FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

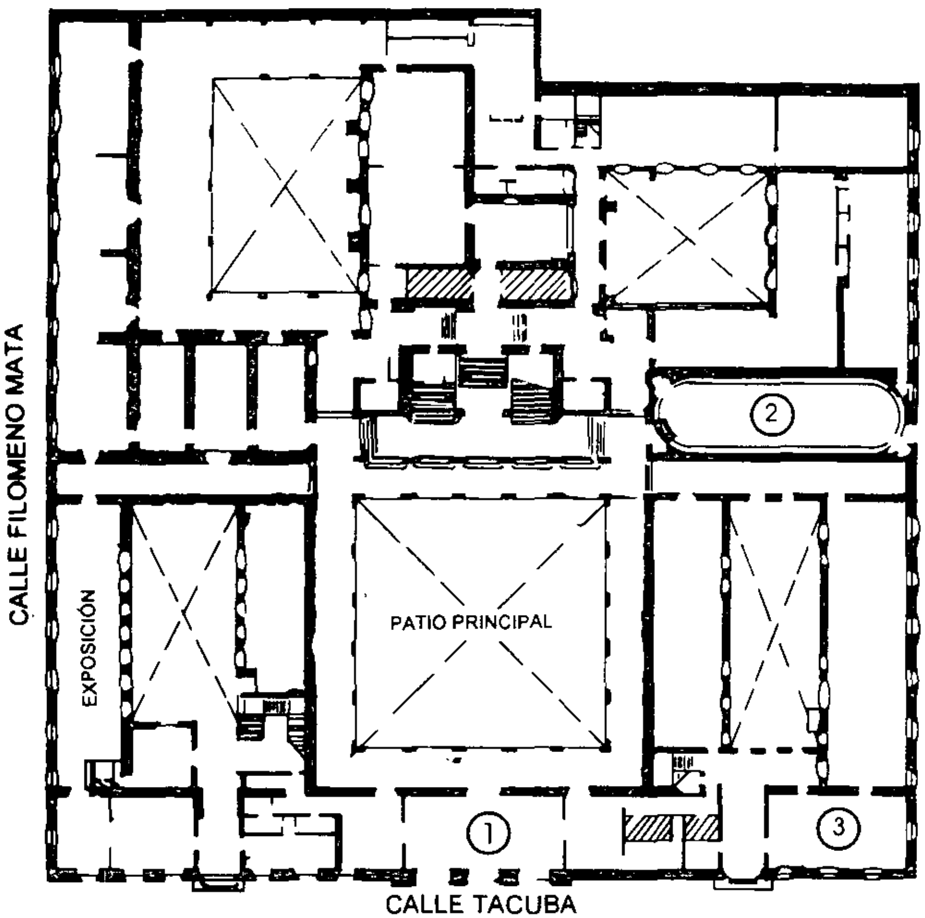
Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

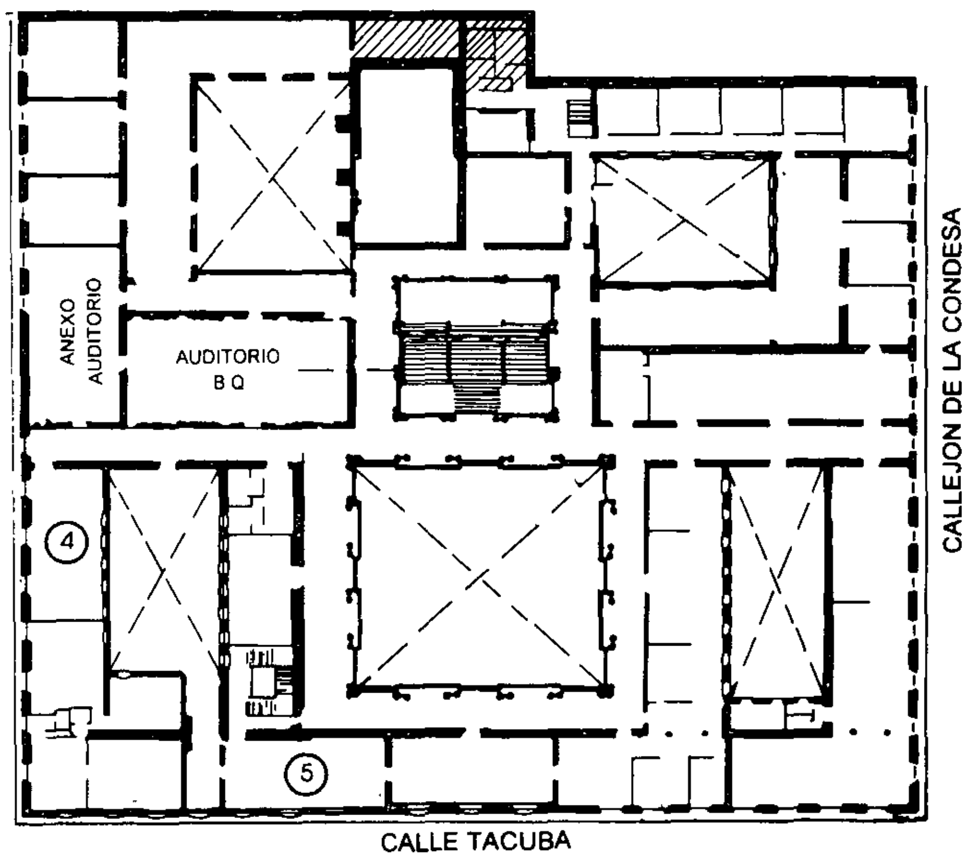
Atentamente
División de Educación Continua.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 5512-8955 5512-5121 5521-7335 5521-1987 Fax 5510-0573 5521-4021 AL 25

PALACIO DE MINERIA

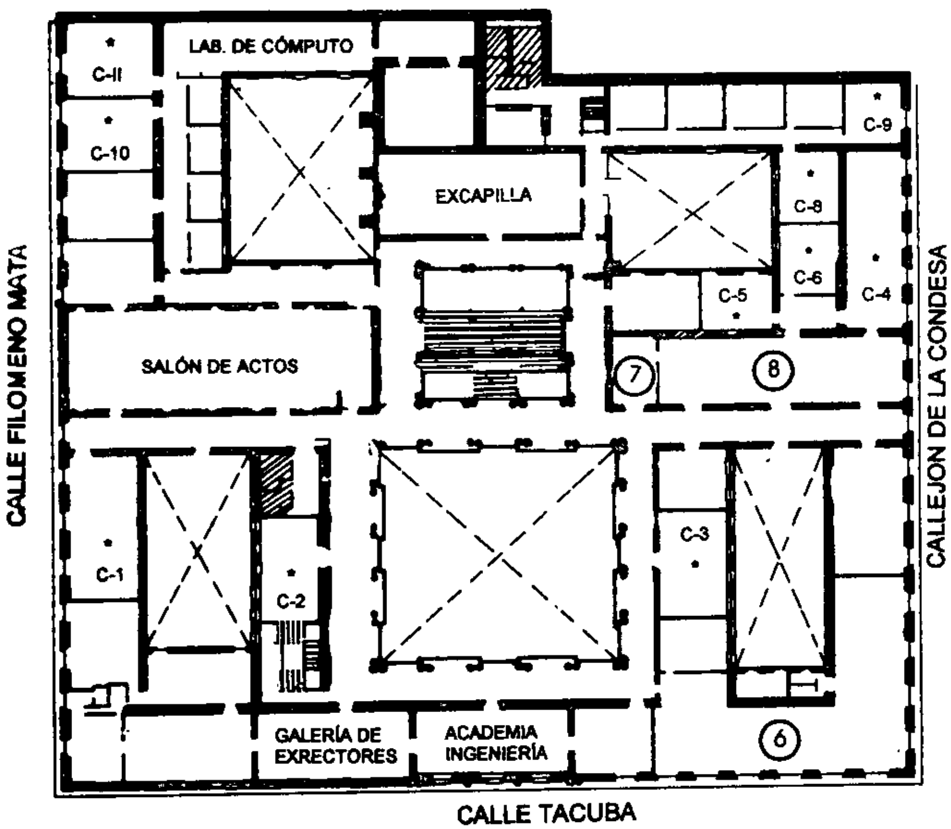


PLANTA BAJA



MEZZANINNE

PALACIO DE MINERIA



Ier. PISO

GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

* AULAS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CURSOS ABIERTOS

CURSO: DIPLOMADO EN VALUACIÓN INMOBILIARIA, INDUSTRIAL Y DE NEGOCIOS
MÓDULO III: VALUACIÓN DE NEGOCIOS
FECHA: Del 8 al 25 de abril de 2002. CA004

EVALUACIÓN DEL PERSONAL DOCENTE

(ESCALA DE EVALUACIÓN: 1 A 10)

CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	COMUNICACIÓN CON EL ASISTENTE	PUNTUALIDAD
M. EN I. ENRIQUE A. HERNÁNDEZ RUIZ				
ACT. JOSÉ MARTÍN ESTRADA GARCÍA				

Promedio ____________

EVALUACIÓN DE LA ENSEÑANZA

CONCEPTO	CALIF.
ORGANIZACIÓN Y DESARROLLO DEL CURSO	
GRADO DE PROFUNDIDAD DEL CURSO	
ACTUALIZACIÓN DEL CURSO	
APLICACIÓN PRACTICA DEL CURSO	

Promedio ____________

EVALUACIÓN DEL CURSO

CONCEPTO	CALIF.
CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
CONTINUIDAD EN LOS TEMAS	
CALIDAD DEL MATERIAL DIDÁCTICO UTILIZADO	

Promedio ____________

Evaluación total del curso ____________

Continúa...2

1. ¿Le agradó su estancia en la División de Educación Continua?

SI [ ] NO [ ]

Si indica que "NO" diga porqué: ____________________

2. Medio a través del cual se enteró del curso:

Periódico *La Jornada*	
Folleto anual	
Folleto del curso	
Gaceta UNAM	
Revistas técnicas	
Otro medio (Indique cuál)	

3. ¿Qué cambios sugeriría al curso para mejorarlo?

____

____

____

____

____

____

4. ¿Recomendaría el curso a otra(s) persona(s) ?

SI [ ] NO [ ]

5.¿Qué cursos sugiere que imparta la División de Educación Continua?

____

____

____

____

____

____

6. Otras sugerencias:

____

____

____

____

____

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN VALUACIÓN INMOBILIARIA, INDUSTRIAL Y DE NEGOCIOS

MODULO III
CA O4
VALUACIÓN DE NEGOCIOS

TEMA

PROBABILIDAD

EXPOSITOR: ACT. JOSÉ MARTÍN ESTRADA GARCÍA
PALACIO DE MINERIA
ABRIL DEL 2002

1 PROBABILIDAD.

1.1 Espacio de Probabilidad.

Objetivo: Estudio de los fenómenos Aleatorios.

Si bajo un cierto conjunto de condiciones fijas la realización de un experimento conduce a más de un resultado, entonces se dice que el experimento es un Fenómeno Aleatorio.

1.1.1 ¿Qué estudia la teoría de la probabilidad?

1) Ω, (¿qué?) : El espacio de todos los posibles resultados, llamado Espacio Muestral.

2) a, (¿dónde?) : Estructura de subconjuntos de Ω para la cual se cumplen las siguientes proposiciones:

$\Omega \in a$

$\varnothing \in a$

Si $A \in a \Rightarrow A^c \in a$

Si $\{ A_i \} \in a \Rightarrow \cup A_i \in a$; $i = 1,\ldots, n$.

Si $\{ A_i \} \in a \Rightarrow \cap A_i \in a$; $i = 1,\ldots,n$.

Una estructura que cumple con estas propiedades es llamada Algebra o Campo. Si además cumple con las siguientes propiedades:

Si $\{ A_i \} \in a \Rightarrow \cup A_i \in a$; $i = 1,\ldots, \infty$.

Si $\{ A_i \} \in a \Rightarrow \cap A_i \in a$; $i = 1,\ldots, \infty$.

Esta estructura es llamada σ - Algebra o σ - Campo.

3) P, (¿cómo?) : Mediante una función que cumple algunas condiciones, axiomas, llamada función de probabilidad.

Probabilidad Clásica

Probabilidad Frecuencial

Probabilidad Total

Probabilidad Condicional

Probabilidad Bayesiana

1.1.2 Axiomas de probabilidad.

Consideremos un evento cuyo espacio muestral es Ω.

Para cada evento E de Ω, supongamos que el número P(E) esta definido y satisface los siguientes axiomas:

1) $0 \leq P(E) \leq 1$

2) $P(\Omega) = 1$

Para cualquier sucesión de eventos Mutuamente Excluyentes o Ajenos, es decir ($E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$), se cumple que :

3) $P(\cup E_i) = \Sigma P(A_i)$.

Entonces P(E) es llamada probabilidad del evento E.

Propiedades:

A) $P(\varnothing) = 0$

B) $P(E^C) = 1 - P(E)$

C) Sean E y F dos eventos tales que $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$.

D) Sean E y F dos eventos, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Desigualdad de Boole:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Fórmula de Inclusión – Exclusión:

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

1.2 Técnicas de Conteo.

a) Combinaciones de n elementos tomados de x en x.

$$\binom{n}{x} = C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Condiciones: (x, y) = (y, x), es decir, no importa el orden.
(x, x) no existe, es decir, no se permite la repetición.

Ejemplo:

Supóngase una urna con tres elementos llamados A, B y C.

¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos elementos de esta urna, efectuando combinaciones?

$$\binom{3}{2} = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Que son las siguientes:

{(A, B), (A, C), (B, C)}.

b) Ordenaciones sin repetición (Permutaciones sin repetición) de n elementos tomados de x en x.

$$P_n^x = O_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Condiciones: (x, y) ≠ (y, x), es decir, importa el orden.
(x, x) no existe, es decir, no se permite la repetición.

Ejemplo:

Supóngase una urna con tres elementos llamados A, B y C.

¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos elementos de esta urna, ordenándolos sin repetición?

$$P_3^2 = O_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Que son las siguientes:

{(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B)}.

c) Ordenaciones con repetición de n elementos tomados de x en x.

$$OR_n^x = n^x$$

Condiciones: (x, y) = (y, x), es decir, importa el orden.

(x, x) existe, es decir, se permite la repetición.

Ejemplo:

Supóngase una urna con tres elementos llamados A, B y C.

¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos elementos de esta urna, ordenándolos con repetición?

$$OR_3^2 = 3^2 = 9$$

Que son las siguientes:

{(A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C)}.

d) Permutaciones de los n elementos.

$$P_n = O_n^n = n!$$

Condiciones: (x, y) = (y, x), es decir, importa el orden.

(x, x) no existe, es decir, no se permite la repetición.

Ejemplo:

Supóngase una urna con tres elementos llamados A, B y C.

¿De cuántas formas se pueden Permutar los tres elementos de esta urna?

$$P_3 = 3! = 6$$

Que son las siguientes:

{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (C, A, B), (B, C, A), (C, B, A)}.

1.3 Probabilidad Clásica.

Un espacio probabilizable es una pareja (Ω, β), compuesta por un conjunto no vacío Ω y un álgebra β en Ω tal que $P : \beta \rightarrow [0, 1]$.

Si $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) = \#A / \#\Omega$ (definición clásica de probabilidad)

Aunque Ω sea finito, no implica que todas las A_i tengan la misma probabilidad.

Ejemplo:

Supóngase el lanzamiento de dos monedas. El espacio muestral es el siguiente:

$\Omega = \{(a, a), (a, s), (s, a), (s, s)\}$

P[(a, a)] = 1 / 4 (una posibilidad entre cuatro alternativas)

P[Al menos una águila] = 3 / 4 (tres posibilidades de cuatro alternativas)

P[En el primer lanzamiento caiga sol] = 2 / 4

El problema surge cuando Ω no es finito, ya que si A es finito entonces P(A) = 0, pero si A es infinito entonces P(A) esta indeterminada.

Lo que se hace es asociar a cada evento un número real que diga que tan fácil es que suceda ese evento, $P(A) \rightarrow \mathbf{R}$. Para esto se recurre a la experimentación:

Se efectúa n veces el fenómeno aleatorio y se observa si ocurre el evento que se está estudiando, i.e,:

A, B y $C \in \beta$

A ocurre n_A veces.

Si n_A es grande entonces el evento ocurre fácilmente.

Si n_A es próximo a cero entonces difícilmente ocurre.

$$0 \leq n_A \leq n$$

$$0 \leq n_A / n \leq 1$$

y n_A se llama Frecuencia Relativa. El defecto de la frecuencia relativa es que no es un número fijo.

Aún así se dice que:

$$fn(A) = n_A / n \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to \infty} \{fn(A)\} \approx P(A)$$

A lo que se conoce como La Ley Débil de los Grandes Números.

1.4 EJERCICIOS DE APLICACION.

1. Se tiene un examen que consta de 12 preguntas. Cada una de ellas tiene respuesta verdadera o falsa. ¿Cuántas maneras se tienen para contestar el examen?, ¿Cuál es la probabilidad de contestar correctamente sin haber estudiado?
2. Se forman placas de automóviles con tres letras y tres dígitos de la siguiente forma, (L,L,L,#,#,#). ¿Cuántas placas diferentes pueden formarse? y ¿cuántas si existen 196 casos que forman combinaciones de letras no permisibles?
3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente una tercia en una mano de pocker?, ¿un par?, ¿un full?. (se entregan cinco cartas).
4. Se lanza una moneda hasta obtener sol. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran tres lanzamientos o más?.
5. Se lanzan dos dados distinguibles tales que (x, y) sea diferente de (y, x). Calcúlense las siguientes probabilidades $P(x + y = 1)$, $P(x+y)=2,\ldots,P(x+y=12)$, $P(x = y)$, $P(x = y+1)$ y $P(x \leq Y)$.
6. Supóngase que se lanzan doce dados. Calcúlese la probabilidad de que cada uno de los seis números distintos, aparezca dos veces.
7. Supóngase que treinta miembros de una organización van a ser distribuidos en tres comités, de manera que cada uno de los primeros dos comités tenga doce miembros y el tercero tenga seis. ¿De cuántas formas distintas pueden ser asignados los miembros de estos comités?.
8. Experimento con $P(A)=1/2$, $P(B)=1/2$ y $P(A\cup B)=2/3$.Calcúlese $P(A^C)$, $P(B^C)$, $P(A\cap B)$, $P(A^C\cap B^C)$, $P(A^C\cup B^C)$, $P(A^C\cap B)$, $P(A\cap B^C)$, $P(A^C\cup B)$ y $P(A\cup B^C)$.

1.5 Independencia Estocástica.

Sean A y B dos eventos independientes entonces $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

Si A y B son estocásticamente independientes entonces:

A y B^C son independientes.

A^C y B son independientes.

A^C y B^C son independientes.

En general, Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos independientes entonces

$$P(\cap A_i) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \cdots P(A_n) = \Pi P(A_i);\ i = 1, \ldots, n$$

1.6 Probabilidad Condicional.

Supóngase que se realiza un experimento cuyo espacio muestral es S y que se han especificado las probabilidades para todos los eventos de S.

Se desea calcular la probabilidad del evento A cuando se sabe que otro evento B ha ocurrido, i.e., la probabilidad del evento A dado que el evento B ya ocurrió se define como:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \qquad P(B) \neq 0$$

Nota: $P(A \cap B) = P(A / B)\, P(B)$.

Si los eventos A y B son independientes, entonces $P(A / B) = P(B)$.

1.7 Ley de Probabilidades Totales

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ eventos ajenos, tales que formen una partición del espacio muestral S, i.e. $\{\cup A_i\} = S$; $(i = 1, \ldots, k)$. Considérese otro evento B de tal forma que B está formado por $A_i \cap B$; $i = 1, \ldots, k$, entonces:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

y como $P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(B / A_i)\, P(A_i)$.

$$P(B) = \Sigma\, P(B \cap A_i) = \Sigma P(B / A_i)\, P(A_i);\ i=1, \ldots, K$$

Supóngase ahora que B ha ocurrido y estamos interesados en determinar cuál de los A_i también ocurrió. Tenemos entonces:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i)\, P(A_i)}{\Sigma P(B / A_i)\, P(A_i)}; \quad i = 1, \ldots, k$$

A lo que se denomina Regla de Bayes.

1.8 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

1. Supongamos que nos interesa la conclusión de una obra de construcción, que puede demorarse en virtud de una huelga. Se estima que las posibilidades de ir a huelga son del 60% y que la probabilidad de que se termine a tiempo, si no hay huelga es de 0.85 y de haberla 0.35. ¿Cuál es la probabilidad de que se concluya a tiempo?
2. Una escuela tiene el 70% de hombres y el 30% de mujeres. Se sabe que de los hombres el 40% fuma mientras que de las mujeres el 80% fuma. Calcula las siguientes probabilidades: $P(F)$, $P(F^C)$, $P(F/H)$, $P(F^C/H)$, $P(F/M)$, $P(F^C/M)$, $P(H/F)$, $P(H/F^C)$, $P(M/F)$, $P(M/F^C)$. $P(F \cap H)$, $P(F^C \cap H)$, $P(F \cap M)$ y $P(F^c \cap M)$.
3. Supongamos que en una fábrica hay dos máquinas, A y B, que elaboran el 60% y el 40% de la producción respectivamente. De los productos de A el 3% sale defectuoso, mientras que de B el 5% también lo es. Dado que salió un producto defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina A?, y ¿cuál de que provenga de la máquina B?.
4. Supóngase un examen de admisión a la universidad. Este contempla 120 reactivos de opción múltiple con cinco posibles respuestas (solo una correcta). Supóngase también, que el examinado considera "dominar" el 80% del contenido de los programas de estudio. ¿cuál es la probabilidad de ser aceptado? si para ello se requiere acertar en 90 respuestas? (¡dramático!) y ¿si el estudiante considera dominar el 60%?.
5. Calcular lo mismo que en 2, suponiendo el 48% de hombres, que de los hombres el 56% fuma y que de las mujeres el 68% también lo hace.

1.9 Variables Aleatorias.

Una variable aleatoria (V.A.) es una función real definida sobre un espacio muestral. Es una variable que toma sus valores mediante el "azar".

Se necesita una forma de describir los posibles valores de la V.A. y sus probabilidades, y para esto se define la Función de Distribución acumulativa para todo real mediante la expresión:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propiedades:

$F_X(x)$ es no decreciente. Si $x \leq y \Leftrightarrow F_X(x) \leq F_Y(y)$.

$\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$F_X(x)$ es continua por la derecha. $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

1.10 Distribuciones discretas y continuas.

Una variable aleatoria que puede tomar a lo más una cantidad de posibles valores numerables, se dice que es Discreta.

Para una V. A. Discreta definimos la Función de masa de probabilidad o Función de Densidad $f_X(x)$ de la siguiente forma:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Propiedades:

$f_X(x_i) \geq 0 \ \forall \ i = 1, ..., n$

$f_X(x) = 0$ para cualquier otro valor

$\sum_R f_X(x_i) = 1$

Sean $x_1, x_2, x_3, ...,$ posibles valores de la V. A., entonces

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{xi \leq x} P(X = x_i) = \sum_{xi \leq x} f_X(x_i)$$

Para el caso continuo:

$f_X(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx$

1.10.1 Funciones de Densidad y de Distribución. Casos Especiales.

1) Función Bernoulli.

Un experimento que tiene únicamente dos posibles resultados, llamados éxito o fracaso es denominado Fenómeno Bernoulli.

Si X~ Bernoulli (p), entonces:

$$f_x(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Mide la ocurrencia de un éxito o fracaso.

2) Función Binomial.

Un experimento que consiste en la repetición de n ensayos de tipo Bernoulli, es llamado Fenómeno Binomial.

Si X~ Bin (n, p): entonces:

$$f_x(x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0,\ldots, n \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Mide la ocurrencia de x éxitos o n - x fracasos en n ensayos..

3)Función Geométrica.

El Fenómeno Geométrico es un experimento similar al fenómeno Binomial, solo que éste exige un orden.

Si X~ Geo (p): entonces:

$$f_x(x) = \begin{cases} q^{x-1} p, & x = 1, 2,\ldots \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Mide la ocurrencia de x – 1 fracasos e inmediatamente el primer éxito.

4) Función Hipergeométrica.

Si una caja tiene N elementos de los cuales M están defectuosos, y extraemos n sin remplazo, La probabilidad de que x de los n sean defectuosos se distribuye de forma Hipergeométrica.

Si X~ HG (N, M, p): entonces:

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}, & x = 0,\ldots, n \quad N\geq M\\ 0 \quad en \quad otro \quad caso\end{cases}$$

4) Función Poisson.

El número de ocurrencias que se presentan en un espacio, tiempo, volumen o alguna otra dimensión es un Fenómeno de tipo Poisson.

Si X~ P (λ): entonces:

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0,\ 1,\ \ldots, \quad \lambda>0\\ 0 \quad en \quad otro \quad caso\end{cases}$$

5) Función Exponencial.

Dado un proceso Poisson con parámetro λ, se designa con cero el momento en que se empieza a observar el proceso.

Sea T el tiempo que transcurre hasta que ocurra el primer evento; se llama V.A. Exponencial con parámetro λ al tiempo T.

Si X~ Exp (λ): entonces:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & \lambda > 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

6) Función Normal:

Una V.A. que cumple con la siguiente Función de Distribución es llamada Variable Aleatoria Normal con parámetros μ y σ^2, donde μ es llamada media y σ^2 varianza.

Si X~ N (μ, σ^2): entonces:

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} & \sigma>0, \quad -\infty\leq x\leq\infty \\ 0 \quad en \quad otro \quad caso & \end{cases}$$

Se trata de una función que permite el cálculo de probabilidades con mucha facilidad, ya que proporciona una excelente aproximación cuando se cuenta con al menos 30 datos, su media y su varianza.

Para esto se recurre a una estandarización, que se logra mediante el cambio de variable $Z=(x-\mu)/\sigma$. Las probabilidades requeridas se obtienen de las Tablas de la Normal (0, 1).

Característica del manejo de la población.:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 68.27\%$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 95.45\%$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 99.73\%$$

Ejemplo:

Supóngase que se efectúan 6,000 lanzamientos de un dado.

La probabilidad de que el número de lanzamientos en los cuales ocurra un tres esté entre 980 y 1,030, inclusive, esta dada por la suma

$$P(980 \le x \le 1030) = \sum_{k=980}^{1030} \binom{6000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{6000-k}$$

Claramente, resulta muy laboriosa la evaluación directa de esta suma. Afortunadamente, por medio de la Función Normal, tenemos que la suma anterior se puede calcular (aproximar) de la siguiente forma, mediante una estandarización:

Recordar que la media de una Función Binomial es np y que su varianza es npq

$$P(980 \le x \le 1030) = P\left(\frac{980-1000}{28.87} \le Z \le \frac{1030-1000}{28.87}\right) = P(-0.69 \le Z \le 1.03)$$

$$= \phi(1.03) - \phi(-0.69) = 0.8485 - 0.2451 = 0.6034$$

$$P(980 \le x \le 1030) \cong 0.6034$$

1.11 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

1. Un análisis estadístico muestra que el 5% de una población vota por el partido Nacional. Si se elige una muestra de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 6 voten por este partido? y ¿cuál la de que al menos 6 personas voten por él?.
2. Supóngase un examen de opción múltiple de 15 preguntas con tres posibles respuestas, (se sabe que el alumno no estudió). ¿Cuál es la probabilidad de contestar correctamente 12 preguntas? y ¿al menos 12?..
3. Supóngase que la probabilidad de que una máquina no funcione en algún momento dentro de un periodo de una hora es 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de dos horas antes de descomponerse?
4. Supóngase que el número de muertes por suicidio es un proceso Poisson con parámetro de 2 por día. ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten al menos 10 muertes por semana?.
5. Supóngase que el número de llamadas que llegan a un conmutador telefónico es un proceso Poisson con tasa de 120 llamadas por hora. ¿Cuál es la probabilidad de no recibir llamadas en un minuto? y ¿cuál la de que lleguen entre 1 y 5 llamadas?.
6. Se ha observado que las fallas mecánicas ocurridas en una planta industrial, aparecen como un proceso Poisson aproximado con un parámetro de una cada dos horas. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra al menos una hora antes de que aparezca la primera falla? y ¿cuál la de que pasen más de 4 horas antes de la primera falla?.
7. Supóngase que la distancia x a la que un atleta puede efectuar un tiro (en su primer intento) es una

V.A. Normal con media 50m y desviación estándar 3m. ¿Cuál es la probabilidad de que efectúe su tiro a más de 55m?.

8. La longitud de un bacalao adulto pescado es una V.A. Normal (30,2) en pulgadas. Si se pesca uno de estos animales, ¿cuál es la probabilidad de que mida al menos 31 pulgadas?

2 ESTADISTICA

Como sucede con muchos vocablos, al concepto de Estadística. recibe diversas acepciones:

Ciencia que agrupa los hechos susceptibles de valoración numérica, como la población, la edad y el peso.

Ciencia que a través de la obtención, organización y graficación de datos analiza y encuentra consecuencias de los datos de la vida y actividades de los seres.

Ciencia de cálculo y análisis a partir de muestras y/o poblaciones.

2.1 Utilidad.

Entre muchas de las aplicaciones que tiene la Estadística, destacan las siguientes:

a) Representación funcional de los fenómenos numéricos.
b) Representación gráfica de situaciones de toda índole.
c) Recopilación de datos e interpretación.
d) Predicción científica de efectos de causas evaluables matemáticamente.
e) Interpretación de la experimentación.

f) Corrección de errores inevitables en toda ciencia.

g) Aprovechamiento del muestreo para el conocimiento de los fenómenos.

2.2 Definiciones elementales.

a) Universo.- Conjunto determinado de objetos o elementos.

b) Población.- El número total, de valores posibles, de elementos que tienen una característica que determine un conjunto.

c) Muestra.- Subconjunto de una población.

2.2.1 Datos relevantes.

Cuando se va a estudiar un fenómeno, mediante Estadística, se selecciona una variable de la cual es importante tener cierta información:

a) Valor mayor: (X_{max}) entre los datos obtenidos; o de los datos de la muestra que se haya tomado en forma aleatoria.

b) Valor menor: (X_{min}) entre los datos obtenidos, o de los datos de la muestra.

c) Rango: (R)diferencia entre los dos valores anteriores.

d) Intervalo: (I) división (generalmente igual) del rango. A cada uno se le llama Clase o intervalo de clase.

e) Límite superior del intervalo: (L_{sup})Valor final del intervalo.

f) Límite inferior del intervalo: (L_{inf}) Valor inicial del intervalo.

g) Marca de clase: (MC) Promedio aritmético de los límites de cada Intervalo de Clase.

h) Frecuencia: Número de casos u ocurrencias dentro de cada Intervalo de Clase. La frecuencia puede ser Absoluta (f) (cuando se trata del número de ocurrencias), Relativa (fr) (cuando se obtiene su relación con respecto al total de las frecuencias, $f_x(x)$) y Acumulativa ($F_x(x)$)

Ejemplo:

Tomemos como universo a los alumnos del propedéutico del ITC.

Como Población tomemos el conjunto de valores de los promedios finales obtenidos.

La muestra es el siguiente conjunto de promedios que fueron tomados al azar:

7.6, 8.7, 7.1, 7.3, 8.0, 7.3, 8.0, 8.2, 6.4, 8.2, 6.4, 8.0, 8.0, 8.2,

9.3, 7.8, 9.1, 7.1, 8.0, 9.1, 6.9, 5.8, 7.1, 8.2, 7.6, 7.6, 8.7, 6.7, 6.0, 6.9, 5.1, 5.8, 6.4, 4.7, 7.6, 7.1, 6.4, 6.9, 6.7, 5.8, 8.0, 6.7, 7.8, 7.3, 5.6, 5.6, 7.1, 5.6, 7.6, 6.7

En la forma en que están los datos, no es posible establecer ninguna relación útil. Organizándolos en una tabla darán mejor información.

VARIABLE	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
4.7	1	0.019	1	0.019
5.1	1	0.019	2	0.038
5.6	3	0.057	5	0.096
5.8	3	0.057	8	0.153
6.0	1	0.019	99	0.173
6.4	4	0.076	13	0.250
6.7	4	0.076	17	0.327
6.9	4	0.076	21	0.403
7.1	6	0.115	27	0.519
7.3	3	0.057	30	0.576
7.6	5	0.096	35	0.673
7.8	2	0.038	37	0.711
8.0	6	0.115	43	0.826
8.2	4	0.076	47	0.903
8.7	2	0.038	49	0.942
9.1	2	0.038	51	0.980
9.3	1	0.019	52	1.000
TOTAL	52	1.000		

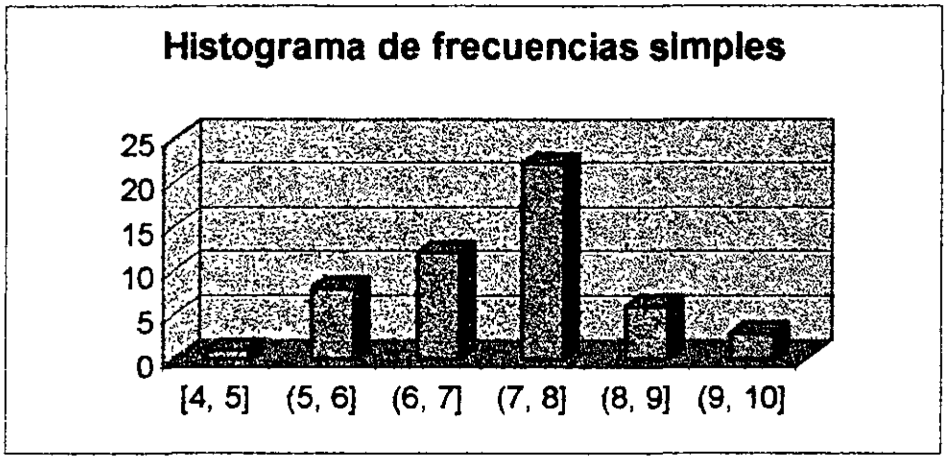
Se puede condensar la tabla anterior, distribuyendo las frecuencias por Intervalos de Clase, que son del tipo $a < x \leq b$, o sea $(a, b]$.

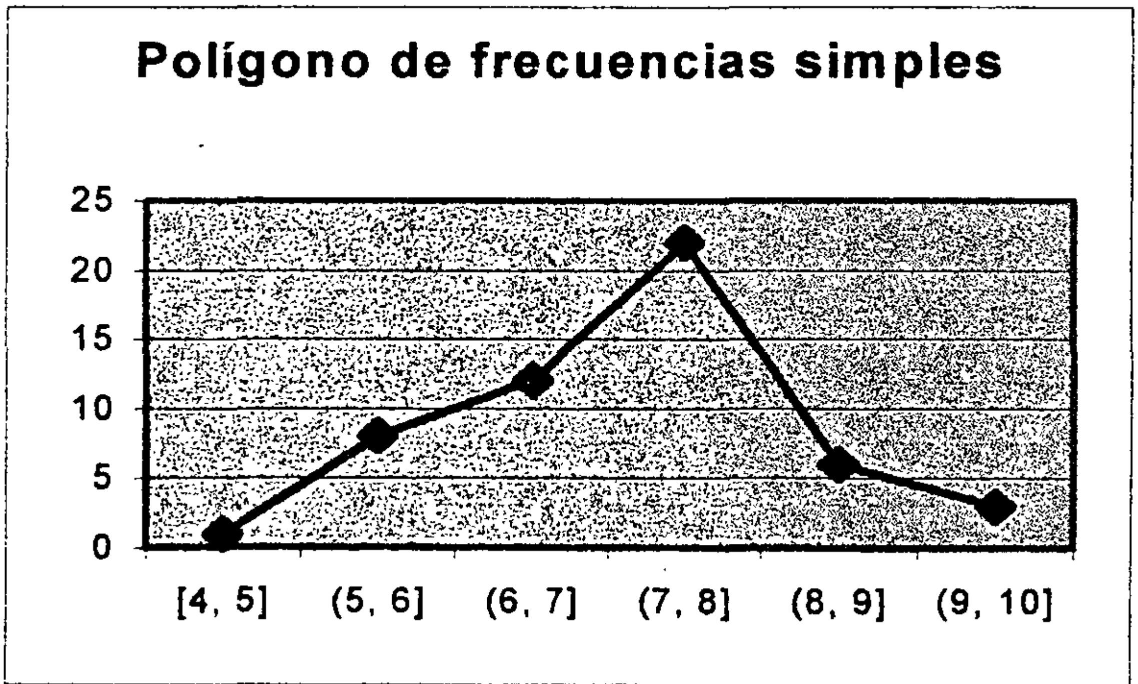
El tamaño t del intervalo lo obtenemos dividiendo el rango entre el número de intervalos requeridos. Rango = 9.3 – 4.7 = 4.6, y queriendo 6 intervalos, obtenemos:

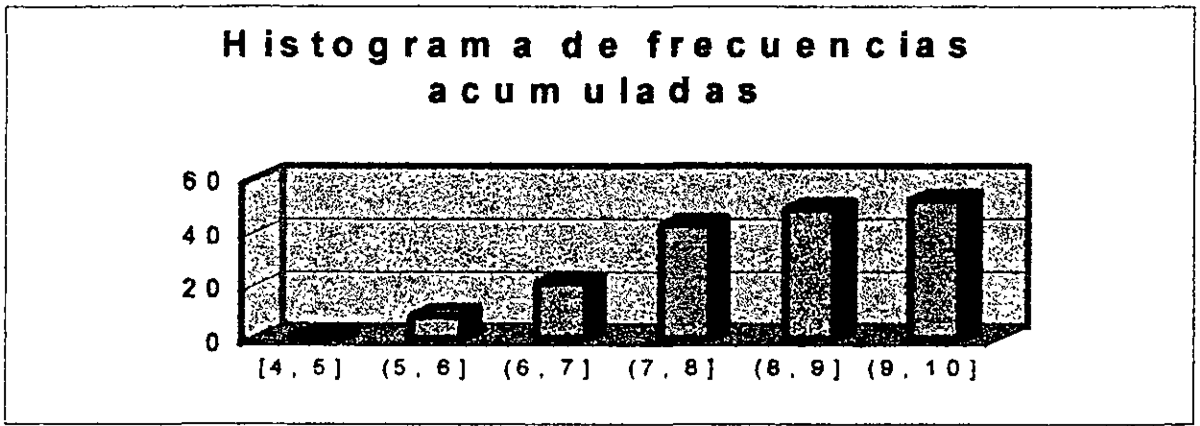
t = 4.6/6 = 0.766, que por conveniencia lo hacemos uno, es decir t = 1.

INTERVALO	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA ACUMULADA RELATIVA	PUNTO MEDIO
4 – 5	1	0.019	1	0.019	4.5
5 – 6	8	0.154	9	0.173	5.5
6 – 7	12	0.231	21	0.403	6.5
7 – 8	22	0.423	43	0.826	7.5
8 – 9	6	0.115	49	0.942	8.5
9 - 10	3	0.058	52	1.000	9.5

Otra forma útil para la presentación de los datos anteriores es el uso de Histogramas y Polígonos, que son diagramas de barras, generalmente, y segmentos de recta (respectivamente) donde las bases corresponden a los intervalos y las alturas corresponden al número de frecuencias de cada clase.


Histograma de frecuencias simples
25
20
15
10
5
0
[4, 5]
(5, 6]
(6, 7]
(7, 8]
(8, 9]
(9, 10]


Polígono de frecuencias simples
25
20
15
10
5
0
[4, 5]
(5, 6]
(6, 7]
(7, 8]
(8, 9]
(9, 10]



2.3 Medidas de tendencia Central y de Dispersión.

Para poder obtener consecuencias y deducciones válidas de los datos de una estadística, es muy útil contar con información sobre los valores al centro y sobre lo distanciados que estén unos valores con respecto a otros.

Las primeras medidas se llaman Medidas de Tendencia Central, las segundas Medidas de Dispersión.

2.3.1 Las Medidas de Tendencia Central más comunes son la media, la moda y la mediana.

a) La Media es una medida equivalente al promedio aritmético de todos los valores de las variables que están en la muestra.

$$\overline{X} = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i)MC_i$$

Se usa $\overline{X}$ cuando se trata de una muestra, mientras que se usa μ cuando es una población.

b) La Mediana es un valor de la variable, tal que la mitad de las observaciones debe tener un valor menor o igual al de la Mediana y la otra mitad, debe tener un valor mayor o igual que el de la Mediana.

$$50\ \% \leq x_{1/2} = \tilde{x} \leq 50\ \%$$

En general la idea de subdividir los valores en conjuntos de cardinalidad igual, da origen a los llamados cuantiles.

c) La Moda es el valor que se presenta con mayor frecuencia en la muestra.

$$x_m$$

2.3.2 Las Medidas de Dispersión más comunes son la Varianza, la Desviación Estándar y el Coeficiente de Variación.

a) La Varianza es el promedio de la suma de los cuadrados de las distancias, que hay entre los datos y la media.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(MC_i - \bar{x})^2 f_x(x_i)$$

La Varianza se representa con S^2 cuando se trata del análisis de una muestra, mientras que se representa con σ^2 cuando se trata de una población (Para este caso se divide entre n).

b) La desviación Estándar es la parte positiva de la raíz cuadrada de la Varianza.

$$S = \sqrt{S^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

c) El Coeficiente de Variación es la relación que existe entre la Desviación Estándar y la Media. Este se da en porcentaje, y a mayor porcentaje mayor dispersión.

$$V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\mu}$$

2.3.3 Covarianza, Coeficiente de Correlación y Coeficiente de Determinación.

a) Sean X y Y dos V.A. se define la Covarianza de X y Y de la siguiente forma:

$$Cov(X, Y) = E\{ (X - \mu_x)(Y - \mu_y) \} = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

b) El coeficiente de Correlación de X y de Y como:

$$\rho = \frac{Cov(x, Y)}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

Donde $-1 \leq \rho \leq 1$; tal que si

$\rho = -1$ se dice que las variables están inversamente correlacionadas; si

$\rho = 0$, son estocásticamente independientes y si

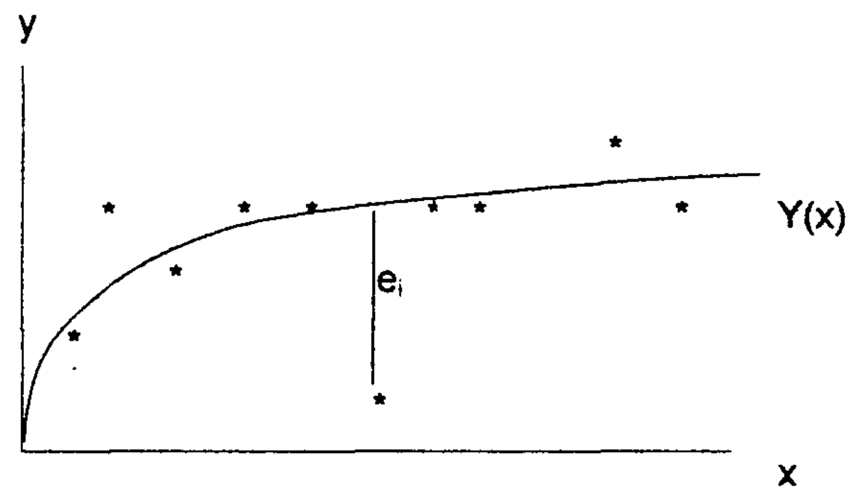
$\rho = 1$, las variables están directamente correlacionadas.

c) El Coeficiente de Determinación es el cuadrado del Coeficiente de Correlación. Mide qué tanto el comportamiento de una variable explica el comportamiento de la otra, en términos de su variación, (se da en porcentaje).

2.4 Análisis de Regresión.

Supóngase que se desea ajustar una curva a un conjunto aproximado de datos, tales como los que se obtienen en mediciones experimentales. Uno de los requisitos para ajustar una curva a los datos, es que el proceso no sea ambiguo, es decir, que si los datos ajustados por una persona son distintos a los que obtiene otra, el método resulta impráctico.

Así también es conveniente, en algún sentido, minimizar la desviación de los puntos de la línea. Las desviaciones se miden por las distancias que van de los puntos a la línea.



e_i = Error i – ésimo. (La distancia de cada uno de los puntos a ajustar con respecto a la curva ajustada)

Se pueden minimizar las desviaciones (errores), haciendo mínima su suma o tratando de minimizar la suma de las magnitudes de los errores. El método acepta el criterio de hacer a la magnitud de los errores el mínimo, es decir, minimizar el máximo error (criterio minimax); Pero como puede apreciarse, en virtud de que el signo de unos errores es positivo y el de otros negativo, lo recomendable es minimizar la suma de los cuadrados de los errores (criterio de mínimos cuadrados).

Si se requiere ajustar a una función polinomial de la forma:

$$Y = a_0+ax_1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$$

se tendrá que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{vmatrix}$$

Donde:

N es el número de datos que se van a ajustar.

n el grado del polinomio.

x_i y y_i cualquiera de los puntos experimentales { (x_i, y_i) }.

$e_i = Y_i - y_i$. El error de cada punto

$\sigma^2 = (\Sigma e_i^2) / (N - n - 1)$. La varianza.

Ejemplo:

Supóngase el análisis de todas las edades de los alumnos de un grupo.

Los datos son los siguientes (en años):

24.6, 30.5, 23.7, 27.8, 23.8, 22.5, 31.9, 23.0, 23.4, 21.6, 25.5, 30.7, 37.9, 26.4, 25.0, 27.3, 28.7, 28.3, 25.2, 29.1, 30.3, 24.3, 26.1, 25.5, 27.0, 39.7.

n = 26

Xmin = 21.6

Xmax = 39.7

Longitud del Intervalo de Clase = 3.62

Se desean 5 clases.

Analizando los datos tenemos que :

IC_i	f_i	MC_i	fr_i
[21.6, 25.22]	10	23.41	0.3846
(25.22, 28.84]	9	27.03	0.3462
(28.84, 32.46]	5	30.65	0.1923
(32.46, 36.08]	0	34.27	0.0000
(36.08, 39.7]	2	37.89	0.0769
			1.0000

$fr_i \cdot MC_i$	$(MC_i-\mu)^2$	$fr_i \cdot (MC_i-\mu)^2$
9.0035	14.1376	5.4373
9.3578	0.0196	0.0068
5.8940	12.1104	2.3288
0.0000	50.4100	0.0000
2.9137	114.9184	8.5372
$\mu = 27.17$		$\sigma^2 = 16.61$

Entonces:

$\mu = 27.17$

$\sigma^2 = 16.61$

$\sigma = 4.0755$

$v = 4.0755 / 27.17 = 0.15 = 15\%$

Se desea ajustar los datos a un a función polinomial de segundo grado:

y_i	x_i	x_i^2	x_i^3
0.3846	23.41	548.0281	12,829.3378
0.3462	27.03	730.6209	19,784.6829
0.1923	30.65	939.4225	28,793.2996
0.0000	34.27	1,174.4329	40,247.8155
0.0769	37.89	1,435.6521	54,396.8581
1.0000	153.25	4,828.1565	156,015.9939

x_i^4	$x_i\, y_i$	$x_i^2\, y_i$
300,334.7984	9.0035	210.7716
533,806.8995	9.3578	252.9410
882,514.6335	5.5940	180.6509
1'379,292.6370	0.0000	0.0000
2'061,096.9520	2.9137	110.4016
5'157,045.9200	27.169	754.7651

Queda entonces, por resolver, una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 5 & 153.25 & 4{,}828.1565 \\ 153.25 & 4{,}828.1565 & 156{,}016.9939 \\ 4{,}828.1565 & 156{,}016.9939 & 5'157{,}045.9200 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 27.169 \\ 754.7651 \end{vmatrix}$$

de la que se obtienen los siguientes coeficientes:

$a_0 = 0.340967752$, $a_1 = 0.01764053059$ y $a_2 = -0.0007063501614$

Por lo tanto el polígono ajustado (curva ajustada) es:

$Y_{(x)} = 0.340967752 + 0.01764053059\, x - 0.0007063501614\, x^2$

$Y_{(xi)}$	e_i	e_i^2
0.3667	-0.0179	0.0003
0.3016	-0.0446	0.0020
0.2179	0.0256	0.0007
0.1158	0.1158	0.0134
0.0049	-0.0720	0.0051
		0.0215

$\sigma^2 = 0.0215 / (5 - 2 - 1) = 0.0175$, entonces $\sigma = 0.10368$

y_i	Y_i	MC_i
0.3846	0.3667	23.41
0.3462	0.3016	27.03
0.1923	0.2179	30.65
0.0000	0.1158	34.27
0.0769	0.0049	37.89

$E(y_i)$	$E(Y_i)$	$E(y_i)\cdot E(Y_i)$	Cov (y_i, Y_i)	Var (y_i)	Var (Y_i)
9.0035	8.5844	77.2896	-73.9880	74.2853	67.5306
9.3578	8.1522	76.2867	-73.4644	81.2089	61.6319
5.8940	0.0091	0.0536	1.2307	32.5093	0.0436
0.0000	3.9685	0.0000	0.0000	0.0000	14.8433
2.9137	0.1857	0.5411	-0.5268	8.0474	0.0327
			-146.7485	196.0509	144.0821

y obtenemos, ¡por fin!, la información acerca de las varianzas, las desviaciones estándar, la covarianza, el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación que existen entre nuestros datos y la curva ajustada a estos.

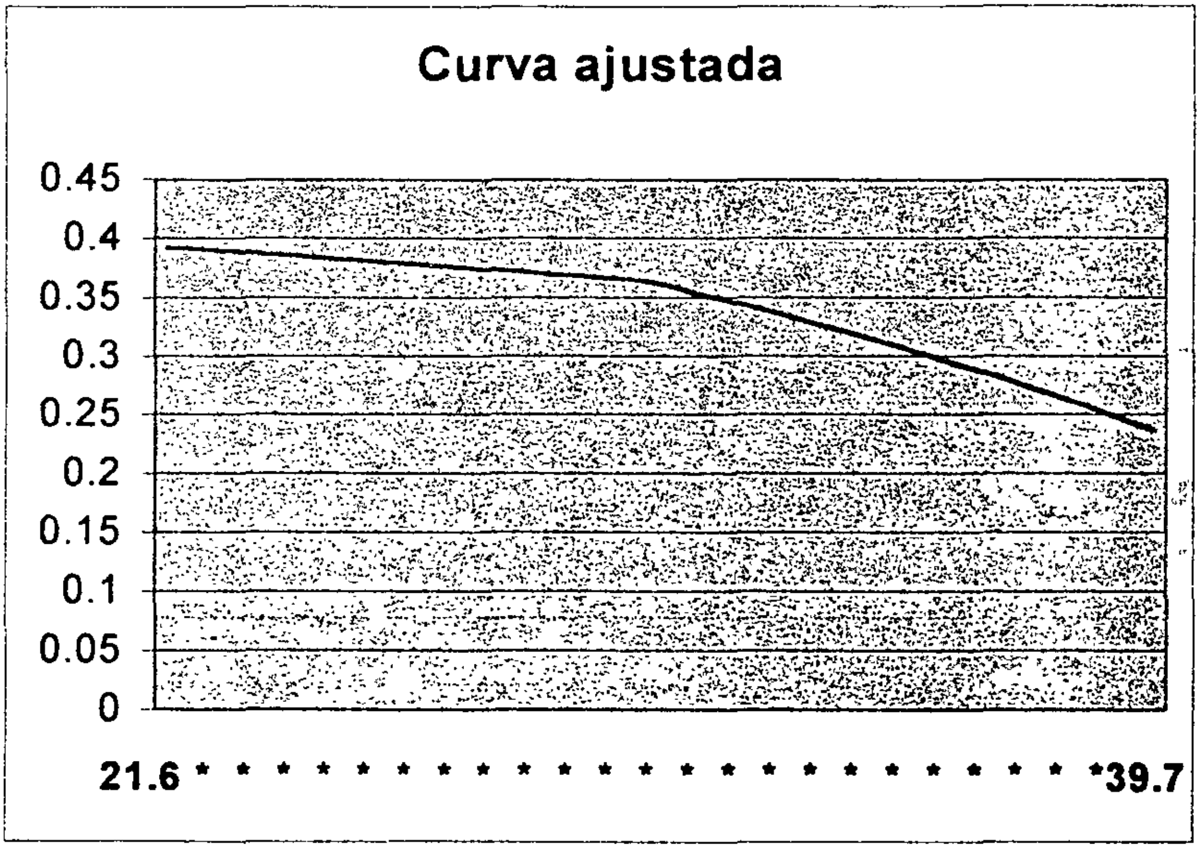
σ^2_y = 196.0509 entonces σ_y = 14.0018

σ^2_Y = 144.0821 entonces σ_Y = 12.0034

Cov (y, Y) = -146.7485

$\rho_{y,Y} = -146.7485 / \{(14.0018)(12.0034)\} = -0.87314$

$\rho^2_{y,Y} = 0.762379 = 76.24\%$


Curva ajustada
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
21.6
39.7

2.5 EJERCICIOS DE APLICACION.

1. En un bosque del estado de Michoacán de pinos Leiophyla, para su análisis silvícola y de aprovechamiento, se ha tomado una muestra de 25 árboles, a los cuales se les determinó su edad. Que se reporta a continuación: 80, 84, 71, 72, 76, 79, 80, 70, 68, 90, 58, 63, 70, 85, 83, 74, 70, 65, 59, 73, 81, 87, 66, 75 y 88.

   Determina para datos no agrupados y agrupados, la media, la moda la mediana, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación, elabora sus histogramas y polígonos de frecuencias (todos), ajusta los datos a una curva de segundo grado y determina la covarianza, el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación.

2. Se desea obtener una expresión matemática de tipo cuadrático que modele la suma de los primeros n naturales; por ejemplo:

   Si n=1, S=1; si n=2, S=1+2=3; si n=3, S=1+2+3=6, etc. Aplíquese el método de mínimos cuadrados con la información hasta n=7.

Mencione qué medidas de tendencia central serían más útiles en cada uno de los siguientes casos (explique):

3. El gerente de producción de una fábrica de envases de vidrio quiere saber cual es el tamaño de envase que debe fabricar en mayor cantidad. El tiene a la mano un buen número de datos de los tamaños de envases ordenado por los clientes.
4. El gerente de ventas de una compañía que produce mobiliario de lujo, desea seleccionar regiones para establecer salas de exhibición. ¿En qué medida de ingreso familiar por región estará más interesado, en la media o en la moda?
5. Un analista de la Bolsa de Valores está interesado en describir el cambio diario en el precio del mercado de una acción de cierta compañía. Rara vez el precio cambia más de un punto porcentual, pero hay ocasiones en que el precio cambia hasta cuatro puntos. ¿Qué medida debe utilizar el estadístico para describir el cambio de precio en la acción en cuestión, la media, la moda o la mediana?

2.6 REGLAS DE DECISION BAJO CONDICIONES DE RIESGO.

Al comparar dos o más proyectos, bajo condiciones de riesgo, se toma una decisión de acuerdo a las siguientes reglas:

a) Se elige el proyecto con mayor esperanza, (valor esperado).

b) Regla de la media-varianza:
Se elige el proyecto que presente la mayor esperanza y la menor varianza.

c) Regla del coeficiente de variación:
Se elige el proyecto de menor coeficiente de variación.

Para efectuar el análisis de proyectos, bajo condiciones de riesgo, se recomienda aplicar las dos últimas reglas (media - varianza y coeficiente de variación).

Ejemplo:

Supóngase un proyecto que presenta dos funciones de densidad de probabilidad diferentes para las ventas, ya que se tienen dos planes de trabajo en la administración.

La información se presenta en la siguiente tabla:

Ventas (en miles)	Densidad 1 (porcentaje)	Densidad 2 (porcentaje)
50	10	10
60	20	15
70	40	20
80	20	30
90	10	25

a) ¿Cuál es el valor esperado para cada una de las densidades?

Densidad 1

$$E_1(x) = (0.10)(50)+(0.20)(60)+\ldots+(0.10)(90) = \underline{70.0}$$

Densidad 2

$$E_2(x) = (0.10)(50)+(0.15)(60)+\ldots+(0.25)(90) = \underline{74.5}$$

Aparentemente se elegiría el proyecto con densidad 2, ya que

$$E_2(x) > E_1(x)$$

(Regla de la esperanza.)

b) ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar para cada una de las densidades?

Densidad 1

$$\sigma_1^2 = 0.10\{50-70\}^2+0.20\{60-70\}^2+\ldots+0.10\{90-70\}^2= \underline{120.0} \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = \underline{10.9544}$$

Densidad 2

$$\sigma_2^2 = 0.10\{50-74.5\}^2+0.15\{60-74.5\}^2+\ldots+0.10\{90-74.5\}^2= \underline{157.33} \Rightarrow$$

$$\sigma_2 = \underline{12.5431}$$

No se puede tomar una decisión ya que

$E_1(x) < E_2(x)$ pero $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$.

(Regla de la media-esperanza.)

c) ¿Cuál es el coeficiente de variación para cada una de las densidades?

Densidad 1

$v_1 = 10.9544 / 70 = \underline{0.15649} = \underline{15.65\%}$

Densidad 2

$v_2 = 12.5432 / 74.5 = \underline{0.16836} = \underline{16.84\%}$

Se elegirá el proyecto con densidad 1, ya que

$v_1 < v_2$

(Regla del coeficiente de variación.)

3 MATEMATICAS FINANCIERAS.

Designemos por C a una cierta cantidad de dinero en una fecha cuyo valor aumenta a S en una fecha posterior;

C se conoce como Capital o Principal,

S se conoce como monto o valor acumulado de C, e

$I = S - C$ se conoce como Interés generado por C

La Tasa de Interés devengada o cargada es la razón del Interés devengado al capital, en la unidad de tiempo:

$$i = I / C$$

A menos que se especifique lo contrario, la unidad de tiempo será de un año.

El Interés puede ser de dos tipos:

Exacto que es el que se calcula sobre la base del año de 365 días (366 en años bisiestos), y

Ordinario que es el que se calcula sobre la base de 360 días (año comercial).

3.1 INTERES COMPUESTO.

En aquellas transacciones que abarcan un período largo de tiempo, el interés puede ser manejado de dos formas:

a) A intervalos establecidos, el interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permanece sin cambio durante el plazo de la transacción. En este caso estamos tratando con Interés Simple (Ver sección 3.1).

b) A intervalos establecidos, el interés vencido es agregado al capital (por ejemplo, en las cuentas de ahorro). En este caso, se dice que el interés es capitalizable, o convertible en capital y, en consecuencia también gana interés. El capital aumenta periódicamente y el interés convertible en capital también aumenta periódicamente durante el período de transacción. La suma vencida al final de la transacción es conocida como Monto Compuesto. A la diferencia entre el Monto Compuesto y el capital original se le conoce como Interés Compuesto.

El Interés puede ser convertido en capital anualmente, semestralmente, trimestralmente, etc. El número de veces que el interés se convierte en un año se conoce como frecuencia de conversión. El período de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como período de interés o conversión.

En problemas que implican Interés Compuesto, tres conceptos son importantes:

a) El Capital original,
b) La tasa de Interés por período y
c) El número de períodos de conversión durante todo el plazo de la transacción.

Ejemplo:
Una cierta cantidad es invertida durante ocho años y medio al 7% convertible trimestralmente (tasa nominal). El período de conversión es tres meses; la frecuencia de conversión es 4. La tasa de interés por período de conversión (tasa efectiva) es

$$\frac{\text{Tasa anual de interés}}{\text{Frecuencia de conversión}} = 0.07/4 = 0.0175 = 1.75\%$$

3.2 MONTO COMPUESTO.

Sea un capital C invertido a la tasa i por período de conversión y designemos con S al monto compuesto de C al final de n períodos de conversión. Puesto que C produce Ci de interés durante el primer período de conversión, al final de dicho período produce C+Ci = C(1+i). En otras palabras, el monto de un capital al final de un período de conversión se obtiene multiplicando el capital por el factor (1+i). En consecuencia, al final del segundo período de conversión el capital es de $C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$, al final del tercer período de conversión, el monto es $C(1+i)^3$ y así sucesivamente. La sucesión de montos forma una progresión geométrica cuyo n–ésimo término es:

$$S = C(1+i)^n$$

Mediante un simple despeje se obtiene la fórmula para calcular el valor presente:

$$C = S(1+i)^{-n}$$

Ejemplo:

Si se invierten \$1000 durante ocho años y medio al 7% anual convertible trimestralmente, ¿cuál es el monto compuesto y cuál el interés?

$C = 1000$,

$i^{(4)} = 0.07$ entonces $i' = 0.0175$ y

$n = 34$ Períodos ((4)(8.5))

$$S = C(1+i)^n = 1000(1+0.0175)^{34} = \$1803.72$$

$$I = S - C = 1803.72 - 1000 = \$803.72$$

Ejemplo:

El 20 de marzo de 1945, se invirtieron \$200 en un fondo que pagaba el 5% convertible semestralmente. ¿Cuál era el importe de dicho fondo el 20 de septiembre de 1961?

C = \$200

$i^{(2)} = 0.05$, entonces $i' = 0.025$

n = 33

$$S = C(1+i)^{n} = 200(1+0.025)^{33} = \$451.77$$

3.3 TASA NOMINAL Y TASA EFECTIVA DE INTERÉS.

Cuando el interés es convertible más de una vez en un año (período), la tasa anual dada se conoce como Tasa Nominal anual o simplemente tasa nominal ($i^{(m)}$). La tasa de interés efectivamente ganada en un año (período) se conoce como tasa equivalente anual (o de período) (i) y la tasa de interés efectivamente ganada en cada subperíodo se conoce como tasa efectiva ($i' = i^{(m)} / m$).

La relación entre ambas tasas, anual y nominal , se determina de la siguiente forma:

$$(1+i)^{n} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}$$

Donde :

i es la Tasa Efectiva anual,

$i^{(m)}$ es la Tasa Nominal convertible m veces al año,

n es el número de años (períodos) y

m es el número de subperíodos.

$i' = i^{(m)} / m$ es la Tasa Efectiva del subperíodo.

Ejemplo:

Hallar la tasa efectiva de interés equivalente a una tasa nominal del 5% convertible mensualmente.

$$(1+i)^1 = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{(12)(1)}$$

$i^{(12)} = 5\%$ entonces:

$$i = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1 = 0.051161 = 5.11\%$$

Ejemplo:

Hallar la tasa nominal convertible trimestralmente equivalente a una tasa efectiva del 5%.

$$(1 + 0.05)^1 = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^{(4)(1)}$$

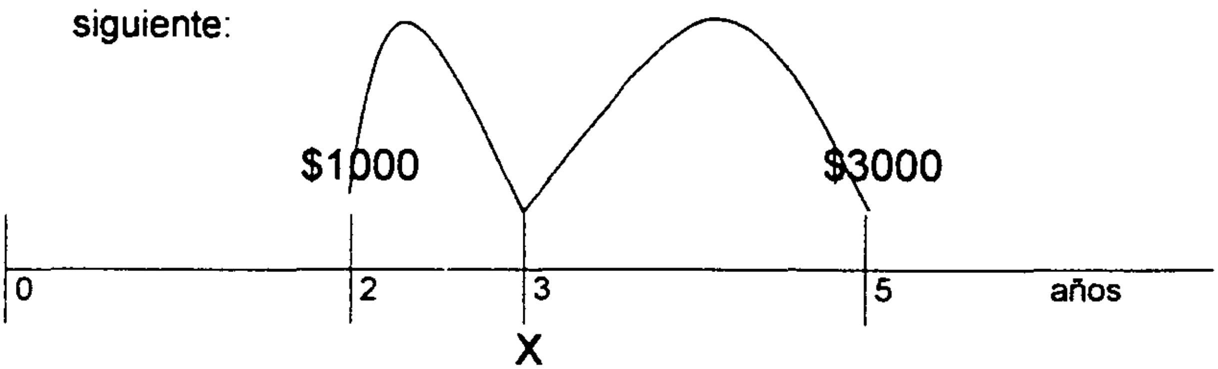
entonces:

$$i^{(4)} = 4\left[\sqrt[4]{1+0.05} - 1\right] = 0.049088 = 4.909\%$$

Ejemplo:

M debe a N \$1000 pagaderos en dos años y \$3000 pagaderos en cinco años. Acuerdan que M liquide sus deudas mediante un pago único al final de tres años sobre la base de un rendimiento del 6% convertible semestralmente.

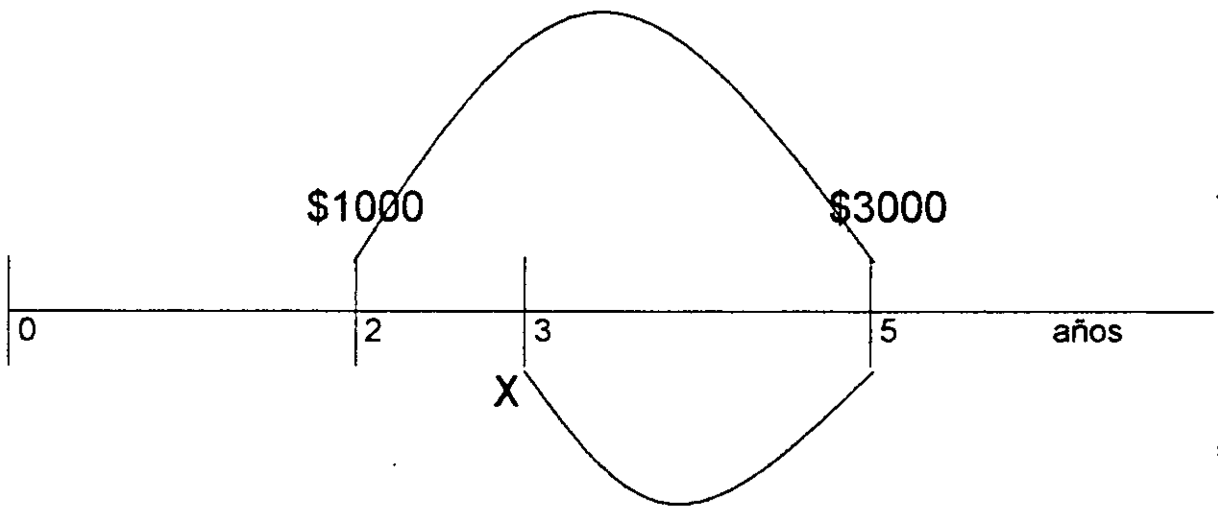
a) Tomando el inicio del tercer año como fecha focal, la deuda es la siguiente:



$$X = 1000\,(1+0.03)^{2} + 3000\,(1+0.03)^{-4}$$

$$X = \$3726.36$$

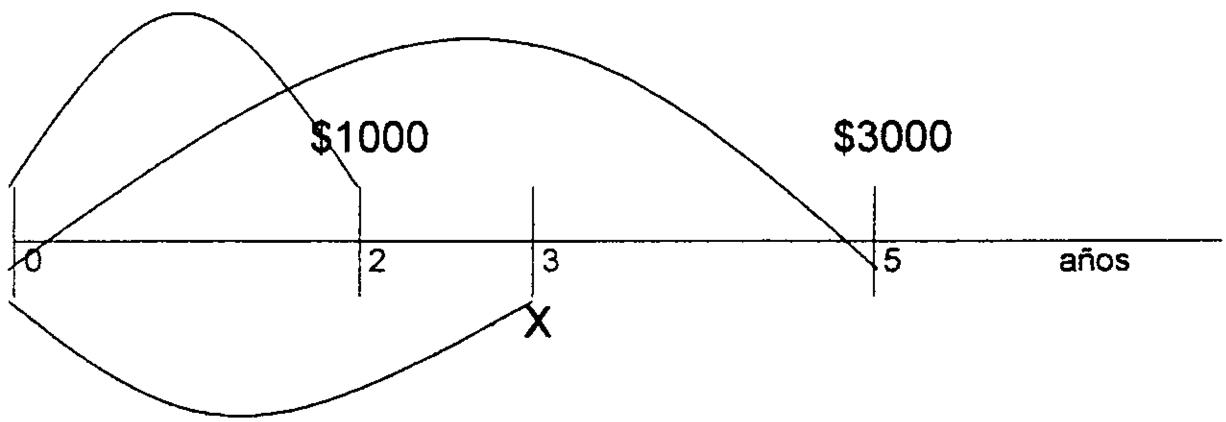
b) Tomando el quinto año como fecha focal, la deuda es la siguiente:



$$X\,(1+0.03)^{4} = 1000\,(1+0.03)^{6} + 3000$$

$$X = \$3726.36$$

c) Tomando la fecha inicial como fecha focal, la deuda es la siguiente:



$$X\,(1 + .03)^{-6} = 1000\,(1+0.03)^{-4} + 3000\,(1 + 0.03)^{-10}$$

$$X = \$3726.36$$

3.4 EJERCICIOS DE APLICACION

1) Se deben $1250 pagaderos dentro de tres años, sin intereses. ¿Qué cantidad debería estar dispuesto a aceptar el acreedor en este momento si él puede invertir el dinero al 4%, convertible semestralmente?.

2) En la compra de una casa, Y paga $10000 de cuota inicial y acuerda pagar $7500 dos años después. Hallar el valor de contado de la casa al 6% convertible semestralmente.

3) B debe $3000 con vencimiento en dos años sin intereses; y $2000 con intereses al 4% convertible trimestralmente, pagaderos en 6 años. Suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente, ¿cuál sería el pago único que tiene que hacer dentro de cuatro años para liquidar sus deudas?

4) M obtiene un préstamo de $5000 con intereses al 5% convertible semestralmente. Acepta pagar $1000 dentro de un año, $2000 en dos años y el saldo en tres años. Hallar el pago final.

5) Un terreno es vendido por $500 en efectivo y $250 anuales por los próximos cuatro años. Suponiendo un rendimiento del 6% efectivo, hallar el precio de contado del terreno.

6) El día de hoy se invierte en el banco $5000 al 36% anual en interés compuesto. ¿Cuánto tiempo debe pasar para obtener $25000?.

7) Un deudor puede liquidar sus deudas pagando (a) $8000 en la fecha o (b) $10000 dentro de cinco

años. ¿Qué opción debe aceptar suponiendo un rendimiento del 5% convertible semestralmente?. ¿Cuánto dinero perdería de no seleccionar la opción adecuada?

8) Al nacer su hijo, un padre desea invertir una cantidad tal, que acumulada al 8% convertible semestralmente importe $60000 cuando su hijo tenga 21 años. ¿Cuánto tendría que invertir?

9) Resuélvanse los problemas 6, 7 y 8 suponiendo que la tasa, a la que se hace referencia, es del 4.5% convertible mensualmente.

3.5 CASO PRACTICO

Una empresa desea aumentar su producción, y para ello dispone de varias alternativas o proyectos. Entre ellos se considera el de construir una nueva fábrica, cuyo proceso de construcción tardaría un año. La vida esperada del producto es de 5 años, después de los cuales el valor de rescate del activo fijo sería cero. Se considera que los flujos netos de efectivo son estocásticamentes independientes en cada periodo.

En la siguiente tabla se presentan los flujos netos para cada periodo y su variabilidad medida por los coeficientes de variación:

PERIODO	VALOR ESPERADO DEL FLUJO NETO $\$(E(F_i))$	COEFICIENTE DE VARIACION V_i
0	-2'000,000.00	0.00
1	-1'600,000.00	0.05
2	950,000.00	0.05
3	1'100,000.00	0.10
4	1'200,000.00	0.10
5	1'600,000.00	0.20
6	2'200,000.00	0.25

Se pretende decidir si el proyecto se rechaza o si pasa a posterior selección, considerando que el proyecto debe rechazarse si la probabilidad de que su Valor Presente Neto (VPN=f(c), donde "c" es el costo de capital) sea negativo es mayor que 0.05.

Si el costo de capital es del 8%, ¿se debe rechazar el proyecto o dejarlo para su posible aceptación?.

$$E(\,VPN\,) = \sum_{i=0}^{6} E(\,V^iF_i\,) = V^0E(F_0)+ V^1E(F_1)+..+ V^6E(F_6);\; V^t = (i+i)^{-t}.$$

$$E(VPN)= -2'000,000(1.08)^{-0} - 1'600,000(1.08)^{-1} +...+ 2'200,000(1.08)^{-6}$$

$$E(VPN)= \underline{1'563,547.98}$$

$$Var(\,VPN\,) = \sum_{i=0}^{6} Var(V^iF_i\,) + 2\sum_{K<L} Cov(F_K,F_L);$$

$$\sigma^2 = \{E(x)\ \nu\}^2 \text{ y } Cov(F_K,F_L)=0.$$

$Var(\,VPN\,) =$

$\{\,(-2'000,000)(0.00)\,\}^2 + (1.08)^{-2}\{\,(-1'600,000.00)(0.05)\,\}^2+...+$

$(1.08)^{-12}\{\,(2'200,000)(0.25)\,\}^2=$

$$\sigma^2 = \underline{190,108'229,100} \Rightarrow \sigma = \underline{436,014.024}$$

Si $P\{\,VPN < 0\,\} > 0.05 \Rightarrow$ Se rechaza.

Suponiendo una distribución Normal (aunque para ello se requiere de al menos 30 datos) y estandarizando, no se rechaza el proyecto ya que

$$P(z< -3.586003878)= 0.0001679 < 0.05$$

4 METODOS ANALITICOS PARA LA TOMA DE DECISIONES.

4.1 INTRODUCCION ELEMENTAL.

Supónganse P modelos diferentes n_1, n_2, ..., n_p de un bien n. Se desea adquirir un n_i que satisfaga todas las necesidades.

Supóngase un caso típico de selección de proyectos de inversión. Considere que una empresa agroalimentaria busca diversificarse y se propone invertir en una nueva actividad para la cual contempla las siguientes:

Proyecto 1 (P1): Adquirir y explotar un rancho en Jalisco.
Proyecto 2 (P2): Crear una granja avícola en Tlaxcala.
Proyecto 3 (P3): Levantar una granja de cría de cerdos en el Estado de México.
Proyecto 4 (P4): Revitalizar una fábrica de conservas en Morelos.
Proyecto 5 (P5): Invertir en una planta de embutidos en Querétaro.

Los aspectos a evaluar son los siguientes:

La rentabilidad (RE).
Posibilidades de crecimiento del mercado (CR)
Impacto ambiental (MA)

Factores de riesgo (RI)

Tiempo de recuperación (TR)

Y mediante un sondeo en el mercado se obtiene la siguiente información:

proyectos	RE	CR	RI	MA	TR
P1	14%	8%	débil	bueno	7 años
P2	16%	8%	grande	malo	2 años
P3	12%	9%	medio	muy malo	4 años
P4	13%	10%	débil	medio	4 años
P5	20%	12%	medio	malo	5 años

Del 1 al 5 evaluamos el riesgo (5 el más arriesgado) y del 1 al 10 evaluamos el impacto al medio ambiente (10 el mejor impacto).

La matriz anterior es llamada Matriz de Decisiones; P1, P2, P3, P4 y P5 son llamadas Alternativas de Decisión o Acciones; RE, CR, RI, MA y TR son los Criterios de Decisión o Estados de la Naturaleza y la información con que se llena la matriz se conoce como Valores de Estado.

En este matriz se pretende maximizar y minimizar la información de la siguiente forma:

	RE	CR	RI	MA	TR
P1	14	8	1	8	7
P2	16	8	5	3	2
P3	12	9	3	1	4
P4	13	10	1	5	4
P5	20	2	3	3	5
	MAX	MAX	MIN	MAX	MIN

Si se observa con detenimiento se puede eliminar P3 ya que P4 es mejor, es decir, P3 es dominada por P4.

A las opciones que quedan {P1, P2, P4, P5} se les denomina Optimo de Pareto.

4.2 ESTRUCTURA DE UN PROBLEMA DE DECISION.

Se entiende por Toma de Decisiones al proceso mediante el cuál se identifica un conjunto de cursos de acción o alternativas, se estiman sus consecuencias y a los estimados se les compara preferenciálmente para seleccionar el curso de acción que mejor convenga.

Alternativa.- Es el conjunto sobre el cual el decisor va a elegir.

a_i es alternativa i

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es el conjunto de alternativas

a_i y a_j deben ser diferentes, excluyentes y exhaustivas $\forall\ i \neq j$.

Estimado de Consecuencias.- El Estimado de Consecuencias de una alternativa es la información relevante para la elección, y describe lo que se esperaría sobre el logro de los objetivos si ésta se llevara a cabo.

El Estimado de Consecuencias puede ser de las siguientes clases:

Determinista	(bajo certeza)
Probabilista	(bajo riesgo)
Indeterminista	(Bajo incertidumbre)

Para que el decisor lleve a cabo su elección entre las alternativas del conjunto de elección se supone que posee al menos un eje de evaluación. Así por ejemplo serían el precio, la calidad, la estética, el color y la duración, entre algunos, si la decisión se refiere a diversas marcas de un producto.

Estos ejes de evaluación son las características de las alternativas y se llaman atributos. Cuando se añade a estos atributos un mínimo de información relativa a las preferencias del decisor, los atributos se convierten en criterios (estos últimos tienen propiedades cualitativas y cuantitativas).

Matriz de Decisión.- La Matriz M = $\{a_{ij}\}$ se llama Matriz de Decisión si cada fila expresa las cualidades de la alternativa i con respecto a los n atributos (criterios) considerados y cada columna j recoge las evaluaciones hechas por el decisor de todas las alternativas con respecto al criterio i.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\
a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_m & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
\end{array}
$$

4.3 RELACIONES BINARIAS.

Una Relación Binaria $\Re$ en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano AXA tal que:

$a\Re b \Leftrightarrow (a, b) \in \Re$

$\neg(a\Re b) = a\not\Re b \Leftrightarrow (a, b) \notin \Re$

Se dice que:

$\Re$ es transitiva si $\forall$ a, b y c$\in$ A, $a\Re b$ y $b\Re c \Rightarrow a\Re c$.

$\Re$ es simétrica si $\forall$ a y b $\in$ A, $a\Re b \Rightarrow b\Re a$.

$\Re$ es reflexiva si $\forall$ a $\in$ A, $a\Re a$.

$\Re$ es completa si $\forall$ a y b $\in$ A $\Rightarrow$ $a\Re b$, $b\Re a$ o ambas.

$\Re$ es asimétrica si $\forall$ a y b $\in$ A, $a\Re b \Rightarrow b\not\Re a$.

$\Re$ es antisimétrica si $\forall$ a y b $\in$ A, a$\Re$b y b$\Re$a $\Rightarrow$ a = b.

$\Re$ es transitiva negativa si $\forall$ a, b y c $\in$ A, a$\not\Re$b y b$\not\Re$c $\Rightarrow$ a$\not\Re$c.

- Cualquier relación transitiva se llama orden.
- Una relación transitiva y asimétrica es un orden estricto.
- Una relación transitiva y completa es un orden débil.
- Una relación transitiva y reflexiva es un orden parcial.
- Un orden débil antisimétrico es un orden simple o lineal.
- Una relación reflexiva, simétrica y transitiva se llama relación de equivalencia.

4.4 MEDICION Y ESCALAS.

Medida.- Se entiende por medida la asociación de símbolos a las propiedades de interés de un objeto; de tal manera que dichos símbolos guarden las mismas relaciones que las que poseen los atributos del objeto en estudio.

Es importante no confundir las propiedades del sistema numérico con el cual se está midiendo la característica de interés, con los atributos del objeto en estudio. Por ejemplo, al tener dos calificaciones en un examen {4 y 8}, el ocho no implica que el alumno tenga el doble de conocimiento con respecto a quién obtuvo cuatro.

Escala.- La escala es una representación alfanumérica, ordenada a lo largo de un eje, junto con las reglas que permiten manejar los símbolos o medidas representados en ellas. Desde un punto de vista puramente teórico es posible generar una cantidad infinita de escalas, no obstante, sólo un número muy pequeño de ellas tiene aplicación.

El tipo de escala se caracteriza con facilidad por el género de transformación que puede ser operado sobre ella, para obtener una nueva escala que mantenga las mismas propiedades que el original.

Los tipos de escala y de ordenamiento más comunes son los siguientes:

a) Escala Nominal.- Aquella que se usa para nombrar o clasificar. No hay orden y la única transformación es la identidad, $f(x) = x$.
   Ejemplo: Altura → Baja, Media y Alta

b) Escala Ordinal.- Aquella en la que existe una jerarquización u orden. Las transformaciones son monótonas crecientes.

c) Escala de Intervalo.- Las transformaciones posibles son de tipo lineal, $f(x) = ax + b;\ a \neq 0$.
   Ejemplo: la temperatura → $T°C = (1/9)(5T°F - 160)$.

d) Orden Parcial.- Se dice que un conjunto de objetos posee un orden parcial si no es posible comparar a todos ellos, por medio de una relación matemática.
   Ejemplo: $A = \{ a, b, 1, 2, 3\}$

e) Orden Débil.- Aunque todos los elementos de un conjunto se puedan comparar entre sí, si existen elementos repetidos, los cuales recibirán la misma etiqueta por estar en la misma posición dentro de una escala, corresponderán a un ordenamiento débil.
Ejemplo: A = { 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5}

f) Ordenamiento Completo o Simple.- Es aquel donde es posible comparar todos los elementos entre sí, además de que cada uno de ellos recibe una etiqueta diferente que lo distingue.
Ejemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5}

4.5 ESTRUCTURA DE PREFERENCIAS.

La preferencia es una relación binaria.

Se dice que:

1) El decisor prefiere estrictamente a "a" sobre "b" cuando su elección se efectúa sin ninguna duda en "a", y se denota aPb o a>b.

2) El decisor es indiferente entre "a" y "b" cuando acepta indistintamente una alternativa frente a la otra, y se denota aIb o a≈b.

3) El decisor no sabe si prefiere estrictamente a "a" sobre "b" o si es indiferente entre las dos, se dice entonces que tiene una preferencia débil entre "a" y "b", y se denota aQb o a≥b.

4) Cuando el decisor es incapaz o rechace escoger entre dos alternativas, significará que las alternativas son incomparables, es decir que no ocurre a≥b ni b≥a, y se denota por aJb.

4.6 METODOS DE DECISION BAJO INCERTIDUMBRE.

Recordemos que una matriz de decisiones tiene la siguiente estructura:

$$
\left|\begin{array}{cccccc}
 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_n \\
a_1 & v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\
a_2 & v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\
a_3 & v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_m & v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mn}
\end{array}\right|
$$

donde los θ_J son los estados de la naturaleza,

Las a_J son las acciones y

Las V_{iJ} son los valores del estado.

4.6.1 CRITERIO DE WALD.

Los criterios de MAXIMIN y MINIMAX de Wald se consideran como criterios pesimistas, ya que esperan que suceda lo peor.

Cuando se espera analizar Beneficios se usa el criterio MAXIMIN donde lo que se busca es que del menor beneficio esperado, de cada una de las acciones, se seleccione el mayor. Es decir:

$$Max_{\ a_i\ {}_{i=1}^{m}} \left\{ Min_{\ \theta_J\ {}_{j=1}^{n}} \left\{ v_{iJ} \right\} \right\}$$

Cuando se espera analizar Costos se usa el criterio MINIMAX donde lo que se busca es que del Mayor costo esperado, de cada una de las acciones, se seleccione el menor. Es decir:

$$Min_{\ a_i\ {}_{i=1}^{m}} \left\{ Max_{\ \theta_J\ {}_{j=1}^{n}} \left\{ v_{iJ} \right\} \right\}$$

Ejemplo:

Una asociación de padres de familia de una escuela está organizando un evento para recabar fondos. Hay dos alternativas sobre las cuales un comité debe decidir: un día deportivo o una parrillada. Los fondos recabados a partir de cada evento naturalmente dependen del clima en el día del evento, simplificando se asume que hay dos posibilidades: clima húmedo y clima seco. Los fondos recabables pueden ser:

Fondos recabables	Clima Húmedo	Clima seco	Min{V(a_i, θ_J)
Día depotivo	\$85	\$120	**85**
Parrillada	\$75	\$150	75

El director sugiere que dedo el propósito del evento se deben evitar los riesgos. De acuerdo con el criterio de MAXIMIN (ya que se trata de beneficios) la mejor opción será organizar el día deportivo que asegura ingresos de al menos \$85.

4.6.2 CRITERIO DE HURWICZ.

Los criterios de MAXIMAX y MINIMIN de Hurwicz se consideran como criterios optimistas, ya que están apoyados en la idea de que las personas tenemos golpes de suerte favorables.

Hurwicz no sugiere que los decisores sean absolutamente optimistas en todos los casos; esto equivaldría a vivir en un estado utópico, y no en un mundo real, y para vencer este optimismo total, introdujo el concepto de coeficiente de optimismo. Este coeficiente implica que los decisores deben considerar tanto el pago más alto como el más bajo, y deben considerar la importancia de ambos atendiendo a ciertos factores de probabilidad (Si alfa tiende a uno se trata de un análisis optimista).

Cuando se espera analizar Beneficios se usa el criterio **MAXIMAX** donde lo que se busca es que de la ponderación entre el mayor y el menor beneficio esperado, de cada una de las acciones, se seleccione la mayor. Es decir:

$$Max_{\,a_i\,}{}_{i=1}^{m} \left\{ \alpha Max_{\,\theta_J\,}{}_{j=1}^{n} \{v_{iJ}\} + (1-\alpha) Min_{\,\theta_J\,}{}_{j=1}^{n} \{v_{iJ}\} \right\}$$

Cuando se espera analizar Costos se usa el criterio **MINIMIN** donde lo que se busca es que de la ponderación entre el menor y el mayor costo esperado, de cada una de las acciones, se seleccione la menor. Es decir:

$$Min_{\,a_i\,}{}_{i=1}^{m} \left\{ \alpha Min_{\,\theta_J\,}{}_{j=1}^{n} \{v_{iJ}\} + (1-\alpha) Max_{\,\theta_J\,}{}_{j=1}^{n} \{v_{iJ}\} \right\}$$

Ejemplo:

Analizando mediante el criterio de Hurwicz el problema anterior y suponiendo $\alpha = 0.7$, se obtiene lo siguiente:

Fondos recabables	Clima húmedo	Clima seco	αmax+(1-α)min
Día deportivo	85	120	0.7(120)+0.3(85) = 109.5
Parrillada	75	150	**0.7(150)+0.3(75) = 127.5**

Por lo que, a partir de este criterio (MAXIMAX), se recomienda hacer la parrillada, esperando beneficios de $127.5

4.6.3 CRITERIO DE SAVAGE.

En 1951 Savage argumentó que usando los valores Vij como guía de elección, el decisor puede comparar el valor de la consecuencia de una acción bajo un estado de naturaleza con los valores de todas las consecuencias, ya que los estados de naturaleza de ellos ocurren por debajo. Pero el estado de naturaleza actual está mas allá del control de decisor. Ciertamente la consecuencia de una acción debe ser solamente comparada con las consecuencias de otras bajo el mismo estado de la naturaleza y para ello efectúa las siguientes transformaciones:

Cuando se espera analizar Beneficios se usa el criterio MINIMAX de Wald aplicando antes una transformación que consiste en calcular la diferencia del máximo valor de cada columna con el resto de la misma. Es decir:

$$Min \quad a_i {}_{i=1}^{m} \left\{ Max \quad \theta_J {}_{j=1}^{n} \left\{ v_{iJ} \right\} - v_{ij} \right\}$$

Cuando se espera analizar Costos se usa el criterio MAXIMIN de Wald aplicando antes una transformación que consiste en calcular la diferencia de toda la columna con el mínimo valor de la misma. Es decir:

$$Max \; a_i {}_{i=1}^{m} \left\{ v_{ij} - Min \; \theta_J {}_{j=1}^{n} \left\{ v_{iJ} \right\} \right\}$$

Ejemplo:

Analizando el problema del día de campo o la parrillada mediante el criterio de Savage, se obtiene lo siguiente:

De la matriz original

Fondos recabables	Clima Húmedo	Clima seco
Día depotivo	$85	$120
Parrillada	$75	$150

se aplica la transformación para beneficios y se obtiene la siguiente matriz:

Fondos recabables	Clima Húmedo	Clima seco	Max
Día depotivo	85 – 85 = 0	150 – 120 = 30	30
Parrillada	85 - 75 = 10	150 – 150 = 0	**10**

y al aplicar el criterio MINIMAX se determina elegir la parrillada.

4.6.4 CRITERIO DE LAPLACE.

El criterio de Laplace es llamado también Principio de la Razón de Insuficiencia.
No saber nada acerca de todos los estados naturales verdaderos es equivalente a suponer que todos sean equiprobables.

Cuando se espera analizar Beneficios se usa el criterio **MAXIMIN** donde lo que se busca es que del menor beneficio esperado, de cada una de las acciones, se seleccione el mayor. Es decir:

$$Max \quad a_i {}_{i=1}^{m} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \right\}$$

Cuando se espera analizar Costos se usa el criterio **MINIMAX** donde lo que se busca es que del Mayor costo esperado, de cada una de las acciones, se seleccione el menor. Es decir:

$$Min \quad a_i {}_{i=1}^{m} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \right\}$$

Ejemplo:

Analizando el problema del día de campo o la parrillada mediante el criterio de Laplace, se obtiene lo siguiente:

Fondos recabables	Clima húmedo	Clima seco	Promedio
Día deportivo	85	120	(1/2)(85+120) = 102.5
Parrillada	75	150	**(1/2)(75+150) = 112.5**

Y al aplicar el máximo (dado que son beneficios) se elige la Parrillada.

4.6.5 METODO DE LA SUMA PONDERADA.

Es bastante común en la decisión multicriterio que unos criterios tengan para el decisor más relevancia que otros.

Se denomina Pesos o ponderaciones a estas medidas de importancia relativa, que los criterios tienen para el decisor. Se denominrá W_J (J=1,...,n) como el peso asignado al criterio J.

Suponiendo por un momento que tales pesos ya están determinados, el método de Suma Ponderara (lineal), tiene como principal virtud la de ser muy intuitiva y simple de aplicar.

Ejemplo:

La siguiente tabla contiene las evaluaciones del personal junto con una valoración o peso en escala del 0 al 5.

Criterios Alternativas	C1 Rendimiento	C2 Calidad	C3 Edad	C4 Personalidad	C5 Carácter
Alberto	6	5	28	5	5
Blanca	4	2	25	10	9
Daniel	5	7	35	9	6
Emilia	6	1	27	6	7
Germán	6	8	30	7	9
Hilario	5	6	26	4	8
Pesos	5	5	2	4	4
	MAX	MAX	MIN	MAX	MAX

Se suma la información contenida en cada columna (desde Alberto hasta Hilario) para obtener el total, y cada una de las entradas se divide entre este total. Para el criterio tres (minimizar) se efectúa el mismo procedimiento pero con los inversos multiplicativos. Por último, el renglón que corresponde a los pesos se trabaja igual. Así obtenemos la siguiente tabla:

Criterios Alternativas	C1 Rendimiento	C2 Calidad	C3 Edad	C4 Personalidad	C5 Carácter
Alberto	0.188	0.172	0.168	0.122	0.114
Blanca	0.125	0.069	0.188	0.244	0.205
Daniel	0.156	0.241	0.134	0.220	0.136
Emilia	0.188	0.034	0.174	0.146	0.159
Germán	0.188	0.276	0.156	0.171	0.205
Hilario	0.156	0.207	0.180	0.098	0.182
Pesos	0.25	0.25	0.10	0.20	0.20

El último paso del método de Suma Ponderada consiste en obtener la evaluación global $R(a_i)$, multiplicando cada una de las entradas (por renglón), por su correspondiente peso (por columna), es decir:

R(Alberto)=(0.188)(0.25)+(0.172)(0.25)+(0.168)(0.1)+(0.122)(0.2)+(0.114)(0.2)=0.154
R(Blanca)=0.157
R(Daniel)=0.184
R(Emilia)00 134
R(Germán)=0.207
R(Hilario)=0.165

Por lo que el candidato a elegir sería Germán.

En realidad, El método permite dar una ordenación completa final de todos los candidatos. 1° Germán, 2° Daniel, 3° Hilario, 4ª Blanca, 5° Alberto y 6ª Emilia.

4.6.6 METODO DE ENTROPIA.

Se trata de un método "objetivo" de asignación de pesos, ya que estos se determinan en función de las evaluaciones de la matriz de decisión, sin que influyan las preferencias del decisor.

La idea esencial reside en que la importancia relativa del criterio j en una situación dada de decisión, medida por su peso W_J está directamente relacionada con la cantidad de información intrínsecamente aportada por el conjunto de las alternativas respecto a dicho criterio.

El procedimiento es el siguiente:

a) Partamos de las evaluaciones a_{ij} { (i = 1,...,m), (J = 1,...,n) } ya normalizadas como fracción de la suma $\Sigma_i a_{ij}$ de las evaluaciones originales de cada criterio j.

b) Calculemos la Entropía E_J de cada criterio: $E_J = -k \, \Sigma_i \, a_{ij} \, \mathrm{Log} a_{ij}$; con $k = 1/\mathrm{Log} m$ para que $0 \leq E_J \leq 1$.

c) La Entropía E_J de un criterio es tanto mayor cuanto más iguales son sus evaluaciones a_J. Precisamente lo contrario de lo que se desearía que ocurriera si E_J fuese un valor aproximado del peso W_J del criterio. Se utiliza entonces, el complemento que es la medida opuesta llamada diversidad D_J del criterio. $D_J = 1 - E_J$.

d) Finalmente se normalizan a suma uno las diversidades D_J y se obtienen los pesos buscados de la siguiente forma: $W_J = D_J / \Sigma_J D_J$.

Ejemplo:

Supóngase la tabla del ejemplo anterior:

Criterios / Alternativas	C1 MAX	C2 MAX	C3 MIN	C4 MAX	C5 MAX
Alberto	6	5	28	5	5
Blanca	4	2	25	10	9
Daniel	5	7	35	9	6
Emilia	6	1	27	6	7
Germán	6	8	30	7	9
Hilario	5	6	26	4	8

Se normalizan las evaluaciones como fracción de suma:

Criterios / Alternativas	C1	C2	C3	C4	C5
Alberto	0.188	0.172	0.168	0.122	0.114
Blanca	0.125	0.069	0.188	0.244	0.205
Daniel	0.156	0.241	0.134	0.220	0.136
Emilia	0.188	0.034	0.174	0.146	0.159
Germán	0.188	0.276	0.156	0.171	0.205
Hilario	0.156	0.207	0.180	0.098	0.182

Se obtienen las Entropías, las Diversidades y los Pesos normalizados:

Criterios	$E_J = -(1/\log 6)\ \Sigma_i\ a_{ij} \operatorname{Log} a_{ij}$	$D_J = 1 - E_J$	$W_J = D_J / \Sigma_J D_J$
C1	0.995	0.005	0.04
C2	0.908	0.092	0.66
C3	0.997	0.003	0.02
C4	0.973	0.027	0.19
C5	0.988	0.012	0.09

Alternativas	$\Sigma_J\ a_{ij}\ W_J$	Ordenación.
Alberto	0.16054	4°
Blanca	0.11911	5°
Daniel	0.22202	2°
Emilia	0.07549	6°
Germán	0.24374	1°
Hilario	0.18146	3°

En este momento todavía es posible modular los pesos W_J obtenidos, multiplicándolos por otros x_J estimados, teniendo en cuenta las preferencias del decisor, con la finalidad de obtener unos resultados $y_J = W_J\, x_J$, que una vez normalizados constituyen los pesos finales a utilizar.

4.6.7 METODO DE ORDENACION SIMPLE (RANKING).

a) Lo único que se le demanda al decisor es que efectúe una ordenación de los n criterios según la importancia o preferencia que para él tengan. Al último (menos importante) se le da el valor uno, al penúltimo se la da el valor dos, y así sucesivamente hasta asignar el valor de n al primer criterio.

b) Pueden presentarse empates. Estos se cuantificarán con su valor promedio (el de asignación por orden).

c) Finalmente se normalizan a suma uno tales valores.

Ejemplo:

Supóngase que se asignan los siguientes valores para la ordenación:

Orden	Criterio	
1°	Experiencia profesional	EXP
2°	Estudios superiores	EST
3°/4°	Entrevista	ENT
3°/4°	Test psicotécnico	TES
5°	Edad	EDA

Se pueden asignar los siguientes valores, dados los empates de ENT y TES:

EST	EXP	EDA	ENT	TES
4	5	1	2.5	2.5

Normalizando a suma uno se obtiene lo siguiente:

EST	EXP	EDA	ENT	TES
0.26	0.33	0.07	0.17	0.17

Que corresponde a la asignación definitiva de los pesos.

4.7 ARBOLES DE DECISION.

En una forma clara y sencilla de estructurar un proceso de toma de decisiones, el árbol está formado por:

a) Nodos de Acción.- Se denotan mediante cuadrados y representan aquellos lugares del proceso de toma de decisiones en los que se toma una decisión.
b) Nodos de probabilidad.- Se denotan mediante círculos e indican aquellas partes del proceso de toma de decisiones en las que ocurre algún estado de la naturaleza.
c) Ramas.- Se utilizan para denotar las decisiones o los estados de la naturaleza, sobre éstas suele anotarse la probabilidad correspondiente.
d) Pagos.- Se colocan al final de las ramas terminales del estado de la naturaleza para mostrar el resultado que se obtendría al tomar una

decisión en particular, y que después ocurra un estado específico de la naturaleza.

La forma de analizar mediante un diagrama de árbol, es obteniendo el valor esperado de los nodos de probabilidad y en los nodos de decisión (de derecha a izquierda) y eliminar del análisis aquellos que no convengan al decisor.

Ejemplo:

Supóngase que se tiene una empresa y existe la posibilidad de crear un nuevo artículo, para lo cual se efectúa un estudio de mercado y se observa lo siguiente:

a) Si se continúa con los mismos productos, se obtendrá una ganancia de \$150,000 (L_1).
b) Si se realiza el nuevo producto puede ser que se tengan ganancias de \$300,000 (alta L_2), \$100,000 (media L_3) o -\$100,000 (baja L_4 con pérdida)

Además se conocen las probabilidades de obtener cada una de las demandas, siendo éstas las siguientes:

$P(L_2) = 0.3$, $P(L_3) = 0.5$ y $P(L_4) = 0.2$.

El empresario puede contratar un estudio de mercado cuyo costo es de \$20,000, para determinar si el mercado es fuerte, regular o débil.

Considerando las siguientes probabilidades condicionales:

$P(*/L_i)$	L_2	L_3	L_4
Fuerte	0.8	0.2	0
Regular	0.2	0.6	0.3
Débil	0	0.2	0.7

se calculan $P(f) = 0.34$, $P(r) = 0.42$, $P(d) = 0.24$

$P(L_i / f)$, $P(L_i / r)$ y $P(L_i / d)$ (aplicando la Regla de Bayes[1])

y se construye el árbol de la siguiente forma:

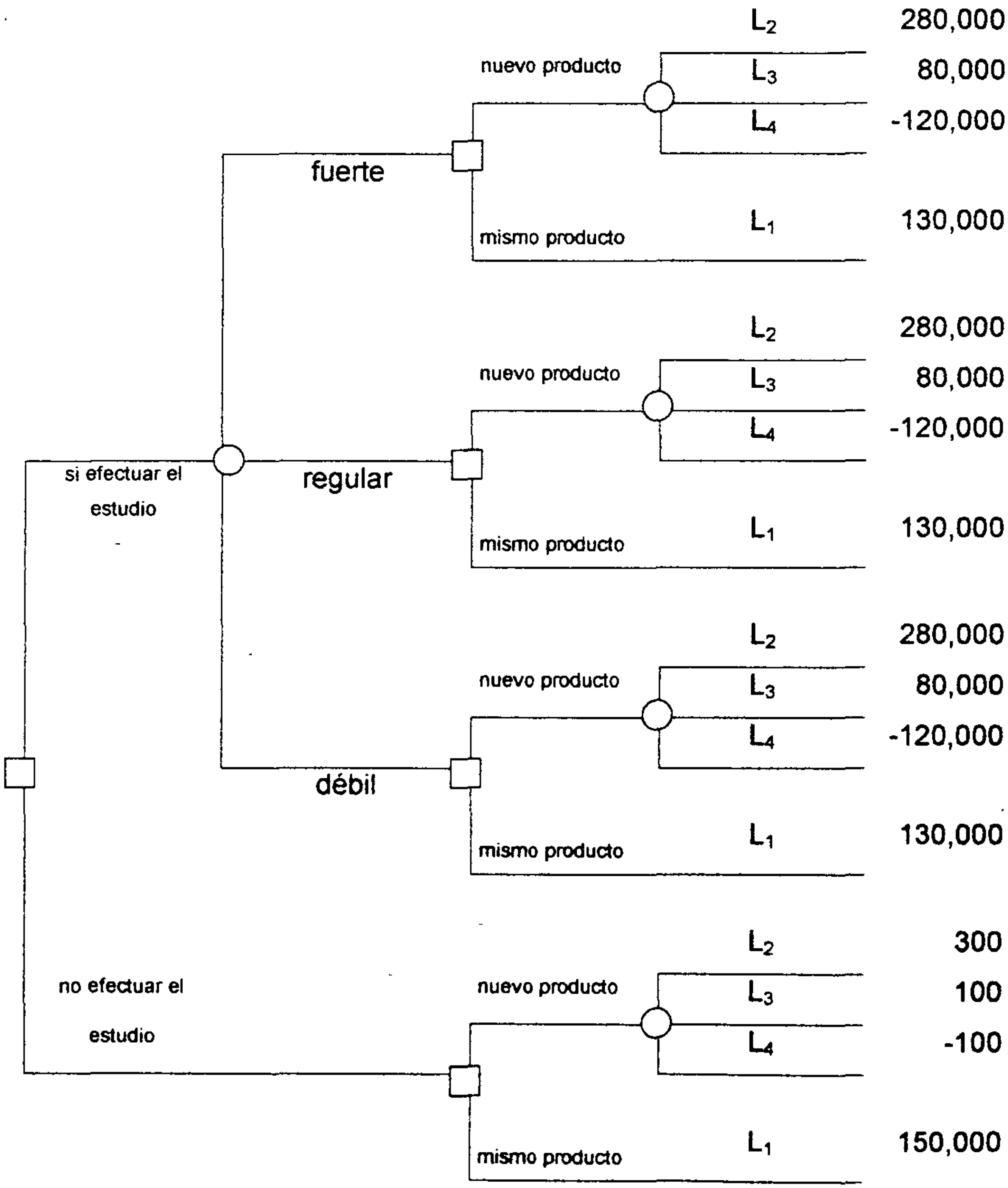
1) Se señalan todas las ramificaciones, considerando los nodos de decisión y de probabilidad, junto con la información que se tiene.

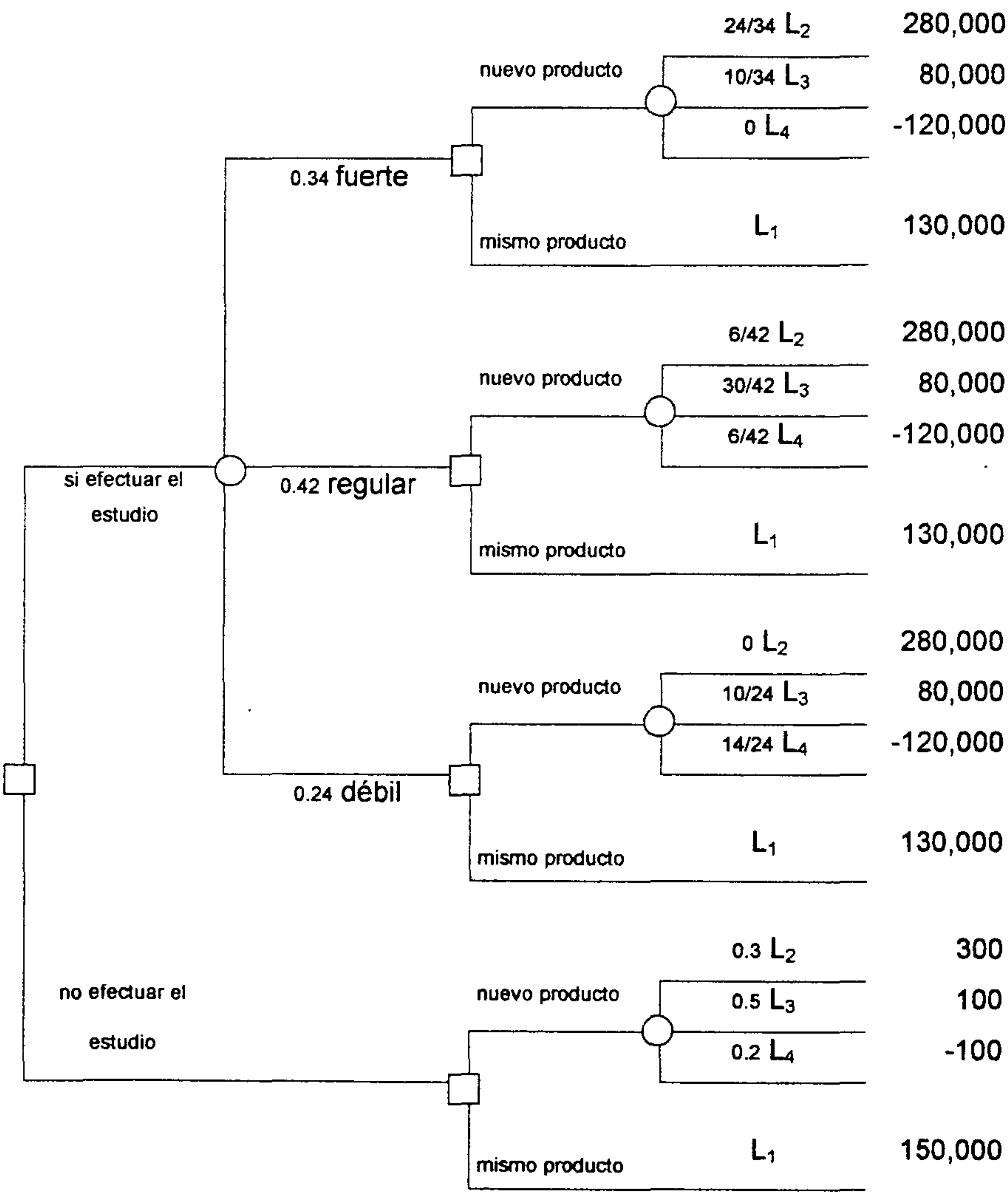
2) Se calcula el valor esperado, esperanza matemática, de los nodos de derecha a izquierda y

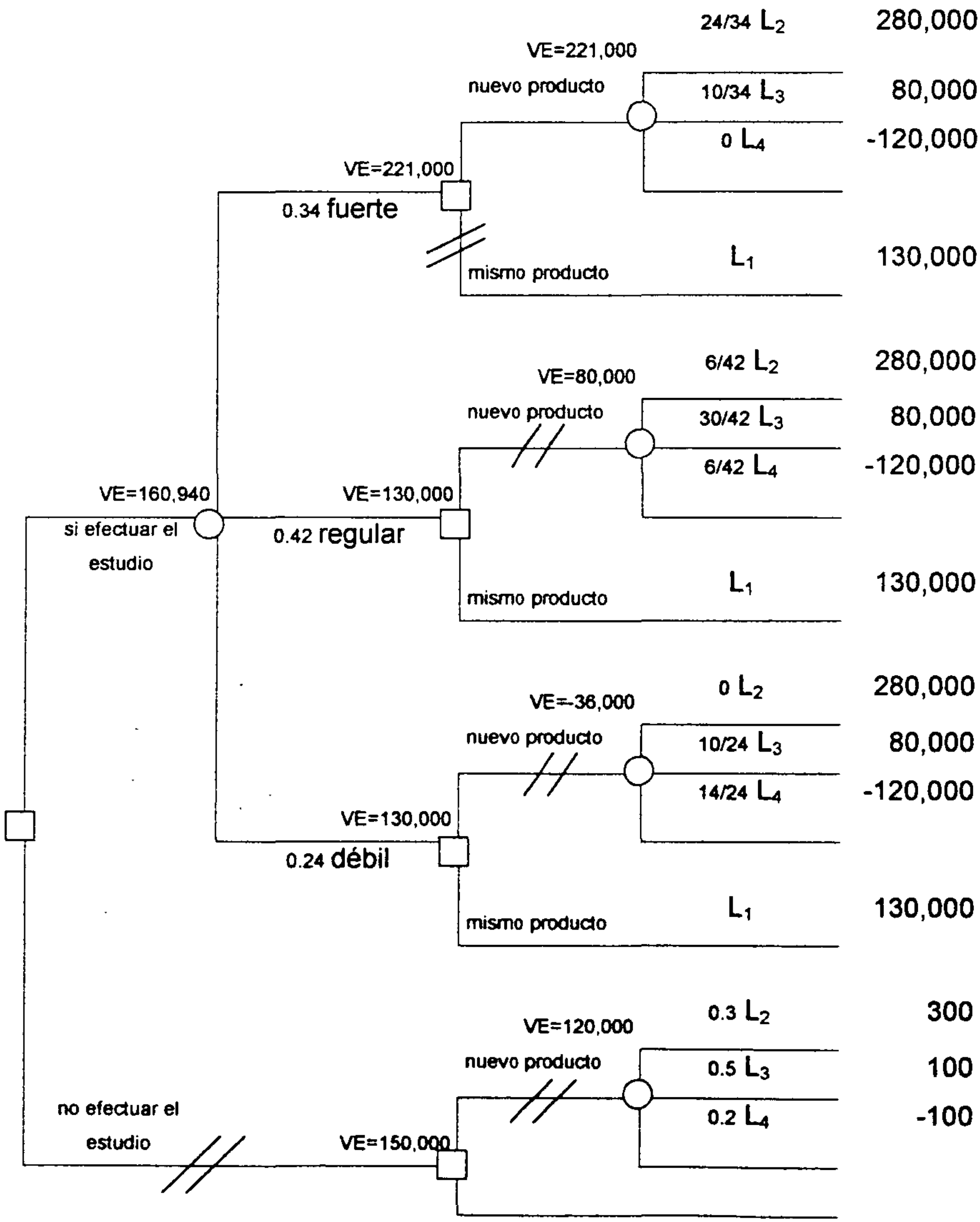
3) Se comparan estas esperanzas para seleccionar la que más convenga.

4) Se repiten los pasos dos y tres hasta obtener una decisión final.

[1] Ver las notas del curso de Probabilidad, Estadística y Matemáticas Financieras del autor.


L2
280,000
nuevo producto
L3
80,000
L4
-120,000
fuerte
mismo producto
L1
130,000
L2
280,000
nuevo producto
L3
80,000
L4
-120,000
si efectuar el estudio
regular
mismo producto
L1
130,000
L2
280,000
nuevo producto
L3
80,000
L4
-120,000
débil
mismo producto
L1
130,000
L2
300
no efectuar el estudio
nuevo producto
L3
100
L4
-100
mismo producto
L1
150,000


24/34 L_2
280,000
nuevo producto
10/34 L_3
80,000
0 L_4
-120,000
0.34 fuerte
mismo producto
L_1
130,000
6/42 L_2
280,000
nuevo producto
30/42 L_3
80,000
6/42 L_4
-120,000
si efectuar el estudio
0.42 regular
mismo producto
L_1
130,000
0 L_2
280,000
nuevo producto
10/24 L_3
80,000
14/24 L_4
-120,000
0.24 débil
mismo producto
L_1
130,000
0.3 L_2
300
no efectuar el estudio
nuevo producto
0.5 L_3
100
0.2 L_4
-100
mismo producto
L_1
150,000


24/34 L_2
280,000
VE=221,000
nuevo producto
10/34 L_3
80,000
0 L_4
-120,000
VE=221,000
0.34 fuerte
mismo producto
L_1
130,000
6/42 L_2
280,000
VE=80,000
nuevo producto
30/42 L_3
80,000
6/42 L_4
-120,000
VE=160,940
si efectuar el estudio
VE=130,000
0.42 regular
mismo producto
L_1
130,000
0 L_2
280,000
VE=-36,000
nuevo producto
10/24 L_3
80,000
14/24 L_4
-120,000
VE=130,000
0.24 débil
mismo producto
L_1
130,000
0.3 L_2
300
VE=120,000
nuevo producto
0.5 L_3
100
0.2 L_4
-100
no efectuar el estudio
VE=150,000

mismo producto	L_1	150,000

4.9 MODELO DE SIMULACION DE MONTE CARLO.

El modelo de Monte Carlo, llamado también método de ensayos estadísticos, es una técnica de simulación de situaciones inciertas que permite definir valores esperados para variables no controlables, mediante la selección aleatoria de valores, donde la probabilidad de elegir entre todos los resultados posibles está en estricta relación con sus respectivas distribuciones de probabilidad.

Si las variables inciertas relevantes en un proyecto fuesen por ejemplo, la demanda y la participación del mercado, deberá aplicarse en ambas la simulación para estimar su comportamiento en el futuro. Supóngase que estudios realizados señalan que la demanda global esperada del mercado tiene la siguiente distribución de probabilidades:

Demanda	Probabilidad
200,000	0.10
250,000	0.25
300,000	0.35
350,000	0.15
400,000	0.10
450,000	0.05

Al mismo tiempo, supóngase que la participación en el mercado para el proyecto, sea también una variable incierta, para la cual se estima la siguiente distribución de probabilidades:

Participación	Probabilidad
0.08	0.26
0.09	0.22
0.10	0.16
0.11	0.13
0.12	0.10
0.13	0.07
0.14	0.05
0.15	0.01

Supóngase, además, que la demanda global del mercado está correlacionada con la tasa de crecimiento de la población, que se estima en un 2% anual a futuro. El precio y los costos asociados al proyecto se suponen conocidos o menos incierto su resultado a futuro.

El primer paso en la solución consiste en expresar matemáticamente el problema. En este caso, la demanda por año que podría enfrentar el proyecto puede expresarse como $D_p = D_g p$, donde D_p corresponde a la demanda del proyecto, D_g a la demanda global y p al porcentaje de participación del proyecto en el mercado.

La tasa de crecimiento de la demanda se incorporará al final como un factor de incremento sobre la demanda del proyecto. Una forma alternativa es incorporarlo en la ecuación anterior, lo que permite obtener el mismo resultado pero con cálculos más complejos.

El siguiente paso del método de Monte Carlo es la especificación de la distribución de probabilidades de cada variable. En el ejemplo, las variables que deben especificar su distribución de probabilidades son la demanda global del mercado y la participación del proyecto. En ambos casos se deberá posteriormente calcular la distribución de probabilidad acumulada y la asignación de rangos de números entre 0 y 99 (es decir 100 números):

Demanda global	Distribución de probabilidades	Probabilidad acumulada	Asignación de números representativos
200,000	0.10	0.10	00 – 09
250,000	0.25	0.35	10 – 34
300,000	0.35	0.70	35 – 69
350,000	0.15	0.85	70 – 84
400,000	0.10	0.95	85 – 94
450,000	0.05	1.00	95 - 99

Participación de mercado	Distribución de probabilidades	Probabilidad acumulada	Asignación de números representativos
0.08	0.26	0.26	00 - 25
0.09	0.22	0.48	26 – 47
0.10	0.16	0.64	48 – 63
0.11	0.13	0.77	64 – 76
0.12	0.10	0.87	77 – 86
0.13	0.07	0.94	87 – 93
0.14	0.05	0.99	94 – 98
0.15	0.01	1.00	99

La asignación de números representativos se efectúa en proporción a la probabilidad acumulada. Así, si el 10% se encuentra en el rango de hasta

200,000, deben asignarse diez números representativos (0 al 9). Como hasta 250,000 hay un 35% de probabilidades, se asignan 35 números representativos (0 al 34).

La etapa siguiente del modelo requiere generar números aleatorios al azar. Cada número seleccionado debe ubicarse en la columna "Asignación de números representativos". Una vez localizado, se da el valor correspondiente de demanda global, el cual se ajusta por el porcentaje de participación en el mercado obtenido de igual forma.

Prueba	Demanda global	Participación	Demanda global	Participación	Valor demanda Proyecto
1	23	5	250,000	0.08	20,000
2	14	38	250,000	0.09	22,500
3	97	11	450,000	0.08	36,000
4	43	93	300,000	0.13	39,000
5	49	36	300,000	0.09	27,000
6	7	43	200,000	0.09	18,000
7	61	31	300,000	0.09	27,000
8	57	9	300,000	0.08	24,000
9	97	93	450,000	0.13	58,500
10	72	61	350,000	0.10	35,000
11	97	89	450,000	0.13	58,500
12	25	81	250,000	0.12	30,000
13	11	15	250,000	0.08	20,000
14	54	87	300,000	0.13	39,000
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
100	95	23	450,000	0.08	36,000

Basados en los resultados de las 100 pruebas aleatorias para cada variable, debe elaborarse una distribución de probabilidades para la demanda del proyecto. El análisis de la distribución de probabilidades acumuladas, permite determinar la probabilidad de que la demanda del proyecto se encuentre bajo un determinado valor.

Rango total de demanda	Observaciones en el rango	Distribuciones de probabilidad	Probabilidad acumulada
15,000 – 19,999	6	0.06	0.06
20,000 – 24,999	26	0.26	0.32
25,000 – 29,999	22	0.22	0.54
30,000 – 34,999	13	0.13	0.67
35,000 – 39,999	19	0.19	0.86
40,000 – 44,999	5	0.05	0.91
45,000 – 49,999	5	0.05	0.96
50,000 – 54,999	0	0.00	0.96
55,000 – 59,000	3	0.03	0.99
60,000 – 64,000	1	0.01	1.00

Por otra parte, el valor esperado de la demanda del proyecto para el primer año es de 31,150 unidades. Luego, si la tasa de crecimiento estimada fuese de un 2% anual, podría esperarse una demanda para el proyecto de:

Año	Demanda
1	31,150
2	31,773
3	32,408
4	33,057
5	33,718

CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}\, dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1-\Phi(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN VALUACIÓN INMOBILIARIA, INDUSTRIAL Y DE NEGOCIOS

MODULO III
CA O4
VALUACIÓN DE NEGOCIOS

TEMA

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

EXPOSITOR: M. EN I. ENRIQUE A. HERNÁNDEZ RUIZ
PALACIO DE MINERIA
ABRIL DEL 2002

Palacio de Minería, Calle de Tacuba No. 5, Primer piso, Delegación Cuauhtémoc, CP 06000, Centro Histórico, México D.F., APDO Postal M-2285 • Tels: 5521.4021 al 24, 5623.2910 y 5623.2971 • Fax: 5510.0573

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

Los movimientos económicos existentes en la sociedad en general han creado desde hace mucho tiempo el concepto de préstamo o "mutuo". Un préstamo es la facilitación que una persona con excedentes de recursos económicos hace a otra para quien esos recursos son escasos, a cambio de la reintegración de ese mismo recurso económico más un "interés" en un momento posterior.

El "interés" es la cantidad o cuantía monetaria que se debe pagar, en el momento establecido, por el uso del recurso económico ajeno referido, sin menoscabo de su reintegración a quien lo prestó. A este recurso económico prestado se le denomina "suerte principal".

Como es lógico de pensar, un préstamo es regido por usos y costumbres de índole comercial, por lo que será necesario definir fundamentos que servirán de principio para el desarrollo de la "teoría del interés" y de la "teoría del descuento".

Se comenzará por denominar al recurso económico prestado como "suerte principal"; se llamará "plazo" al tiempo total en que debe ser reintegrado el préstamo y su interés generado, y "periodo" al tiempo que transcurre entre la aplicación de un interés y otro. Debe tenerse presente que el plazo y el periodo no necesariamente son equivalentes, es más, puede decirse que el plazo es el conjunto de periodos que transcurren para la reintegración de la suerte principal y su interés generado.

Sin embargo, existen lapsos menores al periodo en que suele calcularse el interés que corresponde para integrarlo a la suerte principal, de tal manera que ésta será mayor la siguiente vez que vuelva a calcularse el interés respectivo. A esta forma de generación de intereses se le conoce como "interés compuesto", y a los lapsos referidos en esta idea se le conocen como "subperiodos". Habrá que entender que un conjunto de subperiodos formará un periodo, y como anteriormente se dijo, un conjunto de periodos formarán el plazo.

Para efectos de nomenclatura, se designará a cada subperiodo con la literal "m", a cada periodo con la literal "n", y el plazo quedará referido consecuentemente con el producto "mn". La suerte principal se denotará con la sigla "C_0", y el monto que se debe reintegrar en un momento determinado se entenderá como "C_1, C_2, C_3, ..., C_{mn}", el cual será equivalente a la suerte principal original, más los intereses generados al momento; lo anterior significa que "m" se variará desde la unidad y hasta el número total de subperiodos que tenga cada periodo, y de manera análoga, "n" se variará también desde la unidad y hasta el número total de periodos que tenga el plazo.

Con lo anterior se deduce que, siempre y cuando el interés sea diferente de cero, las cantidades en el tiempo serán diferentes entre sí, es decir que:

$$C_0 \neq C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq \dots \neq C_{mn},$$

y por esta razón se afirma que un recurso económico tiene valor en el tiempo, denominando a la cantidad de la extrema izquierda como "valor presente" respecto de los valores a su derecha, y a la cantidad de la extrema derecha como "valor futuro" respecto de los que están a su izquierda.

TEORÍA DEL INTERÉS

El interés que se pacta pagar por el préstamo en cada subperiodo se establecerá como una proporción de la suerte principal, es decir, se calculará mediante el producto de la misma por una "tasa" expresada en términos porcentuales, y denotada como "i'"; con lo cual se obtiene que:

$$I' = C_0\,(i'),$$

y si se desea conocer la "tasa de interés nominal del periodo", entonces bastará con multiplicar el número total de subperiodos de cada periodo por la tasa de cada subperiodo, es decir:

$$i_{(m)} = m\,i',$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, "i'" es la tasa de interés aplicable en cada subperiodo para el cálculo del interés, y la tasa de interés nominal del periodo "$i_{(m)}$" se conocerá simplemente con el nombre de "tasa nominal de interés".

Con esto, es posible definir la tasa de interés aplicable en cada subperiodo de la siguiente manera:

$$\mathbf{i' = i_{(m)} / m.}$$

Ahora bien, si nos referimos a los montos "C_1, C_2, C_3, ..., C_{mn}" indicados anteriormente, esta tasa tiene la siguiente equivalencia:

$$i' = (C_{k+1} - C_k) / C_k,$$

donde el subíndice "k" señala el monto de un subperiodo específico, y variará desde cero, haciendo referencia a la suerte principal, hasta el valor del producto "mn".

La teoría del interés parte de esta última expresión, en la cual la tasa de interés es vista como un cociente o razón de cambio de la diferencia entre el monto siguiente y el anterior, respecto del monto anterior.

Ahora se puede deducir otra expresión que calcule el siguiente monto a pagar con fundamento en lo anterior de la siguiente manera:

$$C_k\,(i') = C_{k+1} - C_k$$
$$C_{k+1} = C_k + C_k\,(i')$$
$$C_{k+1} = C_k\,(1 + i')$$

Sin embargo, habrá que considerar la idea del interés compuesto introducida anteriormente, pues cuando un interés no es pagado en el subperiodo correspondiente, es costumbre que éste se adicione a la suerte principal; y con este nuevo monto incrementado, se calculará el interés del siguiente subperiodo.

Si esta situación se repite, aplicando la misma tasa en cada subperiodo, se aplicará la misma mecánica, generalizándola de la siguiente manera:

$$C_1 = C_0\,(1 + i')$$

$$C_2 = C_1\,(1 + i')$$
$$C_2 = C_0\,(1 + i')\,(1 + i')$$
$$C_2 = C_0\,(1 + i')^2$$

$$C_3 = C_2\,(1 + i')$$
$$C_3 = C_0\,(1 + i')^2\,(1 + i')$$
$$C_3 = C_0\,(1 + i')^3$$

$$C_4 = C_3\,(1 + i')$$
$$C_4 = C_0\,(1 + i')^3\,(1 + i')$$
$$C_4 = C_0\,(1 + i')^4$$

$$C_5 = C_4\,(1 + i')$$
$$C_5 = C_0\,(1 + i')^4\,(1 + i')$$
$$C_5 = C_0\,(1 + i')^5$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$C_k = C_{k-1}\,(1 + i')$$
$$C_k = C_0\,(1 + i')^{k-1}\,(1 + i')$$
$$C_k = C_0\,(1 + i')^k$$

$$C_{k+1} = C_k\,(1 + i')$$
$$C_{k+1} = C_0\,(1 + i')^k\,(1 + i')$$

$$C_{k+1} = C_0 (1 + i')^{k+1},$$

con lo cual se da lugar a la expresión general del interés compuesto:

$$\mathbf{C_k = C_0 (1 + i')^k}$$

Si se restringe el valor del subíndice "k" desde cero hasta el número de subperiodos que tiene cada periodo, la diferencia entre "C_k" y "C_0" es el interés total que "efectivamente" se generó durante los "m" subperiodos por el préstamo del recurso ajeno, desprendiéndose de esta situación el concepto de "tasa efectiva de interés del periodo", que será distinguida con la literal simple "i", y que tendrá la siguiente equivalencia:

$$i = (C_m - C_0) / C_0,$$

de donde se desprende que:

$$C_m = C_0 + C_0 (i)$$

Sustituyendo el valor de "C_m" en la expresión general del interés compuesto, y teniendo presente que "k" tomará el valor de "m", se llega a que:

$$C_0 + C_0 (i) = C_0 (1 + i')^m$$

Si se divide lo anterior entre el término "C_0" se obtiene la expresión que relaciona a la tasa efectiva con la tasa de interés aplicable en cada subperiodo, que es la siguiente:

$$1 + i = (1 + i')^m$$

$$\mathbf{i = (1 + i')^m - 1}$$

El valor de "i" y de "$i_{(m)}$" son referidos a una misma amplitud de tiempo: el periodo; pero la primera es de índole efectivo y la otra de índole nominal.

Para obtener la relación de la tasa efectiva de interés con la tasa nominal de interés, ambas referidas al periodo como se ha mencionado, se sustituye el valor de la tasa de interés aplicable a cada subperiodo por la equivalencia correspondiente, quedando:

$$\mathbf{i = (1 + i_{(m)}/m)^m - 1}$$

Despejando de lo anterior a la tasa nominal de interés se obtiene que:

$$\mathbf{i_{(m)} = m \{ (1 + i)^{1/m} - 1\}}$$

En términos de la tasa de interés aplicable en cada subperiodo, esta expresión se transforma a lo siguiente:

$$i' = (1 + i)^{1/m} - 1$$

Tomando la expresión general del interés compuesto, y considerando que "k" puede ser variada desde cero hasta el valor del producto "mn", se tendra lo siguiente:

$$C_{mn} = C_0 \, (1 + i')^{mn},$$

o bien, si se considera la tasa efectiva del periodo:

$$C_{mn} = C_0 \, (1 + i)^{n}$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, y "n" el número de periodos que tiene el plazo.

Por ejemplo, con las bases ya planteadas, si deseamos en un plazo de cinco años generar intereses doce veces al año (serán cinco periodos con duración cada uno de un año y se tendrán en cada periodo doce subperiodos con duración cada uno de un mes), el exponente al que habrá que elevar el binomio "(1 + i')" será igual a sesenta, cantidad proveniente de multiplicar doce por cinco, es decir, el valor aplicable de "m" en este caso es de doce, y el de "n" igual a cinco. Cabe mencionar con este ejemplo, que al proceso de generar intereses en cada subperiodo, se le denomina como "capitalización de la tasa".

Con base en lo hasta ahora explicado, es posible realizar un esquema con los conceptos planteados de tasas efectivas referidas a los subperiodos, periodos y plazo de la operación, así como las cuantías de valor involucradas en cada punto de la barra del tiempo como se esquematiza en la Figura 1, donde "i'" es la tasa efectiva del subperiodo y servirá como base para determinar el valor de "i", misma que es la tasa efectiva del periodo y que se empleará para determinar a "i*", que es la tasa efectiva del plazo.

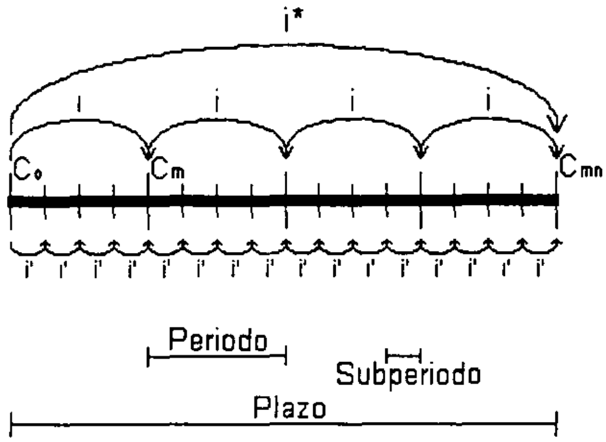


Figura 1. Esquematización del concepto de plazo, periodo y subperiodo

Estas tres tasas están relacionadas entre sí mediante las siguientes expresiones matemáticas:

$$i = (1 + i')^m - 1$$

$$i^* = (1 + i)^n - 1$$

$$i^* = (1 + i')^{mn} - 1$$

Consecuentemente, las relaciones de capital serán las siguientes:

$$C_m = C_0\,(1 + i')^m$$

$$C_{mn} = C_0\,(1 + i)^n$$

$$C_{mn} = C_0\,(1 + i')^{mn}$$

Es muy importante destacar que, no obstante todo lo anterior, el producto "mn" puede inclusive ser definido en el campo de los número reales, es decir, puede tener valores numéricos con cifras decimales; sin embargo, esta idea será discutida más adelante.

Es prudente aclarar que "i*" es la tasa de interés que será pagada al transcurrir todo el tiempo que durará la operación comercial, y puede ser calculada también de la siguiente manera:

$$i^* = (C_{mn} - C_0) / C_0.$$

Pero enfoquemos ahora nuestra atención en la fórmula antes vista que relaciona una tasa efectiva de interés con una nominal:

$$i_{(m)} = m\{(1+i)^{1/m} - 1\},$$

ambas tasas son referidas a una misma amplitud de tiempo como se ha venido reiterando, es decir, si una es expresada en términos anuales, la otra será referida también a un año, por ejemplo.

Planteado este caso, ¿qué ocurriría si, manteniendo constante el valor de la tasa efectiva de interés, esta proviniera de la capitalización semestral de una tasa nominal de interés?. La respuesta es la siguiente:

$$i_{(2)} = 2\{(1+i)^{1/2} - 1\}.$$

Si proviniera de una capitalización trimestral, se tendría que:

$$i_{(4)} = 4\{(1+i)^{1/4} - 1\};$$

si se tratara de una capitalización bimestral, procedería lo siguiente:

$$i_{(6)} = 6\{(1+i)^{1/6} - 1\};$$

si la capitalización se realizara de forma mensual, se llegaría a que:

$$i_{(12)} = 12\{(1+i)^{1/12} - 1\};$$

si existiese una capitalización diaria, la expresión aplicable sería la indicada a continuación:

$$i_{(365)} = 365\{(1+i)^{1/365} - 1\};$$

y así, es factible proseguir, hasta llegar al caso de tratar con una "capitalización instantánea", es decir, una en la que "m" tuviera un valor sumamente grande.

Continuando con la emulación de este procedimiento, se definirá el concepto denominado "fuerza de interés", el cual es representado con la sigla "δ". Este valor puede ser definido con los principios de limite expresados por el cálculo diferencial, como a continuación se muestra:

$$\delta = \lim_{m\to\infty} i_{(m)} = \lim_{m\to\infty} m\{(1+i)^{1/m} - 1\}$$

Para encontrar este límite, es necesario hacer el siguiente cambio de variable:

Si $x = 1/m$:

$$\delta = \lim_{x\to 0} i_{(m)} = \lim_{x\to 0} \{(1+i)^{x} - 1\} / x.$$

Aplicando el Teorema de L'hopital nos queda:

$$\delta = \lim_{x \to 0} i_{(m)} = \lim_{x \to 0} (1 + i)^x \, Ln(1 + i)$$

$$\boldsymbol{\delta = Ln(1 + i)}$$

Si se desea despejar de aquí la tasa efectiva de interés del periodo, queda lo siguiente:

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$\boldsymbol{i = e^{\delta} - 1}$$

Como ya fue expresado, existe la siguiente relación entre la tasa efectiva de interés y la tasa de interés aplicable a cada subperiodo:

$$1 + i = (1 + i')^m,$$

por lo que es válida la siguiente expresión:

$$e^{\delta} = (1 + i')^m$$

$$e^{\delta n} = (1 + i')^{mn},$$

lo cual significa que la expresión del interés compuesto antes vista:

$$C_{mn} = C_0 \, (1 + i')^{mn}$$

puede escribirse también como:

$$\boldsymbol{C_{mn} = C_0 \, e^{(\delta n)}}$$

Para ejemplificar lo anterior, supongamos que deseamos determinar la tasa nominal de interés que corresponde a una efectiva de interés del 13.8%, para distintos subperiodos de capitalización:

Si m=1:

$$i_{(1)} = 1 \{ (1 + 0.138)^{1/1} - 1 \}$$
$$i_{(1)} = 13.8\%$$

Si m=2:

$$i_{(2)} = 2 \{ (1 + 0.138)^{1/2} - 1 \}$$
$$i_{(2)} = 13.3542\%$$

Si m=3:

$$i_{(3)} = 3\ \{\ (1 + 0.138)^{1/3} - 1\}$$
$$i_{(3)} = 13.2098\%$$

Si m=4:

$$i_{(4)} = 4\ \{\ (1 + 0.138)^{1/4} - 1\}$$
$$i_{(m)} = 13.1384\%$$

Si m=6:

$$i_{(6)} = 6\ \{\ (1 + 0.138)^{1/6} - 1\}$$
$$i_{(6)} = 13.0675\%$$

Si m=12:

$$i_{(12)} = 12\ \{\ (1 + 0.138)^{1/12} - 1\}$$
$$i_{(12)} = 12.9971\%$$

Si m=24:

$$i_{(24)} = 24\ \{\ (1 + 0.138)^{1/24} - 1\}$$
$$i_{(24)} = 12.9621\%$$

Si m=52:

$$i_{(52)} = 52\ \{\ (1 + 0.138)^{1/52} - 1\}$$
$$i_{(52)} = 12.9433\%$$

Si m=365:

$$i_{(365)} = 365\ \{\ (1 + 0.138)^{1/365} - 1\}$$
$$i_{(365)} = 12.9295\%$$

Si m=8,760:

$$i_{(8,760)} = 8{,}760\ \{\ (1 + 0.138)^{1/8,760} - 1\}$$
$$i_{(8,760)} = 12.9273\%$$

Si m=525,600:

$$i_{(525,600)} = 525{,}600\{(1+0.138)^{1/525,600}-1\}$$
$$i_{(8,760)} = 12.9272\%.$$

Como puede observarse, a medida que crece "m", "$i_{(m)}$" concurre a un valor que puede determinarse mediante la expresión de la "fuerza del interés":

$$\delta = Ln(1 + i)$$
$$\delta = Ln(1 + 0.138)$$
$$\delta = 12.9272\%.$$

Esto quiere decir que "δ" tiene un significado análogo al de "$i_{(\infty)}$", con lo cual se concluye que, dada una tasa efectiva de interés, no existirá tasa nominal de interés alguna que sea menor que la efectiva, ni mayor que la fuerza del interés, es decir:

$$\delta \le \mathbf{i}_{(m)} \le \mathbf{i}.$$

Por otro lado, en materia de comprobación, la validez de la expresión general del interés compuesto puede verificarse, para el conjunto de los número naturales, por el método de Inducción Matemática de la siguiente manera:

Si mn = 0:

$$C_0 = C_0\,(1 + i')^0$$
$$C_0 = C_0$$

Si mn = 1:

$$C_1 = C_0\,(1 + i')$$
$$C_1 = C_0\,(1 + i')$$

Si mn = k:

$$C_k = C_0\,(1 + i')^k$$

Si mn = k+1:

$$C_{k+1} = C_0\,(1 + i')^{k+1}$$

o bien:

$$C_{k+1} = C_0\,(1 + i')^k\,(1 + i')$$
$$C_{k+1} = C_0\,(1 + i')^{k+1}$$

El ser las dos expresiones idénticas y equivalentes, queda demostrada la validez de la expresión general para el conjunto de los números naturales.

Así mismo, la expresión puede verificarse también para el conjunto de los números reales, como fue mencionado con anterioridad; pero hay que considerar que el incremento en "C_k" estará dado por el número real "1/m", el cual representa a cada subperiodo en que es capitalizada la tasa; situación que dirige al siguiente análisis:

$$i' = i_{(m)} / m = (C_{k+1/m} - C_k) / C_k$$

Si "m" tiende al infinito, puede observarse que la diferencia de "$C_{k+1/m}$" y "C_k" es tendiente a cero por su parte, lo que es equivalente a tener:

$$\lim_{m\to\infty} i' = \lim_{m\to\infty} i_{(m)} / m = \delta / m$$

$$\delta / m = \lim_{m\to\infty} (C_{k+1/m} - C_k) / C_k$$

Haciendo el siguiente cambio de variable se tiene:

Si $\Delta m = 1/m$:

$$i' = (C_{k+\Delta m} - C_k) / C_k = (\Delta m)\, i_{(m)},$$

y despejando "$i_{(m)}$" se obtiene:

$$i_{(m)} = (1 / C_k)\,(C_{k+\Delta m} - C_k) / \Delta m.$$

El límite de esta función cuando "m" tiende al infinito, es equivalente a aplicar el límite de la función cuando "Δm" tiende a cero; pero, si se observa el segundo cociente de la expresión, se notará que al aplicar este límite se tratará con el teorema fundamental del cálculo diferencial, por lo que se obtiene que:

$$\delta = \lim_{\Delta m \to 0} i_{(m)} = \lim_{\Delta m \to 0} (1/C_k)\,(C_{k+\Delta m} - C_k)/\Delta m$$

$$\delta = C_k' / C_k.$$

La sigla "C_k'", representa la derivada de la función "C_k".

No obstante lo anterior, se necesita conocer el valor de la función y no el de su derivada, por lo que debe integrarse la afirmación anterior, y para ello es necesario hacer lo siguiente:

Si $C_k = C_\tau$:

$$\delta = C_\tau' / C_\tau.$$

Multiplicando ambos términos por "$d\tau$" se obtendrá que:

$$\delta(d\tau) = (C_\tau' / C_\tau)\, d\tau.$$

Se debe tener presente que se ha partido de la expresión fundamentada en la tasa efectiva de interés al hacer tender a la literal "m" al infinito, es decir, la amplitud del subperiodo es equivalente a la del periodo, y consecuentemente ambos resultan ser iguales (cada periodo solamente tendrá un subperiodo), por lo que sólo en este caso, bajo esa condición se tiene que:

$$i = i' = i_{(m)}.$$

Al integrar definidamente la última expresión, donde se obtuvo la relación de "$\delta(d\tau)$", desde "0" hasta "n", que es el intervalo de interés en virtud de lo anterior, y recordando el principio del cálculo integral que afirma que la integración del cociente de la derivada de una función entre dicha función es equivalente al logaritmo natural de la misma más una constante de integración, se tiene:

$$\int_0^n \delta(d\tau) = \int_0^n (C_\tau' / C_\tau)\, d\tau$$

$$\delta n = \quad Ln\ C_{mn} - Ln\ C_0$$

$$\delta n = \quad Ln\ (C_{mn} / C_0)$$

$$e^{(\delta n)} = C_{mn} / C_0$$

$$C_{mn} = C_0\, e^{(\delta n)},$$

pero se sabe que:

$$e^{\delta n} = (1 + i')^{mn}$$

$$C_{mn} = C_0\,(1 + i')^{mn}$$

Con lo cual, queda demostrado que la expresión es válida también para el conjunto de los números reales.

Habrá que hacer notar, que al efectuar la integral de la demostración anterior, el término "C_{mn}" aparece debido a que la amplitud del subperiodo es equivalente a la del periodo como se mencionó, y se trató con una expresión donde se involucra la tasa efectiva de interés "i", por lo que "C_τ" en realidad equivale a "C_m", que al integrarse genera a "C_{mn}".

TEORÍA DEL DESCUENTO

El descuento es una cantidad equivalente en monto al interés; pero la determinación de la tasa aplicable en cada subperiodo se obtiene con la siguiente ecuación:

$$d' = (C_{k+1} - C_k) / C_{k+1},$$

donde el subíndice "k", al igual que lo visto bajo la teoría del interés, señala el monto de un subperiodo específico, y variará desde cero, haciendo referencia a la suerte principal, hasta el valor del producto "mn". También se hará referencia a los montos "$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{mn}$" ya indicados anteriormente.

La teoría del descuento sostiene que la tasa de descuento es un cociente o razón de cambio de la diferencia entre el monto siguiente y el anterior, respecto del monto siguiente.

El descuento se calculará mediante el producto del valor futuro de la suerte principal por una "tasa" expresada en términos porcentuales, y denotada como "d'"; con lo cual se obtiene que:

$$D' = C_{mn}\,(d'),$$

y si se desea conocer la "tasa de descuento del periodo", entonces bastará con multiplicar el número total de subperiodos de cada periodo por la tasa de cada subperiodo, es decir:

$$d_{(m)} = m\,d',$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, "d'" es la tasa de descuento aplicable en cada subperiodo para el cálculo del descuento, y la tasa de descuento del periodo "$d_{(m)}$" se conocerá con el nombre de "tasa nominal de descuento".

Con esto, es posible definir la tasa de descuento aplicable en cada subperiodo de la siguiente manera:

$$d' = d_{(m)} / m.$$

De manera análoga a lo hecho en la teoría del interés, se puede deducir una expresión que calcule el siguiente monto a pagar del modo siguiente:

$$C_{k+1}\,(d') = C_{k+1} - C_k$$
$$C_{k+1}\,(1 - d') = C_k$$
$$C_{k+1} = C_k\,(1 - d')^{-1};$$

y con este razonamiento se puede llegar a la expresión general del descuento compuesto:

$$\mathbf{C_k = C_0\,(1 - d')^{-k}}$$

Si se restringe el valor del subíndice "k" desde cero hasta el número de subperiodos que tiene cada periodo, la diferencia entre "C_k" y "C_0" es el descuento total que "efectivamente" se generó durante los "m" subperiodos por el préstamo de un recurso ajeno, desprendiéndose así el concepto de "tasa efectiva de descuento", que será distinguida con la literal simple "d", y que tendrá la siguiente equivalencia:

$$d = (C_m - C_0) / C_m,$$

de donde se desprende que:

$$C_m = C_0\,(1 - d)^{-1}$$

Sustituyendo el valor de "C_m" en la expresión general del descuento compuesto, y teniendo presente que "k" tomará el valor de "m", se llega a que:

$$C_0 (1 - d)^{-1} = C_0 (1 - d')^{-m}$$

Si se divide lo anterior entre el término "C_0" se obtiene la expresión que relaciona a la tasa efectiva de descuento con la tasa de descuento aplicable en cada subperiodo, que es la siguiente:

$$1 - d = (1 - d')^m$$

$$\mathbf{d = 1 - (1 - d')^m}$$

Para obtener la relación de la tasa efectiva de descuento con la tasa nominal de descuento, se sustituye el valor de la tasa de descuento aplicable a cada subperiodo por la equivalencia correspondiente, quedando:

$$\mathbf{d = 1 - (1 - d_{(m)}/m)^m}$$

Despejando de lo anterior a la tasa nominal de descuento se obtiene que:

$$\mathbf{d_{(m)} = m \{ 1 - (1 - d)^{1/m} \}}$$

En términos de la tasa de descuento aplicable en cada subperiodo, esta expresión se transforma a lo siguiente:

$$\mathbf{d' = 1 - (1 - d)^{1/m}}$$

Tomando la expresión general del descuento compuesto, y considerando que "k" puede ser variada desde cero hasta el valor del producto "mn", se tendrá lo siguiente:

$$\mathbf{C_{mn} = C_0 (1 - d')^{-mn}}$$

donde "m" es el número de subperiodos que tiene cada periodo, y "n" el número de periodos que tiene el plazo.

En términos de la tasa de descuento efectiva, la relación anterior queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{C_{mn} = C_0 (1 - d)^{-n}}$$

De manera análoga a lo tratado bajo la teoría del interés, a continuación se definirá el concepto denominado "fuerza de descuento", representado con la sigla "δ'". Este valor puede ser definido con el concepto de límite, formulado en el cálculo diferencial, como a continuación se muestra:

$$\delta' = \lim_{m\to\infty} d_{(m)} = \lim_{m\to\infty} m \{ 1 - (1-d)^{1/m} \}$$

Para encontrar este límite, es necesario hacer el siguiente cambio de variable:

Si x = 1/m:

$$\delta' = \lim_{x\to 0} d_{(m)} = \lim_{x\to 0} \{ 1 - (1-d)^{x} \} / x.$$

Aplicando el Teorema de L'hopital nos queda:

$$\delta' = \lim_{x\to 0} d_{(m)} = \lim_{x\to 0} (1-d)^{x}\, Ln(1-d)$$

$$\boldsymbol{\delta' = - Ln(1-d)}$$

Si se desea despejar de aquí la tasa efectiva de descuento del periodo, queda lo siguiente:

$$e^{-\delta'} = 1 - d$$

$$\boldsymbol{d = 1 - e^{-\delta'}}$$

Como ya fue expresado, existe la siguiente relación entre la tasa efectiva de descuento y la tasa de descuento aplicable a cada subperiodo:

$$1 - d = (1 - d')^{m},$$

por lo que es válida la siguiente expresión:

$$e^{-\delta'} = (1 - d')^{m}$$

$$e^{\delta' n} = (1 - d')^{-mn},$$

lo cual significa que la expresión del descuento compuesto antes vista:

$$C_{mn} = C_0\,(1 - d')^{-mn}$$

puede escribirse también como:

$$\boldsymbol{C_{mn} = C_0\, e^{(\delta' n)}}$$

Esta última expresión es equivalente a la análoga determinado bajo los concepto de la teoría del interés, es decir:

$$\mathbf{C_0\, e^{(\delta' n)} = C_0\, e^{(\delta n)}},$$

por tal motivo, puede afirmarse que la fuerza de interés es equivalente en valor a la fuerza de descuento.

La validez de la expresión general del descuento compuesto puede ser verificada, para el conjunto de los número naturales y para el conjunto de los números reales, de maneras análogas a las desarrolladas en la teoría del interés, razón por la cual las demostraciones respectivas se omitirán en este apartado.

EQUIVALENCIA ENTRE INTERÉS Y DESCUENTO

Tras lo expuesto hasta ahora, surge la interrogante respecto de la existencia de alguna relación entre la teoría del interés y la del descuento, cuya respuesta es evidente, pues se conoce lo siguiente:

$$C_{mn} = C_0\,(1 + i)^n$$

$$C_{mn} = C_0\,(1 - d)^{-n},$$

de donde basta con igualar ambas relaciones, y dividir la resultante entre el término "C_0", obteniendo:

$$C_0\,(1 + i)^n = C_0\,(1 - d)^{-n}$$

$$(1 + i)^n = (1 - d)^{-n}$$

$$1 + i = (1 - d)^{-1}$$

$$i = (1 - d)^{-1} - 1,$$

o bien:

$$\mathbf{i = d\,/\,(1 - d)};$$

y de forma análoga, se desprende también que:

$$\mathbf{d = i\,/\,(1 + i)},$$

lo cual resulta ser la equivalencia entre la tasa efectiva de interés y la tasa efectiva de descuento, con las cuales es posible relacionar un mismo valor presente con un mismo valor futuro, aplicando la teoría respectiva.

Cuando se haga referencia a planteamientos de índole financiera, debe tenerse presente que la tasa aplicable a un esquema derivado de la teoría del interés, puede ser mencionada simplemente como "la tasa", es decir, la palabra "interés" puede ser omitida; pero, en cambio, al tratar con esquemas derivados de la teoría del descuento, habrá que precisar que la tasa tratada es "la tasa de descuento".

AMORTIZACIONES

Un concepto más que debe abordarse dentro del tratado de la matemática financiera es el de "amortización", misma que se define como el elemento de un conjunto de pagos iguales, realizados a intervalos iguales de tiempo para liquidar una cuantía monetaria. La amortización suele conocerse también con el nombre de "anualidad", pero a pesar de este nombre, no necesariamente los pagos deben ser hechos anualmente.

La amortización es el procedimiento con el que se salda gradualmente una deuda por medio de una serie de pagos que, generalmente, son iguales y se realizan en periodos equivalentes como ya se mencionó.

En el cálculo del monto de estos pagos, infiere también la teoría del interés, y se relaciona con el concepto matemático de las progresiones geométricas.

Para conocer el valor futuro de una serie de ingresos periódicos, referidos subsecuentemente con la literal "a", se generaría la siguiente sumatoria:

$$C_{mn} = a(1+i)^0 + a(1+i)^1 + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + \ldots.. + a(1+i)^{n-1}$$

La expresión corresponde evidentemente a una progresión geométrica, que se define como una serie de cantidades que guardan entre sí una relación constante, donde para determinar el siguiente término de la serie, deberá multiplicarse el elemento anterior por la razón conocida "r", que para este caso específico resulta ser equivalente a "(1+i)".

Cabe destacar que, tanto el ingreso periódico "a" como la tasa de interés "i", son referidos a la misma amplitud de tiempo, es decir, el subperiodo es equivalente al periodo. En caso de que ambos no coincidan, habrá que aplicar la tasa de interés del subperiodo "i'" que corresponda, y la literal "n" será sustituida por el término "mn".

Si se formula la solución a este problema con fundamento al concepto matemático de la suma de una progresión geométrica se llega al siguiente desarrollo:

$$C_{mn} = a(1+i)^0 + a(1+i)^1 + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + \ldots\ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

Si se multiplica la expresión anterior por la razón (1+i) se llega a que:

$$C_{mn}\,(1+i) = a(1+i)^1 + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + a(1+i)^4 + \ldots\ldots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

Si se obtiene la diferencia entre la segunda y la primera expresión se obtiene:

$$C_{mn}\,(1+i) - C_{mn} = a(1+i)^n - a(1+i)^0$$

$$C_{mn}\,(i) = a\,[(1+i)^n - 1]$$

$$\mathbf{C_{mn} = [\ a\ /\ i\ ]\ [\ (1+i)^n - 1\ ]}$$

Donde "C_{mn}" es el valor futuro de una suerte principal, y "a" el monto del pago periódico que amortizará una deuda considerando el esquema del interés.

Si se desea referir una amortización en términos de un valor presente o suerte principal "C_0", habrá que considerar lo siguiente:

$$C_{mn} = C_0\,(1+i)^n$$

por lo tanto:

$$C_0(1+i)^n = [a/i]\,[(1+i)^n - 1]$$

$$C_0(1+i)^n\,(1+i)^{-n} = [a/i]\,[(1+i)^n - 1]\,(1+i)^{-n}$$

$$\mathbf{C_0 = [\ a\ /\ i\ ]\ [\ 1 - (1+i)^{-n}\ ]}$$

De cualquiera de ambas expresiones, según sea el caso, puede despejarse fácilmente el pago periódico "a" de la siguiente manera:

$$\mathbf{a = C_{mn}\ (\ i\ )\ /\ [\ (1+i)^n - 1\ ],}$$

o también:

$$\mathbf{a = C_0\ (\ i\ )\ /\ [\ 1 - (1+i)^{-n}\ ].}$$

Debe hacerse hincapié en que ambas expresiones consideran un esquema de pagos vencidos, es decir, el primer pago se liquidará una vez transcurrido el primer subperiodo, el segundo al final del siguiente, y así sucesivamente.

Si se trata con casos en los cuales las amortizaciones son expresadas en términos de tiempo distinto al que corresponde a la tasa de interés, donde como ya fue señalado, un periodo cuenta con más de un subperiodo, las expresiones anteriores se transforman a lo siguiente:

$$\mathbf{C_0 = [\ a' / i'\ ]\ [\ 1 - (1+i')^{-mn}\ ];}$$

$$\mathbf{C_{mn} = [\ a' / i'\ ]\ [\ (1 + i')^{mn} - 1\ ];}$$

$$\mathbf{a' = C_0\ (\ i'\ ) / [\ 1 - (1+i')^{-mn}\ ]};\ \text{y}$$

$$\mathbf{a' = C_{mn}\ (\ i'\ ) / [\ (1 + i')^{mn} - 1\ ],}$$

donde las literales "a'" e "i'" corresponden al pago periódico y a la tasa de interés aplicables en cada subperiodo respectivamente.

No obstante lo anterior, en finanzas existen casos en los cuales se efectúan amortizaciones de "suertes principales" mediante la aportación de pagos constantes que duran un periodo muy grande, que incluso puede considerarse como indefinido; dando lugar de este modo al concepto de "amortizaciones perpetuas", las cuales son pagos constantes que se realizan a lo largo de un tiempo muy amplio para igualar un valor presente.

En matemáticas, esto se traduce a lo consideración de un plazo tan grande que tiende al "infinito", es decir, el número de periodos son tantos, que hacen que el plazo se vuelva en un valor sumamente grande.

Siguiendo las ideas planteadas por el concepto de amortización, es posible determinar valores presentes y futuros con esta nueva condición, efectuando el siguiente límite:

$$C_0 = \lim_{mn \to \infty} [\ a' / i'\ ]\ [\ 1 - (1+i')^{-mn}\ ];$$

evidentemente el término "$(1+i')^{-mn}$" tenderá al valor de cero al aplicar las sustituciones correspondientes, quedando la siguiente expresión:

$$\mathbf{C_0 = a' / i',}$$

misma que resulta ser la equivalencia de un valor presente con una sucesión de amortizaciones perpetuas.

Sin embargo, este proceso sólo es aplicable de manera práctica hacia un valor presente, no así para un valor futuro, pues como puede observarse, si se aplica el límite a la expresión que liga a una amortización con un valor futuro, éste generará un valor tan grande, comparable solamente con el del "infinito".

ELEMENTOS DEL ANÁLISIS DE INVERSIONES

Es sabido que el objetivo preciso de un inversionista es incrementar su patrimonio, y por eso necesita una base sólida sobre la cual fundamente la toma de una buena decisión respecto de qué alternativa elegir con tal efecto; es decir, el inversionista debe determinar y comparar parámetros e indicadores que le permitan eliminar de inmediato las alternativas no viables según la rentabilidad que cada alternativa le aporte a él.

Para lograr este objetivo, es conveniente y necesario seguir los lineamientos de un proceso estructurado, en el cual se distinguen cuatro etapas fundamentales:

1) Identificación de la necesidad de una decisión o de una oportunidad de inversión.

2) Formulación de alternativas de acción para satisfacer la necesidad, o bien para aprovechar la oportunidad que se presenta (proyectos de inversión).

3) Evaluación de las alternativas de inversión en términos de su contribución para el alcance de las metas.

4) Selección de una o varias alternativas de inversión para su implantación.

Habiendo identificado una necesidad de inversión, el paso a seguir es la formulación de alternativas de acción, y en ese sentido debe señalarse que para tomar la mejor decisión es fundamental tratar de agotar las diferentes alternativas que "a priori" cumplen con las restricciones establecidas para cada caso específico.

Una vez determinados los "proyectos de inversión", se procederá en consecuencia a la evaluación y jerarquización de los mismos para determinar la contribución o utilidad de cada uno de ellos al logro de las metas establecidas por el inversionista. Generalmente la contribución de los proyectos se expresa en términos de retornos monetarios como base de comparación entre cada acción a emprender.

Con base en los resultados obtenidos en la evaluación y considerando que la pretensión es maximizar la utilidad susceptible de ser generada, se seleccionará la mejor alternativa de inversión, y para ello se deberá seleccionar el, o los subconjuntos de proyectos que maximicen la utilidad global respectiva, toda vez que cumplan con las restricciones de tipo tecnológico, económico y de financiamiento que en su caso procedan.

Suponiendo la certeza de las características cuantitativas de un proyecto, se presentan tres criterios que permiten clasificar las inversiones en favorables (rentables) o desfavorables (no rentables) en términos del crecimiento patrimonial del inversionista.

Para efectos de la exposición de estos criterios, la notación utilizada para la definición de un proyecto será el siguiente:

C_0 Inversión inicial requerida.
B_t Beneficio generado por el proyecto durante el período "t".
C_t Costo causado por el proyecto en el período "t".
FEN_t Flujo de Efectivo Neto del periodo "t".
n Horizonte de la inversión dividido en periodos.

Debe señalarse que el Flujo de Efectivo Neto del periodo "t" (FEN_t) será determinado calculando la diferencia que exista entre los ingresos generados menos las erogaciones causadas en el mismo periodo; pero cuando a esta diferencia le corresponda un signo negativo, el Flujo de Efectivo Neto será entendido como el costo en el punto "t" del tiempo (C_t), mientras que si su signo es positivo será referido como un beneficio (B_t).

Con estos elementos descritos serán calculados los indicadores con los cuales se establecerá la conveniencia o inconveniencia de realizar una inversión, o bien, en caso de analizar un conjunto de alternativas de inversión, cuáles son las más adecuadas para incrementar el patrimonio del inversionista, y cuáles no. Dichos indicadores son los siguientes:

- Periodo de Recuperación de la Inversión (PRI),
- Periodo de Recuperación Actualizado (PRA),
- Valor Presente Neto (VPN),
- Tasa Interna de Retorno (TIR),
- Tasa Externa de Retorno (TER),
- Relación Beneficio/Costo,
- Índice de Rentabilidad de la Inversión (IRI) y,
- Pago Anual Equivalente (PAE).

Los Flujos de Efectivo Neto forman el conjunto básico y fundamental que primeramente deberá determinarse para proceder con el cálculo de estos indicadores, sin ellos es imposible efectuar el análisis de una inversión o de varias. Primeramente habrá que conocer la utilidad o la pérdida neta integrando una proyección "proforma" de los Estados de Resultados que se esperan obtener a lo largo del plazo u horizonte de vida del proyecto de inversión, periodo por periodo con base en elementos contables que fueron abordados en el apartado inmediato anterior. Seguidamente se elaborará una proforma denominada como "Origen y Aplicación de Recursos", la cual contendrá los mismos periodos que los reflejados en los Estados de Resultados proyectados con la siguiente información:

Origen:

Utilidad o Pérdida Neta

más

Depreciaciones del periodo

más

Amortizaciones del periodo

más

Aportaciones de capital

igual

Suma de los orígenes

Destino:

Inversión en activo fijo

más

Otras inversiones

igual

Suma de los destinos

La diferencia que exista entre la suma de los orígenes y la suma de los destinos representará a la cuantía monetaria que existirá como fondo de recursos líquidos en la entidad, es decir, será el flujo de efectivo que mantendrán sus arcas (chequeras, cajas,.etc.). Dicha cuantía necesariamente será igual o mayor que cero en cada lapso de análisis del horizonte de planeación y, con esta base, puede identificarse que la suma por periodo de las aportaciones de capital que deberán hacer los socios del proyecto y del financiamiento que deberá ser conseguido para que éste sea llevado al cabo quedará determinada con la siguiente expresión:

$$\mathbf{IyF \geq IAF + OI - UN - D - A},$$

donde, por cada periodo del horizonte de planeación analizado:

- IyF Es la suma de la inversión y del financiamiento requerido por el proyecto (monto de los recursos líquidos necesarios),
- IAF Es la inversión en activo fijo,
- OI Son los recursos que se destinarán a otras inversiones,
- UN Es la utilidad o pérdida neta,
- D Es la depreciación de los bienes que forman parte del activo fijo y,
- A Son las amortizaciones de los servicios y derechos que se integraron al activo fijo del proyecto.

Cabe señalar que el monto de inversión y de financiamiento está imposibilitado a ser negativo; además, cuando dicho monto sea equivalente a cero y el flujo de efectivo del proyecto (considerando el pago de intereses por concepto de financiamiento) sea mayor que cero, podrá considerarse destinar dicho flujo de efectivo al pago de dividendos a los inversionistas del proyecto en cuestión, o bien, al apoyo de otros proyectos de la entidad.

El Flujo de Efectivo Neto de cada periodo que se empleará para evaluar el proyecto será igual a la suma de los orígenes menos la suma de los destinos menos las aportaciones de capital que correspondan igualmente en cada periodo. En esta evaluación se integrará el pago de intereses por los financiamientos que sean necesarios para dar marcha al proyecto, pero se excluirá el pago de dividendos a los inversionistas y el apoyo a otros proyectos.

Una vez que se cuente con todo lo anterior será posible calcular los indicadores de rentabilidad de la inversión, mismos que ya fueron enunciados y se definirán por separado en su punto respectivo.

PERIODO DE RECUPERACIÓN DE LA INVERSIÓN (PRI)

Este método consiste en cuantificar el período en que será recuperada la inversión inicial "C_0", tomando como parámetro principal el costo total del proyecto (inversión total), respecto de los ingresos obtenidos anualmente durante el horizonte de inversión del mismo.

El periodo de recuperación de una inversión puede ser definido como el tiempo requerido para que el flujo de ingresos producido por una inversión sea igual al desembolso original; con lo cual es posible medir la liquidez del proyecto, la recuperación de su capital y su ganancia o utilidad.

Este método es uno de los más simples y sólo se utiliza como complemento en la toma de decisiones, ya que no toma el valor del dinero en el tiempo.

Para determinar el periodo de recuperación de una inversión se debe establecer la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^{PRI} FEN_t = C_0,$$

donde el valor de "t" será variado desde uno y hasta el valor del periodo de recuperación de la inversión, mismo que es la incógnita a resolver mediante tanteos o por aproximaciones sucesivas.

Para calcular este indicador es recomendable acumular periodo por periodo los Flujos de Efectivo Neto, de manera tal que el Flujo de Efectivo Neto Acumulado en cualquier periodo será equivalente al Flujo de Efectivo Neto Acumulado del periodo inmediato anterior más el Flujo de Efectivo Neto del periodo en cuestión.

El Periodo de Recuperación de la Inversión (PRI) se encontrará entre los dos periodos donde exista un cambio de signo en el Flujo de Efectivo Neto Acumulado.

Bajo el criterio del Periodo de Recuperación de la Inversión, se considerará que ésta es rentable si el periodo de recuperación de la misma es menor o igual que el horizonte o plazo de la inversión; es decir:

$$PRI \leq n,$$

y será considerada como no rentable en caso que esto no ocurra.

No obstante, los demás indicadores que fueron mencionados, sí consideran el valor del dinero en el tiempo, y por lo tanto resultan ser más útiles al proceso de toma de decisiones.

PERIODO DE RECUPERACIÓN ACTUALIZADO (PRA)

Este método es similar al anterior, pero la diferencia radica en el establecimiento de la siguiente ecuación:

$$\sum_{t=1}^{PRA} FEN_t (1 + i)^{-t} = C_0$$

Al igual que el indicador anterior, se aconseja acumular en cada periodo los Flujos de Efectivo Neto de manera deflactada, es decir, el Flujo de Efectivo Neto Acumulado Deflactado en cualquier periodo será igual a su Flujo de Efectivo Neto referido en valor presente más el Flujo de Efectivo Neto Acumulado Deflactado del periodo inmediato anterior, encontrándose el Periodo de Recuperación Actualizado (PRA) entre los dos periodos que presenten un cambio de signo en sus Flujos de Efectivo Neto Acumulados Deflactados.

Se considerará que una inversión es rentable si el Periodo de Recuperación Actualizado de la misma es menor o igual que el horizonte o plazo de la inversión:

$$PRA \leq n,$$

y será no rentable en caso contrario.

Si la tasa de interés aplicada es positiva y diferente de cero, deberá existir la siguiente relación entre los periodos de recuperación de la inversión y el actualizado:

PRI < PRA

MÉTODO DEL VALOR PRESENTE NETO

El método del Valor Presente Neto es uno de los criterios financieros más ampliamente utilizado en el Análisis de Inversiones. Para entender su conceptualización, y también posteriormente el de Tasa Interna de Retorno, consideremos el siguiente esquema mostrado en la Figura 2 que recibe el nombre de Diagrama de Flujo de Efectivo, en el cual se representan, como su nombre lo indica, los flujos de efectivo para una inversión.

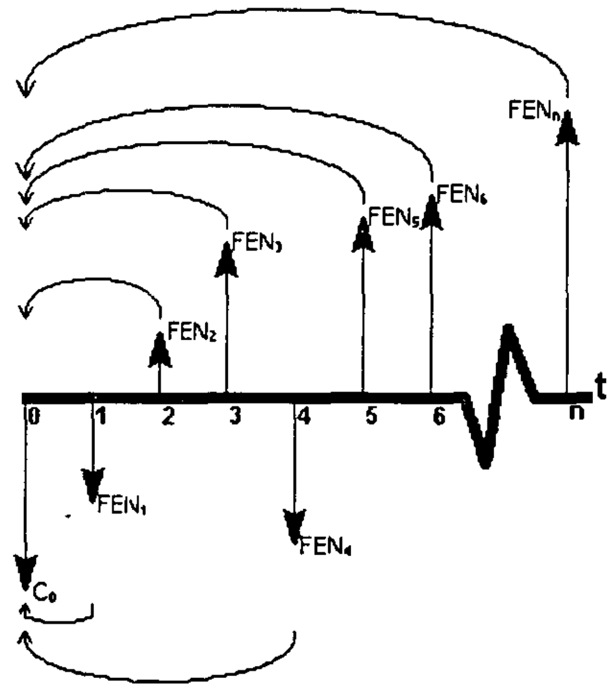


Figura 2. Diagrama de Flujo de Efectivo

En este proyecto de inversión se requiere de un desembolso inicial de efectivo "C_0", con lo que se generarán una sucesión de Flujos de Efectivo Neto al paso del tiempo, desde el primer periodo y hasta el horizonte de la inversión donde se presenta el flujo de efectivo final, quedando éstos representados como "FEN_1", "FEN_2", "FEN_3", ..., "FEN_n". Los subíndices colocados corresponden a la variación del contador "t", el cual representa al t-ésimo periodo.

En la figura anterior, la inversión inicial es denotada con la sigla "C_0" y se representa gráficamente con una flecha hacia abajo de la línea de tiempo, lo cual significa que es una erogación de efectivo. Los flujos de efectivo "FEN_1" y "FEN_4" también son hacia abajo en la línea de tiempo y representan flujos de efectivo negativos, es decir, son erogaciones proyectadas. Los flujos positivos son representados con flechas hacia arriba y representan ingresos o beneficios que el proyecto le aporta al inversionista.

El valor presente neto se calcula sumando la inversión inicial al valor actualizado de los Flujos de Efectivo Neto futuros; es decir, a la inversión inicial (representada por un flujo de efectivo negativo) se le suman algebraicamente los Flujos de Efectivo Neto traídos a valor presente mediante una "tasa" con la aplicación de la teoría del interés, tratada ya anteriormente. Dicha tasa será conocida como Tasa de Rendimiento Mínima Aceptable (TREMA).

La Tasa de Rendimiento Mínima Aceptable (TREMA) es una tasa de interés que indica el rendimiento mínimo que se espera tenga el proyecto.

En resumen, el método del Valor Presente Neto (VPN) consiste en actualizar los flujos de efectivo a través de una tasa de interés y compararlos con la inversión inicial mediante la siguiente relación:

$$\mathbf{VPN_i = C_0 + \sum_{t=1}^{n} FEN_t\,(1 + i)^{-t}}$$

Se considerará que la inversión es rentable si el Valor Presente Neto tiene un valor positivo, y en caso contrario será no rentable; por lo que se deduce entonces que el resultado que se obtiene refleja si el proyecto será capaz de generar utilidades o pérdidas respectivamente.

Este método tiene las ventajas que a continuación se numeran:

1. Considera el valor del dinero en el tiempo mediante la aplicación de la teoría del interés.

2. Existe verdadera facilidad para calcularlo.

3. Tiene solución única por cada tasa de interés que se aplique.

Sin embargo, la desventaja es que el resultado obtenido depende de la tasa de interés para deflactación que sea utilizada.

En lo sucesivo, se entenderá por deflactación al procedimiento mediante el cual un Valor Futuro es transformado en un Valor Presente. Al proceso inverso se le conocerá como reflactación.

TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

La Tasa Interna de Retorno (TIR), considerada también como tasa interna de rendimiento financiero, se define como la tasa de interés de deflactación que hace que el Valor Presente Neto de todos los Flujos de Efectivo Neto de una inversión o proyecto, sea igual a cero, satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$f(TIR) = C_0 + \sum_{t=1}^{n} FEN_t\,(1+TIR)^{-t} = 0,$$

donde la Tasa Interna de Retorno (TIR) es la solución o raíz de dicha ecuación. Es nececario observar que la ecuación anterior representa el desarrollo de un polinomio de grado "t".

Este método tiene una desventaja, la cual radica en el hecho que, la anterior es una ecuación de grado "t", como ya se menciono, la cual tendrá hasta "t" raíces o soluciones; una o más comprendidas en el campo de los números reales, y el resto existirán, por pares conjugados, en el campo de los números complejos.

Lo anterior significa que, cuando existe uno o más Flujos de Efectivo Neto negativos, pueden traer como resultado la obtención de Tasas Internas de Retorno múltiples; en otras palabras, cuando tratamos casos con características no típicas, pueden obtenerse varias soluciones (Tasas Internas de Retorno) que hacen que el Valor Presente Neto de una inversión sea igual a cero, por lo que para tomar una decisión, es necesario apoyarse en un mecanismo gráfico como el que se ilustra a continuación en la Figura 3.

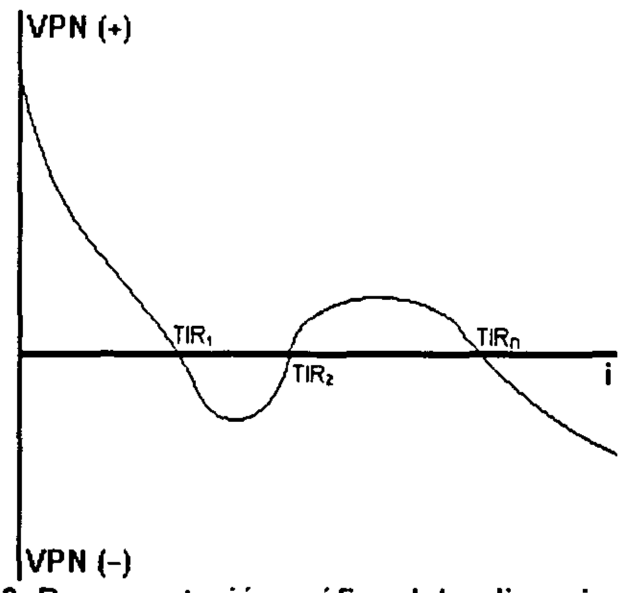


Figura 3. Representación gráfica del polinomio del VPN

Las soluciones o raíces del polinomio que representa el comportamiento del Valor Presente Neto, pueden encontrarse mediante la aplicación de algún método numérico, como puede ser el "Método de Newton". Para resolver la ecuación representativa del Valor Presente Neto, el Método de Newton resulta ser eficaz y eficiente, siempre y cuando existan soluciones pertenecientes al campo de los números reales, por tal razón es uno de los métodos numéricos más ampliamente utilizados para resolver polinomios, de hecho, es un método que converge más rápidamente que cualquiera otro (de manera cuadrática en términos del error obtenido en cada paso).

Este método es de aproximaciones sucesivas, es decir, se obtendrá una mejor solución mientras más iteraciones se realicen. Se aplicará comenzando a partir de una estimación inicial que esté cercana a la raíz, extrapolando a lo largo de la tangente del polinomio en cuestión hasta su intersección con el eje de las abscisas y se le tomará a ese valor como la siguiente aproximación, continuando así hasta que los valores sucesivos de la solución que se esté buscando se encuentren lo suficientemente cercanos entre ellos, o bien, el valor de la función sea lo suficientemente próximo a cero.

En términos generales, la expresión postulada por el método, adaptada para encontrar el valor de la Tasa Interna de Retorno (TIR) es la siguiente:

$$\mathbf{TIR_{k+1} = TIR_k - [f(TIR_k) / f'(TIR_k)]}$$

En términos prácticos, habrá que obtener la primera derivada de la función particular que represente al Valor Presente Neto (VPN), partir de un valor supuesto para la Tasa Interna de Retorno (cero, por ejemplo), y sustituir dicho valor en la función y en su derivada como lo indica la expresión anterior. El nuevo valor obtenido servirá para que, de nueva cuenta, se sustituya en la función y en su derivada y, con este procedimiento iterativo, se obtenga a cada paso un mejor valor que se aproxime al verdadero de la Tasa Interna de Retorno.

TASA EXTERNA DE RETORNO (TER)

El cálculo de la Tasa Externa de Retorno (TER) se realiza aplicando la misma expresión señalada en el punto inmediato anterior, pero se deberán modificar los Flujos de Efectivo Neto; para ello se deberán agregar en las proformas de Estados de Resultados los productos financieros que puedan ser generados por la inversión de las utilidades netas en otros proyectos diferentes del que se está evaluando.

Con dicha inversión, estos recursos monetarios accederán a tasas exógenas al mismo, y por tal motivo, el indicador recibe este nombre.

Cabe señalar que la Tasa Externa de Retorno (TER) tiene las mismas características, desde el punto de vista matemático, que la Tasa Interna de Retorno (TIR); sin embargo, cuando la segunda es indefinida o presenta más de un valor numérico, la primera puede sí serlo o ser única, según sea el caso, pero sin ser ello una regla. Entendiendo que ambas tasas resultan ser indicadores de decisión, se recomienda proceder con este cálculo solamente cuando se presente esa situación.

RELACIÓN BENEFICIO/COSTO (B/C)

Este indicador se define como la relación entre los Beneficios y los Costos de un proyecto a valores actuales (Valor Presente). Si la relación B/C > 1 el proyecto deberá aceptarse pues indica que sus beneficios son mayores que sus costos, y por lo tanto es conveniente para el o los inversionistas (inversión rentable). Si por el contrario, B/C < 1, se debe rechazar el proyecto pues indica que sus costos son mayores a sus beneficios y por lo tanto el proyecto no es rentable.

La relación B/C se calculará aplicando la siguiente relación:

$$(B/C)_i = \sum_{t=1}^{n} B_t\,(1+i)^{-t} \,/\, C_0 + \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+i)^{-t}$$

ÍNDICE DE RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN (IRI)

Este índice será calculado con la siguiente ecuación:

$$IRI_i = VPN_i \,/\, [C_0 + \sum_{t=1}^{n} C_t\,(1+i)^{-t}]$$

Se considerará como rentable un proyecto cuyo Índice de Rentabilidad de Inversión sea positivo; y como no rentable el caso negativo.

PAGO ANUAL EQUIVALENTE (PAE)

Con el Método del Pago Anual Equivalente (PAE), todos los ingresos y gastos que ocurran dentro de un periodo son convertidos a una anualidad equivalente (uniforme). Cuando dicha anualidad es positiva, el proyecto generará utilidades y es conveniente llevarlo a cabo; si es negativo ocurre lo inverso.

El Pago Anual Equivalente (PAE) será determinado con la expresión siguiente:

$$\mathbf{PAE_i = VPN_i\ (i) / [1 - (1 + i)^{-n}]}$$

FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN VALUACIÓN INDUSTRIAL Y DE NEGOCIOS

MODULO III
CA 004
VALUACIÓN DE NEGOCIOS

TEMA

EJERCICIOS DE FINANZAS

EXPOSITOR: DR. ARCADIO MANUEL GAMBOA MEDINA
PALACIO DE MINERIA
ABRIL DEL 2002

Palacio de Minería, Calle de Tacuba No. 5, Primer piso, Delegación Cuauhtémoc, CP 06000, Centro Histórico, México D F ,
APDO Postal M-2285 • Tels 5521.4021 al 24, 5623.2910 y 5623 2971 • Fax. 5510 0573

SERIE I

Ejemplo 1.

Encontrar el valor presente P de N\$1,500.00 si la tasa de interés es del 8% anual efectiva y el término es de 5 años.

Solución:

$$P = 1500\,(1.08)^{-5} = 1020.87$$
$$P = \text{N\$}1{,}020.87$$

Ejemplo 2.

Encontrar el monto S de N\$100.00 acumulados durante 20 años a una tasa efectiva de interés del 10% durante 20 años.

Solución:

$$S = 100\,(1.1)^{20} = 672.75$$
$$S = \text{N\$}672.75$$

Ejemplo 3.

Encontrar el valor presente P de N\$5,000.00 pagaderos dentro de 4 años cuando el interés es del 5% convertible semestralmente.

Solución:

$$P = 5000\,(1 + 0.05/2)^{-2\times 4} = 4103.73;\ P = \text{N\$}4{,}103.73.$$

Ejemplo 4.

Encontrar el monto S de N\$300.00 acumulados durante 30 años a una tasa nominal de interés del 6% anual convertible trimestralmente.

Solución:

$$S = 300\,(1 + 0.06/4)^{4\times 30} = 1790.80;\ S = \text{N\$}1{,}790.80.$$

Ejemplo 5.

Encontrar el valor presente P de N\$5,000.00 pagaderos dentro de 4 años cuando la fuerza de interés es del 5% anual.

Solución:

$$P = 5000 \times e^{-0.05\times 4} = 4093.65;\ P = \text{N\$}4{,}093.65.$$

Ejemplo 6.

Encontrar el monto S de N\$300.00 acumulados durante 30 años a una fuerza efectiva de interés del 6% anual.

Solución:

$$S = 300 \times e^{0.06 \times 30} = 1814.89; S = \text{N\$}1{,}814.89.$$

Ejemplo 7.

Dado que P = N\$1,000.00 y que S = N\$1,100.00 dentro de 1 año, encontrar el interés, el descuento, la tasa efectiva de interés y la tasa efectiva de descuento de la transacción anual.

Solución:

Tanto el interés como el descuento están dados por:

$$\text{N\$}1{,}100.00 - \text{N\$}1{,}000.00 = \text{N\$}100{,}00$$

La tasa efectiva de interés i, por ende, está definida como:

$$i = 100/1000 = 0.1 = 10\%,$$

y la tasa efectiva de descuento d como:

$$d = 100/1100 = 0.09 = 9.09\%$$

Ejemplo 8.

Encontrar el valor presente P de N$4,500.00 si la tasa efectiva de descuento es del 7.5% anual y el término es de 6 años.

Solución:

$$P = 4500\ (1 - 0.075)^6 = 4500\ (0.925) = 4162.50$$
$$P = \text{N\$}4{,}162.50$$

Ejemplo 9.

Encontrar el monto S de N$1,000.00 acumulados durante 15 años a una tasa efectiva de descuento del 8% anual.

Solución:

$$S = 1000\ (1 - 0.08)^{-15} = 1000\ (0.92)^{-15} = 3492.87$$
$$S = \text{N\$}3{,}492.87$$

Ejemplo 10.

Encontrar el valor presente P de N$5,000.00 pagaderos dentro de 4 años cuando la tasa nominal de descuento es del 4.5% anual convertible semestralmente.

Solución:

$$P = 5000\,(1 - 0.045/2)^{2\times4} = 5000\,(0.9775)^{2\times4} = 4167.77$$
$$P = \text{N\$}4{,}167.77$$

Ejemplo 11.

Encontrar el monto S de N$300.00 acumulados durante 30 años a una tasa nominal de descuento del 6% anual convertible bimestralmente.

Solución:

$$S = 300\,(1 - 0.06/6)^{-6\times30} = 300\,(0.99)^{-6\times30} = 1831.41$$
$$S = \text{N\$}1{,}831.41$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentre el monto al cual se acumularán N$100.00: a) al 4% anual convertible trimestralmente durante 10 años; b) al 6% anual convertible semestralmente durante 5 años; c) a la tasa efectiva de descuento del 3% anual durante 8 años; d) al 5% efectivo durante 10 años, al 4% efectivo durante los siguientes 5 años y al 2.5% efectivo durante los 3 años subsiguientes; y e) a la fuerza de interés del 4% anual durante 3 años y 9 meses.

2. ¿Qué fuerza constante de interés produciría el mismo resultado que las tasas de interés del problema 1.d)?

3. Encuentre el valor presente de N$100.00 pagaderos dentro de 20 años: a) al 5% convertible semestralmente; b) al 5% convertible instantáneamente (fuerza de interés); y c) al 4% convertible trimestralmente durante los primeros 10 años y al 3% anual efectivo después.

4. Encuentre el monto de N$100.00 acumulados durante 20 años a las siguientes tasas de interés: a) tasa efectiva de interés correspondiente a una tasa nominal de descuento del 4% anual convertible bimestralmente; b) 6% anual convertible cuatrimestralmente durante 12 años y 3.5% anual convertible bianualmente; y c) tasa de interés anual a la cual un capital se triplica en 21 años.

5. Encontrar el monto de N$100.00 al fin de 6 años, si el interés al que se encuentra colocado es del 5% efectivo anual.

6. Encontrar el monto de N$3,000.00 al fin de 12 años, si se invierte a una tasa del 5% convertible anualmente.

7. Encontrar el monto de N$100.00 invertidos al 6% durante 40 años.

8. Encontrar el monto de N$100.00 por 3 años al 6%.

9. Encontrar el número de años requeridos para que N$500.00 se conviertan en N$735.00 a una tasa del 6% anual.

10. Encontrar el número de años para que N$100.00 sean el valor presente de N$119.10 a una tasa del 6%.

11. Encontrar el tiempo en que N$500.00 se duplicarán al 6% convertible trimestralmente.

12. Encontrar la tasa de interés a la cual N$100.00 se acumularán a N$119.10 en 3 años.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. a) N$148.89; b) N$134.39; c) N$127.59; d) N$213.42; y e) N$116.18
2. 4.212%
3. a) N$37.24; b) N$36.79; y c) N$49.98
4. a) N$224.37; b) N$267.39; y c) N$284.71
5. N$134.01
6. N$5,387.57
7. N$1,028.57
8. N$119.10
9. 6.61 años
10. 3 años
11. 11.64 años
12. 6% efectivo anual

SERIE II

Ejemplo 1.

Encontrar la tasa efectiva anual equivalente a una tasa nominal anual del 6% convertible semestralmente.

Solución:

$$1 + i = (1 + 0.06 \div 2)^{\wedge}2$$
$$\Rightarrow \quad i = 6.09\%$$

Ejemplo 2.

Encontrar la tasa nominal anual convertible trimestralmente equivalente a una tasa efectiva anual del 4%.

Solución:

$$1 + 0.04 = (1 + i(4) \div 4)^{\wedge}4$$
$$\Rightarrow \quad i(4) = 3.94\%$$

Ejemplo 3.

Encontrar la tasa efectiva anual equivalente a una fuerza de interés del 5% anual.

Solución:

$$1 + i = e^{0.05}$$
$$\Rightarrow \quad i = 5.13\%$$

Ejemplo 4.

Encontrar la fuerza de interés anual equivalente a una tasa efectiva de interés del 5% anual.

Solución:

$$1 + 0.05 = e^{\delta}$$
$$\Rightarrow \quad \delta = 4.88\%$$

Ejemplo 5.

Encontrar la tasa nominal anual de interés convertible mensualmente equivalente a una fuerza de interés del 10% anual.

Solución:

$$(1 + i(12) \div 12)^{\wedge}12 = e^{\wedge}0.1$$
$$\Rightarrow \quad i(12) = 10.04\%$$

Ejemplo 6.

Encontrar la fuerza de interés anual equivalente a una tasa nominal anual convertible cuatrimestralmente del 9%.

Solución:

$$(1 + 0.09 \div 3)^{\wedge}3 = e^{\wedge}\delta$$
$$\Rightarrow \quad \delta = 8.87\%$$

Ejemplo 7.

Encontrar la tasa de descuento efectiva anual equivalente a una tasa de descuento nominal anual del 5% convertible semestralmente.

Solución:

$$1 - d = (1 - 0.05 \div 2)^{\wedge}2$$
$$\Rightarrow \quad d = 4.94\%$$

Ejemplo 8.

Encontrar la tasa nominal anual de descuento convertible trimestralmente equivalente a una tasa efectiva de descuento del 4% anual.

Solución:

$$1 - 0.04 = (1 - d(4) \div 4)^{\wedge}4$$
$$\Rightarrow \quad d(4) = 4.06\%$$

Ejemplo 9.

Encontrar la tasa efectiva de descuento anual equivalente a una fuerza de descuento del 6% anual.

Solución:

$$1 - d = e^{\wedge}\text{-}0.06$$
$$\Rightarrow \quad d = 5.82\%$$

Ejemplo 10.

Encontrar la fuerza de descuento anual equivalente a una tasa efectiva de descuento del 6% anual.

Solución:

$$1 - 0.06 = e^{-\delta'}$$
$$\Rightarrow \quad \delta' = 6.19\%$$

Ejemplo 11.

Encontrar la tasa nominal anual de descuento convertible mensualmente equivalente a una fuerza de descuento del 10% anual.

Solución:

$$(1 - d(12) \div 12)^{12} = e^{-0.1}$$
$$\Rightarrow \quad d(12) = 9.96\%$$

Ejemplo 12.

Encontrar la fuerza de descuento anual equivalente a una tasa nominal anual de descuento del 9% convertible cuatrimestralmente.

Solución:

$$(1 - 0.09 \div 3)^{3} = e^{-\delta'}$$
$$\Rightarrow \quad \delta' = 9.14\%$$

Ejemplo 13.

Encontrar la tasa nominal anual de descuento convertible mensualmente equivalente a una tasa nominal de interés, también convertible mensualmente, del 15% anual.

Solución:

$$(1 + 0.15 \div 12)^{\wedge}12 = (1 - d(12) \div 12)^{\wedge}\text{-}12$$
$$\Rightarrow \quad d(12) = 14.81\%$$

Ejemplo 14.

Encontrar la tasa efectiva de interés anual equivalente a una tasa nominal anual de descuento convertible quincenalmente del 7.5%.

Solución:

$$1 + i = (1 - 0.075 \div 24)^{\wedge}\text{-}24$$
$$\Rightarrow \quad i = 7.8\%$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar la tasa efectiva anual equivalente a una tasa efectiva semestral del 3%.

2. Encontrar la tasa efectiva trimestral equivalente a una tasa efectiva anual del 4%.

3. Encontrar la tasa efectiva semestral equivalente a una fuerza de interés del 5% anual.

4. Encontrar la fuerza de interés mensual equivalente a una tasa efectiva de interés del 5% mensual.

5. Encontrar la tasa nominal semestral de interés convertible quincenalmente equivalente a una fuerza de interés del 10% semestral.

6. Encontrar la fuerza de interés trimestral equivalente a una tasa nominal trimestral convertible mensualmente del 9%.

7. Encontrar la tasa de descuento efectiva mensual equivalente a una tasa de descuento nominal mensual del 5% convertible quincenalmente.

8. Encontrar la tasa nominal cuatrimensual de descuento convertible mensualmente equivalente a una tasa efectiva de descuento del 4% cuatrimensual.

9. Encontrar la tasa efectiva de descuento mensual equivalente a una fuerza de descuento del 6% mensual.

10. Encontrar la fuerza de descuento trimestral equivalente a una tasa efectiva de descuento del 6% semestral.

11. Encontrar la tasa nominal semestral de descuento convertible quincenalmente equivalente a una fuerza de descuento del 10% semestral.

12. Encontrar la fuerza de descuento trimestral equivalente a una tasa nominal trimestral de descuento del 9% convertible mensualmente.

13. Encontrar la tasa nominal semestral de descuento convertible quincenalmente equivalente a una tasa nominal de interés, también convertible quincenalmente, del 15% semestral.

14. Encontrar la tasa efectiva de interés bianual equivalente a una tasa nominal bianual de descuento convertible mensualmente del 7.5%.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. 6.09%
2. 0.99%
3. 2.53%
4. 4.88%
5. 10.04%
6. 8.87%
7. 4.94%
8. 4.06%
9. 5.82%
10. 3.09%
11. 9.96%
12. 9.14%
13. 14.81%
14. 7.8%

SERIE III

Ejemplo 1.

Calcular el valor presente de 20 pagos anuales de N$500.00, el primero de ellos efectuándolo un año después del momento actual, a una tasa del 8% efectiva anual.

Solución:

$$VP = 500 \times a(20,0.08) = 4909.07$$
$$VP = N\$4,909.07$$

Ejemplo 2.

Obtener el valor futuro de los pagos del problema anterior.

Solución:

$$VF = 500 \times S(20,0.08) = 22880.98$$
$$VF = N\$22,880.98$$

Ejemplo 3.

¿Cuál debe ser el precio de compra de un bono que proporciona dividendos netos vencidos del 1% semestral pagaderos semestralmente? El bono tiene un valor nominal de N$100.00 y es redimible a la par en 10 años. Se desea obtener un rendimiento del 4.5% efectivo anual.

Solución:

Evidentemente, los nuevos pesos que se ofrecen pagar como dividendo al final de cada uno de los 20 semestres se deben tratar como el valor presente de una anualidad ordinaria. Sin embargo, los pagos son semestrales y la tasa es efectiva anual. Por lo tanto, para utilizar la fórmula discutida, primero se necesita obtener la tasa efectiva semestral equivalente a una tasa efectiva anual del 4.5%.

$$1 + 0.045 = (1 + i(2) \div 2)^\wedge 2$$
$$\Rightarrow \quad i(2) \div 2 = 2.23\%$$

$$\therefore \quad P = a(20,0.0223) + 100 \times (1.045^\wedge{-10}) = 16.00 + 64.39 = 80.39$$
$$P = N\$80.39$$

El bono se debe pagar con un descuento de N$19.61, a un precio de N$80.39.

Ejemplo 4.

Una deuda se va a liquidar mediante pagos semestrales iguales y vencidos. Encontrar el valor de la deuda si la renta anual es de N$500.00 cada uno durante 5 años y la tasa de interés es del 8% anual convertible semestralmente.

Solución:

$$i(2) \div 2 = 0.08 \div 2 = 0.04$$
$$\therefore \quad D = (500 \div 2) \times a(10, 0.04) = 2027.72$$
$$D = N\$2,027.72$$

Ejemplo 5.

Una persona está formando un fondo de ahorro efectuando abonos de N$10,000.00 cada 6 meses al 4.5% convertible semestralmente. ¿Cuánto dinero habrá en el fondo al final de 7 años?

Solución:

$$i(2) \div 2 = 0.045 \div 2 = 0.0225$$

$$VF = 10000 \times S(14, 0.0225) = 162437.08$$
$$V = N\$162,437.08.$$

Ejemplo 6.

¿Cuántos pagos anuales completos y vencidos de N$1,500.00 y qué pago incompleto un año después deben hacerse para acumular al 6% anual N$25,000.00?

Solución:

$$25000 = 1500 \times [(1.06\text{^}n) - 1] \div 0.06$$
$$\Rightarrow \quad n = 11.9 \text{ años}$$
$$\Rightarrow \quad \text{El número de pagos completos de N\$1,500.00 es 11.}$$

$$1500\times[(1.06^{11})-1]\div 0.06=22457.46$$
$$22457.46\times 1.06=23804.91$$
$$25000-23804.91=1195.09$$

$\Rightarrow$ El último pago incompleto un año después es de N$1,195.09.

Ejemplo 7.

Un empresario dona N$250,000.00 a una Universidad para que se proporcione una beca anual en forma indefinida. Si el dinero puede ser invertido al 8% efectivo anual, ¿de cuánto será la beca B al año?

Solución:

$$250000=B\div 0.08$$
$$\Rightarrow\ B=N\$3'125{,}000.00$$

Ejemplo 8.

Una dueda de N$10,000.00 va a ser amortizada mediante 7 pagos anuales iguales y vencidos, cada uno de ellos conteniendo un abono a interés y otro a capital. Si la tasa efectiva de interés es del 5% anual, encontrar el pago anual y construir la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

$$10000=P\times a(7;0.05)$$
$$\Rightarrow\ P=N\$1{,}728.20$$

Habiendo obtenido el valor de los pagos anuales, la tabla de amortización se puede construir renglón por renglón aplicándole la tasa de interés al saldo insoluto al principio de cada período para obtener el interés contenido en el pago. En seguida, la diferencia entre **P** y el citado interés arroja el capital contenido en el pago, mismo que, restándoselo al saldo insoluto al principio del período, da como resultado el saldo insoluto al final del período. Éste pasa a ser el saldo insoluto al principio del siguiente período y el procedimiento se repite hasta saldar la deuda.

En este ejemplo, la construcción del primer renglón obedece a lo previamente señalado.

Al principio del primer período, el saldo insoluto es igual a la deuda total de N$10,000.00. El 5% de este saldo insoluto es de N$500.00 (interés contenido en el pago), por lo cual el capital contenido en el pago es de N$1,228.20 (N$1,728.20 - N$500.00). Por lo tanto, el saldo insoluto al final del primer período es de N$8,771.80 (N$10,000.00 - N$1,228.20). Esta cifra pasa a ser el saldo insoluto al principio del segundo período y, repitiendo el procedimiento período por período, se completa la tabla de amortización. El resultado completo de este ejemplo es el siguiente:

Período de Pago	*Saldo Insoluto al Principio del Período*	*Interés Contenido en el Pago*	*Capital Contenido en el Pago*	*Saldo Insoluto al Final del Período*
1	N$10,000.00	N$500.00	N$1,228.20	N$8,771.80
2	N$8,771.80	N$438.59	N$1,289.61	N$7,482.19
3	N$7,482.19	N$374.11	N$1,354.09	N$6,128.10
4	N$6,128.10	N$306.41	N$1,421.79	N$4,706.31
5	N$4,706.31	N$235.32	N$1,492.88	N$3,213.43
6	N$3,213.43	N$160.67	N$1,567.53	N$1,645.90
7	N$1,645.90	N$82.30	N$1,645.90	N$0.00

Ejemplo 9.

De las características de la deuda del Ejemplo 8 y de su correspondiente forma de pago, determinar directamente el 5° renglón de la tabla de amortización (sin utilizar la información de los períodos precedentes).

Solución:

En este caso, **t = 5**. En consecuencia:

1. El saldo insoluto al principio del período está dado por **P×a(3,0.05)**. A saber:

$$N\$1,728.20 \times a(3,0.05) = N\$4,706.31$$

2. El interés contenido en el pago está dado por **P×(1 - V^3)**. A saber:

$$N\$1,728.20 \times (1 - V\text{^}3) = N\$235.32$$

3. El capital contenido en el pago está dado por **P×V^3**. A saber:

$$N\$1,728.20 \times V\text{^}3 = N\$1,567.53$$

4. El saldo insoluto al final del período está dado por **P×a(2,0.05)**. A saber:

$$N\$1,728.20 \times a(2,0.05) = N\$3,213.43$$

Ejemplo 10.

Una deuda de N$160,000.00 devenga una tasa de interés del 4% efectivo anual y va a ser amortizada mediante pagos iguales de N$40,000.00 al fin de cada año. Encontrar cuántos pagos completos se deben efectuar y qué pago incompleto deberá cubrirse un año después del último completo. Elabore la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

$$160000 = 40000 \times a(n,0.04)$$
$$\Rightarrow \quad n = 4.45 \text{ años}$$

De lo anterior se concluye que el número de pagos completos de $N40,000.00 es 4.

Para determinar cuánto se deberá pagar al final del 5° año, primeramente se obtiene el valor futuro de la deuda al final de 4 años y se le resta el valor futuro de los cuatro pagos completos.

$$160000 \times 1.04\text{^}4 - 40000 \times S(4,0.04) = 17318.81$$

Es decir, después de 4 años, se tendrá un saldo insoluto de N$17,318.81. Un año después, este saldo insoluto será de N$17,318.81×1.04 = N$18,011.56, por lo cual éste será el valor del pago incompleto. La tabla de amortización respectiva es la siguiente (para efectos de simplicidad, se omite la nomenclatura de unidad N$):

Período de Pago	*Saldo Insoluto al Principio del Período*	*Interés Contenido en el Pago*	*Capital Contenido en el Pago*	*Saldo Insoluto al Final del Período*
1	160,000.00	6,400.00	33,600.00	126,400.00
2	126,400.00	5,056.00	34,944.00	91,456.00
3	91,456.00	3,658.24	36,341.76	55,114.24
4	55,114.24	2,204.57	37,795.43	17,318.81
5	17,318.81	692.75	17,318.81	0.00

Ejemplo 11.

Una deuda de N$12,000.00 va a ser amortizada mediante 6 pagos vencidos a una tasa efectiva de interés del 5% anual, cada uno de ellos conteniendo N$2,000.00 por concepto de capital. Determinar los pagos anuales para amortizar esta deuda.

Solución:

Este problema se soluciona por medio de la elaboración de la tabla de amortización correspondiente.

Período de Pago	*Saldo Insoluto al Principio del Período*	*Interés Contenido en el Pago*	*Capital Contenido en el Pago*	***Pago (Capital e Interés Incluídos)***	*Saldo Insoluto al Final del Período*
1	12,000.00	600.00	2,000.00	**2,600.00**	10,000.00
2	10,000.00	500.00	2,000.00	**2,500.00**	8,000.00
3	8,000.00	400.00	2,000.00	**2,400.00**	6,000.00
4	6,000.00	300.00	2,000.00	**2,300.00**	4,000.00
5	4,000.00	200.00	2,000.00	**2,200.00**	2,000.00
6	2,000.00	100.00	2,000.00	**2,100.00**	0.00

Ejemplo 12.

Suponga que en el Ejemplo 8, después de cuatro períodos completos, la tasa cambia a 5.5% efectivo anual.

En la primera de las opciones mencionadas, lo que se tiene es una deuda nueva de N$4,706.31 a saldarse mediante tres pagos anuales vencidos. Se empieza entonces calculando el nuevo pago anual, para después reconstruir la tabla de amortización.

$$4706.31 = P \times a(3, 0.055)$$
$$\Rightarrow \quad P = N\$1{,}744.41$$

Periodo de Pago	*Saldo Insoluto al Principio del Periodo*	*Interés Contenido en el Pago*	*Capital Contenido en el Pago*	*Saldo Insoluto al Final del Periodo*
5	4,706.31	258.85	1,485.56	3,220.74
6	3,220.74	177.14	1,567.27	1,653.47
7	1,653.47	90.94	1,653.47	0.00

Alternativamente, la tabla de amortización quedaría de la siguiente forma:

Periodo de Pago	*Saldo Insoluto al Principio del Periodo*	*Interés Contenido en el Pago*	*Capital Contenido en el Pago*	*Saldo Insoluto al Final del Periodo*
5	4,706.31	258.85	1,492.88	3,213.43
6	3,213.43	176.74	1,567.53	1,645.90
7	1,645.90	90.52	1,645.90	0.00

Como se muestra en las tablas, en la segunda opción los tres últimos pagos son ligeramente decrecientes, quedando en una posición intermedia los pagos uniformes de la primera opción.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Suponga un valor del dinero en el tiempo de 0.05 anual. a)¿A qué cantidad equivalente recibida en diez pagos anuales iguales, el primero recibido después de un año, serían N$100.00 recibidos de inmediato? b)¿Cuál sería la cantidad anual si el primer pago se recibiere de inmediato?

2. Se puede hacer un pago de N$10,000.00 de inmediato o pagar cantidades iguales de **R** durante los próximos cinco años (el primer pago dentro de

un año). Con un valor del dinero en el tiempo de 0.05 anual, ¿cuál es el valor máximo de R que se estaría dispuesto a aceptar?

3. Suponga que un banco carga un 1% de interés mensual. A Usted le presta el banco N$50,000.00 a ser pagados por cantidades iguales durante un período de 35 meses (el primer pago dentro de un mes). ¿Cuánto tendrá Usted que pagar mensualmente?

4. Suponga que una compañía tiene pendiente una deuda de carátula de N$10'000,000.00 de bonos al 10% de dividendos anuales pagaderos al final de cada período, cuyo vencimiento es dentro de 20 años (*i.e.*, la deuda paga N$1'000,000.00 vencidos de interés por año). La tasa de interés del mercado de dinero es de 4% anual. ¿Cuál es el valor presente de la deuda?

5. Un bono promete pagar N$30.00 anuales de dividendos vencidos durante 30 años y N$1,000.00 a su vencimiento. Si el mercado de dinero paga el 3% anual efectivo de interés, ¿cuál es el valor presente del bono?

6. Exactamente dentro de 20 años, una persona empezará a recibir una pensión de N$10,000.00 anuales. La duración de la pensión es de 30 años. ¿Cuánto vale la pensión ahora, si el dinero vale 0.05 por año?

7. Para comprar una casa se grava ésta con una hipoteca y se abonan N$12,000.00 anuales pagaderos mensualmente durante 15 años. Si la tasa es del 8% anual nominal convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado de dicha casa?

8. Una persona desea disponer de un capital de N$100,000.00 dentro de 10 años, formado mediante depósitos mensuales en un banco que le ofrece el 9% de interés anual nominal convertible mensualmente. ¿De cuánto será la renta anual (la suma directa de 12 depósitos mensuales) para lograr su objetivo?

9. Una persona adquiere una televisión cuyo valor es de N$5,000.00 con la opción de pagarla mediante 12 abonos mensuales, el primero un mes después de efectuada la compra. Si la tasa de interés que le cargan es del 1% mensual efectiva, ¿a cuánto ascenderán los abonos mensuales?

10. Una persona adeuda N$20,000.00 y desea efectuar pagos anuales de N$1,000.00. ¿Durante cuánto tiempo deberá efectuar dichos pagos a fin de liquidar el adeudo si la tasa de interés involucrada es del 3.5% anual efectiva?

11. Una anualidad de N$125.00 mensuales tiene un valor presente de N$3,000.00. Si el interés es del 12% anual efectivo, ¿cuántos pagos completos se requiren y qué pago irregular al fin del siguiente mes para efectos de que la operación sea equitativa?

12. Para liquidar una deuda de N$52,563.00 se efectúan pagos anuales de N$6,000.00 en forma vencida durante 11 años. ¿Cuál es la tasa anual nominal convertible semestralmente con la que se está operando?

13. Un fideicomiso de N$720,000.00 proporciona pagos anuales de N$40,000.00 al fin de cada año durante 30 años. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que paga el fideicomiso?

14. Por una deuda de N$50,000.00 se hacen pagos anuales iguales para su amortización en 15 años a una tasa efectiva del 5% anual. Sin elaborar la tabla de amortización, calcular: a) capital contenido en el 10° pago; b)interés contenido en el 12° pago; y c) capital total pagado después de haber efectuado 13 pagos.

15. Una deuda de N$90,073.45 se amortiza por medio de pagos mensuales iguales durante 10 años a una tasa de interés del 6% anual nominal convertible mensualmente. En el 90° período de pago, sin utilizar el menú de amortización de una calculadora financiera, determine: a) el saldo insoluto al principio del período; b) el interés contenido en el pago; y c) el capital contenido en el pago.

16. Una deuda de N$25,000.00 devenga interés del 4% efectivo anual y va a ser amortizada mediante pagos iguales de N$4,000.00 al fin de cada año. Encontrar cuántos pagos completos se deben efectuar y qué pago incompleto deberá cubrirse un año después del último completo. Elabore la tabla de amortización correspondiente.

17. ¿Cuál es el precio de una casa cuya renta mensual es de N$1,200.00 si la tasa de interés es del 12% anual nominal convertible mensualmente?

18. Un préstamo de N$1'500,000.00 se amortiza en un plazo de 6 años mediante pagos semestrales iguales, el primero de ellos un año después de recibir el préstamo; el interés es del 12% anual nominal convertible semestralmente. Elaborar la tabla de amortización correspondiente.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. a) 10 pagos de N$12.95 cada uno; b) 10 pagos de N$12.33 cada uno.
2. N$2,309.75
3. N$1,700.18
4. N$18'154,195.81
5. N$1,000.00
6. N$60,834.01
7. N$104,640.59
8. N$6,201.09
9. N$444.24
10. 35 años
11. 27 pagos mensuales completos de N$125.00 y un pago de N$47.57 un mes después.
12. 3.96%
13. 0.3%
14. a) N$3,594.60; b) N$854.06; y c) N$41,043.01
15. a) N$28,650.80; b) N$143.25; y c) N$856.75
16. 7 pagos completos de N$4,000.00 y 1 pago de N$1,357.34 un año después.
17. N$120,000.00

SERIE IV

Ejemplo 1.

A cambio de una promesa de pago de N$500,000.00 al final de 10 años, una persona conviene en abonar N$100,000.00 de inmediato, N$200,000.00 al final de 6 años y una suma adicional al final de 12 años. Si la tasa de interés es del 3% anual, ¿a cuánto debería ascender dicha suma adicional?

Solución:

Sea **X** el pago final de la transacción. Entonces, el valor presente **VP** de los 3 pagos está dado por:

$$VP = 500000 \times V\string^10 = 100000 + 200000 \times V\string^6 + X \times V\string^12$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$149{,}063.45$$

De igual manera, **X** se puede obtener con base al valor futuro **VF** de los 3 pagos al final de 12 años.

En este caso, la relación estaría dada como:

$$VF = 500000 \times (1.03)\string^2 = 100000 \times (1.03)\string^12 + 200000 \times (1.03)\string^6 + X$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$149{,}063.45$$

Ejemplo 2.

A cambio de una promesa de pago de N$600,000.00 al final de 8 años, una persona conviene en pagar N$100,000.00 de inmediato, N$200,000.00 al final de 5 años y una suma adicional al final de 10 años. Si la tasa de interés es del 4% anual, ¿a cuánto debería ascender dicha suma adicional?

Solución:

Una vez más, sea **X** el pago final de la transacción. Así, el valor presente **VP** de los 3 pagos está dado por:

$$VP = 600000 \times V\text{^}8 = 100000 + 200000 \times V\text{^}5 + X \times V\text{^}10$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$257{,}604.99$$

De igual manera, **X** se puede obtener con base al valor futuro **VF** de los 3 pagos al final de 10 años.

En este caso, la relación estaría dada como:

$$VF = 600000 \times (1.04)\text{^}2 = 100000 \times (1.04)\text{^}10 + 200000 \times (1.04)\text{^}5 + X$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$257{,}604.99$$

Ejemplo 3.

Una persona se compromete a pagar N$50,000.00 al fin de 5 años, a cambio de recibir N$10,000.00 en este momento, N$15,000.00 después de 2 años y una cantidad **X** al final del 4° año. ¿A cuánto debe ascender dicha cantidad si la tasa de interés es del 5% anual efectivo?

Solución:

$$X = 50000\times(1.05)^{-1} - 15000\times(1.05)^{2} - 10000\times(1.05)^{4}$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$18{,}926.49$$

Ejemplo 4.

Se desea cambiar una deuda de **N$2,500.00** que vence en dos años por tres pagos iguales **X**: el primero pagadero dentro de 6 meses, el segundo después de un año y el tercero al fin de dos años. ¿Cuánto debe valer **X** si la tasa de interés anual efectiva es del 6%?

Solución:

$$X + X\times(1.06) + X\times(1.06)^{1.5} = 2500$$
$$\Rightarrow \quad X = N\$793.31$$

Ejemplo 5.

Encontrar el precio **P** en porcentaje de un bono redimible a la par en 10 años con dividendos anuales del 8% a una tasa efectiva anual del 9%. Los dividendos son pagaderos trimestralmente en forma vencida (2% al trimestre).

Solución:

$$1 + i(4)\div 4 = (1.09)^{0.25}$$
$$\Rightarrow \quad i(4)\div 4 = 0.022$$

$$P = 2\times a(40,0.022) + 100\times(1.09)\text{^-}10$$
$$\Rightarrow \quad P = 95.284\%$$

Ejemplo 6.

Encontrar la fecha equivalente para liquidar deudas de N$500.00, N$1,000.00 y N$1,500.00, pagaderas dentro de 6 meses, 1 año y 2 años, respectivamente. La tasa de interés es del 7% anual nominal convertible semestralmente (la fecha equivalente es aquélla en la que se liquidan las deudas por medio de un solo pago consistente en la suma directa de las mismas).

Solución:

$$500\times(1.035)\text{^-}1 + 1000\times(1.035)\text{^-}2 + 1500\times(1.035)\text{^-}4 = 3000\times(1.035)\text{^-}n$$
$$\Rightarrow \quad n = 2.81 \text{ años}$$

Ejemplo 7.

Calcular la fuerza de interés correspondiente a una tasa efectiva anual de interés del 5%.

Solución:

$$1 + 0.05 = e\text{^}\delta$$
$$\Rightarrow \quad \delta = 4.88\%$$

Ejemplo 8.

¿A qué tasa de interés convertible anualmente una cierta cantidad quintuplicará su valor en 5 años?

Solución:

$$5 = (1 + i)^5$$
$$\Rightarrow \quad i = 37.97\%$$

Ejemplo 9.

¿Qué tasa da mejor rendimiento: 5.5% convertible anualmente o 5% convertible semestralmente?

Solución:

$$1 + i = (1 + 0.025)^2$$
$$\Rightarrow \quad i = 5.06\%$$

$\therefore$ 5.5% convertible anualmente da mejor rendimiento.

Ejemplo 10.

Si una cantidad de dinero se triplica en 10 años colocada a una cierta tasa de interés efectiva anual, ¿cuánto tiempo tardará en quintuplicarse a la misma tasa de interés?

Solución:

$$3 = (1 + i)^{10}$$
$$\Rightarrow \quad i = 11.61\%$$

$$5 = (1 + 0.1161)^{n}$$
$$\Rightarrow \quad n = 14.6497 \text{ años}$$

Ejemplo 11.

El beneficiario de un pagaré de N$1,000.00 pagadero dentro de 2 años desea tener su dinero ahora. Calcule la cantidad **D** que recibirá si se descuenta a: a)una tasa efectiva de interés del 5% anual; b)una tasa de descuento correspondiente a una tasa efectiva de interés del 5% anual; y c)una tasa efectiva de interés del 5% anual en el primer año y a la misma tasa en el segundo.

Solución:

$$a)\ D = 1000\times(1 + 0.05)^{-2} = 907.03$$
$$D = N\$907.03$$

$$b)\ D = N\$907.03$$
(se descuenta a la misma tasa)

$$c)\ D = N\$907.03$$
(se descuenta a la misma tasa)

Ejemplo 12.

¿Qué fuerza de interés constante produciría el mismo efecto que las tasas del Ejemplo 11.c)?

Solución:

$$\delta = 4.88\%$$

(ver Ejemplo 7)

Ejemplo 13.

Una deuda de N$5,000.00 pagadera en 3 años sin intereses y otra de N$10,000.00 pagadera dentro de 10 años con interés del 4.5% semestral efectivo se desean cambiar por un solo pago dentro de 5 años. ¿Cuál es el pago requerido si el dinero devenga un interés del 8% efectivo anual?

Solución:

$$P = 5000\times(1.08)^{\wedge}2 + [10000\times(1.045)^{\wedge}20]\times 1.08^{\wedge}\text{-}5$$

$$P = N\$22{,}245.72$$

Ejemplo 14.

Una casa fue adquirida en N$450,000.00, pagándose un enganche del 30% y tomándose una hipoteca a un interés del 15% anual por la diferencia. Si al

Solución:

$$C = 0.7 \times 450000 \times 1.15\text{^}5 - 160{,}000.00 \times 1.15\text{^}2 = 421977.51$$
$$C = N\$421{,}977.51$$

Ejemplo 15.

¿Cuál debe ser el precio de compra de un bono que proporciona dividendos netos del 1% semestral pagaderos semestralmente? El bono tiene un valor nominal de N$100.00 y es redimible a la par en 10 años. Se desea un rendimiento del 4.5% convertible anualmente.

Solución:

$$i = 0.045 \quad \Rightarrow \quad 1.045\text{^}0.5 = 1.0223 = 1 + i(2) \div 2 \quad \Rightarrow \quad i(2) \div 2 = 2.23\%$$

$$\therefore \quad P = 1 \times \ddot{a}(20{,}0.0223) + 100 \times 1.045\text{^-}10 = 16.00 + 64.39 = 80.39$$
$$P = N\$80.39$$

Ejemplo 16.

Una empresa de seguros, para encontrar la prima trimestral equivalente a la anual, multiplica esta última por 0.26. ¿Qué interés anual efectivo está cargando al asegurado?

Solución:

$$1 = 0.26 + 0.26\times(1 + i)^{-0.25} + 0.26\times(1 + i)^{-0.5} + 0.26\times(1 + i)^{-0.75}$$
$$\Rightarrow\ 1\div 0.26 - 1 = 2.8462 = (1 + i)^{-0.25} + (1 + i)^{-0.5} + (1 + i)^{-0.75}$$
$$\Rightarrow\ 2.8462 = a(3,i') \ \Rightarrow\ i' = 2.679\% \text{ (efectiva trimestral)}$$
$$\Rightarrow\ i = 11.2\%$$

Ejemplo 17.

Un refrigerador se compra pagando N\$1,000.00 de contado y N\$300.00 mensuales durante 2 años. ¿Cuál es el precio equivalente en efectivo si el interés es del 12% convertible bimestralmente?

Solución:

$$1 + 0.12\div 6 = (1 + i(12)\div 12)^2$$
$$\Rightarrow\ i(12)\div 12 = 0.995\%$$
$$\Rightarrow\ P = 1000 + 300\times a(24,0.00995) = 7376.77$$
$$P = N\$7,376.77$$

Ejemplo 18.

¿Cuántos pagos anuales completos de N\$2,500.00 y qué pago incompleto un año después deben hacerse con el objeto de acumular al 9% anual N\$15,000.00?

Solución:

$$15000 = 2500 \times S(n,0.09)$$
$$\Rightarrow \quad n = 5.01037 \text{ años}$$
$$\Rightarrow \quad \text{El número de pagos completos de N\$2,500.00 es 5}$$

$$2500 \times S(5,0.09) = 14961.78$$
$$14961.78 \times 1.09 = 16308.34$$
$$15000 - 16308.34 = -1308.34$$
$\Rightarrow$ Al final del 6° año se debe hacer un *retiro* de N$1,308.34

Ejemplo 19.

Si por una deuda de N$1'000,000.00 se hacen pagos mensuales de N$8,000.00 durante 15 años, encontrar la tasa efectiva de interés mensual.

Solución:

$$1000000 = 8000 \times a(180,i')$$
$$\Rightarrow \quad i' = i(12) \div 12 = 0.431\%$$

Ejemplo 20.

Un empresario desea asegurarse un ingreso de N$600,000.00 anuales durante 15 años, una vez que se retire de los negocios a la edad de 60 años. Colocó cierta cantidad de dinero a la edad de 40 años invertida al 8% de interés anual. Considerando que el primer pago debe recibirlo a la edad de 61 años, ¿cuál fue la cantidad que invirtió?

Solución:

$$C = 600000 \times [a(75,0.08) - a(60,0.08)] \times 1.08\text{^}40$$
$$\Rightarrow \quad C = N\$1'101{,}852.49$$

Ejemplo 21.

Una persona efectuó pagos semestrales en un fondo al final de cada semestre y durante 5 años. Si el fondo tiene N$1'000,000.00 al cabo de 10 años y el interés que se abonó fue del 7% convertible semestralmente, ¿cuál fue el pago periódico?

Solución:

$$P \times S(10,0.035) \times 1.035\text{^}10 = 1000000$$
$$\Rightarrow P = N\$60{,}429.21$$

Ejemplo 22.

¿Dentro de cuánto tiempo se comenzará a recibir una renta de N$10,000.00 anuales por una duración de 50 años, si se entregan en este momento N$180,000.00 a un interés del 4% anual?

Solución:

$$180000 = 10000 \times [a(n+50,0.04) - a(n,0.04)]$$
$$\Rightarrow \quad n = 4.51 \text{ años}$$

1. Calcular la tasa nominal de interés convertible semestralmente equivalente a una tasa efectiva de interés de 4.25%.

2. ¿A qué tasa de interés convertible trimestralmente una cierta cantidad duplicará su valor en 10 años?

3. ¿Qué tasa da mejor rendimiento: 5.5% convertible semestralmente o 5% convertible mensualmente?

4. Si una cantidad de dinero se duplica en 9 años colocada a una cierta tasa de interés anual, ¿cuánto tiempo tardará en triplicarse a la misma tasa de interés?

5. El beneficiario de un pagaré de N$1,000.00 pagadero dentro de 2 años desea tener su dinero ahora. Determine la cantidad que recibirá si se descuenta a: a) una tasa efectiva de interés del 4% anual; b) una tasa de descuento correspondiente a una tasa efectiva de interés del 4.25%; y c)una tasa de interés efectiva anual del 4% en el primer año y del 4.5% en el segundo.

6. ¿Qué fuerza de interés constante produciría el mismo efecto que las tasas del problema 5.c)?

7. Una deuda de N$3,500.00 pagadera en 2 años sin intereses y otra de N$4,250.00 pagadera dentro de 5 años con interés del 4% anual efectivo se desean cambiar por un solo pago dentro de 3 años. ¿Cuál es el pago requerido si el dinero devenga un interés del 6% anual convertible trimestralmente?

8. Una casa fue adquirida en N$150,000.00, pagándose un enganche del 50% y tomándose una hipoteca a un interés del 8% convertible semestralmente por la diferencia. Si al fin de 3 años se han pagado

N$60,000.00, ¿qué cantidad deberá cobrarse al fin del 5° año para saldar la hipoteca?

9. La venta de un automóvil se nos ofrece en 2 formas: a) N$28,000.00 en efectivo; o b) N$10,000.00 en este momento y dos pagos de N$9,500.00 al fin de 1 y 2 años, respectivamente. ¿Cuál oferta debemos aceptar si el interés es del 9% anual convertible semestralmente?

10. Deudas de N$1,800.00, N$1,450.00 y N$1,050.00 son pagaderas en 4, 6 y 15 meses, respectivamente. Si se pagan ahora N2,000.00, ¿cuánto deberá pagarse dentro de un año a la tasa del 6% convertible semestralmente?

11. Una persona compra un refrigerador en N$5,000.00, dando un enganche del 20% sobre el valor del aparato y el resto en 12 pagos mensuales, el primero un mes después de la compra. ¿De cuánto serán los abonos si el interés que se cobra es del 2% mensual?

12. Obtener la fecha equivalente de las deudas de N$3,000.00, N$2,500.00 y N$1,750.00, pagaderas en 3, 4 y 7 años, respectivamente, si la tasa de interés es del 5% convertible semestralmente. Indique el resultado en años, meses y días.

13. En lugar de un pago de N$145,000.00 ahora, ¿qué suma deberá pagarse al fin de cada año y durante 15, si la tasa es del 8% anual efectiva?

14. ¿Cuál debe ser el precio de compra de un bono que proporciona dividendos netos del 2% anual pagaderos semestralmente? El bono tiene un valor nominal de N$100.00 y es redimible a la par en 10 años. Se desea obtener un rendimiento del 4.5% anual.

15. Una persona paga su póliza de seguro con prima de N$100.00 cada año en forma anticipada. Si desea cambiar a pagos trimestrales anticipados, ¿de cuánto serán éstos si la tasa de interés es del 4.5% convertible semestralmente?