



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DE UN ROBOT  
BÍPEDO DE SIETE GRADOS DE LIBERTAD

TESIS

Para obtener el título de:  
INGENIERO MECATRÓNICO

P R E S E N T A :

**Javier Pliego Jiménez**

ASESOR:

**Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez**



2010

**A mis padres  
Javier y María Elena**

## Agradecimientos

- A mi familia por todo su apoyo en esta etapa de mi vida.
- Al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez que hizo posible la realización de esta tesis.
- A los miembros del jurado por sus valiosos comentarios.
- A los profesores de la Facultad de Ingeniería de la UNAM por todas las enseñanzas transmitidas, en especial al Ing. Serafín Castañeda Cedeño y al Dr. Paul Maya Ortíz que directa o indirectamente contribuyeron en la realización de esta tesis.
- Al CONACyT por el apoyo económico otorgado para la realización de este trabajo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Robots Bípedos</b>	<b>6</b>
1.1. Fases del movimiento del Robot bípedo . . . . .	6
1.2. Configuraciones comunes . . . . .	7
1.3. Configuración propuesta . . . . .	8
1.4. Cinemática . . . . .	10
1.4.1. Cinemática directa . . . . .	10
1.4.2. Cinemática inversa . . . . .	14
1.5. Dinámica del Robot . . . . .	20
1.5.1. Formulación de Euler-Lagrange . . . . .	20
1.5.2. Cálculo de la energía cinética . . . . .	21
1.5.3. Cálculo de la energía potencial . . . . .	21
1.5.4. Ecuaciones de movimiento del Robot . . . . .	22
1.6. Diseño de una ley de Control . . . . .	36
1.6.1. Técnicas de control . . . . .	36
<b>2. Planeación de Trayectorias para Robots Bípedos</b>	<b>41</b>
2.1. Restricciones . . . . .	41
2.2. ZMP . . . . .	43
2.3. Modelo simplificado: péndulo invertido . . . . .	44
2.4. Análisis y Control del Modelo Simplificado . . . . .	48
<b>3. Simulación</b>	<b>57</b>
3.1. Actuadores . . . . .	57
3.2. Simulación de las trayectorias del Robot . . . . .	60
3.2.1. Desempeño de la ley de Control . . . . .	61
3.2.2. Máquina de Estados . . . . .	70
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>

<b>A. Propiedades del Sistema</b>	<b>76</b>
A.1. Propiedades de las matrices . . . . .	76
A.2. Propiedades relacionadas con cotas y normas . . . . .	78
A.3. Propiedades relacionadas con el modelo . . . . .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

1.	Robots Bípedos . . . . .	5
1.1.	Fases del robot bípedo. . . . .	7
1.2.	Configuraciones comunes: a) Doce grados de libertad b)Ocho grados de libertad . . . . .	8
1.3.	Estructura cinemática del robot. . . . .	9
1.4.	Sistemas de coordenadas del robot bípedo. . . . .	11
1.5.	Posición del centro de gravedad en el plano $y-z$ . . . . .	15
1.6.	Posición del centro de gravedad en el plano $x-z$ . . . . .	16
1.7.	Posición del pie en el plano $x-z$ . . . . .	17
1.8.	Cambio de base al final de cada fase. . . . .	20
1.9.	Distribución de la masa del robot. . . . .	24
1.10.	Control Par Calculado . . . . .	37
1.11.	Controladores clásicos. a) Control PD. b) Control PD con com- pensación de gravedad. c) Control PID . . . . .	40
2.1.	Suma de momentos alrededor de A. . . . .	42
2.2.	a) Péndulo invertido tridimensional de longitud variable. b) Péndu- lo invertido con movimiento restringido a un plano. . . . .	45
2.3.	Modelo simplificado para el robot, en el plano $x-z$ . . . . .	46
2.4.	Sistema sobreamortiguado . . . . .	49
2.5.	a) Posición del centro de gravedad $x_{cg}$ . b) Posición del ángulo $\phi$ . . . . .	50
2.6.	a) Señal de control $\ddot{x}_{cg}$ . b) Velocidad del centro de gravedad $\dot{x}_{cg}$ . . . . .	51
2.7.	Desempeño del observador. a) $x_{cg}$ — vs $\hat{x}_{cg}$ - - -. b) $\phi$ — vs $\hat{\phi}$ - - -. . . . .	53
2.8.	a) Control por retroalimentación del vector de estado. b) Control por retroalimentación del vector de estado con observado . . . . .	54
2.9.	a) Trayectoria para $y_{cg}$ . b) Trayectoria del pie . . . . .	56
3.1.	Diagrama de un motor de CD. . . . .	60
3.2.	Algoritmo para simular los movimientos del robot. . . . .	61
3.3.	Diagrama de bloques en LabVIEW. . . . .	62
3.4.	Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 1. Trayectoria deseada $q_d$ - - -. Simulación $q$ —. . . . .	63

3.5. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
2. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	64
3.6. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
3. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	65
3.7. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
4. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	66
3.8. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
5. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	67
3.9. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
6. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	68
3.10. Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación	
7. Trayectoria deseada $q_d$ - - . Simulación $q$ —.	69
3.11. Par de reacción $\tau_R$ .	70
3.12. Robot con un sistema de visión	71
3.13. Máquina de estados.	73
3.14. Simulación 3D.	74

# Índice de cuadros

1. Robots bípedos actuales . . . . .	4
1.1. Parámetros del robot obtenidos con el software SolidWorks. . . . .	35
2.1. Parámetros del péndulo. . . . .	48
3.1. Parámetros del motor . . . . .	60
3.2. Parámetros de la marcha. . . . .	60



# Introducción

## Antecedentes

Los robots están siendo, cada vez más, parte importante de las actividades humanas. En particular, los procesos industriales han sido transformados en los últimos años con la incorporación de robots. El uso de manipuladores en la industria automotriz o en líneas de ensamblaje se ha traducido en un incremento en la productividad y calidad de los productos.

En años recientes se ha desarrollado otra clase de robots, llamados de servicio, destinados a realizar actividades diferentes a los manipuladores industriales. Están enfocados a ayudar a las personas en diversas tareas que van desde la exploración en zonas peligrosas, asistencia en zonas de desastre, así como trabajar en áreas contaminadas e incluso el entretenimiento. En el área médica los robots de servicio han tenido una gran aplicación; el diseño de mecanismos que tengan un movimiento parecido al movimiento humano y la comprensión de éste ha llevado a mejorar las prótesis añadiendo elementos activos mejorando la rehabilitación de muchos pacientes, por ejemplo se puede citar el robot Lokomat utilizado para la rehabilitación de personas parapléjicas comercializado por Hocoma AG.

Existen dos grupos principales de robots de servicio: los bípedos y los que utilizan una base móvil impulsada generalmente por ruedas. Siendo los robots con base móvil los primeros en desarrollarse y en los que se ha alcanzado un desarrollo importante. Los robots bípedos siguen siendo objeto de estudio actualmente. Presentan muchas ventajas con respecto al segundo grupo, debido principalmente a que presentan una mayor flexibilidad para acceder a lugares difíciles o irregulares, subir o bajar escaleras, evadir ciertos objetos que un robot impulsado por ruedas no podría por requerir una cantidad excesiva de movimientos. Por lo tanto los robots bípedos son ideales para trabajar en entornos diseñados para el hombre. El sistema de locomoción del hombre y otras

especies es extremadamente complejo y ha sido objeto de estudio en los últimos años por diversas compañías y universidades que han desarrollado diversos prototipos de robots bípedos, siendo Japón el país con mayor progreso en el tema. Actualmente existen diferentes prototipos como se muestra en la Figura 1. Cada uno con diferentes características ya sea en el tipo de control utilizado, el tipo de actuadores que poseen (servomotores (Hirai *et al.* 1998), actuadores neumáticos (Verrelst *et al.* 2005), etc.) o los grados de libertad con los que cuentan. Los robots japoneses de Honda, Toyota y Kawada Industries son los que lideran este renglón, cada uno de ellos logrando el objetivo de caminar de forma estable.

Paralelamente se han desarrollado sistemas de visión para dotar al robot de una mayor autonomía y que sea capaz de tomar decisiones en tiempo real, como en Asatani *et al.* (2007), Michel *et al.* (2005) y Seara *et al.* (2003). Algunos robots cuentan también con sistemas de reconocimiento de voz para interactuar con las personas.

## Problemas abiertos

En las últimas dos décadas se ha presentado diversos robots bípedos capaces de realizar un movimiento estable alcanzando velocidades entre 1-2 km/h aproximadamente (Hirai *et al.* 1998, Löffler *et al.* 2004, Kaneko *et al.* 2008). La planeación de trayectorias para alcanzar velocidades superiores sigue siendo objeto de estudio. El diseño de estructuras antropomorfas es hasta el día de hoy un reto, la mayoría de los robots bípedos son pequeños (Tanaka *et al.* 2005). Un tamaño mayor requiere una mayor demanda de energía y necesitan ser alimentados mediante cables restringiendo su área de trabajo. El diseño baterías de mayor duración también es un tópico importante a considerar. La Tabla 1 muestra algunos robots que se han desarrollado hasta el momento.

## Contribución

El presente trabajo tiene como objetivo proponer una configuración para un robot bípedo que sea capaz de caminar de forma estable, obteniendo el modelo cinemático y las ecuaciones de movimiento del robot, así como probar una ley de control para el seguimiento de las trayectorias del robot. Existen en la literatura diferentes configuraciones para robots bípedos, sin embargo, la información sobre sus ecuaciones de movimiento escasa. Una motivación adicional en el desarrollo de este trabajo es obtener tanto las ecuaciones cinemáticas como las ecuaciones dinámicas en forma cerrada; las cuáles son útiles para probar

diferentes leyes de control mediante simulación.

Nombre	Compañía	Grados de Libertad
P2	Honda Motor Co.	20
ASIMO	Honda Motor Co.	26
HRP-2	Kawada Industries	30
Qrio	Sony	28
Jhonnie	Technical University of Munich	17
BARt-UH	IRT	19
I-foot	Toyota	12
Partner Robot	Toyota	31

Cuadro 1: Robots bípedos actuales

La planeación de trayectorias del robot se realiza mediante un modelo simplificado tomando en cuenta las restricciones tanto de capacidad de torque suministrados por los actuadores como las impuestas por las fuerzas y torques de reacción que pueden transmitirse hacia la superficie de contacto. Cuando estas fuerzas y torques son excedidos el robot tiende a rotar con respecto al pie perdiendo balance. De esta forma las trayectorias deben adaptarse para mantener el balance. Una forma de hacerlo es controlar las fuerzas y torques de reacción utilizando un modelo simplificado y aplicando técnicas control para sistemas lineales. Debido a esta restricción nos lleva a un margen de estabilidad muy pequeño. Mediante simulación se valida la ley de control y las trayectorias propuestas agregando también la dinámica de los actuadores. Finalmente se utiliza un modelo 3D para tener un panorama del movimiento del robot, la simulación 3D incluye las ecuaciones de movimiento.

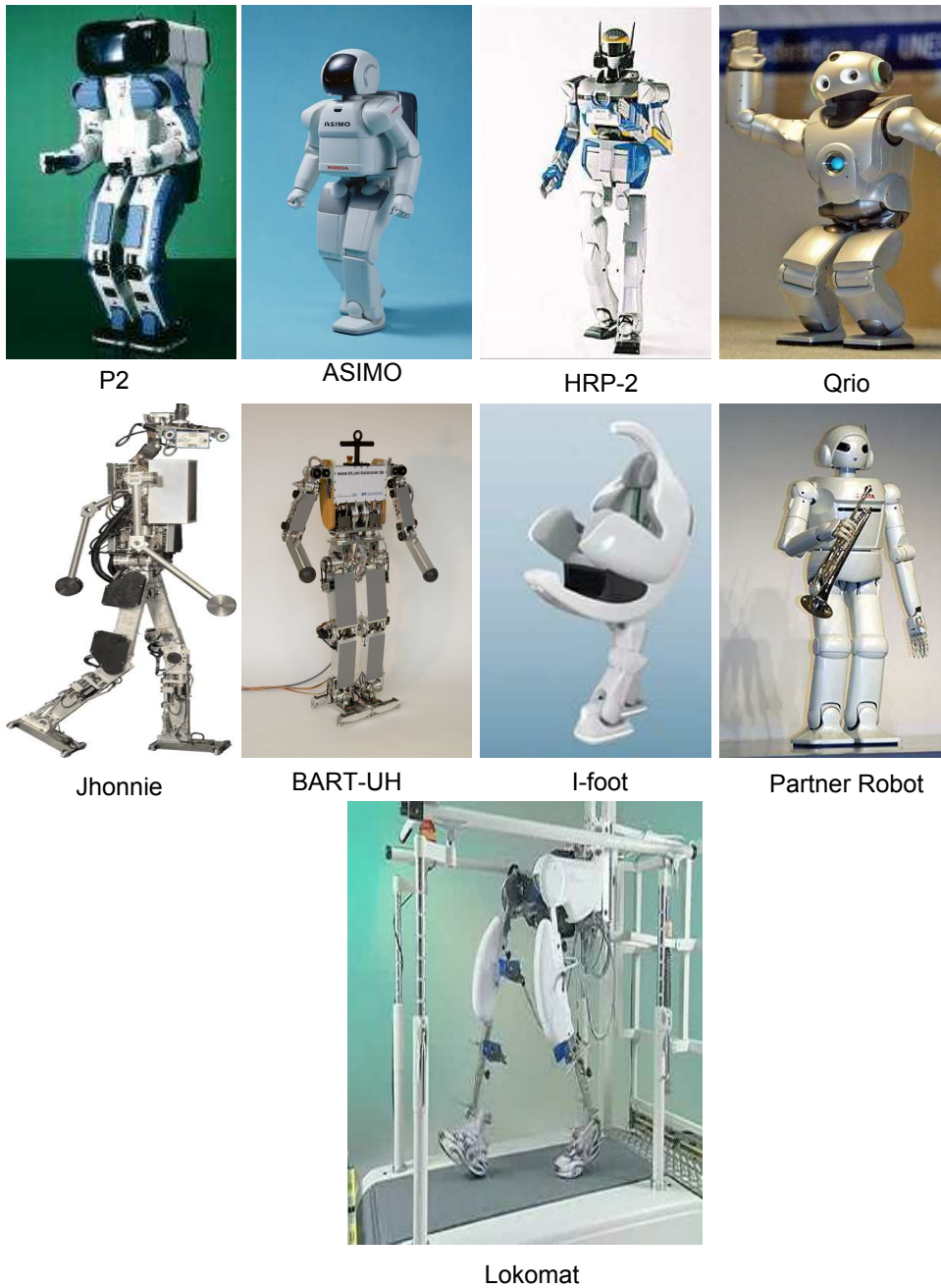


Figura 1: Robots Bípedos

# Capítulo 1

## Robots Bípedos

### 1.1. Fases del movimiento del Robot bípedo

El movimiento de un robot bípedo es cíclico y se distinguen dos fases principales (ver Figura 1.1):

**Fase de Soporte Simple** Ocurre cuando una pierna del robot se encuentra apoyada en el suelo y la otra se mueve libremente. La fase termina cuando la pierna libre entra en contacto con el suelo.

**Fase de Doble Soporte** Se da cuando ambas piernas del robot están apoyadas en el suelo. En muchas ocasiones se considera como una fase instantánea. La inclusión de esta fase ayuda a asegurar el contacto entre la pierna libre y el suelo además de reducir el impacto. Por otro lado implica una mayor dificultad en el modelado matemático y en el diseño de una ley de control (Mu y Wu 2004).

Para obtener el modelo matemático (ecuaciones cinemáticas y dinámicas) se tomará únicamente la Fase de Soporte Simple realizando la siguiente consideración, el pie del robot que se encuentra apoyado en el suelo no sufre ninguna rotación ni traslación. Esta consideración permite analizar al robot como un manipulador redundante. La Fase de Doble Soporte se considera instantánea ya que su duración con respecto a la primera es muy corta. Debido a la simetría del robot solo es necesario analizar una configuración del robot tanto para el modelo cinemático como el modelo dinámico solo es necesario realizar un cambio de coordenadas en cada ciclo.

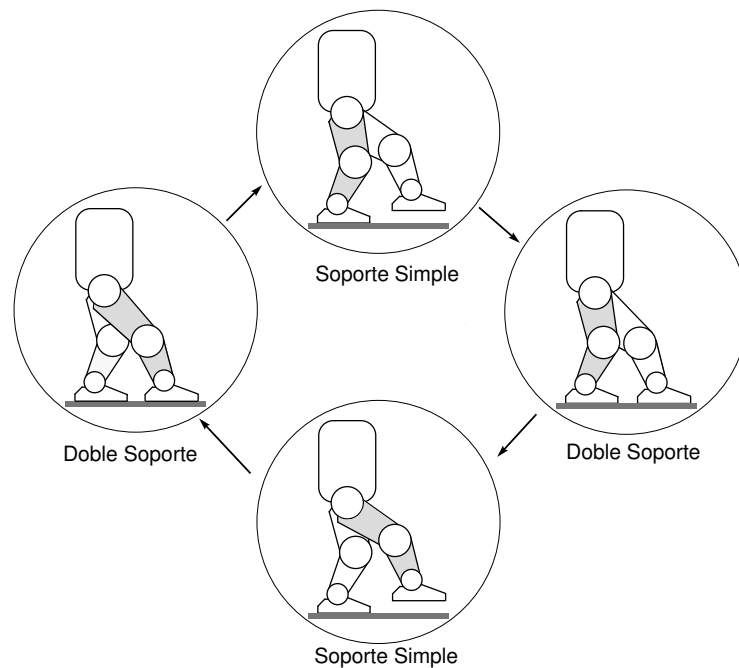


Figura 1.1: Fases del robot bípedo.

## 1.2. Configuraciones comunes

En la literatura existen diferentes configuraciones para robots bípedos (Löffler *et al.* 2004, Kaneko *et al.* 2008, Tanaka *et al.* 2005). La configuración básica de las piernas consiste en estructura cinemática con 8 grados de libertad (Azevedo *et al.* 2004). Cada pierna cuenta con cuatro grados de libertad, dos grados de libertad en el tobillo y un grado de libertad en la rodilla y cadera. Para aumentar la movilidad se han añadido 4 grados de libertad, dando un total de 12 grados de libertad (seis por cada pierna). Esta configuración la podemos encontrar en la mayoría de los robots bípedos existentes (Hirai *et al.* 1998, Löffler *et al.* 2004, Kaneko *et al.* 2008, Tanaka *et al.* 2005). La Figura 1.2 muestra dichas configuraciones.

Las ventajas principales de la configuración con 12 grados de libertad son:

- Mayor movilidad.
- Cambiar de dirección durante el movimiento.
- Caminar en superficies irregulares.

Las desventajas son:

- Diseño mecánico complejo.
- Mayor consumo de energía.
- El modelo cinemático y dinámico es más difícil de obtener.

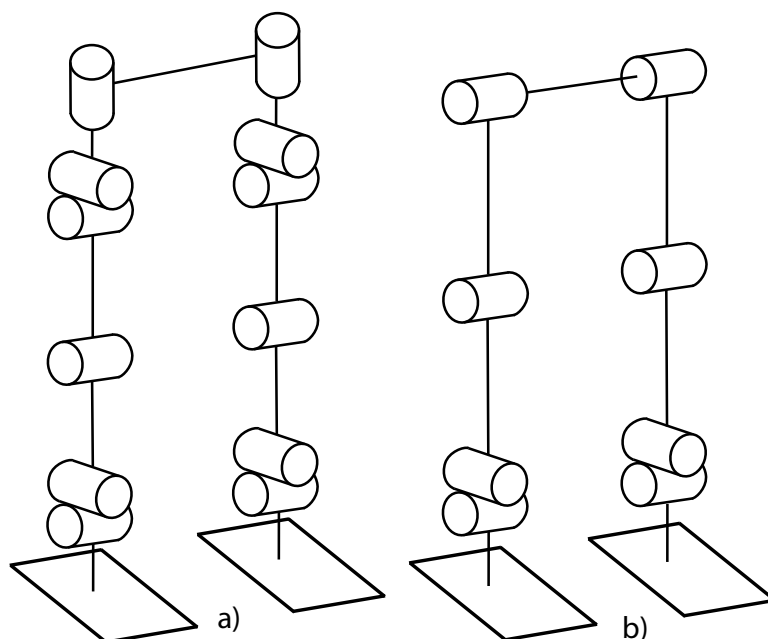


Figura 1.2: Configuraciones comunes: a) Doce grados de libertad b) Ocho grados de libertad

### 1.3. Configuración propuesta

El primer paso es elegir el número de grados de libertad y su distribución, como se sabe los grados de libertad se relacionan con la movilidad del robot. La idea principal es tener una estructura cinemática simple para facilitar su análisis, pero sin restar movilidad. La estructura cinemática propuesta se muestra en la Figura 1.3. El robot posee 7 grados de libertad distribuidos de la siguiente manera: 3 grados de libertad en cada pierna (tobillo, rodilla y cadera) y un grado de libertad en el torso. Todas las articulaciones son de revolución y en cada una de ellas se localiza un actuador (motor-reductor) para transmitir movimiento. Para tener una mejor distribución de los elementos del robot, los motores se encuentran alejados de la articulación. La transmisión del par se realiza mediante poleas a excepción de las articulaciones de la cadera en cuyo caso el acoplamiento es directo. En la literatura se pueden encontrar

diferentes diseños mecánicos en los cuales el movimiento rotatorio es generado por mecanismos que emplean actuadores lineales capaces de transmitir mayor capacidad de torque, (Azevedo *et al.* 2004, Ulbrich *et al.* 2006).

Con esta estructura el robot puede moverse en la dirección  $x$ . Las articulaciones del tobillo son las encargadas de mover el centro de gravedad del robot y mantener el balance (Löffler *et al.* 2004), para tener una estructura más simple y simplificar el análisis se ha eliminado una de ellas y en su lugar se ha puesto una articulación en la cadera, cuya finalidad es mover el centro de gravedad en el plano  $yz$  sin afectar el movimiento del pie libre. Esta estructura permite considerar al robot bípedo como manipulador serial redundante (Mu y Wu 2004), cada articulación depende de la articulación anterior.

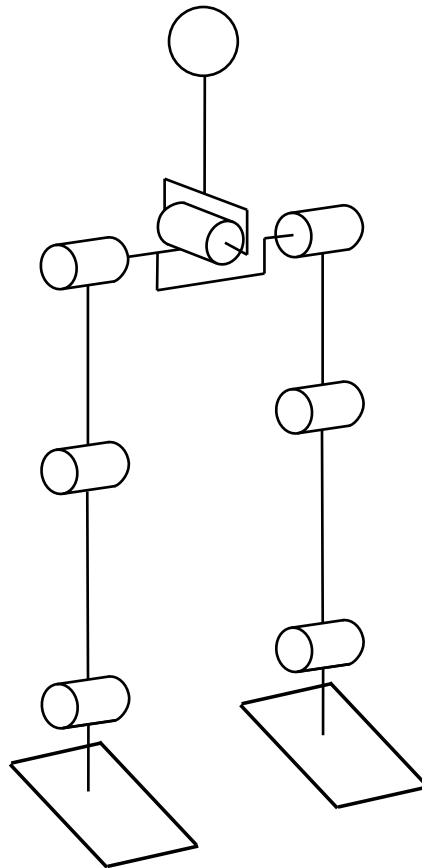


Figura 1.3: Estructura cinemática del robot.



## 1.4. Cinemática

La cinemática estudia el movimiento del robot sin considerar las fuerzas que lo producen. Se ocupa de la descripción espacial del robot como una función del tiempo, y en particular de la relación que existe entre el efector final y las variables de articulación. Existen dos problemas fundamentales relacionados con la cinemática de un robot: **problema cinemático directo** y **problema cinemático inverso**.

### 1.4.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa consiste en: dadas las variables articulares determinar la posición y orientación del efector final. Para el análisis cinemático se considera al robot como un manipulador redundante, lo que implica que posee más grados de libertad de los necesarios para describir completamente su posición. La base del manipulador se localiza en el pie que se encuentra apoyado en el suelo.

En los manipuladores interesa conocer la posición y orientación del efector final. Para el caso del robot bípedo se define como efector final la posición y orientación del pie libre. Si solo se define la posición y orientación del pie, el problema cinemático inverso no tendría solución. Para resolver este problema se emplea un vector de posición adicional para el centro de gravedad. Esto podría parecer un problema, ya que como se sabe el centro de gravedad del robot depende de todos los elementos del robot y por ende de todas las variables de articulación. Sin embargo, si se tiene una apropiada distribución de los elementos una buena aproximación es suponer que el centro de gravedad se localiza en el torso del robot. De esta forma interesa conocer tanto la posición y orientación del pie como la posición y orientación del torso. La definición de los sistemas de coordenadas se muestra en la Figura 1.4.

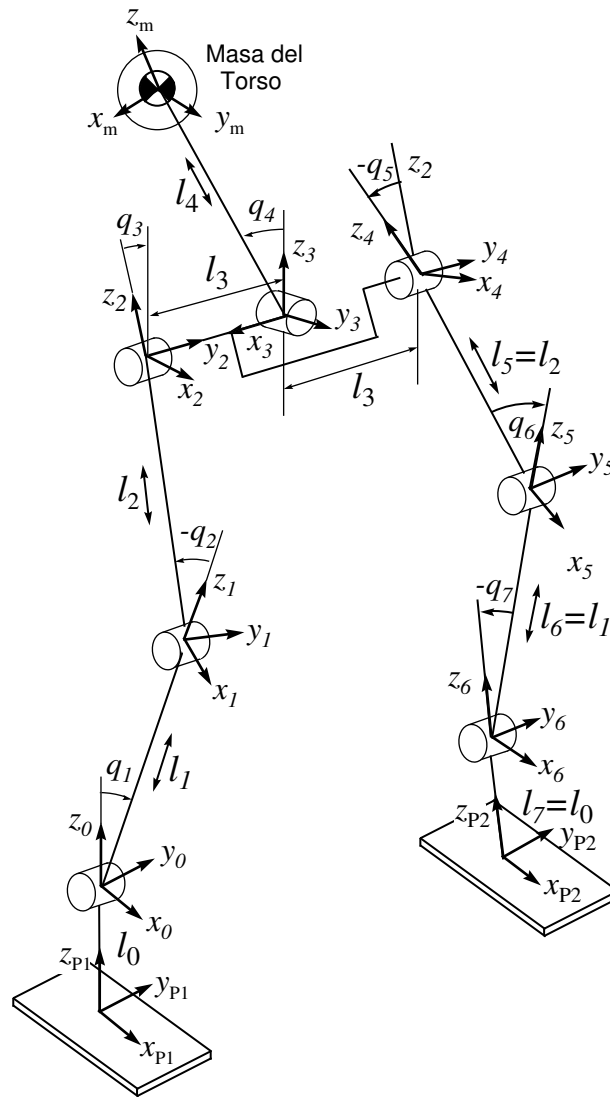


Figura 1.4: Sistemas de coordenadas del robot bípedo.

Para describir la posición y orientación del robot se utilizan matrices de transformación homogénea dadas por:

$$\begin{aligned}
{}^{P1}\mathbf{H}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & l_1 \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & l_1 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^1\mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & l_2 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^2\mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ -\sin q_3 & 0 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3\mathbf{H}_m &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cos q_4 & 0 & -\sin q_4 & -l_4 \sin q_4 \\ -\sin q_4 & 0 & \cos q_4 & l_4 \cos q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3\mathbf{H}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^4\mathbf{H}_5 &= \begin{bmatrix} -\cos q_5 & 0 & -\sin q_5 & -l_2 \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ \sin q_5 & 0 & -\cos q_5 & -l_2 \cos q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^5\mathbf{H}_6 &= \begin{bmatrix} \cos q_6 & 0 & \sin q_6 & -l_1 \sin q_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_6 & 0 & \cos q_6 & -l_1 \cos q_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^6\mathbf{H}_{P2} &= \begin{bmatrix} \cos q_7 & 0 & \sin q_7 & -l_0 \sin q_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q_7 & 0 & \cos q_7 & -l_0 \cos q_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La posición (centro de gravedad) y orientación del torso se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} {}^{P1}\mathbf{H}_m &= {}^{P1}\mathbf{H}_0 {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_2 {}^2\mathbf{H}_3 {}^3\mathbf{H}_m \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} -s_{123}s_4 & c_{123} & s_{123}c_4 & l_1s_1 + l_b s_{12} + l_4 s_{123}c_4 \\ -c_4 & 0 & -s_4 & l_3 - l_4 s_4 \\ -c_{123}s_4 & -s_{123} & c_{123}c_4 & l_0 + l_1c_1 + l_2c_{12} + l_4c_{123}c_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Se observa que la posición del centro de gravedad es:

$$x_{cg} = l_1s_1 + l_2s_{12} + l_4s_{123}c_4 \quad (1.2)$$

$$y_{cg} = l_3 - l_4s_4 \quad (1.3)$$

$$z_{cg} = l_0 + l_1c_1 + l_2c_{12} + l_4c_{123}c_4 \quad (1.4)$$

donde

$$s_1 = \sin q_1$$

$$c_1 = \cos q_1$$

$$s_4 = \sin q_4$$

$$c_4 = \cos q_4$$

$$s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$$

$$c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$$

$$s_{123} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$c_{1233} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

La posición y orientación del pie libre se define como:

$$\begin{aligned} {}^{P1}\mathbf{H}_{P2} &= {}^{P1}\mathbf{H}_0 {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_2 {}^2\mathbf{H}_3 {}^3\mathbf{H}_4 {}^4\mathbf{H}_5 {}^5\mathbf{H}_6 {}^6\mathbf{H}_{P2} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} -c_{123567} & 0 & -s_{123567} & l_1s_1 + l_2s_{12} - l_2s_{1235} - l_1s_{12356} - l_0s_{123567} \\ 0 & 1 & 0 & 2l_3 \\ s_{123567} & 0 & -c_{123567} & l_0 + l_1c_1 + l_2c_{12} - l_2c_{1235} - l_1c_{12356} - l_0c_{123567} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

La posición del pie es:

$$x_p = l_1s_1 + l_2s_{12} - l_2s_{1235} - l_1s_{12356} - l_0s_{123567} \quad (1.6)$$

$$z_p = l_0 + l_1c_1 + l_2c_{12} - l_2c_{1235} - l_1c_{12356} - l_0c_{123567} \quad (1.7)$$

donde

$$s_{1235} = \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_5)$$

$$c_{1235} = \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_5)$$

$$s_{123567} = \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + q_6 + q_7)$$

$$c_{123567} = \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + q_6 + q_7)$$

### 1.4.2. Cinemática inversa

Las trayectorias del robot están en coordenadas cartesianas. La razón principal en usar coordenadas cartesianas en lugar de coordenadas articulares, es que son más fáciles de planear y diseñar especialmente cuando el número de articulaciones es mayor a dos. Debido a esto es necesario resolver el problema cinemático inverso que consiste en obtener los valores que deben tomar las variables de articulación para que su efector final se posicione y oriente según una determinada localización espacial. El problema cinemático inverso es mucho más difícil debido a que se trabaja con ecuaciones no lineales. Una solución es utilizar métodos numéricos iterativos, sin embargo la convergencia no está garantizada y su velocidad puede ser muy lenta haciéndolos poco eficientes en aplicaciones en tiempo real (seguimiento de trayectorias). Lo más adecuado es encontrar una solución en forma cerrada ya que permiten mayor rapidez de cálculo y son fáciles de programar para ser ejecutadas en tiempo real.

Otro punto importante es conocer si existe solución para una posición y orientación determinada. Si existe o no solución depende de las restricciones matemáticas y físicas del robot. Otro problema que puede encontrarse es la posibilidad de tener múltiples soluciones para una misma posición, donde el robot puede adoptar distintas configuraciones. En este caso, una solución en forma cerrada nos permite incluir restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada tomando en cuenta el espacio de trabajo del robot.

El primer paso consiste en encontrar las variables articulares correspondientes a la posición del centro de gravedad, ecuaciones (1.2)-(1.4). El movimiento del robot en el plano  $y$ - $z$  depende únicamente de la articulación 4 como lo muestra la Figura 1.5.

Resolviendo para  $q_4$  en la ecuación (1.3) se tiene:

$$s_4 = \frac{l_3 - y_{\text{cog}}}{l_4} \quad (1.8)$$

$$c_4 = \pm \sqrt{1 - s_4^2} \quad (1.9)$$

$$q_4 = \text{atan2}(s_4, c_4) \quad (1.10)$$

La Figura 1.6 muestra la proyección del robot en el plano  $x$ - $z$ . La orientación del torso en dicho plano está dada por:

$$\varphi_x = q_1 + q_2 + q_3 \quad (1.11)$$

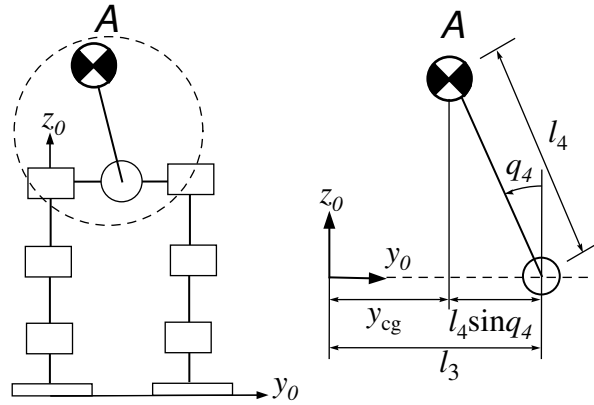


Figura 1.5: Posición del centro de gravedad en el plano  $y$ - $z$ .

De acuerdo a la Figura 1.6 la posición del centro de gravedad del robot en el plano  $x$ - $z$  esta dado por:

$$\mathbf{p}_{cg} = \mathbf{p}_c + \mathbf{a} \quad (1.12)$$

Donde  $\mathbf{p}_{cg}$  es el vector de posición del centro de gravedad,  $\mathbf{p}_c$  es el vector de posición de la cadera y  $\mathbf{a}$  es el vector que va desde la cadera hacia el centro de gravedad y se define como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_4 s_{123} c_4 \\ l_4 c_{123} c_4 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

De la ecuación (1.11) el vector  $\mathbf{a}$  se puede definir como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_4 \sin \varphi_x c_4 \\ l_4 \cos \varphi_x c_4 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Tanto el vector  $\mathbf{p}_{cg}$  y el vector  $\mathbf{a}$  son conocidos ( $c_4$  se obtiene a partir de la ecuación (1.9)). Despejando  $\mathbf{p}_c$  de la ecuación (1.12) y expresado en forma escalar se tiene:

$$l_1 s_1 + l_2 s_{12} = x_{cg} - l_4 \sin \varphi_x c_4 \quad (1.15)$$

$$l_1 c_1 + l_2 c_{12} = z_{cg} - l_4 \cos \varphi_x c_4 - l_0 \quad (1.16)$$

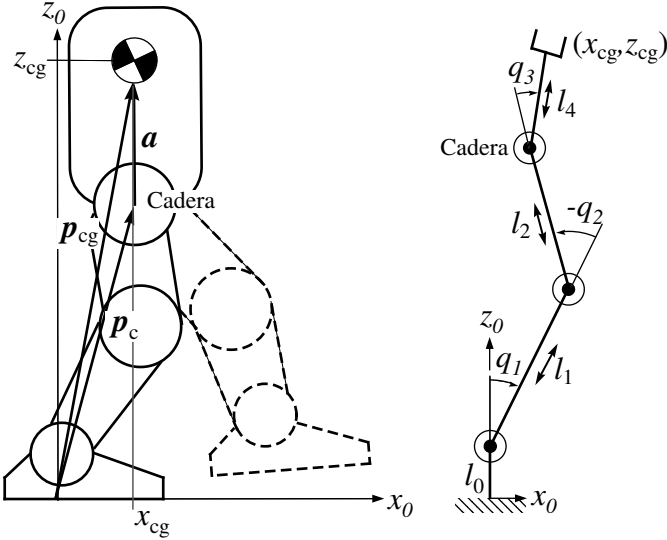


Figura 1.6: Posición del centro de gravedad en el plano  $x$ - $z$ .

Elevando al cuadrado las ecuaciones (1.15) y (1.16) y sumándolas se obtiene:

$$l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \underbrace{(s_1s_{12} + c_1c_{12})}_{c_2} = (x_{cg} - l_4 \sin \varphi_x c_4)^2 + (z_{cg} - l_4 \cos \varphi_x c_4 - l_0)^2 \quad (1.17)$$

Despejando  $c_2$  de la ecuación (1.17) se obtiene:

$$c_2 = \frac{k_1^2 + k_2^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \quad (1.18)$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (1.19)$$

$$q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \quad (1.20)$$

donde

$$k_1 = x_{cg} - l_4 \sin \varphi_x c_4$$

$$k_2 = z_{cg} - l_4 \cos \varphi_x c_4 - l_0$$

Utilizando las identidades trigonométricas

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

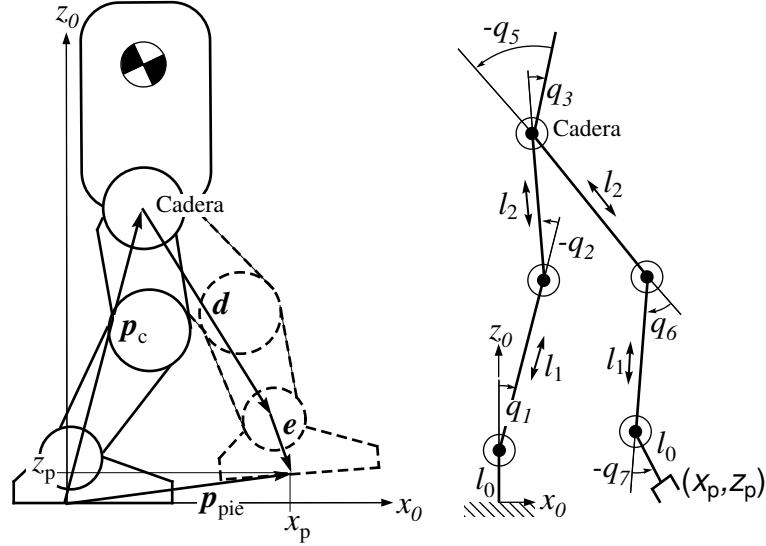


Figura 1.7: Posición del pie en el plano  $x$ - $z$ .

las ecuaciones (1.15) y (1.16) quedan de la siguiente forma:

$$(l_1 + l_2 c_2) s_1 + l_2 s_2 c_1 = k_1 \quad (1.21)$$

$$(l_1 + l_2 c_2) c_1 - l_2 s_2 s_1 = k_2 \quad (1.22)$$

Resolviendo para  $q_1$  se tiene (Craig 2006):

$$q_1 = \text{atan2}((l_1 + l_2 c_2) k_1 - l_2 s_2 k_2, (l_1 + l_2 c_2) k_2 + l_2 s_2 k_1) \quad (1.23)$$

De la ecuación (1.11) se resuelve para  $q_3$

$$q_3 = \varphi_x - (q_1 + q_2) \quad (1.24)$$

Ahora solo resta encontrar las variables  $q_5$ ,  $q_6$  y  $q_7$ . La Figura 1.7 muestra la posición del pie libre en el plano  $x$ - $z$ . Al igual que en el caso anterior los ángulos de las articulaciones en el plano se suman, por lo tanto la orientación del pie se define como:

$$\varphi_p = \varphi_x + q_5 + q_6 + q_7 \quad (1.25)$$

La posición del pie en el plano  $x$ - $z$  está dado por:

$$\mathbf{p}_{\text{pie}} = \mathbf{p}_c + \mathbf{d} + \mathbf{e} \quad (1.26)$$



El vector  $\mathbf{d}$  va desde la cadera hasta el tobillo y está dado por:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -l_2 s_{1235} - l_1 s_{12356} \\ -l_2 c_{1235} - l_1 c_{12356} \end{bmatrix}$$

El vector  $\mathbf{e}$  va desde el tobillo hasta la base del pie y está dado por:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -l_0 s_{123567} \\ -l_0 c_{123567} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_0 \sin \varphi_p \\ -l_0 \cos \varphi_p \end{bmatrix}$$

Despejando  $\mathbf{d}$  de la ecuación (1.26) y expresando la ecuación resultante en forma escalar se tiene:

$$l_2 s_{1235} + l_1 s_{12356} = l_1 s_1 + l_2 s_{12} - (x_p + l_0 \sin \varphi_p) \quad (1.27)$$

$$l_2 c_{1235} + l_1 c_{12356} = l_0 + l_1 c_1 + l_2 c_{12} - (z_p + l_0 \cos \varphi_p) \quad (1.28)$$

Las ecuaciones (1.27) y (1.28) tienen la misma forma que las ecuaciones (1.15) y (1.16) de manera que se puede seguir el mismo procedimiento para obtener  $q_5$  y  $q_6$ .

Elevando al cuadrado la ecuaciones (1.27) y (1.28) y sumándolas se obtiene:

$$c_6 = \frac{k_3^2 + k_4^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1 l_2} \quad (1.29)$$

$$s_6 = \pm \sqrt{1 - c_6^2} \quad (1.30)$$

$$q_6 = \text{atan2}(s_6, c_6) \quad (1.31)$$

donde

$$k_3 = l_1 s_1 + l_2 s_{12} - (x_p + l_0 \sin \varphi_p)$$

$$k_4 = l_0 + l_1 c_1 + l_2 c_{12} - (z_p + l_0 \cos \varphi_p)$$

Se define la siguiente variable

$$\alpha = q_1 + q_2 + q_3 + q_5 \quad (1.32)$$

Sustituyendo la ecuación (1.32) en las ecuaciones (1.27) y (1.28) se obtiene:

$$l_2 \sin \alpha + l_1 \sin(\alpha + q_6) = k_3 \quad (1.33)$$

$$l_2 \cos \alpha + l_1 \cos(\alpha + q_6) = k_4 \quad (1.34)$$

Resolviendo para  $\alpha$  se tiene:

$$\alpha = \text{atan2}((l_2 + l_1 c_6)k_3 - l_1 s_6 k_4, (l_2 + l_1 c_6)k_4 + l_1 s_6 k_3)$$

La variable  $q_5$  se obtiene a partir de la ecuación (1.32)

$$q_5 = \alpha - (q_1 + q_2 + q_3) \quad (1.35)$$

Finalmente la variable  $q_7$  se obtiene a partir de la ecuación (1.25)

$$q_7 = \varphi_p - (\varphi_x + q_5 + q_6) \quad (1.36)$$

Para el caso particular en el que el robot camina sobre una superficie plana, es deseable que la orientación del torso y el pie se mantenga constantes. Debido a la configuración propuesta el movimiento del torso afecta el movimiento del pie libre, por esta razón se mantendrá constante y con valor cero. La orientación del pie también se mantendrá fija y con valor cero con el fin de evitar impactos contra el suelo. Lo anterior simplifica las ecuaciones (1.24) y (1.36) quedando de la siguiente forma

$$q_3 = -q_1 - q_2 \quad (1.37)$$

$$q_7 = -q_5 - q_6 \quad (1.38)$$

### Cambio de coordenadas

Se consideró al robot como un manipulador cuya base se localiza en el pie que se encuentra apoyado en el suelo. Al terminar la Fase de Soporte Simple el pie libre entra en contacto con el suelo. Para la siguiente Fase el pie libre se convierte en la base del robot como lo muestra la Figura 1.8. En esta caso es necesario definir la posición del centro de gravedad y la posición del pie libre con respecto a la nueva base. Para ello se pueden utilizar las matrices de transformación.

La posición y orientación del pie libre con respecto a la nueva base se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$${}^{P2}\mathbf{H}_{P1} = {}^{P2}\mathbf{H}_6 {}^6\mathbf{H}_5 {}^5\mathbf{H}_4 {}^4\mathbf{H}_3 {}^3\mathbf{H}_2 {}^2\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_0 {}^0\mathbf{H}_{P1} \quad (1.39)$$

La posición y orientación del torso se define como:

$${}^{P2}\mathbf{H}_m = {}^{P2}\mathbf{H}_6 {}^6\mathbf{H}_5 {}^5\mathbf{H}_4 {}^4\mathbf{H}_3 {}^3\mathbf{H}_m \quad (1.40)$$

donde

$${}^i\mathbf{H}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{H}_i^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T & -{}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\mathbf{d}_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

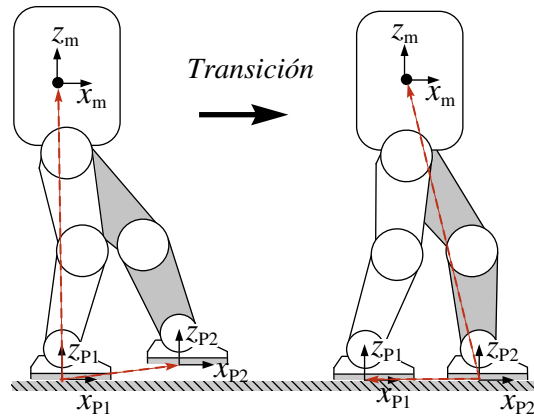


Figura 1.8: Cambio de base al final de cada fase.

## 1.5. Dinámica del Robot

El modelo dinámico relaciona las fuerzas/pares que actúan sobre el robot y el movimiento que en él originan. La obtención de un modelo dinámico nos permite:

- Simulación del movimiento del robot.
- Cálculo de las fuerzas y pares necesarios para desarrollar un movimiento determinado.
- Diseño de una ley de control.
- Selección de los actuadores.
- Diseño de la estructura mecánica del robot.

### 1.5.1. Formulación de Euler-Lagrange

Mediante la formulación de Euler-Lagrange es posible derivar las ecuaciones de movimiento general del robot de una forma sistemática independientemente del sistema de referencia. Primeramente se deben definir un conjunto de variables  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  llamadas *coordenadas generalizadas* que describen completamente la localización (posición y orientación) del robot con respecto a un sistema de referencia.

La ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i \quad (1.41)$$

donde,  $q_i$  es la coordenada generalizada,  $\dot{q}_i$  es la primera derivada con respecto al tiempo de la coordenada  $q_i$ ,  $\mathcal{D}$  función de disipación de Rayleigh,  $\tau_i$  fuerza o par generalizado aplicado en la articulación  $i$ , finalmente la función  $\mathcal{L}$  (función lagrangiana) es la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}$  y la energía potencial  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} \quad (1.42)$$

### 1.5.2. Cálculo de la energía cinética

La energía cinética de un objeto es la suma de dos términos: la energía traslacional obtenida concentrando la masa del objeto en su centro de masa, y la energía rotacional del cuerpo alrededor de su centro de masa. La energía cinética de un cuerpo se calcula como (Spong *et al.* 2006):

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (1.43)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad lineal y angular respectivamente, e  $\mathbf{I}$  es la matriz de inercia.

Considerando los  $n$  elementos del robot. La velocidad lineal y la velocidad angular pueden calcularse utilizando el Jacobiano del sistema (Spong *et al.* 2006). Esto es:

$${}^0 \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{J}_{\text{vci}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad {}^0 \bar{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}_{\omega ci}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.44)$$

La ecuación para calcular la energía cinética del robot es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n \{ m_i \mathbf{J}_{\text{vci}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\text{vci}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega ci}^T(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{R}_{ci} \mathbf{I}_i {}^0 \mathbf{R}_{ci}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega ci} \} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde  $m_i$  es la masa del elemento  $i$ ,  ${}^0 \mathbf{R}_{ci}$  denota la rotación del sistema en movimiento al sistema de coordenadas de la base.

### 1.5.3. Cálculo de la energía potencial

Sea  $\mathcal{P}$  la energía potencial total del robot, y sea  $\mathcal{P}_i$  la energía potencial de cada uno de sus elementos dada por:

$$\mathcal{P}_i = -m_i \bar{\mathbf{g}}^{\text{T}0} \bar{\mathbf{r}}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.46)$$

donde  $\bar{\mathbf{g}}$  es el vector de gravedad expresado en el sistema de coordenadas de la base. Para un sistema de nivel se tiene  $\bar{\mathbf{g}} = [0 \ 0 \ -g_0 \ 0]$ .

Al igual que la energía cinética la energía potencial se obtiene al sumar las energías potenciales de cada elemento y está dada por:

$$\mathcal{P} = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{g}}^{\text{T}0} \bar{\mathbf{r}}_i \quad (1.47)$$

#### 1.5.4. Ecuaciones de movimiento del Robot

La función lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$  tomando en cuenta las ecuaciones (1.45) y (1.47) puede escribirse como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{\text{T}} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{g}}^{\text{T}0} \bar{\mathbf{r}}_i \quad (1.48)$$

Expresando en forma matricial la ecuación de Euler-Lagrange (1.41) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.49)$$

donde  $\mathcal{D}$  es la función de disipación de Rayleigh la cual representa el modelo de fricción viscosa y está dada por:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{\text{T}} \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.50)$$

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante positiva semidefinida.

Sustituyendo (1.48) en (1.49) para obtener un modelo en forma matricial y cerrada. Primeramente se desarrolla el segundo término de la ecuación (1.49), esto es:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{g}}^{\text{T}0} \bar{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^{\text{T}} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.51)$$

La primera parte del lado derecho de la ecuación anterior representa el vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  de términos gravitacionales. Los elementos de dicho vector se calculan de la siguiente manera (Artega-Pérez 1998):

$$g_j = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{g}}^{\text{T}} \frac{\partial^0 \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (1.52)$$

La ecuación anterior se puede escribir en forma compacta como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial (\mathbf{q})} \quad (1.53)$$

El segundo miembro del lado derecho de la ecuación (1.51) es un vector de dimensión  $n$  que forma parte del vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis generalizadas. Calculado la primera parte de la ecuación (1.49)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.54)$$

El vector  $\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$  se encuentra en su forma matricial final. El término  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  pertenece también al vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, dicho vector es:

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (1.55)$$

Resulta mas conveniente utilizar los **símbolos de Christoffel** para el cálculo de  $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Para ello se define una matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que la relación

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.56)$$

sea válida. Para determinar los componentes de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , se puede utilizar el elemento  $i$  de  $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,

$$h_{c_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.57)$$

Sea

$$c_{kji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) = c_{jki} \quad (1.58)$$

$c_{kji}$  son los símbolos de Christoffel de la primera clase (Spong y Vidyagarasar 1989). De este modo el elemento  $ij$  de la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está dado por (Spong y Vidyagarasar 1989):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{kji} \dot{q}_k \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.59)$$

Finalmente la ecuación de movimiento del robot es:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.60)$$

La distribución de la masa del robot se muestra en la Figura 1.9.

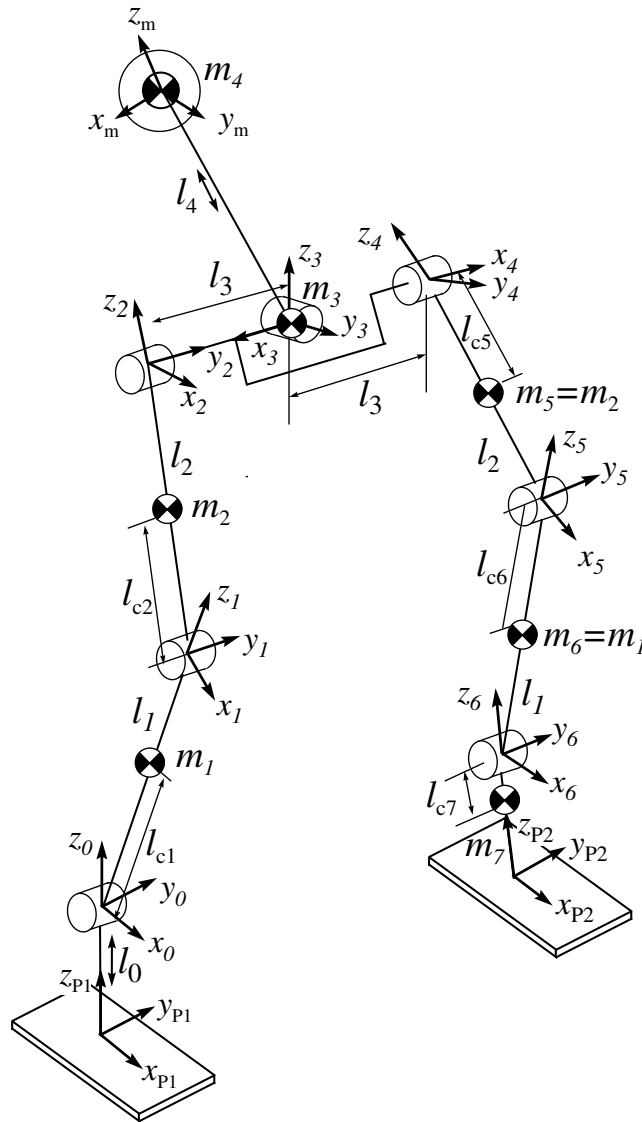


Figura 1.9: Distribución de la masa del robot.

Las matrices de transformación homogénea de acuerdo al sistema de coordenadas de la Figura 1.9 son:

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{T}_1 &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & s_1 & l_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & l_1 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_2 &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{12} & 0 & s_{12} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_{12} & 0 & c_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_3 &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{123} & 0 & s_{123} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ -s_{123} & 0 & c_{123} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_m &= \left[ \begin{array}{ccc|c} -s_{123} s_4 & c_{123} & s_{123} c_4 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_4 s_{123} c_4 \\ -c_4 & 0 & 0 & l_3 - l_4 s_4 \\ -c_{123} s_4 & -s_{123} & c_{123} c_4 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_4 c_{123} c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_5 &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{1235} & 0 & s_{1235} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} - l_5 s_{1235} \\ 0 & 1 & 0 & 2l_3 \\ -s_{1235} & 0 & c_{1235} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} - l_5 c_{1235} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_6 &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{12356} & 0 & s_{12356} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} - l_5 s_{1235} - l_6 s_{12356} \\ 0 & 1 & 0 & 2l_3 \\ -s_{12356} & 0 & c_{12356} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} - l_5 c_{1235} - l_6 c_{12356} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
{}^0\mathbf{T}_{P2} &= \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{123567} & 0 & s_{123567} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} - l_5 s_{1235} - l_6 s_{12356} - l_7 s_{123567} \\ 0 & 1 & 0 & 2l_3 \\ -s_{123567} & 0 & c_{123567} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} - l_5 c_{1235} - l_6 c_{12356} - l_7 c_{123567} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$



El vector de posición del centro de gravedad ( ${}^0\mathbf{r}_i$ ) del elemento  $i$  referido al sistema  $x_0y_0z_0$  está dado por:

$${}^0\mathbf{r}_i = {}^0\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{r}_i \quad (1.61)$$

donde  ${}^i\mathbf{r}_i$  es el vector de posición del centro de gravedad referido al sistema  $i$ . Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} l_{c1}s_1 \\ 0 \\ l_{c1}c_1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_{c2}s_{12} \\ 0 \\ l_1c_1 + l_{c2}c_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_2s_{12} \\ l_3 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_m &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_2s_{12} + l_4s_{123}c_4 \\ l_3 - l_4s_4 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_4c_{123}c_4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_5 &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_2s_{12} - l_{c2}s_{1235} \\ 2l_3 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} - l_{c2}c_{1235} \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_6 &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_2s_{12} - l_2s_{1235} - l_{c1}s_{12356} \\ 2l_3 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} - l_2c_{1235} - l_{c1}c_{12356} \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{r}_{P2} &= \begin{bmatrix} l_1s_1 + l_2s_{12} - l_2s_{1235} - l_1s_{12356} - l_{c7}s_{123567} \\ 2l_3 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} - l_2c_{1235} - l_1c_{12356} - l_{c7}c_{123567} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde se ha sustituido  $l_1 = l_6$   $l_2 = l_5$   $l_{c1} = l_{c6}$   $l_{c2} = l_{c5}$  debido a la simetría del robot.

La matriz jacobiana de cada elemento está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{vc1} &= \begin{bmatrix} l_{c1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{c1}s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc2} &= \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1s_1 - l_{c2}s_{12} & -l_{c2}s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc3} &= \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} & l_2c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1c_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc4} &= \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} + l_4c_{123}c_4 & l_2c_{12} + l_4c_{123}c_4 & l_4c_{123}c_4 & -l_4s_{123}s_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_4c_4 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1s_1 - l_2s_{12} - l_4s_{123}c_4 & -l_2s_{12} - l_4s_{123}c_4 & -l_4s_{123}c_4 & -l_4c_{123}s_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc5} &= \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} - l_{c2}c_{1235} & l_2c_{12} - l_{c2}c_{1235} & -l_{c2}c_{1235} & 0 & -l_{c2}c_{1235} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1s_1 - l_2s_{12} + l_{c2}s_{1235} & -l_2s_{12} + l_{c2}s_{1235} & l_{c2}s_{1235} & 0 & l_{c2}s_{1235} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc6} &= \begin{bmatrix} \dot{j}_{vc1} & \dot{j}_{vc2} & -l_2c_{1235} - l_{c1}c_{12356} & 0 & -l_2c_{1235} - l_{c1}c_{12356} & -l_{c1}c_{12356} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{j}_{vc3} & \dot{j}_{vc4} & l_2s_{1235} + l_{c1}s_{12356} & 0 & l_2s_{1235} + l_{c1}s_{12356} & l_{c1}s_{12356} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{vc7} &= \begin{bmatrix} \dot{j}_{vc5} & \dot{j}_{vc6} & \dot{j}_{v7} & 0 & \dot{j}_{vc7} & -l_1c_{12356} - l_{c7}c_{123567} & -l_{c7}c_{123567} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{j}_{vc8} & \dot{j}_{vc9} & \dot{j}_{vc10} & 0 & \dot{j}_{vc10} & l_1s_{12356} + l_{c7}s_{123567} & l_{c7}s_{123567} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\dot{j}_{vc1} &= l_1\dot{c}_1 + l_2\dot{c}_{12} - l_2\dot{c}_{1235} - l_{c1}\dot{c}_{12356} \\
\dot{j}_{vc2} &= -l_1\dot{s}_1 - l_2\dot{s}_{12} + l_2\dot{s}_{1235} + l_{c1}\dot{s}_{12356} \\
\dot{j}_{vc3} &= l_2\dot{c}_{12} - l_2\dot{c}_{1235} - l_{c1}\dot{c}_{12356} \\
\dot{j}_{vc4} &= -l_2\dot{c}_{1235} - l_{c1}\dot{c}_{12356} \\
\dot{j}_{vc5} &= l_1\dot{c}_1 + l_2\dot{c}_{12} - l_2\dot{c}_{1235} - l_1\dot{c}_{12356} - l_{c7}\dot{c}_{1234567} \\
\dot{j}_{vc6} &= l_2\dot{c}_{12} - l_2\dot{c}_{1235} - l_1\dot{c}_{12356} - l_{c7}\dot{c}_{1234567} \\
\dot{j}_{vc7} &= -l_2\dot{c}_{1235} - l_1\dot{c}_{12356} - l_{c7}\dot{c}_{1234567} \\
\dot{j}_{vc8} &= -l_1\dot{s}_1 - l_2\dot{s}_{12} + l_2\dot{s}_{1235} + l_1\dot{s}_{12356} + l_{c7}\dot{s}_{123567} \\
\dot{j}_{vc9} &= -l_2\dot{s}_{12} + l_2\dot{s}_{1235} + l_1\dot{s}_{12356} + l_{c7}\dot{s}_{123567} \\
\dot{j}_{vc10} &= l_2\dot{s}_{1235} + l_1\dot{s}_{12356} + l_{c7}\dot{s}_{123567}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\omega c1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{123} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_{123} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c6} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega c7} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz de inercia de cada elemento tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{xxi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzi} \end{bmatrix}$$

### Cálculo de la matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$

La matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  está dada por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^7 m_i \mathbf{J}_{vci}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{vci}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega ci}^T(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{R}_{ci} \mathbf{I}_i {}^0\mathbf{R}_{ci}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega ci} \quad (1.62)$$

Los elementos de  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  son:

$$\begin{aligned}
h(1, 1) &= 2I_{yy1} + 2I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + 2m_1l_{c1}^2 + 2m_2l_{c2}^2 + m_7l_{c7}^2 + (m_1 + 2m_2 + \\
&\quad m_3 + m_4 + 2m_7)l_1^2 + (2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 2m_7)l_2^2 + 2(m_2l_{c2} + \\
&\quad (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7)l_2)l_1c_2 + m_4l_4c_4(2l_1c_{23} + 2l_2c_3 + l_4c_4) - \\
&\quad 2A_1(l_1c_{2356} + l_2c_{356} - l_2c_6) - 2A_2(l_1c_{235} + l_2c_{35}) + 2A_3(l_1c_7 + \\
&\quad l_2c_{67} - l_1c_{23567} - l_2c_{3567}) \\
h(1, 2) &= I_{yy1} + 2I_{yy2} + I_{yy7} + m_1l_{c1}^2 + m_7(l_1^2 + l_{c7}^2) + m_2l_{c2}^2 + (2m_1 + m_2 + m_3 + \\
&\quad m_4 + 2m_7)l_2^2 + (m_2l_{c2} + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7)l_2)l_1c_2 - A_2(l_1c_{235} + \\
&\quad 2l_2c_{35}) - A_1(l_1c_{2356} + 2l_2c_{356} - 2l_2c_6) + A_3(2l_1c_7 + l_2c_{67} - l_1c_{23567} \\
&\quad - l_2c_{3567}) + m_4l_4c_4(l_1c_{23} + 2l_2c_3 + l_4c_4) \\
h(1, 3) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (m_1 + m_7)l_2^2 + m_7l_1^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + m_7l_{c7}^2 + \\
&\quad m_4l_4c_4(l_1c_{23} + l_2c_3 + l_4c_4) - (A_1c_{2356} + A_2c_{235} + A_3c_{23567})l_1 - (A_1c_{356} + \\
&\quad A_2c_{35} + A_3c_{3567})l_2 + 2A_3(l_1c_7 + l_2c_{67}) \\
h(1, 4) &= -m_4l_1l_4s_{23}s_4 - m_4l_2l_4s_3s_4 \\
h(1, 5) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1l_{c1}^2 + m_7l_{c7}^2 + m_1l_{c2}^2 + (m_1 + m_7)l_2^2 + 2A_1l_2c_6 + \\
&\quad 2A_3(l_1c_7 + l_2c_{67}) - (A_1c_{356} + A_2c_{35} + A_3c_{3567}) - (A_1c_{2356} + A_2c_{235} + \\
&\quad A_3c_{23567})l_1 \\
h(1, 6) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1l_{c1}^2 + m_7l_1^2 + 2m_7l_1l_{c7}c_7 + m_7l_{c7}^2 + (A_1c_6 + A_3c_{67})l_2 - \\
&\quad (A_1c_{356} + A_3c_{3567})l_2 - (A_1c_{2356} + A_3c_{23567})l_1 \\
h(1, 7) &= I_{yy7} + m_7l_{c7}^2 + A_3(l_1c_7 + l_2c_{67} - l_1c_{23567} - l_2c_{3567}) \\
h(2, 1) &= I_{yy1} + 2I_{yy2} + I_{yy7} + m_1l_{c1}^2 + m_7(l_1^2 + l_{c7}^2) + (2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \\
&\quad 2m_7)l_1^2 + (l_2m_2 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7)l_2)l_1c_2 - A_2(l_1c_{235} + 2l_2c_{35}) \\
&\quad - A_1(l_1c_{2356} + 2l_2c_{356} - 2l_2c_6) + A_3(2l_1c_7 + l_2c_{67} - l_1c_{23567} - l_2c_{3567}) + \\
&\quad m_4l_4c_4(l_1c_{23} + 2l_2c_3 + l_4c_4) \\
h(2, 2) &= I_{yy1} + 2I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 2m_7)l_2^2 + 2m_2l_{c2}^2 + \\
&\quad m_1l_{c1}^2 + m_7l_{c7}^2 + m_4l_4c_4(2l_2c_3 + l_4c_4) - (A_1c_{356} + A_2c_{35} + A_3c_{3567})l_2 + \\
&\quad 2A_1l_2c_6 + 2A_3(l_1c_7 + l_2c_{67}) \\
h(2, 3) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (m_1 + m_7)l_2^2 + m_1l_{c1}^2 + m_2l_{c2}^2 + m_7l_{c7}^2 + 2A_1l_2c_6 + \\
&\quad 2A_1l_2c_6 + 2A_3(l_1c_7 + l_2c_{67}) + m_4l_4c_4^2 - (A_1c_{356} + A_2c_{35} + A_3c_{3567})l_2 \\
&\quad m_4l_4c_4(l_2c_3 + l_4c_4) \\
h(2, 4) &= -m_4l_2l_4s_3s_4 \\
h(2, 5) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1l_{c1}^2 + m_7l_{c7}^2 + m_1l_{c2}^2 + (m_1 + m_7)l_2^2 + 2A_1l_2c_6 + \\
&\quad 2A_3(l_1c_7 + l_2c_{67}) - (A_1c_{356} + A_2c_{35} + A_3c_{3567})l_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(2, 6) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + A_1 l_2 (c_6 - c_{356}) + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67} - l_2 c_{3567}) \\
h(2, 7) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67} - l_2 c_{3567}) \\
h(3, 1) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (m_1 + m_7) l_2^2 + m_7 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_7 l_{c7}^2 + \\
&\quad m_4 l_4 c_4 (l_1 c_{23} + l_2 c_3 + l_4 c_4) - (A_1 c_{2356} + A_2 c_{235} + A_3 c_{23567}) l_1 - (A_1 c_{356} + \\
&\quad A_2 c_{35} + A_3 c_{3567}) l_2 + 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(3, 2) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (m_1 + m_7) l_2^2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_7 l_{c7}^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_1 l_2 c_6 + 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) + m_4 l_4^2 c_4^2 - (A_1 c_{356} + A_2 c_{35} + A_3 c_{3567}) l_2 \\
h(3, 3) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} + I_{yy7} + (m_1 + m_7) l_2^2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_7 l_{c7}^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_1 l_2 c_6 + 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) + m_4 l_4^2 c_4^2 \\
h(3, 4) &= 0 \\
h(3, 5) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_1 l_{c2}^2 + (m_1 + m_7) l_2^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(3, 6) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + 2m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + (A_1 c_6 + A_3 c_{67}) l_2 \\
h(3, 7) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(4, 1) &= -m_4 l_1 l_4 s_{23} s_4 - m_4 l_2 l_4 s_3 s_4 \\
h(4, 2) &= -m_4 l_2 l_4 s_3 s_4 \\
h(4, 3) &= 0 \\
h(4, 4) &= m_4 l_4^2 \\
h(4, 5) &= 0 \\
h(4, 6) &= 0 \\
h(4, 7) &= 0 \\
h(5, 1) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_1 l_{c2}^2 + (m_1 + m_7) l_2^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) - (A_1 c_{356} + A_2 c_{35} + A_3 c_{3567}) - (A_1 c_{2356} + A_2 c_{235} + \\
&\quad A_3 c_{23567}) l_1 \\
h(5, 2) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_1 l_{c2}^2 + (m_1 + m_7) l_2^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) - (A_1 c_{356} + A_2 c_{35} + A_3 c_{3567}) l_2 \\
h(5, 3) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_1 l_{c2}^2 + (m_1 + m_7) l_2^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(5, 4) &= 0 \\
h(5, 5) &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_1 l_2^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_7 l_1^2 + 2A_1 l_2 c_6 + \\
&\quad 2A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(5, 6) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + m_7 l_{c7}^2 + A_1 l_2 c_6 + A_3 (2l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(5, 7) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(6, 1) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + 2m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + (A_1 c_6 + A_3 c_{67}) l_2 - \\
&\quad (A_1 c_{356} + A_3 c_{3567}) l_2 - (A_1 c_{2356} + A_3 c_{23567}) l_1 \\
h(6, 2) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + A_1 l_2 (c_6 - c_{356}) + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67} - l_2 c_{3567}) \\
h(6, 3) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + 2m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + (A_1 c_6 + A_3 c_{67}) l_2 \\
h(6, 4) &= 0 \\
h(6, 5) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_1^2 + m_7 l_{c7}^2 + A_1 l_2 c_6 + A_3 (2l_1 c_7 + l_2 c_{67}) \\
h(6, 6) &= I_{yy1} + I_{yy7} + m_1 l_{c1}^2 + m_7 l_{c7}^2 + m_7 l_1^2 + 2A_3 l_1 c_7 \\
h(6, 7) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 l_1 c_7 \\
h(7, 1) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 (l_1 c_7 + l_2 c_{67} - l_1 c_{23567} - l_2 c_{3567}) \\
h(7, 2) &= -m_7 l_2 l_{c7} c_{3567} + m_7 l_2 l_{c7} c_{67} + m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + I_{yy7} \\
h(7, 3) &= m_7 l_2 l_{c7} c_{67} + m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + I_{yy7} \\
h(7, 4) &= 0 \\
h(7, 5) &= m_7 l_2 l_{c7} c_{67} + m_7 l_1 l_{c7} c_7 + m_7 l_{c7}^2 + I_{yy7} \\
h(7, 6) &= I_{yy7} + m_7 l_{c7}^2 + A_3 l_1 c_7 \\
h(7, 7) &= m_7 l_{c7}^2 + I_{yy7}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= m_1 l_{c1} + m_7 l_1 \\
A_2 &= m_2 l_{c2} + (m_1 + m_7) l_2 \\
A_3 &= m_7 l_{c7} \\
c_2 &= \cos q_2 \\
c_6 &= \cos q_6 \\
c_7 &= \cos q_7 \\
c_{23} &= \cos(q_2 + q_3) \\
s_{23} &= \sin(q_2 + q_3) \\
c_{35} &= \cos(q_3 + q_5) \\
c_{67} &= \cos(q_6 + q_7) \\
c_{235} &= \cos(q_2 + q_3 + q_5) \\
c_{2356} &= \cos(q_2 + q_3 + q_5 + q_6) \\
c_{23567} &= \cos(q_2 + q_3 + q_5 + q_6 + q_7)
\end{aligned}$$

### Cálculo de la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se calcula a partir de las ecuaciones (1.58) y (1.59). De esta forma se tiene:

$$\begin{aligned}
c(1, 1) &= c_{211} \dot{q}_2 + c_{311} \dot{q}_3 + c_{411} \dot{q}_4 + c_{511} \dot{q}_5 + c_{611} \dot{q}_6 + c_{711} \dot{q}_7 \\
c(1, 2) &= c_{211} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{311} \dot{q}_3 + c_{411} \dot{q}_4 + c_{511} \dot{q}_5 + c_{611} \dot{q}_6 + c_{711} \dot{q}_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(1, 3) &= c_{311}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_{411}\dot{q}_4 + c_{511}\dot{q}_5 + c_{611}\dot{q}_6 + c_{711}\dot{q}_7 \\
c(1, 4) &= c_{411}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_{441}\dot{q}_4 \\
c(1, 5) &= c_{511}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{611}\dot{q}_6 + c_{711}\dot{q}_7 \\
c(1, 6) &= c_{611}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) + c_{711}\dot{q}_7 \\
c(1, 7) &= c_{711}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(2, 1) &= c_{112}\dot{q}_1 + c_{312}\dot{q}_3 + c_{412}\dot{q}_4 + c_{512}\dot{q}_5 + c_{612}\dot{q}_6 + c_{712}\dot{q}_7 \\
c(2, 2) &= c_{332}\dot{q}_3 + c_{412}\dot{q}_4 + c_{512}\dot{q}_5 + c_{612}\dot{q}_6 + c_{712}\dot{q}_7 \\
c(2, 3) &= c_{312}(\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{412}\dot{q}_4 + c_{512}\dot{q}_5 + c_{612}\dot{q}_6 + c_{712}\dot{q}_7 \\
c(2, 4) &= c_{412}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_{442}\dot{q}_4 \\
c(2, 5) &= c_{512}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{612}\dot{q}_6 + c_{712}\dot{q}_7 \\
c(2, 6) &= c_{612}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) + c_{712}\dot{q}_7 \\
c(2, 7) &= c_{712}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(3, 1) &= c_{113}\dot{q}_1 + c_{213}\dot{q}_2 + c_{413}\dot{q}_4 + c_{613}\dot{q}_6 + c_{713}\dot{q}_7 \\
c(3, 2) &= c_{213}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{413}\dot{q}_4 + c_{613}\dot{q}_6 + c_{713}\dot{q}_7 \\
c(3, 3) &= c_{413}\dot{q}_4 + c_{613}\dot{q}_6 + c_{713}\dot{q}_7 \\
c(3, 4) &= c_{413}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
c(3, 5) &= c_{613}\dot{q}_6 + c_{713}\dot{q}_7 \\
c(3, 6) &= c_{613}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) + c_{713}\dot{q}_7 \\
c(3, 7) &= c_{713}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(4, 1) &= c_{114}\dot{q}_1 + c_{214}\dot{q}_2 + c_{314}\dot{q}_3 \\
c(4, 2) &= c_{214}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{324}\dot{q}_3 \\
c(4, 3) &= c_{324}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
c(4, 4) &= 0 \\
c(4, 5) &= 0 \\
c(4, 6) &= 0 \\
c(4, 7) &= 0 \\
c(5, 1) &= c_{115}\dot{q}_1 + c_{215}\dot{q}_2 + c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 2) &= -c_{512}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 3) &= c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 4) &= 0 \\
c(5, 6) &= c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 6) &= c_{615}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 7) &= c_{715}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(6, 1) &= c_{116}\dot{q}_1 + c_{216}\dot{q}_2 + c_{316}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 2) &= c_{216}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{316}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 3) &= c_{316}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 4) &= 0 \\
c(5, 1) &= c_{115}\dot{q}_1 + c_{215}\dot{q}_2 + c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 2) &= -c_{512}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 3) &= c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 4) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(5, 6) &= c_{615}\dot{q}_6 + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 6) &= c_{615}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) + c_{715}\dot{q}_7 \\
c(5, 7) &= c_{715}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(6, 1) &= c_{116}\dot{q}_1 + c_{216}\dot{q}_2 + c_{316}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 2) &= c_{216}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{316}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 3) &= c_{316}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 4) &= 0 \\
c(6, 5) &= c_{316}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 6) &= c_{716}\dot{q}_7 \\
c(6, 7) &= c_{716}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \\
c(7, 1) &= c_{117}\dot{q}_1 + c_{217}\dot{q}_2 + c_{317}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{617}\dot{q}_6 \\
c(7, 2) &= c_{217}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + c_{317}(\dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{617}\dot{q}_6 \\
c(7, 3) &= c_{317}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{617}\dot{q}_6 \\
c(7, 4) &= 0 \\
c(7, 5) &= c_{317}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5) + c_{617}\dot{q}_6 \\
c(7, 6) &= c_{617}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6) \\
c(7, 7) &= 0
\end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}
c_{211} &= -(m_2 l_{c2} + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7) l_2) l_1 s_2 + (A_1 s_{2356} + A_2 s_{235} \\
&\quad + A_3 s_{23567}) l_1 - m_4 l_2 l_4 c_{23} s_4 \\
c_{311} &= A_1 (l_1 s_{2356} + l_2 s_{356}) + A_2 (l_1 s_{235} + l_2 s_{35}) + A_3 (l_1 s_{23567} + l_2 s_{3567}) \\
&\quad - m_4 l_4 (l_1 s_{23} + l_2 s_3) \\
c_{411} &= -m_4 l_4 s_4 (l_1 c_{23} + l_2 c_3 + l_4 c_4) \\
c_{511} &= A_1 (l_1 s_{2356} + l_2 s_{356}) + A_2 (l_1 s_{235} + l_2 s_{35}) + A_3 (l_1 s_{23567} + l_2 s_{3567}) \\
c_{611} &= A_1 (l_1 s_{2356} + l_2 s_{356} - l_2 s_6) + A_3 (l_1 s_{23567} + l_2 s_{3567} - l_2 s_{67}) \\
c_{711} &= A_3 (l_1 s_{23567} + l_2 s_{34567} - l_2 s_{67} - l_1 s_7) \\
c_{441} &= -m_4 l_4 c_4 (l_1 s_{23} + l_2 s_3) \\
c_{112} &= (m_2 l_{c2} + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7) l_2) l_1 s_2 - (A_1 s_{2356} + A_2 s_{235} + A_3 s_{23567}) l_1 \\
&\quad + m_4 l_2 l_4 c_{23} s_4 \\
c_{312} &= (A_1 s_{356} + A_2 s_{35} + A_3 s_{3567}) l_2 - m_4 l_2 l_4 c_4 s_3 \\
c_{412} &= -m_4 l_4 s_4 (l_2 c_3 + l_4 c_4) \\
c_{512} &= (A_1 s_{356} + A_2 s_{35} + A_3 s_{3567}) l_2 \\
c_{612} &= A_1 (l_2 s_{356} - l_2 s_6) + A_3 (l_2 s_{3567} - l_2 s_{67}) \\
c_{712} &= A_3 (l_2 s_{3567} - l_2 s_{67} - l_1 s_7) \\
c_{442} &= -m_4 l_2 l_4 c_4 s_3
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c_{113} &= -A_1(l_1s_{2356} + l_2s_{356}) + A_2(l_1s_{235} + l_2s_{35}) + A_3(l_1s_{23567} + l_2s_{3567}) \\
&\quad + m_4l_4(l_1s_{23} + l_2s_3) \\
c_{213} &= -(A_1s_{356} + A_2s_{35} + A_3s_{3567})l_2 + m_4l_2l_4c_4s_3 \\
c_{413} &= -m_4l_4^2s_4c_4 \\
c_{613} &= -(A_1l_2s_6 + A_3l_2s_{67}) \\
c_{713} &= -A_3(l_1s_7 + l - 2s_{67}) \\
c_{114} &= m_4l_4s_4(l_1c_{23} + l_2c_3 + l_4c_4) \\
c_{214} &= m_4l_4s_4(l_2c_3 + l_4c_4) \\
c_{314} &= m_4l_4^2s_4c_4 \\
c_{115} &= -A_1(l_1s_{2356} + l_2s_{356}) - A_2(l_1s_{235} + l_2s_{35}) - A_3(l_1s_{23567} + l_2s_{3567}) \\
c_{215} &= -(A_1s_{356} + A_2s_{35} + A_3s_{3567})l_2 \\
c_{615} &= -(A_1l_2s_6 + A_3l_2s_{67}) \\
c_{715} &= -A_3(l_1s_7 + l_2s_{67}) \\
c_{116} &= -A_1(l_1s_{2356} + l_2s_{356} - l_2s_6) - A_3(l_1s_{23567} + l_2s_{3567} - l_2s_{67}) \\
c_{216} &= -A_1(l_2s_{356} - l_2s_6) - A_3(l_2s_{3567} - l_2s_{67}) \\
c_{316} &= A_1l_2s_6 + A_3l_2s_{67} \\
c_{716} &= -A_3l_1s_7 \\
c_{117} &= -A_3(l_1s_{23567} + l_2s_{34567} - l_2s_{67} - l_1s_7) \\
c_{217} &= -A_3(l_2s_{3567} - l_2s_{67} - l_1s_7) \\
c_{317} &= A_3(l_1s_7 + l_2s_{67}) \\
c_{617} &= A_3l_1s_7
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
s_2 &= \sin q_2 \\
s_3 &= \sin q_3 \\
c_3 &= \cos q_3 \\
s_7 &= \sin q_7 \\
s_{35} &= \sin(q_3 + q_5) \\
s_{67} &= \sin(q_6 + q_7) \\
s_{356} &= \sin(q_3 + q_5 + q_6) \\
s_{3567} &= \sin(q_3 + q_5 + q_6 + q_7) \\
s_{23567} &= \sin(q_2 + q_3 + q_5 + q_6 + q_7)
\end{aligned}$$

### Cálculo del vector de términos gravitacionales

El vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  se obtiene a partir de la ecuación (1.52). Los elementos del vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  son:

$$\begin{aligned}
 g(7) &= g_0 A_3 s_{123567} \\
 g(6) &= g_0 A_1 s_{12356} + g_0 A_3 s_{123567} \\
 g(5) &= g_0 A_2 s_{1235} + g_0 A_1 s_{12356} + g_0 A_3 s_{123567} \\
 g(4) &= -m_4 l_4 g_0 c_{123} s_4 \\
 g(3) &= -m_4 l_4 g_0 s_{123} c_4 + g_0 A_2 s_{1235} + g_0 A_1 s_{12356} + g_0 A_3 s_{123567} \\
 g(2) &= -(m_2 + l_{c2} + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7) l_2) g_0 s_{12} + g(3) \\
 g(1) &= -(m_1 l_{c1} + (m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4 + m_7) l_1) g_0 s_1 + g(2)
 \end{aligned}$$

donde  $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$

Los cálculos se realizaron con el software Mathematica 6.

$i$	$m_i$ [Kg]	$l_i$ [m]	$l_{ci}$ [m]	$I_{xxi}$ [Kgm <sup>2</sup> ]	$I_{yyi}$ [Kgm <sup>2</sup> ]	$I_{zzi}$ [Kgm <sup>2</sup> ]
1	1.25	0.3	0.143	0.0136	0.0136	$3 \times 10^{-4}$
2	1.25	0.3	0.143	0.0136	0.0136	$3 \times 10^{-4}$
3	3	0.0835	0.0835	0.014	0.0114	0.024
4	8	0.15	0.15	0	0	0
5	1.25	0.3	0.143	0.0136	0.0136	$3 \times 10^{-4}$
6	1.25	0.3	0.143	0.0136	0.0136	$3 \times 10^{-4}$
7	0.25	0.0545	0.0241	0.002	0.002	0.002

Cuadro 1.1: Parámetros del robot obtenidos con el software SolidWorks.

## 1.6. Diseño de una ley de Control

El objetivo de la ley de control es que el robot siga una determinada trayectoria. En el diseño de una ley de control se debe tomar en cuenta el error debido a las condiciones iniciales, el ruido en los sensores, la incertidumbre paramétrica y la dinámica de los actuadores.

### 1.6.1. Técnicas de control

#### Control por calculado

El modelo dinámico está dado por la ecuación (1.60)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.63)$$

La idea de la *Ley de control por par calculado* es encontrar un vector  $\boldsymbol{\tau}$  de tal forma que convierta al sistema (1.60) en un sistema lineal, esta técnica se le conoce como *linealización por realimentación*. En muchos sistemas no es posible encontrar una ley de control que pueda linealizar el sistema, sin embargo, debido a la forma particular de (1.60) la ley de control

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1.64)$$

cancela todas las no linealidades y aplica exactamente el par necesario para vencer la inercia del actuador. Sustituyendo la ley de control se obtiene la ecuación en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Ya que  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es una matriz positiva definida y, por tanto, invertible, donde  $\mathbf{y}$  representa un nuevo vector de entrada. El sistema (1.65) es un sistema lineal y desacoplado con respecto a la entrada  $\mathbf{y}$ , es decir, la componente  $y_i$  influye únicamente sobre la articulación  $q_i$ .

Si se elige  $\mathbf{y}$  como (Siciliano *et al.* 2009):

$$\mathbf{y} = -\mathbf{K}_p\mathbf{q} - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}, \quad (1.66)$$

lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_p\mathbf{q} + \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r} \quad (1.67)$$

Dada una trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  el seguimiento de esta trayectoria se garantiza eligiendo:

$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p\mathbf{q}_d \quad (1.68)$$

Sustituyendo (1.68) en (1.67) se obtiene:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (1.69)$$

La ecuación diferencial lineal anterior rige la dinámica del error entre las trayectorias deseadas y las reales. El error de seguimiento se define como:

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (1.70)$$

$\mathbf{K}_v$  y  $\mathbf{K}_p$  son matrices diagonales constantes positivas definidas.

La desventaja que presenta la ley de control anterior es la demanda de tiempo de cómputo puede ser muy grande; además requiere de un conocimiento perfecto de los parámetros del modelo del robot.

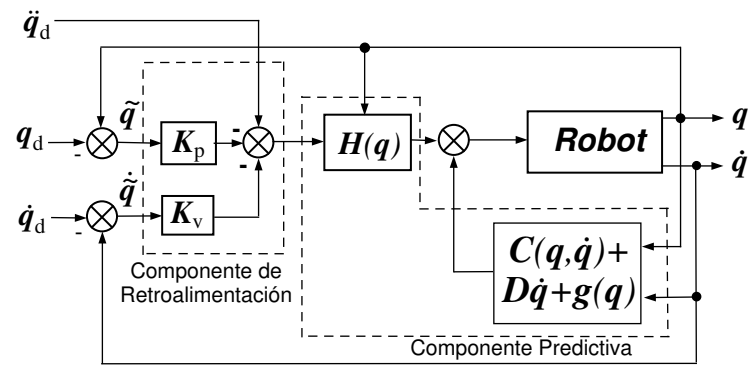


Figura 1.10: Control Par Calculado

### Control Proporcional-Derivativo (PD)

La dinámica de los robots en general no lineal, sin embargo, es posible utilizar un controlador Proporcional-Derivativo. La ley de control PD está dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (1.71)$$

con  $\mathbf{K}_v$  y  $\mathbf{K}_p$  matrices diagonales positivas definidas y el error de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}$  está definido por la ecuación (1.70). En ausencia del vector de términos gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  en la ecuación (1.60) la ley de control PD resulta en un seguimiento asintótico de la trayectoria deseada.

### Demostración

Considérese la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (1.72)$$

El primer término de la ecuación (1.72) es la energía cinética del robot, el segundo término representa la energía potencial. Para probar que el robot sigue la trayectoria deseada, la función  $V$  debe ser decreciente para cualquier trayectoria del robot.

Se asume  $\mathbf{q}_d$  constante y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = 0$ . La derivada de (1.72) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{D} + \mathbf{K}_v) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (1.73)$$

puesto que la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica de acuerdo con la Propiedad A.1.2. La matriz  $\mathbf{D} + \mathbf{K}_v$  es positiva definida, por lo que la función  $\dot{V}$  es negativa semidefinida, el robot puede alcanzar una posición donde  $\dot{\mathbf{q}} = 0$  pero  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_d$ . Para probar que esto se usa el Teorema de LaSalle. Si  $\dot{V} \equiv 0$  implica que  $\dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} \equiv 0$ , ecuación (1.73). Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} &= -\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

lo que implica que  $\tilde{\mathbf{q}} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ . El Teorema de LaSalle nos dice que el punto  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$  es asintóticamente estable.

En la presencia del vector de términos gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  la ley de Control no garantiza un seguimiento asintótico de la trayectoria. En la práctica existirá un error en estado estacionario. Asumiendo que el sistema en lazo cerrado es estable entonces, se tiene:

$$-\mathbf{K}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1.74)$$

como lo muestra la ecuación anterior el error se puede reducir aumentando la ganancia  $\mathbf{K}_p$

### Control PD con compensación de gravedad

Para eliminar el error en estado estacionario provocado por el vector de términos gravitacionales se puede modificar la ley de Control PD como:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1.75)$$

La ley de control anterior cancela los efectos de los términos gravitacionales. Al igual que la ley de control par calculado es necesario conocer dicho vector para su implementación.

### Control Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

Otra alternativa para eliminar el error en estado estable es introducir un término integral. Dicho término aumenta el orden del sistema, por tanto, el error en estado estable del sistema original se mejora en un orden; es decir, si el error en estado estable a una entrada dada es constante, el término integral lo reduce a cero. Por otro lado se debe tener cuidado en la elección de la ganancia de la parte integral ya que esto puede introducir problemas debido a que la estabilidad del sistema puede verse afectada.

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_i \int \tilde{\mathbf{q}} dt \quad (1.76)$$

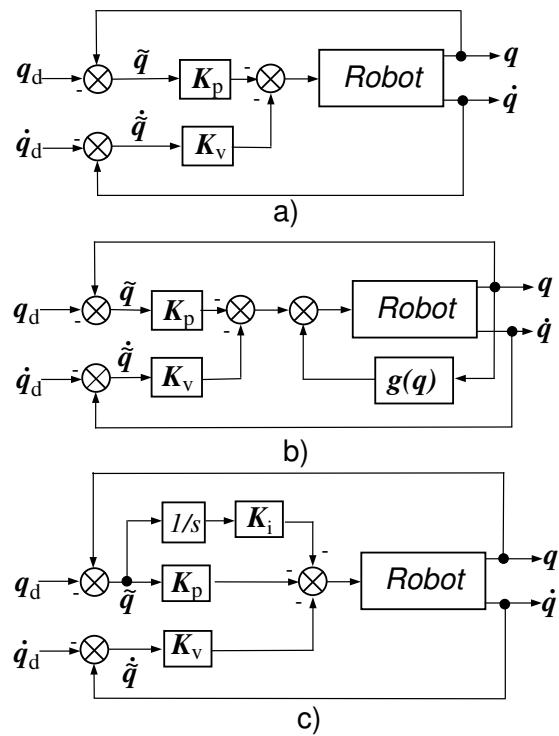


Figura 1.11: Controladores clásicos. a) Control PD. b) Control PD con compensación de gravedad. c) Control PID

## Capítulo 2

# Planeación de Trayectorias para Robots Bípedos

La planeación de una trayectoria consiste en definir una secuencia de puntos, ya sea en el espacio cartesiano o en el espacio de articulación, por los cuales el robot debe pasar en un tiempo determinado. Como se mencionó anteriormente se considera al robot como un manipulador serial redundante. Para resolver el problema cinemático se dividió el problema en dos partes: la posición del centro de gravedad y la posición y orientación del pie libre. De igual forma se abordará el problema de generación de trayectorias, tanto para el centro de gravedad como para el pie están definidas en el espacio cartesiano.

### 2.1. Restricciones

El objetivo principal es mover al robot de un punto inicial a un punto final siguiendo una determinada trayectoria en un tiempo preestablecido. Existe un número infinito de trayectorias que pueden ser seleccionadas para realizar esta función; sin embargo, deben cumplir las siguientes restricciones:

**Espacio de trabajo:** Evitar colisiones con el ambiente de trabajo, configuraciones singulares.

**Actuadores:** Las velocidades y aceleraciones de una determinada trayectoria pueden ser excesivas requiriendo una cantidad de fuerza/torque que supera los límites del actuador.

**Tiempo ejecución:** Si la trayectoria es demasiado compleja en su cálculo resultaría ineficiente en tiempo real.

Estas restricciones son comunes en los manipuladores. Sin embargo, para un robot bípedo existe otra restricción muy importante, que es la fuerza y el



par que el robot ejerce sobre la superficie y viceversa. Para obtener las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del robot se consideró como base el pie que se encuentra apoyado en el suelo. Para que dichas ecuaciones sean válidas se debe garantizar que no haya ninguna rotación ni traslación. Cuando esto ocurre el sistema se convierte en un sistema subactuado ya que posee un número mayor de grados de libertad que actuadores. A continuación se analiza la interacción entre el pie y la superficie en el plano  $x-z$  como se muestra en la Figura 2.1.

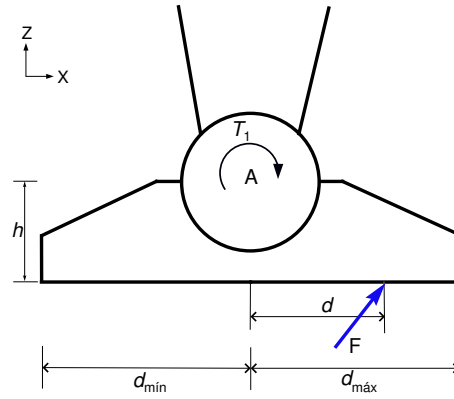


Figura 2.1: Suma de momentos alrededor de A.

Realizando la suma de momentos respecto al punto  $A$  se tiene:

$$\sum \mathbf{M}_A = \tau_1 - (dF_z + hF_r) \quad (2.1)$$

donde  $F_z$  es la fuerza de reacción en la dirección  $z$  y  $F_r$  es la fuerza de fricción.

Cuando el robot camina en una superficie plana la altura del centro de gravedad ( $z_{cg}$ ) se mantiene generalmente en un valor constante, esto no ocurre cuando camina sobre una superficie inclinada o sube escaleras. Se considera únicamente el caso en el que  $z_{cg}$  es constante, entonces la fuerza de reacción  $F_z$  se aproxima por:

$$F_z = mg \quad (2.2)$$

Para simplificar el análisis se supone que no existe deslizamiento del pie del robot de tal forma que:

$$F_r = \mu_k N = \mu_k mg \quad (2.3)$$

donde

$m$  es la masa total del robot.

$\mu_k$  coeficiente de fricción estática.

$g$  aceleración de la gravedad.  
 $N$  fuerza normal.  
 $\tau_1$  par aplicado en la articulación 1.

Para que no exista rotación del pie la ecuación (2.1) debe ser igual a cero, es decir,

$$\tau_1 = dF_z + hF_r \quad (2.4)$$

como  $dF_z \gg hF_r$ . La ecuación anterior se aproxima por:

$$\tau_1 = dF_z = \tau_R \quad (2.5)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es el par transmitido hacia la superficie de contacto, su magnitud depende de la geometría del pie (ver Figura 2.1). Los valores máximos y mínimos de  $\tau_1$  ocurren cuando la fuerza  $F_z$  se localiza en los extremos del pie ( $d_{\min}, d_{\max}$ ); cuando el valor de  $\tau_1$  supera estos valores el pie comienza a rotar. La localización de  $d$  depende el movimiento del robot y se le conoce como ZMP por sus siglas en inglés (*Zero Moment Point*); este concepto es uno de los principales criterios para la planeación de trayectorias para robots bípedos. Es muy común utilizar el ZMP como criterio de estabilidad del robot en lugar del par transmitido hacia la superficie, pero el principio es básicamente el mismo, como se observa en la ecuación (2.5).

## 2.2. ZMP

El concepto de ZMP fue definido por Vukobratovic y Borovac (2004) como criterio para analizar la estabilidad y planeación de trayectorias de robots que poseen más de dos piernas (robots bípedos, robots hexápodos, etc.). Este criterio ha sido ampliamente utilizado en la mayoría de los robots bípedos existentes (Hirai *et al.* 1998, Kaneko *et al.* 2008, Löffler *et al.* 2004), se define como:

*El punto donde las fuerzas de reacción  $\mathbf{F}$  ( $F_x, F_y, F_z$ ) que actúan en el pie del robot producen un momento  $\mathbf{M}$  ( $M_x, M_y, M_z$ ) igual a cero. Se dice entonces que el robot se encuentra en equilibrio.*

Se basa en una extensión del principio de *D'Alembert* (Bedford y Fowler 2000) que establece que la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido pares y fuerzas externos incluidos el momento producido por la fuerza inercial y par inercial es igual a cero, ecuación (2.1).

La condición necesaria para mantener en equilibrio al robot es  $M_x = 0$  y  $M_y = 0$ . La componente  $M_z$  puede ser diferente cero y no provoca pérdida de

balance en el robot. Generalmente está compensada por la fuerza de fricción tangencial. La localización del ZMP debe estar siempre dentro del área de soporte. Cabe mencionar que este concepto no es nuevo, pues ha sido aplicado en el campo de la mecánica de fluidos conocido como **CoP** por sus siglas en inglés (*Center of Pressure*), fue renombrado como ZMP al aplicarse en el campo de los robots bípedos.

De esta forma se pueden planear diversas trayectorias para el robot empleando la ecuaciones de movimiento (1.60) y la ecuación (2.5) en conjunto con la ley de control, evaluarlas mediante simulación y elegir la trayectoria que cumpla con los requisitos antes mencionados, convirtiéndose en un proceso iterativo. La desventaja principal de este método es no tomar en cuenta la presencia de perturbaciones durante el movimiento del robot. Cualquier perturbación podría alejar al robot de la trayectoria deseada ocasionando pérdida de balance, además de restarle autonomía al robot. Las leyes de control propuestas en la Sección 1.6 tiene como finalidad el seguimiento de una determinada trayectoria, de manera que si la trayectoria provoca la rotación del pie dicha ley no corregirá esta situación ocasionando una eventual caída si no se corrige la trayectoria.

Una alternativa para la generación de trayectorias de robots bípedos es abordar el problema inverso, es decir, dada una posición del ZMP deseada o en su caso un par que se encuentre entre los límites permitidos, ¿qué tipo de movimiento de seguir el robot para cumplir estas restricciones? Se pueden utilizar las ecuaciones de movimiento del robot (1.60) para resolver el problema, sin embargo, debido su complejidad es difícil la implementación en tiempo real.

### 2.3. Modelo simplificado: péndulo invertido

Muchos investigadores han optado por utilizar un modelo simplificado del robot para la generación de trayectorias en tiempo real debido a la facilidad de cálculo. Las trayectorias se pueden adaptar para mantener estable el robot y se pueden programar para dar mayor autonomía al robot, como ejemplo se puede citar Kajita *et al.* (2003), Löffler *et al.* (2004) y Nazir *et al.* (2005). Entre los algoritmos propuestos utilizando modelos simples podemos encontrar: soluciones analíticas (Löffler *et al.* 2004), soluciones numéricas (Takanishi y Lim 1990); algoritmos empleando control predictivo (Kajita *et al.* 2003) y redes neuronales.

El comportamiento del robot bípedo es semejante al comportamiento que presenta un péndulo invertido tridimensional (Kajita *et al.* 2001), ya que ambos

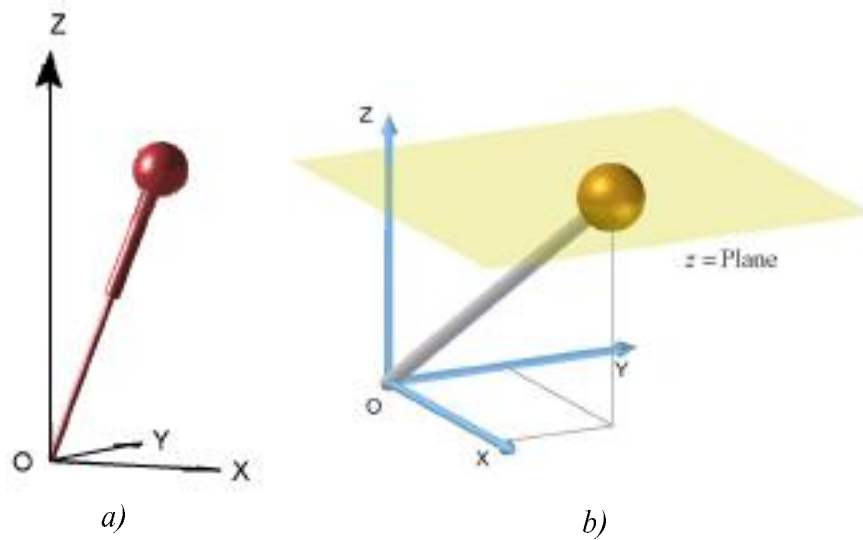


Figura 2.2: a) Péndulo invertido tridimensional de longitud variable. b) Péndulo invertido con movimiento restringido a un plano.

presentan una dinámica inestable como se muestra en la Figura 2.2. Existen diferentes modelos y métodos para obtener las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido. Siguiendo esta línea se propone el modelo simplificado mostrado en la Figura 2.3. En particular se analiza el movimiento del robot en el plano  $x$ - $z$  debido a que el eje  $x$  representa la dirección de movimiento. Para obtener las ecuaciones de movimiento del modelo simplificado (ver Figura 2.3), realizamos la siguientes suposiciones:

- La masa total del robot se concentra en el centro de masa del robot.
- El par de reacción entre la superficie y el robot se modela como el par ejercido por un resorte torsional lineal ( $K_r\phi$ ).
- La altura del centro de gravedad  $z_{cg}$  se mantiene constante.

Para obtener el modelo matemático del péndulo invertido se aplica la ecuación (1.41). La energía cinética del sistema está dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}Ml^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}^2 \quad (2.6)$$

La energía potencial es:

$$\mathcal{P} = Mgl \cos(\theta + \phi) + \frac{1}{2}K_r\phi \quad (2.7)$$

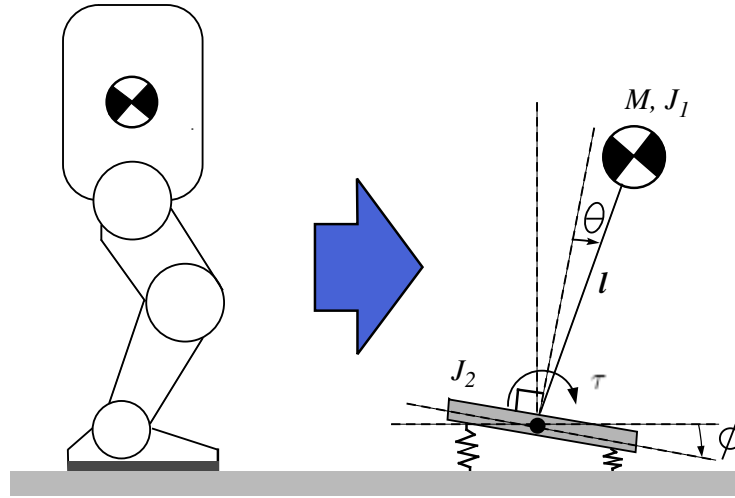


Figura 2.3: Modelo simplificado para el robot, en el plano  $x-z$

La función lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Ml^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}^2 - (Mgl \cos(\theta + \phi) + \frac{1}{2}K_r\phi) \quad (2.8)$$

Al aplicar (1.41) se obtiene:

$$Ml^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - Mgl \sin(\theta + \phi) = \tau \quad (2.9)$$

$$Ml^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + J_2\ddot{\phi} - Mgl \sin(\theta + \phi) + K_r\phi = 0 \quad (2.10)$$

donde

$M$  es la masa total del robot.

$l$  longitud del péndulo.

$J_2$  Momento de inercia del pie.

$\tau$  par aplicado en el tobillo.

La ecuación (2.9) describe la dinámica del centro de gravedad del robot, mientras que (2.10) describe la dinámica del pie. Al despejar  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\phi}$  de las ecuaciones (2.9) y (2.10) se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{Ml^2 + J_2}{J_2Ml^2} \right) \tau + \left( \frac{Mgl}{Ml^2} \right) \sin(\theta + \phi) + \left( \frac{K_r}{J_2} \right) \phi \quad (2.11)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{1}{J_2}(\tau + k_r\phi) \quad (2.12)$$

Se linealiza el sistema alrededor del punto de operación  $(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) = (0, 0, 0, 0)$ , que corresponde a un punto medio en el movimiento del centro de gravedad.

De esta manera, se transforma el problema de la generación de trayectorias en un problema de control lineal. Las ecuaciones lineales son:

$$\ddot{\theta} = \left( \frac{Ml^2 + J_2}{J_2 Ml^2} \right) \tau + \left( \frac{Mgl}{Ml^2} \right) (\theta + \phi) + \left( \frac{K_r}{J_2} \right) \phi \quad (2.13)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{1}{J_2} (\tau + K_r \phi) \quad (2.14)$$

El modelo toma en cuenta la interacción entre el robot y la superficie de contacto. El par de reacción se calcula de la siguiente manera:

$$\tau_R = -K_r \phi \quad (2.15)$$

El ZMP se calcula fácilmente a partir de la ecuación (2.15) como:

$$d = -\frac{1}{Mg} \tau_R \quad (2.16)$$

Al despejar  $\tau$  de la ecuación (2.14) y sustituyendo en (2.13) se obtiene:

$$\ddot{\theta} = -\left( \frac{Ml^2 + J_2}{Ml^2} \right) \ddot{\phi} + \left( \frac{Mgl}{Ml^2} \right) \theta + \left( \frac{Mgl - K_r}{Ml^2} \right) \phi \quad (2.17)$$

La posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad en la dirección  $x$  se calculan a partir de las siguientes ecuaciones:

$$x_{cg} = l\theta \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_{cg} = l\dot{\theta} \quad (2.19)$$

$$\ddot{x}_{cg} = l\ddot{\theta} \quad (2.20)$$

Finalmente al combinar las ecuaciones (2.18) y (2.20) con la ecuación (2.17) se obtiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{Mg}{Ml^2 + J_2} x_{cg} + \frac{Mgl - K_r}{Ml^2 + J_2} \phi - \frac{Ml^2}{l(Ml^2 + J_2)} \ddot{x}_{cg} \quad (2.21)$$

Utilizando como entrada de control la aceleración del centro de gravedad  $\ddot{x}_{cg}$  (Hirai *et al.* 1998), es decir, cuando el robot tienda a caer para mantener el balance el robot se acelera en una dirección determinada para mantener el equilibrio, conceptos similares se ha propuesto en Löffler *et al.* (2004), Nazir *et al.* (2005).

Expresando la ecuación (2.21) en variables de estado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{cg} \\ \dot{x}_{cg} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cg} \\ \dot{x}_{cg} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u \quad (2.22)$$

donde  $a_1 = \frac{Mg}{Ml^2+J_2}$ ,  $a_2 = \frac{Mgl-K_r}{Ml^2+J_2}$  y  $b_1 = \frac{-Ml^2}{l(Ml^2+J_2)}$

## 2.4. Análisis y Control del Modelo Simplificado

Como era de esperarse el sistema definido por (2.22) es inestable, puesto que al menos un valor característico de la matriz  $\mathbf{A}$  de (2.22) se encuentra en el lado derecho del plano  $s$ . Es posible estabilizar al sistema utilizando la retroalimentación del vector de estado como señal de control  $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$  siempre y cuando el sistema sea controlable. Los parámetros del péndulo se muestran en la Tabla 2.1.

**Definición 2.4.1** *Un sistema es controlable si existe un control sin restricciones  $u(t)$  que pueda llevar a cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  cualquier otro estado  $\mathbf{x}(t)$  en un tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*

△

Parámetros	Valor	Unidades
Masa Total del robot ( $M$ )	16.5	Kg
Longitud del péndulo ( $l$ )	0.75	m
Momento de Inercia del péndulo	9.28	Kgm <sup>2</sup>
Momento de inercia del pie ( $J_2$ )	0.002	Kgm <sup>2</sup>
Constante del resorte ( $K_r$ )	1500	Nm

Cuadro 2.1: Parámetros del péndulo.

### Control por Retroalimentación del vector de estado

Sea el sistema definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.23}$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , con la señal de control dada por:

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}\tag{2.24}$$

El sistema en lazo cerrado esta dado por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}\tag{2.25}$$

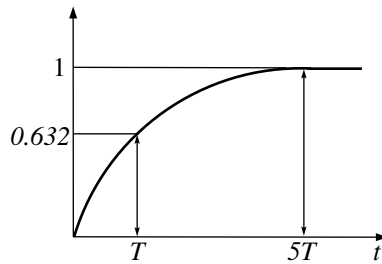


Figura 2.4: Sistema sobreamortiguado

Si todas las raíces de la ecuación característica  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = 0$  tiene parte real negativa el sistema es estable. Para cualquier condición  $\mathbf{x}(t_0)$  se sigue que:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)t} \mathbf{x}(t_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

Dado que el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  de la ecuación (2.22) es controlable, entonces mediante la ley de control dada por (2.24) es posible asignar los polos del sistema de forma arbitraria mediante una apropiada elección del vector de ganancias  $\mathbf{k}$ .

Los polos se eligen de tal forma que el sistema no presente sobrepaso, el mejor de los casos es tener un sistema sobreamortiguado como lo muestra la Figura 2.4. La duración de la Fase de Soporte simple es de 2 segundos, se sabe que un sistema sobreamortiguado alcanza su valor final aproximadamente en  $5T$ , por lo tanto, se puede elegir la constante de tiempo ( $T$ ) para el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 10T &= 2 \\ T &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se sabe que  $e^{-t/T}$  por lo tanto la elección para un polo es  $P_1 = -5$ . El resto de los polos se eligen con una constante de tiempo más pequeña de tal forma que su término exponencial decae más rápido. Los polos deseados son:

$$P = \{-5 - 8 - 10 - 15\} \quad (2.28)$$

Entonces el vector de ganancias  $\mathbf{k}^T$  (Ogata 2006) está dado por:

$$\mathbf{k}^T = [ 66.75 \quad 21.32 \quad -224.78 \quad -12.5 ] \quad (2.29)$$

Para probar el desempeño de la ley de control por retroalimentación de estados se llevará al sistema desde la condición inicial  $\mathbf{x}_o = [ -0.08 \quad 0 \quad -0.01 \quad 0 ]$



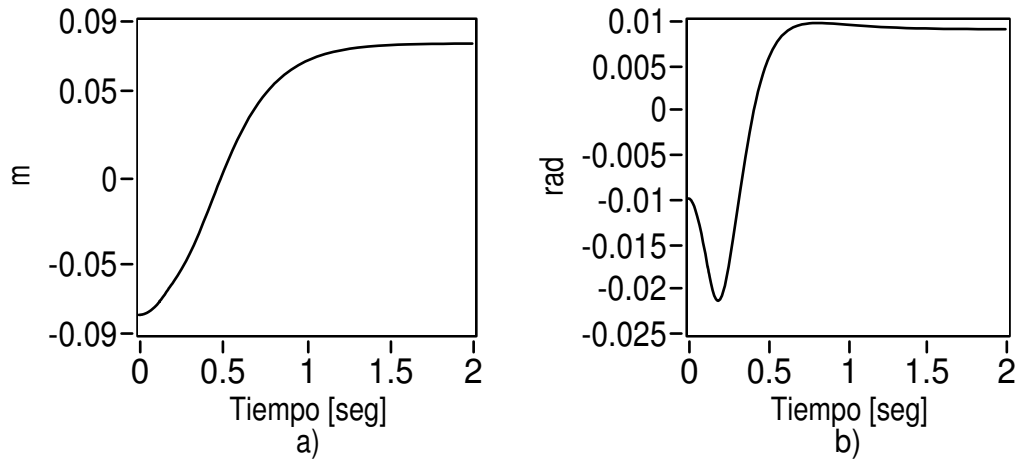


Figura 2.5: a) Posición del centro de gravedad  $x_{cg}$ . b) Posición del ángulo  $\phi$ .

hasta el estado  $\mathbf{x}_f = [ 0.08 \ 0 \ 0.01 \ 0 ]$ . Es decir el centro de gravedad del robot se encuentra en el extremo posterior del pie del robot. La fuerza de reacción del piso también se encuentra en la parte posterior produciendo una pequeña deformación en el pie traduciéndose en un cambio en el valor de  $\phi$ ; entonces la ley de control moverá el centro de gravedad del robot hacia el estado  $\mathbf{x}_f$ . De esta forma el ZMP ( $d$ ) se moverá desde la parte posterior del pie hacia la parte frontal. Mientras el centro de gravedad se mantenga lo más cercano al centro del pie, el par de reacción será menor debido a que la fuerza  $F_z$  se mueve hacia el centro del pie produciendo un momento igual a cero. Cuando el par de reacción es cero, el centro de gravedad coincide con el ZMP. El desempeño de la ley de control se muestra en la Figura 2.5. La aceleración y velocidad requerida para mover el robot se muestra en la Figura 2.6. La señal de control está acotada  $-1 \leq u \leq 1$ , debido a las limitaciones en los actuadores.

La ley de control definida por (2.24) requiere que todos los estados se encuentren disponibles, la posición y velocidad del centro de gravedad ( $x_{cg}, \dot{x}_{cg}$ ) se pueden determinar a partir de la cinemática directa, sin embargo, la medición de las variables ( $\phi, \dot{\phi}$ ) no es directa. Se puede diseñar un sistema mecánico para medir la deformación y transformarla en un ángulo  $\phi$  y utilizar diferenciación numérica para obtener  $\dot{\phi}$ . Una alternativa es utilizar un observador de estado, el cual es un algoritmo que permite estimar los estados no medibles del sistema, con esto se ahorra en diseño mecánico.

**Definición 2.4.2** *El sistema (2.23) es observable si es posible conocer el estado  $\mathbf{x}(t_0)$  a partir del conocimiento de la salida  $\mathbf{y}(t)$  y la entrada  $\mathbf{u}(t)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*

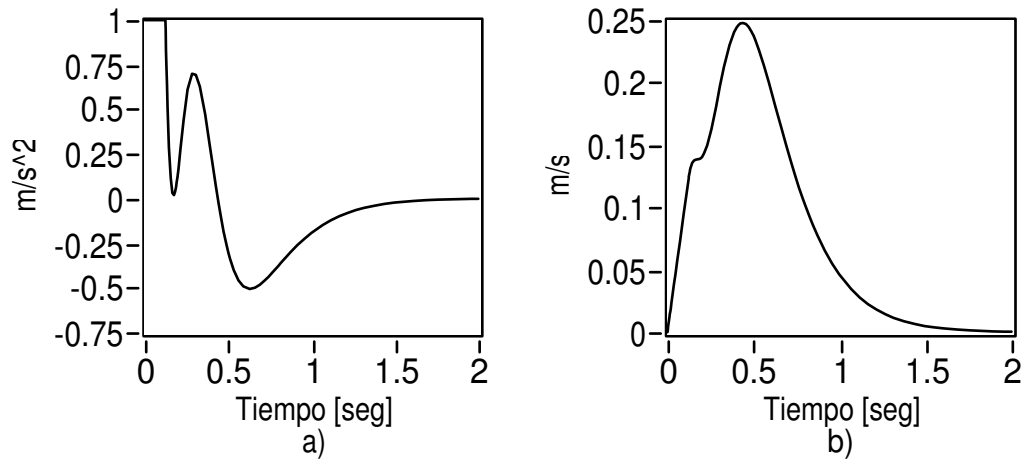


Figura 2.6: a) Señal de control  $\ddot{x}_{cg}$ . b) Velocidad del centro de gravedad  $\dot{x}_{cg}$ .

El sistema es observable si los renglones de la matriz  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{nm \times n}$  llamada matriz de observabilidad (Ogata 2006) son linealmente independientes.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{m-1} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

△

### Observador de Estado

El modelo matemático del observador de estado es básicamente el mismo que el de la planta con un término adicional que contiene el error de estimación. El modelo matemático del observador es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es el estado estimado. La dinámica del error de observación está dado por:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{e} \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ .

Si la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  es estable, el error convergerá a cero, es decir,  $\hat{\mathbf{x}}$  convergerá a  $\mathbf{x}$ . Si el sistema es observable, se puede elegir un vector  $\mathbf{l}$  tal que el sistema definido por la ecuación (2.32) sea asintóticamente estable. El diseño de un observador de estado consiste en determinar  $\mathbf{l}$  tal que  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  posea los valores característicos deseados. El problema es el mismo que en el caso de asignación de polos. A esta propiedad se le llama *dualidad*.

La salida para el sistema (2.22) puede ser el centro de gravedad del robot  $x_{cg}$ , ya que se puede obtener mediante el cálculo de la cinemática directa, sin embargo, el sistema no es observable, la matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz  $\mathbf{O}$  no es de rango completo, por lo tanto, el sistema no es observable.

Si se elige como salida el par de reacción definido como  $\tau_R = -K_r\phi$ , dicho par puede medirse con un sensor de fuerza ubicado en el pie. El sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{cg} \\ \dot{x}_{cg} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cg} \\ \dot{x}_{cg} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cg} \\ \dot{x}_{cg} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

El sistema es observable, los polos deseados para la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$  se eligen dos veces más rápidos que el sistema original

$$P_o = 2P = \{-10 - 16 - 20 - 30\}$$

Se pueden elegir los polos para que el estado estimado converja más rápido, sin embargo, esto ocasiona oscilaciones indeseables. El vector de ganancias del observador es:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -0.9 & -3.67 & -0.05 & -1.27 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

La ley de control (2.24) se modifica, para utilizar los estados estimados, como lo muestra la Figura 2.8-b. La ley de control se escribe como:

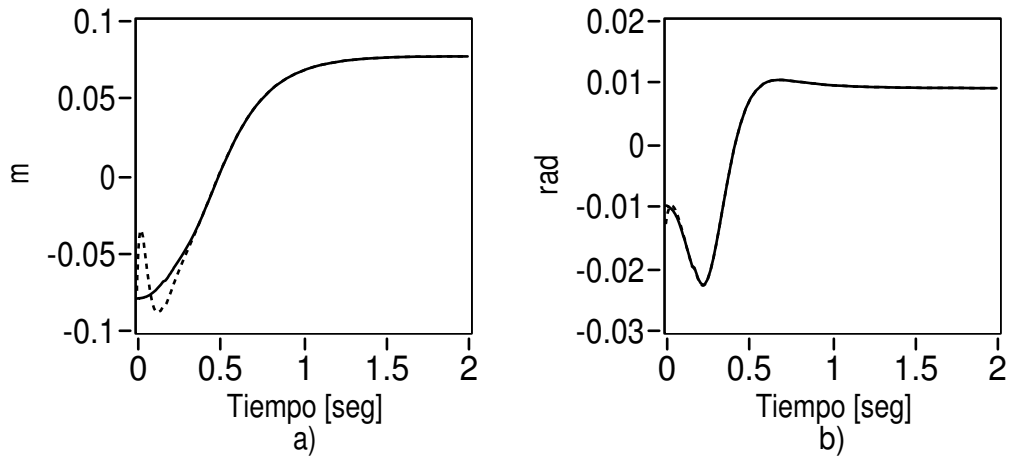


Figura 2.7: Desempeño del observador. a)  $x_{cg}$ — vs  $\hat{x}_{cg}$ - - -. b)  $\phi$ — vs  $\hat{\phi}$ - - -.

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (2.35)$$

El desempeño del observador se muestra en la Figura 2.7.

De esta forma se tiene un algoritmo para generar la trayectoria que debe seguir el centro de gravedad en la dirección  $x$  manteniendo en equilibrio al robot en el plano  $x$ - $z$ . Como la altura del centro de gravedad del robot  $z_{cg}$  se mantiene constante solo falta definir la trayectoria para  $y_{cg}$ .

Se puede realizar un procedimiento similar para obtener la trayectoria que debe seguir  $y_{cg}$  para mantener el balance del robot en el plano  $y$ - $z$ , sin embargo, el movimiento del robot en este plano es más restringido. El criterio para mantener estable al robot en este plano es mantener el centro de gravedad dentro del área de soporte, como se sugiere en Azevedo *et al.* (2004). El centro de gravedad en la dirección  $y$  se moverá desde un punto inicial ( $y_{cgi}$ ) a un punto final ( $y_{cgf}$ ) siguiendo una línea recta dada por:

$$y_{cg} = y_{cgi} + (y_{cgf} - y_{cgi})w \quad (2.36)$$

donde de  $w$  es un polinomio de quinto orden dado por:

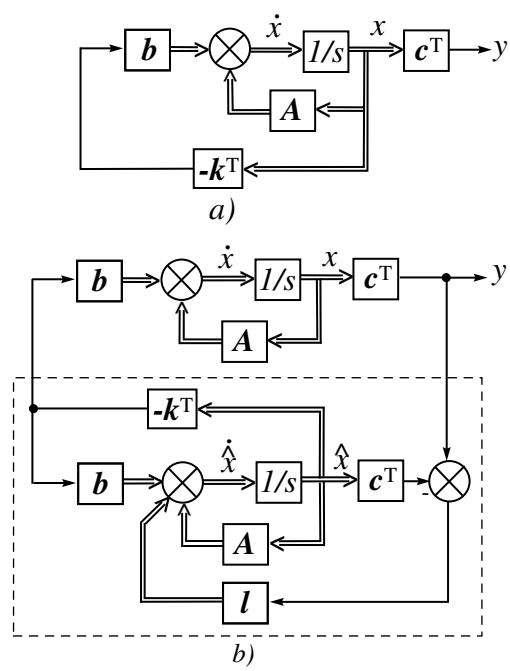


Figura 2.8: a) Control por retroalimentación del vector de estado. b) Control por retroalimentación del vector de estado con observado

$$w(t) = \frac{10}{t_f^3}t^3 - \frac{15}{t_f^4}t^4 + \frac{6}{t_f^5}t^5 \quad (2.37)$$

$$\dot{w}(t) = \frac{30}{t_f^3}t^2 - \frac{60}{t_f^4}t^3 + \frac{30}{t_f^5}t^4 \quad (2.38)$$

$$\ddot{w}(t) = \frac{60}{t_f^3}t - \frac{180}{t_f^4}t^2 + \frac{12}{t_f^5}t^3 \quad (2.39)$$

donde  $t_f$  es el tiempo final.

El polinomio  $w$  tiene las siguientes restricciones:

$$w(0) = 0$$

$$\dot{w}(0) = 0$$

$$\ddot{w}(0) = 0$$

$$w(t_f) = 1$$

$$\dot{w}(t_f) = 0$$

$$\ddot{w}(t_f) = 0$$

El pie sigue una trayectoria parabólica (ver Figura 2.9-b), dada por la ecuaciones:

$$x_p = x_{pi} + (x_{pf} - x_{pi})w \quad (2.40)$$

$$z_p = Aw^2 + Bw + z_{pi} \quad (2.41)$$

donde

$$A = 2(z_{pf} + z_{pi} - 2h)$$

$$B = 4h - z_{pf} - 3z_{pi}$$

$(x_{pi}, z_{pi})$  posición inicial del pie.

$(x_{pf}, z_{pf})$  posición final del pie.

$h$  altura máxima alcanzada por el pie durante su movimiento.

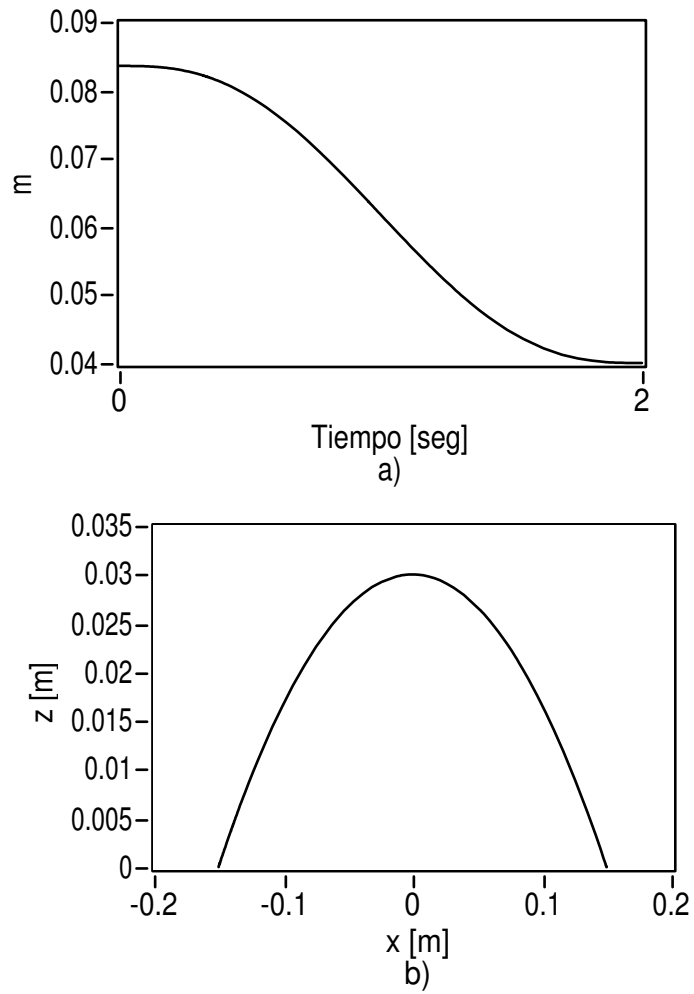


Figura 2.9: a) Trayectoria para  $y_{cg}$ . b) Trayectoria del pie

# Capítulo 3

## Simulación

### 3.1. Actuadores

Para tener un modelo más preciso del robot, es necesario incluir la dinámica de los actuadores y los sistemas de transmisión. A continuación se describen brevemente cada uno de ellos.

Los actuadores utilizados en robótica se clasifican en tres grupos dependiendo del tipo de energía que utilizan

- *Neumáticos*: su fuente de energía es el aire a presión producida por compresores transformándola en energía mecánica mediante pistones o turbinas.
- *Hidráulicos*: utilizan fluidos a presión, generalmente aceites.
- *Eléctricos*: su fuente de poder es la energía eléctrica y son los más empleados por sus características de control y sencillez. Existen dos tipos: motores de corriente directa (DC) y motores de corriente alterna (AC).

Los sistemas de transmisión son elementos mecánicos (engranes, bandas, cadenas) empleados para transmitir potencia, ya que en ocasiones el actuador no se encuentra acoplado directamente en la articulación o simplemente no es capaz por sí solo de generar las fuerzas y pares requeridos.

Debido a que el robot requiere gran precisión, los motores de CD son ideales para este caso. El motor de DC cuenta con un reductor para mayor capacidad de torque. El modelo matemático de un motor de CD de imán permanente



está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\tau_m = K_a i_a \quad (3.1)$$

$$V = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (3.2)$$

$$e_b = K_b \dot{q}_m \quad (3.3)$$

$$q_m = r q \quad (3.4)$$

donde

$\tau_m$  par en el eje del motor (Nm)

$V$  voltaje de armadura (V)

$i_a$  corriente de armadura (A)

$e_b$  fuerza electromotriz (V)

$q_m$  posición angular del eje del motor (rad)

$q$  posición angular del eje de la carga (rad)

$r$  relación de reducción de los engranes

$R_a$  resistencia de armadura ( $\Omega$ )

$L_a$  inductancia de armadura (H)

$K_a$  constante motor-par (Nm/A)

$K_b$  constante de contrarreacción electromotriz (Vsrad)

La ecuación de movimiento de un motor está dada por:

$$J_m \ddot{q}_m = \tau_m - f_m(\dot{q}_m) - \frac{\tau}{r} \quad (3.5)$$

donde  $\tau$  es el par neto aplicado a la carga,  $J_m$  es la inercia del rotor y  $f_m(\dot{q}_m)$  es el par de fricción. Puesto que la constante de tiempo eléctrica es mucho más rápida que la constante de tiempo mecánica, la inductancia  $L_a$  es despreciada ( $L_a \approx 0$ ). La ecuación (3.2) se convierte en:

$$V = R_a i_a + K_b \dot{q}_m \quad (3.6)$$

ya que  $e_b = K_b \dot{q}_m$  ecuación (3.3). Despejando  $i_a$  de la ecuación anterior y sustituyendo el resultado en (3.1), se tiene:

$$\tau_m = \frac{K_a}{R_a} (V - K_b \dot{q}_m). \quad (3.7)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.5):

$$J_m \ddot{q}_m + f_m(\dot{q}_m) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q}_m + \frac{\tau}{r} = \frac{K_a}{R_a} V. \quad (3.8)$$

como  $q_m = rq$  ecuación (3.4), la ecuación anterior se escribe:

$$J_m \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} V. \quad (3.9)$$

Considerando únicamente fricción viscosa  $f_m(\dot{q}_m) = f_m \dot{q}_m$

$$J_m \ddot{q} + \left( f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} V, \quad (3.10)$$

esta ecuación relaciona el voltaje aplicado a la armadura del motor aplicado a la carga en términos de la posición angular, velocidad y aceleración angular de la misma.

La ecuación (3.10) representa el modelo matemático de un motor de CD con un reductor. En el caso de  $n$  motores de corriente directa para el robot, se tiene:

$$J_{mi} \ddot{q}_i + \left( f_{mi} + \frac{K_{ai} K_{bi}}{R_{ai}} \right) \dot{q}_i + \frac{\tau_i}{r_i^2} = \frac{K_{ai}}{r_i R_{ai}} V_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

La ecuación anterior puede escribirse en forma compacta como:

$$\mathbf{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_f \dot{\mathbf{q}} \mathbf{D}_n \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_k \mathbf{V} \quad (3.12)$$

donde

$$\mathbf{D}_j = \text{diag} \{ J_{mi} \}$$

$$\mathbf{D}_f = \text{diag} \left\{ f_{mi} + \frac{K_{ai} K_{bi}}{R_{ai}} \right\}$$

$$\mathbf{D}_n = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_i^2} \right\}$$

$$\mathbf{D}_k = \text{diag} \left\{ \frac{K_{ai}}{r_i R_{ai}} \right\}$$

Despejando  $\boldsymbol{\tau}$  de la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación de movimiento del robot (1.60) se tiene:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{D}_k \mathbf{V} - \mathbf{D}_j \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_f \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.13)$$

Agrupando términos se tiene:

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_j) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_f) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_k \mathbf{v} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) es la ecuación de movimiento del robot incluyendo la dinámica de cada uno de los actuadores. Además el modelo anterior también satisface las propiedades descritas en la Sección A. Los parámetros del motor empleados en la simulación se muestran en la Tabla 3.1.

$R_a$	$K_a$	$K_b$	$J_m$	$f_m$	$r$
0.2	0.014	0.014	$3.35 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-3}$	100

Cuadro 3.1: Parámetros del motor

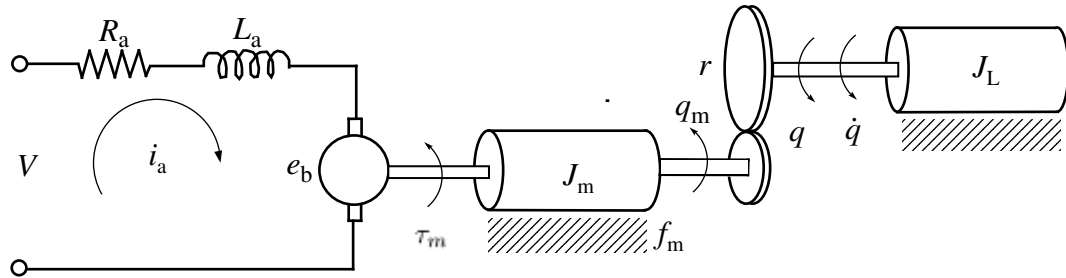


Figura 3.1: Diagrama de un motor de CD.

### 3.2. Simulación de las trayectorias del Robot

La simulación se realizó utilizando el módulo de control y simulación de LabVIEW. El algoritmo para simular los movimientos del robot se muestra en la Figura 3.2. El algoritmo consta de tres partes; en la primera se calculan las trayectorias del robot que están en función de coordenadas cartesianas. Como se mencionó se utiliza un modelo simplificado (péndulo invertido) con el fin generar trayectorias estables. Se diseñó una ley de control para el modelo simplificado que consiste en retroalimentar los estados de dicho sistema; también se diseñó un observador para estimar los estados no medibles. El observador requiere del conocimiento del par transmitido hacia el piso ( $\tau_R$ ), dicho par se obtiene a partir de ecuaciones de movimiento y la ley de control ( $\tau_1 = \tau_R$ ). La segunda parte consiste en calcular las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares requeridas para que el robot siga la trayectoria deseada empleando la cinemática inversa. La última etapa consiste en calcular los pares requeridos para que el robot siga la trayectoria propuesta en el primer paso, utilizando las leyes de control descritas en la Sección 1.6 en conjunto con las ecuaciones de movimiento (1.60). Los parámetros de la marcha del robot se muestran en la Tabla 3.2.

Cuadro 3.2: Parámetros de la marcha.

Duración de la Fase de Soporte Simple	2 segundos
Longitud de paso del robot	0.3 m
Altura máxima alcanzada por el pie	0.04 m

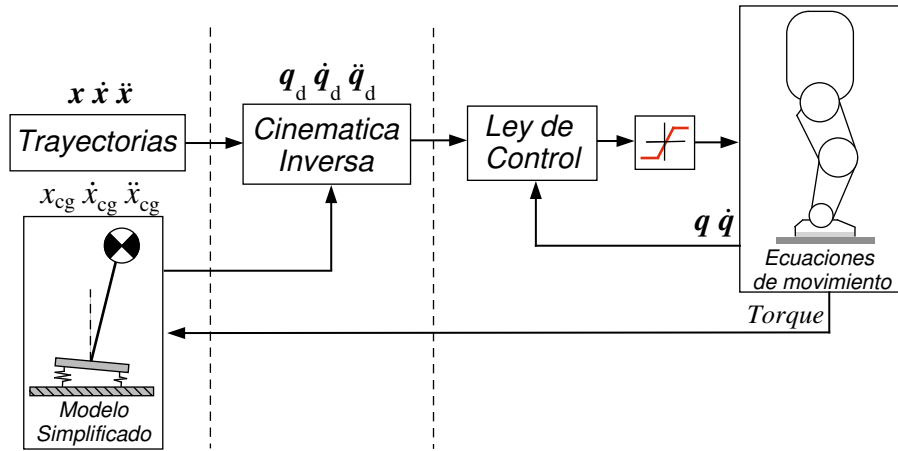


Figura 3.2: Algoritmo para simular los movimientos del robot.

### 3.2.1. Desempeño de la ley de Control

La Figura 3.3 muestra la implementación del algoritmo de control en LabVIEW. En la Sección 1.6 se propusieron las leyes de control para el seguimiento de las trayectorias. A continuación se muestra el desempeño de cada ley de control propuesta. La duración de la Fase de Soporte Simple es de 2 segundos, las condiciones iniciales son:

$$\mathbf{q} = [ 0.007 \quad -0.32 \quad 0.31 \quad -0.22 \quad 0.44 \quad -0.22 \quad 0 ] \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

La articulación 1 tiene una gran importancia en el movimiento del robot, ya que la posición del centro de gravedad depende en gran medida de dicha articulación además el par aplicado en dicha articulación está más restringido que el resto de las articulaciones. Las Figuras 3.4-1.36 muestran el desempeño de cada una de las leyes de control. Las ganancias se determinaron mediante un proceso de prueba y error. El Control PD muestra un desempeño aceptable para el seguimiento de la trayectoria. El control PID disminuye el error al final de la fase. El control por Par Calculado y el Control PD con compensación de gravedad presentan un desempeño similar a al control PD y PID en la articulación 1. Es lógico pensar que ambos presentaran un mejor desempeño ya que ambos incluyen componentes predictivos, sin embargo su desempeño es apenas superior. Esto se debe a que el par aplicado en la articulación 1 está muy limitado por las restricciones ya comentadas.

Si bien el Control Par Calculado y el Control PD con compensación de gravedad presentan un mejor desempeño con respecto al Control PD y PID en

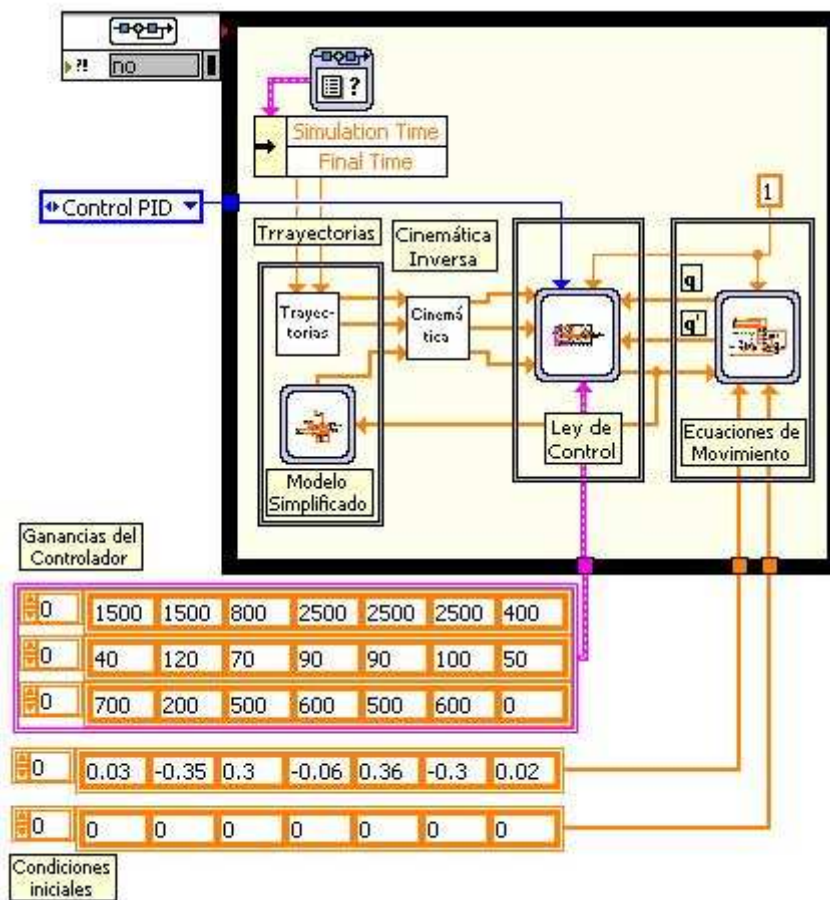


Figura 3.3: Diagrama de bloques en LabVIEW.

el resto de las articulaciones, en la práctica es más difícil su implementación, puesto que idealmente requieren de un conocimiento perfecto del modelo del robot para poder cancelar las no linealidades. Sin embargo, esto no es posible, debido principalmente a los fenómenos como la fricción y a la incertidumbre en los parámetros.

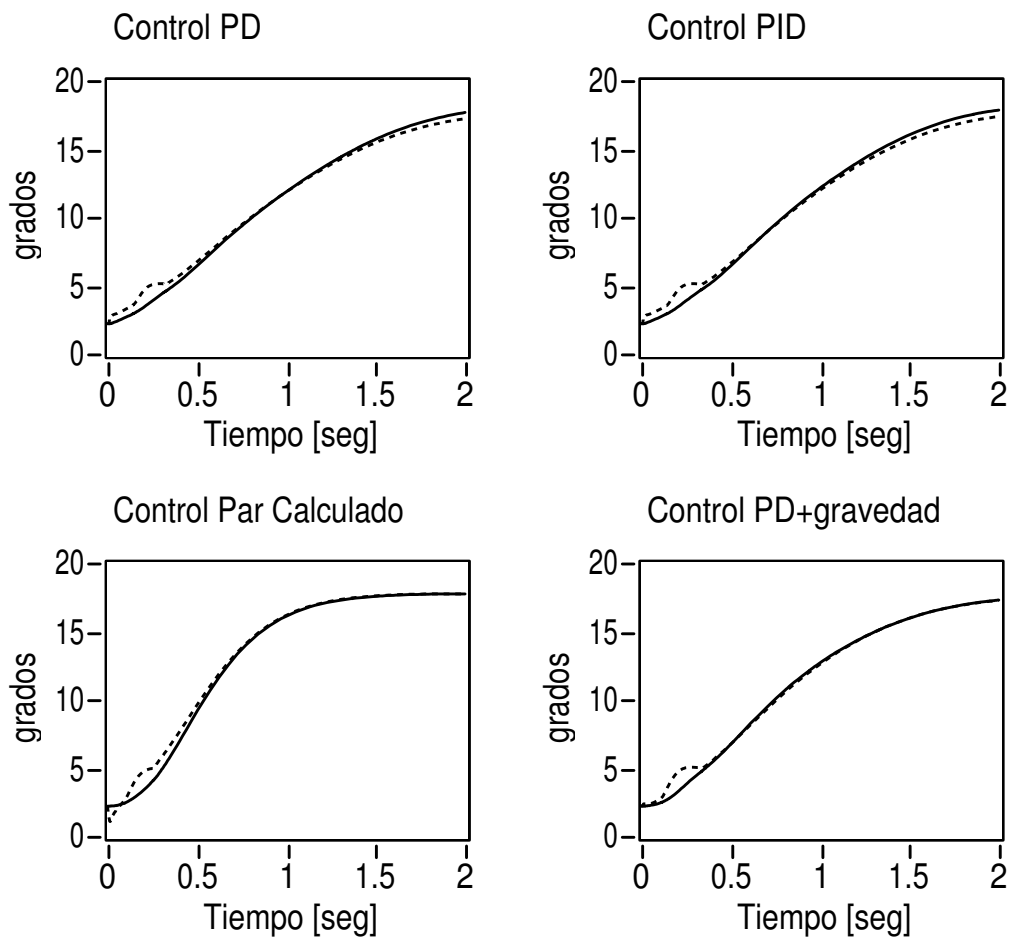


Figura 3.4: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 1. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

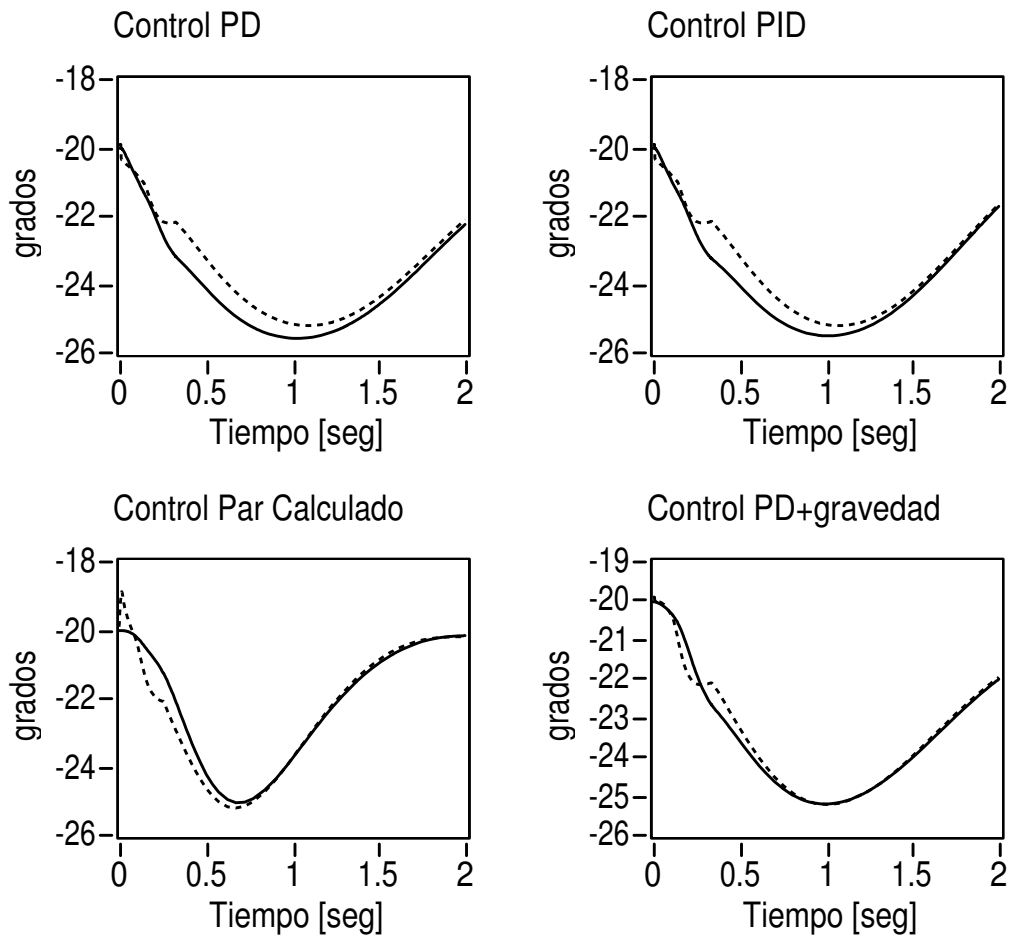


Figura 3.5: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 2. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

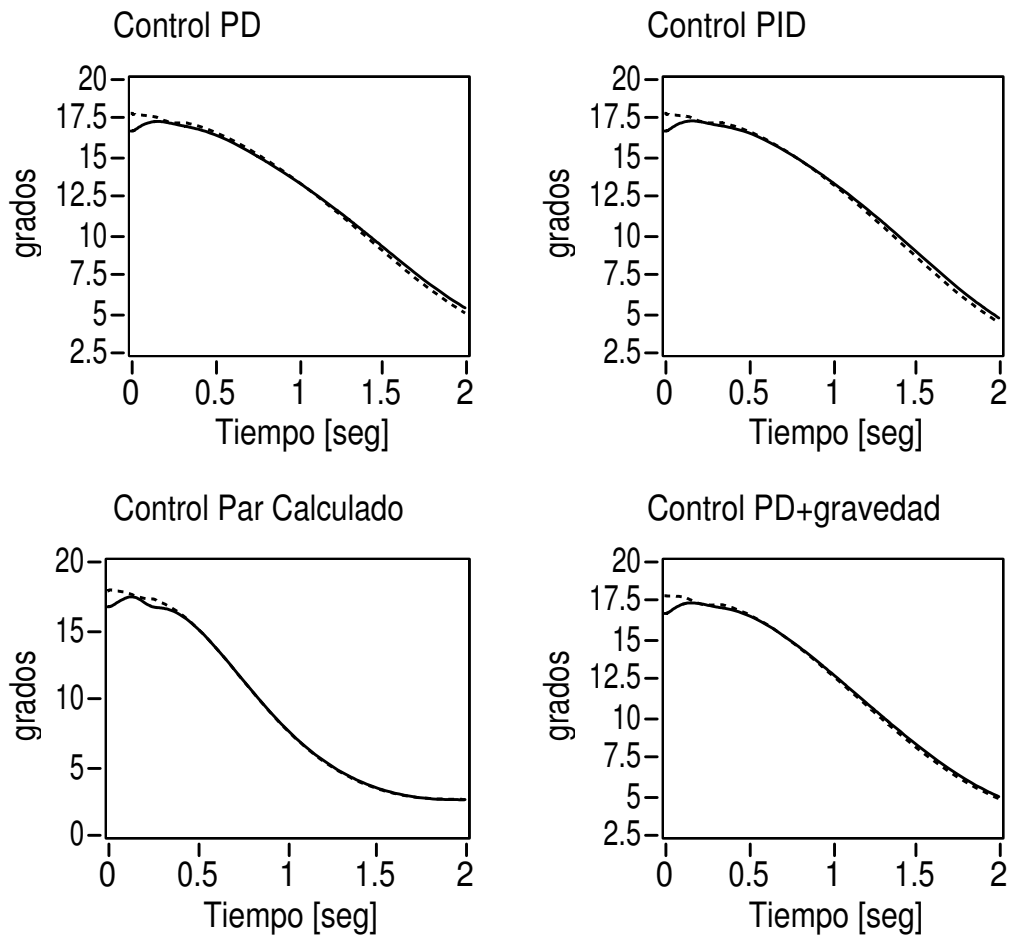


Figura 3.6: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 3. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.



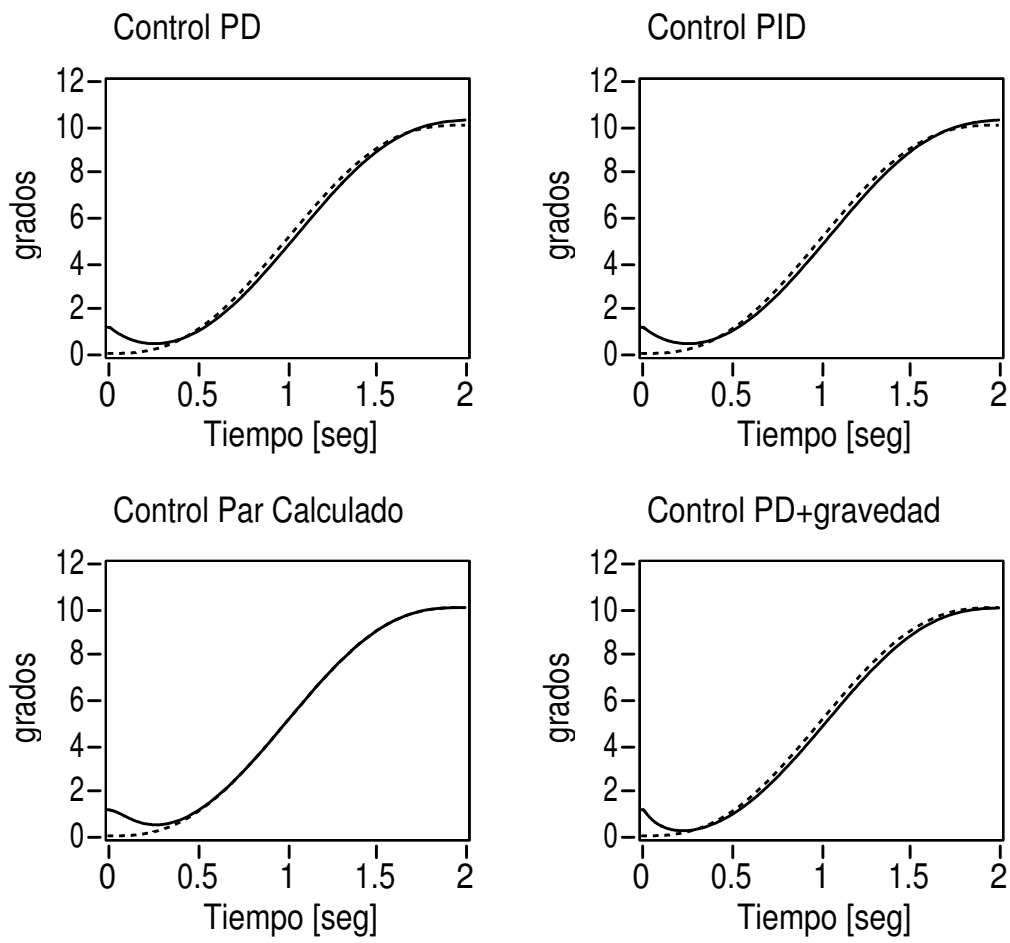


Figura 3.7: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 4. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

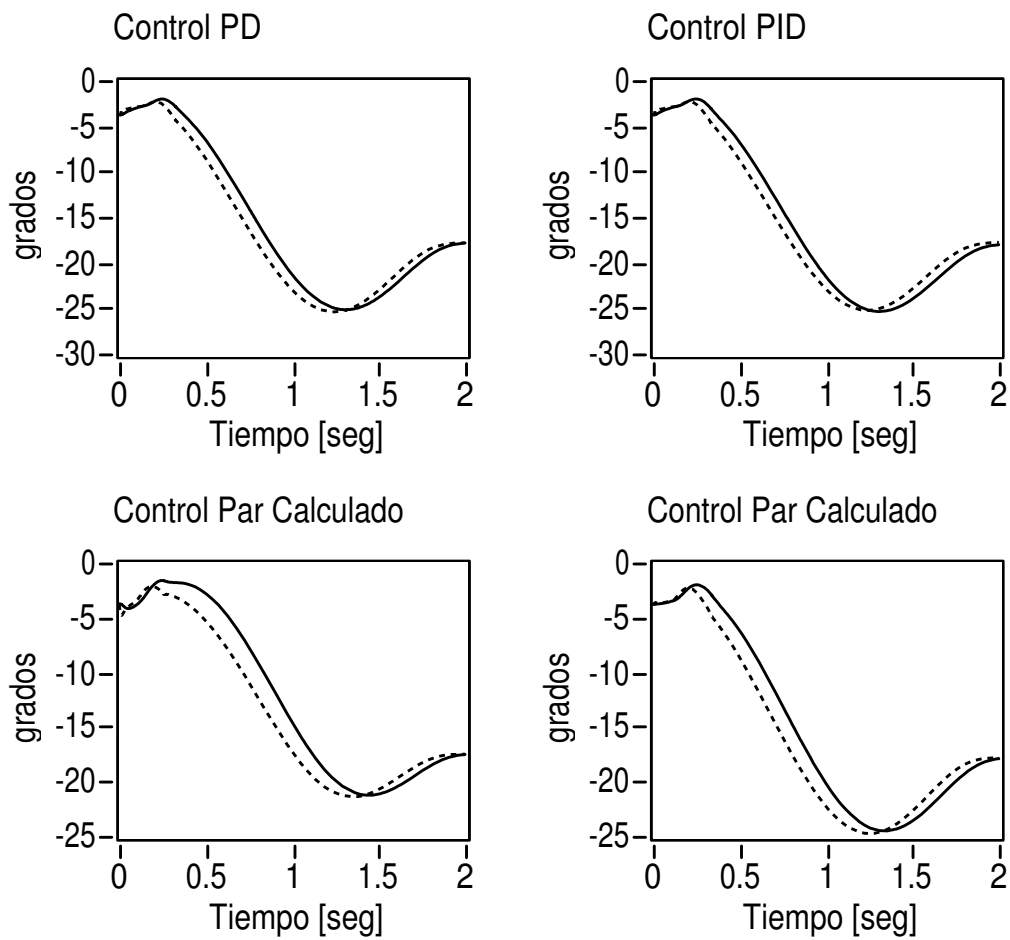


Figura 3.8: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 5. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

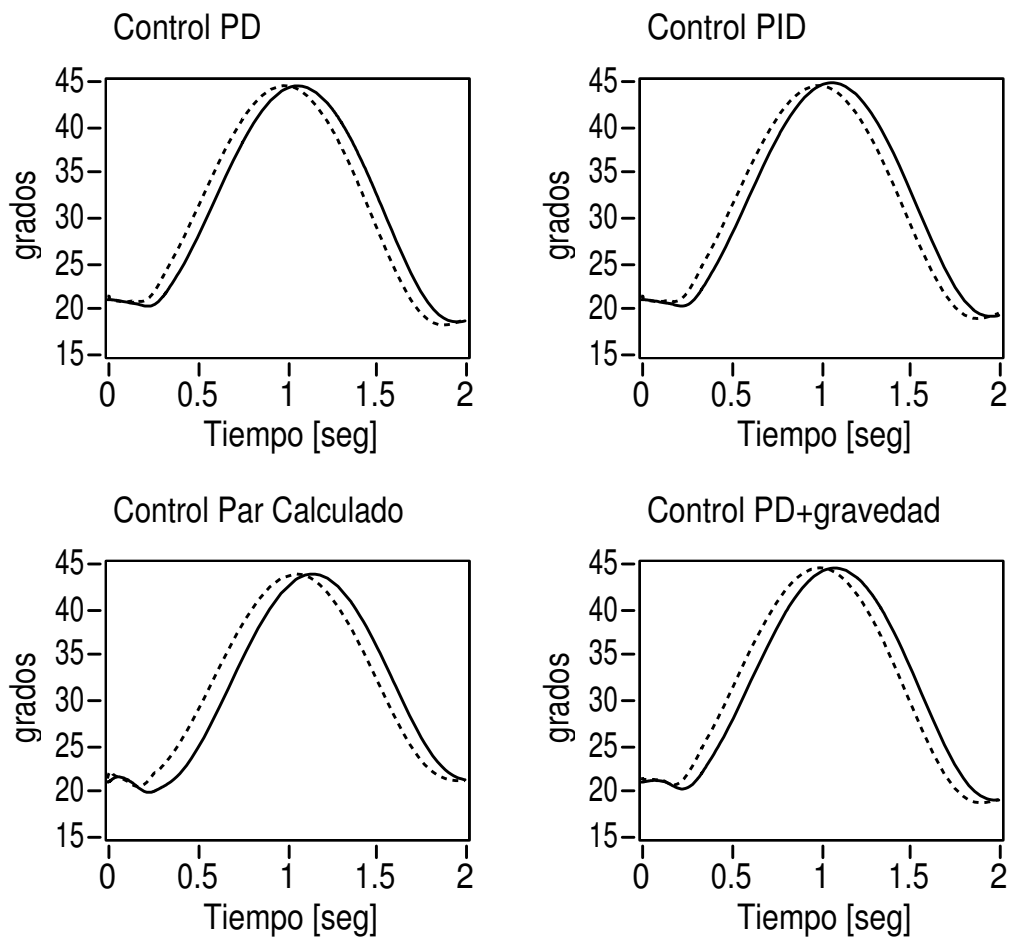


Figura 3.9: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 6. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

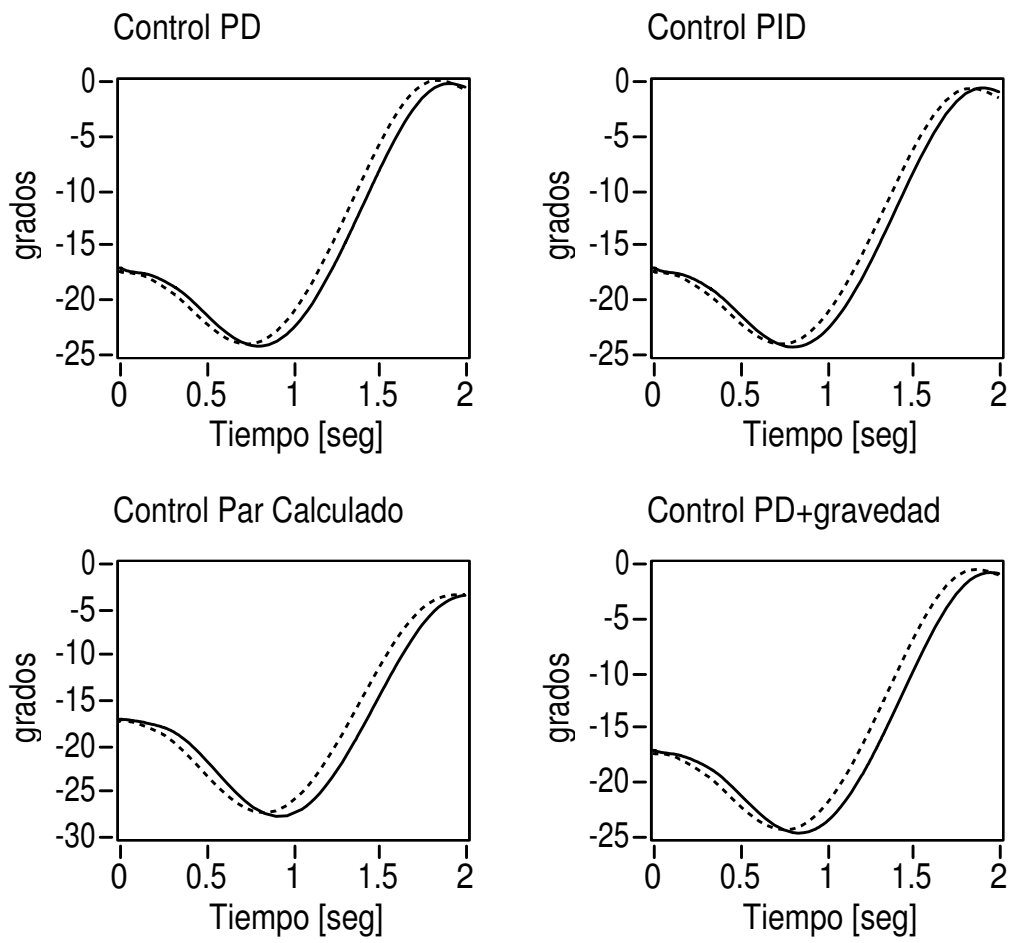


Figura 3.10: Desempeño de las diferentes leyes de control en la articulación 7. Trayectoria deseada  $q_d$  - -. Simulación  $q$ —.

El par de reacción ( $\tau_R$ ) se modeló como el par ejercido por un resorte torsional lineal, lo que es válido debido a que elementos del robot sufren una pequeña deformación. Dicho par no debe rebasar los límites permitidos ecuación (2.5), o de lo contrario el robot perderá su balance producto de la rotación del pie que se encuentra en contacto con el suelo. El objetivo principal del control por retroalimentación del vector estado es mantener dicho par dentro del rango permitido. La Figura 3.11 muestra la evolución del par durante el movimiento. Como se observa el par no supera el valor máximo ni mínimo permitido y paulatinamente se establece en un valor seguro. Es importante señalar que no es necesario que el par alcance el valor cero.

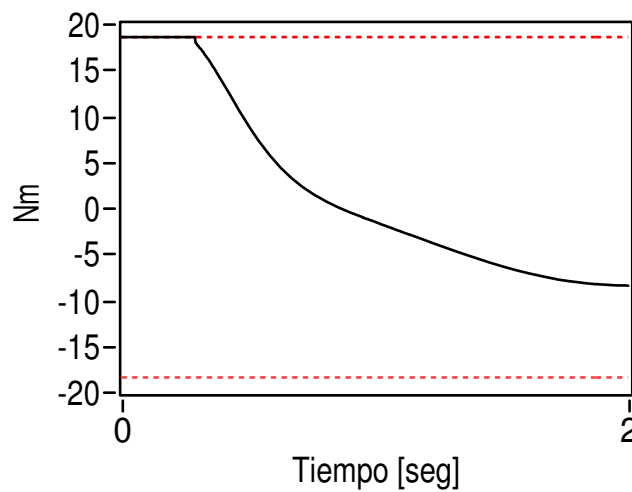


Figura 3.11: Par de reacción  $\tau_R$ .

### 3.2.2. Máquina de Estados

Al caminar el robot cambia de configuración en cada paso. Para programar una secuencia de pasos se utiliza un máquina de estados. Dicha máquina está en función del número de pasos. Al término de la Fase de Soporte Simple las posiciones y velocidades finales se convierten en las condiciones iniciales para el siguiente ciclo. De esta forma, la máquina de estados evita planear cada paso del robot. Si se cuenta con un sensor de distancia o un sistema de visión, el robot puede moverse hacia él caminando los pasos necesarios en función de la distancia, como se muestra en la Figura 3.12.

La máquina de estados se muestra en la Figura 3.13. La máquina de estados consta 8 estados y opera de la siguiente manera

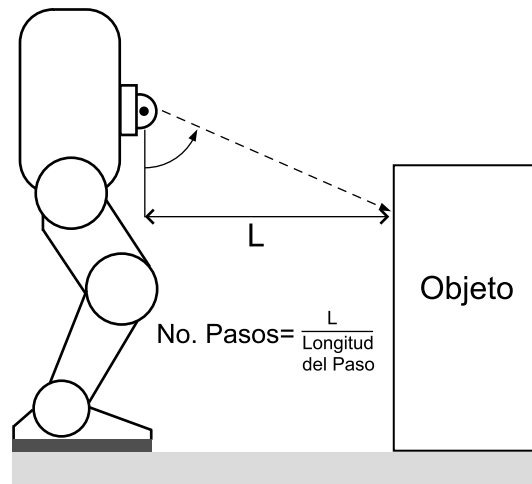


Figura 3.12: Robot con un sistema de visión

**Estado 0:** Corresponde al estado inicial. Se definen los parámetros para el movimiento del robot y el número de pasos. Al terminar continúa el Estado 1.

**Estado 1:** El robot comienza su movimiento dando un paso inicial. La pierna derecha se encuentra en contacto con el suelo y la pierna izquierda se mueve hacia adelante. Al terminar el movimiento se va al Estado 2.

**Estado 2:** En este estado ambas piernas del robot se encuentran en contacto con el suelo, lo que corresponde a la Fase de Doble Soporte. Se realiza el cambio de coordenadas, la pierna izquierda está en contacto con el suelo mientras la pierna derecha se mueve hacia adelante. Se incrementa en uno la variable contador y se compara con el número de pasos del robot. Si ambas variables son iguales se va al Estado 3 de lo contrario pasa al estado 4.

**Estado 3:** El robot se mueve hacia adelante con la pierna izquierda en contacto con el suelo. Al terminar el movimiento regresa al Estado 0, el robot adopta la configuración inicial.

**Estado 4:** El robot se mueve hacia adelante con la pierna izquierda en contacto con el suelo. Al terminar el movimiento pasa al Estado 5.

**Estado 5:** Se realiza nuevamente el cambio de coordenadas, la pierna derecha vuelve a estar en contacto con el suelo mientras la otra se mueve libremente. Se incrementa en uno la variable contador y se compara con el número de pasos, si son iguales se va al Estado 6 de lo contrario pasa al Estado 7.

**Estado 6:** El robot se mueve hacia adelante con la pierna derecha fija al suelo. Al terminar regresa al Estado 0, el robot adopta la configuración inicial.

**Estado 7:** El robot se mueve hacia adelante con la pierna derecha fija al suelo. Al terminar pasa al Estado 8.

**Estado 8:** Nuevamente se realiza un cambio de coordenadas. La pierna izquierda está ahora en contacto con el suelo y la derecha se mueve hacia adelante. Se incrementa en uno la variable contador y se compara con el número de pasos especificado, si son iguales se va al Estado 3 de lo contrario pasa al estado 4. La máquina de estados continúa hasta que se den los pasos especificados en el Estado 0.

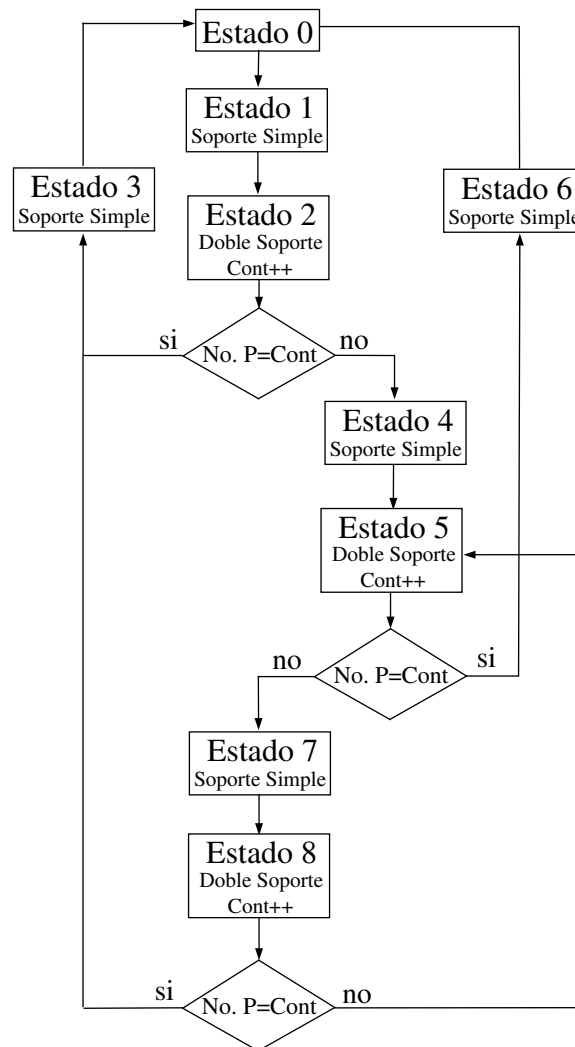


Figura 3.13: Máquina de estados.



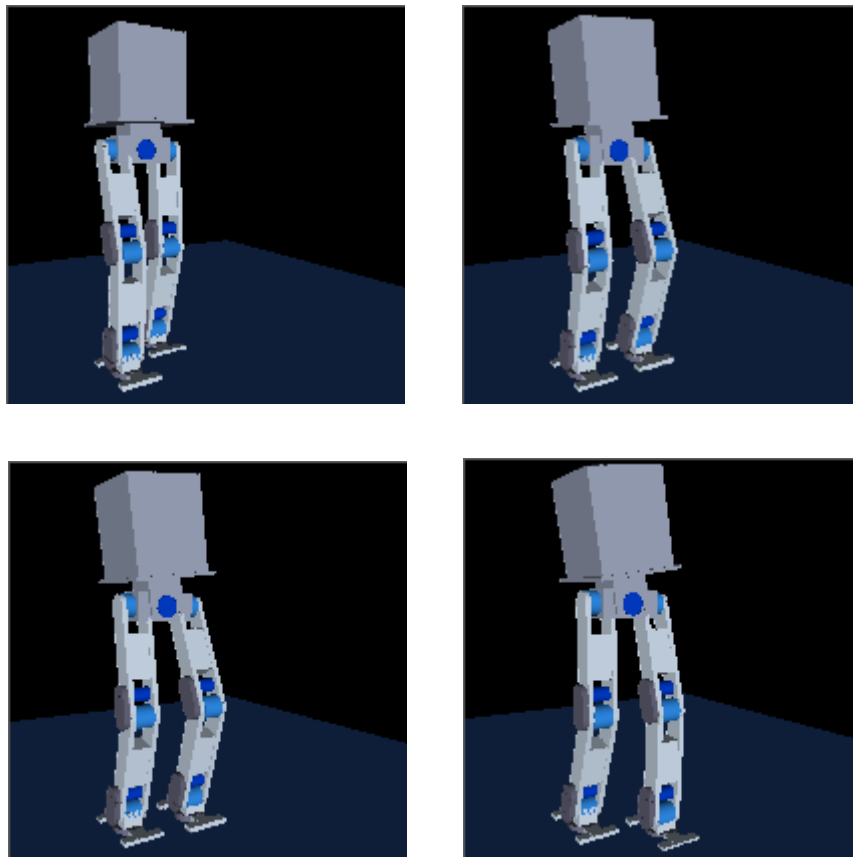


Figura 3.14: Simulación 3D.

# Conclusiones

En este trabajo se presentó un robot bípedo de siete grados de libertad. Se obtuvo las ecuaciones cinemáticas y dinámicas de forma cerrada considerando al robot bípedo como un manipulador serial redundante.

Se presentaron cuatro leyes de control para el seguimiento de las trayectorias del robot: Control Par Calculado, Control PD con compensación de gravedad, Control Proporcional - Derivativo (PD) y Control Proporcional - Integral - Derivativo (PID). Mediante simulación se evaluó su desempeño incluyendo la dinámica de cada actuador. A pesar de la dinámica no lineal del robot y debido a un elevado factor de reducción, el Control PD presenta un desempeño aceptable, siendo necesario en algunas articulaciones añadir un término integral para reducir el error.

Para abordar el problema de la planeación de trayectorias se empleó un modelo simplificado para el robot convirtiéndose en un problema de control, utilizando como señal de control la aceleración del centro de gravedad en la dirección del movimiento para mantener en equilibrio el robot, de esta forma el robot puede caminar de forma estable. El resto de las trayectorias se diseñaron en función de polinomios de quinto orden. De esta forma se diseñó un algoritmo para generar trayectorias estables para el robot bípedo aplicando dos técnicas de control: control de balance (control por retroalimentación del vector de estado) y control de seguimiento de trayectorias (PD-PID).

A pesar de las simplificaciones realizadas para obtener el modelo simplificado del robot, el modelo del péndulo invertido es suficiente para describir la dinámica del robot cuando la altura del centro de gravedad se mantiene constante.

Finalmente se programó un algoritmo para generar una secuencia de pasos para el robot en conjunto con una animación 3D. El software empleado para la simulación fue LabVIEW.

# Apéndice A

## Propiedades del Sistema

Las ecuaciones de movimiento del robot (1.60) presentan ciertas propiedades de gran interés para el desarrollo de leyes de control. Algunas de ellas son propiedades físicas mientras que otras surgen del procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones de movimiento del robot.

### A.1. Propiedades de las matrices

**Propiedad A.1.1** *La matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es simétrica positiva definida.*

△

**Propiedad A.1.2** *La matriz  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica.*

#### Demostración

Cada elemento de  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisface

$$\dot{h}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.1})$$

De acuerdo con (1.58)

$$c_{kji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) = c_{jki}$$

además de (1.59)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{kji} \dot{q}_k \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

calculamos los elementos de  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  como

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \dot{h}_{ij} - 2c_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} - \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) \right) \dot{q}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \end{aligned}$$

Debido a que la matriz de inercia es simétrica, es decir,  $h_{ij} = h_{ji}$ , intercambiando los índices  $i$  y  $j$  se tiene

$$\begin{aligned} n_{ji} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \\ &= -n_{ij} \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. △

La propiedad anterior se relaciona con la estructura pasiva del robot y proporciona la relación entre la matriz de inercia generalizada  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  y la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  empleada para calcular el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis  $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Es posible introducir más de una matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  para calcular dicho vector pero, independientemente de la definición de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , siempre se cumple que:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Esto se puede demostrar como sigue, sea

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\boldsymbol{\psi} \triangleq \boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.4})$$

El Hamiltoniano o función hamiltoniana está dada por (Ortega y Spong 1989)

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} \quad (\text{A.5})$$

donde el momentum generalizado  $\mathbf{p}$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente el Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{P} = \mathcal{K} + \mathcal{P} \quad (\text{A.7})$$

por otro lado, las ecuaciones canónicas del movimiento de Hamilton se pueden calcular también como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \psi_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.9})$$

calculando la derivada con respecto al tiempo de  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \mathbf{q}^T \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pero también se puede calcular dicha derivada a partir de la ecuación (A.7)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

comparando (A.10) y (A.11) se comprueba (A.2).

△

## A.2. Propiedades relacionadas con cotas y normas

Para cualquier sistema mecánico los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  están acotados, además todas las articulaciones del robot son de revolución y los términos están en función de senos y cosenos, por lo tanto el vector  $\mathbf{q}$  está acotado. Las cotas de normas ofrecen muchas ventajas, especialmente cuando se utiliza la teoría de Lyapunov además de ser muy útiles para el diseño de muchos esquemas de control.

**Propiedad A.2.1** *La matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface*

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{y} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.12})$$

△

**Propiedad A.2.2** *La matriz  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$  existe y satisface*

$$\lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{y} \leq \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.13})$$

△

**Propiedad A.2.3** *La matriz de inercia satisface  $0 < \lambda_h \leq \|\mathbf{H}(\mathbf{q})\| \leq \lambda_H < \infty$ .*

△

**Propiedad A.2.4**  *$\mathbf{H}(\mathbf{q}^{-1})$  satisface  $0 < \sigma_h \leq \|\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_H < \infty$ .*

△

**Propiedad A.2.5** *La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisface  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|$ ,  $k_c > 0$ .*

△

**Propiedad A.2.6** *El vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{q}(\mathbf{q})$  satisface  $\|\mathbf{q}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_g$ ,  $\sigma_g > 0$ .*

△

**Propiedad A.2.7** *El vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  satisface*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq \alpha \quad (\text{A.14})$$

△

### A.3. Propiedades relacionadas con el modelo

**Propiedad A.3.1** *Mediante una definición apropiada de sus parámetros, el modelo (1.60) puede escribirse como*

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\varphi}, \quad (\text{A.15})$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  se conoce como el **regresor**, y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros.

△

La elección del regresor y de los parámetros nos es única. La propiedad anterior establece que el modelo (1.60) es lineal en sus parámetros y es muy importante en diseño de esquemas de control adaptable.

**Propiedad A.3.2** *La ecuación de movimiento del robot dada por (1.60) define un mapeo pasivo  $\boldsymbol{\psi} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}$ , es decir*

$$\langle \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\psi} \rangle_T \triangleq \int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\psi} dt \geq -\beta, \quad (\text{A.16})$$

para algún  $\beta > 0$  y  $\forall T > 0$ , con  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$

△

Un análisis más detallado de las propiedades y sus demostraciones puede consultarse en Artega-Pérez (1998), Spong *et al.* (2006), Lewis *et al.* (2004) y Siciliano *et al.* (2009).

# Bibliografía

- Artega-Pérez, M. A.** 1998. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120. 8–14.
- Asano, F., Z.-W. Luo y M. Yamakita.** 2005. Biped Gait Generation and Control Based on a Unified Property of Passive Dynamic Walking. *IEEE Transactions on Robotics* 21(4). 754–762.
- Asatani, M., S. Sugimoto y M. Okutomi.** 2007. A Footstep-Plan-Based Floor Sensing Method Using Stereo Images for Biped Robot Control. *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* 907–912.
- Azevedo, C., N. Andreff y S. Arias.** 2004. BIPedal walking: from gait design to experimental analysis. *Mechatronics* 14. 6639–665.
- Barrientos, A., L. F. Peñin, C. Balaguer y R. Aracil.** 2007. *Fundamentos de Robótica*. 2ª edn. Mc-GrawHill.
- Bedford, A. y W. Fowler.** 2000. *Dinámica Mecánica para Ingeniería*. Prentice Hall, México.
- Craig, J. J.** 2006. *Robótica*. 3ª edn. Prentice Hall, México.
- Doi, M., Y. Hasegawa, T. Matsuno y T. Fukuda.** 2007. Stability Proof of Biped Walking Control based on Point-Contact. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 3204–3209.
- Dorf, R. C.** 2005. *Sistemas de Control Moderno*. 10ª edn. Pearson, España.
- Esfahani, E. T. y M. H. Elahinia.** 2007. Stable Walking Pattern for an SMA-Actuated Biped. *IEEE/Asme Transactions on Mechatronics* 12(5). 534–541.



- Goswami, A.** 1999. Foot rotation indicator (FRI) point: A new gait planning tool to evaluate postural stability of biped robots. *In Proceedings of International Conference on Robotics and Automation.*
- Grizzle, J. W., G. Abba y F. Plestan.** 2001. Asymptotically Stable Walking for Biped Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects. *IEEE Transactions on Automatic Control.*
- Hirai, K., M. Hirose, Y. Haikawa y T. Takenaka.** 1998. The development of honda humanoid robot. *Proceedings 1998 IEEE International Conference Robotics and Automation* 160–165.
- Huang, Q. y Y. Nakamura.** 2005. Sensory Reflex Control for Humanoid Walking. *IEEE Transactions on Robotics* 21(5). 977–984.
- Hurmuzlu, Y., F. Génot y B. Brogliato.** 2004. Modeling, stability and control of biped robots a general framework. *Automatica* 40. 1647–1664.
- Ikebe, M. y K. Ohnishi.** 2006. A Method of Deciding Force Feedback Gain against External Force for Biped Robot. *IEEE International Workshop on Advance Motion Control* 422–427.
- Kajita, S., F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Yokoiand y H. Hirukawa.** 2001. The 3D Linear Inverted Pendulum Model: A simple modeling for a biped walking pattern generation. *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* 239–246.
- Kajita, S., K. Kaneko, K. Harada, F. Kanehiro y K. Fujiwara.** 2003. Biped Walking Pattern Generation by using Preview Control of Zero-Moment Point. *Proc. on the 2003 ICRA* 1620–1626.
- Kajita, S., K. Kaneko, K. Harada, F. Kanehiro y K. Fujiwara.** 2004. Biped Walking on a Low Friction Floor. *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International conference on Intelligent Robots and Systems* 3546–3552.
- Kajita, S., T. Nagasaki, K. Kaneko, K. Yokoi y K. Tanie.** 2005. A Running Controller of Humanoid Biped HRP-2LR. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation* 618–624.
- Kaneko, K., K. Haradaa, F. Kanehiro, G. Miyamori y K. Akachi.** 2008. Humanoid Robot HRP-3. *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* 2471–2478.
- Khalil, H. K.** 1996, U.S.A.. *Nonlinear Systems.* 2nd edn. Prentice Hall.

- Kim, Y.-D., B.-J. Lee, J.-H. Ryu y J.-H. Kim.** 2007. Landing Force Control for Humanoid Robot by Time-Domain Passivity Approach. *IEEE Transactions on Robotics*.
- Kuo, B. C.** 1996. *Sistemas de Control Automático*. 7<sup>a</sup> edn. Pearson-Prentice Hall.
- Lewis, F. L., D. M. Dawson y C. T. Abdallah.** 2004. *Robot Manipulator Control Theory and Practice*. 2nd edn. Marcel Dekker, New York, U.S.A.
- Löffler, K., M. Gienger y F. Pfeiffer.** 2004. Sensors and Control Concept of Walking Johnnie. *International Journal of Humanoid Robotics (IJHR)* 1(3). 481–496.
- Löffler, K., M. Gienger, F. Pfeiffer y H. Ulbrich.** 2004. Sensors and control concept of a biped robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 51(4). 972–980.
- Michel, P., J. Chestnutt, J. Kuffner y T. Kanade.** 2005. Vision-Guided Humanoid Footstep Planning for Dynamic Environments. *Proceedings of 2005 5th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots* 13–18.
- Morimoto, J. y C. G. Atkenson.** 2007. Learning Biped Locomotion Application of Poincaré-Map-Based Reinforcement Learning. *IEEE Robotics & Automation Magazine* 41–51.
- Mu, X. y Q. Wu.** 2004. Development of a Complete Dynamic Model of a Planar Five-Link Biped and Sliding Mode Control of Its Locomotion During the Double Support Phase. *International Journal of Control* 77(8). 789–799.
- Nazir, N., H. Izu, S. Nakaura y M. Sampei.** 2005. An analysis of ZMP control problem of humanoid robot with complines in sole of the foot. *IFAC World Congress*.
- Ogata, K.** 2006. *Ingeniería de Control Moderna*. 4<sup>a</sup> edn. Pearson-Prentice Hall.
- Ortega, R. y M. W. Spong.** 1989. Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica* 25(6). 877–888.
- Pfeiffer, F.** 2006. The TUM walking machines. *Phil. Trans. R. Soc.* 109–131.

- Sardain, P.** y **G. Bessonnet.** 2004. Forces Acting on a Biped Robot Center of Pressure-Zero Moment Point. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 34(5). 630–637.
- Seara, J. F., K. H. Strobl** y **G. Schmidt.** 2003. Path-Dependent Gaze Control for Obstacle Avoidance in Vision Guided Humanoid Walking. *Proceedings 2003 IEEE International Conference Robotics and Automation ICRA* 887–892.
- Siciliano, B., L. Sciavicco, L. Villani** y **G. Oriolo.** 2009. *Robotics Modeling, Planning and Control*. 2nd edn. Springer-Verlang, London.
- Spong, M. W.** y **M. Vidyagar.** 1989. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, U.S.A.
- Spong, M. W., J. K. Holm** y **D. Lee.** 2007. Passivity-Based Control of Bipedal Locomotion. *IEEE Robotics & Automation Magazine* 30–40.
- Spong, M. W., S. Hutchinson** y **M. Vidyasagar.** 2006. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, U.S.A.
- Takanishi, A.** y **H. ok Lim.** 1990. Realization of Dynamic Biped Walking Stabilized by Trunk Motion on a Sagittally Uneven Surface. *Proceedings of IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems* 323–30.
- Tanaka, F., B. Fortenberry, K. Aisaka** y **J. R. Movellan.** 2005. Plans for Developing Real-time Dance Interaction between QRIO and Toddlers in a Classroom Environment. *Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Development and Learning*.
- Ulbrich, H., T. Buschmann** y **S. Lohmeier.** 2006. Development of the Humanoid Robot LOLA. *Applied Mechanics and Materials* 5. 529–540.
- Umez, E.** 2001. *Dinámica de Sistemas y Control*. 1<sup>a</sup> edn. Thomson.
- Verrelst, B., B. Vanderborght, J. Vermeulen, R. V. Ham, J.Ñaudet** y **D. Lefeber.** 2005. Control architecture for the pneumatically actuated dynamic walking biped Lucy. *Mechatronics* 15. 703–729.
- Vukobratovic, M.** y **B. Borovac.** 2004. Zero Moment Point - Thirty five years of its life. *International Journal of Humanoid Robotics* 1(1). 157–173.