



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

ANÁLISIS DE DISPOSITIVOS ELECTROMAGNÉTICOS EN BAJA FRECUENCIA
MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS
CARTESIANOS 2D Y AXISIMÉTRICOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. EN I. VÍCTOR MANUEL JIMÉNEZ MONDRAGÓN

TUTOR PRINCIPAL
DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ, UAM-AZCAPOTZALCO
COMITÉ TUTOR
DR. CÉSAR ANGELES CAMACHO, INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
DR. ENRIQUE MELGOZA VÁZQUEZ, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA
DR. FRÉDÉRIC TRILLAUD PIGHI, INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO. SEPTIEMBRE 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. FRÉDÉRIC TRILLAUD PIGHI
Secretario: DR. CÉSAR ANGELES CAMACHO
Vocal: DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ
1^{er}. Suplente: DR. MARCO ANTONIO ARJONA LÓPEZ
2^{d o}. Suplente: DR. ENRIQUE MELGOZA VÁZQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO.

TUTOR DE TESIS:

DR. RAFAEL ESCARELA PÉREZ

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Rafael', is written over a horizontal dashed line. The signature is stylized and cursive.

FIRMA

Dedicatoria:

A mi esposa Silvia Barrera García, por su apoyo incondicional.

A mis padres, por haberme apoyado en todo y por confiar en mis decisiones.

*A mi hermana y hermano, por su apoyo y por los grandes momentos que me
han dado.*

A mis amigos por su apoyo y sincera amistad

Agradecimientos

Extiendo mi reconocimiento a:

1. Agradezco al **Dr. Rafael Escarela Pérez**, por todas sus enseñanzas.
2. También quiero agradecer a todos los profesores del **Área de Ingeniería Energética y Electromagnética** de la Universidad Autónoma Metropolitana; su gran apoyo, orientación y motivación fueron de mucha ayuda para la realización de este trabajo.
3. Los **miembros del jurado**, por todos sus comentarios que ayudaron a enriquecer este trabajo de tesis.
4. **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)**, por el apoyo otorgado mediante la beca para estudios de posgrado, de agosto 2013 a julio 2017.
5. **CONACYT**, por el apoyo otorgado mediante la beca mixta-movilidad en el extranjero, de agosto de 2016 a diciembre 2016 para realizar una estancia de investigación en Université de Lorraine, Francia.

Resumen

En esta tesis se presenta una formulación general y sistemática para el análisis en el dominio de la frecuencia de múltiples sistemas de campo magnético que se interconectan eléctricamente a través de circuitos. La formulación propuesta se basa en el método del elemento finito, el análisis nodal modificado y la técnica de análisis multi-sistema para plantear el método de acoplamiento circuito-campo. Esta aproximación permite la solución simultánea de múltiples problemas de campo 2D Cartesianos y axisimétricos, considerando las terminales eléctricas de cada modelo de elementos finitos como elementos no naturales del método de análisis nodal modificado, para su incorporación sistemática en el sistema global de ecuaciones. La formulación permite analizar redes eléctricas con topología arbitraria, donde los sistemas de campo se consideran como elementos adicionales de circuito. Se introduce un bloque de construcción unificado para modelos 2D Cartesianos y axisimétricos, permitiendo una implementación computacional sencilla. Para determinar la eficacia de la formulación, se analiza el comportamiento electromagnético de un motor de inducción doble jaula de ardilla, que se alimenta con una fuente de voltaje trifásica a través de un banco de transformadores. Se emplea un modelo 2D Cartesiano para simular el motor, mientras que se utiliza una representación axisimétrica para cada transformador monofásico. Por consiguiente, se resuelven cuatro modelos de elementos finitos de forma simultánea, los cuáles están interconectados eléctricamente a través de elementos de circuito.

Por otra parte se propone una técnica novedosa para el análisis de problemas en 3D, mediante el ensamblaje de modelos 2D Cartesianos y axisimétricos a través de circuitos. Es importante que estos dominios puedan reproducir la geometría 3D del dispositivo cuando se interconectan. Los distintos modelos de elementos finitos 2D Cartesianos y axisimétricos se acoplan a través de sus terminales eléctricas, y junto con una especificación apropiada de condiciones de frontera, se reproduce el comportamiento electromagnético del dispositivo original en 3D de manera precisa. La principal ventaja de esta metodología de análisis es que se mantienen los atributos bien conocidos de utilizar modelos en 2D (eficiencia computacional y disminución de tiempos de cómputo), sin recurrir a factores de corrección o modelos de parámetros concentrados. La técnica propuesta se utiliza para analizar un transformador de potencia trifásico con núcleo acorazado. Se usa un modelo 2D Cartesiano para representar la sección transversal del núcleo magnético y devanados, mientras que las secciones finales de cada devanado, no consideradas en el modelo Cartesiano, se insertan mediante modelos axisimétricos. Los resultados obtenidos con esta formulación muestran una diferencia menor al 1% en las corrientes en los devanados en comparación con un modelo en 3D.

Abstract

A general and systematic formulation based on the finite element method, modified nodal analysis and a multi-field system approach is presented for the analysis of multiple magnetic field systems in the frequency domain, that are electrically interconnected through circuit networks. This approach permits the simultaneous solution of any number of 2D Cartesian and axisymmetric problems by considering the electrical terminals of each finite element model as nonnatural elements of the modified nodal analysis, allowing their systematic incorporation into the global system of equations. This way, arbitrary electrical network topologies can be readily analyzed, where the magnetic systems are no more than simple elements of the circuit system. Moreover, a unified building block is introduced for the 2D and axisymmetric models, leading to easy computer implementation. The effectiveness of the formulation is tested by determining the electromagnetic behavior of a double-squirrel cage induction motor that is connected to three feeding transformers. A 2D Cartesian finite element model is employed for the three-phase motor, whereas an axisymmetric representation is used for each transformer. Hence, four finite element models are simultaneously solved, which are electrically coupled through circuit elements.

A new methodology to model true 3D electromagnetic devices that can be judiciously disassembled in Cartesian and axisymmetric models is proposed. It is important that these domains can reproduce the original 3D geometry of the device when they are joined together. The Cartesian and axisymmetric models are coupled through their electrical terminals, along with a proper specification of boundary conditions, to nearly reproduce the actual electromagnetic behavior of the original 3D device. This way, all the convenient and well-known attributes of 2D FE modeling are kept, without resorting to correction factors or external circuit elements. This novel technique has been used to analyze a shell-type three-phase power transformer. A 2D Cartesian FE model is set up to represent the cross-section of the transformer core and its three-phase winding, whereas an axisymmetric representation is employed for the end sections of each set of windings (one per phase). All models and their associated circuit systems are simultaneously solved, providing a circuit-field method that is easy to implement at low computational cost, keeping the well-known advantages of 2D FE modeling. Our approach shows a remarkably small difference (no higher than 1%) with a full 3D FE model.

Índice general

Índice de figuras	ix
Tablas	xi
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estado del arte: Métodos de acoplamiento <i>circuito-campo</i>	3
1.2.0.1. Acoplamiento débil	4
1.2.0.2. Acoplamiento fuerte	6
1.3. Objetivos	9
1.4. Contribuciones	9
2. Sistemas electromagnéticos y sus puertos eléctricos	13
2.1. Sistema de EF axisimétrico usando vectores de devanado	13
2.1.1. Discretización mediante el MEF	20
2.2. Sistema de EF Cartesiano usando vectores de devanado	25
3. Método de acoplamiento fuerte EF-ANM-Multi-Sistema	29
3.1. Análisis nodal modificado	29
3.2. Contribución no natural de un sistema de elementos finitos axisimétrico al ANM	32
3.3. Contribución no natural de un sistema de elementos finitos Cartesiano	34
3.4. Sistema acoplado EF-ANM-Multi-Sistema	35
4. Validación numérica de la formulación Cartesiana-axisimétrica	39
4.1. Descripción del modelo de EF del motor	40
4.1.1. Especificaciones eléctricas	40
4.1.2. Especificaciones geométricas	42
4.1.3. Propiedades físicas	42
4.1.4. Mallado de la geometría	44
4.1.5. Condiciones de frontera	45
4.2. Características de los transformadores	46

ÍNDICE GENERAL

4.3. Resultados	47
4.3.1. Metodología de validación	49
4.3.2. Resultados y análisis	52
5. Análisis 3D de dispositivos electromagnéticos mediante descomposición bi- dimensional	57
5.1. Modelado tridimensional y bidimensional	58
5.2. Descomposición del dominio	59
5.3. Análisis de un transformador trifásico	59
5.3.1. Subdominios con geometría axisimétrica	59
5.3.2. Subdominio con geometría Cartesiana	62
5.3.3. Proceso de unión de los modelos de EF	62
5.4. Simulaciones	63
5.4.1. Resultados a carga nominal	63
5.4.2. Resultados de la operación en cortocircuito	64
5.4.3. Validación de resultados	65
5.4.3.1. Comparación entre valores locales de campo magnético.	66
6. Conclusiones y trabajos futuros	69
6.1. Conclusiones	69
6.1.1. Formulación ANM-EF-multi-sistema	69
6.1.2. Descomposición bidimensional	71
6.2. Líneas de investigación abiertas y trabajos futuros	71
6.3. Fichas bibliográficas de las publicaciones	72
A. Publicaciones	73
B. Ecuaciones electromagnéticas de problemas axisimétricos	89
C. Bloques de construcción de diferentes elementos	91
D. Ejemplo de aplicación del ANM	93
E. Software de EF FLD	95
F. Formulación electromagnética 3D del transformador	97
F.1. Ecuaciones electromagnéticas	97
F.2. Modelo 3D de elementos finitos	99
Referencias	101

Índice de figuras

1.1. Modelo acoplado <i>circuito-campo</i> con 4 modelos de EF.	2
1.2. Problema de acoplamiento circuito-campo con n_t modelos de EF.	10
2.1. Modelo en 3D de un solenoide.	14
2.2. Modelo axisimétrico de un solenoide.	14
2.3. Coordenadas cilíndricas.	15
2.4. Representación del voltaje inducido en conductores sólidos y filamentos mediante fuentes de voltaje controladas por PMV.	25
2.5. Representación de los voltajes inducidos mediante fuentes de voltaje controladas por PMV.	28
4.1. Problema acoplado bajo estudio.	40
4.2. Circuito del sistema acoplado: a) conexión del banco de transformadores y el estator de la máquina de inducción, b) conexión en la jaula de ardilla del rotor.	41
4.3. Vista exterior del motor de inducción a modelar.	41
4.4. Esquema del devanado de un estator de doble capa.	42
4.5. Sección transversal de la armadura del estator y rotor (distancias en mm).	43
4.6. Dimensiones de las ranuras del estator y rotor (distancias en mm).	43
4.7. Dependencia $B(H)$ de las laminaciones del núcleo magnético.	44
4.8. Geometría y malla de EF del motor de inducción.	45
4.9. Condiciones de frontera.	46
4.10. Geometría del transformador (dimensiones en mm).	47
4.11. Geometría del transformador axisimétrico (dimensiones en mm).	48
4.12. Malla de EF del transformador axisimétrico de 5 kVA.	48
4.13. Líneas de campo magnético en el motor a deslizamiento unitario.	49
4.14. Líneas de campo magnético a deslizamiento nominal ($S=0.034$).	50
4.15. Líneas de campo magnético en cada transformador axisimétrico. a) Fase a, b) fase b y c) fase c.	50
4.16. Curva par-deslizamiento.	51

ÍNDICE DE FIGURAS

4.17. Problema acoplado a resolver en FLUX2D.	52
4.18. Par electromagnético: FLD vs FLUX2D.	54
4.19. Voltaje inducido en la fase <i>a</i> del motor: FLD vs FLUX2D	54
4.20. Corrientes en la fase <i>a</i> del estator: FLD vs FLUX2D.	55
5.1. Diagrama de flujo del proceso mediante descomposición bidimensional.	60
5.2. Geometría 3D del transformador trifásico.	61
5.3. Vista superior del transformador.	61
5.4. Vista superior de la pierna externa del núcleo del lado derecho.	61
5.5. a) Modelo axisimétrico, uno para cada fase del transformador y b) modelo Car- tesiano.	62
5.6. Circuito de interconexión. Los números en los bloques de EF corresponden con la numeración en la Fig. 5.5 para cada región conductora.	63
5.7. Distribución del flujo magnético ($\omega t = 0$) a carga nominal.	64
5.8. Distribución del flujo magnético ($\omega t = 0$) en un cortocircuito.	65
5.9. Región de análisis del campo magnético.	67
5.10. Componente axial de la densidad de flujo magnético vs altura del devanado: condición de cortocircuito.	67
5.11. Componente radial de la densidad de flujo magnético vs altura del devanado: condición de cortocircuito.	68
D.1. Diagrama del circuito.	93
E.1. Estructura modular de FLD.	96
F.1. Modelo 3D de EF: a) geometría y condiciones de frontera, b)mallado.	99
F.2. Vista completa del modelo 3D del transformador.	100

Tablas

4.1. Constantes del modelo.	44
4.2. Corrientes en regiones con conductores filamentosos a deslizamiento unitario. . .	52
4.3. Corrientes en regiones con conductores filamentosos a plena carga.	52
4.4. Corrientes en regiones con conductores sólidos a deslizamiento unitario	53
4.5. Corrientes en regiones con conductores sólidos a deslizamiento nominal	53
5.1. Corrientes en los devanados a carga nominal	64
5.2. Corrientes en los devanados: condición de cortocircuito.	66
C.1. Bloques de construcción de elementos no naturales.	92

TABLAS

Nomenclatura

Símbolo	Unidades	Descripción
$\tilde{\mathbf{A}}$	[Wb/m]	Potencial magnético vectorial
\tilde{A}_z	[Wb/m]	Componente del potencial magnético vectorial en la dirección z
\tilde{A}_ϕ^*	[Wb/m]	Componente del potencial magnético vectorial en la dirección ϕ
$\tilde{\mathbf{B}}$	[T]	Densidad de flujo magnético
$\tilde{\mathbf{D}}$	[C/m ²]	Densidad de flujo eléctrico
$\tilde{\mathbf{E}}$	[V/m]	Intensidad de campo eléctrico
\tilde{E}_s^*	[V/m]	Componente de la intensidad de campo eléctrico en la dirección ϕ para conductores sólidos
e		Número de elementos en la malla de elementos finitos
e_f		Número de elementos en una región filamentaria
e_s		Número de elementos en cada región sólida
\tilde{I}_s^*	[A]	Corriente en conductores sólidos en la dirección ϕ
\tilde{I}_f^*	[A]	Corriente en conductores filamentosos en la dirección ϕ
\tilde{I}_s	[A]	Corriente en conductores sólidos en la dirección z
\tilde{I}_f	[A]	Corriente en conductores filamentosos en la dirección z

$\tilde{\mathbf{j}}$	[A/m ²]	Densidad de corriente eléctrica
\tilde{j}_f^*	[A/m ²]	Componente de la densidad de corriente en conductores filamentosos en la dirección ϕ
\tilde{j}_s^*	[A/m ²]	Componente de la densidad de corriente en conductores sólidos en la dirección ϕ
j		Número imaginario
l_{eff}	[m]	Longitud axial del modelo Cartesiano de elementos finitos
$\tilde{\mathbf{M}}$	[A/m]	Vector de magnetización
m		Número de nodos en un circuito eléctrico
N_f^*		Número de vueltas en una bobina perteneciente a un modelo axisimétrico
N_f		Número de vueltas en una bobina perteneciente a un modelo Cartesiano
N_A		Número de vueltas del devanado primario de la fase A
N_a		Número de vueltas del devanado secundario de la fase a
q_e		Número de nodos en un elemento
n		Número de nodos en la malla de elementos finitos
R_s	[Ω]	Resistencia en corriente directa de un conductor sólido en una región con geometría Cartesiana
R_f	[Ω]	Resistencia en corriente directa en una región Cartesiana con N_f conductores filamentosos conectados en serie
R_s^*	[Ω]	Resistencia en corriente directa de un conductor sólido en una región con geometría axisimétrica
R_f^*	[Ω]	Resistencia en corriente directa en una región axisimétrica con N_f^* conductores filamentosos conectados en serie

s		Número de regiones con conductores sólidos
S		Deslizamiento
S_{fil}^*		Dominio en regiones axisimétricas con conductores filamentosos
S_{sol}^*		Dominio en regiones axisimétricas con conductores sólidos
S_{nc}^*		Dominio en regiones axisimétricas no conductoras
S_{nc}		Dominio en regiones Cartesianas no conductoras
S_{fil}		Dominio en regiones Cartesianas con conductores filamentosos
S_{sol}		Dominio en regiones Cartesianas con conductores sólidos
\tilde{V}^*	[V]	Potencial eléctrico escalar en sistemas con geometría axisimétrica
\tilde{V}_s^*	[V]	Diferencia de potencial en un conductor sólido con geometría axisimétrica
\tilde{V}_f^*	[V]	Diferencia de potencial en una región axisimétrica con conductores filamentosos
\tilde{V}_s	[V]	Diferencia de potencial en un conductor sólido con geometría Cartesiana
\tilde{V}_f	[V]	Diferencia de potencial en una región Cartesiana con conductores filamentosos
W		Función de ponderación en el método de Galerkin
Γ	[m]	Trayectoria de integración
ε	[C ² /N·m ²]	Permitividad eléctrica
Λ_s^*	[m]	Integral de $1/r$ sobre el área de la sección transversal de un conductor sólido

Λ_f	[m ²]	Área de la sección transversal de cada región filamentaria
Λ_s	[m ²]	Área de la sección transversal de una región con conductores sólidos
μ	[H/m]	Permeabilidad magnética del medio
μ_r		Permeabilidad relativa
μ_0	[H/m]	Permeabilidad magnética del aire
ρ	[C/m ³]	Densidad volumétrica de carga
ϕ_{eff}	[rad]	Ángulo que abarca el modelo axisimétrico
τ_L	[N-m]	Par de carga
σ	[S/m]	Conductividad eléctrica
ν	[m/H]	Reluctividad magnética
δ	[m]	Factor de profundidad
χ_m		Susceptibilidad magnética
∇		Operador nabra $\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}\right)$
∂		Operador diferencial parcial
ω	[rad/s]	Frecuencia angular
Ω	[m ²]	Superficie de integración

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Las redes eléctricas involucran diferentes componentes que interactúan al mismo tiempo: generadores síncronos, motores de inducción, transformadores, líneas de transmisión, cargas, así como sistemas de control y protección. El análisis y diseño de sistemas eléctricos requiere de modelos apropiados para cada componente. La representación más común de cada uno de estos elementos, tanto en problemas en estado estable como transitorios, es mediante un circuito de parámetros concentrados [1, 2]. Este análisis es útil cuando se requiere conocer el comportamiento global del sistema, por ejemplo en un análisis de flujos de potencia.

Por otro lado, frecuentemente se requiere conocer a detalle el comportamiento electromagnético de una componente individual del sistema eléctrico, información que no provee un modelo de parámetros concentrados (puntos calientes, distribución de flujo magnético, campos de dispersión, efectos de borde del campo magnético, etc). Una formulación acoplada Elementos Finitos (EF)-circuito permite analizar, diseñar y controlar dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia con una representación distribuida, tomando en consideración la no linealidad de los materiales magnéticos, sus geometrías complejas, las conexiones de los devanados y su interconexión con los circuitos externos de alimentación. El cálculo numérico de campos magnéticos mediante el Método del Elemento Finito (MEF), se ha convertido gradualmente en un estándar para el diseño y análisis de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia. Hoy en día se han desarrollado métodos altamente especializados que han hecho posible interconectar un modelo de campo con elementos de circuito, facilitando el diseño y la especificación apropiada de los sistemas asociados al sistema de campo.

La mayoría de los esquemas de acoplamiento *circuito-campo* solo pueden tratar con un modelo de campo magnético, mientras que el resto de los elementos del sistema se representan con un modelo de parámetros concentrados. Sin embargo, existen problemas donde se requiere analizar con detalle varios sistemas electromagnéticos que tienen una interconexión a través de

circuitos eléctricos. Con la finalidad de abordar esta problemática, este trabajo de tesis se enfoca a establecer métodos numéricos para acoplar múltiples modelos de campo magnético a través de la técnica EF-Análisis Nodal Modificado (ANM) para resolver problemas de interconexión como el que se muestra en la Fig. 1.1.

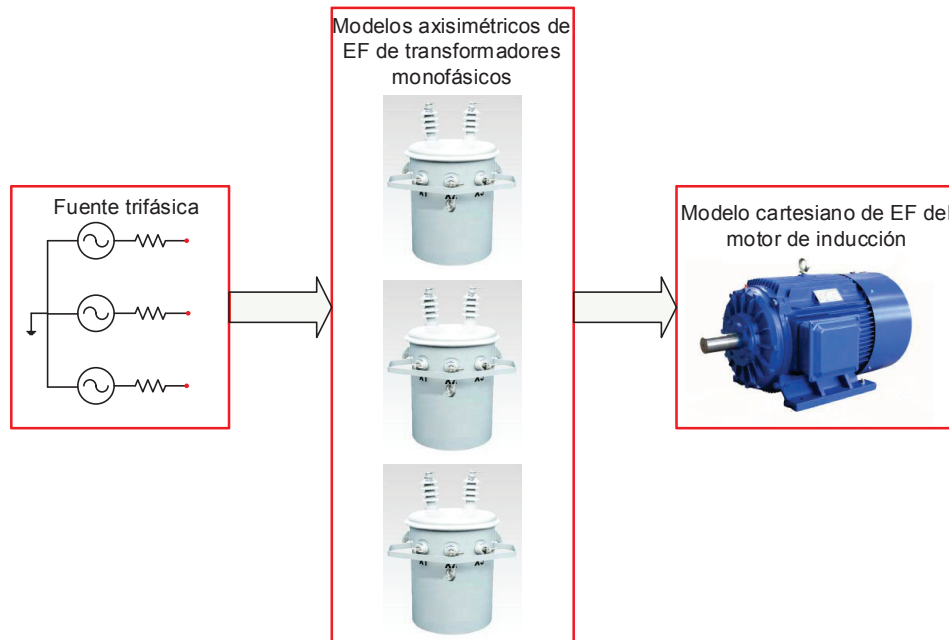


Figura 1.1: Modelo acoplado *circuito-campo* con 4 modelos de EF.

Este problema de múltiples modelos de campo interconectados ofrece desafíos relacionados con flexibilidad y simplicidad numérica y eficiencia computacional. En este sentido la técnica de ANM es un método poderoso para el análisis sistemático de circuitos eléctricos [3], que ofrece las ventajas deseadas al resolver también el problema de circuito-campo. Esta técnica se utiliza ampliamente en la elaboración de paquetes modernos de análisis de circuitos, ya que la incorporación de nuevos elementos es sencilla y sistemática.

Este trabajo de tesis muestra formalmente que el método de ANM se puede usar para acoplar múltiples sistemas de campo Cartesianos y axisimétricos. Cabe destacar que en la literatura no se habían reportado trabajos que resuelvan el problema de acoplar n modelos de EF con geometría cartesiana con m modelos con geometría axisimétrica, ya sea en el dominio de la frecuencia o con un análisis en el dominio del tiempo.

1.2. Estado del arte: Métodos de acoplamiento *circuito-campo*

El estudio de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia, mediante el MEF, se usa comúnmente tanto en la academia como en la industria para el diseño y optimización de los mismos [4]. Actualmente se dispone de software comercial y libre que permite resolver problemas en dos o tres dimensiones, tanto estáticos como en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo. Además se dispone de métodos especializados para calcular variables eléctricas, electromagnéticas y mecánicas (par electromagnético, velocidad, voltaje inducido, etc) de forma precisa. El desarrollo de métodos numéricos especializados ha permitido la interconexión de un modelo de campo electromagnético con circuitos eléctricos. Este problema se ha estudiado desde hace poco más de 40 años [5] y aún ofrece desafíos relacionados con multifísica, la simplicidad numérica y eficiencia computacional.

El problema acoplado *circuito-campo* surge debido a que la ecuación de difusión depende directamente de la densidad de corriente [4, 6]. De hecho, las primeras simulaciones de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia utilizando el MEF, se resolvían asumiendo conocida la densidad de corriente en los devanados [7, 8]. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones los dispositivos electromagnéticos se alimentan con fuentes de voltaje y las corrientes en los conductores del sistema electromagnético son incógnitas. Esto resulta en la necesidad de resolver de manera simultánea los circuitos externos de alimentación y las ecuaciones de campo del sistema.

En los trabajos presentados en [5, 9, 10, 11, 12], se analiza el comportamiento de turbogeneradores bajo diferentes condiciones de operación (cortocircuito, circuito abierto, etc). Estos son los primeros trabajos donde se consideran conexiones externas del problema de campo con circuitos. Las ecuaciones del MEF se formularon a través del método nodal [10] y el efecto de los circuitos en el rotor se tomó en cuenta al introducir el concepto de matriz de conductividad, en el que se incorporan las características de cada circuito (resistencia, número de vueltas, conductividad, longitud axial del modelo, etc). La formulación tal y como se presenta en estos trabajos carece de generalidad, ya que se utiliza exclusivamente en el análisis de turbogeneradores. Un trabajo interesante que muestra la derivación de las expresiones de los circuitos, acoplados al modelo de elementos finitos en el análisis de turbogeneradores, se puede encontrar en [13].

En los 80's la formulación para abordar el problema *circuito-campo* se basaba en resolver de forma simultánea las ecuaciones magnéticas y eléctricas. Hasta entonces, los problemas con y sin corrientes de remolino se abordaban de manera separada en el modelo acoplado. En esta época se comprendió que para resolver problemas con corrientes inducidas en conductores masivos se debía utilizar un modelo acoplado, que además de tener como incógnita el potencial magnético vectorial, también debía incluir el potencial eléctrico escalar y la corriente total en cada conductor sólido. En [14] se derivó una formulación integro-diferencial para resolver

el problema de corrientes inducidas, en la que se combinó la ecuación de campo con la de voltaje para conductores, y se obtuvo una sola ecuación en términos del potencial magnético vectorial en el que se consideraba la corriente total conocida. Formulaciones similares para resolver problemas con corrientes de remolino se presentan en [15, 16, 17].

A partir de 1988, Piriou y colaboradores presentan una serie de trabajos relacionados al problema de acoplamiento circuito-campo. Con esta formulación se pueden tratar problemas con circuitos más complejos, que involucran además de resistencias, fuentes de voltaje, inductancias y dispositivos de electrónica de potencia como diodos. En las simulaciones realizadas se analiza un alternador conectado a un rectificador de potencia y un electroimán alimentado por una fuente de voltaje a través de un diodo [18, 19, 20]. También se analizó el problema de un motor de inducción con barras sesgadas con un modelo acoplado [21]. La máquina se modela mediante la combinación de varios modelos 2D Cartesianos, tomando en cuenta que la corriente en los conductores de cada modelo es la misma. Las ecuaciones del circuito eléctrico se acoplan de forma directa con las ecuaciones de campo para cada modelo en 2D.

Un análisis más completo, del problema acoplado con un dispositivo electromagnético se presenta hasta 1990 en [22] y [23]. La formulación propuesta incluye el acoplamiento de las ecuaciones de campo, circuito y movimiento. Considera conductores sólidos o filamentosos (conexiones en serie o paralelo) y la no linealidad de los materiales magnéticos. La principal característica del método propuesto es que sólo se necesita como entrada el voltaje aplicado en las terminales del dispositivo y las corrientes son incógnitas del sistema. Además calcula la fuerza magnética sobre cuerpos en movimiento con el método del trabajo virtual [24].

Una revisión exhaustiva de los trabajos publicados en los 80's para resolver el problema de acoplamiento circuito-campo se presenta en [25]. Gran parte de estos trabajos fueron desarrollados para resolver problemas específicos y la mayoría de las formulaciones propuestas son similares. Cabe destacar que hasta antes de los 90's se utilizaba el método de corrientes de lazo (basado en la ley de voltajes de Kirchhoff) para plantear las ecuaciones del circuito [26].

Métodos más sistemáticos fueron implementados hasta los 90's, basados en dos aproximaciones para acoplar análisis de elementos finitos con circuitos: acoplamiento fuerte (solución simultánea de ecuaciones) y acoplamiento débil (solución escalonada).

1.2.0.1. Acoplamiento débil

El problema de acoplamiento circuito-campo se ha resuelto usando un acoplamiento débil, donde los modelos de campo y circuitos se resuelven como sistemas separados, y las soluciones independientes de cada uno de estos se emplean para excitar los sistemas en un procedimiento iterativo. De aquí, cada sistema se desarrolla de forma autónoma con sus propios métodos matemáticos y numéricos.

El método de acoplamiento débil es atractivo cuando las constantes de tiempo de los sistemas de campo y de circuitos difieren de forma apreciable [27]. En estos casos, es factible la

interacción de simuladores de circuitos y software de elementos finitos, evitando la necesidad de programación de código numérico. De esta forma los desarrolladores de software de elementos finitos, no tienen que ser expertos en la programación de código para resolver problemas de circuitos eléctricos. Las principales ventajas de este método de acoplamiento son la flexibilidad y modularidad, permitiendo el uso de software de circuito ya probado.

Uno de los primeros trabajos que resuelven el problema circuito-campo mediante un acoplamiento débil se presenta en [28]. El método se basa en representar el modelo de elementos finitos del dispositivo electromagnético como un circuito multipuerto no lineal, donde las variables de acoplamiento entre el modelo de campo y el de circuito (ambos con topología arbitraria) son los voltajes y corrientes. En la formulación de elementos finitos que presentan, los conductores sólidos y filamentosarios se tratan de diferente forma: una representación basada en corriente para conductores filamentosarios y la representación clásica basada en voltaje para conductores sólidos. Las ecuaciones del circuito se obtienen a través del método de mallas modificado en el que las variables del circuito son las corrientes, los voltajes capacitivos, y los voltajes en los conductores sólidos. El método se utilizó para modelar un generador síncrono de imanes permanentes que alimenta un resistor variable a través de un rectificador de potencia.

En [29] abordan el problema acoplado resolviendo por separado los sistemas de campo magnético, circuito y sistema mecánico con un proceso de solución paso a paso con respecto al tiempo. Estos sistemas están conectados por variables de acoplamiento como son las corrientes de línea, inductancias, voltajes inducidos en la bobina, par y ángulo de rotación. El circuito es el sistema principal, mientras que el modelo de campo se incorpora como un elemento que se representa con un bloque de inductancias y voltajes inducidos. La formulación se particulariza a resolver problemas con motores de imanes permanentes sin escobillas. Además no se precisa el método que fue utilizado para abordar el problema con conductores sólidos y filamentosarios.

En [30] presentan un método de acoplamiento indirecto que se basa en extraer un conjunto de parámetros concentrados (la inductancia dinámica y el voltaje inducido para cada devanado) del modelo de campo, con los que se representa de forma aproximada el dispositivo electromagnético. Se utilizan diferentes pasos de integración entre el modelo de campo y el circuito para reducir el tiempo de cómputo en las simulaciones. Aún así, éste se puede incrementar de forma considerable debido al lazo implementado para la extracción de parámetros del modelo de campo. Además se tienen problemas numéricos en los integradores, tanto en simulaciones en estado estable como transitorias, debidos a la acumulación de errores numéricos. El método propuesto se valida con la simulación de un generador de inducción doblemente alimentado operando en estado estable a con carga reducida, y también presentan estudios transitorios aplicando un cortocircuito trifásico en el estator de la máquina.

En [27] y [31] se presenta un método de acoplamiento débil basado en el siguiente procedimiento. Primero, se realiza la simulación de EF y en cada paso de tiempo se extraen un conjunto de parámetros concentrados de los devanados (matriz de inductancias de acoplamiento, voltajes

inducidos y corrientes). El modelo de parámetros concentrados del dispositivo se usa para realizar la simulación en el circuito, generalmente en términos de pasos de tiempo más pequeños que en el modelo de EF, y se extrae el equivalente de Norton en los nodos donde se interconectan los devanados. Después, esta información se retroalimenta al modelo de EF para realizar la simulación en el siguiente paso de integración. Nótese que el dispositivo electromagnético se representa mediante un circuito equivalente linealizado en la simulación del circuito y por lo tanto no incorpora los fenómenos electromagnéticos de manera precisa. La formulación tiene el inconveniente de realizar la simulación en cada dominio con tiempos de retraso, lo que conlleva la acumulación de errores en el proceso de solución.

Los trabajos desarrollados en [32], [33] y [34] se centran en disminuir el tiempo de simulación en el análisis de sistemas a través de un acoplamiento débil. La idea es extraer los parámetros concentrados que describen el modelo de elementos finitos, a una tasa de cambio relacionada con la constante de tiempo del sistema de elementos finitos, y usar estos para iterar las ecuaciones del circuito con un paso de tiempo adaptado a las constantes de tiempo del sistema eléctrico, que son significativamente más pequeñas que las del sistema de campo en aplicaciones que involucran dispositivos de electrónica de potencia. Se resuelven los sistemas de campo y circuito por separado, con diferentes pasos de tiempo, evitando tiempos de simulación largos y mayor demanda computacional.

Cabe destacar que los trabajos antes mencionados se limitan a resolver el problema de acoplamiento con sólo un dispositivo electromagnético que se representa con un modelo de parámetros distribuidos. Recientemente se ha resuelto el problema de interconectar múltiples modelos de EF con un circuito externo, mediante un acoplamiento débil [35]. El modelo de parámetros concentrados de cada máquina se establece por el método de *multilazo* y los parámetros de acoplamiento (resistencias e inductancias) se extraen de las simulaciones de EF con corrientes conocidas en cada paso de tiempo. El método toma en consideración la no linealidad del material, corrientes de remolino, movimiento y armónicos al utilizar el modelo de EF de cada dispositivo electromagnético. Es importante resaltar que el problema que se está resolviendo con esta formulación es al final un circuito eléctrico. Además el método multi-lazo no puede tomar en cuenta por completo el efecto de las corrientes de remolino y considera de manera aproximada la saturación en el modelo de parámetros concentrados [36].

1.2.0.2. Acoplamiento fuerte

El método de acoplamiento fuerte resuelve de forma simultánea las ecuaciones del circuito y las del sistema magnético. Con este método se pueden encontrar soluciones de mayor precisión y rapidez, en comparación con el método de acoplamiento débil. Sin embargo, se tienen que implementar los códigos específicos para solucionar el problema acoplado.

El desarrollo del método de acoplamiento fuerte se basa principalmente en las técnicas de análisis de circuitos: mallas y nodos. Ambas formulaciones permiten la incorporación de conductores sólidos y filamentosarios en el sistema acoplado circuito-campo. Sin embargo, se puede analizar un número limitado de elementos: fuentes independientes de voltaje y corriente, resistencias, inductancias y capacitancias. En [37] se presenta una formulación capaz de incorporar conductores sólidos y filamentosarios con conexiones arbitrarias, usando el método nodal o el de mallas. Independientemente del método utilizado, ambos conductores se tratan de forma diferente en la formulación acoplada, lo que desde el punto de vista de implementación numérica complica su desarrollo.

Los trabajos que consideran un acoplamiento fuerte entre conductores y circuitos mediante el método de mallas se reportan en [22, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Las principales ventajas de estos métodos son la preservación de una matriz de elementos finitos dispersa, simétrica y definida positiva. La desventaja es que no consideran circuitos no lineales y los conductores filamentosarios y sólidos se tratan de forma diferente (representación basada en voltaje para conductores sólidos y una representación basada en corriente para conductores filamentosarios).

El desarrollo de técnicas novedosas de análisis de circuitos, cómo la teoría de topología de redes, permitió la incorporación de una gran variedad de elementos [44, 45, 46, 47, 48, 49]. Es importante mencionar que es necesario incorporar esta teoría cuando se tienen elementos en el circuito que no tienen una relación directa con la ley de voltajes de Kirchhoff, como es el caso de una fuente de corriente independiente. Los métodos topológicos para el análisis de problemas circuito-campo derivan una estructura en grafos del problema, que lleva a un sistema de ecuaciones consistente. En los trabajos presentados por Sadowski y colaboradores [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55] se utiliza la formulación de variables de estado en combinación con la técnica de grafos, para obtener la forma canónica de las ecuaciones de circuito al representar una red como un conjunto de ramas, nodos y enlaces. Cualquier configuración de circuito eléctrico se puede tratar con esta formulación y el método alcanzó la generalización al incorporar tanto conductores sólidos como filamentosarios. Una aproximación basada en voltaje (corriente) se establece para regiones con conductores sólidos (filamentosarios). Estos trabajos revolucionaron el análisis de los dispositivos electromagnéticos, principalmente las máquinas eléctricas, ya que el método de acoplamiento permite incorporar fuentes de voltaje y corriente, resistencias, inductancias, capacitancias, diodos, tiristores, transistores, etc. La principal aplicación de esta formulación es el modelado de máquinas eléctricas rotatorias, alimentadas con fuentes de voltaje a través de inversores de potencia para el control de velocidad y flujo magnético. En general, la principal desventaja de estas formulaciones es que carecen de simplicidad para su implementación, ya que se necesitan aplicar operaciones para reducir la complejidad del problema con la técnica de grafos, y como consecuencia se tiene un método de acoplamiento complicado.

El problema de acoplamiento fuerte circuito-campo también se puede formular utilizando el método de ANM [56]. Este método se basa en el método de análisis nodal, el cual a su

vez se basa en el modelo de admitancias de red. El método nodal se ha utilizado por décadas para resolver problemas de redes eléctricas en sistemas eléctricos de potencia [2], debido a la facilidad de implementación a través del concepto de ensamblaje de bloques (similar al proceso de ensamblaje en el MEF). Esta característica es muy atractiva debido a que las ecuaciones de una red se obtienen fácilmente y de forma sistemática. Sin embargo, el método nodal tiene limitaciones importantes debido a que elementos *no naturales*, tal como fuentes dependientes, transformadores, auto-transformadores y fuentes independientes de voltaje, no pueden ser considerados directamente debido a que no tienen una relación directa con la ley de corrientes de Kirchhoff. El ANM supera estas limitaciones al incorporar sistemáticamente elementos *no naturales* a través de ecuaciones de voltaje adicionales e inyecciones apropiadas de corriente en los nodos donde se conectan estos elementos.

Los primeros trabajos reportados en la literatura donde se aplica el ANM para acoplar modelos de EF con circuitos, se pueden encontrar en [57] y [58]. En [58] se presenta una formulación para resolver problemas en el dominio del tiempo, considerando solo conductores filamentosos y elementos de circuito básicos. El trabajo presentado en [59] resuelve el problema acoplado usando conceptos del método de ANM y puede tratar con una gran variedad de elementos de circuito. Sin embargo, no se explota el concepto de bloques de construcción para obtener una formulación compacta y sistemática, llevando a una implementación difícil del método propuesto.

En [60, 61, 62] se muestra que se puede obtener un método de acoplamiento simple, general y sistemático al considerar los conductores sólidos y filamentosos del sistema de campo como elementos no naturales (fuentes de voltaje controlada por potencial magnético vectorial) del método de ANM. La característica distintiva y única de este método es que se mantiene el concepto de bloques de construcción del método nodal y del MEF. Esta característica tan importante no se había explotado en intentos anteriores de usar el ANM, para resolver el problema de acoplamiento circuito-campo. Además se muestra que los conductores sólidos y filamentosos se pueden tratar de la misma manera en la formulación acoplada al introducir el concepto de vector de devanado. Esta técnica se implementó para resolver problemas no lineales tanto en el dominio de la frecuencia [60] como del tiempo [61].

El método de acoplamiento fuerte EF-ANM tal y como se presenta en [60], se ha extendido para interconectar eléctricamente un número arbitrario de sistemas de campo en 2D y analizar problemas de motores de inducción con rotores de barras sesgadas utilizando la aproximación conocida como *multirebanadas* [63]. Este es un caso particular donde los modelos 2D Cartesianos de elementos finitos de diferentes dispositivos electromagnéticos se conectan eléctricamente a través de circuitos múltiples para estudiar su interacción y en algunos casos, para considerar efectos 3D. Cabe mencionar que la técnica *multirebanadas* permite incorporar los efectos 3D de los modelos electromagnéticos, manteniendo las ventajas de una formulación en dos dimensiones (simplicidad y eficiencia computacional). Esta técnica analiza una serie de modelos de campo 2D

Cartesianos y aproximan la variación en la tercera dimensión en una forma discreta, generando modelos numéricos prácticos y económicos.

Recientemente se ha abordado el problema de acoplar varios modelos de EF con geometría 2D Cartesiana, a través de los circuitos de interconexión, usando el formalismo del método EF-ANM [64]. El trabajo considera que el circuito de interconexión es el sistema principal, mientras que los diferentes modelos de elementos finitos son elementos no naturales del ANM, que se introducen al sistema a través de sus respectivos nodos de interconexión en el circuito. Con esta formulación es posible simular un sistema eléctrico en estado estable, donde cualquier dispositivo electromagnético 2D Cartesiano se puede modelar utilizando su representación de circuito mediante parámetros concentrados o el modelo de elementos finitos de parámetros distribuidos. Para mostrar la efectividad del método se modela un motor de inducción alimentado por un bus infinito a través de un transformador. El transformador y el motor se modelan como sistemas de parámetros distribuidos, mientras que los circuitos incluyen los efectos de los anillos de corto circuito de la jaula de ardilla del motor, la barra del bus infinito y la línea de transmisión que interconecta los diferentes elementos.

1.3. Objetivos

- Objetivo general

Proponer técnicas numéricas de elementos finitos para la solución general de problemas electromagnéticos de baja frecuencia.

- Objetivos específicos

- Establecer métodos de acoplamiento fuerte para la solución simultánea de varios dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia 2D Cartesianos y axisimétricos, interconectados eléctricamente y modelados por el MEF. En la Fig. 1.2 se muestra de forma esquemática el problema que se aborda en este trabajo de tesis.
- Establecer métodos sistemáticos para la creación de ecuaciones *circuito-campo*, basados en el ANM.
- Establecer las propiedades numéricas de los métodos propuestos en el trabajo de tesis.

1.4. Contribuciones

- Se propuso un método de acoplamiento fuerte [65], basado en el ANM y el MEF, capaz de acoplar varios modelos 2D Cartesianos y axisimétricos de EF a través de redes de circuito con topología arbitraria, de forma sencilla y sistemática.

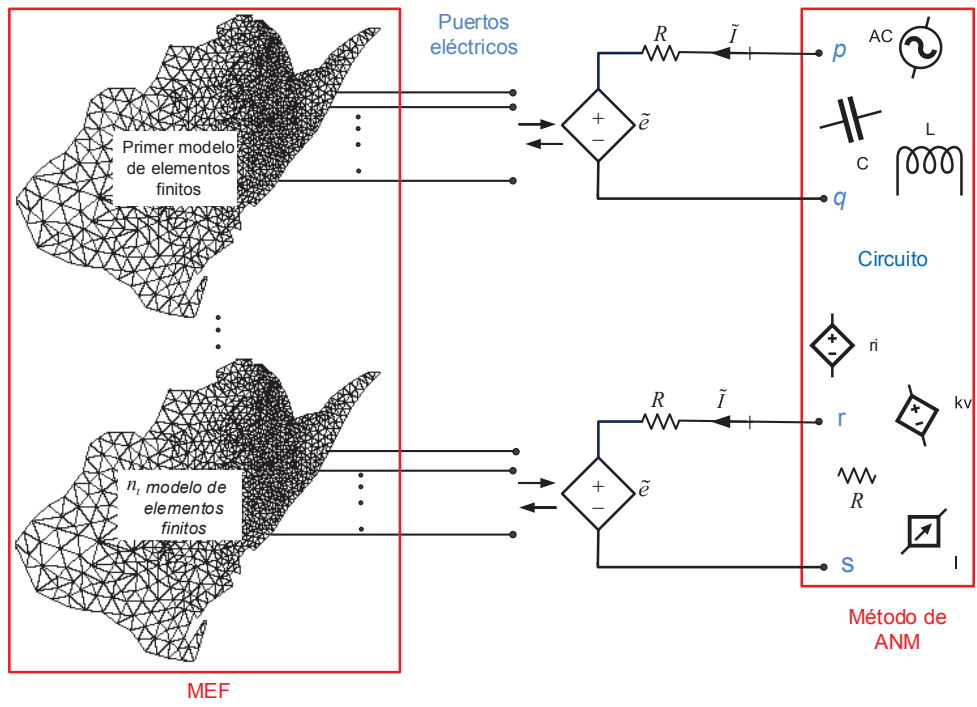


Figura 1.2: Problema de acoplamiento circuito-campo con n_t modelos de EF.

La formulación se desarrolla en el dominio de la frecuencia; sin embargo, el método acoplamiento puede aplicarse para resolver problemas en el dominio de tiempo.

- Se introduce un bloque de construcción general que permite que los sistemas de campo 2D Cartesianos y axisimétricos puedan ser tratados en la misma forma, lo que facilita la implementación computacional. Esto ha sido posible debido a la inserción de elementos no naturales nuevos, para el ANM, de conductores sólidos y filamentosarios en problemas axisimétricos.
- El método de acoplamiento fuerte EF-ANM que se propone en esta tesis amplía la capacidad de modelado con el MEF, al permitir el análisis simultáneo de sistemas de campo Cartesianos y axisimétricos magnéticamente independientes, que interactúan a través de redes de circuitos. Una implicación importante del método propuesto es que el usuario elige el nivel de refinamiento para cada dispositivo, debido a que éste se puede modelar como un modelo de parámetros distribuidos o un modelo de parámetros concentrados.
- Se propuso una formulación general que puede tratar con más de un sistema magnético (Cartesiano ó axisimétrico), modelados mediante el MEF, que interactúan a través de circuitos que pueden tener una amplia variedad de elementos (resistencias, inductancias, capacitancias, fuentes de voltaje/corriente dependientes e independientes, etc) e incluso incorporar modelos de parámetros concentrados de dispositivos electromagnéticos.
- Se propuso una metodología novedosa para modelar y analizar dispositivos electromagnéticos 3D, mediante varios modelos en dos dimensiones. La única restricción es que el dispositivo se pueda desensamblar en modelos Cartesianos y/o axisimétricos [66]. Después de realizar una búsqueda exhaustiva, se puede afirmar que este tipo de análisis no se había reportado en la literatura.

Las contribuciones de este trabajo de tesis fueron publicadas en la revista *IEEE Transactions on Magnetics* [65, 66] y se anexan en el Apéndice A.

Capítulo 2

Sistemas electromagnéticos y sus puertos eléctricos

En este Capítulo se presentan las ecuaciones electromagnéticas que gobiernan el comportamiento de sistemas de campo axisimétricos y Cartesianos. Además se realiza la discretización numérica de las ecuaciones diferenciales parciales usando el MEF.

Cada sistema de campo magnético considerado en este trabajo se asume magnéticamente independiente. En otras palabras, se asume que el campo magnético de un sistema no afecta directamente el campo de cualquier otro. La interacción entre ellos se da nivel de circuito y toma lugar a través de sus puertos eléctricos, que se interconectan con distintos elementos para formar redes eléctricas con topología arbitraria. Los puertos eléctricos de cada modelo de EF son las terminales de los conductores sólidos y filamentosarios, que se pueden ver como nodos de interconexión con el circuito en estudio.

Se desarrollan las expresiones en el dominio de la frecuencia usando fasores, suponiendo que los campos son puramente senoidales y con el objetivo de resolver problemas en estado estable. No obstante, se considera la no linealidad de los materiales magnéticos. Se desarrollan las expresiones para sistemas de campo axisimétricos y Cartesianos, cada uno de estos con conductores sólidos y filamentosarios, así como regiones no conductoras tanto lineales como no lineales.

2.1. Sistema de EF axisimétrico usando vectores de devanado

En ingeniería eléctrica hay dispositivos electromagnéticos que se pueden analizar con un modelo axisimétrico. Estos incluyen por ejemplo, solenoides y transformadores. En la Fig. 2.1 se muestra el modelo tridimensional de un solenoide y en la Fig. 2.2 se observa su representación axisimétrica.

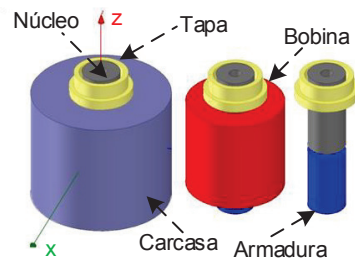


Figura 2.1: Modelo en 3D de un solenoide.

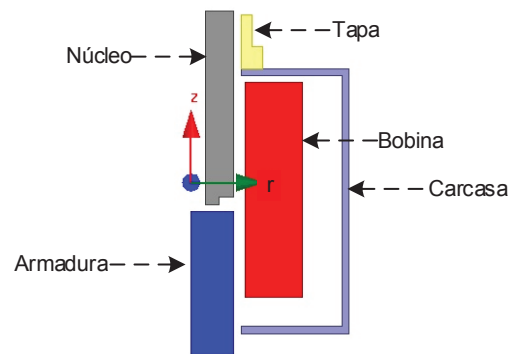


Figura 2.2: Modelo axisimétrico de un solenoide.

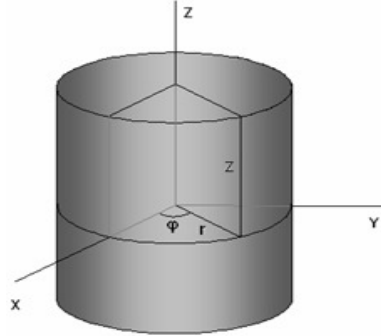


Figura 2.3: Coordenadas cilíndricas.

Un análisis 2D Cartesiano se basa en la suposición que la estructura no presenta variación geométrica en la dirección perpendicular al plano y que los campos son invariantes en esa dirección. Esta aproximación es razonable para muchos problemas, pero en el caso de solenoides y otros sistemas con geometrías circulares no es aplicable. Sin embargo, si la geometría posee simetría axial, el problema se puede tratar en dos dimensiones. Estos problemas se denominan axisimétricos y se estudian utilizando coordenadas cilíndricas (ver Fig. 2.3).

Así, el campo magnético en la sección de un dispositivo electromagnético con geometría axisimétrica se calcula con el MEF en dos dimensiones. El dispositivo de baja frecuencia se trata como un sistema magnético cuasi-estático, constituido por regiones no conductoras, así como por un número arbitrario de subdominios con conductores filamentosos y conductores sólidos. En la literatura se pueden encontrar varios esquemas de discretización por EF de sistemas axisimétricos [4, 40, 42]. Sin embargo, las formulaciones utilizadas para regiones conductoras (sólidas y filamentosas) no se prestan para una incorporación sistemática en un método de acoplamiento fuerte circuito-campo. En este sentido, esta sección provee una discretización única para conductores sólidos y filamentosos usando el concepto de vector de devanado, que lleva a una forma general para tratar ambos tipos de conductores en la formulación acoplada. Entonces, se obtiene una metodología de acoplamiento sistemática, donde los conductores sólidos se modelan como conductores filamentosos de una vuelta.

El comportamiento de dispositivos electromagnéticos en el dominio de la frecuencia se describe completamente mediante la solución de las ecuaciones de Maxwell [6]:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\tilde{\mathbf{B}} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + j\omega\tilde{\mathbf{D}} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \rho \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de Maxwell se complementan con las siguientes relaciones constitutivas que describen las propiedades del medio:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.5)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0(\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{M}}) \quad (2.6)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.7)$$

La relación entre $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ y $\tilde{\mathbf{M}}$ de la ecuación (2.6) puede simplificarse para medios isotrópicos donde se define una susceptibilidad magnética χ_m como:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \chi_m \tilde{\mathbf{H}} \quad (2.8)$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= \mu_0(\tilde{\mathbf{H}} + \chi_m \tilde{\mathbf{H}}) \\ &= \mu_0 \mu_r \tilde{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (2.10)$$

es la permeabilidad relativa. Se define la permeabilidad μ como:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.11)$$

y esto permite escribir la relación entre $\tilde{\mathbf{B}}$ y $\tilde{\mathbf{H}}$ como:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \nu \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.12)$$

donde ν es el inverso de la permeabilidad y se conoce como reluctividad magnética.

Las siguientes consideraciones se usan para resolver los problemas electromagnéticos de baja frecuencia que se abordan en este trabajo:

- El dispositivo electromagnético puede considerarse con una aproximación *cuasi-estacionaria*. Es decir la corriente de desplazamiento asociada a la ley de Ampère, puede omitirse cuando se opera a baja frecuencia.
- El fenómeno de histéresis se desprecia, pero la reluctividad ν del material magnético es dependiente del campo magnético y con ello se considera la no linealidad de los materiales magnéticos.
- Se asumen materiales magnéticos isotrópicos que satisfacen la ecuación (2.12).
- La conductividad eléctrica σ es constante.
- La densidad de corriente en conductores filamentosos es uniforme sobre la sección transversal del conductor.
- Se asume un modelo en dos dimensiones del sistema electromagnético, en el cual se pueden incorporar los efectos tridimensionales con modelos de parámetros concentrados.
- $\tilde{\mathbf{B}}$ es planar en modelos en dos dimensiones.

La densidad de flujo magnético $\tilde{\mathbf{B}}$, puede expresarse como el rotacional de un campo vectorial de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.13)$$

ya que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es igual a cero, lo cual satisface la ec. (2.3):

$$\nabla \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir con las siguientes expresiones para sistemas de campo axisimétricos en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) &= 0 & \text{en} & \quad S_{nc}^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) &= -\tilde{J}_f^* & \text{en} & \quad S_{fil}^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) &= -\tilde{J}_s^* & \text{en} & \quad S_{sol}^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde se utiliza una tilde para describir cantidades fasoriales y un asterisco para enfatizar la naturaleza axisimétrica de las excitaciones y potenciales. \tilde{A}_ϕ^* es la componente en ϕ del

Potencial Magnético Vectorial (PMV). En (2.15) se emplea el cambio de variable $\tilde{A}_\phi^* = r\tilde{A}_\phi$ (ver Apéndice B), para eliminar la asimetría en la matriz de rigidez que se presenta al aplicar el método de Galerkin en la obtención de las ecuaciones de EF en problemas axisimétricos [4]. \tilde{J}_f^* y \tilde{J}_s^* son la densidad de corriente en regiones con conductores filamentosos y la densidad de corriente no-uniforme en regiones con conductores sólidos, respectivamente. ν es la reluctividad del material, que puede ser función no lineal de la densidad de flujo magnético. S_{nc}^* , S_{fil}^* , S_{sol}^* son los dominios en regiones no-conductoras, regiones con conductores filamentosos y con conductores sólidos, respectivamente. Nótese que las componentes de $\tilde{\mathbf{H}}$ en términos del potencial magnético vectorial son:

$$\tilde{H}_r = -\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \quad (2.16)$$

y

$$\tilde{H}_z = \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \quad (2.17)$$

Las densidades de corriente \tilde{J}_f^* y \tilde{J}_s^* en (2.15) dependen del tipo de conductor electromagnético, y tiene un efecto directo sobre el circuito externo al cual se interconectan. Se considera primero el caso para conductores sólidos. El potencial magnético vectorial y la densidad de corriente sólo tienen componente en la dirección ϕ en el problema de campo axisimétrico. Por consiguiente, el potencial eléctrico escalar varía linealmente en la dirección ϕ de un conductor sólido. Si \hat{s} es la longitud de arco de un conductor sólido que abarca ϕ_{eff} radianes en el modelo, se tiene que

$$\tilde{V}_s^* = -\hat{s} \frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial \phi} \quad (2.18)$$

es la diferencia de potencial entre las terminales del conductor. La densidad de corriente \tilde{J}_s^* en (2.15) se puede escribir en términos del potencial magnético vectorial y el potencial eléctrico escalar como:

$$\tilde{J}_s^* = \sigma \tilde{E}_s^* = -\frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^* - \sigma \frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial \phi} \quad (2.19)$$

Sustituyendo el gradiente de potencial de (2.22) en (2.19) da como resultado:

$$\tilde{J}_s^* = -\frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^* + \frac{\sigma}{\hat{s}} \tilde{V}_s^* \quad (2.20)$$

Integrando (2.20) se puede obtener la corriente total en la región desunida S_{sol}^{*s} de S_{sol}^* :

$$\tilde{I}_s^* = \iint_{S_{sol}^{*s}} \tilde{J}_s^* dr dz = -j\omega\sigma \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{\tilde{A}_\phi^*}{r} dr dz + \frac{\sigma \tilde{V}_s^*}{\phi_{eff}} \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{1}{r} dr dz \quad (2.21)$$

y resolviendo para \tilde{V}_s^* , se obtiene la siguiente relación voltaje-corriente para conductores sólidos:

$$\tilde{V}_s^* = \frac{\phi_{eff}}{\sigma \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{1}{r} dr dz} \tilde{I}_s^* + \frac{j\omega\sigma\phi_{eff}}{\sigma \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{1}{r} dr dz} \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{\tilde{A}_\phi^*}{r} dr dz \quad (2.22)$$

Si se introduce en (2.22) la definición clásica de resistencia en corriente directa se observa que:

$$R_s^* = \frac{\phi_{eff}}{\iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{\sigma}{r} dr dz}, \quad (2.23)$$

entonces (2.22) se puede reescribir como:

$$\tilde{V}_s^* = R_s^* \tilde{I}_s^* + j\omega\phi_{eff} \frac{\iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{1}{r} \tilde{A}_\phi^* dr dz}{\Lambda_s^*} \quad (2.24)$$

donde, $\Lambda_s^* = \iint_{S_{sol}^{*s}} \frac{1}{r} dr dz$.

Los conductores filamentosos se consideran delgados, tal que su diámetro es menor al factor de profundidad definido por [67]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.25)$$

de modo que los efectos de las corrientes de remolino son despreciables en este tipo de conductores. Cada uno de los dominios S_{fil}^{*f} de S_{fil}^* con conductores filamentosos contienen secciones transversales denotadas por Λ_f . Cada una de estas secciones tiene una distribución uniforme de N_f^* conductores filamentosos conectados en serie, que lleva una corriente \tilde{I}_f^* . La densidad de corriente uniforme sobre Λ_f , está dada por:

$$\tilde{J}_f^* = \frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} \quad (2.26)$$

Nótese que Λ_f y Λ_s^* no poseen el mismo significado. Λ_f es el área de la sección transversal de cada región filamentaria S_{fil}^{*f} , mientras que Λ_s^* es la integral de $\frac{1}{r}$ sobre el área de la sección transversal de cada conductor sólido, y tiene unidades de longitud.

Sustituyendo en (2.15) la densidad de corriente en conductores sólidos (2.20) junto con (2.22), y la densidad de corriente en conductores filamentosos (2.26), se obtiene el problema de valor a la frontera a resolver para el caso axisimétrico de baja frecuencia:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) &= 0 & \text{en } S_{nc}^* \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) &= -\frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} & \text{en } S_{fil}^* \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) + \frac{j\omega\sigma}{r} \iint \frac{1}{\Lambda_s^*} \tilde{A}_\phi^* dr dz - \frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^* &= -\frac{\tilde{I}_s^*}{r\Lambda_s^*} & \text{en } S_{sol}^* \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Las corrientes en el lado derecho del sistema (2.27), son las únicas excitaciones del sistema de campo. Si se conocen estas corrientes en cada región conductora, el problema se puede resolver únicamente con el sistema de ecuaciones (2.27). Sin embargo, problemas con corrientes conocidas se encuentran muy rara vez en el análisis de dispositivos electromagnéticos de baja frecuencia. La primera expresión en (2.27) es la ecuación de Laplace y se utiliza para resolver problemas en regiones no conductoras. La segunda expresión resuelve el problema en regiones con devanados filamentosos y se conoce como ecuación de Poisson, mientras que la tercera es la ecuación de difusión que considera regiones que involucran corrientes de remolino.

La relación voltaje-corriente para un devanado de N_f^* conductores conectados en serie, se puede encontrar en términos del PMV usando la ley de Faraday e introduciendo la caída de voltaje en su resistencia:

$$\tilde{V}_f^* = R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{eff} \omega N_f^* \frac{\iint_{S_{fil}^*} \tilde{A}_\phi^* dr dz}{\Lambda_f} \quad (2.28)$$

donde R_f^* es la resistencia en corriente directa del devanado. Está expresión es fundamental para la interconexión de una región filamentaria con circuitos externos.

El sistema electromagnético que se presenta en (2.15) usualmente se conoce como formulación axisimétrica A - V . En el sistema equivalente (2.27), se ha eliminado la presencia de V y esta formulación simplemente se denomina formulación axisimétrica, donde las incógnitas son las corrientes \tilde{I}_f^* e \tilde{I}_s^* y el potencial magnético vectorial.

2.1.1. Discretización mediante el MEF

El sistema integro-diferencial (2.27) se resuelve mediante el método de elementos finitos. Las ecuaciones de EF en los diferentes subdominios se obtienen mediante la aproximación de Galerkin [4]. Este método se formula en términos de una integral del residuo y es un caso especial del método de residuales ponderados.

El sistema integro-diferencial (2.27) se puede reescribir para todo el dominio como:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) + \frac{j\omega\sigma}{r} \iint \frac{1}{\Lambda_s^*} \tilde{A}_\phi^* dr dz - \frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^* + \frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} + \frac{\tilde{I}_s^*}{r\Lambda_s^*} = R \quad (2.29)$$

donde el residual $R = 0$ si la solución \tilde{A}_ϕ^* es exacta. En el método de residuales ponderados se requiere que la proyección del residual sobre una función de ponderación W , sea igual a cero sobre el dominio de interés. Esto se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} WRd\Omega = 0 \quad (2.30)$$

La elección de la función de ponderación determina el tipo de método de residuales ponderados. Si se elige la función de ponderación igual que la función de forma, entonces se tiene la formulación de Galerkin. Las funciones de forma ζ_i [68], se utilizan para aproximar con polinomios el potencial magnético vectorial en un elemento como:

$$\tilde{A}_\phi^* = \sum_{i=1}^{q_e} \tilde{A}_{\phi_i}^* \zeta_i \quad (2.31)$$

donde $\tilde{A}_{\phi_i}^*$ es el PMV en el nodo i . A partir de aquí se trabaja como en el caso de coordenadas rectangulares, tomando r y z como y y x , respectivamente. Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (2.29), se obtiene:

$$\int_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) + \frac{j\omega\sigma}{r} \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{r} \tilde{A}_\phi^* d\Omega}{\Lambda_s^*} - \frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^* + \frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} + \frac{\tilde{I}_s^*}{r\Lambda_s^*} \right] d\Omega = 0 \quad (2.32)$$

Primero se desarrollan los dos primeros términos de (2.32). Estos se pueden reescribir como:

$$\int_{\Omega} W \left[\nabla \cdot \frac{\nu}{r} \nabla \tilde{A}_\phi^* \right] d\Omega \quad (2.33)$$

Usando la siguiente identidad vectorial:

$$U (\nabla \cdot \mathbf{G}) = \nabla \cdot (U\mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot \nabla U \quad (2.34)$$

con $U = W$ y $\mathbf{G} = \frac{\nu}{r} \nabla \tilde{A}_\phi^*$, la ecuación (2.33) se puede integrar por partes, tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[W \left(\frac{\nu}{r} \nabla \tilde{A}_\phi^* \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\nu}{r} \nabla \tilde{A}_\phi^* \right) \cdot \nabla W d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(W \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(W \frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con base en las ecuaciones (2.16) y (2.17) y definiendo el operador divergencia en el plano $z - r$, como para el plano $x - y$,

$$\nabla \cdot = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial r}$$

la primera integral en la ec. (2.35) se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (W H_z \mathbf{j} - W H_r \mathbf{i}) d\Omega \quad (2.36)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a (2.36), se tiene que:

$$\oint_{\Gamma} W (H_z \mathbf{j} - H_r \mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.37)$$

donde \mathbf{n} , el vector normal a la trayectoria Γ es $\mathbf{n} = n_z \mathbf{i} + n_r \mathbf{j}$. Sustituyendo (2.37) en (2.35) se obtiene:

$$\oint_{\Gamma} W (-H_r n_z + H_z n_r) d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial \tilde{A}_{\phi}^*}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \tilde{A}_{\phi}^*}{\partial z} \right] d\Omega \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) es el resultado de aplicar el método de Galerkin a los primeros dos términos de la expresión integral (2.32). Es importante mencionar que el primer término en (2.38) está relacionado con las condiciones de frontera naturales del problema de valores en la frontera. Nótese que el procedimiento de Galerkin condiciona que la suma de las integrales sobre el dominio Ω en la expresión (2.32) sea cero, por lo tanto la integral de línea sobre Γ también debe ser igual a cero. Esto se cumple al aplicar las condiciones de frontera del problema y por lo tanto no se incluye el término en la formulación.

Sustituyendo el segundo término de (2.38) en (2.32) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial \tilde{A}_{\phi}^*}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \tilde{A}_{\phi}^*}{\partial z} \right] d\Omega - \int_{\Omega} W \left[\frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_{\phi}^* \right] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} W \left[\frac{j\omega\sigma}{r} \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{r} \tilde{A}_{\phi}^* d\Omega}{\Lambda_s^*} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W \left[\frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W \left[\frac{\tilde{I}_s^*}{r \Lambda_s^*} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

La ecuación (2.39) es la forma débil de la formulación debido a que sólo hay derivadas de primer orden [4], a diferencia de (2.32) donde se tienen derivadas de segundo orden.

Una vez que se aplica el método de Galerkin, y considerando que en esta formulación las funciones de ponderación W son iguales a las funciones de forma ζ_i , se procede a la discretización numérica por EF. Para una malla con e elementos finitos, la discretización del sistema (2.39) con f regiones con conductores filamentosos y s regiones con conductores sólidos se expresa en forma matricial como:

$$-[S^*] \{\tilde{a}^*\} - j\omega \sum_s [D_s^*] \{\tilde{a}^*\} + j\omega \sum_s [D_s^{1*}] \{\tilde{a}^*\} + \sum_f \{W_f^*\} \tilde{I}_f^* + \sum_s \{W_s^*\} \tilde{I}_s^* = 0 \quad (2.40)$$

Las matrices y vectores en (2.40), se definen mediante las siguientes expresiones:

$$[S^*] = \sum_e \iint_{\Omega_e} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \zeta^T}{\partial r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \zeta^T}{\partial z} \right) dr dz \quad (2.41)$$

$$[D_s^*] = \sum_e \iint_{\Omega_e} \frac{\sigma}{r} \zeta \zeta^T dr dz \quad (2.42)$$

$$\{W_f^*\} = \frac{N_f^*}{\Lambda_f} \sum_{e_f} \iint_{S_{fil}^*} \zeta dr dz \quad (2.43)$$

$$\{W_s^*\} = \frac{1}{\Lambda_s^*} \sum_{e_s} \iint_{S_{sol}^*} \frac{1}{r} \zeta dr dz \quad (2.44)$$

$$[D_s^{1*}] = \sum_{e_s} \iint_{S_{sol}^*} \zeta \frac{\sigma_{e_s} \sum_{e_s} \iint_{S_{sol}^*} \frac{1}{r} \zeta^T dr dz}{\Lambda_s^*} dr dz \quad (2.45)$$

donde \tilde{a}^* es un vector $n \times 1$ de potencial magnético vectorial en los nodos de la malla de EF. $[S^*]$ es la matriz de rigidez de dimensión $n \times n$ que depende de la reluctividad magnética. $[D_s^*]$ y $[D_s^{1*}]$ también son de dimensión $n \times n$ y se conocen como matrices de conductividad. $\{W_f^*\}$ y $\{W_s^*\}$ son vectores de $n \times 1$ que encapsulan las propiedades de los devanados y conductores sólidos. ζ es un vector columna de funciones de forma ζ_i que se usan para aproximar el PMV mediante la expresión (2.31).

La ecuación (2.45) se puede expresar en términos del vector $\{W_s^*\}$, tal que:

$$[D_s^{1*}] = \sum_{e_s} \left[\sigma \iint_{S_{sol}^*} \frac{1}{r} \zeta dr dz \right] \{W_s^*\}^T = \sigma \Lambda_s^* \{W_s^*\} \{W_s^*\}^T = \frac{\phi_{eff}}{R_s^*} \{W_s^*\} \{W_s^*\}^T \quad (2.46)$$

El segundo y tercer término en (2.40) toman en consideración el efecto de las corrientes de remolino en conductores sólidos. La importancia de (2.46) radica en el hecho que la matriz resultante que involucra el producto $\{W_s^*\} \{W_s^*\}^T$ permite que los conductores sólidos se puedan tratar de forma similar que los conductores filamentosos. Nótese que los conductores sólidos son de una sola vuelta. Entonces, el vector de devanado $\{W_s^*\}$ permite que los conductores sólidos se puedan tratar como devanados filamentosos de una sola vuelta. Bajo esta consideración el sistema (2.40) se puede reescribir como:

$$-[S^{*1}] \{\tilde{a}^*\} + [W^*] \{\tilde{i}_c^*\} = 0 \quad (2.47)$$

donde

$$[S^{*1}] = [S^*] + j\omega \sum_s [D_s^*] - j\omega \sum_s [D_s^{*1}] \quad (2.48)$$

$[W^*]$ es una matriz de dimensión $n \times (f + s)$, que contiene en sus columnas los $f + s$ vectores de devanado. $\{\tilde{i}_c^*\}$ es un vector de corrientes de dimensión $(f + s) \times 1$.

La discretización por EF de las relaciones voltaje-corriente para regiones con conductores filamentosos y regiones con conductores sólidos se obtiene al sustituir la aproximación del PMV (2.31) en (2.28) y (2.24), respectivamente:

$$\tilde{V}_f^* = R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{eff}\omega \frac{N_f^*}{\Lambda_f} \sum_{e_f} \left[\int_{S_{fil}^*} \zeta^T drdz \right] \{\tilde{a}^*\} \quad (2.49)$$

$$\tilde{V}_s^* = R_s^* \tilde{I}_s^* + j\phi_{eff}\omega \frac{1}{\Lambda_s^*} \sum_{e_s} \left[\int_{S_{sol}^*} \frac{1}{r} \zeta^T drdz \right] \{\tilde{a}^*\} \quad (2.50)$$

El segundo término del lado derecho de las ecuaciones (2.49) y (2.50) es el voltaje inducido en cada una de las regiones con conductores filamentosos y conductores sólidos, respectivamente. Mas aún, el voltaje inducido se puede expresar en términos de los vectores de devanado $\{W_f^*\}$ y $\{W_s^*\}$, según:

$$\tilde{V}_f^* = R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{eff}\omega \{W_f^*\}^T \{\tilde{a}^*\} \quad (2.51)$$

$$\tilde{V}_s^* = R_s^* \tilde{I}_s^* + j\phi_{eff}\omega \{W_s^*\}^T \{\tilde{a}^*\} \quad (2.52)$$

El término relacionado con el voltaje inducido en una región conductora en las ecuaciones (2.51) y (2.52), se puede representar con una fuente de voltaje controlada por potencial magnético vectorial, tal y como se muestra en la Fig. 2.4. Además, la definición de los vectores de devanado $\{W_f^*\}$ y $\{W_s^*\}$, es particularmente importante en esta formulación debido a que estos términos permiten la interconexión del modelo de EF axisimétrico con circuitos externos, como se muestra en la Fig. 2.4. Estos vectores contienen información de las propiedades de los devanados filamentosos y conductores sólidos. De hecho, la suma de sus entradas siempre da el número de vueltas en la región conductora, independientemente del tipo y grado del elemento utilizado en la discretización. Además, las entradas diferentes de cero en los vectores de devanado coinciden con la numeración de los nodos que pertenecen a la región conductora.

Finalmente, para abordar el problema de acoplamiento circuito-campo para el caso axisimétrico se tiene que resolver el sistema (2.47) junto con las relaciones voltaje-corriente (2.51) y (2.52) para las $f + s$ regiones conductoras.

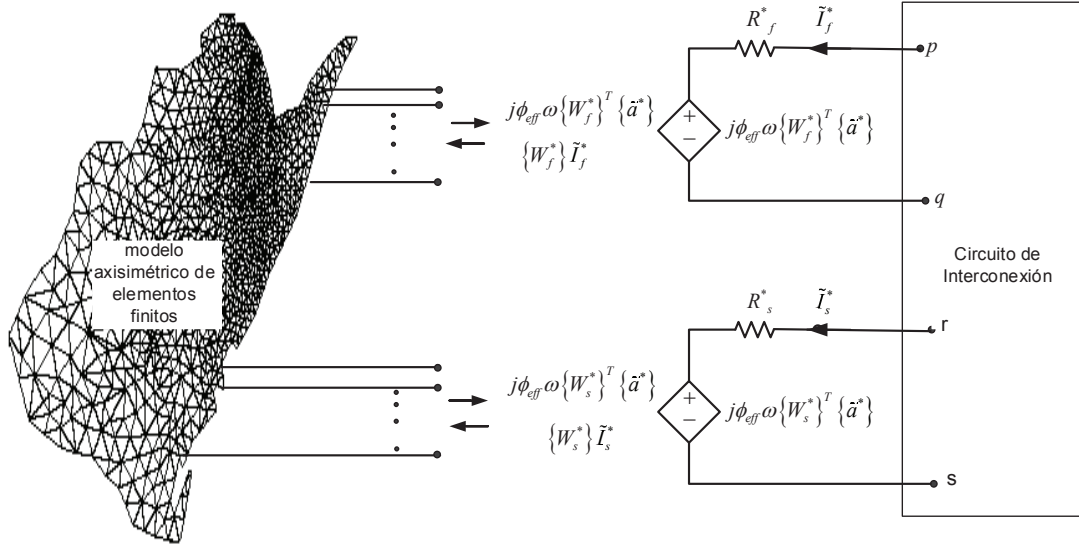


Figura 2.4: Representación del voltaje inducido en conductores sólidos y filamentosos mediante fuentes de voltaje controladas por PMV.

2.2. Sistema de EF Cartesiano usando vectores de devanado

La representación en términos del PMV del problema de campo electromagnético de baja frecuencia en coordenadas rectangulares, con corrientes en la dirección axial z , está dado por [60, 69]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial y} \right) &= 0 & \text{en } S_{nc} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial y} \right) &= -\frac{N_f \tilde{I}_f}{\Lambda_f} & \text{en } S_{fil} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial y} \right) + j\omega\sigma \iint \frac{\tilde{A}_z dx dy}{\Lambda_s} - j\omega\sigma \tilde{A}_z &= -\frac{\tilde{I}_s}{\Lambda_s} & \text{en } S_{sol} \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

donde \tilde{A}_z es la única componente existente del PMV en el sistema Cartesiano. S_{nc} , S_f y S_s son las regiones no-conductoras, filamentosas y de conductores sólidos, respectivamente. Λ_s , a diferencia del problema axisimétrico, corresponde al área de la sección transversal de una región con conductor sólido. N_f es el número de vueltas en una región S_f . \tilde{I}_f y \tilde{I}_s son corrientes en regiones filamentosas y con conductores sólidos, respectivamente. Las suposiciones para

obtener estas ecuaciones son similares a las planteadas para el caso axisimétrico. Nótese que para problemas Cartesianos no se necesita realizar un cambio de variable en \tilde{A}_z , debido a que al aplicar el método de Galerkin al sistema (2.53) no se tiene ninguna asimetría como en el caso del problema axisimétrico.

Las condiciones que prevalecen en los puertos eléctricos de conductores filamentosos y sólidos se obtienen de sus ecuaciones de voltaje. Éstas se pueden encontrar en términos del PMV usando la ley de Faraday, tal que:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_f &= R_f \tilde{I}_f + j\omega l_{eff} N_f \frac{\iint_{S_{fi}^f} \tilde{A}_z dx dy}{\Lambda_f} \\ \tilde{V}_s &= R_s \tilde{I}_s + j\omega l_{eff} \frac{\iint_{S_{sol}^s} \tilde{A}_z dx dy}{\Lambda_s}\end{aligned}\quad (2.54)$$

donde l_{eff} es la profundidad del modelo Cartesiano de EF. R_f y R_s son las resistencias en corriente directa de las regiones conductoras.

La discretización por EF del sistema de ecuaciones integro-diferenciales (2.53), se realiza usando la aproximación de Galerkin, donde el residual R es el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial y} \right) + j\omega \sigma \frac{\iint \tilde{A}_z dx dy}{\Lambda_s} - j\omega \sigma \tilde{A}_z + \frac{\tilde{I}_s}{\Lambda_s} + \frac{N_f \tilde{I}_f}{\Lambda_f} = R \quad (2.55)$$

Aplicando (2.30) y tomando en cuenta que la aproximación polinomial del PMV en sistemas de campo Cartesianos es de la forma:

$$\tilde{A}_z = \sum_{i=1}^{q_e} \tilde{A}_{zi} \zeta_i \quad (2.56)$$

se obtiene la siguiente discretización por EF para sistemas Cartesianos:

$$-[S^1] \{\tilde{a}\} + [W] \{\tilde{i}_c\} = 0 \quad (2.57)$$

donde

$$[S^1] = [S] + j\omega \sum_s [D_s] - j\omega \sum_s [D_s^1] \quad (2.58)$$

De forma similar al caso axisimétrico, $[W]$ es una matriz de dimensión $n \times (f + s)$ que contiene los vectores de devanado de regiones con conductores sólidos y filamentosos. $\{W_f\}$ y $\{W_s\}$ son vectores $n \times 1$ que involucran propiedades del devanado y distribución de corrientes. $[S]$, $[D_s]$ y $[D_s^1]$ son matrices de dimensión $n \times n$ que contienen información de geometría y materiales del sistema de campo. $\{\tilde{a}\}$ es un vector $n \times 1$ de potencial magnético vectorial, mientras que $\{\tilde{i}_c\}$ es un vector $(f + s) \times 1$ de corrientes.

La definición explícita de los vectores y matrices en (2.57) se da a continuación:

Matriz de permeabilidad:

$$[S] = \sum_e \iint_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta^T}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta^T}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.59)$$

Matriz de conductividad:

$$[D_s] = \sum_e \iint_{\Omega_e} \sigma \zeta \zeta^T dx dy \quad (2.60)$$

Vector de devanado (conductores filamentosos):

$$\{W_f\} = \frac{N_f}{\Lambda_f} \sum_{e_f} \iint_{S_{fii}^f} \zeta dx dy \quad (2.61)$$

Vector de distribución de corrientes en conductores sólidos:

$$\{W_s\} = \frac{1}{\Lambda_s} \sum_{e_s} \iint_{S_{sol}^s} \zeta dx dy \quad (2.62)$$

Matriz de conductividad:

$$[D_s^1] = \frac{l_{eff}}{R_s} [W_s][W_s]^T \quad (2.63)$$

Por último, la discretización numérica de las ecuaciones de voltaje en (2.54) viene dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_f &= R_f \tilde{I}_f + j\omega l_{eff} \{W_f\}^T \{\tilde{a}\} \\ \tilde{V}_s &= R_s \tilde{I}_s + j\omega l_{eff} \{W_s\}^T \{\tilde{a}\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Nuevamente, (2.64) es clave para el acoplamiento entre el circuito y el sistema de campo Cartesiano. La representación de estas ecuaciones a través de fuentes de voltaje dependientes del PMV se muestra en la Fig. 2.5

En el Capítulo 3 se muestra a detalle el procedimiento para acoplar los sistemas de campo axisimétrico y Cartesiano a través de un acoplamiento fuerte.

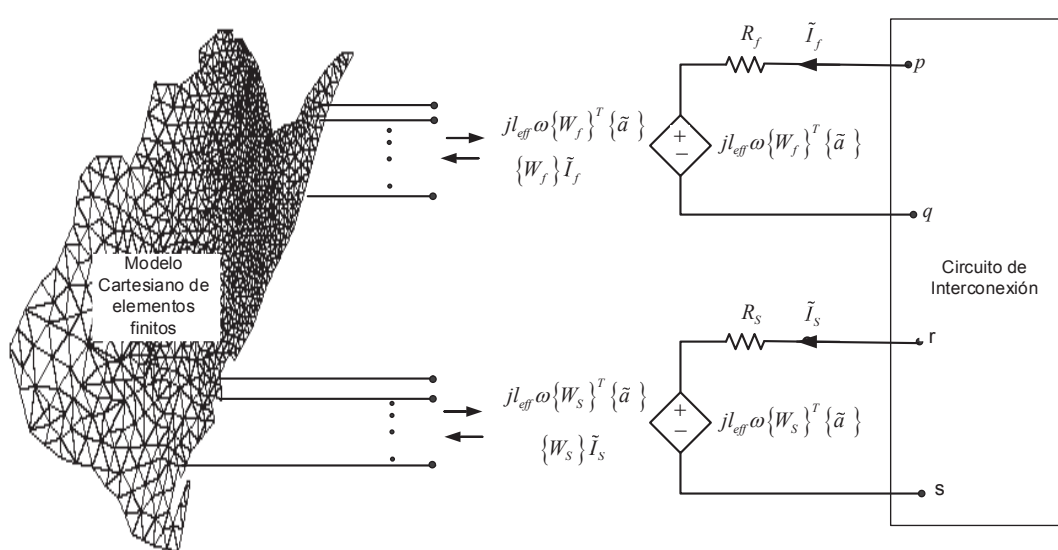


Figura 2.5: Representación de los voltajes inducidos mediante fuentes de voltaje controladas por PMV.

Capítulo 3

Método de acoplamiento fuerte EF-ANM-Multi-Sistema

En este Capítulo se presenta una metodología sistemática para resolver simultáneamente n sistemas de EF axisimétricos y Cartesianos, utilizando los conceptos fundamentales del ANM [56]. Las diferentes regiones de EF con conductores filamentosarios y sólidos se interconectan con el modelo de campo a través de sus relaciones voltaje-corriente.

En la Sección 3.1 se presenta un breve resumen del ANM. En las Secciones 3.2 y 3.3 se desarrollan los bloques de construcción para cada sistema de campo (Cartesiano y axisimétrico) con base en las expresiones obtenidas en el Capítulo 2. En este sentido se introduce un nuevo bloque de construcción al ANM para el problema de campo axisimétrico. En la Sección 3.4 se obtiene un bloque de construcción general que permite tratar a los sistemas de campo axisimétricos y Cartesianos de la misma forma, desde el punto de vista del ANM, y se presenta la formulación acoplada EF-ANM-multi-sistema que resuelve el problema de acoplamiento fuerte de varios modelos de EF interactuando con un circuito.

3.1. Análisis nodal modificado

El análisis nodal modificado se basa en el análisis nodal, que a su vez tiene relación con la ley de corrientes de Kirchhoff. El sistema de ecuaciones en el método nodal, se obtiene al incorporar de manera sistemática los *bloques de construcción* de cada uno de los elementos del circuito y la inyección de corrientes en los nodos de interconexión. Los bloques de construcción se obtienen de la relación voltaje-corriente (RVC) de un elemento, el cual tiene sus terminales numeradas de acuerdo a la red con topología arbitraria a la que pertenece. Por ejemplo, la RVC de una admitancia y_a es:

$$y_a \tilde{v}_a = \tilde{i}_a \tag{3.1}$$

donde v_a e i_a son el voltaje y la corriente en el elemento. Si sus terminales están conectadas entre los nodos p y q de una red con m nodos, la RVC se puede expresar con el siguiente bloque de construcción:

$$\begin{bmatrix} y_a & -y_a \\ -y_a & y_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_p \\ \tilde{v}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{i}_p \\ \tilde{i}_q \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Para el caso de una fuente de corriente independiente conectada entre los nodos p y q de un circuito, el bloque de construcción se obtiene al considerar la inyección de corrientes en los nodos respectivos, es decir:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{i}_p \\ \tilde{i}_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tilde{i}_s \quad (3.3)$$

donde, i_s es la corriente en la fuente.

El sistema de ecuaciones a resolver se obtiene incorporando los bloques de construcción de cada uno de los elementos que se tengan en el circuito en sus respectivos nodos de interconexión. Aplicando este procedimiento sistemático se obtiene al final el siguiente sistema matricial:

$$[Y_R] \{\tilde{v}\} = \{\tilde{f}_i\} \quad (3.4)$$

donde $[Y_R]$ es la matriz de admitancias de dimensión $m \times m$. $\{\tilde{v}\}$ y $\{\tilde{f}_i\}$ son los voltajes nodales (incógnitas) y el vector de corrientes conocidas, respectivamente. m es el número de nodos en el circuito. La solución de un circuito mediante (3.4) implica utilizar el análisis nodal.

La contribución a la matriz $[Y_R]$ del sistema (3.4) de una admitancia conectada entre los nodos p y q de un circuito es:

$$\begin{bmatrix} & p & q \\ y_a & -y_a & \\ -y_a & y_a & \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ q \\ q \end{matrix} \quad (3.5)$$

Nótese, por ejemplo, que la contribución a la matriz $[Y_R]$ en el renglón p y columna p es el valor de la admitancia y_a . La contribución de una fuente de corriente independiente conectada entre los nodos p y q al vector de excitaciones $\{\tilde{f}_i\}$ del sistema (3.4) es:

$$\begin{Bmatrix} -\tilde{i}_s \\ \tilde{i}_s \end{Bmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \quad (3.6)$$

El método nodal se ha utilizado por décadas para analizar redes eléctricas en los sistemas eléctricos de potencia [2], debido a la facilidad de implementación computacional a través del concepto de ensamblaje de bloques de construcción (similar al proceso de ensamblaje con el MEF). Esta característica es muy atractiva debido a que se pueden resolver redes eléctricas con una gran cantidad de elementos de forma sistemática. De hecho, en el contexto de sistemas eléctricos de potencia la matriz $[Y_R]$ del sistema (3.4) generalmente se conoce como matriz

$[Y]_{bus}$ y se utiliza ampliamente en análisis de flujos de potencia. Además la matriz inversa de $[Y]_{bus}$, conocida como $[Z]_{bus}$, se emplea en análisis de cortocircuito de una red eléctrica [2].

Sin embargo, el método nodal tiene una restricción importante debido a que sólo se pueden analizar circuitos con los siguientes tipos de elementos: admitancias, fuentes de corriente independientes y admitancias magnéticamente acopladas. Además, las fuentes de voltaje no-ideales se pueden incorporar sólo si se utiliza una transformación de fuentes. Con base en esta limitación surge el método de análisis nodal modificado para analizar circuitos con una gran variedad de elementos.

Básicamente se distinguen dos tipos de elementos en el ANM: *naturales* y *no naturales*. Los elementos naturales son aquellos que se pueden analizar con el método nodal. Los elementos *no naturales* surgen de la limitación del método nodal para incorporar bloques de construcción que no tengan una relación explícita entre el voltaje y la corriente. Ejemplos de este tipo de elementos son: transformadores, fuentes de voltaje independientes, fuente de voltaje y corriente dependientes, y auto-transformadores. El ejemplo más sencillo para mostrar la limitación del método nodal, es un circuito resistivo con fuentes de voltaje ideales. Este circuito no se puede resolver usando el sistema (3.4), debido a que no hay manera de obtener una expresión que determine las inyecciones de corriente en los nodos de interconexión de estos elementos.

Para superar las limitaciones del método nodal, se agregan las RVC de los elementos no-naturales como ecuaciones adicionales al sistema (3.4), así como la inyección de corrientes en los nodos de interconexión en el circuito. Para cada elemento (natural o no natural) se puede obtener el bloque de construcción, lo que permite su incorporación sistemática al sistema de ecuaciones a resolver. En [3, 60] se presentan una amplia variedad de elementos de circuito, junto con los bloques de construcción utilizados en el ANM para realizar análisis tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. En el Apéndice C se pueden encontrar los bloques de construcción de diferentes elementos en el dominio de la frecuencia.

La principal ventaja del ANM es precisamente la incorporación sistemática de elementos naturales y no naturales a través del concepto de ensamblaje de bloques de construcción. Por lo tanto el método es de fácil implementación numérica y ha sido utilizado por décadas en simuladores de circuitos.

El ANM se puede expresar en forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} Y_R & A \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

donde $[Y_R]$ es la matriz de admitancias nodal, que excluye la contribución de elementos no-naturales. $[A]$ es una matriz de dimensión $m \times n_e$, que contiene las inyecciones de corriente en los nodos de elementos no naturales. Las RVC utilizadas para incorporar elementos no naturales se incluyen en las matrices $[B]$ y $[C]$, las cuales son de dimensión $n_e \times m$ y $n_e \times n_e$, respectivamente. $\{\tilde{f}_i\}$ es un vector $m \times 1$ de corrientes conocidas, debidas a excitaciones. $\{\tilde{f}_v\}$

es un vector $n_e \times 1$ cuyas entradas son los valores de las fuentes de voltaje independientes. $\{\tilde{i}_{aux}\}$ es un vector $n_e \times 1$ de corrientes desconocidas que circulan en elementos no naturales.

Una vez que se tiene la biblioteca con cada uno de los diferentes elementos, los bloques de construcción se incorporan de forma sistemática al sistema (3.7), según el tipo de elementos que se tengan en el circuito en estudio. En el Apéndice D se resuelve un ejemplo que muestra el proceso de inserción de los bloques de construcción de elementos naturales y no naturales en el sistema (3.7).

3.2. Contribución no natural de un sistema de elementos finitos axisimétrico al ANM

Para abordar el problema circuito-campo, que considera la interconexión de n modelos de elementos finitos con geometría axisimétrica y Cartesiana, primero se plantea el bloque no natural de cada modelo de elementos finitos, asumiendo que estos sistemas de campo no son más que elementos del circuito con varios puertos eléctricos.

El sistema axisimétrico de elementos finitos (2.47) con $n_c = (f + s)$ regiones conductoras y el sistema (3.7) que resuelve el problema del circuito, se pueden expresar en conjunto mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -S^{*1} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W^* \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & 0_{m \times n_c} \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}^* \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

El sistema de campo y el circuito en (3.8) aún están desacoplados, por lo que se obtiene un sistema simultáneo de ecuaciones indeterminado. Se requiere de una ecuación adicional por conductor de EF para que el problema sea soluble. Esta ecuación es la RVC (2.51) para conductores filamentosos o (2.52) para conductores sólidos. Las RVC de manera general se pueden escribir como:

$$\tilde{v}_p - \tilde{v}_q = R^* \tilde{I}^* + j\phi_{eff}\omega\{W_c^*\}^T \{\tilde{a}^*\} \quad (3.9)$$

considerando que la región conductora esta conectada entre los nodos p y q del circuito.

Insertando la RVC (3.9) para cada una de las n_c regiones conductoras en (3.8), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -S^{*1} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W^* \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & 0_{m \times n_c} \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} \\ j\phi_{eff}\omega W^{*T} & -L^{*T} & 0_{n_c \times n_e} & Z^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}^* \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0_{n_c \times 1} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

donde $[L^*]$ es una matriz de dimensión $m \times n_c$ con valores 1 y -1 en las posiciones p y q donde se conectan eléctricamente cada una de las regiones conductoras de EF a través de sus puertos

eléctricos y las demás entradas son cero. $[Z^*]$ es una matriz de dimensión $n_c \times n_c$ que contiene en la diagonal los valores de la resistencia de cada región conductora. El problema de acoplamiento circuito-campo aún no está resuelto, ya que se necesitan considerar las inyecciones de corriente en los nodos p y q de cada región conductora de EF, por lo que (3.10) se modifica de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} -S^{*1} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W^* \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & L^* \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} \\ j\phi_{eff}\omega W^{*T} & -L^{*T} & 0_{n_c \times n_e} & Z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}^* \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0_{n_c \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

El sistema (3.11) resuelve el problema circuito-campo, como el que se muestra en la Fig. 2.4, mediante un acoplamiento fuerte. Entonces, la contribución al ANM de un modelo de EF axisimétrico que contiene un número arbitrario de conductores sólidos y filamentos se puede expresar en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} -S^{*1} & 0_{n \times m} & W^* \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} & L^* \\ \gamma W^{*T} & -L^{*T} & Z^* \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde $\gamma = j\phi_{eff}\omega$. Este bloque de construcción se agrega a la biblioteca de elementos no naturales del ANM que se muestran en la Tabla C.1.

La solución del problema acoplado mediante (3.11) es numéricamente ineficiente, ya que el término $\sum_s [D_s^{*1}]$ en (2.47) requiere la suma de s matrices cuadradas. Además, cada una de estas matrices implica la multiplicación de los vectores de devanado $\{W_s^*\}$, requiriendo n_{nc}^2 operaciones para construir cada una de las s matrices. n_{nc} es el número de entradas diferentes de cero en el vector $\{W_s^*\}$. Sin embargo, este problema se puede eludir agregando una ecuación extra al sistema por cada región con conductores sólidos. Nótese que el término $\sum_s [D_s^{*1}] = \sum_s \frac{\phi_{eff}}{R_s^*} \{W_s^*\} \{W_s^*\}^T$ se puede expresar como $\phi_{eff} [W_{Ti}^*] [W_{Ti}^{*1}]^T$. Entonces el sistema (3.11) se puede reescribir:

$$\begin{bmatrix} -S^{*2} & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W^* & W_{Ti}^* \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & L^* & 0_{m \times s} \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} & 0_{n_e \times s} \\ \gamma W^{*T} & -L^{*T} & 0_{n_c \times n_e} & Z^* & 0_{n_c \times s} \\ W_{Ti}^{*T} & 0_{s \times m} & 0_{s \times n_e} & 0_{s \times n_c} & -Z_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}^* \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c^* \\ \tilde{a}_{is}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0_{n_e \times 1} \\ 0_{s \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde $[S^{*2}] = [S^*] + j\omega \sum_s [D_s^*]$.

Los términos en (3.13) se definen de la siguiente manera: $[W_{Ti}^*]$ es una matriz de dimensión $n \times s$ que contiene en sus columnas sólo los vectores de devanado de conductores sólidos. $[Z_s^*]$ es una matriz diagonal de dimensión $s \times s$ que contienen las resistencias en corriente directa de

los conductores sólidos. $[W_{Ti}^{*1}]$ es una matriz de dimensión $n \times s$ que contiene los vectores de devanado de conductores sólidos, y cada uno de estos divididos por su resistencia R_s^* .

En el sistema (3.13) se ha agregado un vector de incógnitas $\{\tilde{a}_{is}^*\}$. Cada entrada en este vector se define como:

$$\tilde{a}_i^* = j\phi_{eff}\omega \frac{\{W_s^*\}^T}{R_s^*} \{\tilde{a}^*\} \quad (3.14)$$

donde \tilde{a}_i^* es la corriente de remolino en cada región con conductores sólidos.

Resolviendo el problema acoplado mediante (3.13) se ahorra tiempo de procesamiento, debido a que la construcción de la matriz $\sum_s [D_s^{*1}]$ en (2.47) es mucho más laboriosa que resolver el sistema de ecuaciones (3.13) con más incógnitas. De hecho, la ecuación (2.47) no se ha modificado sino se ha reagrupado más eficientemente.

3.3. Contribución no natural de un sistema de elementos finitos Cartesiano

El objetivo de esta sección es presentar el bloque de construcción para sistemas de EF Cartesianos. El procedimiento para obtener este bloque, en lo general, es similar que para el problema axisimétrico presentado en la Sección 3.2. Nótese que la estructura del sistema matricial (2.47) que resuelve el problema de EF para el caso axisimétrico es semejante al sistema Cartesiano (2.57), con diferencias en la definición explícita de cada uno de estos vectores y matrices.

El sistema Cartesiano de EF (2.57) con $f + s$ conductores junto con cada una de sus RVC definidas por (2.64), se pueden incorporar en el sistema matricial (3.7) que resuelve el problema de circuitos mediante el ANM, tal que [60]:

$$\begin{bmatrix} -S^1 & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & L \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} \\ j l_{eff}\omega W^T & -L^T & 0_{n_c \times n_e} & Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0_{n_c \times 1} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

donde $[Z]$ es una matriz diagonal de dimensión $s \times s$ y contiene los valores de las resistencias en corriente directa de cada región conductora. La matriz $[L]$ de dimensión $s \times s$ contiene valores 1 y -1 exclusivamente en los nodos del circuito donde se interconectan las regiones conductoras del modelo de EF. El sistema (3.15) resuelve el problema circuito-campo que se muestra en la Fig. 2.5, mediante un acoplamiento fuerte. Entonces, la contribución de un sistema de EF Cartesiano a la biblioteca de elementos no naturales del ANM es:

$$\begin{bmatrix} -S^1 & 0_{n \times m} & W \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} & L \\ \kappa W^T & -L^T & Z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde $\kappa = j l_{ef} f \omega$.

La ineficiencia computacional presente en el sistema (3.15) se ataca agregando una ecuación extra al problema acoplado. Con esto se evita el cálculo de $\sum_s [D_s^1]$ a través de la descomposición de este término. Entonces (3.15) se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} -S^2 & 0_{n \times m} & 0_{n \times n_e} & W & W_{Ti} \\ 0_{m \times n} & Y_R & A & L & 0_{m \times s} \\ 0_{n_e \times n} & B & C & 0_{n_e \times n_c} & 0_{n_e \times s} \\ \kappa W^T & -L^T & 0_{n_c \times n_e} & Z & 0_{n_c \times s} \\ W_{Ti}^T & 0_{s \times m} & 0_{s \times n_e} & 0_{s \times n_c} & -Z_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{i}_c \\ \tilde{a}_{is} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0_{n_c \times 1} \\ 0_{s \times 1} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

donde $[S^2] = [S] + j\omega \sum_s [D_s]$. $\{\tilde{a}_{is}\} = \kappa [W'_{Ti}]^T \{\tilde{a}\}$ es un vector de corrientes inducidas en conductores sólidos. $[W'_{Ti}]$ es una matriz de dimensión $s \times n$ que se obtiene al multiplicar cada vector $\{W_s\}$ de $[W_{Ti}]$ por su factor correspondiente $1/R_s$. Las matrices y vectores involucradas en (3.17) se pueden determinar de forma similar que en el caso axisimétrico. En ese sentido, una ventaja importante del método de acoplamiento propuesto es la versatilidad para incorporar un número arbitrario de modelos de EF en un sistema general, como se muestra en la siguiente sección.

3.4. Sistema acoplado EF-ANM-Multi-Sistema

El problema que se aborda en este trabajo de tesis se muestra esquemáticamente en la Fig. 1.2. El objetivo es resolver n_t modelos de EF interconectados eléctricamente a través de un acoplamiento fuerte.

Una vez obtenidos los bloques de construcción de cada modelo de EF, ahora se puede presentar el modelo acoplado que considera el circuito como el sistema principal, con los diferentes modelos de EF como elementos no naturales del ANM. Con la finalidad de obtener un modelo acoplado coherente, el bloque de construcción para el l -ésimo sistema de EF axisimétrico o Cartesiano se puede expresar de forma general como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{L}^{(l)} \\ 0 & -\mathcal{S}^{(l)} & \mathcal{W}^{(l)} \\ -\mathcal{L}^{T(l)} & \mathcal{W}^{T(l)} & \mathcal{Z}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\mathcal{A}}^{(l)} \\ \tilde{i}_c^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

donde $[\mathcal{S}^{(l)}] = \kappa[S^1]$, $[\mathcal{W}^{(l)}] = \kappa[W]$, $[\mathcal{Z}^{(l)}] = [Z]$ y $\{\tilde{\mathcal{A}}_\tau^{(l)}\} = \{\tilde{a}^{(l)}\}$ para el bloque de construcción que pertenece a un modelo Cartesiano. En un bloque de construcción axisimétrico se tiene $[\mathcal{S}^{(l)}] = \gamma[S^{*1}]$, $[\mathcal{W}^{(l)}] = \gamma[W^*]$, $[\mathcal{Z}^{(l)}] = [Z^*]$ y $\{\tilde{\mathcal{A}}^{(l)}\} = \{\tilde{a}^{*(l)}\}$. Esta formulación permite que los modelos de EF Cartesiano y axisimétrico se puedan tratar en la misma manera desde la perspectiva de circuitos. El superíndice l en (3.18) indica que cualquier número de modelos de EF pueden agregarse.

El primer renglón en (3.18) es necesario para la inyección de corrientes en los nodos del circuito donde los conductores de los diferentes modelos de EF se interconectan. El segundo renglón se puede asociar inmediatamente con la ecuación de EF (2.57) o (2.47). El tercer renglón en (3.18) involucra la RVC para cada conductor sólido o filamentario. El bloque de construcción general tal y como se tiene en (3.18) contiene las propiedades eléctricas, magnéticas y de geometría de cada sistema de EF.

Finalmente, la interconexión del sistema (3.7) y los diferentes modelos de EF se puede expresar en forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} Y_R & A & 0 & \mathcal{L}_\tau \\ B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_\tau & \mathcal{W}_\tau \\ -\mathcal{L}_\tau^T & 0 & \mathcal{W}_\tau^T & \mathcal{Z}_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{\mathcal{A}}_\tau \\ \tilde{i}_{c\tau} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

El sistema (3.19) puede reescribirse convenientemente como:

$$\begin{bmatrix} -Y_R & -A & 0 & -\mathcal{L}_\tau \\ -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_\tau & \mathcal{W}_\tau \\ -\mathcal{L}_\tau^T & 0 & \mathcal{W}_\tau^T & \mathcal{Z}_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{i}_{aux} \\ \tilde{\mathcal{A}}_\tau \\ \tilde{i}_{c\tau} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{f}_i \\ -\tilde{f}_v \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

El sistema (3.20) se establece al incorporar cada modelo de EF en cascada, esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau &= \begin{bmatrix} \mathcal{S}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{S}^{(n_l)} \end{bmatrix}, \mathcal{L}_\tau = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}^{(n_l)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{W}_\tau &= \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{W}^{(n_l)} \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_\tau = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{Z}^{(n_l)} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{A}}_\tau &= \{ \tilde{\mathcal{A}}^{(1)} \quad \dots \quad \tilde{\mathcal{A}}^{(n_l)} \}^T, \tilde{i}_{c\tau} = \{ \tilde{i}_c^{(1)} \quad \dots \quad \tilde{i}_c^{(n_l)} \}^T \end{aligned} \quad (3.21)$$

Los bloques de construcción de los modelos de EF no introducen asimetría y la estructura del sistema acoplado no se ve afectado por las propiedades específicas de cada sistema de elementos finitos. Es importante mencionar que no hay restricción alguna en el número de modelos de campo a incorporar en el análisis. Además, cada modelo de EF se puede introducir en orden arbitrario en (3.20), al establecer una enumeración apropiada de los nodos en la malla de EF. Por ejemplo, si se analizan dos modelos de EF, cada uno de estos con i y j nodos libres, y se realiza el procedimiento de inserción sólo para el caso de la matriz de rigidez, al introducir el primer modelo de EF en $[\mathcal{S}_\tau]$ se obtiene una matriz de dimensión $i \times i$. Ahora, al agregar el segundo modelo de EF a $[\mathcal{S}_\tau]$ la dimensión de ésta matriz es $(i + j) \times (i + j)$. Nótese que la

enumeración de cada uno de los nodos para el segundo modelo ahora tendría que establecerse desde $(i + 1)$ hasta $(i + j)$.

En el caso de que existan materiales magnéticos no lineales en los dominios de campo, el sistema acoplado (3.20) involucra ecuaciones no lineales. El sistema no lineal se resuelve mediante el método de Newton-Raphson [70].

3. MÉTODO DE ACOPLAMIENTO FUERTE EF-ANM-MULTI-SISTEMA

Capítulo 4

Validación numérica de la formulación Cartesiana-axisimétrica

La teoría presentada en los Capítulos 2 y 3 se ha programado en *Fortran* [71] e integrado al programa de elementos finitos *FLD* [60]. En el Apéndice E se explica en mayor detalle la estructura de este software de EF.

Para validar la metodología de acoplamiento fuerte propuesta se lleva a cabo una prueba numérica. La formulación se emplea para simular la operación no lineal en el dominio de la frecuencia de 4 modelos de EF interconectados a través de elementos de circuito, tal y como se muestra en la Fig. 4.1: un motor de inducción trifásico (modelo Cartesiano), un banco trifásico de transformadores conectados en Y-Y (3 modelos axisimétricos de EF de transformadores monofásicos), circuitos externos (para modelar los efectos de los anillos de cortocircuito en la jaula de ardilla del rotor), así como conexiones eléctricas entre los modelos de EF y la fuente trifásica.

En la Fig. 4.2 se muestra el circuito de interconexión del problema acoplado. Nótese que el término correspondiente al voltaje inducido en las ecuaciones (2.51), (2.52) y (2.64), se ha representado como una fuente de voltaje controlada por PMV, con base en la teoría presentada en el Capítulo 2. En el circuito de la Fig. 4.2a se muestra la fuente de alimentación trifásica, 6 regiones filamentosas para incorporar el devanado trifásico del estator y seis regiones filamentosas que representan los devanados de los transformadores monofásicos (primario y secundario). El circuito del rotor con los conductores sólidos (barras del rotor) y la impedancia inter-barra (r_l and L_l) se muestra en la Fig. 4.2b.

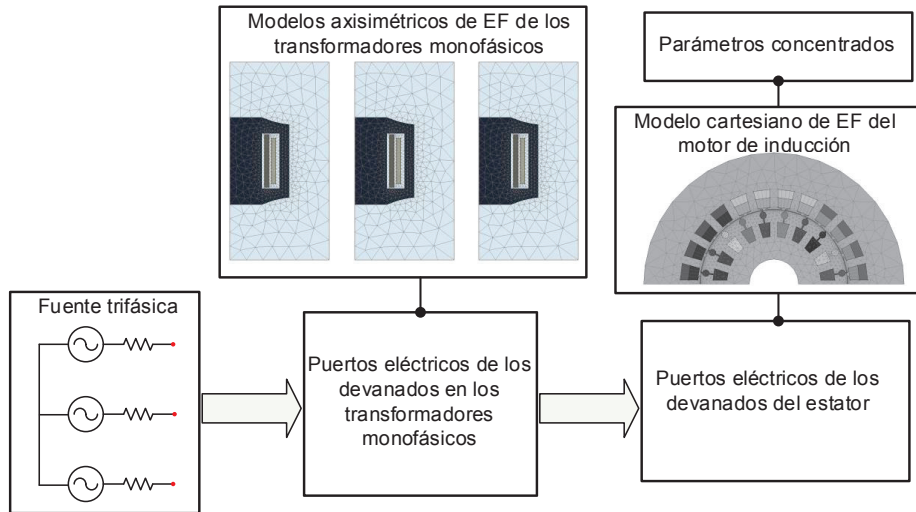


Figura 4.1: Problema acoplado bajo estudio.

4.1. Descripción del modelo de EF del motor

A continuación se especifican las características tanto eléctricas como geométricas del motor de inducción. Esta información es importante para crear el modelo de EF de la máquina.

4.1.1. Especificaciones eléctricas

La máquina de inducción trifásica considerada en esta tesis se muestra en la Fig. 4.3. Es un motor de 2 polos, conectado en estrella en el estator. Las características eléctricas son las siguientes:

- Potencia nominal, $P_n = 7.5$ kW
- Voltaje de alimentación nominal, $V_{fn} = 380$ V (fase a neutro)
- Frecuencia nominal, $f_s = 50$ Hz

El devanado del estator es de cobre del tipo doble capa y 208 vueltas por fase. En la Fig. 4.4 se muestra de manera esquemática el devanado trifásico del estator.

El circuito del rotor está compuesto por una doble jaula de ardilla de aluminio colado.

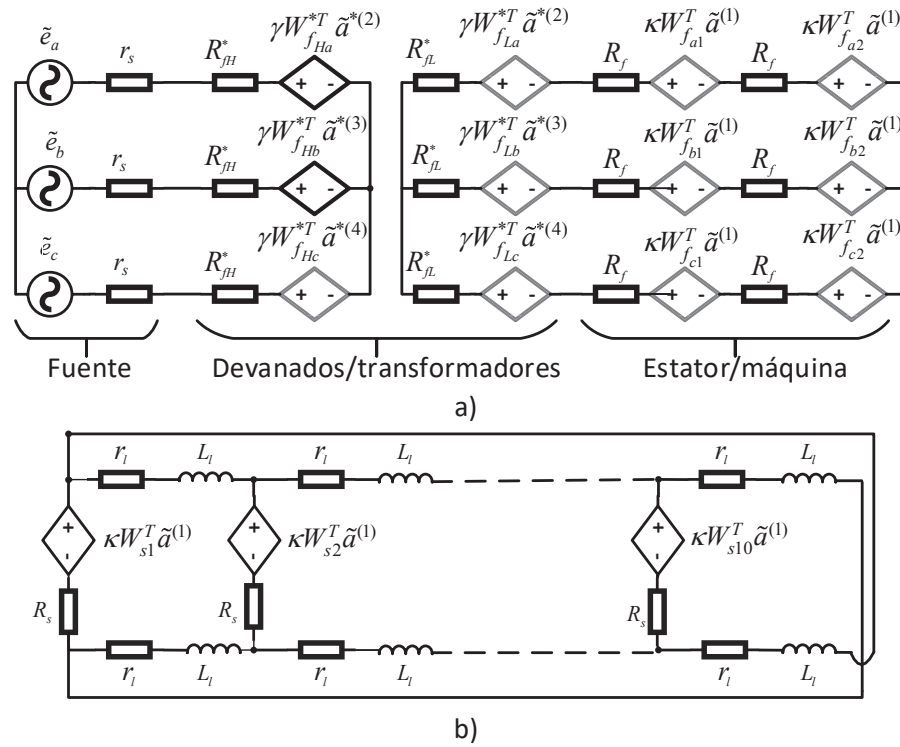


Figura 4.2: Circuito del sistema acoplado: a) conexión del banco de transformadores y el estator de la máquina de inducción, b) conexión en la jaula de ardilla del rotor.

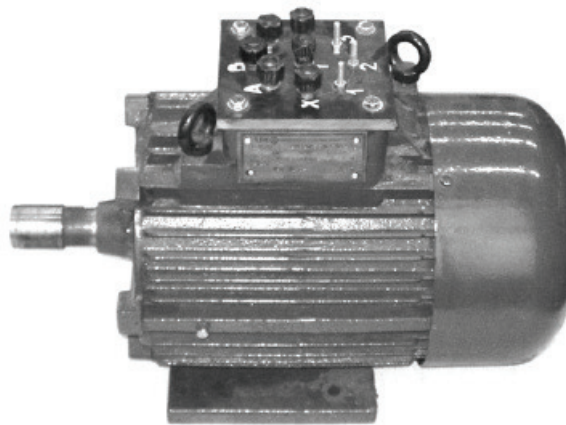


Figura 4.3: Vista exterior del motor de inducción a modelar.

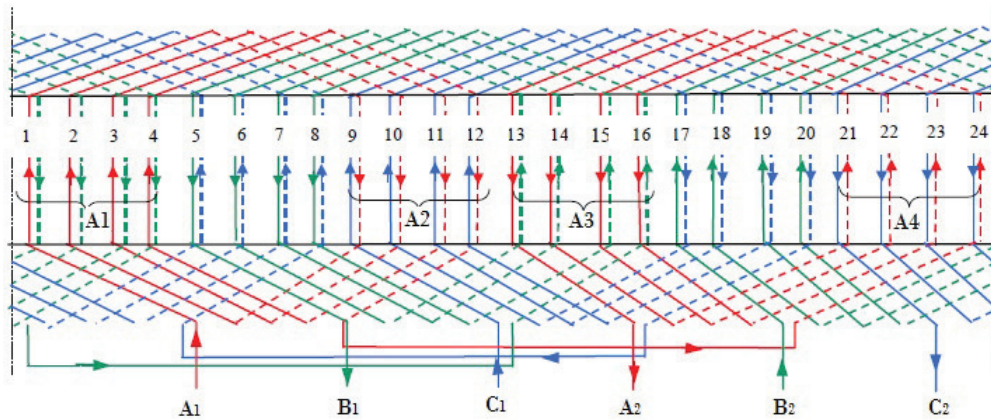


Figura 4.4: Esquema del devanado de un estator de doble capa.

4.1.2. Especificaciones geométricas

El motor de la Fig. 4.3 está conformado físicamente de la siguiente manera (ver Fig. 4.5):

- El estator y rotor tienen 24 y 20 ranuras, respectivamente, espaciadas uniformemente a lo largo de la periferia de la máquina.
- El diámetro externo del núcleo magnético del estator mide 212 mm.
- El diámetro externo del núcleo magnético del rotor mide 119 mm. La longitud del entrehierro es de 0.5 mm.
- El diámetro interno del rotor es de 40 mm
- La longitud de núcleo magnético del rotor y estator es de 125 mm.

La geometría y dimensiones de las ranuras del estator y rotor se muestran en la Fig. 4.6. Con base en las características y especificaciones geométricas de la máquina de inducción antes presentadas, se construye el modelo de EF del motor en *FLD*.

4.1.3. Propiedades físicas

En esta sección se especifican las propiedades físicas del modelo de la máquina de inducción. Es decir, se precisan las características de los diferentes materiales que conforman los dominios del modelo y las constantes de la máquina. En la Tabla 4.1 se especifican los parámetros del motor de inducción.

Los devanados del estator y rotor están constituidos con materiales isotrópicos (cobre y aluminio). El núcleo magnético del estator y rotor se construye de un material ferromagnético isotrópico no lineal (acero laminado). La dependencia $B(H)$ del material magnético se muestra en la Fig. 4.7.

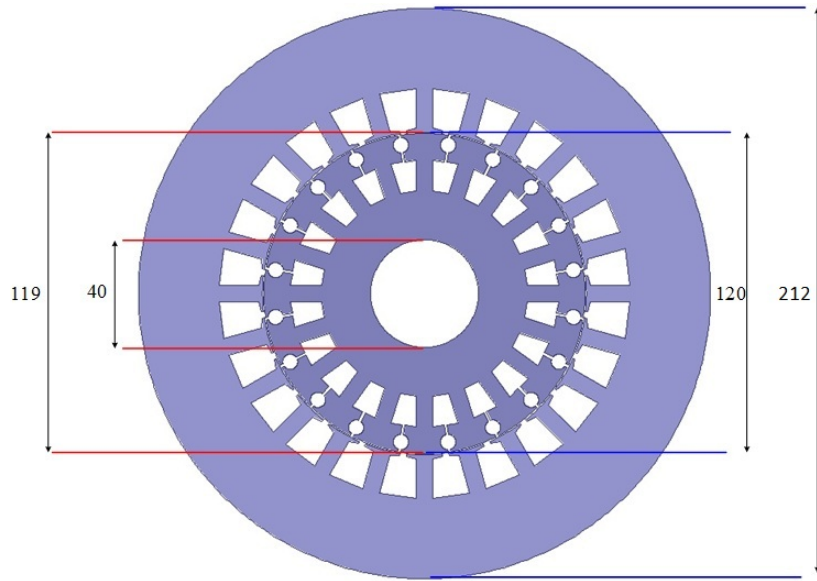


Figura 4.5: Sección transversal de la armadura del estator y rotor (distancias en mm).

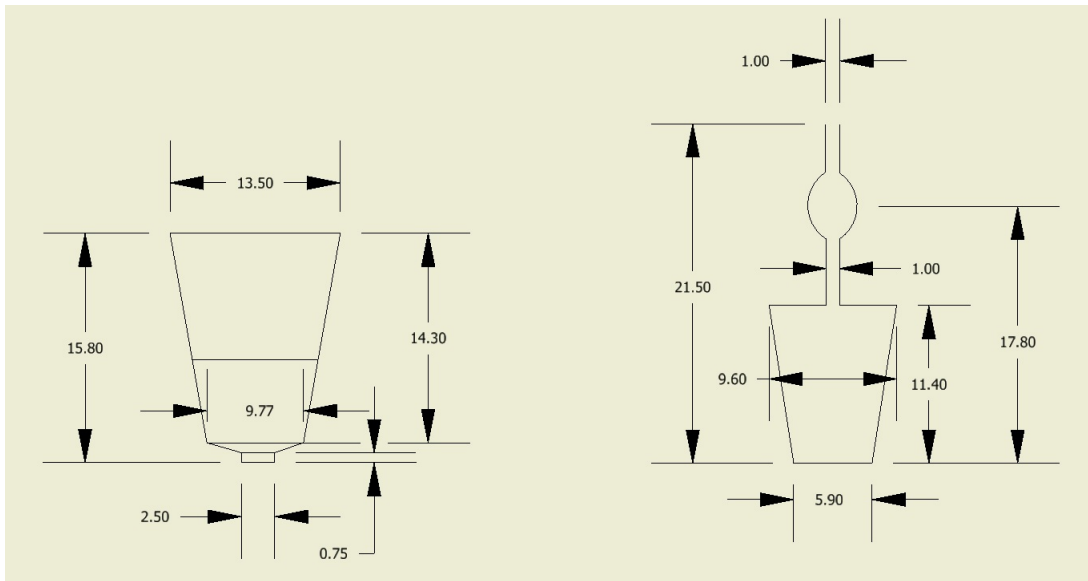
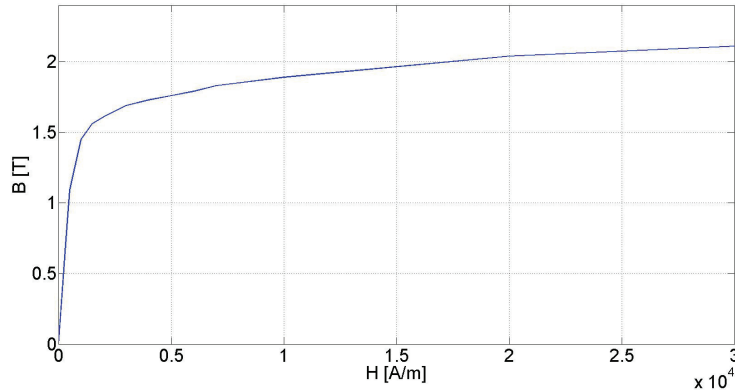


Figura 4.6: Dimensiones de las ranuras del estator y rotor (distancias en mm).

Tabla 4.1: Constantes del modelo.

<i>Nombre</i>	<i>Valor</i>	<i>Descripción</i>
e_a, e_b, e_c	380 V	Voltaje RMS de fase a neutro en las fases a , b y c
N_f	208	Número de vueltas por fase
R_f	1.54 Ω	Resistencia de los devanados del estator
l_{eff}	0.125 m	Longitud axial del motor
σ	32.05x10 ⁶ S	Conductividad eléctrica de las barras de aluminio del rotor
r_l	1.39x10 ⁻⁶ Ω	Resistencia de la sección entre barras del rotor
L_l	1.06x10 ⁻⁸ H	Inductancia de la sección entre barras del rotor
τ_L	24.72 N-m	Par de carga nominal
f_s	50 Hz	Frecuencia nominal

Figura 4.7: Dependencia $B(H)$ de las laminaciones del núcleo magnético.

4.1.4. Mallado de la geometría

En la Fig. 4.8 se muestra la sección transversal de la máquina de inducción, junto con la malla utilizada en las simulaciones. La malla consta de 3464 elementos de segundo orden y 7235 nodos.

En la Fig. 4.8 también se observa que conforme se incrementa la distancia a las fuentes que generan los campos magnéticos en el estator (corrientes en los devanados), el mallado es menos denso, ya que la magnitud de los campos magnéticos entre cada punto de la superficie tiene valores similares y por lo tanto se requiere de menos nodos para calcular los campos en este dominio.

La malla propuesta en las barras de la jaula de ardilla es densa en todas estas regiones (ver Fig. 4.8), debido a que se necesita calcular con precisión las densidades de corriente inducidas. La distribución no uniforme de estas cantidades, implica tener una mayor cantidad de nodos para calcular los campos magnéticos en la banda de elementos donde se tienen las barras.

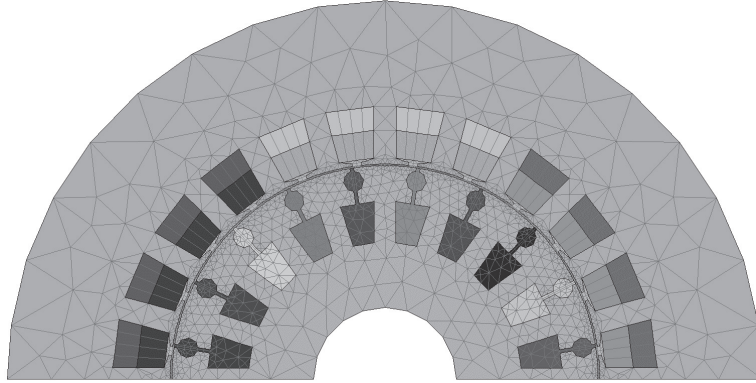


Figura 4.8: Geometría y malla de EF del motor de inducción.

El mallado en el entrehierro es vital ya que es ahí donde sucede el proceso de conversión electromagnética más importante. En esta región es donde los campos magnéticos generados por los devanados del estator tienen que cruzar hacia el rotor para inducir corrientes en la jaula de ardilla, que a su vez generan un campo magnético, el cual interactúa con el campo del estator, y así se crea el par electromagnético que hace girar el rotor.

4.1.5. Condiciones de frontera

La evaluación del campo electromagnético en todas las simulaciones realizadas por el MEF consideran como incógnita el PMV en los nodos de la malla de EF. Aunque teóricamente se debería considerar el infinito para resolver con precisión el modelo del motor, es necesario emplear condiciones de frontera que delimiten el dominio del problema. Esto tiene como objetivo disminuir tiempos de simulación y desprestigiar zonas donde el campo magnético es pequeño o su efecto es imperceptible en el modelado del motor con el MEF. La condición de frontera del dominio seleccionado en este trabajo de tesis (ver Fig. 4.9), es la periferia externa del núcleo magnético del estator. El modelo del motor considera la condición de frontera Dirichlet de flujo magnético nulo cruzando esta frontera. Expresada en términos del PMV, esta condición impone un valor igual a cero a esta variable en la periferia del estator de la máquina.

En este modelo se podría considerar una condición de frontera más alejada de la periferia de la máquina. Sin embargo, el área del núcleo magnético principal del estator es mucho mayor que el área ocupada por los dientes del estator, que es donde puede existir saturación. Entonces, el flujo pasa sin dificultad por el material magnético de alta permeabilidad del estator, lo que resulta en que el flujo de dispersión en la periferia externa de la máquina sea prácticamente nulo.

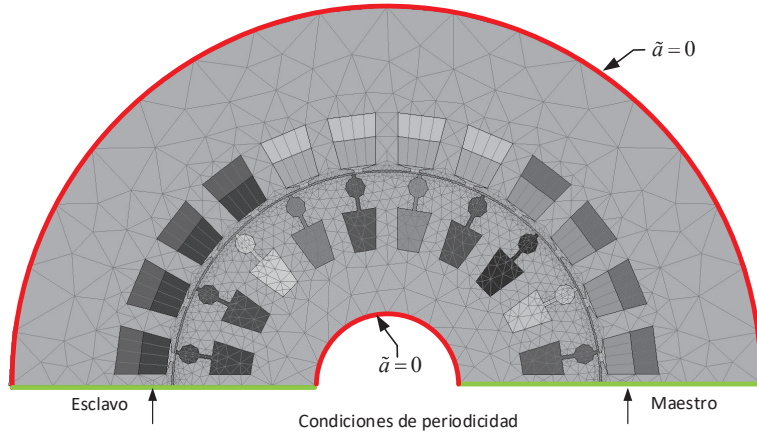


Figura 4.9: Condiciones de frontera.

Además, se aprovechan las condiciones de periodicidad que exhibe el motor. Esta condición de frontera implica la asignación de una correspondencia entre los valores del PMV a lo largo de dos líneas que se encuentran en la frontera. Estas líneas se denotan como *Maestro* y *Esclavo* en la Fig. 4.9. Se selecciona una línea principal (*Maestro*), y el potencial de la otra línea se expresa como una función del potencial de la línea principal. Esta condición de frontera es útil en estructuras que exhiben una repetición de los campos electromagnéticos, como es el caso del motor en estudio en este trabajo. Con la asignación de esta condición de frontera sólo es necesario modelar la mitad de la geometría tal y como se muestra en la Fig. 4.9. Específicamente, se asigna una condición de anti-periodicidad en la que los valores del PMV en la frontera *Esclavo* tienen la misma magnitud que en la frontera *Maestro*, pero con signo contrario.

4.2. Características de los transformadores

Cada transformador monofásico es del tipo núcleo acorazado y tiene las siguientes características: 5 kVA, 13.8/0.38 kV y 50 Hz. El número de vueltas en el devanado primario es 1049 y tiene una resistencia de 39.205Ω , mientras que el devanado secundario consta de 50 vueltas con una resistencia de 0.1162Ω . En la Fig. 4.10 se observan las dimensiones del núcleo magnético del transformador. La longitud axial del transformador es de 152.4 mm.

Con la finalidad de validar la formulación propuesta en este trabajo de tesis con varios modelos Cartesianos y axisimétricos, cada uno de los transformadores con geometría cartesiana (ver Fig. 4.10) se representan mediante su equivalente axisimétrico [72] tal y como se requiere para resolver el problema acoplado de la Fig. 4.1.

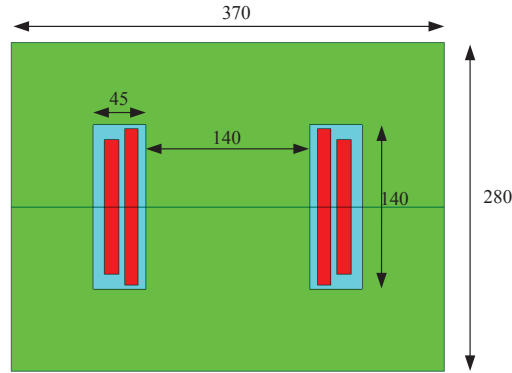


Figura 4.10: Geometría del transformador (dimensiones en mm).

En la Fig. 4.11 se muestra la geometría del transformador axisimétrico junto con sus dimensiones principales. El modelo de los transformadores con geometría axisimétrica y la malla de elementos finitos se muestra en la Fig. 4.12. La malla consta de 2311 nodos y 1134 elementos triangulares de segundo orden. En la Fig. 4.12 también se muestra la condición de frontera Dirichlet impuesta en la región exterior de aire y a lo largo del eje z para resolver el problema de valor en la frontera. Esta condición en la región exterior de aire implica un aislamiento magnético (el campo no cruza esta frontera) y a lo largo del eje z que el campo magnético sólo tiene componente tangencial.

4.3. Resultados

Las pruebas numéricas involucran la simulación no lineal del motor de inducción en el dominio de la frecuencia a diferentes valores de deslizamiento, con el objetivo de operar al motor bajo distintas condiciones de operación (sin carga, plena carga y rotor bloqueado).

Las simulaciones en el dominio de la frecuencia se realizan usando mallas estáticas. El movimiento del rotor se considera al modificar el valor de la conductividad eléctrica de las barras de la jaula de ardilla [73]. Específicamente se afecta la conductividad eléctrica por el deslizamiento de la máquina. Este procedimiento de análisis es similar al que se utiliza cuando se estudia la máquina mediante su circuito equivalente, donde la resistencia del rotor se refiere al estator mediante una resistencia que es función del deslizamiento [74].

En la Fig. 4.13 se muestra la distribución del flujo magnético en el motor a rotor bloqueado. En esta condición de operación la máquina se comporta como un transformador con el secundario en cortocircuito. Se puede observar que el campo magnético no penetra el núcleo del rotor de manera uniforme, sino que se concentra en la periferia, por lo que es importante tener una malla densa en las regiones de las barras tal y como se explica en la Sección 4.1.4. Esta distribución

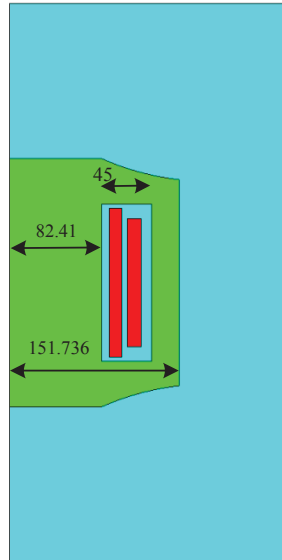


Figura 4.11: Geometría del transformador axisimétrico (dimensiones en mm).

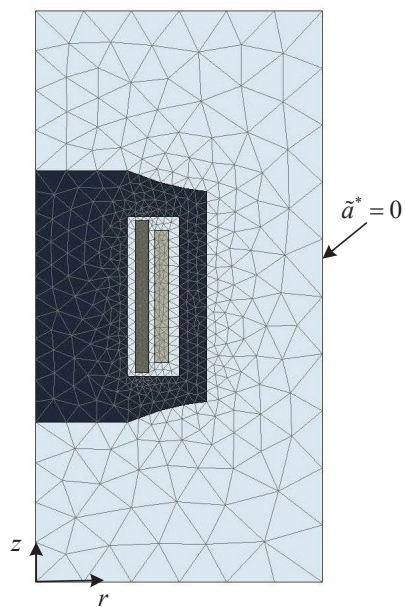


Figura 4.12: Malla de EF del transformador axisimétrico de 5 kVA.

del campo magnético se debe a que las corrientes en las barras del rotor son de gran magnitud lo que provoca un efecto pantalla, que se opone a que el flujo magnético del estator atraviese el entrehierro hacia el núcleo magnético del rotor. Debido a que el deslizamiento es igual a 1, la frecuencia del rotor es la misma que la frecuencia de la fuente de alimentación, por lo que el efecto piel en las barras del rotor es más pronunciado en esta condición que a plena carga. Conforme disminuye el deslizamiento, las corrientes del rotor también disminuyen, por lo que el flujo magnético del estator atraviesa casi por completo el núcleo del rotor tal y como se observa en la Fig. 4.14 .

En la Fig. 4.15 se observa la distribución de campo magnético en cada transformador axi-simétrico para la condición de operación a rotor bloqueado. Los flujos para otros deslizamientos muestran también una distribución correcta. Nótese que las gráficas de flujo a deslizamiento unitario de las Figuras 4.13 y 4.15 no son eléctricamente independientes, debido a que se resuelven los 4 modelos de EF de manera simultánea, empleando la formulación acoplada propuesta en este trabajo de tesis.

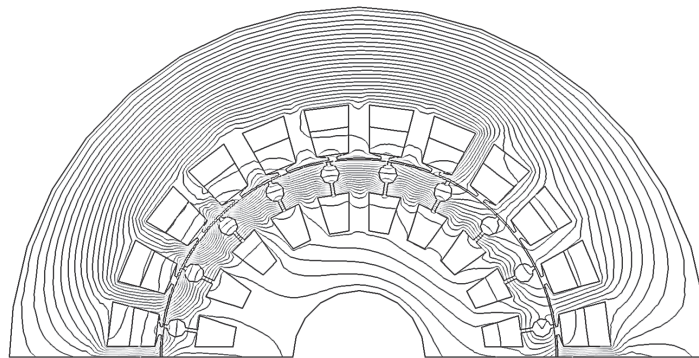


Figura 4.13: Líneas de campo magnético en el motor a deslizamiento unitario.

El par electromagnético calculado en FLD a diferentes deslizamientos se observa en la Fig. 4.18. El par se calcula por medio del método de trabajo virtual tal y como se describe en [24]. El par de arranque en la máquina de inducción es de 54.6 N-m, mientras que el par electromagnético a plena carga es de 26.01 N-m.

4.3.1. Metodología de validación

La formulación propuesta se valida al comparar los resultados con FLUX2D [75]. Este software comercial de EF es capaz de resolver problemas de acoplamiento circuito-campo con sólo un modelo de EF. Nótese que ningún software comercial o del dominio público en el presente, empleado para el análisis de dispositivos electromagnéticos por el MEF, puede resolver el problema de interconexión de varios modelos de EF. En este sentido se necesita reducir el problema

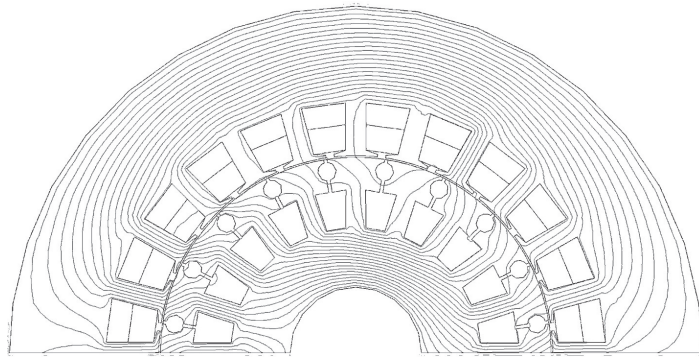


Figura 4.14: Líneas de campo magnético a deslizamiento nominal ($S=0.034$).

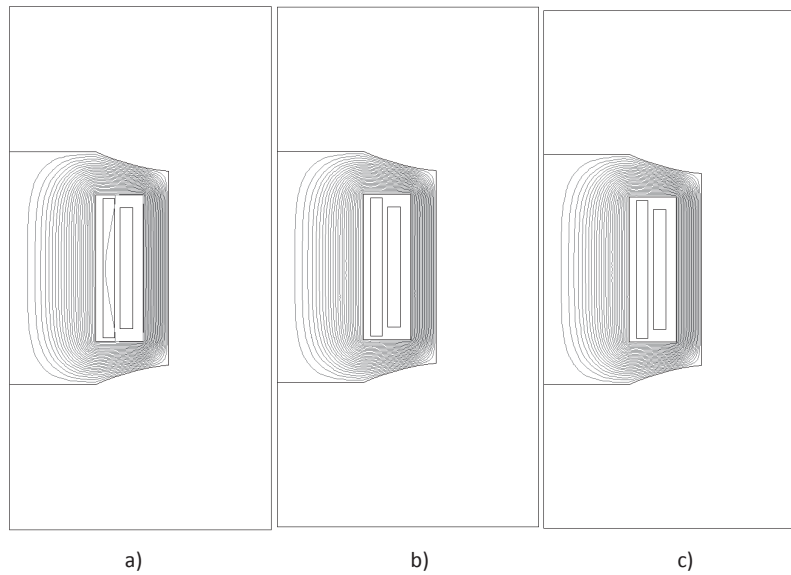


Figura 4.15: Líneas de campo magnético en cada transformador axisimétrico. a) Fase a, b) fase b y c) fase c.

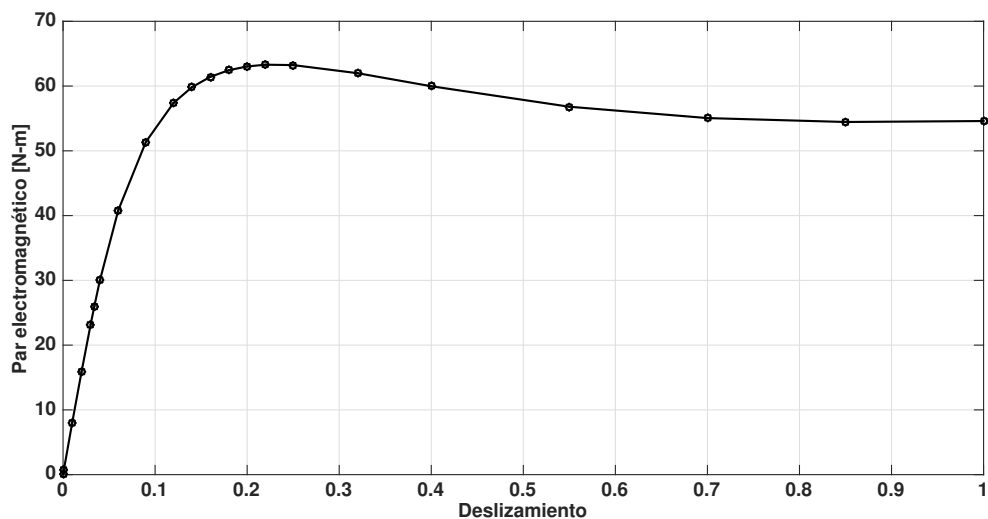


Figura 4.16: Curva par-deslizamiento.

de la Fig. 4.1 con 4 modelos de EF, a un problema con sólo un modelo de campo para validar los resultados presentados en este trabajo de tesis. En este caso, cada modelo de campo electromagnético de los transformadores con geometría axisimétrica se representa con su circuito equivalente, y por lo tanto se puede analizar el problema con FLUX2D con sólo el modelo de EF de la máquina de inducción y el circuito de interconexión (ver Fig. 4.17).

Cada modelo de campo de los transformadores axisimétricos se representa con su circuito equivalente referido al secundario: una impedancia de dispersión en serie y la reactancia de magnetización en paralelo. Estos parámetros se obtuvieron de las pruebas de cortocircuito y circuito abierto realizadas en el modelo de EF. Nótese que el circuito equivalente de cada transformador representa con buena precisión el comportamiento eléctrico de este dispositivo en condiciones de estado estable, como es el caso del problema propuesto [74].

Además el modelo de EF de la máquina de inducción en FLUX2D se ha validado con resultados experimentales en [75]. Esto da certeza de que el modelo de EF en FLD del motor también es correcto, ya que en [60] se han comparado los resultados de FLD con FLUX2D.

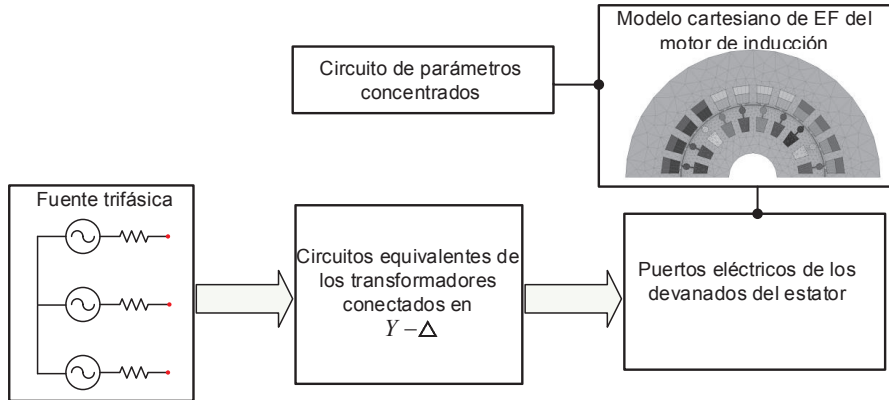


Figura 4.17: Problema acoplado a resolver en FLUX2D.

Tabla 4.2: Corrientes en regiones con conductores filamentosos a deslizamiento unitario.

deslizamiento		\tilde{i}_a [A]	\tilde{i}_b [A]	\tilde{i}_c [A]
1.0	FLD	49.441∠121.351°	49.607∠2.472°	50.257∠-118.209°
1.0	FLUX2D	48.420∠121.455°	48.596∠2.587°	49.336∠-118.154°

4.3.2. Resultados y análisis

Las Tablas 4.2 y 4.3 muestran los valores de corrientes en el lado de bajo voltaje del transformador a velocidad nominal y en la condición de rotor bloqueado. Estas corrientes son iguales a las que circulan a través de los devanados del estator del motor, un hecho que se verifica con los resultados que se obtienen de las simulaciones. En las Tablas 4.4 y 4.5 se comparan las corrientes en algunas barras de la jaula de ardilla del rotor. En ambas Tablas se reportan los resultados de FLD y FLUX2D. Se puede observar que existe una excelente correspondencia entre la formulación propuesta y FLUX2D.

En la Fig. 4.18 se muestra la curva característica par-deslizamiento del motor de inducción calculada con FLUX2D. En la comparación de resultados entre FLUX2D y la formulación EF-ANM-multi-sistema, se tiene una excelente correspondencia en los valores de par electromagnético desde una condición de no carga hasta plena carga (deslizamiento=0.034). Aunque existe una buena correspondencia para valores de deslizamiento altos, la diferencia es más pro-

Tabla 4.3: Corrientes en regiones con conductores filamentosos a plena carga.

deslizamiento		\tilde{i}_a [A]	\tilde{i}_b [A]	\tilde{i}_c [A]
0.034	FLD	8.902∠144.990°	8.871∠25.621°	8.945∠-94.452°
0.034	FLUX2D	8.932∠146.62°	8.883∠27.123°	8.974∠-92.853°

Tabla 4.4: Corrientes en regiones con conductores sólidos a deslizamiento unitario

deslizamiento		$Barra_1$ [A]	$Barra_5$ [A]	$Barra_{10}$ [A]
1.0	FLD	2304.462 \angle -75.105°	2486.774 \angle -143.632°	2019.054 \angle 141.961°
1.0	FLUX2D	2291.016 \angle -75.683°	2453.120 \angle -143.496°	2018.707 \angle 142.683°

Tabla 4.5: Corrientes en regiones con conductores sólidos a deslizamiento nominal

deslizamiento		$Barra_1$ [A]	$Barra_5$ [A]	$Barra_{10}$ [A]
0.034	FLD	425.743 \angle -22.524°	432.168 \angle -92.986°	383.787 \angle 176.803°
0.034	FLUX2D	432.892 \angle -22.766°	439.202 \angle -92.940°	387.929 \angle 177.045°

nunciada en los valores de par con una diferencia máxima de 4.45 % a deslizamiento unitario. Esto se atribuye a una menor caída de voltaje en las terminales de la máquina en la formulación multi-modelos. Esta diferencia en los voltajes inducidos se atribuye principalmente a que se considera la no linealidad del material ferromagnético en cada transformador axisimétrico, en contraste con la representación lineal mediante el circuito equivalente que se utiliza en FLUX2D. Bajo estas premisas, se tienen las siguientes observaciones:

Observación 1: En las Fig. 4.19 y 4.20 se comparan el voltaje inducido y la corriente en la fase a del motor. Se tiene una diferencia porcentual máxima de 1.85 % y 2.06 % en el voltaje y corriente, respectivamente, correspondiente a la condición de rotor bloqueado. Esto explica la diferencia en los valores del par, debido a que esta variable es directamente proporcional al cuadrado del voltaje (o corriente) en las terminales de la máquina [74].

Observación 2: Para verificar que los estados magnéticos del motor y los transformadores calculados con la formulación multi-modelo son correctos, se realizan simulaciones con corrientes forzadas en cada modelo de campo por separado. Las corrientes obtenidas de la formulación multi-modelo se usan para alimentar de manera independiente cada dispositivo electromagnético. Con estas simulaciones se verifica por ejemplo, que el par calculado a deslizamiento unitario (condición crítica) en la prueba con corrientes forzadas sea similar al valor obtenido en la simulación multi-modelo. Mas aún, en cada simulación de los transformadores con corrientes forzadas, se obtiene el voltaje inducido en terminales, y se verifica que estos valores corresponden con los obtenidos en la simulación multi-modelo. Este tipo de comparación sólo es posible una vez que se determinan las corrientes de la formulación EF-ANM-multi-sistema, debido a que estas cantidades son incógnitas. Se concluye que los valores de par y voltajes inducidos para cada simulación con corrientes forzadas a cualquier deslizamiento, corresponden con el estado magnético obtenido de la formulación multi-modelo.

Entonces, se puede concluir que el método de acoplamiento fuerte propuesto es correcto y se puede utilizar para analizar varios modelos de campo interconectados eléctricamente.

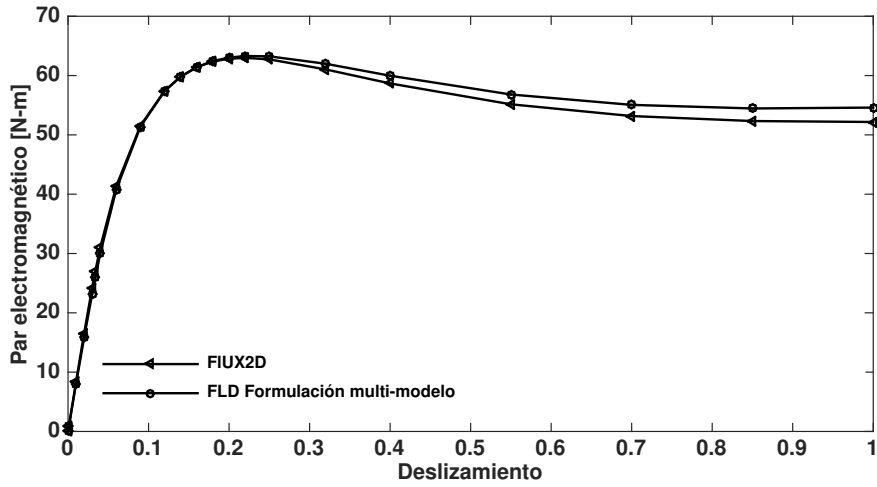


Figura 4.18: Par electromagnético: FLD vs FLUX2D.

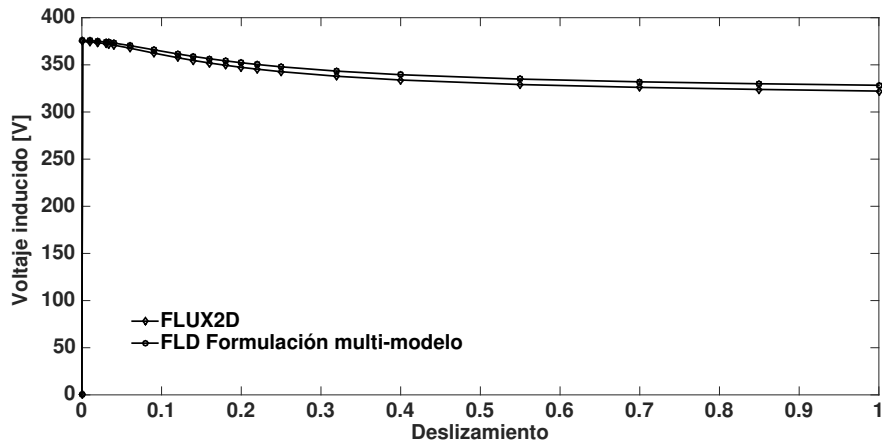


Figura 4.19: Voltaje inducido en la fase *a* del motor: FLD vs FLUX2D

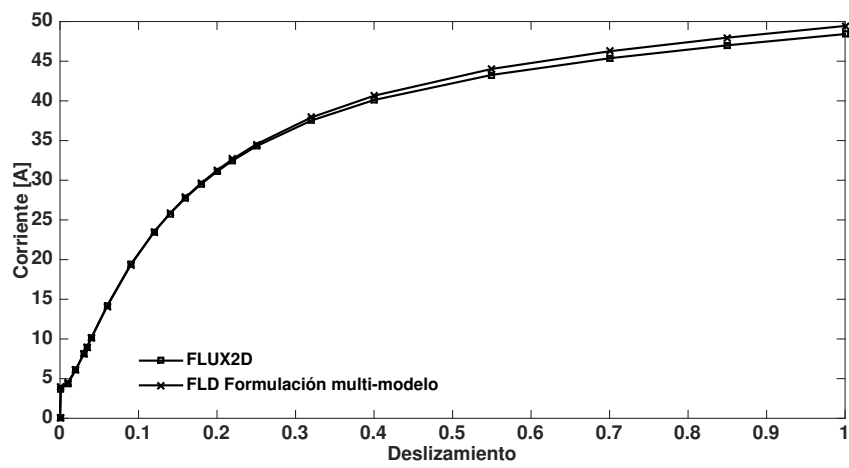


Figura 4.20: Corrientes en la fase *a* del estator: FLD vs FLUX2D.

Capítulo 5

Análisis 3D de dispositivos electromagnéticos mediante descomposición bidimensional

La metodología de acoplamiento fuerte EF-ANM-multi-sistema presentada en el Capítulo 3, se expande para el análisis de dispositivos electromagnéticos 3D, mediante su descomposición en varios modelos de campo bidimensionales (Cartesianos ó axisimétricos). La idea es descomponer la geometría 3D en modelos en dos dimensiones que se acoplan a través de circuitos, preservando el comportamiento electromagnético del dispositivo al incorporar las condiciones de frontera apropiadas en cada modelo de campo. En ese sentido se obtiene un método de análisis general en el que todos los modelos de campo y circuitos asociados se resuelven simultáneamente, manteniendo las ventajas del modelado 2D. Cabe destacar que este tipo de análisis no se ha reportado en la literatura.

La técnica de análisis propuesta puede reproducir de forma eficaz el campo magnético 3D en el dispositivo electromagnético. Por consiguiente, se eluden las simulaciones 3D que conllevan a una alta demanda de recursos de cómputo.

Sin pérdida de generalidad, se plantea aplicar la metodología propuesta a un transformador de potencia trifásico de núcleo acorazado. Un modelo de EF Cartesiano se utiliza para representar la sección transversal del núcleo y su devanado trifásico, mientras que una representación axisimétrica (una por fase) se emplea para la sección final de devanado que no se incorpora en el modelo Cartesiano. Se analiza un transformador de 31.5 MVA en el dominio de la frecuencia y se validan los resultados con una simulación 3D del dispositivo electromagnético.

5.1. Modelado tridimensional y bidimensional

La mayoría de los dispositivos electromagnéticos son difíciles de modelar debido a que tienen geometrías complejas y el campo magnético no se puede aproximar usando representaciones con demasiadas simplificaciones. Entonces, es deseable plantear métodos generales y precisos para el análisis de los diferentes dispositivos.

Aún cuando los modelos 2D se caracterizan por su sencillez, generalmente poseen deficiencias que están bien reconocidas en la literatura, por ejemplo en el análisis de transformadores [76, 77]. Una representación 2D no es válida para el cálculo de los campos de dispersión en transformadores de potencia trifásicos con núcleo acorazado, debido a que las porciones de devanado fuera de la ventana del núcleo no se pueden considerar. Para tratar con este tipo de problemática se requiere de un modelo de EF 3D para obtener resultados precisos, en comparación con mediciones experimentales [78, 79].

El análisis completo de un dispositivo electromagnético involucra un problema en 3D. Sin embargo, simulaciones de este tipo llevan a sistemas muy grandes de ecuaciones simultáneas, que en el contexto de diseño del dispositivo o la predicción de su comportamiento bajo cualquier condición de operación requieren una gran cantidad de soluciones que demandan grandes cantidades de recursos de cómputo y tiempo de cálculo. Por lo tanto, existe la tendencia de usar modelos de EF 2D siempre que sea posible. En ese sentido, los modelos 2D son más atractivos desde punto de vista de recursos de cómputo y tiempo de cálculo. No obstante, la distribución del campo magnético, las excitaciones y las geometrías complejas del dispositivo impiden su uso generalizado para resolver el problema 3D. Frecuentemente, los resultados con estos modelos se corrigen usando factores empíricos que funcionan bien para problemas específicos; sin embargo, el modelo carece de generalidad. Por ejemplo, una porción de los devanados no se puede considerar con simulaciones Cartesianas, a menos que se agregue una inductancia de dispersión como un elemento externo al problema de campo en 2D. Esta inductancia de dispersión en la mayoría de los casos es un valor estimado/empírico, o en el mejor de los casos una fórmula que surge de una aproximación lineal.

Por lo tanto, el modelado 2D puro (sin parámetros de corrección) no es apto para una simulación precisa en dispositivos que exhiben campos electromagnéticos de naturaleza 3D. Sin embargo, aquí se propone una metodología para modelar dispositivos electromagnéticos 3D que se puedan desarmar en modelos Cartesianos y axisimétricos. Es importante que estos dominios puedan reproducir la geometría 3D original del dispositivo cuando se unen. Los modelos de campo 2D se acoplan a través de sus terminales eléctricas, junto con una especificación apropiada de condiciones de frontera, con el objetivo de reproducir el comportamiento 3D del dispositivo original. De esta forma, se mantienen los atributos bien conocidos de simulaciones en 2D, sin recurrir a factores de corrección o circuitos externos.

5.2. Descomposición del dominio

La idea principal de la metodología propuesta es descomponer la geometría 3D original, junto con las excitaciones, utilizando representaciones con geometrías Cartesianas o axisimétricas. Estos dominios deben reproducir tan cerca como sea posible el problema original cuando se interconectan. Este proceso se establece utilizando las terminales eléctricas de los conductores sólidos y filamentosos que existen en cada modelo. La etapa de interconexión se realiza con base en el método de acoplamiento fuerte EF-ANM-multi-sistema que se presentó en el Capítulo 3. Además, el proceso de unión de los modelos de campo demanda una especificación apropiada de las condiciones de frontera y excitaciones.

El proceso de descomposición bidimensional se muestra en la Fig. 5.1. Esta metodología es general y se puede aplicar al análisis de dispositivos siempre y cuando se reproduzca de manera precisa su geometría y excitaciones.

5.3. Análisis de un transformador trifásico

Para ejemplificar la aplicación de la metodología propuesta se analiza un transformador trifásico de 31.5 MVA, 132 kV/33 kV, 50 Hz, conexión estrella-delta, con devanados concéntricos. En la Fig. 5.2 se muestra la geometría 3D de este dispositivo electromagnético. Es claro que un modelo Cartesiano o axisimétrico no puede capturar la geometría del transformador. Entonces, se opta por descomponer esta geometría 3D en subdominios.

5.3.1. Subdominios con geometría axisimétrica

La Fig. 5.3 muestra una vista superior (plano $x - z$) del transformador; seis círculos definen los devanados del transformador. Es posible descomponer esta vista en tres subdominios, uno para cada conjunto de devanados por fase junto con su correspondiente región de núcleo magnético. El subdominio que exhibe la Fase C se muestra en la Fig. 5.4. Se ve claramente que no se puede definir un modelo axisimétrico usando esta vista, debido a que el núcleo magnético no posee una geometría circular perfecta. Sin embargo, destacan dos subdominios con geometría axisimétrica asociados sólo a los devanados del transformador, cada uno abarcando un ángulo ϕ . La continuidad de las corrientes que circulan en los devanados, permite que cada par de dominios axisimétricos se puedan unir para tener uno sólo por fase, por lo tanto abarca un ángulo 2ϕ . Este procedimiento de análisis se repite para los devanados de la fase A y B. La vista frontal del modelo axisimétrico para cada fase es la misma y se muestra en la Fig. 5.5a.

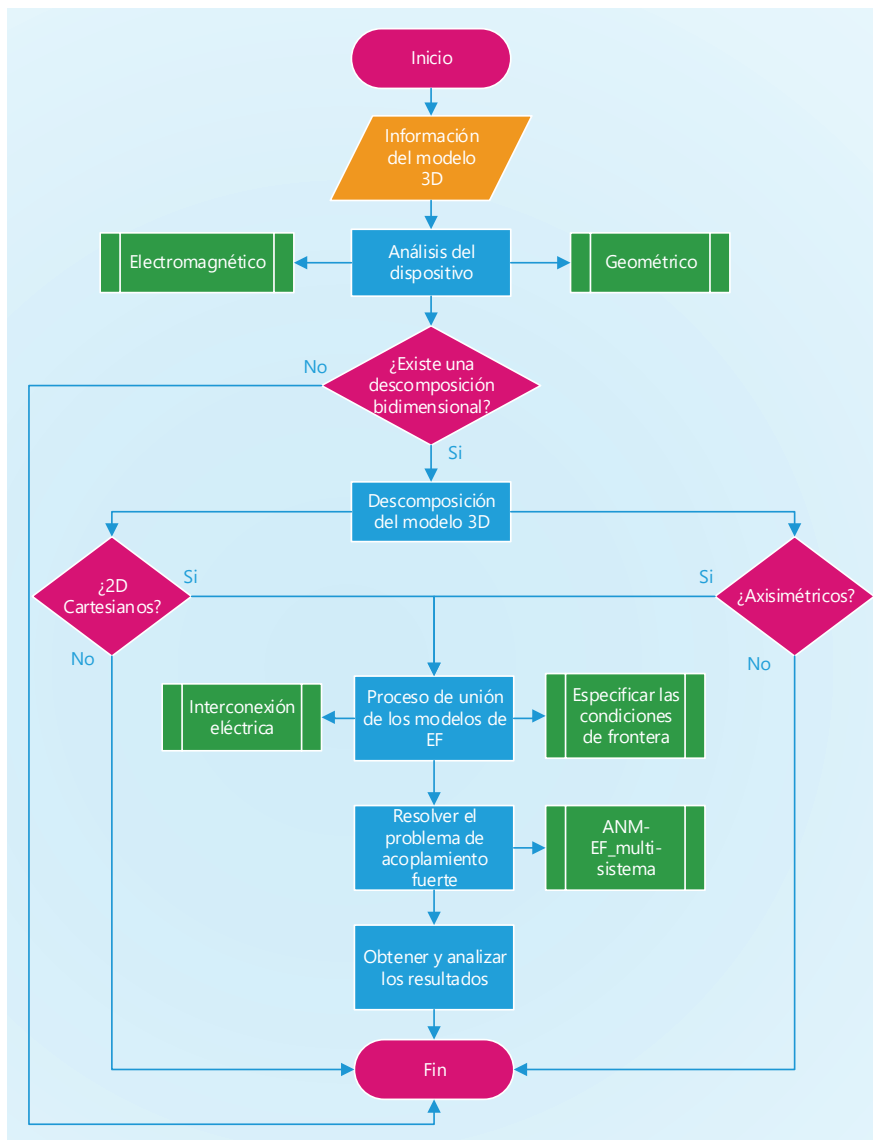


Figura 5.1: Diagrama de flujo del proceso mediante descomposición bidimensional.

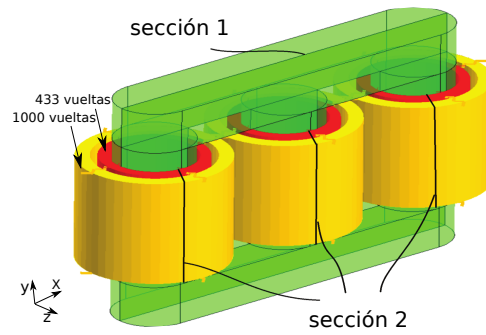


Figura 5.2: Geometría 3D del transformador trifásico.

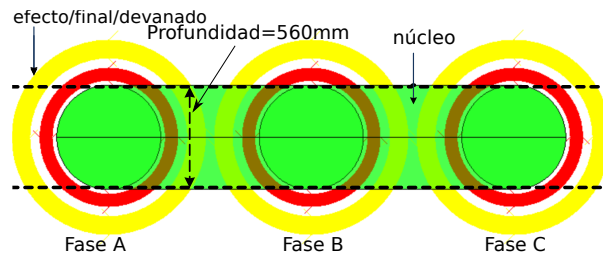


Figura 5.3: Vista superior del transformador.

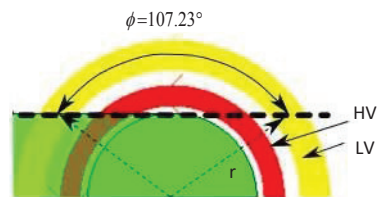


Figura 5.4: Vista superior de la pierna externa del núcleo del lado derecho.

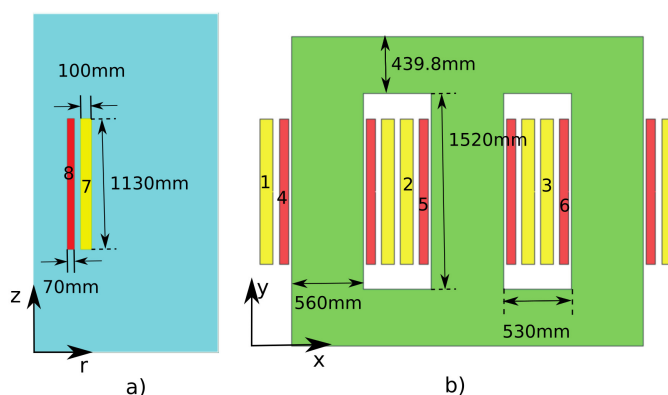


Figura 5.5: a) Modelo axisimétrico, uno para cada fase del transformador y b) modelo Cartesiano.

5.3.2. Subdominio con geometría Cartesiana

El subdominio geométrico que no es considerado por los modelos axisimétricos corresponde a la región que existe entre las líneas punteadas de la Fig. 5.3. La vista frontal (o sección transversal) de esta región se muestra en la Fig. 5.5b, la cual tiene una profundidad igual a la del núcleo magnético. Este subdominio se resuelve como un sistema de EF Cartesiano e incluye el núcleo del transformador y las secciones de los devanados que son perpendiculares al plano xy .

5.3.3. Proceso de unión de los modelos de EF

El análisis del transformador trifásico mediante una descomposición bidimensional incluye cuatro modelos de EF: tres axisimétricos y uno Cartesiano. Estos se interconectan a través de los puertos eléctricos de los devanados que se tienen en cada región de EF. Esta etapa se explica con ayuda de la Fig. 5.6, donde cada región de EF perteneciente a un devanado se representa por un bloque utilizando la siguiente notación: FECar indica un dominio de EF Cartesiano, mientras que FEaxi hace referencia a una región axisimétrica. En la Fig. 5.6a se observa la conexión en estrella de los devanados del lado de alto voltaje (primario) del transformador. Tres bloques FECar permiten la interconexión de las regiones de EF denotadas como 1,2 y 3 en el modelo Cartesiano de la Fig. 5.5b con el circuito. Además, se conecta en serie un bloque FEaxi por fase para considerar los efectos finales de devanado a través de cada modelo de EF axisimétrico. De forma similar, en el lado de bajo voltaje que se encuentra conectado en delta (ver Fig. 5.6b), tres bloques FECar permiten la interconexión de las regiones de EF denotadas como 4, 5 y 6 en el modelo Cartesiano de la Fig. 5.5b con el circuito. Finalmente, tres bloques FEaxi asociados

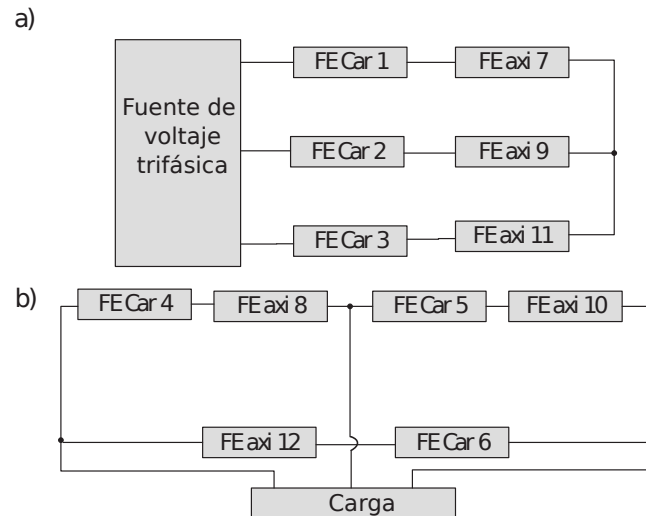


Figura 5.6: Circuito de interconexión. Los números en los bloques de EF corresponden con la numeración en la Fig. 5.5 para cada región conductora.

a los devanados de baja tensión de los modelos axisimétricos, permiten considerar los efectos finales de devanado en cada fase que no se toman en cuenta en el modelo Cartesiano.

La conexión eléctrica de los devanados tal y como se realiza en el circuito de la Fig. 5.6, asegura que se tengan las mismas condiciones de interconexión que en el transformador real.

5.4. Simulaciones

Se realizaron simulaciones para la condición de operación a carga nominal y cortocircuito. En las Figuras. 5.2 a 5.5 se muestran las dimensiones del transformador y el número de vueltas de los devanados. Las resistencias de los devanados de alto y bajo voltaje son 1.022Ω y 0.1359Ω , respectivamente. Las simulaciones implican la operación no lineal del transformador en el dominio de la frecuencia.

5.4.1. Resultados a carga nominal

Los voltajes de alimentación en cada una de las fases en la prueba a carga nominal son los siguientes: $\tilde{e}_A = 13,200/\sqrt{3}\angle -90^\circ$ V, $\tilde{e}_B = 13,200/\sqrt{3}\angle 30^\circ$ V y $\tilde{e}_C = 13,200/\sqrt{3}\angle 150^\circ$ V. En la Tabla 5.1 se muestran los valores de las corrientes que circulan en cada una de las fases a carga nominal (columna etiquetada como FLD). El factor de potencia es cercano a la unidad, debido a que se conecta una carga resistiva en las terminales del secundario del transformador. En la Fig. 5.7 se muestra la distribución del flujo magnético cuando el transformador opera a carga nominal. Cabe resaltar que en la condición a carga nominal el flujo magnético se confina al

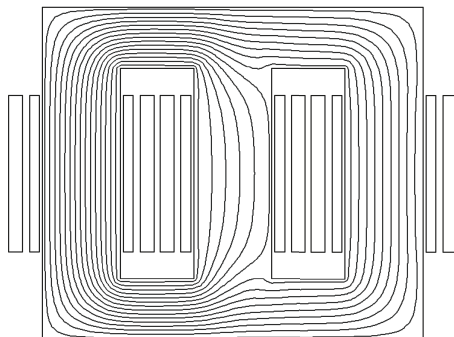
Figura 5.7: Distribución del flujo magnético ($\omega t = 0$) a carga nominal.

Tabla 5.1: Corrientes en los devanados a carga nominal

Corriente [A]	FLD	FLUX3D	FLUX2D
\dot{i}_A	135.27 \angle -98.93 $^\circ$	136.85 \angle -98.25 $^\circ$	136.50 \angle -93.79 $^\circ$
\dot{i}_B	135.68 \angle 21.02 $^\circ$	135.06 \angle 22.07 $^\circ$	138.47 \angle 25.74 $^\circ$
\dot{i}_C	134.88 \angle 140.74 $^\circ$	136.71 \angle 142.46 $^\circ$	136.08 \angle 145.09 $^\circ$
\dot{i}_a	312.52 \angle 81.20 $^\circ$	315.67 \angle 82.15 $^\circ$	315.95 \angle 86.13 $^\circ$
\dot{i}_b	311.59 \angle -158.68 $^\circ$	310.94 \angle -157.50 $^\circ$	316.79 \angle -153.95 $^\circ$
\dot{i}_c	312.86 \angle -38.54 $^\circ$	316.48 \angle -36.81 $^\circ$	316.30 \angle -34.01 $^\circ$

núcleo y entonces enlaza a los devanados. Las corrientes en cada uno de los devanados también generan flujo adicional que se conoce como flujo de dispersión, que enlaza sólo a un devanado por lo que el encadenamiento en los demás es nulo. Este flujo es una pequeña fracción del flujo total, no obstante juega un papel importante en la determinación del comportamiento del transformador.

5.4.2. Resultados de la operación en cortocircuito

A continuación se muestran los resultados de la condición de cortocircuito. Este se impone en el lado de bajo voltaje, mientras que los devanados en el primario del transformador se alimentan con los siguientes voltajes reducidos por fase: $\tilde{e}_A = 11,491\angle 0^\circ$ V, $\tilde{e}_B = 11,491\angle -120^\circ$ V y $\tilde{e}_C = 11,491\angle 120^\circ$ V. El bloque de carga en el secundario (ver Fig. 5.6) se reemplaza por un nodo de interconexión para esta condición de operación.

La Tabla 5.2 (columna etiquetada como FLD) muestra los valores de las corrientes que circulan en los devanados del transformador. Estas corrientes están defasadas aproximadamente 90° en atraso con respecto a los voltajes, debido a que el factor de potencia es cercano a cero

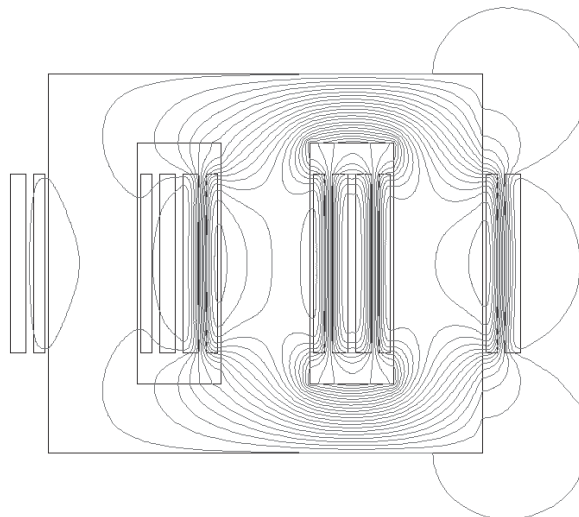


Figura 5.8: Distribución del flujo magnético ($\omega t = 0$) en un cortocircuito.

en una condición de cortocircuito. Por lo tanto, el dispositivo se comporta como un elemento predominantemente inductivo.

En la Fig. 5.8 se muestra la distribución de las líneas de campo magnético en una condición de cortocircuito. Nótese que con los devanados en el secundario del transformador en cortocircuito, el campo magnético principalmente es forzado al espacio de aire entre los devanados (conocido como canal de dispersión). De hecho, asumiendo que los ampére-vuelta en el primario y secundario por fase son balanceados, la fuerza magnetomotriz en cada lado tiene la misma amplitud y dirección opuesta, es decir:

$$N_A |\tilde{i}_A| = -N_a |\tilde{i}_a| \quad (5.1)$$

para el caso de la fase a . En este caso, todo el flujo magnético del transformador es flujo de dispersión. Debido a que los devanados de alto y bajo voltaje son concéntricos con respecto a las piernas del núcleo, una condición de cortocircuito en el secundario implica que no hay flujo circulando por las piernas del núcleo, con el fin de satisfacer la condición de encadenamiento de flujo nulo para el devanado en cortocircuito, un hecho que se puede observar en la Fig. 5.8.

5.4.3. Validación de resultados

Los resultados antes presentados se comparan con simulaciones de EF 2D y 3D utilizando el software Flux [75], para determinar la precisión del método propuesto. En el Apéndice F se

Tabla 5.2: Corrientes en los devanados: condición de cortocircuito.

Corriente [A]	FLD	FLUX3D	FLUX2D
\dot{i}_A	135.08 \angle -87.93°	134.71 \angle -89.14°	299.25 \angle -88.21°
\dot{i}_B	135.15 \angle 152.35°	134.12 \angle 151.16°	301.29 \angle 152.62°
\dot{i}_C	135.05 \angle 32.64°	134.47 \angle 31.48°	298.89 \angle 33.42°
\dot{i}_a	312.78 \angle 92.34°	311.55 \angle 91.03°	694.14 \angle 92.25°
\dot{i}_b	310.38 \angle -27.65°	308.68 \angle -28.83°	689.31 \angle -27.38°
\dot{i}_c	312.71 \angle -147.63°	310.99 \angle -148.68°	693.44 \angle -147.03°

presenta la formulación del problema electromagnético 3D y las características del modelo de EF implementado en el software comercial FLUX3D.

La Tabla 5.2 muestra diferencias importantes entre FLD y FLUX2D (modelo 2D Cartesiano). Se tiene una diferencia máxima en la magnitud de la corriente de 124.64 %, como consecuencia de no incorporar los efectos finales de devanado en el modelo de EF Cartesiano. Nótese que los valores de corriente para la condición de carga nominal (ver Tabla 5.1) muestran una buena concordancia entre FLD y FLUX2D, debido a que el flujo magnético se confina en su mayoría en el núcleo del transformador para esta condición de operación.

Por otra parte, los resultados de la metodología propuesta también se comparan con simulaciones 3D. Las corrientes calculadas con el modelo 3D se muestran en la tercera columna de las Tablas 5.1 y 5.2. Se puede apreciar que los resultados de FLD coinciden de manera precisa con la simulación en 3D, con una diferencia menor al 1 % en la condición de cortocircuito. Además se tiene la ventaja de que la solución en FLD se obtiene más rápido y con menor demanda computacional, comparado con un análisis de EF en 3D. Estos resultados demuestran la capacidad de la formulación propuesta para incorporar de manera precisa efectos en 3D, sin recurrir a elementos de parámetros concentrados externos.

5.4.3.1. Comparación entre valores locales de campo magnético.

Aunque los resultados anteriores muestran una buena correspondencia entre cantidades globales, se realiza una comparación más rigurosa con valores locales de cantidades magnéticas. Particularmente se obtienen las componentes axial y radial de la densidad de campo magnético en la región entre devanados de la fase C (ver Fig. 5.9) como una función de la altura.

En las Fig. 5.10 y 5.11 se muestran los valores de campo magnético para la condición de cortocircuito. Es claro que un modelo Cartesiano no calcula de forma correcta la densidad de flujo axial así como la componente radial en un cortocircuito. Por el contrario, los resultados de la densidad de campo magnético obtenidos con FLD muestran una excelente correspondencia con la simulación 3D.

Cabe destacar que para ampére-vueltas uniformemente distribuidos a lo largo de los devanados primario y secundario (con la misma altura), el campo magnético de dispersión es



Figura 5.9: Región de análisis del campo magnético.

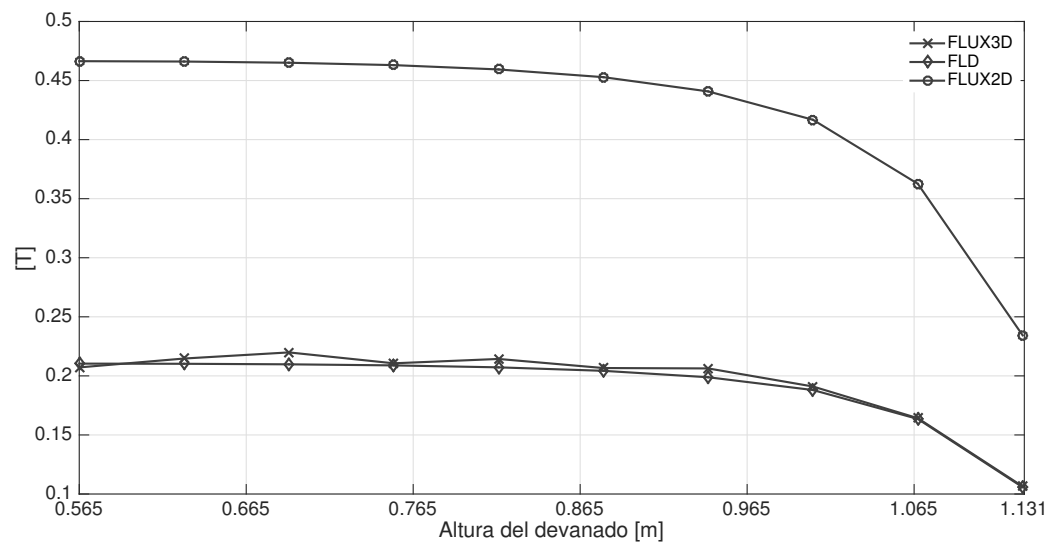


Figura 5.10: Componente axial de la densidad de flujo magnético vs altura del devanado: condición de cortocircuito.

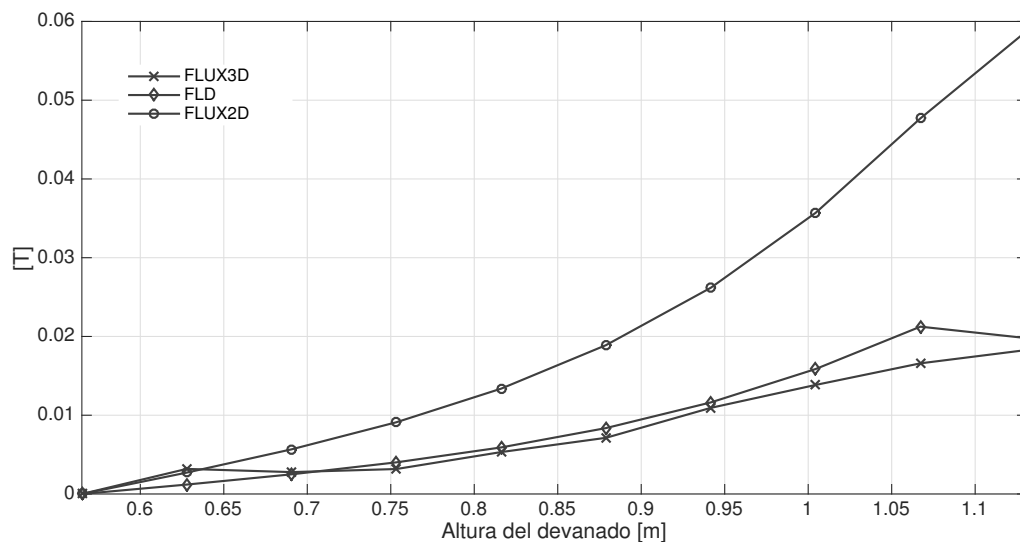


Figura 5.11: Componente radial de la densidad de flujo magnético vs altura del devanado: condición de cortocircuito.

predominante axial (ver Fig. 5.10) e incluye casi toda el área entre los devanados, excepto en los extremos de las bobinas donde hay abombamiento del campo. Esto se debe a que el flujo de dispersión encuentra una trayectoria más corta, determinada por la reluctancia de la región, para regresar vía el yugo o la pierna del transformador, por lo que aumenta la magnitud de la componente radial en los extremos tal y como se observa en la Fig. 5.11. Nótese que el penúltimo valor de la densidad de flujo radial calculado con FLD, difiere con el valor que se tiene en el modelo 3D. Esta diferencia se puede atribuir a un error numérico, ya que se debería mantener el aumento gradual de la componente radial de la densidad de flujo, con el valor máximo en el extremo de los devanados.

Con base en los resultados presentados se concluye que la técnica de análisis bidimensional propuesta es eficaz para reproducir efectos tridimensionales tanto locales como globales, con costos computacionales y tiempos de cálculo bajos.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo de investigación, se ha propuesto una metodología que permite el análisis no lineal de múltiples dispositivos electromagnéticos modelados a través del MEF, e interconectados eléctricamente. Se ha presentado una descripción completa de la formulación propuesta, junto con las suposiciones que se establecieron para su desarrollo. Además, se ha desarrollado una técnica de análisis de dispositivos 3D a través de una descomposición bidimensional.

6.1. Conclusiones

6.1.1. Formulación ANM-EF-multi-sistema

Se ha derivado un procedimiento general y sistemático de acoplamiento fuerte basado en el análisis nodal modificado y el método del elemento finito, para acoplar varios modelos de EF de sistemas de campo magnético Cartesianos y axisimétricos a través de redes de circuito con topología arbitraria. La matriz final del sistema acoplado es simétrica, siempre y cuando no se tengan fuentes controladas por voltaje o por corriente en el problema. Aunque la formulación se desarrolla para resolver problemas de campo electromagnético en el dominio de la frecuencia, también se puede hacer el planteamiento para resolver problemas en el dominio del tiempo en los que se puede considerar, por ejemplo, el movimiento.

El método propuesto sirve para analizar redes eléctricas donde cada sistema de campo magnético se puede representar por un modelo de parámetros concentrados o distribuidos. Entonces, el usuario tiene la opción de elegir el nivel de refinamiento para cada dispositivo, con lo que se amplía la capacidad de análisis en sistemas eléctricos. El análisis de un dispositivo con elementos finitos permite un refinamiento mayor debido a que se pueden considerar las geometrías complejas, la no linealidad de los materiales y las corrientes inducidas. En contraste, la representación con un modelo de parámetros concentrados sólo intenta captar los fenómenos

electromagnéticos con un conjunto de parámetros eléctricos, perdiéndose la naturaleza distribuida de su fenomenología.

La interconexión de los diferentes modelos de EF se considera que es a nivel de circuito, es decir, el estado magnético de un dispositivo electromagnético no afecta a los demás y cada uno de estos tiene sus propias condiciones de frontera, geometría y excitaciones. Esto no implica una restricción importante ya que la mayoría de los problemas prácticos involucran una interconexión eléctrica entre los diferentes componentes del sistema, por lo que el método propuesto en este trabajo de tesis tiene la versatilidad para resolverlos desde diferentes perspectivas de análisis.

Los problemas de campo Cartesianos se pueden tratar esencialmente en la misma forma que los sistemas de campo axisimétrico, lo que permitió plantear un bloque de construcción general de estos sistemas de campo. Cada bloque contiene los datos de la geometría y la física del problema, así como la información de la interconexión eléctrica con los demás modelos. Los bloques de construcción se incorporan de forma sencilla en el sistema matricial que resulta de aplicar el ANM, por medio del concepto de ensamblaje de bloques.

Se ha desarrollado y explicado a detalle un nuevo elemento no natural para sistemas de campo axisimétrico en el dominio de la frecuencia. Con esta contribución se ha ampliado el alcance de solución de problemas a través del ANM. El elemento no natural para sistemas axisimétricos permite la inclusión de regiones de EF con conductores filamentosos y sólidos. Además, desde la perspectiva del circuito, estos dos tipos de conductores se tratan de la misma forma, con una representación a través de fuentes de voltaje controladas por PMV.

Se ha demostrado la efectividad de la metodología propuesta, con un ejemplo numérico en el que se analizan simultáneamente 4 modelos de EF interconectados con elementos de circuito: un motor de inducción trifásico, transformadores monofásicos, fuentes de voltaje, inductancias y resistencias. Los resultados se compararon con software comercial de elementos finitos, por lo que fue imprescindible utilizar la representación de los transformadores mediante circuitos equivalentes, debido a la restricción de que sólo se puede resolver un modelo de campo con FLUX2D. Con base en los resultados obtenidos, se concluye mediante un análisis eléctrico y magnético que el método de acoplamiento EF-ANM-multi-sistema es una herramienta general y sistemática para analizar problemas de acoplamiento circuito-campo con varios modelos de EF.

6.1.2. Descomposición bidimensional

Se ha propuesto una metodología para analizar dispositivos electromagnéticos 3D mediante una descomposición bidimensional. El principal requerimiento es que el dispositivo electromagnético se pueda ensamblar por secciones con geometrías Cartesianas y/o axisimétricas. De esta manera, se conservan las ventajas que ofrecen los modelos en 2D y se evita el uso de paquetes de EF 3D que tienen una alta demanda de recursos de cómputo y tiempo largos para el cálculo electromagnético. Esta formulación puede ser de interés en la etapa de diseño de dispositivos, donde se recurre a un procedimiento de optimización que requiere una gran cantidad de soluciones.

En la formulación propuesta, basada en la descomposición bidimensional del dispositivo, no se requiere de factores de corrección aproximados o empíricos, tal como parámetros concentrados acoplados al modelo 2D de EF. Aunque este tipo de soluciones pueden mejorar la precisión de los modelos 2D, generalmente solo funcionan para un análisis específico, entonces es preferible incorporar modelos de EF que pueden tomar en consideración geometrías complejas, propiedades no lineales y excitaciones arbitrarias.

El método se aplica al modelado de un transformador de potencia de 31.5 MVA. Los resultados muestran una excelente correspondencia con simulaciones de EF 3D, a diferencia de un modelo 2D Cartesiano donde se tienen diferencias por arriba del 100% en la prueba de cortocircuito. Para aplicar esta metodología se requiere hacer un estudio a detalle de la geometría y comportamiento electromagnético del dispositivo, para proponer la descomposición bidimensional.

6.2. Líneas de investigación abiertas y trabajos futuros

El método de acoplamiento propuesto para resolver problemas en el dominio de la frecuencia, abre la posibilidad de ampliar la formulación para resolver problemas en el dominio del tiempo.

Los problemas específicos a estudiar son:

- Aplicar el método de acoplamiento fuerte EF-ANM-Multi-sistema, para la solución simultánea de varios dispositivos electromagnéticos en el dominio del tiempo.
- Establecer técnicas numéricas para acoplar mallas de elementos finitos que permitan la simulación de movimiento en dispositivos electromagnéticos.
- Establecer las propiedades numéricas de los métodos de acoplamiento propuestos para resolver problemas transitorios.

- Validar los resultados de los métodos propuestos con software comercial o experimentación.

Además, con el método basado en la descomposición bidimensional de un transformador trifásico con modelos Cartesianos y axisimétricos, se podría llevar a cabo el cálculo de fuerzas electromagnéticas ejercidas en los devanados en condiciones de cortocircuito. Este análisis será posible llevarlo a cabo una vez que se tenga la formulación transitoria del método de acoplamiento EF-ANM-multi-sistema. Con base en los estudios reportados en la literatura, generalmente este problema se ha abordado con modelos de EF 3D. Entonces, resulta interesante llevar a cabo la investigación con un modelado bidimensional y comparar los resultados.

6.3. Fichas bibliográficas de las publicaciones

A continuación se dan las fichas bibliográficas de los productos publicados de forma permanente y que fueron generados a partir de mi trabajo doctoral:

1. V. M. Jimenez-Mondragon, R. Escarela-Perez, E. Melgoza, M. A. Arjona, and J. C. Olivares-Galvan, *Nonlinear time-harmonic analysis of multiple magnetic field systems: Cartesian, axisymmetric and coupled circuits*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 52, no. 10, pp. 1-10, 2016.
2. V. M. Jimenez-Mondragon, R. Escarela-Perez, E. Melgoza, M. A. Arjona, and J. C. Olivares-Galvan, *Quasi-3-D Finite-Element Modeling of a Power Transformer*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 53, no. 6, pp. 1-4, 2017.

Apéndice A

Publicaciones

En este Apéndice se presentan las publicaciones que son resultado de mi trabajo doctoral.

Nonlinear Time-Harmonic Analysis of Multiple Magnetic Field Systems: Cartesian, Axisymmetric, and Coupled Circuits

V. M. Jimenez-Mondragon^{1,2}, Rafael Escarela-Perez², Enrique Melgoza³, M. A. Arjona⁴,
and J. C. Olivares-Galvan²

¹Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Coyoacán 04510, Mexico

²Departamento de Energia, Universidad Autonoma Metropolitana-Azcapotzalco, Mexico City 02200, Mexico

³Instituto Tecnologico de Morelia, Morelia 58120, Mexico

⁴Instituto Tecnologico de La Laguna, Torreón, 27000, Mexico

A general and systematic formulation based on the finite-element method, modified nodal analysis and multi-field system approach is presented for the analysis of multiple magnetic field systems that are electrically interconnected through circuit networks in the frequency domain. This approach permits simultaneous solution of any number of 2-D Cartesian and axisymmetric problems by considering the electrical terminals of each finite-element model as nonnatural elements of the modified nodal analysis, allowing their systematic incorporation into the global system of equations. This way, arbitrary electrical network topologies can be readily analyzed, where the magnetic systems are no more than simple elements of the circuit system. Moreover, a unified building block is introduced for the 2-D and axisymmetric models, leading to easy computer implementation. The effectiveness of our formulation is tested by determining the electromagnetic behavior of a double-squirrel cage induction motor that is connected to three feeding transformers. A 2-D Cartesian finite-element model is employed for the three-phase motor, whereas an axisymmetric representation is used for each transformer. Hence, four finite-element models are simultaneously solved, which are electrically coupled through circuit elements. Lumped circuit parameters model the end effects of the motor squirrel cage and stator as well as the associated stator feeding circuits. Previous work only considers coupling of Cartesian systems, while our formulation expands the capabilities of quasi-3-D finite-element modeling by systematically coupling 2-D and axisymmetric finite-element models.

Index Terms—Circuit-field problems, cosimulation, modified nodal analysis, multiple finite-element analysis, strong coupling.

I. INTRODUCTION

ELECTRICAL networks involve many different components interacting at the same time: synchronous generators, induction motors, transformers, transmission lines, loads, and actuators, as well as their control and protection systems. Thus, analysis and design of electric systems [1] requires appropriate models for each component. Common representations in the steady and transient cases are found by modeling each component with lumped-parameter models [2], where a solution is obtained for the equivalent assembled circuit network. This kind of analysis is in general useful when the global behavior of the system is sought.

On the other hand, it is often necessary to focus analysis efforts on just one component of the electric system to obtain detailed information that cannot be provided by lumped-parameter models, such as hot spots, magnetic flux distributions and leakage, and fringing magnetic fields. Finite-element (FE) circuit-field (CF) coupled formulations can be applied to analyze, design and control low-frequency (LF) electromagnetic devices with greater detail than with lumped-parameter equivalent circuits by taking into consideration nonlinearities, intricate geometries, winding connections, and complex interconnection with external devices. Generally, just one electromagnetic system is modeled with finite elements, whereas the rest of the system elements are represented by lumped-parameter models (equivalent circuits in most cases).

The coupling of field and circuit equations has been typically based on two approaches, namely direct (or strong) [3]–[6] and indirect (or weak) [2], [7], [8] couplings. Each system (field, circuit, and controls) is separately solved in the weak coupling method, with independent solutions being employed to excite the independent systems in an iterative way [9]. Hence, each system is autonomously and conveniently developed with its own numerical and mathematical methods. The advantages of this method are its flexibility and modularity, allowing for the direct use of proven and readily available circuit softwares.

Some weak coupling implementations also require accurate parameter extraction from the electromagnetic system for precise results in cosimulation computations [2]. An interesting cosimulation proposal can be found in [10], which can deal with the analysis of several 2-D Cartesian FE models connected to an external circuit. A multiloop method is employed here to extract circuit parameters of the machine from independent current-forced FE simulations for every time step. The equivalent circuit thus established can now be connected at the terminals of the entire circuit. Notice that the final problem to be solved is a pure electric circuit.

The strong coupling method simultaneously solves the lumped-parameter and magnetic field equations, where solutions of higher accuracy can be generally and quickly found. Nevertheless, custom circuit code is usually required to achieve proper coupling with the field equations. First attempts to strongly couple circuit and field systems using mesh methods can be found in [11], [12]. Reference [13] was able to incorporate arbitrarily connected solid and filamentary conductors using either nodal or mesh approaches. Loop techniques

Manuscript received January 28, 2016; revised April 21, 2016; accepted June 7, 2016. Date of publication June 14, 2016; date of current version September 16, 2016. Corresponding author: R. Escarela-Perez (e-mail: r.escarela@ieee.org).

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2016.2580528

involve an additional unknown in regions with solid conductors, whereas a nodal approximation requires an electromotive force unknown for filamentary conductors. This technique was only able to consider basic circuit elements (sources, resistors, capacitors, and inductors).

Development of more general strong coupling techniques has been widely based on topology theory [4], [6]. Topological methods for circuit-field analysis derive a graph structure out of the coupled problem that leads to a consistent system of equations. The state variable approach [14] can be combined with graph techniques to obtain a canonical form of the electrical equations by representing the circuit network as a set of nodes, branches, and links. This method generalizes the obtention of circuit-field equations with proper incorporation of solid and filamentary conductors. A voltage (current)-based approach is established for solid (filamentary) conductor regions. Graph operations are required in most cases to reduce the complexity of the problem, leading to a complicated coupling scheme. This approach can be applied to analyze control problems in electrical machines [15], since the FE/CF coupled formulation allows the incorporation of elements such as voltage and current sources, resistances, inductors, capacitors, diodes, transistors, and thyristors.

Strong coupling of circuit-field equations can be formulated using the modified nodal analysis (MNA) [16]. A formulation for nonlinear magnetodynamics systems was presented in [17] considering only filamentary conductors and basic circuit elements. Recent work presented in [3] solves the coupled problem using the concepts of the MNA. However, the building-block construction concept is not used to achieve a compact and systematic formulation, leading to a cumbersome implementation of the proposed method. Nonetheless, the method can include a greater variety of circuit elements such as switching devices, diodes, resistances, capacitances, inductances, and independent and dependent sources.

It has been shown in [5] that a simple, general and systematic strong coupling method for the analysis of circuit-field problems can be obtained by considering the massive and filamentary conductors of the field system as nonnatural elements of the MNA. The distinguishing and unique characteristic of this method is that the building-block construction concept of the nodal and FE analyses is retained. It is worth noticing that this important feature was not exploited in previous attempts to use the MNA for circuit-field coupling. Furthermore, FE conductors (solid and filamentary) can be treated in the same way to obtain a more general formulation of the coupled problem.

The MNA-FE strong coupling approach of [5] has been extended to analyze several 2-D FE Cartesian models coupled through circuit systems in [18]. Thus, it is possible to simulate with this formulation any number of electrically interconnected low-frequency electromagnetic elements using lumped-parameter representations and 2-D FE models. This multi-system simulation method has been employed, for example, to model the rotor skew in induction motors [19].

We summarize our contributions as follows.

- 1) A new systematic strong coupling procedure based on the modified nodal analysis and finite-element method capable of coupling any number of Cartesian and axisymmetric FE models of magnetic field systems through circuit networks of arbitrary topology is proposed. The method is developed in the frequency domain to solve magneto harmonic problems.
- 2) A general building block is introduced which allows Cartesian and axisymmetric FE models to be treated in the same way, easing computer implementation. This has been possible by new nonnatural elements of axisymmetric solid and filamentary conductors.
- 3) Our formulation broadens the simulation power of Cartesian and axisymmetric finite-element modeling by allowing the simultaneous analysis of independent magnetic systems interacting through circuit networks. One important implication of our proposed techniques is that the user is truly empowered to choose the level of refinement required by each device since it can be modeled as a field or circuit model.
- 4) We are not aware of any commercial, free or scientific FE software capable of dealing with more than one magnetic FE system interacting with an electrical circuit system.

A time harmonic analysis of an induction machine fed from a transformer bank has been performed to show the robustness of the proposed method. Our multi-FE MNA coupled approach (coded in Fortran) is validated by comparing our results with those obtained with a certified commercial software.

II. FE ELECTRICAL PORTS

Each FE-modeled magnetic field system considered in this work is assumed magnetically independent from any other such system. The interaction between them takes place through their electrical ports [18], having interconnections through circuit elements that create electrical networks of arbitrary topology. This means that the interaction is electrical between different FE devices without any magnetic coupling between them. Thus, the electrical ports of FE devices are the terminals of their massive and filamentary conductors, which can be seen as circuit nodes belonging to a circuit network.

The expressions in the next sections are developed in the frequency domain, considering an arbitrary number of Cartesian and axisymmetric FE devices, with each system having an arbitrary number of solid and stranded conductors as well as any number of nonconducting linear and nonlinear regions.

A. Axisymmetric FE Systems Using Winding Vectors

FE discretization schemes of axisymmetric systems can be found elsewhere [12], [20], [21]. However, the treatment of conductor regions given there does not lend itself for easy incorporation into the MNA. As a result, this section provides a discretization approach for filamentary and solid conductors using a winding vector concept that leads to a single way of processing both types of conductors. Hence, a systematic coupling methodology is obtained, where solid conductors can be modeled as filamentary ones with just one turn.

Proper manipulation of Maxwell's equations in cylindrical coordinates leads to the following expressions for the

l th axisymmetric field system in the frequency domain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &= 0 \quad \text{in } S_{\text{nc}}^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &= -\tilde{J}_f^* \quad \text{in } S_f^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &= -\tilde{J}_s^* \\ &= \sigma \left(\nabla \tilde{V}^* + \frac{j\omega}{r} \tilde{A}_\phi^{*(l)} \right) \quad \text{in } S_s^* \end{aligned} \quad (1)$$

where a tilde is used to describe phasor quantities and an asterisk emphasizes the axisymmetric nature of the excitations and potentials. $\tilde{A}_\phi^{*(l)}$ is the only component of the magnetic vector potential (MVP). A change of variable $\tilde{A}_\phi^{*(l)} = r\tilde{A}_\phi^{(l)}$ is employed in (1) to eliminate asymmetry in the stiffness matrix when Galerkin's method is applied to obtain the FE equations [21]. \tilde{J}_f^* , \tilde{J}_s^* and \tilde{V}^* are the current density in filamentary regions, the nonuniform current density in regions with solid conductors and the electric scalar potential, respectively. ω and σ are the angular frequency and the conductivity, respectively. ν is the reluctivity of the material, and can be a nonlinear function of the magnetic flux density. S_{nc}^* , S_f^* , S_s^* are domains of nonconducting materials, and filamentary and solid conductors.

The current densities in (1) depend on the type of FE conductor, having a direct effect over the external circuits to which they are interconnected. Let us first consider solid conductors. The magnetic vector potential and the current density only have ϕ components in the axisymmetric field problem. It follows that the value of the electric scalar potential is constant on the cross section of an axisymmetric solid conductor. If \hat{s} is the arc length of the solid conductor for a model spanning ϕ_{eff} radians, we find that

$$\tilde{V}_s^* = -\hat{s} \frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial \phi} \quad (2)$$

represents the potential difference between the ends of the solid conductor. The current density \tilde{J}_s^* in (1) can therefore be written in terms of the magnetic vector potential and terminal voltage as

$$\tilde{J}_s^* = -\frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^{*(l)} + \frac{\sigma}{\hat{s}} \tilde{V}_s^* \quad (3)$$

Integrating (3) and solving for \tilde{V}_s^* leads to the following voltage-current relation for solid conductors:

$$\tilde{V}_s^* = R_s^* \tilde{I}_s^* + j\omega\phi_{\text{eff}} \frac{\int_{S_s^*} \frac{1}{r} \tilde{A}_\phi^{*(l)} dr dz}{\Lambda_s^*} \quad (4)$$

where \tilde{I}_s^* is the total current in the solid conductor and $\Lambda_s^* = \int_{S_s^*} 1/r ds$. Here

$$R_s^* = \frac{\phi_{\text{eff}}}{\int \int_{S_s^*} \frac{\sigma}{r} dr dz} \quad (5)$$

is the dc resistance of the solid conductor.

Stranded (or filamentary) conductors are considered too thin such that eddy-current effects are negligible. This way, the S_f^* domain contains cross sections denoted by Λ_f . Each cross section has a uniform distribution of N_f^* series-connected filamentary conductors, which carry a current \tilde{I}_f^* . Hence, a uniform current density over Λ_f can be written as

$$\tilde{J}_f^* = \frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} \quad (6)$$

Notice that Λ_f and Λ_s^* do not possess the same meaning. Λ_f is the actual cross-section area of each filamentary region S_f^* while Λ_s^* is the integral of $1/r$ over the cross-sectional area of each solid conductor in S_s^* , having length units.

Substitution of (4) and (6) into (1) leads to the boundary-value problem for the axisymmetric LF magnetic field

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &= 0 \quad \text{in } S_{\text{nc}}^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &= -\frac{N_f^* \tilde{I}_f^*}{\Lambda_f} \quad \text{in } S_f^* \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^{*(l)}}{\partial z} \right) &+ \frac{j\omega\sigma}{r} \frac{\int \int \frac{1}{r} \tilde{A}_\phi^{*(l)} dr dz}{\Lambda_s^*} - \frac{j\omega\sigma}{r} \tilde{A}_\phi^{*(l)} = -\frac{\tilde{I}_s^*}{r\Lambda_s^*} \quad \text{in } S_s^* \end{aligned} \quad (7)$$

where the total currents in the right hand sides are the only excitations of the l th system. A problem specified with total currents in every conductor can be uniquely solved with (7). However, current-forced problems are rarely found in the analysis of LF electromagnetic devices.

The voltage-current relation for a winding of N_f^* series-connected filamentary conductors can be found in terms of the MVP using Faraday's law and its ohmic voltage drop

$$\tilde{V}_f^* = R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{\text{eff}} \omega N_f^* \frac{\int \int_{S_f^*} \tilde{A}_\phi^{*(l)} dr dz}{\Lambda_f} \quad (8)$$

where R_f^* is the dc resistance of the winding. This expression is fundamental to interconnect axisymmetric filamentary conductors with external circuits as shown in the following.

A weighted residual Galerkin formulation is used to discretize (7), which leads to

$$\begin{aligned} -[S^*] \{ \tilde{a}^{*(l)} \} - j\omega \sum_s [D_s^*] \{ \tilde{a}^{*(l)} \} \\ + j\omega \sum_s [D_s^{1*}] \{ \tilde{a}^{*(l)} \} + \sum_f \{ W_f^* \} \tilde{I}_f^* + \sum_s \{ W_s^* \} \tilde{I}_s^* = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Matrices and vectors in (9) are defined by the following

expressions

$$\begin{aligned}
[S^*] &= \sum_e \iint_{S_e} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \zeta^T}{\partial r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \zeta^T}{\partial z} \right) dr dz \\
[D_s^*] &= \sum_e \iint_{S_e} \frac{\sigma}{r} \zeta \zeta^T dr dz \\
\{W_f^*\} &= \frac{N_f^*}{\Lambda_f} \sum_{ef} \iint_{S_{ef}} \zeta dr dz \\
\{W_s^*\} &= \frac{1}{\Lambda_s^*} \sum_{es} \iint_{S_{es}} \frac{1}{r} \zeta dr dz \\
[D_s^{1*}] &= \iint_{S_{es}} \zeta \frac{\sigma}{r} \frac{\iint_{S_{es}} \frac{1}{r} \zeta^T dr dz}{\Lambda_s^*} dr dz \\
&= \sigma \iint_{S_{es}} \frac{1}{r} \zeta dr dz \{W_s^*\}^T = \sigma \Lambda_s^* \{W_s^*\} \{W_s^*\}^T \\
&= \frac{\phi_{\text{eff}}}{R_s^*} \{W_s^*\} \{W_s^*\}^T \quad (10)
\end{aligned}$$

where $\tilde{a}^{*(l)}$ is an $n \times 1$ vector of MVPs at element nodes belonging to the l th axisymmetric FE model. $[S^*]$ is an $n \times n$ known as stiffness matrix. $[D_s^*]$ and $[D_s^{1*}]$ also have $n \times n$ dimensions, and are called conductivity matrices. $\{W_f^*\}$ and $\{W_s^*\}$ are $n \times 1$ vectors that encapsulate the properties of windings and solid conductors. n is the total number of free nodes in the FE region. ζ is a column vector of shape functions ζ_i that are used to approximate the MVP with polynomial functions.

The second and third terms in (9) take into account the induced current effect in solid conductors. Additionally, the definition of the winding vectors $\{W_f^*\}$ and $\{W_s^*\}$ is particularly important since these terms allow the interconnection of FE systems with external circuits, as shown in the next paragraphs. These vectors contain information about the properties of filamentary windings and solid conductors, attributing current at element nodes. An important property of winding vectors is that the sum of their entries always gives the total number of turns in the conductor region. Notice that solid conductors are made up of just one turn. Thus, the winding vector $\{W_s^*\}$ allows solid conductors to be treated as if they were filamentary ones of just one turn. Under this consideration the system (9) can be written as

$$-[S^{*1}] \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} + j\omega \sum_s [D_s^{*1}] \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} + [W^*] \left\{ \tilde{i}_c^* \right\} = 0 \quad (11)$$

where

$$[S^{*1}] = [S^*] + j\omega \sum_s [D_s^*]. \quad (12)$$

$[W^*]$ is an $n \times (f + s)$ matrix that contains the $f + s$ filamentary and solid winding vectors. $\{\tilde{i}_c^*\}$ contains their respective currents, having dimensions $(f + s) \times 1$.

FE discretization of the voltage-current relations (8) and (4) can be performed using the winding vector definitions such

that

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_f^* &= R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{\text{eff}} \omega N_f^* \frac{\iint_{S_f^*} \zeta^T dr dz}{\Lambda_f} \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} \\
&= R_f^* \tilde{I}_f^* + j\phi_{\text{eff}} \omega \left\{ W_f^* \right\}^T \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_s^* &= R_s^* \tilde{I}_s^* + j\phi_{\text{eff}} \omega \frac{\iint_{S_s^*} \frac{1}{r} \zeta^T dr dz}{\Lambda_s^*} \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} \\
&= R_s^* \tilde{I}_s^* + j\phi_{\text{eff}} \omega \left\{ W_s^* \right\}^T \left\{ \tilde{a}^{*(l)} \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

Notice that the winding vectors $\{W_f^*\}$ and $\{W_s^*\}$ can be employed for computation of induced voltages and flux linkages in axisymmetric FE conductors.

B. Cartesian FE Systems Using Winding Vectors

A MVP representation of the low-frequency electromagnetic field problem, with z -directed currents, is given in rectangular coordinates for the l th field system by [5], [22]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial y} \right) &= 0 \quad \text{in } S_{nc} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial y} \right) &= -\frac{N_f \tilde{I}_f}{\Lambda_f} \quad \text{in } S_f \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_z^{(l)}}{\partial y} \right) \\
+ j\omega \sigma \frac{\iint_{S_s} \tilde{A}_z^{(l)} dx dy}{\Lambda_s} - j\omega \sigma \tilde{A}_z^{(l)} &= -\frac{\tilde{I}_s}{\Lambda_s} \quad \text{in } S_s \quad (15)
\end{aligned}$$

where; $\tilde{A}_z^{(l)}$ is the only component of the MVP in the l th Cartesian domain. S_{nc} , S_f and S_s are nonconducting, filamentary conductor, and solid-conductor domains, existing in any number and distribution. Λ_s is the cross-sectional area of a solid conductor region. N_f is the number of conductor turns contained in a given region of S_f . \tilde{I}_f and \tilde{I}_s are currents in filamentary regions and impressed currents in solid regions, respectively.

The prevailing conditions at electric ports of filamentary and solid conductors are obtained with their voltage equations. Thus, Faraday's law establishes that

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_f &= R_f \tilde{I}_f + j\omega l_{\text{eff}} N_f \frac{\iint_{S_f} \tilde{A}_z^{(l)} dx dy}{\Lambda_f} \\
\tilde{V}_s &= R_s \tilde{I}_s + j\omega l_{\text{eff}} \frac{\iint_{S_s} \tilde{A}_z^{(l)} dx dy}{\Lambda_s} \quad (16)
\end{aligned}$$

where l_{eff} is the depth of the filamentary and solid conductors. R_f and R_s are dc conductor resistances as defined for the axisymmetric case.

FE discretization of the system of integro-differential equations (15) can again be performed using the Galerkin approach [21], which leads to

$$-[S^1] \left\{ \tilde{a}^{(l)} \right\} + j\omega \sum_s [D_s^1] \left\{ \tilde{a}^{(l)} \right\} + [W] \left\{ \tilde{i}_c \right\} = 0 \quad (17)$$

where

$$[S^1] = [S] + j\omega \sum_s [D_s] \quad (18)$$

Similarly to the axisymmetric case, $[W]$ is an $n \times (f + s)$ matrix containing the winding vectors of filamentary and solid regions. Again, $\{W_f\}$ and $\{W_s\}$ are $n \times 1$ vectors that involve winding properties and distribution of currents. $[S]$, $[D_s]$, and $[D_s^1]$ are $n \times n$ stiffness and conductivity matrices involving geometry and materials of the l th field system. $\{\tilde{a}^{(l)}\}$ is an $n \times 1$ vector of nodal MVPs, while $\{\tilde{i}_c\}$ is an $(f + s) \times 1$ vector. The reader is referred to [5] for the explicit definitions of matrices and vectors in (17). This formulation has the advantage of allowing filamentary and solid conductors to be numerically processed in the same way from a circuit point of view, since massive conductors are dealt with as filamentary ones of just one turn.

The FE version of (16) is therefore given by

$$\begin{aligned} \tilde{V}_f &= R_f \tilde{I}_f + j\omega l_{\text{eff}} \{W_f\}^T \{\tilde{a}^{(l)}\} \\ \tilde{V}_s &= R_s \tilde{I}_s + j\omega l_{\text{eff}} \{W_s\}^T \{\tilde{a}^{(l)}\} \end{aligned} \quad (19)$$

Now, (19) is key for the coupling between the circuit and the l th FE system.

III. FE-MNA MULTI-MODEL METHOD

A systematic methodology to simultaneously solve several axisymmetric and Cartesian FE systems, electrically interconnected through lumped-parameter circuit systems, is now developed using the underlying concepts of the MNA method [16]. Here, FE conductors (either filamentary or solid) provide additional voltage–current relations and currents are injected at appropriate circuit nodes. Section III-A provides a brief summary of the MNA methodology. Sections III-B and III-C develop the building blocks for each finite-element system, whereas the complete coupled system is presented in Section III-D.

A. Modified Nodal Analysis

The MNA is based on the classic nodal analysis, which in turn is related to Kirchhoff's current law. This methodology is a combination of topological relations and circuit element characteristics. It has been widely used in most modern circuit simulators, because of its ease of implementation through the building-block concept. This characteristic is very attractive since complex electrical networks can be readily solved. In recent years, the MNA has been used to solve the circuit-field coupling problem, which shows the effectiveness and flexibility of this method. Basically, the MNA distinguishes between two type of elements: *natural* and *nonnatural*. Natural elements are those than can be handled by the nodal method such as resistances, inductances, capacitances, and independent current sources. Circuits with only natural elements are readily solved by adding the building blocks of admittance elements and forcing currents at specific circuit nodes. Non-natural elements arise due to the limitation of the nodal method to incorporate circuit elements with building-blocks

that cannot be directly expressed using forcing current contributions, such as transformers, ideal voltage sources, dependent sources, auto-transformers, magnetically coupled circuits, etc. To overcome this limitation, voltage–current relations of such elements are added as additional equations with appropriate injection of currents at connecting nodes. A building block can be obtained [16] for each natural or nonnatural element, which is assembled alongside the other blocks to obtain the final system to be solved. The main advantage of the MNA is the systematic incorporation of natural and nonnatural elements through the building-block concept. In fact, the equations can be directly written by inspection, which can be readily translated into computer code.

The MNA can be compactly expressed in matrix notation as

$$\begin{bmatrix} Y_R & A \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{i}_{\text{aux}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_v \end{bmatrix} \quad (20)$$

where $[Y_R]$ is an $m \times m$ admittance matrix that excludes nonnatural elements. It stands for m nontrivial circuit nodes, that is, for m unknown circuit voltages. $[A]$ is an $m \times n_e$ matrix that injects currents to nodes from nonnatural elements, whose voltage–current relations have been introduced as additional equations using matrices $[B]$ and $[C]$. $\{\tilde{f}_i\}$ is an $m \times 1$ vector that contains known forcing currents of circuit components. $\{\tilde{f}_v\}$ is an $n_e \times 1$ vector whose entries are forcing voltage values. $\{\tilde{v}\}$ is an $m \times 1$ vector of unknown nodal circuit voltages and $\{\tilde{i}_{\text{aux}}\}$ is an $n_e \times 1$ vector of unknown currents in nonnatural elements.

B. Nonnatural Contribution of an Axisymmetric FE System

The building-block for the l th axisymmetric model that contains an arbitrary number of filamentary and solid conductors can be expressed in matrix notation as

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & L^* & 0 \\ 0 & -S^{*1} & W^* & W_{Ti}^* \\ -L^{*T} & \gamma W^{*T} & Z^* & 0 \\ 0 & \gamma W_{Ti}^{*T} & 0 & -Z_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{a}^{*(l)} \\ \tilde{i}_c^* \\ \tilde{a}_{is}^{*(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

by adding the voltage–current relations (13) and (14) for each FE axisymmetric conductor of the l th FE system (11). Notice that the coupling between the field and circuit systems is achieved through the winding vectors of each FE conductor. Here, an unknown vector $\{\tilde{a}_{is}^{*(l)}\}$ of additional eddy currents in the solid conductors has been included in this building-block, with each entry defined as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{is}^{*(l)} &= j\phi_{\text{eff}} \omega \frac{\{W_s^*\}^T}{R_s^*} \{\tilde{a}^{*(l)}\} \\ &= j\omega\sigma \sum_{e_s} \iint_{S_{e_s}} \frac{1}{r} \zeta^T dr dz \{\tilde{a}^{*(l)}\} \end{aligned} \quad (22)$$

The incorporation of this extra equation has the advantage of avoiding the explicit construction of $\sum_s [D_s^{*1}]$, that requires the sum of s square matrices in (11), each one involving the multiplication of winding vectors $\{W_s^*\}$. This way, much computational time is saved since the actual construction of the global $\sum_s [D_s^{*1}]$ matrix in (11) is more laborious than solving

the resultant global system of equations. Equation (11) has not been modified at all but only rearranged in a computationally convenient form.

The terms in (21) are defined as follows: $\gamma = j\phi_{\text{eff}}\omega$ while $[W_{Ti}^*]$ is an $n \times s$ matrix containing only winding vectors of solid conductors. $[Z^*]$ is an $n_c \times n_c$ diagonal matrix and $[Z_s^*]$ is an $s \times s$ diagonal matrix that contains the dc resistances of the finite-element conductors (solid and filamentary). $[L^*]$ is an $m \times n_c$ matrix with 1 and -1 entries to inject current in and out at nodes where FE conductors are electrically connected.

C. Nonnatural Contribution of a 2-D Cartesian FE System

The l th FE system (17) with $f+s$ finite-element conductors and their voltage-current relations (19) can be put together to obtain the following building block for the l th 2-D Cartesian model:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & -S^1 & W & W_{Ti} \\ -L^T & \kappa W^T & Z & 0 \\ 0 & \kappa W_{Ti}^T & 0 & -Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{a}^{(l)} \\ \tilde{i}_c \\ \tilde{a}_{is}^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

where $\kappa = jI_{\text{eff}}\omega$. $\{\tilde{a}_{is}^{(l)}\} = \kappa[W_{Ti}']^T\{\tilde{a}^{(l)}\}$ is a vector of unknown eddy currents for each solid conductor. $[W_{Ti}']$ is an $s \times n$ matrix obtained by multiplying each $\{W_s\}$ vector from $[W_{Ti}]$ by its corresponding factor $1/R_s$. The matrices and vectors in (23) can be similarly determined as in the axisymmetric case.

An advantage of our strong coupling method is the versatility to incorporate an arbitrary number of FE models into the global system as will be shown in the next section.

D. Complete Coupled System

The complete coupled system can now be presented by considering the circuit system as the main one, with the different FE conductors as nonnatural elements. In order to get a coherent coupled problem, the building block for the l th Cartesian or axisymmetric FE system can be concisely and generally expressed as

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{L}^{(l)} \\ 0 & -S^{(l)} & \mathcal{W}^{(l)} \\ -\mathcal{L}^{T(l)} & \mathcal{W}^{T(l)} & \mathcal{Z}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\mathcal{A}}^{(l)} \\ \tilde{i}_c^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

where $[S^{(l)}] = \kappa[S^1] - j\kappa\omega \sum_s [D_s^1]$, $[\mathcal{W}^{(l)}] = \kappa[W]$, $[\mathcal{Z}^{(l)}] = [Z]$ and $\{\tilde{\mathcal{A}}^{(l)}\} = \{\tilde{a}^{(l)}\}$ for the building block belonging to a Cartesian model. The vector of currents $\{\tilde{i}_c^{(l)}\}$ is given by $\{\tilde{i}_c\}$ in this case. An axisymmetric building block has $[S^{(l)}] = \gamma[S^*] - j\gamma\omega \sum_s [D_s^{*1}]$, $[\mathcal{W}^{(l)}] = \gamma[W^*]$, $[\mathcal{Z}^{(l)}] = [Z^*]$ and $\{\tilde{\mathcal{A}}^{(l)}\} = \{\tilde{a}^{*(l)}\}$. $\{\tilde{i}_c^{(l)}\}$ is now given by $\{\tilde{i}_c^*\}$. This permits to treat 2-D and axisymmetric FE models in exactly the same way.

The first row in (24) is necessary to inject current into the circuit nodes where each FE conductor is connected. The minus sign is incorporated to preserve symmetry in the general building block. The second row in (24) can be immediately associated with the FE equation (17) or (11) and it is multiplied

by the factor κ or γ , respectively, to keep symmetry. The third row is identified with the voltage-current relation for each filamentary or solid conductor. The general building-block (24) contains electric, magnetic and geometric properties for each finite-element system, which is systematically incorporated into the circuit system (20).

Finally, the interconnection of the circuit system (20) and all FE models can be compactly expressed as

$$\begin{bmatrix} -Y_R & -A & 0 & -\mathcal{L}_\tau \\ -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_\tau & \mathcal{W}_\tau \\ -\mathcal{L}_\tau^T & 0 & \mathcal{W}_\tau^T & \mathcal{Z}_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{i}_{\text{aux}} \\ \tilde{\mathcal{A}}_\tau \\ \tilde{i}_{c\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{f}_i \\ -\tilde{f}_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

The establishment of the circuit-field coupled system has been made by allocating the individual FE models in cascade as follows:

$$\begin{aligned} S_\tau &= \begin{bmatrix} S^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & S^{(n_l)} & \\ & & & \mathcal{L}^{(n_l)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_\tau = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathcal{L}^{(n_l)} & \\ & & & \mathcal{Z}^{(n_l)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{W}_\tau &= \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathcal{W}^{(n_l)} & \\ & & & \mathcal{Z}^{(n_l)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_\tau = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathcal{Z}^{(n_l)} & \\ & & & \mathcal{Z}^{(n_l)} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{A}}_\tau &= \{\tilde{\mathcal{A}}^{(1)} \dots \tilde{\mathcal{A}}^{(n_l)}\}^T, \quad \tilde{i}_{c\tau} = \{\tilde{i}_c^{(1)} \dots \tilde{i}_c^{(n_l)}\}^T \end{aligned}$$

The building blocks of FE models do not introduce asymmetries and the general structure of this coupled system is not affected by the specific properties of each FE model.

FE models can be arbitrarily inserted in (25) by proper numbering of the circuit and FE nodes and there is no restriction in the number of models that can be incorporated.

If materials with nonlinear magnetic characteristics exist, the consistent coupled system (25) involves complex nonlinear equations. They can be solved with the Newton-Raphson method [23].

Magnetic nonlinearity cannot be formally accounted for in time-harmonic FE formulations as magnetic permeability varies over the entire electric cycle. However, it is possible to consider a modified BH curve [24] to define a single equivalent reluctivity per cycle. The equivalences are defined by a simple energy matching as follows [24]

$$\int_0^{|\tilde{\mathbf{B}}_{\text{eq}}|} |\tilde{\mathbf{B}}| d|\tilde{\mathbf{H}}| = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{|\mathbf{B}_t|} \mathbf{H}^T d\mathbf{B} dt \quad (26)$$

where \mathbf{H} and \mathbf{B} are the time-domain magnetic field intensity and magnetic flux density. $\tilde{\mathbf{B}}$ and $\tilde{\mathbf{H}}$ are their phasor representations, respectively. This equation simply equates the energy calculated from the BH curve, given a certain magnetic state, with the averaged energy over a period of time. It is assumed that a perfect sinusoidal variation of either the magnetic flux density or magnetic field intensity exists [24]. Hence, $|\tilde{\mathbf{B}}_{\text{eq}}|$ is now easily determined from the energy match for a given maximum value of $|\mathbf{H}_t|$ over a period of time.

The theory presented in this section has been integrated into a computer code called *FLD* [5], a general FE software programmed in Fortran and mainly developed by the third author.

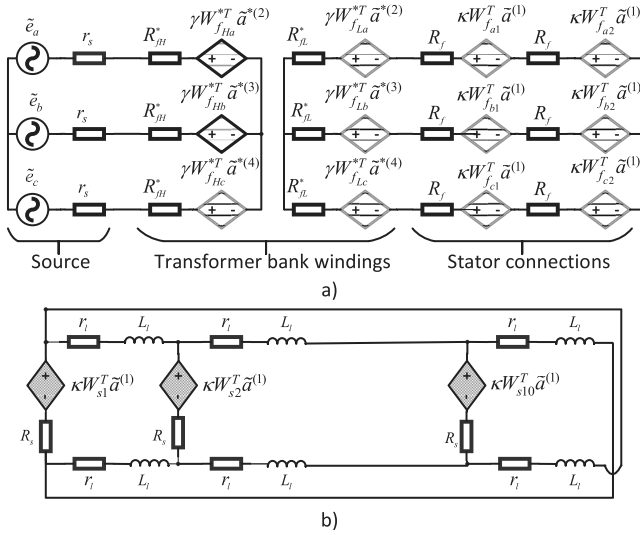


Fig. 1. Complete circuit representation of the system under study: a) Connections involving the transformer bank and stator of the rotating machine, b) Connections involving the squirrel cage rotor connections.

TABLE I
MAIN INDUCTION MACHINE PARAMETERS [25]

Parameter	Value	Parameter	Value
Pole number	2	Stator inner diameter	120 mm
Axial length	0.125 m	Rotor slot number	20
Stator slot number	24	Rotor outer diameter	119 mm
Stator outer diameter	212 mm	Rotor inner diameter	40 mm

IV. NUMERICAL EXPERIMENT

Numerical tests have been carried out to validate our proposed multi-model coupling method. The method is employed to simulate the time-harmonic nonlinear operation of four FE models interconnected through circuit elements: A three-phase double squirrel cage motor (FE Cartesian model), a Y - Y connected three-phase transformer bank (3 FE axisymmetric models of single phase transformers), external circuits (to model the end-ring effects of the squirrel cage) as well as electrical connections between FE models and the three-phase voltage source.

Fig. 1 shows the circuit connections of the entire coupled model under study. Notice that voltage equations (13), (14) and (19) have been represented as MVP-controlled voltage sources, following the theory shown in [5]. Fig. 1a shows the three-phase voltage source, six filamentary windings of the stator windings and six filamentary windings of the three transformers. The rotor circuit is shown in Fig. 1b with solid conductors (rotor bars) along with the end-rotor resistances and inductances (r_l and L_l) that short circuit the cage bars.

The electric machine employed in the simulation is a 10 HP star-connected motor, 660 V, 50 Hz, whose main parameters are given in Table I. The stator winding has 208 turns per phase and the rotor has 20 cast aluminum bars.

Each single-phase transformer has a shell type core, and the following characteristics: 5 kVA, 7.96 kV primary voltage, 0.38 kV secondary voltage and an operation frequency

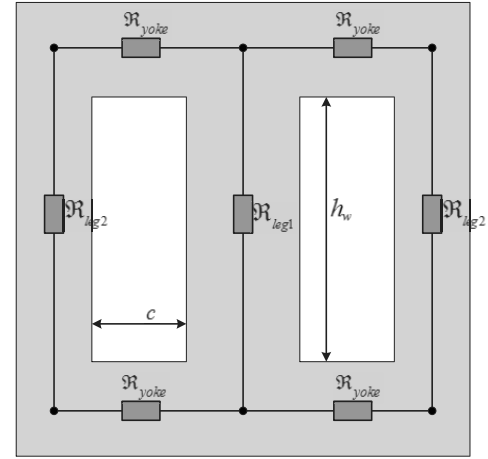


Fig. 2. Reluctance-network of the shell-type core transformer.

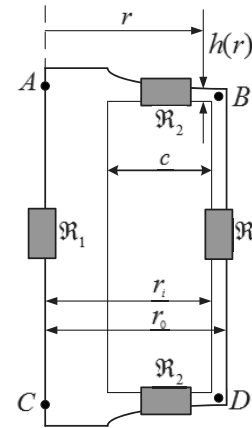


Fig. 3. Reluctance-network of the axisymmetric model.

of 50 Hz. An equivalent axisymmetric model was obtained from the actual geometry of the three-legged transformer by matching the total reluctance of the model, shown in Fig. 2, with the total reluctance of the axisymmetric model (see Fig. 3) [26]. This is achieved by modifying the cross sections of the yoke and outer leg while keeping the core window fixed in the axisymmetric model. The heights of the yokes are made dependent on the radius, so that the cross section is kept constant. This particular axisymmetric representation for each transformer is useful to retain the electrical input-output behavior of a practical transformer design that can be used to validate our proposed formulation as shown below.

The induction machine and axisymmetric transformer cross sections are shown in Figs. 4 and 5, respectively. The induction machine FE mesh has 3464 second-order finite elements, 7235 nodes and it takes advantage of anti-periodic boundary conditions. The single-phase transformer FE mesh has 1134 second-order finite elements and 2311 nodes.

Our numerical tests included the time harmonic simulation of the induction motor under different values of slip, where the motion is taken into account by multiplying the rotor bar conductivities by the rotor slip [27].

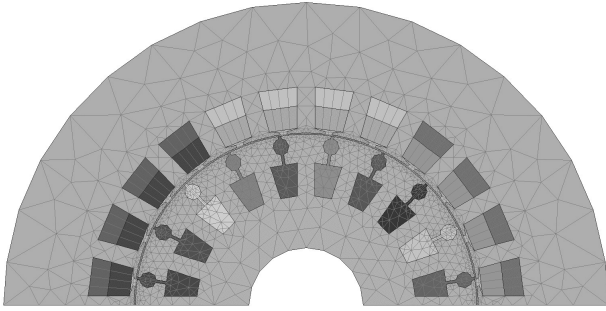


Fig. 4. Geometry and mesh of the induction motor.

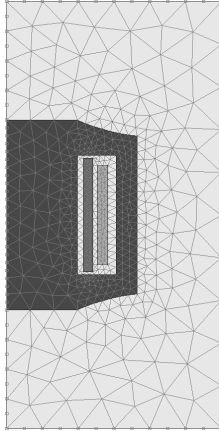


Fig. 5. Geometry and mesh of the 5 kVA axisymmetric transformer.

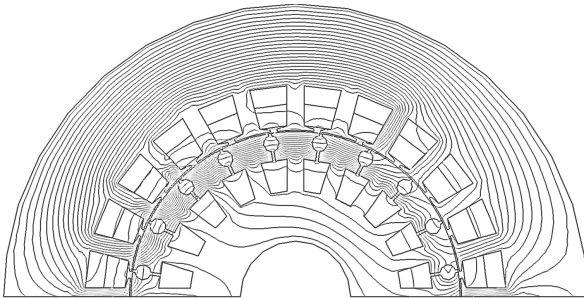


Fig. 6. Flux plot for the induction machine at slip 1.

The motor flux distribution at locked rotor operation is shown in Fig. 6. It can be seen as expected that the magnetic flux density is mainly restricted to the outer part of the rotor body due to the high currents induced in the squirrel cage. The flux distribution in each axisymmetric transformer is shown in Fig. 7 for the same operating condition, also depicting a typical behavior. Flux distributions for other slips show proper flux distributions as well.

A. Validation of the Results

Torque values have been obtained for each operating condition, leading to the torque characteristic shown in Fig. 8. The electromagnetic torque was calculated by means of the virtual work method as described in [24].

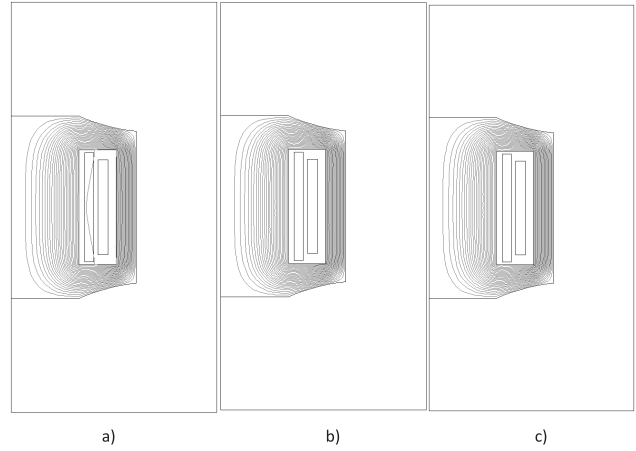


Fig. 7. Flux plots for each axisymmetric transformer. (a) Phase A. (b) Phase B. (c) Phase C.

TABLE II
FE CALCULATED CURRENTS: FILAMENTARY WINDINGS

Slip		i_a [A]	i_b [A]	i_c [A]
0.034	FLD	8.902∠144.990°	8.871∠25.621°	8.945∠-94.452°
0.034	Flux2D	8.932∠146.62°	8.883∠27.123°	8.974∠-92.853°
1.0	FLD	49.441∠121.351°	49.607∠2.472°	50.257∠-118.209°
1.0	Flux2D	48.420∠121.455°	48.596∠2.587°	49.336∠-118.154°

TABLE III
FE CALCULATED CURRENTS: SOLID BARS

Slip		Bar_1 [A]	Bar_5 [A]	Bar_{10} [A]
0.034	FLD	425.743∠-22.524°	432.168∠-92.986°	383.787∠176.803°
0.034	Flux2D	432.892∠-22.766°	439.202∠-92.940°	387.929∠177.045°
1.0	FLD	2304.462∠-75.105°	2486.774∠-143.632°	2019.054∠141.961°
1.0	Flux2D	2291.016∠-75.683°	2453.120∠-143.496°	2018.707∠142.683°

Our computer code has been validated by comparing our results with those of the well-known commercial software Flux2D [25]. Notice that currently available commercial or public-domain software, employed for finite-element modeling electromagnetic devices, cannot simultaneously deal with several FE magnetic models electrically interacting. Hence, for comparison purposes, the problem in Flux2D is simplified by representing each axisymmetric transformer field model with an equivalent circuit referred to the secondary: a series leakage impedance and a parallel magnetizing reactance.

Table II shows complex numerical values of the currents flowing in the low voltage side of the transformers at nominal speed and blocked rotor operation. These currents should be equal to the currents flowing through the motor windings, a fact that is verified from our numerical simulations. Table III shows the complex values of the currents flowing in three bars of the rotor squirrel cage. The spatial distribution of currents in the rotor bars closely follow a sinusoidal distribution as expected. Both Tables report results obtained from FLD and Flux2D. It can now be seen that there is an excellent match between our proposal and Flux2D. The current values of other bars compare equally well.

The electromagnetic torque characteristic calculated by Flux2D for the induction motor coupled to the equivalent

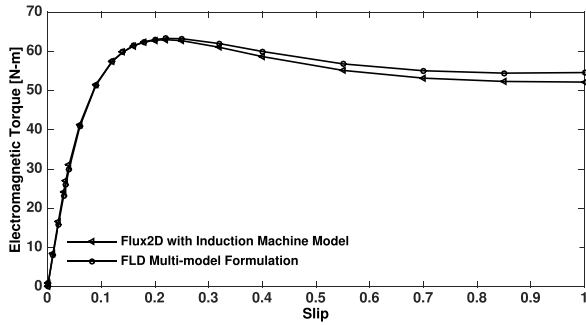


Fig. 8. Electromagnetic torque curves: FLD versus Flux2D.

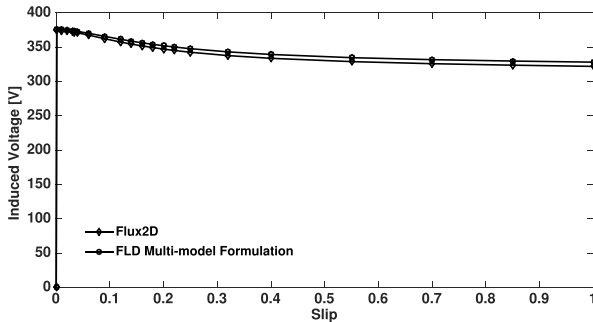


Fig. 9. Induced voltage at phase A induction motor terminals: FLD versus Flux2D.

circuits of the three transformers is shown in Fig. 8. A comparison of results of our multi-model FE formulation implemented in FLD against Flux2D shows that from no-load to rated load operation (slip = 0.034) there is an excellent correspondence between electromagnetic torque values. Although there is a good match beyond this slip, there is a small difference in the torque values. These differences can be attributed to the following facts: the use of different induction machine FE meshes, a lower voltage drop at the machine terminals in the multi-model formulation and numerical implementation differences due to undisclosed software code of Flux2D. This way, the following remarks are in order.

Remark 1: The induced voltage values at phase A of the motor are compared in Fig. 9. The induced voltage has a maximum relative error of 1.85% at blocked rotor operation. These results explain in part the torque value differences since such variable is directly proportional to the square of the voltage at machine terminals [28]. These differences in the induced voltage are attributed to the nonlinearity considered in each transformer in the multi-model formulation, in contrast with the linear equivalent circuit representation used in Flux2D.

Remark 2: Forced-current numerical experiments are carried out with Flux2D to further verify that the magnetic states of the motor and each transformer in our coupled model were correct. The electric current values obtained from our multi-model simulation were used to independently feed each electromagnetic device in Flux2D. It was verified for example that the torque calculated at the critical condition slip 1.0 in the force current motor problem reasonably matches the value obtained in the multi-model simulation. Moreover, each

forced-current transformer problem provides the induced voltages at their terminals, which closely match the multi-model ones. It is worth noticing that this comparison is only possible once the feeding electrical currents are determined from our multi-model formulation, since these values are unknowns in the multi-system coupled formulation. It is found that proper values of torque and induced voltages for each forced-current simulation are always determined for any slip value.

Thus, we conclude that our strong coupling method works satisfactorily with an arbitrary number of quasi 3-D FE models and circuit systems.

V. CONCLUSION

A systematic strong coupling procedure based on the modified nodal analysis and finite-element method has been derived to couple any number of Cartesian and axisymmetric FE models of magnetic field systems with an external circuit. As a result, the proposed method can solve electrical networks where each independent system can be represented by a lumped parameter or distributed model. It has been shown that Cartesian field problems can be treated in essentially the same way as axisymmetric field systems, with this strong coupling methodology, leading to a general FE building-block that can be easily incorporated into the MNA formulation. The new nonnatural element for axisymmetric problems has been fully developed and explained in the frequency domain and it is ready for direct addition into the MNA. A numerical example has shown the effectiveness of the proposed methodology. The problem analyzes four finite-element models interconnected with circuit elements: a three-phase induction machine, single-phase transformers, voltage sources, inductances, and resistances. A comparison of results with commercial software has shown that this method is a powerful, general, and systematic tool to analyze general circuit-field problems. These characteristics open up the possibility of enhancing our method to solve time-domain problems, a research work which is currently being investigated by the authors. We want to emphasize that we are not aware of any commercial FE software that can simultaneously solve multiple electrically interconnected FE magnetic systems.

ACKNOWLEDGMENT

Victor M. Jimenez gratefully acknowledges the scholarships granted by the National Council of Science and Technology (CONACYT-MEXICO) and Universidad Autonoma Metropolitana (UAM) to support his current doctoral studies at Universidad Nacional Autonoma de Mexico (UNAM). This work was also supported in part by CONACYT-MEXICO and in part by the National System of Researchers (SNI-MEXICO).

REFERENCES

- [1] J. Machowski, J. Bialek, and J. Bumby, *Power System Dynamics: Stability and Control*. New York, NY, USA: Wiley, 2011.
- [2] S. L. Ho, S. Niu, W. N. Fu, and J. Zhu, "A sensitivity analysis method for equivalent parameter extraction of transient magnetic field with internal circuits," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 295–298, Feb. 2012.

- [3] Y. Huangfu, S. Wang, J. Qiu, H. Zhang, G. Wang, and J. Zhu, "Transient performance analysis of induction motor using field-circuit coupled finite-element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 873–876, Feb. 2014.
- [4] P. Zhou, W. N. Fu, D. Lin, S. Stanton, and Z. J. Cendes, "Numerical modeling of magnetic devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp. 1803–1809, Jul. 2004.
- [5] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Coupling circuit systems and finite element models: A 2-D time-harmonic modified nodal analysis framework," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 2, pp. 707–715, Feb. 2009.
- [6] H. de Gersem, R. Mertens, D. Lahaye, S. Vandewalle, and K. Hameyer, "Solution strategies for transient, field-circuit coupled systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1531–1534, Jul. 2000.
- [7] E. Lange, F. Henrotte, and K. Hameyer, "A circuit coupling method based on a temporary linearization of the energy balance of the finite element model," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 838–841, Jun. 2008.
- [8] T. Herold, E. Lange, and K. Hameyer, "System simulation of a PMSM servo drive using field-circuit coupling," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 938–941, May 2011.
- [9] P. Zhou, D. Lin, W. N. Fu, B. Ionescu, and Z. J. Cendes, "A general cosimulation approach for coupled field-circuit problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 1051–1054, Apr. 2006.
- [10] W. Liang, J. Wang, T. Lu, and W. Fang, "A new method for multiple finite-element models in cosimulation with electrical circuit using machine multiloop modeling scheme," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, no. 12, pp. 6583–6590, Dec. 2014.
- [11] S. J. Salon, M. DeBortoli, and R. Palma, "Coupling of transient fields, circuits, and motion using finite element analysis," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 4, no. 11, pp. 1077–1106, 1990.
- [12] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1737–1740, Mar. 1993.
- [13] W. N. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. J. Cendes, "Modeling of solid conductors in two-dimensional transient finite-element analysis and its application to electric machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 426–434, Mar. 2004.
- [14] N. Sadowski, R. Carlson, S. R. Arruda, C. A. da Silva, and M. Lajoie-Mazenc, "Simulation of single-phase induction motor by a general method coupling field and circuit equations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1908–1911, May 1995.
- [15] A. M. Oliveira, P. Kuo-Peng, M. F. da Luz, N. Sadowski, and J. P. A. Bastos, "Generalization of coupled circuit-field calculation for polyphase structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 5, pp. 3444–3447, Sep. 2001.
- [16] L. M. Wedepohl and L. Jackson, "Modified nodal analysis: An essential addition to electrical circuit theory and analysis," *Eng. Sci. Edu. J.*, vol. 11, no. 3, pp. 84–92, Jun. 2002.
- [17] M. C. Costa, S. I. Nabeta, and J. R. Cardoso, "Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1431–1434, Jul. 2000.
- [18] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Systematic coupling of multiple magnetic field systems and circuits using finite element and modified nodal analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 1, pp. 207–213, Jan. 2011.
- [19] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Multi-slice modeling in circuit-field coupled systems using finite-element and modified nodal analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 1, pp. 67–74, Jan. 2010.
- [20] G. Meunier, D. Shen, and J.-L. Coulomb, "Modélisation de 2D et axisymétrique magnétodynamique par les éléments finis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 166–169, Jan. 1988.
- [21] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. New York, NY, USA: Marcel Dekker, 2003.
- [22] W. N. Fu and S. L. Ho, "Instantaneous power balance analysis in finite-element method of transient magnetic field and circuit coupled computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1561–1564, May 2013.
- [23] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, vol. 2. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2012.
- [24] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, J. Alvarez-Ramirez, and A. L. Laureano-Cruces, "Nonlinear time-harmonic finite-element analysis of coupled circuits and fields in low frequency electromagnetic devices," *Finite Elements Anal. Design*, vol. 46, no. 10, pp. 829–837, 2010.
- [25] *Flux: CAD Package for Electromagnetic and Thermal Analysis Using Finite Elements*, CEDRAT, France, 2005.
- [26] G. B. Kumbhar and S. V. Kulkarni, "Analysis of short-circuit performance of split-winding transformer using coupled field-circuit approach," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 22, no. 2, pp. 936–943, Apr. 2007.
- [27] S. Salon, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*. Norwell, MA, USA: Kluwer, 1995.
- [28] S. Umans, A. Fitzgerald, and C. Kingsley, *Electric Machinery*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2013.

V. M. Jimenez-Mondragon was born in Atizapan, Mexico, in 1986. He received the M.Sc. degree from the Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, Mexico, in 2013, where he is currently pursuing the Ph.D. degree in electrical engineering at the Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, especialidad en Sistemas Eléctricos de Potencia.

He is also a full-time Lecturer with the Departamento de Energía de UAM-Azcapotzalco (on leave for his doctoral studies). His current research interests include the numerical analysis and design of electric machinery.

Rafael Escarela-Perez (SM'05) was born in Mexico City, Mexico, in 1969. He received the B.Sc. degree in electrical engineering from the Universidad Autónoma Metropolitana, Mexico City, in 1992, and the Ph.D. degree from Imperial College London, London, U.K., in 1996.

He is a full-time Professor with the Departamento de Energía, UAM-Azcapotzalco. He current research interests include the control, electromagnetic analysis, and design aspects of electric machinery.

Enrique Melgoza (S'93–M'96–SM'09) was born in Morelia, Mexico, in 1967. He received the B.Sc. and M.Sc. degrees from the Instituto Tecnológico de Morelia (ITM), Morelia, in 1994 and 1996, respectively, and the Ph.D. degree from the University of Bath, Bath, U.K., in 2001.

He is a Faculty Member with ITM's Programa de Graduados e Investigación en Ingeniería Eléctrica. His current interests include finite-element analysis of electromagnetic fields and electromagnetic transients.

M. A. Arjona (S'93–M'97–SM'08) received the B.Sc. degree in electrical engineering from the Instituto Tecnológico de Durango, Durango, Mexico, in 1988, the M.Sc. degree in electrical engineering from the Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreon, Mexico, in 1990, and the Ph.D. degree in electrical engineering from Imperial College, London, U.K., in 1996.

He was with the Simulation Department, Instituto de Investigaciones Eléctricas, from 1991 to 1999. He is currently a Professor of Electrical Machines with the Instituto Tecnológico de la Laguna. His current research interests include the design, analysis, and control of electrical machines.

J. C. Olivares-Galvan (SM'10) was born in Zamora, Mexico, in 1969. He received the Ph.D. degree in electrical engineering from CINVESTAV, Guadalajara, Mexico, in 2003.

He was a Transformer Design Engineer for eight years. He was a Visiting Scholar with Virginia Tech, Blacksburg, VA, USA, in 2001. He is currently a Professor with the Departamento de Energía, Universidad Autónoma Metropolitana, Mexico City, Mexico. His current research interests include the experimental and numerical analysis of transformers.

Quasi-3-D Finite-Element Modeling of a Power Transformer

V. M. Jimenez-Mondragon^{1,2}, R. Escarela-Perez², E. Melgoza³, M. A. Arjona⁴, and J. C. Olivares-Galvan²

¹Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Ciudad de Mexico 04510, Mexico

²Departamento de Energia, Universidad Autonoma Metropolitana, Ciudad de Mexico 02200, Mexico

³Instituto Tecnologico de Morelia, Morelia 58120, Mexico

⁴Instituto Tecnologico de La Laguna, Torreon 27000, Mexico

A strong circuit-field coupling technique that can analyze multiple magnetic field systems (2-D Cartesian and axisymmetric) is adapted to study power transformers. The technique is based on finite-element (FE) and modified nodal analyses, leading to a multi-field system approach that can effectively take account of the 3-D magnetic field existing inside and outside the transformer core. Hence, cumbersome 3-D FE simulations are circumvented, overcoming high computational costs. A 2-D Cartesian FE model is set up to represent the cross section of the transformer core and its three-phase winding, whereas an axisymmetric representation is employed for the end sections of each set of windings (one per phase). All models and their associated circuit systems are simultaneously solved, providing a circuit-field method that is easy to implement at low computational cost, keeping the well-known advantages of 2-D FE modeling. Electrical currents and local values of magnetic flux density are calculated for two limiting conditions: rated load and short-circuit operation. Our approach shows a remarkably small difference (no higher than 1%) with a full 3-D FE model.

Index Terms—End-winding effects, finite-element (FE) analysis, power transformer, short-circuit condition, strong coupling method.

I. INTRODUCTION

ACTUAL experimentation with electromagnetic devices is expensive, insecure, and impractical in several situations. Therefore, there is a need for analytical- or numerical-based analyses that truly describe the performance of electrical equipment. For instance, power transformers are difficult to model, since they have geometries and fields that cannot be approximated using oversimplified representations. Thus, it is desirable to obtain easy, general, and accurate methods for the analysis of this kind of electromagnetic devices.

Finite-element (FE) analysis has now become an essential numerical tool that ensures, in most cases, reliable and accurate modeling of electromagnetic devices [1]. Notice, however, that inaccuracies and deficiencies of 2-D techniques to study these devices are well recognized, for example, in the FE analysis of transformers [2], [3]. Here, 2-D field analyses are not valid for computation of leakage fields of shell-type three-phase power transformers, because the portions of the coil out of the core window cannot be taken into account [2]. The 3-D FE modeling that produces more accurate results [4], [5] is required to deal with this kind of problem.

Although 3-D modeling is highly accurate, it demands large amounts of computer resources and computational time, even for time-harmonic analyses. Hence, there is still a trend to use 2-D models whenever possible. Indeed, 2-D numerical models are preferred, even if they fail to account for important 3-D effects. The 2-D results are frequently *corrected* using empirical factors that are tailor-made for specific problems, making the numerical analysis uncertain to some extent. For example, end-winding effects cannot be directly and accurately

considered within 2-D Cartesian FE simulations, unless a leakage inductance is added, for example, as an external circuit element to the 2-D FE circuit-field problem. This *leakage* inductance is, in most cases, an estimated/empirical value or obtained at best from approximated linear formulas.

Thus, it would seem that pure (no correction parameters) 2-D modeling is unfit for accurate simulation in devices exhibiting electromagnetic fields of 3-D nature. However, we propose, here, a new methodology to model true 3-D electromagnetic devices that can be judiciously disassembled in Cartesian and axisymmetric models. It is important that these domains can reproduce the original 3-D geometry of the device when they are joined together. The Cartesian and axisymmetric models are coupled through their electrical terminals, along with a proper specification of boundary conditions, to nearly reproduce the actual electromagnetic behavior of the original 3-D device. This way, we keep all the convenient and well-known attributes of 2-D FE modeling, without resorting to correction factors or external circuit elements. This kind of analysis has not been reported in the literature to the best of our knowledge. A 31.5 MVA, three-phase power transformer has been analyzed to show the effectiveness of our methodology. A full 3-D FE model is set up to verify the results.

II. COUPLED 2-D AND AXISYMMETRIC MODELING

A full analysis of electromagnetic devices involves a 3-D problem. However, it is well-known that 3-D models lead to huge systems of simultaneous equations, frequently requiring hundreds of solutions in the context of design iterations or time transient simulations. In this sense, 2-D models are more attractive from a time saving and computational point of view. However, the excitations and geometry of the device are such that 2-D models are incorrect in a strict sense.

Hence, the main goal of our proposed methodology is to carefully decompose the original 3-D geometry, along with its excitations, using Cartesian and axisymmetric representations.

Manuscript received November 16, 2016; revised January 12, 2017; accepted January 24, 2017. Date of publication January 26, 2017; date of current version May 26, 2017. Corresponding author: V. M. Jimenez-Mondragon (e-mail: vmjm@ieee.org).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2017.2659662

These domains must reproduce as close as possible the original problem when they are stitched together. The joining process is established using the electrical terminals of the filamentary or massive conductors that exist in each Cartesian or axisymmetric model. This stage is performed using the theory presented in [6]. Equally important, the stitching process also demands proper specification of boundary and excitation conditions as described in Section III.

A systematic interconnection of FE models is achieved through the electrical connection of their filamentary and massive conductors. Consider the discretization of either low-frequency Cartesian or axisymmetric models in the frequency domain [6]

$$[S_j]^l \{A_j\}^l - [N_j]^l \{i_j\}^l = \{0\} \quad (1)$$

where the subindex j can be substituted by a ($=$ axisymmetric) or c ($=$ Cartesian). The superscript l indicates that (1) holds for the l th Cartesian or axisymmetric domain. $[S_j]^l$ is a complex matrix that embodies geometric and material properties [1], $[N_j]^l$ is a matrix that contains winding vectors of massive and filamentary conductors [6], whereas $\{A_j\}^l$ and $\{i_j\}^l$ are vectors that contain complex magnetic vector potentials and currents. Eddy currents and magnetic nonlinearity are taken into account with this general formulation. Each filamentary and massive conductor has a voltage equation V_k given by

$$V_k^l = R_k^l i_k^l + \chi_j^l \{n_j\}^{lT} \{A_j\}^l \quad (2)$$

where R_k^l is the conductor resistance at zero frequency [6] and i_k^l is its current. $\{n_j\}^l$ is the winding vector of the k th conductor, which can be extracted from $[N_j]^l$. $\chi_c^l = j\omega l_z$ is a complex quantity defined by the operating angular frequency ω and the model depth l_z considered in the Cartesian case. In the axisymmetric case, $\chi_a^l = j\omega\phi$, where ϕ is the modeled arc angle. The second term of (2) is no more than Faraday's law. Equation (2) can be series or parallel interconnected to other conductors or circuit elements, using the modified nodal analysis [7]. Hence, it is now possible to create a matrix system that contains any number of Cartesian, axisymmetric, and circuit elements, which always has the following structure:

$$\begin{bmatrix} -[Y] & -[B] & [0] & -[L] \\ -[C] & -[Z] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[S] & [N] \\ -[L]^T & [0] & [N]^T & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{i_{ce}\} \\ \{A\} \\ \{i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{f_i\} \\ -\{f_v\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

where $[Y]$, $[Z]$, $[B]$, $[C]$, $[R]$, and $[L]$ are matrices that contain zeros, ones, circuit resistances and admittances as well as dependent source gains. $\{f_i\}$ and $\{f_v\}$ are forcing vectors of known currents and voltages, respectively. $\{v\}$ is a vector of unknown nodal voltages whereas $\{i_{ce}\}$ is a vector for currents of nonnatural circuit elements. The explicit construction of these matrices and vectors can be found in [7]. The construction of $\{A\}$ and $\{i\}$ is given by

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{\{A_j\}^1 \dots \{A_j\}^{n_{sl}}\}^T \\ \{i\} &= \{\{i_j\}^1 \dots \{i_j\}^{n_{sl}}\}^T \end{aligned}$$

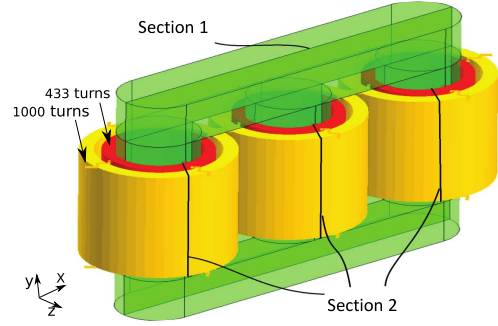


Fig. 1. 3-D geometry of a three-phase transformer.

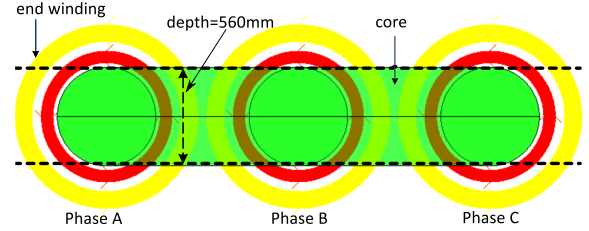


Fig. 2. Top view of a 3-D transformer showing the end-winding portions.

while $[S]$, $[R]$, $[N]$, and $[L]$ are assembled as

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{bmatrix} \chi_j^1 [S_j]^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_j^{n_{sl}} [S_j]^{n_{sl}} \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} [R_j]^1 & & \\ & \ddots & \\ & & [R_j]^{n_{sl}} \end{bmatrix} \\ [N] &= \begin{bmatrix} \chi_j^1 [N_j]^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_j^{n_{sl}} [N_j]^{n_{sl}} \end{bmatrix} \\ [L] &= \begin{bmatrix} [L_j]^1 & & \\ & \ddots & \\ & & [L_j]^{n_{sl}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notice that each FE model can be arbitrarily numbered and added using any suitable sequence. This method has been programmed in a Fortran code called FLD, which has been developed by the authors.

III. DOMAIN DECOMPOSITION AND SIMULATIONS

A three-phase, 31.5 MVA, 132 kV/33 kV, 50 Hz, star-delta power transformer with concentric windings is considered in this paper. Fig. 1 shows the actual 3-D geometry of this transformer. A 2-D Cartesian or axisymmetric model fails to capture the real geometry of this device. Hence, we seek to decompose this 3-D geometry into subdomains.

Fig. 2 shows the top view (plane xz) of the transformer, where six circles defined by the transformer windings can be observed. It is now possible to decompose this view in three domains, one for each leg of the transformer core. The domain of the right outer leg can be seen in Fig. 3. It can be seen here

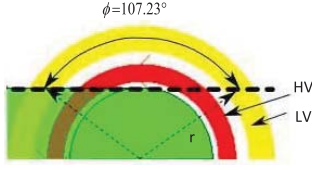


Fig. 3. Top view of the windings of the rightmost transformer core leg.

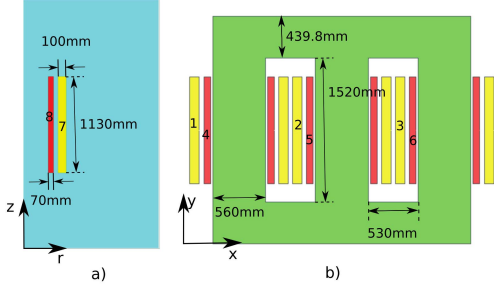


Fig. 4. (a) Axisymmetric model, one for each core leg. (b) Cartesian model.

that an axisymmetric model cannot be defined using this view, because the magnetic core does not have a perfect circular geometry (it is an assembly of a semicircle and a rectangle). However, two axisymmetric domains exist there, which can be spotted in Fig. 3 with the aid of the arc angle ϕ shown there. This procedure can be repeated for the other two transformer legs. The continuity of excitation currents circulating in the windings means that each pair of axisymmetric domains can be joined together to have just one domain per leg that expands a 2ϕ arc section. The front view of these axisymmetric models is the same and it is shown in Fig. 4(a).

The geometric domain that is not considered by the axisymmetric models corresponds to the region that exists between the dotted lines of Fig. 2. A front view (or cross section) of this region is shown in Fig. 4(b), which has been assigned a depth equal to the actual core depth. Notice that the 3-D geometry is approximately obtained stitching the axisymmetric and Cartesian models.

Thus, we can generate four independent FE models: one Cartesian and three axisymmetric. They are now interconnected using the electrical terminals of the transformer windings. This stage is explained with the aid of Fig. 5, where each FE winding region is represented by a rectangular box with the following notation. FE Car indicates a Cartesian FE domain whereas FE axi refers to an axisymmetric region. These electrical interconnections ensure the same electrical conditions that exist in the actual transformer. The imposition of Dirichlet conditions in the outer boundaries of the Cartesian and axisymmetric models allows the magnetic flux to be tangential at the joining boundaries of FE models, a condition that approximates very well the actual 3-D magnetic flux.

A. Numerical Simulations

Simulations have been performed for rated load and short-circuit operating conditions. Figs. 1–4 show the dimensions and number of windings turns employed in the simulations. The winding resistances are 1.022 and 0.1359 Ω for the

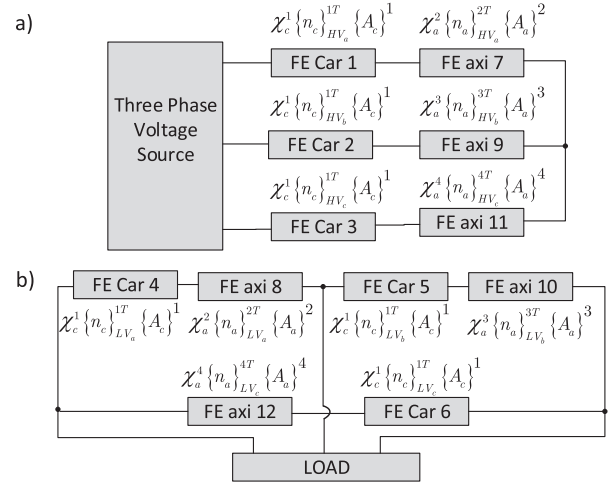


Fig. 5. Circuit interconnection at a) high voltage and b) low voltage sides. The numbers of the FE boxes correspond to the region numbers of Fig. 4.

TABLE I
CURRENT PHASORS AT NOMINAL LOAD CONDITION

Current (A)	FLD	Flux 3D	Flux 2D
\vec{I}_{AHV}	135.27 \angle -98.93 $^\circ$	136.85 \angle -98.25 $^\circ$	136.50 \angle -93.79 $^\circ$
\vec{I}_{BHV}	135.68 \angle 21.02 $^\circ$	135.06 \angle 22.07 $^\circ$	138.47 \angle 25.74 $^\circ$
\vec{I}_{CHV}	134.88 \angle 140.74 $^\circ$	136.71 \angle 142.46 $^\circ$	136.08 \angle 145.09 $^\circ$
\vec{I}_{ALV}	312.52 \angle 81.20 $^\circ$	315.67 \angle 82.15 $^\circ$	315.95 \angle 86.13 $^\circ$
\vec{I}_{BLV}	311.59 \angle -158.68 $^\circ$	310.94 \angle -157.50 $^\circ$	316.79 \angle -153.95 $^\circ$
\vec{I}_{CLV}	312.86 \angle -38.54 $^\circ$	316.48 \angle -36.81 $^\circ$	316.30 \angle -34.01 $^\circ$

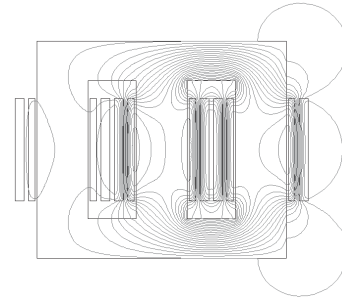


Fig. 6. Distribution of magnetic flux ($\omega t = 0$) for the short-circuit condition.

high voltage (HV) and low voltage (LV) sides, respectively. The numerical experiments involve time-harmonic nonlinear operations at nominal frequency. Complex numerical values of the phase currents flowing in each set of windings at rated load are shown in Table I (column labeled as FLD). The power factor is close to one, since a pure resistive load is connected to the secondary terminals. The flux lines at this operation condition are almost confined inside of the magnetic core, because of its low reluctance.

The short-circuit condition is imposed at the LV windings with a reduced voltage of 11491 V feeding each phase of the HV windings. The load box in Fig. 5 is replaced by a circuit node for this condition. The magnetic field is mainly forced into leakage paths for this case, as shown in Fig. 6. Table II (column labeled as FLD) shows the numerical values of the current phasors flowing in the windings of the transformer. These results agree very well with the fact that

TABLE II
COMPARISON OF CURRENT PHASORS: SHORT-CIRCUIT CONDITION

Current (A)	FLD	Flux 3D	Flux 2D
\vec{I}_{AHV}	135.08 \angle -87.93 $^\circ$	134.71 \angle -89.14 $^\circ$	299.25 \angle -88.21 $^\circ$
\vec{I}_{BHV}	135.15 \angle 152.35 $^\circ$	134.12 \angle 151.16 $^\circ$	301.29 \angle 152.62 $^\circ$
\vec{I}_{CHV}	135.05 \angle 32.64 $^\circ$	134.47 \angle 31.48 $^\circ$	298.89 \angle 33.42 $^\circ$
\vec{I}_{ALV}	312.78 \angle 92.34 $^\circ$	311.55 \angle 91.03 $^\circ$	694.14 \angle 92.25 $^\circ$
\vec{I}_{BLV}	310.38 \angle -27.65 $^\circ$	308.68 \angle -28.83 $^\circ$	689.31 \angle -27.38 $^\circ$
\vec{I}_{CLV}	312.71 \angle -147.63 $^\circ$	310.99 \angle -148.68 $^\circ$	693.44 \angle -147.03 $^\circ$

rated phase currents must be obtained with low voltages during the short-circuit condition. The calculated current phasors are approximately 90 $^\circ$ behind source voltage phasors, because the power factor is close to zero under this operation condition.

B. Validation of Results

Our results are compared with 3-D and 2-D FE simulations from Flux 2-D and 3-D [8] to determine the accuracy of the proposed method. Table II shows important differences between our proposed methodology and Flux 2-D, where end-winding effects cannot be considered. A maximum difference of 124.64% can be observed as a consequence of neglecting end effects with Flux 2-D. Notice that current values for nominal load condition (Table I) show good agreement between our computations and Flux 2-D, because the main magnetic flux is confined to the transformer core for this condition.

Fig. 6 shows lines of the magnetic flux distribution under the short-circuit condition. It can be observed that the magnetic field is forced into the air space between windings. Since low- and high-voltage windings are concentric with respect to the core limbs, the short-circuit condition at the secondary implies that very little magnetic flux is allowed in the core limbs.

The numerical results of our proposed methodology have also been compared with those of a full 3-D FE analysis using Flux 3-D. The third columns of Tables I and II show the current values obtained with the 3-D model. We can see that the results of FLD agree very well with the 3-D simulations, with a difference of less than 1% under the short-circuit condition. It is worth noticing that our solution is obtained faster and with less computational effort as compared with 3-D FE analysis. These results demonstrate the ability of our formulation to accurately incorporate 3-D effects with the *stitching* of 2-D FE models.

Although the previous comparison shows good correspondence between global quantities, a more rigorous and revealing comparison of results can be performed using local values of magnetic quantities. Axial and radial flux density components are obtained at the middle of the inter-winding region of phase C as a function of height. Fig. 7 shows the axial and radial flux density versus height of winding for the short-circuit condition, respectively. It is clear from these results that Flux 2-D is unable to compute correct values of axial flux density as well as the radial component under the short-circuit condition. On the other hand, the results of flux density obtained with FLD closely match the results of the 3-D simulation. Therefore, it can be concluded that our proposed method is truly effective to reproduce 3-D local and global effects at low computational costs.

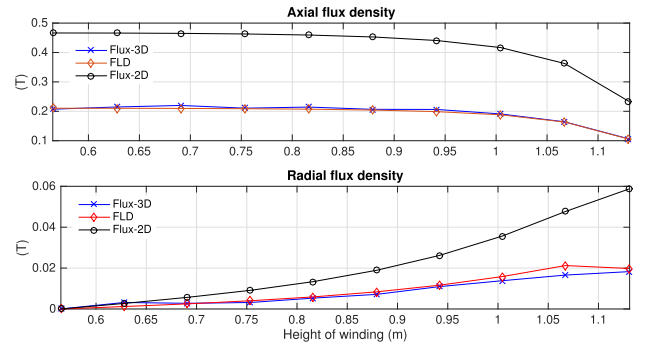


Fig. 7. Flux density components versus height: short-circuit condition.

IV. CONCLUSION

A formulation based on modified nodal analysis, multi-field simulation, and Cartesian and axisymmetric FE models has been proposed to analyze a class of 3-D electromagnetic devices. The requirement is that the electromagnetic device can be assembled by parts with Cartesian and axisymmetric geometries. This way, the advantages of 2-D FE analysis are conserved and the use of cumbersome and expensive 3-D FE packages is avoided.

Notice that empirical or approximated correction factors, such as lumped parameters coupled to the 2-D FE model are not required in our proposed methodology. Although corrective measures may ameliorate the inaccuracies of pure 2-D models, they introduce uncertainties to FE modeling, which, otherwise, can take account of complex geometries, nonlinear properties, and arbitrary excitations.

Our proposed methodology demonstrates that local and global results are consistent with 3-D FE simulations, without resorting to high computational resources. This formulation can be found very useful at the design stage where optimization procedures can require hundreds of solutions.

REFERENCES

- [1] G. Meunier, Ed., *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2010.
- [2] J. Faiz, B. M. Ebrahimi, and T. Noori, "Three- and two-dimensional finite-element computation of inrush current and short-circuit electromagnetic forces on windings of a three-phase core-type power transformer," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 5, pp. 590–597, May 2008.
- [3] K. Rasheed, "Finite element calculation of leakage reactance in distribution transformer wound core type using energy method," *J. Eng. Develop.*, vol. 16, no. 3, pp. 297–320, 2012.
- [4] S. L. Ho, Y. Li, H. C. Wong, S. H. Wang, and R. Y. Tang, "Numerical simulation of transient force and eddy current loss in a 720-MVA power transformer," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 687–690, Mar. 2004.
- [5] E. Sorrentino and J. C. Burgos, "Calculation of the positive-sequence reactance of power transformers by using the results of magnetic energy from the numerical simulation of 3D magnetostatic fields," *Elect. Power Syst. Res.*, vol. 105, pp. 85–87, 2013.
- [6] V. M. Jimenez-Mondragon, R. Escarela-Perez, E. Melgoza, M. A. Arjona, and J. C. Olivares-Galvan, "Nonlinear time-harmonic analysis of multiple magnetic field systems: Cartesian, axisymmetric, and coupled circuits," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 10, Oct. 2016, Art. no. 7403710.
- [7] L. M. Wedepohl and L. Jackson, "Modified nodal analysis: An essential addition to electrical circuit theory and analysis," *Eng. Sci. Edu. J.*, vol. 11, no. 3, pp. 84–92, Jun. 2002.
- [8] *Flux 11: User Guide. CAD Package for Electromagnetic and Thermal Analysis Using Finite Elements*, CEDRAT Design Solutions Elect. Eng., France, 2013.

Apéndice B

Ecuaciones electromagnéticas de problemas axisimétricos

Primero se presenta la Ley de Ampère en términos de $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\nabla \times \nu \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{J}} \quad (\text{B.1})$$

para coordenadas cilíndricas. La densidad de flujo magnético $\tilde{\mathbf{B}}$, se puede expresar como el rotacional de un campo vectorial de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{B.2})$$

ya que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es igual a cero, lo cual satisface la ec. (2.3):

$$\nabla \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

El potencial magnético vectorial y la densidad de corriente sólo tienen componentes en la dirección ϕ en problemas axisimétricos, por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial z} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{A}_\phi)}{\partial r} \hat{a}_z \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.4) en (B.1) y realizando las operaciones vectoriales correspondientes, se obtiene la ecuación que gobierna el comportamiento en problemas axisimétricos:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial (r \tilde{A}_\phi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial z} \right) = \tilde{J}_t \quad (\text{B.5})$$

Desarrollando el primer término del lado izquierdo en (B.5), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{\tilde{A}_\phi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial z} \right) = -\tilde{J}_t \quad (\text{B.6})$$

El primer y tercer término en (B.6) son similares a los que se obtienen en problemas 2D Cartesianos, al realizar la sustituciones $r = x$ y $z = y$. Sin embargo, el segundo término del lado izquierdo de (B.6) implica una asimetría en la matriz de rigidez que se presenta al aplicar el método de Galerkin en la obtención de las ecuaciones de EF en problemas axisimétricos, debido a que este término sólo depende de la coordenada r . Para eliminar este inconveniente se introduce una variable nueva \tilde{A}_ϕ^* en la formulación, que tiene la siguiente relación con la variable original \tilde{A}_ϕ :

$$\tilde{A}_\phi^* = r \tilde{A}_\phi \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo la relación (B.7) en (B.5), se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \tilde{A}_\phi^*}{\partial z} \right) = -\tilde{J}_t \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Bloques de construcción de diferentes elementos

Los bloques de construcción de elementos no naturales se pueden presentar con un ejemplo. Considere una fuente de voltaje independiente conectada entre los nodos p y q de un circuito con topología arbitraria. El voltaje $\tilde{v}_s = (\tilde{v}_p - \tilde{v}_q)$ de una fuente de voltaje no ideal es igual al valor de voltaje de la fuente en circuito abierto \tilde{e}_s más la caída de voltaje en la impedancia de la fuente z_s , es decir $\tilde{v}_s = \tilde{e}_s + \tilde{i}_s z_s$. La RVC de la fuente para establecer su bloque de construcción es: $\tilde{v}_p - \tilde{v}_q - \tilde{i}_s z_s = \tilde{e}_s$. La contribución a (3.7) es $\{ 1 \ -1 \}$ en la columna p y q del renglón s de $[B]$, $-z_s$ a $[C]$ y \tilde{e}_s en $\{\tilde{f}_v\}$. La corriente \tilde{i}_s circula del nodo p al nodo q , y debe ser inyectada positivamente en el nodo p y de forma negativa en el nodo q . Esta condición se cumple si el vector $\{ 1 \ -1 \}^T$ se agrega a la columna s de $[A]$ en la posición p y q . De esta forma la contribución de una fuente de voltaje no ideal al sistema (3.7) es:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ s \end{array} \begin{array}{ccc} p & q & s \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -z_s \end{array} \right] \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}_p \\ \tilde{v}_q \\ \tilde{i}_s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \tilde{e}_s \end{array} \right\} \begin{array}{c} p \\ q \\ s \end{array} \quad (\text{C.1})$$

Nótese que la contribución de este elemento a la matriz de admitancia $[Y_R]$ del sistema (3.7) es:

$$\begin{array}{cc} & p \quad q \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \end{array} \quad (\text{C.2})$$

En la Tabla C.1 se muestran los bloques de construcción de diferentes elementos de circuito. El procedimiento para obtener estos bloques es similar al planteado para el caso de la fuente de voltaje independiente.

Tabla C.1: Bloques de construcción de elementos no naturales.

Elemento	Símbolo	Contribución
Fuente de voltaje controlada por voltaje		$k \begin{bmatrix} & & & & & \\ l & & & & & \\ p & & & & & 1 \\ q & & & & & -1 \\ e & -G_e & G_e & 1 & -1 & \end{bmatrix}$
Fuente de voltaje controlada por corriente		$k \begin{bmatrix} & & & & 1 & \\ l & & & & -1 & \\ p & & & & & 1 \\ q & & & & & -1 \\ h & 1 & -1 & & & \\ i & & & 1 & -1 & -G_h \end{bmatrix}$
Fuente de corriente controlada por corriente		$k \begin{bmatrix} & & & & 1 & \\ l & & & & -1 & \\ p & & & & & G_f \\ q & & & & & -G_f \\ f & 1 & -1 & & & \end{bmatrix}$
Fuente de corriente controlada por voltaje		$k \begin{bmatrix} & & & & & \\ l & & & & & \\ p & & & & & 1 \\ q & & & & & -1 \\ g & 1 & -1 & & & -D_g \end{bmatrix}$
Transformador ideal		$k \begin{bmatrix} & & & & -a & \\ l & & & & a & \\ p & & & & 1 & \\ q & & & & -1 & \\ t & -a & a & 1 & -1 & \end{bmatrix}$
Circuito magnéticamente acoplado		$p \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_m & -y_m \\ q & -y_a & y_a & -y_m & y_m \\ k & y_m & -y_m & y_b & -y_b \\ l & -y_m & y_m & -y_b & y_b \end{bmatrix}$
Auto-transformador		$p \begin{bmatrix} & & & & 1 & \\ q & & & & -(a+1) & \\ k & & & & a & \\ t & 1 & -(a+1) & a & & \end{bmatrix}$

Apéndice D

Ejemplo de aplicación del ANM

El circuito a resolver mediante el ANM se muestra en la Fig. D.1. El objetivo es obtener los voltajes en cada uno de los nodos del circuito. Cabe destacar que se tienen 7 elementos naturales (4 resistencias y 3 fuentes de corriente independientes) y un elemento no natural (la fuente de voltaje independiente). Para resolver el problema primero se obtienen los bloques de construcción de cada uno de los elementos del circuito y después estos se introducen de manera sistemática al sistema (3.7), tomando en cuenta los nodos de interconexión de cada elemento en el circuito. La contribución de la resistencia R_a conectada entre los nodos 1 y 2, es la siguiente matriz:

$$y_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La contribuciones de las resistencias R_b , R_c y R_d son las siguientes:

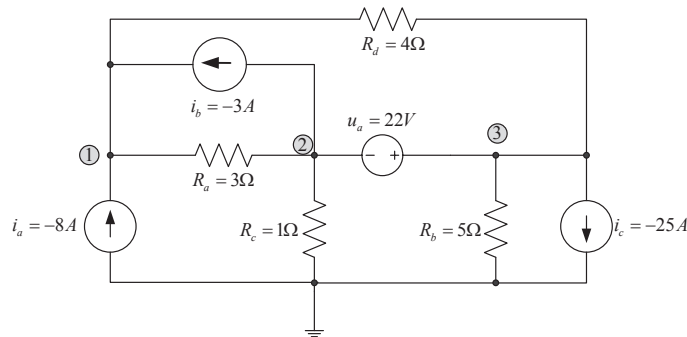


Figura D.1: Diagrama del circuito.

$$\begin{aligned}
 y_b &= \begin{matrix} & & 3 \\ & & [1/5] \\ 3 & & \end{matrix} \\
 y_c &= \begin{matrix} & & & & 2 \\ & & & & [1] \\ & & & & \end{matrix} \\
 y_d &= \begin{matrix} & & & & 1 & & & & 3 \\ & & & & [& 1/4 & -1/4 &] \\ 1 & & & & 3 & & & & \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Mientras que las contribuciones de las fuentes de corriente independientes a , b y c al vector de excitaciones $\{\tilde{f}_i\}$ son:

$$\begin{aligned}
 &1 \quad \{-8\} \\
 &2 \quad \left\{ \begin{matrix} -3 \\ 3 \end{matrix} \right\} \\
 &3 \quad \{25\}
 \end{aligned}$$

respectivamente.

Por último, la contribución de la fuente de voltaje independiente al lado izquierdo de (3.7) es la siguiente:

$$\begin{matrix} & & 2 & 3 & 4 \\ & & [& 0 & 0 & -1 &] \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \end{matrix}$$

y al vector de excitaciones $\{\tilde{f}_v\}$ es:

$$4 \quad \{22\}$$

Nótese que se agrega una ecuación, donde la incógnita es la corriente de la fuente de voltaje independiente tal y como se establece en la ecuación C.1 . Incorporando cada una de las contribuciones anteriores en (3.7), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & [& 1/3 + 1/4 & -1/3 & -1/4 & 0 &] \\ 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & \end{matrix}
 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \\ 22 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

Resolviendo (D.1) se obtiene la solución al circuito de la Fig. D.1: $u_1=1.0714$ V, $u_2=10.5$ V, $u_3=32.5$ V e $i_s=10.6429$ A.

Apéndice E

Software de EF FLD

El software de elementos finitos FLD ha sido desarrollado en su mayoría por el Dr. Enrique Melgoza Vázquez, Profesor Investigador del Instituto Tecnológico de Morelia. Esta herramienta computacional para la solución de problemas electromagnéticos, es resultado de años de investigación propia y colaboración entre un grupo de Profesores Investigadores mexicanos, como es el caso del Dr. Rafael Escarela Pérez de la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco. En años recientes, los alumnos de doctorado también han propuesto técnicas novedosas para el análisis de problemas de campo que han sido implementadas e integradas en FLD.

FLD ha sido implementado en una estructura modular (ver Fig. E.1), para facilitar la incorporación de nuevas características como la presentada en este trabajo de tesis. Este programa se ha probado utilizando problemas planteados en la literatura tal como: solenoides, actuadores, transformadores trifásicos, motores de imanes permanentes, aisladores eléctricos, motores de inducción jaula de ardilla, etc.

Actualmente FLD puede resolver problemas del tipo:

1. Electrostático.
2. Magnetostático.
3. Elasticidad.
4. Transferencia de calor.
5. Acoplamiento *circuito-campo* en el dominio de la frecuencia mediante la técnica de acoplamiento fuerte ANM-MEF en sistemas Cartesianos (lineal y no lineal).
6. ***Acoplamiento circuito-campo en el dominio de la frecuencia mediante la técnica de acoplamiento fuerte ANM-MEF en sistemas axisimétricos (lineal y no lineal).***

7. Acoplamiento *circuito-campo* en el dominio del tiempo mediante la técnica de acoplamiento fuerte ANM-MEF en sistemas Cartesianos y axisimétricos (lineal y no lineal).
8. *Acoplamiento circuito-campo en el dominio de la frecuencia mediante la técnica de acoplamiento fuerte ANM-MEF-multi-sistema para resolver problemas con n_t modelos de EF (Cartesianos y axisimétricos).*

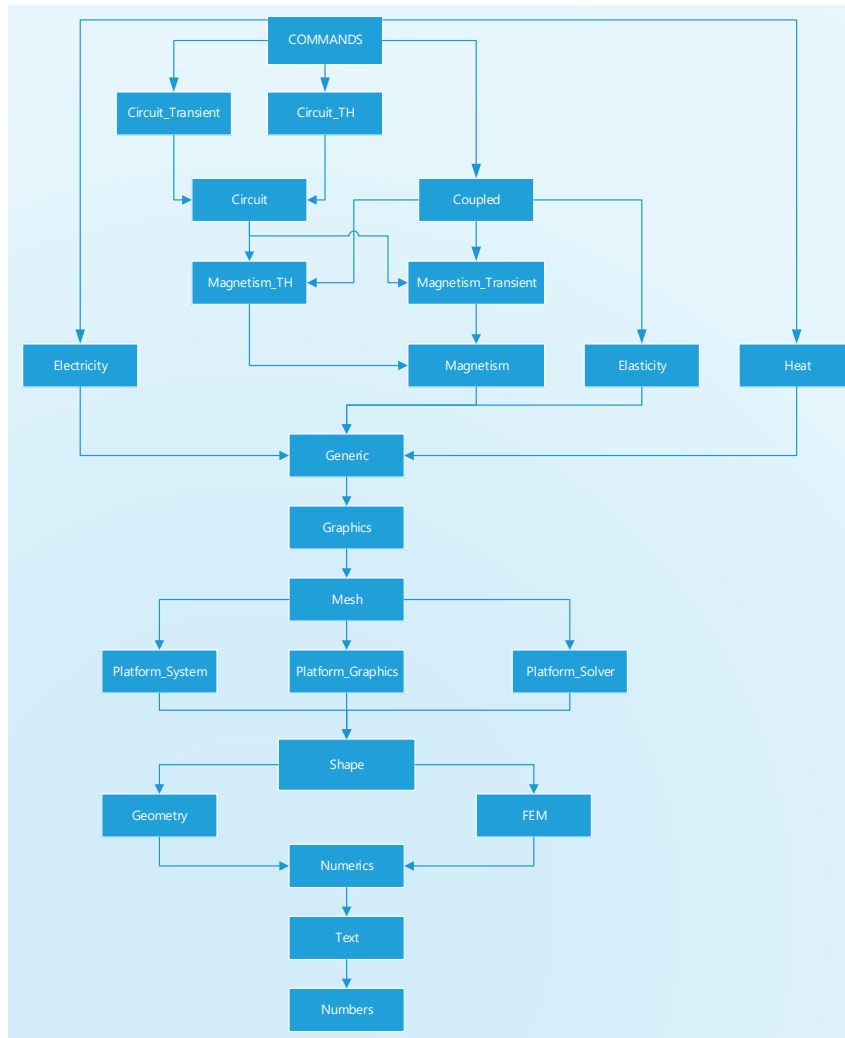


Figura E.1: Estructura modular de FLD.

En este trabajo de tesis se implementaron las formulaciones 6 y 8. Estas se encuentran integradas en los módulos `Circuit.TH`, `Circuit`, `Magnetism.TH` y `Magnetism` que se muestran en la Fig. E.1.

Apéndice F

Formulación electromagnética 3D del transformador

Se construye un modelo de EF 3D del transformador para simular distintas condiciones de operación. El modelo toma en cuenta el núcleo magnético, los devanados y la región de aire que rodea estas componentes. El problema se aborda en el dominio de la frecuencia, considerando la no linealidad de los materiales magnéticos.

F.1. Ecuaciones electromagnéticas

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento electromagnético del transformador en sus diferentes regiones se describen a continuación. El núcleo magnético (yugo y piernas) es una región libre de corrientes que se analiza con un potencial magnético escalar total ψ [6], tal que la intensidad de campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}$ se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{H}} = -\nabla\psi \quad (\text{F.1})$$

La ecuación que se resuelve en el núcleo se obtiene tomando la divergencia de $\tilde{\mathbf{H}}$, esto es:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \psi) = 0 \quad (\text{F.2})$$

El uso del potencial magnético escalar total es muy atractivo cuando se resuelven problemas de campos magnéticos en 3D, debido a que se reducen los tiempos de cómputo en comparación, por ejemplo, con una formulación basada en el potencial magnético vectorial donde se deben calcular sus tres componentes.

Ahora se obtienen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento electromagnético en las regiones de los devanados del transformador. Despreciando las corrientes de remolino sobre la sección transversal de los conductores de cada devanado, es posible representar las regiones

como bobinas con conductores filamentosos. La distribución de corriente es perfectamente conocida en estas regiones (aunque no necesariamente su valor), por lo que la intensidad de campo magnético total $\tilde{\mathbf{H}}$ se puede dividir en dos términos [80]:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_s + \tilde{\mathbf{H}}_r \quad (\text{F.3})$$

donde $\tilde{\mathbf{H}}_s$ es el campo magnético generado por la corriente en una región abierta en la que además no existen medios magnéticos. Entonces, el campo magnético reducido $\tilde{\mathbf{H}}_r$ toma en cuenta la presencia de materiales magnéticos. $\tilde{\mathbf{H}}_s$ se puede calcular con la ley de Biot-Savart [81]:

$$\tilde{\mathbf{H}}_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \tilde{\mathbf{J}}_s \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (\text{F.4})$$

donde $\tilde{\mathbf{J}}_s$ es la densidad de corriente en el devanado y V es el volumen de esta región conductora. R es la distancia de un diferencial de volumen del devanado al punto donde se requiere calcular el valor del campo magnético. Nótese que la ecuación (F.4) implica que $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_s = \tilde{\mathbf{J}}_s$. Por lo tanto,

$$\nabla \times (\tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{H}}_s) = 0 \quad (\text{F.5})$$

Esto a su vez significa que la diferencia ($\tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{H}}_s$) se puede obtener del gradiente de una función escalar ϕ tal que:

$$\tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{H}}_s = -\nabla\phi \quad (\text{F.6})$$

donde ϕ se conoce como el potencial magnético escalar reducido. Sustituyendo (F.6) en (2.3) y usando la relación constitutiva $\tilde{\mathbf{B}} = \mu\tilde{\mathbf{H}}$, se tiene,

$$\nabla \cdot \mu\nabla\phi = \nabla \cdot \mu\tilde{\mathbf{H}}_s \quad (\text{F.7})$$

la cual satisface la ley de Ampère. Con esta formulación en particular no es necesario mallar las regiones de EF de los devanados, con la condición de que estas residan dentro de una región (aire en el caso del transformador) definida por el potencial magnético escalar reducido. Además las regiones no deben contener ninguna trayectoria que enlace corrientes. Sin embargo esta restricción se elimina con el uso de *cortes* [82].

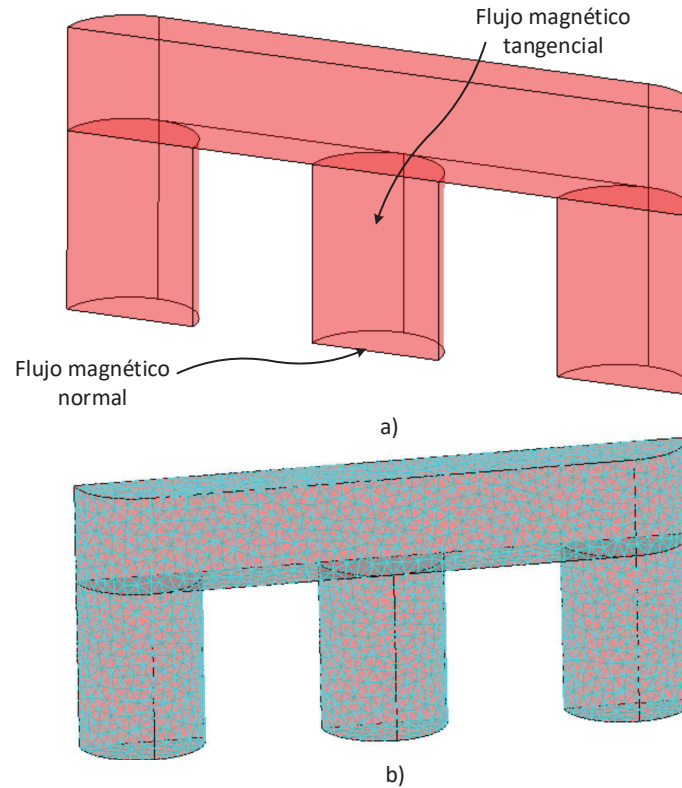


Figura F.1: Modelo 3D de EF: a) geometría y condiciones de frontera, b) mallado.

F.2. Modelo 3D de elementos finitos

El modelo de EF se realiza en el software de EF FLUX3D [75]. En la Fig. F.1.a se observa la geometría del transformador (no se muestran los devanados y la región de aire, para mayor detalle ver Fig. F.2) y sus condiciones de frontera. Se definen dos condiciones de frontera de simetría, la primera es una condición de flujo tangencial en el plano vertical y la segunda es una condición de flujo normal en el plano horizontal. Estas condiciones de frontera permiten simular sólo un cuarto de la geometría transformador con lo que se reduce el tiempo de cómputo y la demanda de recursos computacionales. La Fig. F.1.b muestra la malla de EF usada en las simulaciones. Esta se construye con 117983 tetraedros de segundo orden. Una vez que se establecen las excitaciones, condiciones de frontera y materiales en cada una de las regiones se pueden realizar las simulaciones de EF requeridas para el análisis del transformador.

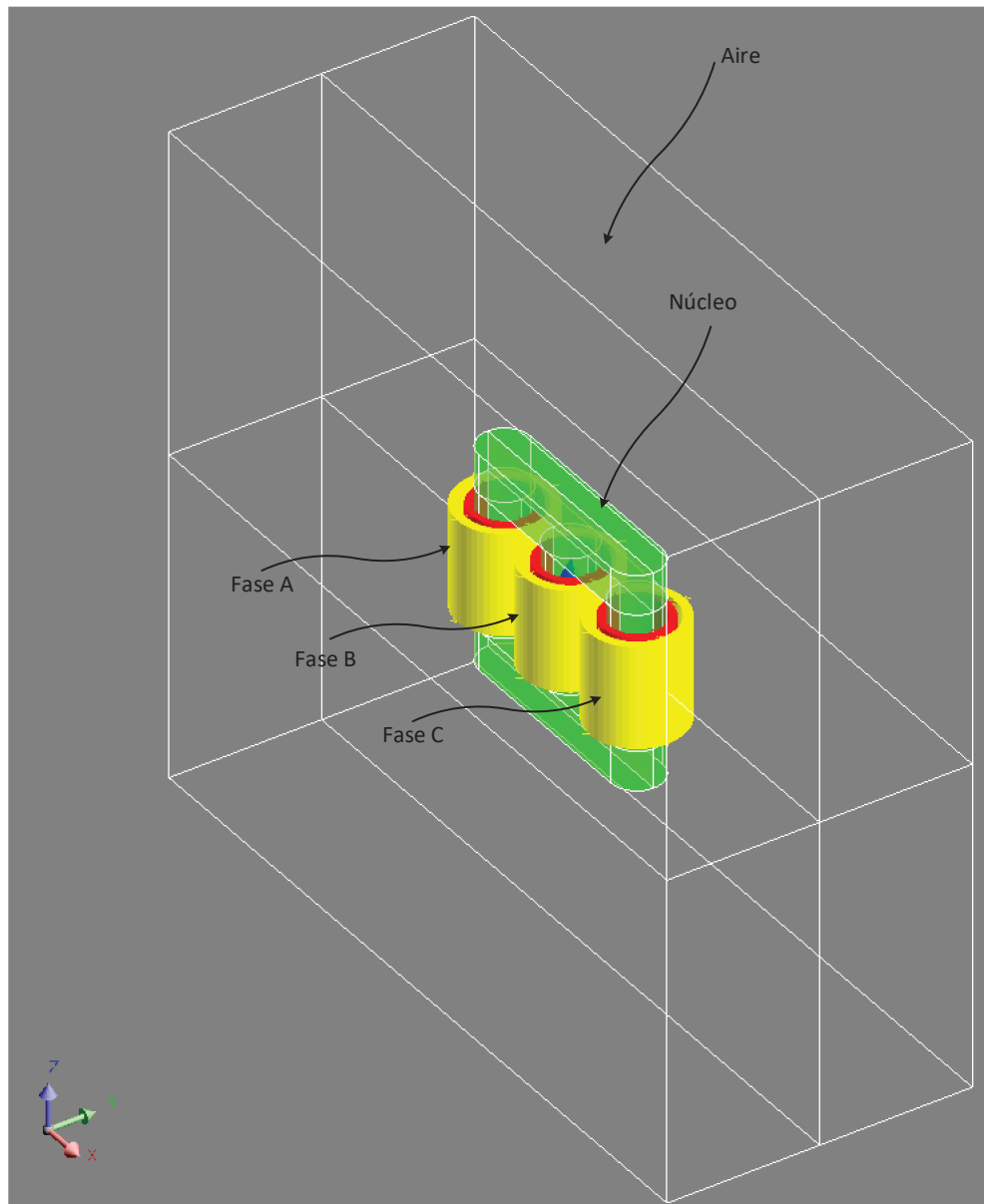


Figura F.2: Vista completa del modelo 3D del transformador.

Referencias

- [1] J. Machowski, J. Bialek, and J. Bumby, *Power system dynamics: stability and control*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] J. J. Grainger and W. D. Stevenson, *Power system analysis*. McGraw-Hill New York, 1994, vol. 31.
- [3] L. Wedepohl and L. Jackson, “Modified nodal analysis: an essential addition to electrical circuit theory and analysis,” *Engin. Scien. & Educ. Journ.*, vol. 11, no. 3, pp. 84–92, 2002.
- [4] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic modeling by finite element methods*. Publication by Marcel Dekker, 2003.
- [5] A. Hannalla and D. Macdonald, “The calculation of machine transient performance,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 13, no. 5, pp. 1134–1136, 1977.
- [6] W. H. Hayt and J. A. Buck, *Engineering electromagnetics*. McGraw-Hill New York, 2001, vol. 7.
- [7] P. Silvester and M. V. Chari, “Finite element solution of saturable magnetic field problems,” *IEEE Trans. Power App. Syst.*, no. 7, pp. 1642–1651, 1970.
- [8] M. Chari and P. Silvester, “Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements,” *IEEE Trans. Power App. Syst.*, no. 2, pp. 454–464, 1971.
- [9] A. Hannalla and D. Macdonald, “Comparison of stator and rotor induced transients in solid rotor turbine generators,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 15, no. 6, pp. 1485–1487, 1979.
- [10] A. Hannalla and D. MacDonald, “Numerical analysis of transient field problems in electrical machines,” *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 123, no. 9, pp. 893–898, 1976.
- [11] A. Y. Hannalla, “Analysis of transient field problems in electrical machines allowing for end leakage and external reactances,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 17, no. 2, pp. 1240–1243, 1981.

REFERENCIAS

- [12] A. Hannalla and D. Macdonald, "Steady state short circuit characteristics of turbine-generators from design data using field calculations," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, no. 5, pp. 1805–1809, 1980.
- [13] P. J. Turner, "Finite element electromagnetic analysis of turbine-generator performance," Ph.D. Dissertation, University of London, 1982.
- [14] A. Konrad, "Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady-state skin effect problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 18, no. 1, pp. 284–292, 1982.
- [15] K. Preis, "A contribution to eddy current calculations in plane and axisymmetric multi-conductor systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 19, no. 6, pp. 2397–2400, 1983.
- [16] P. Belforte, M. Chiampi, and M. Tartaglia, "A finite element computation procedure for electromagnetic fields under different supply conditions," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 21, no. 6, pp. 2284–2287, 1985.
- [17] J. Weiss and V. Garg, "Steady state eddy current analysis in multiply-excited magnetic systems with arbitrary terminal conditions," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 6, pp. 2676–2678, 1988.
- [18] F. Piriou and A. Razek, "Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 274–277, 1988.
- [19] A. Razek, "Simulation of electromagnetic systems by coupling of magnetic and electric equations," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 31, no. 3, pp. 189–198, 1989.
- [20] F. Piriou and A. Razek, "A model for coupled magnetic-electric circuits in electric machines with skewed slots," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, no. 2, pp. 1096–1100, 1990.
- [21] P. Piriou, "Numerical simulation of a nonconventional alternator connected to a rectifier," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 5, no. 3, pp. 512–518, 1990.
- [22] S. Salon, R. Palma, and C. Hwang, "Dynamic modeling of an induction motor connected to an adjustable speed drive," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 4, pp. 3061–3063, 1989.
- [23] S. Salon, M. DeBortoli, and R. Palma, "Coupling of transient fields, circuits, and motion using finite element analysis," *J. of Electromagn. Waves and Applicat.*, vol. 4, no. 11, pp. 1077–1106, 1990.
- [24] J. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 20, no. 5, pp. 1894–1896, 1984.

- [25] I. A. Tsukerman, A. Konrad, G. Meunier, and J. C. Sabonnadiere, “Coupled field-circuit problems: trends and accomplishments,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1701–1704, 1993.
- [26] I. Tsukerman, A. Konrad, and J. Lavers, “A method for circuit connections in time-dependent eddy current problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1299–1302, 1992.
- [27] P. Zhou, D. Lin, W. Fu, B. Ionescu, and Z. Cendes, “A general cosimulation approach for coupled field-circuit problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 1051–1054, 2006.
- [28] J. Väänänen, “Circuit theoretical approach to couple two-dimensional finite element models with external circuit equations,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 2, pp. 400–410, 1996.
- [29] M. Ito, K. Kawabata, F. Tajima, and N. Motoi, “Coupled magnetic field analysis with circuit and kinematics modelings of brushless motors,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 2, pp. 1702–1705, 1997.
- [30] S. Kanerva, S. Seman, and A. Arkkio, “Inductance model for coupling finite element analysis with circuit simulation,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1620–1623, 2005.
- [31] X. Zhu, M. Cheng, W. Zhao, C. Liu, and K. Chau, “A transient cosimulation approach to performance analysis of hybrid excited doubly salient machine considering indirect field-circuit coupling,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 6, pp. 2558–2560, 2007.
- [32] E. Lange, F. Henrotte, and K. Hameyer, “An efficient field-circuit coupling based on a temporary linearization of fe electrical machine models,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1258–1261, 2009.
- [33] T. Herold, E. Lange, and K. Hameyer, “System simulation of a pmsm servo drive using field-circuit coupling,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 938–941, 2011.
- [34] E. Lange, F. Henrotte, and K. Hameyer, “A circuit coupling method based on a temporary linearization of the energy balance of the finite element model,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 838–841, 2008.
- [35] W. Liang, J. Wang, T. Lu, and W. Fang, “A new method for multiple finite-element models in cosimulation with electrical circuit using machine multiloop modeling scheme,” *IEEE Trans. Ind. Elect.*, vol. 61, no. 12, pp. 6583–6590, 2014.
- [36] M. Xiaohe, L. Jianxun, and Z. Weiwei, “Uniform field and circuit coupled finite element method for short-circuit transient eddy analysis on aeronautic ac power synchronous generator,” in *Power Electronics and Motion Control Conference, 2009. IPEMC’09. IEEE 6th International*. IEEE, 2009, pp. 2057–2061.

REFERENCIAS

- [37] W. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. Cendes, "Modeling of solid conductors in two-dimensional transient finite-element analysis and its application to electric machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 426–434, 2004.
- [38] E. Vassent, G. Meunier, A. Foggia, and G. Reyne, "Simulation of induction machine operation using a step by step finite element method coupled with circuits and mechanical equations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, no. 6, pp. 5232–5234, 1991.
- [39] E. Vassent, G. Meunier, and J. Sabonnadier, "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 4, pp. 3064–3066, 1989.
- [40] G. Meunier, D. Shen, and J. L. Coulomb, "Modelisation of 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite elements method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 166–169, 1988.
- [41] P. Lombard, "A general method for electric and magnetic coupled problem in 2D and magnetodynamic domain," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1291–1294, 1992.
- [42] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1737–1740, 1993.
- [43] G. Bedrosian, "A new method for coupling finite element field solutions with external circuits and kinematics," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1664–1668, 1993.
- [44] H. De Gerssem, R. Mertens, U. Pahner, R. Belmans, and K. Hameyer, "A topological method used for field-circuit coupling," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3190–3193, 1998.
- [45] H. De Gerssem, R. Mertens, D. Lahaye, S. Vandewalle, and K. Hameyer, "Solution strategies for transient, field-circuit coupled systems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1531–1534, 2000.
- [46] S. Suuriniemi, J. Kangas, L. Kettunen, and T. Tarhasaari, "State variables for coupled circuit-field problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 949–952, 2004.
- [47] P. Zhou, W. Fu, D. Lin, S. Stanton, and Z. Cendes, "Numerical modeling of magnetic devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp. 1803–1809, 2004.
- [48] N. Sadowski, B. Carly, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, and S. Astier, "Finite element simulation of electrical motors fed by current inverters," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1683–1688, 1993.

- [49] N. Sadowski, R. Carlson, S. Arruda, C. Da Silva, and M. Lajoie-Mazenc, "Simulation of single-phase induction motor by a general method coupling field and circuit equations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1908–1911, 1995.
- [50] A. Oliveira, P. Kuo-Peng, M. F. Da Luz, N. Sadowski, and J. Bastos, "Generalization of coupled circuit-field calculation for polyphase structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 5, pp. 3444–3447, 2001.
- [51] J. R. Ortiz, N. Sadowski, P. Kuo-Peng, N. Batistela, and J. Bastos, "Coupling static converter with control loop and non-linear electromagnetic devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no. 5, pp. 3514–3517, 2001.
- [52] N. Sadowski, Y. Lefevre, C. Neves, and R. Carlson, "Finite elements coupled to electrical circuit equations in the simulation of switched reluctance drives: attention to mechanical behaviour," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1086–1089, 1996.
- [53] P. Kuo-Peng, N. Sadowski, J. Bastes, R. Carlson, N. Batistela, and M. Lajoie-Mazenc, "A general method for coupling static converters with electromagnetic structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 2, pp. 2004–2009, 1997.
- [54] P. Kuo-Peng, N. Sadowski, N. J. Batistela, and P. Bastos, "Coupled field and circuit analysis considering the electromagnetic device motion," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1458–1461, 2000.
- [55] A. Oliveira, P. Kuo-Peng, N. Sadowski, M. De Andrade, and J. Bastos, "A non-a priori approach to analyze electrical machines modeled by FEM connected to static converters," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 933–936, 2002.
- [56] C. W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 22, no. 6, pp. 504–509, 1975.
- [57] J. S. Wang, "A nodal analysis approach for 2D and 3D magnetic-circuit coupled problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 1074–1077, 1996.
- [58] M. C. Costa, S. I. Nabeta, and J. R. Cardoso, "Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1431–1434, 2000.
- [59] Y. Huangfu, S. Wang, J. Qiu, H. Zhang, G. Wang, and J. Zhu, "Transient performance analysis of induction motor using field-circuit coupled finite-element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 873–876, 2014.

REFERENCIAS

- [60] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Coupling circuit systems and finite element models: A 2-D time-harmonic modified nodal analysis framework," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 2, pp. 707–715, 2009.
- [61] E. Melgoza-Vazquez, R. Escarela-Perez, and J. L. Guardado, "Generalized primitive stamps for nonlinear circuit-field coupling in the transient case," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 5, pp. 1–9, 2017.
- [62] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, J. Alvarez-Ramirez, and A. L. Laureano-Cruces, "Nonlinear time-harmonic finite-element analysis of coupled circuits and fields in low frequency electromagnetic devices," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, no. 10, pp. 829–837, 2010.
- [63] R. Escarela, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Multi-slice modeling in circuit-field coupled systems using finite-element and modified nodal analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 1, pp. 67–74, 2010.
- [64] R. Escarela-Perez, E. Melgoza, and J. Alvarez-Ramirez, "Systematic coupling of multiple magnetic field systems and circuits using finite element and modified nodal analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 1, pp. 207–213, 2011.
- [65] V. M. Jimenez-Mondragon, R. Escarela-Perez, E. Melgoza, M. A. Arjona, and J. C. Olivares-Galvan, "Nonlinear time-harmonic analysis of multiple magnetic field systems: Cartesian, axisymmetric, and coupled circuits," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 10, pp. 1–10, 2016.
- [66] V. M. Jimenez-Mondragon, R. Escarela-Perez, E. Melgoza, M. A. Arjona, and J. Olivares-Galvan, "Quasi-3-D finite-element modeling of a power transformer," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 6, pp. 1–4, 2017.
- [67] G. W. Carter, *The electromagnetic field in its engineering aspects*. Longman, 1954.
- [68] S. Salon and M. Chari, *Numerical methods in electromagnetism*. Academic press, 1999.
- [69] W. Fu and S. Ho, "Instantaneous power balance analysis in finite-element method of transient magnetic field and circuit coupled computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1561–1564, 2013.
- [70] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill, 2012, vol. 2.
- [71] S. J. Chapman, *Fortran for scientist and engineers*. McGraw-Hill, 2008.

- [72] E. Bjerkan, “High frequency modeling of power transformers: stresses and diagnostics,” Ph.D. Dissertation, Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk, 2005.
- [73] S. J. Salon, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [74] S. Umans, A. Fitzgerald, and C. Kingsley, *Electric Machinery*. McGraw-Hill, 2013.
- [75] *Flux 12.2: User’s Guide. CAD Package for Electromagnetic and Thermal Analysis using Finite Elements*. Altair Engineering, France, 2016.
- [76] J. Faiz, B. M. Ebrahimi, and T. Noori, “Three-and two-dimensional finite-element computation of inrush current and short-circuit electromagnetic forces on windings of a three-phase core-type power transformer,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 5, pp. 590–597, 2008.
- [77] K. Rasheed, “Finite element calculation of leakage reactance in distribution transformer wound core type using energy method,” *Journ. Engin. and Develop.*, vol. 16, pp. 297–320, 2012.
- [78] S. Ho, Y. Li, H. C. Wong, S. Wang, and R. Tang, “Numerical simulation of transient force and eddy current loss in a 720-MVA power transformer,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 687–690, 2004.
- [79] E. Sorrentino and J. C. Burgos, “Calculation of the positive-sequence reactance of power transformers by using the results of magnetic energy from the numerical simulation of 3D magnetostatic fields,” *Elect. Power Syst. Res.*, vol. 105, pp. 85–87, 2013.
- [80] J. Simkin and C. Trowbridge, “On the use of the total scalar potential on the numerical solution of fields problems in electromagnetics,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 14, no. 3, pp. 423–440, 1979.
- [81] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. John Wiley & Sons, 2007.
- [82] A. T. Phung, O. Chadebec, P. Labie, Y. Le Floch, and G. Meunier, “Automatic cuts for magnetic scalar potential formulations,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1668–1671, 2005.