CÁLCULO I PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

2ª edición

J. Ismael Arcos Q.

2ª edición 1999

Av. del Parque No. 91
Colonia Nápoles
C.P. 03810 México, D.F.
Tel. 669 39 85, 272 99 91, ext. 4000-4001
Ext. fax 4083

http://www.fundación–ica.org.mx
e-mail: lunaf@fundacion-ica.org.mx

ISBN 968-7508 33-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Este es un texto pensado para la enseñanza del cálculo, concretamente del primer curso de cálculo para estudiantes de ingeniería. El objetivo principal es ofrecer una presentación que le facilite el acceso al conocimiento de las ciencias de la ingeniería.

Si se analizan los textos de cálculo de uso común en nuestras universidades, se encontrará que la mayoría están escritos de manera que puedan ser utilizados por un mayor número de estudiantes, independientemente de la carrera que estudien, de esta manera encontramos textos que pueden ser utilizados lo mismo por estudiantes de ingeniería, que de química o de física.

Aún en los casos en los que el nombre del texto indica que está dirigido a estudiantes de ingeniería, la presentación de los conceptos es casi la misma que la encontrada en los otros. De esta manera, no resulta sorprendente que el estudiante resulte confundido cuando al leer un texto de ciencias de la ingeniería, digamos de termodinámica o electromagnetismo, por ejemplo, encuentre que las matemáticas, y más precisamente el cálculo que se utiliza en éste, no es muy parecido a aquél que aprendió en el curso correspondiente.

Un aspecto en el que esta situación es fácilmente palpable, es el relativo al uso de las cantidades infinitesimales, las que son utilizadas con mayor o menor frecuencia en prácticamente todos los textos de ciencias de la ingeniería, mientras que han sido desechadas en todos los textos de c álculo.

Un análisis detallado de los textos, tanto de ciencias de la ingeniería como de cálculo, permite afirmar que la manera en la que los conceptos del cálculo en los textos escritos para su enseñanza, no facilita el acceso al conocimiento de los conceptos propios de las ciencias de la ingeniería.

Por tal motivo, desde hace aproximadamente tres años, y como parte de los trabajos del grupo de investigadores que dirige el Dr. Carlos Imaz, en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, se ha venido desarrollando un proyecto cuyo objetivo fundamental es el de proponer una presentación del cálculo, acorde con las necesidades de los estudiantes de ingeniería.

En este grupo de investigación se ha estado analizando el acercamiento infinitesimalista como una alternativa para la enseñanza del cálculo. La parte de este trabajo que le corresponde al autor de este texto, es la de proponer una presentación de los conceptos del cálculo, utilizando el acercamiento infinitesimalista, de manera que esta presentación efectivamente facilite al estudiante el acceso al conocimiento de las ciencias de la ingeniería. El presente libro es el resultado de dicho trabajo.

El texto se presenta en tres capítulos, el primero corresponde a los conceptos básicos; aritmética infinitesimalista, series de potencias para funciones algebraicas, continuidad y límite. El segundo contiene los temas de cálculo diferencial que usualmente se tratan en los textos, sin embargo, en la mayoría de los casos se encontrará que la presentación no se parece a la usual, lo mismo ocurre con el tercero y ultimo capítulo que corresponde al cálculo integral.

En esta primera edición no se ha incluido una gran cantidad de ejercicios resueltos, se espera contar con las sugerencias de profesores y estudiantes para escribir una segunda edición qué resulte bastante rica en ejemplos y ejercicios.

Al final se incluyen dos apéndices, el primero contiene los temas referentes a las funciones reales que son utilizados en el texto. En el segundo se incluyen algunos fragmentos de textos de ciencias de la ingeniería en los que se utilizan conceptos de cálculo.

Quiero agradecer finalmente a las siguientes personas: al Dr. Carlos Imaz J. (CINVESTAVIPN), por su apoyo y por ayudarme a entender las ventajas del acercamiento infinitesimalista, al Dr. Horacio Ramírez de Alba (Fl- UAEM), por la confianza otorgada para la realización de este trabajo, a los ingenieros Arnulfo Andrade Delgado y Carios Crail Corzas (FI-UNAM), así como al ingeniero Santiago Martínez Hernández (UI) por sus valiosas opiniones sobre el texto, con quienes me comprometo a desarrollar un mayor esfuerzo para que la próxima edición resulte más acorde con sus expectativas, al ingeniero Armando Herrera Barrera (FI-UAEM), quien ha proporcionado valiosas opiniones, particularmente en lo referente a las aplicaciones del cálculo en las ciencias de la ingeniería, y a los ingenieros Dolores Duran García (FI-UAEM) y Lorenzo Contreras Garduño (UAEM), quienes participaron en la elaboración del segundo apéndice.

Toluca, Méx., junio de 1997

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Desde la publicación de la primera edición, este libro ha sido utilizado por la mayor parte de los profesores que imparten el primer curso de cálculo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México (FIUAEM). En él se presentan los conceptos básicos del cálculo: continuidad, límite, derivada e integral, utilizando extensivamente la terminología y la aritmética infinitesimalistas.

Lo anterior tuvo lugar luego de que un análisis de algunos textos de ciencias básicas –mecánica, electromagnetismo y termodinámica– revelara que tanto el lenguaje como la aritmética infinitesimalistas son usados con frecuencia en tales textos. De esta manera, si se piensa en estudiantes de ingeniería, quienes habrán de asistir a cursos de ciencias básicas a continuación de los de cálculo, resulta recomendable ofrecer una presentación de los conceptos del cálculo utilizando el acercamiento infinitesimalista.

En esta segunda edición, a la vez que se hicieron un buen número de correcciones respecto de la primera, se han incluido más ejemplos en el contexto de la física, particularmente en las áreas que son comunes en las distintas carreras que ofrece la FIUAEM, esto es, mecánica, electromagnetismo y termodinámica.

Considerando que algunos de los temas incluidos en la primera edición, no son suficientemente importantes en las ciencias básicas, se han quitado del cuerpo del texto e insertado en anexos al final del libro. Se incluyen además otros tres anexos, uno en el que se dan respuestas a algunos de los problemas propuestos al final de cada sección, otro en el que se dan las referencias bibliográficas, y otro más en el que se da una pequeña tabla de integrales.

Debo agradecer nuevamente a todos aquellos que hicieron posible la publicación de este libro, quienes son mencionados en la presentación de la primera versión. Además agradezco al Ing. Ángel Albíter R., director de la FIUAEM, a Israel Mora, quien participó en la solución de los problemas que se incluyen en el anexo de esta versión, a los profesores de cálculo que hicieron algunas correcciones y, particularmente, a Daury García, así como al personal del Departamento Editorial de la UAEM.

Finalmente, invito a todos aquellos que deseen hacer algún comentario, pregunta o sugerencia al respecto de la presente obra, a que lo hagan a través de la página WEB: *dmp.ing.uaemex.mx/arcos* (no escribir www al principio), vía correo electrónico, en la dirección *iaq@coatepec.uaemex.mx,* o bien, personalmente, en el cubículo 5 de la División de Materias Propedéuticas de la FIUAEM.

Ismael Arcos Q.

Toluca, México, septiembre de 1999

CONTENIDO

ANEXOS

I. CONCEPTOS BÁSICOS

La derivada y la integral son los dos conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal, a partir de los cuales se habla de cálculo diferencial y de cálculo integral. Además, dependiendo del conjunto de funciones con cuyos elementos se trabaje, podemos hablar de cálculo para funciones en una o en varias variables. En este libro estudiaremos el cálculo para funciones en una variable, o cálculo elemental, para lo cual se asumirá que el lector conoce las funciones reales en una variable. En cualquier caso, al final del texto se incluye un apéndice que contiene el mínimo material sobre las funciones reales (en una variable).

Por otra parte, además del conjunto de funciones, también se requiere establecer un conjunto numérico de trabajo. Dicho conjunto es el de los números reales, sin embargo, el cálculo infinitesimal, particularmente cuando se aplica al estudio de los fenómenos físicos, recurre a números infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

1. ARITMÉTICA INFINITESIMALISTA Y SERIES DE POTENCIAS

1.1 Aritmética infinitesimalista

Números grandes y números pequeños

Cuando se hacen operaciones aritméticas con números reales, utilizando una calculadora, no siempre se obtienen los resultados con exactitud absoluta. Esto ocurre en particular cuando se opera con dos cantidades, una de las cuales es muy pequeña en comparación con la otra. Por otro lado, en ingeniería es frecuente "despreciar" una cantidad que, comparada con otra, es demasiado pequeña.

Ejemplo 1.1 La variación de la gravedad en pequeñas distancias puede despreciarse

Cuando se estudia el movimiento de un proyectil sujeto a la acción de la gravedad, se considera que la magnitud de la fuerza de gravedad es constante, lo cual no es rigurosamente cierto, ya que la magnitud de tal fuerza de atracción de la Tierra sobre el proyectil varía en relación inversa con el cuadrado de la distancia de éste al centro de la Tierra.

Para cuantificar el tamaño del error cometido al despreciar la variación de la magnitud de la fuerza de gravedad, supongamos que el proyectil se lanza desde el suelo y se desplaza, digamos 5 km, en sentido vertical. Considerando que el radio de la Tierra es de 6.37 mil km (en el Ecuador es, aproximadamente, 6.374 mil km), y si F_1 y es la magnitud de la fuerza en el punto más bajo de la trayectoria, y F_2 en el más alto, entonces, estas magnitudes están relacionadas por:

$$F_2\,(6.375)^2 = F_1\,(6.370)^2$$

Por lo tanto

$$F_1 = \frac{(6.375)^2}{(6.370)^2}\,F_2 \cong 1.00157\,F_2$$

Lo cual quiere decir que la magnitud de la fuerza en el punto más bajo de la trayectoria, excede al de la magnitud en el punto más alto, aproximadamente, en un 0.03 %.

Si esa variación se desprecia, querrá decir que se asume que ese error de 0.03 % no resulta significativo. De hecho, la variación de la fuerza de gravedad es, en términos generales, mucho menos significativa que la resistencia del aire, por ejemplo.

En ciencias básicas y de la ingeniería, con frecuencia se hacen suposiciones como las indicadas, es decir: "despreciando la variación de la gravedad..." o "despreciando la resistencia del aire..." Si esto no se hiciera, los modelos matemáticos resultantes serían mucho más complejos, sin que ello garantizara mejorar, notablemente, el grado de precisión. En el siguiente ejemplo se verá que, en ocasiones, el despreciar una cantidad respecto de otra, puede no ser una decisión de quien estudia un problema, sino producto de las limitaciones de los instrumentos de cálculo.

Ejemplo 1.2 La masa de la Tierra, ¿con gente o sin gente?

¿Cuál es la variación de la masa de la Tierra si cae sobre ella un meteorito de 500 kg de masa?

La masa de la Tierra es, aproximadamente, 5.976×10^{24} kg. Si aumentamos la del meteorito, la masa será:

$$M_{Tm} = 5.976\times10^{24} + 500 \text{ kg}$$

Si tratamos de obtener el resultado con una calculadora, el resultado será:

$$M_{Tm} = 5.976\times10^{24} + 500 = 5.976\times10^{24}$$

Esto ocurre debido a que la precisión de la calculadora está limitada a 10 cifras significativas (generalmente), presentándolas de izquierda a derecha. De esta manera, comenzará con las cuatro cifras 5, 9, 7, 6, y las seis restantes las ocupará con ceros, así que el "5" no alcanza a aparecer en la pantalla. Vamos a considerar entonces, una masa mucho mayor que los 500 kg del meteorito, por ejemplo, la de la gente que habita en la Tierra.

Supongamos que en la Tierra hay 6 000 millones de personas con una masa promedio de 50 kg. La masa de la Tierra "con todo y gente" será:

$$M_{Tg} = 5.976\times10^{24} + 6\times10^{9}\times5\times10 = 5.976\times10^{24} + 3\times10^{11}$$

Haciendo los cálculos a mano, obtenemos

$$M_{Tg} = 59\,760\,000\,000\,003\times10^{11}\,\text{kg},$$

de manera que, para retener el "3" que corresponde, en la suma, a la masa de todas las personas, deberá utilizarse una calculadora con precisión mínima de 14 dígitos; de otra manera, el "3" no aparecerá, por lo que el resultado dado por una calculadora con menor precisión será:

$$M_{Tg} = 5.976\times10^{24} + 3\times10^{11} = 5.976\times10^{24}$$

En otras palabras, con una precisión máxima de 13 dígitos, la masa de todas las personas juntas, es despreciable con respecto a la de la Tierra.

Lo que observamos en el ejemplo anterior es que, para cualquier calculadora y cualquier cantidad fija a, podemos siempre identificar otra cantidad α suficientemente pequeña, con respecto a a, tal que, efectuando la suma con esa calculadora, se obtenga:

$$a + \alpha = a$$

De hecho, también podemos obtener cantidades suficientemente grandes (N), tal que:

$$a + N = N$$

Ejemplo 1.3

Usando una calculadora de 10 dígitos, si $a = 1$, $\alpha = 1\times10^{-10}$ y $N = 1\times10^{10}$, entonces $a + \alpha = a$ y $a + N = N$.

Ejemplo 1.4

Vamos a ver, ahora, las implicaciones de los problemas aritméticos antes descritos en una situación geométrica. Para ello, analicemos la gráfica de la función f definida por

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Si hacemos una breve tabulación, o bien, recurrimos a una calculadora o una computadora, obtendremos que la gráfica de f es como se muestra en la figura 1.1.

Vemos que en la parte situada inmediatamente a la derecha del eje Y, es decir, la correspondiente a valores pequeños de la variable, la gráfica parece "pegarse" al eje Y. Si hacemos una tabulación, asignando a la variable valores dados por potencias negativas de 10 (tabla 1.1), observamos que, utilizando una calculadora de 10 dígitos, para valores menores que una diez milésima, el término x resulta despreciable con respecto a $1 / x$, es decir:

Si x es "pequeño", entonces, $1/x$ es "grande" y x será "despreciable" con respecto a $1/x$, de manera que

$$x+\frac{1}{x}\cong\frac{1}{x} \qquad \text{para } x \text{ “pequeño”} \qquad \text{(a)}$$

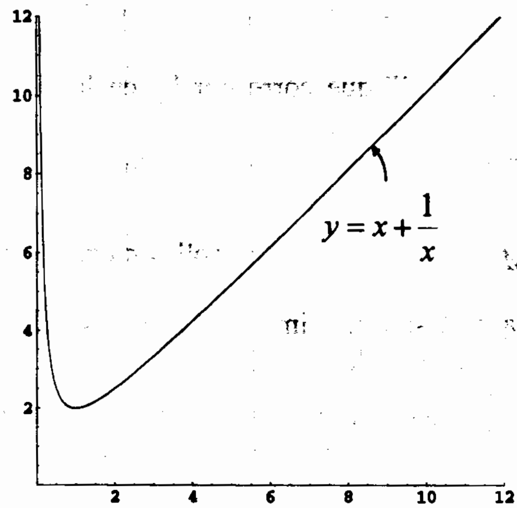


Fig. 1.1

x	$10^{-1} = 0.1$	$10^{-2} = 0.01$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$x+\frac{1}{x}$	10.1	100.01	1 000.001	10 000.0001	100 000

Tabla 1.1

Análogamente, para valores “grandes” de x (ver tabla 1.2), tenemos que $1/x$ es “pequeño”, por lo que será “muy pequeño” en comparación con x, es decir:

$$x+\frac{1}{x}\cong x \qquad \text{para } x \text{ “grande”} \qquad \text{(b)}$$

x	$10^{1} = 10$	$10^{2} = 100$	10^{3}	10^{4}	10^{5}
$x+\frac{1}{x}$	10.1	100.01	1 000.001	10 000.0001	100 000

Tabla 1.2

Las relaciones dadas por (a) y (b), indican que en la parte izquierda la gráfica debe parecerse a la de la hipérbola $y = 1/x$, mientras que en la parte derecha debe parecerse a la recta $y = x$. En la figura 1.2 se muestra la gráfica de f en el mismo sistema coordenado con la recta y la hipérbola. Podemos observar que, efectivamente, en la parte izquierda, la gráfica de f se confunde con la hipérbola, mientras que en la parte derecha se confunde con la recta.

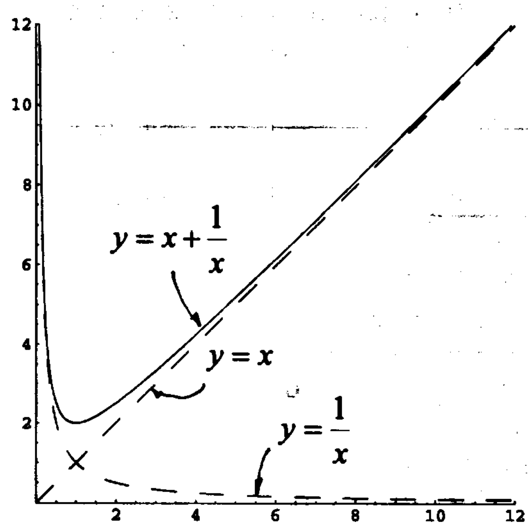


Figura 1.2

Resumiendo: cuando una cantidad es suficientemente pequeña en comparación con otra, el instrumento de cálculo no podrá distinguir entre la suma y el valor de la cantidad grande.

Vamos a definir a continuación una nueva clase de números que resulten infinitamente pequeños respecto de cualquier número real, es decir, que la suma entre ellos será igual al número real, independientemente del número real y del "instrumento de cálculo". En el resto de este texto veremos cómo utilizar estas nuevas cantidades para definir y utilizar nuevos conceptos.

Los infinitesimales y los infinitamente grandes

Primeramente, recordemos la *propiedad arquimediana* de los números reales: dados dos números reales (positivos) cualesquiera, no importa qué tan pequeño pueda ser uno respecto del otro, siempre puede obtenerse una suma de n términos iguales a éste, siendo n suficientemente grande, de manera que la suma resultante supere al número grande. Es decir:

> Siendo a y b dos números reales positivos cualesquiera, con $a < b$, existe siempre un número natural n, tal que $an > b$.
>
> Equivalentemente, siendo a y b números reales positivos cualesquiera, con $a < b$, existe siempre un número natural n, tal que $b / n < a$.

Podemos también decir, que:

Dados dos números reales (positivos) cualesquiera, no importa que tan pequeño pueda ser uno respecto del otro, siempre puede obtenerse una suma de n términos iguales al primero, siendo n suficientemente grande, de manera que la suma resulte mayor que el segundo.

Los números infinitamente pequeños y los infinitamente grandes se definen, precisamente, de manera que estas nuevas cantidades no satisfagan la propiedad arquimediana:

Sea b un número real positivo cualquiera, si β es un número positivo (no real), tal que, para todo n natural, $\beta < b/n$, entonces β es un número infinitamente pequeño.	(1.1)

Por otra parte,

Sea b un número real positivo cualquiera, si N es un número positivo (no real), tal que, para todo n natural, $nb < N$, entonces N es un número infinitamente grande.	(1.2)

Usualmente llamaremos *infinitesimales* o *infinitésimos* a los números infinitamente pequeños. Las definiciones anteriores corresponden a infinitesimales y a números infinitamente grandes positivos. Los infinitesimales negativos y los números infinitamente grandes, pero negativos, son los negativos de las cantidades antes definidas.

De las definiciones dadas en (1.1) y (1.2) se desprende que:

> Un número positivo β tal que $\beta < a$, para todo número real positivo a, es infinitamente pequeño, y recíprocamente, todo infinitesimal es menor que cualquier número real positivo.

Análogamente,

> Un número positivo N es infinitamente grande, si y sólo si, es mayor que cualquier número real positivo.

Estas definiciones permiten afirmar, primeramente, que toda cantidad de la forma $n\alpha$, con n natural y α infinitesimal, también es infinitesimal. Ahora bien, convendrá ver el conjunto de los infinitesimales, al igual que el de los infinitamente grandes, como una imagen del conjunto de los números reales, de manera que si P_1 es el conjunto de los números de la forma $k\alpha$, con α infinitesimal y k real, entonces pueden identificarse los elementos de P_1 con los puntos de una recta dirigida (ver figura 1.3).

Hay que tomar en cuenta, que el cero no es un elemento de P_1, aun cuando en la recta se incluya para hacer la identificación con la recta real.

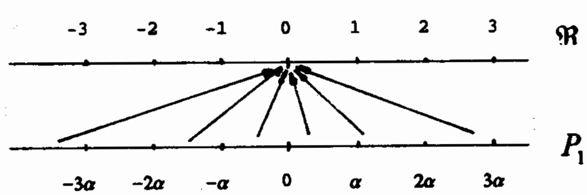


Figura 1.3

De acuerdo con esto, una cantidad como 17.6α, con α infinitesimal, también es infinitesimal, y está ubicada, en la recta, entre 17α y 18α. Además, la definición (1.1) indica que todos los elementos de P_1 —es decir, toda la recta P_1— se verán, en la recta real, como el número cero, ya que ninguno de ellos alcanza algún número real, por pequeño que éste sea. Análogamente, toda cantidad de la forma $3+k\alpha$, con α infinitesimal y k real, se verá, en la recta real, como el número 3. En resumen, toda la recta P_1 se ve, en la recta real, como un punto, y todo punto en la recta real puede verse como toda una recta, cuyos puntos están infinitamente próximos entre sí.

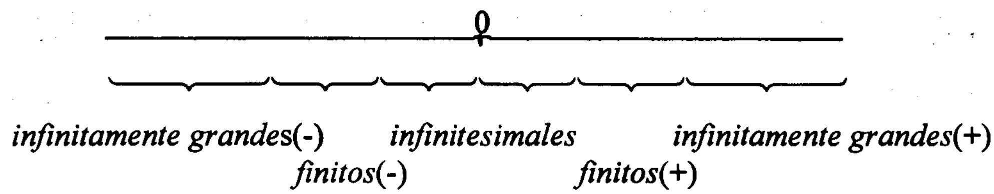


Fig. 1.4

Las cantidades de la forma $a+b\alpha$, con a y b reales y α infinitesimal, se llamarán *finitas* y se identificarán, en la recta real, con el número a, que se llamará *parte principal*, ya que $b\alpha$ resulta despreciable con respecto a a. De esta manera, en este nuevo conjunto numérico, se distinguen tres tipos de cantidades (excluyendo al cero), las infinitesimales, las finitas y las infinitamente grandes (ver figura 1.4).

Cocientes y productos de cantidades de diferente tipo

Veremos a continuación cómo es el cociente entre dos cantidades de diferentes tipos. Por ejemplo, siendo β infinitesimal y a un número real, ambos positivos, entonces, β / a debe ser un infinitesimal, ya que $1/a$ es un número real por lo que $\beta / a = (1/a)\,\beta$ también debe ser infinitesimal. Así pues

Si β es infinitesimal y a un número real, entonces β / a es infinitesimal. (1.3)

Por otra parte, si α es un infinitesimal positivo, su recíproco $1/\alpha$ debe ser infinitamente grande.

En efecto, suponiendo que $1/\alpha$ no es infinitamente grande, debe existir un número real b, positivo, tal que $1/\alpha \le b$, entonces, al multiplicar por $\alpha > 0$, tenemos que $0 < 1 \le b\alpha$. Pero $b\alpha$ es infinitesimal, así que no puede ser mayor que 1, de manera que la hipótesis de que $1/\alpha$ no es infinitamente grande es falsa y, por lo tanto, $1/\alpha$ es infinitamente grande. Así pues:

$$\boxed{\text{Si } \alpha \text{ es un infinitesimal, entonces } 1/\alpha \text{ es infinitamente grande.}} \tag{1.4}$$

y, por lo tanto:

Si α es infinitesimal y a un número real, entonces a/α es infinitamente grande y α / a es infinitesimal. (1.5)

De la misma manera, puede concluirse que:

Si N es infinitamente grande y a un número real, entonces N / a es infinitamente grande y a / N es infinitesimal. (1.6)

Y, en consecuencia:

Dados un infinitesimal α, y un número real c, podemos siempre suponer la existencia de un número infinitamente grande N, tal que $N\alpha = c$. (1.7)

Ejemplo 1.5 π puede verse como el producto de un infinitesimal y un infinitamente grande

Consideremos dos números a_n y b_n definidos en función de un número natural n mediante $a_n = \operatorname{sen}(180°/n)$ y $b_n = n\,a_n$. Deseamos saber cuál es el valor de b_n para n infinitamente grande.

Más adelante estudiaremos algunos aspectos de los ángulos infinitesimales, mientras tanto, utilizaremos la calculadora para tratar de identificar lo que pasa con a_n y b_n para valores "grandes" de n, lo que nos permitirá tener una idea de lo que pasa cuando n es infinitamente grande.

La tabla 1.3 consta de tres columnas; en la primera se muestran los valores asignados a n, en la segunda se indican los correspondientes valores de a_n y en la tercera los de b_n.

n	$a_n = \operatorname{sen}(180°/n)$	$b_n = n\,a_n$
10	0.309017	3.09017
20	0.156434	3.12869
50	0.0627905	3.13953
100	0.0314108	3.14108
1000	0.00314159	3.14159

Tabla 1.3

Obsérvese que conforme el valor de n es más grande, el de a_n es cada vez más pequeño; sin embargo, el valor de b_n, que es el producto de n y a_n, casi no varía. De hecho, como se puede percibir en la tercera columna de la tabla, y como se probará más adelante, para $n = N$ infinitamente grande, $b_N = \pi$. Tenemos pues, un caso particular de la proposición (1.7).

Infinitesimales e infinitamente grandes de orden mayor

Las proposiciones (1.5) y (1.6) permiten generalizar las definiciones (1.1) y (1.2) como sigue:

Si $\dfrac{p}{q} = \beta$, con β infinitesimal, entonces p es infinitamente pequeño respecto de q, o bien, q es infinitamente grande respecto de p.	(1.8)

O, equivalentemente:

Si $\dfrac{p}{q} = N$, con N infinitamente grande, entonces p es infinitamente grande respecto de q (o bien, q es infinitamente pequeño respecto de p).	(1.9)

De esta forma, tenemos que si β es un infinitesimal, $\beta^2 / \beta = \beta$, así que β^2 es infinitamente pequeño respecto de β. De la misma forma podemos obtener que β^3 es infinitamente pequeño respecto de β^2, β^4 es infinitamente pequeño respecto de β^3, y, en general, β^m es infinitamente pequeño respecto de β^n, siempre que $m > n$. Siendo β un infinitesimal, diremos que β^m es un *infinitesimal de orden m* (respecto de β).

Por otra parte, si N es infinitamente grande, entonces $N^2 / N = N$ es infinitamente grande, por lo que N es infinitamente pequeño respecto de N^2. Análogamente, N^2 es infinitamente pequeño respecto de N^3, y, en general, N^k es infinitamente grande respecto de N^j, siempre que $k > j$. Siendo N infinitamente grande, diremos que N^k es un número *infinitamente grande de orden k* (respecto de N).

De esta manera, si α es infinitesimal y N infinitamente grande, definimos los conjuntos P_i como el conjunto de los infinitesimales de orden i y G_j como el conjunto de los infinitamente grandes de orden j, por lo cual las relaciones entre estos conjuntos y $\Re$ pueden ser indicadas como se muestra en la figura 1.5.

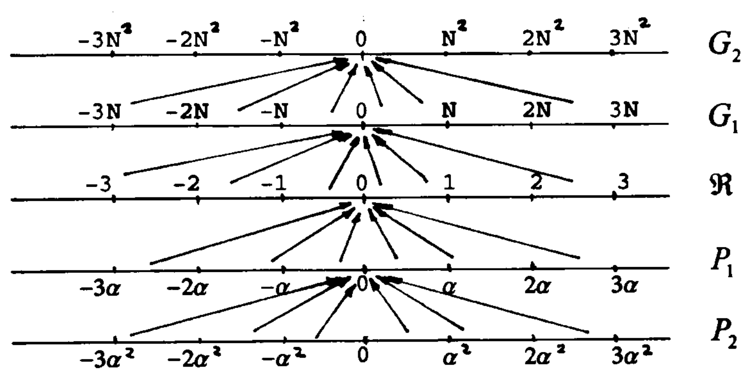


Fig. 1.5

Así, y de acuerdo con esta figura, en una suma en la que aparecen números de distinto orden, aquellos ubicados en cada recta son despreciables (infinitamente pequeños) respecto de cualquier otro ubicado en un "nivel superior". En una suma tal, se ordenarán los términos "de arriba hacia abajo", de acuerdo con el nivel (orden) de cada uno de los términos, llamando *término principal* al que se ubique en el nivel más alto.

Generalmente estaremos interesados en identificar el término principal de una cantidad, en cuyo caso, llamaremos *residuo* al resto de los términos, del cual sólo se indicará el orden. Por ejemplo, si $x=3N^2$, escribimos $x=3N^2+o(N)$ y si $w=3\alpha$, escribimos $w=3\alpha+o(\alpha^2)$.

En ocasiones resultará conveniente escribir explícitamente algunos términos del residuo, además del principal. Por ejemplo, si $x=r$, donde r es un número real, podemos escribir:

$$x=r+o(\alpha),$$

o

$$x=r+k_1\alpha+o(\alpha^2),$$

o bien

$$x=r+k_1\alpha+k_2\alpha^2+o(\alpha^3), \text{ etc.}$$

Expresiones racionales: cálculo del término principal

Para obtener el término principal de una expresión irracional o trascendente, se requiere de algunos conceptos que serán estudiados más adelante; por el momento, vamos a calcular el término principal de una expresión racional.

Ejemplo 1.6

Si f es la función definida por la regla de correspondencia dada y N es infinitamente grande y positivo, calcular el término principal de $f(N)$, indicando el orden del residuo.

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{3x^2+1}$$

Solución

$$f(N)=\frac{2N^2+N-1}{3N^2+1}=\frac{2N^2}{3N^2+1}+\frac{N}{3N^2+1}+\frac{-1}{3N^2+1}$$

$$f(N)=\left[\frac{2}{3}+o_1(N^{-1})\right]+o_2(N^{-1})+o(N^{-2})=\frac{2}{3}+o(N^{-1})$$

Ejemplo 1.7

Si f es la función definida por la regla de correspondencia dada y β es un infinitesimal positivo, calcular el término principal de $f(1+\beta)$ e indicar el orden del residuo.

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$

Solución
$$f(1+\beta)=\frac{1+\beta}{1+\beta-1}=\frac{1+\beta}{\beta}=\frac{1}{\beta}+1=\beta^{-1}+1$$
$$f(1+\beta)=N+o(N^0)=N+o(1)$$

donde N es el número infinitamente grande y positivo que es el recíproco de β.

Expresiones racionales: cálculo de los términos del residuo

En el caso de las funciones racionales, y suponiendo que se desea calcular uno o más de los términos del residuo, puede utilizarse el algoritmo de la división de polinomios.

Ejemplo 1.8

Si f es la función con regla de correspondencia dada y N es infinitamente grande y positivo, calcular el término principal y los términos del residuo hasta del orden de N^0, es decir, hasta el término real.

$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+2}$$

Solución

Aplicando el algoritmo de la división de polinomios, y calculando el cociente hasta el término de grado cero (respecto de N), obtenemos:

$$f(N)=\frac{N^2+3N-1}{N+2}=N+1+\frac{-3}{N+2}=N+1+o(N^{-1})$$

En el caso de una función racional, si se desean más términos, pueden obtenerse al continuar con la división de polinomios, ignorando la regla que indica que la división termina cuando se obtiene un residuo parcial de grado menor que el divisor. Por supuesto, en tal caso, se obtendrán términos con exponente negativo en el cociente.

Así, para la función del ejemplo anterior, al continuar con la división hasta el término de grado x^{-3}, se obtiene el cociente $x+1-3x^{-1}+6x^{-2}-2x^{-3}$, siendo el correspondiente residuo 24 x^{-3}, así que

$$\frac{x^2+3x-1}{x+2}=x+1-3x^{-1}+6x^{-2}-12x^{-3}+\frac{24x^{-3}}{x+2}$$

De esta manera, para $x = N$ infinitamente grande, obtenemos:

$$f(N)=\frac{N^2+3N-1}{N+2}=N+1-3N^{-1}+6N^{-2}-12N^{-3}+o(N^{-4})$$

1.1 Ejercicios

1-11 Siendo N infinitamente grande y α infinitesimal, ambos positivos, calcular el término principal de cada una de las expresiones dadas.

1) $f(-2-\alpha)$, $f(-2+\alpha)$, $f(2-\alpha)$, $f(2+\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

2) $f(2-\alpha)$, $f(2+\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\dfrac{4x}{(x-2)^2}$

3) $f(-\alpha)$, $f(\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

4) $f(-\alpha)$, $f(\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\dfrac{-3x^2}{x}$

5) $f(1-\alpha)$, $f(1+\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-3}$

6) $f(1-\alpha)$, $f(1+\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$ si $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-4x+2}$

7) $f(-1-\alpha)$, $f(-1+\alpha)$, $f(1-\alpha)$ y $f(-1+\alpha)$ si $f(x)=\begin{cases} x, & \leq -1, \\ x^2-1, & -1<x<1, \\ x^2+3x-4, & x\geq 1 \end{cases}$

8) $f(-\alpha)$, $f(\alpha)$, $f(-N)$ y $f(N)$, si $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$

9) $g(-\alpha)$, $g(\alpha)$, $g(-N)$ y $g(N)$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$

10-14 Utilizando una calculadora científica, obtener el mínimo valor de n para el cual se cumple (de acuerdo con la lectura de la pantalla) la igualdad indicada.

10) $f(10^n)=10^n$ si $f(x)=\sqrt{x^2+25}$

11) $g(10^n)=2\times 10^n$ si $g(x)=\sqrt[3]{8x^3-430}$

12) $\phi(10^n)=1.5$ si $\phi(x)=\dfrac{3x+2}{2x}$

13) $h(10^n)=3$ si $h(x)=\sqrt{9+x}$

14) $F(10^n)=0.8$ si $F(x)=\dfrac{4+x^3}{5-x^2}$

1.2 Desarrollo en serie de potencias: funciones algebraicas

Los polinomios son funciones que se evalúan y con las que se pueden hacer operaciones fácilmente. En esta sección veremos cómo expresar las funciones algebraicas como *polinomios de grado infinito*, a los que se denomina *series de potencias* de la función. Esto permitirá, entre otras cosas, obtener el valor de la función, para un valor dado de la variable, con tanta precisión como se desee (y el instrumento de cálculo lo permita).

Veamos algunos conceptos relativos a las series de potencias. Primeramente, siendo f una función real, si existen constantes reales c_i (i = 1, 2, 3,...), tales que, para cada x en un intervalo, se tiene que

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots, \tag{1.10}$$

entonces diremos que el segundo miembro de esta ecuación es el *desarrollo en serie de potencias* de f en el intervalo.

Los puntos suspensivos al final del segundo miembro de la ecuación indican que la suma continúa indefinidamente y que sólo en tal caso, es decir, si el número de términos es infinito, se cumplirá la igualdad. De esta manera, si el número de términos es finito, el segundo miembro de (1.10) es un polinomio, que al ser evaluado para un valor dado de la variable, proporcionará un valor aproximado de la función, obteniendo un error que se espera sea menor en cuanto mayor sea el número de términos considerado. Así pues, si se toman n términos, con n finito, y si P_n es el polinomio

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \tag{1.11}$$

entonces, el *error absoluto*, cometido al evaluar la función por medio de este polinomio será:

$$e_n(x) = \left| f(x) - P_n(x) \right| \tag{1.12}$$

Ahora bien, si para un valor dado de x, el error $e_n(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, haciendo n suficientemente grande, diremos que la serie $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ *converge* para ese valor de x, en cuyo caso, e_n es infinitesimal para n infinitamente grande. En caso contrario se dirá que la serie diverge.

En general, tendremos que la serie convergerá para toda x real en un intervalo al que, por lo tanto, se denomina *intervalo de convergencia*. Si la serie no converge para un valor de x, entonces se dirá que *diverge* para ese valor de x.

Cabe mencionar, por último, que el desarrollo en serie de potencias de una función es único, es decir, el valor de cada uno de los coeficientes c_i en (1.10) está determinado, de manera única, por la función misma.

Ejemplo 1.9

Como se verá más adelante, el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial está dado por

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots,$$

la cual converge para todo valor de x. De esta manera, al hacer $x = 1$, la serie debe converger a e, por lo tanto, el valor de la expresión

$$P_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

debe ser más parecido a e conforme aumenta el valor de n. En la tabla 1.4 se muestra el valor de P_n, lo mismo que el correspondiente error (obtenido por medio de la ecuación 1.12), para algunos valores de n. Puede observarse que, efectivamente, el error disminuye conforme se incluyen más términos de la serie.

n	4	6	8	10
P_n	2.708333333	2.718055555	2.718278769	2.718281801
e_n	9.95×10^{-3}	2.26×10^{-4}	3.06×10^{-6}	2.84×10^{-8}

Tabla 1.4

Funciones racionales: serie geométrica

Ejemplo 1.10 Aquiles y la tortuga

Supóngase que la velocidad de Aquiles, un conocido atleta ateniense, es el doble que la de una tortuga. Si se organiza una carrera entre ambos, en una pista recta, dando una ventaja d (distancia en metros) a la tortuga, ¿qué distancia deberá recorrer Aquiles para alcanzar a la tortuga?, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarla?

Primer planteamiento (paradoja de Zenón)

Antes de alcanzar a la tortuga, Aquiles deberá recorrer la distancia d que ha dado de ventaja. Sin embargo, una vez que recorre esa distancia, la tortuga recorre $d/2$ metros, distancia que ahora deberá ser recorrida por Aquiles.

Una vez que Aquiles recorre esa distancia, la tortuga ha recorrido $d/4$ metros, la cual es recorrida por Aquiles mientras la tortuga se desplaza otros $d/8$ metros, y así, sucesivamente. En la figura 1.6, se han señalado, en dos líneas, las posiciones sucesivas de Aquiles y de la tortuga, asignando el 0 a las posiciones iniciales, el 1 a las posiciones en el momento en el que Aquiles recorre la distancia d, el 2 a las posiciones de Aquiles y la tortuga una vez que el corredor recorre la distancia $d/2$, etcétera.

Continuando de esta manera, tenemos que la distancia que separa a Aquiles de la tortuga, después de cada "etapa" es: d, $d/2$, $d/4$, $d/8$, $d/16$, etc. Como esa distancia nunca llega a ser cero, podemos concluir que ¡Aquiles nunca alcanza a la tortuga!

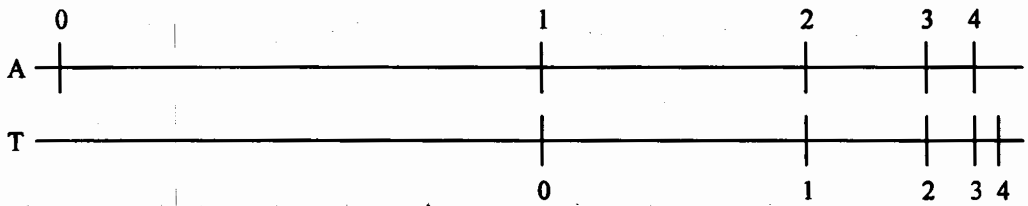


Fig. 1.6

Segundo planteamiento

Siendo x la distancia total que debe ser recorrida por Aquiles para alcanzar a la tortuga, t el tiempo que tarda en recorrerla, y v_t y v_a, respectivamente, las velocidades de la tortuga y Aquiles, tenemos que

$$x = v_a t \qquad \text{(a)}$$

$$x - d = v_t t \qquad \text{(b)}$$

Ahora bien, sabemos que $v_a = 2v_t$, así que la ecuación (a) puede escribirse en la forma

$$x = 2v_t t \qquad \text{(c)}$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (b) entre la (c), tenemos:

$$\frac{x-d}{x} = \frac{1}{2}, \quad 2(x-d) = x, \quad 2x - 2d = x$$

Por lo tanto, $x = 2d$, de manera que Aquiles recorre el doble de la distancia que ha dado de ventaja a la tortuga para alcanzarla.

A continuación consideraremos un procedimiento para calcular la suma de una cantidad infinitamente grande de términos, para el caso de que éstos correspondan a una sucesión geométrica. Esto permitirá resolver la aparente contradicción entre los planteamientos antes citados.

Una *sucesión geométrica* es aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un factor constante. Es decir, si p es el primer término de la sucesión y r (razón) el factor común, entonces los siguientes términos son:

$$pr,$$

$$(pr)r = pr^2,$$

$$(pr^2)r = pr^3, \text{ etc.}$$

De esta manera, una sucesión geométrica será de la forma

$$p, pr, pr^2, pr^3, \ldots, pr^n, \ldots \qquad (1.13)$$

Lo que haremos ahora, es averiguar si la suma de todos los términos de la sucesión geométrica puede ser finita. Para ello, consideraremos la *enésima suma parcial* de la sucesión, esto es, la suma de los primeros términos, hasta el de orden n, inclusive:

$$S_n = p + pr + pr^2 + pr^3 + \cdots + pr^n \qquad (1)$$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por r, obtenemos

$$rS_n = pr + pr^2 + pr^3 + pr^4 + \cdots + pr^{n+1} \qquad (2)$$

Observando que los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) coinciden en todos sus términos, excepto en uno, restamos miembro a miembro dichas ecuaciones, obteniendo

$$rS_n - S_n = pr^{n+1} - p$$

$$S_n(r-1) = pr^{n+1} - p$$

$$\boxed{S_n = \frac{p(r^{n+1}-1)}{r-1}} \qquad (1.14)$$

$$S_n = \frac{p}{r-1}r^{n+1} - \frac{p}{r-1} \qquad (3)$$

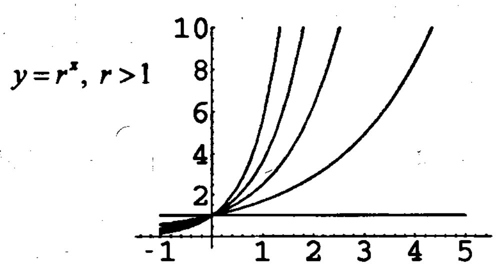


Fig. 1.7a

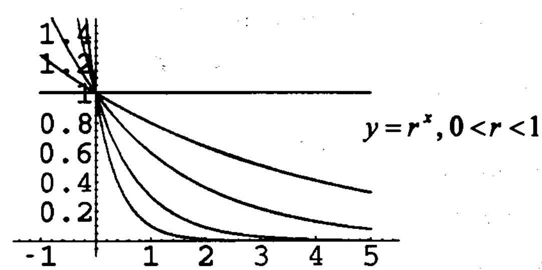


Fig. 1.7b

Recordemos ahora que, si $0<r<1$, la gráfica de $y=r^x$ (ver figura 1.7b) decrece asintóticamente a cero, de manera que para $0<r<1$ y n infinitamente grande, el primer término en el segundo miembro de (3) es infinitesimal. Así pues, la suma de la infinidad de términos de (1.13), para $0<r<1$, es

$$S_N = -\frac{p}{r-1} = \frac{p}{1-r}$$

De hecho, puede probarse que esta igualdad se cumple también para $-1<r<0$, es decir:

$$\boxed{p + pr + pr^2 + pr^3 + \cdots = \frac{p}{1-r}}, \qquad (|r|<1) \qquad (1.15)$$

Obsérvese que para $r = 0$ la igualdad es evidente.

Ejemplo 1.11

Obtener el desarrollo en serie y el correspondiente intervalo de convergencia de la función definida por

$$g(x) = \frac{4}{3-5x}$$

Solución

Dividiendo por 3 y comparando con el segundo miembro de (1.15) obtenemos:

$$\frac{4}{3-5x} = \frac{4/3}{1-5/3x} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{5}{3}x\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{5}{3}x\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{5}{3}x\right)^3 + \cdots$$

la cual converge si $|(5/3x|<1$, es decir, para valores de x en el intervalo $\langle -3/5, 3/5\rangle$.

Ejemplo 1.12

Respecto al problema de Aquiles y la tortuga tenemos que la distancia recorrida por el atleta, para alcanzar a la tortuga es

$$x = d + \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \cdots,$$

que es una serie geométrica con primer término d y razón ½. Como la condición de convergencia indicada en (1.15) se cumple, tenemos que

$$x = d + \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \cdots = \frac{d}{1-1/2} = 2d,$$

tal y como se había obtenido previamente.

Por otra parte, considerando el tiempo invertido por Aquiles para recorrer cada distancia, tenemos que el tiempo total será

$$t = \frac{d}{v_a} + \frac{d}{2v_a} + \frac{d}{4v_a} + \frac{d}{8v_a} + \cdots,$$

que es otra serie geométrica con razón ½. Por lo tanto, el tiempo total empleado para alcanzar a la tortuga es

$$t = \frac{d}{v_a} + \frac{d}{2v_a} + \frac{d}{4v_a} + \cdots = \frac{d/v_a}{1-1/2} = \frac{2d}{v_a}$$

Obsérvese que este resultado pudo haberse obtenido, directamente, dividiendo la distancia recorrida ($2d$) entre la velocidad.

Funciones irracionales: serie binomial

Vamos a considerar ahora el desarrollo en serie de potencias de una función irracional. Particularmente interesará obtener el desarrollo en serie de una función definida mediante una raíz, siendo el radicando un binomio, uno de cuyos términos es constante y el otro depende de la variable.

Ejemplo 1.13

Supóngase que se desea obtener el desarrollo en serie de la función definida mediante

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Esto quiere decir que se desea saber si existen constantes c_0, c_1, c_2, etc., tales que, para valores de x en un intervalo, se tiene que

$$\sqrt{1+x} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \qquad \text{(a)}$$

Esta igualdad se cumple, si y sólo si

$$(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots)^2 = 1 + x \qquad \text{(b)}$$

Recordando que el cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de sus términos más la suma de todos los dobles productos, obtenemos que el primer miembro de la ecuación (b) es

$$\begin{aligned}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots)^2 = {} & c_0^2 + 2c_0c_1x + \\ & (c_1^2 + 2c_0c_2)x^2 + (2c_0c_3 + 2c_1c_2)x^3 + \\ & + (2c_0c_4 + 2c_1c_3 + c_2^2)x^4 + \cdots\end{aligned}$$

Identificando ahora esta serie, término a término, con el polinomio $1 + x$, obtenemos:

$$\begin{array}{lll} 1: & c_0^2 = 1 & \text{(c)} \\ x: & 2c_0c_1 = 1 & \text{(d)} \\ x^2: & c_1^2 + 2c_0c_2 = 0 & \text{(e)} \\ x^3: & 2c_0c_3 + 2c_1c_2 = 0 & \text{(f)} \\ x^4: & 2c_0c_4 + 2c_1c_3 + c_2^2 = 0 & \text{(g)} \\ \vdots & & \end{array}$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, podemos calcular los coeficientes buscados. Así, de la ecuación (c) obtenemos que $c_0 = 1$. Al sustituir este valor en la ecuación (d) y despejar c_1 se obtiene $c_1 = 1/(2c_0) = 1/2$. Procediendo de manera similar con las siguientes ecuaciones, se tiene que $c_2 = -1/8$, $c_3 = 1/16$, $c_4 = -5/128$, etc.

De esta manera, el desarrollo en serie de la función dada es

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4\cdots \tag{1.16}$$

Si, por ejemplo, $x = 0.44$, entonces obtenemos:

$$\sqrt{1.44} = 1+\tfrac{1}{2}(0.44)-\tfrac{1}{8}(0.44)^2+\tfrac{1}{16}(0.44)^3-\tfrac{5}{128}(0.44)^4+\cdots$$

En la tabla 1.5 se muestran las sumas parciales para los valores enteros de n de 1 a 6.

n	1	2	3	4	5	6
$P_n(1.44)$	1.22	1.1958	1.201124	1.1996599	1.200110843	1.199962032

Tabla 1.5

Obsérvese que el "comportamiento" de $P_n(1.44)$ es como se esperaba, puesto que $\sqrt{1.44} = 1.2$. Sin embargo, si $x = 3$, al sustituir en (1.16) se obtiene:

$$\sqrt{4} = 1+\tfrac{1}{2}(3)-\tfrac{1}{8}(3)^2+\tfrac{1}{16}(3)^3-\tfrac{5}{128}(3)^4+\cdots$$

n	1	2	3	4	5	6
$P_n(3)$	2.5	1.375	3.0625	-0.1015625	6.54296875	-8.40722656

Tabla 1.6

En la tabla 1.6 se puede observar que los valores calculados de $P_n(3)$ se alejan, alternativamente, por exceso y por defecto, del valor al cual deberían acercarse, ya que $\sqrt{4} = 2$. Así pues, (1.16) no es válida para todo valor admisible de x (en este caso $x \geq -1$).

Por otra parte, el procedimiento efectuado en el ejemplo anterior, para la obtención de los coeficientes de la serie, tendría que llevarse a cabo para cada caso particular, lo que podría resultar muy complicado o, incluso, inaplicable. A continuación se verá cómo obtener el desarrollo en serie para expresiones de la forma $(a+b)^n$, donde alguno de los términos, a o b, contiene una variable, y n es un número real (no natural).

Sabemos que al elevar un binomio al cuadrado y al cubo se obtienen, respectivamente, las igualdades

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Podemos continuar haciendo los productos para potencias mayores, o bien, recurrir a una técnica para la obtención de los coeficientes, como el triángulo de Pascal. Si se hace para las dos siguientes potencias, se tiene:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Si ahora escribimos la última de estas ecuaciones en la forma

$$(a+b)^5 = a^5 + \tfrac{5}{1}a^4b + \tfrac{5\cdot4}{1\cdot2}a^3b^2 + \tfrac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}a^2b^3 + \tfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ab^4 + \tfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}b^5$$

podemos observar que en el numerador aparece, a partir del segundo término, el factor 5, que es el exponente del binomio, y que en cada uno de los términos subsecuentes aparecen, como factores, sus enteros antecesores, 4, 3, ... Por otra parte, en el denominador aparece el 1 a partir del segundo término, que además se mantiene en los subsecuentes, multiplicado por sus enteros siguientes, 2, 3, ... ; así pues, para $n = 5$, los coeficientes pueden obtenerse como sigue:

$$c_1 = \tfrac{5}{1} = \tfrac{n}{1}$$

$$c_2 = \tfrac{5\cdot4}{1\cdot2} = \tfrac{5}{1}\cdot\tfrac{4}{2} = \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2} = c_1\cdot\tfrac{n-1}{2}$$

$$c_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{3}{3} = \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{3}{3} = c_2\cdot\frac{n-2}{3}$$

$$c_4 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{n-3}{4} = c_3\cdot\frac{n-3}{4}$$

$$c_5 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{n-4}{5} = c_4\cdot\frac{n-4}{5}$$

Consideremos ahora el caso general, es decir, la n-ésima potencia

$$(a+b)^n = a^n + c_1a^{n-1}b + c_2a^{n-2}b^2 + c_3a^{n-3}b^3 + \cdots,$$

en la cual se han indicado mediante $c_1, c_2, \ldots$ los coeficientes desconocidos.

Puede probarse —lo que no es uno de los objetivos de este libro—, que es factible obtener tales coeficientes siguiendo el patrón sugerido, de manera que

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3 + \cdots}$$

o bien:

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots} \qquad (1.17)$$

Lo que aquí nos interesa es explorar la validez de esta última ecuación cuando n no es natural.

Antes de considerar algunos casos, obsérvese que, si n no es natural, el segundo miembro de la ecuación contiene una infinidad de términos, debido a que nunca se cancela el numerador, como sucede cuando n es natural, ya que, en tal caso, en el término $n+1$ aparece $n-n$ como factor en el denominador, por lo que los coeficientes c_k se anulan para $k \geq n+1$. Así pues, si n no es natural, la ecuación (1.17) da un desarrollo en serie para la potencia del binomio, razón por la cual se llamará *serie binomial.*

Ejemplo 1.14

Consideremos en (1.17) que $a=1$, $b=x$, y $n=-1$. De esta manera, al hacer las sustituciones correspondientes, obtenemos

$$(1+x)^{-1} = 1^{-1} + \frac{-1}{1!}\cdot 1^{-2}x + \frac{(-1)(-2)}{2!}1^{-3}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}1^{-4}x^3 + \cdots$$

es decir:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

que es válida —obsérvese que la serie es geométrica— para $|x| < 1$.

Ejemplo 1.15

Ahora supongamos que $a = 1, b = x$ y $n = ½$, obteniendo entonces:

$$(1+x)^{1/2} = 1^{1/2} + \frac{1/2}{1}\cdot 1^{-1/2}x + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}1^{-3/2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}1^{-5/2}x^3 + \cdots$$

es decir:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2^3}x^2 + \tfrac{1\cdot 3}{2^4\cdot 3}x^3 - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots} \qquad (1.18)$$

o bien:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \cdots$$

Resultado que coincide con el obtenido en el ejemplo 1.13, en el cual, además, se observó que el desarrollo dado por la ecuación (1.18) no converge para todo valor de x. De hecho, puede demostrarse que la *serie binomial*:

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots} \qquad (1.19)$$

con n real y no natural, converge sólo para $|x| < 1$.

En este texto consideraremos únicamente desarrollos en serie de funciones irracionales que puedan escribirse en la forma dada por la ecuación (1.17), es decir, binomiales. Además, el binomio deberá ser escrito en la forma $1+x$ para determinar el intervalo de convergencia, tal y como se procede en los ejemplos siguientes.

La serie binomial en electromagnetismo: algunos ejemplos

Al estudiar los fenómenos electromagnéticos, con frecuencia interesa observar lo que ocurre con el valor del campo, o del potencial eléctrico, en puntos específicos del espacio, por ejemplo, lejos de una superficie cargada eléctricamente.[1]

Ejemplo 1.16 Disco cargado uniformemente: campo eléctrico[2]

Puede probarse que el campo eléctrico producido por una superficie circular cargada, de radio *r*, en un punto situado sobre el eje de la superficie —es decir, sobre la recta perpendicular al plano que contiene el disco, y que pasa por su centro—, a una distancia *b*, está dado por

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{b}{(r_0{}^2+b^2)^{1/2}}\right)\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \qquad \text{(a)}$$

donde σ y ε_0 son constantes. Lo que interesa ahora es estimar el valor del campo eléctrico en dos situaciones particulares: en un punto próximo a la superficie y en uno muy alejado de la misma.

En el primer caso podemos decir que *b* es mucho menor que r_0, lo cual se simboliza mediante $b \ll r_0$ por lo cual, con fines de cálculo, podemos decir que *b* es despreciable respecto de r_0, de manera que el valor del campo se reduce a:

$$\mathrm{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$$

Análogamente, en el segundo caso, podemos asumir que $b \gg r_0$. Sin embargo, si eliminamos *b* en la ecuación (a), tenemos que el término principal se cancela. Para evitar esto, escribimos la ecuación en la forma

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{(r_0{}^2+b^2)^{1/2}-b}{(r_0{}^2+b^2)^{1/2}}\right)$$

o bien, dividiendo numerador y denominador por *b*, obtenemos:

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{(1+(r_0/b)^2)^{1/2}-1}{(1+(r_0/b)^2)^{1/2}}\right)$$

De esta manera, las expresiones que aparecen elevadas a la potencia ½, pueden desarrollarse utilizando el teorema del binomio, ya que corresponden a la forma dada por la

[1] Los ejemplos que siguen han sido tomados —y ligeramente modificados para incluirlos en este texto— de la fuente que para cada uno se indica.
[2] Jaramillo, pp. 25-27.

ecuación (1.17) y satisfacen la condición indicada para tal caso, ya que, siendo $b >> r_0$, entonces $(r_0 / b) << 1$. De esta manera, tenemos:

$$\left(1+\left(\frac{r_0}{b}\right)^2\right)^{1/2} = 1+\frac{1/2}{1!}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 + o\left(\frac{r_0}{b}\right)^4$$

Como suponemos que $b >> r_0$, entonces, despreciando los términos de orden 4 en adelante, tenemos que

$$\left(1+\left(\frac{r_0}{b}\right)^2\right)^{1/2} \cong 1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2$$

por lo que

$$E \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2 - 1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2}\right)$$

Además, la misma suposición de que $b >> r_0$, permite, a su vez, afirmar que $1 >> \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2$, de manera que el campo eléctrico, para puntos muy alejados de la superficie está dado por

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{b}\right)^2$$

Ejemplo 1.17 Disco cargado uniformemente: potencial eléctrico[3]

Análogamente, puede probarse que el potencial eléctrico en un punto situado sobre el eje de un anillo uniformemente cargado, de radio R, en un punto situado sobre su eje, a una distancia z, está dado por

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right) \qquad \text{(b)}$$

Considerando un punto muy alejado del disco, tenemos que $z >> R$. Nuevamente, para poder aplicar el teorema del binomio, se saca z como factor común (z^2 dentro del radical), de manera que se satisfaga la condición de convergencia indicada en la ecuación (1.18):

$$\sqrt{R^2+z^2} = z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+o(z^{-4})\right) \approx z+\frac{R^2}{2z}$$

Al usar esta aproximación, la ecuación (b) se reduce a

[3] Resnick, p. 78.

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(z + \frac{R^2}{2z} - z\right) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z},$$

en donde $q = \sigma\pi R^2$ es la carga total del disco.

Ejemplo 1.18 Campo eléctrico debido a un dipolo[4]

Un dipolo (eléctrico) está constituido por dos cargas puntuales de la misma magnitud, una positiva y una negativa. Puede probarse que la magnitud del campo eléctrico debido a este dipolo, en un punto situado sobre la mediatriz del segmento que une los puntos donde se ubican las cargas, a una distancia x del punto medio del segmento, está dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left[x^2 + (d/2)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{x^3}\left[1 + (d/2x)^2\right]^{-3/2} \end{aligned} \tag{c}$$

Donde d es la distancia de separación entre las cargas y q es la magnitud de cada carga. Asumiendo que $d << x$, al hacer el desarrollo binomial del factor entre corchetes se obtiene

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{d}{2x}\right)^2 + \cdots\right]$$

Conservando sólo el primer término, hallamos una expresión para la magnitud del campo eléctrico debida a un dipolo en puntos distantes, situados sobre la mediatriz:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}$$

1.2 Ejercicios

1. Como se verá posteriormente, el desarrollo en serie de la función seno está dado por

$$\operatorname{sen} x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$

donde el argumento debe estar medido en radianes.

1.1 Siguiendo el patrón definido por los términos dados, proporciónense los dos términos siguientes de la serie.

[4] **Resnick, pp.** 19-20.

1.2 Dar una *fórmula recursiva* para la generación de los términos de la serie, esto es, una ecuación a partir de la cual pueda obtenerse cualquier término de la serie a partir del anterior.

1.3 Dar una *fórmula indicial* para el término general, es decir, una ecuación a partir de la cual, cada término de la serie se obtenga conociendo solamente el lugar que ocupa en la serie (se puede comenzar por 0 o 1).

1.4 Mediante calculadora y conservando en cada operación la totalidad de las cifras que aparezcan en la pantalla, completar la tabla mostrada.

¿De qué depende la precisión con la que un polinomio aproxima la función?

x	$P_1(x)$	$P_3(x)$	$P_5(x)$	$P_7(x)$	$\operatorname{sen} x$ *
0.2	0.2				
0.1					
0.01					
0.001					

*** Escribir en esta columna los valores que da la calculadora, utilizando directamente la función.**

2. Considérese la función definida por $\phi(x) = \dfrac{2}{x+3}$

2.1 Continuar la división indicada hasta obtener, en el cociente, el término de grado 7.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}x^2 \\
\hline
3 + x & 2 \\
 & -2 - \frac{2}{3}x \\
 & \quad -\frac{2}{3}x \\
 & \quad +\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \\
 & \qquad\qquad \frac{2}{9}x^2
\end{array}
$$

2.2 Dar la fórmula recursiva para la generación de los términos de la serie.

2.3 Dar la fórmula indicial para el término general.

2.4 Dar el intervalo de convergencia (la serie es geométrica).

2.5 Complétese la tabla:

x	$P_1(x)$	$P_3(x)$	$P_5(x)$	$P_7(x)$
0.2				
0.1				
0.01				
0.001				

3. Expandir $(a+b)^8$

4. Considérese la función definida por $f(x)=(1+x)^{3/2}$

   4.1 Obténgase el desarrollo de f en serie de potencias hasta el término de grado 5.

   4.2 Complétese la siguiente tabla:

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
0.5					
0.2					
0.1					
0.01					

   4.3 Utilizando el polinomio obtenido, calcular los términos hasta de grado 5 de $\left[(1+x)^{3/2}\right]^2$. ¿Se obtiene el resultado esperado?

5. Si $\phi(x)=\sqrt[3]{1+x}$

   5.1 Obtener el desarrollo en serie de ϕ, hasta el término de grado 4.

   5.2 Estimar el valor de $\sqrt[3]{1.331}$ utilizando la serie obtenida. Considérese el número de términos suficiente para obtener una aproximación correcta hasta milésimas. Calcular el error relativo cometido en esa aproximación.

6. Si $f(x)=(1+x)^n$ y $g(x)=(1-x)^n$

   6.1 ¿Cuál es la diferencia entre los desarrollos binomiales correspondientes? Obsérvese que $g(x)=f(-x)$, o bien, que $g(x)=(1-x)^n=[1+(-x)]^n$.

   6.2 Calcular $\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]$ y $\frac{1}{2}[f(x)-g(x)]$.

2. CONTINUIDAD

2.1 Incremento y diferencial

Los conceptos *cambio* y *continuidad* son sumamente importantes en las ciencias básicas y de la ingeniería. El *cambio* o *incremento de una variable* no es más que la diferencia entre dos de sus valores, esto es, el valor "nuevo" menos el original.

Por lo general, cuando se estudia un fenómeno natural, interesa hacer predicciones —con un grado aceptable de certidumbre— de lo que ocurrirá con el valor de alguna variable en particular (variable dependiente, o función), sabiendo cómo cambia el valor de otra de ellas, previamente determinada (variable independiente, o simplemente, variable).

Esto puede hacerse fácilmente, cuando se conoce la regla de correspondencia entre las variables de interés, ya que, en tal caso, sólo hay que evaluar la función en los puntos de interés y calcular la diferencia. Sin embargo, hay situaciones —durante el proceso de modelación de un fenómeno, o cuando la información disponible es una tabla de valores— en que no se conoce la regla de correspondencia. En estos casos resulta sumamente útil poder estimar la magnitud del incremento de la función a partir de la magnitud del incremento de la variable y de la información disponible en el "punto de partida", es decir, de lo que se conoce de la función para el valor original o inicial de la variable.

En esta sección, comenzaremos a caracterizar el "comportamiento" de una función, indicando, para empezar, si su gráfica consta de una o más piezas, describiendo, además, lo que pasa con la curva, cada vez que ésta se "interrumpe".

Como se ha indicado, el incremento de una variable es la diferencia entre dos de sus valores. Ahora bien, debido a que el eje de abscisas generalmente se recorre "de izquierda a derecha", el incremento de la variable será, por lo general, positivo.

De esta manera, si f es una función definida por $y = f(x)$, y si interesa observar qué pasa con la función cuando la variable x cambia su valor de b a w, entonces, el incremento de x es $w - b$. En general, se dirá que

$$\text{incremento} = \text{valor final} - \text{valor inicial.}$$

Usualmente se simboliza un incremento mediante una letra Δ (delta mayúscula), de manera que el incremento de una variable x será

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{2.1}$$

donde x_i y x_f son, respectivamente, los valores inicial y final de la variable.

Ahora bien, si el incremento de la variable es infinitesimal, es decir, si los valores inicial y final de la variable difieren en una cantidad infinitesimal, el incremento se llamará *diferencial*, en cuyo caso se usará una "*d*" en lugar de la Δ. Así pues, dx denotará un incremento infinitesimal de x.

Nota: en algunos libros de ciencias básicas y de la ingeniería, se utiliza el término diferencial para referirse a un incremento o cambio finito, pero pequeño, de hecho, *suficientemente pequeño* como para validar alguna suposición.

Ahora bien, con referencia a una función f definida por $y = f(x)$, si x tiene un valor inicial a y un incremento dx (por lo tanto un valor final $a + dx$), entonces, el correspondiente incremento de la función —el cual se espera que sea también infinitesimal— es el diferencial de la función, es decir:

$$\boxed{dy(a) = f(a + dx) - f(a)} \tag{2.2}$$

Es importante indicar que, al suponer infinitesimal este incremento, para el cálculo del diferencial, se conservará únicamente el término principal.

Ejemplo 2.1

Si $y = x^2$ y $a = 3$, entonces $dy(a) = (3 + dx)^2 - 3^2 = 6dx + (dx)^2$

Como dx simboliza una cantidad, y no el producto de d y x, suele eliminarse el paréntesis cuando se tienen potencias de dx. Así, en el ejemplo anterior podemos escribir

$$dy(a) = 6dx + dx^2$$

Si se conserva sólo el término principal, tendremos:

$$dy(a) = 6dx$$

Ejemplo 2.2 Área de un anillo circular delgado

Calculemos el incremento infinitesimal producido en el área de un círculo de radio r, cuando éste experimenta un incremento infinitesimal dr.

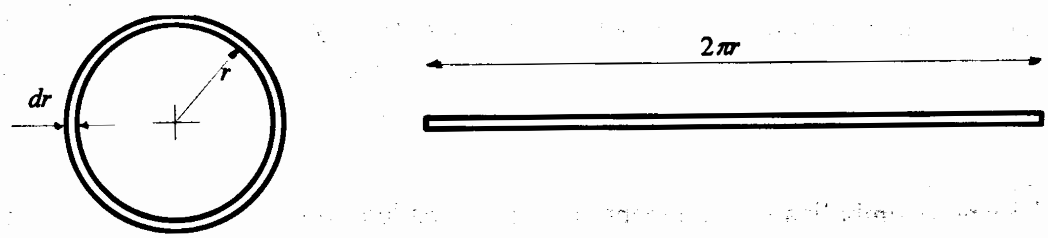


Figura 2.1

El área de un círculo de radio r es $A(r) = \pi r^2$. Si el radio cambia su valor a $r + dr$, el área correspondiente será $A(r + dr) = \pi(r + dr)^2$. Así pues, el incremento correspondiente en el área será

$$dA(r) = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r\,dr + dr^2 - r^2)$$

$$dA(r) = \pi(2r\,dr + dr^2)$$

Al despreciar el infinitesimal de segundo orden, se obtiene

$$dA(r) = 2\pi r\, dr \tag{a}$$

Obsérvese que esta ecuación indica (ver figura 2.1) que el área de un anillo circular, de espesor infinitesimal, es igual al producto de la longitud de la circunferencia y el espesor. Es decir, si el espesor es diferencial, la diferencia entre las longitudes de las circunferencias interior y exterior es despreciable, de manera que puede calcularse el área del anillo como la del "rectángulo" que resulta de cortar y desdoblar el anillo.

Si el incremento del radio es finito, pero pequeño, de acuerdo con la ecuación (a) tendremos:

$$\Delta A(r, \Delta r) \cong 2\pi r\, \Delta r \tag{b}$$

En la tabla 2.1 se muestra que el error cometido al aproximar el área del anillo por medio de la ecuación (b) es más pequeño conforme el espesor lo es.

Δr	1	0.1	0.01
$\Delta A_e = \pi(2r\Delta r + \Delta r^2)$	65.9734	6.3146	0.628633
$\Delta A_a = 2\pi r\, \Delta r$	62.8319	6.28319	0.628319
$e_a = \lvert \Delta A_e - \Delta A_a \rvert$	3.14159	0.0314159	0.000314159
$e_r = \lvert e_r / \Delta A_e \rvert$	4.76%	0.5%	0.05%

Tabla 2.1

En el primer renglón se muestran los valores asignados a Δr. En el segundo se muestran los valores "exactos" (con seis cifras de precisión) del incremento, calculados como la diferencia entre las áreas de las circunferencias exterior e interior. El tercer renglón muestra los valores calculados para el incremento, usando la aproximación dada por la ecuación (b), el cuarto muestra el error absoluto cometido al utiizar la aproximación, es decir, la diferencia entre el valor exacto y el aproximado mediante el incremento. Finalmente, el quinto renglón muestra el error relativo, el cual se define como el cociente entre el error absoluto y el valor exacto, el cual se expresa, generalmente, como un porcentaje. Puede observarse que, tal y como se esperaba, el error es más pequeño conforme el espesor del anillo lo es.

Ejemplo 2.3 Ley del gas ideal[5]

La ecuación de estado del gas ideal o "perfecto", también llamada ley del gas ideal, relaciona la presión p, el volumen V y la temperatura T, de una masa m de un gas "ideal", mediante $pV = mRT$, donde R es una constante. Si consideramos además que m es

[5] Burghardt, p. 76

constante, entonces podemos expresar la temperatura, en función de la presión y el volumen del gas, mediante

$$T = \frac{1}{mR} pV$$

Si ahora suponemos que p y V experimentan incrementos infinitesimales dp y dV, respectivamente, entonces, el diferencial (incremento infinitesimal) de T será

$$dT = \text{nuevo valor de } T - \text{valor original de } T$$

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{mR}(p+dp)(V+dV) - \frac{1}{mR}pV \\ &= \frac{1}{mR}(pV + p\,dV + V\,dp + dp\,dV - pV) \\ &= \frac{1}{mR}(p\,dV + V\,dp + dp\,dV) \end{aligned}$$

Al despreciar el último término, por ser un infinitesimal de segundo orden, obtenemos finalmente:

$$dT = \frac{1}{mR}(p\,dV + V\,dp)$$

Diferencial por la izquierda y por la derecha: funciones diferenciables

Ahora bien, en la definición de diferencial de una función, dada por (2.2), no se hizo ninguna indicación sobre el signo del diferencial de la variable. Esto es porque, por un lado, suponemos que $dx > 0$, y por otro, porque, por lo general, el término principal de dy es el mismo, independientemente del signo de dx, o, lo que es lo mismo, el diferencial de la función, partiendo de a ($x_i = a$), tiene el mismo término principal que cuando el valor final de la variable es a.

Ejemplo 2.4

Si $y = x^2 + 3x$, $a \in \Re$ y $x_i = a$, entonces $x_f = a + dx$ y

$$\begin{aligned} dy &= f(a+dx) - f(a) = [(a+dx)^2 + 3(a+dx)] - (a^2 + 3a) \\ &= 2a\,dx + dx^2 + 3\,dx = (2a+3)\,dx + dx^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Si, en cambio, $x_f = a$, entonces, $x_i = a - dx$ y

$$\begin{aligned} dy &= f(a) - f(a-dx) = (a^2 + 3a) - [(a-dx)^2 + 3(a-dx)] \\ &= 2a\,dx - dx^2 + 3\,dx = (2a+3)\,dx - dx^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Observando las ecuaciones (1) y (2), tenemos que, efectivamente, el término principal de dy es el mismo "partiendo de a" que "llegando a a", pues en ambos casos es $(2a+3)dx$. Sin embargo, si consideramos una función definida por secciones, tendremos que, al considerar el punto donde la función cambia su regla de correspondencia, el diferencial podrá diferir, incluso en el término principal, según si el punto de interés es el inicial o el final.

Para tales situaciones, convendrá referirse al *diferencial izquierdo* y al *diferencial derecho*, (en un punto), los cuales estarán denotados, respectivamente, por $df_{-}(a)$ y $df_{+}(a)$, y definidos mediante

$$df_{-}(a) = f(a) - f(a - dx) \tag{2.3}$$

$$df_{+}(a) = f(a + dx) - f(a) \tag{2.4}$$

Se dirá que una función *f* es *diferenciable* en un punto, si los términos principales de los diferenciales izquierdo y derecho de *f*, en ese punto, son iguales.

Ejemplo 2.5 Campo eléctrico: esfera cargada uniformemente[6]

Puede probarse que el campo eléctrico producido por una esfera de radio *R*, cargada uniformemente, en un punto situado a una distancia r del centro de la esfera, está dado por:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qr}{R^3}, & r \le R \qquad \text{(1a)} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & r \ge R \qquad \text{(1b)} \end{cases}$$

donde q es la carga de la esfera.

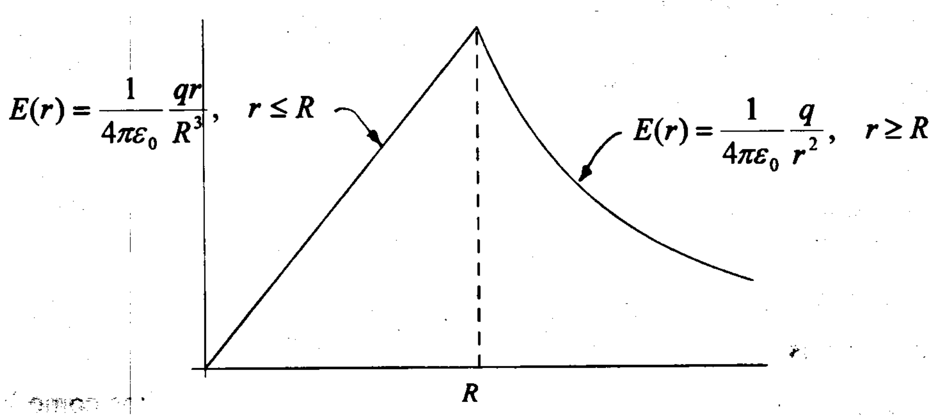


Fig. 2.2

Vamos a calcular la diferencia, en el valor del campo eléctrico, entre un punto de la esfera cargada, y otro cuya distancia al centro es infinitesimalmente mayor o menor que *R*.

Primeramente, si consideramos *R* como el valor final del radio, entonces, el valor inicial será $R - dr$, y el incremento correspondiente, en el valor del campo eléctrico, será

---

[6] Resnick, pp. 52-53.

$$dE_{-}(R) = E(R) - E(R - dr)$$

Haciendo los cálculos correspondientes, utilizando la ecuación (1a), puesto que $r \leq R$, tenemos que

$$dE_{-}(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qR}{R^3} - \frac{q(R-dr)}{R^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qR - qR + q\,dr}{R^3}\right)$$

$$dE_{-}(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}dr \qquad \text{(2a)}$$

Análogamente, considerando R como el valor inicial del radio, el valor final será $R + dr$. Utilizando ahora la ecuación (1b), el correspondiente incremento en el valor del campo eléctrico, será

$$dE_{+}(R) = E(R + dr) - E(R)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(R+dr)^2} - \frac{q}{R^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R^2 - (R+dr)^2}{R^2(R+dr)^2}\right]$$

$$dE_{+}(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2R\,dr - dr^2}{R^2(R+dr)^2}\right]$$

Despreciando dr^2 en el numerador (por ser un infinitesimal de orden 2), y dr en el denominador (por ser infinitamente pequeño respecto de R), obtenemos

$$dE_{+}(R) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}dr \qquad \text{(2b)}$$

A partir de las ecuaciones (2a) y (2b), puede concluirse, primeramente, que la función $E(r)$ no es diferenciable en $r = R$. Además, los diferenciales izquierdo y derecho difieren en signo, por lo que podemos decir que, en ese punto (ver figura 2.2), la curva "llega creciendo" (porque el incremento es positivo) y "sale decreciendo" (porque entonces el incremento es negativo), lo que indica la presencia de un valor máximo de la función en ese punto.

Tabla de diferencias

Supóngase que se cuenta con un conjunto de datos $w_1, w_2, ..., w_n$ escritos como la primera columna de una matriz, tal como se muestra en la tabla 2.2. A continuación se describe cómo se obtienen los elementos de las siguientes columnas de la matriz, a la que se llamará *tabla de diferencias*.

Primeramente, la segunda columna se forma con los incrementos de cada par de datos consecutivos de la primera columna, es decir,

$$\Delta w_1 = w_2 - w_1, \quad \Delta w_2 = w_3 - w_2, ..., \Delta w_n = w_{n+1} - w_n$$

O sea,

$$\boxed{\Delta w_i = w_{i+1} - w_i, \quad i = 1, 2, \ldots} \tag{2.5}$$

Por tal razón, ésta será llamada *columna de primeras diferencias*.

	Δ	Δ^2	Δ^3	...
w_1	Δw_1	$\Delta^2 w_1$	$\Delta^3 w_1$	...
w_2	Δw_2	$\Delta^2 w_2$	$\Delta^3 w_2$	...
w_3	Δw_3	$\Delta^2 w_3$	$\Delta^3 w_3$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
w_n	Δw_n	$\Delta^2 w_n$	$\Delta^3 w_n$	...

Tabla 2.2

La tercera columna se obtiene a partir de la segunda, de la misma manera que ésta se obtuvo de la primera, es decir:

$$\boxed{\Delta^2 w_i = \Delta(\Delta w_i) = \Delta w_{i+1} - \Delta w_i, \quad i = 1, 2, \ldots} \tag{2.6}$$

Como esta columna contiene los incrementos de los incrementos, es llamada *de segundas diferencias*. Los elementos de esta columna pueden obtenerse directamente de la primera, como se muestra a continuación:

$$\Delta^2 w_1 = \Delta w_2 - \Delta w_1 = (w_3 - w_2) - (w_2 - w_1)$$

$$\Delta^2 w_1 = w_3 - 2w_2 + w_1$$

En general,

$$\Delta^2 w_i = w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

El resto de las columnas, es decir, la de terceras diferencias y las siguientes, se obtienen de la misma manera. Así, la expresión general para cualquiera de los términos de la matriz, a partir de la segunda columna, se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\boxed{\Delta^k w_i = \Delta^{k-1} w_{i+1} - \Delta^{i-1} w_i, \quad i = 1, 2, \ldots \quad k = 1, 2, \ldots} \tag{2.8}$$

Ahora bien, de acuerdo con lo anterior, los elementos de cada columna de la matriz se obtienen recursivamente de la columna precedente, sin embargo, si sólo se cuenta con n elementos de la primera columna, sólo se podrán obtener $n - 1$ elementos de la columna de primeras diferencias, $n - 2$ de la de segundas diferencias, y así sucesivamente. De esta manera, lo que obtenemos es una matriz triangular.

Ejemplo 2.6

Vamos a construir la tabla de diferencias, partiendo de los valores de la función $y = e^x$ correspondientes a $x = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.

Los elementos de la primera columna serán e^0, $e^{0.2}$, ..., que se han calculado con seis cifras.

i	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	$e^0 = 1$	0.22140	0.04902	0.01086	0.00238	0.00058
2	$e^{0.2} = 1.22140$	0.27042	0.05988	0.01324	0.00296	
3	$e^{0.4} = 1.49182$	0.3303	0.07312	0.0162		
4	$e^{0.6} = 1.82212$	0.40342	0.08932			
5	$e^{0.8} = 2.22554$	0.49274				
6	$e^1 = 2.71828$					

Tabla 2.3

El resto de los elementos de la matriz se obtiene como se indicó anteriormente; así, por ejemplo, $\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 1.49182 - 1.22140 = 0.27042$, $\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 0.40342 - 0.3303 = 0.07312$, $\Delta^4 y_2 = \Delta^3 y_3 - \Delta^3 y_2 = 0.0162 - 0.01324 = 0.00296$, etc.

El caso más frecuentemente utilizado para la construcción de una tabla de diferencias es aquel en que la primera columna está constituida, como en el ejemplo anterior, por los valores de una función, para un conjunto de valores *equiespaciados* de la variable, es decir, la diferencia entre cada par de valores consecutivos de la variable es constante.

Puede probarse que, en el caso de una tabla de valores para una función polinomial de grado *n*, correspondiente a un conjunto de valores equiespaciados de la variable, la columna *n* es constante, de manera que todos los elementos de las siguientes columnas son ceros. Vamos a mostrar esto con un ejemplo, y después se probará para el caso de un polinomio cuadrático.

Ejemplo 2.7

La 2.4 es la tabla de diferencias de la función $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$, considerando los valores de la función correspondientes a $x = 0, 1, 2, \ldots, 6$.

Obsérvese que los elementos de la columna de segundas diferencias corresponden a una función lineal (forman una progresión aritmética), de manera que la columna de terceras diferencias es constante.

Supongamos, ahora, que se va a calcular la tabla de diferencias de un polinomio cuadrático definido mediante $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, considerando un conjunto equiespaciado de valores de x con valor inicial x_0 e incremento constante h. De esta manera, los valores de la variable serán $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots$, es decir

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

i	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	$f(0) = 3$	2	10	6	0
2	$f(1) = 5$	12	16	6	0
3	$f(2) = 17$	28	22	6	0
4	$f(3) = 45$	50	28	6	
5	$f(4) = 95$	78	34		
6	$f(5) = 173$	112			
7	$f(6) = 285$				

Tabla 2.4

Por lo tanto, los elementos de la primera columna de la tabla serán:

$$y_i = f(x_i) = f(x_0 + ih), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Es decir

$$y_i = a(x_0 + ih)^2 + b(x_0 + ih) + c, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Los elementos de la columna de segundas diferencias, de acuerdo con la ecuación (2.7), serán

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i = {} & a[x_0 + (i+2)h]^2 + b[x_0 + (i+2)h] + c \\ & - 2a[x_0 + (i+1)h]^2 - 2b[x_0 + (i+1)h] - 2c \\ & + a[x_0 + ih]^2 + b[x_0 + ih] + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i = {} & (a - 2a + a)x_0{}^2 + [2ah(i+2) + b - 4ah(i+1) - 2b + 2ahi + b]x_0 + \\ & + a(i+2)^2 h^2 + b(i+2)h + c - 2a(i+1)^2 h^2 - 2b(i+1)h - 2c + \\ & + ai^2 h^2 + bih + c\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_i = 2ah^2$$

Así pues, como esta expresión sólo depende del coeficiente del término cuadrático y del espaciamiento (constante) entre los valores de las variables, concluimos que los elementos de la columna de segundas diferencias son iguales entre sí.

Diferenciales de orden mayor

Si se define un *diferencial de segundo orden* como el diferencial del diferencial, entonces tenemos que, partiendo de $x = a$,

$$d^2 f(a) = d(df(a)) = d(f(a+dx) - f(a)) =$$
$$= [f(a+dx+dx) - f(a+dx)] - [f(a+dx) - f(a)]$$
$$d^2 f(a) = f(a+2dx) - 2f(a+dx) + f(a) \qquad (2.9)$$

Esta ecuación es equivalente a (2.7), considerando que, en este caso, el espaciamiento (infinitesimal) de la variable es constante (igual a dx), lo cual era de esperar, ya que un diferencial no es más que un incremento infinitesimal.

De la misma manera en que se ha definido el diferencial de segundo orden, pueden definirse diferenciales de orden mayor (3, 4, 5,...). En la segunda unidad de este texto, se verá cómo utilizar estos infinitesimales, mientras tanto, en el siguiente ejemplo podrá observarse una característica importante de estos diferenciales.

Ejemplo 2.8

El volumen de una esfera de radio r está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Aplicando la ecuación (2.9), tenemos que el diferencial de orden dos, o segundo diferencial del volumen, partiendo de un valor inicial r del radio, es

$$d^2V(r) = V(r+2dr) - 2V(r+dr) + V(r) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi(r+2dr)^3 - (2)\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$d^2V(r) = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 6r^2dr + 12r\,dr^2 + 8\,dr^3$$
$$-2r^3 - 6r^2dr - 6r\,dr^2 - 2dr^3 + r^3)$$
$$d^2V(r) = \frac{4}{3}\pi(6r\,dr^2 + 6\,dr^3)$$

Finalmente, eliminando el diferencial de orden mayor, tenemos

$$d^2V(r) = 8\pi r\,dr^2$$

Obsérvese que el segundo diferencial de V es un infinitesimal de orden dos, respecto de dr. Ésta es una característica que se observará en cualquier diferencial de orden mayor: el diferencial de orden *n*, de una función, es un infinitesimal de orden *n*, respecto del diferencial de la variable.

2.1 Ejercicios

1. Calcular $df(a, dx)$ para cada una de las funciones dadas y el valor indicado de la variable.

   a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $a = 1$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 3.5$

   c) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 2$

2. Para cada una de las funciones con regla de correspondencia dada, indicar si es, o no, diferenciable en $x = 0$.

   a) $f(x) = |x|$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   c) $f(x) = x^3$

   d) $f(x) = x^{2/3}$

   Sugerencia: obsérvese que, si $a = 0$, y $f(a) = f(0) = 0$, entonces, las ecuaciones (2.3) y (2.4) indican que $df_-(0) = -f(-dx)$ y $df_+(0) = f(dx)$, así que f es diferenciable en $x = 0$ si $f(-dx) = -f(dx)$, es decir, si f es impar.

3. Recuérdese que el volumen de una esfera de radio *r*, es $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

   a) Calcular el diferencial del volumen de la esfera, correspondiente a un incremento infinitesimal *dr* del radio.

   b) ¿Cuál es el incremento en el volumen de la esfera, si el radio experimenta un incremento finito Δr?

   c) Calcular el error relativo cometido al aproximar el incremento por medio del "diferencial", es decir, despreciando los términos de orden mayor en la expresión obtenida el inciso anterior, si $\Delta r = 0.1r$ y si $\Delta r = 0.01r$.

4. Considerando la función $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, con x medido en radianes, obtener la tabla de diferencias partiendo de los valores de la función correspondientes a $0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$ y $\pi/2$.

2.2 Continuidad: definición y tipos de discontinuidad

Hay dos situaciones, en las ciencias básicas y de la ingeniería, en las que la continuidad resulta sumamente importante. La primera tiene lugar cada vez que se considera, por ejemplo, una pieza metálica como constituida totalmente de materia, sin huecos, aun cuando, a niveles microscópicos, la materia (del metal) ocupe sólo una parte del espacio. En estos casos, la suposición de la pieza como un medio continuo de materia es útil para la obtención de algunos resultados cuya validez importa sólo en una escala macroscópica.

La segunda situación se presenta al suponer que una pequeña variación en alguna de las variables que intervienen en un fenómeno produce variaciones, también pequeñas, en el resto. En tal caso diremos que las variables presentan una variación continua. Esto será estudiado con detalle más adelante.

Ahora bien, todos tenemos una idea intuitiva respecto de la continuidad en un contexto gráfico, pudiendo distinguir, por lo tanto, una curva continua de una que no lo es. Así por ejemplo, si analizamos las curvas mostradas en la figura 2.3, podemos afirmar que solamente la curva *a* es continua, el resto presenta alguna discontinuidad. Esto es, puede identificarse a las curvas continuas como aquellas que constan "de una sola pieza".

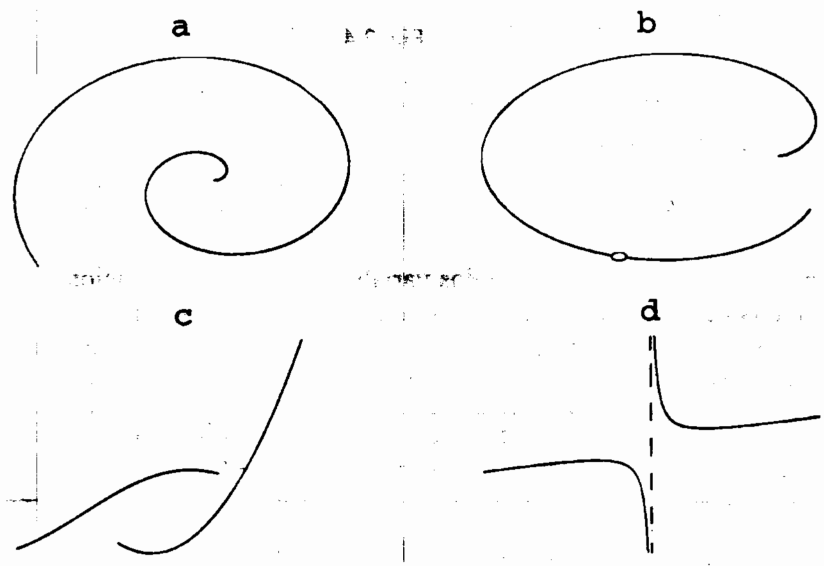


Fig. 2.3

Cuando se hable de una función, se dirá que ésta es continua si su gráfica lo es. Interesa, entonces, poder identificar cuándo una función es continua, conociendo su gráfica o su regla de correspondencia. Para ello consideremos ahora las curvas mostradas en la figura 2.4, todas las cuales son gráficas de funciones reales.

En este caso, nuevamente, sólo una de las curvas es continua, la *a*, el resto son discontinuas. La *d*, por ejemplo, muestra un comportamiento *asintótico*, como el de una hipérbola, la b muestra un *hueco* y la c muestra un *salto*. Éstos son los tres tipos de discontinuidad que aquí se estudiarán.

Si una curva consta de "dos o más piezas", pero cada una de estas piezas es continua y entre éstas no se presenta ninguna discontinuidad de tipo asintótico, diremos que la curva, y por lo tanto la función que la define, es *continua por secciones*.

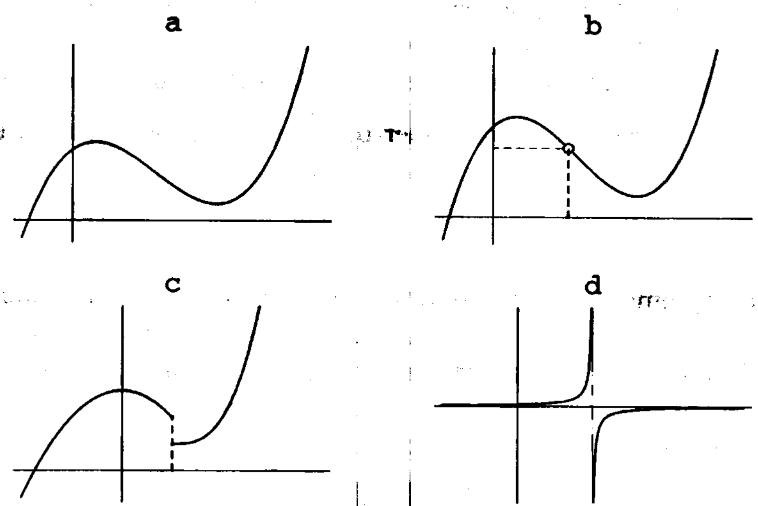


Fig. 2.4

De esta manera, las curvas b y c, mostradas en la figura 2.4, corresponden a gráficas de funciones continuas por secciones.

Continuidad: definición

Como se indicó previamente, se dirá que dos variables guardan una relación de variación continua, entre sí, cuando una pequeña variación en una de ellas produzca una variación, también pequeña, en la otra. La siguiente definición corresponde a los casos en que esta relación se conserva aun a niveles infinitesimales:

En una función continua, a un cambio (incremento) infinitesimal de la variable, corresponde un cambio también infinitesimal (o nulo) de la función.	(2.10)

Ejemplo 2.9

Siempre que dibujamos una parábola, la suponemos continua. Comprobaremos que esa suposición es correcta para el caso particular de la función definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. En el ejemplo siguiente se verá que tal afirmación es correcta para cualquier polinomio.

Tenemos pues, que si α es infinitesimal, entonces

$$\begin{aligned} f(a+\alpha) &= (a+\alpha)^2 + 2(a+\alpha) + 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 + \alpha(2a + \alpha + 2) \end{aligned}$$

$$= f(a) + \alpha(2a + 2 + \alpha)$$

$$= f(a) + \alpha(2a + 2) + \alpha^2 = f(a) + \text{ infinitesimal},$$

de manera que, como se esperaba, la función es continua para todo valor de a, es decir, en todo su dominio. Además, el incremento de la función es un infinitesimal de orden mayor al de la variable, sólo en el caso $a = -1$. Esto tiene un significado muy importante, que se analizará en el capítulo siguiente.

Ejemplo 2.10

Si $f(x) = cx^n$ con n natural y c real, y si α es infinitesimal, entonces,

$$f(a+\alpha) = c(a+\alpha)^n = c\left(a^n + na^{n-1}\alpha + \tfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n\right)$$

$$= ca^n + c\alpha\left(na^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}\right),$$

lo que permite concluir que f, y por lo tanto cualquier función polinomial, es continua para todo valor real de la variable, y su gráfica es de una sola pieza.

Obsérvese, además, que el diferencial de la función, o sea, el incremento de la función correspondiente al incremento infinitesimal α de la variable, sólo se anula en el caso de que $c = 0$ o $n = 0$, es decir, sólo si la función es constante.

Tipos de discontinuidad

Veremos ahora cómo identificar el tipo de discontinuidad que presenta una función a partir de su regla de correspondencia.

A. Discontinuidad asintótica

A partir de la figura 2.5 podemos observar que la función presenta discontinuidades asintóticas en $x = a$, $x = b$, $x = c$, y $x = d$. Ahora bien, podemos decir que si x está "muy cerca" de a, entonces $f(x)$ es "muy grande", de manera que si esperamos que este comportamiento se conserve, aun si nos situamos infinitamente cerca de a, tendremos que, si x está infinitamente cerca de a, es decir, si $|x - a|$ es infinitamente pequeño, entonces, $f(x)$ es infinitamente grande.

Dicho de otra forma, si α es infinitesimal, $f(a+\alpha)$ es infinitamente grande (y positivo).

Análogamente, podemos decir que si α es infinitesimal (y positivo),

$f(b-\alpha) = -M$ y $f(b+\alpha) = -N$, con N y M infinitamente grandes y positivos,

$f(c-\alpha) = M$ y $f(c+\alpha) = -N$, con N y M infinitamente grandes y positivos, y

$f(d-\alpha) = -M$ y $f(d+\alpha) = N$, con N y M infinitamente grandes y positivos.

Resumiendo, diremos que:

Una función f tiene una discontinuidad asintótica en $x = a$, si para α infinitesimal, $f(a-\alpha)$ y $f(a+\alpha)$ son infinitamente grandes (en valor absoluto).	(2.11)

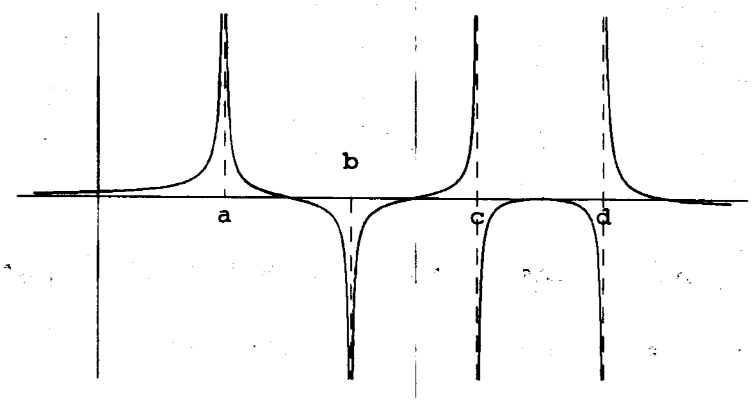


Fig. 2.5

Ejemplo 2.11

Si $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, reconocemos que la gráfica corresponde a una hipérbola cuya asíntota vertical se ubica en $x = 2$. En efecto, si α es infinitesimal, tenemos que

$$f(2+\alpha) = \frac{3}{(2+\alpha)-2} = \frac{3}{\alpha} = \begin{cases} -N, & si\ \alpha < 0 \\ N, & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

con N infinitamente grande, así que el comportamiento de f (como se esperaba) corresponde al de la función de la figura 2.5, en $x = d$.

Recordando el curso de geometría analítica del bachillerato, o recurriendo a una tabulación y teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos trazar fácilmente la gráfica de f, que se muestra en la figura 2.6.

x	0	1	3	4
$f(x)$	-3/2	-3	3	3/2

Tabla 2.5

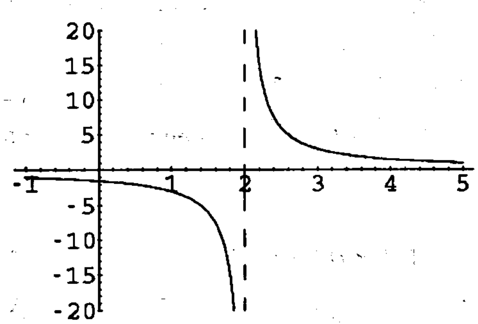


Fig. 2.6

Interesará en particular el caso en que la función esté definida como el cociente de dos funciones continuas.

Así pues, supóngase que f es una función definida por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P y Q funciones continuas en $x = a$, entonces,

$$f(a+\alpha) = \frac{P(a+\alpha)}{Q(a+\alpha)},$$

y por ser P continua en a, $P(a+\alpha)$ es finito. Supongamos además que $P(a+\alpha)$ no se anula en a, entonces, para que $f(a+\alpha)$ sea infinitamente grande (en valor absoluto), se requiere que

$$\frac{1}{f(a+\alpha)} = \frac{Q(a+\alpha)}{P(a+\alpha)}$$

sea infinitesimal, es decir, que $Q(a+\alpha)$ lo sea, lo cual ocurrirá siempre que $Q(a) = 0$ y Q sea continua en a.

Podemos resumir lo anterior, diciendo que:

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$, siendo P y Q funciones continuas en a, y si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$, entonces f tiene una discontinuidad asintótica en $x = a$.	(2.12)

Ejemplo 2.12

Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

Tenemos entonces, en este caso, que el denominador se anula cuando $x^2 + 2x = x(x+2) = 0$, es decir, si $x = 0$ o si $x = -2$. Además, como el numerador no se anula para ninguno de estos valores, concluimos entonces que la gráfica de f tiene asíntotas en $x = 0$ y en $x = -2$.

x	-4	-3	-3/2	-1	-1/2	1	2
$f(x)$	-5/8	-4/3	10/3	2	5/7	0	1/8

Tabla 2.6

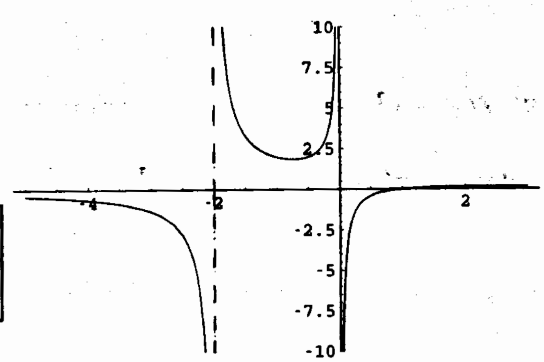


Fig. 2.7

Tomando en cuenta lo anterior y haciendo una breve tabulación, podemos trazar la gráfica de f (figura 2.7).

B. Discontinuidad de hueco

Sea f la función continua cuya gráfica se muestra en la figura 2.8a, y sea g la función que resulta de quitar de f el par $(a, f(a))$.

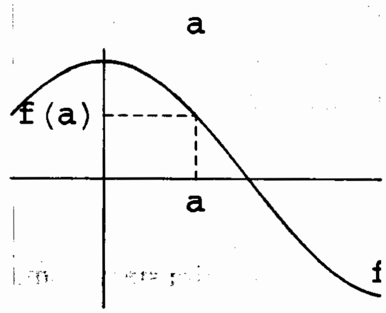


Fig. 2.8a

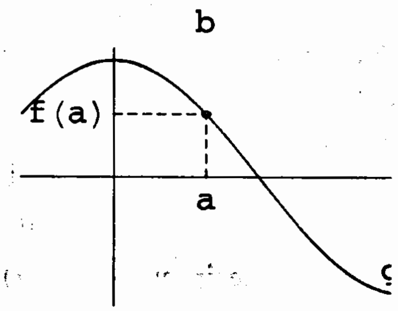


Fig. 2.8b

La gráfica de g será, entonces, idéntica a la de f, exceptuando el punto $(a, f(a))$, en cuyo lugar aparecerá un hueco (figura 2.8b). Ahora bien, resulta fácil "agujerar" una función continua en un valor deseado de la variable, según se describe a continuación.

Si f es una función continua y queremos "agujerarla" en $x = a$, definimos

$$g(x) = \frac{f(x)(x-a)}{x-a}$$

De esta manera, $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq a$, mientras que $g(a)$ no está definida, es decir, el punto $(a, f(a))$ no está en la gráfica de g. En otras palabras, la gráfica de g es la de f con un hueco en $x = a$, tal y como ocurre con las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 2.8.

Ejemplo 2.13

Si $f(x) = x^2 - 1$, y definimos $g(x) = \dfrac{(x^2-1)(x-2)}{x-2}$

entonces $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq 2$ y $g(2)$ no existe, mientras que $f(2) = 3$. Así pues, la gráfica de g es la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$ (ver figura 2.9), con un hueco en (2,3).

En general, si f es una función continua en $x = a$ y definimos

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{f(x)(x-a)}{x-a}$$

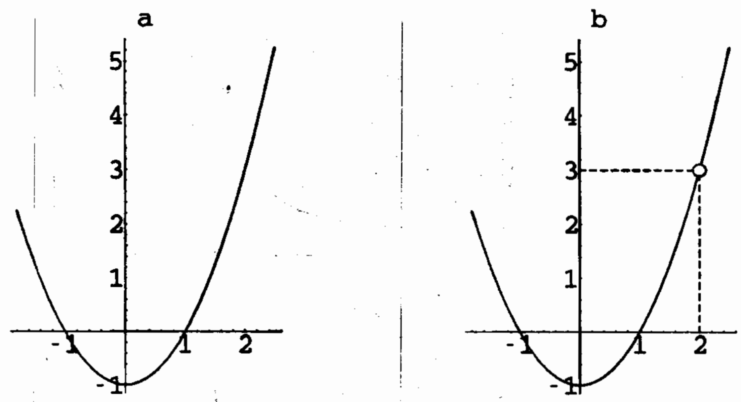


Fig. 2.9

entonces $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq a$, de manera que g presenta una discontinuidad de hueco en $x = a$. Obsérvese que $P(a) = Q(a) = 0$, es decir:

Si una función g está definida por un cociente de funciones continuas en $x = a$, si tanto el denominador como el numerador se anulan en a, y si esta función es idéntica a otra función f (que es continua en a), excepto en a, entonces g tiene una *discontinuidad de hueco* en $x = a$ y su gráfica es la misma que la de f, pero con un hueco en $(a, f(a))$.	(2.13)

Ejemplo 2.14

Sea $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ y sean $P(x) = x^2 - 1$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$.

Vemos que el denominador Q se anula si $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$, es decir, en $x = -3$ y en $x = 1$. Ahora bien, $P(-3) = 8$, así que g tiene una discontinuidad asintótica en $x = -3$.

Por otra parte, tenemos que $P(1) = 0$ y que

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+1}{x+3} \qquad \forall x \neq 1$$

Y como la función f definida por $f(x) = (x+1)/(x+3)$ es continua en $x = 1$ y $f(1) = 1/2$, entonces g tiene una discontinuidad de hueco en $x = 1$ y su gráfica un hueco en (1, ½).

Tomando en cuenta lo anterior, y haciendo una tabulación, podemos trazar la gráfica de g, como se muestra en la figura 2.10.

X	$f(x)$
-5	2
-4	3
-2	-1
-1	0
2	3/5

Tabla 2.7

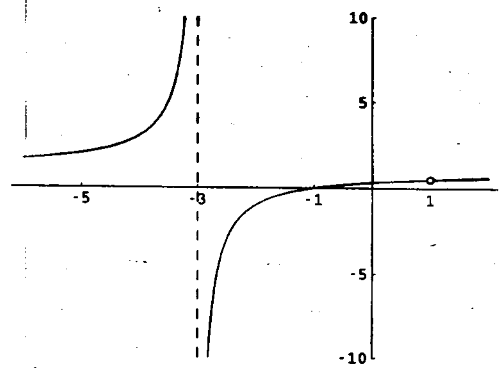


Fig. 2.10

Debe tomarse en cuenta que si f es una función definida mediante el cociente

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

y si $P(a) = Q(a) = 0$, entonces podemos afirmar que la función presenta una discontinuidad de hueco, sólo si podemos asegurar que f es idéntica a otra función ϕ, excepto en a, y que esta función ϕ es continua en a. De hecho,

> Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ y si $P(a) = Q(a) = 0$, no puede afirmarse nada acerca del comportamiento de la función alrededor de a. En este caso diremos que se presenta la *forma indeterminada* $0/0$.

Por ejemplo, si consideramos las funciones

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2x},\ f_2(x) = \frac{3x^2}{5x^2} \text{ y } f_3(x) = \frac{5x^2}{x^3}$$

entonces, cada numerador y cada denominador se anulan para $x = 0$. Sin embargo, para $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \frac{x}{2},\ f_2(x) = \frac{3}{5} \text{ y } f_3(x) = \frac{5}{x},$$

de manera que la gráfica de f_1 es una recta con pendiente ½ y un hueco en (0,0), y la de f_2 es una recta horizontal con un hueco en (0, 3/5), mientras que la de f_3 es una hipérbola con una de sus asíntotas en $x = 0$.

El arco y la cuerda de un ángulo central pequeño se confunden

Consideremos ahora un caso muy particular, el de la función definida por:

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad (x \text{ en radianes})$$

Observemos, primeramente, que el numerador y el denominador son funciones continuas, así que la función es discontinua solamente en $x = 0$, para el cual se presenta la forma indeterminada $0/0$. Por otra parte, tenemos que:

$$\phi(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \phi(x),$$

de manera que ϕ es par y su gráfica es simétrica respecto del eje Y. Así pues, bastará con analizar el comportamiento de ϕ para valores infinitesimales y positivos.

Ahora bien, en este caso, y por el momento, no tenemos manera de saber si hay un factor x en el numerador, sin embargo, si utilizamos valores pequeños de la variable, podemos tener una idea de cuál es el valor de la función para valores infinitesimales de la variable:

x	$\phi(x)$
0.1	0.99833416
0.01	0.99998333
0.001	0.99999983
0.0001	0.99999999

Tabla 2.8

Así pues, a partir de la tabla 2.8 podemos observar que, conforme x es más pequeño, el valor de ϕ es cada vez más próximo a 1, lo cual nos lleva a inferir que si α es infinitesimal,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1 + \beta \qquad \text{(a)}$$

donde β es también infinitesimal, lo cual indicaría que la función tiene una discontinuidad de hueco para $x = 0$, y que el hueco corresponde al punto (0, 1).

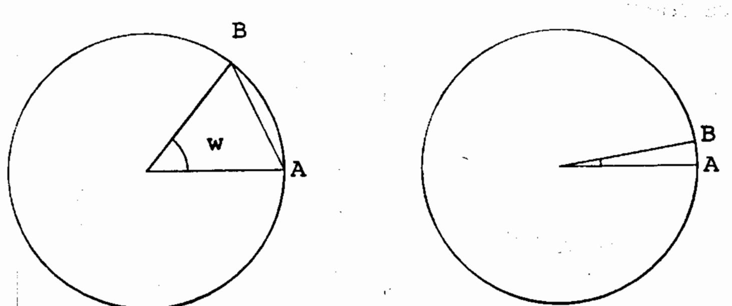


Fig. 2.11a Fig. 2.11b

Ahora vamos a considerar el problema gráficamente. En la fig. 2.11a se tiene una circunferencia de radio a en la que se muestra un ángulo central de magnitud w (en radianes), que intersecta a la circunferencia en A y B. Las magnitudes del segmento rectilíneo y del arco de la circunferencia con extremos en A y B son:

$$\overline{AB} = 2a\,sen(w/2) \qquad \text{y} \qquad \widehat{AB} = aw$$

Ahora bien, la figura 2.11b. sugiere que

Para valores pequeños del ángulo w, el arco y la cuerda se confunden.	(2.14)

Es decir, si $w \approx 0$, $\overline{AB} \approx \widehat{AB}$, o bien,

$$2a\,\text{sen}(w/2) \approx aw, \quad \text{sen}(w/2) \approx w/2,$$

lo que también puede interpretarse como:

Si un ángulo es pequeño (y está medido en radianes) éste se confunde con su seno.	(2.15)

Lo que nos lleva a inferir entonces que, si x (medidos en radianes) es infinitesimal, entonces $\text{sen}\, x = x + \lambda$, siendo λ un infinitesimal de orden mayor que x, lo cual es equivalente a (a).

Aun cuando lo anterior no es una demostración rigurosa, en adelante utilizaremos el resultado obtenido.

C. Discontinuidad de salto

Consideraremos este tipo de discontinuidades únicamente en funciones definidas "a trozos".

Ejemplo 2.15

Si f es la función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & si\ x<1 \\ \sqrt{x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

entonces su gráfica consistirá de la parte de la recta $y = x - 2$ que está a la izquierda de la recta $x = 1$ (sin incluir el punto (1,-1)) y de la parte de la semiparábola $y = \sqrt{x}$ que está a la derecha de la misma recta (incluyendo el punto (1,1)), como se muestra en la figura 2.12.

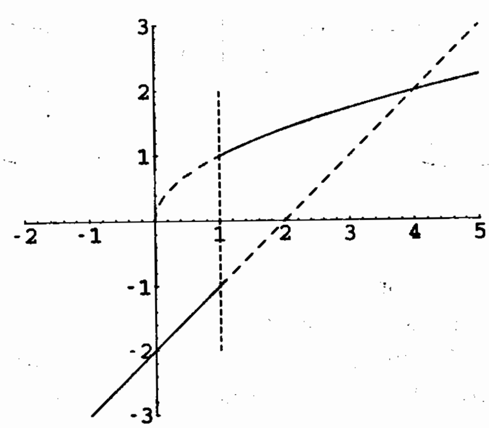


Fig. 2.12

Observemos que la gráfica tiene un "salto" entre los puntos (1,-1) y (1,1). Podemos decir, entonces, que si "leemos" la gráfica en el sentido creciente de los valores de x, es decir, de izquierda a derecha, un punto en ésta se mueve (desde "menos infinito") sobre la recta hasta que el valor de x es 1, en donde "salta" a la semiparábola.

Es claro que la función puede "redefinirse" de manera que ahora sí resulte continua, para lo cual podemos "subir" la recta o "bajar" la semiparábola.

En general, podemos definir una función mediante dos o más reglas de correspondencia; aplicándose cada una de ellas a diferentes subconjuntos del dominio:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & si \quad x<a_1 \\ f_2(x) & si \quad a_1\le x<a_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & si \quad a_{n-1}\le x<a_n \end{cases} \tag{2.16}$$

La gráfica de esta función está constituida por: la parte de la gráfica de f_1 que corresponde al intervalo $\langle -\infty, a_1\rangle$, la parte de la gráfica de f_2 que corresponde al intervalo $[a_1, a_2\rangle$, etc.

En tal caso, si conocemos el comportamiento de cada una de las secciones, el análisis de la continuidad de f se complementará observando si se dan saltos en cada uno de los valores de la variable en los que la función cambia de regla de correspondencia.

Si f es una función real y si α es infinitesimal positivo, usaremos la siguiente notación:

$$f_-(a)=f(a-\alpha) \;\text{ y }\; f_+(a)=f(a+\alpha) \tag{2.17}$$

de manera que si f está definida por (2.16), y si cada una de las funciones f_i son continuas, entonces,

$$f_-(a_i)=f_i(a_i-\alpha)=f_i(a) \;\text{ y }\; f_+(a_i)=f_{i+1}(a_i+\alpha)=f_{i+1}(a_i)$$

y en tal caso, f tendrá una discontinuidad de salto en $x=a_i$ si $f_-(a_i)\neq f_+(a_i)$.

Ejemplo 2.16

Si ϕ es la función definida por

$$\phi(x)=\begin{cases} 3-x^2, & x\le 1, \\ x+1, & 1<x\le 3, \\ 3-x, & x>3 \end{cases}$$

entonces, cada una de las funciones que definen ϕ en cada sección es continua. Además, $\phi_-(1)=\phi_1(1)=3-1^2=2$ y $\phi_+(1)=\phi_2(1)=1+1=2$, así que ϕ es continua en 1, por otra parte, $\phi_-(3)=\phi_2(3)=3+1=4$ y $\phi_+(3)=\phi_3(3)=3-3=0$, de manera que ϕ tiene una discontinuidad de salto en $x=3$ (ver figura 2.13).

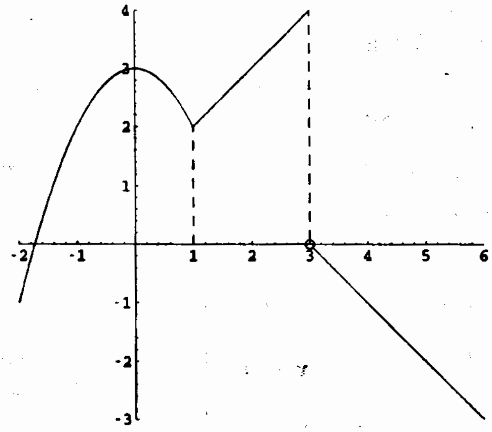


Fig. 2.13

2.2 Ejercicios

1-9. Para cada una de las funciones con regla de correspondencia dada,

a) Obtener el dominio.

b) Analizar la continuidad de la función, es decir, indicar en dónde ésta presenta discontinuidades y de qué tipo son.

c) Trazar la gráfica.

1) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 2) $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2+t}$

3) $w(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$ 4) $z(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{4x^2+4x+1}$

5) $h(t) = \dfrac{t+1}{|t+1|}$ 6) $p(x) = \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

7) $s(t) = 2t + \sqrt{25-t^2}$ 8) $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{x}, & x < -1 \\ \dfrac{2}{x}, & x > -1 \end{cases}$

9) $$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<1\\ x^2-1, & x\geq 1\end{cases}$$

10. Si el salario de una persona es de \$ 3,000.00 y se le garantiza un aumento de \$ 500.00 cada 6 meses,

    a) Escribir una expresión para el salario s de la persona, en términos del tiempo t transcurrido a partir de ahora, con t en meses.

    b) Trazar la gráfica de $s(t)$ para t entre 0 y 24.

    c) Analizar la continuidad de esta función en el intervalo indicado.

11. Obtener el valor de la constante c para el cual la función con regla de correspondencia dada sea continua en $\Re$ e interpretar gráficamente el resultado.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 1\\ 3x+c & x>1\end{cases}$$

12. Obtener el valor de la constante k para el cual la función con regla de correspondencia dada sea continua en $\Re$ e interpretar gráficamente el resultado.

$$f(x)=\begin{cases}kx+2, & x\leq 2\\ kx^2 & x>2\end{cases}$$

13. Obtener el valor de cada una de las constantes a y c para los cuales la función con regla de correspondencia dada sea continua en $\Re$ e interpretar gráficamente el resultado.

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\leq -2\\ ax^2+c, & -2<x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

2.3 Continuidad: graficación y propiedades

Con el objeto de obtener el trazo de la gráfica de una función, de una manera más o menos precisa, en la primera parte de esta sección vamos a utilizar los conceptos antes estudiados, relativos a la continuidad, y un procedimiento para la obtención de las asíntotas de una curva. En la segunda parte se estudiarán dos propiedades importantes de las funciones continuas, las cuales serán utilizadas en los siguientes capítulos.

Graficación

En la sección anterior se vio cómo identificar la presencia de una discontinuidad asintótica, lo que a su vez indicaba que la gráfica de la función tenía una asíntota vertical. Ahora vamos a ver un procedimiento para obtener asíntotas horizontales u oblicuas, e incluso asíntotas curvas.

Ejemplo 2.17 Caída libre[7]

En el curso de mecánica en bachillerato, se vio que la velocidad de un cuerpo en caída libre, está dada por $v = gt$, donde g es la aceleración de la gravedad y t el tiempo transcurrido a partir de que el cuerpo se deja caer.

De acuerdo con esta ecuación, el valor de la velocidad de caída crece indefinidamente con el tiempo. En realidad esta ecuación es correcta sólo si se desprecia la resistencia que opone el aire al movimiento del objeto. De hecho, puede demostrarse que, suponiendo que el aire ofrece una fuerza de fricción cuya magnitud es proporcional a la velocidad del cuerpo, el valor de la velocidad de caída, en términos del tiempo, estará dado por

$$v = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{gm}{k}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{k}{m}t}}\right)$$

donde m es la masa del objeto y k es una constante positiva.

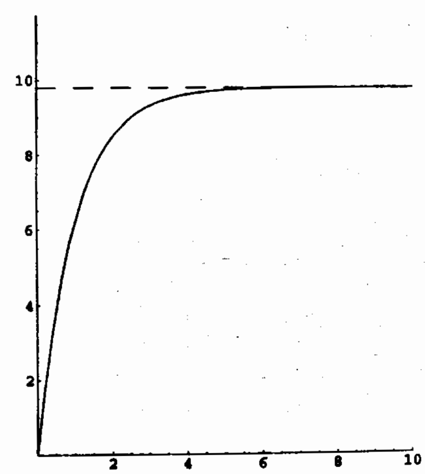


Figura 2.14

[7] Simmons, p. 30.

Obsérvese que el valor de la expresión exponencial, en el denominador de la fracción, crece indefinidamente conforme crece el tiempo, de manera que podría afirmarse que, si t es suficientemente grande, el recíproco de tal expresión puede despreciarse y el valor de la velocidad será, aproximadamente, $v = gm/k$.

Si consideramos un caso particular (utilizando el sistema de unidades MKS), digamos $k = 1$, $m = 1$, y, por supuesto, $g = 9.8$, de manera que $gm/k = 9.8$, y se traza la gráfica de v contra t, previa tabulación, se obtendrá una curva como la mostrada en la figura 2.14, en la que puede observarse claramente que, para valores de t mayores que 6, la curva no se distingue de la recta $v = gm/k = 9.8$.

La gráfica trazada, y un breve análisis de la expresión, parecen indicar que la recta $v = gm/k$ es una asíntota (horizontal) de la curva. Vamos a ver, a continuación, cómo llegar directamente a este resultado.

Asíntotas horizontales, oblicuas y curvas

En el curso de geometría analítica de bachillerato[8] se ha definido cuándo una recta es asíntota de una curva:

> "Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva".

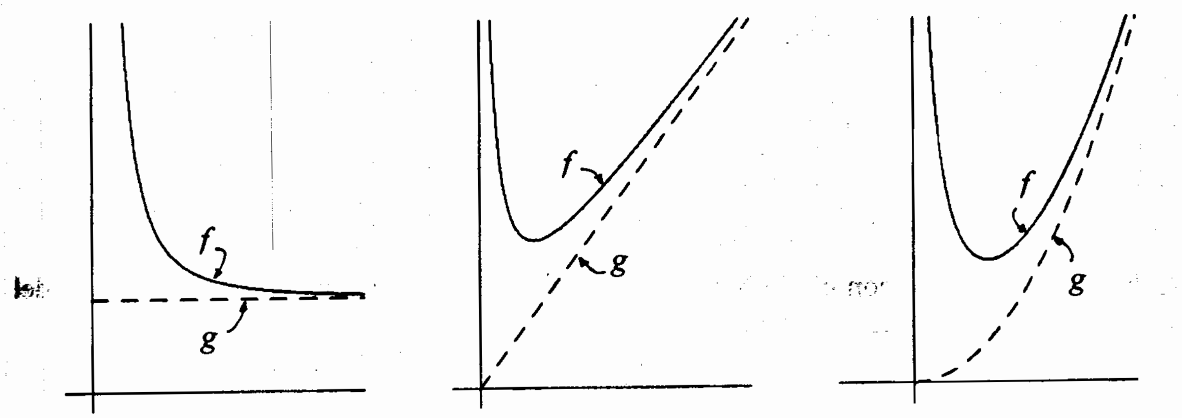


Fig. 2.15

A partir de esta definición, y considerando la figura 2.15, en la que cada una de las curvas "g" representan asíntotas de las curvas "f", definimos:

La gráfica de una función g es una *asíntota* de la gráfica de otra función f (y viceversa), si para N infinitamente grande, $f(N) - g(N)$ es infinitesimal.	(2.18)

[8] Ver Lehmann, p. 41.

Así pues, para obtener una asíntota de la gráfica de una función dada *f*, se calcula $f(N)$, con N infinitamente grande, reteniendo los términos infinitamente grandes y el real, de manera que la diferencia entre $f(N)$ y la expresión obtenida, es decir, $g(N)$, sea infinitesimal. Una vez obtenida la asíntota, y habiendo analizado la continuidad de la función, puede hacerse un trazo más o menos preciso de la gráfica de una función.

Ejemplo 2.18

Trazar la gráfica de la función definida mediante

$$y = h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Solución

En este caso, $D_h = \Re - \{-1,1\}$, y dado que el numerador no se anula para ningún valor de la variable, entonces la gráfica de h tiene asíntotas en $x = -1$ y en $x = 1$.

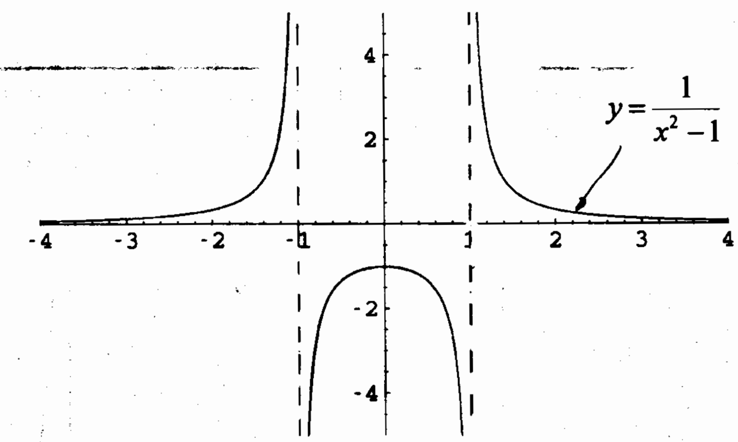


Fig. 2.16

No hay intersecciones con el eje X y h es par, así que su gráfica es simétrica respecto del eje Y. Por último, si N es infinitamente grande,

$$h(N) = \frac{1}{N^2 - 1} = \beta = 0 + \beta,$$

siendo β infinitesimal, de manera que otra asíntota de la gráfica de h es la recta $y = 0$ (eje X). Con toda esta información, podemos trazar la gráfica de h, la cual se muestra en la figura 2.16.

En general, si *f* es una función racional propia, tenemos que

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + \cdots + a_n}{b_0 x^m + \cdots + b_m}, \text{ con } n < m,$$

De manera que, siendo N infinitamente grande, y conservando en cada parte de la fracción sólo el término principal, se tiene que

$$f(N)=\frac{a_0N^n}{b_0N^m}=\frac{a_0/b_0}{N^{m-n}}=0+\text{ infinitesimal}$$

Es decir,

Si f es una ***función racional propia***, entonces, una asíntota de la gráfica de f es la recta $y=0$ (eje X).	(2.19)

Ahora bien, para una función racional impropia, se aplica el algoritmo de la división de polinomios:

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{D(x)}$, con $gr(P)\geq gr(D)$, entonces,

$$f(x)=\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{Q(x)\cdot D(x)+R(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)},\text{ con } gr(R)<gr(D),$$

de manera que, siendo N infinitamente grande:

$$f(N)=Q(N)+\frac{R(N)}{D(N)}=Q(N)+\text{ infinitesimal}$$

Es decir,

Si f es una *función polinomial impropia*, definida por $f(x)=P(x)/D(x)$, entonces una asíntota de f es el cociente (polinomio) que resulta de dividir P entre D.	(2.20)

Ejemplo 2.19

Trazar la gráfica de la función definida mediante

$$y=F(x)=\frac{x^2}{2x-1}$$

Solución

Tenemos que $D_F=\Re-\{½\}$, y dado que el numerador no se anula en ½ , entonces $x=½$ es una asíntota de la gráfica de F.

La única intersección de la gráfica de F con los ejes coordenados es el origen. Además, al hacer la división, obtenemos que

$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1/4}{2x-1}$$

de manera que, si N es infinitamente grande,

$$F(N) = \frac{N}{2} + \frac{1}{4} + \text{ infinitesimal,}$$

por lo tanto, otra asíntota de la gráfica de F es la recta

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

Con esta información, trazamos la gráfica de F, la cual se muestra en la figura 2.17.

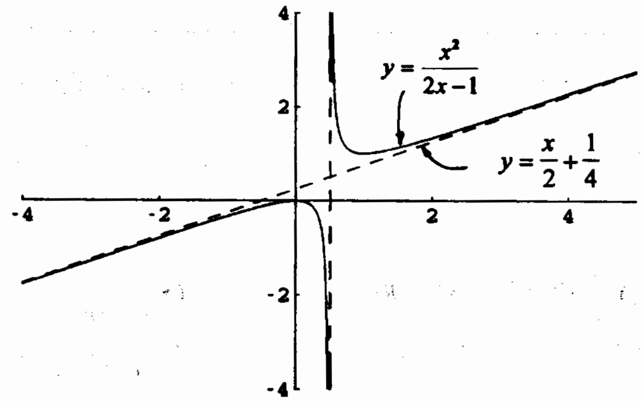


Fig. 2.17

Ejemplo 2.20

Trazar la gráfica de la función definida mediante

$$y = G(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

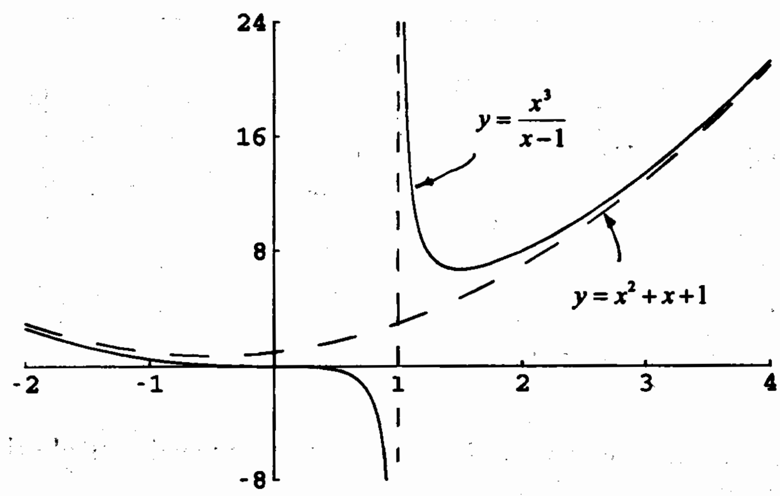


Fig. 2.18

Solución

En este caso, $D_G = \Re - \{1\}$, y considerando que el numerador no se anula en 1, entonces $x = 1$ es una asíntota de la gráfica de *G*. La única intersección de la gráfica de *G* con los ejes coordenados es el origen. Asimismo,

$$G(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1},$$

por lo tanto, otra asíntota de la gráfica de *G* es la parábola de ecuación $y = x^2 + x + 1$. Con esta información trazamos la gráfica de *G*, la cual se muestra en la figura 2.18.

Por otra parte, tratándose de funciones irracionales, podemos utilizar la serie binomial para calcular las asíntotas, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.21

Sea *f* la función definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3},$$

tenemos que

$$f(x) = (-x^3 + 2x^2)^{1/3} = \left[-x^3(1-2x^{-1})\right]^{1/3} = -x(1-2x^{-1})^{1/3}$$

así que si *N* es infinitamente grande —y por lo tanto $2x^{-1}$ infinitesimal—, entonces la condición para la convergencia de la serie binomial se cumple y

$$\begin{aligned} f(N) &= -N\left(1-2N^{-1}\right)^{1/3} \\ &= -N\left(1 - \frac{1}{3}(2N^{-1}) + \cdots\right) = -N + \frac{2}{3} + \text{ infinitesimal,} \end{aligned}$$

así que una asíntota de la gráfica de *f* es la recta $y = -x + 2/3$. En la unidad 2 veremos cómo obtener más información para trazar la gráfica de *f*.

Ejemplo 2.22

Recuérdese que las funciones hiperbólicas, seno y coseno, están dadas por

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Así pues, si *N* es infinitamente grande y positivo, entonces e^N es infinitamente grande y e^{-N} infinitesimal (ver figura 1.7), por lo que

$$\operatorname{senh} N = \frac{e^N}{2} - \text{ infinitesimal, } \quad \text{y} \quad \cosh N = \frac{e^N}{2} + \text{ infinitesimal}$$

Por lo tanto, $y = e^x / 2$ es una asíntota de la gráfica de f y también de la de g. Considerando además que f es impar y g par, pueden trazarse sus gráficas, las cuales se muestran en la figura 2.18.

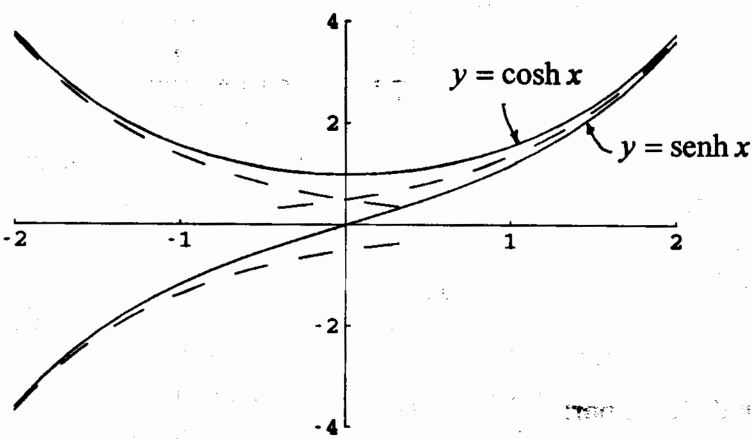


Fig. 2.19

Ejemplo 2.23 Potencial eléctrico: disco cargado uniformemente[9]

Considérese un disco cargado uniformemente. Si y es la distancia de un punto sobre el eje del disco al centro del mismo, puede probarse que el potencial eléctrico en ese punto está dado por

$$\phi(y) = 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2 + a^2} - y\right], \quad \text{para } y > 0 \qquad \text{(a)}$$

y

$$\phi(y) = 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2 + a^2} + y\right], \quad \text{para } y < 0 \qquad \text{(b)}$$

Se desea trazar la gráfica de $\phi(y)$.

Observando que (b) resulta de cambiar y por $-y$, y que (a) define el potencial para valores positivos de y, mientras que (b) lo hace para los valores negativos, podemos afirmar que la gráfica de la parte definida por (b) es la reflexión, con respecto del eje Y, de la gráfica de la parte definida por (a), de manera que sólo hará falta analizar el comportamiento del potencial para valores positivos de la variable y.

Ahora bien, un breve análisis de la ecuación (a) permite afirmar que la intersección con el eje de ordenadas ocurre en el punto $(0, 2\pi a\sigma)$ y que todos los valores del potencial son positivos, ya que $y^2 + a^2 > y^2$. Finalmente, para $y >> a$, se tiene que $a^2 / y^2 << 0$, de manera que, al expandir en serie la expresión irracional, se obtiene

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - y =$$

[9] Purcell, pp. 43-45.

$$= y\left[\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}}-1\right] = y\left[1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2}+o\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2-1\right]$$

Así que, para $y >> a$,

$$\sqrt{y^2+a^2}-y \approx y\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2}\right) = \frac{a^2}{2y}$$

Por lo tanto, una asíntota de la gráfica de $\phi(y)$ es la hipérbola $\phi = \pi a^2\sigma / y$.

Con esta información, y haciendo una breve tabulación, asignando previamente valores particulares a las constantes a y σ, puede trazarse la gráfica del potencial, la cual se muestra en la figura 2.20 (esta gráfica fue trazada con $a = 1$ y $\sigma = 1$).

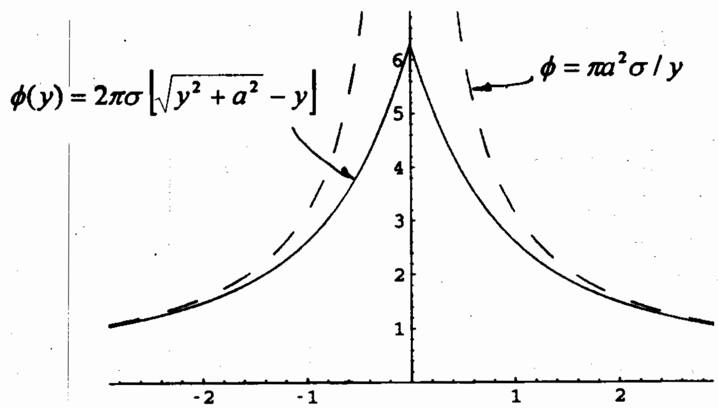


Fig. 2.20

Comportamiento oscilante y asintótico oscilante

El comportamiento asintótico observado en los ejemplos anteriores puede denominarse *unilateral*, en el sentido de que, a partir de un determinado valor de la variable, la gráfica de la función no intersecta la asíntota, es decir, permanece del mismo lado de ésta. En este caso, $f(x) - g(x)$ tiene el mismo signo a partir del valor mencionado.

Si en cambio la curva intersecta a la asíntota infinitas veces, de manera que $f(x) - g(x)$ cambia alternativamente de signo, diremos entonces que la función presenta un *comportamiento asintótico oscilante*. Éste se presenta, por ejemplo, cuando la regla de correspondencia de la función es un producto, uno de cuyos factores corresponde a una función de naturaleza oscilante (digamos seno o coseno), y el otro a una función que observe un comportamiento asintótico unilateral.

Antes de ver un ejemplo en el que se presente este comportamiento, consideraremos primeramente el caso en que la gráfica de una función oscila entre otras dos, el cual se presenta, por ejemplo, cuando *f* es una función definida por

$$f(x) = g(x)\operatorname{sen} x, \text{ tal que } g(x) \geq 0 \text{ para toda } x.$$

En tal caso, considerando que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, tenemos que $-g(x) \leq g(x)\operatorname{sen} x \leq g(x)$, es decir,

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

de manera que la gráfica de *f* oscilará de acuerdo con la senoidal, entre las gráficas de -*g* y *g*, intersectando el eje X en $x = n\pi,\ n \in \mathbf{E}$, la gráfica de *g* en $x = \pi/2+2n\pi,\ n \in \mathbf{E}$, y la de -*g* en $x = 3\pi/2+2n\pi,\ n \in \mathbf{E}$, tal y como se muestra en la figura 2.21.

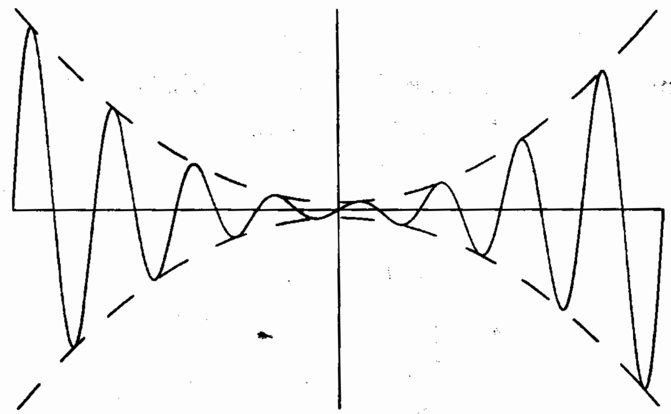


Fig. 2.21

Ejemplo 2.24

Trazar la gráfica de la función definida por

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}$$

Solución

Tenemos que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, así que $D_g = D_f = <-\infty, 1>$

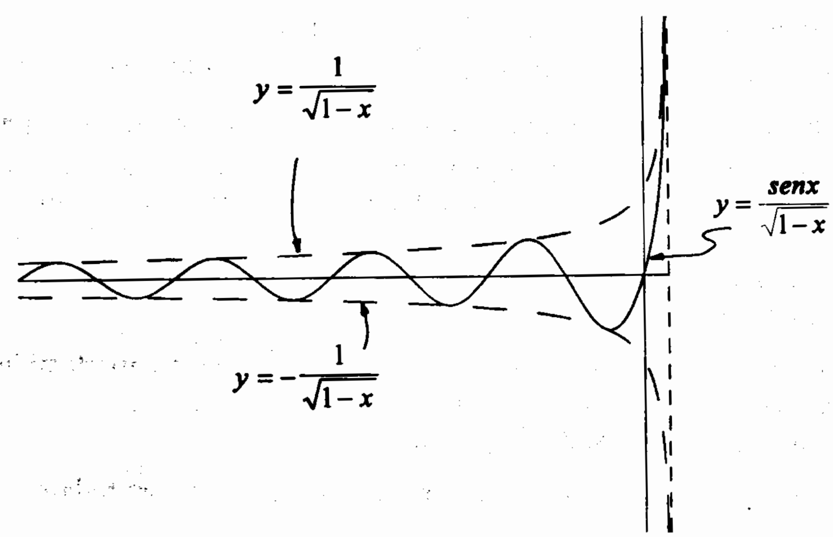


Fig. 2.22

Ahora, siendo N infinitamente grande, y α infinitesimal (ambos positivos), tenemos entonces que

$$g(-N)=\frac{1}{\sqrt{1-(-N)}}=\frac{1}{\sqrt{1+N}}=\beta \quad \text{(infinitesimal)}$$

y

$$g(1-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\alpha)}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=M \quad \text{(infinitamente grande)}$$

Así que $y = 0$ y $x = 1$ son asíntotas de la gráfica de f. Además, ésta oscila asintóticamente entre las gráficas de $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ y $y=-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Con toda esta información, podemos trazar la gráfica de f, la cual se muestra en la figura 2.22.

Ejemplo 2.25

Trazar la gráfica de la función definida por

$$y=s(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Solución

Tenemos que $D_s = \Re - \{0\}$ y según lo visto en el capítulo anterior, sabemos que la gráfica de s tiene un hueco en (0, 1). En este caso la gráfica oscilará entre las hipérbolas $y=-1/x$ y $y=1/x$. Podemos entonces trazar la gráfica de s, la cual se muestra en la figura 2.23.

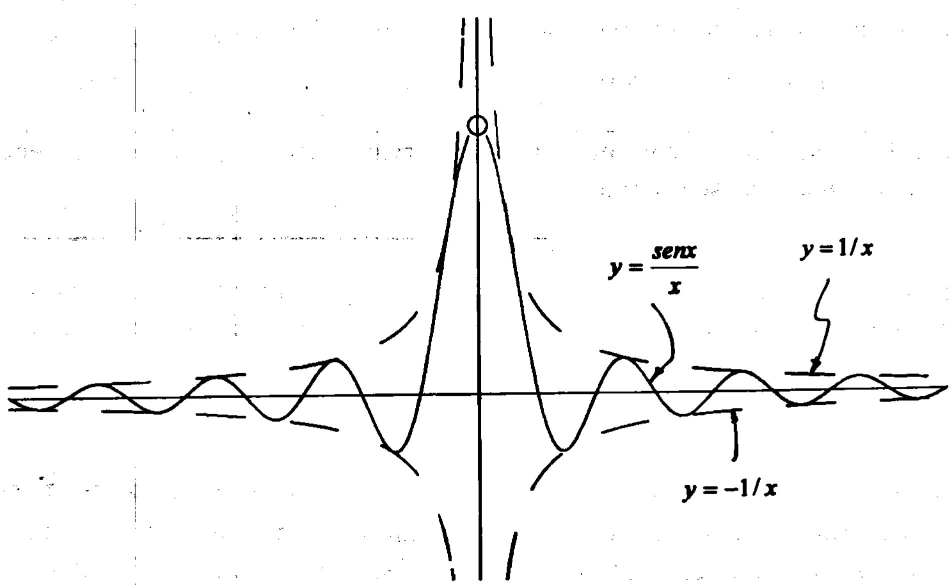


Fig. 2.23

Propiedades de las funciones continuas

Para finalizar con el estudio de la continuidad, se mencionarán algunas propiedades de las funciones continuas que serán utilizadas más adelante.

Funciones continuas y valores extremos

Si f es una función real, definida en un intervalo I, diremos que *f tiene un valor máximo en* $c \in I$, si para todo $x \in I$, $f(c) \geq f(x)$.

Análogamente, si f es una función real, definida en un intervalo I, diremos que *f tiene un valor mínimo en* $c \in I$, si para todo $x \in I$, $f(c) \leq f(x)$.

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo se conocen como *valores extremos* de la función en el intervalo.

Las definiciones anteriores pueden extenderse a todo el dominio de la función, el cual puede ser, inclusive, el conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.26

a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$, entonces, el valor máximo de f es 1, para $x = -3\pi/2$ y para $x = \pi/2$, mientras que el valor mínimo de f es -1 para $x = -\pi/2$ y para $x = 3\pi/2$.

b) Sea $g(x) = e^{-x}$, $x \in [0,1]$, entonces, el valor máximo de g es 1 para $x = 0$, mientras que el valor mínimo de f es $1/e$ para $x = 1$.

c) Sea $h(x) = x^2 - 1$, $x \in [-3,2]$, entonces, el valor máximo de h es 8 para $x = -3$, mientras que el valor mínimo de f es -1 para $x = 0$.

d) Sea $H(x) = x^2 - 2$, entonces, el valor mínimo de H es -2 cuando $x = 0$, pero H no tiene valor máximo en su dominio (conjunto de los números reales).

Considerando las definiciones anteriores, tenemos que

Si una función real es continua en un intervalo (cerrado), entonces, tiene valores extremos en ese intervalo.	(2.21)

Las funciones f, g y h de los incisos a, b y c, del ejemplo anterior, satisfacen la condición (2.21), por lo que tienen valores extremos en el intervalo indicado. Ahora bien, es claro que si la función no es continua en el intervalo cerrado, ya sea porque presenta discontinuidades para valores intermedios, o porque no es continua en alguno de los extremos, entonces no puede asegurarse que la función tenga valores extremos en el intervalo.

Así, por ejemplo, la función definida por $\alpha(x) = \cos x$, $x \in <0, \pi/2>$ no tiene valores extremos en el intervalo, es decir, no tiene ni un valor máximo ni uno mínimo en el intervalo. Lo mismo ocurre con la función definida por $\beta(x) = 1/x$, $x \in [-2,2]$, $x \neq 0$.

Teorema del valor intermedio

Ésta es una propiedad que presentan las funciones continuas y que tiene algunas aplicaciones importantes. Simbólicamente se puede expresar como sigue:

Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces, para todo número z, entre $f(a)$ y $f(b)$, existe otro número c, en el intervalo $[a,b]$, tal que $f(c)=z$.	(2.22)

En otras palabras,

> Una función continua en un intervalo cerrado toma todos los valores contenidos en el intervalo cuyos extremos son las imágenes de los extremos del intervalo.

La figura 2.24 ilustra el teorema. La gráfica de cualquier función continua deberá cortar la recta $y = z$, al menos una vez en "su camino", desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$.

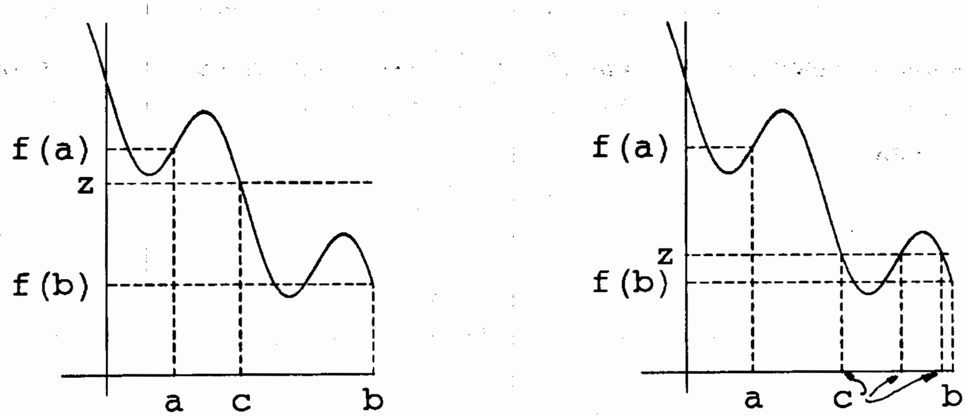


Fig. 2.24

Como caso particular, y que tiene aplicaciones importantes, sobre todo para la solución de ecuaciones, tenemos que,

> Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces, la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $< a, b >$.

La figura 2.25 ilustra la propiedad anterior. Si f es una función continua y cambia de signo entre dos valores dados de la variable, entonces, debe anularse al menos una vez en el intervalo.

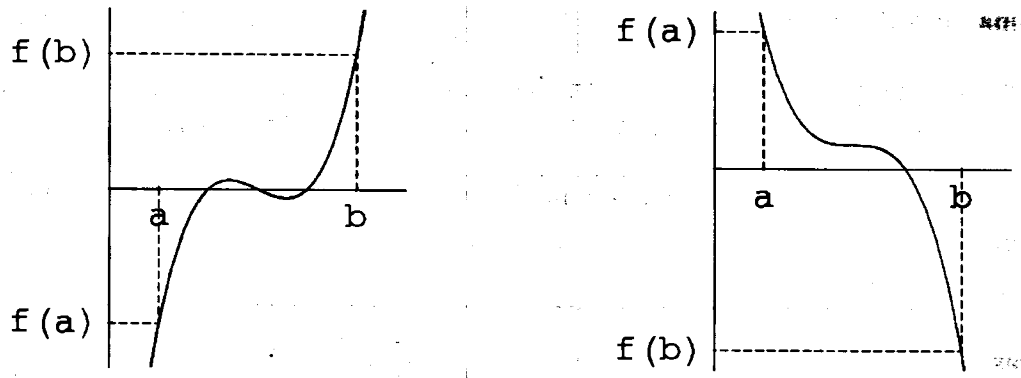


Fig. 2.25

Ejemplo 2.27

a) La función $f(x) = \cos x - x$ es continua en $\Re$, además, $f(0) = 1$ y $f(1) = \cos 1 - 1 < 0$, así que la ecuación $\cos x - x = 0$ tiene al menos una raíz entre 0 y 1.

b) Si P es un polinomio de grado impar, entonces tiene al menos un cero real.

En efecto, tenemos que $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots$, y sabemos además que para valores "grandes" (en valor absoluto) de x, $P(x)$ se comporta como su término de grado mayor, entonces existen números reales x_1 y x_2 (de signos diferentes) tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos diferentes y como todo polinomio es una función continua en $\Re$, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz real.

La propiedad anterior puede utilizarse, entre otras cosas, para "encerrar" una raíz real de una función que satisface las condiciones indicadas, es decir, para calcular dicha raíz con cualquier precisión predeterminada.

Bisección e *interpolación lineal*, entre otros, son métodos numéricos para resolver ecuaciones que se basan en el teorema del valor intermedio.

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c=(a+b)/2$	$f(c)$
0	1	+1	-0.459698	0.5	+0.377583
0.5	1	+0.377583	-0.459698	0.75	-0.018311
0.5	0.75	+0.377583	-0.018311	0.625	+0.185963
0.625	0.75	+0.185963	-0.018311	0.6875	+0.085335
0.6875	0.75	+0.085335	-0.018311	0.71875	+0.033879
0.71875	0.75	+0.033879	-0.018311	**0.734375**	+0.007875

Tabla 2.9

Ejemplo 2.28

La tabla 2.9 ilustra la aplicación del método de bisección para calcular la raíz de la ecuación $\cos x - x = 0$, que de acuerdo con el ejemplo a) tiene una raíz entre 0 y 1.

Podemos decir que una aproximación de la raíz buscada es 0.734375. Sin embargo, como también puede observarse, este método es muy lento. En la siguiente unidad se estudiará otro que resulta mucho más rápido.

2.3 Ejercicios

1-11. Para cada una de las funciones con regla de correspondencia dada,

a) Indicar el dominio.

b) Obtener las asíntotas.

c) Trazar la gráfica.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

2. $g(t) = \dfrac{t}{t^2 - 4}$

3. $\phi(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

4. $h(t) = \dfrac{3}{t^2 + 1}$

5. $w(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

6. $p(t) = \dfrac{3t^2}{t^2 + 2}$

7. $q(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$

8. $s(t) = \dfrac{t^3}{\sqrt{t^2 + 4}}$

9. $v(x) = \dfrac{x^3}{x + 2}$

10. $z(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t}$

11. $R(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{5 + x}}$

12-13. Esbozar la gráfica de una función que satisface el conjunto de condiciones dadas (N, M_1 y M_2 son infinitamente grandes y positivos).

12. f es continua en $\Re - \{-1, 2\}\}$, $f(-N) = 1$, $f_-(-1) = M_1$, $f_+(-1) = -M_2$, $f_-(2) = 0 = f(2)$, $f_+(2) = -3$ y $f(N) = 0$.

13. f es continua en $\Re - \{-1, 2\}$, $f(-N) = 2$, $f_-(-1) = M_1$, $f_+(-1) = M_2$, $f_-(2) = 3$, $f_+(2) = 3$, $f(2)$ no existe y $f(N)$ es infinitamente grande.

14-16. Considerando las gráficas mostradas, completar lo que se pide.

14. $f(-N) =$

$f_-(-3) =$

$f_+(-3) =$

$f_-(3) =$

$f_+(3) =$

$f(N) =$

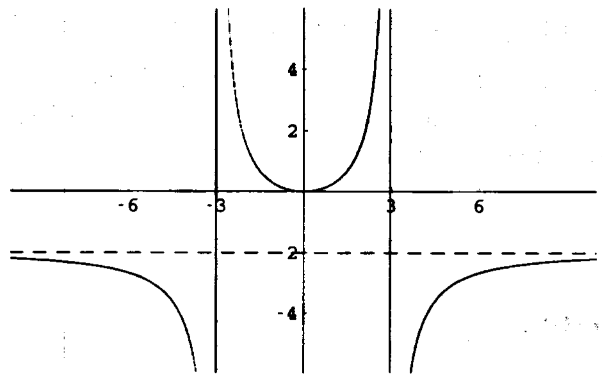


Figura del problema 14

15. $f(-N) =$

$f_-(-2) =$

$f_+(-2) =$

$f_-(2) =$

$f_+(2) =$

$f(N) =$

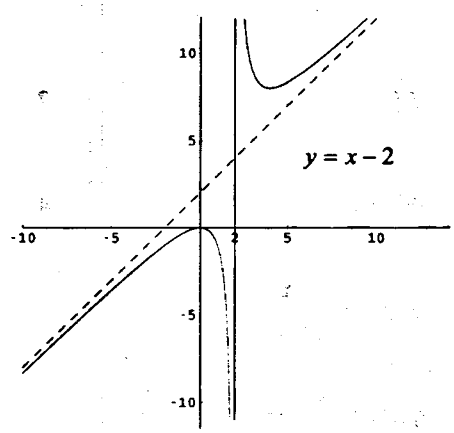


Figura del problema 15

16. $f(-N)$

$f_-(0) =$

$f_+(0) =$

$f(N)$

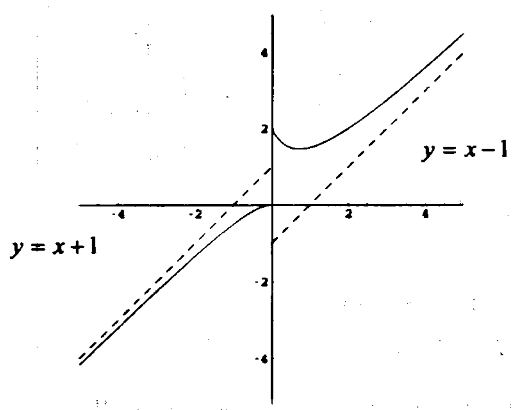


Figura del problema 16

17-28. Para cada una de las funciones definidas en el intervalo dado, indicar si tienen o no, un máximo y un mínimo, y en caso afirmativo indicar su valor.

17. $l(x) = 2x - 1 \qquad x \in < -1,3]$

18. $p(x) = 3x + \frac{1}{2} \qquad x \in < -1,2 >$

19. $m(x) = -2x + 3 \qquad x \in < -1,4]$

20. $\lambda(x) = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad x \in [-2,5]$

21. $\phi(x) = x^2 + 2 \qquad x \in [-3,3]$

22. $w(x) = 1 - x^2 \qquad x \in [0,2 >$

23. $\psi(x) = \operatorname{sen} x \qquad x \in \left\langle 0, \pi/4 \right]$

24. $f(x) = \tan x \qquad \left\langle -\pi/2, \pi/2 \right\rangle$

25. $g(x) = \tan x \qquad \left\langle -\pi/4, \pi/4 \right\rangle$

26. $\phi(x) = \tan x \qquad \left[-\pi/4, \pi/4 \right]$

27. $y = f(x) \qquad f$ creciente en $[a,b]$

28. $y = f(x) \qquad f$ decreciente en $[a,b]$

29-31. Demostrar que la ecuación dada tiene al menos una raíz real en el intervalo indicado y auxiliándose de una calculadora, obtener el valor de la raíz con precisión de centésimas.

29. $x^3 - 4x + 2 = 0, \qquad [0,1]$

30. $x^2 = \sqrt{x+2}, \qquad [0,2]$

31. $\ln x + x = 0, \qquad < 0,1]$

32. Demostrar que existe un número c tal que $f(c) = 25$ si $f(x) = x^3 - 2$ y calcular tal número.

2.4 Definición y cálculo de límites

El concepto de límite —muy relacionado con el de la continuidad— resulta sumamente útil en las ciencias básicas y de la ingeniería. Además, el límite se utiliza para definir algunas propiedades físicas, particularmente cuando su valor depende de la posición en el espacio.

Primeramente veremos la definición correspondiente al límite de una función en un punto, a partir de la cual se generan otras.

Límite en un punto

Para las situaciones de interés en las ciencias básicas y de la ingeniería, este concepto busca responder a la cuestión: si la variable toma valores cada vez más próximos a un valor dado, ¿qué valores toma la función?

Considerando entonces una función definida mediante $y = f(x)$, interesa saber qué pasa con el valor de $f(x)$ conforme x toma valores cada vez más próximos a a. Si la respuesta es: el valor de $f(x)$ se aproxima a L, entonces diremos que el límite de la función f, cuando x tiende a a es L, lo cual se denotará:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2.23}$$

Ejemplo 2.29

¿Cuál es el límite de la función $f(x) = \dfrac{tanx}{x}$ cuando x (medido en radianes) tiende a cero?

En la tabla 2.10 se muestran los valores de la función dada, correspondientes a valores relativamente próximos a cero. Puede observarse que, conforme el valor de x es más cercano a 0, el valor de la función es cada vez más próximo a 1 —de hecho, la calculadora que se utilizó indica que el valor de la función es 1 para valores de x menores que 0.00001—, de tal manera que podría afirmarse que

$$\lim_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = 1$$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\dfrac{tanx}{x}$	1.003346721	1.000033335	1.000000333	1.000000003

Tabla 2.10

Para aquellas situaciones en las ciencias básicas y de la ingeniería en las que se requiera conocer el valor del límite de una función en un punto, conociendo su regla de correspondencia, podría utilizarse el procedimiento anterior, sin embargo, conviene dar una definición que no precise del uso de la calculadora y que además sea más precisa.

Reconociendo entonces que interesa conocer el valor de la función "alrededor" de un valor dado de la variable, y considerando que se pueden asignar a la variable valores incluso infinitamente próximos al de interés, se propone la siguiente definición:

Decimos que el límite de una función f en a es L, si para α infinitesimal se tiene que

$$f(a+\alpha) = L + \beta \qquad \text{con } \beta \text{ infinitesimal} \tag{2.24}$$

Obsérvese que, si f es continua en a, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, de manera que no resulta relevante preguntarse por el valor del límite de la función cuando sabemos que ésta es continua. Lo que verdaderamente interesa, es el cálculo de límites cuando la variable tiende a infinito o cuando tiende a un valor para el cual la función no es continua, particularmente cuando se tiene una forma indeterminada.

Ejemplo 2.30

Siendo $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{2x+4}$, calcular $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Solución

Si α es infinitesimal, entonces

$$f(-2+\alpha) = \frac{(-2+\alpha)^2 - (-2+\alpha) - 6}{2(-2+\alpha)+4} = \frac{4 - 4\alpha + \alpha^2 + 2 - \alpha - 6}{-4 + 2\alpha + 4}$$

$$= \frac{-5\alpha + \alpha^2}{2\alpha} = \frac{-5+\alpha}{2} = -\frac{5}{2} + \text{ infinitesimal}$$

O también: $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{2x+4} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{2(x+2)} = \dfrac{x-3}{2} \qquad x \neq -2,$

de donde $\quad f(-2+\alpha) = \dfrac{-2+\alpha-3}{2} = -\dfrac{5}{2} + \text{ infinitesimal,}$

así que $\quad \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{2x+4} = -\dfrac{5}{2}$

Más adelante se estudiarán otros métodos para el cálculo de límites.

Límite en un punto: definición de un campo escalar

Como se indicó anteriormente, el concepto de límite resulta útil cuando se desea definir un campo escalar, esto es, cuando se quiere definir una propiedad escalar como una función de la posición. Por ejemplo, puede decirse que el valor de la temperatura, en una habitación, depende del punto donde se coloque el termómetro, sin embargo, ¿qué significa temperatura "en un punto"?

En realidad, no puede hablarse sino de la temperatura de una pequeña región del espacio, sin embargo, en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería, esta situación se resuelve haciendo uso de la "aproximación al continuo", como se muestra en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.31 Definición de presión[10]

La presión es una propiedad muy útil para describir el estado de un sistema, ya que muchos de los sistemas estudiados en termodinámica comprenden gases o vapores. La presión se define como la fuerza normal a una superficie real o ficticia, ejercida por unidad de área en el sistema.

En la termodinámica clásica no se consideran los efectos que puedan presentarse a escala microscópica; por lo tanto, sólo se trata de presiones que existen sobre áreas grandes respecto a los espacios intermoleculares. El fluido se considera un continuo y por lo mismo se le llama aproximación al continuo, que puede cuestionarse en sistemas al vacío donde los espacios moleculares se vuelven grandes.

Con la restricción de que el área sobre la cual se aplica la fuerza no puede volverse menor que un cierto valor mínimo a (debido a la aproximación al continuo), la definición matemática de una presión local es

$$P \equiv \lim_{\Delta A \to a} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Ejemplo 2.32 Definición de volumen específico[11]

En termodinámica clásica también se define el volumen específico con base en la restricción del continuo. Por lo tanto, la definición matemática del volumen específico es

$$v = \lim_{\Delta m \to \mu} \frac{\Delta V}{\Delta m}$$

donde μ es la cantidad mínima de masa que resulta grande respecto a la masa que compone a una molécula individual. De nuevo esta restricción causa algunas dificultades cuando se examinan gases en condiciones de alto vacío o sistemas con volumen muy pequeño. El volumen específico es el inverso de la densidad, o sea $v = 1/\rho$.

Límites laterales

En la definición dada por la ecuación (2.23) no se especifica el signo del infinitesimal. En caso de que para cada signo se tenga una situación diferente se requiere hablar, entonces, de los límites laterales:

Diremos que el límite por la izquierda, de una función f, en a, es L, lo cual se denotará

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para α infinitesimal positivo, se tiene que

[10] Howell, pp. 38-39.
[11] Howell, p. 40.

$$f(a-\alpha)=f_{-}(a)=L+\beta \qquad \text{con } \beta \text{ infinitesimal.} \tag{2.25}$$

Análogamente, diremos que el límite por la derecha de una función f, en a, es L, lo cual se denotará

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=L,$$

si para α infinitesimal (positivo), se tiene que

$$f(a+\alpha)=f_{+}(a)=L+\beta \qquad \text{con } \beta \text{ infinitesimal.} \tag{2.26}$$

De esta manera, se dirá que el límite de f en a existe, si los límites por la izquierda y por la derecha son iguales.

Siempre que la función esté definida por secciones, será necesario calcular los límites laterales, precisamente en los puntos en los que cambia la regla de correspondencia.

Ejemplo 2.33

Sea g la función definida por $$g(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$$

Entonces, siendo α infinitesimal, tenemos que

$$g(1-\alpha)=g_{-}(1)=1^2+1+1=3 \ \text{ y } \ g(1+\alpha)=g_{+}(1)=1+4=5,$$

de manera que

$$\lim_{x\to 1^{-}} g(x)=3 \ \text{ y } \ \lim_{x\to 1^{+}} g(x)=5$$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe.

Límite en infinito

Una situación de mucho interés en las ciencias básicas y de la ingeniería, es el análisis del comportamiento de una función cuando la variable toma valores infinitamente grandes, o bien, cuando la variable tiende a infinito. En la sección anterior se vio cómo determinar las asíntotas de una función, con lo cual se describe con precisión lo que ocurre con la función cuando la variable es infinitamente grande. Sin embargo, en ocasiones interesará sólo averiguar si la función se hace infinitamente grande o no, y si se hace finita, determinar su valor. Para esto se utilizarán los límites en infinito.

Decimos que el límite de f cuando x tiende a infinito es el número real L, lo cual denotamos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L,$$

si para N infinitamente grande, $f(N)-L$ es infinitesimal. (2.27)

Ejemplo 2.34

Si $$f(x) = \frac{3x}{x-1},$$

entonces, siendo N infinitamente grande, tenemos que

$$f(N) = \frac{3N}{N-1} = 3 + \text{infinitesimal},$$

de manera que $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

Ejemplo 2.35 (véase ejemplo 2.18)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

Ejemplo 2.36 (véase ejemplo 2.19)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$$

Ejemplo 2.37 (véase ejemplo 2.21)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = -\infty$$

Límite infinito

Como podemos observar, los conceptos antes estudiados, utilizando la terminología infinitesimalista, pueden interpretarse usando los límites. Eso es justamente lo que se hará en las definiciones siguientes.

Primeramente se hará referencia a la existencia de una asíntota vertical, usando ahora el lenguaje de los límites. Ya que en este caso sabemos que una función tiene una asíntota vertical en $x = a$, si, para valores de la variable infinitamente próximos a a, los correspondientes valores de la función son infinitamente grandes, entonces se define lo que sigue:

Siendo f una función definida mediante $y = f(x)$, decimos que el límite de f cuando x tiende a a es infinito, lo cual se denota

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

si para β infinitesimal, $f(a+\beta)$ es infinitamente grande (y positivo). (2.28)

Ejemplo 2.38

Siendo β infinitesimal y ϕ la función definida por $\phi(x) = \dfrac{3x}{(x-4)^2}$, entonces,

$$\phi(4+\beta) = \frac{3(4+\beta)}{(4+\beta-4)^2} = \frac{12+3\beta}{\beta^2} = \frac{12}{\beta^2},$$

que es infinitamente grande, por lo que $\lim\limits_{x\to 4} \phi(x) = \infty$

Ejemplo 2.39 (véase ejemplo 2.11)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$

Continuidad y límite

También pueden definirse la continuidad y cada uno de los casos de discontinuidad antes considerados utilizando los límites:

a) Una función *f es continua* en a, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (2.29)

b) La gráfica de una función *f tiene una asíntota* en $x = a$, si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$ (2.30)

c) La gráfica de una función *f* tiene una *discontinuidad de hueco* en *a*, si

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ o si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, y $f(a)$ no. (2.31)

d) Una función *f* tiene una *discontinuidad de salto* en *a*, si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \tag{2.32}$$

Ejemplo 2.40 (véase ejemplo 2.39)

Siendo *f* la función definida mediante $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y α un infinitesimal positivo, tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2-\alpha) = \frac{3}{2-\alpha-2} = \frac{2}{-\alpha} = -\infty$$

y $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2+\alpha) = \frac{3}{2+\alpha-2} = \frac{2}{\alpha} = \infty,$$

así que *f* tiene una discontinuidad asintótica en $x = 2$.

Ejemplo 2.41 (véase ejemplo 2.14)

Siendo g la función definida mediante $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$, tenemos que

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+1}{x+3} \text{ para toda } x \neq 1,$$

entonces, si α es un infinitesimal positivo,

$$\lim_{x \to -3^-} g(x) = g(-3-\alpha) = \frac{-3-\alpha+1}{-3-\alpha+3} = \frac{-2}{-\alpha} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to -3^+} g(x) = g(-3+\alpha) = \frac{-3+\alpha+1}{-3+\alpha+3} = \frac{-2}{\alpha} = -\infty$$

de manera que g tiene una discontinuidad asintótica en $x = -3$.

Por otra parte,

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1-\alpha) = \frac{1-\alpha+1}{1-\alpha+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1+\alpha) = \frac{1+\alpha+1}{1+\alpha+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

así que $\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}$. Sin embargo, $g(1)$ no existe, de manera que g tiene una discontinuidad de hueco en $x = 1$.

Ejemplo 2.42 (véase ejemplo 2.16)

Siendo ϕ la función definida mediante $\phi(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3-x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Si se desea analizar la continuidad de ϕ, entonces, observando que cada una de las secciones de la función es continua —un arco de parábola y dos segmentos rectilíneos—, debe verse lo que ocurre donde la función cambia de regla de correspondencia, esto es en $x = 1$ y en $x = 3$.

Primeramente, para $x = 1$, siendo α un infinitesimal positivo, tenemos que

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1-\alpha) = 3-(1-\alpha)^2 = 2$$

y

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1+\alpha) = 1+\alpha+1 = 2,$$

así que $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$. Además, $g(1) = 3-1^2 = 2$, por lo tanto, g es continua en $x = 1$.

Por otra parte, para ver lo que pasa en $x = 3$, tenemos:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = g(3-\alpha) = 3-\alpha+1 = 4$$

y
$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = g(3+\alpha) = 3-(3+\alpha) = 0,$$

así que g tiene una discontinuidad de salto en $x = 3$.

Cálculo de límites y series de potencias

Cuando se calculan límites, particularmente cuando se presenta alguna forma indeterminada, puede resultar conveniente utilizar series de potencias, siempre y cuando, el valor al que tiende la variable pertenezca al intervalo de convergencia de la serie utilizada. Vamos a ver cómo utilizar las series en dos casos particulares, en uno se utiliza la serie geométrica y en el otro la binomial.

Ejemplo 2.43

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{3}{2+5x} - \dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{5}{2}x\right)\right]$

(obsérvese que se presenta la forma indeterminada $0/0$).

Solución 1

Haciendo las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{3}{2+5x} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{6-3(2+5x)(1-5/2\,x)}{2(2+5x)}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{75/2\,x^2}{2(2+5x)}\right] = \frac{75}{4(2+5x)}$$

Por lo tanto,
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left[\frac{3}{2+5x} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right] = \lim_{x \to 0} \frac{75}{4(2+5x)} = \frac{75}{8}$$

Solución 2

Desarrollando la primera fracción del paréntesis como una serie geométrica, tenemos:

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{3}{2+5x} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{3/2}{1+5/2\,x} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2x^2}\left[\frac{1}{1+5/2\,x} - \left(1-\frac{5}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2x^2}\left\{\left[1-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}x^2\right)+o(x^3)-\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{3}{2x^2}\left[\frac{25}{4}x^2+o(x^3)\right] = \frac{75}{8}+o(x)$$

Así que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{3}{2+5x}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}x\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{75}{8}+o(x)\right] = \frac{75}{8}$

Ejemplo *2.44*

Calcular $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-(1+\frac{1}{3}x)}{x^2}$

(obsérvese que nuevamente se presenta la forma indeterminada $0/0$).

Solución

Tomando en cuenta que el valor al que tiende la variable es, justamente, el punto medio del intervalo de convergencia de la serie binomial —de acuerdo con (1.19)—, tenemos que

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{(1/3)(-2/3)}{2}x^2+o(x^3)$$

$$= 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^3),$$

de manera que

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-(1+\frac{1}{3}x)}{x^2} = \frac{[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^3)]-(1+\frac{1}{3}x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{9}x^2+o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{9}+o(x)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-(1+\frac{1}{3}x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{9}+o(x)\right] = -\frac{1}{9}$$

2.4 Ejercicios

1-10. Calcular lo que se indica.

1. $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

2. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

4. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

5. $\displaystyle \lim_{x \leftarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

6. $\displaystyle \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

7. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$

8. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$

9. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

10. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{2x^2}{4x-1}\right)$

II. CÁLCULO DIFERENCIAL

La derivada —concepto fundamental del cálculo diferencial— se vincula con situaciones de carácter geométrico, como la recta tangente a una curva; pero, principalmente, en las ciencias básicas y de la ingeniería, se relaciona íntimamente con la razón de cambio, es decir, con la medida de la rapidez con la que cambia una variable (dependiente), cuando otra (la independiente) lo hace.

3. CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y CÁLCULO DE DERIVADAS

3.1 Velocidad instantánea y razón de cambio

Uno de los conceptos del cálculo más útiles en las ciencias básicas y de la ingeniería es el de velocidad, entendida como la rapidez con que un objeto cambia su posición conforme transcurre el tiempo. En un sentido más amplio, interesará conocer la rapidez con que una variable (dependiente) cambia su valor conforme otra (variable independiente) lo hace.

Por otra parte, el término "instante" suele tener dos acepciones: como un intervalo pequeño o infinitesimal de tiempo, o como el "momento" correspondiente a un valor específico del tiempo. En este libro se utilizarán las dos, aunque con predominio de la primera.

Razón promedio de cambio

Recordemos, primeramente, que si una variable y depende funcionalmente de otra variable x, es decir, si se define una función f mediante la regla de correspondencia $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente, o simplemente variable, y y es la variable dependiente, o función. Llamamos *razón promedio de cambio* de la función, respecto de la variable, a la razón existente entre el incremento de la función y el incremento de la variable.

Así, si f es una función continua en la variable t, y si esta variable cambia su valor de a a $a+\Delta t$, entonces la función cambiará su valor de $f(a)$ a $f(a+\Delta t)$, de manera que la razón de cambio de f respecto a t, correspondiente a ese cambio en el valor de la variable será

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(a+\Delta t)-f(a)}{\Delta t}} \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.1

Siendo f la función definida mediante $y=f(t)=\frac{1}{3}t^3-t$

a) Si t cambia su valor de -1 a 1, entonces, $\Delta t=1-(-1)=2$ y $\Delta y=f(1)-f(-1)=$ $-2/3-(2/3)=-4/3$, así que la correspondiente razón de cambio de y respecto a t será

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{-4/3}{2}=-\frac{2}{3}$$

b) Si t cambia de -1 a 2, entonces $\Delta t=2-(-1)=3$ y $\Delta y=f(2)-f(-1)=2/3-2/3$ $=0$, así que la correspondiente razón de cambio de y respecto a t será

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{0}{3}=0$$

c) Si t cambia de -1 a 3, entonces $\Delta t=3-(-1)=4$ y $\Delta y=f(3)-f(-1)=6-2/3=$ $16/3$, así que la correspondiente razón de cambio de y respecto a t será

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16/3}{4}=\frac{4}{3}$$

Nota: Recuérdese que normalmente "leemos" la gráfica de una función de izquierda a derecha, es decir, asignando valores crecientes a la variable, de manera que el incremento de la variable es siempre positivo. Siendo así, la razón de cambio será negativa, cero, o positiva, según si el valor final de la función es, respectivamente, menor, igual, o mayor que el valor inicial.

Movimiento rectilíneo: velocidad promedio

Cuando un objeto se mueve sobre una curva, ya sea en el plano o en el espacio, su posición estará determinada por un vector, llamado *vector de posición.* Sin embargo, si el objeto se mueve en línea recta, su posición quedará determinada sólo por la distancia desde un punto de referencia, acompañada por un signo que indicará en qué lado de la recta se encuentra el objeto, con respecto del punto de referencia. En tal caso, la velocidad promedio se define como la razón promedio de cambio de la posición con respecto del tiempo, es decir, qué tan rápido cambia su posición con el tiempo.

Ahora bien, si el objeto se mueve en la dirección asignada al eje de referencia, entonces la posición (variable) aumentará con el tiempo, de manera que la velocidad será positiva; en cambio, si se mueve en dirección contraria a la asignada al eje de referencia, la velocidad será negativa.

Ejemplo 3.2

En el ejemplo 3.1, t representa tiempo transcurrido (medido en segundos), a partir de un momento dado, y y es la posición de una partícula (medida en centímetros), en el tiempo t, con lo cual la posición del objeto está dada por:

$$y = f(t) = \tfrac{1}{3}t^3 - t$$

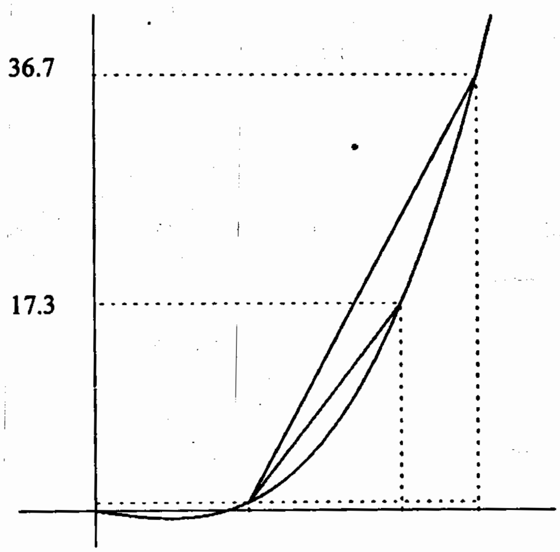


Fig. 3.1a

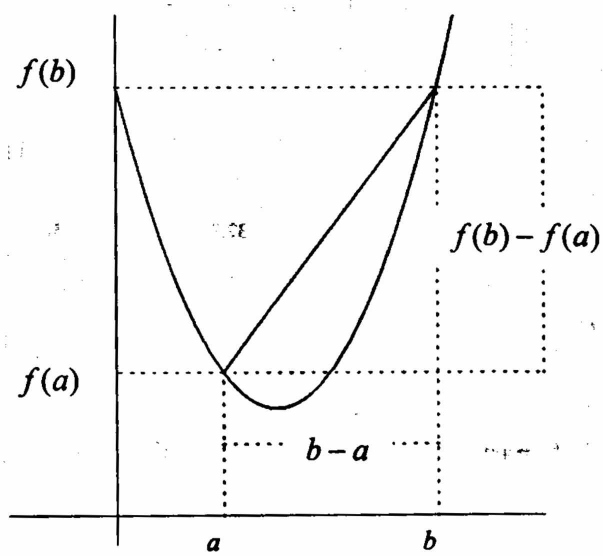


Fig. 3.1b

De esta forma, la velocidad promedio del móvil en el intervalo comprendido entre los 2 y los 5 segundos será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(5) - y(2)}{5 - 2} = \frac{\left(\frac{1}{3}5^3 - 5\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2\right)}{3}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{125}{3} - 5 - \frac{8}{3} + 2}{3} = 12 \text{ cm/s}$$

y entre los 2 y los 4 segundos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(4) - y(2)}{4 - 2} = \frac{\left(\frac{1}{3}4^3 - 4\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2\right)}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} + 2}{2} = 25/3 \text{ cm/s} \cong 8.33 \text{ cm/s}$$

En la figura 3.1*a* se muestra la gráfica[1] de la ecuación de posiciones dada, en la cual se marcan los segmentos que unen los puntos de la curva a los que se hace referencia en este ejemplo. Obsérvese (figura 3.1*b*) que la velocidad promedio (y, en general, cualquier razón de cambio) viene dada por la pendiente del segmento que une los puntos de interés.

Ejemplo 3.3

Supóngase, ahora, que para analizar el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta, se han medido (en centímetros, a intervalos de 2 segundos), las distancias desde un punto de referencia, obteniéndose los datos mostrados en la tabla 3.1.

t (s)	0	2	4	6	8	10
x (cm)	3.7	9.5	32.9	73.9	132.5	208.7

Tabla 3.1

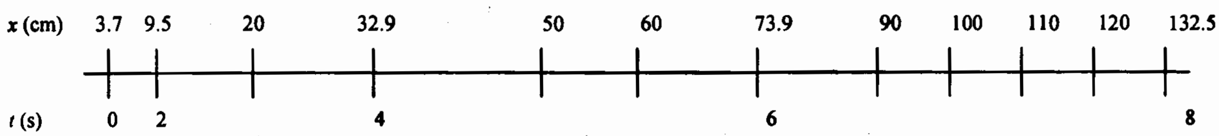


Fig. 3.2

A partir de los datos de la tabla (véase también la figura 3.2), se puede concluir que, durante el movimiento observado, el objeto se ha desplazado en la dirección elegida para el eje de referencia, ya que los valores de la posición crecen con el tiempo, de manera que el objeto se aleja del punto de referencia. Por la misma razón, la velocidad promedio, correspondiente a cada intervalo, es positiva.

t (s)	x (cm)	Δx (cm)	$\Delta^2 x$ (cm)
0	3.7	5.8	17.6
2	9.5	23.4	17.6
4	32.9	41.0	17.6
6	73.9	58.6	17.6
8	132.5	76.2	
10	208.7		

Tabla 3.2

[1] A la gráfica de posición contra tiempo suele llamársele *historia del movimiento*.

Para indagar más acerca del movimiento, se puede recurrir a la tabla de diferencias de la función $x(t)$, la cual corresponde a un conjunto de valores equiespaciados de la variable (el tiempo), ya que la medición de la posición se hizo cada dos segundos.

En esta tabla (la 3.2), la columna de primeras diferencias muestra los desplazamientos obtenidos cada dos segundos, es decir, las diferencias entre dos valores consecutivos de la posición. Puede concluirse, entonces, que el movimiento es acelerado, ya que los desplazamientos son cada vez mayores (ver figura 3.2).

Finalmente, obsérvese que la columna de segundas diferencias es constante, de manera que, al menos en el periodo considerado —los primeros diez segundos— la *función de posición*, es decir, la función que da la posición del objeto en términos del tiempo, es un polinomio cuadrático. Más adelante analizaremos el significado de esta situación.

Velocidad instantánea

Supongamos, ahora, que a partir de la ecuación de posiciones de una partícula en movimiento, se desea obtener el valor de la velocidad en un instante dado. Esto es, si la función de posición de la partícula es $x = f(t)$, se desea saber el valor de la velocidad de la partícula en el punto correspondiente a $t = a$.

Ahora bien, esta cuestión carece de sentido si sólo se toma en cuenta la definición de velocidad promedio, ya que para calcular una velocidad promedio se requiere de dos valores del tiempo, puesto que ésta es una medida del cambio de la posición que tiene lugar en un intervalo de tiempo. Por otra parte, si consideramos el movimiento realizado por la partícula en un intervalo de tiempo infinitesimal, las dos posiciones se verán, desde una perspectiva real, como una sola.

Por tal motivo, llamaremos *velocidad instantánea* a la velocidad promedio correspondiente a un intervalo infinitesimal de tiempo, es decir, a un instante. De esta manera, si $x(t)$ es la función de posición de una partícula en movimiento rectilíneo y si denotamos por $v(a)$ la velocidad instantánea (o simplemente velocidad) en el tiempo a, entonces

$$v(a) = \frac{x(a+dt) - x(a)}{dt} \tag{3.2}$$

donde dt es un intervalo infinitesimal de tiempo.

Ejemplo 3.4

Si la función de posición de una partícula en movimiento rectilíneo es

$$x(t) = t^2 - 3t + 4$$

con t medido en segundos y x en centímetros, entonces, la velocidad de la partícula en el instante $t = 3$ s, es

$$v(3) = \frac{x(3+dt) - x(3)}{dt} = \frac{[(3+dt)^2 - 3(3+dt) + 4] - [3^2 - 3(3) + 4]}{dt}$$

$$v(3) = \frac{(9+6dt+dt^2-9-3dt+4)-4}{dt} = \frac{3dt+dt^2}{dt} = 3+dt$$

Eliminando el término infinitesimal, tenemos

$$v(3) = 3 \text{ cm/s}$$

Observemos ahora (ecuación 3.2) que, siendo la posición x una función del tiempo t, entonces la velocidad instantánea es el cociente del diferencial de la posición entre el diferencial del tiempo. Es decir:

$$\boxed{v(a) = \frac{dx(a)}{dt} = \frac{x(a+dt)-x(a)}{dt}} \tag{3.3}$$

O bien, utilizando límites, tenemos que

$$\boxed{v(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(a,\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(a+\Delta t)-x(a)}{\Delta t}} \tag{3.4}$$

Por lo tanto, una aproximación del valor de la velocidad, para un valor dado del tiempo, puede obtenerse asignando valores pequeños al incremento del tiempo.

Ejemplo 3.5

Supóngase que la posición x de una partícula en movimiento, en términos del tiempo t, está dada por:

$$x(t) = t^2 - 2t \qquad \text{con } t \text{ en segundos y } x \text{ en metros.}$$

La tabla 3.3 muestra los valores de la velocidad promedio para intervalos cada vez más pequeños, manteniendo constante el valor inicial del tiempo en 1.5 s. Los valores de la velocidad promedio, mostrados en el segundo renglón de la tabla, se obtuvieron mediante:

$$v_{prom} = \frac{\Delta x(1.5,\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(1.5+\Delta t)-x(1.5)}{\Delta t} = \frac{\left[(1.5+\Delta t)^2-2(1.5+\Delta t)\right]-\left[1.5^2-2(1.5)\right]}{\Delta t}$$

$$= \frac{2.25+3\Delta t+(\Delta t)^2-3-2\Delta t-2.25+3}{\Delta t} = \frac{\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t} = 1+\Delta t \tag{a}$$

Δt	1.0	0.5	0.1	0.01	0.001
V_{prom}	2	1.5	1.1	1.01	1.001

Tabla 3.3

Observamos que, conforme Δt es más pequeño, el valor de la velocidad promedio es cada vez más parecido a 1, lo cual es evidente en la ecuación (a), ya que, siendo Δt infinitesimal, la velocidad promedio será 1. Resulta razonable, entonces, decir que la velocidad de la partícula, para $t = 1.5$ s, es de 1 cm/s, es decir, la velocidad de la partícula en el instante $t = 1.5$ s, es de 1 cm/s.

Por otra parte, puede verse que el valor de la velocidad instantánea es una función del tiempo. Así pues, considerando un instante t, es decir, un valor inicial del tiempo t y un incremento infinitesimal dt, tenemos que la velocidad será:

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}} \tag{3.5}$$

O bien:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.6

Para la función de posición del ejemplo anterior, tenemos:

$$x(t) = t^2 - 2t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{\left[(t+dt)^2 - 2(t+dt)\right] - (t^2 - 2t)}{dt}$$

$$= \frac{t^2 + 2t\,dt + (dt)^2 - 2t - 2dt - t^2 + 2t}{dt} = \frac{2t\,dt + (dt)^2 - 2dt}{dt} = 2t - 2 + dt$$

Es decir:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 2$$

En particular, para $t = 1.5$ s, tenemos que $v(1.5) = 2(1.5) - 2 = 1$ cm/s, tal y como se obtuvo en el ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.7

En el ejemplo 3.3 se obtuvo que la función de posición, dada ahí para el periodo de tiempo considerado, es un polinomio cuadrático, es decir

$$x(t) = at^2 + bt + c \tag{a}$$

Considerando, entonces, los datos correspondientes a los tres primeros valores del tiempo, tenemos que:

Para, $t = 0$, $x = 3.7$, así que	$3.7 = c$	(b),
para, $t = 2$, $x = 9.5$, así que	$9.5 = 4a + 2b + c$	(c)
y para $t = 4$, $x = 32.9$, así que	$32.9 = 16a + 4b + c$	(d)

Al resolver el sistema de ecuaciones {(b), (c), (d)], se obtiene: $c = 3.7$, $a = 2.2$ y $b = -1.5$, así que, al sustituir en (a), se obtiene que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = 2.2t^2 - 1.5t + 3.7 \qquad \text{(e)}$$

Así pues, sustituyendo en (3.5), tenemos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{2.2(t+dt)^2 - 1.5(t+dt) + 3.7 - (2.2t^2 - 1.5t + 3.7)}{dt},$$

$$v(t) = \frac{(2.2t^2 + 4.4t\,dt + 4.84dt^2 - 1.5t - 1.5dt + 3.7) - (2.2t^2 - 1.5t + 3.7)}{dt},$$

$$v(t) = \frac{4.4t\,dt + 4.84dt^2 - 1.5dt}{dt} = 4.4t - 1.5 + 4.84dt,$$

de manera que, al despreciar el término infinitesimal, se obtiene, finalmente, que la velocidad, para cualquier tiempo, está dada por

$$v(t) = 4.4t - 1.5$$

Este resultado indica que la velocidad varía linealmente con el tiempo, de manera que, considerando dos valores cualesquiera del tiempo, el promedio aritmético de las correspondientes velocidades (ver figura 3.3) es igual a la velocidad promedio en el intervalo.

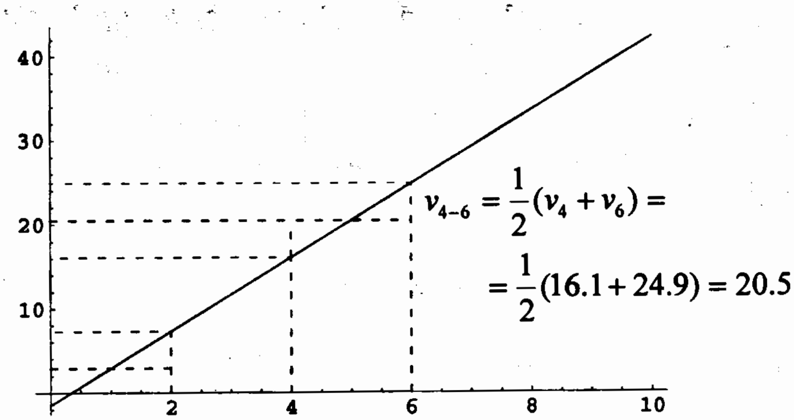


Fig. 3.3

Por ejemplo, si consideramos el intervalo comprendido entre $t = 0$ y $t = 2$, tenemos que

$$v(0) = -1.5 \quad \text{y} \quad v(2) = 4.4(2) - 1.5 = 7.3,$$

así que la velocidad promedio en el intervalo comprendido entre 0 y 2 segundos, es

$$v_{0-2} = \frac{v(0)+v(2)}{2} = \frac{-1.5+7.3}{2} = 2.9 \text{ cm/s}$$

Si ahora consideramos la tabla de diferencias (tabla 3.2), tenemos que la tabla de primeras diferencias proporciona los desplazamientos efectuados por el objeto entre cada par de valores del tiempo. Así pues, el desplazamiento efectuado en los dos primeros segundos es $\Delta x_{0-2} = 5.8$ cm, de manera que la velocidad promedio en el mismo intervalo es

$$v_{0-2} = \frac{\Delta x_{0-2}}{\Delta t} = \frac{5.8}{2} = 2.9 \text{ cm/s}$$

Es importante tener en cuenta que el promedio aritmético de los valores de la velocidad, correspondientes a dos tiempos cualesquiera, coincidirá con el valor de la velocidad promedio en el intervalo, sólo si la velocidad varía linealmente, como ocurre en el presente ejemplo.

3.1 Ejercicios

1. Las posiciones de una partícula moviéndose en línea recta fueron registradas cada 3 segundos, obteniéndose los resultados mostrados en la tabla siguiente.

t (s)	0	2	4	6	8	10	12
x (m)	0.7	8.7	-3.3	-11.3	8.7	80.7	228.7

   a) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿cuándo se mueve la partícula en la dirección asignada al eje de referencia? y ¿cuándo en dirección opuesta?
   b) ¿Cuáles son las velocidades promedio en cada intervalo de 2 segundos?
   c) ¿Cuál es el promedio de las velocidades del inciso anterior?
   d) Haciendo una tabla de diferencias, ¿es la posición de la partícula una función polinomial del tiempo?, si es así, ¿de qué grado?

2. La posición de una partícula está dada por

$$x(t) = 4 + 5t - t^2 \quad (t \text{ en segundos y } x \text{ en centímetros})$$

   a) Calcular la velocidad de la partícula en $t = 2$ por medio de la ecuación (3.3).
   b) Calcular la velocidad de la partícula en función del tiempo. Verificar el resultado obtenido en el inciso anterior.
   c) ¿Hay algún momento en que la partícula se encuentra en reposo?, ¿cuál es?
   d) Trazar la gráfica de la ecuación de movimiento de la partícula.

3.2 Derivada de una función y recta tangente

Derivada: definición

Como se ha dicho anteriormente, en ciencias básicas y de la ingeniería, la razón de cambio es un concepto sumamente importante, del cual la velocidad es solamente un caso particular, de manera que resulta necesario generalizar la definición dada para la velocidad instantánea, a una razón de cambio cualquiera, a la que llamaremos *derivada*.

Si w es una función de x, la *derivada* de w respecto a x, en $x = a$, se denotará por $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=a}$ y se calcula por medio de:

$$\boxed{\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=a} = \frac{w(a+dx) - w(a)}{dx}} \tag{3.7}$$

donde dx es un incremento infinitesimal de la variable.

Así pues, si x y w están relacionadas mediante $w = f(x)$, entonces la derivada de w respecto de x, es decir, la razón de cambio de w respecto a x, en $x = a$, que también se denotará por $f'(a)$, es

$$\boxed{f'(a) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=a} = \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}} \tag{3.8}$$

O bien, en términos del límite:

$$\boxed{f'(a) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}} \tag{3.9}$$

Estas últimas ecuaciones se utilizarán suponiendo que la función es diferenciable, por lo que no se indica nada acerca del signo del incremento infinitesimal de la variable, sin embargo, si la función no es diferenciable en el punto, es decir, si los diferenciales por la izquierda y por la derecha son diferentes, entonces tampoco lo serán los cocientes obtenidos mediante tales ecuaciones. En tal caso se hará referencia a las *derivadas laterales*, es decir a las derivadas por la izquierda y por la derecha, las cuales, considerando las definiciones dadas para las diferenciales por la izquierda y por la derecha, se definen como sigue:

$$\boxed{f'_-(a) = \frac{d_-f(a)}{dx} = \frac{f(a) - f(a-dx)}{dx}} \tag{3.10}$$

$$\boxed{f'_+(a) = \frac{d_+f(a)}{dx} = \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}} \tag{3.11}$$

Ejemplo 3.8

Consideremos la función definida por $\phi(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x \le 1 \\ x+1, & 1 < x \le 3 \\ 3-x, & x > 3 \end{cases}$

Entonces (ver ejemplo 2.16), ϕ tiene una discontinuidad de salto en $x = 3$, pero es continua en $x = 1$. Vamos a ver si es diferenciable en $x = 1$.

Obsérvese primero que $\phi(1) = 3 - 1^2 = 2$. Ahora bien, al sustituir en (3.10) y (3.11), tenemos que las derivadas, por la izquierda y por la derecha, son, respectivamente,

$$\phi'_-(1) = \frac{\phi(1)-\phi(1-dx)}{dx} = \frac{2-[3-(1-dx)^2]}{dx} = \frac{2-3+1-2dx+dx^2}{dx} = -2+dx$$

$$\text{y} \quad \phi'_+(1) = \frac{\phi(1+dx)-\phi(1)}{dx} = \frac{[(1+dx)+1]-1}{dx} = \frac{1+dx+1-2}{dx} = 1$$

Al despreciar el término infinitesimal, en la derivada por la izquierda, se obtiene

$$\phi'_-(1) = -2 \quad \text{y} \quad \phi'_+(1) = 1,$$

así que ϕ no es diferenciable en $x = 1$, aunque sí es continua.

Por lo anterior, podemos hablar de la *función derivada* de una función *f*, que sería aquella con dominio en todos los elementos del dominio de *f* en los cuales es diferenciable y cuya regla de correspondencia es

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}} \tag{3.12}$$

Ejemplo 3.9

Si $y = f(x) = x^3$, entonces,

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3+3x^2dx+3x\,dx+dx^3-x^3}{dx}$$

$$= \frac{[3x^2+3xdx+dx]dx}{dx} = 3x^2+3xdx+dx^2$$

Al despreciar la parte infinitesimal, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2$$

Nota: en ocasiones usaremos "*D*" antes de la letra que denota una función, para simbolizar la derivada de dicha función, y un subíndice para denotar la variable respecto de la cual se deriva. Así, para el ejemplo anterior tenemos: $D_x x^3 = 3x^2$.

Recta tangente

La recta tangente a una circunferencia se define como aquella que la intercecta exactamente en un punto. Esta definición puede aplicarse igualmente, aunque con ciertas restricciones, a toda cónica –elipse, parábola e hipérbola–. Si tomamos en cuenta que un conjunto de puntos de una curva, infinitamente próximos entre sí, son vistos como uno solo cuando se miran con una escala real, podemos definir *recta tangente* a una curva en un punto dado, como aquella que pasa por ese punto y por cualquiera otro de la curva que se encuentre infinitamente cerca del mismo. Veremos a continuación que esta definición es válida para el caso de la circunferencia.

Ejemplo 3.10 Consideremos la circunferencia definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25$$

y supongamos ahora que se desea obtener la recta tangente en el punto $(3, 4)$.

Tomando en cuenta que se conoce un punto de la recta, sólo hace falta determinar su pendiente. Consideremos la recta secante a la circunferencia que pasa por el punto (3,4) y por un punto cuya abscisa es h unidades mayor que 3 (ver figura 3.4).

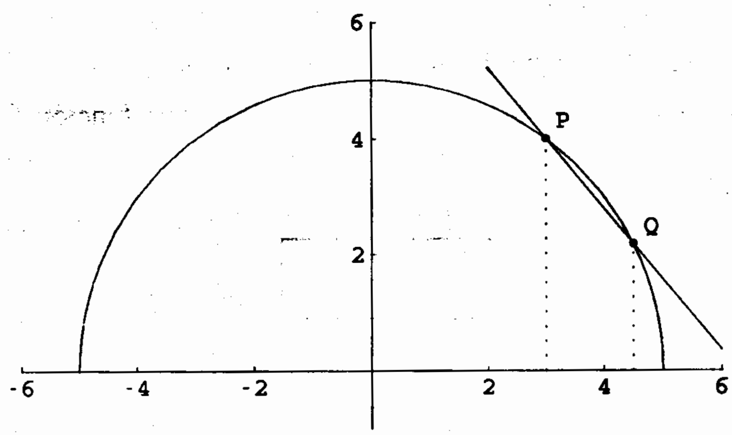


Fig. 3.4

El punto de interés corresponde a la semicircunferencia superior, así que la pendiente de esta secante es:

$$m_{PQ} = \frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} = \frac{\sqrt{25-(3+h)^2} - 4}{h} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25-(3+h)^2} - 4\right)\left(\sqrt{25-(3+h)^2} + 4\right)}{h\left(\sqrt{25-(3+h)^2} + 4\right)} = \frac{25-(3+h)^2 - 16}{h\left(\sqrt{25-(3+h)^2} + 4\right)}$$

$$m_{PQ} = \frac{-6h - h^2}{h\left(\sqrt{25-(3+h)^2}+4\right)} = \frac{-6-h}{\sqrt{25-(3+h)^2}+4}$$

Si P y Q están infinitamente cerca, es decir, si h es infinitesimal, entonces

$$m_{PQ} = \frac{-6}{8},$$

por lo que la pendiente de la tangente a la circunferencia en P deberá ser -3/4, lo cual puede comprobarse recurriendo a la geometría analítica.

Se propone entonces la siguiente definición (ver figura 3.5),

Si C es una curva definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la recta tangente a C, en el punto de abscisa a, es aquella que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, con h infinitesimal.	(3.13)

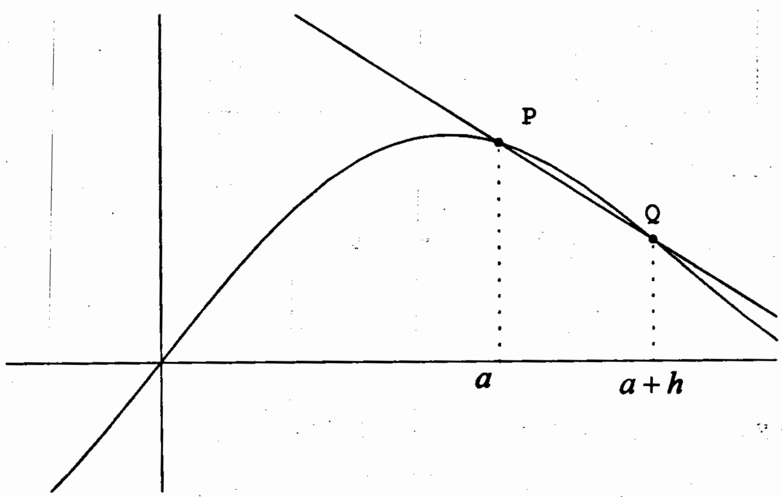


Fig. 3.5

De esta manera, la pendiente de la recta tangente, en el punto de abscisa a será

$$\boxed{m_T = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \tag{3.14}$$

con h infinitesimal, es decir,

La pendiente de la recta tangente a la curva definida por una función en punto dado, es la derivada de la función evaluada en el punto.	(3.15)

Ahora bien, si el valor de la derivada depende del signo del infinitesimal [ver ecuaciones (3.10) y (3.11)], entonces se tienen derivadas por la izquierda y por la derecha, y, por consiguiente, *dos* rectas tangentes, lo que no corresponde a lo que se espera, puesto que se habla de *la* recta tangente, por lo que ésta debe ser única. Considerando, además, que la recta tangente puede asociarse con la dirección de la curva (ver figura 3.6), tenemos:

Si una curva continua presenta un cambio de dirección en un punto, entonces, la función que la define no es diferenciable en ese punto. Los valores de las derivadas por la izquierda y por la derecha, de esa función, en el punto, corresponden, respectivamente, a las pendientes de las rectas tangentes por la izquierda y por la derecha.	(3.16)

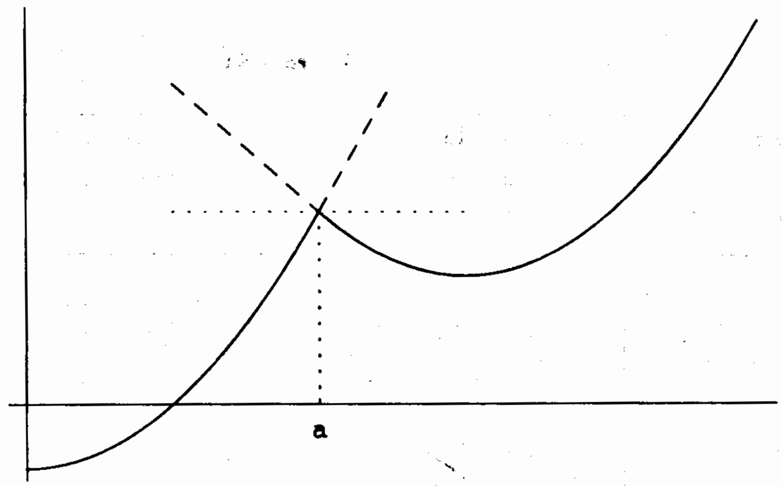


Fig. 3.6

Ejemplo 3.11

En el ejemplo 3.8 se obtuvo que la función ϕ definida por $\phi(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \le 1 \\ x + 1, & 1 < x \le 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$

es continua, pero no diferenciable, en $x = 1$, ya que $\phi'_-(1) = -2$ y $\phi'_+(1) = 1$. Viendo la gráfica de la función (figura 2.13) puede observarse que la gráfica tiene un cambio de dirección en $x = 1$.

3.2 Ejercicios

1. Considerando la tabla de tiempos y posiciones del ejercicio 1 de la sección 3.1 y el resultado obtenido en el inciso a) del mismo ejercicio, procédase como en el ejemplo 3.7 para obtener la ecuación de posiciones y derivarla a fin de obtener una expresión para la velocidad en términos del tiempo.

2. Para cada una de las curvas dadas, obtener la ecuación de la recta tangente en el punto indicado y graficar, en el mismo sistema coordenado, la curva y la tangente.

   a) $y = x^2 - 2x + 1$, punto de abscisa 2.

   b) $y = 2 - x^3$, punto de abscisa -1.

   c) $y = \dfrac{1}{x}$, punto de abscisa ½.

3. Obtener los valores de las constantes a, b, c y k, para los cuales la función dada es diferenciable para todo número real y dar una interpretación gráfica del resultado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + k, & x < -1 \\ ax^2 + bx + c, & -1 \le x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$

3.3 Cálculo de derivadas

La definición de la sección anterior puede usarse para obtener la derivada de una función con regla de correspondencia dada, sin embargo, esto puede resultar innecesariamente complicado. En esta sección obtendremos un conjunto de teoremas que permitirán calcular, con relativa facilidad, la derivada de una función a partir de su regla de correspondencia. Comenzaremos primero por aquellos teoremas que permitirán derivar cualquier función algebraica.

Funciones algebraicas: teoremas básicos

Para derivar funciones algebraicas, en las que no intervenga la composición de funciones, se utilizarán los teoremas siguientes.

Función constante

Teorema 3.1 $$\boxed{\frac{dc}{dx}=0}$$

Función lineal

Teorema 3.2 $$\boxed{\frac{d(ax+b)}{dx}=a}$$

Derivada de una potencia

Teorema 3.3 $$\boxed{\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}, \qquad \forall n\in\mathbf{Q}}$$

Derivada de una suma

Teorema 3.4 $$\boxed{D\,(f+g)=D\,f+D\,g}$$

Derivada de un producto

Teorema 3.5 $$\boxed{D\,(f\cdot g)=f\cdot Dg+g\cdot Df}$$

Derivada de una constante y una función

Corolario (del teorema 3.5) $$\boxed{D(c\,f)=c\,D\,f}$$

Derivada de un cociente

Teorema 3.6 $$\boxed{D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot Df-f\cdot Dg}{g^2}}$$

Para demostrar estos teoremas, pueden utilizarse las definiciones de derivada y diferencial. Aquí se demostrarán los teoremas 3.3 y 3.5, los restantes pueden verse en el anexo C.

Prueba del teorema 3.3

Usando la serie binomial, tenemos que

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}dx^3 + \cdots$$

Por lo tanto,

$$(x+dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}dx^3 + \cdots$$

$$d(x^n) = (x+dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + o(dx^2)$$

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} = n\cdot x^{n-1} + o(dx)$$

Al eliminar la parte infinitesimal se tiene, finalmente, que

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\cdot x^{n-1}$$

Prueba del teorema 3.5

Si u y v son funciones de x, entonces, suponiendo que se da un incremento infinitesimal dx en la variable x, u y v experimentarán incrementos, también infinitesimales, du y dv, así que el producto de estas variables también cambiará su valor, de uv a $(u+du)(v+dv)$.

El incremento infinitesimal, es decir, el diferencial del producto será entonces

$$d(uv) = (u+du)(v+dv) - uv = uv + u\,dv + v\,du + du\,dv - uv$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du + du\,dv$$

Eliminando el diferencial de orden mayor, se tiene

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Finalmente, dividiendo por el diferencial dx de la variable, se obtiene

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{u\,dv + v\,du}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Así pues, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la última ecuación nos indica que

$$\frac{d(f\,g)}{dx} = (f\,g)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

Tal y como debía probarse.

Ejemplo 3.12 $D(c\,x^n) = c\,Dx^n = cn\,x^{n-1}$

Ejemplo 3.13 $D\,(3x^4 - 7x^2 + 5x - 10) = 12x^3 - 14x + 5$

Ejemplo 3.14

Calcular la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \dfrac{x}{x^2+4}$ en el punto cuya abscisa es $x = \sqrt{12}$.

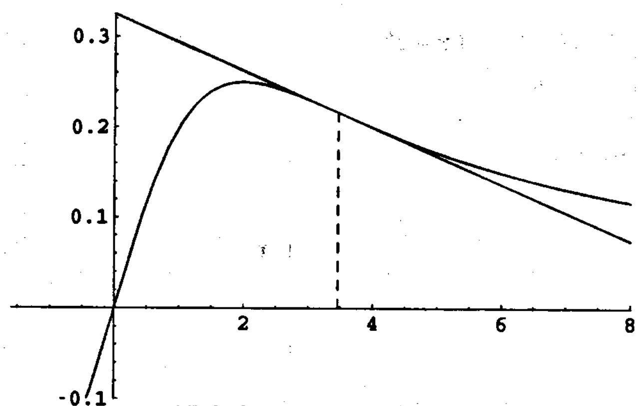


Fig. 3.7

Solución

De acuerdo con (3.15), la pendiente buscada es la derivada de la función dada en el punto indicado. Ahora bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+4)\,D_x x - x\,D_x(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{(x^2+4)(1) - x(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

En el punto de interés, tenemos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{12}} = \frac{4-12}{(12+4)^2} = -\frac{8}{256} = -\frac{1}{32}$$

Así pues, la recta tangente a la curva dada, en el punto indicado, es casi horizontal. En la figura 3.7 se muestra una porción de la curva dada (ver ejercicio 5 de la sección 2.3) y de la tangente en el punto de interés. Obsérvese que, en este caso, la recta tangente "corta" a la curva, es decir, la parte de la recta a la izquierda del punto de tangencia, está por encima de la curva, en cambio, a la derecha, la recta está por debajo de la curva. Esta situación, que se presenta sólo en puntos muy particulares de una curva, será estudiada más adelante.

Ejemplo 3.15

La posición de una partícula, en movimiento rectilíneo, está dada por

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5, \quad t \geq 0,$$

donde t está medido en segundos y x en centímetros. Si el eje de referencia está dirigido de izquierda a derecha, ¿durante qué intervalo(s) la partícula se mueve hacia la derecha?, ¿hacia la izquierda?

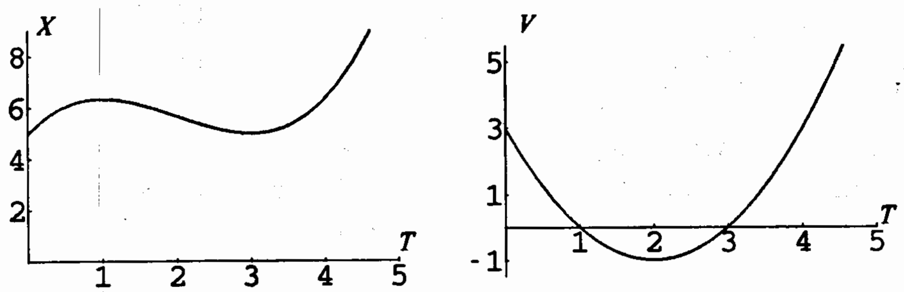


Fig. 3.8

Solución

La partícula se mueve hacia la derecha en los instantes en que los desplazamientos son positivos. Además, de acuerdo con la ecuación (3.5), el desplazamiento infinitesimal dx, correspondiente a un intervalo infinitesimal dt, es el producto de la velocidad por el intervalo. Ahora bien, la velocidad de la partícula es

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = t^2 - 4t + 3$$

Por lo tanto, la partícula se mueve hacia la derecha, cuando $t^2 - 4t + 3 > 0$.

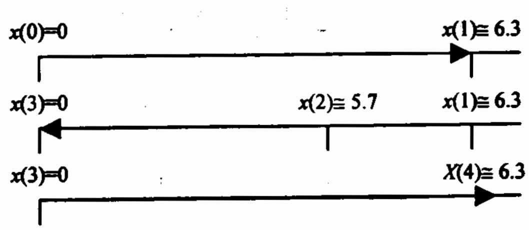


Fig. 3.9

Resolviendo esta desigualdad, se obtiene finalmente (véanse figuras 3.8 y 3.9), que la partícula se mueve hacia la derecha, durante el primer segundo, y después del tercero, mientras que se mueve a la izquierda, entre el primero y el tercer segundos.

Ejemplo 3.16

Si $y = f(x) = \sqrt{x}$, es decir, si $y = x^{1/2}$, entonces, de acuerdo con el teorema 3.3,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^{1/2})}{dx} = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por otra parte, podemos entender la expresión x^n, con n un número real, y $x > 0$, como el límite de una sucesión de expresiones de la forma x^n, con n un número racional y asumir que el teorema 3.3 es válido para cualquier potencia con exponente real (y base positiva).

Ejemplo 3.17 $\quad D_x\, x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}, \quad x > 0$

Regla de la cadena

Supóngase que las variables x, u y y están relacionadas por medio de $u = g(x)$ y $y = f(u)$, de manera que $y = h(x) = f[g(x)] = [f \circ g](x)$. Deseamos calcular la derivada de y respecto de x, es decir, la derivada de una función compuesta.

Supongamos ahora que f y g son derivables (y por lo tanto continuas), de manera que cuando x cambia su valor de x a $x + dx$, siendo dx infinitesimal, u cambia de u a $u + du$ y y de y a $y + dy$, siendo du y dy también infinitesimales (por continuidad). Tenemos, entonces, que:

$$\boxed{h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}} \tag{3.17a}$$

O bien:

$$D_x\, f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x) \tag{3.17b}$$

Ejemplo 3.18

Si $y = \sqrt{u}$, siendo u función de x, entonces, de acuerdo con el ejemplo 3.16,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$$

en particular,

$$\frac{d\left(\sqrt{5x^3 - x}\right)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5x^3 - x}}\frac{d(5x^3 - x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5x^3 - x}}\left(15x^2 - 1\right)$$

$$D_x\sqrt{5x^3 - x} = \frac{15x^2 - 1}{2\sqrt{5x^3 - x}}$$

Ejemplo 3.19

Para cualquier función expresada como una potencia tendremos:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = \frac{d(u^n)}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

de manera que, por ejemplo,

$$D_x\left(3x^4 - x^2\right)^3 = 3\left(3x^4 - x^2\right)^2 \cdot D_x\left(3x^4 - x^2\right) = 3\left(12x^3 - 2x\right)\left(3x^4 - x^2\right)^2$$

y también,

$$D_w\left(4\sqrt[3]{2w^2 - 1}\right) = D_w\left[4\left(2w^2 - 1\right)^{1/3}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left(2w^2 - 1\right)^{-2/3} \cdot D_w(2w^2 - 1) = \frac{16w}{3\sqrt[3]{\left(2w^2 - 1\right)^2}}$$

Ejemplo 3.20

Obtener el punto de la gráfica de $y = \sqrt{1 + x^3}$ en el cual la recta tangente tenga una inclinación de 45°.

Solución

La pendiente de la recta tangente de la curva dada, en cualquiera de sus puntos, de acuerdo con (3.15) y el ejemplo 3.18, es

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^3}}(3x^2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$$

Si la tangente tiene una inclinación de 45°, su pendiente debe ser 1, de manera que el punto buscado es aquel cuya abscisa satisface la ecuación

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}} = 1$$

O bien: $3x^2 = 2\sqrt{1 + x^3}$, $9x^4 = 4(1 + x^2)$, $9x^4 - 4x^3 - 4 = 0$.

Utilizando un método numérico,[2] se encuentra que las raíces reales de esta ecuación son $x_1 \cong -0.724$ y $x_2 \cong 0.955$, de manera que los puntos de la curva en los que la tangente tiene una inclinación de 45° son $P_1 \cong (-0.724, 0.788)$ y $P_2 \cong (0.955, 1.368)$.

[2] Al final de esta unidad, cuando se estudien algunas aplicaciones de la derivada, se verá el *método de Newton*, por medio del cual se podrá hacer el cálculo numérico aquí indicado.

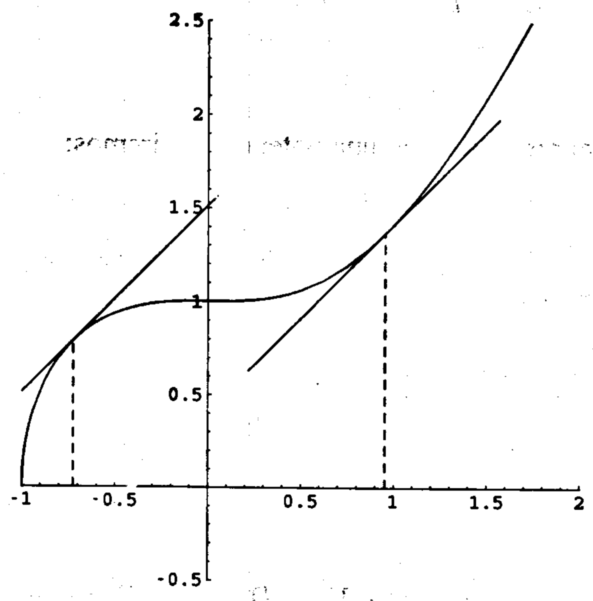


Fig. 3.10

En la figura 3.10 se muestra la curva dada y las rectas tangentes que satisfacen la condición pedida.

Derivación implícita

Sabemos que si una relación R está definida mediante una ecuación de la forma

$$R(x,y)=0, \qquad (a)$$

entonces podemos suponer que ésta define, implícitamente, una o más funciones de la forma

$$y=f(x) \qquad (b)$$

Así pues, si queremos calcular la derivada de y respecto de x, a partir de la ecuación (a), podemos derivar cada uno de los términos de la misma, suponiendo que y depende de x, de manera que habrá de aplicarse la regla de la cadena en cada término que contenga a y.

Ejemplo 3.21

Si R es la relación definida por $4x^2y^3=1$, entonces, $\dfrac{d(4x^2y^3)}{dx}=\dfrac{d(1)}{dx}$,

$$4\left(x^2\frac{d(y^3)}{dx}+y^3\frac{d(x^2)}{dx}\right)=0, \qquad x^2\left(3y^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy^3=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{2xy^3}{3x^2y^2}=-\frac{2y}{3x}$$

Ejemplo 3.22

Obtener la pendiente de la recta tangente a la curva $xy^2+2x^2y-x+2y=4$, en el punto $(1,1)$.

Solución

Derivando ambos miembros de la ecuación, implícitamente, respecto a x, se obtiene

$$y^2+2xy\frac{dy}{dx}+4xy+2x^2\frac{dy}{dx}-1+2\frac{dy}{dx}=0$$

Despejando dy/dx,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2-4xy+1}{2xy+2x^2+2}$$

En el punto de interés,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\frac{-1-4+1}{2+2+2}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Derivación de funciones inversas

Sabemos que una función inyectiva tiene inversa. Consideremos, pues, que la inversa de una función inyectiva *f*, es *g*, de manera que, para todo punto (x,y) de *f*, se tiene que

$$y=f(x) \quad \text{y} \quad x=g(y)$$

Supongamos, además, que *f* y *g* son diferenciables, y que cuando x cambia su valor de x a $x+dx$, y lo hace de y a $y+dy$, de manera que

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy}=g'(y)$$

Entonces

$$\boxed{g'(y)=\frac{1}{f'(x)}} \tag{3.15}$$

Ejemplo 3.23

Si $y=f(x)=x^2$, $x\geq 0$, entonces f es inyectiva, y su inversa está dada por $x=g(y)=\sqrt{y}$. Tenemos entonces, que

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Es decir,

$$D_y\sqrt{y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Resultado que, por supuesto, coincide con el obtenido anteriormente.

Ejemplo 3.24

Calcular la pendiente de la recta tangente a la semiparábola $y = \sqrt{x}$, que pasa por el punto $(4, 3)$.

Solución

Siendo T la recta tangente cuya pendiente se busca, Q el punto dado, f la función que define la curva, y $P = (a,b)$ el correspondiente punto de tangencia (ver figura 3.11a), entonces

$$m_T = m_{PQ} = f'(a) \qquad \text{(a)}$$

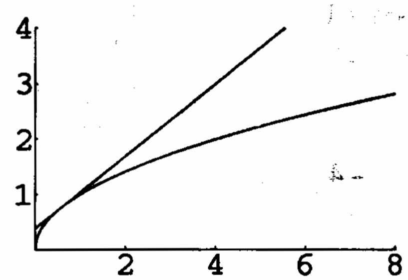


Fig. 3.11a

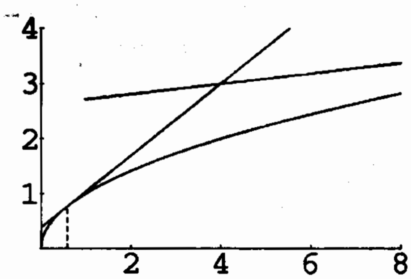


Fig. 3.11b

Ahora, como $f(x) = \sqrt{x}$, tenemos que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo tanto, $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Además, $b = f(a) = \sqrt{a}$, así que al sustituir todo esto en (a), tenemos:

$$\frac{b-3}{a-4} = \frac{\sqrt{a}-3}{a-4} = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

$$2a - 6\sqrt{a} = a - 4,$$

$$a - 6\sqrt{a} + 4 = 0$$

Al resolver esta ecuación (que es cuadrática en $\sqrt{a}$), obtenemos dos raíces reales y positivas: $\sqrt{a_1} = 3 - \sqrt{5} \cong 0.764$ y $\sqrt{a_2} = 3 + \sqrt{5} \cong 5.236$, así que: $a_1 \cong (3-\sqrt{5})^2 \cong 0.584$ y $a_2 \cong (3+\sqrt{5})^2 \cong 27.42$.

Por lo tanto, hay dos rectas tangentes a la parábola (ver figura 3.11b) que pasan por el punto $(4, 3)$, siendo los puntos de tangencia $P_1 \cong (0.584, 0.764)$ y $P_2 \cong (27.42, 5.236)$, y las correspondientes pendientes,

$$m_1 = \frac{1}{2\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2(3-\sqrt{5})} \cong 0.655,$$

$$\text{y} \qquad m_2 = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} = \frac{1}{2(3+\sqrt{5})} \cong 0.095$$

En la figura no se muestra el segundo punto de tangencia ya que queda muy lejos del punto $(4,3)$.

Derivación de funciones trascendentes

Completaremos ahora la obtención de los procedimientos para el cálculo de derivadas, al considerar las principales funciones trascendentes. Al igual que en el caso de las algebraicas, sólo se incluyen aquí algunas demostraciones, las restantes pueden verse en el anexo C.

Funciones trigonométricas directas

En la unidad anterior se obtuvo que, siendo dx infinitesimal,

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \tag{3.16}$$

de donde,

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)\cdot(\cos h + 1)}{h\cdot(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h\cdot(\cos h + 1)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h\cdot(\cos h + 1)} = -\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} = -1\cdot 0 = 0$$

Así pues, si h es infinitesimal, entonces $\dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ (3.17)

Con este resultado, podemos ahora obtener la derivada de cada una de las funciones trigonométricas directas. Así, para la función seno:

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x+dx) - \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos dx + \cos x\cdot\operatorname{sen} dx - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x\cdot(\cos dx - 1) + \cos x\cdot\operatorname{sen} dx}{dx} = \operatorname{sen} x\frac{\cos dx - 1}{dx} + \cos x\frac{\operatorname{sen} dx}{dx}$$

$$= \operatorname{sen} x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x$$

Por lo tanto,

$$\boxed{D_x \operatorname{sen} x = \cos x} \tag{3.18}$$

De manera similar puede obtenerse la derivada de la función coseno. El resto de los teoremas, para la derivación de las funciones trigonométricas directas, son una consecuencia inmediata (ver anexo C).

Funciones trigonométricas inversas

Para obtener los teoremas referentes al cálculo de la derivada de cada una de las funciones trigonométricas inversas, debe definirse la función y aplicar los resultados antes obtenidos para las funciones directas. Por ejemplo, en el caso de la función seno (ver anexo C), considerando la función seno $y = f(x) = senx$, con dominio en $[-\pi/2, \pi/2]$, se define la función inversa correspondiente, es decir, $x = g(y) = \operatorname{arcsen} y$, y al aplicar la ecuación (3.15) se obtiene que

$$D_w arc\,\text{sen}\,w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \tag{3.19}$$

De la misma manera se procede para cada una de las funciones trigonométricas restantes.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Para las funciones exponencial y logarítmica, se comienza por obtener la derivada de la función exponencial, posteriormente se aplica la derivación inversa y el teorema para el cambio de base (ver anexo C).

Ejemplo 3.25

Obtener los puntos de la gráfica de $y = x\ln x$ en los cuales la tangente es horizontal (paralela al eje de abscisas).

Solución

Siendo la tangente paralela al eje de abscisas, su ángulo de inclinación es 0 (o π), y, por lo tanto, su pendiente se anula. De esta manera, deben encontrarse los puntos de la curva en los que la derivada es cero.

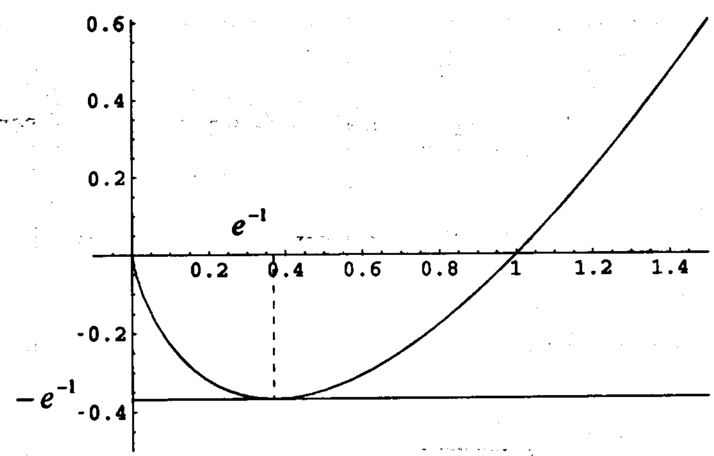


Fig. 3.12

Ahora bien, utilizando el teorema 21 del anexo C, tenemos que la derivada de la función dada es:

$$\frac{dy}{dx} = xD_x \ln x + \ln x D_x x = x\frac{1}{x} + \ln x(1) = 1 + \ln x$$

Así pues, la derivada se anula en los puntos en los que

$$1 + \ln x = 0, \qquad \ln x = -1, \qquad x = e^{-1}$$

En la figura 3.12 se muestran la curva y la recta tangente a ésta en el punto $(e^{-1}, -e^{-1})$, que, tal y como se pedía, es paralela al eje de abscisas.

Funciones hiperbólicas

Los teoremas para el cálculo de la derivada de las funciones hiperbólicas se obtienen de las definiciones de éstas, y del teorema para la derivación de la función exponencial.

Ahora bien, por lo general las funciones trascendentes se aplican en combinación con otras, es decir, en una composición de funciones. Por tal motivo, al final del anexo C se incluyen todos los teoremas para el cálculo de derivadas de funciones trascendentes, indicando explícitamente la regla de la cadena en cada caso.

Empleando tales teoremas se podrá calcular la derivada de cualquiera de las funciones de uso en las ciencias básicas y de la ingeniería, a partir de su regla de correspondencia, como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.26

$$D_x \operatorname{sen}(3x^2 - 1) = \cos(3x^2 - 1)\frac{d(3x^2 - 1)}{dx} = 6x\cos(3x^2 - 1)$$

Ejemplo 3.27

$$D_x arctan\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} D_x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2-x^2}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} D_x(1-x^2)$$

$$D_x arctan\sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}})$$

Ejemplo 3.28

$$D_w e^{\cosh\sqrt{2w}} = e^{\cosh\sqrt{2w}}\left(\operatorname{senh}\sqrt{2w}\right)\frac{1}{2\sqrt{2w}}2 = \frac{1}{\sqrt{2w}}\operatorname{senh}\sqrt{2w}e^{\cosh\sqrt{2w}}$$

Derivadas de orden superior

Dado que la derivada de una función es, a su vez, otra función, entonces, puede derivarse nuevamente, obteniendo así la derivada de la derivada, a la que denominaremos *segunda derivada* de la función dada.

Si *f* es una función definida por $y = f(x)$, denotaremos la segunda derivada de *f* mediante:

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x), \qquad D_x^2\,y$$

Ejemplo 3.29

Si $\qquad y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

entonces, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x) = 4x^3 - 6x + 6$

y $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = 12x^2 - 6$

De la misma forma, podemos derivar sucesivamente una función dada, obteniendo su tercera, cuarta, enésima derivada, las que se denotarán por:

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \frac{d^5y}{dx^5}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y''', \quad y^{iv}, \quad y^{v}, \ldots, y^{(n)}$$

$$f'''(x), \quad f^{iv}(x), \quad f^{v}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

$$D_x^3, \quad D_x^4, \quad D_x^5, \ldots, \quad D_x^n$$

Ejemplo 3.30

Si $\qquad y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

entonces, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = 12x^2 - 6$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 24x \quad , \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = y^{iv} = 24$$

y $\qquad \dfrac{d^ky}{dx^k} = y^{(k)} = 0 \qquad$ para $\quad k \geq 5$

Ejemplo 3.31

Si $\qquad y = f(x) = e^{ax}$

entonces, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = y' = ae^{ax}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = a^2 e^{ax} ,$$

y, en general,
$$\frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)} = a^k e^{ax}$$

3.3 Ejercicios

1. Considerando como "suficientemente pequeño" el número 0.0001 para sustituir el incremento infinitesimal de la variable en la definición de derivada, estimar el valor de $f'(x_0)$ si:

   a) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$, $x_0 = 1$

   b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 4$

   c) $f(x) = 3^{2x}$, $x_0 = 0.6$

2. La potencia con exponente irracional no está definida, sin embargo, podemos tener una idea de su significado si consideramos al irracional como el valor hacia el que converge una sucesión de números racionales. Por ejemplo, si recordamos el algoritmo aritmético para calcular una raíz cuadrada tenemos que cada paso proporciona una cifra decimal de la raíz buscada, de manera que si deseamos calcular la raíz (cuadrada) de 2, obtenemos 1 en el primer paso, 1.4 en el segundo, 1.41 en el tercero, etc.

   La sucesión {1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,...} converge a la raíz cuadrada de 2 y cada uno de sus elementos es un número racional.

p	2^p
1	
1.4	
1.41	
1.414	
1.4142	

   Usando calculadora y reteniendo en cada operación todas las cifras, llenar la tabla mostrada y contestar lo que sigue:

   a) ¿Cuál es el valor que da la calculadora para $2^{\sqrt{2}}$?

b) ¿Qué tienen que ver los números obtenidos en la tabla con el valor de $2^{\sqrt{2}}$?

c) El valor dado por la calculadora para $2^{\sqrt{2}}$, ¿es el valor exacto?, ¿y el de $\sqrt{2}$?

Por último considérese la función definida por $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, entonces,

$$f'(2) = \frac{(2+h)^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}}{h} \qquad \text{con } h \text{ infinitesimal,}$$

Definiendo $g(h) = \dfrac{(2+h)^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}}{h}$ (con h real), completar la siguiente tabla:

h	$g(h)$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

Con base en esta tabla, ¿cuál es el valor de $f'(2)$ con precisión de milésimas?

3. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

   a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto cuya abscisa es 2.

   b) Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f que pase por el punto (1.5, 0.5)

4. Calcular $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = 5x^2e^{3x}$

   b) $f(x) = \dfrac{\cos 5x}{x}$

   c) $f(x) = (arctan\ 3x)^2$

   d) $f(x) = \sqrt{1+3^x}$

   e) $f(x) = \ln \operatorname{arcsen} 2x$

5. a) si $f(x) = x^2 sen 2x$, calcular $f''(x)$

   b) si $g(x) = x^2e^{3x}$, calcular $g'''(x)$

   c) si $\phi(x) = x\sqrt{x^2+2}$, calcular $\phi''(\sqrt{2})$

d) si $F(x) = x^2 \ln x$, calcular $F'''(1)$

e) si $G(x) = x^{2n}$, calcular $n!G^{(n)}(x)$

6. Obtener y' si:

a) $x^2y + x - 2y = 0$

b) $\text{sen}(x + y) = x + y$

c) $e^{xy} - x - y = 0$

7. Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa dada y trazar las gráficas de f y de la tangente pedida si:

a) $f(x) = x^3 - x + 1$, $x = 1$

b) $f(x) = \text{sen}\, x$, $x = 0$

c) $f(x) = e^{x-1}$, $x = 0$

8. Obtener la ecuación de la recta tangente:

a) a la gráfica de $xe^y - x^2 + 2y = 0$ en el punto (1, 0).

b) a la gráfica de $xy - 2x - y - 3 = 0$ en el punto de abscisa 2

c) a la gráfica de $y^2 - 2x + y - 4 = 0$ tal que pase por el punto (1, 3).

d) a la gráfica de $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = 0$ tal que pase por el punto (0, 2). Trazar la gráfica correspondiente.

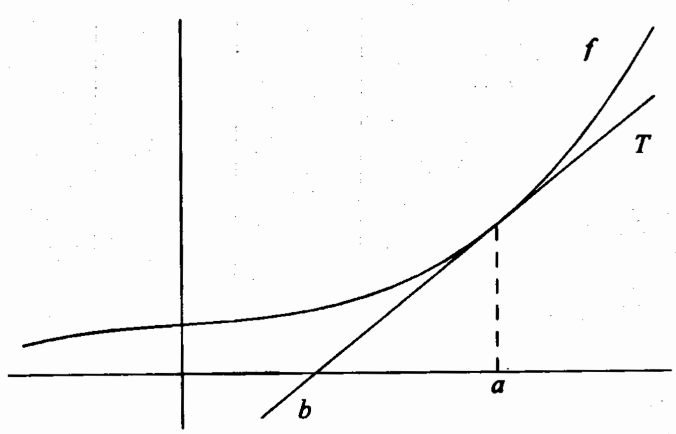
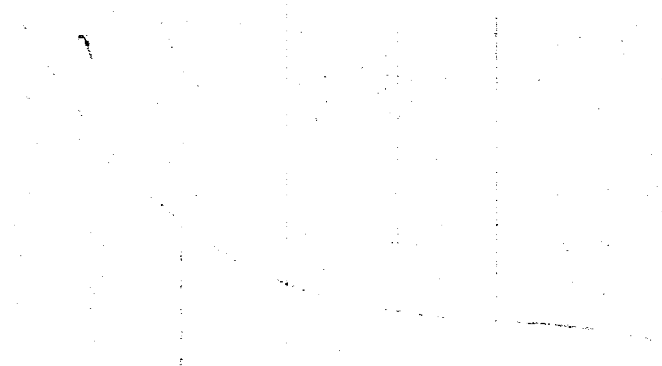


Figura del ejercicio 9

9. Siendo f una función, T la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ y b la abscisa del punto de intersección de la tangente con el eje X (ver figura), la subtangente de f en $x = a$, denotada por s, se define como la longitud del intervalo $[b, a]$ (o $[b, a]$).

   Encontrar una expresión para calcular s dada la regla de correspondencia de f y el valor de a y demuestra que para el caso de la función exponencial, $f(x) = e^x$ el valor de la subtangente es independiente del punto.



4. SERIES DE POTENCIAS Y SERIE DE TAYLOR

En la sección 1.2 de la primera unidad, se estudiaron series de potencias para algunas funciones algebraicas. Ahora vamos a considerar el desarrollo en serie de potencias de las principales funciones trascendentes.

En esta primera sección se procederá a obtener el desarrollo en serie, considerando cada tipo de función en forma particular, y en la siguiente se verá que tales desarrollos pueden obtenerse utilizando un procedimiento general.

4.1 Series de potencias: funciones trascendentes

Un procedimiento que suele resultar de mucha utilidad, cuando se desea obtener el desarrollo en serie de una función, es el de *identificación término a término*, utilizado en el ejemplo 1.13 para obtener el desarrollo de una función irracional, sólo que, en ese caso [ecuación (b)], la serie estaba igualada a un polinomio y no a otra serie.

Como se indicó en la sección 1.2, el desarrollo correspondiente es único, de modo que cada uno de los coeficientes de la serie queda determinado por la función misma. Es decir, si cada una de las series

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

y

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

representa la misma función, entonces, necesariamente, los coeficientes correspondientes a cada una de las potencias de la variable son iguales:

$$\begin{array}{ll} 1 & c_0 = a_0, \\ x & c_1 = a_1, \\ x^2 & c_2 = a_2, \text{ etc.} \end{array}$$

También resulta muy útil la *derivación término a término*, que consiste en suponer que la serie puede derivarse como un polinomio (de grado infinito). Vamos a ver cómo aprovechar ambos procedimientos para la obtención del desarrollo en serie de la función exponencial.

Supongamos que la función exponencial puede desarrollarse en serie de potencias, es decir que, para toda x, en algún intervalo se satisface la ecuación

$$f(x) = e^x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots \tag{4.1}$$

Suponiendo que la igualdad es válida para $x = 0$, tenemos

$$f(0) = e^0 = 1 = c_0,$$

así que, al sustituir en (4.1), se obtiene

$$f(x) = e^x = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{4.2}$$

Derivando la última serie término a término, obtenemos:

$$f'(x) = e^x = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots + (n+1)c_{n+1} x^n + \cdots \tag{4.3}$$

Teniendo en cuenta que $D_x e^x = e^x$, podemos entonces identificar término a término las series dadas por (4.2) y (4.3) para obtener:

$$\begin{aligned}
&c_1 = 1 \\
&2c_2 = c_1, \qquad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2} \\
&3c_3 = c_2, \qquad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3 \cdot 2} \\
&4c_4 = c_3, \qquad c_4 = \frac{c_3}{4} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&(n+1)c_{n+1} = c_n, \qquad c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot n \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2}
\end{aligned}$$

De donde puede inferirse que

$$c_k = \frac{1}{k!}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Finalmente, al sustituir el valor de cada coeficiente en (4.2), obtenemos:[3]

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots} \tag{4.4}$$

Utilizando este resultado, veremos ahora cómo se relaciona la función exponencial con una serie binomial; para ello, considérese que $|x| < n$, es decir, que $|x/n| < 1$. Tenemos entonces que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots$$

De manera que, si $n = N$ es infinitamente grande, entonces, para todo número real k, se tiene que $N - k = N$ y

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = 1 + N\left(\frac{x}{N}\right) + \frac{N^2}{2!}\left(\frac{x}{N}\right)^2 + \frac{N^3}{3!}\left(\frac{x}{N}\right)^3 + \cdots,$$

[3] Puede demostrarse, lo que no corresponde a los fines de este libro, que el desarrollo en serie dado por (4.4) es válido para cualquier valor de la variable.

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

desarrollo que coincide con el que aparece en la ecuación (4.4), de manera que, si N es infinitamente grande,

$$\boxed{\left(1+\frac{x}{N}\right)^{N}=e^{x}} \tag{4.5}$$

Para la función exponencial con base diferente de e, tenemos:

$$a^{w}=\left(e^{Ln\,a}\right)^{w}=e^{(Ln\,a)w}$$

Además, si $x=(Lna)w=kw$, con $k=Lna$, entonces, sustituyendo en (4.4), resulta:

$$\boxed{a^{w}=1+kw+\frac{k^2}{2!}w^2+\frac{k^3}{3!}w^3+\cdots+\frac{k^n}{n!}w^n+\cdots \qquad (k=Ln\,a)} \tag{4.6}$$

Puesto que esta serie se obtuvo de (4.4), y como existe una relación lineal entre las variables que intervienen en las mismas ($x=w\,\mathrm{Ln}\,a$), el desarrollo dado por (4.6) también es válido para todo valor de la variable.

Para el resto de las funciones trascendentes, sólo se dará el desarrollo correspondiente, así como el intervalo de convergencia. Si se desea ver cómo se obtienen tales desarrollos, puede consultarse el anexo D.

En el caso de las funciones logarítmicas, se obtienen los desarrollos

$$\boxed{\log_a(1+y)=\frac{1}{k}\left(y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\cdots\right)} \tag{4.7}$$

y

$$\boxed{\ln(1+y)=y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\cdots} \tag{4.8}$$

que son válidos en el intervalo $<-1,1>$, es decir, para $-1<y<1$.

Por otra parte, para las funciones trigonométricas directas, seno y coseno, se obtienen las ecuaciones

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots} \tag{4.9}$$

y

$$\boxed{\mathrm{sen}\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots} \tag{4.10}$$

que son válidas para todo valor de y.

Es importante señalar que las funciones seno y coseno pueden relacionarse con la función exponencial con argumento complejo, por medio de las ecuaciones siguientes:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x} \tag{4.11}$$

y

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x} \tag{4.12}$$

En efecto, si en la ecuación (4.4) se sustituye ix en lugar de x, se obtiene

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \cdots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}ix^5 - \cdots\right)$$

En donde se observa que las series incluidas entre paréntesis coinciden con las dadas por las ecuaciones (4.9) y (4.10), por lo tanto

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

tal y como lo indica la ecuación (4.11). De manera similar, al sustituir $-ix$ en lugar de x en (4.4), se obtiene la ecuación (4.12).

Finalmente, para obtener el desarrollo en serie de las funciones hiperbólicas, seno y coseno, simplemente se utiliza la definición de las mismas y la ecuación (4.4) para obtener

$$\boxed{\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} \tag{4.13}$$

y

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.1

En el ejemplo 1.9 se obtuvieron valores aproximados de e al sustituir $x = 1$ en la ecuación (4.4), es decir, por medio de la serie numérica

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

Según los resultados mostrados en el mismo ejemplo (tabla 1.4), se requieren 10 términos de la serie para obtener una aproximación correcta hasta 7 cifras después del punto decimal. En tal caso, el primer término de la serie que no se incluye en el polinomio, es decir, el de grado 11 es $1/11! = 1/39916800 \cong 2.5 \times 10^{-8}$, que, al sumarlo con los anteriores términos de la serie, no modifica ninguna de las 7 primeras cifras después del punto decimal.

Ahora bien, si se tiene el valor del polinomio que resulta de truncar la serie hasta un grado determinado, y se quiere entonces calcular la suma, considerando el término siguiente, sólo hay que sumar dicho término a la suma que ya se tiene. Sin embargo, en caso de no contar con el valor de ninguno de los polinomios, deberán sumarse todos los términos, a partir del primero. Si las operaciones se hacen con calculadora, el proceso puede resultar muy tedioso, y si se hace por computadora, habrá que realizar el cálculo utilizando un algoritmo que minimice el número de operaciones aritméticas.

En este caso, sin embargo, puede calcularse una buena aproximación del valor de la función exponencial, utilizando la ecuación (4.5), en lugar de la serie (4.4). En efecto, considerando que la ecuación mencionada es válida sólo para N infinitamente grande, la aproximación se obtendrá asignando a n valores finitos, pero grandes.

n	100	10 000	1 000 000	1 000 000 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.704 813 827	2.718 145 927	2.718 280 469	2.718 281 817

Tabla 4.1

La tabla 4.1 muestra los valores de la expresión dada por (4.4), con $x = 1$, para algunos valores "grandes" de n. Tomando en cuenta que una calculadora con 10 dígitos indica que el valor de e es 2.718 281 818, observamos que se requiere asignar valores muy grandes a n para obtener una buena precisión.

Hemos visto cómo obtener el desarrollo en serie de potencias de una función mediante la identificación de términos. A continuación se indica cómo obtener la serie haciendo operaciones algebraicas con desarrollos en serie previamente obtenidos.

Ejemplo 4.2

Obtener el desarrollo en serie de potencias de la función tangente.

Solución

Sabemos que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y que, para todo valor de x, de acuerdo con las ecuaciones (4.9) y (4.10), para todo valor de x,

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} \qquad \text{(a)}$$

y
$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots} \qquad \text{(b)}$$

Considerando los primeros cuatro términos de cada una de estas series, y dividiendo (b) entre (a), se obtiene que el desarrollo en serie de la función tangente[4] está dado por

$$\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots} \qquad (4.15)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots \\
 & -x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{720}x^7 + \cdots \\
 & \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{840}x^7 + \cdots \\
 & \quad -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{72}x^7 + \cdots \\
 & \qquad \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots \\
 & \qquad -\frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{15}x^7 + \cdots \\
 & \qquad\qquad \frac{17}{315}x^7 + \cdots
\end{array}$$

Ejemplo 4.3

Para obtener el desarrollo de la función arco tangente, vamos ahora a utilizar un procedimiento similar al que se usó para la obtención de la serie de la función exponencial.

Supongamos que el desarrollo de dicha función, en serie de potencias, está dado por

$$\arctan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$$

Para $x = 0$ se tiene que $0 = c_0$, de manera que la serie se reduce a

$$\arctan x = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots \qquad \text{(a)}$$

Derivando:

[4] Obsérvese que los otros términos de las series no influyen en el valor de los coeficientes calculados.

$$\frac{1}{1+x^2} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \cdots \qquad \text{(b)}$$

Ahora bien, el primer miembro de esta última ecuación es una expresión racional que se puede expandir como una serie geométrica con primer término igual a la unidad y razón $-x^2$, obteniendo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad \text{(c)}$$

Haciendo, entonces, una identificación término a término entre las series dadas por (b) y (c), ya que representan la misma función, se obtiene

$$c_1 = 1, \quad 2c_2 = 0, \quad 3c_3 = -1, \quad 4c_4 = 0, \quad 5c_5 = 1, \text{ etc.}$$

Así pues, todos los coeficientes correspondientes a potencias pares son cero, mientras que los correspondientes a las potencias impares son

$$c_1 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{3}, \quad c_5 = \frac{1}{5}, \text{ etc.}$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados en (a) se obtiene, finalmente, que

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots} \qquad (4.16)$$

Series de potencias y cálculo de límites

Las series de potencias, además de ser una herramienta usual para la aproximación y evaluación de funciones, también puede utilizarse para calcular integrales (lo que se verá casi al final del libro), para resolver ecuaciones diferenciales, y para calcular límites. Esto último se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 4.4

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$

Solución

En la sección 3.3 se obtuvo que, para h infinitesimal, $\dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ (ecuación 3.17), lo cual es equivalente a decir que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$. Vamos a utilizar la serie de potencias del coseno para llegar a este resultado.

Así pues, de acuerdo con (4.9), tenemos que:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

De donde

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

y

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2!} + o(x^3)$$

Por lo tanto, al hacer tender x a cero (o, equivalentemente, considerando x infinitesimal), tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Ejemplo 4.5

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

Solución

Así pues, de acuerdo con (4.6), tenemos que, para $a = 2$,

$$2^w = 1 + kw + \frac{k^2}{2!} w^2 + \frac{k^3}{3!} w^3 + \cdots + \frac{k^n}{n!} w^n + \cdots \qquad (k = \text{Ln}\, 2)$$

De donde

$$2^w - 1 = kw + \frac{k^2}{2!} w^2 + \frac{k^3}{3!} w^3 + \cdots + \frac{k^n}{n!} w^n + \cdots \qquad (k = \text{Ln}\, 2)$$

y

$$\frac{2^w - 1}{w} = k + o(w) \qquad (k = \text{Ln}\, 2)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = k = \text{Ln}\, 2$$

Recuérdese que este resultado es equivalente a

$$\frac{2^h - 1}{h} = k = \text{Ln}\, 2, \qquad \text{con } h \text{ infinitesimal}$$

Sin embargo, si h no es infinitesimal, sino finito, pero pequeño, la expresión de la izquierda, en esta última ecuación, debe ser, aproximadamente, $\text{Ln}\, 2$.

Por ejemplo, si $h = 0.0001$, entonces, una calculadora con 10 dígitos indica que

$$\frac{2^h - 1}{h} \cong 0.693171,$$

mientras que la misma calculadora indica que $\ln 2 \cong 0.69314718$.

Series de potencias y aproximaciones geométricas

En las ciencias básicas y de la ingeniería, suele utilizarse algunas aproximaciones de carácter geométrico, aceptando su validez mediante "evidencia visual". Vamos a ver dos casos de éstos, recurriendo a las series de potencias para argumentar su validez y para ver el orden del error de aproximación.

Ejemplo 4.6 Aproximación de la cuerda por el arco

En mecánica[5] es frecuente indicar que, suponiendo un ángulo central pequeño, la cuerda definida por dicho ángulo es aproximadamente igual al arco correspondiente. En la sección 2.2 se hizo alusión a esta aproximación, indicando que "para ángulos pequeños, el arco y la cuerda se confunden" (ver figuras 2.11 y 4.1).

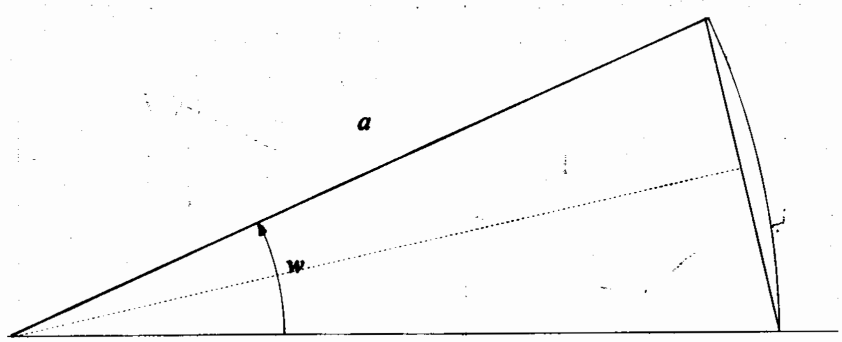


Figura 4.1

Si el valor del ángulo central es w, el arco será aw, y la cuerda $2a\operatorname{sen}(w/2)$.

Ahora bien, de acuerdo con (4.10),

$$\operatorname{sen}\frac{w}{2}=\frac{w}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{w}{2}\right)^3+o(w^5),$$

por lo tanto,

$$2a\operatorname{sen}\frac{w}{2}=2a\frac{w}{2}-2a\left(\frac{w^3}{48}\right)+o(w^5)=aw-o(w^3)$$

lo que quiere decir que el error resultante de aproximar la cuerda por medio del arco es de orden cúbico, en relación con el tamaño del ángulo. Así pues, si w es infinitesimal, la diferencia entre las longitudes de la cuerda y el arco es un infinitesimal de tercer orden.

Si w es finito, pero pequeño, la diferencia entre la cuerda y el arco será dos órdenes de magnitud más pequeña que el ángulo mismo. Por ejemplo, si el ángulo es $w=0.001$ radianes, la longitud del arco es $aw=0.001a$, y la de la cuerda es $2a\operatorname{sen}(0.0005)\cong$ 00099999996 a, de manera que el error absoluto cometido al aproximar la cuerda por el arco es, aproximadamente, $4.16\times10^{-11}a$, y el error relativo, 4.16×10^{-8}.

[5] Ver, por ejemplo, Hibbeler, p. 30.

Obsérvese, además, que el primer término de la serie no incluido, es decir, el de tercer orden, es $-aw^3/24$, que para $w = 0.001$ tiene un valor aproximado de $4.17 \times 10^{-11}a$, que prácticamente coincide con el valor del error absoluto, lo que quiere decir que la suma del resto de los términos de la serie resulta despreciable con respecto del último término que se tomó en cuenta. Ésta es una propiedad de las series de potencias a la que se hará referencia más adelante.

Ejemplo 4.7 Aproximación del arco por la perpendicular

En mecánica de materiales suelen considerarse deformaciones pequeñas, e incluso infinitesimales. Esta situación da lugar, entre otras cosas, a sustituir un arco por medio de una perpendicular,[6] ya que con eso pueden simplificarse los cálculos.

Vamos a ver cuál es el orden del error cometido al hacer tal sustitución. Primeramente vamos a comparar las longitudes del arco y de la perpendicular (ver figura 4.2).

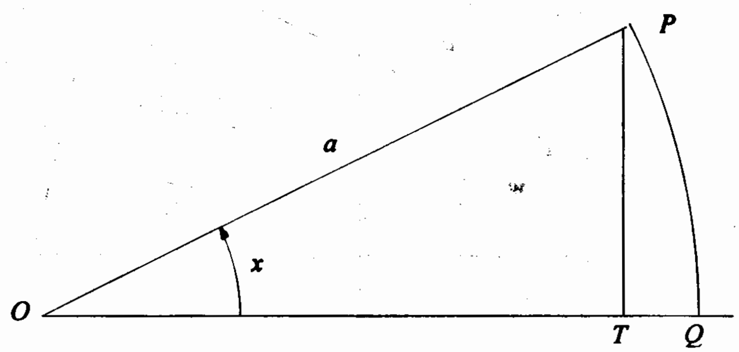


Figura 4.2

Obsérvese que el arco PQ y la perpendicular PT, que desean compararse, son las mitades, respectivamente, del arco y la cuerda que se compararon en el ejemplo anterior, de manera que sus longitudes, como se había obtenido, difieren en una cantidad de orden cúbico con respecto del tamaño del ángulo central.

Sin embargo, en los textos de mecánica de materiales, con frecuencia se indica que la longitud del radio OQ puede sustituirse por la proyección ortogonal OT, lo que equivale a considerar despreciable el segmento TQ con respecto del radio. Vamos a analizar esta sustitución.

Si la longitud del segmento que gira es a, y si el ángulo de giro es x (ver figura 4.2), tenemos que la longitud del segmento TQ es

$$TQ = OQ - OT = a - a\cos x$$

Recurriendo al desarrollo en serie de la función coseno (ecuación 4.9), obtenemos:

$$TQ = a(1-\cos x) = a\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^4)\right)\right] = a\left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)$$

[6] Ver, por ejemplo, Gere y Timoshenko, p. 90.

Por lo tanto, el tamaño relativo de TQ, con respecto de OQ es

$$\frac{TQ}{OQ}=\frac{a}{a}\left(\frac{x^2}{2}-o(x^4)\right)=\frac{x^2}{2}-o(x^4)$$

Es decir, el tamaño del segmento que se desprecia es dos órdenes de magnitud más pequeño que el tamaño del ángulo.

4.1 Ejercicios

1. Derivar las series de potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, ¿se obtiene el resultado esperado?
2. Derivar las series de potencias de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$, ¿se obtiene el resultado esperado?
3. Considerando el desarrollo en serie dado por (4.16),

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$

   Haciendo $x=1$ y conservando hasta el término correspondiente a x^{25}, ¿qué aproximación de π se obtiene?

   Obsérvese que el término número 100 es $1/199 \cong 0.005$, de manera que, utilizando esta serie, se requieren más de 100 términos para aproximar π con precisión de centésimas.

4. Consideremos ahora las siguientes series numéricas:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots$$

   Suponiendo que ambas convergen y que $S_1+S_2=\pi/4$, ¿cuál es la aproximación de π que se obtiene considerando 4 términos de cada serie?

5. Considérese la serie

$$f(x)=\operatorname{sen} x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

   Supóngase que se desea aproximar f por medio de un polinomio de orden n (es decir, considerando hasta el término que contiene x^n) con precisión hasta diez milésimas. Completar la tabla mostrada para cada valor dado de n e indicar, de acuerdo con esa información, cuál es, aproximadamente, el máximo valor de x para obtener la precisión deseada:

a) si $n = 7$, b) si $n = 5$, c) si $n = 3$, y d) si $n = 1$.

x	$P_n(x)$	$f(x)$ (calculadora)
0.1		
0.01		
0.001		
0.0001		
0.00001		

4.2. Serie de Taylor

Recordemos (sección 2.1) que el diferencial de una variable se definió como un cambio o incremento infinitesimal de la misma, y que el diferencial de la función se definió como el incremento de la función, correspondiente a un incremento infinitesimal de la variable, de manera que, suponiendo continuidad, el incremento de la función, es decir, su diferencial, también será infinitesimal.

Sin embargo, también se mencionó que el término diferencial no se utiliza, en las ciencias básicas y de la ingeniería, para referirse a incrementos rigurosamente infinitesimales, pero que, en tal caso, esos incrementos han de ser pequeños y que, por lo tanto, el diferencial de la función diferirá del valor del incremento.

En esta sección se continuará estudiando cómo medir, lo mejor posible, el cambio en el valor de la función, correspondiente a un determinado cambio en la variable. Esto podrá utilizarse, entre otras cosas, para expresar el valor de la función, correspondiente a un valor de la variable que se encuentra "próximo" a otro, al que se le llamará punto o valor de referencia.

Incremento y diferencial: interpretación geométrica

Sabemos que, siendo f una función diferenciable en $x = a$, **entonces, para** h **infinitesimal,**

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)+o(h)$$

Es decir,

$$\boxed{f(a+h)-f(a) = f'(a)h+o(h^2)} \qquad (4.17)$$

O bien

$$\boxed{f(a+h) = f(a)+f'(a)h+o(h^2)} \qquad (4.18)$$

Ahora bien, si f es una función diferenciable, definida por $y = f(x)$, y si la variable cambia su valor de x a $x+h$ (con h infinitesimal), entonces, el diferencial correspondiente será

$$df(x,h) = f(x+h)-f(x)$$

y la derivada,

$$f'(x) = \frac{df(x,h)}{h}$$

De esta manera, el diferencial también puede escribirse como

$$\boxed{df(x,h) = f'(x)h} \qquad (4.19)$$

Esta ecuación indica que, en caso de que h no sea infinitesimal, el diferencial de la función tampoco lo será. Por esta razón se utilizará esta expresión para calcular el diferencial de una función, en los casos en que el incremento de la variable no sea infinitesimal.

Por otra parte, siendo $\Delta f(a,h)$ el incremento de f cuando la variable tiene un incremento h, partiendo de un valor inicial a, la ecuación (4.18) dice que

$$\boxed{\Delta f(a,h) = d\,f(a,h) + o(h^2)} \tag{4.20}$$

de manera que, como ya se había indicado, para h finita pero "pequeña",

$$\Delta f(a,h) \cong d\,f(a,h)\,, \tag{4.21}$$

y también

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h \tag{4.22}$$

Vamos a dar una interpretación gráfica de lo anterior. Si consideramos una función real definida mediante $y = f(x)$, y si la variable cambia su valor de a a $a+h$ $(h > 0)$, es decir, si la variable tiene un incremento h a partir de a, entonces la función tiene un incremento[7] Δf, desde $f(a)$ hasta $f(a+h)$ (véase figura 4.3a).

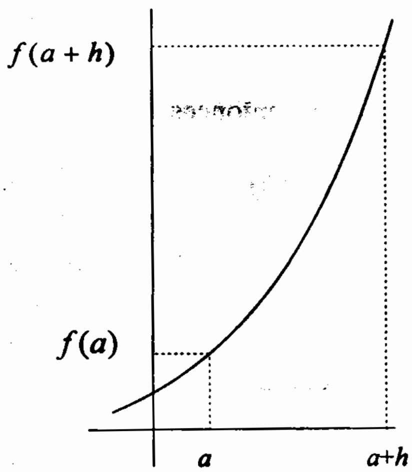


Fig. 4.3a

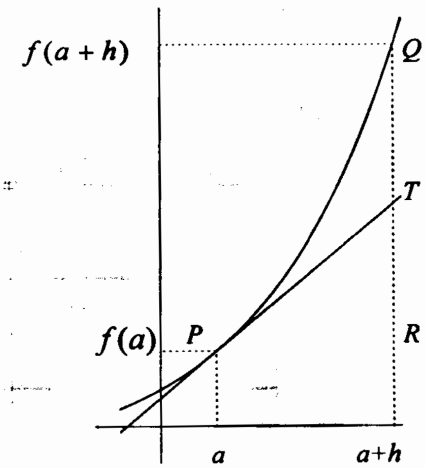


Fig. 4.3b

Ahora bien, siendo L la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$, y observando que la gráfica de la función y de la tangente se confunden alrededor del punto de tangencia (ver figura 4.3b), puede decirse que:

Si $h \cong 0$, entonces $\qquad \overline{QT} \cong 0$ y $\overline{RQ} \cong \overline{RT}$ (4.23)

Por otra parte, si α es el ángulo de inclinación de T, entonces

$$\tan\alpha = m_L = \frac{\overline{RT}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{RT}}{h}$$

[7] Por comodidad se utiliza la misma palabra —*incremento*—, aun y cuando el cambio pueda ser negativo, en cuyo caso debería decirse *decremento*.

y como L es la tangente a la gráfica de f en $x = a$, entonces $m_L = f'(a)$. Por lo tanto

$$\frac{\overline{RT}}{h} = f'(a), \qquad \overline{RT} = f'(a)h$$

De esta manera, al sustituir en (4.23) se obtiene que, siendo h pequeño,

$$\overline{RT} = f'(a)h \cong f(a+h) - f(a),$$

es decir, $\boxed{\text{si } h \cong 0, \quad \text{entonces} \quad \Delta f(a,h) \cong df(a,h)}$

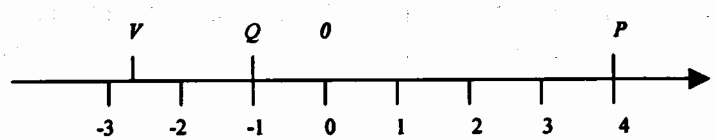
Ejemplo 4.8

Considérese una propiedad ρ cuyo valor depende de la posición de un punto en un eje de referencia (véase figura 4.4.a). Si P, Q y V son los tres puntos cuya posición se muestra en la figura 4.2.b, estimar:

a) el valor de ρ en Q en términos de su valor en P,
b) el valor de ρ en Q en términos de su valor en V, y
c) el valor de ρ en P en términos de su valor en V.

Fig. 4.4a

Fig. 4.4b



Solución

Para el primer inciso tenemos que, al considerar P como punto de referencia, el incremento de la variable correspondiente al cambio de posición desde P hasta Q es:

$$h = x_Q - x_P = -1 - 3 = -4$$

así que, sustituyendo en (4.22), encontramos

$$\rho(Q) = \rho(P) - 4\rho'(P)$$

Análogamente, para los casos restantes, tenemos

$$\rho(Q) = \rho(V) + 1.5\rho'(V) \ \text{ y } \ \rho(P) = \rho(V) + 5.5\rho'(V)$$

La recta es la gráfica de una función lineal, por esta razón, cuando se utiliza la ecuación (4.22) para aproximar el valor de la función en un "punto vecino" al de referencia (punto de tangencia), decimos que se hace una *aproximación lineal.*

Ahora bien, si nos alejamos del punto de tangencia, la curva puede alejarse de la tangente, entonces esta recta, en general, dejará de ser un "buen aproximador" de la función, conforme nos alejemos del punto de tangencia.

Veremos a continuación cómo mejorar esa aproximación utilizando polinomios de mayor grado. Para ello, consideremos nuevamente la ecuación (4.18), la cual puede escribirse en la forma:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+k_2h^2+k_3h^3+k_4h^4+\cdots+k_nh^n+o(h^{n+1}) \tag{4.24}$$

Derivando esta ecuación sucesivamente (respecto de h por supuesto) obtenemos:

$$f'(a+h)=f'(a)+2k_2h+3k_3h^2+4k_4h^3+\cdots+nk_nh^{n-1}+o(h^n)$$

$$f''(a+h)=2k_2+3\cdot 2k_3h+4\cdot 3k_4h^2+\cdots+n(n-1)k_nh^{n-2}+o(h^{n-1})$$

$$f'''(a+h)=3\cdot 2k_3+4\cdot 3\cdot 2k_4h+\cdots+n(n-1)(n-2)k_nh^{n-3}+o(h^{n-2})$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a+h)=n!\,k_n+o(h)$$

Si suponemos que h es infinitesimal, y que $f^{(k)}$ es continua en $x=a$, para $k = 1, 2, ..., n$, entonces podemos despreciar las variaciones infinitesimales de cada una de estas derivadas, entre a y $a+h$. De esta manera, al despreciar los términos infinitesimales en las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$k_2=\frac{f''(a)}{2},\quad k_3=\frac{f'''(a)}{3\cdot 2}=\frac{f'''(a)}{3!},\ \ldots,\ k_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

de manera que, al sustituir en (4.24) obtenemos

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\cdots} \tag{4.25}$$

Habiendo supuesto h infinitesimal, esta ecuación proporciona el valor de $f(a+h)$ con un error infinitesimal del orden que se quiera, a condición de tener la información suficiente de la función en a. Ahora bien, si h es finita, pero suficientemente pequeña, esta última ecuación nos da una aproximación con un error tan pequeño como se desee.

La serie de potencias dada por la ecuación (4.25) se denominará *serie de Taylor* de f alrededor de a. Si sólo se conserva un número finito de términos, la expresión resultante se denominará entonces *polinomio de Taylor* de f alrededor de a. Así pues, el polinomio de Taylor de orden n, de la función f alrededor de a, está dado por:

$$\boxed{P_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n} \tag{4.26}$$

Haciendo $x = a + h$ en las ecuaciones (4.25) y (4.26) se obtiene:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots} \tag{4.27}$$

y
$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.28}$$

Si usamos un polinomio de Taylor para aproximar una función, entonces, el error absoluto correspondiente será:

$$e_n(x) = |f(x) - P_n(x)| \tag{4.29}$$

y el error relativo:

$$e_r(x) = \left|\frac{f(x) - P_n(x)}{f(x)}\right| \tag{4.30}$$

Ejemplo 4.9

Si $f(x) = e^x$ y $a = 0$, entonces $f^{(k)}(x) = e^x$ y $f^{(k)}(0) = 1$, así que la serie de Taylor de la función exponencial, alrededor de $x = 0$, de acuerdo con (4.27) es

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{4.31}$$

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$f(x)$ (calc.)
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.648721
0.2	1.2	1.22	1.221333	1.221403
0.1	1.1	1.105	1.105167	1.105171
0.01	1.01	1.01005	1.010050	1.010050

Tabla 4.2

y el polinomio de Taylor, de orden n, es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

En particular, los polinomios de primero, segundo y tercer orden son:

$$P_1(x) = 1 + x \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

En la tabla 4.2 se muestran los valores de estos polinomios, así como de la función exponencial (obtenidos con calculadora), para x = 0.5, 0.2, 0.1 y 0.01, y en la figura 4.5 se muestran las gráficas de la función exponencial, así como de los polinomios de Taylor obtenidos.

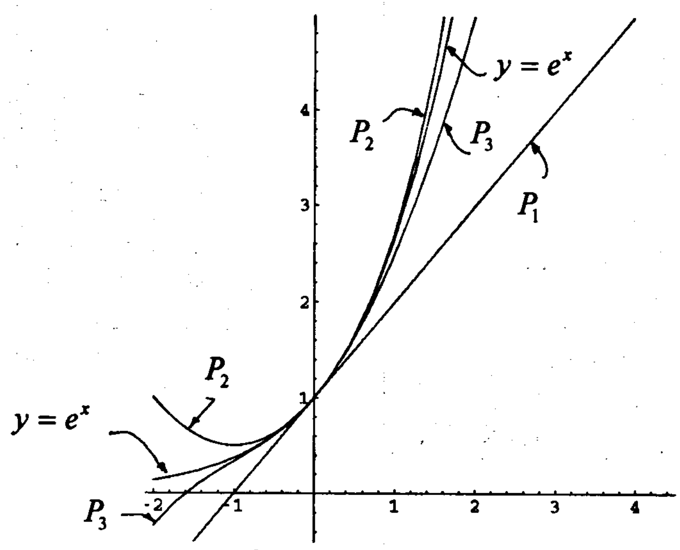


Fig. 4.5

Es claro que tanto la tabla como la figura muestran el comportamiento esperado:

La aproximación de una función por medio de un polinomio de Taylor mejora conforme aumenta el grado del polinomio y conforme la variable se acerca al punto de referencia.	(4.32)

Lo anterior hace pensar que, si el número de términos del polinomio de Taylor es infinitamente grande, el error con que el polinomio aproxima a la función es infinitesimal, y, por lo tanto, despreciable. Es decir, bajo ciertas condiciones, una función f puede expresarse mediante (4.27).

Siempre que una función pueda expresarse para un determinado valor de la variable mediante una serie de potencias (serie de Taylor), se dirá que la función es *analítica* para ese valor de la variable. En este texto supondremos que toda función derivable en un punto será analítica en el mismo.

De esta manera, si f es una función (analítica) definida mediante $y = f(x)$, y si Δx es un incremento finito de la variable x, tendremos

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\Delta x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n + \cdots \quad (4.33)$$

En donde, para obtener el valor de la función, con una precisión dada, habrá que incluir el número de términos necesario, dependiendo del valor de la variable. Por otra parte, si P es un polinomio de grado n, todas las derivadas, a partir de la de orden $n+1$, serán cero, así que P podrá expresarse en la forma

$$P(x+\Delta x) = P(x) + P'(a)\Delta x + \frac{P''(a)}{2!}\Delta x^2 + \frac{P'''(a)}{3!}\Delta x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n \quad (4.34)$$

Por otra parte, si comparamos las ecuaciones (4.4) y (4.31), observaremos que la serie de Taylor de la función exponencial es la serie de potencias que había sido obtenida anteriormente. Puede demostrarse que, en general, si una función puede expresarse mediante una serie de potencias, ésta tendrá que ser la serie de Taylor.

También puede probarse que, si la función es analítica, entonces, considerando un incremento de la variable finito, será siempre posible despreciar los términos de orden superior a alguno previamente determinado, a condición de que el incremento de la variable sea suficientemente pequeño. En adelante, nos referiremos a esta propiedad de las funciones analíticas como *propiedad lagrangiana.*

Ejemplo 4.10 Cantidad de pintura para pintar un lápiz

La cantidad de pintura que se requiere para pintar un lápiz puede verse como el incremento que experimenta el volumen, al añadir la capa de pintura.

El volumen de un lápiz, en forma de cilindro circular recto, de radio r y altura h, es

$$V(r) = \pi r^2 h$$

Si se añade una capa de pintura de espesor Δr, entonces, de acuerdo con (4.34), el volumen será ahora:

$$V(r+\Delta r) = V(r) + V'(r)\Delta r + \frac{V''(r)}{2}\Delta r^2$$

De manera que el incremento de volumen, es decir, la cantidad de pintura es

$$V(r+\Delta r) - V(r) = 2\pi r h\,\Delta r + \pi h\,\Delta r^2$$

Si el espesor de la capa de pintura es pequeño comparado con el radio, entonces puede despreciarse el término de orden 2, aproximando entonces la cantidad de pintura por medio de

$$\Delta V_a \cong 2\pi r h\,\Delta r$$

El error relativo, cometido al aproximar el incremento de volumen por medio de esta expresión, es

$$e_r = \left|\frac{\Delta V - \Delta V_a}{\Delta V}\right| = \left|\frac{\pi h\,\Delta r^2}{2\pi rh\,\Delta r + \pi h\,\Delta r^2}\right| = \left|\frac{\Delta r}{2r + \Delta r}\right|$$

Así, por ejemplo, si $\Delta r = 0.1r$, entonces $e_a = 0.1/2.1 \cong 4.76\%$, y si $\Delta r = 0.01r$, entonces $e_a = 0.01/2.01 \cong 0.5\%$.

Ejemplo 4.11 Peso de una esfera hueca

De la misma manera, la cantidad de metal necesaria para hacer una esfera hueca, de radio r y espesor ε, puede considerarse como el incremento, en el volumen de la esfera, correspondiente al incremento del radio desde su valor inicial (radio interior) hasta su valor final, es decir, el inicial más el incremento.

El volumen de una esfera de radio r es

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

así que su incremento, correspondiente a un cambio h en el valor del radio, de acuerdo con (4.34), es

$$V(r+\varepsilon) - V(r) = V'(r)\varepsilon + \frac{V''(r)}{2}\varepsilon^2 + \frac{V'''(r)}{6}\varepsilon^3$$

$$V(r+\varepsilon) - V(r) = \Delta V = 4\pi r^2\,\varepsilon + 4\pi r\,\varepsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3$$

Si ε es pequeño en comparación con r, pueden despreciarse los términos de orden superior a 1 (aproximación lineal, por medio del diferencial), o sólo el término de orden 3 (aproximación cuadrática, polinomio de Taylor de orden 2). Definamos tales polinomios aproximantes del incremento, por medio de

$$P_1(r,\varepsilon) = 4\pi r^2\,\varepsilon, \text{ y}$$

$$P_2(r,\varepsilon) = 4\pi r^2\,\varepsilon + 4\pi r\,\varepsilon^2$$

ε	ΔV	P_1	e_1	P_2	e_2
0.5	943.0	904.8	4%	942.5	0.05%
0.2	368:0	361.9	1.7%	367.9	0.03%
0.1	182.5	181.0	0.8%	182.5	0%

Tabla 4.3

En la tabla 4.3 se muestran los valores del incremento, así como de los polinomios, para una esfera de 12 cm de radio y distintos valores del espesor. En cada caso se incluye el error relativo cometido al aproximar la cantidad de material (en cm^3) por medio del polinomio.

Si se conoce el peso específico del material con el que habrá de hacerse la esfera, bastará con multiplicarlo por el volumen obtenido para obtener el peso de la esfera hueca resultante.

Obsérvese, además, que la expresión correspondiente a la aproximación lineal indica que, si el espesor es suficientemente pequeño, el volumen de la esfera hueca puede calcularse al multiplicar el área de la esfera por su espesor (véase también el ejemplo 2.2).

4.2 Ejercicios

1. Considérese la función definida por $\phi(x) = sen(x/2)$ y supóngase que x cambia su valor de $\pi/2$ a 1.6.

   1.1. ¿Cuál es el incremento de ϕ? (escribir el resultado con 5 cifras significativas).

   1.2. ¿Cuál es el diferencial de ϕ correspondiente al incremento dado en x ?, ¿cuál es el error relativo que se tiene al aproximar el incremento por medio del diferencial?

   1.3. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden correspondiente al incremento dado en x, ¿cuál es el error relativo que se tiene al aproximar el incremento por medio de este polinomio?

2. Usando la ecuación (11.10), obtener la serie de Taylor de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{3}{1+2x}$

   b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

   c) $f(x) = \ln(1+x)$

   ¿Se obtienen los resultados esperados?

3. Expandir una función en serie de Taylor, alrededor de $x = a$, es escribirla como una serie de potencias de $x - a$. Si la función es un polinomio, esto puede aprovecharse para expresar el polinomio como una suma (finita) de potencias de $x - a$.

   Por ejemplo, supóngase que se desea expresar el polinomio

   $$P(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x - 2$$

   como una suma de potencias de $x - 1$.

Vamos a utilizar, entonces, la ecuación (4.27). Para ello debe derivarse sucesivamente el polinomio 4 veces (el polinomio es de grado 4), y evaluar cada una de las derivadas obtenidas en $x = 1$. Así pues,

$$P(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x - 2, \qquad P(1) = -2,$$

$$P'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 14x + 1, \qquad P'(1) = 6,$$

$$P''(x) = 12x^2 + 30x - 14, \qquad P''(1) = 28,$$

$$P'''(x) = 24x + 30, \qquad P'''(1) = 54, \text{ y}$$

$$P^{iv}(x) = 24, \qquad P^{iv}(1) = 24$$

Sustituyendo en (4.27) se obtiene que

$$P(x) = -2 + 6(x-1) + \frac{28}{2}(x-1)^2 + \frac{54}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4$$

O bien,

$$P(x) = -2 + 6(x-1) + 14(x-1)^2 + 9(x-1)^3 + (x-1)^4$$

(puede comprobarse, haciendo los productos, que este resultado es correcto).

Procediendo de la misma manera, expresar cada uno de los polinomios dados como potencias del binomio indicado.

a) $P(x) = 2x^2 - 5x + 12, \quad x - 2$

b) $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 8, \quad x + 3$

c) $P(x) = x^4 + 5x^3 - 8x + 13, \quad x + 1$

4.3 Valores extremos y concavidades

En la primera unidad se estudiaron algunos aspectos de las funciones que pueden utilizarse para describir parcialmente el fenómeno que modela la función; por ejemplo, las asíntotas de la función describen el comportamiento de ésta para valores grandes de la variable.

En esta sección vamos a completar el estudio de las funciones, considerando ahora aquella información que se puede obtener a partir de la primera y segunda derivadas de la función.

Máximos y mínimos: criterio de la primera derivada

Funciones crecientes y decrecientes

Decimos que una función f es (estrictamente) ***creciente*** en un intervalo, si para cualesquiera x_1 y x_2 elementos del intervalo,

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)} \tag{4.35}$$

Es decir, si a valores mayores de la variable, corresponden valores mayores de la función (ver figura 4.6a). Análogamente, f es (estrictamente) *decreciente* en un intervalo, si para cualesquiera x_1 y x_2 elementos del intervalo,

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)} \tag{4.36}$$

Así pues, en este caso, a valores cada vez mayores de la variable corresponden valores cada vez menores de la función (ver figura 4.6b).

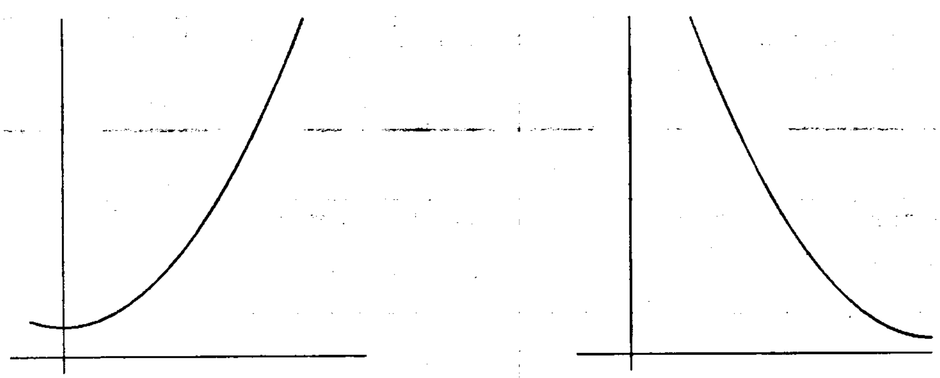


Fig. 4.6a **Fig. 4.6b**

Ahora bien, si x_1 y x_2 están infinitamente próximos, entonces, desde una *perspectiva real*, el intervalo comprendido entre ellos se vería como un solo punto, de esta manera, de acuerdo con la definición anterior, si x_1 y x_2 están infinitamente próximos —digamos $x_2 = x_1 + h$, con h infinitesimal (positivo)—, y si $f(x_2) > f(x_1)$, entonces, siendo f derivable en x_1, f es creciente en x_1, si $f'(x_1) > 0$.

En efecto, si $x_2 = x_1 + h$, y si $f(x_2) > f(x_1)$, entonces, siendo h un infinitesimal positivo,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} > 0$$

Esta última desigualdad equivale a decir que $f'(x_1) > 0$. Análogamente, podemos decir que siendo f derivable en x_1, f es decreciente en x_1, si $f'(x_1) < 0$.

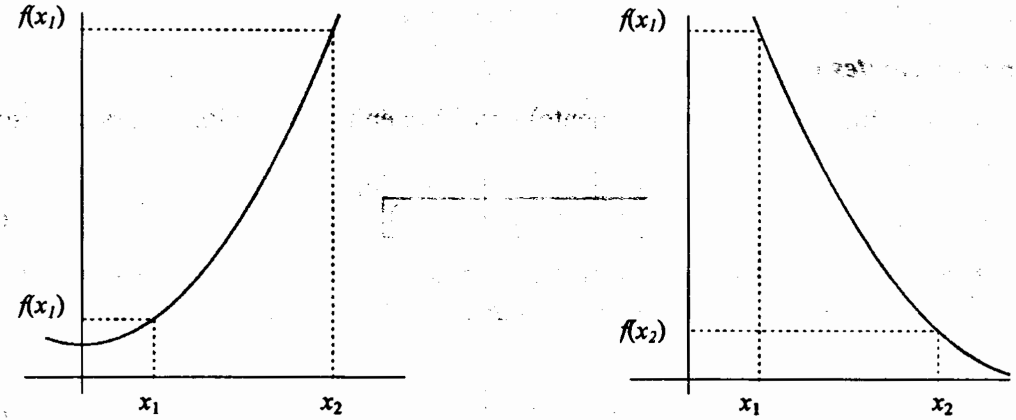


Fig. 4.7

Lo anterior puede extenderse a todo un intervalo (ver figura 4.7):

Si f es diferenciable en un intervalo I, entonces f es *creciente* en I, si y sólo si $f'(x) > 0$, para toda x en el intervalo.	(4.37)

Y:

Si f es diferenciable en un intervalo I, entonces f es *decreciente* en I, si y sólo si $f'(x) < 0$, para toda x en el intervalo.	(4.38)

Criterio de la primera derivada

Sabemos que si f es una función continua en un intervalo cerrado, entonces tendrá valores extremos en ese intervalo. Si además f tiene un máximo en el intervalo, entonces f tendrá que ser creciente en algún intervalo antes del punto, y decreciente en algún intervalo después del mismo. Siendo la función continua, esto sólo podrá ocurrir en dos formas (ver figura 4.8):

a) *La derivada de la función también es continua.* En este caso la derivada tiene que anularse en el punto donde la función tiene el máximo, ya que pasa de valores positivos a negativos.

b) *La gráfica se quiebra justo en donde alcanza el máximo*. En este caso la función no es diferenciable en el punto.

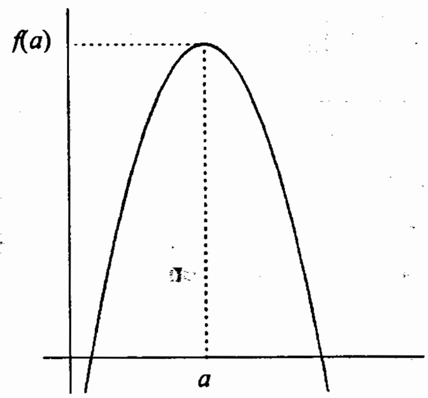


Fig 4.8a $f'(a) = 0$

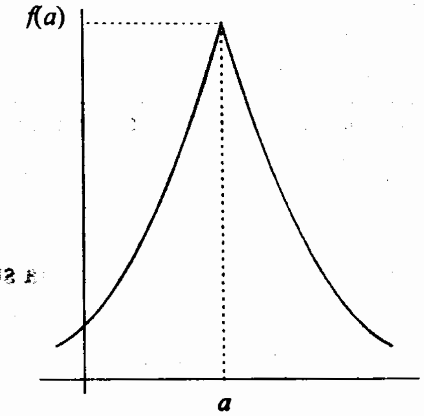


Fig 4.8b $f'(a)$ no existe

Se pueden hacer consideraciones similares para el caso en que una función continua tenga un mínimo en un intervalo (ver figura 4.9).

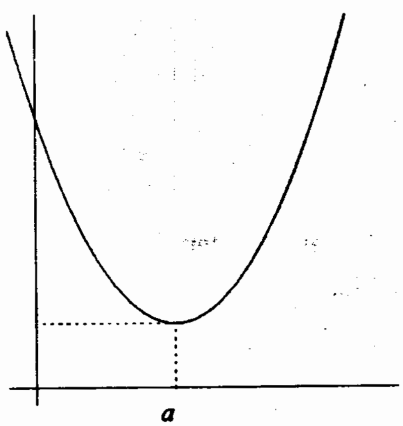


Fig 4.9a $f'(a) = 0$

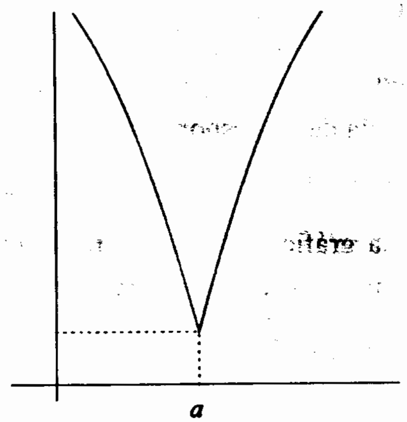


Fig 4.9b $f'(a)$ no existe

Considerando, entonces, que en una función continua los valores extremos se dan en aquellos puntos en los que la derivada no existe o se anula, conviene definir tales puntos.

Llamaremos *números críticos* de una función a aquellos elementos de su dominio en los cuales la derivada se anula o no existe. Si a es un número crítico de una función f, entonces $(a, f(a))$ es un *punto crítico* de f. Así pues, podemos resumir las observaciones antes expuestas en la siguiente forma:

Siendo a un número crítico de una función f, tenemos que:

a) Si f es creciente en algún intervalo (abierto) con extremo derecho en a y es decreciente en algún intervalo (abierto) con extremo izquierdo en a, entonces, f tiene un máximo en $x = a$.

b) Si f es decreciente en algún intervalo (abierto) con extremo derecho en a y es creciente en algún intervalo (abierto) con extremo izquierdo en a, entonces f tiene un mínimo en $x = a$.

O bien:

Siendo a un número crítico de f, a) Si f' cambia su signo de "+" a "–" en $x = a$, entonces f tiene un *máximo* en $x = a$. b) Si en cambio f' cambia su signo de "–" a "+" en $x = a$, entonces f tiene un *mínimo* en $x = a$. c) Si f' no cambia su signo en $x = a$, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en $x = a$.	(4.39)

Ejemplo 4.12

Siendo f la función definida por $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, analizar su comportamiento y trazar su gráfica.

Solución

De la regla de correspondencia de f se obtiene que:

a) $D_f = \Re - \{0\}$,

b) la gráfica de f tiene una asíntota en $x = 0$ (eje Y), aunque también lo es la curva $y = 1/x^2$, para valores infinitesimales de la variable.

c) f es par, así que su gráfica es simétrica respecto del eje Y, y

d) si N es infinitamente grande, $f(N) = x^2 + 1/N^2$, así que la parábola $y = x^2$ es una asíntota de la gráfica de f.

Ahora bien, derivando f se obtiene

$$f'(x) = 2x - 2x^{-3} = 2x^{-3}(x^4 - 1) = \frac{2(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3},$$

así que el conjunto de números críticos de f es {-1, 1} (0 no está en el dominio). Además, como f' es continua en su dominio —que es el mismo que el de f—, entonces, por el teorema del valor intermedio, no cambiará su signo en cada uno de los intervalos $<-\infty, -1>$, $<-1, 0>$, $<0, 1>$ y $<1, \infty>$.

De esta manera, el signo de la derivada en cada uno de estos intervalos puede obtenerse asignando a la variable cualquier valor particular contenido en el intervalo.

intervalo	$<-\infty,-1>$	$<-1,0>$	$<0,1>$	$<1,\infty>$
signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$
comportamiento de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabla 4.4

La tabla 4.4 muestra, para cada uno de los intervalos antes referidos, el signo que tiene la derivada de la función dada, indicando, según sea el caso, si la función es creciente o decreciente. Los resultados indican que la función tiene un mínimo en $x=-1$ y otro en $x=1$ (en $x=0$ la derivada cambia su signo, pero la función no es continua, tiene una asíntota). Con toda esta información, bastará con tabular unos cuantos valores positivos de la función (aprovechando la simetría), para trazar la gráfica pedida, la cual se muestra en la figura 4.10.

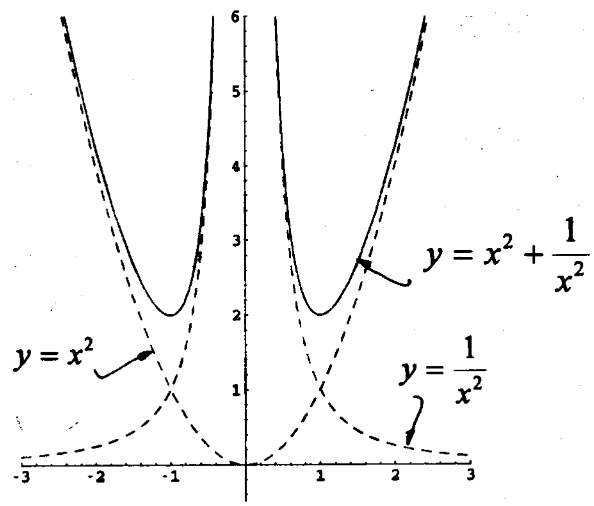


Fig. 4.10

Ejemplo 4.13

Analizar el comportamiento de la función con regla de correspondencia

$$\phi(x) = x + \operatorname{sen} x$$

Solución

En este caso, el dominio es $\Re$, y, tomando en cuenta que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, tenemos entonces que $x-1 \le \phi(x) \le x+1$.

Ahora, derivando ϕ obtenemos $\phi'(x) = 1+\cos x$, así que $\phi'(x) = 0\ \forall x = (2n+1)\pi,\ n \in E$, de manera que el conjunto de números críticos es $\{(2n+1)\pi,\quad n \in E\}$, sin embargo, para cualquier otro valor de x se tiene que $\phi'(x) > 0$, por lo tanto, la derivada no cambia de signo en ninguno de los números críticos, por lo que se puede concluir que la función no tiene máximos ni mínimos, a pesar de tener una infinidad de puntos en donde la tangente es paralela al eje X (ver figura 4.11).

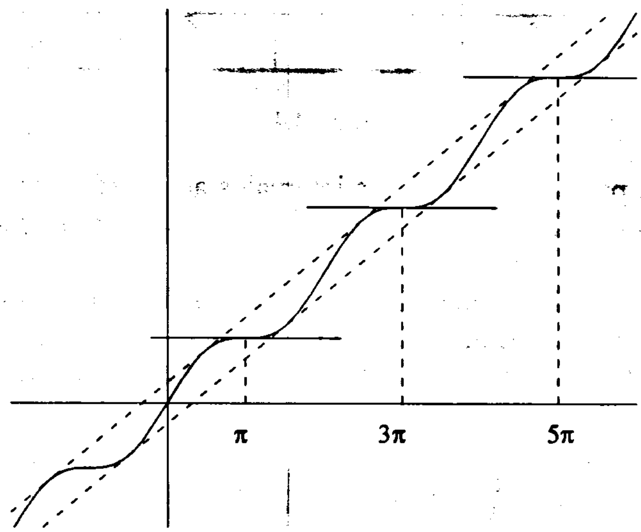


Fig. 4.11

Concavidades y puntos de inflexión

En las curvas de la figura 4.12, se puede observar que la posición de las tangentes respecto de la curva es diferente en cada caso, ya que en *a* las tangentes están por debajo de la curva, mientras que en *b* están por encima.

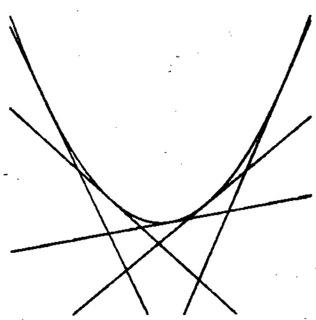


Fig. 4.12a

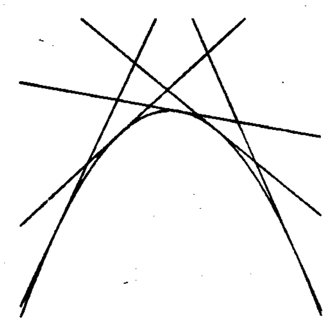


Fig. 4.12b

Diremos que la gráfica de una función es *cóncava hacia arriba* (en un intervalo), si las tangentes a la curva se encuentran siempre por debajo de la misma. Análogamente, la gráfica será *cóncava hacia abajo*, si las tangentes se encuentran por encima de la curva.

Consideremos el caso de una función f cuya gráfica sea cóncava hacia arriba, en un intervalo que contiene un número a (ver figura 4.13). Si L es la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$, entonces,

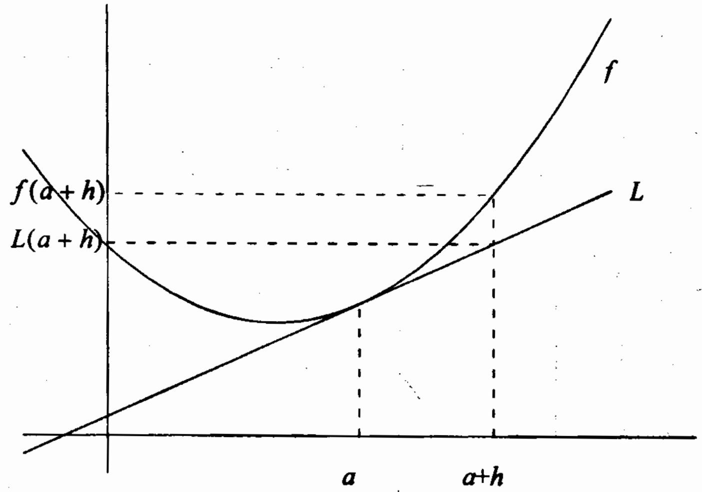


Fig. 4.13

$$L(a+h) = f(a) + f'(a)\,h,$$

y, por otra parte, expresando $f(a+h)$ en serie de Taylor alrededor de a, tenemos que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^3)$$

de manera que, al restar miembro a miembro estas ecuaciones, obtenemos que:

$$f(a+h) - L(a+h) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^3)$$

Así pues, considerando la definición dada, la propiedad lagrangiana y esta última ecuación, podemos concluir que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en una vecindad de a, si, y sólo si, $f''(a) > 0$.

Análogamente, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en una vecindad de a si, y sólo si, $f''(a) < 0$. Extendiendo este resultado a todos los puntos de un intervalo, tenemos que:

La gráfica de una función, dos veces derivable, es cóncava hacia arriba, o hacia abajo, en un intervalo, según su segunda derivada sea positiva o negativa en todo punto del intervalo.	(4.40)

Por otra parte, si consideramos una función cuya gráfica sea como la mostrada en la figura 4.14, tendremos que la “parte izquierda” de ésta es cóncava hacia abajo, mientras que la “parte derecha” es cóncava hacia arriba.

Suponiendo que la segunda derivada de esta función es continua, y tomando en cuenta que en la parte izquierda es negativa, y en la derecha es positiva, entonces, de acuerdo con el teorema del valor intermedio, debe existir un punto en que la segunda derivada sea cero y ése debe ser el punto en que la curva cambia su sentido de concavidad. Cada uno de tales puntos será llamado ***punto de inflexión***. Suponiendo, pues, que la segunda derivada de una función es continua, los puntos de inflexión de su gráfica se localizarán donde ésta se anula.

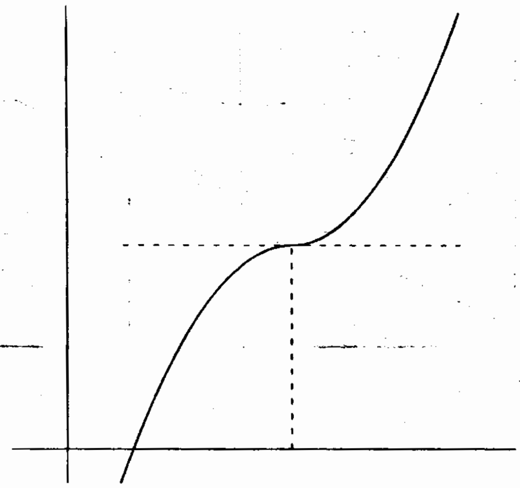


Fig. 4.14

Ejemplo 4.14

Trácese la gráfica de la función definida por $\phi(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Solución

Primeramente tenemos que ϕ es impar y continua en $\Re$ y que la única intersección de la gráfica, con los ejes coordenados, es el origen. Además, el eje X es una asíntota de su gráfica.

Tomando en cuenta lo anterior, y haciendo una tabulación, puede trazarse la gráfica de ϕ (ver figura 4.15). Ésta nos sugiere que la curva tiene tres puntos de inflexión, uno en el origen, y los otros dos localizados simétricamente respecto al mismo, ya que la función es impar. Derivando ϕ obtenemos:

$$\phi'(x) = \frac{(x^2+4)(1) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

Obsérvese que los números críticos son -2 y 2, que corresponden, respectivamente, de acuerdo con la figura, a un mínimo y un máximo de la función. Derivando nuevamente:

$$\phi''(x) = \frac{(x^2+4)^2(-2x) - (4-x^2)(2)(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+4)(-2x) - (4-x^2)(2)(2x)}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

de manera que la segunda derivada de ϕ es continua en $\Re$ y se anula para $x = 0$ y para $x = \pm\sqrt{12}$, por lo que conserva su signo en cada uno de los intervalos

$$< -\infty, -\sqrt{12} >, \ < -\sqrt{12}, 0 >, \ < 0, \sqrt{12} > \ \text{y} \ < \sqrt{12}, \infty >$$

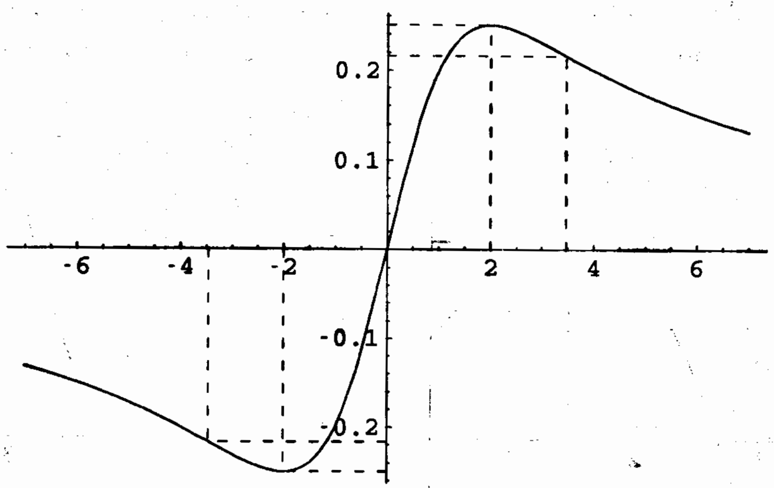


Fig. 4.15

Eligiendo elementos cualesquiera de cada uno de estos intervalos, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 4.5, a partir de los cuales concluimos, como se esperaba, que la gráfica de ϕ tiene tres puntos de inflexión: en $x = -\sqrt{12}$, en $x = 0$, y en $x = \sqrt{12}$.

intervalo	$< -\infty, -\sqrt{12} >$	$< -\sqrt{12}, 0 >$	$< 0, \sqrt{12} >$	$< \sqrt{12}, \infty >$
signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
concavidad de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Tabla 4.3

Criterio de la segunda derivada

El análisis previo nos permite afirmar que:

Siendo f una función dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene un número crítico a, a) Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo en $x = a$. b) Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo en $x = a$.	(4.41)

Ejemplo 4.15

Analizar el comportamiento de la función definida por $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

Solución

Como esta función es un polinomio, su gráfica es una curva suave y continua, por lo que sólo hay que calcular sus valores extremos y las coordenadas de sus puntos de inflexión. Derivando f obtenemos que $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$, de manera que $f'(x) = 0$, si $x^2 - 2 = 0$, es decir, si $x = \pm\sqrt{2}$.

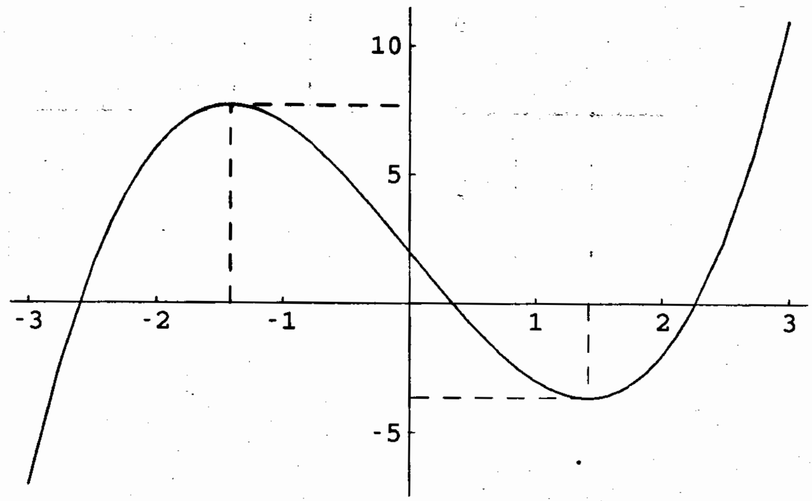


Fig. 4.16

Al derivar nuevamente, se obtiene que $f''(x) = 6x$, así que la segunda derivada de f es continua. Además $f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$, así que f tiene un mínimo en $x = -\sqrt{2} \cong -1.414$. Análogamente, $f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0$, así que f tiene un mínimo en $x = \sqrt{2} \cong 1.414$.

Por otra parte, $f''(x) = 6x = 0$, sólo si $x = 0$, de manera que el punto de la curva para el que $x = 0$ es un posible punto de inflexión. Ahora bien, $f''(x) < 0$, si $x < 0$, y $f''(x) > 0$, si $x > 0$, así que f'' cambia de signo, lo que permite concluir que f tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Con esta información, y mediante una tabulación, puede trazarse la gráfica de la función dada, la cual se muestra en la figura 4.16.

Para resolver la mayoría de los problemas de optimización, es decir, aquellos en los que se desea maximizar o minimizar una función, el material de esta sección resulta suficiente. Ahora bien, debe tomarse en consideración que el criterio de la segunda derivada no es concluyente en todos los casos y, siendo éste precisamente el que puede generalizarse a funciones en varias variables, debe contarse con algún otro método que, siendo concluyente en todos los casos, pueda también generalizarse a funciones en varias variables.

Un método que cumple con tales condiciones es aquel que recurre a la serie de Taylor y a la propiedad lagrangiana. Si se desea saber más sobre tal método puede consultarse el anexo E.

4.3 Ejercicios

Ejercicios 1 a 4. Para cada una de las funciones con regla de correspondencia dada, (a) obtener los intervalos en los que f es creciente o decreciente, (b) calcular los máximos y mínimos locales de f, y (c) trazar la gráfica de f.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
2. $f(x) = x^4 + 4x + 1$
3. $f(x) = x\sqrt{6-x}$
4. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi]$

5. ¿Para qué valores de a y b la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$$

tiene un máximo local cuando $x = -3$ y un mínimo local cuando $x = -1$?

6. Obtener una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

7. Trazar la gráfica de una función que satisfaga, simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $f(1) = 5, \quad f(4) = 2$ (b) $f'(1) = f'(4) = 0$

(c) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ (d) $f'(x) < 0$ para $x > 1$

5. Aplicaciones del cálculo diferencial

Hemos visto que la derivada de una función representa, en un contexto geométrico, la pendiente de la tangente a la gráfica de la función, y, en un contexto físico, la razón de cambio de la función con respecto de la variable. En particular, si se trata de la función de posición (en términos del tiempo), la derivada es la velocidad.

Ahora que hemos aprendido a calcular la derivada de las funciones de uso común en las ciencias básicas y de la ingeniería, lo mismo que algunos aspectos útiles en el análisis del comportamiento de las funciones, a partir de su regla de correspondencia, vamos a considerar, nuevamente, la derivada en cualquiera de sus contextos, geométrico o físico.

5.1 Problemas de razones de cambio relacionadas

Como se mencionó anteriormente, la razón de cambio es un concepto sumamente importante en las ciencias básicas y de la ingeniería. En esta sección se verá cómo resolver algunos problemas en los que interviene el concepto de razón de cambio.

Ejemplo 5.1

Por un crucero pasa un autobús hacia el Este, a las 3 de la tarde, a 75 km/h, y una hora más tarde pasa un automóvil hacia el Norte, a 90 km/h. Calcular la rapidez con la que se alejan los autos entre sí, a las 6 de la tarde, suponiendo que ambos vehículos continúan desplazándose en línea recta y con la misma velocidad.

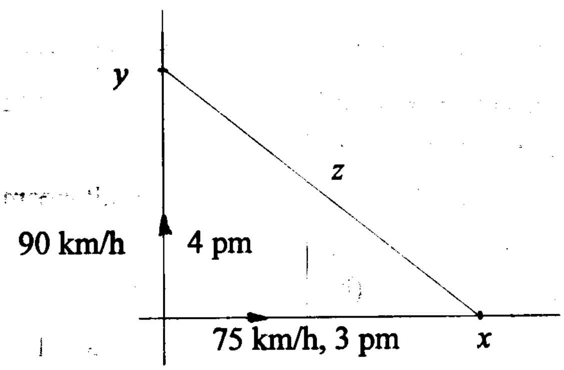


Fig. 5.1

Solución 1

Denotando con x y y, respectivamente, las distancias que separan al autobús y al automóvil del crucero, y con z la distancia entre los vehículos, tenemos:

El autobús se mueve con rapidez constante de 75 km/h, así que la distancia de ésta al crucero será

$$x = 75t \qquad \text{(a)}$$

Análogamente, la distancia que separa al automóvil del crucero, considerando que pasa por ese punto una hora después del autobús, es

$$y = 90(t-1) \qquad \text{(b)}$$

Por otra parte, de acuerdo con la figura 5.1,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo (a) y (b),

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(75t)^2 + 8100(t-1)^2} \\ &= \sqrt{5625t^2 + 8100(t^2 - 2t + 1)} \\ &= \sqrt{13725t^2 - 16200t + 8100} \end{aligned}$$

Derivando esta expresión para obtener la razón de cambio buscada, tenemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{13725t^2 - 16200t + 8100}}(27450t - 16200)$$

A las 6 de la tarde, es decir, cuando $t = 3$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{13725(9) - 16200(3) + 8100}}(27450(3) - 16200) \cong 114.8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Solución 2

Procediendo de igual manera, hasta obtener la ecuación (c), y derivando esta ecuación respecto de t, aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{(75t)(75) + 90(t-1)(90)}{\sqrt{(75t)^2 + 8100(t-1)^2}}$$

Así pues, a las seis de la tarde,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{75^2(3) + 90^2(2)}{\sqrt{5625(9) + 8100(4)}} \cong 114.8\ \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

Un caso de interés, es calcular dw/dt, cuando no se tiene una expresión para w en términos de t, sin embargo, se conoce el valor de dv/dt, donde v es una variable que está relacionada con w. Si se aplica la regla de la cadena, entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dv}\frac{dv}{dt}, \qquad (5.1)$$

de manera que, para obtener la razón de cambio buscada, sólo hay que determinar la relación algebraica entre w y v, calculando entonces dw/dv y sustituir en la ecuación (5.1).

Ejemplo 5.2

Supóngase que una bola de nieve se derrite de manera que su superficie decrece a razón de 1.2 cm^2/min. Calcular la razón con la que cambia el diámetro cuando éste mide 2.3 cm.

Solución

Denotando con ϕ y A, respectivamente, el diámetro y el área de la bola, se desea calcular $\frac{d\phi}{dt}$ sabiendo que $\frac{dA}{dt} = -1.2\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$.

De acuerdo con la regla de la cadena, tenemos que $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dA}\frac{dA}{dt} = -1.2\frac{d\phi}{dA}$ (a)

Ahora bien, el diámetro y el área de una esfera se relacionan por medio de

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = \pi\phi^2,$$

así que $\frac{dA}{d\phi} = 2\pi\phi$. Al sustituir en (a) se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = -1.2\frac{d\phi}{dA} = -1.2\frac{1}{\frac{dA}{d\phi}} = -1.2\,\frac{1}{2\pi\phi} = -\frac{0.6}{\pi\phi}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Cuando ϕ mide 2.3 cm,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{0.6}{\pi(2.3)}\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cong 0.083\frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Este resultado indica que, si la bola se derritiera a razón constante, su diámetro disminuiría 0,083 cm cada minuto. Sin embargo, es claro que esta razón no es constante, de hecho, varía inversamente con el valor del radio.

Ejemplo 5.3

Se deja caer arena en el suelo, a razón de 6 m^3/min, formando un montículo cónico cuya altura es siempre igual al diámetro de la base. ¿Cómo varía la altura del montículo cuando ésta mide 1.6 m?

Solución

Denotando con r y h, respectivamente, el radio y la altura del cono, se debe calcular $\frac{dh}{dt}$ sabiendo que $\frac{dV}{dt} = 6\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$.

Aplicando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\frac{dV}{dt} = 6\frac{dh}{dV} \qquad \text{(a)}$$

Ahora bien, el volumen del cono, en términos de la altura, es

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3$$

De donde

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{4}h^2$$

Así que, al sustituir en (a), se obtiene

$$\frac{dh}{dt}=6\frac{dh}{dV}=6\frac{1}{\dfrac{dV}{dh}}=6\frac{1}{\dfrac{\pi}{4}h^2}=\frac{24}{\pi h^2}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Cuando $h=1.6$,

$$\frac{dh}{dt}=\frac{24}{\pi(1.6)^2}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}\cong 2.98\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Ejemplo 5.4

Cuando el aire se dilata adiabáticamente[8] (sin ganar o perder calor), su presión, P, y su volumen, V, están relacionados por la ecuación $PV^n=C$, donde C es una constante y n puede considerarse también constante. Supóngase que $n=1.4$ y que, en un instante en que el volumen es de 350 cm^3 y la presión de 90 kPa, ésta disminuye a razón de 8 kPa/min. ¿A qué razón cambia el volumen en ese instante?

Solución 1

Se desea calcular $\dfrac{dV}{dt}$ sabiendo que $\dfrac{dP}{dt}=-8\dfrac{\text{kPa}}{\text{min}}$. Aplicando entonces la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dP}\frac{dP}{dt} \qquad \text{(a)}$$

Además, sabemos que

$$PV^{1.4}=C, \qquad \text{(b)}$$

y que $V=350$ cuando $P=90$, de manera que el valor de C es $(90)(350)^{1.4}\cong 328\,048.3$.

Despejando V de (b), se obtiene

$$V=\left(CP^{-1}\right)^{\frac{1}{1.4}}=C^{\frac{1}{1.4}}P^{-\frac{1}{1.4}}\cong 8\,708.7\,P^{-0.714} \qquad \text{(c)}$$

y sustituyendo en (a),

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dP}\frac{dP}{dt}\cong -6\,218\,P^{-1.714}(-8)=49744.1\,P^{-1.714}$$

[8] Ver, por ejemplo, Zemansky, p. 120.

Cuando $V = 350$ y $P = 90$,

$$\frac{dV}{dt} \cong 49744.1\,(90)^{-1.714} \cong 22.24\,\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

Solución 2

Derivando implícitamente la ecuación (b) respecto a t,

$$\frac{dP}{dt}V^{1.4} + 1.4PV^{0.4}\frac{dV}{dt} = 0,$$

de donde, al despejar la razón de cambio buscada, se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V^{1.4}dP/dt}{1.4PV^{0.4}} = \frac{8V}{1.4P}$$

Cuando $V = 350$ y $P = 90$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{8V}{1.4P} = -\frac{8(350)}{1.4(90)} = -22.22\,\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

Ejemplo 5.5

Un aeroplano vuela a una altura de 5 km directamente sobre un observador en el piso. El avión mantiene una velocidad constante de 570 km/h en vuelo horizontal. Cuando ya pasó el punto que se encuentra directamente sobre el observador y ha recorrido 3 km, ¿cuál es la razón de cambio del ángulo entre la visual del observador hacia el avión, y la horizontal?

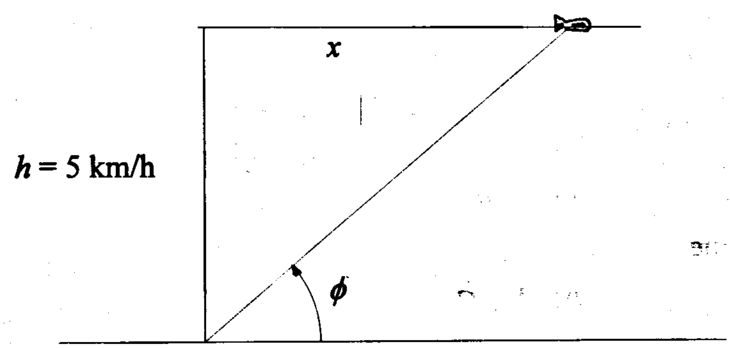


Fig. 5.2

Solución

Deseamos calcular la razón de cambio del ángulo ϕ respecto al tiempo, $d\phi/dt$, sabiendo que la velocidad del avión, dx/dt, es 570 km/h. De esta manera, podemos calcular la razón de cambio buscada por medio de:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \text{(a)}$$

Ahora bien (véase figura 5.2),

$$\phi = arc\tan\frac{h}{x} \qquad \text{(b)}$$

entonces,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}\frac{d\left(\frac{h}{x}\right)}{dx} = \frac{1}{\frac{x^2+h^2}{x^2}}\left(-\frac{h}{x^2}\right) = -\frac{h}{x^2+h^2}\frac{\text{rad}}{\text{km}}$$

así que, sustituyendo en (a),

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{h}{x^2+h^2}(570)\frac{\text{rad}}{\text{h}}$$

En el momento de interés, $h = 5\,\text{km}$ y $x = 3\,\text{km}$, así que

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{5}{3^2+5^2}(570)\frac{\text{rad}}{\text{h}} = 83.83\frac{\text{rad}}{\text{h}} \cong 1.33^\circ / s$$

5.1 Ejercicios

1. Si P es la presión y V el volumen de un gas ideal diatómico sometido a un proceso adiabático, entonces se tiene que $PV^{7/5} = c$, donde c es constante. Suponiendo que V = 190 cm^3, P = 1.1 kg / cm^2 y que el gas se comprime a razón de 1.6 cm^3 / s. Calcular la razón con la que cambia la presión.
2. Un hombre de 1.75 m de estatura camina alejándose de un farol de la calle que está a 6.5 m del piso. Si el hombre camina a 0.8 m / s, calcular la razón con la que cambia la longitud de su sombra sobre el piso cuando se encuentra a 8 m de la base del poste.
3. Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, se encuentra inicialmente vacío. El tanque tiene 2.5 m de profundidad y el radio en la parte superior es de 0.9 m. Si se vierte agua desde una llave a razón de .12 m^3 / min, calcular la velocidad con la que aumenta el nivel del agua media hora después de comenzar a llenarse.
4. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 1 650 m y a una velocidad de 800 km/h pasa directamente sobre una estación de radar. Encontrar la velocidad a la que la distancia del avión a la estación aumenta cuando el avión se encuentra a 3 km de la estación.
5. La altura de un triángulo aumenta a razón de 1 cm/min, mientras que el área del mismo aumenta a razón de 2 cm^2/min. ¿A qué velocidad cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a 1 cm y el área es de 100 cm^2?

6. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, en donde C es una constante. Supóngase que en cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que está aumentando a razón de 20 kPa/min. ¿A qué velocidad cambia el volumen en dicho instante?

5.2 Problemas de optimización

Por razones de eficiencia o economía, resulta común —en ingeniería y, en general, en cualquier actividad profesional—, buscar maximizar ganancias, utilidades, producción, duración, etc., o bien, minimizar costos, tiempos de producción, pérdidas, etc. Llamaremos *problema de optimización*, a cualquiera en el que se busque maximizar o minimizar una variable (función).

Si la variable a maximizar o minimizar puede expresarse en términos de una sola variable independiente, entonces, podrá aplicarse alguno de los criterios estudiados anteriormente (sección 4.3) para resolver el problema, esto es, encontrar el *valor de la variable independiente*, para el cual la función tiene el valor máximo (o mínimo).

Ejemplo 5.6

Obtener el punto de la recta $2x - y + 2 = 0$, más cercano del punto (3,1).

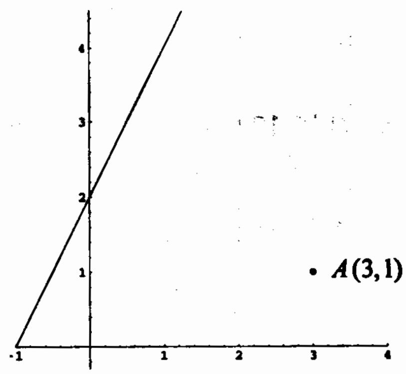


Fig. 5.3

Solución

Si $P(x, y)$ es el punto buscado (ver figura 5.3), entonces, la distancia de éste al punto A(3,1) es

$$\delta(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \qquad \text{(a)}$$

Sin embargo, P es un punto de la recta, de manera que sus coordenadas satisfacen la ecuación $2x - y + 2 = 0$, de donde, al despejar y, se obtiene

$$y = 2x + 2 \qquad \text{(b)}$$

Al sustituir en (a), se obtiene la variable a minimizar, en términos de x:

$$\delta(x) = \sqrt{(x-3)^2 + [(2x+2)-1]^2}$$

$$\delta(x) = \left[(x-3)^2 + (2x+1)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(c)}$$

Como se desea el mínimo de esta función, deben obtenerse sus puntos críticos, para lo cual hay que derivar la función:

$$\delta'(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 + (2x+1)^2\right]^{-1/2}\left[2(x-3) + 2(2x+1)(2)\right]$$

$$\delta'(x) = \frac{10x - 2}{2\left[(x-3)^2 + (2x+1)^2\right]^{1/2}}$$

Los puntos críticos en los que la derivada no existe, es decir, aquellos para los que el denominador se anula, no tienen coordenadas reales, ya que el denominador es el doble de la distancia δ, que, evidentemente, no puede ser cero (figura 5.3). Así pues, los puntos críticos de interés deben obtenerse al igualar a cero la derivada. Tenemos, entonces, que $\delta'(x) = 0$, si $10x - 2 = 0$; es decir, si $x = 1/5$. Por lo tanto, al sustituir en (b), $y = 12/5$.

Ahora bien, siendo rigurosos, debería verificarse que el punto crítico obtenido efectivamente corresponde a un mínimo, sin embargo, al observar la figura se puede concluir que el punto crítico obtenido es el más cercano al punto A. Además, es claro que no hay un punto de la recta que se encuentre más lejos de A, lo que correspondería a un máximo, ya que al desplazar un punto sobre la recta, puede alejarse de A tanto como se quiera.

Así pues, el punto buscado es $(1/5, 12/5) = (0.2, 2.4)$, y la distancia mínima, que se obtiene al sustituir en (a), es

$$\delta_{mín} = \sqrt{(1/5-3)^2 + (12/5-1)^2} = \sqrt{144/25 + 49/25}$$

$$\delta_{mín} = \frac{\sqrt{193}}{5} \cong 2.78 \text{ unidades de longitud}$$

En este caso, parece ocioso utilizar el cálculo, ya que el problema pudo haberse resuelto con relativa facilidad utilizando geometría analítica; sin embargo, la ventaja del método utilizado consiste en que puede aplicarse de la misma manera con otras curvas, y no sólo con una recta.

Ejemplo 5.7

Obtener el punto de la parábola $x = y^2$, más cercano al punto $Q = (4, 1)$.

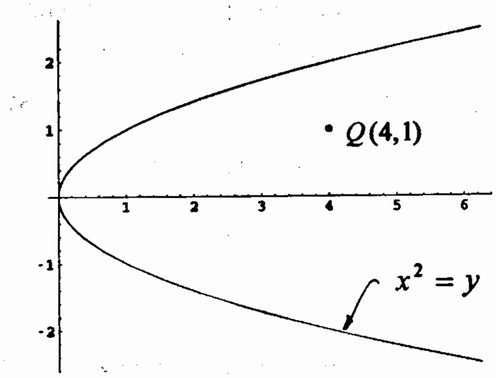


Fig. 5.4

Solución

Procediendo como en el ejemplo anterior, tenemos:

$$\delta(x,y)=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} \qquad \text{(a)}$$

Pero P es un punto de la parábola, así que

$$x=y^2 \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo en (a)

$$\delta(y)=\sqrt{(y^2-4)^2+(y-1)^2}=\left[(y^2-4)^2+(y-1)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(c)}$$

Derivando,

$$\delta'(y)=\frac{1}{2}\left[(y^2-4)^2+(y-1)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2(y^2-4)(2y)+2(y-1)\right]$$

$$\delta'(y)=\frac{(y^2-4)(2y)+(y-1)}{\left[(y^2-4)^2+(y-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{2y^3-7y-1}{\left[(y^2-4)^2+(y-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Así que $\delta'(y)=0$ si $2y^3-7y-1=0$.

Al resolver numéricamente esta ecuación, se obtienen tres raíces reales:

$$y_1\cong-1.79483, \qquad y_2\cong-0.143705 \quad \text{y} \quad y_3\cong 1.93854$$

Para las cuales, los correspondientes valores de x, que se obtienen al sustituir en (b), son:

$$x_1\cong 3.22141, \qquad x_2\cong 0.0206511 \quad \text{y} \quad x_3\cong 3.75794$$

Ahora bien, la figura 5.4 permite suponer —considerando la simetría de la parábola con respecto del eje X— que $y>0$, de manera que el punto buscado debe ser

$$P_1=(x_3,y_3)\cong(3.75794,1.93854),$$

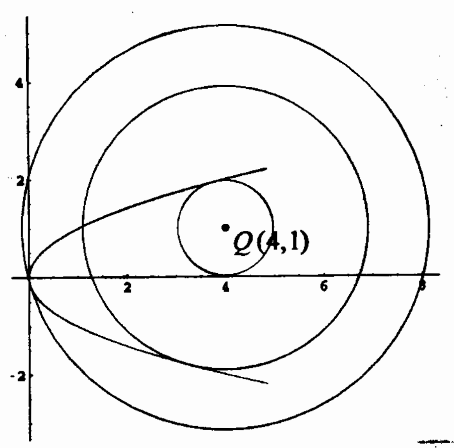


Fig. 5.5

Sin embargo, los otros valores encontrados también deben corresponder a puntos críticos, situación que puede analizarse en la gráfica 5.5:[9]

Supóngase que un punto se desplaza, sobre la parábola, de abajo hacia arriba, desde "el infinito". Inicialmente, el punto se acerca a Q, hasta llegar a P_1 (mínimo relativo), a partir del cual el punto se aleja momentáneamente, hasta que llega a P_2 (máximo relativo), de donde vuelve a acercarse a Q, hasta que llega a P_3 (mínimo absoluto), a partir del cual el punto se mueve alejándose indefinidamente de Q.

En la figura 5.6 se muestra la gráfica de la distancia δ contra y, trazada a partir de (c), en la cual puede confirmarse lo dicho en el párrafo anterior.

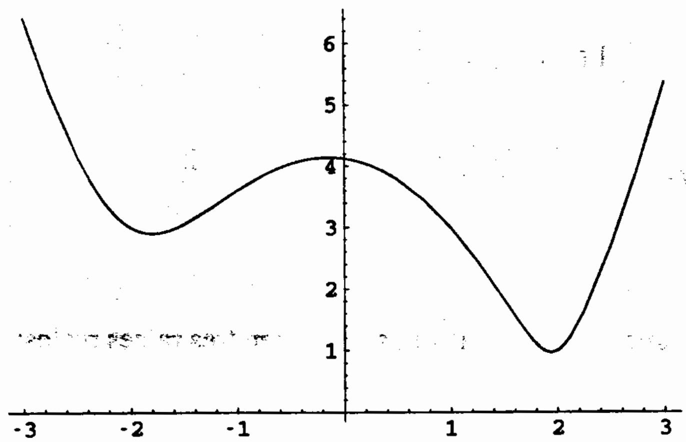


Fig. 5.6

Optimización en un intervalo

En ocasiones, cuando se resuelven problemas de optimización, las variables a obtener están restringidas por las condiciones mismas del problema. Si esto no se toma en cuenta, el proceso de solución puede alargarse innecesariamente o, incluso, pueden darse, como soluciones, valores que resultan inadmisibles.

Ejemplo 5.8

Supóngase que la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su anchura y al cubo de su altura (o espesor). Si se va a obtener una viga de un tronco, cuya forma es, aproximadamente, la de un cilindro circular de 52 cm de diámetro, ¿cuáles han de ser las medidas del corte transversal de la viga, para que su resistencia sea máxima?

Solución

Siendo a y b, respectivamente, el ancho y la altura de la viga, la resistencia R de la misma será

$$R = kab^3 \qquad \text{(a)}$$

[9] Si se desea analizar con más detalle esta relación entre máximas y mínimas distancias, con situaciones de tangencia, ver Arcos, capítulos 6 y 7.

Ahora, de acuerdo con la figura 5.7, tenemos que

$$26^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$4(26)^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(b)}$$

De donde

$$a = \pm\sqrt{4(26)^2 - b^2}$$

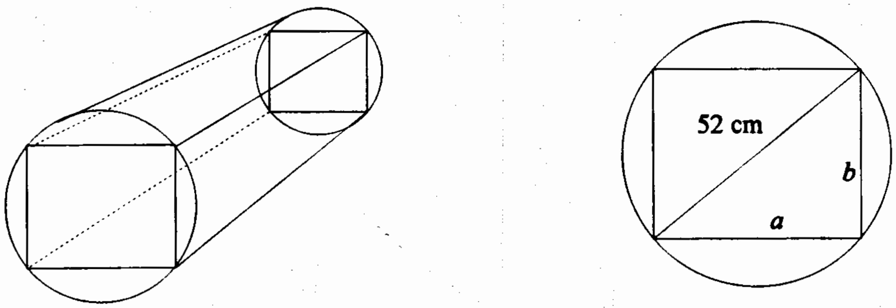


Fig. 5.7

Sin embargo, a no puede ser negativa, ya que es una longitud, así que

$$a = \sqrt{4(26)^2 - b^2} \qquad \text{(c)}$$

De esta manera, al sustituir en (a), se obtiene que la resistencia de la viga, en función de la altura es

$$R = kb^3\sqrt{4(26)^2 - b^2} \qquad \text{(d)}$$

Así pues, para hallar los puntos críticos, hay que derivar esta función:

$$R'(b) = 3kb^2\sqrt{4(26)^2 - b^2} + \frac{kb^3}{2\sqrt{4(26)^2 - b^2}}(-2b)$$

$$R'(b) = 3kb^2\sqrt{4(26)^2 - b^2} - \frac{kb^4}{\sqrt{4(26)^2 - b^2}}$$

$$R'(b) = \frac{3kb^2(4(26)^2 - b^2) - kb^4}{\sqrt{4(26)^2 - b^2}} = \frac{kb^2}{a}[3(4(26)^2 - b^2) - b^2]$$

Observemos ahora que hay dos números críticos que no pueden tomarse en cuenta: el primero, $b = 0$ —para el cual la derivada se anula—, ya que, en tal caso, no hay viga, y el segundo, $a = 0$ —en el cual la derivada no existe—, ya que tampoco en este caso habría viga.

Así pues, el único punto crítico admisible es aquel para el cual

$$3(4(26)^2 - b^2) - b^2 = 0, \quad 12(26)^2 - 4b^2 = 0, \quad 12(26)^2 = 4b^2$$

Es decir,

$$b = 26\sqrt{3}$$

Al sustituir en (c),

$$a = \sqrt{4(26)^2 - 3(26)^2} = 26$$

Resumiendo, para maximizar la resistencia, el ancho de la viga debe ser de 26 cm, y el alto de $26\sqrt{3} \cong 45\,\text{cm}$.

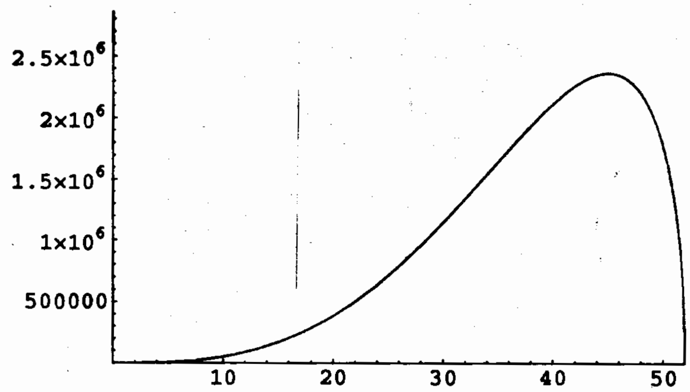


Fig. 5.8

En la figura 5.8 se muestra la gráfica de la resistencia en función del espesor de la viga [dada por la ecuación (d), con $k = 1$]. Obsérvese que, en este caso, la misma regla de correspondencia define el conjunto de valores admisibles de la variable independiente —en este caso, la altura de la viga—, ya que el radicando no puede ser negativo.

Ejemplo 5.9

Supóngase que la iluminación que recibe un objeto es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a la fuente. Si dos fuentes luminosas, una de ellas tres veces más intensa que la otra, se colocan a 10 m de distancia entre sí, ¿en qué punto del segmento de recta comprendido entre las fuentes debe colocarse un objeto para recibir la mínima iluminación?

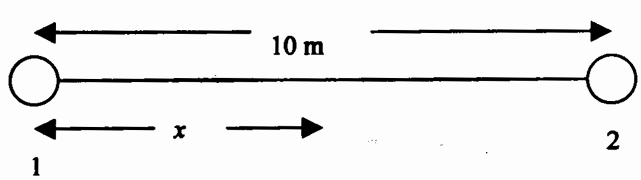


Fig. 5.9

Solución

Denotando con I la iluminación, y con P la intensidad de la fuente, y siendo x la distancia del objeto a la fuente más intensa (ver figura 5.9), tenemos que la iluminación en el objeto debida a la fuente 2 (la menos intensa) es

$$I_2 = \frac{kP_2}{(10-x)^2} \qquad \text{(a)},$$

y la debida a la más intensa es

$$I_1 = \frac{kP_1}{x^2} = \frac{3kP_2}{x^2} \qquad \text{(b)},$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

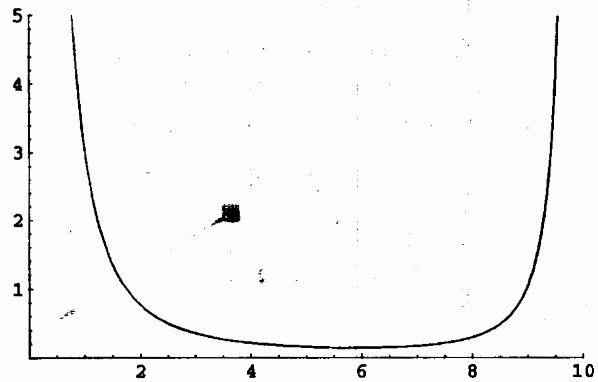


Fig. 5.10

Por lo tanto, la iluminación total en el objeto, debida a la acción conjunta de las dos fuentes, es

$$I(x) = \frac{kP_2}{(10-x)^2} + \frac{3kP_2}{x^2} = kP_2\left[\frac{1}{(10-x)^2} + \frac{3}{x^2}\right] \qquad \text{(c)}$$

Derivando

$$I'(x) = kP_2\left[\frac{-2(-1)}{(10-x)^3} + \frac{-6}{x^3}\right] = kP_2\left[\frac{2x^3 - 6(10-x)^3}{(10-x)^3 x^3}\right]$$

$$= \frac{2xP_2}{x^3(10-x)^3}\left[x^3 - 3(10-x)^3\right] = \frac{2xP_2[x^3 - 3(1000 - 300x + 30x^2 - x^3)}{x^3(10-x)^3}$$

$$= \frac{2xP_2[4x^3 - 90x^2 + 900x - 3000]}{x^3(10-x)^3}$$

Los puntos críticos correspondientes a $x = 0$ y $x = 10$ no se toman en cuenta ya que en ambos casos la iluminación se hace infinita [lo cual se deduce de las expresiones (a) y (b)]. Así pues, los puntos críticos de interés son aquellos para los cuales

$$4x^3 - 90x^2 + 900x - 3000 = 0$$

Al resolver numéricamente esta ecuación, se obtiene que la única raíz real es

$$x \cong 5.905$$

En la figura 5.10 se muestra la gráfica de la iluminación en términos de la distancia del objeto, respecto de la fuente más intensa. Por supuesto, la gráfica se trazó en el intervalo de valores admisibles, de acuerdo con el problema. Obsérvese que, en este caso, la variación de la función (iluminación), alrededor del punto crítico, es muy pequeña.

5.2 Ejercicios

1. Un pasillo de a metros de ancho intersecta un corredor de b metros de ancho en ángulo recto (ver figura). Determinar la longitud l del tramo recto de tubo más largo que se puede pasar horizontalmente del pasillo al corredor.

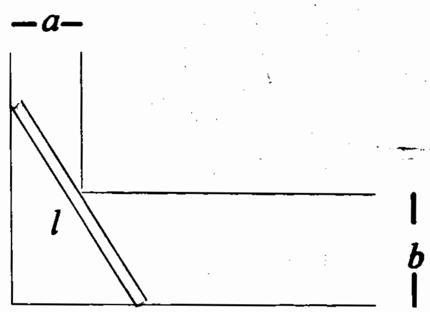


Fig. problema 1

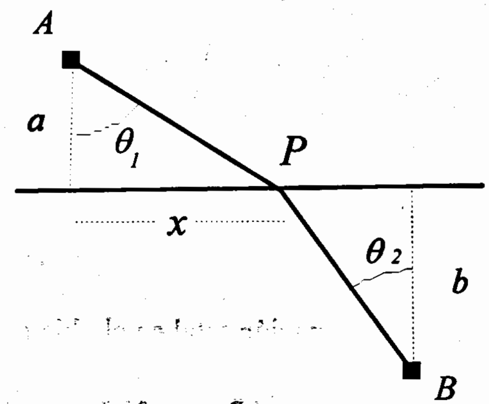


Fig. problema 2

2. Supóngase que una falla geológica separa las ciudades A y B, según se muestra en la figura. Se quiere construir un camino entre las ciudades, sabiendo que la distancia entre las proyecciones perpendiculares sobre la falla es 1 kilómetro, el costo de construcción es C_1 (en miles de pesos por cada km) en el lado de la falla donde se encuentra A y C_2 en el lado donde se encuentra B. Se desea ubicar la posición de P de manera que se minimice el costo de la carretera.

   a) Mostrar que el costo es mínimo cuando se satisface la ecuación:

   $$C_1 \operatorname{sen} \theta_1 = C_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

   b) Considerando que $a = b = C_1 = 1$, $C_2 = 2$ y $l = 4$, probar que la ecuación obtenida en el inciso anterior es equivalente a:

   $$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 32x + 64 = 0$$

3. Un faro está a 6 km de distancia del punto A más cercano de una costa recta. El guarda faros obtiene sus artículos de consumo en un punto B ubicado sobre la costa a 8 km de A. Para ello, puede remar en el bote del faro a 3 km/h y puede caminar por la playa a 4.8 km/h. Suponiendo que el bote puede encallar en cualquier punto

de la playa entre A y B, ¿en qué punto de la playa debe arribar el guarda faros para minimizar el tiempo para llegar al almacén?

4. Considerando la circunferencia cuya ecuación es $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ y el punto A de coordenadas (-3, 1).

   a) ¿Cuál de los puntos de la circunferencia está más cerca de A?

   b) ¿Cuál de los puntos de la circunferencia está más lejos de A?

   c) ¿Cómo se resuelve este problema utilizando geometría analítica?

   d) ¿Cómo se resuelve usando regla y compás?

5.3 Graficación

En la sección 2.3 se vio cómo emplear algunos conceptos relativos a la continuidad para obtener información útil en el trazo de la gráfica de una función, a partir de su regla de correspondencia. Después, en la sección 4.3 se vio cómo utilizar parte de la información que podemos obtener a partir de la primera y segunda derivadas de la función, en el trazo de la gráfica.

Tomando en cuenta lo que se estudió en las secciones mencionadas, podemos resumir el proceso para el trazo de la gráfica de una función como se describe a continuación.

1. A partir de la regla de correspondencia de la función dada, obtener la siguiente información:
   a) Dominio.
   b) Intersecciones y simetrías con los ejes coordenados y con el origen.
   c) Discontinuidades: asíntotas verticales, huecos y saltos.
   d) Comportamiento de la función para valores grandes de la variable (asíntotas horizontales, oblicuas y curvas).
2. A partir de la (primera) derivada de la función, obtener:
   a) Puntos críticos.
   b) Intervalos donde la función es creciente o decreciente.
   c) Máximos y mínimos relativos.
   d) Puntos de inflexión con tangente horizontal.
   e) Picos o puntos de quebradura (puntos donde la función es continua pero no derivable).
   f) Puntos con tangente vertical (pendiente infinita).
3. A partir de la segunda derivada de la función, obtener:
   a) Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
   b) Máximos y mínimos relativos.
   c) Puntos de inflexión.
4. Hacer una tabulación mínima y trazar la gráfica.

Notas:

1. La discontinuidad de salto sólo se considera, en este texto, en caso de que la función esté definida por secciones. Lo mismo ocurre con los puntos de quebradura.
2. Los máximos y mínimos relativos pueden obtenerse conociendo sólo la primera derivada o utilizando también la segunda derivada, dependiendo del criterio utilizado.

3. Las diferentes situaciones que pueden ocurrir cuando se tiene un punto con tangente horizontal, es decir, uno en que la derivada se anule, se resumen en la tabla 5.1.

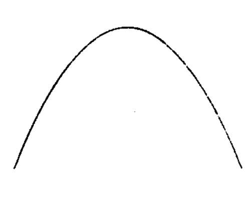
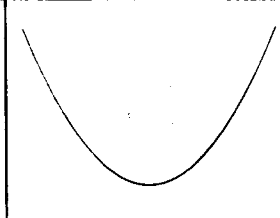
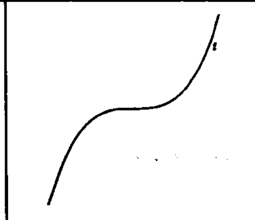
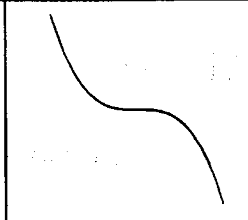
1 máximo	2 mínimo	3 p. de inflexión	4 p. de inflexión
			
$f'(a)=0$ f' $+\mid-$ $f''(a)<0$	$f'(a)=0$ f' $-\mid+$ $f''(a)>0$	$f'(a)=0$ f' $+\mid+$ $f''(a)=0$ f'' $-\mid+$	$f'(a)=0$ f' $-\mid-$ $f''(a)=0$ f'' $+\mid-$

Tabla 5.1

4. Las diferentes situaciones que pueden ocurrir cuando se tiene un punto con tangente vertical, es decir, uno con derivada infinita, se resumen en la tabla 5.2.

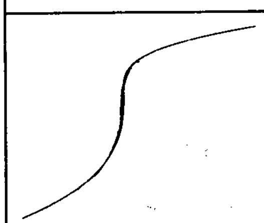
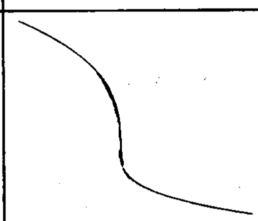
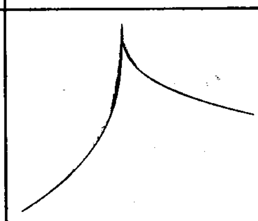
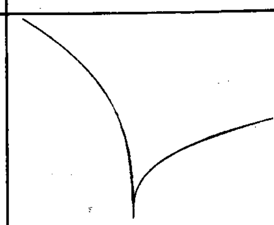
1 p. de inflexión	2 p. de inflexión	3 máximo	4 mínimo
			
f' $+\mid+$ f'' $+\mid-$ la gráfica de f es suave	f' $-\mid-$ f'' $-\mid+$ la gráfica de f es suave	f' $+\mid-$ f'' $+\mid+$ la gráfica de f tiene un pico	f' $-\mid+$ f'' $-\mid-$ la gráfica de f tiene un pico

Tabla 5.2

5. No es necesario obtener toda la información indicada, en cada caso resultará más relevante alguna información que otra. La práctica y el conocimiento previo que se tenga del tipo de función que se desea graficar ayudan a reconocer cuál es la información que permite hacer el trazo de la manera más rápida.

6. Para hacer la tabulación, habiendo obtenido la información descrita, basta con incluir, ordenados de manera creciente, los *puntos de interés gráfico* —es decir, los

máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los picos—, un punto a la izquierda del menor de éstos, uno a la derecha del mayor, y uno entre cada par de ellos.

7. Aun si se utiliza calculadora con gráficos o computadora para hacer el trazo, convendrá obtener parte de la información indicada, particularmente las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los máximos y mínimos, y los puntos de inflexión.

Ejemplo 5.10 Polinomio factorizado

Trazar la gráfica de la función definida por

$$y = f(x) = (x+2)^3(x-1)^2 \qquad \text{(a)}$$

Solución

A partir de la regla de correspondencia (polinomio de 5° grado), se tiene que

$$D_f = \mathfrak{R}$$

La función es continua en todo el eje real.

La gráfica no presenta simetrías ni asíntotas.

Las intersecciones con los ejes son (-2, 0), (1, 0) y (0, 8).

Ahora bien, al derivar la función, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+2)^2(x-1)^2 + 2(x+2)^3(x-1) \\ &= (x+2)^2(x-1)\,[3(x-1)+2(x+2)] \\ &= (x+2)^2(x-1)\,(5x+1) \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los números críticos —todos ellos correspondientes a puntos con tangente horizontal— ordenados crecientemente son $-2,\ -1/5,\ \text{y}\ 1$.

Intervalo	$<-\infty, -2>$	$<-2, -1/5>$	$<-1/5, 1>$	$<1, \infty>$
Signo de f'	$(+)(-)(-) = +$	$(+)(-)(-) = +$	$(+)(-)(+) = -$	$(+)(+)(+) = +$
Comportamiento de f	↗	↗	↘	↗

Tabla 5.3

La tabla 5.3 indica los signos de la derivada en cada uno de los subintervalos del dominio definidos por los números críticos. Tal información permite afirmar (véase la tabla 5.1) que la función tiene un máximo relativo en $x = -1/5$, un mínimo relativo en $x = 1$, y un punto de inflexión con tangente horizontal en $x = -2$.

Calculando ahora la segunda derivada de la función, partiendo de (b), tenemos:

$$f''(x) = 2(x+2)(x-1)(5x+1) + (x+2)^2(5x+1) + 5(x+2)^2(x-1)$$
$$= (x+2)[2(5x^2-4x-1) + (5x^2+11x+2) + 5(x^2+x-2)]$$
$$= (x+2)(20x^2+8x-10) = 2(x+2)(10x^2+4x-5)$$

Resolviendo la ecuación que resulta de igualar a cero la expresión del último paréntesis, se obtiene que sus raíces son, aproximadamente, $x_{i1} \cong -0.935$ y $x_{i2} \cong 0.535$. Así pues, los puntos para los cuales la segunda derivada se anulan son -2, x_{i1} y x_{i2}.

Intervalo	$< -\infty, -2 >$	$< -2, x_{i1} >$	$< x_{i1}, x_{i2} >$	$< x_{i2}, \infty >$
Signo de f''	$(-)(+) = -$	$(+)(+) = +$	$(+)(-) = -$	$(+)(+) = +$
Concavidad de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Tabla 5.4

La tabla 5.4 indica que $-2, x_{i1}$ y x_{i2} son, los tres, puntos de inflexión. Haciendo una tabulación de la función (tabla 5.5), utilizando la ecuación (a), se trazó la gráfica de la función que se muestra en la figura 5.11.

x	$f(x)$
-3	-16
-2	0
-1	4
-0.935	4.524
0	8
0.535	3.524
1	0
2	64

Tabla 5.5

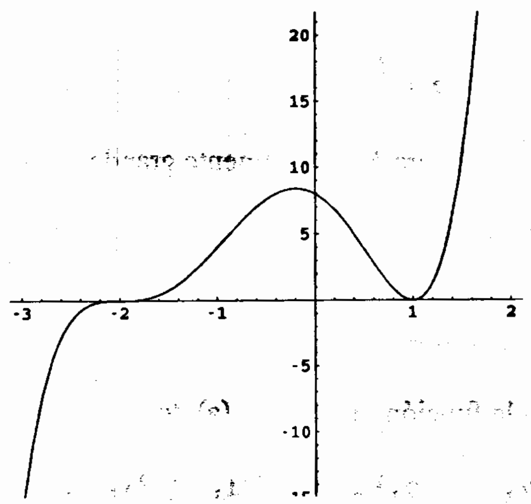


Fig. 5.11

En dicha gráfica se observa una propiedad de las funciones cuya regla de correspondencia es un polinomio factorizado: en una raíz de multiplicidad impar (como $x = -2$ en este ejemplo), la gráfica tiene un punto de inflexión, siendo su tangente el eje X; en cambio, en una raíz de multiplicidad par (como $x = 1$ en el ejemplo), la gráfica tiene un máximo o un mínimo.

Ejemplo 5.11 Función irracional con un pico

Trazar la gráfica de la función definida por $y = f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ (a)

Solución

A partir de la regla de correspondencia de la función, se obtiene que

$D_f = \Re$ (el índice del radical es impar).

No hay simetrías con los ejes coordenados ni con el origen.

La función es continua en todo el eje real.

La única intersección con los ejes coordenados es el origen.

Ahora bien, para ver si la gráfica presenta una asíntota, debe utilizarse la serie binomial, puesto que se trata de una función irracional. Interesa, por lo tanto, ver el comportamiento de la función para valores grandes de la variable, por lo que será necesario escribir la función de manera que se tenga, dentro del radicando, un binomio de la forma $1 + w$, donde w sea una expresión menor que 1 cuando x sea grande.

Factorizando, entonces, $-x^3$ dentro del radical, tenemos:

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 2x^2} = \sqrt[3]{-x^3(1 - 2x^{-1})} = -x\sqrt[3]{1 - 2x^{-1}}$$

$$f(x) = -x(1 - 2x^{-1})^{1/3} = -x\left[1 + \frac{1}{3}(-2x^{-1}) + o(x^{-2})\right]$$

$$f(x) = -x + \frac{2}{3} + o(x^{-1})$$

De manera que, para N infinitamente grande,

$$f(N) = -N + \frac{2}{3} + \text{infinitesimal}$$

Así que una asíntota de la gráfica de f es la recta $y = -x + \dfrac{2}{3}$

Derivando la función, utilizando (a), tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-2/3}(4x - 3x^2) = \frac{x(4 - 3x)}{3(2x^2 - x^3)^{2/3}} = \frac{4x - 3x^2}{3(2x^2 - x^3)^{2/3}} \qquad \text{(b)}$$

$$f'(x) = \frac{x(4 - 3x)}{3[x^2(2 - x)]^{2/3}} = \frac{x(4 - 3x)}{3x^{4/3}(2 - x)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 3x}{3x^{1/3}(2 - x)^{2/3}}$$

Así pues, los puntos críticos de la función corresponden a $x=0$, $x=4/3$ y $x=2$. En $x=0$ y en $x=2$ se presenta una tangente vertical, mientras que en $x=4/3$ se tiene una tangente horizontal.

Intervalo	$<-\infty, 0>$	$<0, 4/3>$	$<4/3, 2>$	$<2, \infty>$
Signo de f'	$\frac{(+)}{(-)(+)}=-$	$\frac{(+)}{(+)(+)}=+$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$
Comportamiento de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Tabla 5.6

De la tabla 5.6 se puede concluir que f tiene un máximo relativo en $x=4/3$, sin embargo, para precisar el comportamiento de la función en los puntos con tangente vertical, obtendremos la segunda derivada, utilizando la última expresión de la ecuación (b).

$$f''(x)=\frac{3(2x^2-x^3)^{2/3}(4-6x)-(4x-3x^2)(2)(2x^2-x^3)^{-1/3}(4x-3x^2)}{9(2x^2-x^3)^{4/3}}$$

$$f''(x)=\frac{(2x^2-x^3)^{-1/3}[3(4-6x)(2x^2-x^3)-2(4x-3x^2)^2]}{9(2x^2-x^3)^{4/3}}$$

$$f''(x)=\frac{(4-6x)(6x^2-3x^3)-2(4x-3x^2)^2}{9(2x^2-x^3)^{5/3}}=-\frac{8x^2}{9[x^2(2-x)]^{5/3}}$$

$$f''(x)=-\frac{8x^2}{9x^{10/3}(2-x)^{5/3}}=-\frac{8}{9x^{4/3}(2-x)^{5/3}}$$

Intervalo	$<-\infty, 0>$	$<0, 2>$	$<2, \infty>$
Signo de f''	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$	$\frac{(-)}{(+)(+)}=-$	$\frac{(-)}{(+)(-)}=+$
Concavidad de f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Tabla 5.7

Los valores de x para los cuales la segunda derivada se hace infinita son $x=0$ y $x=2$. Por otra parte, al observar los resultados de las tablas 5.6 y 5.7, concluimos que la gráfica tiene un mínimo y un pico en el punto correspondiente a $x=0$ (caso 4 de la tabla 5.2), y un punto de inflexión con tangente vertical en $x=2$ (caso 2 de la tabla 5.2).

x	$f(x)$
-1	-1.44
0	0
1	1
4/3	1.06
5/3	0.975
2	0
3	-2.08

Tabla 5.8

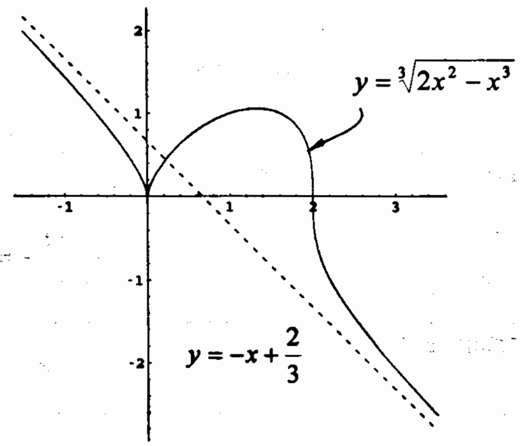


Fig. 5.12

Complementando la información con una breve tabulación, se traza la gráfica de la función dada, la cual se muestra en la figura 5.12.

Ejemplo 5.12 Funciones periódicas

Trazar la gráfica de la función definida por $y = f(x) = 3\operatorname{sen} 2x - 5\cos 2x$.

Solución

A partir de la regla de correspondencia de la función, se tiene que

$$D_f = \Re$$

f es periódica y su periodo es π (por lo tanto, el análisis del comportamiento de la función se hará para el intervalo $[0, \pi]$

Ahora bien derivando la función se obtiene que

$$f'(x) = 6\cos 2x + 10\operatorname{sen} 2x$$

Para obtener, entonces, los puntos críticos, tenemos

$$6\cos 2x + 10\operatorname{sen} 2x = 0,$$

$$6 + 10\tan 2x = 0,$$

$$\tan 2x = -3/5,$$

$$2x = \arctan(-3/5) \cong 2.60, 5.74, \ldots,$$

$$x \cong 1.30, 2.87, \ldots,$$

Y para los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -12\operatorname{sen} 2x + 20\cos 2x = 0$$

$$-12\tan 2x + 20 = 0$$

$$\tan 2x = 20/12 = 5/3$$

$$2x = \arctan(5/3) \cong 1.03,\ 4.17,...$$

$$x \cong 0.52,\ 2.09,...$$

Haciendo una breve tabulación en el intervalo elegido, se traza la gráfica mostrada en la figura 5.13.

x	$f(x)$
0	-5
0.52	0
1.30	5.83
2.09	0
2.87	-5.83
π	-5

Tabla 5.9

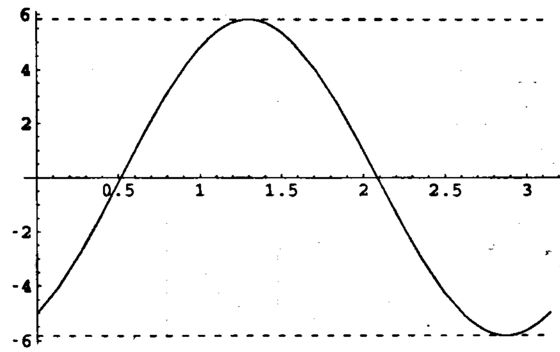


Fig. 5.13

Tomando en cuenta que la función es periódica, que su periodo es π, y que en la figura 5.13 se muestra precisamente un ciclo completo, entonces, si se deseara hacer el trazo de la gráfica para un intervalo más amplio, simplemente se hacen tantas copias como se desee, en cada intervalo que comprenda un ciclo. Por ejemplo en la figura 5.14 se muestra la gráfica para los tres ciclos correspondientes al intervalo $[-\pi, 2\pi]$.

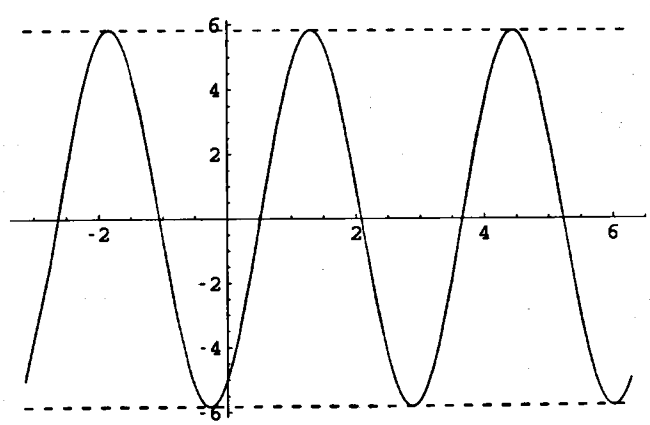


Fig. 5.14

5.3 Ejercicios

Ejercicios 1-12. Obteniendo toda la información que resulte pertinente, trazar la gráfica de la función con regla de correspondencia dada.

1. $y = x^4 - 6x^2$

2. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

3. $y = x + \sqrt{x}$

4. $y = \sqrt{x^2+1} - x$

5. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

7. $y = \operatorname{sen} x - \tan x$

8. $y = x^2 \ln x$

9. $y = \operatorname{senh} x + \cosh x$

10. $y = e^{-x^2}$

11. $y = \dfrac{1}{x-1} - x$

12. $y = \dfrac{x^4 - 1}{x}$

5.4 Movimiento rectilíneo

En la sección 3.1 se estudió el concepto de velocidad instantánea, habiendo indicado que si $x(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, en términos del tiempo, entonces

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) \tag{5.2}$$

define la velocidad en función del tiempo.

De acuerdo con esta ecuación la velocidad es la razón de cambio de la posición respecto del tiempo, de manera que el valor (absoluto) de la velocidad es el indicador de la rapidez con que la partícula cambia su posición con el tiempo, y el signo de la velocidad indica si la partícula se mueve en la dirección asignada al eje de referencia o en dirección opuesta, según si la velocidad es positiva o negativa.

Análogamente, la aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo se define como la razón de cambio de la velocidad con respecto del tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \tag{5.3}$$

De esta manera, el valor (absoluto) de la aceleración indica qué tan rápido está cambiando la velocidad, y su signo indica si el valor de la velocidad (considerando su signo), aumenta o disminuye.

Por ejemplo, considérese el caso de un tiro vertical y supóngase que se ha asignado como positiva la dirección "hacia arriba", es decir, alejándose del centro de la tierra (ver figura 5.15).

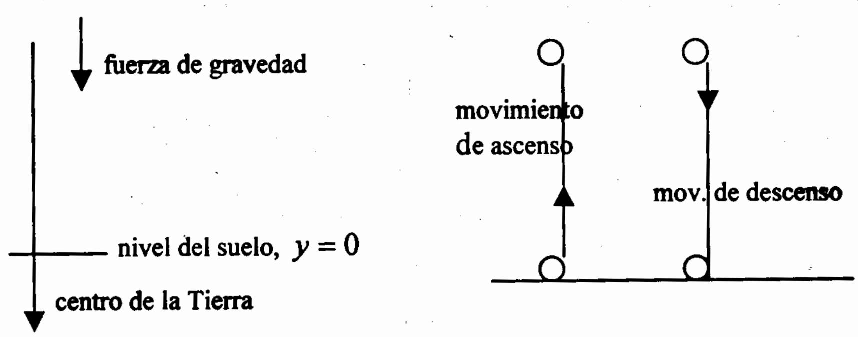


Fig. 5.15

En este caso la aceleración es constante (ver ejemplo 1.1) y negativa, pues está en dirección opuesta al eje de referencia. Puede considerarse el movimiento del proyectil en dos etapas, la primera de ascenso y la segunda de descenso; en la primera la velocidad es positiva, ya que el proyectil avanza en la dirección del eje de referencia, sin embargo, la fuerza de gravedad la va frenando, es decir, la velocidad va disminuyendo, hasta que se detiene en el punto más alto de la trayectoria.

Cuando desciende, la velocidad aumenta (en valor absoluto) porque la gravedad ahora actúa en la dirección del movimiento, sin embargo, la velocidad sigue disminuyendo ya que ahora es negativa.

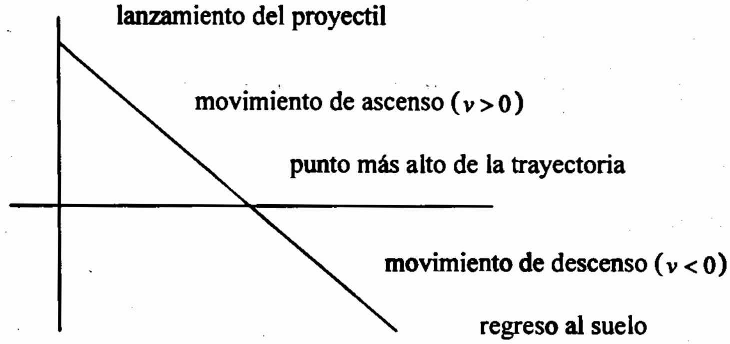


Fig. 5.16

En resumen, la velocidad disminuye continuamente (ver figura 5.16) comenzando con un valor máximo y positivo (cuando se lanza el proyectil), disminuyendo hasta cero en el punto más alto de la trayectoria, y tomando en seguida valores negativos cada vez más grandes, hasta que regresa al suelo.

Las ecuaciones fundamentales para un movimiento rectilíneo son (5.2) y (5.3), y resultan, en general, suficientes para resolver una gran variedad de problemas, con el auxilio del cálculo.

Ejemplo 5.13

Una partícula se mueve sobre la parábola $y = x^2$, de manera tal que la abscisa del punto cambia a razón de 3.2 cm/s. Calcular la rapidez de la partícula (medida sobre la curva) cuando ésta se encuentra en el punto (2,4).

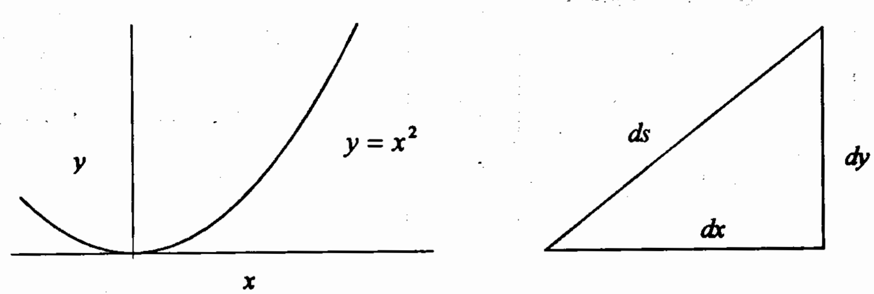


Fig. 5.17

Solución

En un intervalo infinitesimal (de tiempo), podemos considerar el arco recorrido por la partícula (ver figura 5.17) como la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son los desplazamientos en las direcciones de los ejes coordenados.

De esta manera, queremos calcular $\dfrac{ds}{dt}$ sabiendo que $\dfrac{dx}{dt} = 3.2$ cm/s.

Ahora bien, de acuerdo con la figura 5.17,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

dividiendo por dt,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad \text{(a)}$$

pero (x, y) es un punto de la parábola, de manera que

$$y = x^2 \qquad \text{(b)}$$

aplicando la regla de la cadena y utilizando esta ecuación, tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo en (a), y tomando en cuenta que $\frac{dx}{dt} = 3.2$ cm/s, tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(3.2)^2 + 4x^2(3.2)^2} = 3.2\sqrt{1 + 4x^2}$$

en el punto de interés, $x = 2$, así que la rapidez buscada es:

$$\frac{ds}{dt} = 32\sqrt{1 + 4(2)^2} = 3.2\sqrt{17} \cong 13.2 \text{ cm/s}$$

Ejemplo 5.14 Movimiento rectilíneo y polinomios de Taylor

La ecuación de movimiento a lo largo de una línea recta, puede obtenerse utilizando un polinomio de Taylor, a condición de tener la información necesaria en el punto de partida.

Caso A. Movimiento rectilíneo uniforme

Si $x(t)$ es la función de posición y $v =$ constante, entonces, $v' = x'' = 0$, de manera que, al sustituir en (4.33), considerando $a = 0$ y $a + \Delta t = \Delta t = t$, entonces

$$x(t) = x(0) + x'(0)t \qquad \text{(a)}$$

ya que todas las derivadas de orden superior a dos se anulan, debido a que $v = x'(t)$ es constante.

Si $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v(0) = v_0$, entonces la ecuación (a) puede escribirse en la forma

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Caso B. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Si ahora $a(t) = a = x''(t)$ es constante, entonces

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2$$

siendo $x(0) = x_0$, $x'(0) = v(0) = v_0$ y $x''(0) = a$, tenemos que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

que es la ecuación de movimiento buscada.

Ejemplo 5.15

Si la posición de una partícula está dada por

$$x(t) = 2t^3 - 6t^2 + 15, \quad t \geq 0 \qquad \text{(a)}$$

con t en segundos y x en centímetros, obtener:

a) Los puntos en los que la partícula se encuentra más lejos del punto de referencia (origen).

b) Los puntos en los que la velocidad es máxima o mínima.

Solución

a) Para obtener los puntos de máximo alejamiento con respecto del origen, hay que derivar la función de posición e igualar a cero (en este caso la función es un polinomio), así pues, derivando (a) e igualando a cero

$$x'(t) = v(t) = 6t^2 - 12t \qquad \text{(b)}$$

(obsérvese que, siendo derivable la función de posición, la posición es máxima cuando la velocidad es cero).

$$v(t) = 6t^2 - 12t = 0, \quad v(t) = 6t(t-2) = 0, \quad t = 0, \quad t = 2$$

Podemos ver (tabla 5.10) que en $t = 0$, x tiene el máximo relativo $x_{máx} = x(0) = 15$ cm; y el mínimo relativo $x_{mín} = x(2) = 2(2)^3 - 6(2)^2 + 15 = 7$ cm, en $t = 2$. A partir de ese momento, la partícula se aleja indefinidamente del punto de referencia.

Intervalo	$<0,2>$	$<2,\infty>$
Signo de $v = x'$	$(+)(-) = -$	$(+)(+) = +$
Comportamiento de x	$\searrow$	$\nearrow$

Tabla 5. 10

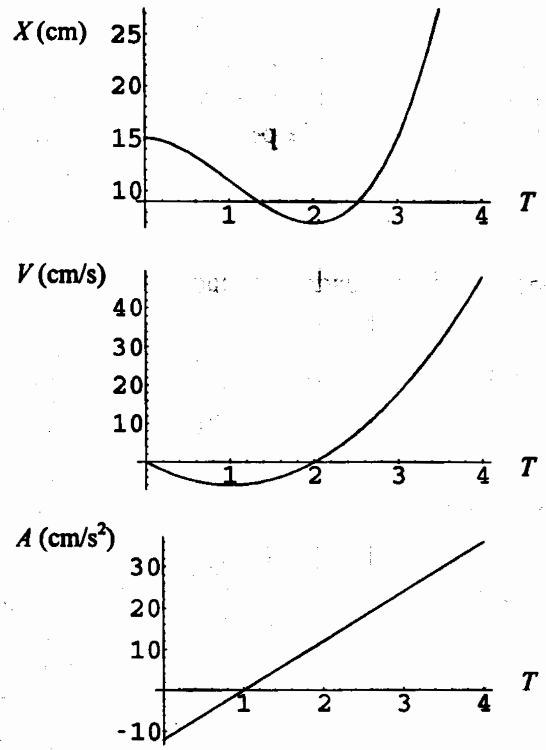


Fig. 5.18

b) Para calcular los puntos donde la velocidad es máxima, se deriva (b) y se iguala a cero:

$$v'(t) = a(t) = 12t - 12 = 0\,, \qquad t = 1$$

Intervalo	$<0,1>$	$<1,\infty>$
Signo de $v' = a$	$-$	$+$
Comportamiento de v	↘	↗

Tabla 5. 11

De la tabla 5.11 concluimos que la partícula comienza su movimiento disminuyendo la velocidad desde $v(0) = v_0 = 0$, hasta $v_{min} = v(1) = -6\,\text{cm/s}$, a partir de lo cual, la velocidad crece indefinidamente.

En la figura 5.18 se muestran, simultáneamente, las gráficas de la posición, la velocidad, y la aceleración, con respecto del tiempo. Obsérvese que la posición x tiene un valor extremo en los puntos en que la velocidad $v = x' = 0$.

Además, los puntos de inflexión de la posición corresponden a valores extremos en la velocidad y a ceros de la función de aceleración.

Ejemplo *5.16 Movimiento armónico simple*[10]

Un movimiento oscilatorio, como el de un resorte, en el que la fuerza restauradora y, por lo tanto, la aceleración, es proporcional al desplazamiento, pero de signo contrario, es llamado *movimiento armónico simple*. En tal caso la posición del objeto, con respecto al punto de equilibrio, está dada por

$$x(t) = A\operatorname{sen} Kt + B\cos Kt \qquad \text{(a)}$$

Vamos a calcular la magnitud de cada oscilación, es decir, el valor del máximo desplazamiento respecto del punto de equilibrio.

Derivando la ecuación (a), e igualando a cero:

$$x'(t) = AK\cos Kt - KB\operatorname{sen} Kt = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$AK - KB\tan Kt = 0$$

$$\tan Kt = \frac{A}{B}$$

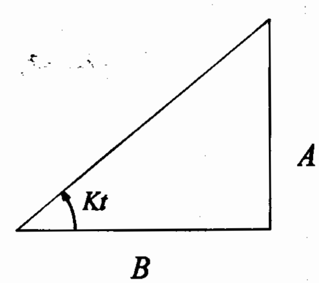


Fig. 5.19

$$Kt = \phi = \arctan\frac{A}{B} \qquad \text{(c)}$$

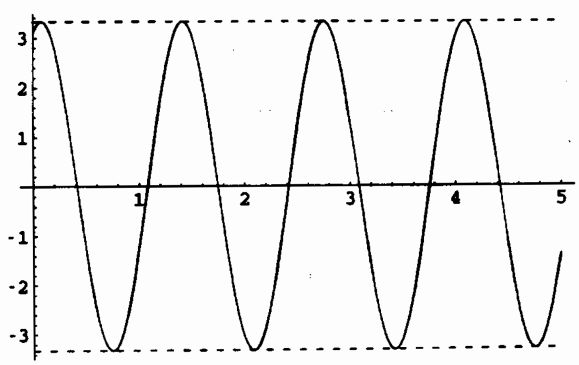


Fig. 5.20

A partir de esta relación (ver figura 5.19) se tiene que

$$\cos\phi = \cos Kt = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(d)}$$

---

[10] Ver Meriam, pp. 23-24.

y $$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} Kt = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{(e)}$$

Sustituyendo en (a) estas últimas expresiones, que corresponden a los valores extremos de x, tenemos

$$x_{ext} = \text{amplitud} = A\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + B\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{A^2+B^2}$$

En la figura 5.20 se muestra la gráfica de la función (a), con $A = 1.2$, $B = 3.1$ y $K = 4.7$, de manera que la amplitud del movimiento es $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{1.2^2+3.1^2} = \sqrt{11.05} \cong 3.324$.

5.4 Ejercicios

1. La posición de una partícula oscilante está dada por la relación $y = A\operatorname{sen}(pt+\phi)$. Siendo $v_0 = v(0)$ y $y_0 = y(0)$, demostrar que el valor máximo de y es

$$y_{máx} = \sqrt{{y_0}^2 + (v_0/p)^2}$$

2. La posición de una partícula está dada por $s = 2t^2 - 10$, con t en segundos y s en metros.
   (a) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 4$ s?
   (b) ¿Cuáles son la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$?
   (c) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración de la partícula en $t = 4$?
3. Un cohete parte del reposo y viaja hacia arriba en línea recta. Su altura sobre el suelo se mide con un radar desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s, y se puede expresar, de manera aproximada, por medio de la función $s = 10t^2$ m.
   (a) ¿Cuál es el desplazamiento durante ese intervalo de tiempo?
   (b) ¿Cuál es la velocidad en $t = 4$ s?
   (c) ¿Cuál es la aceleración durante los primeros 4 segundos?
4. La posición de una partícula durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 6$ s es $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2 + 4t$ m.
   (a) ¿Cuál es el desplazamiento del punto durante ese intervalo de tiempo?
   (b) ¿Cuál es la velocidad máxima durante este intervalo, y en qué momento ocurre?
   (c) ¿Cuál es el valor de la aceleración cuando la velocidad es máxima?

5. Supóngase que se quiere representar la posición de un vehículo que está siendo probado, por medio de un polinomio de la forma $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, donde A, B, C y D son constantes. El vehículo parte del reposo en $t = 0$ y $s = 0$. En $t = 4\,\text{s}$, $s = 46\,\text{m}$, y en $t = 8\,\text{s}$, $s = 142\,\text{m}$.

   (a) Determinar el valor de cada constante.

   (b) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración aproximada del vehículo en $t = 8\,\text{s}$?

5.5 Método de Newton

En secciones anteriores del texto, se ha hecho alusión a la *solución numérica* de alguna ecuación, cuando ésta no puede resolverse, de manera exacta, utilizando los métodos algebraicos conocidos. En esta sección vamos a ver uno de tales métodos, llamado *método de Newton.*

Supóngase que se desea resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = 0, \tag{15.4}$$

donde f es una función real.

Supóngase, además, que una raíz real de la ecuación es un número desconocido a, pero que se sabe que x_0 es un número cercano a a.

Expandiendo f en serie de Taylor alrededor de x_0, tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

En particular, si $x = a$, entonces

$$f(a) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(a - x_0)^2 + \cdots$$

Si además x_0 está suficientemente próximo a a, podemos conservar sólo el primer término de la serie, despreciando los términos de orden dos en adelante

$$0 \cong f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0)$$

de donde

$$a \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Como a es la raíz buscada, entonces esta última ecuación nos indica que, si x_0 es una "buena" aproximación de una raíz real de (13.1), entonces $x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ será aun mejor.

Así pues, si damos una aproximación inicial x_0 de una raíz de (13.1), esperamos que los términos de la sucesión $\{x_n\}$ con

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \tag{15.5}$$

tengan valores cada vez más próximos a la raíz a.

No es seguro que la sucesión generada mediante (15.5) converja a una raíz de (15.4), es decir, que a partir de un cierto momento, los términos de tal sucesión tomen valores cada vez más próximos a una raíz de (15.4). Sin embargo, este método nos permite hallar, en un buen número de casos, una o más de las raíces reales de una ecuación, con la precisión que uno quiera, y siempre y cuando el instrumento de cálculo lo permita.

Ejemplo 5.17

En el ejemplo 3.20 se debía resolver la ecuación

$$9x^4 - 4x^3 - 4 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Vamos a calcular sus raíces reales utilizando el método de Newton.

Tenemos pues, que $\qquad f(x) = 9x^4 - 4x^3 - 4 \qquad$ (b)

Y, por lo tanto, $\qquad f'(x) = 36x^3 - 12x^2 \qquad$ (c)

Ahora bien, tomando en cuenta que $f(-1) = 9 + 4 - 4 = 9$, y que $f(0) = -4$, entonces, por el teorema del valor intermedio, la ecuación (a) debe tener una raíz real en $[-1, 0]$, así pues, se propone el punto medio del intervalo, es decir, –0.5, como aproximación inicial.

Así pues, tenemos que $x_0 = -0.5$, y al sustituir en (b) y (c), tenemos que

$$f(x_0) = f(-0.5) \cong -2.9375$$

y $\qquad f'(x_0) = f'(-0.5) \cong -7.5$

Sustituyendo ahora en (15.5), con $n = 1$,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cong -0.5 - \frac{-2.9375}{-7.5} \cong -0.891667$$

Para la siguiente iteración se obtiene:

$$f(x_1) = f(-0.891667) \cong 4.52497$$

y $\qquad f'(x_0) = f'(-0.891667) \cong -35.0626$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cong -0.891667 - \frac{4.52497}{-35.0626} \cong -0.762613$$

Y para las dos siguientes:

$$x_3 = -0.724469 \qquad \text{y} \qquad x_4 = -0.724458$$

Obsérvese que estos últimos valores coinciden en las primeras cuatro cifras. Podemos suponer que el valor de la raíz buscada, con una precisión mínima de cuatro cifras, es $x \cong -0.724458$.

Por otra parte, observando que la suma de los coeficientes de la ecuación (b), es decir, $f(0)$, es 1, se propone $x_0 = 1$.

Procediendo de la misma manera, obtenemos:

$f(x_0) = f(1) = 1, \qquad f'(x_0) = f'(1) = 24 \qquad \text{y} \qquad x_1 = 0.958333,$

$f(x_1) = f(0.958333) = 0.070629, \qquad f'(x_1) = f'(0.958333) = 20.6641 \qquad \text{y}$
$x_2 = 0.954915,$

$f(x_2) = f(0.954915) = 0.0004438, \quad f'(x_2) = f'(0.954915) = 20.4047 \qquad \text{y}$
$x_3 = 0.954894,$

Así que otra raíz real de la ecuación (b) es, aproximadamente, $x = 0.954894$.

Ejemplo 5.18

Obtener una raíz real de la ecuación:

$$e^{x/2} - x - 2 = 0 \tag{a}$$

Solución

Primeramente escribamos la ecuación en la forma:

$$e^{x/2} = x + 2 \tag{b}$$

De esta manera, vemos que las raíces buscadas son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de $\phi(x) = e^{x/2}$ y $g(x) = x + 2$, las cuales pueden ser fácilmente trazadas.

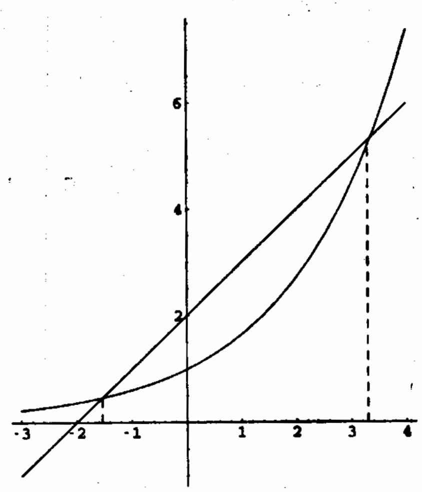


Fig. 5.21

x	$e^{x/2}$	$x+2$
-2	0.368	0
-1	0.607	1
0	1	2
1	1.649	3
2	2.718	4
3	4.482	5
4	7.389	6

Tabla 5.12

Observando la figura 5.21, podemos decir que la ecuación dada tiene dos raíces reales, una entre -2 y -1, y la otra entre 3 y 4. Aplicaremos el método de Newton para hallar la raíz negativa.

Tenemos, pues, que de acuerdo con (a),

$$f(x) = e^{x/2} - x - 2 \tag{c}$$

por lo cual,

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}e^{x/2} - 1 \tag{d}$$

La figura sugiere que la raíz buscada es, aproximadamente, -1.6. Así pues, se propone como aproximación inicial, $x_0 = -1.6$, de manera que, al sustituir en (c) y (d) tenemos:

$$f(x_0) = e^{-1.6/2} - (-1.6) - 2 \cong 0.049328964$$

y

$$f'(x_0) = \tfrac{1}{2}e^{-1.6/2} - 1 \cong -0.77533551$$

Ahora, usando (15.5), con $n = 1$,

$$x_1 = -1.6 - \frac{0.049328964}{-0.77533551} \cong -1.53637726$$

De la misma manera obtenemos:

$$f(x_1) = 2.29782 \times 10^{-4}, \qquad f'(x_1) = -0.768074$$

y

$$x_2 = -1.53608;$$

para el cual, $f(x_2) = 5.2 \times 10^{-9}$, de manera que se considera que una buena aproximación de la raíz es $x = -1.53608$

Ejemplo 5.19

Obtener el punto sobre la gráfica de $y = \ln x$ que esté más próximo al punto (1, 2).

Solución

Deseamos minimizar la distancia entre un punto $P(x, y)$ de la gráfica de la función, y el punto fijo $A(1, 2)$ (ver figura 5.22).

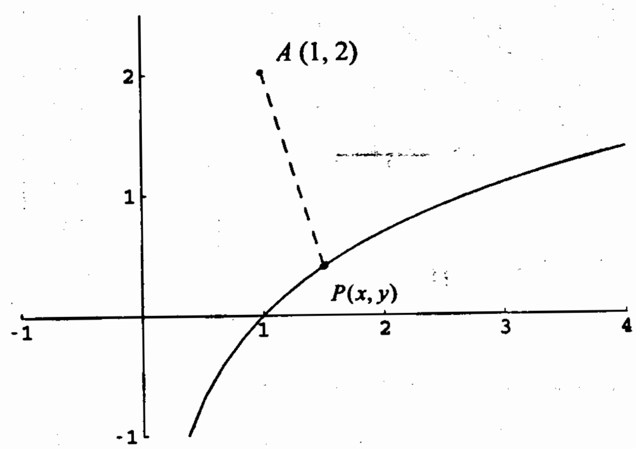


Fig. 5.22

Deseamos, pues, minimizar la función definida por

$$d(P,A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

Ahora bien, dado que esta distancia es necesariamente un número positivo, su valor mínimo se da cuando su cuadrado también es mínimo, así pues, tomando en cuenta que P es un punto de la gráfica de la función, debemos minimizar la función:

$$l_c=(x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(\ln x-2)^2\,,$$

$$l_c(x)=(x-1)^2+(\ln x-2)^2$$

Para encontrar el mínimo de esta función procedemos a encontrar sus puntos críticos:

$$l_c'(x)=2(x-1)+2(\ln x-2)(1/x)=0,$$

de donde resulta necesario resolver la ecuación:

$$f(x)=x^2-x+\ln x-2=0$$

Utilizaremos el método de Newton para resolverla, para lo cual debemos proponer una aproximación inicial. Observando la figura 13.2, encontramos que la raíz de esta ecuación, es decir, la abscisa del punto de la curva más próximo de A, está entre 1 y 2, de manera que proponemos 1.5 como aproximación inicial.

Tenemos entonces:

$$f'(x)=2x-1+1/x\,,$$

$$x_0=1.5\,,$$

$$f(x_0)=-0.84453489\,,\quad f'(x_0)=2.666666667\,,$$

Por lo tanto,

$$x_1=1.5-\frac{-0.84453489}{2.666666667}=1.816700584$$

De la misma forma, obtenemos:

$$x_2=1.79135$$

y $\quad x_3=1.79117,$

para el cual $f(x_3)=2.53\times10^{-8}$, así que podemos considerar, entonces, que la abscisa del punto buscado es, con una precisión de diez milésimas, $x=1.7912$, de manera que el punto buscado es, aproximadamente, (1.7912, 0.5829).

5.5 Ejercicios

1. Utilizando una gráfica para dar aproximaciones iniciales, calcular con cuatro cifras significativas las dos raíces reales de la ecuación:

$$\ln x - x^2 + 2x = 0$$

2. Empleando el método de Newton, podemos deducir un procedimiento para calcular la raíz cuadrada de un número positivo cualquiera. Para ello debe considerarse la ecuación $f(x) = x^2 - a = 0$, donde a es el número cuya raíz se desea calcular.

   a) Demostrar que al aplicar el método de Newton a la ecuación dada se obtiene la fórmula recursiva:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   a) Utilizar esta fórmula para calcular la raíz cuadrada de 20 con 5 cifras decimales correctas, utilizando 4 como aproximación inicial.

3. Utilizar el método de Newton para resolver la ecuación

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

tomando como aproximación inicial cada uno de los siguientes números:

(a) 3.0 (b) 3.2(c) 3.25 (d) 3.5 (e) 3.51 (f) 3.6

4. Utilizando una gráfica para dar una aproximación inicial, calcular (con precisión de diez milésimas) una de las tres raíces reales de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0$$

Reducir la ecuación dada a cuadrática y calcular las dos raíces restantes, ¿concuerdan los resultados obtenidos con la gráfica trazada?

5. En el ejemplo 5.2 se llegó a la ecuación

$$4x^3 - 90x^2 + 900x - 3000 = 0.$$

Considerando el problema que se desea resolver, dar una aproximación razonable para la raíz real de la ecuación, y calcularla, con precisión de milésimas, utilizando el método de Newton.

6. Resolver la ecuación que se obtuvo en el ejercicio 2 de la sección 5.2.

7. Obtener, para cada una de las ramas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$, el punto más cercano al punto (4, 1).

5.6 Regla de L'Hôpital

En la primera unidad se estudió el concepto de límite y se indicó que si la regla de correspondencia de una función es un cociente y si el numerador y el denominador se anulan para un valor a de la variable, no se puede decidir acerca de la existencia y, en su caso, del valor del límite de la función cuando la variable tiende a a.

Cuando esto ocurre, se dice que la función presenta la forma indeterminada $0/0$ para $x = a$. En esta sección veremos cómo utilizar la derivada para calcular el límite de una función cuando se presenta ésta o alguna otra forma indeterminada.

Interesa, pues, estudiar el comportamiento de una función definida por

$$\phi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

tal que, si $x \to a$, entonces $P(x) \to 0$ y $Q(x) \to 0$, es decir, si α es infinitesimal, entonces, $P(a+\alpha)$ y $Q(a+\alpha)$ son infinitesimales.

Sean pues f y g dos funciones tales que $f(a) = g(a) = 0$ (ver figura 13.3), deseamos calcular el límite de $f(x)/g(x)$ cuando $x \to a$.

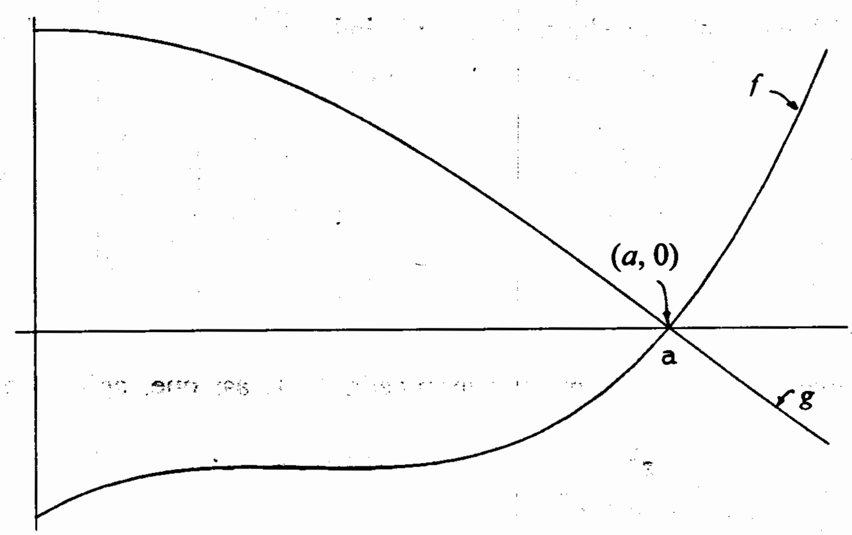


Fig 5.23

Si se expanden ambas funciones en serie de Taylor alrededor de a, obtenemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

y

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Haciendo ahora $x = a + \alpha$, entonces

$$f(a+\alpha) = f(a) + f'(a)\alpha + \frac{f''(a)}{2!}\alpha^2 + \cdots$$

y
$$g(a+\alpha) = g(a) + g'(a)\alpha + \frac{g''(a)}{2!}\alpha^2 + \cdots$$

Así pues, despreciando los términos de orden 2 en adelante, y suponiendo que $f'(a)$ y $g'(a)$ no son simultáneamente nulos, tendremos:

$$\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{así que:} \qquad \boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

Si, en cambio, $f'(a) = g'(a) = 0$, y si $f''(a)$ y $g''(a)$ no son simultáneamente nulas, entonces

$$\frac{f(a+\alpha)}{g(a+\alpha)} = \frac{f''(a)}{g''(a)} \qquad \text{así que:} \qquad \boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}}$$

Este proceso deberá continuarse hasta eliminar la indeterminación, es decir, hasta que, para alguna k, $f^{(k)}(a)$ y $g^{(k)}(a)$ no sean, simultáneamente nulas.

Ejemplo 5.20

Calcular $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cosh z}$

Solución

Es fácil ver que se tiene la forma indeterminada $0/0$, así que, aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cosh z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{-\operatorname{sen h} z} = \lim_{z\to 0} \frac{2}{-\cosh z} = -2$$

Existen otras formas indeterminadas que son equivalentes a $0/0$, como ∞/∞ e $\infty \cdot 0$. Son equivalentes, porque cualquier función cuya regla de correspondencia presenta una de tales formas puede escribirse en cualquiera de las otras, por ejemplo, la función f definida por $f(x) = x \ln x$ puede escribirse como

$$f(x) = x \cdot \ln x,$$

$$f(x) = \frac{x}{1/\ln x}, \text{ o}$$

$$f(x)=\frac{\ln x}{1/x}$$

pudiendo observar, entonces, que cuando $x \to 0^+$, se obtienen, respectivamente, las formas indeterminadas $\infty \cdot 0$, $0/0$ e ∞/∞.

Ahora bien, puede probarse que la regla de L'Hôpital puede aplicarse si la función está escrita de manera que se presente una de las formas $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo 5.21

Trazar la gráfica de la función definida por $f(x)=x\cdot \ln x$

Solución

Tenemos que $D_f=\langle 0,\infty\rangle$, y que la gráfica de *f* intersecta al eje X si $\ln x=1$, es decir, si $x=e$.

Por otra parte, como ya se indicó, si $x\to 0^+$ obtenemos la forma indeterminada $\infty\cdot 0$, de manera que, si se desea analizar el comportamiento de la función para valores de la variable pequeños y positivos, se aplica la regla de L'Hôpital, intentando primero con la forma $0/0$:

$$f(x)=\frac{x}{1/\ln x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{-(\ln x)^{-2}}=\cdots,$$

y el proceso no termina.

Si intentamos entonces con la forma ∞/∞, tenemos

$$f(x)=\frac{\ln x}{1/x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0,$$

de manera que la función tiene una discontinuidad de hueco en $x=0$ y su gráfica tiene un hueco en el origen.

La derivada de la función es

$$f'(x)=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x=1+\ln x,$$

a partir de lo cual resulta (ver ejemplo 3.25) que *f* tiene un mínimo en el punto $(e^{-1},-e^{-1})$.

Derivando nuevamente se obtiene

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

Así que $f''(x)>0$ para toda x en el dominio de la función, que es $<0,\infty>$. Por lo tanto, la gráfica es una curva cóncava hacia arriba.

Completando esta información con una tabulación, podemos trazar la gráfica de *f* la cual se muestra en la figura 3.12.

5.6 Ejercicios

1. Calcular los límites indicados:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^x - 2^x}{x}$

2. Trácese la gráfica de:

   (a) $y = x^2 \ln x$

   (b) $y = \dfrac{2^x - 1}{x}$

III. CÁLCULO INTEGRAL

En esta unidad vamos a considerar el concepto de integral y algunas de sus aplicaciones a la geometría y la física. El concepto de *diferencial* —que, a su vez, da lugar al de *derivada*— y el de *integral* son los conceptos fundamentales del cálculo y constituyen herramienta primordial en las ciencias básicas y de la ingeniería.

6. CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

6.1 Integral indefinida y cálculo de primitivas

Primeramente estudiaremos la integración como un procedimiento inverso de la diferenciación, comenzando con la definición de *primitiva de una función*:

Si F es una función cuya derivada es la función f, entonces diremos que F es una *primitiva o antiderivada* de f.	(5.1)

Ejemplo 6.1

Sabemos que $D_x(\operatorname{sen} 5x) = 5\cos 5x$, entonces, una primitiva o antiderivada de $5\cos 5x$ es $\operatorname{sen} 5x$.

Ejemplo 6.2

Considerando que $D_x(x^2 + 5x - 7) = 2x + 5$, tenemos que una primitiva de $2x + 5$ es $x^2 + 5x - 7$. Sin embargo, observemos que $D_x(x^2 + 5x + 16) = 2x + 5$ y que, en general, $D_x(x^2 + 5x + c) = 2x + 5$, con c constante, de manera que podemos afirmar que cada una de las funciones $x^2 + 5x + c$, con c constante, es una primitiva de $2x + 5$, es decir,

Si F es una primitiva de f, entonces, $F+c$ también es una primitiva de f	(5.2)

En efecto, $D_x(F+c) = D_xF + D_xc = F' + 0 = f$.

Así pues, mientras que la derivada de una función dada es única, puede haber una infinidad de primitivas de la misma función:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \tag{5.3}$$

pero,

$$f'(x) = g'(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + c \tag{5.4}$$

Esta última ecuación también puede escribirse en la forma:

Si F es una primitiva de f, y si $y' = f(x)$, entonces, $y = F(x) + c$	(5.5)

Ahora bien, definiremos el proceso de integración como el inverso de la diferenciación, es decir, la integral de la diferencial de una función debe ser la función misma. Usando el símbolo de integración $\int$, tenemos:

$$\int dF = F$$

O bien

$$\int dF(x) = F(x)$$

De esta manera, si F es una primitiva de f, es decir, si

$$F' = f,$$

entonces,

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

Así que

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Finalmente, considerando (5.2),

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c} \tag{5.6}$$

en donde la función f es llamado *integrando.*

Ejemplo 6.3

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + c,$$

ya que $d\left(\frac{2}{3}x^3\right) = 2x^2$

Problema de valor inicial

Llamaremos problema de valor inicial al consistente en buscar una función y que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\,, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Un caso particular se da cuando la función f sólo depende de la variable independiente:

$$\begin{cases} y' = f(x)\,, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

En tal caso, obsérvese que cada primitiva de f satisface la primera condición, de manera que el problema consiste en hallar una primitiva de f que satisfaga la segunda condición.

Ejemplo 6.4

Resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 3x + 4, \\ y(2) = 1/2 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Solución

Es fácil obtener el conjunto de primitivas de f, el cual está dado por

$$y(x) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + c \qquad \text{(b)}$$

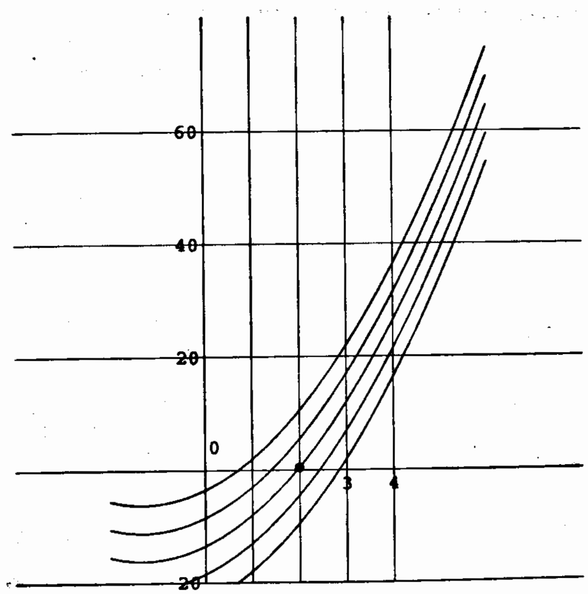


Fig. 6.1

Ahora, para que se cumpla la segunda condición, tenemos que:

$$y(2) = \tfrac{3}{2}(2)^2 + 4(2) + c = \tfrac{1}{2}$$

de donde se obtiene que el valor de la constante es $c = -27/2$, de manera que la solución buscada, obtenida al sustituir en (b), es

$$y(x) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x - \tfrac{27}{2}$$

Obsérvese que la solución (general) dada por (b) es una familia de curvas (parábolas, en este caso), por lo que el problema de valor inicial consiste en buscar dentro de una familia de curvas (las definidas por las primitivas), aquella que pasa por un punto dado (ver fig. 6.1).

Cálculo de primitivas

Vamos ahora a estudiar algunas técnicas para el cálculo de la primitiva de una función. Primeramente, el caso en que el integrando pueda identificarse en una tabla, y más adelante se verán algunos procesos que se utilizarán en función del tipo de integrando.

Se han incluido sólo algunos ejemplos porque, en la práctica, las primitivas podrán obtenerse mediante algún programa de manipulación simbólica, como *Mathematica*, por ejemplo.

Integrales elementales

Utilizando las reglas o teoremas de derivación podemos obtener fórmulas de integración, como se muestra a continuación.

Sabemos que $D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, u'(x)$, por lo tanto,

$$d(\operatorname{sen} u) = \cos u \, u'(x) \, dx = \cos u \, du,$$

es decir,

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c \qquad \textbf{(6.6)}$$

donde u es una función de otra variable, esto es, la variable independiente.

Ejemplo 6.5

Calcular $\int x \cos(3x^2) \, dx$

Solución

Comparando con (6.6), tenemos que:

Si $u = 3x^2$, $du = 6x \, dx$, entonces, multiplicando y dividiendo por 6,

$$\int x \cos(3x^2)\, dx = \int \frac{1}{6}(6x)\cos(3x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \cos(3x^2)\,(6x\, dx) = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x^2) + c$$

De igual manera podemos obtener fórmulas similares a (6.6), a las que denominaremos formas *elementales*, las cuales pueden encontrarse en cualquier libro que contenga tablas y fórmulas matemáticas.

Integración de funciones racionales

Usando una tabla podemos calcular una primitiva de cualquier función racional propia, con denominador lineal o cuadrático. Sabemos, además, que todo polinomio puede factorizarse de manera tal, que cada uno de sus factores sea lineal o cuadrático. Finalmente, también sabemos que toda función racional impropia puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia, y que esta fracción propia puede a su vez expresarse como la suma de fracciones *parciales* con denominador lineal o cuadrático.

De esta manera, el cálculo de una primitiva de una función racional dada se reduce a la aplicación de técnicas algebraicas, como la de factorización (que puede a su vez requerir de la búsqueda de raíces), la división de polinomios y la descomposición en fracciones parciales. En textos de álgebra puede encontrarse la información para adquirir la habilidad necesaria en tales técnicas. En este texto sólo indicaremos cómo se emplean en el cálculo de primitivas.

Ejemplo 6.6

Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 - x^2}\, dx$

Solución

La fracción del radicando es propia y se puede descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)},$$

así que:

$$x + 1 \equiv Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 \equiv (A+C)x^2 + (B-A)x - B,$$

de donde $\quad A + C = 0, \quad B - A = 1 \;\text{ y }\; B = 1,$

de manera que $\quad B = -1, \; A = -2 \;\text{ y }\; C = 2.$

Así pues,

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}\, dx = \int \frac{-2}{x}\, dx + \int \frac{-1}{x^2}\, dx + \int \frac{2}{x-1}\, dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{x+1}{x^3 - x^2}\,dx = \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2} + c$$

Integración por partes

Integrar una suma de funciones resulta tan simple, o complicado, como integrar cada uno de sus términos, ya que la integral de la suma es la suma de las integrales. Sin embargo, cuando el integrando es un producto, no podemos hacer lo mismo, ya que la derivada de un producto no es igual al producto de las derivadas de los factores.

Sin embargo, de la regla de la derivación de un producto podemos obtener lo que se conoce como método de *integración por partes*:

Sabemos que

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

de donde,

$$u\,dv = d(uv) - v\,du,$$

e integrando:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{6.7}$$

Es claro que conviene utilizar (6.7) cuando la integral de $v\,du$ es más fácil de calcular que la de $u\,dv$, o bien cuando, al aplicarse repetidas veces, se puede calcular la integral buscada mediante un procedimiento puramente algebraico. Por otra parte, dada una función integrando en forma de producto, es posible identificar los factores en más de una forma, por lo que probablemente será necesario probar varias opciones antes de tener éxito.

Ejemplo 6.7

Calcular $\int x^3 \ln x\,dx$

Solución

Si se elige $u = x^3$ y $dv = \ln x$, el problema es encontrar, fácilmente, una primitiva de $\ln x$.

Si, en cambio, se elige $u = \ln x$ y $dv = x^3$, entonces, $du = 1/x$ y $v = x^4/4$, así que, al sustituir en (6.7), tenemos que

$$\int x^3 \ln x\,dx = (\ln x)(x^4/4) - \int\left(\frac{x^4}{4}\right)\frac{dx}{x} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

Ejemplo 6.8

Obtener una fórmula de reducción para $\int \cos^n ax\, dx$

y aplicarla para calcular $\int \cos^5 3x\, dx$.

Solución

Sea $I = \int \cos^n ax\, dx$,

entonces, haciendo $u = \cos^{n-1} ax$ y $dv = \cos ax\, dx$, tenemos

$$du = a(n-1)\cos^{n-2} ax\,(-\operatorname{sen} ax)\, dx \quad y \quad v = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

de manera que:

$$I = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax + (n-1)\int \cos^{n-2} ax \operatorname{sen}^2 ax\, dx\ ,$$

y como $\operatorname{sen}^2 ax = 1 - \cos^2 ax$, entonces:

$$I = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax + (n-1)\left[\int \cos^{n-2} ax\, dx - \int \cos^n ax \operatorname{sen}^2 ax\, dx\right]$$

$$I = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax + (n-1)\int \cos^{n-2} ax\, dx - (n-1)I$$

De donde, al despejar *I*, obtenemos la fórmula de reducción:

$$\int \cos^n ax\, dx = \frac{1}{na}\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$$

así pues, para el caso particular propuesto tenemos:

$$\int \cos^5 3x\, dx = \frac{1}{15}\operatorname{sen} 3x \cos^4 3x + \frac{4}{5}\int \cos^3 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{15}\operatorname{sen} 3x \cos^4 3x + \frac{4}{5}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x \cos^2 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3x\, dx\right]$$

$$\int \cos^5 3x\, dx = \frac{1}{15}\operatorname{sen} 3x \cos^4 3x + \frac{4}{36}\operatorname{sen} 3x \cos^2 3x + \frac{8}{405}\operatorname{sen} 3x + c$$

Integración por cambio de variable

Supóngase que se desea calcular

$$\int f(x)\, dx,$$

para lo cual, se propone que

$$x = \phi(w) \tag{6.8}$$

de manera que $\qquad dx = \phi'(w)\,dw$

Así que, al sustituir en la integral, tenemos que:

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(w)]\,dw = \int g(w)\,dw$$

donde g es la función compuesta $g = f \circ \phi$

Si g es más fácil de integrar que f, entonces, el cambio de variable (6.7) resulta conveniente. Ahora bien, la primitiva buscada debe ser una función de la variable dada x, mientras que al integrar g obtenemos una función en la nueva variable w. Esto puede corregirse si de (6.7) despejamos w

$$w = \phi^{*}(x)$$

donde ϕ^{*} es la función inversa de ϕ, y sustituimos en la primitiva encontrada.

Para que pueda aplicarse este cambio de variable se requiere que ϕ sea una función inyectiva. El procedimiento antes descrito se muestra mediante el siguiente esquema:

$$\boxed{\begin{array}{ccc}
\int f(x)\,dx & \xrightarrow{(1)} & F(x)+c \\
\downarrow & & \uparrow \\
x = \phi(w) & & w = \phi^{*}(x) \\
\downarrow_{(2)} & & \uparrow_{(4)} \\
\int g(w)\,dw & \xrightarrow{(3)} & G(w)+c
\end{array}}$$

Cambio de variable, integral indefinida

El cambio de variable podrá aplicarse, entendiendo que la primitiva obtenida estará definida sobre un intervalo en el cual f sea inyectiva.

Ejemplo 6.9

Calcular $\qquad \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Solución

Haciendo $w = \sqrt{1-x}$, tenemos que $w^2 = 1-x$, $x = 1-w^2$, y $dx = -2wdw$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{(1-w^2)^2}{w}(-2w\,dw) = -2\int (1-w^2)^2\,dw$$

$$= -2\int(1-2w^2+w^4)\,dw = -2\left(w-\frac{2}{3}w^3+\frac{1}{5}w^5\right)+c$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\left[(1-x)^{1/2}-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+\frac{1}{5}(1-x)^{5/2}\right]+c$$

Hay casos particulares en los que se sugieren determinados cambios de variable, uno de éstos es aquel en el que el integrando es una función algebraica, que contiene radicales de la forma $\sqrt{a^2 \pm u^2}$ o $\sqrt{u^2-a^2}$

Si por ejemplo en el integrando aparece el radical $\sqrt{a^2+u^2}$, entonces, al hacer $u = a\tan z$, tendremos:

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 z} = a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sqrt{\sec^2 z} = a\sec z,$$

así que en el radicando queda eliminada la raíz.

Ejemplo 6.10

Calcular $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

Solución

En este caso se propone $x = 2\cos w$, de manera que:

$$4-x^2 = 4-4\cos^2 w = 4(1-\cos^2 w) = 4\,\mathrm{sen}^2\, w$$

Además, $dx = -2\,\mathrm{sen}\,w\,dw$, así que al sustituir en la integral, obtenemos:

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = \int\frac{2\,\mathrm{sen}\,w}{2\cos w}(-2\,\mathrm{sen}\,w\,dw) = -2\int\frac{\mathrm{sen}^2\,w}{\cos w}\,dw$$

$$= -2\int\frac{1-\cos^2 w}{\cos w}\,dw = -2\int\sec w\,dw + 2\int\cos w\,dw$$

$$= -2\ln(\sec w+\tan w) + 2\,\mathrm{sen}\,w + c$$

$$= -2\ln\left(\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+\sqrt{4-x^2}+c$$

Uso de series de potencias

Si se desea calcular una primitiva de una función dada, podemos auxiliarnos de las series de potencias, considerando que la función obtenida tiene como dominio el intervalo de convergencia de la serie utilizada, o la intersección de los intervalos de las series, en el caso de que se use más de una.

Para algunas funciones no existen primitivas que se puedan expresar como combinación de un conjunto finito de funciones elementales, por eso, en ocasiones resulta muy útil el uso de las series de potencias.

Ejemplo 6.11

Calcular $$\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

Solución

Recurriendo al desarrollo (10.9), tenemos que

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

entonces,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots ,$$

de manera que:

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) dx$$

$$= x - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 - \frac{1}{4^2}x^4 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

6.1 Ejercicios

Calcular:

1. $\int (9 - x^2)^{3/2}\,dx$

2. $\int \left(\frac{\sec w}{1 + \operatorname{tg} w}\right)^2 dw$

3. $\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta$

4. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z-z^2-2}}$

5. $\int \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2+1}}$

6. $\int \frac{ds}{s^2-s+1}$

7. $\int \cos\phi \cos 2\phi \, d\phi$

8. $\int \operatorname{sen}^2 3x \, dx$

9. $\int \cos^4 3x \operatorname{sen} 3x \, dx$

6.2 Área bajo una curva y teorema fundamental del cálculo

Hemos visto que, en un contexto geométrico, la función derivada, cuando se evalúa en un punto, es la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en el punto. Veremos ahora que, dada una función, la función primitiva de ésta —cualquiera de ellas— o mejor dicho, la diferencia entre los valores de la primitiva en dos puntos del dominio de la función, está relacionada con el área comprendida por la curva y el eje de abscisas.

Altura promedio y área bajo la curva

Supóngase que se tiene una pecera de 1 cm de espesor, y que una banda de hule limita por arriba al volumen de agua (ver figura 6.2a). Si se retira la banda, la superficie libre del agua será entonces horizontal (figura 6.2b).

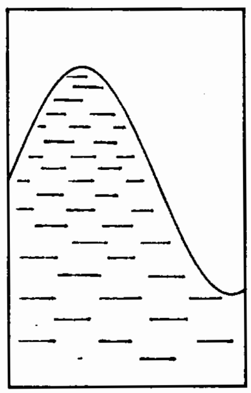


Fig. 6.2a

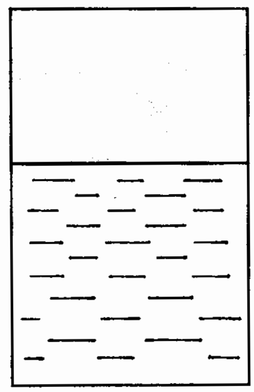


Fig.6.2b.

Suponiendo que no se tira agua al retirar la banda, su volumen permanecerá constante:

$$V_1 = V_2 = l \cdot h \cdot 1\ cm^3$$

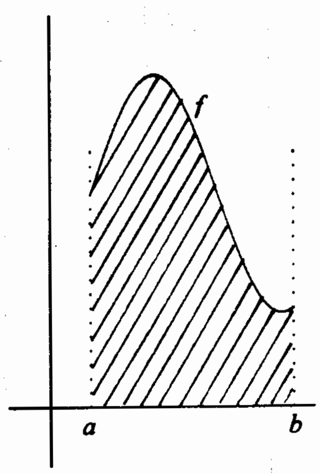


Fig. 6.3a

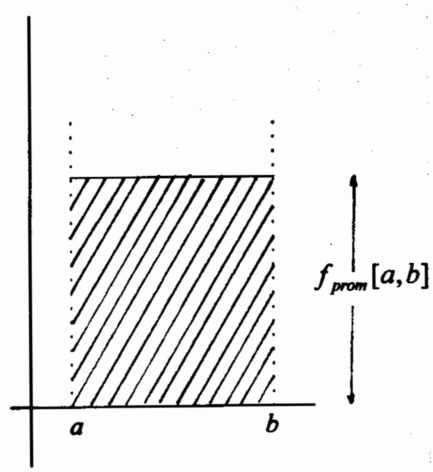


Fig. 6.3b

Considerando, ahora, una función continua *f*, cuya gráfica sea como la banda de hule, en un intervalo de longitud $l = b - a$ (véanse figuras 6.3a y 6.3b), se propone la siguiente definición:

> Llamaremos *área bajo la gráfica* de f en $[a,b]$, al área de la región comprendida entre la gráfica de *f*, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, y llamaremos *valor promedio* (o *altura promedio*) de *f* en $[a,b]$, denotado por $f_{prom}[a,b]$, a la altura del rectángulo con base en el intervalo y cuya área sea igual al área bajo la gráfica de *f* en $[a,b]$.

Ejemplo 6.12

Si *f* es una función lineal, entonces, el valor promedio de *f* (véase figura 6.4) en cualquier intervalo, es la imagen del punto medio del intervalo.

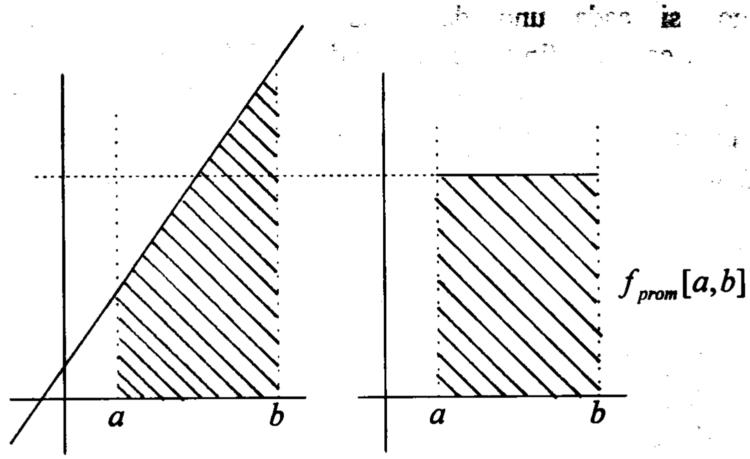


Fig. 6.4

Si la gráfica de f es una poligonal (figura 6.5), y si se divide $[a,b]$ en subintervalos definidos por cada uno de los lados de la poligonal, el valor promedio en cada subintervalo corresponde al punto medio del mismo, de manera que el área bajo la curva será

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} f(x_{ip})\Delta x_i} \qquad (6.9)$$

donde Δx_i es el ancho del *i*-ésimo subintervalo, x_{ip} es el punto medio del subintervalo, y *n* el número de subintervalos, es decir, el número de secciones lineales de la gráfica de *f*.

Ahora bien, si queremos calcular el área bajo una curva cualquiera, y si dividimos igualmente el intervalo en un número finito de subintervalos, el problema es entonces, determinar, en cada uno de éstos, el valor de la abscisa a la que le corresponde el valor promedio.

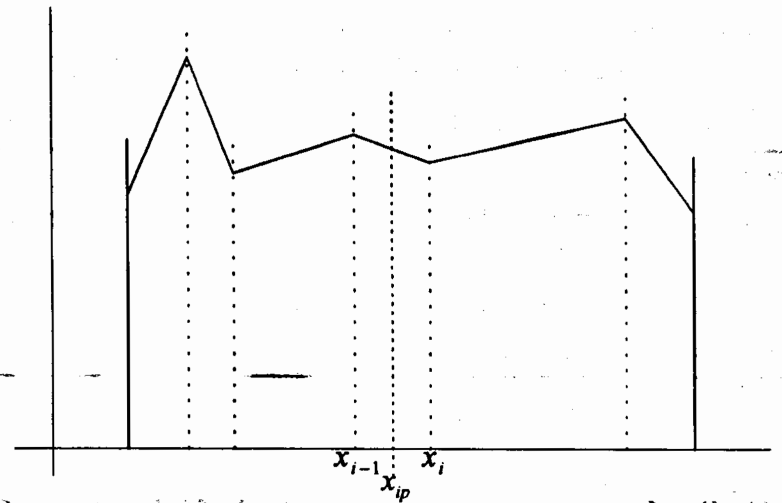


Fig. 6.5

Sin embargo, si cada uno de éstos tiene longitud infinitesimal, por ejemplo, $dx = (b-a)/N$, con N infinitamente grande, y si f es continua en $[a,b]$, las imágenes de dos elementos cualesquiera del subintervalo estarán infinitamente próximas, de manera que, siendo x_i * un número cualquiera del subintervalo, arbitrariamente elegido, y f_{pi} la altura promedio en el mismo, tenemos:

$$f_{pi} = f(x_i^*) + \alpha_i \,, \tag{6.10}$$

siendo α_i infinitesimal, de donde:

$$f_{pi} \ dx = f(x_i^*)dx + \alpha_i \cdot dx \tag{6.11}$$

Si denotamos el área bajo la gráfica de f en $[a, b]$, por $A_a^b(f)$, entonces:

$$A_a^b(f) = \sum_{i=1}^{N} f_{pi} \cdot dx = \sum_{i=1}^{N} [f(x_i^*) + \alpha]dx$$

Al despreciar el término infinitesimal que aparece en el paréntesis rectangular, se obtiene que, siendo f continua, el área bajo su gráfica en $[a,b]$ está dada por

$$\boxed{A_a^b(f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)dx} \tag{6.12}$$

Nota: Obsérvese que, para que el segundo miembro de esta última ecuación sea, efectivamente, el valor del área bajo la gráfica de f en $[a,b]$, es necesario que la función no tome valores negativos en el intervalo. De hecho, si g es positiva en todo el intervalo, y si $f = -g$, entonces todos los términos de la suma en la ecuación (7.4) son negativos y el "área bajo la gráfica" de f en $[a,b]$ sería negativa, lo que no puede suceder. Así que la expresión del segundo miembro puede no medir un área, debido a lo cual utilizaremos otro símbolo y otro nombre para tal expresión:

Siendo f una función continua[1] en $[a,b]$, la integral de f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)dx$$	(6.13)

Ejemplo 6.13

Probaremos la validez de (6.123) para una función lineal (ver figura 6.6).

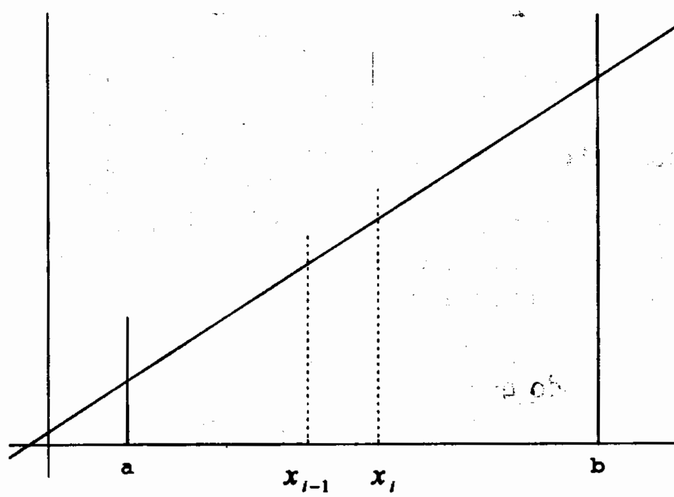


Fig. 6.6

Sea $f(x) = kx$ con $k > 0$ y $b > a > 0$, y siendo $dx = (b-a)/N$, tenemos que $x_0 = a$, $x_1 = a + dx$, $x_2 = a + 2dx$, y que, en general, $x_i = a + i\,dx$, con i de 0 a N (para $i = N$, $x_N = a + Ndx = a + (b-a) = b$).

Si ahora elegimos como x_i * al extremo derecho de cada subintervalo, obtenemos:

$$x_i{}^* = x_i = a + idx$$

$$f(x_i{}^*) = f(x_i) = f(a + idx) = k(a + idx),$$

y al sustituir en (7.5),

$$A_a^b(f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)dx = \sum_{i=1}^{N} k(a + idx)dx$$

[1]En realidad sólo se requiere que sea continua por secciones.

$$A_a^b(f) = kadx\sum_{i=1}^{N}(1) + k(dx)^2\sum_{i=1}^{N} i$$

$$= ka(N\,dx) + k(dx)^2\,\frac{N(N+1)}{2}$$

$$= ka(N\,dx) + \frac{k}{2}(N\,dx)^2 + \frac{k}{2}N(dx)^2$$

Al despreciar el último término, que es el único infinitesimal, resulta:

$$A_a^b(f) = ka(b-a) + \frac{k}{2}(b-a)^2$$

$$= \frac{k}{2}(b-a)(2a+b-a) = \frac{k}{2}(b-a)(b+a),$$

tal y como se esperaba.

Teorema fundamental del cálculo

El procedimiento efectuado en el ejemplo 6.13 puede aplicarse para calcular la integral de una función en un intervalo dado, siempre y cuando se conozca, como en el ejemplo mencionado, una expresión para cada una de las sumas resultantes, lo cual, en general, no ocurre.

Vamos a obtener un resultado que, como veremos, permitirá calcular la integral de una forma más simple y para una mucho mayor cantidad de funciones.

Sea f una función continua en $[a,b]$, y sea G la función que para cada $w \in [a,b]$ proporciona el *área bajo f* en $[a,w]$ (ver figura 6.7a), es decir:

$$G(w) = \int_a^w f(x)\,dx\,, \tag{6.14}$$

entonces,

$$G(w+h) = \int_a^{w+h} f(x)\,dx\,,$$

y

$$G(w+h) - G(w) = \int_w^{w+h} f(x)\,dx$$

Si dividimos entre h, obtenemos:

$$\frac{G(w+h)-G(w)}{h} = \frac{1}{h}\int_w^{w+h} f(x)\,dx \tag{6.15}$$

El segundo miembro de esta última ecuación es claramente, $f_{prom}[w,w+h]$ (ver figura 6.7b), de manera que si h es infinitesimal, esta altura promedio difiere infinitesimalmente de $f(w)$, y de la imagen de cualquiera otro elemento de $[w,w+h]$.

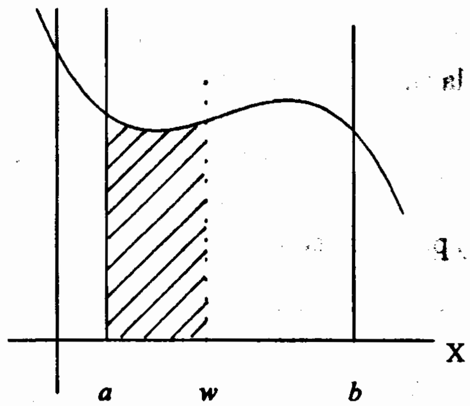


Fig. 6.7a

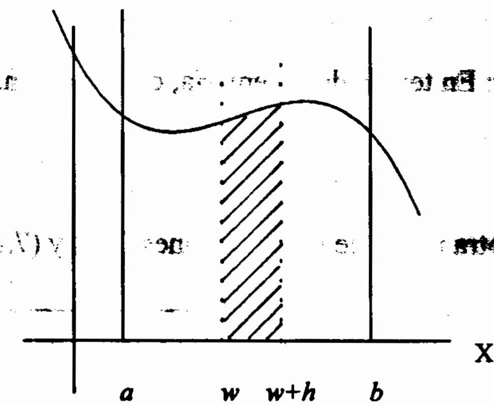


Fig. 6.7b

Por otra parte, si h es infinitesimal, el primer miembro de la misma ecuación difiere infinitesimalmente de $G'(w)$, así pues, al despreciar los términos infinitesimales obtenemos:

$$\boxed{G'(w) = f(w)} \tag{6.15}$$

es decir: la "función área" (bajo la gráfica de f), definida por (6.14), es la función cuya derivada es precisamente f.

Por otra parte, si F es otra función cuya derivada es f, es decir, otra primitiva de f, al menos en el intervalo, entonces:

$$F'(w) = f(w), \tag{6.16}$$

y tendremos que para toda $w \in [a,b]$, G y F difieren por una constante:

$$G(w) = F(w) + c \tag{6.17}$$

Ahora bien, de la definición de G, tenemos que $G(a) = 0$, así pues, haciendo $w = a$ en la última ecuación, obtenemos:

$$0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$$

y al sustituir en (6.17) se tiene:

$$G(w) = F(w) - F(a)$$

En particular, para el valor que nos interesa, es decir, para $w = b$, tenemos que:

$$G(b) = F(b) - F(a)$$

Observando la definición de G dada por la ecuación (6.15), y esta última ecuación, obtenemos finalmente que:

La integral de f en $[a,b]$ está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier primitiva de f.

Nota: En textos de ingeniería, es común en, la siguiente notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{6.18}$$

Por otra parte, de las ecuaciones (7.6) y (7.8) podemos concluir que:

$$\boxed{D_w G(w) = D_w \int_a^w f(x)\,dx = f(w)} \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.14

$$D_t \int_2^t \cos(e^{x^2})\,dx = \cos(e^{t^2})$$

Ejemplo 6.15

Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2$, el eje X y la recta $x = a,\ a > 0$.

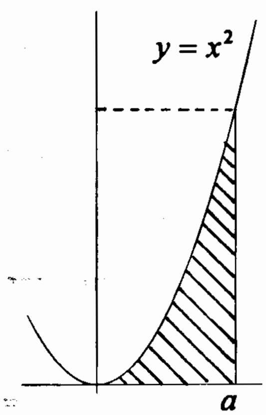


Fig. 6.8

Solución

La parábola $y = x^2$ está por encima del eje X (ver figura 6.8), de manera que el área que se busca puede calcularse por medio de la ecuación (6.19). Ahora bien, tenemos que $f(x) = x^2$, y una primitiva de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, así que,

$$A_0^a(f) = \int_0^a x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \tfrac{1}{3}a^3$$

Teorema del valor promedio

Si f es una función continua en $[a,b]$, tendremos entonces (ver figura 6.3) que:

$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f_{prom}[a,b]\ ,$$

de donde,

$$\boxed{f_{prom}[a,b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \tag{6.20}$$

Además, dado que f es continua en $[a,b]$, que el valor de $f_{prom}[a,b]$ está entre el mínimo y el máximo valor de f en el intervalo, y que éstos corresponden a valores de x en el mismo intervalo, entonces, por el teorema del valor intermedio, debe existir z en el intervalo, cuya imagen sea el valor promedio de la función en el mismo, es decir:

Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $z \in [a,b]$ tal que

$$\boxed{f(z) = f_{prom}[a,b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \tag{6.21}$$

Ejemplo 6.16

Calcular el valor promedio de la función senoidal en el intervalo $[0,\pi]$ (ver figura 6.9a).

Solución

Tenemos que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $[a,b] = [0,\pi]$. Además, una primitiva de f es $F(x) = -\cos x$, así que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\big|_0^a = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$.

El valor promedio es, entonces, $f_{prom}[0,\pi] = \frac{1}{\pi}(2) = \frac{2}{\pi}$

Además, si $f(z) = \operatorname{sen} z = 2/\pi$, entonces tenemos dos valores de z en el intervalo: $z_1 \cong 0.69$ y $z_2 \cong 2.45$ (ver figura 6.9b).

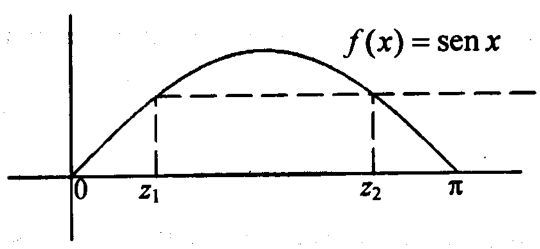


Fig. 6.9a

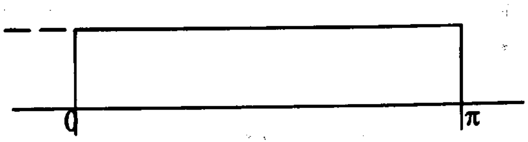


Fig. 6.9b

Para finalizar esta sección, nos remitiremos a la definición dada por (6.13). Para que la integral de una función en un intervalo dado quede definida, es condición suficiente que la función sea seccionalmente continua en el intervalo, es decir, que tenga un número finito de discontinuidades y que ninguna de éstas sea de tipo asintótico.

Consideraremos algunos casos particulares:

a) Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo.

Es claro que en este caso la integral proporciona el valor del área bajo la curva.

b) Si f es continua y $f(x) \leq 0$ en todo el intervalo.

En este caso, la integral proporciona el negativo del valor del área bajo la curva. Tómese en cuenta que la definición de "área bajo la curva" dada al principio de la sección no establece ninguna posición relativa entre la gráfica de la función y el eje X.

Lo anterior se debe a que la definición de valor promedio (o altura promedio) presenta un problema, y es que el valor promedio puede ser negativo, mientras que las alturas (así como las áreas) son magnitudes siempre positivas.

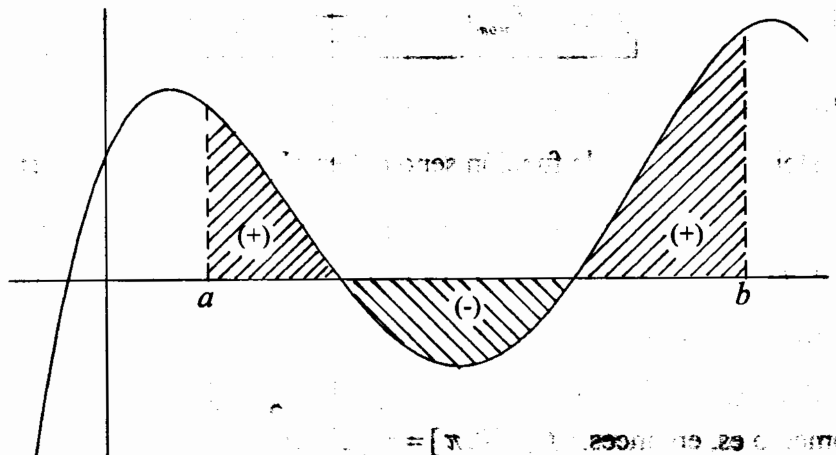


Fig. 6.10

c) Si f es continua y cambia de signo una o más veces en el intervalo.

En este caso, los términos de la suma que aparece en la ecuación (7.5), no tienen todos ellos el mismo signo. Los que corresponden a valores de x con imagen positiva, serán positivos, mientras que serán negativos, los que correspondan a valores de x con imagen negativa.

De esta manera (ver figura 6.10), las partes de la gráfica que se encuentren por encima del eje X contribuyen, en el valor total de la integral, con un valor positivo, mientras que las partes que se encuentren por debajo contribuyen con un valor negativo.

Por lo tanto, en este caso, la integral proporciona el valor de la diferencia entre las áreas de las partes situadas por encima del eje y las situadas por debajo.

d) Si la función es seccionalmente continua (ver figura 6.11), entonces el *área bajo la curva* será la suma de las áreas correspondientes a cada sección.

Es decir, si una función f presenta discontinuidades de salto o de hueco en $x = c_1$, $x = c_2$, ..., $x = c_n$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

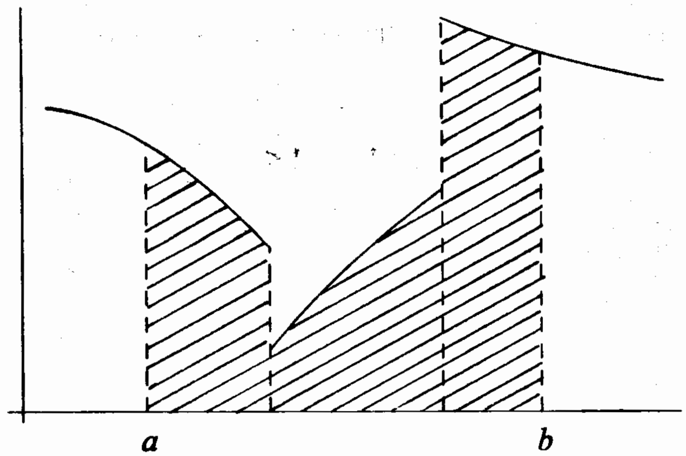


Fig. 611

Ejemplo 6.17

En el caso de una función como la definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 1$ (ver figura 6.12), y considerando el intervalo $[0,5]$, tenemos que algunas partes de la curva se encuentran por encima y otras por debajo del eje X.

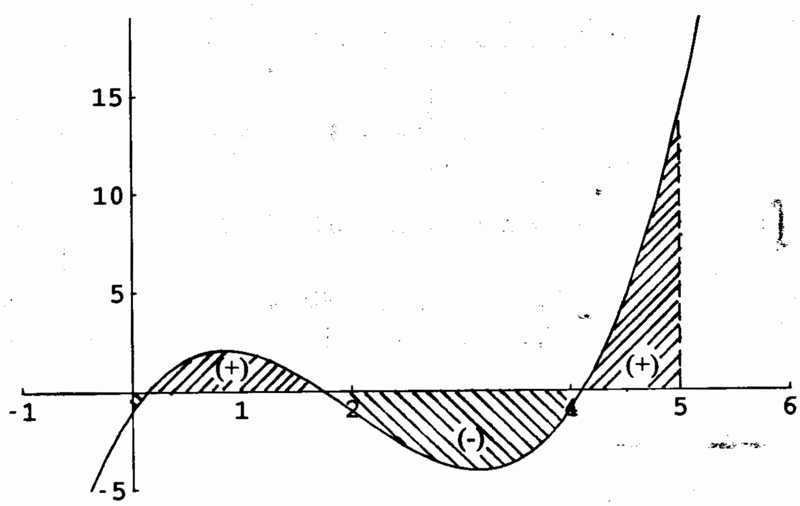


Fig. 6.12

Ahora bien, el valor de la integral de la función en el intervalo indicado es

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x^3 - 6x^2 + 8x - 1)\, dx = \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x \Big|_0^5$$

$$\int_0^5 f(x)dx = -4,$$

de manera que, en este caso, la suma de las áreas de las regiones que se encuentran por debajo del eje X es mayor que la suma de las que se encuentran por encima.

Ejemplo 6.18

Si f es la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 1 \leq x \leq e \end{cases}$

entonces (ver figura 7.12), tenemos que: $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$ y $\int_{0}^{1} f(x)dx = 2$

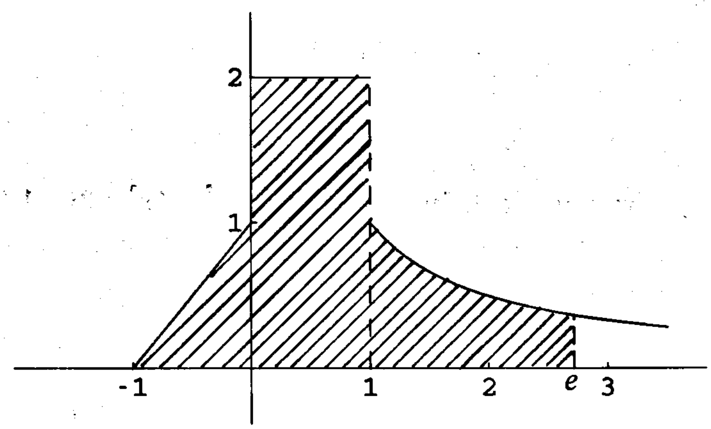


Fig. 6.13

Ahora, $$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1,$$

así que $$\int_{-1}^{e} f(x)dx = \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{7}{2} = 3.5$$

6.2 Ejercicios

Hallar el área de la región limitada por el eje X y las gráficas de las ecuaciones dadas

1. $y = x^3 + 3x^2 + 2x, \quad x = -3, \quad x = 3$

2. $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x = 1, \quad x = 4$

6.3 Cálculo de integrales definidas

Si se aplica el teorema fundamental del cálculo para obtener el valor de una integral definida, el problema se reduce al cálculo de una primitiva de la función integrando. Sin embargo, la integral definida puede calcularse utilizando algún método numérico.

En esta sección, los métodos para calcular primitivas permitirán obtener el valor de una integral definida. Además, veremos un método numérico, el del trapecio, por ser el más sencillo de aplicar.

Integrales elementales

Ejemplo 6.19

Calcular el área de la región sombreada en la figura 6.14

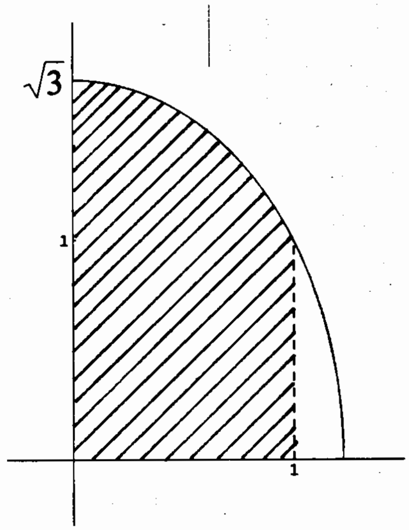


Fig. 6.14

Solución

Obsérvese que la región sombreada está situada sobre el eje X, bajo la semielipse superior, cuya ecuación es $y=\sqrt{3-2x^2}$, y entre las rectas $x=0$ y $x=1$, de manera que el área buscada es el *área bajo la curva* $y=\sqrt{3-2x^2}$, es decir,

$$\text{Área}\,(R)=\int_0^1\sqrt{3-2x^2}\;dx$$

ahora, consultando una tabla, encontramos que:

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\;du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a}+c$$

así que,

$$\text{Área }(R) = \int_0^1 \sqrt{3-2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2}\,\sqrt{2}dx$$

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{3-2x^2} + \frac{3}{2}\,\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\,\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \cong 1.513$$

Integrales de funciones racionales

Ejemplo 6.20

Calcular el valor promedio de la función con regla de correspondencia

$$y = \frac{x^3}{x^2+x-6},$$

en el intervalo [-2, 1]

Solución

De acuerdo con (6.21), el valor promedio de la función en el intervalo dado es

$$y_{prom} = \frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1} \frac{x^3}{x^2+x-6}dx$$

Ahora bien, el radicando es una función racional impropia, de manera que debe aplicarse el algoritmo de la división para expresarla como la suma de un polinomio y una función racional propia. Así pues, al hacer la división se obtiene que el cociente es $x-1$ y el residuo $7x-6$, de manera que

$$\frac{x^3}{x^2+x-6} = x-1+\frac{7x-6}{x^2+x-6} = x-1+\frac{7x-6}{(x+3)(x-2)}$$

Ahora hay que descomponer en fracciones parciales la expresión racional resultante. Así pues,

$$\frac{x^3}{x^2+x-6} = x-1+\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$

Procediendo como en el ejemplo 6.6, se obtiene que $A = 27/5$ y $B = 8/5$, así que

$$y_{prom} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}\left(x-1+\frac{27/5}{x+3}+\frac{8/5}{x-2}\right)dx$$

$$y_{prom} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 27/5\ln(x+3) + 8/5\ln(x-2)\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$y_{prom} = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} - 3 + \frac{27}{5}\ln 4 + \frac{8}{5}\ln\frac{1}{4}\right) \cong 0.256$$

Integración por partes

Considerando la derivada de un producto, tenemos:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

De donde

$$u\,dv = uv - v\,du$$

Así que, al integrar en el intervalo $[a,b]$, se obtiene

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du,$$

es decir,

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du} \qquad (6.22)$$

Ejemplo 6.21

Calcular $\int_1^3 x^3 \ln x\, dx$

Solución

Si $u = \ln x$ y $dv = x^3 dx$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{1}{4}x^4$, de manera que, de acuerdo con (6.22),

$$\int_1^3 x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^3 - \frac{1}{4}\int_1^3 x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4\right)\Bigg|_1^3$$

$$\int_1^3 x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^3 = \frac{1}{4}(81\ln 3) - \frac{1}{16}(81-1) \cong 17.247$$

Integración por cambio de variable

En la sección 6.1 se vio que, si se hace el cambio de variable

$$x = \phi(w),$$

entonces, la integral

$$\int f(x)\,dx$$

se transforma en

$$\int f[\phi(w)]dw = \int g(w)dw$$

Ahora, si la integral es definida, entonces, tomando en cuenta que los límites de integración indican el intervalo que recorre la variable de integración, éstos deberán ser sustituidos por los correspondientes valores de la nueva variable w. Es decir, sabiendo que $w = \phi^*(x)$, entonces, cuando $x = a$, el valor de w será $\phi^*(a)$, y cuando $x = b$, w valdrá $\phi^*(b)$, de manera que los límites de integración cambian según se indica en el siguiente esquema.

$$\boxed{\begin{array}{lcc}
\int_a^b f(x)dx & \xrightarrow{(1)} & I \\
\quad\downarrow & & \uparrow \\
x = \phi(w) & & \\
\quad\downarrow & & \uparrow \\
\int_{\phi^*(a)}^{\phi^*(b)} g(w)\,dw & \longrightarrow &
\end{array}}$$

Cambio de variable, integral definida

Ejemplo 6.22

Calcular $\displaystyle\int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Solución

El radical del radicando en el integrando sugiere la sustitución

$$w = \sqrt{x-1},$$

de manera que,

$$w^2 = x - 1, \qquad x = w^2 + 1, \qquad dx = 2w\,dw$$

Por otra parte, para los límites de integración, tenemos que

Cuando $x = 5$, $w = 2$, y cuando $x = 10$, $w = 3$. De manera que el valor de la integral es

$$\int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_2^3 \frac{(w^2+1)^2}{w}(2w\,dw) = 2\int_2^3 (w^2+1)^2\,dw$$

$$\int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\int_2^3 (w^4+2w^2+1)\,dw = 2\left[\frac{1}{5}w^5 + \frac{2}{3}w^3 + w\right]_2^3$$

$$\int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\left[\frac{1}{5}(3^5-2^5) + \frac{2}{3}(3^3-2^3) + (3-2)\right]_2^3 = \frac{2}{5}(243-32) + \frac{4}{3}(27-8) + 2$$

$$\int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{1676}{15}$$

Uso de series de potencias

Ejemplo 6.23

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

Solución

Antes de proceder al cálculo de la integral, obsérvese que se busca el área bajo la curva $y = (\operatorname{sen} x)/x$, en el intervalo $[0, 1]$, y hay que recordar que esta función tiene una discontinuidad de hueco en $x = 0$, que es el extremo izquierdo del intervalo de integración. Sin embargo, el área bajo un punto es la de un segmento de recta, es decir, cero, de manera que la existencia del hueco no altera el valor del área buscada. En la figura 6.15 también se puede observar que el área es ligeramente menor que la del cuadrado de lado 1, por lo cual el valor de la integral deberá ser ligeramente menor que 1.

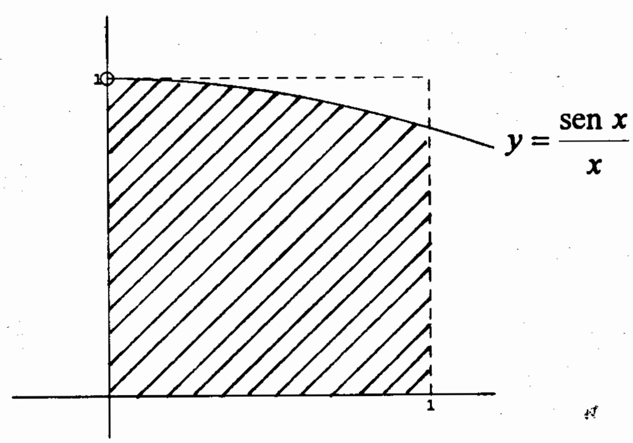


Fig. 6.15

Ahora bien, de acuerdo con el desarrollo dado por (4.10), tenemos que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$

que converge para todo número real, y por lo tanto, para todo elemento del intervalo de integración. Dividiendo tal serie por x obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots$$

por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots\right) dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{5\cdot 5!}x^5 - \frac{1}{7\cdot 7!}x^7 + \cdots\right)\Bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

Si consideramos los cuatro primeros términos, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \cong 1 - 0.055555 + 0.001667 - 0.000028 \cong 0.946084$$

Integración numérica: método del trapecio

Como se indicó al principio de la unidad, si una función es lineal, entonces su valor promedio, en cualquier intervalo, es la imagen del punto medio del mismo, lo cual equivale (ver figura 6.16a) a decir que el área bajo la curva es la del trapecio limitado por abajo, por el eje X; lateralmente, por las rectas $x = a$ y $x = b$; y por arriba, por el segmento que une los puntos de la curva definidos por los extremos del intervalo.

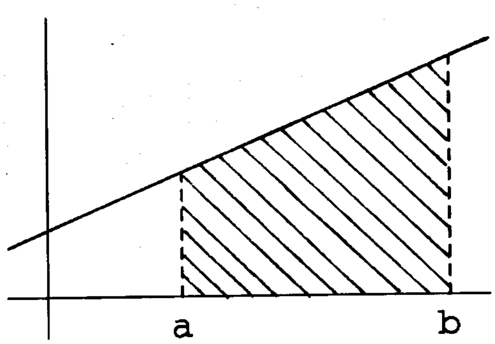


Fig. 6.16a

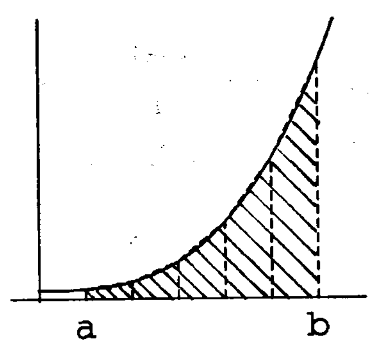


Fig. 6.16b

Si la función no es lineal, y si subdividimos el intervalo en pequeños subintervalos, entonces, cada una de las porciones de la curva que comprenden a tales subintervalos, parecerán segmentos rectilíneos, de manera que el área bajo la curva podrá aproximarse por medio del área bajo la poligonal (ver figura 6.16b).

Así pues, si el intervalo $[a,b]$ se divide en n intervalos, de la misma longitud, ésta estará dada por $h = \Delta x = (b-a)/n$, y las abscisas de los extremos de estos subintervalos, por:

$$x_i = i \cdot h = i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

De manera que el área bajo la poligonal será:

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \cdots + \frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2}h + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h$$

por lo tanto, el valor de la integral podrá aproximarse por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2[(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\right]} \tag{6.23}$$

Ejemplo 6.24

Vamos a estimar el valor de la integral del ejemplo 6.23, utilizando ahora el método del trapecio.

Así pues. si $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $a = 0$, $b = 1$, y si n es, digamos 4, tenemos entonces, que

$$f(x_0) = f(0) = 1, \qquad f(x_1) = f(0.25) = \frac{\operatorname{sen} 0.25}{0.25} \cong 0.989616,$$

$$f(x_2) = f(0.5)\frac{\operatorname{sen} 0.5}{0.5} \cong 0.958851, \quad f(x_3) = f(0.75) = \frac{\operatorname{sen} 0.75}{0.75} \cong 0.908852,$$

$$f(x_4) = f(1) = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} \cong 0.841471,$$

así que, al sustituir en (6.23), se obtiene

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \cong \frac{0.25}{2}[1 + 2(0.989616 + 0.958851 + 0.908851) + 0.841471]$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \cong 0.944514$$

Ejemplo 6.25

Estimar el valor de $\int_1^3 \frac{2^x}{x}\,dx$

Solución

Tenemos que $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$, $a = 1$ y $b = 3$.

Proponiendo $n = 8$, se tiene que $h = \dfrac{3-1}{8} = 0.25$,

así que $f(x_0) = f(1) = \dfrac{2^1}{1} = 2$, $f(x_1) = f(1.25) = \dfrac{2^{1.25}}{1.25} \cong 1.902731$,

$f(x_2) = f(1.5) \cong 1.885618$, $f(x_3) = f(1.75) \cong 1.922049$,

$f(x_4) = f(2) = 2$, $f(x_5) = f(2.25) \cong 2.114146$,

$f(x_6) = f(2.5) \cong 2.262742$, $f(x_7) = f(2.75) \cong 2.446244$,

y $f(x_8) = f(3) \cong 2.666667$.

Por lo tanto, al sustituir en (6.23) se obtiene:

$$\int_1^3 \frac{2^x}{x}\,dx \cong \frac{0.25}{2}\big[2 + 2(1.902731 + 1.885618 + 1.922049 + 2 + 2.114146 +$$

$$2.262742 + 2.446244) + 2.666667\big] \cong 4.216716$$

Uso de tablas calculadora y software especializado

En realidad no se requiere ser un experto en los métodos de integración, aunque es importante conocer cada uno de los métodos antes descritos. En la actividad profesional podemos recurrir a tablas de integrales, calculadoras, o bien, paquetes de computación diseñados para el cálculo numérico (para integrales definidas), e incluso simbólico (para integrales indefinidas).

Integrales impropias

Como se ha visto, si una función es continua por secciones en un intervalo, la integral de ésta en el intervalo es una área, el negativo de una área o la diferencia entre sumas de áreas. Cuando la función presenta una discontinuidad de tipo asintótico en uno de los extremos del intervalo, o en uno de sus puntos intermedios, se puede pensar que el área resultante es, necesariamente, infinitamente grande, sin embargo, no ocurre así en todos los casos.

Consideraremos dos situaciones, la primera (figura 6.17a) en que la función tiene una discontinuidad de tipo asintótico en un punto del intervalo, y la segunda (figura 6.17b) en que la función tiene como asíntota al eje X (o una recta paralela a este eje), y uno de los extremos del intervalo de integración es ∞ o $-\infty$.

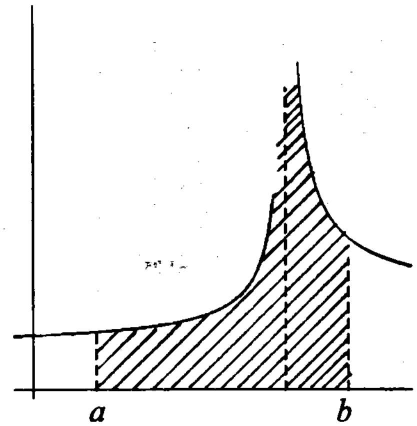


Fig. 6.17a

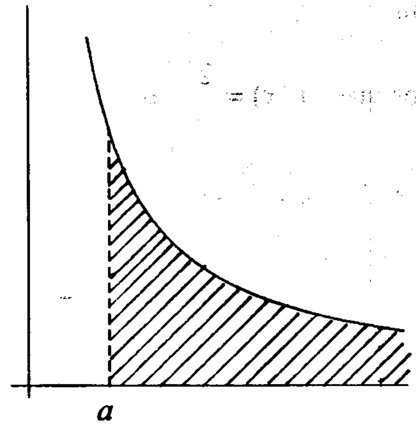


Fig. 6.17b

El problemas es, entonces, determinar si el área de la región sombreada es infinitamente grande o finita, en cuyo caso se buscará calcular el valor correspondiente. En cualquiera de estos casos, diremos que se tiene una *integral impropia* y que ésta *converge* cuando su valor no sea infinitamente grande; en caso contrario, *diverge*.

Ejemplo 6.26

Indicar si la integral dada es infinitamente grande. En caso contrario, calcular su valor.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

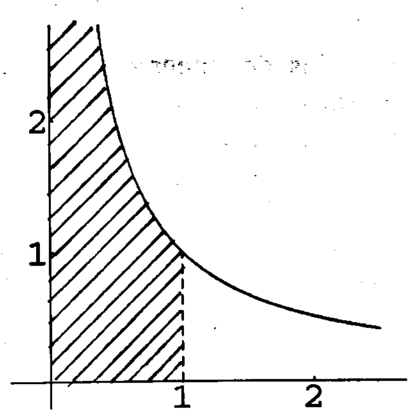


Fig. 6.18a

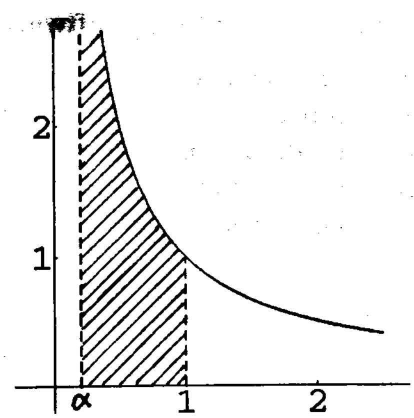


Fig. 6.18b

Solución

I es el área bajo la hipérbola $y = 1/x$, entre $x = 0$ y $x = 1$, la cual tiene una asíntota en $x = 0$, que es el extremo izquierdo del intervalo (figura 6.18a). Si en lugar del intervalo $[0, 1]$ usamos el intervalo $[\alpha, 1]$, con α infinitesimal positivo, estaremos excluyendo el área correspondiente al intervalo $[0, \alpha]$ (figura 6.18b).

Si esta área es infinitesimal, entonces la integral en el intervalo $[\alpha, 1]$ será la buscada. Si en cambio, es finita o infinitamente grande, entonces, el área total será también infinitamente grande, y la integral dada divergirá.

Así pues, dado que lo que interesa es el caso en que la integral converge, entonces calculamos la integral en el intervalo $[\alpha, 1]$, despreciando infinitesimales en el resultado.

De esta manera,

$$I = \int_\alpha^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_\alpha^1 = \ln 1 - \ln \alpha = -\ln \alpha$$

que es un número infinitamente grande y positivo, por lo tanto la integral dada diverge.

Ejemplo 6.27

Igual que en el ejemplo anterior, pero ahora con $I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$.

Solución

En este caso consideraremos la integral en el intervalo $[1, N]$ con N infinitamente grande, así pues,

$$I = \int_1^N \frac{1}{x^2\, dx} = -\frac{1}{x}\Big|_1^N = -\frac{1}{N} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 + \text{ infinitesimal}$$

entonces: $I = \int \frac{1}{x^2} dx = 1$

Ejemplo 6.28

Igual que en los casos anteriores, pero ahora con $I = \int_0^4 \frac{1}{(2x-3)^{2/3}} dx$.

Solución

La función del integrando (ver figura 6.19), tiene una asíntota en $x = 3/2$, así que consideraremos por separado las integrales:

$$I_1 = \int_0^{3/2} \frac{1}{(2x-3)^{2/3}} dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{3/2}^4 \frac{1}{(2x-3)^{2/3}} dx$$

Tenemos entonces,

$$I_1 = \int_0^{3/2} \frac{1}{(2x-3)^{2/3}}\,dx = \int_0^{3/2-\alpha} \frac{1}{(2x-3)^{2/3}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{3/2-\alpha} (2x-3)^{-2/3}\,(2dx) =$$

$$I_1 = \frac{3}{2}(2x-3)^{1/3}\Big|_0^{3/2-\alpha} = \frac{3}{2}[(-2\alpha)^{1/3} - (-3)^{1/3}] \stackrel{c}{=} \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cong 2.163$$

e $$I_2 = \int_{3/2}^{4} \frac{1}{(2x-3)^{2/3}}\,dx = \int_{3/2+\alpha}^{4} \frac{1}{(2x-3)^{2/3}}\,dx = \frac{3}{2}(2x-3)^{1/3}\Big|_{3/2+\alpha}^{4}$$

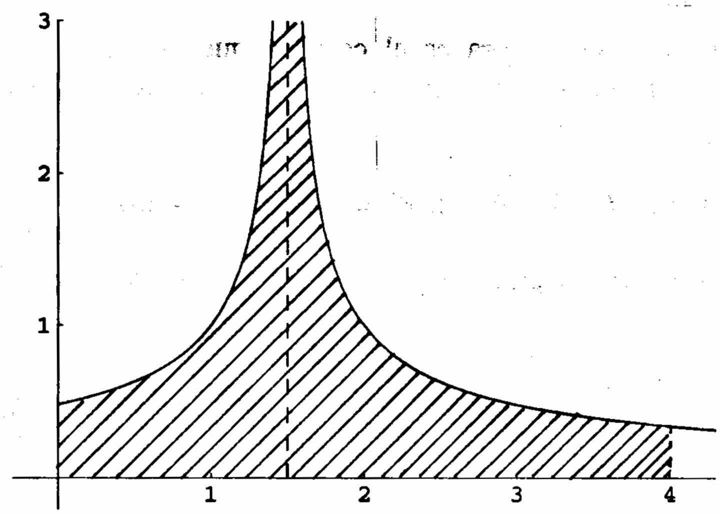


Fig. 6.19

6.3 Ejercicios

Calcular cada una de las integrales dadas

1. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

2. $\int_0^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. $\int_0^{1} \frac{2x+5}{x^2+3x+2}\,dx$

4. $\int_3^{4} \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

5. $\int_0^{\pi/2} x\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

Estimar numéricamente cada una de las integrales siguientes, mediante la regla del trapecio, utilizando el número de subintervalos dado.

6. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}\quad n=4$

7. $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\qquad n=8$

8. $\int_0^1 \frac{\cos x-1}{x}\,dx\qquad n=5$

Calcular cada una de las integrales dadas

9. $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

10. $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}}$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+2z+2}$

7. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

La integral es un concepto sumamente importante en la física y en las ciencias de la ingeniería. Para terminar este libro, dedicado al estudio del cálculo diferencial e integral para funciones en una variable, veremos algunas aplicaciones de la integral en la geometría y en la física.

7.1 Aplicaciones geométricas

En la sección 6.2 se vio que la integral de una función, en un intervalo dado, es el área bajo la curva, el negativo de la misma, o una diferencia de áreas. Vamos a considerar nuevamente, ahora con un poco más de detalle, el cálculo del "área bajo la curva".

Área bajo la curva: identificación de la contribución elemental

Recordemos, primeramente, que, si en todo un intervalo $[a,b]$, entonces el *área bajo f en* $[a,b]$ —es decir, el área de la región comprendida entre las gráficas de $y=0$ (eje X), $y=f(x)$, $x=a$ y $x=b$— puede *aproximarse* por medio de

$$A_a^b(f) \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i{*})\Delta x \tag{7.1}$$

con $\Delta x=(b-a)/n$ y $x_i=a+i\Delta x$, y donde $x_i{*}$ es cualquier elemento del subintervalo $[x_{i-1},x_i]$. Esta aproximación es mejor en cuanto más grande sea *n*, y, por lo tanto, en cuanto más pequeño sea Δx.

Ahora bien, la suma de la derecha en la ecuación (7.1) es la suma de las áreas de los *n* rectángulos con base Δx (longitud de cada subintervalo), y altura $f(x_i{*})$.

Llamaremos *contribución elemental* del área a la de cada uno de estos rectángulos, y la denotaremos por ΔA_i, es decir,

$$\Delta A_i = f(x_i{*})\Delta x \tag{7.2}$$

Así pues, tenemos que si *n* es "grande", entonces

$$A_a^b(f) \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \tag{7.3}$$

Si $n=N$ es infinitamente grande, y por lo tanto, $\Delta x = dx$ es infinitesimal, entonces, la suma dará el valor exacto del área, es decir:

$$A_a^b(f) = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} f(x_i{*})dx \tag{7.4}$$

Lo anterior resume un procedimiento mediante el cual una magnitud —el área, en este caso— se calcula como la suma de una infinidad de términos infinitesimales (contribuciones elementales), cada una de las cuales forma parte de aquello que se desea calcular.

Este procedimiento funciona muy bien, siempre que la suma de las partes que despreciamos siga siendo despreciable, es decir, que la parte que no se toma en cuenta sea infinitamente pequeña respecto de la contribución elemental. En adelante asumiremos que la continuidad de la función, en el intervalo de interés, es una condición suficiente para que esto ocurra.

Ahora bien, sabemos que, entre dos números reales cualesquiera, tenemos un número infinitamente grande de números reales, así que, en el caso del área bajo la curva, podemos proponer, como contribución elemental (ver figura 7.1), el área del rectángulo con base dx (infinitesimal) y altura $f(x)$ (la imagen del extremo izquierdo del intervalo), para cada x en el intervalo de integración. De esta manera,

$$\sum f(x)\,dx \tag{7.5}$$

será una suma de un número infinitamente grande (tenemos tantos términos como números reales en el intervalo) de cantidades infinitesimales, ya que $f(x)$ es real, pero dx es infinitesimal.

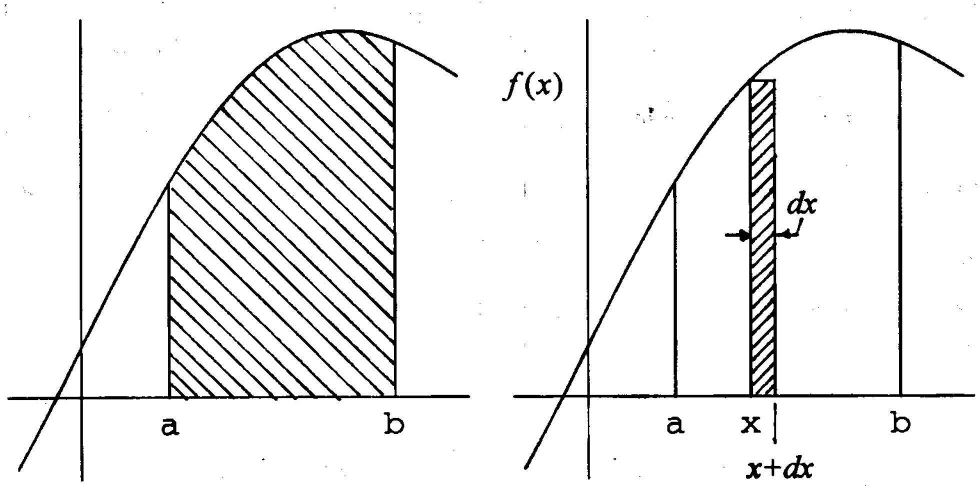


Fig. 7.1

Como la variación de una función continua, correspondiente a una variación infinitesimal de la variable, es también infinitesimal (o nula), entonces, la parte del área bajo la curva que no se toma en cuenta en cada uno de los subintervalos es un infinitesimal de segundo orden, y por lo tanto, despreciable respecto de la parte que sí se toma en cuenta.

Tenemos por otra parte que, debido a lo visto en la sección 6.2, la suma dada en (7.5) es la integral de f entre a y b, es decir,

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.6}$$

Finalmente, observando que en esta ecuación el integrando es la contribución elemental dada por (7.5), podemos concluir que el área bajo f entre a y b puede calcularse como sigue:

1) Cada $x \in [a,b]$ define un intervalo $[x, x+dx]$. La contribución elemental del área, correspondiente a este intervalo, se propone[2] entonces como

$$dA = f(x)\,dx$$

2) Al sumar todas estas contribuciones elementales, es decir al integrar, obtenemos el valor buscado:

$$A_a^b(f) = \sum dA = \sum f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Resumiendo:

La contribución elemental del área A es $$dA = f(x)\,dx,$$ y el valor de A, es decir, la suma de las contribuciones elementales es $$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Áreas de regiones planas: coordenadas rectangulares

Vamos a utilizar el procedimiento antes descrito para el cálculo de áreas de regiones planas.

Área de una región del tipo I

Si R es una región plana, comprendida entre dos rectas paralelas al eje Y, y dos relaciones funcionales con x como variable independiente, diremos que R es una región del tipo I.

Es decir, una región definida mediante

$$R = \{(x,y) | a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le g(x)\},$$

donde a y b son constantes y f y g dos funciones, es una región del tipo I (ver figura 7.2).

En este caso, para cada $x \in [a,b]$ proponemos la contribución elemental del área mediante

$$dA = [g(x) - f(x)]\,dx$$

De manera que

$$\boxed{A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx} \tag{7.7}$$

[2] Recuérdese que la función definida por $A(x) = A_a^x(f) = \int_a^x f(x)\,dx$, es una función tal que $A'(x) = f(x)$, de manera que $dA(x,dx) = A'(x)\,dx = f(x)dx$, o bien, $dA(x) = f(x)\,dx$, lo cual coincide con la propuesta.

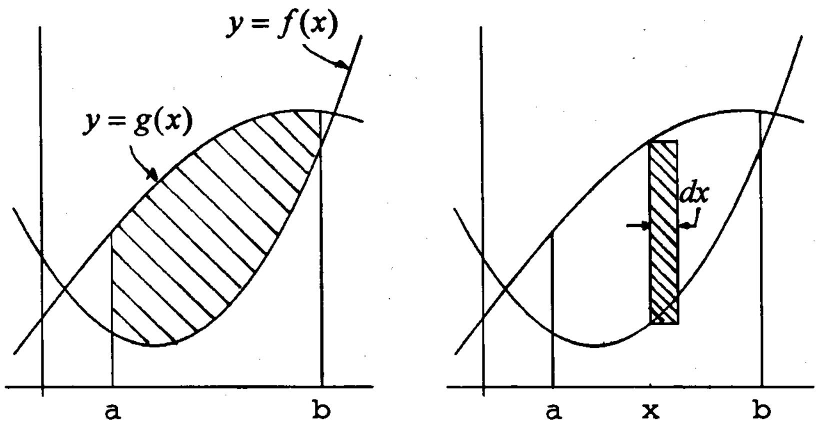


Fig. 7.2

Ejemplo 7.1

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de $y = x^3$ y $y^2 - x = 0$.

Solución

Primeramente determinamos los puntos de intersección de las gráficas (ver figura 7.3), para lo cual debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Así pues, si sustituimos lo indicado por la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$\left(x^3\right)^2 = x, \quad x^6 = x, \quad x^6 - x = 0, \quad x(x^5 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

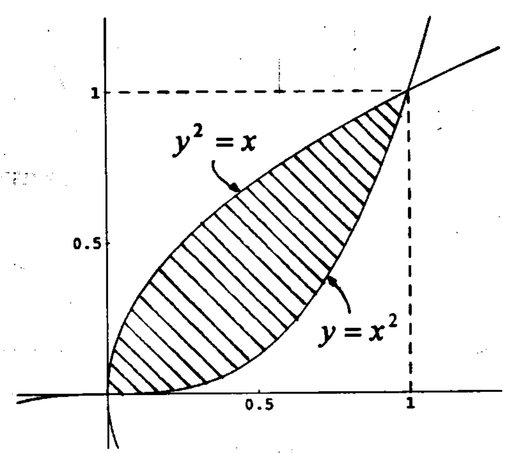


Fig. 7.3

De donde resulta que dos de las raíces, que corresponden a las abscisas de los puntos de intersección, son $x = 0$ y $x = 1$.

La figura 7.3 sugiere que no hay más raíces reales, como puede verificarse recurriendo a la teoría de ecuaciones.

Entonces la región de interés puede describirse mediante:

$$R = \{(x,y) | 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x^{1/2}\},$$

así que:

$$A(R) = \int_0^1 [x^{1/2} - x^3] dx = \tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{12}$$

Área de una región del tipo II

Si R es una región plana, comprendida entre dos rectas paralelas al eje X y dos relaciones funcionales, con y como variable independiente, diremos que R es una región del tipo II. Es decir, una región definida mediante

$$R = \{(x,y) | a \le x \le b,\quad f(x) \le y \le g(x)\},$$

donde a y b son constantes y f y g dos funciones, es una región del tipo I (ver figura 7.2).

Ahora proponemos, para cada $x \in [a,b]$, la contribución elemental del área mediante

$$dA = [\gamma(y) - \phi(y)]\, dy$$

y por lo tanto

$$\boxed{A = \int_c^d [\gamma(y) - \phi(y)]\, dy} \qquad (7.8)$$

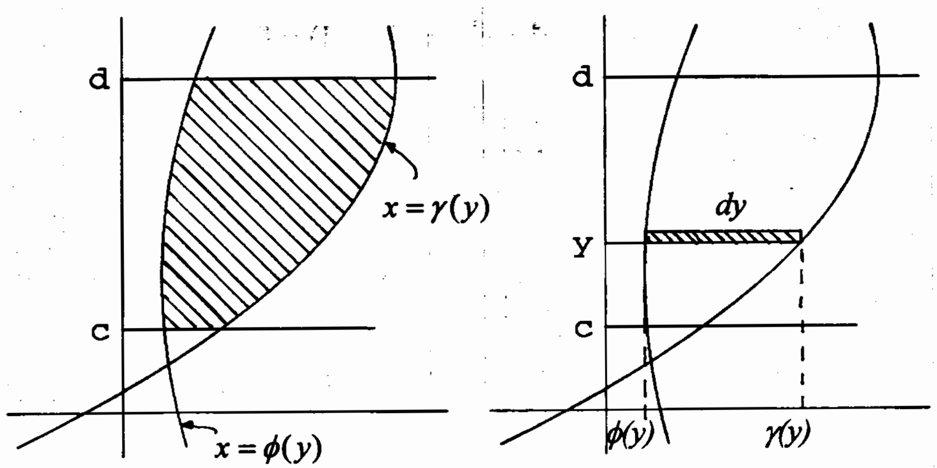


Fig. 7.4

Ejemplo 7.2

Resolver el ejemplo 7.1, identificando ahora a R como una región del tipo II.

Solución

Si ahora vemos a R, como una región comprendida entre paralelas al eje Y, tenemos:

$$R = \{(x,y) | 0 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le y^{1/3}\}$$

entonces, de acuerdo con (7.8),

$$A(R) = \int_0^1 [y^{1/3} - y^2]dy = \tfrac{3}{4}y^{4/3} - \tfrac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12}$$

En los casos de mayor interés para las Ciencias de la Ingeniería, una región plana que no pueda identificarse ni como del tipo I ni como del tipo II, podrá ser identificada como la unión de dos o más regiones, cada una de las cuales sea del tipo I o del tipo II, de manera que su área podrá calcularse como la suma de las áreas de cada una de esas partes.

Áreas de regiones planas: coordenadas polares

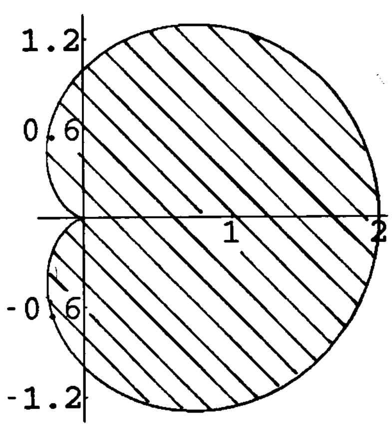
Abordaremos el problema considerando un caso particular:

Ejemplo 7.3

Calcular el área encerrada por la cardioide $r = 1 + \cos\theta$

Solución

La gráfica de la cardioide dada se muestra en la figura 7.5



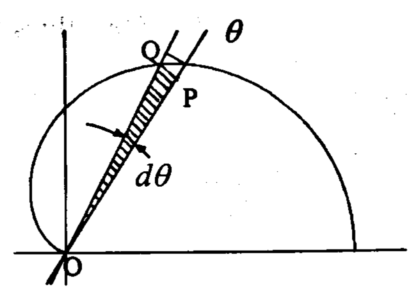


Fig. 7.5

Observemos que la curva es simétrica respecto del eje polar, de manera que será suficiente con calcular el área encerrada por la mitad superior.

Proponemos ahora, como contribución elemental del área, la del sector circular OPQO, es decir

$$\boxed{dA = \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta}, \tag{7.9}$$

$$dA = \frac{1}{2}[1+\cos\theta]^2 d\theta,$$

donde θ es un ángulo (en radianes), que varía de 0 a π.

Como vamos a integrar esta expresión, conviene transformarla como sigue:

$$dA = \frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \left(\frac{3}{4}+\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)d\theta$$

así que, al sumar las contribuciones elementales, obtenemos:

$$A = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}+\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)d\theta = 2\left(\frac{3}{4}\theta+\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{8}\operatorname{sen}2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$A = \frac{3}{2}\pi$$

Área de una región plana (coordenadas polares)

Consideremos, ahora, una región plana R comprendida entre los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$ (con a y b en radianes), y las gráficas de dos relaciones funcionales de la forma $r = g(\theta)$ (ver figura 7.6), es decir,

$$R = \{(r,\theta) | a \le \theta \le b, \quad g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

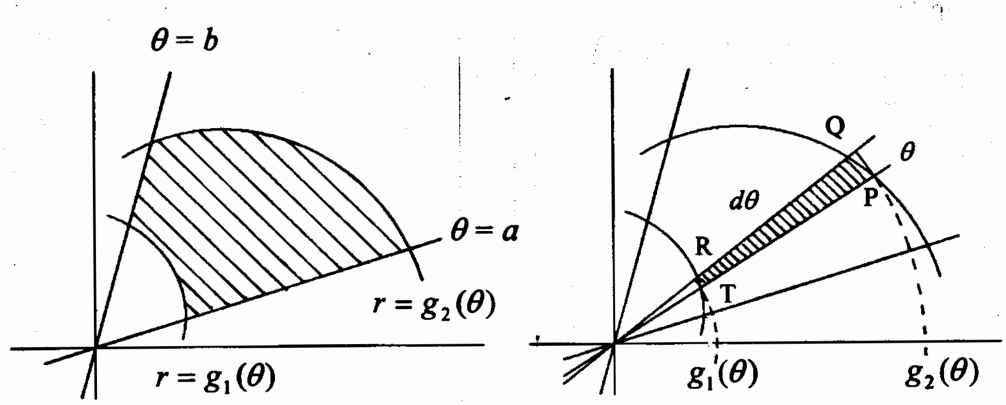


Fig. 7.6

Entonces, podemos proponer como contribución elemental, el área del sector QRTP, cuyo valor es

$$dA = \frac{1}{2}[g_2(\theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2}[g_1(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\left([g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2\right)d\theta,$$

así que

$$\boxed{A = \int dA = \frac{1}{2}\int_a^b\left([g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2\right)d\theta} \tag{7.10}$$

Longitud de arco

Supóngase que deseamos calcular la longitud del arco de la curva *C*, definido por $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ (figura 7.7a), al que denotaremos por $L_a^b(f)$.

Para cada $x \in [a,b]$, definimos la contribución elemental, como la longitud del arco infinitesimal comprendido entre los puntos $P = (x, f(x))$ y $Q = (x+dx, f(x+dx))$ (figura 7.7b).

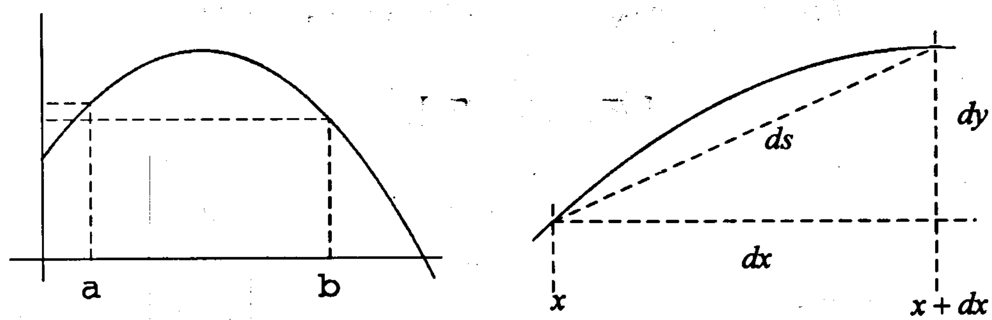


Fig. 7.7

Como estamos considerando un intervalo infinitesimal, podemos ignorar la curvatura, de manera que la contribución elemental será

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Dividiendo y multiplicando cada término en el radicando, por dx^2,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\,dx$$

Así pues,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

de manera que la longitud de arco buscada es

$$\boxed{L_a^b = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx} \tag{7.11}$$

Ejemplo 7.4

Calcular la longitud del arco de una parábola, comprendido entre el vértice y uno de los extremos de su lado recto.

Solución

Consideremos la parábola definida por $x^2 = 4pyx^2$, es decir, por $y = (1/4p)\,x^2$ (figura 7.8), entonces $y' = (1/2p)\,x$, así que, de acuerdo con (7.11), tenemos que:

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{2p} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2p}x\right)^2} = \int_0^{2p} \frac{1}{2p}\sqrt{(2p)^2+x^2}\,dx$$

$$L_0^p(f) = \frac{1}{2p}\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4p^2} + 4p^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2+4p^2}\,\right|\right)_0^{2p}$$

$$L = \left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]p \cong 2.296\,p$$

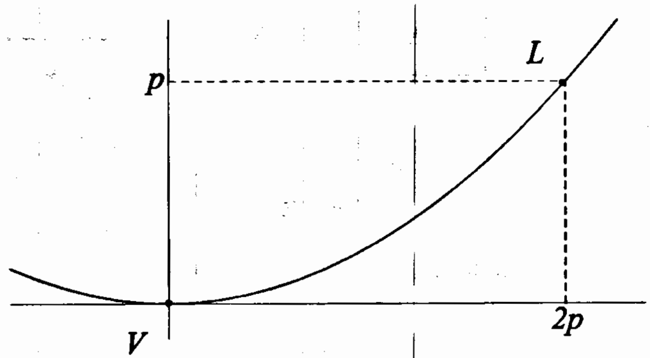


Fig. 7.8

Volumen de sólidos de revolución

Supóngase que se genera un sólido, mediante la rotación de una curva plana alrededor de una recta contenida en tal plano, por ejemplo, supongamos que la curva es la porción de la gráfica de la función definida por $y = f(x)$, entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (ver figura 7.9), y que el plano XY se gira con respecto al eje X, generando entonces un sólido de revolución.

Para calcular el volumen del sólido así generado podemos elegir, como contribución elemental, el volumen del disco cilíndrico con radio $f(x)$, para cada x en el intervalo $[a,b]$, y espesor infinitesimal *dy*, de manera que el valor de esa contribución elemental será

$$dV = \pi y^2 dx = \pi[f(x)]^2 dx,$$

de donde

$$\boxed{V = \int dV = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx} \tag{7.12}$$

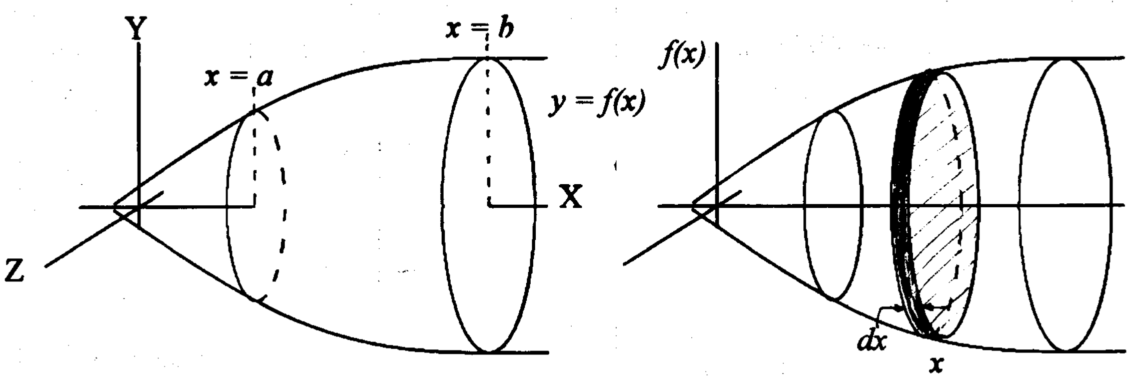


Fig. 7.9

Ejemplo 7.5

Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar el arco de la senoidal $y = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x$ comprendido entre los puntos (0, 0) y (π, 0) (ver figura 7.10).

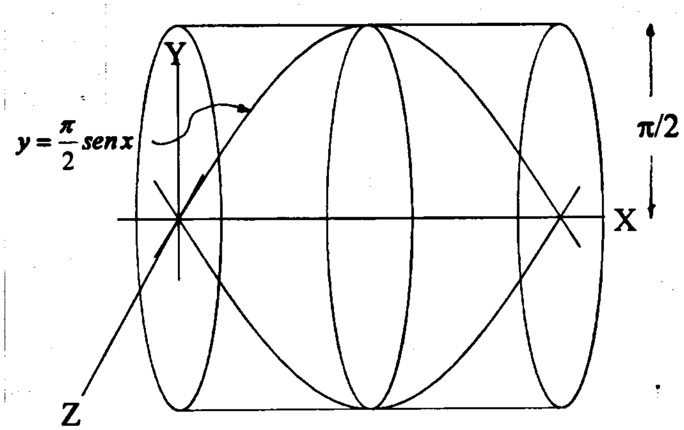


Fig. 7.10

Solución

Sustituyendo en (7.11), tenemos que el volumen buscado es

$$V=\pi\int_0^\pi\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x\right]^2dx=\frac{\pi^3}{4}\int_0^\pi\operatorname{sen}^2x\,dx=\frac{\pi^4}{8}$$

Obsérvese que, de acuerdo con este resultado, el sólido ocupa exactamente la mitad del volumen del cilindro en el que está inscrito, cuyo valor es $\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi^4}{4}$.

Ejemplo 7.6

Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar la región plana comprendida entre las gráficas de $y=x^5+x+1$, $x=0$, $x=1$ y $y=0$, alrededor del eje Y (ver figura 7.11).

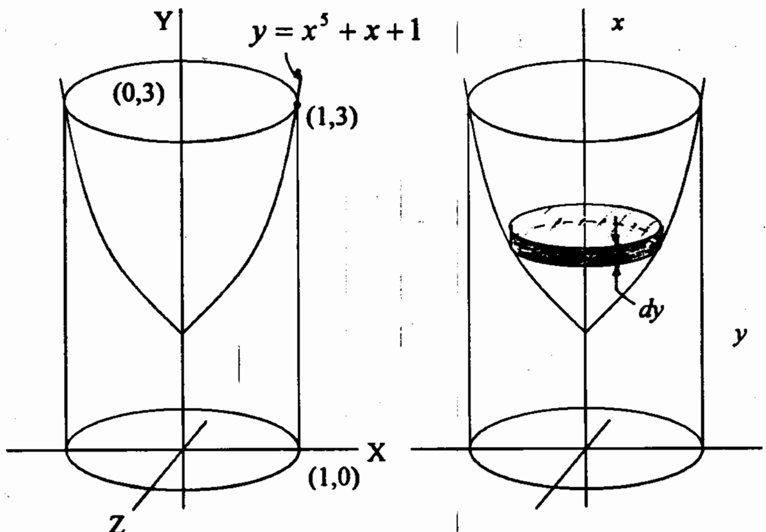


Fig. 7.11

Solución

En este caso podemos calcular el volumen como la diferencia entre el volumen del cilindro en el que está inscrito el sólido, y el del sólido que se obtiene al girar la región comprendida entre las gráficas de $y=x^5+x+1$, $x=0$ y $y=3$, alrededor del eje Y, el cual se puede calcular como en el ejemplo anterior.

Tenemos pues que el volumen del cilindro es

$$V_{cil}=\pi(1)^2(3)=3\pi$$

Ahora bien, para calcular el volumen que se va a restar, al cual denotaremos por V_{hueco}, tenemos que

$$dV=\pi x^2dy,$$

así que

$$V_{hueco} = \pi \int_1^3 x^2 dy$$

Como no podemos despejar x de la ecuación de la curva, para calcular esta última integral, hacemos un cambio de variable, el cual está dado por la misma ecuación de la curva:

$$y = x^5 + x + 1, \quad dy = (5x^4 + 1)dx,$$

de manera que cuando $y = 1$, entonces $x = 0$, y cuando $y = 3$, tenemos que $x = 1$, así que

$$V_{hueco} = \pi \int_0^1 x^2(5x^4 + 1)dx = \pi\left(\frac{5}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3\right)_0^1 = \frac{22}{21}\pi$$

Por lo tanto, el valor del volumen buscado es

$$V = V_{cil} - V_{hueco} = 3\pi - \frac{22}{21}\pi = \frac{41}{21}\pi$$

Veamos ahora otro método:

En lugar de la contribución elemental en forma de disco, consideraremos ahora una en forma de cilindro hueco, tal y como se muestra en la figura 7.12.

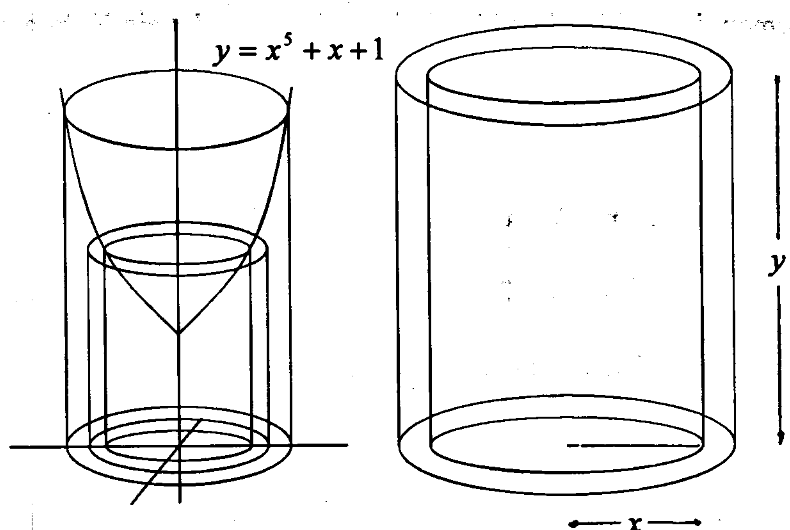


Fig. 7.12

En este caso, el valor de la contribución elemental es

$$dV = \pi(x + dx)^2 y - \pi x^2 y = \pi(x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 - x^2)y$$

de donde, al despreciar infinitesimales de orden 2, tenemos que

$$\boxed{dV = 2\pi xy\,dx} \tag{7.13}$$

Así pues,

$$V = 2\pi \int_0^1 xy\,dx = 2\pi \int_0^1 x(x^5 + x + 1)\,dx = 2\pi \left(\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right)_0^1$$

$$V = \frac{41}{21}\pi$$

7.1 Ejercicios

1. Hallar el área de la región limitada por la circunferencia $r = a\cos\theta$ y las semirectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi/3$.

2. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de $r = \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$.

3. Hallar el área de la región interior a las gráficas de $r = 3\cos\theta$ y $r = 1 + \cos\theta$.

Hallar el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje X, la región encerrada por las gráficas de las ecuaciones dadas

4. $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$.

5. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.

6. $(x-1)y = 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$.

Hallar el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje Y, la región encerrada por las gráficas de las ecuaciones dadas

7. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

8. $x^2 + 4y^2 = 4$.

9. $y^2 = 9 - x$, $x = 0$.

10. Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y^3 = x^2$, comprendida entre los puntos (0, 0) y (8, 4).

11. Estimar la longitud del arco de la curva $3y = x^3$, desde el origen hasta el punto $(1, 1/3)$.

12. Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

13. Sin calcular ninguna integral, hallar el valor promedio de $x(t)$ en el intervalo [0, 2] si $x(t) = \sqrt{4 - t^2}$.

ANEXOS

A

Números reales

(Propiedades)

A continuación se da una lista de las propiedades del conjunto de los números reales que más se utilizan. Las propiedades de campo indican la manera de hacer operaciones con estos números reales, mientras que las de igualdad se utilizan, generalmente, cuando se resuelven ecuaciones. Tanto las de campo como las de igualdad son válidas también en el conjunto de los números complejos.

Las propiedades relativas a la relación de orden y las de cuadrados y valor absoluto[1] sólo son válidas para los números reales, y se utilizan, principalmente, en la solución de desigualdades.

A) *Propiedades de campo*

$A_1 \quad \forall\, a, b \in \Re, \quad a+b \in \Re$

$A_2 \quad \forall\, a, b \in \Re, \quad a \cdot b \in \Re$

$A_3 \quad \forall\, a, b \in \Re, \quad a+b = b+a$

$A_4 \quad \forall\, a, b \in \Re, \quad a \cdot b = b \cdot a$

$A_5 \quad \forall\, a, b, c \in \Re, \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

$A_6 \quad \forall\, a, b, c \in \Re, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$A_7 \quad \exists\, 0 \in \Re \,\middle|\, \forall a \in \Re, \quad a+0 = a$

$A_8 \quad \exists\, 1 \in \Re \,\middle|\, \forall a \in \Re, \quad a \cdot 1 = a$

[1] La propiedades D1 y D3 resultan válidas para números complejos, siempre que el signo de valor absoluto sea sustituido por el de módulo, sin embargo, en este libro interesan sólo las variables reales.

A_9 $\forall a \in \Re \, \exists -a \in \Re \mid a+(-a)=0$

A_{10} $\forall a \in \Re, a \neq 0, \exists\, a^{-1} \in \Re \mid a \cdot a^{-1} = 1$

A_{11} $\forall\, a,b,c \in \Re, \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

B) *Propiedades de la igualdad*

B_1 $\forall a \in \Re, \quad a = a$

B_2 $\forall a,b \in \Re, \quad a = b \Rightarrow b = a$

B_3 $\forall a,b,c \in \Re, \quad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

B_4 $\forall a,b,c \in \Re, \quad a = b \Rightarrow a + c = b + c$

B_5 $\forall a,b,c \in \Re, \quad a = b \Rightarrow a\cdot c = b \cdot c$

C) *Relación de orden*

C_1 $\forall\, a,b \in \Re, \quad a < b \Rightarrow b > a$

C_2 $\forall\, a,b,c \in \Re, \quad a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

C_3 $\forall\, a,b,c \in \Re, \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$

C_4 $\forall\, a,b,c \in \Re, c > 0 \quad a < b \Rightarrow a\cdot c < b \cdot c$

C_5 $\forall\, a,b,c \in \Re, c < 0 \quad a < b \Rightarrow a\cdot c > b \cdot c$

D) *Cuadrados y valor absoluto*

D_1 $\forall\, a,x \in \Re, \quad x = a \Rightarrow x^2 = a^2 \wedge |x| = |a|$

D_2 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a\cdot x > 0, \quad x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$

D_3 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a\cdot x > 0, \quad |x| = |a| \Rightarrow x = a$

D_4 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a > 0, \quad x^2 < a \Rightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

D_5 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a > 0, \quad x^2 > a \Rightarrow x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a}$

D_6 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a > 0, \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$

D_7 $\forall\, a,x \in \Re, \quad a > 0, \quad |x| > a \Rightarrow x < -a \vee x > a$

B

Funciones reales

En este anexo se incluyen los conceptos relativos a las funciones reales que más se utilizan en el texto. Sólo se agregan ejemplos o detalles en los casos en que sea difícil encontrarlos en los textos convencionales.

RELACIONES Y FUNCIONES

Producto cartesiano

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, el *producto cartesiano* de A y B (en este orden), denotado por $A \times B$ ("A cruz B"), es el conjunto de pares ordenados (a,b), tales que $a \in A$ y $b \in B$; es decir:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

En particular, $\Re \times \Re = \Re^2$ representará al conjunto de pares ordenados de números reales; como un par ordenado de reales puede representarse por un punto en un plano, entonces, $\Re^2$ quedará representado, gráficamente, por el conjunto de todos los puntos de un plano.

Relación

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, una *relación* de A en B (en ese orden) es un subconjunto cualquiera de $A \times B$.

Si (a,b) es elemento de una relación R, se dice que "a está relacionado con b", lo que se escribirá $a\,R\,b$.

Se llama *dominio* de una relación al conjunto de sus primeros elementos, y *rango*, al conjunto de sus segundos elementos.

Relación real

Una relación de $\Re$ en $\Re$ es llamada *relación real*. Así pues, una relación real es subconjunto de $\Re^2$ y podrá representarse, por lo tanto, por un conjunto de puntos del plano.

Relaciones reales definidas por ecuaciones

Considerando una ecuación en dos variables, cada una de sus soluciones reales son pares ordenados de números reales, así que el conjunto de soluciones reales de una ecuación en dos variables es una relación real.

Dada una ecuación $R(x,y)=0$, el conjunto de puntos de $\Re^2$ cuyas coordenadas la satisfacen se denomina *gráfica de la relación real*.

Si una relación real está definida por medio de una ecuación, y no se especifica el dominio, o el rango, entonces éstos estarán definidos por

$$D=\{x\in\Re \mid y\in\Re\} \quad \text{y} \quad R=\{y\in\Re \mid x\in\Re\}$$

Función

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, una *función de A en B*, es una relación de A en B, tal que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B.

Si f es una función de A en B, lo cual se denotará por $f:A\rightarrow B$, A es el *dominio* y B el *contradominio* de la función f. El *rango* de f es el subconjunto de B cuyos elementos son los segundos elementos de cada par ordenado.

En caso de no hacer referencia a los conjuntos A y B, entonces puede decirse que *una función es un conjunto de pares ordenados tales que, tomados dos diferentes de ellos, el primer elemento es distinto*.

Sea $f:A\rightarrow B$, si $(x,y)\in f$ entonces se dice que y es la *imagen* de x bajo la función f, lo cual se denotará por $y=f(x)$. Si $y\in B$, se llamará *imagen inversa* de y al conjunto

$$f^{-1}(y)=\{x\in A/f(x)=y\}$$

Función inyectiva

Una función $f:A\rightarrow B$ es *inyectiva* si, para cualesquiera x_1 y x_2 elementos de A, se tiene que $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

En otras palabras, una función es inyectiva si, y sólo si, no existen dos elementos distintos del dominio con la misma imagen.

Composición de funciones

Sean f y g funciones con dominios D_f y D_g, respectivamente, la (función) *composición* de f y g (en ese orden), denotada por $f\circ g$, tiene como dominio al conjunto $D_{f\circ g}=\{x\in D_g/g(x)\in D_f\}$, y como regla de correspondencia, $[f\circ g](x)=f[g(x)]$.

Función inversa

Sea f una función inyectiva, se define la *función inversa* de f como aquella que se obtiene al intercambiar los elementos de cada uno de sus pares ordenados.

Es decir, si $f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ es inyectiva, entonces, su función inversa, denotada por f^*, será $f^* = \{(x, y) | y = f(x)\}$. De esta manera, si $y = f(x)$, entonces $x = f^*(y)$.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Definición, gráfica y representación usual

Función real de variable real es toda función $f: A \to \Re$ donde $A \subset \Re$. De esta manera, una función real de variable real será un conjunto de pares ordenados de reales, y su gráfica será un conjunto de puntos en el plano.

En general se representa una función real, por

$$f = \{(x, y) | y = f(x),\ x \in A\},$$

donde A será el dominio, $\Re$ el contradominio, y la ecuación $y = f(x)$ es llamada *regla de correspondencia*. Ahora bien, de manera general, una función real podrá ser definida mediante su regla de correspondencia, sin especificar su dominio, en cuyo caso se entenderá que

$$D = \{x \in \Re \mid f(x) \in \Re\}$$

Funciones algebraicas

Se dice que una función es *algebraica*, si la variable independiente x es afectada únicamente por un número finito de operaciones algebraicas (adición, multiplicación, potenciación y sus inversas, sustracción, división y radicación). En caso contrario, es decir, cuando la variable forme parte del argumento de un logaritmo, por ejemplo, o bien, cuando el número de operaciones sea infinito, se dirá que la función es *trascendente*.

Nota: Como se indicó en el texto, hay funciones algebraicas (las racionales) que pueden expresarse como una suma de un número infinito de términos (serie de potencias).

Una *función polinomial* (de grado n), o *polinomio*, es una función con regla de correspondencia de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in \Re$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\quad a_n \neq 0, n \in E$, $\quad n \geq 0$.

Una *función racional* es una función definida por $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, de manera que, en este caso, el dominio de está dado por $\{x \in \Re / Q(x) \neq 0\}$, ya que la división por cero no está definida en $\Re$.

Funciones hiperbólicas

Las funciones *seno hiperbólico y coseno hiperbólico* se definen por medio de las reglas de correspondencia:

$$\operatorname{sen} h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

El resto de las funciones hiperbólicas se define de manera que las identidades de recíprocos y cocientes, que se satisfacen para las funciones circulares, se satisfagan igualmente para las hiperbólicas. Por ejemplo, las *funciones tangente hiperbólica y secante hiperbólica* se definen por

$$\tan h\, x = \frac{\operatorname{sen} h\, x}{\cos h\, x} \quad \text{y} \quad \sec h\, x = \frac{1}{\cos h\, x}$$

Sin embargo, aun cuando las identidades de recíprocos y de cocientes se satisfagan, no sucede lo mismo con las otras identidades elementales, así pues, a partir de la definición anterior puede probarse que:

$$\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x = \cos h\, 2x \quad \text{y} \quad \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

que no corresponden con las de las funciones circulares.

GRAFICACIÓN Y SUS APLICACIONES

A continuación, estudiaremos algunos conceptos geométricos que resultan útiles para bosquejar gráficas de funciones, lo cual a su vez puede usarse, entre otras cosas, para "leer" información de la función graficada, o para interpretar la solución de ecuaciones y desigualdades en una variable.

Traslaciones

A. *Gráfica de* $y = f(x) \pm k$, $k > 0$

Sabemos que los puntos $A = (a,b)$ y $B = (a, b \pm k)$ están situados sobre una recta paralela al eje de ordenadas y separados una distancia k, estando B por encima o por debajo de A, según si el signo es "+" o "-".

De esta manera, la gráfica de $y = f(x) + k$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ k unidades hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo mencionado (véase figura A1). Por ejemplo, las gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} x + 1/2$ y $y = \operatorname{sen} x - 1$ se muestran en la figura A2.

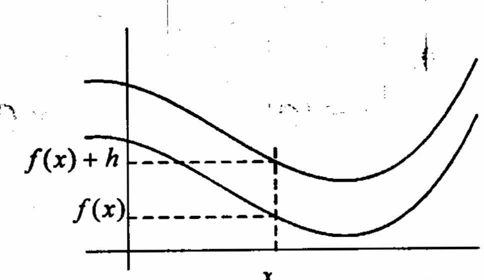


Fig. A1 Traslación "vertical"

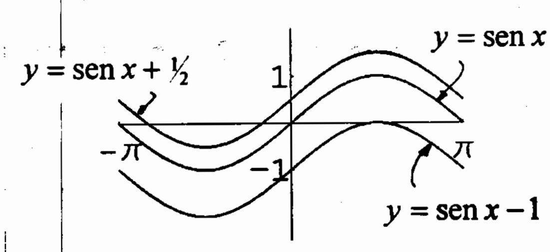


Fig. A2 Traslaciones verticales de $y = \operatorname{sen} x$

B. *Gráfica de* $y = f(x \pm h),\ h > 0$

Consideraciones similares a las mencionadas para la traslación vertical pueden hacerse en este caso. Tenemos ahora que la gráfica de $y = f(x \pm h)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia la izquierda o la derecha, según si el signo es "+" o "-" (véase figura A3). En la figura A4 se muestran las gráficas de $y = (x+2)^2$ y $y = (x-3)^2$ como traslaciones horizontales de la gráfica de $y = x^2$.

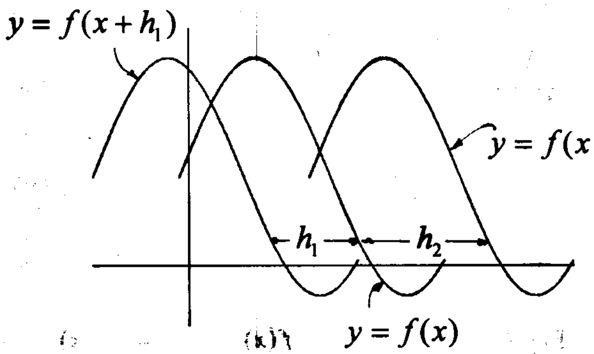


Fig. A3 Traslaciones horizontales

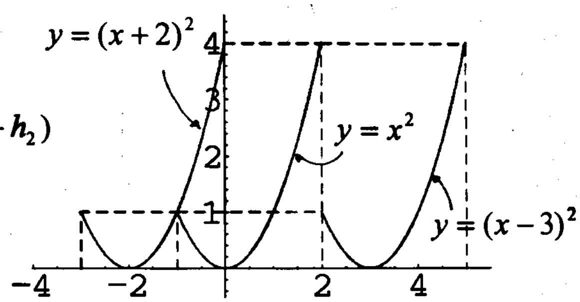


Fig. A4 Traslaciones horizontales de $y = x^2$

Reflexiones

C. *Gráfica de* $y = -f(x)$

Los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos respecto del eje X de manera que la gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene mediante la reflexión de la de $y = f(x)$ respecto del eje X (véase figura A5).

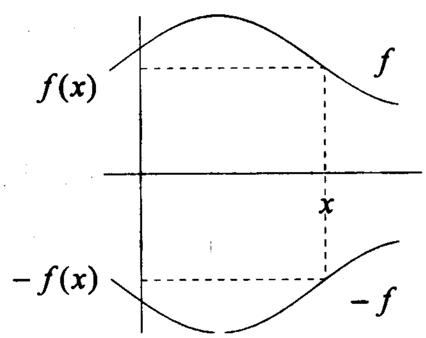


Fig. A5 Gráficas de f y $-f$

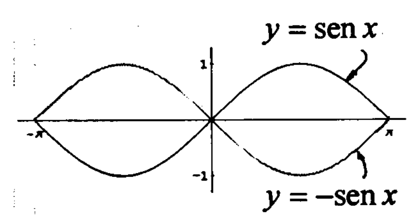


Fig. A6 Reflexión de $y = \operatorname{sen} x$

Las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = -\operatorname{sen} x$, para $x \in [-\pi, \pi]$, se muestran en la figura A6.

D. *Gráfica de* $y = f(-x)$

Por otra parte, los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos respecto del eje Y; así que la gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene reflejando la de $y = f(x)$ respecto del eje Y. (ver figura

A7). Por ejemplo, las gráficas de $y = x^2 - 4x + 2$, $x \in [1,4]$ y de $y = f(-x) = x^2 + 4x + 2$, $x \in [-4,-1]$ se muestran en la figura A8. Nótese que la reflexión del intervalo [1,4] respecto del eje Y es [-4,-1].

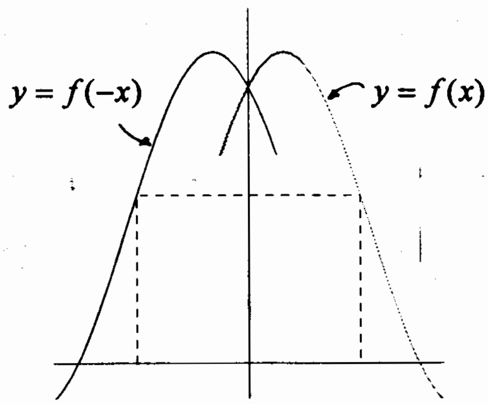


Fig. A7 Gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f(-x)$

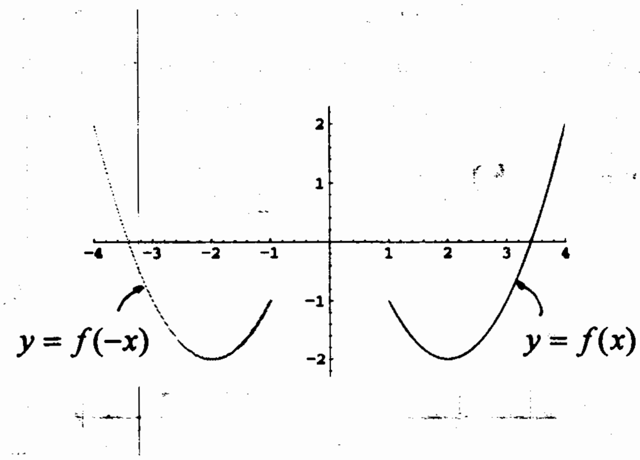


Fig. A8 Gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f(-x)$ para $f(x) = x^2 - 4x + 2$

E. *Gráfica de* $y = |f(x)|$

Considerando que $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, tenemos entonces que

$$|f(x)| = f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad |f(x)| = -f(x) \text{ si } f(x) < 0,$$

así que la gráfica de $y = |f(x)|$ se puede obtener de la de $y = f(x)$, reflejando, respecto del eje X, la parte en la que $f(x) < 0$, es decir, reflejando únicamente las partes de la gráfica que se encuentran por debajo del eje X. Por ejemplo, la gráfica de $y = |x|$ se obtiene reflejando las partes de la gráfica de $y = x$ (función idéntica) en las que $x < 0$ (ver figura A9).

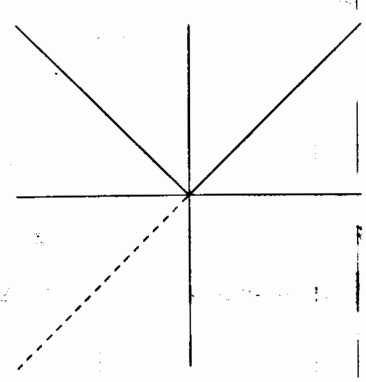


Fig. A9 Gráfica de $y = |x|$

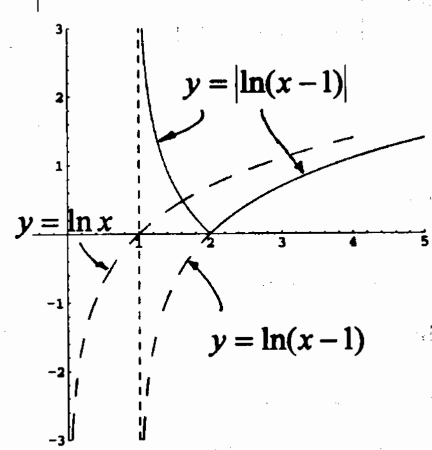


Fig. A10 Gráfica de $y = |\ln(x-1)|$

Análogamente, si se desea trazar la gráfica de $y = |\ln(x-1)|$, se puede trazar primero la gráfica de $y = \ln x$, después trasladarla a la derecha una unidad, obteniendo por lo tanto la gráfica de $y = \ln(x-1)$ y, finalmente, reflejar en esta última, respecto del eje X, la parte en la que $\ln(x-1) < 0$ es decir, la que corresponde al intervalo $\langle 1,2 \rangle$ (ver figura A10).

F. Gráfica de la función inversa

Recuérdese que, si f es una función inyectiva, su inversa f^* se obtiene intercambiando los elementos de cada par ordenado de f. Por otra parte, como los puntos (x, y) y (y, x) son simétricos respecto de la gráfica de I —función idéntica, $y = x$—, entonces las gráficas de f y f^* serán simétricas respecto de la gráfica de I (ver figura A11).

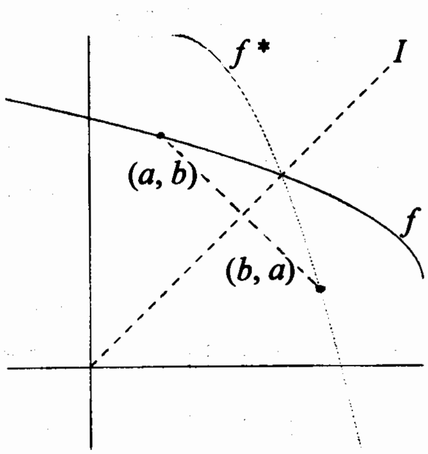


Fig. A11 gráficas de f y de f^*

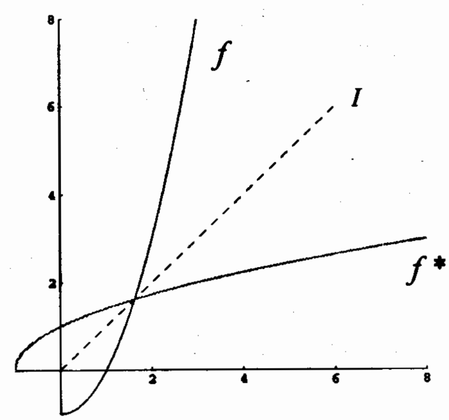


Fig. A12 gráficas de f y f^* con $f(x) = x^2 - 1$

Por ejemplo, si $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1,\ x \in [0,3]\}$, entonces f es creciente —y, por lo tanto, inyectiva—, así que su rango es $R_f = [f(0), f(3)] = [-1, 8] = D_{f^*}$. Ahora, despejando x se obtiene $x = \pm\sqrt{y+1}$, en donde debe elegirse el signo adecuado para que, por ejemplo, $(-1, 0)$ y $(8, 3)$ sean elementos de f^*.

Puede observarse que el signo es +, de manera que $f^* = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+1},\ x \in [-1, 9]\}$. Las gráficas de f y f^* se muestran en la figura A12. Obsérvese, además, que para cada $x \in [-1, 8]$,

$$[f \circ f^*](x) = f[f^*(x)] = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x + 1 - 1 = x,$$

y, para cada $x \in [0,3]$,

$$[f^* \circ f](x) = f^*[f(x)] = f^*(x^2 - 1) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$$

Recuérdese que, en general, no es cierto que $\sqrt{x^2} = x$ (ver anexo A).

Funciones pares e impares y funciones periódicas

Funciones pares e impares

Considerando la familia de funciones definida por $y = f(x) = x^n$, $n \in N$, tenemos que, para n par, $f(-x) = (-x)^n = x^n$, así que la gráfica de f resulta simétrica respecto del eje Y, en cambio, para n impar $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$, y la gráfica de f resulta, ahora, simétrica respecto del origen (ver figuras A13 y A14).

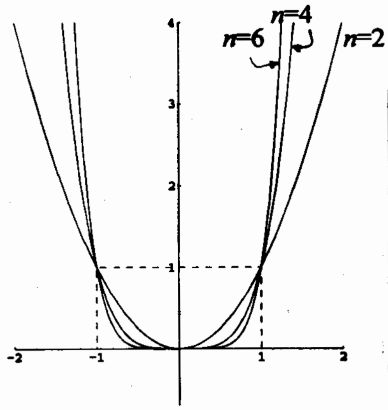


Fig. A13 Gráficas de $y = x^n$ con n par

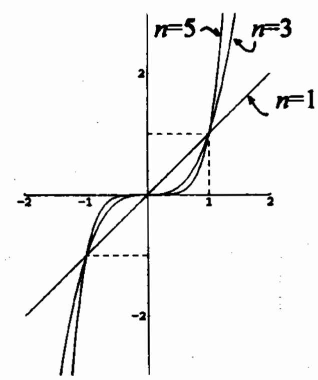


Fig. A14 Gráficas de $y = x^n$ con n impar

Lo anterior sugiere la siguiente definición:

Una función f es *par* si, para toda x en el dominio de la función, se tiene que $f(-x) = f(x)$, en cambio, f es *impar* si, para toda x en el dominio de la función, $f(-x) = -f(x)$. Es claro que si f es par, entonces su gráfica es simétrica respecto del eje Y, mientras que si f es impar, entonces su gráfica es simétrica respecto del origen.

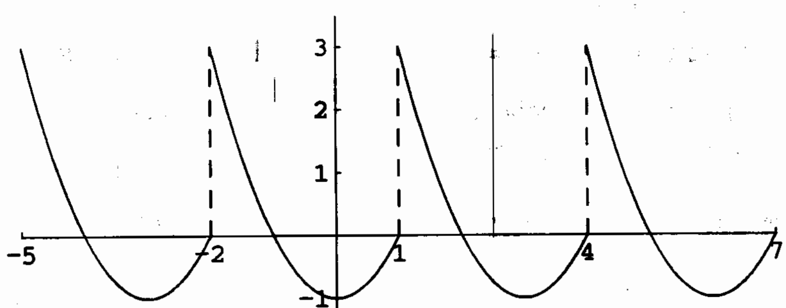


Fig. A15 Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in <-2, 1]$ y su extensión periódica

Funciones periódicas

Una función real f es *periódica*, con período p si

$$\boxed{f(x) = f(x + np),\ n \in E,\ x \in D_f}$$

Ahora bien, una función f, definida en un intervalo A de longitud p, puede *extenderse periódicamente* mediante $f(x+p)=f(x)$. Por ejemplo, la función definida por $f(x)=x^2-1$, $x\in<-2,1]$, puede extenderse periódicamente, definiendo $f(x+3)=f(x)$ para toda x real (ver figura A15).

Funciones reales, ecuaciones y desigualdades

Sean f y g dos funciones reales, entonces $\{x\in\Re / f(x)=g(x)\}$ es el conjunto de soluciones reales de la ecuación $f(x)=g(x)$, y, por lo tanto, el conjunto de las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de f y g. Por otra parte, si las ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $F(x)=G(x)$ son equivalentes, entonces

$$\{x\in\Re / f(x)=g(x)\}=\{x\in\Re / F(x)=G(x)\}$$

Por ejemplo, las ecuaciones $x^2-2x=2-x$ y $x^2-x-2=0$ son equivalentes, de manera que los puntos de intersección de las gráficas de $y=x^2-2x$ y $y=2-x$, y de las gráficas de $y=x^2-x-2$ y $y=0$, tienen las mismas abscisas (ver figura A16).

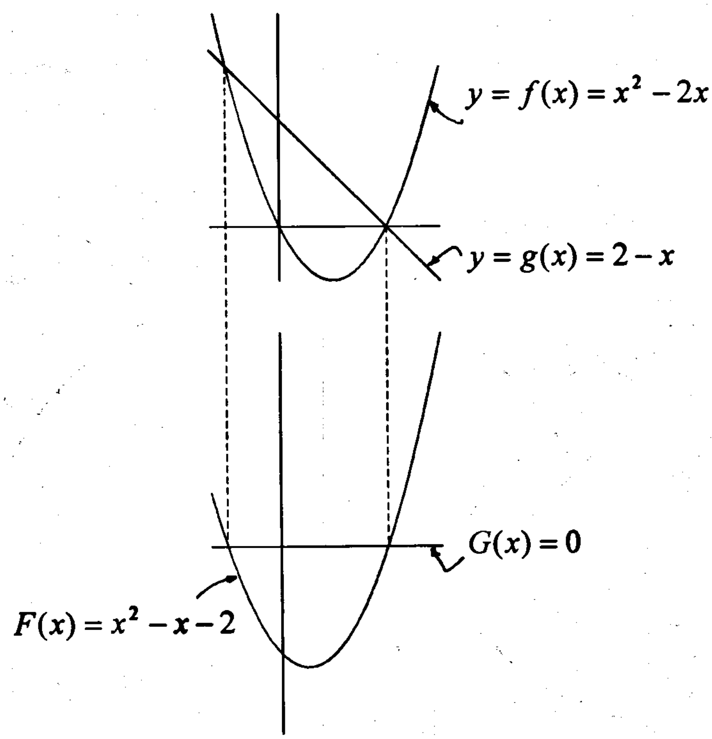


Fig. A16 las ecuaciones $f(x)=g(x)$ y $F(x)=G(x)$ son equivalentes

Por otra parte, supóngase que f y g tienen como gráficas las mostradas en la figura A17. Se puede observar, entonces, que el conjunto solución de $f(x)=g(x)$ es $\{a,b,c\}$ mientras que el de $f(x)>g(x)$ es $\langle-\infty,a\rangle\cup\langle b,c\rangle$ y el de $f(x)\le g(x)$ es $[a,b]\cup[c,7>$.

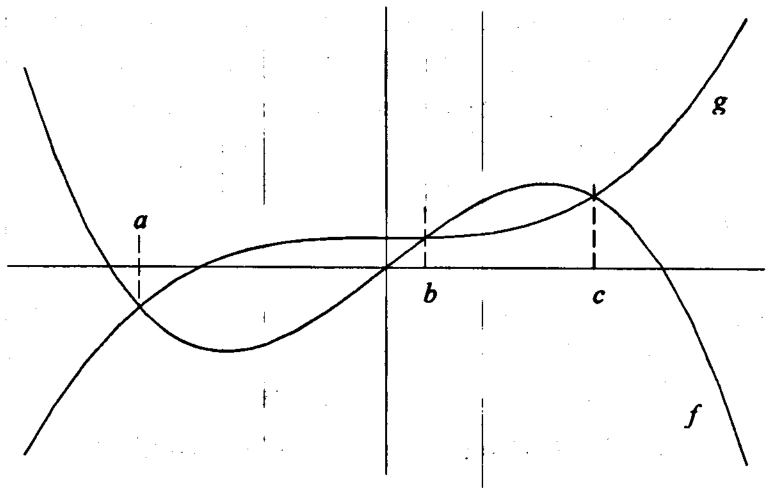


Fig. A17 Lectura de la solución de una desigualdad

Por ejemplo, si se desea resolver la desigualdad:

$$\sqrt{4-x^2} = |x+1|,$$

entonces, considerando las funciones $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ y $g(x)=x+1$, y trazando las gráficas de f, g y -g (ver figura A18), tenemos que el conjunto solución de la desigualdad dada es $[-2,a]\cup[b,2]$.

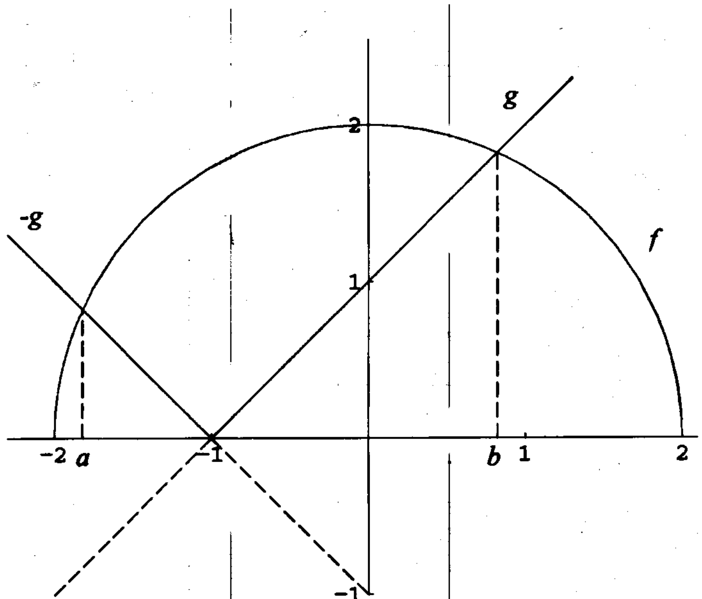


Fig. A18

Ahora bien, $a=\{x\in\Re \mid -g(x)=f(x)\}=\{x\in\Re \mid -(x+1)=\sqrt{4-x^2}\}$, de manera que, para calcular a deberá resolverse la ecuación $\sqrt{4-x^2}=-(x+1)$.

Sin embargo, al resolverla se obtiene, además del valor de a, el de b, lo cual se debe a que el procedimiento de solución de una ecuación con un radical, involucra un paso en el que se deben elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, así que la ecuación $-(x+1)=\sqrt{4-x^2}$ se resuelve de la misma manera que la ecuación $(x+1)=\sqrt{4-x^2}$.

De esta manera, al elevar al cuadrado se obtiene

$$(x+1)^2 = 4-x^2 \quad \text{con raíces } \frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$$

Observando la gráfica, puede afirmarse, entonces, que

$$a=(-1-\sqrt{7})/2 \cong -1.82 \qquad \text{y} \qquad b=(-1+\sqrt{7})/2 \cong 0.82,$$

de manera que la solución buscada es:

$$\left[-2,\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{7}}{2},2\right] \cong [-2,-1.82]\cup[0.82,2]$$

C

Cálculo de derivadas

(Teoremas)

Funciones algebraicas: teoremas básicos

a) *Función constante*

Teorema 1 $$\boxed{\frac{dc}{dx}=0}$$

Es decir, *la derivada de una función constante es cero*. Este resultado es obvio, ya que no importa cuál sea el valor del incremento de la variable, la función (constante) no cambia su valor, de manera que el correspondiente incremento (y por lo tanto la razón de cambio) será siempre cero.

b) *Función lineal*

Teorema 2 $$\boxed{\frac{d(ax+b)}{dx}=a}$$

Es decir, *la derivada de toda función lineal es constante, y su valor es el coeficiente del término lineal* (o sea, la pendiente de la recta).

$$\frac{d(ax+b)}{dx}=\frac{a(x+dx)+b-(ax+b)}{dx}=\frac{a\,dx}{dx}=a$$

c) *Derivada de una potencia*

Teorema 3 $$\boxed{\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbf{Q}}$$

Prueba: ver página 94.

d) *Derivada de una suma*

Teorema 4 $$\boxed{D(f+g) = Df + Dg}$$

Demostración:

Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$, si h es un incremento infinitesimal de la variable, entonces

$$\phi'(x) = \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x) = Df + Dg$$

e) *Derivada de un producto*

Teorema 5 $$\boxed{D(f \cdot g) = f \cdot Dg + g \cdot Df}$$

Demostración: ver páginas 94 y 95.

f) *Derivada de una constante y una función*

Corolario (del teorema 5) $\quad D(c \cdot f) = c \cdot Df$

Demostración:

$$\begin{aligned} D(c\cdot f) &= c\cdot Df + f\cdot Dc && \text{(Teorema 5)} \\ &= c\cdot Df + f\cdot 0 = c\cdot Df + 0 && \text{(Teorema 1)} \\ &= c\cdot Df \end{aligned}$$

g) *Derivada de un cociente*

Teorema 6 $$\boxed{D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot Df - f\cdot Dg}{g^2}}$$

Demostración:

Sea $\phi = \dfrac{f}{g}$, entonces $f = \phi \cdot g$, así que, por el teorema 5,

$$f'(x) = \phi(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot \phi'(x)$$

Despejando ϕ' de esta última igualdad, tenemos que

$$\phi'(x) = \frac{f'(x) - \phi(x) \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Funciones trigonométricas directas

Teorema 8 $\boxed{D_x \operatorname{sen} x = \cos x}$

Prueba: ver página 101 del texto.

Teorema 9 $\boxed{D_x \cos x = -sen x}$

Prueba:

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{\cos(x + dx) - \cos x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos dx - sen x \cdot sen dx - \cos x}{dx} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot (\cos dx - 1) - sen x \cdot sen dx}{dx} = \cos x \frac{\cos dx - 1}{dx} - sen x \frac{sen dx}{dx}$$

$$= \cos x \cdot 0 - sen x \cdot 1 = -sen x$$

Teorema 10 $\boxed{D_x tan x = \sec^2 x}$

Prueba:

$$D_x \, tan x = D_x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot D_x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot D_x \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Con base en los teoremas probados se muestran los tres restantes:

Teorema 11 $\boxed{D_x \cot x = -\csc^2 x}$

Teorema 12 $\boxed{D_x \sec x = \sec x \cdot \tan x}$

Teorema 13 $\boxed{D_x \csc x = -\csc x \cdot \cot x}$

Funciones trigonométricas inversas

Teorema 14 $D_w \mathit{arc}\operatorname{sen} w = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ $\qquad -\dfrac{\pi}{2} \le \mathit{arc}\operatorname{sen} w \le \dfrac{\pi}{2}$

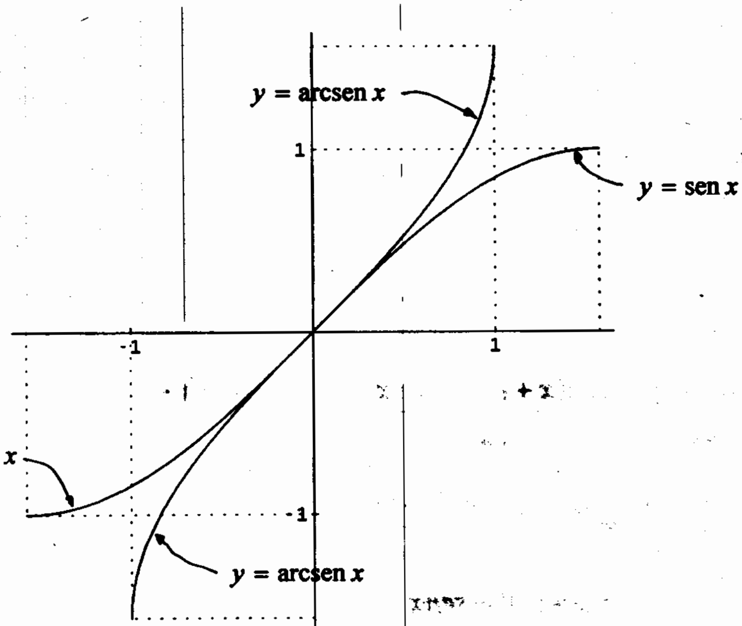


Fig. A19

Prueba: Para definir la inversa de la función seno, su dominio debe restringirse a alguno en el que la función sea creciente o decreciente. Así pues (ver figura A19), si

$$y = f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

entonces f es inyectiva, y, por lo tanto, tiene inversa. Siendo g esa función inversa, tenemos que

$$x = g(y) = \mathit{arc}\operatorname{sen} y$$

Por lo tanto,

$$D_y arc\,\mathrm{sen}\, y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Es decir:

$$D_w arc\,\mathrm{sen}\, w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$$

De igual manera se definen las funciones inversas para las otras funciones trigonométricas (o circulares), para las cuales se obtiene:

Teorema 15 $\boxed{D_w \mathrm{arc}\cos w = -\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}}$ $-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{arc}\cos w \le \frac{\pi}{2}$

Teorema 16 $\boxed{D_w arc\,tan\, w = \frac{1}{1+w^2}}$ $-\frac{\pi}{2} \le arc\,tan\, w \le \frac{\pi}{2}$

Teorema 17 $\boxed{D_w arc\cot w = -\frac{1}{1+w^2}}$ $0 \le arc\cot w \le \pi$

Teorema 18 $\boxed{D_w arc\sec w = \frac{1}{|w|\sqrt{w^2-1}}}$ $0 < arc\sec w < \pi$, $arc\sec w \neq \frac{\pi}{2}$

Teorema 19 $\boxed{D_w arc\csc w = -\frac{1}{|w|\sqrt{w^2-1}}}$ $-\frac{\pi}{2} < arc\csc w < \frac{\pi}{2}$, $arc\csc w \neq 0$

Funciones exponenciales y logarítmicas

Teorema 20

$$\boxed{D_x\, e^x = e^x}$$

Prueba

Consideremos primeramente la función exponencial en cualquier base, esto es,

$$f(x) = a^x, \qquad a > o,$$

Siendo h infinitesimal, la derivada será

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x a^h-a^x}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h},$$

es decir,

$$f'(x)=a^x\,\frac{a^h-1}{h}$$

En particular, si $x=0$, tenemos que

$$f'(0)=a^0\cdot\frac{a^h-1}{h}=\frac{a^h-1}{h} \tag{A1}$$

Ahora bien, esta última expresión corresponde al valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $x=0$, y sabemos que, para $a=1$, ese valor es 0 (la función es constante). Si suponemos que la pendiente varía continuamente, tendremos que, si a es "ligeramente" mayor que 1, la pendiente dada por (A1) es "pequeña", pero positiva (ver figura A20a).

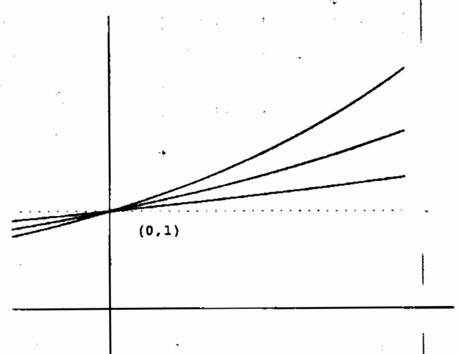


Fig. A20a

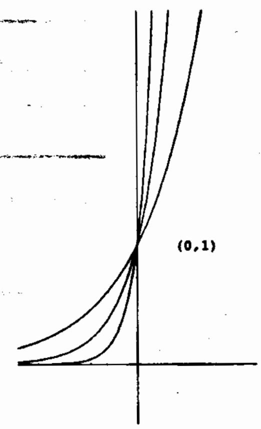


Fig. A20b

Por otra parte, si la base es "grande", entonces la tangente es "casi vertical" (ver figura A20b), de manera que la pendiente es "grande". Podemos suponer, incluso, que si a es infinitamente grande, la pendiente de la tangente a la gráfica de f, en $x=0$, también lo es.

Entonces la continuidad de la pendiente nos permite suponer (por el teorema del valor intermedio) la existencia de algún valor de a para el cual la pendiente valga cualquier cantidad positiva dada, particularmente 1. Definiendo como e el valor de la base para el cual esa pendiente es 1, se obtiene

$$f(x)=e^x,\qquad f'(0)=\frac{e^h-1}{h}=1\quad\text{y}\quad f'(x)=e^x$$

Por lo tanto,

$$\boxed{D_x\, e^x = e^x}$$

Teorema 21

$$\boxed{D_w \ln w = \frac{1}{w}}$$

Prueba:

Sea $y = f(x) = e^x, \quad x \in \Re$, entonces, f es inyectiva (es creciente), y su inversa es

$$x = g(y) = \ln y,$$

así que,

$$D_y \ln y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Es decir:

$$\boxed{D_w \ln w = \frac{1}{w}}$$

Usando el teorema del cambio de base de un logaritmo, el corolario 1 (después del teorema 8.5), y el resultado anterior,

$$D_x \log_a x = D_x \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot D_x \ln x = \frac{1}{x \ln a}$$

Es decir:

C3

$$\boxed{D_w \log_a w = \frac{1}{w \ln a}}$$

Por último, recurriendo nuevamente a la derivada de la función inversa, y a este resultado, tenemos que, siendo $y = f(x) = \log_a x, \quad x \in <0,\infty>$, entonces, f es inyectiva (es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$), y su inversa es

$$x = g(y) = a^y$$

así que

$$D_y a^y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x \ln a}} = x \ln a = a^y \ln a$$

o bien:

C4

$$\boxed{D_x\, a^x = a^x \ln a}$$

Funciones hiperbólicas

La obtención de la derivada para estas funciones es más simple, ya que éstas se definen en términos de la función exponencial, de manera que sólo hay que aplicar C1 y la *regla de la cadena*. Así, por ejemplo,

$$D_x \operatorname{sen} h\, x = D_x \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos h\, x$$

Es decir:

D1 $\boxed{D_x \operatorname{sen} h\, x = \cos h\, x}$

De manera análoga se demuestra que:

D2 $\boxed{D_x \cos h\, x = \operatorname{sen} h\, x}$

D3 $\boxed{D_x\, tan h\, x = \sec h^2 x}$

D4 $\boxed{D_x \cot h\, x = -\csc h^2 x}$

D5 $\boxed{D_x \sec h\, x = -\sec h\, x\, tan h\, x}$

D6 $\boxed{D_x \csc h\, x = -\csc h\, x \cot h\, x}$

Por lo general, las funciones a derivar aparecen compuestas, por lo que debe aplicarse la regla de la cadena. A continuación se da una tabla con las fórmulas de derivación para las funciones trascendentes.

Resumen de fórmulas de derivación (funciones trascendentes)

A1 $D_x \operatorname{sen} u = \cos u \dfrac{du}{dx}$

A2 $D_x \cos u = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

A3 $D_x tan\, u = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

A4 $D_x \cot u = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

A5 $D_x \sec u = \sec u \cdot tan\, u \dfrac{du}{dx}$

A6 $D_x \csc u = -\csc u \cdot \cot u \dfrac{du}{dx}$

B1	$D_x arc\,\mathrm{sen}\, u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
B2	$D_x arc\cos u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
B3	$D_x arc\,tan\, u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
B4	$D_x arc\cot u = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
B5	$D_x arc\sec u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
B6	$D_x arc\csc u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
C1	$D_x\, e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
C2	$D_x\,\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
C3	$D_x\,\log_a u = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx}$
C4	$D_x\, b^u = b^u \ln b\dfrac{du}{dx}$
D1	$D_x\,\mathrm{sen}h\, u = \cosh\, u\dfrac{du}{dx}$
D2	$D_x\cosh\, u = \mathrm{sen}h\, u\dfrac{du}{dx}$
D3	$D_x\, tanh\, u = \mathrm{sec}h^2 u\dfrac{du}{dx}$
D4	$D_x\,\mathrm{cot}h\, u = -\mathrm{csc}h^2 u\dfrac{du}{dx}$
D5	$D_x\,\mathrm{sec}h\, u = -\mathrm{sec}h\, u\;\; tanh\, u\dfrac{du}{dx}$
D6	$D_x\,\mathrm{csc}h\, u = -\mathrm{csc}h\, u\;\; \mathrm{cot}h\, u\dfrac{du}{dx}$

D

Series de potencias: funciones trascendentes

En este anexo se muestra cómo pueden obtenerse los desarrollos en serie de potencias para las principales funciones trascendentes. En buena medida, los procedimientos aquí expuestos se deben al matemático Leonard Euler, quien los publicó en su *Introductio in Analysis Infinitorum*, en 1748.

Funciones exponencial y logarítmica

Para la función exponencial, véanse las páginas 107 y 108. Ahora bien, si $w = \beta$ es un infinitesimal, y asumiendo que la función exponencial es continua, tendremos entonces que

$$a^{\beta} = 1 + k\beta$$

Si además N es un número infinitamente grande, tal que $N\beta = x$, con x finito, entonces

$$a^{N\beta} = a^{x} = 1 + y \qquad \text{(A2)}$$

Usando ahora algunas propiedades de exponentes y estas últimas ecuaciones, tenemos:

$$(1+y)^{1/N} = a^{N\beta/N} = a^{\beta} = 1 + k\beta$$

$$k\beta = (1+y)^{1/N} - 1$$

Aplicando la definición de logaritmo a la ecuación (A2), resulta:

$$\log_a(1+y) = N\beta = \frac{N}{k}(k\beta) = \frac{N}{k}\left[(1+y)^{1/N} - 1\right]$$

Si desarrollamos el binomio, considerando que $-1 < y < 1$, tenemos:

$$\log_a(1+y) = \frac{N}{k}\left[\left(1 + \frac{\frac{1}{N}}{1}y + \frac{\frac{1}{N}\left(\frac{1-N}{N}\right)}{2!}y^2 + \frac{\frac{1}{N}\left(\frac{1-N}{N}\right)\left(\frac{1-2N}{N}\right)}{3!}y^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

y como N es infinitamente grande, tenemos que

$$\frac{1-N}{N} = -1, \quad \frac{1-2N}{N} = -2, \quad \frac{1-3N}{N} = -3, \text{ etc.},$$

de manera que

$$\boxed{\log_a(1+y) = \frac{1}{k}\left(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \cdots\right)} \tag{A3}$$

de donde, si $a = e$, entonces, $k = 1$, y

$$\boxed{\ln(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \cdots} \tag{A4}$$

Obsérvese que los desarrollos en serie dados por (A3) y (A4) se obtuvieron suponiendo que $|y| < 1$, de manera que el intervalo de convergencia de tales series es $< -1, 1 >$.

Funciones trigonométricas

Recuérdese que si i es la unidad imaginaria, entonces

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc + ad),$$

y si tomamos en cuenta algunas identidades trigonométricas como:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

y

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \cos B,$$

entonces,

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \cos z \cos y - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} y + i(\cos z \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z \cos y),$$

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \cos(z+y) + i \operatorname{sen}(y+z)$$

Y de manera análoga,

$$(\cos z - i \operatorname{sen} z)(\cos y - i \operatorname{sen} y) = \cos(z+y) - i \operatorname{sen}(y+z)$$

Si en estas últimas ecuaciones hacemos $z = y$ se obtiene:

$$(\cos z + i\,\mathrm{sen}\,z)^2 = \cos 2z + i\,\mathrm{sen}\,2z$$

y

$$(\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z)^2 = \cos 2z - i\,\mathrm{sen}\,2z$$

De la misma forma, podemos obtener que

$$(\cos z + i\,\mathrm{sen}\,z)^3 = \cos 3z + i\,\mathrm{sen}\,3z$$

y

$$(\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z)^3 = \cos 3z - i\,\mathrm{sen}\,3z\,,$$

lo que nos lleva a inferir que

$$(\cos z + i\,\mathrm{sen}\,z)^n = \cos nz + i\,\mathrm{sen}\,nz$$

y

$$(\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z)^n = \cos nz - i\,\mathrm{sen}\,nz$$

Identidades que pueden probarse por inducción matemática. Sumando y restando estas últimas ecuaciones se obtiene:

$$\cos nz = \frac{1}{2}\left[(\cos z + i\,\mathrm{sen}\,z)^n + (\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z)^n\right]$$

y

$$\mathrm{sen}\,nz = \frac{1}{2i}\left[(\cos z + i\,\mathrm{sen}\,z)^n - (\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z)^n\right]$$

Si z es infinitesimal, entonces, $\mathrm{sen}\,z = z$ y $\cos z = 1$. Si además n es infinitamente grande, de manera que $nz = x\,n$ sea finito, entonces tenemos que

$$\cos x = \frac{1}{2}\left[(1+iz)^n + (1-iz)^n\right] \tag{A5}$$

y

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2i}\left[(1+iz)^n - (1-iz)^n\right] \tag{A6}$$

Desarrollando los binomios, obtenemos:

$$\cos x = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \frac{n^6z^6}{6!} + \cdots$$

y

$$\mathrm{sen}\,x = nz - \frac{n^3z^3}{3!} + \frac{n^5z^5}{5!} - \frac{n^7z^7}{7!} + \cdots$$

es decir,

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} \tag{A7}$$

y
$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots} \tag{A8}$$

Por otra parte, las ecuaciones (A5) y (A6) pueden escribirse en la forma

$$\cos x = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{ix}{N}\right)^N + \left(1-\frac{ix}{N}\right)^N\right]$$

y
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{ix}{N}\right)^N - \left(1-\frac{ix}{N}\right)^N\right]$$

Si recurrimos a la ecuación (4.5), estas últimas ecuaciones quedan:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \tag{A9}$$

y
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \tag{A10}$$

De donde, al sumar y restar, obtenemos finalmente,

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x} \tag{A11}$$

y
$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x} \tag{A12}$$

Las cuales son conocidas como *ecuaciones de Euler*, que relacionan las funciones exponenciales (con argumento complejo) con las trigonométricas.

Funciones hiperbólicas

El desarrollo de estas funciones es muy simple, ya que están definidas en términos de exponenciales. Así pues, a partir de las definiciones y del desarrollo dado por la ecuación (4.4), tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} \tag{A13}$$

Análogamente, a partir de:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

obtenemos:

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} \tag{A14}$$

E

Serie de Taylor y valores extremos

Como puede observarse en el texto, el criterio de la segunda derivada no es concluyente para el caso en que la segunda derivada de la función se anule en el número crítico. Vamos a obtener a continuación, mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función, alrededor del punto crítico, un criterio que nos permite identificar la naturaleza de un punto crítico, aun en tal caso.

Consideremos, entonces, el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de a, dado por

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \cdots \tag{A15}$$

Recordemos ahora que, si la función es analítica en a, su comportamiento alrededor de $x = a$ está determinado por su comportamiento en una vecindad infinitamente pequeña de a, es decir, por su comportamiento en el punto, por lo tanto, si deseamos determinar la naturaleza de un punto crítico (máximo, mínimo o punto de inflexión), basta con conocer el comportamiento de la función en una vecindad infinitamente pequeña del número crítico. Para ello será suficiente comparar el valor de la función en el punto crítico con su valor en puntos infinitamente próximos situados tanto a la izquierda como a la derecha de tal número.

Si escribimos (A15) en la forma:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \cdots, \tag{A16}$$

y si consideramos, además, que a es un número crítico de f para el cual $f'(a) = 0$, entonces, esta ecuación queda:

$$\boxed{f(a+h)-f(a)=\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\cdots} \qquad \text{(A17)}$$

A partir de la cual, observamos que el signo del lado derecho, y por tanto del izquierdo también, está dado por el del primer término no nulo de la serie (propiedad lagrangiana), entonces:

a) Si $f''(a)\neq 0$, entonces el signo de la serie es el del término $f''(a)h^2/2$, así que,

a1) Si $f''(a)>0$, entonces f tiene un ***mínimo*** en $x=a$, ya que $f(a+h)-f(a)$ es positivo, por lo que $f(a+h)$ se encuentra por encima de $f(a)$ en ambos lados del punto (ver figura A21a).

a2) Si $f''(a)<0$, entonces f tiene un *máximo* en $x=a$, ya que $f(a+h)-f(a)$ es negativo, por lo que $f(a+h)$ se encuentra por debajo de $f(a)$ en ambos lados del punto (ver figura A21b).

Obsérvese que lo anterior equivale al *criterio de la segunda derivada.*

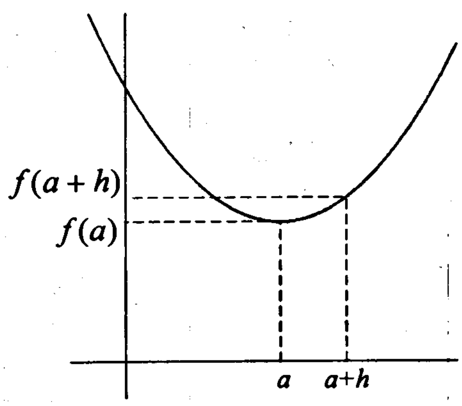


Fig. A21a

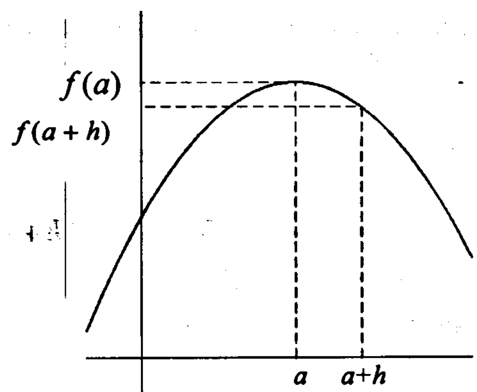


Fig. A21b

b) Si $f''(a)=0$, pero $f'''(a)\neq 0$, entonces, el signo de la serie está dado por el del término $f'''(a)h^3/3!$, el cual es positivo o negativo, dependiendo del signo de $f'''(a)$ (que es independiente de h) y del signo de h, es decir, dependiendo de si estamos a la izquierda o a la derecha del punto, así que en este caso la función tiene un *punto de inflexión*. Ver figuras A22a y A22b.

c) Si $f^{(j)}(a)=0$ para $j<k$, y $f^{(k)}(a)\neq 0$, siendo k un número *par*, entonces,

c1) Si $f^{(k)}(a)>0$, entonces f tiene un ***mínimo*** en $x=a$.

c2) Si $f^{(k)}(a)<0$, entonces f tiene un *máximo* en $x=a$.

d) Si $f^{(j)}(a)=0$ para $j<k$, y $f^{(k)}(a)\neq 0$, siendo k *impar*, entonces f tiene un *punto de inflexión* en $x=a$.

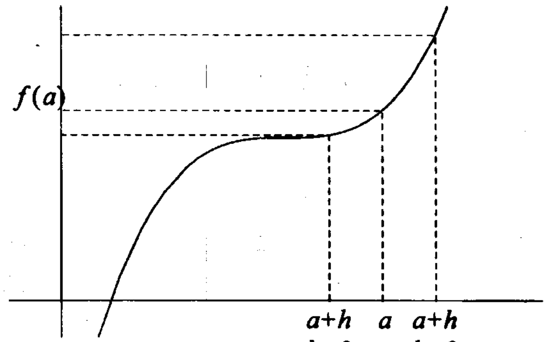


Fig. A22a

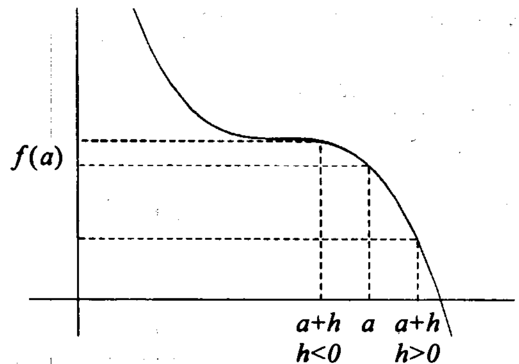


Fig. A22b

Por ejemplo, considérese la función definida por:

$$f(x)=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32 \qquad \text{(a)}$$

(obsérvese que $f(x)=(x-2)^5$),

tenemos entonces que

$$f'(x)=5x^4-40x^3+120x^2-160x+80 \qquad \text{(b)}$$
$$=5(x^4-8x^3+24x^2-32x+16)$$

Al igualar a cero la expresión entre paréntesis y aplicando el teorema correspondiente a las raíces racionales de un polinomio, puede obtenerse, por división sintética, que una de las raíces es 2, por lo que f' puede escribirse en la forma:

$$f'(x)=5(x-2)(x^3-6x^2+12x-8),$$

de manera que 2 es un número crítico de f.

Ahora, derivando (b) resulta

$$f''(x)=20x^3-120x^2+240x-160=20(x^3-6x^2+12x-8),$$

de donde obtenemos fácilmente que $f''(2)=0$.

Además,

$$f'''(x)=60x^2-240x+240=60(x^2-4x+4)=60(x-2)^2,$$

así que $f'''(2)=0$,

$$f^{iv}(x) = 120x - 240 = 120(x-2), \qquad f^{iv}(2) = 0,$$

y finalmente $f^{v}(x) = 120 > 0$ para toda x, de manera que f tiene un punto de inflexión en $x = 2$. Con la información así obtenida, podemos trazar la gráfica de la función dada, la cual se muestra en la figura A23.

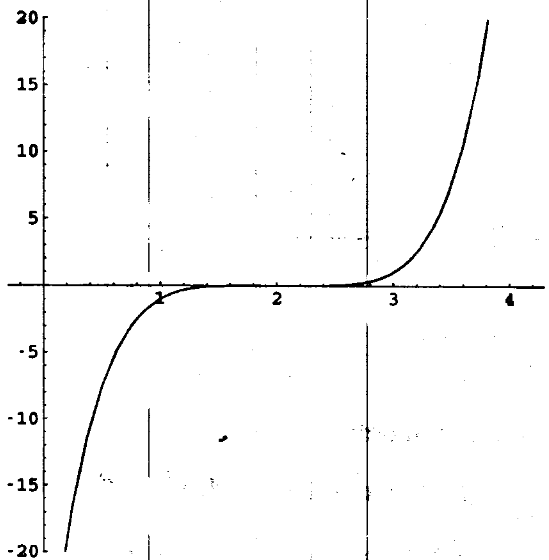


Fig. A23

F

Tabla de integrales elementales

Formas básicas

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	$\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
$\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\quad (n \neq -1)$	$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$ *
$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$
$\int a^u du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$	$\int \tan u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$	$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	$\int \cot u\,du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$	$\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	

Formas que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$

$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\right\rvert + C$	$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\right\rvert + C$

* Por economía de espacio se utiliza la notación $\operatorname{sen}^{-1}u$ en lugar de arcsen u .

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left\|u+\sqrt{a^2+u^2}\right\|+C$	

Formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+C$$

$$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a}+C$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$

$$\int\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

$$\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

Formas trigonométricas inversas

$$\int \operatorname{arcsen} u\,du = u\operatorname{arcsen} u+\sqrt{1-u^2}+C$$

$$\int \arccos u\,du = u\arccos u-\sqrt{1-u^2}+C$$

Formas exponenciales y logarítmicas

$$\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au}+C$$

$$\int \ln u\,du = u\ln u-u+C$$

Formas hiperbólicas

$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$	$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$	$\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$
$\int \coth u\,du = \ln\left\|\operatorname{senh} u\right\| + C$	$\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}\left\|\operatorname{senh} u\right\| + C$	$\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left\|\tanh \tfrac{1}{2}u\right\| + C$

G

Solución a problemas selectos

En este anexo se dan las respuestas o sugerencias para la solución de algunos de los problemas propuestos al final de cada sección del texto. Para algunas de las secciones no se da solución a ninguno de los problemas, sin embargo, conforme se avance en el curso, se utilizará la página WEB[2] para dar soluciones a todos los problemas que presentan alguna dificultad especial y para hacer comentarios al respecto de cada uno de los temas del curso.

UNIDAD I. CONCEPTOS BÁSICOS

Sección 1.1, p. 12

1. $f(-2+\alpha)$ es infinitamente grande y negativo si $\alpha<0$; e infinitamente grande y positivo si $\alpha>0$.

   $f(2+\alpha)$ es infinitamente grande y negativo si $\alpha<0$; e infinitamente grande y positivo si $\alpha>0$.

   $f(N)$ es un infinitesimal negativo si $N<0$; y un infinitesimal positivo si $N>0$.

3. $f(\alpha)$ es infinitamente grande y positivo para cualquier infinitesimal α, sea cual sea su signo.

   $f(N)$ es un infinitesimal positivo para cualquier N infinitamente grande, sea cual sea su signo.

[2] Se dispone de una página en la División de Materias Propedéuticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México. Si se desea consultar algo al respecto de este libro, se deberá entrar en la página "Arcos".

5. $f(1+\alpha)=1$ (despreciando infinitesimales), para cualquier infinitesimal α, sea cual sea su signo.

   $f(N)$ es un número infinitamente grande, del mismo signo que N.

6. $f(1+\alpha)$ es infinitamente grande y positivo si $\alpha<0$, e infinitamente grande y negativo si $\alpha>0$.

   $f(N)=1/2$ (despreciando infinitesimales), para cualquier N infinitamente grande, sea cual sea su signo.

8. $f(\alpha)=\sqrt{3}$ (despreciando infinitesimales), para cualquier infinitesimal α, sea cual sea su signo.

   $f(N)=\sqrt{2}\,N$ (despreciando infinitesimales), así que $f(N)$ es un número infinitamente grande, del mismo signo que N.

9. Obsérvese que:

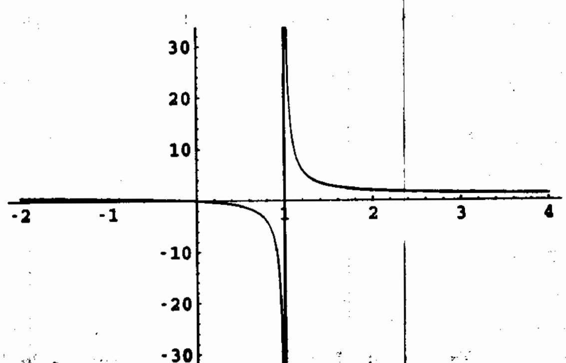
$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}}=-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} & \text{si } x<0\\ \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}}=\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} & \text{si } x>0\end{cases},$$

   de manera que si α es infinitesimal, entonces $g(\alpha)$ es un número infinitamente grande del mismo signo que α.

   Por otra parte, tomando en cuenta la ecuación anterior, tenemos que si N es infinitamente grande, y si despreciamos infinitesimales, entonces $g(N)=-1$, si N es negativo, mientras que $g(N)=1$, si N es positivo.

Sección 2.2, pp. 50-51.

1. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $\qquad\qquad D_f=\mathfrak{R}-\{1\}$



$f_{-}(1) = -N_1 \quad f_{+}(1) = N_2$, con N_1 y N_2 infinitamente grandes (y positivos), así que la gráfica de f tiene una asíntota en $x = 1$.

3. $w(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x+1}$

$D_f = \Re - \{-1/2\}$

El numerador y el denominador se anulan para $x = -1/2$. Factorizando tenemos:

$w(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x+1} = \dfrac{(2x-1)(x-1)}{2x+1} \equiv x - 1$, excepto para $x = -1/2$, así que la gráfica de w es la de la recta $w = x - 1$, con un hueco en (-1/2, -3/2).

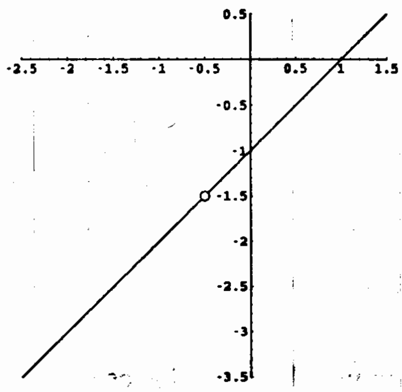


Figura del problema 3

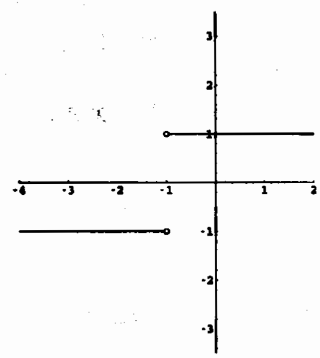


Figura del problema 5

5. Aplicando la definición de valor absoluto, tenemos:

$$h(t) = \frac{t+1}{|t+1|} = \begin{cases} \dfrac{t+1}{-(t+1)}, & t+1 < 0 \\ \dfrac{t+1}{t+1}, & t+1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & t < -1 \\ 1, & t \geq -1 \end{cases}$$

Por lo tanto $D_h = \Re$.

Además $h_{-}(-1) = -1$ y $h_{+}(-1) = 1$, así que la gráfica de h tiene una discontinuidad de salto en $t = -1$.

7. $s(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

$D_s = \{t \in \Re \mid 25 - t^2 \geq 0\} = [-5, 5]$

La función s es continua en este conjunto.

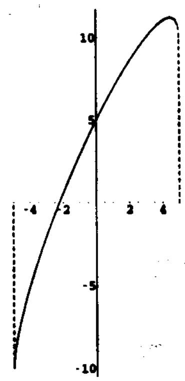


Figura del problema 7

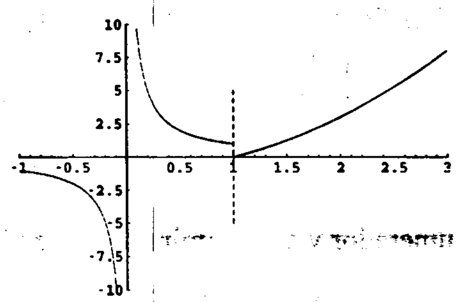


Figura del problema 9

9. $G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<1\\ x^2-1, & x\geq 1\end{cases}$ $\qquad D_G=\Re-\{0\}$

El cero está dentro del dominio que corresponde a la "parte izquierda" de la función, la cual tiene como gráfica a una hipérbola con una asíntota en $x=0$.

Por otra parte, $G_-(1)=1/1=1$ y $G_+(1)=1^1-1=0\neq G_-(1)$, así que la gráfica de G tiene un salto en $x=1$.

11. La función está definida en dos partes, cada una de las cuales es continua. Ahora, para que la función f sea continua en todo su dominio, se requiere que $f_-(1)=f_+(1)$, es decir:

$$1^2-1=3(1)+c \quad\Rightarrow\quad c=-3$$

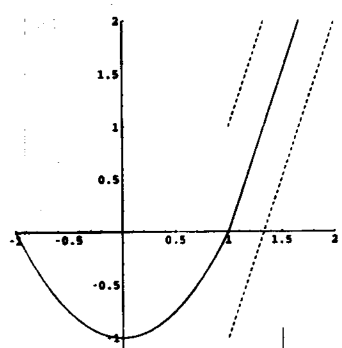


Figura del problema 11

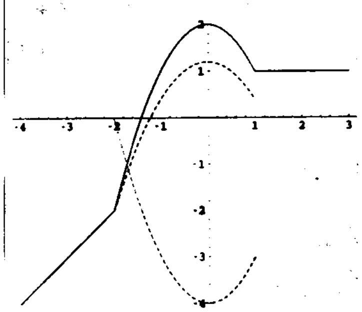


Figura del problema 13

13. La función está definida en tres partes, cada una de las cuales es continua. Ahora, para que la función f sea continua en todo su dominio, se requiere que $f_-(-2)=f_+(-2)$ y $f_-(1)=f_+(1)$, es decir:

$$-2 = a(-2)^2 + c \quad \text{y} \quad a(1)^2 + c = 1$$

$$\begin{cases} 4a + c = -2 \\ a + c = 1 \end{cases} \qquad a = -1, \quad c = 2$$

Sección 2.3, pp. 65-67.

2. $D_g = \Re - \{-2, 2\}$

   Asíntotas: $x = -2$, $x = 2$.

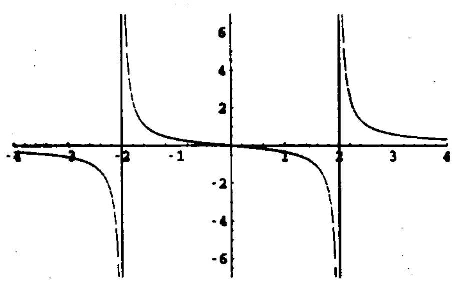


Figura del problema 2

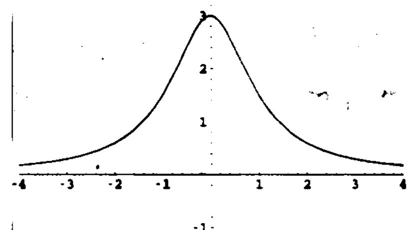


Figura del problema 4

4. $D_h = \Re$, Asíntotas: $y = 0$

6. $D_p = \Re$, Asíntotas: $y = 3$

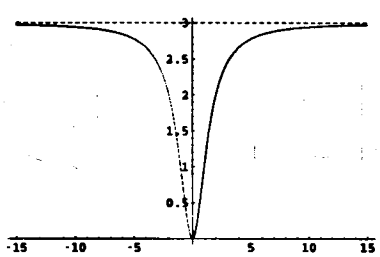


Figura del problema 6

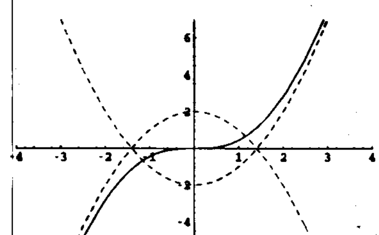


Figura del problema 8

8. $D_s = \Re$

   Asíntotas: obsérvese que

$$s(t) = \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{t^3}{t(1 + 4t^{-2})^{1/2}} = t^2(1 + 4t^{-2})^{-1/2}$$

Desarrollando el binomio:

$$s(t) = t^2\left[1 - \frac{1}{2}(4t^{-2}) + o(t^{-4})\right] = t^2 - 2 + o(t^{-2})$$

Por lo tanto, para N infinitamente grande:

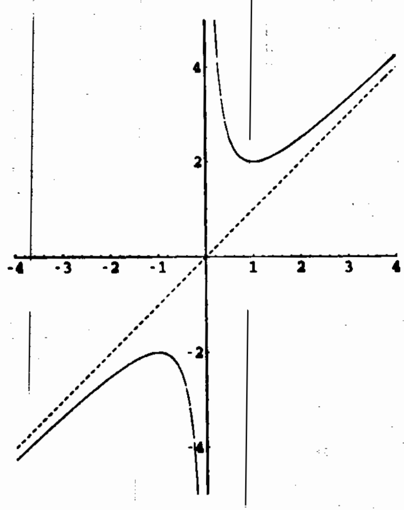
$$s(N) = N^2 - 2 + \text{ infinitesimal}$$

Así que una asíntota de la gráfica de s es la parábola $s = t^2 - 2$.

Finalmente, obsérvese que s es impar, de manera que la parábola obtenida es asíntota sólo en la "parte derecha", en la parte izquierda tendrá que ser la parábola $s = -t^2 + 2$

10. $D_z = \Re - \{0\}$

Asíntotas: $x = 0$ y $z = t$



Figura, problema 10

12. La información indica que la gráfica de f:

en la parte izquierda tiene por asíntota a la recta $y = 1$,

tiene una asíntota en $x = -1$ y una discontinuidad de salto en $x = 2$, y

en la parte derecha tiene por asíntota a la recta $y = 0$.

14. $f(-N) = 2$, $f_{-}(-3)$ es infinitamente grande y negativa, $f_{+}(-3)$ es infinitamente grande y positiva, $f_{-}(3)$ es infinitamente grande y positiva, $f_{+}(3)$ es infinitamente grande y positiva y $f(N) = 2$.

16. $f(-N) = N + 1$, $f_{-}(0) = 2$, $f_{+}(0) = 0$ y $f(N) = N - 1$.

18. Mínimo: $3(-1)+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$, máximo: $3(2)+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

20. Mínimo: $-\frac{1}{2}(5)+4=\frac{3}{2}$, máximo: $-\frac{1}{2}(-2)+4=5$

22. Mínimo: -3, máximo: 1

24. No tiene mínimo ni máximo

26. Mínimo: $\tan(-\pi/4)=-1$, máximo: $\tan(\pi/4)=1$

28. Mínimo: $f(b)$ máximo: $f(a)$

30. Definiendo la función $\phi(x)=x^2-\sqrt{x+2}$, tenemos que ϕ es continua en su dominio y por lo tanto en el intervalo dado. Además, $\phi(0)=-\sqrt{2}<0$ y $\phi(2)=4-\sqrt{4}=2>0$, así que la ecuación $\phi(x)=0$ —y por lo tanto la ecuación dada, ya que son equivalentes— tiene una raíz en el intervalo [0, 2].

    Para encontrar la raíz en el intervalo dado, podemos aplicar el método de bisección, hasta encontrar que, con precisión de centésimas, la raíz buscada es 1.35.

32. Si $f(x)=x^3-2$, entonces, f es continua en todos los números reales. Además, $f(0)=-2$ y $f(10)=998$. De esta manera, conforme x varía entre 0 y 10, la función toma todos los valores intermedios entre –2 y 998, en particular 25.

Sección 2.4, p. 77.

2. Sea $\phi(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\dfrac{(1+x^4)^{1/4}-(1+x^2)^{1/2}}{x^2}$, al desarrollar los binomios y simplificar, obtenemos:

$$\phi(x)=\frac{1}{x^2}\left[(1-1)-\frac{1}{2}x^2+o(x^4)\right]=-\frac{1}{2}+o(x^2)$$

así que $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=-\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=0$

6. Recuérdese que para $w<0$, $\sqrt{w^2}=|w|=-w$, de esta manera, para $x+1<0$, tenemos:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+1)^2}}=-\sqrt{\frac{x^2+1}{-x-1}}=-\sqrt{-x+1-\frac{2}{x+1}}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -\infty$

8. Si $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$, $\quad f(1+w) = \dfrac{1-(1+w)^{1/3}}{1-(1+w)^{1/4}}$,

de donde $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{w\to 0} f(w) = \dfrac{4}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{2x^2}{4x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3-2x^2}{(2x^2+1)(4x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+o(x^2)}{8x^3+o(x^2)} = -\dfrac{1}{8}$

UNIDAD II. CÁLCULO DIFERENCIAL

Sección 3.3, pp. 107-110

1. a) –3.141592548

   b) 0.2499968

   c) 8.2123541

2.

p	2^p
1	2
1.4	2.639015821
1.41	2.657371622
1.414	2.66474965
1.4142	2.6651119088

   a) 2.665144142

   b) La sucesión correspondiente a la primera columna converge a $\sqrt{2}$, por lo tanto la correspondiente a la segunda columna converge a $2^{\sqrt{2}}$.

   c) Ninguno de los valores dados por la calculadora, para números irracionales, es exacto, tan sólo son aproximaciones, con el número de cifras que utiliza la calculadora.

d)

h	$g(h)$
0.1	1.903869717
0.01	1.8864911
0.001	1.88473662
0.0001	1.884561

De acuerdo con esta tabla, el valor aproximado de $f'(2)$ es 1.885.

5. a) $2\operatorname{sen}2x+8x\cos 2x-4x^2\operatorname{sen}2x$

   b) $18e^{3x}+5xe^{3x}+27x^2e^{3x}$

   c) 3

   d) 2

   e) $(2n)!\,x^n$

7. a) 2

   b) 1

   c) $1/e$

9. $s=\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

   Para la función exponencial, $s=1$.

Sección 4.1, pp.121-122

5. a) $n=7$

$P_n(x)$	$f(x)$ (calculadora)
0.1	0.099833416
0.01	$9.999833284 \times 10^{-3}$
0.001	$9.999998333 \times 10^{-4}$
0.0001	$9.999999983 \times 10^{-5}$
0.00001	1×10^{-5}

b) $n = 5$

$P_n(x)$	$f(x)$ (calculadora)
0.1	0.099833416
0.01	$9.999833334 \times 10^{-3}$
0.001	$9.999983333 \times 10^{-4}$
0.0001	$9.999999983 \times 10^{-5}$
0.00001	1×10^{-5}

c) $n = 3$

$P_n(x)$	$f(x)$ (calculadora)
0.1	0.0998333333
0.01	$9.999833333 \times 10^{-3}$
0.001	$9.999983333 \times 10^{-4}$
0.0001	$9.999999983 \times 10^{-5}$
0.00001	1×10^{-5}

d) $n = 1$

$P_n(x)$	$f(x)$ (calculadora)
0.1	0.1
0.01	0.01
0.001	0.001
0.0001	0.0001
0.00001	0.00001

Sección 4.2, pp. 131-132

1. a) 0.01025
   b) 0.01032, 0.7%
   c) 0.01025, 0

Sección 5.2, pp. 158-159

1. Sugerencia: Considérese fija la longitud del tramo de tubo y variable el ancho b del corredor. Ahora obténganse la ecuación de la curva que describe el extremo libre del tubo cuando el extremo fijo se desliza sobre la pared del otro corredor y el tubo permanece en contacto con la esquina formada entre ambos corredores.

   Finalmente, determínese el máximo de la curva obtenida. El resultado dará la relación entre la longitud l del tubo y el ancho b del corredor.

4. a) (-0.6, -0.8)

   b) (2.6, -3.2)

   Los puntos en cuestión son las intersecciones de la circunferencia y la recta que pasa por el punto dado y el centro de la circunferencia.

Sección 5.5, p. 182.

3. 0.828427

Sección 5.6, p. 186.

1. a) 0

   b) -1 / 6

   d) ln 3

UNIDAD III. CÁLCULO INTEGRAL

Sección 6.1, pp. 196-197.

1. $\sqrt{9-x^2}\left(\frac{45x}{8}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{243}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+c$

2. $(1+\tan w)\tan w$

4. $-\operatorname{arcsen}(3-2z)+c$

5. $\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\right]+c$

Sección 6.2, pp. 208-209

1. **54**

Sección 6.3, pp. 220-221

1. $\dfrac{\pi}{2}$

7. 35.6896

9. $\dfrac{\pi}{2} \cong 1.5708$

11. $\pi \cong 3.1416$

Sección 7.1, pp. 234-235.

2. $\dfrac{3\pi}{8} \cong 1.178$

4. $\dfrac{128\pi}{7} \cong 57.446$

6. $3\pi \cong 9.4248$

8. $\dfrac{16\pi}{3} \cong 16.755$

10. $\dfrac{8}{27}\left(-1+10\sqrt{10}\right) \cong 9.0734$

12. $6a$

H

Referencias bibliográficas

Arcos, I., *Geometría Analítica. Ecuaciones y Gráficas*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

Burghardt, M., *Ingeniería Termodinámica*, 2ª edición, Harla, México, 1984.

Gere, J. y S. Timoshenko, *Mecánica de Materiales*, Thomson, México, 1998.

Hibbeler, R., *Ingeniería Mecánica, Dinámica*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1996.

Howell, J. y R. Buckius, *Principios de Termodinámica para Ingenieros*, McGraw-Hill, México, 1990.

Jaramillo, G. y A. Alvarado, *Electricidad y Magnetismo*, UNAM-Trillas, México, 1990.

Lehmann, Ch., *Geometría Analítica*, UTEHA, México, 1953.

Meriam, J.L. y L.G. Kraige, *Mecánica para ingenieros, Dinámica*, Reverté, España, 1998.

Purcell, E., *Electricidad y Magnetismo*, Berckeley Phisics Course, Reverté, España, 1969.

Resnick, R., D. Halliday y K. Krane, *Física*, Vol. 2, 3ª edición, CECSA, México, 1994.

Simmons, G., *Ecuaciones Diferenciales*, 2ª Edición, McGraw-Hill, México, 1993.

Zemansky, M., y R. Dittman, *Calor y Termodinámica*, McGraw-Hill, España, 1984.

Fundación ICA es una asociación civil constituida conforme a las leyes mexicanas el 26 de octubre de 1986, como se hace constar en la escritura pública número 21 127, pasada ante la fe del Lic. Eduardo Flores Castro Altamirano, notario público número 33 del Distrito Federal, inscrita en el Registro Público de la Propiedad en la sección de "Personas morales civiles", bajo folio 12 847. A fin de adecuar a las disposiciones legales vigentes los estatutos sociales, éstos fueron modificados el 17 de octubre de 1994, como se hace constar en la escritura pública número 52 025 pasada ante la fe del Lic. Jorge A. Domínguez Martínez, notario público número 140 del Distrito Federal.

Fundación ICA es una institución científica y tecnológica inscrita en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el número 99/213 del 13 de agosto de 1999.

Consejo Directivo de la Fundación ICA

Presidente
Ing. Bernardo Quintana

Vicepresidentes
Dr. Francisco Barnés de Castro
Dr. Daniel Resendiz Núñez
Dr. Julio Rubio Oca
Ing. Raúl López Roldán

Director Ejecutivo
Ing. Fernando O. Luna Rojas

Cuerpos Colegiados de los Progrmas Operativos

Comité de Becas
Dr. Juan Casillas García de León
Dr. Sergio Gallegos Cazares
Ing. Miguel Ángel Parra Mena

Comité de Premios
Dr. Luis Esteva Maraboto
M. en I. Mario Ignacio Gómez Mejía
Ing. Gregorio Farías Longoria

Comité de Publicaciones
Dr. Oscar Gonzalez Cuevas
Dr. Horacio Ramírez de Alba
M. en I. Gabriel Moreno Pecero
Ing. Santiago Martínez Hernández
Ing. Gilberto García Santamaría González

Comité de Investigación
Dr. José Luis Fernández Zayas
Dr. Bonifacio Peña Pardo
Dr. Ramón Padilla Mora
Dr. Roberto Meli Piralla

Universidad Autónoma del Estado de México

M. en A. Uriel Galicia Hernández
Rector

M. en S. P. Ezequiel Jaimes Figueroa
Secretario Académico

M. en A. E. Pedro Enrique Lizola Margolis
Secretario Administrativo

Ing. Roberto Mercado Dorantes
Secretario de Rectoría

C. P. Blanca M. Álamo Neidhart
Contralora

Dr. en Q. Rafael López Castañares
Coordinador General de Investigación y Estudios Avanzados

M. en Pl. Gustavo A. Segura Lazcano
Coordinador General de Difusión Cultural

Ing. Jesús Hernández Ávila
Director General de Extensión y Vinculación Universitaria

M. en E. Gerardo E. del Rivero Maldonado
Director General de Planeación y Desarrollo Institucional

M. en D. Alfonso Chávez López
Abogado General

Cálculo I para Estudiantes
de Ingeniería, segunda Edición.
Se terminó de imprimir en el mes de
noviembre de 1999 en los talleres de
Editorial Emahaia, S.A. de C.V.,
Av. Morelos Ote. No. 300,
Toluca México
Tel. 2-15-21-90, el tiraje consta de
2000 ejemplares.