



G- 605141

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE INGENIERIA

JAIME CERVANTES DE GORTARI

**APUNTES DE
INTRODUCCION
AL ESTUDIO DEL
FLUJO
TURBULENTO**

DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE FLUIDOS Y TERMICA

1	INTRODUCCION. DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES	1
1.1	Importancia del estudio de la turbulencia	1
1.2	Definición de turbulencia	1
1.3	Características fundamentales	2
1.4	Métodos de análisis	7
1.5	Ejemplos	9
	Referencias	18
2.	ELEMENTOS PARA LA DESCRIPCION ESTADISTICA DE LA TURBULENCIA	19
2.1	Generalidades	19
2.2	Características principales de los procesos determinados y de los procesos estocásticos	20
2.3	Momentos. Autocorrelación. Espectro de potencia	34
2.4	Funciones de correlación. Espectros de energía	44
	Referencias	65
3.	ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA UN FLUJO TURBULENTO	66
3.1	Generalidades	66
3.2	Ecuaciones fundamentales	67
3.3	Ecuaciones para un flujo turbulento	71
3.4	Ecuaciones para un flujo incompresible en flujo turbulento	80
	Referencias	

CONTENIDO

G-

605141

1	INTRODUCCION. DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES	1
1.1	Importancia del estudio de la turbulencia	1
1.2	Definición de turbulencia	1
1.3	Características fundamentales	2
1.4	Métodos de análisis	7
1.5	Ejemplos	9
	Referencias	18
2.	ELEMENTOS PARA LA DESCRIPCION ESTADISTICA DE LA TURBULENCIA	19
2.1	Generalidades	19
2.2	Características principales de los procesos <u>determinis</u> tas y de los procesos estocásticos	20
2.3	Momentos. Autocorrelación. Espectro de potencia	34
2.4	Funciones de correlación. Espectros de energía	44
	Referencias	65
3.	ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA UN FLUJO TURBULENTO	66
3.1	Generalidades	66
3.2	Ecuaciones fundamentales	67
3.3	Ecuaciones para un flujo turbulento	71
3.4	Ecuaciones para un flujo incompresible en flujo turbulen <u>to</u>	80
	Referencias	

CAPITULO UNO

INTRODUCCION

DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1 IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LA TURBULENCIA

Es indudable el interés que tiene dentro de la mecánica de fluidos el estudio de la turbulencia. Basta recordar que la mayor parte de los escurrimientos que se presentan en la naturaleza y en las aplicaciones de la ingeniería se encuentran en régimen turbulento. Ejemplos dentro de la primera categoría lo constituyen la capa límite atmosférica, el escurrimiento en los ríos y en las corrientes marinas. Pertenecientes al segundo tipo se pueden mencionar la mayor parte de los procesos de combustión de líquidos y gases, el mezclado efectivo de sustancias químicas, el flujo en ductos y canales, las estelas en barcos, aviones y automóviles, etc. Se observa entonces que el estudio de la turbulencia tiene un amplio rango de aplicaciones.

1.2 DEFINICION DE TURBULENCIA

La experiencia cotidiana con los flujos turbulentos nos permite tener una idea más o menos clara de la turbulencia. Sin embargo, tratar de definirla de manera tal que incluya sus principales características, es bastante difícil. Repetiremos aquí algunos de los intentos hechos en el pasado en este sentido. Los diccionarios de la lengua generalmente definen a la turbu-

lencia como el estado de agitación, violencia o disturbio en el fluido. Esta definición es obviamente muy general para aceptarse en consideraciones técnicas.

Taylor y von Karman (dos grandes investigadores en este campo) dieron en 1937 la siguiente definición: "Turbulencia es un movimiento irregular que generalmente se presenta en fluidos, ya sean gaseosos o líquidos, que fluyen sobre superficies sólidas, o inclusive cuando corrientes del mismo fluido escurren adyacentes entre sí". La irregularidad que se menciona se refiere a la imposibilidad de describir detalladamente el movimiento como función del tiempo y del espacio. Afortunadamente el movimiento turbulento puede describirse mediante el uso de las leyes de la probabilidad, como se verá más adelante.

Hinze completa la definición diciendo "el movimiento turbulento de un fluido es una condición irregular del flujo, en la cual las diferentes variables características del escurrimiento presentan una variación aleatoria en el tiempo y en el espacio, de tal modo que se pueden distinguir valores medios estadísticos".

Puede observarse que ninguna de las definiciones nos permite obtener una imagen completa del concepto de turbulencia. Conviene mejor examinar una a una sus características principales.

1.3. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES

IRREGULARIDAD.- El carácter irregular o aleatorio de los flu-

jos turbulentos hace imposible cualquier tratamiento determinista; en su lugar se tiene que recurrir a los métodos estadísticos.

Efectivamente, las matemáticas de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (tal es la naturaleza de las ecuaciones de la turbulencia) no han sido desarrolladas suficientemente como para poder establecer soluciones generales. La combinación aleatoriedad-no-linealidad hace que las ecuaciones de la turbulencia sean muy difíciles de tratar. Es así que se tiene que recurrir a los métodos estadísticos.

DIFUSION.- Esta propiedad de los flujos turbulentos ocasiona el rápido mezclado de las sustancias involucradas e incrementa grandemente las rapidezces de transferencia de calor, de masa y de cantidad de movimiento. Claramente se concluye que ésta es quizás la característica más importante de la turbulencia con relación a sus aplicaciones.

ASPECTO FISICO.- Una característica esencial de la turbulencia es que el movimiento es aleatorio. Dicho movimiento es, sin embargo, continuo en el sentido que siempre existe correlación entre las velocidades medidas en el mismo punto a diferentes tiempos, separados por intervalos cortos. Por otro lado, el carácter aleatorio de la turbulencia da como resultado la falta de periodicidad en las variables del flujo y por tanto la imposibilidad de representar a este último mediante vórtices

discretos perfectamente definidos (como los que se forman detrás de un cilindro, por ejemplo). Sin embargo, se acostumbra visualizar el flujo turbulento como una composición de remolinos o vórtices aleatorios en el tiempo y en el espacio; tridimensionales; cambiando continuamente de tamaño, intensidad y orientación; e interactuando dinámicamente entre ellos.

ESCALAS.- Relacionado con la descripción anterior, se tiene el importante concepto de escalas en la turbulencia. Efectivamente, si se comparan detenidamente diferentes flujos turbulentos se notará que las estructuras o remolinos son de diferentes tamaños, más o menos discernibles para cada uno de los escurrimientos (recordemos que estas estructuras desde luego no se mantienen fijas en el espacio ni en el tiempo, sino que cambian continuamente de forma, tamaño, posición, orientación, etc.). Lo anterior significa que para describir cuantitativamente un movimiento turbulento, es necesario emplear el concepto de escalas, es decir, magnitudes representativas de las diferentes variables que sean características de determinados aspectos del movimiento. Por ejemplo, en un flujo turbulento a través de una tubería no es de esperarse encontrar estructuras o remolinos de los arriba mencionados más grandes que la tubería misma; resulta así que la escala de longitud más grande (representativa de los remolinos de mayor tamaño) queda de terminada por el diámetro de la tubería.

TRANSFERENCIA Y DISIPACION DE LA ENERGIA. MANTENIMIENTO DE LA TURBULENCIA.- La existencia de una jerarquía de estructuras o remolinos (escalas) anteriormente descrita, juega un papel importante en el mantenimiento de la turbulencia. En efecto, los remolinos más grandes se encargan de extraer energía del flujo medio, es decir, del movimiento general mediante esfuerzos cortantes. Esta energía extraída se va transfiriendo a las escalas de menor tamaño a través de los siguientes efectos combinados: convección del flujo medio, convección y difusión de las fluctuaciones de presión y difusión por fuerzas viscosas. En las escalas más pequeñas del flujo turbulento, los esfuerzos cortantes viscosos (originados por la actividad molecular del fluido) convierten la energía cinética de la turbulencia en energía interna, es decir, los remolinos más pequeños son disipadores de la energía. Se puede mencionar aquí la descripción que L.F. Richardson dio al respecto: "Los remolinos grandes contienen remolinos pequeños, los cuales se alimentan de su velocidad; los remolinos pequeños contienen remolinos aún más pequeños; y se puede continuar así hasta la viscosidad". Se concluye entonces que la turbulencia necesita de una provisión continua de energía para suplir aquella disipada por la viscosidad.

La interacción dinámica entre remolinos que da como resultado la transferencia de energía de los remolinos grandes a los más pequeños, así como el carácter tridimensional de la turbulencia, se pueden visualizar mediante lo que se conoce como

"alargamiento o estiramiento de vórtices". Supóngase que un elemento de fluido girando alrededor del eje coordenado z , se encuentra bajo la influencia de una rapidez de deformación lineal en la dirección z , $\frac{\partial w}{\partial z}$; el elemento se alargará en la misma dirección y su sección transversal (en el plano xy) se reducirá de tamaño. Si se toma como elemento uno de sección circular en el plano xy (vórtice con eje de rotación en la dirección z) y se desprecian las fuerzas viscosas por simplicidad, entonces la conservación del momento de la cantidad de movimiento (momento angular) implica que la circulación permanece constante. De esta manera la energía cinética de rotación se incrementa a expensas de la energía cinética asociada al componente w que efectuó el alargamiento y además, la escala en el plano xy disminuye. Resulta así, que un estiramiento en una dirección puede disminuir las escalas de longitud, y al mismo tiempo, aumentar las velocidades en las dos direcciones normales a la primera: Estas dos direcciones estimuladas, accionan a su vez a sus correspondientes direcciones perpendiculares y el proceso continúa de tal modo que el efecto de alargamiento sucesivo corresponde a escalas de longitud cada vez más pequeñas. Cualitativamente se puede ver mediante la siguiente tabla, que una extensión inicial en una dirección produce cantidades prácticamente iguales de alargamientos en las tres direcciones, después de unas cuantas etapas del proceso:

Tabla 1.1 Frecuencias de alargamientos en las tres direcciones

x	0	1	1	3	5	11	21
y	0	1	1	3	5	11	21
z	1	0	2	2	6	10	22

Resulta así el carácter tridimensional de la turbulencia. Además, se puede concluir una propiedad muy importante de la turbulencia: no existe una dirección preferente en las escalas más pequeñas y, como se verá más adelante, tales escalas presentan una estructura universal que facilita su estudio.

1.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS

Tal como se mencionó anteriormente, no existen todavía herramientas matemáticas adecuadas para dar una solución general a las ecuaciones de la turbulencia. El carácter aleatorio y no lineal de dichas ecuaciones hace muy difícil su tratamiento y es prácticamente imposible hacer predicciones cuantitativas con suficiente aproximación sin tener que recurrir a resultados experimentales.

El procedimiento generalmente más aceptado en la actualidad en el estudio de la turbulencia es a través de los métodos estadísticos. Este camino sufre sin embargo, de una grave dificultad: el problema de cierre en las ecuaciones de la turbulencia. Efectivamente, cualesquiera que sean los parámetros estadísti-

cos que se consideren en la formulación de las ecuaciones, siempre se llegan a tener más incógnitas que ecuaciones. Una buena parte de los intentos por resolver el problema, ha sido el buscar hipótesis o suposiciones que permitan igualar el número de incógnitas al de ecuaciones. El buen éxito de este procedimiento depende en gran medida de la inventiva, intuición e inspiración del investigador. Se trata pues, de buscar conceptos y modelos físicos simples basados en la experiencia, que permitan ligar adecuadamente las ecuaciones con los escurrimientos reales.

Con objeto de ilustrar lo anterior, se puede pensar en que la teoría de la turbulencia se encuentra limitada en forma análoga a como lo estaría la mecánica de fluidos general si no se conociera la ley de Stokes que relaciona esfuerzos con rapidez de deformación en un fluido newtoniano. El ejemplo no es completamente arbitrario; de hecho uno de los procedimientos empleados al intentar completar la teoría de la turbulencia, consiste en postular una relación entre esfuerzos y rapidez de deformación turbulentos, basada en una "viscosidad turbulenta", la cual jugaría un papel análogo al de la viscosidad molecular en flujos laminares. El procedimiento se basa en el aparente parecido que tienen entre sí el movimiento de las moléculas y las fluctuaciones turbulentas de velocidad al transmitir cantidad de movimiento y calor. Prandtl, von Karman, Taylor y otros desarrollaron estos conceptos que constituyen la base

de las llamadas teorías fenomenológicas de la turbulencia.

En los últimos años se han venido desarrollando teorías estadísticas más formales y sofisticadas para la turbulencia con la esperanza de encontrar un formalismo que no requiera de hipótesis o suposiciones adicionales. Asimismo, una escuela de investigadores experimentales está tratando de presentar una nueva concepción de la turbulencia, en la cual se toma un punto de vista más determinista. Más adelante se examinarán en forma somera estas nuevas tendencias.

1.5 EJEMPLOS

Para finalizar este capítulo examinaremos a continuación algunos ejemplos tomados del libro de Tennekes y Lumley, [1] en los cuales se trata de ilustrar el carácter difusivo de la turbulencia (de gran interés en la ingeniería), así como el papel fundamental que juegan las escalas que se pueden definir en un escurrimiento dado. Se harán algunas comparaciones con flujos laminares con objeto de enfatizar la gran habilidad que tienen los flujos turbulentos en el transporte y dispersión de cantidad de movimiento, energía cinética y contaminantes como el calor, partículas en suspensión y humedad.

DIFUSION CUANDO SE IMPONE UNA ESCALA DE LONGITUD.- Supóngase que en una habitación (con una longitud característica L) se coloca un calentador. Si no existe ningún movimiento del aire en el cuarto, el calor se transmitirá solamente por difusión molecular o conducción (aceptando que la radiación térmica

sea despreciable). En esas condiciones el fenómeno estaría regido por la clásica ecuación de la difusión, la cual en notación tensorial cartesiana es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (1.5.1)$$

En lugar de resolver la ec. 1.5.1 con las condiciones de frontera apropiadas, trataremos de determinar sus consecuencias globales empleando el análisis dimensional. Efectivamente, en forma dimensional, la ec. 1.5.1 se puede interpretar como sigue:

$$\frac{\Delta \theta}{T_d} = \alpha \frac{\Delta \theta}{L^2} \quad (1.5.2)$$

donde $\Delta \theta$ es una diferencia de temperaturas característica del problema y T_d corresponde a una escala de tiempo relacionada con la difusión molecular. De la expresión 1.5.2 se obtiene:

$$T_d = \frac{L^2}{\alpha} \quad (1.5.3)$$

Así, por ejemplo, si la dimensión L de la habitación es de 5m y el coeficiente de difusión α para el aire se toma como $0.2 \text{ cm}^2/\text{seg}$, la escala de tiempo T_d para este proceso de difusión será del orden de 10^6 seg (más de 100 horas).

Si se tuviera en cambio el más mínimo movimiento del aire dentro del cuarto (causado tal vez por pequeñas diferencias de densidad), es decir una convección natural, el calor se difundiría rápidamente. Supóngase que la misma longitud L se use para caracterizar al movimiento del aire en la habitación. Lo anterior es válido ya que se sabe que las escalas de movimiento más grandes (las cuales no pueden ser mayores que las dimensiones del cuarto) son las más efectivas en transportar y distribuir el calor. De esta manera, la escala de tiempo característica de este flujo turbulento se podría expresar como:

$$T_t = \frac{L}{u} \quad (1.5.4)$$

donde u corresponde a una velocidad característica del movimiento (por ejemplo el valor r.m.s. de las fluctuaciones de velocidad en el cuarto). Para estimar esta última, supóngase que el calentador ocasiona un aumento de temperatura $\Delta\theta$ de 10°C en el aire cercano a él. Se genera así una aceleración de flotación $g\Delta\theta/\theta$ del orden de 0.3 m/seg^2 , que probablemente ocurra sólo cerca de la pared del calentador. Si la altura h del calentador es de 0.1m , entonces la energía cinética por unidad de masa $gh \Delta\theta/\theta$, del aire que se mueve, será del orden 0.03 (m/seg)^2 . Se obtiene así una velocidad de 17cm/seg . Sin embargo, gran parte de la energía cinética se pierde por la tendencia del aire a estratificarse dentro de la habitación. Parece ra

zorable tomar un valor $5 \text{ cm}^2/\text{seg}$ para el promedio de velocidad en todo el cuarto. En estas condiciones, la escala T_t se estimaría en 100 seg. Es decir la dispersión mediante el flujo turbulento resulta varios órdenes más rápida que la simple difusión molecular

El cociente T_t entre T_d se puede interpretar como el recíproco de un número de Péclet (producto del número de Reynolds por el de Prandtl);

$$\frac{T_t}{T_d} = \frac{L\alpha}{uL} = \frac{\alpha}{uL} \quad (1.5.5)$$

y dado que el número de Prandtl para la mayor parte de los gases es de orden 1, la expresión 1.5.5 se reduce a:

$$\frac{T_t}{T_d} = \frac{v}{uL} = \frac{1}{Re} \quad (1.5.6)$$

resultando así que el número de Reynolds puede interpretarse como el cociente de la escala de tiempo asociada a difusión molecular entre la escala de tiempo correspondiente a difusión turbulenta cuando la escala de longitud es la misma.

DIFUSIVIDAD APARENTE.- Debido a la complicada naturaleza de las ecuaciones de la turbulencia, algunas veces se maneja el aspecto difusivo de los escurrimientos turbulentos mediante el uso de un coeficiente de difusividad aparente. Siguiendo este procedimiento se pierde un poco el intento por entender la turbulencia, pues con el concepto de difusividad aparente se

tiende a pensar en la turbulencia como una propiedad del flujo y no del fluido. De cualquier modo, este procedimiento simplifica un poco las matemáticas.

A través de esta idea, es posible representar una ecuación para la difusión del calor en flujos turbulentos, análogamente a la ec. 1.5.1 Efectivamente, se tiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (1.5.7)$$

donde K es la difusividad aparente, muchas veces llamado coeficiente de intercambio de calor. Con objeto de que este coeficiente sea congruente con la realidad, es necesario que se tenga igualdad entre la escala de tiempo del proceso de difusión hipotético expresado por 1.5.7 y la escala de tiempo del proceso real de mezclado según 1.5.4. Para el primero se tiene:

$$T = \frac{L^2}{K} \quad (1.5.8)$$

el cual igualado a T_t en 1.5.4, resulta en:

$$K = uL \quad (1.5.9)$$

Si comparamos K con la viscosidad cinemática molecular ν y la difusividad térmica α (α es del mismo orden de magnitud que ν), se obtiene:

$$\frac{K}{\nu} = \frac{K}{\alpha} = \frac{uL}{\nu} = Re \quad (1.5.10)$$

Es decir el número de Reynolds así definido, se puede interpretar como la relación de viscosidades, aparente (turbulenta) a

molecular (laminar).

DIFUSION CUANDO SE IMPONE UNA ESCALA DE TIEMPO.- Considérese ahora la capa límite atmosférica, la cual se encuentra expuesta a la rotación terrestre. Cualquier flujo en un sistema de referencia rotatorio, se encuentra acelerado por la fuerza de Coriolis, la cual es igual al doble del producto vectorial entre la velocidad de rotación y la velocidad del flujo. Si la velocidad angular del sistema de referencia es $f/2$, resulta que el escurrimiento atmosférico tiene una escala de tiempo impuesta de orden $1/f$, donde f , se le conoce como parámetro de Coriolis (por ejemplo, a una latitud de 40 grados, f vale aproximadamente 10^{-4} seg $^{-1}$ suponiendo que el eje de rotación coincide con la vertical).

De esta manera, si la capa límite atmosférica fuera laminar, de acuerdo a la expresión:

$$T = \frac{L_d^2}{\nu} \quad (1.5.11)$$

análoga a 1.5.3, se tendría $L_d = 40$ cm. para $\nu = 0.15$ cm 2 /seg y $T = f^{-1} = 10^4$ seg, lo cual está muy alejado de la realidad. Lo que sucede es que la capa límite atmosférica casi siempre es turbulenta. Resulta entonces al reemplazar ν por K (difusividad aparente) y haciendo uso de 1.5.9:

$$L_t = uT \quad (1.5.12)$$

Una escala de velocidad típica de capas límite turbulentas es

del orden de 1/30 la velocidad media del viento. Entonces para un viento de 10 m/seg, $U=0.3$ m/seg, la cual junto con $T=10^4$ seg nos da $L_t=3$ km que corresponde al espesor observado para la capa límite atmosférica.

El cociente entre escalas de longitud para las capas límite atmosféricas laminar y turbulenta, resulta al considerar 1.5.11 y 1.5.12

$$\frac{L_t}{L_d} = \frac{L_t}{(\nu T)^{1/2}} = \frac{L_t}{(\nu L_t / u)^{1/2}} = Re^{1/2} \quad (1.5.13)$$

Es decir, que el número de Reynolds se puede interpretar como la relación de escalas de longitud para las difusiones turbulenta y molecular. Para Re muy grandes, el flujo turbulento penetra más dentro de la atmósfera que el flujo laminar.

MÚLTIPLES ESCALAS DE LONGITUD EN UN FLUJO TURBULENTO.- En los escurrimientos turbulentos se tiene un amplio rango de escalas de longitud, limitadas éstas por las dimensiones geométricas del flujo y por la acción disipativa de la viscosidad. Algunas de estas escalas juegan papeles muy específicos e importantes en la dinámica de la turbulencia.

Examinemos brevemente la existencia de múltiples escalas de longitud en un flujo cortante laminar. Las ecuaciones de Navier-Stokes para un escurrimiento de esta naturaleza, incompresible y en estado permanente, se pueden escribir en notación tensorial cartesiana:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.5.14)$$

de donde se pueden estimar los términos de inercia y los viscosos, como u^2/L y $\nu u/L^2$, respectivamente, donde u es una velocidad característica y L es una longitud característica. El cociente de estos términos uL/ν es el conocido número de Reynolds y se concluye que para valores muy grandes de este último, los términos viscosos deben ser despreciables comparados con los términos de inercia. Sin embargo las condiciones de frontera que se impongan sobre 1.5.14 permiten despreciar los términos viscosos en todo el escurrimiento. Tal es el caso de la capa límite donde es necesario asociar los antedichos términos viscosos con una escala de longitud pequeña diferente de L , de manera de tener el mismo orden de magnitud en ambos términos (inerciales y viscosos), aún para valores grandes del número de Reynolds. Si l es ésa nueva escala de longitud, se tiene entonces:

$$\frac{u^2}{L} \approx \frac{\nu u}{l^2} \quad (1.5.15)$$

obteniéndose la siguiente relación entre la longitud viscosa l y la escala de longitud L del escurrimiento:

$$\frac{l}{L} = \frac{\nu^{1/2}}{L} = Re^{-1/2} \quad (1.5.16)$$

La escala viscosa l es una escala de longitud transversal al flujo, obviamente asociada al espesor de la capa límite. A esta escala se le acostumbra llamar escala de longitud difusiva y a L , escala de longitud convectiva. Generalmente en los flujos cortantes (tanto laminares como turbulentos) L es mucho mayor que l , es decir, su longitud es mucho mayor que su ancho y esto permite simplificar las ecuaciones de movimiento, haciendo el análisis más simple.

En el caso de una capa límite turbulenta, si las fluctuaciones características de velocidad son del orden u , entonces se puede presumir que el espesor de la capa límite l aumenta aproximadamente como $dl/dt = u$. Por otro lado el tiempo transcurrido entre el origen de la capa límite y la posición L es de orden L/U (escala de tiempo convectiva). Se puede entonces estimar $l = ut = \frac{uL}{U}$. Nótese que este procedimiento, análogo al que condujo a la ec. 1.5.16, equivale a igualar la escala de tiempo de difusión turbulenta l/u con la escala de tiempo convectiva L/U . Se obtiene entonces para la capa límite turbulenta las relaciones entre escalas:

$$\frac{l}{L} = \frac{u}{U} \quad (1.5.17)$$

$$\frac{l}{u} = \frac{L}{U}$$

Se refuerza así la idea (físicamente correcta) de que un flujo turbulento expuesto a un escurrimiento externo, debe tener una escala de tiempo congruente con la escala de tiempo del flujo externo.

BIBLIOGRAFIA.

1. Tennekes, H. and Lumley, J.L., A First Course in Turbulence, The MIT Press, 1972.

CAPITULO DOS

ELEMENTOS PARA LA DESCRIPCION ESTADISTICA DE LA TURBULENCIA

2.1 GENERALIDADES

Antes de establecer las ecuaciones fundamentales para la descripción estadística de la turbulencia, conviene revisar algunos conceptos básicos acerca de procesos estocásticos. Solamente se resumirán aquellos aspectos que por su aplicación directa en las ecuaciones fundamentales o por su sentido físico, resultan de interés para la teoría de la turbulencia.

Se puede decir en general que toda variable que represente algún aspecto de un fenómeno físico, puede clasificarse como determinista o no determinista (aleatoria). Pertenecen a la primera categoría, aquellos procesos que se pueden describir mediante una relación matemática explícita. Por ejemplo, el movimiento de un cuerpo suspendido mediante un resorte, la descarga del voltaje de un capacitor a través de una resistencia, o el cambio de temperatura del agua en un recipiente, conforme se le aplica calor, son fenómenos que pueden describirse mediante fórmulas explícitas, resultando estas últimas de leyes fundamentales o de observaciones repetidas.

A la segunda clase pertenecen aquellos casos en los cuales no es posible escribir una relación matemática explícita entre las variables que gobiernan el fenómeno. Se trata entonces, de situaciones en las que resulta imposible predecir un valor exacto de las variables para un instante futuro (aceptando que la variable

independiente sea el tiempo). Se dice que las variables son aleatorias y que sólo se pueden describir en términos de proposiciones probabilísticas y promedios estadísticos, en lugar de ecuaciones explícitas. Ejemplo de ello lo constituyen, sin duda, la velocidad, la presión y la temperatura en un flujo turbulento.

En el cuadro siguiente, se presenta una posible clasificación de los fenómenos o procesos atendiendo al carácter arriba apuntado y utilizando como variable independiente el tiempo (no es necesario emplear este último, aunque es el caso más común):

Determinista	{	Periódico	{	Sinusoidal
		Aperiódico		Complejo
Aleatorio	{	Estacionario	{	Casi periódico
				Transitorio
	No estacionario	{		Ergódico
				No ergódico

2.2 CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LOS PROCESOS DETERMINISTAS Y DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

Examinaremos brevemente los tipos principales de fenómenos deterministas, con el objeto de fijar algunos conceptos que serán de utilidad en la mayor parte de esta sección, cuyo contenido se refiere esencialmente a los procesos estocásticos.

PROCESOS PERIODICOS SIMPLES (SINUSOIDAL)

Esta clase de funciones se pueden expresar matemáticamente mediante una relación del tipo:

$$x(t) = X \text{ sen } (2\pi f_0 t + \theta) \quad (2.2.1)$$

donde:

$x(t)$ = valor instantáneo de x en el tiempo t

X = amplitud

f_0 = frecuencia en ciclos por segundo

θ = ángulo de fase en radianes

El intervalo de tiempo necesario para el complemento de un ciclo, se llama período y es igual al recíproco de la frecuencia. En la fig. 2.1 se muestra la función (2.2.1) tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, siendo este último el espectro de amplitud-frecuencia de la función $x(t)$. Nótese que en este caso, el espectro está constituido por una sola línea o pulso correspondiente a la única frecuencia f_0 .

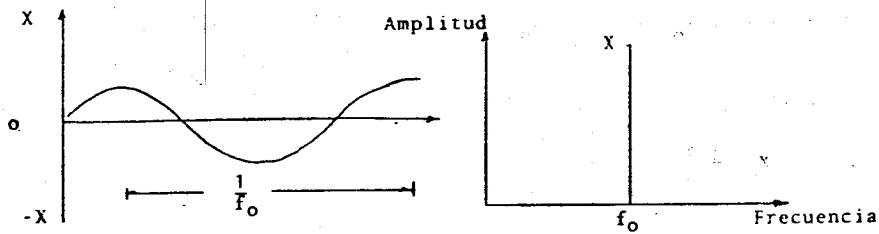


Fig. 2.1 Función periódica simple y su correspondiente espectro.

PROCESOS PERIODICOS COMPLEJOS

Pertencen a esta clase las funciones cuyos valores se repiten a intervalos regulares, es decir:

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.2)$$

donde T es el período y $f_1 = \frac{1}{T}$ es la frecuencia fundamental.

Con pocas excepciones, las funciones periódicas se pueden expresar mediante series de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \quad (2.2.3)$$

donde los coeficientes de Fourier a_n , b_n están dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt & n=0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt & n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Alternativamente, la función $x(t)$ se puede expresar como sigue:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos (2\pi n f_1 t - \phi_n) \quad (2.2.5)$$

donde:

$$X_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Se puede decir entonces que la función periódica $x(t)$ está formada por un componente constante (cero frecuencia) X_0 y una serie infinita de componentes sinusoidales (armónicos) de amplitudes X_n y ángulos de fase θ_n . Las frecuencias de las armónicas son múltiplos enteros de f_1 . En la fig. 2.2 se muestra el espectro de amplitud-frecuencia para una función periódica compleja.

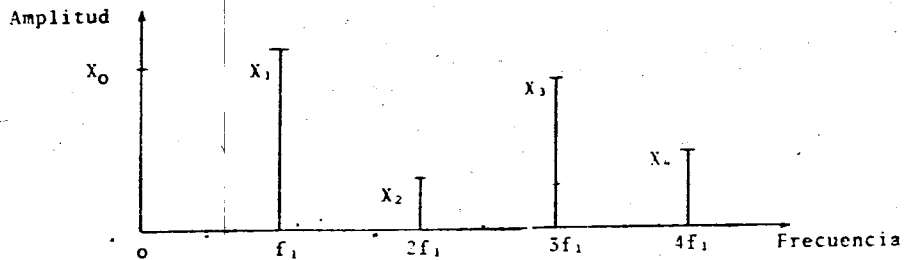


Fig. 2.2 Espectro de una función periódica compleja

PROCESOS CASI PERIODICOS

Corresponden a esta clase aquellas funciones generalmente no periódicas, compuestas de dos o más frecuencias arbitrarias. Efectivamente, la suma de dos o más ondas sinusoidales dará como resultado una función periódica siempre que todos los cocientes p_0

sibles de formar entre pares de frecuencia de las componentes, sean números racionales. Cuando no sucede así, decimos que la función tiene un carácter casi periódico. Matemáticamente se tiene:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{sen}(2\pi f_n t + \theta_n) \quad (2.2.6)$$

donde f_n/f_m no es racional.

Un ejemplo donde se presenta este tipo de función, lo constituyen las vibraciones de una hélice de avión cuando los pistones del motor están fuera de sincronización.

La fig. 2.3 muestra cómo sería un espectro de amplitud-frecuencia para este tipo de funciones.

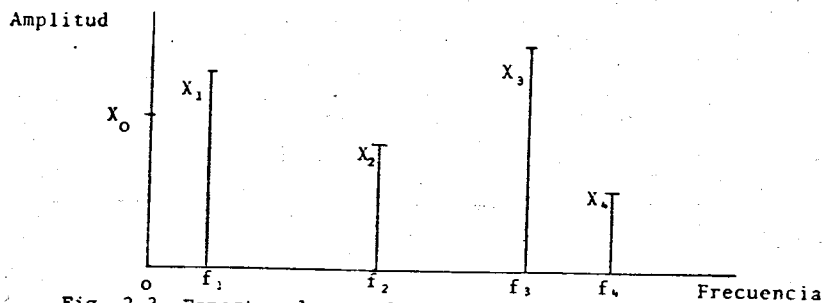


Fig. 2.3 Espectro de una función casi periódica.

PROCESOS TRANSITORIOS

Esta clase de procesos deterministas de gran importancia en la práctica, está formada por funciones de tipo transitorio. Por ejemplo las vibraciones amortiguadas de un sistema mecánico cuando se ha dejado de aplicar la fuerza excitatriz.

En este caso, no es posible descomponer la función en series de Fourier. Sin embargo, en casi todos los casos se puede obtener una representación espectral continua mediante el uso de la integral o transformación de Fourier.:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.2.7)$$

La función transformada $X(f)$, generalmente es una variable compleja pudiéndose entonces escribir:

$$X(f) = |X(f)| e^{-j\theta(f)}$$

donde $|X(f)|$ es la amplitud y $\theta(f)$ es el ángulo de fase.

En la fig. 2.4 aparecen ejemplos de señales transitorias con sus correspondientes transformadas de Fourier.

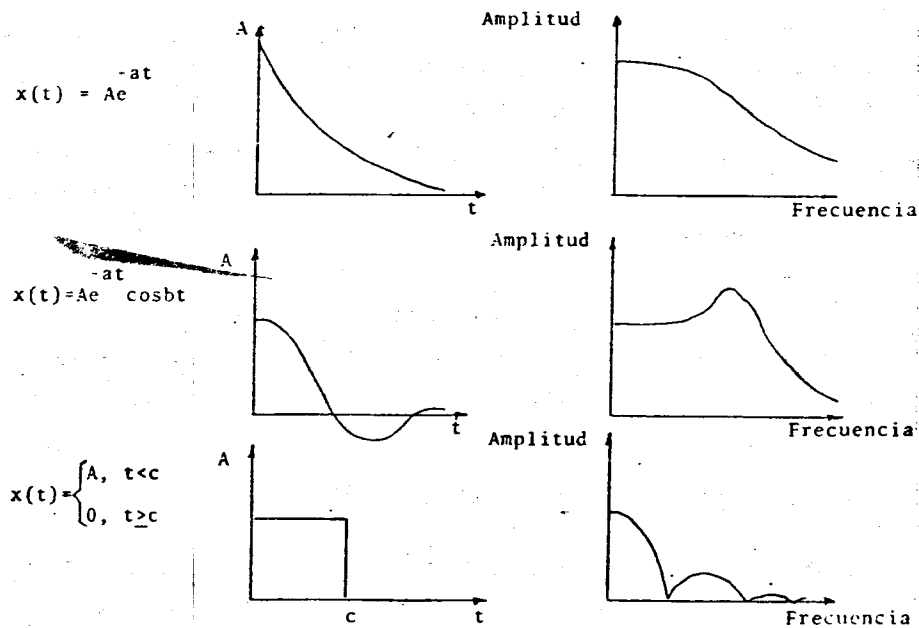


Fig. 2.4 Ejemplos de señales transitorias y sus transformadas de Fourier.

CONCEPTO DE PROCESO ESTOCASTICO.- Tal como se mencionó anteriormente, existen fenómenos físicos que no se pueden describir mediante una relación matemática explícita debido a que cada observación del fenómeno es única, es decir, una observación hecha representa solamente una de las muchas posibilidades que pudieron haber ocurrido.

El concepto de proceso estocástico es una extensión del de variable aleatoria. Efectivamente, se recordará que al definir una variable aleatoria, se acostumbra asociar a cada posible resultado aleatorio de un experimento, una cantidad o número de acuerdo con una regla determinada. Para un proceso estocástico, se asocia una señal o función (generalmente respecto a alguna variable independiente de interés, por ejemplo el tiempo), a cada posible resultado del experimento. Al conjunto o "ensamble" de funciones, junto con ciertas medidas de probabilidad, se le llama precisamente proceso aleatorio o proceso estocástico. Cada una de las señales o funciones es una muestra o función-muestra del proceso estocástico. Un ejemplo típico lo constituye la señal de ruido que se tiene en un sistema electrónico. El conjunto o "ensamble" del proceso está formado por todas las ondas de ruido que se pueden tener en un número igual de sistemas electrónicos idénticos o en un mismo sistema cada vez que se le ponga a funcionar (fig. 2.5)

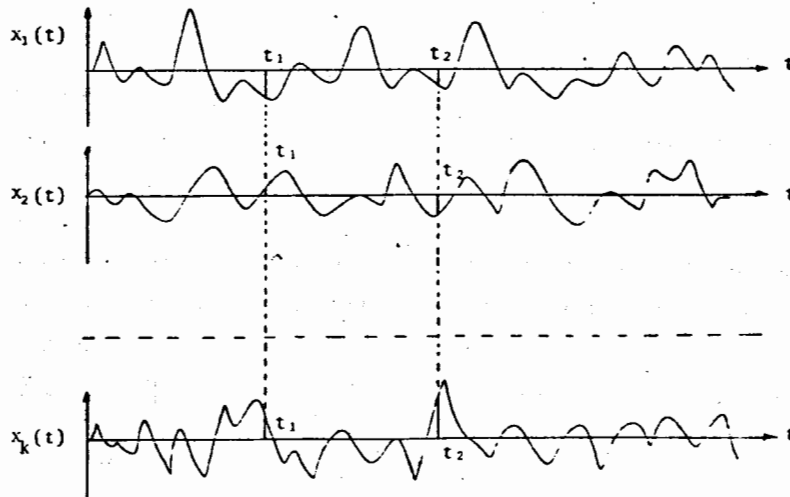


Fig. 2.5 Proceso estocástico.

Nótese que cada una de las señales que forman el proceso, pueden ser o no aleatorias en sí mismas. En realidad, la aleatoriedad involucrada en el concepto de proceso estocástico, se refiere a la ocurrencia de una señal en particular.

DESCRIPCION DE UN PROCESO ESTOCASTICO.- Existen varias medidas de probabilidad empleadas en la descripción de un proceso estocástico. Considérese el proceso $\{x_k(t)\}$ de la fig. 2.5. Para un valor fijo de la variable independiente $t=t_1$, el conjunto de número $x_k(t_1)$ constituyen una variable aleatoria, la cual tiene una cierta distribución de probabilidades. De la misma manera, la variable aleatoria $x_k(t_2)$, formada por los valores de todas las muestras x para $t=t_2$, tendrá asociada una distribución de probabilidades. Se puede entonces definir un número infinito de variables aleatorias correspondiendo a todos los valores que t puede tomar, con sus respectivas distribuciones de probabilidades. A

las medidas estadísticas de cada una de estas variables aleatorias, tomadas individualmente, se les llama "estadística de primer orden del proceso estocástico". Análogamente, la estadística-conjunta de dos variables aleatorias se llama "estadística de segundo orden del proceso". En general, si se toman n variables a la vez, la estadística-conjunta recibe el nombre de "estadística de orden n del proceso estocástico".

ESTADÍSTICAS DE PRIMER Y DE SEGUNDO ORDEN.- La estadística de primer orden para un proceso estocástico queda completamente especificada por la distribución de probabilidades de las variables aleatorias para cada valor de t . En forma simbólica, se tiene para la densidad de probabilidades $p(x;t)$. Conociendo esta densidad de probabilidades, se puede determinar el valor medio y el valor medio cuadrado de la variable aleatoria $x(t)$, mediante las conocidas fórmulas:

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t) dx \quad (2.2.8a)$$

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x;t) dx \quad (2.2.8b)$$

El producto $p(x;t) dx$ se puede interpretar como la probabilidad de que la amplitud de una función muestra $x(t)$, se encuentre en el intervalo $(x, x+dx)$ en el instante t . Desde el punto de vista de frecuencias relativas, correspondería a que de un total de N muestras,

\underline{n} pasarán por la ventana de la fig. 2.6, pudiéndose escribir:

$$p(x;t) dx = \frac{n}{N}$$

$$p(x;t) = \frac{n}{N dx}$$

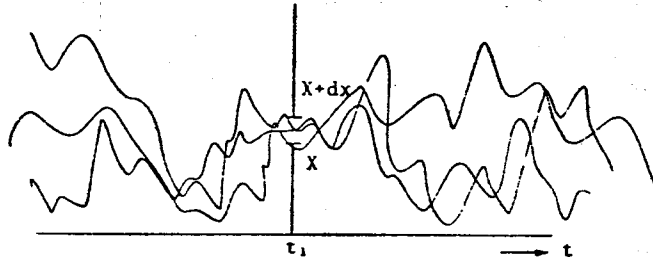


Fig. 2.6 Estadística de primer orden

Si bien la estadística de primer orden nos da información respecto a la distribución de amplitudes de las funciones muestra para todos los valores de \underline{t} , no resulta adecuada para describir completamente el proceso aleatorio. Considérese por ejemplo, que el proceso estuviera formado por señales eléctricas y se deseara conocer su contenido de frecuencias. Una señal, que contenga componentes de frecuencias predominantemente bajas, cambia muy lentamente, resultando muy parecidos los valores $x(t_1)$ y $x(t_1+\tau)$. Es decir, las variables aleatorias $x(t_1)$ y $x(t_1+\tau)$ no son estadísticamente independientes si $\underline{\tau}$ es suficientemente pequeño. En otras palabras el conocimiento de una nos da cierta información acerca de la otra. Por otro lado, si las señales contienen frecuencias predominantemente altas, entonces las señales cambian muy rápidamente y los valores de las señales, separados por el mismo intervalo $\underline{\tau}$, guar

darán muy poco parecido. Resulta así que la correlación entre valores de la señal para varios intervalos, puede darnos información útil respecto al contenido de frecuencia del proceso en general, y la estadística de primer orden no nos ayuda en este respecto. Se recordará que se puede obtener una medida de la relación o interdependencia de dos variables aleatorias, mediante su correlación, la cual a su vez se puede determinar a partir de la función de densidad de probabilidades conjunta: $p(\sigma, \eta; t_1, t_2)$. La probabilidad de que una función muestra tenga su amplitud en el intervalo $(\sigma, \sigma + d\sigma)$ para $t = t_1$ y en el rango $(\eta, \eta + d\eta)$ para $t = t_2$, está dada por $p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta$. Interpretando este resultado desde el punto de vista de frecuencias relativas, se diría que si de N funciones-muestra, m de ellas pasan simultáneamente a través de las "ventanas" $\sigma + d\sigma$ y $\eta + d\eta$, correspondientes a t_1 y t_2 , respectivamente (Fig. 2.7) entonces se escribiría:

$$p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta = \frac{m}{M}$$

La densidad-conjunta de probabilidades para dos variables aleatorias se puede relacionar con las densidades individuales de las variables, mediante simple integración, por ejemplo:

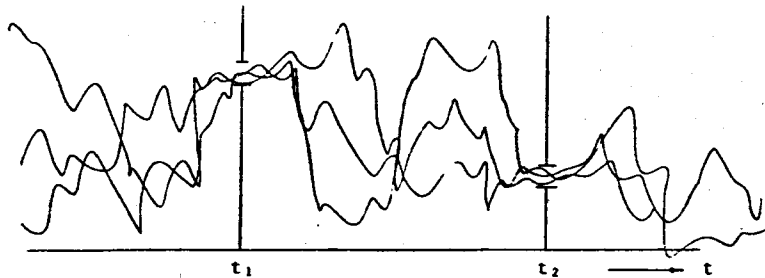


Fig. 2.7 Estadística de segundo orden

$$p(\sigma; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\eta$$

En general, si se tiene la densidad-conjunta de probabilidades de orden n , se pueden obtener todas las densidades de orden inferior a través de integración sucesiva.

Para terminar esta subsección, diremos que un proceso estocástico queda completamente especificado si se conoce la densidad conjunta de probabilidades $p(\sigma, \eta, \dots, \xi; t_1, t_2, \dots, t_n)$ para cualquier grupo finito de instantes de observación t_1, t_2, \dots, t_n y para cualquier valor que tome n . Afortunadamente, en la práctica solamente es necesario considerar hasta el segundo orden para determinar valores medios, valores medios cuadrados, autocorrelación, espectro, etc., particularmente si se trata de transmisión de señales aleatorias a través de sistemas lineales.

PROCESOS ESTACIONARIOS. PROCESOS ERGODICOS.-

Antes de examinar los conceptos de proceso estacionario y proceso ergódico, vamos a definir dos promedios de gran utilidad en el manejo de procesos estocásticos.

Se define como valor medio de la variable aleatoria $x(t)$, al promedio estadístico, promedio de "ensamble" o esperanza:

$$\overline{x(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) p(x; t_1) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (2.2.9)$$

Se define como función autocorrelación del proceso estocástico $\{x(t)\}$, al promedio estadístico del producto de dos variables aleatorias $\sigma=x(t_1)$ y $\eta=x(t_2)$:

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{\sigma\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\eta p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_2) \quad (2.2.10)$$

Existen procesos estocásticos para los cuales alguna de las funciones de densidad de probabilidades o alguna otra función descriptiva del proceso, es independiente del parámetro t . Por ejemplo, el proceso aleatorio:

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta)$$

donde θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 2\pi)$, tiene una densidad de probabilidades de primer orden independiente de t .

Se dice que un proceso aleatorio es (estrictamente) estacionario si toda su estadística (densidades de probabilidad de todos los órdenes) es independiente del parámetro t . Un proceso estocástico es "débilmente" estacionario si el valor medio $x(t)$ y la autocorrelación $R_x(t_1, t_2)$, son independientes de t :

$$\overline{x(t)} = \text{constante para todo } t$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau) \quad (2.2.11)$$

En los párrafos anteriores se ha discutido cómo se pueden determinar las propiedades de un proceso estocástico mediante promedios calculados tomando todo el conjunto o "ensamble" de muestras para valores específicos del parámetro t . En muchos casos de interés práctico, se puede determinar las propiedades del proceso, calculando promedios temporales (es decir, respecto al parámetro t) sobre determinadas muestras del proceso. Así por ejemplo, si se tiene la k -ésima muestra del proceso, es posible calcular los promedios:

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (2.2.12)$$

$$R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t+\tau) dt \quad (2.2.13)$$

De esta manera, si el proceso $\{x(t)\}$ es estacionario y $\mu_x(k)$ y $R_x(\tau, k)$ definidos arriba, resultan ser iguales a los promedios estadísticos (2.2.9) y (2.2.10) respectivamente, se dice que el proceso $x(t)$ es un proceso estocástico ergódico.

Los procesos ergódicos resultan ser una clase muy importante de procesos aleatorios, ya que todas sus propiedades pueden determinarse mediante promedios temporales en una sola función muestra. Generalmente, en la práctica un proceso aleatorio estacionario es ergódico y su tratamiento es más fácil.

2.3 MOMENTOS. AUTOCORRELACION. ESPECTRO DE POTENCIA.

Teniendo en cuenta que generalmente en el estudio de la turbulencia se acepta como válida la hipótesis de ergodicidad, conviene examinar los parámetros y funciones estadísticas más empleados en este campo, refiriéndonos a una sola de las funciones muestra del proceso estocástico, es decir, empleando promedios con respecto al parámetro t .

FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES

Cualquiera de las variables de interés en un punto en el seno de un flujo turbulento, por ejemplo la velocidad, puede tomar una forma como la que se indica a continuación.

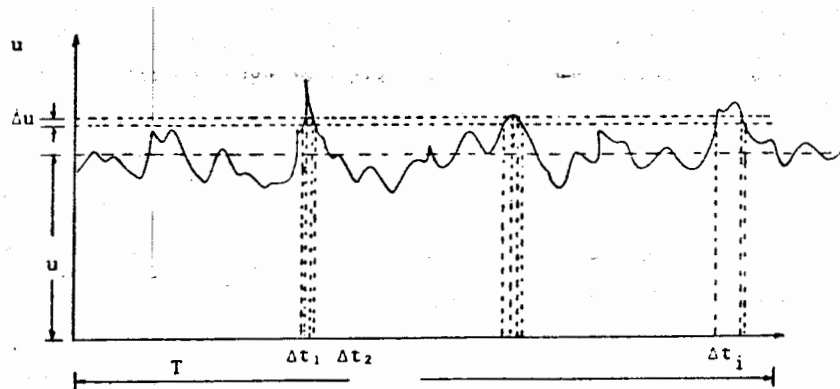


Fig. 2.8 Descripción por frecuencias de la función de densidad de probabilidades.

Supongamos que dentro del intervalo T , la variable toma valo-

res entre u y $u+\Delta u$ durante los intervalos $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i$ de tiempo indicados en la figura; de esta manera el porcentaje del tiempo durante el cual la variable cae dentro en el intervalo indicado se puede expresar como:

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t_i}{T}$$

y es de esperarse que este porcentaje resulte proporcional a Δu . Podemos definir a la función de densidad de probabilidades como:

$$p(u) = \frac{1}{\Delta u} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t_i}{T} \quad (2.3.1)$$

de tal modo que la probabilidad de que u tome un valor entre u_1 y u_2 está dada por

$$P(u_1 < u < u_2) = \int_{u_1}^{u_2} p(u) du \quad (2.3.2)$$

es decir, el área bajo la curva $p(u)$ entre las abscisas u_1 y u_2 .

En la última expresión $P(u)$ recibe el nombre de función de distribución de probabilidades y se define como

$$P(u) = \int_{-\infty}^u p(u) du \quad (2.3.3)$$

y corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor igual o menor que un determinado nivel u . Obsérvese que se tienen las siguientes propiedades para la función de densidad

de probabilidades y la función de distribución de probabilidades.

$$\begin{aligned}
 p(u) &\geq 0 \\
 P(\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \, du = 1 \\
 P(-\infty) &= 0 \\
 0 &\leq P(u) \leq 1 \\
 \frac{dP(u)}{du} &= p(u)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.4}$$

Las funciones que acabamos de definir tienen en general, una forma como se indica a continuación

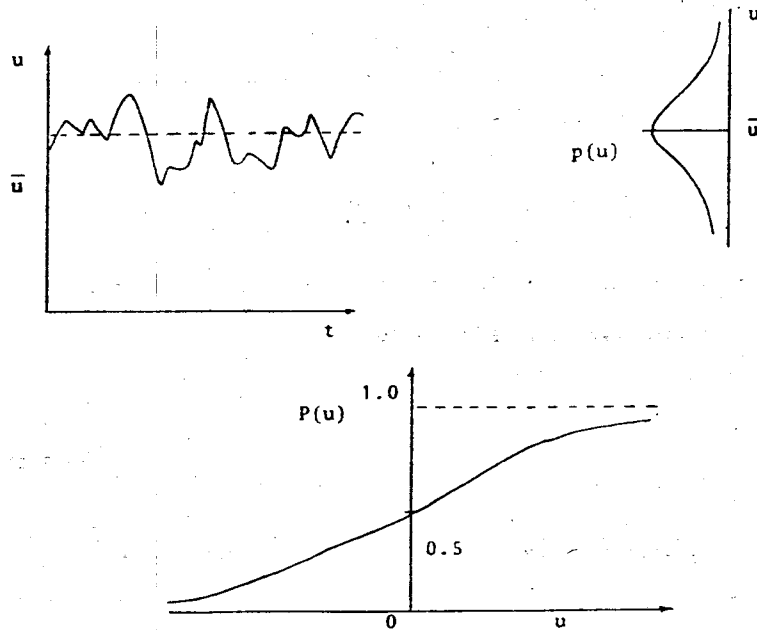


Fig. 2.9 Funciones de densidad de probabilidades y de distribución acumulada

MOMENTOS.- Supongamos que se tiene una función $f(u)$ y que se desea calcular su valor medio en función de $p(u)$; se escribe entonces

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(u) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du \quad (2.3.5)$$

es decir, sumamos todos los intervalos de tiempo t_i incluidos entre 0 y T durante los cuales u se encuentra entre los valores u y $u+\Delta u$, multiplicamos por $f(u)$ y sumamos para todos los niveles de u .

De interés particular en cuanto a la forma de $f(u)$ son las potencias de u . Los correspondientes valores medios reciben el nombre de momentos; así, se tiene para el momento de primer orden la conocida media:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (2.3.6)$$

Ahora bien, generalmente, sobre todo en el trabajo experimental, resulta más cómodo manejar a las variables fluctuantes restándoles su correspondiente valor medio. Supongamos entonces que redefinimos a nuestra variable de la manera indicada; en tal caso los momentos se convierten en momentos centrales, teniéndose para el de primer orden evidentemente $u=0$. Los siguientes tres momentos centrales son de interés en el estudio de la turbulencia:

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt \quad (2.3.7)$$

Este momento de segundo orden (varianza) es una medida de la amplitud de las fluctuaciones, acostumbrándose utilizar a veces el valor r.m.s., es decir, $\sqrt{\overline{u^2}}$.

El momento de tercer orden, adimensionalizado como se indica a continuación,

$$f.o. = \frac{\overline{u^3}}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (2.3.8)$$

recibe el nombre de factor de oblicuidad, mientras que el momento de cuarto orden,

$$f.a. = \frac{\overline{u^4}}{(\overline{u^2})^2} \quad (2.3.9)$$

se conoce como factor de aplanamiento. Ambos factores generalmente se utilizan para indicar qué tanto se diferencia la densidad de probabilidades de una función de tipo normal o gaussiana, tal como se ilustra en las siguientes figuras:

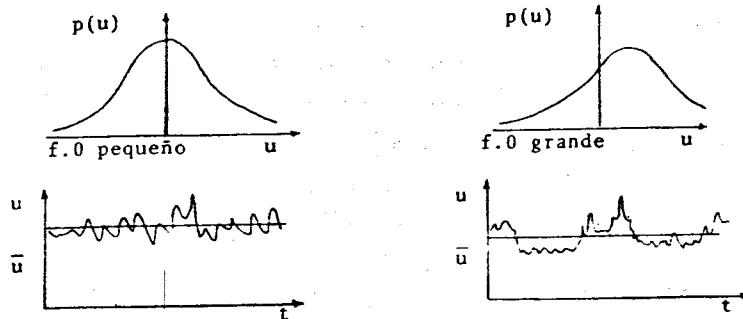


Fig. 2.10 Factor de oblicuidad

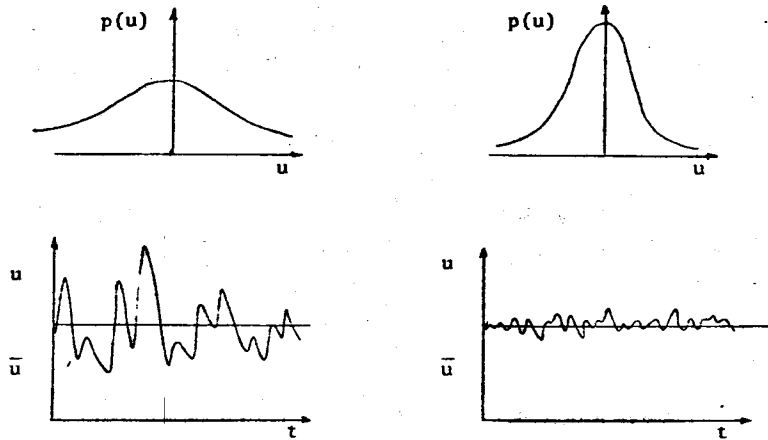


Fig. 2.11 Factor de aplanamiento

FUNCIÓN AUTOCORRELACION.- Para un proceso ergódico, la función autocorrelación está dada por:

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt = \overline{u(t)u(t+\tau)} \quad (2.3.10)$$

la cual, en forma adimensional se acostumbra escribir:

$$R_u(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u^2(t)}} \sqrt{\overline{u^2(t+\tau)}}} \quad (2.3.11)$$

Esta función es real, par y tiene su valor máximo para $\tau=0$.

El concepto de función de correlación expresado en (2.3.10) se puede extender al caso de dos procesos estocásticos conjuntamente ergódicos $\{u(t)\}$ y $\{v(t)\}$. Se define entonces como función de correlación cruzada al promedio:

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)v(t+\tau)dt = \overline{u(t)v(t+\tau)} \quad (2.3.12)$$

o bien, en forma normalizada:

$$R_{uv}(\tau) = \frac{\overline{u(t)v(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u^2(t)}} \sqrt{\overline{v^2(t+\tau)}}} \quad (2.3.13)$$

Al igual que la autocorrelación, esta función es real; sin embargo no es par ni tiene su valor máximo para $\tau=0$, necesariamente.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\ R_x(0) &= \overline{x^2} \\ R_x(\tau) &= R_x(\tau+nT) \text{ para } x(t) = x(t+nT) \\ R_x(0) &\geq |R_x(\tau)| \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \\ |R_{xy}(\tau)| &\leq [R_x(0) R_y(0)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ESPECTRO DE POTENCIA.- Este concepto es una extensión del espectro de amplitud-frecuencia para una señal periódica (series de Fourier) y para una señal transitoria (transformada de Fourier). Efectivamente, en el segundo caso se tenía:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.3.15)$$

con la condición que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \quad \text{sea finita}$$

En el caso de una señal aleatoria la última condición no se cumple. Además, la función que resulta de interés no es $u(t)$ sino $\overline{u^2(t)}$.

En esas condiciones, lo que se hace es redefinir $u(t)$ de tal manera de considerar sólo un intervalo $0 < t < T$. Así, la integral arriba apuntada resulta finita.

Expresemos ahora el valor medio cuadrado $\overline{u^2(t)}$ mediante transformadas de Fourier.

$$\overline{u^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} dt \quad (2.3.16)$$

Se puede demostrar que el orden de integración no afecta al resultado de la última expresión. Se obtiene entonces:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^T u(t) e^{j\omega t} dt \quad (2.3.17)$$

De la definición de transformada de Fourier se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = F(-\omega) \quad (2.3.18)$$

y tomando en cuenta la redefinición de $u(t)$ que nos indica un valor cero fuera del rango $0 < t < T$, se puede escribir:

$$\int_0^T u(t) e^{j\omega t} dt = F(-\omega) \quad (2.3.19)$$

Sustituyendo en (2.18), resulta:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.3.20)$$

y siendo $F(\omega)$ y $F(-\omega)$ funciones complejas conjugadas, resulta:

$$\overline{u^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2 d\omega}{T 2\pi} \quad (2.3.21)$$

La cantidad de arriba es una medida de la energía cinética de la turbulencia, por unidad de masa, debida a la componente u . El integrando

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \quad (2.3.22)$$

representa la distribución de esa energía en la frecuencia ω .

Se le conoce bajo el nombre de espectro de energía o de potencia (el primer adjetivo se usa en turbulencia, mientras que el segundo lo usan los ingenieros electrónicos).

Se puede demostrar que la función de autocorrelación y el espectro de energía son transformadas de Fourier, una de la otra.

En efecto, la función autocorrelación expresada en (2.3.10) se puede escribir teniendo en cuenta la primera fórmula (2.3.15), como

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t+\tau)} \frac{d\omega}{2\pi} dt \quad (2.3.23)$$

Separando la función exponencial e intercambiando el orden de integración

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega\tau} \int_0^T u(t) e^{j\omega t} dt \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.3.24)$$

es decir, teniendo en cuenta (2.3.19)

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega\tau} F(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.3.25)$$

resultando

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.3.26)$$

se concluye entonces que

$$S(\omega) = F\{R_u(\tau)\} \quad ; \quad R_u(\tau) = F^{-1}\{S(\omega)\} \quad (2.3.27)$$

2.4 FUNCIONES DE CORRELACION. ESPECTROS DE ENERGIA

Dada la importancia que tienen para el estudio de la turbulencia las diversas funciones de correlación (y los espectros de energía asociados a ellas) que se pueden definir entre las propiedades del flujo, conviene estudiarlas en forma más detallada, particularmente aquéllas relacionadas con los diferentes componentes de la velocidad. A continuación, primeramente revisaremos las funciones de correlación más comúnmente empleadas en la descripción estadística de la turbulencia, ligándolas con las diversas escalas de longitud y de tiempo que permiten caracterizar a un determinado escurrimiento; definiremos después, los espectros de energía de mayor interés para nuestro estudio.

FUNCIONES DE CORRELACION

Tal como sabemos, una función de correlación en su sentido más general nos permite comparar una serie de datos o mediciones con otra serie de naturaleza semejante. Se le emplea de manera extensa (si bien, a través del concepto un poco restringido de coeficiente de correlación) en disciplinas como la Biología, la Economía, la Psicología, etc. Su utilización en el campo de la turbulencia se basa en la sugerencia original de Taylor (1) en relación con la descripción estadística de la turbulencia de que sin importar qué se pueda entender por el diámetro de un remolino, siempre existirá un alto grado de correlación entre las velo

ciudades en dos puntos de un escurrimiento si la distancia entre los dos puntos es pequeña comparada con el diámetro del remolino. De la misma manera, si los dos puntos se encuentran muy separados entre sí, es decir, varias veces el diámetro del remolino, es de esperarse muy poca correlación entre las correspondientes velocidades. Los conceptos anteriores se pueden hacer extensivos a los diferentes valores que va tomando la velocidad en un solo punto al transcurrir el tiempo, diciendo que para intervalos de tiempo relativamente cortos es de esperarse un alto grado de correlación entre los valores que toma la velocidad, mientras que para intervalos relativamente grandes debe suceder lo contrario. En la fig. 2.12 se muestra de manera esquemática los conceptos anteriores.

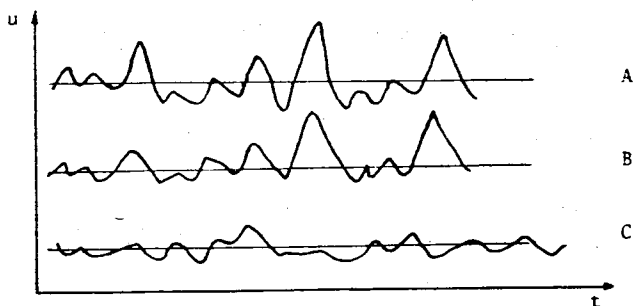


Fig. 2.12 Los registros de velocidad A y B corresponden a dos puntos muy cercanos y se caracterizan por un alto grado de correlación; el registro C corresponde a un tercer punto alejado de A y B y posee poca correlación con éstos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden definir diversas funciones de correlación para las velocidades de un flujo turbulento. La más general de ellas se expresa como sigue:

$$Q_{ij}(x_k, \tau) = \overline{u_i(x_k, \tau) u_j(x_k + r_k, \tau + \tau)} \quad (2.4.1)$$

Se trata entonces de un tensor de segundo orden que describe la correlación entre las componentes de velocidad en dos puntos separados por el vector r_k , defasadas el intervalo de tiempo τ . Este tensor, además de estar formado por nueve componentes, es función de cuatro variables, y su completa determinación es difícil de lograr experimentalmente, a no ser que exista alguna simetría u homogeneidad en el escurrimiento.

Una función de correlación más sencilla, sumamente estudiada experimentalmente (véase Favre [2]), es la que comúnmente se conoce como Función de Correlación Euleriana y la cual, en forma adimensional, se define como:

$$R_{ij}(x_k) = \frac{\overline{u_i(x_k) u_j(x_k + r_k)}}{\overline{u_i(x_k)} \overline{u_j(x_k + r_k)}} \quad (2.4.2)$$

donde u_i' indica el valor r.m.s. de u_i . Se trata en este caso de una correlación espacial y el adjetivo "euleriana" se refiere precisamente al punto de vista que se sigue para describir al movimiento del fluido.

Dos casos de la expresión (2.4.2.) resultan de particular impor-

tancia en la descripción estadística de la turbulencia: (a) cuando ésta es homogénea y (b), cuando además es isótropa.

En el primer caso, escribimos

$$R_{ij}(x_k) = \frac{u_i(x_k)u_j(x_k+r_k)}{u_i^2 u_j^2} \quad (2.4.3)$$

ya que el valor r.m.s de las fluctuaciones es independiente de la posición (no así la función de correlación misma).

En el segundo caso se tiene

$$R_{ii}(x_k) = \frac{u_i(x_k)u_i(x_k+r_k)}{u^2} \quad (2.4.4)$$

Efectivamente, en la turbulencia isótropa además de tenerse un solo valor r.m.s., únicamente se tienen tres componentes para la función de correlación (los componentes para $i \neq j$ son nulas) pues de otro modo no existiría la isotropía. (Aquí, el doble subíndice simplemente indica que los subíndices son iguales).

Se puede demostrar (véase por ejemplo Batchelor [3]) que en el caso de la turbulencia isótropa solamente se necesita especificar una función de correlación de las indicadas en (2.4.4). Esta función escalar generalmente se escribe.

$$f(r) = \frac{u_r(x_k+r_k) u_r(x_k)}{u^2} \quad (2.4.5)$$

es decir, se trata de la correlación entre las componentes de la velocidad en la misma dirección del vector r_k que separa a los

dos puntos: se le conoce por lo tanto como correlación longitudinal. Se acostumbra emplear también la correlación lateral de finida por

$$g(r) = \frac{u_n(x_k) u_n(x_k + r_k)}{u^2} \quad (2.4.6)$$

donde el subíndice n indica que los componentes de la velocidad se toman perpendiculares al vector r_k (fig. 2.13)

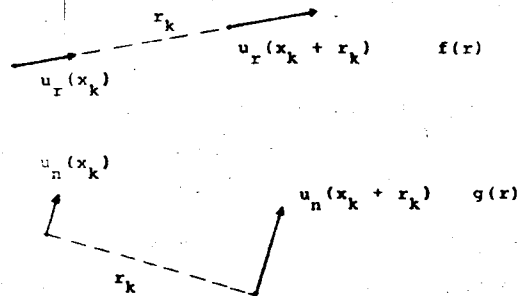


Fig. 2.13 Dirección para las velocidades en las correlaciones para turbulencia isótropa.

von Karman y Howarth demostraron (v. por ejemplo, Batchelor [3]) que la necesaria relación entre $f(r)$ y $g(r)$ está dada por:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (2.4.7)$$

y en la obra de Hinze [4] se presenta la comprobación experimental de la ec. (2.4.7) (fig. 2.14).

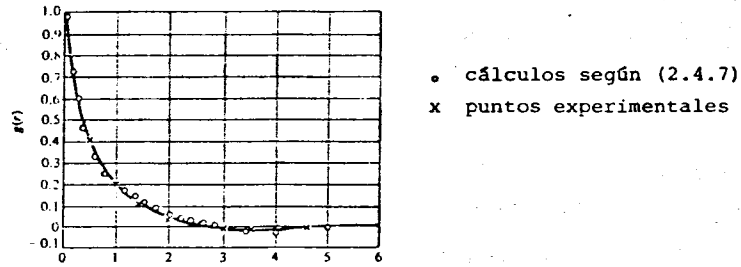


Fig. 2.14 Función de correlación lateral

En la ec. (2.4.7), el término $f(r)$ siempre es positivo y tiende a cero conforme crece r ; a su vez, el término $\partial f/\partial r$ siempre es negativo y también tiende a cero al aumentar r . Para valores de r un poco menores que 5 resulta ser más grande en valor absoluto el segundo término en (2.4.7), haciendo que $g(r)$ sea negativo. Más adelante, ambos términos en (2.4.7) se hacen cero y $g(r)$ también se aproxima a cero por el lado negativo.

Este resultado de obtener valores negativos de $g(r)$ para determinadas separaciones entre los dos puntos, se entiende fácilmente si se piensa que para esas distancias se tiene, en promedio, valores positivos en uno de los puntos de velocidad asociados a valores negativos de velocidad en el otro es decir, tienen sentidos opuestos; se trata entonces de las velocidades en puntos opuestos de un remolino.

ESCALAS

Precisamente lo anterior nos permite utilizar las funciones de

correlación para definir "tamaños" de típicos remolinos en la turbulencia a través del concepto de escala. Existen diversas clases de escalas dependiendo de la correlación que se emplee para definir las y de la variable dependiente en la correlación (r ó r_k). Así, tenemos para el caso más general, la escala integral o macroescala euleriana, dada por

$$L_{ij} = \int R_{ij}(r_k) dr_k \quad (2.4.8)$$

En el caso de la turbulencia isótropa, evidentemente se acostumbra definir las siguientes dos escalas:

$$\begin{array}{l} \text{escala integral} \\ \text{longitudinal} \end{array} \quad L_f = \int_0^{\infty} f(r) dr \quad (2.4.9)$$

$$\begin{array}{l} \text{escala integral} \\ \text{lateral} \end{array} \quad L_g = \int_0^{\infty} g(r) dr \quad (2.4.10)$$

pudiéndose demostrar que entre ellas existe la relación

$$L_g = \frac{1}{2} L_f \quad (2.4.11)$$

También se acostumbra utilizar en turbulencia varias microescalas definidas a través de la curvatura de la función de correlación para $r_k=0$; en efecto, se tiene para el caso de turbulencia isótropa.

$$\begin{array}{l} \text{Microescala} \\ \text{longitudinal} \end{array} \quad \lambda_f = \left[\frac{\overline{2u^2}}{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=0}} \right]^{1/2} \quad (2.4.12)$$

Microescala lateral

$$\lambda_g = \left[\frac{2\bar{u}^2}{\left(\frac{\partial u_n}{\partial r} \right)_{r=0}} \right]^{1/2} \quad (2.4.13)$$

y corresponden cada una de ellas al denominador del segundo término de una expansión en series de Taylor de la respectiva correlación, cerca de $r=0$. Geométricamente, se pueden obtener estas microescalas ajustando una parábola a la curvatura de la función de correlación en la región cercana a $r=0$, como se indica en la fig. 2.15.

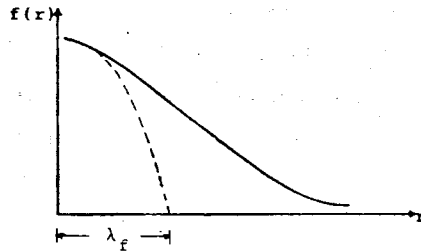


Fig. 2.15 Definición de microescala

Los conceptos de macroescala y microescala se pueden extender para el caso en que consideremos al tiempo como variable independiente. Hablaríamos entonces de la función de autocorrelación para las velocidades en un mismo punto, la cual como sabemos está dada por ejemplo, para las velocidades longitudinales por

$$f(r) = \frac{\overline{u_r(\tau) u_r(\tau+r)}}{u^2} \quad (2.4.14)$$

Definimos entonces de manera parecida a las escalas espaciales,

$$\begin{array}{l} \text{macroescala} \\ \text{temporal} \\ \text{euleriana} \end{array} \quad \tau_e = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \quad (2.4.15)$$

$$\begin{array}{l} \text{microescala} \\ \text{temporal} \\ \text{euleriana} \end{array} \quad \tau_e = \left[\frac{\overline{2u^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}} \right]^{1/2} \quad (2.4.16)$$

HIPOTESIS DE TAYLOR

Obsérvese en relación con las funciones de correlación longitudinales que $f(r)$ resulta difícil de medir debido a la interferencia que ocasiona el sensor que se encuentre más aguas arriba sobre el segundo sensor. Por otro lado, la correlación $f(\tau)$ es relativamente fácil de determinar experimentalmente dado que en tal caso, solamente se necesita algún medio para ir "corriendo" en el tiempo a la señal representativa de la velocidad y se tienen en el mercado instrumentos adecuados para tal operación.

Se trataría entonces de relacionar una función de correlación con la otra. Una manera de hacerlo es escribiendo

$$f(r) = \frac{\overline{u_r(x_k) u_r(x_k + r_k)}}{\overline{u^2}} = \frac{\overline{u_r(\tau) u_r(\tau + \tau)}}{\overline{u^2}} = f(\tau) \quad (2.4.17)$$

en cuyo caso se implica poder escribir:

$$x = t U \quad (2.4.18)$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$$

es decir, se reemplaza la coordenada espacial por un tiempo equivalente, suponiendo que en un punto fijo en el espacio las fluctuaciones de velocidad se deben esencialmente al paso de una estructura del movimiento turbulento que no cambia al pasar por el punto; en otras palabras, la turbulencia en un punto en el instante t es la misma que en el instante t^*+t en un segundo punto situado a una distancia $x=t\bar{U}$ aguas abajo.

Lo anterior recibe el nombre de Hipótesis de Taylor (de la estructura "congelada") y es aproximadamente válida para fluctuaciones de velocidad muy pequeñas comparadas con el valor medio correspondiente. Una manera de comprobar experimentalmente la hipótesis de Taylor es tomando correlaciones espacio-temporales, es decir,

$$R_u(r, \tau) = \frac{u(x, t) u(x+r, t+\tau)}{\sqrt{u^2(x)} \sqrt{u^2(x+\tau)}} \quad (2.4.19)$$

Dichas funciones, que alcanzan su valor máximo para $r=\bar{U}\tau$, tienen el aspecto indicado en la fig. 2.16

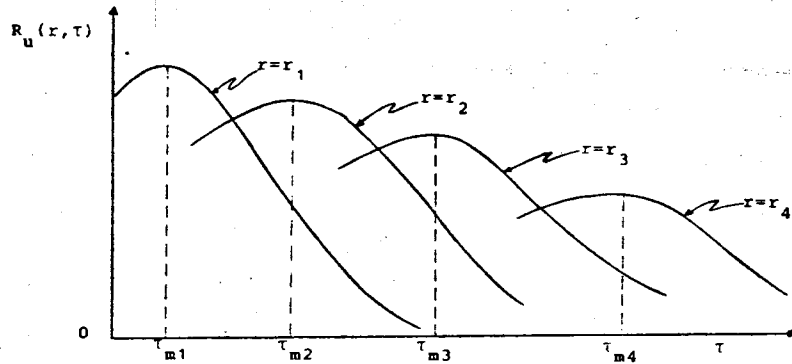


Fig. 2.16 Funciones de correlación de acuerdo con la ec. 2.4.19

Obsérvese que la hipótesis de Taylor se cumpliría exactamente si $R_u(r, \tau_m) = 1$ para cada uno de los τ_m . Esto no sucede así y además se cumple menos la mencionada hipótesis conforme crece r .

Una medida de la velocidad convectiva con que realmente se mueve la estructura turbulenta, se obtiene mediante el cociente Y_i/τ_{mi} que para valores pequeños de r , resulta prácticamente constante. Esta velocidad convectiva comparada con \bar{U} es como 0.8 para el caso de una tubería y adquiere un valor menor en flujos cortantes no confinados.

Para completar esta parte relativa a funciones de correlación podemos mencionar que dicho concepto se puede extender de tal mane-

ra de incluir tres o más cantidades. Por ejemplo, se puede hablar de correlaciones triples:

$$S_{ij,k}(r_e) = \overline{u_i(x_e)u_j(x_e)u_k(x_e+r_e)}$$

tensor que consta de 27 elementos, 18 de los cuales son diferentes. En el caso de la turbulencia isótropa, está demostrado que solamente se necesitan tres de ellos, de naturaleza parecida a $f(r)$ y $g(r)$, es decir, entre componentes longitudinales y transversales de las velocidades en dos puntos.

ESPECTROS DE ENERGIA

Tal como se demostró en la sección anterior, la autocorrelación de un proceso estocástico ergódico posee una transformada de Fourier a la cual denominamos espectro de potencia y nos viene a representar la misma información contenida en la función muestra, pero esta vez en el dominio de las frecuencias. Esta representación es sumamente útil en el manejo de las ecuaciones fundamentales de la turbulencia pues tal como veremos, en ellas se presentan funciones de correlación dobles y triples, dificultándose en grado extremo el lenguaje matemático, mientras que el empleo de los correspondientes espectros disminuye notablemente la anterior dificultad.

Como se recordará, una señal fluctuante puede considerarse como una onda compleja equivalente a una suma de ondas sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias; el espectro viene a ser una representación continua a lo largo de las frecuencias, de cantidades proporcionales a las amplitudes. Más concretamente, en el caso de fluctuaciones turbulentas de velocidad, el espectro de energía* unidimensional representa la distribución continua con respecto a la frecuencia, de la energía cinética de las fluctuaciones.

*—————
En la teoría de las comunicaciones se prefiere emplear el término espectro de potencia, porque dicha función representa efectivamente la distribución de la potencia en las diversas frecuencias, cuando la señal original es un voltaje que pasa a través de una resistencia eléctrica unitaria.

De la misma manera que existen varias funciones de correlación, se pueden definir los correspondientes espectros de energía.

En efecto, el caso más general consiste en el tensor de espectro de energía (tridimensional) definido por

$$\phi_{ij}(\underline{x}, \underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(\underline{r}) \exp(-i\underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r} \quad (2.4.20)$$

donde, siguiendo la nomenclatura de Brodkey [5] y Townsend [6], la raya debajo de cada símbolo indica que se trata de un vector. En la ec. (2.4.20), el vector \underline{k} representa al número de onda asociado a la frecuencia de las fluctuaciones; sus componentes se expresan como

$$k_i = 2\pi/\lambda_i = 2\pi f_i/U_i \quad (2.4.21)$$

Cada elemento de Fourier k_i se puede interpretar como una onda en el espacio físico, existiendo su correspondiente transformación en el espacio vectorial \underline{k} como se indica en la fig. 2.17:

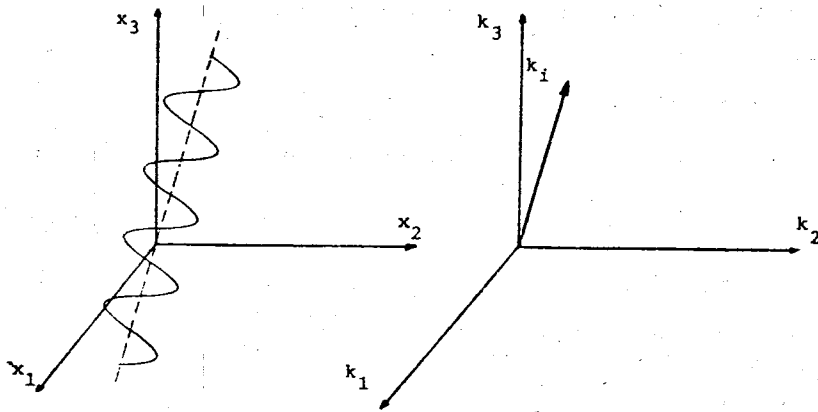


Fig. 2.17 Representación de una onda en el espacio físico y en el espacio vectorial de números de onda.

Propiamente se puede interpretar al espectro definido por (2.4.20) como la distribución en el espacio de los diferentes tamaños de remolinos de la turbulencia; de esta manera, la transformada de Fourier inversa,

$$Q_{ij}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(\underline{x}, \underline{k}) \exp(i\underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{k} \quad (2.4.22)$$

nos indica que ϕ_{ij} constituye la contribución a $\overline{u_i u_j} = Q_{ij}(\underline{x}, 0)$ de las componentes de Fourier del campo de velocidades, en el elemento de volumen $d\underline{k}$ del espacio de números de onda. (Se puede visualizar en ϕ_{ij} como una especie de densidad de energía en el espacio \underline{k} : ϕ_{ij} es la densidad, \underline{k} es el volumen y $Q_{ij}(0)$ es la masa).

Esta clase de espectro de energía la estudiaremos con más detalle al hablar de turbulencia homogénea e isotrópica; dada su naturaleza bastante complicada, no se le ha podido medir completamente. Podemos medir en forma relativamente sencilla un espectro de energía unidimensional, propuesto por Taylor, mediante el análisis armónico de la señal que produce un anemómetro de hilo caliente.

El espectro unidimensional está definido por la doble integral:

$$\phi_{ij}(\underline{x}, k_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\underline{x}, \underline{k}) dk_m dk_n \quad (2.4.23)$$

es decir, se trata de la integración sobre todos los valores laterales posibles de \underline{k} ; vista la operación anterior en forma geométrica, corresponde a la suma de $\phi_{ij}(\underline{x}, \underline{k})$ extendida a todo el plano mn localizado a una distancia k_ℓ desde el origen en el espacio \underline{k} , como se esquematiza en la fig. 2.18

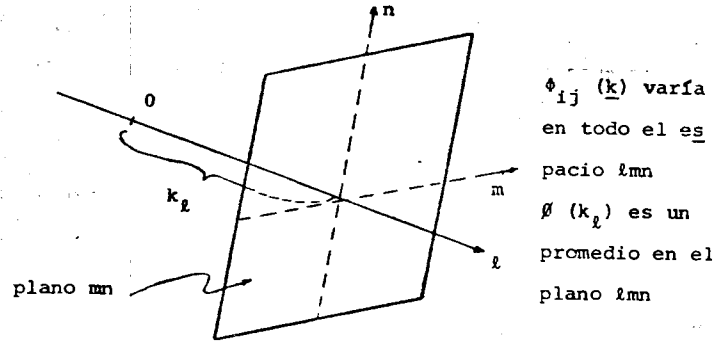


Fig. 2.18. Espectro unidimensional

El espectro unidimensional corresponde a una función de correlación; en efecto, se tiene

$$\phi_{ij}(k_\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r_\ell) \exp(-i k_\ell r_\ell) dr_\ell \quad (2.4.24)$$

Si recordamos que para la turbulencia isótropa solamente necesitamos una función de correlación y que generalmente se manejan las correlaciones longitudinal y lateral, es claro que tendremos en tal caso un espectro unidimensional longitudinal y un espectro unidimensional lateral.

Otra forma integrada del espectro de energía de interés en la turbulencia, la constituye la definida por la siguiente expresión:

$$E_{ij}(k) = \int_S \phi_{ij}(\underline{k}) dS(k) \quad (2.4.25)$$

Se trata entonces de una integración de $\phi_{ij}(\underline{k})$ extendida a una superficie de radio $k = |\underline{k}|$ en el espacio \underline{k} ; pierde por tanto, el carácter direccional que tiene el espectro unidimensional donde la integración se extiende a un plano perpendicular a una determinada dirección. El espectro $E_{ij}(k)$ se puede visualizar como la contribución a la energía por cada número de onda k : se trata del producto de la "densidad" $\phi_{ij}(\underline{k})$ por el "área" correspondiente a k en el espacio \underline{k} .

Una forma escalar del espectro de energía con la cual se trabaja comúnmente y que se relaciona directamente con la forma integrada que acabamos de examinar, es la siguiente: consideremos la energía cinética de las fluctuaciones de velocidad teniendo en cuenta la relación (2.4.22),

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{3}{2} \overline{u^2} = \frac{1}{2} Q_{ii}(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (2.4.26)$$

pero recordando que la integral en (2.4.20) es en realidad una integral de volumen en el espacio \underline{k} y recordando lo expresado en (2.4.25), se tiene, al definir

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_S \phi_{ii}(k) dS(k) \quad (2.4.27)$$

que la energía cinética de las fluctuaciones se puede expresar como

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \int_0^\infty E(k) dk \quad (2.4.28)$$

En (2.4.28), el escalar $E(k)$ recibe también el nombre de espectro de energía tridimensional.

Con objeto de tener una mejor conceptuación de la relación entre los espectros que hemos revisado, conviene situarlos en el marco de referencia de las mediciones. (Más adelante nos dedicaremos con detalle a este aspecto de la turbulencia). Supongamos que estamos midiendo un espectro unidimensional, es decir, estamos procediendo a lo largo de una determinada dirección y nuestras observaciones aparentemente se refieren al vector de número de onda en la misma dirección (fig. 2.19).

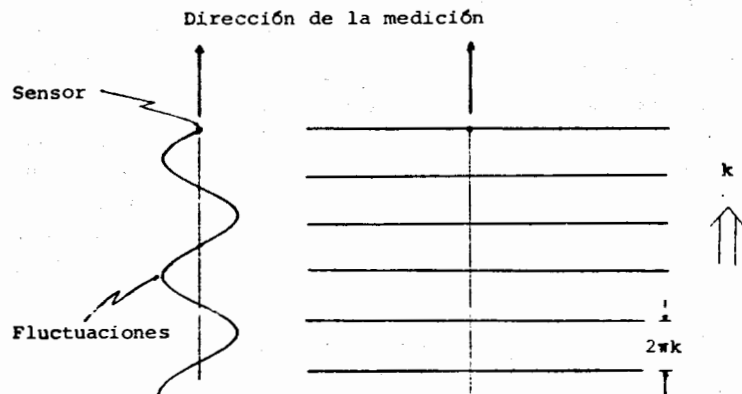


Fig. 2.19 Obtención de un espectro unidimensional cuando el vector número de onda es unidimensional en la dirección de medición.

Sin embargo, la interpretación anterior es incorrecta puesto que nuestro sensor no puede distinguir entre fluctuaciones cuyo vector de número de onda k es paralelo a la dirección de la medición (fig. 2.19) y las fluctuaciones cuyo vector de número de onda k^1 ($k^1 > k$) está inclinado con respecto a la misma dirección de la medición (fig. 2.20)

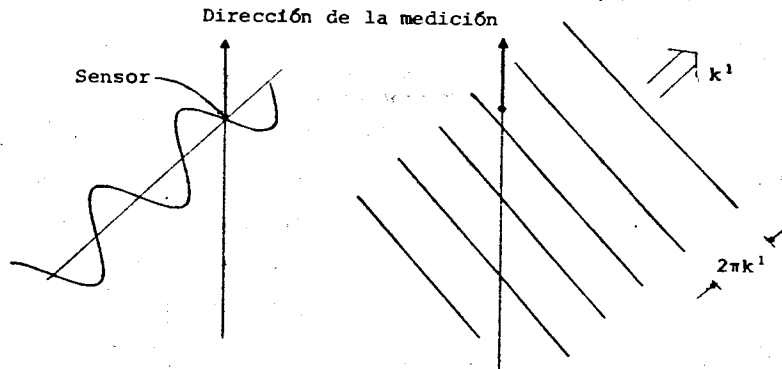


Fig. 2.20 Obtención de un espectro unidimensional cuando el vector número de onda está inclinado respecto a la dirección de medición.

De esta manera, un espectro unidimensional obtenido experimentalmente en un campo tridimensional, en cierto modo nos da una información incorrecta respecto a éste, al incluir en el número de onda k , contribuciones correspondientes a componentes con números de onda mayores que k . Esta es la razón por la cual un espectro unidimensional determinado experimentalmente toma la siguiente forma:

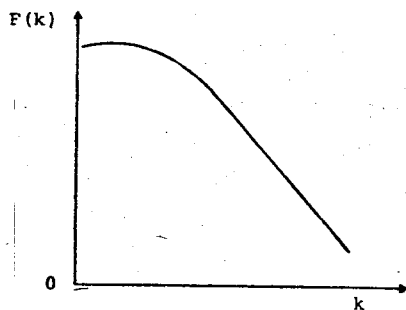


Fig. 2.21 Espectro unidimensional en escalas logarítmicas.

donde $F(0) \neq 0$, lo cual podría interpretarse equivocadamente como que existe una componente C.D. que contiene una cantidad de energía diferente de cero (recuérdese que el espectro se refiere a u , no a $\bar{U} + u$).

Este problema es particularmente grave con relación a los remolinos grandes ya que éstos generalmente presentan tamaños y formas diferentes en todas las direcciones, no así con los remolinos pequeños que son más uniformes en su tamaño.

Para evitar la situación mencionada tendríamos que efectuar mediciones en todas las direcciones posibles: el tensor de espectro $\phi_{ij}(k)$. Sin embargo, esto además de ser prácticamente imposible, dificulta enormemente su interpretación. Se prefiere entonces eliminar la información direccional al integrar en capas esféricas centradas en el origen del espacio vectorial \underline{k} . El espectro así obtenido, $E(k)$, resulta función del escalar k y representa la energía total distribuida en las magnitu

des de k ; dicho espectro, reúne la información de la energía cinética total de las tres componentes de velocidad, distribuida en los números de onda.

REFERENCIAS

1. Taylor, G.I., Statistical Theory of Turbulence, Proc. Roy. Soc. London, 151A, 421, 1935.
2. Favre, A. J. Review of Space-Time Correlations in Turbulent Fluids, J. App. Mech., 32, Ser E, 2, 241, 1965.
3. Batchelor, G.K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, 1970
4. Hinze, J.O., Turbulence, Mc Graw Hill, New York, 1959.
5. Brodkeym R.S., The Phenomena of Fluid Motions, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1967.
6. Townsend, A.A., The Structure of Turbulent Shear Flow, 2nd ed., Cambridge University Press, 1976.

CAPITULO 3

ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA UN FLUJO TURBULENTO

3.1 GENERALIDADES

Generalmente se acepta para el estudio de la turbulencia que el fluido se caracteriza por un medio continuo, es decir, carente de una estructura molecular. Se trata entonces de suponer que las propiedades del fluido como la velocidad, la presión, la temperatura, etc. se pueden definir como promedios a lo largo de intervalos de tiempo y regiones del espacio los cuales resulten, por un lado, grandes comparados con las correspondientes escalas del movimiento de las moléculas, pero por el otro lado sean menores que las escalas típicas del movimiento del fluido mismo. Tal como indica Townsend [1], se ha dudado acerca de esta hipótesis si bien no se han encontrado inconsistencias al respecto y aparentemente la hipótesis es aceptable excepto en casos extremos donde las escalas de longitud del movimiento son muy pequeñas o las velocidades del fluido resultan excesivamente altas.

A continuación, partiendo de las ecuaciones fundamentales para un fluido newtoniano, las cuales de acuerdo con lo expresado anteriormente son válidas para cualquier instante, estableceremos las ecuaciones básicas que describen a un flujo turbulento en términos de los valores medios temporales de las propiedades del fluido y de las fluctuaciones respecto a estos valores medios.

Seguiremos el método empleado por primera vez por O. Reynolds [2] pero tratando el caso más general de un flujo turbulento compresible y particularizando en aquellos casos de interés.

3.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Las ecuaciones fundamentales que describen el movimiento de un fluido newtoniano, se obtienen al considerar los principios de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía junto con relaciones constitutivas y ecuaciones de estado apropiadas. (Para una deducción de tales ecuaciones véase, por ejemplo, Currie [3].) De esta manera, si indicamos el valor instantáneo de una variable con una tilde sobre el símbolo correspondiente, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales para el caso más general del movimiento de un fluido:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (3.2.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \bar{\rho} \tilde{g}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (3.2.2)$$

Ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_i \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i^2 \right) \right] \\ = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{g}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ji}) - \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

o bien, al multiplicar (3.2.2) por la velocidad u_i (obteniéndose así una expresión para la energía cinética del fluido) y restar de (3.2.3),

$$\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_i} = \bar{\sigma}_{ji} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\epsilon}_i}{\partial x_i} \quad (3.2.4)$$

es decir,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \bar{\sigma}_{ji} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\epsilon}_i}{\partial x_i} \quad (3.2.5)$$

En las ecuaciones anteriores,

- ρ = densidad del fluido
- u_i = componentes de la velocidad
- g_i = componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de masa
- σ_{ij} = tensor de esfuerzos
- e = energía interna específica
- h = entalpía específica
- ϵ_i = componentes del vector flujo de calor

Las ecuaciones generales (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.4) o (3.2.5) se pueden expresar para el caso del fluido newtoniano, homogéneo e isótropo que nos ocupa, si se toman en cuenta las siguientes relaciones constitutivas:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.6)$$

$$\bar{\epsilon}_i = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (3.2.7)$$

donde μ y λ son el primero y el segundo coeficientes de viscosidad, respectivamente, y k es la conductividad térmica del fluido, los cuales por simplicidad, consideraremos constantes en el

presente estudio. Las relaciones constitutivas expresadas mediante (3.2.6) están basadas en los siguientes tres postulados de Stokes; (a) el tensor de esfuerzos es cuando mucho una función lineal del tensor de rapidez de deformación; (b) el fluido es isótropo; (c) la ley de deformación debe reducirse a la condición hidrostática de presión cuando el fluido está en reposo. La ecuación (3.2.7) expresa la conocida ley de Fourier para la conducción de calor en un medio homogéneo e isótropo sujeta a un gradiente de temperatura.

En la presentación que haremos de las ecuaciones fundamentales para un flujo turbulento utilizaremos según nos convenga, las ecuaciones generales (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.4) o (3.2.5), haciendo referencia a las relaciones constitutivas (3.2.6) y (3.2.7), o bien, las ecuaciones que resultan al combinar las anteriores, es decir:

Ecuación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano
(ecuación de Navier-Stokes)

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{\rho} \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (3.2.8)$$

Ecuación de la energía para un fluido newtoniano:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_i} = - \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i \partial x_i} + \bar{\phi} \quad (3.2.9)$$

donde $\bar{\phi}$ = función de disipación viscosa

$$= \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (3.2.10)$$

Para completar esta sección, escribiremos las ecs. (3.2.1) (3.2.8) y (3.2.9) para dos casos especiales de interés: el gas perfecto y el fluido incompresible.

Gas perfecto

La forma de las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para un gas perfecto no cambia por lo que (3.2.1) y (3.2.8) siguen siendo válidas; la ecuación de la energía (3.2.9) en cambio, se simplifica al tenerse para este caso $d\tilde{e} = c_v d\tilde{T}$, donde c_v es el calor específico a volumen constante; se tiene entonces:

Ecuación de la energía para un gas perfecto:

$$\bar{\rho} c_v \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = - \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_i \partial x_i} + \bar{\phi} \quad (3.2.11)$$

Fluido incompresible

En el caso de un fluido incompresible sí se obtienen simplificaciones en las tres ecuaciones (3.2.1) (3.2.8) y (3.2.9); en efecto, la incompresibilidad del fluido permite obtener una forma muy sencilla para la ecuación de continuidad, la cual sustituida en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, logra que éstas a su vez se simplifiquen:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.12)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \bar{g}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.2.13)$$

Ecuación de la energía:

$$\rho c \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_i \partial x_i} + \tilde{\phi} \quad (3.2.14)$$

donde

$$\tilde{\phi} = \mu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.15)$$

3.3 ECUACIONES PARA UN FLUJO TURBULENTO

Basándonos entonces en la idea de Reynolds y siguiendo el procedimiento delineado en Schuabauer y Tchen [4] debemos considerar a las variables como si estuvieran compuestas de un valor medio temporal más la correspondiente fluctuación:

$$\tilde{u}_i = \bar{u}_i + u_i$$

$$\tilde{p} = \bar{p} + p \quad (3.3.1)$$

$$\tilde{\rho} = \bar{\rho} + \rho'$$

$$\tilde{T} = \bar{\theta} + \theta$$

etc.

Supondremos que las propiedades físicas como la viscosidad, la conductividad térmica, etc., son esencialmente constantes y que resultan válidas las siguientes reglas de promediado:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$\overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}\bar{B}$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{A}}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_i} \quad (3.3.2)$$

$$\bar{a} = 0$$

$$\overline{\bar{A}\bar{B}} = \overline{(\bar{A}+a)(\bar{B}+b)} = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}b + \bar{B}a + \overline{ab} = \bar{A}\bar{B} + \overline{ab}$$

Tal como veremos, al incluir entre las variables fluctuantes a la densidad del fluido, la no linealidad de las ecuaciones se presenta no sólo con respecto a la velocidad en los términos convectivos sino además en relación con los productos de la velocidad y la densidad. Por otro lado, en el caso del flujo incompresible, la ecuación de cantidad de movimiento para valores medios de la velocidad (ecuación de Reynolds) se ve aumentada únicamente en los términos de fácil interpretación como esfuerzos aparentes que juegan el papel preponderante en la fricción turbulenta y en la producción de la turbulencia misma al estar multiplicados por gradientes de la velocidad media; en el caso más general que examinaremos a continuación, los términos adicionales no tienen una interpretación sencilla.

Ecuación de continuidad

Sustituyendo las descomposiciones apropiadas (3.3.1) en la ec. (3.2.1), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_i + u_i') \right] = 0 \quad (3.3.3)$$

Teniendo en cuenta las reglas (3.3.2) al promediar esta ecuación resulta:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u_i'}) = 0 \quad (3.3.4)$$

Obsérvese que en (3.3.4) el primer término es cero por definición, pero lo conservaremos en dicha ecuación por así convenir-

nos en las simplificaciones que haremos en las otras ecuaciones.

Ecuación de la cantidad de movimiento

En este caso obtenemos, al sustituir las descomposiciones (3.3.1) en la ecuación general (3.2.2),

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u_i) + (\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u_i) \\ = (\bar{F}_i + f_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde $\bar{F}_i = \bar{F}_i + f_i$ representa la fuerza de cuerpo la cual estudiaremos con mayor detalle adelante.

Multiplicando la ecuación de continuidad (3.3.3) por $(\bar{u}_i + u_i)$ y sumando el resultado al miembro izquierdo de (3.3.5), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_i + u_i) \right] = \bar{F}_i + f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\tau}_{ij} + \sigma_{ij}) \right] - (\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_i + u_i) (\bar{u}_j + u_j) \quad (3.3.6)$$

Promediando esta ecuación y teniendo en cuenta las reglas (3.3.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{F}_i + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \overline{u_i u_j} + \bar{u}_i \overline{\rho' u_j} + \bar{u}_j \overline{\rho' u_i} + \overline{\rho' u_i u_j} \right] \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Obsérvese el parecido con la ecuación de movimiento (3.2.2) ex-

presada para valores medios, con la diferencia de los términos adicionales donde aparecen las fluctuaciones incluyendo los esfuerzos de Reynolds. Obsérvese además, que en (3.3.7) el tensor de esfuerzos promedio para un fluido newtoniano está dado por

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{P}\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3.8)$$

al haber considerado constantes a las viscosidades.

El mismo resultado combinado de (3.3.7) y (3.3.8) se obtiene si se procede directamente con las ecuaciones de Navier-Stokes (3.2.8) ya que, a diferencia de los términos convectivos, no se tienen productos entre las variables en los términos relacionados con los esfuerzos en el fluido.

Ecuaciones para la energía cinética

De manera relativamente simple, se pueden obtener expresiones tanto para la energía cinética total del flujo (medio más turbulento) como para aquella asociada al flujo medio, o bien, para la energía cinética de las fluctuaciones. La energía cinética del flujo tiene un claro significado en la dinámica de la turbulencia y las expresiones que vamos a deducir resultan de utilidad en el manejo de la ecuación de conservación de la energía.

Comencemos con la más fácil de obtener: la que se refiere a la energía cinética total $K = \frac{1}{2}(\bar{u}_i + u_i)^2$. En efecto, multiplicando

la ecuación de la cantidad de movimiento (3.3.6) por $(\bar{u}_i + u_i)$ y promediando, multiplicando la ecuación de continuidad (3.3.3) y promediando también, y restando esta última de la primera, se obtiene, después de algunos pasos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho K}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho K} \bar{u}_j) &= - \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' K'}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' u_j K'} + \bar{\rho} \overline{u_j K'} + \bar{u}_j \overline{\rho' K'} + \bar{K} \overline{\rho' u_j}) \\ &\quad + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}}{\partial x_j} + \overline{u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} + \bar{u}_i \bar{F}_i + \overline{u_i F_i} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

donde

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.3.10)$$

$$K' = u_i \bar{u}_i + \frac{1}{2} u_i u_i - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.3.11)$$

De manera parecida se puede obtener una ecuación para la energía cinética del flujo medio; en efecto, multiplicando la ecuación de la cantidad de movimiento (3.3.7) por \bar{u}_i y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (3.3.4) multiplicada por $\frac{1}{2} \bar{u}_i$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j) + \bar{u}_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho' u_i u_j}) \right] \\ = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_i (\overline{\rho' u_i u_j} + \bar{\rho} \overline{u_i u_j}) + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_j u_i^2} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} (\overline{\rho' u_i u_j} + \bar{\rho} \overline{u_i u_j}) + (\bar{F}_i + \frac{\partial \bar{f}_{ij}}{\partial x_j}) \bar{u}_i \quad (3.3.12)$$

Finalmente, una ecuación para la energía cinética de las fluctuaciones se obtiene multiplicando la ecuación de la cantidad de movimiento (3.3.5) por u_i y promediando, a la cual se le suma la ecuación de continuidad multiplicada ésta por $\frac{1}{2} u_i^2$ y promediando el resultado, después de varios pasos es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \overline{\rho u_i^2} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i^2} \right] + \overline{\rho' u_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i u_j} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i u_i u_j} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i u_i \bar{u}_j} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i u_i u_j} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_i} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] \\ & = \overline{f_i u_i} + \overline{u_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}} \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

Los diversos términos que forman a las ecuaciones (3.3.9), (3.3.12) y (3.3.13) son difíciles de interpretar, sobre todo en el caso general que estamos considerando donde incluimos a las fluctuaciones de la densidad. Sin embargo podemos describir algunos de ellos dada la importancia que representan en el balance de energía de un flujo turbulento, o en todo caso debido a

su clara interpretación. Los términos marcados con un numerito ① en la parte superior se refieren a la rapidez con que cambia la energía cinética correspondiente, en un volumen de control elemental. De manera parecida, los términos señalados con un ② representan la convección de la energía cinética bajo consideración con el flujo medio. Términos como los marcados con el número ③ representan el transporte de energía cinética por las fluctuaciones turbulentas; constituyen por tal motivo, términos difusivos turbulentos. De particular interés son los términos indicados con un ④ los cuales corresponden a la acción de los esfuerzos aparentes sobre el flujo medio y se trata por tanto, de términos de producción de la turbulencia, a este respecto, se deja al lector explicar por qué no aparecen netamente términos de esta naturaleza en la ecuación (3.3.9). Finalmente, los términos asociados con las fuerzas másicas y los esfuerzos en el fluido, representan energía ganada por el trabajo efectuado, por ejemplo, por fuerzas de flotación, y la transformación de energía a formas menos útiles, es decir, disipación, respectivamente.

Ecuación de conservación de la energía

Teniendo en cuenta que la conservación de la energía se puede expresar de diversas formas dependiendo de si se considera la energía interna o la entalpía del fluido, o bien, estas mismas cantidades pero en forma total, es decir, sumándoles un término corres

pendiente a la energía cinética, y tratándose además de un flujo turbulento para el cual descomponemos las cantidades instantáneas en valores medios más sus correspondientes fluctuaciones, resulta obvio que son varias las ecuaciones de energía que se pueden obtener. Así por ejemplo, es relativamente fácil de obtener la siguiente ecuación para valores medios al sustituir las descomposiciones (3.3.1) en (3.2.5) y promediar, observando las reglas (3.3.2) y teniendo en cuenta además a la ecuación de continuidad multiplicada por $\bar{H} + h$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{H}) + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho'h}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho H u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho'h u_i}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{P u_i}) \\ = - \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho h u_i} + \overline{\rho' u_i h} + \overline{\rho' u_i h} - \overline{p u_i} + \overline{\epsilon_i}) \\ + \bar{\tau}_{ji} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

De manera parecida, se puede obtener una ecuación para la entalpía media de estancamiento H_0 , definida por

$$\bar{H}_0 = \bar{H} + \frac{1}{2} \overline{(\bar{U}_i + u_i)^2} = \bar{H} + \frac{1}{2} (\bar{U}_i^2 + \overline{u_i^2}) \quad (3.3.15)$$

siendo

$$\begin{aligned} h_0 = H_0 - \bar{H}_0 = \bar{H} + h + \frac{1}{2}(\bar{U}_i + u_i)^2 - \bar{H} - \frac{1}{2}(\bar{U}_i^2 + \overline{u_i^2}) \\ h_0 = h + u_i \bar{U}_i + \frac{1}{2} u_i^2 - \frac{1}{2} \overline{u_i^2} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Se obtiene, al sumar (3.3.14) y (3.3.9),



$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \bar{h}_0}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho \bar{h}_0 \bar{u}_i}) + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' h_0}) \\
 & = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_i h_0} + \overline{\rho' u_i \bar{h}_0} + \overline{\rho' u_i h_0} + \bar{u}_i \overline{\rho' h_0} + \bar{\epsilon}_i) \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_j \bar{\epsilon}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j \sigma_{ij}}) \quad (3.3.17)
 \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo con \bar{h}° a la entalpía de estancamiento del flujo medio:

$$\bar{h}^\circ = \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i = \bar{h}_0 - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.3.18)$$

se obtiene al sumar (3.3.14) y (3.3.12),

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \bar{h}^\circ}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \bar{h}^\circ \bar{u}_j}) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u_i}) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \overline{\rho' u_i}) \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' h}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \overline{\rho' h}) \\
 & = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho' u_i \bar{h}^\circ} + \bar{u}_j \overline{\rho u_i u_j} + \overline{\rho u_i h} + \bar{\epsilon}_i) + \overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_j \bar{\epsilon}_{ij}) + \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \bar{F}_i \bar{u}_i \quad (3.3.19)
 \end{aligned}$$

En esta última ecuación, los términos del lado izquierdo representan rapidez de cambio de las cantidades expresadas entre paréntesis. Dichas rapidez de cambio son el resultado de los términos del derecho: difusión, aquellos indicados dentro del paréntesis, y producción, el término $\overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$ que hace disminuir la energía del flujo medio.

G- 605141

3.4 ECUACIONES PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE EN FLUJO TURBULENTO

Tal como se desprende de la revisión que hicimos en la sección anterior, las ecuaciones fundamentales para un flujo turbulento general, cuando se reemplazan los valores instantáneos por los valores medios y las fluctuaciones, resultan complejas en grado extremo y difícil de interpretar todos sus términos. En esta sección procederemos a simplificar las ecuaciones mencionadas para un caso de gran interés: el flujo incompresible. Esta situación corresponde a que se tenga (Hinze [5]) $\rho'/\bar{\rho} \ll 1$, o bien, que el cuadrado del número de Mach que se puede definir con las fluctuaciones de velocidad sea mucho menor que uno.

Ecuación de continuidad

En este caso resulta, como ya habíamos visto al principio, de (3.3.3)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.4.1)$$

y

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.4.2)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento.

Igualmente, siendo $\rho' = 0$ en (3.3.7), se obtiene la ecuación de Reynolds también examinada con anterioridad.

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \bar{F}_i + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \quad (3.4.3)$$

Ecuaciones para la energía cinética

Para la energía cinética total, $K = \frac{1}{2} (\bar{u}_i + u_i)^2$ la ecuación (3.3.9) se reduce a:

$$\left[\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \right] = \bar{u}_j \bar{K} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{F}_{ij}}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{U}_i \bar{F}_i + \bar{u}_i \bar{f}_i \quad (3.4.4)$$

donde \bar{K} y K' siguen estando dadas por (3.3.10) y (3.3.11) respectivamente; en (3.4.4) se debe tener en cuenta además a la ec.

(3.3.8) con $\partial \bar{u}_k / \partial x_k = 0$ y a la equivalente para σ_{ij} con $\partial u_k / \partial x_k = 0$

En el caso de la energía cinética del flujo medio, la ec. (3.3.12) se reduce a:

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{U}_i + \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j + (\bar{F}_i + \frac{\partial \bar{F}_{ij}}{\partial x_j}) \bar{U}_i \quad (3.4.5)$$

o bien, teniendo en cuenta (3.3.8) con $\partial \bar{u}_k / \partial x_k = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_j \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{U}_i) - (-\bar{u}_i \bar{u}_j) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Finalmente, para la ecuación de la energía cinética de las fluctuaciones, ec. (3.3.13), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{U}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j \right) &= -\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{f}_i \bar{u}_i \\ &+ u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

o bien, teniendo en cuenta la expresión equivalente a la (3.3.8) para las fluctuaciones y las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_j \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
 & + v \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
 & + \overline{f_i u_i} \qquad \qquad \qquad (3.4.8)
 \end{aligned}$$

La interpretación de cada uno de los términos en (3.4.4), (3.4.6) y (3.4.8), indicados con numeritos encerrados en círculos en la parte superior, es la misma que se había dado antes, con las siguientes aclaraciones:

- (a) en el ② de la ecuación (3.4.6) se incluye el transporte de la energía de presión por el flujo medio;
- (b) en el ③ de (3.4.8) se incluye el transporte (o difusión turbulenta) de la energía de presión, asociada a las fluctuaciones, por la turbulencia misma;
- (c) obsérvese la diferencia de signo en el término ④ de las ecuaciones. Los términos ⑤ y ⑥ representan respectivamente el trabajo efectuado por los esfuerzos viscosos y la disipación viscosa, en este sentido, los términos ④ y ⑤ y los ⑦ y ⑧ en la ec. (3.4.6) tienen un significado parecido; en el primer caso, se trata de la "disipación" de la energía del flujo medio por acción de los esfuerzos turbulentos y por los esfuerzos viscosos respectivos; en el segundo, se trata del trabajo de deformación efectuado sobre el flujo medio por los esfuerzos turbulentos y por los esfuerzos viscosos respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

1. Townsend, A. A., The Structure of Turbulent Shear Flows 2nd ed., Cambridge University Press, 1976.
2. Reynolds, O., Trans. Royal Society (London) 186 A, 123, 1895

3. Currie, I.G., Fundamental Mechanics of Fluids, Mc Graw-Hill 1974.
4. Schubauer, G.B. y Tchen, C.M., Turbulent Flow, Princeton Aeronautical Paperback No. 9, C. Donaldson (ed), Princeton University Press, 1961.

CAPITULO 4

TURBULENCIA ISOTROPA

4.1 GENERALIDADES

No es la intención de estas notas hacer una presentación formal y completa respecto a este tipo de turbulencia. Se trata simplemente de ofrecer los aspectos más sobresalientes de este modelo que resulten de interés tanto para la teoría general de la turbulencia como para sus aplicaciones en la ingeniería. Existen obras escritas muy completas, las cuales, habiendo servido de base para elaborar estos apuntes, pueden ser consultadas por el lector: Batchelor [1], Hinze [2], Lin [3].

Como se recordará, la homogeneidad de un flujo turbulento se refiere a la independencia, respecto de la posición en el campo de escurrimiento, de las propiedades estadísticas del flujo; en otras palabras, las propiedades estadísticas de un flujo homogéneo no cambian al tenerse una translación de los ejes coordenados. Si por otro lado suponemos que las propiedades mencionadas resultan independientes de la orientación de los ejes, es decir, que no cambian al tenerse una rotación o una reflexión de los ejes coordenados, se dice que el flujo es isótropo. Obsérvese que en la descripción estadística de la turbulencia debemos considerar por lo menos dos puntos en el campo de escurrimiento (función de correlación); por lo tanto, la independencia de las propiedades estadísticas al tenerse una rotación o una reflexión de los ejes coordenados en un flujo isótropo implica, necesariamente, que se tenga también independencia ante una translación de ejes.

De lo anterior se concluye que un flujo isótropo es necesariamente homogéneo. Lo contrario, sin embargo, no resulta válido, pudiéndose tener un flujo homogéneo anisótropo.

Dado el carácter fundamental de la isotropía, brevemente descrito en los párrafos anteriores, no pueden existir en esta clase de flujos turbulentos, esfuerzos cortantes medios ni, por tanto, gradientes de la velocidad media. Esto da como resultado, al considerar el balance de energía mecánica, que un flujo turbulento isótropo siempre se encuentre en un estado de decaimiento al no existir producción de la turbulencia.

El modelo de flujo isótropo, al cual nos referiremos más en este capítulo constituye un tipo de turbulencia hipotético: en la práctica no existe un flujo que manifieste isotropía completa, si bien, bajo ciertas condiciones, es posible aproximarse bastante. Tal es el caso, por ejemplo, en la turbulencia que se desarrolla al pasar un flujo uniforme a través de una malla adecuadamente diseñada, colocada perpendicularmente a la corriente, digamos en un túnel de viento. En efecto, el flujo aguas abajo de la malla consiste en una corriente con la misma velocidad media y una distribución aleatoria de fluctuación de velocidad originadas por la malla. Este movimiento decae (y eventualmente desaparece por la acción de la viscosidad) conforme aumenta la distancia a la malla, y en este sentido no es turbulencia homogénea. Sin embargo, si consideramos un elemento pequeño del escurrimiento (pequeño con relación al tamaño del túnel pero suficientemente gran

de con respecto a la escala de la turbulencia) viajando a la velocidad media del flujo, podemos considerar que se trata de un flujo aproximadamente isótropo, dado al lento decaimiento de la turbulencia. Más adelante examinaremos algunos resultados experimentales que comprueban lo anterior.

El estudio de la turbulencia isótropa, para la cual la teoría estadística ha alcanzado su desarrollo más completo, nos permitirá disponer de una base más sólida, tanto en los aspectos matemáticos como en los físicos, para el estudio de otros tipos de escurrecimiento turbulento relativamente más complicados.

Particularmente interesante nos resultará la conclusión a que llegaremos, cuando examinemos el mecanismo de transferencia de energía siguiendo la distribución de los remolinos grandes a los más pequeños, de que la estructura fina o de los remolinos pequeños, exhiba un estado de isotropía local.

En lo que sigue, después de examinar brevemente la naturaleza de los esfuerzos de Reynolds para un flujo isótropo, pasaremos a lo que usualmente se considera como la cinemática de la isotropía la cual consiste esencialmente en la descripción del flujo mediante correlaciones dobles y triples de velocidad. Utilizando estas correlaciones y trabajando con la ecuación de Navier-Stokes, con la restricción de que la velocidad media del flujo sea constante, es posible obtener la ecuación que podría considerarse como fundamental de la dinámica de la isotropía: la ecuación de von

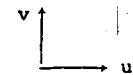
Karman-Howarth. Al final, utilizando varios espectros de energía relacionados entre sí, examinaremos el mecanismo de transferencia de energía durante el decaimiento. Supondremos en todo nuestro estudio que el flujo es incompresible.

4.2 ESFUERZOS DE REYNOLDS

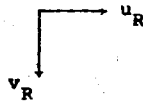
Es muy fácil ver que en el caso de la isotropía, los esfuerzos de Reynolds se reducen a uno solo. En efecto, las componentes de este tensor son proporcionales a:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{u^2} \quad \overline{uv} \quad \overline{uw} \\ \overline{vu} \quad \overline{v^2} \quad \overline{vw} \\ \overline{wu} \quad \overline{wv} \quad \overline{w^2} \end{array} \right\} \quad (4.2.1)$$

Ahora bien, el que las propiedades estadísticas no cambien al tenerse una rotación, por ejemplo alrededor de u (ver figura adjunta), implica poder escribir



$$\overline{uv} = \overline{u_R v_R} = \overline{u(-v)}$$



es decir, $\overline{uv} = 0$,
necesariamente

Análogamente, $\overline{vw} = \overline{wu} = 0$. El sistema (4.2.1) se transforma entonces en

$$\left. \begin{array}{ccc} \overline{u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w^2} \end{array} \right\} \quad (4.2.2)$$

Pero además, la propia rotación implica

$$\begin{array}{c} \overline{u^2} \\ \leftarrow u \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ u_R \\ \leftarrow \end{array} \quad \overline{u^2} = \overline{u_R^2} = \overline{v^2}$$

es decir, $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$.

Aquí, dicho sea de paso, el resultado último de arriba hizo pensar por algún tiempo que la turbulencia en el centro de una tubería circular era aproximadamente isotropa, al obtenerse experimentalmente casi el mismo valor para la intensidad de la turbulencia en las tres coordenadas cilíndricas (Laufer [4]). Sin embargo, esto aparentemente no es cierto pues los espectros de las tres fluctuaciones son completamente diferentes.

4.3 CINEMATICA DE LA TURBULENCIA ISOTROPA

Tal como se apuntó anteriormente, una manera de describir a la turbulencia isotropa es a través de las funciones de correlación, las cuales en este caso, además de resultar muy sencillas en su forma y en las relaciones entre sí, son relativamente fáciles de medir.

Son varias las funciones de correlación que se utilizan en el

estudio de la turbulencia isotrópica: además de las correlaciones en un solo punto (esfuerzos de Reynolds) y de las correlaciones de primer orden en dos puntos es decir, el producto de un escalar por un vector (véase por ejemplo, Hinze [2]), se tienen las correlaciones de segundo orden o correlaciones dobles (cuya expresión general presentamos en el capítulo II) y las de tercer orden o correlaciones triples, ambos tipos considerando simultáneamente dos puntos en el campo del escurrimiento. A continuación vamos a referirnos a estas dos últimas clases de correlaciones y a las relaciones entre ellas.

Correlaciones dobles de velocidad

Siguiendo la nomenclatura generalmente aceptada para el caso, se tiene para el tensor correlación general,

$$\begin{aligned} Q_{ij}(\underline{x}, \underline{r}) &= \overline{u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r})} \\ &= \overline{u_i^A u_j^B} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

o en forma normalizada (función de correlación),

$$R_{ij}(\underline{x}, \underline{r}) = R_{i,j} = \frac{\overline{u_i^A u_j^B}}{\sqrt{(u_i^A)^2} \sqrt{(u_j^B)^2}}$$

En (4.3.1) y (4.3.2) los exponentes A y B se emplean con el doble propósito de simplificar un poco la nomenclatura y subrayar que se trata de dos puntos diferentes A y B en el campo del es-

currimiento. En otras palabras, cualquiera de las ecuaciones anteriores expresa la correlación entre las componentes de la velocidad en dos puntos diferentes. (obsérvese en (4.3.2) la coma entre los subíndices de la segunda R, la cual se utiliza para indicar que se trata de dos puntos). En el caso de una triple correlación entre dos componentes de velocidad en un punto y una componente en otro punto, se escribe, como veremos,

$$r_{ij,k} = \frac{u_i^A u_j^A u_k^B}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (4.3.3)$$

donde el denominador implica, evidentemente, la isotropía del flujo.

En el capítulo II se mencionó que la función de correlación en (4.3.2) se puede expresar de una manera muy simple en el caso del flujo isótropo. En efecto, al no tenerse una dirección preferente en la turbulencia isótropa, las correlaciones deberán caracterizarse mediante componentes de velocidad referidas al vector que une a los dos puntos A y B. De esta manera se tiene la correlación longitudinal

$$f(r) = \frac{u_r^A u_r^B}{\overline{u^2}} \quad (4.3.4)$$

y la correlación lateral

$$g(r) = \frac{u_n^A u_n^B}{\overline{u^2}} \quad (4.3.5)$$

donde r es la distancia que une a los dos puntos. En (4.3.5), n representa cualquier dirección perpendicular al vector \underline{r} , ya que por la misma condición de isotropía, la función $g(r)$ es independiente del par de funciones componentes u_n^A, u_n^B , paralelas entre sí, que se tomen.

Ahora bien, al quedar completamente descrito el vector velocidad mediante las tres direcciones r, n, t , donde esta última es perpendicular a las otras dos, los nueve términos de la función de correlación estarían dados por los valores medios de los productos entre u_r^A, u_n^A, u_t^A y u_r^B, u_n^B, u_t^B . Sin embargo, debido a la isotropía del flujo todos los términos que se refieren a dos direcciones diferentes (por ejemplo, $\overline{u_r^A u_n^B}$) valen cero. Se concluye entonces que solamente es necesario considerar las dos correlaciones $f(r)$ y $g(r)$. Aprovechando este resultado, von Karman obtuvo una expresión para la función de correlación (4.3.4), con i, j, k dados por un determinado sistema de ejes coordenados, en función de $f(r)$ y $g(r)$. La deducción de esta ecuación se puede hacer de varias maneras; posiblemente la más simple sea la siguiente:

Considérese el sistema de ejes x_1, x_2, x_3 mostrado en la fig. 4.1, donde se indican además, los puntos A y B y la distancia r entre ellos

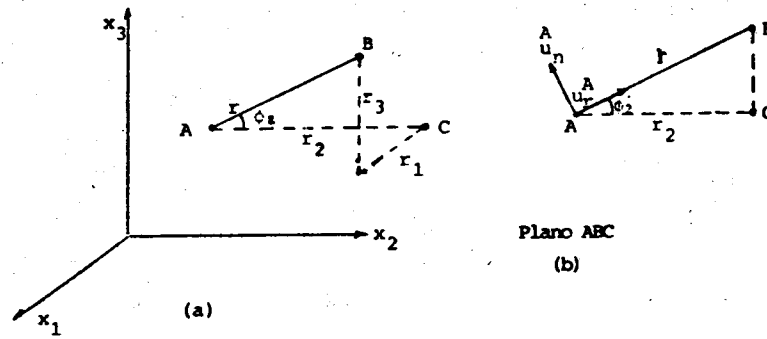


Fig. 4.1 Sistema de referencia para las funciones de correlación longitudinal y transversal.

se tiene,

$$u_2^A = (u_r^A)_2 + (u_n^A)_2 + (u_t^A)_2$$

es decir, teniendo en cuenta que $(u_t^A)_2 = 0$ y observando la figura 4.1,

$$u_2^A = u_r^A \cos \phi_2 - u_n^A \sin \phi_2$$

o bien,

$$u_2^A = u_r^A \frac{r_2}{r} - u_n^A \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2} \quad (4.3.6)$$

Análogamente se obtiene

$$u_2^B = u_r^B \frac{r_2}{r} - u_n^B \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2} \quad (4.3.7)$$

De esta manera, se puede escribir

$$\begin{aligned} \overline{u_2^A u_2^B} &= \overline{u_r^A u_r^B} \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 + \overline{u_n^A u_n^B} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] \\ &- \left(\frac{r_2}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2} \left[\overline{u_r^A u_n^B} + \overline{u_n^A u_r^B} \right] \end{aligned}$$

expresión que se reduce a

$$\frac{\overline{u_2^A u_2^B}}{u^2} = f(r) \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 + g(r) \left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] \quad (4.3.8)$$

procediendo de manera parecida se tiene

$$u_3^B = u_r^B \cos \phi_3 + u_n^B \frac{\cos \phi_3}{\tan \phi_2} + u_t^B \quad (4.3.9)$$

y teniendo en cuenta (4.3.6) resulta al final

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_2^A u_3^B}}{u^2} &= f(r) \frac{r_1 r_2}{u^2} - g(r) \frac{r_1 r_2}{r^2} \\ &= \left[f(r) - g(r) \right] \frac{r_1 r_2}{r^2} \quad (4.3.10) \end{aligned}$$

Una fórmula general que reúne todos los casos como el expresado en (4.3.8) y en (4.3.10), es

$$\overline{\frac{u_i^A u_j^B}{u^2}} = \left[f(r) - g(r) \right] \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij} \quad (4.3.11)$$

Existe, por otro lado, una relación entre $f(r)$ y $g(r)$ previamente señalada en el capítulo II, ec. (2.4.7), que se puede obtener fácilmente tomando en cuenta la ec. (4.3.11) y la condición de incompresibilidad; (ver Hinze [2], pág. 185) se trata de

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (4.3.12)$$

cuya comprobación experimental mostramos anteriormente. De la expresión (4.3.12) se puede escribir

$$f(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r r g(r) dr \quad (4.3.13)$$

Se concluye de todo lo anterior que en la turbulencia isótropa todas las funciones de correlación de segundo orden se pueden expresar en función de una sola de ellas, por ejemplo, $f(r)$.

Correlaciones triples de velocidad

Siguiendo con la descripción de la turbulencia isotrópica mediante correlaciones de velocidad, el siguiente tipo de funciones que se podrían utilizar serían las correspondientes a tres puntos del campo de flujo:

$$T_{i,j,k} = \frac{\overline{u_i^A u_j^B u_k^C}}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (4.3.14)$$

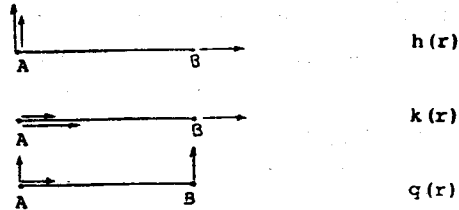
Esta función depende de los dos vectores que unen uno de los puntos con cada uno de los otros dos; es por lo tanto, de naturaleza complicada. En su lugar se prefiere utilizar la expresada en (4.3.2) que solamente incluye dos puntos del escurrimiento,

$$T_{ij,k} = \frac{\overline{u_i^A u_j^A u_k^B}}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (4.3.15)$$

Von Karman y Howarth, (véase Hinze [2]) la estudiaron por vez primera, llegando a deducir la siguiente ecuación:

$$T_{ij,k} = \left[\overline{u^2} \right]^{3/2} \left[\frac{k(r) - h(r) - 2g(r)}{r} r_i r_j r_k + \delta_{ij} r_k \frac{h(r)}{r} + \delta_{ik} r_j \frac{g(r)}{r} + \delta_{jk} r_i \frac{g(r)}{r} \right] \quad (4.3.16)$$

donde las correlaciones $h(r)$, $k(r)$ y $q(r)$ se definen en la siguiente figura:



La ecuación (4.3.16) se complementa con las siguientes dos relaciones

$$k(r) = -2 h(r)$$

$$q(r) = -h(r) - \frac{r}{2} \frac{\partial h}{\partial r}$$

concluyéndose entonces que todas las funciones de correlación triple del tipo (4.3.16) se pueden expresar en términos de una sola función de correlación, por ejemplo, $h(r)$.

4.4 DINAMICA DE LA TURBULENCIA ISOTROPA

Ecuación de Karman-Howarth

Dejando a un lado el problema de cierre de las ecuaciones de la turbulencia, es posible obtener una expresión relativamente simple para la turbulencia isotropa al tenerse $\bar{U} = \text{constante}$ en todo el flujo y suponer además la ausencia de fuerzas másicas. En efecto, se tiene en tal caso, para las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.4.1)$$

o bien, expresándola para cada uno de los puntos A y B

$$\frac{\partial u_i^A}{\partial t} + (\bar{u}_j^A + u_j^A) \frac{\partial u_i^A}{\partial x_j^A} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^A}{\partial x_i^A} + \nu \frac{\partial^2 u_i^A}{\partial x_j^A \partial x_j^A} \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial u_i^B}{\partial t} + (\bar{u}_j^B + u_j^B) \frac{\partial u_i^B}{\partial x_j^B} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^B}{\partial x_i^B} + \nu \frac{\partial^2 u_i^B}{\partial x_j^B \partial x_j^B} \quad (4.4.3)$$

Multiplicando (4.4.2) por u_K^B y la (4.4.3) por u_K^A , tomando en cuenta que se tiene $\partial u_K^B / \partial x_i^A = 0$, etc.,

$$u_K^B \frac{\partial u_i^A}{\partial t} + (\bar{u}_j^A + u_j^A) \frac{\partial}{\partial x_j^A} (u_i^A u_K^B) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^A} (p^A u_K^B) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^A \partial x_j^A} (u_i^A u_K^B) \quad (4.4.4)$$

$$u_K^A \frac{\partial u_i^B}{\partial t} + (\bar{u}_j^B + u_j^B) \frac{\partial}{\partial x_j^B} (u_i^B u_K^A) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^B} (p^B u_K^A) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^B \partial x_j^B} (u_i^B u_K^A) \quad (4.4.5)$$

Los subíndices i y K en las ecuaciones (4.4.4) y (4.4.5) son libres y pueden, por lo tanto, intercambiarse; intercambiando los subíndices en (4.4.5) y sumando a (4.4.4) se obtiene, al agrupar términos,

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_i^A u_K^B) + \bar{u}_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j^A} (u_i^A u_K^B) + \frac{\partial}{\partial x_j^B} (u_i^B u_K^A) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j^A} (u_i^A u_j^A u_K^B) + \frac{\partial}{\partial x_j^B} (u_i^B u_j^B u_K^A) =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i^A} (p^A u_k^B) + \frac{\partial}{\partial x_k^B} (p^B u_i^A) \right] + v \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^A \partial x_j^A} (u_i^A u_k^B) + \frac{\partial^2}{\partial x_j^B \partial x_j^B} (u_i^B u_k^A) \right] \quad (4.4.6)$$

donde se ha tenido en cuenta $\bar{U}_i^A = \bar{U}_i^B = \bar{U}_i$ y la condición de incompresibilidad $\partial u_i / \partial x_i = 0$.

Introduzcamos ahora a nuestro vector **que une** a los dos puntos A y B, $r_i = x_i^B - x_i^A$, de tal manera que se tiene $\partial / \partial x_i^A = - \partial / \partial r_i$; $\partial / \partial x_i^B = \partial / \partial r_i$. Se obtiene en la ec. (4.4.6), una vez que se promedia,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i^A u_k^B} + \bar{U}_j \left[- \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^A u_k^B} + \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^B u_k^A} \right] - \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^A u_j^A u_k^B} + \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{u_i^B u_j^B u_k^A} \\ &= -\frac{1}{\rho} \left[- \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{p^A u_k^B} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{p^B u_i^A} \right] + v \left[\frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j} \overline{u_i^A u_k^B} + \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j} \overline{u_i^B u_k^A} \right] \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

es decir, escribiendo:

$$K_{i,p} = \overline{u_i^A p^B} \quad (4.4.8)$$

$$S_{ij,k} = \overline{u_i^A u_j^A u_k^B} \quad (4.4.9)$$

$$Q_{i,j} = \overline{u_i^A u_j^B} \quad (4.4.10)$$

la ec. (4.4.7) se expresa como

$$\frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} - \frac{\partial S_{ij,k}}{\partial r_j} + \frac{\partial S_{i,jk}}{\partial r_j} = -\frac{1}{\rho} \left[- \frac{\partial K_{p,k}}{\partial r_i} + \frac{\partial K_{i,p}}{\partial r_k} \right] + 2v \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial r_j \partial r_j} \quad (4.4.11)$$

La ecuación general de transporte (4.4.11) se reduce a una expresión interesante para el caso del flujo isótropo incompresible. En efecto, se puede demostrar que en tal caso el tensor $K_{i,p}$ es nulo y para los demás términos en (4.4.11) hay que efectuar una contracción escribiendo $k=1$:

$$\frac{\partial Q_{i,i}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r_j} (S_{ij,i} - S_{i,ji}) = 2v \frac{\partial^2 Q_{i,i}}{\partial r_j \partial r_j} \quad (4.4.12)$$

el tensor $Q_{i,i}$ resulta de acuerdo con (4.3.11) y con (4.3.12)

$$Q_{i,i} = \bar{u}^2 \left[f(r) + 2g(r) \right] = \bar{u}^2 \left[3 + r \frac{\partial}{\partial r} \right] f(r) \quad (4.4.13)$$

Para las correlaciones triples S , obsérvese primeramente que al no depender su valor de una reflexión de los ejes coordenados en el punto A y al tenerse simetría en los subíndices, resulta

$$S_{ij,k} = \overline{u_i^A u_j^A u_k^B} = - \overline{u_k^A u_i^B u_j^B} = - S_{k,ij}$$

y

$$S_{k,ij} = S_{k,ji}$$

De este modo, en (4.4.12)

$$\frac{\partial}{\partial r_j} (S_{ij,i} - S_{i,ji}) = 2 \frac{\partial}{\partial r_j} S_{ij,i} \quad (4.4.14)$$

Además, teniendo en cuenta (4.3.16)

$$S_{ij,i} = (\bar{u}^2)^{3/2} \left[\frac{k-h-2q}{r^3} r^2 r_j + \delta_{ij} r_i \frac{h}{r} + 3 r_j \frac{q}{r} + \delta_{ji} r_i \frac{q}{r} \right]$$

es decir, recordando que $h=-k/2$ y la propiedad de sustitución de la delta de Kronecker,

$$S_{ij,i} = (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{r_j}{r} (k+2q) \quad (4.4.15)$$

o bien, con la segunda de (4.3.17)

$$S_{ij,i} = (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{r_j}{r} \left(2 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) k(r) \quad (4.4.16)$$

Se tiene entonces para (4.4.14)

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial r_j} S_{ij,i} &= (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial r_j} r_j \left(\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) k(r) \\ &= (\bar{u}^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial r_j} \left[r_j \phi(r) \right] \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

donde $\phi(r) = \left(\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) k(r)$

Se puede demostrar fácilmente que

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \left[r_j \phi(r) \right] = 3 \phi(r) + r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r}$$

por lo que (4.4.17) se reduce a

$$2 \frac{\partial}{\partial r_j} S_{ij,i} = \overline{(u^2)}^{1/2} (3+r \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r}) k(r) \quad (4.4.18)$$

Sustituyendo (4.4.13) y (4.4.18) en (4.4.12) se obtiene, después de algunos pasos,

$$(3+r \frac{\partial}{\partial r}) \left[\frac{\partial \overline{u^2} f(r)}{\partial t} - \overline{(u^2)}^{1/2} (\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r}) k(r) - 2v \overline{(u^2)}^{1/2} (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r}) f(r) \right] = 0 \quad (4.4.19)$$

Si consideramos a todo el paréntesis cuadrado como una variable, la expresión (4.4.19) se puede integrar con respecto a r y la única posibilidad es que la integral sea una constante, cero, dado que el término entre paréntesis cuadrado debe ser finito para $r=0$:

$$\frac{\partial \overline{u^2} f(r)}{\partial t} = \overline{(u^2)}^{1/2} (\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r}) k(r) + 2v \overline{(u^2)}^{1/2} (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r}) f(r) \quad (4.4.20)$$

La ec. (4.4.20) recibe el nombre de ecuación de Karman Howart en honor a quienes primero la dedujeron. R.W. Stewart [5] la comprobó experimentalmente en 1951. La ecuación (4.4.20) es el punto de partida para el estudio de la dinámica de la turbulencia isótropa ; obsérvese que aunque dicha ecuación ha sido comprobada experimentalmente, posee la dificultad original del tratamiento estadístico de la turbulencia: se tienen más incógnitas que ecuaciones.

Ecuación espectral

La misma información contenida en la ecuación de Karman-Howart, pero indudablemente de interpretación más fácil y útil, se puede lograr si consideramos el análisis espectral de la energía cinética de la turbulencia. En efecto, definiendo las siguientes transformadas de Fourier:

$$\Pi_{ij}(\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} P_{ij}(\underline{r}) \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r} \quad (4.4.21)$$

$$\omega_{ij}(\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}(\underline{r}) \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r} \quad (4.4.22)$$

$$\text{donde } P_{ij}(\underline{r}) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial K_{i,p}}{\partial r_j} - \frac{\partial K_{p,j}}{\partial r_i} \right) \quad (4.4.23)$$

$$T_{ij}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial r_k} \left[S_{i^k,j} - S_{i,kj} \right] \quad (4.4.24)$$

y recordando (2.4.20), la ecuación general (4.4.11) se reduce, al tomar la transformada de Fourier de todos sus términos, a

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_{ij}(\underline{k}) = \omega_{ij}(\underline{k}) - \Pi_{ij}(\underline{k}) - 2\nu k^2 \phi_{ij}(\underline{k}) \quad (4.4.25)$$

Pero la turbulencia isotrópica, $\Pi_{ij}(\underline{k}) = 0$, y además se tiene $i=j$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_{ii}(\underline{k}) = \omega_{ii}(\underline{k}) - 2\nu k^2 \phi_{ii}(\underline{k}) \quad (4.4.26)$$

Ahora bien, de acuerdo con la definición del espectro de energía

tridimensional, ec. (2.4.27), se tiene para el caso de la isotropía:

$$E(k) = \frac{1}{2} 4 \pi k^2 \phi_{ii}(k) \quad (4.4.27)$$

donde $4 \pi k^2$ es el área de una esfera de radio k en el espacio vectorial de números de onda \underline{k} .

De esta manera, si definimos

$$T(k) = 4 \pi k \frac{1}{2} \omega_{ii}(k) \quad (4.4.28)$$

se tiene, al multiplicar todos los términos de (4.4.26) y tener en cuenta (4.4.27) y (4.4.28),

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = T(k) - 2\nu k^2 E(k) \quad (4.4.29)$$

La ec. (4.4.29) es sumamente interesante en tanto que permite conocer la manera como se presenta la dinámica de la turbulencia isótropa, a través de los espectros de energía. En efecto, el término de la izquierda de (4.4.29) generalmente es negativo y representa por tanto, el decaimiento de la energía cinética de las fluctuaciones. El segundo término del lado derecho se refiere a la acción disipadora de la viscosidad, obsérvese su tendencia más marcada hacia los números de onda más grandes (remolinos más pequeños) al incluir el factor k^2 . Finalmente, el término $T(k)$ corresponde a la transferencia de energía entre diferentes números de onda. Observe

que en este término no aparece la viscosidad; en otras palabras, esta propiedad del fluido no interviene en el mecanismo de transferencia de energía. Algunas veces se prefiere utilizar la función

$$S(k) = - \int_0^k T(k) dk \quad (4.4.30)$$

que representa la energía total transferida de los remolinos en el rango que va de 0 a k , a los que se encuentran en el rango por encima de k . De este modo, la ec. (4.4.29) se escribiría

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = - \frac{\partial}{\partial k} S(k) - 2 \nu k^2 E(k) \quad (4.4.31)$$

En la Fig. 4.2 se muestra la forma aproximada que tienen cada una de estas funciones:

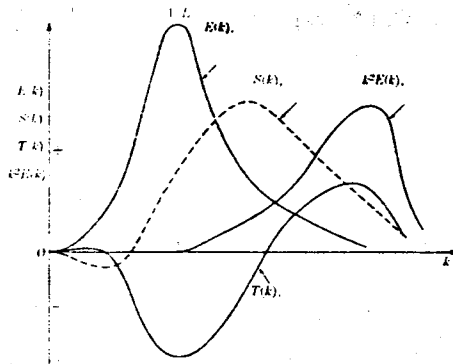


Fig. 4.2 Funciones escalares de energía

Integrando la ec. (4.4.29) en todo el rango de números de

onda, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k) dk = \int_0^{\infty} T(k) dk - 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk \quad (4.4.32)$$

El segundo término del lado derecho de (4.4.32) vale cero al no tenerse una transferencia neta de energía en todo el rango completo de números de onda. De este modo lo que queda de la ec.

(4.4.32) viene a ser la rapidez con que cambia la energía de la turbulencia (decaimiento) debido a la acción viscosa.

Por esta razón a la segunda integral se le conoce como rapidez de disipación de la energía turbulenta, ϵ ; se tiene, de acuerdo con (2.4.28)

$$\epsilon = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k) dk = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_i} = - \frac{3}{2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} \quad (4.4.33)$$

Obsérvese que el problema de cierre de las ecuaciones de la turbulencia sigue presente en nuestra ec. (4.4.29): se tienen dos incógnitas y una sola ecuación.

Con todo, aparentemente es más fácil postular alguna forma apropiada para el espectro $T(k)$ y buscar una solución de la ecuación dinámica (4.4.29) para $E(k)$, que trabajar en forma equivalente con la ecuación de Karman-Howarth.

La forma más sencilla en relación con lo apuntado en el párrafo anterior es, evidentemente, suponer que la interacción entre los remolinos correspondientes a diferentes números de onda es mínima, de tal manera que no existe transferencia de energía entre los remolinos de diferentes tamaños: el espectro $T(k)$ es despreciable con respecto a los demás términos en la ec. (4.4.29), reduciéndose ésta a

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = -2\nu k^2 E(k) \quad (4.4.34)$$

la cual al integrarse resulta en

$$E(k,t) = E(k,t_0) \exp \left[-2 \nu k^2 (t-t_0) \right] \quad (4.4.35)$$

De esta última ecuación se desprenden dos aspectos interesantes:

- a) la energía cinética disminuye más rápido conforme más grande es el número de onda, es decir, conforme más pequeños son los remolinos;
- b) la dependencia que tiene la función espectral con respecto al tiempo, se hace menor conforme se reduce el número de onda; en el límite, cuando $k \rightarrow 0$, esta dependencia deja de existir y la función espectral resulta proporcional a k^4 .

Hipótesis de Kolmogorov.

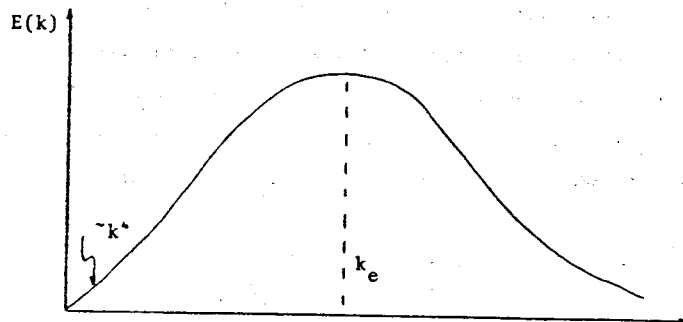
El mecanismo mediante el cual se disipa la energía turbulenta de acuerdo con la ec. (4.4.31) ya lo habíamos examinado anteriormente (capítulo I) de acuerdo con la descripción de Bradshaw [6]: los remolinos grandes, al sufrir una perturbación dan lugar a remolinos del tamaño más reducido (proceso en "cascada") los cuales se ven fuertemente afectados por la viscosidad. El proceso de transferencia de energía lo llevan a cabo las fuerzas de inercia (término $S(k)$ en la ecuación espectral de la energía, o bien, términos convectivos en la ecuación en términos de correlaciones) y se puede suponer que consiste en una interacción esfuerzo-rapidez de deformación según la cual los remolinos se rompen dando lugar a remolinos más pequeños. El número de Reynolds basado en el tamaño del remolino es, en general, grande, excepto para los más pequeños, la disipación viscosa es despreciable para todos aquellos remolinos cuyo número de Reynolds es grande.

De acuerdo con lo delineado en el párrafo anterior, supongamos que el número de Reynolds del escurrimiento sea suficientemente alto de tal manera que podamos esperar una clara separación entre los remolinos disipadores; en otras palabras, los máximos de las curvas $E(k)$ y $k^2E(k)$ de la fig. 4.2 se encuentran muy separados entre sí. Supongamos además que k^1 es un número de onda representativo de la región intermedia de las dos que acabamos de describir. Integrando la ec. (4.4.31) entre 0 y k^1 , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{k'} E(k) dk = -S(k') - 2\nu \int_0^{k'} k^2 E(k) dk \quad (4.4.36)$$

Tal como apuntamos, para este caso, la mayor parte de la energía se encuentra entre 0 y k' , mientras que la disipación de energía se efectúa entre k' y ∞ ; por tanto, la integral del lado derecho de (4.4.36) es prácticamente nula, indicándosenos mediante lo que resta de esta ecuación, que la rapidez con que disminuye la energía cinética es igual únicamente a la transferencia de los remolinos entre 0 y k' , y aquellos entre k' y ∞ .

Ahora bien, dada la naturaleza del proceso de transferencia de energía en cascada y teniendo en cuenta el rápido crecimiento de $E(k)$ con respecto a k ($\sim k^4$), se sabe que para el flujo turbulento en su completo desarrollo, no son los remolinos más grandes los que contienen la energía cinética máxima (si bien estos remolinos que son más permanentes llegan a contener hasta un 20% del total de la energía), sino un rango llamado "de los remolinos que contienen a la energía" de mayores números de onda centrados en k_e (correspondiente a este valor máximo que se presenta en el espectro, fig. 4.3).



Con respecto a la disipación de la energía por efecto de la viscosidad, ya se ha mencionado repetidamente que se ve incrementada al aumentar el número de onda, es decir, al reducirse el tamaño de los remolinos. Podemos asociar un número de onda k_d al tamaño de estos remolinos, correspondiendo tal número de onda al máximo de la curva $k^2 E(k)$ de la Fig. 4.2. Esta disipación, como sabemos, dará como resultado una continua disminución de la energía cinética de la turbulencia, es decir, un decaimiento, si no se tiene alguna fuente de energía en el escurrimiento.

Es interesante comparar la rapidez con que se efectúa el proceso de decaimiento de la energía con las velocidades turbulentas típicas de cada uno de los rangos del espectro que hemos estado describiendo.

En efecto, para el rango correspondiente a los remolinos más grandes, la frecuencia que les podemos asociar, $(\overline{u_k^2})^{1/2} k$, es muy pequeña comparada con la rapidez de decaimiento de la energía cinética, expresada ésta mediante el cambio relativo $(d\overline{u^2}/dt)/\overline{u}$. Obsérvese que para que resulte significativo el valor r.m.s. de las fluctuaciones de velocidad correspondiente al número de onda k en un espectro continuo, es necesario definirlo tomando en cuenta un ancho de banda alrededor de k :

$$(\overline{u_k^2})^{1/2} = \sqrt{k E(k)} \quad (4.4.37)$$

De manera semejante, en el rango de los remolinos disipadores se tendrá una frecuencia muy alta, $(\overline{u_k^2}) k_d$ comparada con el cambio relativo de la energía de la turbulencia.

En un rango intermedio de remolinos, las frecuencias resultarán del mismo orden que el decaimiento relativo de la energía; es de suponerse que este rango corresponda precisamente al "de los remolinos que contienen a la energía" ya que ellos son los que principalmente contribuyen a la energía total de la turbulencia.

De acuerdo con lo anterior, se puede considerar que en el rango de remolinos de números de onda más grande que aquellos que contienen a la energía, el proceso de decaimiento es relativamente lento, comparado con el movimiento de los propios remolinos. Se trata entonces de un rango de longitudes de onda en el cual la turbulencia se puede suponer muy cercana a un estado estadísticamente permanente. Los remolinos correspondientes a este rango resultan independientes de las condiciones externas que han dado lugar a las fuerzas creadoras de los remolinos más grandes iniciales. Esta hipótesis se confirma mediante los resultados experimentales, aún en aquellos casos de turbulencia anisótropa, los cuales indican que en el rango de números de onda más altos, la turbulencia adquiere características de isotropía.

Estando la turbulencia asociada a los números de onda más altos, no sólo estadísticamente permanente sino además independiente de las condiciones externas, se debe poder caracterizar mediante pa

rámetros relacionados exclusivamente con las condiciones internas.

En efecto, supongamos que el número de Reynolds sea lo suficiente mente grande como para que el rango de disipación y el rango de los remolinos que contienen a la energía estén muy separados entre sí ($k_e \ll k_d$).

La energía se va entonces transmitiendo por efectos inerciales desde los remolinos más grandes y a la vez se va disipando, siendo esta disipación más grande en los números de onda mayores. En el rango arriba mencionado, donde los remolinos se pueden considerar en equilibrio estadístico, es decir, aquellos para los cuales la energía transmitida a través de ellos es más grande que la rapidez con que cambia su propia energía, la turbulencia debe estar completamente determinada por el flujo de energía a través de este rango de remolinos y por la rapidez de disipación, resultando prácticamente iguales:

$$-\frac{3}{2} \frac{d\bar{u}^2}{dt} = \epsilon(t) = 2\nu \int_0^{\infty} k E(k) dk \quad (4.4.38)$$

De esta manera, la naturaleza de la turbulencia en este rango de equilibrio queda determinada por la disipación $\epsilon(t)$ y naturalmente por la viscosidad.

Todo lo anterior constituye la base de la hipótesis de Kolmogorov:

Para números de Reynolds suficientemente elevados, las escalas más

pequeñas de la turbulencia exhiben una estructura universal (isotropía local) la cual es estadísticamente independiente del flujo medio y de las escalas grandes; los únicos parámetros que la determinan son ϵ y ν .

Se acostumbra más manejar una escala de velocidad que de tiempo en este rango universal. Utilizando el análisis dimensional se llegan a establecer las siguientes formas para las escalas de Kolmogorov:

$$\begin{aligned} \text{de longitud: } \quad \eta &= \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \\ \text{de velocidad} \quad v &= (\nu\epsilon)^{1/4} \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

La primera de estas escalas es representativa de los remolinos más pequeños de la turbulencia y se ha podido comprobar experimentalmente, según indica Reynolds [7], que la disipación se efectúa en el rango $0.1 < k\eta < 1$ que corresponde al rango de escalas

$$6\eta < \lambda < 60\eta$$

Utilizando una vez más el análisis dimensional, se puede obtener para el espectro tridimensional $E(k)$, la siguiente forma:

$$E(k) = \eta\nu^2 f(k\eta) \quad (4.4.40)$$

donde $f(k\eta)$ viene a ser una función universal, o bien, al combinar con las relaciones (4.4.39),

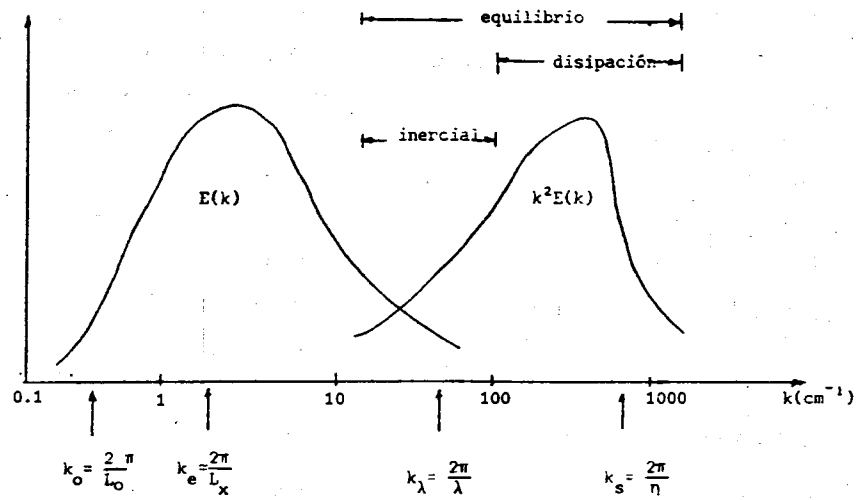
$$E(k) = \nu^{5/4} \epsilon^{1/4} f(k\eta) \quad (4.4.41)$$

Un concepto complementario de la hipótesis de Kolmogorov es la existencia de un subrango inercial en el rango de equilibrio. En efecto, si el número de Reynolds es suficientemente grande, se deberá tener un rango de remolinos, dentro de la estructura universal, cuyo tamaño no es tan reducido como para verse afectados por la viscosidad (fig. 4.3). En este caso, la función $f(k)$ debe ser de tal forma que el espectro en (4.4.41) resulte independiente de la viscosidad; se obtiene (Brodkey [8])

$$E(k) = A \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.4.42)$$

donde A es una constante adimensional universal.

De acuerdo con Reynolds [7], parece que es necesario que $Re_\lambda > 2000$ para lograr tener un verdadero rango de equilibrio. El número de Reynolds al que se hace referencia corresponde al valor r.m.s de las fluctuaciones de velocidad longitudinal y a la microescala longitudinal. Estos escurrimientos normalmente sólo se encuentran en la atmósfera. Sin embargo, el concepto de equilibrio universal y su realización aproximada, se han logrado encontrar para valores del número de Reynolds del orden de 100, si bien el valor de la constante universal A en (4.4.41) resulta diferente. En la fig. 4.4 (tomada de Reynolds [7]), se muestra un espectro que corresponde aproximadamente a este último caso; obsérvese la posición correspondiente a la microescala longitudinal λ .



L_o = longitud característica de escurrimiento

L_x = macroescala longitudinal

λ = microescala longitudinal

Fig. 4.4.

BIBLIOGRAFIA

1. Batchelor, G.K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, London, 1970.
2. Hinze, J.O., Turbulence, 2nd ed., Mc Graw Hill Book Co., New York, 1975.
3. Lin C.C., Statistical Theories of Turbulence, Princeton Aeronautical Paperbacks Number 10, Princeton University Press, Princeton, 1961.
4. Laufer, J., NACA Report 1174, 1954
5. Stewart, R.W., Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 1951.
6. Bradshaw, P. An Introduction to Turbulence an its Applications. Pergamon Press, 1971
7. Reynolds, A.J., Turbulent Flows in Engineering, J. Wiley; New York, 1974.
8. Brodkey, R.S., The Phenomena of Fluid Motions, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass. 1967.

Impreso por la
Coordinación de Servicios Generales
a través de la Unidad de Difusión,
Departamento de Impresión.
El tiraje consta de 500 ejemplares
y se terminó de imprimir
en el mes de junio de 1990.