

Apéndice A

Algoritmo de Talwani

A.1 Algoritmo de Talwani

Talwani y Heirtzler (1964^[55]), son los autores del calculo de anomalías magnéticas producidas por cuerpos bidimensionales de forma arbitraria, representando mediante un polígono de forma irregular una sección transversal de un cuerpo de dos dimensiones.

Estos cálculos se pueden aplicar a anomalías magnéticas de intensidad total, vertical u horizontal, considerando que el cuerpo tiene una polarización uniforme. Es un método de interpretación indirecto, pues las anomalías son calculadas a partir de un cuerpo de prueba que será comparado con la anomalía calculada con respecto a la observada.

El método consiste en calcular perfiles de los cuerpos, cuando conocemos la forma de la anomalía,

Para el desarrollo de las fórmulas consideramos primero la anomalía producida por un cuerpo bidimensional representado por un prisma semi-infinito cuyos vértices son KLMN, como se muestra en la figura A.1 Se calcula el efecto magnético (anomalía magnética) del prisma en el origen en su componente horizontal y vertical, para lo cual consideramos la anomalía causada por la barra elemental ABCD de sección transversal (figura A.2). Debido a que todo cuerpo magnético se comporta como un imán, el momento magnético m del volumen elemental $\Delta X \Delta Y \Delta Z$, con una intensidad de magnetización J es:

$$m = J \cdot \Delta X \Delta Y \Delta Z \quad (\text{A.1})$$

Su potencial magnético W en el origen, siendo r la distancia del origen al volumen elemental será:

$$W = m \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A.2})$$

como:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A.3})$$

Combinando las ecuaciones A.1, A.2 y A.3 se obtiene:

$$W = \iiint_V J \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv \quad (\text{A.4})$$

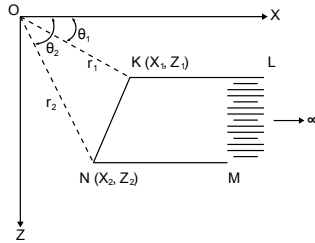


Figura A.1: Prisma bidimensional semi-infinito KLMN

Para el potencial del elemento infinito de la sección ABCD del volumen elemental se tiene:

$$W = - \iiint_V J \cdot \Delta X \cdot \Delta Z \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dy \quad (\text{A.5})$$

$$W = -\Delta X \cdot \Delta Z \iiint_V J \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dy \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo la ecuación A.3 en A.6:

$$W = \Delta X \cdot \Delta Z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J \cdot \vec{r}}{r^3} dy \quad (\text{A.7})$$

pero $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces:

$$W = \Delta X \cdot \Delta Z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{JxX + JyY + JzZ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \quad (\text{A.8})$$

$$W = 2\Delta X \cdot \Delta Z \frac{JxX + JzZ}{x^2 + z^2} \quad (\text{A.9})$$

La componente vertical V del campo magnético producida por el volumen elemental es:

$$V = -\frac{\delta W}{\delta z} \quad (\text{A.10})$$

$$V = -2\Delta X \Delta Z \frac{\delta((JxX + JzZ)(x^2 + z^2))}{\delta z} \quad (\text{A.11})$$

$$V = -2\Delta X \Delta Z \frac{Jz(x^2 + z^2) - 2Z(JxX + JzZ)}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{A.12})$$

$$V = -2\Delta X \Delta Z \frac{JzX^2 + JzZ^2 - 2ZJxX - 2JzZ^2}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{A.13})$$

$$V = 2\Delta X \Delta Z \frac{2XZJx - Jz(x^2 - z^2)}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{A.14})$$

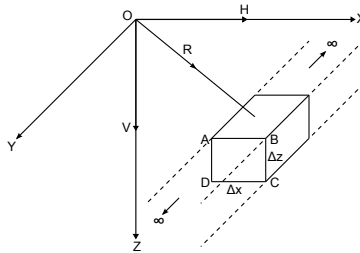


Figura A.2: Barra elemental ABCD en tres dimensiones

Para obtener la componente horizontal H del campo magnético medida a lo largo del eje X , se tiene:

$$H = -\frac{\delta W}{\delta x} \quad (\text{A.15})$$

$$H = 2\Delta X \Delta Z \frac{Jx(x^2 - z^2) + 2XZJz}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{A.16})$$

El cuerpo es considerado infinitamente largo en la dirección del eje Y , por lo tanto no existe ninguna fuerza horizontal del campo actuando en la dirección Y . Para obtener los valores V y H para el área KLMN se integran las ecuaciones A.15 y A.16 con respecto a X , considerando los límites de integración de X a ∞ , obteniéndose:

$$V = 2\Delta Z \int_X^{+\infty} \frac{2XZJx - Jz(x^2 + z^2)}{(x^2 + z^2)^2} dx \quad (\text{A.17})$$

$$V = 2\Delta Z \frac{JxZ - JzX}{x^2 + z^2} \quad (\text{A.18})$$

$$H = 2\Delta Z \int_X^{+\infty} \frac{Jx(x^2 - z^2) + 2XZJz}{(x^2 + z^2)^2} dx \quad (\text{A.19})$$

$$H = 2\Delta Z \frac{JxX + JzZ}{(x^2 + z^2)^2} \quad (\text{A.20})$$

Para el prisma KLMN, la fuerza vertical (ecuación A.18) y la fuerza horizontal (ecuación A.20) tienen que ser integradas con respecto a Z .

$$V = 2 \int_{z_2}^{z_1} \frac{JxZ - JzX}{x^2 + z^2} dz \quad (\text{A.21})$$

$$H = 2 \int_{z_2}^{z_1} \frac{JxX + JzZ}{(x^2 + z^2)^2} dz \quad (\text{A.22})$$

El largo del lado KN está definida por la ecuación de una recta (figura A.3):

$$X = (X_1 + Z_1 \cot \phi) - Z \cot \phi \quad (\text{A.23})$$

Sustituyendo la ecuación A.23 en la solución de la integral A.21 resulta:

$$V = 2 \sin \phi \left[Jx \left((\theta_2 - \theta_1) \cos \phi + \sin \phi \ln \frac{r_2}{r_1} \right) - Jz \left((\theta_2 - \theta_1) \sin \phi - \cos \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

De manera similar, se sustituye la A.23 en la solución de la integral A.22 resultando:

$$H = 2 \sin \phi \left[Jx \left((\theta_2 - \theta_1) \sin \phi - \cos \phi \ln \frac{r_2}{r_1} \right) + Jz \left((\theta_2 - \theta_1) \cos \phi + \sin \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

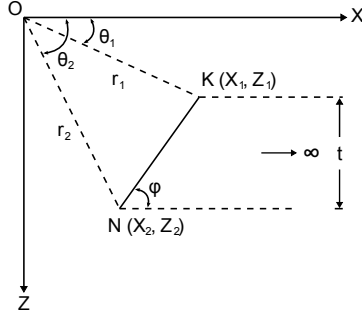


Figura A.3: Recta KN

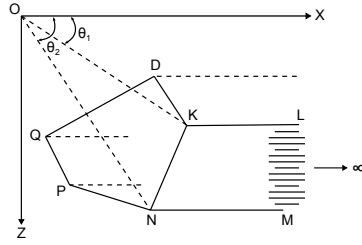


Figura A.4: Poligonal KNPQR

Una anomalía magnética en el origen producida por un cuerpo bidimensional con sección poligonal KNPQR (A.4) puede ser calculada sumándose las anomalías obtenidas de prismas como KLMN. Las ecuaciones A.24 y A.25 pueden ser reescritas como:

$$V = 2(Jx \cdot Q - Jz \cdot P) \quad (\text{A.26})$$

$$H = 2(Jx \cdot P + Jz \cdot Q) \quad (\text{A.27})$$

donde:

$$P = (\theta_2 - \theta_1) \sin \phi - \cos \phi \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{A.28})$$

$$Q = \sin \phi (\theta_2 - \theta_1) \cos \phi + \sin \phi \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{A.29})$$

Las funciones trigonométricas que intervienen en P y Q en función de los vértices son los siguientes, los subíndices 1 y 2 indican los vértices de cada segmento del polígono en sentido horario:

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_2 - Z_1 & X_{21} &= X_2 - X_1 \\ r_1 &= \sqrt{x_1^2 + z_1^2} & r_2 &= \sqrt{x_2^2 + z_2^2} \end{aligned}$$

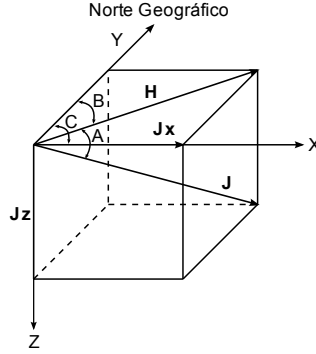


Figura A.5: Componentes del campo magnético

$$\sin \phi = \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_{21}^2 + X_{12}^2}} \quad \cos \phi = \frac{X_{12}}{\sqrt{Z_{21}^2 + X_{12}^2}}$$

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{Z_1}{X_1} \right) \quad \theta_2 = \arctan \left(\frac{Z_2}{X_2} \right)$$

Por lo tanto la ecuación A.28 y A.29 en términos de las funciones anteriores son:

$$P = \frac{Z_{21}^2}{Z_{21}^2 + X_{12}^2} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_{21} X_{12}}{Z_{21}^2 + X_{12}^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{A.30})$$

$$Q = \frac{Z_{21} X_{12}}{Z_{21}^2 + X_{12}^2} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{Z_{12}^2}{Z_{21}^2 + X_{12}^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{A.31})$$

Para el cálculo de un perfil magnético se efectúa un movimiento sucesivo del origen a varios puntos a lo largo del eje X. De esta manera el perfil magnético será determinado por una línea perpendicular a los ejes del polígono.

Para evaluar Jx y Jz consideramos de acuerdo a la figura A.5 que el ángulo A de inclinación del vector J es positivo y el ángulo B es medido en sentido horario, guardando la siguientes relaciones:

$$Jx = J \cos(C - B) \quad (\text{A.32})$$

$$Jz = J \sin A \quad (\text{A.33})$$

La magnetización del cuerpo es por inducción, por lo tanto:

$$J = \chi \cdot F \quad (\text{A.34})$$

$$A = I \quad (\text{A.35})$$

$$B = D \quad (\text{A.36})$$

donde I y D es la inclinación y declinación respectivamente del campo magnético terrestre, χ la susceptibilidad y F el campo Total.

Para evaluar anomalías pequeñas de intensidad magnética total con respecto al campo total F , T es la suma de las proyecciones, H y V a lo largo de la dirección de F , siendo igual a:

$$T = V \sin I + H \cos(C - D) \cos I \quad (\text{A.37})$$

La ecuación A.37 es la expresión final que se emplea para calcular la anomalía magnética de cuerpos bidimensionales, el cual se aproxima mediante un polígono, este cuerpo irregular está constituido por un cierto número de placas de espesor finito (t) y de longitud infinita en la dirección positiva del eje X , de tal manera que las placas se combinan algebraicamente para obtener el efecto magnético del campo.