caso se clasifica en b y c. De la figura 7.15 resulta

$$\frac{Q_u - Q_L}{Q_u} = 19 \text{ por ciento}$$

Es decir

$$Q_L = (1 - 0.19) Q_u = 0.81 Q_u$$

donde Q_u es el valor obtenido en la solución a. Por tanto

$$Q_L = 0.81 (220320) = 178459 \text{ m}^3/100 \text{ d/km}$$

Esto significa que es mucho más efectivo revestir los taludes en este caso.

Ejemplo 7.10. El suelo debajo de una estructura hidráulica es estratificado y consiste de las siguientes capas:

- arena gruesa mal graduada, $e_1 = 3 \text{ m}$, $k_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$;
- muy arcillosa, plástica, $e_2 = 0.25 \text{ m}$, $k_2 = 2 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$;
- arena arcillosa, plasticidad media, $e_3 = 6 \text{ m}$, $k_3 = 5 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$.

Determinar los coeficientes de permeabilidad horizontal y vertical equivalentes, \bar{k}_h y \bar{k}_v .

Solución. Después de convertir las unidades de k a m/s, de la ecuación 7.12 se obtiene

$$\bar{k}_h = \frac{(5 \times 10^{-5}) (3.0) + (2 \times 10^{-9}) (0.25) + (5 \times 10^{-6}) (6.0)}{3 + 0.25 + 6}$$

$$\bar{k}_h = 1.95 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 19.5 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$$

Este valor no difiere mucho de los valores de k_1 y k_3 de las dos capas más permeables.

De la ecuación 7.13

$$\bar{k}_v = \frac{3.0 + 0.25 + 6.0}{\frac{3.0}{5 \times 10^{-5}} + \frac{0.25}{2 \times 10^{-9}} + \frac{6.0}{5 \times 10^{-6}}}$$

$$\bar{k}_v = 0.0073 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 73 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$$

Este valor es muy similar a k_2 de la capa casi impermeable.

7.4 TRAZO DEL CANAL Y ESTRUCTURAS AUXILIARES

7.4.1 Trazo

En terrenos suficientemente uniformes, los canales se diseñan comunmente con pendiente entre 0.00005 y 0.0002, y con secciones abiertas totalmente en corte o parte en corte y relleno, como se muestra en la figura 7.18, siendo común que para la última situación resulte la sección más económica al balancear los volúmenes de excavación y relleno. Cuando el ángulo de inclinación de la ladera que va a alojar el canal es mayor de $\pi/4$, se recomienda utilizar un conducto cerrado, es decir, un túnel que opere a superficie libre.

Los terraplenes resultantes del relleno se forman con el material producto de la excavación y se deben diseñar y construir con el mismo cuidado que un dique o una presa, para garantizar su estabilidad e impermeabilidad. El ancho de su corona suele ser similar al tirante del canal, con un mínimo de 1.20 m, pero siempre debe ser suficiente para proporcionar estabilidad contra la presión hidrostática resultante de un vaciado rápido, con el flujo de filtración hacia afuera y hacia abajo del terraplén.

Si el terreno natural es inclinado, la cimentación del terraplén debe banquearse como se muestra en la figura 7.18c. La distancia AB varía de 4 a 5 veces el tirante para suelos de grava de primera clase con arcilla suficiente para asegurar cohesión, y de 8 a 10 veces para suelos más ligeros o arcillosos. En cualquier caso, el terraplén debe ser suficientemente grande para prevenir fugas excesivas y tubificación, o bien tener un corazón impermeable o un revestimiento. En el cálculo del libre bordo del canal debe preverse el asentamiento que va a sufrir el terraplén.

Es conveniente un camino de acceso para las labores de inspección, operación y mantenimiento del canal. Cuando el terraplén mismo forma el camino, el ancho de la corona y cimentación quedan gobernados por razones del tránsito y equipo de construcción que se piense utilizar en

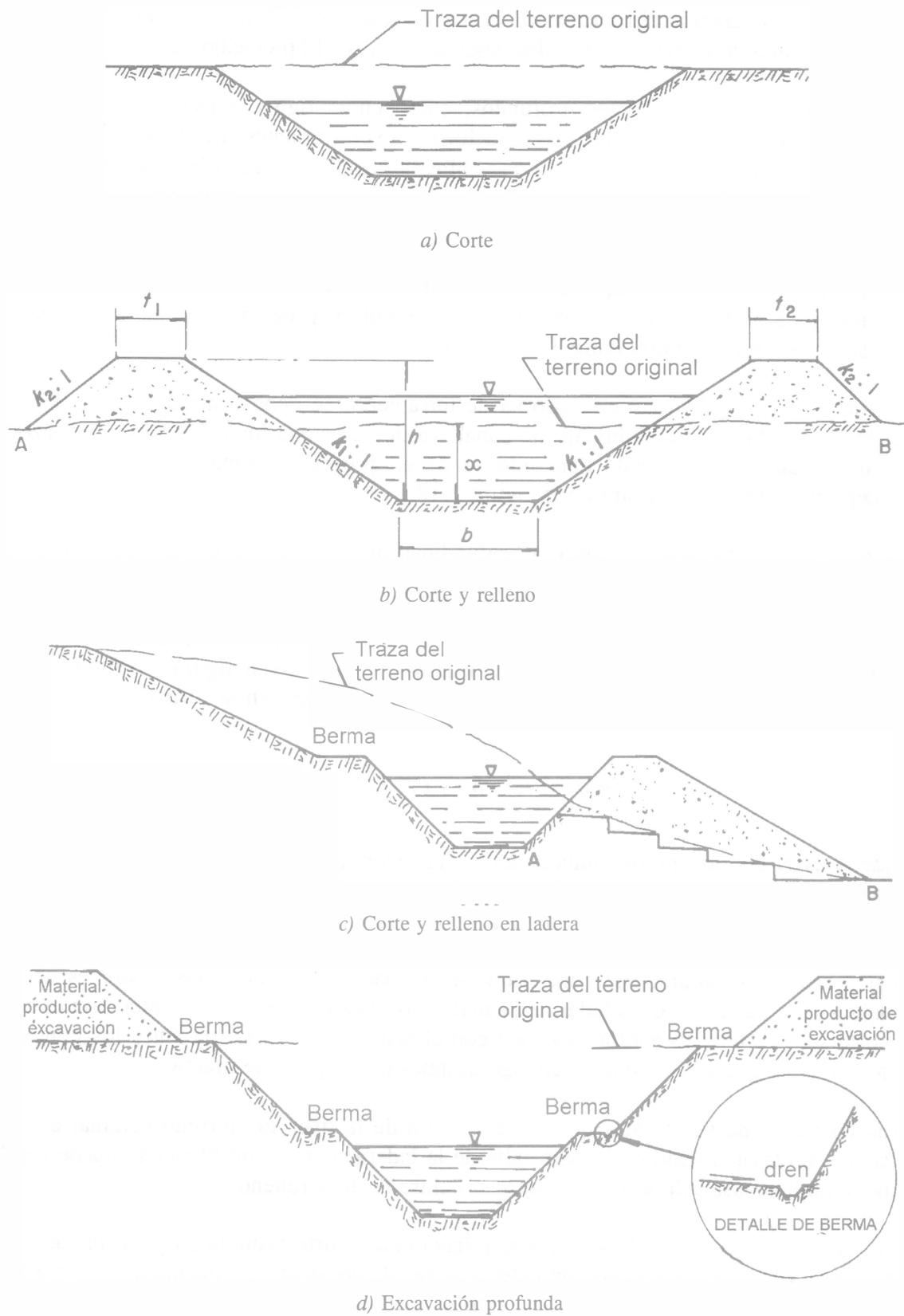


Figura 7.18. Secciones típicas de un canal

las labores de reparación. El ancho de corona varía desde 3.70 m en canales pequeños, hasta 6.10 m en canales grandes (con capacidad hasta de 70 m³/s). El promedio más común es de 5.00 m.

En ocasiones se realizan cortes profundos, como en la figura 7.18d, que producen mayor volumen de material que el necesario para formar los terraplenes. El excedente se deposita en las partes altas adyacentes al canal, lo que obliga al uso de bermas o banquetas para protegerlo de la caída de dicho material. Con el mismo propósito se utilizan bermas en los taludes excavados por encima del libre bordo.

El ancho de las bermas o banquetas depende del tamaño del canal, del volumen de excavación necesario para conformarlas, de la altura de los cortes y de la maquinaria empleada en la excavación; el mínimo varía entre 1.50 y 3 m.

La superficie de las bermas y la corona de terraplenes se debe configurar de manera que se impida la entrada de aguas pluviales al canal, ya que erosiona los taludes, arrastra azolve a su interior y aumenta el caudal. Para ello se deben prever pendientes transversales y drenes interceptores, como se muestra en la figura 7.18d.

Cuando no hay restricciones como la profundidad del corte o un desnivel relativo importante entre la superficie del agua y la del terreno natural, el canal se ubica de manera que el promedio de los materiales excavados sea suficiente para construir los terraplenes. El balance entre corte y relleno en cada estación particular se deduce de una expresión algebraica o de una reevaluación de las opciones. Para un canal, como el que se muestra en la figura 7.18b, se igualan las expresiones para el área en corte y relleno de los terraplenes, en la forma

$$b x + k_1 x^2 = \left[(t_1 + t_2) (h - x) + (k_1 + k_2) (h - x)^2 \right] (1 + \phi)$$

donde ϕ es el coeficiente de abundamiento del material al pasar del área de corte al área de relleno compactado; los otros símbolos se indican en la figura mencionada. La ecuación se resuelve para x , que es la única incógnita.

Cuando el terreno natural tiene una pequeña inclinación pero de todos modos es necesario el terraplén en la parte alta de la ladera, el canal se localiza de modo que la intersección de la línea de corte y la de terreno natural coincida con el centro de la distancia entre los puntos A y B. Esto involucra algún error que se corrige después de un poco de práctica.

En la figura 7.18c se muestra que la inclinación de la línea del terreno original es tal que el terraplén ha desaparecido en la parte alta de la ladera, pero el problema se puede resolver de manera similar buscando el balance deseado entre corte y relleno.

La discusión anterior se aplica a la determinación del corte económico para un canal recto en una sola estación. Sobre colinas con laderas de pendiente suave y especialmente sobre montañas de laderas inclinadas, el trazo del canal debe seguir en lo posible las curvas de nivel del terreno, con pendientes longitudinales que varían entre 0.001 y 0.002. De este modo, las curvas horizontales para cambiar la dirección del canal afectan las cantidades de corte y relleno y, por otra parte, los contornos que resultan de las curvas de nivel en terrenos accidentados pueden ser

demasiado irregulares para ser seguidos por un canal de tamaño apreciable. En este caso, la profundidad del corte debe variar y la economía exigir que parte de los materiales sean transportados a lo largo del canal, desde los puntos de corte en exceso a los de relleno en déficit. Esto complica la técnica, ya que además de que los volúmenes de corte y relleno son de por sí variables, intervienen distancias económicas de acarreo; en cuyo caso debe manejarse como una carretera, utilizando la llamada curva masa.

La solución correcta entre un trazo con localización elegida libremente y la adaptación total a la topografía del terreno debe determinarse comparando los costos de las diferentes soluciones posibles. Sin embargo, es necesario tener en mente que las condiciones geológicas del terreno influyen en forma definitiva en la ubicación del canal. Con objeto de establecer bases dignas de confianza para el trazo del canal y para la determinación de sus secciones, se deben explorar ampliamente las formaciones geológicas, disposición de los estratos, calidad de la roca (grado de fisuramiento, permeabilidad, resistencia, tendencia al intemperismo, etc.) en cortes y rellenos, tomando en cuenta su profundidad o altura, la cimentación de los muros del canal y del relleno, así como la extensión y calidad del revestimiento.

En la figura 7.19 se muestran algunas secciones típicas del canal que se han adaptado a diversas formas geométricas y estructurales adecuadas al corte y relleno en laderas inclinadas.

En canales importantes localizados en ladera se establece con frecuencia, como condición de seguridad, que el prisma de agua quede totalmente en el área por debajo del terreno original, excepto en depresiones, donde los terraplenes se construyen con un cuidado muy especial. Algunos de estos casos se presentan en la figura 7.19 en los que se elimina la posibilidad de balancear corte y relleno.

En barrancas poco profundas puede localizarse el canal en un relleno, mientras que los riscos más bajos se pueden salvar mediante cortes. El agua de lluvia de los terrenos adyacentes se conduce debajo del relleno mediante sifones invertidos, mientras que en los cortes profundos de longitud considerable hay que desalojarla por canales de drenaje especialmente contruídos sobre el lado del canal de conducción correspondiente al corte.

7.4.2 Estructuras auxiliares

Cuando hay bajos en el terreno o el canal se tiene que resguardar de dificultades topográficas particulares, suele resultar más económico seguir un trazo recto sobre la depresión del terreno en lugar de una curva de nivel. En ese caso se utilizan acueductos, es decir, canales artificiales de sección rectangular o semicircular, contruídos de madera, metal, concreto o mampostería, soportados por una estructura que salva la depresión y permite dar la pendiente necesaria. En la figura 7.20 se muestran esquemas de algunos acueductos típicos que funcionan como cualquier canal abierto, cuya sección tiene las dimensiones mínimas para reducir el costo. En general, la velocidad del flujo es mayor en los acueductos que en los canales sobre la superficie del terreno, a fin de disminuir su sección, debiendo haber la tolerancia suficiente en los desniveles para vencer las pérdidas y producir los cambios de velocidad en la entrada y salida del conducto.

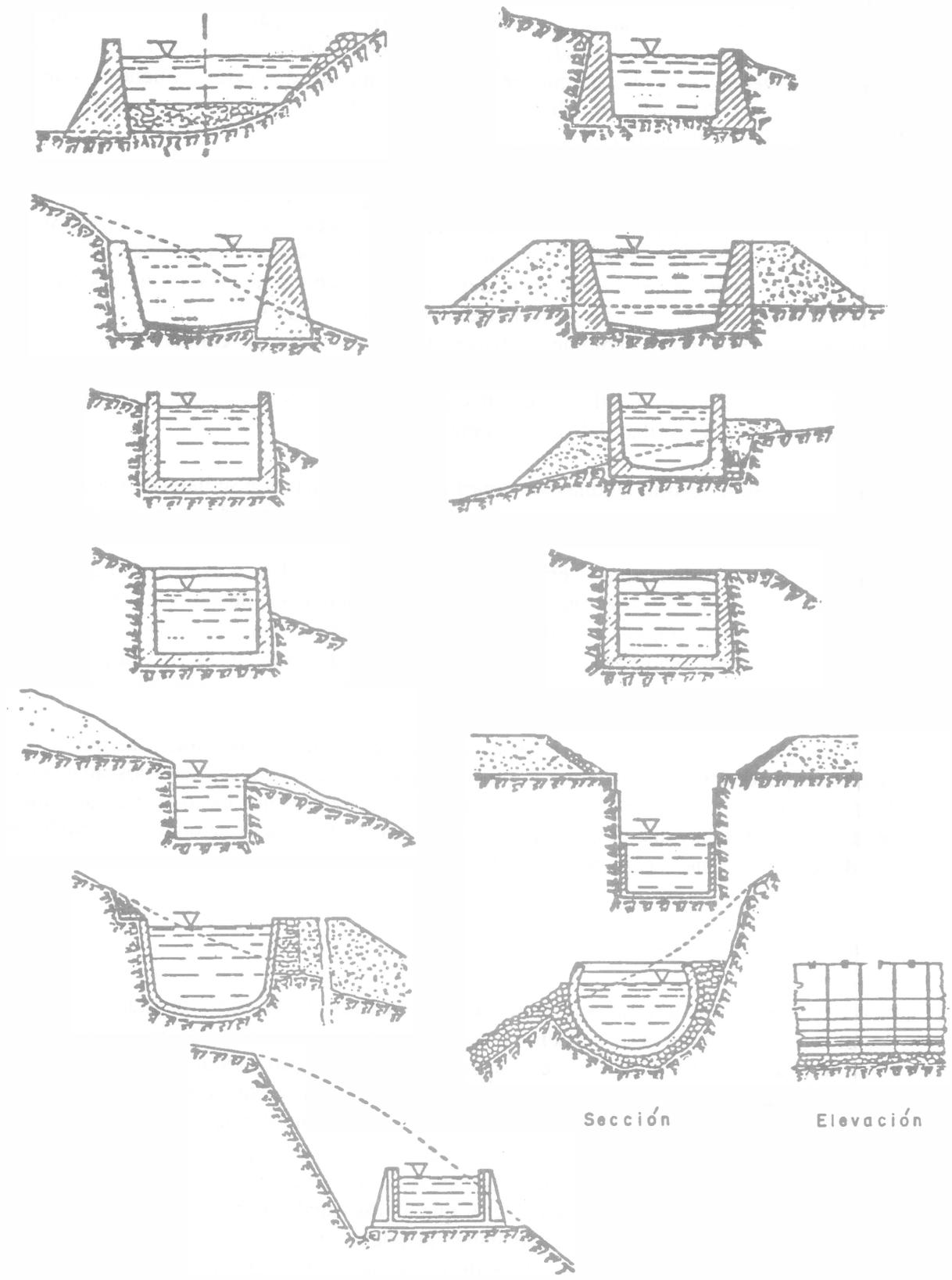
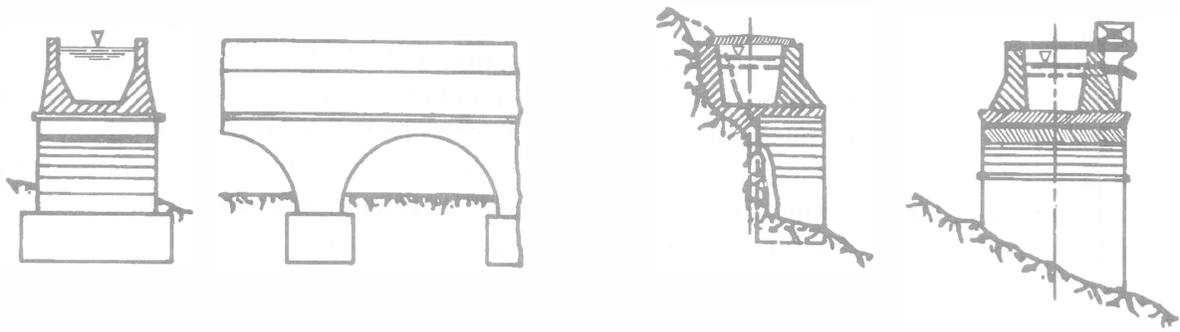
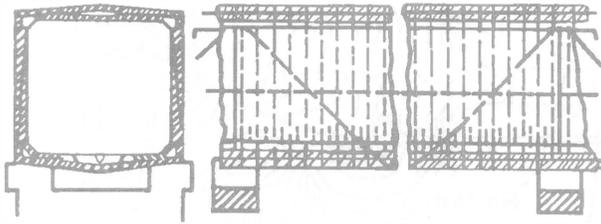


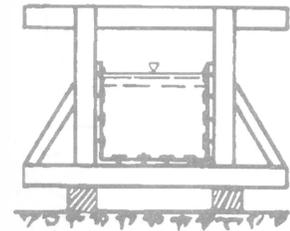
Figura 7.19. Otras secciones típicas de un canal con diversas formas geométricas y estructurales, según Mosonyi (1963)



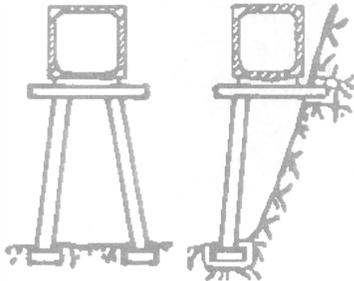
a) Acueducto abierto de concreto soportado por arcos



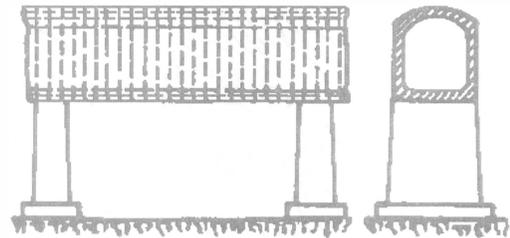
b) Detalle de un acueducto cerrado de concreto reforzado



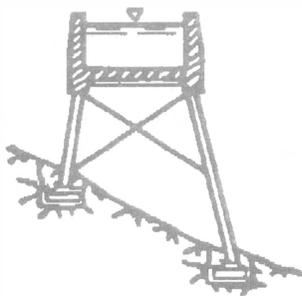
c) Acueducto abierto de madera



d) Acueducto cerrado de concreto reforzado sobre caballetes



e) Acueducto cerrado de concreto sobre pilas



f) Acueducto abierto de concreto reforzado sobre caballetes



g) Acueducto cerrado de acero sobre caballetes

Figura 7.20. Acueductos para salvar bajos de la topografía en el trazo de un canal de conducción, según Mosonyi (1963)

Para salvar una barranca se utiliza un puente-canal o un sifón invertido. El primero es el caso presentado en la figura 7.21 y sus detalles en la figura 7.22. El canal se convierte en un acueducto, soportado por un puente de concreto reforzado o metálico. El sifón invertido se muestra en la figura 7.23 y puede descansar sobre el lecho de la barranca o río, o bien apoyarse o colgarse de un puente en un nivel que llene toda su sección. Es por ello que su diseño difiere del acueducto ya que funciona completamente lleno y su cálculo es como el de un conducto a presión, donde las pérdidas son muy importantes (sección 9.2.6).

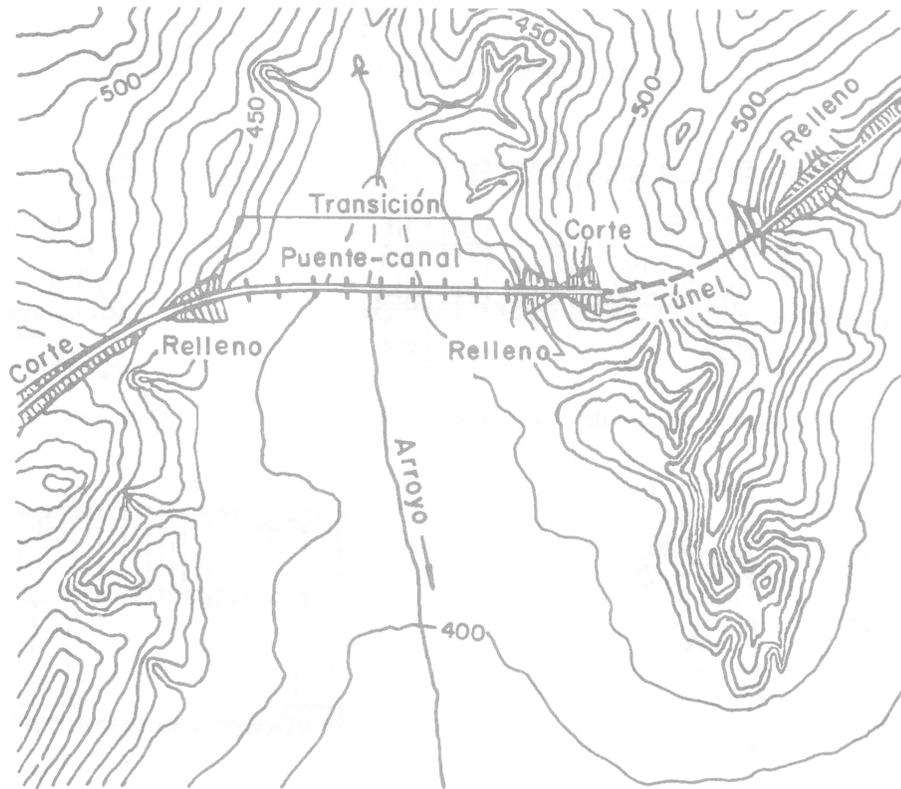


Figura 7.21. Trazo de un canal de conducción con puente-canal y túnel, según Mosonyi (referencia 7)

Es frecuente que algunos conductos que operan parcialmente llenos tengan que ser cubiertos para no exponerlos. La protección se puede deber a razones de seguridad cuando se prevén derrumbes del terreno circunvecino, para proteger la calidad del agua cuando es para aprovisionamiento, o por razones de higiene y seguridad cuando el agua es residual. La sección del conducto puede ser rectangular, circular, herradura o cualquier otra forma razonable, donde la forma del conducto queda supeditada a razones estructurales para soportar las cargas externas, más que a razones de tipo hidráulico. Algunas secciones típicas se muestran en la figura 7.24.

El diseño hidráulico de un conducto cubierto es igual que el de un canal abierto, excepto por el incremento de resistencia cuando la superficie del agua se aproxima al techo. Dicho incremento llega a ser del orden de 20 por ciento en un conducto cuadrado que se llena, pero es menos drástico si la cubierta es abovedada ya que la reducción en capacidad ocurre gradualmente. Cuando el tirante con que opera el conducto es sólo un poco menor que su altura total, cualquier obstrucción pequeña puede sobrelevar la superficie libre y producir un estrangulamiento. El diseño es seguro sólo si el conducto lleno conduce un caudal un poco mayor que el deseado.

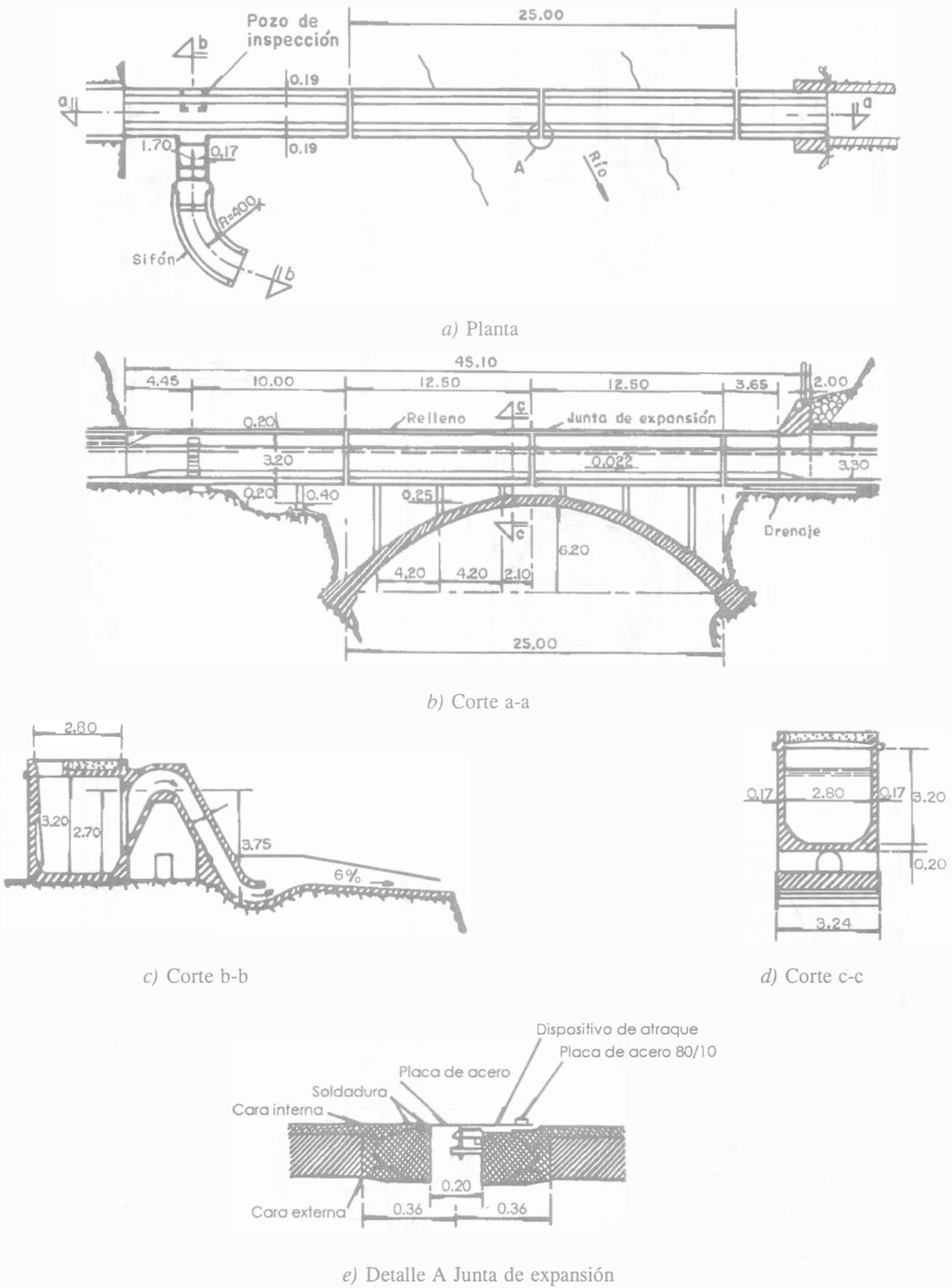
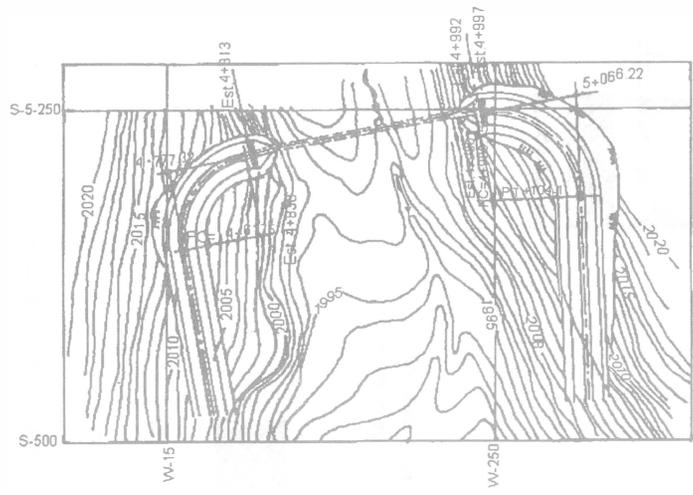
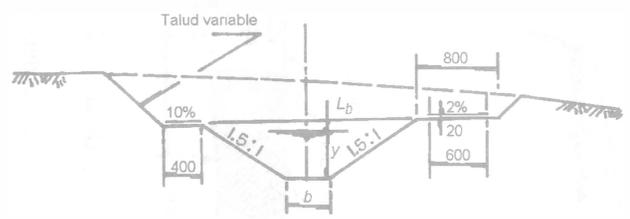


Figura 7.22. Estructuras de apoyo, de excedencias y detalles de un puente-canal, en el trazo de un canal de conducción, según Mosonyi (1963). Acotaciones en metros

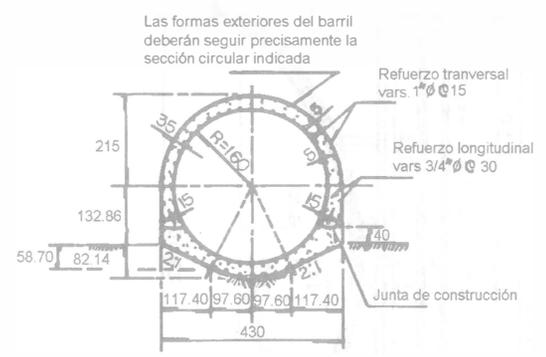


Planta

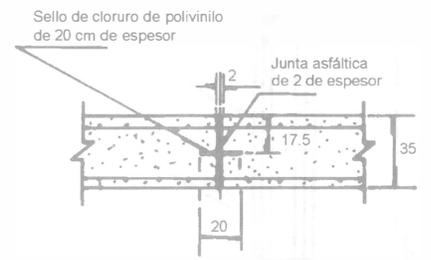


Sección del canal

DATOS HIDRÁULICOS					
DEL CANAL			DEL SIFÓN		
$Q = 25.0 \text{ m}^3/\text{s}$	$n = 0.030$	$Q = 50.1 \text{ m}^3/\text{s}$	$n = 0.030$	$Q = 25.0 \text{ m}^3/\text{s}$	$n = 0.015$
$A = 33.68 \text{ m}^2$	$R_h = 1.980 \text{ m}$	$A = 56.54 \text{ m}^2$	$R_h = 2.584 \text{ m}$	$A = 10.18 \text{ m}^2$	$R_h = 0.90 \text{ m}$
$V = 0.75 \text{ m/s}$	$S = 0.0002$	$V = 0.888 \text{ m/s}$	$S = 0.0002$	$V = 2.456 \text{ m/s}$	$V = 2.461 \text{ m/s}$
$y = 3.47 \text{ m}$	$k = 1.5$	$y = 4.82 \text{ m}$	$k = 1.5$	$D = 3.60 \text{ m}$	$D = 3.60 \text{ m}$ (2 conductos)
$b = 4.50 \text{ m}$	$L_b = 2.06 \text{ m}$	$b = 4.50 \text{ m}$	$L_b = 0.71 \text{ m}$		

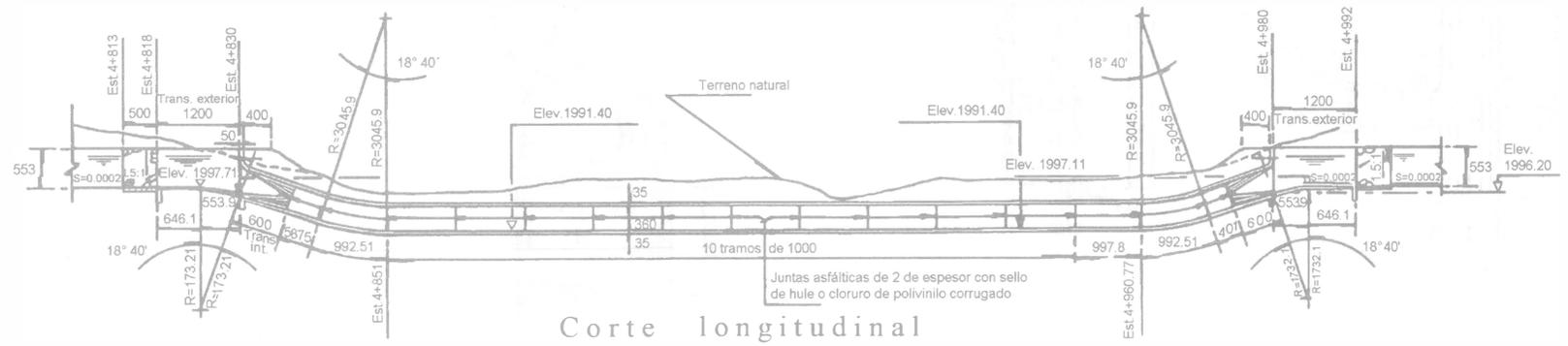


Sección del conducto



Detalle de las juntas

Acotaciones en centímetros



Corte longitudinal

Figura 7.23. Sifón invertido en el cruce de un canal principal con un arroyo

Sobre laderas muy accidentadas no es económico el trazo de un canal superficial siguiendo curvas de nivel tan irregulares, siendo entonces preferible un túnel, como se ve en la figura 7.21, después del puente canal. La opción de un túnel es también ventajosa en áreas urbanas muy congestionadas por vialidades u otros servicios que habría necesidad de interferir si se construyera un conducto superficial. La sección puede ser rectangular, circular, herradura o alguna combinación de ellas, como las que se muestran en la figura 7.25. Las dimensiones de la sección deben ser suficientes para conducir el gasto de diseño con la pendiente disponible y adecuarse a los requerimientos constructivos. La sección circular es la mejor forma hidráulica y también la más estable cuando el terreno no es seguro. Es común que los lados rectos y fondos planos sean más fáciles de excavar. El arco superior en un túnel reduce las cargas externas y agrega resistencia al recubrimiento cuando éste se requiere. En un túnel excavado en roca, aunque sea fracturada, el piso debe ser plano a menos que se espere presión hidrostática externa, en cambio, si el terreno es suave, el piso debe ser curvo al grado de adoptar la sección circular si el terreno es extremadamente denso. Las secciones portal y herradura poseen más área hidráulica en la parte inferior que la circular y por ende, mayor capacidad de conducción.

El costo unitario (por m^3) de excavación en un túnel, varía con las dimensiones de la sección. La dimensión mínima del túnel es de 2 m cuando la excavación es manual o 2.50 m cuando es con máquina. En un buen terreno el costo unitario de excavación disminuye cuando aumenta el diámetro, hasta el punto en que puede usarse equipo mecánico de extracción cuando el diámetro es mayor de 7.50 m. Sin embargo, si el terreno está muy fracturado, el costo unitario de excavación puede aumentar con el diámetro por encima del óptimo, debido al costo excesivo que llega a tener el ademe para el soporte del techo y paredes durante la excavación.

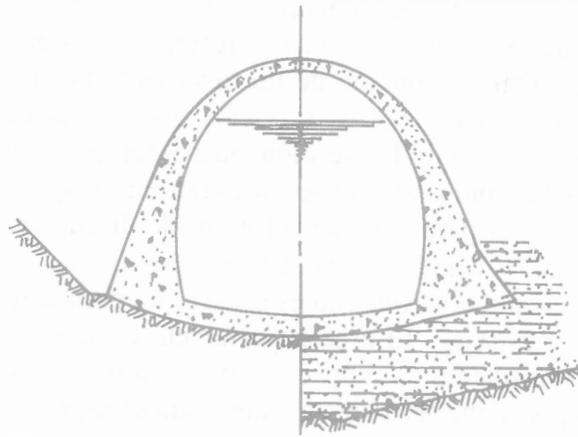
La sección circular conduce el mismo gasto que a tubo lleno cuando la relación de llenado es $y/D = 0.80$. Es por ello que la pendiente del túnel se calcula de modo que el tirante y no rebase a $0.8 D$, donde D es el diámetro. La presión interior del agua no se considera en el análisis estructural, de manera que el espesor y calidad del revestimiento en un túnel quedan gobernados por la presión de la roca, impermeabilidad y, en ocasiones, por la agresividad de las aguas que conduce.

Los acueductos, conductos cubiertos y túneles se protegen contra sobrepresiones causadas por ondas ocasionales en el canal de conducción, instalando desfuegos a base de sifón en su extremo inicial, como se muestra en la figura 7.25. La ubicación de los vertedores laterales es más conveniente en aquellos puntos donde el canal de conducción cruza un arroyo u otro canal.

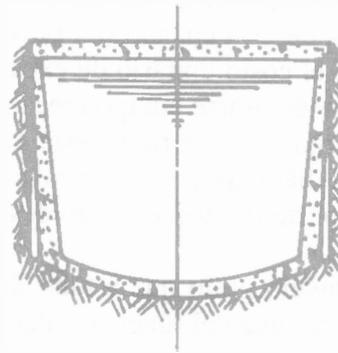
7.5 CRITERIOS GENERALES DE DISEÑO

7.5.1 Aspectos básicos

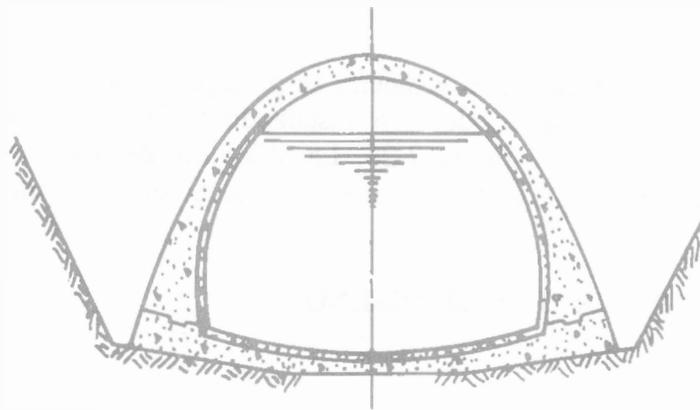
Es frecuente que el diseño de un canal se plantee teniendo como datos el gasto máximo que debe conducir, la rugosidad de sus fronteras y la pendiente disponible de acuerdo con la topografía del terreno en que se va a construir. Con éstos, se puede obtener un solo valor del módulo de sección ($A R_h^{2/3}$), que se satisface con distintas formas y dimensiones de la sección, unas más eficaces que otras, lo que significa más de una solución. La sección trapecial es la más utilizada en canales abiertos, pero persiste el problema de seleccionar los taludes y la mejor proporción ancho/tirante.



a) Herradura estándar

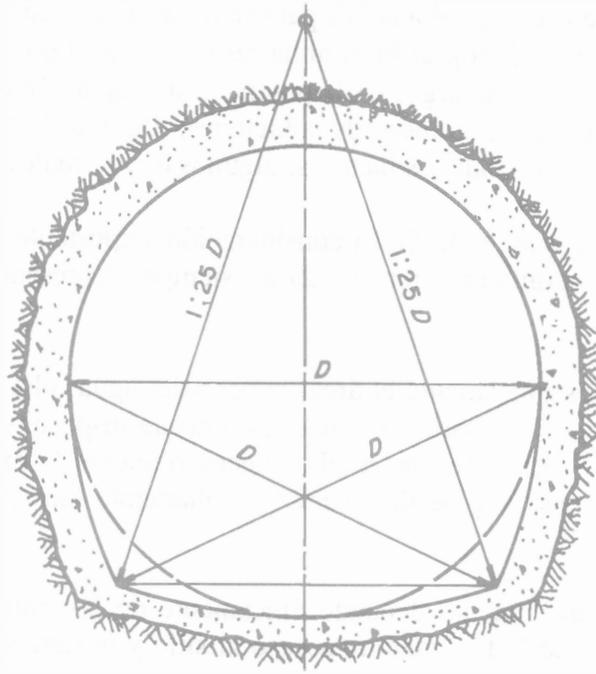


b) Cuadrada deformada



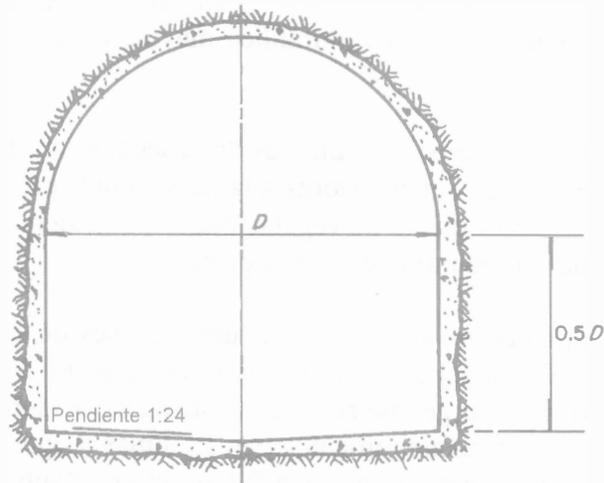
c) Herradura modificada con junta longitudinal

Figura 7.24. Secciones típicas de conductos cubiertos



Área hidráulica = $0.834 D^2$
 Perímetro mojado = $3.286 D$
 Diámetro equivalente = $1.031 D$

a) Sección herradura modificada



Área hidráulica = $0.905 D^2$
 Perímetro mojado = $3.58 D$
 $R_h = 0.253 D$

b) Sección portal

Figura 7.25. Secciones típicas en túneles

En el subcapítulo 2.7 se presentó el análisis para optimar el área hidráulica y perímetro mojado de la sección trapecial, a fin de lograr la mínima resistencia al flujo. Esto incluso se realizó para otras formas de sección. Sin embargo, en la práctica, la adaptación del canal a la conformación del terreno original causa un sinnúmero de soluciones, algunas de las cuales se muestran en la figura 7.18 donde intervienen muchos factores, algunos de los cuales se exponen a continuación.

- 1) La resistencia al flujo no es la única consideración importante en el diseño y, por ello, la sección hidráulica óptima (sección 2.7.2) no siempre representa la mejor solución, sobre todo, económica.
- 2) El área hidráulica es únicamente el área de paso del agua; el volumen total de excavación debe también incluir libre bordo, bermas, camino de inspección, cunetas, etc., por lo que el valor mínimo de dicha área no implica necesariamente la excavación total mínima; las dimensiones de la sección pueden variar ampliamente sin que cambie mucho el valor requerido.
- 3) El costo de la excavación no depende únicamente de la cantidad de material removido. Consideraciones como la facilidad de acceso al sitio y la remoción del material de desecho pueden ser más importantes que el volumen excavado.
- 4) Si el cuerpo del canal tiene que protegerse, el costo del recubrimiento puede ser comparable con el de la excavación e incluso ser mayor.
- 5) Cuando la pendiente en canales cortos no queda absolutamente fijada por la topografía local, se debe considerar como una variable en los cálculos de economía. Un valor reducido de la pendiente suele requerir un área hidráulica mayor, aunque menos excavación en cortes laterales.
- 6) Pendientes reducidas y dimensiones amplias de la sección producen además velocidades del flujo pequeñas, que pueden ser inferiores a la de sedimentación del material que transporta el agua y propiciar el crecimiento de vegetación, lo que aumenta el costo del mantenimiento por los depósitos de sedimento que se producen.
- 7) En el diseño de un canal no recubierto las dimensiones de la sección se deben elegir de modo que el material resista la acción erosiva del agua, es decir, que el flujo no erosione las fronteras y modifique su geometría, y con ésta su capacidad de conducción; también que su costo de operación y mantenimiento sean mínimas y que su perímetro mojado sea el menor posible para que ocurra la mínima filtración en el subsuelo.
- 8) En canales recubiertos el volumen de excavación y la superficie de recubrimiento son factores importantes en el costo, por lo cual su optimación lo reduce. En muchos casos, el área hidráulica queda supeditada a la pendiente disponible. Si dicha pendiente aumenta, en general se reduce el costo del canal, pero ésto puede significar menor elevación en su extremo final y dominar menores áreas de cultivo si el canal es de riego, o menor carga disponible sobre las máquinas si es para alimentar una planta hidroeléctrica.

- 9) En general, un canal de conducción se diseña a flujo uniforme en régimen subcrítico, excepto cuando se trate de canales cortos y de rápidas en canales de descarga de obras de excedencia. El régimen del flujo no debe ser el crítico ni próximo a él, ya que al cambiar las condiciones de diseño por imperfecciones en la construcción, o por deficiente conservación con el tiempo, suelen ocurrir condiciones de inestabilidad del nivel del agua que reducen los márgenes de seguridad.
- 10) En los canales de fondo y paredes fijas, con o sin recubrimiento de superficie dura, se debe limitar la velocidad media máxima del flujo para evitar el desgaste y la erosión continua del cuerpo del canal por efecto de la turbulencia, abrasión y eventual cavitación.
- 11) La elección del ancho o del tirante en canales pequeños carece de importancia, toda vez que la eficiencia hidráulica se ve poco afectada dentro de un intervalo razonable de la proporción ancho/tirante. Ésta suele ser del orden de 2.
- 12) En canales grandes conviene limitar el tirante a un máximo de 3 m para evitar el costo excesivo en la construcción de terraplenes altos en las márgenes, que sean seguros bajo la presión del agua, así como minimar el peligro de falla de los mismos. Cuando el corte es en roca o en otros materiales firmes, no existe gran peligro en utilizar tirantes mayores. La proporción ancho/tirante puede llegar a ser igual a 8.

7.5.2 Selección del talud

Los taludes de un canal trapecial deben garantizar la estabilidad del corte mientras se efectúa la excavación, de manera que si se coloca un recubrimiento de superficie dura, éste no tenga que resistir el total del empuje de los suelos. Si no hay recubrimiento, además de estabilidad se busca resistencia a la erosión y el talud queda también supeditado a las fluctuaciones que pueda tener el nivel del agua durante la operación del canal. Cuando el corte sea profundo, los taludes en cortes y rellenos deben ser de acuerdo con el ángulo de reposo del material, aceptando la debida tolerancia por saturación e infiltración. Los taludes que están por encima del nivel máximo del agua dentro de la sección son con frecuencia de mayor inclinación que los que están debajo. En zanjas pequeñas de drenaje, el talud es menor que el que tendría un canal de riego excavado en el mismo material.

En la tabla 7.17 se presentan los valores recomendables para distintas clases de material y en la tabla 7.18 los recomendados por el *U.S. Bureau of Reclamation* (USBR) para canales en tierra. En la tabla 7.19 se muestran los taludes correspondientes a canales construídos en regiones semiáridas, cuando operen con grandes fluctuaciones del caudal, por ende, del nivel de la superficie del agua.

En muchos casos, el talud queda determinado por la economía en la construcción y, en este sentido, es apropiado considerar los criterios que a continuación se mencionan.

- 1) Es común que el talud final en canales con recubrimiento de superficie dura sea menor que en los no recubiertos. Casi cualquier material cohesivo con drenaje libre se puede mantener con talud 1:1 si se recubre.

Tabla 7.17. Talud recomendable para canales excavados en diversas clases de material

Material	Talud
Roca sana no estratificada	0 a 0.25
Roca fracturada o alterada	0.25
Roca estratificada poco alterada	0.25 a 0.5
Roca alterada; tepetate duro	1.0
Canto rodado redondeado	1.75
Canto rodado anguloso	1.0
Grava angulosa, suelo firme con recubrimiento de grava, tierra en grandes canales	1.0
Grava semifina, arena, suelo arenoso suelto; material poco estable	2.0 a 2.5
Arenisca blanda	1.5 a 2.0
Tierra con recubrimiento de piedra	1.0
Arena saturada	2.0 a 3.0
Limo arenoso	1.5 a 2.0
Suelo limo-arenoso con grava gruesa o tierra arcillosa; tepetate blando	1.0 a 1.5
Limo arcilloso	1.0 a 1.5
Arcilla dura	0.5 a 1.0
Arcilla muy compacta (densa), tierra, o suelo con revestimiento de concreto	1.0 a 1.5
Arcilla dura o tierra en canales pequeños	1.5
Arcilla porosa o saturada	3.0

Tabla 7.18. Talud recomendable para canales en tierra, según U.S. Bureau of Reclamation

Tipo de suelo	Tirante hasta 1.20 m	Tirante mayor de 1.20 m
Turba	0	--
Arcilla dura	0.5	1.0
Limo arcilloso	1.0	1.5
Limo arenoso	1.5	2.0
Arena	2.0	3.0

Tabla 7.19. Talud recomendable en canales con grandes fluctuaciones del caudal en regiones semiáridas, según Kinori (1970, referencia 11)

Tipo de suelo	Tirante hasta 1.0 m	Tirante mayor de 1.0 m
Turba	0.25	0.5
Arcilla dura	1.0	1.5
Limo arcilloso	1.5	2.0
Limo arenoso	2.0	3.0
Arena	3.0	4.0

Si el material de recubrimiento es concreto, taludes menores de 1:1 requieren de moldes interiores para el colado y cuando son menores de 0.75:1, el revestimiento se debe diseñar para resistir el empuje activo del terreno sobre las paredes cuando el suelo es granular. Otros tipos de recubrimiento obedecen a razones de estabilidad y de impermeabilización y se colocan sobre taludes comparables a los usados en canales sin recubrimiento.

- 2) Los taludes cortados en roca pueden ser verticales si éste es deseable y el corte no es profundo, y pueden no necesitar revestimiento.
- 3) El talud común de canales en tierra (sin recubrimiento) es 1.5:1 o 2:1; el último es más frecuente. El talud 1:1 se utiliza cuando el canal se excava en materiales cohesivos.

La selección definitiva del talud apropiado debe ser soportada por un análisis de su estabilidad, de acuerdo con las propiedades mecánicas del material obtenidas en laboratorio a partir de muestras del suelo tomadas en el sitio. Lane y después Simons y Albertson (1960, referencia 12) determinaron por mediciones directas los valores del ángulo de reposo ϕ del material y elaboraron las curvas de diseño mostradas en la figura 7.26 que permiten obtener los diferentes valores en material no cohesivo, seco o saturado, de diámetro medio mayor de 0.1 mm y varios grados de redondez.

En la tabla 7.20 se presentan algunos valores del ángulo de reposo ϕ para suelos cohesivos de tamaño menor de 5 mm. Se observa una contradicción entre los valores dados en las tablas 7.19 y 7.20. Por ejemplo, el ángulo natural de reposo en arena húmeda es de 0.262 a 0.436 rad (15° a 25°), mientras que el talud permisible (4:1) es de 0.244 rad (14°).

En la práctica, las fuerzas causadas por el flujo pueden destruir el canal si el ángulo θ de inclinación del talud es menor que el natural ϕ de reposo; es decir, se debe cumplir que $\theta < \phi$, con una diferencia de 0.1 a 0.21 rad (6° a 12°), pero k debe ser múltiplo de 0.25.

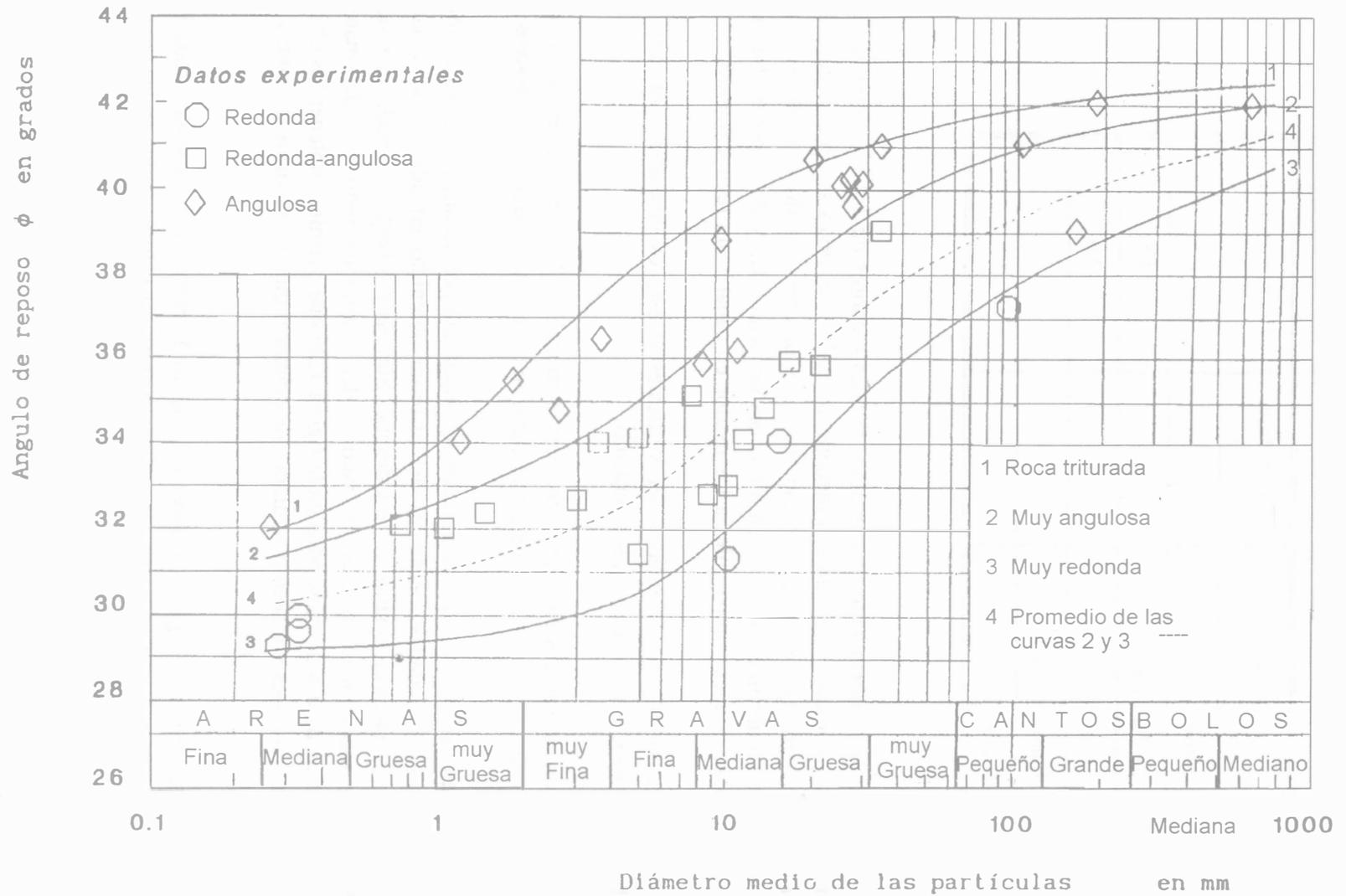


Figura 7.26. Ángulo de reposo de materiales no cohesivos, en función del diámetro y forma de sus partículas, según Lane y Simons (1960)

Tabla 7.20. Ángulo natural de reposo ϕ (en rad) recomendable en suelos cohesivos, según U. S. Bureau of Reclamation

Suelo	Seco	Húmedo
Turba	$\pi/3$ a $\pi/2.5$ (60° a 75°)	$\pi/3$ a $\pi/2.5$ (60° a 75°)
Arcilla dura	$\pi/4.5$ a $\pi/3.6$ (40° a 50°)	$\pi/9$ a $\pi/7.2$ (20° a 25°) en estado no cohesivo
Limo arcilloso y limo arenoso	$\pi/4.5$ a $\pi/4$ (40° a 45°)	$\pi/9$ a $\pi/6.429$ (20° a 28°)
Limo arenoso	$\pi/7.2$ a $\pi/6$ (25° a 30°)	$\pi/12$ a $\pi/7.2$ (15° a 25°)
Arena	$\pi/6$ a $\pi/5.143$ (30° a 35°)	$\pi/12$ a $\pi/7.2$ (15° a 25°)

7.5.3 Velocidad mínima

El diseño de canales, recubiertos o no, que conducen agua con material fino en suspensión debe considerar que la velocidad media del flujo para el caudal mínimo de operación sea mayor o igual que la necesaria para evitar la sedimentación del material transportado. Además, aunque el canal conduzca agua limpia, una velocidad pequeña propicia el crecimiento de vegetación sobre las paredes y fondo o sobre las juntas constructivas del recubrimiento. En este caso, la velocidad mínima necesaria debe también evitar que ello ocurra.

Existen distintos criterios para elegir la velocidad que evita la sedimentación y el crecimiento de hierbas y plantas. Los hay desde establecer valores prácticos como los presentados en el subcapítulo 2.8, hasta criterios que precisan la velocidad del flujo para evitar la sedimentación, en los que es necesario conocer las propiedades del material transportado en suspensión.

En la ex-Unión Soviética se ha usado la ecuación de Levi (referencia 13), cuyos resultados en su forma simplificada se presentan en la figura 7.27, donde d_m es el diámetro medio en mm del sedimento predominante (en peso) del material en suspensión, V la velocidad media del flujo que evita el depósito del sedimento en m/s y R_h el radio hidráulico en m.

Otros criterios utilizan la concentración de partículas en suspensión y su velocidad de caída. El propuesto por Pedroli (1963, referencia 14) se presenta en la figura 7.28, donde se relaciona la concentración en masa (o en peso) del sedimento (C_{33} en la tabla 7.3) en partes por millón, con el parámetro VS/ω_{50} , donde V es la velocidad media del flujo mínima para evitar la sedimentación, ω_{50} la velocidad de caída del sedimento para $d = d_{50}$ (figura 7.1) y S la pendiente hidráulica en el canal, la cual en flujo uniforme coincide con la del fondo. El punto definido con ambos parámetros como coordenadas en la figura 7.28 debe quedar a la derecha de la curva para evitar la sedimentación.

La adopción de una velocidad mínima del flujo es también necesaria para evitar el crecimiento de vegetación en el canal. Un tirante mayor de 1.5 a 2.0 m, así como una velocidad mayor de 0.3 m/s cuando el agua es turbia o mayor de 0.5 m/s cuando el agua transporta arena fina en suspensión, son suficientes para evitarlo.

El lavado periódico del posible sedimento depositado en el canal se puede hacer mediante compuertas laterales que descarguen a un canal de lavado. La velocidad del flujo en el canal, incrementada por el descenso en el nivel del agua que se produce al abrir la compuerta, transporta el sedimento hasta el umbral y de ahí hasta el canal de lavado.

7.5.4 *Velocidad máxima*

La velocidad máxima de operación en canales de fronteras fijas, con o sin recubrimiento de superficie dura, que conducen agua limpia o con material en suspensión, debe limitarse para evitar el desgaste y la erosión continua del fondo y paredes por la turbulencia, la abrasión y eventualmente la cavitación. En la tabla 7.21 se muestran los valores de la velocidad máxima admisible para distintos materiales en el cuerpo del canal.

Cuando no existe recubrimiento o éste no es de superficie dura, el material que forma el cuerpo del canal se ve expuesto a la acción erosiva del agua, debiendo evitarse que el flujo lo arrastre y modifique la sección. La velocidad media con la que se inicia el arrastre del sedimento se conoce como *velocidad crítica* y depende principalmente del tamaño, clase y peso del material en el cuerpo del canal, además del tirante. Su selección se presenta en el subcapítulo 7.7.

7.5.5 *Libre bordo*

Es necesario prever un libre bordo por encima del nivel de la superficie del agua calculada, con el fin de considerar su variación por efecto de oleaje, estimación defectuosa de rugosidad, arrastre de aire, fallas en la operación, ondas de traslación generadas por maniobras bruscas de rechazo o demanda del gasto en canales de fuerza, por cierre o apertura de compuertas intermedias, o por maniobras defectuosas que puedan provocar el desbordamiento.

La magnitud del libre bordo depende de muchos factores que hacen compleja su selección, pero existen algunas reglas sencillas producto de la experiencia. En general, varía entre 5 y 30 por ciento del tirante máximo del canal. Una ecuación empírica general es la 2.71.

$$L_b = 0.30 + 0.25 y \quad (7.14)$$

donde y tirante máximo, y L_b libre bordo, ambos en metros. Para el último se acepta un máximo de 1.20 m.

Según el *U.S. Bureau of Reclamation*, el libre bordo en canales revestidos se obtiene de la figura 7.29, en función del gasto. De esta misma figura se obtiene además la altura hasta la cual hay que prolongar el revestimiento por encima de la superficie del agua.

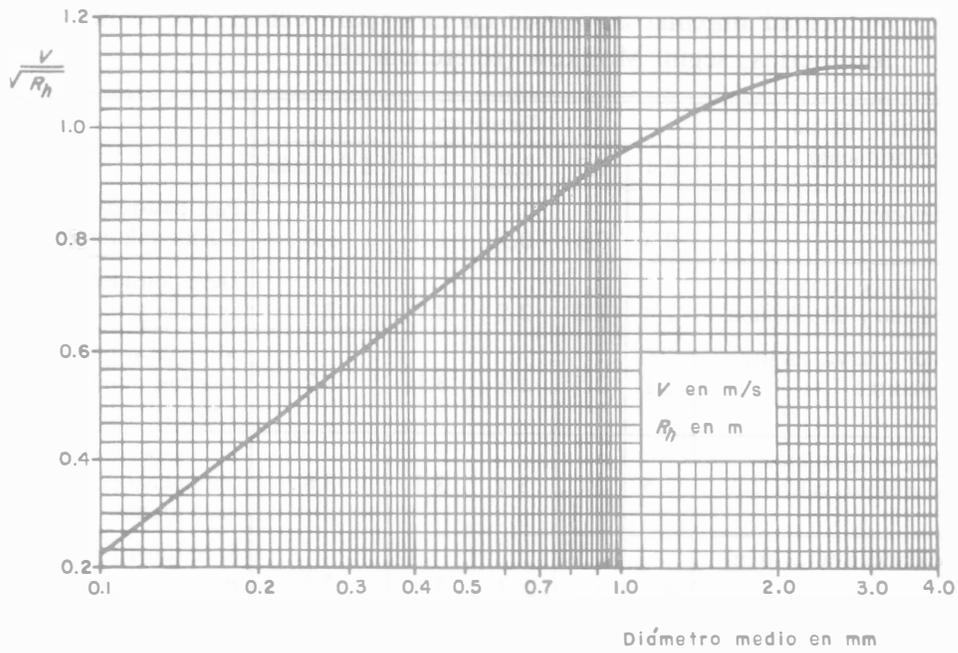


Figura 7.27. Velocidad de sedimentación en un canal, según Levi (referencia 13)

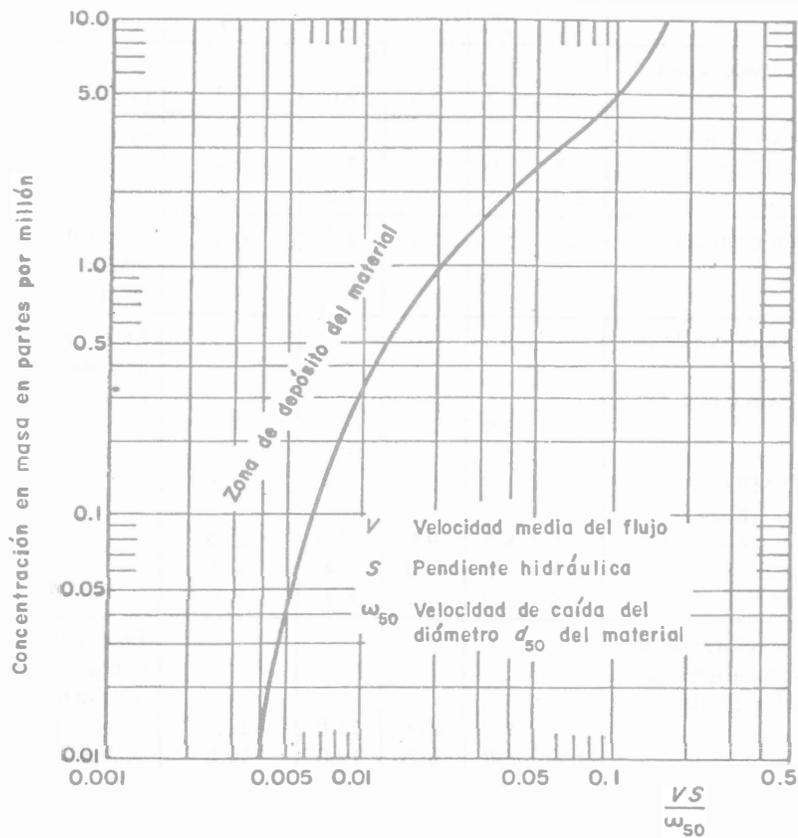


Figura 7.28. Velocidad de sedimentación en canales que conducen agua con sedimentos en suspensión, según Pedrolí (referencia 14)

Tabla 7.21. Velocidad máxima admisible en m/s, para canales de lecho y paredes fijos o recubiertos, según Mostkow (referencia 15)

Material o tipo de recubrimiento	Tirante en m					Observaciones
	0.4	1.0	2.0	3.0	5.0 o más	
Césped recién crecido en área plana	0.6	0.8	0.9	1.0	1.0	Para pasto-alfombra multiplicar por 2.2 los valores para cada tirante.
Cubierta de ramaje verde con buen crecimiento y distribución	1.8	2.2	2.5	2.7	2.7	Debe considerarse la solidez de la sujeción y su colocación.
Conglomerado, marga, esquisto arcilloso y pizarras	2.1	2.5	2.9	3.1	3.2	Multiplicar por 0.47 para suelos blandos, por 1.43 para suelos duros, y por 2.0 para suelos muy duros.
Caliza porosa, conglomerado duro, caliza arenosa, caliza dolomítica	2.5	3.0	3.4	3.7	3.8	Si la superficie de la roca es lisa, multiplicar por 1.67 los valores para cada tirante.
Arenisca dolomítica dura, arenisca sílicea	3.7	4.5	5.2	5.6	5.8	Si la superficie de la roca es lisa, multiplicar por 1.57 los valores para cada tirante.
Mármol, granito, sienita (resistencia a la compresión de 156.91 a 196.13 MPa)	16	20	23	25	25	Para roca con superficie lisa, 25 m/s es permisible con cualquier tirante. En caso de estar agrietada o disgregada por intemperismo, los valores permisibles deben disminuir.
Porfirita, andesita, diabasa, basalto, cuarzita (resistencia temporal a la compresión de 156.91 a 196.13 MPa)	21	25	25	25	25	
Recubrimiento de madera con acabado burdo	6.0	7.5	8.5	9.0	9.3	Si está bien terminado, multiplicar por 2.
Recubrimiento sencillo de piedra de tamaño:						Si el recubrimiento es en dos capas, multiplicar por 1.25.
15 cm	2.5	3.0	3.5	3.8	3.9	
20 cm	2.9	3.5	4.0	4.3	4.4	
Recubrimiento con gaviones	4.2	5.0	5.7	6.2	6.6	La posibilidad de desgaste de las mallas y su corrosión debe tomarse en cuenta.
Mampostería con mortero de cemento:						En el caso de buenas condiciones de acabado superficial y reforzamiento en juntas, multiplicar los valores por 1.8.
Ladrillo normal (resistencia 1.57 a 3.14 MPa)	1.6	2.0	2.3	2.5	2.5	
Ladrillo con refuerzo de acero (resistencia 11.77 MPa)	4.6	5.5	6.3	6.9	7.0	
Ladrillo refractario (Klinker) (resistencia 24.5 a 29.42 MPa)	7.1	8.5	9.8	11.0	11.5	
Piedra de poca resistencia	2.9	3.5	4.0	4.4	4.5	
Piedra de mediana resistencia	5.8	7.0	8.1	8.7	8.8	
Concreto simple y reforzado, de cabado irregular. Resistencia de probeta cúbica a los 28 días, en MPa						En el caso de acabado cuidadoso con juntas rebajadas y pulidas, se admite hasta 25 m/s, pero si el agua transporta material grueso y el acabado es regular, se admiten valores entre 12 y 20 m/s.
20.59	7.5	9.0	10.0	11.0	11.9	
16.67	6.6	8.0	9.2	10.0	10.6	
12.75	5.8	7.0	8.1	8.7	9.2	
10.79	5.0	6.0	6.9	7.5	8.0	
8.83	4.2	5.0	5.7	6.2	6.6	

Los valores de la resistencia en MPa se multiplican por 10.1972 para convertirlos a kgf/cm²

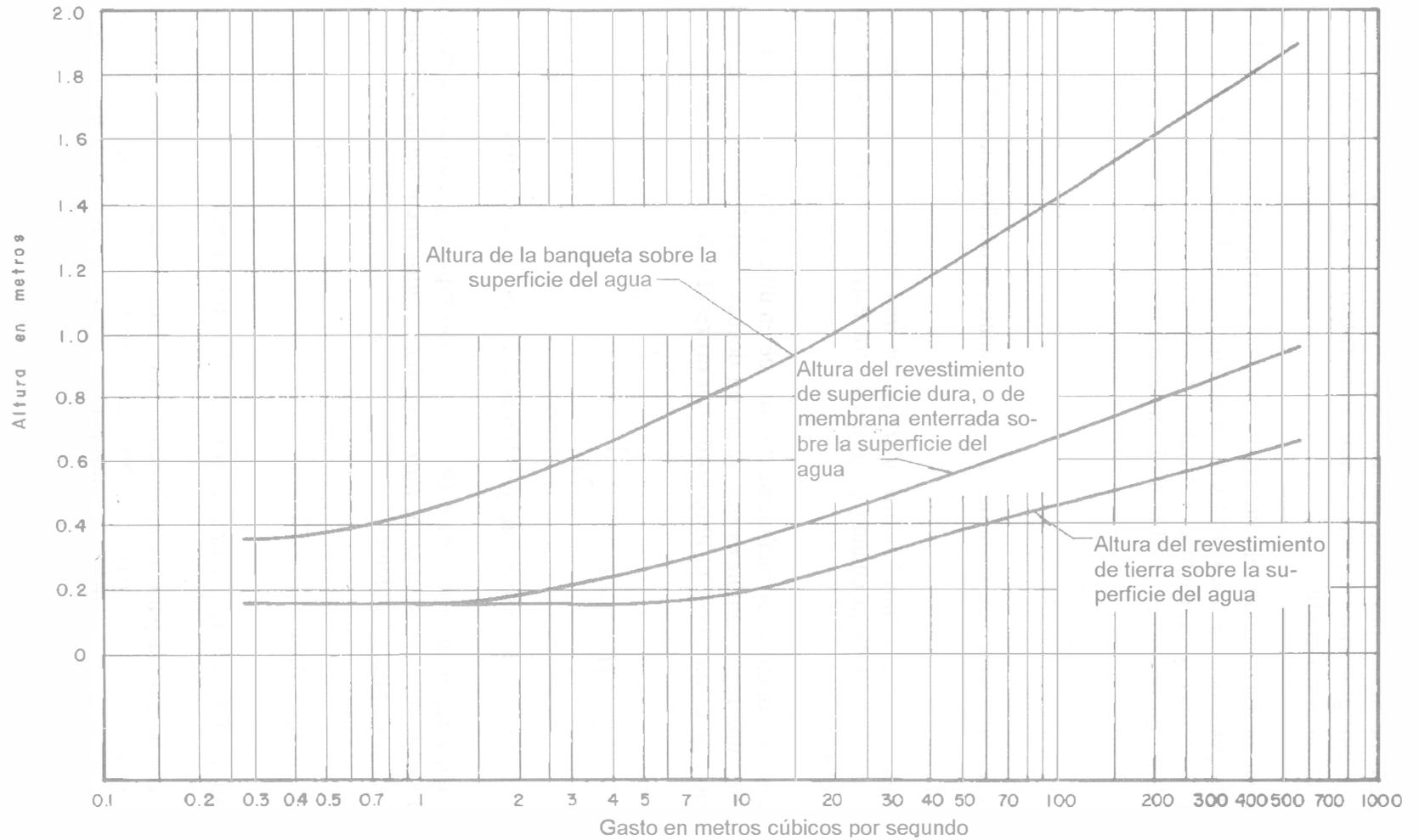


Figura 7.29. Libre bordo para canales con revestimientos de superficie dura, membrana enterrada y tierra, según U.S. Bureau of Reclamation

En canales no revestidos o pequeños, el libre bordo queda gobernado por el tamaño, localización, ingreso de aguas pluviales, fluctuaciones del nivel freático, acción del viento, características del suelo, gradientes de infiltración, requerimientos del camino de operación y disponibilidad del material excavado.

Según el *U.S. Bureau of Reclamation*, el libre bordo en canales no revestidos varía desde 0.30 m en canales laterales pequeños de poco tirante y caudal menor de 0.5 m³/s, hasta 1.20 m en canales de 85 m³/s o más de capacidad y tirantes relativamente grandes. Una estimación preliminar del libre bordo (en m) es posible mediante la expresión.

$$L_b = 0.552 \sqrt{c y} \quad (7.15)$$

donde y tirante m, c coeficiente que varía desde 1.5 en canales pequeños, hasta 2.5 en canales grandes.

El libre bordo sugerido por el *Central Board of Irrigation and Power* de la India es de 0.5 m cuando $Q < 1.5$ m³/s, de 0.75 m cuando Q se encuentra entre 1.5 y 85 m³/s y de 0.90 m cuando $Q > 85$ m³/s.

El libre bordo en un acueducto es normalmente menor que en un canal y varía entre 6 y 10 por ciento del diámetro; una regla común es que valga un doceavo del diámetro o del ancho del acueducto. Cuando éste es metálico, el libre bordo (en m) resulta de la ecuación

$$L_b = \left[0.09 + 0.033 \frac{V^2}{2g} \right] y \quad (7.16)$$

donde y es el tirante en el acueducto en m, y V la velocidad del agua en m/s.

En canales con flujo a régimen supercrítico ($F > 1$) (como rápidas y canales de descarga de vertedores), desde luego revestidos, el *U. S. Bureau of Reclamation* recomienda calcular el libre bordo con la ecuación empírica siguiente

$$L_b = 0.61 + 0.0372 V y^{1/3} \quad (7.17)$$

donde V velocidad del flujo en m/s, y tirante en m, L_b libre bordo en m.

Cuando el canal conduce agua para un aprovechamiento hidroeléctrico debe considerarse las ondas de traslación generadas por maniobras bruscas de rechazo o demanda de las máquinas, o por el cierre o apertura de compuertas intermedias (véase subcapítulo 3.8). La altura del revestimiento queda definida por la altura máxima de una onda positiva, debiendo exceder en 0.30 a 0.50 m su cresta (véase ejemplo 3.13). El libre bordo se define también por la altura de las olas debidas a la acción del viento, en cuyo caso la dirección del viento más frecuente y el ancho del canal son factores decisivos.

Las curvas horizontales en los canales producen sobre elevación del agua en el lado exterior y descenso en el interior, que pueden disminuir el libre bordo. Cuando el flujo es subcrítico estos efectos pueden aminorarse utilizando radios de curvatura al eje del canal de tres a siete veces el ancho de la superficie libre, siendo seis el mínimo para canales grandes. En la India se recomienda un radio mínimo de 91 m para canales que conducen menos de 0.30 m³/s y hasta 1500 m para canales que conducen más de 85 m³/s. Para mayor detalle acerca de estas curvas veáse el subcapítulo 9.3 relativo al tema, que se presenta más adelante.

Ejemplo 7.11. Un canal trapecial no revestido ($n = 0.03$, Manning) va a conducir 32 m³/s con pendiente longitudinal de 0.0004. El talud del canal es de 0.5:1 y como libre bordo el 20 por ciento del tirante. El canal se va a excavar en la ladera de una montaña, de inclinación $\alpha = \pi/18$, (10°), efectuando cortes con talud $k_2 = 0.5$ como el mostrado en la figura 7.30 a fin de formar primero una plataforma y después excavar la sección del canal propiamente dicha. La berma existente entre la sección del canal y la ladera sirve para captar las aguas de lluvia con una cuneta, y también para evitar que cualquier derrumbe que se produzca no caiga directamente al canal. La berma del lado opuesto forma la sección y ayuda a evitar la entrada de aguas pluviales. Puede permitirse que pase un camino por cualquiera de los lados para la construcción y mantenimiento del canal. Diseñar la sección de manera que el volumen de excavación sea el mínimo, haciendo que $c = B + 2$ m, es decir, $g + d = 2$ m.

Solución. Con objeto de hacer comparaciones, se diseña primero la sección hidráulica óptima sin considerar al resto de la excavación. Para $k_1 = 0.5$ se tiene que

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{1.25}} = 0.8944$$

$$\text{cos } \theta = \frac{0.5}{\sqrt{1.25}} = 0.4472$$

Por tanto, de la ecuación 2.70 resulta

$$y = 2^{1/4} \left[\frac{0.8944}{2 - 0.4472} \right]^{3/8} \left[\frac{0.03 (32)}{\sqrt{0.0004}} \right]^{3/8} = 4.129 \text{ m}$$

De la ecuación 2.66 el ancho de plantilla es entonces

$$b = 2 \left[\frac{1 - 0.4472}{0.8944} \right] 4.129 = 5.104 \text{ m}$$

Siendo el área hidráulica

$$A = (5.104 + 0.5 (4.129)) 4.129 = 29.6031 \text{ m}^2$$

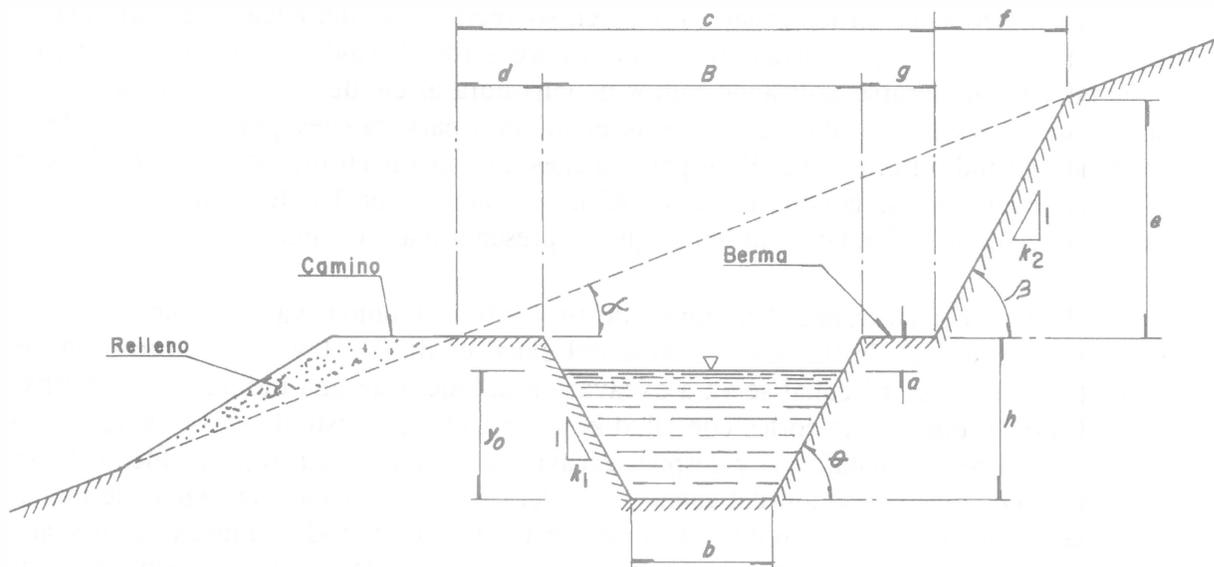


Figura 7.30. Corte transversal de la excavación en el canal del ejemplo 7.11

y la velocidad

$$V = \frac{32}{29.6031} = 1.081 \text{ m/s}$$

Se considera que el libre bordo y, por tanto, la profundidad total h de la sección son

$$a = 0.2 (4.129) = 0.826 \text{ m}$$

$$h = 4.129 + 0.826 = 4.955 \text{ m}$$

El área total de excavación del canal resulta

$$A_c = [5.104 + 0.5 (4.955)] 4.955 = 37.5673 \text{ m}^2$$

Se consideran ahora las condiciones que incluyen el resto de la excavación. De acuerdo con la simbología de la figura 7.30, el área de excavación a la altura de la plataforma es

$$A_p = \frac{c e}{2} \tag{a}$$

La tangente de los ángulos α y β se puede calcular como sigue

$$\tan \alpha = \frac{e}{c + f} \tag{b}$$

$$\tan \beta = \frac{e}{f} \quad (c)$$

Eliminando e de las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$f = \frac{c \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \quad (d)$$

y al sustituir esta ecuación en la c se obtiene

$$e = \frac{c \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

y de las ecuaciones e y a , el área A_p es

$$A_p = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{2 (\tan \beta - \tan \alpha)} c^2 \quad (f)$$

Si el talud $k_2 = 0.5$, $\tan \beta = 1/0.5 = 2$. Además, $\tan \alpha = \tan (\pi/18)$, por tanto, se obtiene

$$A_p = 0.09669 c^2 \quad (g)$$

Por otra parte, el factor de conducción del canal es

$$K = \frac{Q n}{\sqrt{S}} = \frac{32 (0.03)}{0.02} = 48 \quad (h)$$

Del valor de K se obtiene el tirante y_n y la profundidad total de excavación $h = y_n + a = 1.2 y_n$. El área de excavación del canal está dada por la ecuación

$$A_c = b h + 0.5 h^2$$

siendo además, $B = b + 2 k h = b + h$, se tiene

$$c = B + 2 m = b + h + 2 m$$

El área total de excavación es $A_t = A_c + A_p$. Para diferentes valores de b , se calcula el tirante normal y_n necesario para transportar el gasto y además el área total de excavación en cada caso.

En la tabla 7.22 se presenta un resumen de los cálculos, donde se ve que el área total mínima de excavación se obtiene para $b = 4.20$ m y tirante normal $y_n = 4.58$ m, dimensiones distintas de las de la sección hidráulica óptima, pero también poco prácticas. Es preferible una sección más ancha.

Tabla 7.22. Cálculos del ejemplo 7.11

b en m	y_n en m	h en m	A_c en m ²	c en m	A_p en m ²	A_t en m ²
3.40	5.046	6.0552	38.9204	11.4552	12.6875	51.6079
3.60	4.921	5.9052	38.6944	11.5052	12.7985	51.4929
3.80	4.801	5.7612	38.4883	11.5612	12.9234	51.4117
4.00	4.685	5.622	38.2914	11.622	13.0597	51.3511
4.20	4.575	5.490	38.1281	11.69	13.2130	51.3411
4.40	4.469	5.3628	37.9761	11.7628	13.3781	51.3542
4.60	4.367	5.2404	37.8367	11.8404	13.5552	51.3919
4.80	4.270	5.124	37.7229	11.924	13.7472	51.4701
5.00	4.177	5.0124	37.6241	12.0124	13.9518	51.5759

7.6 CANALES RECUBIERTOS

7.6.1 Propósito de un recubrimiento

El recubrimiento en un canal satisface uno o varios de los objetivos que a continuación se mencionan.

- a) Permitir la conducción del agua a velocidades mayores en áreas de excavación profunda o difícil y a costo efectivo adecuado.
- b) Disminuir la filtración y fugas del agua a través del cuerpo del canal y con ello el costo elevado que producen, evitando el anegamiento de los terrenos adyacentes y la necesidad de obras de drenaje costosas.
- c) Reducir y homogeneizar la rugosidad, con ello las dimensiones de la sección y los volúmenes de excavación.
- d) Asegurar la estabilidad de la sección y proteger los taludes del intemperismo y de la acción del agua de lluvia.
- e) Evitar el crecimiento de vegetación y reducir la destrucción de los bordos por distintos animales.
- f) Reducir los costos anuales de operación y mantenimiento.

De acuerdo con lo anterior, un buen recubrimiento debe ser impermeable, resistente a la erosión, de bajo costo de construcción y mantenimiento, y durable a la acción de agentes atmosféricos, plantas y animales.

7.6.2 Tipos de recubrimiento

Los recubrimientos en un canal se construyen de varios tipos de material. El llamado de superficie dura puede ser a base de concreto simple, reforzado o lanzado, de concreto asfáltico, de mampostería (piedra, ladrillo, bloques prefabricados, etc.). En general, dichos materiales satisfacen todos los propósitos antes expuestos y ofrecen gran resistencia a la acción erosiva del agua. Otros recubrimientos son a base de materiales granulares, como arcilla, tierra compactada o grava, que ofrecen menor resistencia a la erosión, pero que superpuestos o no sobre una membrana impermeable, disminuyen de modo importante las pérdidas del agua por infiltración.

Los recubrimientos de concreto son llamados revestimientos y los que no tienen acero de refuerzo son también utilizados cuando el canal es de operación continua. Se colocan sobre taludes 1.5:1 o mayores, con espesores que van de 6.5 a 10 cm según las dimensiones del canal, debiéndose prever la tendencia del agua a dislocar los bloques o partes de los mismos y colocarlos fuera de posición. En la figura 7.31 se muestra cómo varía el espesor del concreto sin refuerzo con el caudal que va a conducir el canal, es decir, con las dimensiones de la sección. Se aconseja que la cantidad de cemento sea mayor de 2.452 kN/m^3 ($250 \text{ kg}_f/\text{m}^3$) y que la relación agua/cemento sea menor de 0.6, para lograr la impermeabilidad del revestimiento.

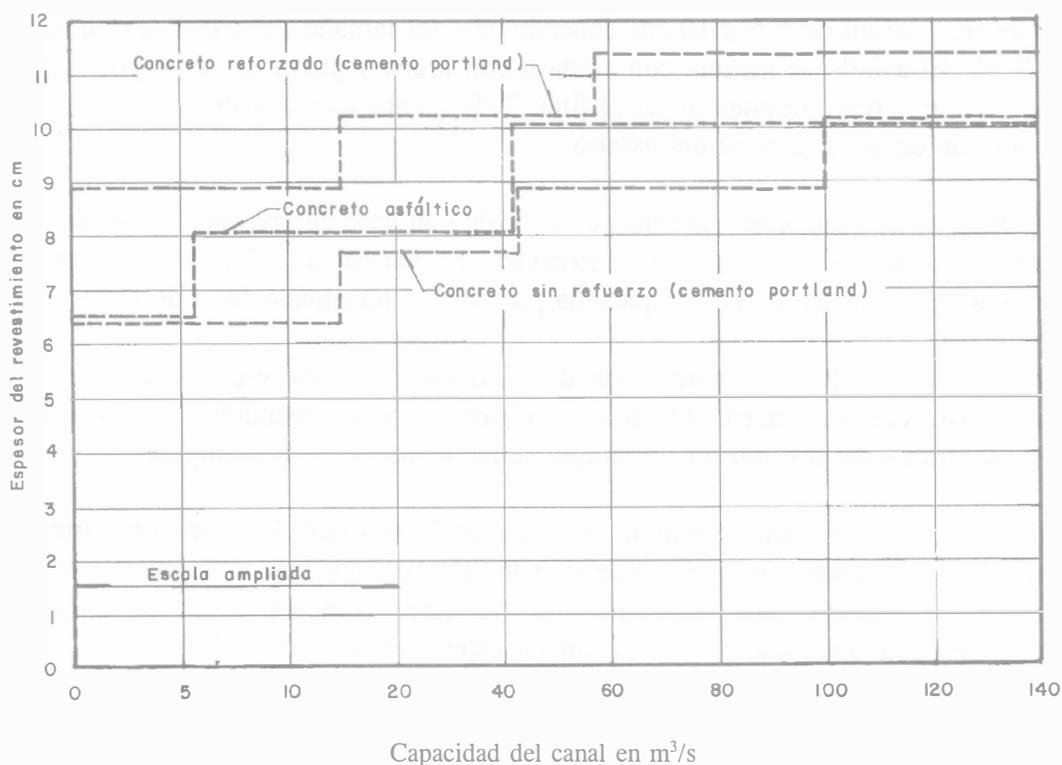


Figura 7.31. Espesor de revestimientos de superficie dura en canales, según U.S. Bureau of Reclamation

Las juntas de contracción se construyen con espaciamentos entre 20 a 100 veces el espesor, mediante ranuras transversales de profundidad igual a la cuarta parte del espesor del revestimiento, las cuales por el calor de fraguado se agrietan y después se rellenan con material impermeabilizante y flexible.

Los revestimientos de concreto con refuerzo se utilizan cuando el canal se construye en sitios cuyos cambios de temperatura son extremos y hay fluctuaciones frecuentes del gasto. El acero de refuerzo sirve para evitar el agrietamiento del concreto como resultado de dichos cambios de temperatura y para controlar las grietas y con ello las filtraciones. La figura 7.31 muestra que el espesor de dicho revestimiento varía de 9 a 12 cm según el caudal. La sección del acero de refuerzo en dirección longitudinal es del 0.1 al 0.4% y en dirección transversal del 0.1 a 0.2%. Representa una parte importante del costo total y a veces es posible suprimirlo mediante las juntas de construcción.

Los revestimientos de mortero a base de pistola de cemento o *shotcrete* se usan en canales pequeños, pero el procedimiento deja una superficie rugosa que debe ser terminada a mano si se desea una de primera clase. Además son más propensos a fallas por presión hidrostática. El espesor no es mayor de 5 cm en taludes firmes. El cemento se mezcla con arena previamente cernida a través de la malla No. 4 de 4.76 mm de abertura, en proporción 1:3 a 1:4.

El concreto asfáltico es una mezcla de arena, grava, cemento y asfalto, realizada a temperaturas de 160 °C o más según el tipo de asfalto. Los recubrimientos a base de concreto asfáltico tienen algunas ventajas por su flexibilidad y resistencia a la erosión, si bien fallan por intemperismo. Los espesores varían de 6.5 a 10 cm dependiendo del tamaño del canal, como se indica en la figura 7.31. El asfalto se mezcla con arena o con arena y grava en la proporción de 6 a 11% en peso y se le agrega después material fino (70% menor que la abertura de la malla No. 200) en proporción de peso igual al del asfalto.

El revestimiento de membrana enterrada es también con base en una capa de asfalto de 6 a 9 mm de espesor que se coloca en un canal excavado en exceso de 30 a 50 cm y que después se recubre con una capa de tierra compactada para dar el terminado final de la sección.

Los recubrimientos de mampostería (piedra, ladrillo, bloques, etc.) se utilizan cuando estos materiales abundan y la mano de obra es económica y recomendable. Los de piedra pueden construirse juntando con mortero o simplemente acomodándola (zampeado).

Un canal no se reviste cuando se aloja en suelos arcillosos para los que se reporta poca pérdida de agua, lo cual puede ocurrir de manera natural o compactando plantilla y taludes una vez conformada la sección. Los recubrimientos de tierra compactada sirven para disminuir la filtración de agua del canal y se colocan en espesores de 0.30 a 0.60 m. Si el material es arcilloso, el espesor varía de 0.30 a 0.90 m una vez conformada la sección; se usa en taludes de 1.5:1 o mayores, compactando el material al 95 por ciento de la prueba proctor. Estos recubrimientos son económicos pero con costos de mantenimiento elevados. Por otra parte, admiten velocidades del agua hasta de 0.60 m/s, obligan a taludes grandes, secciones muy anchas y no impiden el crecimiento de vegetación.

7.6.3 Aplicación de un recubrimiento

Cuando un canal se reviste de concreto, la pérdida por filtración (por metro cuadrado de superficie mojada) disminuye hasta el orden de un vigésimo a igualdad de superficie mojada, pero como ésta también disminuye, la pérdida es del orden de 1/33 de la del canal no revestido.

Considerando que los subíndices 1 y 2 indican las dimensiones de dos canales diseñados con el mismo gasto y pendiente, el primero revestido y el segundo sin revestir, la igualación del factor de conducción de ambos, calculado con la ecuación de Manning, resulta

$$\frac{A_1 R_{h1}^{2/3}}{n_1} = \frac{A_2 R_{h2}^{2/3}}{n_2}$$

Considerando que $R_{h1} \approx R_{h2}$ (o bien el mismo tirante en el caso de canales muy anchos), la expresión anterior se simplifica a la forma

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Siendo $n_1 = 0.015$ y $n_2 = 0.025$, se concluye que la utilización de un revestimiento (de concreto) reduce el área hidráulica aproximadamente en un 40 por ciento.

La justificación económica de un recubrimiento se debe basar en un estudio que abarque tanto el costo de excavaciones y rellenos, como el de los diferentes tipos de recubrimiento, incluyendo el costo de conservación y mantenimiento, a fin de concluir el beneficio del agua economizada al impedirse las filtraciones. El resultado no siempre es claro y definitivo y muchas veces no es posible tener conclusiones importantes a través de consideraciones sencillas.

7.6.4 Secciones típicas

Uno de los propósitos importantes de un recubrimiento de superficie dura es de lograr resistencia a la erosión. Cuando el contorno es fijo, la resistencia puede verificarse a través del criterio de velocidad máxima, cuyos valores se presentan en la tabla 7.21.

En rigor, hasta los canales revestidos de concreto pueden ser erosionados por el flujo si se rebasa su resistencia a la erosión o se producen otros fenómenos más complejos como la cavitación, que pueden dislocar e incluso destruir el revestimiento. Sin embargo, los revestimientos de concreto amplían el intervalo de resistencia a la erosión y proporcionan un mayor margen de seguridad a ese peligro. Para estos revestimientos, el USBR recomienda elegir el ancho de plantilla o el tirante, de acuerdo con la capacidad del canal y la figura 2.15 permite seleccionar dichos valores. Cuando se elige el ancho por este camino, el tirante debe quedar supeditado al cálculo por medio de una ecuación de fricción. El proceso inverso también es válido.

Es recomendable que la superficie del revestimiento sea curvo en la zona de intersección de los taludes y la plantilla, ya que mejora el funcionamiento hidráulico de la sección trapecial. Su costo se puede reducir cuando se usa maquinaria para colocar el revestimiento.

En las figuras 7.32 y 7.33 se muestran los elementos hidráulicos de algunas secciones trapeciales revestidas de concreto, recomendadas por el *U.S. Bureau of Reclamation*.

Por otra parte, evitar el peligro de erosión no es el único propósito de un recubrimiento. La pérdida de agua por infiltraciones en el subsuelo también disminuye con otras protecciones, como las de tierra y membrana enterrada, si bien son menos resistentes a la erosión. En las figuras 7.34 y 7.35 aparecen las secciones típicas de canales con ese propósito.

7.6.5 Dimensiones en términos del módulo de sección

De la ecuación de Manning, el módulo de sección de un canal trapecial es

$$A R_h^{2/3} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{(b y + k y^2)^{5/3}}{(b + 2 \sqrt{1 + k^2} y)^{2/3}} = \frac{n Q}{\sqrt{S}}$$

O bien

$$\frac{[(b/y) + k]^{5/3} y^{10/3}}{[(b/y) + 2 \sqrt{1 + k^2}]^{2/3} y^{2/3}} = \frac{n Q}{\sqrt{S}}$$

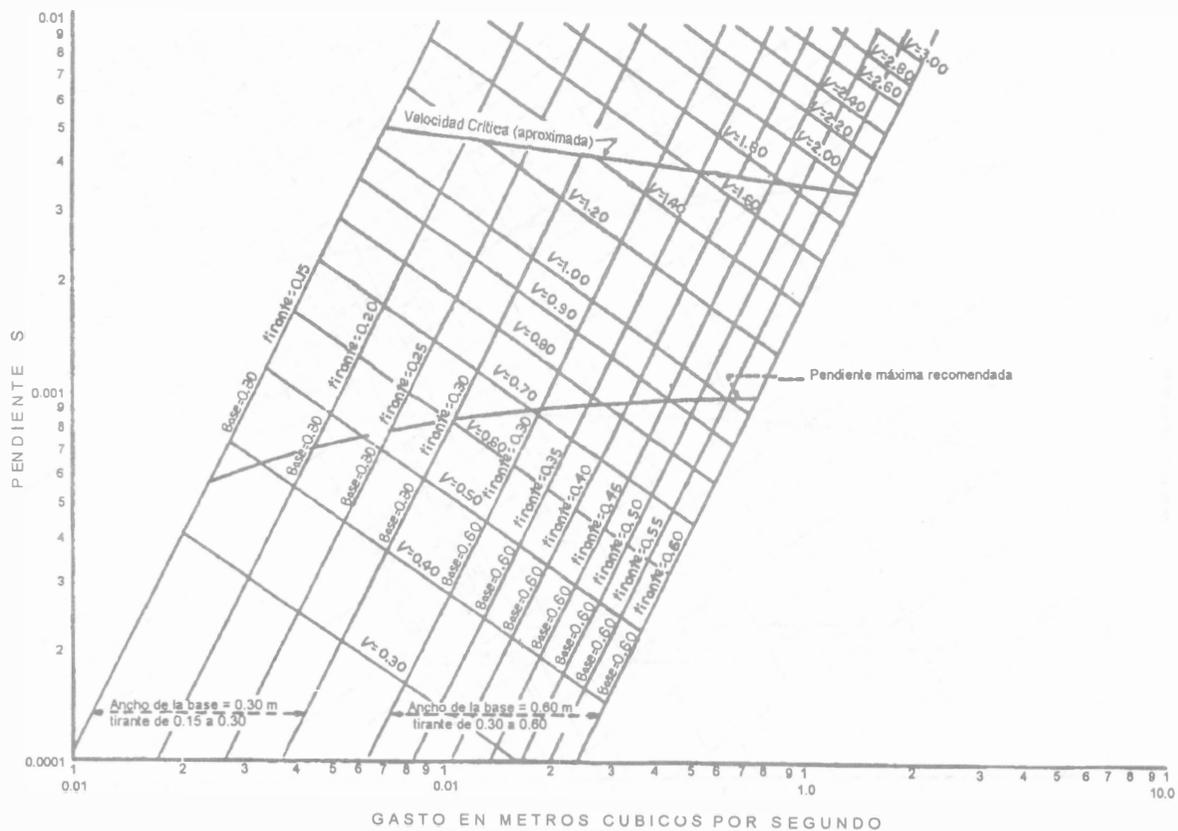
Al despejar, se obtiene

$$y = \frac{[(b/y) + 2 \sqrt{1 + k^2}]^{1/4}}{[(b/y) + k]^{5/8}} \left(\frac{n Q}{\sqrt{S}} \right)^{3/8} \quad (7.18)$$

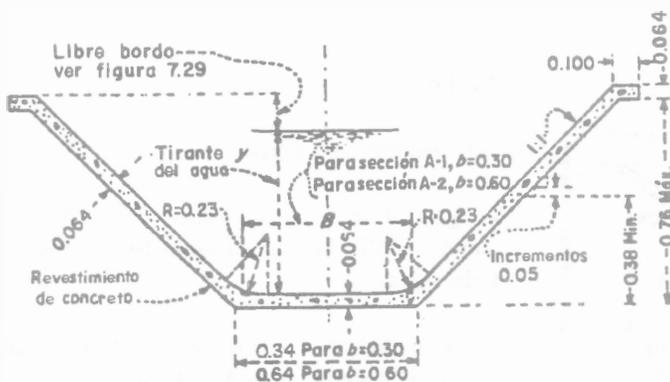
Cuando se conocen o se eligen los valores de b/y y de k , el de y se obtiene de la ecuación 7.18; con éste y el de b/y , se determina el de b , ambos para satisfacer el módulo de sección deseado.

7.6.6 Sección con revestimiento de costo mínimo

Una vez que se ha decidido la conveniencia técnica y económica de revestir un canal, un aspecto muy importante en su diseño consiste en elegir las dimensiones de la sección de modo que sea mínimo el costo del material de revestimiento. Dicho costo depende del tipo de material y del volumen empleado; éste último es a su vez función del espesor y del perímetro que se reviste en la sección. Cuando el costo del material es el mismo en plantilla y taludes (igual material y espesor) y sólo se reviste el perímetro mojado de la sección, el costo mínimo se obtiene con la sección hidráulica óptima (sección 2.7.2.), pero si el material, espesor o costo unitario son distintos en plantilla y taludes, el problema se torna más complejo.



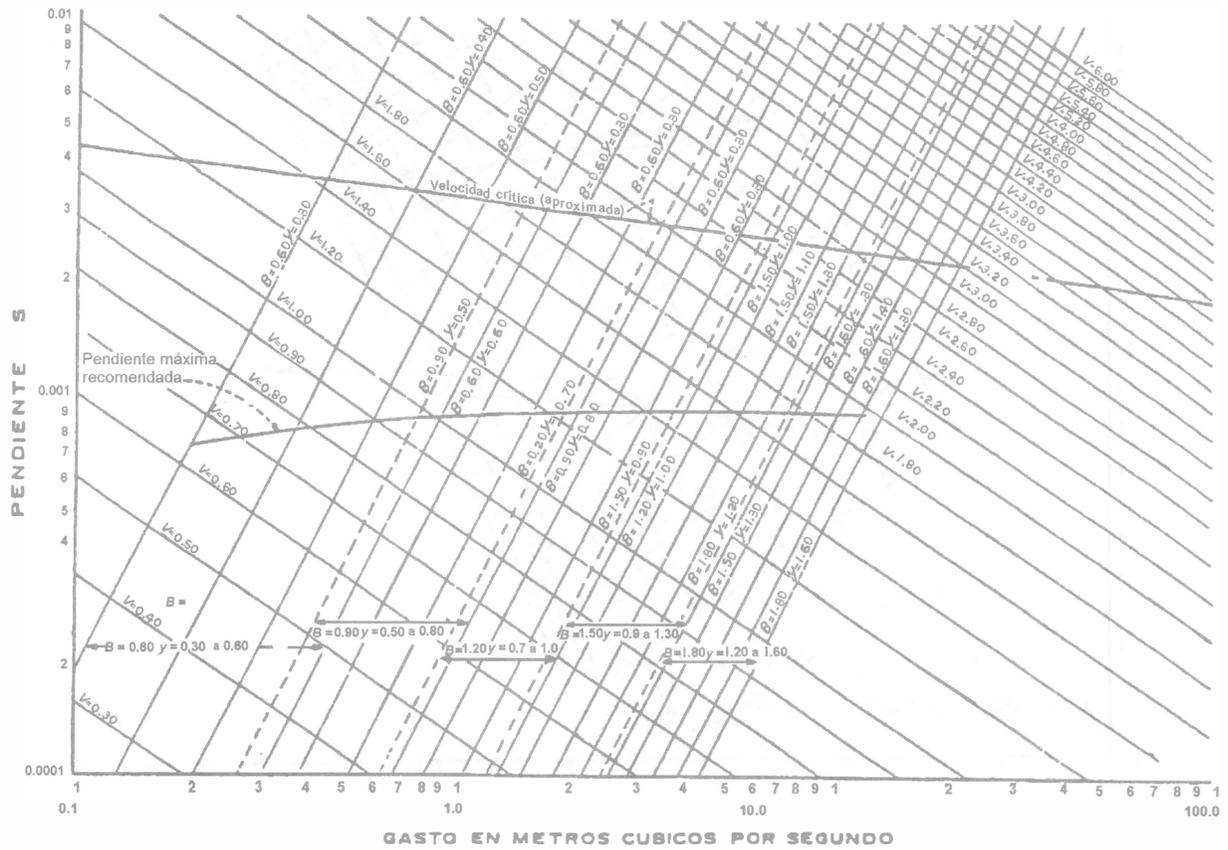
SECCIONES NORMALES
(A-1 y A-2)



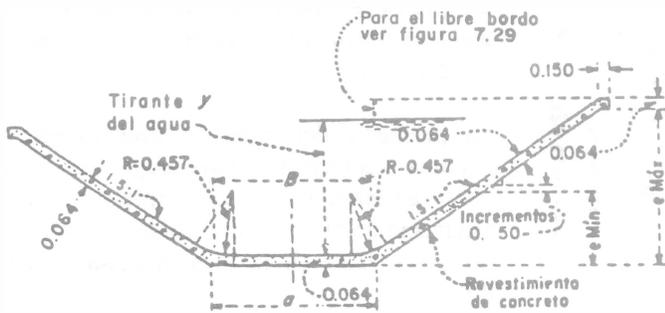
NOTAS:

- Para las secciones normales A-1 y A-2, como indica la figura. La gráfica se basa en la ecuación de Manning, con $n = 0.014$. El tirante anotado corresponde a y del agua.
- La pendiente del canal no debe exceder la máxima recomendada, para asegurarse de que no se alcanzan velocidades críticas cuando la tolerancia de nivel de la rasante es igual a 30 mm; con base en la n de Manning igual a 0.011.
- Dimensiones en metros

Figura 7.32. Elementos hidráulicos en canales revestidos de concreto. Secciones normales A-1 y A-2, según USBR (Adaptado del plano 103-D-1042)



Dimensiones				
SECCIÓN	A	B	s Min	s Máx
B-2	0.64	0.60	0.60	1.20
B-3	0.94	0.90	0.70	1.40
B-4	1.24	1.20	0.80	1.70
B-5	1.54	1.50	0.90	1.80
B-6	1.84	1.80	1.10	2.15



Sección típica
(B-2, B-3, B-4, B-5, y B-6)

NOTAS:

- Dimensiones en metros.
- La gráfica se basa en la ecuación de Manning, con $n = 0.014$. El tirante anotado corresponde a y del agua.
- La pendiente del canal no debe exceder la máxima recomendada, para asegurarse de que no se alcanzan velocidades críticas cuando la tolerancia del nivel de la rasante es igual a 30 mm; con base en la n de Manning igual a 0.011.

Figura 7.33. Elementos hidráulicos en canales revestidos de concreto. Secciones normales B-1, B-3, B-4, B-5 y B-6, según USBR (plano 103-D-1042)

Trout (referencia 16), en 1982, analizó este último problema en canales trapeciales que tuvieran no sólo distintos espesores en plantilla y taludes sino también distintos materiales y costos; su metodología se expone a continuación.

Es común que el costo de los revestimientos se determine a partir del volumen empleado y del costo por unidad de volumen de los mismos. También, si se especifica el espesor del revestimiento, su costo puede ser por unidad de área revestida o bien por unidad de longitud de canal. Dicho costo resulta del perímetro mojado más el libre bordo y del costo del material usado en las esquinas, como se indica en la figura 7.36.

En los costos antes mencionados no se toma en cuenta el de colocación del revestimiento o cualquier otro, a menos que se puedan valuar en términos del área revestida del canal.

De acuerdo con estas consideraciones y los términos definidos en la figura 7.36, se establecen enseguida algunas expresiones de dichos costos.

El costo del material en plantilla es

$$C_b = \left[\frac{\text{volumen}}{\text{unidad de longitud}} \right] \mu_b = (b + b') t_b \mu_b = b B + z \quad (7.19)$$

y el de taludes

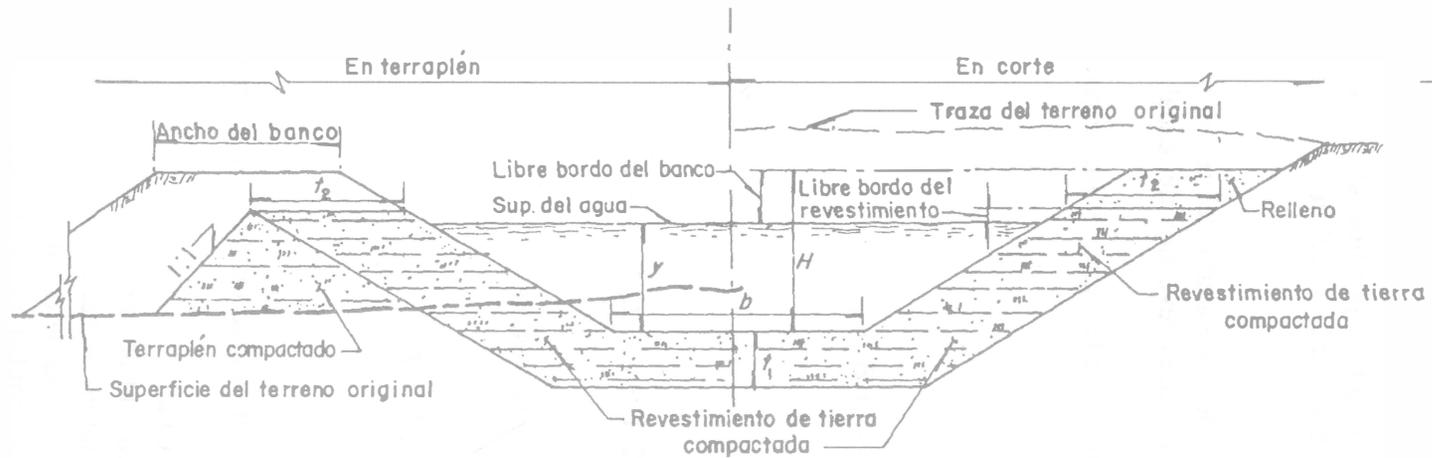
$$C_s = \left[\frac{\text{volumen}}{\text{unidad de longitud}} \right] \mu_s = (2 s + 2 s') t_s \mu_s = 2 \Gamma (y + L_b) \sqrt{1 + k^2} \quad (7.20)$$

De este modo, la función costo por unidad de longitud de canal resulta

$$C = C_b + C_s = b B + z + 2 \Gamma (y + L_b) \sqrt{1 + k^2} \quad (7.21)$$

donde

- B costo del material de revestimiento en la plantilla por unidad de área, para un espesor prefijado,
- C costo total del material por unidad de longitud de canal,
- C_b costo del material en la plantilla por unidad de longitud de canal,
- C_s costo del material en los taludes por unidad de longitud de canal,
- z costo del material en las esquinas por unidad de longitud de canal,
- Γ costo del material de revestimiento en taludes por unidad de área, para un espesor prefijado,
- μ_b costo del material de revestimiento en plantilla por unidad de volumen,
- μ_s costo del material de revestimiento en taludes por unidad de volumen.

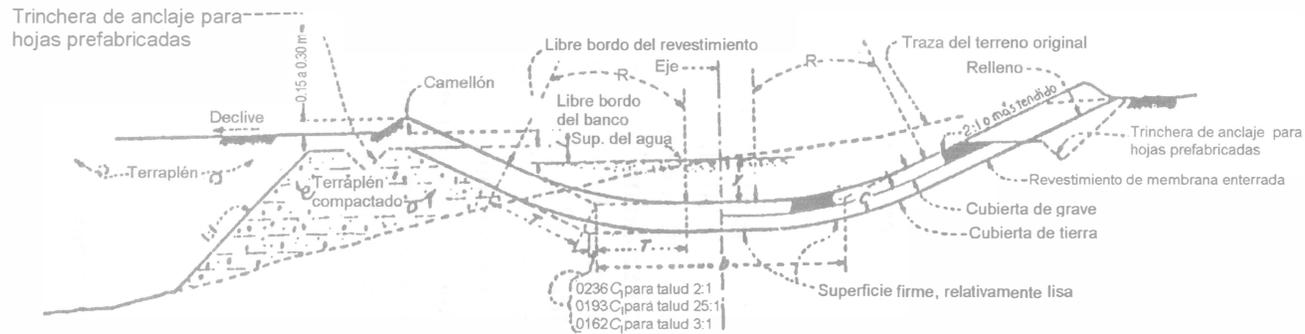


Sección típica

Espesor del revestimiento		
y en m	t_1 en m	t_2 en m
0.60 ó menor	0.30	0.90
0.60 a 1.20	0.45	1.20
1.20 a 1.80	0.60	1.80
mayor de 1.80	0.60	2.40

Si el material de revestimiento requiere una capa protectora de grava o roca para prevenir socavación o erosión, la excavación se debe ampliar para acomodar el espesor designado del revestimiento más el espesor de la capa de grava o roca. Para determinar el libre bordo veáse figura 7.29.

Figura 7.34. Sección típica para canales con revestimiento de tierra



Cubierta de una sola capa Cubierta de doble capa

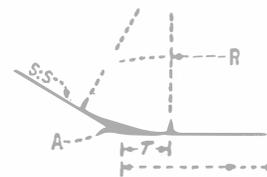
SECCION TRANSVERSAL DEL CANAL

$$C = 0.254 + \frac{Y}{12} \quad ; \quad C \text{ espesor en metros (0.305 min.);}$$

$$Y \text{ tirante del agua en metros}$$



SECCION LONGITUDINAL
Membrana junto a estructuras



b metros	T metros	S:S=2:1, ΔWP=0.0085R, R=4.23608T, A=0.00425 R ₂			S:S=2.5:1, ΔWP=0.0066R, R=5.19259T, A=0.00233 R ₂			S:S=3:1, ΔWP=0.0028R, R=6.16226T, A=0.0014 R ₂		
		R	2ΔWP	2Δ	R	2ΔWP	2Δ	R	2ΔWP	2Δ
0.60	0.30	1.271	0.022	0.014	1.558	0.015	0.112	1.849	0.010	0.009
0.90	0.30	1.271	0.022	0.014	1.558	0.015	0.012	1.849	0.010	0.009
1.20	0.30	1.271	0.022	0.014	1.558	0.015	0.012	1.849	0.010	0.009
1.50	0.45	1.906	0.032	0.030	2.337	0.022	0.026	2.773	0.016	0.022
1.80	0.60	2.542	0.043	0.055	3.116	0.029	0.045	3.697	0.021	0.039
2.40	0.85	3.601	0.061	0.110	4.414	0.041	0.090	5.238	0.029	0.076
3.00	1.05	4.448	0.076	0.169	5.452	0.051	0.139	6.470	0.036	0.116
3.60	1.30	5.507	0.094	0.259	6.750	0.063	0.213	8.011	0.045	0.180
4.20	1.50	6.354	0.108	0.343	7.789	0.073	0.284	9.243	0.052	0.240
4.80	1.65	6.990	0.119	0.416	8.568	0.080	0.343	10.168	0.057	0.290
5.40	1.80	7.625	0.130	0.496	9.347	0.087	0.407	11.092	0.062	0.344
6.00	1.95	8.260	0.140	0.578	10.126	0.094	0.476	11.016	0.067	0.403
6.60	2.10	8.896	0.151	0.672	10.904	0.102	0.556	12.941	0.072	0.466
7.20	2.25	9.531	0.162	0.772	11.683	0.109	0.637	13.865	0.078	0.541
7.80	2.35	9.955	0.169	0.841	12.203	0.114	0.696	14.481	0.081	0.586
8.40	2.50	10.590	0.180	0.953	12.981	0.121	0.785	15.406	0.086	0.662
9.00	2.60	11.014	0.187	1.030	13.501	0.126	0.851	16.022	0.090	0.721
10.70	2.90	12.285	0.209	1.284	15.059	0.140	1.054	17.871	0.100	0.894
12.20	3.20	13.555	0.230	1.559	16.616	0.155	1.288	19.719	0.110	1.085
13.70	3.40	14.403	0.245	1.764	17.655	0.165	1.457	20.952	0.117	1.226
15.20	3.65	15.462	0.223	2.033	18.953	0.177	1.677	22.492	0.126	1.417

NOTAS

- Dimensiones en metros.
- La graduación, tipo y espesor del material de cubierta depende de las fuerzas tractivas y velocidades en la sección del canal, y del tipo de material disponible en el área.
- ΔW_p es la diferencia entre $2T$ y la longitud del arco.
- Para obtener el perímetro mojado de una sección, reste $2\Delta W_p$ del perímetro mojado de una sección trapezoidal de base b .
- Δ es el área del filete. para obtener el área de una sección, reste 2Δ del área de una sección trapezoidal de base b . Para el libre bordo véase la figura 7.29.

Figura 7.35. Canales con revestimientos de membrana enterrada

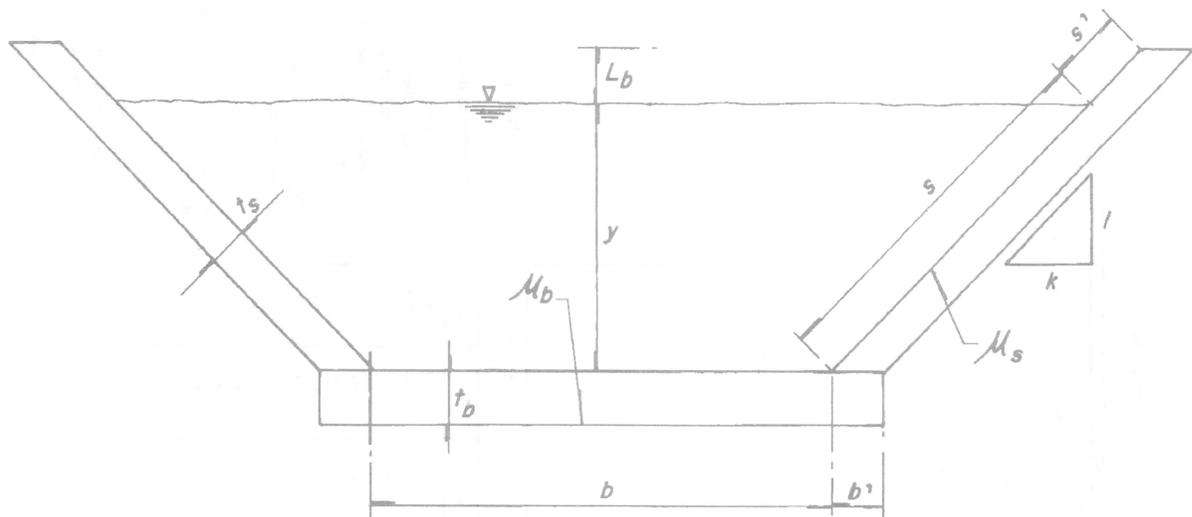


Figura 7.36. Definición de términos empleados en la optimación del costo de revestimientos en canales trapeziales

Las dimensiones óptimas y y b , y el talud k de una sección trapezoidal (incluye la rectangular y la triangular) se determinan calculando C_b y C_s de las ecuaciones 7.19 y 7.20, hasta que la función costo obtenida de la 7.21 sea mínima. Es decir, que el problema de optimación del costo del revestimiento en un canal es similar al problema clásico en la microeconomía de minimizar los costos de producción a través de la sustitución del costo de los insumos. En este caso, el producto del sistema es la capacidad de conducción del canal, los insumos son las variables que definen la geometría de la sección y la función producción es la ecuación para el módulo de sección. En la terminología de los negocios, la solución necesita de la combinación dimensional en que el cociente de los cambios en los productos marginales (del módulo de sección) sea igual al cociente de los costos que tienen esos cambios marginales. Cuando el talud es constante es posible usar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar una solución algebraica explícita del problema, en la forma

$$\frac{\partial(A R_h^{2/3}) / \partial b}{\partial(A R_h^{2/3}) / \partial y} = \frac{\partial C / \partial b}{\partial C / \partial y}$$

siempre que la ecuación 7.18 represente la solución óptima o de costo mínimo del caso tratado.

Al sustituir las ecuaciones 7.18 y 7.21 en la anterior, además de simplificar e introducir los parámetros:

$$K_1 = 20 (1 + k^2) - \left[1 + 4 \left(\frac{B}{\Gamma} \right) \right] 4 k \sqrt{1 + k^2} \quad (7.22)$$

$$K_2 = \left[1 - \frac{B}{\Gamma} \right] 6 \sqrt{1 + k^2} - 10 k \left[\frac{B}{\Gamma} \right] \quad (7.23)$$

la solución óptima es

$$K_1 \left(\frac{y}{b} \right)^2 + K_2 \left(\frac{y}{b} \right) - 5 \left[\frac{B}{\Gamma} \right] = 0 \quad (7.24a)$$

O bien, despejando

$$\frac{b}{y} = \frac{2 K_1}{-K_2 + \left[K_2^2 + 20 \left[\frac{B}{\Gamma} \right] K_1 \right]^{1/2}} \quad (7.24b)$$

De este modo, la relación b/y que proporciona el costo mínimo queda expresada por la ecuación 7.24b, en función del talud y del cociente de los costos unitarios de los materiales usados en plantilla y taludes. El procedimiento de cálculo se reduce a los siguientes pasos.

1. Se conocen los valores de n , Q , S , k , B , y Γ ; los de K_1 y K_2 resultan de las ecuaciones 7.22 y 7.23.
2. La relación b/y que proporciona el costo mínimo se obtiene de la ecuación 7.24b.
3. El tirante asociado al costo mínimo y al módulo de sección necesario resulta de la ecuación 7.18.
4. El ancho de plantilla se determina multiplicando a b/y del paso 2 por y del paso 3.

El método de Trout es útil para seleccionar las dimensiones económicas de canales largos cuando los procedimientos de construcción se orienten hacia la minimación del costo de materiales, o en situaciones en que el costo de la obra de mano sea relativamente bajo en comparación con el de los materiales.

Para ilustrar el procedimiento se presenta a continuación el mismo ejemplo de Trout en la referencia 16.

Ejemplo 7.12. Un canal trapecial revestido se debe diseñar para conducir un caudal de $0.08 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua con una pendiente de 0.001 . El talud debe ser $k = 0.5$ y el libre bordo necesario de 0.15 m . El coeficiente de Manning del material de revestimiento es $n = 0.014$ y los costos en dólares estadounidenses de acuerdo con el espesor del revestimiento usado, son $B = \$3.20$, $\Gamma = \$2.00$, ambos por metro cuadrado; el de las esquinas, de $\$0.35$ por metro de canal. Determinar las

dimensiones de la sección siguiendo diferentes criterios: a) la sección hidráulica óptima; b) las secciones normales A tipo USBR; c) la sección de costo mínimo por el método de Trout.

Solución a. Para $k = 0.5$, el ángulo de inclinación del talud es $\theta = 1.1071$ rad; $\text{sen } \theta = 0.8944$, $\text{cos } \theta = 0.4472$.

El tirante normal de la sección hidráulica óptima se obtiene de la ecuación 2.70, como sigue

$$y = 2^{1/4} \left(\frac{0.8944}{2 - 0.4472} \right)^{3/8} \left[\frac{0.014 (0.08)}{\sqrt{0.001}} \right]^{3/8} = 0.276 \text{ m}$$

De la ecuación 2.66

$$b = 2 \left[\frac{1 - 0.4472}{0.8944} \right] 0.2763 = 0.342 \text{ m}$$

Solución b. Con el gasto y la pendiente, de la figura 7.32 resulta: $y = 0.25$ m, $b = 0.30$ m.

Solución c. De las ecuaciones 7.22 y 7.23 se obtienen

$$K_1 = 20 [1 + (0.5)^2] - \left[1 + 4 \left(\frac{3.2}{2.0} \right) \right] 4 (0.5) \sqrt{1 + (0.5)^2} = 8.45$$

$$K_2 = \left[1 - \frac{3.2}{2.0} \right] 6 \sqrt{1 + (0.5)^2} - 10 (0.5) \left(\frac{3.2}{2.0} \right) = -12.02$$

Por tanto, de la ecuación 7.24b

$$\frac{b}{y} = \frac{2 (8.45)}{12.02 + \left[(-12.02)^2 + 20 \left(\frac{3.2}{2.0} \right) 8.45 \right]^{1/2}} = 0.522$$

y de la ecuación 7.18

$$y = \frac{\left[0.522 + 2 \sqrt{1 + (0.5)^2} \right]^{1/4}}{\left[0.522 + 0.5 \right]^{5/8}} \left[\frac{0.08 (0.014)}{\sqrt{0.001}} \right]^{3/8} = 0.363 \text{ m}$$

de modo que

$$b = 0.522 (0.363) = 0.19 \text{ m}$$

Con estas dimensiones, de la ecuación 7.21 se obtiene el costo mínimo del material de revestimiento

$$C = 0.19 (3.20) + 0.35 + 2 (2.00) (0.363 + 0.15) \sqrt{1 + (0.5)^2}$$

$$C = \$3.25 \text{ por metro de canal}$$

Un segundo método de solución es por la vía gráfica, representando las ecuaciones 7.18, y 7.24b para el talud $k = 0.5$, como se muestra en la figura 7.37a. Las líneas curvas representan valores del módulo de sección y las rectas radiales al origen corresponden a las soluciones de la ecuación 7.24b para distintos valores de B/T .

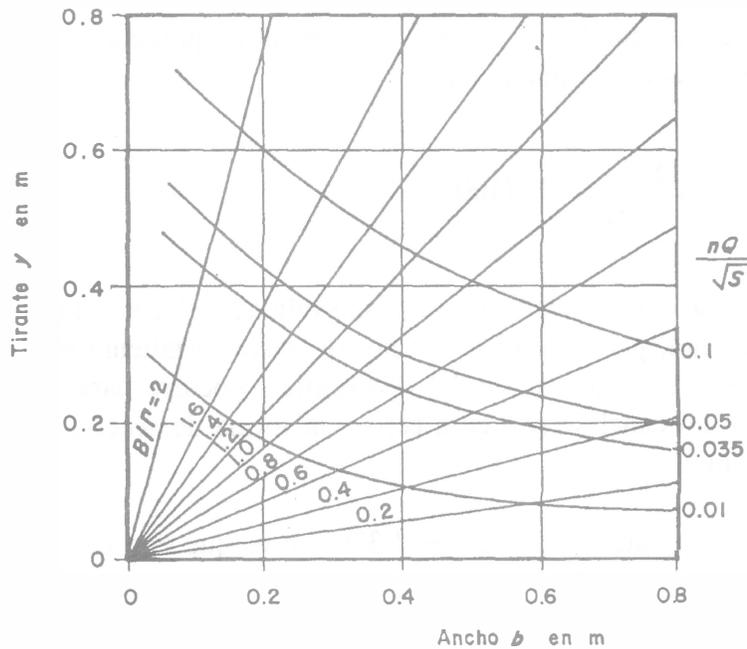


Figura 7.37a. Minimización del costo de revestimiento en el canal trapecial ($k = 0.5$) del ejemplo 7.12, según Trout (1982)

De la figura se pueden hacer algunos comentarios.

- Es necesaria una figura separada para cada valor del talud.
- Cualquier combinación de b y y asociada con el módulo de sección satisface los requerimientos del diseño.
- Los valores de b y y en el punto en que la línea B/T interseca la curva del módulo de sección apropiado, corresponden a los óptimos del costo del revestimiento.

Con los valores de $n Q / \sqrt{S} = 0.035$ y $B/\Gamma = 1.6$, de la figura 7.37a se determina que $y = 0.36$ m y $b = 0.19$ m; misma solución encontrada por la vía analítica.

Una vez que la figura 7.37a ha sido elaborada, algunas preguntas afines se pueden responder si no cambian los datos de partida. Por ejemplo: ¿Cuál es el costo adicional que tiene el hecho de que los moldes disponibles tengan un ancho de plantilla de 0.40 m? Esta cuestión se puede resolver siguiendo la curva del módulo de sección hasta que interseca a la abscisa $b = 0.4$ m, donde el tirante es $y = 0.25$ m. De la ecuación 7.21 el costo por unidad de longitud del canal es

$$C = 0.4 (3.20) + 0.35 + 2 (2.00) (0.25 + 0.15) [1 + (0.5)^2]^{1/2}$$

$$C = \$3.42 \text{ por metro}$$

de manera que usar los moldes disponibles representa un porcentaje de incremento en el costo mínimo del revestimiento, de magnitud

$$P = \frac{3.42 - 3.25}{3.25} (100) = 5.2 \%$$

Otra cuestión que se puede analizar es la sensibilidad del costo total del revestimiento con variaciones en el talud, para los mismos datos de gasto, pendiente y costos, como se presenta en la figura 7.37b. El costo mínimo del revestimiento ocurre para $k = 0.65$. Si $k = 0.92$, el ancho de plantilla del canal se reduce a cero y la forma de sección que proporciona el costo mínimo es un triángulo.

Una conclusión importante de las figuras 7.37a y b es que el costo del revestimiento es poco sensible a variaciones en las dimensiones de la sección, si éstas no se desvían demasiado de los valores óptimos.

7.7 CANALES NO REVESTIDOS Y CAUCES SIN ARRASTRE

7.7.1 Consideraciones de diseño

El cuerpo de los canales sin recubrimiento y de los ríos se forma de materiales con partículas de forma, tamaño y propiedades diferentes, que varían desde grandes piedras a materia coloidal. El material puede cambiar de una parte a otra a lo largo de la conducción y el del fondo a menudo difiere del que forma los taludes. Según sea la intensidad del flujo, el material no siempre es capaz de resistir la fuerza de arrastre generada por el agua, que crece conforme aumenta la velocidad. Se puede entonces producir el arrastre del material y el transporte de sedimentos en el seno de la corriente, con el proceso de erosión en las fronteras y el de depósito del material en las zonas donde disminuye la velocidad haciendo inestable al canal o al cauce.

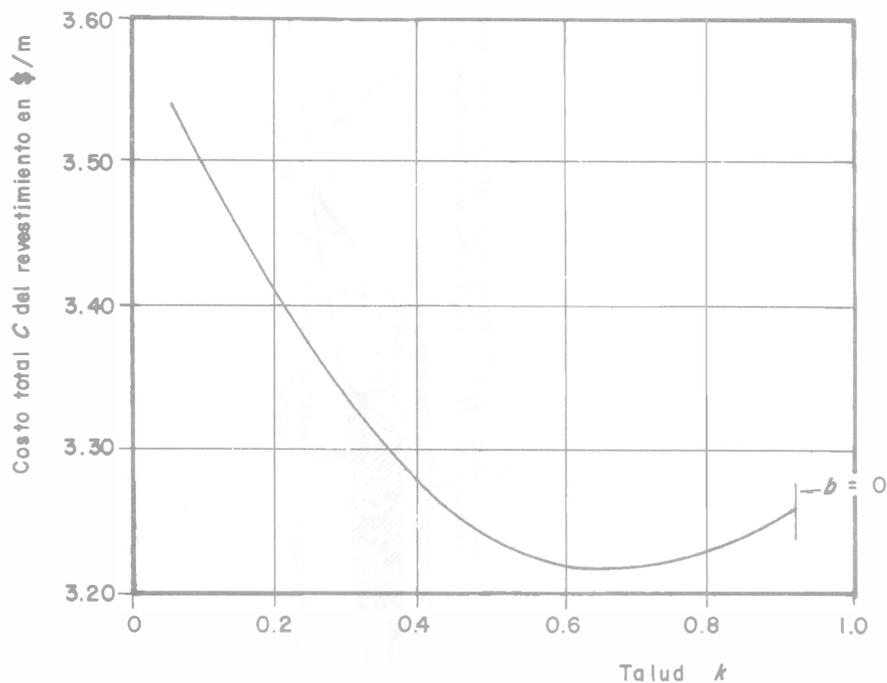


Figura 7.37b. Costo total del revestimiento en el canal del ejemplo 7.12, como una función del talud, según Trout (referencia 16)

Estas consideraciones obligan a admitir premisas distintas en el diseño de un canal artificial. Cuando no hay revestimiento y el material en que se excava es erosionable, las dimensiones de la sección más bien se eligen para evitar la erosión y la sedimentación apreciable, es decir, impedir el arrastre producido por el flujo en cualquier condición de operación para que el canal sea estable. Esto significa que es más importante que el canal mantenga su sección en equilibrio dentro del intervalo de fluctuación del gasto, que cualquier otra condición de eficiencia hidráulica de tipo económico o constructivo.

En cualquier canal el caudal y con éste el tirante a menudo fluctúan, si bien, en algunos casos, el intervalo de variación es relativamente pequeño y el caudal se puede suponer constante durante períodos prolongados. Un canal de riego con frecuencia se construye para permitir la expansión de la demanda a largo plazo, de modo que el gasto máximo se presenta cuando los bordos se han consolidado e impermeabilizado por la sedimentación del material en suspensión. En otros casos se produce acorazamiento, es decir, se desarrolla una coraza o armadura en el lecho por el afloramiento de partículas de mayor tamaño y más resistentes, al ser removidas las más débiles por la acción del flujo. Por el contrario, un canal para fines hidroeléctricos es más probable que conduzca el gasto máximo desde un principio, pero que quede sujeto a fluctuaciones más rápidas y más frecuentes.

La sección transversal típica para la construcción de canales principales y secundarios sin revestimiento se muestra en la figura 7.38, donde falta determinar las dimensiones de la sección hidráulica central. Los distintos procedimientos de diseño de la sección son parte del objetivo de este subcapítulo.

y en m	G en m
0 - 0.60	0.90
0.60 - 1.80	1.80
más de 1.80	2.40

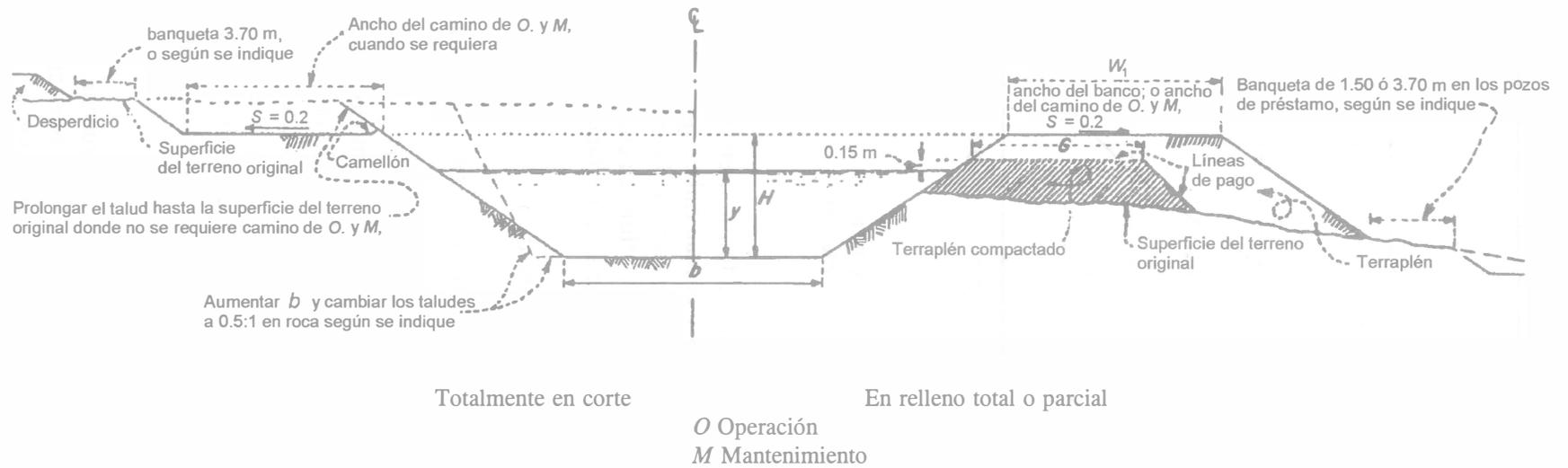


Figura 7.38. Sección típica sin revestimiento para canales principales y laterales

Si fuera posible diseñar un canal cuyo radio hidráulico no variara con el tirante, el problema desaparecería porque no cambiaría la velocidad. Dicha sección es factible, pero no es fácil de diseñar, es más costosa de construir y muy difícil de mantener.

En algunos casos, se puede disminuir la complejidad del problema si se usan secciones compuestas, como las presentadas en el subcapítulo 2.9, que reducen y mantienen la velocidad del flujo en la parte central, pero aumentan el volumen de excavación por la inclusión de las ampliaciones laterales.

Otra solución consiste en seleccionar una pendiente menor que la del terreno natural, para acotar razonablemente el intervalo de variación de la velocidad de acuerdo a la fluctuación del gasto, y compensar los desniveles topográficos con caídas locales, como se muestra en la figura 7.39, de modo que el desnivel total en toda la longitud sea el mismo. Sin embargo, esto suele significar cortes más profundos, mayor volumen de excavación y el costo del recubrimiento local necesario antes y después de las caídas. El que queda antes de cada caída se debe extender hasta aquella sección donde la velocidad del flujo sea tolerada por el material sin producir arrastre del mismo. El diseño hidráulico de la zona después de la caída debe tratarse como se expone en el capítulo de disipadores de energía.

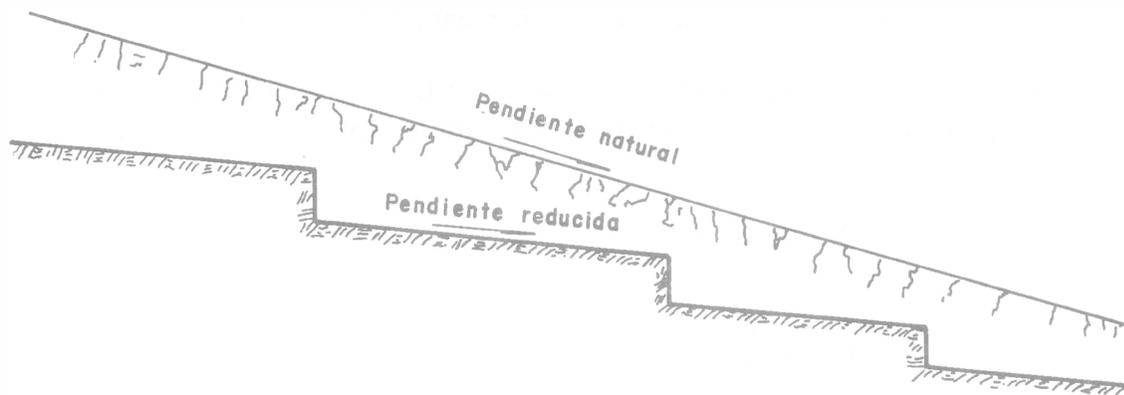


Figura 7.39. Reducción de la pendiente mediante caídas

Por las razones mencionadas, son de gran interés las condiciones necesarias para que un flujo inicie el movimiento, arrastre o transporte de las partículas del material en el cuerpo del canal. Dicha situación se conoce como *condición crítica de arrastre*, *inicio del arrastre* o *movimiento crítico* y su conocimiento permite establecer los criterios de diseño de la sección hidráulica que impidan rebasar dicha frontera.

En un cauce es también importante conocer la condición crítica de arrastre, ya que con ésta se inicia el transporte de sedimentos en sus distintas clases, lo que origina cambios progresivos en la configuración del fondo y en la resistencia al flujo.

Es difícil dar reglas precisas y universales para determinar la condición crítica de arrastre. Los resultados de los trabajos publicados con frecuencia difieren entre sí por el carácter aleatorio y poco definido del fenómeno. Su aplicación a canales de condiciones geométricas, hidráulicas y

propiedades físicas del suelo muy similares pero en regiones distintas, puede conducir a condiciones reales diferentes. Las propiedades químicas del material también intervienen en su estabilidad, ya que el intercambio de iones con el agua, así como su hidratación, suelen proveer una mejor unión de las partículas en algunos sitios y afectar los resultados. Además, con la operación frecuente y el transcurso del tiempo se altera el material superficial en fondo y taludes, ya que parte de las partículas arcillosas y coloides se van depositando y consolidando, formando a su vez una capa resistente que cubre el material original. Por ello los canales viejos soportan condiciones críticas más severas que los nuevos o de laboratorio.

En este subcapítulo se presentan los criterios utilizados en el diseño de canales no revestidos, los mismos que pueden también consultarse en el libro de García Flores y Maza (referencia 17).

7.7.2 Distribución de la velocidad en canales de rugosidad no uniforme

Las ecuaciones 1.34 a 1.39, para la distribución de la velocidad y para el valor de la media, son válidas en canales con fondo de rugosidad uniforme. Sin embargo, los canales no recubiertos y los ríos tienen más bien rugosidad no uniforme y las investigaciones realizadas con ellos han demostrado que la curva de transición para representar el comportamiento del coeficiente B en la ecuación 1.34, es mucho más gradual que la de los canales de rugosidad uniforme, cuando los suelos o sedimentos del fondo en ambos no han entrado todavía en movimiento.

Para la rugosidad no uniforme, Einstein propuso en 1950 (referencia 17) las mismas ecuaciones 1.34 y 1.38 para la distribución de la velocidad y para la media, respectivamente, es decir

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + B$$

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{R_h}{k_s} + A'_r$$

donde la rugosidad de la pared k_s se toma como el diámetro d_{65} del suelo o sedimento y los coeficientes B y A'_r dependen del comportamiento de la pared (como hidráulicamente lisa, de transición o rugosa), de acuerdo con las expresiones

$$B = 2.5 \ln (30.2 x) \quad (7.25)$$

$$A'_r = 2.5 \ln (12.27 x) \quad (7.26)$$

En éstas, el factor de corrección x depende del parámetro k_s/δ , como se representa en la figura 7.40, con la misma interpretación de $k_s = d_{65}$ y donde

$$\delta = 11.6 \nu/v_* \quad (7.27a)$$

es el espesor aproximado de la subcapa laminar como se definió en el subcapítulo 1.10, es decir

$$\frac{k_s}{\delta} = 0.0862 \frac{v_* k_s}{\nu} \quad (7.27b)$$

En la figura 7.40 se observan prácticamente los mismos límites para la zona de transición: hidráulicamente liso cuando $v_* k_s/\nu \leq 5$ ($k_s/\delta = 0.43$); rugoso cuando $v_* k_s/\nu \geq 70$ ($k_s/\delta = 6.03$). Einstein propuso la misma ecuación 1.37b para el fondo liso, con $A'_l = 3.25$ de Keulegan (tabla 1.6) y para el rugoso, $x = 1$, $B = 8.52$, $A'_r = 6.27$; valores iguales a los propuestos para los canales de rugosidad uniforme.

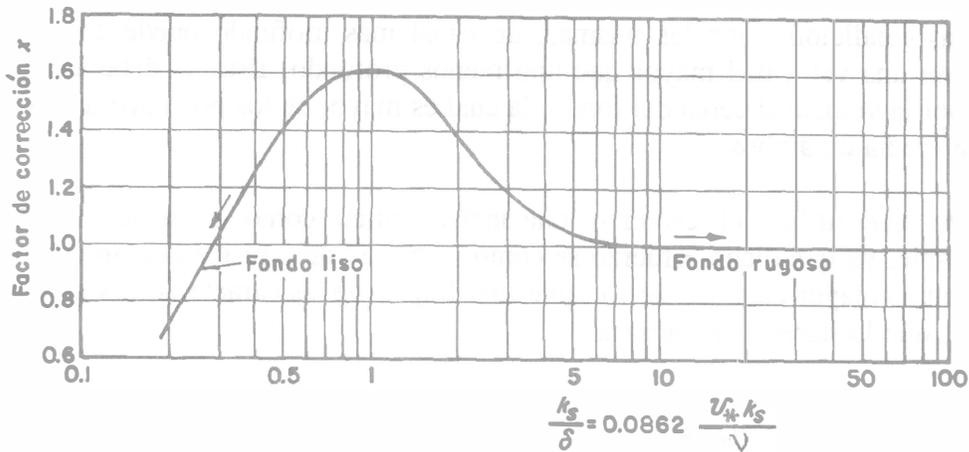


Figura 7.40. Factor de corrección x en las ecuaciones 7.25 y 6.27, según Einstein (1950)

7.7.3 Inicio del arrastre de sedimentos

Cuando la velocidad del flujo en un canal de laboratorio es pequeña, el material del fondo no se mueve, pero al crecer paulatinamente, la fuerza de arrastre también aumenta, hasta que es suficientemente grande para mover las partículas menos estables. Estas comienzan a balancearse en su sitio y en ocasiones algunas de ellas se separan iniciando un movimiento incipiente. Con el crecimiento progresivo de la velocidad, un mayor número se desprende aisladamente en zonas pequeñas del fondo del canal hasta que aumenta el tamaño de la zona, y el número de partículas que se mueven cambian de posición y se desprenden en otros sitios; después la mayoría o todas las partículas inician su movimiento. El flujo arrastra las partículas removidas sin desarrollar todavía ondulaciones en el fondo, iniciándose así el transporte incipiente de sedimentos.

Lo antes expuesto impide establecer con claridad la condición crítica con que se inicia el arrastre, lo que ha originado distintos parámetros para precisarla, los cuales toman en cuenta las características del material y del flujo que la produce. Dichos parámetros se califican comúnmente como críticos y se les asigna el subíndice c . Los más utilizados son: la velocidad media crítica V_c (no debe confundirse con la que corresponde al régimen crítico), la velocidad

crítica en el fondo v_c y el esfuerzo tangencial crítico τ_c . Éstos corresponden a los valores máximos que el material es capaz de resistir antes de ser arrastrado por el flujo.

El método con base en la velocidad media crítica fue el primero en emplearse. Cuando el caudal varía de modo importante, la velocidad media del flujo y el esfuerzo tangencial que produce en las fronteras varían en la misma forma, de modo que un canal aceptable con caudales pequeños, se erosiona con los grandes. Por otra parte, la velocidad puede no causar erosión con caudales grandes, pero su magnitud en los pequeños puede disminuir tanto que propicie la sedimentación del material transportado en suspensión por el agua.

En general, se alcanza una velocidad crítica mayor en los canales antiguos que en los nuevos, a veces por acorazamiento del fondo o bien por la sedimentación del material en suspensión. Cuando las condiciones son las mismas, un canal más profundo puede conducir el agua sin arrastre con una velocidad mayor que uno menos profundo. Esto se debe a que la erosión se produce por la velocidad cerca del fondo, la cual es mayor en los poco profundos para la misma velocidad media en ambos.

El método que utiliza el esfuerzo tangencial crítico como elemento de diseño es más recomendable, ya que dicho esfuerzo se compara con el de arrastre que produce el flujo. En él intervienen una mayor cantidad de variables del flujo y de las características del material para su valuación, que lo hacen más racional.

7.7.4 *Velocidad crítica de arrastre*

Existen distintos criterios para estimar la velocidad crítica de arrastre. Para la mayoría es necesario disponer de la distribución granulométrica y densidad del material en el canal, pero también del tirante del flujo, lo cual a veces es inconveniente en el diseño. No obstante, la velocidad crítica tiene un significado más claro para el ingeniero y ha sido más común su empleo.

La máxima velocidad media del flujo que soportan las partículas sin ser arrastradas se denomina *velocidad sin desplazamiento*, *velocidad máxima permisible* o no erosiva y se designa como V_p . Cuando no hay arrastre del material, la fuerza de sustentación fluctúa sin sobrepasar todavía el valor del peso sumergido de las partículas gruesas de materiales cohesivos bien graduados, pero puede arrastrar las finas. Esta es la razón por la cual suele confundirse a V_p con V_c .

Por otra parte, la menor velocidad media del flujo que logra separar continuamente a las partículas es la llamada velocidad de separación V_s , para la cual la fuerza de sustentación de la partícula es casi igual a su peso sumergido. Es así que también se confunde a V_s con V_c . En ambos casos, la condición se asocia a la definición de condición crítica de arrastre que se haya adoptado.

Los resultados de mayor interés se presentan a continuación en forma de tablas, figuras o ecuaciones, separando los que corresponden a materiales no cohesivos de las de los cohesivos. Puede decirse que todos son producto de la experimentación en laboratorio o en campo.

a) Velocidad crítica media para materiales no cohesivos.

Los resultados de Etcheverry fueron de los primeros que se publicaron (1915) en forma de tabla, conteniendo los valores de las velocidades y los esfuerzos tangenciales máximos permisibles que no provocan erosión en distintas clases de suelos. Pueden consultarse en la referencia 17.

Los valores publicados por Fortier y Scobey en 1926 son todavía de uso común y se muestran en la tabla 2.10, con una explicación detallada de su aplicación en canales rectos y curvos.

Se presentan a continuación otros criterios, algunos más recientes.

1) Diagrama de Hjülstrom (1935, referencia 19)

Se presenta en la figura 7.41 en la que se delimitan zonas donde las condiciones pueden significar transporte, erosión o sedimentación de partículas de tamaño uniforme. La línea que separa las zonas de transporte y sedimentación representa a la condición de velocidad crítica de arrastre. Los resultados valen para tirantes sin mucha variación.

2) Criterio soviético

En la revista citada en la referencia 20 se publicaron los valores de la velocidad máxima permisible para suelos no cohesivos cubriendo un intervalo amplio de tamaño de partículas, para un tirante medio de 1 m. Los resultados se presentan en la figura 7.42, los cuales se corrigen por el factor que se obtiene de la figura 7.43 cuando el tirante es diferente de 1 m.

3) Criterio de Lischtvan-Levediev

Los resultados de estos autores se presentan en la figura 7.44, donde puede estimarse la velocidad máxima permisible (no erosiva) en términos de un intervalo amplio del diámetro de partículas y tirante en suelos no cohesivos. Otros investigadores expresaron los resultados de Lischtvan-Levediev en términos de los parámetros adimensionales y/d y el número de Froude de la partícula, $V_c / [(S_s - 1) g d]^{1/2}$. Las ecuaciones de ajuste obtenidas por García Flores y Maza se presentan al principio de la tabla 7.23; ellos observaron la tendencia hacia dos rectas bien definidas a pesar de la dispersión de los puntos.

Otras ecuaciones para calcular la velocidad máxima permisible o sus variantes también se presentan en la tabla 7.23 y su representación gráfica comparativa en las figuras 7.45 y 7.46.

b) Velocidad crítica cerca del fondo para materiales no cohesivos

Algunos investigadores han expresado la condición crítica de arrastre o de transporte incipiente en términos de la velocidad que actúa en el fondo o cercana a las partículas que constituyen el material en el lecho, que aquí se designa como v_{bc} . Las ecuaciones más importantes para determinar dicha velocidad se presentan en la tabla 7.24.

Tábla 7.23. Velocidad máxima permisible V_c (no erosiva) en canales con suelos no cohesivos, según distintos autores (García Flores y Maza, 1996)

Autor	Ecuación	Comentarios
Lischtván - Levediev (1959)(referencia 22)	$\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 1.63 \left(\frac{y}{d} \right)^{0.1283} \quad \text{Para } \frac{y}{d} \leq 744.19$ $\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 0.4527 \left(\frac{y}{d} \right)^{0.3221} \quad \text{Para } \frac{y}{d} > 744.19$	<p>d diámetro medio de las partículas en m, y tirante en m, S_s densidad relativa del material. (Ecuaciones de ajuste según García Flores) (referencia 17).</p>
Goncharov (1964) (referencia 22)	$\frac{V_s}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 1.069 \log \left(8.8 \frac{y}{d} \right)$ $\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 0.75593 \log \left(8.8 \frac{y}{d} \right)$	<p>V_s velocidad de separación; V_c velocidad permisible (sin separación). Se relacionan mediante la expresión $V_s = 1.41421 V_p$ d diámetro medio de las partículas cuando la granulometría no es uniforme.</p>
Maza-García (1978) (referencia 23)	$\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 1.504 \left(\frac{y}{d} \right)^{0.15}$	<p>V_c velocidad crítica media, d el diámetro d_m cuando la granulometría no es uniforme. Pared hidráulicamente rugosa.</p>
Neill (1968) (referencia 24)	$\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 1.414 \left(\frac{y}{d} \right)^{1/6}$	<p>V_c velocidad crítica media. Pared hidráulicamente rugosa. d diámetro medio de las partículas.</p>
Garde (1970) (referencia 25)	$\frac{V_c}{\sqrt{(S_s - 1) g d}} = 0.5 \log \left(\frac{y}{d} \right) + 1.63$	<p>V_c velocidad crítica media. Pared hidráulicamente rugosa. d diámetro medio.</p>
Levi (referencia 26)	$\frac{V_c}{\sqrt{g d_m}} = 1.4 \left[1 + \ln \left(\frac{y}{7 d_m} \right)^{1/2} \right] \left[\frac{d_{m\max}}{d_m} \right]^{1/7} \quad \text{Para } 10 < \frac{y}{d_m} < 60$ $\frac{V_c}{\sqrt{g d_m}} = 1.4 \left[\frac{d_{m\max}}{d_m} \right]^{1/7} \ln \left(\frac{y}{7 d_m} \right) \quad \text{Para } \frac{y}{d_m} > 60$	<p>d_m y d_{50} son diámetros característicos del material. Cuando es uniforme, $d_{m\max} = d_m$. V_c velocidad crítica media. Pared hidráulicamente rugosa.</p>

Tabla 7.24. Velocidad crítica cerca del fondo (no erosiva) en canales con suelos no cohesivos, según distintos autores (García Flores y Maza, 1996)

Autor	Ecuación	Comentarios
Mavis-Laushey (1949) (referencia 17)	$v_{bc} = 0.152 d^{4/9} (S_s - 1)^{1/2}$	d diámetro característico del material en mm y v_{bc} en m/s.
Carstens (1966) (referencia 28)	$\frac{v_{bc}}{\sqrt{(S_s - 1)gd}} = [3.61 (\tan \phi \cos \theta - \text{sen } \theta)]^{1/2}$	ϕ ángulo de reposo del sedimento y θ ángulo que forma el lecho con la horizontal (en dirección longitudinal).
Garde (1970) (referencia 25)	$\frac{v_{bc}}{\sqrt{(S_s - 1)gd}} = 1.51$	d diámetro característico del material.
Maza y García Flores (1985) (referencia 29)	$\frac{v_{bc}}{\sqrt{(S_s - 1)gd}} = 1.11 \left(\frac{y}{d}\right)^{0.05}$	y tirante del flujo, d diámetro medio cuando el material no es uniforme.

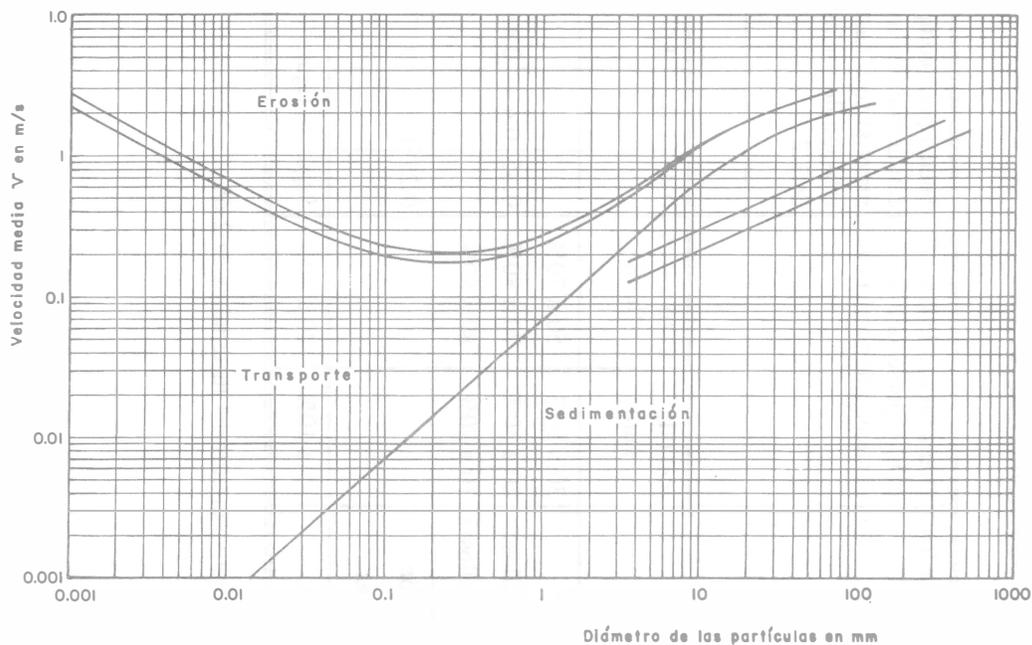


Figura 7.41. Criterio de Hjulström para el transporte de partículas de tamaño uniforme

Tabla 7.25 Velocidad media permisible (no erosiva) en m/s para suelos cohesivos en canales rectos, según Lischtván-Levediev (1959, referencia 21)

Denominación de los suelos	Diámetro medio (en mm) y porcentaje del contenido de partículas		Suelos poco compactos, con densidad relativa del material seco hasta 1.2, relación de vacíos mayor de 1.2				Suelos medianamente compactos, con densidad relativa del material seco de 1.2 a 1.66, relación de vacíos de 1.2 a 0.6				Suelos compactos, con densidad relativa del material seco de 1.66 a 2.04, relación de vacíos de 0.6 a 0.3				Suelos muy compactos, con densidad relativa del material seco de 2.04 a 2.14, relación de vacíos de 0.3 a 0.2				
			Tirante en m																
	<0.005 (mm)	0.005 a 0.05 (mm)	0.4	1.0	2.0	3.0 o más	0.4	1.0	2.0	3.0 o más	0.4	1.0	2.0	3.0 o más	0.4	1.0	2.0	3.0 o más	
Arcillas	30 a 50%	50 a 70%																	
Suelos muy arcillosos	20 a 30%	70 a 80%	0.35	0.4	0.46	0.50	0.7	0.85	0.95	1.1	1.0	1.2	1.4	1.5	1.4	1.7	1.9	2.1	
Suelos poco arcillosos	10 a 20%	80 a 90%																	
Suelos de aluvión, arcillas margosas			0.27	0.32	0.37	0.40	0.6	0.7	0.8	0.85	0.8	1.0	1.2	1.3	1.1	1.3	1.5	1.7	
Suelos arenosos	5 a 10%	20 a 40%	Según la figura 7.44, de acuerdo con el tamaño de las fracciones arenosas																

La densidad relativa óptima del material es de 2.65

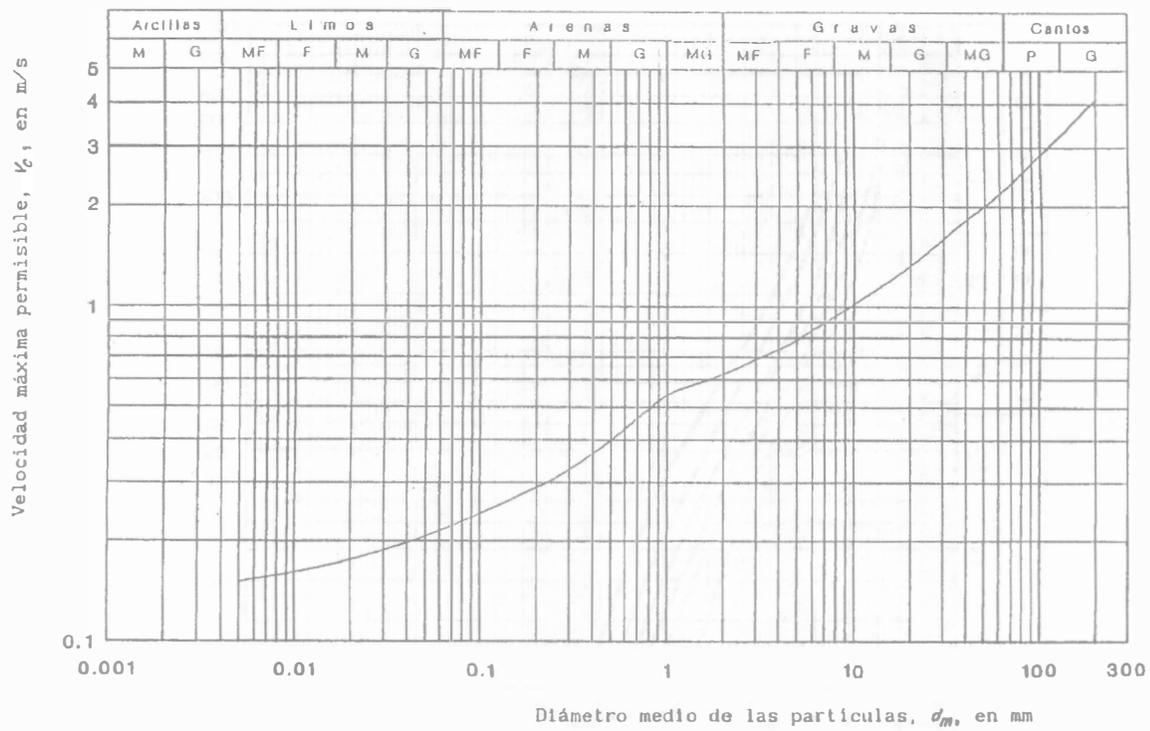


Figura 7.42. Velocidad máxima permisible, para material no cohesivo, según datos de la ex-Unión Soviética

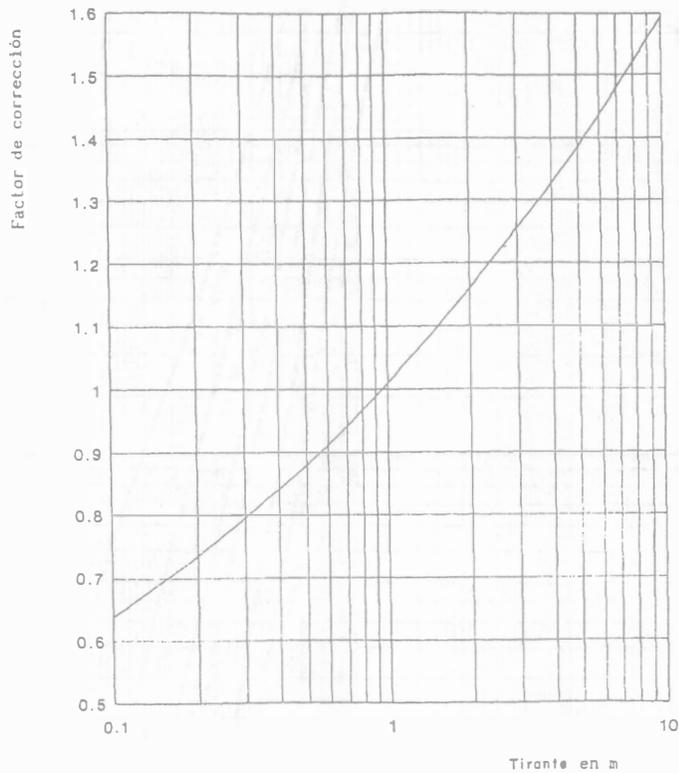


Figura 7.43. Factor de corrección de la velocidad máxima permisible para suelos cohesivos y no cohesivos, en función del tirante en el canal, según datos de canales en la ex-Unión Soviética (referencia 20)

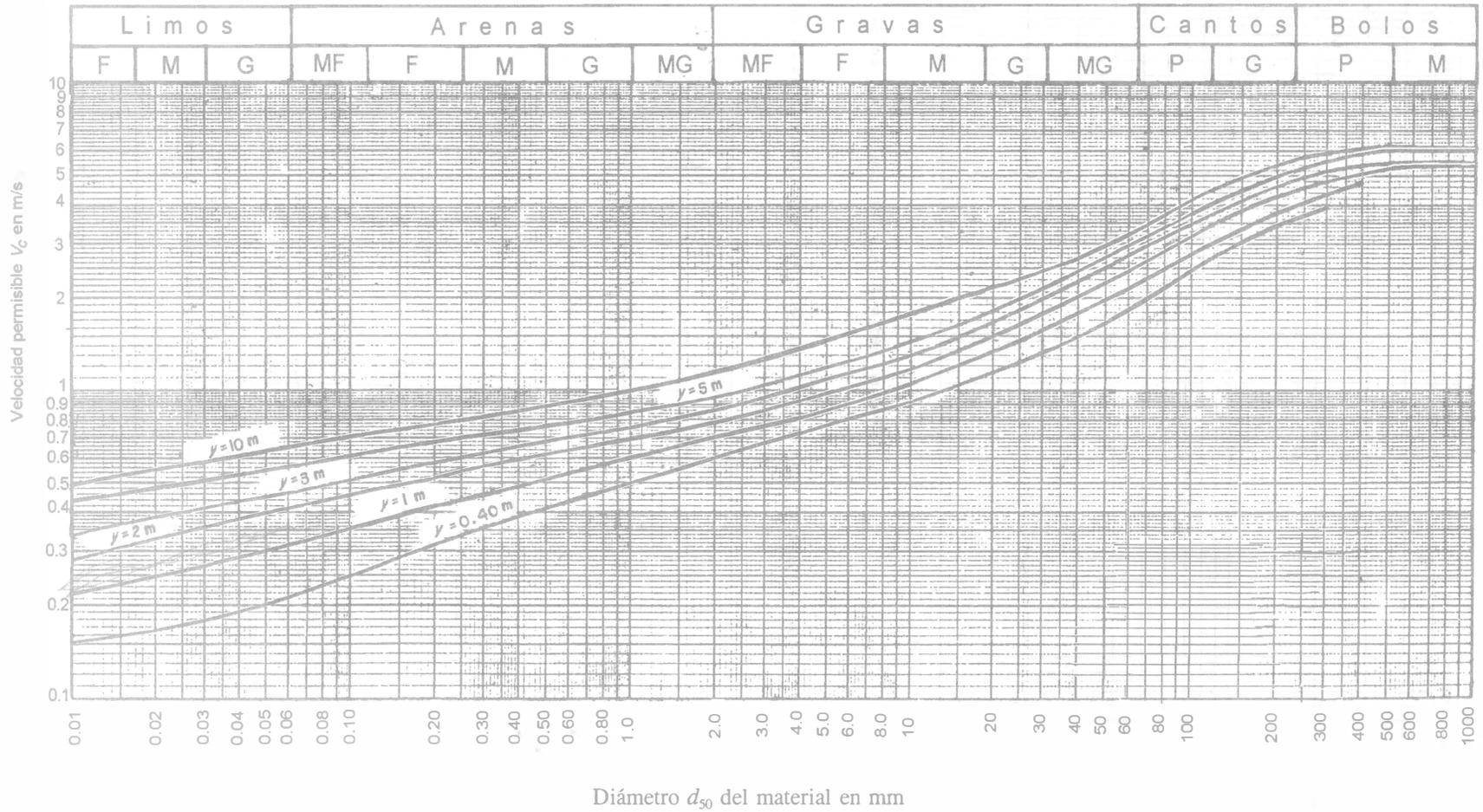


Figura 7.44. Velocidad máxima permisible para suelos no cohesivos, según Lischtan-Levediev (1959)

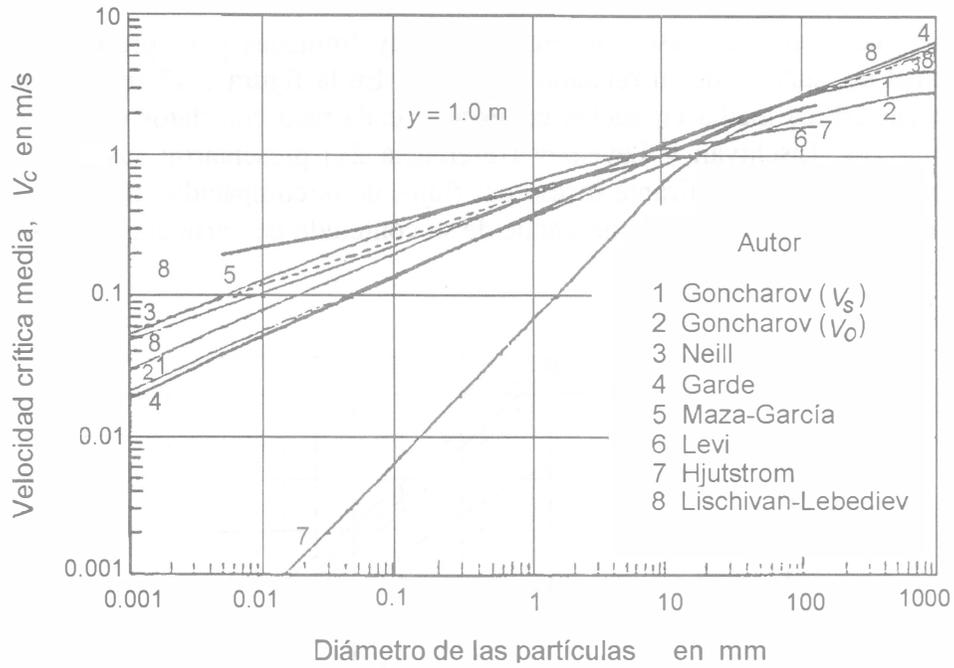


Figura 7.45. Comparación de criterios de velocidad crítica media para suelos no cohesivos, según García Flores

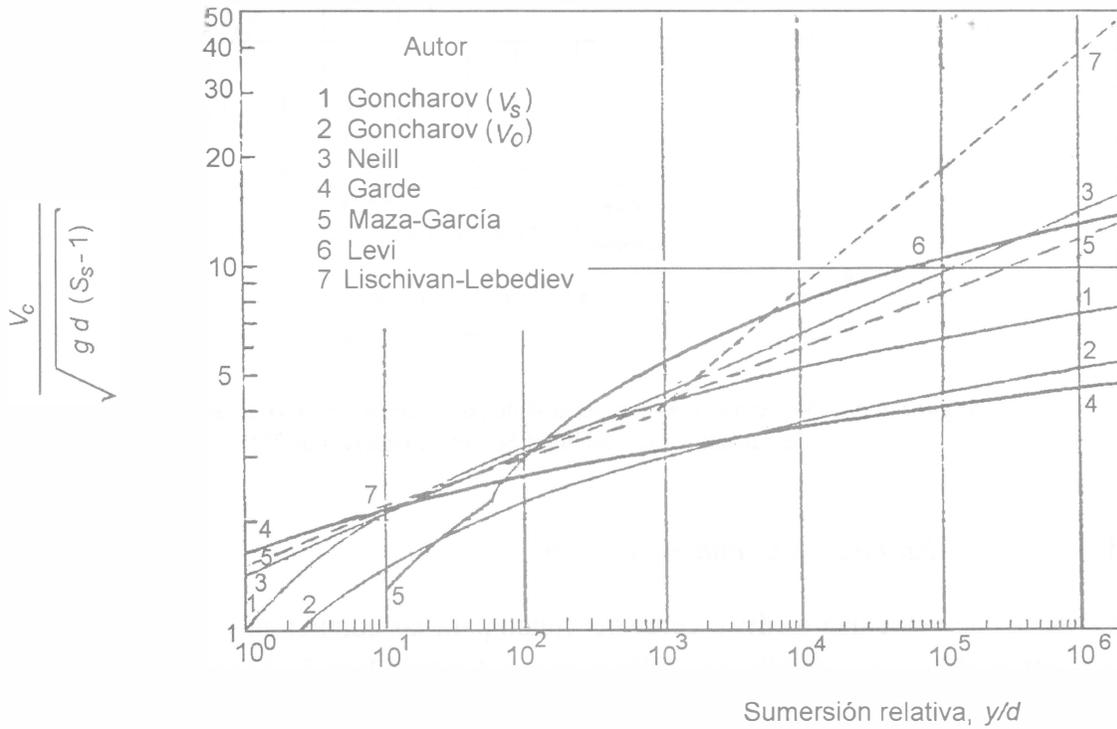


Figura 7.46. Comparación de ecuaciones adimensionales de velocidad crítica media para suelos no cohesivos, según García Flores

c) *Velocidad crítica media para materiales cohesivos*

Las experiencias en este caso son escasas y muy limitadas y se presentan en función de la compactidad del suelo o de su relación de vacíos. En la figura 7.47 se muestran los valores de la velocidad crítica media en suelos cohesivos, elaborada con datos de la ex-Unión Soviética (referencia 20). Lischtvan y Levediev (referencia 21) presentaron sus resultados para suelos arcillosos, en función del tirante medio del flujo, de la compactidad del suelo o de la densidad relativa del material seco y del porcentaje de su contenido de partículas finas, como se muestran en la tabla 7.25.

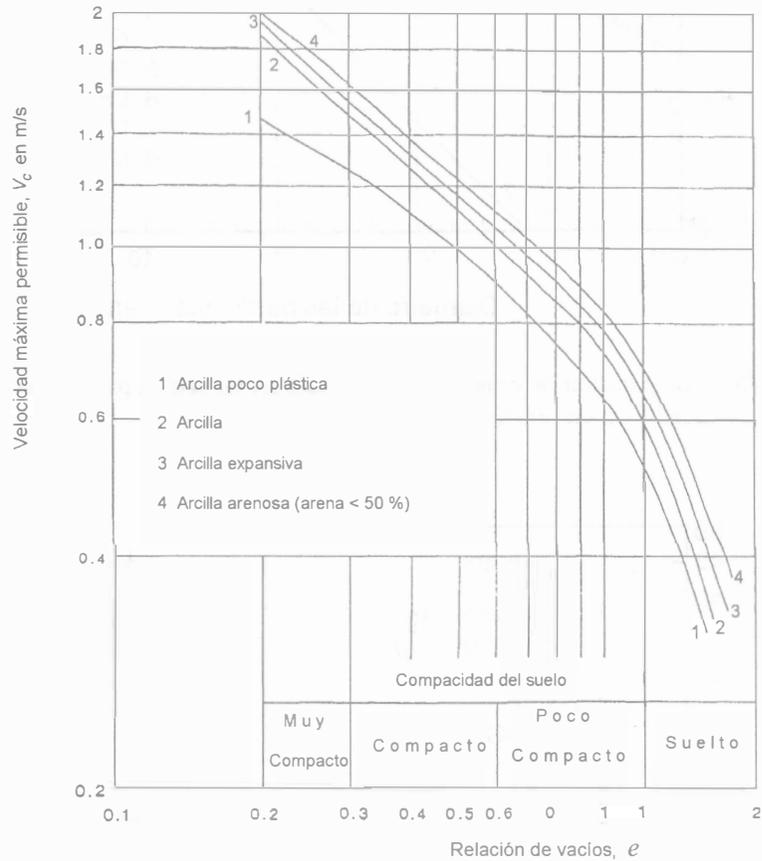


Figura 7.47. Velocidad máxima permisible para suelos cohesivos, según datos de canales en la ex-Unión Soviética (referencia 20)

d) *Velocidad crítica media en canales sinuosos*

Los criterios de velocidad media o cerca del fondo para las condiciones críticas, presentados en los incisos *a*, *b* y *c*, son válidos en canales rectos. Cuando tienen curvas el agua erosiona más fácilmente las paredes y el valor de la velocidad crítica tiene que disminuirse multiplicándolo por un factor f_s que depende del grado de sinuosidad del canal. Los valores de f_s sugeridos por Lane (referencia 30) son:

0.95 en los poco sinuosos
 0.87 en los moderadamente sinuosos
 0.78 en los muy sinuosos.

7.7.5 Método de la velocidad media permisible

La inestabilidad de un canal se puede deber: a erosión considerable en lecho y márgenes sin sedimentación porque el agua trae poco o nada de sedimentos; a una sedimentación progresiva sin sufrir erosión cuando el agua trae consigo gran cantidad de sedimentos y su velocidad permite la sedimentación; o a la presencia de erosión y sedimentación notables cuando el agua acarrea gran cantidad de sedimentos gruesos y el material opone poca resistencia al arrastre.

Cuando el transporte de sedimentos no es importante, el canal será estable desde el punto de vista hidráulico si el flujo no arrastra el material que constituye el cuerpo del canal. En cambio, cuando el transporte de sedimentos es importante, el canal será estable si existe continuidad en dicho transporte para evitar zonas de erosión o depósito.

El canal estable sin arrastre es el que aquí se trata con base en el método de la velocidad media permisible. Este no considera la estabilidad hidráulica de los taludes y por ello el flujo puede ocasionar su erosión, a menos que dichos taludes se revisen y diseñen conforme al método del esfuerzo tangencial permisible que se presenta en el siguiente subcapítulo.

El método de la velocidad media permisible se basa en suponer flujo uniforme en un canal de fondo plano sin arrastre, de modo que la velocidad V del flujo sea preferentemente igual o bien menor que la máxima permisible V_c , la primera calculada con alguna ecuación de fricción y la segunda con alguno de los criterios antes expuestos, que toman en cuenta el tirante y las características del material.

Cuando se conoce el tirante se determina V_c y al igualarla con la velocidad del flujo, el área hidráulica necesaria en la sección es $A = Q/V$.

De la ecuación de Manning, $A R_h^{2/3} = A^{5/3} P^{-2/3} = n Q / \sqrt{S}$ y por tanto

$$P = \left[\frac{\sqrt{S}}{n Q} \right]^{3/2} A^{5/2} \quad (7.28)$$

El caso más común será el diseño de un canal trapecial, cuyos taludes se eligen con los criterios de la sección 7.5.2. El ancho del canal y con este el tirante tendrán que satisfacer las dos ecuaciones anteriores, de modo que el valor de P sirve para calcular el ancho

$$b = P - 2 \sqrt{1 + k^2} y \quad (7.29)$$

el cual se sustituye en la ecuación del área hidráulica $A = (b + k y) y$, de donde se despeja

$$y = -\frac{b}{2k} + \sqrt{\left(\frac{b}{2k}\right)^2 + \frac{A}{k}} \quad (7.30)$$

Conviene que la variable por iterar sea el tirante ya que de éste depende V_c en los distintos criterios, si bien b debe después ajustarse a un ancho estándar constructivo. Se tiene que elegir alguno de los criterios antes expuestos para calcular V_c según el tipo de material. En México se usa la ecuación de Maza-García (tabla 7.23) cuando el suelo no es cohesivo.

Las iteraciones se pueden realizar según los siguientes pasos:

- 1) Se supone un valor inicial de y (por ejemplo, 1.0 m).
- 2) Se determina la velocidad permisible según el criterio elegido y se considera igual a la velocidad del flujo.
- 3) Se calcula el área hidráulica $A = Q/V$.
- 4) Se determina P de la ecuación 7.28.
- 5) Se obtiene el valor de b de la ecuación 7.29.
- 6) Se calcula y de la ecuación 7.30.
- 7) Se compara el valor de y calculado en el paso anterior con el inicial del paso 1. Si son próximos (dentro de la tolerancia deseada), las iteraciones terminan y continúa el paso 8. Si son distintos, se obtiene un nuevo valor de V_c para el de y calculado así como la relación V/V_c y se repite el proceso desde el paso 1 con los nuevos valores de y y V_c .
- 8) Se selecciona el valor de b constructivo adecuado para $V/V_c = 1$ o el más próximo a uno.
- 9) Se determina el tirante normal por alguno de los métodos convencionales.
- 10) Se calcula la velocidad permisible según el criterio elegido, con el cual se debe satisfacer que $V \leq V_c$.
- 11) Se selecciona un libre bordo con alguno de los criterios de la sección 7.4.5.

El procedimiento equivale a diseñar un canal con velocidad de flujo preestablecida por el valor del tirante y converge sólo si hay solución, aunque puede existir más de una. En este último caso, se elige la que proporcione las dimensiones más convenientes para el proyecto.

Cuando no existe solución en el intervalo de b/y de interés práctico, con el procedimiento se detecta alguno de los casos siguientes:

- a) $V/V_c < 1$. Cualquier valor de b/y satisface la condición de no arrastre en el canal, pero conviene elegir la que corresponda al valor de V/V_c más próximo a 1, dentro del intervalo práctico de b/y . El canal puede también conducir un gasto mayor aumentando el área hidráulica siempre que se cumpla que $V/V_c \leq 1$. Para el gasto original, el diseño mejora al aumentar la pendiente si ésta no tiene restricciones, ya que aumenta V y reduce el área de excavación.
- b) $V/V_c > 1$. Ningún valor de b/y satisface la condición de no arrastre. Ésta se logra disminuyendo el gasto, la pendiente o ambos, si no existen limitaciones para ello.

Cuando existen, lo más aconsejable es proteger el cuerpo del canal con material más grueso o revestirlo.

Cuando hay solución es común que la sección no logre pasar la revisión de esfuerzos tangenciales permisibles en plantilla y taludes con el método que se expone en la sección siguiente. Éste es más recomendable en el diseño de canales no revestidos, que sean estables y sin arrastre.

Ejemplo 7.13. El canal trapecial del ejemplo 2.14 debe conducir $50 \text{ m}^3/\text{s}$ con pendiente de 0.00026. El material es no cohesivo, densidad relativa 2.6, partículas poco angulosas y su granulometría es del tipo log-normal, con $d_{50} = 5.9 \text{ mm}$, $d_{75} = 11.8 \text{ mm}$, $d_{90} = 22.1 \text{ mm}$ y $d_m = 10 \text{ mm}$.

- a) Determinar las dimensiones de la sección al eliminar el revestimiento, siguiendo el criterio de velocidad permisible de Lischtvan-Levediev, de modo que la solución satisfaga el intervalo $4 < b/y < 10$.
- b) Proponer las modificaciones más adecuadas en el canal para mejorar el diseño y éste efectuarlo con el criterio de Maza-García.

Solución a. El coeficiente de Manning se estima de alguna ecuación empírica. Si se usa la de Strickler (ecuación 2.32)

$$n = 0.015 (5.9)^{1/6} = 0.020$$

Con la de Meyer-Peter y Müller (ecuación 2.34)

$$n = 0.0122 (22.1)^{1/6} = 0.0204$$

y con la de Lane y Carlson (ecuación 2.35)

$$n = 0.0152 (11.8)^{1/6} = 0.0229$$

Se acepta $n = 0.02$, obtenido de la primera ecuación.

Según la tabla 7.1 el material es grava de muy fina a gruesa, para la cual se recomienda un talud entre 2 y 2.5 en la tabla 7.17.

Con $d_m = 10 \text{ mm}$ y material poco anguloso, de la figura 7.26 resulta un ángulo de reposo $\phi = 0.6 \text{ rad}$ (34.4°), pero se recomienda que el ángulo del talud sea 0.1 a 0.21 rad (6 a 12°) menor para aumentar su estabilidad; es decir, $0.6 - 0.157 = 0.4433 \text{ rad}$, siendo el talud $k = 1/\tan 0.4433 = 2.1$ y se elige $k = 2$, que queda entre los límites aceptables de la tabla 7.17.

Se siguen los pasos que antes se mencionaron para las iteraciones.

- 1) Se supone $y = 1.0$ m.
- 2) Con $d_m = 10$ mm y $y = 1.0$ m, de la figura 7.44 la velocidad máxima permisible es $V_c = 1.05$ m/s. Si se usa la ecuación de ajuste de la tabla 7.23, $y/d = 1/0.01 = 100$, y

$$V_c = [1.63 (100)^{0.1283}] \sqrt{(2.6 - 1) 9.81 (0.01)} = 1.166 \text{ m/s}$$

Se prefiere usar el primer valor.

- 3) Por tanto, $A = 50/1.05 = 47.619$ m².
- 4) De la ecuación 7.28

$$P = \left[\frac{0.02 (50)}{\sqrt{0.00026}} \right]^{-3/2} (47.619)^{5/2} = 0.0020475 (47.619)^{5/2} = 32.0392 \text{ m}$$

- 5) De la ecuación 7.29

$$b = 32.0392 - 2 \sqrt{1 + (2)^2} 1.0 = 27.5671 \text{ m}$$

Por tanto, $b/(2k) = 6.8918$.

- 6) De la ecuación 7.30

$$y = -6.8918 + \sqrt{(6.8918)^2 + \frac{47.619}{2}} = 1.55 \text{ m}$$

- 7) El tirante calculado es mayor que el supuesto en el paso 1. Para $y = 2$ m, $V_c = 1.15$ m/s, de modo que al interpolar con el considerado en el paso 1 para $y = 1.55$ m, $V_c = 1.105$ m/s, de modo que $V/V_c = 1.05/1.105 = 0.95$ y $b/y = 27.5671/1 \approx 27.57$.

En la tabla 7.26 se presenta un resumen de las restantes iteraciones. No existe solución para $V/V_c = 1$; el más próximo es con $V/V_c = 0.9911$, es decir, $b = 12.825$ m y $y = 2.378$ m, $b/y = 5.39$ dentro del intervalo de interés práctico. Por ejemplo, puede elegirse $b = 13$ m, al que corresponde un tirante normal $y = 2.375$ m, $b/y = 5.47$ y $A = 42.1563$ m². Sin embargo, la solución con $b = 10.50$ m, $y = 2.614$ m, $b/y = 4.017$; $A = 41.113$ m² sería la más económica dentro de los límites prácticos.

Solución b. Con el criterio de Lischvan-Levediev poco se puede mejorar el diseño, ya que V es muy próximo a V_c . Para las dimensiones: $b = 10.5$ m y $y = 2.614$ m, $A = 41.113$ m², con el mismo gasto y pendiente la velocidad media del flujo es 1.2162 m/s. Con la ecuación de Maza García (tabla 7.23), la velocidad permisible sería

$$V_c = 1.504 \left(\frac{2.614}{0.010} \right)^{0.15} \sqrt{(2.6 - 1) 9.81 (0.01)} = 1.3732 \text{ m/s} > V$$

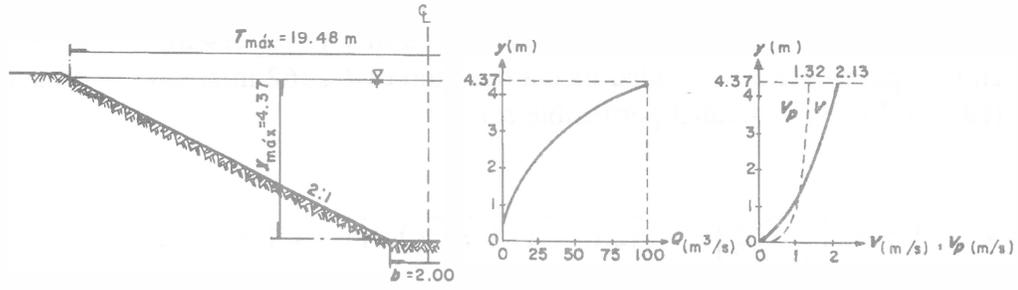
Es decir, $V/V_c = 0.8857 < 1$, lo que permite aumentar la pendiente para que aumente V . Sin embargo, de las ecuaciones 7.27 a 7.30 se deduce que A disminuye y con ésta P y b , pero y aumenta lo que obliga a una proporción b/y menor que el intervalo práctico establecido. Por estas razones, no sería conveniente aumentar la pendiente.

En otras palabras, no es posible mejorar el diseño, a menos que fuera deseable conducir mayor gasto.

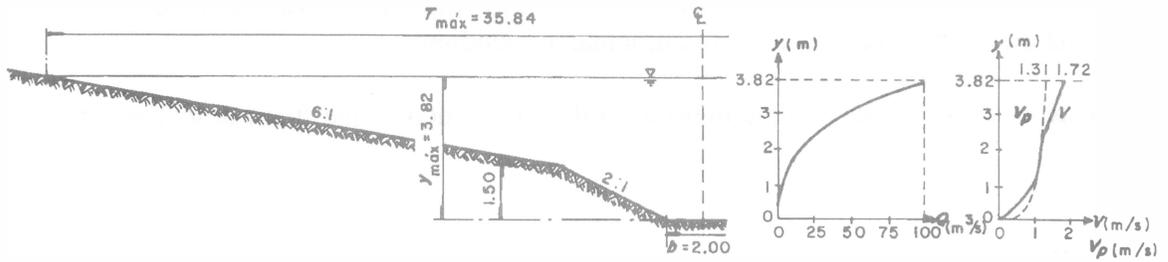
Tabla 7.26. Proceso de iteraciones para la solución del ejemplo 7.13, inciso *a*, con el criterio de Lischvan-Levediev ($n = 0.02$)

y (supuesto) en m	$V = V_c$ en m/s (Fig. 7.44)	A en m ²	P en m	b en m	y (calculado) en m	V_c en m/s (Fig. 7.44)	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{b}{y}$
1.0	1.05	47.619	32.0392	27.5671	1.55	1.105	0.9502	17.79
1.55	1.105	45.2489	28.2000	21.2682	1.817	1.132	0.9761	11.71
1.817	1.132	44.1696	26.5484	18.4225	1.974	1.147	0.9866	9.33
1.974	1.147	43.592	25.689	16.8610	2.075	1.161	0.9878	8.13
2.075	1.161	43.0663	24.9215	15.6418	2.158	1.174	0.9892	7.25
2.158	1.174	42.5894	24.2373	14.5865	2.235	1.185	0.9905	6.53
2.235	1.185	42.1941	23.6788	13.6835	2.306	1.196	0.9909	5.93
2.306	1.196	41.8060	23.1381	12.8253	2.378	1.207	0.9911	5.39
2.378	1.207	41.4250	22.6145	11.9798	2.453	1.218	0.9910	4.88
2.453	1.218	41.0509	22.1074	11.1372	2.533	1.230	0.9902	4.40
2.533	1.230	40.6504	21.5721	10.2442	2.624	1.244	0.9891	3.90

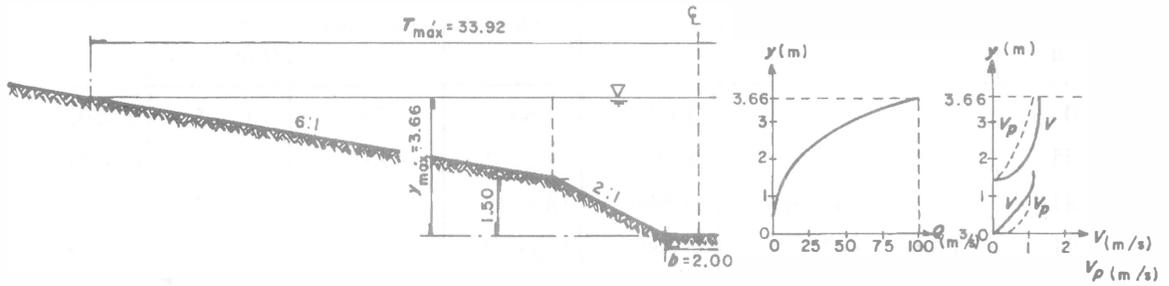
Ejemplo 7.14. Un canal debe conducir un caudal que fluctúa entre 1 y 100 m³/s; con pendiente de 0.00075 y material en plantilla y talud de diámetro medio $d_m = 8.9$ mm. Comparar el comportamiento de la velocidad del flujo y de la velocidad permisible para la fluctuación indicada del caudal, considerando tres secciones de 2 m de ancho de plantilla en la parte central y el resto como sigue:



a) Sección trapecial

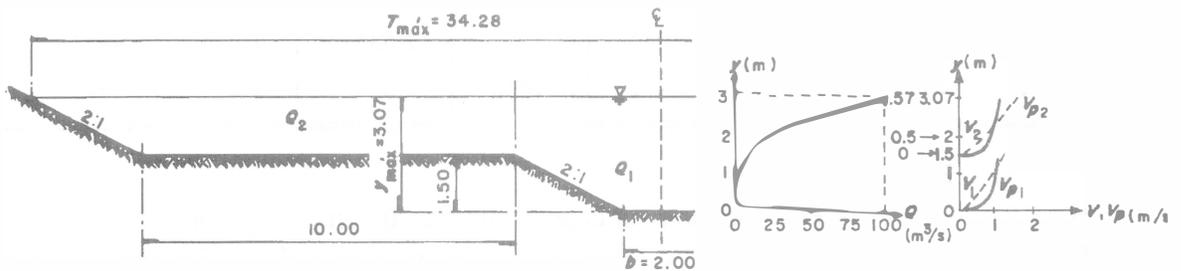


Tratamiento de sección sencilla



Tratamiento de sección compuesta

b) Sección trapecial con cambio de talud



c) Sección trapecial con ampliaciones laterales

Figura 7.48. Comparación de tres secciones en el ejemplo 7.14

a) Trapecial de taludes 2:1 (figura 7.48a); b) trapecial en la parte central con taludes 2:1 hasta una altura de 1.50 m y después taludes 6:1 (figura 7.48b); c) la sección compuesta de la figura 7.48c.

Solución. De la ecuación 2.32, el coeficiente de Manning resulta

$$n = 0.015 (8.9)^{1/6} = 0.0216$$

Cualquiera que sea la sección, el caudal es

$$Q = \frac{\sqrt{0.00075}}{0.0216} A R_h^{2/3} = 1.26788 A R_h^{2/3}$$

siendo función únicamente del tirante, hasta el máximo que proporcione el caudal de $100 \text{ m}^3/\text{s}$. En la tabla 7.27 se presentan los cálculos únicamente para dicho máximo, así como las velocidades del flujo y las permisibles tomadas de la figura 7.44.

En la tabla 7.27 se observa que la velocidad mínima para $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ se obtiene para la sección b cuando el cálculo se realiza considerando a la sección completa, siendo dicha velocidad más representativa para efectos de estabilidad de la sección. Esta velocidad es 31 por ciento mayor que la velocidad permisible para el tirante que se alcanza, siendo aceptable esta situación si el caudal máximo es poco frecuente y de corta duración. Sin embargo, tanto el ancho de la superficie libre como el área hidráulica, y con ellos el volumen de excavación, son mayores para la sección b que para las otras.

Al permitir un aumento del 30 por ciento por encima de la velocidad permisible, en la sección a se presenta un exceso de 31 por ciento, y en las partes laterales de la c del 15 por ciento. Carece de sentido considerar en este análisis a la velocidad en la parte central de la sección c o la media, en virtud de que dichos valores son ficticios.

Si el caudal máximo ocurre casualmente, la sección b no requiere de caídas locales (figura 7.39) para disminuir la pendiente, pero sí la c, aunque con espaciamientos grandes. En cambio, la a necesita de caídas más frecuentes.

Es obvio que se pueden analizar otras secciones compuestas y solamente la evaluación económica de todas puede indicar cual es la mejor.

Este ejemplo permite concluir que las secciones compuestas tienen un radio hidráulico que cambia poco con el caudal y, como consecuencia, la velocidad media crítica varía dentro de límites estrechos.

Tabla 7.27. Cálculos relativos al ejemplo 7.14

Sección	$y_{máx}$ en m	T en m	A_2 en m ²	P en m	R_h en m	V en m/s	V_p en m/s	V/V_p	Q en m ³ /s
a	4.37	19.48	46.93	21.54	2.18	2.13	1.32	1.61	100.00
b	3.82	35.84	58.35	36.93	1.58	1.72	1.31	1.31	100.36
	3.66	8.00	24.78	8.71	2.85	2.55	1.30	1.96	63.09
	2.16	25.92	27.99	26.28	1.07	1.32	1.02	1.29	37.02
		33.92	52.77			1.90	1.30	1.50	100.11
c	1.50	8.00	7.50	8.71	0.86	1.15	1.06	1.08	8.61
	3.07	8.00	20.06	8.71	2.30	2.21	1.26	1.76	44.36
	1.57	26.28	36.33	27.02	1.34	1.54	1.06	1.45	56.11
		34.28	56.39			1.78	1.26	1.41	100.47

7.7.6 Esfuerzo tangencial crítico para materiales no cohesivos

a) Material no cohesivo y uniforme

Shields (referencia 31) en 1936 fue el primero que analizó las fuerzas que actúan sobre una partícula de material uniforme en un canal de fondo plano, y en aplicar los principios de similitud para relacionarlas con las características del flujo turbulento plenamente desarrollado sobre materiales uniformes de distintos tamaños y densidades. Sus resultados experimentales los pudo representar mediante dos parámetros adimensionales que definieron la frontera de inicio del movimiento del material. El primer parámetro fue el número de Reynolds asociado con la velocidad de fricción: $v_* = \sqrt{\tau_c}/\rho$ (ecuación 2.2), el diámetro de las partículas y la viscosidad cinemática ν del agua

$$R_{*c} = \frac{v_{*c} d}{\nu} = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \frac{d}{\nu} \quad (7.31)$$

El segundo se conoce como número o parámetro adimensional de Shields

$$\tau_* = \frac{\tau_o}{g \rho (S_s - 1) d} = \frac{R_h S}{(S_s - 1) d} \quad (7.32a)$$

donde $\tau_o = g \rho R_h S$ es el esfuerzo tangencial medio producido por el flujo en el fondo (ecuación 2.1), siendo S la pendiente hidráulica. Cuando dicho esfuerzo alcanza el valor crítico $\tau_c = g \rho R_{hc} S = g \rho R_h S_c$, el parámetro anterior representa también la condición crítica

$$\tau_{*c} = \frac{\tau_c}{g \rho (S_s - 1) d} \quad (7.32b)$$

En la figura 7.49 se muestra la curva de Shields. Un punto debajo de la curva representa las condiciones en donde no hay movimiento del material ($\tau_o < \tau_c$); cuando queda sobre la curva ocurren las condiciones críticas de arrastre ($\tau_o = \tau_c$), y cuando está encima de la curva, las condiciones de movimiento del material del fondo ($\tau_o > \tau_c$) con las diferentes configuraciones que se señalan en el diagrama: rizos para \mathbf{R}_{*c} pequeño, barras largas con valores grandes de \mathbf{R}_{*c} .

Varios investigadores han hecho contribuciones para comprobar la curva de Shields, modificarla o ampliarla, pero los experimentos de Yalin y Karahan en 1979 (referencia 32) han sido los más completos. Ellos utilizaron agua y mezclas de agua y glicerina, así como arenas de tamaño uniforme ($1.6 \leq d_{90}/d_{10} \leq 2.1$). Con una gran cantidad de datos experimentales obtuvieron el diagrama que se muestra en la figura 7.50, donde se observa que el esfuerzo tangencial crítico se define mediante dos curvas distintas para los flujos laminar y turbulento, y no una sola, como se consideraba convencionalmente. Para valores de $\mathbf{R}_{*c} \geq 70$ (frontera hidráulicamente rugosa), en la curva de flujo turbulento se alcanza el valor constante de $\tau_{*c} = 0.045$, en lugar de 0.06 de Shields. Para $\mathbf{R}_{*c} < 70$ (frontera hidráulicamente lisa), τ_{*c} depende de \mathbf{R}_{*c} .

Debido a la gran cantidad de datos y al amplio intervalo que cubren, la curva de Yalin y Karahan es superior a la de Shields y es más recomendable, no obstante que tiene también la desventaja de que la variable τ_c tampoco aparece en forma explícita y debe igualmente procederse por iteraciones para obtenerla. En ambos casos, esta desventaja se elimina al introducir el parámetro propuesto por Yalin.

$$\mathbf{D}_* = \left[\frac{\mathbf{R}_{*c}^2}{\tau_{*c}} \right]^{1/3} \quad (7.33a)$$

donde se sustituyen las ecuaciones 7.31 y 7.32 y se obtiene

$$\mathbf{D}_* = \left[(S_s - 1) \frac{g}{\nu^2} \right]^{1/3} d \quad (7.33b)$$

Al eliminar τ_{*c} en la ecuación 7.33a, queda establecida una relación única ahora entre τ_{*c} y \mathbf{D}_* y ésto permite la determinación directa de τ_c , ya que no interviene en el segundo parámetro.

La curva de Shields adaptada al nuevo parámetro \mathbf{D}_* se presenta en la figura 7.51; la de Yalin y Karahan en la figura 7.52.

Las curvas originales de Shields y de Yalin y Karahan, así como las adaptadas al parámetro de la ecuación 7.33b se ajustan bien a las ecuaciones presentadas en la tabla 7.28, propuestas por los autores que en ella se mencionan. Estas aportaciones eliminan las iteraciones en el cálculo del esfuerzo tangencial crítico, como se expone en el siguiente ejemplo.

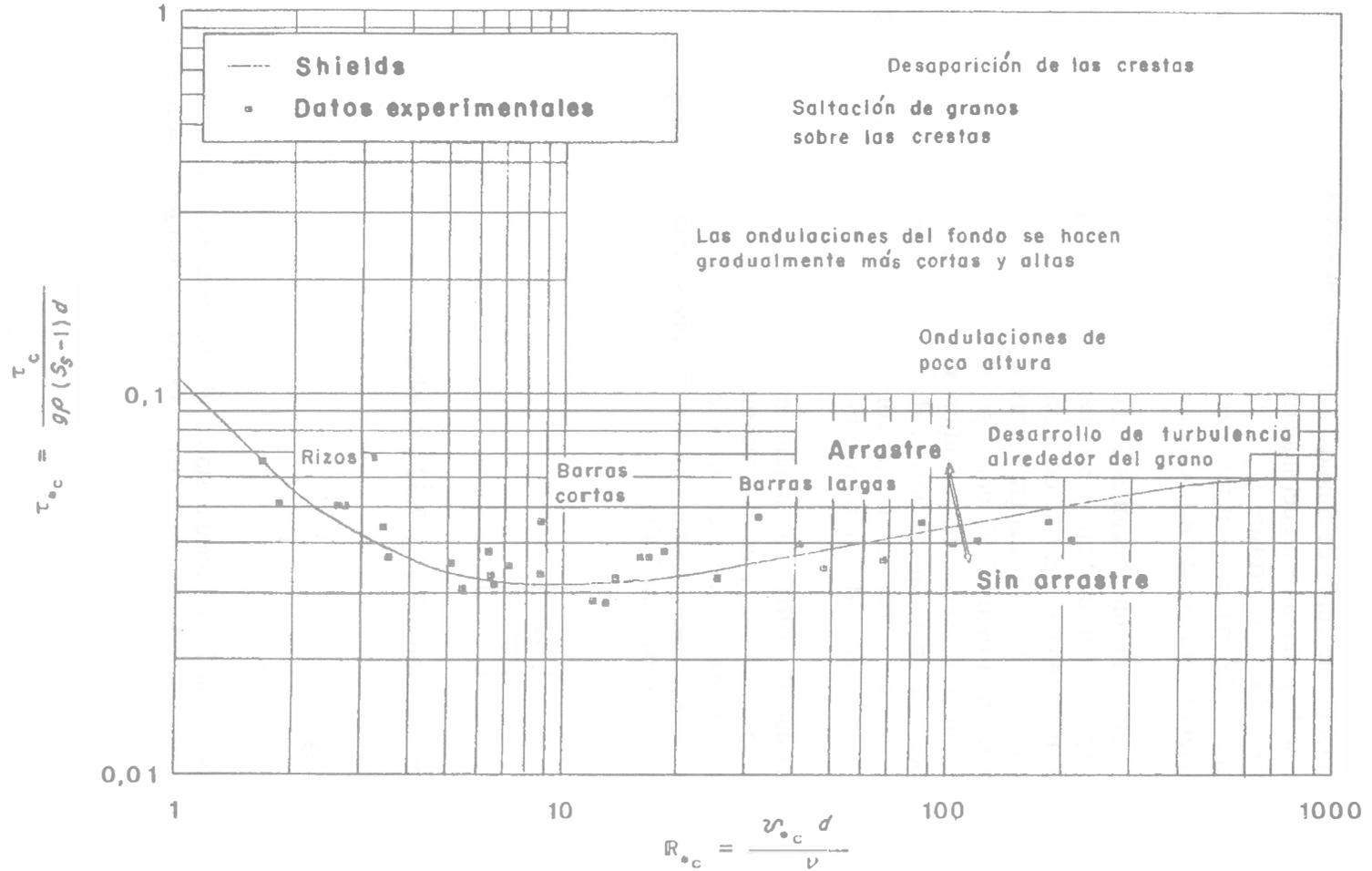


Figura 7.49. Curva de Shields; define el inicio del arrastre de sedimentos (1936)

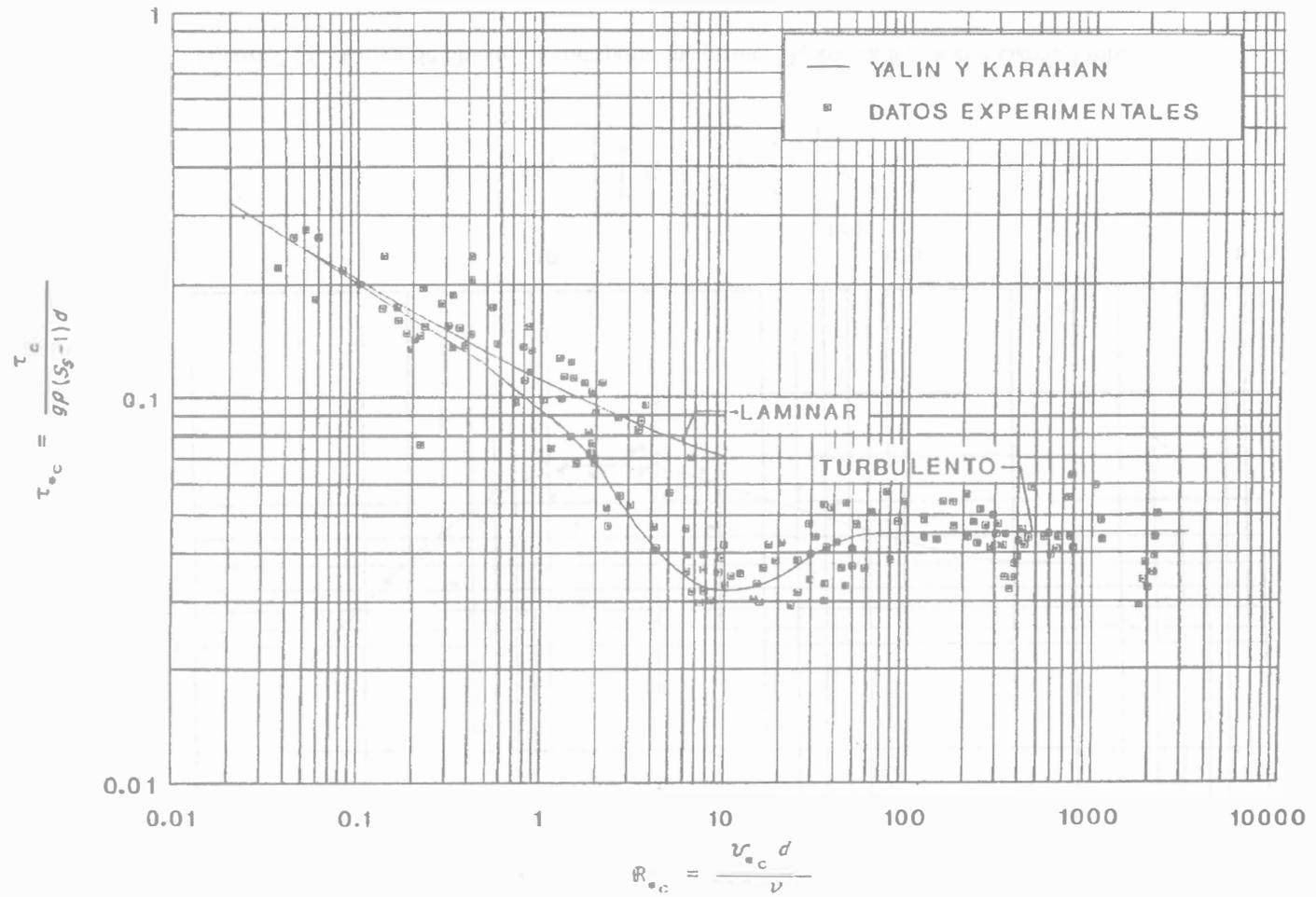


Figura 7.50. Curvas de inicio de arrastre o de transporte incipiente, según Yalin y Karahan (1979)

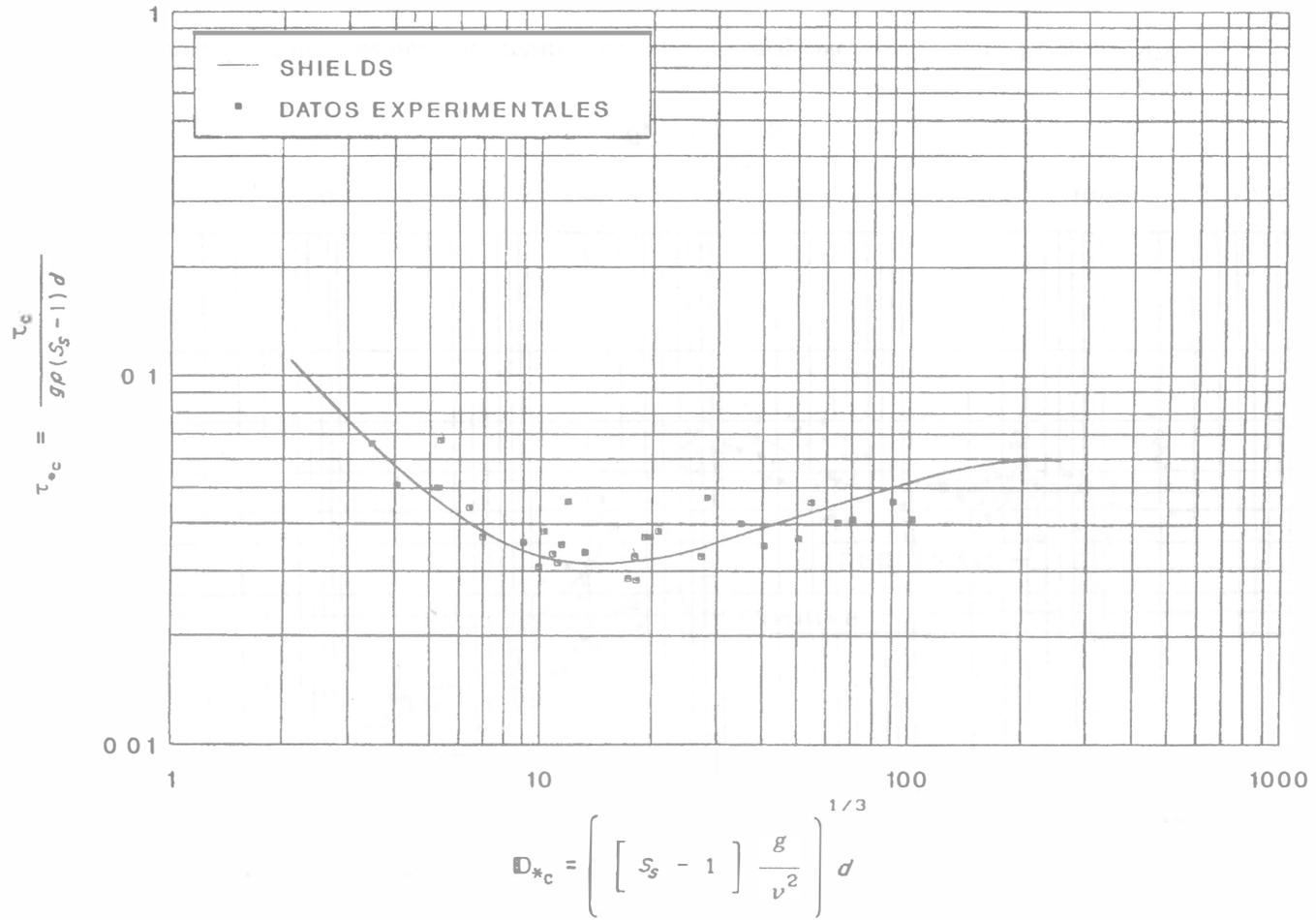


Figura 7.51. Curva de Shields de transporte incipiente, D_{*c} contra θ_{*c} , según García Flores

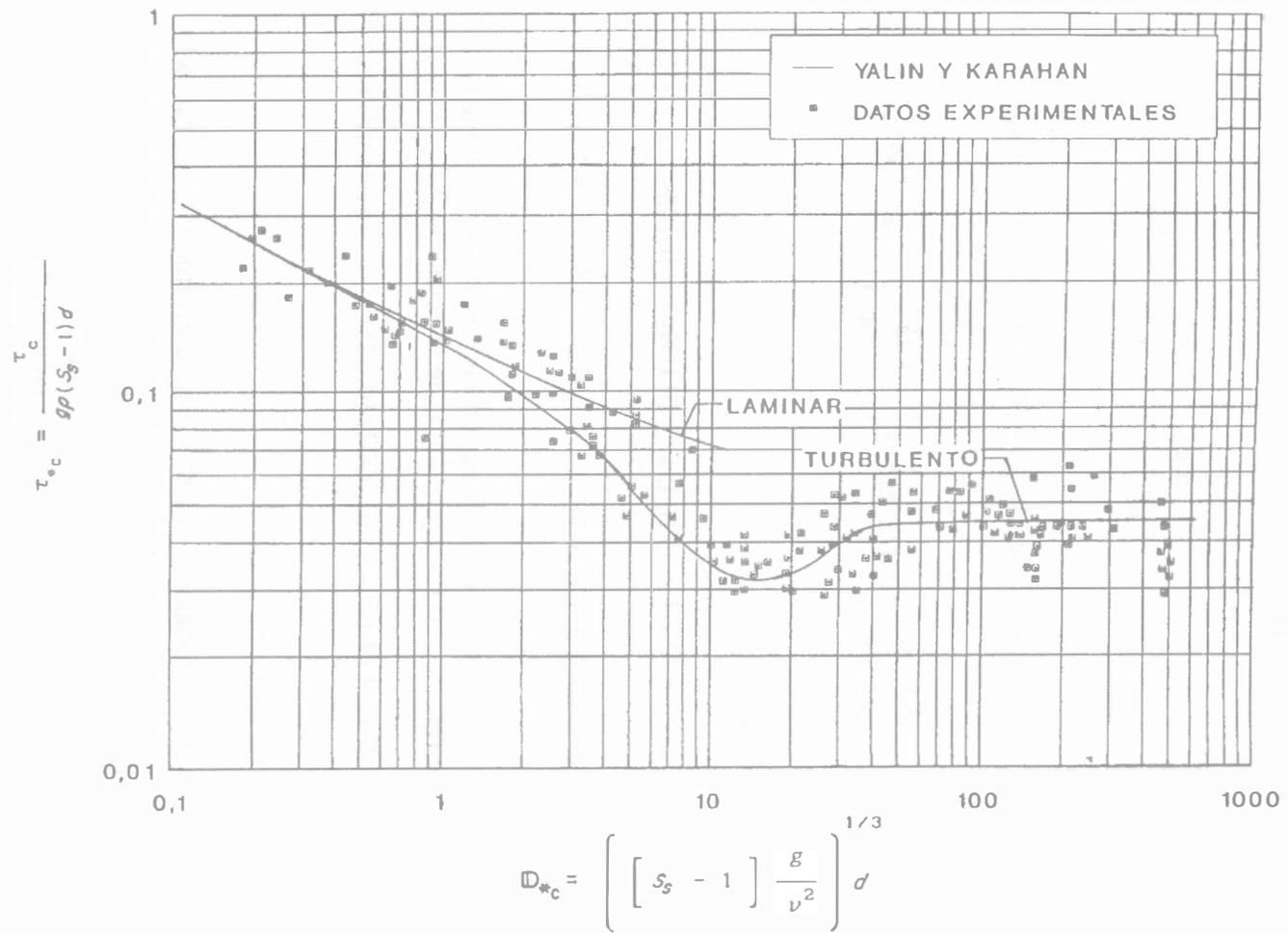


Figura 7.52. Curva de Yalin y Karahan de transporte incipiente, D_{*c} contra τ_{*c} , según García Flores

Ejemplo 7.15. En el fondo de un cauce se encuentran arenas de tamaño uniforme, de diámetro $d = 0.2$ mm y densidad relativa $S_s = 2.68$. El agua es clara y tiene 15 °C de temperatura, de modo que $g\rho = 9797.8$ N/m³ y $\nu = 1.141 \times 10^{-6}$ m²/s. Determinar el esfuerzo tangencial crítico en el cauce según los criterios de: a) Shields; b) Yalin y Karahan.

Solución a. Se calcula el parámetro D_* de la ecuación 7.33b

$$D_* = \left[(2.68 - 1) \frac{9.81}{1.141 \times 10^{-6}} \right]^{1/3} = 243.54$$

De acuerdo con este valor, la ecuación 2 de Maza en la tabla 7.28 es aplicable, y resulta

$$\tau_{*c} = \frac{0.2196}{243.54} + 0.077 \exp - \left[\frac{30.35}{243.54} \right]^{0.563} = 0.0574$$

Por tanto, de la ecuación 7.32

$$\tau_c = 9797.8 (2.68 - 1) (0.0002) (0.0574) = 0.1889 \text{ N/m}^2 \text{ (Pa)}$$

En la misma forma, según la ecuación 4 de la tabla 7.28, $D_{*c} > 182.012$ y $\tau_{*c} = 0.06$, por tanto, $\tau_c = 0.1975$ N/m² (Pa).

Solución b. Puesto que $D_* = 243.54 > 47.7523$, según las observaciones de la tabla 7.28 para la ecuación 9 de García Flores, $\tau_{*c} = 0.045$, por tanto, de la ecuación 7.32.

$$\tau_c = 9797.8 (2.68 - 1) (0.0002) (0.045) = 0.1481 \text{ N/m}^2 \text{ (Pa)}$$

b) *Material no cohesivo y no uniforme*

Es más común que el material en canales y cauces sea no uniforme y bien graduado, es decir, una mezcla de partículas de muy diferentes tamaños, donde el esfuerzo tangencial crítico de una fracción específica i del material se ve afectado por las demás fracciones, ya que los granos gruesos protegen a los finos y producen el acorazamiento del conjunto. Esto plantea dos problemas, el primero de calcular el máximo esfuerzo tangencial τ_{ci} que las partículas de una cierta fracción i del material de diámetro d_i definido pueden soportar sin ser desplazadas; el segundo de determinar el esfuerzo tangencial crítico τ_c que resiste la mezcla de partículas. Para resolver el primer problema se utilizan las ecuaciones empíricas de Egiazaroff, y de Hayashi y coautores que se presentan en la tabla 7.29; para el segundo se cuenta con las restantes ecuaciones (también empíricas) de la misma tabla y de los conceptos de acorazamiento de Gessler.

Tabla 7.28. Ecuaciones de ajuste de los resultados experimentales de Shields (1936) (referencia 31), y Yalin y Karahan (1979) (referencia 32)

Autor	Ecuación	Observaciones
1. Maza (1986) (referencia 33)	$\tau_{*c} = \frac{0.097}{R_{*c}} + 0.077 \exp - \left[\frac{19.58}{R_{*c}} \right]^{0.3191}$	Vale para $1 \leq R_{*c} \leq 1500$ en la curva original de Shields. Si $R_{*c} > 1500$, $\tau_{*c} = 0.06$.
2. Maza (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.2196}{D_*} + 0.077 \exp - \left[\frac{30.35}{D_*} \right]^{0.563}$	Vale para $2.15 \leq D_* \leq 333$ en la curva adaptada de Shields. Si $D_* > 333$, $\tau_{*c} = 0.06$.
3. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.0907}{R_{*c}^{0.9481}} + 0.0835 \exp - \left[\frac{26.1583}{R_{*c}} \right]^{0.334}$	Vale para $1.6543 < R_{*c} < 600$ en la curva original de Shields. Si $R_{*c} \geq 600$, $\tau_{*c} = 0.06$.
4. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.2061}{D_*^{0.969}} + 0.0947 \exp - \left[\frac{44.6685}{D_*} \right]^{0.517}$	Vale para $3.46 < D_* < 182.012$ en la curva adaptada de Shields. Si $D_* > 182.012$, $\tau_{*c} = 0.06$.
5. Mantz (1977) (referencia 34)	$\tau_{*c} = 0.1 R_{*c}^{-0.3}$	Vale para $0.02 < R_{*c} \leq 1.0395$ (flujo turbulento) en la curva original de Yalin y Karahan.
6. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.1013}{R_{*c}^{0.6338}} + 0.0486 \exp - \left[\frac{17.6427}{R_{*c}} \right]^{1.0311}$	Vale para $1.0395 \leq R_{*c} < 70$ (flujo turbulento) en la curva original de Yalin y Karahan. Si $R_{*c} \geq 70$, $\tau_{*c} = 0.045$.
7. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.1114}{R_{*c}^{0.2655}} + 0.0091 \exp - \left[\frac{3.82}{R_{*c}} \right]^{6.3767}$	Vale para $0.05 \leq R_{*c} \leq 10$ (flujo laminar) en la curva original de Yalin y Karahan.
8. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = 0.1371 D_*^{-0.377}$	Vale para $0.10735 < D_* \leq 2.0838$ (flujo turbulento) en la curva adaptada de Yalin y Karahan.
9. García Flores (1996) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.1777}{D_*^{0.7303}} + 0.0437 \exp - \left[\frac{31.9536}{D_* + 10} \right]^{2.4531}$	Vale para $2.0838 \leq D_* < 47.7523$ (flujo turbulento) en la curva adaptada de Yalin y Karahan. Si $D_* \geq 47.7523$, $\tau_{*c} = 0.045$.
10. García Flores (1966) (referencia 17)	$\tau_{*c} = \frac{0.1439}{D_*^{0.3524}} + 0.0084 \exp - \left[\frac{5.6243}{D_*} \right]^{9.2084}$	Vale para $0.21637 \leq D_* \leq 11.25177$ (flujo laminar) en la curva adaptada de Yalin y Karahan.

En la figura 7.53 se comparan los resultados de las ecuaciones 3 a 6 de la tabla 7.29 con los de Shields y de Yalin-Karahan (ésta para flujo turbulento). Con excepción de la ecuación de Meyer-Peter y Müller, las demás cubren un intervalo relativamente pequeño ya que se basan en experimentos de laboratorio.

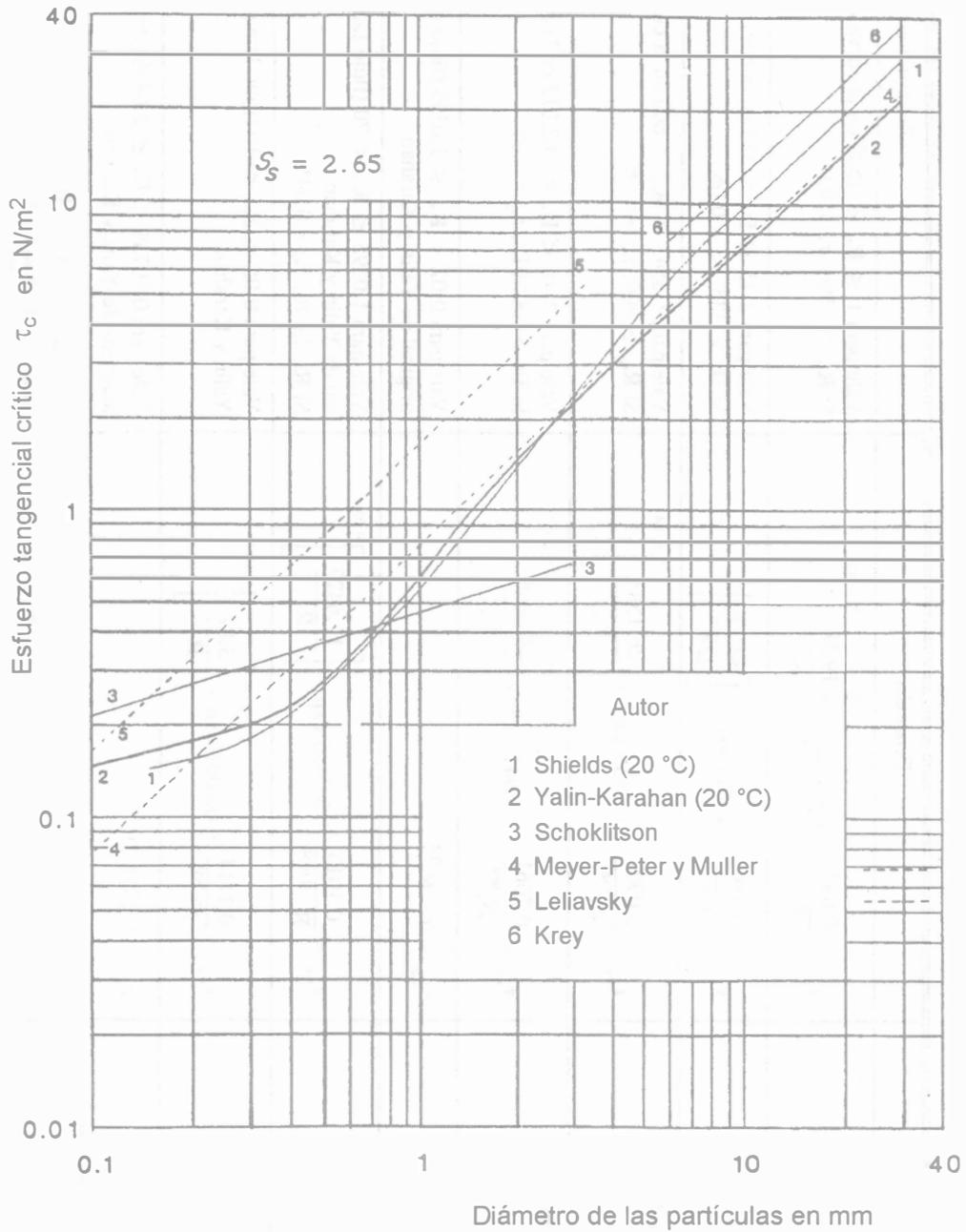


Figura 7.53. Esfuerzo tangencial crítico para material no cohesivo. Comparación de criterios, según García Flores

Tabla 7.29. Ecuaciones para determinar el esfuerzo tangencial crítico τ_{ci} de una fracción i o τ_c de una mezcla (ambos en N/m²) de material no cohesivo y no uniforme, recopiladas por García Flores y Maza (1996)

Autor	Ecuación	Observaciones
1. Egiazaroff (1965) (referencia 35)	$\frac{\tau_{ci}}{g\rho (S_s - 1) d_i} = \frac{0.1}{[\log (19 d_i/d_m)]^2}$	Para calcular τ_{ci} de una fracción del material de diámetro d_i y diámetro medio aritmético de la mezcla d_m . Ecuación adimensional.
2. Hayashi y coautores (1980) (referencia 36)	Para $d_i/d_m < 1$. $\frac{\tau_{ci}}{g\rho (S_s - 1) d_i} = \frac{\tau_{cm}}{g\rho (S_s - 1) d_m} \frac{d_i}{d_m}$ Para $d_i/d_m > 1$. $\frac{\tau_{ci}}{g\rho (S_s - 1) d_i} = \frac{\tau_{cm}}{g\rho (S_s - 1) d_m} \left[\frac{\log 8}{\log (8 d_i/d_m)} \right]^2$	Con la misma simbología de la ecuación de Egiazaroff, pero d_m es el diámetro medio aritmético de la mezcla. $\tau_{cm} / [g\rho (S_s - 1) d_m] \approx 0.03$, cuando $2 < \sigma_g < 4.47$ y $2.47 \text{ mm} < d_m < 10.74 \text{ mm}$, según Misri (1983), referencia 37.
3. Schoklitsch (1971) (referencia 38)	$\tau_c = 2.85 \times 10^{-5} g\rho (S_s - 1) d_m^{1/3}$	Para $0.1 \text{ mm} < d_m < 3 \text{ mm}$. En la ecuación, d_m en mm, $g\rho$ en N/m ³ y τ_c en N/m ² .
4. Meyer-Peter y Müller (1948)(referencia 39)	$\frac{\tau_c}{g\rho (S_s - 1) d_m} = 0.047$	Para materiales de granulometría uniforme y no uniforme, con $1.25 < S_s < 4.2$ y $0.005 \text{ m} < d < 0.0286 \text{ m}$. Vale para cualquier valor de R_c .
5. Krey (1956) (referencia 40)	$\frac{\tau_c}{g\rho (S_s - 1) d_m} = 0.07693$	Para $d > 0.006 \text{ m}$.
6. Leliavsky (1955) (referencia 41)	$\frac{\tau_c}{g\rho (S_s - 1) d_m} = 0.1006$	Para $d_m < 0.0034 \text{ m}$.
7. Diagrama de Lane (1955)(referencia 30) Aparece en la figura 7.54	$\tau_c = 1.1217 + 0.652 d_{50} + 0.11 d_{50}^2$ $\tau_c = 2.5532 + 0.2411 d_{50} + 0.1827 d_{50}^2$ $\tau_c = 3.7878 + 0.5776 d_{50} + 0.0999 d_{50}^2$	Ecuaciones de García Flores para $0.1 \text{ mm} < d_{50} < 5 \text{ mm}$: Para agua clara. Para baja concentración de sedimentos. Para alta concentración de sedimentos. En ellas d_{50} en mm y τ_c en N/m ² .
	$\tau_c = 0.754 d_{75}$ $\frac{\tau_c}{g\rho (S_s - 1) d_{75}} = 0.0493$	Ecuaciones de García Flores para $d_{75} \geq 5 \text{ mm}$ y $S_s = 2.56$. En esta ecuación, d_{75} en mm y τ_c en N/m ² . Ecuación adimensional.

Lane en 1955 (referencia 30) coleccionó y publicó los resultados obtenidos en campo de canales con materiales de distintos tipos y propuso el diagrama que lleva su nombre y que aparece en la figura 7.54. Cuando el material es no cohesivo y fino, Lane supone que d_{50} (o mediana) es el diámetro que lo caracteriza y si $d_{50} < 5$ mm el esfuerzo tangencial en la figura puede adoptar tres valores muy diferentes, según sea la concentración de sedimentos en el agua: los valores mayores de τ_c para alta concentración, de 2% o más de finos en suspensión (limos y arcillas pero bajo contenido de arenas); los valores menores de τ_c para agua clara o libre de sedimentos; los valores intermedios de τ_c para una baja concentración de sedimentos, 0.2% de finos en suspensión (limos y arcillas).

Para el material bien graduado y grueso (línea recta de la figura 7.54), Lane consideró que d_{75} lo caracteriza, ya que las partículas más finas son arrastradas y las de mayor tamaño permanecen protegiendo al material fino subyacente.

El diagrama de Lane es el más conocido y completo para canales y cauces rectos y es ampliamente utilizado para estimar el esfuerzo tangencial crítico en suelos no cohesivos finos y gruesos con alta a nula concentración de sedimentos en el agua.

En la tabla 7.29 se encuentran las ecuaciones deducidas por García Flores para representar las curvas del diagrama de Lane.

Cuando el canal es sinuoso se torna más vulnerable a la erosión y los esfuerzos tangenciales críticos se tienen que afectar por un porcentaje de reducción que vale: 10 por ciento para canales poco sinuosos, 25 por ciento para los moderadamente sinuosos y 40 por ciento para los muy sinuosos.

7.7.7 Acorazamiento de un lecho con materiales bien graduados

La granulometría de los sedimentos no cohesivos en un lecho puede tener un amplio intervalo en los tamaños de las partículas y cantidades apreciables de cada tamaño, en cuyo caso se trata de sedimentos de granulometría *extendida* o de materiales bien graduados ($\sigma_g > 2$). Cuando se sujetan a la acción de un flujo son capaces de desarrollar una coraza o armadura en la superficie del lecho, cuya resistencia a la erosión crece con la intensidad del flujo, ya que el agua arrastra primero a las partículas más finas hasta que afloran otras de mayor tamaño capaces de resistir y proteger al material fino subyacente. Dicha resistencia tiene un límite, ya que si la intensidad del flujo alcanza la capacidad de arrastrar también a las partículas más gruesas, se destruye la coraza y se produce el transporte de todos los sedimentos en el lecho.

La explicación del acorazamiento que a continuación se presenta fue expuesta por García Flores y Maza en la referencia 17.

Durante el proceso de acorazamiento existe transporte pero de los sedimentos más finos, que causa una erosión insignificante en el lecho sin modificar su pendiente longitudinal, por lo cual se considera que el acorazamiento la vuelve estable. Este, en cambio, no es el caso cuando la capacidad de erosión del flujo rebasa la resistencia del material más grueso, ya que entonces todo el que está en el fondo se pone en movimiento y el lecho del canal se erosiona y deforma.

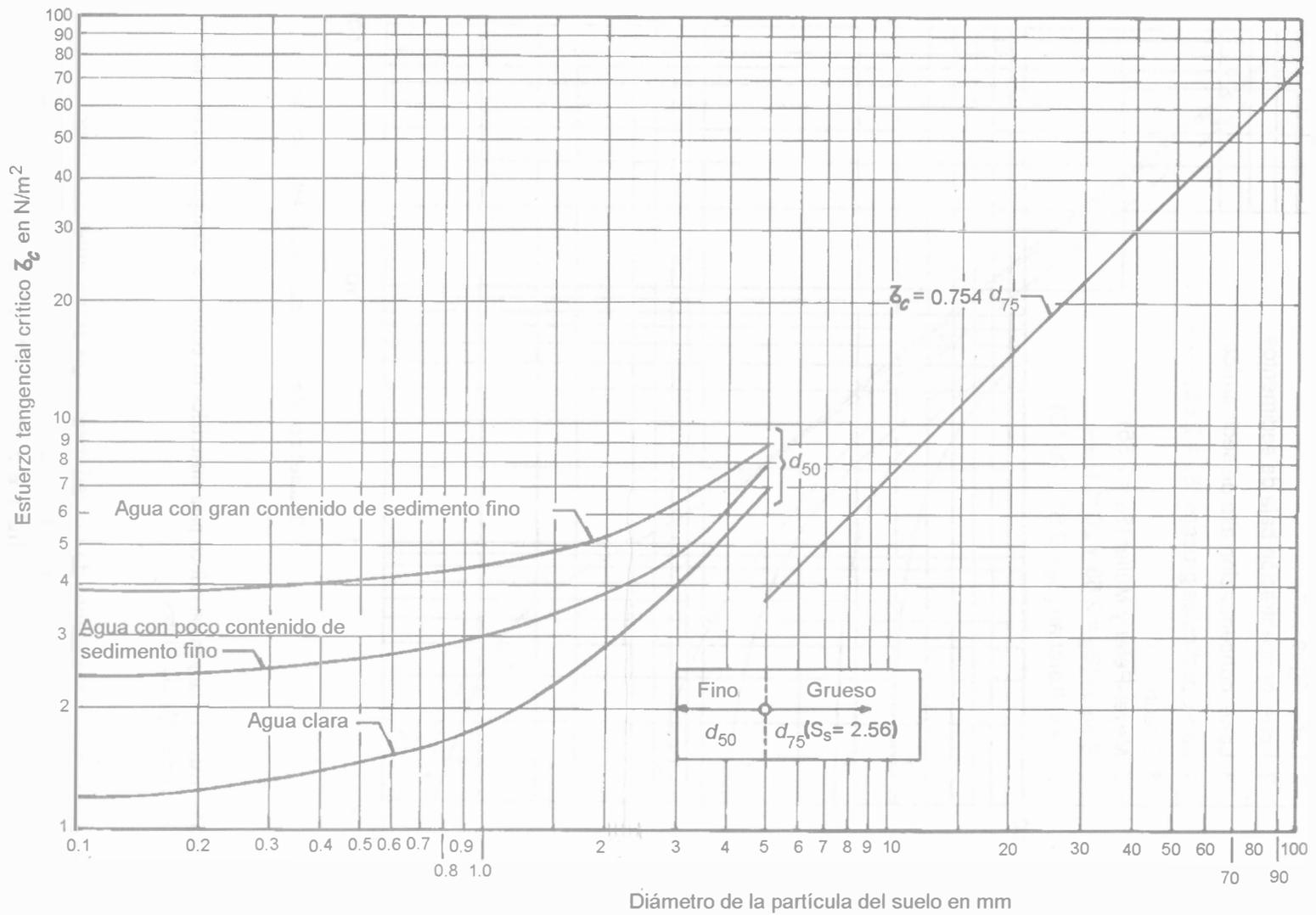


Figura 7.54. Esfuerzo tangencial permisible en un fondo plano con material no cohesivo, según Lane

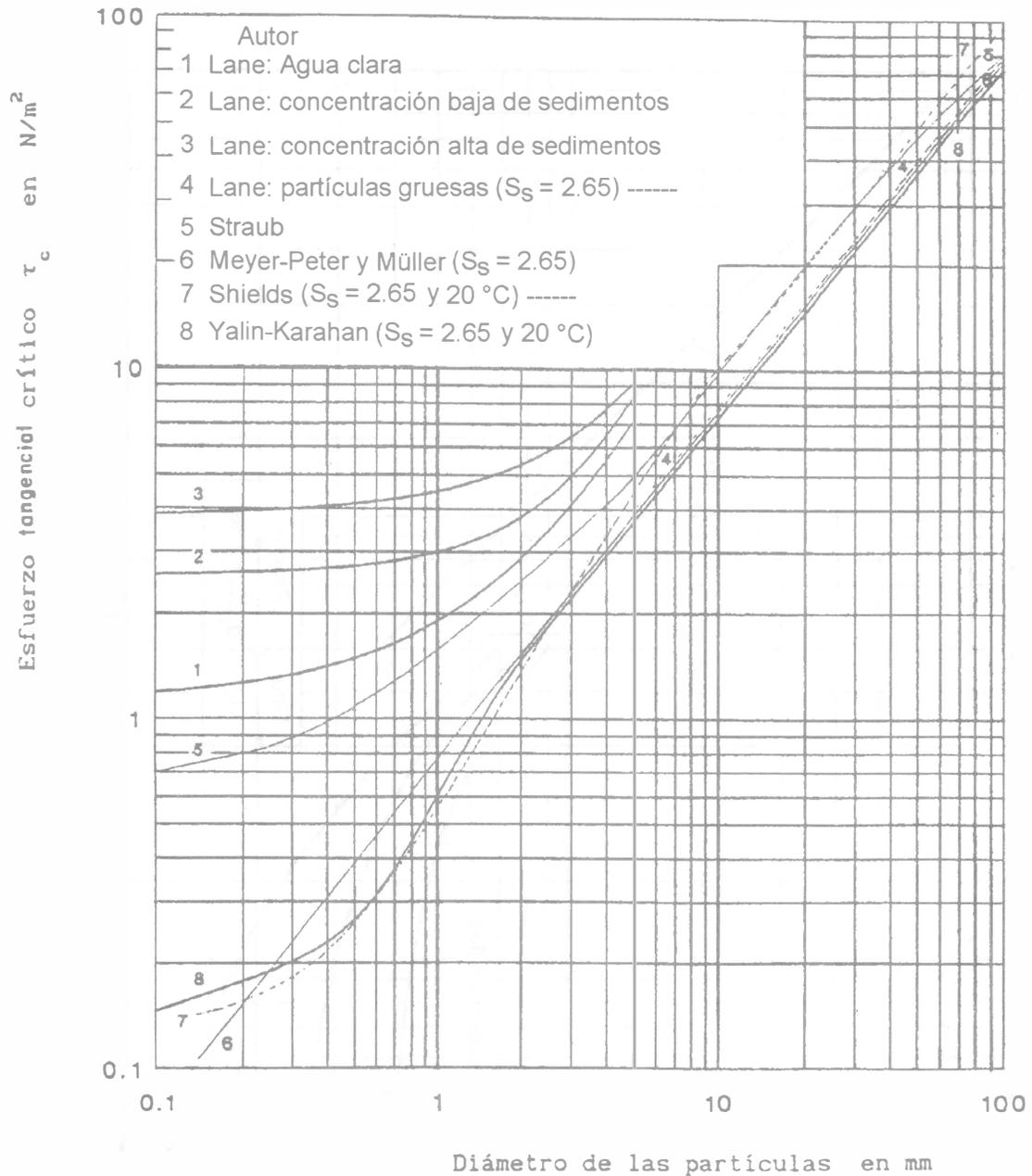


Figura 7.55. Esfuerzo tangencial crítico para materiales no cohesivos. Comparación de criterios, según García Flores

Aunque el proceso de acorazamiento de los sedimentos de granulometría extendida sigue siendo un problema de inicio de arrastre, no existe una condición promedio o única de transporte incipiente sino varias. La condición del flujo que está a punto de mover las partículas de tamaño mínimo corresponde al llamado *punto inferior* de transporte incipiente, y la que está a punto de mover las de tamaño máximo corresponde al llamado *punto superior* de transporte incipiente. Entre ambos puntos extremos existen condiciones intermedias del flujo que producen el

acorazamiento en sus distintos grados, según sean los tamaños de las partículas que forman la coraza, no obstante que aun exista la posibilidad de que cualquier partícula sea arrastrada, por el carácter aleatorio de la turbulencia en la corriente.

La coraza que se forma para cada condición de flujo posee la granulometría del material que no ha sido arrastrado, según la intensidad del esfuerzo tangencial τ_0 que produce el flujo. Si éste no es muy grande, sólo arrastra las partículas del material original y el diámetro medio d_{mc} del que permanece formando la coraza es mayor, pero parecido al del material original. A medida que aumenta τ_0 , se mueven partículas de tamaño cada vez mayor y d_{mc} también crece hasta alcanzar un máximo. Si la magnitud de τ_0 sigue aumentando, alcanza la capacidad de arrastrar las partículas de diámetro máximo en la coraza y deja descubiertas las finas que protegía, de manera que el diámetro medio del material empieza a disminuir, la coraza se destruye gradualmente y se inicia el transporte franco de todo el material en el lecho. La solución consiste en encontrar la condición del flujo que produce el esfuerzo tangencial máximo o crítico que puede soportar el material en su conjunto sin perder el acorazamiento.

De este modo, Gessler (1970, referencia 42) estableció que el esfuerzo tangencial máximo o crítico que resiste un lecho con material cohesivo de granulometría extendida es igual al esfuerzo tangencial τ_0 que desarrolla el flujo para formar una coraza cuyo diámetro medio de sedimento haya alcanzado su valor máximo. El método consiste en simular el proceso de acorazamiento del cauce para distintos valores del esfuerzo tangencial τ_0 del flujo, determinando para cada uno de ellos el diámetro medio del material que forma la coraza hasta encontrar el valor máximo; el valor de τ_0 que lo produce es igual al crítico que todo el material en el lecho es capaz de soportar.

La resistencia global del acorazamiento que se produce para cada valor de τ_0 se debe al efecto estabilizador de cada partícula individual, es decir, se define por la contribución de cada partícula que constituye la coraza. Dicha contribución depende del diámetro d de la partícula, el cual se asocia con el esfuerzo tangencial crítico τ_c que de manera individual puede resistir sin ser arrastrada. Para determinar τ_c se emplea la ecuación de Meyer-Peter y Müller (ecuación 4 de la tabla 7.29)

$$\tau_c = 0.047 g \cdot \rho (S_s - 1) d \quad (7.34)$$

donde d es en m. Para su cálculo se eligen únicamente los diámetros característicos representativos de cada intervalo de clase en que se haya dividido la granulometría original del sedimento, en lugar de todos y cada uno de sus diámetros.

El esfuerzo tangencial medio τ_0 producido por el flujo actúa sobre las partículas que constituyen el lecho y su valor se supone y se mantiene constante en cada etapa de la simulación. Su valor inicial se puede también estimar con la ecuación 7.34, pero utilizando el diámetro medio de la curva granulométrica o el diámetro d_{65} .

Dada una condición de flujo a través del esfuerzo tangencial τ_0 que produce, la probabilidad q de que una partícula de diámetro conocido no sea arrastrada y forme parte de la coraza es mayor cuando la partícula es gruesa que cuando es fina. Gessler obtuvo experimentalmente dicha

probabilidad, analizando el material erosionado y el que formaba la coraza, y encontró que la variable aleatoria τ_c / τ_0 sigue una distribución gaussiana o normal de probabilidades, con media $\mu = 1$ y desviación estándar $\sigma = 0.57$, como se muestra en la figura 7.56.

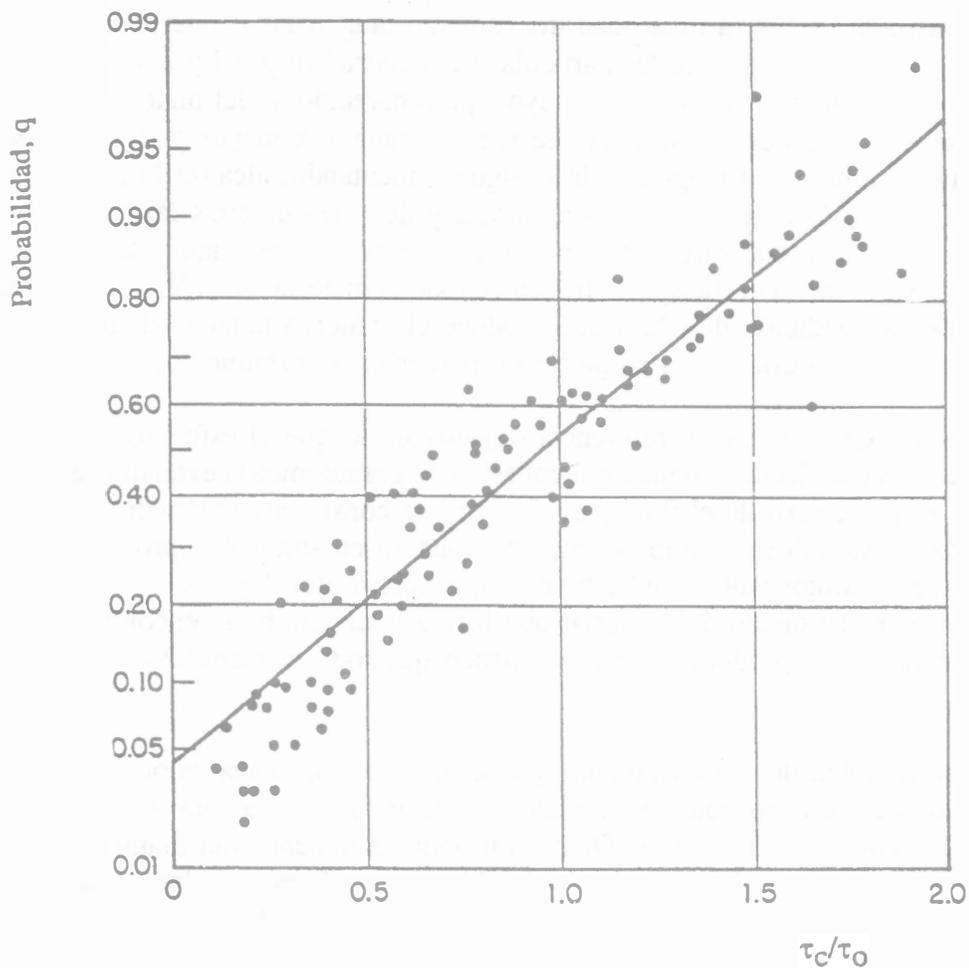


Figura 7.56. Probabilidad de que una determinada partícula o piedra no sea arrastrada por el flujo y forme parte de la coraza, según Gessler (1970)

Al estandarizar la variable aleatoria resulta la expresión

$$Z = \frac{(\tau_c / \tau_0) - 1}{0.57} \quad (7.35)$$

que permite valuar, con ayuda de la tabla 7.7, un valor más preciso de la probabilidad q. Las ecuaciones de la tabla 7.30 tienen también el mismo propósito.

Conocida la probabilidad q para cada diámetro característico del intervalo de clase, se puede calcular la frecuencia del material original que permanece en la coraza, la frecuencia relativa del

mismo, el porcentaje de partículas de cada tamaño y finalmente, el diámetro medio del material que corresponde a τ_0 .

A continuación se expone un resumen de la técnica empleada por García Flores, mediante la tabla 7.31, para tener mayor claridad en la exposición.

Para efectuar los cálculos es necesario conocer de manera precisa la granulometría característica o efectiva del material, como la que se muestra en la tabla 7.5, de densidad relativa $S_s = 2.583$ y que aquí se utiliza como ejemplo. Enseguida se calculan los diámetros característicos de cada intervalo de clase, como se expuso en la elaboración de la tabla 7.11.

Tabla 7.30. Ecuaciones que sustituyen a la tabla 7.7 en el cálculo de q , conocido el valor de Z (ecuación 7.35)

Ecuaciones, funciones y valores de los coeficientes	Validez
$1) q = 1 - \frac{1}{\sqrt{2} \pi} f(Z) f(t)$ $2) q = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} f(Z) f(t)$	$Z \geq 0$ $Z < 0$
$f(Z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} Z^2 \right\}$ $f(t) = \left[1 + 0.2316419 Z \right]^{-1}$ $f(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$	En las ecuaciones 1 y 2 de esta tabla
$c_1 = 0.31938153$ $c_2 = -0.356563782$ $c_3 = 1.78147937$ $c_4 = -1.821255978$ $c_5 = 1.330274429$	En la función $f(t)$ de esta tabla

La distribución de frecuencias relativas acumuladas P_0 (por ciento que pasa) del material original o característico del lecho es la que corresponde a la variable que se lleva sobre el eje de las abscisas de la curva granulométrica y sus valores aparecen en la columna 1 de la tabla 7.31.

Tabla 7.31. Determinación de τ_c con el método de Gessler ($S_s = 2.583$). Según García Flores y Maza (referencia 17)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
P_0	\bar{P}_0	d_i (mm)	τ_c (N/m ²)	τ_0 (N/m ²)	τ_c/τ_0	Z	q	q ΔP_0	ΔP_a	P_a	$d_i \Delta P_a$ (mm)	(1-q)	(1-q) ΔP_0	ΔP_e	P_e
0.00										0.00000					0.00000
	0.05	0.334	0.2437	2.9095	0.08376	-1.60744	0.05398	0.00540	0.02220	0.01110	0.0074	0.94602	0.09460	0.12500	0.06250
0.10										0.02220					0.12500
	0.15	0.642	0.4684	2.9095	0.16099	-1.47194	0.07052	0.00705	0.02900	0.03669	0.0186	0.92948	0.09295	0.12282	0.18641
0.20										0.05119					0.24782
	0.25	0.846	0.6173	2.9095	0.21215	-1.38219	0.08346	0.00835	0.03432	0.06835	0.0290	0.91654	0.09165	0.12111	0.30837
0.30										0.08551					0.36893
	0.35	1.088	0.7938	2.9095	0.27284	-1.27573	0.10102	0.01010	0.04154	0.10628	0.0452	0.89898	0.08990	0.11879	0.42832
0.40										0.12705					0.48771
	0.45	1.408	1.0273	2.9095	0.35308	-1.13494	0.12820	0.01282	0.05271	0.15341	0.0742	0.87180	0.08718	0.11520	0.54531
0.50										0.17976					0.60291
	0.55	1.797	1.3111	2.9095	0.45063	-0.96380	0.16757	0.01676	0.06890	0.21421	0.1238	0.83243	0.08324	0.10999	0.65790
0.60										0.24866					0.71290
	0.65	2.218	1.6183	2.9095	0.55621	-0.77859	0.21811	0.02181	0.08969	0.29351	0.1989	0.78189	0.07819	0.10331	0.76456
0.70										0.33835					0.81622
	0.75	2.856	2.0838	2.9095	0.71620	-0.49790	0.30928	0.03093	0.12717	0.40193	0.3632	0.69072	0.06907	0.09127	0.86185
0.80										0.46552					0.90748
	0.85	4.000	2.9185	2.9095	1.00308	0.00540	0.50215	0.05022	0.20648	0.56876	0.8259	0.49785	0.04979	0.06578	0.94038
0.90										0.67200					0.97327
	0.95	5.882	4.2917	2.9095	1.47502	0.83337	0.79768	0.07977	0.32800	0.83600	1.9293	0.20232	0.02023	0.02673	0.98663
1.00								0.24320		1.00000	3.6156		0.75680		1.00000

El valor $P_0 = 1.0$, se divide en pequeños intervalos ΔP_0 , cuya amplitud puede variar o ser constante a fin de que la curva quede bien representada, pero es recomendable dividirla en diez intervalos iguales (deciles); es decir, de 0 a 0.10, de 0.10 a 0.20, ..., de 0.90 a 1.0 ($\Delta P_0 = 0.10$).

Esto permite determinar los valores: $\bar{P}_0 = 0.05, 0.15, \dots, 0.95$, que son las marcas de clase o puntos medios del intervalo anotadas en la columna 2 de la tabla 7.31.

Para cada valor de \bar{P}_0 existe un diámetro característico (o de la marca de clase), que se anota en la columna 3. Cuando la curva granulométrica no se ajusta a ninguna distribución teórica (sección 7.2.6) o no se cuenta con los datos del cribado de las muestras, los diámetros característicos se determinan leyendo directamente de la curva con la mayor precisión posible. Pero si la curva se ajusta a un modelo matemático de distribución teórica, los diámetros d_i se generan con la ecuación del modelo. Los valores que aparecen en la columna 3 de la tabla 7.31 fueron obtenidos con la granulometría de la tabla 7.5 al representarse en papel aritmético, con diámetro medio $d_m = 2.225$ mm.

Para cada diámetro representativo se calcula el esfuerzo tangencial crítico con la ecuación 7.34 y los valores aparecen en la columna 4 de la tabla 7.31.

El cálculo de las siguientes columnas puede efectuarse sólo si se elige el esfuerzo tangencial medio que produce alguna condición de flujo en el proceso de simulación. Para la tabla se eligió $\tau_0 = 2.9095$ N/m², que fue el que dio finalmente el diámetro medio máximo en la coraza y que aparece como valor constante en la columna 5. Al iniciar el proceso, el valor de τ_0 (inicial) podría ser alguno de los valores que se calculan a continuación con la ecuación 7.34, para los diámetros $d_m = 2.225$ mm y $d_{65} = 2.218$ mm respectivamente:

$$\tau_0 = 0.047 (9.81) (1000) (2.583 - 1) (0.002225) = 1.624 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_0 = 0.047 (9.81) (1000) (2.583 - 1) (0.002218) = 1.6189 \text{ N/m}^2$$

Se calculan los valores de τ_c / τ_0 con los de las dos columnas anteriores y se anotan en la columna 6. Con ellos se determinan los de Z mediante la ecuación 7.35, que aparecen en la columna 7, y con ayuda de la tabla 7.7 o las ecuaciones de la tabla 7.30, se determinan los valores de la probabilidad q de que las partículas de diámetro d_i permanezcan en la coraza, los cuales se anotan en la columna 8.

Los productos ($q \Delta P_0$) de la columna 9 son los valores de la frecuencia del material original que se queda en la coraza y la suma $\Sigma (q \Delta P_0)$ se anota al final de dicha columna. Los valores ΔP_a de la columna 10 son las frecuencias relativas del material en la coraza, es decir, el porcentaje de partículas de diámetro d_i que no son arrastradas; se calculan dividiendo cada valor de la columna 9 entre la suma total, o sea ($q \Delta P_0 / \Sigma q \Delta P_0$).

Los valores P_a de la columna 11 son los de distribución de frecuencias relativas acumuladas (porcentaje acumulado que pasa) del material que permanece en la coraza y se calculan anotando el cero en el primer renglón, al que se suma el primer valor de la columna 10 y se anota en el tercer renglón, al que se suma el segundo valor de la columna 10 y se anota en el quinto renglón y así sucesivamente. A continuación se llenan los renglones vacíos (pares) con los promedios

de los valores que haya arriba y abajo (renglones impares) y las cantidades obtenidas (renglones pares) son las marcas de clase de los intervalos, que al reproducirlos en función de los diámetros, resulta la curva granulométrica del material que acoraza el lecho. La columna 11 puede omitirse si no se desea conocer dicha curva.

El porcentaje de partículas de diámetro d_i en la coraza se determina como $(d_i \Delta P_a)$ y aparece en la columna 12, la cual se forma multiplicando los valores de la columna 3 por los correspondientes ΔP_a de la 10. La suma de estos productos $\Sigma (d_i \Delta P_a)$ es igual al diámetro medio del material que forma la coraza, según se expresa en la primera definición de la tabla 7.8, es decir

$$d_{mc} = \Sigma d_i \Delta P_a$$

con lo cual termina el cálculo. Con el valor supuesto de $\tau_0 = 2.9095 \text{ N/m}^2$ resultó $d_{mc} = 3.6165 \text{ mm}$, mayor que el diámetro medio $d_m = 2.225 \text{ mm}$ del material original.

Cuando se desea conocer también la granulometría del material erosionado, se continúa con las restantes columnas. La 13 contiene los valores de $(1 - q)$, que es la probabilidad que tienen las partículas de diámetro d_i de ser arrastradas, es decir, de no formar parte de la coraza. La columna 14 contiene los valores de $(1 - q) \Delta P_0$ que es la frecuencia de dicho material, la 15 los valores ΔP_e , que es la frecuencia relativa y la 16 los de P_e , frecuencia relativa acumulada del mismo material erosionado. Es decir, las columnas 13 a 16 para el material erosionado se determinan de manera similar a las columnas 8 a 11 para el no erosionado.

Al cambiar el valor de τ_0 , siguiendo el mismo proceso de cálculo se obtienen otros valores de d_{mc} , que se representan gráficamente en la figura 7.57, donde se aprecia que el valor de τ_0 seleccionado para elaborar la tabla 7.31, es el que produce el diámetro medio máximo del material en la coraza y por tanto, define la condición crítica de arrastre $\tau_0 = \tau_c$. La elaboración de la figura 7.57 simultáneamente con los cálculos ayuda en la selección de τ_0 en la siguiente iteración, ya que visualiza la tendencia que tiene τ_0 de aumentar o disminuir d_{mc} . La figura 7.58 muestra las curvas granulométricas del material original, en la coraza y del erosionado, según resultados de la tabla 7.31.

Para diseñar canales sin revestimiento, Gessler (referencia 43) recomendó adoptar un valor de τ_c de diseño, dividiendo el valor de τ_c calculado entre un factor de seguridad $f = 1.3$. García Flores (referencia 44) recomienda que $f = 1.25$, pero para no quedar tan cerca de la condición crítica, que se adopte $f = 1.5$.

El método de Gessler tiene el inconveniente de ser muy laborioso pero es el más racional que existe. Sin embargo, admite grandes simplificaciones cuando la granulometría del material sigue alguna distribución teórica de las mencionadas en la tabla 7.6. Cruickshank y García Flores (1976, referencia 44) mostraron la manera de adimensionar el método de Gessler, analizando las distribuciones log-normal y la logarítmica, para proponer finalmente un procedimiento sencillo para calcular τ_c sin necesidad de iterar. García Flores extendió el estudio para cubrir también las distribuciones normal, log-log y circular. En la figura 7.59 se muestran los resultados conjuntos y la relación entre el porcentaje i del material que pasa y la desviación estándar geométrica σ_g para diferentes distribuciones.

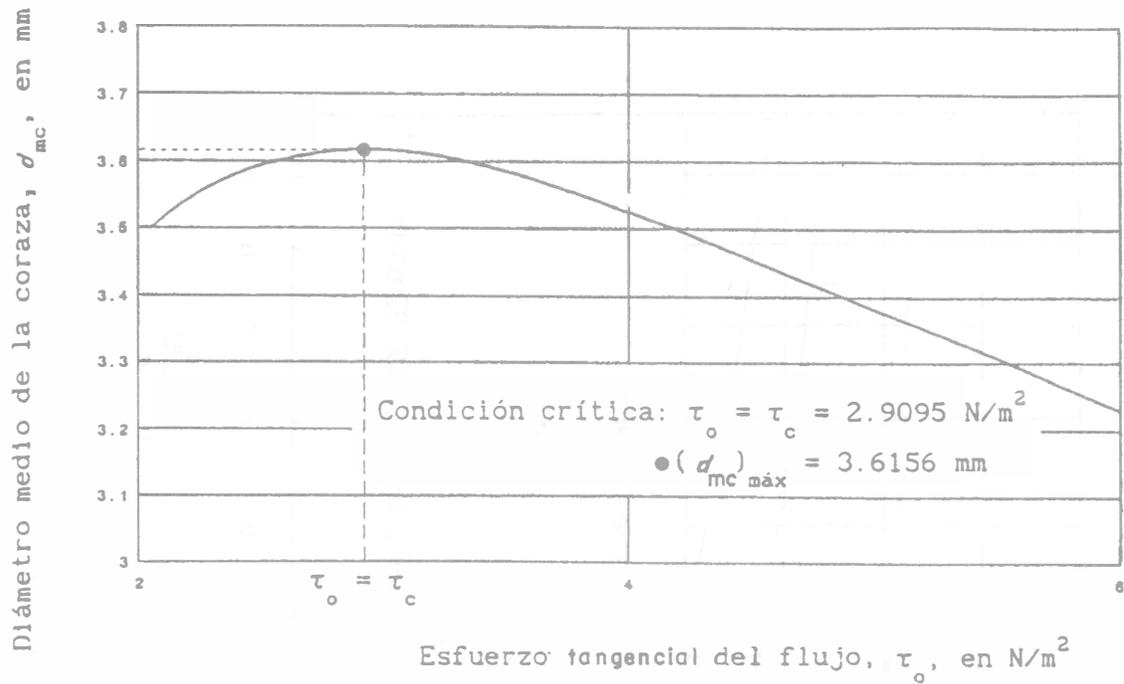


Figura 7.57. Variación del diámetro medio de la coraza, d_{mc} , con el esfuerzo tangencial producido por el flujo, θ_0 y condición crítica de arrastre, según García Flores

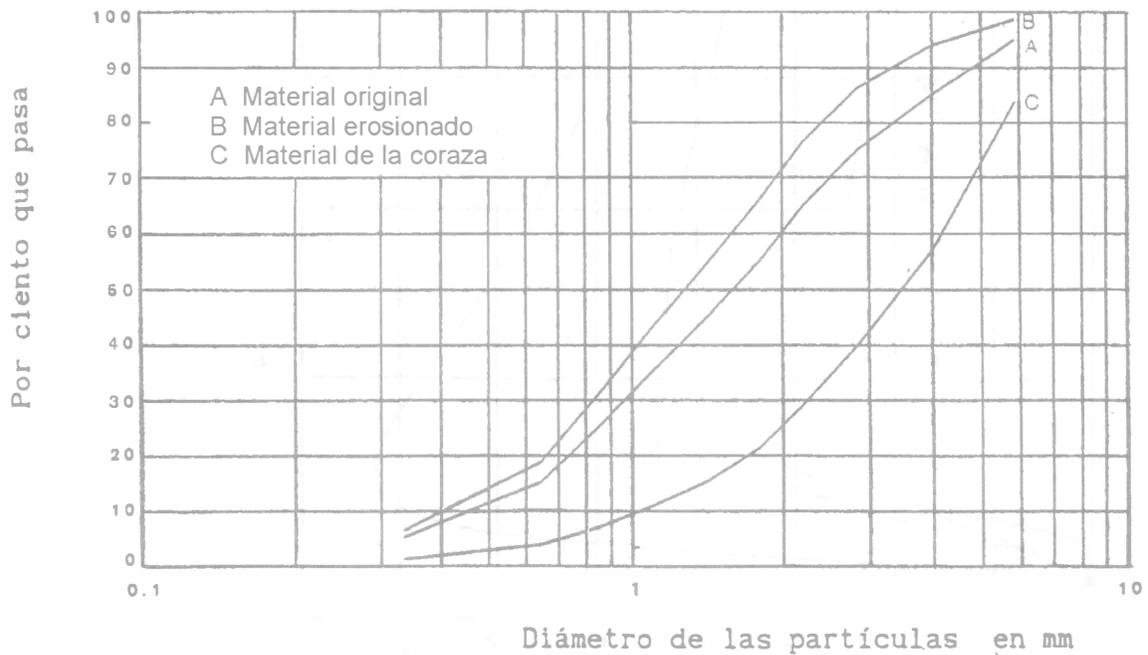


Figura 7.58. Curva granulométrica del material original del cauce, la del material que forma coraza y la del material erosionado (tabla 7.31), según García flores

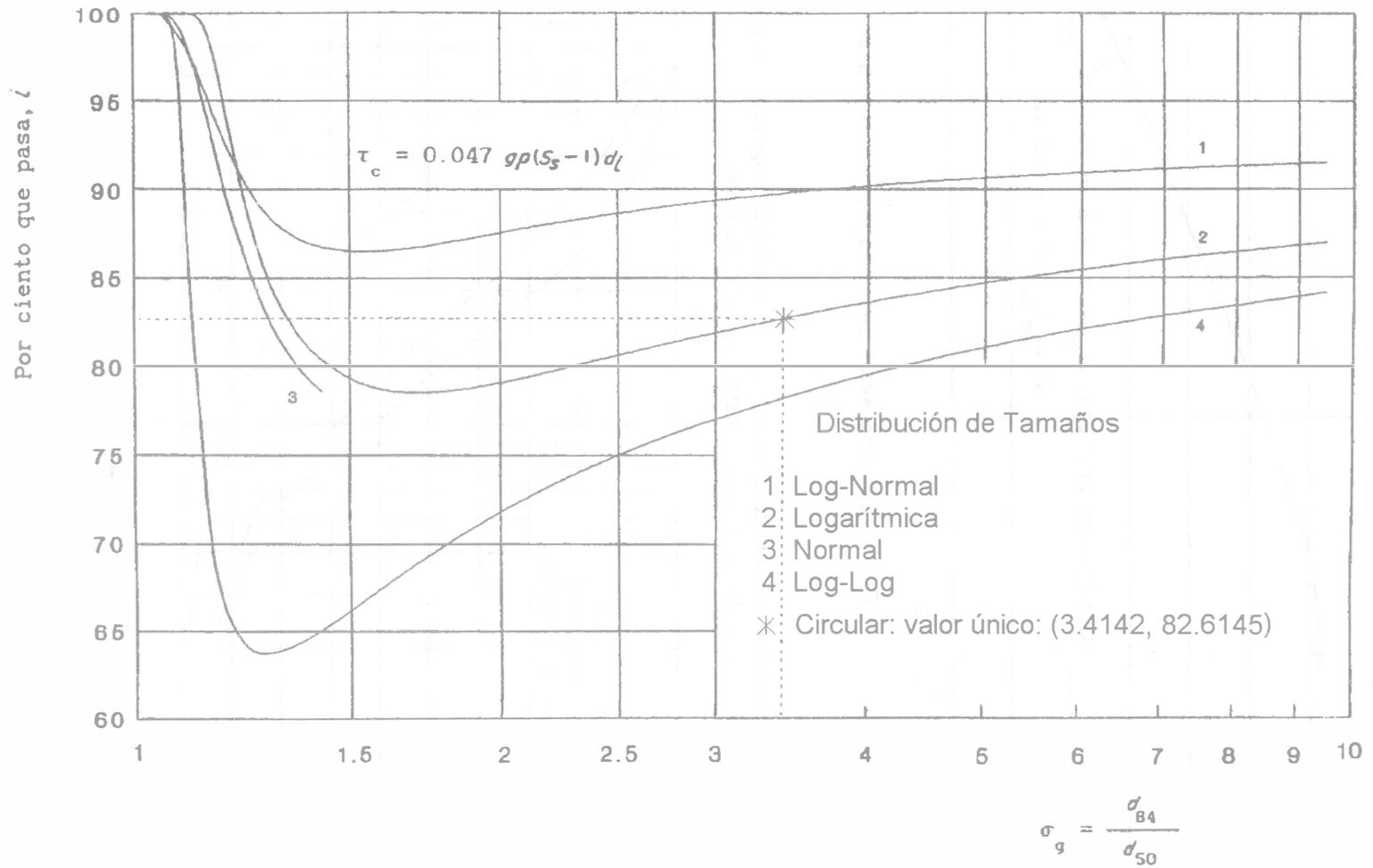


Figura 7.59. Relación entre $i\%$ y σ_g para determinar el porcentaje que define al diámetro efectivo, d_i , asociado al esfuerzo tangencial crítico, según García Flores

Es decir, conocida σ_g , la figura permite estimar el valor de i que define el diámetro efectivo d_i con el cual se calcula el esfuerzo tangencial crítico mediante la ecuación 7.34 de Meyer-Peter y Müller sin necesidad de efectuar iteraciones.

En el ejemplo 7.8 se estableció que la granulometría de la tabla 7.5, sigue fielmente una distribución log-normal, como se muestra en la figura 7.6, con desviación estándar geométrica $\sigma_g = 2.122$. Dicha granulometría se usó para elaborar la tabla 7.31. Con el valor de σ_g y la curva 1, en la figura 7.59 se lee $i = 88\%$. Esto significa que el diámetro d_{88} es el que debe emplearse para calcular τ_c con la ecuación 7.34.

En la figura 7.59 se observa que los valores de i corresponden a la distribución log-log, con la cual se alcanzan también valores más pequeños de τ_c .

Para simplificar aun más el procedimiento, García Flores (1996, referencia 17) propuso ecuaciones para calcular directamente τ_c y el diámetro medio máximo de la coraza, en términos de σ_g y d_{50} . Dichas ecuaciones se presentan en la tabla 7.32 con las aclaraciones del caso.

Un ejemplo de su aplicación es el que propuso el propio García Flores, quien analizó la granulometría del material presentada en la tabla 7.31 y determinó que se ajusta a una distribución log-normal (como fue presentada en la figura 7.6), con los parámetros $d_{50} = 1.5579$ mm, $\sigma_g = 2.35453$ y $S_s = 2.583$. Al aplicar la ecuación de τ_c correspondiente en la tabla 7.32, se obtiene el valor

$$\tau_c = \left[- 0.6877 + 1.1665 (2.35453) + 0.1286 (2.35453)^2 \right] \times \\ \times \left[0.047 (9810) (2.583 - 1) 0.0015579 \right]$$

$$\tau_c = 3.1517 \text{ N/m}^2$$

Para el diseño

$$\tau_{cd} = 3.1517/1.5 = 2.1011 \text{ N/m}^2$$

El diámetro medio máximo del material en la coraza resultó

$$d_{mc} = \left[0.7953 - 0.2997 (2.35453) + 0.4219 (2.35453)^2 \right] 1.5579 = 3.7835 \text{ mm}$$

Los valores de τ_c y d_{mc} antes obtenidos son un poco mayores a los calculados en la tabla 7.31, García Flores atribuyó las diferencias a que las partículas gruesas de la distribución teórica son ligeramente mayores que las de la distribución real y ofrecen mayor resistencia. Al utilizar los diámetros característicos de la distribución teórica y seguir el procedimiento de la tabla, García Flores obtuvo $\tau_c = 3.1599 \text{ N/m}^2$ y $d_{mc} = 3.7902 \text{ mm}$, prácticamente iguales a los obtenidos con sus ecuaciones.

Tabla 7.32. Ecuaciones de García Flores (1996, referencia 17) para determinar el esfuerzo tangencial crítico τ_c (en N/m²) y el diámetro medio máximo d_{mc} en la coraza (en mm), para distintas distribuciones teóricas del material. σ_g es la desviación geométrica estándar, S_s la densidad relativa del material y d_{50} es en mm

Distribución	Ecuaciones	Intervalo de validez
Log-normal	$\tau_c = \left[0.7005 + 0.0427 \sigma_g + 0.3578 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$1.25 \leq \sigma_g \leq 2.30$
	$\tau_c = \left[-0.6877 + 1.1665 \sigma_g + 0.1286 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$2.30 < \sigma_g \leq 10$
	$d_{mc} = \left(0.7953 - 0.2997 \sigma_g + 0.4219 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$1.25 < \sigma_g \leq 2.60$
	$d_{mc} = \left(-0.8666 + 0.8626 \sigma_g + 0.2149 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$2.60 < \sigma_g \leq 10$
Logarítmica	$\tau_c = \left[1.0657 - 0.1391 \sigma_g + 0.2524 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$1.1 \leq \sigma_g \leq 2.40$
	$\tau_c = \left[-0.1189 + 0.8632 \sigma_g + 0.0392 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$2.40 < \sigma_g \leq 10$
	$d_{mc} = \left(0.6220 + 0.0876 \sigma_g + 0.2132 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$1.25 \leq \sigma_g \leq 2.40$
	$d_{mc} = \left(-0.3846 + 0.9010 \sigma_g + 0.0479 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$2.40 < \sigma_g \leq 10$
Log-log	$\tau_c = \left[0.7608 + 0.0282 \sigma_g + 0.1993 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$1.25 \leq \sigma_g < 2.30$
	$\tau_c = \left[-0.1071 + 0.8054 \sigma_g + 0.0225 \sigma_g^2 \right] \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$2.30 \leq \sigma_g \leq 10$
	$d_{mc} = \left(0.3738 + 0.3879 \sigma_g + 0.1256 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$1.20 < \sigma_g \leq 2.40$
	$d_{mc} = \left(-0.2233 + 0.8713 \sigma_g + 0.0269 \sigma_g^2 \right) d_{50}$	$2.40 < \sigma_g \leq 10$
Normal	$\tau_c = \left[1.2183 - 0.0163 \left(\frac{\sigma}{d_{50}} \right) + 0.6916 \left(\frac{\sigma}{d_{50}} \right)^2 \right] \times$ $\times \left[0.047 g \rho (S_s - 1) d_{50} \right]$	$0.025 \leq \frac{\sigma}{d_{50}} \leq 0.425$
	$d_c = \left[0.9966 + 0.0731 \left(\frac{\sigma}{d_{50}} \right) + 0.9654 \left(\frac{\sigma}{d_{50}} \right)^2 \right] d_{50}$	$0.025 \leq \frac{\sigma}{d_{50}} \leq 0.425$
Circular	$\tau_c = 0.047 g \rho (S_s - 1) d_{82.6145}$ donde $d_{82.6145} = 0.43654 d_{m\acute{a}x} = 0.95437 d_{84} = 3.2584 d_{50}$ $d_{m\acute{a}x} = 3.2782 d_{50} = 0.9602 d_{84} = 0.4392 d_{m\acute{a}x}$	Todo

El valor de τ_c calculado con las ecuaciones se debe reducir dividiéndolo entre el factor de seguridad que se elija.

7.7.8 Esfuerzo tangencial crítico para materiales cohesivos

La resistencia al arrastre de un material cohesivo consolidado depende principalmente de las propiedades fisicoquímicas de sus minerales arcillosos, su contenido de agua, su índice plástico, su nivel de esfuerzos de consolidación y su grado de consolidación. La condición de transporte incipiente ocurre cuando el flujo empieza a desprender fragmentos del material, lo que incrementa su rugosidad y la erosión progresa rápidamente. El esfuerzo tangencial crítico es normalmente mayor que en un material no cohesivo; por ello, cuando se rompe un bordo construido con material cohesivo, la falla no avanza tanto en dirección lateral como ocurriría si el bordo estuviera construido con arenas. Aunque pueden existir cauces naturales con márgenes de material cohesivo, el fondo está cubierto generalmente por material no cohesivo.

Las experiencias con materiales cohesivos son escasas y sus resultados deben aplicarse con reservas. La información publicada en la referencia 20 de canales en la ex-Unión Soviética aparecía en términos de valores de la velocidad máxima permisible (figura 7.47), pero fueron transformados por Lane a valores de esfuerzo tangencial crítico y reproducidos después por Chow (referencia 45) en forma gráfica. Los que aparecen en la figura 7.60 fueron reconvertidos al sistema internacional, donde τ_c depende de la relación de vacíos y del tipo de arcilla.

Otras ecuaciones fueron presentadas por García Flores y Maza (1996) en la referencia 17 y se anotan en la tabla 7.33 pero corresponden a casos especiales, quizá no muy adecuados al diseño de canales, como se mencionan en las observaciones de dicha tabla.

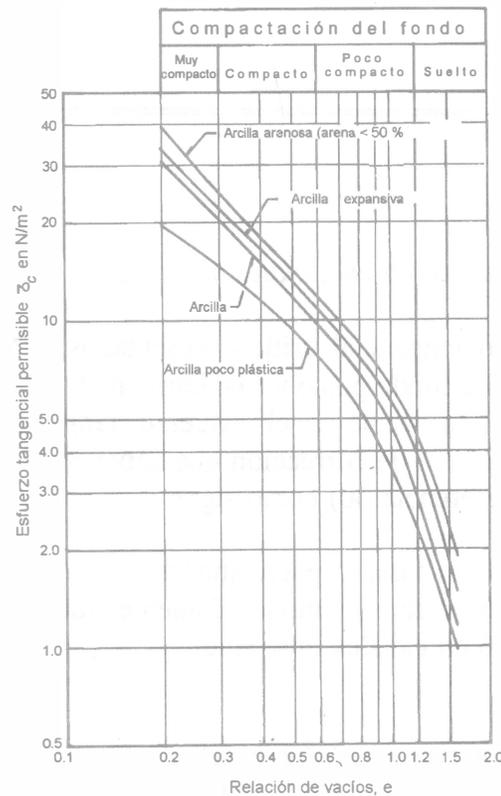


Figura 7.60. Esfuerzo tangencial permisible en el fondo de canales con material cohesivo, según datos de la ex-Unión Soviética

Tabla 7.33. Ecuaciones para el esfuerzo tangencial crítico en N/m^2 , para suelos cohesivos en canales

Autor	Ecuación	Observaciones
Dunn (1959) (referencia 46)	$\tau_c = 0.95762 + 0.04788 (0.020885 S_v + 180) \times \tan (30 + 1.73 I_p)$ <p>S_v resistencia del suelo al esfuerzo tangencial en N/m^2</p> <p>I_p índice plástico del suelo.</p>	<p>Vale para $5 \leq I_p \leq 16$.</p> <p>Fue obtenida en laboratorio, exponiendo las muestras a la acción erosiva de un chorro de agua vertical y sumergido.</p>
Smeardon y Beasley (1959) (referencia 47)	$\tau_c = 0.16279 I_p^{0.84}$ <p>I_p índice plástico del suelo (porcentaje de arcillas).</p>	<p>Vale para $5 < I_p < 50$.</p> <p>Fue obtenida en un canal pequeño de laboratorio con once tipos de suelo.</p>
Cormault (1971) (referencia 48)	$\tau_c = 4.7927 \times 10^{-8} C_s^2$ <p>C_s concentración del material depositado (en N/m^3).</p>	<p>Vale para $490 N/m^3 < C_s < 3923 N/m^3$, en desembocaduras de ríos, estuarios y lagunas costeras con fondos de material muy fino, o con el que en suspensión en agua dulce forme flóculos al entrar en contacto con el agua salada y se deposite.</p>

7.7.9 Esfuerzo tangencial crítico en canales sinuosos

Los criterios del esfuerzo tangencial crítico presentados en las secciones 7.7.6 a 7.7.8 son válidos en canales rectos, de fondo plano y casi horizontal. Cuando el canal tiene curvas, el flujo erosiona más fácilmente su fondo y el esfuerzo tangencial crítico tiene que disminuir, multiplicándolo por un factor f_s de corrección que depende del grado de sinuosidad, cuyo valor fue sugerido por Lane (referencia 30) como sigue

- 0.90 en canales poco sinuosos
- 0.75 en canales moderadamente sinuosos
- 0.60 en canales muy sinuosos.

7.7.10 Método del esfuerzo tangencial permisible

El método se emplea para el diseño de canales y es más completo que el de la velocidad media permisible, ya que analiza tanto la estabilidad del lecho del canal, como de sus taludes o márgenes. Se le conoce también como método de Lane, o según el USBR, como *método de la fuerza tractiva crítica*. Consiste en igualar el esfuerzo tangencial que produce el flujo con el

tangencial permisible τ_p que se adopte en el diseño, de acuerdo con el factor de seguridad y el valor de τ_c que resiste el material antes de ser arrastrado. Se debe destacar que los criterios expuestos en las tres secciones anteriores para determinar τ_c se aplican sólo al lecho o fondo del canal. Las partículas del material sobre el talud son afectadas además por la fuerza gravitacional, que ayuda a que rueden; por tanto, el esfuerzo tangencial permisible en el talud es menor que el del fondo. Por ello, es necesario distinguir al esfuerzo tangencial permisible en el fondo τ_{pb} , del correspondiente τ_{pt} en los taludes.

De acuerdo con la figura 7.61, las partículas que descansan sobre el talud se sujetan a dos fuerzas: la tangencial crítica ($a \tau_{pt}$) y el componente de la fuerza de gravedad en la dirección de la pendiente máxima del talud ($W_s \text{ sen } \theta$), donde a es el área efectiva de la partícula (área que se expone al esfuerzo tangencial), W_s la fuerza de gravedad sobre la partícula sumergida y θ el ángulo de inclinación del talud respecto de la horizontal.

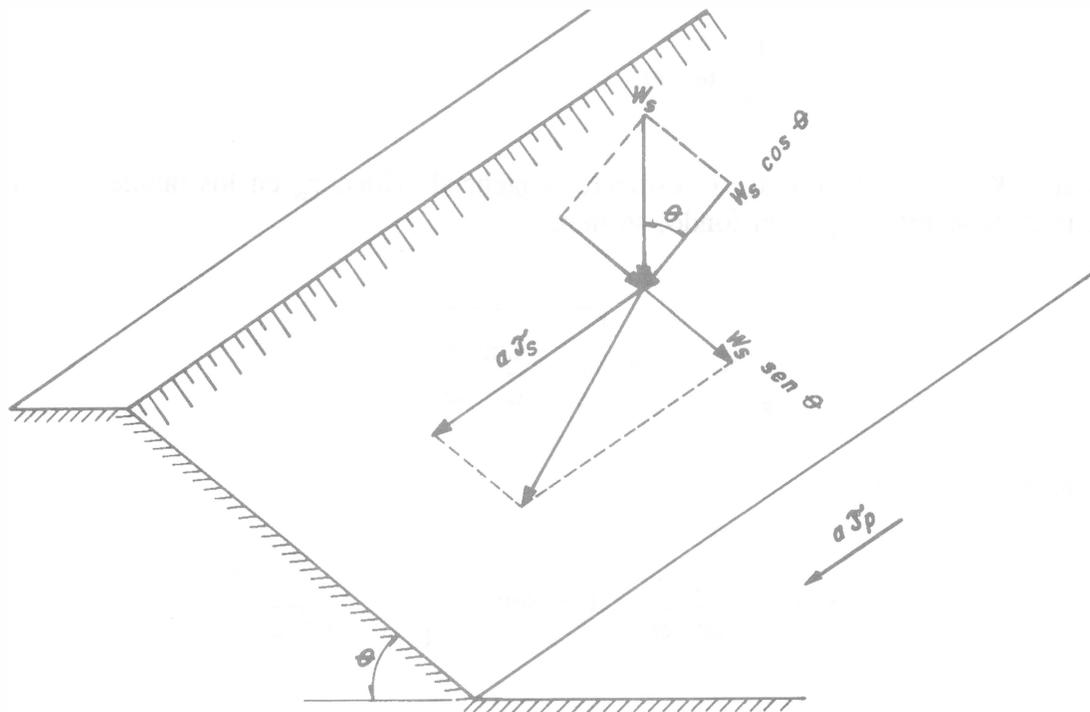


Figura 7.61. Fuerzas actuando sobre una partícula colocada sobre el talud de un canal trapecial

La resultante de estas dos fuerzas perpendiculares entre sí resulta $(W_s^2 \text{ sen}^2 \theta + a^2 \tau_{pt}^2)^{1/2}$. La partícula se equilibra con la fuerza de fricción ejercida sobre ella, que es igual al producto del componente de la fuerza de gravedad normal al talud, $W_s \cos \theta$, por el coeficiente de fricción

interna del material $\tan \phi$, donde ϕ es el ángulo de reposo del material. Cuando la partícula está a punto de rodar, se alcanza el equilibrio de las fuerzas; es decir

$$W_s \cos \theta \tan \phi = \sqrt{W_s^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \tau_{pt}^2}$$

Al despejar, se obtiene

$$\tau_{pt} = \frac{W_s}{a} \cos \theta \tan \phi \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}}$$

Para las partículas descansando en el fondo del canal, θ es igual a cero y la ecuación anterior se convierte en

$$\tau_{pb} = \frac{W_s}{a} \tan \phi$$

Llamando K a la relación entre el esfuerzo tangencial crítico τ_{pt} en los taludes y el esfuerzo tangencial de arrastre τ_{pb} en el fondo, se tiene

$$K = \frac{\tau_{pt}}{\tau_{pb}} = \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \quad (7.36a)$$

O bien, debido a que

$$K^2 = \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\tan^2 \phi} = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \phi} \right)$$

$$K^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\tan^2 \phi + 1}{\tan^2 \phi} \right) = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} \right)$$

ya que, $\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, también resulta

$$K = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (7.36b)$$

En las ecuaciones 7.36, K depende sólo del ángulo θ del talud y del ángulo de reposo ϕ del material, pero no de a . Para materiales cohesivos y no cohesivos finos, la fuerza de cohesión es muy grande si se compara con la gravitacional, y ésta última se puede ignorar, es decir, $K = 1$. El ángulo de reposo ϕ se obtiene de la figura 7.26; si se desea mayor exactitud se puede obtener experimentalmente con muestras de campo.

Con el valor de K obtenido con alguna de las ecuaciones 7.36a o b y de τ_{pb} con alguno de los criterios antes expuestos según el tipo de material, se calcula el esfuerzo tangencial τ_{pt} permisible sobre los taludes; es decir, $\tau_{pt} = K \tau_{pb}$.

El esfuerzo tangencial medio de fricción τ_0 que produce el flujo se obtiene de la ecuación 2.1, resultante de las consideraciones de equilibrio dinámico impuestas al movimiento del agua en flujo uniforme. Cuando el canal es muy ancho ($T \geq 40 y$) el radio hidráulico es casi igual al tirante ($R_h \approx y$) y τ_0 adquiere su máximo valor: $\tau_0 = g \rho y S$.

El esfuerzo tangencial τ que produce el flujo no se distribuye de manera uniforme sobre el perímetro mojado de la sección del canal. Por ejemplo, de acuerdo con las mediciones del *U.S. Bureau of Reclamation* en un canal trapecial de talud $k = 2$, $b/y = 4$, dicho esfuerzo varía como se muestra en la figura 7.62, donde se observa que el máximo en los taludes es $(0.75 g \rho y S)$ y en el fondo es $(0.97 g \rho y S)$, ambos expresados en términos del máximo esfuerzo tangencial medio: $g \rho y S$. Para otros valores de b/y , los máximos que alcanza el esfuerzo tangencial producido por el flujo sobre los taludes se presentan en la figura 7.63a, y sobre el fondo en la figura 7.63b.

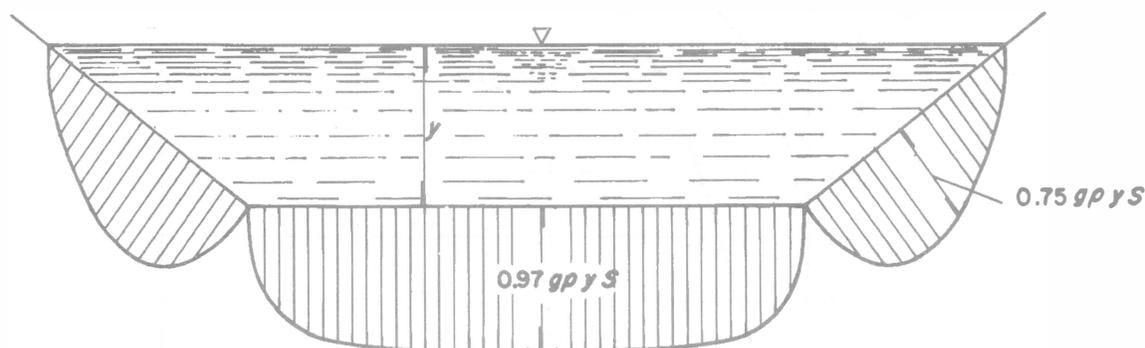


Figura 7.62. Distribución del esfuerzo tangencial producido por el flujo sobre las paredes de un canal trapecial, donde $b/y = 4$ y el talud $k = 2$

Al examinar la distribución de τ se concluye que una sección trapecial no es tan eficaz, ya que en general el máximo en el fondo es mayor que el máximo en los taludes y pocas veces ocurre lo contrario o son iguales. Un talud grande acerca más los valores de ambos y el canal es más económico e igualmente estable.

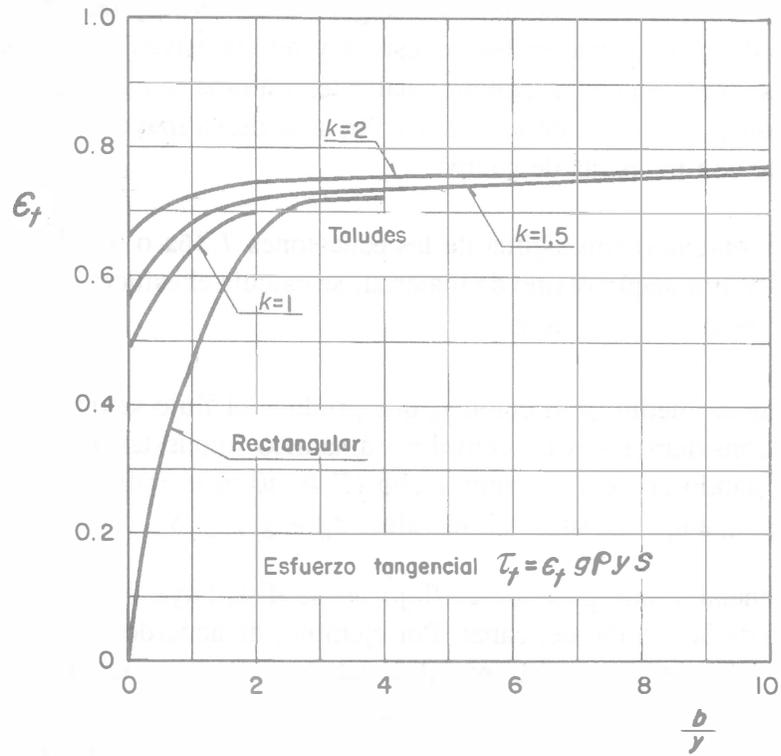


Figura 7.63a. Esfuerzo tangencial máximo que el flujo produce sobre los taludes (USBR)

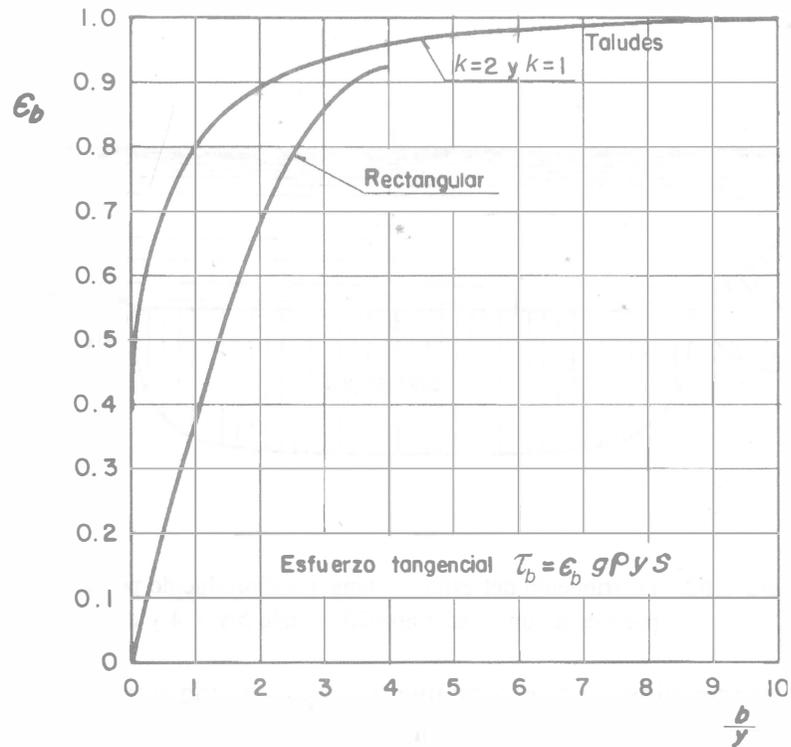


Figura 7.63b. Esfuerzo tangencial máximo que el flujo produce en el fondo (USBR)

El método del esfuerzo tangencial permisible consiste en igualar el esfuerzo tangencial permisible en el fondo y taludes con el que produce el flujo en los mismos, pero ésto difícilmente puede ocurrir de manera simultánea; es decir, se tiene que optar por la solución que logre la igualdad en alguno de los dos, de manera que en el otro esfuerzo satisfaga la condición de que $\tau < \tau_p$.

Para utilizar el método se considera flujo uniforme establecido en el canal, donde se conoce el gasto que conduce, la pendiente y las características del material en el fondo y taludes. El método requiere de un procedimiento de iteraciones, pero antes de iniciarlas se efectúan los siguientes cálculos preliminares.

- a) De acuerdo con las características del material, se determina el esfuerzo tangencial crítico τ_{cb} en el fondo siguiendo alguno de los criterios expuestos en las secciones 7.7.6 a 7.7.9, según el tipo de material y el grado de sinuosidad del canal. También se elige el factor de seguridad f y el permisible resulta $\tau_{pb} = \tau_{cb} / f$.
- b) Se selecciona al coeficiente de Manning con el diámetro del material, por ejemplo, con la ecuación 2.35 de Lane.
- c) Se determina el ángulo ϕ de reposo del material utilizando la figura 7.26, la tabla 7.20 o bien de mediciones en campo.
- d) Se selecciona el ángulo θ de inclinación del talud de modo que $\theta < \phi$. La diferencia puede ser de 0.1 a 0.21 rad (6° a 12°) y en una primera aproximación se recomienda $\theta \approx \phi - 0.157$ y que el valor de $k = \cot \theta$ así calculado, se aproxime al múltiplo de 0.25 inmediato superior, el cual debe ser igual o mayor que el recomendado en la tabla 7.17. Con el valor de k seleccionado se recalcula el valor final de θ .
- e) Se obtiene el valor de K con la ecuación 7.36 (a o b). En materiales cohesivos $K = 1$.
- f) El esfuerzo tangencial permisible τ_{pt} en los taludes se obtiene de la expresión $\tau_{pt} = K \tau_{pb}$.
- g) Los esfuerzos tangenciales máximos que produce el flujo sobre el fondo y taludes son del tipo: $\tau = \varepsilon g \rho y S$, que se igualan con los valores permisibles correspondientes obtenidos en los incisos a y d, y se despeja el tirante que resulta de cada igualdad; es decir, para el fondo

$$y = \frac{\tau_{pt}}{g \rho S \varepsilon_t} \quad (7.37)$$

y para el talud

$$y = \frac{\tau_{pb}}{g \rho S \varepsilon_b} \quad (7.38)$$

Una vez efectuados los cálculos anteriores, se inicia el procedimiento de iteraciones que se resume en los siguientes pasos.

- 1) Se supone una relación b/y (ancho/tirante).
- 2) De las figuras 7.63 a y b se determinan ε_t y ε_b .
- 3) Se calculan dos valores del tirante con las ecuaciones 7.37 y 7.38, previa sustitución de ε_t y ε_b , y se elige el menor. Si se eligiera el mayor, el esfuerzo tangencial producido por el flujo en el sitio no elegido (fondo o talud) rebasaría al permisible.
- 4) Se calcula b con el valor de y elegido y con el supuesto de b/y en el paso 1.
- 5) Con la geometría de la sección así obtenida, se revisa que el canal sea capaz de conducir el gasto de diseño usando la ecuación de Manning.
- 6) Si el gasto calculado difiere del diseño, se repite el procedimiento desde el paso 1, respetando la tendencia. Cuando los dos gastos son iguales se continúa con el paso 7.
- 7) Se ajusta el ancho de la sección a un valor adecuado para la construcción y se proporciona un libre bordo de acuerdo con los criterios de la sección 7.5.5.

Es común que el tirante menor que se elige en el paso 3 corresponda al del talud y que en éste se iguale el esfuerzo tangencial máximo producido por el flujo con el permisible. En estas condiciones, el fondo opera con un esfuerzo tangencial producido por el flujo menor que el permisible.

En rigor, los valores de b/y que se eligen en el paso 1 tienen el propósito de ajustar la capacidad del canal al gasto de diseño. Sin embargo, esto ocurre porque se ha seleccionado previamente el ángulo ϕ de reposo del material y el talud k . El mejor valor de ϕ es el que se obtiene en laboratorio a partir de muestras del material tomadas en campo y tiene influencia importante en el diseño del canal, aunque no cambie el talud. Éste también influye en el diseño ya que cuanto mayor es k , más estables son los taludes y menor resulta la relación b/y , lo que puede significar reducción del costo del canal.

Se recomienda que el material en el talud resista por lo menos la mitad de lo que resiste el que está en el fondo, es decir, que $K \geq 0.5$. Si esta condición no se satisface, es necesario aumentar el talud k para hacer más resistente al material en el talud y disminuir también el valor de b/y .

El procedimiento se aclara con la solución del ejemplo que se presenta a continuación.

Ejemplo 7.16. Un canal trapecial recto y sin revestimiento debe conducir $60 \text{ m}^3/\text{s}$ con pendiente de 0.001. El canal será excavado en material no cohesivo poco anguloso, no uniforme, cuyo diámetro $d_{75} = 40 \text{ mm}$ y su densidad relativa de 2.63. Diseñar una sección estable.

Solución. Por tratarse de material no cohesivo muy grueso ($d_{75} > 5 \text{ mm}$) no uniforme, conviene usar el criterio de Lane (tabla 7.29) $\tau_{cb} = \tau_{pb} = 0.0493 (9810) (2.63 - 1) (0.04) = 31.533 \text{ N/m}^2$.

El coeficiente de Manning se obtiene de la ecuación de Lane (2.35)

$$n = 0.0152 (40)^{1/6} = 0.0281$$

A falta de datos de campo, el ángulo de reposo del material poco anguloso se selecciona de la figura 7.26 utilizando la curva 3; resulta $\phi = 0.6615 \text{ rad}$ y $\tan \phi = 0.7785$.

El ángulo adecuado del talud sería $\theta \approx 0.6615 - 0.157 = 0.5044 \text{ rad}$ y $\cot \theta = 1.8115$. Por tanto, el talud múltiplo de 0.25 más cercano es $k = 1.75$, mayor de 1 recomendado en la tabla 7.17 para grava angulosa. De este modo, con $\tan \theta = 1/1.75 = 0.5714$, el ángulo es $\theta = \arctan 0.5714 = 0.5191 \text{ rad}$.

De la ecuación 7.36a

$$K = \cos 0.5191 \sqrt{1 - \left(\frac{0.5714}{0.7785}\right)^2} = 0.589637$$

El valor K es mayor de 0.5 y no es necesario otro ajuste de θ .

En este caso, no se usa factor de seguridad ni de corrección por curvas, por tanto, el esfuerzo tangencial permisible en taludes resulta de la definición de K (ecuación 7.36a)

$$\tau_{pt} = 0.589637 (31.533) = 18.593 \text{ N/m}^2$$

Con $S = 0.001$, de las ecuaciones 7.37 y 7.38

$$y = \frac{18.593}{9.81 (1000) (0.001) \varepsilon_t} = \frac{1.8953}{\varepsilon_t} \quad (\text{a})$$

$$y = \frac{31.533}{9.81 (1000) (0.001) \varepsilon_b} = \frac{3.2144}{\varepsilon_b} \quad (\text{b})$$

Finalmente, de la ecuación de Manning

$$Q = \frac{\sqrt{0.001}}{0.0281} A R_h^{2/3} = 1.125 A R_h^{2/3}$$

En la tabla 7.34 se presenta un resumen de las iteraciones de b/y que fueron necesarias para determinar las dimensiones de la sección, según los pasos 1 a 6. Se adoptaron $b = 10.00$ m y $y = 2.51$ m.

Aceptando $c = 2$ en la ecuación 7.15, el libre bordo resulta de 1.237 m y las dimensiones definitivas se muestran en la figura 7.64.

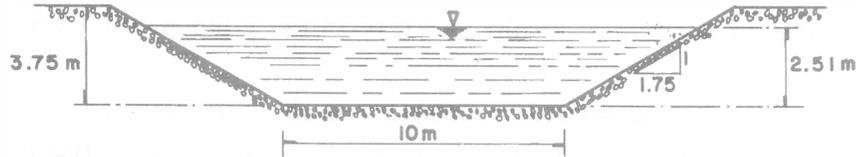


Figura 7.64. Dimensiones definitivas de la sección del canal en el ejemplo 7.16

Tabla 7.34. Cálculo de las dimensiones del canal en el ejemplo 7.16, de manera que $Q = 1.125 A R_h^{2/3}$

b/y	ε_r	ε_b	y_r en m (ec. a)	y_b en m (ec. b)	y en m	b en m	A en m ²	R_h en m	Q en m ³ /s
1.5	0.72	0.86	2.6324	3.7377	2.6324	3.9485	22.5203	1.5467	33.88 < 60
2.0	0.73	0.9	2.5963	3.5716	2.5963	5.1926	25.2779	1.6143	39.13 < 60
4.0	0.75	0.96	2.5271	3.3483	2.5271	10.1083	36.7199	1.8093	61.34 > 60
3.9	0.75	0.96	2.5271	3.3483	2.5271	9.8556	36.0813	1.8002	60.07 \approx 60
Valores adoptados					2.5100	10.00	36.1252	1.7957	60.04 \approx 60

7.7.11 Sección estable óptima

El método del esfuerzo tangencial crítico permite el diseño de la sección de un canal en la que el esfuerzo tangencial producido por el flujo se iguala al crítico sólo en una parte del perímetro mojado, comunmente en los taludes. Ante esta situación, el *U.S. Bureau of Reclamation* se planteó el problema de definir una sección en la que la condición de movimiento incipiente de las partículas prevaleciera en todos los puntos del perímetro mojado. El caso fue analizado en canales que conducen agua limpia sobre materiales erosionables no cohesivos, con base en las mismas hipótesis del método expuesto en la sección 7.7.10 y además las que siguen.

- El talud al nivel y por encima de la superficie libre del agua coincide con el de reposo del material no cohesivo.

- b) El talud en el eje del canal es cero y el solo esfuerzo tangencial es suficiente para producir un estado de movimiento incipiente de las partículas.

En el canal cuya sección se muestra en la figura 7.65, el esfuerzo tangencial τ multiplicado por el área diferencial del elemento de longitud unitaria y ancho $dx/\cos \theta$, produce una fuerza tangencial igual a la que resulta del esfuerzo tangencial medio producido por el flujo dado por la ecuación 2.1, ésto es

$$\tau \frac{dx}{\cos \theta} = g \rho y S dx$$

Por tanto

$$\tau = g \rho y S \cos \theta \quad (7.39)$$

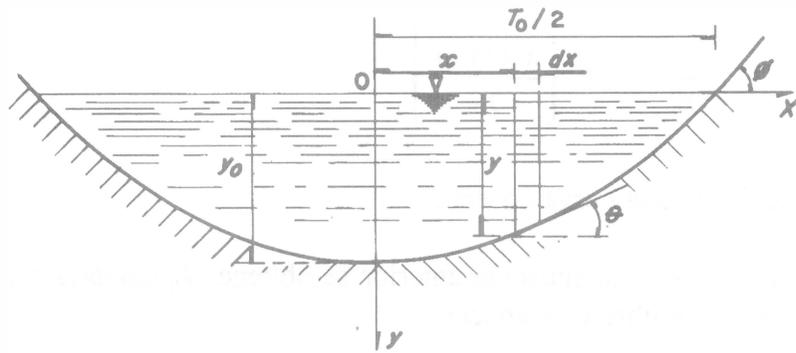


Figura 7.65. Esquema de la sección estable óptima

El esfuerzo tangencial es máximo cuando $y = y_0$ (para $\cos \theta = 1$) y vale $\tau_{m\acute{a}x} = g \rho y_0 S$, resultando

$$\frac{\tau}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{y}{y_0} \cos \theta \quad (7.40)$$

En el inicio del movimiento de los granos del suelo, $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_c$, y de la ecuación 7.36a se tiene

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}}$$

que al igualar con la ecuación 7.40 se convierte en

$$\frac{y}{y_0} = \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}}$$

Haciendo $\tan \theta = -dy/dx$ y ordenando términos, resulta

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]^2 + \left[\frac{y}{y_0} \right]^2 \tan^2 \phi - \tan^2 \phi = 0$$

Con la condición de que para $x = 0$, $y = y_0$, la solución de esta ecuación diferencial proporciona la geometría de la sección estable. Dicha solución es

$$\frac{y}{y_0} = \cos \left[\frac{x \tan \phi}{y_0} \right] \quad (7.41)$$

es decir, la ecuación de una curva coseno.

Para $x = T_0/2$, $y = 0$, y de la ecuación anterior se obtiene, $T_0 \tan \phi / (2 y_0) = \pi/2$, por lo que el ancho de la superficie libre es entonces

$$T_0 = \frac{\pi y_0}{\tan \phi} \quad (7.42)$$

Sustituyendo $\tan \phi$ de la ecuación anterior en la 7.41, se obtiene

$$\frac{y}{y_0} = \cos \left[\frac{\pi x}{T_0} \right] \quad (7.43)$$

El área de la sección resulta

$$A_0 = 2 \int_0^{T_0/2} y \, dx = 2 y_0 \int_0^{T_0/2} \cos \left(\frac{\pi x}{T_0} \right) dx = \frac{2 y_0 T_0}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

la cual, con $\sin(\pi/2) = 1$ y la ecuación 7.42, resulta

$$A_0 = \frac{2 y_0 T_0}{\pi} = \frac{2 y_0^2}{\tan \phi} \quad (7.44)$$

La derivada de la ecuación 7.43, donde se sustituye la 7.42, vale

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\pi y_0}{T_0} \sin \left(\frac{\pi x}{T_0} \right) = - \tan \phi \sin \left(\frac{\pi x}{T_0} \right) \quad (7.45)$$

Por tanto, el perímetro mojado es

$$P_0 = 2 \int_0^{T_0/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = 2 \int_0^{T_0/2} \sqrt{1 + \tan^2 \phi \sin^2 \left(\frac{\pi x}{T_0} \right)} dx \quad (7.46)$$

Al efectuar el cambio de variable: $\frac{\pi x}{T_0} = \left[\frac{\pi}{2} - w \right]$, con la ecuación 7.42 se obtiene

$$dx = - \frac{T_0}{\pi} dw = - \frac{y_0}{\tan \phi} dw \quad (7.47)$$

También, para $x = T_0/2$, el límite superior de la integral cambia a $\pi/2 = (\pi/2) - w$, es decir, a $w = 0$; el límite inferior cambia a: $0 = (\pi/2) - w$, es decir, $w = (\pi/2)$. Por otra parte, también es

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - w \right) = \left[\sin \frac{\pi}{2} \cos w - \cos \frac{\pi}{2} \sin w \right]^2 = \cos^2 w = 1 - \sin^2 w$$

Con estos resultados, al intercambiar los límites (debido al signo menos de dx), la ecuación 7.46 se convierte en

$$P_0 = \frac{2 y_0}{\tan \phi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \tan^2 \phi (1 - \sin^2 w)} dw$$

Pero $\tan \phi = \text{sen } \phi / \text{cos } \phi$, y al introducir $\text{cos } \phi$ al integrando, resulta

$$P_0 = \frac{2 y_0}{\text{sen } \phi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\text{cos}^2 \phi + \text{sen}^2 \phi - \text{sen}^2 \phi \text{sen}^2 w} dw$$

O bien, con $\text{cos}^2 \phi + \text{sen}^2 \phi = 1$, se obtiene

$$P_0 = \frac{2 y_0}{\text{sen } \phi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi \text{sen}^2 w} dw \quad (7.48)$$

La integral de la ecuación anterior se conoce como integral elíptica de segunda clase y puede resolverse mediante un desarrollo en serie, es decir, la función

$$E \left(\text{sen } \phi, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{sen}^2 \phi - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 \frac{\text{sen}^4 \phi}{3} - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right)^2 \frac{\text{sen}^6 \phi}{5} - \dots \right] \quad (7.49)$$

También puede obtenerse de una tabla matemática. Por tanto, el perímetro mojado resulta

$$P_0 = \frac{2 y_0}{\text{sen } \phi} E \left(\text{sen } \phi, \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.50)$$

y con la ecuación 7.44, el radio hidráulico vale

$$R_{ho} = \frac{y_0 \text{cos } \phi}{E \left(\text{sen } \phi, \frac{\pi}{2} \right)} \quad (7.51)$$

Para una pendiente conocida, un canal con la sección obtenida es estable para la velocidad V_0 y caudal Q_0 que resultan de la ecuación de Manning. La velocidad es

$$V_0 = \left[\frac{\text{cos } \phi}{E \left(\text{sen } \phi, \frac{\pi}{2} \right)} \right]^{2/3} \frac{y_0^{2/3} \sqrt{S}}{n} \quad (7.52)$$

y con la ecuación 7.44, el gasto resulta

$$Q = \frac{2}{\tan \phi} \left[\frac{\cos \phi}{E \left(\sin \phi, \frac{\pi}{2} \right)} \right]^{2/3} \frac{y_0^{8/3} \sqrt{S}}{n} \quad (7.53)$$

A fin de simplificar los cálculos, en el *U.S. Bureau of Reclamation* se desarrollaron ecuaciones aproximadas. En primer lugar, de la figura 7.62, el esfuerzo tangencial máximo es: $\tau_0 = 0.97 g \rho S y_0$, por lo que

$$y_0 = \frac{\tau_0}{0.97 g \rho S} \quad (7.54)$$

Además, en sustitución de las ecuaciones 7.44 y 7.52 respectivamente, se obtuvieron las expresiones

$$A_0 = \frac{2.04 y_0 T_0}{\pi} = \frac{2.04 y_0^2}{\tan \phi} = \frac{2.04 T_0^2 \tan \phi}{\pi^2} \quad (7.55)$$

$$V_0 = (0.908 - 0.80 \tan \phi) \frac{y_0^{2/3} \sqrt{S}}{n} \quad (7.56)$$

de manera que, en lugar de la ecuación 7.53 resulta

$$Q_0 = \left(\frac{1.852}{\tan \phi} - 1.632 \right) \frac{y_0^{8/3} \sqrt{S}}{n} \quad (7.57)$$

Las cuatro últimas ecuaciones son válidas para el sistema internacional de unidades.

Dado τ_0 , ϕ y S , las ecuaciones 7.42, 7.43, 7.54 y 7.55 definen la geometría y el área de la sección estable óptima del canal, sin que intervenga el caudal con que opera. Para una n conocida, la sección así definida puede conducir únicamente el caudal Q_0 obtenido de la ecuación 7.57. Si el caudal Q de diseño es menor, el tirante normal que necesita es también menor que el utilizado en el diseño de la sección y, con éste un esfuerzo tangencial también menor, por lo que la capacidad de resistencia al arrastre del material no sería plenamente utilizada. Por el contrario, si $Q > Q_0$, el tirante normal también sería mayor, y con éste, el esfuerzo tangencial rebasaría al de la capacidad de resistencia.

Si se desea diseñar un canal estable para una pendiente dada y un esfuerzo tangencial seguro en todos los puntos, la profundidad de cualquier punto de la sección tendría que quedar asociada a un valor característico de ϕ .

De esta manera, es posible una sección estable óptima de menor ancho cuando $Q < Q_0$, o de mayor ancho cuando $Q > Q_0$, sin cambiar la curvatura de los lados.

Si $Q < Q_0$ y se desea mantener τ_0 , se debe eliminar una parte del área en la zona central de la sección, de ancho ΔT_1 . De acuerdo con el análisis matemático del USBR, la magnitud del área resultante se puede estimar haciendo una corrección a la dada por la ecuación 7.55, de modo que su valor es

$$A = 2.04 \cdot (T_0 - 1.042 \Delta T_1)^2 / \pi^2$$

Igualando la velocidad en la sección original de área A_0 (ecuación 7.55) con la de la sección modificada (anterior), se obtiene

$$\frac{\pi^2 Q_0}{2.04 T_0^2 \tan \phi} = \frac{\pi^2 Q}{2.04 (T_0 - 1.042 \Delta T_1)^2}$$

y de aquí, el nuevo ancho de la superficie libre debe ser

$$T_0 - 1.042 \Delta T_1 = T_0 \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \quad (7.58a)$$

o bien, el ancho que se elimina en la zona central resulta

$$\Delta T_1 = 0.96 \left(1 - \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) T_0 \quad (7.58b)$$

Si $Q > Q_0$, se debe agregar una parte rectangular al área en el centro de la sección para conducir la diferencia $Q - Q_0$ del caudal. Esto es, de la ecuación de Manning se tiene

$$Q - Q_0 = \frac{\Delta T_2 y_0^{5/3} S^{1/2}}{n}$$

y de aquí, el ancho de la parte que se agrega es

$$\Delta T_2 = \frac{n (Q - Q_0)}{y_0^{5/3} S^{1/2}} \quad (7.59a)$$

de modo que el nuevo ancho de la superficie del canal sea

$$T_2 = T_0 + \Delta T_2 \quad (7.59b)$$

Las secciones modificadas se muestran en las figuras 7.66 a y b respectivamente.

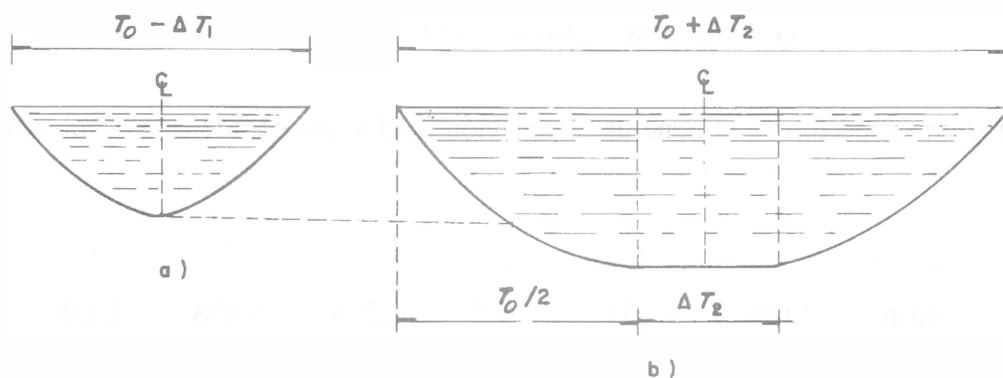


Figura 7.66. Secciones estables óptimas modificadas

Ejemplo 7.17. La sección estable óptima de un canal excavado en material no cohesivo debe diseñarse para los siguientes datos: $\tau_c = 9.81 \text{ N/m}^2$, $\phi = 0.4363 \text{ rad}$, $S = 0.0005$ y $n = 0.03$. Determinar: a) y_0 , V_0 , Q_0 y la forma de la sección; b) el ancho de la superficie libre y la forma de la sección para el gasto de diseño de $2.2 \text{ m}^3/\text{s}$; c) igual que el caso anterior, pero para $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$.

Solución a. De la ecuación 7.54 ($\tau_0 = \tau_c$) el tirante debe ser

$$y_0 = \frac{9.81}{0.97 (9.81) (1000) (0.0005)} = 2.062 \text{ m}$$

y de la ecuación 7.42, el ancho de la superficie libre

$$T_0 = \frac{\pi (2.062)}{\tan 0.4363} = 13.891 \text{ m}$$

$$\Delta T_1 = 0.96 \left(1 - \sqrt{\frac{2.2}{12.013}} \right) 13.891 = 7.629 \text{ m}$$

siendo el ancho definitivo

$$T_1 = 13.891 - 7.629 = 6.262 \text{ m}$$

En la figura 7.67 se muestra la sección modificada superpuesta a la original.

Solución c. Siendo $Q > Q_0$ ($Q - Q_0 = 7.987 \text{ m}^3/\text{s}$), de la ecuación 7.59a el ancho de la parte que se agrega resulta

$$\Delta T_2 = \frac{0.03 (7.987)}{(2.062)^{5/3} \sqrt{0.0005}} = 3.208 \text{ m}$$

y de la ecuación modificada

$$T_2 = 13.891 + 3.208 = 17.10 \text{ m}$$

En la figura 7.67 también se muestra la sección modificada superpuesta a la original.

7.8 CANALES CON UNA CUBIERTA VEGETATIVA

7.8.1 *Uso de una cubierta vegetativa*

El crecimiento de vegetación natural o deliberadamente plantada en los taludes y plantilla de un canal tiene varios efectos en el flujo que se produce. A primera vista todos parecen indeseables, pero algunos son deseables, como a continuación se explica.

- a) La vegetación ocupa parte de la sección transversal y reduce su área efectiva, lo que es indeseable.
- b) La vegetación obstaculiza el transporte de sedimentos realizado por el agua, causa su sedimentación y reduce la sección transversal efectiva, lo que es indeseable. Cuando se busca disminuir dicho transporte, entonces es deseable.
- c) Según el tipo y altura, la vegetación cambia la rugosidad del canal. Es indeseable si la rugosidad aumenta y deseable si disminuye.

- d) Las raíces de las plantas refuerzan el suelo, reduciendo mucho el peligro de erosión, lo que es deseable.
- e) La vegetación reduce la turbulencia del flujo cerca del fondo y con ello el peligro de erosión, lo que es también deseable.

Mediante una selección adecuada de la vegetación y un mantenimiento apropiado, es posible aumentar los efectos deseables y reducir los indeseables. Algunas medidas que ayudan a una selección correcta se proponen a continuación.

1. Debe evitarse la vegetación de crecimiento rápido y de gran altura; por ejemplo, el de árboles, arbustos, etcétera.
2. Evitar la vegetación leñosa dura y poco flexible.
3. Evitar áreas expuestas dentro de la cubierta de vegetación. En dichas áreas, la erosión se propaga de manera más rápida que en un canal completamente expuesto.
4. Los pastos forman una protección fuerte y tersa, crecen altos pero debido a su flexibilidad se doblan por efecto del flujo.
5. Hierbas densas y bajas forman una buena protección. Sus raíces proporcionan un buen refuerzo del suelo. La mayoría progresa a través de los tallos que, por si mismos, llenan las áreas expuestas.
6. La cubierta vegetativa no se debe usar en la parte del canal donde el flujo ocurra de modo permanente o continuo, sino sólo en aquellas partes sumergidas de modo intermitente.
7. La vegetación que se seleccione en regiones semiáridas debe ser la que alcance su condición más fuerte en la estación de mínimo caudal. Además, la vegetación seleccionada no debe requerir de riego en la estación de estiaje, o cuando mucho, en el primer año.

7.8.2 Criterios de diseño

Los canales con cubierta vegetativa han sido de uso común en la conducción de caudales intermitentes para fines de irrigación y para controlar la erosión en áreas agrícolas. La cubierta vegetal sirve para estabilizar el cuerpo del canal, consolidar la masa de suelo en el perímetro e impedir el arrastre de sus partículas en el fondo. Sin embargo, los canales con dicha protección por lo general no pueden resistir inundación y humedad prolongadas. Su diseño presenta problemas que no existen con otros recubrimientos; por ejemplo, la variación estacional influye en el factor de resistencia al flujo, debido a los cambios en el elemento de la cubierta.

El coeficiente n de Manning en canales vegetados se conoce como coeficiente de *retardación* y se ha encontrado que varía con el tipo de vegetación y su altura, la forma de la sección del canal y el tirante de la misma. Los experimentos han mostrado que hay una relación entre el producto de la velocidad media y el radio hidráulico con dicho coeficiente, en la forma

$$n = f(V R_h) \tag{7.60}$$

Esta relación es típica para cada clase de vegetación y es casi independiente de la forma del canal y de su pendiente longitudinal. Según Coyle (referencia 49), n se puede representar por la serie de curvas empíricas que se muestra en la figura 7.68 en términos de VR_h , para plantas que en promedio se ajustan al mismo grado de retardación de acuerdo con lo que se indica en la tabla 7.35.

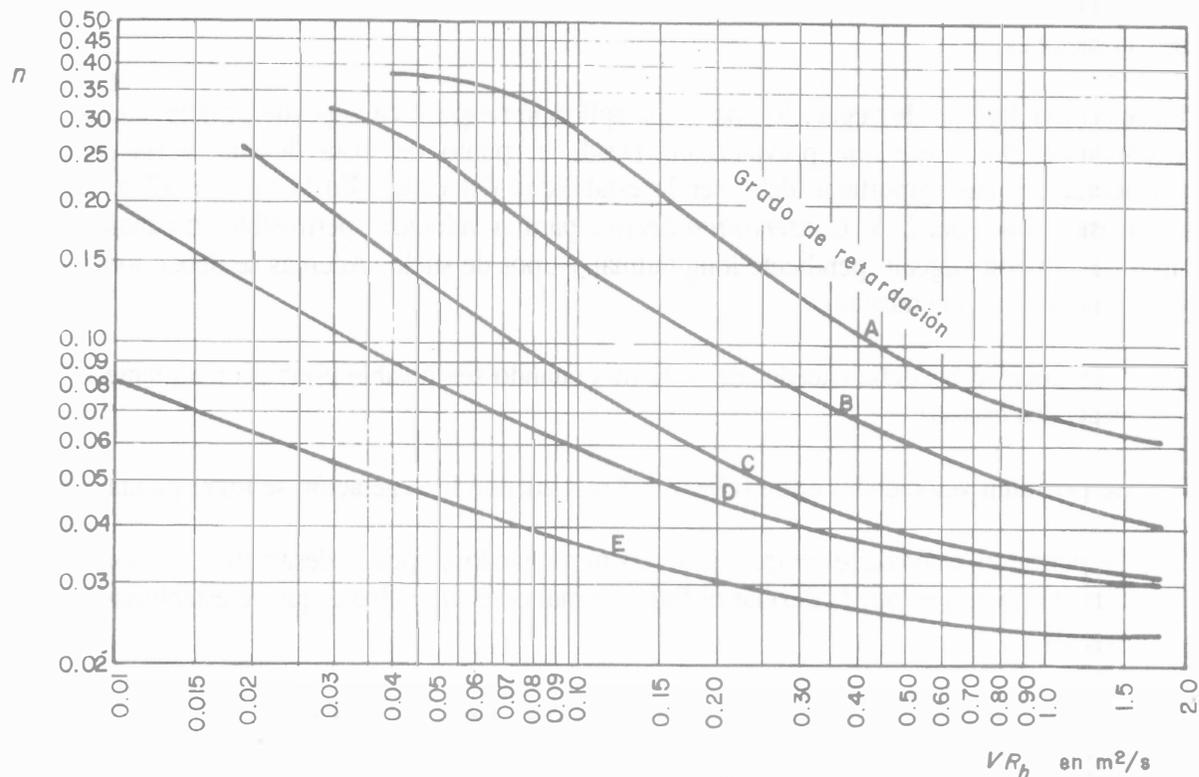


Figura 7.68. Coeficiente n de Manning en función de VR_h y del grado de retardación

Tabla 7.35. Grado de retardación, según Coyle (referencia 49)

Grado	Retardación
A	Muy alta
B	Alta
C	Media
D	Baja
E	Muy baja

Los experimentos en los que se basa la figura 7.68 fueron realizados en los Estados Unidos de América. Como la vegetación cambia de un lugar a otro aunque tenga el mismo grado de retardación, no se dan aquí los nombres de las plantas que se experimentaron, pero pueden consultarse en la referencia 49 ya citada o en los libros de texto de Chow y French. Como guía general, el grado de retardación está relacionado con la altura e intensidad de crecimiento, como se muestra en la tabla 7.35.

En la figura 7.68 se observa que los experimentos fueron sólo en canales pequeños, en los que $V R_h$ es menor de 2.0. En la medida que $V R_h$ crece, n disminuye y llega a ser casi constante. En otras palabras, con caudales pequeños la vegetación impide que el caudal aumente y viceversa. En este caso, debido a que n depende de V y ésta depende a su vez de n , el cálculo se puede efectuar sólo por iteraciones.

La selección del tipo de vegetación para una aplicación específica depende principalmente del clima y condición del suelo que prevalezcan. Desde el punto de vista de ingeniería hidráulica, la consideración mas importante debe ser la estabilidad del canal. En la tabla 7.37 se resumen las recomendaciones del *U.S. Conservation Service* para la velocidad permisible en canales con varios tipos de cubierta vegetal, pendiente longitudinal y tipos de suelo. Además se deben tomar en cuenta las siguientes recomendaciones.

1. La velocidad no debe exceder de 0.91 m/s cuando sea posible establecer o mantener cubiertas vegetales escasas.
2. Se permiten velocidades entre 0.91 y 1.2 m/s cuando la vegetación se logre plantando semillas.
3. Se permiten velocidades entre 1.2 y 1.5 m/s cuando se pueda desarrollar un césped denso en forma rápida o se pueda desviar el flujo normal en el canal hasta que se establezca una cubierta vegetal.
4. Velocidades entre 1.5 y 1.8 m/s se permiten en césped bien desarrollado de buena calidad.
5. Velocidades hasta de 1.8 a 2.1 m/s se permiten sólo en condiciones muy especiales.

Tabla 7.36. Efecto de la altura e intensidad de crecimiento de las plantas en el grado de retardación, según Coyle (referencia 49)

Grado	Altura media de crecimiento en cm	Intensidad de crecimiento
A	mayor de 75	buena
B	25 a 60	buena
C	15 a 25	buena
D	5 a 15	buena
E	menor de 5	buena
B	mayor de 75	media
C	25 a 60	media
D	15 a 25	media
D	5 a 15	media
E	menor de 5	media

Tabla 7.37. Velocidad permisible en canales cubiertos con vegetación, según U.S. Conservation Service

Vegetación	Pendiente longitudinal del canal en por ciento	V permisible en m/s	
		En suelos resistentes a la erosión	En suelos fácilmente erosionables
Pasto bermuda.	0 a 5	2.40	1.80
	5 a 10	2.10	1.50
	mayor de 10	1.80	1.20
Pasto búfalo, pasto bahía y pasto azul kentucky. Pasto de hierba mala de hoja plana y espina. Gramma azul y cañuela alta.	0 a 5	2.10	1.50
	5 a 10	1.80	1.20
	mayor de 10	1.50	0.90
Mezclas de pasto. Pasto tipo cañuela.	0 a 5	1.50	1.20
	5 a 10	1.20	0.90
no adecuados para pendientes mayores del 10 por ciento			
<i>Lespedeza sericea</i> , pasto azul-amarillo, pasto de forraje y alfalfa.	0 a 5	1.10	0.80
	no adecuados para pendientes mayores del 5 por ciento		
<i>Lespedeza común</i> . Pasto sudán y pastos anuales.	0 a 5	1.10	0.80
	no adecuados en pendientes mayores del 5 por ciento		

Nota: Los valores se refieren a cubiertas densas y uniformes con buen mantenimiento. Las pendientes longitudinales grandes que aparecen en la tabla se deben a que los experimentos se llevaron a cabo en canales pequeños y poco profundos. La velocidad permisible y el esfuerzo tangencial crítico en canales ordinarios de profundidad regular a grande y con vegetación, no deben exceder del 120 al 130 por ciento de los valores para canales libres de vegetación que aparecen en la figura 7.44 o ecuaciones de la tabla 7.23 para materiales no cohesivos, o bien de la tabla 7.25 o figura 7.47 para materiales cohesivos.

7.8.3 Métodos de diseño

Para el diseño de un canal con una cubierta vegetal se debe proceder en dos etapas. En la primera se supone un grado bajo de retardación que corresponda tanto a estaciones con vegetación en estado latente, como al período en que la misma llegue a desarrollarse. Para ello se siguen los pasos que enseguida se detallan.

1. Se supone un valor de n y se determina $V R_h$ de la figura 7.68.
2. Se elige la velocidad permisible en la tabla 7.37, que corresponda a la pendiente del canal prefijada, al material de la cubierta vegetativa y al suelo. Se calcula R_h usando los resultados del paso 1.
3. Con el valor supuesto de n , de la ecuación de Manning se calcula

$$V R_h = \frac{R_h^{5/3} \sqrt{S}}{n}$$

en la que se usa el valor de R_h encontrado en el paso 2 para el lado derecho de la misma.

4. Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que el valor de $V R_h$ determinado en el paso 1 coincida con el del paso 3.
5. Se determina el área hidráulica A con el caudal de diseño y la velocidad permisible del paso 2.
6. Se obtienen las dimensiones de la sección para los valores calculados de R_h y A .

En la segunda etapa se determinan las dimensiones pertinentes de la sección para un grado más alto de retardación, de acuerdo a los siguientes pasos.

1. Se asume el tirante determinado en la primera etapa y se calcula A y R_h .
2. Se calcula la velocidad media $V = Q/A$, con el valor de A determinado en el paso 1.
3. Se calcula $V R_h$ usando los resultados de los pasos 1 y 2.
4. Con los resultados del paso 3 se determina n de la figura 7.68.
5. Se calcula V con los valores de n del paso 1 y la ecuación de Manning.
6. Se comparan los valores medios de la velocidad en los pasos 2 y 5 y se repiten los pasos de 1 a 5 hasta que sean iguales, con la tolerancia deseada.
7. Se añade el libre bordo apropiado y se verifica el número de Froude.

Las formas de sección más usadas en estos canales son la trapecial, triangular y parabólica, siendo las dos últimas las más comunes. El proyectista debe ser conciente de que una consideración importante puede ser la facilidad de la maquinaria para cruzar el canal dentro de las parcelas durante los períodos donde no haya flujo. Esta consideración puede implicar que los taludes del canal se diseñen con este propósito, más que por eficiencia hidráulica o estabilidad estructural.

Debido a la naturaleza compleja de las cubiertas vegetativas, no debe sorprender que el diseño de los canales que las utilizan esté basado en criterios empíricos, siendo claro que se necesita investigación adicional sobre este tópico.

Ejemplo 7.18. Un canal trapecial de 1.00 m de ancho, tirante de 0.80 m, taludes 4:1 y pendiente del 0.2 por ciento, tiene una vegetación de 20 cm de altura con buena intensidad de crecimiento. Determinar la velocidad del flujo y el caudal que conduce.

Solución. El problema no es de diseño sino de revisión. Las propiedades geométricas de la sección son $A = 3.36 \text{ m}^2$, $P = 7.597 \text{ m}$; $R_h = 0.442 \text{ m}$. Se supone $n = 0.04$ y para 20 cm de altura de vegetación y crecimiento denso de la misma, el grado de retardación es el C .

De la figura 7.68, con $n = 0.04$ y grado C , se obtiene $V R_h = 0.45 \text{ m}^2/\text{s}$, siendo

$$V = \frac{0.45}{0.44} \approx 1.0 \text{ m/s}$$

De la ecuación de Manning

$$V = \frac{1}{0.04} (0.44)^{2/3} (0.002)^{1/2} = 0.647 \text{ m/s} < 1$$

por tanto, el valor seleccionado para n fue incorrecto.

Se supone $n = 0.052$ y de la figura 7.68, $V R_h = 0.22 \text{ m}^2/\text{s}$, es decir

$$V = \frac{0.22}{0.44} = 0.5 \text{ m/s}$$

De la ecuación de Manning

$$V = \frac{1}{0.052} (0.44)^{2/3} (0.002)^{1/2} = 0.498 \approx 0.5$$

$$Q = 0.5 (3.36) = 1.68 \text{ m}^3/\text{s}$$

ejemplo 7.19. Un canal trapecial tiene taludes 2:1 y pendiente del 0.1 por ciento. La cubierta es una mezcla de pastos que tiene un grado de retardación C y admite una velocidad máxima de 1.5 m/s. Determinar las dimensiones de la sección para conducir un gasto de 51 m³/s.

Solución. Se supone $n = 0.03$ y de la extrapolación de la curva C en la figura 7.68, $V R_h = 2.55 \text{ m}^2/\text{s}$; por tanto

$$R_h = \frac{2.55}{1.5} = 1.7 \text{ m}$$

De la ecuación de Manning

$$V R_h = \frac{(1.7)^{5/3} \sqrt{0.001}}{0.03} = 2.552 \text{ m}^2/\text{s} \approx 2.55$$

Por tanto

$$A = \frac{51}{1.5} = 34 \text{ m}^2$$

Se debe cumplir

$$(b + 2 y) y = 34$$

$$\frac{34}{b + 2 \sqrt{5} y} = 1.7$$

Estas ecuaciones se satisfacen de modo aproximado con $b = 5 \text{ m}$ y $y = 3 \text{ m}$. En efecto

$$A = (5 + 6) 3 = 33 \text{ m}^2$$

$$P = 5 + 2 \sqrt{5} 3 = 18.4164 \text{ m}$$

$$R_h = 1.7919 \text{ m}$$

$$Q = \frac{33}{0.03} (1.7919)^{2/3} (0.001)^{1/2} = 51.32 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V = \frac{51.32}{33} = 1.56 \text{ m/s}$$

La velocidad es un poco mayor que la permisible.

7.8.4 Método de Akan y Hager (2001)

Akan y Hager (2001) (referencia 50) presentan una serie de gráficas para el diseño (o análisis) de canales con recubrimientos vegetales que eliminan los tanteos antes expuestos. Para dichos canales, Chen y Cotton (1988) (referencia 51) habían reportado previamente una expresión para el coeficiente n de Manning utilizando las unidades del sistema inglés, la cual se generaliza y se escribe en forma dimensionalmente homogénea como sigue

$$n = \frac{(K R_h)^{1/6}}{C + 19.97 \log (K^{1.4} R_h^{1.4} S^{0.4})} \quad (7.61)$$

donde $K = 3.28 \text{ m}^{-1}$ y C es un factor adimensional de retardación dependiente del pasto que se use de acuerdo con la tabla 7.38. La ecuación equivale a la 7.60 y permite adecuar el procedimiento, ya que con ella la de Manning para el gasto Q se convierte en

$$Q = \frac{k_0 \left[C + 19.97 \log (K^{1.4} R_h^{1.4} S^{0.4}) \right]}{(K R_h)^{1/6}} A R_h^{2/3} S^{1/2} \quad (7.62)$$

donde $k_0 = 1.0 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ para el S.I. Ésta se escribe en forma adimensional para facilitar el cálculo del ancho b de un canal trapecial de talud k , cuando se conoce el tirante y . Para ello, la ecuación se multiplica por $(K^{1/6} / k_0 S^{1/2} k y^{5/2})$ y resulta

$$\frac{Q K^{1/6}}{S^{1/2} k y^{5/2}} = \left[C + 19.97 \log \left(K^{1.4} S^{0.4} y^{1.4} \left(\frac{R_h}{y} \right)^{1.4} \right) \right] \frac{A}{k y^2} \sqrt{\frac{R_h}{y}}$$

O bien

$$\frac{Q K^{1/6}}{S^{1/2} k y^{5/2}} = \left[C + 19.97 \log (K^{1.4} S^{0.4} y^{1.4}) + 19.97 \log \left(\frac{R_h}{y} \right)^{1.4} \right] \frac{A}{k y^2} \sqrt{\frac{R_h}{y}}$$

En forma simplificada también es

$$Q_b = \left[\beta + 19.97 \log R_{hb}^{1.4} \right] A_b R_{hb}^{1/2} \quad (7.63)$$

donde aparecen los siguientes parámetros adimensionales que ya contienen el valor de $K = 3.28 \text{ m}^{-1}$:

$$Q_b = \frac{1.2189 Q}{S^{1/2} k y^{5/2}} \quad (7.64)$$

$$\beta = C + 19.97 \log (5.275 S^{0.4} y^{1.4}) \quad (7.65)$$

$$A_b = \frac{A}{k y^2} = 1 + \frac{b}{k y} \quad (7.66)$$

$$R_{hb} = \frac{R_h}{y} = \frac{1 + b/ky}{(b/ky) + 2 \sqrt{(1 + k^2)/k^2}} \quad (7.67)$$

Las ecuaciones 7.63 a 7.67 muestran que el gasto adimensional Q_b depende únicamente de los parámetros β , b/ky y del talud k . En la figura 7.69 se muestra su representación gráfica, donde el término $[(1 + k^2)/k^2]^{1/2}$ se ha hecho constante e igual a 1.118, valor que corresponde al talud $k = 2$. A pesar de ello, si la figura se usa para otros taludes se incurre en una sobreestimación del ancho del fondo de sólo el 4 por ciento para $k = 3$ y del 5 por ciento para $k = 4$, lo cual está del lado conservador y es aceptable para fines prácticos.

Siguiendo un procedimiento similar, se obtiene la figura 7.70 para facilitar el cálculo del tirante y del canal cuando se conoce el ancho b , siendo los parámetros

$$Q_y = \frac{1.2189 k^{3/2} Q}{S^{1/2} b^{5/2}} \quad (7.68)$$

$$\alpha = C + 19.97 \log (5.275 S^{0.4} b^{1.4}/k^{1.4}) \quad (7.69)$$

y también ky/b . La figura 7.70 proporciona una solución precisa para $k = 2$ y sobreestima el tirante cerca del 2 por ciento para $k = 3$ y del 3 por ciento para $k = 4$, lo cual es nuevamente aceptable para fines prácticos. Akan y Hager adoptaron el método de la fuerza crítica tractiva y en la misma tabla 7.38 se presentan los valores del esfuerzo tangencial permisible para distintas clases de retardación.

Tabla 7.38. Clases de retardación para cubiertas vegetativas

Clase de retardación	Cubierta	Condición (intensidad de crecimiento)	C	τ máx. en N/m ²
A	Pasto alpiste tipo cañuela	Excelente densidad, alto (76 cm en promedio)	15.8	177.2
A	Pasto amarillo tallo azul, <i>Ischaemum</i>	Excelente densidad, alto (91 cm en promedio)	15.8	177.2
B	Pasto bermuda	Buena densidad, alto (30 cm en promedio)	23.0	100.5
B	<i>Lespedeza sericea</i> , mezclas gramíneas	Buena densidad, no leñoso, alto (48 cm en promedio)	23.0	100.5
B	Pasto alpiste tipo cañuela, gama azul	Buena densidad, sin segar, (33 cm en promedio)	23.0	100.5
C	Agróstida, planta gramínea de cultivo	Densidad mediana, sin segar, (38 a 50 cm)	30.2	47.9
C	Pasto bermuda, pasto cienpies	Buena densidad, segados (15 cm en promedio)	30.2	47.9
C	<i>Lespedeza</i> común	Buena densidad, sin segar, (28 cm en promedio)	30.2	47.9
D	Pasto bermuda	Buena densidad, segado a 6 cm de altura	34.6	28.7
D	<i>Lespedeza</i> común	Excelente densidad, sin segar (11 cm en promedio)	34.6	28.7
D	<i>Lespedeza sericea</i>	Después de cortar a 5 cm de altura; muy buena densidad antes de segarlo	34.6	28.7
E	Pasto bermuda	Buena densidad, segado a 4 cm de altura	37.7	16.7

El esfuerzo tangencial máximo en el fondo de un canal ancho se expresa como

$$\tau_{máx} = g \rho y S \quad (7.70)$$

De la tabla 7.38 se ve que el mismo tipo de pasto puede pertenecer a varias clases de retardación dependiendo de la madurez en su crecimiento. Las clases A y E representan las retardaciones más alta y más baja, respectivamente. Como ya se ha mostrado, el diseño de un canal con una cubierta vegetal se realiza en dos etapas; en la primera se dimensiona por efecto de estabilidad usando la condición de retardación más baja. En la segunda etapa el diseño se modifica para un flujo bajo la condición de mayor retardación.

Ejemplo 7.20. Se desea diseñar un canal trapecial con pasto bermuda para conducir $Q = 0.7 \text{ m}^3/\text{s}$ con una pendiente $S = 0.004$ y taludes $k = 3$.

Solución. Según la tabla 7.38, la clase de retardación más baja para el pasto bermuda es la E, para la cual $C = 37.7$ y $\tau_{m\acute{a}x} = 16.7 \text{ N/m}^2$. Con $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, de la ecuación 7.70 resulta

$$y = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{g \rho S} = \frac{16.7}{9.81(1000)(0.004)} = 0.4256 \text{ m}$$

Este valor representa el tirante máximo permisible para condiciones de baja retardación, es decir, se puede usar éste o cualquier tirante menor en el diseño, siendo éste último lo más frecuente por razones prácticas. Por ello, aquí se elige $y = 0.4 \text{ m}$ y utilizando las ecuaciones 7.65 y después la 7.64 se obtiene

$$\beta = 37.7 + 19.97 \log [5.275 (0.004)^{0.4} (0.4)^{1.4}] = 21.84$$

$$Q_b = \frac{1.2189(0.7)}{(0.004)^{1/2} (3)(0.4)^{5/2}} = 44.439$$

Con estos valores, de la figura 7.69 se encuentra que $b/ky = 2$ y por tanto $b = 2(3)(0.4) = 2.4 \text{ m}$. Esto significa que se puede usar cualquier ancho mayor o igual a 2.4 m y se elige $b = 2.5 \text{ m}$, con lo cual se completa la primera etapa de diseño.

La clase de retardación más alta para el pasto bermuda es la B, según se encuentra en la tabla 7.38, y para ella $C = 23.0$; con ésta se modifica el diseño para acomodar el tirante aumentado por las condiciones de alta retardación. De las ecuaciones 7.68 y 7.69 se obtiene

$$Q_y = \frac{1.2189(3)^{3/2} (0.7)}{(0.004)^{1/2} (2.5)^{5/2}} = 7.0936$$

$$\alpha = 23 + 19.97 \log [5.275 (0.004)^{0.4} (2.5)^{1.4} / (3)^{1.4}] = 16.054$$

Con estos valores, de la figura 7.70 se obtiene $ky/b = 0.77$ y para las condiciones de alta retardación el tirante es $y = 0.77(2.5)/3 = 0.642 \text{ m}$. Se elige un libre bordo de 0.16 m , con el cual la profundidad del canal es $0.64 + 0.16 = 0.80 \text{ m}$.

Para terminar, es conveniente verificar el número de Froude ya que valores próximos a 1 no son aceptables debido a que causan inestabilidades. En este caso, los números de Froude son menores de 0.25 para ambas etapas de diseño.

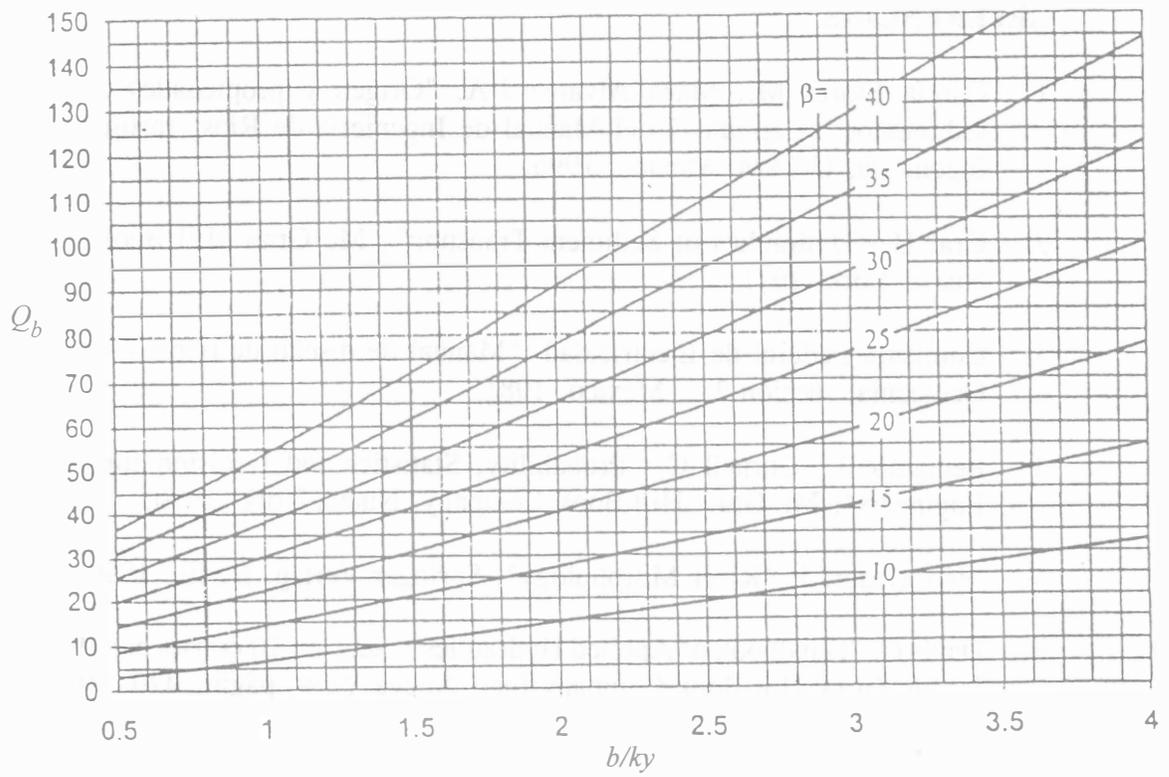


Figura 7.69. Curvas para determinar el ancho del canal

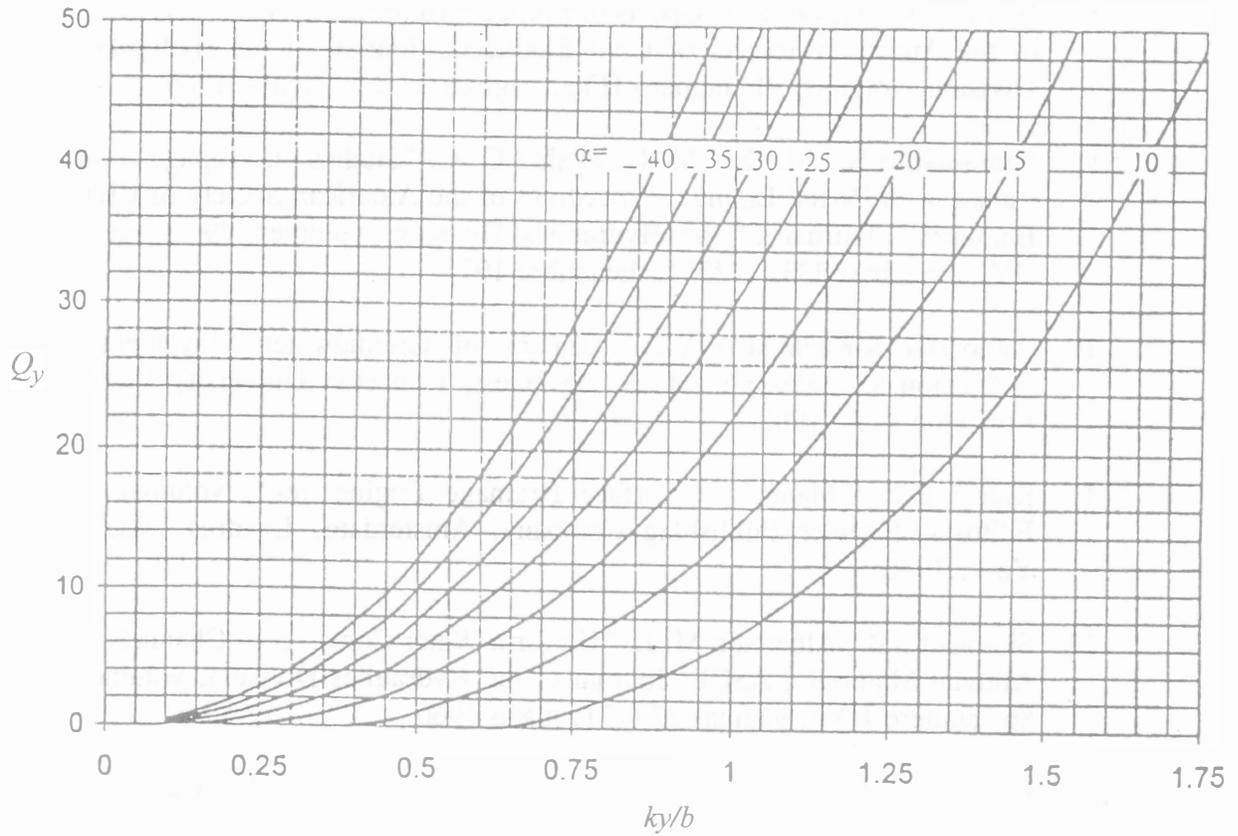


Figura 7.70. Curvas para determinar el tirante en el canal

REFERENCIAS

1. García Flores M., Maza Álvarez J.A. "Origen y propiedades de los sedimentos", Capítulo 7 del Manual de Ingeniería de Ríos, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1996.
2. Graf H. "Hydraulics of Sediment Transport", Mc Graw-Hill Book Co., Nueva York, 1971.
3. Comisión Federal de Electricidad. "Manual de diseño de obras civiles", Geotecnia, sección 2.2, México, 1981.
4. Benjamín J., Cornell C. "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers", Mc Graw Hill Book Company, Nueva York, 1970.
5. Mangelsdorf J. "River Morphology", Springer Verlag, Berlín, 1990.
6. Davis C. "Handbook of Applied Hydraulics", Sección 10 escrita por Hinds J., Mc Graw Hill-Book Company Inc., Nueva York, página 420, 1952.
7. Mosonyi E. "Water Power Development", volumen 1, Academia de Ciencias de Hungría, Budapest. 1963.
8. Bouwer H. "Theoretical Aspects of Seepage from Channels", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics División, volumen 91, número HY3, páginas 37 a 59, mayo 1965.
9. Subramanya K., Madhav M.R., Mishra G. C. "Studies on Seepage from Canals with Partial Lining", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics División, volumen 99, número HY12, páginas 2333 a 2351, diciembre 1973.
10. Palubarinova-Kochina P.Y.A. "Theory of Groundwater Movement", traducción al inglés por M. R. de Wiest, Princeton University Press, Princeton N.J., 1962.
11. Kinori B.Z. "Manual of Surface Drainage Engineering", volumen I, Editorial Elsevier Publishing Company, Amsterdam, Londres, Nueva York, 1970.
12. Simons D. B., Albertson M. L. "Uniform Water Conveyance Channels in Alluvial Material", ASCE, Journal of the Hydraulics División, volumen 86, número HY5, páginas 33 a 71, mayo 1960.
13. Kisieliev P. G. "Manual de Cálculos Hidráulicos", GEIL, Moscú, 1961.

14. Pedroli R. "Transporto di materiali solido in canali a fondo fissio e liscio", tesis doctoral, Escuela Politécnica Federal de Zurich, 1963.
15. Mostkow M. A. "Handbuch der Hydraulik", VEB Verlag Technik, Berlín, 1956.
16. Trout T.J. "Channel Design to Minimize Lining Material Costs", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Irrigation and Drainage División, volumen 108, número IR4, páginas 242 a 249, diciembre 1982.
17. García Flores M., Maza Álvarez J. "Inicio de movimiento y acorazamiento", Capítulo 8 del Manual de Ingeniería de Ríos, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1996.
18. Einstein H. A. "The bed-load function for sediment transportation in open channels, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Technical bulletin número 1026, 1950.
19. Hjulström F. "The Morphological Activity of Rivers as Illustrated by Rivers Fyris", Boletín Geological Institute Uppsala, volumen 25, capítulo III, 1935.
20. Hydrotechnical Construction. "The maximum permissible mean velocity in open channels", número 5, páginas 5 a 7, Moscú, mayo de 1936.
21. Levediev V.V. "Gidrologia i Hidraulika v Mostovom Doroshnom Staitielsvie", texto en ruso, Leningrado, 1959.
22. Goncharov V. N. "Dynamics of Channels Flow", Israel Programme for Scientific Translation, 185, 1964.
23. Maza J. A., García Flores M. "Velocidades medias para el inicio del movimiento de partículas", V Congreso Nacional de Hidráulica, Guadalajara, México, 1978.
24. Neill C. R. "Note and Initial Movement of Coarse Uniform Material", Journal of Hydraulic Research, IAHR, volumen 6, número 2, 1968.
25. Garde R. J. "Initiation of Motion on a Hydrodynamically Rough Surface-Critical Velocity Approach", JIP, volumen 27, número 3, India, julio 1970.
26. Stelczer K. "Bed Load Transport. Theory and Practice", Water Resources Publications, Michigan, U.S.A., 1981.

27. Mavis F.T., Lanshey L.M. "Formula for velocity of beginning of bed-load movement is reappraised", *Civil Engineering*, volumen 29, número 1, 1949.
28. Carstens M. R. "An Analytical and Experiment Study of Bed Ripples under Water Waves", *Quarterly Reports 8 y 9*, Georgia Institute of Technology, School of Civil Engineering, Atlanta, 1966.
29. García Flores M., Martínez A. A. "Estudio preliminar sobre la fluidificación de lechos arenosos sujetos a oleaje", *Series del Instituto de Ingeniería, UNAM*, número 492 serie azul, 74 páginas, México, D.F., junio 1985.
30. Lane E. W. "Design of Stable Channels ", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, volumen 120, páginas 1234 a 1279, 1955.
31. Schields A. "Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik under Turbulenzforschung auf Geshiebewegung", *Mitteilungen der Preussische Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Heft 26, Berlín, 1936.
32. Yalin M. S., Karahan E. "Inception of Sediment Transport" *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, volumen 105, número HY11, *Proceedings Paper 14975*, páginas 1433 a 1443, noviembre 1979.
33. Maza A. J. A., García Flores M. "Distribuciones de los tamaños de los sedimentos del fondo en cauces naturales", *Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, volumen 3, páginas 104 a 109, Sao Paolo, septiembre de 1986.
34. Mantz P. A. "Incipient Transport of Fine Grains and Flakes by Fluids-Extended Shields Diagram", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, volumen 103, número HY6, *Proceedings Paper 12992*, páginas 601 a 615, junio 1977.
35. Egiazaroff I.V. "Calculation of Nonuniform Sediment Concentration", *Journal of the Hydraulic Division, Proceedings ASCE*, volumen 91, número HY-4, julio 1965.
36. Hayashi T., Ozaki S., Ichibashi T. "Study on Bed Load Transport of Sediment Mixture", *Proceedings 24th Japanese Conference on Hydraulics*, 1980.
37. Misri R. L., Garde R. J., Ranga Raju K.G. "Bed Load Transport an Experimental Study, JIP, India, abril 1983.
38. Graf W. H. "Hydraulics of Sediment Transport", *McGraw-Hill Book Company, Series on Water Resources and Environmental Engineering*, Nueva York, 1971.

39. Meyer-Peter E., Müller R. "Formulas for bed-load transport", Proceedings of the Second Congress of the International Association for Hydraulic Research. IAHR, Estocolmo, junio 1948.
40. Iwagaki Y. "Hydrodynamical Study on Critical Tractive Force", Transactions JSCE, número 41, 1956.
41. Leliavsky S. "An Introduction to Fluvial Hydraulics", Constable, Londres, 1955.
42. Gessler J. "Self-Stabilizing Tendencies of Alluvial Channels", Journal of the Waterways and Harbors Division, ASCE, volumen 96, número WW2, Proceedings Paper 7263, páginas 235 a 249, mayo 1970.
43. Gessler J. "Critical shear stress for sediment mixtures", Proceedings del 14 Congreso de IAHR, París, 1971.
44. Cruickshank C., García Flores M. "Determinación del inicio de arrastre para material suelto con granulometría extendida", Memorias del IV Congreso Nacional de Hidráulica, volumen 3, páginas 180 a 190, Acapulco, México, octubre 1976.
45. Chow Ven Te. "Open-Channel Hydraulics", McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1959.
46. Dumm I. S. "Tractive Resistance of Cohesive Channels", Journal of Soil Mechanics Division, ASCE, volumen 85, número SM 3, junio 1959.
47. Smerdon E.T., Beasley R.P. "The Tractive Force Theory Applied to Stability of Open Channels in Cohesive Soils", University of Missouri, Agricultural Experiment Station, Research Bulletin 715, 1959.
48. Cormault P. "Determination experimentale du debit solide d'erosion des sediments fins cohesifs", Memorias del XIV Congreso Internacional de IAHR, París, 1971.
49. Coyle J. J. "Grassed Waterways and Outlets", Engineering Field Manual, U.S. Soil Conservation Service, Washington, páginas 7-1 a 7-43, abril 1975.
50. Akan O., Hager W.H. "Design Aid for Grass-Lined Channels, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, volumen 127, número 3, marzo 2001.
51. Chen Y.H., Cotton G.K. "Design of roadside channels with flexible linings", Hydraulic Engineering Circular, número 15, Federal Highway Administration, Washington, D.C., 1988.

52. Martín Vide Juan P. "Ingeniería Fluvial", Edicions UPC, Barcelona 1977.
53. Vedernikov V.V. "Seepage from Channels", Gosstroizdat, 1934. Véase también "Versickerungen aus Kanälen", Wasserkraft und Wasserwirtschaft, números 11, 12 y 13, 1934.
54. Muskat M. "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media", Mc Graw-Hill Book Company, Nueva York, 1937, reimpresso por J. W. Edwards Publisher, Inc., Ann Arbor, 1946.
55. Harr M.E. "Groundwater and Seepage", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1962.

Esta obra se terminó de imprimir
en enero de 2002
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1000 ejemplares
más sobrantes de reposición.

A

APUNTE
106

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.

2002
G.- 612794



612794