



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS**

**L**as autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

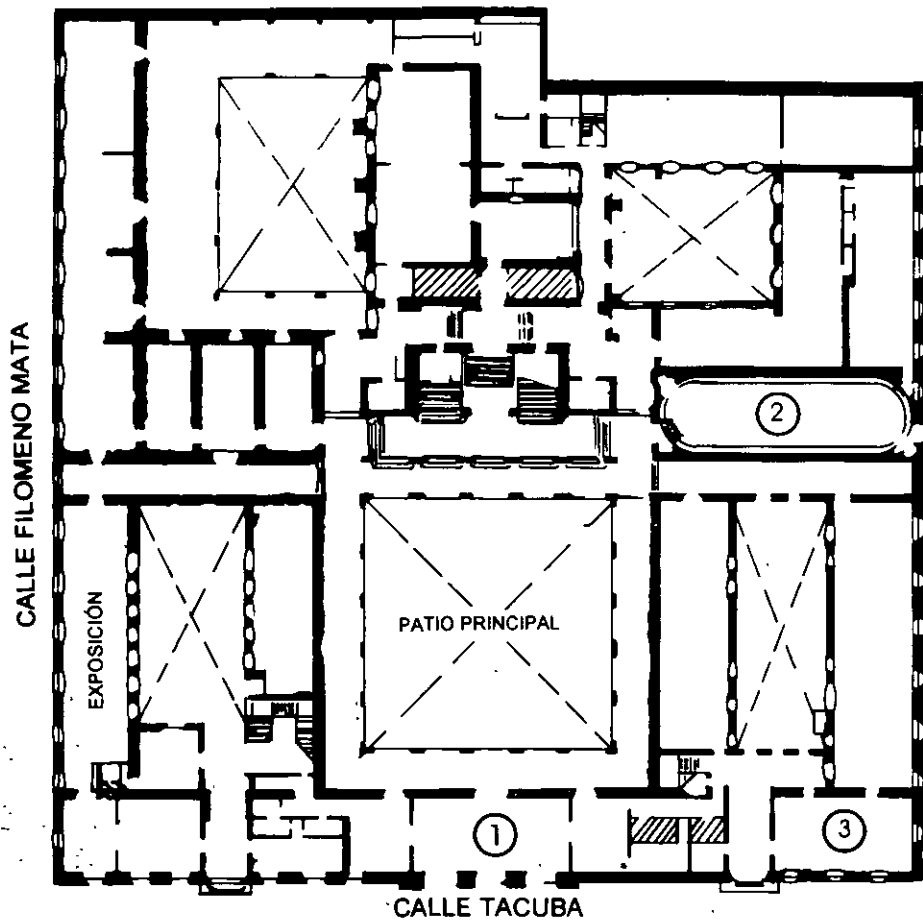
Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

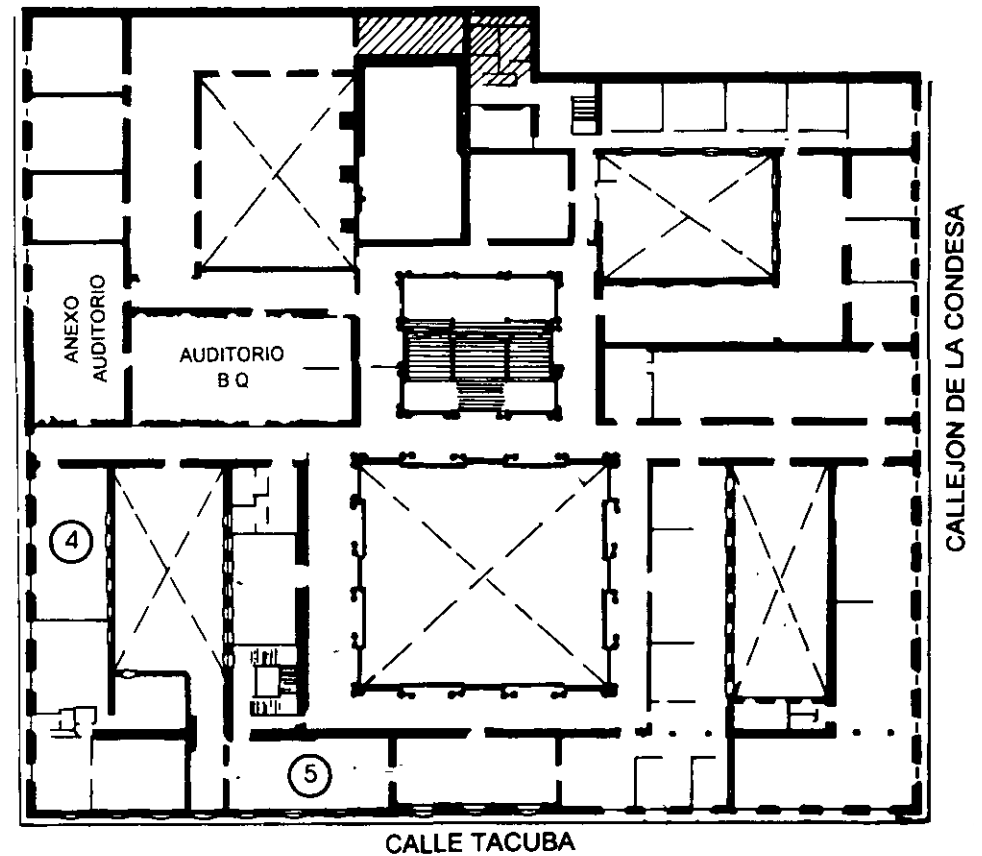
Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

**Atentamente  
División de Educación Continua.**

# PALACIO DE MINERIA

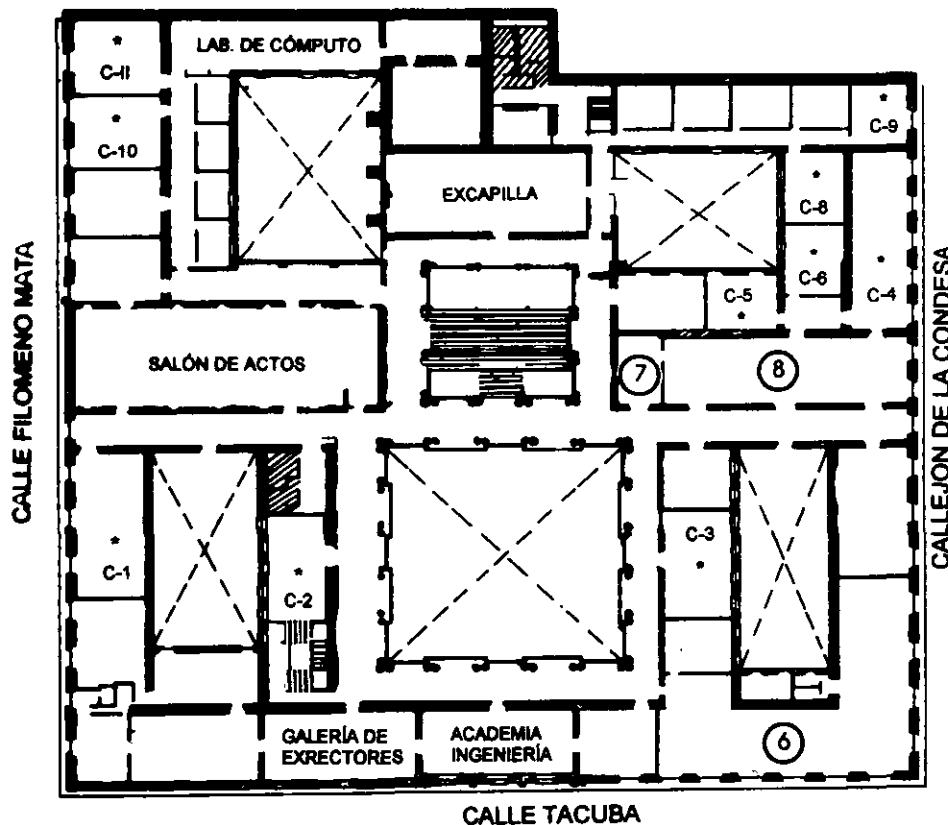


**PLANTA BAJA**



**MEZZANINNE**

# PALACIO DE MINERÍA



## GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

\* AULAS

**1er. PISO**



DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.  
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**DEL 4 AL 19 DE SEPTIEMBRE DEL 2000**

**1. INTRODUCCION Y CONCEPTOS BASICOS**

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO SIMPLE  
CRITERIOS DE DISEÑO

**2. CARGA AXIAL EN ELEMENTOS DE CONCRETO**

ELEMENTOS SUJETOS A CARGA AXIAL  
COLUMNAS DE CONCRETO SIMPLE Y ZUNCHADAS

**3. FLEXION DE ELEMENTOS DE CONCRETO**

RESISTENCIAS DE VIGAS DE SECCION SIMETRICA Y ASIMETRICA  
FORMULACION DE ARTICULACIONES PLASTICAS

**4. FLEXION-COMPRESION EN ELEMENTOS DE CONCRETO**

COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLAS  
DIAGRAMAS DE INTERACCION  
EFECTOS, DISEÑOS Y RESISTENCIA DE ELEMENTOS ESBELTOS

**5. DISEÑO POR FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE**

COMPORTAMIENTO  
DISEÑO Y RESISTENCIA DE ELEMENTOS DE CONCRETO  
TIPOS DE FALLAS  
NORMAS DEL RCDF  
TORSION

**7. SISTEMAS DE PISO**

CLASIFICACION  
COMPORTAMIENTO GENERAL Y MODOS DE FALLAS DE LOSAS  
METODOS DE ANALISIS Y DISEÑO

**8. CIMENTACIONES**

CLASIFICACION  
COMPORTAMIENTO GENERAL Y MODO DE FALLAS



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

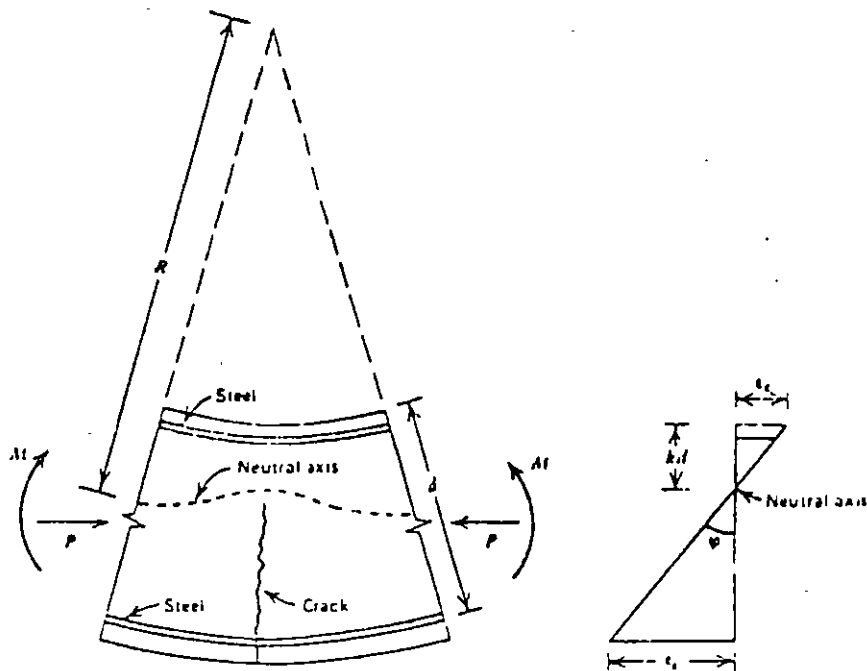
**FLEXION**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

### III.- F L E X I O N

#### 1.- HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE LA RESISTENCIA.

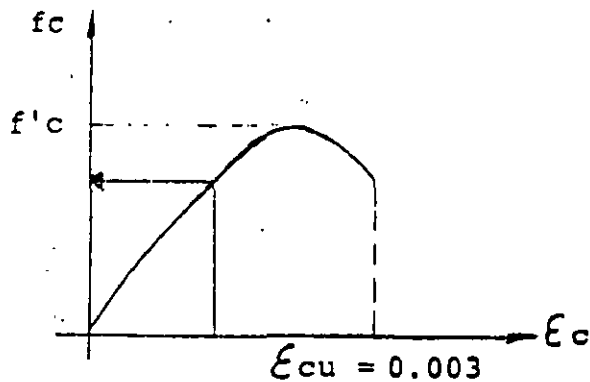
- A) EL CONCRETO NO RESISTE ESFUERZOS DE TENSION.
- B) LA DISTRIBUCION DE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES EN LA SECCION TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO - ES PLANA Y POR LO TANTO SE CONSIDERA QUE EXISTE ADHERENCIA PERFECTA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO.



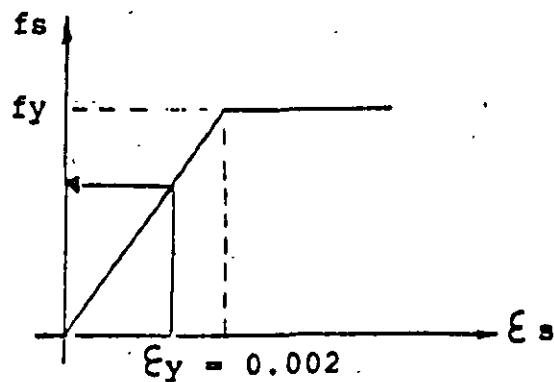
- C) LA DEFORMACION UNITARIA DEL CONCRETO A COMPRESION - CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA DE LA SECCION ES:

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

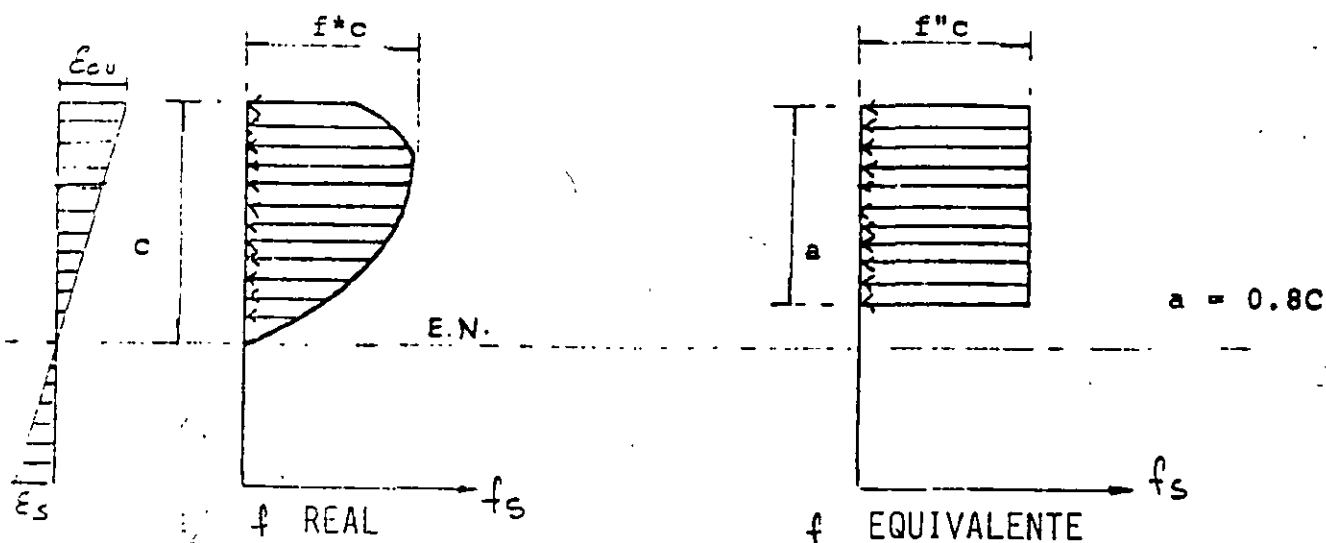
D) LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN EL CONCRETO Y EL ACERO CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA SE CONOCEN



CURVA TIPICA DEL CONCRETO EN COMPRESION.



CURVA TIPICA DEL ACERO EN TENSION.



$$f^*c = 0.8 f'c$$

$$f''c = 0.85 f^*c$$

$$f''c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c$$

$$\text{si } f^*c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$$

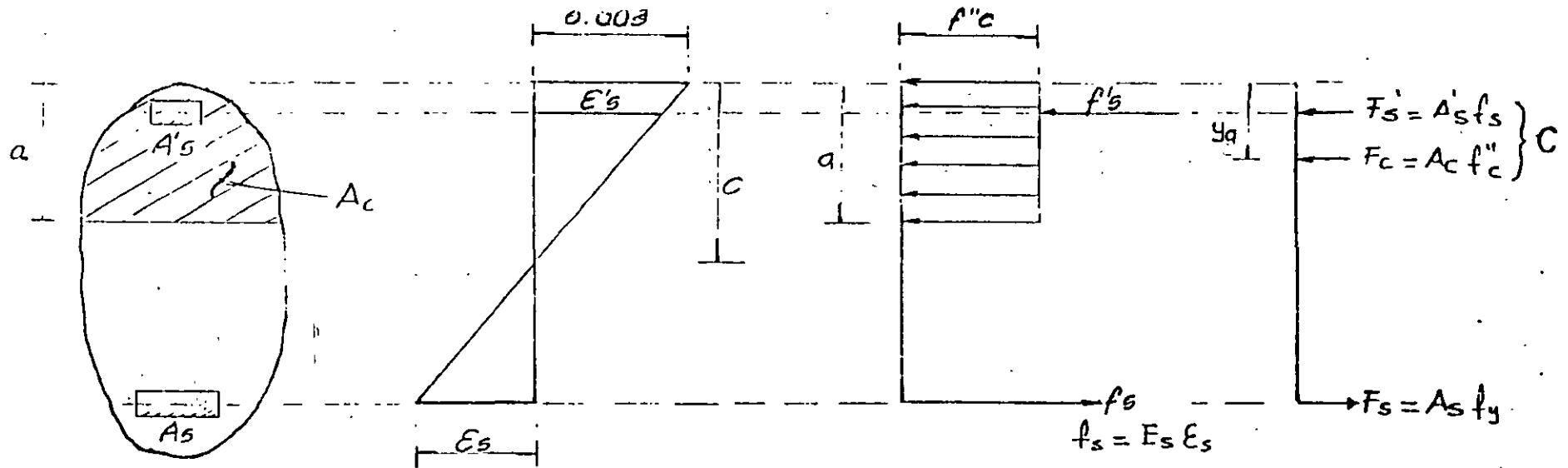
$$\text{si } f^*c > 250 \text{ Kg/cm}^2$$

SECCION DE  
FORMA  
CUALQUIERA

DEFORMACIONES  
UNITARIAS

DISTRIBUCION  
DE  
ESFUERZOS

FUERZAS



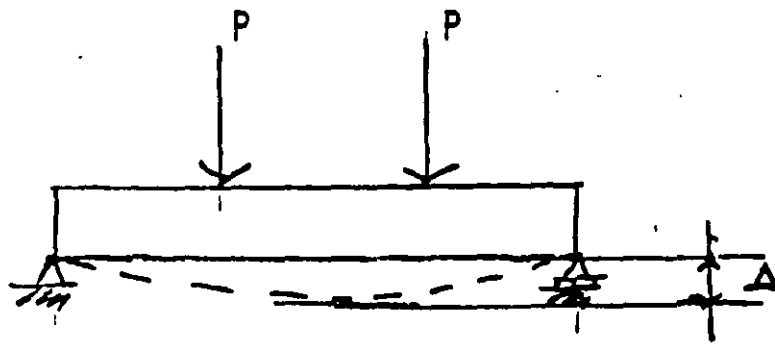
$$\sum F = 0 \Rightarrow C = T.$$

$$\sum M = M_R$$

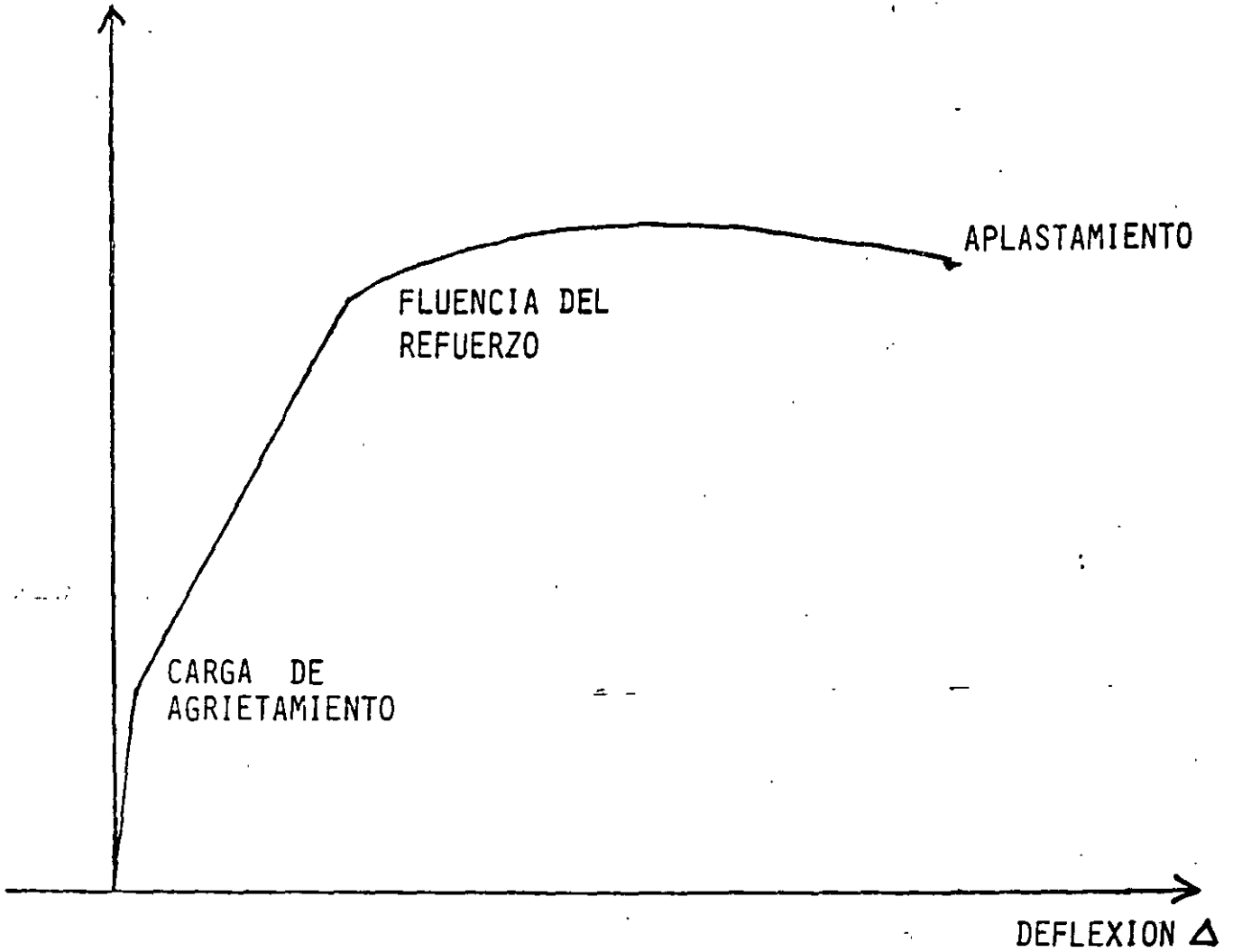
PROCEDIMIENTO GENERAL PARA CALCULAR LA RESISTENCIA  $M_R$



GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO  
CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE -  
REFUERZO.

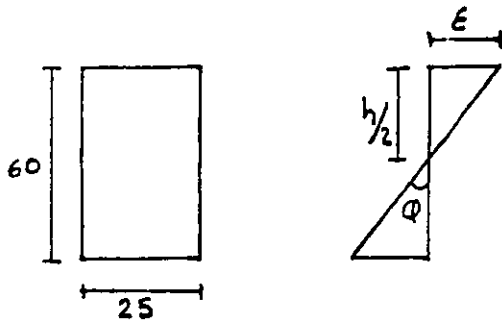


CARGA P



CALCULO DE RESISTENCIAS A FLEXION DE UNA SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO CON DIFERENTE PORCENTAJE DE REFUERZO (R.C.D.F. - 1987).

1) SECCION DE CONCRETO SIMPLE



$f'c = 200$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f^*c = 160$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f''c = 136$	Kg/cm <sup>2</sup>
* $\bar{f}_t = 19.80$	Kg/cm <sup>2</sup>
** $E = 113,137$	Kg/cm <sup>2</sup>
$E_s = 2 \times 10^6$	Kg/cm <sup>2</sup>

$$F_d = 0.9$$

$$* E = 8000 \sqrt{f'_c}$$

$$** \bar{f}_t = 1.4 \sqrt{f'_c}$$

A) CALCULO DE  $M_R$

$$\bar{f}_t = \frac{M_R}{I} C \quad M_R = \bar{f}_t \frac{I}{C} = \bar{f}_t S = \bar{f}_t \frac{bh^2}{6}$$

$$M_R = 19.80 \frac{(25 \times 60^2)}{6} = 297,000 \text{ Kg - cm}$$

$$M_R = 2.97 \text{ Ton - M}$$

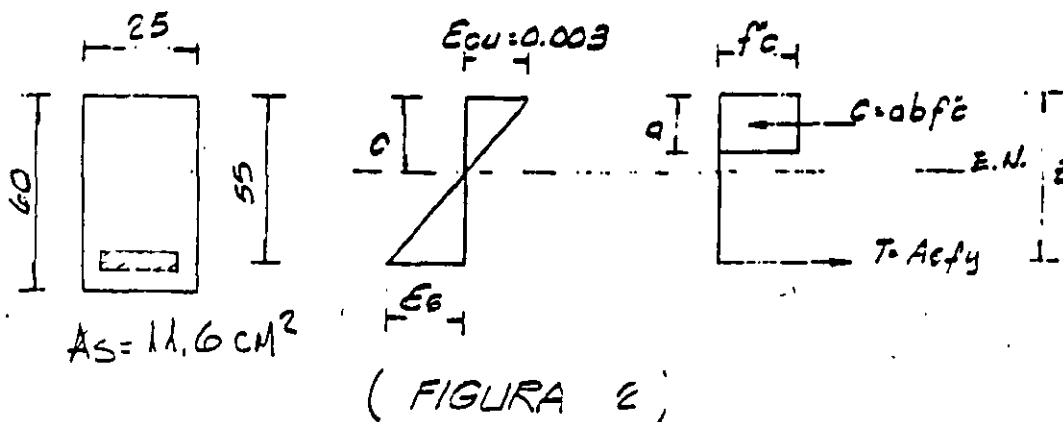
$$M_R = 2.97 \times 0.9 = 2.67 \text{ Ton-M (MOMENTO DE AGRIETAMIENTO)}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\epsilon = \frac{\bar{f}_t}{E} = \frac{19.80}{113,137} = 0.00018$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{C} = \frac{\epsilon}{h/2} = \frac{0.00018}{30} = 0.6 \times 10^{-5}$$

2) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



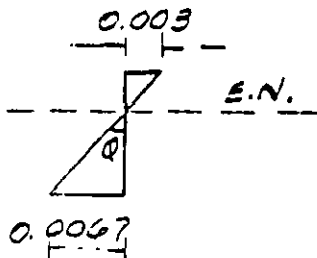
A) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c=17.00$

$$a = 0.8 \times 17 = 13.60$$

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \left( \frac{55}{17} \times 0.003 \right) - 0.003 = 0.0067$$

$$\epsilon_s = 0.0067 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



FALLA DUCTIL

$$C = abf''c = 13.60 \times 25 \times 136 = 46,240 \text{ Kg} = 46.24 \text{ Ton.}$$

$$T = Asf_y = 11.60 \times 4000 = 46,400 \text{ Kg} \hat{=} C$$

$$M_R = T_z = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 46,400 \left( \frac{55 - 13.60}{2} \right) = 2'236,480 \text{ Kg-cm.}$$

$$M_R = 22.36 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 22.36 \times 0.9 = \underline{20.12} \text{ Ton-m}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.0030}{17} = \frac{17.65 \times 10^{-5}}{\text{cm}} \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

### 3) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SOBREREFORZADA)

#### A) CALCULO DE $M_R$

$$A_s = 30.00 \text{ cm}^2$$

SECCION 25 X 60

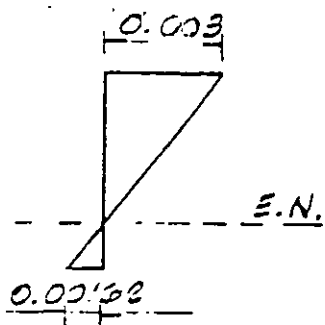
$$\text{SE SUPONES } c = 35.7$$

$$a = 0.8c = 0.8 \times 35.70 = 28.56 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = \left( \frac{d}{c} \epsilon_{cu} \right) - \epsilon_{cu} = \frac{55}{35.70} \cdot 0.003 - 0.003 = 0.0016 < \epsilon_y$$

NO FLUYE EL  
ACERO

$$f_s = E_s \epsilon_s$$



FALLA FRAGIL

$$C = abf''c = 28.56 \times 25 \times 136 = 97,104 \text{ Kg}$$

$$T = A_s E_s E = 30 \times 0.00162 \times 2 \times 10^6 = 97,200 \text{ Kg}$$

$$M_R = Tz = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 97,200 \left( 55 - \frac{28.56}{2} \right) = 3,957,964 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

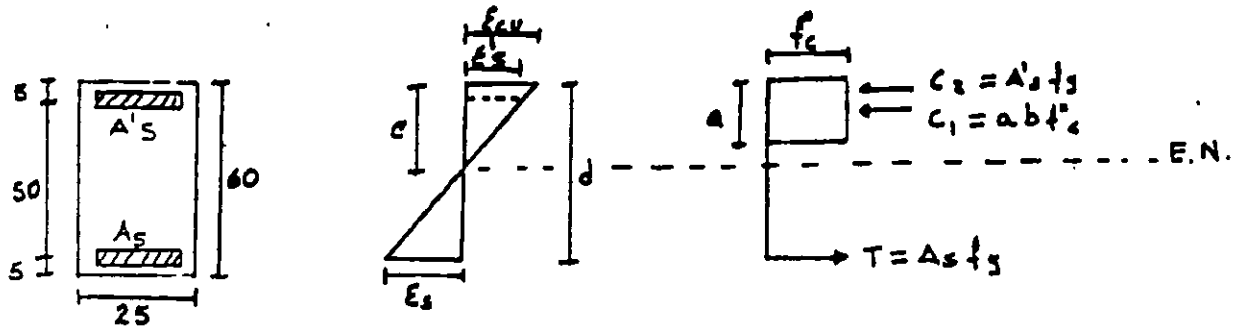
$$M_R = 39.58 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

$$M_R = 39.58 \times 0.9 = \underline{35.62} \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

#### B) CALCULO DE $\phi$ (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{35.70} = \underline{8.40 \times 10^{-5}} \text{ rad/cm}$$

4) SECCION DOBLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



DATOS:

$$A_B = 30 \text{ cm}^2$$

$$A's = 10 \text{ cm}^2$$

B) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c = 29.4$

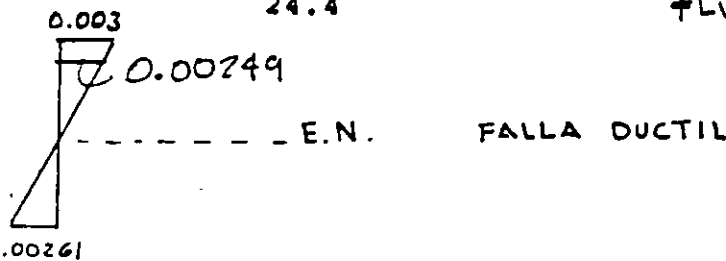
$$a = 0.8c = 23.52$$

$$\epsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \epsilon_{cu} = \frac{(29.4 - 5)}{29.4} 0.003 = 0.00249 > f_y = 0.002$$

FLUYE EN COMPRESION

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{24.4} 0.003 - 0.003 = 0.00261 > f_y = 0.002$$

+ FLUYE EN TENSION



$$C_1 = a b f'_c = 23.52 \times 25 \times 136 \cong 79\,968 \text{ Kg}$$

$$C_2 = A's f_y = 10 \times 4000 = 40000 \text{ Kg}$$

$$C = C_1 + C_2 = 79968 + 40000 = 119,968 \text{ Kg}$$

$$T = A_s f_y = 30 \times 4000 = 120\,000 \text{ Kg} \cong C$$

$$M_R = C_1 \left( d - \frac{a}{2} \right) + C_2 (d-d')$$

$$M_R = 79,968 \cdot \left( 55 - \frac{23.52}{2} \right) + 40000 (55-5)$$

$$M_R = 5'457,816 \text{ Kg-cm}^2$$

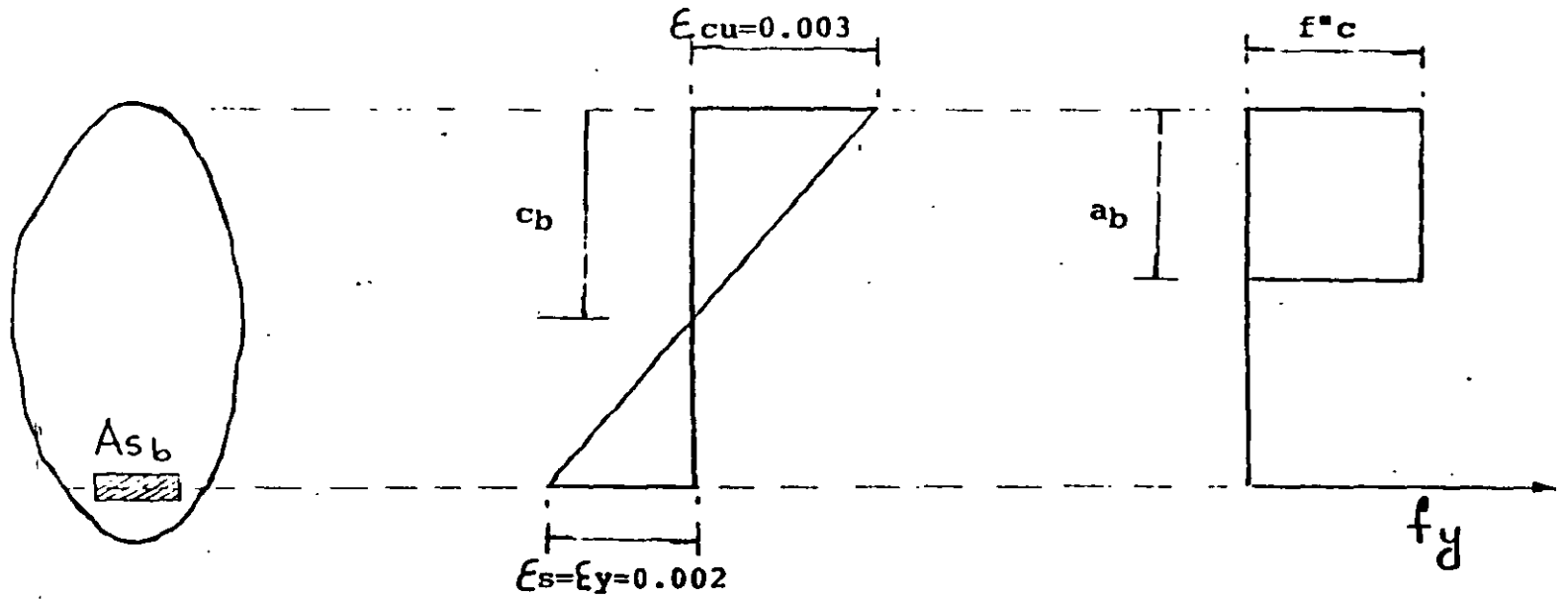
$$M_R = 54.57 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 54.57 \times 0.9 = \underline{49.11 \text{ Ton-m}}$$

B) CALCULO DE  $\phi$

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{29.40} = \frac{10.20 \times 10^{-5}}{29.40} \text{ rad/cm}$$

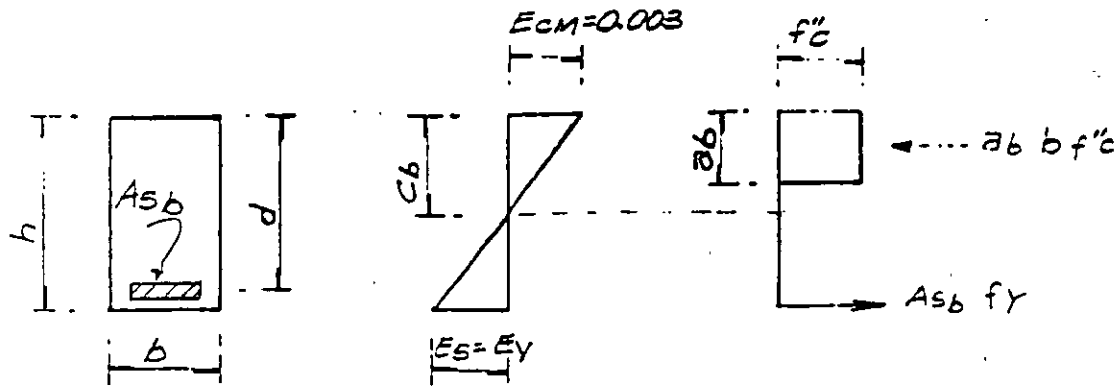
# FALLA BALANCEADA



SECCION SUBREFORZADA  $A_s \ll A_{sb}$

SECCION SOBREFORZADA  $A_s > A_{sb}$

CALCULO DEL PORCENTAJE BALANCEADO  
EN SECCIONES RECTANGULARES



$$P_b = \frac{A_s b f_y}{b d}$$

$$C = T$$

$$0.8 C_b b f'_c = P_b b d f_y$$

$$C_b = \frac{P_b b d f_y}{0.8 b f'_c} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f'_c}$$

PERO  $\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{C_b}{d}$

$$\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f'_c d}$$

$$P_b = \frac{0.8 f'_c}{f_y} \frac{0.003}{E_y + 0.003}$$

MULTIPLICANDO POR  $E_S = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$P_b = \frac{0.8 f'_c}{f_y} \frac{6000}{f_y + 6000} = \left[ f_y = E_S E_Y \right]$$

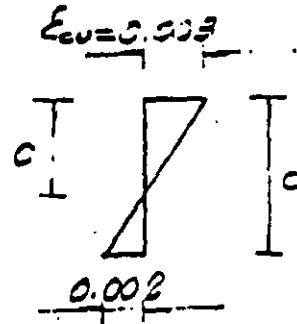
$$P_b = \frac{4800}{f_y + 6000} \frac{f'_c}{f_y}$$



5) SECCION BALANCEADA

A) CALCULO DE MR

$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4000}{2 \times 10^6} = 0.002$$



DE LA FIGURA

$$\frac{c}{\epsilon_{cu}} = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad c = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \epsilon_{cu}$$

$$c = \frac{55 \times 0.003}{0.003 + 0.002} = 33.00 \text{ cm.}$$

$$a = 0.8c = 0.8 (33) = 26.40 \text{ cm}$$

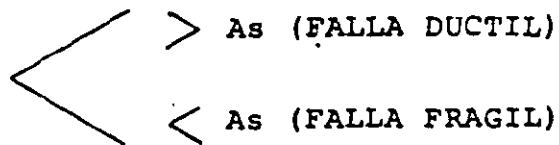
LA FUERZA DE COMPRESION ES

$$C = abf''c = 26.40 \times 25 \times 136 = 89,760 \text{ Kg}$$

POR EQUILIBRIO

$$T = C \Rightarrow A_s b f_y = 89,760$$

$$A_s b = \frac{89760}{4000} = \underline{\underline{22.44}} \text{ cm}^2$$



$$M_R = CZ = C \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_R = 89760 \left( 55 - \frac{26.40}{2} \right) = 3'751,968 \text{ Kg - cm}$$

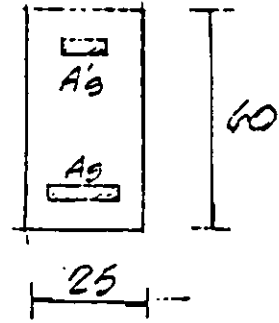
$$M_R = 37.52 \times 0.9 = \underline{\underline{33.77}} \text{ Ton-M}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

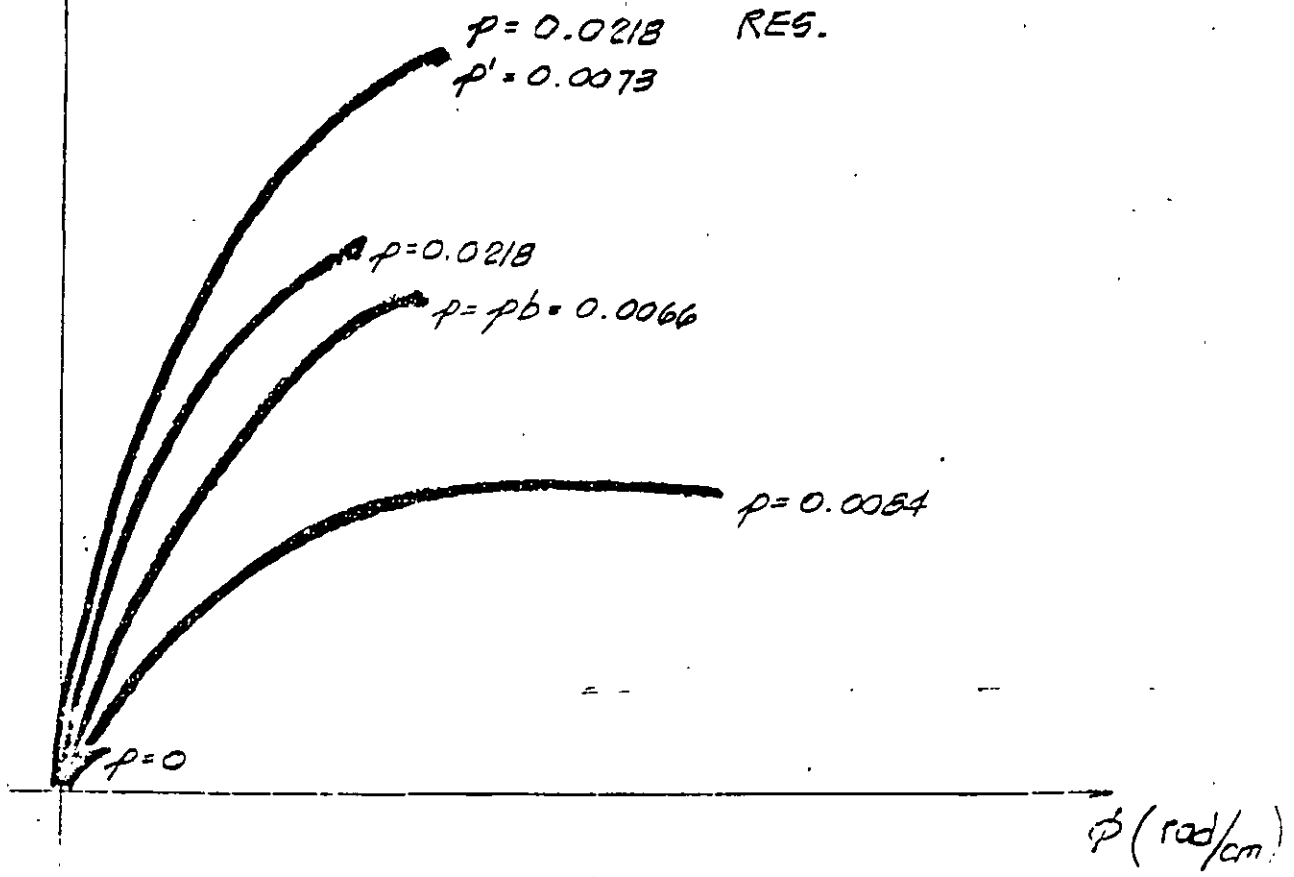
$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{33.00} = \underline{\underline{9.09 \times 10^{-5}}} \text{ rad/cm}$$

# GRAFICA MOMENTO-CURVATURA PARA DISTINTOS PORCENTAJES DE REFUERZO

$M$  (TON-m)



RESISTENCIA Y CURVATURAS OBTENIDAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES.



RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{MAX}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

2.1)  $A_{s\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & \text{(NO SISMO)} \\ 0.75 A_{sb} & \text{(SI SISMO)} \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{MAX}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

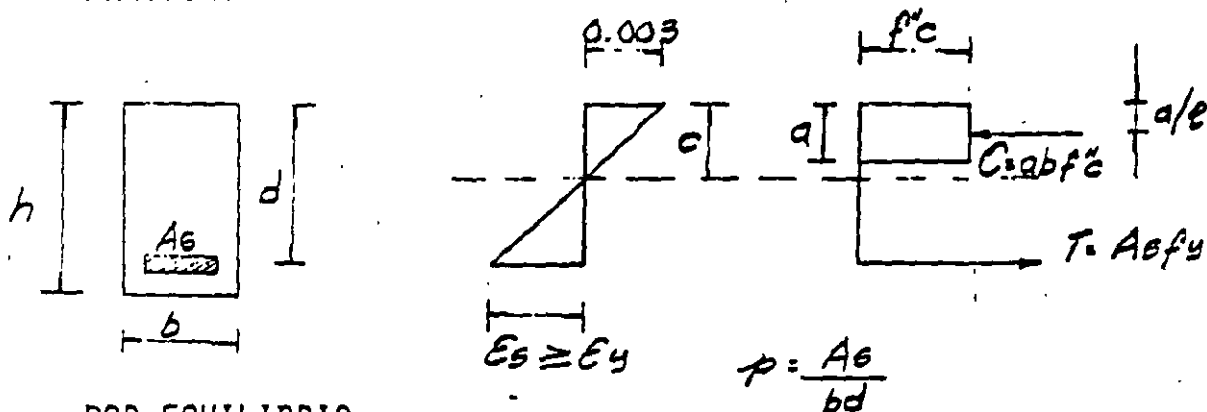
2.1)  $A_{s\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & \text{(NO SISMO)} \\ 0.75 A_{sb} & \text{(SI SISMO)} \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

## FORMULAS PARA CALCULAR LAS RESISTENCIAS EN SECCIONES DE FORMA COMUN

A) SECCIONES RECTANGULARES SUBREFORZADAS SIN ACERO DE COMPRESION.



POR EQUILIBRIO:

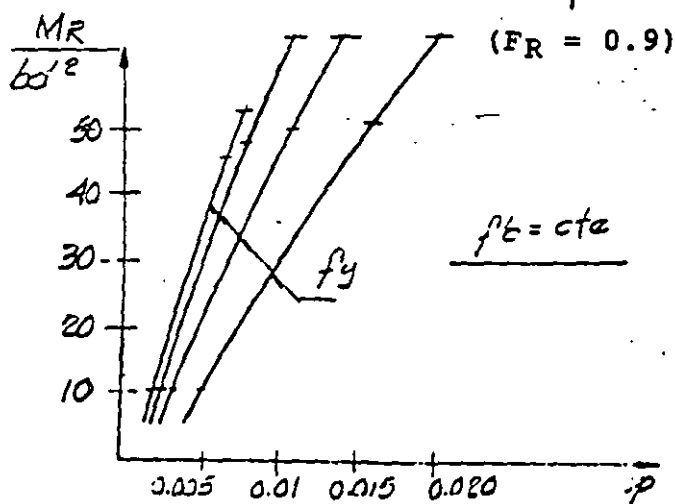
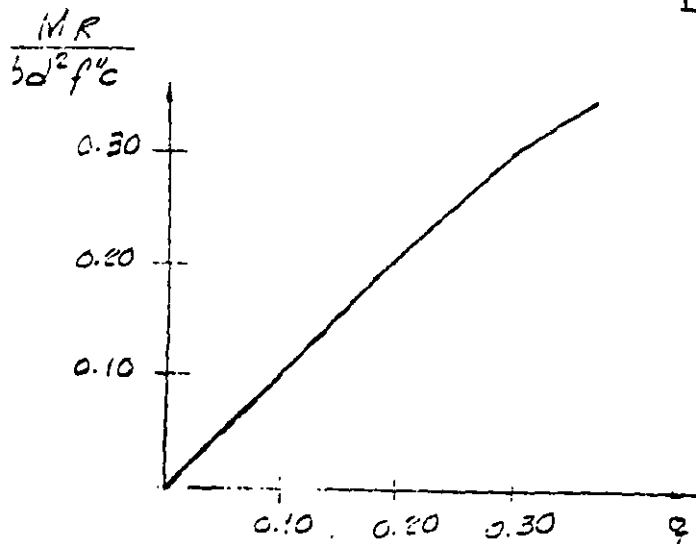
$$c = T$$

$$abf''c = Asfy$$

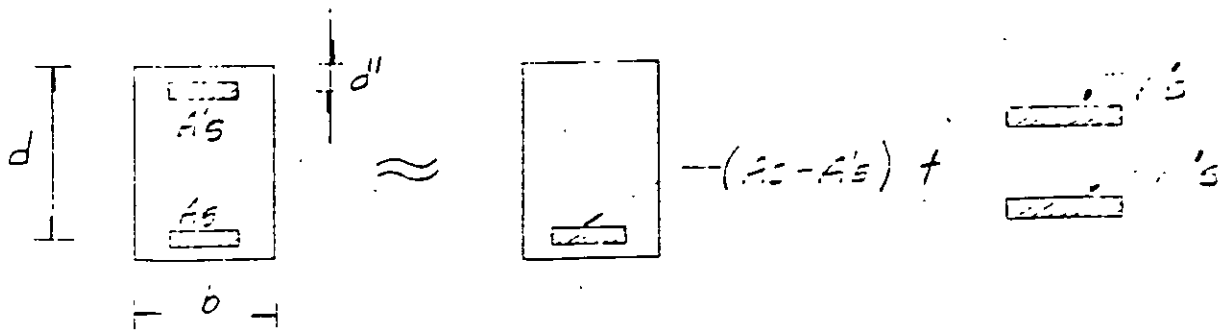
$$a = \frac{Asfy}{bf''c} = \frac{P d fy}{f''c} \quad ; \quad q = \frac{P fy}{f''c}$$

$$M_R = c \left( d - \frac{a}{2} \right) = abf''c \frac{d(1-a)}{2d} = \frac{p d fy}{f''c} b f''c d \left( 1 - \frac{p d fy}{2d f''c} \right)$$

$$M_R = F_R \left[ b d^2 f''c q (1 - 0.5q) \right]$$



E. SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[ (A_s - A_s') f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right]$$

de  $C = T$

$$abf''c + A_s' f_y = A_s f_y$$

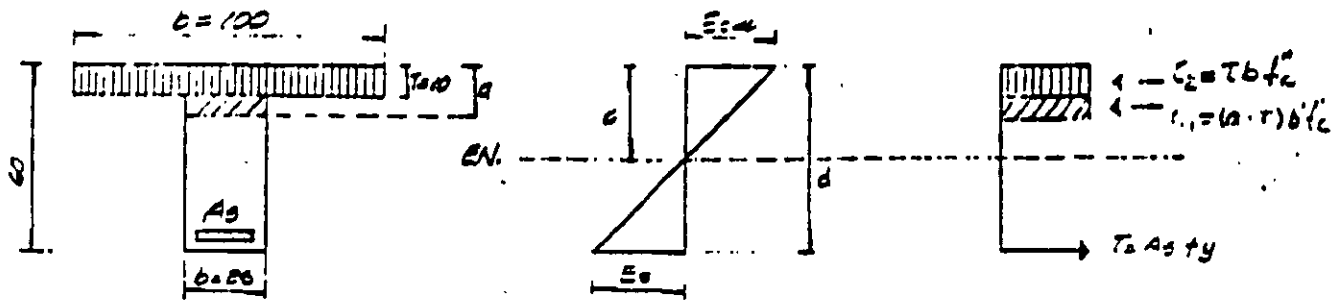
$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{bf''c}$$

SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

6-) SECCION T SIMPLEMENTE ARMADA  
(SUBREFREZADA)



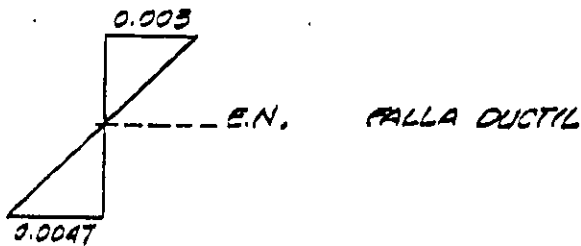
$$A_s = 40.00 \text{ CM}^2$$

A-) CALCULO DE  $M_R$ .

SE SUPONE  $c = 21.32 \text{ CM}$ .

$$a = 0.8 = 0.8 \times 21.32 = 17.06 \text{ CM}$$

$$\epsilon_b = \frac{E}{E_s} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{21.32} \cdot 0.003 = 0.00477 \Rightarrow f_b = f_y$$



$$C_1 = (a - d) b' f'c = (17.06 - 10) 25 \times 136 = 24,004 \text{ Kg}$$

$$C_2 = T b f'c = 10 \times 100 \times 136 = 136,000 \text{ Kg}$$

$$C = 24,004 + 136,000 = 160,004 \text{ Kg}$$

$$T = A_s f_y = 40 \times 4000 = 160,000 \text{ Kg} = C$$

$$M_R = C_1 \left( d - a + \frac{a - d}{2} \right) + C_2 \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_R = 2400 \left( 0.55 - 0.17 + \frac{0.17 - 0.1}{2} \right) + 136,00 \left( 0.55 - \frac{0.1}{2} \right) = 77.95 \text{ TON-M}$$

$$M_R = 77.95 \times 0.9 = 70.16 \text{ TON-M}$$

B-) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{c} = \frac{0.0047}{21.32} = 0.00022 \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

### EJEMPLO 9.1 Diseño de una viga rectangular simplemente armada

Obtener las dimensiones de una viga rectangular y la cuantía de acero  $A_s$  para resistir los siguientes momentos (en condiciones de servicio):  $M_D = 7.50$  ton-m y  $M_L = 5.00$  ton-m. El agrietamiento por flexión debe ser revisado con el refuerzo; suponga que la viga está expuesta a la intemperie.

Usar  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z = 145 \text{ (exposición al exterior)}$$

#### CALCULOS Y DISCUSION

referencias

10.3.3

1.- El procedimiento de diseño completo para secciones rectangulares simplemente armadas se presenta a partir de calcular un peralte mínimo, usando el porcentaje máximo que se permite para los miembros a flexión,  $0.75 P_b$

Paso 1. Cálculo del porcentaje máximo de acero\*

$$P_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.0283$$

$$\beta_1 = 0.85 \quad (f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b = 0.75 (0.0283) = 0.0212$$

10.3.3

Paso 2. Cálculo del  $b d^2$  necesario

Resistencia a la flexión necesaria:

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$M_U = 1.4 \times 7.50 + 1.7 \times 5.0$$

ec (9-1)

$$M_U = 19.00 \text{ ton-m}$$



\* Los valores de  $P_b$  y  $0.75 P_b$  se pueden obtener también directamente de la tabla 9.1

$$R_n = p f_y \left( 1 - 0.5 \frac{p f_y}{0.85 f_c} \right)$$

$$= 0.0212 \times 4200 \left( 1 - \frac{0.5 \times 0.0212 \times 4200}{0.85 \times 280} \right)$$

$$R_n = 72.38 \text{ Kg/cm}^2$$

9.3.2.1

$$\phi = 0.90 \text{ (flexión)}$$

$$bd^2_{\text{nec.}} = \frac{M_u}{\phi R_n} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 \times 72.38} = 29,167 \text{ cm}^3$$

Paso 3. Dimensiones del elemento

$$bd^2_{\text{nec.}} \leq bd^2_{\text{disp.}}$$

Sea  $b = 25.0 \text{ cm}$  (ancho de columna)

$$d = \sqrt{\frac{29,167}{25}} = 34.16 \text{ cm}$$

Peralte mínimo total  $\hat{=} 34.16 + 6.25 = 40.4 \text{ cm}$

Para la resistencia a la flexión, resulta adecuada una viga de  $25 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ . Sin embargo, debe observarse que el peralte total de  $40 \text{ cm}$  es un poco menor que el requerido según el criterio de esfuerzos admisibles. Debido a eso que las deflexiones pueden ser importantes en las vigas diseñadas con el criterio de resistencia última.

Paso 4. Con el peralte total de  $40 \text{ cm}$ , se calcula un valor revisado de  $p$ .

Como ilustración, se calcula el  $p$  con cuatro diferentes métodos

$$d \hat{=} 40 - 6.2 = 33.8 \text{ cm}$$

(1) por fórmula (método exacto):

$$R_n = \frac{M_u}{\phi (bd^2)_{disp}} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 (25 \times 33.8^2)} = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$p = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}} \right)$$

$$p = \frac{0.85 \times 0.28}{4.2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 73.9}{0.85 \times 280}} \right) = 0.0218 \hat{=} p_{m\acute{a}x}$$

(2) Con las curvas de resistencia como las de la fig. 9.1 para  $R_n = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$  (10511lb/pulg<sup>2</sup>),  $p = 0.0214$

(3) Con las tablas de resistencia como la tabla 9.2:

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c bd^2} = \frac{19 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 25 \times 33.8^2} = 0.2640$$

$$w = 0.327$$

$$p = wf'_c / f_y = 0.327 \times 0.28 / 4.2 = 0.0218$$

(4) Con aproximación lineal:

$$p = (p_{original}) \frac{(R_n \text{ revisado})}{(R_n \text{ original})}$$

$$p = 0.0212 \times 73.92 / 72.38 = 0.0217$$

Paso 5. Cálculo de As necesaria

$$As = (p_{revisado}) (bd)_{disp.}$$

$$As = 0.0218 \times 25 \times 33.8 = 18.42 \text{ cm}^2$$

2.- Revisión de la corrección de los cálculos, por simple estática  
(ver la siguiente figura):

$$T = \rho b d f_y = A_s f_y = 18.42 \times 4.2 = 77.36 \text{ ton}$$

$$a = \frac{C \phi T}{0.85 f'_c b} = \frac{77.36}{0.85 \times 0.28 \times 25} = 13 \text{ cm}$$

Resistencia de diseño a la flexión:

$$\phi M_n = [\phi A_s f_y (d - \frac{a}{2})] = [0.9 \times 77.36 (33.8 - 13.00/2)]$$

$$\phi M_n = 1900.74 \text{ ton-cm} \approx 19.01 \text{ ton-m}$$

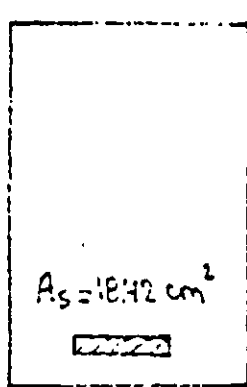
como (resistencia necesaria)  $\leq$  (resistencia disponible), o sea que

$$M_u \leq \phi M_n,$$

$$19.00 \approx 19.01$$

bien

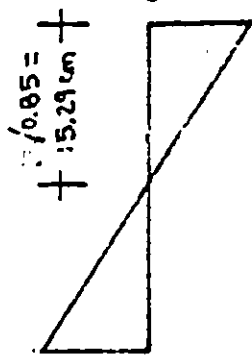
+ 25 cm +



sección transversal

33.8 cm

$\epsilon_c = 0.003$

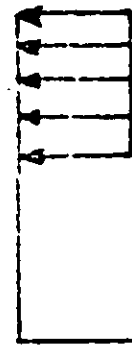


$\epsilon_s = 0.0036$

deformaciones

+ 238.0 Kg/cm² +

+ 13.0 cm +



$C = 77.36 \text{ Ton}$

27.3 cm

$f_y$

$T = 77.36 \text{ Ton}$

Bloque de esfuerzos

3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

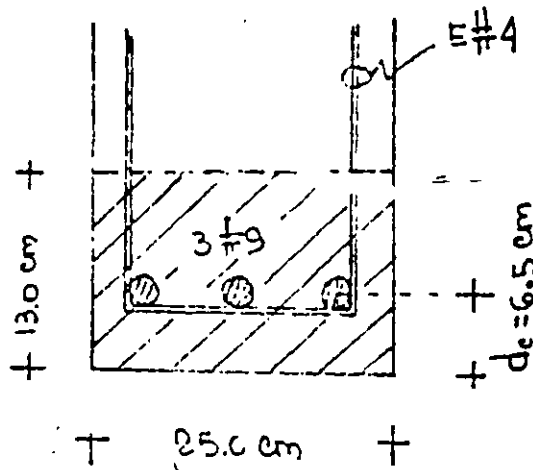
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$



3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

10.6

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

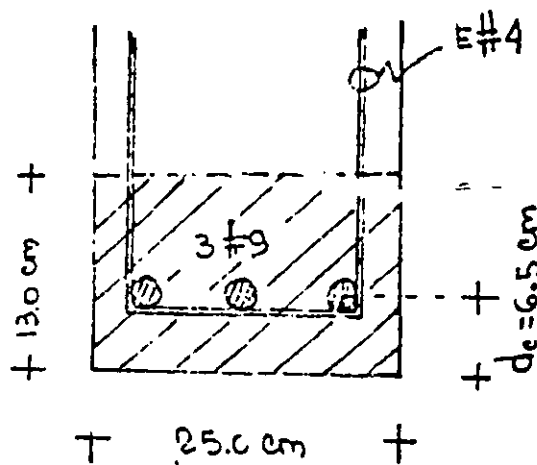
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$



4. Revisión del ancho de viga

$$b_{\text{disp.}} \geq 2 \times (\text{recubrimiento}) + 3 \times 2.86 + 2 \times 2.86 = 7.6.1$$

$$= 2 \times 5.07 + 14.30 = 24.4 < 25 \text{ cm (ancho disponible)} \quad 7.7.1$$

bien

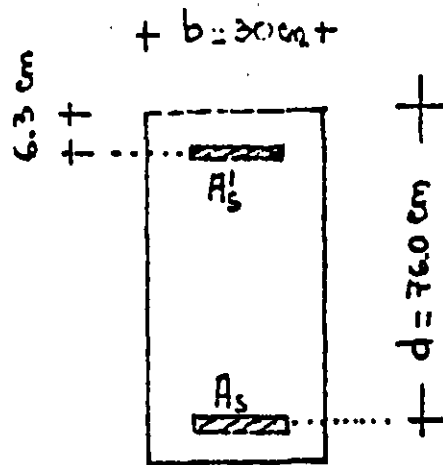
**EJEMPLO 9.2** DISEÑO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE ARMADA

Se tiene una sección transversal de una viga, con las dimensiones como se observa en la siguiente figura, y se pide calcular las cuantías de acero para resistir un momento facturado  $M_u = 124 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (exposición al exterior)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Revisión como simplemente armada (acero a tensión)

Cálculo del acero de refuerzo a tensión que se requiere, con la ayuda de la tabla 9.2:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{124 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 30 \times 76^2} = 0.2840$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.361$

Porcentaje de acero a tensión necesario:

$$p = w f'_c / f_y = 0.361 \times 0.28 / 4.2 = 0.241$$

Considerando solo refuerzo a tensión:

$$p_{\text{máx}} = 0.75 p_b$$

10.3.3

de la tabla 9.1, con  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$  (4000 lb/pulg<sup>2</sup>) y

$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  (60000 lb/pulg<sup>2</sup>):

$$p_{\text{máx}} = 0.0214$$

como  $0.0241 > 0.0214$  se necesita acero de compresión

## 2. Cálculo del acero necesario, $A_s$ y $A'_s$ :

La  $w$  máxima que se permite para vigas simplemente armadas (acero de tensión) es:

$$w \leq 0.75 \rho_b f_y / f'_c = 0.0214 \times 4.2 / 0.28 = 0.321; \text{ de la tabla}$$

9.2, con  $w = 0.321$ :

$$M_n / f'_c b d^2 = 0.2602$$

La resistencia máxima de diseño a la flexión como simplemente armada vale:

$$\begin{aligned} \phi M_n &= 0.9 (0.2602) (0.28 \times 30) (76^2) / 100 \\ &= 113.62 \text{ ton-m} \end{aligned}$$

y la resistencia necesaria tomada con el refuerzo a compresión:

$$M'_u = 124 - 113.62 = 10.38 \text{ ton-m}$$

Suponiendo que el acero a compresión fluye,  $f'_s = f_y$ :

$$p' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{M'_u}{\phi f_y (d-d') bd}$$

$$p' = \frac{10.38 \times 100,000}{0.9 \times 4200 (76 - 6.3) 30 \times 76} = 0.00173$$

$$p = 0.75 \rho_b + p' = 0.0214 + 0.00173 = 0.0231$$

NOTA: para elementos doblemente armados, el porcentaje de  $\rho_b$  con que contribuye el refuerzo de compresión no se necesita reducir por el factor de 0.75

Ver la tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento



$$A'_s = p'bd = 0.00173 \times 30 \times 76 = 3.94 \text{ cm}^2$$

$$A_s = pbd = 0.0231 \times 30 \times 76 = 52.67 \text{ cm}^2$$

Revisión de que se cumpla que el acero de compresión esté fluyendo:

$$\frac{A_s - A'_s}{bd} \geq \frac{0.85 b_1 f'_c d'}{f_y d} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0231 - 0.00173 \geq \frac{0.85 \times 0.85 \times 0.28 \times 6.3}{4.2 \times 76} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0214 \geq 0.0133$$

∴ sí fluye el acero de compresión como se supuso, bien.

3. Se puede llevar a cabo una revisión de las correcciones a los cálculos, según las ecs. de resistencia que se dan en la sección 10.3 (A) (3) de los comentarios del Reglamento. Cuando el armado a compresión fluye:

$$\phi M_n = \phi \left[ (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right]$$

$$= [0.9 \left\{ (48.79 \times 4.2) \left( 76 - \frac{28.70}{2} \right) + 3.94 \times 4.2 (76 - 6.3) \right\}] / 100$$

$$= 124.08 \text{ ton-m} \dots \dots \dots \text{bien}$$

$$\text{donde } a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{48.79 \times 4.2}{0.85 \times 0.28 \times 30} = 28.70$$

4. Distribución del acero para satisfacer el criterio de agrietamiento (por flexión) de la sección 10.6 para elementos colocados a la intemperie.

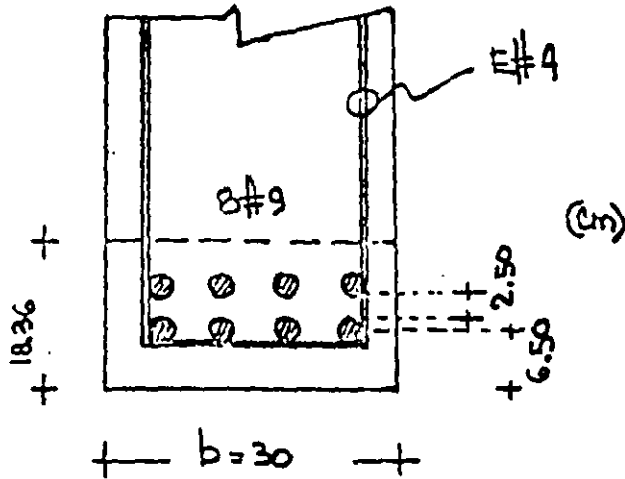
Refuerzo a tensión:

$$\text{sean 8 var. } \# 9 (A_s = 51.28 \text{ cm}^2 = 52.67 \text{ cm}^2)$$

(2% menos que lo necesario .... bien)

Acero a compresión:

sean 2 var. # 5 ( $A'_s = 3.96 \text{ cm}^2 \approx 3.94 \text{ cm}^2$ , bien)



$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{ec(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento}) + \frac{1}{2} \phi_{\text{longit.}} + \phi_{\text{estribo}} \quad 10.0$$

$$= 3.81 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm}$$

$$(\text{recubrimiento para var. \# 9} = 3.81 + 1.27 = 5.08 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

(expuesta a la intemperie)

$$A = 18.36 \times 30/8 = 68.85 \text{ cm}^2/\text{varilla} \quad 10.0$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 68.85} = 108 < 145 \quad \text{--- bien}$$

5. Revisión del ancho de viga = -

$$b = 2 \times (\text{recubrimiento}) + 4 \times 2.86 + 3 \times 2.86$$

$$= 2 \times 5.08 + 11.44 + 8.58 = 30 \text{ cm} \quad \text{--- bien}$$

6. Para el trazo desde el tamaño de carga se requiere por norma 7.10.5.2 se necesitan varillas con:

$$\text{sep. máx} \leq 16 \times 1.59 = 25.4 \text{ cm}$$

$$48 \times 1.27 = 60.9 \text{ cm}$$

$$\text{dimensión menor de la viga} = 30 \text{ cm}$$

7.10.5.2

usar E # 4 @ 25 cm

Resistencia a la compresión del patín:

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$= 0.85 \times 0.28 (75 - 25) 6.5 = 77.35 \text{ ton}$$

$A_{sf}$  necesario con que contribuye el patín:

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{77.35}{4.2} = 18.42 \text{ cm}^2$$

Contribución, a la resistencia, del patín:

$$\phi M_{nf} = \phi [A_{sf} f_y (d - 0.5 h_f)]$$

$$= 0.9 [18.42 \times 4.2 (49 - 0.5 \times 6.5)] / 100 = 31.85 \text{ t-m}$$

Momento que debe tomar el alma de la viga:

$$\phi M_{LW} = M_u - \phi M_{nf} = 55.0 - 31.85 = 23.15 \text{ ton-m}$$

3. Con la ayuda de la tabla 9.2 se calcula el área de acero  $A_{sw}$  necesario para absorber 23.15 t-m

$$\text{para } \frac{M_{LW}}{\phi f'_c b d^2} = \frac{23.15 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 25 \times 49^2} = 0.153$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.167$

$$A_w = 1.18 w d = 1.18 \times 0.167 \times 49 = 9.7 \text{ cm}$$

$$A_{sw} = \frac{0.85 f'_c b_w A_w}{f_y} = \frac{0.85 \times 0.28 \times 25 \times 9.7}{4.2} = 13.74 \text{ cm}^2$$

De igual modo,  $A_{sw}$  se puede calcular directamente de

$$A_{sw} = \frac{w f'_c b_w d}{f_y} = \frac{0.167 \times 0.28 \times 25 \times 49}{4.2} = 13.64 \text{ cm}^2$$

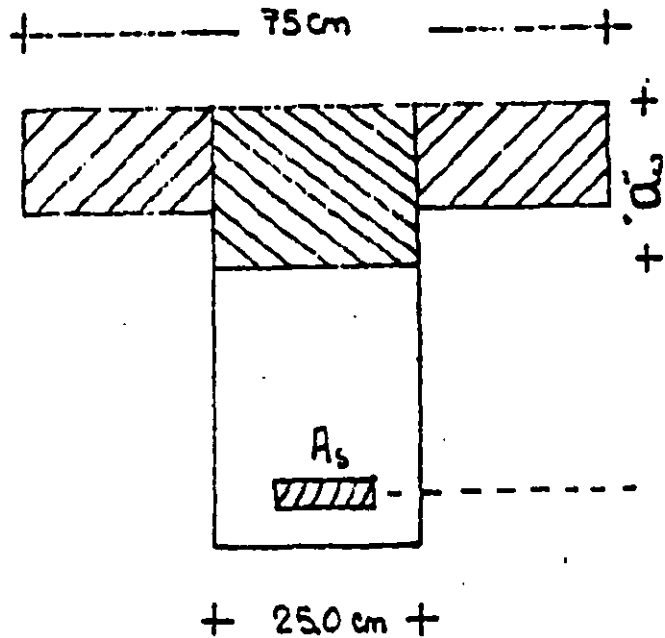
EJEMPLO 9.5 DISEÑO DE UNA SECCIÓN TIPO "T" SIMPLEMENTE ARMADA

Calcular el armado a tensión de una sección "T" que debe resistir un momento ya afectado por el factor de carga de  $M_u = 55 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (expuesta a la intemperie)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Con la ayuda de la tabla 9.2 se determina la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos,  $a$ , como sección rectangular

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{55 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 75 \times 49^2} = 0.121 \quad 9.3.2.1$$

de tabla 9.2,  $w = \rho f_y / f'_c = 0.132$

$$"a" = 1.19 w d$$

$$= 1.18 \times 0.132 \times 49 = 7.63 > 6.5 \text{ cm}$$

Como el valor de "a" necesario, como si fuera sección rectangular, es mayor que el espesor del patín, entonces el diseño debe hacerse como sección "T".

2. Cálculo del armado necesario  $A_{sf}$  y de la resistencia  $\phi M_{nf}$  con que contribuye el patín de la viga.

4. Así, el refuerzo total necesario para tomar el  $M_u = 55 \text{ ton.-m.}$   
cs

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 18.42 + 13.74 = 32.16 \text{ cm}^2$$

10.3

5. Revisión del porcentaje máximo permitido según la sección 10.3.3. Ver la fig. 10.3.2 (c) y tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento:

(2) para secciones "T" simplemente armadas:

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{b_w}{b} (\bar{p}_b + p_f) \right]$$

$$p_f = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} (b - b_w) h_f / (b_w d)$$

$$= 0.85 \frac{0.28}{4.2} (75 - 25) 6.5 / (25 \times 49) = 0.0150$$

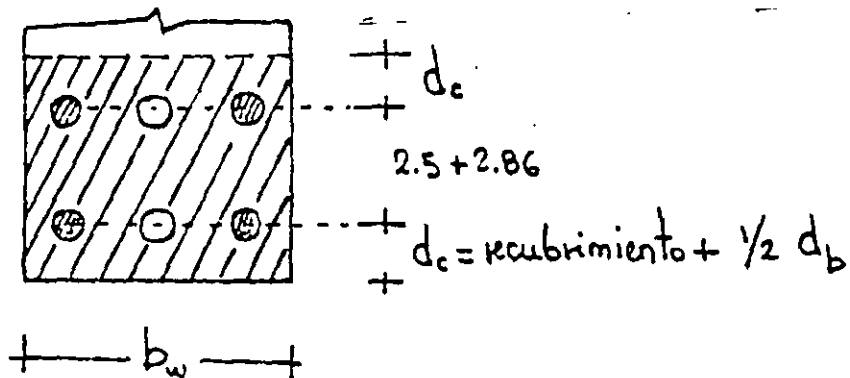
de la tabla 9.1,  $\bar{p}_b = 0.0285$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{25}{75} (0.0285 + 0.015) \right] = 0.0109$$

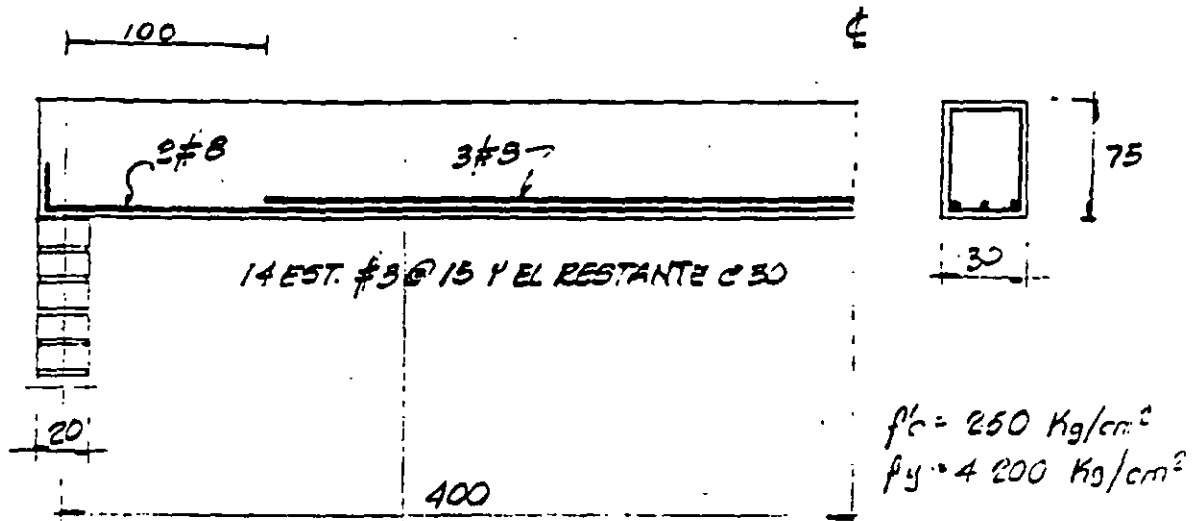
$$A_s \text{ máx} = 0.0109 \times 75 \times 49 = 40.06 \text{ cm}^2 > 32.16 \quad \text{bien}$$

6. Selección del armado tal que satisfaga el criterio de control de agrietamiento para exposición a la intemperie ( $z = 145$ )

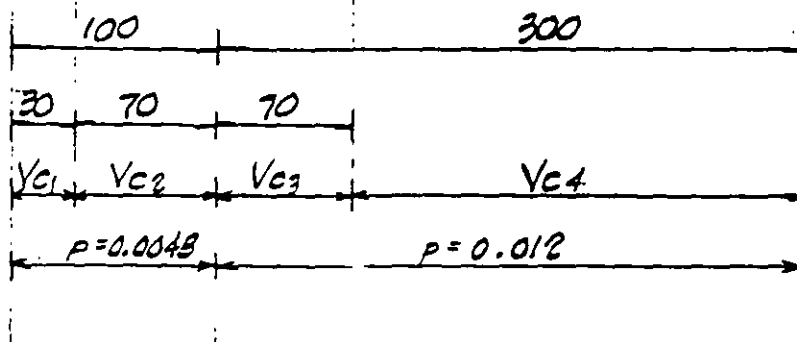
sean 4 var # 9 y 2 var # 7, ( $A_s = 33.40 \text{ cm}^2$ )



# 1.- EDIFICIO A DISTANCIA DE UNA VIGA RECTANGULAR



## A).- CONTRIBUCION DE $V_c$



(COMO  $h > 70$  REDUCIR EN UN 30% A  $V_c$  EN TODOS LOS CASOS)

- CALCULO DE  $V_{c1}$

COMO  $p = 0.0048 < 0.01$ .

$$V_{c1} = V_{ce} = [(0.2 + 30p) F_r b d \sqrt{f'_c}]^{0.7}$$

$$V_{c1} = [(0.2 + 30 \cdot 0.0048) 0.8 \times 20 \times 70 \sqrt{250}]^{0.70} = 5721.11$$

- CALCULO DE  $V_{c2}$

EN BOTE TRAMA DE INTERUMINTE MAS ES 33%

$$V_{c2} = V_{c1} \cdot 0.33$$

$$d_c = 5.08 + 1.43 = 6.50 \text{ cm}$$

área efectiva de tensión del concreto:

$$A = (2d_c + 2.5 + 2.86) b_w / \text{No. equivalente de var } \neq 9$$

$$= 18.36 \times 25 / (33.40 / 6.45) = 89.71 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.6) \sqrt[3]{d_c A} = 0.6 \times 4.2 \times 5.6 \sqrt[3]{6.5 \times 89.7}$$

$$= 118 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$

7. Revisión del ancho del alma necesario

$$b_w \text{ necesario} = 2 (\text{recubrimiento}) + 2d_{b1} + 2d_{b1}^* + d_{b2}$$

$$= 2 \times 5.08 + 4 \times 2.86 + 2.22$$

$$= 23.8 \text{ cm} < 25 \text{ cm} \quad \underline{\text{bien}}$$

\*La distancia libre entre dos varillas debe ser mayor que  $d_b$  ó 2.5 cm



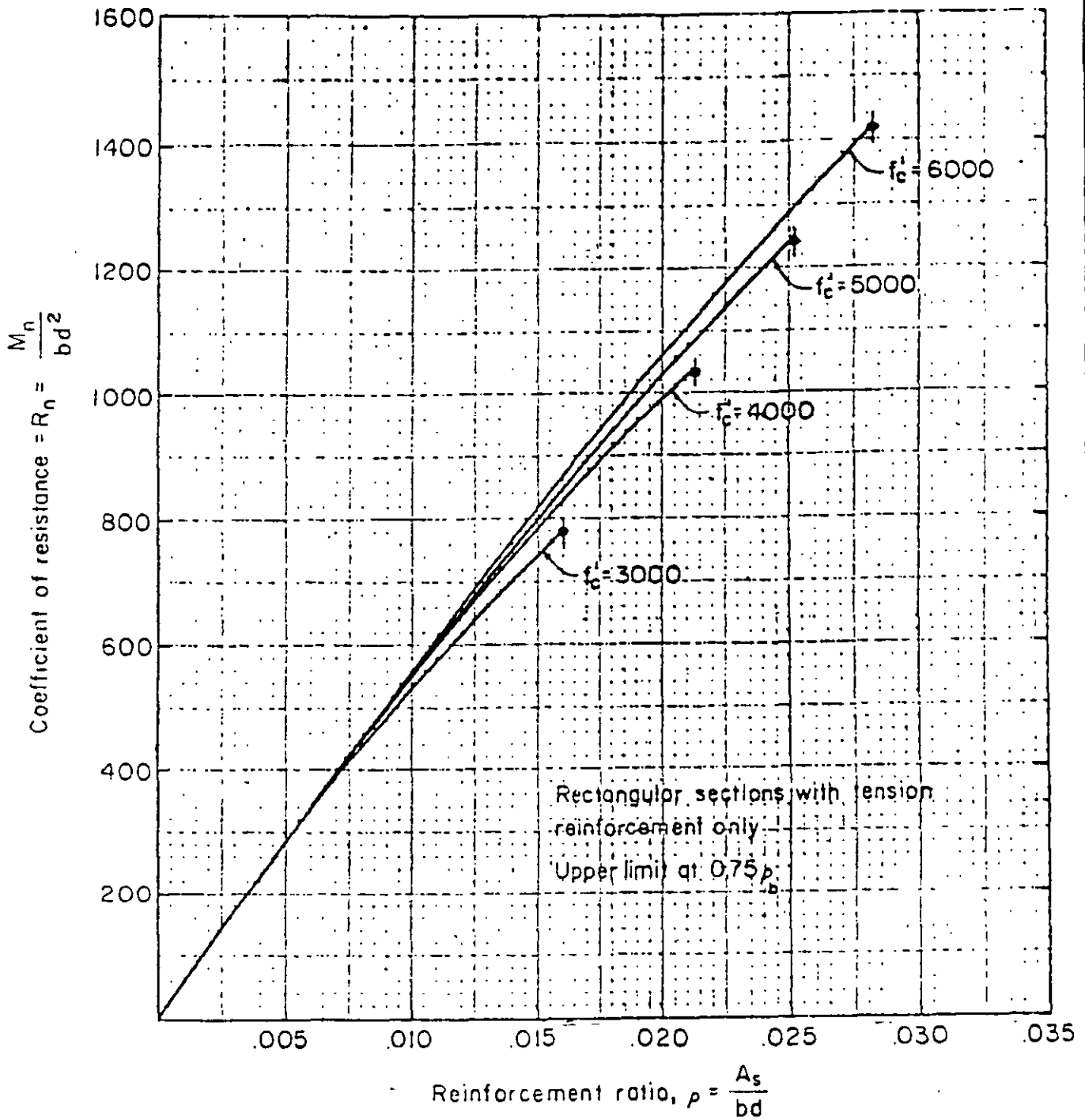


Fig. 9-1 - Strength Curves ( $R_n$  vs  $\rho$ ) for Grade 60 Reinforcement

TABLE 9-2. Moment Strength  $M_u / \phi f'_c b d^2$  or  $M_n / f'_c b d^2$  of Rectangular Sections with Tension Reinforcement Only\*

$\omega$	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
0.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
0.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
0.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
0.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0438	.0448	.0457	.0467	.0476
0.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
0.06	.0579	.0588	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
0.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0725	.0735	.0744	.0753
0.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
0.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
0.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
0.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
0.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
0.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
0.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
0.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
0.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1489	.1497	.1506	.1514	.1522
0.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
0.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
0.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
0.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
0.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
0.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
0.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
0.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
0.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
0.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
0.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
0.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
0.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
0.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
0.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
0.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
0.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
0.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
0.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
0.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
0.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
0.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
0.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051

\* $M_n / f'_c b d^2 = A_s f_y (d-a/2) / f'_c b d^2 = \omega(1-0.59\omega)$ , where  $\omega = \rho f_y / f'_c$   
 and  $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b$ .

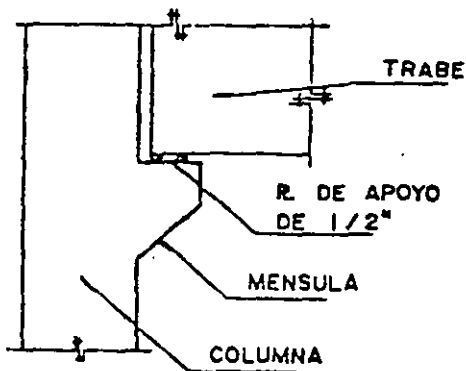
Design: Using factored moment  $M_u$  enter table with  $M_u / \phi f'_c b d^2$ ; find  $\omega$  and compute steel percentage  $\rho$  from  $\rho = \omega f'_c / f_y$ .

Investigation: Enter table with  $\omega$  from  $\omega = \rho f_y / f'_c$ ; find value of  $M_n / f'_c b d^2$  and solve for nominal moment strength,  $M_n$ .

Ejemplo:

Diseñar la ménsula mostrada en la figura con las mínimas dimensiones para soportar la trabe.

La ménsula se encuentra en una columna de 35 cm. Debido al efecto de contracción y flujo plástico restringidos se crea una fuerza de 9 ton. en el apoyo soldado.



$$f'c = 350 \text{ kg/cm}^2 \text{ (peso norm)}$$

$$fy = 4200 \text{ "}$$

Cargas

$$C.M. = 10.9 \text{ ton.}$$

$$C.V. = 17.0 \text{ ton.}$$

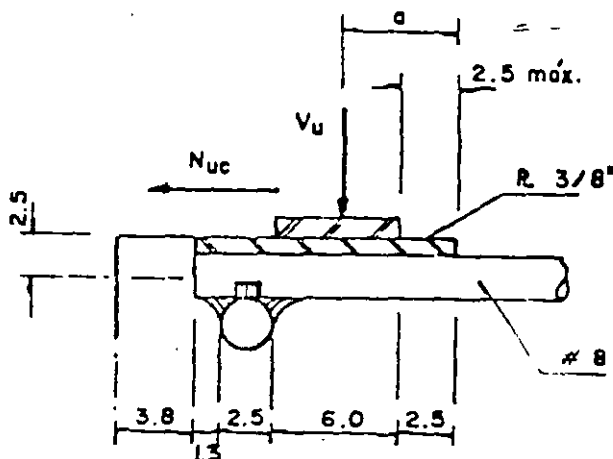
$$T = 9.1 \text{ ton.}$$

### Cálculo y Discusión

Referencia del  
Reglamento

- 1.- Dimensión del apoyo basado en la resistencia al aplastamiento de concreto de acuerdo a la sección 10.15.

El ancho del apoyo = 35 cm.



Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$V_u = 1.4 (10.9) + 1.7 (17.0) = 44.2 \text{ tons.}$$

$$V_u \leq \psi P_{nb} = \psi (0.85 f'_c A_c)$$

10.5

$$44200 = 0.70 (0.85) (350) A_c = 208.3 A_c$$

9.3.2.4

$$A_c = 44200 / 208.3 = 212.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Longitud de apoyo} = 212.2 / 35 = 6 \text{ cm.}$$

Usar un apoyo de 6 X 35 cm.

$$N_{uc} = 1.7 (9.1) = 15.5 \text{ ton. (como carga viva)}$$

11.9.3.4

2. Determinación de "a" con 2.54 cm. de holgura al final de la trabe. Considerando la reacción a un tercio de la placa de apoyo.

$$a = 2/3 (6.0) + 2.54 = 6.54 \text{ cm.}$$

Usar un a = 7 cm.

3. Determinación del peralte de la ménsula basándose en el diseño al límite por resistencia al cortante  $V_n$ .

$$\text{Para } f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2, V_n (\text{max}) = 56 \text{ bwd}$$

11.9.3.2.1

$$V_u \leq \psi V_n = \psi (56 \text{ bwd})$$

Se requiere un peralte:

$$"d" = 44200 / 0.85 (56) (35)$$

Cálculo y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$d = 26.5 \text{ cm.}$$

Suponiendo varillas #8 más la tolerancia

$$h = 26.5 + 2.54 = 29 \text{ cm.}$$

Usar h = 30 cm.

Para el diseño  $d=30-2.50=27.50 \text{ cm.}$

$$a/d = 0.26.$$

4. Determinación del refuerzo por corte-fricción  $A_{uf}$ .

$$A_{uf} = \frac{V_u}{\phi f_y \mu} = \frac{44200}{0.85(4200)(1.4)} = 8.8 \text{ cm.}$$

11.7.4.1

11.7.4.3

5. Determinación del refuerzo por momento  $A_f$ .

$$M_u = V_u a + N_u c (h-d)$$

11.9.3.3

$$= 44200(6.54) + 15500(30-27.50) = 327,820 \text{ Kg.cm}$$

$$= 3.28 \text{ Ton.m.}$$

Utilizando un método ordinario de flexión para el cálculo de  $A_f$  o usando conservadoramente  $j d = 0.9 d$ .

$$A_f = \frac{327820}{0.85(4200)(0.9)(27.50)} = 3.71 \text{ cm}^2$$

Nota: Para todos los cálculos se ha utilizado  $\phi = 0.85$

11.9.3.1

Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

6. Determinación del refuerzo por tensión directa.

$A_n$

11.9.3.4

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} = \frac{15500}{0.85(4200)} = 4.34 \text{ cm}^2$$

7. Determinación del refuerzo por tensión primaria.

$A_s$

11.9.3.5

$$(2/3) A_{uf} = (2/3) 8.8 = 5.9 \text{ cm}^2$$

$$A_f = 3.71 \text{ cm}^2 < (2/3) A_{uf}$$

$$A_s = (2/3) A_{uf} + A_n = 5.9 + 4.34 = 10.24 \text{ cm}^2$$

Usar 2 # 8

11.9.5

Verificación del refuerzo mínimo  $A_s$  -

$$p_{min} = 0.04(f'_c/f_y) = 0.04(350/4200) = 0.003$$

$$A_{smin} = 0.003(35)(27.5) = 2.88 \text{ cm}^2 < 10.24$$

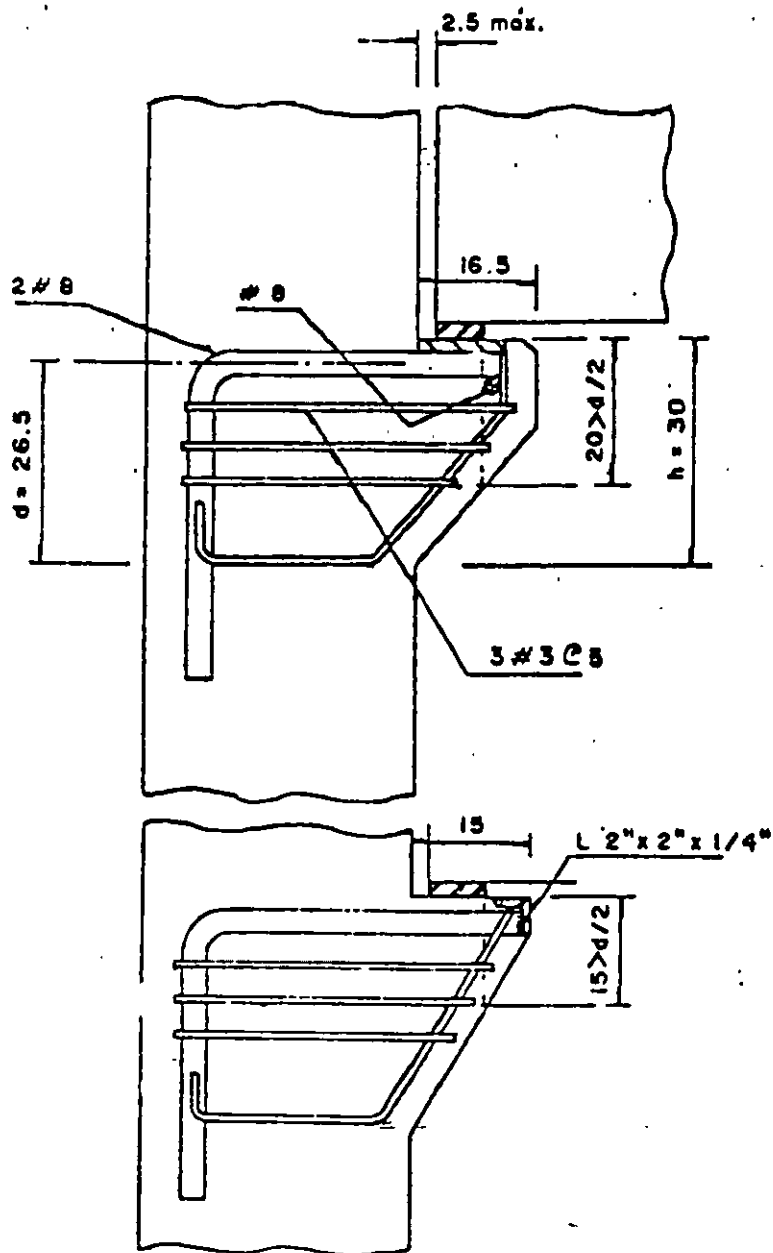
8. Determinación del refuerzo por cor--  
tante  $A_h$

11.9.4

$$A_h = 0.5(A_s - A_n) = 0.5(10.24 - 4.34) = 2.95 \text{ cm}^2$$

Usar 3 Estribos # 3 ( $A_h = 4.26 \text{ cm}^2$ )

Distribuir los estribos en 2/3 d adyacen  
tes a  $A_s$ .



### Ejemplo de muros.

Un muro de carga soporta un sistema de piso a base de vigas "T" pre fabricados separados 2.40 m.. El alma de la sección "T" es de 20 cm. y estan apoyadas por completo en el muro. La altura del muro es de 4.60 m. y se encuentra contraventeado lateralmente como se muestra en la figura.

#### Datos de Diseño

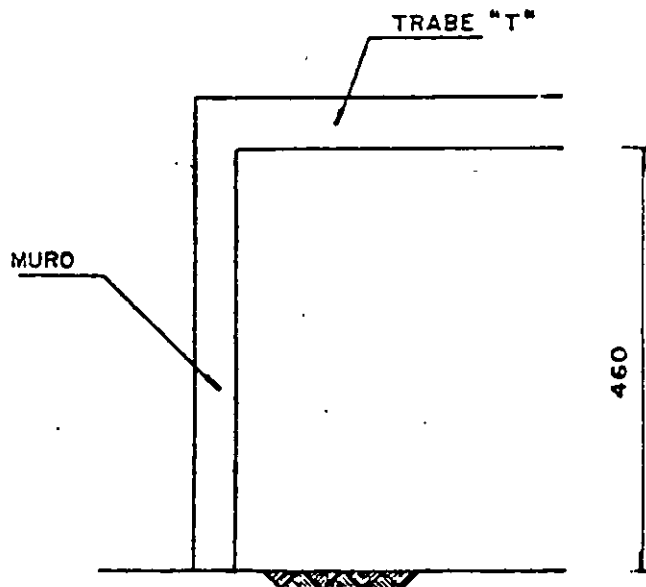
Reacciones:

$$P_{cM} = 12.7 \text{ ton.}$$

$$P_{cV} = 6.4 \text{ ton.}$$

$$f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



#### Cálculo y discusión

Referencia del  
Reglamento

El procedimiento general de diseño es de suponer un espesor del muro  $h$ , después comprobarlo con las condiciones de carga.

##### 1. Selecciones del espesor $h$

$$h > l_u/25 \text{ pero no menor de } 10 \text{ cm.}$$

14.5.3.1

$$> 4.6/25 = 0.18 \text{ m.}$$

Se probará con  $h = 19 \text{ cm.}$



## Cálculo y Discusión

Referencia  
Reglamento

### 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec.(9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

### 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Área cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\psi (0.85 f'_c A_c) = 0.70(0.85)(280)(338.2) \\ = 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

### 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\psi P_{n\omega} = 0.55 \psi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k_1 \bar{c}}{32h} \right)^2 \right] \\ = 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right] \\ = 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.}$$

Ec. (14-1)

$$P_u < \psi P_{n\omega}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentrici

## 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec. (9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

## 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Area cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\phi (0.85 f'_c A_c) = 0.70(0.85)(280)(338.2)$$

$$= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

## 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\phi P_{n_w} = 0.55 \phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{kl_c}{32h} \right)^2 \right]$$

Ec. (14-1)

$$= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right]$$

$$= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.}$$

$$P_u < \phi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentri

acidad de carga.

5. Selección de refuerzo

Proporcionando refuerzo en una sola cara

Acero horizontal  $A_s = 0.0020 \times 19 \times 100 = 3.8 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.3

Acero vertical  $A_s = 0.0012 \times 19 \times 100 = 2.3 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.2

$S = 3h$ , pero no mayor a 45 cm. 7.6.5

$= 3 \times 19 = 57 > 45$  ( $S = 45 \text{ cm}$ )

horizontal  $A_s$  - usar # 4 @ 30 cm.

vertical  $A_s$  - usar # 4 @ 45 cm.

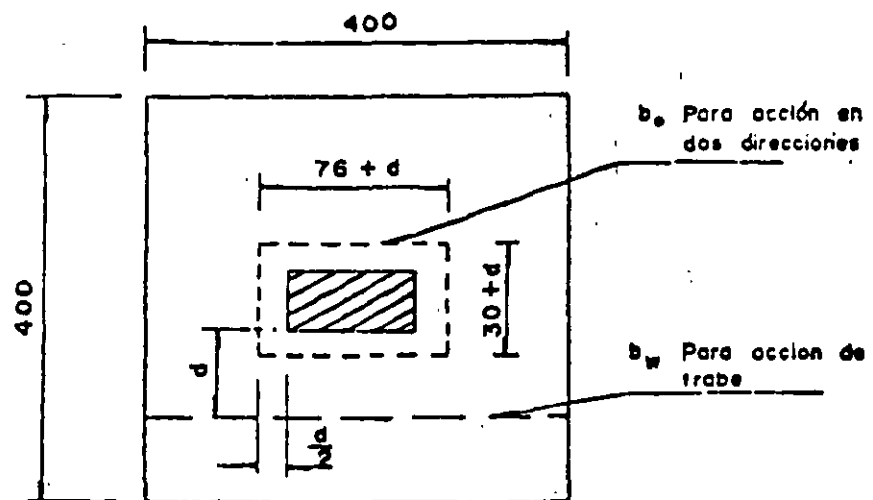
Ejemplo de Zapatas:

Determinar el espesor de la losa de la zapata que se muestra en la figura:

$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$Pu = 435 \text{ ton.}$$

$$qs = 27.9 \text{ ton/m}^2$$



Cálculo y Diseño

Referencia del reglamento

Determinar el peralte para resistir el cortante sin refuerzo. Debe investigarse la acción de viga y la acción en dos direcciones. Supondremos un espesor total de 84 cm.  $d = 70$  cm.

11.11

1. Acción de trabe

11.11.1.1

$$Vu \leq \psi Vn$$

Ec(11-1)

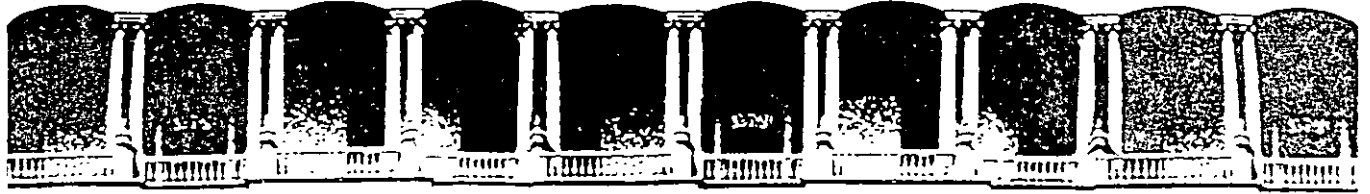
$$Vu \leq \psi (0.53 \sqrt{f'c}) b_w d$$

Ec.(11-3)

$$Vu = 27.9 (4.0) (1.80 - 0.35) = 162 \text{ ton}$$

$$b_w = 4.0 \text{ m.}$$

$$Vu \leq 0.85 (0.53) \sqrt{210} (400) (70) = 345 \text{ ton}$$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**TORSION**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

El material que contiene esta sección  
fue traducido y adaptado del capítulo  
7, Torsión, de "Reinforced Concrete".  
Edward G. Nawy. Prentice Hall, Inc.,  
1985. Págs. 195-226.

## TORSION

### 7.1 INTRODUCCION

En las construcciones monolíticas de concreto, la torsión ocurre principalmente cuando la carga actúa a cierta distancia del eje longitudinal del elemento estructural. Una viga en el extremo de un tablero de piso, una viga de borde que recibe la carga de un solo lado, una marquesina, o una cubierta para parada de autobuses que se proyecta de una viga monolítica apoyada en columnas, vigas periféricas que circundan la abertura en un piso, o una escalera helicoidal, son ejemplos de elementos estructurales sujetos a momentos de torsión. Ocasionalmente, estos momentos provocan esfuerzos cortantes excesivos. Como resultado, puede desarrollarse un severo agrietamiento superior a los límites de serviceabilidad admisibles, a menos que se dote de un refuerzo especial para torsión. Las fotos 40 y 41 ilustran la cuantía del agrietamiento en la falla de una viga sujeta a torsión. Muestran el plano curvilíneo de torsión provocado por los momentos torsionantes impuestos. En las vigas de borde de un sistema estructural, normalmente no es tan severa la magnitud del daño debida a la torsión como se aprecia en las fotos 42 y 43. Ello se debe a la redistribución de esfuerzos en la estructura. Sin embargo, deberá siempre evitarse la pérdida de integridad debida a los esfuerzos torsionantes, mediante un diseño apropiado del refuerzo necesario para torsión.

La introducción al tema de la distribución de los esfuerzos de torsión debe iniciarse con el comportamiento elástico básico de las secciones sencillas, tales como las circulares y las rectangulares. La mayoría de las vigas de concreto sujetas a torsión son componentes de rectángulos. Estas son normalmente, secciones con patines, tales como las vigas en T o en L. Aun cuando las secciones circulares rara vez se consideran en la construcción normal de concreto, un comentario breve respecto de estas secciones circulares constituye una buena introducción al comportamiento torsional de otros tipos de secciones.

En las secciones circulares, al nivel elástico, el esfuerzo cortante es igual a la deformación unitaria de cortante multiplicada por el módulo de cortante. Igual que en el caso de la flexión, el esfuerzo es proporcional a su distancia al eje neutro (esto es: el centro de la sección circular) y es máximo en las fibras extremas. Si  $r$  es el radio del elemento,  $J = \pi r^4/2$ , su momento polar de inercia, y  $v_{te}$  el esfuerzo cortante elástico debido a un momento de torsión elástico  $T_e$ ,

$$v_{te} = \frac{T_e r}{J} \quad (a)$$

Cuando tiene lugar la deformación en la barra circular, se supone que el eje del cilindro circular permanece recto. Todos los radios de una sección transversal también permanecen rectos (esto es: sin alabearse) y giran el mismo ángulo respecto al eje. Cuando el elemento circular empieza a tener un comportamiento plástico, el esfuerzo en el anillo plástico exterior se conserva constante, en tanto que el esfuerzo en el núcleo interior permanece elástico, como se muestra en la Fig. 7.1. Cuando toda la sección transversal se plastifica,  $b = 0$  y el esfuerzo cortante

$$v_{tf} = \frac{3 T_p r}{4 J} \quad (b)$$

donde  $v_{tf}$  es el esfuerzo cortante no lineal debido a un momento de torsión  $T_p$ , donde el índice  $f$  denota falla.

En las secciones rectangulares, el problema de la torsión es considerablemente más complicado. Las secciones planas originales experimentan un alabeo debido al momento torsionante aplicado. Este momento produce esfuerzos cortantes axiales así como circunferenciales, con valor cero en las esquinas de la sección y el centroide del rectángulo, y valores máximos en la periferia al centro de los lados, como se aprecia en la Fig. 7.2. El esfuerzo cortante torsional máximo ocurrirá en los puntos medios A y B de la mayor dimensión de la sección transversal. Estas complicaciones, además del hecho de que las secciones de concreto reforzado no son ni homogéneas ni isótropas, hacen difícil desarrollar formulaciones matemáticas exactas basadas en modelos físicos tales como las ecuaciones (a) y (b) para secciones circulares.

Por más de 60 años, el análisis torsional de los elementos de concreto se ha basado, en ya sea, (1) la teoría clásica de la elasticidad desarrollada a través de formulaciones matemáticas asociadas a las verificaciones de la analogía con la membrana (St. Venant), o (2) la teoría de la plasticidad representada por la analogía con el montón de arena (Nadai). Ambas teorías fueron esencialmente aplicadas al estado de torsión pura. Pero se descubrió experimentalmente que la teoría plástica no es enteramente satisfactoria para la predicción precisa del estado de esfuerzos del concreto en torsión pura. Se encontró que el comportamiento del concreto se representa mejor mediante el enfoque plástico. Consecuentemente, casi todos los desarrollos de la torsión aplicados al concreto y el concreto reforzado han tenido lugar en esta última dirección.



## 7.2 TORSION PURA EN LOS ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE

### 7.2.1 Torsión en los Materiales Elásticos

En 1853 St. Venant presentó su solución al problema torsional elástico con alabeo debido a la torsión pura que se desarrolla en las secciones no circulares. En 1903, Prandtl demostró el significado físico de las formulaciones matemáticas mediante su modelo de la analogía con la membrana. El modelo establece relaciones particulares entre la superficie deformada de la membrana cargada y la distribución de los esfuerzos torsionantes en una barra sujeta a momentos de torsión. La Fig. 7.3 muestra el comportamiento de la analogía con la membrana para formas rectangulares y en L.

Para pequeñas deformaciones, puede demostrarse que la ecuación diferencial de la superficie de la membrana deformada tiene la misma forma que la ecuación que determina la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la barra sujeta a esfuerzos de torsión. En forma similar, se puede demostrar que (1) la tangente a la línea de contorno en un punto cualquiera de la membrana deformada proporciona la dirección del esfuerzo cortante en la correspondiente sección transversal de la membrana real sujeta a torsión; (2) la pendiente máxima de la membrana en cualquier punto es proporcional a la magnitud del esfuerzo cortante en el punto correspondiente en el elemento real; (3) el momento de torsión al que está sujeto el miembro real es proporcional al doble del volumen bajo la membrana deformada.

Puede verse en las Figs. 7.2 y 7.3b que el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de contorno. Mientras más próximas entre sí se encuentren las líneas, mayor es el esfuerzo, llevando a la conclusión antes expresada que el esfuerzo máximo de torsión ocurre al centro del lado mayor del rectángulo. De la analogía con la membrana, el esfuerzo máximo tiene que ser proporcional a la pendiente más pronunciada de las tangentes en los puntos A y B.

Si  $\delta$  = desplazamiento máximo de la membrana a partir de la tangente en el punto A, entonces de los principios básicos de la mecánica de la teoría de St. Venant,

$$\delta = b^2 G \theta \quad (7.1a)$$

donde  $G$  es el módulo de cortante y  $\theta$  es el ángulo de torsión. Pero  $v_{t(\max)}$  es proporcional a la pendiente de la tangente; por tanto:

$$v_{t(\max)} = k_1 b G \theta \quad (7.1b)$$

donde las  $k$  son constantes. El correspondiente momento torsionante  $T_e$  es proporcional al doble del volumen bajo la membrana, o

$$T_e \propto 2(2/3 \delta bh) = k_2 \delta bh$$

o

$$T_e = k_3 b^3 h G \quad (7.1c)$$

De las Ecs. 7.1b y 7.1c,

$$v_{t(\max)} = \frac{T_{eb}}{kb^3h} \approx \frac{T_{eb}}{J_1} \quad (7.1d)$$

El denominador  $kb^3h$  en la Ec. 7.1d representa el momento polar de inercia  $J$  de la sección. La comparación de la Ec. 7.1d con la Ec. (a) para la sección circular muestra la similitud de las dos expresiones, excepto que el factor  $k$  de la ecuación para la sección rectangular toma en cuenta las deformaciones unitarias debidas al alabeo. La ecuación 7.1d puede simplificarse más aún para quedar:

$$v_{t(\max)} = \frac{T_e}{kb^2h} \quad (7.2)$$

También puede establecerse para proporcionar el esfuerzo en los planos dentro de la sección, tal como un rectángulo concéntrico de dimensiones  $x$  y  $y$ , donde  $x$  es el lado más corto, de tal manera que:

$$v_{t(\max)} = \frac{T_e}{kx^2y} \quad (7.3)$$

Al usar el enfoque de la analogía con la membrana, es importante notar que el esfuerzo cortante torsionante cambia de un punto a otro a lo largo del mismo eje como AB en la Fig. 7.3, a causa de la pendiente cambiante de la membrana análoga, tornando largos los cálculos para el esfuerzo cortante torsional.

### 7.2.2 Torsión en los Materiales Plásticos

Como se ha indicado antes, la analogía plástica del montón de arena proporciona una mejor representación del comportamiento de los elementos frágiles, tales las vigas de concreto sujetas a torsión pura. El momento torsional es también proporcional al doble del volumen bajo el montón y el esfuerzo cortante torsional máximo es proporcional a la pendiente del montón de arena. La figura 7.4 es una ilustración bi y tridimensional del montón de arena. El momento torsionante  $T_p$  en la Fig. 7.4d es proporcional al doble del volumen del montón rectangular que se muestra en las partes (b) y (c). También puede reconocerse que la pendiente de los lados del montón de arena como una medida del esfuerzo cortante torsional es

constante en el enfoque de la analogía con el montón de arena, en tanto que es continuamente variable en el de la analogía con la membrana. Esta característica del montón de arena simplifica las soluciones considerablemente.

### 7.2.3. La Analogía del Montón de Arena Aplicada a las Vigas en L

La mayoría de los elementos de concreto sujetos a torsión son secciones con patines, más comúnmente las vigas en L que comprenden las vigas externas de un piso estructural. Se elige la viga en L de la Fig. 7.5 para aplicar el enfoque del montón de arena plástico para evaluar su capacidad al momento torsionante y los esfuerzos cortantes a los que está sujeta.

El montón de arena se reparte en tres volúmenes:

$V_1$  = La pirámide que representa una forma cuadrada de la sección transversal =  $y_1 b_w^2 / 3$

$V_2$  = La porción en pabellón del alma que representa una forma rectangular de la sección transversal =  $y_1 b_w (h - b_w) / 2$

$V_3$  = El pabellón que representa el patín de la viga, transfiriendo la parte PDI a NQM =  $y_2 h_f (b - b_w) / 2$

El momento torsionante es proporcional al doble del volumen de los montones arena; por consiguiente:

$$T_p \approx 2 \left[ \frac{y_1 b_w^2}{3} + \frac{y_1 b_w (h - b_w)}{2} + \frac{y_2 h_f (b - b_w)}{2} \right] \quad (7.4)$$

También, el esfuerzo cortante torsional es proporcional a la pendiente de los montones de arena; por lo tanto:

$$y_1 = \frac{v_t b_w}{2} \quad (7.5a)$$

$$y_2 = \frac{v_t h_f}{2} \quad (7.5b)$$

Substituyendo  $y_1$  y  $y_2$  de las Ecs. 7.5a y 7.5b, en la Ec. 7.4, se obtiene:

$$v_{t(\max)} = \frac{T_p}{(b_w^2/6)(3h - b_w) + (h_f^2/2)(b - b_w)} \quad (7.6)$$

Si tanto el numerador como el denominador de la Ec. 7.6 se dividen por  $(b_w h)^2$  y se arreglan los términos, se obtiene:

$$v_{t(\max)} = \frac{T_p h (b_w h)^2}{[1/6(3 - b_w/h)] + \frac{1}{2}(h_f/b_w)2(b/h - b_w/h)} \quad (7.7a)$$

si se supone que  $C_t$  es el denominador en la Ec. 7.7a y  $J_E = C_t (b_w h)^2$ , la Ec. 7.7a se convierte en

$$v_{t(\max)} = \frac{T_p h}{J_E} \quad (7.7b)$$

donde  $J_E$  es el momento polar de inercia equivalente y una función de la forma de la sección polar transversal de la viga. Nótese que la Ec. 7.7b es similar en forma a la Ec. 7.1d de la analogía con la membrana, excepto por los valores diferentes de los denominadores  $J$  y  $J_E$ . La ecuación puede de esa forma aplicarse a secciones rectangulares haciendo que  $h_f = 0$ .

También debe reconocerse que el concreto no es un material perfectamente plástico; por consiguiente, la resistencia real a la torsión de la sección de concreto simple tiene un valor que yace entre los valores de las analogías con la membrana y la del montón de arena.

La ecuación 7.7b puede establecerse de nuevo designando  $T_p = T_c$  como la resistencia nominal a la torsión del concreto simple y  $v_{t(\max)} = v_{tc}$ , empleando la terminología del ACI, de tal manera que

$$T_c = k_2 b^2 h v_{tc} \quad (7.8a)$$

$$T_c = k_2 x^2 y v_{tc} \quad (7.8b)$$

donde  $x$  es la menor dimensión de la sección rectangular.

El extenso trabajo de Hsu y confirmado por otros, ha establecido que  $k_2$  se puede tomar igual a  $1/3$ . Este valor se originó en la investigación de la teoría de la flexión oblicua del concreto simple. También se estableció que  $1.59\sqrt{f'_c}$  se puede considerar como el valor límite de la resistencia a la torsión pura de un miembro sin refuerzo a la torsión. Utilizando un factor de reducción de 2.5 para la carga torsional en la primera grieta,  $v_{tc} = 0.64\sqrt{f'_c}$ , e introduciendo  $k_2 = 1/3$  en la Ec. 7.8, resulta

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} x^2 y \quad (7.9)$$

donde  $x$  es el lado más corto de la sección rectangular. El alto factor de reducción de 2.5 tiene por objeto compensar algún efecto de los momentos flexionantes que pudiese estar presente.

Si la sección transversal es en T o en L, el área se puede descomponer en rectángulos, como en la Fig. 7.6, tal que

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y \quad (7.9b)$$

### 7.3 TORSION EN LOS LOS ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

En las estructuras de concreto rara vez ocurre la torsión sin estar acompañada por la flexión y el cortante. Los párrafos precedentes deberán proporcionar un antecedente suficiente de la contribución del concreto simple en la sección, en lo que concierne a que resistan parte de los esfuerzos combinados que resultan de las fuerzas; de torsión, axiales, de cortante, o de flexión. La capacidad del concreto simple para resistir la torsión cuando está combinada con otras cargas podría, en muchos casos, ser menor a cuando resiste sólo, los mismos momentos factorizados de torsión externa.

La inclusión de refuerzo longitudinal y transversal para resistir parte de los momentos torsionantes, introduce un nuevo elemento en el conjunto de fuerzas y momentos que actúan en la sección. Si

$T_n$  = la resistencia torsional nominal total requerida de la sección incluyendo el refuerzo

$T_c$  = la resistencia torsional nominal del concreto simple

$T_s$  = la resistencia torsional del refuerzo

Entonces

$$T_n = T_c + T_s \quad (7.10a)$$

o

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.10b)$$

Con objeto de estudiar la contribución de las varillas longitudinales de acero de tal manera que  $T_s$  pueda evaluarse, se tiene que analizar el sistema de fuerzas que actúan en las secciones transversales alabeadas del elemento estructural en el estado límite de falla. Básicamente, en la actualidad hay dos caminos aceptables:

1. La teoría de la flexión oblicua, que se basa en el enfoque de la deformación plana para las secciones planas sujetas a flexión y torsión.

2. La teoría de la analogía con la armadura y su extensión como teoría del campo de la compresión. Se aplica a los estribos para torsión, una analogía con la armadura modificada comparable a la utilizada en el diseño de los estribos para cortante.

### 7.3.1 La Teoría de la Flexión Oblicua

Esta teoría considera en detalle el desempeño de deformación interno de la serie de superficies transversalmente alabeadas a lo largo de la viga. Inicialmente propuesta por Lessig, ha tenido contribuciones subsecuentes de Collins, Hsu, Zia, Gesund, Mattock, y Elfgren, entre los diversos investigadores en este campo. T.T.C. Hsu hizo una contribución experimental importante para el desarrollo de la teoría de la flexión oblicua tal como se encuentra en la actualidad.

En su reciente libro (Ref. 7.12), Hsu detalla el desarrollo de la teoría de la torsión aplicada a las estructuras de concreto y de cómo la teoría de la flexión oblicua formó las bases de las actuales disposiciones para la torsión del reglamento ACI. La complejidad del problema torsional puede permitir en este libro de texto, tan sólo el siguiente breve comentario.

La superficie de falla de la sección transversal normal de una viga sujeta al momento flexionante  $M_u$ , permanece plana después de flexionarse, como se muestra en la Fig. 7.7a. Si el momento de torsión  $T_u$  se aplica también, excediendo la capacidad de la sección, se desarrollan grietas en los tres lados de la sección transversal de la viga y esfuerzos de compresión en porciones del cuarto lado a lo largo de la viga. Al continuar la carga torsional al estado límite en la falla, resulta una superficie oblicua de falla, debida a la combinación de los momentos; el torsionante  $T_u$  y el flexionante  $M_u$ . El eje neutro de la superficie oblicua y el área sombreada en la Fig. 7.7b que denota la zona de compresión, no continuarán rectos, sino que subtienden un ángulo  $\theta$  variable con el plano original de la sección transversal.

Antes del agrietamiento, ni las varillas longitudinales ni los estribos cerrados dan una contribución apreciable a la rigidez torsionante de la sección. En la etapa de carga posterior al agrietamiento se reduce la rigidez de la sección, pero se incrementa considerablemente su resistencia a la torsión, dependiendo de la cantidad y la distribución, tanto de las varillas longitudinales, como de los estribos cerrados. Debe subrayarse que sólo puede lograrse una poca resistencia torsional adicional a la capacidad del concreto simple en la viga, a menos que se empleen tanto varillas longitudinales, como estribos transversales.

La teoría de la flexión oblicua idealiza la zona de compresión considerándola de un peralte uniforme. Supone que las grietas en las restantes tres caras de la sección transversal están separadas uniformemente, con los estribos de acero en esas caras, soportando las fuerzas de tensión en las grietas y las varillas longitudinales resistiendo el cortante a través de acción de espiga con el concreto. La Fig. 7.8a muestra las fuerzas que actúan en el plano flexionado oblicuamente. El polígono de la Fig. 7.8b da la resistencia al cortante  $F_c$  del concreto, la fuerza  $T_1$  de las varillas de acero longitudinales activas en la zona de compresión, y el bloque de la fuerza normal de compresión  $C_c$ .

El momento torsionante  $T_c$  de la fuerza cortante resistente  $F_c$  generada por el área sombreada del bloque de compresión en la Fig. 7.8a, es por lo tanto:

$$T_c = \frac{F_c}{\cos 45^\circ} \quad \text{X su brazo respecto a las fuerzas } F_v \quad \text{en la Fig. 7.8a}$$

o

$$T_c = \sqrt{2} F_c (0.8x) \quad (7.11a)$$

en que  $x$  es el lado más corto de la viga. Pruebas extensas (Refs. 7.9 y 7.12) para evaluar  $F_c$  en términos del esfuerzo interno en el concreto,  $k_1 f'_c$ , y las constantes torsionales geométricas de la sección,  $k_2 x^2 y$ , llevaron a la expresión

$$T_c = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} \quad (7.11b)$$

Las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  se suponen proporcionales a las áreas de la sección transversal de estas varillas. Si se establece una relación entre la proporción de la resistencia dada por las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  y la resistencia torsional de las fuerzas  $F_c$  de los anillos, los momentos torsionantes serán las sumas

$$\Sigma F_v (\frac{1}{2} x_1), \quad \Sigma F_x (\frac{1}{2} y_0), \quad \Sigma F_y (\frac{1}{2} x_0), \quad \Sigma T_1 (\frac{1}{2} x_0)$$

Las dimensiones  $x_1$  y  $y_1$  son, respectivamente, la menor y la mayor dimensión centro a centro de los estribos rectangulares cerrados, y las dimensiones  $x_0$  y  $y_0$  son las correspondientes dimensiones centro a centro de las varillas longitudinales en las esquinas de los estribos. La expresión resultante para la resistencia torsional,  $T_s$ , suministrada por los anillos y el acero longitudinal en la sección rectangular, es

$$T_s = \alpha_1 \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.12)$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33 y_1 / x_1$ , de tal manera que el momento torsionante nominal de resistencia, es  $T_n = T_c + T_s$ , o

$$T_n = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} + (0.66 + 0.33 \frac{y_1}{x_1}) \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.13)$$

### 7.3.2 La Teoría de la Analogía con la Armadura en el Espacio

Esta teoría originalmente fue desarrollada por Ramsch y más tarde expandida por Lampert y Collins, con trabajo adicional de Hsu,

Thurliman, Elfgren, y otros. Un refinamiento posterior fue introducido por Collins y Mitchell (Ref. 7.11) como una teoría del campo de compresión. La analogía con la armadura en el espacio es una extensión del modelo usado en el diseño de los estribos que resisten cortante, en la que las grietas de tensión diagonal, una vez que empiezan a desarrollarse, son resistidas por los estribos. A causa de la forma no plana de las secciones transversales debida al momento de torsión, se utiliza como miembros a tensión diagonal, una armadura en el espacio compuesta por los estribos, y las fajas idealizadas de concreto a 45° entre las grietas se utilizan como los miembros a compresión, como se muestra en la Fig. 7.9.

En esta teoría se supone que la viga de concreto se comporta en torsión en forma similar a un cajón de paredes delgadas con un flujo de cortante constante en la sección transversal de la pared, produciendo un momento torsionante constante. El uso de secciones huecas en las paredes en vez de sólidas, demostró que se obtiene esencialmente el mismo momento torsionante último, siempre que las paredes no sean demasiado delgadas. Tal conclusión sale a relucir a partir de los ensayos que han mostrado que la resistencia a la torsión de las secciones sólidas está compuesta de la resistencia de la jaula de estribos cerrados, que consisten de barras longitudinales y estribos cerrados, y los idealizados puntales a compresión inclinados de concreto en el plano de las paredes de la jaula. Los puntales a compresión son las fajas inclinadas de concreto entre las grietas en la Fig. 7.9.

El reglamento CEB-FIP se basa en el modelo de la armadura en el espacio. En este código, el espesor efectivo de la viga hueca se toma como  $1/6 D_o$ , donde  $D_o$  es el diámetro del círculo inscrito en el rectángulo que conecta las varillas longitudinales de las esquinas, o sea,  $D_o = x_o$  en la Fig. 7.9. En resumen, la ausencia del núcleo no afecta la resistencia en torsión de tales miembros, de ahí la aceptación del enfoque de la analogía con la armadura espacial basada en secciones huecas.

Si el flujo de cortante en las paredes de la sección en cajón es  $\tau t$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante, y  $F$  es la fuerza de tensión en cada varilla longitudinal en las esquinas, la ecuación del equilibrio de fuerzas sería

$$4F = 2 \frac{\tau t x_o}{\tan \phi} + 2 \frac{\tau t y_o}{\tan \phi} \quad (7.14)$$

y los momentos debidos a las fuerzas del flujo de cortante serían

$$T_n = \tau t y_o x_o + \tau t x_o y_o \quad (7.15)$$

Si  $A_t$ , es el área de la sección transversal del estribo, y  $f_y$  es la resistencia de fluencia del estribo con separación a una distancia  $s$ , entonces

$$A_t f_y = \tau t s \tan \phi \quad (7.16a)$$



También, si  $A_1$  es el área total de las cuatro varillas longitudinales en las esquinas,

$$F = \frac{1}{4} A_1 f_y \quad (7.16b)$$

Resolviendo las Ecs. (7.14), (7.15), y (7.16a), se llega a

$$T_n = 2x_o y_o \sqrt{\frac{A_1 f_y A_t f_y}{2s(x_o + y_o)}} \quad (7.17)$$

Para el caso de volúmenes iguales de acero longitudinal y estribos transversales (esto es:  $\phi = 45^\circ$ ) el momento torsionante de resistencia  $T_n$  en la falla, sería

$$T_n = 2 \frac{A_t f_y}{s} x_o y_o \quad (7.18)$$

Nótese la similitud de la forma de la Ec. 7.12 desarrollada para la teoría de la flexión oblicua, con la de Ec. 7.18, desarrollada por la teoría de la analogía con la armadura espacial.

#### 7.4 DESEMPEÑO DEL CONCRETO BAJO LA ACCION COMBINADA DE TORSION, CORTANTE Y FLEXION

##### 7.4.1 Torsión y Cortante Combinados

Hasta ahora, esta discusión ha presentado el mecanismo resistente interno y las fuerzas acompañantes, momentos y esfuerzos en el concreto simple y en el refuerzo, cuando un elemento estructural unidimensional está sujeto a momentos torsionantes. Cuando la torsión externa está acompañada por cortante externo, la misma sección está sujeta a mayores esfuerzos cortantes debido al efecto combinado de los dos tipos de cargas al interactuar una con otra. La resistencia de una viga a la torsión y cortante combinados es menor que su resistencia a alguno de estos dos parámetros actuando solos. Consecuentemente, se torna necesaria una relación de interacción en una manera similar a la desarrollada para la combinación de la flexión y la carga axial, discutida en el Capítulo 9. La figura 7.10 representa la siguiente expresión no dimensional de interacción que relaciona la torsión al cortante:

1. Miembro sin acero en el alma:

$$\left( \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{V_c}{V_{c0}} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.19a)$$

$T_c$  y  $V_c$  son la torsión y el cortante nominal externos cuando actúan simultáneamente.  $T_{c0}$  y  $V_{c0}$  son los valores nominales para la torsión y el cortante cuando cada uno actúa separadamente.

2. Miembros reforzados, para la combinación de torsión y cortante:

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} + \frac{V_n}{V_{n0}} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.19b)$$

$T_n$  y  $V_n$  representan las resistencias nominales de torsión y cortante para resistir  $T_u$  y  $V_u$  cuando actúan simultáneamente.  $T_{n0} = T_c + T_s$  representa la resistencia torsional nominal del alma reforzada cuando la torsión pura actúa sola en la sección;  $V_{n0} = V_c + V_s$  representa la resistencia nominal al cortante del alma reforzada cuando el cortante solo actúa en la sección. La ecuación 7.19a se puede anotar de nuevo utilizando el valor aproximado de  $T_c$  de la Ec. 7.11b y  $V_c$  de la Ec. 6.9 para el alma sin reforzar:

$$\left( \frac{T_c}{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_c}{0.5\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.20)$$

En el caso del alma reforzada sujeta a torsión y cortante combinados, tiene que establecerse un límite superior para  $T_{n0}$  y  $V_{n0}$  para asegurar que el refuerzo del alma fluya en el estado límite de falla. Con base en los resultados de ensayos,

$$T_{n0} \leq 3.2\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \quad \text{y} \quad V_{n0} \leq 2.7\sqrt{f'_c} b_w d$$

Consecuentemente, la Ec. 7.19b se transforma en

$$\left( \frac{T_n}{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_n}{2.7\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.21)$$

Al comparar las Ecs. 7.20 y 7.21 puede verse que  $T_n = 5T_c$ . El Reglamento ACI simplifica el procedimiento al requerir que

$$T_s \leq 4T_c \quad (7.22)$$

pues de otra manera, la sección deberá incrementarse.

### 7.4.2 Torsión y Flexión Combinadas

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce drásticamente. Como resultado, el agrietamiento debido al esfuerzo cortante torsional se genera a niveles bajos de la carga. La figura 7.11c muestra el vector resultante  $R_u$  para los momentos de flexión y torsión combinados que provocan el alabeo de la sección, como se muestra en la Fig. 7.7b.

De manera similar al caso de la torsión y el cortante combinados, se establece una relación de interacción relacionando la torsión con la flexión cuando ambas actúan simultáneamente. Tiene que suponerse que la sección está reforzada con acero de compresión y de tensión.

Se pueden desarrollar dos casos para los cuales son aplicables las siguientes expresiones de interacción:

1. Cuando fluye el acero de tensión en la zona de tensión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} \right)^2 = r \left( 1 - \frac{M_n}{M_{n0}} \right) \quad (7.23a)$$

2. Cuando ocurre la fluencia de tensión en la zona de flexión de compresión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} \right)^2 = 1 + r \frac{M_n}{M_{n0}} \quad (7.23b)$$

donde  $T_n$  = momento nominal torsional resistente equivalente a  $T_u/\phi$   
 $T_{n0}$  = resistencia nominal torsional del alma reforzada cuando actúa sola la torsión pura

$M_n$  = momento nominal resistente a flexión  $M_u/\phi$   
 $M_{n0}$  = resistencia nominal a la flexión cuando ésta actúa sola

$$r = \frac{A_s f_y}{A'_s f_y}$$

### 7.4.3 Flexión, Cortante y Torsión Combinadas

Una combinación de estos tres parámetros resulta en una superficie tridimensional de interacción. El alcance del libro limita la posibilidad de una discusión profunda. La expresión aplicable resulta de la superposición del efecto de la torsión y el cortante combinados con el efecto de la flexión y la torsión combinadas a partir de los dos casos de interacción de las Secciones 7.4.1 y 7.4.2. El ACI requiere (1) el cálculo del acero transversal en el alma, para cortante; adicionándolo al acero transversal en el alma calculado para torsión; y (2) el cálculo de acero longitudinal para torsión, adicionándolo al acero de tensión para flexión, pero

distribuyéndolo simétricamente en todos los costados de la sección transversal.

## 7.5 DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A LA COMBINACION DE TORSION, FLEXION Y CORTANTE

### 7.5.1 Desempeño Torsional de las Estructuras

El momento de torsión que actúa en un cierto componente estructural tal como una viga de orilla se puede calcular utilizando los procedimientos normales del análisis estructural. El diseño de un componente en particular necesita basarse en el estado límite de falla. Por consiguiente, el comportamiento no lineal de un sistema estructural después del agrietamiento torsional se debe identificar en una de las dos siguientes condiciones: (1) no hay redistribución de los esfuerzos de torsión a otros miembros después del agrietamiento, y (2) la redistribución de los esfuerzos y momentos torsionantes después del agrietamiento para que tenga efecto la compatibilidad de deformación entre los miembros que se intersectan.

Las resultantes de esfuerzos debidas a la torsión en las vigas estáticamente determinadas se pueden evaluar de las solas condiciones de equilibrio. Tales condiciones requieren un diseño para el momento total factorizado exterior de torsión, ya que no es posible la redistribución de los esfuerzos torsionantes. Con frecuencia a este estado se le llama torsión de equilibrio. Una viga de orilla que soporta una marquesina en voladizo, como en la Fig. 7.13, es un ejemplo de ello.

La viga de orilla tiene que diseñarse para que resista la totalidad del momento externo factorizado de torsión debido a la losa en voladizo; de otra forma, la estructura experimentará un colapso. La falla sería ocasionada por la viga al no satisfacer las condiciones de equilibrio de las fuerzas y los momentos que resultan de la gran torsión exterior.

En los sistemas estáticamente indeterminados, las suposiciones relativas a las rigideces, la compatibilidad de las deformaciones en las uniones, y la redistribución de los esfuerzos pueden afectar los esfuerzos resultantes, llevando a una reducción de los esfuerzos resultantes de cortante torsional. Se permite una reducción en el valor del momento factorizado que se utiliza en el diseño del miembro, si parte de este momento se puede redistribuir a los miembros que se intersectan. El Reglamento ACI permite un momento torsional factorizado máximo en la sección crítica  $d$  a partir del paño de los apoyos:

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right) \quad (7.24)$$

El hacer caso omiso del efecto total de la torsión externa total en este caso, no conduce de hecho, a la falla de la estructura, pero puede tener por resultado un agrietamiento excesivo si  $\phi(\sqrt{f'_c} \sum x^2 y / 3)$  es de un valor considerablemente menor al momento real factorizado de torsión. En la Fig. 7.14 puede verse un ejemplo de la torsión de compatibilidad.

Las vigas  $B_2$  aplican momentos de torsión  $T_u$  en las secciones 1 y 2 de la viga de orilla AB en la Fig. 7.14b. Las magnitudes de las rigideces relativas de la viga AB y las transversales  $B_2$  determinan las magnitudes de la rotación en las juntas de intersección 1 y 2. A causa de la continuidad y la acción en dos direcciones, los momentos extremos de las vigas  $B_2$  en sus intersecciones con la viga de orilla AB, no se transmitirán totalmente como momentos de torsión a las columnas de apoyo A y B. Se reducirán en forma importante ya que las redistribuciones de momentos resultan en una transferencia de la mayor parte de los momentos flexionantes de los extremos 1 y 2 a 3 y 4, así como al centro de los claros de las vigas  $B_2$ .  $T_u$  en cada uno de los apoyos A y B de las vigas de orilla y en la sección crítica a una distancia  $d$  de estos apoyos se determina a partir de la Ec. 7.24.

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right)$$

Si el momento torsionante factorizado real debido a las vigas  $B_2$  es menor que el dado por la Ec. 7.24, la viga se tiene que diseñar para un valor torsional menor. Sin embargo, los momentos de torsión se desprecian, si

$$T_u < \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) \quad (7.25)$$

Quando el momento torsionante factorizado  $T_u$  excede  $\phi(0.13 \sqrt{f'_c})$ , el Reglamento ACI requiere que el alma de concreto simple se diseñe en secciones para

$$V_c = \frac{0.17 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u / V_u)]^2}} \quad (7.26a)$$

y

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}} \quad (7.26b)$$

Las ecuaciones 7.26a y 7.26b se derivan de la Ec. 7.20 suponiendo que el cociente del momento torsionante respecto a la fuerza cortante permanece constante a través de la historia de carga. Cuando se toma en cuenta la contribución del refuerzo para torsión, el ACI limita la fuerza de torsión  $T_s$  resistida por el acero a un valor que no exceda  $4T_c$ , como se ve en la Ec. 7.22.

### 7.5.2 Refuerzo en el Alma para Torsión

Como se indica en la Sección 7.3.1, sólo se puede lograr una importante resistencia adicional a la torsión debida al refuerzo para torsión, si se emplean tanto estribos como varillas longitudinales. En forma ideal, deberán colocarse volúmenes iguales de acero tanto de estribos cerrados como de varillas longitudinales, de tal manera que ambos participen por igual para resistir los momentos de torsión. Este principio es la base de las expresiones de ACI para diseñar el acero torsional en el alma. Si  $s$  es la separación de los estribos,  $A_1$  es el área total del acero de las varillas longitudinales de la sección transversal, y  $A_t$  es la sección transversal de una rama del estribo, donde las dimensiones del estribo son  $x_1$  en la dirección corta y  $y_1$  en la dirección larga, entonces:

$$2A_t(x_1 + y_1) = A_1s \quad (7.27a)$$

de tal manera que

$$2A_t = \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.27b)$$

Por tanto, el acero torsional total en el alma, incluyendo tanto los estribos cerrados como las varillas longitudinales de las Ecs. 7.27a y 7.27b, se convierte en

$$A_{total} = 2A_t + \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.28a)$$

Pero, de la Ec. 7.12

$$A_t = \frac{T_s s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_1} \quad (7.28b)$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33y_1/x_1 \leq 1.5$  y  $T_s$  es el momento torsionante resistente del acero torsionante del alma. Si  $T_c$  es la resistencia torsional nominal del concreto simple en el alma,

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.29)$$

De la Ec. 7.27b, y empleando la expresión de ACI para  $A_t$  para la torsión y el cortante combinados, donde

$$2A_t = \frac{14 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t}$$

el refuerzo torsional longitudinal se puede expresar como

$$A_l = \left( \frac{28 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 X Y_1}{s} \quad (7.30)$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . El término  $2A_t$  en la Ec. 7.30 no puede ser menor que  $3.5b_w s / f_y$ , puesto que este valor es el mínimo  $2A_t$  para que los estribos torsionales sean efectivos. En la ref. 7.12 se presenta una discusión completa y una derivación detallada de la Ec. 7.30.

Puede compensarse una reducción en los estribos mediante un incremento en el acero longitudinal siempre que el volumen del acero torsional total se mantenga el mismo. Si la separación  $s$  de los estribos es pequeña, de tal manera que  $2A_t$  sea considerablemente mayor que el valor mínimo  $3.5b_w s / f_y$ , no es poco común que  $A_l$  de la Ec. 7.30 dé un valor negativo, de tal manera que se invoque  $A_l$  mínimo de la Ec. 7.27a para volúmenes iguales de estribos y varillas longitudinales; esto es:

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + Y_1}{s} \quad (7.31)$$

El área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para la torsión y cortante combinados se convierte en

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5b_w s}{f_y} \quad (7.32)$$

### 7.5.3 Procedimiento de diseño para la Torsión y Cortante Combinados

Lo que sigue es un resumen de la secuencia recomendada de los pasos para el diseño. En la Fig. 7.15 se muestra un diagrama de flujo que describe la secuencia de las operaciones en forma gráfica.

1. Clasifique si la torsión aplicada es torsión de equilibrio o de compatibilidad. Determine la sección crítica y calcule el momento torsionante factorizado  $T_u$ . La sección crítica se toma a una distancia  $d$  del paño del apoyo. Si  $T_u$  es menor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2 y)$ , se pueden despreciar los efectos de la torsión.
2. Calcule la resistencia nominal torsional  $T_c$  del alma de concreto simple:

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2}}$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . Los miembros sujetos a una tensión axial importante se pueden diseñar para un valor de  $T_c$

que se multiplica por  $(1 + N_u/35 A_g)$ , en que  $N_u$  es negativa para tensión.

Verifique si  $T_u$  excede  $\phi T_c$ . Si no es así, desprecie el efecto torsionante. Si así ocurre, calcule el valor  $T_s$  de esa porción del momento torsionante que será resistida por el refuerzo de acero. Para torsión de equilibrio

$$T_s = T_n - T_c$$

Para torsión de compatibilidad

$$T_s = \frac{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{3} - T_c \quad \text{ó} \quad T_s = T_n - T_c$$

la que sea menor. El valor de  $T_n$  tiene que ser al menos equivalente a  $T_u/\phi$ . Si  $T_s > 4T_c$ , incremente el tamaño de la sección.

Seleccione los estribos cerrados que se emplearán como refuerzo transversal. Puede emplearse una varilla del No. 3 como mínimo (9.5 mm. de diámetro). Si  $s$  es una separación constante de los estribos, calcule el área de una rama del estribo para torsión, para la separación unitaria:

$$A_t = \frac{T_s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_y}$$

3. Calcule el refuerzo  $A_v$  requerido para cortante por unidad de espaciamiento en una sección transversal.  $V_u$  es la fuerza cortante exterior factorizada en la sección crítica,  $V_c$  es la resistencia nominal al cortante del concreto en el ama, y  $V_s$  es la fuerza cortante que resisten los estribos:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{y d}$$

donde  $V_s = V_n - V_c$ , y

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}}$$

4. El valor de  $V_n$  tiene que ser cuando menos igual a  $V_u/\phi$ . Obtenga el área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para torsión y cortante, y diseñe los estribos de tal manera que

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5 b_w s}{f_y}$$



5. Calcule el área  $A_l$  del refuerzo longitudinal requerida para torsión, donde

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s}$$

o

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

la que sea mayor.  $A_l$  calculada empleando la segunda expresión no necesita ser mayor a

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - \frac{3.5b_w s}{f_y} \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

6. Arregle el refuerzo utilizando las siguientes directrices:

- La separación  $s$  de los estribos cerrados deberá ser menor a  $(x_1 + y_1)/4$  o 30 cm
- Las varillas longitudinales deberán quedar a separaciones iguales alrededor del perímetro de los estribos cerrados. La distancia entre las varillas deberá ser menor a 30 cm. y cuando menos una varilla longitudinal deberá colocarse en cada esquina.
- La resistencia a la fluencia del refuerzo para torsión no excederá de 4,200 kg/cm<sup>2</sup>.
- Los estribos que se usen para refuerzo de torsión deberán anclarse a través de una distancia  $d$  desde las fibras extremas en compresión. Los anillos cerrados con ganchos en los estribos logran este efecto.
- El refuerzo para torsión se suministrará al menos una distancia  $(d + b)$  más allá del punto requerido teóricamente, con objeto de cubrir cualesquier esfuerzos cortantes excesivos potenciales.

#### 7.5.4 Ejemplo 7.1: Diseño del Refuerzo en el Alma para la Torsión y el Cortante Combinados en una sección en T

Una viga de sección en T tiene las dimensiones geométricas que se muestran en la Fig. 7.16. En la sección crítica actúa una fuerza cortante externa factorizada, que tiene un valor de  $V_u = 6,800$  kg. Está sujeta a los siguientes momentos de torsión:

- momento exterior torsionante factorizado de equilibrio  
 $T_u = 570,000$  kg.cm;
- de compatibilidad factorizado,  $T_u = 86,200$  kg.cm;
- y (c) de compatibilidad factorizado,  $T_u = 345,000$  kg.cm.

Dados:

$$\begin{aligned} \text{Refuerzo para flexión } A_s &= 23.4 \text{ cm}^2 \\ f'_c &= 280 \text{ kg/cm}^2, \text{ concreto de peso normal} \\ f_y &= 4,200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Diseño del refuerzo en el alma necesario para esta sección.

Solución

(a) Torsión de equilibrio:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado el momento torsional de equilibrio = 570,000 kg-cm.  
La totalidad del momento de torsión debe tomarse en cuenta para el diseño. De la Fig. 7.16:

$$\begin{aligned} \sum x^2y &= 35^2 \times 65 + 2(10^2 \times 30) = 79,500 \text{ cm}^3 \\ \phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2y) &= \\ &= 0.85 \times 0.13 \times 280 \times 79,500 = 146,997 \text{ kg-cm} < T_u \end{aligned}$$

Por consiguiente, se deben colocar estribos

Diseño de estribos cerrados para torsión. (Paso 2)

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{T_u}{\phi} = \frac{570,000}{0.85} = 670,588 \text{ kg-cm} \\ T_c &= \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2y}{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2} \end{aligned}$$

Supóngase un recubrimiento efectivo de 5.0 cm, y  $d = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{b_w d}{\sum x^2y} = \frac{35 \times 55}{79,500} = 0.024 \\ T_c &= \frac{0.21\sqrt{280} (79,500)}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.4(6,800)}{0.024(570,000)}\right)^2}} = 274,089 \text{ kg-cm} \end{aligned}$$

Suponga también que tanto  $T_c$  como  $V_c$  son constantes para todos los propósitos prácticos al centro del claro de la viga.

$$T_s = T_n - T_c = 670,588 - 274,089 \text{ kg-cm}$$

Supóngase un recubrimiento libre de 2.5 cm y estribos cerrados del #4.

$$x_1 = 35 - 2(2.5 + 0.64) = 28.73 \text{ cm}$$

$$y_1 = 60 - 2(2.5 + 0.64) = 53.72 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 0.66 + 0.33(53.72/28.73) = 1.28 < 1.5$$

Emplée  $\alpha_1 = 1.28$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{396,499}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.048 \text{ cm}^2/\text{cm}/1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5 \sqrt{280} (35) 55}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)570,000/6,800]^2}}$$

$$= 3,141 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{6,800}{0.85} - 3,141 = 4,859 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{s} = \frac{4,859}{4,200(55)} = 0.021 \text{ cm}^2/\text{cm}/\text{dos ramas}$$

Estribos cerrados para torsión y cortante combinados (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.048) + 0.021 = 0.117 \text{ cm}^2/\text{cm}/ 2 \text{ ramas}$$

Pruébese con estribos cerrados del No. 3 (9.5 mm de diámetro). El área para las dos ramas = 1.42 cm<sup>2</sup>.

$$s = \frac{\text{área de la sección transversal del estribo}}{A_{vt}/s \text{ requerida}} = \frac{1.42}{0.117} =$$

$$= 12.1 \text{ cm}$$

$$\text{separación máxima permisible, } s_{\max} = \frac{x_1 + y_1}{4} = \frac{28.73 + 53.72}{4} =$$

$$= 20.6 \text{ cm} > 12.1 \text{ cm}$$

Utilice estribos cerrados del # 3 @ 12 cm c. a c.

$$\text{Area mínima de estribos requerida} = A_v + 2A_t = \frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)12}{4,200} = 0.35 \text{ cm}^2 < 1.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{Area proporcionada} = 1.42 > 0.35 \text{ cm}^2$$

Diseño del acero longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.048)(28.73 + 53.720) = 7.92 \text{ cm}^2$$

También:

$$A_1 = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

(O substituyendo  $3.5b_w s/f_y$  por  $2A_t$ , aquella que controle):

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = 0.35 \text{ cm}^2 < 2A_t = 2(0.048)12 = 1.15 \text{ cm}^2$$

Use  $2A_t = 1.15 \text{ cm}^2$ . Por consiguiente:

$$A_1 = \left( \frac{28(35)12}{4,200} \frac{570,000}{570,000 + \frac{6,800}{3(0.024)}} - 1.15 \right) \frac{28.73 + 53.72}{12} = 8.12 \text{ cm}^2 > 7.92 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, colóquese  $A_1 = 8.12 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales de torsión

El área del refuerzo longitudinal a distribuir es  $8.12 \text{ cm}^2$ . Supóngase que  $\frac{1}{4} A_1$  se coloca en las esquinas superiores. Otro tanto en las esquinas inferiores, adicional a las varillas para flexión. El área requerida en cada esquina es  $= 8.12/4 = 2.03 \text{ cm}^2$ . El área requerida en cada costado vertical es también  $\frac{1}{4} A_1 = 2.03 \text{ cm}^2$ , a una separación no mayor de 30 cm. c a c. Colóquense 2 varillas del No. 4 en cada zona.

$$\text{Al centro del claro } \sum A_s = \frac{A_1}{4} + A_s = 2.03 + 23.4 = 25.43 \text{ cm}^2$$

Colóquense 5 vars. del #8 en la zona de tensión;  $A_s = 25.35 \text{ cm}^2$   
La figura muestra la geometría de la sección transversal.

**Solución**

(b) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado  $T_u = 86,200$  kg-cm. Si se utilizan los resultados del caso (a), se tiene:

$$\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y) = 0.85(0.13)\sqrt{280}(79,500) = 146,997 \text{ kg-cm}$$

$$> T_u = 86,200 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, pueden despreciarse los efectos de torsión.

**Solución**

(c) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado que  $T_u = 345,000$  kg-cm es mayor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y)$ , se deben suministrar estribos. Puesto que esta es una torsión de compatibilidad, la sección se puede diseñar para un momento torsionante de  $\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3)$  si la torsión exterior excede este valor.

$$\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3) = 0.85(280)79,500/3 = 376,915 > 345,000 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la sección se diseñará para  $T_u = 345,000$  kg-cm

Diseño de los estribos cerrados para torsión (Paso 2)

Utilizando la Ec. 7.26b,

$$T_c = \frac{0.21(\sqrt{280})79,500}{\sqrt{1 + \left[\frac{0.4(6,800)}{0.024(345,000)}\right]^2}} = 265,407 \text{ kg-cm}$$

$$T_s = T_n - T_c = 345,000/0.85 - 265,407 = 140,475 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y\alpha_1x_1y_1} = \frac{140,475}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.017 \text{ cm}^2/\text{cm}/ \text{1 rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (Paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 f'_c b_w d}{\sqrt{1 + [2.5C_t(T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5\sqrt{280} 35(55)}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)(345,000/6,800)]^2}} = 5,026 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = 6,800/0.85 - 5,026 = 2,974 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{2,974}{4,200(55)} = 0.013 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Estribos cerrados combinados para torsión y cortante (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.017) + 0.013 = 0.047 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Coloque estribos del #3 con un área de  $2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$  (9.5 mm. de diámetro), y se tiene:

$$s = \frac{\text{área del estribo } A_s}{\text{área requerida } A_{vt}/s} = 1.42 / 0.047 = 30 \text{ cm}$$

separación máxima permisible  $s_{\max} = (x_1 + y_1)/4 = 20 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

Por consiguiente, suministre estribos cerrados del #3 @ 20 cm c. a c.

$$\text{área mínima de estribos requerida} = 3.5(35)20/4,200 = 0.58 \text{ cm}^2$$

$$\text{área suministrada} = 1.42 > 0.58 \text{ cm}^2$$

Diseño del refuerzo longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.017) (28.73 + 53.72) = 2.80 \text{ cm}^2$$

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)20}{4,200} = 0.583 < 2A_t s = 2(0.017)20 = 0.68 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente:

$$A_1 = \left( \frac{28(35)20}{4,200} - \frac{345,000}{6,800} - 0.68 \right) \frac{28.73 + 53.72}{20} = 7.10 \text{ cm}^2 > 2.8 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente  $A_1$  que se debe suministrar es igual a  $7.10 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales. Considérese el mismo criterio que se siguió en (a).

## REFERENCIAS SELECTAS

- 7.1 Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part II: Advanced Theory*, D. Van Nostrand, New York, 1952, 501 págs.
- 7.2 Nadai, A., *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, McGraw Hill, New York, 1931, 349 págs.
- 7.3 Cowan, H.J., "Design of Beams Subject to Torsion Related to the Australian Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 56, January 1960, págs. 591-618.
- 7.4 Gesund, H., Schnette, F.J., Buchanan, G.R., and Gray, G.A., "Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Both Longitudinal and Transverse Reinforcement," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 61, December 1964, págs. 1509-1521.
- 7.5 Lessig, N.N., "Determination of Carrying Capacity of Reinforced Concrete Elements with Rectangular Cross-section Subjected to Flexure with Torsion," *Zhelezobeton*, 1959, págs. 5-28.
- 7.6 Zia, P., "Tension Theories for Concrete Members," *Special Publication SP 18-4, American Concrete Institute*, Detroit, 1968, págs. 103-132.
- 7.7 Hsu, T.T.C., "Ultimate Torque of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST2, February 1968, págs. 485-510.
- 7.8 Rangan, B.V., and Hall, A.J., "Strength of Rectangular Prestressed Concrete Beams in Combined Torsion, Bending and Shear," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 70, April 1973, págs. 270-279.
- 7.9 Wang, C.K., and Salmon, C.G., *Reinforced Concrete Design*, 3rd ed., Harper & Row, New York, 1979, 918 págs.
- 7.10 Thurliman, B., "Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach, U.S. and European Practices," *Special Publication, American Concrete Institute*, Detroit, 1979, págs. 117-143.
- 7.11 Collins, M.P., and Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-prestressed Concrete Beams," *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc. Vol. 25, No. 5, September-October 1980, págs. 32-100.
- 7.12 Hsu, T.C.C., *Torsion of Reinforced Concrete*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983, 510 págs.

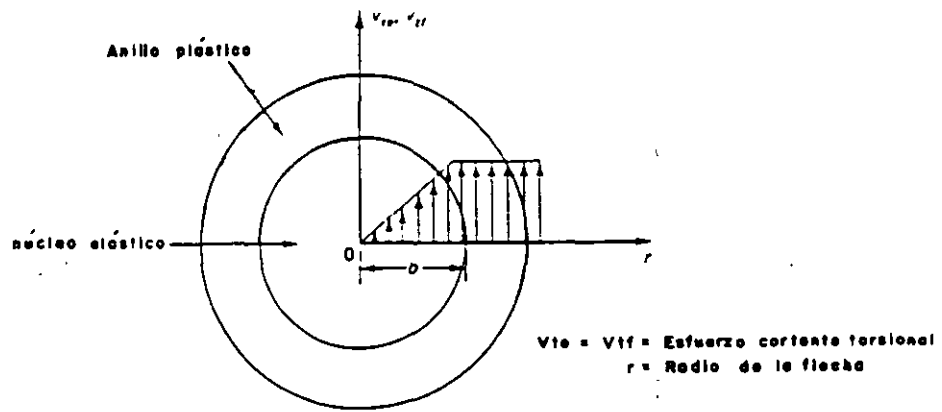


Fig. 7.1 Distribución de esfuerzos torsionales en una sección circular

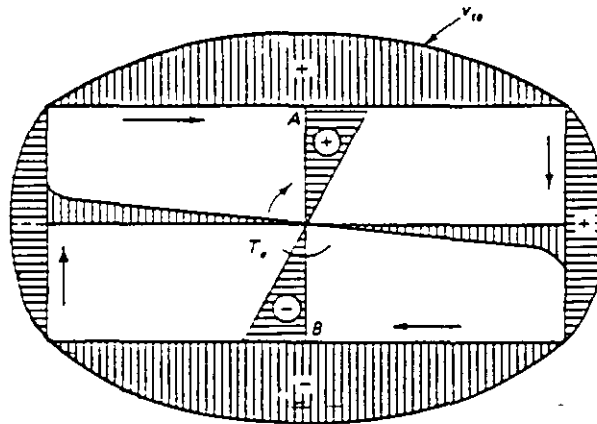


Fig. 7.2 Distribución de esfuerzos de torsión pura en una sección rectangular.



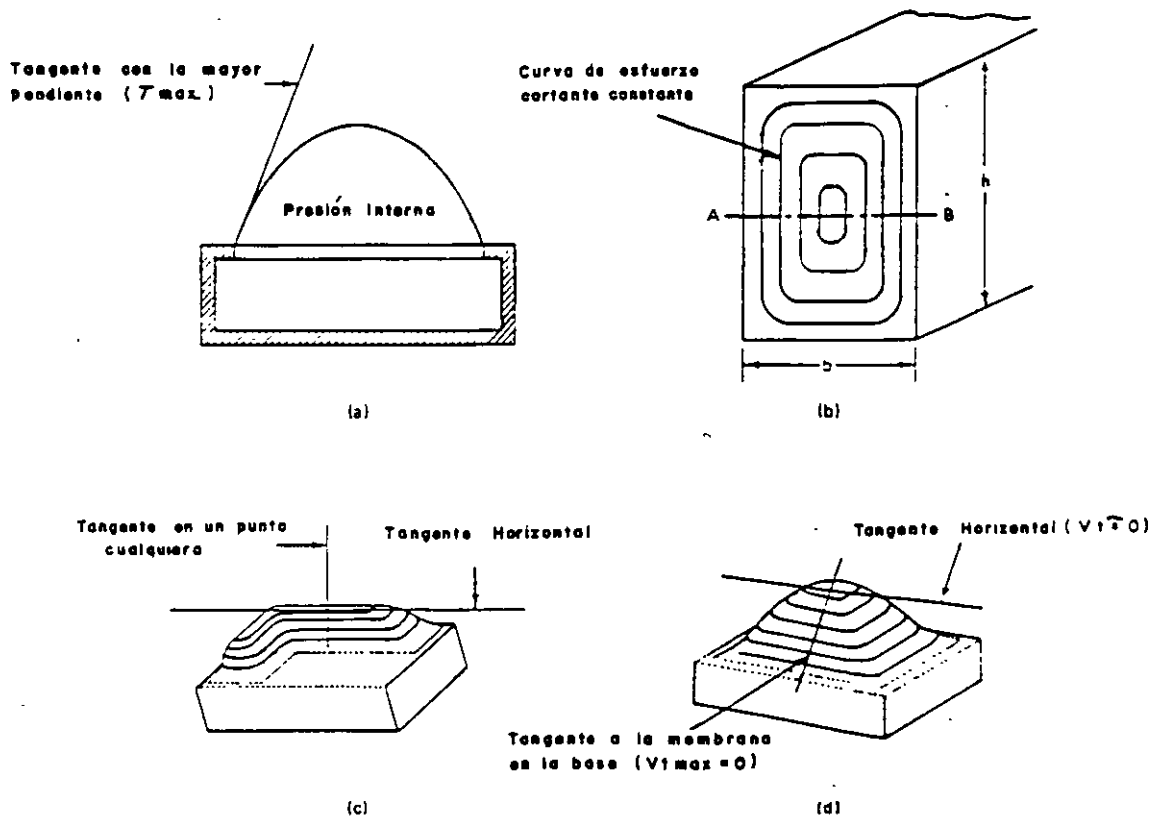


Fig. 7.3 Analogía con la membrana en la torsión pura elástica. (a) Membrana bajo presión; (b) Curvas en una viga real o en una membrana; (c) Sección L; (d) Sección rectangular.

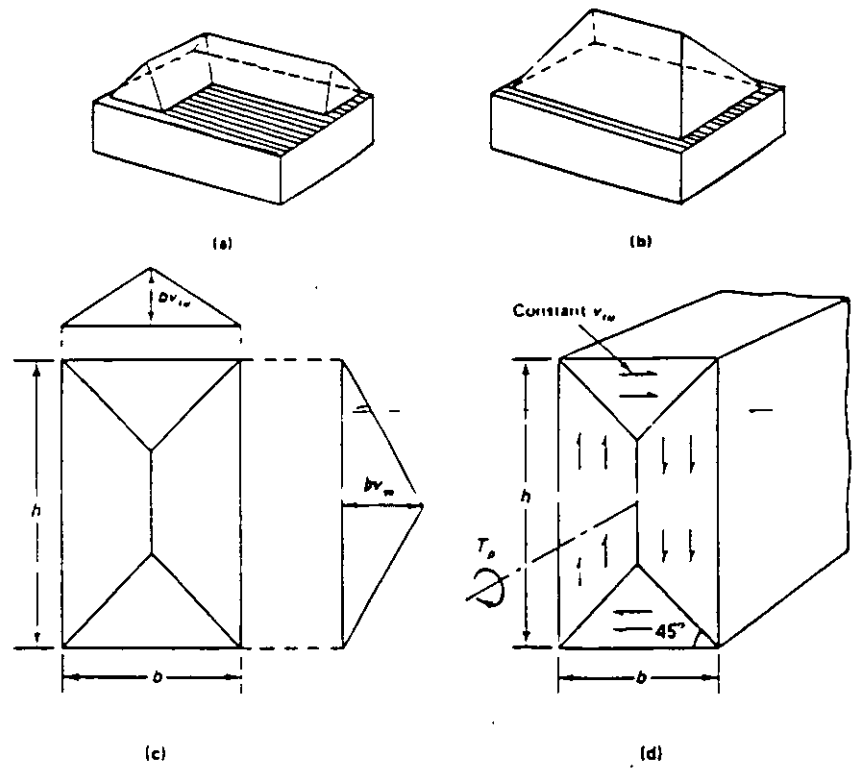


Fig. 7.4 Analogía con el montón de arena en torsión plástica pura. (a) Sección en L del montón de arena; (b) Sección rectangular del montón de arena; (c) Planta de la sección rectangular; (d) Esfuerzo cortante torsional

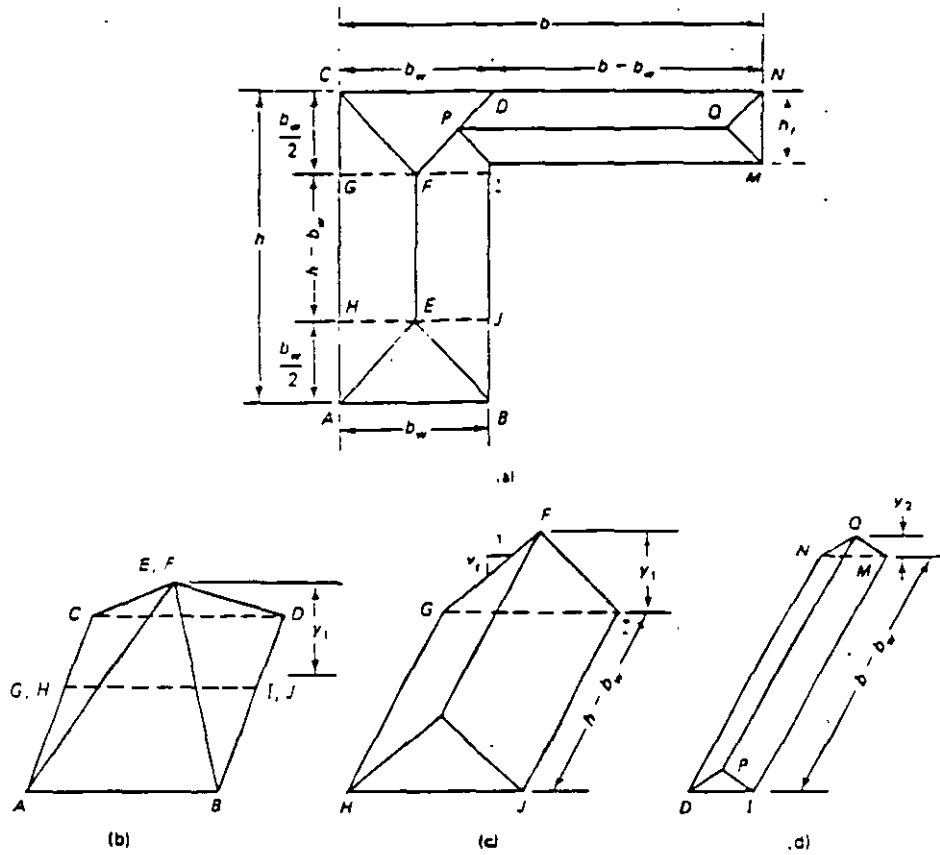


Fig 7.5 Analogía con el montón de arena de la sección con patín (a) Montón de arena de la sección transversal en L; (b) Pirámide compuesta a partir del alma ( $V_1$ ); (c) Segmento en pabellón a partir del alma ( $V_2$ ); (d) Pabellón transformado del patín de la viga ( $V_3$ )

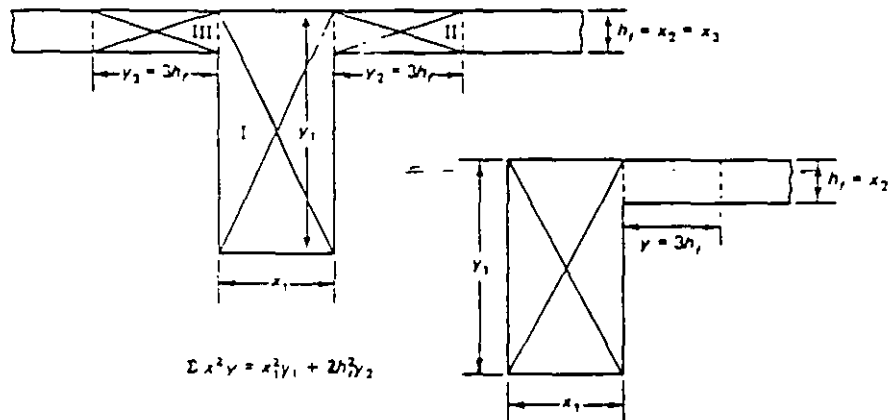


Fig. 7.6 Rectángulos compuestos para el cálculo de  $T_c$ .

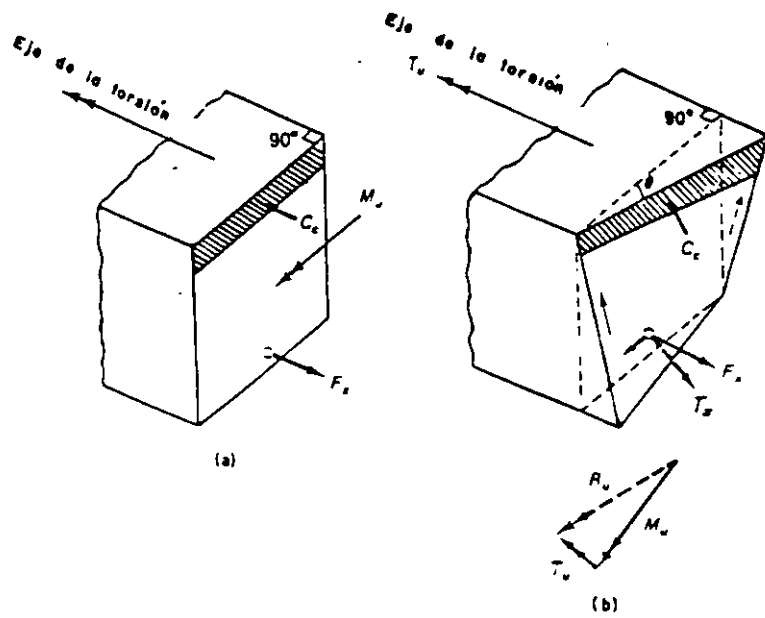
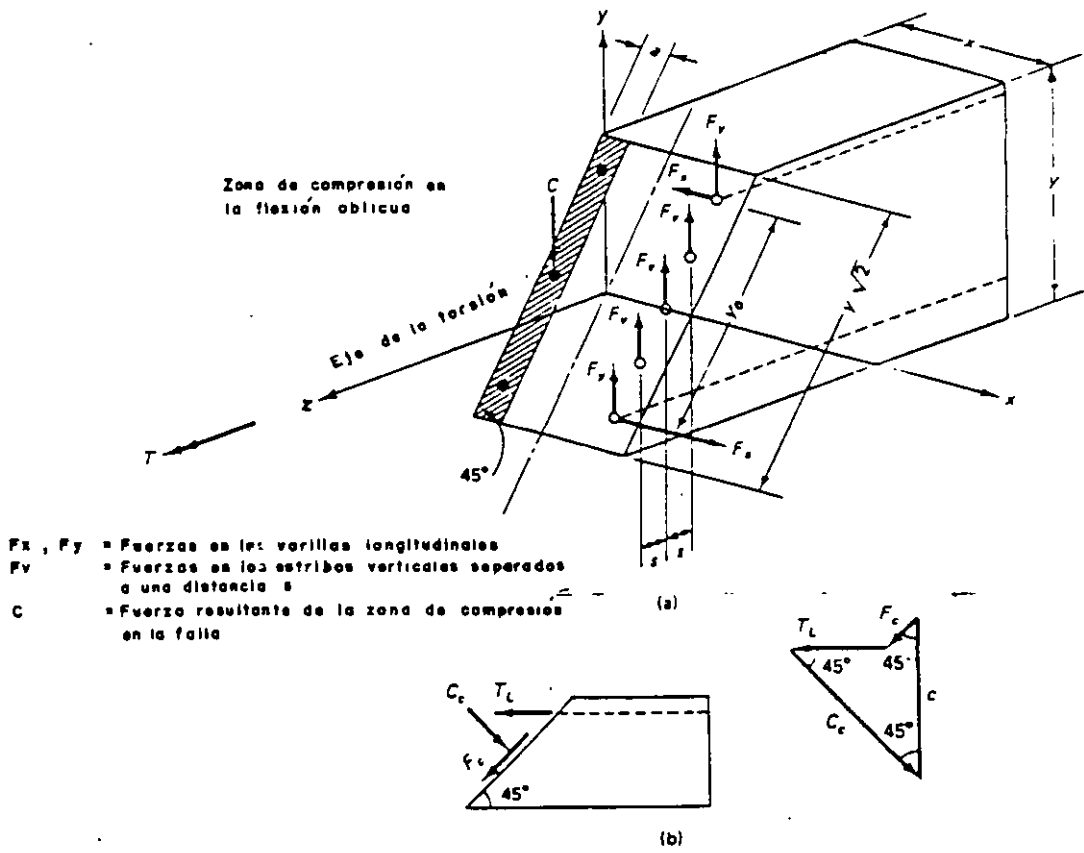
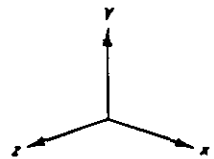
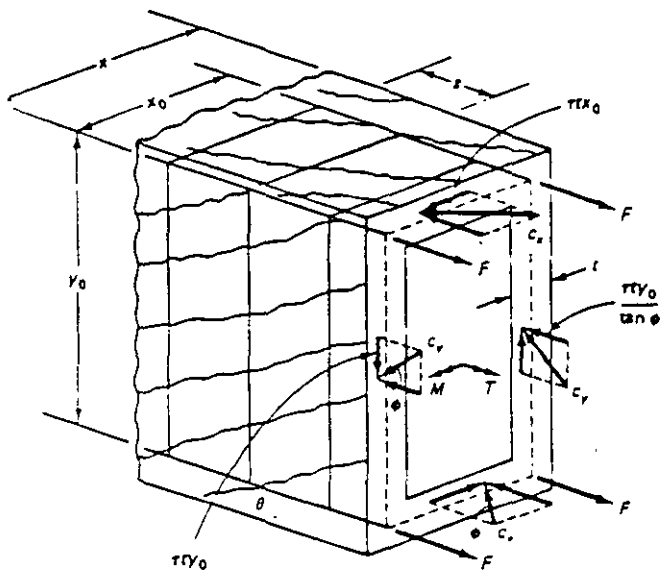


Fig. 7.7 Flexión oblicua debido a la torsión  
 (a) Flexión antes de la torsión; (b) Flexión y torsión



$F_x, F_y$  = Fuerzas en las varillas longitudinales  
 $F_v$  = Fuerzas en los estribos verticales separados a una distancia  $s$   
 $C$  = Fuerza resultante de la zona de compresión en la falla

Fig. 7.8 Fuerza en los planos flexionados oblicuamente  
 (a) Todas las fuerzas actúan en un plano oblicuo en la falla; (b) Fuerza vectoriales en la zona de compresión.



**F** = Fuerza de tensión en cada una de las varillas longitudinales  
**Cx** = Fuerza inclinada de compresión en la cara horizontal  
**Cy** = Fuerza inclinada de compresión en la cara vertical  
**T** = Fuerza de flujo de cortante por unidad de longitud de muro

Fig. 7.9 Fuerzas en la superficie del cajón hueco de concreto mediante la analogía con la armadura

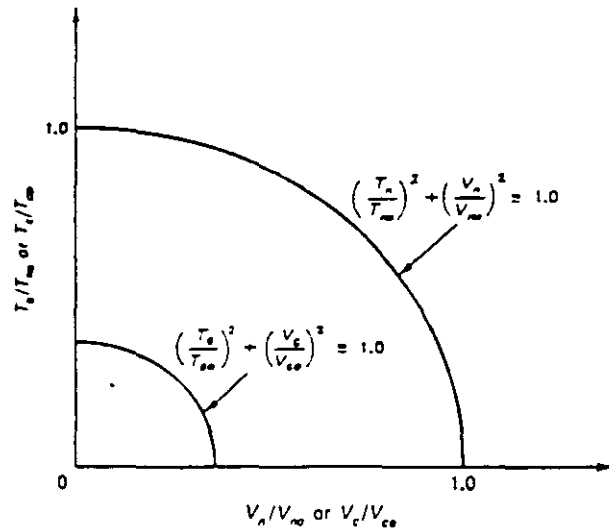


Fig. 7.10 Diagramas de interacción para la combinación de torsión y cortante

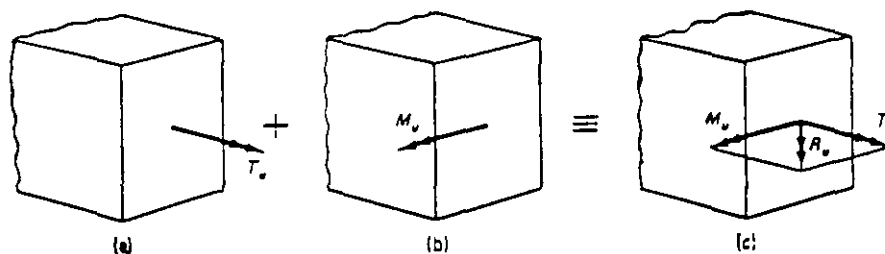


Fig. 7.11 Representación vectorial esquemática de la combinación de torsión con flexión: (a) Flexión; (b) Torsión; (c) Flexión y Torsión combinados

El refuerzo de compresión fluye con tensión

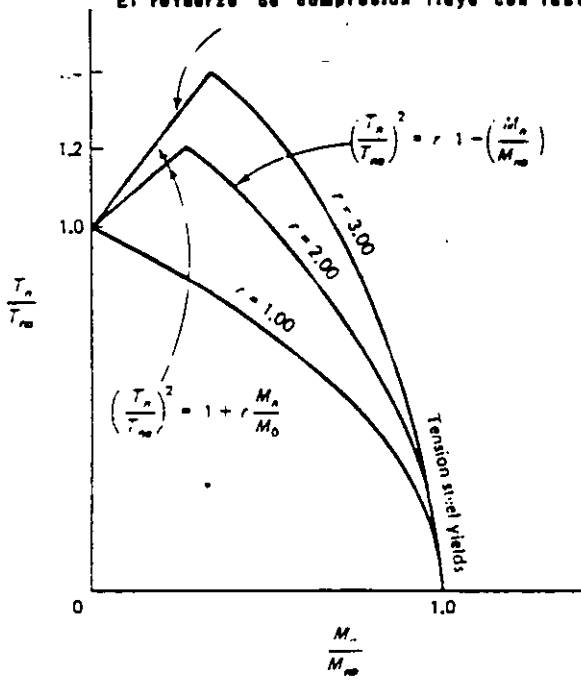


Fig. 7.12 Diagrama de interacción para combinaciones de torsión y flexión

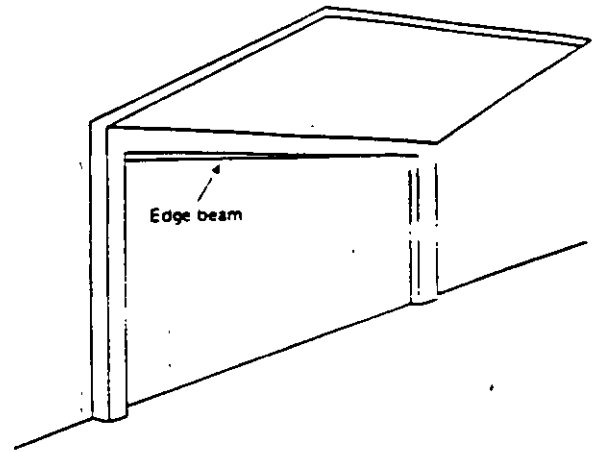
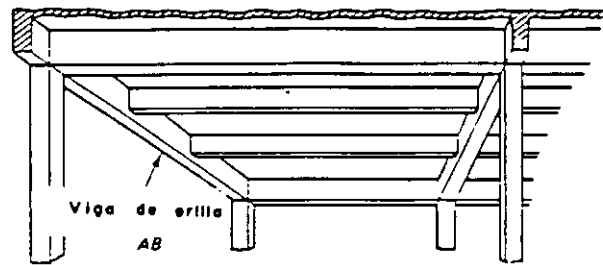
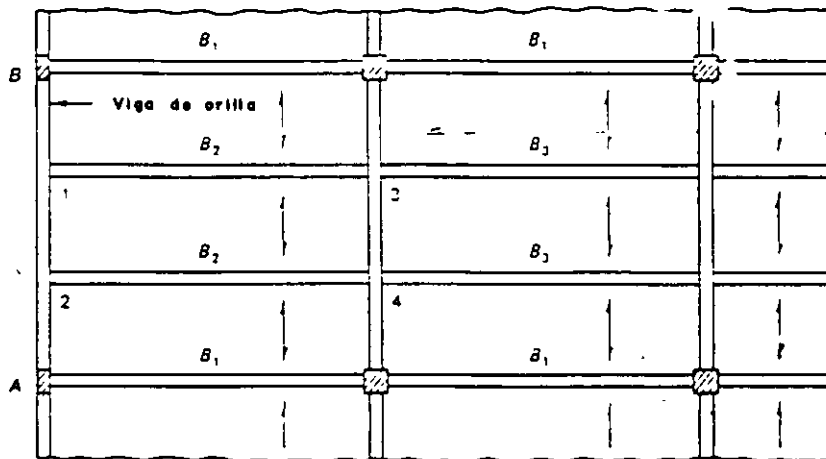


Fig. 7.13 No hay redistribución de la torsión (Torsión de equilibrio)



(a)



(b)

Fig. 7.14 Redistribución de la torsión (compatibilidad): (a) vista isométrica de un tablero de extremo; (b) Planta de un sistema típico de un sistema en un sentido.

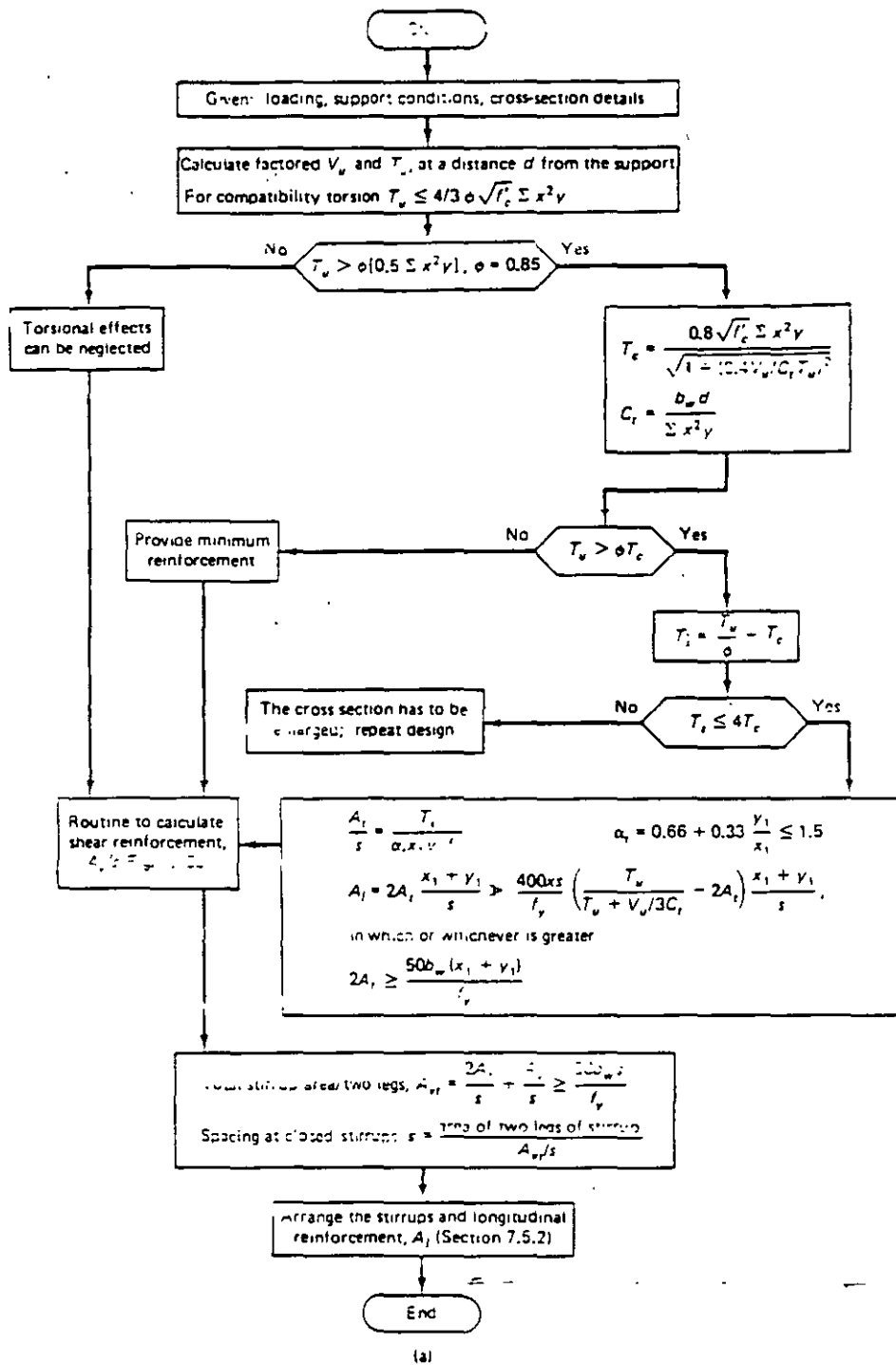
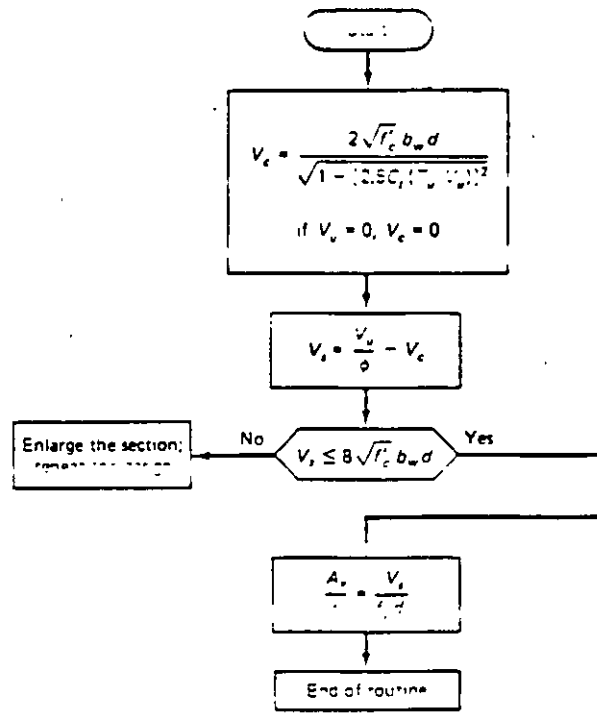


Fig. 7.15 Diagrama de flujo para diseñar el refuerzo para la combinación de cortante y torsión: (a) Acero torsional en el alma; (b) Acero para cortante en el alma.



(b)

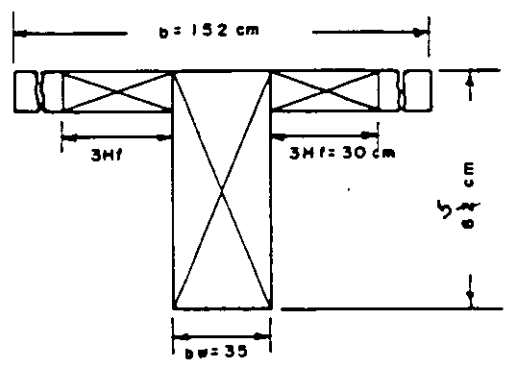


Fig. 7.16 Rectángulos componentes de una viga T.

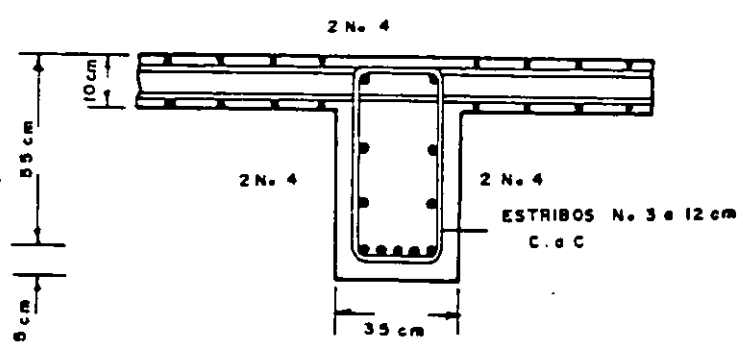


Fig. 7.17 Detalles del refuerzo en el alma, Ejemplo 7.1(a)



Photo 37 Simply supported beam prior to developing diagonal tension crack (load stage 11). (Test by Navy et al.)

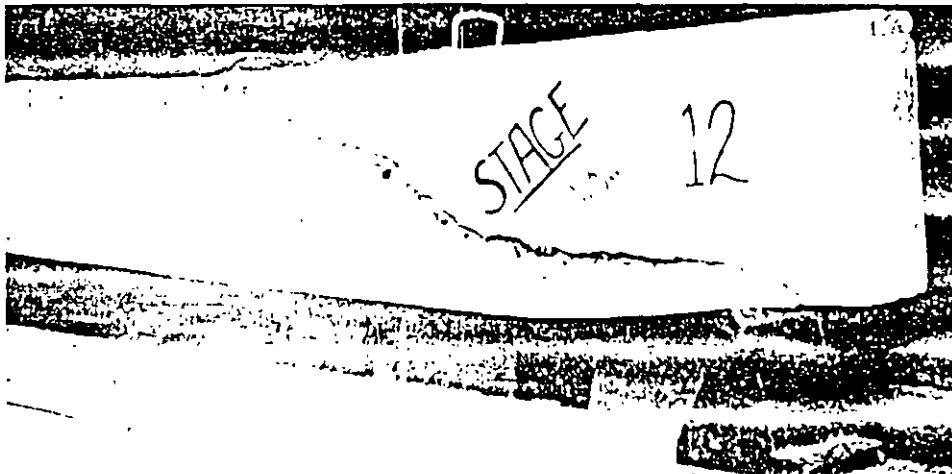


Photo 38 Principal diagonal tension crack at failure of beam in the preceding photograph (load stage 12).



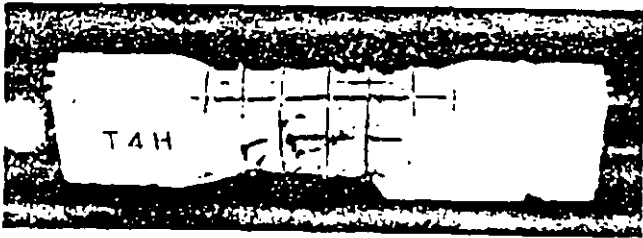


FOTO No. 40 Viga de yeso reforzada en la falta de torsión pura

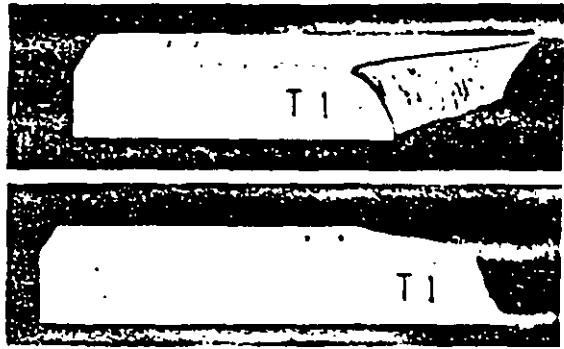


FOTO No. 41 Viga de mortero simple en torsión para  
(a) Vista superior; (b) Vista inferior

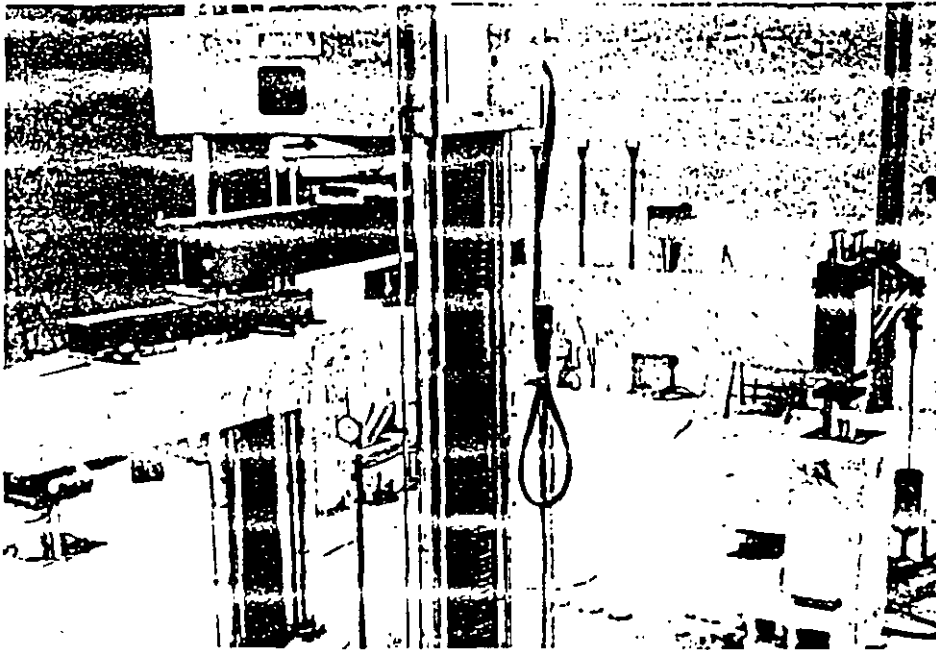


FOTO No. 42 Viga de concreto reforzado en torsión pura. Disposición  
para el ensayo



FOTO No. 43 Acercamiento del agrietamiento por torsión de  
las vigas de la fotografía anterior

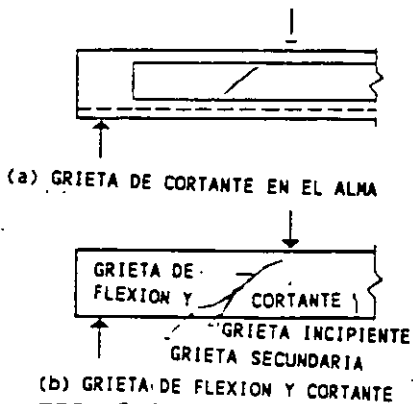


FIG. 3.1

Tipos de Grietas Inclinadas Fallas de Vigas Esbeltas

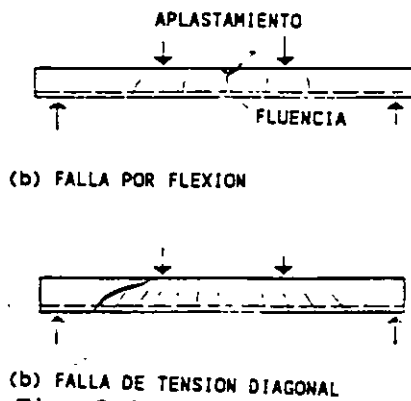


Fig. 3.2

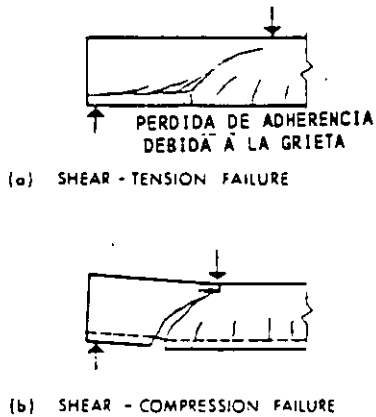


Fig. 3.3  
Fallas Típicas de Cortantes en las Vigas Cortas

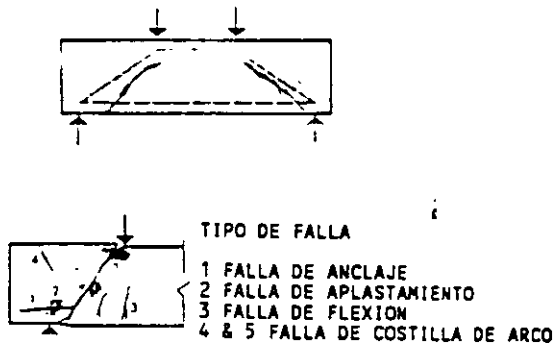


Fig. 3.4  
Modelos de Falla de Vigas de Gran Peralte

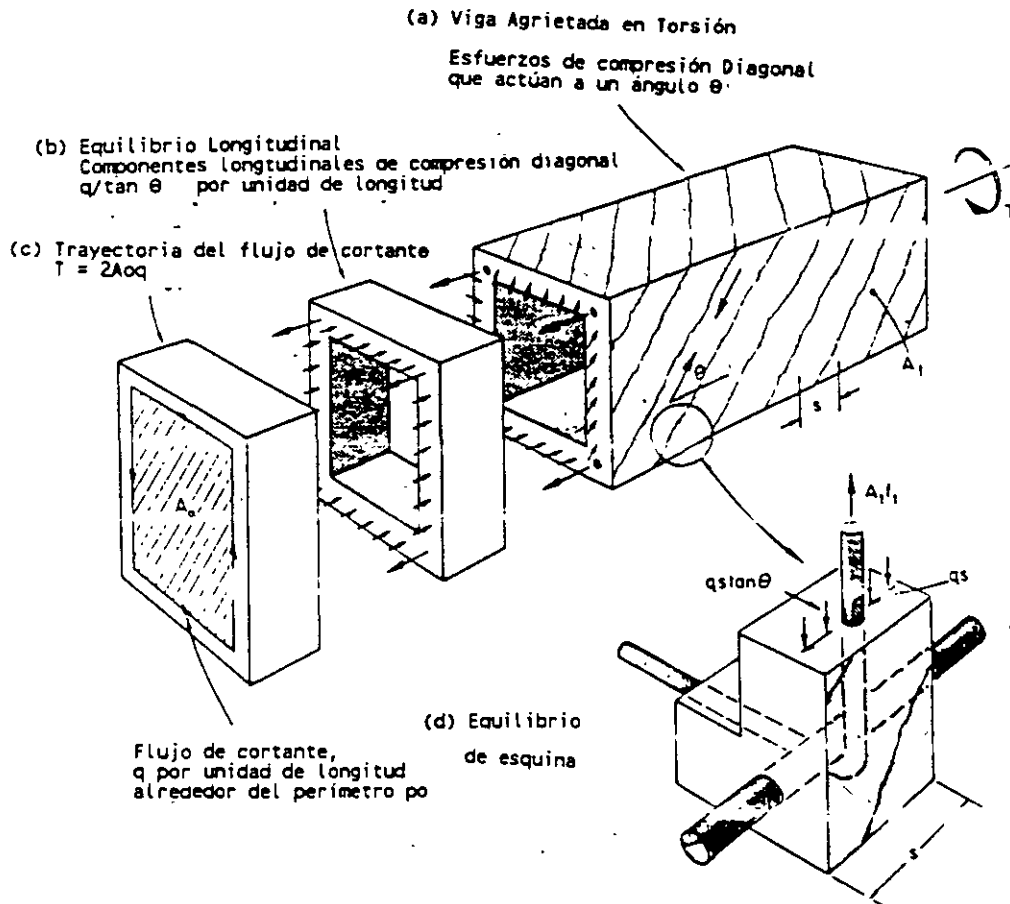
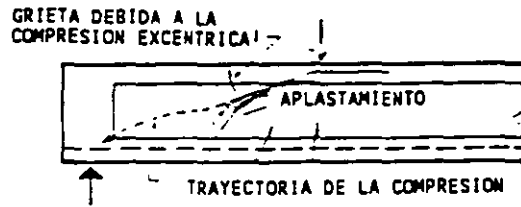
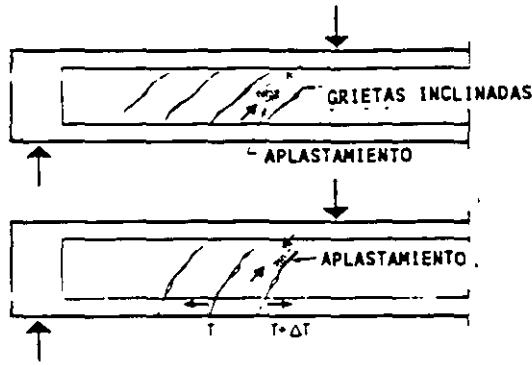


Fig. 3. Modelo de Armadura para Torsión que muestra las fuerzas que actúan en el elemento.



(a) ARCH-RIB FAILURE



(b) WEB-CRUSHING FAILURE

FIG. 3.5 Falla Típica de Cortante en las vigas I

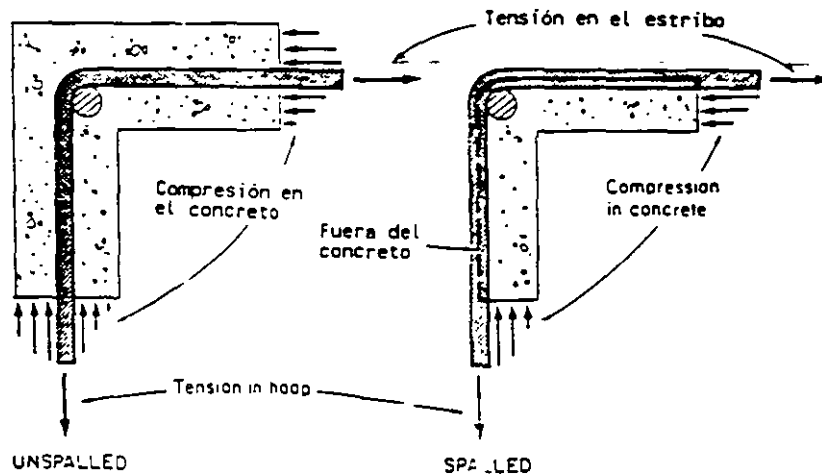
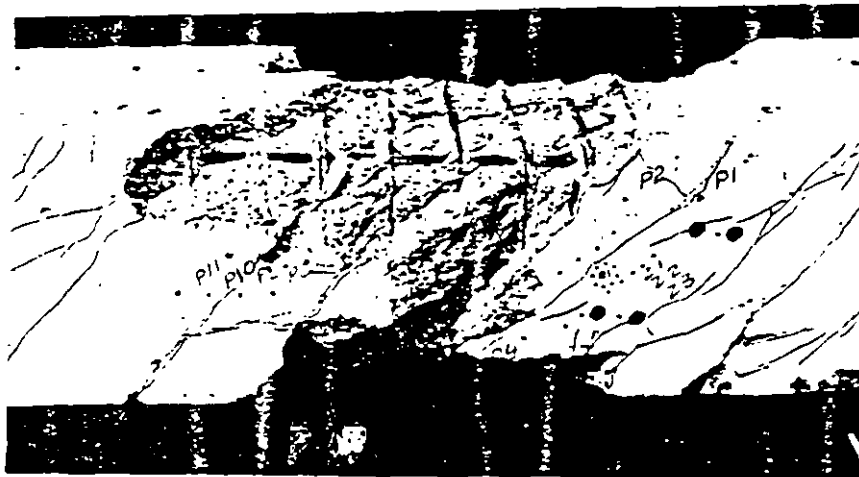


Fig. 4. Descascaramiento del recubrimiento del concreto debido a la torsión.

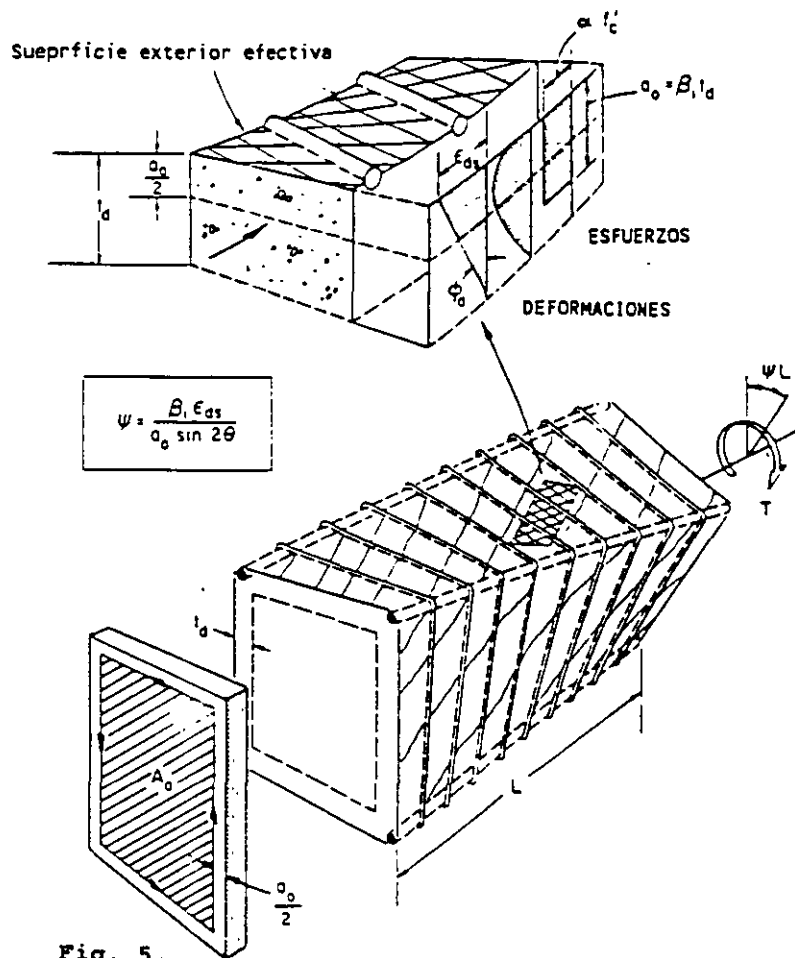


Fig. 5.  
 Espesor efectivo de la pared de un miembro en torsión.

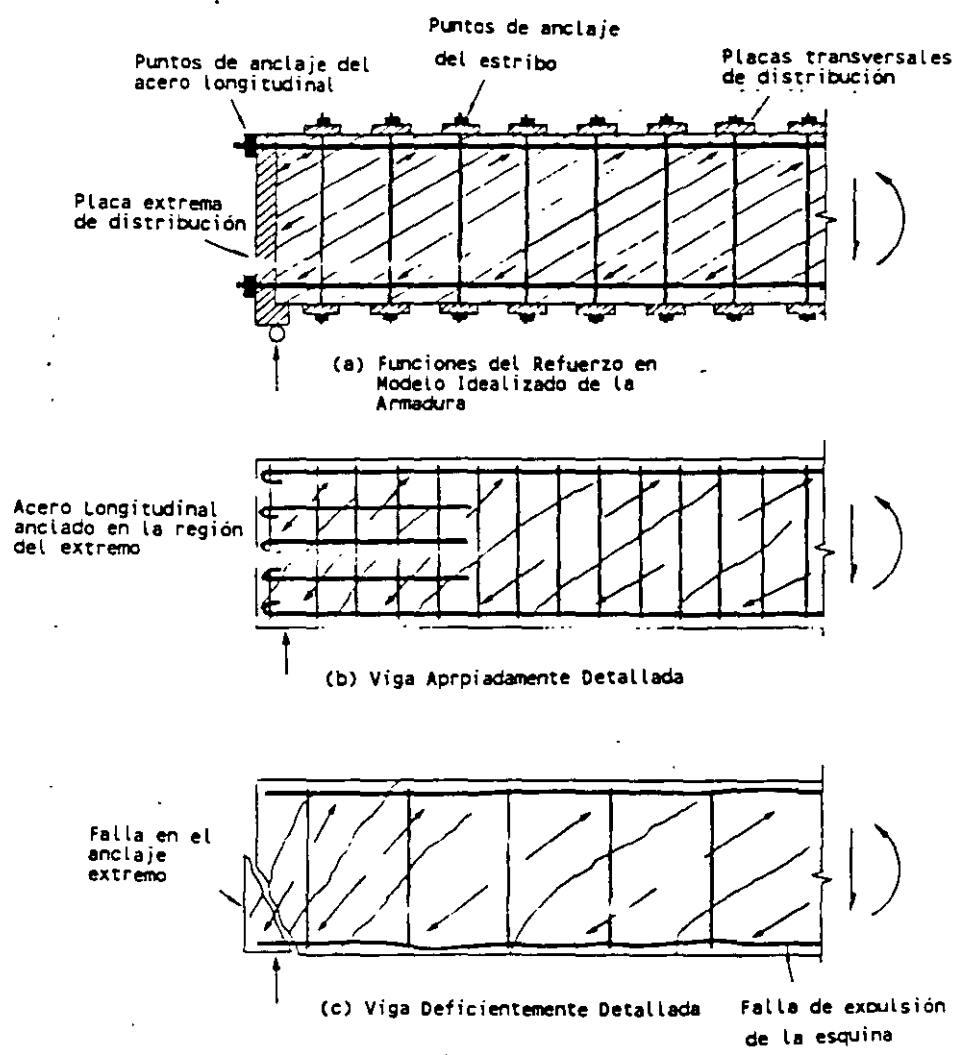
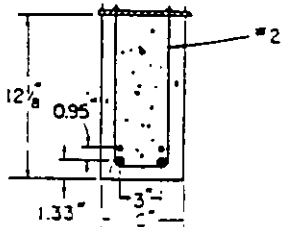
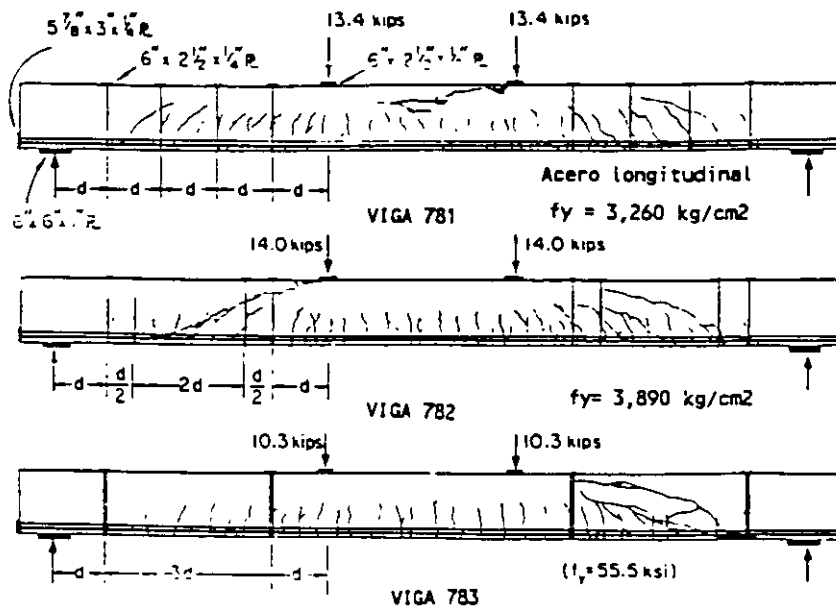


Fig. 18. Consideraciones de detallado para una viga sujeta a cortante y/o torsión.



PROPIEDADES DE LA SECCION TRANSVERSAL  
 Estribos #2  $f_y = 3,500 \text{ kg/cm}^2$   
 Concreto  $f'_c = 270 \text{ kg/cm}^2$   
 Recubrimiento lateral = 1cm  
 Acero Longitudinal 2#3 + 2#8  
 Resistencias de fluencia, las mostradas  
 $d = 27 \text{ cm}$

Fig. 20.  
 Tres vigas con separaciones grandes de los estribos.

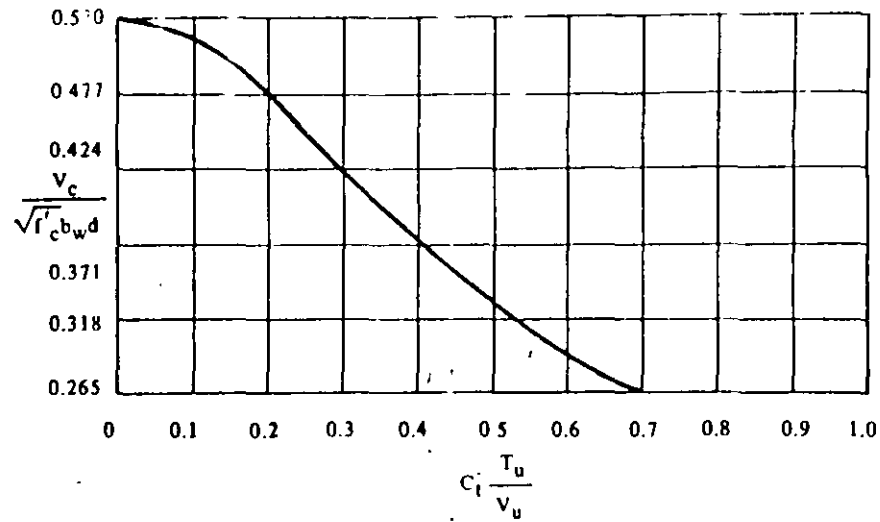


Fig. 13.6 Variación de  $V_c / \sqrt{f'_c} b_w d$  con la relación  $C_f T_u / V_u$ , según la ecuación 11.5.

En la figura 13.7 se ilustran diversos tipos de distribución del refuerzo por cortante, de acuerdo con las secciones 11.5.1.1 y 11.5.1.2.

11.5.5 Refuerzo mínimo por cortante

En general, todos los elementos de concreto sujetos a flexión deben tener una cantidad mínima de refuerzo por cortante, excepto para losas y zapatas, nervaduras y vigas anchas de poco peralte (sección 11.5.5.1). Para elementos no preforsados se calcula el refuerzo mínimo por cortante requerido a partir de:

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} \quad \text{ecuación 11.14}$$

La esencia de la ecuación 11.14 consiste en que, cuando se utiliza el refuerzo mínimo por cortante, la resistencia total al cortante de una sección es  $V_c + 3.5 b_w d$ .

EJEMPLO 13.1 Diseño por cortante: Elementos sometidos solamente a cortante y flexión

Determinar el tamaño y la separación de los estribos verticales en U, para una viga simplemente apoyada, con un claro de 9.14 m.

$b_w = 33 \text{ cm}$

$f'_c = 211 \text{ kg/cm}^2$

$w_u = 6.7 \text{ ton/m}$

$d = 51 \text{ cm}$

$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$

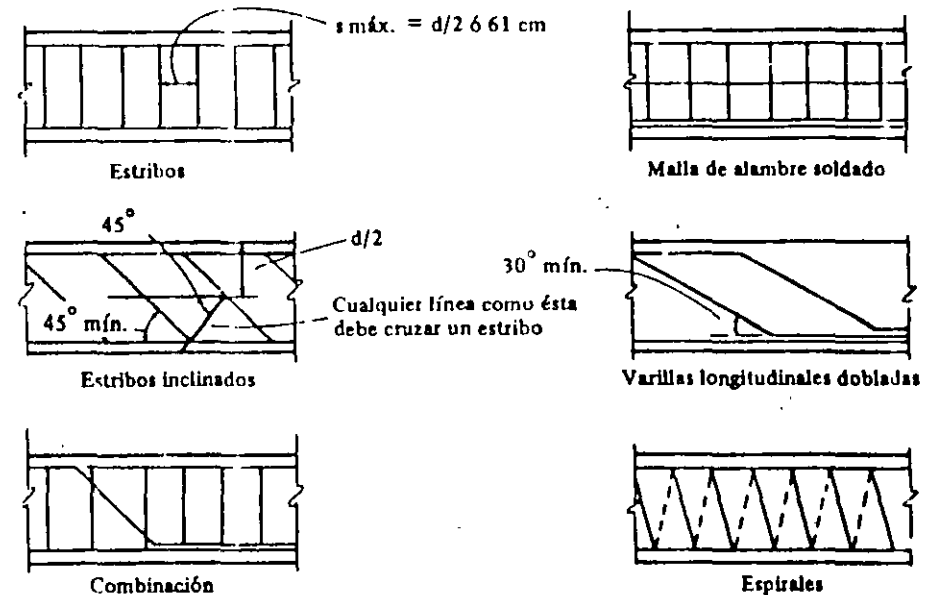


Fig. 13.7 Tipos y distribución del refuerzo por cortante.

Cálculo y análisis

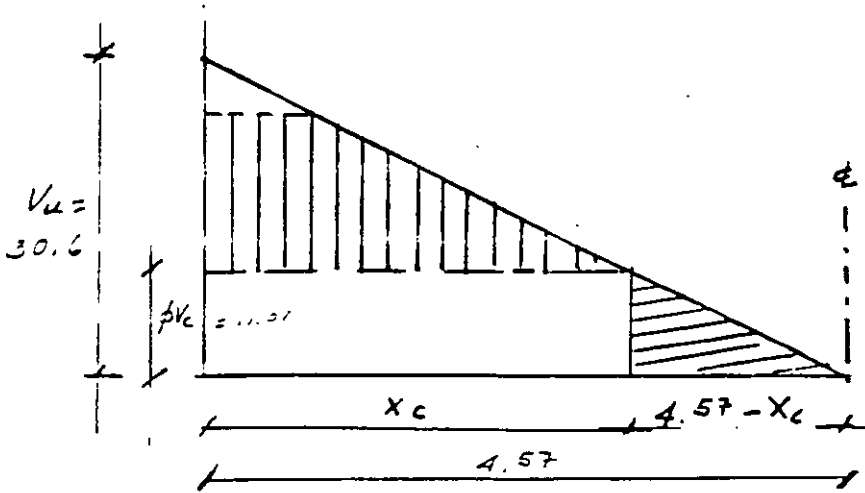
Referencia en el Reglamento

Para este ejemplo, se supone que la carga viva está fija, de tal modo que el cortante de diseño en el centro del claro es igual a cero. (Se obtiene un cortante de diseño mayor que cero si se considera una carga viva parcial sobre el claro.)

1. Determinar las fuerzas cortantes factorizadas: @ apoyo:  $V_u = 6.7 \times 4.57 = 30.6$  ton. @ distancia  $L/4$  del apoyo:  $V_u = 30.6 - 6.7 \times 0.51 = 27.2$  ton. 11.1.2.1
2. Determinar la resistencia al cortante proporcionada por el concreto.

$$\begin{aligned} \phi V_c &= \phi 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \\ &= 0.85 \times 0.53 \sqrt{211} \times 33 \times 51 = 11\,013 = 11.01 \text{ ton} \end{aligned} \quad \text{ecuación 11.13}$$





Por comparación de  $\Delta$ s semejantes:

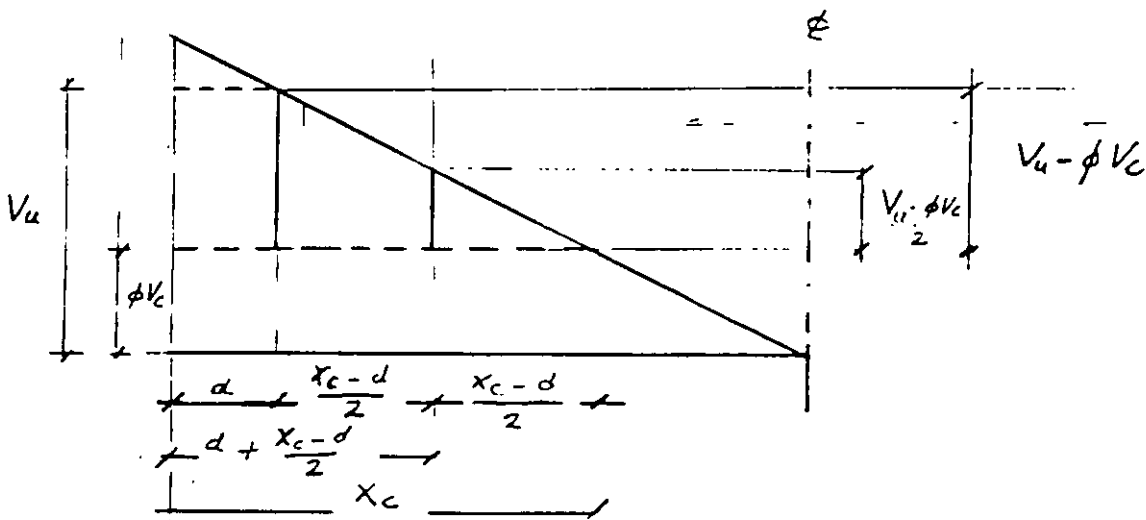
$$\frac{4.57 - X_c}{4.57} = \frac{\phi V_c}{V_u}$$

$$4.57 - X_c = 4.57 \left( \frac{\phi V_c}{V_u} \right); \quad 4.57 \left( 1 - \frac{\phi V_c}{V_u} \right) = X_c$$

$$X_c = 4.57 \left( 1 - \frac{11.01}{30.6} \right) = 2.93 \text{ m}$$

En la misma forma se puede determinar  $X_m$

$$X_m = 4.57 \left( 1 - \frac{\phi V_c / 2}{V_u} \right) = 4.57 \left( 1 - \frac{5.50}{30.6} \right) = 3.75 \text{ m}$$

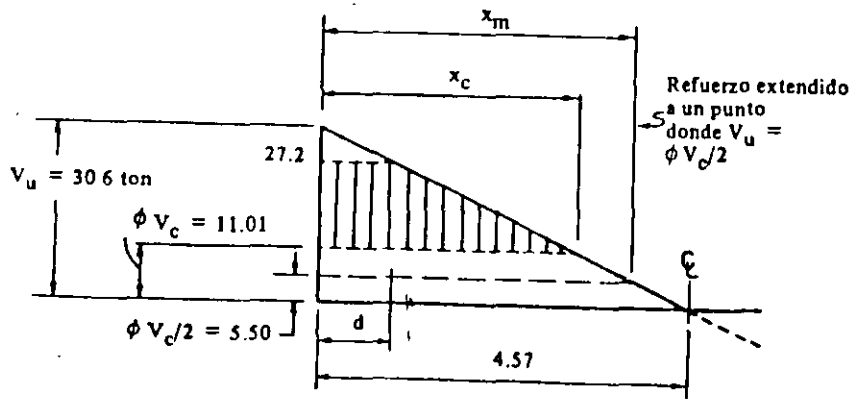


3. Determinar la distancia  $x_c$  desde el apoyo, más allá de la cual el concreto puede soportar el cortante total.

Del dibujo  $(4.57 - x_c)/4.57 = \phi V_c/V_u$  en el apoyo  
 $\therefore x_c = 4.57 [1 - (\phi V_c/V_u)] = 4.57 [1 - (11.01/30.6)] = 2.93 \text{ m}$

4. Determinar la distancia  $x_m$  desde el apoyo hasta donde sea preciso proporcionar refuerzo mínimo por cortante (es decir, hasta  $V_u = \phi V_c/2$ ). 11.5.5.1

$$x_m = 4.57 [(30.6 - 5.50)/30.6] = 3.75 \text{ m}$$



5. Determinar la separación requerida de los estribos en U.

$$s \text{ (requerida)} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

Comentarios sección 11.5.6

Suponiendo estribos en U del #4 ( $A_v = 2.58 \text{ cm}^2$ ) apéndice F @ distancia  $d$  del apoyo:

$$s \text{ (requerida)} = 0.85 (2.58) 2.8 (51) / (27.2 - 11.01) = 19.4 \text{ cm}$$

Puesto que  $(V_u - \phi V_c)$  varía linealmente entre  $x = d$ ,  $x = x_c$  y la separación requerida varía inversamente con  $(V_u - \phi V_c)$ , la separación requerida en cualquier sección entre esos dos puntos se puede obtener directamente del valor  $s$  (requerido), correspondiente a  $x = d$ . Por ejemplo, en la sección:

$$x = d + [(x_c - d)/2] = 1.72 \text{ m del apoyo}$$

$$s \text{ (requerida)} = 19.4/0.5 = 38.8 \text{ cm}$$

6. Verificar la separación máxima permisible de los estribos.

$$s \text{ (máx)} \text{ de los estribos verticales} < d/2 = 25.5 \text{ cm} \quad 11.5.4.1$$

$$\text{o también } < 61 \text{ cm}$$

$s \text{ (máx)}$  de los estribos en U del #4 correspondiente a los requerimientos mínimos de áreas de refuerzo

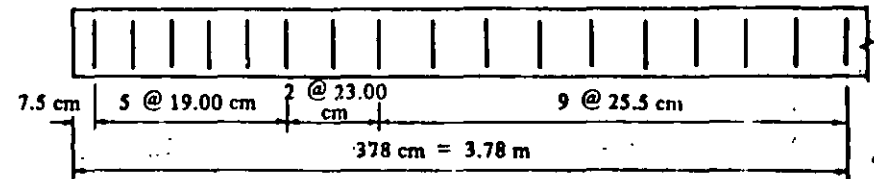
$$s \text{ (máx)} = A_v f_y / 3.5 b_w = 2.58 (2810) / 3.5 \times 33 \quad \text{ecuación 11.14}$$

$$= 63 \text{ cm}$$

$$\therefore s \text{ (max)} = 25.5 \text{ cm}$$

Resumen

Separación de los estribos utilizando estribos en U del #4:



6 estribos @ 19.00 cm

2 estribos @ 23.00 cm

9 estribos @ 25.5 cm

EJEMPLO 13.2 Diseño por cortante con tensión axial

Determinar la separación que se requiere para estribos verticales en U, para una viga sometida a tensión axial.

$$f'_c = 253 \text{ kg/cm}^2 \text{ (concreto ligero con arena; no se especifica } f_{ct})$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_d = 6.01 \text{ ton-m}$$

$$M_l = 4.42 \text{ ton-m}$$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CONCRETOS  
FABRICADOS EN EL D. F.**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CONCRETOS FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL

Carlos Javier Mendoza Escobedo (I)

## RESUMEN

Se determinan las propiedades mecánicas de los concretos fabricados con agregados típicos del Distrito Federal y se establecen expresiones que permiten determinar las variaciones de las resistencias a compresión y tensión, del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson, del módulo de rigidez por cortante, de la contracción por secado y de la deformación diferida, a través del tiempo. Se dan recomendaciones para obtener concretos con un mejor comportamiento en cuanto a estas propiedades.

## INTRODUCCION

Los materiales pétreos empleados tradicionalmente en la ciudad de México para la fabricación de concreto, tienen características físicas que difieren de las especificadas en las normas relativas. Entre las discrepancias más notorias se pueden mencionar el peso específico, la absorción y el contenido de polvos. Lo anterior ha hecho que las propiedades de los concretos fabricados con estos agregados difieran de las alcanzadas en los concretos comunes.

Se ha observado que estos concretos, bajo condiciones de trabajo, presentan deformaciones y agrietamiento mayores que los usuales, haciéndose evidente, por estas y otras causas, la diferencia entre el comportamiento de los concretos característicos del Distrito Federal y los comunes.

## PROPIEDADES MECANICAS

Materiales componentes. En este trabajo se incluyen los resultados alcanzados con gravas y arenas andesíticas, comunes en el D.F. Se estudian dos tipos de arenas, cuya diferencia básica estriba en el contenido de polvos (material más fino que la malla 200).

Tanto las gravas como las arenas tienen peso específico bajo y absorción alta, lo que hace que los concretos fabricados con estos materiales sean muy deformables, a corto y a largo plazos.

En la fabricación de los concretos se empleó cemento Portland tipo I y no se usó aditivo alguno.

Concreto en estado fresco. Con los materiales antes descritos se hicieron proporcionamientos para resistencias nominales de 200, 300 y 400 kg/cm<sup>2</sup>. En todos los casos se usó un factor de sobrediseño de 50 kg/cm<sup>2</sup>. En las mezclas con resistencias nominales de 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> se buscó un revenimiento de 10 cm y para la de 400 kg/cm<sup>2</sup>, uno de 5 cm. Una de las mezclas de 300 kg/cm<sup>2</sup> tuvo revenimiento teórico de 12 cm, para cubrir los casos de concretos con características

adecuadas para ser transportado por medio de bombas.

Resistencia a compresión. Las edades de prueba fueron 7, 28, 90, 360 y 1825 días; cada resultado representa el promedio del ensaye de tres especímenes compañeros. En la fig 1 se plantea la correlación que permite predecir la resistencia a compresión a cualquier edad en función de la alcanzada a los 28 días. Cabe mencionar que los incrementos de resistencia con la edad fueron mayores en aquellos concretos con menos polvo. La expresión sugerida resulta ser:

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ en kg/cm}^2$$

Resistencia a tensión. Se hicieron especímenes cilíndricos para ensayarlos a tensión por medio de la prueba indirecta, así como vigas para determinar el módulo de rotura. Las expresiones que correlacionan las resistencias a tensión y compresión resultan ser:

Tensión indirecta, fig 2 ; por flexión, fig 3

$$f_t = 1.47 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2 \quad f_f = 1.81 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad se obtuvo a partir de las gráficas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados a compresión. Se usó el criterio de módulo secante. Por cada mezcla de concreto estudiada se hicieron tres ensayos, siendo los valores reportados el promedio alcanzado en estas determinaciones. La expresión propuesta para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión es, fig 4

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Relación de Poisson. Esta se obtuvo del ensaye a 28 días de especímenes cilíndricos de concreto de diferentes resistencias. En la fig 5 se observa que la relación de Poisson varía con la resistencia y que se puede relacionar con ésta con la expresión

$$\mu = 0.22 + 0.00026 f'_c$$

habiendo alcanzado un valor medio de 0.30, superior al intervalo usual recomendado para el concreto (0.15 - 0.20).

Módulo de rigidez por cortante. Con los valores de módulos de elasticidad y relación de Poisson conocidos, se pueden estimar el módulo de rigidez por cortante. Para los concretos de agregados andesíticos resultó ser

$$G = 3300 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Deformación unitaria ( $\epsilon_0$ ) correspondiente al esfuerzo máximo. El valor de esta deformación también se ve afectado por el nivel de resistencia que se alcance en el concreto, por lo que se puede correlacionar con ella con la expresión siguiente, fig 6

$$\epsilon_0 = 0.003 + 2.8 \times 10^{-6} f'_c$$

Los resultados de los ensayos condujeron a un valor medio de esta deformación ( $\bar{\epsilon}_0$ )

igual a 0.0044.

La curva esfuerzo-deformación del concreto bajo cargas de compresión, puede representarse en forma adecuada con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c}{\epsilon_0 \left| 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right|}, \text{ en kg/cm}^2$$

Contracción por secado. La rapidez con que se presenta la contracción de los concretos andesíticos, varía de acuerdo con el contenido de polvos que se tenga en los materiales componentes, sin embargo, la contracción última se puede estimar del mismo orden para los dos casos e igual  $(\epsilon_{cs})_u = 0.001$ , para los proporcionamientos usuales y las condiciones ambientes de la ciudad de México, fig 7. Las expresiones que permiten estimar el valor de la contracción para una edad cualquiera se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.001$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.001$$

en ambos casos t debe expresarse en días.

Deformación diferida. Esta deformación se estimó en función del coeficiente de deformación diferida ( $C_t$ ), el cual es igual  $C_t = \frac{\epsilon_t - \epsilon_i}{\epsilon_i}$ , siendo  $\epsilon_t$ , la deformación unitaria alcanzada en un tiempo t y  $\epsilon_i$ , la deformación unitaria inicial al aplicar el esfuerzo de compresión, igual a 40 por ciento del esfuerzo máximo.

El valor del coeficiente último ( $C_u$ ), estimado para un tiempo infinito, para los proporcionamientos usuales y para las condiciones ambientes de la ciudad de México, variarán de acuerdo con el contenido de polvos observados en los materiales componentes, fig 8. Las expresiones encontradas para calcular el valor de este coeficiente para un tiempo cualquiera t, en días, se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \times 4$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \times 2.5$$

Contracción por secado en condición estándar. Tomando en cuenta los coeficientes determinados con los resultados de los ensayos y las modificaciones en la contracción última para ponerla en condición estándar, se recomienda emplear las siguientes expresiones para la estimación de la contracción por secado a cualquier edad:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.0013$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.0013$$

En estas expresiones el valor de  $t$  se debe tomar como el número de días después de la suspensión del curado húmedo y el valor de la contracción determinada se debe afectar por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del concreto de que se trate y las condiciones del medio ambiente, fig 9.

Deformación diferida última en condición estándar. Entre las variables que mayor influencia tuvieron en los valores de los coeficientes de deformación diferida última están la edad a la que se aplica la carga, la humedad relativa, y el revenimiento, los cuales incrementaron los valores alcanzados en los ensayos.

El coeficiente de deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} 5.65$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} 3.12$$

Al igual que en la contracción por secado los coeficientes calculados para la deformación diferida, deberán ser afectados por los factores de corrección para tomar en cuenta las características particulares de los concretos empleados y las condiciones del medio ambiente en que se encuentran, fig 9.

#### CONCLUSIONES

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción, como los andesíticos, en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Dadas las discrepancias encontradas entre las expresiones usuales y las

determinadas en este estudio para estimar la resistencia del concreto así como sus deformaciones a corto y largo plazos, se requiere modificar los parámetros usados convencionalmente en los diseños estructurales para obtener mejor concordancia entre el comportamiento estimado en el diseño y el alcanzado en las estructuras reales.

3. La contracción por secado registrada fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas y al revenimiento de las mezclas utilizadas.
4. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida. Este coeficiente también aumentará en forma apreciable al incrementarse el revenimiento del concreto.

#### RECOMENDACIONES

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por secado, porque hay mayor restricción a estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conducirá a menores consumos de agua lo que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

La resistencia a tensión por flexión del concreto es usual valuarla como  $2\sqrt{f'_c}$  (ACI 318, RDF), sin embargo, los resultados de los ensayos efectuados con los concretos andesíticos dan resistencias a la tensión ligeramente menores, por lo que se sugiere tomar en cuenta esta discrepancia empleando la expresión propuesta.

En relación con el módulo de elasticidad estático, las expresiones propuestas por los diferentes reglamentos de construcción (ACI 318, RDF) sobrestiman los valores alcanzados con los concretos andesíticos, por lo que se recomienda emplear la expresión propuesta en este trabajo para predecir las deformaciones a corto plazo de las estructuras hechas con este material.

Al igual que los otros parámetros la relación de Poisson y el módulo de rigidez por cortante determinados para el concreto andesítico, difieren de los valores usualmente empleados, por lo que para estimar mejor el comportamiento de estos concretos conviene emplear los valores sugeridos.

La deformación correspondiente al esfuerzo máximo es usual considerarla igual a 0.003, sin embargo, el resultado de los ensayos indican que esta deformación alcanza un valor promedio de 0.0044.



En relación con las deformaciones a largo plazo, tanto las originadas por la contracción como por la deformación diferida, pueden estimarse con buena precisión con los coeficientes determinados de los resultados de los ensayos, sin requerirse de correcciones por características del material y medio ambiente del Distrito Federal, dado que los concretos empleados son característicos de los usuales en el área metropolitana de la ciudad de México, y las condiciones de curado representan también las usuales en esta área.

Cuando las características del concreto y las condiciones del medio ambiente varían, haciendo no aplicables directamente los resultados de los ensayos, se recomienda emplear los valores sugeridos para características y condiciones estándar y hacer todas las correcciones necesarias para adecuar los coeficientes a las circunstancias de cada caso en particular, de acuerdo con los factores de corrección indicados en la fig 9.

Como las deformaciones y agrietamientos alcanzados a largo plazo en los concretos característicos del D.F. son mucho mayores que los esperados usualmente, se deben tomar en el diseño las precauciones necesarias para restringir estos efectos con el acero de refuerzo u otros medios adecuados.

#### REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J. "Estudio de las propiedades a largo plazo de los concretos en el Distrito Federal" Informe elaborado para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano, enero 1984
2. Neville, A.M. "Properties of Concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
3. ACI Committee 209 "Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures", ACI Publication SP-27.

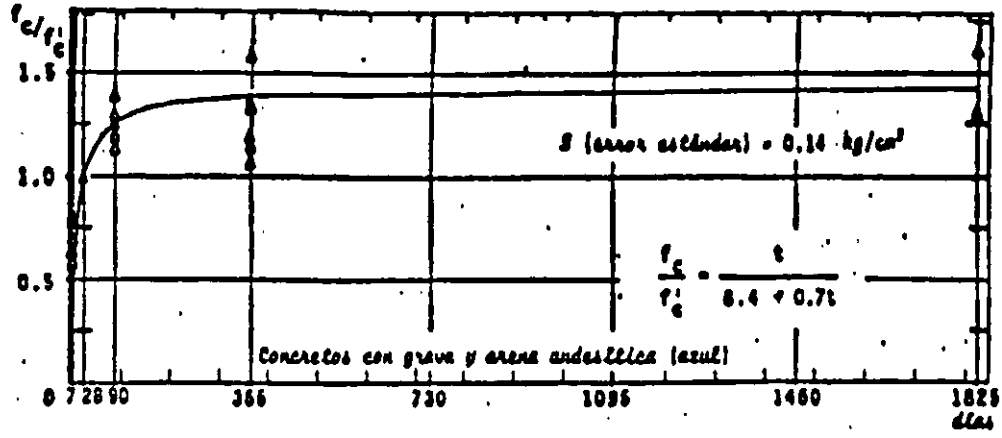


Fig 1 Variación de la resistencia a compresión con el tiempo

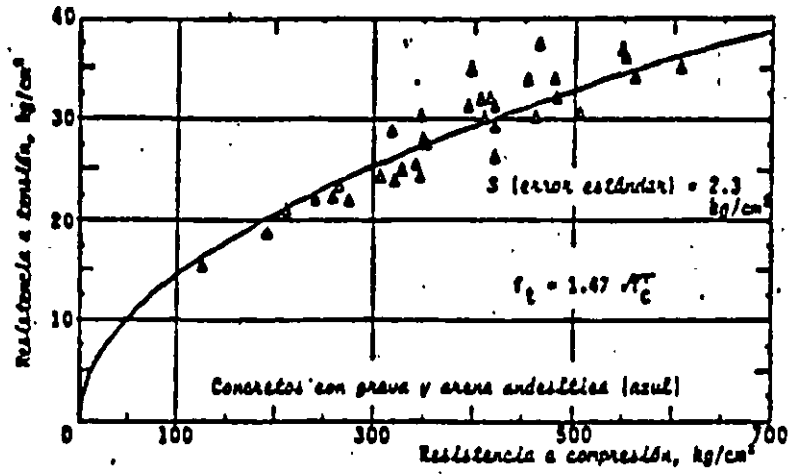


Fig 2 Resistencia a tensión por compresión diametral

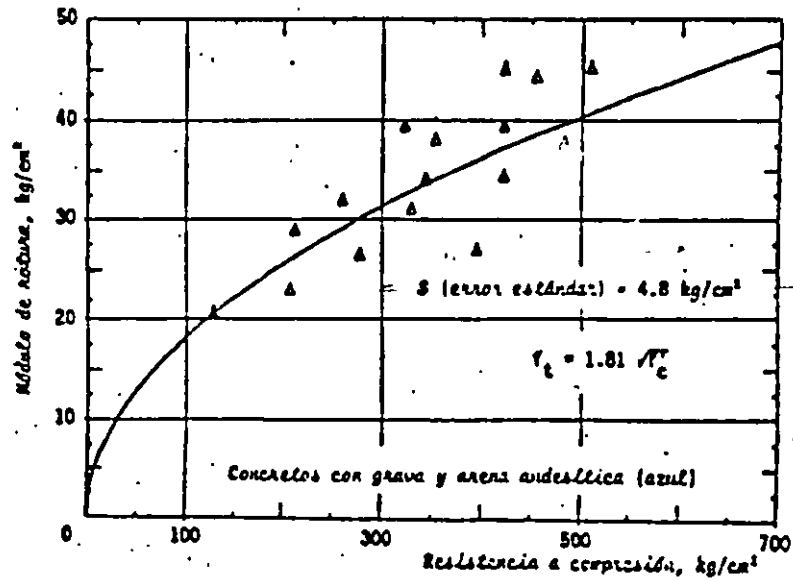


Fig 3 Resistencia a tensión por flexión

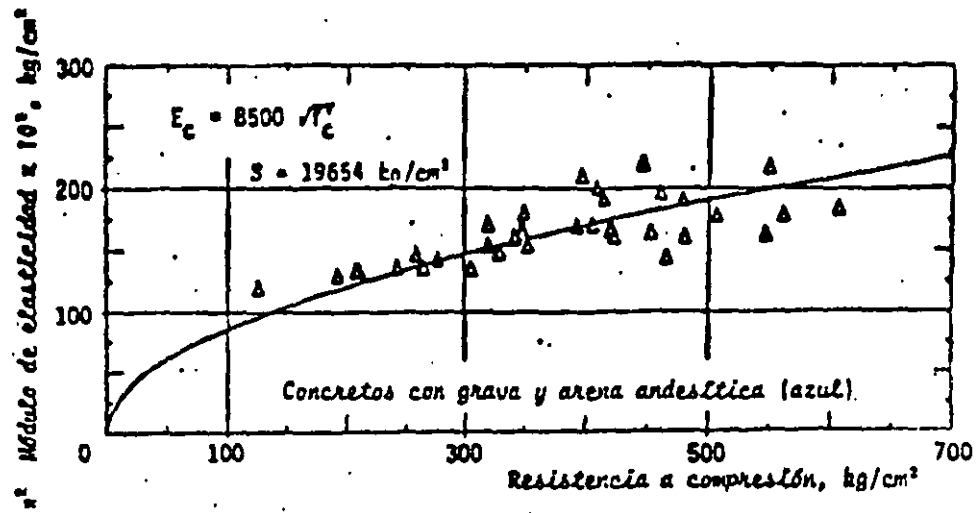


Fig 4 Módulo de elasticidad

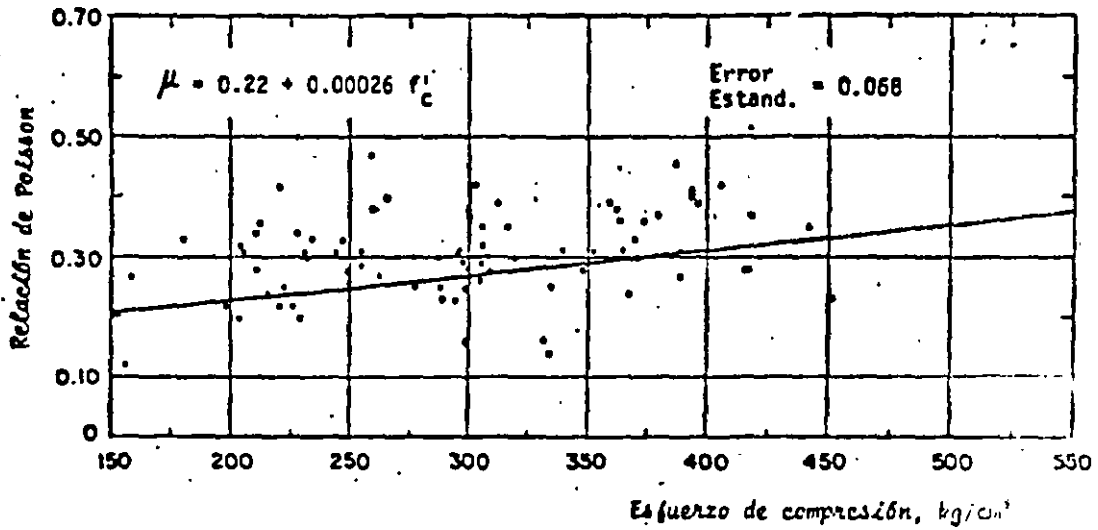
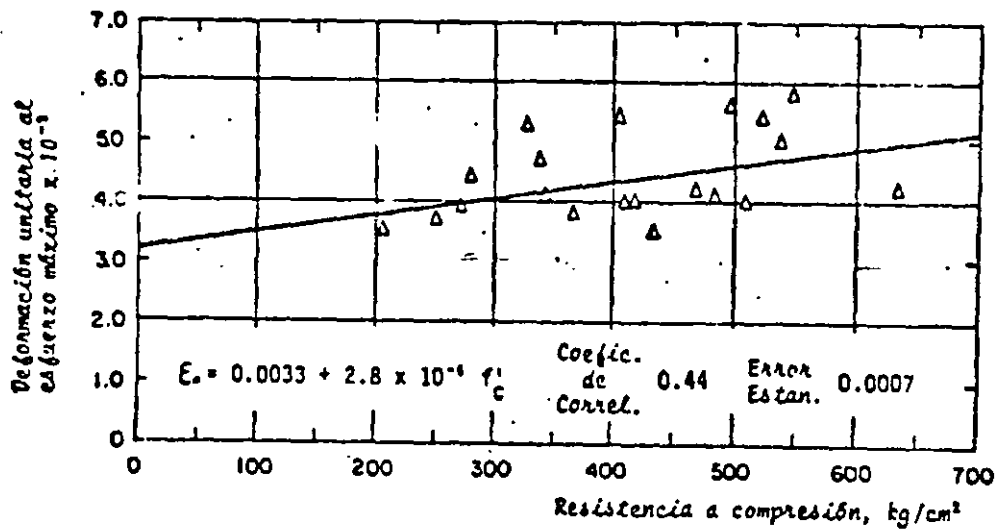
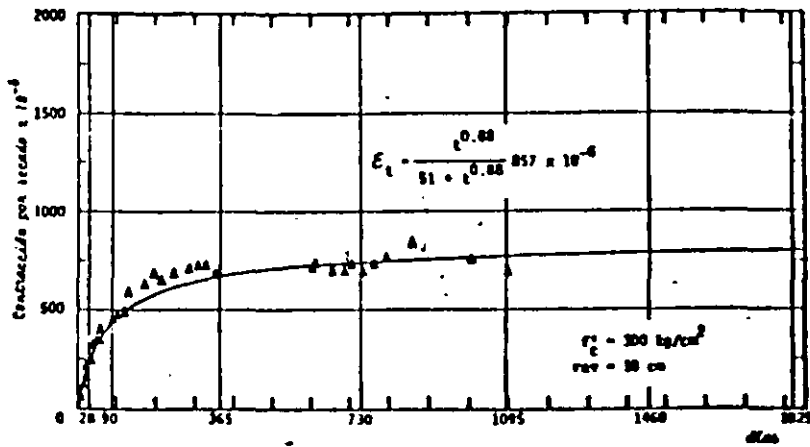


Fig 5 Relación de Poisson para concretos andesíticos

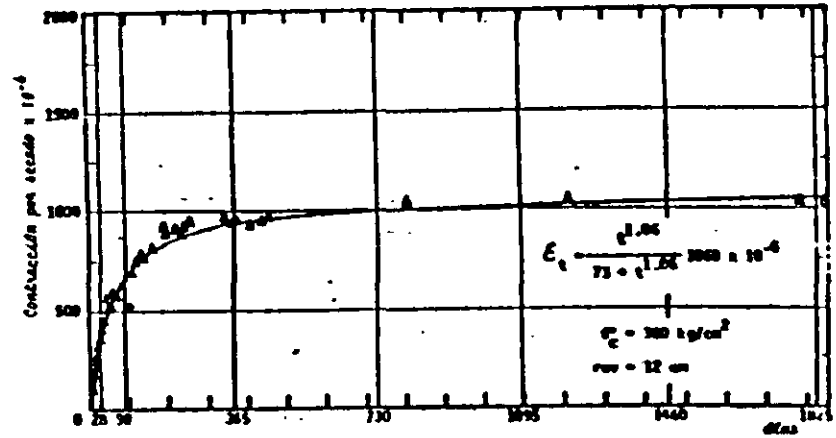


a) Concretos andesíticos

Fig 6 Relación entre deformación unitaria al esfuerzo máximo y resistencia a compresión

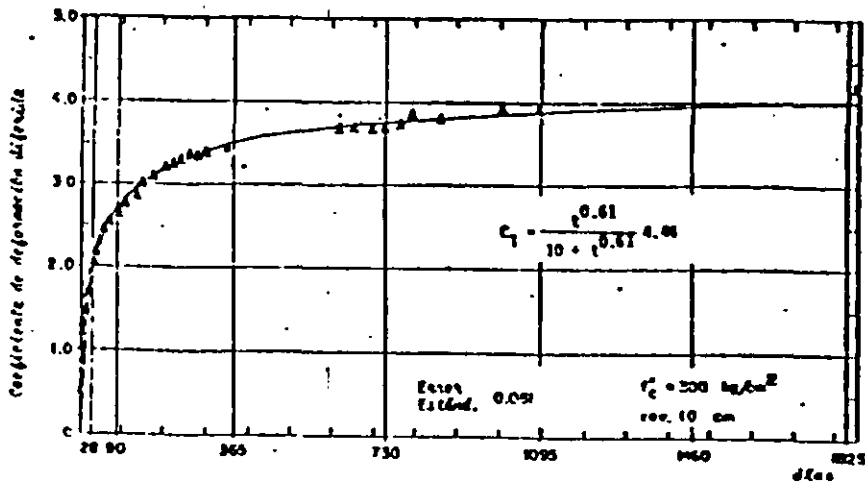


a) Concretos andesíticos con exceso de polvos

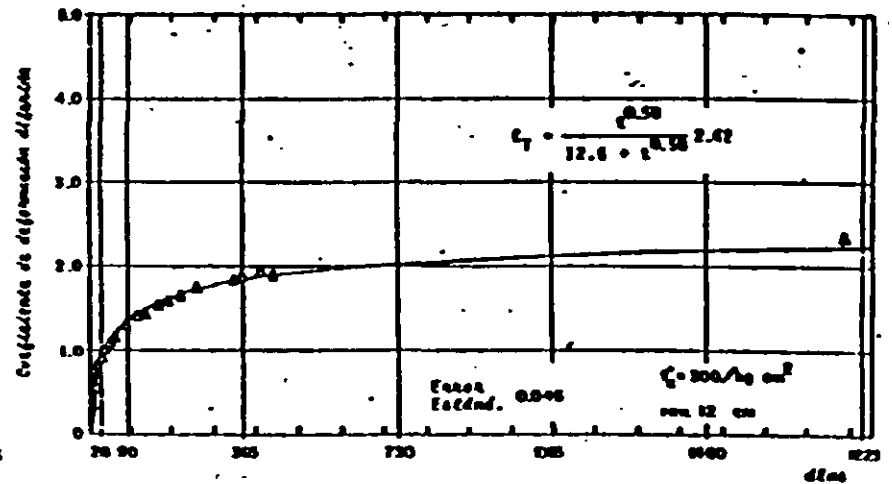


b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 7 Contracción por secado



a) Concretos andesíticos con exceso de polvos



b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 8 Deformación diferida

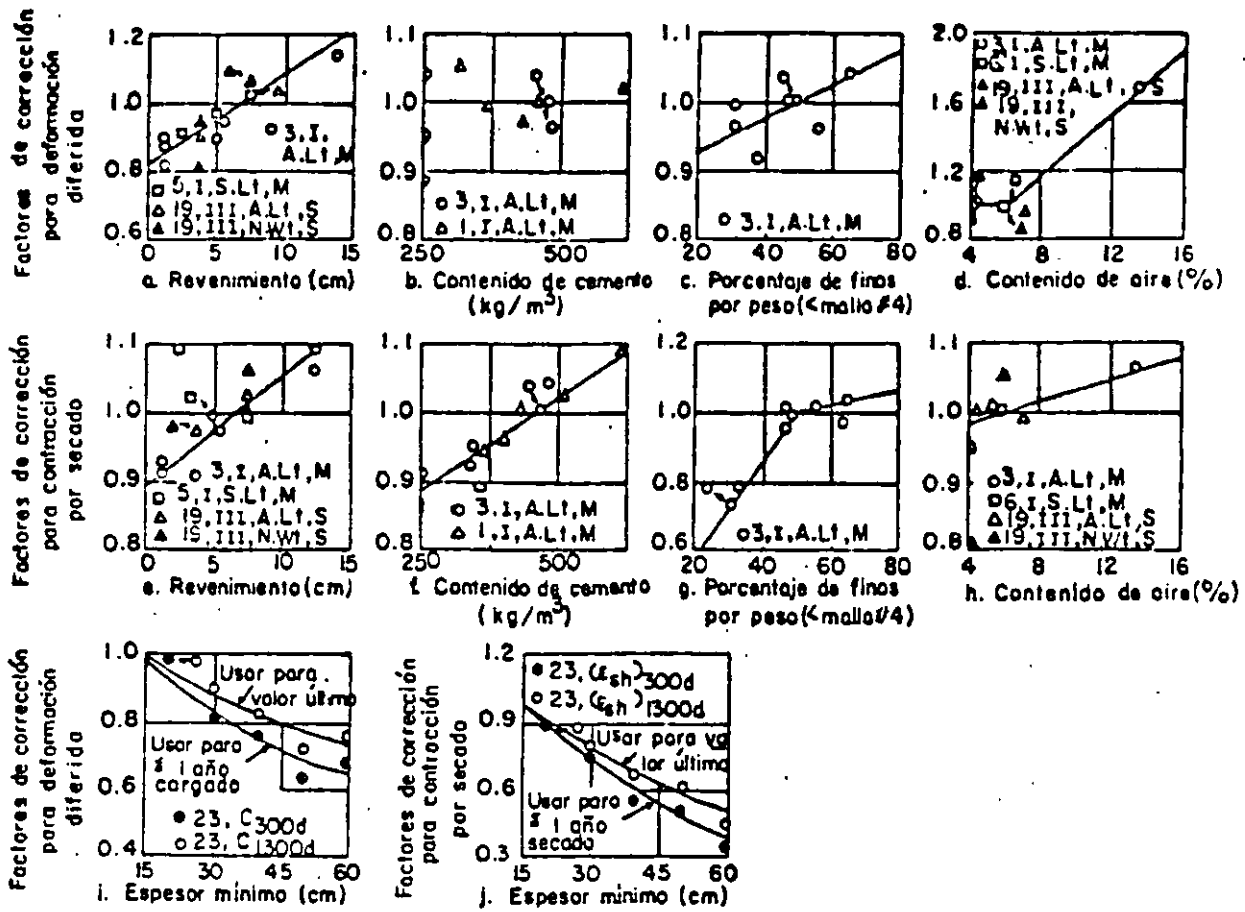


Fig 9 Factores de corrección nominales para deformación diferida y contracción por secado para los parámetros mostrados. I, III - Tipo de cemento; N.Wt, S. Lt, A.Lt - peso del concreto; M, S - curado húmedo y a vapor (ref 3)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

## **TEMA**

**INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS  
ESTRUCTURALES DEL D. F.**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL D.F.

---

Ing. Carlos Javier Mendoza\*  
Ing. Manuel Mena Ferrer\*\*

## RESUMEN

---

Se analiza el efecto que tienen las partículas más finas de las arenas andesíticas y las características intrínsecas de las gravas calizas y andesíticas, disponibles en la ciudad de México, sobre las propiedades de los concretos en los estados fresco y endurecido. Además, se dan recomendaciones para mejorar las propiedades de estos concretos.

## SUMMARY

---

The effects of the finest part of andesitic sands and of the intrinsic characteristics of limestones and andesitic gravels, available in Mexico City, in the properties of fresh and hardened concrete are analyzed. Also, recommendations for improving the properties of these concretes are given.

\* Subdirector, Instituto de Ingeniería, UNAM  
\*\* Asesor en tecnología del concreto

## INTRODUCCION

Los concretos utilizados comúnmente en la Ciudad de México presentan ciertas deficiencias, originadas en algunos casos por la calidad de los materiales componentes y en otros por las prácticas constructivas empleadas. Entre las deficiencias más notorias se pueden señalar las siguientes:

a) La deficiente calidad de los agregados empleados propicia que los concretos tengan propiedades inadecuadas como bajo módulo de elasticidad, elevados cambios volumétricos por secado y excesivas deformaciones diferidas bajo cargas sostenidas (flujo plástico)<sup>1</sup>. Asimismo, la tendencia al empleo de mezclas demasiado fluidas ocasiona sangrado excesivo en el concreto recién colocado y produce mayor contracción por secado en el concreto endurecido. Por todo ello, las estructuras de concreto son propensas a presentar agrietamientos por elevados cambios volumétricos, excesivas deformaciones a corto y largo plazo y escasa rigidez ante cargas laterales.

b) El empleo de cemento portland-puzolana en la fabricación de concreto propicia una adquisición de resistencia más lenta que la obtenida con otros tipos de cemento portland (I y III), lo cual es incompatible con la práctica usual de pronto descimbrado de las estructuras, en particular de los sistemas de pisos para edificios, y dar lugar a flechas excesivas y agrietamientos inaceptables.

c) Las pruebas de control de calidad realizadas por diferentes laboratorios<sup>2</sup> indican que la relativa frecuencia los concretos no cumplen con los requisitos de calidad especificados y que la proporción de mezclas con resistencias inferiores a la especificada llega a cerca de un 30%, sobre todo para algunos valores de  $f_c$ . Lo anterior ocasiona que los factores de seguridad de un número importante de elementos estructurales sean inferiores a los considerados en los reglamentos.

Los problemas anteriores tienden a agudizarse con los llamados concretos "bombeables", cuando se usan mezclas

con revenimientos exageradamente altos y proporciones excesivas de arena.

Por todo lo mencionado se opina que las características y propiedades del concreto que se ha utilizado normalmente en la Ciudad de México no son las más favorables para su empleo con fines estructurales, lo cual ha hecho pensar en la necesidad de introducir mejoras sustanciales, tanto en los materiales componentes como en el control de calidad y en las prácticas constructivas, sobre todo para aquellas aplicaciones con mayor requerimiento estructural.

Con el propósito de evaluar los efectos de ciertos cambios que en lo relativo a la calidad de los agregados pueden realizarse, se diseñó un programa

de ensayos en mezclas de concreto, que se llevó a cabo simultáneamente en tres diferentes laboratorios independientes de la Ciudad de México. En este trabajo se analizan los resultados obtenidos.

## MATERIALES EMPLEADOS

Para mejorar las propiedades de los concretos que se utilizan en las construcciones del Distrito Federal, se pueden considerar dos modificaciones principales en los agregados:

- Emplear gravas de mejor calidad que las actuales de andesita y basalto escoriáceo.
- Reducir el contenido de finos indeseables ( $< 74\mu$ ) en las arenas, y comprobar que los aceptados no tengan

TABLA 1. PROPIEDADES FISICAS DE LAS GRAVAS

GRAVAS	ANDESITICA		CALIZA TRITURADA		NORMA ASTM C-33
	5-10 mm	10-20 mm	5-10 mm	10-20 mm	
1. Material más fino que la malla No. 200,	1.60	0.40	0.67	0.75	1 máx.
2. Densidad	2.42	2.41	2.63	2.63	
3. Absorción,	4.54	4.19	0.82	0.68	
4. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en	9.8	14.7	8.0	7.4	12 máx.
5. Abrasión en Máquina Los Angeles, pérdida en	23.8	27.1	17.5	14.9	50 máx.
6. Coeficiente volumétrico:					
Por tamaños	0.34	0.37	0.13	0.22	
Grava total		0.36		0.19	
7. Pesos volumétricos:					
Suelto, $kg/m^3$	1256	1266	1366	1348	
Varillado, $kg/m^3$	1354	1370	1517	1528	



**TABLA 2. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LAS ARENAS**

CONCEPTOS	IDENTIFICACION (% FINOS)	ARENAS ANDESITICAS					ARENA DE RE- FEREN- CIA (1.1)	NORMA ASTM C-33
		(1.8)*	(7.7)	(9.9)	(16.7)	(19.3)		
1. Módulo de finura	3.44	3.00	2.60	2.97	2.78	2.80	2.3-3.1	
2. Material más fino que la malla No. 200, %	1.8	7.7	9.9	16.7	19.3	1.1	5 máx.	
3. Densidad	2.40	2.28	2.40	2.37	2.30	2.31		
4. Absorción, %	5.85	5.87	4.38	4.94	7.93	5.12		
5. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en %	5.67	10.54				5.82	10 máx.	
6. Pesos volumétricos:								
Suelto, kg/m <sup>3</sup>	1396	1392	1443	1440	1450	1386		
Varillado, kg/m <sup>3</sup>	1531	1590	1690	1635	1624	1524		
7. Materia orgánica, color respecto al límite	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.		
8. Equivalente de arena, %	82.9	66.0	59.3	65.4	52.1	84.5		
9. Límites de consistencia:								
Límite líquido, %	17.2	23.1	19.0	21.1	22.3	15.6		
Límite plástico, %	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.		
Índice plástico	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.		
Contracción lineal, %	0.0	2.10	0.0	1.95	1.85	0.0		

\* Arena andesítica lavada

**propiedades plásticas:**

Para cuantificar qué tanto pueden influir estas modificaciones en las propiedades del concreto, se realizó un estudio comparativo que incluyó mezclas con dos tipos de grava (andesítica natural y caliza triturada), cinco arenas andesíticas con diferentes contenidos de finos y una arena de referencia, no andesítica, que cumplió con los requisitos físicos de la norma ASTM C33.<sup>3</sup>

En cuanto al cemento, se optó por emplear cemento portland tipo I como único material cementante y no usar aditivos en la preparación de las mezclas.

**Cemento**

Las pruebas físicas y químicas efectuadas al cemento portland tipo I empleado indicaron que cumple ampliamente con los requisitos especificados en la norma ASTM C150<sup>4</sup>. Sin embargo, cabe señalar que resultó ser menos fino de lo que suelen ser los cementos del mismo tipo.

**Agregados**

**a) GRAVAS**

Las gravas tanto andesíticas como calizas se dividieron en dos fracciones: de 5 a 10 mm y de 10 a 20 mm. Estas fracciones se combinaron en proporción de 35 y 65%, respectivamente, para integrar el agregado grueso

**empleado.**

Las propiedades físicas de estas gravas se presentan en la tabla 1. Los valores ahí mostrados son el promedio de las pruebas efectuadas en los tres laboratorios que participaron en el estudio.

Los resultados de las pruebas de densidad y absorción muestran una diferencia importante entre las gravas andesíticas y calizas, en favor de las segundas. Si se admite que estas propiedades pueden ser un buen índice del grado de deformabilidad de las rocas que las constituyen, debe esperarse que los concretos hechos

**TABLA 3. MEZCLAS DE CONCRETO DE PRUEBA**

Materiales	Mezclas No. (consumo promedio, kg/m <sup>3</sup> )								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cemento	300	296	297	297	303	300	295	294	298
Arena andesítica (finos ): 1.8				770					
7.7					742				
9.9	775					774			
16.7		755					752		
19.3			736					761	
Arena de referencia									740
Grava andesítica	952	938	940						
Grava caliza				1024	1044	1034	1018	1014	1027
Agua	179	187	190	183	176	183	193	194	177
Agua/cemento	0.60	0.63	0.65	0.62	0.58	0.61	0.63	0.68	0.59

con la grava caliza resulten mucho menos deformables.

**b) ARENAS**

Se utilizaron cinco arenas andesíticas cuyos contenidos de finos menores que la malla 200 variaron entre 1.8 y 19.3%. Cuatro de estas arenas procedieron de otros tantos bancos (depósitos piroclásticos) de la región. La arena andesítica con 1.8% de finos se obtuvo por lavado. A manera de referencia se empleó una arena no andesítica con un contenido de finos de 1.1%.

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas efectuadas a estas arenas. Conviene notar que, además de las pruebas físicas que son usuales, se efectuaron otras dos determinaciones: el equivalente de arena y los límites de consistencia. Esto se hizo con el fin de buscar un medio que permitiera evaluar las propiedades plásticas de los finos de estas arenas.

Las especificaciones de calidad para agregados por lo regular aceptan un máximo de 5% de partículas más finas que la malla 200 (74 $\mu$ ) en arenas para concretos de uso general, no expuestos a la abrasión. Todas las arenas andesíticas que se utilizan en los concretos del Distrito Federal ex-

ceden por mucho este límite, pues sus contenidos de finos suelen fluctuar entre cerca del 10 y algo más del 20%. Debido a las dificultades que existen para reducir estos finos a valores aceptables, se ha vuelto costumbre tolerarlos sin mayor trámite, aduciendo que se trata de finos inertes que no afectan la calidad del concreto; sin embargo, la experiencia ha demostrado que esto no siempre es así, pues hay arenas contaminadas con finos plásticos (limos y arcillas) que sí son dañinos para el concreto.

Como es usual, todas estas arenas andesíticas exhibieron densidades relativamente bajas y altas absorciones. Conviene observar que, en este aspecto, la arena de referencia no presentó mejores características.

**PROGRAMA DE PRUEBAS**

El programa incluyó nueve mezclas de concreto en las que se mantuvieron constantes las siguientes características:

- a) Cemento: portland tipo
- b) Tamaño máximo de grava: 20 mm
- c) Granulometría de la grava: 35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm
- d) Consumo de cemento: 300  $\pm$  5 kg/m<sup>3</sup>
- e) Proporción de arena en los agrega-

- dos: 45% en volumen absoluto
- f) Revenimiento del concreto: 10  $\pm$  1 cm

Los consumos de materiales por metro cúbico de concreto, así como la relación agua/cemento de cada mezcla se presentan en la tabla 3.

**Pruebas realizadas**

A todas las mezclas de concreto se les efectuaron las mismas pruebas. Los métodos de ensaye fueron preferentemente los de las normas oficiales mexicanas (NOM) y, en su defecto, los de la ASTM. Las pruebas que se practicaron al concreto fresco fueron: revenimiento, peso volumétrico, contenido de aire (método gravimétrico) y agua de sangrado. Al concreto endurecido se le hicieron las siguientes determinaciones: resistencia a compresión y módulo de elasticidad a 28 días, y contracción por secado con 28 días en agua y 28 días al aire. Los resultados de estos ensayos se presentan en las tablas 4 y 5.

**CARACTERÍSTICAS DE LOS CONCRETOS**

El objetivo del estudio consistió en verificar la influencia que ejercen los contenidos de finos de las arenas y las características de las gravas sobre las propiedades de los concretos ensayados. Tomando en cuenta que en este caso la cantidad de finos totales en el c

creto resultó proporcional a los contenidos de las arenas, como se muestra en la figura 1, las referencias se hacen en función de los finos de las arenas para facilitar la identificación de las mezclas.

#### Concretos en estado fresco

En la tabla 4 se presentan los resultados promedio de los ensayos efectuados en los tres laboratorios a los concretos en estado fresco. Como se puede observar, las mezclas estudiadas tuvieron revenimientos que variaron entre 9 y 10.5 cm; todos ellos quedaron en el intervalo de  $10 \pm 1$  cm propuesto para el estudio.

Dado que el revenimiento se mantuvo constante, el parámetro que se puede considerar para juzgar la influen-

cia del contenido de finos resulta ser el consumo de agua por volumen unitario de concreto. A este respecto, en la figura 2 se observa que, independientemente del tipo de grava empleada, el consumo de agua se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta un 10%, y después de este valor, dicho consumo se incrementó en forma gradual hasta ser 8% mayor para contenidos de finos de 19% en la arena.

Por otro lado, si se comparan los 180 Kg de agua por metro cúbico de concreto requeridos en este caso, contra los 200 que estima el ACI 211.1<sup>s</sup> para un tamaño máximo de agregado de 20 mm, en mezclas sin aire incluido y revenimientos entre 8 y 10 cm, resulta que las mezclas en estudio necesitaron

10% menos de agua. Esta disminución se debió muy probablemente a la finura del cemento, que por ser más grueso de lo usual requirió menos agua para producir el revenimiento previsto.

En relación con el peso volumétrico de los concretos estudiados, en la tabla 4 y la figura 3 se observa que para contenidos de finos de hasta 10% el peso volumétrico se mantuvo constante y que éste disminuyó a medida que aumentaron los finos en las arenas más allá de ese valor. Asimismo se puede ver que existe una diferencia de alrededor de  $80 \text{ kg/m}^3$  entre los concretos fabricados con grava caliza y los hechos con andesita, a favor de la primera.

Dada la diferencia tan clara en cuanto a peso volumétrico de estos dos ti-

TABLA 4. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO FRESCO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Revenimiento, cm	10.5	9.5	10.0	9.5	9.0	10.5	10.0	9.0	9.5
Peso volumétrico, $\text{kg/m}^3$	2207	2176	2165	2274	2270	2291	2258	2263	2242
Vacíos,	0.6	1.1	1.3	1.3	0.3	0.5	0.9	0.7	1.7
Agua de sangrado,	3.3	2.4	1.7	3.0	1.8	3.1	1.7	1.3	3.0

TABLA 5. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO ENDURECIDO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Resistencia a compresión a 28 días ( $f'_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	283	266	242	279	283	289	282	242	273
Módulo de elasticidad a 28 días ( $E_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	157318	140369	138284	282350	279042	286094	259474	254460	274566
Relación $E_c/\sqrt{f'_c}$	9352	8607	8809	16904	16587	16829	15451	16357	16617
Constracción por secado, 28 días en agua y 28 días al aire, $10^{-6}$	533	733	759	337	443	332	403	448	308

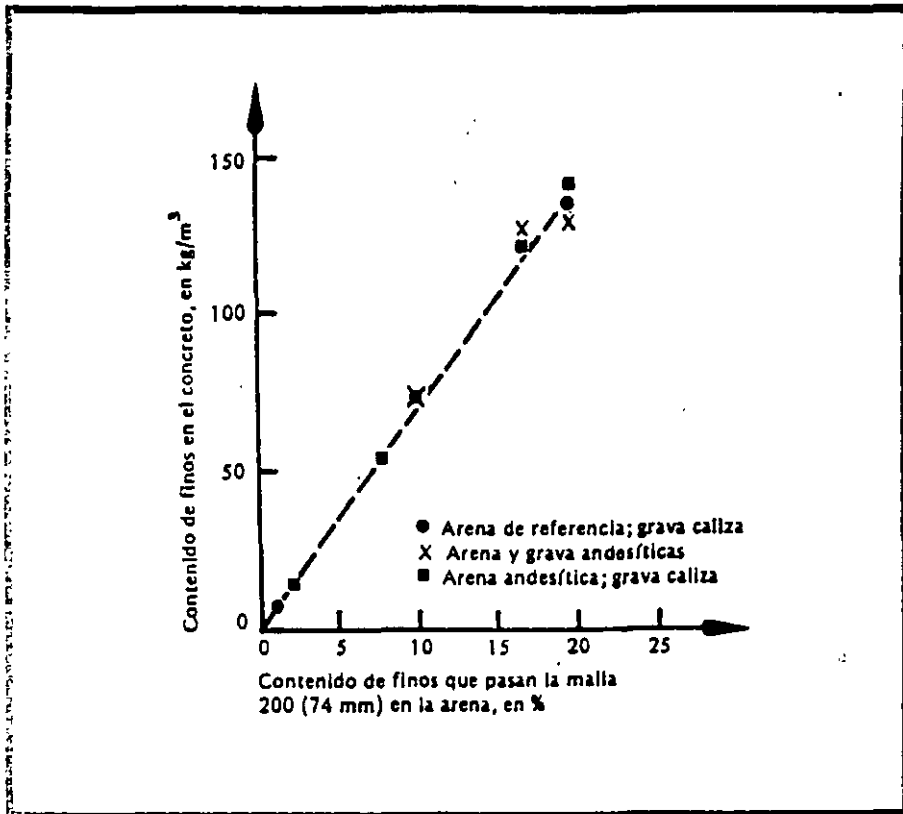


Fig. 1. Proporcionalidad entre los contenidos de finos de la arena y del concreto.

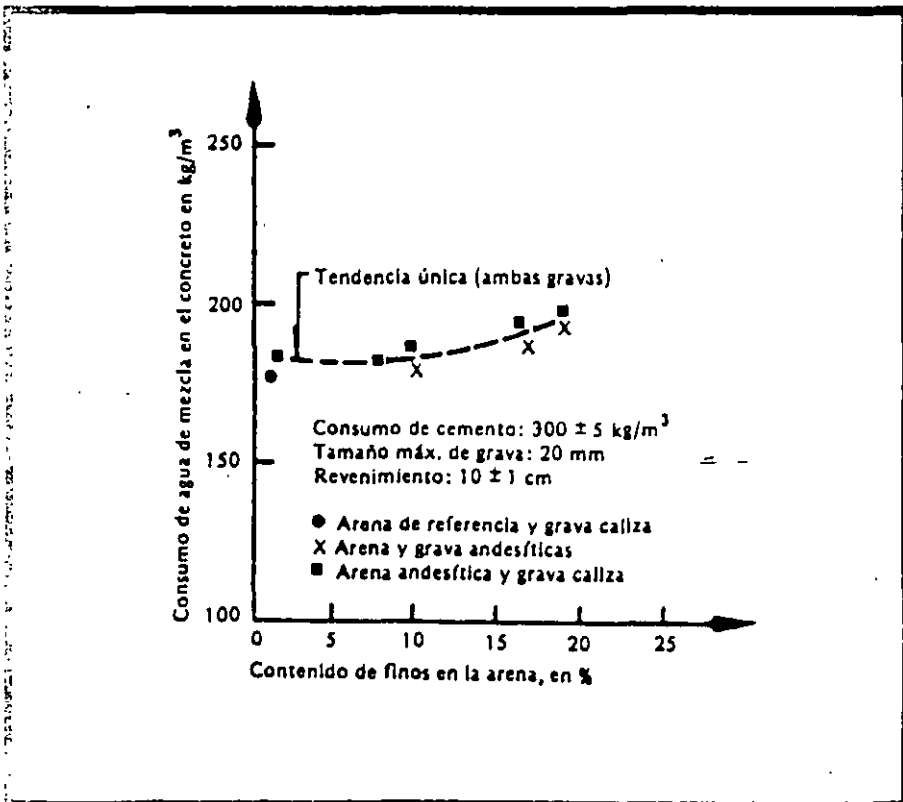


Fig. 2. Relación entre el contenido de finos de la arena y el consumo de agua de mezcla en el concreto.

pos de concreto y tomando en cuenta la simplicidad de la prueba, se puede sugerir su ejecución en obra como una primera medida para discriminar entre los dos tipos de concreto. Un valor razonable que se puede considerar como frontera entre los dos tipos de concreto es  $2250 \text{ kg/m}^3$ .

El contenido de vacíos de las mezclas estudiadas (figura 4), establecido en función de los volúmenes absolutos de los materiales componentes, parece tener un comportamiento independiente del tipo de agregado grueso y del contenido de finos en la arena. Los valores obtenidos resultan ser inferiores a los usualmente estimados para este tipo de mezclas (2%).

En relación con el agua de sangrado, en la figura 5 se puede observar que las mezclas estudiadas siguen una sola tendencia, independientemente del tipo de grava utilizada, y que para contenidos de finos de hasta 10% el sangrado resulta constante y cercano al 3%. Para contenidos finos en la arena mayores que 10% el sangrado disminuye a valores cercanos al 1.5% para porcentajes de finos de 19%.

Cabe señalar el comportamiento discrepante de la mezcla fabricada con arena con 7.7% de finos, la cual tuvo un sangrado de tan sólo 1.8%. Esta situación se atribuye a que no obstante que la arena tiene relativamente pocos finos, parte de ellos tienen características plásticas, lo que les permite retener mejor el agua.

Los resultados anteriores representan una contradicción, ya que por una parte es deseable limitar el porcentaje de finos en la arena y por otra es conveniente al mismo tiempo tener el mínimo de sangrado posible. Aparentemente la consistencia de la mezcla (revenimiento) tiene una influencia más significativa e importante en cuanto al sangrado; pero dado que las mezclas estudiadas tuvieron un revenimiento poco variable (9 a 10.5 cm), la influencia del mismo no quedó totalmente definida. Sin embargo, en la figura 6 se muestra una relación entre el sangrado y el revenimiento. Aunque ésta varió en un intervalo muy reducido, la figura parece sugerir que sería adecuado limitar

El sangrado a valores inferiores al 3.5%.

### Concretos en estado endurecido

Las propiedades determinadas a los concretos en estado endurecido se presentan en la tabla 5. Estas propiedades son las resistencia a la compresión y el módulo de elasticidad del concreto a 28 días de edad, y la contracción por secado después de 28 días de curado en agua a 23°C y 28 días de secado al aire a 23°C y 50% de humedad relativa.

En cuanto a la resistencia a la compresión, dado que los consumos de cemento y los revenimientos de todas las mezclas fueron prácticamente constantes, los resultados alcanzados se pueden comparar en forma directa; así, en la figura 7 se puede ver que los tipos de grava estudiadas y los diferentes contenidos de finos en la arena no tuvieron influencia en la resistencia a la compresión hasta para contenidos de finos del 10%, en tanto que para porcentajes mayores la resistencia a la compresión decreció hasta una reducción del orden del 15% para arenas con 19% de finos. Cabe hacer notar que el concreto fabricado con la arena considerada como de referencia siguió la misma tendencia general observada en los concretos con arenas andesíticas.

Otra forma de tomar en cuenta el efecto de los finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto es a través de la eficiencia del cemento, entendida ésta como la relación consumo de cemento/resistencia a la compresión (figura 8).

En esta figura se puede ver que para contenidos de finos en las arenas menores que el 10%, la relación antes mencionada se mantuvo constante en un valor de 1.06, en tanto que este valor se incrementó a 1.23 cuando los finos en la arena llegaron a ser del orden del 19%, lo que equivale a tener un incremento del 16% en el consumo de cemento para igualdad de resistencias.

En relación con el módulo de elasticidad, en la figura 9 se puede observar la gran influencia que tuvo el tipo de grava que se empleó en la fabricación del concreto. Se encontraron diferen-

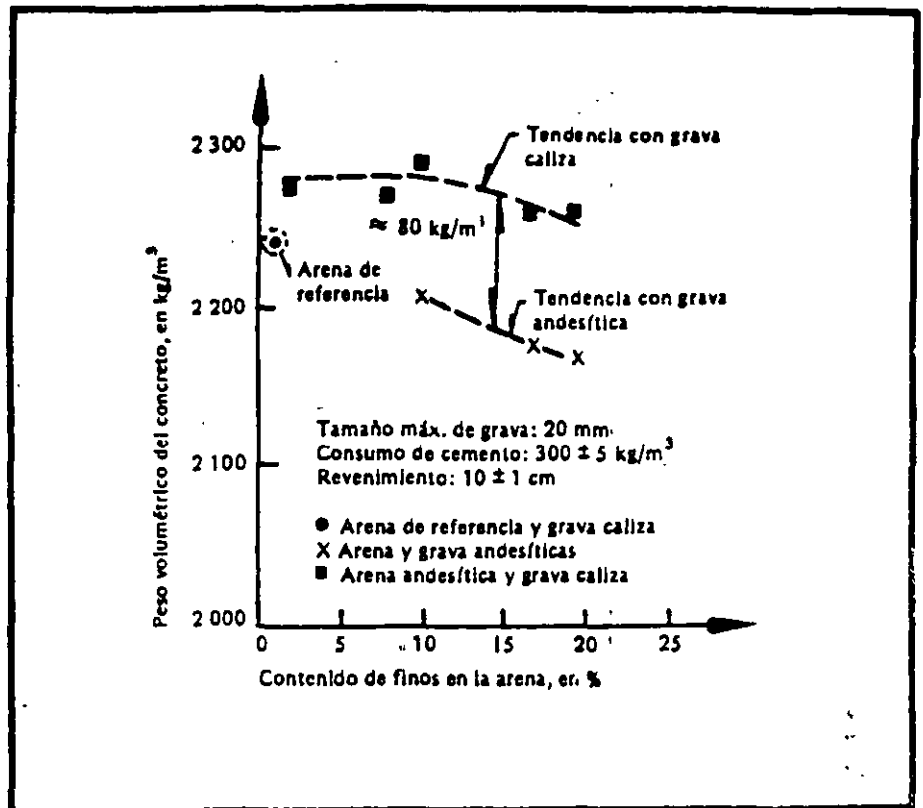


Fig. 3. Influencia del contenido de finos de la arena en el peso volumétrico del concreto.

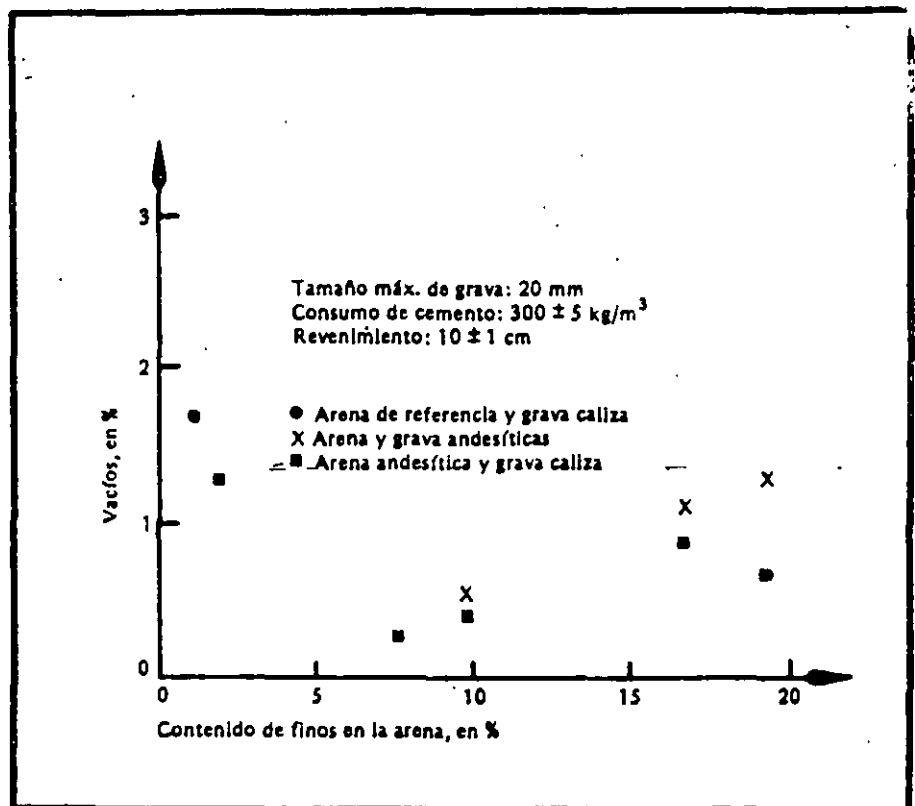


Fig. 4. Influencia de los finos de la arena en la cantidad de vacíos en las mezclas.

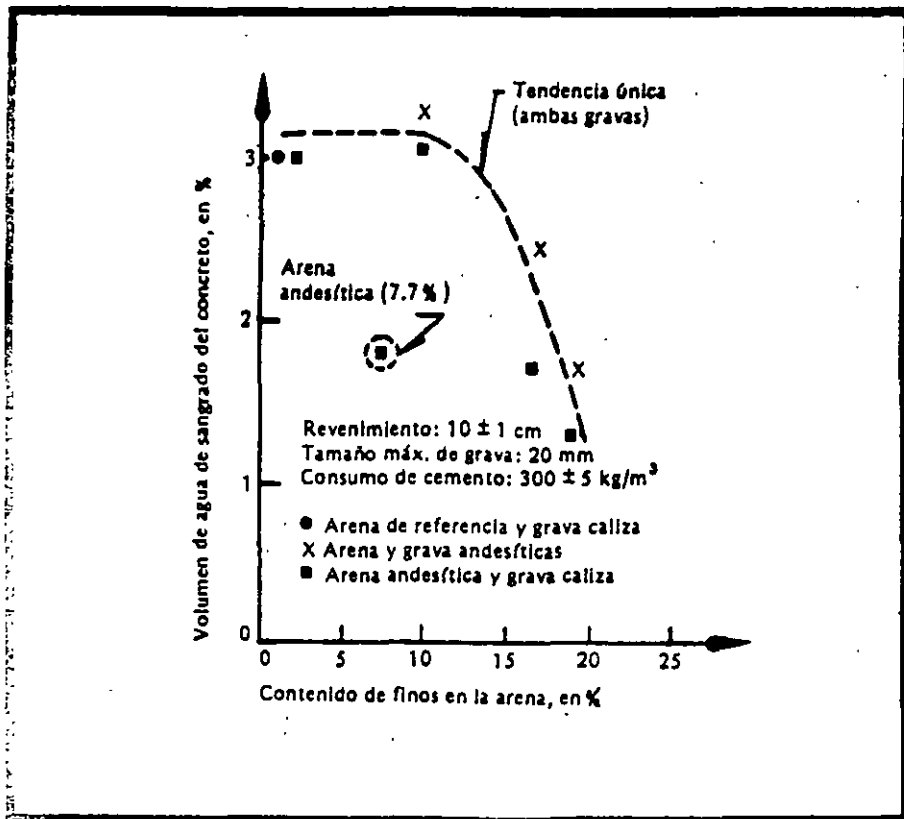


Fig. 5. Relación entre el contenido de finos de la arena y el agua de sangrado del concreto.

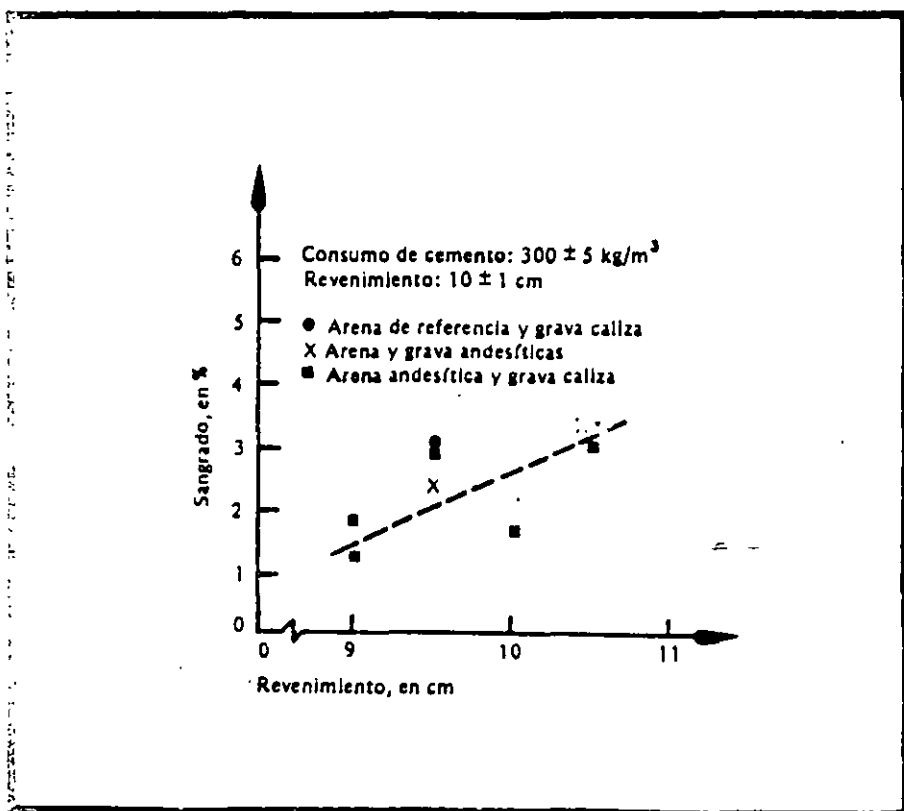


Fig. 6. Variación del sangrado en función del revenimiento.

cias del orden de 120 000 kg/cm<sup>2</sup> entre los módulos de los concretos hechos con gravas andesíticas y los fabricados con gravas calizas, diferencia que corresponde a un incremento del orden del 80% en los valores alcanzados por estos últimos.

Por otra parte, los finos de las arenas influyeron en el módulo de elasticidad de los concretos de manera similar a como lo hicieron en la resistencia a la compresión. Para contenidos inferiores al 10% no existió variación apreciable en los valores alcanzados, en tanto que para contenidos de finos en la arena del 19% la disminución en el módulo de elasticidad fue del orden del 12% en relación con los valores alcanzados en los concretos hasta con 10% de finos.

Conviene señalar que, al igual que para la resistencia a la compresión, el empleo de la arena de referencia con 1.1% de finos no cambió el comportamiento del concreto en cuanto a módulo de elasticidad, el cual alcanzó valores similares a los obtenidos con la arena andesítica lavada.

En la figura 10 se presenta la relación que se manifestó entre el módulo de elasticidad del concreto y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión del mismo. Esta relación alcanzó un valor medio aproximado de 9 000 para los concretos de gravas andesíticas y de 16,500 para los de grava caliza. Conviene hacer notar que aunque el tamaño de la muestra es pequeño, la tendencia está bien definida y la totalidad de los resultados quedan localizados dentro de una dispersión de  $\pm 2$  o de la tendencia central.

En la contracción por secado, el tipo de grava empleada en el concreto tuvo también una influencia notoria; las contracciones de los concretos con grava caliza fueron del orden del 60% de las alcanzadas en los concretos con las gravas andesíticas. Asimismo, los finos de la arena, y en particular los finos con propiedades plásticas, influyeron también en forma considerable en las contracciones alcanzadas (figuras 11 y 12).

En los concretos con gravas andesíticas la contracción se incrementó des-

de un valor de  $533 \times 10^4$  con el uso de la arena con 10% de finos no plásticos, hasta un valor de  $759 \times 10^4$  con la arena de 19% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas.

En los concretos con gravas calizas el incremento de la contracción con el aumento de los finos en la arena no fue tan significativo; pasó de un valor de  $332 \times 10^4$  a  $448 \times 10^4$  al variar el contenido de finos del 10 al 19% respectivamente. Sin embargo, fue notorio el comportamiento del concreto fabricado con la arena con 7.7% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas. En este caso la contracción alcanzada resultó ser del mismo orden que la obtenida con la arena con 19% de finos. Conviene señalar que los finos de ambas arenas presentaron propiedades plásticas similares.

Los concretos fabricados con las arenas andesíticas lavadas y de referencia, que no tuvieron finos plásticos, presentaron contracciones similares a la alcanzada en el concreto con arena de 10% de finos, que tampoco tuvo finos plásticos.

En la figura 12 se puede observar la influencia que tuvo el contenido de finos plásticos, determinandos en función de la contracción lineal de los finos de la arena, en la contracción por secado del concreto. Como se observa la contracción por secado del concreto se incrementó al aumentar la contracción lineal de los finos de la arena, independientemente del tipo de grava utilizada, aunque este incremento fue mayor para los concretos con gravas andesíticas.

Las contracciones aquí registradas corresponden a las obtenidas después de un curado en agua de 28 días y secado al aire a una humedad relativa del 50% durante otros 28 días. De acuerdo con la literatura respectiva<sup>6</sup>, la contracción alcanzada en estas condiciones resulta ser del orden de la mitad de las contracciones últimas; por lo que si se extrapolaran los resultados en los concretos con las arenas hasta con 10% de finos no plásticos y gravas calizas, se llegaría a valores de contracciones últimas comprendidas entre  $600$  y  $900 \times 10^4$ , congruentes con los valores encontra-

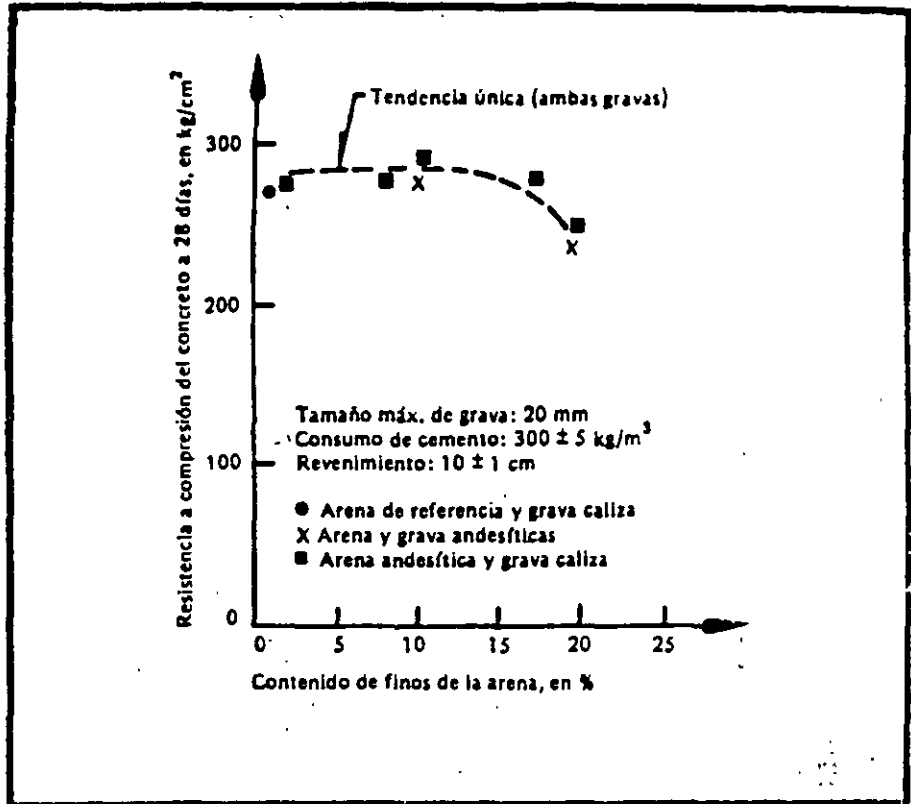


Fig. 7. Influencia del contenido de finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto.

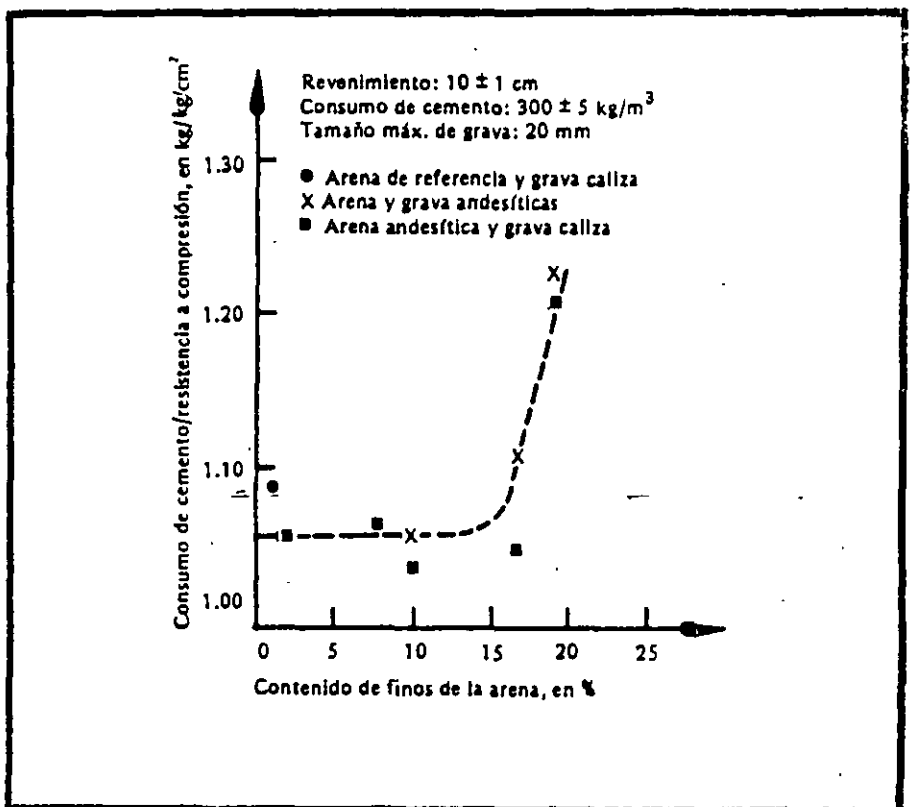


Fig. 8. Influencia del contenido de finos de arena en la eficacia del consumo de cemento.

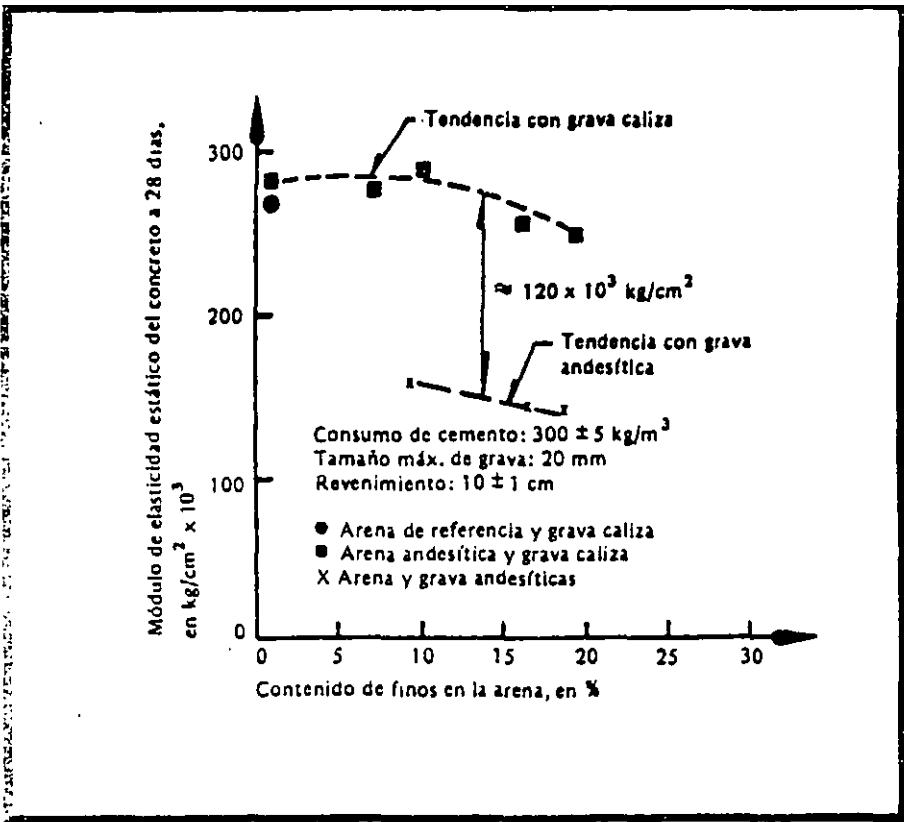


Fig. 9. Influencia del contenido de finos de la arena en el módulo de elasticidad del concreto.

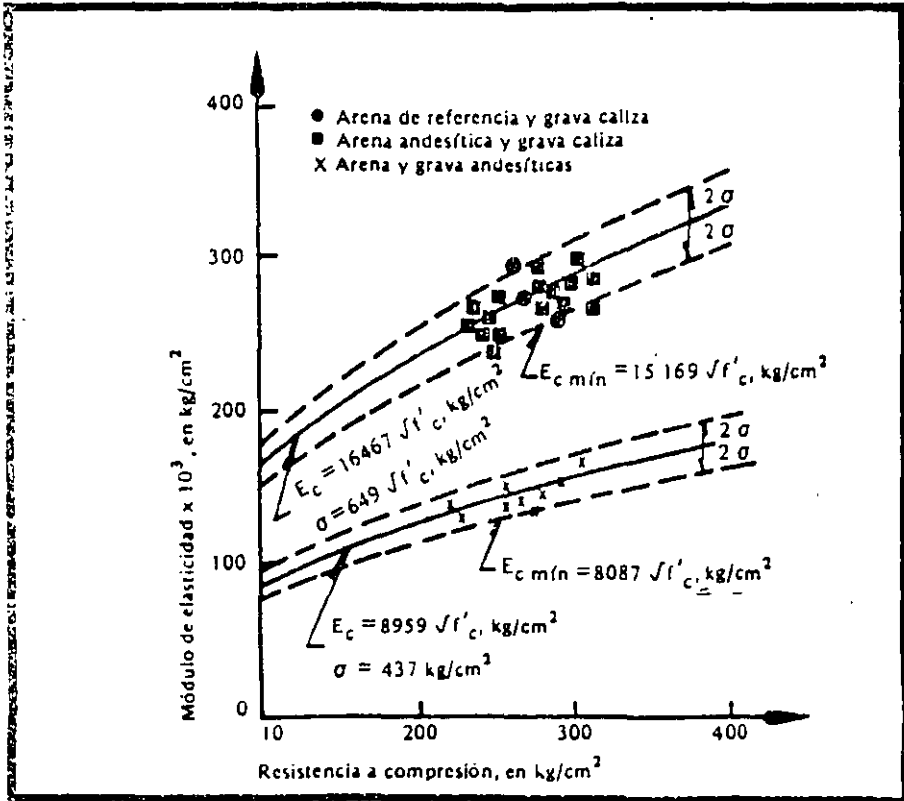


Fig. 10. Relación módulo de elasticidad - resistencia a la compresión de los concretos andesíticos y calizos.

dos en la literatura a que se refieren en esta referencia.

**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

**Conclusiones**  
 Los resultados de los ensayos efectuados y las consideraciones hechas sobre el comportamiento de los concretos conducen a las siguientes conclusiones:

1. Para mejorar las propiedades mecánicas de los concretos que se utilizan en el Distrito Federal, es necesario emplear gravas más densas y con menos absorción de las que actualmente se emplean.
2. Las arenas andesíticas en uso resultan ser las únicas, desde el punto de vista económico, viables para la fabricación de los concretos en el D.F. Sin embargo, es necesario limitar la cantidad de finos y muy especialmente la de los finos plásticos que contienen.
3. El tipo de cemento empleado en las mezclas puede afectar algunas de las propiedades de los concretos. Las conclusiones a que se llega en este trabajo se refieren a concretos hechos con cemento portland tipo I.
4. Las gravas calizas empleadas tuvieron un comportamiento satisfactorio en cuanto a todas las propiedades mecánicas de los concretos estudiados.
5. El coeficiente volumétrico de las partículas de grava caliza triturada prácticamente igual a 0.20 con respecto a mezclas de concreto trabajables con contenidos de mortero usuales.
6. La proporción en la que se combinaron los tamaños de grava (35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm) se manifestó como una granulometría adecuada para estos materiales.
7. Desde el punto de vista de las propiedades mecánicas del concreto, para alcanzar los mejores resultados se requiere limitar los finos en la arena a un máximo de 10% y además la contracción lineal de estos finos debe ser nula.
8. Debido a que la proporción en que se mezclaron grava y arena se mantuvo constante en todo el estudio, la cantidad de finos totales en las mezclas de concreto resultó pro-

10



porcional a la cantidad de finos en las arenas.

9. El requerimiento de agua de mezclado se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta 10%; para porcentajes mayores, la demanda de agua de mezclado se incrementó hasta en un 8% para contenidos de finos del orden del 19%.
10. Independientemente del contenido de finos en la arena, los concretos con grava caliza tuvieron un peso volumétrico mayor a  $2\ 250\ \text{Kg/m}^3$  mientras que en los concretos con gravas andesíticas el peso volumétrico fue siempre inferior a este valor.
11. La cantidad de vacíos en las mezclas de concreto resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado. Las mezclas fabricadas con arena andesítica lavada y con la arena de referencia tuvieron contenidos de aire cercanos al 2%; pero en las mezclas fabricadas con arenas con mayor contenido de finos los vacíos fueron siempre inferiores a esta cantidad.
12. El sangrado que presentaron las mezclas de concreto varió en forma inversamente proporcional al contenido de finos de las arenas y en proporción directa con el revenimiento de las mezclas. Para mezclas con arena de hasta 10% de finos, sería conveniente tener sangrados máximos del 3.5%.
13. La resistencia a la compresión resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado y de los finos de la arena, cuando el porcentaje de éstos fue inferior al 10%. Para arenas con mayor contenido de finos la resistencia decreció.
14. Los módulos de elasticidad de los concretos hechos con agregados gruesos calizos resultaron del orden del doble de los obtenidos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10% no tuvieron influencia en el módulo de elasticidad alcanzado. El valor medio de la relación entre el módulo de elasticidad y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión resultó ser 16 500 para los concretos con gravas calizas y 9 000 para los hechos con gravas andesíticas.

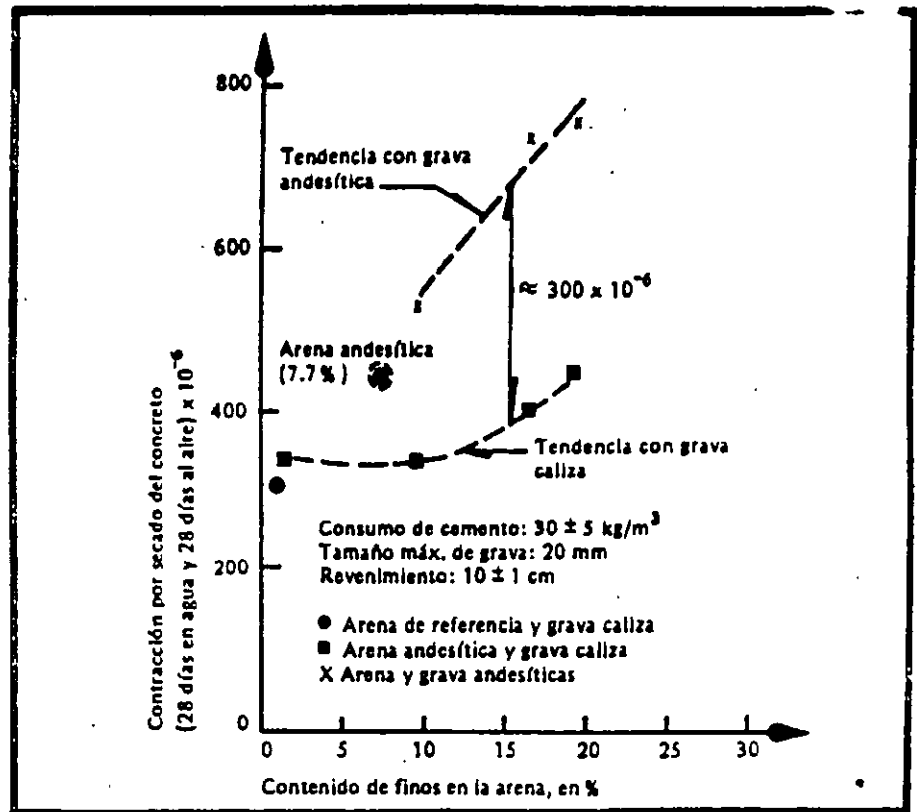


Fig. 11. Influencia del contenido de finos de la arena en la contracción por secado del concreto.

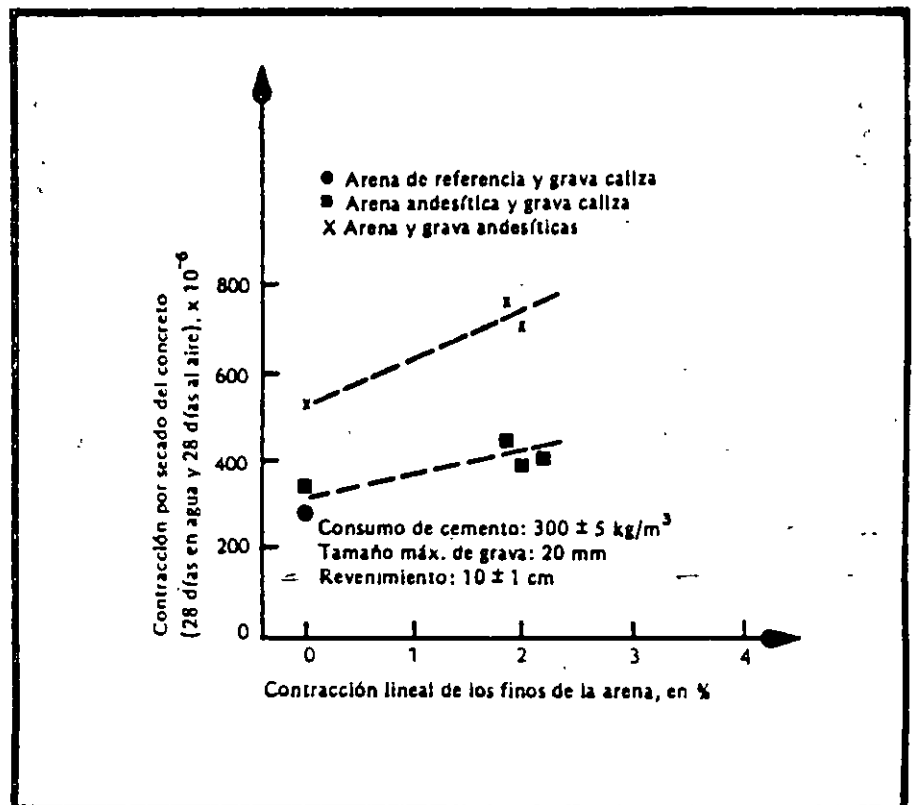


Fig. 12. Influencia de los finos plásticos de las arenas en la contracción por secado del concreto.

15. La contracción por secado de los concretos fabricados con grava caliza fue del orden del 60% de la obtenida en los concretos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas superiores al 10%, en especial el contenido de finos con propiedades plásticas, tuvieron una influencia determinante en la contracción del concreto, incrementándose ésta con el porcentaje y las propiedades plásticas de estos finos.
16. La contracción por secado, después de 28 días de curado húmedo y de otros 28 de secado al aire con una humedad relativa de 50%, en concretos con porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10%, resultó ser de  $332 \times 10^{-4}$  para los concretos con gravas calizas y de  $533 \times 10^{-4}$  para los de gravas andesíticas.

#### Recomendaciones

La evaluación de los resultados de los ensayos conduce a plantear las siguientes recomendaciones:

Para obtener un concreto de calidad satisfactoria para fines estructurales, se requiere seleccionar con precaución las características de los materiales componentes.

En cuanto a los cementos portland se puede emplear cualquiera de los tipos usuales (I, II, III y V) con tal que sea congruente con los fines a los que se destine la estructura. Con respecto al cemento portland-puzolana, se halla en curso de revisión la norma NOM C-2 con objeto de incluir un tipo denominado PUZ-1, el cual se debe compor-

tar en su desarrollo de resistencia como el cemento portland tipo I.

Las gravas deben proceder de una roca sana, preferiblemente con densidad superior a 2.6 y absorción no mayor al 2%. Si las gravas se obtienen por un proceso de trituración conviene verificar que la forma de las partículas sea tal, que su coeficiente volumétrico resulte mayor a 0.20. Se obtiene una granulometría adecuada para fabricar concreto con tamaño máximo de 20 mm, cuando las gravas de 5 a 10 mm se mezclan con las de 10 a 20 mm en proporción de 35 a 65%, respectivamente.

Las arenas que se utilicen para la fabricación de los concretos pueden ser de naturaleza andesítica, pero se debe verificar que el porcentaje de los finos que contenga sea inferior al 10% y además que estos finos no tengan propiedades plásticas. Una forma de medir la plasticidad de los finos puede ser la prueba de contracción lineal, la cual debe conducir a valores de 0% cuando la arena está exenta de finos plásticos.

Dada la buena trabajabilidad que mostraron las mezclas con revenimientos de 10 cm, se sugiere emplear este valor como máximo nominal, con una tolerancia de  $\pm 2.5$  cm. En caso de requerir una mezcla más fluida se puede adicionar en obra un aditivo fluidificante que permita incrementar ese revenimiento. Como medida de control y aceptación del concreto en su estado fresco se recomienda realizar, adicionalmente a la prueba de revenimiento, la determinación del peso volumétrico, cuyo resultado permitirá distinguir si el concreto se fabricó con agregados den-

so o ligeros. Un valor mínimo para esta característica en el concreto estructural puede ser de  $2\ 250 \text{ kg/m}^3$ .

Tomando en cuenta el comportamiento de los concretos con agregados gruesos calizos, se puede estimar que el módulo de elasticidad de los mismos a los 28 días tendrá un valor mínimo de  $14\ 500 \text{ f}_c$  y que la contracción por secado última será inferior a  $900 \times 10^{-4}$ .

#### RECONOCIMIENTO

Este artículo es un resumen del informe "Ensayes para definir las características de los concretos estructurales en el D.F." preparado por el Instituto de Ingeniería para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano y se reproduce con la autorización de la mencionada comisión.

Los autores hacen patente su reconocimiento al personal del Grupo Toltteca, por su participación en la obtención y selección de los materiales empleados en el estudio; a los empleados de las empresas INSPECTEC, Laboratorios Liac y Laboratorio Nacional de la Construcción, quienes intervinieron en la realización de los ensayos; a la Comisión Federal de Electricidad por facilitar sus instalaciones y a todos los miembros del grupo de trabajo sobre control de calidad de los materiales de construcción. Se agradece en forma especial al Dr. Roberto Meli, por las sugerencias recibidas durante el desarrollo del estudio.



#### REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J., "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el D.F.", Informe 495. Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. Meli, R., "Estudio estadístico de propiedades de materiales y estructuras de concreto reforzado en el Distrito Federal", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, julio de 1985.
3. ASTM "Annual Book of Standards", Section 4, Volume 0 4.02 Concrete and Mineral Aggregates, 1983.
4. Rabot R., Coulon C. y Hamel J., "Contribution a l'amélioration de l'essai d'équivalent de sable", Bull Liaison Labo. P. et Ch. 57, enero-febrero de 1972.
5. ACI Committee 211 "Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete (ACI 211.1-81)", ACI Manual of Concrete Practice, Parte 1, 1986.
6. ACI Committee 209 "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Publication SP-27, 1971.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS AGREGADOS  
EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# INFLUENCIA DE LAS CARACTERISTICAS DE LOS AGREGADOS EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Carlos Javier Mendoza E.

## Introducción

En una mezcla de concreto los agregados constituyen cuando menos tres cuartas partes de su volumen total, por lo que la calidad de éstos tienen una importancia definitiva en la resistencia, durabilidad y comportamiento de las estructuras construidas con ellos.

Por otro lado, los agregados son más económicos que el cemento, por lo que resulta ventajoso usar la mayor cantidad posible de ellos, a parte de que el empleo de volúmenes importantes de agregados da al concreto mayor estabilidad volumétrica y durabilidad.

## Influencia de la forma y textura del agregado en la trabajabilidad y resistencia

La forma y textura superficial del agregado grueso tienen una influencia considerable en la resistencia del concreto, particularmente en la resistencia a flexión y son particularmente significativas en los concretos de alta resistencia.

La contribución de la forma y textura del agregado grueso en el desarrollo de la resistencia a compresión del concreto no se conoce, pero posiblemente una textura rugosa dé como resultado una fuerza de adhesión más grande entre las partículas y la matriz de cemento. De igual forma, una superficie de contacto más grande en los agregados angulosos significa que se puede desarrollar una mayor fuerza adhesiva. En la tabla 1 se ha ce una estimación cuantitativa de la manera en que la forma, la textura

superficial y el módulo de elasticidad del agregado afecta a las resistencias a flexión y compresión del concreto.

La forma y textura del agregado fino tiene un efecto significativo en el requerimiento de agua de mezclado, ya que estas propiedades se pueden expresar en forma indirecta en función del porcentaje de huecos que quedan en la arena en condición suelta. La influencia de los huecos entre las partículas del agregado grueso es menos definitiva en el consumo de agua, sin embargo, la forma del agregado grueso, y en particular el agregado grueso lajeado, tiene un efecto considerable en la trabajabilidad del concreto.

La influencia de las propiedades de los agregados en la trabajabilidad de crece con el consumo de cemento y posiblemente desaparece cuando la relación agregado/cemento es del orden de 2.5.

La influencia en la granulometría en la segregación es importante, pero esta depende mayormente del método de manejar y colocar el concreto. También el empleo de agregado grueso con peso específico muy diferente del que tiene el agregado fino aumenta la tendencia a la segregación.

Las propiedades físicas del agregado fino, especialmente el más pequeño que la malla #100 (150  $\mu\text{m}$ ), puede afectar el sangrado del concreto.

La forma del agregado influye en la bombeabilidad de una mezcla, en general son preferibles arenas naturales y gravas redondeadas a los agregados triturados, pero puede hacerse una mezcla con características adecuadas para ser bombeada con una combinación apropiada de fracciones de agregados triturados.

Si la superficie del agregado es porosa los huecos internos pueden no estar totalmente saturados aún cuando estén completamente humedecidos. Cuando se aplica la presión en la línea, el aire en estos vacíos se contrae y el agua se introduce en los poros, dando como resultados que las mezclas sean más secas y poco manejables. Si se suspende el

bombeo y se libera la presión, se libera también el agua de los agregados; esta agua puede arrastrar materiales finos, formando un tapón cuando se reinicia el bombeo.

### Influencia de la resistencia del agregado en el comportamiento del concreto

La resistencia a compresión del concreto no puede exceder a la del agregado con el que se fabrica. Sin embargo, la resistencia a compresión del agregado tal como se encuentra es difícil de determinar y la información requerida tiene que obtenerse através de pruebas indirectas: resistencia a compresión de muestras labradas de la roca, valor al aplastamiento del agregado grueso, o comportamiento del agregado en el concreto.

Lo anterior implica que se deben hacer algunos ensayos previamente con el agregado que se pretende usar y compararlos con la respuesta de otros concretos de calidad conocida. Si el agregado bajo ensaye conduce a una resistencia a compresión más baja que la del concreto de referencia, y en particular si numerosas partículas individuales de agregados aparecen fracturadas después de que el espécimen se ha ensayado, la resistencia del agregado es inferior a la de la mezcla de concreto a la cual se le incorporó, por tanto, tales agregados solo deben usarse en mezcla de baja resistencia.

Una resistencia inadecuada del agregado representa una limitación ya que las propiedades del agregado tiene cierta influencia en la resistencia del concreto, aún cuando sea suficientemente resistente para no fracturarse prematuramente. Si se comparan concretos hechos con diferentes agregados se puede observar que la influencia del agregado en la resistencia del concreto es cualitativamente la misma, independientemente del proporcionamiento de la mezcla y de que el concreto se ensaye en compresión o tensión. Es posible que la influencia del agregado sobre la resistencia del concreto se deba no solamente a la resistencia mecánica del agregado sino también, y en grado considerable, a sus características de

absorción y adherencia.

En general la resistencia y elasticidad del agregado depende de su composición, textura y estructura así, una baja resistencia se puede deber a una debilidad de los granos constituyentes, a que los granos, no obstante de ser suficientemente resistentes, no están bien ligados o cementados.

El módulo de elasticidad del agregado aunque se determina rara vez, no deja de tener importancia, ya que el módulo de elasticidad del concreto es más grande a medida que mayor es el módulo de elasticidad de los agregados constituyentes. El módulo de elasticidad del agregado afecta también la magnitud de la deformación diferida y de la contracción que puede presentarse en el concreto.

Por otro lado, el agrietamiento vertical de un espécimen sujeto a compresión uniaxial comienza bajo carga del orden de 50 a 75 por ciento de la carga última. El esfuerzo al que se forman las grietas depende en gran parte de las propiedades del agregado grueso: gravas lisas conducen al agrietamiento a esfuerzos más bajos que los requeridos con rocas trituradas, asperas y angulosas, debido probablemente a que la adherencia mecánica está influenciada por las propiedades de la superficie y, en cierta manera, por la forma del agregado grueso.

Las propiedades de los agregados afectan la carga de agrietamiento en compresión y la resistencia en flexión de la misma manera, por lo que la relación entre las dos cantidades es independiente del tipo del agregado usado, fig 1. Por otra parte la relación entre las resistencias a flexión y compresión depende del tipo de agregado grueso, ya que las propiedades del agregado, especialmente su textura superficial, afectan la resistencia última en compresión mucho menos que la resistencia en tensión o la carga de agrietamiento en compresión, fig 2, ref 1.

La influencia del tipo de agregado grueso en la resistencia del concreto varía en magnitud y depende de la relación agua/cemento de la mezcla.

Para relaciones agua/cemento inferiores a 0.4 el empleo de agregados triturados ha dado como resultado resistencias hasta 38 por ciento superiores que cuando se emplean gravas redondeadas. Con incremento en la relación agua/cemento la influencia del agregado disminuye, posiblemente debido a que la resistencia de la pasta misma es determinante, y a relaciones agua/cemento de 0.65 no se observa diferencias entre las resistencias alcanzadas con agregados triturados o gravas redondeadas.

La influencia del agregado en la resistencia a flexión parece depender también de la condición de humedad del concreto en el momento del ensaye.

#### Influencia de los agregados en el módulo de elasticidad del concreto

Las propiedades de los agregados también influyen en el módulo de elasticidad del concreto; mientras más alto sea el módulo de elasticidad del agregado, mayor será el módulo de elasticidad del concreto. La forma de las partículas de agregado y sus características superficiales pueden influir también en el valor del módulo de elasticidad del concreto y en la curvatura de la relación esfuerzo-deformación.

Es interesante hacer notar que los dos componentes del concreto, pasta de cemento y agregado, cuando están sujetos a esfuerzos en forma individual presentan una relación esfuerzo-deformación sensiblemente lineal. La razón para el comportamiento no lineal en el material compuesto (concreto) se debe a la presencia de interfases entre la pasta de cemento y el agregado y al desarrollo de microagrietamiento en esas interfases. Debido a que las grietas se desarrollan progresivamente en las interfases, hay un incremento progresivo en la intensidad del esfuerzo local y en la magnitud de la deformación, por lo que la deformación se incrementa más rápidamente que el esfuerzo promedio aplicado y la curva esfuerzo-deformación se hace cóncava hacia abajo con un comportamiento pseudo-plástico.

La relación entre módulo de elasticidad y resistencia depende también de la proporción de la mezcla (el agregado por lo general tiene un módulo



mayor que el de la pasta de cemento) y de la edad del concreto; a edades mayores (mayores resistencias) el módulo se incrementa más rápidamente que la resistencia. Esto se muestra en la fig 3, la cual también da resultados para concretos hechos con agregados de arcilla expandida. El módulo de elasticidad del concreto de agregado ligero no se incrementa con la resistencia en la misma proporción y su valor está entre 40 y 80 por ciento del módulo del concreto de agregado ordinario de la misma resistencia. Dado que el módulo del agregado ligero difiere poco del módulo de la pasta del cemento, la proporción con que se encuentra en la mezcla no afecta al módulo de elasticidad de los concretos de agregados ligeros.

#### Influencia de los agregados en la contracción

Los agregados restringen la contracción que se puede presentar. El tamaño y granulometría del agregado por ellos mismos no influyen en la magnitud de la contracción, pero un agregado más grande permite el uso de mezclas más pobres y origina, por tanto, una contracción menor.

Similarmente, para una resistencia dada, el concreto de baja trabajabilidad contiene más agregado que uno de alta trabajabilidad hecho con agregados del mismo tamaño y, como consecuencia, la primera mezcla presentará una contracción más pequeña.

La influencia combinada de la relación agua-cemento y contenido de agregado puede presentarse en una gráfica; esto se hace en la fig 4 pero debe recordarse que los valores de contracción dados son solamente típicos para el secado en climas templados.

Las propiedades elásticas de los agregados determinan el grado de restricción ofrecido. Por ejemplo, los agregados de acero conducen a una contracción un tercio menor y los agregados de arcilla expandida un tercio mayor que la que permiten los agregados ordinarios. La presencia de arcilla en el agregado reduce su efecto restrictivo en la contracción, y dado que la arcilla misma está sujeta a contracción, la presencia de arcilla en el recubrimiento de los agregados puede incrementar la contracción hasta en 70 por ciento.

Dentro del intervalo de agregados normales hay una variación considerable en la contracción, fig 5. El agregado natural común no se contrae por si mismo, pero existen algunos agregados que presentan contracciones por secado de hasta  $900 \times 10^{-6}$ , similar a la contracción que presenta el concreto fabricado con agregados sin contracción. Las rocas que presentan contracciones usualmente tienen alta absorción y este hecho debe servir como advertencia para investigar sus propiedades en relación con la contracción.

El agregado ligero usualmente conduce a contracciones más grandes que el agregado de peso normal, debido principalmente a que el agregado, teniendo un módulo de elasticidad más bajo, presenta menos restricciones a la contracción potencial de la pasta de cemento. Los materiales ligeros que tienen una proporción importante de material más pequeño que la malla 200 (75  $\mu$ m) tienen una contracción aun más grande, dado que la finura conduce a un contenido mayor de vacíos.

El contenido de agua de una mezcla de concreto afecta la contracción por que reduce el volumen de los agregados que la restringe, siguiendo la tendencia mostrada en la fig 6, pero el contenido de agua por si mismo se piensa que no es un factor determinante.

#### Efecto del agregado en la deformación diferida

En la mayor parte de los casos el agregado de peso normal no está sujeto a deformación diferida, por lo que es razonable suponer que el origen de la deformación diferida está en la pasta de cemento, pero los agregados influyen en la deformación diferida del concreto a través de un efecto de restricción, similar al que se presenta en el caso de la contracción y dependiente de algunas propiedades físicas de las rocas de las cuales provienen.

Debido a la gran variación de los agregados dentro cualquier tipo mineralógico y petrográfico, no es posible establecer de una manera general la magnitud de la deformación diferida del concreto hecho con agregados de

diferentes tipos. Sin embargo, los datos de la fig 7 son de importancia considerable; después de 20 años de conservados a una humedad relativa de 50 por ciento, el concreto hecho con areniscas presenta una deformación diferida más del doble de la obtenida con calizas. Una diferencia aún más grande entre la deformación diferida del concreto hecho con diferentes agregados fue encontrada por Rüsçh et al, después de 18 meses bajo carga a una humedad relativa de 65 por ciento, la máxima deformación diferida fue cinco veces el valor mínimo; los agregados en orden creciente de deformación diferida son: basalto y cuarzo; grava, marmol y granito; y arenisca.

El agregado ligero merece atención especial porque la opinión generalizada sugiere que su uso conduce a deformación diferida sustancialmente más alta que la alcanzada con agregado de peso normal. Trabajos recientes indican que no hay diferencia fundamental entre agregados normal y ligero en lo que se refiere a la deformación diferida y que la deformación diferida más alta de los concretos ligeros refleja solamente el módulo de elasticidad más bajo de los agregados. No hay diferencia en el comportamiento inherente al hecho de que los agregados estén o no cubiertos o a que sean obtenidos por procesos de manufactura diferente; esto no significa que todos los agregados conducen a la misma deformación diferida.

Como regla general se puede establecer que la deformación diferida del concreto de calidad estructural de agregado ligero es aproximadamente la misma que la del concreto hecho con agregado ordinario. (Es importante en cualquier comparación que el contenido de agregado no difiera mucho entre el concreto de agregado ligero y el concreto de agregado normal). Más aun, siendo la deformación elástica de los concretos con agregados ligeros mayor que la que tienen los concretos ordinarios, la relación deformación diferida a deformación elástica es más pequeña para los concretos de agregados ligeros.

Características de los concretos comunes en el Distrito Federal

4. Las expresiones que correlacionan la resistencia a tensión por flexión con la resistencia a compresión son las siguientes:

Concretos con grava y arena andesítica

$$f_f = 1.9 \sqrt{f'_C} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaéreo y arena andesítica

$$f_f = 2.1 \sqrt{f'_C} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

5. Las expresiones para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión son:

concretos con grava y arena andesítica

$$E_C = 8500 \sqrt{f'_C} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaéreo y arena andesítica

$$E_C = 11000 \sqrt{f'_C} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

6. La relación de Poisson para concretos andesíticos ensayados a 28 días de edad, varía de 0.25 para una resistencia de 100 kg/cm<sup>2</sup> a 0.35 para 500 kg/cm<sup>2</sup> de resistencia a compresión. Un valor medio de 0.30 se recomienda tomar para la mayor parte de las resistencias usuales.

7. El módulo de rigidez por cortante para concretos andesíticos se puede calcular con la expresión:

$$G = 3300 \sqrt{f'_C} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

estando G y  $f'_C$  expresados en kg/cm<sup>2</sup>

Los concretos usualmente empleados en el Distrito Federal están fabricados con gravas y arenas de origen piroclástico (gravas y arenas andesíticas y basaltos escoriaáceos) las cuales son relativamente ligeras y muy absorbentes. Esta situación ha dado como consecuencia que las propiedades de estos concretos difieran en forma sustancial de las consideradas como comunes. En la tabla 2 se presentan los valores alcanzados en un estudio realizado al respecto y se comparan con aquellos considerados como comunes, ref 2. Como resultado de ese estudio se alcanzaron las siguientes conclusiones:

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Los concretos fabricados con grava de basalto escoriaáceo presentaron incrementos de resistencia más grandes respecto a la alcanzada a los 28 días en relación con los incrementos observados en los concretos fabricados con gravas andesíticas.

En cuanto a las arenas, los mayores incrementos se alcanzaron en los concretos fabricados con las arenas con menor contenido de polvos.

3. Las expresiones que correlacionan la resistencia a compresión a una edad cualquiera con la alcanzada a los 28 días se indican a continuación:

Concretos con grava y arena andesíticas

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica

$$f_c = \frac{t}{9.3 + 0.67t} f'_c, \text{ kg/cm}^2$$

8. La deformación unitaria correspondientes al esfuerzo máximo ( $\epsilon_0$ ) varía con el tipo de agregado grueso y con el nivel de resistencia del concreto. Valores representativos de este comportamiento, correspondientes a resistencias a compresión entre 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> pueden ser:

Concretos con agregado andesíticos

$$\epsilon_0 = 0.004$$

Concretos con agregado grueso de basalto escoriaeo y arena andesítica

$$\epsilon_0 = 0.003$$

9. La curva esfuerzo-deformación se puede obtener con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c \epsilon}{\epsilon_0 \left| 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right|}, \text{ kg/cm}^2$$

en la que los valores de  $f'_c$  y  $\epsilon_0$  se seleccionan de acuerdo con las características de los concretos

10. La contracción por secado registraua fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas. El tipo de agregado grueso también tuvo influencia, presentando menos contracción los concretos hechos con grava de basalto escoriaeo.
11. La contracción por secado a cualquier edad se puede estimar con las siguientes expresiones:

Concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos.

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.93}}{10 + t^{0.93}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.71}}{10 + t^{0.71}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.84}}{16 + t^{0.84}} 1100 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.81}}{17 + t^{0.81}} 1000 \times 10^{-6}$$

Los valores determinados con estas expresiones habrán que afectarlos por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del material y las condiciones del medio ambiente.

12. La tendencia al agrietamiento, medida como la presencia o ausencia de grietas, depende no solamente de la contracción potencial sino también de la deformabilidad del concreto, su resistencia y el grado de restricción a la deformación, lo que puede conducir al agrietamiento.
13. El coeficiente de deformación diferida resulta mayor para los concretos más rígidos (mayor módulo de elasticidad), por lo que las deformaciones totales, incluyendo deformaciones instantáneas y a largo plazo, vienen a ser del mismo orden, independientemente del tipo de agregado grueso utilizado.
14. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos, incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida.

15. El coeficiente de la deformación diferida en condicion estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \quad 5.65$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \quad 3.12$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.80}}{46 + t^{0.80}} \quad 7.14$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.66}}{21 + t^{0.66}} \quad 3.88$$

16. La deformación diferida afecta las deformaciones y las deflexiones y en ocasiones la distribución de esfuerzos; sin embargo, afecta poco la resistencia última de los elementos estructurales y ayuda a la relevación de esfuerzo originados por contracciones, cambios de temperatura o movimiento de los apoyos.

#### Recomendaciones para los concretos estructurales futuros en el Distrito Federal

Conocidas las características y deficiencias de los concretos utilizados comúnmente en la ciudad de México es conveniente plantear algunas medidas correctivas a la práctica usual, sobre todo si se toma en cuenta el com-



portamiento poco favorable de algunas estructuras de concreto durante los recientes sismos.

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por seco, por restringir mejor estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto, se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conduciría, por una parte, a menores consumos de agua los que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

Para satisfacer estas recomendaciones se pueden sustituir las gravas andesíticas y las de basalto escoriaeo por otras trituradas de origen calizo o de basalto sano y denso. Estas pueden alcanzar densidades superiores a 2.6, en comparación con 2.3 que tienen las andesíticas o 2.0 los basaltos escoriaeos.

En cuanto a la arena andesítica es difícil sustituirla por otra de mejores características que se encuentre a distancias razonables de la ciudad de México, por lo que será necesario seguirlas empleando, limitando el contenido de polvos de las mismas. Un valor límite deseable en el contenido de polvo podría ser 5 por ciento.

En cuanto a la trabajabilidad de las mezclas se deberá limitar el revenimiento a 10 cm y las relaciones arena/agregados totales a valores no superiores 0.45, en volumen absoluto.

En pruebas realizadas con un agregado calizo y con una arena con densidad de 2.4 y 5 por ciento de polvos se obtuvieron los siguientes parámetros, ref 3:

Peso volumétrico	2260 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidad	14100 $\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup>
Contracción por secado última	900 X 10 <sup>-6</sup>
Coefficiente de deformación diferida última	2.4

Lo anterior indica que con estos materiales se pueden tener parámetros del comportamiento del concreto en las estructuras muy cercanos a aquellos considerados como comunes.

#### Referencias

1. Neville, A.M. "Properties of concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
2. C.J. Mendoza "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal" Informe 495, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.
3. C.J. Mendoza "Comportamiento a corto y largo plazo de vigas presforzadas de concreto" Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.

TABLA 1. VALORES RELATIVOS PROMEDIO DEL EFECTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS AGREGADOS EN LA RESISTENCIA DEL CONCRETO (KAPLAN)

Propiedades del concreto	Efecto relativo de las propiedades de los agregados, por ciento		
	Forma	Textura superficial	Módulo de elasticidad
Resistencia a flexión	31	26	43
Resistencia a compresión	22	44	34

Los valores representan la relación de variancia debida a cada propiedad a la variancia total obtenida para las tres características de los agregados en pruebas realizadas sobre tres mezclas hechas con 13 agregados.

TABLA 2. COMPARACION ENTRE CARACTERISTICAS DE CONCRETOS COMUNES Y LOS QUE SON FACTIBLES DE FABRICAR EN EL DISTRITO FEDERAL

<u>Características</u>	<u>Comunes</u>	<u>Andésítica</u>	<u>Basalto Escoreáceo</u>	<u>Calizas</u>
Resistencia a tensión	$2.5 \sqrt{f'_c}$	$1.9 \sqrt{f'_c}$	$2.1 \sqrt{f'_c}$	-
Módulo de elasticidad	$14900 \sqrt{f'_c}$	$8500 \sqrt{f'_c}$	$11000 \sqrt{f'_c}$	$14000 \sqrt{f'_c}$
Relación de Poisson	0.15 - 0.20	0.30	-	-
Módulo de rigidez	$6500 \sqrt{f'_c}$	$3300 \sqrt{f'_c}$	-	-
Deformación unitaria al esfuerzo máximo	0.003	0.004	0.003	-
Contracción por secado última	$800 \times 10^{-6}$	$1300 \times 10^{-6}$	$1100 \times 10^{-6}$	$900 \times 10^{-6}$
Coefficiente de deformación diferida última	1.30 - 4.15	3.12 x 5.65	3.88 - 7.14	2.4

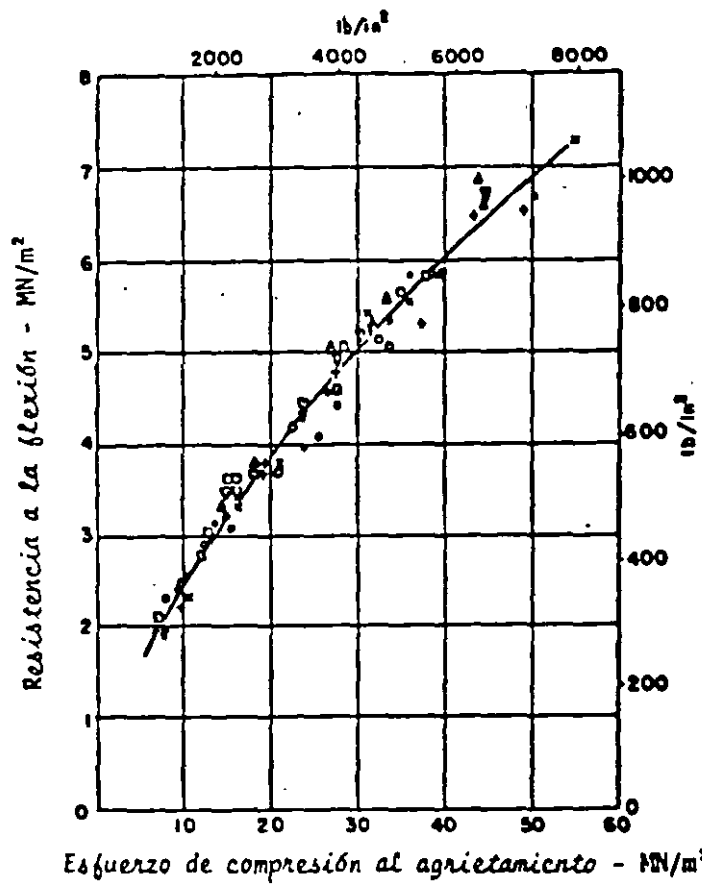


Fig 1. Relación entre resistencia a flexión y esfuerzo de compresión al agrietamiento para concretos hechos con diferentes agregados gruesos (ref 1)

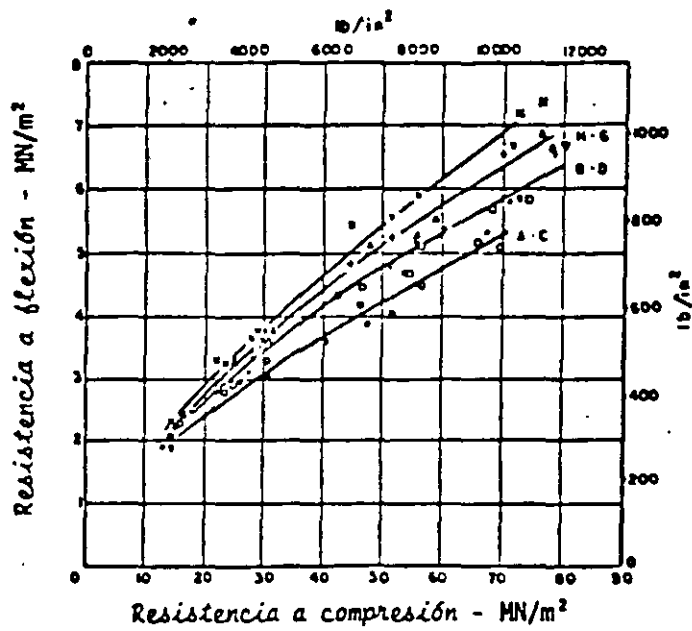


Fig 2. Relación entre resistencia a flexión y compresión para concretos hechos con diferentes agregados (ref 1)

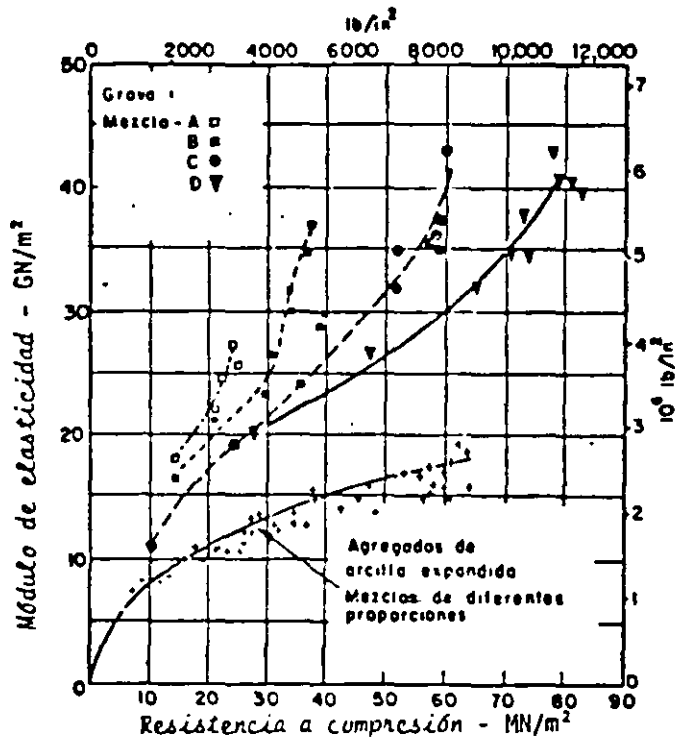


Fig 3. Módulo de elasticidad estático de concretos hechos con agregados gruesos de río y de arcilla expandida, y ensayados a diferentes edades hasta un año (ref 1)

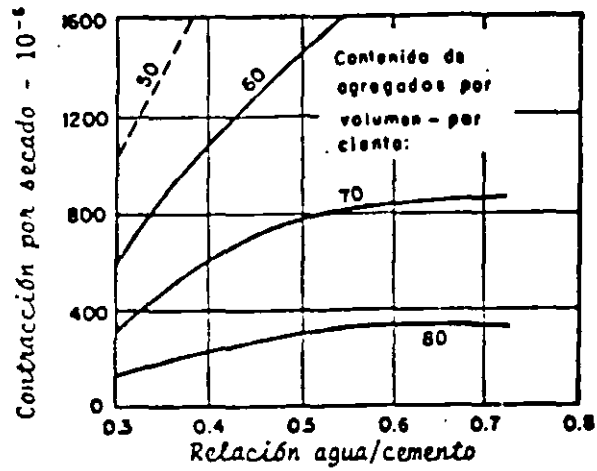


Fig. 4. Influencia de la relación agua/cemento y del contenido de agregado en la contracción (ref 1)

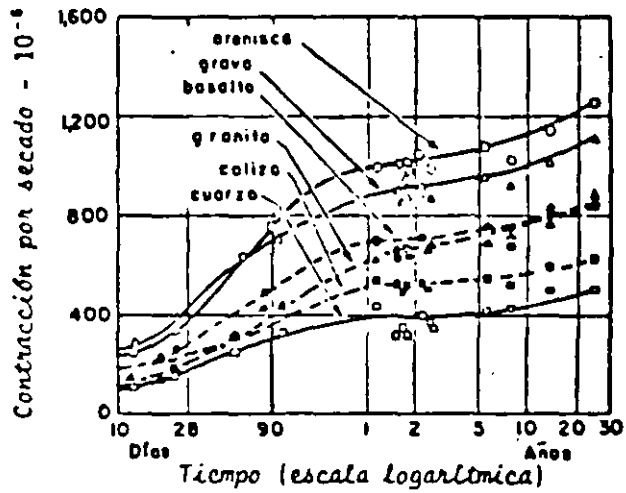


Fig. 5. Contracción por secado de concretos hechos con las mismas proporciones en la mezcla, pero con diferentes agregados, almacenados al aire a 21° C y una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)

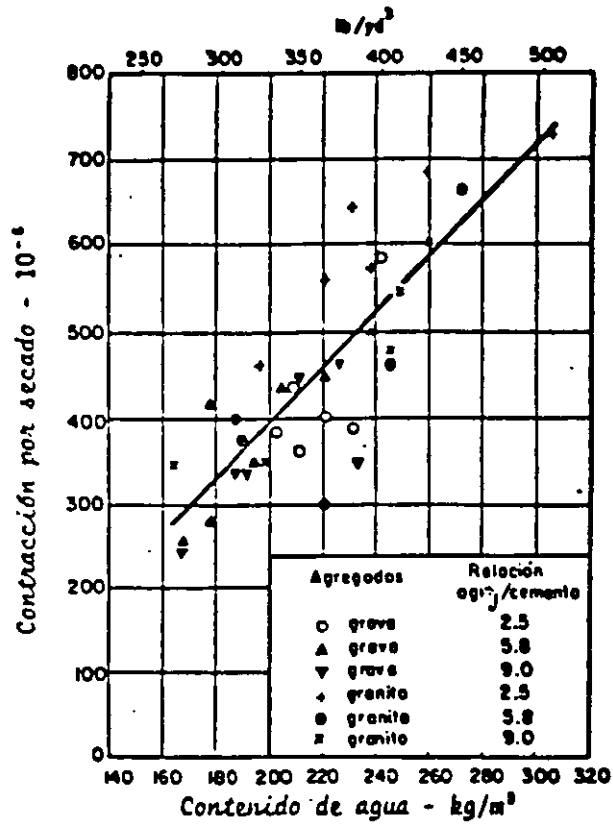


Fig 6. Relación entre el contenido de agua del concreto fresco y la contracción por secado (ref 1)

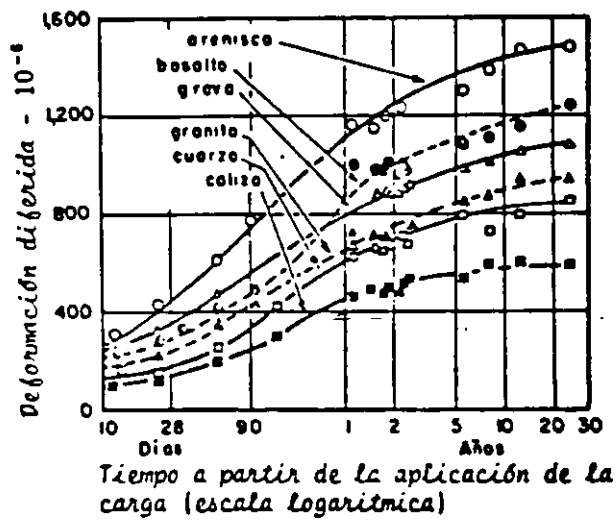


Fig 7. Deformación diferida de concretos de las mismas proporciones pero hechos con diferentes agregados, cargados a la edad de 28 días y almacenados en aire a  $21^{\circ}C$  y a una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**CARACTERÍSTICAS GENERALES  
DEL CO**

## CAPÍTULO 2

### Características generales del concreto y del acero

2.1 Introducción./ 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple./ 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido./ 2.4 Fatiga./ 2.5 Módulos elásticos./ 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura./ 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo.

#### 2.1 Introducción

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla, en proporciones determinadas, de cemento, agregados y agua. El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo. Algunas veces se añaden ciertas sustancias, llamadas aditivos o adicionantes, que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El concreto simple, sin refuerzo, es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir tensiones, se emplea refuerzo de acero, generalmente en forma de barras, colocado en las zonas donde se prevé que se desarrollarán tensiones bajo las acciones de servicio. El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto.

El uso del refuerzo no está limitado a la finalidad anterior. También se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al con-

creto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación de concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama *concreto reforzado*.

El concreto presforzado es una modalidad del concreto reforzado, en la que se crea un estado de esfuerzos de compresión en el concreto antes de la aplicación de las acciones. De este modo, los esfuerzos de tensión producidos por las acciones quedan contrarrestados o reducidos. La manera más común de presforzar consiste en tensar el acero de refuerzo y anclarlo en los extremos del elemento.

Para dimensionar estructuras de concreto reforzado es necesario utilizar métodos que permitan combinar el concreto simple y el acero, de tal manera que se aprovechen en forma racional y económica las características especiales de cada uno de ellos. Esto implica el conocimiento de estas características; en las páginas siguientes se describirán algunas de las más importantes.

Existen otras características del concreto, tales como su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a la abrasión, a la intemperie, etc., que no se tratarán, ya que no es necesario su conocimiento detallado para establecer métodos de dimensionamiento. El lector puede consultar a este respecto algún texto de tecnología del concreto, como los de Neville [2.2, 2.19], el de Troxell, Davis y Kelly [2.1] o el de Orchard [2.3], recomendados al final de este capítulo.

#### 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple

Se ha indicado que el objeto principal del estudio del comportamiento del concreto es la obtención de las relaciones acción-respuesta del material, bajo la gama total de sollicitaciones a que puede quedar sujeto. Estas características acción-respuesta pueden describirse claramente mediante curvas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados bajo distintas condiciones.

En este caso, el esfuerzo es comúnmente una medida de la acción ejercida en el espécimen, y la deformación, una medida de la respuesta. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en algunos casos, como por ejemplo en asentamientos y contracciones, esta relación se invierte; es decir, las solicitaciones quedan medidas por la deformación y la respuesta está representada por los esfuerzos respectivos.

Para conocer el comportamiento del concreto simple es necesario determinar las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a los distintos tipos de acciones a que puede estar sometido. En el caso más general sería necesario analizar todas las combinaciones de acciones a que puede estar sujeto un elemento. Hasta la fecha, sólo se han establecido las relaciones esfuerzo-deformación para las combinaciones más comunes. Así, se han hecho estudios sobre el comportamiento del concreto sujeto a estados uniaxiales de compresión y tensión, a estados biaxiales de compresión y tensión, y a estados triaxiales de compresión.

### 2.2.1 *Modos de falla y características esfuerzo-deformación bajo compresión axial*

#### MODOS DE FALLA

La figura 2.1 muestra un cilindro de concreto simple ensayado en compresión axial. En cilindros con relación de lado a diámetro igual a dos, como el que se muestra en la figura, la falla suele presentarse a través de planos inclinados respecto a la dirección de la carga. Esta inclinación es debida principalmente a la restricción que ofrecen las placas de apoyo de la máquina contra movimientos laterales. Si se engrasan los extremos del cilindro para reducir las fricciones, o si el espécimen es más esbelto, las grietas que se producen son aproximadamente paralelas a la dirección de aplicación de la carga. Al comprimir un prisma de concreto en estas condiciones, se desarrollan grietas en el sentido paralelo al de la compresión, porque el concreto se expande transversalmente.

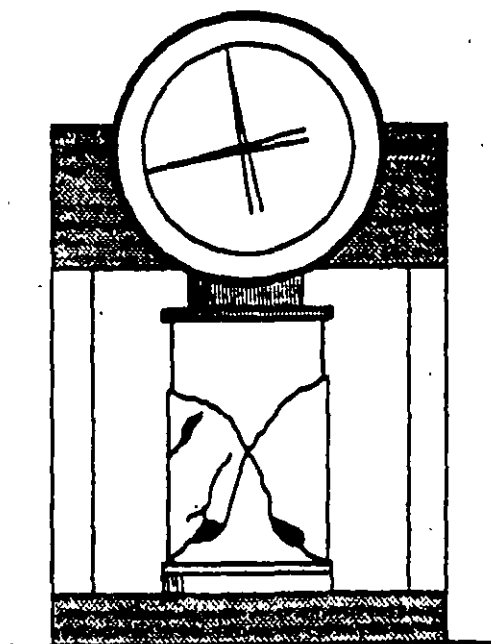


Figura 2.1 *Falla en compresión de un cilindro de concreto.*

Las grietas se presentan de ordinario en la pasta y muy frecuentemente entre el agregado y la pasta. En algunos casos también se llega a fracturar el agregado. Este microagrietamiento es irreversible y se desarrolla a medida que aumenta la carga, hasta que se produce el colapso.

#### CURVAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las curvas esfuerzo-deformación se obtienen del ensaye de prismas sujetos a carga axial repartida uniformemente en la sección transversal mediante una placa rígida. Los valores del esfuerzo resultan de dividir la carga total aplicada,  $P$ , entre el área de la sección transversal del prisma,  $A$ , y representar valores promedio obtenidos bajo la hipótesis de que la distribución de deformaciones es uniforme y de que las características esfuerzo-deformación del concreto son constantes en toda la masa. El valor de la deformación unitaria,  $\epsilon_c$ , es la relación entre el acortamiento total,  $a$ , y la longitud de medición,  $l$  (figura 2.2).

Puesto que el concreto es un material heterogéneo, lo anterior es una idealización del fe-

nómeno. Según la distribución de la pasta y del agregado en la masa, los esfuerzos, considerados como la carga soportada en un área diferencial, variarán de un punto a otro de una misma sección. Sin embargo, esta variación no es significativa desde el punto de vista del diseño estructural.

**CURVA TÍPICA BAJO CARGA DE CORTA DURACIÓN**

La curva que se presenta en la figura 2.2 corresponde a un ensaye efectuado en un tiempo relativamente corto, del orden de unos cuantos minutos desde la iniciación hasta el colapso. Se puede apreciar que el concreto no es un material elástico y que la parte inicial de estas curvas no es rigurosamente recta. Sin embargo, sin gran error puede considerarse una porción recta hasta aproximadamente el 40 por ciento de la carga máxima. Se observa, además, que la curva llega a un máximo y después tiene una rama descendente. El colapso se produce comúnmente a una carga menor que la máxima.

En el ensaye de prismas o cilindros de concreto simple, la carga máxima se alcanza a una deformación unitaria del orden de 0.002, si la longitud de medición es del mismo orden de magnitud que el lado del espécimen. El colapso del prisma, que corresponde al extremo de la rama descendente, se presenta en ensayes de corta duración a deformaciones que varían entre 0.003 y 0.007, según las condiciones del espécimen y de la máquina de ensaye.

**EFFECTO DE LA EDAD**

Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su capacidad de carga con la edad. Este proceso de hidratación puede ser más o menos efectivo, según sean las condiciones de intercambio de agua con el ambiente, después del colado. Por lo tanto, el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

La figura 2.3 muestra curvas esfuerzo-deformación de cilindros de 15 X 30 cm, fabricados de un mismo concreto y ensayados a distintas edades. Todos los cilindros fueron curados en las mismas condiciones hasta el día del ensaye. Las curvas se obtuvieron aplicando incrementos de deformación constantes. Se determinan así ramas descendentes más extendidas que las obtenidas comúnmente bajo incrementos constantes de carga. Se puede observar que la deformación unitaria para la carga máxima, es del orden de 0.0015 a 0.0020.

El aumento de resistencia con la edad depende también del tipo de cemento, sobre todo a edades tempranas. La figura 2.4 muestra el aumento de resistencia con la edad para cilindros de 15 X 30 cm, hechos con cemento normal (tipo I), y de alta resistencia inicial (tipo III), que son los dos tipos más empleados en estructuras de concreto reforzado. Después de los primeros tres meses, el aumento en resistencia es relativamente pequeño.

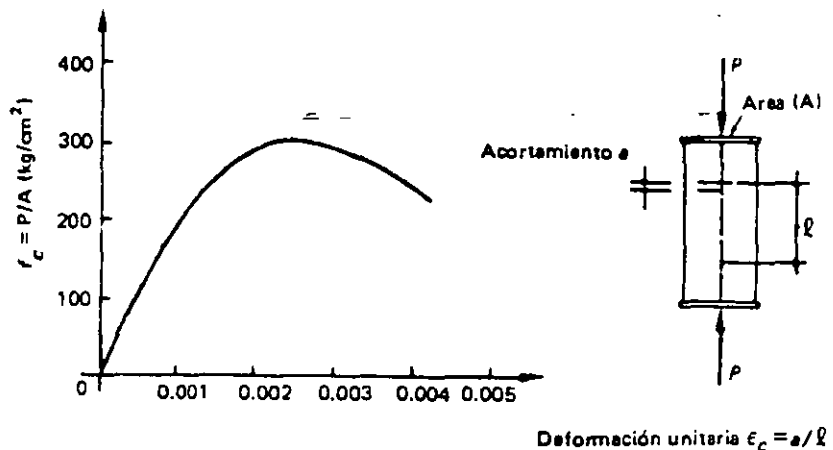


Figura 2.2 Curva esfuerzo-deformación en compresión axial de un espécimen sujeto a carga de corta duración.

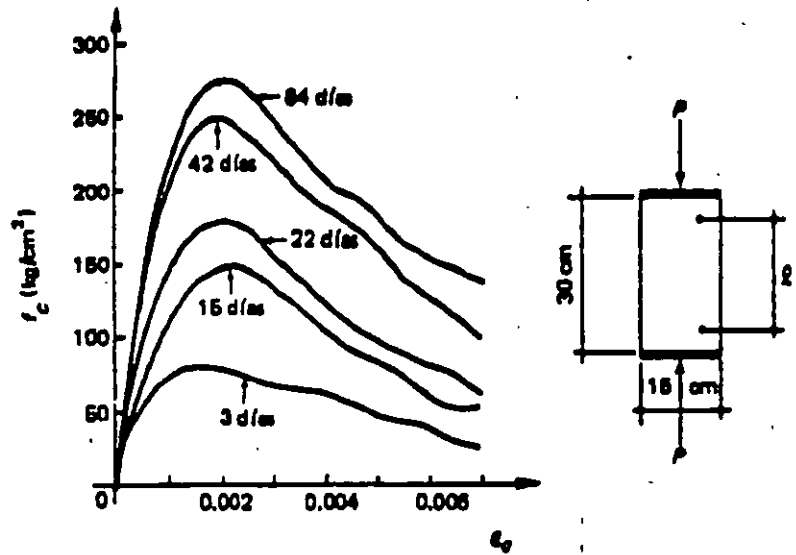


Figura 2.3 Efecto de la edad al ensayar en la resistencia.

**EFFECTO DE LA RELACIÓN AGUA/CEMENTO**

La resistencia del concreto depende de la relación agua/cemento: a mayor relación agua/cemento, menor resistencia. En la figura 2.5 se presentan curvas esfuerzo-deformación, correspondientes a distintas relaciones.

Puede observarse en las figuras 2.3 y 2.5 que la forma de la curva esfuerzo-deformación depende de la resistencia. Para resistencias bajas, la pendiente de la rama descendente es muy suave. Para resistencias altas, la curva es muy pronun-

ciada en su parte superior, y la rama descendente es más corta. También se nota que la pendiente de la tangente inicial a la curva aumenta a medida que crece la resistencia.

**EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA**

La figura 2.6 muestra resultados de ensayos de cilindros realizados a distintas velocidades de carga. En este tipo de ensayos se aplicó la carga a una velocidad constante y se midió el tiempo necesario para alcanzar la resistencia.

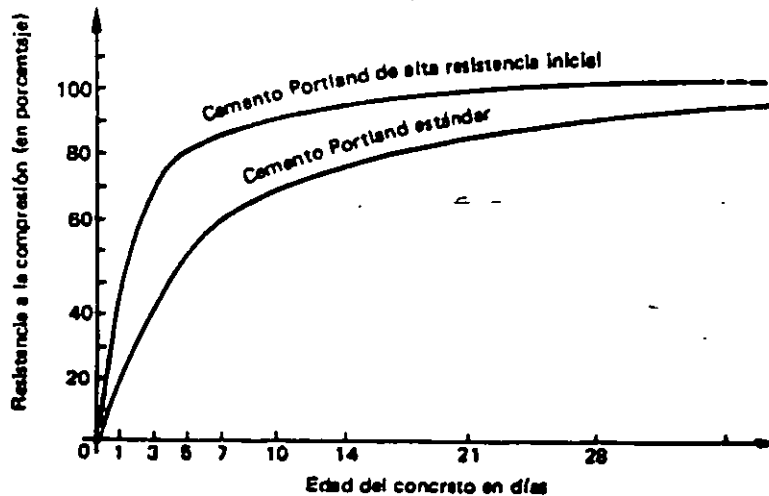


Figura 2.4 Variación de la resistencia con la edad.

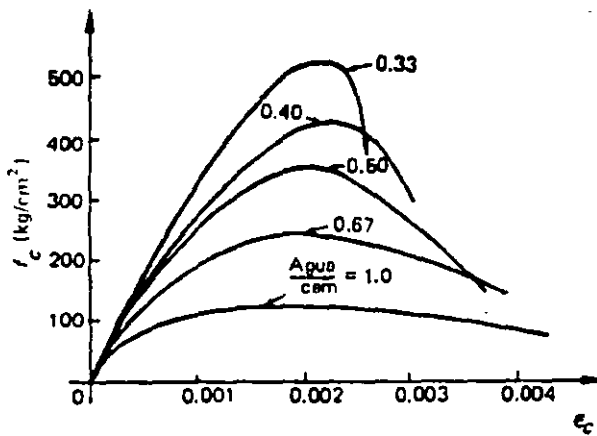


Figura 2.5 Efecto de la relación agua/cemento.

Se puede observar que la resistencia de un cilindro en el que la carga máxima se alcanza en centésimas de segundo es aproximadamente 50 por ciento mayor que la de uno que alcanzó su carga máxima en 66 segundos. Por otra parte para un cilindro en que la carga máxima se alcanza en 69 minutos, la resistencia disminuye aproximadamente en un 10 por ciento.

En ensayos a velocidad de carga constante, las ramas descendentes de las curvas esfuerzo-deformación no son muy extendidas, debido

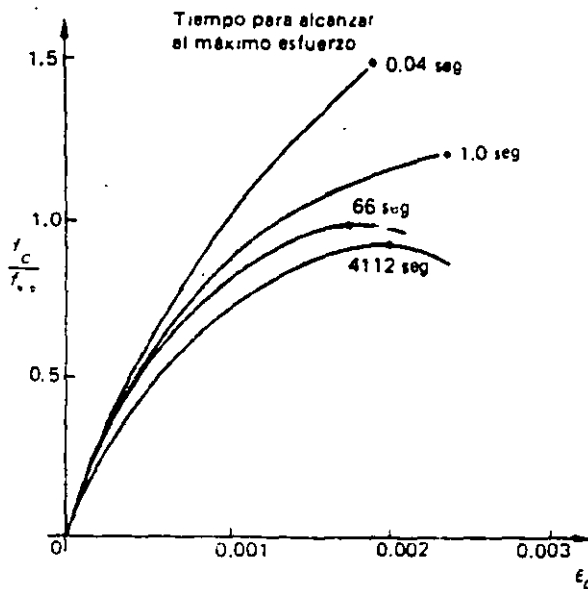


Figura 2.6 Efecto de la velocidad de carga (Hatanó [2.4]).

a que las características de las máquinas de ensaye hacen que el colapso ocurra súbitamente, una vez que se alcanza la carga máxima.

En la figura se muestra que las pendientes de las tangentes iniciales a las curvas crecen al aumentar la velocidad. No es posible determinar en todos los casos la rama descendente. Al igual que en otros tipos de ensaye, las deformaciones correspondientes a las cargas máximas son del orden de 0.002.

#### EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

La figura 2.7 muestra curvas obtenidas ensayando cilindros a distintas velocidades de deformación, desde una milésima de deformación unitaria por minuto, hasta una milésima por cien días. En esta figura,  $f_{c(0.001)}$  representa la resistencia obtenida cuando la velocidad de deformación unitaria en el ensaye es de 0.001 por minuto. Como puede apreciarse, esta variable tiene un efecto notable sobre las características de la curva esfuerzo-deformación, especialmente sobre la carga máxima. Si la velocidad de deformación es muy grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave. La deformación unitaria correspondiente a la carga máxima sigue siendo del orden de 0.002. Puede observarse que la resistencia disminuye muy poco con incrementos importantes en la duración del ensaye.

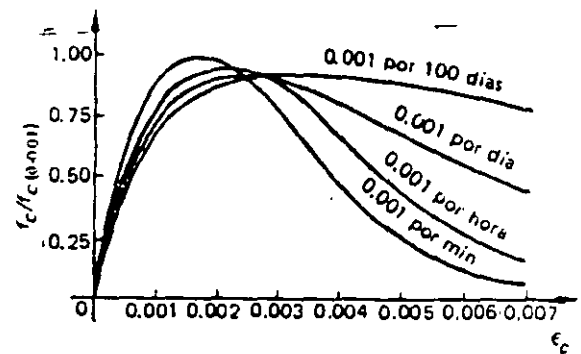


Figura 2.7 Efecto de la velocidad de deformación (Rüsch [2.5]).

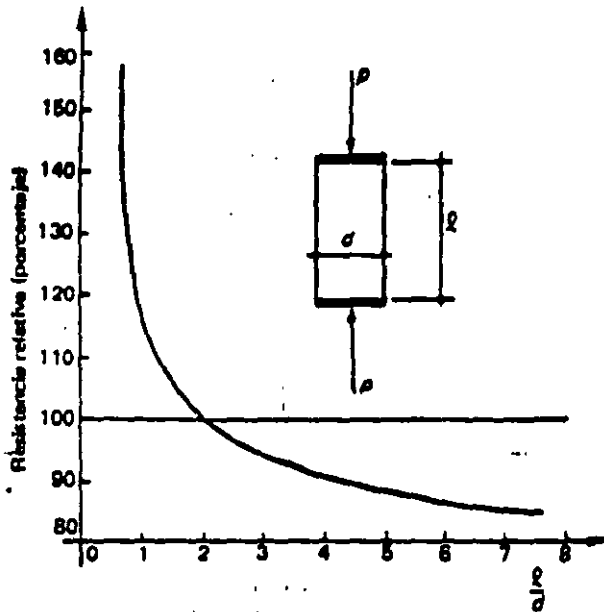


Figura 2.8 Efecto de la relación de esbeltez.

**EFFECTO DE LA ESBELTEZ Y DEL TAMAÑO DEL ESPÉCIMEN**

El efecto de la relación de esbeltez sobre la resistencia a la compresión de un prisma se muestra de manera cualitativa en la figura 2.8, en la que arbitrariamente se ha tomado como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos. Como medida de la esbeltez se toma la relación entre la longitud, medida en dirección de la carga, y el lado menor de un prisma, o el diámetro de un cilindro.

Para esbelteces mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente, para esbelteces de seis o más. Por el contrario, para especímenes de esbelteces menores que dos, la resistencia aumenta indefinidamente, y en teoría sería infinita para un espécimen de altura nula.

En especímenes geoméricamente semejantes pero de distinto tamaño, la resistencia disminuye, dentro de ciertos límites, mientras mayor sea el espécimen. Esto es debido a que en materias frágiles, como el concreto, la probabilidad de que existan zonas de resistencia baja aumenta con el tamaño del espécimen. La fi-

gura 2.9 muestra el efecto del tamaño de un cilindro en su resistencia a la compresión.

**2.2.2 Compresión triaxial**

Los ensayos efectuados en cilindros de concreto bajo compresión triaxial muestran que la resistencia y la deformación unitaria correspondiente crecen al aumentar la presión lateral de confinamiento. En estos ensayos, el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando el espécimen de aceite a cierta presión y aplicando una carga axial hasta la falla mediante dispositivos como el ilustrado esquemáticamente en la figura 2.10 (a).

En la figura 2.10 (b) se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de los ensayos realizados por Brandtzaeg [2.6]. Corresponden a distintas presiones de confinamiento lateral, desde 38 hasta 286 kg/cm<sup>2</sup>. Se puede observar que el incremento de la resistencia es función directa del incremento de la presión de confinamiento. Con presiones de confinamiento adecuadas pueden obtenerse resistencias de más de 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

El efecto de la presión lateral sobre la resistencia se ilustra en la figura 2.10 (c), donde se presenta una gráfica del esfuerzo axial,  $f_1$ , necesario para producir la falla del cilindro, contra la presión lateral,  $f_2$ . Los resultados obtenidos de los ensayos pueden representarse, aproximadamente, por medio de la expresión

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2 \quad (2.1)$$

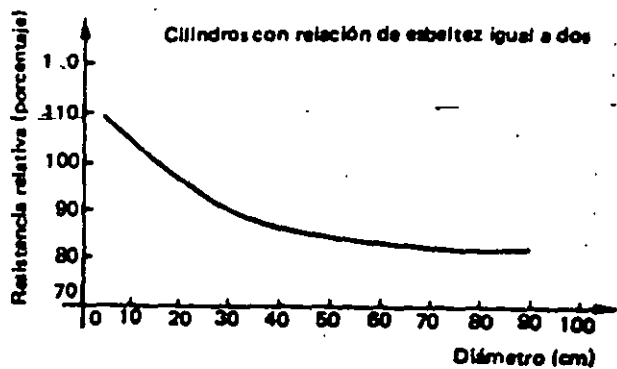


Figura 2.9 Efecto del tamaño.

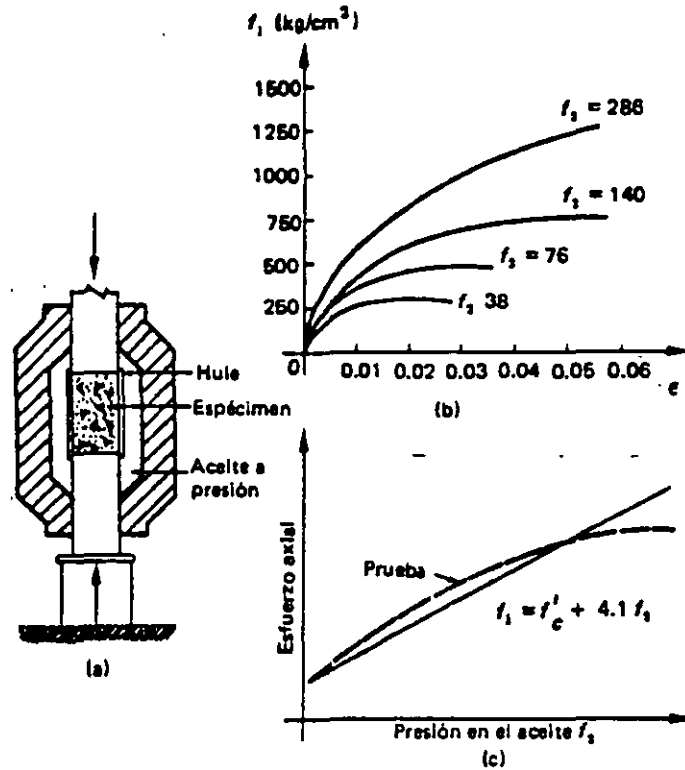


Figura 2.10 Compresión triaxial (Brandtzaeg [2.9]).

donde  $f'_c$  es la resistencia en compresión axial de un cilindro sin presión confinante. Es evidente que el efecto del confinamiento es muy importante; basta que se aplique una compresión lateral igual a la cuarta parte de la resistencia uniaxial para que ésta se duplique.

Debe notarse también el incremento notable en el valor de la deformación unitaria, correspondiente a la resistencia al incrementar la presión de confinamiento; con una presión de 38 kg/cm<sup>2</sup>, la deformación unitaria correspondiente a la carga máxima aumenta diez veces respecto a la de un cilindro sin confinar.

### 2.2.3 Tensión

Es difícil encontrar una manera sencilla y reproducible de determinar la resistencia a tensión uniaxial. Siendo el concreto bajo esta condición un material frágil, es necesario que la sección transversal del espécimen varíe gradualmente, para evitar fallas prematuras debidas a

concentraciones de esfuerzos. La curva esfuerzo-deformación de concreto en tensión representada en la figura 2.11 se obtuvo ensayando un espécimen de sección rectangular, variable, a lo largo del mismo. Para fijarlo en la máquina de ensaye, se utilizaron placas pegadas con resina a los extremos del espécimen, las que a su vez fueron atornilladas a la máquina. Este tipo de ensaye requiere mucho cuidado para lograr resultados dignos de confianza.

Para concreto en tensión axial, tanto las resistencias como las deformaciones correspondientes son aproximadamente del orden de una décima parte de los valores respectivos en compresión axial. Sin embargo, la relación no es lineal para toda la escala de resistencias.

En 1948, Lobo Carneiro [2.7] en Brasil y, casi simultáneamente Akazawa [2.8] en Japón, idearon un procedimiento de ensaye indirecto en tensión, que se conoce como el ensaye brasileño. En esencia consiste en someter un cilindro a compresión lineal diametral, como se



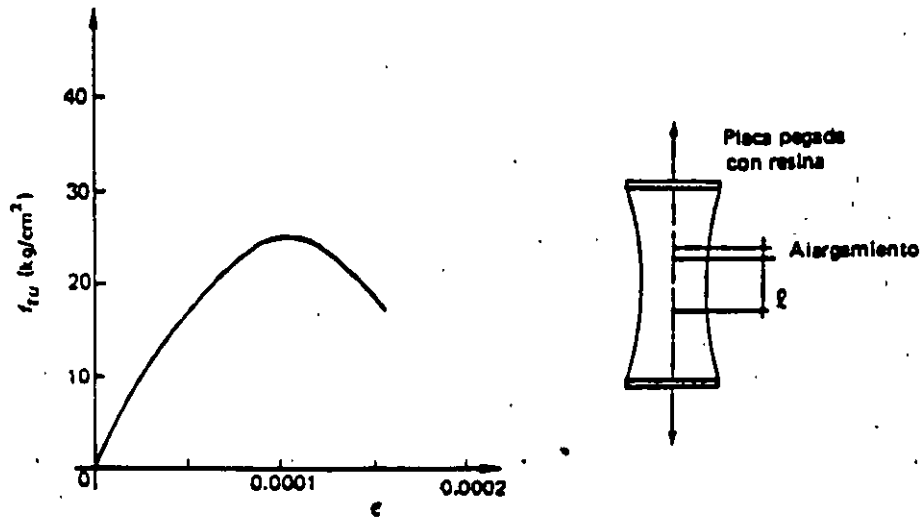


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación en tensión uniaxial.

muestra en la figura 2.12 (a). La carga se aplica a través de un material relativamente suave, como triplay o corcho. Si el material fuera perfectamente elástico, se originarían esfuerzos de tensión uniformemente distribuidos en la mayor parte del plano diametral de carga, como se muestra en la figura 2.12 (b).

La resistencia en tensión se calcula con la fórmula:

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = \frac{2P}{\pi dl} \quad (2.2)$$

deducida de la teoría de la elasticidad. (Véase, por ejemplo, la referencia 2.9.)

En la expresión (2.2):

$P$  = carga máxima

$d$  = diámetro del espécimen

$l$  = longitud del espécimen

En realidad, el concreto no es elástico y, además, la resistencia en tensión que se mide no es la resistencia en tensión uniaxial como la

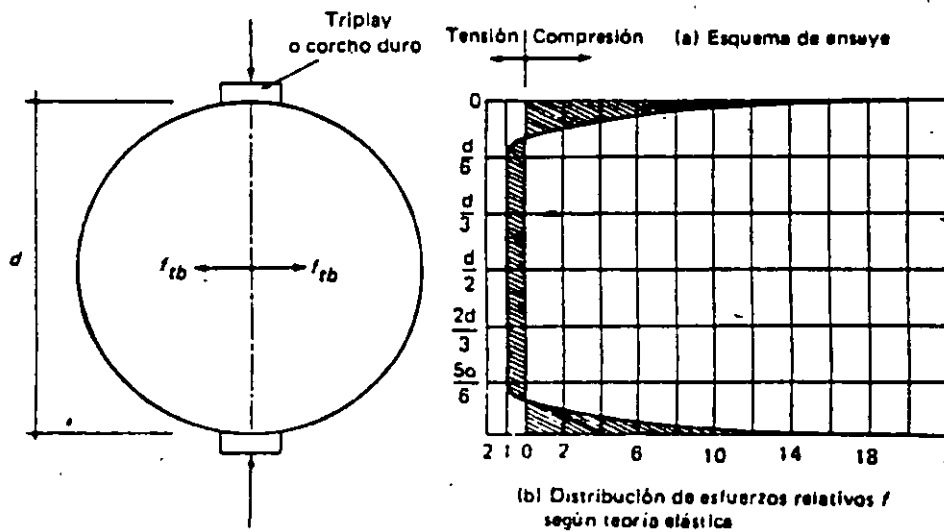


Figura 2.12 Distribución de esfuerzos y tipo de carga en tensión indirecta.

que se obtendría en el ensaye mostrado en la figura 2.11. Sin embargo, lo que se pretende es tener una medida de la resistencia del concreto a la tensión por medio de un ensaye fácil y reproducible por muchos operadores en distintas regiones. Esto se logra satisfactoriamente con el ensaye brasileño.

Para concretos fabricados con agregados de Santa Fe (ciudad de México), la relación entre la resistencia a la compresión de un cilindro y su resistencia a la tensión, obtenida del ensaye brasileño, está dada por la expresión

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = 6 \text{ kg/cm}^2 + 0.06 f'_c \quad (2.3)$$

válida para

$$150 \text{ kg/cm}^2 \leq f'_c \leq 450 \text{ kg/cm}^2$$

donde

$(f_{tb})_{\text{máx}}$  = resistencia en tensión del ensaye brasileño

$f'_c$  = resistencia a la compresión simple de un cilindro de...  
15 X 30 cm.

Esta expresión es solamente aproximada y se presenta para dar una idea de los órdenes de magnitud relativos. Para valores bajos de  $f'_c$ , la resistencia en tensión es del orden de  $0.10 f'_c$ , mientras que para valores altos disminuye a  $0.07 f'_c$ .

El conocimiento de la resistencia a la tensión del concreto es importante para el diseño en tensión diagonal y para otros tipos de comportamiento, en donde la tensión es el fenómeno predominante.

#### 2.2.4 Flexión

Para algunas aplicaciones, tales como pavimentos de concreto, es necesario conocer aproximadamente la resistencia a la flexión del concreto simple. Esta se determina frecuentemente ensayando un prisma de concreto li-

brememente apoyado, sujeto a una o dos cargas concentradas. La falla es brusca, con una grieta única que fractura el espécimen.

El esfuerzo teórico de tensión en la fibra inferior correspondiente a la rotura se calcula mediante la expresión

$$f_r = \frac{Mc}{I} \quad (2.4)$$

en la que  $f_r$  es el módulo de rotura,  $M$  es el momento flexionante correspondiente a la carga máxima aplicada,  $c$  es el medio peralte, e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal del prisma.

Al aplicar la expresión (2.4) se supone que el concreto es elástico hasta la rotura, hipótesis que, como se ha indicado, no es correcta para toda la escala de carga.

Esta prueba proporciona una medida de la resistencia del concreto a flexión, o más bien, a la tensión debida a flexión. Normalmente, el módulo de rotura es mayor que la resistencia a la tensión obtenida del ensaye brasileño.

Se ha observado que el esfuerzo máximo de rotura en flexión depende, entre otras variables, de la resistencia a la compresión, de la relación peralte a claro y de las condiciones de curado. Debido a que la medición de deformaciones es difícil de realizar, no existen muchos datos experimentales sobre las características esfuerzo-deformación de prismas sujetos a flexión simple.

El módulo de rotura como medida de la resistencia a la tensión, tiene varias desventajas. La principal es que el punto de tensión máxima se presenta en la superficie externa del espécimen, que está sujeta en forma importante a esfuerzos de contracción originados por cambios en el ambiente. Por esta razón, la dispersión de datos de ensayes de módulo de rotura es mayor que la dispersión obtenida en el ensaye brasileño, la que a su vez es mayor que la dispersión de datos de pruebas en compresión. Es difícil establecer relaciones generales entre los valores de  $f_r$  y  $f'_c$ , ya que la relación depende del tipo de concreto.

### 2.2.5 Otras condiciones de esfuerzos

La determinación de la resistencia del concreto simple a un estado de esfuerzo cortante puro no tiene mucha importancia práctica, porque dicho estado implica siempre la presencia de tensiones principales de la misma magnitud que el esfuerzo cortante, las cuales originan la falla cuando el elemento podría aún soportar esfuerzos cortantes mayores. Algunos procedimientos indirectos indican que la resistencia al esfuerzo cortante es del orden del 20 por ciento de la resistencia a la compresión.

También se han realizado ensayos en concreto simple sujetando especímenes de diversos tipos a otras combinaciones de esfuerzos. Entre éstos cabe mencionar los ensayos efectuados por McHenry [2.10], utilizando cilindros huecos sujetos a una presión interior y a una carga axial longitudinal, en los que se provoca un estado combinado de esfuerzos de tensión y compresión; los llevados a cabo por Bresler [2.11], sometiendo cilindros a combinaciones de esfuerzos de torsión y compresión axial, y los de Kupfer, Hilsdorf y Rüsck [2.12] en placas y prismas cargados a través de dispositivos especiales, para evitar alteraciones de los estados de esfuerzos estudiados.

### 2.2.6 Criterio de falla

A pesar de los estudios que se han realizado no se tiene todavía una teoría de falla sencilla y que permita predecir con precisión aceptable la resistencia del concreto simple. Se ha intentado hacer adaptaciones, entre otras, de las teorías de Mohr, de Coulomb, de esfuerzos cortantes y de deformaciones limitativas. K. Newman y J. Newman han utilizado con buenos resultados criterios de falla basados en teorías energéticas, las cuales parecen ser las más adecuadas para el caso del concreto [2.13]. En la referencia 2.14 se presenta un resumen de los estudios efectuados para determinar la resistencia del concreto a estados combinados de esfuerzos y las distintas teorías de falla que se han propuesto hasta la fecha.

## 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido

### 2.3.1 Conceptos generales

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aun cuando no se incremente la carga.

Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La figura 2.13 muestra una curva típica de deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación y en el horizontal, el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño, el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente el 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen, se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la figura 2.13, la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido representa las deformaciones que

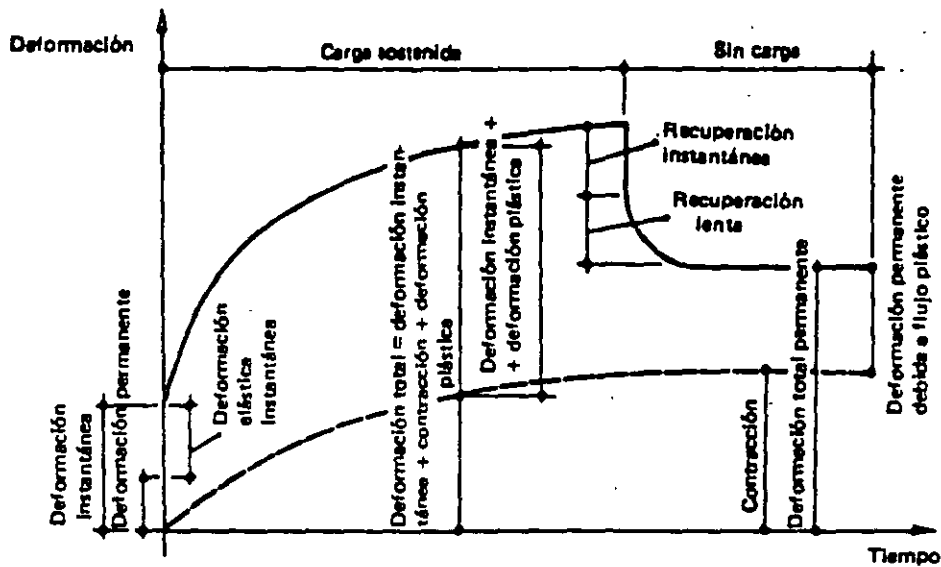


Figura 2.15 Curva típica deformación-tiempo, bajo condiciones ambientales constantes.

produce el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción.

Para efectos de diseño estructural, no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas; en muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total, incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales de dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

### 2.3.2 Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando e hidrata el cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambientales especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que

otro de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en ambiente húmedo se contraerá menos que en ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento, la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que otra pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen en general en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente, la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

### 2.3.3 Flujo plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de una carga. Las teorías que

se han desarrollado para explicarlo son complejas y caen fuera del alcance de este texto. Puede consultarse a este respecto la referencia 2.15. Se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un reajuste interno de las partículas que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50% de la resistencia. Para niveles mayores la relación ya no es proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante.

En la figura 2.13 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que, para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan a las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla y la humedad ambiente.

Es interesante mencionar que, como el flujo plástico aumenta con el nivel de carga, este fenómeno tiende a aliviar las zonas de máximo esfuerzo y, por lo tanto, a uniformar los esfuerzos en un elemento.

### 2.3.4 Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. En la figura 2.14 se muestra el efecto de la permanencia de una carga según los ensayos de Rüsch [2.5]. En el eje horizontal se representan deformaciones unitarias, y en el eje vertical valores relativos,  $f_c/f'_c$ , de los esfuerzos aplicados con respecto a la resistencia en una prueba de corta duración (20 minutos aproximadamente).

Se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de especímenes sujetos a distintas velocidades de deformación, con lo que se produjeron fallas a diferentes edades. La línea de trazo continuo corresponde a un espécimen en el que la falla se produjo en 20 minutos. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo.

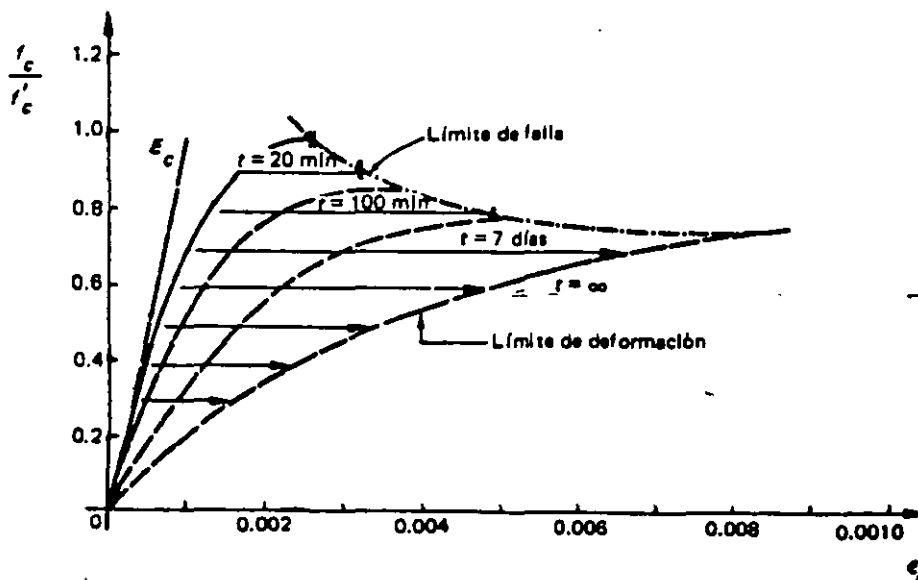


Figura 2.14 Efecto de la permanencia de la carga (Rüsch) [2.5].

Se muestran además dos envolventes: la inferior, llamada *límite de deformación* y la superior, *límite de falla*. La primera muestra las deformaciones máximas que se obtienen al aplicar indefinidamente distintos porcentajes de la resistencia, inferiores a un cierto valor crítico. La segunda envolvente indica las deformaciones a la falla, correspondientes a porcentajes de carga superiores al valor crítico. La intersección entre estas dos envolventes indica, teóricamente, el porcentaje de la resistencia por debajo del cual el espécimen puede soportar la carga indefinidamente.

En la figura puede observarse que si se carga un espécimen al 80 por ciento de su resistencia de corta duración, se producirá la falla eventualmente a una deformación del orden de 0.0055. En cambio, si se le sujeta solamente al 40 por ciento de su resistencia de corta duración, el espécimen sufrirá una deformación del orden de 0.0025 después de un tiempo muy largo y mantendrá su carga indefinidamente.

Se puede decir, con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomar indefinidamente, sin fallar, cargas hasta del 60 por ciento de su capacidad. Cargas mayores que el 70-80 por ciento, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.

## 2.4 Fatiga

Se han hecho diversos estudios sobre elementos de concreto sujetos a repeticiones de carga. Cuando un elemento falla después de un número muy grande de repeticiones de carga, se dice que ha fallado por *fatiga*. Este tipo de sollicitación tiene importancia práctica, ya que elementos como vigas de puente, durmientes de ferrocarril o cimentaciones de maquinaria están sujetos a muchas repeticiones de carga.

Se mencionó anteriormente que un elemento de concreto en compresión no puede soportar indefinidamente fracciones de su resistencia estática mayores que un 70 por ciento. Cuando a un elemento de concreto se le aplican

compresiones del orden de la mitad de su resistencia estática, falla después de aproximadamente diez millones de repeticiones de carga. Se ha encontrado también que si la carga se aplica intercalando periodos de reposo, el número de ciclos necesario para producir la falla aumenta considerablemente.

Los estudios experimentales se han hecho aplicando los ciclos de carga y descarga a velocidades bastante más rápidas que las que se presentan en la práctica y, por lo tanto, sus resultados en general son conservadores.

Se puede estimar que el concreto simple en compresión, toma diez millones o más de repeticiones de carga al 50 por ciento de su resistencia estática. En flexión, el mismo número de aplicaciones puede alcanzarse con ciclos de carga y descarga con valor máximo del orden de 35-50 por ciento de su resistencia estática. Se han hecho estudios limitados de fatiga en torsión, que tienen un interés práctico menor.

Para ciertos materiales, como el acero, se ha encontrado que, aplicando ciclos de carga y descarga y llevando el esfuerzo máximo hasta un cierto valor, existe un límite de este esfuerzo por debajo del cual se puede soportar un número indefinido de ciclos. En concreto, se han llevado los ensayos hasta 10 millones de aplicaciones de carga, sin que se haya comprobado la existencia de límites semejantes. En las referencias 2.16 y 2.18 se trata ampliamente el tema de fatiga en el concreto.

## 2.5 Módulos elásticos

Para estimar deformaciones debidas a cargas de corta duración, donde se puede admitir un comportamiento elástico sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación mostradas, resulta obvio que el concepto convencional de módulo de elasticidad no tiene sentido en concreto. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tan-

gente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de cargas de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos elásticos menores que los correspondientes a las definiciones mencionadas anteriormente.

El módulo secante se usa en ensayos de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM [2.17] recomienda la pendiente de la línea que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.0005 y al 40 por ciento de la carga máxima.

Se ha observado que, después de varios ciclos de carga y descarga a esfuerzos relativamente pequeños, la relación esfuerzo-deformación tiende a convertirse en una relación prácticamente lineal. Como es difícil determinar el módulo tangente inicial de una manera reproducible, se recurre a veces a aplicaciones previas de carga y descarga, con objeto de rectificar la curva esfuerzo-deformación, y se considera la pendiente de la curva así obtenida como el módulo de elasticidad. El método para determinar el módulo tangente en esta forma se describe con detalle en la referencia 2.17. El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico. Se han propuesto varias expresiones para predecir el módulo de elasticidad a partir de estas variables. Por ejemplo, el Reglamento ACI presenta la ecuación

$$E_c = w^{1.5} \frac{4270}{15100} \sqrt{f'_c} \quad (2.5)$$

donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad en  $\text{kg/cm}^2$ ,  $w$  es el peso volumétrico del concreto en  $\text{ton/m}^3$  y  $f'_c$  es la resistencia del concreto en  $\text{kg/cm}^2$ . El Reglamento del D.F., propone la ecuación

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (2.6)$$

que es aplicable únicamente a concretos fabricados con agregados típicos de la ciudad de México. Estas ecuaciones dan únicamente valores aproximados, porque existen otras varia-

bles importantes, como el tipo de agregado. Las diferencias entre los valores reales y los calculados con estas ecuaciones pueden ser muy grandes. Cuando se requieren estimaciones de cierta precisión, conviene determinar el módulo de elasticidad del concreto usado en particular.

En algunos análisis elásticos se suelen emplear  $G$ , el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y  $\mu$ , el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20. Con frecuencia se supone  $\mu$  igual a 0.18.

## 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura

El concreto está sometido a cambios volumétricos por temperatura. Se han determinado algunos coeficientes térmicos que oscilan entre 0.000007 y 0.000011 de deformación unitaria por grado centígrado de cambio de temperatura. Los valores anteriores corresponden a concreto de peso volumétrico normal (del orden de  $2.2 \text{ ton/m}^3$ ). Para concretos fabricados con agregados ligeros, los coeficientes pueden ser muy distintos de los mencionados.

## 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. En las figuras 2.15 y 2.16 se muestran curvas de ambos tipos de acero, típicas de barras europeas.

Los diámetros usuales de las barras producidas en México, varían de  $\frac{1}{4}$  pulg a  $1\frac{1}{2}$  pulg. (Algunos productores han fabricado barras corrugadas de  $\frac{5}{16}$  pulg,  $\frac{3}{32}$  pulg y  $\frac{3}{16}$  pulg.) En otros países se usan diámetros aun mayores. Todas las barras, con excepción del alambrión de  $\frac{1}{4}$  pulg, que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie, para mejorar

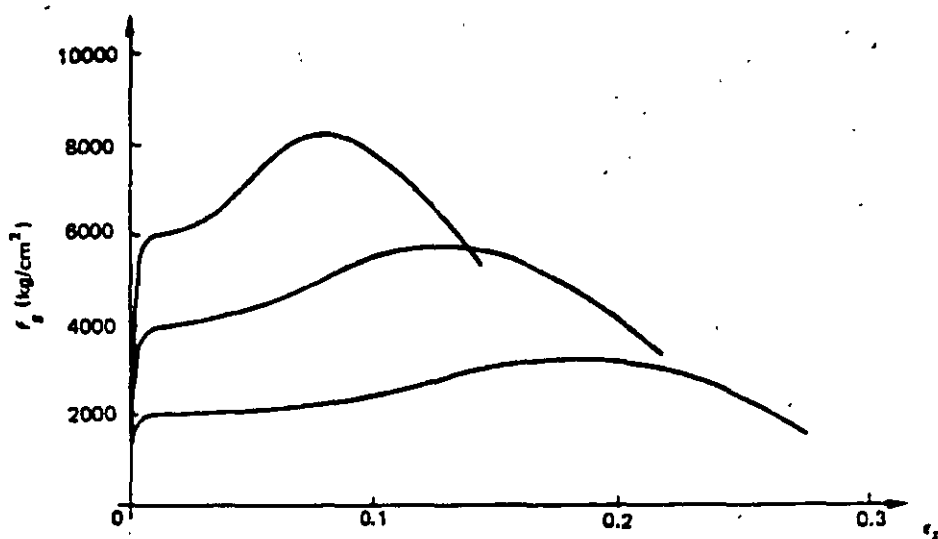


Figura 2.15 Curvas esfuerzo deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo de fabricación europea.

su adherencia al concreto. La tabla 2.1 proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como la nomenclatura para identificarlas.

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Este límite se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de barras laminadas en caliente,

como se ve en la figura 2.15. El acero trabajado en frío no tiene un límite de fluencia bien definido (figura 2.16). En este caso, el límite de fluencia suele definirse trazando una paralela a la parte recta de la curva esfuerzo-deformación desde un valor de la deformación unitaria de 0.002; la intersección de esta paralela con la curva define el límite de fluencia.

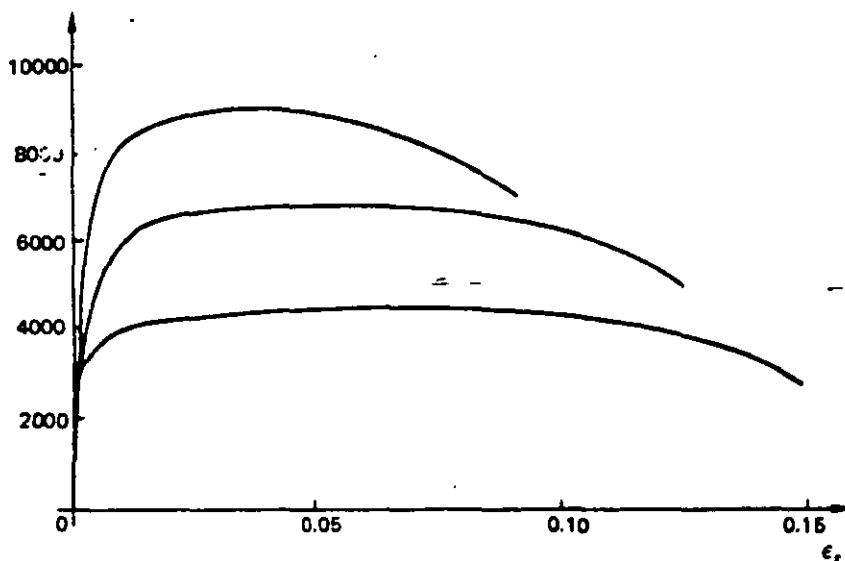


Figura 2.16 Curvas esfuerzo-deformación de acero trabajados en frío para barras de refuerzo de fabricación europea.



#### 44 Características generales del concreto y del acero

Tabla 2.1 Diámetros, pesos, áreas, y perímetros de barras.

Barra Núm.	Diámetro pulg	Diámetro mm	Peso kg/m	Área cm <sup>2</sup>	Perímetro cm
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.995	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	3/4	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.958	11.40	11.97

#### OBSERVACIONES

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a la norma de la Secretaría de Comercio, NOM B6-1974. Según esta norma, el diámetro nominal y el área de una barra corresponden a los que tendría una barra lisa, sin corrugaciones, del mismo peso por metro lineal; todas las barras, con excepción de la No. 2, están corrugadas.

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las barras laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2 300 hasta 4 200 kg/cm<sup>2</sup>. El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia de 4 000 a 6 000 kg/cm<sup>2</sup>. En la figura 2.17 se representa la gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México. En los países escandinavos se usan varillas con límites de fluencia hasta de 9 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en refuerzos con detalles soldados es la soldabilidad. La soldadura de aceros trabajados en frío debe hacerse con cuidado. Otra propiedad importante es la facilidad de doblado, que es una medida indirecta de ductilidad y un índice de su trabajabilidad.

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por alambres lisos unidos por puntos de

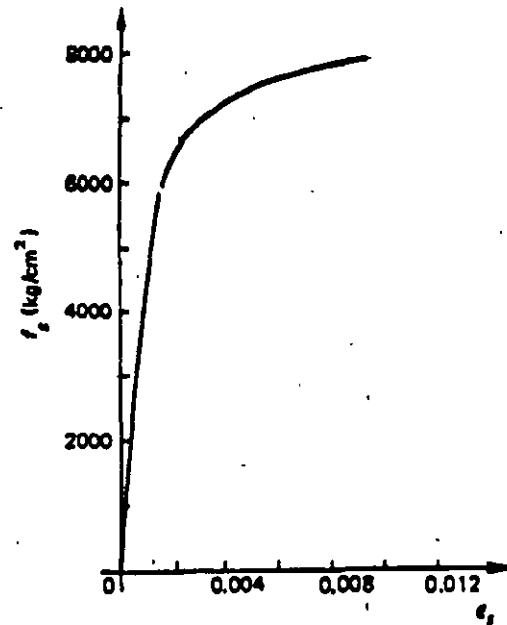


Figura 2.17 Gráfica esfuerzo-deformación de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido, de fabricación nacional.

soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con refuerzos de fluencia del orden de 5 000 kg/cm<sup>2</sup>. El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm y los diámetros de 2 a 7 mm, aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos, se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial, para mejorar la adherencia.

El acero que se emplea en estructuras prefabricadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia última varía entre 14 000 y 22 000 kg/cm<sup>2</sup> y su límite de fluencia, definido por el esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12 000 y 19 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Como ilustración, en la figura 2.18 se presentan, atendiendo al grado de calidad, algunas curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero, y dos curvas esfuerzo-deformación para concreto con una resistencia de 250 kg/cm<sup>2</sup>, correspondientes a cargas de corta y larga duración.

El módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco. De la compa-

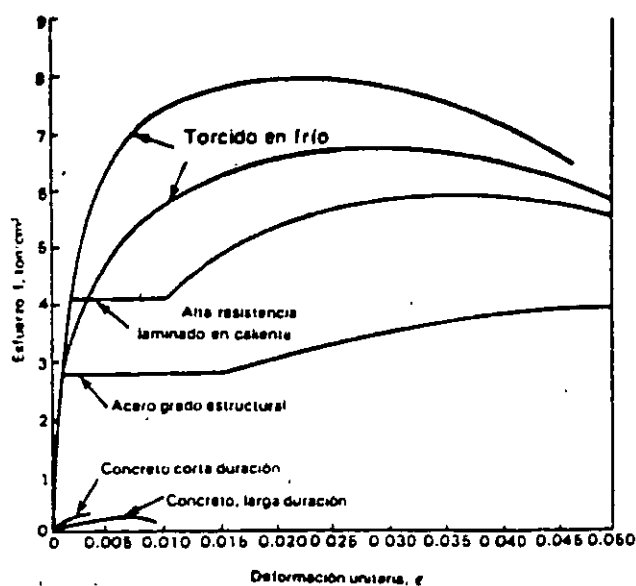


Figura 2.18 Curvas comparativas para acero y concreto

ración de las curvas del acero y del concreto, se puede inferir que si ambos trabajan en un

elemento de concreto reforzado sujeto a compresión axial, el colapso del conjunto estará regido por la deformación del concreto que, bajo cargas de larga duración, puede ser hasta de 0.010 ó 0.012. Para esta deformación, el acero tendría apenas una deformación del orden correspondiente a su límite de fluencia.

Las características de adherencia de los distintos aceros, y su influencia en el diseño, se presentarán en el capítulo de Adherencia. Para lograr el trabajo en conjunto debe tenerse una adherencia suficiente entre concreto y acero obtenida ya sea mecánicamente o por medio de la adhesión entre el concreto y el acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión es difícil de determinar en el caso de barras, debido a efectos de esbeltez.

## Referencias

- 2.1 Troxell, G. E., H. E. Davis y J. W. Kelly. *Composition and Properties of Concrete*, segunda edición. Nueva York, McGraw Hill, 1968.
- 2.2 Neville, A. M. *Properties of Concrete*, tercera edición. Londres, Pitman, 1981.
- 2.3 Orchard, D. F. *Concrete Technology* (3 volúmenes). Nueva York, Halsted Press. Vol. I, 1973; Vol. 2; 1973, Vol. 3, 1976.
- 2.4 Hatano, T. y H. Tsutsumi. *Dynamical Compressive Deformation and Failure of Concrete under Earthquake Load*. Informe No. C 5904 del Laboratorio Técnico del Instituto Central de Investigaciones de la Industria Eléctrica, Tokio, septiembre 1968. Véase también el Informe No. C 5906, por T. Hatano, Tokio, marzo 1960.
- 2.5 Rüschi, H. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, julio 1960.
- 2.6 Richart, F. E., A. Brandtzaeg y R. L. Brown. "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses". *Bulletin No. 185*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, noviembre 1928.
- 2.7 Lobo B. Carneiro, F. L. "Concrete Tensile Strength". *Boletín RILEM No. 13*, marzo 1953.
- 2.8 Akazawa, T. "Tension Test Method for Concrete". *Boletín RILEM No. 16*, noviembre 1953.
- 2.9 Timoshenko, S. P. y J. N. Goodier. *Teoría de la elasticidad*. Bilbao, URMO, 1968.
- 2.10 McHenry, D. y J. Karni. "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, abril 1958.
- 2.11 Bresler, B., y K. S. Pister. "Strength of Concrete under Combined Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, septiembre 1958.
- 2.12 Kupfer, H., H. K. Hilsdorf y H. Rüschi. "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, agosto 1969.
- 2.13 Newman, K. y J. B. Newman. "Failure Theory and Design Criteria for Plain Concrete". En la Memoria del *International Conference of Structure, Solid Mechanics and Engineering Design and Civil Engineering Materials*. Southampton, 1969.
- 2.14 Jordá, R. *Resistencia del concreto a esfuerzos combinados*, tesis profesional. Puebla, México, Universidad Autónoma de Puebla, 1970.

- 2.15 \_\_\_\_\_. *Symposium on Creep of Concrete (SP-9)*. Detroit. American Concrete Institute, 1964.
- 2.16 Lloyd, J. P., J. L. Lott y C. E. Kesler. "Fatigue of Concrete". *Bulletin No. 499*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1968.
- 2.17 \_\_\_\_\_. *Standard Method of Test for Static Young's Modulus of Elasticity and Poissons Ratio in Compression of Cylindrical Concrete Specimens (ASTM C 469-65)*. Filadelfia, American Society for Testing and Materials, 1965.
- 2.18 Shah, S. P., editor. *Fatigue of Concrete Structures (SP 75)*. Detroit, American Concrete Institute, 1982.
- 2.19 Neville, A. M. *Tecnología del concreto (2 volúmenes)*. México, D. F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

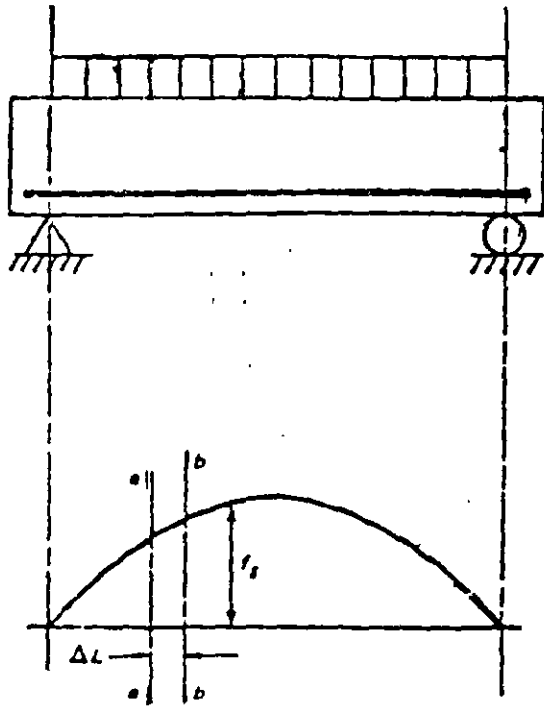
**TEMA**

**ADHERENCIA Y ANCLAJE**

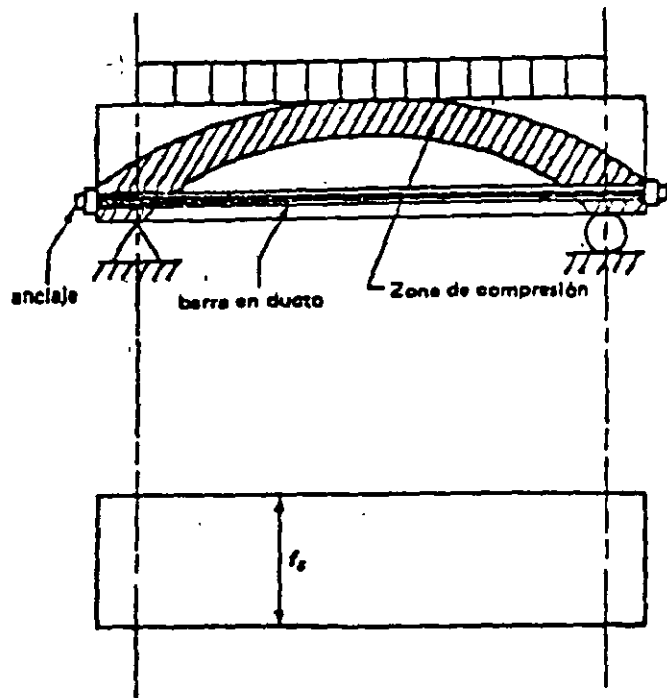
**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# IV. ADHERENCIA Y ANCLAJE

## 1.- NATURALEZA



REFUERZO ADHERIDO



REFUERZO SIN ADHERENCIA

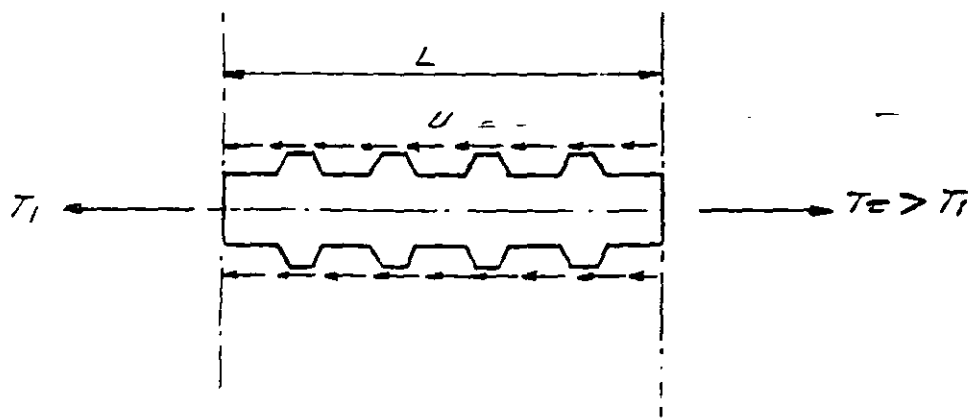
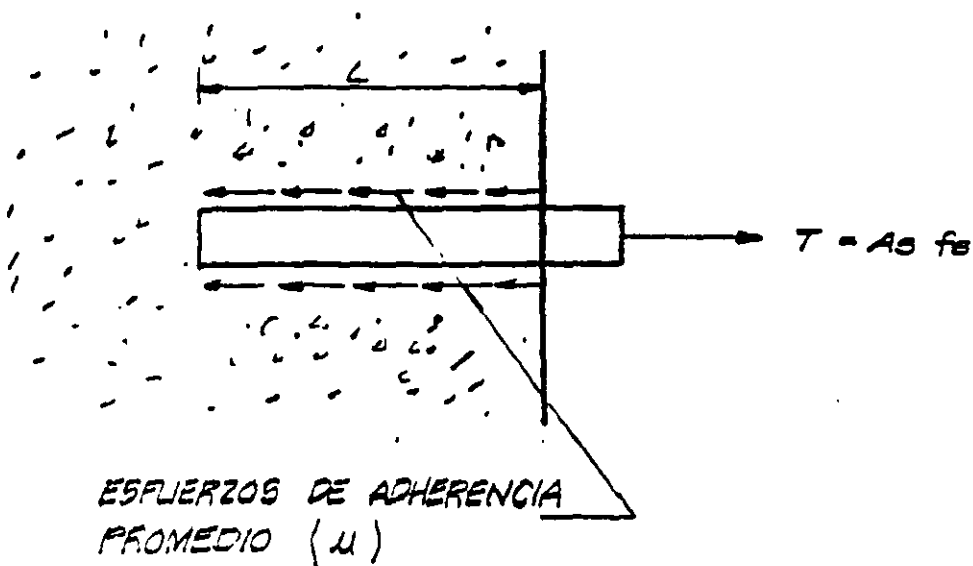


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN TRAMO DE BARRA ADHERIDA

## 1.1 ORIGEN DE LA ADHERENCIA O RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO

- A) ADHESION DE ORIGEN QUIMICO
  - B) FRICCION ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO
  - C) APOYO DIRECTO DE LAS CORRUGACIONES
- 
- A) Y B) EN VARILLAS LISAS
  - A) B) Y C) EN VARILLAS CORRUGADAS

## 2.- ADHERENCIA POR ANCLAJE O DESARROLLO



POR EQUILIBRIO

$$\mu \Sigma 0 L = A_s f_s$$

$$\mu = \frac{A_s f_s}{\Sigma 0 L} = \frac{\frac{\pi d_b^2}{4} f_s}{\pi d_b L}$$

$$\mu = \frac{d_b f_s}{4L}$$

si  $f_s = f_y$

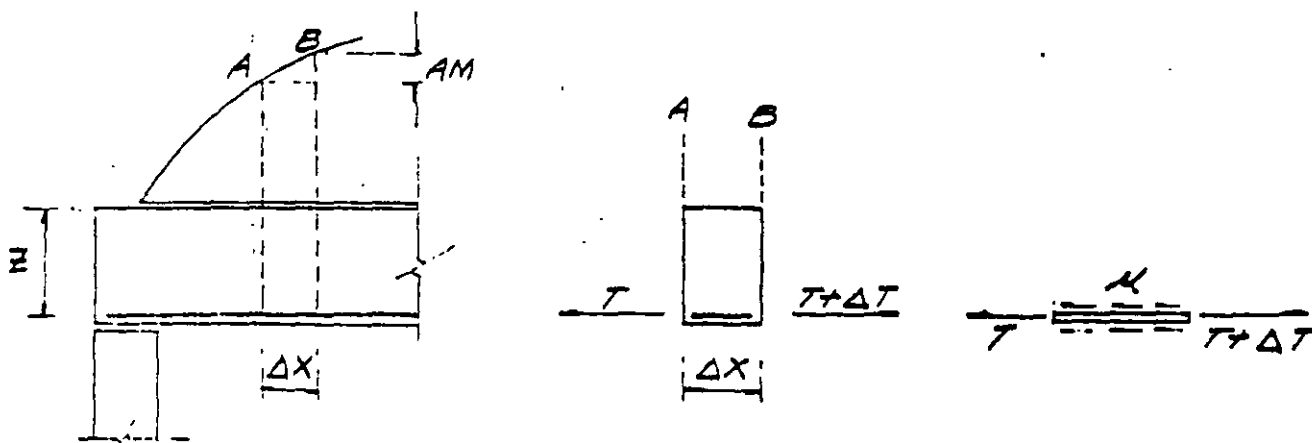
$\mu = \mu \mu$

y  $L = l_d$

$$l_d = \frac{f_y d_b}{4 \mu \mu}$$

### 3.- ADHERENCIA POR FLEXION

A) POR EFECTO DE UN INCREMENTO DE ESFUERZOS EN LAS VARRILLAS DEBIDO A UN CAMBIO EN EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.



$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z}$$

$$\Delta T = \mu (\Sigma o) \Delta x$$

$$\mu = \frac{\Delta M}{z \Sigma o \Delta x}$$

TOMANDO LIMITES CUANDO  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\mu = \frac{dM}{dx} \frac{1}{z \Sigma o}$$

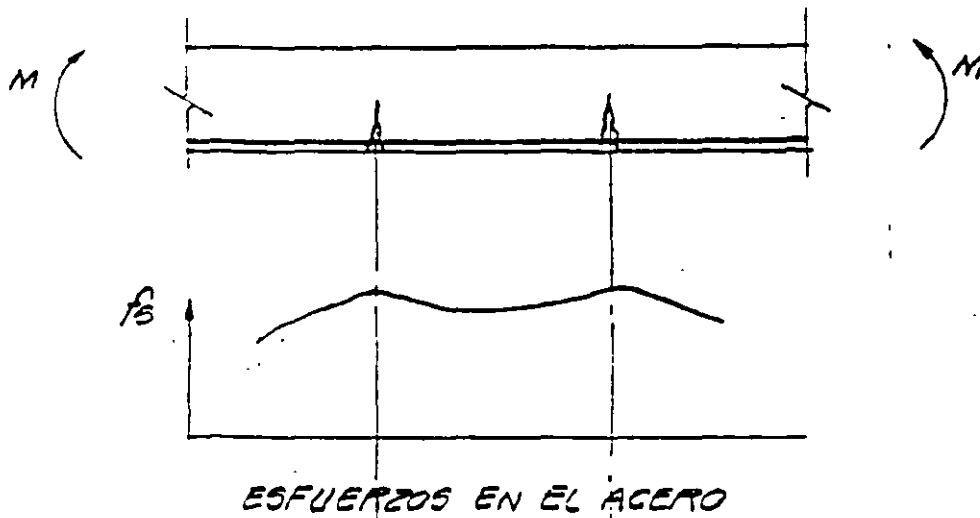
PERO  $\frac{dM}{dx} = V$

$$\mu = \frac{V}{z \Sigma o}$$



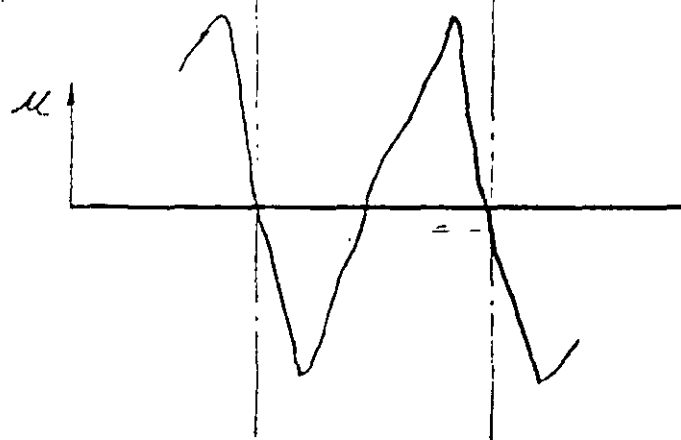
b) CAMBIO EN LOS ESFUERZOS DE LAS VARILLAS  
 POR AGRIETAMIENTO DEL ELEMENTO

MOMENTO CONSTANTE



$$\mu = \frac{T_2 - T_1}{L E_0} = \frac{\Delta T}{L E_0}$$

$$\mu = \frac{dT}{dL} \frac{L}{E_0} = \frac{df_s}{dL} \frac{\Delta s}{E_0}$$



ESFUERZOS DE ADHERENCIA

4.- VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL DESARROLLO DE LA ADHERENCIA.

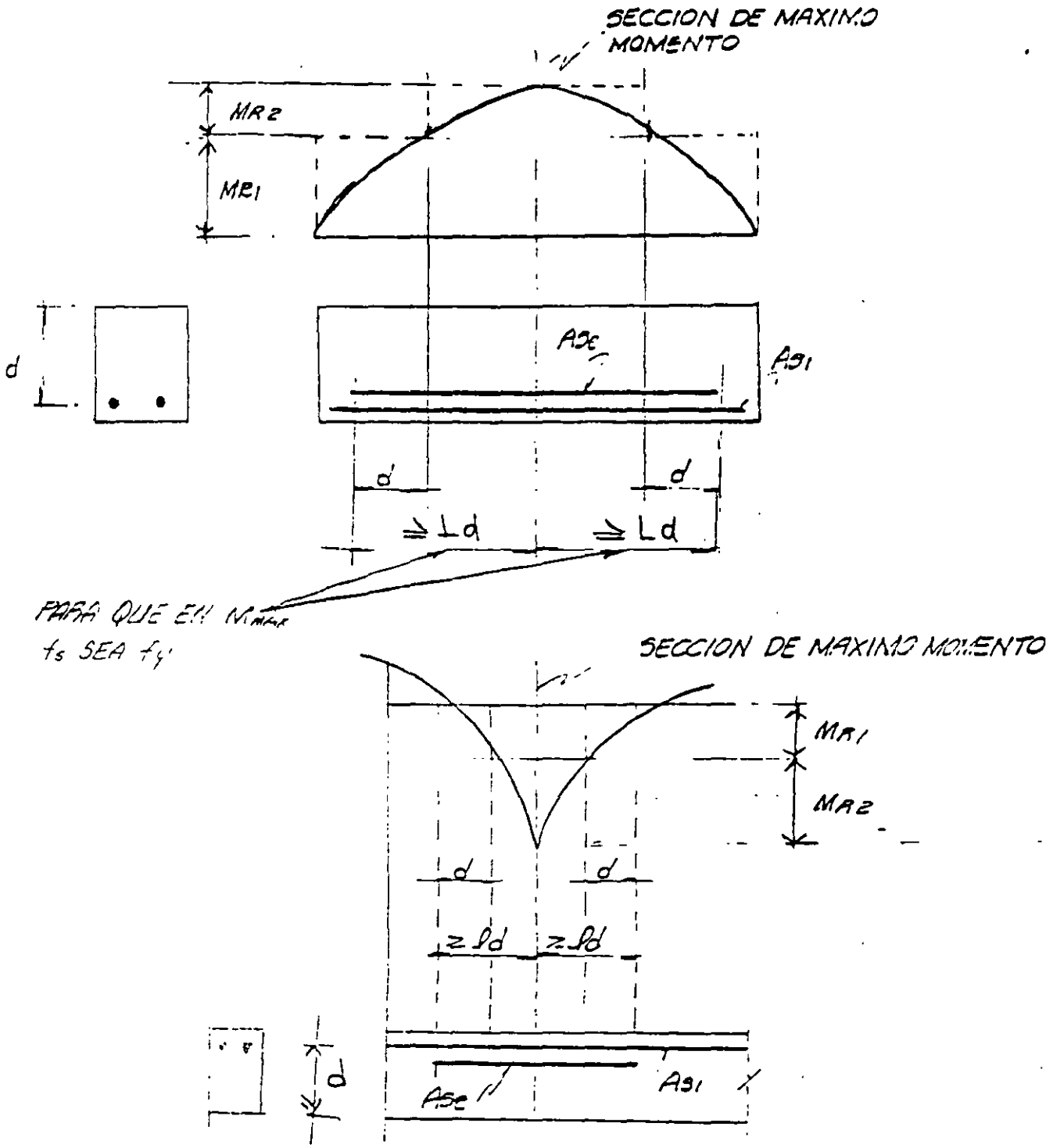
- A) RESISTENCIA A TENSION DEL CONCRETO, QUE ES PROPORCIONAL A  $\sqrt{F'c}$ .
- B) TIPO DE CORRUGACIONES Y DIAMETRO DEL REFUERZO.
- C) POSICION DEL REFUERZO.  
SE DESARROLLA MAYOR ADHERENCIA EN VARILLAS DE -  
LECHO INFERIOR QUE EN LECHO SUPERIOR, Y MEJOR -  
EN BARRAS VERTICALES QUE EN HORIZONTALES.
- D) RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE LAS VARILLAS.
- E) CONFINAMIENTO DEL CONCRETO POR ESTRIBOS CERRADOS.
- F) EN BARRAS A COMPRESION, LA INEXISTENCIA DE GRIETAS DE FLEXION, MEJORA LA ADHERENCIA.

5.- REVISION DE LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

A CAMBIO DE CALCULAR LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA, LOS REGLAMENTOS ESPECIFICAN UNA LONGITUD DE ANCLAJE O DESARROLLO MINIMA QUE DEBE PROPORCIONARSE A CADA LADO DE LAS SECCIONES DONDE SE PRESENTEN ESFUERZOS MAXIMOS EN EL ACERO. ESTA LONGITUD DEPENDE BASICAMENTE DE LAS VARIABLES INDICADAS EN EL PUNTO 4.

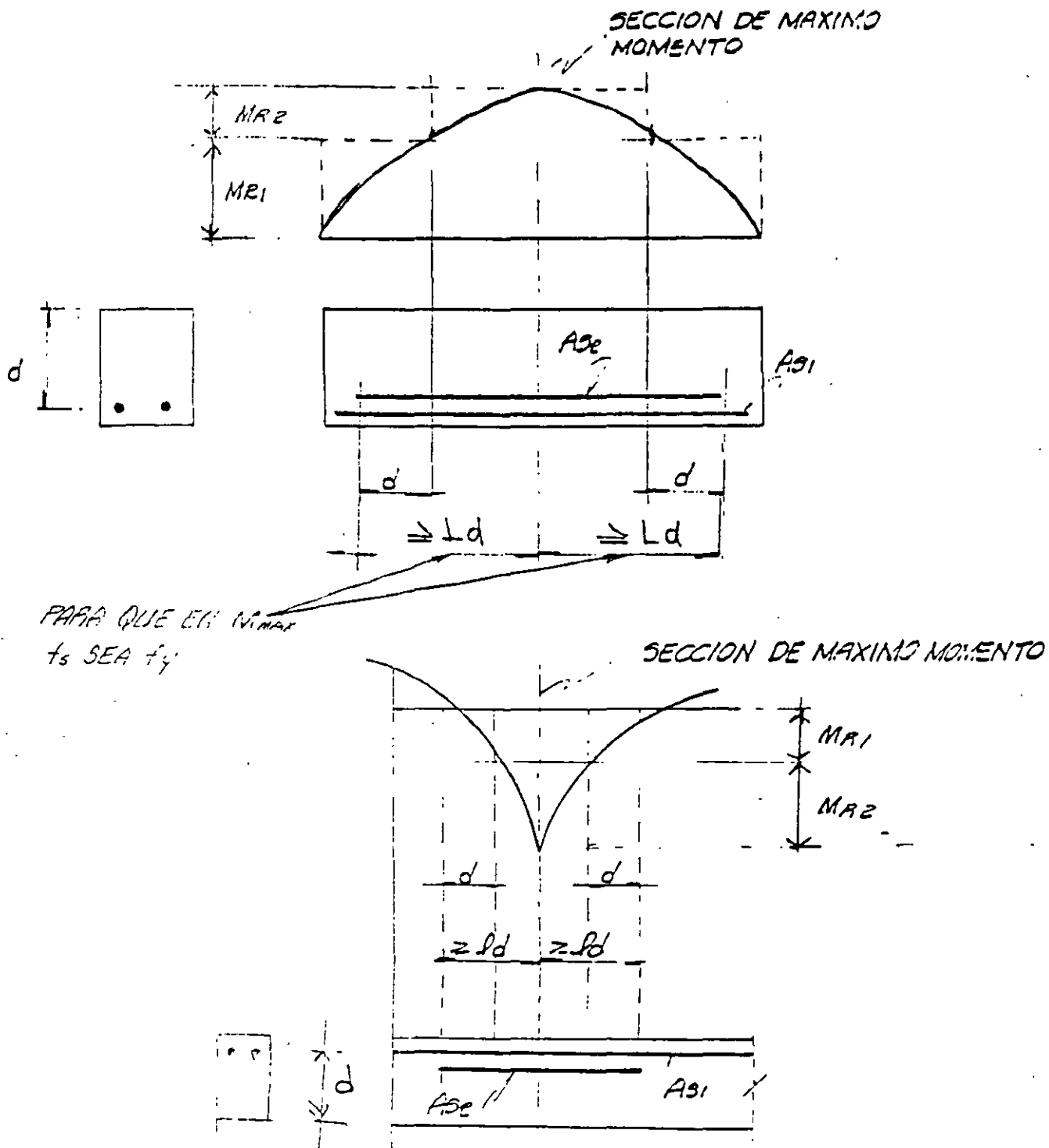
6.- REGLAMENTO D. F. 1987

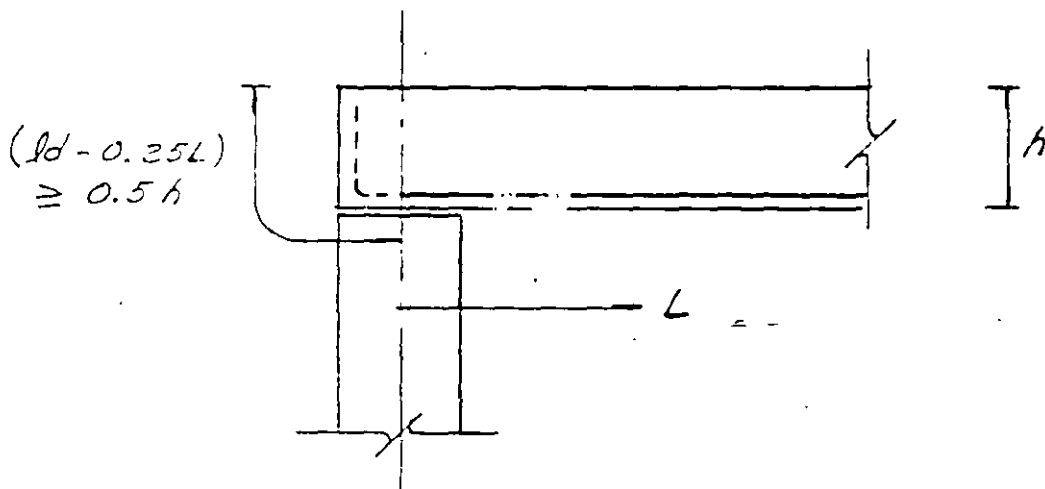
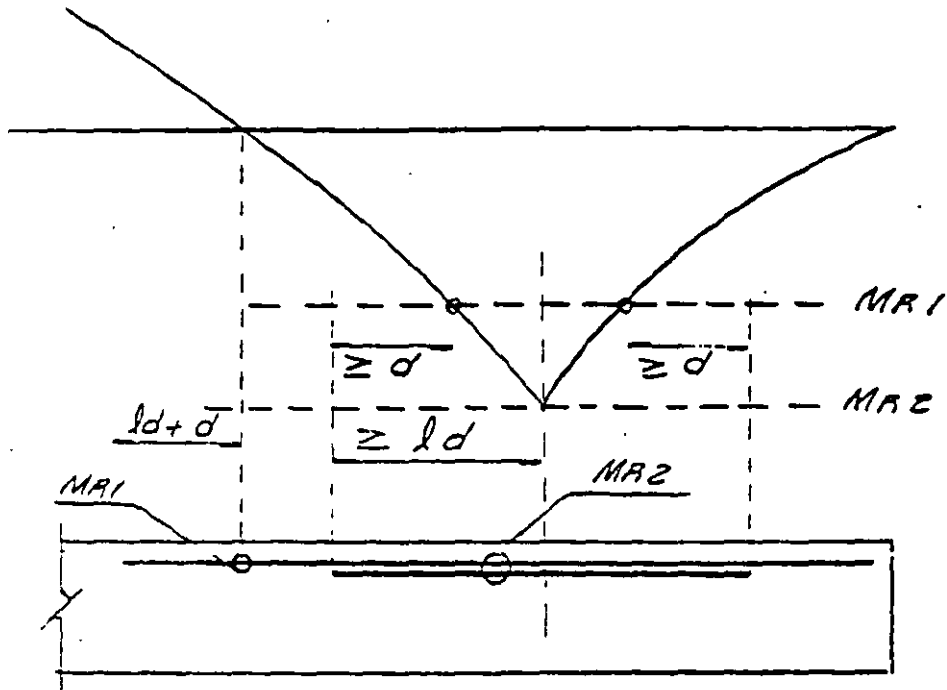
ACERO EN TENSION:



# 6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:





LONGITUD BASICA DE DESARROLLO:

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

FACTORES PARA OBTENER LA LONGITUD DE DESARROLLO. (  $L_d$  )

$$L_d = \text{Factor } L_{db}$$

<u>CONDICION DEL REFUERZO</u>	<u>FACTOR</u>
BARRAS HORIZONTALES O INCLINADAS COLOCADAS DE MANERA QUE BAJO ELLAS SE CUELEN MAS DE 30 CM DE CONCRETO.	1.4
EN CONCRETO LIGERO	1.33
BARRAS CON $F_y$ MAYOR DE 4200 KG/CM <sup>2</sup> ( $F_y$ , EN KG/CM <sup>2</sup> ).	$2 - \frac{4200}{F_y}$
BARRAS TORCIDAS EN FRIO DE DIAMETRO - IGUAL O MAYOR QUE 19.1 MM (N°6).	1.2
¡ODOS LOS OTROS CASOS	1.0

EN NIINGUN CASO  $L_d$  SERA MENOR DE 30 CM.

EN PAQUETES  $L_d$  SE INCREMENTA:

$$\begin{array}{ll} \text{⊗} & L_d = 1.2 L_{dc/b} \\ \text{⊙} & L_d = 1.00 L_{dc/b} \text{ (NO SE MODIFICA)} \end{array}$$

SI EL ESFUERZO EN EL ACERO ES MENOR QUE  $F_y$ :

$$L_d' = \frac{f_s}{f_y} L_d$$

DONDE  $f_s = \frac{M}{A_s Z}$

EN VARILLAS LISAS

$$L_d' = 2 L_{d_{corr}}$$

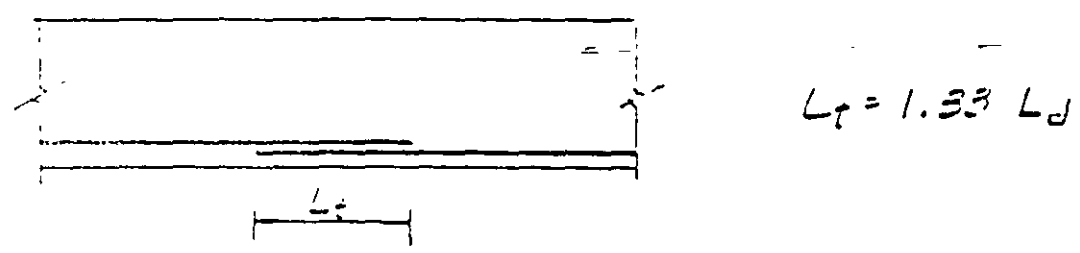
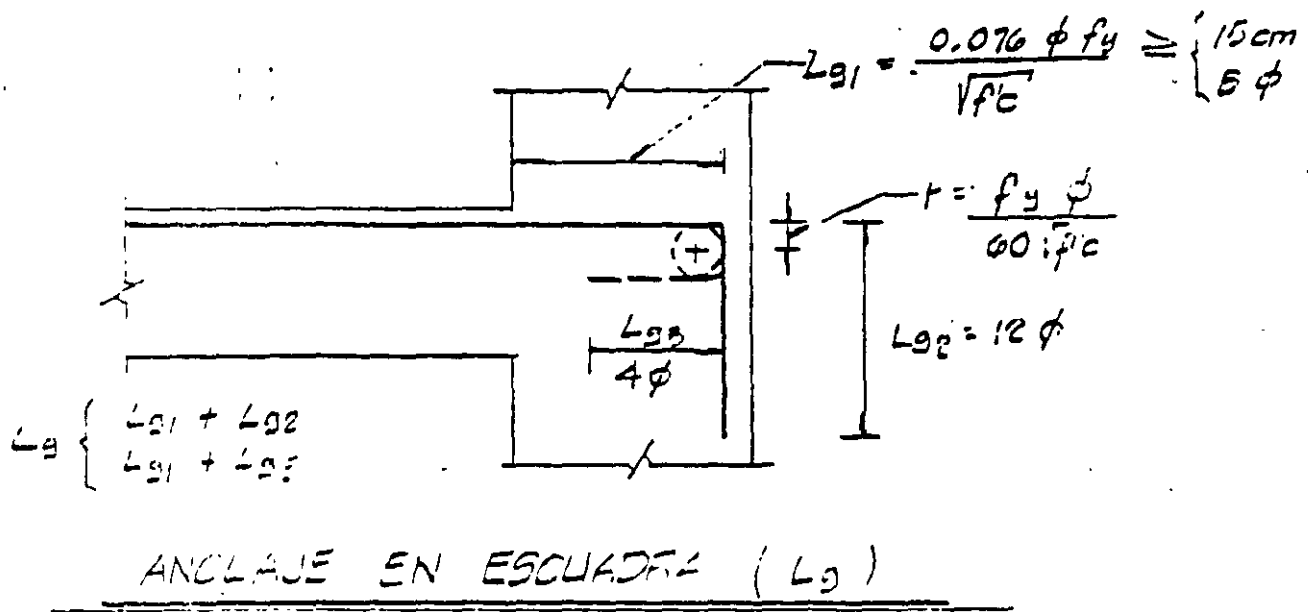
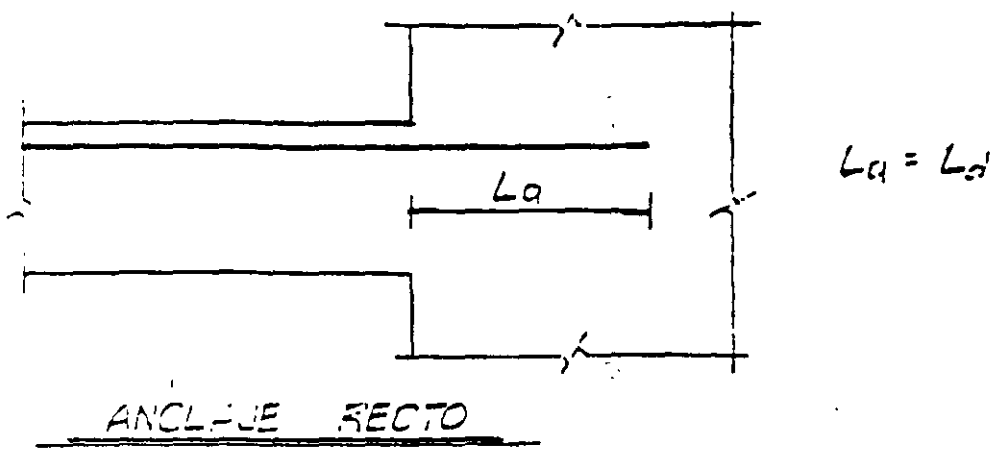
ACERO EN COMPRESION.

$$L_d = 0.6 L_d \text{ tensión}$$

$$L_d \geq 20 \text{ cm.}$$

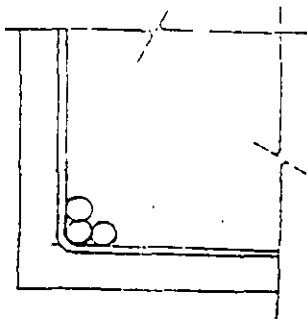
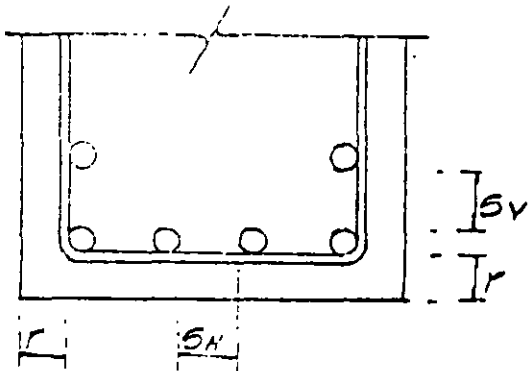
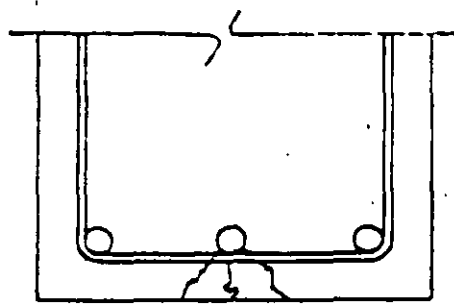
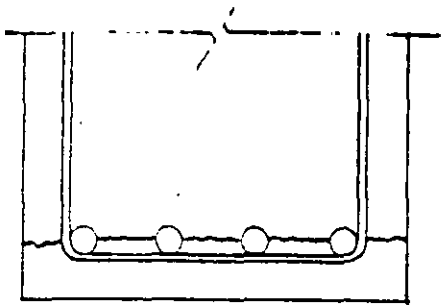


# ANCLAJES Y REFUERZO DEL CONCRETO



## LONGITUD DE TRASLAPE (L<sub>t</sub>)

# RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE VARILLAS



EN ELEMENTOS NO EXPUESTOS

$r$  SERÁ EL MENOR DE LOS DOS VALORES SIGUIENTES

$\phi$  MAX.  
2 cm.

EN ELEMENTOS COLADOS CONTRA EL SUELO

$r = \begin{cases} 5 \text{ cm. SIN PLANTILLA} \\ 3 \text{ cm. CON PLANTILLA} \end{cases}$

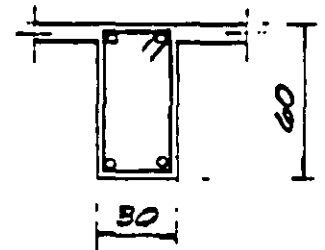
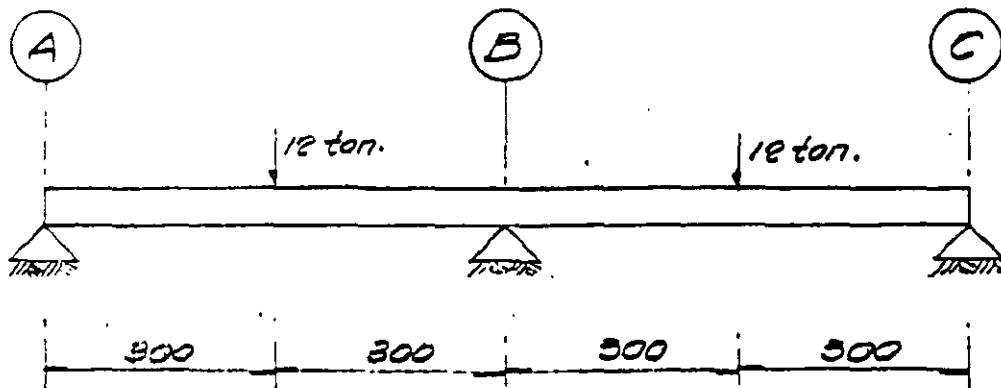
$sh$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 1.5 T \text{ m} \text{áx. AGR} \end{cases}$

$sv$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 2 \text{ cm.} \end{cases}$

PAQUETES DE BARRAS A CONDICION QUE ESTEN EN UNA ESQUINA DE ESTRIBO

2 VARILLAS EN TRABES Y  
3 EN COLUMNAS (MAX)

# EJEMPLO



## DATOS

$$P = 12 \text{ ton.}$$

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$d = 55 \text{ cm.}$$

$$r = 5 \text{ cm.}$$

$$h = 60 \text{ cm.}$$

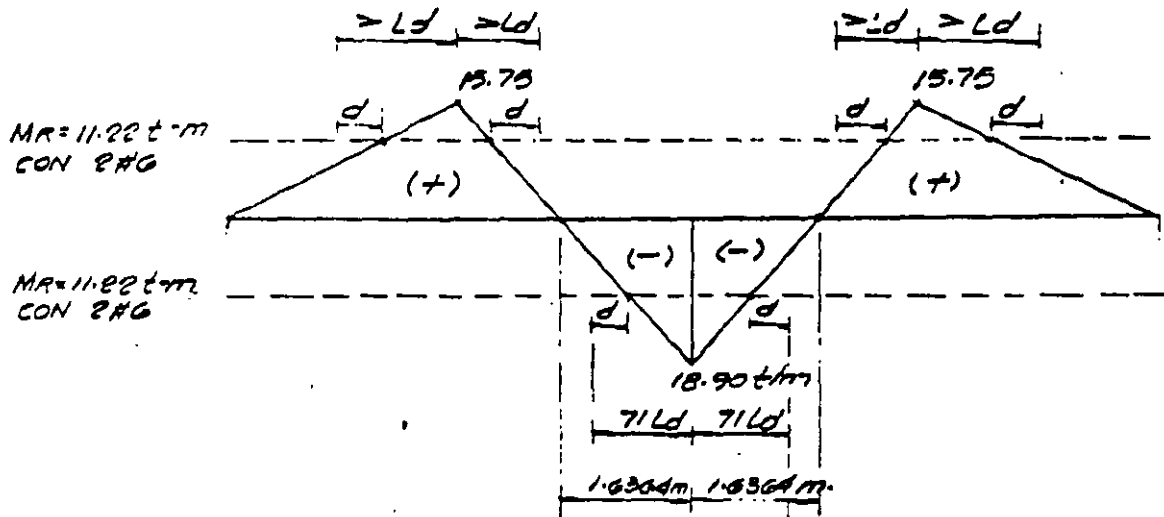
$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_u = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

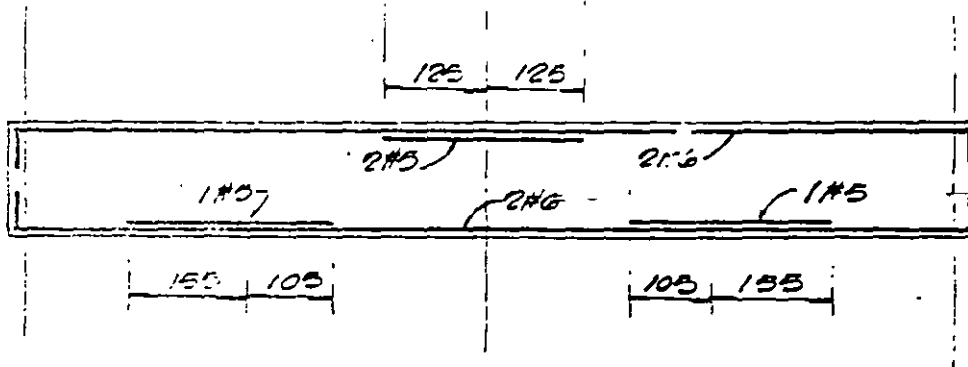
$$F_r = 0.9 \text{ (FLEXION)}$$

$$F_c = 1.4$$

# DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE



- $L\phi\#6$
- $l_s = 71$
  - $l_i = 51$
- $L\phi\#5$
- $l_s = 56$
  - $l_i = 40$





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

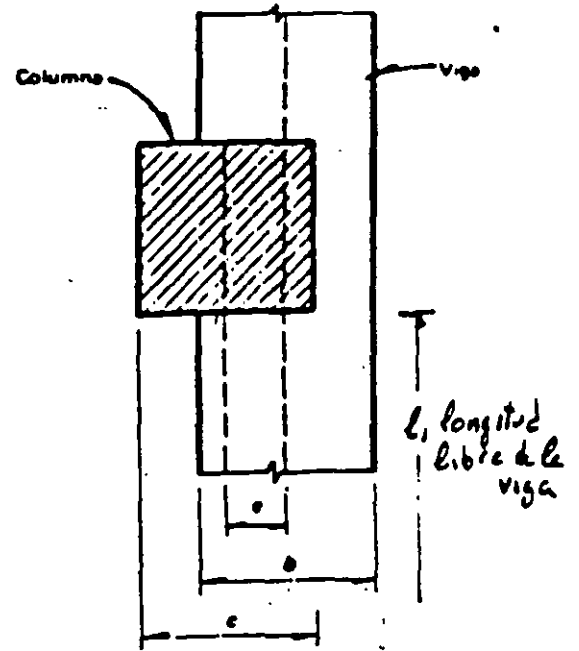
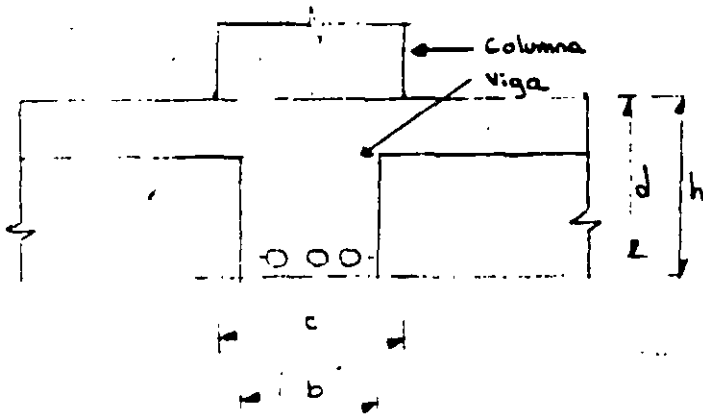
**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**REQUISITOS DE DUCTILIDAD PARA ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**



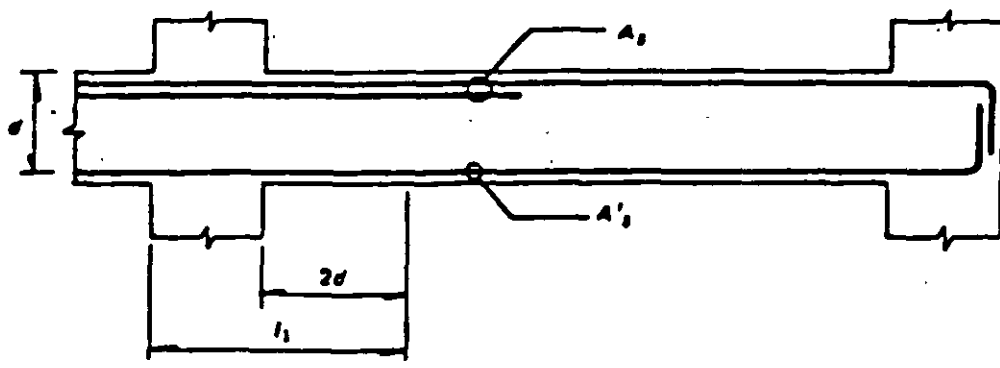
a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$\begin{array}{lll}
 b \geq 25 \text{ cm} & b \leq c & h/b \leq 3 \\
 e \leq 0.1c & l/b \leq 30 & l/d \geq 4
 \end{array}$$

Requisitos generales = para vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

$$A_s \text{ y } A'_s \geq 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd, \text{ en zonas donde aparezcan tensiones}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb} \text{ (área de refuerzo correspondiente a falla balanceada)}$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$A_s, A'_s \geq 0.7 (\sqrt{f'_c}/f_y) bd, \text{ en toda la longitud de la viga}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb}$$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambos lados

No se admiten paquetes de más de dos barras

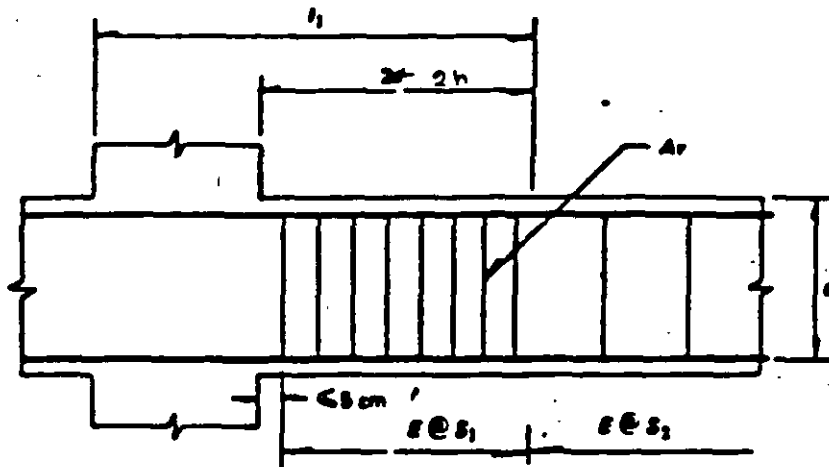
El momento resistente positivo en \$l\_1\$ no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en \$l\_1\$

Todo el refuerzo de tensión, \$A\_s\$, necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de marcos de concreto.



### a) Requisitos generales

No se tendrá en cuenta estribos:

- que formen un ángulo con el eje de la pieza  $< 45^\circ$
- Ni barras dobladas en que dicho ángulo sea  $< 30^\circ$

Suministrar refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando

si  $V_u < V_{cr}$ ,  $\phi \geq \# 2$  @  $0.5d$  (Se colocará a partir de toda unión de viga con columna o muro hasta  $0.25$  del claro correspondiente).

si  $V_u > V_{cr}$ , 
$$s = \frac{F_r A_v f_y d (\text{Sen } \theta + \text{Cos } \theta)}{V_u - V_{cr}} \leq \frac{F_r A_v f_y}{3.5 b}$$

NOTA: en secciones circulares se cambia  $d$  por el diámetro.

$$s \geq 5 \text{ cm}$$

$$V_{cr} \leq V_u \leq 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} \quad - \quad s \leq 0.6 d$$

$$1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} < V_u \quad \quad \quad s \leq 0.25 d$$

En ningún caso se permitirá que  $V_u > 2 F_r b d \sqrt{f_c'}$

Cuando el refuerzo conste de 1 solo estribo ó grupo de barras paralelas dobladas en una misma sección, su área se calculará

$$A_v = \frac{V_u - V_{cr}}{F_r f_y \text{Sen } \theta}, \quad \text{en este caso no se admitirá } V_u > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$$



## b) Requisitos para marcos dúctiles

### 1) Refuerzo Transversal para confinamiento

Estribas # 2.5 ó mayores

En la zona  $L_d$  los estribos deberán ser cerrados y con remate a  $135^\circ$  se indica en la fig. 10.4. La separación no deberá exceder de:

$$S_1 \leq \begin{cases} 8 \text{ diámetros de la barra longitudinal mayor} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ 30 \text{ cm.} \\ d/4 \end{cases}$$

Además al menos una de cada dos barras longitudinales de la periferia deberá estar abrazada por la esquina de un estribo.

### 2) Requisitos por cortante.

Fuera de  $L_d$  habrá estribos a una separación  $S_2 \leq d/2$   
Estribas verticales cerradas de una pieza.

$$\phi_s \geq 2.5$$

$$V_{sismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.3 Requisitos para refuerzo transversal de vigas de marcos de concreto

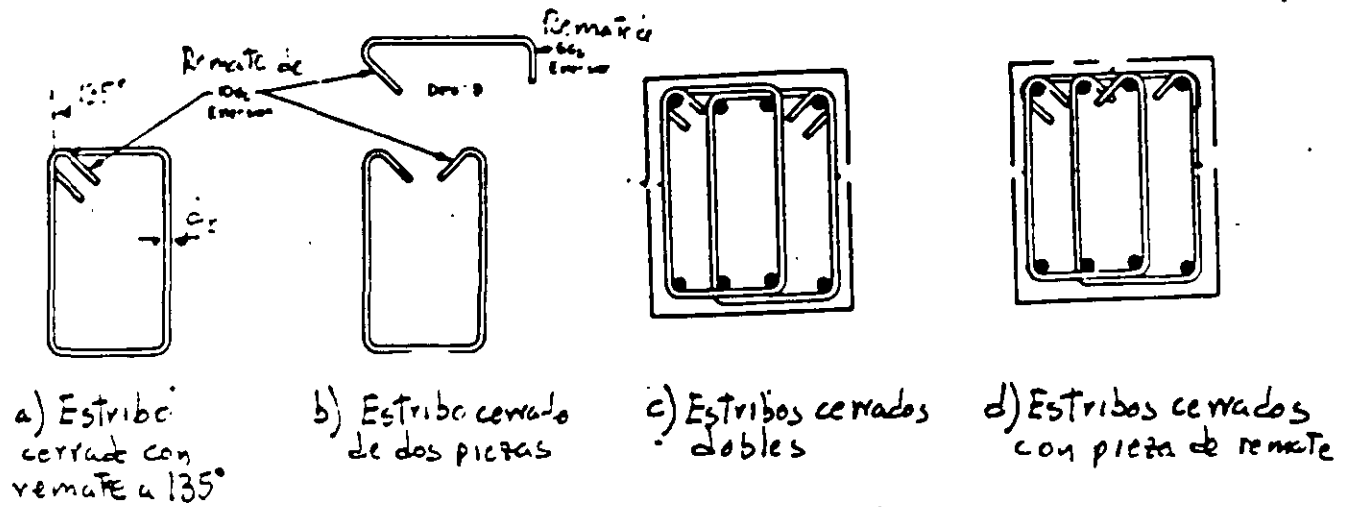


Fig 10.4 Estribos para confinamiento (de código ACI)

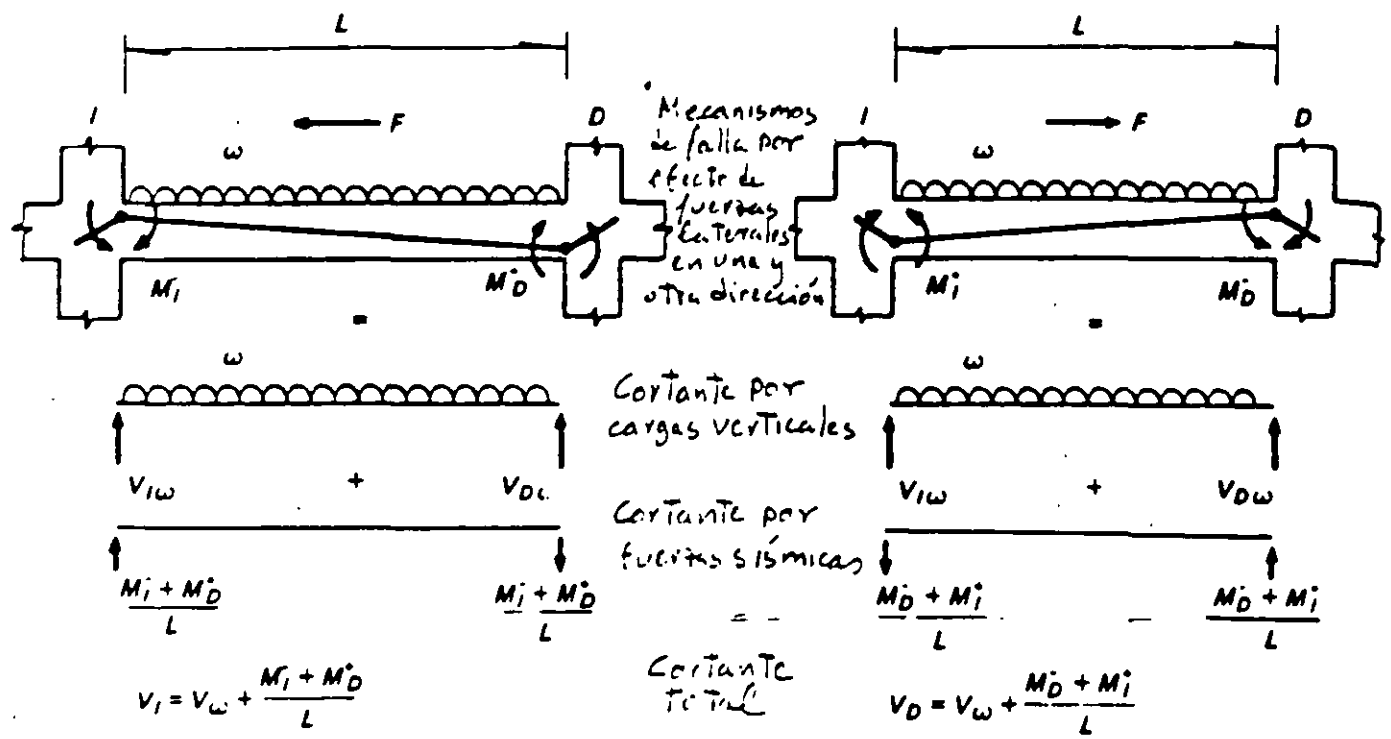
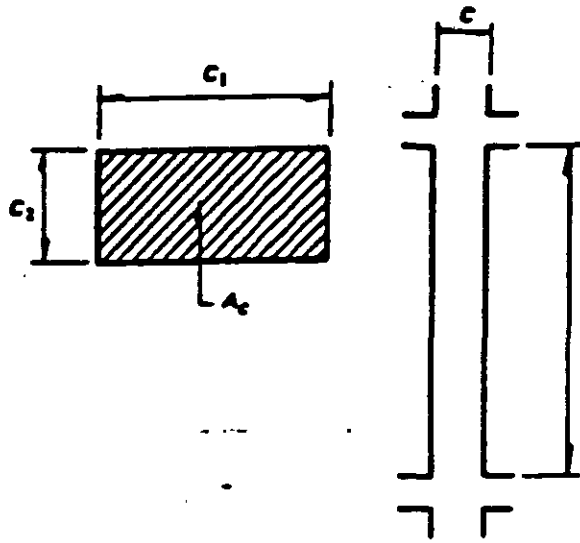


Fig 10.5 Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos dúctiles de concreto



Requisitos generales

$$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$$

$$c_1/c_2 \leq 4$$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f'_c}$$

$$c_1/c_2 \leq 2.5$$

$$l/c \leq 15$$

Fig 16.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

## I.- REFUERZO LONGITUDINAL

En la porción de la columna que abarca la unión con la viga debe colocarse el mismo ref. transversal que en la. Si el nudo está confinado

por cuatro traves que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

a) Requisitos mínimos

$$\frac{20}{f_y} \leq \rho \leq 0.06$$

Mínimo 4 barras en columnas rectangulares  
y 6 en circulares

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$0.01 \leq \rho \leq 0.04$$

Paquetes de no más de dos barras  
Terminados solo en la mitad central  
de la altura libre de la columna

## II.- REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso.

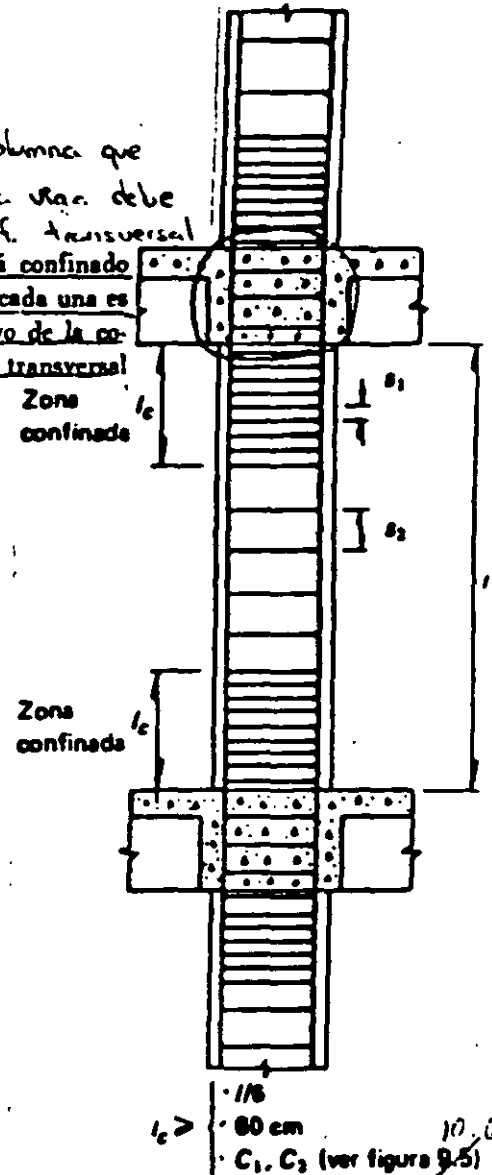
a) Requisitos generales

$$S_2 \leq \begin{cases} \frac{250 d_b}{\sqrt{f_y}} & d_b - \phi \text{ más delgado} \\ 48 d_u & d_u - \phi \text{ estribo} \\ c_1/2, c_2/2 \end{cases}$$

$S_1 \leq$  la mitad de los límites para  $S_2$ .

b) Requisitos para marcos dúctiles

y confinamientos



En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, y debe continuarse dentro de la cimentación al menos en una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra más gruesa

El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que 42  
 $d_v \geq \#3$

Refuerzo Transversal mínimo:

$$S_1 \leq \begin{cases} 10 \text{ cm.} \\ \frac{C_{\text{menor}}}{4} \end{cases}$$

$S_1$  - Mismos límites que para el caso general.

$S_2$  - Igual que para requisitos generales

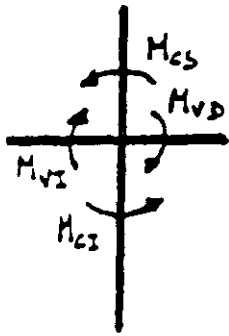
2) Fuerza cortante.

Si  $P_u < \frac{A_g f'_c}{20}$  (Incluyendo efectos sismo)

$$V_{\text{sismo}} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.7 Requisitos de refuerzo para columnas de marcos de concreto.

$$\Sigma M_c \geq 1.5(\Sigma M_v)$$

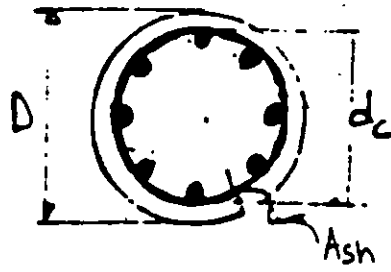


$\Sigma M_v = M_{v1} + M_{v2}$ , es la suma de los momentos flexionantes resistentes (negativo de un lado y positivo del otro) de los extremos de las vigas que llegan a un nudo

$\Sigma M_c = M_{c1} + M_{c2}$ , es la suma de los momentos flexionantes que deben ser capaces de resistir los extremos de las columnas (superior e inferior) que llegan a dicho nudo

El momento resistente de la columna se calculará para la carga axial que le corresponde a la columna por efecto de carga vertical más el doble de la que se genera por efecto de las fuerzas sísmicas actuando en la dirección correspondiente al signo de los momentos flexionantes considerados

Fig. 10? Procedimiento para la revisión de la capacidad en flexocompresión de columnas de marcos dúctiles de concreto



Mínimo 6 barras longitudinales  
 Ref. Trans versal  $\phi \geq$  No. 3  
 El acero de la hélice  $\leq$  grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$l_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_2 \leq 7 \text{ cm} \text{ y } \geq 1.5 \text{ tamaño agregado}$$

Los traspases tendrán 1.5 vueltas

Las hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

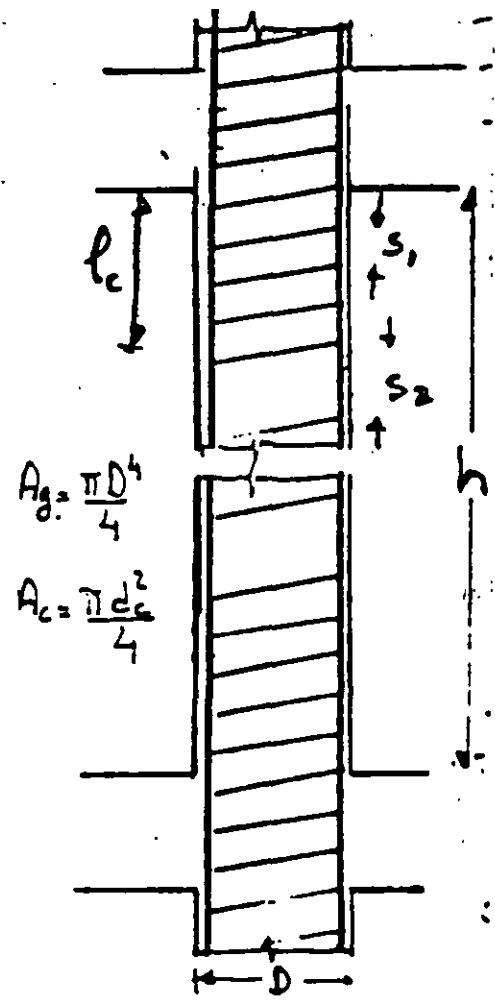


Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas

$$\Sigma A_u \geq 0.3 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$$\Sigma A_u \geq 0.19 \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$\Sigma A_u$  = suma de áreas de todas las ramas de estribos en la dirección considerada

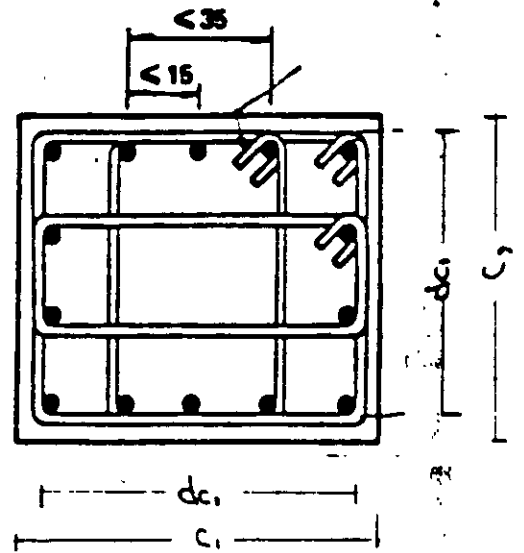
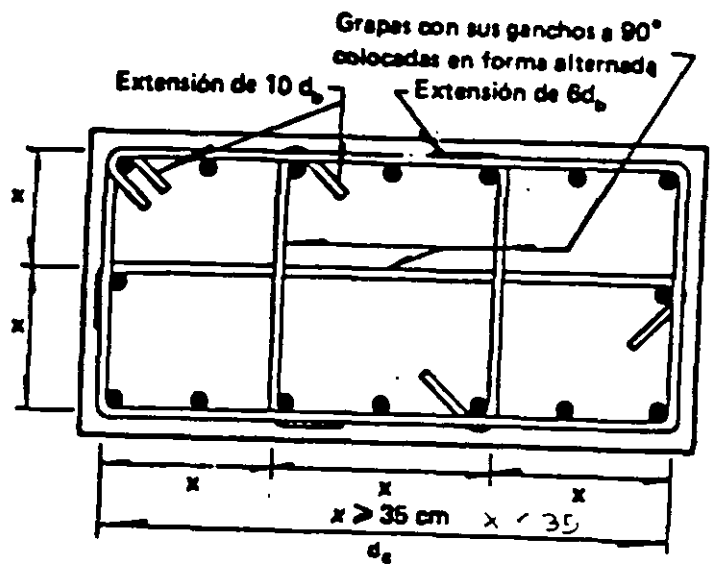
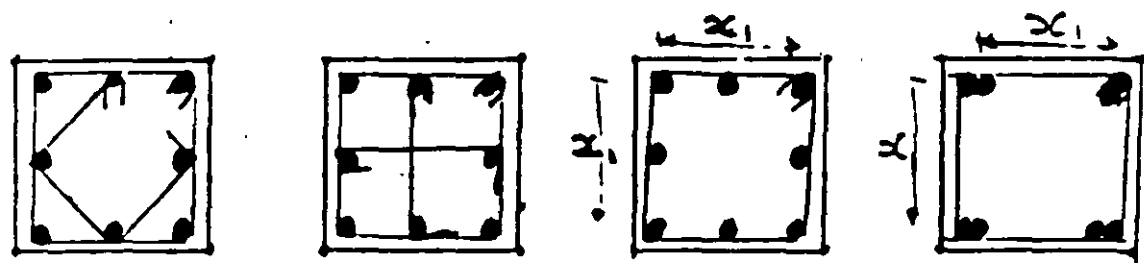


Fig. 10.10 Requisitos de distribución de refuerzo en columnas de estribos.





10  
 Figura 9.9 Combinaciones de estribos y grapas admisibles para confinamiento de columnas, según el Reglamento ACI 83.



No son aconsejables  
 Admisibles si  $x_1 \leq 30$

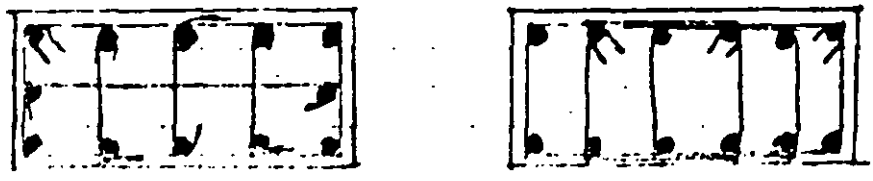
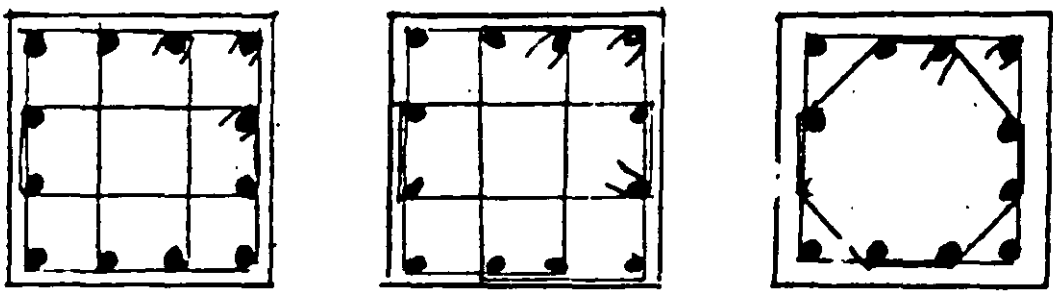
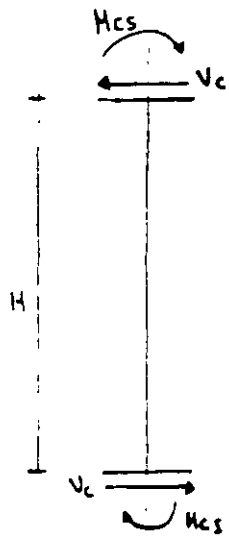


Fig. 9.10 - Arrreglos admisibles de refuerzo en columnas de muros y vigas de concreto

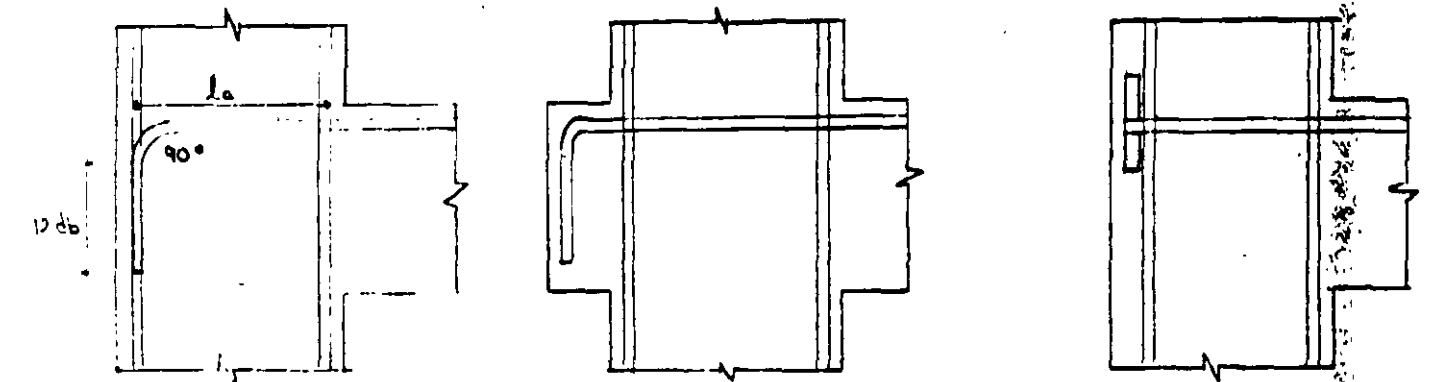


$$V_c = \frac{M_{cs} + M_{cs}}{H}$$

$$M_c \geq 1.5(\Sigma M_u)$$

- En el extremo inferior de columnas de planta baja, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente.
- En el extremo superior de columnas del último entrepiso se usará  $1.5 \leq M_u$ .

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por Cortante de las columnas de marcos dúctiles.



$$l_d \geq \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}}$$

15 cm  
8 db

NOTA: 30% mayor en concreto ligero

a) Anclaje con gancho extremo

b) Viga con saliente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria

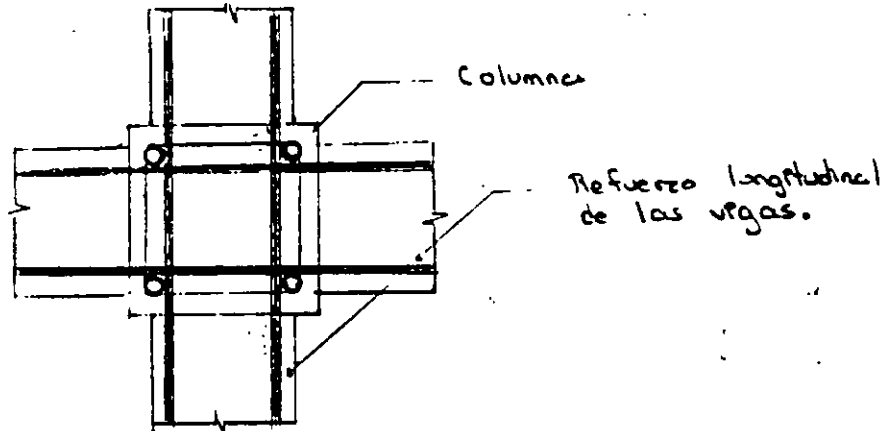
c) Anclaje mecánico

Fig. 10.15 Anclaje del refuerzo longitudinal en Vigas extremas de marcos dúctiles.

# UNION VIGA-COLUMNA

## Marcos Lisos

### 1) Requisitos generales

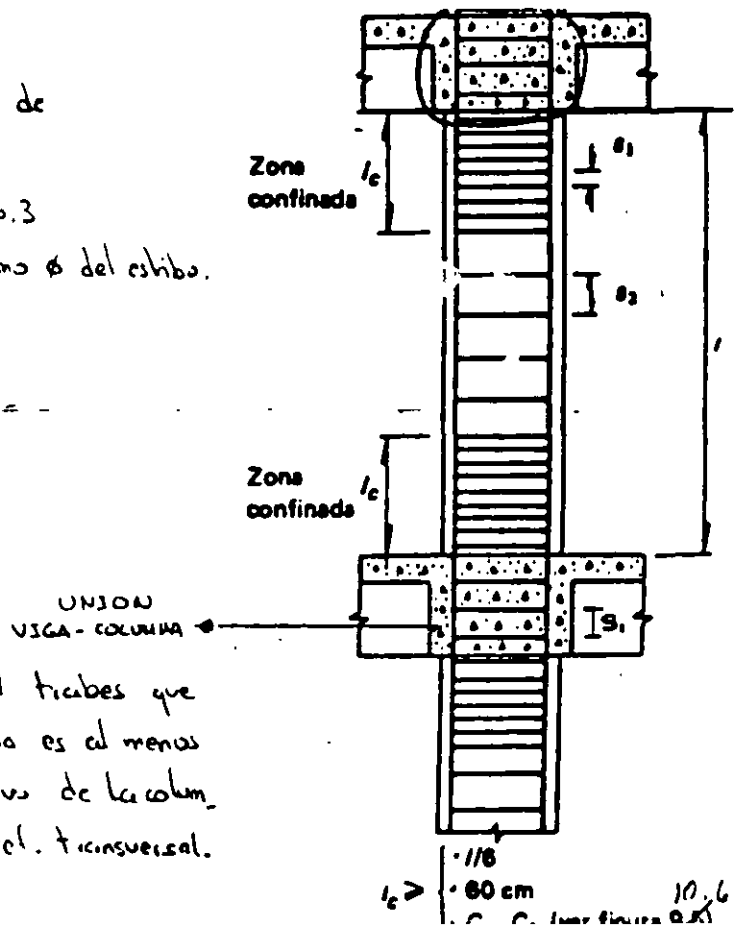


El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

### 2) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el 42
- Las barras pueden ser helicoidales de  $\phi \geq \text{No. 3}$
- Puede considerarse con ganchos del mismo  $\phi$  del estibo.

$$s_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\text{min}} \\ 10 \text{ cm.} \end{cases}$$



Si el núcleo está confinado por 4 barras que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del ref. transversal.

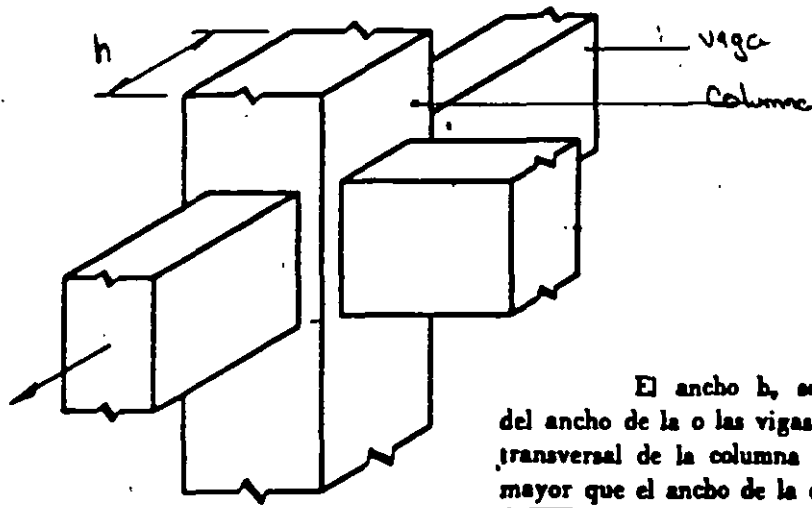
c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

en zonas confinadas  
 otros nudos

$$V_u = 5.5 F_{cu} \sqrt{f_c} b_e h$$

$$V_u = 4.5 F_{cu} \sqrt{f_c} b_e h$$



El ancho  $b_e$  se tomará igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero no mayor que el ancho de la o las vigas más  $h$ .

d) Ancho del refuerzo

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectas a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$h(col)/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$h(viga)/d_b(\text{barras de col.}) \geq 20$$

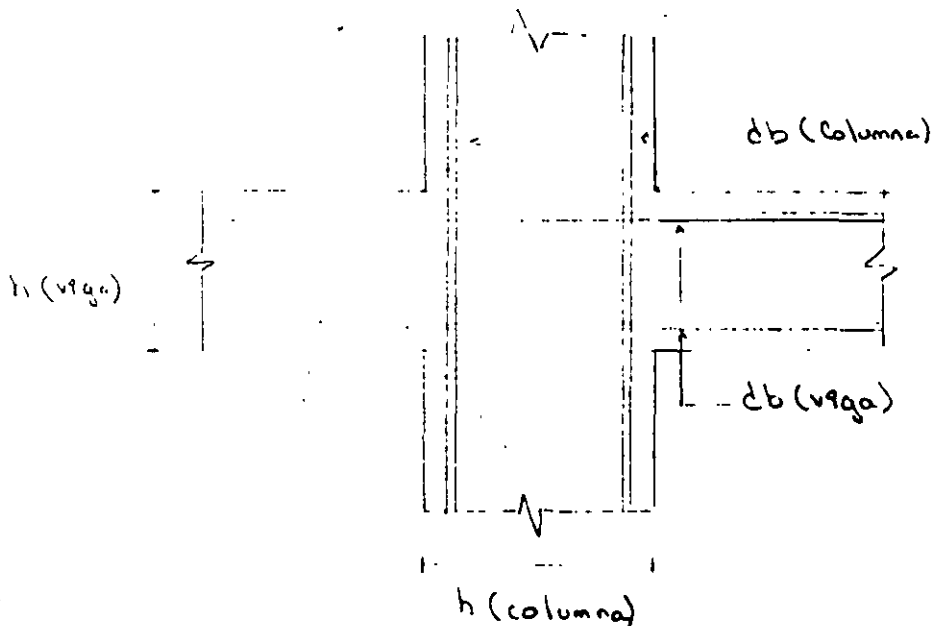
$h(col)$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas

Es en la columna superior del nudo cumple:

$$\frac{P_u}{A_g f_c} \geq 0.3$$

Entonces:  $h(\text{viga}) / d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

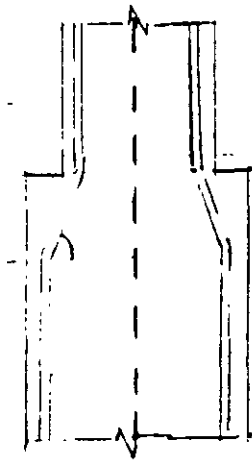
NOTA: también esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.



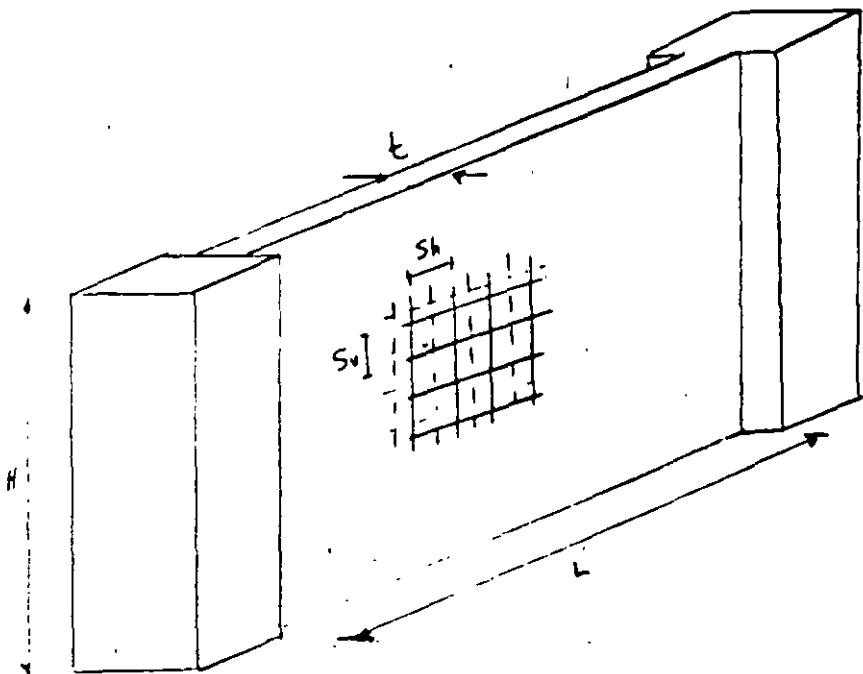
GENERALIZACIONES:

Como de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que las usadas en la columna en las secciones próximas a dicha sección, si es igual que en la zona de confinamiento).

Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torsiones causadas por la excentricidad.



← tje de columna.



Limitaciones geométricas

$$L/t \leq 70$$

$$t \geq \begin{cases} 13 \text{ cms} \\ 0.06 H \text{ (altura no restringida lateralmente)} \end{cases}$$

Refuerzo mínimo

$$P_v, P_h \geq 0.0025$$

$$S_v, S_h \leq 35 \text{ cm.}$$

$$P_h = \frac{A_{sh}}{t S_v} \quad P_v = \frac{A_{sv}}{t S_h}$$

Fig. 10.18 Requisitos geométricos y de refuerzo en muros de concreto

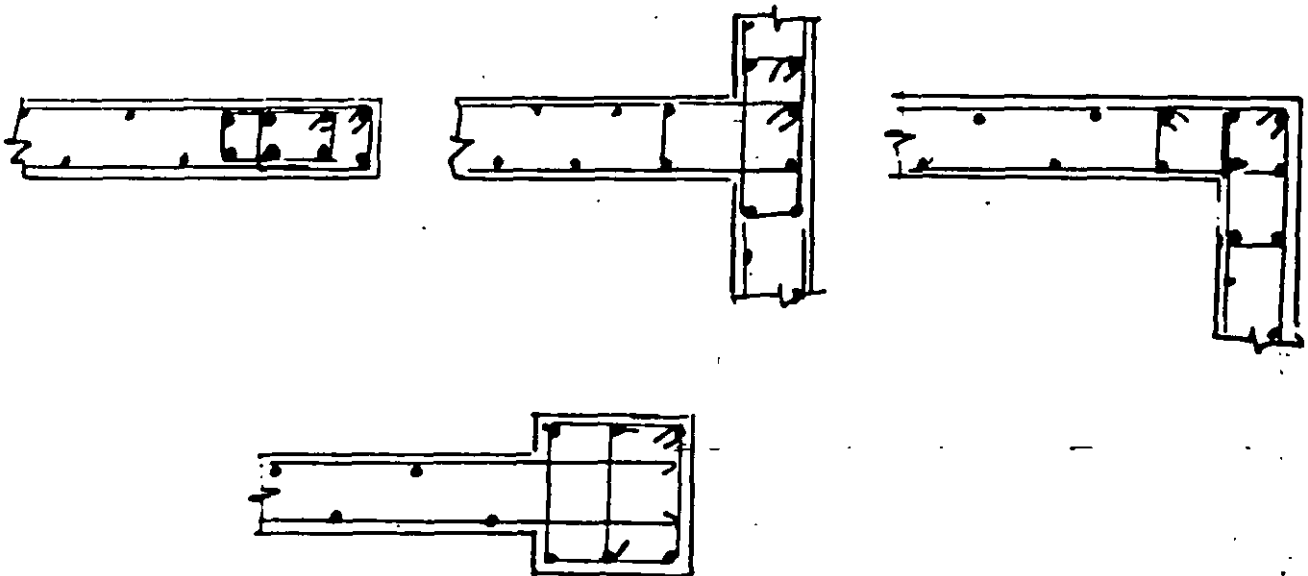
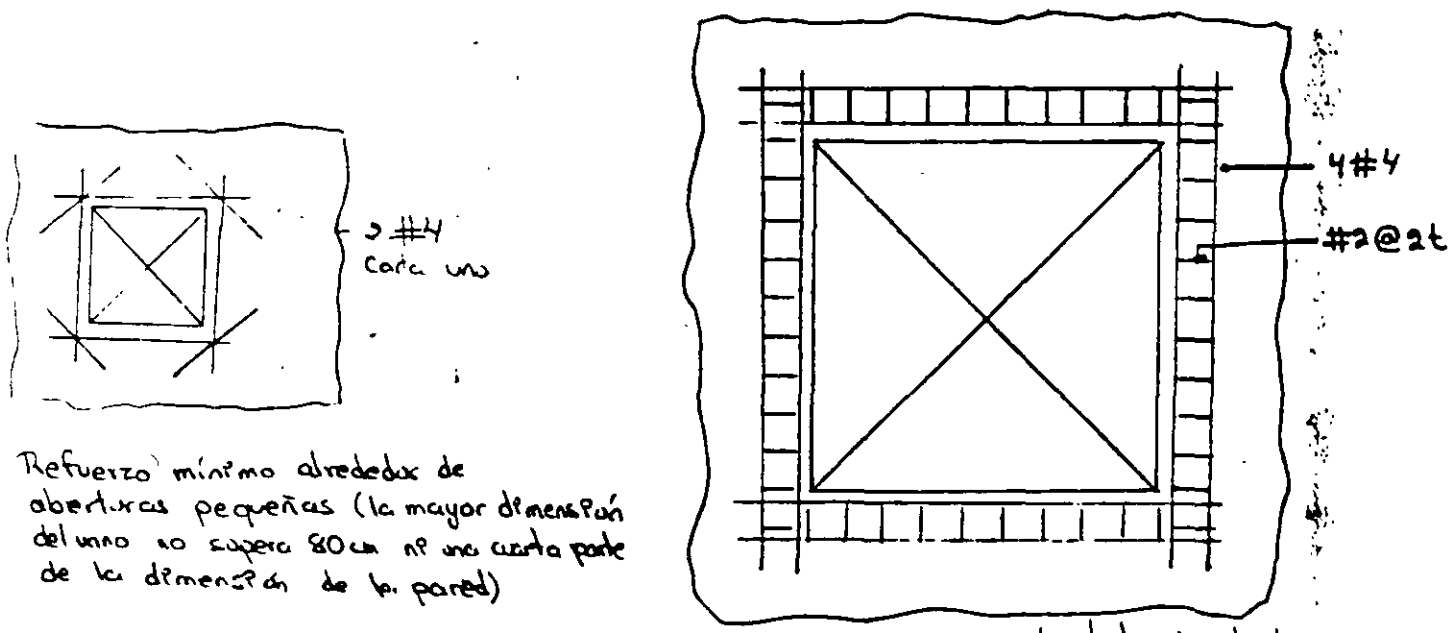


Fig. 10.14 Refuerzo en los extremos de muros



Reforzo mínimo alrededor de aberturas pequeñas (la mayor dimensión del vano no supera 80 cm ni una cuarta parte de la dimensión de la pared)

Reforzo mínimo alrededor de aberturas mayores.

Fig. 10.20 Detalles recomendados de reforzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

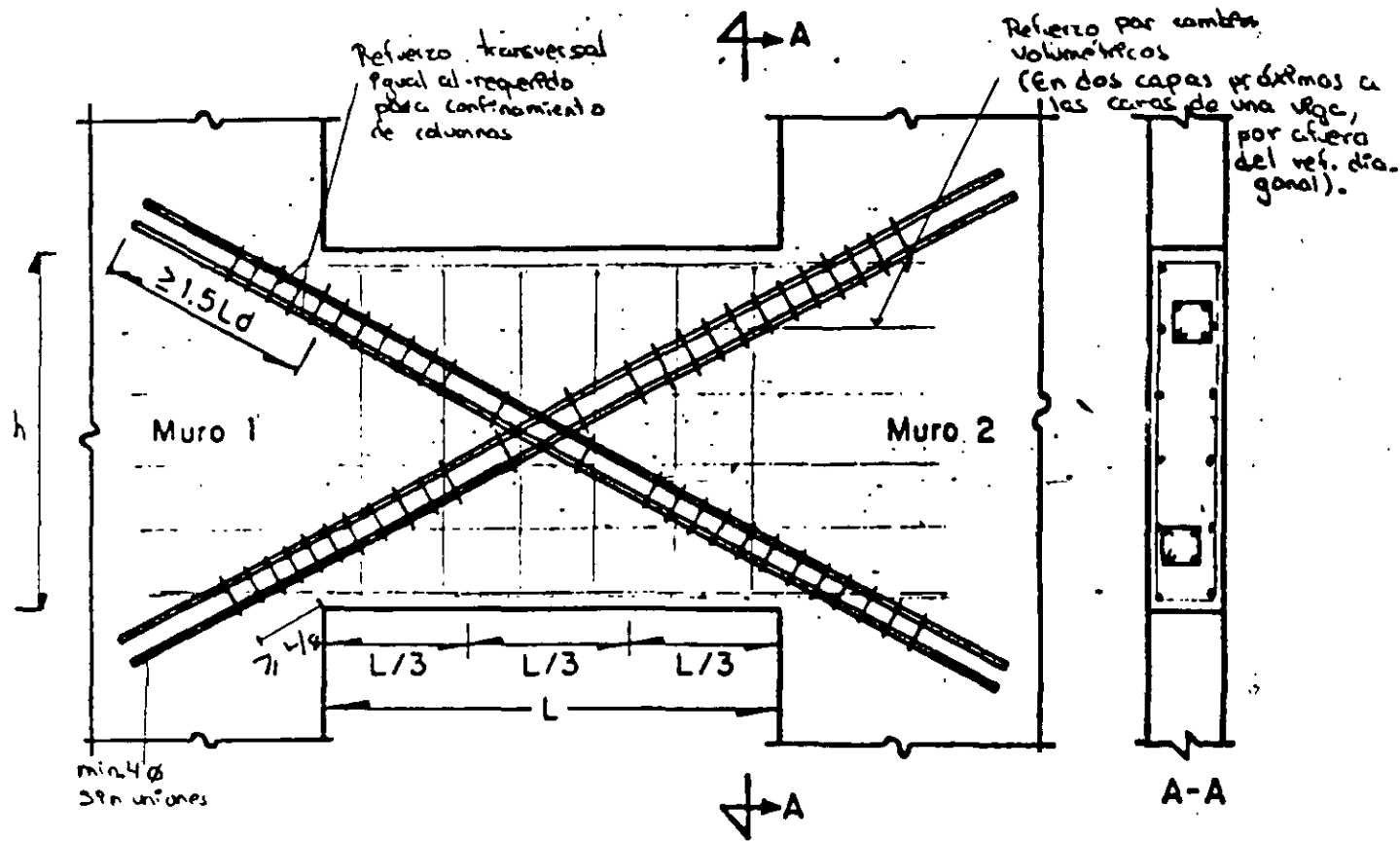
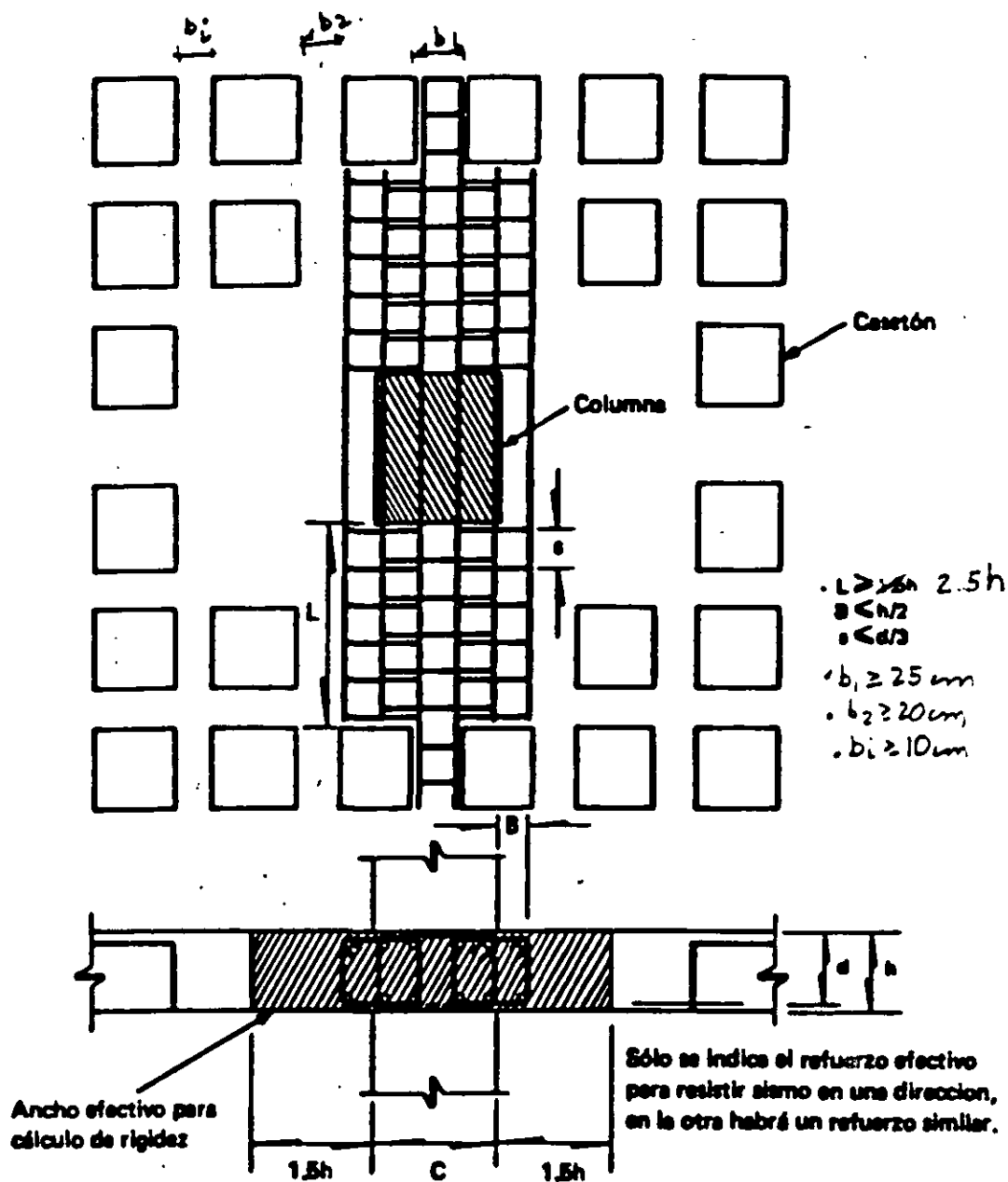


Fig. 10.21 Reforzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto (para  $L/h \leq 2$ )





$$n(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20$$

$$h(\text{losa})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 1.5$$

$h(\text{columna})$  - es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losa-plano-columna

**CURSO**  
**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

Flexo-Compresión y Efectos de Esbeltez en Columnas

Instructor: M. en I. Víctor M. Pavón R.

Septiembre del 2000.

## **BIBLIOGRAFÍA PARA EL CURSO DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

1. Normas técnicas Complementarias al RC.D.F. Normas para la Construcción con Concreto.
2. Reglamento de Construcciones para el D.F.
3. Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural y Comentarios. ACI 318-95 y ACI 318R-95. Publicado por el IMCYC.
4. Diseño de Estructuras d Concreto Conforme al Reglamento ACI 318-89. Publicado por el IMCYC.
5. Notes on ACI-318-99. Buiding Code Requirements for Structural Concrete. Portland Cement Association, 2000.
6. James MacGregor. Reinforced Concrete. Mechanics and Design. Third Edition. Prentice Hall.

## CONSIDERACIONES GENERALES

Esencialmente el diseño de columnas consiste en seleccionar una sección transversal y un refuerzo adecuado para que la columna sea capaz de soportar una combinación requerida de la carga axial factorada  $P_u$  y un momento factorado (primario)  $M_u$ , además de tomar en consideración la esbeltez de la columna (momentos secundarios).

La esbeltez de la columna se expresa en términos de su relación de esbeltez

$$\frac{kl_u}{r}$$

en la que:

$k$  es un factor de la longitud efectiva, el cual depende de las restricciones laterales y rotacionales en los extremos de la columna,

$l_u$  es la longitud entre los apoyos de dicha columna, y,

$r$  es el radio de giro de la sección transversal de la misma columna.

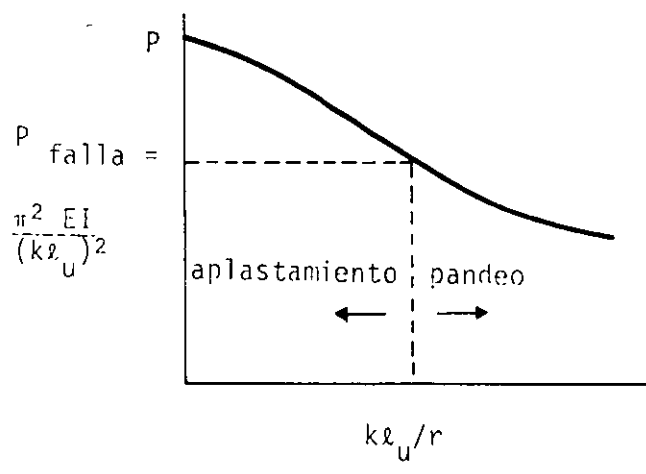
Para propósitos de diseño, el término columna corta se utiliza para designar una columna que tiene una resistencia igual a la calculada para su sección transversal, empleando las fuerzas y momentos obtenidos de un análisis para la combinación de flexión y carga axial.

La columna esbelta se define como la columna cuya resistencia se reduce a causa de las deformaciones de segundo orden (momentos secundarios).

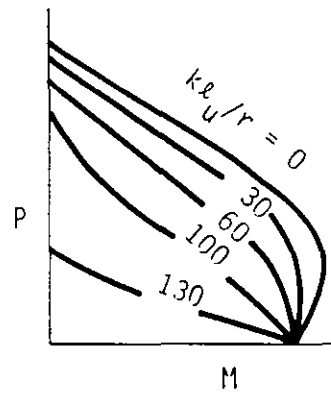
Mediante estas definiciones, puede considerarse que una columna con una relación de esbeltez dada, para un cierto conjunto de restricciones, puede diseñarse como columna corta, así como columna larga para otro tipo.

Mediante el uso de concretos y refuerzos con mayores resistencias, así como con los métodos de diseño más precisos, es posible obtener secciones transversales de menor tamaño, dando por resultado elementos estructurales más esbeltos.

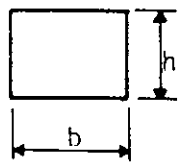
Por lo tanto, en el diseño de columnas, una consideración de gran importancia, es la de contar con procedimientos de diseño confiables y racionales para tomar en cuenta la esbeltez de estos elementos estructurales.



CURVA DE LA COLUMNA.

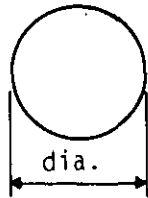


DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS ESBELTAS.

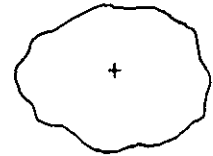


$$r = 0.3b$$

$$r = 0.3h$$

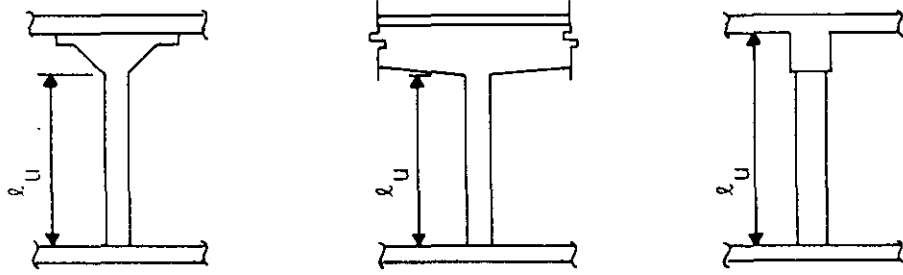


$$r = 0.25 \text{ dia.}$$



$$r = \sqrt{\frac{I_g}{A_g}}$$

RADIO DE GIRO (r)



LONGITUD NO SOPORTADA ( $l_u$ )



Ejemplo de aplicación del diseño de elementos cortos sujetos a flexo-compresión, en los cuales no es necesario tomar en consideración los efectos de esbeltez.

---

Diséñese una columna rectangular armada con estribos. Defínase el refuerzo vertical para una carga muerta de 160 ton y una carga viva de 110 ton. Los momentos de carga muerta y viva aplicados en el extremo superior de la columna tienen un valor de 13.00 y 10.00 ton-m, respectivamente, respecto al eje fuerte. Supóngase que los momentos en el extremo inferior son la mitad de los aplicados en el extremo superior. Respecto del eje débil los momentos son insignificantes.

La columna tiene una altura libre entre apoyos, de 2.30 m, en ambas direcciones, y respecto del eje fuerte se flexiona en curvatura doble, en tanto que respecto al eje débil lo hace en curvatura sencilla. Utilícese un concreto  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y un acero de refuerzo, con  $f_y = 4,000 \text{ kg/cm}^2$ . El marco del cual forma parte la columna se encuentra atiesado (no experimenta ladeo).

---

El proceso de diseño se desarrolla de conformidad con las N.T.C. para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, del Reglamento de Construcciones del D.F.

1. Las cargas para diseño valen:

$$\begin{aligned} P_u &= 1.4(160 + 110) = 378.00 \text{ ton} \\ M_u &= 1.4(13.00 + 10.00) = 32.2 \text{ ton-m} \end{aligned} \quad \text{R.C.D.F. Art. 194}$$

2. Esbeltez de la columna. Sección de la misma

Verifíquese la esbeltez de la columna. Supóngase una columna con dimensiones de 35 por 60 cm.

La sección 1.3.2.b) de las NTC, establece que en miembros con extremos restringidos lateralmente (que no experimentan ladeo), pueden despreciarse los efectos de esbeltez cuando la relación entre la longitud efectiva y el radio de giro  $r$  de la sección considerada, sea menor que  $34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$ . El cociente es negativo cuando el elemento

se flexiona en curvatura doble y positivo cuando lo hace en curvatura sencilla.  $M_1$  es el ~~menor~~ <sup>menor</sup> de los momentos y  $M_2$  es el ~~menor~~ <sup>mayor</sup> de los que actúan en los extremos de la columna.

El concepto de los efectos de esbeltez se tratará con mayor amplitud más adelante, en una sesión especial sobre el tema.

a. Esbeltez respecto al eje débil (35 cm)

$k = 1.0$  por tratarse de un elemento a compresión que no experimenta ladoo (ACI 10.12.1)

$$r = 0.30(35) = 10.5 \text{ cm}$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{10.5} = 21.90$$

Con momentos respecto al eje débil insignificantes, supóngase  $M_1 / M_2 = 1.0$   
Para considerar la esbeltez:

$$\frac{kl_u}{r} < 34 - 12(1.0) = 22 \text{ en curvatura sencilla}$$

Por lo tanto: respecto al eje débil no es necesario tomar en cuenta la esbeltez

b. Esbeltez respecto al eje fuerte (60 cm)

$$k = 1.0$$

$$r = 0.30(60) = 18$$

$$M_1 / M_2 = -0.5$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{18} = 12.78 < 34 - 12(-0.5) = 40$$

Por lo tanto: pueden despreciarse los efectos de esbeltez respecto al eje fuerte.

### 3. Cálculo del acero de refuerzo

a. Porcentaje de refuerzo mínimo y máximo

En la sección 4.22 de las NTC para concreto, se establece que el porcentaje de refuerzo no debe ser menor a  $20/f_y$  ni mayor al 6 por ciento. El número mínimo de varillas es de 6 en columnas circulares y de 4 en columnas cuadradas o rectangulares.

b. Esfuerzos y módulo de elasticidad de los materiales para el diseño

Para el diseño se utiliza:

$$f_c^* = 0.8f_c' \quad \text{Ec. 1.7 de la sección 1.4.1.b de las NTC}$$

Para usos estructurales, el concreto clase 1 deberá tener una resistencia mínima:

$$f_c' = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{sección 1.4.1.b de las NTC}$$

El módulo de elasticidad del concreto clase 1, se estipula igual a  $14,000\sqrt{f'_c}$  (1.4.1.d de las NTC), en tanto que el módulo de elasticidad del acero es casi siempre igual a:

$$E_s = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se emplea la resistencia del acero en su punto de fluencia:

$$f_v = 4,000 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Sección 1.4.2 de las NTC})$$

c. Factores de reducción de la resistencia

De conformidad con la sección 1.6 de las NTC, los factores de reducción de la resistencia que se deben emplear, son:

- Para flexión:  $F_R = 0.9$
- Para cortante y torsión:  $F_R = 0.8$

Para flexocompresión, el factor de reducción de la resistencia vale 0.8, si el núcleo está confinado por un zuncho, y 0.7 si se colocan estribos y la falla de la columna es en compresión.

4. Utilización del diagrama de interacción del D.F.

Supóngase que se utilizan varillas del #10 (1.25 pulgadas)

a. Cálculo del parámetro  $d/h$ . Para el peralte de 60 cm.

$$d = \text{peralte total} - \text{recubrimiento libre} - \text{el diámetro del estribo} - \frac{1}{2} \text{ del diámetro de la varilla} = 60 - 1.5 - 0.95 - 1.59 = 55.96 \text{ cm}$$

El cociente  $d/h = 55.96/60 = 0.93$ . Se utiliza el diagrama de interacción para  $d/h = 0.95$

5. Diagrama de interacción

Hay varias formas de ingresar al diagrama de interacción. Una de ellas es la de calcular los valores de:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c}; \quad \text{y} \quad R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f'_c}$$

expresiones en las cuales  $b$  y  $h$  son los lados menor y mayor de la columna; para columnas con refuerzo transversal de estribos, el factor de reducción  $F_R = 0.7$ ; y

$$f'_c = 0.85(0.8)f'_c = 0.85(0.8)300 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

Reemplazando valores, se obtiene que  $K = 1.26$  y  $R = 0.18$ , en cuya intersección se encuentra  $q = 0.71$ .

Ahora,

$$q = p \frac{f_y}{f_c}; \text{ y } p = \frac{A_s}{bh};$$

donde  $A_s$  es el área de acero de la sección de concreto.

Reemplazando: si 
$$q = p \frac{f_y}{f_c} = 0.71$$

entonces: 
$$p = 0.71 \frac{204}{4,000} = 0.0362 = 3.62\%$$

Lo anterior significa que el área de acero necesaria es el 3.62% del área del concreto:

$$A_s = p(bh) = 0.0362(35)60 = 76.04 \text{ cm}^2$$

Ocho varillas del #10 (1¼ de pulgada) tienen un área de 63.52 cm<sup>2</sup>, en tanto que 10 varillas del No. 10, tienen un área de 79.40 cm<sup>2</sup>. Se requieren, por consiguiente, 10 varillas del #10.

Otro procedimiento para hacer uso del diagrama de interacción, es el de calcular el parámetro  $e/h$ , donde  $e$ , es la excentricidad de la aplicación de la carga, la cual se obtiene dividiendo el momento  $M_u$  entre la carga axial  $P_u$ . En efecto:

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u h} = \frac{34.2(10)^5}{378(10)^3 60} = 0.142$$

En la intersección de  $\frac{e}{h} = 0.14$  con  $K = 1.26$ , se lee nuevamente  $q = 0.71$ , y descendiendo hasta la abcisa  $R$  se encuentra el valor 0.18 de ésta, obteniéndose los mismo valores que ya se habían determinado previamente. Con este valor de  $R$ , puede calcularse  $M_u$  y compararlo con el propuesto para el diseño. En caso de que este valor calculado sea mayor que el momento último de diseño, se verifica que el área de acero calculada resulta correcta. De otra forma, habrá que incrementar la cantidad de acero o el tamaño de la sección de concreto, y efectuar una nueva secuencia de diseño con los nuevos valores.

## 6. Porcentaje de refuerzo

El porcentaje efectivo de acero suministrado, vale:

$$p = \frac{A_s}{bh} = \frac{79.4}{35(60)} = 3.79\% > 3.62\% \text{ requerido}$$

a. Refuerzo máximo y mínimo

El porcentaje mínimo admisible de refuerzo es:

$$p_{\min} = \frac{20}{f_y} = \frac{20}{4,000} = 0.005 = 0.5\% < 3.62\% \therefore \text{correcto}$$

Este último porcentaje resulta un tanto alto para los porcentajes de refuerzo que usualmente se utilizan en la práctica, pero aún así es menor al máximo permisible del 6%. El número de 10 varillas colocadas es, por supuesto, mayor al mínimo de 4 necesarias en una sección transversal cuadrada o rectangular.

b. Comportamiento de la columna según las cargas aplicadas y la sección dada

Por otro lado, de conformidad con la zona donde se ubica la intersección de  $K$  con los demás parámetros calculados, incluyendo  $R$ , es factible percatarse de que la falla de la columna tendría lugar en la zona de compresión, por lo cual, el valor de 0.7 adoptado para el factor de reducción  $F_R$ , es correcto.

## 7. Refuerzo transversal

a. Separación de los estribos

La sección 4.2.3. de las N.T.C. señala que la separación de los estribos no será mayor a:

- $\frac{850}{\sqrt{f_y}}$  veces el diámetro de la varilla longitudinal;
- 48 veces el diámetro de la varilla del estribo; ni
- la mitad de la menor dimensión de la columna

Efectuando operaciones:

$$\begin{array}{rcl} \frac{850}{\sqrt{4,000}} & = 13.44; \times 3.81 \text{ cm} & = 51.21 \text{ cm}; \\ 48 (0.95) & & = 45.60 \text{ cm}; \\ 0.5(35) & & = 17.5 \text{ cm} \quad \underline{\text{rige}} \end{array}$$

Deberá entonces colocarse estribos del #3 @ 17.5 cm de separación

b. Separación en la zona de las juntas

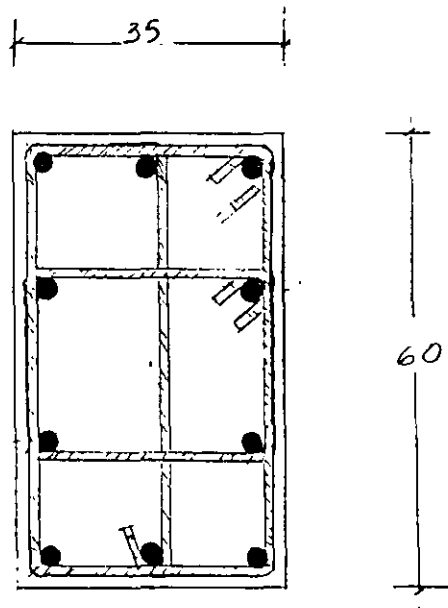
La separación máxima se debe reducir a la mitad de la antes indicada, en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de columna, 1/6 de la altura libre de ésta, ni que 60 cm, arriba y debajo de cada unión con traveses y losas, medida a partir del respectivo plano de intersección. En este caso:

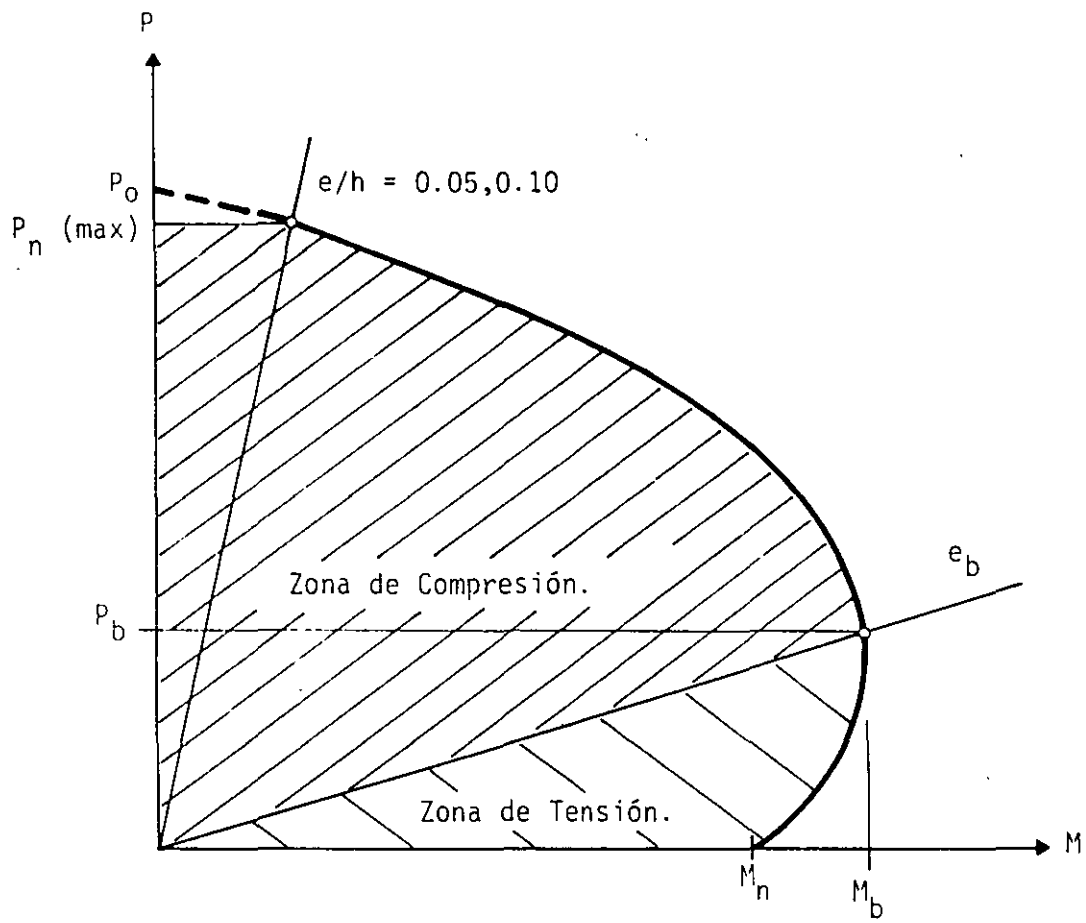
- La mayor longitud transversal de la columna es de 60 cm
- $1/6$  de la altura libre = 38 cm
- 60 cm

Por consiguiente, la dimensión que rige es la de 60 cm

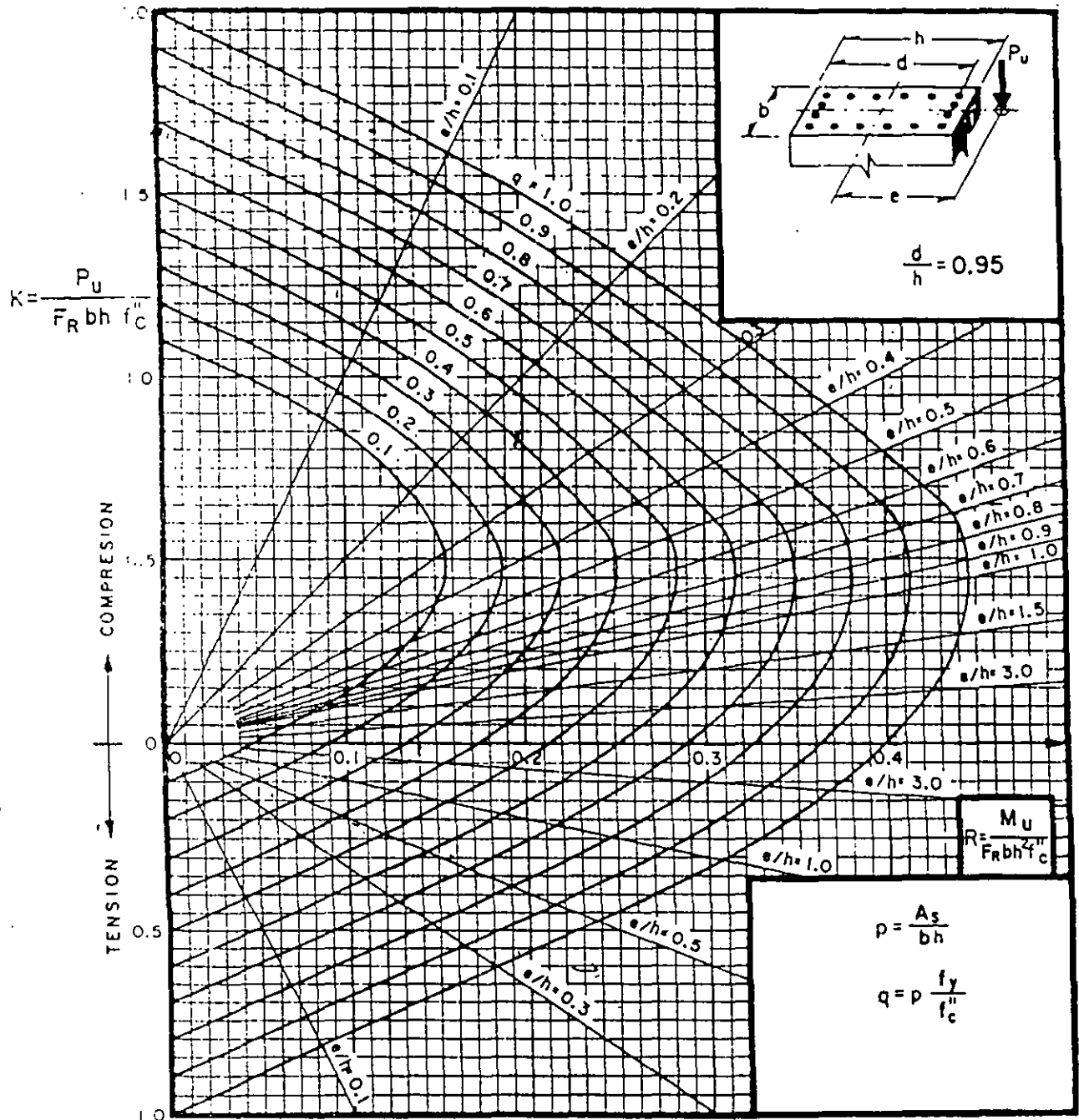
c. Detalle de la colocación de los estribos

Los estribos deben disponerse de tal manera que cada varilla longitudinal de esquina y una de cada dos consecutivas de la periferia tengan un soporte lateral suministrado por el doblé de un estribo con un ángulo interno no mayor de 135 grados. Además, ninguna varilla sin soporte lateral debe distar más de 15 cm de una varilla soportada lateralmente.





FORMA GENERAL DE LA INTERACCION DE LA RESISTENCIA CARGA - MOMENTO.



$A_s$  = Area total de refuerzo

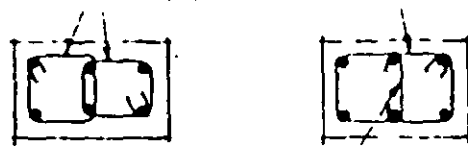
$f_c'' = 0.85 f_c^*$ ; si  $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250}\right) f_c^*$ ; si  $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

$M_u$  = Momento flexionante de diseño

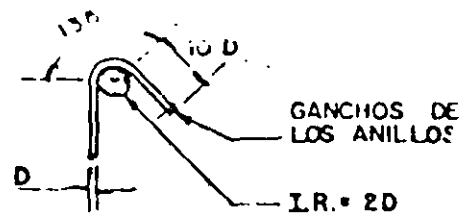
$P_u$  = Carga axial de diseño

Fig 8



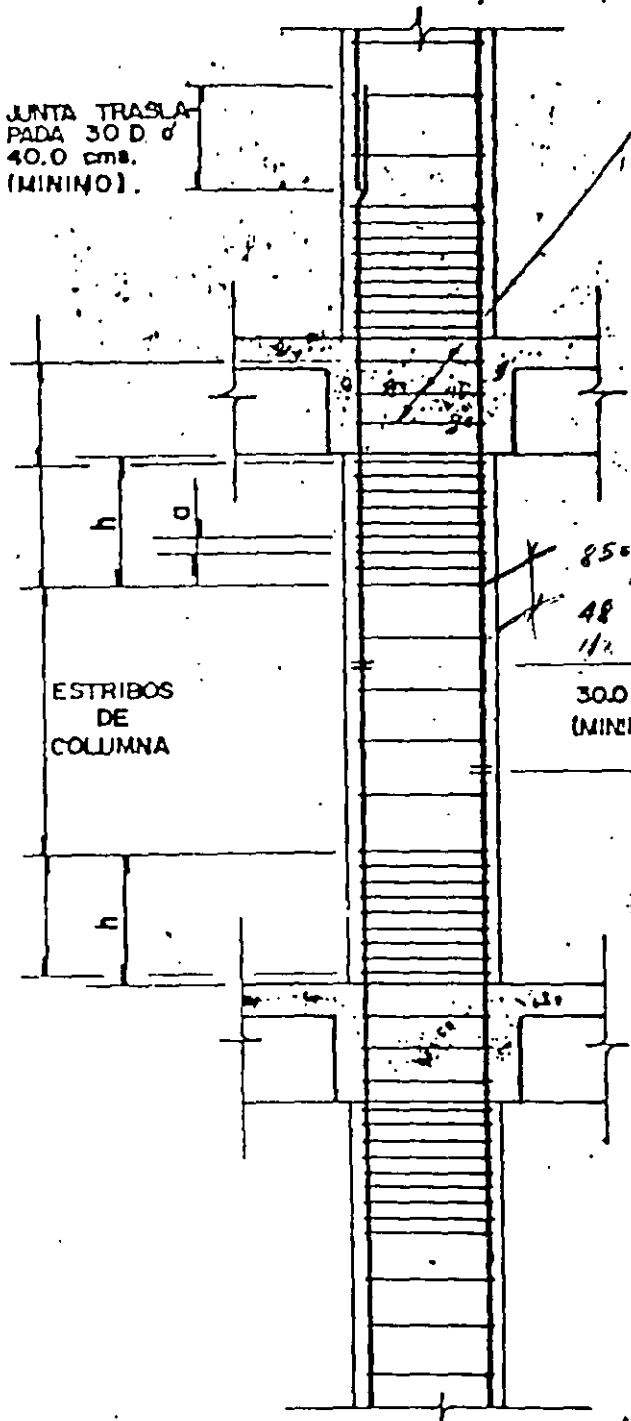


GANCHOS SUPLEMENTARIOS



GANCHOS DE LOS ANILLOS

I.R. = 2D



JUNTA TRASLAPA  
PADA 30 D o  
40.0 cms.  
(MINIMO).

ESTRIBOS  
DE  
COLUMNA

ANILLOS DE JUNTAS CON SEPARACION "2a" CUANDO EXISTAN VIGAS EN LOS 4 LADOS DE LA COLUMNA. PARA OTRAS CONDICIONES, PONER ANILLOS CON SEPARACION "a".

*85%  $f_y$  de varilla más delgada*  
*48 de estribo*  
*1/2 menor diámetro de la columna*

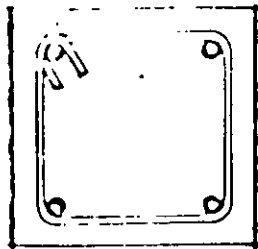
30.0 cms.  
(MINIMO).

CUANDO LA CONTINUIDAD DE LA VARILLA SE LOGRA MEDIANTE SOLDADURA O POSITIVOS MECANICOS, DEBERA TRASPASARSE A CUALQUIER NIVEL NO MAS DE UN CUARTO DE LAS VARILLAS, Y LA DISTANCIA ENTRE LOS NIVELES DE TRASLAPE DE VARILLAS ADYACENTES, NO DEBERA SER MENOR A 30.0 cms.

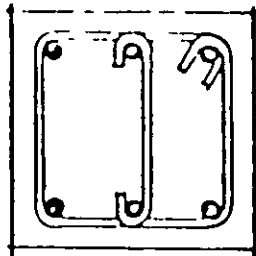
a = SEPARACION DE LOS ANILLOS Y GANCHOS SUPLEMENTARIOS

h = DIMENSION MAXIMA DE LA COLUMNA, PERO NO MENOR A 50.0 cms. O UN SEXTO DE LA ALTURA LIBRE DE LA COLUMNA.

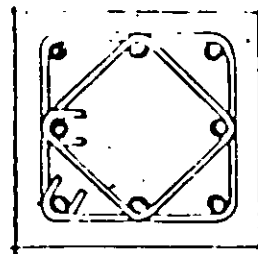
DETALLES TIPICOS DE COLUMNAS RECTANGULARES DE ESTRIBOS PARA ESTRUCTURAS DUCTILES QUE RESISTEN MOMENTOS



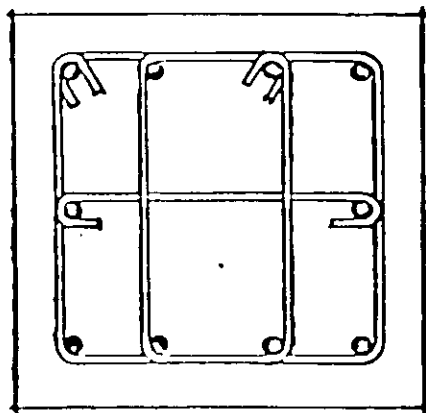
4 varillas



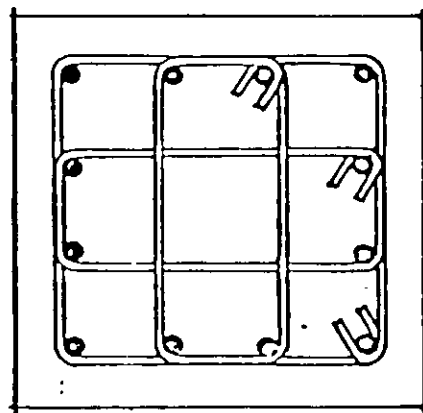
6 varillas



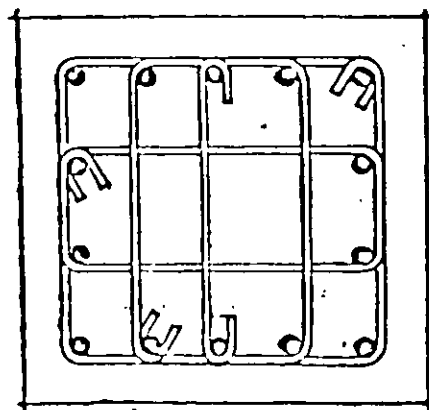
8 varillas



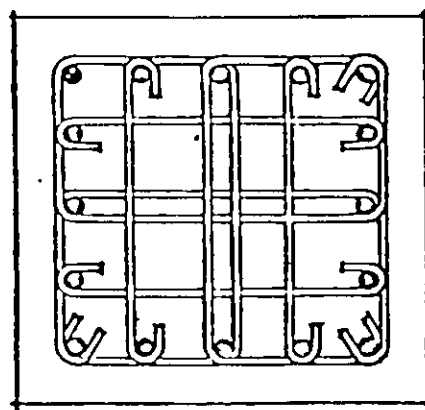
10 varillas



12 varillas



14 varillas

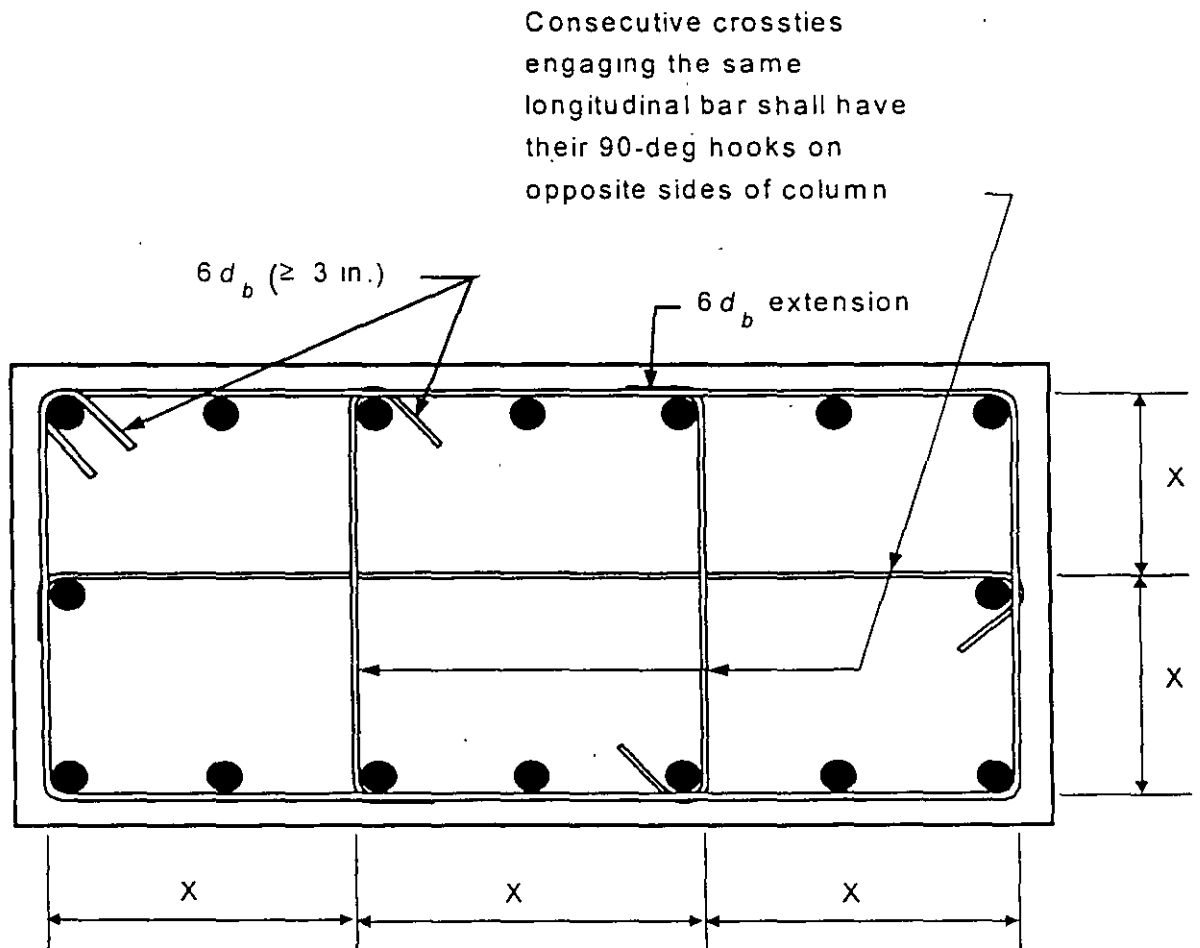


16 varillas

TODAS LAS VARILLAS DEBERAN LLEVAR ESTRIBOS O ANILLOS CUANDO MENOS DEL No. 2, PARA RESTRINGIR EL PANDEO. DICHSO ESTRIBOS DEBERAN ESPACIARSE NO MAS DE  $16 \phi$  DE LA VARILLA LONGITUDINAL,  $48 \phi$  DE LA VARILLA DEL ESTRIBO, O LA MENOR DIMENSION DE LA COLUMNA. ADENAS LA DISPOSICION DE LOS ESTRIBOS SERA DE TAL FORMA QUE CADA VARILLA LONGITUDINAL TENGA UN SOPORTE LATERAL DADO POR EL DOBLEZ DE CUALQUIERA DE LOS ANILLOS CON UN ANGULO INTERNO MENOR O IGUAL A  $135^\circ$ . ESTAS SUGERENCIAS RIGEN TANTO PARA EL USO DE PAQUETES DE VARILLAS COMO PARA EL REFUERZO NORMAL.

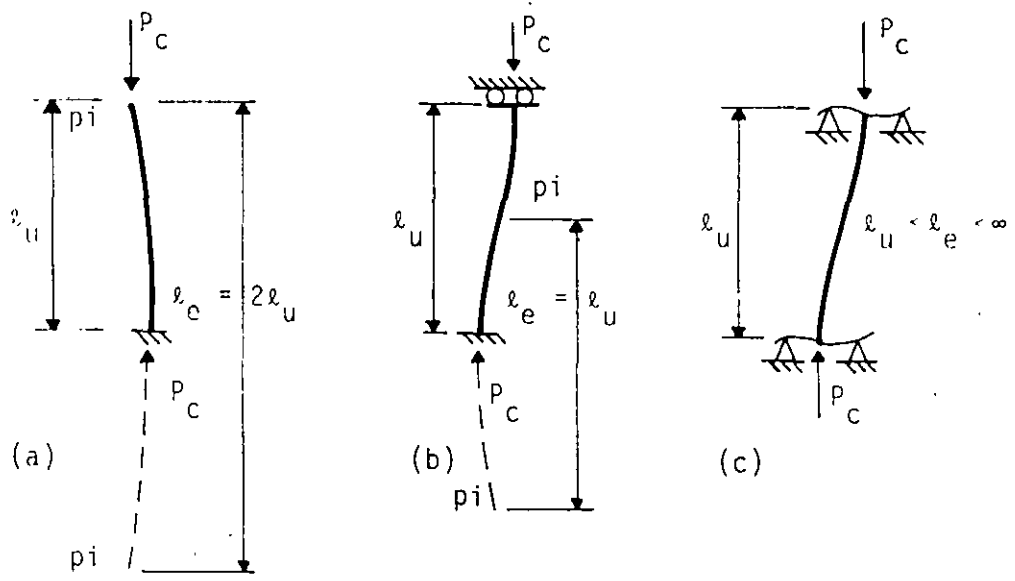
Fig. A-20

TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL EN COLUMNAS

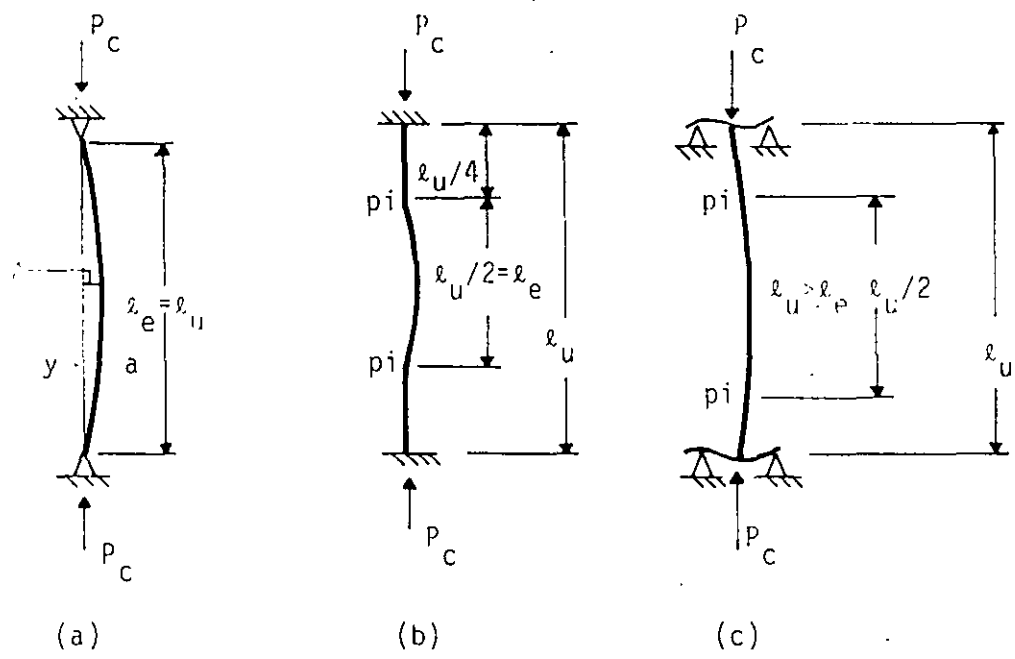


Note: X shall not exceed 14 inches.  
 $h_x$  = maximum value of X on all column faces.

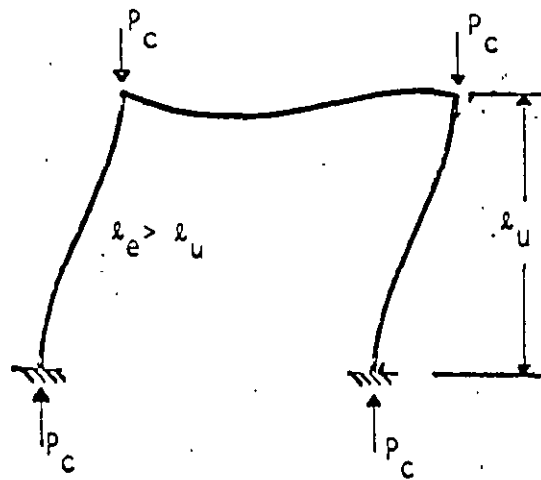
New Fig. R21.4.4 -- Example of transverse reinforcement in columns



LONGITUD EFECTIVA  $l_e$  (TRASLACION LATERAL PERMITIDA)



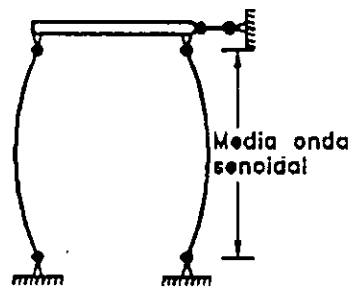
LONGITUD EFECTIVA  $\ell_e$  (TRASLACION LATERAL IMPEDIDA)



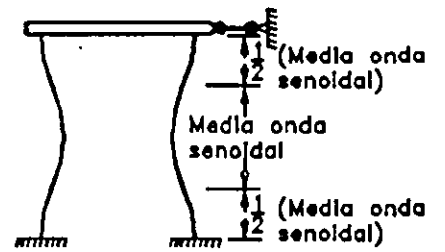
MARCO RIGIDO ( TRASLACION LATERAL PERMITIDA )

En resumen, se tiene que:

- a) En las columnas que están contraventeadas (sin ladeo), la longitud efectiva  $l_e$  se encuentra entre  $\frac{l_u}{2}$  y  $l_u$ , donde  $l_u$  es la longitud no soportada entre los apoyos de la columna;
- b) En las columnas que no están contraventeadas, la longitud efectiva  $l_e$  es siempre mayor que la longitud real de la columna  $l_u$ , y puede resultar  $2l_u$  o más. En tal caso, un valor de  $k$  menor que 1.2 **no** se considera razonable
- c) El uso de los nomogramas anexos, permite una determinación gráfica de los factores de longitud efectiva para los marcos atiesados (sin ladeo), o no atiesados (con ladeo), respectivamente
- d) Si ambos extremos están empotrados o casi, entonces  $\Psi = 0$ , y  $k = 0.5$ .
- e) Si ambos extremos de una columna no atiesada (con ladeo) tiene una mínima rigidez a la rotación, o se aproxima a  $\Psi = \infty$ , entonces  $k = \infty$ .
- f) Si ambos extremos se aproximan al empotramiento perfecto, entonces  $\Psi = 0$ , y  $k = 1$ .

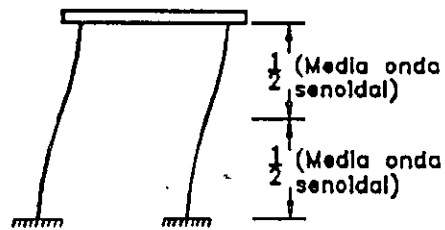


(a)  $n = 1, kl = l$

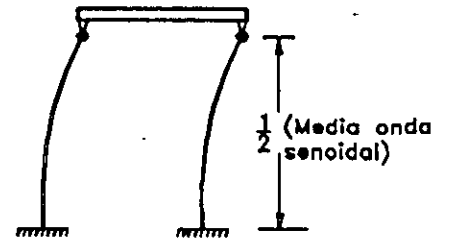


(b)  $n = 2, kl = \frac{1}{2}l$

Marcos contraventeados contra el lado



(c)  $n = 1, kl = l$



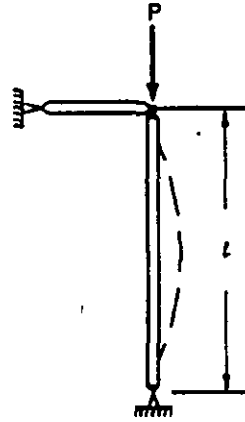
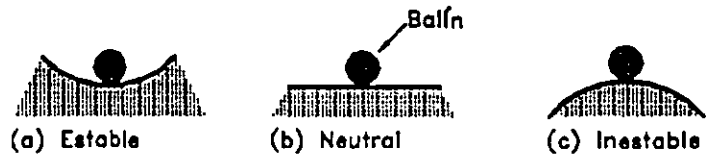
(d)  $n = \frac{1}{2}, kl = 2l$

Longitudes efectivas de columnas idealizadas

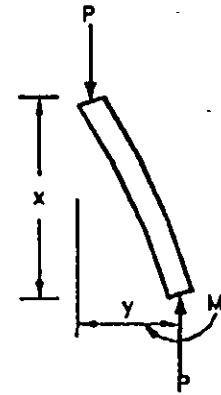
Marcos con libertad para experimentar lado



Estados de equilibrio

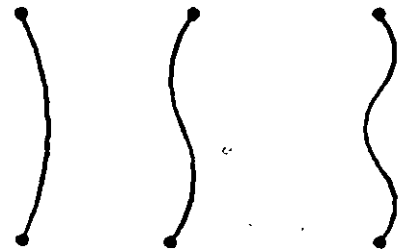


(a) Columna



(b) Diagrama de Cuerpo Libre

Pandeo de una columna biarticulada



$n = 1$

$n = 2$

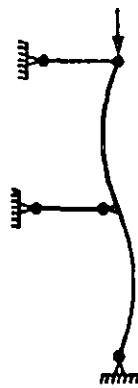
$n = 3$

(c) Número de medias ondas senoidales

Longitud efectiva de columnas



(a)



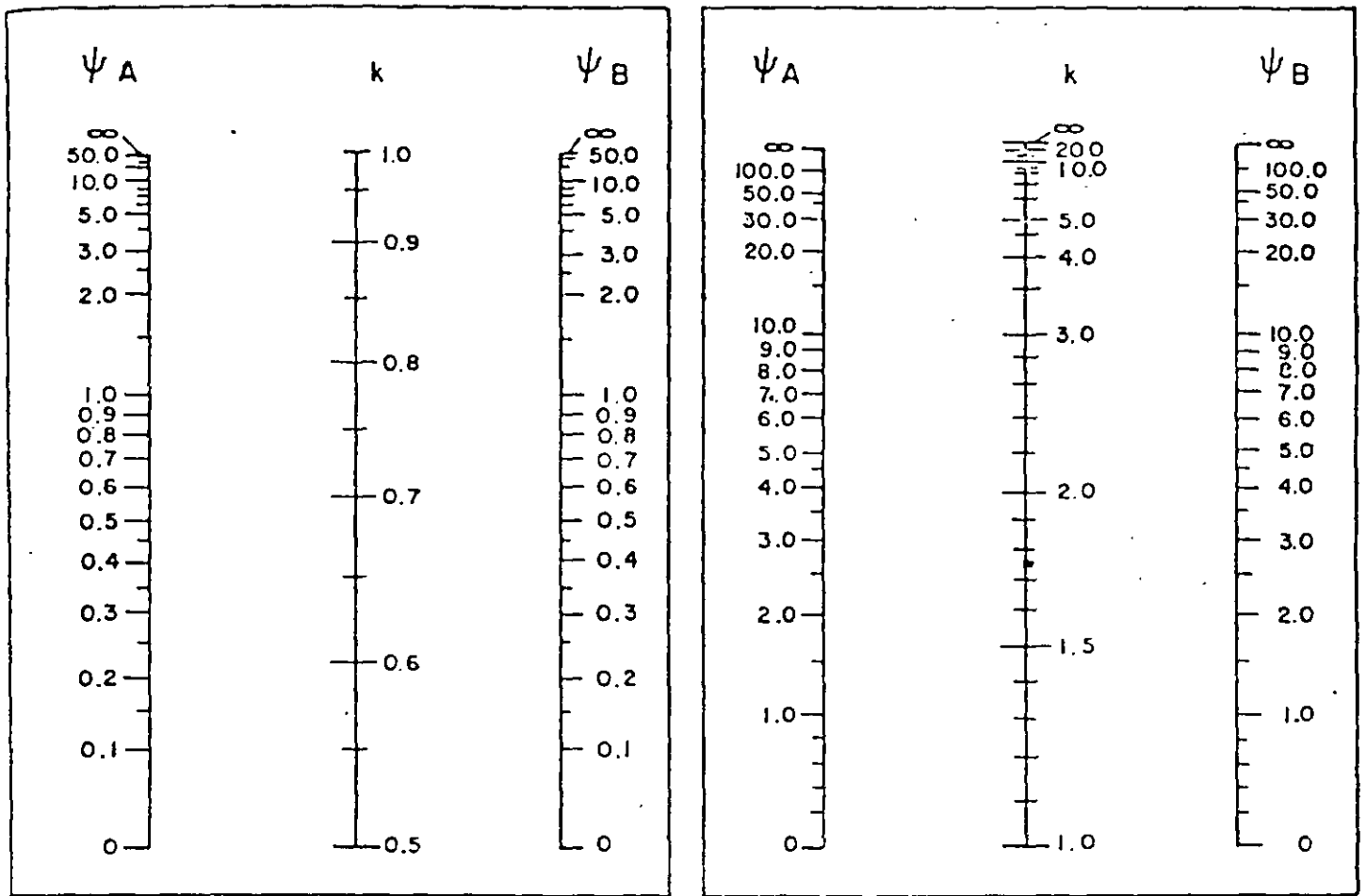
(b)



(c)

(a)

(b)



$\psi$  = cociente de  $\sum(I/L)$  de las columnas, entre  $\sum(I/L)$  de los miembros de flexión que llegan a un extremo de una columna, en el plano considerado

$H' = kH$

A y B son los extremos de la columna

Fig 1.1. Nomogramas para determinar longitudes efectivas,  $H'$ ,  $eL_u$  (ACI) (DF)

## EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS, DE CONFORMIDAD CON EL CAPÍTULO 10 DE ACI 318-99

### 10.10. Efectos de esbeltez en los elementos a compresión

En 1995, el reglamento se modificó para especificar que en lo sucesivo los efectos de esbeltez se tomen en consideración por medio de un análisis de 2o. orden (10.10.1). Si se toma en cuenta que los procedimientos de computación y muchos programas existentes son ahora capaces de realizar análisis de 2o. orden, se justifica esta disposición del ACI 318-95, la cual continúa vigente en 1999.

Como una alternativa a lo establecido en 10.10.1, tal y como ha ocurrido en versiones previas del reglamento, se permiten, en 10.12 y 10.13, los métodos aproximados que determinan un momento de diseño amplificado mediante un factor  $\delta$ , para tomar en cuenta la esbeltez del elemento en consideración.

En la presente revisión del reglamento, se establece en forma más explícita que en las versiones anteriores, la diferencia entre los marcos **no** contraventeados, (que ahora se les llama "con ladeo"), de los contraventeados, (que ahora se les llama "sin ladeo"). En ambos casos se especifican límites para los efectos de esbeltez.

Se establecen límites inferiores para la esbeltez, abajo de los cuales pueden despreciarse los momentos de segundo orden y sólo deberán considerarse las cargas axiales y los momentos de primer orden para el diseño como columnas "cortas."

Cuando se tienen relaciones de esbeltez moderadas, es permisible la determinación de los momentos amplificados mediante los procedimientos aproximados que se mencionan en 10.12 y 10.13.

En las columnas con relaciones de esbeltez altas, se requiere un análisis de segundo orden que resulte más preciso (sección 10.11.5) y que tome en cuenta la no linealidad del material y el agrietamiento, los efectos de la curvatura del elemento, la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, la contracción y la fluencia (flujo plástico), así como la interacción con la cimentación. Los límites que se establecen en 10.12.2 y 10.13.2 para marcos, sin ladeo y con ladeo, respectivamente, se resumen a continuación:

Marco con ladeo (sin contraventear)		Marco sin ladeo (contraventeado)
si $kl_u/r < 22$ ⇒	Se desprecia la esbeltez	si $kl_u/r \leq 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $22 \leq kl_u/r \leq 100$ ⇒	Métodos aproximados	si $100 \geq kl_u/r > 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $kl_u/r > 100$ ⇒	Análisis P-Δ	si $kl_u/r > 100$ ⇐

Donde:

$M_1$  y  $M_2$  son respectivamente, el menor y el mayor de los momentos factorados en los extremos de la columna.  $M_1$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura sencilla y negativo si lo hace en curvatura doble; en tanto que  $M_2$  siempre será positivo.

$k$ , es el factor que determina la longitud efectiva del elemento en flexo-compresión. El factor  $k$  se determina de conformidad con 10.12, calculando las expresiones que se presentan en R10.12, o por medio de los nomogramas de Jackson y Moreland, que permiten calcular dicho valor de  $k$ , para columnas de sección constante en un marco

$r$  es el radio de giro de la sección del elemento en flexo-compresión

$l_u$  es la longitud fuera de los apoyos, del elemento en flexo-compresión

10.10.1. Excepto con lo permitido en 10.10.2, el diseño de los elementos a compresión, las vigas de restricción y otros elementos de apoyo, se basará en las fuerzas y momentos factorados a partir de un análisis de segundo orden, considerando la no linealidad y el agrietamiento del material, así como los efectos de la curvatura del elemento y la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, contracción y flujo plástico, y la interacción con la cimentación. Las dimensiones de la sección transversal de cada elemento que se use en el análisis estarán dentro del 10 por ciento de las dimensiones de los elementos mostrados en los planos de diseño, o deberá repetirse el análisis, proponiéndose nuevas secciones de los elementos.

Comentario: Las disposiciones de la sección 10.10.1 para los efectos de esbeltez en los elementos a compresión se revisaron en 1995, para reconocer el uso de los análisis de segundo orden y para mejorar la distinción entre los marcos con ladeo y sin ladeo.

Se aclara el uso de los marcos no contraventeados que experimentan ladeo y los marcos contraventeados que no experimentan ladeo.

### 10.11. Momentos amplificados

10.11.1. Las cargas axiales factoradas  $P_u$ , los momentos factorados  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos de las columnas y cuando se requieran, las deflexiones laterales relativas  $\Delta_o$  en el entrepiso, se calcularán utilizando un análisis elástico de primer orden donde las propiedades de la secciones se determinan tomando en cuenta la influencia de las cargas axiales, la presencia de las regiones agrietadas a lo largo del miembro, así como los efectos de la duración de las cargas. En forma alternativa se permitirá el uso de las siguientes propiedades para los elementos de la estructura:

a) El módulo de elasticidad	de la sección 8.5.1: para concreto de peso normal $E_c = 15000\sqrt{f'_c}$
b) Momentos de inercia:	
Vigas	0.35 I <sub>g</sub>
Columnas	0.70 I <sub>g</sub>
Muros - sin agrietar	0.70 I <sub>g</sub>
agrietados	0.35 I <sub>g</sub>
Placas y losas planas	0.25 I <sub>g</sub>
c) Area	1.0 A <sub>g</sub>

Los momentos de inercia se dividirán por  $(1 + \beta_d)$ , donde  $\beta_d$ :

a) Para marcos sin ladeo:

$$\beta = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

b) Para marcos con ladeo, excepto a lo requerido en c):

$$\beta_d = \frac{\text{cortante sostenido máximo factorado en un entrepiso}}{\text{cortante máximo factorado en ese entrepiso}}$$

c) en la verificación de la estabilidad de marcos con ladeo llevado a cabo de conformidad con 10.13.6:

$$\beta_d = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

#### 10.11.4 Los marcos sin y con ladeo

En las estructuras reales no existen las condiciones perfectas “con ladeo” o “sin ladeo.” Si mediante una inspección no es posible determinar con precisión si el marco está o no contraventado, las secciones 10.11.4.1 y 10.11.4.2 proporcionan dos formas para determinar la condición del marco. De conformidad con 10.11.4.1, una columna que forma parte del marco se considera contraventada (sin ladeo), si los momentos en los extremos de ella, debidos a los efectos de segundo orden, no sobrepasan el 5 por ciento de los correspondientes momentos de primer orden. De acuerdo con 10.11.4.2, se puede suponer que un entrepiso del marco no experimenta ladeo, si:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_u}{V_u l_c} \leq 0.05 \quad \text{Ec. (10-7)}$$

en la que:

Q	=	índice de estabilidad en un entrepiso
$\sum P_u$	=	carga vertical factorada total en el entrepiso
$V_u$	=	cortante total en el entrepiso

$\Delta_0$  = deflexión relativa de primer orden entre los extremos superior e inferior del entrepiso, debida a  $V_u$

$l_c$  = longitud de la columna, medida centro a centro entre las juntas del marco

10.12.2. En los marcos sin ladeo se permitirá despreciar los efectos de esbeltez para los elementos en compresión que satisfagan:

$$\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12(M_1/M_2) \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde el término  $[34 - 12(M_1/M_2)]$  no se tomará mayor a 40. El término  $M_1/M_2$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla, y negativo si se flexiona en curvatura doble.

10.12.3. Los elementos en compresión se diseñarán para la carga axial factorada  $P_u$  y el momento  $M_c$  amplificado por los efectos de la curvatura, como sigue:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-9)}$$

en la que:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec. (10-10);}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

$EI$  se tomará igual a:

$$EI = \frac{(0.2E_c I_g + E_s I_{sc})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$\text{ó} \quad EI = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-13)}$$

10.12.3.1. En los elementos sin cargas transversales entre los apoyos,  $C_m$  se tomará como:

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad \text{Ec. (10-14)}$$

donde  $M_1/M_2$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla. En los miembros con cargas transversales entre los apoyos,  $C_m$  se tomará igual a 1.0.

10.12.3.2. El momento factorado  $M_2$  de la ec. (10-9) no se tomará menor a

$$M_{2,min} = P_u(0.6 + 0.012h) \quad \text{Ec. (10-15)}$$

separadamente alrededor de cada uno de los ejes, donde  $0.6$  y  $h$  están en centímetros. En los elementos en los que  $M_{2,\min}$  excede  $M_2$ , el valor de  $C_m$  de la ec. (10-14) se tomará, ya sea igual a 1.0, o se basará en el cociente de los momentos calculados  $M_1$  y  $M_2$ .

### 10.13. Amplificación de momentos — marcos con ladeo

El diseño por esbeltez de los elementos con ladeo se revisó en el Reglamento de 1995. El procedimiento revisado consiste de tres pasos:

1) Se calculan los momentos amplificados  $\delta_s M_s$ . Esto puede llevarse a cabo de tres maneras diferentes:

Primero, se podrá utilizar un análisis elástico de segundo orden del marco (10.13.4.1).

Segundo, podrá utilizarse una aproximación de dicho análisis (10.13.4.2).

La tercera alternativa es la de utilizar el amplificador de ladeo  $\delta_s$  de las ediciones anteriores del reglamento (10.3.4.3).

2) Los momentos amplificados de ladeo  $\delta_s M_s$  se suman al momento no amplificado sin ladeo  $M_{ns}$  en cada extremo de cada una de las columnas (10.13.3). Los momentos sin ladeo se podrán calcular utilizando un análisis elástico de primer orden.

10.13.1. En los elementos a compresión no contraventeados contra el ladeo, el factor  $k$  de longitud efectiva se determinará utilizando  $E$  e  $I$  de conformidad con 10.11.1 y será mayor que 1.0.

10.13.2. En los elementos a compresión que no estén contraventeados contra ladeo, los efectos de la esbeltez se despreciarán si  $kl_u/r$  es menor que 22.

10.13.3. Los momentos  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos del elemento en compresión se tomarán como:

$$M_1 = M_{1\ ns} + \delta_s M_{1s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

$$M_2 = M_{2\ ns} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec. (10-17)}$$

donde,  $\delta_s M_{1s}$  y  $\delta_s M_{2s}$  se calcularán de conformidad con 10.13.4.

10.13.4. Los momentos de ladeo amplificados  $\delta_s M_s$  se tomarán como los momentos en los extremos de la columna, calculados utilizando un análisis elástico de segundo orden, basado en la rigidez del miembro dada en 10.11.1.

10.13.4.2. En forma alternativa se permitirá calcular  $\delta_s M_s$  como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1-Q} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-18)}$$

Si  $\delta_s$  calculado de esta manera excede 1.5,  $\delta_s M_s$  se calculará utilizando 10.13.4.1 o 10.13.4.3.

10.13.4.3. Alternativamente se permitirá calcular los momentos amplificados de lado  $\delta_s M_s$  como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-19)}$$

donde  $\sum P_u$  es la suma de todas las cargas verticales en el entrepiso y  $\sum P_c$  es la suma de todas las cargas de las columnas que resisten lado en el entrepiso.  $P_c$  se calcula utilizando la ecuación (10-11), donde  $k$  se obtiene con 10.13.1 y  $EI$  de la ecuación (10-12) o la (10-13).

10.13.5. Si en un elemento a compresión:

$$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}} \quad \text{Ec. (10-20)}$$

el momento máximo ocurrirá entre los extremos de las columnas y en ese caso,  $M_2$  se deberá amplificar mediante el amplificador para marcos sin lado de la ecuación (10-10), de la siguiente manera:

$$M_c = \delta_m M_2 = \left( \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \right) (M_m + \delta_s M_2) \quad \text{Ec. (10-9)}$$

Entonces, la columna se diseñará para la carga axial factorada  $P_u$  y el momento  $M_c$  calculado utilizando 10.12.3, en que  $M_1$  y  $M_2$  se calculan de conformidad con 10.13.3,  $\beta_d$  como se define para la combinación de carga en consideración, y  $k$  como se define en 10.12.1.

Se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto, ante cargas gravitacionales, como sigue:

10.13.6. En adición a los casos de carga que comprenden cargas laterales, se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto bajo cargas gravitacionales factoradas.

a) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.1, el cociente de las deflexiones laterales de segundo orden por las deflexiones laterales de primer orden, con 1.4 veces la carga muerta y 1.7 veces la carga viva, más la carga lateral aplicada a la estructura, no excederá de 2.5.



b) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.2, el valor de  $Q$  calculado utilizando  $\Sigma P_u$  con 1.4 veces la carga muerta más 1.7 veces la carga viva, no excederá de 0.60.

c) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.3,  $\delta_s$  calculado utilizando  $\Sigma P_u$  y  $\Sigma P_c$  correspondiente a las cargas factoradas muerta y viva, será positiva y no excederá de 2.5.

En los casos a), b), y c),  $\beta_d$  se tomará como el cociente de la carga axial máxima factorada sostenida, por la carga axial máxima factorada.

10.13.7. En los marcos con ladeo, los elementos a flexión se diseñarán para los momentos totales amplificados en la junta, en los extremos de los elementos a compresión.

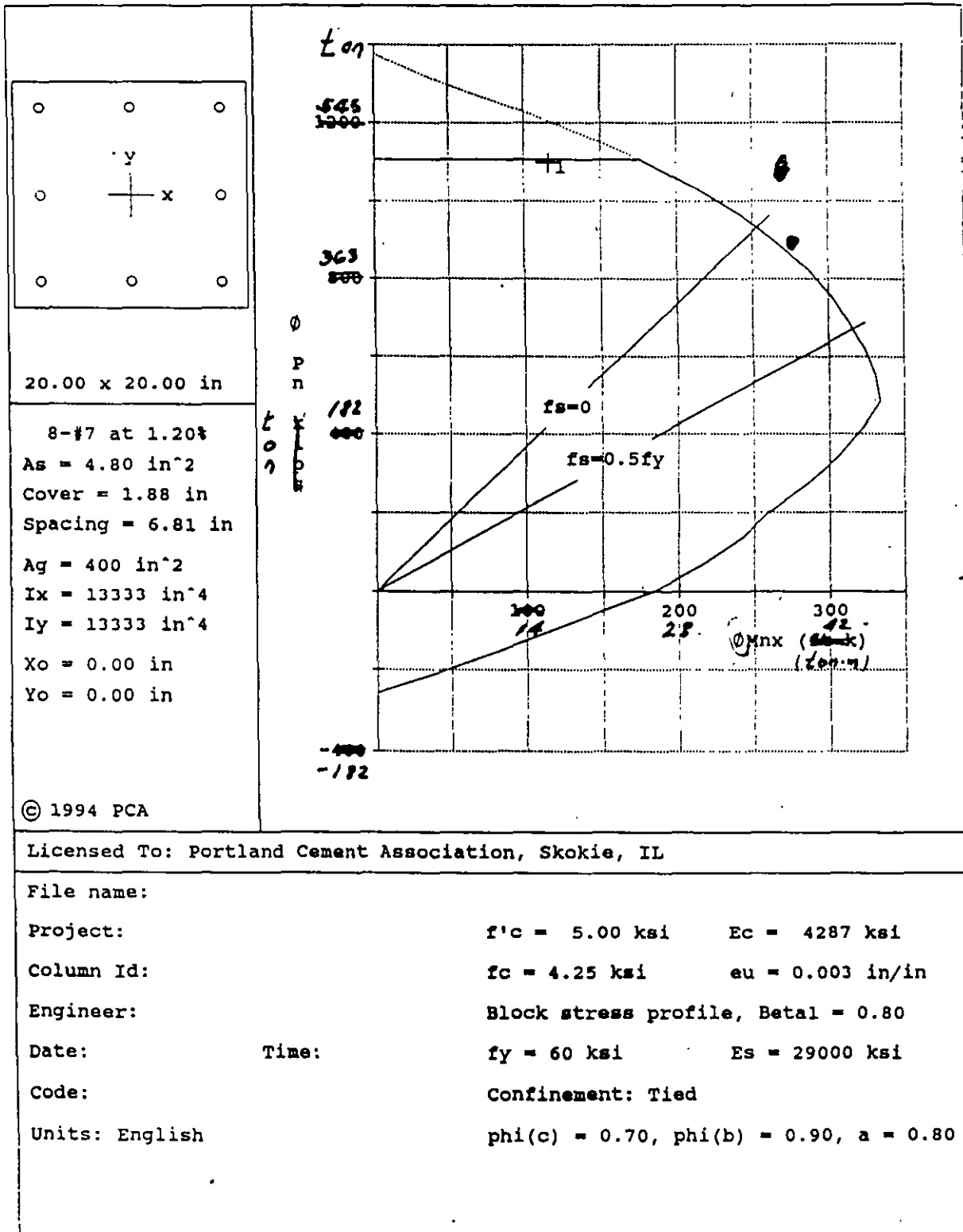


Figure 13-14 Design Strength Interaction Diagram for Column A3

Similarly, for column C3, use 24-#9 ( $\rho_g = 4.2\%$ ; see Fig. 13-15).

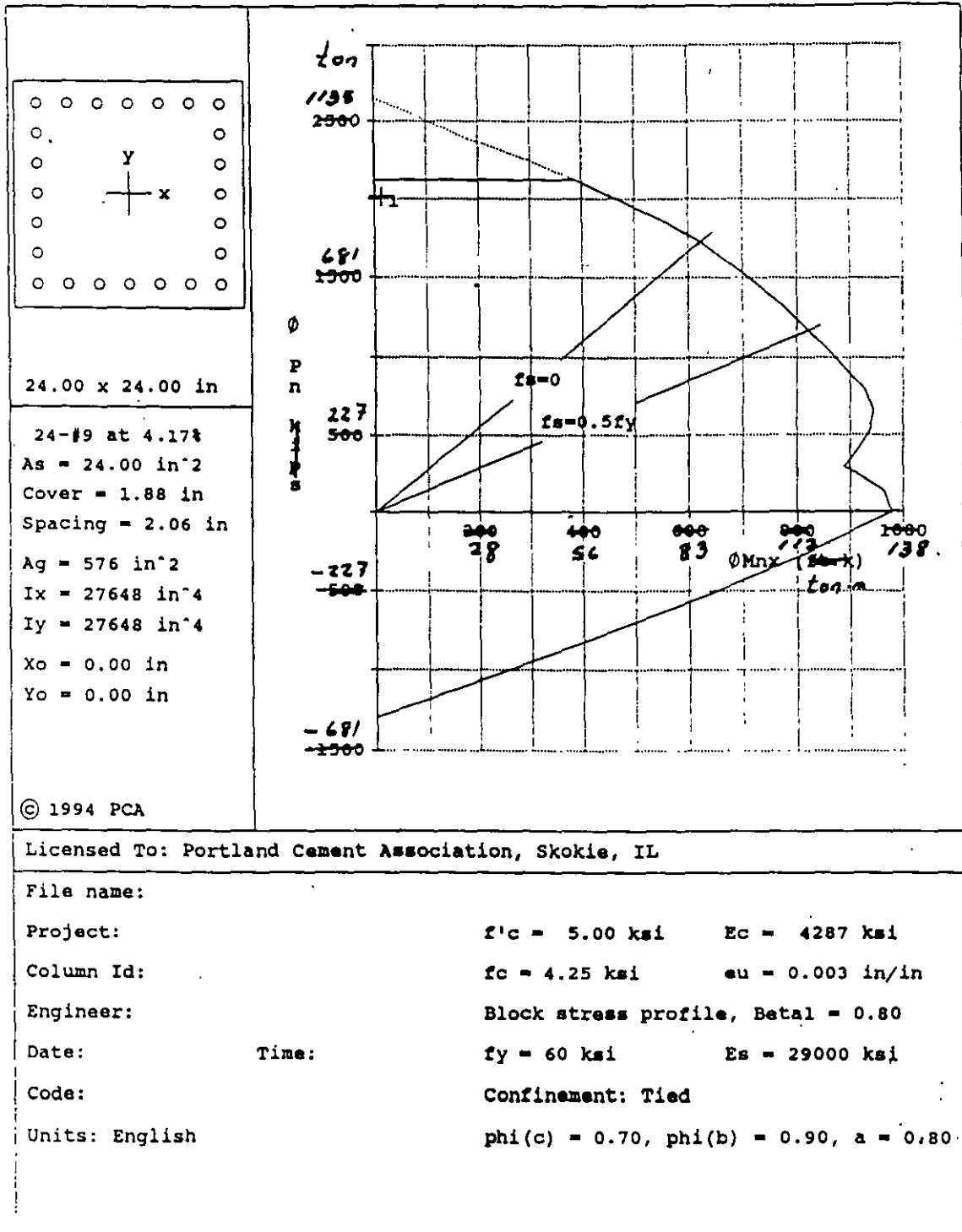


Figure 13-15 Design Strength Interaction Diagram for Column C3

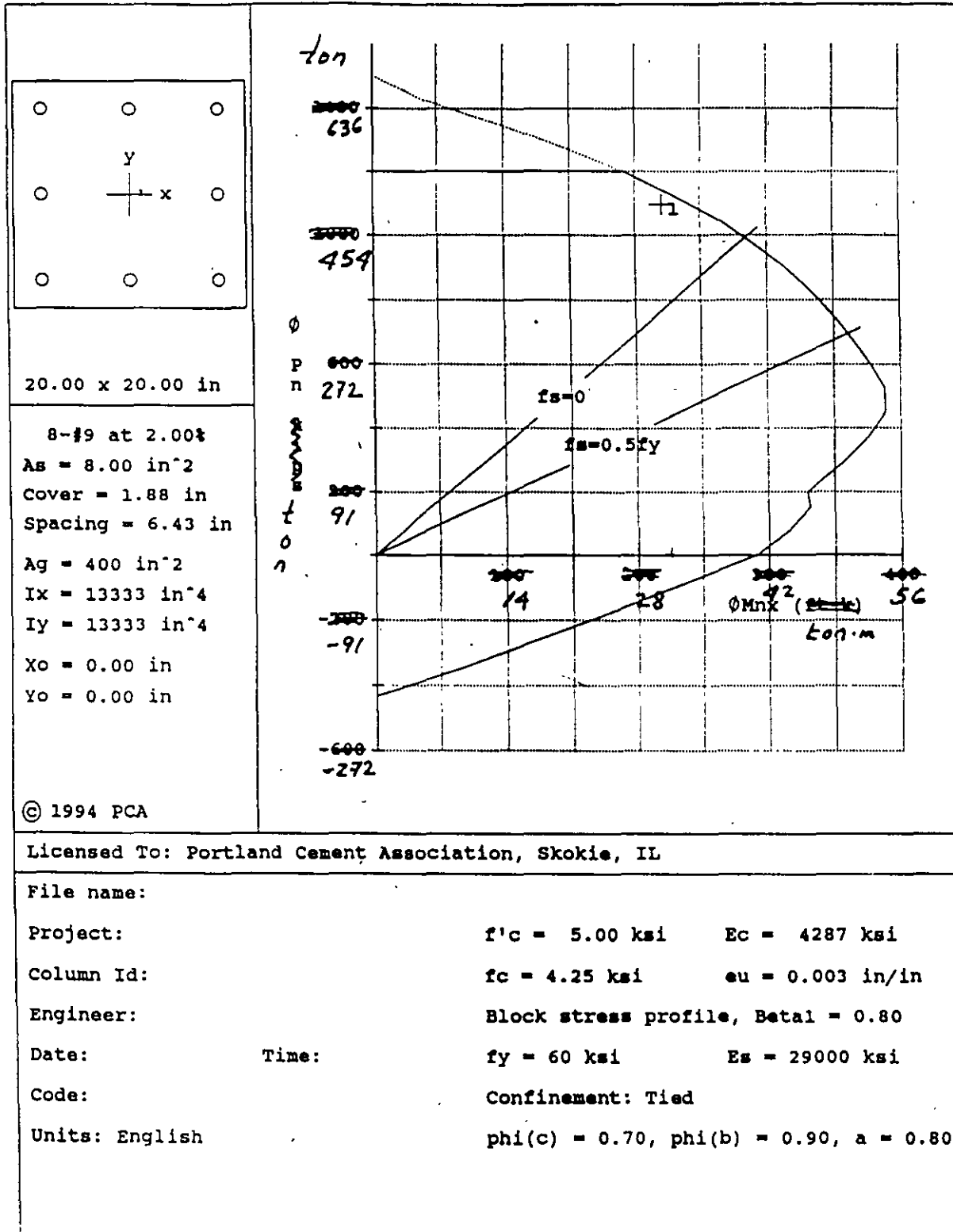
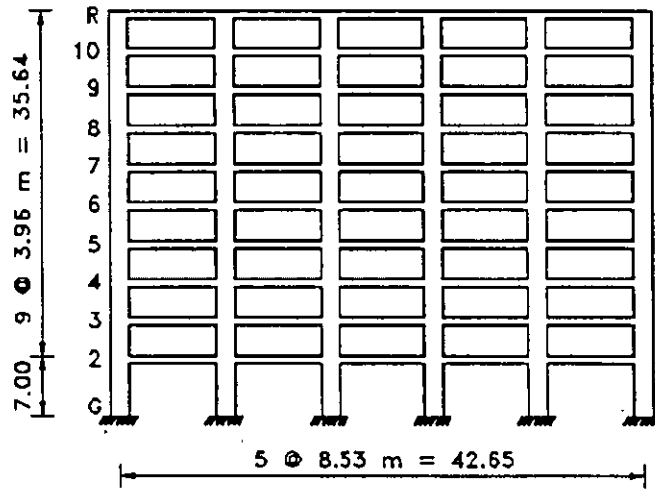
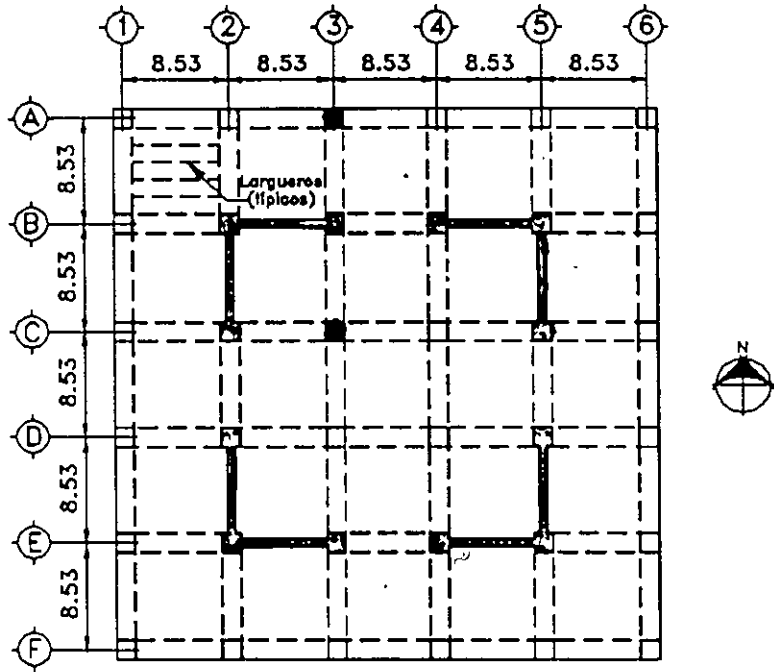


Figure 13-16 Design Strength Interaction Diagram for Column A3 (including magnified moment)



Ejemplo 13.1 — Efectos de esbeltez para columnas en un marco sin ladeo (Contraventado).

Diséñense las columnas A3 y C3 del primer entrepiso del edificio para oficinas con 10 entrepisos, que se muestra abajo. La altura libre de primer entrepiso es de 6.50 m, y de 3.45 m para los otros entrepisos. Supóngase que los efectos de las cargas laterales en el edificio son causadas por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedad de los materiales:

Concreto:  $f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo:  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Muros de cortante: 30 cm

Peso de los largueros de piso: 420 kg/cm<sup>2</sup>

Carga muerta sobrepuesta: 156 kg/cm<sup>2</sup>

Carga viva: 244 kg/cm<sup>2</sup>

### 1. Cargas gravitacionales factoradas

Columna	Carga axial factorada ton	Momentos flexionantes factorados, ton-m			
		$M_1$ extr. sup.	$M_2$ extr. inferior	$M_1$	$M_2$
A3	498	16.08	8.21	8.21	16.08
C3	916	1.69	0.86	0.86	1.69

### 2. Determinése si el marco es con o sin ladeo

Secc. 10.11.4.2

Los resultados de un análisis elástico de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.1.1, se resumen en la tabla que sigue:

Nivel de piso	$\sum P_u$ ton	$\Delta_o$ cm	$V_u$ ton	$l_c$ cm	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u l_c}$
Az	1,803	0.036	10.90	396	0.015
10	3,661	0.036	32.19	396	0.010
9	5,518	0.038	53.07	396	0.010
8	7,375	0.038	73.46	396	0.010
7	9,232	0.036	93.25	396	0.009
6	11,090	0.036	112.46	396	0.009
5	12,947	0.036	131.02	396	0.009
4	14,804	0.028	148.96	396	0.007
3	16,662	0.025	165.80	396	0.006
2	18,631	0.028	187.68	675	0.004

El índice de estabilidad  $Q = \sum P_u \Delta_o / V_u l_c$  para cada entrepiso es menor que 0.05. Por consiguiente, toda la estructura se puede considerar como de *no ladeo* (contraventada).

### 3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Para columnas con anillos, excluyendo efectos de esbeltez:

$$\phi P_{n,max} = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{v'}) + 4,200 A_{s'}] \quad \text{Ec (10-2)}$$

Para la columna A-3:

$$498 = 0.80(0.70) [0.85(350)(50^2 - A_{v'}) + 4,200 A_{s'}]$$

de donde:  $A_{v'} = 37.29 \text{ cm}^2$

Utilícese 8 varillas del #8 ( $A_{s'} = 40.56 \text{ cm}^2$ ;  $\rho_x = 1.6\%$ )

Utilícese PCACOL para determinar la capacidad nominal de la columna A3 con:

$$P_u = 498 \text{ ton.}$$

De la figura 13.14:

$$\phi M_n = 24.98 \text{ ton-m} > 16.08 \quad \text{CORRECTO}$$

En forma similar, de la figura 13.15, para la columna C3 utilice 24 vars. del #9:  $A_{v'} = 153.87 \text{ cm}^2$

$$\rho_x = \frac{153.87}{60 \times 60} = 0.0427 = 4.3\%$$

4. **Columna C3** — Diseño final, que incluye los efectos de esbeltez. Determinese si debieran considerarse los efectos de esbeltez. Utilícese un factor de longitud efectiva  $k = 1.0$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(650)}{0.3(60)} = 36.11 \quad 10.12.1$$

Puesto que la columna se flexiona en doble curvatura:

$$34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) = 34 - 12 \left( \frac{-0.86}{1.69} \right) = 40.1 > 36.1$$

No requieren considerarse los efectos de esbeltez para la columna **C3** puesto

$$\text{que } kl_u/r < 34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \quad 10.12.2$$

Nótese que de conformidad con la disposición de 10.12.2 de ACI 318-99,  $34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$  no debe tomarse mayor a 40.

En este caso no es necesario calcular un valor más preciso de  $k$ , ya que la columna no es esbelta para  $k = 1.0$ . Las 24 vars. del #9 resultan adecuadas.

5. **Columna A3** — Diseño final, incluyendo efectos de esbeltez

a) Determinese si es necesario considerar los efectos de esbeltez

Determinese  $k$  del nomograma en R.10.12

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 282,589 \text{ kg/cm}^2$$

Para la columna en la planta baja, de 6.75 m = 675 cm

$$\frac{E_c I}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{675} = 153 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

Para la columna en el segundo entrecimso, de 3.96 m = 396 cm

$$\frac{E_c I}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{396} = 260 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$I_{viga} = \frac{0.35(60 \times 50^3)}{12} = 218,750 \text{ cm}^4$$

Para la viga de 8.53 m



$$\frac{E_c I}{l} = \frac{282,589(218,750)}{853} = 72 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / l_c}{\sum E_c I / l} = \frac{(153 + 260)10^5}{72 \times 10^5} = 5.7$$

Supóngase que  $\Psi_B = 1.0$  (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma en R10.10.12.1 (a):  $k = 0.84$ .

Por consiguiente, para la columna **A3** flexionada en doble curvatura:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left( \frac{8.21}{16.08} \right) = 28$$

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left( \frac{-8.21}{16.08} \right) = 40$$

para la columna **A3** flexionada en curvatura sencilla:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 > 34 - 12 \left( \frac{8.21}{16.04} \right) = 28$$

No es necesario considerar la esbeltez de la columna **A3**, si se flexiona en doble curvatura, la cual es la condición más común para las construcciones de concreto vaciado en sitio. Si embargo, con objeto de ilustrar el procedimiento de diseño, incluidos los efectos de esbeltez en las columnas sin ladeo, supóngase una curvatura sencilla.

b. Determinése el momento total  $M_c$  (incluidos los efectos de esbeltez) y la combinación de cargas para el diseño.

$$M_c = \delta_m M_2 \quad \text{Ec (10-9)}$$

donde:

$$\delta_m = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec (10-10)}$$

$$\begin{aligned} C_m &= 0.6 + 0.4 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0.4 && \text{Ec (10-14)} \\ &= 0.6 + 0.4 \left( \frac{8.21}{16.08} \right) = 0.8 \end{aligned}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec (10-11)}$$

$$EI = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec (10-12)}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 15,100 \sqrt{350} = 282,589 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.51}$$

$$I_g = \frac{50^4}{12} = 520,833 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.5.2}$$

$$I_{se} = 2 \left[ (3 \times 5.07) \left( \frac{50}{2} - 1.11 - 1.91 - 3.81 \right)^2 \right] = 10,043 \text{ cm}^4$$

En la expresión anterior, el diámetro de la varilla del #7 dividido por 2 = 1.11 cm; el diámetro del estribo del #6 = 1.91 cm, y el recubrimiento de 1.5" = 3.81 cm

$$\beta_d = \frac{1.4 P_D}{1.4 P_D + 1.7 P_L} = 0.82$$

$$EI = \frac{0.2(282,589)520,833 + 2(10^6)10,043}{1 + 0.82} = 2.72(10)^{10} \text{ kg-cm}^2$$

De la Ec (10.-13):

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} = \frac{0.4(282,589)520,833}{1.82} = 3.23(10^{10})$$

Si se utiliza este último valor, la carga crítica  $P_c$  vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 (3.23) 10^{10}}{(0.84 \times 650)^2} = 1,070,919 \text{ kg}$$

$$\delta_m = \frac{0.8}{1 - \frac{498,000}{0.75(1,071,000)}} = 2.11$$

Verifiquense los requisitos de momento mínimo:

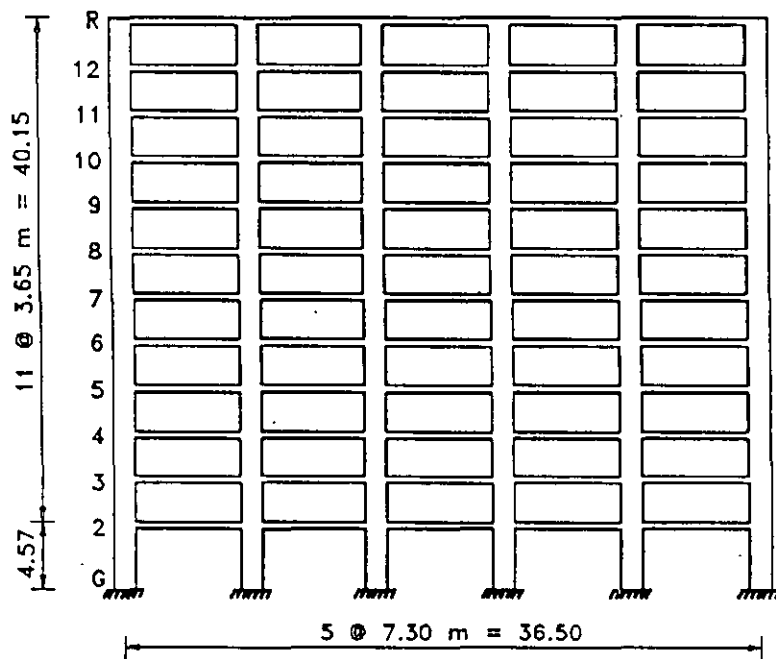
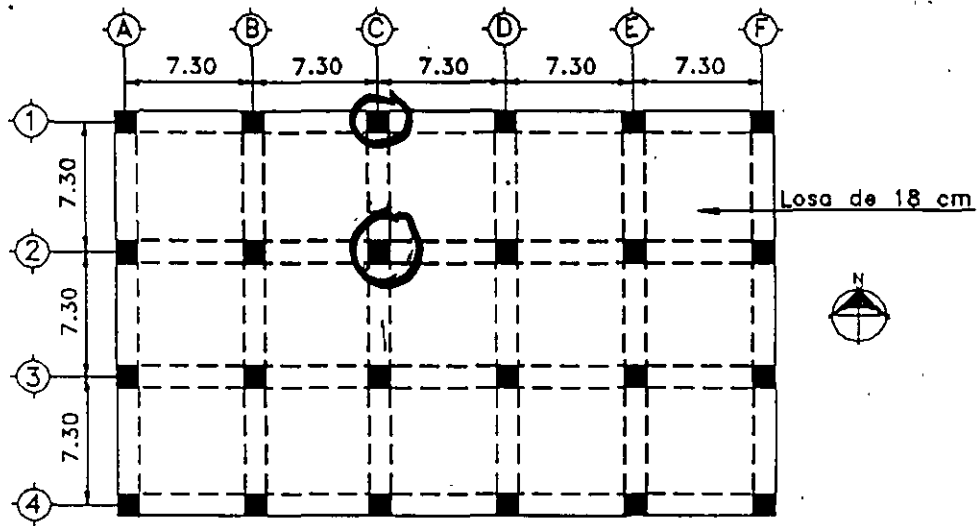
$$\begin{aligned}
 M_{2,max} &= P_u(0.6 + 0.03h) = 498,000(0.6 + 0.03 \times 50) && \text{Ec (10-15)} \\
 &= 1,045,800 \text{ kg-cm} = 10.45 < 16.08 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$M_c = 2.11(16.08) = 33.85 \text{ ton-m}$$

Si se utiliza la figura 13-14, resulta evidente que la columna de 50 x 50 cm reforzada con 8 varillas del #7 no es adecuada para la combinación de cargas  $P_u = 498 \text{ ton}$  y  $M_c = 33.85 \text{ ton-m}$ . En este caso se requieren 8 vars. del #9, las cuales representan un  $\rho_g = 2.0\%$ .

6. Para propósitos comparativos se realizó un análisis  $P-\Delta$  utilizando las propiedades que aparecen en la sección 10.11.1 del Reglamento. Los momentos totales que se obtuvieron de este análisis  $P-\Delta$  son esencialmente los mismos a los que se obtuvieron a partir de una análisis de primer orden. Lo anterior ilustra la economía total que se logra cuando para el diseño de los elementos se utiliza un análisis  $P-\Delta$ .



Ejemplo 13.2 — Efectos de esbeltez en las columnas de un marco con ladeo (no contraventeado).

Diséñense las columnas C1 y C2 en el primer entrepiso del edificio para oficinas con 12 entrepisos, el cual se muestra abajo. La altura libre del primer entrepiso es de 4.05 m y de 3.15 m para todos los demás. Supóngase que los efectos laterales en el edificio son provocados por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedades de los materiales:

Concreto  $f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$  para las columnas en los dos  
entrepisos inferiores

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  para todos los demás sitios  
( $w_c = 2,400 \text{ kg/m}^3$ )

Refuerzo  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Carga muerta sobrepuesta = 208 kg/m<sup>2</sup>

Carga viva = 244 kg/m<sup>2</sup>

1. Combinaciones las cargas factoradas

Secc. 9.2

1.  $U = 1.4D + 1.7L$  Ec (9-1)

2.  $U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$  Ec (9-2)

3.  $U = 0.9D + 1.3W$  Ec (9-3)

2. Determinese si el marco es con ladeo o sin ladeo

Los resultados del análisis de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.11.1 se resumen en la tabla siguiente:

Col.	Combinación de cargas	Carga axial factorada	Momentos flexionantes factorados (ton-m)											
			M <sub>u</sub> extremo superior			M <sub>u</sub> extremo inferior			M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>1ns</sub>	M <sub>2ns</sub>	M <sub>1s</sub>	M <sub>2s</sub>
			ns	s	total	ns	s	total						
C1	1	602	7.87	-	7.87	3.94	-	3.94	3.94	7.87	3.94	7.87	-	-
	2	478	5.91	2.26	8.16	2.95	21.73	24.68	8.16	24.68	5.91	2.95	2.26	21.73
	3	328	3.78	2.30	6.08	1.90	22.14	24.04	6.08	24.04	3.78	1.90	2.30	22.14
C2	1	1.060	0.14	-	0.14	0.07	-	0.07	0.07	0.14	0.07	0.14	-	-
	2	795	0.12	6.10	6.22	0.07	45.67	45.74	6.22	45.74	0.12	0.07	6.10	45.67
	3	514	0.1	6.23	6.33	0.04	46.50	46.54	6.33	46.54	0.10	0.04	6.23	46.50

Nivel de Piso	$\sum P_u^*$ (ton)	$\Delta_n$ (cm)	$V_u$ (ton)	$l_c$ (cm)	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_n}{V_u l_c}$
Azotea	1,420	0.15	8.67	365	0.067
12	2,849	0.25	25.79	365	0.076
11	4,277	0.41	42.63	365	0.113
10	5,704	0.53	59.11	365	0.140
9	7,135	0.66	75.27	365	0.171
8	8,530	0.79	90.98	365	0.203
7	9,970	0.91	106.19	365	0.234
6	11,399	1.04	129.95	365	0.269
5	12,857	1.14	135.20	365	0.297
4	14,250	1.19	148.87	365	0.312
3	15,690	1.12	161.71	365	0.298
2	17,139	0.84	175.11	430	0.190

\* Incluye el peso del piso, las cargas muertas sobrepuestas y las cargas vivas reducidas. El factor de reducción de la carga viva se tomó igual a 0.08 (A-150).

El índice de estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_n}{V_u l_c}$$

es mayor a 0.05 en todos los niveles de piso. Por consiguiente, las columnas **no** están contraventeadas.

### 3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Utilice el programa PCACOL para determinar el área requerida del acero longitudinal, sin incluir los efectos de esbeltez.

Para la columna C1, utilice 8 vars. del # 8 ( $\rho_g = 1.6\%$ )

Para la columna C2, utilice 16 vars. del # 11 ( $\rho_g = 4.3\%$ )

4. **Columna C1**—Diseño definitivo, incluyendo efectos de esbeltez  
 a. Determine  $k$  del nomograma en R10.12.1

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 15,100 \sqrt{420} = 309,458 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 8.5.1}$$

Para la columna de 4.32 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364,583)}{430} = 262 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

Para la columna de 3.65 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364,583)}{365} = 309 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

$$I_{viga} = 0.35 \left( \frac{60 \times 50^3}{12} \right) = 218,750 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

Para la viga de 7.30 m de longitud:

$$\frac{E_c I}{l} = \frac{309,458(218,750)}{732} = 92.5 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / l_c}{\sum E_c I / l} = \frac{262 + 309}{925} = 6.17$$

Supóngase que  $\Psi_n = 1.0$  (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma de la figura R.10.12.1(b),  $k = 1.76$ :

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.76(405)}{0.3(50)} = 48 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente: deberán considerarse los efectos de esbeltez

- b. Determine el momento total  $M_2$  (incluidos los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño

$$M_2 = M_{2m} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis  $P - \Delta$  aproximado:

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} > M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de las cargas de diseño, incluidos los efectos de esbeltez:

Combinación de cargas	$M_{2m}$ (ton-m)	$M_{2s}$ (ton-m)	Q	$\delta_s$	$\delta_s M_{2s}$	$M_2$ (ton-m)	$P_u$ (ton)
1	7.87	-	-	-	-	7.87	602
2	2.95	21.73	0.19	1.24	26.95	29.90	478
3	1.90	22.14	0.19	1.24	27.45	29.35	328

Utilizando las figura 13.17, es evidente que las tres combinaciones de carga caen dentro del diagrama de interacción. Por lo tanto, las 8 varillas del #8 son adecuadas cuando se toman en cuenta los efectos de esbeltez al utilizar un análisis  $P - \Delta$  aproximado.

Para propósitos de comparación, recalculése  $\delta_s M_{2s}$ , utilizando el método de amplificación de momentos dado en ediciones anteriores del Reglamento ACI.

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_{2s} \quad \text{Ec (10-19)}$$

La carga crítica  $P_c$  se calcula a partir de la Ec (10-11), utilizando  $k$  de 10.13.1 y  $EI$  de la Ec (10-12) o (10-13).

Para cada una de las doce columnas exteriores a lo largo de los ejes de columnas 1 y 4 (esto es: las columnas que reciben sólo 1 viga en la dirección del análisis),  $k$  se determinó en la parte 4(a) con un valor de 1.76. Utilizando la Ec (10-13), con  $\beta_u = 0$ :

$$EI = 0.4(309,458) \left( \frac{50^4}{12} \right) = 6.45(10^{10})$$

La carga crítica vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45 (10)^{10}}{(1.76 \times 405)^2} = 1,257,922 \text{ kg} = 1,257 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las columnas de orilla A2, A3, F2 y F3 (esto es: las columnas que reciben a dos traves, una a cada lado, en la dirección del análisis):



$$\Psi_A = \frac{262 + 309}{2 \times 92.7} = 3.08$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma correspondiente,  $k = 1.58$ .

La carga crítica es:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45(10)^{10}}{(1.58 \times 405)^2} = 1,554,659 \text{ kg} = 1,555 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las ocho columnas interiores:

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{60^4}{12} \right) = 756,000 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

Para la columna de 4.32m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(756,000)}{432} = 541 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

Para la columna de 3.65 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(756,000)}{365} = 641 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

$$\Psi_A = \frac{541 + 641}{(2 \times 92.7)} = 6.38$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma:  $k = 1.8$

$$EI = 0.4(309,458) \left( \frac{60^4}{12} \right) = 1.34 \times 10^{11} \quad \text{Ec (10-13)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.34 \times 10^{11}}{(1.8 \times 405)^2} = 2,488,568 \text{ kg} = 2,488 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_c = 12(1,257) + 4(1,555) + 8(2,488) = 41,208 \text{ ton}$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(41,208)}} = 2.24$$

Para la combinación 2, de cargas:

$$M_2 = 2.95 + 2.24(21.73) = 51.62 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3, de cargas:

$$M_2 = 1.90 + 2.24(22.14) = 51.49 \text{ ton-m}$$

De la figura 13.17, resulta claro que la combinación 2 de cargas cae fuera del diagrama de interacción. Por consiguiente, es necesario incrementar el refuerzo a 8 varillas del #9 ( $\rho_g = 2.0\%$ ), para tomar en cuenta los efectos de esbeltez, cuando se utiliza el método de la amplificación de momentos de reglamentos previos de ACI.

5. Columna C2. Diseño definitivo, para incluir los efectos de esbeltez.

a. Determinése si deben considerarse los efectos de esbeltez.

En la parte 4(b),  $k$  se determinó igual a 1.8 para las columnas interiores. Por consiguiente:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.8(405)}{0.3(60)} = 40.5 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente, deben considerarse los efectos de esbeltez.

b) Determinése el momento total  $M_2$  (incluyendo los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño.

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis  $P - \Delta$  aproximado:

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} \geq M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de cargas de diseño, incluyendo los efectos de esbeltez:

Combinación de carga	$M_{2ns}$ (ton-m)	$M_{2s}$ (ton-m)	Q	$\delta_s$	$\delta_s M_{2s}$	$M_2$ (ton-m)	$P_u$ (ton)
1	0.14	-	-	-	-	0.14	1,060
2	0.07	45.67	0.19	1.24	56.63	56.70	795
3	0.04	46.50	0.19	1.24	57.66	57.70	514

De la figura 13.18 resulta evidente que las tres combinaciones de cargas ( $P_u, M_2$ ) caen dentro del diagrama de interacción. Por consiguiente, las 16

varillas del #11 son adecuadas cuando se incluyen los efectos de esbeltez, utilizando una análisis aproximado  $P - \Delta$ .

- Para propósitos de comparación, recalcúlese  $\delta$ ,  $M_2$ , utilizando el método de amplificación de momentos, el cual aparece en ediciones anteriores del Reglamento ACI. Utilizando los valores  $\sum P_u$ ,  $\sum P_c$  y  $\delta$ , calculados en la parte 4(b):

$$\delta_s = 2.24$$

Para la combinación 2 de cargas:

$$M_2 = 0.07 + 2.14(45.67) = 102.37 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3 de cargas:

$$M_2 = 0.04 + 2.14(46.50) = 104.20 \text{ ton-m}$$

Resulta evidente de la figura 13.18 que ambas combinaciones caen dentro del diagrama de interacción y por consiguiente, las 16 varillas del #11 son adecuadas cuando los efectos de esbeltez se determinan mediante este método.

6. Determínese si el momento máximo ocurre en el extremo del elemento. Ver la sección 10.13.5.

En la columna C1:

$$\frac{l_u}{r} = \frac{405}{0.3(50)} = 27 < \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{1,060,000}{420(60)^2}}} = 41.8 \quad \text{Ec (10-20)}$$

Por consiguiente, para cada una de las columnas C1 y C2 el momento máximo ocurre en uno de los dos extremos, y el momento total  $M_2$  no tiene porqué amplificarse mediante  $\delta_m$ .

7. Verifíquese la inestabilidad debida una deflexión lateral de la estructura (Secc. 10.13.6):

- a. Cuando se utiliza 10.13.4.2 para calcular  $\delta$ ,  $M_2$ , el valor de  $Q$  que se evalúa utilizando cargas gravitacionales factoradas, no deberá exceder de 0.60. Nótese que para verificar la estabilidad, todos los momentos de inercia se deberán dividir por  $(1 + \beta_u)$ , donde, para este piso (Secc. 10.11.1):

$$\beta_d = \frac{\sum 1.4 P_D}{\sum P_u} = 0.89; \quad 1 + \beta_d = 1.89$$

El dividir todos los momentos de inercia por  $(1 + \beta_d)$  es equivalente a incrementar las deflexiones, y consecuentemente  $Q$ , por  $(1 + \beta_d)$ .

Por lo tanto, en el 2o. nivel:

$$Q = 1.89 \times 0.19 = 0.36 < 0.60$$

Por lo tanto, la estructura es estable en este nivel. De hecho, si se calcula la  $Q$  modificada en cada piso, se muestra que la estructura es estable.

b. Al utilizar 10.13.4.3 para calcular  $\delta_s M_s$ , el valor de  $\delta_s$  calculado utilizando  $\sum P_u$  y  $\sum P_c$  correspondientes a las cargas muertas y vivas factoradas, será positiva y no excederá de 2.5. Para la verificación de la estabilidad, los valores de  $EI$  se deberán dividir por  $(1 + \beta_d)$ . Por consiguiente, los valores de  $P_c$  se deberán recalculer considerando los efectos de  $\beta_d$ .

En las columnas B1 a E1 y B4 a E4,  $\beta_d = 0.89$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,297}{1 + 0.89} = 686 \text{ ton}$$

En las columnas A1, F1, A4 y F4,  $\beta_d = 0.91$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,297}{1 + 0.91} = 679 \text{ ton}$$

En las columnas A2, A3, F2 y F3,  $\beta_d = 0.89$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,642}{1 + 0.89} = 869 \text{ ton}$$

En cada una de las columnas interiores,  $\beta_d = 0.88$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{2,590}{1 + 0.88} = 1,378 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_i = 8(686) + 4(679) + 4(869) + 8(1,378) = 22,704 \text{ ton}$$

y,

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(22,704)}} < 0$$

La estructura es inestable cuando se utiliza el método de amplificación de momentos.

8. Para propósitos de comparación, se llevó a cabo un análisis  $P - \Delta$  utilizando las propiedades de la sección, dadas en 10.11.1. En la columna C1, el momento total  $M_2$  aumentó aproximadamente 26% y en la columna C2 aumentó aproximadamente 42%. En ambas columnas, la cantidad de refuerzo determinada en la etapa de diseño preliminar es adecuada para las combinaciones de cargas a partir del análisis de segundo orden. Nótese que en promedio, los momentos de las columnas en el primer nivel aumentaron aproximadamente 26%.

Para la revisión de la estabilidad según 10.13.6, los valores de  $I$  se dividieron por  $(1 + \beta_d)$ . En todos los niveles de piso, el cociente de las deflexiones laterales de 2o. orden respecto de las de 1er. orden, se determinó menor a 2.5, lo cual significa estabilidad de conjunto de la estructura.

9. Es importante hacer notar que también deben considerarse los efectos de las cargas de viento que actúan en la dirección S-N. Sin embargo, en aras de simplicidad, en este ejemplo no se consideran éstas.

10. Cuando las columnas están sujetas a flexión en las direcciones  $x$  y  $y$ , el análisis anterior deberá ejecutarse en cada una de las dos direcciones. La verificación del diseño final de la columna podrá llevarse a cabo utilizando el método de la carga recíproca:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{R0}}}$$

En la cual:

$P_R$  carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{R0}$  carga axial resistente de diseño, para la as excentricidades  $e_x = e_y = 0$

$$P_{RO} = 0.80 \phi \left[ 0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right]$$

cuando se trate de columnas con refuerzo transversal con estribos. Cuando ese refuerzo transversal consista de espirales, el coeficiente 0.80 se reemplazará por 0.85.

- $P_{Rx}$  carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad  $e_x$ , en uno de los planos de simetría
- $P_{Ry}$  carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad  $e_y$ , en el otro plano de simetría

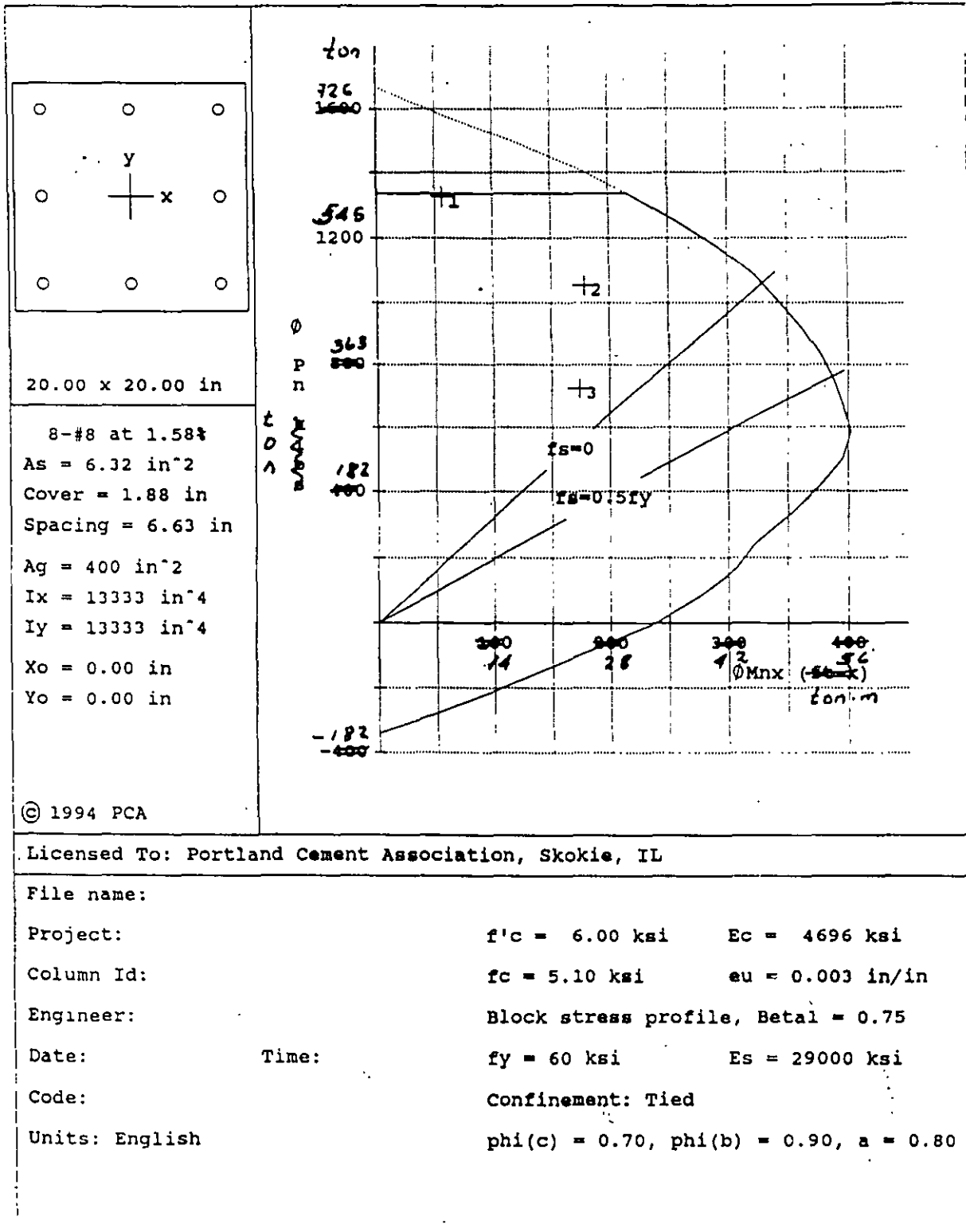


Figure 13-17 Design Strength Interaction Diagram for Column C1

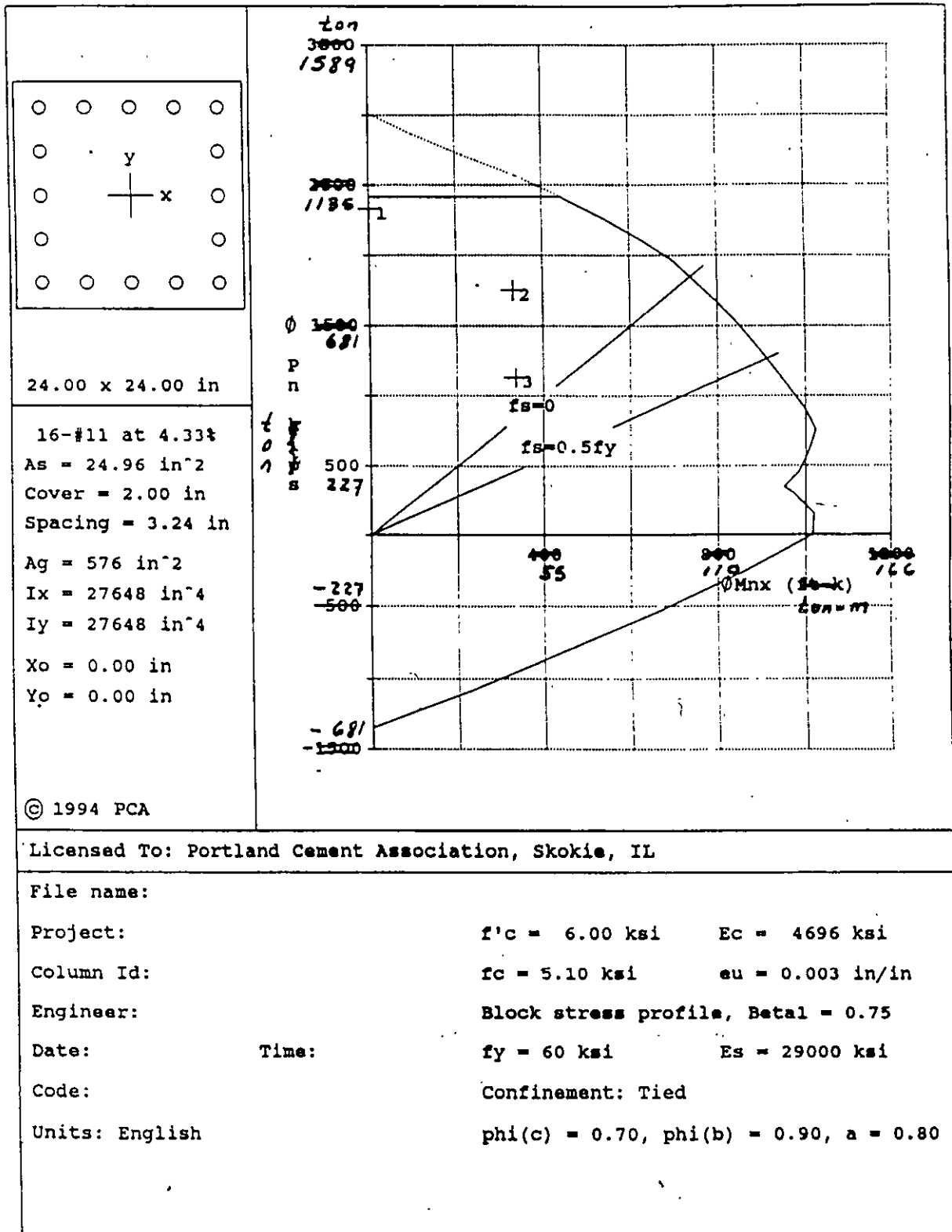


Figure 13-18 Design Strength Interaction Diagram for Column C2





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

## **TEMA**

**FLEXO COMPRESIÓN EN COLUMNAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**ING. JOSE GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO

## TEMA 4. FLEXOCOMPRESION EN COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO

M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS\*

### C O N T E N I D O

A. EL PROCESO DE DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS

B. COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO

1. Elementos "Columna"
2. Acciones mecánicas
3. Forma de la sección transversal
4. Propiedades geométricas
5. Condiciones de frontera
6. Materiales. Concreto: Agregados grueso y fino, cemento, agua y aditivos; Acero de refuerzo
7. Distribución del acérõ de refuerzo
8. Detalles

---

\* Profesor, Facultad de Ingenieria, UNAM; Ingeniero Civil Consultor. Apartado Postal 74-171, México D. F. 09080, MEXICO

# CAPÍTULO 6

## Flexión y carga axial

6.1 Introducción. /6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión. /6.3 Cálculo de resistencia. /6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera. /6.5 Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera. /6.6 Flexotensión.

### 6.1 Introducción

En este capítulo se presentan los procedimientos necesarios para determinar la resistencia de elementos de concreto reforzado sujetos a la acción de carga axial y momento flexionante. Se consideran aquí únicamente elementos muy cortos, en los que no existen problemas de esbeltez. Se supondrán conocidas la geometría del elemento, incluyendo la cantidad y distribución del acero de refuerzo, la calidad del concreto, definida por una cierta

resistencia nominal ( $f'_c$ ), y la calidad del acero, definida por su esfuerzo de fluencia ( $f_y$ ).

Considerando el problema de un modo general, se puede suponer que la carga axial,  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , varían independientemente. En la figura 6.1a se muestra una representación esquemática de un elemento bajo la acción de  $P$  y  $M$ , y en la figura 6.1b, un sistema estáticamente equivalente en el que  $M = Pe$ . Es importante señalar que en algunas estructuras  $P$  y  $M$  varían en la misma proporción en una sección transversal dada al variar las condiciones de carga externa. Esto equivale a afirmar que la excentricidad,  $e$ , permanece constante. Sin embargo, en otros casos  $P$  y  $M$  pueden variar en distinta forma y entonces  $e$  no es constante.

Un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima,  $P_o$ , de tensión o compresión, y un momento nulo, hasta un momento  $M_o$ , aunado a una carga axial nula. El lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar su resistencia, se representa gráficamente por medio de un *diagrama de interacción*. La figura 6.2 muestra uno típico para una sección rectangular con refuerzo simétrico. Cualquier punto en la curva de trazo continuo representa una combinación de momento y carga axial que hace que el elemento alcance su resistencia.

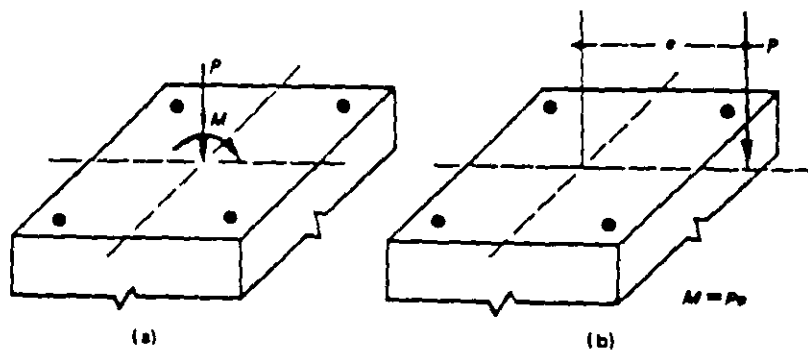


Figura 6.1 Elementos equivalentes sujetos a flexocompresión.

## REFERENCIAS

1. González, O. M. y Robles, F., "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", Segunda edición, LIMUSA, 1985
2. Wang, Ch. K. & Salmon, Ch. G., "Reinforced concrete design", Fourth edition, Harper & Row, 1985
3. Ferguson, P. M., "Reinforced concrete fundamentals", Wiley, 1981
4. Park, R. & Paulay, T., "Reinforced concrete structures", Wiley, 1975
5. Bresler, B., "Design criteria for reinforced concrete columns under axial load and biaxial bending", ACI Journal, V 57, N 5 November 1960, pp 481-490
6. Furlong, R. W., "Ultimate strength of square columns under bi axially excentric loads", ACI Journal, V 57, N 9, March 1961, pp 1129-1140
7. Parme, A. L., Nieves, J. M. & Gowens, A., "Capacity of reinforced rectangular columns subjected to biaxial bending", ACI Journal, V 63, N 9, September 1966, pp 911-923
8. Anónimo, "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Junio 17, 1987; Diario Oficial de la Federación, Julio 3, 1987
9. Anónimo, "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, Diciembre 12, 1987
10. Meli, R., "Columnas de concreto reforzado: Diseño a flexocompresión", Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación 176, Julio 1968
11. Meli R. y Rodríguez, M., "Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado", Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación 428, Septiembre 1980

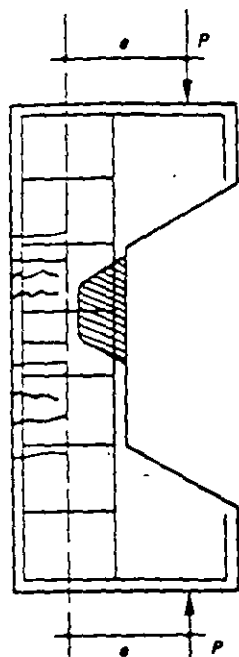


Figura 6.3. Especimen para ensaye en flexocompresión con agrietamiento típico.

se indican esquemáticamente el refuerzo usual y una posible configuración de agrietamiento. Generalmente la carga  $P$  se aplica a una excentricidad constante. Esto hace que toda la zona prismática del espécimen esté sujeta a una carga axial y a un momento flexionante que crecen en la misma proporción, hasta el colapso.

Existen dos modos principales de falla de elementos sujetos a flexocompresión: falla en compresión y falla en tensión.

En el primer caso la falla se produce por aplastamiento del concreto. El acero del lado más comprimido fluye, en tanto que el del lado opuesto no fluye en tensión.

El segundo modo de falla se produce cuando el acero de un lado fluye en tensión antes de que se produzca el aplastamiento del concreto en el lado opuesto, más comprimido.

El tipo de falla depende esencialmente de la relación entre momento y carga axial en el colapso. En el diagrama de interacción mostrado en la figura 6.2, el punto  $D$  separa la zona de fallas en compresión de la de fallas en tensión; recibe el nombre de *punto de falla balanceada*.

Se ha observado que el efecto del refuerzo helicoidal sobre la resistencia disminuye apreciablemente en cuanto la carga axial tiene cierta excentricidad, aunque la hélice sigue aumentando la ductilidad del elemento.

También en este caso cabe notar que las mediciones de deformaciones han indicado que éstas varían linealmente a lo largo del peralte, es decir, las secciones transversales se mantienen planas antes y después de la deformación.

## 6.9 Cálculo de resistencia

### 6.9.1 Determinación del diagrama de interacción

En la sección 6.1 se dijo que un diagrama de interacción es la representación gráfica del lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que hacen que un elemento alcance su resistencia. Así, si se cuenta con el diagrama de interacción de un elemento dado, se conocen todas las combinaciones de carga axial y momento que puede soportar.

El diagrama de interacción de un elemento puede obtenerse a partir de las hipótesis descritas en la sección 5.3 para el cálculo de la resistencia de elementos sujetos a flexión pura. Pueden usarse las hipótesis simplificadoras sobre la forma del diagrama de esfuerzos de compresión en el concreto y sobre la deformación unitaria máxima útil de concreto, o bien, puede aplicarse el procedimiento general descrito en la sección 5.6. El primer enfoque se ilustra en el ejemplo 6.1 y el segundo, en la figura 6.4.

El diagrama de interacción se obtiene determinando varios puntos que lo definan. El procedimiento para encontrar un punto cualquiera es, esencialmente, el mismo usado en flexión para calcular las fuerzas de compresión y de tensión, una vez supuesta la profundidad del eje neutro. Sin embargo, no es necesario hacer varios tanteos hasta igualar ambas fuerzas, ya que su diferencia representa la fuerza normal,  $P$ , y el momento respecto al eje geométrico

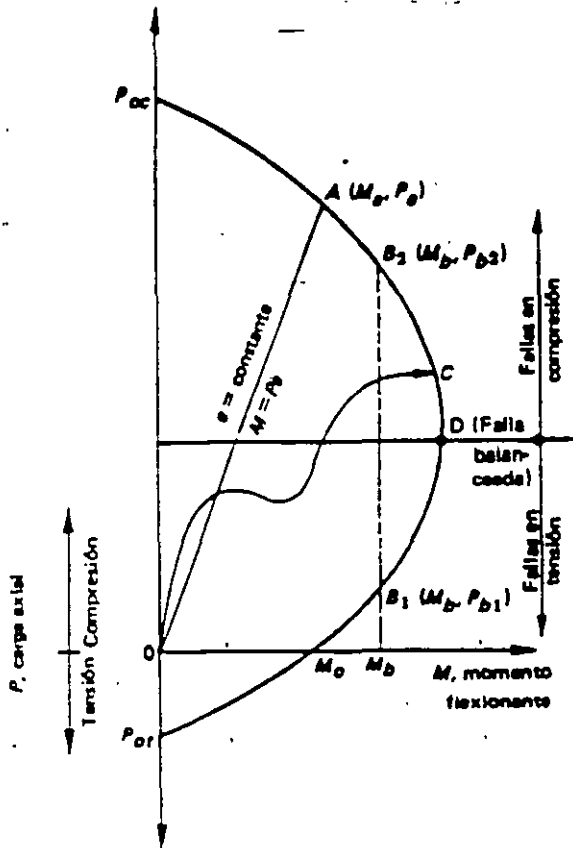


Figura 6.2 Diagrama de interacción típico para una sección rectangular.

Puede observarse que si únicamente se aplicara carga axial de compresión, el valor máximo, o resistencia, correspondería al punto  $P_{oc}$ . De igual manera, la carga axial máxima de tensión sería la correspondiente a  $P_{ot}$ . Si la sección se sujetara sólo a momento flexionante, el máximo que podría aplicarse sería el marcado con  $M_o$ . Nótese que el máximo momento flexionante que la sección es capaz de resistir no es el que corresponde a una carga axial nula.

Cuando al aumentar la carga externa el momento y la carga axial crecen en la misma proporción, la historia de carga queda representada por una recta desde el origen, con una pendiente igual al cociente  $P/M = 1/e$ . Para las combinaciones de carga representadas por la recta OA de la figura 6.2, la resistencia correspondería a la combinación  $M_a, P_a$ . En la figura

se observa también que para un mismo momento,  $M_b$ , existen dos valores de carga axial que hacen que la sección alcance su resistencia. Finalmente, la línea OC representa una historia de carga cualquiera.

El diagrama de interacción de la figura 6.2 corresponde a un elemento definido perfectamente en su geometría y materiales y representa el conjunto de valores de acciones interiores máximas que el elemento es capaz de soportar. El conocimiento necesario para llegar a esta representación se ha ido acumulando de investigaciones experimentales sobre el comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión y carga axial. Estos estudios abarcan desde ensayos en vigas simplemente apoyadas con cargas concentradas simétricas, hasta ensayos en elementos de concreto reforzado sujetos a compresión axial o a compresión excéntrica. También se han llevado a cabo algunos estudios, mucho más reducidos, de elementos sujetos a flexotensión. Con base en esta información, ha sido posible elaborar teorías apoyadas en hipótesis razonables, por medio de las cuales se puede predecir la resistencia de un elemento con un grado tolerable de precisión. Utilizando cualquiera de estas teorías se pueden obtener diagramas de interacción, como el mostrado en la figura 6.2.

En la actualidad se puede predecir la resistencia de un elemento de concreto reforzado sujeto a flexión y carga axial con un error no mayor del 25 por ciento de la capacidad real que se obtendría si dicho elemento se ensayase hasta la falla. En casos usuales, con flexión en torno a uno de los ejes principales, el error es del orden del 10 por ciento. Esta aproximación es satisfactoria para fines de diseño estructural.

## 6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión

El tipo de espécimen usado en investigaciones de elementos sujetos a flexocompresión es semejante al que aparece en la figura 6.3, donde

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Por triángulos semejantes:

$$c = \frac{\epsilon_{cy} \times d}{\epsilon_{cx} + \epsilon_{cs}} = \frac{0.003 \times 45}{0.005} = 26.5 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 21.5}{26.5} = 0.00243 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 1.5}{26.5} = 0.000170 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = 0.0021 = \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00017 = 340 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 340 = 3\,400 \text{ kg} = 3.4 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 f'_c ab = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 26.5 \times 90 = 114\,880 \text{ kg} = 114.9 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 + F_2 - F_3 = 114.9 + 84.0 + 3.4 - 84.0 = 118.3 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

Fuerza (ton)	Brazo (cm)*	Momento (ton-cm)
$C_c = 114.9$	11.25	1 293
$F_1 = 84.0$	20.0	1 680
$F_2 = 3.4$	0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1 680

\*Distancias a un eje que pasa por el medio peralte.

$$M = 4\,653 \text{ ton-cm}$$

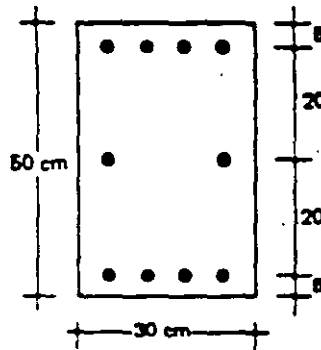
Para el punto 2:

$$P = 118.3 \text{ ton}$$

$$M = 46.5 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 6.1** *Determinación del diagrama de interacción de una columna usando el bloque equivalente de esfuerzos (Hipótesis ACI 318-83).*

**DATOS**

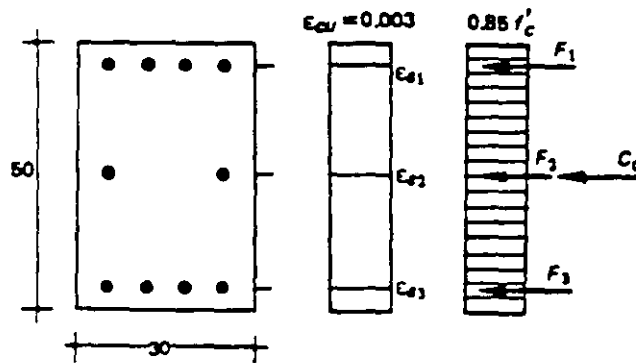


$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 10 \text{ barras del No. 8}$$

**OBTENCION DE  $P_{oc}$  (PUNTO 1)**



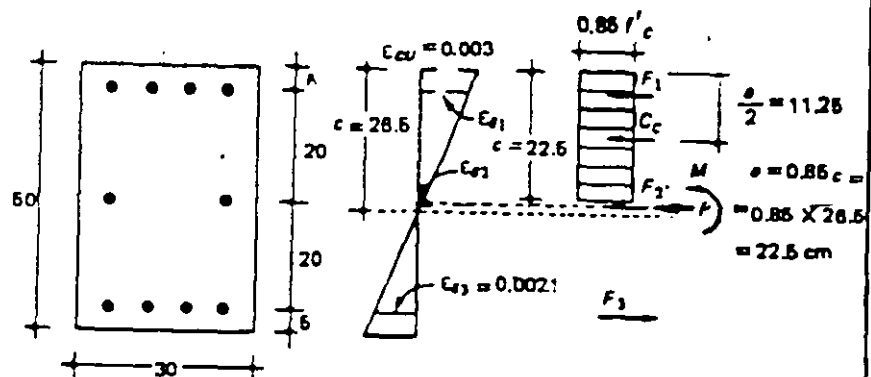
$$P_{oc} = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y = C_c + F_1 + F_2 + F_3 \quad (\text{ecuación 4.1})$$

$$P_{oc} = 0.85 \times 200 \times 30 \times 50 + 50 \times 4 \times 200$$

$$P_{oc} = 255\,000 + 210\,000 = 465\,000 \text{ kg}$$

$P_{oc} = 465 \text{ ton}$

**OBTENCION DEL PUNTO DE FALLA BALANCEADA (PUNTO 2)**





**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Cálculo de  $M$ :

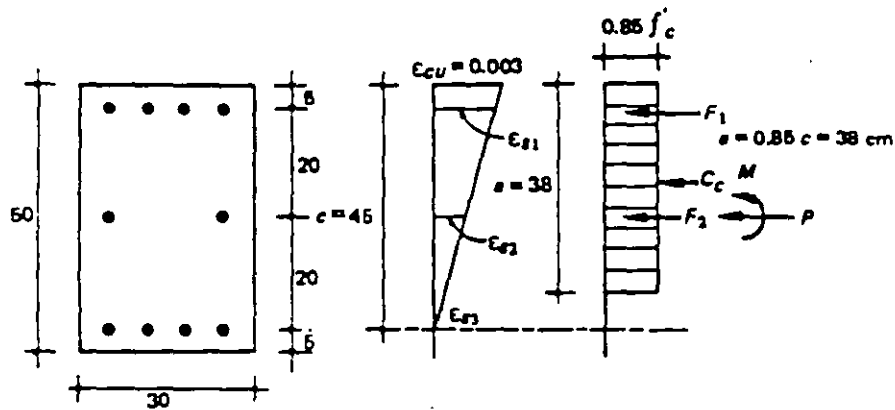
Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 43.4$	20.8	900
$F_1 = 60.0$	20	1 200
$F_2 = 42.0$	0	0
$F_3 = 84.0$	20	1 680

$M = 5 780 \text{ ton-cm}$

Para el punto 3:

$P = - 22.6 \text{ ton (tensión)}$   
 $M = 37.8 \text{ ton-m}$

**OBTENCION DE UN PUNTO ENTRE EL (1) Y EL (2) (PUNTO 4)**



Se supone  $\epsilon_{s3} = 0$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 40}{45} = 0.00267 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{45} = 0.00133 < \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00133 = 2 670 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = 0$$

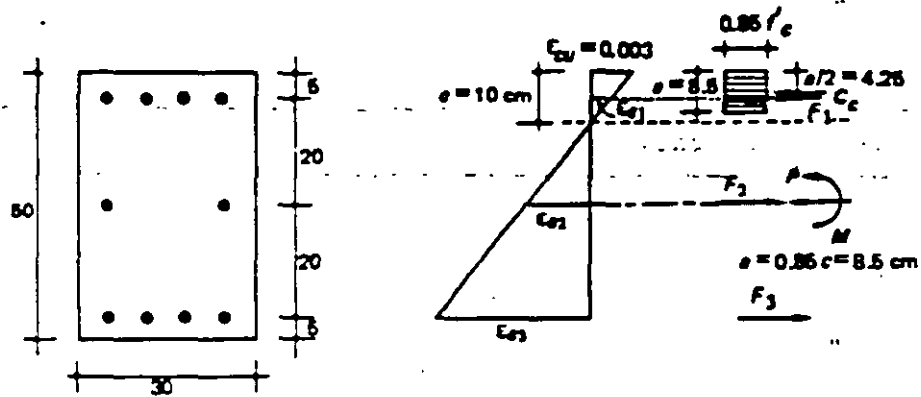
Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4 200 = 84 000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 2 670 = 26 700 \text{ kg} = 26.7 \text{ ton}$$

$$F_3 = 0$$

## EJEMPLO 6.1 (Continuación)

DETERMINACION DE UN PUNTO CERCANO A  $M_0$  (PUNTO 3)

Se supone  $c = 10$  cm

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 5}{10} = 0.0015 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 15}{10} = 0.0045 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 35}{10} = 0.0105 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = E_s \epsilon_{s1} = 2 \times 10^6 \times 0.0015 = 3\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 3\,000 = 60\,000 \text{ kg} = 60 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 4\,200 = 42\,000 \text{ kg} = 42 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 8.5 \times 50 = 43\,400 \text{ kg} = 43.4 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 43.4 + 60.0 - 42.0 - 84.0 = -22.6 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00075 = 1\,500 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 1\,500 = 15\,000 \text{ kg} = 15 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 17 \times 90 = 86\,700 \text{ kg} = 86.7 \text{ ton}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 86.7 + 84.0 - 15.0 - 84.0 = 71.7 \text{ ton}$$

Cálculo de M:

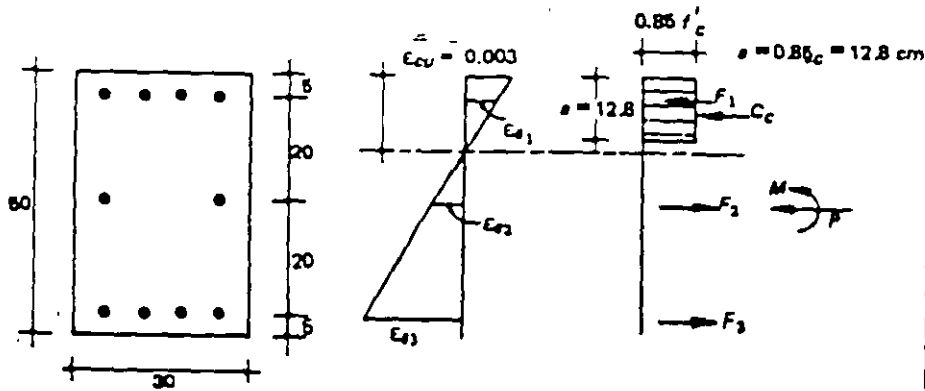
Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 86.7$	16.5	1 450
$F_1 = 84.0$	20.0	1 680
$F_2 = 15.0$	0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1 680

$$M = 4\,790 \text{ ton-cm}$$

Para el punto 5:

$P = 71.7 \text{ ton}$
$M = 47.9 \text{ ton-m}$

**OBTENCION DEL PUNTO 6 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSION**



Se supone  $c = 15 \text{ cm}$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 38 \times 30 = 194\,000 \text{ kg} = 194 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 + F_2 = 194.0 + 84.0 + 26.7 = 304.7 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

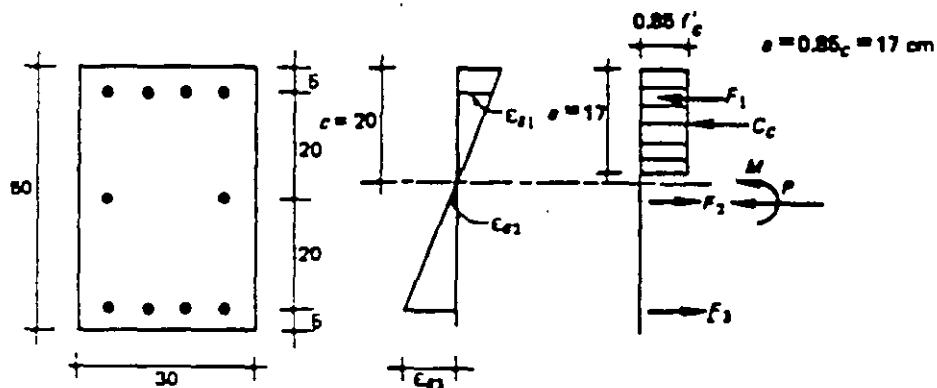
Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 194.0$	6	1 164
$F_1 = 84.0$	20	1 680
$F_2 = 26.7$	0	0

$$M = 2\,844 \text{ ton-cm}$$

Para el punto 4:

$$P = 304.7 \text{ ton}$$

$$M = 28.4 \text{ ton-m}$$

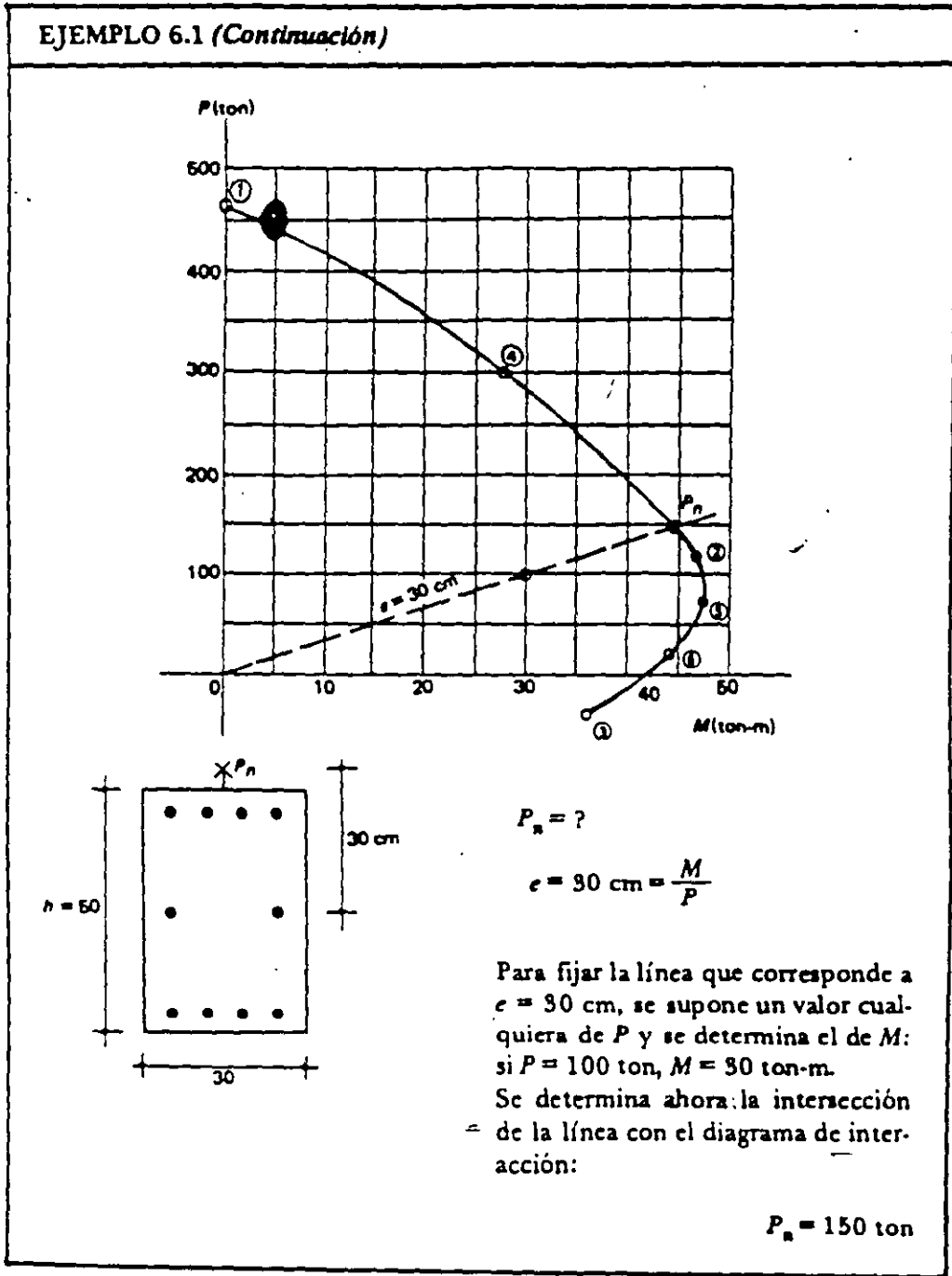
**OBTENCION DEL PUNTO 5 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSION**Se supone  $c = 20 \text{ cm}$ 

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 15}{20} = 0.00225 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 5}{20} = 0.00075 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 25}{20} = 0.00375 > \epsilon_y$$



representa el momento flexionante,  $M$ , que corresponden al estado de deformaciones determinado por la profundidad supuesta del eje neutro. Por lo tanto, para cada estado de deformaciones se obtiene un valor de  $P$  y uno de

$M$ , que definen un punto del diafragma de interacción.

Los diagramas de interacción tienen la forma general mostrada en la figura 6.2. Se puede definir un diagrama en forma aproximada esti-

## EJEMPLO 6.1 (Continuación)

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 = < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 30}{15} = 0.0060 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = 4\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = 4\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4\,000 = 80\,000 \text{ kg} = 80 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 4\,000 = 40\,000 \text{ kg} = 40 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 12.8 \times 30 = 65\,000 \text{ kg} = 65 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 65 + 80 - 40 - 84 = 21 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 65$	18.6	1 210
$F_1 = 80$	20	1 600
$F_2 = 40$	0	0
$F_3 = 84$	20	1 680

$$M = 4\,490 \text{ ton-cm}$$

Para el punto 6:

$$P = 21 \text{ ton}$$

$$M = 44.9 \text{ ton-m}$$

A continuación se calcula un punto cercano al punto  $M_0$  de la figura 6.2, o sea, al de momento sin carga axial.

Para obtener el punto  $M_0$  con precisión, sería necesario hacer varios tanteos hasta igualar las fuerzas de compresión con las de tensión, como en la determinación de la resistencia a flexión (capítulo 5); basta con obtener un punto cercano. En el caso de este punto (punto 3), se fijó la profundidad del eje neutro, y por triángulos semejantes se determinaron las deformaciones unitarias en todos los lechos de refuerzo. Por lo demás, el procedimiento es igual al del punto anterior. Con la profundidad del eje neutro supuesta, se obtuvo una carga axial de tensión de 16.6 ton, la cual es pequeña comparada con la de los dos puntos anteriores. Esto significa que el punto está ligeramente por debajo del eje de abscisas. Aun cuando la carga axial hubiera resultado de magnitud considerable, el punto hubiese servido para determinar el diagrama de interacción, ya que todos los puntos calculados de la manera descrita están sobre dicho diagrama.

El punto 4 se calculó para tener un punto intermedio entre el punto correspondiente a compresión pura y el de falla balanceada. El estado de deformaciones supuesto es tal que en el lecho inferior de acero se tiene una deformación nula. Esto simplifica un poco los cálculos. Por lo general, el diagrama no se aparta mucho de una línea recta en la zona considerada, y con un solo punto es suficiente para definirlo. Sin embargo, si se desea una gran precisión o si se observa que el diagrama dista mucho de ser lineal, pueden calcularse más puntos en esta zona suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedios entre los dos puntos 1 y 2. Si no se necesita una gran precisión, los puntos de carga axial pura y de falla balanceada pueden unirse con una línea recta.

Para definir el diagrama entre los puntos de falla balanceada y de flexión pura, en el ejemplo se calcularon otros dos puntos suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedias. En esta zona del diagrama es necesario,

por su gran curvatura, calcular dos puntos como mínimo para definirlo.

Al final del ejemplo se muestra un diagrama dibujado a escala con los valores obtenidos. Con este diagrama, puede conocerse la resistencia de la sección para cualquier combinación de  $P$  y  $M$ . Para fines de ilustración, al final del ejemplo 6.1 se muestra la obtención de la resistencia de la columna cuando la carga actúa con una excentricidad de 30 cm.

La carga obtenida de esta manera es la resistencia nominal de la columna usada en el ejemplo  $P_n$ . Para obtener la carga de diseño, sería necesario multiplicar la carga anterior por el factor de reducción,  $\phi$ , que, según el Reglamento ACI 318-83, para el caso de flexocompresión vale 0.70 para columnas de estribos y 0.75 para columnas con refuerzo helicoidal. El Reglamento citado permite incrementar el valor de  $\phi$ , hasta el valor que corresponde a flexión pura, cuando la carga axial es pequeña.

El procedimiento descrito anteriormente puede aplicarse a secciones de otras formas y con diferentes hipótesis simplificadoras. También puede aplicarse definiendo las características geométricas y mecánicas de la sección por medio de literales, lo cual tiene la ventaja de que se obtienen diagramas adimensionales que sirven para cualquier sección de esas características. Esto se ha hecho tanto con las hipótesis del Reglamento ACI 318-83 como con la NTC 77 del Reglamento del D. F., para obtener diagramas de interacción de uso general. En el Apéndice C se presentan algunos de los calculados por Roberto Meji y Mario Rodríguez [6.2], aplicando las hipótesis del D.F. para secciones rectangulares y circulares. Estos diagramas cubren la mayoría de las secciones que se encuentran normalmente y simplifican de manera notable el cálculo de resistencias a flexocompresión y flexotensión. Sólo es necesario calcular el diagrama de una sección cuando dicha sección difiere mucho de las que aparecen en los diagramas adimensionales disponibles y la precisión que se obtiene interpolando no es suficiente. Las NTC-77 contienen diagramas parecidos.

mando los siguientes puntos, o puntos cercanos a ellos:

- a) El punto  $P_{oc}$ , que corresponde a carga axial de compresión pura, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias de compresión uniforme (en secciones simétricas).
- b) El punto  $D$ , que corresponde a la falla balanceada, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias definido por  $\epsilon_{cu}$  en la fibra extrema en compresión y por  $\epsilon_y$  en el acero de tensión. Este estado de deformaciones es el que se tiene cuando, simultáneamente, el concreto alcanza su deformación máxima útil y el acero su límite de fluencia.
- c) El punto  $M_o$ , que corresponde a momento sin carga axial, para el cual se supone un estado de deformaciones semejante a los obtenidos en el capítulo 5 para cálculos de resistencia a flexión.
- d) Un punto adicional entre los puntos  $P_{oc}$  y  $D$ , y otros dos puntos entre los puntos  $D$  y  $M_o$ .

En la mayoría de los casos, estos puntos son suficientes para definir con precisión adecuada el diagrama de interacción. En ocasiones se determinan puntos en la zona de flexotensión. La determinación de estos puntos se trata en la sección 6.6.

El procedimiento con hipótesis simplificadas se ilustra en el ejemplo 6.1, en el que se han usado las hipótesis simplificadas del Reglamento ACI 318-83. Se trata de calcular el diagrama de interacción de una sección con porcentajes iguales de refuerzo de compresión y de tensión, como el usual en columnas. La sección tiene también dos barras a medio peralte y en el ejemplo se ha considerado la contribución de estas barras.

El primer punto que se determina es el que corresponde a compresión sin momento (punto  $P_{oc}$  de la figura 6.1). Debido a que la sección es simétrica, el estado de deformaciones correspondiente es uniforme, como se muestra en el diagrama del ejemplo. Este caso resulta igual

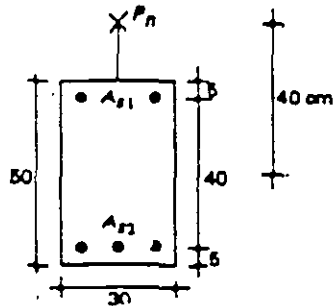
al de una columna sujeta a carga axial pura (capítulo 4) y la resistencia puede calcularse con la ecuación 4.1, la cual expresa que la resistencia total es la suma de las contribuciones del concreto y del acero. En secciones no simétricas, si se supone un estado uniforme de deformaciones se obtiene también un momento, por lo que el punto que se calcula no cae sobre el eje de ordenadas del diagrama de interacción. Sin embargo, tal punto resulta útil, ya que por lo general está localizado cerca del eje de ordenadas y sirve para determinar gráficamente la intersección del diagrama con el eje.

A continuación se calcula en el ejemplo el punto correspondiente a la falla balanceada (punto  $D$  en la figura 6.2). El estado de deformaciones unitarias se fija de tal manera que la deformación en la fibra extrema en compresión es igual a la deformación máxima útil del concreto (0.003 según el Reglamento ACI 318-83) y la deformación en el acero de tensión más alejado del eje neutro es igual a la deformación de fluencia (0.0021 para acero de 4 200 kg/cm<sup>2</sup> de esfuerzo de fluencia). A partir del diagrama de deformaciones unitarias se calculan las deformaciones unitarias,  $\epsilon_s$ , en todos los lechos de refuerzo; después se calculan los esfuerzos en el acero, que son iguales al esfuerzo de fluencia cuando la deformación unitaria es mayor que la de fluencia, e iguales a  $\epsilon_s E_s$ , cuando es menor, y a continuación se calculan las fuerzas en los distintos lechos de acero,  $F_s$ , multiplicando las áreas de acero por los esfuerzos correspondientes. Por triángulos semejantes se calcula la profundidad del eje neutro,  $c$ , y a partir de ésta, la profundidad del bloque equivalente (0.85c en este caso) y la fuerza de compresión en el concreto,  $C_c$ . Para el estado de deformaciones supuesto, los dos lechos superiores de acero trabajan a compresión y el lecho inferior, a tensión. La suma algebraica de todas las fuerzas que actúan en la sección, da el valor de la fuerza normal,  $P$ , que resulta de compresión, y la suma de momentos alrededor del eje geométrico es el momento flexionante resistente,  $M$ . De esta manera se obtiene el punto de falla balanceada.



**EJEMPLO 6.2 Obtencción de la resistencia de una sección por tanteos.**

**DATOS**



$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

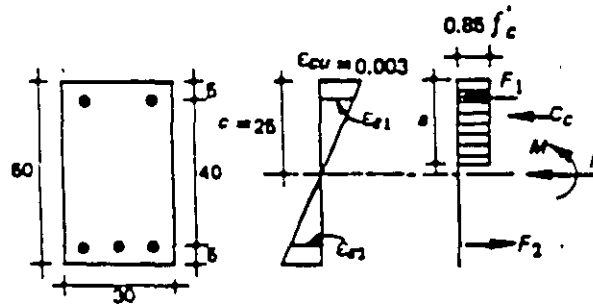
$$f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$e = 40 \text{ cm}$$

$$A_{s1} = 2 \text{ barras del No. 6} = 5.8 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = 3 \text{ barras del No. 8} = 15 \text{ cm}^2$$

1er. TANTEO ( $c = 25 \text{ CM}$ )



$$a = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1\,400}\right) c = \left(1.05 - \frac{350}{1\,400}\right) 25 = 0.8c = 20 \text{ cm (figura 5.6)}$$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_{s2} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 5.8 \times 4\,200 = 24\,400 \text{ kg} = 24.4 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 15 \times 4\,200 = 63\,000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$$

En la referencia 6.1 se proporcionan diagramas de interacción adimensionales basados en las hipótesis del Reglamento ACI 318-77, que son semejantes a las del Reglamento ACI 318-83.

La obtención de diagramas de interacción adimensionales como los de las referencias 6.1 y 6.2 se hace normalmente con la ayuda de computadoras electrónicas. Esto permite calcular fácilmente un gran número de puntos de cada diagrama, por lo que éstos quedan perfectamente definidos.

### 6.3.2 *Obtención de la resistencia por tanteos utilizando hipótesis simplificadoras*

El procedimiento descrito en la sección anterior, que consiste en obtener la resistencia a partir del diagrama de interacción, es apropiado cuando se va a determinar la resistencia de una sección para distintas combinaciones de  $P$  y  $M$ , o para distintas excentricidades de la carga aplicada. Cuando se trata de calcular la resistencia para una sola combinación de  $P$  y  $M$ , resulta más conveniente el procedimiento de tanteos descrito en esta sección.

Este procedimiento consiste en calcular los valores de  $P$  y de  $M$  para una configuración supuesta de deformaciones unitarias, de la misma manera que en el ejemplo 6.1. Se determina después la excentricidad,  $e = M/P$ , y se compara con la excentricidad de la carga externa. Si coinciden las dos excentricidades el problema está resuelto, y si no coinciden se hacen otros tanteos cambiando la configuración de deformaciones unitarias hasta lograr la coincidencia. Se ve que el procedimiento es básicamente el mismo que el usado en el capítulo 5 para calcular la resistencia en flexión. La diferencia estriba en que para flexión se procede a tantear hasta que  $C$  sea igual a  $T$  (lo cual equivale a la condición  $P = 0$  y  $e = \infty$ ), mientras que para flexocompresión se tantea hasta que  $M/P$  sea igual a la excentricidad buscada.

En el ejemplo 6.2 se ilustra este procedimiento aplicado a una sección rectangular con re-

fuerzo asimétrico. El ejemplo se ha resuelto mediante las hipótesis simplificadoras del Reglamento ACI 318-83. En el primer tanteo, la excentricidad que corresponde a los valores obtenidos de las acciones internas  $P$  y  $M$  es de 31.6 cm, la cual difiere de la excentricidad de la carga, que es de 40 cm, como se indica en los datos del problema. Para aumentar la excentricidad, en el segundo tanteo se disminuyó la profundidad del eje neutro, con lo que la excentricidad resultante coincidió con la excentricidad dada como dato. La carga que puede resistir la sección, por consiguiente, es el valor de  $P_n$  obtenido en el segundo tanteo, o sea 104.4 ton. La carga de diseño se obtendría multiplicando este valor de  $P_n$  por el factor de reducción  $\phi$  que, para este caso, vale 0.70.

### 6.3.3 *Procedimiento general*

En las secciones anteriores se ha indicado la manera de obtener las acciones internas máximas en una sección, utilizando hipótesis simplificadoras referentes a la deformación unitaria máxima útil del concreto y al diagrama de esfuerzos de compresión. Es posible emplear también el procedimiento general descrito en la sección 5.6 para el caso de flexión, el cual es aplicable para cualquier diagrama esfuerzo-deformación tanto del concreto como del acero.

En la figura 6.4 se ilustra la obtención de los valores de  $P_n$  y  $M_n$  para una sección determinada suponiendo el estado de deformaciones unitarias indicado en la figura 6.4b. Las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero son las de la figura 5.14 (capítulo 5). Aplicando el procedimiento para distintas configuraciones de deformaciones unitarias, se obtuvo el diagrama de interacción de la figura 6.5.

Debe observarse que, para obtener los valores correspondientes a las resistencias, es necesario hacer tanteos variando la deformación máxima en el concreto, pero manteniendo la excentricidad constante, hasta obtener un valor máximo de  $M_n$ , tal como se hizo en la sección 5.6 en el caso de flexión simple. De ahí que en la

**EJEMPLO 6.2 (Continuación)**

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1}f_{s1} = 5.8 \times 4\,200 = 24\,400 \text{ kg} = 24.4 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2}f_{s2} = 15 \times 4\,200 = 63\,000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 950 \times 16 \times 30 = 143\,000 \text{ kg} = 143 \text{ ton}$$

$$P_n = C_c + F_1 - F_2 = 143.0 + 24.4 - 63.0 = 104.4 \text{ ton}$$

Cálculo del momento:

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 143.0$	17	2 450
$F_1 = 24.4$	20	488
$F_2 = 63.0$	20	1 260

$$M_n = 4\,178 \text{ ton-cm}$$

$$e = \frac{M_n}{P_n} = \frac{4\,178}{104.4} = 40 \text{ cm}$$

Este valor coincide con la excentricidad de la carga. Por lo tanto:

$$P_n = 104.4 \text{ ton}$$

figura 6.5 los diagramas de deformaciones unitarias correspondientes a los distintos puntos del diagrama de interacción mostrados, tienen diferentes valores de deformación máxima en compresión.

#### 6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera

##### 6.4.1 Solución por tanteos

El problema consiste en encontrar el valor máximo de la carga axial  $P$  que actúa fuera de los planos de simetría, a distancias  $e_x$  y  $e_y$  de ellos. Esta condición es estáticamente equiva-

lente a considerar el elemento sujeto a una carga axial  $P$  y a dos momentos flexionantes,  $M_x = Pe_x$  y  $M_y = Pe_y$ .

Para un elemento de geometría y excentricidades dadas, aplicando las hipótesis simplificadas o el procedimiento básico a partir de características esfuerzo-deformación, por tanteos sucesivos se puede obtener el valor máximo de la carga  $P$  que actúa a las excentricidades dadas. En la figura 6.6 se presenta un cálculo típico para una posición supuesta del eje neutro que, junto con el valor de  $\epsilon_{cu} = 0.003$ , fija la distribución de deformaciones unitarias, las que tienen valores constantes en secciones paralelas al eje neutro supuesto. En este ejemplo la zona sujeta a compresión tiene forma trapecial. Se calculan las fuerzas, los brazos

sión, y desde infinito nuevamente hasta una excentricidad nula (punto 5), para una carga de tensión.

Los diagramas de interacción del Apéndice C se obtuvieron siguiendo un procedimiento semejante al descrito anteriormente.

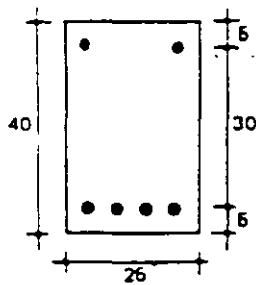
Referencias

- 6.1 Comité ACI 318-77. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Volume 2-Columns*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 6.2 Meli, R., y M. Rodríguez. *Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado*. México, D. F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1980.
- 6.3 Breker, B. "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, enero 1961.
- 6.4 Marín, J. "Abacos, fórmulas y criterios para el cálculo de columnas de edificios de concreto armado". *Boletín IMME*. Caracas, enero-junio 1978.

Ejercicios

- 6.1 Utilizando el diagrama de interacción del ejemplo 6.1, calcular la carga que puede resistir la sección mostrada para excentricidades de 60 cm y de 5 cm. Calcular también el momento que puede resistir la sección bajo una carga axial de 250 ton.
- 6.2 Determinar por el procedimiento de tanteos y usando hipótesis simplificadoras, la resistencia de la siguiente sección para una excentricidad de 20 cm hacia la cara con dos barras.

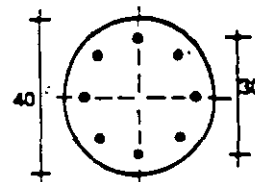
- 6.4 Calcular la carga axial que puede resistir la siguiente sección, usando las gráficas del Apéndice C con las hipótesis ACI, si está sometida a un momento de 20 ton-m.



$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 6 \text{ barras del No. 6}$$



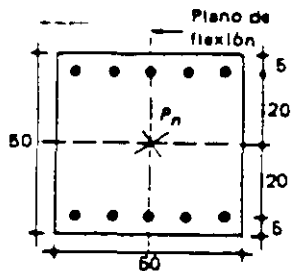
$$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 8 \text{ barras del No. 8}$$

- 6.3 Determinar el momento que puede resistir la siguiente sección por el procedimiento de tanteos usando las hipótesis ACI o DF. Verificar el resultado obtenido con las gráficas del Apéndice C.

- 6.5 Calcular los momentos de diseño de la siguiente sección en cada uno de los dos planos principales de flexión cuando está sometida a una carga axial última,  $P_n = 300 \text{ ton}$ .

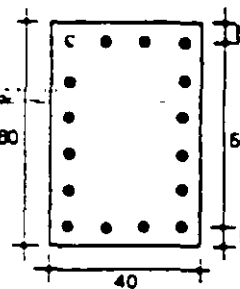


$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 10 \text{ barras del No. 8}$$

$$P_n = 300 \text{ ton}$$



$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 16 \text{ barras del No. 6}$$

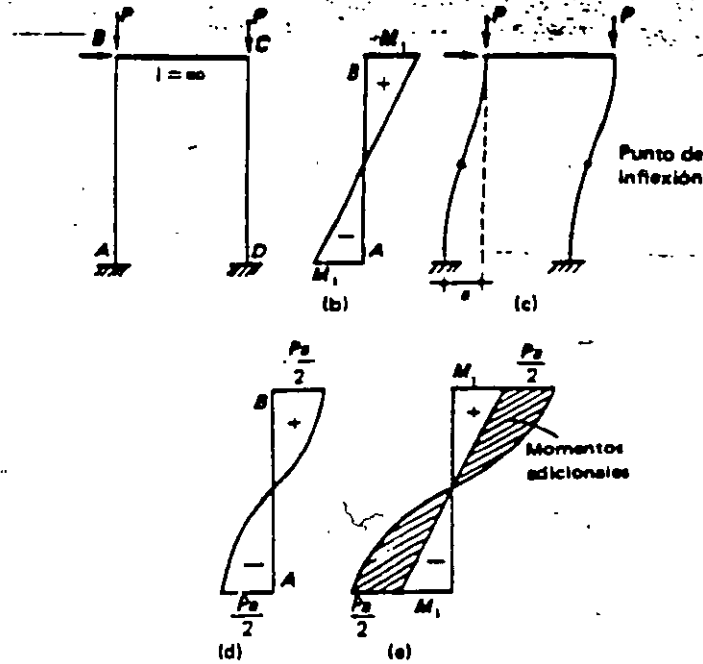


Figura 13.2 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez infinita).

tos de primer orden mostrado en la figura 13.2b. (Se entiende por momentos de primer orden los que no consideran las deformaciones de la columna.) Por efecto del desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna (figura 13.2c) se presentan en la columna A-B los momentos de segundo orden mostrados en la figura 13.2d. (Se entiende por momentos de segundo orden, los momentos adicionales debidos a las deformaciones de la columna.) El diagrama de momentos totales es el de la figura 13.2e. El caso representado en la figura

13.2 corresponde a un ejemplo hipotético en el que la rigidez de la viga superior es infinita o sea, que la columna está empotrada en sus dos extremos. Cuando la rigidez de la viga es finita, los momentos adicionales son diferentes en los dos extremos de la columna, como se muestra en la figura 13.3. Los momentos adicionales se pueden calcular aplicando la carga  $P$  en el punto de inflexión de la columna, y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos respecto al punto de inflexión. La reducción de resistencia por esbeltez

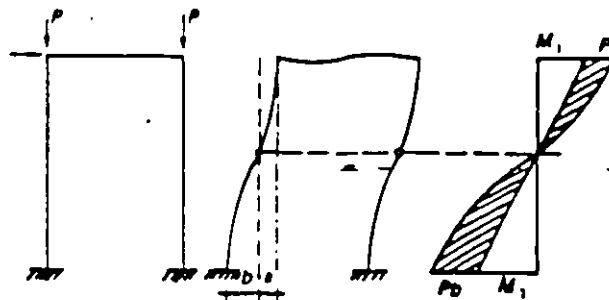


Figura 13.3 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez finita).

# CAPÍTULO 13

## Efectos de esbeltez

13.1 Introducción. / 13.2 Comportamiento y variables principales. / 13.3 Métodos de dimensionamiento. / 13.4 Cálculo de los efectos de esbeltez. / 13.5 Ejemplos.

### 13.1 Introducción

Se entiende por efecto de esbeltez la reducción de resistencia de un elemento sujeto a compresión axial o a flexo-compresión, debida a que la longitud del elemento es grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Para ilustrar este efecto, considere una columna articulada en sus extremos, sujeta a carga axial y momento flexionante (figura 13.1a). Esta columna es equivalente al sistema mostrado en la figura 13.1b, y tiene el diagrama de momentos flexionantes de la figura 13.1c. Al aplicar la carga  $P$  al sistema de la figura 13.1b, éste se deforma, como se mues-

tra en la figura 13.1d, y, como consecuencia de esta deformación, aumenta la distancia de la línea de acción de las cargas  $P$  al eje de la columna, lo cual equivale a que crezca la excentricidad de la carga en una cantidad  $y$ . Por lo tanto, el momento flexionante real en una sección cualquiera de la columna es:

$$M = Pe + Py = P(e + y)$$

El momento es máximo, para este ejemplo, a la mitad de la altura, donde alcanza el valor:

$$M = P(e + y_{m\acute{a}x})$$

Como consecuencia de los momentos adicionales  $Py$ , la resistencia del elemento se reduce respecto a la resistencia que tendría si sólo se aplicase el momento  $Pe$ . Esta reducción de resistencia se conoce como efecto de esbeltez. Este se presenta cualquiera que sea la longitud del elemento, pero es importante únicamente en elementos cuya relación longitud-peralte es grande, o sea, en elementos esbeltos. Sólo en estos elementos la magnitud de los momentos adicionales,  $Py$ , es significativa en relación con los momentos  $Pe$ .

La reducción de resistencia por esbeltez puede deberse también a desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, como sucede en marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en carga o en geometría. En la figura 13.2a se muestra un marco de este tipo. La columna  $\bar{A}\bar{B}$  de este marco tiene el diagrama de momen-

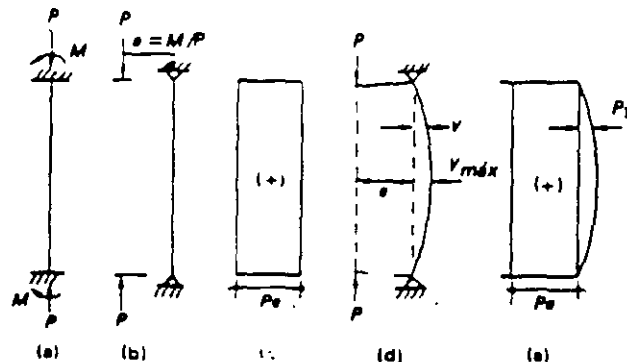


Figura 13.1 Momentos adicionales en una columna por efecto de esbeltez.

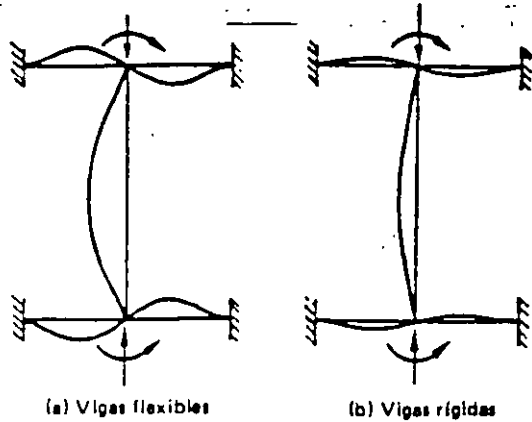


Figura 13.5 Efecto de la rigidez flexionante de las vigas que restringen a una columna.

a) Rigidez a flexión de las vigas que restringen a la columna

Mientras mayor sea esta rigidez a flexión, es mayor el grado de empotramiento o restricción de la columna en sus extremos y, por tanto, son menores las deflexiones de la columna y los momentos adicionales  $P\delta$ . Este efecto puede verse en la figura 13.5, en la cual se com-

para una columna restringida por vigas flexibles (figura 13.5a) y otra restringida por vigas rígidas (figura 13.5b).

b) Rigidez a flexión de la columna

La rigidez a flexión de la propia columna tiene influencia sobre la reducción de resistencia por esbeltez, ya que mientras más rígida sea la columna, son menores sus deflexiones y, por lo tanto, el valor de los momentos adicionales  $P\delta$ . La rigidez a flexión de la columna depende principalmente del tamaño de la sección transversal, del módulo de elasticidad del concreto, del porcentaje de refuerzo longitudinal y de la longitud de la columna. El efecto combinado del tamaño de la sección transversal y de la longitud, suele tomarse en cuenta en los métodos de dimensionamiento mediante el parámetro llamado esbeltez de la columna, que se define como la relación entre la longitud y el radio de giro de la sección transversal. A veces, la esbeltez se define también en función de la relación entre la longitud y la dimensión menor de la columna.

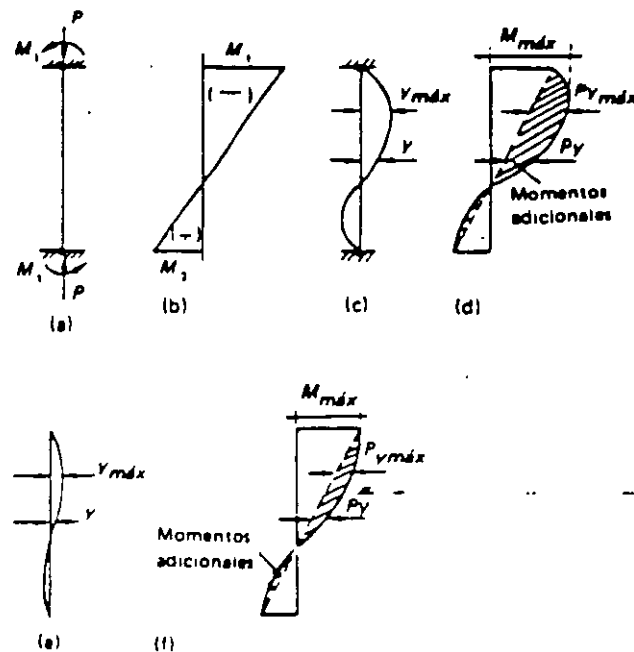


Figura 13.6 Efecto de esbeltez en columnas con doble curvatura.

es mayor cuando los extremos de la columna pueden sufrir desplazamiento lateral relativo, que cuando están restringidos contra el mencionado desplazamiento.

En la figura 13.4a se ha trazado con línea llena el diagrama de interacción de una columna corta en la que los efectos de esbeltez son despreciables. Si en esta columna se aumenta la carga progresivamente, manteniendo constante la excentricidad, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la recta 0-1. La intersección de la recta 0-1 con el diagrama de interacción representa la resistencia de la columna corta. Si en una columna esbelta, como la de la figura 13.4a, la carga aumenta progresivamente en la misma forma, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la curva 0-2. La diferencia en las abscisas de los puntos de las dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe precisamente a los momentos adicionales  $P\delta$ . La resistencia de la columna esbelta está representada por la intersección de la línea 0-2 con el diagrama de interacción. Como puede verse en la figura, es menor que la resistencia de la columna corta.

En la figura 13.4b se ha indicado también, con línea de punto y raya, la historia de carga de una columna sumamente esbelta que falla por inestabilidad. La característica de este tipo de falla, es que la carga aplicada alcanza su valor máximo antes de que la línea que representa la historia de carga corte al diagrama de interacción.

La falla, en este caso, ocurre por pandeo súbito del elemento, mientras que en el caso anterior, la falla ocurre por aplastamiento del concreto, en forma similar a la falla de una columna corta. Debido a que los elementos de concreto reforzado son de sección transversal relativamente grande, es raro que fallen por inestabilidad. De ordinario, se presenta únicamente una reducción de resistencia por efecto de esbeltez. En este capítulo se describen métodos para calcular esta reducción de resistencia.

### 13.2 Comportamiento y variables principales

El comportamiento de una columna que forma parte de una estructura de concreto reforzado es complejo, debido a que las estructuras generalmente son monolíticas y a que las columnas están restringidas por otros elementos estructurales que influyen en su comportamiento. Se han realizado ensayos de columnas esbeltas que forman parte de marcos de concreto. Sin embargo, la interpretación de su comportamiento requiere un estudio previo del comportamiento de estructuras hiperestáticas y cae fuera del alcance de este texto. Sólo se describirá aquí la influencia de algunas variables sobre la resistencia de columnas esbeltas que forman parte de estructuras.

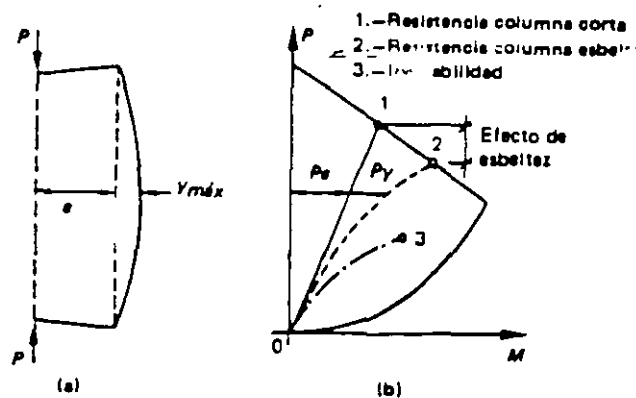


Figura 13.4 Comparación del comportamiento de una columna corta, de una columna esbelta y de una columna que falla por inestabilidad.



cuando los marcos no pueden hacerlo. Esto se debe a que, en el primer caso, los momentos adicionales máximos se presentan generalmente donde son máximos los momentos de primer orden, como puede verse en las figuras 13.2 y 13.3.

La magnitud del desplazamiento lateral relativo depende de la rigidez a flexión de las columnas y de las vigas de los marcos. Si la rigidez a flexión de las vigas es pequeña, en relación con la rigidez a flexión de las columnas, la rotación de los extremos de las columnas es grande y aumenta, por lo tanto, el desplazamiento lateral relativo. El desplazamiento lateral también depende del tipo de carga que actúa sobre el marco. Por lo general, es mayor el desplazamiento cuando el marco está sujeto a cargas laterales que cuando está sujeto únicamente a cargas verticales.

Para valuar el desplazamiento lateral debe considerarse la estructura en conjunto y no solamente un marco por separado [13.11]. Por ejemplo, considérese la estructura de la figura 13.8, en la que existen muros rígidos en los ejes *A* y *D*. Si actúa la fuerza horizontal *F* sobre dicha estructura, los marcos *B* y *C* no sufrirán desplazamientos laterales importantes, a pesar de no estar contraventados, ya que lo impiden los marcos *A* y *D* que son muy rígidos por la presencia de los muros. Se supone en este ejemplo que existe una losa de piso lo suficientemente rígida para obligar a que todos los marcos se deformen en conjunto. El análisis

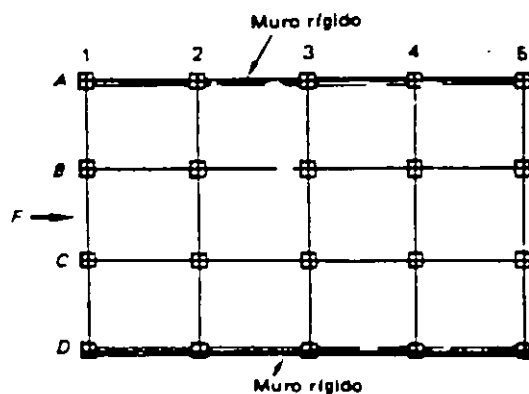


Figura 13.8 Estructura con muros rígidos.

detallado de estructuras para valuar los desplazamientos laterales está fuera del alcance de este texto.\*

#### e) Duración de la carga

Cuando la carga actúa por un periodo prolongado de tiempo, las deflexiones aumentan por efecto de la contracción y el flujo plástico del concreto. Por lo tanto, aumentan también los momentos adicionales y la reducción de resistencia por efecto de esbeltez. La influencia de la duración de la carga es más importante mientras mayores sean las deflexiones adicionales.

### 13.3 Métodos de dimensionamiento

Del análisis anterior sobre la influencia de las distintas variables en la reducción de resistencia por esbeltez, puede deducirse que la solución rigurosa del problema consiste en calcular las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. La suma de estos momentos y de los de primer orden es igual a los momentos totales de diseño. Sin embargo, el cálculo de los momentos de segundo orden, que se conoce con el nombre de análisis estructural de segundo orden, resulta demasiado laborioso para fines de dimensionamiento de estructuras comunes.

Algunas de las razones que complican este análisis son las siguientes. Es difícil evaluar con precisión las deflexiones de los elementos de la estructura en todas las etapas de carga, ya que debe tomarse en cuenta el comportamiento inelástico del concreto reforzado y los efectos del agrietamiento, contracción y flujo plástico. Las rigideces relativas de los elementos varían con la etapa de carga, ya que algunos alcanzan su momento de fluencia antes que otros y, por lo tanto, pierden su rigidez más rápidamente. El análisis debe hacerse por aproximaciones suce-

\*El lector interesado puede consultar la siguiente referencia: E. Rosenblueth y L. Esteve, "Folleto Complementario del Reglamento del Distrito Federal, Análisis Sísmico", edición de la Revista Ingeniería, México.

c) *Relación de excentricidades en los dos extremos de la columna y tipo de curvatura*

La relación de excentricidades, o sea, la relación entre los momentos en los dos extremos de la columna, influye en la magnitud de las deflexiones y, por lo tanto, en los momentos adicionales por esbeltez. Considérese, por ejemplo, el caso mostrado en la figura 13.6a, en el que los momentos de apoyo sobre barra son del mismo signo, y el diagrama de momentos flexionantes de primer orden es el indicado en la figura 13.6b. La columna deformada tiene la forma mostrada en la figura 13.6c, y el diagrama final de momentos, que se obtiene sumando el diagrama de la figura 13.6b con los momentos adicionales  $Py$ , es el mostrado en la figura 13.6d. Puede verse que, en este caso, el momento máximo de primer orden y el momento máximo adicional,  $Py_{máx}$ , ocurren en secciones diferentes de la columna. Por consiguiente, el momento máximo total no es la suma de los momentos máximos de primer y segundo orden, sino un valor menor. Para que haya reducción de resistencia por esbeltez en columnas de este tipo, es necesario que los momentos adicionales sean lo suficientemente grandes para desplazar la sección de momento máximo, como se muestra en la figura 13.6d. Puede suceder que la columna no sea lo suficientemente esbelta para que ocurra este desplazamiento. En este caso no habrá reducción de resistencia, como se muestra en las figuras

13.6e y 13.6f. Cuando hay reducción de resistencia, ésta es relativamente pequeña, ya que el momento máximo no difiere mucho del momento aplicado en el extremo.

Considérese ahora el caso en que los momentos de apoyo sobre barra son iguales y de signo contrario (figura 13.7a). Aquí, el momento flexionante de primer orden es constante a lo largo de la columna (figura 13.7b), y la columna se deforma con curvatura simple (figura 13.7c). El momento máximo es igual a la suma del momento constante y el momento adicional máximo  $Py_{máx}$ , que ocurre a la mitad de la altura (figura 13.7d). En estas columnas siempre hay reducción de resistencia por esbeltez, cualquiera que sea su longitud, y esta reducción es mayor que en el caso de la figura 13.6, puesto que el momento máximo total es la suma de los dos momentos máximos.

d) *Desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna*

Se ha mencionado que las columnas pueden formar parte de marcos que no tengan posibilidad de sufrir deformaciones laterales, por estar contraventados o unidos a otras estructuras muy rígidas, o de marcos cuya resistencia a cargas laterales dependa exclusivamente de la resistencia a flexión de sus miembros, y que, por lo tanto, puedan sufrir deformaciones laterales. También se ha mencionado que cuando los marcos pueden desplazarse lateralmente, los momentos adicionales son mayores que

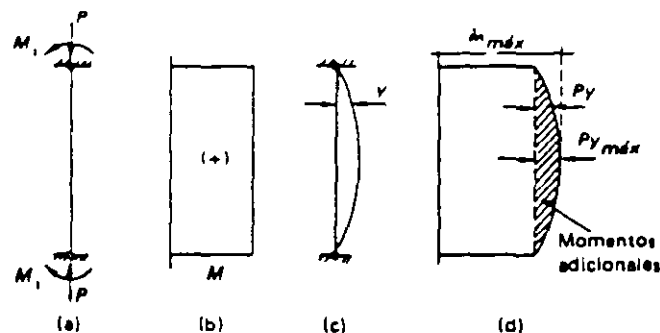


Figura 13.7 Efecto de esbeltez en columnas con curvatura simple.

del diagrama de interacción mostrado con línea llena. Los incrementos de carga están representados por puntos sobre la línea 0-2, en la cual la excentricidad aumenta con el nivel de carga, puesto que el valor de  $\delta$  depende, en estos métodos, del valor de la carga  $P$ .

Un ejemplo de estos métodos de amplificación de momentos es el presentado en el Reglamento ACI 318-83 y en las NCT-77 del Reglamento del Distrito Federal.

#### b) Métodos del momento complementario

En estos métodos, se calculan los valores  $P$  y  $M$  mediante un análisis de primer orden y a partir de estos valores se calcula la excentricidad  $e = M/P$  que tendría la columna si no hubiese efectos de esbeltez. A esta excentricidad,  $e$ , se agrega una excentricidad adicional,  $e_1$ , que es función de las principales variables que intervienen en la reducción de resistencia por esbeltez. Al aumentar la excentricidad, el dimensionamiento de la columna se hace para un momento total que es igual al momento de primer orden más un momento complementario que resulta de multiplicar la carga  $P$  por la excentricidad adicional  $e_1$ . El valor de la carga  $P$  no se modifica.

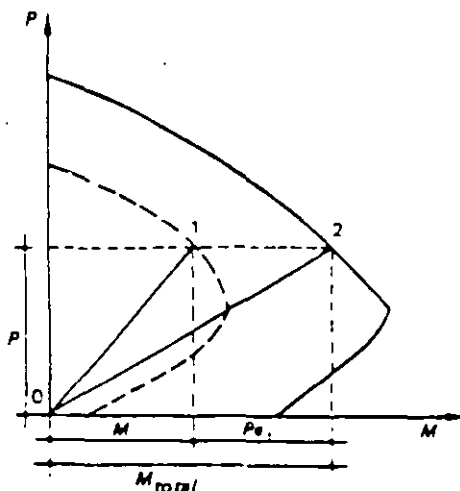


Figura 13.11 Valores de dimensionamiento en los métodos del momento complementario

En la figura 13.11 se muestra este concepto de dimensionamiento. El punto 1 del diagrama de interacción trazado con línea punteada corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna sin considerar el efecto de esbeltez. El punto 2 del diagrama de interacción trazado con línea llena corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna esbelta. Puesto que el valor de la excentricidad adicional es independiente del valor de  $P$ , la línea 0-2, que representa incrementos de carga de la columna esbelta, es una línea recta, a diferencia de la línea 0-2 de los métodos de amplificación de momentos, que es una línea curva. Sin embargo, los valores de dimensionamiento en ambos métodos, o sea, los puntos 2, son similares.

#### c) Métodos del factor de reducción

En estos métodos se supone que la carga axial y el momento que puede resistir una columna esbelta son iguales a los que puede resistir una columna corta, multiplicados por un factor de reducción  $\gamma$ , que siempre es menor que la unidad. Por lo tanto, para fines de dimensionamiento, los valores de  $P$  y  $M$  obtenidos de un análisis de primer orden se dividen entre el factor  $\gamma$ , con lo cual se obtienen valores amplificados, para los que se dimensiona la columna.

Este concepto de dimensionamiento se ilustra en la figura 13.12. El punto 1 corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna corta y el punto 2, a los de la columna larga.

En este caso, no se considera el cambio en la excentricidad causado por las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. Por lo tanto, en estos métodos es menos precisa la representación del comportamiento de la columna que en los dos métodos anteriores. Por esta razón, actualmente se tiende a abandonar este enfoque del problema. El Reglamento ACI de 1963 presentaba un método basado en factores de reducción, el cual se sustituyó en 1971 por un método de amplificación de momentos.

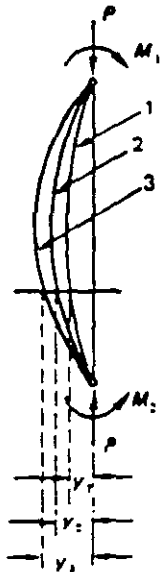


Figura 13.9 Incrementos sucesivos de deformaciones debidos a momentos de segundo orden.

sivas, ya que los momentos adicionales producen deflexiones adicionales, las que a su vez incrementan nuevamente los momentos. Por ejemplo, considérese que en la figura 13.9, la línea 1 representa la columna deformada por efecto de los momentos de primer orden; los momentos adicionales,  $Py_1$ , incrementan las deformaciones, y la columna deformada queda representada ahora por la línea 2, pero esto incrementa los momentos adicionales que ahora tienen el valor  $Py_2$ ; las deflexiones también vuelven a aumentar al aumentar los momentos adicionales, y así sucesivamente. El procedimiento de aproximaciones sucesivas se realiza calculando los momentos y las deformaciones de la manera descrita, hasta que los incrementos entre dos etapas sucesivas sean muy pequeños en comparación con los momentos totales. Puede suceder que el procedimiento no converja y entonces la estructura es inestable.

Las consideraciones anteriores indican que un análisis de segundo orden sólo puede hacerse en forma expedita con programas para computadora electrónica bastante elaborados. Por lo tanto, no suele usarse este procedimiento excepto en estructuras importantes en las que existan reducciones fuertes de resistencia por

esbeltez. En este texto no se presentan métodos de análisis de segundo orden. El lector interesado puede consultar las referencias 13.1 y 13.2.

El dimensionamiento de columnas esbeltas en estructuras comunes suele hacerse con métodos simplificados, en los que no es necesario desarrollar análisis de segundo orden. Dichos métodos simplificados pueden reunirse en los tres siguientes grupos.

a) Métodos de amplificación de momentos

Estos métodos consisten en obtener el valor de la carga axial,  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , en las columnas de una estructura por medio de un análisis de primer orden, y dimensionar las columnas para el mismo valor de  $P$  y para un momento amplificado,  $\delta M$ , donde  $\delta$  es un factor siempre mayor que la unidad. En la figura 13.10 se ilustra este concepto. Si se despreciase el efecto de esbeltez, la columna se dimensionaría para los valores de  $P$  y  $M$ , y su resistencia sería la correspondiente al punto 1 del diagrama de interacción mostrado con línea punteada. Los incrementos de carga con un valor constante de la excentricidad estarían representados por puntos sobre la línea recta 0-1. Para tomar en cuenta el efecto de esbeltez, la columna se diseña para los valores  $P$  y  $\delta M$ , y su resistencia es la que corresponde al punto 2

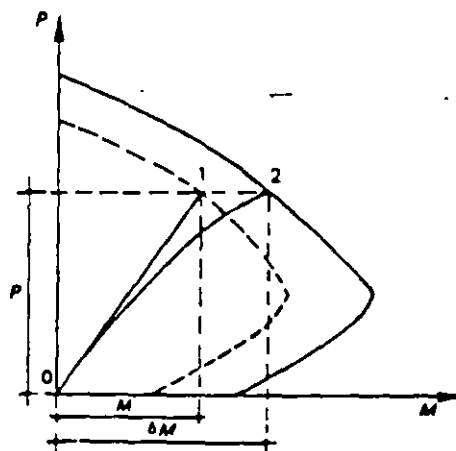


Figura 13.10 Valores de dimensionamiento en los métodos de amplificación de momentos.

318-83 establece que los elementos se dimensionen usando la carga axial,  $P_u$ , afectada del factor de carga y obtenida de un análisis elástico convencional de primer orden, y un momento amplificado  $M_c$  definido por la ecuación:

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s} \quad (13.6)$$

$M_{2b}$  es el mayor de los momentos en los extremos del elemento producido por cargas que no provocan desplazamiento lateral apreciable y  $M_{2s}$  es el correspondiente a cargas que sí provocan dicho desplazamiento. Al final de esta sección se hace un comentario sobre lo que puede considerarse un desplazamiento lateral apreciable.

Los factores de amplificación  $\delta$  quedan definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{\phi P_c}} \geq 1.0 \quad (13.7)$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\phi \sum P_c}} \geq 1.0 \quad (13.8)$$

Para estructuras no contraventeadas, o sea, que pueden sufrir desplazamientos laterales, deben calcularse  $\delta_b$  y  $\delta_s$ ; para estructuras contraventeadas puede considerarse que  $\delta_s$  vale cero. Puede verse que la ecuación 13.7 es igual a la 13.5 con la inclusión únicamente del factor de reducción  $\phi$  que tiene los valores indicados en la sección 6.3.1 para miembros sujetos a flexo-compresión. La ecuación 13.8 se deriva también de la 13.5, haciendo  $C_m$  igual a uno y sumando las cargas  $P_u$  y  $P_c$  de todas las columnas de un piso en vez de considerar cada columna en forma aislada. Esto último se hace para tomar en cuenta que cuando las columnas están unidas por una losa rígida que trabaja como diafragma horizontal, todas tienen el mismo desplazamiento lateral. A continuación se presenta la forma

de evaluar  $C_m$  y  $P_c$ , términos que aparecen en las ecuaciones 13.7 y 13.8.

**Valuación de  $C_m$ .** En el Método ACI se proponen las siguientes expresiones para calcularlo:

Para elementos sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo y sin cargas transversales entre sus apoyos,

$$C_m = 0.6 + 0.4 (M_{1b}/M_{2b}) \quad (13.9)$$

pero no menor que 0.4.

Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo o con cargas transversales entre sus apoyos,

$$C_m = 1. \quad (13.10)$$

Los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  son los momentos flexionantes en los extremos del elemento, siendo  $M_{2b}$  el momento numéricamente mayor. El término  $0.4 (M_{1b}/M_{2b})$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en curvatura doble. Obsérvese que cuando  $M_{1b} = M_{2b}$ , y el elemento se flexiona en curvatura simple, el valor de  $C_m$  es igual a la unidad, y la ecuación 13.9 se transforma en la ecuación 13.2. Para el caso de columnas con desplazamiento lateral relativo entre sus extremos, el valor de  $C_m$  siempre es igual a la unidad, ya que en estas columnas el momento máximo de segundo orden ocurre en la misma sección que el momento máximo de primer orden, como sucede también en columnas con curvatura simple y momentos iguales en sus extremos.

**Valuación de  $P_c$ .** La siguiente ecuación da la carga crítica de pandeo o carga crítica de Euler de elementos de comportamiento lineal,

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} \quad (13.11)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el menor momento de inercia de la

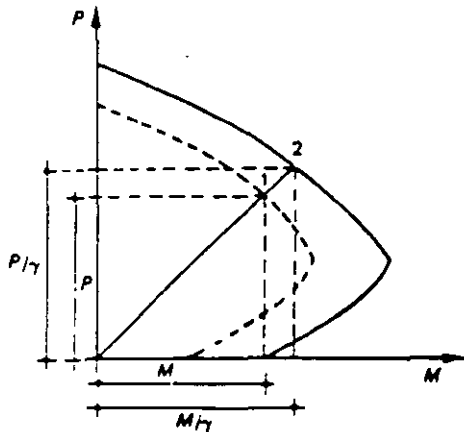


Figura 13.12 Valores de dimensionamiento en los métodos del factor de reducción.

La exposición detallada de los métodos de cada grupo resultaría demasiado extensa y de poca utilidad. Sólo se presentan aquí, por lo tanto, los métodos del Reglamento ACI 318-83 y de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal, que son muy similares. En ambos casos, la presentación de este capítulo se limita al cálculo de los momentos amplificados con los cuales se deben dimensionar los elementos.

### 3.4 Cálculo de los efectos de esbeltez

#### 3.4.1 Método del Reglamento ACI 318-83

Es un método de momento complementario que está basado en el análisis elástico de elementos esbeltos sujetos a carga axial y flexión, los cuales se denominan frecuentemente "vigas-columna". El análisis riguroso de estos elementos se puede efectuar aplicando una ecuación diferencial de segundo orden o un procedimiento numérico de aproximaciones sucesivas. Sin embargo, el análisis simplificado indica que el momento máximo en una viga-columna que deforma en curvatura simple puede calcularse aproximadamente con la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = M_o + \frac{Pa_o}{1 - (P/P_c)} \quad (13.1)$$

donde  $M_o$  y  $a_o$  son el momento y la deflexión máxima de primer orden, respectivamente,  $P$  es la carga axial, y  $P_c$  es la carga crítica de Euler.\*

En el caso de vigas-columna que se deforman en curvatura simple, y que tienen momentos iguales en ambos extremos, la ecuación 13.1 puede aproximarse por la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{M_o}{1 - (P/P_c)}, \quad (13.2)$$

y para otros casos, por la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{C_m M_o}{1 - (P/P_c)}, \quad (13.3)$$

donde  $C_m$  es un factor que hace equivalente el diagrama de momentos flexionantes del elemento, al diagrama de un elemento con momentos iguales en ambos extremos. La ecuación 13.3 puede expresarse en la forma:

$$M_{m\acute{a}x} = \delta M_o, \quad (13.4)$$

donde

$$\delta = \frac{C_m}{1 - (P/P_c)} \quad (13.5)$$

El término  $\delta$  de la ecuación 13.4 es el factor de amplificación de momentos mencionado en la sección 13.3. Los resultados de análisis teóricos y las mediciones efectuadas en ensayos de marcos de concreto reforzado, indican la conveniencia de distinguir entre los momentos producidos por cargas que no provocan desplazamientos laterales de la estructura y los momentos producidos por cargas que sí los provocan, y de establecer factores de amplificación distintos para ambos tipos de momentos. Por lo tanto, el Reglamento ACI

\* Para un tratamiento del problema de pandeo, que incluya la definición de carga crítica de Euler, consúltese algún texto especializado, como por ejemplo, S. P. Timoshenko y J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability". Segunda edición, McGraw-Hill, 1961, Nueva York.

ya se ha señalado anteriormente. La longitud efectiva de las columnas de estos marcos tiende a infinito cuando la rigidez del sistema de piso tiende a cero, o sea, cuando las columnas están articuladas. En este caso se tiene una columna inestable. En cambio, en columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral, la longitud efectiva,  $k l_u$ , nunca es mayor que la longitud real,  $l_u$ . Los nomogramas de la figura 13.14 se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal, pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

Una vez calculados los valores de  $C_m$  y de  $P_c$ , de la manera descrita, pueden determinarse los factores de amplificación,  $\delta$ , con las ecuaciones 13.7 y 13.8, y el momento máximo de diseño con la ecuación 13.6. En el caso de que los momentos máximos se presenten en los extremos de las columnas, los momentos de primer orden en los extremos del sistema de piso también deben incrementarse con el mismo factor de amplificación, ya que la resistencia del sistema de piso debe ser congruente con la de las columnas.

En el Reglamento ACI 318-89 se recomienda que se tomen en cuenta los efectos de esbel-

tez en columnas en las que el término  $k l_u/r$  es mayor que  $34 - 12 M_{1b}/M_{2b}$ , o que 22, según se trate, respectivamente, de marcos sin desplazamiento lateral o con desplazamiento lateral. El término  $r$  es el radio de giro de la sección, que puede estimarse como 0.30 veces el lado menor para columnas rectangulares, o 0.25 veces el diámetro para columnas circulares. Cuando el valor de  $k l_u/r$  es mayor que 100, no se permite el método simplificado descrito en esta sección, sino que debe usarse un análisis de segundo orden.

En este método se hace una diferenciación importante entre estructuras que puedan sufrir desplazamientos laterales importantes y las que no pueden. Es por lo tanto necesario distinguir ambos tipos de estructuras. Los sistemas estructurales a base de marcos no contraventeados o sin muros de cortante, que estén sujetos a cargas laterales de sismo o viento, sí sufren desplazamientos laterales y para ellas debe incluirse el factor de amplificación  $\delta$ . También debe incluirse en estructuras asimétricas en carga o geometría cuando la relación entre el desplazamiento lateral y altura de la columna es mayor de 1/1500. Cuando existen contra-

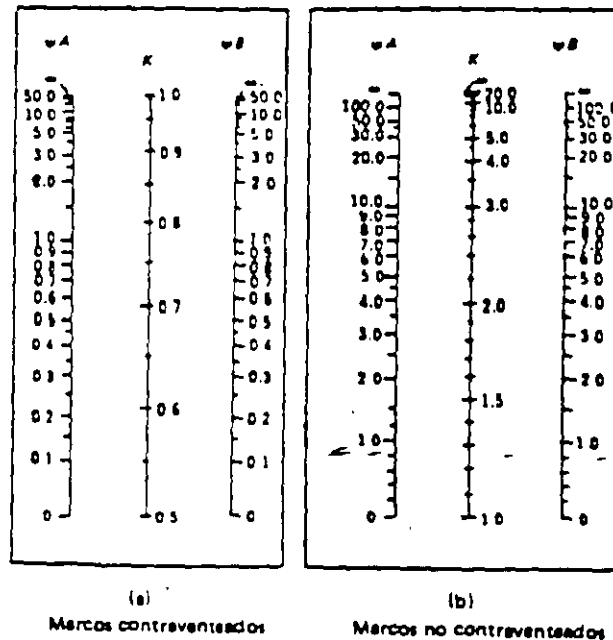


Figura 13.14 Factores para obtener las longitudes efectivas del pandeo.

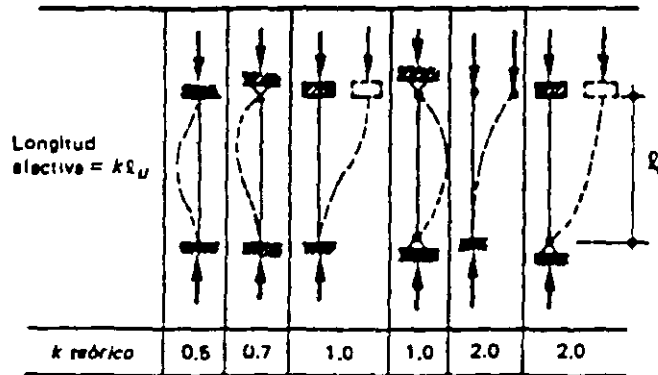


Figura 13.13 Longitud efectiva de pandeo para diferentes condiciones de apoyo.

sección transversal, y  $k l_u$  es la longitud efectiva de pandeo. La ecuación 13.11 no es rigurosamente aplicable a elementos de concreto reforzado, ya que su comportamiento no es lineal. Sin embargo, puede usarse, en forma aproximada, si el valor de  $EI$  se calcula con una de las siguientes ecuaciones,

$$EI = \frac{E_c I_g / 5 + E_s I_s}{1 + \beta_d} \quad (13.12)$$

ó,

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \quad (13.13)$$

En estas ecuaciones,  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto,  $E_s$ , el módulo de elasticidad del acero,  $I_g$ , el momento de inercia de la sección gruesa,  $I_s$ , el momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la columna, y  $\beta_d$  es la relación entre el momento producido por la carga muerta y el momento total. La ecuación 13.13 es más sencilla de usar que la ecuación 13.12 pero no se recomienda para columnas con relaciones muy elevadas de refuerzo. El término  $\beta_d$  toma en cuenta que la rigidez del elemento, la cual se puede medir en términos de  $EI$ , se reduce bajo la acción de cargas permanentes de larga duración.

La longitud efectiva de pandeo,  $k l_u$ , depende del grado de restricción de la columna en sus extremos y de la posibilidad de que exista desplazamiento lateral relativo. En la figura 13.13

se muestran las longitudes efectivas de pandeo de columnas con condiciones ideales de restricción (perfectamente articuladas o perfectamente empotradas). En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos. El grado de restricción depende de la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso, la cual puede definirse en la siguiente forma:

$$\psi = \frac{\sum K_{col}}{\sum K_{piso}} \quad (13.14)$$

En esta ecuación,  $K$  es la rigidez  $EI/l$ ;  $\sum K_{col}$  se refiere a las columnas que concurren en un nudo en la estructura; y  $\sum K_{piso}$  se refiere a los elementos que forman el sistema de piso y que están contenidos en el plano del marco estructural que se analiza; o sea, que no se incluyen en la suma las rigideces de las vigas perpendiculares al marco.

El cálculo de la longitud efectiva de pandeo en función del grado de restricción,  $\psi$ , puede hacerse utilizando los nomogramas de la figura 13.14, en los que  $\psi_A$  y  $\psi_B$  son los valores de  $\psi$  en los extremos  $A$  y  $B$  de la columna. Para valores dados de  $\psi_A$  y  $\psi_B$ , las longitudes efectivas son mayores para columnas de marcos con posibilidad de desplazamiento lateral. Esto refleja el hecho de que los momentos de segundo orden son mayores en este tipo de marcos, como



mos restringidos lateralmente, y tomarse el mayor de los dos factores.

Las recomendaciones respecto a los casos en que pueden despreciarse los efectos de esbeltez, aquellos en que se puede usar el método presentado anteriormente, y a las situaciones en que se requiere un análisis de segundo orden son iguales a las del Reglamento ACI 318-83, nada más sustituyendo  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  por  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente.

En las NTC-77, la estructura puede considerarse suficientemente contraventeada contra desplazamientos laterales si el índice de estabilidad calculado con la ecuación 13.15 es menor que 0.08, o si la rigidez de los contravientos o muros de cortante es por lo menos el 85 por ciento de la rigidez total de entrepiso. Se establece una restricción adicional respecto a la losa considerada como diafragma horizontal; su rigidez no debe ser menor que diez veces la rigidez de entrepiso del marco a que pertenece la columna en estudio. La rigidez de un diafragma horizontal con relación a un eje de columnas se define como la fuerza que debe aplicarse al diafragma en el eje en cuestión para producir una deflexión unitaria sobre dichos ejes, estando el diafragma libremente apoyado en los elementos que dan restricción lateral (muros, contravientos, etc.).

#### 13.4.3 Comentarios sobre los métodos ACI y NTC

Ambos métodos eran prácticamente iguales hasta que en el año de 1983 se introdujo en el Reglamento ACI la modificación que consiste en considerar por separado el momento para la situación de marco contraventeado y el momento para marco no contraventeado. Esta modificación se justificó sobre la base, principalmente, de que el efecto de esbeltez es mucho mayor cuando los marcos se pueden desplazar lateralmente. En algunos ensayos de marcos se detectó que al aplicar el mismo factor de amplificación a ambos tipos de momentos se obtenían resultados muy conservadores. Los factores de amplificación totales resultan menores

al hacer la diferenciación entre los dos momentos.

Sin embargo, como se ha planteado el método en el Reglamento ACI 318-83, se suman dos momentos,  $\delta_2 M_{2b}$  y  $\delta_2 M_{2s}$ , que pueden corresponder a secciones distintas de una columna, ya que no necesariamente el momento máximo con marco restringido lateralmente actúa en la misma sección que el momento máximo con marco no restringido. Por lo tanto, el momento que se obtiene con la ecuación 13.6 es en muchos casos mayor que el momento máximo. Esto hace que el método sea también conservador en este aspecto, pero en el Comentario al Reglamento ACI 318-83, al reconocer este hecho, se estima que el error que se comete no es muy grande ya que cuando hay desplazamientos laterales de la estructura los momentos  $M_{2s}$  son generalmente mucho mayores que los momentos  $M_{2b}$ .

### 13.5 Ejemplos

#### 13.5.1 Método del Reglamento ACI 318-83

En el ejemplo 13.1 se ilustra la aplicación del método descrito en la sección 13.4.1 a la obtención de los momentos de diseño de una columna interior de la planta baja de una estructura. Se ha supuesto que la estructura está sujeta a carga por gravedad y sismo simultáneamente, y que los resultados del análisis estructural (no incluido en el ejemplo) indican que la columna en cuestión tiene una carga axial de 150 ton, y momentos flexionantes de 50 ton-m y 80 ton-m en sus extremos superior e inferior, respectivamente; en el ejemplo se indica la parte que corresponde a la carga por gravedad y la parte que corresponde a sismo. También se ha supuesto que la estructura no está contraventeada lateralmente y que, por lo tanto, puede sufrir desplazamientos laterales.

El primer paso en la solución del problema es la determinación de las rigideces relativas del sistema de piso y de la columna.

vientos o muros de cortante suficientemente rígidos se reducen los desplazamientos laterales a valores muy pequeños y entonces puede considerarse que  $\delta_1$  vale cero. Para calcular si los contravientos o muros de cortante son suficientemente rígidos, el Comentario al Reglamento ACI 318-83 recomienda dos métodos.

El primer método consiste en calcular el índice de estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_v \Delta_u}{H_u h_s} \quad (13.15)$$

donde

$\Delta_u$  = desplazamiento lateral en el nivel de piso calculado en un análisis elástico de primer orden.

$H_u$  = fuerza cortante en el piso considerado.

$h_s$  = altura del entrepiso medida centro a centro de los pisos superior e inferior.

Si el índice de estabilidad es menor que 0.04 puede considerarse que los momentos debidos a desplazamientos laterales no exceden del 5 por ciento de los momentos de primer orden y que por lo tanto la estructura está suficientemente contraventeada.

El segundo método consiste en calcular la rigidez de los contravientos o muros de cortante y compararla con la rigidez del sistema de columnas. Si el primero es por lo menos seis veces mayor que el segundo, la estructura puede considerarse contraventeada. El cálculo de las rigideces de los contravientos, muros de cortante y sistema de columnas puede hacerse con diversos grados de precisión. Este cálculo no se incluye en el presente texto; puede consultarse la referencia ya mencionada de E. Rosenbluth y L. Esteva o algún texto de análisis estructural o de ingeniería sísmica.

#### 13.4.2 Método de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal

Este método es semejante al del Reglamento ACI 318-83.

También distingue entre estructuras que pueden y que no pueden desplazarse lateralmente. Sin embargo, no separa los momentos debidos a las cargas que producen el desplazamiento lateral y los momentos por cargas que no lo producen. Por lo tanto, el momento amplificado se calcula siempre con la ecuación

$$M_c = F_a M_2 \quad (13.16)$$

donde  $F_a$  es el factor de amplificación y  $M_2$  es el mayor de los momentos en los extremos de la columna, o sea, es la suma de los momentos  $M_{2b}$  y  $M_{2t}$  de la ecuación 13.6.

Para miembros que no puedan desplazarse lateralmente, el factor de amplificación se calcula con la ecuación

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} > 1.0 \quad (13.17)$$

la cual es igual a la ecuación 13.5. El término  $C_m$  se calcula con la ecuación 13.9, pero en vez de los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  se usan los momentos totales  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos de las columnas. La carga crítica,  $P_c$ , se calcula con la ecuación

$$P_c = \frac{F_R \pi^2 EI}{(H')^2} \quad (13.18)$$

Esta ecuación es igual a la 13.11, usando la notación  $H'$  para la longitud efectiva de pandeo e incluyendo el factor de reducción  $F_R$ . Para calcular  $EI$ , las NTC especifican la ecuación 13.13 únicamente.

Para miembros que puedan desplazarse lateralmente se utiliza la ecuación

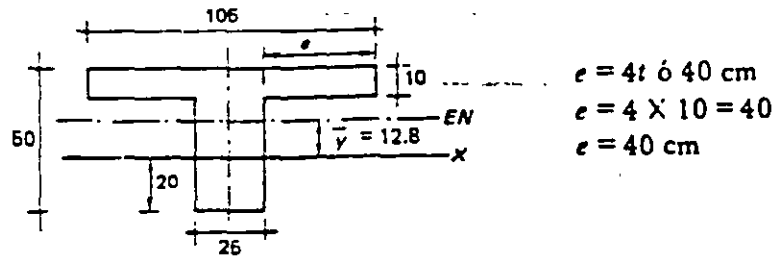
$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\sum P_c}} > 1.0 \quad (13.19)$$

equivalente a la 13.8. También debe calcularse el factor de amplificación con la ecuación 13.17, como si la columna tuviera sus extre-

## EJEMPLO 13.1 Continuación

## MOMENTOS DE INERCIA

a) Sistema de piso. Criterio de la estructura equivalente (capítulo 13, ACI 318-83).



Centroide:

$$\bar{y} = \frac{10 \times 105 \times 25}{25 \times 40 + 105 \times 10} = 12.8 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal:

$$I_t = \frac{105 \times 10^3}{12} + 105 \times 10 \times 12.2^2 + \frac{25 \times 40^3}{12} + 25 \times 40 \times 12.8^2$$

$$I_t = 462\,000 \text{ cm}^4$$

b) Columna:

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{40 \times 60^3}{12}$$

$$I_{AB} = I_{BC} = 720\,000 \text{ cm}^4$$

## RIGIDECES

1) Para todas las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*  
Nudo A:

$$\psi_A = 0, \text{ por tratarse de empotramiento}$$

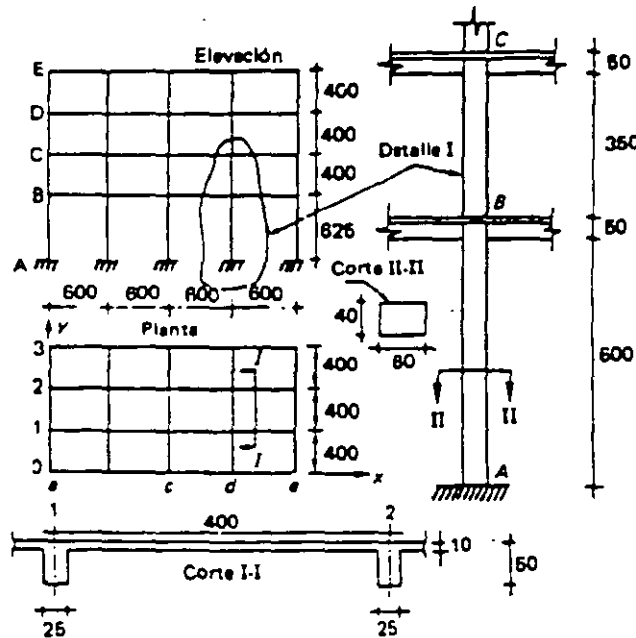
Nudo B:

Rigidez del sistema de piso:

$$K_{\text{trabe}} = \frac{I_t}{l_t} = \frac{462\,000}{600} = 770 \text{ cm}^3$$

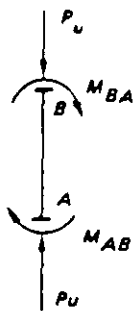
**EJEMPLO 13.1 Efecto de esbeltez en una columna por el método del Reglamento ACI 318-83**

**DATOS**



La estructura puede tener desplazamientos laterales y se analiza en la dirección  $O X$ .

**Acciones internas**



$$P_u(\text{cols. interiores}) = 150 \text{ ton}$$

$$P_u(\text{cols. de borde}) = 80 \text{ ton}$$

$$P_u(\text{cols. de esquina}) = 45 \text{ ton}$$

$$(M_{BA})_b = 10 \text{ ton-m}$$

$$(M_{BA})_i = 40 \text{ ton-m}$$

$$(M_{AB})_b = 5 \text{ ton-m}$$

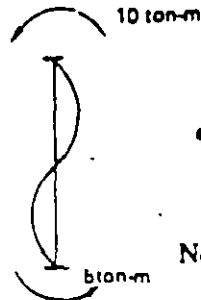
$$(M_{AB})_i = 65 \text{ ton-m}$$

**Materiales**

$$\text{Concreto, } f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero, } f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

## EJEMPLO 13.1 Continación



$$34 - 12 \frac{M_{1b}}{M_{2b}} = 34 - 12 \left( -\frac{5}{10} \right) = 34 + 6 = 40$$

$$\frac{kL_u}{r} < 34 - 12 \frac{M_{1b}}{M_{2b}}$$

No es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso.

- c) Con desplazamiento lateral

$$\frac{kL_u}{r} = \frac{720}{18} = 40 > 22$$

Sí es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso. Además como  $kL_u/r < 100$  se puede aplicar este método.

## CALCULO DE FACTORES DE AMPLIFICACION

- a)  $\delta_b = 1$  porque no es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso

$$b) \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{\phi \Sigma P_c}} > 1.0 \quad (\text{ecuación 13.8})$$

$$\Sigma P_u = 150 \times 6 + 80 \times 10 + 45 \times 4 = 1880 \text{ ton}$$

$$0.10 f'_c A_g = 0.10 \times 200 \times 40 \times 60 = 48\,000 \text{ kg} < 150 \text{ ton}$$

$$\text{Luego } \phi = 0.70$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kL_u)^2} \quad (\text{ecuación 13.11})$$

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_u} \quad (\text{ecuación 13.13})$$

$$E_c = 15\,000 \sqrt{f'_c} = 15\,000 \sqrt{200} = 212\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720\,000 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 13.1 *Continuación*

Rigidez de columnas:

$$K_{BC} = \frac{I_{BC}}{l_{BC}} = \frac{720\,000}{400} = 1\,800 \text{ cm}^3$$

$$K_{BA} = \frac{I_{BA}}{l_{BA}} = \frac{720\,000}{625} = 1\,152 \text{ cm}^3$$

$$\psi_B = \frac{\sum K_{\text{cols}}}{\sum K_{\text{trabes}}} = \frac{1\,800 + 1\,152}{770 + 770} = 1.9$$

- b) Para todas las columnas de los ejes *a* y *e*  
 $\psi_A = 0$ , por tratarse de empotramiento

$$\psi_B = \frac{\sum K_{\text{cols}}}{\sum K_{\text{trabes}}} = \frac{1\,800 + 1\,152}{770} = 3.8$$

**LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO**

- a) Columnas de los ejes *b*, *c* y *d* sin desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 1.9$ , se encuentra en la figura 13.14a:  
 $k = 0.64$ ,  $kl_u = 0.64 \times 600 = 384 \text{ cm}$
- b) Columnas de los ejes *b*, *c* y *d* con desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 1.9$ , se encuentra en la figura 13.14b:  
 $k = 1.20$ ,  $kl_u = 1.20 \times 600 = 720 \text{ cm}$
- c) Columnas de los ejes *a* y *e* sin desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 3.8$ , se encuentra en la figura 13.14a:  
 $k = 0.66$ ,  $kl_u = 0.66 \times 600 = 396 \text{ cm}$
- d) Columnas de los ejes *a* y *e* con desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 3.8$ , se encuentra en la figura 13.14b:  
 $k = 1.39$ ,  $kl_u = 1.39 \times 600 = 834 \text{ cm}$

**VERIFICACION DE ESBELTEZ**

- a) Radio de giro

$$r = 0.30 \times 60 = 18 \text{ cm}$$

- b) Sin desplazamiento lateral

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{384}{18} = 21.3$$

a cada lado del paño del alma, igual al menor de los dos valores siguientes: cuatro veces el espesor de la losa, o el peralte total de la viga menos el espesor de la losa. Este criterio es semejante al que se recomienda para calcular las rigideces de sistemas de piso para fines de determinación de momentos debidos a cargas verticales. El método tiene la ventaja de que no es necesario conocer previamente el porcentaje de refuerzo de la viga, ni determinar cuáles zonas de la viga se encuentran agrietadas y cuáles no.

Para calcular la rigidez de la columna pueden usarse las ecuaciones 13.12 ó 13.13, o puede calcularse el momento de inercia de la sección gruesa. De los estudios con computadora mencionados anteriormente, se deduce que se obtienen mejores resultados cuando se usa la ecuación 13.12. Sin embargo, el uso de esta ecuación presupone el conocimiento de la cantidad de acero que se va a emplear y del recubrimiento correspondiente, datos que no se conocen hasta después de varios tanteos. En el ejemplo se usó el momento de inercia de la sección gruesa de la columna. Siguiendo las recomendaciones del Reglamento ACI 318-83, se usaron la altura libre de la columna y el claro centro a centro de las vigas para determinar los valores de las rigideces relativas.

Después se calcularon los factores  $\psi$  que indican la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso con la ecuación 13.14. Aunque en el ejemplo sólo se analiza una columna, es necesario determinar el valor de  $\psi$  para todas las columnas del entrepiso ya que de él dependen la longitud efectiva de pandeo y la carga crítica, y al aplicar la ecuación 13.8 se necesita conocer la carga crítica de todas las columnas.

Los términos  $\psi$  se calcularon en ambos extremos de las columnas. En el extremo superior, el término  $\sum K_{col}$  incluye las rigideces relativas de las columnas en cuestión (columna A-B) y de las columnas del piso superior (columna B-C), ya que estas dos columnas concurren en el nudo. El término  $\sum K_{vigas}$  incluye dos vigas iguales que también concurren en el nudo, excepto para los ejes  $a$  y  $e$  en que sólo

concorre una viga. El extremo inferior de la columna está empotrado, por lo que puede considerarse que en dicho extremo existen vigas de rigidez infinita en comparación con la rigidez de la columna. Por lo tanto, el valor de  $\psi$  es nulo. Conocidos los valores de  $\psi$ , se determinaron en el nomograma de la figura 13.14 los valores del factor,  $k$ , los cuales, multiplicados por las longitudes reales de las columnas, dan las longitudes efectivas de pandeo.

Obsérvese que para cada columna se determinaron dos longitudes efectivas de pandeo, una para la condición en que no hay posibilidad de desplazamiento lateral y otra para la condición en que sí la hay. Esto se hizo así, ya que el Reglamento señala que para el cálculo de  $P_c$  en la ecuación 13.7 se use la longitud efectiva de pandeo que corresponde a la primera condición, mientras que para el cálculo de  $P_c$  en la ecuación 13.8 se use la que corresponde a la segunda condición.

Conocidas las longitudes efectivas de pandeo, se verificó si era necesario considerar el efecto de esbeltez y en caso afirmativo, si era posible usar este método o si se requería un análisis de segundo orden. Se encontró que para la condición de desplazamiento lateral restringido no era necesario considerar efecto de esbeltez, ya que el valor de  $kl_u/r$  resultó menor que el de 35-12  $M_{1b}/M_{2b}$ . El término  $M_{1b}/M_{2b}$  es negativo según puede verse en el croquis del ejemplo. Para la condición de desplazamiento lateral no restringido, el valor de  $kl_u/r$  quedó comprendido entre 22 y 100. Por lo tanto, si es necesario considerar el efecto de esbeltez, pero no lo es efectuar un análisis de segundo orden.

Después se calcularon los factores de amplificación. El factor  $\delta_b$  es igual a uno ya que no hay efecto de esbeltez para esta condición de carga. El factor  $\delta_s$  se calculó con la ecuación 13.8. La suma de las cargas  $P_u$  se hizo para toda la planta de la estructura con las cargas mostradas en la sección de acciones internas del ejemplo.

Se revisó si era posible usar un factor de reducción intermedio entre el que corresponde

EJEMPLO 13.1 *Continuación*

$$\beta_d = 0.10$$

$$EI = \frac{212\,000 \times 720\,000}{2.5(1 + 0.10)} = 5.55 \times 10^{10} \text{ kg-cm}^2$$

Para las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*:

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 5.55 \times 10^{10}}{720^2} = 10.57 \times 10^5 \text{ kg} = 1057 \text{ ton}$$

Para las columnas de los ejes *a* y *e*:

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 5.55 \times 10^{10}}{834^2} = 10.57 \times 10^5 \text{ kg} = 1057 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = 12 \times 1057 + 8 \times 787 = 18\,980 \text{ ton}$$

Sustituyendo en la ecuación 13.8:

$$\delta_i = \frac{1}{1 - \frac{1880}{0.70 \times 18\,980}} = 1.16$$

**CALCULO DEL MOMENTO AMPLIFICADO**

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_i M_{2i} \quad (\text{ecuación 13.6})$$

$$M_c = 1.0 \times 10 + 1.16 \times 65 = 85.4 \text{ ton-m}$$

La rigidez del sistema de piso depende de varios factores, los más importantes de los cuales son las dimensiones y la geometría de la viga y de la losa, el estado de agrietamiento de estos elementos, sus porcentajes de refuerzo y las características del concreto. Es difícil tomar en cuenta el efecto de todas estas variables, por lo que suele recurrirse a diversas hipótesis simplificadoras. Un problema especialmente complejo es el de definir la contribución de la losa a la rigidez del sistema de piso, en sistemas de losa y vigas.

Algunos estudios con computadora de estructuras idealizadas, constituidas por columnas y vigas rectangulares, indican que es conveniente considerar el momento de inercia de la sección agrietada y transformada [13.9, 13.10]. Sin embargo, no se han hecho estudios para determinar el ancho efectivo del patín, cuando existe una losa colada monolíticamente con la viga.

En el ejemplo se calculó el momento de inercia del sistema de piso, como el de una sección *T* homogénea, con un ancho efectivo del patín,



## EJEMPLO 13.2 Resolución del ejemplo 13.1 con las NTC-77

Las rigideces y longitudes efectivas de pandeo son iguales a las del ejemplo 13.1. La verificación de esbeltez es igual a la del caso con desplazamiento lateral.

## CALCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACION CONSIDERANDO EL MOVIMIENTO GENERAL DE LAS COLUMNAS

$$F_d = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{\Sigma P_c}} \geq 1.0 \quad (\text{ecuación 13.19})$$

$$\Sigma P_u = 150 \times 6 + 80 \times 10 + 45 \times 4 = 1880 \text{ ton}$$

$$P_c = \frac{F_R \pi^2 EI}{(H')^2} \quad (\text{ecuación 13.18})$$

$$F_R = 0.75$$

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \quad (\text{ecuación 13.13})$$

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{200} = 141\,400 \text{ kg/cm}^2$$

$$EI = \frac{141\,400 \times 720\,000}{2.5(1 + 0.10)} = 3.70 \times 10^{10} \text{ kg-cm}^2$$

Para las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*:

$$P_c = \frac{0.75 \times 3.14^2 \times 3.70 \times 10^{10}}{720^2} = 5.28 \times 10^5 \text{ kg} = 528 \text{ ton}$$

Para las columnas de los ejes *a* y *e*.

$$P_c = \frac{0.75 \times 3.14^2 \times 3.70 \times 10^{10}}{834^2} = 3.94 \times 10^5 \text{ kg} = 394 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = 12 \times 528 + 8 \times 394 = 9\,488 \text{ ton}$$

Sustituyendo en la ecuación 13.18:

$$F_d = \frac{1}{1 - \frac{1880}{9\,488}} = 1.25$$

a flexión pura y a flexocompresión; el Reglamento ACI permite hacerlo cuando el valor de  $\phi P_u$  es menor de  $0.10 f'_c A_g$ , o sea, cuando la carga axial es pequeña. No fue el caso del ejemplo y se usó un factor  $\phi$  de 0.70, que corresponde a columnas de estribos.

Para calcular  $EI$  se utilizó la ecuación 13.13. Aunque se obtienen mejores resultados con la ecuación 13.12, el empleo de esta última requiere conocer previamente la cantidad de acero y el recubrimiento, según se ha mencionado anteriormente. El módulo de elasticidad del concreto se obtuvo con la ecuación del Reglamento ACI para concreto de peso normal. El valor del término  $\beta_d$ , que es la relación entre el momento producido por carga permanente y el producido por carga viva, se obtuvo del análisis estructural y resultó de 0.10. Este valor suele ser muy pequeño cuando la estructura está sujeta a la acción de sismos o vientos fuertes, como en este ejemplo, ya que los momentos en las columnas debidos a estas acciones son mucho mayores que los producidos por las cargas permanentes. Es posible, en estos casos, considerar que  $\beta_d$  es igual a cero.

Se calcularon las cargas críticas de pandeo de todas las columnas para sustituir su sumatoria en la ecuación 13.8. El factor de amplificación  $\delta$ , resultó de 1.16 y el momento total amplificado, de 85.4 ton-m. Si se compara este momento con el de 70 ton-m que actúa en el extremo A de la columna, se ve que el incremento por efecto de esbeltez es de 22 por ciento.

El refuerzo de la columna debe calcularse, pues, para que resista una carga axial de 150 ton y un momento flexionante de 85.4 ton-m. En el capítulo 15 se ilustran los problemas generales del dimensionamiento de elementos sujetos a combinaciones de carga axial y momento.

En este ejemplo se ha calculado el efecto de esbeltez para una columna y en una sola dirección. Para la estructura completa deben re-

visarse todas las columnas en las dos direcciones.

### 13.5.2 Método de las NTC-77

En el ejemplo 13.2 se ha calculado el efecto de esbeltez para la misma columna del ejemplo 13.1 usando el método de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal. Los cálculos de las rigideces de vigas y columnas, de los factores  $\psi$  y de las longitudes efectivas de pandeo son iguales y por lo tanto no se han repetido en este ejemplo. Los cálculos para verificar si es necesario considerar el efecto de esbeltez, sólo se hacen en este método para el caso de extremos con posibilidad de desplazamiento lateral y también son iguales al del ejemplo 13.1.

Se calculó primero el factor de amplificación de la estructura en su conjunto, o sea, considerando que todas las columnas se desplazan lateralmente la misma distancia. Para este caso, el factor de amplificación se calcula con la ecuación 13.19 en la que intervienen la suma de todas las cargas de columna y la suma de todas las cargas críticas. En el cálculo de la carga crítica se usó el factor de reducción  $k_H$  que corresponde a flexocompresión de columnas de estribos. Se usó también el módulo de elasticidad del concreto que señalan las NTC-77. El factor de amplificación que se obtuvo resultó de 1.25.

Después se calculó el factor de amplificación para el caso de la columna aislada con sus extremos restringidos contra desplazamiento lateral. Para este caso, el factor de amplificación resultó menor que la unidad, lo cual indica que el caso anterior es más desfavorable.

El momento amplificado resultó ligeramente mayor con este método que con el del Reglamento ACI 318-83, pero debe tomarse en cuenta que no son directamente comparables, sobre todo por la diferencia en los módulos de elasticidad del concreto.

### EJERCICIOS

- 13.1 Determinar el efecto de esbeltez en la columna del ejemplo 13.1, suponiendo que el marco está contraventado.
- 13.2 Calcular el efecto de esbeltez en la columna localizada en la intersección de los ejes b-0 del ejemplo 13.1. Analice el efecto en la dirección  $O_y$  en el tramo inferior, suponiendo que las dimensiones de las columnas y las vigas sean las mismas que en el ejemplo 13.1. El marco no está contraventado en la dirección  $O_y$ .
- 13.3 Resuélvase el Ejercicio 13.2 suponiendo que el marco está contraventado.

EJEMPLO 13.2 *Continuación*

## CALCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACION CONSIDERANDO LA COLUMNA AISLADA SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} > 1.0 \quad (\text{ecuación 13.17})$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 (M_1/M_2) \geq 0.4 \quad (\text{ecuación 13.9})$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left( -\frac{50}{70} \right) = 0.314 < 0.4$$

$$C_m = 0.4$$

$$F_a = \frac{0.4}{1 - \frac{150}{462}} = 0.592 < 1.0$$

$$F_a = 1.0$$



## CALCULO DEL MOMENTO AMPLIFICADO

$$M_c = F_a M_2 = 1.25 \times 70 = 87.5 \text{ ton-m}$$

## REFERENCIAS

- 13.1 Pfrang, E. O. "Behavior of Reinforced Concrete Columns with Sidesway". *Proceedings ASCE*, Vol. 92 ST-3, Nueva York, junio 1966.
- 13.2 Breen, J.E. "Computer Use in Studies of Frames with Long Columns". En *Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (SP-12)*. Detroit, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, 1965.
- 13.3 Comité ACI 318. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)*. Detroit, American Concrete Institute, 1983.
- 13.4 \_\_\_\_\_ *Diseño y construcción de estructuras de concreto, Normas técnicas complementarias del Reglamento de construcción para el Distrito Federal*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.
- 13.5 Robles F.-V., F. *Manual de diseño de obras civiles, Sección H: Concreto reforzado*. México, D.F., Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones de la Industria Eléctrica, 1969.
- 13.6 \_\_\_\_\_ *Propuesta de Recomendaciones Internacionales CEB-IP para el Cálculo y la Ejecución de Curas de Hormigón*, 1970.
- 13.7 MacGregor, J. G., J.E. Breen y E.O. Pfrang. "Design of Slender Columns". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, enero 1970.
- 13.8 Parme, A.L. "Capacity of Restrained Eccentrically Loaded Long Columns". En *Symposium on Reinforced Concrete Columns (SP-13)*. Detroit, American Concrete Institute, 1966.
- 13.9 Pagay, S.N., P.M. Ferguson y J.E. Breen. "Importance of Beam Properties on Concrete Column Behavior". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, octubre 1970.
- 13.10 Okamura, H., S.N. Pagay, J.E. Breen y P.M. Ferguson. "Elastic Frame Analysis Corrections Necessary for Design of Short Concrete Columns in Braced Frames". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, noviembre 1970.
- 13.11 Rosenblueth, E. "Efectos de esbeltez en edificios". *Ingeniería*. México, D.F., enero 1965.

mite utilizar hasta cuatro barras por haz. Las barras deben ligarse firmemente entre sí. Se considera que el área del haz es la suma de las áreas de las barras. La longitud de desarrollo del haz es igual a la de una barra individual incrementada en ciertos factores que dependen del número de barras por haz. Según el Reglamento ACI 318-83, el factor es 1.20 para haces de tres barras y 1.33 para haces de cuatro barras. Se recomienda no cortar todas las barras en un haz en la misma sección. Los haces evitan el congestionamiento del refuerzo, pero obligan a poner especial cuidado en los detalles de empalmes y dobleces. El recubrimiento de un haz debe ser el de una barra hipotética de tal diámetro que su área sea el área del haz. Para las separaciones entre haces se hacen recomendaciones semejantes.

#### DETALLES EN LOS CAMBIOS DE SECCIÓN

Es frecuente que se cambien las dimensiones de las columnas al pasar de un piso a otro de una estructura. En estos casos, las barras deben doblarse en forma gradual, para evitar componentes desfavorables de esfuerzos. En la figura 15.2 se muestran las recomendaciones que a

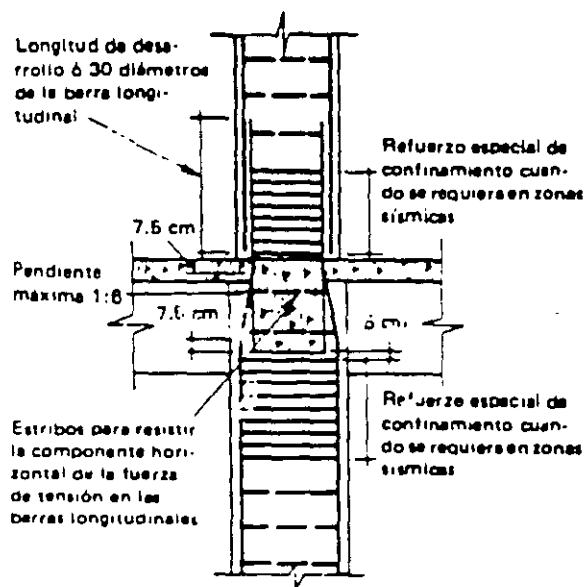


Figura 15.2 Detalles del refuerzo en los cambios de sección de columnas.

este respecto se presentan en la referencia 15.1, que son semejantes a las del Reglamento ACI 318-83. Según este reglamento, en la zona de cambio debe colocarse refuerzo transversal capaz de resistir una y media veces la componente horizontal de la fuerza que actúe en las porciones inclinadas de las barras de la columna.

#### REFUERZO MÁXIMO

Aunque en algunos reglamentos se permiten porcentajes máximos de refuerzo longitudinal del orden de 8 por ciento, pocas veces puede colocarse esta cantidad de refuerzo por restricciones de orden constructivo.

#### EXCENTRICIDAD ACCIDENTAL

Las NTC-77 especifican que debe considerarse siempre una excentricidad accidental igual a  $0.05h \geq 2$  cm, siendo  $h$  la dimensión de la columna en la dirección de la flexión.

#### REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal puede consistir en hélices o en estribos.

En el caso de hélices, éstas deben anclarse en sus extremos mediante 2.5 vueltas según las NTC-77 y 1.5 vueltas según el Reglamento ACI. El esfuerzo de fluencia no debe ser superior a  $4200 \text{ kg/cm}^2$ . El diámetro y la separación de las hélices se calculan de acuerdo con lo indicado en el capítulo 4. Además deben respetarse ciertas limitaciones establecidas en los reglamentos que tienen por objeto asegurar una acción confinante efectiva y, al mismo tiempo, permitir la correcta colocación del concreto. Así, suele especificarse que la separación libre máxima entre vueltas consecutivas no exceda de 7 a 8 cm, mientras que la separación libre mínima se limite a unos 2.5 cm o a 1.5 veces el tamaño máximo del agregado.

En el caso de estribos, éstos deben colocarse de manera que restrinjan el pandeo lateral de las barras longitudinales. Tanto el Reglamento ACI como las NTC-77, especifican que todas las

# CAPÍTULO 15

## Dimensionamiento de columnas

15.1 Introducción. / 15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas. / 15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas. / 15.4 Ejemplos.

### 15.1 Introducción

En este capítulo se trata el dimensionamiento de columnas dados la carga axial y el momento que deben resistir. El comportamiento de columnas sometidas a combinaciones de carga axial y momento se analizó en el capítulo 6, donde también se expusieron diversos procedimientos para determinar la resistencia de columnas cortas de dimensiones y refuerzo dados. Los efectos de esbeltez fueron estudiados en el capítulo 13. En los ejemplos desarrollados en el presente capítulo se supone que dichos efectos de esbeltez ya están considerados en los valores de la carga axial y el momento para los cuales deben proponerse secciones adecuadas. Los métodos de dimensionamiento utilizados están basados en el uso de diagramas de interacción.

### 15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas

#### ACERO MÍNIMO

Los porcentajes mínimos de refuerzo recomendados para columnas son, por lo general,

mayores que los recomendados para vigas. En los reglamentos de construcción suelen especificarse porcentajes mínimos del orden de uno por ciento. Las NTC-77 indican que la relación entre el área del refuerzo vertical y el área total de la sección no sea menor que  $20/f_y$ , estando  $f_y$  expresado en  $\text{kg/cm}^2$ . También se recomienda usar por lo menos una barra en cada esquina de columnas no circulares y un mínimo de seis barras en columnas circulares.

#### SEPARACIÓN ENTRE BARRAS

Suele especificarse que la separación libre entre las barras longitudinales no sea inferior a 1.5 veces el diámetro de la barra, 1.5 veces el tamaño máximo del agregado, ni que 4 cm.

#### HACES DE BARRAS

Debido a que los porcentajes de refuerzo usados en columnas son altos, a veces es necesario recurrir al empleo de haces o paquetes de barras, lo cual simplifica el armado, como se muestra en la figura 15.1. En general, se per-

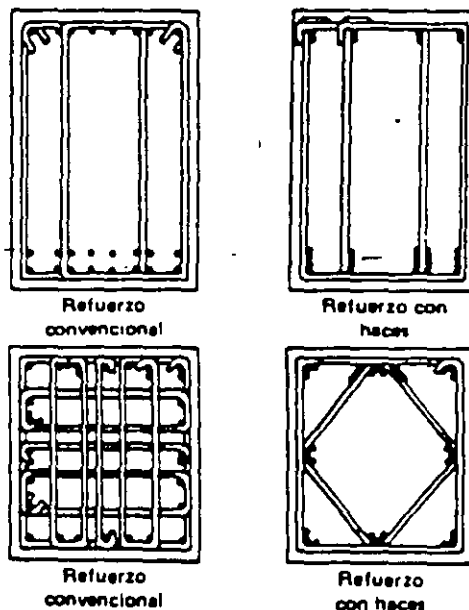
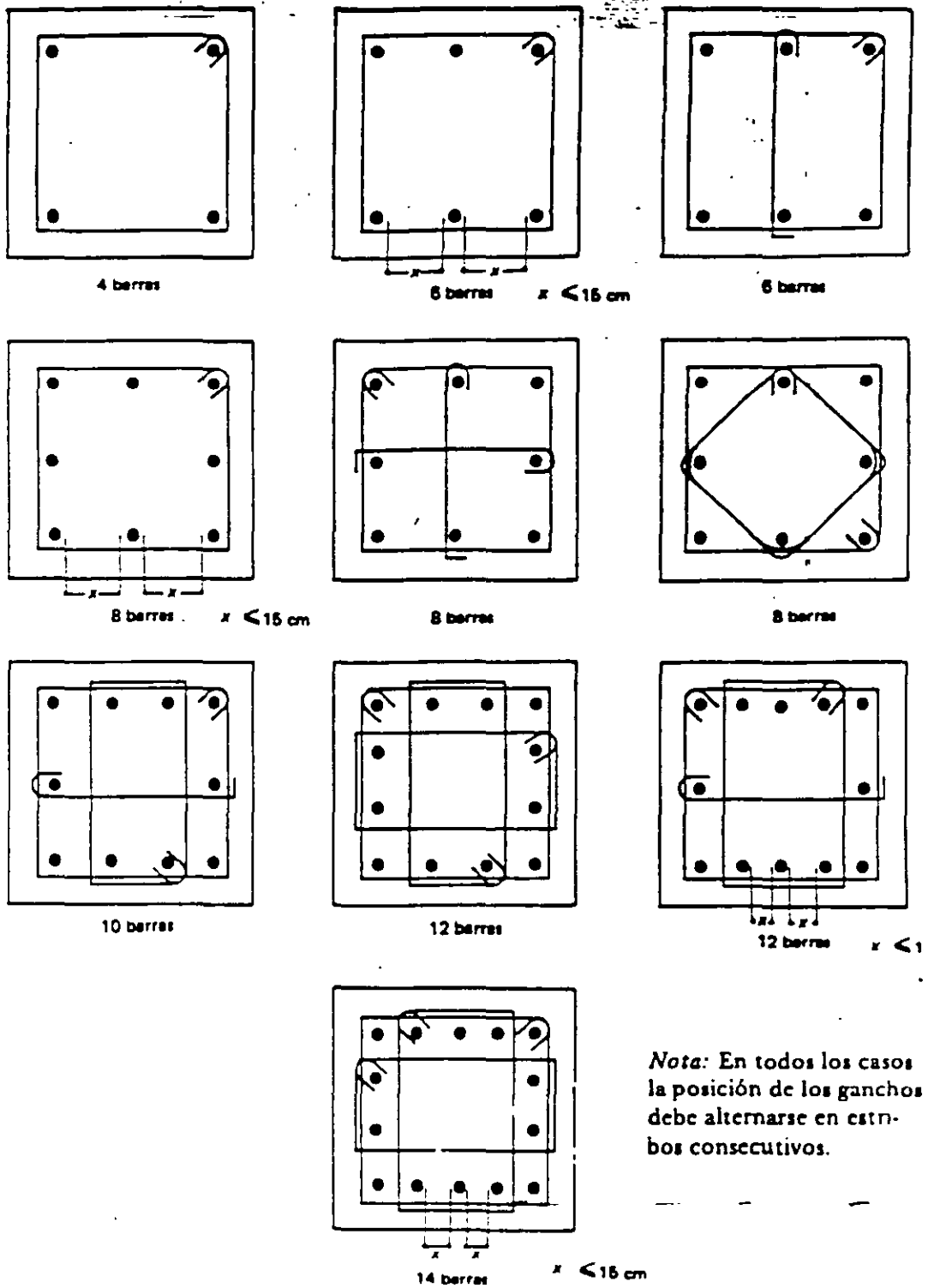


Figura 15.1 Sugerencias para el uso de haces de varillas en vigas y columnas.



*Nota:* En todos los casos la posición de los ganchos debe alternarse en estribos consecutivos.

Figura 15.4 Atreglos típicos de estribos para columnas.

barras de esquina y cada barra alternada estén restringidas por la esquina de un estribo con un ángulo interno máximo de  $135^\circ$ . La distancia libre de las barras no restringidas a las barras restringidas se limita a 15 cm. La separación centro a centro entre barras restringidas se suele limitar a unos 35 cm, como se aprecia en la figura 15.3. El significado de estos requisitos junto con detalles típicos de anclaje, se ilustran en la figura 15.3. En la figura 15.4 se muestran algunos arreglos típicos de estribos para columnas rectangulares.

Para proporcionar restricción lateral pueden usarse grapas en la forma representada en la figura 15.3b. Cuando las barras están colocadas en la periferia de un círculo, se puede usar un estribo circular. Como en el caso de vigas,

los estribos deben estar adecuadamente anclados en sus extremos.

Según el Reglamento ACI 318-83, la separación de los estribos no debe exceder de 16 veces el diámetro de la barra longitudinal, 48 veces el diámetro de los estribos, ni de la menor dimensión de la columna. En lugar de la primera de estas restricciones, las NTC-77 limitan la separación máxima a  $850/\sqrt{f_y}$  veces el diámetro de la barra (o de la barra de menor diámetro de un paquete), siendo  $f_y$  el esfuerzo de fluencia de las barras longitudinales en  $\text{kg/cm}^2$ . Las otras limitaciones se conservan iguales a las del Reglamento ACI. Además de ellas, las NTC-77 especifican que la separación máxima se reduzca a la mitad en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de la columna,

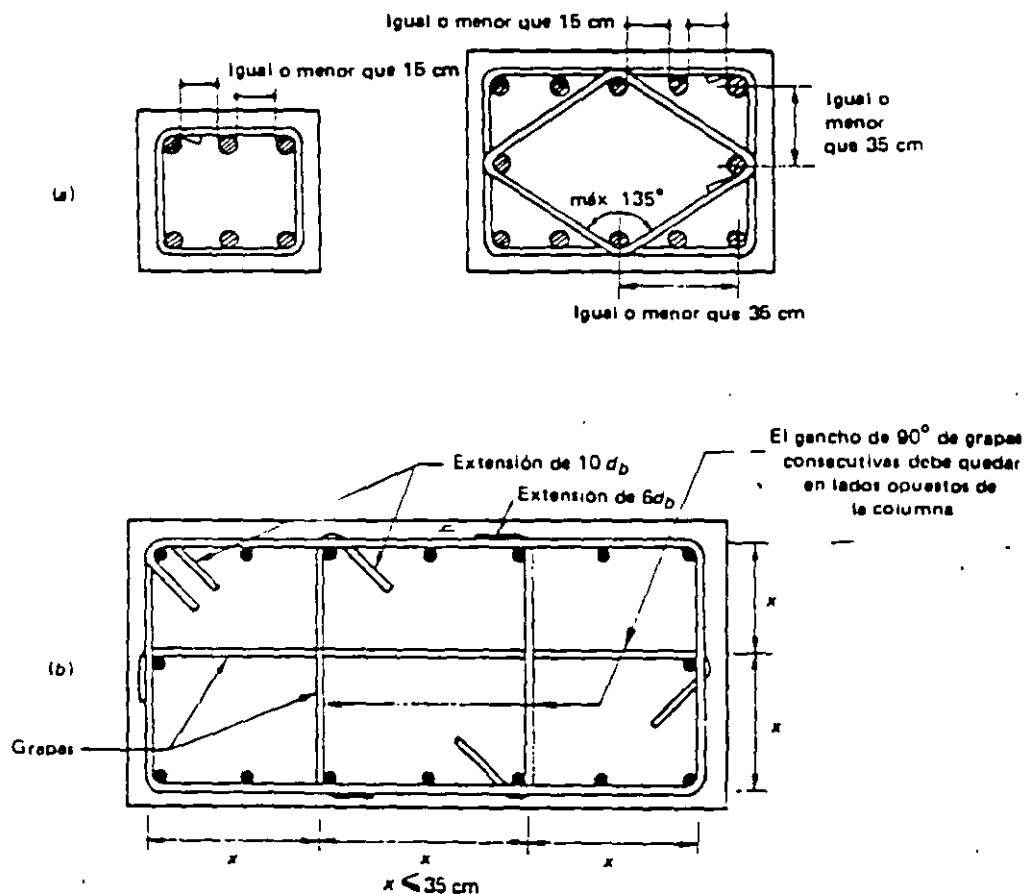


Figura 15.3 Detalles del refuerzo transversal de columnas.



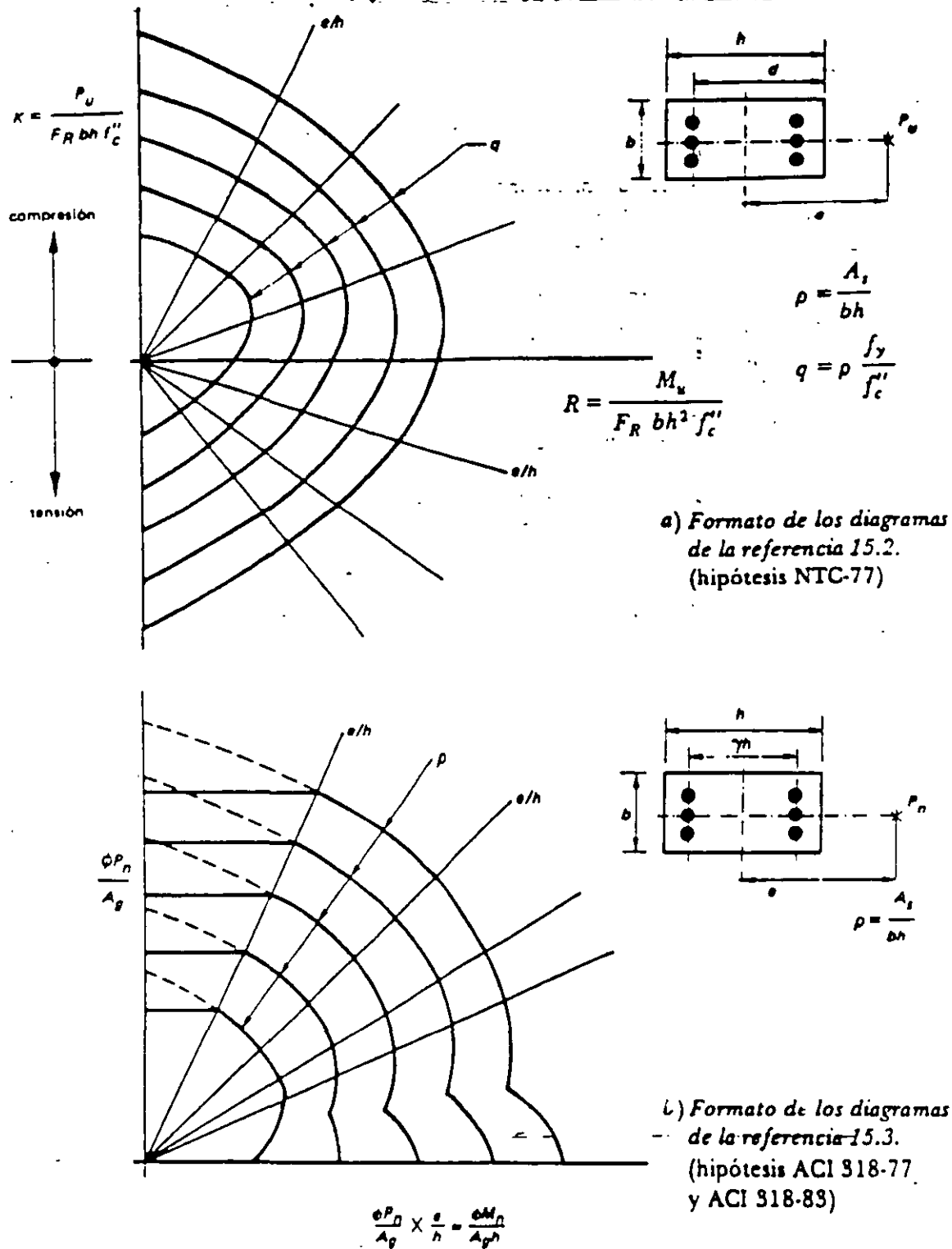


Figura 15.5 Formatos típicos de diagramas de Interacción.

un sexto de su altura, ni que 60 cm, encima y debajo de cada unión de columna con vigas o losas. El ACI se limita a indicar que el primer estribo encima o debajo de la losa o viga se coloque a la mitad de la separación máxima a partir de los paños de la unión.

En cuanto al diámetro de los estribos, el Reglamento ACI 318-83 especifica valores según el diámetro de las barras longitudinales. Las NTC exigen que la fuerza de fluencia que puede desarrollar un estribo no sea menor que dos por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra o el mayor paquete restringido por el estribo.

Además de satisfacer los requisitos mínimos arriba reseñados, el refuerzo transversal debe proporcionar suficiente resistencia frente a las fuerzas cortantes o torsiones que pudieran actuar sobre la columna. En caso de estructuras expuestas a sismos, deben tenerse en cuenta las recomendaciones adicionales que se mencionan brevemente en el capítulo 20.

### 15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas

Una de las ayudas más útiles para el dimensionamiento de columnas es el diagrama de interacción. La forma de construir los diagramas de interacción se describió en el capítulo 6, donde también se explicó cómo se utilizan para determinar la resistencia a combinaciones de momento y carga axial de secciones de características conocidas. El problema inverso, consistente en determinar las dimensiones y el refuerzo requeridos para resistir una fuerza axial y un momento dados, puede también resolverse con la ayuda de los diagramas de interacción mediante un proceso de tanteos como el ilustrado en los ejemplos del siguiente inciso.

En el Apéndice C se reproducen algunos diagramas típicos tomados de los elaborados por Meli y Rodríguez para la referencia 15.2. Estos diagramas están basados en las hipótesis de las NTC-77. Constituyen una versión refinada y ampliada de los incluidos en las ayudas de

diseño que acompañan a las NTC-77. Abarcan una gran variedad de secciones, tipos de refuerzo y condiciones de carga, incluyendo algunos casos de flexión biaxial. Se consideran dos categorías de acero de refuerzo: acero con esfuerzos de fluencia iguales o menores que 4200 kg/cm<sup>2</sup> y aceros con esfuerzos de fluencia comprendidos entre 4200 y 6000 kg/cm<sup>2</sup>. Se proporcionan gráficas para distintos valores de  $d/h$ , en el caso de secciones rectangulares, y de  $d/D$ , en el de secciones circulares. (El significado de estas relaciones puede apreciarse en las gráficas del Apéndice C.)

Como las gráficas son adimensionales, pueden utilizarse para diseños con otros reglamentos siempre que se calculen los parámetros adimensionales con base en las hipótesis del reglamento correspondiente. Así, para dimensionar según el Reglamento ACI 318-83 deberá sustituirse el valor de  $f'_c$  por  $\beta_1 f'_c$ , donde  $\beta_1 = (1.05 - f'_c/1400)$ . (Véase la figura 5.6.) Además, en lugar de  $F_R$  deberá usarse el valor de  $\phi$  que especifica dicho reglamento para miembros sujetos a flexocompresión. El error en que se incurre suele ser poco significativo.

Los diagramas pueden utilizarse de distintas maneras. Considérese, por ejemplo, el diagrama de la figura 15.5a, que muestra esquemáticamente el formato empleado en los de la referencia 15.2.

Una forma de proceder puede consistir en suponer una sección y calcular los parámetros  $K$  y  $R$ . Estos parámetros definen un punto en el diagrama al que corresponderá un valor de  $q$ , del cual puede deducirse el valor de  $\rho$  necesario. Si este valor está comprendido entre límites aceptables, el problema está resuelto. De lo contrario es necesario ensayar otra sección. Debe cuidarse que el valor de  $M_u$  incluya el momento adicional debido a la excentricidad accidental que especifican las NTC-77. El valor del factor de resistencia  $F_R$  se supone igual a 0.75 si el núcleo no está confinado y la falla es de compresión, e igual a 0.85 si el núcleo cuenta con un confinamiento adecuado.

Otra forma de proceder consiste en suponer una sección y definir un punto en el diagrama

sica: a) carga muerta y carga viva, y b) carga muerta, carga viva y sismo. Por sencillez se supone que los momentos dados incluyen el efecto de la excentricidad accidental que especifican las NTC-77 ( $0.05D \geq 2$  cm) con base en tanteos previos.

Como se señaló en la sección 15.4, el dimensionamiento de columnas puede llevarse a cabo por un proceso de tanteos auxiliado por diagramas de interacción. El procedimiento implica proponer una sección e investigar, con la ayuda de los diagramas, si la sección propuesta puede resistir las cargas con una cuantía de refuerzo que esté comprendida entre los límites admisibles. En el ejemplo se presenta únicamente el tanteo final, que proporcionó una solución adecuada.

Para elegir el diagrama apropiado es necesario determinar la relación  $d/D$ , donde  $d$  es el diámetro de un círculo que pasa por los centros de las barras y  $D$  es el diámetro de la sección de la columna. Cuando el valor de  $d/D$  no coincide con los valores para los cuales existen diagramas, puede recurrirse a la inter-

polación, cuando se requiera precisión.

Se determinó un valor del índice  $q$  para cada una de las condiciones de carga consideradas, comprobándose que regía la de carga muerta, viva y sismo. Por tratarse de una columna zunchada se tomó  $F_R = 0.85$  para el cálculo de  $K$ . El valor de  $q$  correspondiente a la condición de carga muerta más viva resultó inferior a los que abarca el diagrama.

El área de acero requerida se proporcionó con ocho barras del No. 8, que pueden alojarse en la columna con suficiente holgura entre ellas aun cuando se prevea la posibilidad de hacer traslapes.

El área del núcleo utilizado para calcular la cuantía  $\rho$ , es la definida por un círculo que coincide con el paño exterior del zuncho, y cuyo diámetro, por lo tanto, será igual al diámetro de la columna menos dos veces el recubrimiento libre del zuncho. En cambio, el diámetro  $d$ , utilizado en la ecuación 4.2 es el diámetro de la hélice medido centro a centro. Generalmente los valores calculados del paso  $s$  se redondean a medio centímetro.

#### EJEMPLO 15.1 *Dimensionamiento de una columna de sección circular, zunchada (NTC-77)*

##### DATOS

##### Cargas

(Las cargas dadas son a nivel de servicio. Los momentos incluyen una estimación de los correspondientes a la excentricidad accidental que especifican las NTC 77.)

##### a) Condición carga muerta más carga viva

$$P = 150 \text{ ton}$$

$$M_x = 15 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 3 \text{ ton-m}$$

a partir del parámetro  $K$  o  $R$  y la relación  $e/h$ , cuidando que  $e$  incluya la excentricidad accidental.

Si se limita la cuantía  $\rho$  a un valor dado, puede calcularse el valor de  $q$  correspondiente. Se puede, entonces, definir un punto en el diagrama a partir de este valor y de la relación  $e/h$ . Se harán los ajustes necesarios en la sección supuesta hasta encontrar una que dé un valor de  $P_u$  semejante al requerido.

Además de las gráficas, la referencia 15.2 contiene varios ejemplos que ilustran su aplicación.

El formato utilizado en las gráficas de la referencia 15.3 se muestra en la figura 15.5b. Estas gráficas se formularon con base en las hipótesis del Reglamento ACI 318-77, que son iguales a las del Reglamento ACI 318-83. No se considera en ellas el caso de flexo-tensión, como en las de Meli y Rodríguez [15.2]. Fueron elaboradas para diversas combinaciones de  $f'_c$  y  $f_y$ , lo que permitió construirlas con base en valores de la cuantía  $\rho$ , en lugar del índice de refuerzo,  $\omega$ . La parte plana de las curvas para  $\rho$  corresponde a la limitación que establece el Reglamento ACI para columnas con poca excentricidad, según la cual, la máxima capacidad para carga axial que puede atribuirse a columnas está dada por las siguientes expresiones:

Para columnas zunchadas:

$$\phi P_n (\text{máx}) = 0.85 \phi [0.85f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s] \quad (15.1)$$

Para columnas de estribos:

$$\phi P_n (\text{máx}) = 0.80 \phi [0.85f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s] \quad (15.2)$$

En estas expresiones  $P_n$  es la capacidad nominal. El factor de resistencia  $\phi$  se toma igual a 0.75 para columnas zunchadas e igual a 0.70 para columnas de estribos. Las expresiones 15.1 y 15.2 rigen respectivamente para excentricidades aproximadamente iguales a  $0.05h$  y  $0.10h$ , que corresponden a las excentricidades mínimas especificadas en versiones anteriores

del Reglamento ACI. Simplifican considerablemente el dimensionamiento de columnas con excentricidades pequeñas.

El quiebre en la parte inferior de las curvas para  $\rho$  refleja la especificación del Reglamento ACI según la cual, para cargas axiales bajas, el valor de  $\phi$  puede aumentarse linealmente hasta un valor de 0.90 al disminuir  $\phi P_n$  de  $0.10 f'_c A_g \approx 0$ .

Los diseñadores que se basen en las Recomendaciones Internacionales CEB-FIP pueden recurrir al texto de Jiménez Montoya [15.4] que incluye una gama muy amplia de diagramas de interacción basados en las hipótesis de dichas recomendaciones.

En la referencia 15.8 se presentan diagramas para secciones en cruz y otras secciones poco comunes.

Son útiles también las ayudas de diseño en forma de tablas que dan directamente la carga axial y el momento flexionante que puede resistir una sección de dimensiones dadas, con una cierta área de acero y con materiales de resistencias conocidas. Dados los valores de  $P_u$  y  $M_u$  requeridos pueden encontrarse en la tablas distintas alternativas de secciones, con el refuerzo correspondiente, que proporcionan una resistencia adecuada. Véanse, por ejemplo, las referencias 15.5 a 15.7.

#### 15.4 Ejemplos

##### *Ejemplo 15.1. Dimensionamiento de una columna de sección circular zunchada*

El dimensionamiento de la columna circular de este ejemplo está basado en las NTC-77. La columna forma parte de una estructura de marcos ortogonales, en la que el análisis indicó que la columna está sujeta a momentos en dos direcciones perpendiculares entre sí. Puesto que se trata de una columna circular, el problema de flexión biaxial puede reducirse a uno de flexión uniaxial, componiendo los momentos  $M_x$  y  $M_y$  vectorialmente. Los valores de las acciones dadas corresponden al nivel de servicio para las dos combinaciones de carga bá-

**EJEMPLO 15.1 (Continuación)****RESISTENCIAS REQUERIDAS***Composición de momentos*

Condición carga muerta más carga viva:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{15^2 + 9^2} = 15.9 \text{ ton-m}$$

Condición carga muerta más carga viva más sismo:

$$M = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37.0 \text{ ton-m}$$

*Resistencias*

Condición carga muerta más carga viva:

$$\begin{aligned} P_u &= F_c P = 1.4 \times 150 = 210 \text{ ton} \\ M_u &= F_c M = 1.4 \times 15.9 = 21.4 \text{ ton-m} \\ e &= 21.4/210 = 0.10 \text{ m} \end{aligned}$$

Condición carga muerta más carga viva más sismo:

$$\begin{aligned} P_u &= 1.1 \times 150 = 143 \text{ ton} \\ M_u &= 1.1 \times 37 = 40.7 \text{ ton-m} \\ e &= 40.7/143 = 0.28 \text{ m} \end{aligned}$$

**DIMENSIONAMIENTO SECCION Y REFUERZO PRINCIPAL**Diámetro supuesto:  $D = 55 \text{ cm}$ 

$$\begin{aligned} d &= D - 2r = 55 - 2 \times 5.5 = 44 \text{ cm} \\ d/D &= 44/55 = 0.8 \therefore \text{Usar figura C.11 del Apéndice C} \end{aligned}$$

*Condición carga muerta más viva*

$$\left. \begin{aligned} e/D &= 0.10/0.55 = 0.18 \\ K &= P_u / F_R D^2 f_c'' = \frac{210\,000}{0.85 \times 55^2 \times 204} = 0.40 \end{aligned} \right\} q < 0.2$$

## EJEMPLO 15.1 (Continuación)

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$$P = 130 \text{ ton}$$

$$M_x = 35 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 12 \text{ ton-m}$$

## Materiales

$$\text{Concreto: } f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero: } f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Tamaño máximo agregado} = 2.5 \text{ cm}$$

Recubrimiento libre: 3 cm

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo usando las gráficas del Apéndice C. Detallar el zuncho.

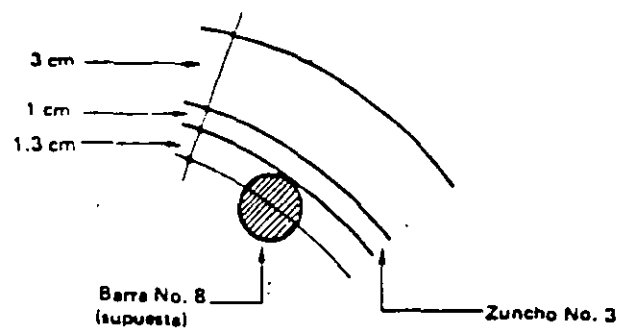
## DATOS PARA EL CALCULO

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^{**} = 0.85 f_c^* = 204 \text{ kg/cm}^2$$

Estimación del recubrimiento  $r$

$$r = 3 + 1 + 1.3 = 5.3 \text{ cm} \approx 5.5 \text{ cm}$$



## EJEMPLO 15.1 (Continuación)

Para zuncho del No. 3:

$$s = \frac{4 \times 0.71}{0.0086 (55 - 4)} = 6.5 \text{ cm}$$

separación libre máxima = 7 cm > (6.5 - 1) = 5 cm

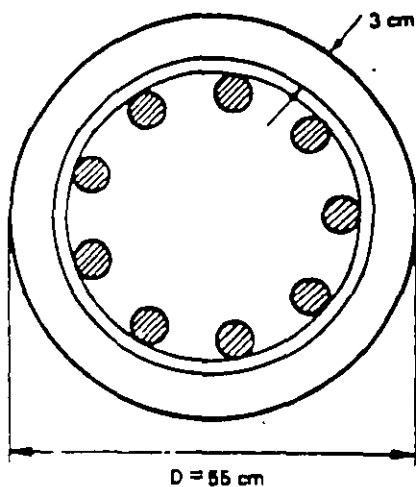
separación libre mínima = 1.5 × 2.5 = 4 cm < 5 cm

← tamaño máximo agregado

## SECCION ADOPTADA

9 barras del No. 8.

Zuncho del No. 3 con un paso  $s = 6.5$  cm



*Ejemplo 15.2 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras*

El propósito de este ejemplo es ilustrar la aplicación de los diagramas de interacción de la referencia 15.3, que están basados en las

hipótesis del Reglamento ACI, al dimensionamiento de columnas. Las características de los materiales corresponden a una de las combinaciones previstas en la referencia citada.

Para hacer una primera estimación de la sección requerida se recurrió a la ecuación 15.2, considerando que sólo actúa la carga axial y

## EJEMPLO 15.1 (Continuación)

Condición carga muerta más viva más sismo

$$e/D = 0.28/0.55 = 0.51$$

$$K = \frac{143\,000}{0.85 \times 55^2 \times 204} = 0.27$$

$$q = 0.4 \text{ (rige)}$$

$$\rho = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.4 \frac{204}{4200} = 0.019$$

$$A_s = \rho \frac{\pi D^2}{4} = \frac{0.019 \times \pi \times 55^2}{4} = 45.1 \text{ cm}^2$$

Usar 9 barras No. 8 = 45.6 cm<sup>2</sup> > 45.1

## DIMENSIONAMIENTO ZUNCHO

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} > 0.12 \frac{f'_c}{f_y} \quad \text{(ecuación 4.9)}$$

$$\frac{A_g}{A_c} = \frac{D^2}{(D - 2 \times 9)^2} = \frac{55^2}{(55 - 6)^2} = 1.26$$

└ recubrimiento libre

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 (1.26 - 1) \frac{300}{4200} = 0.0084$$

$$0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.12 \frac{300}{4200} = 0.0086 > 0.0084$$

$$\therefore \rho_s = 0.0086$$

De la ecuación 4.2:

$$\rho_s = \frac{4 A_s}{s d_s}$$

 $(d_s = \text{diámetro del núcleo centro a centro de la hélice.})$  $A_s = \text{área zuncho}$ 

$$s = \frac{4 A_s}{\rho_s d_s}$$



## EJEMPLO 15.2 (Continuación)

## ESTIMACION PRELIMINAR

Suponer que sólo actúa  $P_u$  y que  $p = 0$ .

De la ecuación 15.2:

$$P_u = \phi P_n = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s]$$

$$A_g = \frac{P_u}{0.80 \phi (0.85) 280}$$

$$= \frac{290\,000}{0.8 \times 0.7 \times 0.85 \times 280} = 2176 \text{ cm}^2$$

$$b = \sqrt{2176} = 47 \text{ cm}$$

Ensayar una columna de 50 X 50 cm

DETERMINACION DE  $e/h$  Y  $\phi P_n/A_g$  PARA ENTRAR EN EL DIAGRAMA DE INTERACCION

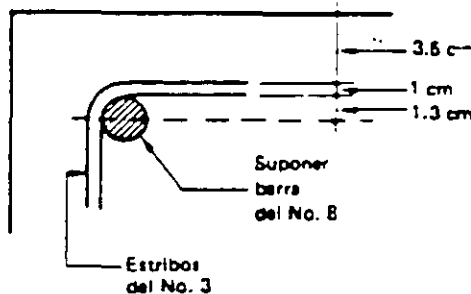
$$e/h = 15.5/50 = 0.31$$

Valor de  $\phi P_n/A_g$  requerido:

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{P_u}{A_g} = \frac{290\,000}{50^2} = 116 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 1650 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} = 1.65 \text{ ksi}$$

(ksi = kips por pulg<sup>2</sup> = 1000 lb/pulg<sup>2</sup>)

## ELECCION DE LA GRAFICA



$$r = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8 \approx 6 \text{ cm}$$

$$\gamma h = h - 2r$$

$$= 50 - 2 \times 6 = 38 \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{38}{50} = 0.76$$

∴ Usar la gráfica A-17 de la referencia 15.3, para  $\gamma = 0.75$ ,  
 $f'_c = 4\,000 \text{ lb/pulg}^2$  y  
 $f_y = 60\,000 \text{ lb/pulg}^2$

despreciando la contribución del refuerzo. Resultó así una sección de 47 cm de lado. Siguiendo la práctica usual de usar múltiplos de cinco centímetros para las medidas de las columnas, la dimensión obtenida se redondeó a 50 cm.

Escogida tentativamente la sección de 50 X 50 cm, se calcularon los valores de  $\phi P_n/A_g$  y de  $e/h$  requeridos para poder entrar en la gráfica. Puesto que las ordenadas de los diagramas de la referencia 15.3 están dadas en kips ( $= 1000$  lb) por pulg<sup>2</sup>, fue necesario transformar el valor obtenido para  $\phi P_n/A_g$ , expresado en kg/cm<sup>2</sup>, a dichas unidades.

Para seleccionar la gráfica apropiada se calculó el valor de  $\gamma$ , que es la relación entre la distancia entre las barras de los lados opues-

tos y la dimensión total de la columna, ambas medidas en la dirección paralela al plano de flexión. Se obtuvo un valor de  $\gamma = 0.74$  por lo que se utilizó la gráfica A-17 de la referencia 15.9, que corresponde a  $\gamma = 0.75$ . Dado lo parecido de los valores no se consideró necesario recurrir a la interpolación.

El valor de la cuantía  $\rho = 0.09$  obtenido de la gráfica, está comprendido entre los límites admisibles de manera que se aceptó la sección de 50 X 50 cm supuesta inicialmente. En los cálculos se tomó  $\phi = 0.7$  por tratarse de una columna de estribos. El refuerzo requerido se proporcionó con 12 barras del No. 9. La disposición de estribos propuesta puede apreciarse en el croquis al final del ejemplo.

**EJEMPLO 15.2 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras (ACI 318-83)**

**DATOS**

**Cargas**

$$P_u = 290 \text{ ton}$$

$$M_u = 45 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

**Materiales**

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2 = 4000 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 = 60\,000 \text{ lb/pulg}^2$$

**Recubrimiento:** 3.5 cm

**Reglamento:** ACI 318-83

**Se pide:** Determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas de la referencia 15.3. Detallar los estribos.

**EXCENTRICIDAD:**  $e = M_u/P_u = 45/290 = 0.155 \text{ m}$

calculada se corrigió agregando la excentricidad accidental. La relación  $d/h$ , que se requiere para escoger la gráfica, resultó ser 0.88. Por lo tanto se utilizó en el ejemplo la gráfica de la figura C.2 del Apéndice C, que corresponde a un valor de  $d/h = 0.90$ . En caso de desearse mayor precisión podría hacerse una interpolación entre los datos obtenidos con la figura C.2 y los que se deducen de la figura C.3, correspondiente a un valor de  $d/h = 0.85$ .

Utilizando el valor de  $q$  correspondiente a  $\rho = 0.025$  y el de la relación  $e/h$  se definió un punto en el diagrama cuya ordenada  $K$  fue igual a 0.63. Se comprobó que la resistencia era ligeramente inferior a la requerida. Se procedió entonces a hacer un ajuste en el acero definiendo un nuevo punto en el diagrama a

partir del valor de  $K$  necesario y de la relación  $e/h$ . La cuantía correspondiente a este nuevo tanteo fue sólo ligeramente superior a la especificada.

Los estribos del No. 3 propuestos cumplen ampliamente el requisito de que su fuerza de fluencia sea por lo menos igual al dos por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra restringida. Conservadoramente se utilizó una grapa para las dos barras del No. 9, aunque estrictamente no es necesaria ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm.

La separación de 40 cm propuesta debe reducirse a la mitad en las porciones extremas de las columnas de acuerdo con lo indicado en la sección 15.2.

**EJEMPLO 15.3 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero (NTC-77)**

*DATOS*

*Cargas*

$$M_u = 23.5 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 111 \text{ ton}$$

*Materiales*

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

*Cuantía de acero*

$$\rho \approx 0.025$$

*Recubrimiento al centro del refuerzo*

$$r \approx 5 \text{ cm}$$

**EJEMPLO 15.2 (Continuación)****DETERMINACION DEL REFUERZO LONGITUDINAL**

$$\left. \begin{array}{l} e/h = 0.91 \\ \frac{\phi P_n}{A_g} = 1.65 \text{ ksi} \end{array} \right\} \rho = 0.03 \text{ (de la gráfica A-17)}$$

$$A_s = 0.03 \times 50^2 = 75 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 12 barras del No. 9} = 76.7 \text{ cm}^2$$

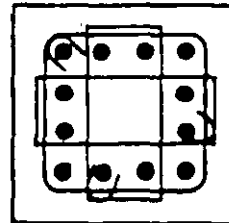
**DETERMINACION DEL REFUERZO TRANSVERSAL**

Considerar estribos del No. 3

$$\left. \begin{array}{l} 16 \times 2.9 = 46 \\ 48 \times 1 = 48 \\ b = 50 \text{ cm} \end{array} \right\} \therefore \text{usar estribos @ 46 cm}$$

**SECCION ADOPTADA**

Sección 50 a 50 cm  
12 barras del No. 9  
estribos del No. 3 @ 46 cm.



*Ejemplo 15.3 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero*

Puede suceder que se imponga como restricción para el dimensionamiento de columnas, el que la cuantía del refuerzo sea del orden de un valor prefijado. En el ejemplo, que sigue las especificaciones de las NTC-77, se esta-

blece la condición que la cuantía sea aproximadamente igual a 0.025.

Para resolver el problema se procedió por tanteos, suponiendo una sección y haciendo ajustes hasta encontrar una que tuviera la resistencia necesaria con una cuantía semejante a la especificada.

Se presenta en el ejemplo un tanteo para una sección de 40 X 40 cm. La excentricidad

**EJEMPLO 15.3 (Continuación)**

*Ajuste del acero:*

$$K = \frac{P_u}{F_R bh f'_c} = \frac{111\,000}{0.75 \times 40^2 \times 136} = 0.68$$

$$\frac{e}{h} = \frac{23}{40} = 0.58$$

$$q = 0.85$$

$$\rho = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.85 \frac{136}{4200} = 0.0275$$

$$A_s = 0.0275 \times 40^2 = 44.0 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar: } 4 \text{ barras No. 10} + 2 \text{ barras No. 9} = 44.6 \text{ cm}^2 > 44 \text{ cm}^2$$

**REFUERZO TRANSVERSAL**

*Separación estribos:*

Considerar estribos No. 3

$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

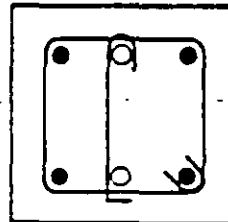
$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

$\therefore$  separación estribos = 40 cm

$$b = 40 \text{ cm}$$

**SECCION ADOPTADA**

Sección 40 X 40 cm  
 4 barras del No. 10 y  
 2 barras del No. 9  
 Estribos del No. 3 @ 40 cm



**EJEMPLO 15.3 (Continuación)**

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas del Apéndice C. Detallar los estribos.

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.8 f_c' = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$$

**CALCULO DEL REFUERZO LONGITUDINAL**

Tanteo inicial

Suponer una sección de 40 X 40 cm

Excentricidad accidental:

$$e_a = 0.05h > 2 \text{ cm}$$

$$e_a = 0.05 \times 40 = 2 \text{ cm}$$

Excentricidad total:

$$e = \frac{23.5}{111} + 0.02 = 0.23 \text{ m}$$

Elección de diagrama:

$$\frac{d}{h} = \frac{40 - 5}{40} = 0.88 \quad \therefore \text{usar la figura C.2 del Apéndice C.}$$

$$q = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.025 \frac{4200}{136} = 0.77$$

$$\frac{e}{h} = \frac{23}{40} = 0.58$$

$$K = 0.63$$

$$P_u = K F_R b h f_c'' = 0.63 \times 0.75 \times 40^2 \times 136$$

$$= 103\,000 \text{ kg} < 111\,000 \text{ kg}$$

**EJEMPLO 15.4 (Continuación)**

(Los momentos incluyen una estimación del efecto de la excentricidad accidental.)

*Materiales*

Concreto:  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo en dos caras

Recubrimiento al centro de las barras:  $r = 5 \text{ cm}$

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo teniendo en cuenta la influencia de la fuerza cortante. Detallar los estribos.

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f'_c{}^* = 0.80 f'_c = 0.80 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c{}^{**} = 0.85 f'_c{}^* = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

**DIMENSIONAMIENTO POR FLEXION**

Suponer:  $b = 30 \text{ cm}$ ;  $h = 45 \text{ cm}$ ;  $d = 40 \text{ cm}$

$d/h = 40/45 = 0.89 \therefore$  usar figura C.2 del Apéndice C.

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{120\,000}{0.75 \times 30 \times 45 \times 170} = 0.70$$

$$R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f'_c} = \frac{30 \times 10^5}{0.75 \times 30 \times 45^2 \times 170} = 0.39$$

$q = 0.85$

$$\rho = q \frac{f'_c{}^{**}}{f_y} = 0.85 \frac{170}{4200} = 0.0344$$

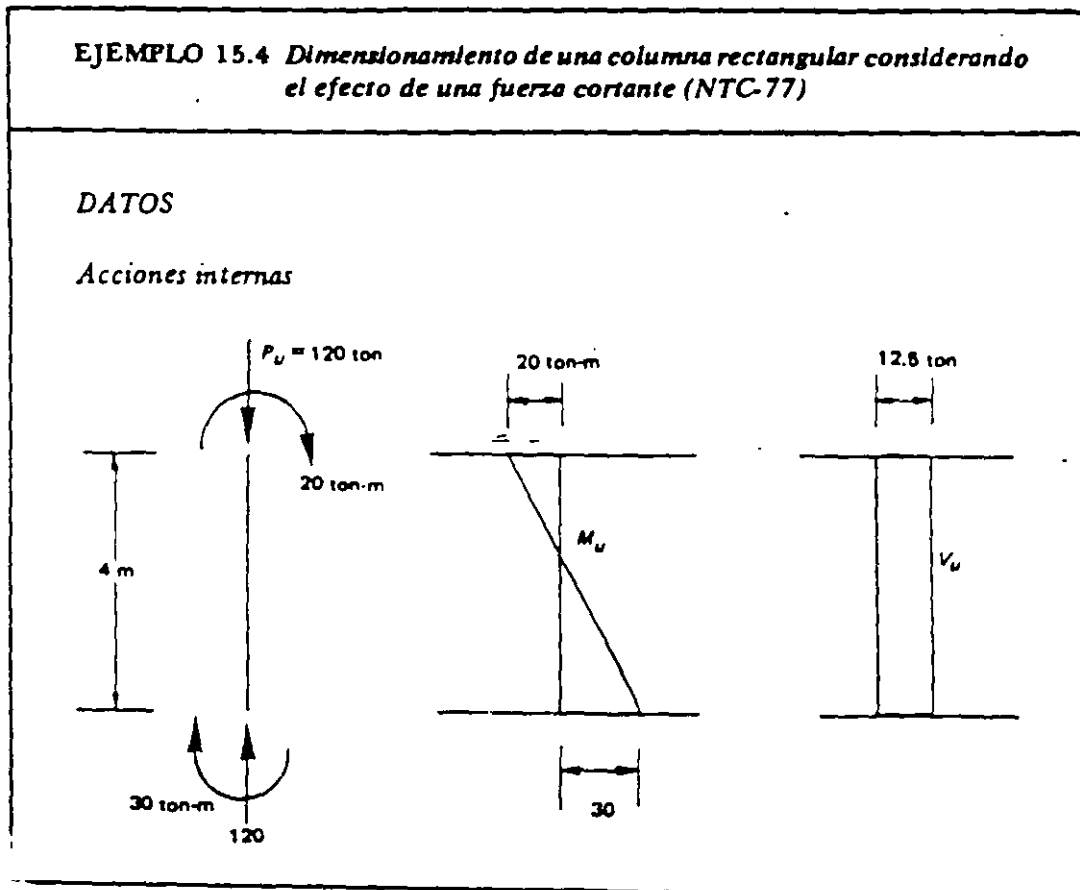
**Ejemplo 15.4 Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante**

Las columnas de estructuras expuestas a acciones sísmicas pueden estar sujetas a fuerzas cortantes significativas cuyo efecto debe considerarse proporcionando un refuerzo transversal adecuado. En el presente ejemplo se ilustra cómo hacer esto de acuerdo con las NTC-77

Se propuso una sección de 35 X 40 cm, cuya resistencia a flexocompresión se comprobó ser suficiente utilizando como refuerzo seis barras del No. 6 distribuidas en dos caras. Para el refuerzo transversal se emplearon estribos del No. 3, que, de acuerdo con las especificaciones de las NTC-77, que fueron resñadas en la sección

15.2, deben colocarse a 30 cm en la porción central de la columna y a la mitad de esta separación en los extremos.

La revisión del efecto de la fuerza cortante se efectuó de acuerdo con las indicaciones de la sección 7.6.2, que prevén la manera de tomar en cuenta la influencia favorable de la presencia de una fuerza de compresión. La separación de estribos calculada fue menor que la mínima especificada de  $d/2$  para miembros sometidos a fuerza cortante. Esta separación, que en el ejemplo fue igual a 20 cm, resultó mayor que la de 15 cm requerida en los extremos por especificación, por lo que se conservó esta última en dichas zonas. Dado que la fuerza cortante es constante en toda la longitud de la columna, en la porción central se utilizó la separación de 20 cm definida por los requisitos de fuerza cortante.





**EJEMPLO 15.4 (Continuación)**

$$\begin{aligned} \therefore V_{CR} &= 0.5 F_R b d \sqrt{f_c'} \left( 1 + 0.007 \frac{P_u}{A_g} \right) \\ &= 0.5 \times 0.8 \times 30 \times 40 \times \sqrt{200} \left( 1 + 0.007 \frac{120\,000}{30 \times 45} \right) \\ &= 11\,000 \text{ kg} \\ s &= \frac{F_R A_v f_y d}{(V_u - V_{CR})} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 40}{(12\,500 - 11\,000)} \\ s &= 127 \text{ cm} > \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45 > \frac{d}{2} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

*Refuerzo transversal adoptado*

En los extremos: 5 estribos del No. 3 @ 15 cm, que abarcan un tramo superior al mínimo especificado de 67 cm.

En la porción central: estribos del No. 3 @ 20 cm por los requisitos de cortante.

*Ejemplo 15.5 Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial*

El problema de la flexión biaxial en secciones rectangulares se presenta con frecuencia en el dimensionamiento de estructuras de concreto. Considérese, por ejemplo, el caso de las columnas de edificios sujetas a acciones sísmicas, para las cuales el Reglamento del Distrito Federal [15.9] exige que se tome en cuenta el efecto total del sismo que actúa en una dirección principal, más el 30 por ciento del correspondiente al que pueda actuar en la otra dirección.

En el ejemplo, en que se han seguido las indicaciones de las NTC-77,  $P_R$  es la carga última que debe soportar la sección con las excentricidades indicadas.

El dimensionamiento se llevó a cabo con la ayuda de la fórmula de Bresler, cuya aplicación

se comentó en la sección 6.4.2. Podría haberse recurrido a los diagramas de interacción para flexión biaxial incluidos en la referencia 15.2. Sin embargo el uso de estos diagramas suele resultar tedioso debido a las interpolaciones que es necesario efectuar. Por otra parte, por regla general, la precisión de los resultados no es superior a la que se obtiene con la fórmula de Bresler.

El problema debe resolverse por tanteos. Se muestra en el ejemplo el tanteo final. Se procuró ajustar la cuantía al tres por ciento especificado en los datos. En el cálculo de  $P_{RO}$ ,  $P_{RX}$  y  $P_{RY}$  se utilizó como valor del factor de resistencia  $F_R = 0.75$ , el correspondiente a la falla en compresión. Los diagramas indicaron que, en efecto, ésta fue la modalidad de falla que rigió.

En el arreglo de estribos mostrado en el croquis de armado, se aprecia que no fue necesario proporcionar una grapa para restringir la

**EJEMPLO 15.4 (Continuación)**

$$A_s = 0.0344 \times 30 \times 45 = 46.4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 6 barras del No. 10} = 47.6 \text{ cm}^2 > 46.4 \text{ cm}^2$$

**REFUERZO TRANSVERSAL**

Considerar estribos del No. 3

$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

$\therefore$  separación estribos = 30 cm

**SECCION PROPUESTA**

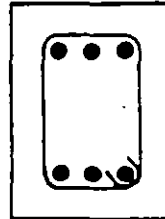
Sección de 30 X 45 cm

6 barras del No. 10

Estribos No. 3 @ 30 cm

en porción central, 5 @

15 cm en los extremos



$$h = 45 \text{ cm}$$

$$60 \text{ cm}$$

$$400/6 = 67$$

$\therefore$  la longitud en que debe mantenerse la separación de 15 cm debe ser igual o superior a 67 cm

**REVISIÓN POR CORTANTE**

(Ver sección 7.6.2)

$$0.7 f_c' A_g + 2000 A_s = 0.7 \times 200 \times 30 \times 45 + 2000 \times 47.6$$

$$= 284\,200 \text{ kg} > P_u = 120\,000 \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{A_s, \text{ (cara de compresión mínima)}}{bd}$$

$$= \frac{23.8}{30 \times 40} = 0.0198 > 0.01$$

**EJEMPLO-15.5 (Continuación)**

**METODO DE SOLUCION**

Fórmula de Bresler (ver sección 6.4.2)

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{RO}}$$

donde

$P_R$  = carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{RO}$  = carga axial resistente de diseño suponiendo  $e_x = e_y = 0$

$P_{RX}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_x$ .

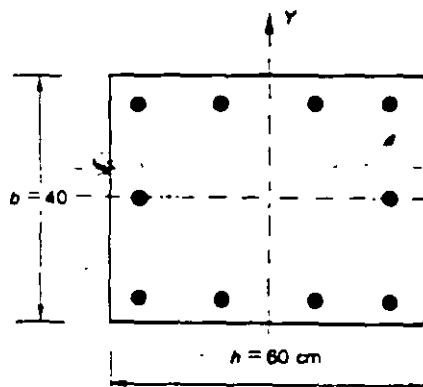
$P_{RY}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_y$ .

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.80 f_c' = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 240 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

**SECCION SUPUESTA**



Considerar  $\rho \approx 0.03$

$$A_s = 0.03 \times 40 \times 60 = 72 \text{ cm}^2$$

$$10 \text{ barras del No. 10} = 79.4 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{79.4}{40 \times 60} = 0.033$$

$$q = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.033 \frac{4200}{204}$$

$$= 0.68$$

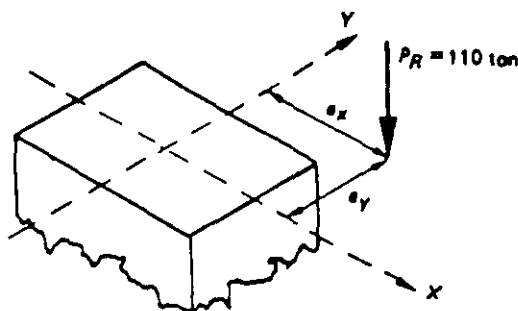
barra central del lado menor ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm. El estribo del No. 3 propuesto cumple ampliamente los requisitos de capacidad en la fluencia mencionados en la sección 15.2. La separación es la correspondiente a la porción central de

la columna. En los extremos, esta separación debe reducirse a la mitad en la forma indicada en la sección citada. No debe olvidarse que en caso de actuar fuerzas cortantes significativas, es necesario verificar que el refuerzo transversal proporcione la resistencia necesaria.

### EJEMPLO 15.5 Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial (NTC-77)

#### DATOS

##### Carga



$$e_x = 95 \text{ cm}$$

$$e_y = 20 \text{ cm}$$

(Los valores de  $e_x$  y  $e_y$  incluyen las excentricidades accidentales.)

##### Materiales

Concreto:  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$

Acero:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo en las cuatro caras

Recubrimiento al centro de las barras:  $r = 6 \text{ cm}$

$$\rho \approx 0.03$$

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar las dimensiones y el refuerzo de una sección rectangular. Detallar los estribos.

## EJEMPLO 15.5 (Continuación)

DETERMINACION DE LA RESISTENCIA  $P_R$ Cálculo de  $P_{RO}$ 

$$\begin{aligned}
 P_{RO} &= F_R (f'_c A_c + A_s f_y) \\
 &= 0.75 [204 (2400 - 79.4) + 79.4 \times 4200] \\
 &= 605\,200 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $P_{RX}$ 

$$d/h = \frac{60 - 6}{60} = 0.9 \quad \therefore \text{usar la figura C.6}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e_x}{h} &= \frac{35}{60} = 0.58 \\
 q &= 0.68
 \end{aligned} \right\} K_x = 0.5$$

$$P_{RX} = K_x F_R b h f'_c = 0.5 \times 0.75 \times 2400 \times 204 = 183\,600 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_{RY}$ 

$$d/b = \frac{40 - 6}{40} = 0.85 \quad \therefore \text{usar la figura C.7}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e_y}{b} &= \frac{20}{40} = 0.5 \\
 q &= 0.68
 \end{aligned} \right\} K_y = 0.55$$

$$P_{RY} = K_y F_R b h f'_c = 0.55 \times 0.75 \times 2400 \times 204 = 202\,000 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_R$ 

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{183\,600} + \frac{1}{202\,000} - \frac{1}{605\,200}} = 114\,000 \text{ kg} > 110\,000 \text{ kg}$$

$\therefore$  La sección propuesta es adecuada

**EJEMPLO-15.5 (Continuación)****METODO DE SOLUCION**

Fórmula de Bresler (ver sección 6.4.2)

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{RO}}$$

donde

$P_R$  = carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{RO}$  = carga axial resistente de diseño suponiendo  $e_x = e_y = 0$

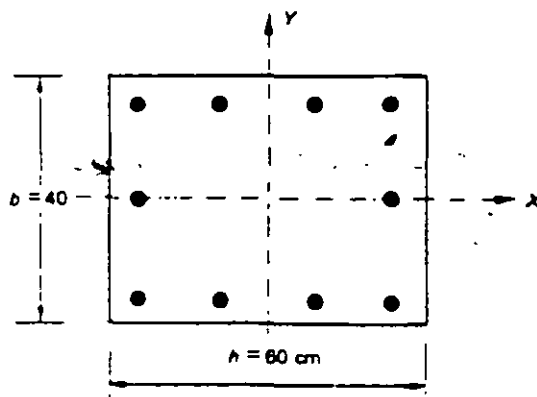
$P_{RX}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_x$ .

$P_{RY}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_y$ .

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.80 f_c' = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 240 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

**SECCION SUPUESTA**Considerar  $\rho \approx 0.03$ 

$$A_s = 0.03 \times 40 \times 60 = 72 \text{ cm}^2$$

10 barras del No. 10 = 79.4 cm<sup>2</sup>

$$\therefore \rho = \frac{79.4}{40 \times 60} = 0.033$$

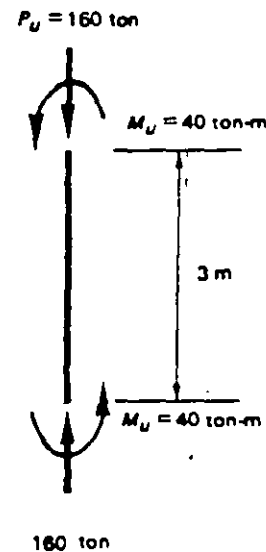
$$q = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.033 \frac{4200}{204}$$

$$= 0.68$$

- 15.2 Detallar el refuerzo de una columna corta cuadrada de estribos para que resista una carga de 300 toneladas. Las dimensiones de la columna deben ser  $45 \times 45$  cm. Suponer  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.
- 15.3 Dimensionar una columna corta cuadrada para una carga muerta de 100 ton y una carga viva de 70 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer  $\rho \cong 0.025$ ,  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .
- 15.4 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para una carga muerta de 80 ton y una carga viva de 140 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar el zuncho.
- 15.5 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para que resista una carga última  $P_u = 200$  ton con una excentricidad igual a 15 cm. Suponer  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar el zuncho.
- 15.6 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última  $P_u = 250$  ton y un momento último  $M_u = 40$  ton-m. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.
- 15.7 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última de 300 ton con una excentricidad  $e_x = 20$  en una de las direcciones principales y

una excentricidad  $e_y = 30$  cm en la otra dirección. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.

- 15.8 Dimensionar la columna del croquis como cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras. Detallar los estribos. Revisar el efecto de la fuerza constante. Suponer  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .



## EJEMPLO 15.5 (Continuación)

## REFUERZO TRANSVERSAL

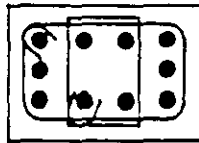
$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

separación estribos = 40 cm

## SECCION ADOPTADA



Sección de 40 X 60 cm  
10 barras del No. 10  
Estribos del No. 3 @ 40 cm

## REFERENCIAS

- 15.1 Blume, J.A., N. M. Newmark y L.N. Corning. *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings*. Skokie, Ill., Portland Cement Association, 1961.
- 15.2 Meli, R., y M. Rodríguez. *Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1980.
- 15.3 Comité ACI 340. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Vol. 2 - Columns*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 15.4 Jiménez Montoya, P., et al. *Hormigón armado, Tomo II: Abacos para el cálculo de secciones en el estado último de agotamiento* (10a. edición). Barcelona, Gustavo Gill, 1979.
- 15.5 González Cuevas, O. *Manual de Diseño de Concreto Reforzado, Vol. 1: Flexocompresión y cor-*
- tante*. México, D.F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, 1970.
- 15.6 Comité ACI 340. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Vol. 1-Beams, Slabs, Brackets, Footings, and Pile Caps*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 15.7 \_\_\_\_\_. *CRSI Handbook*. Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 1978.
- 15.8 Marín, J. "Abacos, fórmulas y criterios para el cálculo de edificios de concreto armado". *Boletín IMME*, Caracas, enero-junio 1978.
- 15.9 \_\_\_\_\_. *Requisitos de seguridad y servicio para las estructuras, Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

## EJERCICIOS

(Observación. Los siguientes ejercicios pueden resolverse con las NTC-77 o con el Reglamento ACI 318-83, salvo cuando se indique lo contrario.)

- 15.1 Utilizando los diagramas de la referencia 15.2, determinar los valores de  $P_u$  y  $M_u$  que resiste la sección dimensionada en el ejemplo 15.2.





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**WALLS**

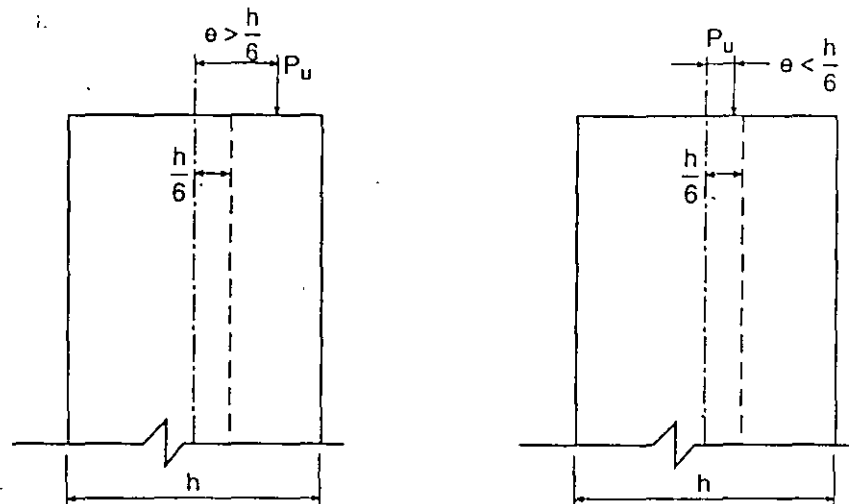
**EXPOSITOR: ING. JOSE MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

### UPDATE FOR THE '95 CODE

The code change affecting the design of walls is due to the revisions in the slenderness provisions of 10.10 to 10.13. Section 14.4 makes reference to these revised sections.

### GENERAL CONSIDERATIONS

Section 14.2.2 allows the designer two options in designing walls: (1) walls may be designed as compression members using the strength design provisions for flexure and axial loads of Chapter 10 (Fig. 23-1(a)) or (2) they may be designed by the Empirical Design Method of 14.5 (Fig. 23-1(b)). The provisions of 14.2 and 14.3 apply to walls designed by either method. No minimum wall thicknesses are prescribed for walls designed as compression members (14.4).



(a) Section 14.4

(b) Section 14.5

Figure 23-1 Design of Walls by ACI Code

Note that the Empirical Design Method applies to load bearing walls, and only to walls of solid rectangular cross-section. Minimum thicknesses are prescribed for walls designed by this method (14.5.3). Load bearing walls of nonrectangular cross-section, such as ribbed wall panels, must be designed by the provisions in 14.4. Cantilever retaining walls are designed by the flexural design provisions of Chapter 10 (see 14.1.2).

Shear forces must be considered in the design of walls. Section 14.2.3 requires the design for shear to be in accordance with 11.10, the special shear provisions for walls. The required shear reinforcement may exceed the minimum wall reinforcement given in 14.3.

The provisions of 15.8 specifically address force transfer between a wall and footing, with 15.8.2.2 requiring a minimum amount of reinforcement, not less than the minimum vertical reinforcement given in 14.3.2, to be provided across the interface between a wall and a supporting footing.

#### 14.4 WALLS DESIGNED AS COMPRESSION MEMBERS

Where wall geometry and loading conditions do not satisfy the limitations of 14.5 (usually where lateral loads are present), walls must be designed as compression members by the strength design provisions in Chapter 10 for flexure and axial loads. Minimum reinforcement requirements of 14.3 apply to walls designed by strength design provisions of Chapter 10. The vertical wall reinforcement need not be enclosed by lateral ties (as for columns) if the conditions of 14.3.6 are satisfied. All other code provisions for compression members apply to walls designed by Chapter 10.

As with columns, the design of walls is usually difficult without the use of design aids. Wall design is further complicated by the fact that slenderness is a consideration in practically all cases. Two methods for slenderness consideration are specified in the code. A second-order analysis, which takes into account variable wall stiffness, as well as the effects of member curvature and lateral drift, duration of the loads, shrinkage and creep, and interaction with the supporting foundation, is specified in 10.10.1. In lieu of that procedure, the approximate evaluation of slenderness effects prescribed in 10.11 may be used.

It is important to note that Eqs. (10-12) and (10-13) for  $EI$  in the approximate slenderness method were not originally derived for members with a single layer of reinforcement.

For members with a single layer of reinforcement, the following expression for  $EI$  has been suggested by MacGregor<sup>23.1</sup>

$$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left( 0.5 - \frac{c}{h} \right) \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad (1)$$

$$\leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta}$$

where  $\beta = 0.9 + (0.5\beta_d^2) - 12\rho \geq 1.0$

$\beta_d$  = ratio of dead load to total load

$\rho$  = ratio of area of vertical reinforcement to gross concrete area

For ACI 318-95, the definition of the creep effect factor  $\beta_d$ , included with Eqs. (10-12) and (10-13) for  $EI$ , now depends on the lateral stiffness of the structure. Walls have considerable stiffness in their own planes. Additionally, they are connected by a roof and/or floor slab. The structure which is created by these walls, therefore, is laterally stiff, i.e., lateral sway is negligible. According to 10.0,  $\beta_d$  for non-sway frames is the ratio of the maximum factored axial dead load to the total factored axial load. For consistency, the same sustained load ratio seems appropriate for the  $EI$  expressions for walls in Eq.-(1).

Figure 23-2 shows the comparison of flexural stiffness ( $EI$ ) by Code Eq. (10-13) and Eq. (1) in terms of  $E_c I_g$ .

The ratio of  $EI/E_cI_g$  is plotted as a function of eccentricity  $e/h$  for several values of  $\beta_d$ , with the reinforcement ratio  $\rho$  constant at 0.0015. Note that Code Eq. (10-13) assumes  $EI$  to be independent of  $e/h$  and appears to overestimate wall stiffness for higher load eccentricity. For walls designed by Chapter 10 with slenderness evaluation by 10.11, Eq. (1) is recommended in lieu of Code Eq. (10-13) for determining wall stiffness. Example 23.1 illustrates application of 10.11 using Eq. (1) for wall stiffness.

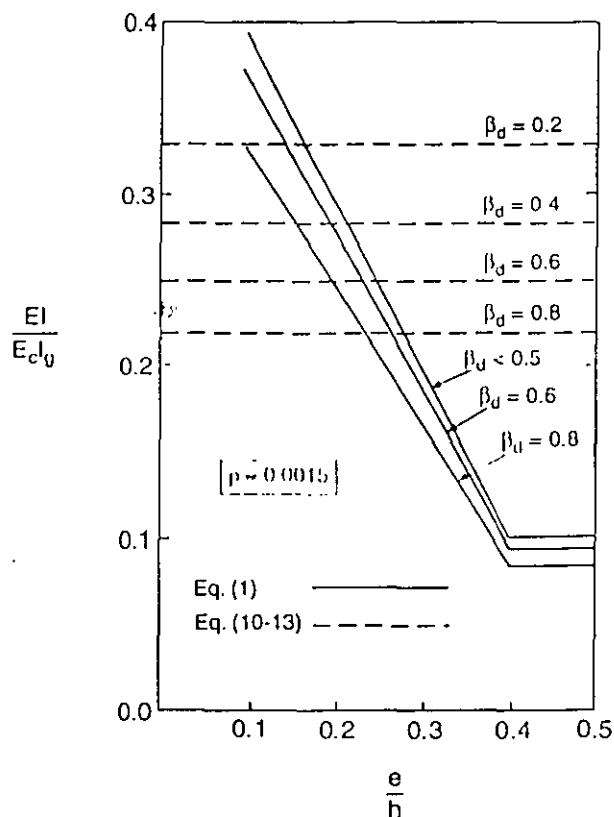


Figure 23-2 Stiffness  $EI$  of Walls

When wall slenderness exceeds the limit for application of the approximate slenderness evaluation method of 10.11 ( $k\ell_u/h \geq 30$ ), a more detailed evaluation of wall slenderness effects is required, as defined in 10.10.1. The slender load-bearing concrete wall panels currently used in some building systems, especially in tilt-up wall construction, fall in this high slenderness category. The more detailed slenderness analysis should account for the influence of variable wall stiffness, the effects of deflections on the moments and forces, and the effects of load duration. Such an analysis is presented in PCA design aid EB074D *Tilt-up Load-Bearing Walls*.<sup>23.2</sup> It presents load capacities of slender wall panels ( $20 \leq k\ell_u/h \leq 50$ ) with thicknesses varying from 5-1/2 to 9-1/2 in. and having single or double layers of reinforcement. The design process involves the use of load capacity coefficient tables, which are simple to use, requiring only a minimum amount of calculations. A detailed description of how the design tables were developed is included in the publication. Example 23.2 illustrates application of EB074D.

## 14.5 EMPIRICAL DESIGN METHOD

The Empirical Design Method may be used for design of load-bearing walls if the resultant of all applicable loads falls within the middle one-third of the wall thickness (eccentricity  $e \leq h/6$ ), and the thickness is at least the minimum prescribed in 14.5.3. Note that in addition to any eccentric axial loads, the effect of any lateral loads on the wall must be included to determine the "effective" eccentricity of the resultant load. The method applies

only to walls of solid rectangular cross-section. The empirical method is a simple design procedure for these limited cases, requiring only a single strength calculation to determine the design axial load strength of a wall.

Primary application of the Empirical Design Method is for relatively short walls spanning vertically, and subject to vertical loads only, such as those resulting from floor or roof reactions. Application becomes extremely limited when lateral loads need to be considered, because the "effective" load eccentricity is limited to  $h/6$ . Walls not falling in this category must be designed as compression members for axial load and flexure by the provisions of Chapter 10 (14.4).

When the eccentricity  $e$  of the "effective" load does not exceed  $h/6$ , the design is performed considering  $P_u$  as a concentric load. The factored axial load  $P_u$  must be less than the design axial load strength  $\phi P_{nw}$  computed by Eq. (14-1):

$$P_u \leq \phi P_{nw} \leq 0.55\phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k\ell_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

The single strength equation for  $\phi P_{nw}$  considers both load eccentricity and slenderness effects. The eccentricity factor 0.55 was originally selected to give strengths comparable with those given by Chapter 10 for members with axial load applied at an eccentricity of  $h/6$ . Figure 23-3 shows typical load-moment strength curves for 8-, 10-, and 12-in. walls with  $f'_c = 4000$  psi and  $f_y = 60,000$  psi.<sup>23,3</sup> The curves yield eccentricity factors (ratios of strength under eccentric loading to that under concentric loading) of 0.562, 0.568, and 0.563 for the 8-, 10-, and 12-in. walls with  $e = h/6$  and  $\rho = 0.0015$ .

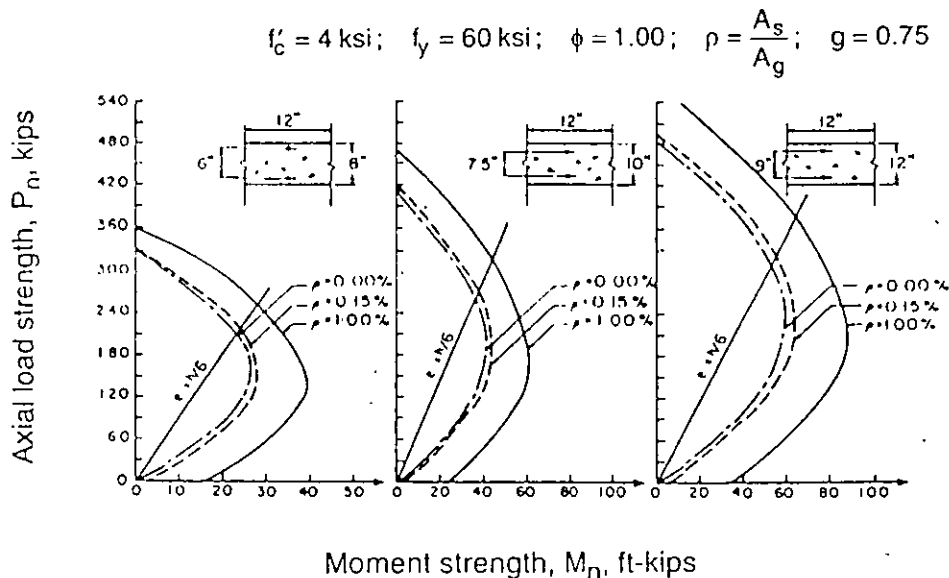


Figure 23-3 Typical Load-Moment Strength Curves for 8-, 10-, and 12-in. Walls

Use of Eq. (14-1) is further limited to the following design conditions:

- 1 Wall thickness  $h$  must not be less than  $1/25$  times the supported length or height, whichever is shorter, nor less than 4 in. (14.5.3.1) Exterior basement walls and foundation walls must be at least 7-1/2 in. thick (14.5.3.2).

2. Walls must contain both horizontal and vertical reinforcement. The area of horizontal reinforcement must not be less than 0.0025 times the gross concrete area, and that of the vertical reinforcement not less than 0.0015 times the gross concrete area. These ratios may be reduced to 0.0020 and 0.0012 respectively, when #5 or smaller bars having  $f_y \geq 60,000$  psi, or welded wire fabric with W31 or D31 or smaller wires are used. In walls greater than 10 in. thick (except basement walls) the reinforcement in each direction must be placed in two layers (14.3).
3. Length of wall to be considered as effective for each beam reaction must not exceed center-to-center distance between reactions, nor width of bearing plus  $4h$  (14.2.4).
4. The wall must be anchored to the floors or to columns and other structural elements of the building (14.2.6).

Note that the minimum wall reinforcement required by 14.3.2 does not substantially increase the strength of a wall above that of a plain concrete wall. The minimum wall reinforcement required by 14.3 is provided primarily for control of cracking due to shrinkage and temperature stresses.

With the publication of ACI 318-83, the empirical wall design Eq. (14-1) was modified to reflect the general range of end conditions encountered in wall design, and to allow for a wider range of design applications. The wall strength equation in previous codes was based on the assumption that the top and bottom ends of the wall are restrained against lateral movement, and that rotation restraint exists at one end, so as to have an effective length factor between 0.8 and 0.9. Axial load strength values could be unconservative for pinned-pinned end conditions, which can exist in certain walls, particularly of precast tilt-up construction. Axial strength could also be overestimated where the top end of the wall is free and not braced against translation. In these cases, it is necessary to reflect the proper effective length in the design equation. Equation (14-1) allows the use of different effective length factors  $k$  to address this situation. The values of  $k$  have been specified in 14.5.2 for commonly occurring wall end conditions. Equation (14-1) will give the same results as the 1977 Code Eq. (14-1) for walls braced against translation of both ends and with reasonable base restraint against rotation.

Reasonable base restraint against rotation implies attachment to a member having a flexural stiffness  $EI/\ell$  at least equal to that of the wall. Selection of the proper  $k$  for a particular set of support end conditions is left to the judgment of the engineer.

Example 23.3 illustrates application of the Empirical Design Method to a bearing wall supporting precast floor beams. It should be noted that the reinforcement and minimum thickness requirements of 14.3 and 14.5.3 may be waived where structural analysis shows adequate strength and wall stability (14.2.7). This required condition may be satisfied by a design using the structural plain concrete provisions in Chapter 22.

## 11.10 SPECIAL SHEAR PROVISIONS FOR WALLS

For most low-rise buildings, horizontal shear forces acting in the plane of walls are small, and can usually be neglected in design. Such in-plane forces, however, become a design consideration in major structures where a limited number of walls resist the total lateral load, such as in high-rise buildings. Flexural strength must also be considered when in-plane loads are significant. Example 23.4 illustrates in-plane shear design of walls, including design for flexural strength.

## DESIGN SUMMARY

A trial procedure for wall design is suggested: first assume a wall thickness  $h$  and a reinforcement ratio  $\rho$ , then check the trial wall for the applied loading conditions.

It is not within the scope of Part 23 to include design aids for a broad range of wall and loading conditions. The intent is to present examples of design options and aids. The designer can, with reasonable effort, produce

design aids to fit the range of conditions usually encountered in practice. For example, strength interaction diagrams such as those plotted in Fig. 23-4(a) ( $\rho = 0.0015$ ) and Fig. 23-4(b) ( $\rho = 0.0025$ ) can be helpful design aids for evaluation of wall strength. "Blow-ups" of the lower portions of the strength interaction diagrams are shown for specific walls ( $h = 6.5$  in.). Load charts, such as the one shown in Fig. 23-5 can also be developed for specific walls. Design aids such as the one shown in Fig. 23-6 may facilitate selection of wall reinforcement.

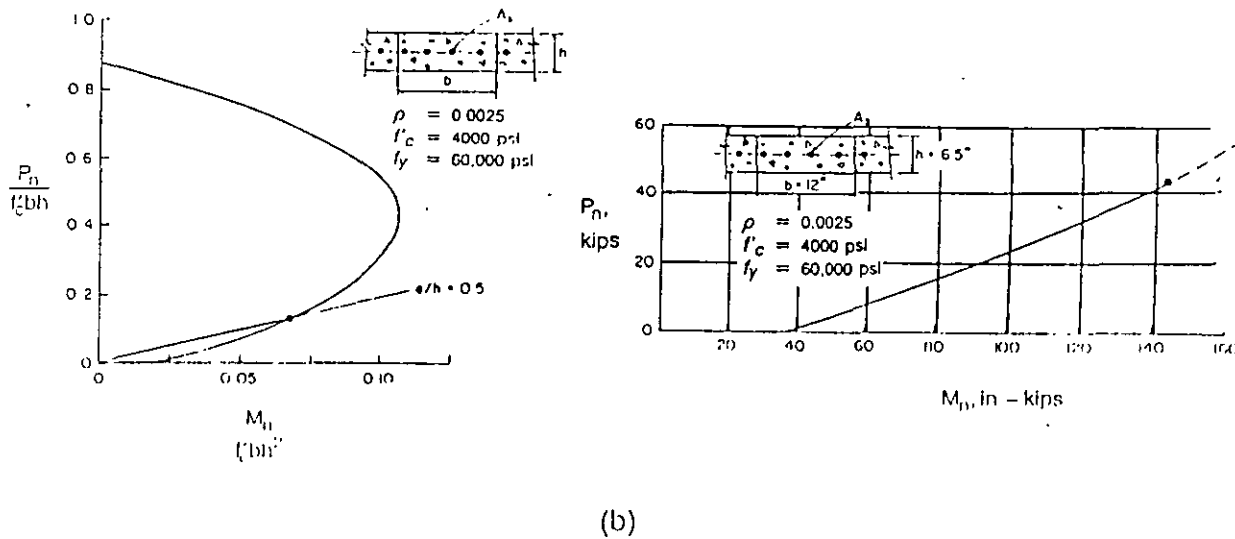
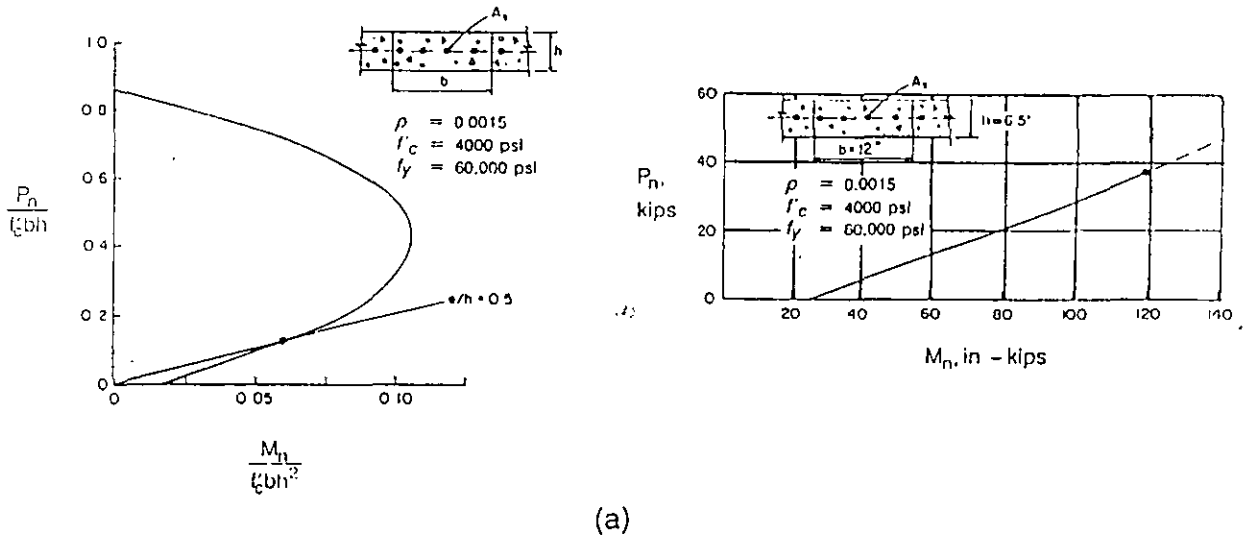


Figure 23-4 Load Moment Interaction Diagram for Wall with (a) Reinforcement  $\rho = 0.0015$ , and (b) Reinforcement  $\rho = 0.0025$

Prestressed walls are not covered specifically in Part 23. Prestressing of walls is advantageous for handling (precast panels) and for increased buckling resistance. For design of prestressed walls the designer should consult Ref. 23.4.

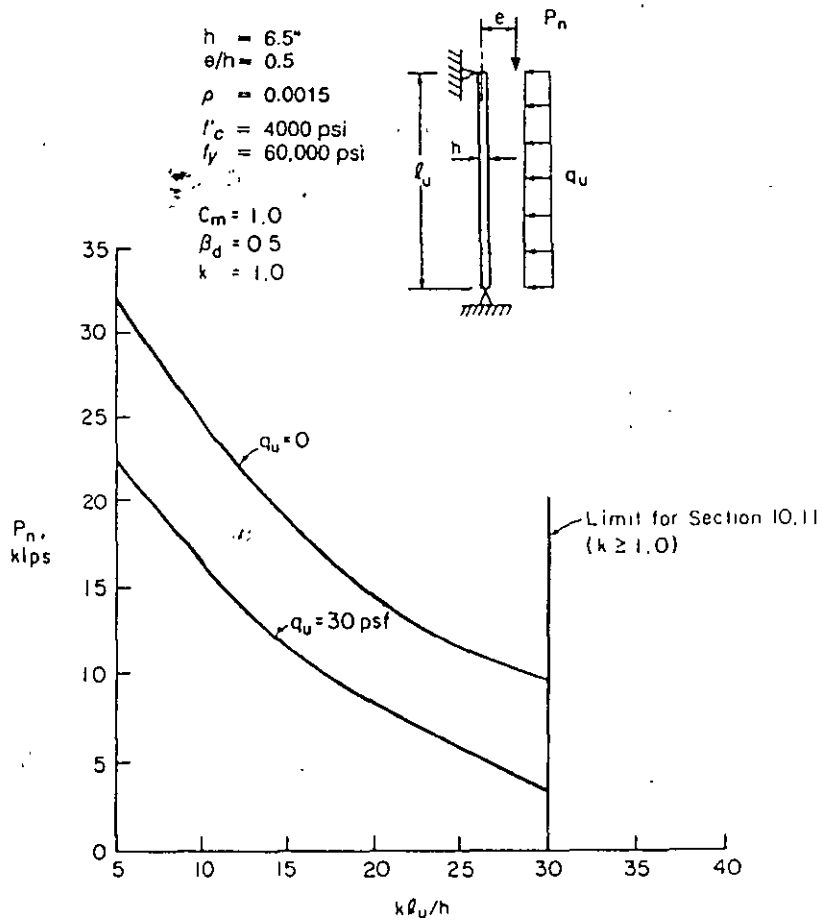


Figure 23-5 Design Chart for 6.5-in. Wall

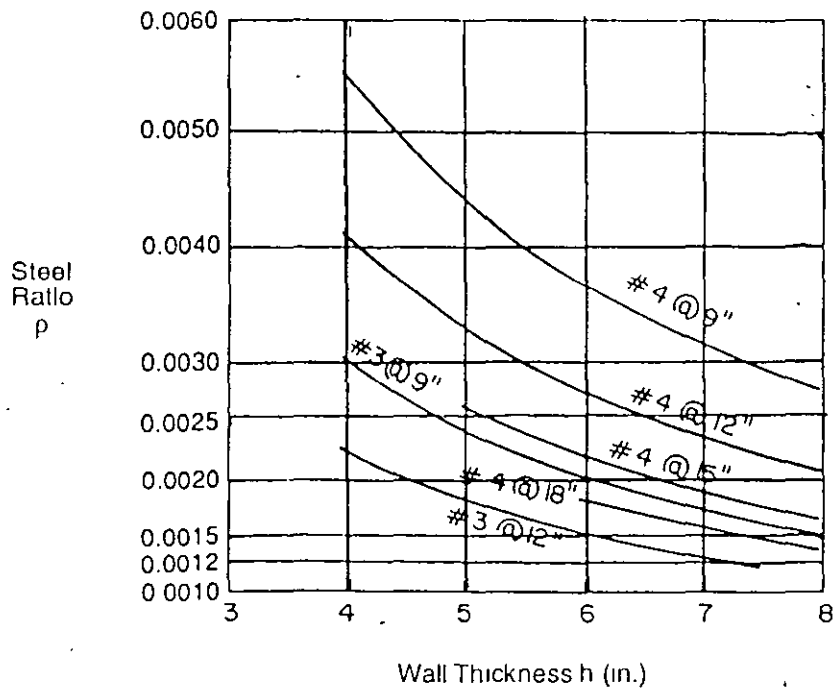


Figure 23-6 Design Aid for Wall Reinforcement

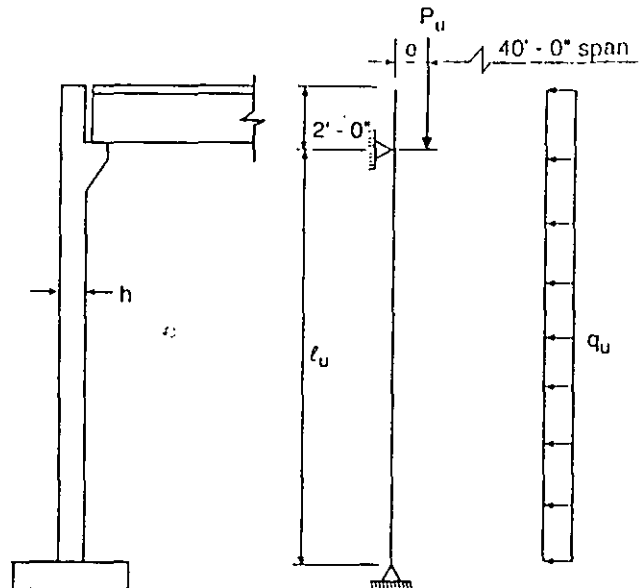


## REFERENCES

- 23.1 MacGregor, J.G., "Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Members," paper presented at International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium, Quebec, 1974.
- 23.2 *Tilt-Up Load Bearing Walls - A Design Aid*, Publication EB074D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1994.
- 23.3 Kripanaryanan, K.M., "Interesting Aspects of the Empirical Wall Design Equation," *ACI Journal*, Proceedings Vol. 74, No. 5, May 1977, pp. 204-207.
- 23.4 *PCI Design Handbook - Precast and Prestressed Concrete*, 4th Edition, Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL, 1994.

## Example 23.1—Design of Tilt-up Wall Panel by Chapter 10 (14.4)

Design of the wall shown is required. The walls are spaced at 40 ft on center and restrained at the top edge. The roof load is supported through 4 in. tee stems spaced at 4 ft on center.



Design data:

Roof dead load = 50 psf

Roof live load = 20 psf

Wind load = 20 psf

Unsupported length of wall  $\ell_u = 16$  ft

Effective length factor  $k = 1.0$  (pinned-pinned end condition)

Concrete  $f'_c = 4000$  psi ( $w_c = 150$  pcf)

Steel  $f_y = 60,000$  psi

Assume non-sway condition.

### Calculations and Discussion

Code  
Reference

1. Trial wall selection (design for 1 ft wall section)

Try  $h = 6.5$  in. with assumed  $e = 6.75$  in.

Try #4 @ 12 in. ( $A_s = 0.20$  in.<sup>2</sup>/ft)

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{0.20}{(12 \times 6.5)} = 0.00256$$

2. a. Effective wall length for roof reaction

14.2.4

(i) bearing width + 4 (wall thickness) =  $4 + 4(6.5) = 30$  in. = 2.5 ft (governs)

(ii) center-to-center distance between stems = 4 ft

Example 23.1 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

b Roof loading per foot of wall

$$\text{dead load} = 50 \times 20 \left( \frac{4}{2.5} \right) = 1600 \text{ lb/ft}$$

$$\text{live load} = 20 \times 20 \left( \frac{4}{2.5} \right) = 640 \text{ lb/ft}$$

$$\text{wall dead load at mid-height} = 150(8 + 2) \left( \frac{6.5}{12} \right) = 813 \text{ lb/ft}$$

Factored load combinations.

Load case 1:  $U = 1.4D + 1.7L$  *Eq. (9-1)*

$$P_u = 1.4(1.6 + 0.81) + 1.7(0.64)$$

$$= 3.4 + 1.1 = 4.5 \text{ kips}$$

$$M_u = 1.4(1.6 \times 6.75) + 1.7(0.64 \times 6.75)$$

$$= 15.1 + 7.3 = 22.4 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 3.4/4.5 = 0.76$$

Load case 2:  $U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$  *Eq. (9-2)*

$$P_u = 0.75(3.4 + 1.1 + 0)$$

$$= 2.6 + 0.8 = 3.4 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.75[15.1 + 7.3 + 1.7(0.02 \times 16^2 \times 12/8)]$$

$$= 11.3 + 5.5 + 9.8 = 26.6 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 2.6/3.4 = 0.76$$

Load case 3:  $U = 0.9D + 1.3W$  *Eq. (9-3)*

$$P_u = 0.9(1.6 + 0.81) + 0 = 2.2 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.9(1.6 \times 6.75) + 1.3(0.02 \times 16^2 \times 12/8)$$

$$= 9.7 + 10.0 = 19.7 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 2.41/2.41 = 1.0$$

3. Check wall slenderness:

$$\frac{kC_u}{r} = \frac{1.0(16 \times 12)}{(0.3 \times 6.5)} = 98.5$$

< 100, approximate evaluation of slenderness effects by 10.11.1 may be used.

4. Calculate moment magnification

10.12

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$
 *Eq. (10-9)*

Example 23.1 (cont'd)

Calculations and Discussion

Code Reference

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{P_u}{0.75P_c} \right)} \geq 1 \quad \text{Eq. (10-10)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Eq. (10-11)}$$

$$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left( 0.5 - \frac{e}{h} \right) \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad \text{Eq. (1)}$$

$$\leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{6.75}{6.5} = 1.04$$

$$\text{Thus, } EI = 0.1 \left( \frac{E_c I_g}{\beta} \right)$$

$$E_c = 57,000 \sqrt{4000} = 3.605 \times 10^6 \text{ psi} \quad 8.5.1$$

$$I_g = \frac{12 \times 6.5^3}{12} = 274.6 \text{ in.}^4$$

$$\beta = 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12\rho \geq 1.0$$

$$= 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12(0.00256)$$

$$= 0.869 + 0.5\beta_d^2 \geq 1.0$$

$$EI = \frac{0.1 \times 3.605 \times 10^6 \times 274.6}{\beta} = \frac{99 \times 10^6}{\beta} \text{ lb-in.}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 99 \times 10^6}{\beta (16 \times 12)^2 \times 1000} = \frac{26.5}{\beta} \text{ kips}$$

$C_m = 1.0$  for members with transverse loads between supports

Calculate  $\phi$  factor for largest  $P_u = 4.5$  kips

9.3.2.2(b)

$$\phi = 0.9 - \frac{0.2P_u}{0.1f'_c A_g} \geq 0.70$$

$$= 0.9 - \frac{0.2 \times 4.5}{0.1 \times 4 \times 12 \times 6.5} = 0.87$$

Although slight variations from this value will occur for different load cases, this single value is considered adequate.

Determine magnified moment  $M_c$  for each load case.

Load Case	$P_u$ (kips)	$M_u$ (in.-kips)	$\beta_d$	$\beta = 0.869 + 0.5\beta_d^2 > 1.0$	$EI = \frac{99 \times 10^6}{\beta}$ (lb-in. <sup>2</sup> )	$P_c = \frac{26.5}{\beta}$ (kips)	$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0$	$M_c = \delta_{ns} M_u$ (in.-kips)
1	4.5	22.4	0.76	1.10	$85 \times 10^6$	22.8	1.36	30.5
2	3.4	26.6	0.76	1.16	$85 \times 10^6$	22.8	1.25	33.3
3	2.2	19.7	1.00	1.37	$72 \times 10^6$	19.3	1.18	23.2

5. Check design strength vs. required strength

For each load case, the required nominal strength will be compared to the design strength using the load-moment interaction diagram in Fig. 23-4(b). The results are tabulated below, based on the moment strengths for the given axial loads.

Load Case	Required Nominal Strength		Design Strength $M_n$ (in.-kips)
	$P_n = P_u / \phi$ (kips)	$M_n = M_c / \phi$ (in.-kips)	
1	5.2	35.1	50.0
2	3.9	30.3	45.0
3	2.5	26.7	40.0

The wall is adequate with the #4 @ 12 in. since the design strength is greater than the required nominal strength for all three load cases.

---

**Example 23.2—Design of Tilt-up Wall of Example 23.1 Using Design Aid EB074D**

---

## 1. Summary of factored loads

$$\begin{aligned}\text{Load case 1: } P_u &= 1.4(1.6) + 1.7(0.64) \\ &= 2.2 + 1.1 = 3.3 \text{ kips}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 2: } P_u &= 0.75(2.2 + 1.1) = 2.5 \text{ kips} \\ q_u &= 0.75(1.7 \times 20) = 25.5 \text{ psf}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 3: } P_u &= 0.9 \times 1.6 = 1.4 \text{ kips} \\ q_u &= 1.3 \times 20 = 26.0 \text{ psf}\end{aligned}$$

From Ex. 23.1,  $\phi = 0.87$

## 2. Select trial section

Use same trial sections as in Example 23.1.

$$h = 6.5 \text{ in.}$$

$$\rho = 0.0025$$

$$\frac{k\ell_u}{h} = \frac{1.0 \times 16 \times 12}{6.5} = 29.5 \approx 30$$

## 3. Check strength using EB074D design aid

Load case 1: Required  $P_u / \phi = 3.8$  kips,  $q_u / \phi = 0$   
Use Table A5 (see Table 23-1) from EB074D  
For  $\rho = 0.0025$ ,  $k\ell_u / h = 30$ ,  $e = 6.75$  in., and  
 $q_u / \phi = 0$ , coefficient = 0.022  
 $P_n = 0.022 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 6.9$  kips  $> P_u / \phi$  O.K.

Load case 2: Required  $P_u / \phi = 2.9$  kips,  $q_u / \phi = 29.3$  psf, say 30 psf  
Use Table A6 (see Table 23-2) from EB074D  
For  $\rho = 0.0025$ ,  $k\ell_u / h = 30$ ,  $e = 6.75$  in., and  
 $q_u / \phi = 30$  psf, coefficient = 0.014  
 $P_n = 0.014 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 4.4$  kips  $> P_u / \phi$  O.K.

By inspection, the strength requirements for load case 3 are satisfied.

Therefore, the 6.5-in. wall reinforced with #4 @ 12 in. is adequate for all of the load combinations investigated.

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-1 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A5. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls \*

( $h = 6'2"$  (165 mm) and  $q_{ub} = 0$  or 15 psf (0 or 0.7 kN/m<sup>2</sup>))

$\mu = \frac{V_u \times 100}{b_v \times h}$		End eccentricity, $e$ , in. (mm)	$q_{ub} = 0$ psf (0 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, $\lambda e/h_i =$				$\lambda e/h_i$ @ coeff. † $\leq 0.001$	$q_{ub} = 15$ psf (0.7 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, $\lambda e/h_i =$				$\lambda e/h_i$ @ coeff. † $\leq 0.001$
			20	30	40	50		20	30	40	50	
0.15	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.085	**	
	3.25 (85)	0.094	0.042	0.018	0.013	**	0.087	0.021	0.005	—	49	
	6.75 (170)	0.018	0.014	0.005	0.003	**	0.017	0.009	0.003	—	49	
0.25	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.090	**	
	3.25 (85)	0.110	0.050	0.026	0.018	**	0.105	0.037	0.011	0.003	**	
	6.75 (170)	0.029	0.022	0.010	0.006	**	0.025	0.015	0.006	0.002	**	
0.50	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.483	0.331	0.191	0.100	**	
	3.25 (85)	0.128	0.066	0.034	0.022	**	0.124	0.055	0.023	0.011	**	
	6.75 (170)	0.019	0.034	0.020	0.012	**	0.045	0.029	0.016	0.009	**	
0.75	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.498	0.331	0.191	0.110	**	
	3.25 (85)	0.146	0.082	0.042	0.026	**	0.142	0.073	0.035	0.019	**	
	6.75 (170)	0.069	0.046	0.030	0.018	**	0.065	0.044	0.026	0.016	**	

\*Observe the direction of ultimate transverse loads ( $q_u$ ) and note the bending moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4). A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

\*\*Walls with slenderness ratios,  $\lambda e/h_i$ , greater than 50 are not recommended.

†This column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity.

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-2 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A6. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls \*  
 ( $h = 6\frac{1}{2}$ " (165 mm) and  $q_u/b = 30$  or  $45$  psf (1.4 or 2.2 kN/m<sup>2</sup>))

$\lambda > 100$ $\mu = \frac{h_1}{h}$	End eccentricity, $e$ , (mm)	$q_u/b = 30$ psf (1.4 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, $\lambda_e/h_e =$				$\lambda_e/h_e$ @ coeff † = 0.001	$q_u/b = 45$ psf (2.2 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, $\lambda_e/h_e =$				$\lambda_e/h_e$ @ coeff † = 0.001
		20	30	40	50		20	30	40	50	
		0.15	1.00 (25)	0.468	0.316		0.035	—	49	0.438	
	3.25 (85)	0.079	0.011	—	—	39	0.067	—	—	—	29
	6.75 (170)	0.016	0.005	—	—	39	0.014	—	—	—	29
0.25	1.00 (25)	0.468	0.316	0.151	0.030	**	0.438	0.301	0.065	—	49
	3.25 (85)	0.101	0.026	0.006	—	49	0.092	0.016	—	—	39
	6.75 (170)	0.024	0.014	0.004	—	49	0.023	0.009	—	—	39
0.50	1.00 (25)	0.483	0.316	0.151	0.040	**	0.453	0.301	0.070	0.010	**
	3.25 (85)	0.121	0.046	0.016	0.004	**	0.114	0.036	0.010	0.003	**
	6.75 (170)	0.042	0.028	0.013	0.003	**	0.040	0.024	0.009	0.002	**
0.75	1.00 (25)	0.498	0.316	0.151	0.050	**	0.468	0.301	0.070	0.020	**
	3.25 (85)	0.141	0.066	0.026	0.009	**	0.137	0.056	0.021	0.006	**
	6.75 (170)	0.061	0.042	0.023	0.007	**	0.059	0.039	0.020	0.005	**

\*Observe the direction of ultimate transverse loads ( $q_u$ ) and note the bending moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4). A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

\*\*Walls with slenderness ratios,  $\lambda_e/h_e$ , greater than 50 are not recommended.

†This column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity



### Example 23.3—Design of Bearing Wall by Empirical Design Method (14.5)

A concrete bearing wall supports a floor system of precast single tees spaced at 8 ft on centers. The stem of each tee section is 8 in. wide. The tees have full bearing on the wall. The height of wall is 15 ft, and the wall is considered laterally restrained at top. Design of the wall is required.

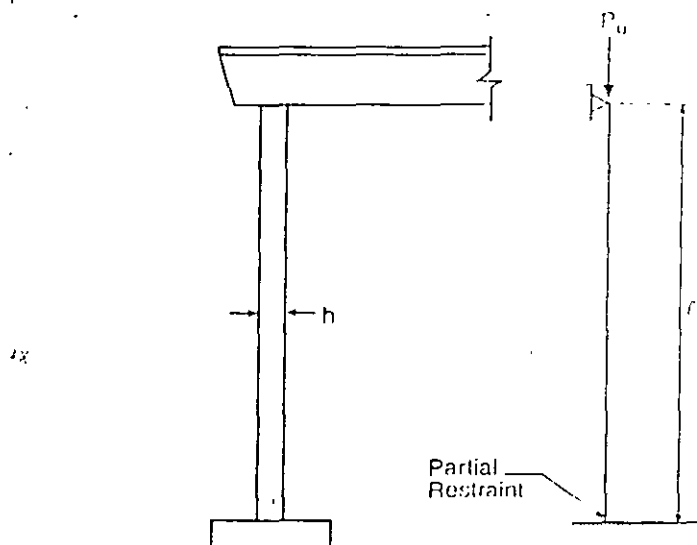
Design Data:

Floor beam reactions: dead load = 28 kips  
live load = 14 kips

$f'_c = 4000$  psi

$f_y = 60,000$  psi

Neglect self-weight of wall



### Calculations and Discussion

### Code Reference

The general design procedure is to select a trial wall thickness  $h$ , then check the trial wall for the applied loading conditions.

1. Select trial wall thickness  $h$ .

$$h > \frac{l_u}{25} \text{ but not less than 4 in.}$$

14.5.3.1

$$> \frac{15 \times 12}{25} = 7.2 \text{ in.}$$

Try  $h = 7.5$  in.

2. Calculate factored loading.

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Eq. (9-1)

$$= 1.4(28) + 1.7(14)$$

$$= 39.2 + 23.8 = 63 \text{ kips}$$

3. Check bearing strength on concrete.

10.17

Assume width of stem for bearing equal to 7 in., to allow for beveled bottom edges.

$$\text{Loaded area } A_1 = 7 \times 7.5 = 52.5 \text{ in.}^2$$

16

Example 23.3 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

Bearing capacity =  $\phi(0.85f'_cA_1) = 0.70(0.85 \times 4 \times 52.5) = 125 \text{ kips} > 63 \text{ kips}$  O.K.

4. Calculate design strength of wall.

Effective horizontal length of wall per tee reaction =  $\begin{cases} 7 + 4(7.5) = 37 \text{ in. (governs)} \\ 8 \times 12 = 96 \text{ in.} \end{cases}$  14.2.4

$$\phi P_{nw} = 0.55\phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k \ell_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

$$= 0.55 \times 0.70 \times 4(37 \times 7.5) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 15 \times 12}{32 \times 7.5} \right)^2 \right]$$

$$= 273 \text{ kips} > 63 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

The 7.5-m. wall is adequate, with sufficient margin for possible effect of load eccentricity.

5. Determine single layer of reinforcement.

Based on 1-ft width of wall and Grade 60 reinforcement (#5 and smaller):

$$\text{Vertical } A_s = 0.0012 \times 12 \times 7.5 = 0.108 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.2$$

$$\text{Horizontal } A_s = 0.0020 \times 12 \times 7.5 = 0.180 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.3$$

$$\text{Spacing} = \begin{cases} 3h = 3 \times 7.5 = 22.5 \text{ in.} \\ 18 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 14.3.5$$

Vertical  $A_s$ : use #4 @ 18 in. on center ( $A_s = 0.13 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

Horizontal  $A_s$ : use #4 @ 12 in. on center ( $A_s = 0.20 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

Design aids such as Fig. 23-6 may be used to select reinforcement directly.

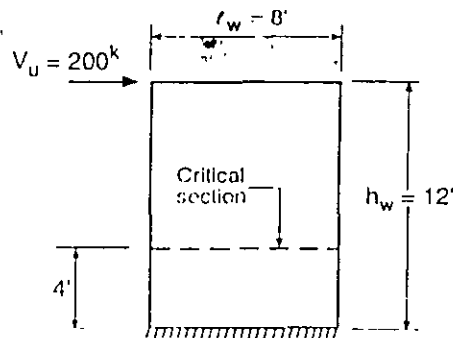
## Example 23.4—Shear Design of Wall

Determine the shear and flexural reinforcement for the wall shown

$$h = 8 \text{ in.}$$

$$f'_c = 3000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi}$$



### Calculations and Discussion

Code  
Reference

1. Check maximum shear strength permitted.

$$V_u \leq \phi 10 \sqrt{f'_c} h d \quad 11.10.3$$

$$\leq 0.85 \times 10 \sqrt{3000} \times 8 (0.8 \times 96) / 1000 = 286 \text{ kips} > 200 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad 11.10.4$$

2. Calculate shear strength provided by concrete  $V_c$ .

Critical section for shear:

11.10.7

$$\frac{l_w}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ ft (governs)}$$

$$\frac{h_w}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ft}$$

$$V_c = 3.3 \sqrt{f'_c} b d + \frac{N_u d}{4 l_w} \quad \text{Eq. (11-31)}$$

$$= 3.3 \sqrt{3000} (8) (76.8) + 0 = 111 \text{ kips}$$

or

$$V_c = \left[ 0.6 \sqrt{f'_c} + \frac{l_w \left( 1.25 \sqrt{f'_c} + \frac{0.2 N_u}{l_w h} \right)}{\frac{M_u}{V_u} + \frac{l_w}{2}} \right] b d \quad \text{Eq. (11-32)}$$

$$= \left[ 0.6 \sqrt{3000} + \frac{96 (1.25 \sqrt{3000} + 0)}{96 - 48} \right] \left( \frac{8 \times 76.8}{1000} \right) = 104 \text{ kips (governs)}$$

where  $M_u = (12 - 4) V_u = 8V_u$  ft kips  $= 96V_u$  in.-kips

$$V_u = 200 \text{ kips} > \phi V_c / 2 = 0.85 (104) / 2 = 44.2 \text{ kips}$$

11.10.8

Shear reinforcement must be provided in accordance with 11.10.9.

3. Determine required horizontal shear reinforcement.

11.10.9.1

$$V_u \leq \phi V_n$$

Eq. (11-1)

$$\leq \phi (V_c + V_s)$$

Eq. (11-2)

$$\leq \phi V_c + \frac{\phi A_v f_y d}{s_2}$$

Eq. (11-33)

$$\frac{A_v}{s_2} = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_y d}$$

$$= \frac{[200 - (0.85 \times 104)]}{0.85 \times 60 \times 76.8} = 0.0285$$

$$\text{For 2-#3: } s_2 = \frac{2 \times 0.11}{0.0285} = 7.7 \text{ in.}$$

$$\text{2-#4: } s_2 = \frac{2 \times 0.20}{0.0285} = 14.0 \text{ in.}$$

$$\text{2-#5: } s_2 = \frac{2 \times 0.31}{0.0285} = 21.8 \text{ in.}$$

Try 2-#4 @ 14 in.

$$\rho_h = \frac{\Lambda_v}{\Lambda_g} = \frac{2 \times 0.20}{8 \times 14} = 0.0036 > 0.0025 \quad \text{O.K.}$$

11.10.9.2

$$\text{Maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{5} = \frac{8 \times 12}{5} = 19.2 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases}$$

11.10.9.3

19

Use 2-#4 @ 14 in.

4. Determine vertical shear reinforcement.

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0.0025 + 0.5 \left( 2.5 - \frac{h_w}{\ell_w} \right) (\rho_h - 0.0025) && \text{Eq. (11-34)} \\ &= 0.0025 + 0.5 (2.5 - 1.5) (0.0036 - 0.0025) \\ &= 0.0031 \end{aligned}$$

$$\text{Maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{3} = \frac{8 \times 12}{3} = 32 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 11.10.9.5$$

Use 2-#4 @ 14 in.

5. Design for flexure.

$$M_u = V_u h_w = 200 \times 12 = 2400 \text{ ft-kips}$$

Using Table 10-1:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{2400 \times 12}{0.9 \times 3 \times 8 \times 76.8^2} = 0.2261$$

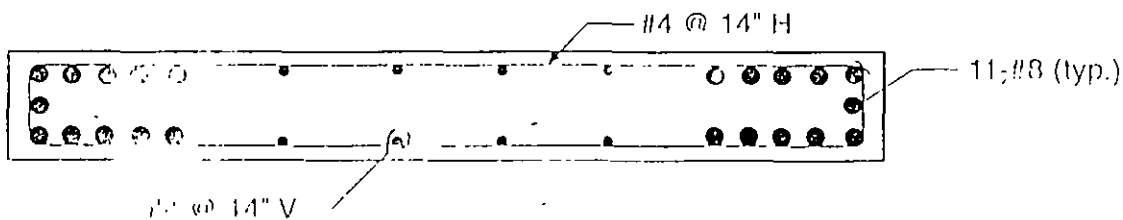
$$\text{where } d = 0.8 \ell_w = 0.8 \times 96 = 76.8 \text{ in.} \quad 11.10.4$$

(a larger value of  $d$  could be used if determined by a strain compatibility analysis)

From Table 10-1, read  $\omega = 0.269$

$$A_s = \rho h d = \frac{\omega f'_c h d}{f_y} = \frac{0.269 \times 3 \times 8 \times 76.8}{60} = 8.26 \text{ in.}^2$$

Use 11-#8 bars each side ( $A_s = 8.69 \text{ in.}^2$ )



# Deep Flexural Members

## UPDATE FOR THE '95 CODE

Two new sections, 12.11.4 and 12.12.4, have been added which affect the reinforcement detailing of deep flexural members. The new sections require that at interior supports of deep flexural members, positive moment tension reinforcement and negative moment tension reinforcement shall be continuous with that of adjacent spans to develop proper anchorage.

## GENERAL CONSIDERATIONS

The code gives two definitions for “deep” members. For flexure, members with overall depth-to-clear-span ratios greater than  $2/5$  for continuous spans or  $4/5$  for simple spans are defined as “deep” (10.7.1). For shear, a “deep” member is one with an effective depth-to-span ratio of  $1/5$  or greater (11.8.1).

No specific provisions for designing deep members for flexure are found in the code, but such members must be designed “taking into account nonlinear distribution of strain and lateral buckling” (10.7.1). Appropriate references for the design of deep beams for flexure are given in the Commentary and at the end of Part 19.

Information on lateral buckling is more difficult to find. Fortunately, most walls and beams receive lateral support from supported floor or roof members, so lateral buckling of the compression flange is rarely a problem (see Fig. 19-1(a)). Some form of lateral support is required at intervals not exceeding 50 times the least width of the compression flange (10.4.1), even if the member is free-standing (see Fig. 19-1(b)). For free-standing walls, a lateral stability check should be made and an adequate margin of safety against lateral buckling provided. As shown in Fig. 19-1(c), lateral bracing can also be achieved by providing flanges.

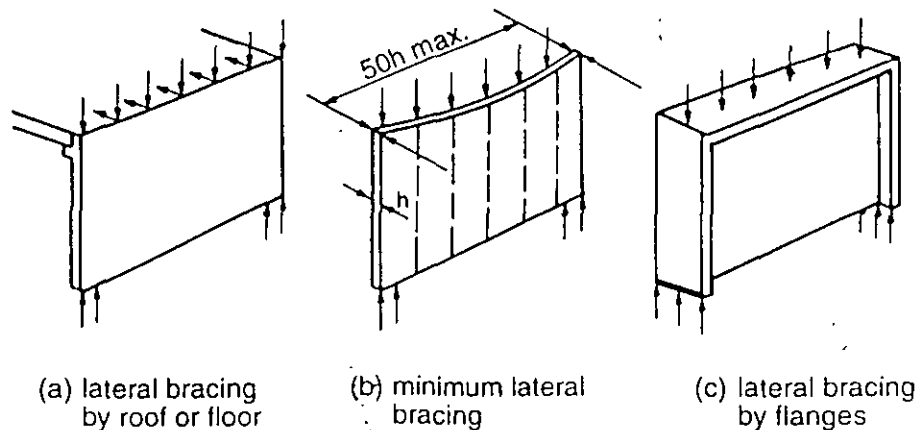


Figure 19-1 Lateral Support for Deep Flexural Members

Lateral buckling in a vertical direction (Fig. 19-2), particularly near concentrated loads and at supports, can be checked by the moment magnifier method for columns, or by numerical or energy methods. A simplified procedure for wall-like beams (tilt-up panels) is provided in Reference 19.1. If the height-to-thickness ratio of a member is limited to 25, buckling should not be a problem.

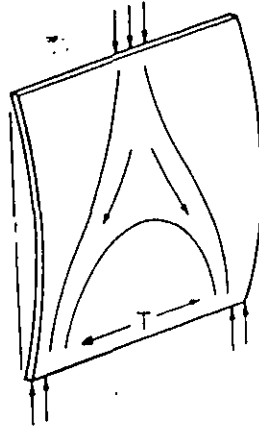


Figure 19-2 Lateral Buckling of Deep Flexural Members

The design of continuous deep flexural members for shear strength must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 with 11.8.5 substituted for 11.1.3, and must also satisfy the provisions of 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. The special shear strength provisions of 11.8 are intended to apply only to simply supported deep beams. Recent tests of continuous deep beams have indicated that the special shear provisions of 11.8 are inadequate for continuous members. Section 11.8.3 directs the engineer to base shear strength of continuous members on the design provisions of 11.1 through 11.5. Section 11.8 is basically limited to simply supported deep beams.

## 10.7 DEEP FLEXURAL MEMBERS

The code requires that "nonlinear distribution of strain" be taken into account in flexural design of deep members. The elastic analyses by Dischinger and others (Refs. 19.2-19.4) have shown that the shape of the elastic stress curve can be quite different from the linear distribution usually assumed. At midspan, the neutral axis moves away from the loaded face of the member as the span-to-depth ratio decreases (see Fig. 19-3). Over the supports, the resultant elastic tensile forces can be within a third of the member depth from the top fiber.

Nonlinear distribution of strains and stresses assumes an uncracked, homogeneous cross-section and, therefore, does not apply to design at the ultimate moment strength (nominal moment strength  $M_n$  for design), since cracking usually occurs before the moment strength can be developed. This would imply that the tensile reinforcement required to develop the moment strength  $M_n$  could be placed near the extreme tensile fiber as is customary for ordinary flexural members. Reference 19.3, however, recommends that tensile reinforcement be distributed throughout the tensile area and centered at or near the resultant of the tensile forces, so that, when cracking occurs, there will not be a sudden shift in the location of the resultant tensile force. Both methods of sizing and placing reinforcement are illustrated in Example 19.1 and it is left to the judgment of the designer to choose the more appropriate method.

Development of horizontal tensile reinforcement in single-span simply-supported deep members requires special consideration. Since moments increase rapidly from zero at the face of the support, the reinforcement may not have sufficient anchorage length to develop the required moment strength near the support. Tensile bars may be anchored by development length (if available), standard hooks, or by special anchorage devices.

The most radical departure from a linear strain and stress distribution is in compression areas at or near supports of continuous members. Compressive forces may be confined to the bottom 5 or 10 percent of the member

depth and compressive stresses may be as high as 14 times those indicated by linear strain and stress distribution.<sup>19.2</sup> In these cases, reinforcing details require special consideration. If service load compressive stresses approach about  $0.45f'_c$ , it may be necessary to treat the compression area as an axially loaded member, using laterally tied reinforcement to carry the compressive forces as the moment strength is approached.

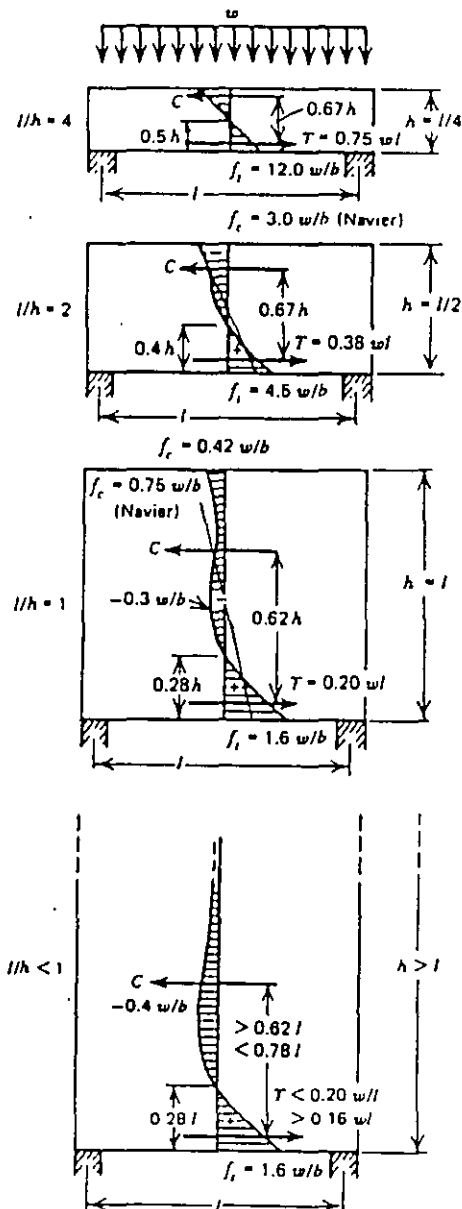


Figure 19-3 Distribution of Flexural Stresses in Homogeneous Simply Supported Beams (Ref. 19.4)

## 11.8 SHEAR STRENGTH OF DEEP FLEXURAL MEMBERS

The special shear strength provisions for deep flexural members apply only to members having a clear-span-to-effective-depth ratio ( $\ell_n/d$ ) less than 5. The deep members must be loaded at the top face as shown in Fig. 19-4. Since the principal tensile forces in deep members are primarily horizontal (vertical cracking), horizontal shear reinforcement is effective in resisting the tensile forces. Truss bars are, therefore, not recommended as shear reinforcement in deep members.



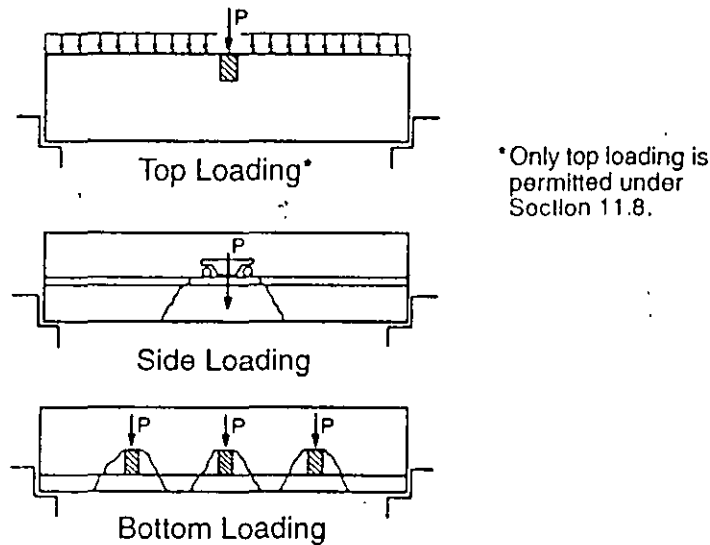


Figure 19-4 Loading of Deep Flexural Members

Different shear design procedures are prescribed for simply supported and continuous deep flexural members. Design of simply supported members for shear must be based on the special provisions of 11.8. Design of continuous members for shear must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 as well as 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Also, when loads are applied through the sides or bottom of the member, simply supported or continuous, the shear design provisions of 11.1 through 11.5 must be used.

### 11.8.2 Simply Supported Deep Flexural Members

For shear design of simply supported deep members, the maximum factored shear force  $V_u$  is calculated at a distance from the face of the support defined as 0.15 times the clear span for uniformly loaded beams or 0.50 times the shear span  $a$  (distance between concentrated load and face of support) for beams with concentrated loads, but in no case greater than  $d$  from the face of the support (11.8.5).

The factored shear force  $V_u$  must not exceed the shear strength  $\phi V_n = \phi(V_c + V_s)$ , where  $V_c$  is the shear strength provided by the concrete and  $V_s$  is the shear strength provided by the shear reinforcement, both horizontal and vertical.  $V_c$  may be computed from either the more complex Eq. (11-29), which takes into account the effects of the tensile reinforcement and  $M_u/V_u d$  at the critical section, or may be determined from the simpler Eq. (11-28),  $V_c = 2\sqrt{f'_c} b_w d$ . Equation (11-29) is illustrated in Fig. 19-5.

The first step in the design is to check if  $V_u$  is less than  $\phi V_c$ , with  $V_c$  equal to  $2\sqrt{f'_c} b_w d$ . If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ , calculate  $\phi V_s$  for minimum shear reinforcement and add to  $\phi V_c$ . Using the minimum shear reinforcement requirements of 11.8.9 ( $A_v = 0.0015b_w s$ ) and 11.8.10 ( $A_{vh} = 0.0025b_w s_2$ ), shear strength Eq. (11-30) reduces to

$$V_s = (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12$$

Substituting  $V_c$  from Eq. (11-28) and  $V_s$  from above, the shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi \left[ 2\sqrt{f'_c} b_w d + (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12 \right]$$

If shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-29) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement  $A_v$  and  $A_{vh}$  may be added to

increase the shear strength of the section. Shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span in all cases (11.8.11).

$$V_c = [3.5 - (2.5)(M_u / V_u d)] \times \left[ 1.9\sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right] b_w d$$

Plotted for 3,000 psi concrete, simple span and uniform load.

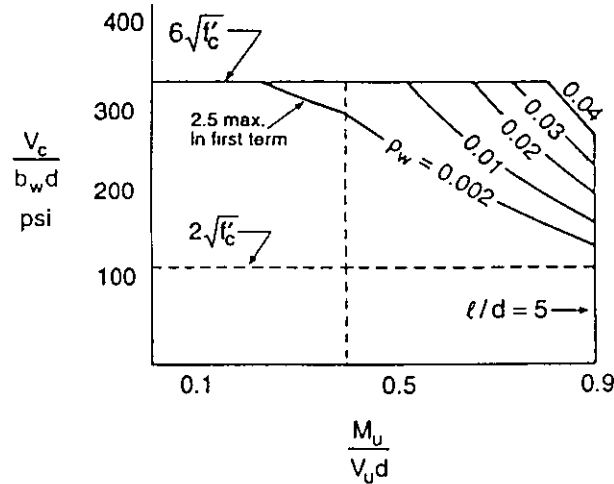


Figure 19-5 Shear Strength of Simply Supported Deep Flexural Members.

For design convenience, the required area of shear reinforcement  $A_v$  and  $A_{vh}$  in terms of the factored shear force  $V_u$  can be computed using Eq. (11-30) as follows:

$$\frac{\phi V_s}{\phi f_y d} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

The shear strength  $V_n = V_c + V_s$  must not be taken greater than:

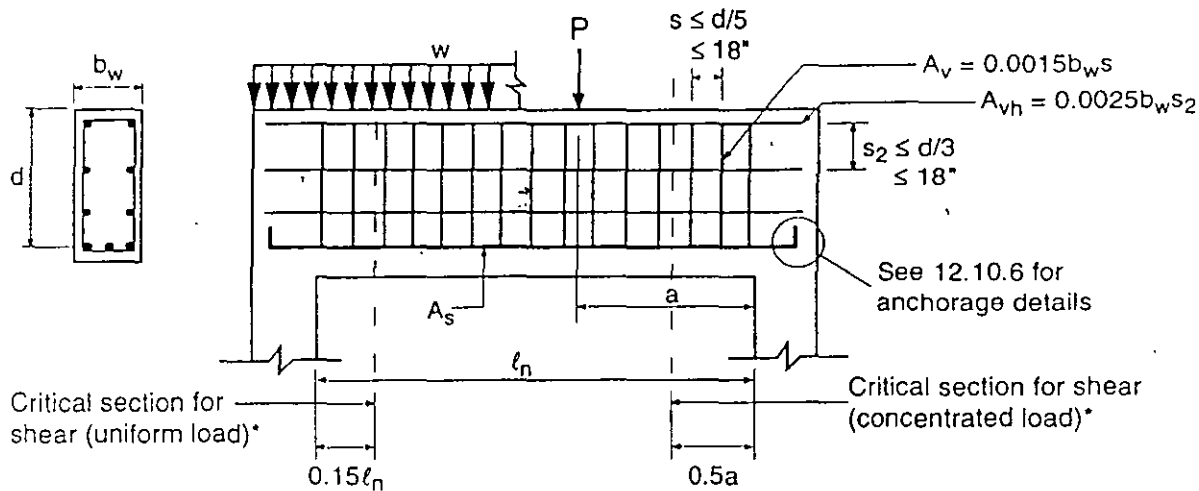
$$V_n = 8\sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5 \quad 11.8.4$$

At the upper limit of  $\ell_n / d = 5$ ,  $V_n = 10\sqrt{f'_c} b_w d$  (the same as for ordinary beams).

A strict reading of 11.8.8 would appear to suggest that no shear reinforcement is needed in a simply supported deep beam unless  $V_u$  exceeds  $\phi V_c$ , which may be as high as  $\phi(6\sqrt{f'_c} b_w d)$ . However, a deep beam without shear reinforcement is not recommended. It would be more appropriate to conform with 11.8.9 and 11.8.10 for the design of simply supported deep beams.

Design details for simply supported deep members is illustrated in Fig. 19-6.



\* Use same shear reinforcement throughout span.

Figure 19-6 Design Details for Simply Supported Deep Beams ( $l_n/d < 5$ )

### 11.8.3 Continuous Deep Flexural Members

For shear design of continuous deep members, the design procedure is the same as for ordinary beams. The maximum factored shear force  $V_u$  is calculated at the critical section defined in 11.8.5. The factored shear force  $V_u$  must not exceed the shear strength provided by the section  $\phi(V_c + V_s)$ , where  $V_c$  may be computed from either the more complex Eq. (11-5), or the simpler Eq. (11-3),  $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_wd$ . Section 11.8.3 also specifies that the design of continuous deep flexural members must also satisfy 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Section 11.8.4 sets an upper limit to  $V_u$ . Sections 11.8.9 and 11.8.10 specify minimum vertical and horizontal shear reinforcement, respectively.

The first step in the design is to check if  $V_u$  is less than  $\phi V_c$ , with  $V_c$  equal to  $2\sqrt{f'_c}b_wd$ . If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ , calculate  $\phi V_s$  for minimum shear reinforcement and add to  $\phi V_c$ . Using the minimum shear reinforcement of 11.8.9 ( $A_v = 0.0015b_ws$ ), the shear strength Eq. (11-15) reduces to

$$\begin{aligned} V_s &= 0.0015f_yb_wd \\ &= 60 b_wd \text{ for Grade 40 bars} \\ &= 90 b_wd \text{ for Grade 60 bars} \end{aligned}$$

Note that the minimum shear reinforcement of 11.8.9 is greater than that required by Eq. (11-13). The shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi(2\sqrt{f'_c}b_wd + 0.0015f_yb_wd)$$

If the shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-5) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement  $A_v$  may be added to increase the shear strength of the section. Using Eq. (11-15), the required shear reinforcement is:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d}$$

Shear reinforcement may be varied along the length of span as for ordinary beams; however, a minimum area of both vertical and horizontal reinforcement,  $A_v$  and  $A_{vh}$ , in accordance with 11.8.9 and 11.8.10 must be provided throughout the full span length, irrespective of shear force conditions. Note that the spacing  $s$  of the vertical shear reinforcement  $A_v$  must not exceed  $d/5$  nor 18 in. (somewhat closer maximum spacing than that permitted for ordinary beams). Note also that the horizontal shear reinforcement  $A_{vh}$  does not contribute to the shear strength  $V_s$  for continuous deep members.

As for simply supported deep members, in continuous deep members, the shear strength  $V_n$  must not be taken greater than:

$$V_n = 8\sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5$$

## REFERENCES

- 19.1 *Tilt-Up Load-Bearing Walls—A Design Aid*, Portland Cement Association, Skokie, IL, EB074D, 1994, 28 pp. A "column model" (a panel considered hinged along loaded edges and free along vertical edges) is used to compute load capacities of reinforced concrete tilt-up wall panels with both one and two layers of reinforcement that rest on continuous footings. An approximate but rational means of evaluating the effects of isolated footings and sustained loads on the capacity of these slender walls is included, as well as load-moment interaction charts and tables and design applications.
- 19.2 *Design of Deep Girders*, Portland Cement Association, Skokie, IL, IS079D, 10 pp. Presents analysis of deep girders according to elastic theory of Franz Dischinger, including special studies and numerical examples. Data and procedures apply to design of deep wall-like members such as in bins, hoppers, and foundation walls.
- 19.3 Chow, Li., Conway, H., and Winter, G., "Stresses in Deep Beams," *Transactions*, ASCE, Vol. 118, 1953, pp. 686-708.
- 19.4 Park, R. and Paulay, T., *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

1153

## Example 19.1—Design of Deep Flexural Members

This design example has been adapted from the PCA publication *Design of Deep Girders*<sup>19.2</sup> and modified in accordance with the ACI Code and the Strength Design Method. The publication may be used directly to design deep members by the Alternate Design Method, or it may be used to locate the tensile resultants and check cracking under the Strength Design Method.

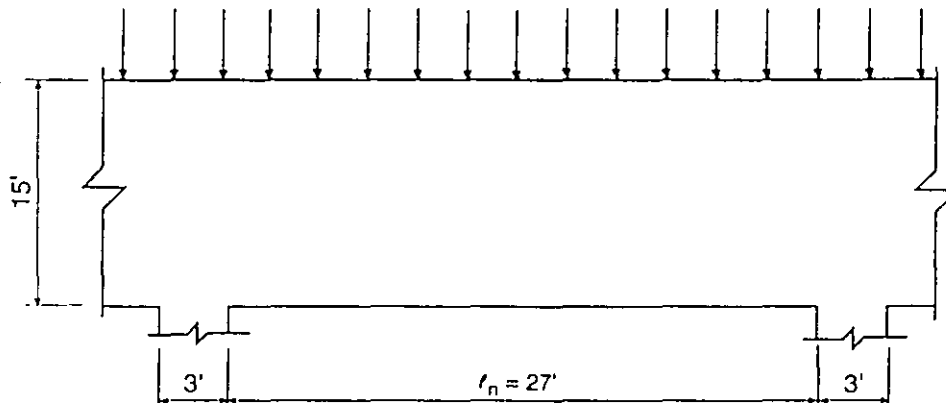
An interior span of a continuous deep girder is shown below.

Width of beam and support  $b_w = 15$  in.

Uniform loads: Live load = 10 kips/ft, Dead load = 10 kips/ft

$$f'_c = 3000 \text{ psi}$$

$$f_y = 40,000 \text{ psi}$$



### Calculations and Discussion

### Code Reference

- Determine if deep beam provisions apply

$$\frac{\ell_n}{h} = \frac{27}{15} = 1.8$$

$$\text{For flexure: } \frac{\ell_n}{h} < 2.5$$

10.7.1

$$\text{For shear: } \frac{\ell_n}{d} < 5$$

11.8.1

Design for flexure and shear must satisfy deep beam provisions of 10.7 and 11.8.

- Design for Flexure

10.7

- Determine moment stresses (at service loads).

Refer to Reference 19.2 for design constants:

$$C = 3 \text{ ft}, L = 27 + 3 = 30 \text{ ft}$$

$$\epsilon = \frac{C}{L} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}, \quad \beta = \frac{H}{L} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$w = 10 + 10 = 20 \text{ kips/ft} = \frac{20,000}{12} = 1667 \text{ lbs/in.}$$

$$\frac{w}{b} = \frac{1667}{15} = 111.1 \text{ lbs}$$

$$wL = 20 \times 30 = 600 \text{ kips}$$

From Figs. 2, 3, 4, and 5 (Ref. 19.2), the service load stresses and the magnitude and location of the resultant T of the tensile stresses at mid-span and support are determined as follows (plus indicates compression and minus tension):

- Mid-span

$$\text{Stress} = \text{coefficients from Fig. 2} \times (w/b)$$

$$\text{Top stress} = +1.07 \times 111.1 = +119 \text{ psi}$$

$$\text{Bottom stress} = -1.31 \times 111.1 = -146 \text{ psi}$$

$$\text{Tensile force } T = \text{coefficient from Fig. 4} \times wL$$

$$= 0.12 \times 600 = 72 \text{ kips}$$

$$\text{Location of } T \text{ from bottom of girder} = \text{coefficient from Fig. 5} \times L$$

$$= 0.06 \times 30 = 1.8 \text{ ft}$$

- Support

$$\text{Stress} = \text{coefficients from Fig. 3} \times (w/b)$$

$$\text{Top stress} = -1.25 \times 111.1 = -139 \text{ psi}$$

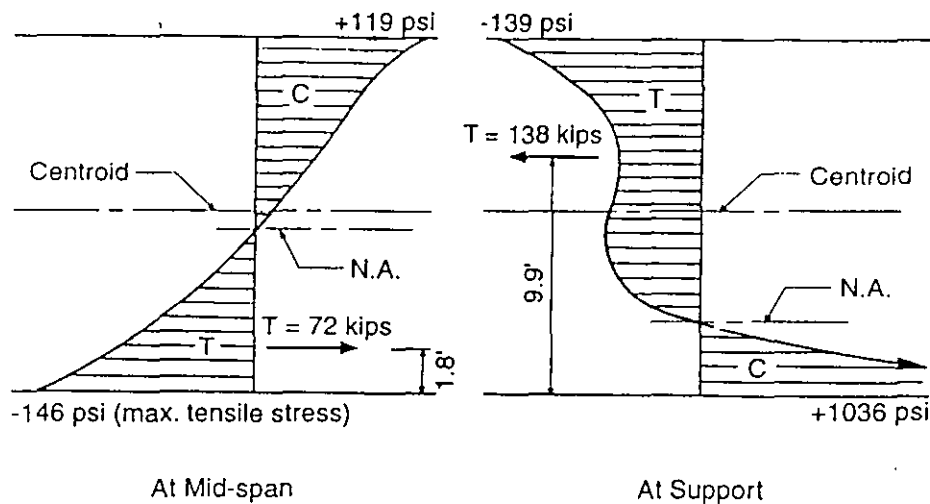
$$\text{Bottom stress} = +9.32 \times 111.1 = +1036 \text{ psi}$$

$$\text{Tensile force } T = \text{coefficient from Fig. 4} \times wL$$

$$= 0.23 \times 600 = 138 \text{ kips}$$

$$\text{Location of } T \text{ from bottom of girder} = \text{coefficient from Fig. 5} \times L$$

$$= 0.33 \times 30 = 9.9 \text{ ft}$$



The variation of the stresses with respect to the depth of the member, as shown in the figure, can be obtained with similar calculations.

To avoid cracking at service loads, tensile stresses should not exceed the modulus of rupture.

$$f_r = 7.5\sqrt{f'_c} = 7.5\sqrt{3000} = 411 \text{ psi} > 146 \text{ psi} \quad \text{O.K.} \quad \text{Eq. (9-9)}$$

Designers using the Alternate Design Method of Appendix A may proceed directly with the flexural design as outlined in Reference 19.2, calculating the required reinforcement from the tensile resultants (T) and distributing the reinforcement appropriately. The following procedure is in accordance with the Strength Design Method.

- b. Determine required moment strengths.

$$w_u = 1.4(10) + 1.7(10) = 31.0 \text{ kips/ft} \quad \text{Eq. (9-1)}$$

@ mid-span (Ref. 19.2):

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon^2)}{24} \\ &= \frac{31 \times 30^2 (1 - 0.1^2)}{24} = 1151 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

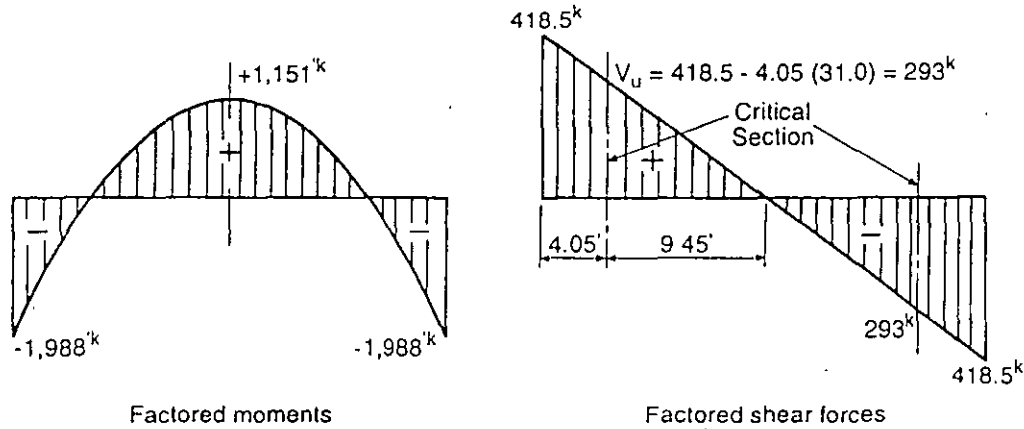
@ support (Ref. 19.2):

$$M_u = \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{24}$$

$$= \frac{31 \times 30^2 (1 - 0.1)(2 - 0.1)}{24} = 1988 \text{ ft-kips}$$

Critical section for shear =  $0.15 \times 27 = 4.05$  ft from face of support

Factored moment and shear diagrams are shown below.



- c. Determine flexural reinforcement.
- Method 1—(using full effective depth  $d$ )

$$d = 15.0 - \frac{3}{12} = 14.75 \text{ ft; assume } j_u = 0.9$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j_u d}$$

@ mid-span:

$$A_s = \frac{1151}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 14.75} = 2.41 \text{ in.}^2$$

Use 4-#7 bars ( $A_s = 2.40 \text{ in.}^2$ )

@ support:

$$A_s = \frac{1988}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 14.75} = 4.16 \text{ in.}^2$$

Use 2-#10 and 2-#9 bars ( $A_s = 4.54 \text{ in.}^2$ )

Locate primary reinforcement  $A_s$  (top and bottom) as close to tension face as cover and other reinforcement allow



Example 19.1 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

- Method 2—(using depth to tensile resultant)

@ mid-span:

$$d = 15.0 - 1.8 = 13.2 \text{ ft; assume } j_u = 0.9$$

$$A_s = \frac{1151}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 13.2} = 2.69 \text{ in.}^2$$

Use 6-#6 bars (3 each face;  $A_s = 2.64 \text{ in.}^2$ )

@ support:

$$d = 9.9 \text{ ft}$$

$$A_s = \frac{1988}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 9.9} = 6.20 \text{ in.}^2$$

Use 14-#6 bars (7 each face;  $A_s = 6.16 \text{ in.}^2$ )

Reinforcement determined by this method should be distributed in the total tensile area, approximately centered on the resultant tensile force.

- d. Determine minimum horizontal and vertical reinforcement in side faces of girder. The minimum "wall" type reinforcement will be used in addition to the primary tensile reinforcement. 10.7.4

Horizontal reinforcement:

$$A_{vh} = 0.0025b_w s_2 \quad 14.3.3$$

$$= 0.0025 \times 15 \times 12 = 0.45 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 11.8.10$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3}, 3b_w, \text{ or } 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 16 in. (each face),  $A_{vh} = 0.46 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Vertical reinforcement:

$$A_v = 0.0015b_w s \quad 14.3.2$$

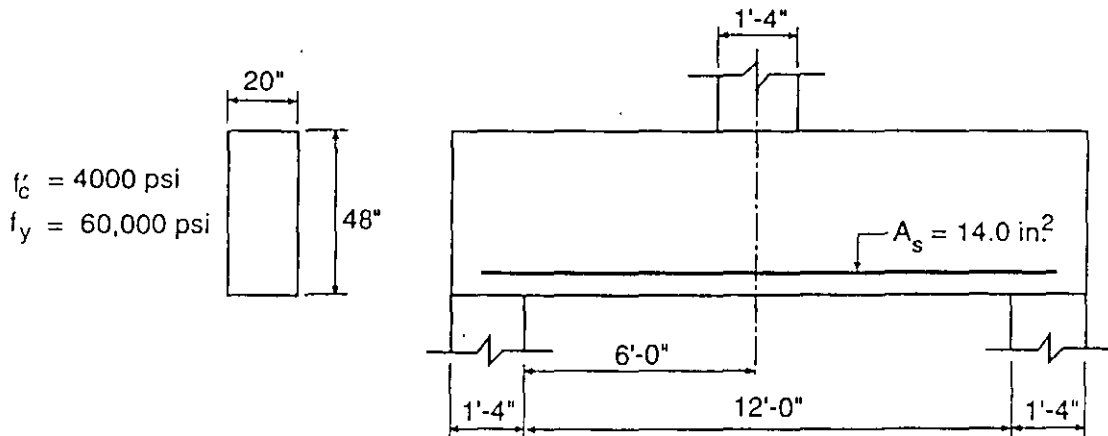
$$= 0.0015 \times 15 \times 12 = 0.27 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 11.8.9$$

$$s \leq \frac{d}{5}, 3b_w, \text{ or } 18 \text{ in.}$$

Use #4 @ 18 in. (each face),  $A_v = 0.27 \text{ in.}^2/\text{ft}$

## Example 19.2—Design of Deep Flexural Members

Determine the required shear reinforcement for the simply supported transfer girder supporting the single column shown below. Column loads: dead load = 200 kips, live load = 250 kips.



### Calculations and Discussion

Code  
Reference

1. Determine if deep beam provisions apply.

$$d \approx 48 - 5 = 43 \text{ in.}$$

$$\frac{\ell_n}{d} = \frac{12 \times 12}{43} = 3.35 < 5, \text{ deep beam provisions apply}$$

11.8.1

2. Determine critical section for shear (neglect uniform dead load since it is small compared to the concentrated loads).

11.8.5

$$0.5a = 0.5 \times 6 = 3 \text{ ft} < d = 3.58 \text{ ft}$$

3. Determine shear strength without shear reinforcement.

11.8.6

$$\phi V_c = \phi (2\sqrt{f'_c} b_w d)$$

Eq. (11-28)

$$= 0.85 (2\sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 92.5 \text{ kips}$$

$$V_u = \frac{1.4(200) + 1.7(250)}{2} = 352.5 \text{ kips} > 92.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Shear strength provided by concrete  $\phi V_c$  is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ .

4. Check maximum shear strength permitted.

11.8.4

Example 19.2 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

For  $\frac{\ell_n}{d} = 3.35$ :

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{Eq. (11-27)}$$

$$V_n = \frac{2}{3} (10 + 3.35) \sqrt{4000} \times 20 \times \frac{43}{1000} = 484 \text{ kips}$$

$$\phi V_n = 0.85 (484) = 411 \text{ kips} > 352.5 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

5. Determine shear strength with minimum shear reinforcement. 11.8.9

Substituting minimum  $A_v$  and  $A_{vh}$  into Eq. (11-30): 11.8.10

$$\begin{aligned} \phi V_s &= \phi(0.029d - 0.001\ell_n) b_w f_y / 12 \\ &= 0.85 [(0.029 \times 43) - (0.001 \times 12 \times 12)] (20 \times 60) / 12 = 94 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$\phi(V_c + V_s) = 92.5 + 94 = 186.5 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

6. Determine shear strength  $\phi V_c$  using more complex Eq. (11-29) at critical section. 11.8.7

$$V_c = \left( 3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} \right) \left( 1.9 \sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad \text{Eq. (11-29)}$$

At critical section:

$$\frac{M_u}{V_u d} = \frac{352.5 \times 3}{352.5 \times 3.58} = 0.84$$

$$3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} = 3.5 - (2.5 \times 0.84) = 1.4 < 2.5$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{14.0}{20 \times 43} = 0.0163$$

$$V_c = 1.4 \left[ 1.9 \sqrt{4000} + \frac{2500 (0.0163)}{0.84} \right] (20 \times 43) / 1000 = 203 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 0.85 (203) = 173 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 173 \text{ kips} < \phi(6 \sqrt{f'_c} b_w d) = 0.85 (6 \sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 277 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad \text{11.8.7}$$

Example 19.2 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

7. Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30).

11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) \quad \text{Eq. (11-30)}$$

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement:

11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025 b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face),  $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.} \quad \text{Eq. (11-30)}$$

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face),  $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

55

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

7. Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30).

11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

Eq. (11-30)

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement:

11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face),  $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Eq. (11-30)

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face),  $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

36

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1048 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$A_v = 0.1048 \times 12 = 1.257 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Use #5 @ 6 in. (each face),  $A_v = 1.24 \text{ in.}^2/\text{ft}$  O.K.

8. Check shear strength provided using #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

$$V_s = \left[ \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) \right] f_y d \quad \text{Eq. (11-30)}$$

$$= \left[ 0.1033 \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) \right] (60 \times 43) = 210.1 \text{ kips}$$

$$\phi V_s = 0.85 (210.1) = 178.6 \text{ kips}$$

$$\phi (V_c + V_s) = 173 + 178.6 = 351.6 \text{ kips} \approx 352.5 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

9. Both horizontal and vertical shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span. See reinforcement details below.

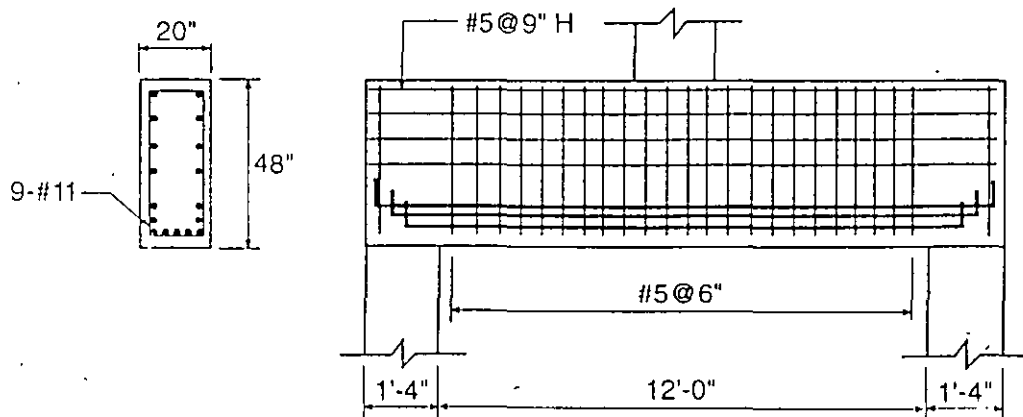
11.8.11

Use #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

Note: The main flexural reinforcement must be anchored to develop the specified yield strength  $f_y$  in tension at the face of the support.

12.10.6

12.11.4



Reinforcement Details



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**TEORIA DE FUERZA CORTANTE**

**EXPOSITOR: ING. JOSE MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

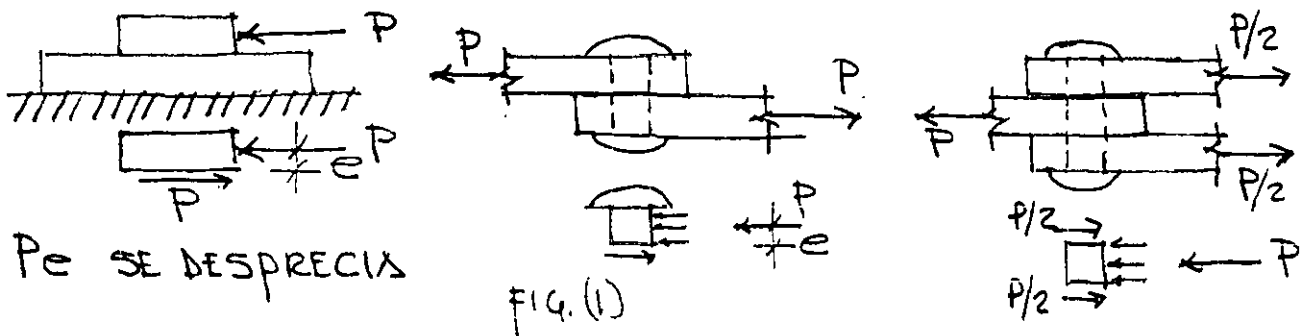
SALINAS  
ABRIL 81

# TEORIA DE FUERZA CORTANTE

## 1. - INTRODUCCION

SE ESTUDIA BASICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS. EN ESTOS ELEMENTOS, LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS POR LA FUERZA CORTANTE, LLAMADOS ESFUERZOS CORTANTES, SE PRESENTAN CASI SIEMPRE ACUMULADOS POR LOS ESFUERZOS NORMALES DE FLEXION. DICHA COMBINACION DE ESFUERZOS CAUSA CONDICIONES CRITICAS DE ESFUERZOS. EN ESTA SECCION SE ANALIZA UNICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE POR SEPARADO. EXISTEN ELEMENTOS ESTRUCTURALES (REMACHES, TORNILLOS, PERROS ETC) EN LOS QUE ACTUAN UNICAMENTE ESFUERZOS CORTANTES O EN LOS QUE LOS ESFUERZOS NORMALES SE DESPRECIAN. ESTOS ESFUERZOS CORTANTES SE DENOMINAN "ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS".

## 2. - ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS



$$\tau = \frac{P}{A} \quad \text{--- (1)}$$

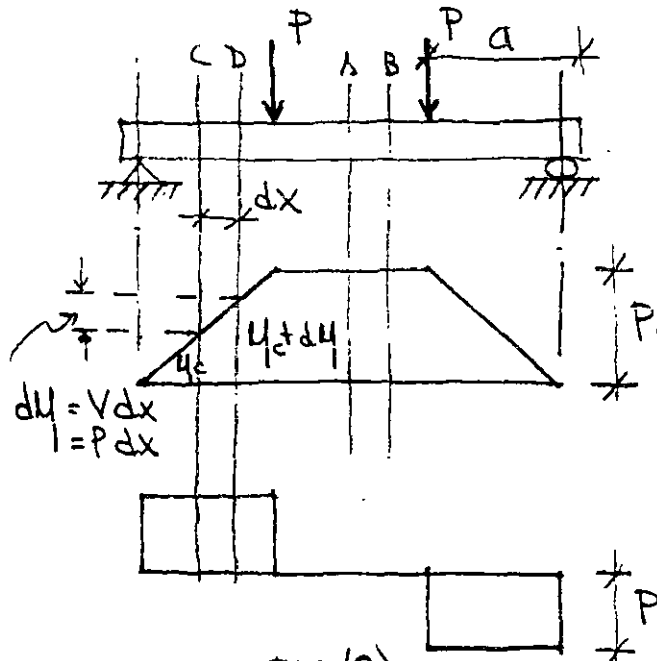
$\tau$  = ESFUERZO CORTANTE DIRECTO O ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO

P = FUERZA TOTAL ACTUANTE

A = AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL



### 3. - EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS



Como

$$V = - \frac{dM}{dx} \quad \dots \quad (2)$$

ENTRE LAS SECCIONES A y B como Pa EL MOMENTO FLEXIONANTE ES CONSTANTE

$$V = 0$$

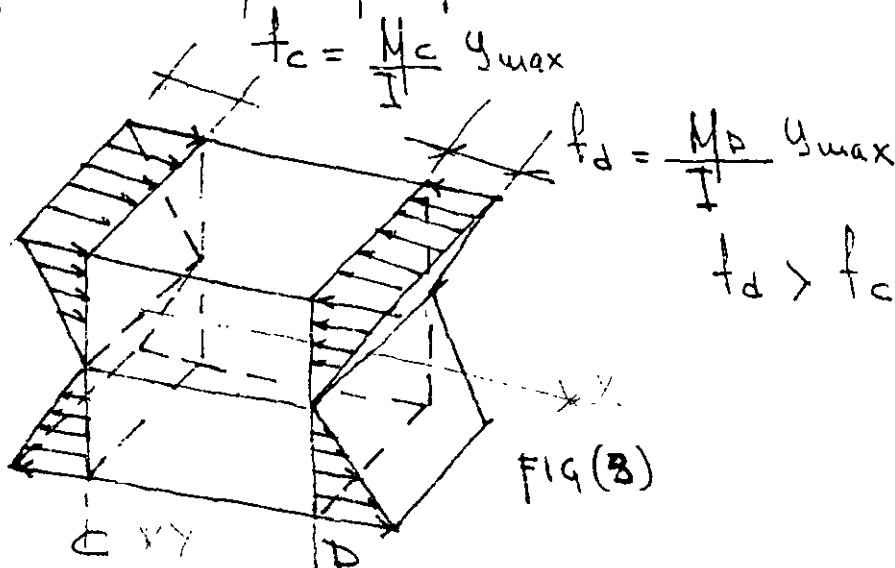
ENTRE LAS SECCIONES C y D DONDE VARIA EL MOMENTO FLEXIONANTE EXISTE UN VALOR DE LA FUERZA CORTANTE.

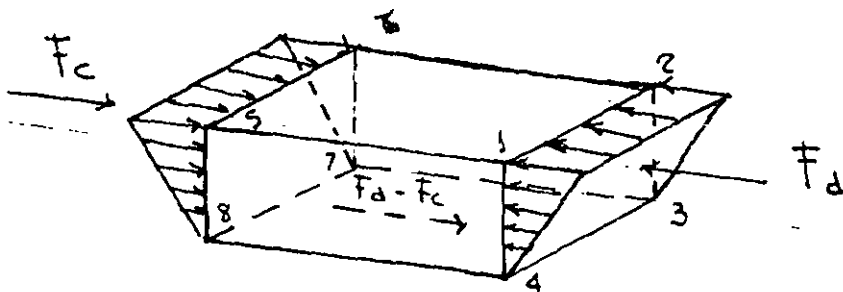
FIG (2)

POR LO TANTO, ENTRE DOS SECCIONES ALEJADAS UNA DISTANCIA dx EN DONDE EXISTE VARIACION DE MOMENTO:

$$dM = - V dx \quad \dots \quad (3)$$

(CONSIDERANDO EL SEGMENTO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C y D Y SUPONIENDO QUE LA SECCION TRANSVERSAL ES RECTANGULAR, LOS ESFUERZOS NORMALES POR FLEXION EN EL RANGO ELASTICO SON:





$$F_d > F_c$$

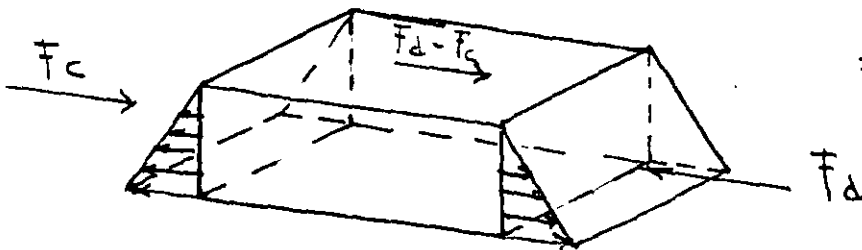


FIG. (4)

SI SE SEPARA LA PORCIÓN SITUADA ENCIMA DEL EJE NEUTRO DE LA DE ABAJO, SE DEBEN SATISFACER LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO EN CUALQUIERA DE LAS DOS PORCIONES.

HACIENDO  $\sum F_y = 0$  SE VE QUE LA FUERZA CORTANTE VERTICAL EN LAS DOS SECCIONES C Y D ES IGUAL.

HACIENDO  $\sum F_x = 0$ , TENEMOS:

COMO  $F_d > F_c$ , LA FUERZA  $F_d - F_c$  ESTARÁ ACTUANDO EN EL ÁREA  $\overline{3478}$

SI LAS DOS PORCIONES ESTÁN UNIDAS POR UN PERNO, ENTONCES LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL  $F_d - F_c$  ES RESISTIDA POR EL PERNO

#### 4. - FLUJO DE CORTANTE

SUPONGAMOS, QUE LA VIGA DE LA FIG. (2) SE ENCUENTRA FORMADA DE VARIAS PLACAS. PARA HACER QUE ESTAS PLACAS TRABAJEN EN CONJUNTO, SE UNEN POR MEDIO DE PERNOS, SEPARADOS A UNA DISTANCIA CONVENIENTE. (CONSIDERANDO EL TRAMO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C y D y TOMANDO EN CUENTA QUE EN LA SECCION C ACTUA UN MOMENTO  $M_c$  y EN LA SECCION D UN MOMENTO  $M_D$ . LOS ESFUERZOS NORMALES (TENSION Y COMPRESION) PRODUCIDOS POR ESTOS MOMENTOS EN ~~UN PUNTO~~ UN PUNTO SITUADO A UNA DISTANCIA  $y$  DEL EJE NEUTRO VALDRAN RESPECTIVAMENTE  $\frac{M_c}{I} y$  y  $\frac{M_D}{I} y$

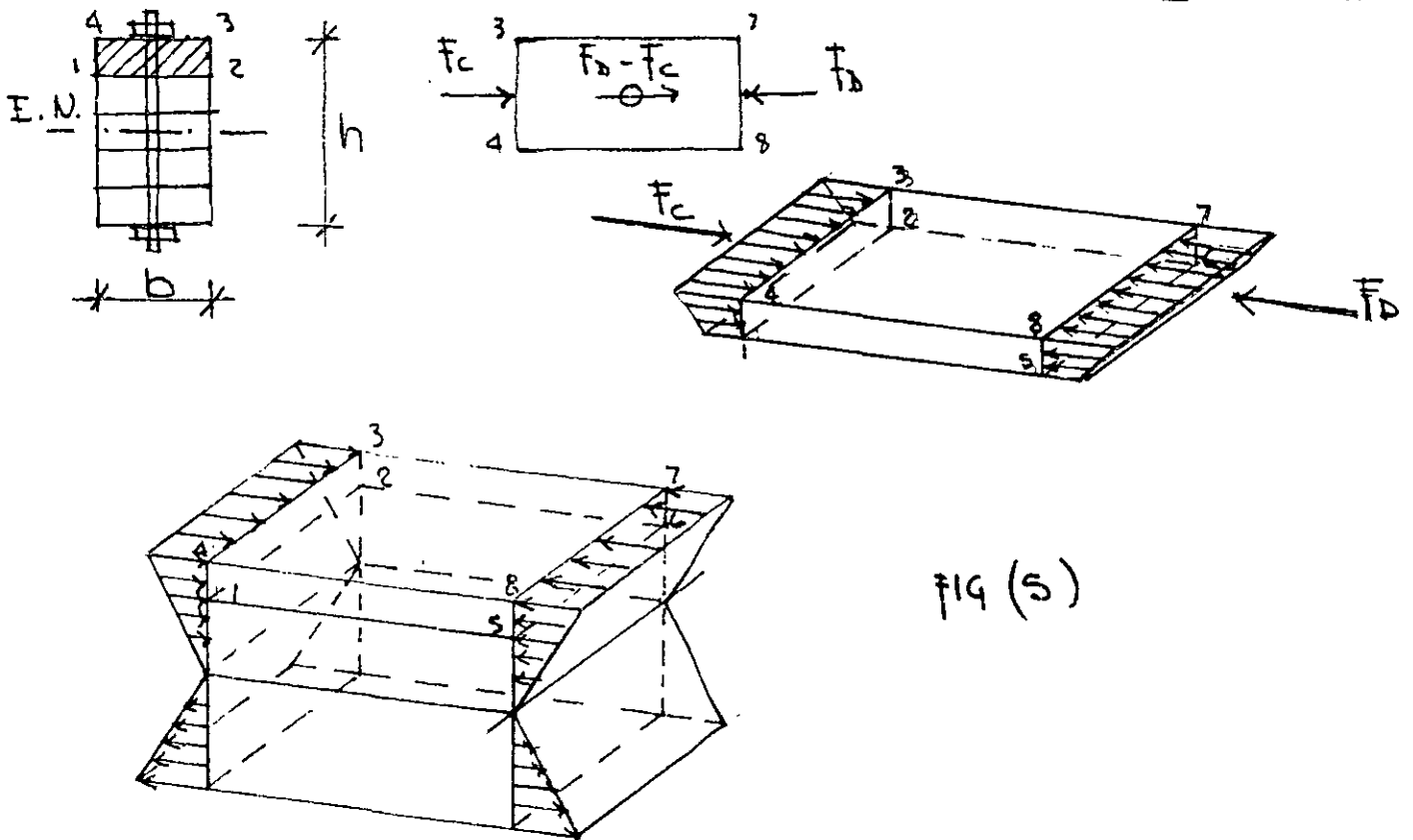


FIG (5)

SI SE TOMA LA PLACA SUPERIOR CUYAS FIBRAS HAN CERCAAS AL EJE NEUTRO ESTA A UNA DISTANCIA  $y_1$ , SE PUEDEN DETERMINAR LAS FUERZAS PERPENDICULARES QUE ACTUAN EN LAS SECCIONES C y D

LA FUERZA QUE ACTUA EN UN AREA DIFERENCIAL ( $dA$ ) SITUADA A UNA DISTANCIA  $y$  DEL EJE NEUTRO VALE:

EN LA SECCION C:

$$dF_c = \left( \frac{M_c}{I} y \right) dA \quad \dots \dots \dots (1)$$

LA FUERZA EN EL AREA  $\overline{1234}$  VALE

$$F_c = \int_{\text{AREA}} \left( \frac{M_c}{I} y \right) dA = \frac{M_c}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$Q = \int_{\text{AREA}} y dA =$  MOMENTO ESTADISTICO O DE PRIMER ORDEN DEL AREA  $\overline{1234}$  CON RESPECTO AL EJE NEUTRO.

$$F_c = \frac{M_c}{I} Q \quad \dots \dots \dots (2)$$

EN FORMA SEMEJANTE LA FUERZA EN EL AREA  $\overline{5678}$  EN LA SECCION D VALE:

$$F_D = \int_{\text{AREA}} \left( \frac{M_D}{I} y \right) dA = \frac{M_D}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$$F_D = \frac{M_D}{I} Q \quad \dots \dots \dots (3)$$

SI  $M_c = M_D$ , LAS FUERZAS  $F_c$  Y  $F_D$  SERIAN IGUALES

EN NUESTRO CASO, EL MOMENTO EN LA SECCION C VALE  $M_c$  Y EN LA SECCION D VALE  $M_c + dM$ . COMO LAS SECCIONES SE ENCUENTRAN SEPARADAS UNA DISTANCIA  $dx$ , ENTONCES LA FUERZA RESULTANTE ( $F_D - F_c$ ) SERA TAMBIEN UNA FUERZA DIFERENCIAL

$$dF = F_D - F_c = \frac{M_D}{I} Q - \frac{M_c}{I} Q = \left( \frac{M_c + dM}{I} \right) Q - \frac{M_c}{I} Q$$

$$dF = \frac{dM}{I} Q \quad \dots \dots \dots (4)$$

LA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE ENCUENTRA DIVIDIENDO LA FUERZA  $dF$  ENTRE LA LONGITUD EN QUE ACTUA ( $dx$ ). DICHA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE DESIGNA CON LA LETRA  $q$  Y SE LLAMA FLUJO DE CORTANTE

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} \text{ --- --- (5)}$$

COMO:  $\frac{dM}{dx} = V$

$$q = \frac{VQ}{I} \text{ --- --- --- --- (6)}$$

$V$  = FUERZA CORTANTE EN LA SECCION CONSIDERADA (TONS, KG. ETC.)

$Q$  = MOMENTO DE PRIMER ORDEN DE LA PARTE DE LA SECCION TRANSVERSAL SITUADA ENCIMA DEL NIVEL CONSIDERADO CON RESPECTO AL EJE NEUTRO. ( $M^3$ ,  $CM^3$  ETC.)

$I$  = MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO AL EJE NEUTRO ( $M^4$ ,  $CM^4$  ETC.)

$q$  = FLUJO DE CORTANTE (TONS./ML., KG./CM ETC.)

### 5. - ESFUERZO CORTANTE

SI SE DIVIDE EL VALOR DE LA FUERZA  $dF$  ENTRE EL AREA EN QUE ESTA ACTUANDO, SE OBTIENE EL VALOR DEL ESFUERZO CORTANTE EN EL PLANO HORIZONTAL.

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{bdx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{Ib} = \frac{VQ}{Ib} \text{ --- --- (1)}$$

TAMBIEN  $\tau_{yx} = \frac{q}{b}$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS ESFUERZOS  $\tau_{yx}$  SIEMPRE ESTAN ACOMPAÑADOS DE ESFUERZOS CORTANTES VERTICALES  $\tau_{xy}$  Y QUE SON DE LA MISMA MAGNITUD

6. - CENTRO DE CORTANTE O CENTRO DE TORSION

COMO SE DIJO ANTERIORMENTE, SIEMPRE QUE EL MOMENTO FLEXIONANTE SEA VARIABLE, EXISTIRA ESFUERZO CORTANTE. ESTOS ESFUERZOS, AL ACTUAR SOBRE SUS AREAS RESPECTIVAS, DAN LUGAR A ~~UNA~~ FUERZAS CORTANTES INTERNAS O RESISTENTES CUYA RESULTANTE DEBERA SER IGUAL, COLINEAL Y OPUESTA CON LA FUERZA CORTANTE EXTERNA. SI ESTO NO OCURRE LA FUERZA CORTANTE INTERNA Y LA FUERZA CORTANTE EXTERNA PRODUCEN UN MOMENTO TORSIONANTE.

SE LLAMA CENTRO DE CORTANTE O CENTRO DE TORSION AL PUNTO POR DONDE TIENE QUE PASAR EL PLANO DE CARGAS EXTERIORES PARA QUE NO EXISTA TORSION.

PARA ILUSTRAR LA DETERMINACION DEL CENTRO DE CORTANTE, CONSIDERESE UNA VIGA DE SECCION CANAL. SE SUPONE QUE LAS PAREDES SON LO SUFICIENTEMENTE DELGADAS PARA QUE TODOS LOS CALCULOS PUEDAN BASARSE EN LA HIPOTESIS DE QUE EL AREA ESTA CONCENTRADA EN LA LINEA MEDIA DEL ESPESOR, SE SUPONE QUE ES APLICABLE LA FORMULA DE LAS ESCUADRIAS

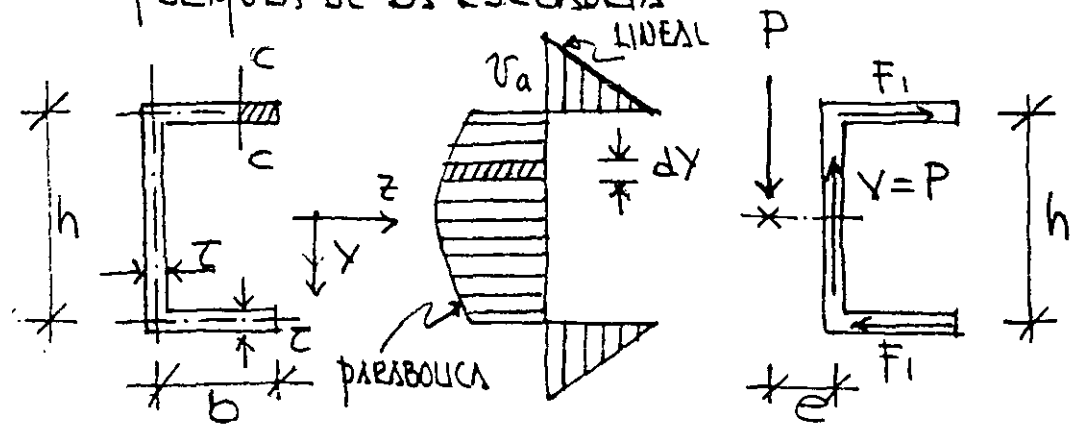


FIG (6)

EL ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO  $(\bar{v}/2)$  MULTIPLICADO POR EL AREA DEL PASTÓN DA UNA FUERZA  $F_1 = (\bar{v}/2) b z$

DE IGUAL FORMA EN EL ALMA RESULTA LA FUERZA:

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} v \tau dy$$

EN LA FIG. (6c) SE DIBUJAN LAS FUERZAS QUE RESULTAN. LA FUERZA  $F_1$  PRODUCE UN PAR QUE VALE  $(F_1)(h)$ , EL CUAL, TIENDE A TERCER LA SECCIÓN ALREDEDOR DE SU EJE LONGITUDINAL.

PARA EVITAR EL GIRO ES NECESARIO APLICAR LAS CARGAS  $P$  A UNA DISTANCIA  $e$  TAL QUE:

$$F_1 h = P e$$

POR LO TANTO:

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{1/2 \bar{v} a b z h}{P} = \frac{b z h}{2P} \frac{V Q}{I \tau} = \frac{b z h}{2P} \frac{V b \tau (h/2)}{I \tau} = \frac{b^2 h^2 \tau}{4I}$$

EN FORMA SEJAJANTE, UNA INVESTIGACIÓN DE LA LOCALIZACIÓN DEL PLANO DONDE DEBEN ESTAR CONTENIDAS LAS FUERZAS HORIZONTALES PARA QUE NO EXISTA TORSIÓN INDICA QUE ESTE PLANO COINCIDE CON EL PLANO NEUTRO. LA INTERSECCIÓN DE LOS DOS PLANOS DE CARGA DEFINEN UN PUNTO LLAMADO CENTRO DE CARGA O CENTRO DE TORSIÓN

### 7. - DEFORMACIONES POR CORTANTE

LAS FUERZAS CORTANTES PRODUCEN UNA DEFORMACION TANGENCIAL O DISTORSION. UN ELEMENTO SUJETO A FUERZA CORTANTE NO VARIA LA LONGITUD DE SUS LADOS SINO QUE UNICAMENTE CAMBIA DE FORMA DE RECTANGULO A PARALELO GRAMO.

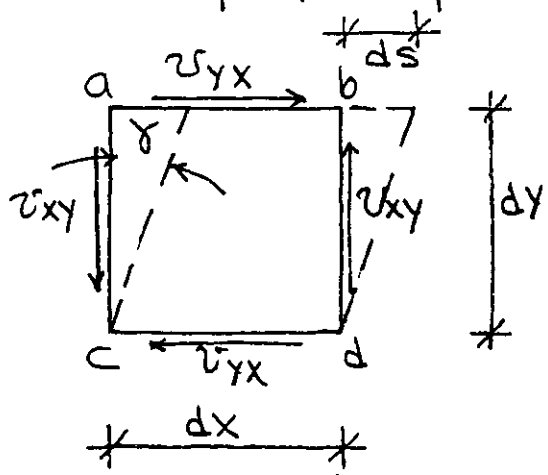


FIG. (7)

ANTES DE LA DEFORMACION EL ANGULO EN EL PUNTO C VALE  $\pi/2$ . DESPUES DE LA DEFORMACION SE REDUCE A  $\pi/2 - \gamma$ . EN EL PUNTO a EL ANGULO SE INCREMENTA A  $\pi/2 + \gamma$

$$\tan \gamma = \frac{ds}{dy}$$

$\gamma$  = DEFORMACION POR CORTANTE

COMO EL ANGULO  $\gamma$  ES SIEMPRE MUY PEQUEÑO:

$$\gamma = \frac{ds}{dy}$$

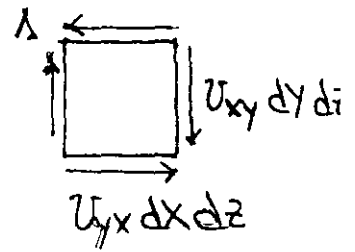
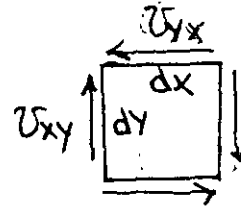
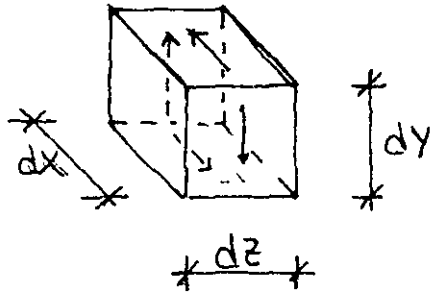
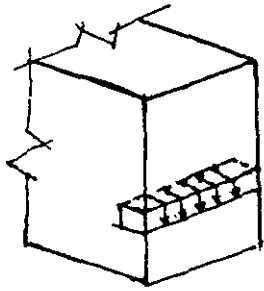
SE REALIZAN ENSAYES PARA OBTENER LAS GRAFICAS ESFUERZO-DEFORMACION (EN ENSAYES A CORTANTE PURO) LAS CUALES SON SEMEJANTES A LAS DE TENSION. LOS EXPERIMENTOS, MUESTRAN QUE PARA METALES DUCTILES INCLUYENDO EL ACERO EL ESFUERZO DE FLENCIA AL CORTANTE  $\tau_y$  VARIA ENTRE  $0.5 f_y$  Y  $0.6 f_y$ .

LA LEY DE HOOKE PARA CORTANTE ES:  $\tau_y = G \gamma$

G = MODULO DE ELASTICIDAD AL ESFUERZO CORTANTE



\* DEMOSTRACIÓN DE QUE  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

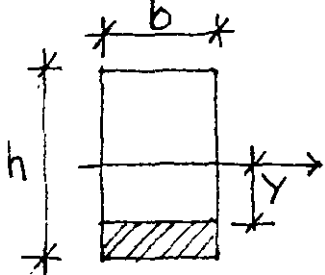


CONSIDERANDO UN ELEMENTO DE DIMENSIONES DIFERENCIALES. POR EQUILIBRIO HORIZONTAL EL ESFUERZO EN LA CARA SUPERIOR REQUIERE OTRO IGUAL Y DE SENTIDO CONTRARIO EN LA CARA INFERIOR. TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR A. SE TIENE:

$$(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0$$

$$\therefore \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

\* CALCULAR LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZO CORTANTE EN UNA SECC. RECTANGULAR



$$\tau = \frac{V Q}{I b}$$

$$Q = b(h/2 - y) \left[ \frac{y + (h/2 - y)/2}{(h/2 + y)/2} \right] = \frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2]$$

SUSTITUYENDO:

$$\tau = \frac{V \frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2]}{I b} = \frac{V [(h/2)^2 - y^2]}{2 I}$$

LA EC. ANTERIOR INDICA QUE LA MAGNITUD DE  $\tau$  VARIA EN FUNCIÓN DE  $y^2$  POR LO QUE LA VARIACION ES PARABOLICA. EL  $\tau_{max}$  SE OBTIENE PARA  $y = 0$ . DICHO VALOR ES:  $\tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{2 I}$

$$\text{COYO } I = \frac{bh^3}{12}; \quad \tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{2 \frac{bh^3}{12}} = \frac{3V}{2bh}$$

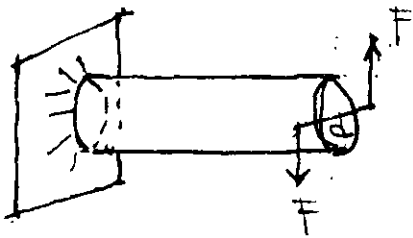
$$bh = A$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{prom.}$$

$$\tau_{prom.} = \frac{V}{A}$$

# TORSION

- MOMENTO TORSIONANTE: ES LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS MOMENTOS DE LOS PARES APLICADOS SITUADOS A LA DERECHA O A LA IZQUIERDA DE LA SECCION CONSIDERADA.



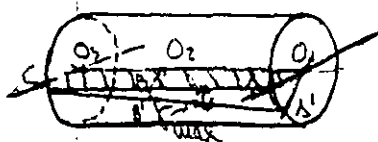
$$T = \text{momento torsionante}$$
$$T = (d)(F)$$

## EFFECTOS DEL MOMENTO TORSIONANTE

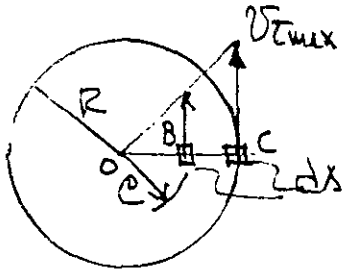
1. - PRODUCE UN DESPLAZAMIENTO ANGULAR DE UNA SECCION CON RESPECTO A OTRAS.
2. - ORIGINA ESFUERZOS CORTANTES EN CUALQUIER SECCION DE LA BARRA.

## HIPOTESIS BASICAS

1. - LAS SECCIONES TRANSVERSALES PLANAS PERPENDICULARES AL EJE DE LA BARRA (CIRCULAR) PERMANECEN PLANAS DESPUES DE LA APLICACION DE UN MOMENTO TORSIONANTE.
2. - EN MIEMBROS DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR QUE SE SOMETEN A TORSION SU DEFORMACION ANGULAR  $\gamma$ , VARIA LINEALMENTE DESDE SU EJE (LOS RADIOS PERMANECEN RECTOS)
3. - POR LO TANTO, SE DEDUCE QUE EL ESFUERZO CORTANTE ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DEFORMACION.



## - FORMULA DEL ESFUERZO POR TORSION MATERIAL ELASTICO-LINEAL



EN EL CASO ELASTICO, COMO EL ESFUERZO ES PROPORCIONAL A LA DEFORMACION, LOS ESFUERZOS VARIAN TAMBIEN LINEALMENTE DESDE EL EJE LONGITUDINAL. LOS ESFUERZOS INDUCIDOS SON ESFUERZOS CORTANTES Y ACTUAN EN UN PLANO

PARALELO A LA SECCION Y PERPENDICULAR AL EJE DE LA BARRA.

EL ESFUERZO EN UN PUNTO A UNA DISTANCIA  $\rho$  DEL CENTRO VALE:

$$\tau_{\rho} = \frac{\rho}{R} \tau_{\max} \quad \text{--- (1)}$$

UNA VEZ ESTABLECIDA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN UNA SECCION, SE PUEDE DETERMINAR LA RESISTENCIA A MOMENTO TORSIONANTE EN FUNCION DEL ESFUERZO. POR LO TANTO, SE PUEDE FORMULAR LA SIGUIENTE ECUACION.

$$\int_A \underbrace{\frac{\rho}{R} \tau_{\max}}_{\text{ESFUERZO}} \underbrace{dA}_{\text{AREA}} \underbrace{\rho}_{\text{BRAZO DE MOMENTO}} = T \quad \text{--- (2)}$$

MOMENTO TORSIONANTE

$T$  = MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE

$\tau_{\max}$  y  $R$  SON CONSTANTES PARA UNA SECCION TRANSVERSAL DADA.

$$\therefore T = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_A \rho^2 dA \quad \text{--- (3)}$$

$$\int \rho^2 dA = J = \text{MOMENTO POLAR DE INERCIA}$$

PARA UNA SECCION CIRCULAR  $dA = 2\pi e de$

$$\therefore J = \int_A e^2 dA = \int_0^R 2\pi e^3 de = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

POR LO TANTO:

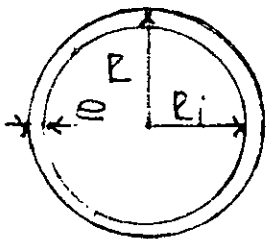
$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} \text{ ----- (4)}$$

LA ECUACION (4) ES LA FORMULA DE LA TORSION PARA SECCIONES CIRCULARES.

PARA CALCULAR EL ESFUERZO EN UN PUNTO CUALQUIERA A UNA DISTANCIA  $e$  DEL CENTRO TENEMOS:

$$\tau_c = \frac{T e}{J} \text{ ----- (5)}$$

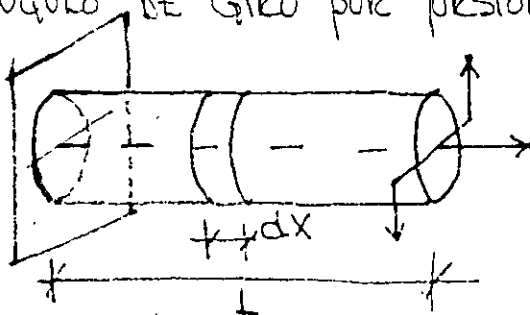
- LAS ECS. (4) Y (5) TAMBIEN SON APLICABLES A TUBOS DE SECCION CIRCULAR, PUESTO QUE SON APLICABLES LAS MISMAS HIPOTESIS Y UNICAMENTE ES NECESARIO CAMBIAR EL VALOR DE  $J$

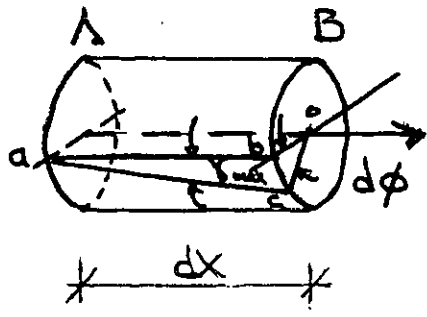


PARA ESTE CASO:

$$J = \int e^2 dA = \int_{Ri}^R 2\pi e^3 de = \frac{\pi}{2} (R^4 - Ri^4)$$

- ANGULO DE GIRO POR TORSION EN MIEMBROS DE SECCION CIRCULAR





Por la definición de su gulo

$$d\phi = \frac{bc}{R}$$

$$bc = R d\phi$$

En angulos muy pequeños las cuerdas y el arco se confunden.

$$\therefore \tan \gamma_{max} = \frac{bc}{dx} \approx \gamma$$

$$\gamma_{max} = \frac{bc}{dx}$$

$$bc = \gamma_{max} dx$$

$$\therefore R d\phi = \gamma_{max} dx \quad \dots \dots \dots (6)$$

Como existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación

$$\tau_{max} = G \gamma_{max} \quad \dots \dots \dots (7)$$

G = módulo de elasticidad al esfuerzo cortante

tomando en cuenta que  $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$

$$\frac{TR}{J} = G \gamma_{max}$$

$$\gamma_{max} = \frac{TR}{GJ} \quad \dots \dots \dots (8)$$

Sustituyendo el valor de  $\gamma_{max}$  en la ec. (6)

$$R d\phi = \frac{TR}{GJ} dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx$$

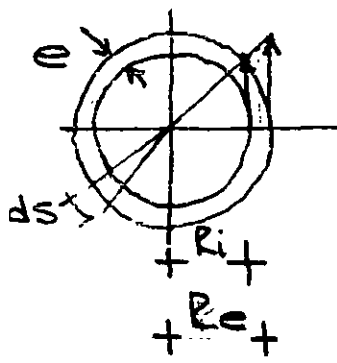
$$\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx = \frac{TL}{GJ}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad \dots \dots \dots (9)$$

MIEMBROS DE SECCION HUECA Y PARED DELGADA

LOS TUBOS DE PARED DELGADA DE CUALQUIER FORMA, SE PUEDEN ANALIZAR FACILMENTE PARA DETERMINAR LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS Y EL ANGULO PRODUCIDO POR UN MOMENTO TORSIONANTE APLICADO

- ESFUERZOS CORTANTES POR TORSION EN LA SECCION CIRCULAR HUECA.



$$R = \frac{R_i + R_e}{2}$$

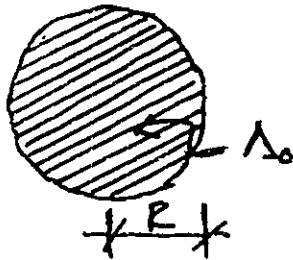
$$v_z = \frac{T e}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$J = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 e ds = R^2 e (2\pi R)$$

$$J = 2R^3 e \pi$$

$$e = R$$



$$v_z = \frac{T R}{2\pi R^3 e} = \frac{T}{2\pi R e} = \frac{T}{2\lambda_0 e}$$

$$\boxed{v_z = \frac{T}{2\lambda_0 e}} \quad \text{--- (10)}$$

- ANGULO DE GIRO

$$\phi = \frac{T L}{G J}$$

$$\frac{v_z}{R} = \frac{T}{J}$$

$$\therefore \phi = \frac{v_z L}{R G}$$

MULTIPLICANDO POR  $\pi R$

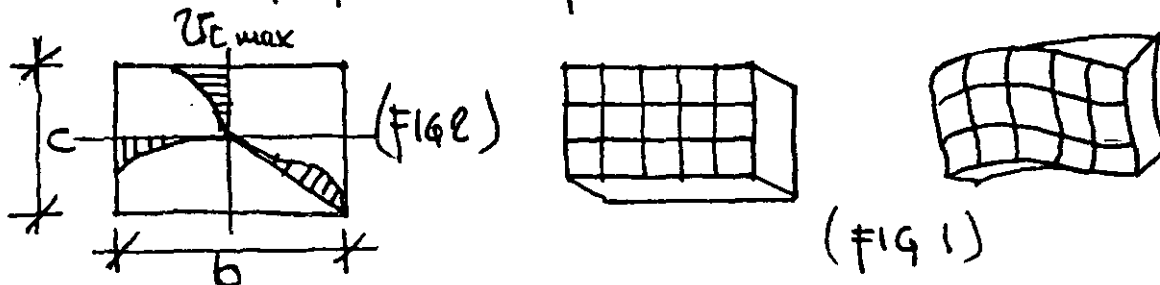
$$\phi = \frac{v_z L \pi R}{\pi R^2 G} = \frac{v_z L S}{2\lambda_0 G}$$

$$\phi = \frac{v_z L S}{2\lambda_0 G} \quad \text{(11)}$$

LAS ECS. (10) Y (11) SON APLICABLES A ~~SECCIONES~~ SECCIONES HUECAS DE CUALQUIER FORMA.

## - MIEMBROS DE SECCION YACIZA NO CIRCULAR

EL TRATAMIENTO ANALITICO MATEMATICAMENTE ES COMPLICADO. LAS PRIMERAS DOS HIPOTESIS NO SON VALIDAS. LAS SECCIONES TRANSVERSALES SI SE ALABEAN. LAS DISTORSIONES QUE OCURREN EN LA SECCION RECTANGULAR PUEDEN VERSE EN LA FIG. (1). EN ESTA SECCION LOS ELEMENTOS DE ESQUINA NO SE DISTORSIONAN EN LO ABSOLUTO. LOS ESFUERZOS CORTANTES SON UNIFORMES EN LOS VERTICES Y MAXIMOS EN LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE MAYOR LONGITUD. EN LA FIG (2) SE MUESTRA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS A LO LARGO DE TRES LINEAS RADIALES QUE PARTEN DEL CENTRO



SE HAN DESARROLLADO SOLUCIONES ANALITICAS PARA LA PRESION DE MIEMBROS ELASTICOS DE SECCION RECTANGULAR (TEORIA DE ELASTICIDAD). AQUI SE PRESENTAN UNICAMENTE LOS RESULTADOS FINALES. PARA EL ESFUERZO MAXIMO Y EL ANGULO DE GIRO, DICHS RESULTADOS SE PUEDEN EXPRESAR COMO:

$$\tau_{c, max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \quad \text{--- --- --- --- (1)}$$

$$\phi = \frac{T L}{\beta b c^2 G} \quad \text{--- --- --- --- (2)}$$

$\alpha$  y  $\beta$  SON PARAMETROS QUE DEPENDEN DE LA RELACION  $b/c$ . VER TABLA 1. CUANDO  $b$  ES MUCHO MAYOR QUE  $c$   $\alpha$  y  $\beta$  TIENDEN

a  $1/3$



TABLA 1

b/c	1.00	1.50	2.00	3.00	6.00	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.267	0.299	0.312	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

EXISTEN FORMULAS COMO LAS ANTERIORES PARA OTROS TIPOS DE SECCIONES TRANSVERSALES.

PARA LOS CASOS QUE NO SE PUEDEN RESOLVER MATEMATICAMENTE EN FORMA CONVENIENTE SE HA IDEADO UN METODO. RESULTA, QUE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL QUE DEBE RESOLVERSE EN EL PROBLEMA DE LA TORSION ELASTICA MATEMATICAMENTE ES IGUAL A LA ECUACION DE UNA MEMBRANA DELGADA, TAL COMO UNA PELICULA DE JABON, FORMADA Y LIGERAMENTE ESTIRADA SOBRE UN AGUJERO. ESTE, DEBE SER GEOMETRICAMENTE <sup>IGUAL</sup> A LA SECCION EN ESTUDIO. SE PUEDEN OBSERVAR LOS SIGUIENTES PUNTOS:

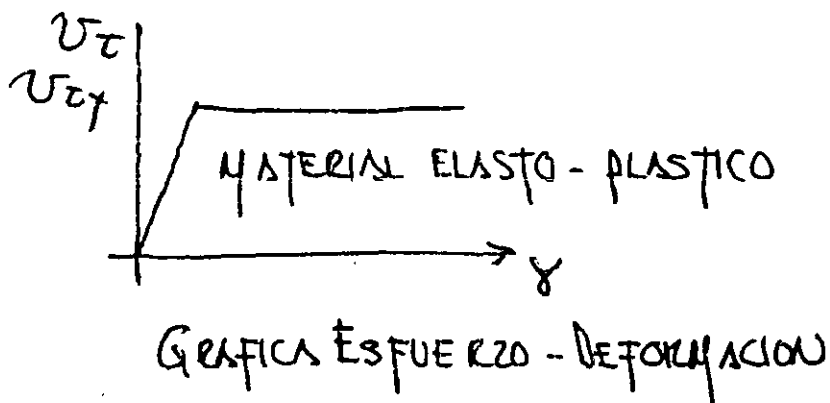
1. - EL ESFUERZO CORTANTE POR TORSION EN UN PUNTO ES PROPORCIONAL A LA PENDIENTE DE LA MEMBRANA EN EL MISMO PUNTO.
2. - LA DIRECCION DEL ESFUERZO EN UN PUNTO ES PERPENDICULAR A LA PENDIENTE EN EL MISMO PUNTO.
3. - EL DOBLE DEL VOLUMEN ENCERRADO POR LA MEMBRANA ES PROPORCIONAL AL MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE.

LA ANALOGIA ANTERIOR SE COLOCA COMO "ANALOGIA DE LA MEMBRANA"

## TORSION PURA EN EL INTERVALO INELASTICO

SI EN UNA SECCION TRANSVERSAL SE APLICA UN MOMENTO TORSIONANTE Y ESTE SE INCREMENTA EN FORMA GRADUAL, LLEGA UN INSTANTE EN QUE EN LOS PUNTOS DE ESFUERZO MAXIMO SE ALCANZA EL ESFUERZO DE FLUENCIA; SI EL MOMENTO CRECE TODAVIA MAS LAS ZONAS PLASTIFICADAS SE VAN EXTENDIENDO HASTA QUE EVENTUALMENTE ABRACAN TODA LA SECCION.

ES FACIL DETERMINAR LA MAGNITUD DEL MOMENTO TORSIONANTE QUE OCASIONA LA PLASTIFICACION TOTAL DE LA SECCION PERO EN CASO, EL PROBLEMA DE LA DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS DURANTE LA ETAPA DE PLASTIFICACION ES MUY COMPLEJA. LA DETERMINACION DEL MOMENTO SE HACE POR UNA EXTENSION DE LA ANALOGIA DE LA MEMBRANA A LA ZONA DE COMPORTAMIENTO INELASTICO IDEALIZANDO EL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL AL DE UN MATERIAL ELASTO-PLASTICO. DICHA EXTENSION SE CONOCE COMO "ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA".

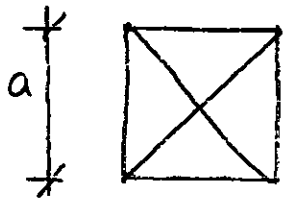


## - ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA

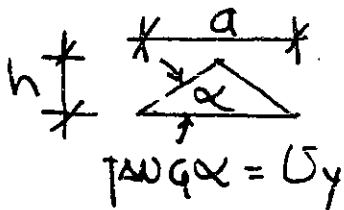
ESTA ANALOGIA HA SIDO DESARROLLADA PARA LA PRESION PLASTICA.

SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA QUE TENGA LA FORMA DE LA SECCION TRANSVERSAL, SE VIERTE ARENA SECA. LA SUPERFICIE DEL MONTON DE ARENA FORMADA, TIENE UNA PENDIENTE CONSTANTE. POR EJEMPLO, SOBRE UN DISCO CIRCULAR SE FORMA UN CONO Y SOBRE UNA BASE CUADRADA UNA PIRAMIDE CUADRANGULAR

EJEMPLO, EN UNA BARRA DE SECCION TRANSVERSAL CUADRADA



$$\begin{aligned} \text{VOLUMEN} &= \frac{1}{3} a^2 h \\ &= \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{a}{2}\right) \text{TANG } \alpha \\ &= \frac{a^3}{6} v_y \end{aligned}$$



$$T_p = 2(\text{VOLUMEN})$$

$$T_p = \frac{a^3}{3} v_y$$

SI CONSIDERAMOS QUE  $v_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}}$

$$T_p = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} f_y = \frac{\sqrt{3}}{9} a^3 f_y$$

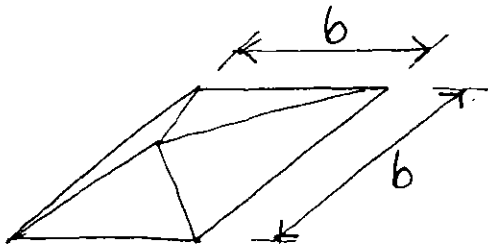
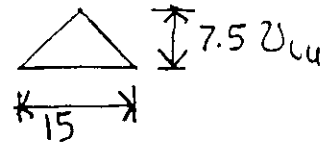
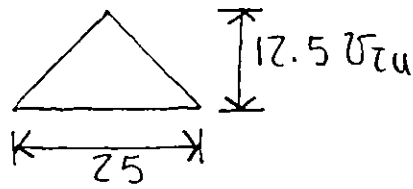
PARA UNA SECCION CIRCULAR DE RADIO R

$$T_p = \frac{2}{3} \pi R^2 (R \text{TANG } \alpha) = \frac{2}{3} \pi R^3 v_y$$

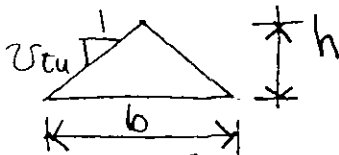
$$T_p = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi R^3 f_y = \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3 f_y$$

EJEMPLO 1: DEDUCIR LA ECUACIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE POR TORSIÓN  $\tau_{cu}$  USANDO LA ANALOGÍA DEL MONTÓN DE ARENAS.

SOLUCIÓN



SOLUCIÓN:



$$\text{VOLÚMEN} = \frac{b^2 h}{3}$$

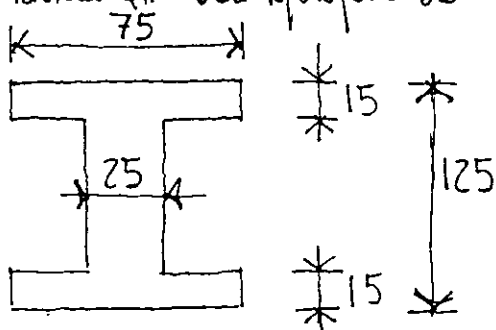
$$T_u = \tau_{cu} \frac{b^2 h}{3}$$

$$h = \tau_{cu} \frac{b}{\tau_{cu}}$$

$$T_u = \frac{\tau_{cu} b^2 (\tau_{cu} b / \tau_{cu})}{3} = \frac{b^3 \tau_{cu}}{3}$$

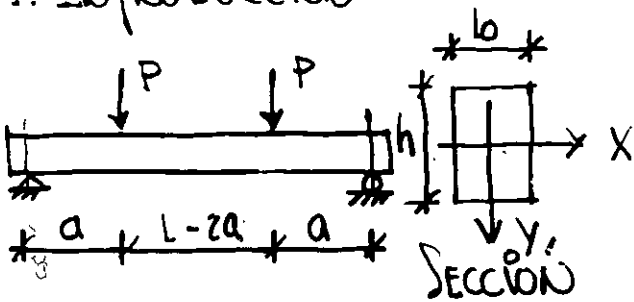
$$\tau_{cu} = \frac{3 T_u}{b^3}$$

EJEMPLO 2: DEDUCIR LA ECUACIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE POR TORSIÓN  $\tau_{cu}$  USANDO LA ANALOGÍA DEL MONTÓN DE ARENAS

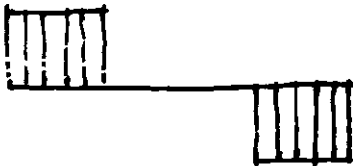


# ELEMENTOS SUJETOS A CORTANTE 2. COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA

## 1. INTRODUCCIÓN



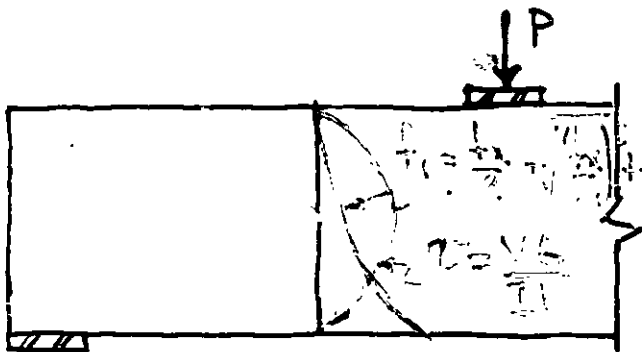
SECCIÓN



$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

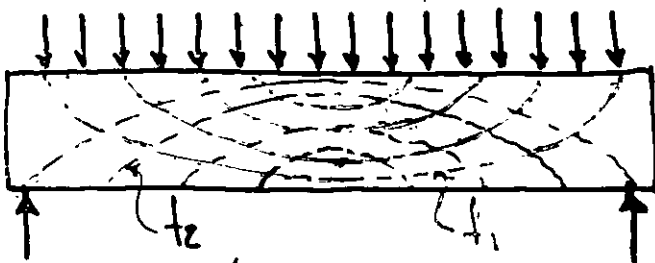


$$f_x = \frac{Vx}{I} y$$



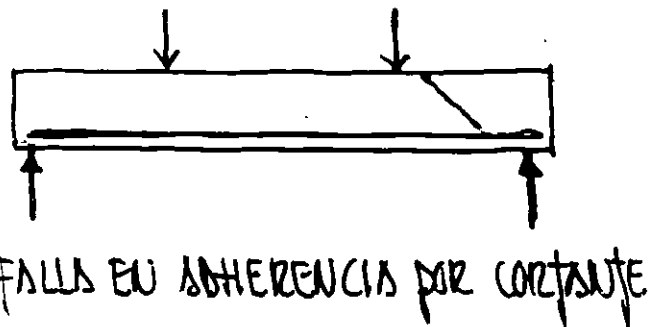
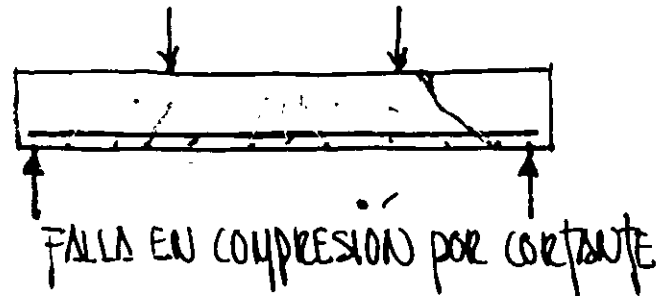
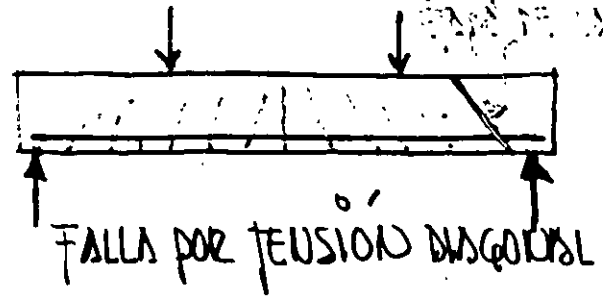
DISTRIB ESTRO EN UNA SECC

$\omega$



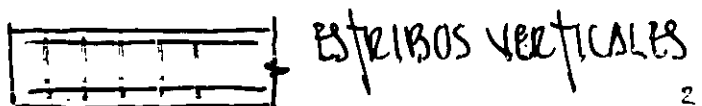
DISTRIBUCION DE ESFUEROS PRINCIPALES

$$\tau_{max} = 2v/f_x$$



\* SECCIONES NO RECTANGULARES  
CIRCULARES, I, CAJON, ETC  
LAS SECC I PUEDEN FALLAR POR APLAS-  
TAMIENTO DEL ALMA

## 3. TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL

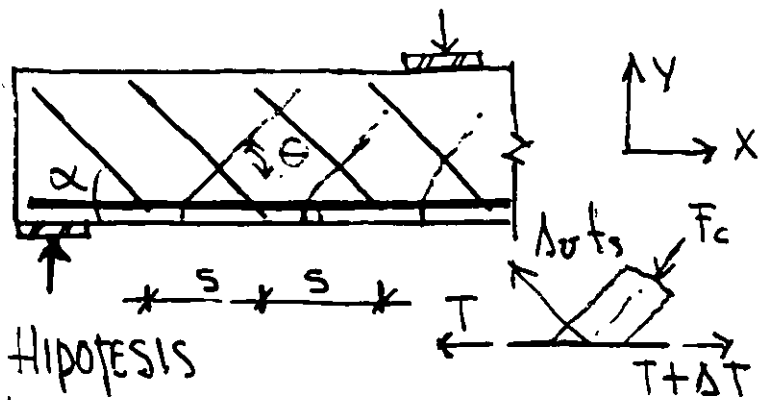


$$\therefore \Delta l = v s / z$$

$$\frac{V s}{z} = \Delta \sigma t_s \left[ \cos \alpha + \frac{\text{SENO} \alpha}{\text{TANG} \theta} \right]$$

$$V = \frac{\Delta \sigma t_s}{s} z \left[ \cos \alpha + \frac{\text{SENO} \alpha}{\text{TANG} \theta} \right]$$

## \* ANALOGIA DE LA ARMAadura (RITTER 1899)



HIPOTESIS

- LA ZONA COMPRESIONADA TOMA SOLO ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESION
- EL REFZO LONG TOMA SOLO ESFUERZOS NORMALES DE TENSION
- LAS TENSIONES DIAGONALES SON RESISTIDAS POR EL REFZO TRANSV
- LAS GRIETAS DIAGONALES SE DESARROLLAN DEL REFZO LONG AL CENTRO DE LAS ZONAS DE COMPRESION
- SE DESPRECIA EL PESO DE LA VIGA. EL INCREMENTO DEL MOMENTO EN UNA DISTANCIA S ES:

$$\Delta M = V s$$

$$\sum F_y = 0 = \Delta \sigma t_s \text{SENO} \alpha - F_c \text{SENO} \theta = 0$$

$$\therefore F_c = \Delta \sigma t_s \text{SENO} \alpha / \text{SENO} \theta$$

$$\sum F_x = 0 = -T + T + \Delta T - \Delta \sigma t_s \text{COS} \alpha - F_c \text{COS} \theta = 0$$

$$\Delta T = \Delta \sigma t_s \text{COS} \alpha + F_c \text{COS} \theta$$

$$= \Delta \sigma t_s \left[ \text{COS} \alpha + \frac{\text{SENO} \alpha}{\text{TANG} \theta} \right]$$

$$\Delta M = \Delta T (z) = V s$$

CONSTANTE

REGLA MEXICO ACI-83

$$V_u \leq \phi V_n \quad (11.1)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (11.2)$$

CUANDO LA REACCION INTRODUCE ESFUEROS DE COMPRESION EN EL EXTREMO DE UN MIEMBRO LA SECCION CRITICA SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA "d" DEL PUNTO INTERIOR DEL APOYO.

METODO SIMPLIFICADO

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d \quad (11.3)$$

METODO DETALLADO

$$V_c = \left( 0.5 \sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_u d}{\phi V} \right) b d \quad (11.6)$$

$$\frac{V_u d}{\phi V} \leq 1 \quad V_c \leq 0.93 \sqrt{f'_c} b d$$

EN LOS DOS METODOS:

PARA ESTRIBOS INCLINADOS

$$V_s = \frac{\Delta s f_y d (S \sin \alpha + \cos \alpha)}{S}$$

PARA ESTRIBOS VERTICALES

$$V_s = \frac{\Delta s f_y d}{S}$$

$$f_y \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$$

ESPECIFICACIONES:

$$\Delta s_{\min} = \frac{3.5 b s}{f_y}$$

$$s_{\max} = d/2$$

$$\text{CUANDO } V_s > 1.1 \sqrt{f'_c} b d \quad s_{\max} = d/4$$

$$V_s \leq 2.1 \sqrt{f'_c} b d$$

DEBE COLGARSE REFUERZO TRANSVERSAL EN TODAS LAS SECCIONES DONDE:

$$V_u > \phi V_c / 2$$



# ESPECIFICACIONES C.F.C.

2.1.5

a) Fza. cortante. Ref. para el concreto (VCR)

Las expresiones de VCR son aplicables cuando:

$$h \leq 70 \text{ cm}; \quad h/b \leq 6$$

Para cada condición que no se cumpla, se debe reducir VCR en 30%

I Vigas sin refzo. cuando  $L/h \geq 5$

$$\text{Si } p < 0.01; \quad VCR = FR (0.7 + 30p) \sqrt{f_c'} \quad (bd)$$

$$\text{" } p \geq 0.01; \quad VCR = FR bd (0.5 \sqrt{f_c'})$$

$$V_u \leq 2.0 FR bd \sqrt{f_c'}$$

$$\text{Si } V_u > 1.5 FR bd \sqrt{f_c'}; \quad s_{max} = d/4$$

$$\text{Si } V_u < 1.5 FR bd \sqrt{f_c'}; \quad s_{max} = d/2$$

$$A_{trunc} = \frac{3.5 k S}{FR f_y}$$

II Elementos anchos (losas, espigas y yuros)

$$b \geq 4d \quad \text{con } h = 60 \text{ cm} \quad \text{y } U/V_d \leq 2.0$$

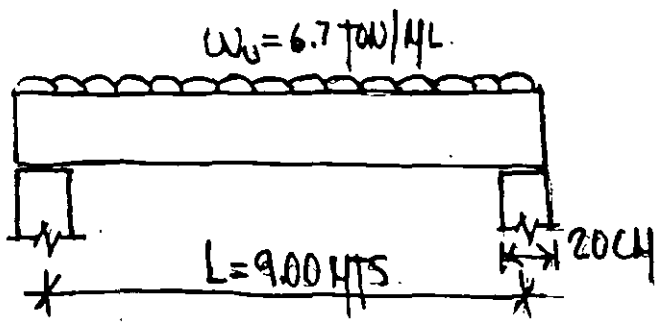
$$\therefore VCR = 1.5 FR \sqrt{f_c'}$$

El refzo. por flexión debe cumplir con los requisitos de 3.1. ES DECIR, DEBE ESTAR ADECUADAMENTE ANCLADO A ALCOS LARGOS DE LA SECC. DEBE EVITARSE LA MÁXIMA GRIETA. UCLAMADA POR

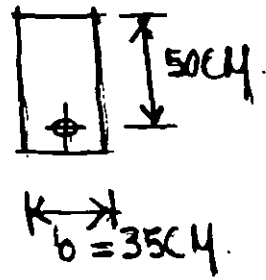
NOCLADA POR Fza. cortante. En espigas de secc. cte. basta con suministrar en los extremos anchos estándar.

Si  $h = 60 \text{ cm}$  y/o  $U/V_d \leq 2.0$  VCR se calcula de nuevo de con la secc. I. El anclaje del refzo. debe ser con gancho en los extremos.

EJEMPLO DE CORTANTE  
 REVISAR POR CORTANTE LA SIGUIENTE VIGA

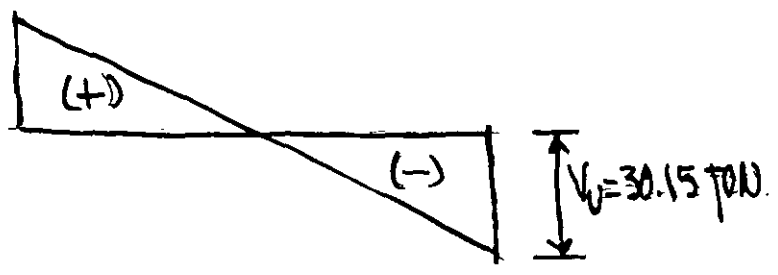


SECCION

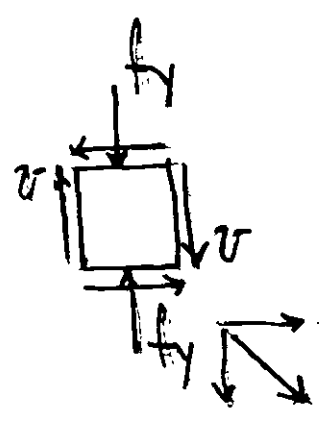
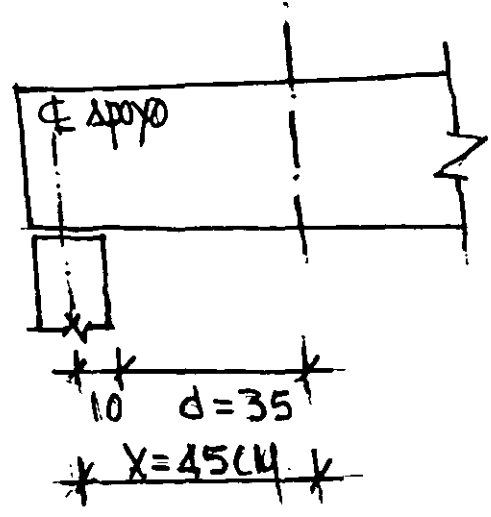


MATERIALES:

$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$   
 $f_y = 2800 \text{ KG/CM}^2$



SECCION CRITICA.



$$V_u = \frac{30.15 \times 4.05}{4.50} = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_u = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_u \leq \phi V_n$$

PARA CORTANTE  $\phi = 0.85$

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b w d$$

$$V_c = 13.12 \text{ ton}$$

$$V_{s_{\text{req}}} = V_u / \phi - V_c$$

$$V_{s_{\text{req}}} = 18.81 \text{ ton}$$

$$S_{\text{req}} = \frac{A_s f_y d}{V_s}$$

USANDO ESTIBOS  $\# 3$

$$S = \frac{1.42 \times 2800 \times 50}{18810} = 10.57 \text{ cm}$$

ESPECIFICACIONES:

SEPARACIÓN MÁXIMA

$$S \leq d/2$$

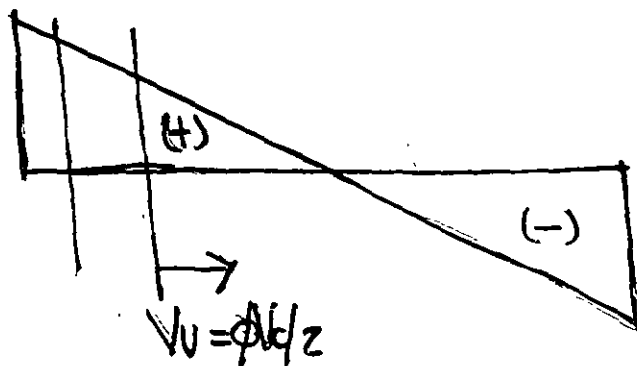
$$S \leq 25 \text{ cm} \leftarrow \text{RIGE}$$

ÁREA DE ACERO DE REFUERZO MÍNIMA

$$A_{s_{\text{min}}} = \frac{3.5 b w S}{f_y}$$

$$S_{\text{max}} = \frac{A_{s_{\text{min}}} f_y}{3.5 b w}$$

$$S_{\text{max}} = \frac{1.42 \times 2800}{3.5 \times 35} = 32 \text{ cm}$$



## 4.1.5 VIGAS DE SECCIÓN COMPUESTA

### a) CONCEPTOS GENERALES

— Es, la formada por un elemento prefabricado y concreto colado en sitio. Las partes integrantes deben estar conectadas de manera que actúen como una unidad. El elemento prefabricado puede ser de concreto o de acero. (en este último caso ver las Normas de Estructuras Metálicas)

— Si las  $f'_c$ ,  $\gamma_c$  u otras propiedades del concreto de los elementos son diferentes, ~~de~~ deben tomarse en cuenta al diseñar o usar las propiedades más desfavorables.

— Deberán tenerse en cuenta los efectos del apuntalamiento o falta del mismo sobre las deflexiones y el agrietamiento.

### b) Efectos de las fuerzas cortante

I El esfuerzo cortante horizontal,  $\tau_h$  en la superficie de contacto entre los elementos que forman las vigas puede calcularse con la expresión:

$$\tau_h = \frac{V_u}{f_r b_o d} \quad (4.1)$$

$V_u$  = fza. cortante de diseño

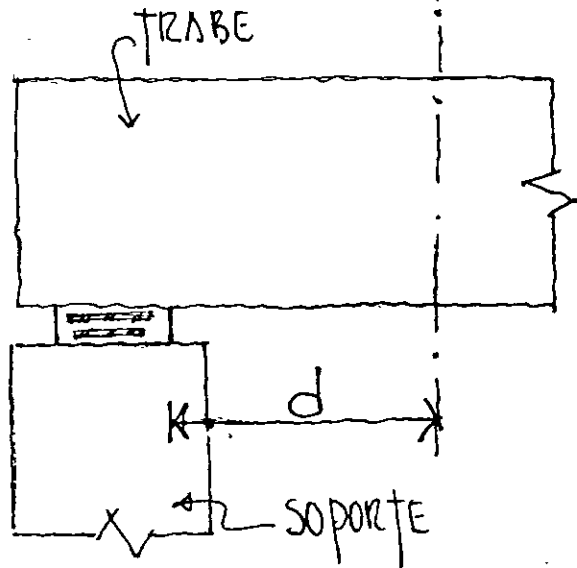
$b_o$  = ancho del área de contacto

$d$  = peralte efectivo de la sección compuesta.

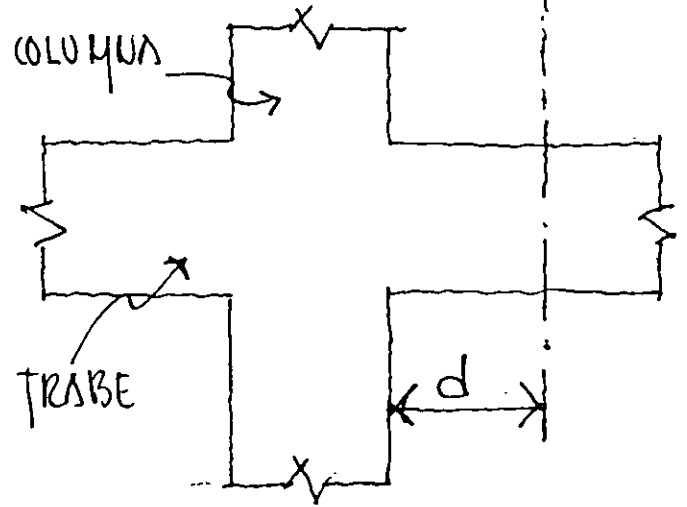
II Debe asegurarse que se transmitan los esfuerzos cortantes ( $\tau_h$ ) que actúan en la superficie de contacto.

III Para transmitir  $\tau_h$  se admiten los valores siguientes:

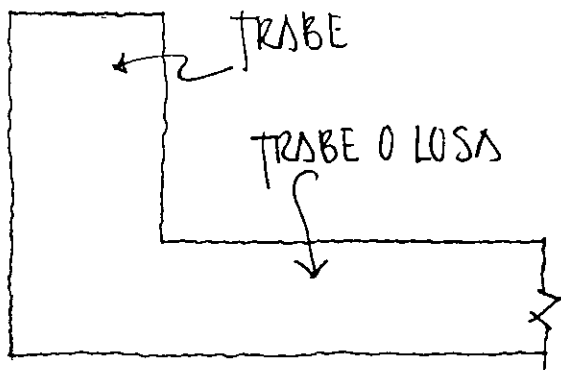
SECCIÓN CRÍTICA



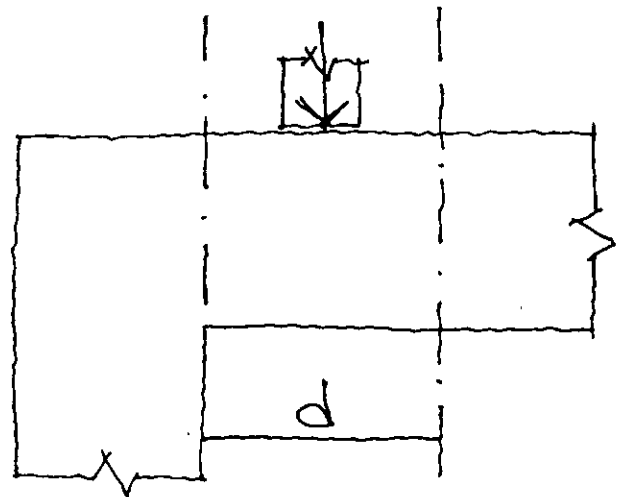
SECCIÓN CRÍTICA

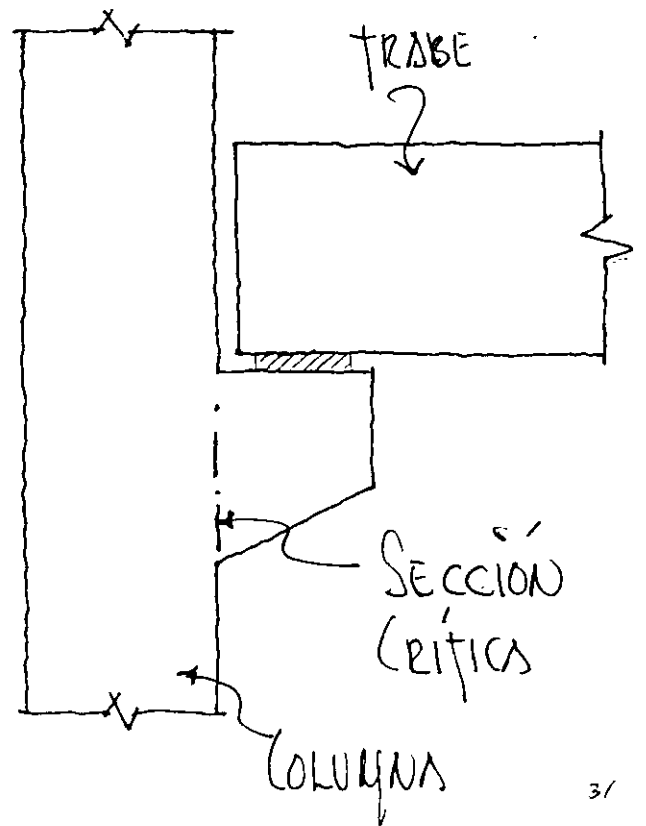
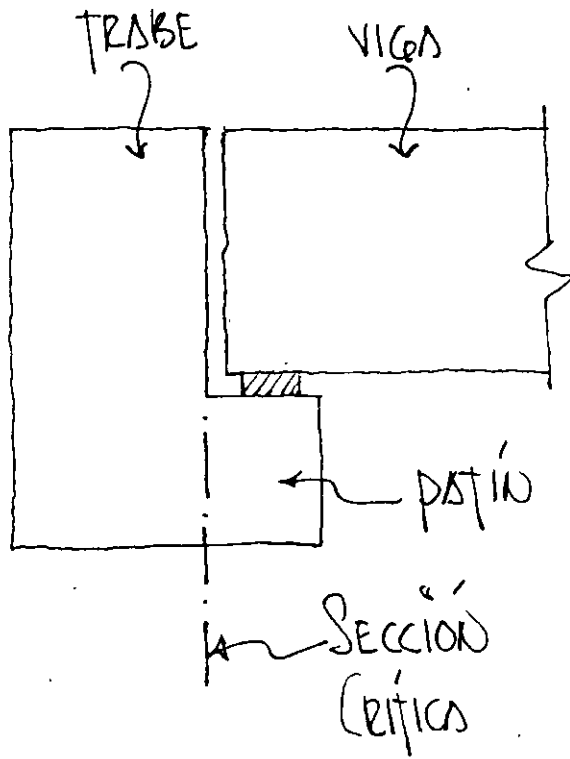
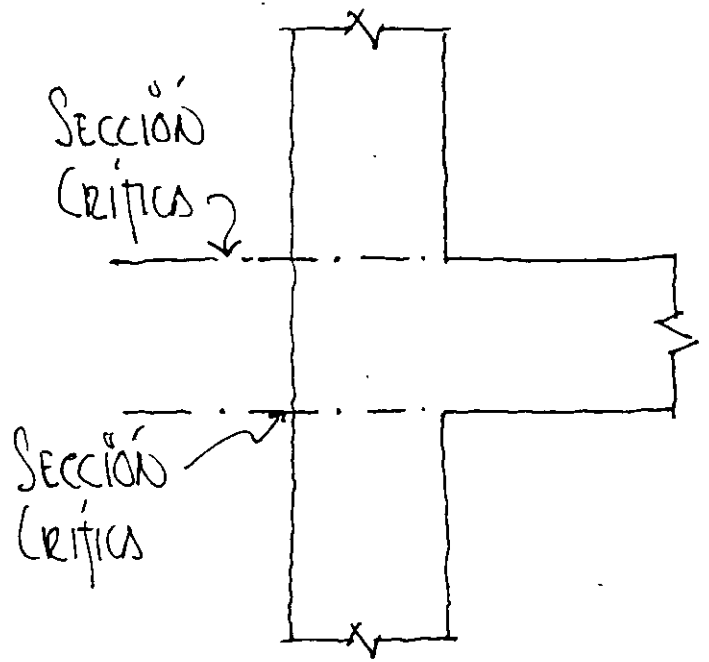
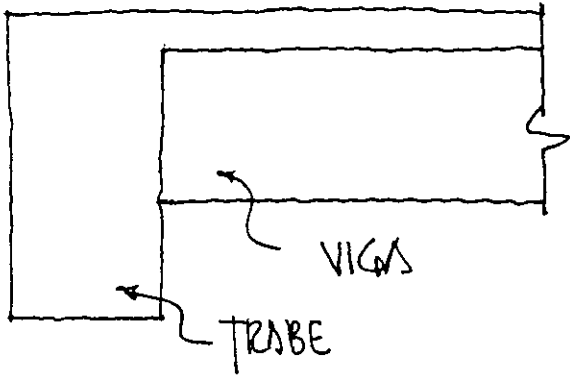


SECCIÓN CRÍTICA



SECCIÓN CRÍTICA





## EJEMPLO 2: DISEÑO POR CORTANTE CON TENSIÓN AXIAL

ACERO DE REFUERZO  $f_y = 4200 \frac{kg}{cm^2}$

CONCRETO (LIGERO CON ARENA)  $f'_c = 250 \frac{kg}{cm^2}$

$M_d =$

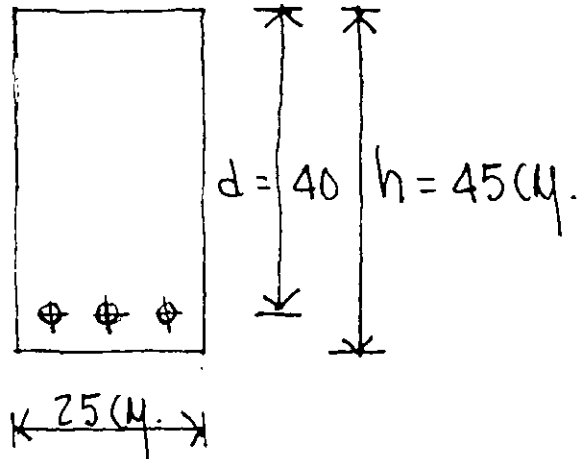
$M_l =$

$V_d = 5.82 \text{ ton}$

$V_l = 4.09 \text{ "}$

$N_d = -0.91 \text{ " (TENSIÓN)}$

$N_l = -6.91 \text{ " "}$



### CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

REFERENCIA  
AL CONGO

1. DETERMINAR LAS CARGAS FACTORIZADAS

$$V_u = 1.4 \times 5.82 + 1.7 \times 4.09 = 15.10 \text{ ton}$$

$$N_u = 1.4 \times (-0.91) + 1.7 \times (-6.91) = -13.02 \text{ "}$$

2. CALCULAR  $\phi V_c$

(COMO NO SE ESPECIFICA  $f_{ct}$ )

$$\phi V_c = \phi \left[ 1 + \frac{N_u}{35 A_g} \right] (0.54 \times 0.85 \sqrt{f'_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left( 1 + \frac{-13020}{35 \times 1125} \right) (0.54 \times 0.85 \sqrt{250}) 25 \times 40 = 4.13 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL ESPACIAMIENTO REQUERIDO DE ESTRIBOS

$$S_{req} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

USANDO ESTRIBOS #3 DOS RAMAS  $A_v = 1.42 \text{ cm}^2$ .

$$S_{req} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times 40 / (15.1 - 4.13) = 18.5 \text{ cm.}$$

VERIFICAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO

$$S_{max} = d/2 = 40 \text{ cm.}; S_{max} = A_v f_y / 3.5 b_w = 68 \text{ cm.}$$

$\therefore$  USAR ESTRIBOS #3 @ 15 cm.

11.2.1.2

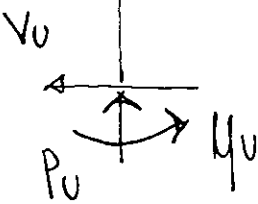
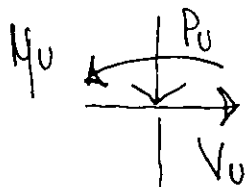
# EJEMPLO 3: DISEÑO DE UN MIEMBRO POR CORTEANTE CON COMPRESIÓN AXIAL.

CONDICIÓN DE CARGAS 1:

$$M_u = 72.72 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 72.72 \text{ ton}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$



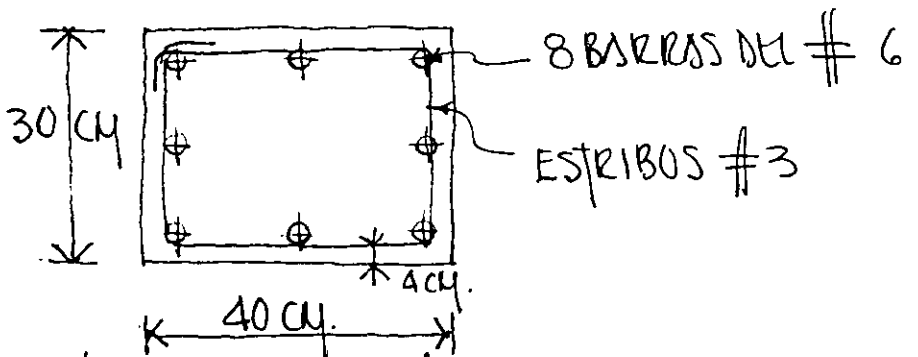
CONDICIÓN DE CARGAS 2:

$$M_u = 4.55 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 4.55 \text{ ton}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$

SECCIÓN TRANSVERSAL



ACERO DE REFUERZO:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

CONCRETO:  $f_c = 210 \text{ "}$

## CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

REFERENCIA AL CÓDIGO

CONDICIÓN 1:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTEANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $\phi V_c$

$$d = 40 - (4 + 1 + 1) = 34 \text{ cm}$$

$$\phi V_c = \phi \left( 1 + \frac{N_u}{140 \times 9} \right) (0.54 \sqrt{f_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left( 1 + \frac{72720}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 = 9.70 \text{ ton} \rightarrow V_u = 9.09 \text{ ton}$$

EC. (11-4)



CONDICIÓN 2:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $\phi V_c$

$$\phi V_c = 0.85 \left( 1 + \frac{4550}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 =$$

EC. (11-4)

$$\phi V_c = 6.97 \text{ ton} < V_u$$

POR LO TANTO, SE REQUIERE COLOCAR ACERO DE REFUERZO TRANSVERSAL

2. DETERMINAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO PARA ESTEBOS DEL #3.

$$S_{\max} = d/2 = 34/2 = 17 \text{ cm.}$$

11.5 "

3. VERIFICAR LA RESISTENCIA A CORTANTE TOTAL

$$\phi V_s = \phi A_v f_y \frac{d}{s} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times \frac{34}{5} = \frac{172.36}{5}$$

PARA  $s = 15 \text{ cm.}$

$$\phi V_s = 11.49 \text{ ton.}$$

$$\phi V_c + \phi V_s = 18.46 \text{ ton} > V_u$$

- 1. NO SE USAN ANCLAJES METÁLICOS Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÁ RUGOSA Y LIMPIA. 3 kg/cm<sup>2</sup>
- 2. SE CUMPLEN LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA LOS CONECTORES DEL INCISO IV Y LA SUPERFICIE ESTÁ LIMPIA. 6 "
- 3. SE CUMPLEN LOS REQUISITOS PARA CONECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÁ LIMPIA Y RUGOSA. 25 "

(CUANDO  $\sigma_{\text{h}} > 25 \text{ kg/cm}^2$  EL DISEÑO SE HACE CON EL CRITERIO DE COEFICIENTE POR FRICCIÓN DE 2.1.5 i)

IV. LOS CONECTORES DEBEN ESTAR FORMADOS POR BARRAS O ESTRIBOS NORMALES A LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL ÁREA MÍNIMA DE ESTE REFZO SERÁ

$$A_{\text{min}} = (3/f_y) (\text{ÁREAS DE CONTACTO})$$

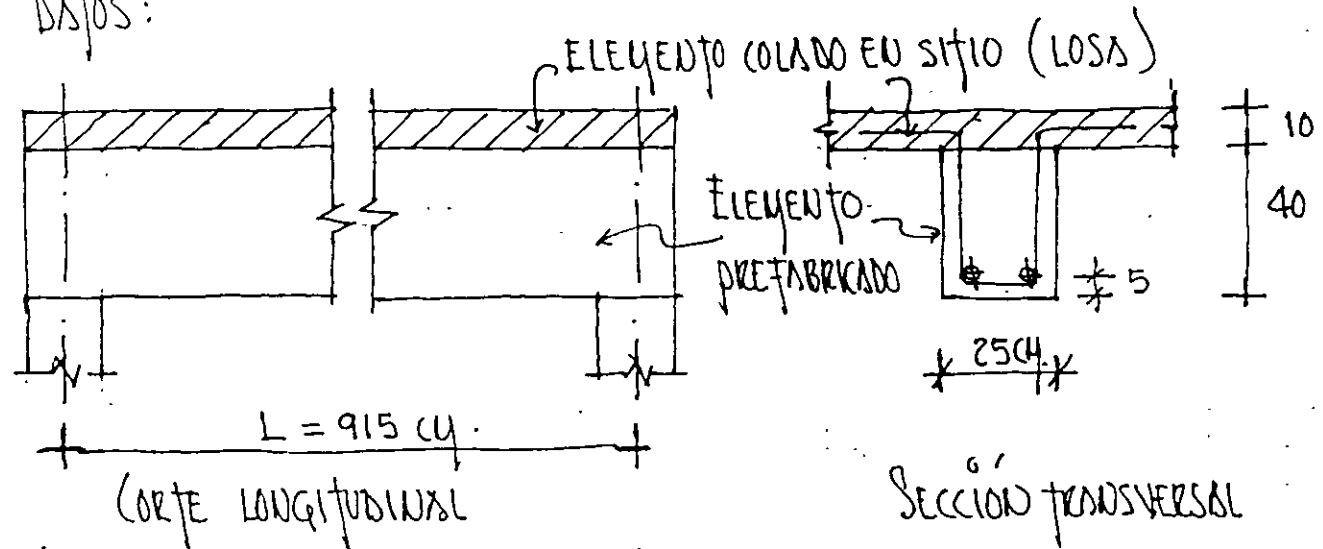
SU SEPARACIÓN (s)  $s \leq 6$  (ESPESOR DEL ELEMENTO COLADO EN SITIO)  
 $s \leq 60 \text{ cm.}$

LOS CONECTORES DEBEN ESTAR ANCLADOS EN AMBOS ELEMENTOS DE MODO QUE EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO DESARROLLEN AL MENOS  $0.8 f_y$ .

V. EL REFZO. POR TENSIÓN DIAGONAL SE DIMENSIONARÁ IGUAL QUE PARA UNA VIGA MONOLÍTICA DE LA MISMA FORMA.

EJEMPLO: DISEÑAR POR CORTANTE HORIZONTAL LA VIGA DE SECCIÓN COMPUESTA SIGUIENTE:

DATOS:



CARGA MUERTA DE SERVICIO = 470 KG/ML

" VIVA " " = 350 "

$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$

$f_y = 4200 \text{ "}$

SOLUCIÓN

1. DETERMINAR  $V_u$  EN EL EXTREMO

$W_u = 1.4(0.47 + 0.35) = 1.15 \text{ TON/ML}$

$V_u = 1.15 \times 9.15 / 2 = 5.26 \text{ TON}$

2. DETERMINAR LA MAGNITUD DEL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL ( $\tau_h$ )

$\tau_h = \frac{5260}{0.8 \times 25 \times 45} = 5.85 \text{ KG/CM}^2$

$3 \text{ KG/CM}^2 < \tau_h < 6 \text{ KG/CM}^2$

∴ SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA LOS CONECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA.

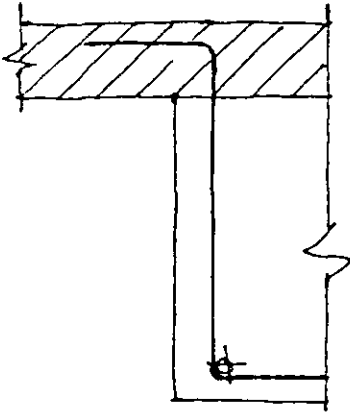
3. CALCULAR LA SEPARACIÓN Y EL AREA DE LOS COLECTORES

SEPARACIÓN  $S = 6(10) = 60 \text{ cm}$

$$A_{sv \text{ min}} = (3/4200)(25 \times 60) = 1.07 \text{ cm}^2$$

USANDO COLECTORES DEL #3 DOS RAMAS  $A_{sv} = 1.42 \text{ cm}^2 > A_{sv \text{ min}}$

4. CALCULAR LOS REQUISITOS DE ANCLAJE DE LOS COLECTORES.



AUMENTANDO LAS CARGAS:

CARGA MUERTA DE SERVICIO = 470 kg/m

" VIVA " " " = 1500 "

SOLUCIÓN:

1. CALCULAR  $V_u$  EN EL EXTREMO

$$W_u = 1.4(0.47 + 1.50) = 2.76 \text{ ton/m.}$$

$$V_u = 2.76 \times 9.15 / 2 = 12.63 \text{ ton.}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE  $\sigma_h$

$$6 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_h = \frac{12630}{0.8 \times 25 \times 45} = 14 \text{ kg/cm}^2 < 25 \text{ kg/cm}^2$$

$\therefore$  SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA COLECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA Y RUGOSA.

INCREMENTANDO LAS CARGAS A:

CARGA MUERTA DE SERVICIO = 800 KG/ML

• VIVAS " " = 3000 "

SOLUCIÓN

1. CALCULAR  $V_0$  EN EL EXTREMO

$$W_0 = 1.4 (0.80 + 3.00) = 5.32 \text{ ton/ML}$$

$$V_0 = 5.32 \times 9.15 / 2 = 24.34 \text{ ton}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE  $\sigma_h$

$$\sigma_h = \frac{24340}{0.8 \times 25 \times 45} = 27.14 \text{ kg/cm}^2 > 25 \text{ kg/cm}^2$$

∴ EL DISEÑO DEBE HACERSE CON EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN

## 17.5 RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL

EL CORTANTE HORIZONTAL EN MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN SE CUBRE EN EL CAP 17 DEL CÓDIGO.

LAS FUERZAS DE CORTANTE HORIZONTAL ACTÚAN SOBRE LA SUPERFICIE DE UNIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS DE LOS MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN. ESTAS FUERZAS HORIZONTALES SON PRODUCIDAS POR EL GRADIENTE DE MOMENTO DEBIDO A LAS FUERZAS CORTANTES VERTICALES. EN LA SECCIÓN 17.5.1. SE REQUIERE QUE SE TRANSMITA EL TOTAL DE LAS FUERZAS CORTANTES HORIZONTALES, GENERADAS EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL CÓDIGO CONSIDERA QUE LA RESISTENCIA DE UN MIEMBRO COMPUESTO ES LA MISMA YA SEA QUE ESTÉ APUNTALADO O NO.

LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL SE DEBE INVESTIGAR EN TODOS LOS MIEMBROS COMPUESTOS. CUANDO  $V_u > \phi(35b_v d)$ , EL DISEÑO SE DEBE HACER SEGÚN 11.7.4 (CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN). ÉSTE LÍMITE SUPERIOR, SE INCREMENTÓ DE  $\phi(24.5b_v d)$  CORRESPONDIENTE A LAS EDICIONES ANTERIORES.

EL LÍMITE SUPERIOR DE LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL DEPENDE DE LAS CONDICIONES DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL REQUISITO COMÚN DE TODOS LOS CASOS ES QUE LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA.  $V_{nh} < 5.6 b_v d$ , CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO SE DEJA INTENCIONALMENTE RUGOSA (17.5.2.1) O, CUANDO SE USA UN MÍNIMO DE CONECTORES (17.5.2.2).

CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÉ INTENCIONALMENTE RUGOSA Y SE PROPORCIONE EL REFUERZO MÍNIMO DE CONECTORES :

$$V_{nh} < (18.2 + 0.6 p_r f) b_v d$$
$$(18.2 + 0.6 p_r f) < 35 \text{ kg/cm}^2$$
$$z_v = A_v / s_b$$

SI:  $V_u > \phi(35)b_v d$ . EL DISEÑO DE LA SECCION SE DEBE HACER USANDO EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN (SECCION 11.7.4 DEL CODIGO)

$\mu = 1.0$ , PARA SUPERFICIE INTENCIONALMENTE RUGOSA

$\mu = 0.6$ , PARA SUPERFICIE LISA

LA SECCION 17.5.2.5, FUE INTRODUCIDA EN LA EDICION DE 1992.. DEFINE EL PERALTE EFECTIVO PARA DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL COMO LA DISTANCIA DE LA FIBRA EXTREMA A COMPRESION AL CENTROIDE DEL ACERO A TENSION, O 0.8 DEL PERALTE TOTAL DE LA SECCION COMPUESTA. ESTO ACLARA LA DEFINICION DE  $d$  PARA SECCIONES COMPUESTAS, HACIÉNDOLO CONSISTENTE CON EL DISEÑO POR CORTANTE DEL RESTO DEL CODIGO. ESTA SECCION ES SIGNIFICATIVA PARA EL DISEÑO DE MIEMBROS PESFORZADOS EN LOS QUE EL PERALTE VARIA A LO LARGO DEL MIEMBRO. EL CODIGO TAMBIEN PRESENTA UN METODO ALTERNATIVO PARA EL DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL EN LA SECCION 17.5.3. LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL QUE DEBE TRANSMITIRSE A TRAVES DE LA SUPERFICIE DE UNION DE LAS PARTES DEL ELEMENTO COMPUESTO SE TOMA COMO EL CAMBIO EN LA FUERZA DE TENSION O COMPRESION EN UN TRAMO DE VIGA. CUANDO SE USA ESTE METODO, LOS LIMITES DE 17.5.2.1 A 17.5.3.1, SE APLICAN.

SUSTITUYENDO  $A_c$  POR  $b_v d$  EN LA EXPRESION. LA SECCION 17.5.3.1 TAMBIEN REQUIERE QUE EL ACERO ESTE DISTRIBUIDO PARA REFLEJAR EN FORMA APROXIMADA LA VARIACION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO. ESTE REQUISITO ENFATIZA LA DIFERENCIA ENTRE EL DISEÑO DE MIEMBROS COMPUESTOS SOBRE CONCRETO Y ACERO. EL DESLIZAMIENTO CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ENTRE UNA VIGA DE ACERO Y UNA LOSA QUE FORMAN SECCION COMPUESTA ES GRANDE. LO CUAL PERMITE LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL MIEMBRO. EN MIEMBROS DE CONCRETO QUE FORMAN SECCION COMPUESTA CON LA LOSA, EL DESLIZAMIENTO CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ES PEQUEÑO Y POR TANTO LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO ES LIMITADA. POR TANTO, LA DISTRIBUCION DEL REFUEZO POR CORTANTE HORIZONTAL DEBE BASARSE EN LA DISTRIBUCION CALCULADA DEL CORTANTE HORIZONTAL FACTORIZADO. PARA EL CASO DE MIEMBROS COMPUESTOS DE CONCRETO.

## CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

DE ACUERDO CON 17.6.3, SE REQUIERE QUE LOS CONECTORES ESTEN TOTALMENTE ANCLADOS EN LOS ELEMENTOS INTERCONECTADOS CUMPLIENDO CON 12.13. LA FIGURA 1 MUESTRA ALGUNOS DETALLES QUE HAN USADOS CON EXITO TANTO EN ENSAYES COMO EN LA PRACTICA.

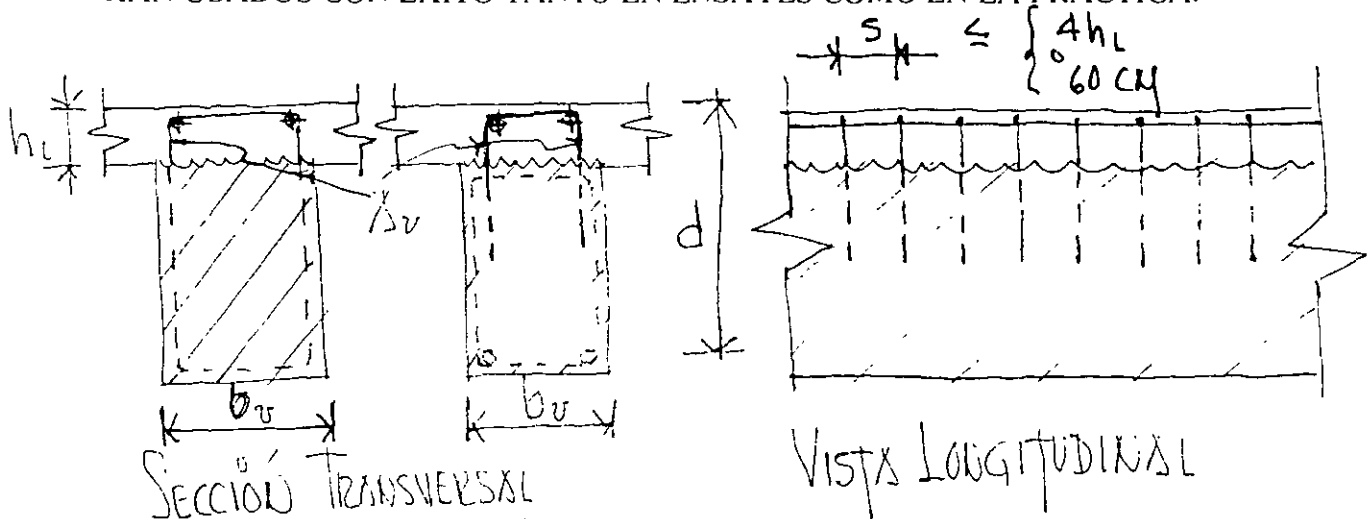
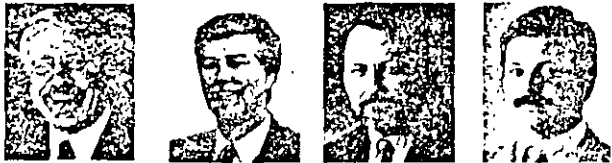


FIG. 1. CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

$$P_v = \frac{\Delta v}{b_v s}$$

$$\Delta v_{\min} = \frac{3.5 b_v s}{f_y}$$

## A General Shear Design Method



by Michael P. Collins, Denis Mitchell, Perry Adebar, and Frank J. Vecchio

*A simple, unified method is presented for the shear design of both prestressed concrete members and nonprestressed concrete members. The method can treat members subjected to axial tension or axial compression and treats members with and without web reinforcement. The derivation of the method is summarized and the predictions of the method are compared with those of the current ACI Code.*

**Keywords:** aggregate interlock; axial loads; building codes; crack width and spacing; reinforced concrete; shear strength; structural design.

The shear design provisions of the 1995 ACI Code<sup>1</sup> contain about 43 empirical equations for different types of members and different types of loading, some of which are illustrated in Fig. 1. In 1973, the ACI-ASCE Shear Committee<sup>2</sup> expressed the hope that these "design regulations for shear strength can be integrated, simplified, and given a physical significance." As shown by the growth in the number of ACI shear design equations (see Fig. 2), the code has not met this desirable goal. It is interesting to note that, prior to 1963, the ACI shear design procedure was so simple that only four equations were required.

Most of the shear design equations given in Fig. 1 were introduced in either the 1963 or 1971 edition of the ACI Code.<sup>3,4</sup> These design equations were developed in the period following the 1955 air-force warehouse shear failures<sup>5</sup> and rely on the traditional concept of adding a concrete contribution  $V_c$  to the shear reinforcement contribution  $V_s$  calculated on the basis of the 45 deg truss equation.

Since 1971 there has been an intensive research effort aimed at improving design methods for shear (see Fig. 3). The research has shown that, in general, the angle of inclination of the concrete compression is not 45 deg, and that equations based on a variable angle truss provide a more realistic basis for shear design. In addition, tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear<sup>6</sup> improved the understanding of the stress-strain characteristics of diagonally cracked concrete.

Stress-strain relationships made it possible to develop a physical model, called the modified compression field theory, that proved capable of accurately predicting the response of reinforced concrete subjected to shear.

The objective of this paper is to present briefly a simple, general shear design method based on the modified compression field theory. This design method, recently introduced by Collins and Mitchell,<sup>7</sup> has been adopted by the Ontario Highway Bridge Design Code,<sup>8</sup> the Canadian Standards Association Concrete Design Code,<sup>9</sup> and the AASHTO LRFD specifications.<sup>10</sup> The method is summarized in Fig. 4.

### SHEAR RESPONSE OF CRACKED CONCRETE

Tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear (see Fig. 4) demonstrated that even after cracking, tensile stresses exist in the concrete and that these stresses can significantly increase the ability of reinforced concrete to resist shear stresses.

Cracked reinforced concrete transmits load in a relatively complex manner involving opening or closing of pre-existing cracks, formation of new cracks, interface shear transfer at rough crack surfaces, and significant variation of the stresses in reinforcing bars due to bond, with the highest steel stresses occurring at crack locations. The modified compression field model attempts to capture the essential features of this behavior without considering all of the details. The crack pattern is idealized as a series of parallel cracks all occurring at angle  $\theta$  to the longitudinal direction. In lieu of following the complex stress variations in the cracked concrete, only the average stress state and the stress state at a crack are considered [see Fig. 4(b) and 4(c)]. As these two states of stress are statically equivalent, the loss of tensile stresses in the concrete at the crack must be replaced by increased steel stresses or, after yielding of some of the reinforcement at the crack, by shear stresses on the crack interface. The shear stress that can be transmitted across the crack will be a function of the crack width. Note that shear stress on the crack implies that the direction of principal stresses in the concrete changes at the crack location.

*ACI Structural Journal*, V. 93, No. 1, January-February 1996.

Received June 17, 1994, and revised paper Institute publication procedures accepted July 1, 1995. American Concrete Institute publication rights reserved. This paper is part of the *Journal of Bridge Engineering*, Vol. 1, No. 1, January-February, 1996. ©ASCE, ISSN 1080-6868/96/0001-0016-0024. Technical Paper 93-S5. Discussion will be published in the November-December 1996 *ACI Structural Journal* if received by July 1, 1996.



Michael P. Collins, F.A.C.I., is Bahen-Jacobson Professor of Civil Engineering at the University of Toronto, Toronto, Canada. He is a member of ACI Committee 458 Concrete Girders, the ACI Technical Activities Committee, subcommittee on High-Performance Concrete, and joint ACI-ASCE Committee 445 Shear and Torsion. He is a member of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

Dennis Mitchell, F.A.C.I., is a professor in the Department of Civil Engineering and Applied Mechanics at McGill University. He is a member of ACI Committee 408 Bond and Development of Reinforcement and ACI-ASCE Committee 445 Shear and Torsion. He is Chairman of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

ACI member Perry Adchar is an associate professor in the Department of Civil Engineering at the University of British Columbia, Vancouver, Canada. He is Secretary of ACI Committee 441 Earthquake Resistant Concrete Bridges, and joint ACI-ASCE committee on the design of reinforced concrete.

ACI member Frank J. Vecchio is a professor in the Department of Civil Engineering at the University of Toronto. He is a member of ACI Committees 441, Reinforced Concrete Columns, and 447, Finite Element Analysis, and of the CLB Committee on Constitutive Modeling.

The average principal tensile strain  $\epsilon_1$  in the cracked concrete is used as a "damage indicator" that controls the average tensile stress  $f_1$  in the cracked concrete, the ability of the diagonally cracked concrete to carry compressive stresses  $f_2$ , and the shear stress  $v_c$  that can be transmitted across a crack.

The principal compressive stress in the concrete  $f_2$  is related to both the principal compressive strain  $\epsilon_2$  and the principal tensile strain  $\epsilon_1$  in the following manner [see Fig. 5(a)]

$$f_2 = f_{2max} \left[ \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1'} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

where

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_1) \leq f_c' \quad (2)$$

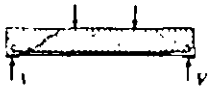
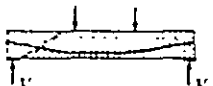
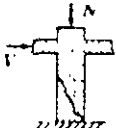

ACI Method		General Method
$V_n = V_c + V_s$		$V_n = V_c + V_s + V_p$
<b>Non-Prestressed Beams</b> 	$V_c = (1.9 \sqrt{f_c'} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$ but $\frac{V_u d}{M_u} \leq 1.0$ $V_c \leq 3.5 \sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = 2 \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s}$ $V_s \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	$V_c = \beta \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y}{s} d_v \cot \theta$ where $\beta$ and $\theta$ are functions of the strain, $\epsilon_1$ , shear stress, $v$ , and crack spacing, $s_c$ where $v = \frac{V_n - V_p}{b_w d}$ and $s_c = \frac{M_u / d_v + 0.5(N_u + V_u \cot \theta) - A_{ps} f_{ps}}{F_s A_s + F_p A_p}$
<b>Prestressed Beams</b> 	$V_c = (0.6 \sqrt{f_c'} + 700 \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$ but $2 \sqrt{f_c'} b_w d \leq V_c \leq 5 \sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = V_{ci} = 0.6 \sqrt{f_c'} b_w d + V_d + \frac{V_s M_{cr}}{M_{max}}$ but $V_{ci} \geq 1.7 \sqrt{f_c'} b_w d$ and $V_c \leq V_{cw} = (3.5 \sqrt{f_c'} + 0.3 f_{pc}) b_w d + V_p$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Axial Compression and Shear</b> 	$V_c = \left( 1.9 \sqrt{f_c'} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u - N_u \frac{(4h \cdot d)}{8}} \right) b_w d$ $V_c \leq 3.5 \sqrt{f_c'} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500 A_g}}$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} < 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Axial Tension and Shear</b> 	$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{500 A_g} \right) \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8 \sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Detailing Rules</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reinforcement shall extend beyond the point at which it is no longer required to resist flexure for a distance equal to the effective depth of the member or <math>12d_s</math>, which is greater.</li> <li>Flexural reinforcement shall not be terminated in a tension zone unless                             <ul style="list-style-type: none"> <li>shear at cutoff <math>\leq 2/3</math> shear permitted, or</li> <li>stirrup area, <math>A_{sv}</math>, in excess of that required for shear and torsion, is provided                                     <ul style="list-style-type: none"> <li><math>A_{sv} \geq 60 b_w s f_y</math>, ... <math>s \leq d/8\beta_s</math>, or</li> <li>for #11 bars or smaller, shear at the cutoff <math>\leq 3/4</math> shear permitted and continuing reinforcement provides double the area required for flexure at the cutoff</li> </ul> </li> </ul> </li> <li>At simple supports and points of inflection, the diameter of the positive moment tension reinforcement shall be limited so that                             <math display="block">l_d \leq \frac{M_u}{V_u} + l_d</math> </li> </ul>		<b>Detailing Rules</b> Longitudinal steel must be detailed so that $A_s f_y + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi d_v} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p \right) \cot \theta$

Fig. 1 -- Comparison of ACI and proposed shear design approaches

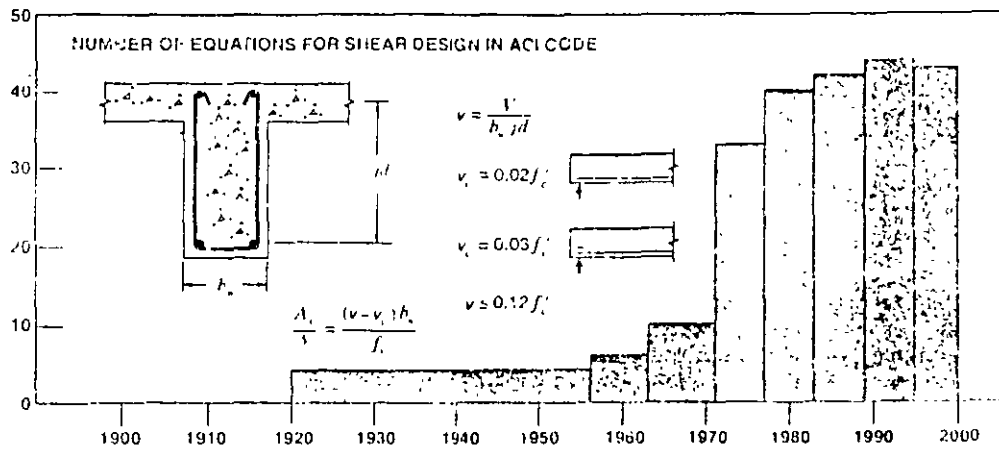


Fig. 2—Number of ACI shear design equations

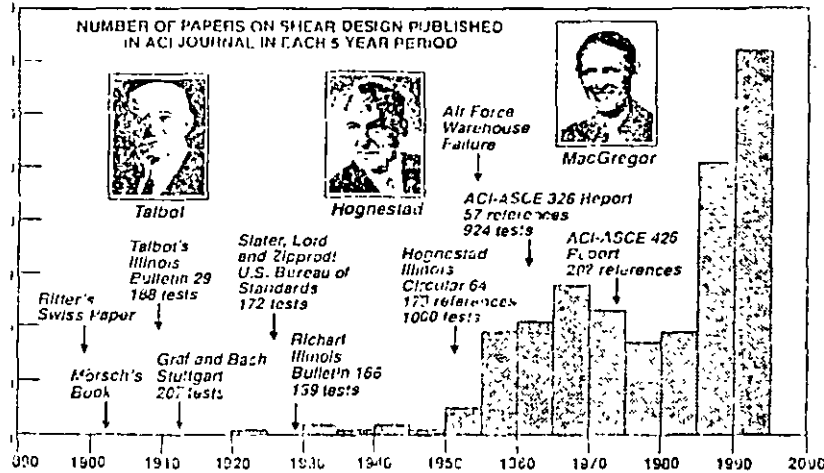


Fig. 3—Research into shear design methods

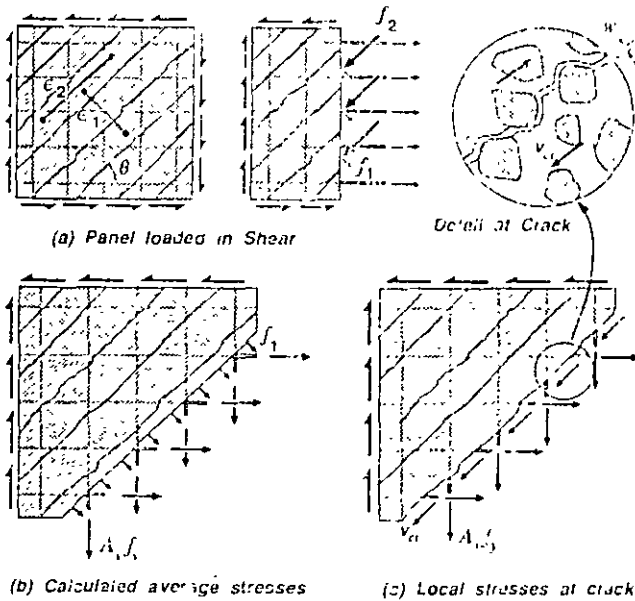


Fig. 4—Reinforced concrete panels subjected to shear

From Eq. (1), the principal compressive strain for the loading in of the stress-strain relationship is

$$\epsilon_2 = -0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - f_2 / f_{2max}} \right) \quad (3)$$

where  $\epsilon_1'$  has been taken as -0.002.

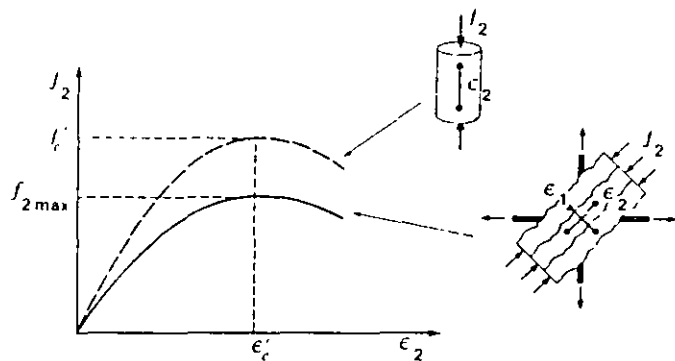
After cracking, the principal tensile stress in the concrete  $f_t$  is related to the principal tensile strain  $\epsilon_1$  as follows [see Fig. 5(b)]

$$f_t = \frac{f_c}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \quad (4)$$

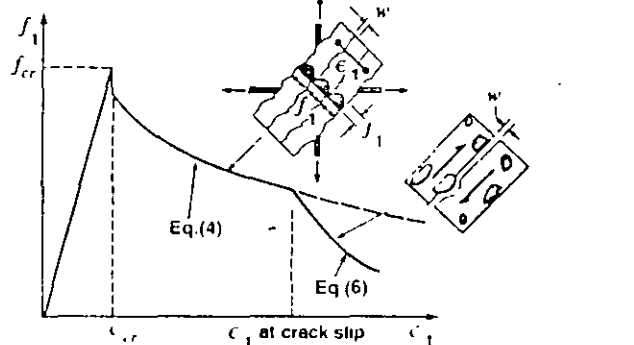
where the cracking stress  $f_c$  can be taken as  $4 \sqrt{f'_c}$  psi ( $0.33 \sqrt{f'_c}$  MPa). For large values of  $f_t$ , the cracks will become wide and the magnitude of  $f_t$  will be controlled by the yielding of the reinforcement at the crack, and by the ability to transmit shear stresses  $v_c$  across the cracked interface [see Fig. 5(b)]. The shear stress that can be transmitted across the crack is a function of the crack width  $w$  and the aggregate size  $c$  [see Fig. 4(c)], as given by

$$v_{cr} = \frac{2.16 \sqrt{f'_c}}{0.3 + \frac{24w}{a + 0.63}} \quad \text{psi and in.} \quad (5)$$

For MPa and mm units, replace the 2.16 by 0.18 and the 0.63 by 16.



(a) Softening of compressive stress-strain curve due to transverse tensile strain



(b) Average tensile stresses in cracked concrete as a function of  $\epsilon_1$   
Fig 5—Stress-strain relationships for cracked concrete

If the stirrups have reached their yield stress and the crack begins to slip, the average tensile stress in the concrete  $f_1$  is limited to

$$f_1 = v_{cr} \tan \theta \quad (6)$$

The previous stress-strain relationships, together with equilibrium and compatibility, can be used to predict the load-deformation response of reinforced concrete beams subjected to shear.<sup>11</sup> In addition, these relationships can be used as the basis for nonlinear finite element formulations.<sup>12,13</sup>

### DESIGN OF STIRRUPS FOR SHEAR

In applying the modified compression field theory to the design of beams, it is appropriate to make a number of simplifying assumptions. As illustrated in Fig. 6, the shear stresses are assumed to be uniform over the effective shear area  $b_v d_v$ . The highest longitudinal strain  $\epsilon_1$  occurring within the web is used to calculate the principal tensile strain  $\epsilon_t$ . For design,  $\epsilon_t$  can be approximated as the strain in the flexural tension reinforcement. The determination of  $\epsilon_t$  for a nonprestressed beam is illustrated in Fig. 7. For a prestressed concrete member, the concrete surrounding the reinforcement will remain in compression until the applied tension exceeds the prestress force  $A_p f_{pu}$ , where  $f_{pu}$  is the stress in the tendon when the surrounding concrete is at zero stress. In lieu of more accurate calculations,  $f_{pu}$  can be taken as 1.10 times  $f_{se}$ .

Hence, for design

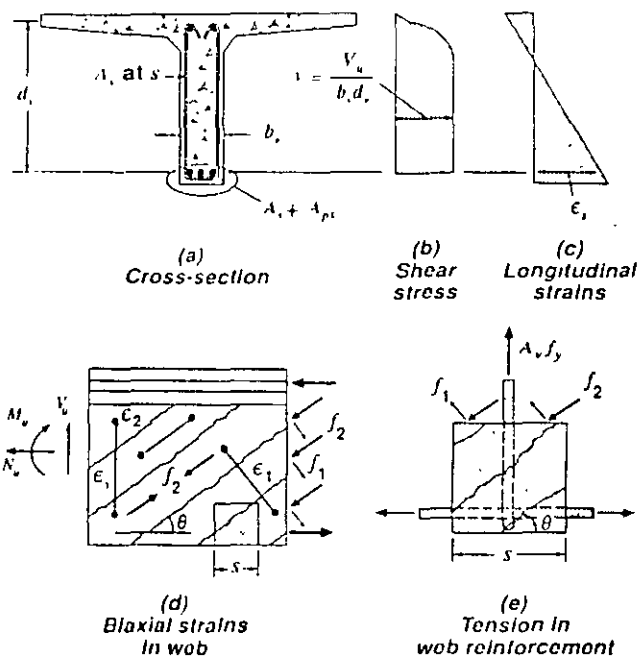


Fig 6—Beam subjected to shear, moment, and axial load

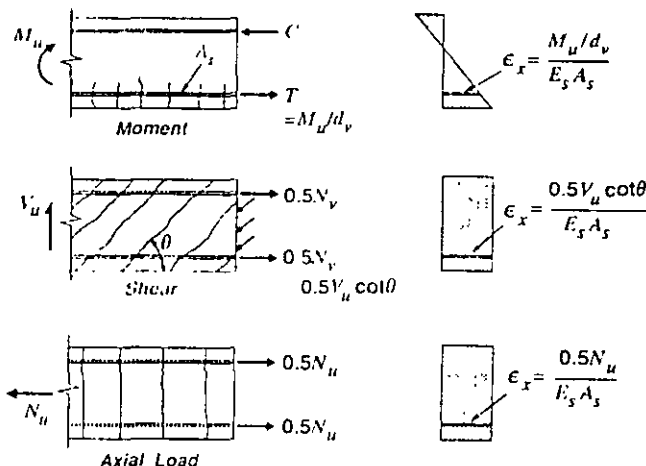


Fig. 7—Determination of strain  $\epsilon_x$  for nonprestressed beam

$$\epsilon_x = \frac{(M_u/d_v) + 0.5N_u + 0.5V_u \cot \theta - A_p f_{pu}}{E_s A_s + E_p A_p} \geq 0 \quad (7)$$

ability, the principal tensile strain  $\epsilon_t$  can be related to the longitudinal strain  $\epsilon_1$ , the direction of the principal compressive stress  $\theta$ , and the magnitude of the principal compressive strain  $\epsilon_2$  in the following manner

$$\epsilon_t = \epsilon_1 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cot^2 \theta \quad (8)$$

Hence, as the longitudinal strain  $\epsilon_1$  becomes larger and the inclination  $\theta$  of the principal compressive stresses becomes smaller, the "damage indicator"  $\epsilon_t$  becomes larger. The nominal shear strength  $V_u$  of a member can be expressed as

$$V_u = V_c + V_s + V_p = f_1 b_v d_v \cot \theta + \frac{A_v f_y}{s} d_v \cot \theta + V_p \quad \text{□ □}$$

$$= \beta \sqrt{f'_c} b_v d_v + \frac{A_v f_s}{s} d_v \cot \theta + V_p \quad (9)$$

From the expressions for the average tensile stress in the cracked concrete [Eq. (4) and (6)], the tensile stress factor  $\beta$  can be determined as

$$\beta = \frac{4 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{2.16}{0.3 + \frac{24w}{a + 0.63}} \text{ psi and in.} \quad (10)$$

For MPa and mm units, replace the 4 by 0.33, the 2.16 by 0.18, and the 0.63 by 16. The crack width  $w$  is taken as the crack spacing times the principal tensile strain  $\epsilon_1$ .

It can be seen from the previous expressions for  $\beta$  that as the tensile straining of the concrete increases (i.e.,  $\epsilon_1$  increases), the shear that can be resisted by tensile stresses in the concrete  $V_c$  decreases. The value of the principal tensile strain  $\epsilon_1$  will depend on the magnitudes of the longitudinal strain  $\epsilon_x$ , the principal compressive strain  $\epsilon_2$ , and the inclination  $\theta$  of the principal stresses [see Eq. (8)]. Strain  $\epsilon_2$  can be found from Eq. (3). In using this equation, the principal compressive stress  $f_2$  can be conservatively taken as

$$f_2 = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

$$v = \frac{V_u - V_p}{b_v d_v} \quad (12)$$

From Eq. (3), (8), and (11),  $\epsilon_1$  can be expressed as

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[ \epsilon_x + 0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v}{f'_c} (\tan \theta + \cot \theta) (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot \theta \quad (13)$$

**Table 1—Values of  $\theta$  and  $\beta$  for members with web reinforcement**

$\frac{v}{f'_c}$		Longitudinal strain $\epsilon_x \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 0.050$	$\theta$ deg	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	$\beta$	4.88	3.49	2.51	2.23	1.95	1.72
$\leq 0.075$	$\theta$ deg	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	$\beta$	4.88	3.01	2.47	2.16	1.90	1.65
$\leq 0.100$	$\theta$ deg	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	$\beta$	3.26	2.54	2.41	2.09	1.72	1.45
$\leq 0.150$	$\theta$ deg	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	$\beta$	2.55	2.45	2.28	1.93	1.50	1.24
$\leq 0.200$	$\theta$ deg	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	$\beta$	2.45	2.33	2.10	1.58	1.21	1.00
$\leq 0.250$	$\theta$ deg	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	$\beta$	2.30	2.01	1.64	1.40	1.30	1.25

Note: For  $\beta$  values in MPa units divide given values by 12.

To use Eq. (9) to determine the required stirrups, the designer needs to determine appropriate values of  $\theta$  and  $\beta$ . For this purpose, Table 1 gives suitable values of  $\theta$  and  $\beta$  as functions of the longitudinal strain  $\epsilon_x$  and the shear stress level  $v/f'_c$ . While the values in Table 1 were calculated assuming a diagonal crack spacing of 12 in. (305 mm) and a maximum aggregate size of 3/4 in. (19 mm), it is believed that these values are appropriate for the full range of beams containing stirrups.

The  $\theta$  values given in Table 1 have been chosen to insure that the stirrup strain  $\epsilon_s$  is at least equal to 0.002 and to insure that, for highly stressed members, the principal compressive stress  $f_2$  in the concrete does not exceed the crushing strength  $f_{2max}$ . Within the range of values of  $\theta$  that satisfy these requirements, the values given in Table 1 will result in close to the smallest amount of shear reinforcement.

While the values in Table 1 can be applied to a range of values of  $\epsilon_x$  and  $v/f'_c$  (e.g.,  $\theta = 36$  deg and  $\beta = 2.09$  can be used provided that  $\epsilon_x$  is not greater than  $1 \times 10^{-3}$  and  $v/f'_c$  is not greater than 0.10), they were calculated for the upper limits of the range. Linear interpolation between the values given in Table 1 could be used, but it is usually not worth the effort.

At a particular section of a member subjected to  $V_u$ ,  $M_u$ , and  $N_u$ , the required shear strength is determined from

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

where the strength reduction factor  $\phi$  can be taken as 0.85.

The amount of stirrups required at the section can then be found from Eq. (9) as

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c - V_p \quad (15)$$

While this calculation is performed for a particular section, a shear failure caused by yielding of the stirrups involves yielding the reinforcement over a length of beam about  $d_v \cot \theta$  long. Hence, the calculations for one section can be taken as representing a length of beam,  $d_v \cot \theta$  long, with the calculated section being in the middle of this length. Thus, near a support, the first section to be checked is the section  $0.5d_v \cot \theta$  from the face of the support. Near concentrated loads, sections closer than  $0.5d_v \cot \theta$  to the load need not be checked. As a simplification, the term  $0.5d_v \cot \theta$  may be taken as  $d_v$ . Since 1963, the ACI Code has required that at least a minimum area of stirrups be provided whenever  $V_u$  exceeds one-half of the shear strength provided by the concrete. For the design method presented in this paper, it is recommended that a minimum area of stirrups be provided if

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

where the minimum requirement is

$$\frac{A_v f_s}{b_v s} \geq 0.72 \sqrt{f'_c} \text{ psi}$$

For MPA units replace the 0.72 by 0.06.

### DESIGN OF LONGITUDINAL REINFORCEMENT

Fig. 8 illustrates the influence of shear on the tensile forces in the longitudinal reinforcement. While the moment is zero at the simple support B, there still needs to be considerable tension in the longitudinal reinforcement near the support. The required tension in the bottom reinforcement at Support B can be determined from the free body diagram in Fig. 8(b) by taking moments about Point C and assuming that the aggregate interlock force in the crack that contributes to  $V_c$  has a negligible moment about Point C. For this nonprestressed beam, the tensile force required at the inner edge of the bearing area is

$$T = \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c \right) \cot \theta \quad (17)$$

Eq. (17) gives the additional tension due to shear. Hence, at a section subjected to a shear  $V_u$ , a moment  $M_u$ , and an axial force  $N_u$ , the longitudinal reinforcement on the flexural tension side of the member must satisfy

$$A_s f_s + A_p f_p \geq \frac{M_u}{\phi d_c} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c - V_p \right) \cot \theta \quad (18)$$

At maximum moment locations, the shear force changes sign and hence, the inclination of the diagonal compressive stresses changes. At direct supports and point loads, this change of inclination is associated with a fan-shaped pattern of compressive stresses radiating from the point load or the direct support, as shown in Fig. 8(a). This fanning of the diagonal stresses reduces the tension in the longitudinal reinforcement caused by the shear (i.e., angle  $\theta$  becomes steeper). Due to this effect, tension in the reinforcement does not exceed that due to the maximum moment alone.

### MEMBERS WITHOUT WEB REINFORCEMENT

In evaluating the  $\beta$  factors given in Table 1, it was assumed that the diagonal cracks in webs containing stirrups would be spaced about 12 in. (305 mm) apart. For members not containing web reinforcement, this assumption may be unconservative; hence, it is inappropriate to use the  $\beta$  factors in Table 1 to evaluate the shear strength of members without web reinforcement.

For members without stirrups, the ability of the cracked concrete to transmit shear is primarily governed by the width of the diagonal cracks [see Eq. (10)]. The crack width can be taken as the principal tensile strain  $\epsilon_t$  multiplied by the crack spacing. Based on a given value of  $\epsilon_t$ , the shear strength will be a function of the crack spacing with more widely spaced cracks resulting in lower shear capacities.

Fig. 9 illustrates the assumptions made in this design method regarding the crack spacing. For members without stirrups, the diagonal cracks will become more widely spaced as  $\theta$  approaches zero. The crack spacing when  $\theta = 90^\circ$  is called  $s_{cr}$  and this spacing is primarily a function of the circumferential distance between reinforcing bars or between reinforcing bars and the development length zone.

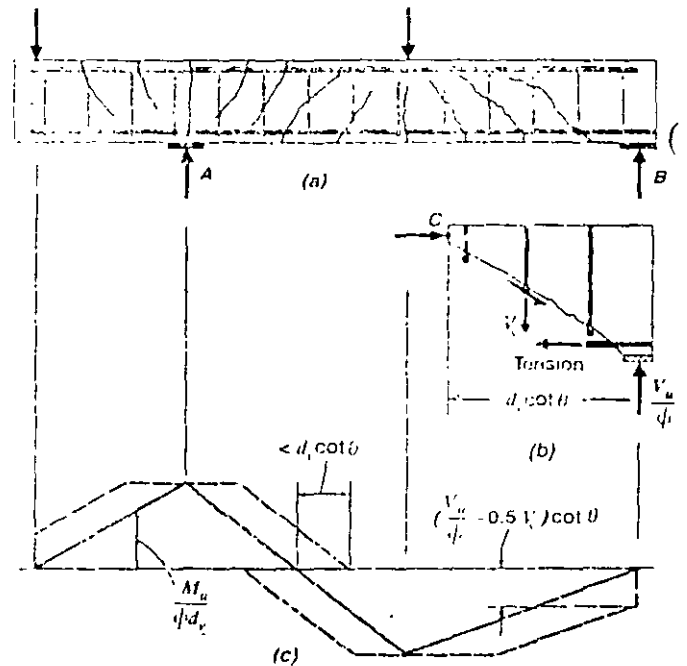


Fig. 8—Influence of shear on forces in longitudinal reinforcement

The factor  $\beta$ , which is the indicator of the ability of the cracked concrete to transmit shear, is a function of  $\theta$ ,  $\epsilon_t$ , and  $s_{cr}$ . For given values of  $\epsilon_t$  and  $s_{cr}$  and a chosen value of  $\theta$ , the factor  $\beta$  can be calculated from Eq. (9), (10), (12), and (13). Table 2 lists the values of  $\theta$  that will result in the highest  $\beta$  values for cracked concrete. The  $\beta$  values in Table 2 were derived assuming that the maximum aggregate size  $a$  was 3/4 in. (19 mm). However, the tabulated values can be used for other aggregate sizes by using an equivalent spacing parameter  $s_{cr}$  [see Eq. (10)] such that

$$s_{cr} = s_{cr} \frac{1.38}{a + 0.63} \text{ in.} \quad (19)$$

For mm units, replace the 1.38 by 35 and the 0.63 by 16. For members without well-distributed crack control reinforcement, the crack spacing parameter  $s_{cr}$  will increase as the member size increases. It is apparent from Table 2 that an increase in  $s_{cr}$  results in a decrease in shear capacity.

Convincing evidence of the reduction in shear stress capacity that occurs as members become larger was provided by an extensive experimental program conducted in Japan by Shioya, et al.<sup>14,15</sup> In the program, lightly reinforced beams without stirrups and having effective depths  $d$  ranging from 4 to 118 in. (100 to 3000 mm) were uniformly loaded until failure. Fig. 10 compares the observed failure shear stresses for one series of these beams with the failure shears predicted by both the 1995 ACI Code expressions and the general method. It can be seen that the largest beam in this series failed at a shear stress less than one-half of the failure shear predicted by the 1995 ACI Code equations.

sion where the ACI equations can be very unconservative. On the other hand, for uniformly loaded members, members with inclined prestressing tendons, and members subjected to high axial tension, the ACI equations can be extremely conservative.

### CONCLUSIONS

It is believed that the method presented in this paper is "integrated," "simplified," and gives "a physical significance" to the parameters being calculated. For example, the shear carried by tensile stresses in the concrete  $V_t$  is made a function of the longitudinal straining in the web of the member  $\epsilon_t$ . As  $\epsilon_t$  increases,  $V_t$  decreases. Increasing the magnitude of the moment or applying axial tension increases  $\epsilon_t$  and hence, decreases  $V_t$ . Applying axial compression or prestress or increasing the area of longitudinal reinforcement decreases  $\epsilon_t$  and hence, increases  $V_t$ .

A key feature of the new procedures is that they explicitly consider the influence of shear upon the longitudinal reinforcement. It is believed that if engineers understand that shear causes tension in the longitudinal reinforcement, they will avoid some of the more serious detailing errors that are sometimes made in current practice.

### ACKNOWLEDGMENTS

The development of the modified compression field theory was made possible by a series of grants from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and by support from the Networks of Centers of Excellence Program funded by the Minister of State, Science, and Technology, Canada. The authors would like to express their gratitude to these organizations for their support. The challenge of developing practical and comprehensive shear design provisions for the National Cooperative Highway Research Program's project "Development of Bridge Specifications" was the catalyst for the formulation of these proposals. The authors are also indebted to Dr. Khaldoun N. Rahal for his valuable assistance in performing the many calculations required to prepare Tables 1, 2, and 3.

### NOTATION

$A_{ps}$	= area of prestressed longitudinal reinforcement on flexural tension side of member
$A_s$	= area of longitudinal reinforcing bars on flexural tension side of member
$A_v$	= area of shear reinforcement within distance $s$
$a$	= maximum aggregate size
$b_v$	= effective web width taken as minimum web width within effective shear depth $d_v$
$d$	= distance from extreme compression fiber to centroid of longitudinal tension reinforcement
$d_v$	= effective shear depth taken as flexural lever arm which need not be taken less than $0.9d$ for prestressed members, $d_v$ need not be taken less than $0.8h$ in determining $d_v$
$E_p$	= modulus of elasticity of prestressing tendons
$E_s$	= modulus of elasticity of reinforcing bars
$f_c'$	= specified compressive strength of concrete
$f_{cr}$	= cracking strength of concrete
$f_{ps}$	= stress in prestressed tendon when surrounding concrete is at zero stress
$f_{pe}$	= effective stress in prestressed tendon after all losses
$f_t$	= residual tensile stress in cracked concrete
$f_2$	= principal compressive stress in concrete
$f_{2max}$	= crushing strength of diagonally cracked concrete
$h$	= overall height of member
$M_u$	= factored moment taken as positive
$N_u$	= factored axial load taken as positive for tension, negative for compression
$s$	= spacing of shear reinforcement
$\lambda$	= crack spacing parameter for members without stirrups
$\lambda_a$	= equivalent value of $\lambda$ for beams when aggregate size is not $1/4$ in
$V_t$	= shear strength provided by tensile stresses in cracked concrete

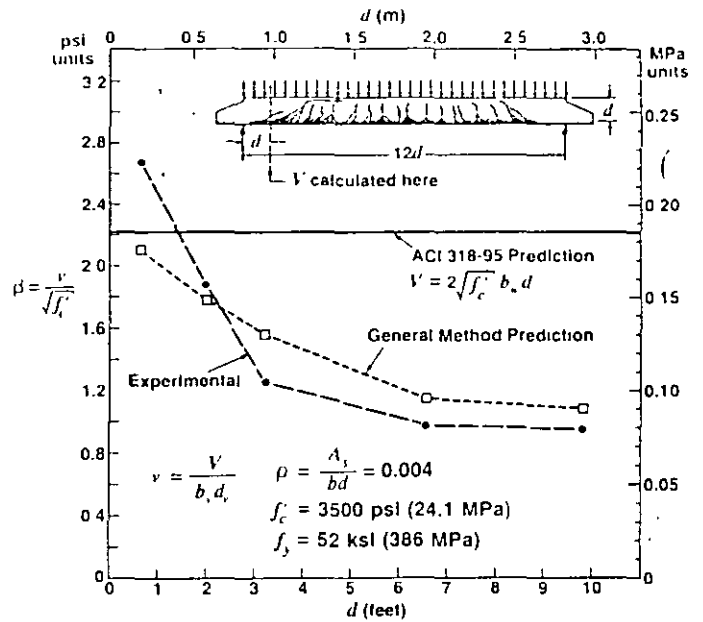


Fig. 10—Influence of member size and maximum aggregate size on shear stresses at failure

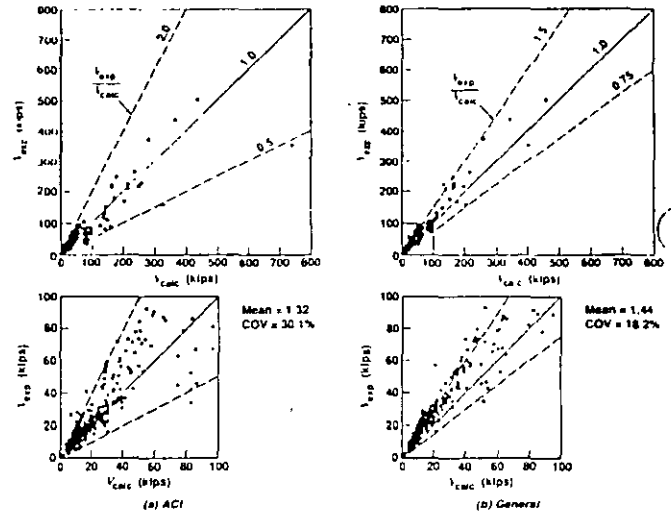


Fig. 11—Correlation of experimental and predicted failure shears for 528 tests

$V_n$	= nominal shear strength
$V_p$	= vertical component of prestressing
$V_s$	= shear strength provided by stirrups
$V_u$	= factored shear force taken as positive
$\beta$	= tensile stress factor indicating ability of cracked concrete to transmit shear
$\epsilon_1$	= principal tensile strain in cracked concrete
$\epsilon_2$	= principal compressive strain in cracked concrete
$\epsilon_c'$	= strain in concrete when $f_c$ reaches $f_c'$
$\theta$	= angle of inclination of principal compressive stress in cracked concrete with respect to longitudinal axis of member
$\phi$	= strength reduction factor

### REFERENCES

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary ACI 318 R-95," American Concrete Institute, Detroit, 1995, 369 pp.
2. ACI/ASCE Committee 426, "Shear Strength of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V. 99, No. ST6, June 1973, pp. 1091-1187.
3. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced

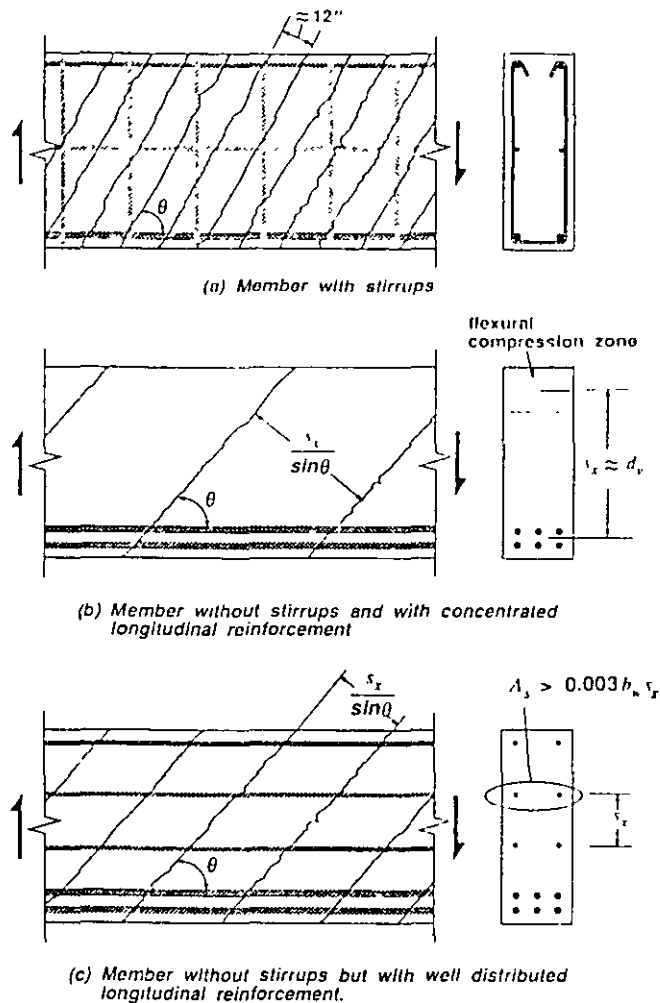


Fig. 9—Influence of reinforcement on spacing of diagonal cracks

Table 2—Values of  $\theta$  and  $\beta$  for members without web reinforcement

$s_x$		Longitudinal strain $\epsilon_s \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 5$ in	$\theta$ deg	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0 deg	38.0 deg
	$\beta$	4.94	3.78	3.19	2.56	2.19	1.93
$\leq 10$ in	$\theta$ deg	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0 deg
	$\beta$	4.65	3.45	2.83	2.19	1.87	1.65
$\leq 15$ in	$\theta$ deg	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0 deg
	$\beta$	4.47	3.21	2.59	1.98	1.65	1.45
$\leq 25$ in	$\theta$ deg	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0 deg
	$\beta$	4.19	2.85	2.26	1.69	1.40	1.18
$\leq 50$ in	$\theta$ deg	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0 deg
	$\beta$	3.83	2.39	1.82	1.27	1.00	0.83
$\leq 100$ in	$\theta$ deg	42.0	55.0	62.0	69.0	72.0	75.0 deg
	$\beta$	3.47	1.88	1.35	0.87	0.65	0.52

Note: For  $\beta$  values in MPa units divide given values by 12

## PROPOSED SHEAR DESIGN PROCEDURE

The general equations of the modified compression field theory, which are intended to account for the complex behavior of diagonally cracked concrete, are more suited for computer solutions (e.g., see program RESPONSE) than for hand calculations. With the  $\theta$  and  $\beta$  tables, the method becomes simple enough to solve by hand. For design, the steps are as follows:

Step 1—At the design section, calculate the shear stress  $v$  from Eq. (12).

Step 2—Calculate the longitudinal strain  $\epsilon_s$  from Eq. (7).

Step 3—For members with web reinforcement, choose the values of  $\theta$  and  $\beta$  from Table 1. For members without web reinforcement, choose the values of  $\theta$  and  $\beta$  from Table 2.

Step 4—For members without web reinforcement, use Eq. (9) to determine the nominal strength. For members with web reinforcement, use Eq. (9) to determine the required amount of web reinforcement.

Step 5—Use Eq. (18) to check the capacity of the longitudinal reinforcement.

## EXPERIMENTAL VERIFICATION

The ACI Code shear design expressions were obtained by first categorizing beams and columns into the following groups: nonprestressed members subjected to shear and flexure only; nonprestressed members subjected to axial compression; nonprestressed members subjected to axial tension; and prestressed members.

For each of the previous groups, an empirical equation was developed to provide a good fit to the available experimental data. Most of the equations were derived in the 1962 ACI/ASCE Shear Committee report<sup>16</sup> using the data available at that time.

In contrast, the shear design method in this paper was derived from the modified compression field theory that is based on equilibrium, compatibility, and the stress-strain characteristics of cracked reinforced concrete. In this fundamental approach, no fitting factors were employed to match the predictions to available beam tests. Thus, it is of considerable interest to compare the accuracy of the equations resulting from this new method with the accuracy of the traditional ACI equations.

In Fig. 11 the experimentally determined failure shears from 528 tests were compared to the failure shears predicted by both the ACI equations and the method presented in this paper. These tests encompass a wide range of cross-sectional shapes, sizes, material properties, and types of loading, as summarized in Table 3. The specimens selected were those that failed primarily due to high shear stresses. Specimens with short shear spans were excluded because such members should be designed using either strut-and-tie models<sup>12,17,18</sup> or the ACI deep-beam equations,<sup>1</sup> rather than the sectional design approaches described in this paper.

As seen in Fig. 11, the proposed general method predicts the failure shears more accurately than the equations of the current ACI Code. Table 3 indicates situations where the ACI shear design method can be very inaccurate. These situations include large, lightly reinforced members and members subjected to high axial compression.

Table 3.—Experimental verification

Reference	Date	Number and specimen type	Loading	Depth, in	Concrete, psi	Strutups $\frac{A_s f_y}{b_w s}$ psi	Experiment/predicted				
							ACI		General		
							Mean	Coefficient of variation, percent	Mean	Coefficient of variation, percent	
Kani <sup>17</sup>	1979	68 rectangular beams	2 point loads on simple span	6 to 35	2230 to 5320	0	1.23	14.9	1.35	8.0	1
Kani <sup>19</sup>	1979	95 T-beams	2 point loads on simple span	12	2510 to 3550	0	1.60	11.5	1.63	10.1	2
Shiroya <sup>15</sup>	1989	13 rectangular beams	Uniformly distributed load on simple span	5 to 124	2860 to 4130	0	0.86	42.9	0.98	25.1	3
Gupta <sup>20</sup>	1993	10 rectangular beams	End loads applying shear and compression	12	8700 to 9120	0 to 170	0.85	27.3	1.13	16.8	4
Adebar and Collins <sup>21</sup>	1996	7 rectangular columns	End loads applying shear and tension	12	6700 to 8500	0	2.75	51.4	0.90	12.8	5
Gregor and Collins <sup>22</sup>	1993	6 prestressed bridge girders	Uniformly distributed load on continuous span	30	6500 to 8400 psi	370 to 590	1.06	17.5	1.37	12.7	6
Collins and Vegh <sup>23</sup>	1993	14 rectangular beams	Point loads on continuous span	11 to 36	7250 to 13,500	0 to 120	0.84	18.2	1.07	15.9	7
Griezic, Cook, and Mitchell <sup>24</sup>	1993	4 T-beams	Uniformly distributed load on simple span	16	5800	225 to 350	1.34	12.2	1.31	12.6	8
Haddadin, Hong, and Mattock <sup>25</sup>	1971	59 T-beams	Point loads on beams with tension or compression	13.5	1950 to 6500	0 to 700	1.61	32.3	1.35	18.7	9
Elzanaty, Nilson, and Slate <sup>26</sup>	1986	33 prestressed I-beams	2 point loads on simple span	14 and 18	6000 to 11,400	0 to 700	1.07	11.6	1.35	9.5	10
Pasley, Gogoi, Darwin, and McCabe <sup>27</sup>	1990	13 T-beams	Point loads on continuous span	18	4500	0 to 82	0.99	12.6	1.27	7.0	11
Mattock <sup>28</sup>	1969	31 rectangular beams	Point loads on beams with tension or compression	12	2200 to 8000	0	1.56	24.7	1.35	11.0	12
Bennett and Balasooriya <sup>29</sup>	1971	20 prestressed T-beams	2 point loads on simple span	10 and 18	4400 to 6460	630 to 1900	1.71	19.4	1.46	18.2	13
Bennett and Debarkey <sup>29</sup>	1974	22 prestressed I-beams	Point load on simple span	13	6000 to 10,500	103 to 5600	1.15	29.9	1.54	10.9	14
Moody, Viest, Elstner, and Hognestad <sup>31</sup>	1954	12 rectangular beams	Point load on simple span	12	880 to 4600	0	1.27	14.2	1.27	13.5	15
MacGregor <sup>32</sup>	1960	33 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2400 to 7000	0 to 370	1.09	25.8	1.54	22.5	16
Oleson, Sozen, and Siess <sup>33</sup>	1967	27 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2450 to 6700	0 to 350	1.06	18.8	1.59	15.3	17
Roller and Russell <sup>31</sup>	1990	10 rectangular beams	Point load on simple span	25 to 34	10,500 to 18,170	0 to 1176	1.05	20.0	1.19	13.5	18
Shahawy, Robinson, and Batchelor <sup>34</sup>	1993	39 full-size prestressed bridge girders	Point load on simple span	44	6000	165 to 1670	1.09	19.5	1.13	15.8	19
Yoon, Cook, and Mitchell <sup>36</sup>	1996	12 rectangular beams	Point load on simple span	30	5270 to 12,615	0 to 145	1.14	13.8	1.07	10.3	20
		528 beams				Average	1.32	33.7	1.39	19.7	

<sup>17</sup> Kani, C. N., American Concrete Institute, Detroit, 1963, 144 pp.  
<sup>19</sup> Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 pp.  
<sup>20</sup> S. Elstner, R. C. and Hognestad, E., "Laboratory Investigation of Rigid Frame Failure," ACI JOURNAL, Proceedings V. 53, No. 1, Jan-

1957, pp. 637-668.  
<sup>21</sup> Adebar, S. J., and Collins, M. P., "Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," ACI Structural Journal, V. 83, No. 2, Mar-Apr 1986, pp. 219-231.  
<sup>22</sup> Collins, M. P., and Mitchell, D., Prestressed Concrete Structures,



Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991, 766 pp

8. MTO, OHBDC Committee, *Ontario Highway Bridge Design Code*, 3rd Edition, Ontario Ministry of Transportation, Downsview, 1991, 370 pp

9. CSA Committee A23.3, "Design of Concrete Structures: Structures (Design) - A National Standard of Canada," Canadian Standards Association, Rexdale, Dec. 1994, 199 pp

10. "AASHTO LRFD Bridge Design Specifications and Commentary," First Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1994, 1091 pp

11. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory," *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 3, May-June 1988, pp 258-268

12. Cook, W. D., and Mitchell, D., "Studies of Disturbed Regions near Discontinuities in Reinforced Concrete Members," *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 2, Mar-Apr. 1988, pp. 206-216.

13. Vecchio, F. J., "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes," *ACI Structural Journal*, V. 86, No. 1, Jan.-Feb 1989, pp 26-35

14. Shioya, T.; Iguro, M.; Nojiri, Y.; Akiyama, H.; and Okada, T., "Shear Strength of Large Reinforced Concrete Beams," *Fracture Mechanics: Application to Concrete*, SP-118, American Concrete Institute, Detroit, 1989, 309 pp

15. Shioya, T., "Shear Properties of Large Reinforced Concrete Member," *Special Report of Institute of Technology, Shimizu Corporation*, No 25 Feb. 1989, 198 pp

16. ACI-ASCE Committee 326, "Shear and Diagonal Tension," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 59, Jan., Feb., and Mar. 1962, pp. 1-30, 277-344, and 352-396

17. Collins, M. P., and Mitchell, D., "Rational Approach to Shear Design—The 1984 Canadian Code Provisions," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 6, Nov.-Dec. 1986, pp 925-933

18. Schlaich, J.; Schafer, K.; and Jennewein, M., "Towards a Consistent Design of Reinforced Concrete Structures," *PCI Journal*, V. 32, No. 3, May-June 1987, pp 74-150.

19. Kani, M. W., Huggins, M. W., and Wittkopp, R. R., *Kani on Shear in Reinforced Concrete*, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, 1979, 225 pp.

20. Gupta, P., and Collins, M. P., "Behavior of Reinforced Concrete Members Subjected to Shear and Compression," MASC thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1993

21. Adebare, P., and Collins, M. P., "Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement," *Canadian Journal of Civil Engineering*, V. 23, No. 1, Feb. 1996, pp. 30-41.

22. Gregori, T., and Collins, M. P., "Tests of Large Partially Prestressed

Concrete Girders," *ACI Structural Journal* (submitted for publication)

23. Collins, M. P.; Mitchell, D., and MacGregor, J. G., "Structural Design Considerations for High-Strength Concrete," *Concrete International* May 1993, pp 27-34

24. Griezic, A.; Cook, W. D., and Mitchell, D., "Tests to Determine Performance of Deformed Welded Wire Fabric Stirrups," *ACI Structural Journal*, V. 91, No. 2, Mar-Apr. 1994, pp. 211-220

25. Haddadin, M. J., Hong, S. T., and Mattock, A. H., "Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 97, No. ST9, Sept 1971, pp 2277-2297

26. Elzanaty, A. H.; Nilson, A. H., and Slate, F. O., "Shear Capacity of Prestressed Concrete Beams Using High-Strength Concrete," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 3, May-June 1986, pp. 359-368.

27. Pasley, G. P.; Gogoi, S.; Darwin, D.; and McCabe, S. L., "Shear Strength of Continuous Lightly Reinforced T-Beams," *SAI Report No. 26*, University of Kansas, Dec. 1990, 151 pp

28. Mattock, A. H., "Diagonal Tension Cracking in Concrete Beams with Axial Forces," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 95, No. ST9, Sept. 1969, pp 1887-1900.

29. Bennett, E. W., and Balasooriya, B. M. A., "Shear Strength of Prestressed Beams with Thin Webs Failing in Inclined Compression," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 68, No. 3, Mar. 1971, pp 204-212.

30. Bennett, E. W., and Debaiky, S. Y., "High-Strength Steel as Shear Reinforcement in Prestressed Concrete Beams," *Shear in Reinforced Concrete*, SP-42, American Concrete Institute, 1974, pp. 231-248

31. Moody, K. G.; Viest, M.; Elstner, R. C.; and Hognestad, E., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams: Part I—Tests of Simple Beams," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 26, No. 4, Dec. 1954, pp 317-332.

32. MacGregor, J. G., "Strength and Behavior of Prestressed Concrete Beams with Web Reinforcement," PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, 1960, 295 pp.

33. Oleson, S. G.; Sozen, M. A.; and Siess, C. P., "Investigation of Prestressed Reinforced Concrete for Highway Bridges: Part IV—Strength in Shear of Beams with Web Reinforcement," *Bulletin No. 493*, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, 1967.

34. Roller, J. J., and Russell, H. G., "Shear Strength of High-Strength Concrete Beams with Web Reinforcement," *ACI Structural Journal*, V. 87, No. 2, Mar-Apr. 1990, pp. 191-198.

35. Shahawy, M.; Robinson, B.; and Batchelor, B. deV., "Investigation of Shear Strength of Prestressed Concrete AASHTO Type II Girders," Structures Research Center, Florida Dept. of Transportation, Jan. 1993, 182 pp.

36. Yoon, Y. S.; Cook, W. D.; and Mitchell, D., "Minimum Shear Reinforcement in Normal, Medium, and High-Strength Concrete Beams," *ACI Structural Journal* (accepted for publication).

# Un Método General de Diseño Por Cortante

Las especificaciones para diseño por corte del código ACI 318-95 consisten de alrededor de 43 ec. empíricas para diferentes tipos de miembros y de cargas, algunas se ilustran en la fig. 1.

En 1973, el Comité de Cortante ACI-ASCE expresó la esperanza que esas "reglas" o "reglas de diseño para la resistencia a corte" pudieran ser integradas, simplificadas y dadas un significado físico.

Como lo muestran el incremento en el número de ec. para diseño por corte del ACI (fig. 2), el código no ha cumplido con estas metas. Es interesante notar que, antes de 1963 el procedimiento de diseño por corte del ACI fue tan simple que solo se requerían cuatro ecuaciones.

La mayoría de las ec. dadas en la fig. 1 fueron introducidas en las ediciones del código ACI de 1963 y 1971.

Estas ec. fueron desarrolladas en el periodo siguiente a la acumulación

de fallas por cortante hechas por las PCs. AEROS hasta 1955, y dependiendo del concepto tradicional de sumar la contribución del concreto  $V_c$  a la contribución del acero  $V_s$  calculada sobre la base de la ec. de las normas para 45°.

Desde 1971 se ha realizado un intenso esfuerzo de investigación encaminado a perfeccionar los métodos de diseño por cortante (fig. 3). La investigación

muestra que, en general, el ángulo de inclinación de la compresión en el concreto no es a 45° y que las ec. basadas sobre un ángulo ~~relativo~~

variable de significancia proporcionan unas bases más realistas para diseñar por cortante.

Además, los ensayos de prismes de concreto sujetos a cortante puro mejoraron el entendimiento de las características esfuerzo-def. del concreto

agrietado diagonalmente. Estas relaciones esfuerzo-def. hacen posible desarrollar un modelo analítico, llamado la teoría

del campo de compresión, que resultó

capaz de predecir con exactitud la respuesta del concreto reforzado sujeto a cortante.

El objetivo de este artículo es presentar en forma breve un método general de diseño por cortante basado en la teoría modificada del grupo de presión. Este método de diseño, introducido recientemente por Collins y Mitchell, ha sido adoptado por el código de diseño de puente de autopistas en Ontario, el código de la Asociación Canadiense de Diseño de Concreto y las especificaciones ASHTO.

### El método se resume en la Fig. 1. Respuesta a Cortante del Concreto Agrietado.

Los ensayos de paneles de concreto sujetos a cortante puro (Fig. 4) muestran que aun después del agrietamiento, existen esfuerzos de tensión en el concreto y que estos esfuerzos pueden incrementarse en forma significativa la capacidad del concreto reforzado para resistir esfuerzos cortantes.

El concreto reforzado transmite cargas en forma relativamente compleja incluyendo el cierre o la abertura de grietas pre-existentes, la formación de grietas nuevas, la transferencia de cortante en las superficies de las grietas y la variación significativa de los esfuerzos en el refuerzo debido a la adherencia que ocurre simultáneamente con los altos esfuerzos del acero en las secciones agrietadas. El modelo del grupo de compresión modificado intenta capturar las características esenciales de este comportamiento sin considerar todos los detalles. El patrón de agrietamiento se idealiza como una serie de grietas paralelas todas formadas un ángulo  $\theta$  con la dirección longitudinal. En lugar de considerar la variación de esfuerzos compleja en el concreto agrietado, solo se considera el estado de esfuerzo proyectado y el estado de esfuerzo en una grieta (Fig. 4b y 4c). Como estos dos estados de esfuerzo son equivalentes estáticamente, la pérdida de esfuerzos de tensión en el

CONCRETO EN LA GRIETA DEBE SER SUSTITUIDO POR UN INCREMENTO EN LOS ESFUZOS DE TENSIÓN EN EL ACERO O, DESPUES DE LA FLEXIÓN DE ALGUN REFZO. EN LA GRIETA POR ESFUZOS. CORTANTES SOBRE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA. EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANSMITIR A TRAVES DE LA GRIETA SERA FUNCION DEL ANCHO DE LA GRIETA. NOTAR QUE EL ESFUZO. CORTANTE SOBRE LA GRIETA IMPLICA QUE LA DIRECCION DE ESFUZOS. PRINCIPALES SOBRE LA GRIETA CAMBIA DE LOCALIZACION.

LA DEFORMACION UNITARIA PRINCIPAL DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  EN EL CONCRETO SE USA COMO UN "INDICADOR DE DAÑO" QUE CONTROLA AL ESFUZO. PROMEDIO DE TENSIÓN  $f_1$  EN EL CONCRETO AGRIETADO, LA CAPACIDAD DEL CONCRETO, AGRIETADO DIAGONALMENTE PARA TOMAR ESFUZOS. DE COMPRESIÓN  $f_2$  Y ESFUZO. CORTANTE  $\tau_c$  QUE PUEDE TRANSMITIRSE A TRAVES DE UNA GRIETA

EL ESFUZO. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN EN EL CONCRETO  $f_2$  ESTA RELACIONADO A LA DEFORMACION PRINCIPAL DE COMPRESIÓN

$\epsilon_2$  Y A LA DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  EN LA FORMA SIGUIENTE (FIG. 5a):

$$f_2 = f_{2max} \left[ \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_c'} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_c'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_1) \leq f_c' \quad (2)$$

DE LA EC. (1), LA DEF. UNITARIA DE COMPRESIÓN PARA LA PORCIÓN CARGADA DE LA REL. ESFUZO.-DEF. ES:

$$\epsilon_2 = -0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - f_2 / f_{2max}} \right) \quad (3)$$

DOUE SE TOMO  $\epsilon_c' = 0.002$  DESPUES DEL AGRIETAMIENTO, EL ESFUZO. PRINCIPAL DE TENSIÓN EN EL CONCRETO  $f_1$  ESTA RELACIONADO A LA DEF. PRINCIPAL DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  (FIG. 5b) COMO SIGUE:

$$f_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} \quad (4)$$

EL ESFUZO. DE AGRIETAMIENTO PUEDE REPRESENTARSE COMO  $1.5 \sqrt{f_c'}$  ( $0.33 \sqrt{f_c'}$  MPa). PARA VALORES GRANDES DE  $\epsilon_1$ , LAS GRIETAS SON ANCHAS Y LA MAGNITUD DE  $f_1$  ESTA CONTROLADA POR LA FRECUENCIA DEL ACERO EN LA GRIETA Y LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR ESFUZOS. CORTANTES  $\tau_c$  A TRAVES DE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA (FIG. 5b). EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANSMITIR

MITRE A TRAVÉS DE LA GRIETA ES FUNCIÓN DEL ANCHO W DE LA GRIETA Y DEL TAMAÑO A DEL AGREGADO (FIG 4c) DADO POR:

$$v_{ci} = \frac{2.16 w}{0.3 + \frac{2.4w}{a + 0.63}}$$

PARA WPa Y Wp, SUSTITUIR 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16.

SI LOS ESTRIBOS ALCANZAN SU ESFUZO DE FLUENCIA Y LA GRIETA SE DESLIZA, EL ESFUZO PROMEDIO DE TENSION EN EL CONCRETO f<sub>i</sub> ESTÁ LIMITADO A:

$$f_i = v_{ci} \tan \theta$$

LAS RELACIONES ANTERIORES ESFUZO.-DEF. JUNTO CON EL EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD, SE PUEDE USAR PARA PREDECIR LA RESPUESTA CARGA.-DEF. DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A CORTANTE. ADEMAS, ESTAS RELACIONES SE PUEDE USAR COMO LA BASE PARA LA FORMULACIÓN NO LINEAL DE ELEMENTOS FINITOS.

DISEÑO POR CORTANTE DE LOS ESTRIBOS  
EN LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA MOPTI-  
CADA DEL CAMPO DE COMPRESION AL DISE-  
ÑO DE VIGAS, ES APROPIADO HACER UN

PERO DE SUPOSICIONES SIMPLIFICADORAS. (COMO SE ILUSTRAN EN LA FIG. 6, SE SUPONE QUE LOS ESFUZOS CORTANTES SON UNIFORMES SOBRE EL AREA EFECTIVA DE CORTANTE b<sub>o</sub> d<sub>o</sub>. LA DEF. LONGITUDINAL MAYOR  $\epsilon_x$  QUE OCURRE DENTRO DEL ALMA SE USA PARA CALCULAR LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon_1$ . PARA DISEÑO,  $\epsilon_x$  SE PUEDE APROXIMAR COMO LA DEF. EN EL ACEÑO DE TENSION POR FLEXION. LA DEFERMINACION DE  $\epsilon_x$  PARA VIGAS NO PRESTREZADAS SE ILUSTRAN EN LA FIG. 7; PARA UNA PRESTREZADA, EL CONCRETO QUE RODA AL DEFZO.

PERDURAR EN COMPRESION HASTA QUE LA TENSION APLICADA EXCEDE LA FZS. DE DEFZO,  $f_{ps} - f_{po}$ , DONDE  $f_{po}$  ES EL ESFUZO EN EL TENDON CUANDO EL ESFUZO EN EL CONCRETO QUE LO RODA ES CERO. EN LUGAR DE UN CALCULO MAS EXACTO,  $f_{po}$  SE PUEDE TOMAR IGUAL A  $1.1 f_{se}$ . ENTONCES, PARA DISEÑO:

$$\epsilon_x = \frac{(1.1 f_{se} - f_{ps})}{E_s} + \frac{0.34 \cos \theta}{E_p} \geq 0 \quad (7)$$

CON BASE EN LA COMPATIBILIDAD, LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon_1$  PUEDE RELACIONARSE A LA DEF. LONG.  $\epsilon_x$ , LA DIRECCION DEL ESFUZO PRINCIPAL  $\theta$  Y LA MAGNITUD DE LA

DEF. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN  $\epsilon_2$  COMO SIGUE:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_z) \cot^2 \theta \quad (8)$$

POR TANTO, COMO  $\epsilon_x$  LLEGA A SER GRANDE Y  $\theta$  PEQUEÑO, EL "INDICADOR DE DAÑO"  $\epsilon_1$  LLEGA A SER GRANDE. LA RESISTENCIA NOMINAL A CORTANTE  $V_n$  DE UN MIEMBRO SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_1 b_w d_v \cot \theta + \frac{\Delta \sigma f_x d_v}{S} \cot \theta + V_p = \beta (0.27 \sqrt{f_c'}) b_w d_v + \frac{\Delta \sigma f_x d_v}{S} \cot \theta + V_p \quad (9)$$

DE LAS EXPRESIONES PARA EL ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO EN EL CONCRETO AGRIETADO (EC. (4) Y (6)), EL FACTOR DE ESFUERZO DE TENSION  $\beta$  SE PUEDE DETERMINAR COMO:

$$\beta = \frac{0.33 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{0.18}{0.3 + \frac{24W}{d_v}} \quad (10)$$

PARA MPa Y MM, SUSTITUIR 4 POR 0.33, 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16. EL ANCHO DE GRIETA  $W$  SE TOMA COMO EL ESPACIAMIENTO ENTRE GRIETAS MULTIPLICADO POR  $\epsilon_1$ . SE PUEDE VER DE LAS EXPRESIONES

5/  
PARA  $\beta$  QUE A MEDIDA QUE LA DEF. POR TENSION CREE ( $\epsilon_1$  CREE), EL ESFUERZO

CORTANTE QUE PUEDE SER RESISTIDO POR ESFUERZO DE TENSION EN EL CONCRETO  $V_c$  SE REDUCE. EL VALOR DE  $\epsilon_1$  DEPENDE DE LAS MAGNITUDES DE  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_z$  Y  $\theta$  (FIG. 8). LA DEF. CORTANTE  $\epsilon_z$  SE PUEDE HALLAR DE LA EC. (3). USANDO ESTA EC., EL ESFUERZO PRINCIPAL DE COMPRESIÓN  $f_2$  SE PUEDE TOMAR CONSERVADORAMENTE COMO:

$$f_2 = \sigma (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{V_n - V_p}{b_w d_v} \quad (12)$$

DE LAS EC (3), (8) Y (11),  $\epsilon_1$  PUEDE EXPRESARSE COMO:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[ \epsilon_x + 0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma (\tan \theta + \cot \theta)}{f_c'} (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot^2 \theta \quad (13)$$

PARA DETERMINAR LOS ESTRIBOS REQUERIDOS, EL DISEÑO NECESITA DETERMINAR LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  PARA CUMPLIR LA EC. (9). CON ESTE PROPOSITO, LA TABLA 1 DA LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  EN FUNCION DE  $\epsilon_x$  Y EL NIVEL DEL ESFUERZO CORTANTE  $\sigma/f_c'$ . LOS VALORES DE LA TABLA 1 SE CALCULARON SUPONIENDO UN ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS DIAGONALES

DE 12" (30.5 cm) y tamaño máximo DE AGREGADO DE 3/4" (19 mm), SE CREE QUE ESTOS VALORES SON APROPIADOS PARA EL RANGO TOTAL DE VIGAS CON ESTRIBOS.

LOS VALORES DE  $\theta$  DADOS EN LA TABLA SE HAN SELECCIONADO PARA ASEGURAR

QUE LA DEF. DEL ESTRIBO  $e_1$  ES AL MENOS IGUAL A 0.002 Y PARA ASEGURAR QUE <sup>PARA</sup> LOS MIEMBROS ACTUAMENTE ESFUZADOS, EL ESFUZO PRINCIPAL DE COMPRESION  $f_2$

EN EL CONCRETO NO EXCEDE A LA RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO  $f_{2max}$ . DENTRO DEL

RANGO DE VALORES DE  $\theta$  QUE SATISFACEN ESTOS REQUISITOS, LOS VALORES DADOS EN

LA TABLA RESULTARÁN CERCA A LOS CORRESPONDIENTES A LA CANTIDAD

MÁS PEQUEÑA DE REFZO. POR CONSTANTE. MIENTRAS QUE LOS VALORES DE LA TABLA

SE PUEDEN APLICAR A UN RANGO DE VALORES DE  $\epsilon_x$  Y  $\sigma/f_c$  (POR EJEMP.  $\theta = 36^\circ$

Y  $\beta = 2.09$ , PARA  $\epsilon_x \leq 1 \times 10^{-3}$  Y  $\sigma/f_c \leq 0.10$ ), FUERON CALCULADOS PARA EL

LÍMITE SUPERIOR DEL RANGO. SE PUEDE HACER UNA INTERPOLACIÓN LINEAL PARA

ENTRE LOS VALORES DE LA TABLA. SIN EMBARGO, NO SE JUSTIFICA DICHO ESFUZO. EN UNA SECCIÓN PARTICULAR DE UN MIEMBRO SUJETO A  $V_u$ ,  $M_u$  Y  $N_u$ , EL REFZO. POR CONSTANTE SE DETERMINA DE:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

$$\phi = 0.85$$

LA CANTIDAD DE ESTR. REQUERIDA EN UNA SECCIÓN, SE DETERMINA DE:

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c - V_p \quad (15)$$

MIENTRAS QUE ESTE CÁLCULO SE HACE PARA UNA SECCIÓN EN PARTICULAR, UNA FALLA

POR CONSTANTE CAUSADA POR LA FLENCIA DE LOS ESTRIBOS INVOLUCRA FLENCIA DEL

REFZO. SOBRE UNA LONGITUD DE LA VIGA ALREDEDOR DE  $d$  O  $\theta$ . ENTONCES, LOS CAL

CULOS PARA UNA SECCIÓN PUEDEN TOMARSE COMO REPRESENTATIVOS DE UNA LONGITUD

DE VIGA IGUAL A  $d$  O  $\theta$ , CONSIDERANDO QUE LA SECCIÓN SE LOCALIZA A LA MITAD

DE ESTA LONGITUD. ASÍ, CERCA DE UN APOYO, LA PRIMERA SECCIÓN QUE SE DEBE

REVISAR SE LOCALIZA A  $0.5 d$  O  $\theta$  DE LA CARA DEL SOPORTE. CERCA DE LAS

CARGAS CONCENTRADAS, LAS SECCIONES LOCALIZADAS A MENOS DE 0.5 d<sub>o</sub> COTA DE LA CARGA, NO NECESITAN VERIFICARSE. COMO UNA SIMPLIFICACIÓN, 0.5 d<sub>o</sub> COTA PUEDE TOMARSE COMO d<sub>o</sub>. DESDE 1963, EL CÓDIGO ACI HA REQUERIDO QUE AL MENOS SE COLOQUE UN ÁREA MÍNIMA DE ESTIBOS CUANDO  $V_u > \phi V_c / 2$ . PARA EL MÉTODO QUE AQUÍ SE PRESENTA, SE RECOMIENDA QUE SE COLOQUE UN ÁREA MÍNIMA DE ESTIBOS SI:

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

DONDE EL REQUISITO MÍNIMO ES:

$$\frac{A_{ov} f_y}{b_w s} \geq 0.20 \sqrt{f'_c}$$

PARA UNIDADES MPa SUSTITUIR 0.2 POR 0.06

### DISEÑO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

LA FIG. 8 ILUSTRAS LA INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FZAS. DE TENSIÓN EN EL REFZO. LONG. MIENTRAS QUE EL MOMENTO ES CERO EN EL APOYO B, ALLÍ TRANQUILAMENTE SE NECESITA TENSIÓN CONSIDERABLE EN EL REFZO. LONG. CERCA DEL APOYO. LA TENSIÓN REQUERIDA EN

EL REFZO. DEL P. LECTO BAJO EN EL APOYO B, SE PUEDE DETERMINAR DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA FIG. 8b, TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO AL PUNTO C Y SUPONIENDO QUE LA FZA. DE TRABAZON DEL AGREGADO EN LA GRIETA QUE CONTRIBUYE A  $V_c$  TIENE UN MOMENTO DESPRECIABLE CON RESPECTO AL PUNTO C. PARA ESTA VIGA NO PRESTFORZADA, LA FZA. DE TENSION REQUERIDA EN EL BORDE INTERIOR DEL ÁREA DE APOYO ES:

$$T = \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s \right) c o t \theta \quad (17)$$

LA EC. (17) DA LA TENSIÓN ADICIONAL DEBIDA AL CORTANTE. ENTONCES, EN UNA SECCIÓN SUJETA A CORTANTE  $V_u$ , UN MOMENTO  $M_u$  Y UNA FZA. AXIAL  $N_u$ , EL REFZO. LONG. SOBRE LA CARA DE TENSION POR FLEXION DEBE CUMPLIR CON:

$$A_{st} f_y + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi d_v} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p \right) c o t \theta \quad (18)$$

EN LAS SECC. DE MOMENTO MÁX. EL CORTANTE CAMBIA DE SIGNO Y ENTONCES, LA INCLINACIÓN DE LA GRIETA COMPRESIÓN DIAGONAL



TAMBIEN CAMBIA. EN LOS APOYOS DIRECTOS Y EN LOS PUNTOS DE CARGA, ESTE CAMBIO DE INCLINACION ESTA ASOCIADO CON UN PATRON ABANICADO DE ESFUZOS. DE COMPRESION RADIAL DESDE EL PUNTO DE CARGA O DEL APOYO DIRECTO, COMO SE MUESTRA EN LA FIG. 8a. ESTA FORMA ABANICADA DE LOS ESFUZOS. DIAGONALES REDUCE LA TENSION EN EL REFZO. LONGITUDINAL PRODUCCION POR EL MOMENTO (POR EJEMP. EL ANGULO  $\theta$  LLEGA A SER ESCALPADO). DIBIDO A ESTE EFECTO, LA TENSION EN EL REFZO NO EXCEDE DE LA PRODUCCION UNICAMENTE POR EL MOMENTO MAXIMO.

**Miembros Sin Refzo. En El Alia.**

EN LA EVALUACION DE LOS FACTORES  $\beta$  DADOS EN LA TABLA 1, SE ASUMIO QUE LAS GRIETAS DIAGONALES EN LOS ALIAS CON ESTRIBOS PUEDEN ESPACIARSE A 12 IN (305 MM). PARA MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALIA, ESTA SUPOSICION PUEDE NO SER CONSERVADORA; ENTONCES, PARA VER SI DE LA TABLA 1, ES NECE-

NO ES ADECUADO USAR  $\beta$  DE LA TABLA 1 PARA EVALUAR LA RESISTENCIA A CORTANTE DE MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALIA.

PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR CORTANTE DEL CONCRETO AGRIETADO ESTA GOBERNADA PRINCIPALMENTE POR EL ANCHO DE LAS GRIETAS DIAGONALES (EE. 10). EL ANCHO DE GRIETA SE PUEDE TOMAR COMO LA DEF. UNIFORME PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon$ , MULTIPLICADA POR EL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS  $s$ . ENTONCES, PARA UN VALOR DADO DE  $\epsilon$ , LA RESISTENCIA A CORTANTE ES FUNCION DEL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS POR LO QUE PARA UN ESPACIAMIENTO GRANDE DE GRIETAS, LAS CAPACIDADES A FZA. CORTANTE SE REDUCEN. LA FIG. 9 ILUSTRAS LA SUPOSICION HECHA EN ESTE METODO DE DISEÑO CON RESPECTO AL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS. PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LAS GRIETAS DIAGONALES ESTARAN MAS ESPACIADAS A MEDIDA QUE  $\theta$  SE APROXIMA A CERO. LA SEPARACION DE GRIETAS CUANDO  $\theta = 90^\circ$  SE LLAMA  $s_x$  Y SU VALOR ES FUNCION PRINCIPALMENTE

DE LA SEPARACIÓN MÁXIMA ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. O ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. Y LA ZONA DE COMPRESIÓN POR FLEXIÓN.

$\beta$  (INDICADOR DE LA CAPACIDAD DEL CONCRETO AGRIETADO PARA RESISTIR CORTANTE) ES FUNCIÓN DE  $\theta$ ,  $\epsilon$ , Y  $S_x$ . PARA VALORES DADOS DE  $\epsilon_x$  Y  $S_x$  Y UN VALOR SELECCIONADO DE  $\theta$ , SE PUEDE CALCULAR  $\beta$  CON LOS EC. (9), (10), (12) Y (13). LA TABLA 2 ENLISTA LOS VALORES DE  $\theta$  QUE PRODUCEN VALORES ALTOS DE  $\beta$  PARA CONCRETO AGRIETADO. LOS VALORES DE  $\beta$  DE LA TABLA SE DERIVARON SUPONIENDO EL TAMAÑO MÁX. DEL AGREGADO  $a = 3/4"$  (19 mm). SIN EMBARGO, SE PUEDEN USAR PARA OTROS TAMAÑOS USANDO UN PARÁMETRO EQUIVALENTE DE ESPACIAMIENTO  $S_{xe}$  (EC. 10) TAL QUE:

$$S_{xe} = \frac{1.38}{a + 0.63} (S_x) \quad (14) \quad (19)$$

PARA MM., SUSTITUIR 1.38 POR 35 Y 0.63 POR 16. EN MIEMBROS SIN REFZO. BIEN DISTRIBUIDO PARA EL CONTROL DEL AGRIETAMIENTO,  $S_x$  SE INCREMENTA

9/  
 LAS MEDIDAS QUE EL TAMAÑO DEL MIEMBRO SE INCREMENTA. EN LA TABLA 2 SE APRECIAN QUE UN INCREMENTO DE  $S_x$  RESULTA EN UNA REDUCCIÓN EN LA CAPACIDAD A CORTANTE. UN EXTENSIVO PROGRAMA EXPERIMENTAL CONDUcido POR SHIOYA EN JAPÓN PROPORCIONÓ EVIDENCIA CONVINCENTE DE LA REDUCCIÓN DE LA CAPACIDAD A EFORTO. CONSTANTE QUE OCURRE A MEDIDA QUE LOS MIEMBROS CRECEN. EN EL PROGRAMA, VIGAS CON POCO REFZO, SIN ESTRIBOS, CON PENALTE EFECTIVO ENTRE 4 Y 118 IN (100 A 3000 MM.) SE CARGARON UNIFORMEMENTE HASTA LA FALLA. LA FIG 10 COMPARA LOS EFORTOS. CONSTANTES DE FALLA PARA UNA SERIE DE ESTAS VIGAS CONTRA LA FALLA ESTIMADA CON EL ACI 318 - 95 Y EL MÉTODO GENERAL. SE PUEDE OBSERVAR QUE LAS VIGAS GRANDES FALLAN A UN EFORTO. CONSTANTE MENOR QUE LA MITAD DEL ESTIMADO CON LAS EC. DEL ACI. 318 - 95.

### PROCEDIMIENTO PROPOSTO PARA DISEÑO POR CORTANTE.

DE LA TEORÍA  
 LOS EC. GENERALES DEL CAMPO DE COM

presión modificada, con la cual se pretende obtener exactitud en el complejo comportamiento de concreto diagonalmente agrietado. Son más adecuadas para un programa de computadora (por ejem. ver el programa RESPOUCE) que para cálculos a mano. Con las tablas de  $\theta$  y  $\beta$ , el método resulta bastante simple para resolverse a mano. En el diseño, los pasos son como sigue:

1. En la sección de diseño, calcular el esfuerzo cortante  $v$  con la ec. (12)
2. Calcular la def. unitaria longitudinal  $\epsilon_x$  con la ec. (7).
3. Para miembros con refzo. en el alma, seleccionar los valores de  $\theta$  y  $\beta$  de la tabla 1; Para miembros sin refzo. en el alma, usar la tabla 2.
4. En miembros sin refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la resistencia nominal. Para miembros con refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la capacidad de refzo. en el alma.

5. Usar la ec. (18) para verificar la capacidad del refzo. longitudinal.

### VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Las expresiones para diseño por corte del ACI, fueron obtenidas considerando vigas y cols. en los siguientes grupos: miembros no prestozados sujetos a corte y torsión; miembros no prestozados sujetos a compresión axial; miembros no prestozados sujetos a tensión axial y miembros prestozados.

Para cada grupo, se desarrolló una ec. empírica para proporcionar una buena aproximación para los datos experimentales disponibles. La mayoría de las ecs. fueron derivadas en el informe del Comité de Corte del ACI/ASCE de 1967, usando los datos disponibles en ese tiempo.

En contraste, el método de diseño por corte de este artículo se derivó de la teoría modificada del campo de compresión que está basada en el equilibrio, compatibilidad y las

CARACTERÍSTICAS ESFUZO.-DEF. DEL CONCRETO REFORZADO ARMADO.  
EN ESTE ENFOQUE FUNDAMENTAL, NO SE EMPLEARON FACTORES DE AJUSTE PARA HACER LAS PREDICCIONES CON LOS ENSAYES DISPONIBLES DE VIGAS. POR LO TANTO, ES DE CONSIDERABLE INTERÉS COMPARAR LA EXACTITUD DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS RES. DE ESTE MÉTODO NUEVO CONTRA LA EXACTITUD DE LOS RES. TRADICIONALES DEL SCI. (FIG. 11). SE COMPARARON LAS FALLAS POR CORTANTE DE TREINTA OCHO ENSAYES CON LAS PREDICHAS CON AMBOS MÉTODOS. ESTOS ENSAYES ABRANCAN UN AMPLIO RANGO DE SECCIONES, FORMAS DE SECCIONES, TAMAÑOS, PROPIEDADES DE LAS TERMINES Y TIPOS DE CARGAS, COMO SE VE SOLO EN LA TABLA 3. LOS ESPECÍMENES SELECCIONADOS FUERON AQUELLOS QUE FALLARON PRINCIPALMENTE DEBIDO A ALTOS ESFUZOS. CORTANTES. SE EXCLUYERON LOS ESPECÍMENES CON CLASOS DE CORTANTE CORTOS, DEBIDO A QUE TALES MIEMBROS PUEDEN DISEÑARSE USANDO LOS MODELOS

11/  
PUNTAL - Y - TIRANTE, O LAS RES. PARA VIGAS DE GRAN PERALTE DEL SCI.  
COMO SE VE EN LA FIG. 11, EL MÉTODO GENERAL PROPUUESTO PREDICE MÁS EXACTAMENTE LAS FALLAS POR CORTANTE QUE LAS RES. DEL ACTUAL SCI. LA TABLA 3 INDICA SITUACIONES DONDE EL MÉTODO DEL SCI PUEDE SER MUY INEXACTO. ESTAS SITUACIONES INCLUYEN MIEMBROS GRANDES, MIEMBROS CON POCO ESFUZO. LONG. Y MIEMBROS SUJETOS A COMPRESION AXIAL GRANDE, DONDE EL SCI PUEDE SER POCO CONSERVADOR. POR OTRO LADO, PARA MIEMBROS CON CARGAS MUY FUERTEMENTE REPARTIDAS, MIEMBROS CON TRUENOS INCLINADOS Y MIEMBROS CON TENSION AXIAL GRANDE, EL SCI PUEDE SER EXTREMAMENTE CONSERVADOR.

# CONCLUSIONES

SE CREE QUE EL MÉTODO PRESENTADO DE LOS ERRORES MÁS SERIOS DE DETALLE EN ESTE ARTICULO ESTA "INTEGRADO" QUE A VECES SE COMETEN EN LA PRÁCTICA "SIMPLIFICADO" Y DA "UN SIGNIFICADO ACTUAL.

FISICO" A LOS PARAMETROS QUE SE CALCULAN. POR EJEMPLO, EL COEFICIENTE TOMADO POR LOS ESFUZOS DE TENSION EN EL CONCRETO  $V_c$  SE HACE FUNCION DE LA DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL EN EL ALMA  $\epsilon_x$ . A MEDIDA QUE  $\epsilon_x$  CRECE,  $V_c$  DECRECE. INCREMENTANDO LA MAGNITUD DEL MOMENTO O APLICANDO TENSION AXIAL  $\epsilon_x$  CRECE, Y ENTONCES,  $V_c$  DECRECE. APLICANDO COMPRESION AXIAL, PRESFUERZO O AUMENTANDO EL AREA DEL REFUERZO LONGITUDINAL,  $\epsilon_x$  DECRECE Y ENTONCES,  $V_c$  CRECE.

UNA CARACTERISTICA CLAVE DE LOS PROCEDIMIENTOS NUEVOS ES QUE EXPLICITAMENTE CONSIDERAN LA INFLUENCIA DEL COEFICIENTE SOBRE EL REFUERZO LONGITUDINAL. SE CREE QUE SI LOS INGENIEROS ENTENDIERAN QUE EL COEFICIENTE PRODUCE TENSION EN EL REFUERZO LONGITUDINAL, EVITARON UNO

ELEMENTO	MÉTODO DEL ACI	MÉTODO GENERAL
	$V_n = V_c + V_s$	$V_n = V_c + V_s + V_p$
1	$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \frac{\rho_w V_{ud}}{\mu_u}) b_w d; \frac{V_{ud}}{\mu_u} \leq 1.0$ $V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d \text{ o } V_c = 0.54\sqrt{f'_c} b_w d$ $V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	$V_c = \beta (0.27\sqrt{f'_c}) b_v d_v$ $V_s = \frac{\Delta_r f_y d_v}{s} \cot \theta$ <p><math>\beta</math> Y <math>\theta</math> SON FUNCIÓN DE: LA DEFORMACIÓN UNITARIA <math>\epsilon_x</math>, ESFUZO. CORTANTE <math>V</math> Y DEL ESPACIAMIENTO DEL AGRIETAMIENTO <math>s_x</math></p> <p>CONSTANTE:</p>
2	$V_c = (0.16\sqrt{f'_c} + 50 \frac{V_{ud}}{\mu_u}) b_w d; 0.54\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1.35\sqrt{f'_c} b_w d$ $V_c \leq V_c = 0.16\sqrt{f'_c} b_w d + V_d + \frac{V_{i,cr}}{\mu_{max}}$ $V_c \leq V_{cw} = (0.95\sqrt{f'_c} + 0.3 f_{pc}) b_w d + V_p$ $V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	$\sigma = \frac{V_n - V_p}{b_v d_v}$ <p>Y</p> $\epsilon_x = \frac{\mu_u}{d_v} + 0.5(N_u + V_u \cot \theta) - \frac{\Delta_r s f_p u}{E_s \Delta_s + E_p \Delta_p}$
3	$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \frac{\rho_w V_{ud}}{\mu_u - \mu_u(4h-d)}) b_w d$ $V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{\frac{1 - \mu_u}{35 \lambda_g}}$ $V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	
4	$V_c = 0.54\sqrt{f'_c} (1 + \mu_u / 35 \lambda_g) b_w d$ $V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$	

REGLAS PARA DETALLAR:

- SE DEBE EXTENDER EL REFZO. MAS ALLÁ DEL PUNTO CRUCE YA NO SE REQUIERE UNA DISTANCIA  $\geq \lambda d$  O  $12d_b$
- NO SE DEBE TERMINAR REFZO. EN ZONAS DE TENSION A MENOS QUE: EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE  $\leq 2/3$  DEL CORTANTE PERMITIDO, O EL AREA DE ESTR.  $\Delta_r$  EN EXCESO DE LA REQ. POR CORTANTE Y TORSION SE PROPORCIONA PARA  $\Delta_r \geq 3.5 \rho_w s / f_y$  ;  $s \leq d$  8B6, 0
- PARA BARRAS  $\# 11$ , EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE  $\leq 3/4$  DEL CORTANTE PERMITIDO Y CONTINUANDO EL DOBLE DEL REFZO. REQUERIDO POR FLEXION, EN LA SECCION DE CORTE
- EN UN APOYO SIMPLE Y EN PUNTO DE INFLEXION, SE DEBE LLEVAR EL DOBLE DEL REFZO. POR MOMENTO POSITIVO EN TORNO AL CUE:  $l_d \leq \frac{V_u}{f_y} + l_a$

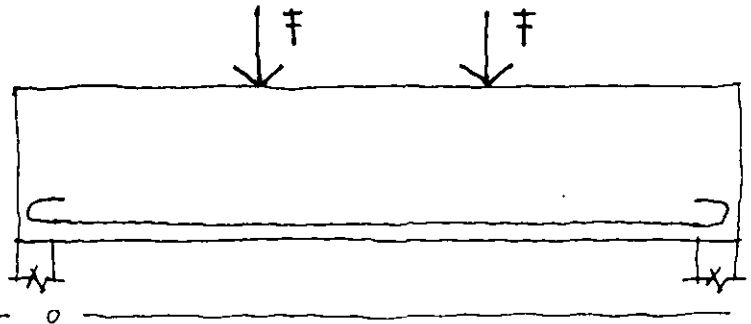
REGLAS PARA DETALLAR:

- EL REFUERZO LONGITUDINAL SE DEBE DETALLAR PARA QUE:  $\Delta_r s f_y + \Delta_p s f_p \geq \frac{\mu_u}{\phi d_o} + 0.5 \frac{\mu_u}{\phi}$
- $+ (\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p) \cot \theta$

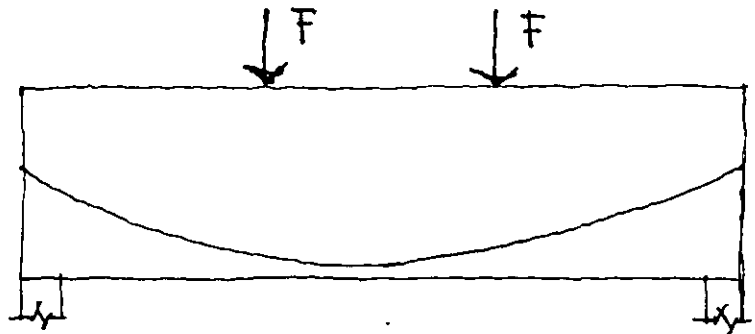
FIG.1. Comparación Entre El Enfoque de Diseño Por Cortante Del ACI y El Propuesto

# COMPLEMENTO DE LA FIGURA 1

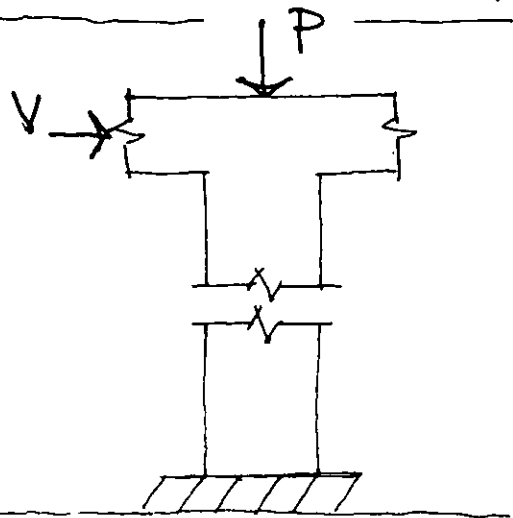
## 1. VIGAS DE CONCRETO REFORZADO



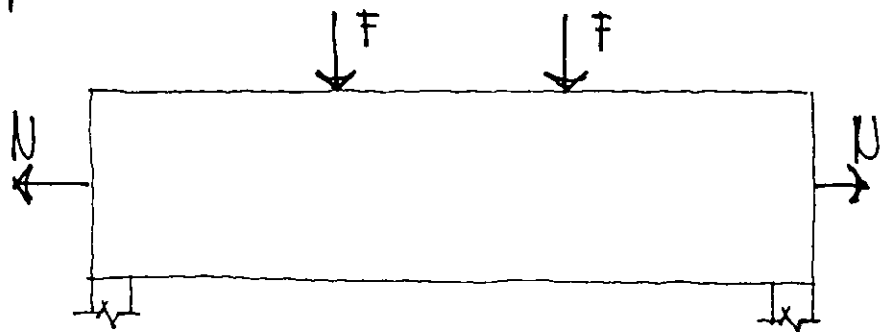
## 2. VIGAS DE CONCRETO PRESTFORZADO



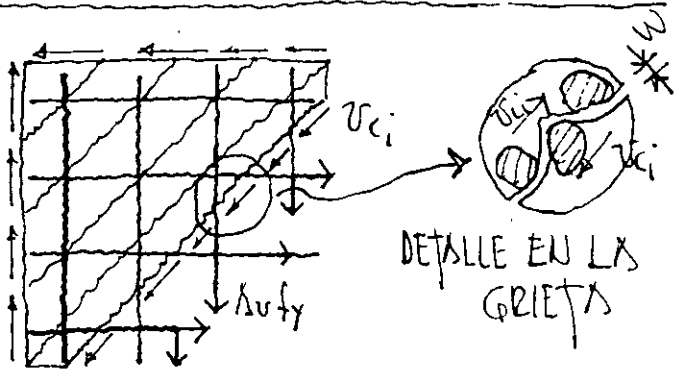
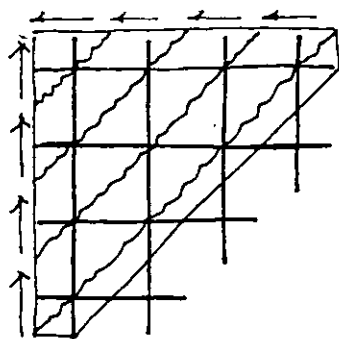
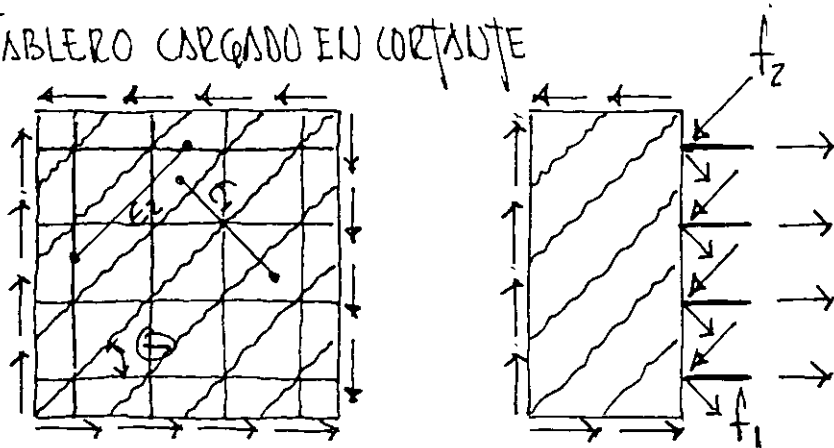
## 3. FLEXOCOMPRESIÓN Y CORTANTE



## 4. FLEXOTENSIÓN Y CORTANTE



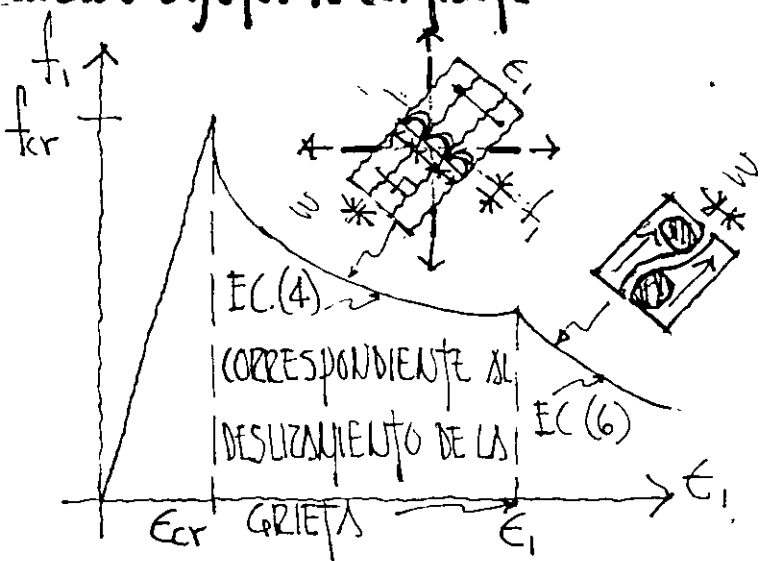
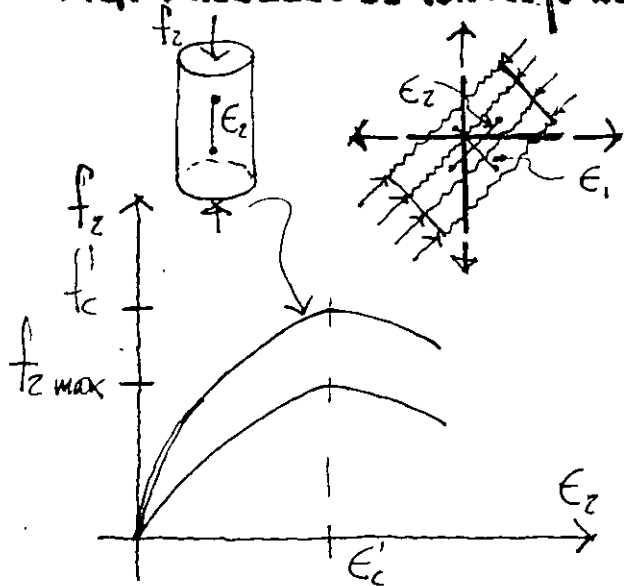
a) TABLERO CARGADO EN CORTANTE



b) ESFUERZOS PROMEDIO CALCULADOS;

c) ESFUERZOS LOCALES EN LAS GRIETAS

FIG. 4 PAVELES DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A CORTANTE

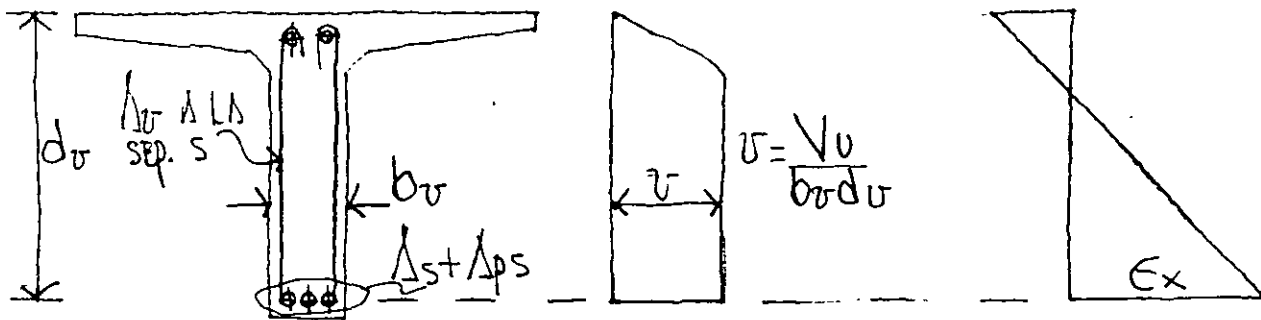


a) ABUNDAMIENTO DE LA CURVA ESFUERZO-DEF. A COMPRESION DEBIDO A LA DEFORMACION TRANSVERSAL DE TENSION

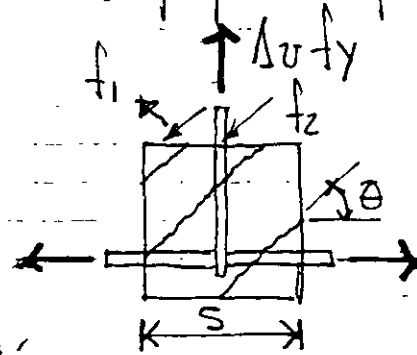
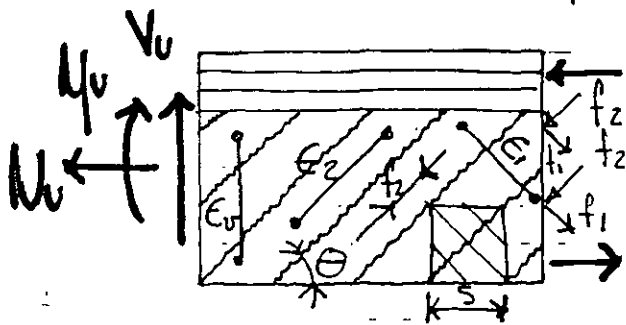
b) ESFUERZOS PROMEDIO DE TENSION EN CONCRETO AGRIETADO EN FUNCION DE  $\epsilon_i$

FIG. 5 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIONES PARA CONCRETO AGRIETADO

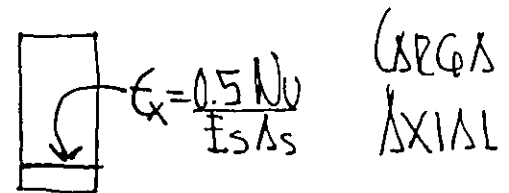
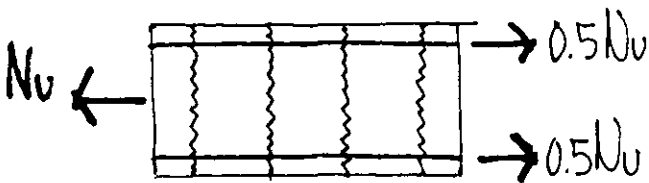
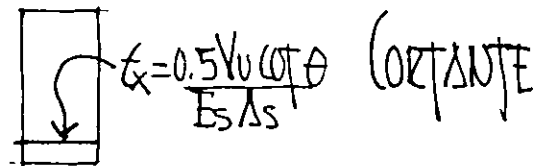
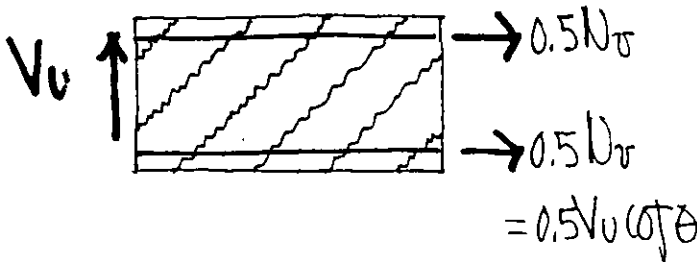
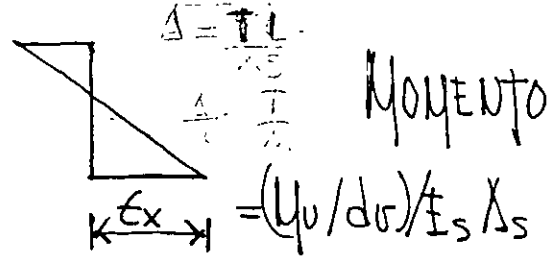
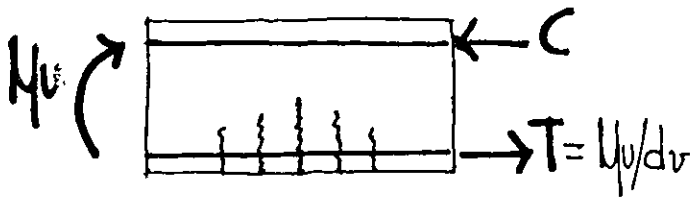




a) SECCIÓN TRANSVERSAL      b) ESFUERZO CORTANTE      c) DEFORMACIONES LONGITUDINALES



d) ESTADO BIAJIAL DE DEF. EN EL ALIJA      e) TENSION EN EL REFORZO DEL ALIJA.  
**FIG. 6 VIGA SUJETA A CORTANTE, MOMENTO Y CARGA AXIAL**



**FIG. 7. DETERMINACIÓN DE  $\epsilon_x$  EN VIGAS NO PREFORZADAS**

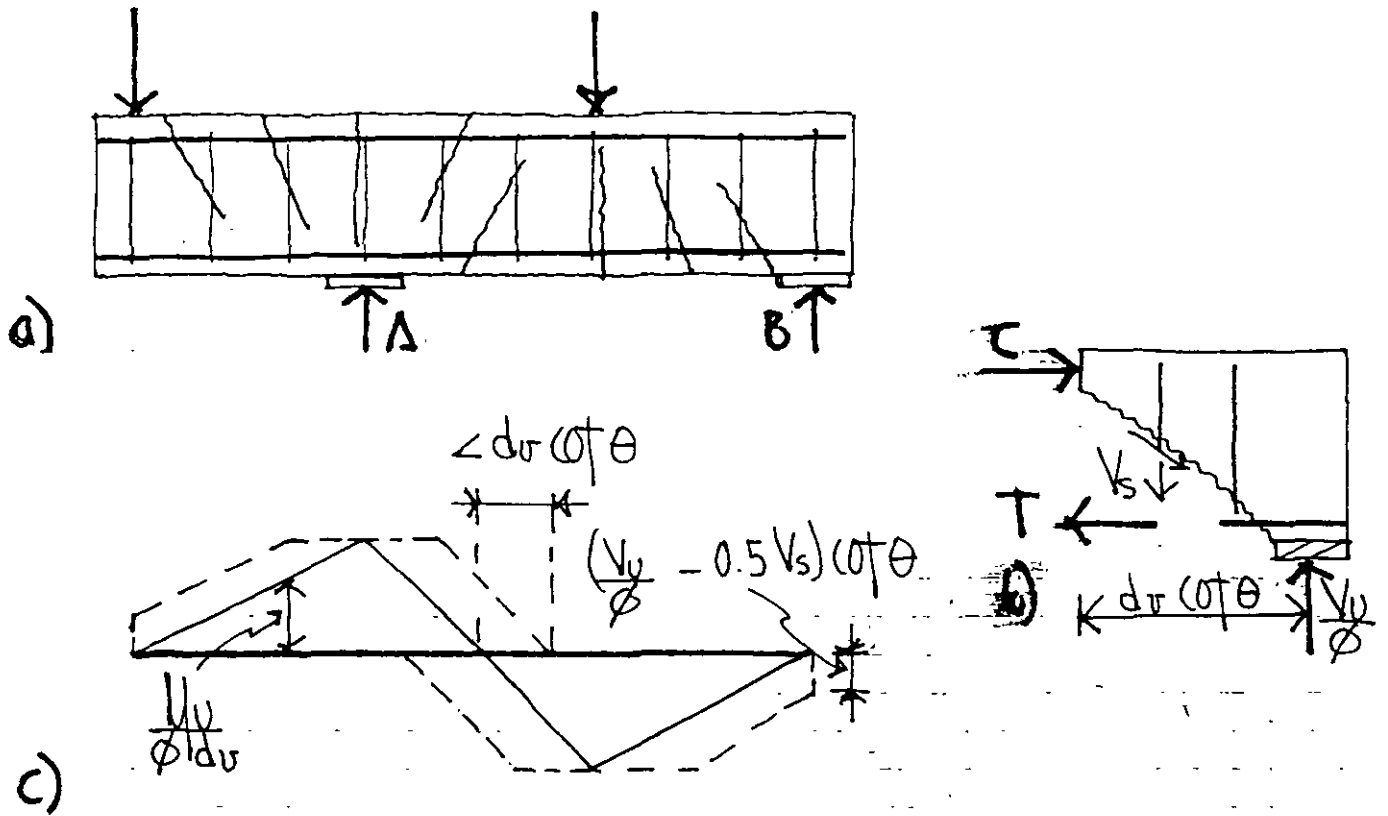


FIG. 8 INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FUERZAS EN EL REFUERZO LONGITUDINAL

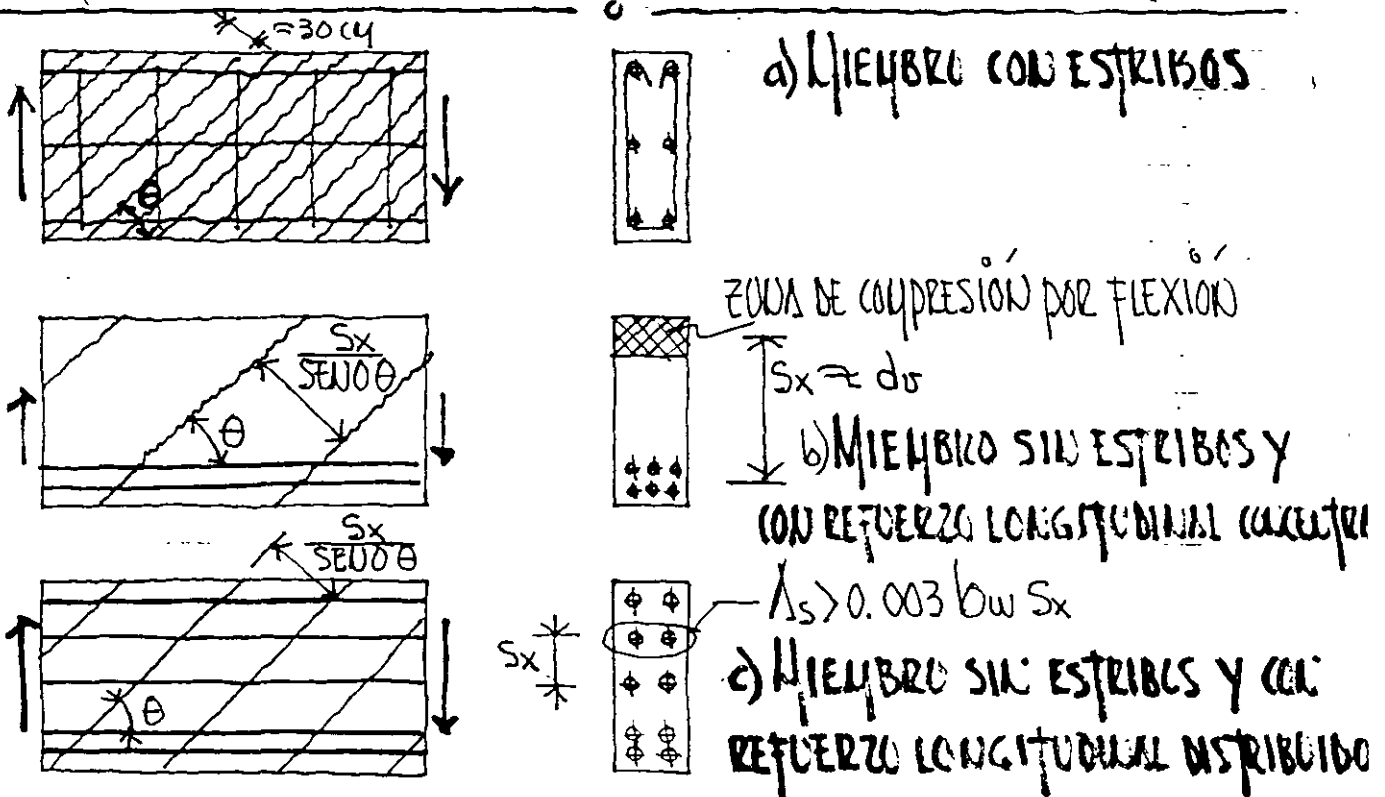


FIG. 9. INFLUENCIA DEL REFUERZO SOBRE EL ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

Tabla 1. VALORES DE  $\theta$  y  $\beta$  PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALMA.

$\sigma/\sigma_c$		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 0.05$	$\theta^\circ$	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	$\beta$	1.32	0.94	0.68	0.60	0.53	0.46
$\leq 0.075$	$\theta^\circ$	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	$\beta$	1.32	0.81	0.67	0.58	0.51	0.48
$\leq 0.10$	$\theta^\circ$	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	$\beta$	0.88	0.69	0.65	0.56	0.46	0.39
$\leq 0.15$	$\theta^\circ$	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	$\beta$	0.69	0.66	0.62	0.52	0.41	0.33
$\leq 0.20$	$\theta^\circ$	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	$\beta$	0.66	0.63	0.57	0.43	0.33	0.27
$\leq 0.25$	$\theta^\circ$	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	$\beta$	0.62	0.54	0.44	0.38	0.35	0.34

Tabla 2. VALORES DE  $\theta$  y  $\beta$  PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA.

c.u. $S_x$		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 12.5$	$\theta^\circ$	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0	38.0
	$\beta$	1.33	1.02	0.86	0.69	0.59	0.52
$\leq 25$	$\theta^\circ$	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0
	$\beta$	1.26	0.93	0.76	0.59	0.50	0.45
$\leq 37.5$	$\theta^\circ$	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0
	$\beta$	1.21	0.87	0.70	0.53	0.45	0.39
$\leq 62.5$	$\theta^\circ$	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0
	$\beta$	1.13	0.77	0.61	0.46	0.38	0.32
$\leq 125$	$\theta^\circ$	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0
	$\beta$	1.03	0.65	0.49	0.34	0.27	0.22
$\leq 250$	$\theta^\circ$	42.00	55.0	62.0	69.60	72.0	75.0
	$\beta$	0.94	0.51	0.36	0.23	0.18	0.14

$S_x$  = ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

REFERENCIA	FECHA	CONTADOR Y TIPO DE CUESTA	CANTIDAD DE MUESTRAS	CONCENTRACION (% CO <sub>2</sub> )	PUNTAJE (% CO <sub>2</sub> )	CONCENTRACION (% CO <sub>2</sub> ) SWT TMS	EXPERIMENTAL / PRODUCTORA		MUESTRO GENERAL	
							MEAN	CV	MEAN	CV
KASUI <sup>19</sup>	1979	VR	68	2000'S DE (CALOR) SAMPLES	15.24 45.72	156 372	1.23	14.9	1.35	8
"	1979	VT	93						1.63	10.1
SHIOYA <sup>15</sup>	1989	VR	13						0.98	25.1
GUPTA <sup>20</sup>	1993	VR	10						1.13	16.8
DEBBAR y COLLINS <sup>21</sup>	1996	CR	7						0.90	12.8
GREGOR y COLLINS <sup>22</sup>	1993	P.L.P	6						1.37	12.7
COLLINS y VEGH <sup>23</sup>	1993	VR	14						1.07	15.9
GREZIC, COOK, y MITCHELL <sup>24</sup>	1993	VT	4						1.34	12.6
HADDADIN HONG y MATTOCK <sup>25</sup>	1971	VT	54						1.45	18.7
ELZANATY, WILSON y SLOTE <sup>26</sup>	1986	VIP	33						1.35	9.5
PASLEY, GUGOL, MARWIN y MAC GREGOR <sup>27</sup>	1990	VT	13						1.27	7.0
MATTOCK <sup>28</sup>	1969	VR	31						1.45	14
BENNETT y BALASOORIAS <sup>29</sup>	1971	VIP	20						1.46	18.2
BENNETT y DEBAIKEY <sup>30</sup>	1974	VIP	22						1.54	10.9
MOODY, VIEST, ELSTNER y HOGESTAD <sup>31</sup>	1954	VR	12						1.27	13.5
MAC GREGOR <sup>32</sup>	1960	VIP	33						1.54	21.5
OLESON, SOZEN y SIESS <sup>33</sup>	1967	VIP	27						1.59	15.3
ROLLER y RUSSELL <sup>34</sup>	1990	VR	10						1.19	13.5
SHAHIN, ROBINSON y BATHLOZ <sup>35</sup>	1993	VIP	34						1.13	15.8
YOON, COOK, y MITCHELL <sup>36</sup>	1996	VR	12						1.07	10.3
									1.39	14.7

TABLA 3. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

# Método General de Diseño por Cortante

RESISTENCIA A CORTANTE DEL CONCRETO ACRIETADO

$$f_z = f_{zmax} [2 \epsilon / \epsilon_c' - (\epsilon_z / \epsilon_c')] \quad (1)$$

$$f_{zmax} = f_c' / (0.8 + 170 \epsilon_c) \leq f_c' \quad (2)$$

$$\epsilon_z = -0.002 (1 - \sqrt{1 - f_z / f_{zmax}}) \quad (3)$$

$$f_c = f_{cr} / (1 + 500 \epsilon_c) \quad (4)$$

$$f_{cr} = 4 \sqrt{f_c'} \quad (4)$$

$$\tau_{ci} = 2.16 \sqrt{f_c'} / [0.3 + 24w / (a + 0.63)] \quad (5)$$

$$f_c = \tau_{ci} \tan \theta \quad (6)$$

## DISEÑO DE ESTRIBOS PARA CORTANTE

$$\epsilon_x = \frac{N_u / d_s + 0.5 N_u + 0.5 V_u (\cot \theta - \Delta p_s / p_s)}{E_s A_s + E_p A_p} \geq 0 \quad (7)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_z) \cot^2 \theta \quad (8)$$

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_c b_w d_s \cot \theta + h_w f_y d_s \cot \theta + V_p \quad (9)$$

$$= \beta \sqrt{f_c'} h_w d_w + \Delta p_s d_w \cot \theta + V_p \quad (9)$$

$$\beta = 4 \cot \theta / (1 + 500 \epsilon_1) \leq 2.14 / [0.3 + 24w / (a + 0.63)] \quad (10)$$

$$f_z = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

$$v = (V_n - V_p) / (b_w d_w \phi_j d) \quad (12)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x + 0.001 - \sqrt{f_c' / (E_s \tan \theta + \cot \theta) (0.8 + 170 \epsilon_1)}) \cot^2 \theta \quad (13)$$

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

$$V_s \geq V_u / \phi - V_c - V_p \quad (15)$$

$$V_u > \phi 0.5 (V_c + V_p) \quad (16)$$

$$A_w f_y / b_w s \geq 0.72 \sqrt{f_c'} \quad (17)$$

$$A_w f_y + \Delta p_s p_s \geq \frac{V_u + 0.5 V_s}{\phi} + \frac{V_u - 0.5 V_s - V_p}{\phi} \cot \theta \quad (18)$$

# Miembros sin Refuerzo en el Alia

$$s_x e = s_x [1.38 / (a + 0.63)] \quad (19)$$

PROCEDIMIENTO DE DISEÑO POR CORTANTE

PROPUESTO

1. EN LA SECCION CONSIDERADA CALCULAR

EL ESFUERZO CORTANTE  $\tau$ , CON LA EC. (12)

2. CALCULAR LA DEFORMACION UNIFORME LONGI-

TUDINAL  $\epsilon_x$ , CON LA EC. (7)

3. PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALIA,

SELECCIONAR LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  DE LA TABLA 1.

PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALIA SELECCIONAR

LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  DE LA TABLA 2.

4. PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALIA, USAR

LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA NOMINAL

( $V_n$ ). PARA MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL,

USAR LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA CANTIDAD

DE REFUERZO EN EL ALIA.

5. USAR LA EC. (18) PARA VERIFICAR LA

CAPACIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**MUROS**

**ING. JOSE MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

## 4.5 MUROS

### 4.5.1 SUJETOS A CARGAS VERTICALES AXIALES O EXCÉNTRICAS

DEBEN DIMENSIONARSE COMO COLUMNAS CON LAS DISPOSICIONES COMPLEMENTARIAS SIGUIENTES:

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES TENGAN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \text{LONG. EFECTIVA DE PANDEO} = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ (1.3 - 0.85H/L)H & ; \text{ Si } 0.35 < H/L < 0.80 \\ L/2 & ; \text{ Si } H/L \geq 0.8 \end{cases}$$

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES NO TIENEN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ 0.215(H/L + 4.3)H \leq 2H & ; \text{ Si } H/L > 0.35 \end{cases}$$

- CARGAS CONCENTRADAS:  $b_{\text{efectivo}} = b_{\text{contacto}} + 4b_{\text{apoyo}} \leq \text{DISTANCIA E.A.C. DE CARGAS}$

- REFUERZO MÍNIMO

SI LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO Y SU MAGNITUD  $\leq 0.25 f_c A_g$ :

EL REFUERZO MÍNIMO VERTICAL  $A_{s \text{ min}} = \frac{66000 b_u}{f_y (b_u + 100)}$  SIN NECESIDAD DE RESTRINGIRLO CONTRA EL PANDEO

EN CASO CONTRARIO  $A_{s \text{ min}} = (20/f_y) A_g$  Y DEBERÁ RESTRINGIRSE CONTRA EL PANDEO CON GRASPAS

EN AMBOS CASOS, EL REFUERZO MÍNIMO HORIZONTAL SERÁ:

$$A_{sh \text{ min}} = \frac{66000 b_u}{f_y (b_u + 100)} \text{ cm}^2/\text{m. (EN MUROS EXPUESTOS$$

A LA INTemperIE O EN CONTACTO DIRECTO CON EL SUELO  $A_{sh} = 1.5 A_{sh \text{ min}}$ )

$S \leq \text{EL MEJOR DE } \begin{cases} 50 \text{ cm.} \\ 3.5 b_u \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } b_u \leq 15 \text{ EL ACERO SE PUEDE COLOCAR} \\ \text{EN UNA SOLA CAPA} \end{array} \right.$

## 4.5.2 MUROS SUJETOS A FUERZAS HORIZONTALES EN SU PLANO

- PARA CARGAS VERTICALES DESPRECIABLES  $L/t \leq 70$
- PARA CARGAS VERTICALES NO DESPRECIABLES  $L/t \leq 40$  Y SE APLICAN 4.5.1 Y 2.1.3
- $t \geq 13 \text{ cm} \geq 0.06 H$  A MENOS QUE SE HAGAN UN ANALISIS DE PUNDEO LATERAL DE LOS ~~MUROS~~ BORDES O SE LES SUPUNISTRE RESTRICCION LATERAL. EN CONSTRUCCIONES DE NO MAS DE DOS NIVELES CON  $H \leq 3 \text{ m}$ , PUEDE SER  $t = 10 \text{ cm}$ .
- CUANDO LOS MUROS RESISTAN EL TOTAL DE LAS FZS. LATERALES DE SISMO  $Q = 3.0$
- CUANDO LOS MUROS NO CUMPLAN CON EL INCISO b);  $Q = 2.0$
- CUANDO PARTE DE LAS FZS. LATERALES SEAN RESISTIDAS POR OTRAS FORMAS ESTRUCTURALES (MARCOS DUCTILES O LOSAS PLANAS)  $Q =$  EL DEFINIDO EN EL CAPITULO CORRESPONDIENTE DE ESTAS NORMAS.

### a) FLEXION Y FLEJO COMPRESION

$$\text{SI } P_u \leq 0.2 f_r c L t' \text{ y } A_s / t d \leq 0.008$$

$$M_e = f_r A_s t y z$$

$$z = \begin{cases} 0.8L; & \text{SI } H/L \geq 1.0 \\ 0.4(1+H/L)L; & \text{SI } 0.5 < H/L < 1.0 \\ 1.2H; & \text{SI } H/L \leq 0.5 \end{cases}$$

$H =$  ALTURA TOTAL DEL MURO;  $L =$  LONGITUD TOTAL DEL MURO

$$A_{s \text{ m\u00edn}} = (0.7 \sqrt{f_c} / f_y) t d \quad (2.1.2a)$$

- CUANDO  $H/L \leq 1.2$  EL REFZO. CALCULADO EN LAS SECC. DE  $M_{\text{m\u00e1x}}$  SE PROLONGAR\u00c1 EN TODA LA ALTURA DEL MURO, DISTRIBUIDO EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO  $= (0.25 - 0.1 \frac{H}{L}) L$  MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE,  $\leq 0.4 H$
- CUANDO  $H/L > 1.2$  EL REFZO. PARA FLEXION O FLEJO COMPRESION SE COLOCAR\u00c1 EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO  $= 0.15 L$  MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE



- ARriba del nivel 1.2L este refzo. se puede hacer variar, respetando 3.10
- Cuando se necesiten los elementos extremos del inciso b), el refzo. por flexión se colocará en ellos independientemente de la relación  $H/L$
  - El refzo. cuyo trabajo a compresión se tome en cta. en la resistencia debe restringirse contra el pandeo con estribos o garras según 4.2.3

### b) ELEMENTOS EXTREMOS EN MUROS Y DIAFRAGMAS

- DEBEN SUMINISTRARSE DONDE  $f_{comp. máx} > 0.2 f'_c$  (BAJO CARGAS DE DISEÑO)
- TAMBIÉN EN LOS BORDES DE ABERTURAS DONDE SE EXCEDA EL LÍMITE SUPERIOR.
- PUEBEN INTERRUPTIRSE DONDE  $f_{comp} < 0.15 f'_c$
- LOS ELEMENTOS EXTREMOS CONTARÁN A TODO LO LARGO, CON EL REFZO. TRANSV. DE 5.3.4 PARA ELEMENTOS A FLEXOCOMPRESIÓN.
- UN ELEMENTO EXTREMO DE MURO, SE DISEÑARÁ COMO COL. CORTA PARA QUE RESISTA COMO CARGA AXIAL LA CARGA QUE LE CORRESPONDA, CALCULADA EN LA BASE DEL MURO, PARA EL MOMENTO MÁXIMO DE VOLTEO.
- EL REFZO. TRANSVERSAL DEL MURO DEBE ANCLARSE EN LOS NÚCLEOS CONFUNDOS DE LOS ELEMENTOS EXTREMOS DE MANERA QUE PUEDAN ALCANZAR SU  $f_y$

### c) FUERZA CORTANTE

- SI  $H/L \leq 1.5$   $V_{cr} = 0.85 f_r \sqrt{f'_c} \tau L$
- SI  $H/L \geq 2.0$ , SE APLICAN LAS EC. 2.17 O 2.18 CON  $b = \tau$  Y  $d = 0.8L$
- SI  $1.5 < H/L < 2.0$  HACER UNA INTERPOLACIÓN LINEAL
- EN MUROS CON ABERTURAS PARA VALORAR  $V_{cr}$  EN LOS SEGMENTOS VERTICALES ENTRE ABERTURAS, SE TOMARÁ LA REL. MAYOR  $H/L$  ENTRE LA DEL MURO COMPLETO Y LA DEL SEGMENTO CONSIDERADO.

$$P_h = \frac{V_u - V_{cr}}{f_r + y_d \tau} \quad (4.6)$$

$$P_u = 0.0025 + 0.5(2.5 - H/L)(P_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

DONDE  $P_h = \frac{\Delta\sigma_h}{s_h \tau}$  ;  $P_u = \frac{\Delta\sigma_u}{s_u \tau}$

$s_h$  = SEPARACIÓN DEL REFZO. HORIZONTAL

$s_u$  = " " " VERTICAL

$\Delta\sigma_h$  = ÁREAS DEL REFZO. HORIZONTAL COMPRENDIDAS EN UNA DISTANCIA  $s_h$

$\Delta\sigma_u$  = " " " VERTICAL " " " " "  $s_u$

$H$  = ALTURA TOTAL DEL MURO;  $L$  = LONGITUD HORIZONTAL DEL MURO

- NO ES NECESARIO QUE  $P_u > P_h$

- SI  $H/L \leq 2.0$  ;  $P_u \geq P_h$

- LAS BARRAS VERTICALES DEBEN ESTAR ANCLADAS EN LA BASE DEL MURO DE MANERA QUE DESARROLLEN SU  $f_y$ .

- REFUERZO MÍNIMO

$$P_{u\text{mín}} = P_{h\text{mín}} = 0.0025$$

- EL REFZO. SE COLOCARÁ UNIFORMEMENTE REPARTIDO CON  $s \leq 35 \text{ cm}$

- CUANDO  $\tau > 15 \text{ cm}$  O EL REFZO. CONSTANTE MEDIO DEBIDO A LAS CARGAS HORIZON-  
TALES DE DISEÑO  $> 0.6 \sqrt{f_c^*}$ , SE COLOCARÁ EN DOS CAPAS. EN CASO CONTRARIO  
SE PUEDE COLOCAR EN UNA SOLA CAPA A MEDIO ESPESOR.

$$V_u \leq 2f_r(L\tau)\sqrt{f_c^*}$$

d) ABERTURAS

SE PROPORCIONARÁ REFZO EN LA PERIFERÍA PARA RESISTIR LAS TENSIONES QUE PUEDAN PRESENTARSE. COMO MÍNIMO DEBEN COLOCARSE  $2\#4$  O SU EQUIVALENTE

DICHO REFZO. SE PROLONGARÁ UNA DISTANCIA  $\geq L_d$ , DESDE LAS ESQUINAS.

- SI  $f_{comp}$ . EN UN BORDE ES  $> 0.2 f'_c$ , SE SUMINISTRARÁ UN ELEMENTO DE BORDE
- LAS ABERTURAS DEBEN TOMARSE EN CTA. AL CALCULAR LA RIGIDEZ Y RESISTENCIA.

e) ELEMENTOS DE UNIÓN ENTRE MUROS.

LAS VIGAS DIAPHRAGMA QUE UNEN MUROS SE DISEÑARÁN SEGÚN 4.1.4 e)

#### 4.6 DIAPHRAGMAS Y ELEMENTOS A COMPRESIÓN DE CONTRAVIENTOS.

ESTOS REQUISITOS SE APLICAN A DIAPHRAGMAS, COMO SISTEMAS DE PISO O TECHO, A PONTALES Y DIAGONALES A COMPRESIÓN DE SISTEMAS QUE TRANSMITAN FZAS. INDUCIDAS POR SISMOS.

EN PISOS PREFABRICADOS, PUEDE FUNCIONAR COMO DIAPHRAGMA UN FICHE COLADO SOBRE LOS PRECOLADOS. PARA  $L < 64$ ,  $t \geq 3$  cm; PARA  $L \geq 64$ ,  $t \geq 6$  cm.

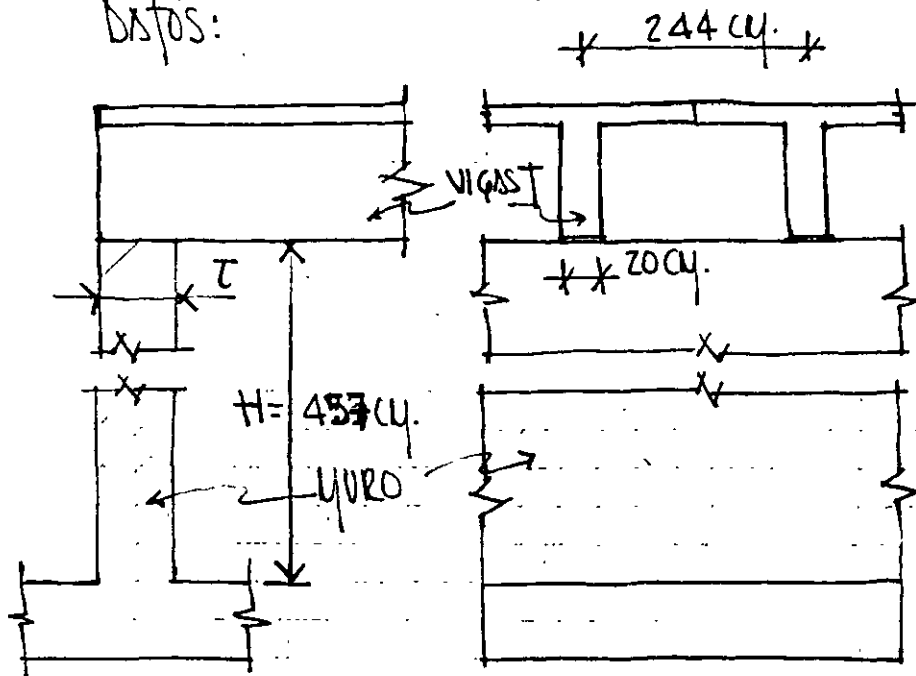
- LOS DIAPHRAGMAS SE DISEÑARÁN COMO VIGAS (COMUNES O DIAPHRAGMA)
- EL REFZO. MÍNIMO POR CORTANTE SEGÚN 4.5.2c) PARA MUROS CON CARGA EN SU PLANO
- SE APLICA 4.5.2 EN LO QUE SE REFIERE AL USO DE ELEMENTOS DE REFZO. EN BORDES Y ABERTURAS.

- LOS ELEMENTOS EXTREMOS DE DIAPHRAGMAS SE DISEÑARÁN PARA LA SUMA DE LA COMPRESIÓN DIRECTA Y LA DEBIDA AL MOMENTO QUE ACTÚA EN LA SECCIÓN, LA CUAL PUEDE OBTENERSE DIVIDIENDO EL MOMENTO ENTRE LA DISTANCIA A EJES DE LOS ELEMENTOS EXTREMOS.

- DEBE COMPROBARSE LA TRANSMISIÓN DE LAS FZAS. SÍSMICAS ENTRE EL DIAPHRAGMA Y LOS ELEMENTOS VERTICALES DESTINADOS A RESISTIR FZAS. LATERALES.

- LOS ELEMENTOS CON  $f_{maxc} > 0.2 f'_c$  TENDRÁN EL REFZO. TRANSV. DE 5.3.4 Y SE PUEDE INTERRUPIR DONDE  $f_{maxc} < 0.15 f'_c$ . USANDO PARA CALCULAR  $f_{maxc}$  LA SECCIÓN BRUTA.

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES  
 DATOS:



EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

DESCARGAS POR VIGAS T  
 CARGA MUERTA = 12.70 TON.

" VIVA = 6.35 "

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 "$

### SOLUCIÓN

#### I. SELECCIONAR EL ESPESOR $t$ DEL MURO

a) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

1) - SI  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m}$ .

SE PUEDEN DESPRECIAR LOS EFECTOS DE ESBELTEZ CUANDO:

$$H'/r < 34 - 12 K_1/K_2$$

COMO  $K_1 = K_2 = 0$ ;  $K_1/K_2 = 1.0 \therefore H'/r < 22$

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ  $t > 4.57 / 0.3 \times 22 = 69 \text{ cm}$ .

2) - SI  $0.35 < H/L < 0.8$  ( $5.71 < L < 13.06 \text{ m}$ );

CON  $L = 6 \text{ m}$ .  $H'/L = 4.57/6 = 0.76$ ;  $H' = (1.3 - 0.85 \times 0.76) 4.57 = 2.99 \text{ m}$ .

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ  $t > 2.99 / 0.3 \times 22 = 45 \text{ cm}$ .

3) - SI  $H/L > 0.80$  ( $L < 5.71 \text{ m}$ )  $H' = L/2$

PARA  $L = 5.70 \text{ m}$ .  $H' = 5.70/2 = 2.85 \text{ m}$ ;  $t > 43 \text{ cm}$ .

b) Bordes verticales sin suficiente restricción lateral

1) Si  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m}$ ;  $t > 69 \text{ cm}$

2) Si  $H/L > 0.35$  ( $L < 13.06 \text{ m}$ )

Para  $L = 12.70 \text{ m}$ ;  $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(H/L + 4.3)H = 0.215(0.36 + 4.30)4.57 = 4.58 \text{ m} < 2H = 9.14 \text{ m}.$$

$$t > 458 / 0.3 \times 22 = 69 \text{ cm}.$$

Para  $L = 5.70 \text{ m}$ ;  $H' = 5.01 \text{ m}$ ;  $t > 501 / 0.3 \times 22 = 76 \text{ cm}.$

II Cargas últimas.

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ ton}.$$

III VERIFICAR EL APUSTAMIENTO

Para el caso 3) de a) con  $t = 45 \text{ cm}.$

$$A_{\text{cargas}} = A_1 = (b)(t) = 20 \times 45 = 900 \text{ cm}^2$$

$$\text{Resistencia al apusamiento} = (F_R f_c^*) (A_1) = 0.7 \times 224 \times 900 = 141 \text{ ton} > P_u$$

IV La resultante de cargas queda dentro del tercio medio

$$\text{Defectivo} = b_{\text{contacto}} + 4t = 20 + 4 \times 45 = 200 \text{ cm} < 244 \text{ cm}.$$

$$\therefore A_{\text{mín}} \text{ SEGUN 3.10 } (0.25 f_c' A_g = 0.25 \times 280 \times 9000 = 630 \text{ ton} > P_u)$$

$$A_s = \frac{66000 t}{f_y (t + 100)} = \frac{66000 \times 45}{4200 (45 + 100)} = 4.88 \text{ cm}^2 / \text{m}.$$

$$A_{\text{mín}} = 1.5 A_s = 7.32 \text{ cm}^2 / \text{m}. \leftarrow \text{var. \# 3 @ } 20 \text{ cm. EN AMBAS CARAS}$$

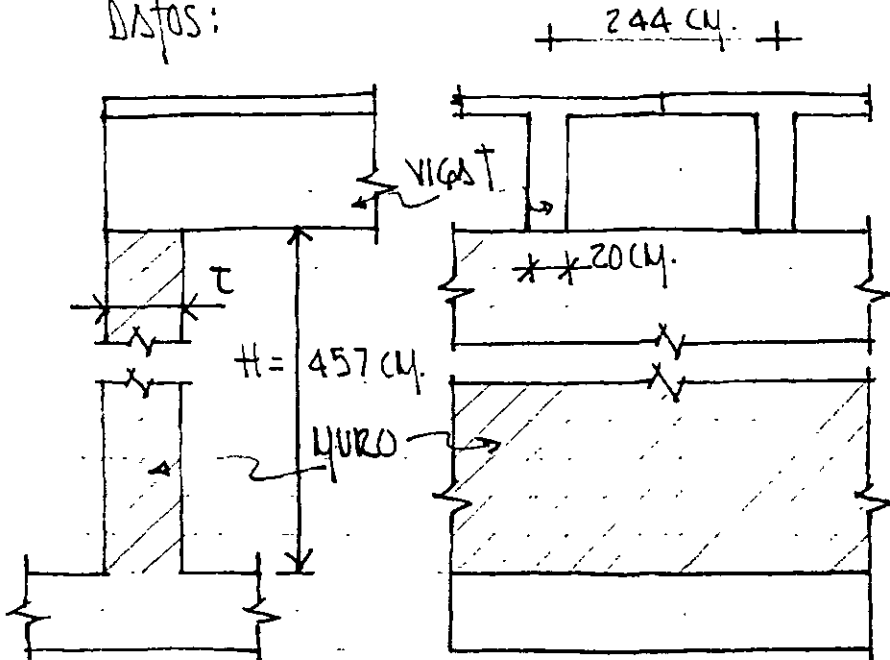
V RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN

$$e_{\text{mín}} = 0.05 t > 2 \text{ cm}.$$

$$e_{\text{mín}} = 2.25 \text{ cm}.$$

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES.

DATOS:



- EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

- CARGAS POR VIGAS T  
CARGAS MUERTAS = 12.70 TON.

" VIVAS = 6.35 "

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 "$

SOLUCIÓN

I SELECCIONAR EL ESPESOR  $\tau$  DEL MURO  
SUPONIENDO  $\tau = 20 \text{ cm}$ .

II CARGAS ÚLTIMAS

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ TON.}$$

III. VERIFICAR EL APLASTAMIENTO

$$\Delta_1 = (b)(\tau) = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

$$\text{RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO} = (\phi R^*) (\Delta_1) = 0.7 \times 224 \times 400 = 62.72 \text{ TON.}$$

$> P_u$

IV RELACIÓN DE ESBELTEZ

1) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m}$ .

$H'/r = 457/6 = \underline{76} > \underline{22} \therefore$  ES NECESARIO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ

b) Si  $0.35 < H/L < 0.8$  ( $5.71 < L < 13.06 \text{ m}$ )

$$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H$$

PARA  $L = 6 \text{ m}$ .  $H' = (1.30 - 0.85 \times 0.76) 457 = 298 \text{ cm}$ .

$$H'/r = 298/6 = \underline{50} > 22$$

c) Si  $H/L > 0.80$  ( $L < 5.71 \text{ m}$ )  $H' = L/2$

PARA  $L = 5.70 \text{ m}$ .  $H' = 285 \text{ cm}$ .  $H'/r = 285/6 = \underline{47.5} > 22$

2) BORDES VERTICALES SIN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H$ ;  $\underline{H'/r = 76} > 22$

b) Si  $H/L > 0.35$  ( $L < 13.06 \text{ m}$ );  $H' = 0.215(H/L + 4.3) H \leq 2H$

PARA  $L = 12.70 \text{ m}$ .  $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(0.36 + 4.3) 4.57 = 4.58 \text{ m} < 9.14 \text{ m}$$

$$\underline{H'/r = 76.3} > 22$$

V LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO

$$b_{\text{efectivo}} = b_{\text{compacto}} + 4T = 20 + 4 \times 20 = 100 \text{ cm} < 244 \text{ cm}$$

$$0.25 f_c A_g = 0.25 \times 280 \times 2000 = 140 \text{ ton} > P_u$$

$$\therefore I_s \text{ min} = \frac{66000 T}{fy(T+100)} \text{ (cm}^2/\text{m)} \quad (\text{SEGÚN 3.10})$$

$$I_s \text{ min} = \frac{66000 \times 20}{4200 \times 120} = 2.62 \text{ cm}^2$$

$$I_s \text{ min} = 1.5 \times 2.62 = 3.93 \text{ cm}^2/\text{m} \leftarrow 6 \# 3 \quad I_s = 4.26 \text{ cm}^2$$

COMO  $T > 15 \text{ cm}$ , COLOCAR DOS LECHOS

$\therefore$  CON EL EFECTO MÍNIMO QUEDA  $\# 3$  E  $30 \text{ cm}$  EN AMBOS LECHOS

$$S_{\text{max}} = 3.5 T = 70 \text{ cm} \leq 50 \text{ cm} \quad \therefore \underline{S_{\text{max}} = 50 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$$

## VI EFECTOS DE ESBELTEZ

Como  $h/r = 76 < 100$ , ES APLICABLE EL PROCEDIMIENTO DE SIMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS (FACTOR DE SIMPLIFICACIÓN 1.3.2 c)

SE DEBE DIMENSIONAR PARA  $P_u$  Y  $M_c$

$$\text{DONDE } M_c = \bar{F}_{ab} M_{zbo} + \bar{F}_{as} M_{zs} \quad (1.1)$$

$$\text{COMO } M_{zs} = 0; \quad M_c = \bar{F}_{ab} M_{zbo}$$

$$\bar{F}_{ab} = \frac{C_m}{1 - P_u/P_c} \geq 1.0 \quad (1.2)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2 \geq 0.4 \quad (1.3)$$

$$P_c = \frac{F_R \pi^2 EI}{(H)^2} \quad (1.4)$$

$$EI = 0.4 E_c I_g / (1 + U) \quad (1.5)$$

$$\text{COMO } M_1 = M_2 = 0; \quad M_1/M_2 = 1 \quad \therefore C_m = 1.0 > 0.4$$

$$M_{zbo} = P_u (e_{min}) = 26.67 \times 0.0225 = \underline{0.60 \text{ TON-M}}$$

$$U = 0.67$$

$$E_c = 14000 \sqrt{f'_c} = 2.34 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2; \quad I_g = 100 \times 20^3 / 12 = 6.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$EI = \frac{0.4 \times 2.34 \times 6.7 \times 10^9}{1.67} = 3.74 \times 10^9$$

$$\text{SUPONIENDO } F_R = 0.70$$

$$P_c = \frac{\pi^2 (3.74 \times 10^9) \times 0.7}{(4.57)^2} = 124 \text{ TON.}$$

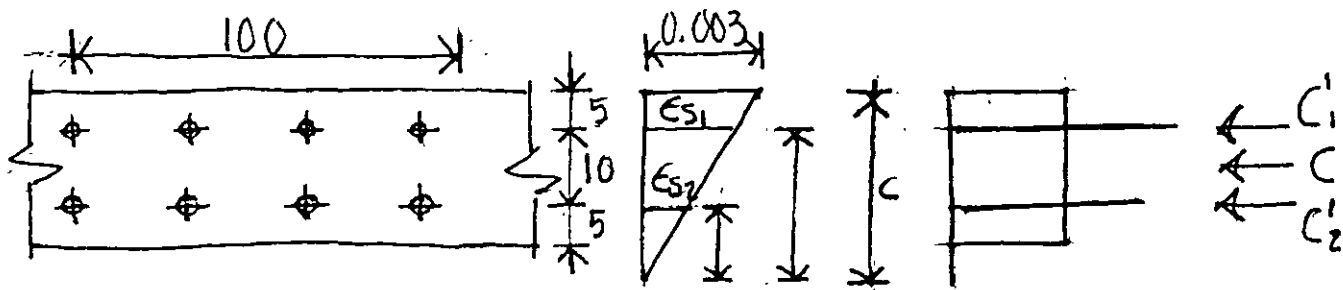
$$\bar{F}_{ab} = \frac{1}{1 - 26.67/124} = 1.27$$

$$M_c = 1.27 \times 0.6 = 0.76 \text{ TON-M.}$$

$$e = \underline{2.85 \text{ cm.}}$$



# VII RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN



PARA  $c = 25 \text{ cm}$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ .

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 20 / 25 = 2.4 \times 10^{-3} > \epsilon_y; f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 10 / 25 = \dots < \epsilon_y; f_{s2} = 2530 \text{ "}$$

$$C_1' = 2.13 \times 4200 = 8.95 \text{ ton}$$

$$C = 100 \times 20 \times 190 = 380.00 \text{ "}$$

$$C_2' = 2.13 \times 2530 = \frac{5.39 \text{ "}}{P_n = 394.34 \text{ "}}$$

$$M_n = 0.05(3.56) = 0.178 \text{ ton-m. } e =$$

$c = 20 \text{ cm}$   $a = 16 \text{ cm}$

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 15 / 20 = 2.25 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 5 / 20 = 7.50 \times 10^{-4} \therefore f_{s2} = 1575 \text{ "}$$

$$C_1' = 2.13 \times 1.575 = 8.95 \text{ ton}$$

$$C = 1.6 \times 190 = 304.00 \text{ "}$$

$$C_2' = \frac{3.35 \text{ "}}{P_n = 316.30 \text{ "}} \quad M_n = 0.05(5.6) + 304 \times 0.02 = 6.36 \text{ ton-m. } e =$$

$$c = 19 \text{ cm}; a = 15.2 \text{ cm}; \quad \epsilon_{s1} = 0.003 \times 14 / 19 = 2.21 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 4 / 19 = 6.3 \times 10^{-4} < \epsilon_y \therefore f_{s2} = 1330 \text{ kg/cm}^2$$

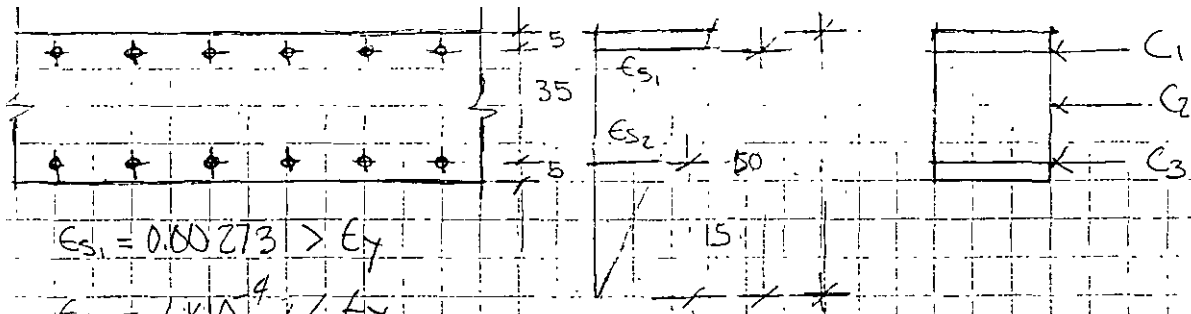
$$C_1' = 8.95 \text{ ton}$$

$$C_2' = 2.13 \times 1.33 = 2.83 \text{ "}$$

$$C = 1.52 \times 190 = \frac{288.80 \text{ "}}{P_n = 300.58 \text{ "}} \quad M_n = 0.05 \times 6.12 + 0.04 \times 288.8 = 7.24 \text{ ton-m.}$$

$$e = 7.24 / 300.58 = 2.40 \text{ cm} = 2.85 \text{ "}$$

"



$$E_{s1} = 0.00273 > E_T$$

$$E_{s1} = 6 \times 10^4 < E_T$$

$$f_{s2} = 120000 / \text{cm}^2$$

$$C_1 = 7.1 \times 4200 = 29820 = 29.82$$

$$C_2 = 200 \times 40 \times 190 = 1520000 = 1520.0$$

$$C_3 = 7.1 \times 1260 = 8.95$$

$$M_n = 0.175(29.82 - 8.95) + 0.025(1520) = 38 + 1558.77 = 41.65$$

$$e = 7.67 \approx 7.25$$

$$P_e = 0.7 \times 1558.77 = 1091 \text{ TON} \approx 7726.67 \text{ TON}$$

100

EJEMPLO: DISEÑO POR CORTANTE

DATOS:

$$\tau = 20 \text{ cm.}$$

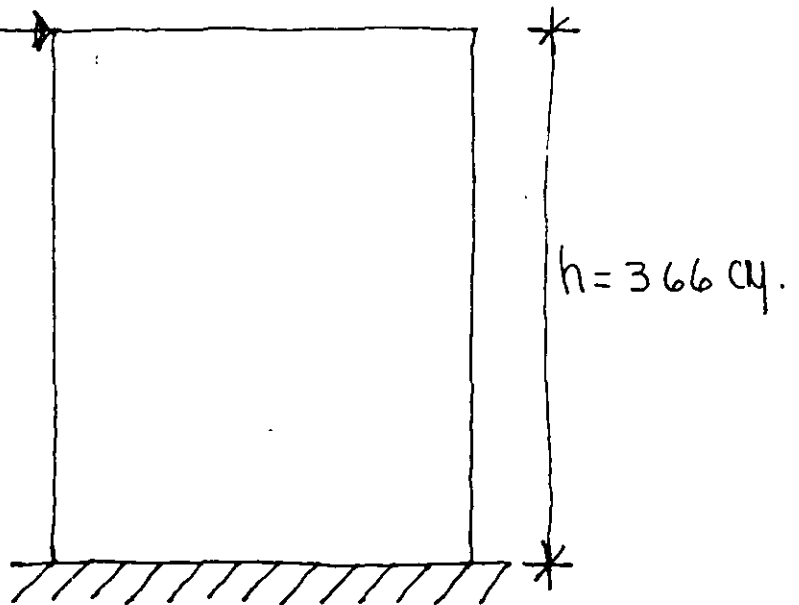
$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

$$FR = 0.80$$

$$V_u = 90 \text{ ton.}$$

$$L = 244 \text{ cm.}$$



SOLUCIÓN

1. DETERMINACIÓN DEL LIMITE SUPERIOR DE  $V_u$

$$V_u \leq FR (L \tau) (2 \sqrt{f'_c})$$

$$0.8 \times 244 \times 20 \times 2 \times \sqrt{160} = 98.76 \text{ ton.}$$

$$V_u = 90 \text{ ton} < 98.76 \text{ ton.}$$

$\therefore$  EL ESPESOR DEL MURO (20 cm) ES ADECUADO

2. CALCULAR LA RESISTENCIA PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $V_{cr}$

$$h/L = 3.66/2.44 = 1.5 \quad \therefore V_{cr} = 0.85 FR \sqrt{f'_c} (L \tau)$$

$$V_{cr} = 0.80 \times 0.85 \times 244 \times 20 \times \sqrt{160} = 42 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL REFUERZO HORIZONTAL REQUERIDO POR CORTANTE

$$P_h = \frac{V_u - V_{cr}}{FR f_y d \tau} \quad (4.6)$$

$$P_h = \frac{A_{sh} h}{S_h \tau}$$

$$S_h = \frac{A_{sh} f_y d \# r}{V_u - V_{ce}}$$

USANDO #3 DOS RAMAS

$$S_h = \frac{1.42 \times 4.2 \times 1.95 \times 0.8}{90 - 42} = 19 \text{ cm.}$$

4. CALCULAR EL REFZO. VERTICAL REQUERIDO POR CORTANTE

$$P_v = 0.0025 + 0.5(2.5 - h/L)(P_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

$$P_h = 0.0037$$

$$P_v = 0.0025 + (0.5(2.5 - 1.5))(0.0037 - 0.0025)$$

$$P_v = 0.0031$$

$$P_v = \frac{A_{sv}}{S_v \tau}$$

$$S_v = \frac{A_{sv}}{P_v(\tau)}$$

PARA  $A_{sv} = 1.42 \text{ cm}^2$  (#3 DOS RAMAS)

$$S_v = \frac{1.42}{0.0031 \times 20} = 23 \text{ cm.}$$

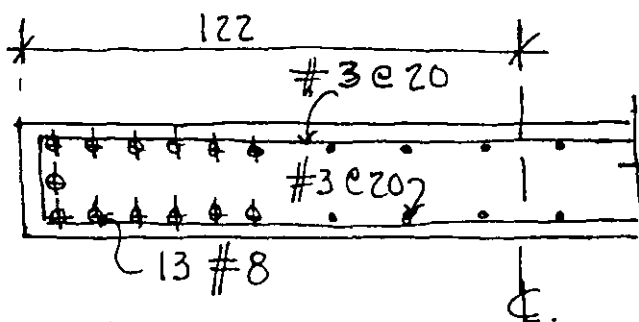
5. DIMENSIONAMIENTO POR FLEXIÓN

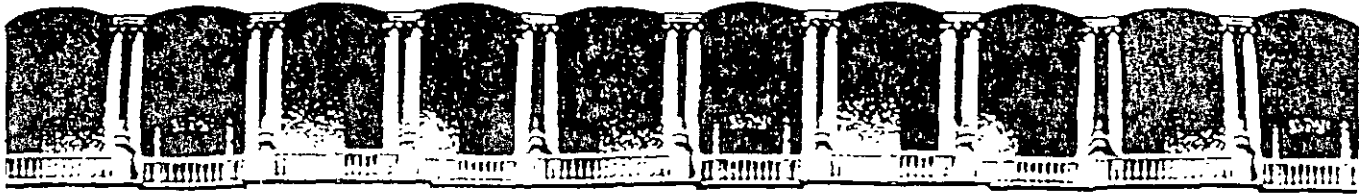
SUPONIENDO  $\rho \leq 0.008$

COMO  $L/h = 0.67$

$$z = 0.6L = 146.4 \text{ cm.}$$

$$A_{s \text{ req}} = \frac{M_u}{f_r z f_y} = \frac{329.4}{0.8 \times 1.46 \times 4.2} = 67 \text{ cm}^2 \leftarrow 13 \#8$$





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

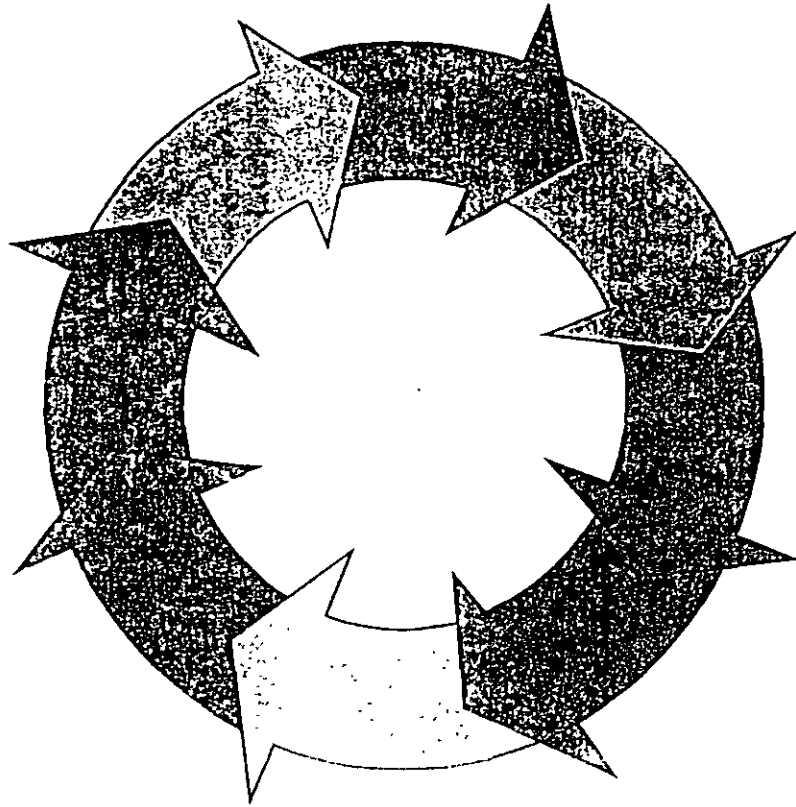
**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN INGENIERIA DE  
PRODUCCION**

**MODULO I: DISEÑO DE SISTEMAS DE PRODUCCION**

**EXPOSITOR: M. EN I. SILVINA HERNÁNDEZ GARCIA  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

# MEJORA CONTINUA



- Significa mejoramiento progresivo global, involucra a todos. Su mensaje es que no debe pasar un día sin que se realice una clase de mejora.

# Características

- Factor
- Plazo
- 
- 
- Paso
- Itinerario
- Cambio
- Involucramiento
- 
- Mejora continua
- Largo plazo y larga duración, poco dramático
- Pasos pequeños
- Continuo incremental
- Gradual y constante
- Involucra a todos
-

# MEJORA CONTINUA

- Es un enfoque para la solución de problemas
- Es conocida también como el círculo de Deming, que tiene como base 4 pasos:

1. PLANEAR

2. HACER

3. ESTUDIAR

4. ACTUAR

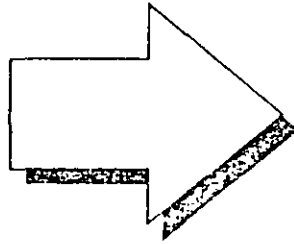


# Características

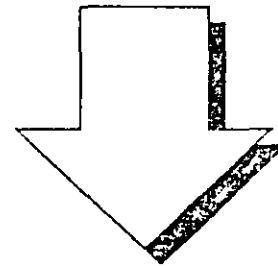
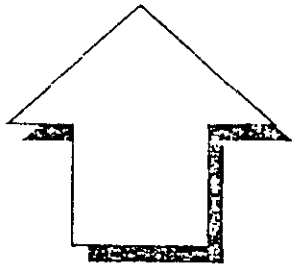
- Enfoque
- 
- 
- Requisitos
- 
- Ventaja
- Colectivo, esfuerzo de grupo, enfoque de sistema.
- Poca inversión, gran esfuerzo por mantenerlo
- Trabaja bien en economías de crecimiento lentas y c.

# Metodología

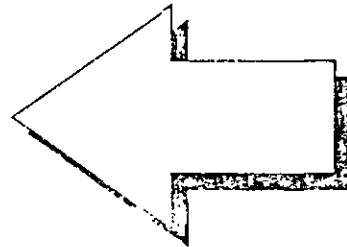
ACTUAR SOBRE  
RESULTADOS



PLANEAR



ESTUDIAR LOS  
RESULTADOS



LLEVAR A CABO  
EL PLAN

## **II. Planteamientos conceptuales básicos para mejorar**

- a) Obtener los hechos reales.
- b) Entender los hechos.
- c) Obtener la verdad, no importa donde se esconda.
- d) Para que estos puntos anteriores se resuelvan tenemos que involucrar los seis elementos que son: ¿qué?, ¿porqué?, ¿dónde?, ¿cuándo?, ¿quién?, ¿cómo?.

## **I. Identificación del problema**

Descubrir los posibles puntos problemáticos en un entorno aparente libre de problemas.

- a) Estar constructivamente insatisfecho.
- b) Buscar, localizar y eliminar con agresividad los problemas.

### **III. Haciendo planes para mejorar. Es la formulación de las ideas.**

- a) Búsqueda intensiva de metas.
- b) Hacer una crítica exhaustiva hacia porque se hacen ciertas cosas.
- c) Observar y reconocer problemas es la llave que abre la cámara de un gran tesoro de ideas de mejora.
- d) Formulación de ideas, en donde proponemos los medios para alcanzar las metas. El trabajo en grupo es excelente.

La formulación de ideas comprende el considerar y evaluar muchas ideas. Si el reconocimiento de un problema es la llave que abre la puerta del tesoro, entonces la formulación de ideas es coger el tesoro.

Una vez identificado el problema, y que se han formulado y evaluado las ideas, si se observa una deficiencia se repite el proceso hasta lograr una mejora verdaderamente útil.

Dentro de la propuesta de mejora deben considerarse la eficiencia de la inversión, la cantidad de inversión permitida, el periodo de recuperación y los hábitos como factores de evaluación.

La mejora siempre significa un cambio; el abandono de un método conocido siempre genera resistencia, pero hay que tomar en cuenta el refrán que dice "El cambio genera progreso".

## **Existen varias formas de matar las ideas.**

### **\* Entre estas encontramos las frases asesinas:**

- Nunca lo hemos hecho así.
- No va a funcionar.
- No tenemos tiempo.
- No tenemos personal.
- Ya lo hemos intentado.
- Ningún reglamento lo contempla.
- Preséntelo por escrito.
- No está en el manual.
- etc.

**\* También existen las frases defensivas:**

- Esto puede no funcionar, pero...
- Puede llevar mucho tiempo, pero...
- Está en contra de la política, pero...
- Este no es el momento, pero...
- No lo hemos analizado a fondo, pero...
- No conozco todos los detalles del tema, pero...
- No soy ningún genio, pero...

**\* Así como la presentación de ideas sin confianza.**



# Herramientas para la mejora

- Despliegue de funciones de calidad.
- Técnicas Taguchi.
- Gráficas de Pareto.
- Gráficos de flujo.
- Diagramas de causa efecto.
- Control estadístico de proceso.

## **IV. Implementación de planes de mejora.**

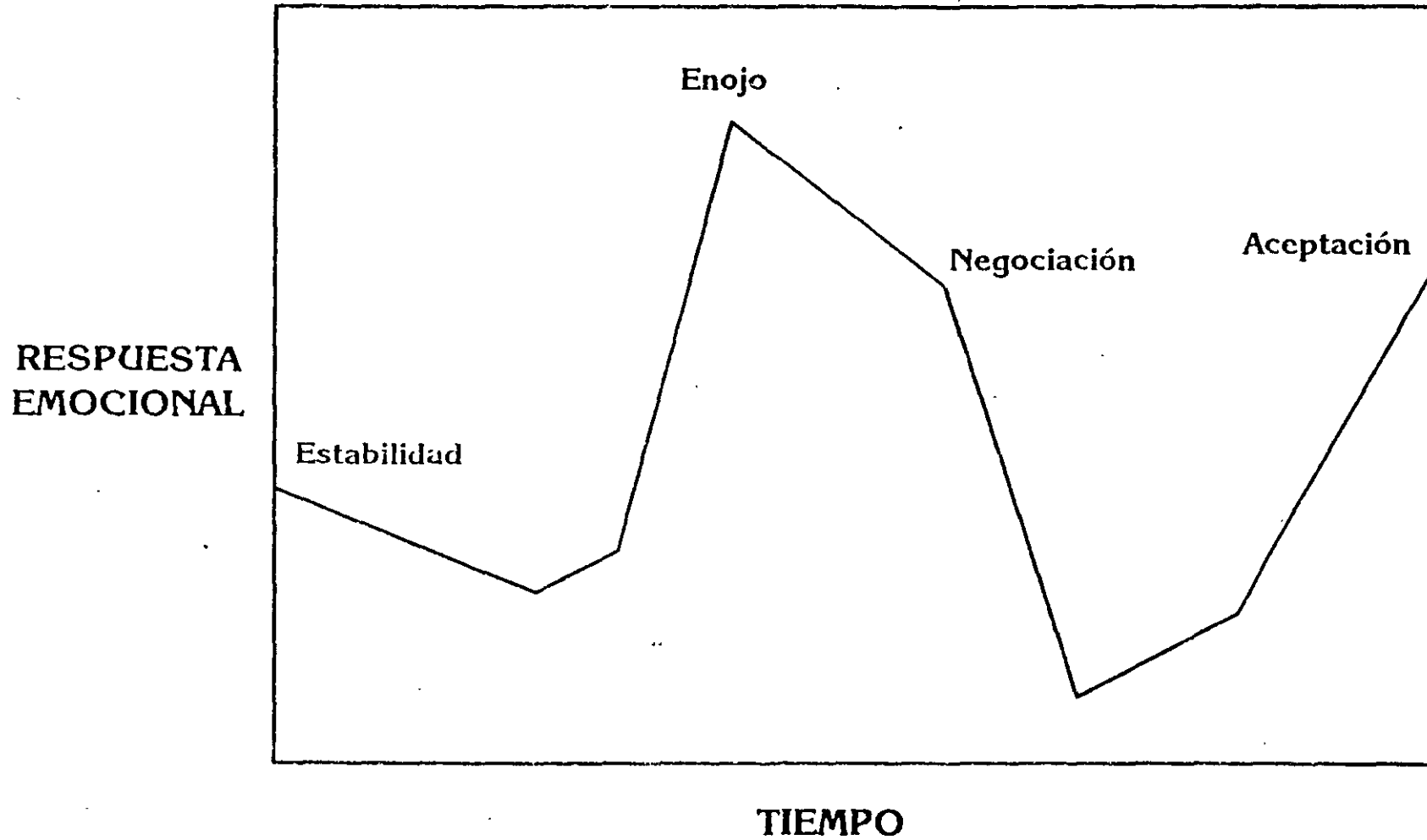
Entender y persuadir son los dos elementos a considerar en la Implementación de los planes de mejora.

Entender la mejora no garantiza que el individuo actúe, ya que la gente actúa después de convencerse.

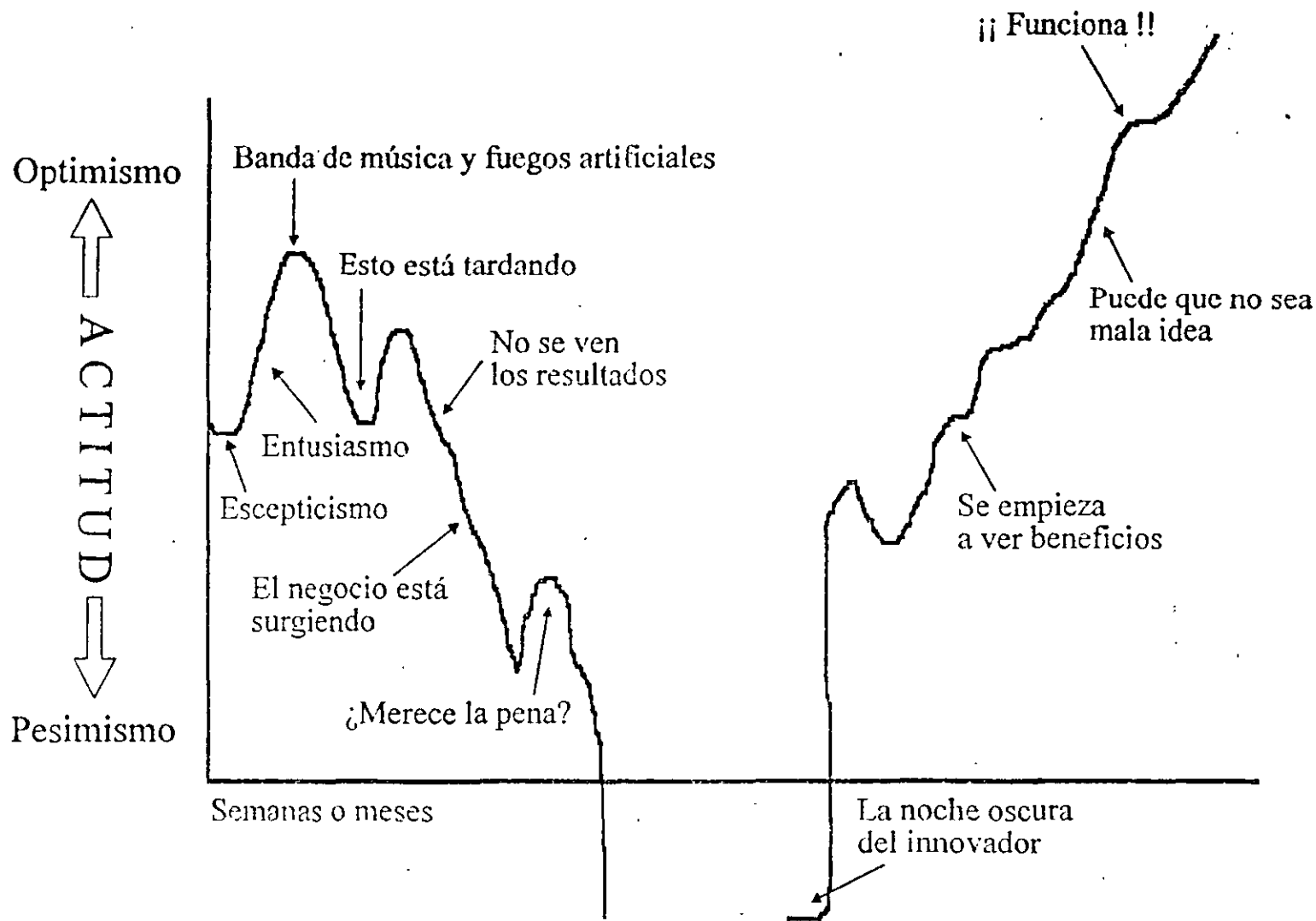
Superar hábitos.- El abandono de un método conocido siempre genera resistencia.

Planear la implementación de la mejora y sus controles.

# RESPUESTA NEGATIVA AL CAMBIO...



# ANATOMÍA DE LA INNOVACIÓN



Identificar los *deseos* del cliente.

Identificar los atributos del producto / servicio.

Relacionar los *deseos* del cliente con los *cómos* del producto o servicio.

Levar acabo una evaluación de los productos de la competencia.

Desarrollar especificaciones de desempeño para los *cómos* del producto o servicio.

Asignar (desplegar) los *cómos* en el lugar apropiado en el proceso.

# Manejo del proceso

1. ¿Cuál es mi producto o servicio?
2. ¿Quiénes son mis clientes?
3. ¿Qué necesitan mis clientes?
4. ¿Cuál es mi proceso?
5. ¿Cómo se comporta mi proceso?
6. ¿Qué puede hacerse para mejorar?
7. ¿Qué necesito de mis proveedores?

## Ejemplo de diagrama de Pareto

### Gráfica de inventario

Categoría: Alicates

Nombre de la herramienta	Necesaria	Tiempo	Exceso	Escasez	% de escasez total	% acumulado de escasez
De pico largo	10	0	0	8	53	53
Pinzas de ranura	6	1	0	4	26	79
Pinzas de presión	2	1	0	1	7	86
Pinzas de cizalla	4	3	0	1	7	93
Diagonales	16	21	0	0	0	93
De corte lateral	1	0	0	1	7	100%
TOTAL	43	34	0	15	100%	

Figura A-2 Hoja de trabajo de Pareto para inventario de una categoría de herramientas: alicates.

### Diagrama de Pareto

Categoría: Alicates

% de escasez total

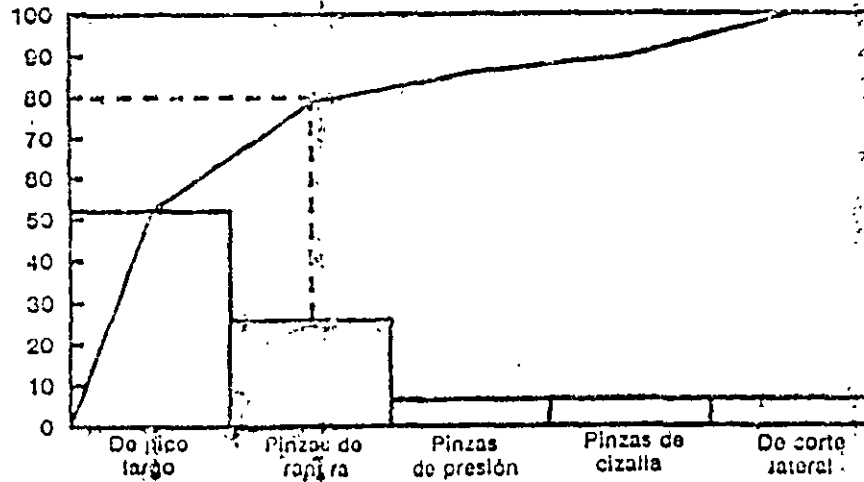


Figura A-3 Diagrama de Pareto para una categoría de herramientas: alicates.

# Gráficas de Pareto

- Son un método de organización de errores, problemas o defectos, para ayudar a enfocar los esfuerzos en la resolución de problemas.
- Juran popularizó el trabajo de Pareto, cuando sugirió que el 80% de los problemas de una empresa son resultado de únicamente el 20% de las causas



## 2.- De clasificación del proceso de producción

Con este método, la línea principal del diagrama sigue al proceso de producción y todas las causas que puedan afectar la calidad son agregadas a las varias etapas del proceso

Este tipo también puede ser hecho como un diagrama de línea de ensamble con las causas agregadas, la figura muestra un ejemplo de éste en el que la dispersión ocurre durante el proceso de producción, hay que analizar los pasos en el proceso de manufactura uno por uno para buscar las causas.

Las ventajas de este tipo de diagrama, es que, como sigue la secuencia del proceso de producción, es fácil de entender y de armar, ya que como se mencionó tenemos las bases del proceso original. Su punto débil consiste en que causas similares aparecen una y otra vez, y causas por una combinación de más de un factor son difíciles de ilustrar.

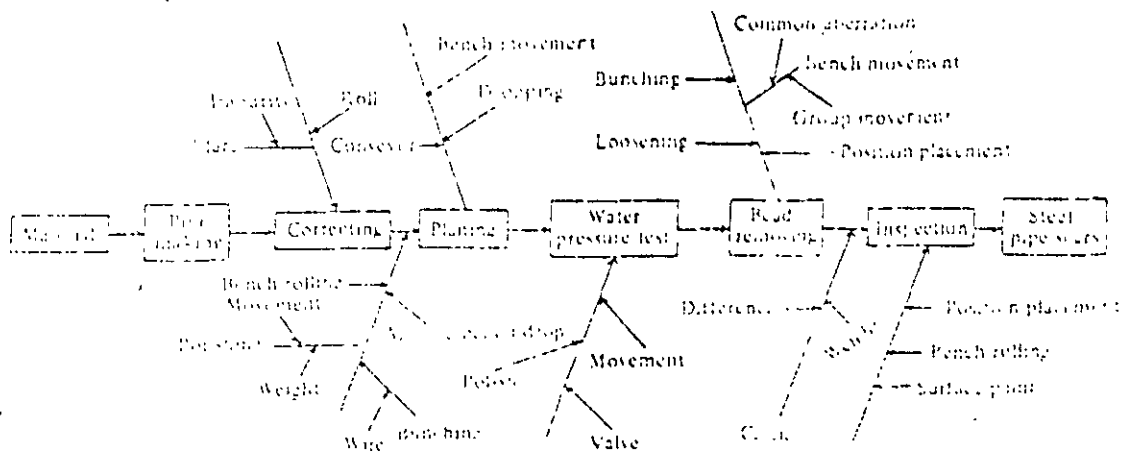
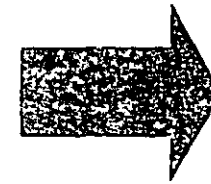
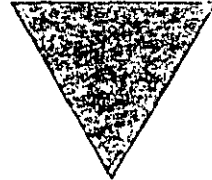
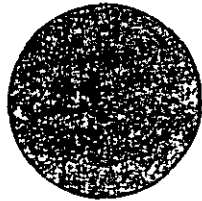


Figure 3.7 Cause and-effect diagram for steel pipe scars (process classification)

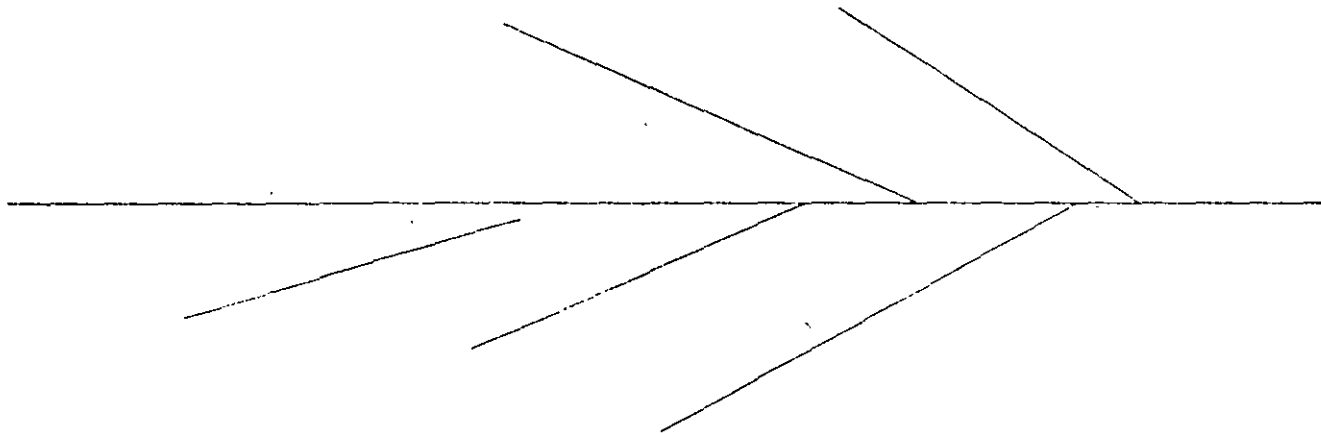
# Gráficas de flujo de proceso

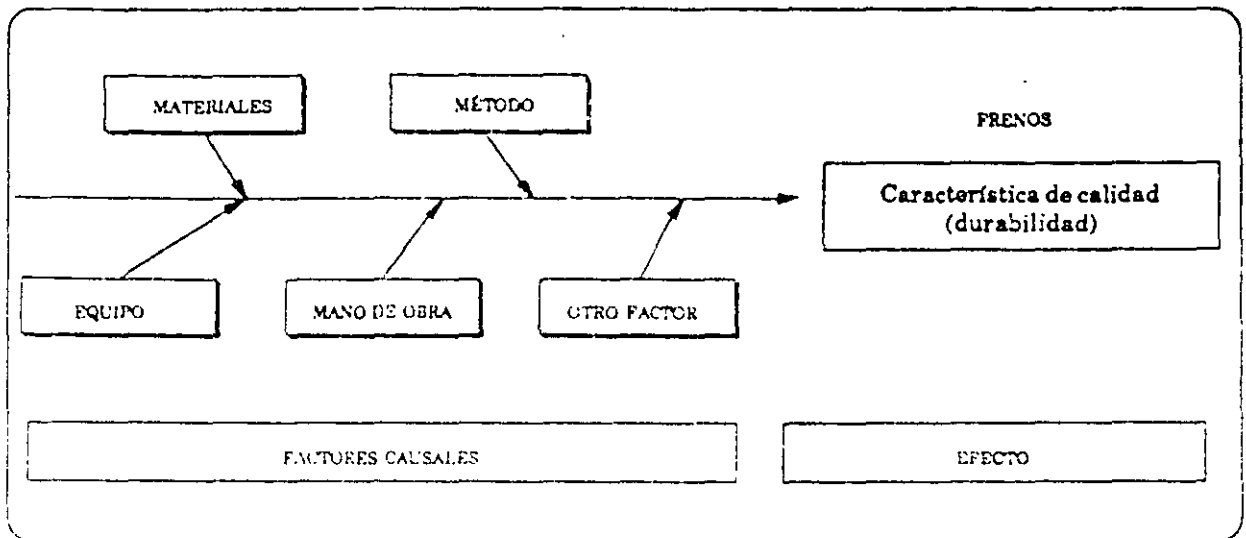
- Están diseñadas para ayudarnos a entender una secuencia de eventos, es decir, el proceso a través del cual viaja un producto.



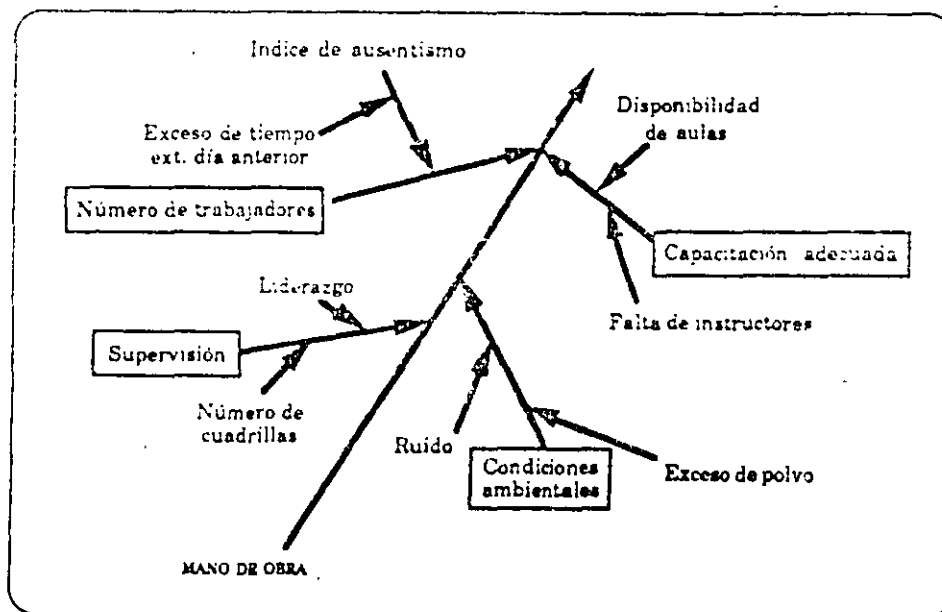
# Diagrama causa y efecto

- Nos sirve para identificar posibles ubicaciones en los problemas de calidad y y los puntos de inspección.
- Cada espina representa una posible fuente de error, lo cual, o los cuales son las causas del problema.





GRAFICA 15  
 Diagrama causa y efecto



GRAFICA 16  
 Diagrama causa y efecto:  
 Análisis del factor "mano de obra"

## Ejemplo de análisis de campo de fuerzas

Después del entrenamiento, un facilitador certificado de círculos de calidad desarrolló un plan y programa para implantar un programa piloto en la planta. Con el fin de asegurar el éxito del proyecto, el facilitador identificó en el campo de fuerzas todas las que eran restrictivas y motivadoras. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

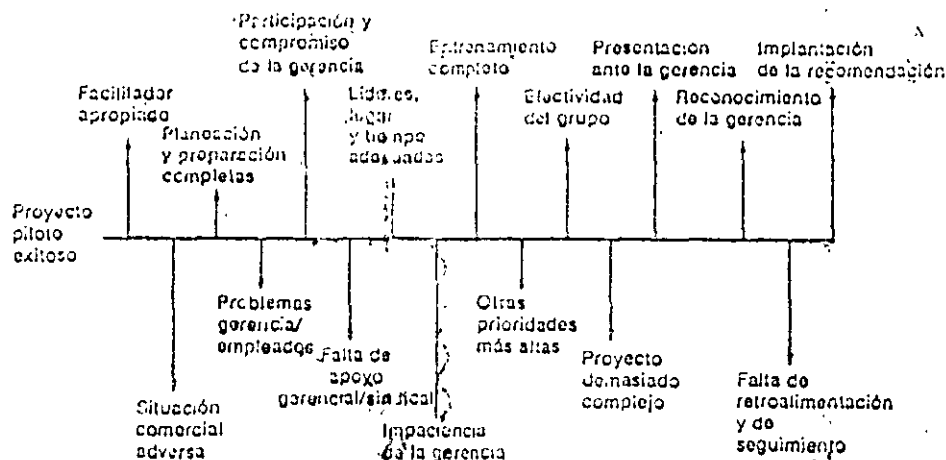


Figura A-7 Análisis del campo de fuerzas para determinar un proyecto piloto exitoso.

Ejemplo de diagrama causa y efecto

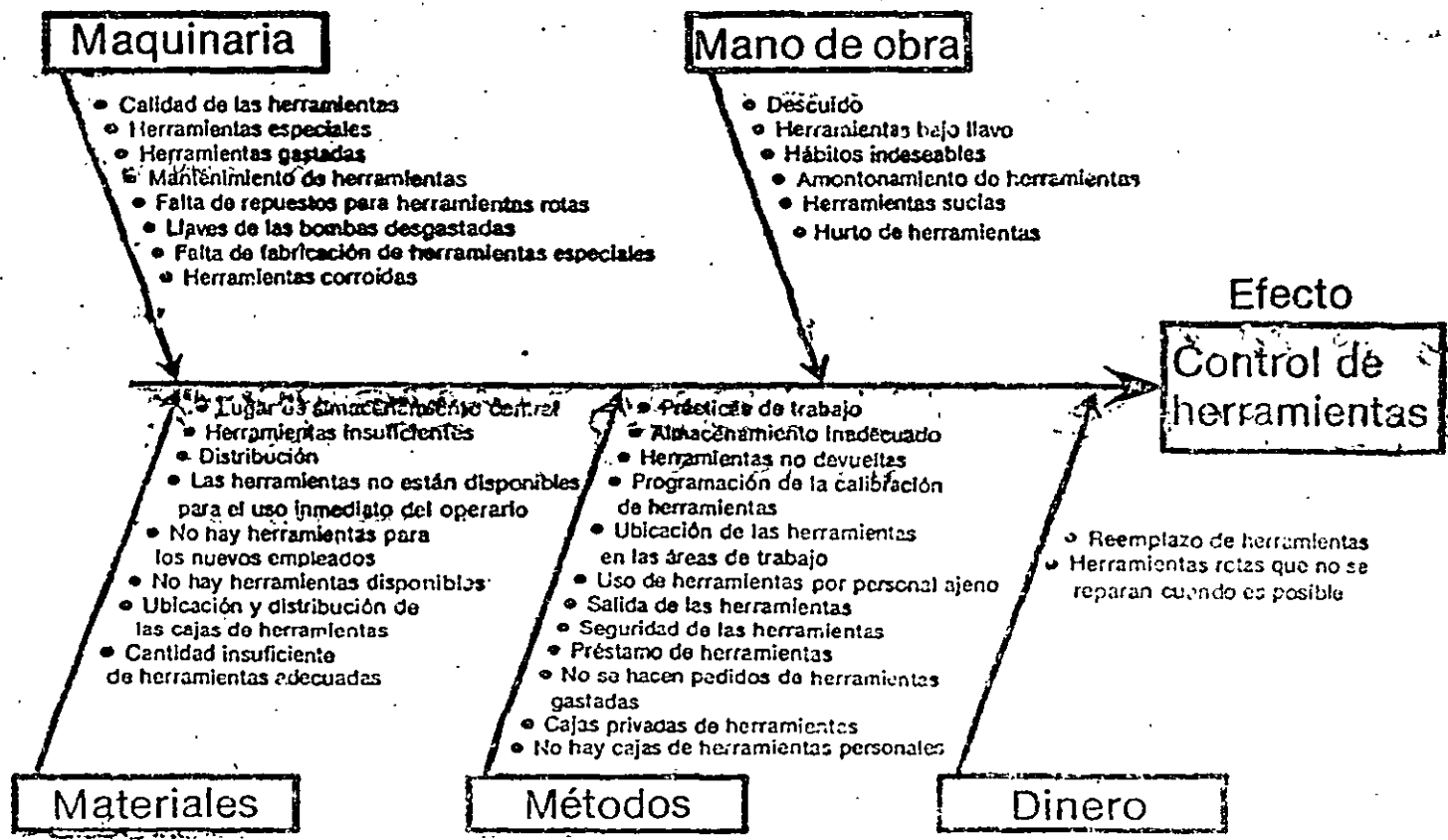


Figura A-1 Diagrama de causa y efecto.

# Control estadístico de proceso

- El control estadístico tiene que ver con con el monitoreo de estándares, mediciones, y toma de acciones correctivas.
- Las muestras de la salida del proceso se examinan, para ver si se encuentran dentro o fuera de los límites.
- Se localizan las causas, y se remueven dichas causas.

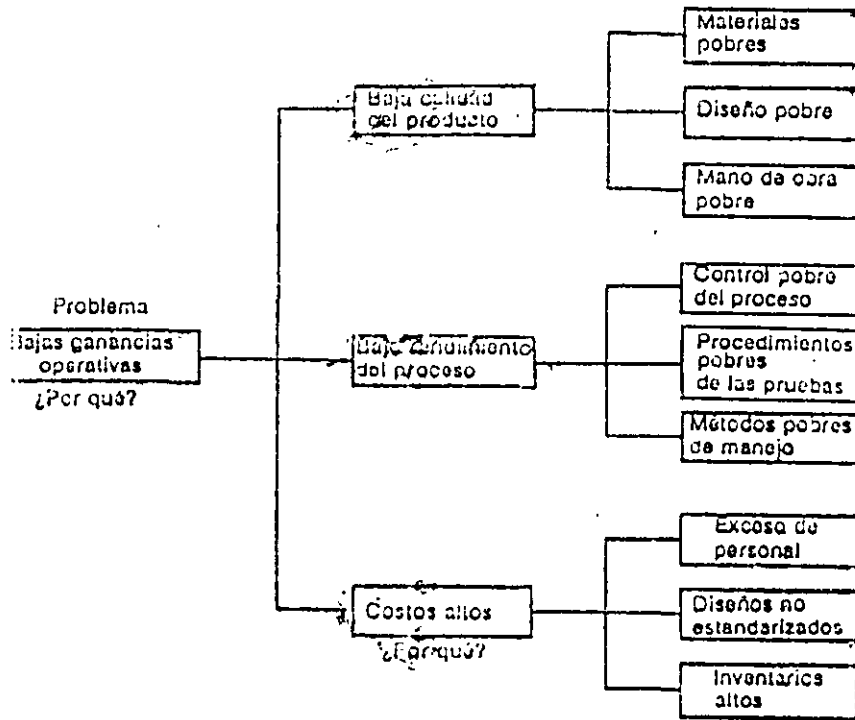


Figura A-5 Análisis "por qué" de bajas ganancias operativas.

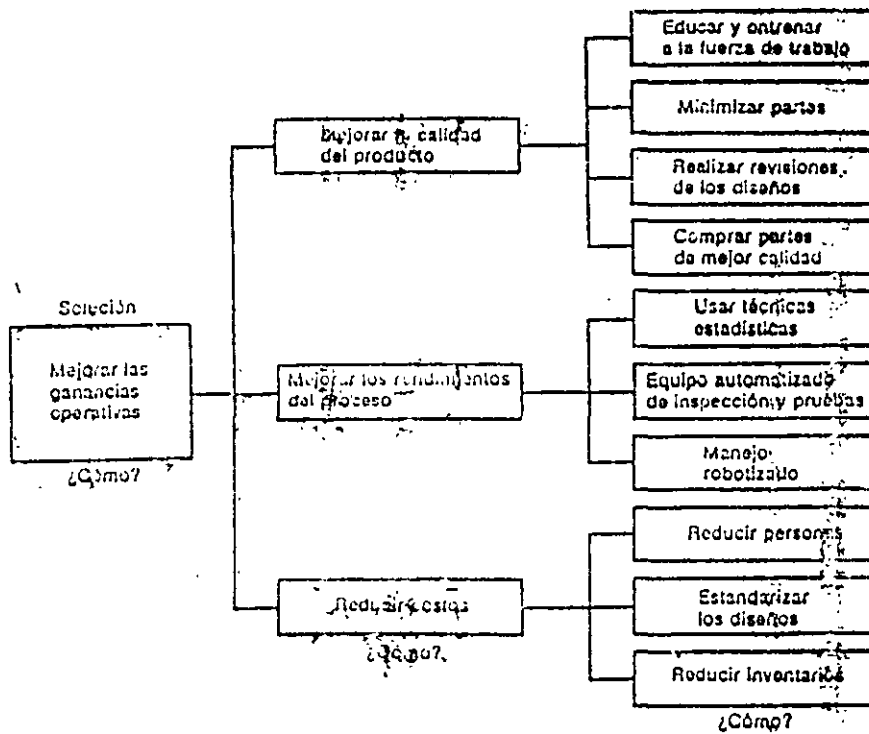
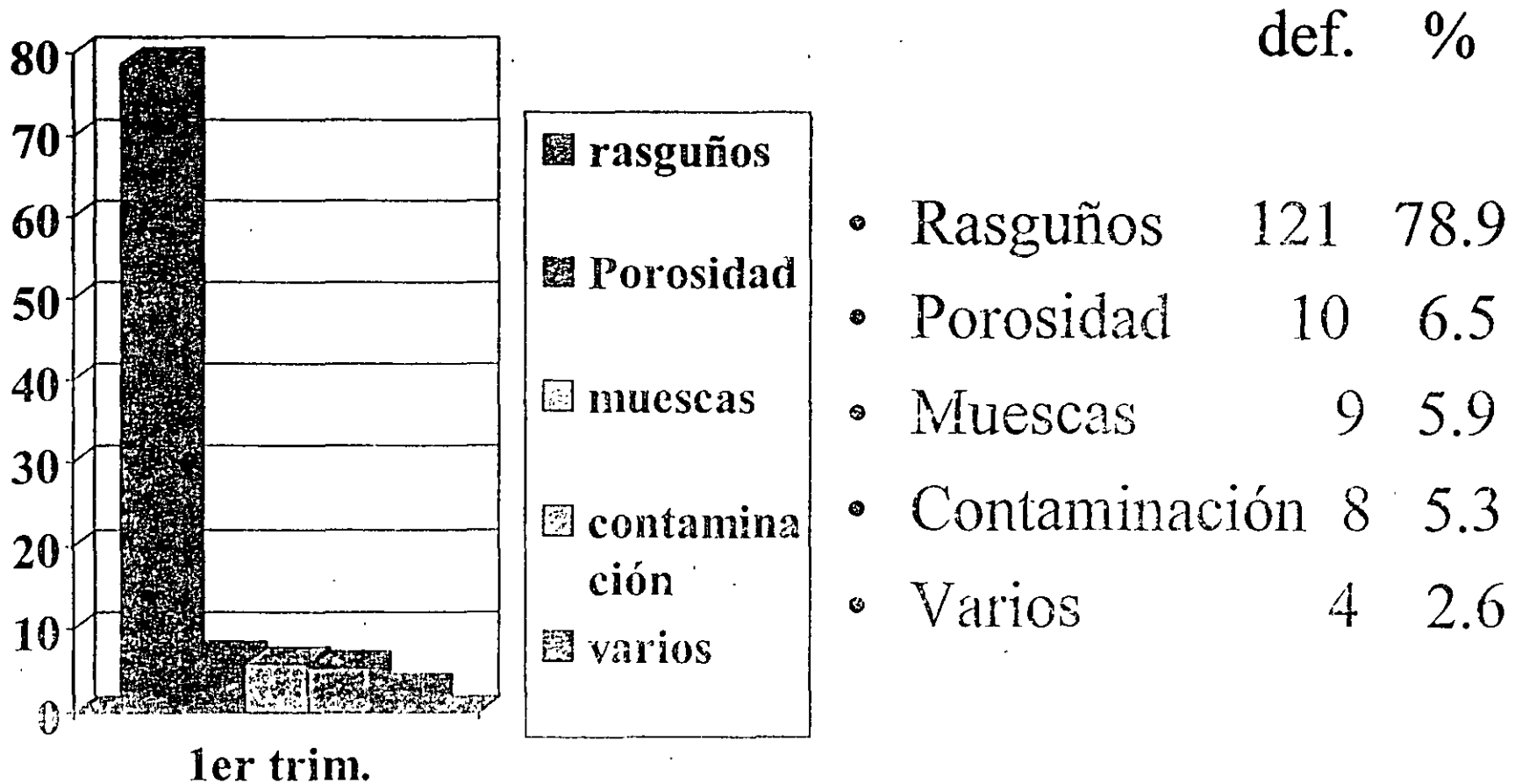


Figura A-6 Análisis "cómo" de las formas de mejorar las ganancias operativas.



# GRAFICA DE PARETO

donde se muestra que casi el 80% de los defectos son causados por rasguños



Procedimiento:

- El facilitador arregla la agenda de la presentación
- El líder, círculo y facilitador ensayan
- El líder presenta a los miembros
- Todos los miembros presentan por turnos las partes del proceso
- El líder explica lo que sigue después
- La gerencia responde
- El círculo sigue las recomendaciones de la gerencia (suponiendo que la presentación es aceptada)

Ejemplo de gráficas o histogramas: la gráfica de columnas  
Inventario de herramientas: alicates

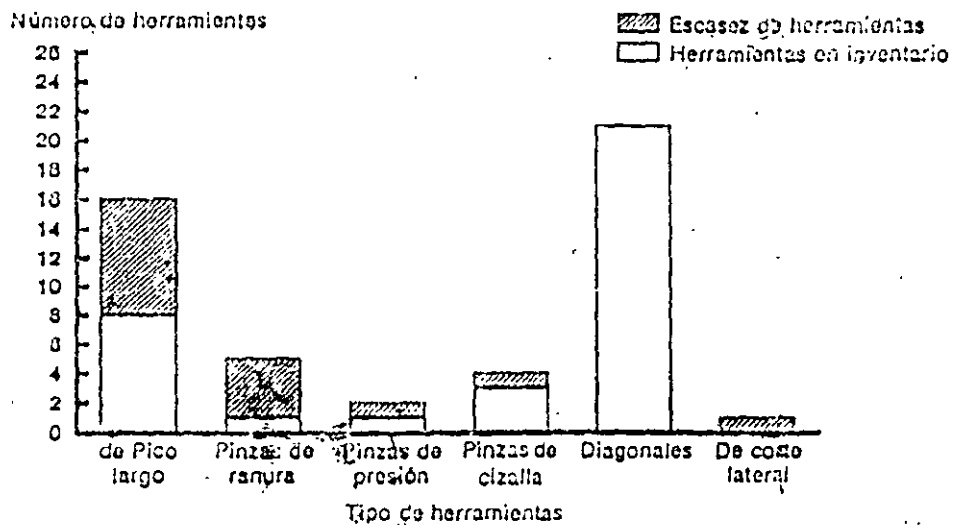


Figura A-4 Gráfica de columnas que muestra herramientas en inventario y la escasez de herramientas.

## VERIFICAR

proceso para satisfacer las metas

- Seleccionar las características a controlar
- Seleccionar las unidades de medida
- Establecer las mediciones
- Establecer estándares de desempeño
- Medir el desempeño actual
- Interpretar las diferencias
- Tomar acciones correctivas sobre las diferencias



## ACTUAR

Ajustar el proceso basado en los conocimientos

- Entender y persuadir
- Superar hábitos
- Planear la implantación
- Hacer operativa la mezcla de recursos (implantar)
- Repetir los pasos en la primera oportunidad



## IMPLANTACIÓN

- Con toda la experiencia obtenida en las fases anteriores, otras partes pueden ser llamadas a participar.
- Esta fase contempla una iniciativa de capacitación a todos los niveles, se forman y entrenan los equipos de acción para evaluar y mejorar los procesos e implantar el cambio.

## Manejo del proceso

1. ¿Cuál es mi producto o servicio?
2. ¿Quiénes son mis clientes?
3. ¿Qué necesitan mis clientes?
4. ¿Cuál es mi proceso?
5. ¿Cómo se comporta mi proceso?
6. ¿Qué puede hacerse para mejorar?
7. ¿Qué necesito de mis proveedores?

## FILOSOFÍA

Del griego

*philos*: amante

*sophia*: Sabiduría

Ciencia que trata de la esencia, propiedades y efecto de las cosas naturales, pero también se usa para nombrar el conjunto de principios fundamentales de una ciencia o arte.

## LOGICA

- Es aquella por la que el hombre procede en su modo de pensar de manera ordenada, consecuente y acertada.

## ACTIVIDADES PERMANENTES PARA LA IMPLANTACIÓN

- Programa de educación y entrenamiento
- Adecuación cultural.
- Sistema de reconocimiento
- Sistema de mejora continua.

## Catorce puntos de Deming para la instrumentación de la mejora

- 1 Crear consistencia de propósito.
- 2 Dirección para promover el cambio.
3. Construir la calidad en el proceso, dejar de depender de las inspecciones para descubrir problemas.
- 4 Construir relaciones a largo plazo basadas en el desempeño

5. Mejora continua del producto, de la calidad, del proceso y del servicio.
6. Dar principio a la capacitación.
7. Enfatizar el liderazgo.
8. Eliminar el miedo
9. Romper barreras entre departamentos.
10. Evitar presiones.

- 11 Apoyar, ayudar y mejorar
- 12 Quitar las barreras del orgullo en el trabajo.
13. Instituir un programa vigoroso de educación y automejora
14. Poner a todo mundo a trabajar en la transformación.

## Herramientas para la mejora

- Despliegue de funciones de calidad
- Técnicas Taguchi.
- Gráficas de Pareto.
- Gráficos de flujo.
- Diagramas de causa efecto.
- Control estadístico de proceso.

## DESPLIEGUE DE LAS FUNCIONES DE LA CALIDAD

- Es una técnica para definir las **relaciones** entre los deseos del cliente y los atributos del del producto o servicio
- Definir esta **relación** es el primer paso para hacer un sistema de producción de clase mundial.
- Se llevan acabo seis pasos básicos.

Identificar los *deseos* del cliente.

Identificar los atributos del producto / servicio.

Relacionar los *deseos* del cliente con los *cómos* del producto o servicio.

Levar acabo una evaluación de los productos de la competencia.

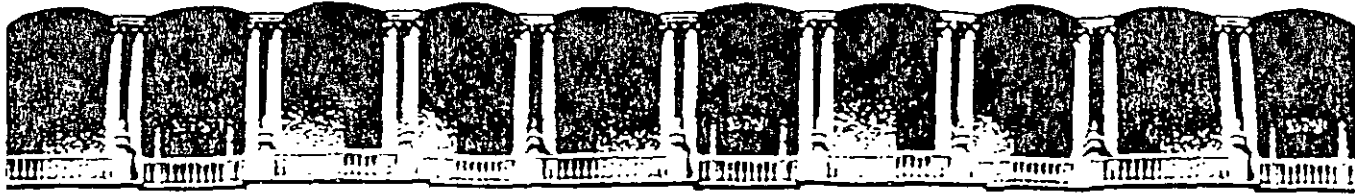
Desarrollar especificaciones de desempeño para los *cómos* del producto o servicio.

Asignar (desplegar) los *cómos* en el lugar apropiado en el proceso.

## Obtención de los hechos metodología de los 6 elementos



- ¿Que? (objeto)
- ¿Porque? (propósito)
- ¿Donde? (lugar)
- ¿Cuándo? (tiempo)
- ¿Quién? (sujeto)
- ¿Cómo? (metodo)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**MANUAL PARA LA ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS**

**EXPOSITOR: ING. JOSE LUIS TRIGOS  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

**DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL**

SECRETARIA GENERAL DE OBRAS



# **MANUAL PARA LA ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS**

**PROGRAMA DE LAS NACIONES  
UNIDAS PARA EL DESARROLLO**

**CENTRO DE LAS NACIONES UNIDAS  
PARA LOS ASENTAMIENTOS HUMANOS**





**DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL**

SECRETARIA GENERAL DE OBRAS



# **MANUAL PARA LA ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS**

**PROGRAMA DE LAS NACIONES  
UNIDAS PARA EL DESARROLLO**



**CENTRO DE LAS NACIONES UNIDAS  
PARA LOS ASENTAMIENTOS HUMANOS**



# PRESENTACION

---

## PRESENTACION

Los sismos de Septiembre de 1985, con origen en las costas de Guerrero, frente a la desembocadura del Río Balsas, tuvieron una magnitud nunca antes registrada y sus efectos sobre el Centro Histórico de la Ciudad de México, se vieron magnificados por la naturaleza del subsuelo.

Las consecuencias para la ciudad de México fueron catastróficas, cerca de 5,000 personas perdieron la vida y las pérdidas materiales fueron incontables. Las autoridades del Departamento del Distrito Federal, por instrucciones del Regente del Distrito Federal, C. P. Ramón Aguirre Velázquez, de inmediato canalizaron todos los recursos disponibles hacia el rescate de las personas atrapadas, a la atención de los damnificados y a restablecer los servicios públicos.

Subsanadas estas primeras necesidades, se contemplaron otras acciones que permitieran mitigar el riesgo sísmico, entre otras medidas se modificaron los reglamentos y normas aplicables a la construcción. Dentro de este ámbito, y para clarificar el contenido de las disposiciones, es que se elaboraron varios manuales, contando para ello con la cooperación de la Organización de las Naciones Unidas, a través de sus organismos especializados; el Centro de las Naciones Unidas para los Asentamientos Humanos (HABITAT) y el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), a ellos nuestro agradecimiento por la eficiente labor realizada.

Uno de estos manuales es el que ahora nos complacemos en presentar al medio interesado, en él varios expertos y asesores han volcado sus experiencias y conocimientos para clarificar con ejemplos las disposiciones reglamentarias evitando, hasta donde ello es posible, interpretaciones personales o comentarios subjetivos, por el esfuerzo hecho estamos seguros que estos trabajos serán un auxiliar valioso para quienes construyen en el Distrito Federal.

Francisco Noreña Casado  
Secretario General de Obras

# PREFACIO

## PREFACIO

Los presentes trabajos fueron ejecutados teniendo como marco de referencia el convenio de colaboración entre el Departamento del Distrito Federal y la Organización de las Naciones Unidas, designado como Proyecto MEX-86-009, que tuvo por objeto conocer los fenómenos sísmicos que afectan la ciudad de México y determinar acciones que mitiguen sus efectos.

Por parte del Departamento del Distrito Federal, fungió como Coordinador Nacional del Proyecto el Ing. Alejandro Rivas Vidal, Coordinador Técnico Operativo de la Secretaría General de Obras, y por parte de la Organización de las Naciones Unidas, se desempeñó como Asesor Técnico Principal el Dr. Ignacio Armillas, Oficial Superior de Asentamientos Humanos del Centro de las Naciones Unidas para los Asentamientos Humanos (HABITAT).

Este "Manual para la Estructuración de Edificios" recoge y ejemplifica varias disposiciones reglamentarias, sin embargo no debe entenderse que dicha normatividad se extiende al Manual, los criterios y ejemplos aquí expuestos deben tomarse sólo como una recomendación.

La ejecución de este manual estuvo encomendada a Rioboo, S. A., se ruega al lector dirigir las sugerencias u observaciones a Prado Sur #664, México, D. F., C. P. 11000.

Participaron en forma directa:

Ing. José Ma. Rioboo Martín  
Ing. Constancio Rene Rodríguez Cabello  
Ing. Luis Enrique Valdés López  
Ing. Othón Sánchez Páez  
Ing. Sergio Torres Téllez  
Ing. José Carlos Arce Rioboo

y como asesores:

M. en I. Jesús Iglesias Jiménez  
Ing. Francisco Robles Fernández-Villegas  
M. en I. Carlos Tapia Castro  
Ing. Carlos Javier Mendoza Escobedo  
M. en I. José Luis Trigos Suárez

gráficas y diagramas dibujados por:

Sr. Jesús Morales Máximo  
Sr. Sergio Gutiérrez Mendoza

# INDICE

1.-Introducción	Pág. 1	4.- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto	95
2.-Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal	13	4.1 Materiales	97
2.1 Disposiciones generales	15	4.2 Vigas	101
2.2 Características generales de las edificaciones para seguridad estructural	27	4.3 Columnas	103
2.3 Diseño por sismo	47	4.4 Losas	105
2.4 Diseño de cimentaciones	67	4.5 Muros	109
2.5 Obras provisionales y modificaciones	77	4.6 Marcos dúctiles	113
2.6 Capítulo único	81	4.7 Miembros a flexión	115
		4.8 Miembros a flexo-compresión	119
3.-Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo	85	4.9 Uniones viga-columna	123
3.2 Espectros para diseño sísmico	87	4.10 Losas planas	125
3.3 Reducción de fuerzas sísmicas	89	4.11 Concreto prefabricado	133
3.4 Factor de comportamiento sísmico	91	5.-Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería	135
3.5 Condiciones de regularidad	Anexo	5.1 Materiales para mampostería	137
		5.2 Sistemas estructurales a base de muros de mampostería	141
		6.-Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas	155
		6.1 Tipos de estructuras y métodos de análisis	157
		6.2 Estabilidad y relaciones de esbeltez	161
		6.3 Marcos dúctiles	165
		7.- Referencias	175

## **1.- Introducción**

## 1.- Introducción.

Para llevar a cabo el proyecto arquitectónico y el diseño estructural de los edificios que serán construídos en la Ciudad de México, es necesario contar con el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y con sus Normas Técnicas Complementarias.

Es por ello que a estos documentos se les considera como el marco de referencia técnico-legal que sirve de base para el diseño de los edificios ubicados en esta entidad.

Con el objeto de ampliar y complementar la información contenida en los documentos antes mencionados, las autoridades de esta Ciudad consideraron conveniente elaborar manuales operativos -- que tratarán con mayor extensión y profundidad algunos temas específicos, considerados fundamentales para el diseño de edificios. De esta manera, y con la valiosa cooperación de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), se procedió a realizar los documentos de apoyo que a continuación se mencionan:

- Manual para la estructuración de edificios
- Manual de análisis sísmico de edificios
- Manual para el diseño de cimentaciones
- Manual para el diseño de viviendas, para personas de escasos recursos

### 1.1. Objetivos del "Manual para la Estructuración de edificios"

El objetivo general que se estableció para este Manual fue el de integrar en un sólo documento a los artículos -- del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y a las especificaciones contenidas en sus Normas Técnicas Complementarias, que tienen relación directa con la estructuración de edificios.

Los objetivos específicos que se plantearon fueron los siguientes:

- Tratar de interpretar los artículos y especificaciones antes señalados.
- Ampliar la información presentada en los artículos y especificaciones mencionados.
- Tratar de exponer los motivos que llevaron a incluir los temas tratados en esos artículos y especificaciones en los documentos base anteriormente mencionados.
- Ejemplificar los temas tratados.
- Proponer procedimientos específicos -- en relación con los temas tratados en algunos artículos.
- Complementar la información de algunos artículos o especificaciones con los textos de otros artículos o especificaciones relacionados directamente con el tema.

- Proponer recomendaciones en relación con la aplicación de algunos temas -- tratados en los artículos y especificaciones correspondientes.

Los objetivos antes mencionados -- fueron establecidos partiendo de las siguientes premisas.

- Que por ser el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y sus Normas Técnicas Complementarias documentos oficiales, no era factible tratar los temas que en ellos se incluyen, con toda la amplitud que para algunos casos es deseable.
- Que las interpretaciones, comentarios y en algunos casos recomendaciones representan el punto de vista de los técnicos que colaboraron en este trabajo.
- Que este documento no pretende ser un tratado sobre estructuración de edificios, y que el objetivo buscado es el de servir de ayuda a los usuarios de los documentos oficiales mencionados.
- Que este documento se circunscribe -- únicamente a lo tratado, en relación con la estructuración de edificios en los documentos base; es decir, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (1987) y sus Normas Técnicas Complementarias y que, por lo tanto, su utilización directa, se limita a esta Ciudad.

- Que la organización de este Manual -- se definió en función del orden establecido por los artículos del Reglamento y de sus Normas Técnicas Complementarias.

Con el fin de entrar en materia de manera lógica y gradual se ha considerado conveniente tratar a continuación, algunos conceptos de carácter general relacionados con el tema base de este documento.

### 1.2. Diseño estructural

El diseño estructural es el procedimiento mediante el cual se definen -- los elementos que integran a las estructuras en lo referente a materiales, dimensiones, uniones, detalles en general y su ubicación relativa en los edificios. Estos elementos deberán presentar un comportamiento adecuado en condiciones de servicio y tener capacidad para resistir las fuerzas a las que estén sometidos sin que se presente el colapso de la estructura.

El diseño estructural se subdivide en los siguientes aspectos:

- Estructuración
- Análisis
- Dimensionamiento

### 1.3. Estructuración

La estructuración de los edificios es la primera etapa del diseño estructural. En ella se define la geometría general de la estructura (en planta y en elevación), se establecen los materiales a emplear, se determinan los elementos integrantes, definiendo su ubicación relativa en la estructura, se establecen los claros de las trabes y demás elementos horizontales y las alturas libres de los entrepisos, se proponen secciones y dimensiones tentativas de los elementos estructurales, se conceptualizan las uniones entre ellos, se definen los elementos no estructurales y sus sistemas de fijación a la estructura.

La estructuración de los edificios es la parte más subjetiva del proceso de diseño. Se basa en gran medida, en la experiencia y la creatividad de los ingenieros proyectistas. Sin embargo, esta etapa del proceso, deberá llevarse a cabo, cuidando que se cumpla lo señalado en los artículos y especificaciones del Reglamento relacionados con el tema.

Durante esta etapa del diseño estructural no se requiere llevar a cabo cálculos matemáticos complicados, ya que las dimensiones de los elementos estructurales y algunos otros aspectos se definen a partir de simples relaciones establecidas en el Reglamento de Construcciones y en sus Normas Técnicas Complementarias.

La estructuración es sin duda, la parte fundamental del diseño y en ella se reflejan de manera clara el criterio y la capacidad creativa del diseñador estructural y la influencia y la capacidad conceptual del arquitecto.

En la Ciudad de México, la estructuración de edificios plantea mayores complicaciones que para otras ciudades. Esto se debe, en parte a las condiciones del subsuelo y a la variabilidad de sus características, y en parte, a la ocurrencia de sismos de gran intensidad.

Se debe mencionar, que para diseñar estructuras de edificios se emplean modelos matemáticos/basados en hipótesis simplificadoras en las que se incluyen factores que representan a los conceptos involucrados. Sin embargo, en aquellos casos en los que la estructuración es muy compleja, es muy difícil predecir el comportamiento real de la estructura a partir de los modelos establecidos.

Por lo mencionado anteriormente, es aconsejable que al llevar a cabo la estructuración de los edificios que serán construidos en esta ciudad, se trate, en la medida de lo posible, que sus estructuras sean conceptualizadas de manera tal, que presenten formas sencillas y simétricas y que estas características se cumplan también en lo referente a masas, rigideces y resistencia, tanto en planta como en elevación.

1.4. Procedimiento para definir la estructura de edificios

Con el objeto de ejemplificar los pasos que se siguen en el proceso para diseñar y construir edificios, se muestra en la fig. 1.4-1 un diagrama de secuencias.

En el diagrama antes mencionado, se presenta la ubicación de la estructuración de los edificios dentro del contexto del diseño y de la construcción y se muestra la interrelación existente entre las actividades que participan en el proceso.

En la fig. 1.4-2 se presenta una opción de procedimiento para llevar a cabo la estructuración de edificios.

Las actividades consideradas en la fig. 1.4-2 son las siguientes:

A.- Recopilación de información

En esta etapa se obtiene la información general del edificio a construir:

- Se define el uso o destino del edificio.
- Se establece la ubicación específica del edificio (calle (s), número, colonia, etc.).
- Se analiza el diseño arquitectónico, el que sirve de base para la estructuración del inmueble.

- Se define la posibilidad de realizar un estudio de mecánica de suelos del predio, en función del diseño arquitectónico, uso del edificio, ubicación, etc.
- Se reúnen los documentos oficiales (Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y sus Normas Técnicas Complementarias) requeridos para llevar a cabo la estructuración del edificio.

B.- Definición de las características generales de la estructura

En esta etapa se define la geometría del edificio, tanto en planta como en elevación, y se subdivide en cuerpos (si ello es necesario) de tal manera que resulten formas regulares y simétricas, cuidando que se cumplan las especificaciones correspondientes a las relaciones permisibles largo-ancho, altura-ancho, etc.

C.- Clasificación del subsuelo del predio en el que se ubicará el edificio

A partir de la ubicación del predio y del estudio de mecánica de suelos (cuando éste se requiera) se clasificará el subsuelo del predio de acuerdo con la zonificación geológica establecida por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, pudiendo ser: Zona I (Lomas),

Zona II (Transición) o Zona III (Lago).

D.- Definición del grupo al que pertenece el edificio

A partir de la información obtenida, se define el grupo al que pertenecerá el edificio, existiendo dos posibilidades: construcciones del Grupo A y construcciones del grupo B, estas a su vez se subdividen en Subgrupo B1 y Subgrupo B2.

E.- Definición de los materiales estructurales

Se definen los materiales que se emplearán en la estructura basándose en la experiencia y conocimientos del proyectista y tomando en cuenta el proyecto arquitectónico, las características generales de la estructura y el grupo al que pertenece el edificio.

Es usual que en muchas estructuras se empleen dos o más materiales diferentes. Así se tienen estructuras de:

- Acero
- Concreto (elementos colados en sitio, elementos prefabricados o soluciones mixtas)
- Madera
- Acero y concreto



- Acero y mampostería
  - Concreto y mampostería
- F.- Definición de los elementos estructurales portantes
- En esta etapa se definen los elementos estructurales portantes y aquellos que resistirán los efectos de cargas horizontales. Entre las opciones factibles se tienen:
- Estructuras únicamente con marcos
  - Estructuras únicamente con muros
  - Estructuras con marcos y muros
  - Estructuras con marcos y contravientos
  - Estructuras con columnas y losas planas
- G.- Definición de los sistemas de piso
- Se definen los sistemas de piso correspondientes tanto a los entresijos como a las azoteas. Para ello, se toman en cuenta tanto las cargas verticales como las horizontales. Estos sistemas de piso deberán funcionar también como diafragmas horizontales.
- Existen las siguientes opciones:
- . Losas apoyadas en travesaños paralelos
  - . Losas perimetrales apoyadas
  - . Losas planas
- . Losas macizas
  - . Losas aligeradas
- H.- Definición de los claros y alturas de entrepiso
- Aun cuando desde el diseño arquitectónico se han definido los claros y las alturas de entrepiso, en esta etapa se hace un análisis cualitativo desde el punto de vista estructural, con el objeto de verificar si los claros y alturas propuestos en el proyecto arquitectónico son factibles de cumplir o, en su caso, deben modificarse.
- I.- Definición de los materiales específicos a utilizar en los elementos estructurales.
- Partiendo de los claros y alturas de entresijos, se establecen los materiales estructurales que se emplearán en cada elemento. Como ejemplo de las opciones disponibles pueden mencionarse las siguientes:
- Marcos de acero y losas y muros de concreto
  - Marcos de concreto colados en el lugar y losas prefabricadas de concreto
- J.- Definición de las secciones transversales y dimensiones de los elementos estructurales
- En esta etapa se establecen las secciones transversales de cada uno de los elementos estructurales. Paralelo se toman en cuenta las especificaciones (correspondientes a cada material) indicadas en las Normas Técnicas Complementarias. En el caso de las estructuras metálicas y de los elementos prefabricados de concreto es conveniente emplear elementos de línea o estandarizados.
- Esta actividad se realiza sin emplear cálculos matemáticos complicados, utilizándose únicamente algunas relaciones geométricas señaladas en las Normas Técnicas.
- K.- Definición de las uniones entre elementos estructurales
- Partiendo de las secciones transversales, dimensiones y materiales de los elementos estructurales, se procede a definir las uniones entre ellos. Estas uniones serán bastante simples en el caso de elementos de concreto colado en el lugar, presentarán mayores complicaciones en el caso de elementos estructurales metálicos y serán bastante complejas cuando se empleen elementos pre-

fabricados de concreto (trabes y columnas). Esta definición es a nivel conceptual sin entrar al detalle en lo referente a armados o dimensiones específicas.

#### L.- Definición de elementos no estructurales

En esta etapa se definen los elementos no estructurales que van a formar parte de la construcción y que por su peso y características podrían modificar de manera sustancial el comportamiento general de la estructura.

Algunos ejemplos de elementos no estructurales que presentan las características antes mencionadas son:

- Pretiles
- Muros de fachada
- Muros de colindancia
- Muros divisorios

Es importante incluir dentro de esta actividad la definición de los materiales que se van a emplear en estos elementos.

#### M.- Definición de la fijación de los elementos no estructurales

Se establece de manera conceptual la forma en que se fijarán los elementos no estructurales a la propia estructura. Esta etapa es muy im-

portante, ya que de no llevarse a cabo una fijación adecuada se puede modificar notablemente el comportamiento de la estructura, principalmente ante efectos sísmicos. Debido a una incorrecta fijación de estos elementos a la estructura se puede evitar el libre desplazamiento de esta o aun modificar la rigidez y capacidad sismo-resistente de la misma.

#### N.- Revisión cualitativa de la estructura propuesta ante cargas verticales y horizontales

Con el objeto de verificar si la estructura está correctamente conceptualizada, se llevará a cabo un análisis breve y cualitativo de la misma, analizando los elementos resistentes de la estructura tanto para cargas gravitacionales como para fuerzas horizontales. Esto se realiza en ambos sentidos tomando en cuenta la conveniencia de tener simetría de resistencias, rigideces y masas, tanto en planta como en elevación. En esta etapa de diseño se visualiza el comportamiento de la estructura bajo los efectos de fuerzas verticales y horizontales.

#### O.- Definición de la cimentación

A partir de la información obtenida del estudio de Mecánica de Suelos y de la estructuración definida en las actividades anteriores, se propone, desde el punto de vista con-

ceptual, la cimentación del edificio a construir.

Con la actividad anterior se da por terminado el Proceso de Estructuración de edificios procediendo posteriormente al análisis estructural y al dimensionamiento, actividades donde los aspectos cuantitativos son de gran importancia.

Conviene señalar que el procedimiento para la estructuración de edificios aquí propuesto representa una opción factible para llevar a cabo esta actividad; sin embargo, existen otras alternativas adecuadas para el caso.

#### 1.5. ¿A quién va dirigido este Manual?

Se pretende que este documento sea de utilidad práctica para arquitectos e ingenieros proyectistas que tengan que realizar el diseño arquitectónico y/o estructural de los edificios que se localizarán en el Distrito Federal.

#### 1.6. Organización del Manual

El manual consta de seis capítulos:

- En el capítulo 1 se presentan los conceptos introductorios.

- En el capítulo 2 se tratan los artículos correspondientes al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (Título Sexto y Décimo Segundo).
- En el capítulo 3 se presentan las especificaciones correspondientes de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo.
- En el capítulo 4 se incluyen las especificaciones correspondientes a las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto.
- En el capítulo 5 se incluyen las especificaciones correspondientes a las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería.
- En el capítulo 6 se presentan las especificaciones correspondientes a las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas.
- Además se incluyen referencias.

### 1.7. Forma de presentación del Manual

Para presentar los artículos y especificaciones incluidos en este manual, se ha optado, en términos generales, por el formato que se describe a continuación:

- Se subdivide el espacio en dos columnas.

- La primera columna sirve para presentar el texto del artículo o de la especificación tal como aparece en el documento base (esta columna presenta siempre las mismas dimensiones).
- La segunda columna, que se encuentra enmarcada en un rectángulo, es la que sirve para presentar la información complementaria de cada artículo en lo correspondiente a comentarios, recomendaciones y ejemplos.
- En algunos casos, al presentar el texto correspondiente a un artículo o especificación se incluye, para complementar la información, el texto de otro artículo o especificación, que tiene relación directa o que está mencionado en el primer texto.
- Para presentar los comentarios o información correspondiente a cada artículo o especificación, se ha tratado, en la medida de lo posible, de seguir un mismo formato, de la manera:

a) En este artículo se indica que:

En este rubro se presenta el contenido esencial del artículo o especificación.

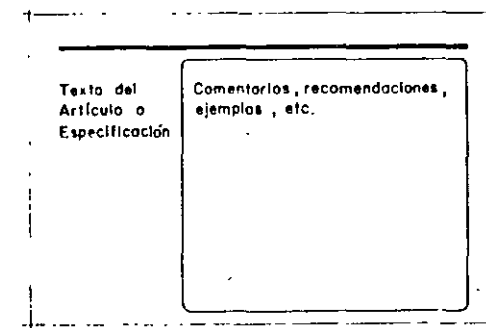
b) Objetivo.

En esta parte se tratan de presentar o exponer las razones que originaron al artículo o especificación.

A continuación con las letras c), d), e), f), etc. se presentan comentarios, procedimientos, señalamientos, recomendaciones y --- ejemplos.

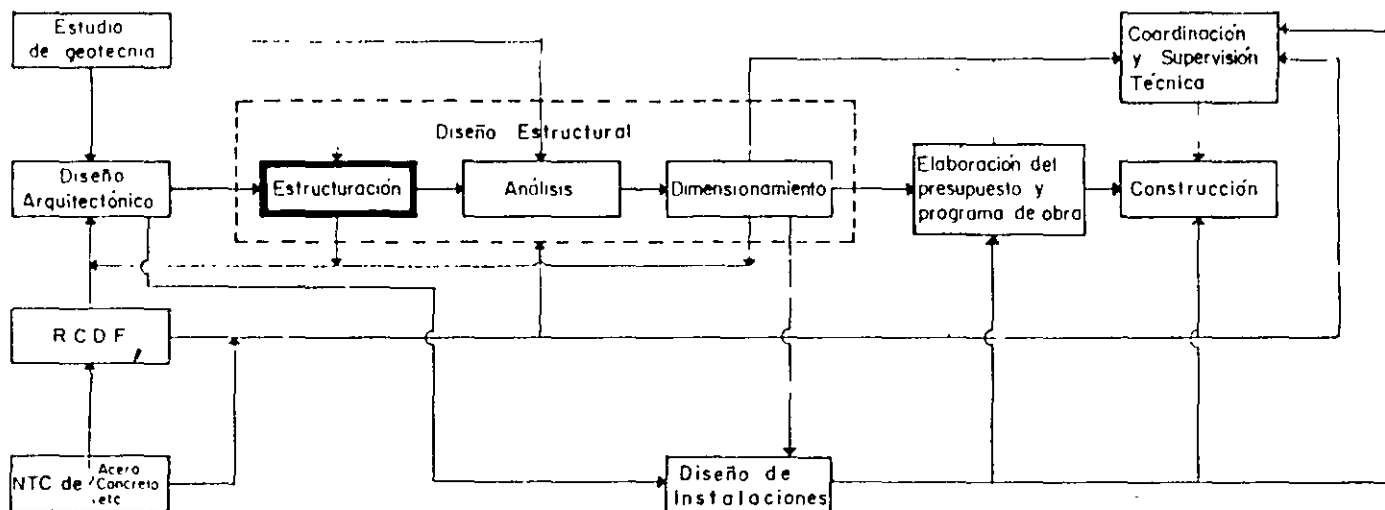
Cuando se presentan recomendaciones o ejemplos sobre algún tema, se indican las siguientes calificaciones:

- Recomendable
- No recomendable
- Inaceptable
- Se debe cumplir



Debido a que continuamente se hace referencia del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y a sus Normas Técnicas Complementarias, estos documentos se abrevian en los textos, de acuerdo a lo siguiente.

RCDF	(1987)	Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (1987)	1.8 Observación final
NTCC	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto	<p>Finalmente es indispensable señalar que si el usuario del presente manual llega a encontrar alguna discrepancia entre la información aquí presentada y la correspondiente a los documentos base; a saber, reglamento de construcciones para el Distrito Federal y Normas Técnicas Complementarias, deberá optar por tomar la información correspondiente a estos últimos (RCDF y NTC) que son los documentos oficiales y los establecidos por las autoridades de esta Ciudad para el Diseño y Construcción de edificios.</p>
NTCM	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de mampostería	
NTCME	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras metálicas	
NTCMA	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de madera	
NTCCI	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño de cimentaciones	
NTCS	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo	
NTCV	(1987)	Normas Técnicas Complementarias para diseño por viento	



PROCEDIMIENTO PARA EL DISEÑO Y CONSTRUCCION DE EDIFICIOS

RELACION DE ARTICULOS CORRESPONDIENTES A CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES DEL PROCEDIMIENTO PARA LA  
 ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS (EN FUNCION DEL NUMERO QUE LE CORRESPONDE EN EL INDICE DEL MANUAL ) <sup>A</sup> AL )

Actividad	Documento	R. C. D. F.	N T. C.			
			Sismo	Concreto	Mampostería	Metálicas
A - Recopilación de información		174, 176, 210, 221				
B - Definición de las características generales de la estructura		176, 177, 209, 211, 221	2, 2, 5, 6			
C - Clasificación del subsuelo del predio en el que se ubicará el edificio		175, 210				
D - Definición del grupo al que pertenece el edificio		174				
E - Definición de los materiales estructurales			5	1, 4, 1, 4, 2, 5, 1, 6	2, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 4, 3, 5, 3, 6	1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
F - Definición de los elementos estructurales portantes		204, 209, 238, 323	2, 2, 2, 6, 3, 4, 1, 5	4, 5, 1, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 3, 6	2, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 3, 5, 3, 6	1, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
G - Definición de los sistemas de piso		238, 323	2, 2, 3, 4, 1, 5, 6	4, 3, 1, 4, 3, 3, 6, 1, 8		
H - Definición de los claros y alturas de entrepiso		176	2, 2, 6	4, 1, 2, 4, 2, 1, 6	3, 1, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 3, 5	1, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
I - Definición del material específico a utilizar en elementos estructurales			5	1, 4, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 6	2, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4	1, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 5
J - Definición de las secciones transversales y dimensiones de los elementos estructurales				4, 1, 2, 4, 2, 1, 4, 3, 1, 4, 3, 3, 4, 5, 1, 4, 5, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 3, 3, 4, 4, 0, 1, 6, 1, 3, 6	3, 2, 3, 3, 3, 4	1, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
K - Definición de las uniones entre elementos		204, 238, 323	2, 2, 6	5, 4, 6, 1, 6, 1, 3, 6	3, 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4	1, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3
L - Definición de los elementos no estructurales		179, 180, 204, 210			3, 5, 3, 6	
M - Definición de la fijación de los elementos no estructurales		179, 180, 204, 210			3, 5, 3, 6	
N - Revisión cualitativa de la estructura propuesta ante cargas verticales y horizontales		323				
O - Definición conceptual de la cimentación		219, 221, 238				

RELACION DE CAPITULOS DEL MANUAL REFERENTES A CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES DEL PROCEDIMIENTO PARA LA ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS

Actividad	Documento	R C D F	N T. C.			
			Sismo	Concreto	Mampostería	Metálicas
A - Definición de los tipos de edificios		211, 221, 241, 242	31, 34, 35			
B - Definición de las características generales de la estructura	221, 223, 232, 234, 242					
C - Consideración del subsuelo, del predio en el que se usará el edificio	212, 241					
D - Definición del grupo al que pertenece el edificio	211					
E - Definición de los miembros estructurales		35	411, 412, 401, 411	511, 512, 513, 521, 522, 523, 524, 525, 526	61, 631, 632	
F - Definición de los elementos estructurales portantes	231, 232, 261, 261	31, 32, 33, 34, 35	451, 462, 47, 48, 411	511, 521, 522, 523, 524, 525, 526	61, 621, 622, 631, 632, 633	
G - Definición de los sistemas de piso	251, 261	31, 32, 33, 34, 35	441, 442, 4101			
H - Definición de los ríostros y alfileros de entrepiso	221	31, 34	421, 431, 411	521, 522, 523, 524, 526	61, 621, 622, 631, 632, 633	
I - Definición del material específico a utilizar en elementos estructurales		33	411, 412, 461, 411	511, 512, 513, 521, 522, 523, 524	61, 621, 622	
J - Definición de las secciones transversales y dimensiones de los elementos estructurales			421, 431, 441, 442, 451, 462, 461, 471, 481, 491, 4101, 4102, 411	522, 523, 524	61, 621, 622, 631, 632, 633	
K - Definición de las uniones entre elementos	231, 251, 261	31, 35	401, 4101, 4102, 411	521, 522, 523, 524	61, 621, 622, 631, 632, 633	
L - Definición de los elementos no estructurales	223, 224, 231, 233			525, 526		
M - Definición de la fijación de los elementos no estructurales	223, 224, 231, 233					
N - Revisión cuantitativa de la estructura propuesta ante cargas verticales y horizontales	261					
O - Definición conceptual de la cimentación	241, 242, 251					

En función del número que le corresponde en el índice del manual:

## **2.- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal**



**ARTICULO 174.** Para los efectos de este Titulo las construcciones se clasifican en los siguientes grupos:

**I. - Grupo A.** Construcciones cuya falla estructural podria causar la perdida de un numero elevado de vidas o perdidas economicas o culturales excepcionalmente altas, o que constituyan un peligro significativo por contener sustancias inflamables o explosivas, así como construcciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una experiencia reciente. Como hospitales y escuelas, estadios, grandes salas de espectáculos y hoteles que tengan salas de reunión que puedan albergar más de 200 personas; pasadizos de salida de sustratos inflamables o líquidos, terminales de transporte, estaciones de bomberos, subestaciones eléctricas, centrales telefónicas y de telecomunicaciones, archivos y bibliotecas públicas de particular importancia al inicio del siglo, edificios municipales y locales que alberguen equipos de seguridad pública.

**II. - Grupo B.** Construcciones comunes destinadas a vivienda, oficinas y locales comerciales, hoteles y restaurantes comerciales e industriales no incluidas en el grupo A, las que se subdividen en:

**SUBGRUPO B1.** Construcciones de más de 30 m de altura y con más de 6,000 m<sup>2</sup> de área total construida, de acuerdo a las zonas (1) y (2) del artículo 175 de este Reglamento.

a.- En este artículo se indica que:

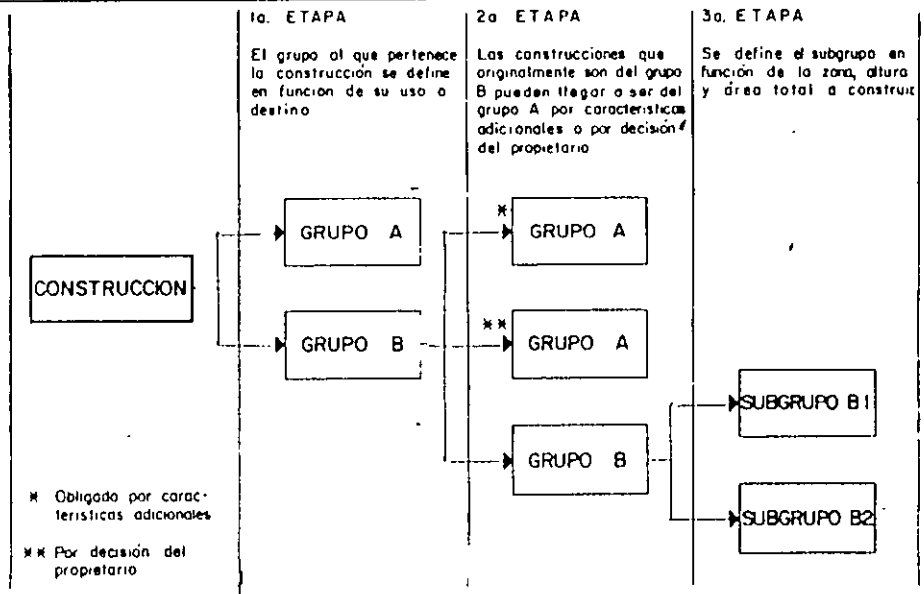
- los edificios se pueden clasificar en función de las pérdidas que se puedan producir al fallar sus estructuras, en:

- Grupo A
  - Grupo B
- { Subgrupo B1  
Subgrupo B2

b.- Objetivo

Clasificar las construcciones en -- función de las posibles pérdidas -- que puedan ocurrir al fallar sus estructuras; para que cuenten con factores de seguridad adecuados para -- cada caso.

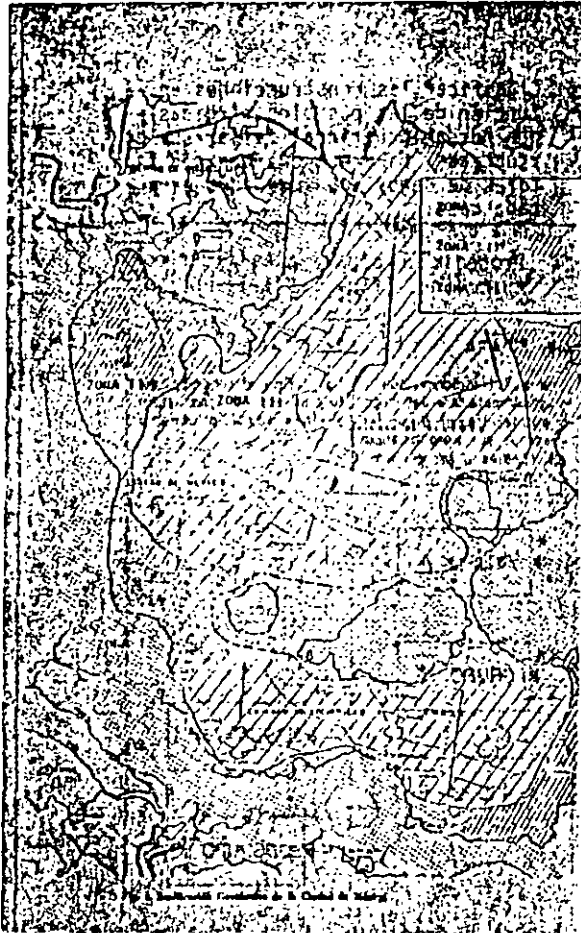
c.- Procedimiento para clasificar construcciones (fig. 2.1.1-1)



PROCEDIMIENTO PARA CLASIFICAR CONSTRUCCIONES

Fig 2.1.1-1

# 2.1.1.



- Primera etapa

El grupo al que pertenece la construcción se define en función de su uso o destino.

EDIFICACION	GRUPO	POR USO O DESTINO	
		A	B
- Hospitales		X	
- Escuelas		X	
- Estadios		X	
- Templos		X	
- Salas de espectáculos		X	
- Terminales de transporte		X	
- Depósitos de sustancias tóxicas o explosivas		X	
- Estaciones de bomberos		X	
- Centrales telefónicas		X	
- Locales que alojen equipo costoso		X	
- Subestaciones eléctricas		X	
- Gasolineras		X	
- Museos		X	
- Archivos y registros públicos importantes a juicio del DOF		X	
- Monumentos		X	
- Viviendas			X
- Oficinas			X
- Locales comerciales			X
- Construcciones industriales			X
- Hoteles			X

Tabla 211-1

- Segunda etapa

Los edificios que originalmente se definieron en función de su uso o destino como del grupo B, es factible que tengan que clasificarse en el grupo A de acuerdo a lo siguiente:

\* Por características adicionales que obligan a clasificarlos en el grupo A, tales como:

- . Edificios que cuentan con salas de reunión con capacidad para más de 200 personas.
- . Edificios en los que parte de su área construida se destina a escuelas.
- . Edificios en donde se ubiquen equipos delicados y costosos.
- . Edificios en los que se almacenen sustancias tóxicas y explosivas.

También se recomienda para edificios de 10 o mas niveles o que alojen a 500 o más personas.

\*\* Por decisión del propietario

- . En función de que las estructuras del grupo B se encuentran limitadas en cuanto a sus posibilidades de comercialización, por no permitir que se ubiquen en ellos equipos delicados y costosos, ciertas sustancias químicas, etc. Sus propietarios pueden optar por

que estos edificios (destinados a hoteles, viviendas multifamiliares, etc.) se clasifiquen en el grupo A aumentando sus posibilidades de rentabilidad y su nivel de seguridad.

- Tercera etapa

Para definir el Subgrupo al que pertenecen los edificios del grupo B se toma en cuenta lo siguiente:

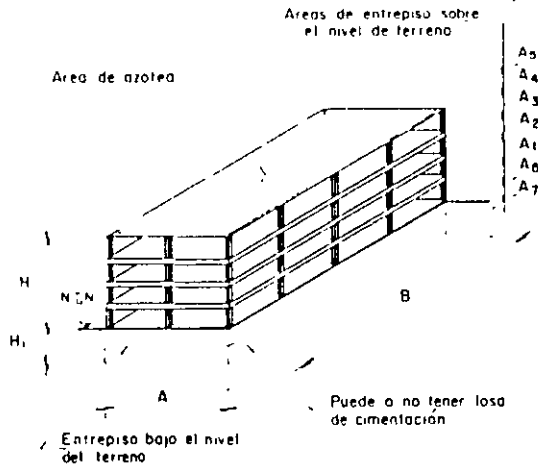
- . Zona de la Ciudad de México en la que se construirá el edificio.
- . Altura del edificio (H)
- . Area total a construir (Ac).

Destino	Subgrupo	Zona	H y Ac
. Viviendas . Oficinas . Comercios . Industrias . Hoteles	B1	I y II	Si: $H > 30m$ ó $Ac > 6000m^2$
		III	Si: $H > 15m$ ó $Ac > 3000m^2$
	B2	I y II	Si: $H \leq 30m$ $Ac \leq 6000m^2$
		III	Si: $H \leq 15m$ $Ac \leq 3000m^2$

Ac = area de todas las losas incluyen do losas inferiores al nivel del terreno y losa de cimentación -- (si existen) (fig. 2.1.1.2).

$Ac = \sum A_i$

EJEMPLO



Luego el área total a construir (Ac) es  
 $Ac = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$

DEFINICION DEL AREA TOTAL A CONSTRUIR

Fig 2.1.1 - 2

d.- Análisis comparativo de construcciones del grupo A con respecto a las del grupo B.

Se pueden considerar que las construcciones del grupo "A" presentan con respecto a las "B" las siguientes:

- Ventajas

- . El uso o destino del inmueble no se ve limitado en el futuro y permite alojar sustancias -- tóxicas, equipos costosos, --- grandes concentraciones de gente, etc.
- . la rentabilidad o precio del inmueble se ve incrementado - debido a lo señalado en el párrafo anterior.
- . Se cuenta con un factor de seguridad mayor.
- . El edificio presenta un comportamiento más satisfactorio ante cualquier tipo de solicitudes, principalmente ante -- las acciones de sismo.

- Desventajas

- . El costo de la construcción es superior.
- . Implica un diseño arquitectónico y estructural más detallado y complicado.
- . Requiere de una supervisión -- más cuidadosa.

## e.- Observaciones y recomendaciones

- Para las construcciones del grupo A se especifican requisitos de diseño más estrictos que para los del B, con el objeto de garantizar en las primeras un nivel de seguridad superior.
- Cuando una zona de un edificio clasificado en el grupo B presente características que obligan a considerar a esa zona dentro del grupo A, todo el edificio será considerado del grupo A.
- En algunos casos y siempre que sea factible, se deberá recomendar al propietario que se divida la edificación en dos o más cuerpos independientes, en donde unos serán del grupo A y otros del grupo "B".
- Es conveniente que el arquitecto y el ingeniero estructural indiquen al propietario del edificio que se va a construir, en los casos en que se tenga opción entre el grupo "A" y el grupo "B", las ventajas y desventajas de ambos, para que éste decida la clasificación que le convenga.
- En aquellos casos en los que se tengan dudas respecto al grupo al que pertenece el edificio a construir, se deberá optar por el grupo "A".
- Los edificios que por sus características pertenecen al grupo "B", pero cuya altura es mayor de 10 niveles, o cuya cantidad de usuarios es mayor que 500 personas, es recomendable que se consideren dentro del grupo "A".
- Una vez que se ha clasificado un edificio en el grupo "A" o en el "B"; el diseño arquitectónico, estructural y de instalaciones, así como lo referente a su construcción, deberán cumplir con todo lo señalado en este reglamento y en sus normas técnicas complementarias para el grupo en cuestión.
- Es conveniente señalar que la clasificación del edificio, se deberá indicar tanto en la placa que se coloque en el inmueble (según este nuevo reglamento), como en los planos arquitectónicos y estructurales.
- Los edificios diseñados y construidos de acuerdo con el grupo "B", no podrán modificar su uso o destino, albergar equipos costosos, sustancias tóxicas o explosivas, etc., a menos que se lleve a cabo una revisión arquitectónica y estructural de ellos, y se realicen las modificaciones requeridas, debiéndose contar con la aprobación de los directores responsables y de los correspondientes.

# 2.1.1.

## EJEMPLO : 2.1.1 - I

### - Datos:

Sea una edificación con las siguientes características:

- . Uso o destino - escuela
- . Altura del edificio -  $H = 6\text{m}$
- . Area total a construir:  $A_c = 500\text{ m}^2$
- . Localización - Campo Nuevo Limón # 182  
Col. Reynosa  
Delegación Azcapotzalco

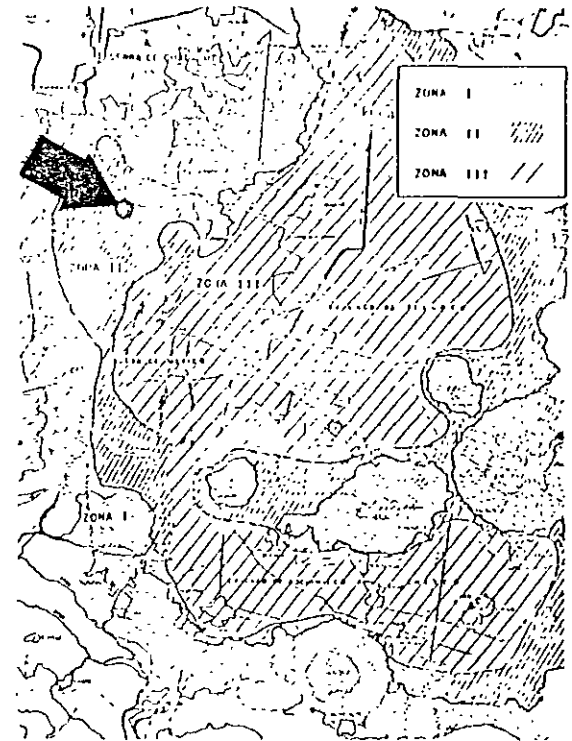
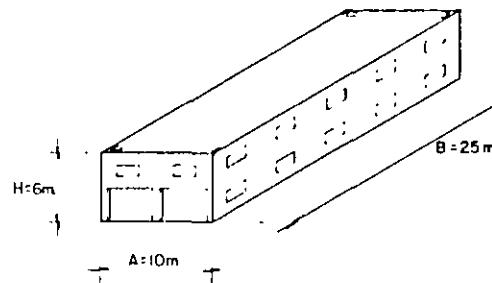


Fig. 1. Zonificación Construcción de la Ciudad de México.

### - Procedimiento:

1a. Etapa

Uso de la construcción escuela

### - Conclusiones:

Por ser la construcción escuela, pertenece al grupo "A"

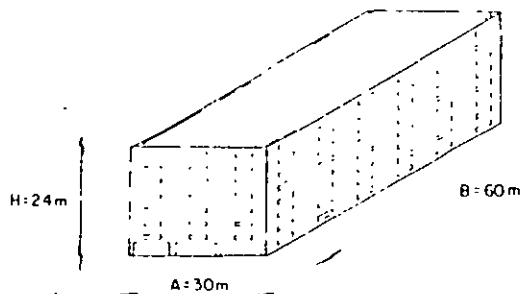
LOCALIZACION DEL INMUEBLE

**EJEMPLO 2.11-2**

**- Datos:**

Sea una edificación con la siguientes características

- Uso o destino oficinas
- Altura del edificio  $H = 24\text{ m}$  (Número de niveles 8)
- Área total a construir  $A_c = 14,400\text{ m}^2$
- Localización Isabel La Católica esa con Izazaga, Centro Histórico del Distrito Federal



**- Procedimiento:**

1a. Etapa

Uso edificio de oficinas

2a. Etapa

- No contará con salas de reunión para alojar más de 200 personas
- No contará con áreas destinadas a escuelas
- No almacenará equipos castros
- No almacenará sustancias tóxicas

3a. Etapa

- $H = 24\text{ m} > 15\text{ m}$
- $A_c = 14,400\text{ m}^2 > 3000\text{ m}^2$
- B1

**- Conclusiones:**

La construcción pertenece al subgrupo B1

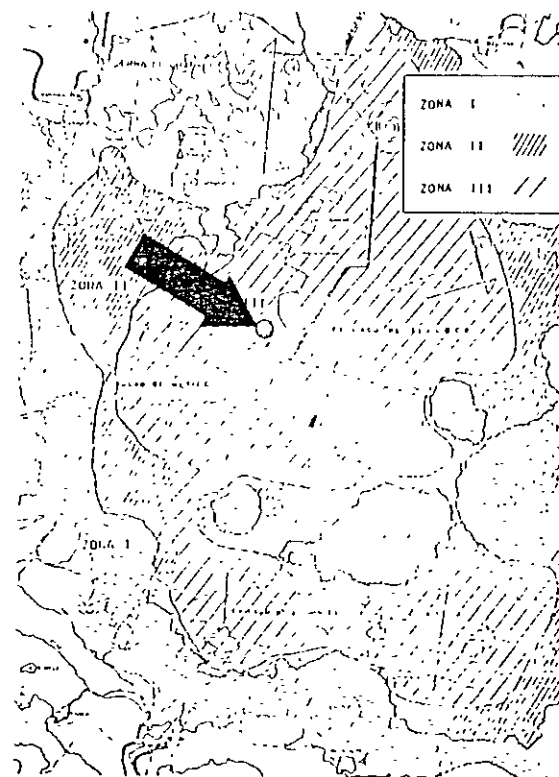


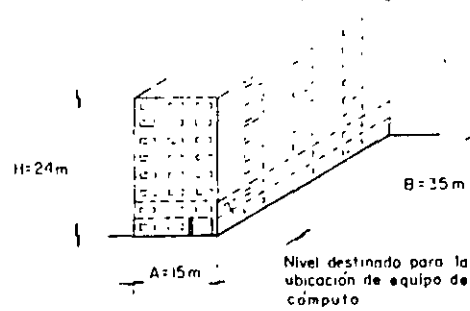
Fig. 1 Zonificación General de la Ciudad de México

**LOCALIZACION DEL INMUEBLE**

**EJEMPLO: 2.11-3**

**- Datos:**

- Sea una edificación con las siguientes características:
- Uso o destino: oficinas
- Altura del edificio:  $H = 24 \text{ m}$ .
- Área total a construir:  $A_c = 4\,200 \text{ m}^2$
- Localización: Isabel La Católica esa con Izazaga, Centro Histórico del Distrito Federal
- En el piso número 1 se almacenará equipo de cómputo



**- Procedimiento:**

1a Etapa

Uso edificio de oficinas

→ B

2a Etapa

No contará con salas de reunión para alojar más de 200 personas

No contará con áreas destinadas a escuelas.

Almacenará equipo costoso, debido a que existirá una unidad de cómputo en el 1er piso

No almacenará sustancias tóxicas.

→ A

**- Conclusiones:**

La construcción se considera del grupo "A", debido a que se almacenará equipo de cómputo en el 1er piso

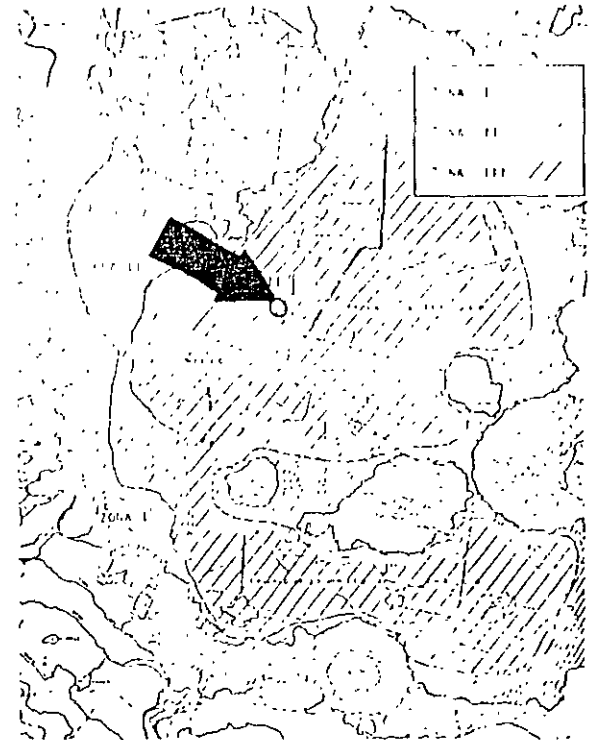


Fig. 2.11. Zona Comuna de la Ciudad de México

**LOCALIZACION DEL INMUEBLE**



ARTICULO 175.- Para fines de estas disposiciones, el Distrito Federal se considera dividido en las zonas I a III, dependiendo del tipo de suelo.

Las características de cada zona y los procedimientos para definir la zona que corresponde a cada predio se fijan en el Capítulo VIII de este Título.

**Distrito Federal (1987)**

ARTICULO 219.- Para fines de este Título, el Distrito Federal se divide en las zonas I, II y III, de acuerdo a las características del subsuelo.

Zona I.- Donde predominan las rocas o suelos general- mente limos que fueron depositados durante el período lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente, intercaladas, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos, relacionados con las rocas. En esta Zona, se caracteri- za la presencia de coqueles, tepalcates y de cavernas y túneles excavados en suelos para explorar yinas de arena.

Zona II.- Transición, en la que los depósitos están en estado suelto o cohesivos, pero no están relacionados con las rocas.

Zona III.- Donde predominan los depósitos lacustres, de tipo limo, arcilla o arena, que se encuentran en estado suelto o cohesivos.

a.- En este artículo se indica que:

- El Distrito Federal se subdivide en:
  - Zona I.- Lomas
  - Zona II.- Transición
  - Zona III.- Lacustre

b.- Objetivo

- Adecuar el diseño de cada estructura a su ubicación.

c.- Observaciones generales

- Debido a las características poco homogéneas del subsuelo de la Ciudad de México, al definir la estructuración de los edificios que en ella se van a construir; se requiere:
  - Establecer en que zona geológica de la ciudad se ubicará (zona I, II ó III).
  - Para edificios de cierta importancia es indispensable contar con un estudio de Mecánica de Suelos que defina las características específicas del subsuelo en el que se ubicará el edificio

## 2.1.2.

24

La zona que corresponde al predio de estudio, a partir de las investigaciones que se realicen en el suelo del predio objeto de estudio, tal y como lo establece con las Normas Técnicas Complementarias. En caso de construcciones ligeras, mediante el uso de cartillas de definición en dichas Normas, podrá determinarse la zona mediante el mapa incluido en las mismas, si el predio está dentro de la porción zonificada y el predio ubicado a menos de 200 m. de las fronteras que se establezcan, antes de que éstas se superen, en caso de ser favorable.

### d.- Recomendaciones

- Se recomienda construir estructuras rígidas en suelos compresibles y estructuras flexibles en suelos duros. Lo anterior tiene por objeto tratar de evitar que el período de vibración de la estructura coincida con el del suelo en que se ubica.
- En suelo duro (fig. 2.1.2-1)
  - Recomendable
    - . Estructuras con marcos flexibles de concreto
    - . Estructuras con marcos flexibles de acero
    - . Estructuras con losas reticulares
  - No recomendable
    - . Estructuras con gran densidad de muros de cortante
    - . Estructuras con gran densidad de contravientos

### EJEMPLO 2.1.2 - 1

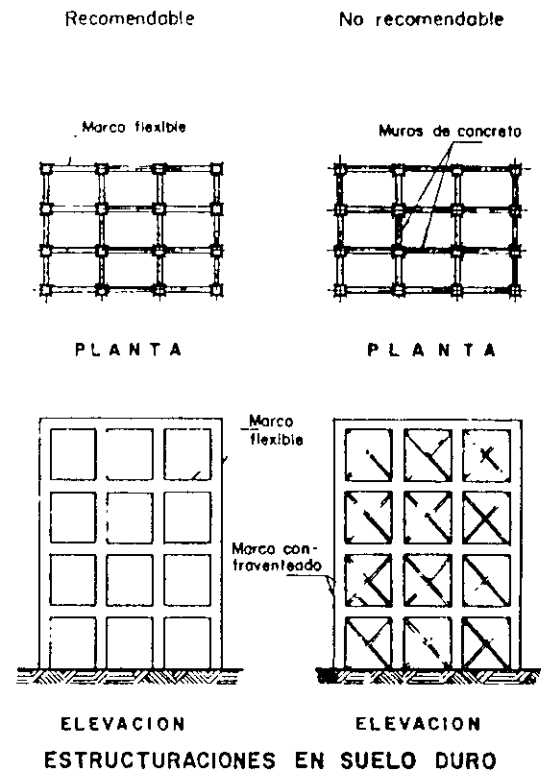


Fig 2.1.2-1

## 2.1.2.

- En suelo compresible (fig. 2.1.2-2).

### Recomendaciones

- . Estructuras con gran densidad de muros de cortante
- . Estructuras con gran densidad de contravientos
- . Estructuras con marcos rígidos de concreto
- . Estructuras con marcos rígidos de acero

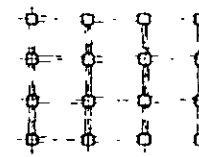
### No recomendable

- . Estructuras con marcos flexibles de concreto
- . Estructuras con marcos flexibles de acero
- . Estructuras con losas reticulares

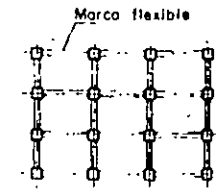
### EJEMPLO 2.1.2 - 2

Recomendable

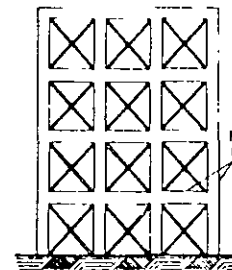
No recomendable



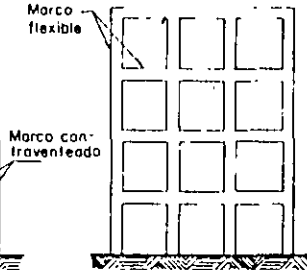
PLANTA



PLANTA



ELEVACION



ELEVACION

ESTRUCTURACIONES EN SUELO COMPRESIBLE

Fig 2.1.2-2

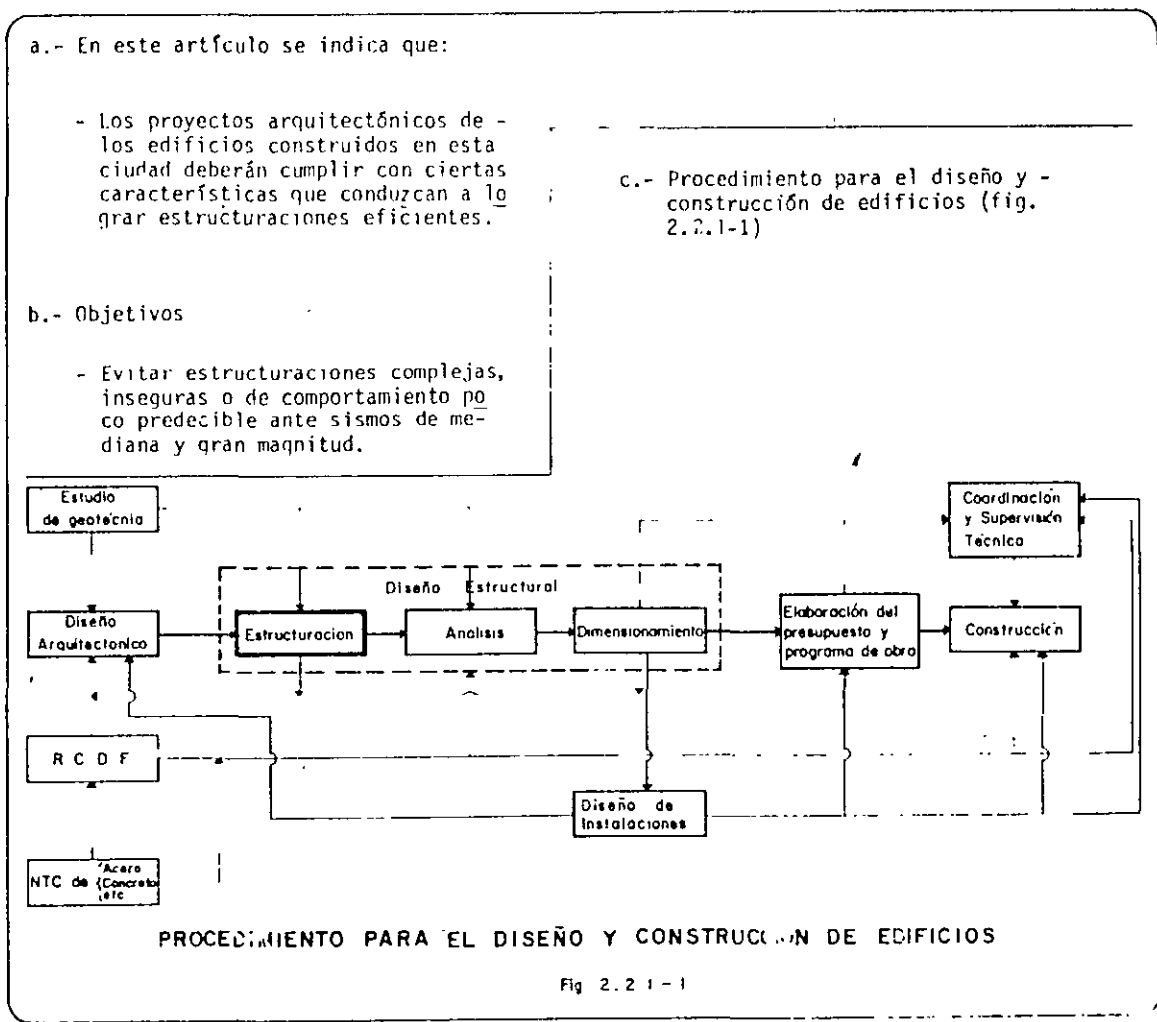
**ARTICULO 176.-** El proyecto arquitectónico de una construcción deberá permitir una estructuración eficiente para resistir las acciones que puedan afectar la estructura con especial atención a los efectos sísmicos.

El proyecto arquitectónico de preferencia permitirá una estructuración regular que cumpla con los requisitos que se establezcan en las Normas Técnicas Complementarias de Diseño Sísmico.

Las construcciones que no cumplan con dichos requisitos de regularidad se diseñarán para condiciones sísmicas más severas en la forma que se especifique en las Normas mencionadas.

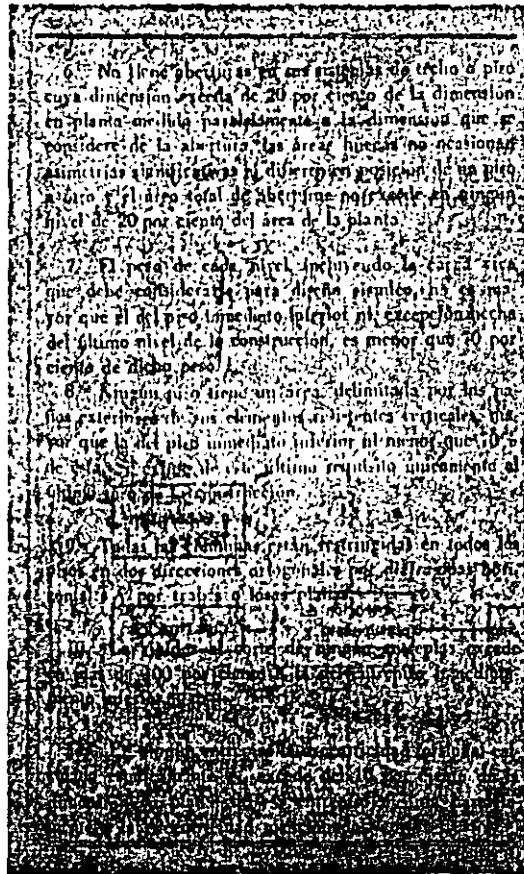
De N.T.C. de sismo.

**CONDICIONES DE IRREGULARIDAD**



## 2.2.1.

28



### d.- Clasificación de los proyectos arquitectónicos.

Los proyectos arquitectónicos son el punto de partida para la estructuración de los edificios. Para lograr estructuras adecuadas y eficientes se requiere -- que estos reúnan algunas características, que posteriormente se mencionarán.

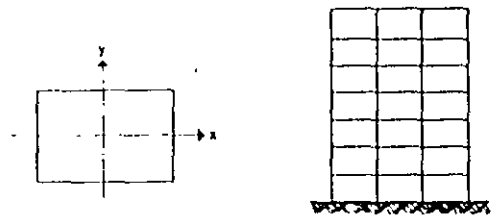
Los proyectos arquitectónicos se pueden clasificar en: (fig. 2.2.1-2).

Proyectos arquitectónicos que conducen a estructuraciones -- que presentan comportamiento altamente satisfactorio ante sismos de mediana y gran magnitud (RECOMENDABLES).

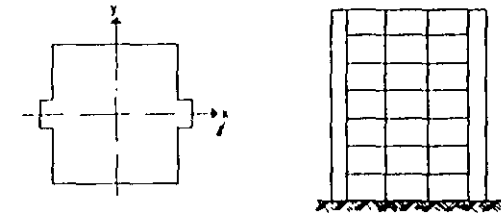
Proyectos arquitectónicos que -- conducen a estructuraciones que presentan comportamiento ineficiente o inconveniente ante sismos de mediana y gran magnitud -- y que requieren un diseño estructural complicado y cuidadoso y una construcción compleja y difícil.

Lo anterior produce incrementos considerables en el costo de la estructura e incertidumbre ante sismos excepcionales (NO RECOMENDABLES).

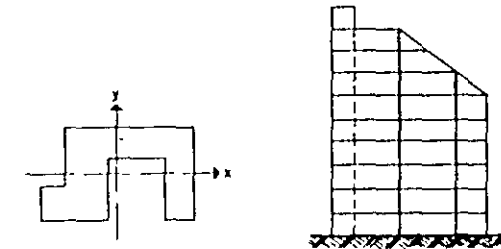
Proyectos arquitectónicos que -- no conducen a soluciones estructurales razonables y económicas (INACEPTABLES).



RECOMENDABLE



NO RECOMENDABLE



INACEPTABLE

CLASIFICACION DE LOS PROYECTOS ARQUITECTONICOS

Fig 2.2.1 - 2

## 2.2.2

ARTICULO 21) Toda construcción deberá separarse de sus linderos con los predios vecinos una distancia no menor de 5 cm ni menor que el desplazamiento horizontal calculado para el nivel de que se trate. El desplazamiento horizontal calculado se obtendrá con las fuerzas sísmicas reducidas según los criterios que fijan las Normas Técnicas Complementarias y se multiplicará por el factor de comportamiento siendo máximos dichos factores aumentados en 0.001, 0.003 y 0.006 de la altura de altura de cada uno de los cuerpos de la construcción.

En este artículo se indica que:

- Las construcciones se deberán separar de: (fig. 2.2.2-1).
- Los linderos de predios vecinos.
- Los otros cuerpos de la misma construcción.
- Estas separaciones deberán estar:
  - Definidas de acuerdo con la respuesta esperada de la estructura ante las solicitaciones de diseño.
  - Libres de toda obstrucción -- (fig. 2.2.2-2).
  - Indicadas claramente en los planos arquitectónicos y estructurales.

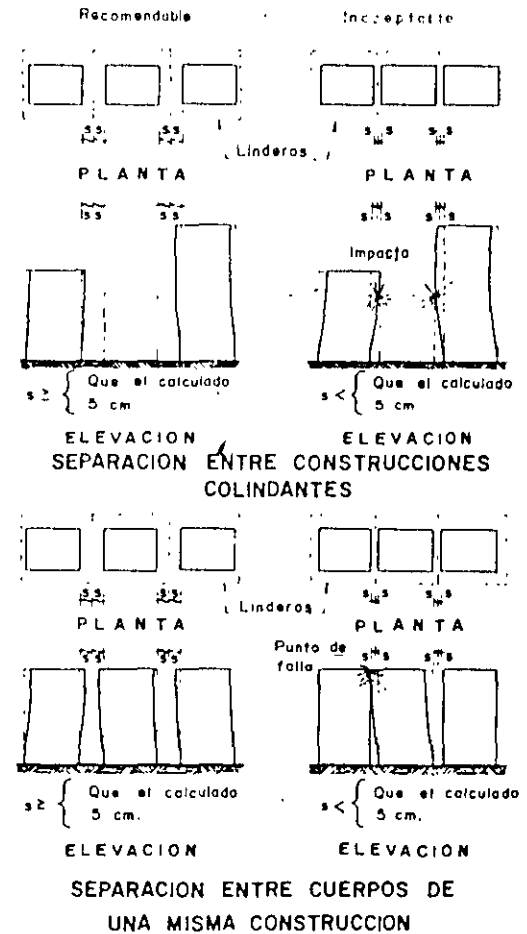
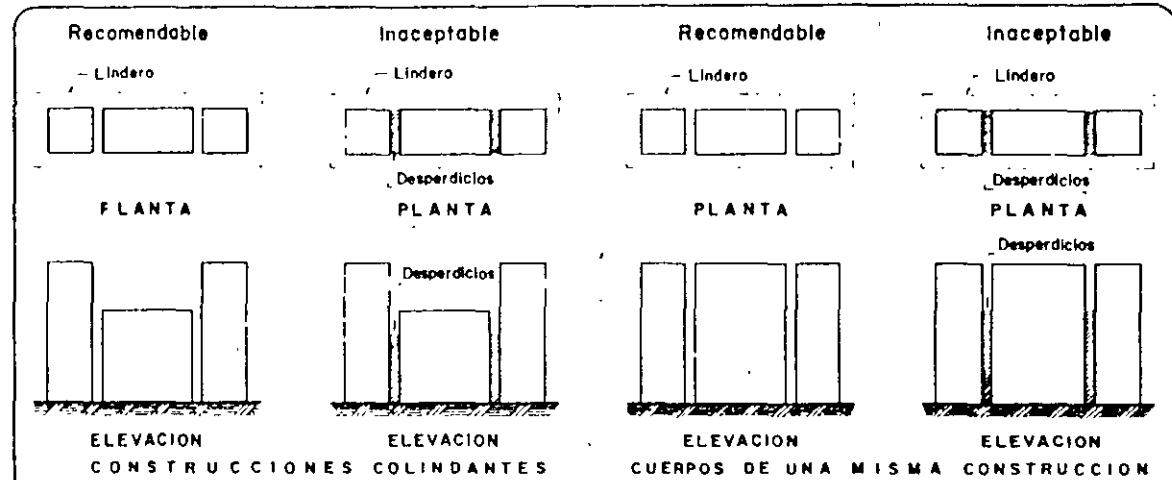
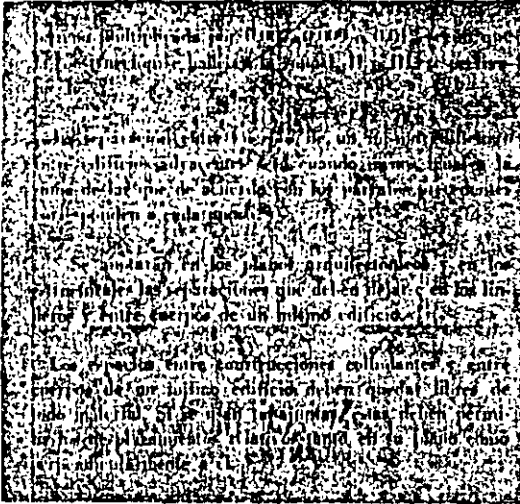


Fig. 2.2.2 - 1

## 2.2.2

30



DESPERDICIOS EN JUNTAS DE CONSTRUCCION

Fig. 222 - 2

### b.- Objetivos

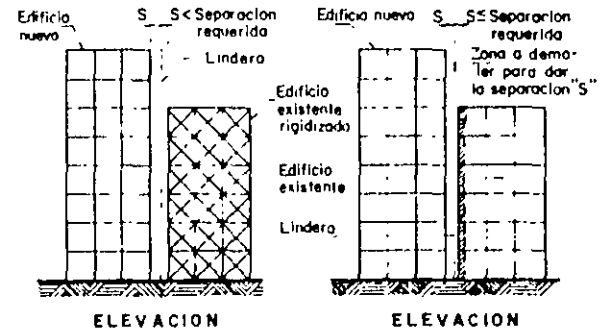
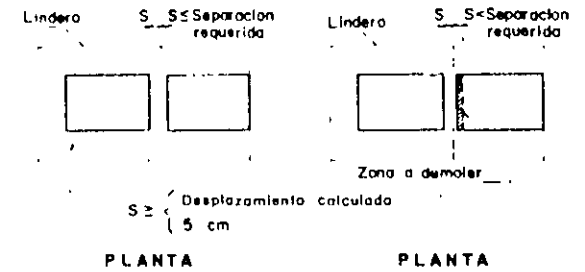
Evitar el choque de la estructura en proyecto con las construcciones ubicadas a su alrededor o con otros cuerpos de la misma construcción; ya que un choque entre dos edificios puede provocar desde daños de pequeña magnitud hasta el colapso parcial o total de las estructuras.

### c.- Determinación de la separación requerida

Se deberá definir la separación requerida entre una construcción y los linderos que la rodean mediante un cuidadoso análisis que permita definir las deformaciones y/o desplazamientos de la estructura, producidos por las acciones consideradas en el diseño (principalmente la correspondiente a sísmo). Esta separación no deberá ser menor de 5 cm.

d.- Estructuras colindantes que no cumplan esta especificación

- Para resolver el problema de --- edificios colindantes ya existentes que no cumplen con las separaciones indicadas en el Reglamento, se cuenta con varias opciones:
- . Rigidizar las estructuras existentes mediante muros, contravientos, etc. para disminuir los desplazamientos horizontales que se puedan presentar durante sismos de mediana y gran intensidad (fig. 2.2.2-3).
- . Demoler parcialmente la estructura existente (fig. 2.2.2-4).
- . Construir la nueva estructura dejando una separación mayor, de tal manera que se absorban los posibles desplazamientos de las estructuras colindantes que no cumplan con lo señalado en este artículo (fig. 2.2.2-5).
- . Diseñar la nueva estructura -- con gran rigidez para evitar desplazamientos notables que puedan originar el choque entre las estructuras en cuestión (fig. 2.2.2-6).



Rigidizar la estructura existente para disminuir desplazamientos. Se limitan los desplazamientos de la estructura existente

Demoler parcialmente la estructura existente

SOLUCIONES PARA EVITAR EL GOLPEO DE EDIFICIOS COLINDANTES

Fig 2.2.2 - 3

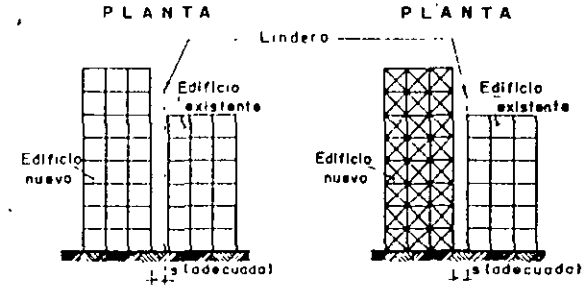
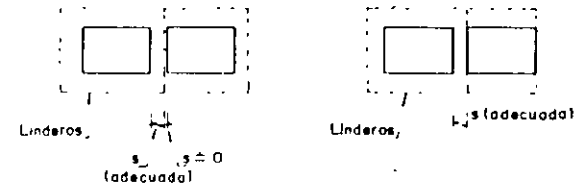
Fig 2.2.2 - 4



## 2.2.2

32

- Para seleccionar alguna de las opciones antes mencionadas, es indispensable tratar este asunto con el propietario del edificio que no cumple estas especificaciones y con su Director Responsable de Obra.



### ELEVACION

En la estructura nueva, prever la separación necesaria entre los dos edificios.

### ELEVACION

Rigidizar la estructura nueva. Se limitan los desplazamientos de la estructura nueva y se deja una separación adecuada.

## SOLUCIONES PARA EVITAR EL GOLPETEO DE EDIFICIOS COLINDANTES

Fig 2 2 2 - 5

Fig 2 2 2 - 6

## 2.2.2

REQUISITOS PARA EL DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONSTRUCCIONES INTEGRADAS POR VARIOS CUERPOS

### e.- Construcciones integradas por varios cuerpos

Cuando se proyecten estructuras integradas por varios cuerpos independientes es conveniente que además de contar con la separación adecuada entre ellos, las alturas de los entrepisos de los cuerpos sean iguales, con el objeto de evitar que bajo la acción de sismos intensos las losas de los entrepisos de un cuerpo golpeen a las columnas de los otros cuerpos produciendo fallas violentas en estas últimas. (fig. 2.2.2-7).

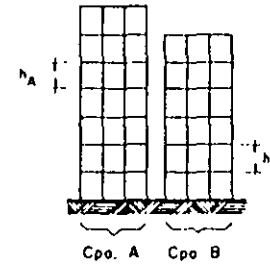
### f.- Limpieza de espacios entre construcciones.

Es conveniente que al terminar la construcción de los edificios se limpien totalmente los espacios dejados para separarlos de las construcciones vecinas o de otros cuerpos del mismo edificio, ya que al dejar desperdicios en estos espacios se impide el libre desplazamiento de las estructuras, modificando totalmente su comportamiento, lo que puede llegar a producir hasta el colapso total por golpeteo de los mismo. Así mismo, y de manera periódica, se deberán limpiar cuidadosamente los espacios entre construcciones para evitar lo antes mencionado.

#### Recomendable



PLANTA



Cpo. A Cpo. B

Nota: La altura de los entrepisos coincide, cuando  $h_A = h_B$

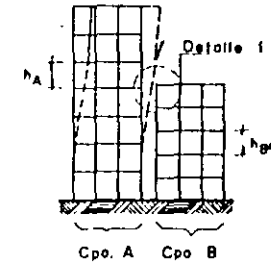
ELEVACION

#### Inaceptable



PLANTA

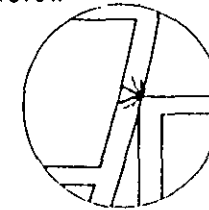
Degollamiento de columna



Cpo. A Cpo. B

Nota: La altura de los entrepisos no coincide, cuando  $h_A \neq h_B$

ELEVACION



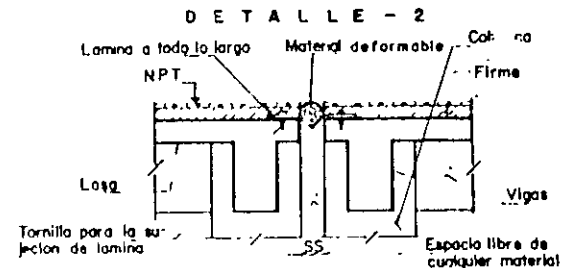
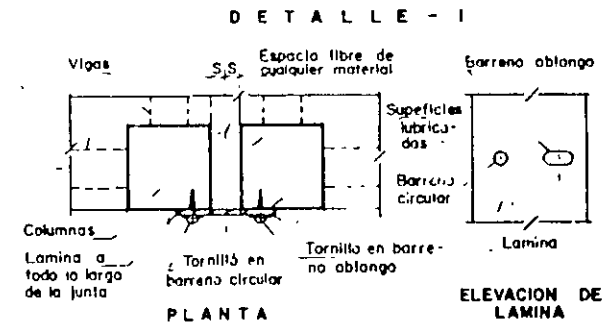
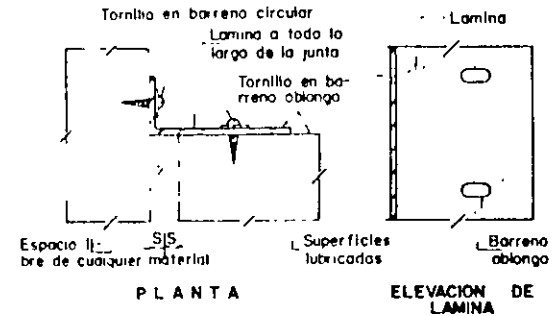
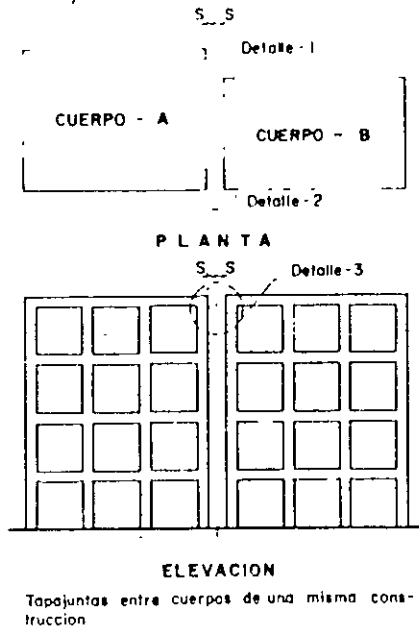
DETALLE - 1  
(DETALLE DE GOLPETEO)  
GOLPETEO ENTRE EDIFICIOS COLINDANTES

Fig 2.2.2-7

# 2.2.2

## g.- Tapajuntas

Es conveniente utilizar tapajuntas para evitar la introducción de materiales no deseables en las separaciones entre edificios o entre cuerpos de edificios, procurando cuidar que estas tapajuntas no modifiquen el comportamiento de las estructuras (fig. 2.2.2-8).



TAPAJUNTAS DETALLE - 3

Fig. 2.2.2 - 8

## 2.2.3

ARTICULO 2.2.3.3. Los elementos no estructurales que se integran a las edificaciones tales como: muros divisorios, pretilas, fachadas precoladas, elementos rígidos de fachada, elementos rígidos de escaleras, equipos pesados, tanques, tinacos, casetas, etc., deben ser aprobados por el director responsable de obra y por el corresponsable en seguridad estructural en un plan que este sea requerido, tales como: muros divisorios, pretilas, fachadas precoladas, elementos rígidos de fachada, elementos rígidos de escaleras, equipos pesados, tanques, tinacos, casetas, etc. El mediatario, los equipos y otros elementos cuyo vuelco o desplazamiento pueda ocasionar daños físicos o materiales como: líneas, alambres, alfileres, tuberías eléctricas y telefónicas, deben fijarse de tal manera que se eviten estos daños.

a.- En este artículo se indica que:

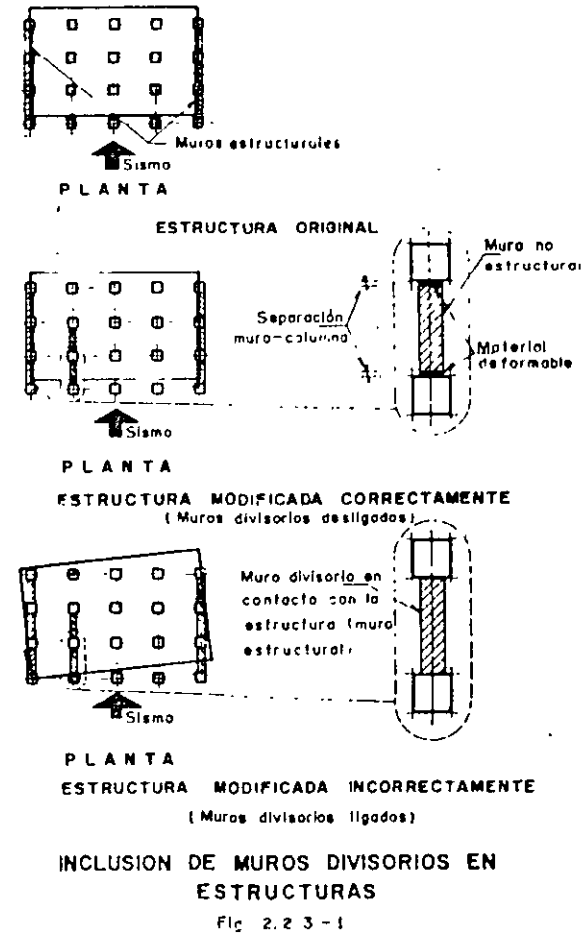
\* Los elementos no estructurales que se integran a las edificaciones tales como: (fig. 2.2.3-1 y fig. 2.2.3-2)

- Muros divisorios
- Muros de colindancia
- Pretiles
- Fachadas precoladas
- Elementos rígidos de fachada
- Elementos rígidos de escaleras
- Equipos pesados
- Tanques
- Tinacos
- Casetas
- Etc.

Deben ser aprobados por el director responsable de obra y -- por el corresponsable en seguridad estructural.

- En sus características
- En su fijación

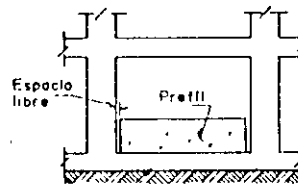
### EJEMPLO: 2.2.3 - 1



# 2.2.3

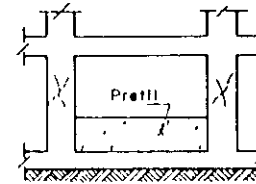
EJEMPLO: 2.2.3-2

Recomendable

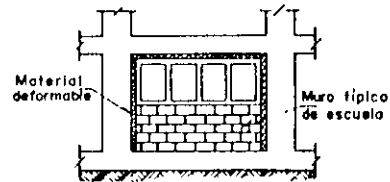


ELEVACION

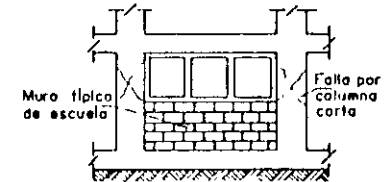
Inaceptable



ELEVACION



ELEVACION



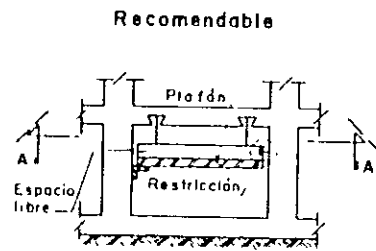
ELEVACION

ELEMENTOS NO ESTRUCTURALES

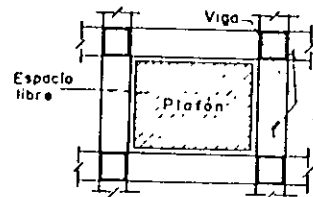
Fig 2.2.3-2(a)

## 2.2.3

### EJEMPLO: 2.2.3 - 2

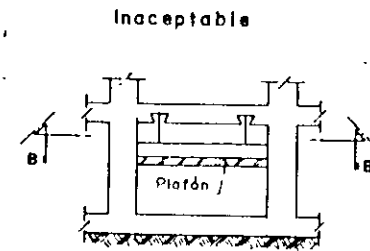


ELEVACION

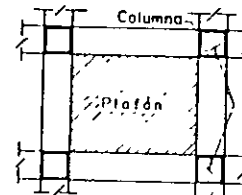


PLANTA

CORTE A - A



ELEVACION



PLANTA

CORTE B - B

ELEMENTOS NO ESTRUCTURALES

Fig 2.2.3-2(b)

## 2.2.3

38

\* Los muebles y equipos que se incluyen dentro de las edificaciones tales como:

- Anaqueles
- Libreros
- Lockers
- Tableros eléctricos
- Tableros telefónicos
- Archivos
- Maquinaria, etc

Se deberán fijar adecuadamente a la estructura, para evitar:

- Daños materiales
- Daños a las personas

b.- Objetivos.

- Evitar que la respuesta de las estructuras ante sismos de mediana y gran magnitud pueda ser modificada respecto al proyecto original al incluirse en la edificación elementos no estructurales como los mencionados, los que, debido a sus características y a su forma de fijación a la estructura, pueden evitar que la estructura se deforme libremente o bien pueden modificar la distribución de la capacidad sísmo-resistente de la misma.
- Evitar que se presenten en la estructura torsiones no previstas en el diseño estructural, que puedan llegar a causarle daños considerables o aún al colapso parcial o total.
- Fijar adecuadamente los muebles o equipos en las edificaciones para evitar su posible deslizamiento, volteo, falla integral o falla de los elementos de sujeción.

c.- Observaciones

- Pueden presentarse modificaciones a la capacidad sismo-resistente de las estructuras debido a la inclusión de elementos no estructurales, ya sea que estos elementos se integren a la estructura durante su construcción o bien posteriormente, cuando el edificio se encuentra en condiciones de servicio.
- En aquellos casos en los que es imposible desligar los elementos no estructurales de la propia estructura, se deberá llevar a cabo un nuevo diseño estructural tomándolos en cuenta como elementos estructurales.
- Los muros no estructurales deben estar desligados adecuadamente de la estructura de tal manera que no restrinjan sus desplazamientos.
- Los muros no estructurales deberán estar fijos a la estructura de tal manera que al presentarse sismos de gran magnitud no se desplacen ni se volteen (fig. 2.2.3-3).
- Los materiales utilizados para aislar a los elementos no estructurales de la propia estructura pueden ser:

- . Polisulfuro
- . Celotex

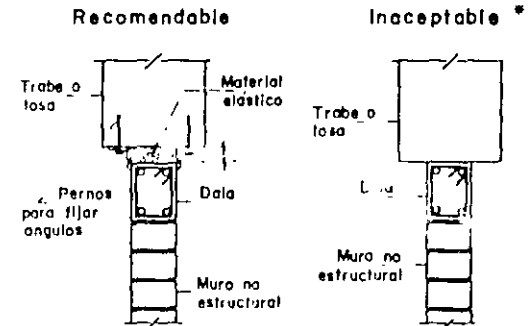
. Sicaflex

. Poliestireno

. Hule espuma (alta densidad).

- Los muebles o equipos no deberán fijarse a los elementos estructurales, ya que ello podría ocasionar la falla de estos debido a las acciones adicionales producidas por su peso y/o tamaño.

Es conveniente fijar los muebles y equipos pesados a los elementos estructurales tomando en cuenta esta situación, al llevar a cabo la revisión estructural del edificio (fig. 2.2.3-4).



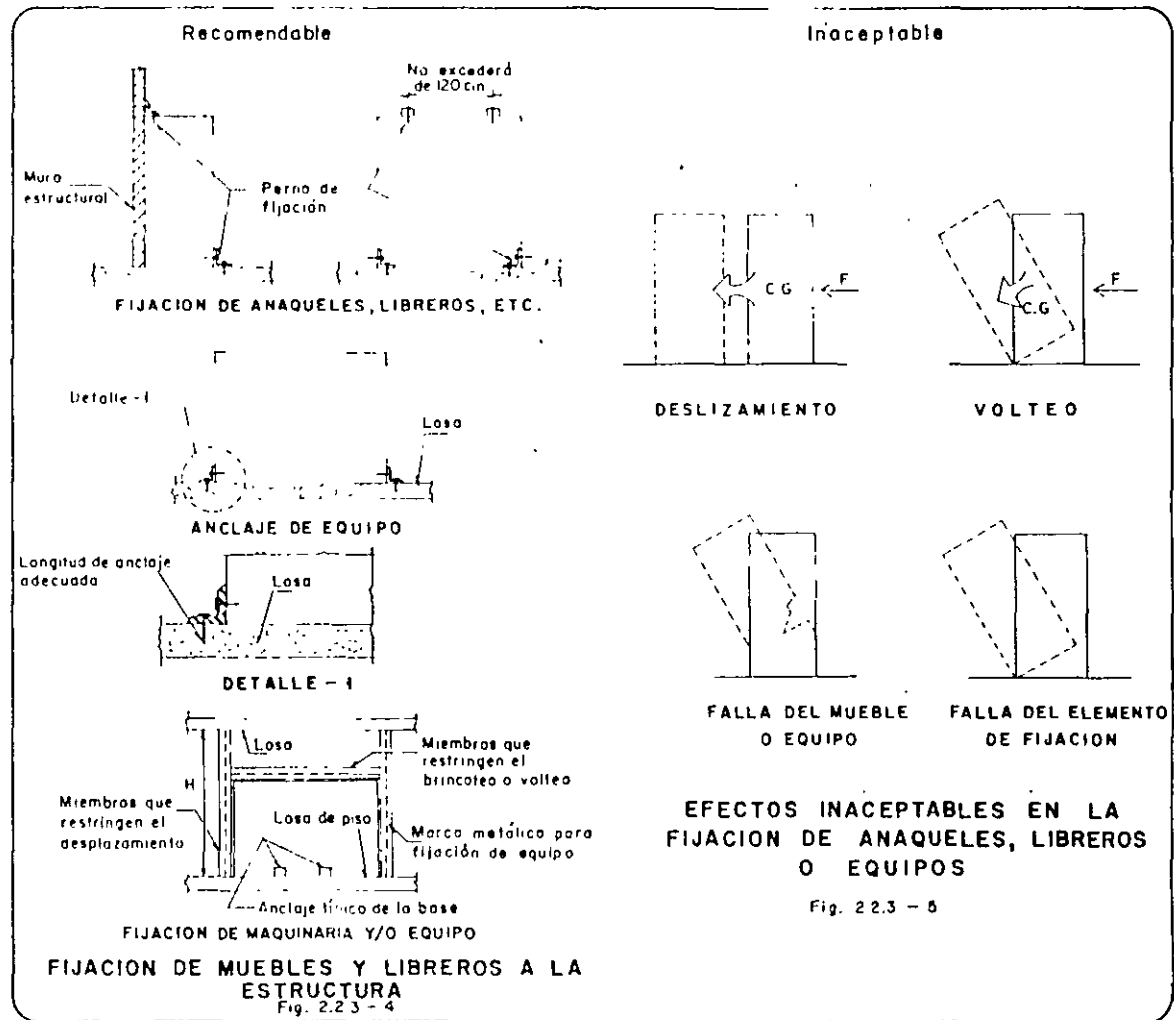
FIJACION DE MUROS NO ESTRUCTURALES

Fig 2.2.3 - 3

\* Para muros no estructurales



# 2.2.3



## 2.2.4

ARTICULO 18.- Las anuncios, señalamientos, colgantes y de gran peso y/o dimensiones considerables, de la estructura en los términos de este Título, con horizontal, atención a los efectos de viento. Deben ser revisados y aprobados por el Director Responsable de Obra y el Corresponsable de Seguridad Estructural. El proceso de estos anuncios deberá ser aprobado por el Director Responsable de Obra y el Corresponsable de Seguridad Estructural de obra, antes que se inicie el montaje de los mismos.

### a.- En este artículo se indica que:

- Las estructuras de los edificios - en que se coloquen anuncios (de -- gran peso y/o dimensiones considerables), ya sea:

- . Adosados (fig. 2.2.4-1.),
- . Colgantes (fig. 2.2 4-2.) ó
- . En la azotea (fig. 2.2 4-3 )

- Se deberán revisar tomando en cuenta las características de estos -- anuncios por:

- . Viento.
- . Sismo.

- Así mismo, se deberá tener cuidado especial en su:

- . Apoyo
- . Fijación.

- Y se deberá contar con la aprobación de los:

- . Directores Responsables de Obra.
- . Corresponsables en Seguridad Estructural.

### b.- Objetivo

- Definir adecuadamente la fijación o apoyo de los anuncios a las estructuras.

- . - Tomar en cuenta en el diseño de la estructura la influencia del peso y dimensiones de los anuncios.

### c.- Observaciones.

- El contar con anuncios de gran peso y dimensiones considerables puede ocasionar solicitaciones adicionales a la estructura, -- las que es necesario tomar en cuenta en su diseño. Cuando estos anuncios son de peso considerable, se presentan solicitaciones adicionales por carga -- vertical y sismos, y cuando presentan dimensiones notables, -- existen solicitaciones adicionales por viento.

Estas solicitaciones pueden -- afectar parte de la estructura o la totalidad de la misma.

## 2.2.4

42

### d.- Revisión estructural debido a los - anuncios.

Es común que los anuncios se colo--  
quen posteriormente al diseño y ---  
construcción del edificio. En este  
caso, es necesario llevar a cabo --  
una revisión estructural del mismo.

### e.- Apoyo y fijación de los anuncios.

Cuando se tienen anuncios de peso y  
dimensiones considerables y su apo--  
yo o fijación no son adecuados, se  
pueden desprender y provocar daños--  
graves, al presentarse acciones con  
siderables de viento o sismo.

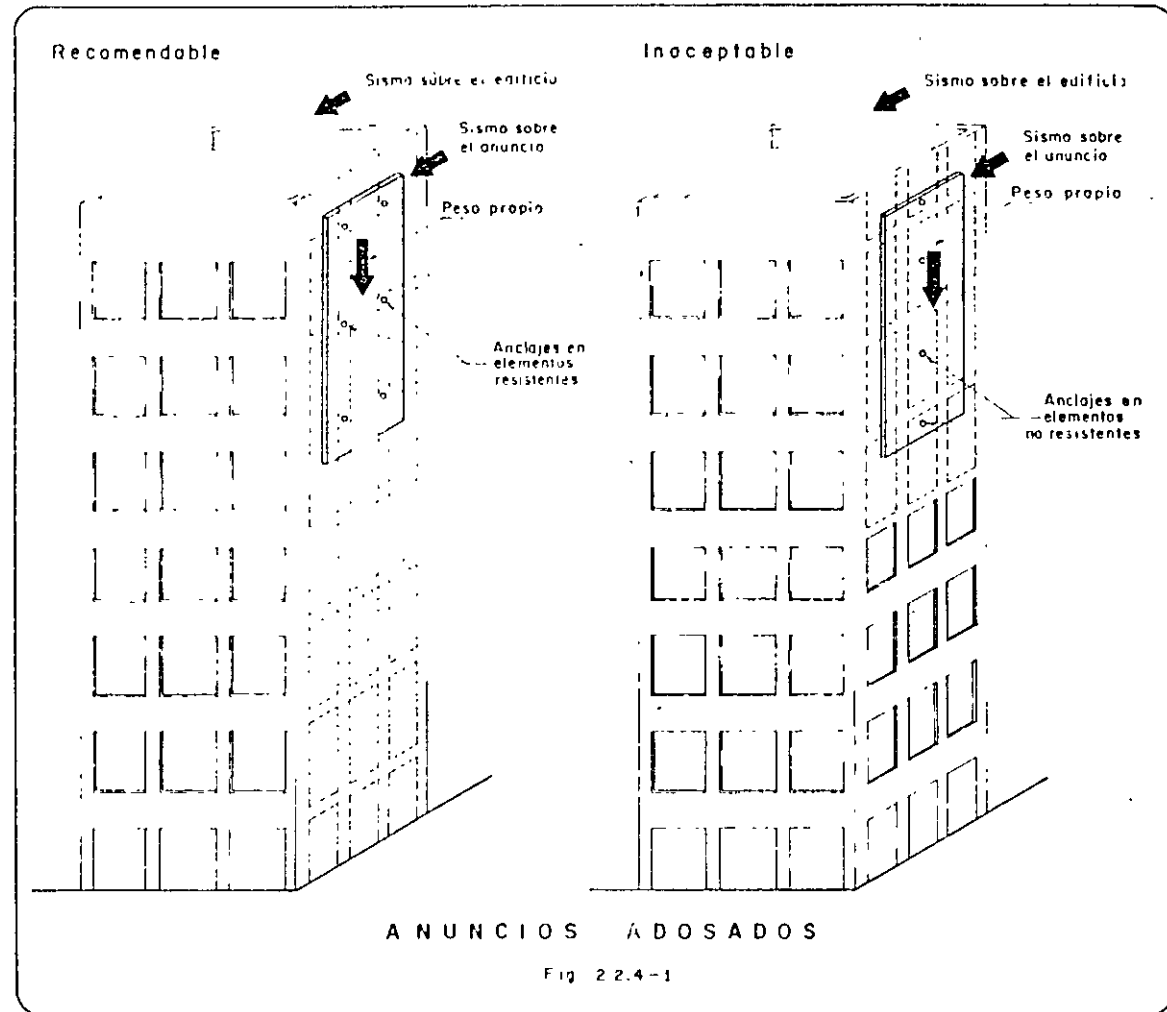
- Los anuncios deben ser ubicados -  
de acuerdo con la estructuración--  
de los edificios; es decir, bus--  
cando que sus apoyos queden loca--  
lizados en las columnas o en tra--  
bes que tengan capacidad para re--  
sistir estas acciones, no se de--  
ben apoyar en los muros o en las  
losas.

Cuando sea necesario reforzar los  
elementos estructurales con el --  
objeto de que resistan las solici--  
taciones producidas o debidas a -  
estos anuncios, se deberá tener -  
cuidado de no afectar el comporta--  
miento general de la estructura.

### f.- Escaleras de servicio

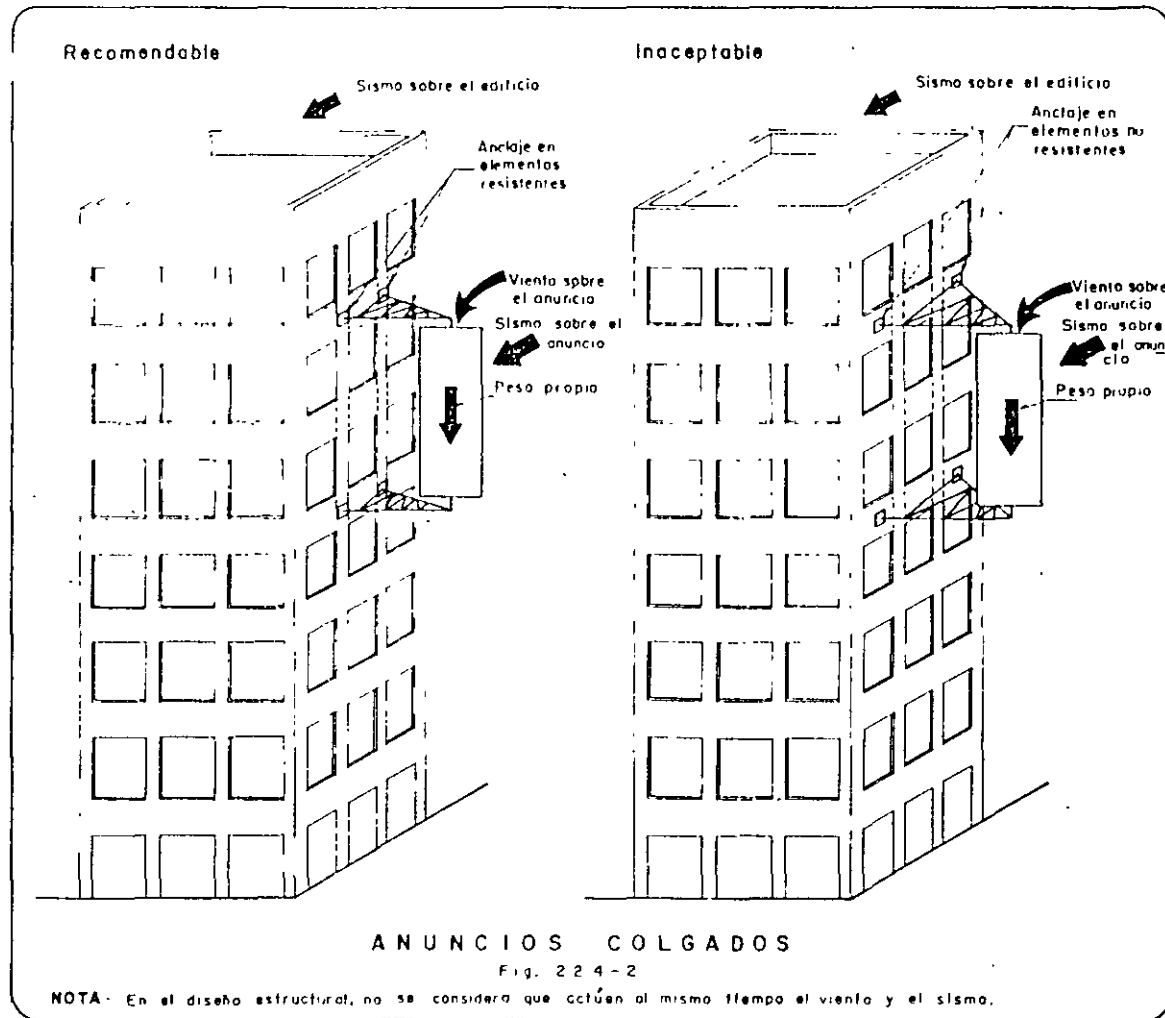
Las escaleras de servicio que se -  
ubiquen en las fachadas de los edi--  
ficios y que no estén consideradas  
en la estructuración de los mismos,  
requieren que se lleve a cabo una--  
revisión de la estructura para ase--  
gurar que ésta tenga capacidad pa--  
ra resistir las acciones produci--  
das por estas escaleras, tomando -  
en cuenta, que la carga viva que -  
se presente en ellas, será conside--  
rable en caso de emergencia.

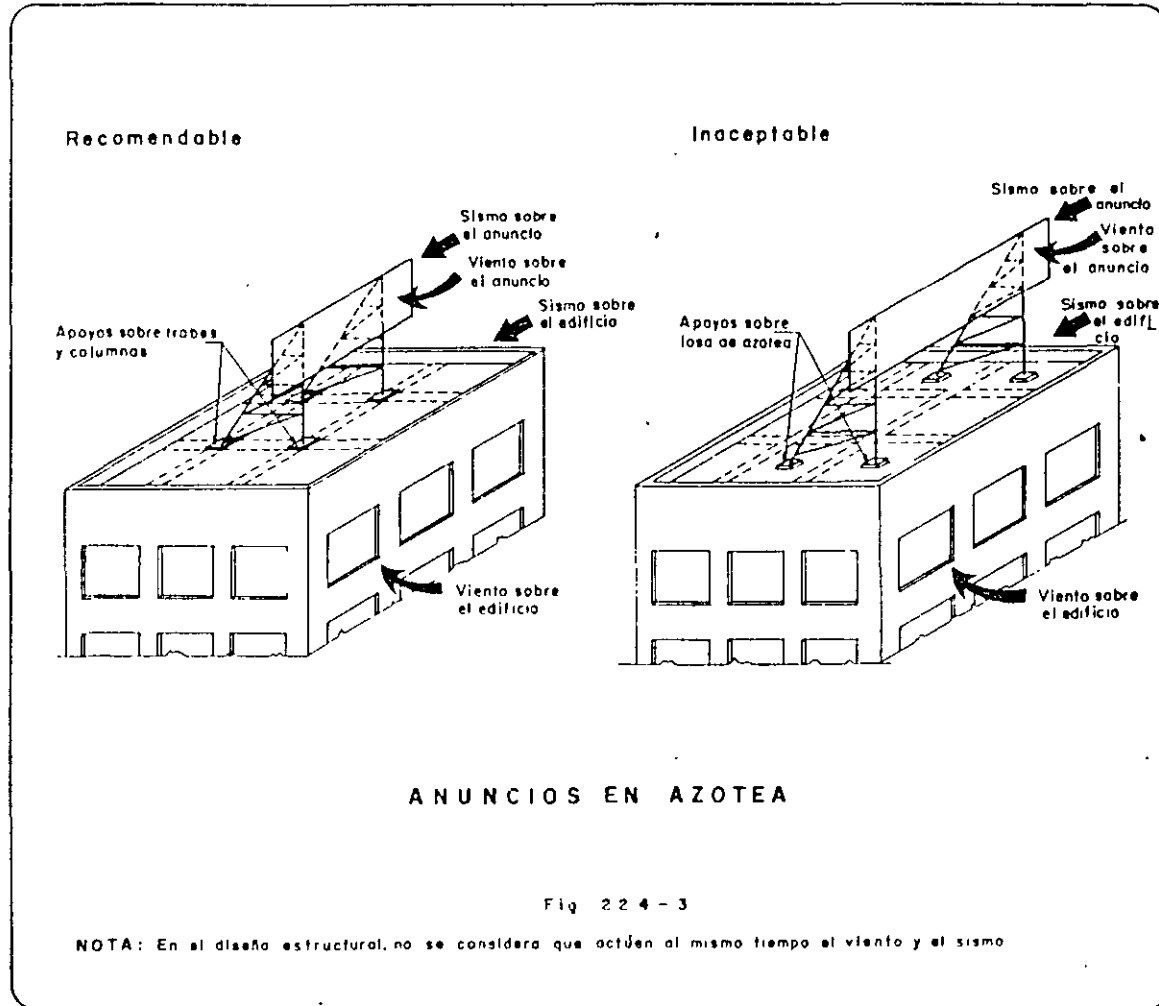
## 2.2.4



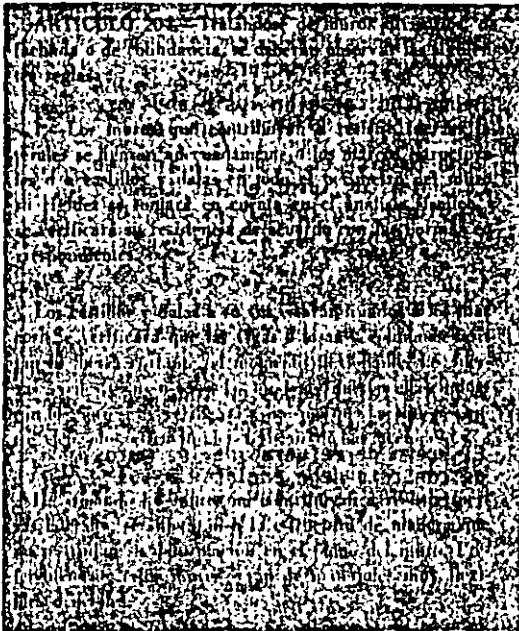
## 2.2.4

44



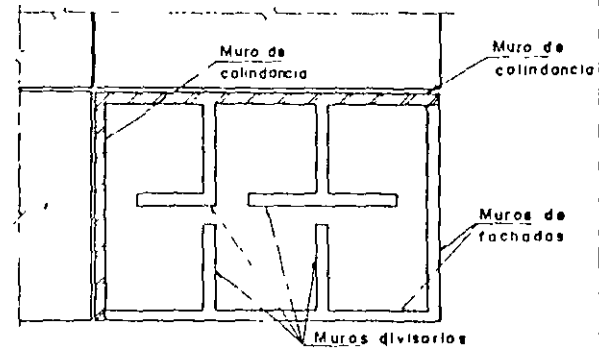


## 2.3 DISEÑO POR SISMO



a.- En este artículo se indica que:

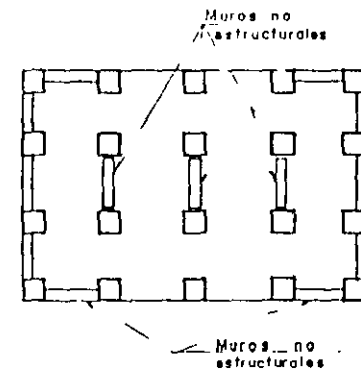
- La clasificación de los muros de acuerdo a su función es: (2.3.1-1)
  - . Muros divisorios
  - . Muros de fachada
  - . Muros de colindancia
- La clasificación de los muros desde el punto de vista estructural es: (2.3.1-2)
  - . Muros estructurales
  - . Muros no estructurales



CLASIFICACION DE MUROS (Tipos de muros)  
Fig 2 31-1

b.- Objetivo

- Asegurar que la contribución de los muros, cuando estos son considerados estructurales, coincida con su conceptualización original en el edificio.
- Asegurar que los muros no estructurales se fijen a la estructura sin ligarlos a la misma; es decir, evitando que esta modifique su comportamiento original bajo la acción de sismos.



MUROS ESTRUCTURALES Y MUROS NO ESTRUCTURALES  
Fig 2 31-2

## 2.3.1

48

### Muros estructurales

#### c.- Características

- . Estan adecuadamente ligados a la estructura.
- . Tienen capacidad para resistir -- fuerzas sísmicas.
- . Su rigidez contribuye a la rigi-- dez total de la estructura.
- . Restringen los desplazamientos -- del edificio.

#### d.- Clasificación de los muros estructurales en función de los materiales

- . Concreto (Fig. 2.3.1-3)
- . Mampostería
  - Sin dadas ni castillos (Fig. - 2.3.1-4)
  - Con dadas y castillos (Fig. -- 2.3.1-5)
  - Con diagonales de contraventeo (Fig. 2.3.1-6)
  - De piezas macizas
  - De piezas huecas
- . Otros

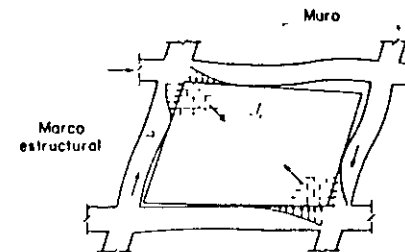
#### e.- Requisitos de Diseño

- . Deben tomarse en cuenta en la es-- tructuración.
- . Debe tomarse en cuenta la influen-- cia de estos muros en el diseño - estructural.

- . Deben dimensionarse desde el pun-- to de vista estructural.
- . Deben indicarse en los planos ar-- quitectónicos y estructurales.
- . Debe tomarse en cuenta la influen-- cia de estos muros, en las trabe-- s y columnas de los marcos que los restringen. (Fig. 2.3.1-7)

#### f.- Requisitos para las uniones de los muros estructurales con el resto -- de la estructura

- . Deben estar ligados en toda su -- periferia. (Fig. 2.3.1-8)
- . El acero de refuerzo de los muros de concreto debe anclarse a las trabe-- s y a las columnas de la es-- tructura. (Fig. 2.3.1-9)



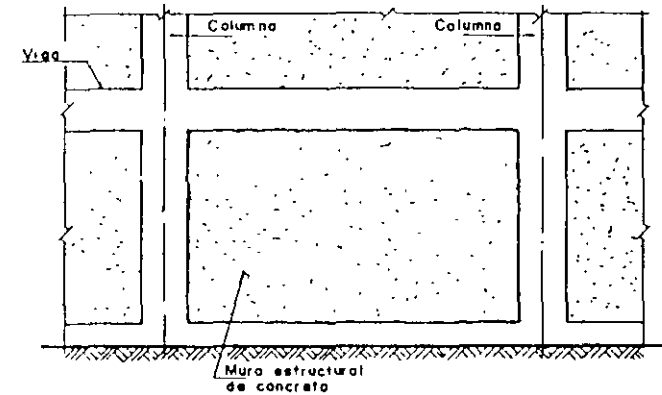
INFLUENCIA DEL MURO SOBRE EL MARCO ESTRUCTURAL

Fig 2-3-1-7

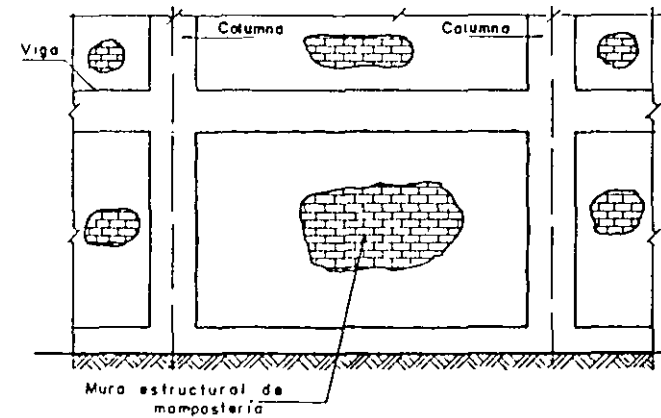


## 2.3.1

- El acero de refuerzo de los castillos y de las dalas, debe anclarse a las traveses y a las columnas de la estructura. (Fig. 2.3.1-10)
- Las superficies de las columnas y de las traveses, que estarán en contacto con los muros, deberán tener un acabado rugoso (6mm de profundidad). (Fig. 2.3.1-11)
- Las superficies antes mencionadas deberán estar limpias y libres de polvo, antes del colado o colocación de las piezas que integran a los muros (Fin. 2.3.1-11)
- Las superficies de contacto antes mencionadas, deberán humedecerse por lo menos durante 24 horas, antes de los colados (Fin. 2.3.1-11)



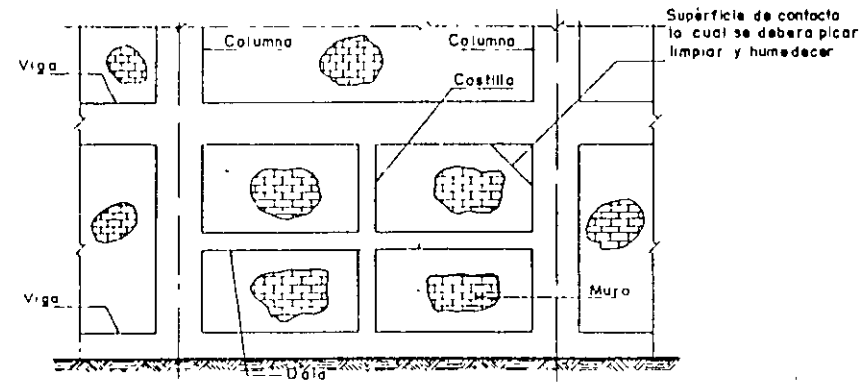
**MURO DE CONCRETO**  
Fig 2.3.1-3



**MURO DE MAMPOSTERIA**  
Fig 2.3.1-4

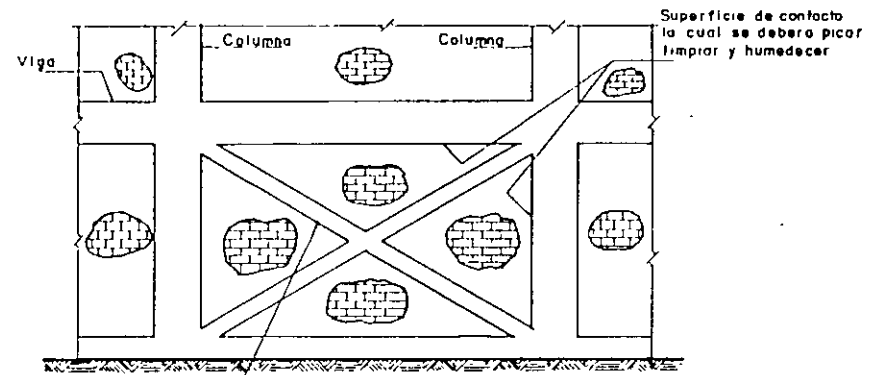
## 2.3.1

50



MURO DE MAMPOSTERIA CON  
DALAS Y CASTILLOS

Fig 2.3.1-5

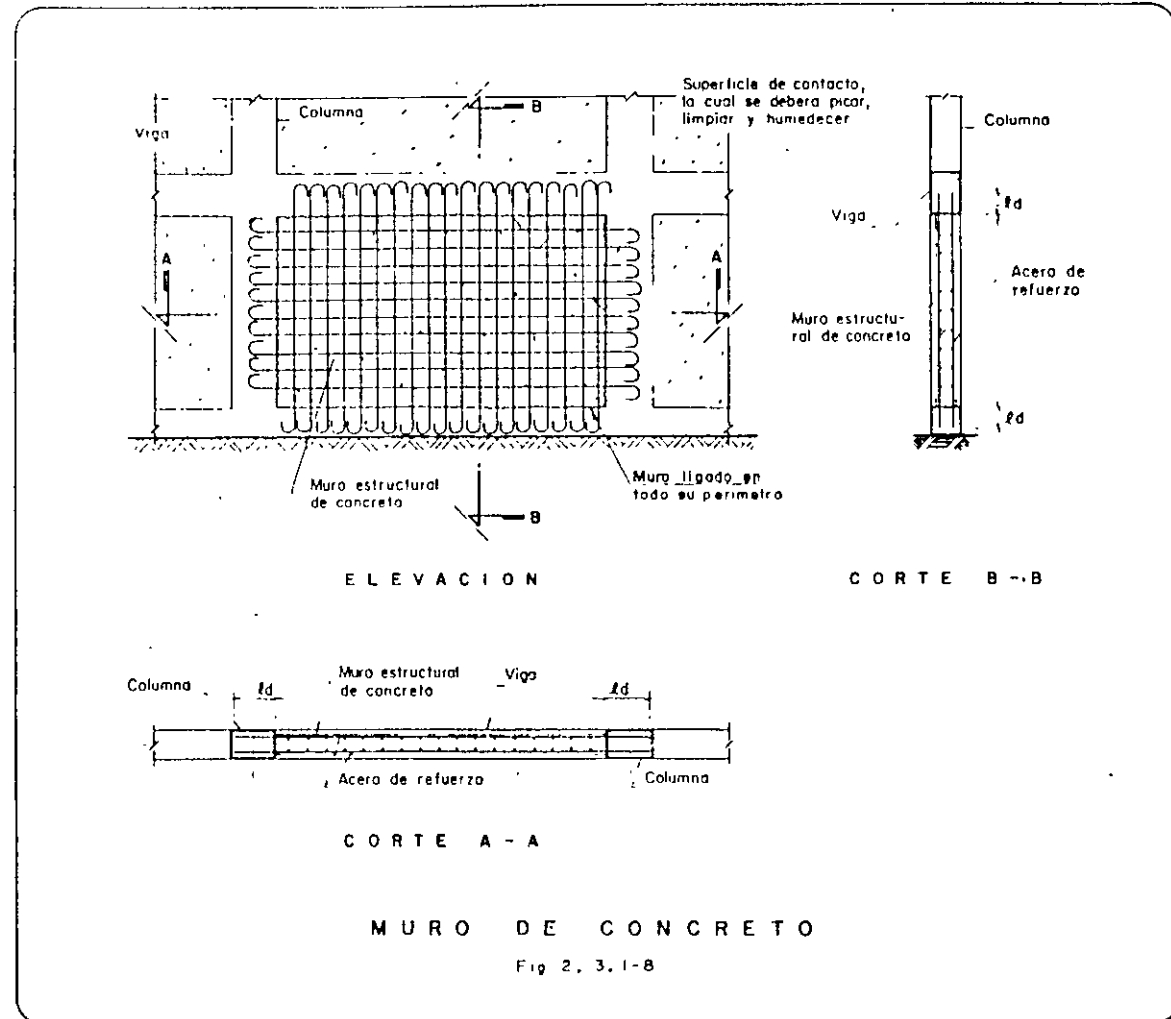


Castillos diagonales  
(contraenteos)

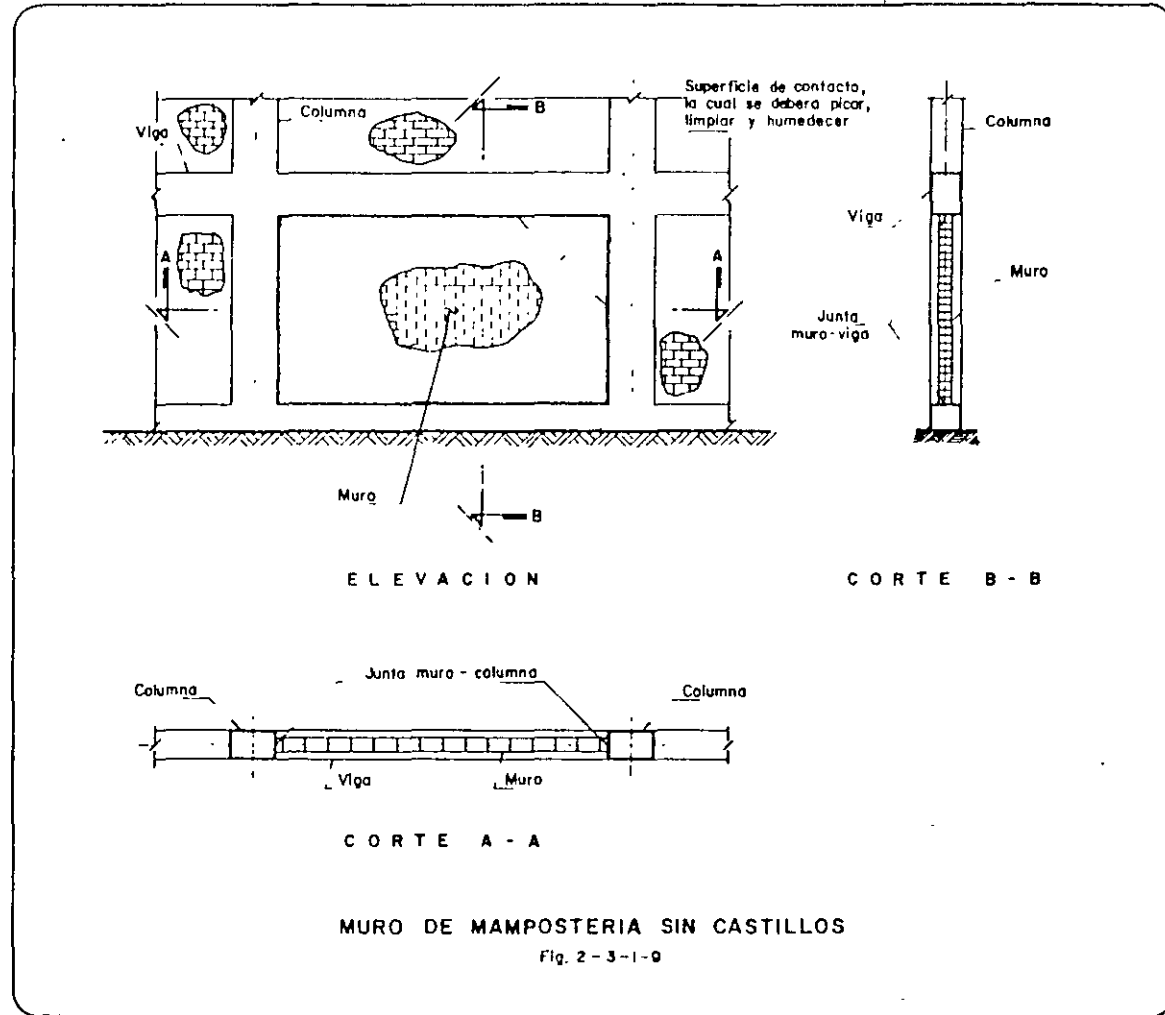
MURO DE MAMPOSTERIA CON  
DIAGONALES DE CONTRAVIENTO

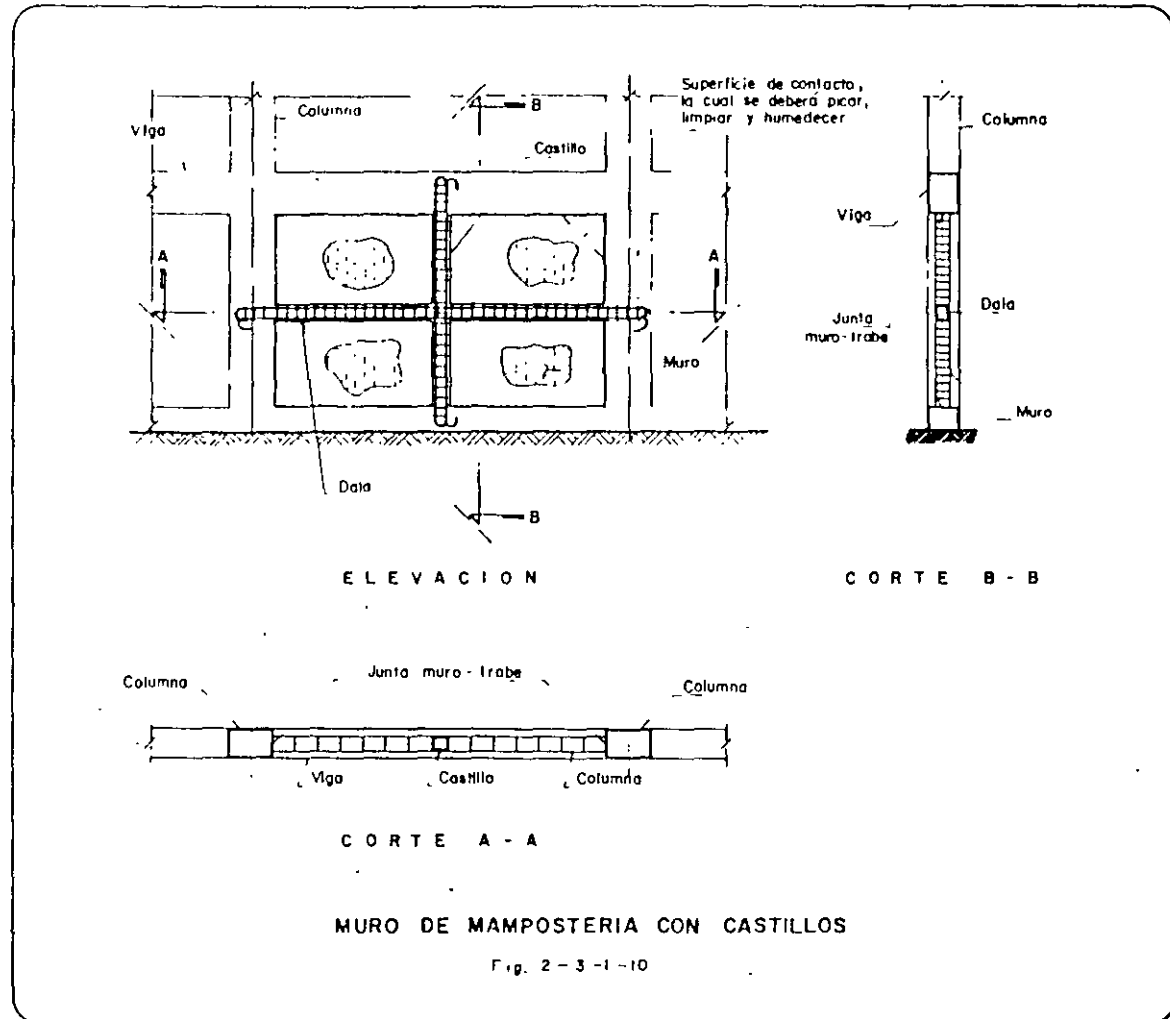
Fig 2.3.1-6

## 2.3.1

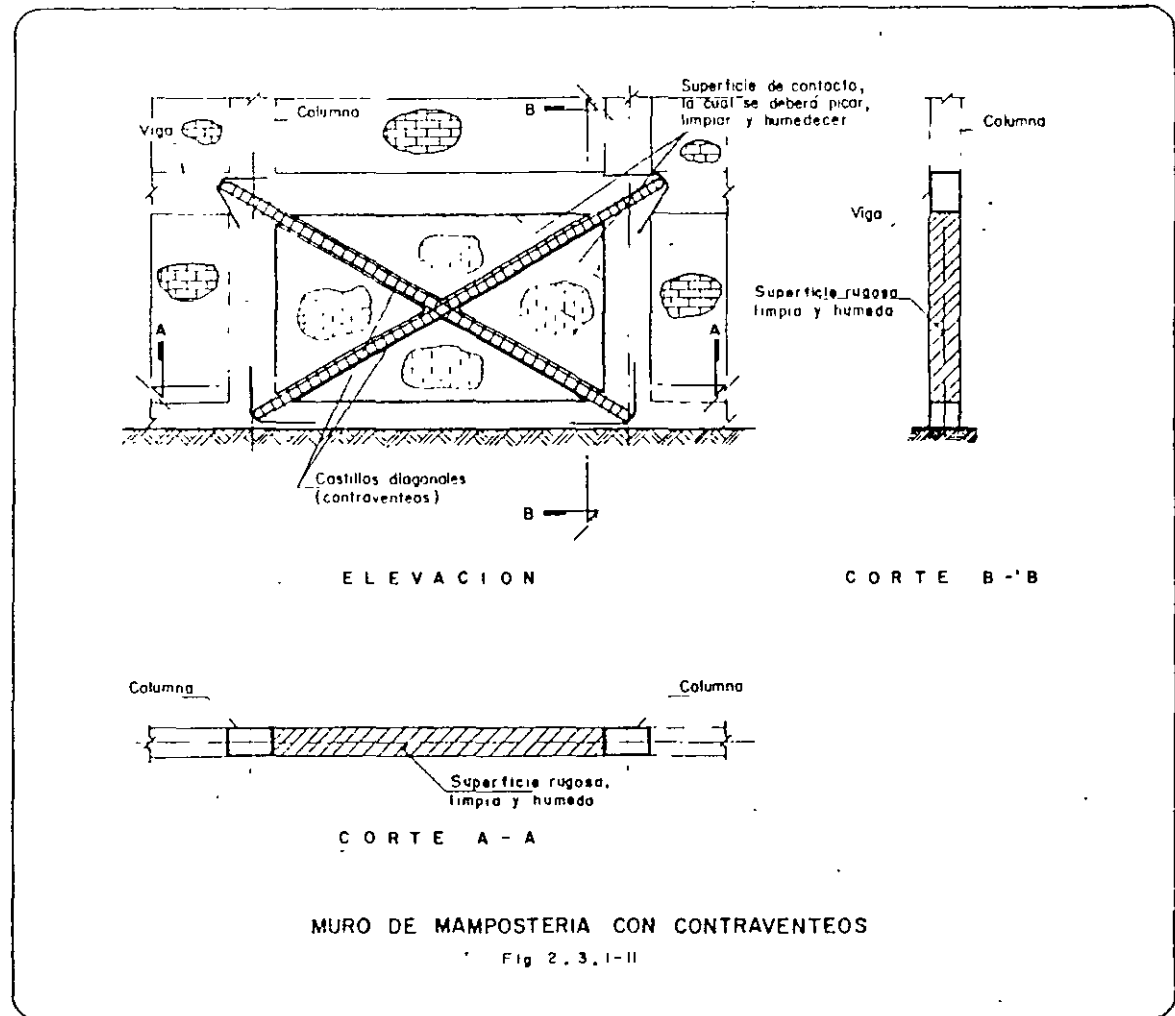


# 2.3.1





# 2.3.1



## 2.3.1

### Muros no estructurales

#### g.- Características

- . Se encuentran desligados de la estructura (fig. 2.3.1-12)
- . No contribuyen a la rigidez de la estructura.
- . No restringen los desplazamientos y/o deformaciones de la estructura.
- . Se encuentran fijos a la estructura, para evitar su deslizamiento y volteo (fig. 2.3.1-13 y 2.3.1-14)

#### h.- Clasificación de los muros no estructurales en función de los materiales.

- . Mampostería
- . Tablaroca
- . Lámina
- . Aglomerados
- . Madera
- . Etc.

#### i.- Requisitos de diseño

- . Deben diseñarse desde el punto de vista arquitectónico y fijarse adecuadamente a la estructura.
- . Debe indicarse en los planos arquitectónicos y estructurales, señalando claramente su fijación.

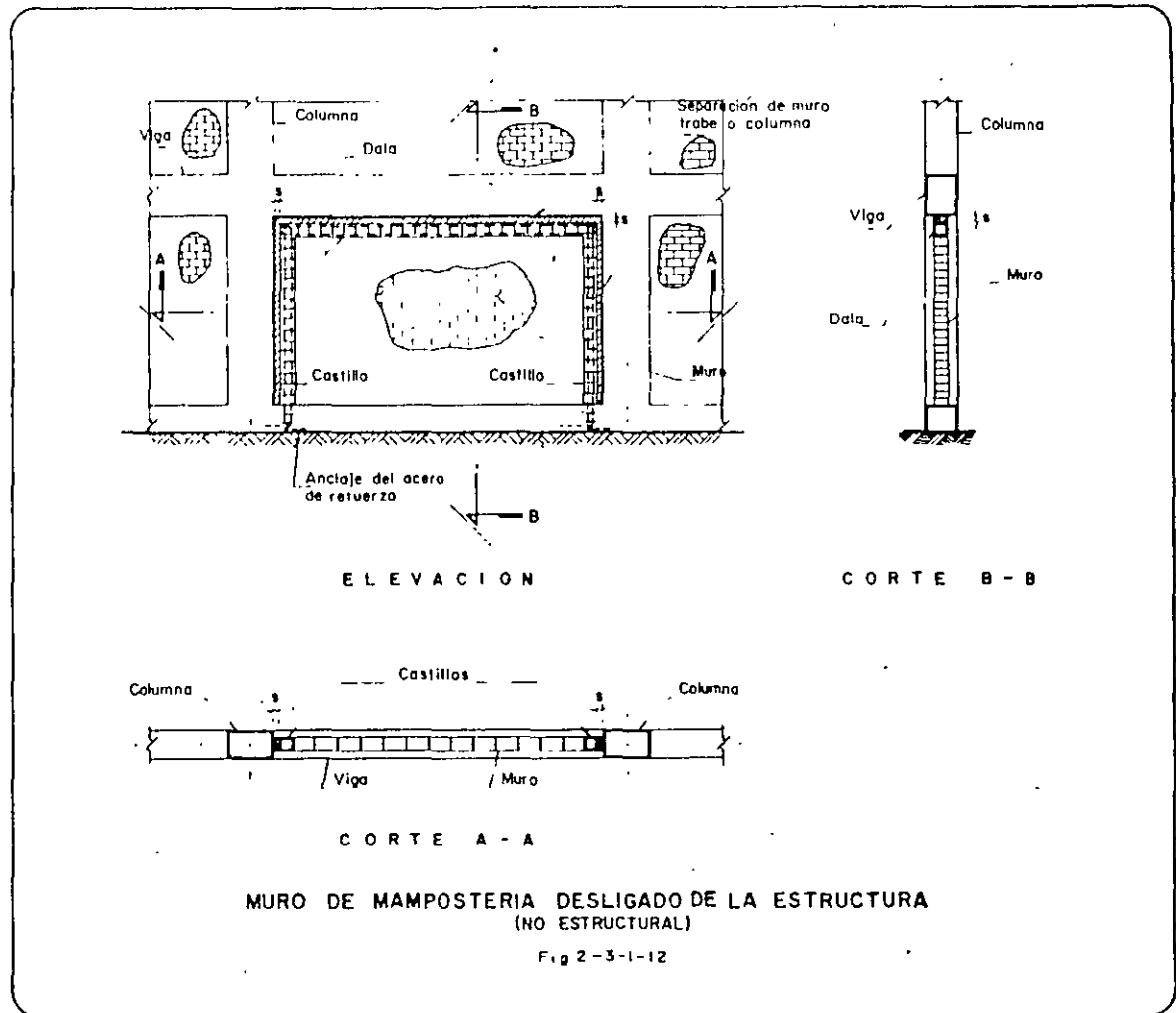
- . Deben diseñarse para ser estables en el sentido perpendicular a su plano.

#### j.- Requisitos para las uniones de los muros no estructurales con la estructura.

- . Deben estar desligados en su perimetro, excepto en la base

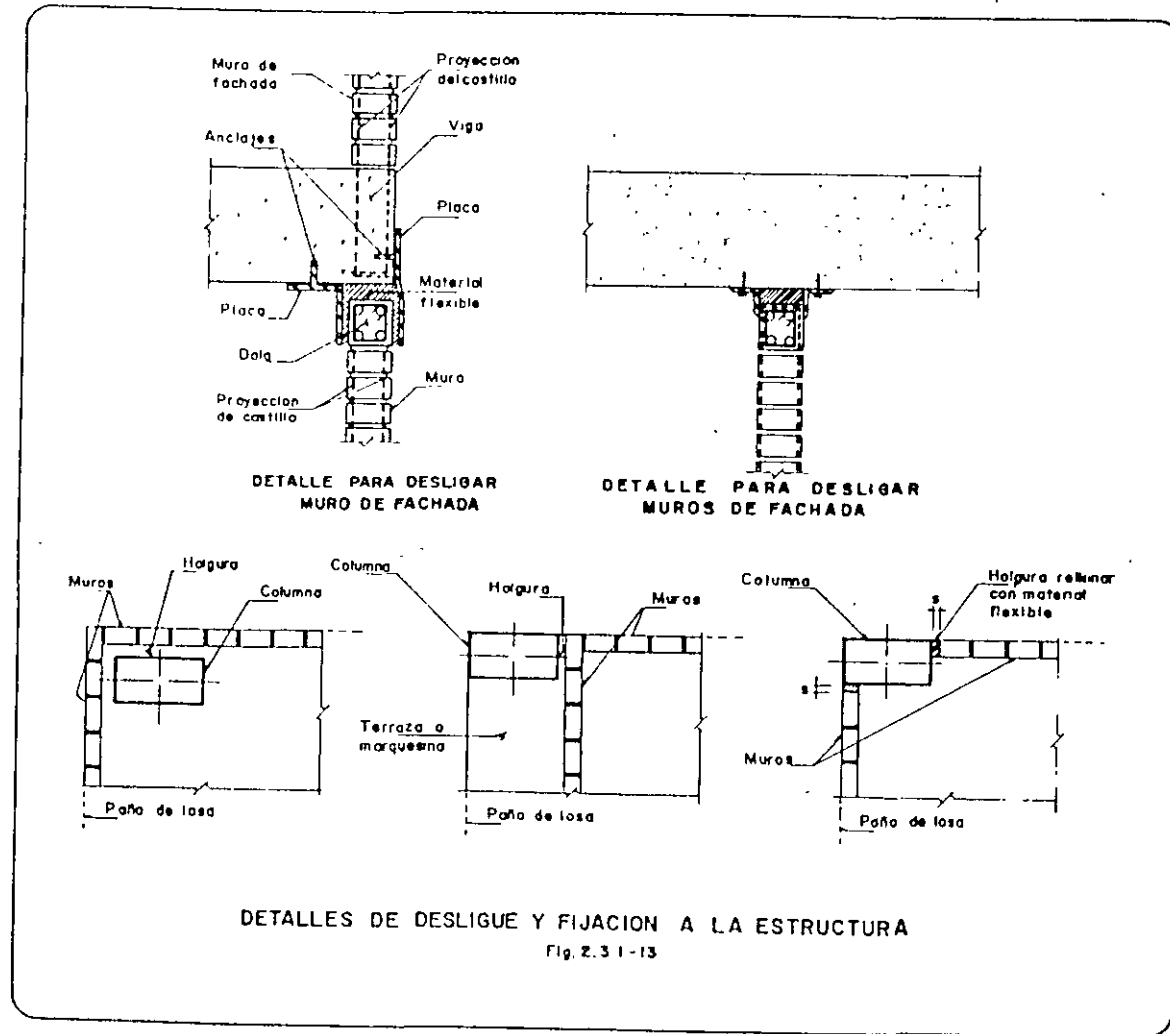
# 2.3.1

56

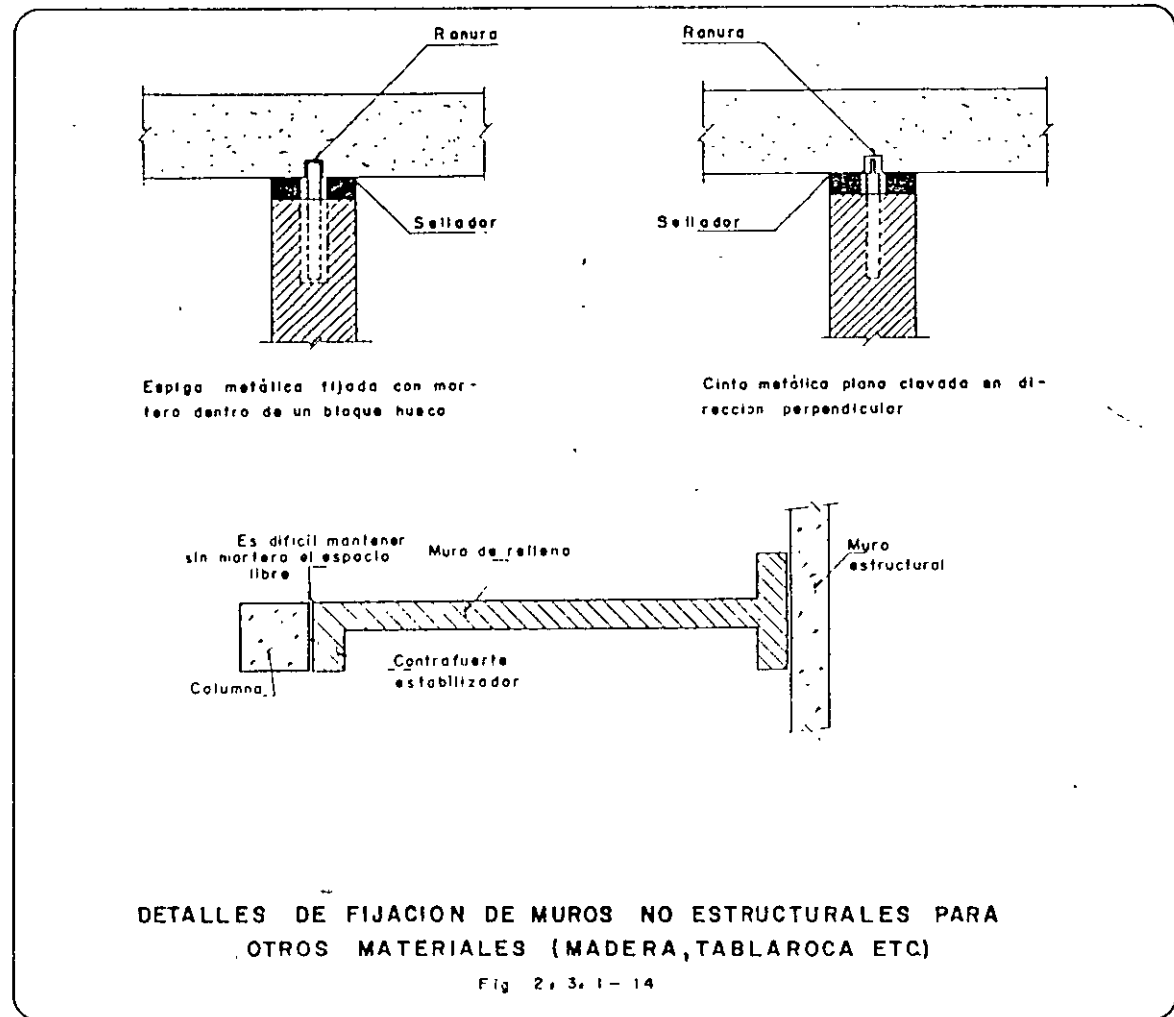




## 2.3.1



## 2.3.1



## 2.3.2

**ARTICULO 203.** Las diferencias entre los desplazamientos laterales de pisos consecutivos debidos a las fuerzas cortantes horizontales, calculadas con alguno de los procedimientos de analisis sismico, especificados en el articulo 203 de este Reglamento, no excederan a 0.006 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, tal como los elementos incapaces de soportar deformaciones apreciables, como los marcos de maquinaria, sean separados de la estructura principal de manera que no sufran danos por las deformaciones de ella. En tal caso, el limite en cuestion sera de 0.012 veces  $H_i$ .

El calculo de deformaciones laterales sera permitido cuando se aplique el metodo simplificado de analisis sismico.

a.- En este articulo se indica que:

- Las diferencias entre los desplazamientos laterales permisibles de pisos consecutivos debidos a fuerzas cortantes horizontales serán: (fig. 2.3.2-1)

• Si existen elementos incapaces de soportar deformaciones apreciables y si dichos elementos no estan separados de la estructura principal

$$\Delta_{ip} = 0.006 H_i$$

• Si dichos elementos estan separados de la estructura principal:

$$\Delta_{ip} = 0.012 H_i$$

$\Delta_{ia}$  = Diferencia de desplazamientos laterales de pisos consecutivos debidos a fuerzas cortantes horizontales.

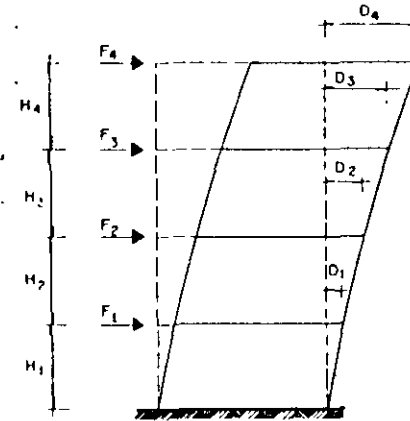
$\Delta_{ip}$  = Desplazamientos laterales permisibles de pisos consecutivos debidos a fuerzas cortantes horizontales.

$$\Delta_{ia} \leq \Delta_{ip}$$

b.- Objetivos.

- Limitar los desplazamientos laterales de la estructura, teniendo en cuenta una mayor restriccion en aquellos ca-

sos en que existan elementos, incapaces de soportar deformaciones apreciables, ligados a la estructura.



$$\Delta_{i0} = D_i - D_{i-1}$$

$D_i$  = Desplazamiento del piso  $i$  debido a fuerzas cortantes horizontales.

$D_{i-1}$  = Desplazamiento del piso  $i-1$  debido a fuerzas cortantes horizontales.

### DESPLAZAMIENTOS EN ENTREPISOS. CONSECUTIVOS

Fig 2.3.2 - 1

**EJEMPLO:** Sea entrapiso 2

$$\Delta_{20} = D_2 - D_1$$

$$\Delta_{20} \leq 0.006 H_2 \text{ ó}$$

$$\Delta_{20} \leq 0.012 H_2$$

Segun sea el caso

## 2.3.2

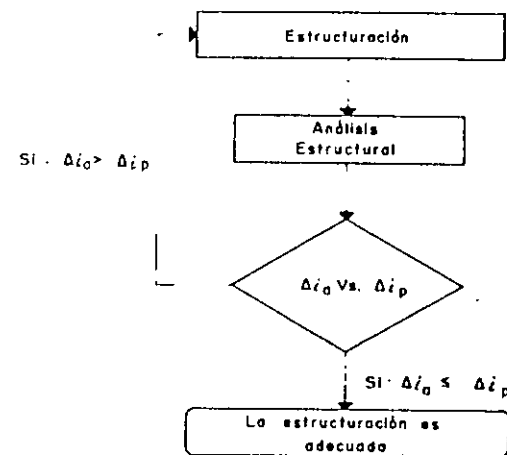
60

### c.- Observaciones.

- Al calcular los desplazamientos debidos a fuerzas cortantes horizontales de los pisos de las estructuras ( $D_i, D_{i-1}$ ) se deberá tomar en cuenta el factor de comportamiento sísmico.
- En aquellos casos en que no se cumplan las especificaciones señaladas en este artículo, es decir, que los desplazamientos calculados sean mayores que los permisibles se podrá emplear alguna de las opciones que a continuación se mencionan:
  - . Aumentar las dimensiones de las columnas y trabes.
  - . Aumentar las dimensiones de los muros y contravientos.

### d.- Estructuras existentes.

- En el caso de edificios construidos con anterioridad y que de acuerdo con el nuevo reglamento deben de ser revisados, es factible que se tenga que emplear una o más de las opciones indicadas en el inciso c), para lograr que los desplazamientos calculados sean menores que los permisibles.



REVISIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LAS ESTRUCTURAS

Fig. 2.3.2 - 2

## 2.3.3

**ARTICULO 210.**—En fachadas tanto interiores como exteriores, la colocación de los vidrios en los marcos o la liga de éstos con la estructura serán tales que las deformaciones de ésta no afecten a los vidrios. La holgura que debe dejarse entre vidrios y marcos o entre éstos y la estructura se especificará en las Normas Técnicas Complementarias.

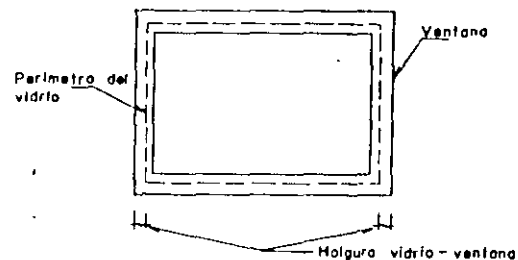
De NTC de sismo

**3.10 Revisión por rotura de vidrios**

Al revisar con respecto al estado límite por rotura de vidrios se verificará que alrededor de cada tablero de vidrio o cada marco exista una holgura no menor que el desplazamiento relativo entre los extremos del tablero o marco, calculado a partir de la deformación por corriente de entrepiso y dividido entre  $1 + H_v/B_v$ , donde  $B_v$  es la base del tablero o marco, y  $H_v$  su altura.

a.- En este artículo se indica que:

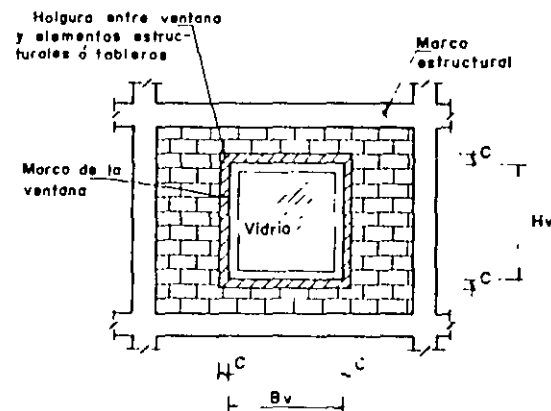
- Las fachadas pueden ser:
  - . Interiores.
  - . Exteriores.
- Deben existir holguras: (fig. 2.3.3-1)
  - . Entre vidrios y marcos de las ventanas (ventanería), definidas por los fabricantes.
  - . Entre los marcos de las ventanas y los elementos estructurales, definidas por el cálculo estructural.



DE VIDRIOS A MARCOS DE VENTANA

b.- Objetivo.

- Asegurar que los vidrios de las fachadas no se vean dañados bajo la acción de sismos de mediana o gran intensidad
- Evitar peligros para los habitantes de los inmuebles o los transeúntes.
- Evitar gastos de reposición de vidrios.



DE MARCOS DE VENTANAS A ESTRUCTURAS

DETALLE DE HOLGURA

Fig 2.3.3 - 1

## 2.3.3

62

c.- Dimensiones de las holguras entre ventanería y elementos estructurales.

- Las dimensiones de las holguras existentes entre los marcos de las ventanas y los elementos estructurales dependen de las deformaciones de los entrepisos, causadas exclusivamente por las fuerzas cortantes horizontales; es decir, no se deben considerar las deformaciones producidas por las cargas axiales en las columnas, ni la rotación de la base de la estructura producida por su interrelación con el suelo. (fig. 2.3.3-2)

- Las holguras entre las ventaneras y los elementos estructurales serán:

$$C \geq \frac{d}{(1 + H_v / B_v)}$$

donde:

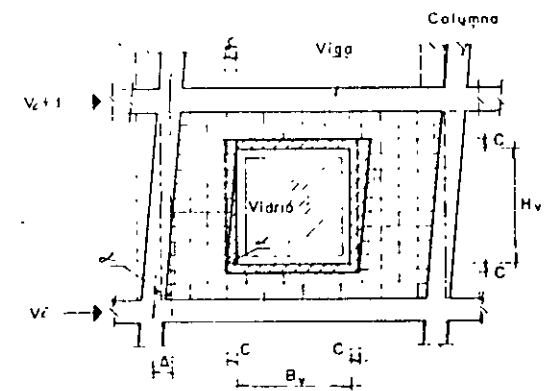
$B_v$  = Ancho del marco de la ventana.

$H_v$  = Altura del marco de la ventana.

$C$  = Holgura total entre marcos de ventana y elementos estructurales.

= Deformación por cortante de entrepisos.

$d$  = Desplazamiento relativo entre los extremos del tablero o marco de la estructura calculada a partir de la deformación por cortante del entrepiso.



$\Delta$  = Deformación del entrepiso causada exclusivamente por fuerzas cortantes consideradas.

**DETALLE DE HOLGURA ENTRE MARCOS DE VENTANERIA Y ESTRUCTURA**

Fig 2.3.3-2

d.- Materiales que se pueden utilizar - para el aislamiento:

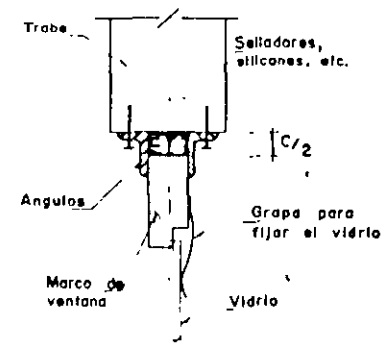
- De las ventanas con respecto a la estructura:
  - Sellador
  - Silicones
  - Etc.
- De los vidrios con respecto a los marcos de las ventanas:
  - Macilla
  - Mastique
  - Sellador
  - Etc.

e.- Fijación de las ventanas a las estructuras

- Se deben fijar las ventanas a la estructura de tal manera que se impidan los movimientos perpendiculares a su plano. Para ello se pueden colocar, entre otras cosas, ángulos metálicos a distancias -- adecuadas (fig. 2.3.3-3).

f.- Fijación de los vidrios a las ventanas

- Se seguirá la práctica establecida por los fabricantes de ventaneria.



DETALLES DE FIJACION DE MARCOS DE VENTANAS A ESTRUCTURAS

Fig 2 3.3 - 3

## 2.3.4

64

**ARTÍCULO 211.** Toda construcción deberá separarse de sus linderos con los predios vecinos una distancia no menor de 5 cm ni menor que el desplazamiento horizontal calculado para el nivel de que se trate. El desplazamiento horizontal calculado se obtendrá con las fuerzas sísmicas reducidas según los criterios que rigen las Normas Técnicas Complementarias y se multiplicará por el factor de comportamiento sísmico marcado por dichas Normas, aumentado en 0.001, 0.003 o 0.006 de la altura de dicho nivel sobre el terreno en las zonas I, II o III, respectivamente.

Si se emplea el método simplificado de análisis sísmico, la separación mencionada no será, en ningún nivel, menor de 5 cm ni menor de la altura del nivel sobre el terreno multiplicada por 0.001, 0.003 o 0.006 según que la construcción se halle en la zona I, II o III, respectivamente.

La separación entre cuerpos de un mismo edificio o entre edificios adyacentes será cuando menos igual a la suma de las que de acuerdo con los párrafos precedentes corresponden a cada uno.

Se anotará en los planos arquitectónicos y en los estructurales las separaciones que deben dejarse en los linderos y entre cuerpos de un mismo edificio.

Los espacios entre construcciones colindantes y entre cuerpos de un mismo edificio deben quedar libres de todo material. Si se usan tapajuntas, estas deben permitir los desplazamientos relativos tanto en su plano como perpendicularmente a él.

a.- En este artículo se indica que:

- Las construcciones deberán separarse de sus linderos una distancia - (fig. 2.3.4-1)

\* Cuando se emplean los métodos estático y dinámico.

$$S \geq \begin{cases} 5 \text{ cm} \\ \Delta \end{cases}$$

donde:

S = Separación de la construcción -- con el lindero.

$\Delta$  = Desplazamiento máximo horizontal del edificio.

- Los desplazamientos máximos horizontales de los edificios se obtendrán ( $\Delta$ ):

. Tomando en cuenta las fuerzas -- sísmicas reducidas.

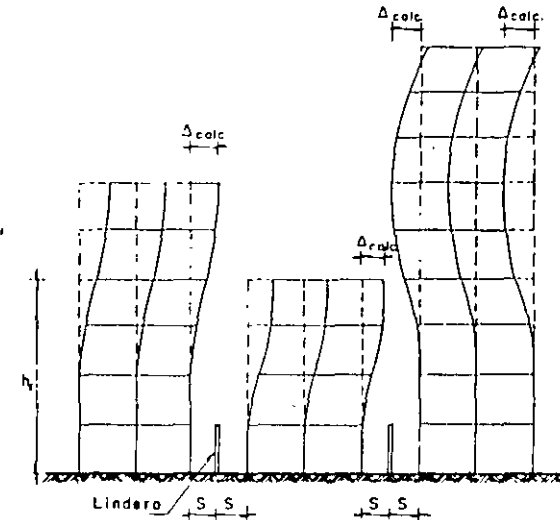
. Obteniendo el desplazamiento máximo horizontal calculado ( $\Delta_{calc}$ )

Luego,

$$\Delta = \Delta_{calc} \times Q + \begin{cases} 0.001h_i & \text{ZONA I} \\ 0.003h_i & \text{ZONA II} \\ 0.006h_i & \text{ZONA III.} \end{cases}$$

donde,

Q = Factor de comportamiento sísmico.



Donde :

S = separación de la construcción con el lindero

### SEPARACION DE EDIFICIOS

Fig. 2.3.4 - 1

$h_i$  = Altura del nivel en que se presenta el desplazamiento máximo horizontal sobre el terreno.

$\Delta_{calc}$  = deformación calculada en el análisis estructural.



\* Cuando se emplea el método simplificado.

		Zona
S	5 cm	
	0.007h <sub>i</sub>	I
	0.009h <sub>i</sub>	II
	0.012h <sub>i</sub>	III

- la separación entre cuerpos de un mismo edificio y entre edificios-adyacentes será: (fig. 2.3.4-2)

$$S_t = S_1 + S_2$$

donde:

$S_t$  = Separación total

$S_1$  = Separación correspondiente al edificio 1.

$S_2$  = Separación correspondiente al edificio 2

- la separación entre cuerpos de un mismo edificio y entre edificios-adyacentes se indicará en:

- . Planos arquitectónicos
- . Planos estructurales

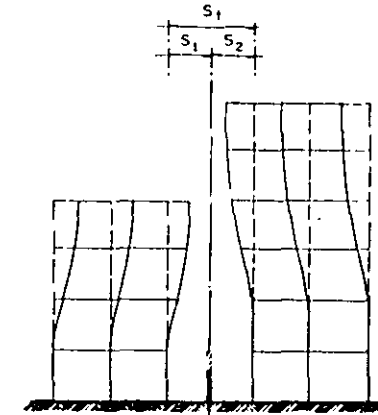
- Si se utilizan tapajuntas, estos permitirán el libre desplazamiento:

- . En su plano
- . Perpendicular a su plano
- . Estarán libres de todo material

b.- Objetivo

- Evitar que los edificios que se construyan, no tengan posibilidad de chocar con las construcciones-adyacentes, cuando se presenten sismos de magnitud considerable.

- Este tema es similar al que se plantea en los artículos 177 y 209, con la diferencia de que en él, se toman en cuenta aspectos cuantitativos.



SEPARACION TOTAL ENTRE EDIFICIOS

Fig 2.3.4-2

## 2.3.4

66

### c.- Comentarios.

- Se observa que la separación entre edificios y entre cuerpos de un mismo edificio, son notablemente mayores para la zona III que para las zonas de transición ( II) y de Lomas ( I).
- El intervalo de las separaciones de los edificios con sus linderos, cuando se aplica el método simplificado son:

Z O N A	INTERVALO (cm)
Lomas ( I )	5 - 9
Transición ( II)	5 - 12
Lacustre ( III)	5 - 16

- Al definir la estructuración de los edificios se suponen separaciones entre sus cuerpos, o con los edificios colindantes. Al llevar a cabo el análisis estructural del mismo es factible se modifique esta separación de acuerdo con los desplazamientos calculados.

- El cumplimiento de este artículo es de gran importancia, debido a que las estructuras pueden estar bien diseñadas pero si no tiene la separación adecuada, podrán sufrir daños importantes provocados por el impacto con los edificios vecinos.
- Esta especificación presenta notables modificaciones, respecto al reglamento de construcciones de 1977 debido al gran número de edificios que sufrieron grandes daños durante los sismos de septiembre de 1985, provocados por el choque entre ellos.

## 2.4.1 DISEÑO DE CIMENTACIONES

Para un estudio de las características generales de las Lomas, se realizaron investigaciones geológicas y geotécnicas en las siguientes zonas:

**Zona I.** Lomas formadas por rocas o suelos puzolánicos, que fueron depositados durante el Pleistoceno, pero en las que existen depósitos lacustres o interglaciales de estos períodos en estado suelto o ligeramente trastramente blandos. En esta Zona se encuentran la presencia de nequeladas en rocas y de catrinas y tinas excavadas en suelos para extraer minas de arena.

**Zona II.** Transición en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad o bien que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limosarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de estas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros.

**Zona III.** Lacustre integrada por potentes depósitos de arcilla altamente comprensible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme a muy dura y de espesores variables de centímetros a varios metros. Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

La zona a que corresponde un predio se determinará a partir de las investigaciones que se realicen en el subsuelo del predio objeto de estudio, tal y como lo establezcan las Normas Técnicas Complementarias. En caso de construcciones ligeras o medianas, cuyas características se definan en dichas Normas, podrá determinarse la zona mediante el mapa incluido en las mismas, si el predio está dentro de la zona zonificada; los predios ubicados a menos de 200 m de las fronteras entre dos de las zonas antes descritas se supondrán ubicados en la más favorable.

a.- En este artículo se incluirá que:

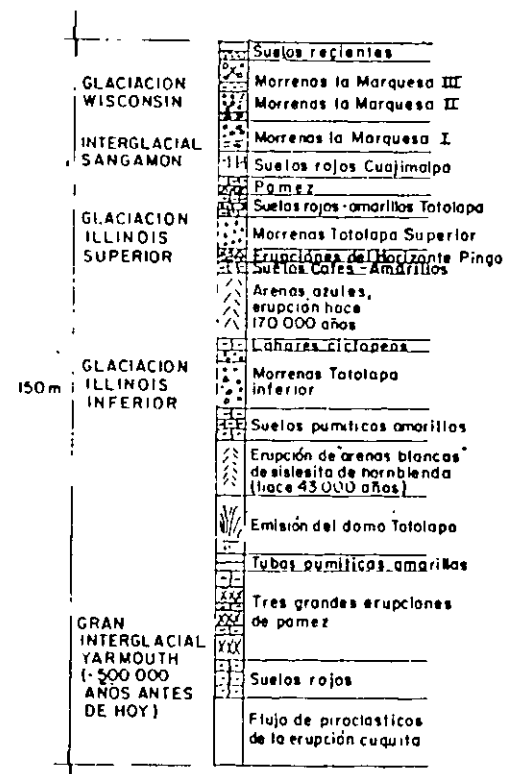
- El Distrito Federal se subdivide en:
  - . Zona I (Lomas)
  - . Zona II (Transición)
  - . Zona III (Lacustre)
- Las estructuras se pueden clasificar en:
  - . Ligeras
  - . Medianas
  - . Pesadas

b.- Objetivo

Definir las zonas geológicas en las que se ubican los predios en donde se van a construir edificios, de acuerdo con la clasificación establecida por el Departamento de Distrito Federal.

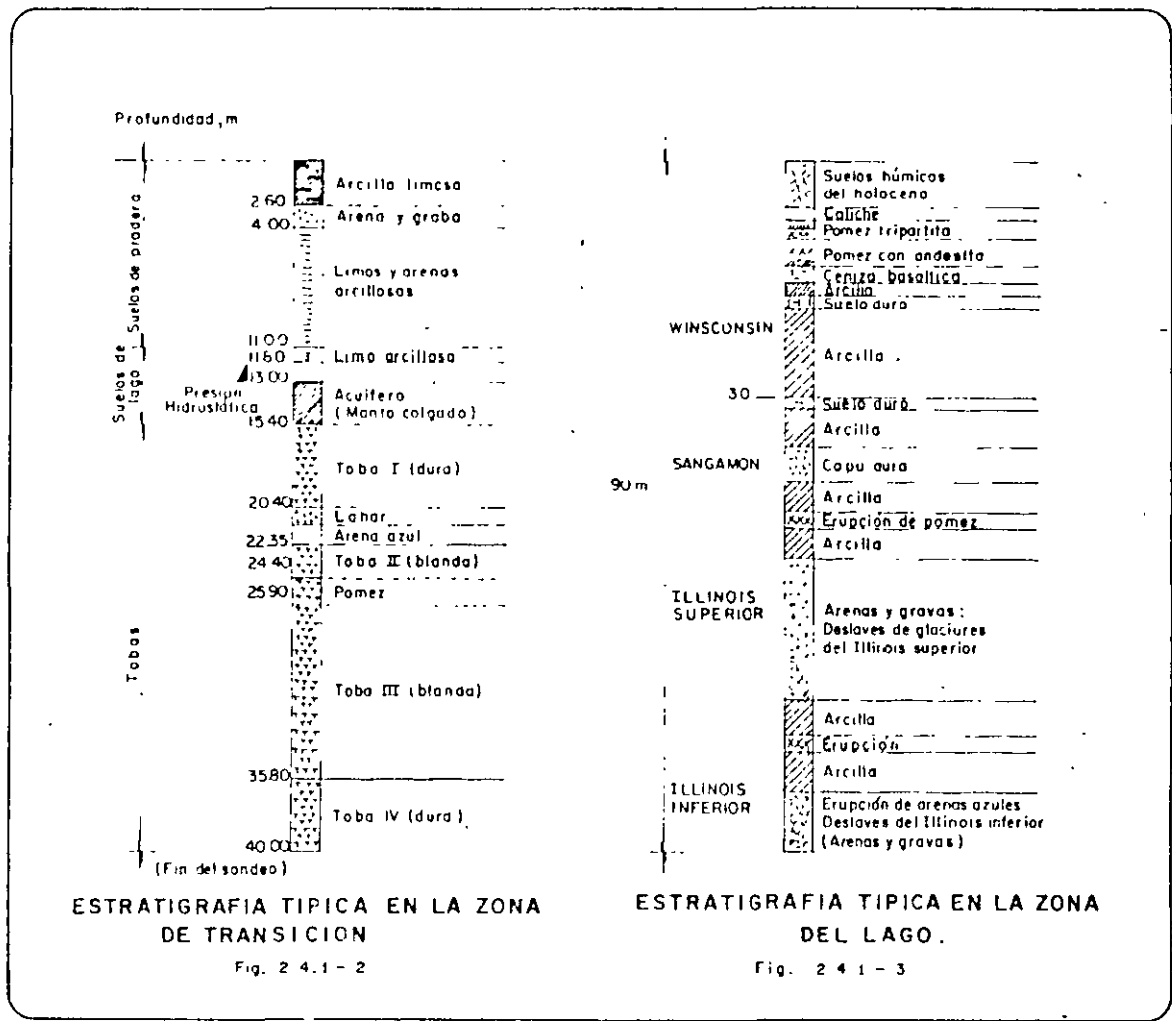
c.- Estratigrafías

Se muestran estratigrafías típicas de las tres zonas en las que se subdivide el Distrito Federal (figs. 2.4.1-1, 2.4.1-2 y 2.4.1-3).

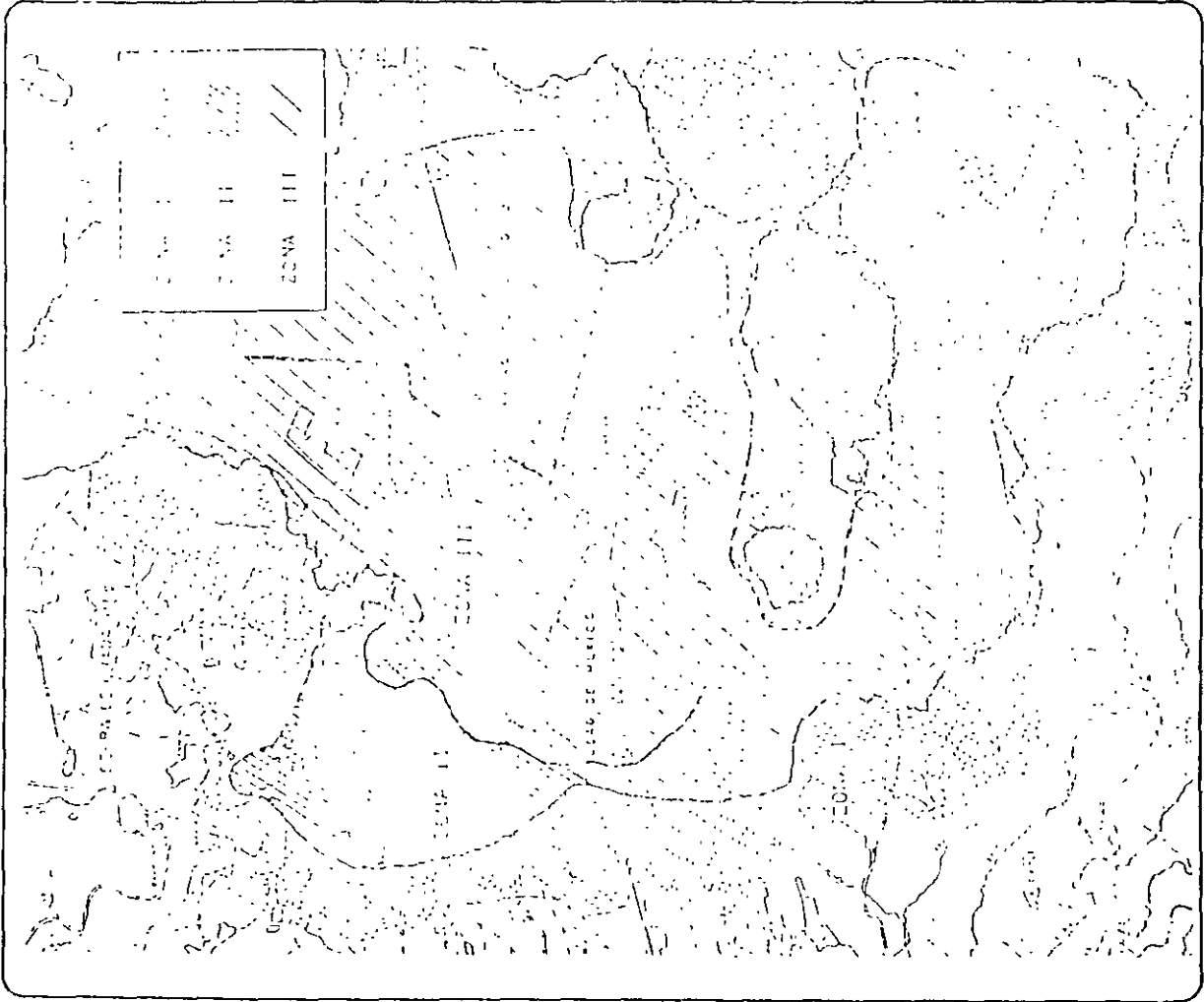


ESTRATIGRAFIA TIPICA EN LA ZONA DE LOMAS

Fig. 2.4.1-1



2.4.1



## 2.4.1

70

### d.- Definición del tipo de suelo

Para definir el tipo de suelo en el que se ubicarán las estructuras, se toman en cuenta las siguientes indicaciones: (fig. 2.4.1-5)

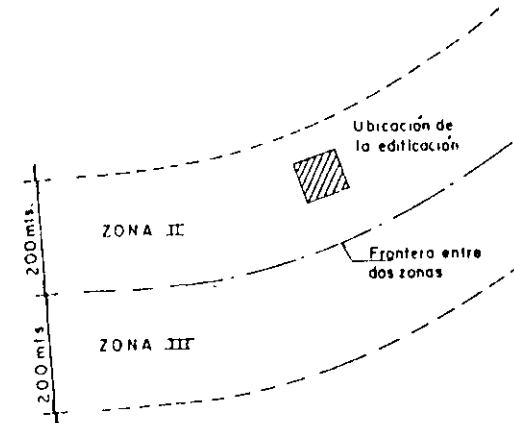
- Para estructuras ligeras y medianas, se puede determinar el tipo de suelo directamente del mapa de zonificación del Distrito Federal. Sin embargo es recomendable llevar a cabo estudios de mecánica de suelos que permita clasificar al suelo con información más precisa.
- Si el predio se encuentra dentro de una franja de 200 m, de la frontera entre dos zonas, se supondrá ubicada en la zona más desfavorable (fig. 2.4.1-4).

Edificación	Definición de tipo de Suelo
- Ligeras	Directamente del mapa de zonificación de la Ciudad de México
- Medianas	Directamente del mapa de zonificación de la Ciudad de México
- Pesadas	Del estudio de Mécanica de suelos

(Fig. 2.4.1-5)

### e.- Observación

Aunque el estudio de mecánica de suelos reclasifique geotécnicamente un lugar, deberá emplearse el coeficiente sísmico correspondiente a su ubicación en el mapa.



**Nota:**  
Se ubicará la estructura en la zona más desfavorable, en este caso en la Zona III.

**PREDIOS UBICADOS EN AREAS  
FRONTERIZAS ENTRE DOS  
ZONAS**

Fig. 2 4 1 - 4

## 2.4.1

- Para estructuras pesadas se define el tipo de suelo del predio en que se ubicarán, con base en los estudios de mecánica de suelos como se especifica en las NTC para diseño de cimentaciones.

- No se recomienda
  - . Zapatas aisladas
  - . Zapatas corridas
  - . Losas de cimentación

### f.- Recomendaciones

Es conveniente emplear cimentaciones superficiales en zonas de suelo duro y cimentaciones profundas en zonas de suelo compresibles.

Con base en lo anterior.

#### \* En zonas de suelo duro.

- Se recomienda:

- . Zapatas aisladas
- . Zapatas corridas
- . Losas de cimentación

- No se recomienda:

- . Cimentaciones compensadas
- . Cimentaciones a base de pilotes.

#### \* En zonas de suelo compresible.

- Se recomienda:

- . Losas de cimentación
- . Cajones de cimentación con pilotes de fricción o de control

## 2.4.2

12

**ARTICULO 221.**—También se deberá investigar las condiciones de cimentación de las obras y de las plantas en materia de estabilidad, hundimientos, emersión, agrietamiento del suelo y desplome en cuenta en el diseño y construcción de las obras en el proyecto.

Asimismo, se investigarán la localización y las características de las obras subterráneas existentes o proyectadas, pertenecientes a la red de transporte colectivo, de drenaje y de otros servicios públicos, con objeto de verificar que la construcción no cause daños y tales instalaciones ni sea afectada por ellas.

a.- En este artículo se indica que:

- Se deben investigar las condiciones de las cimentaciones de los edificios colindantes en lo correspondiente a: (fig. 2.4.2-1)

- . Inestabilidad
- . Hundimientos
- . Emersión
- . Agrietamiento del suelo
- . Desplome

- Se requiere tener conocimiento de las construcciones que puedan afectar o verse afectadas por el edificio en construcción.

Las construcciones que pueden verse afectadas o afectar a la estructura en proyecto, pueden tener:

- . Colindancia directa
- . Colindancia indirecta

- Se deben investigar las obras subterráneas cercanas, ya sea existentes o proyectadas que pueden afectar o verse afectadas por la estructura en proyecto, tales como:

- . Red de transporte colectivo
- . Drenaje
- . Otros servicios públicos

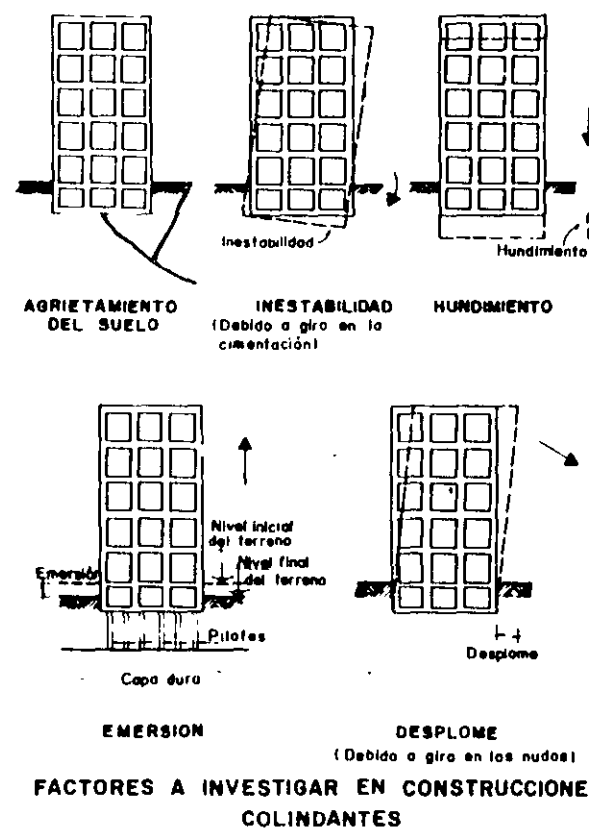


Fig 2.4.2-1



b.- Objetivos

- Evitar que con el tiempo, o bajo la acción de solicitaciones eventuales o accidentales se presenten deformaciones o desplazamientos en las estructuras provocados por los hundimientos, emersiones, etc., del suelo (fig. 2.4.2-2).
- Evitar que debido a las características de la estructura por construir, se vean afectadas las construcciones colindantes y las obras subterráneas ubicadas en las cercanías (fig. 2.4.2-3)

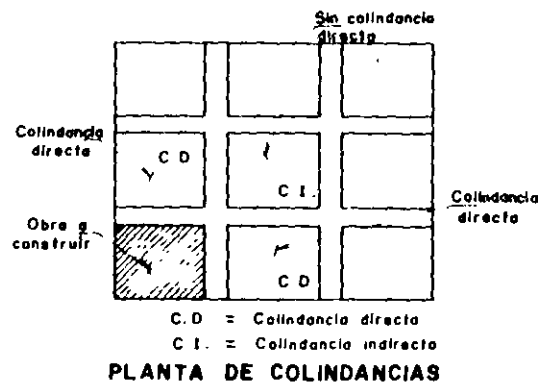
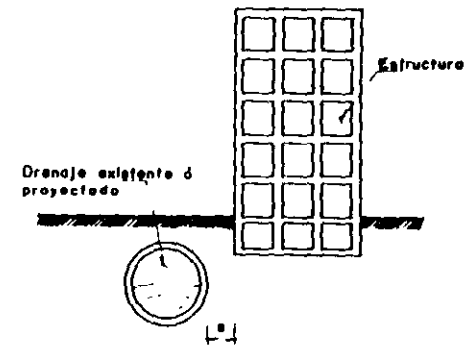
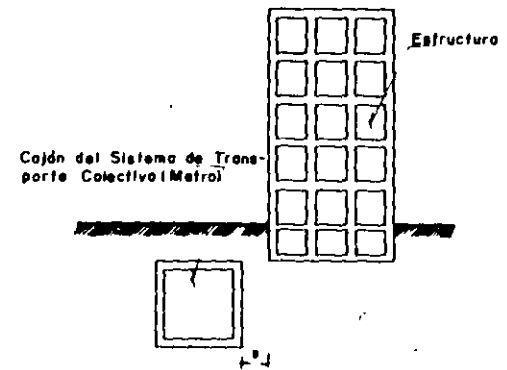


Fig. 2.4.2-2



OBRAS DE DRENAJE



OBRAS DE TRANSPORTE SUBTERRANEO

OBRAS SUBTERRANEAS

Fig. 2.4.2-3

## 2.4.2

14

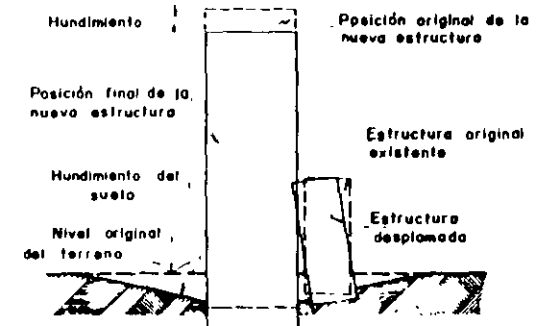
### c.- Investigación de edificios y obras colindantes

- Se deberán estudiar las cimentaciones de cada una de las edificaciones colindantes directa o indirectamente, en lo referente a:

- . Tipo de cimentación
- . Condiciones actuales de la cimentación

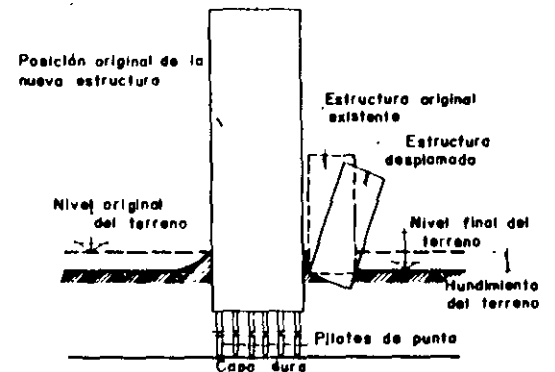
#### Relación cimentación-suelo-estructura

- Influencia de la nueva cimentación en las ya existentes
- . Influencia de las cimentaciones existentes en la nueva
- Los factores que deben tomarse en cuenta para definir la cimentación adecuada y posteriormente la estructuración definitiva son:
  - . Peso de la estructura (fig. 2.4.2-4)
  - . Colindancias (fig. 2.4.2-5)
  - . Rigidez de la estructura
  - . Zona del D.F. en la que se ubicará el edificio.



Influencia de los hundimientos del suelo en estructuras existentes, provocadas por nuevas estructuras de gran peso

Fig 2 4 2 - 4



Influencia de la emersión del suelo en estructuras existentes, provocada por nuevas estructuras piloteadas

Fig 2 4 2 - 5

## d.- Recomendaciones

- Todas las estructuras que se vayan a construir cerca de obras públicas de gran importancia (red de transporte colectivo, drenaje, etc.), se someterán a la revisión y aprobación de las autoridades correspondientes.
- Las edificaciones que se construirán en zonas de la Ciudad en que se presentan suelos compresibles, requieren mayor cuidado tanto al definir la estructura como en el diseño estructural y en su construcción, ya que los problemas que ahí se presentan son más graves que los correspondientes a zonas de suelos duros.
- Es conveniente que las cimentaciones de las nuevas construcciones sean compatibles en sus deformaciones (hundimientos, emersiones, etc.) con las correspondientes de las estructuras colindantes.
- Las cimentaciones de las nuevas construcciones no deben introducir acciones adicionales a las obras subterráneas cercanas.

## 2.5 OBRAS PROVISIONALES Y MODIFICACIONES



a.- En este artículo se indica que:

Las modificaciones a edificios existentes: (fig. 2.5.1-1)

- Deberán realizarse después de llevar a cabo una revisión muy cuidadosa del proyecto estructural.
- Deberán ser aprobadas por el Director Responsable de Obra y/o Co-responsable en seguridad estructural.
- Deberán partir de un rediseño estructural que incluya los aspectos correspondientes a:
  - . La propia estructura
  - . La cimentación
  - . Los apuntalamientos
  - . Las rigidizaciones
  - . Los procedimientos constructivos
  - . Etc.

b.- Objetivo

- Evitar que modificaciones locales de la estructura afecten desfavorablemente el comportamiento general de la misma.

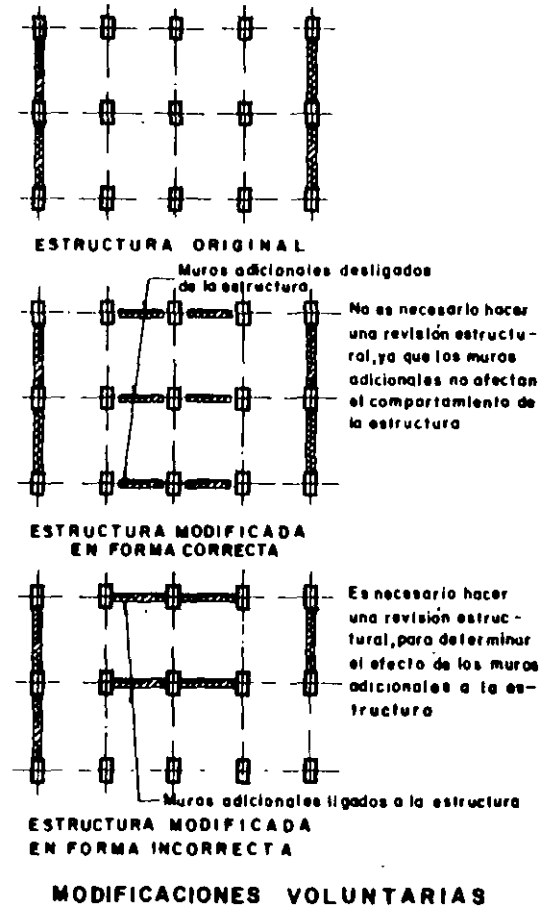


Fig. 2.5.1-1

## 2.5.1

78

c.- Se tienen experiencias de edificios que fallan de manera parcial o total y en algunos casos llegan hasta el colapso, por modificaciones realizadas incorrectamente a la estructura.

d.- Clasificación de las modificaciones:

- Las modificaciones que pueden sufrir las estructuras son:
  - . Modificaciones voluntarias (ampliación, remodelación, refuerzo, etc.) (Fig. 2.5.1-2).
  - . Modificaciones involuntarias -- (por falta de mantenimiento, -- por uso inadecuado del inmueble, etc.) (Fig. 2.5.1-3).

Posibles daños

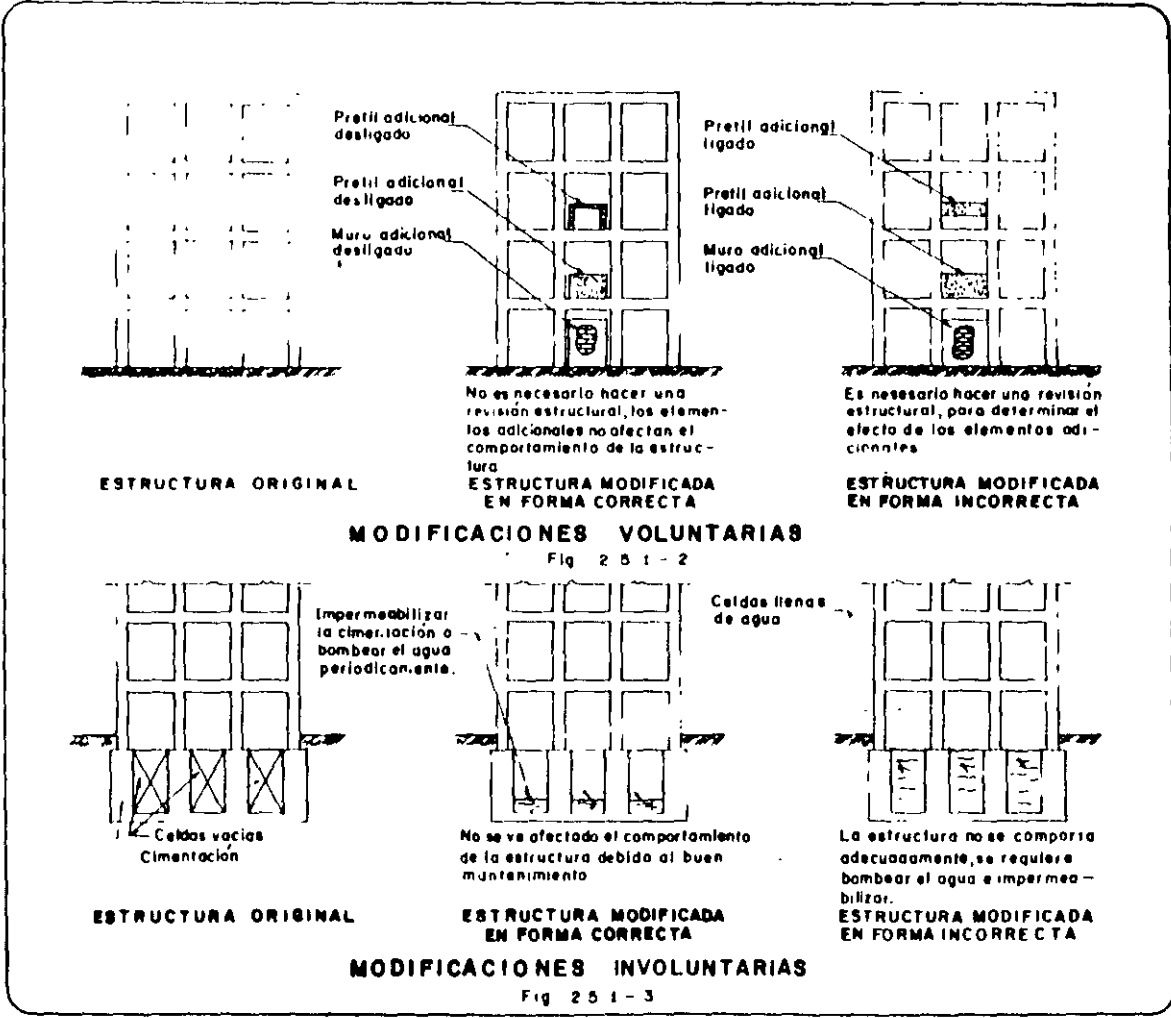
- . Daños en elementos secundarios
- . Daños en elementos principales
- . Colapso parcial de la estructura
- . Colapso total de la estructura

e.- Recomendaciones

- Cuando la modificación consista en la modernización de la fachada mediante elementos colados in situ o prefabricados, éstos no deberán ligarse a la estructura.
- Se deberán rediseñar las cimentaciones de acuerdo con las modifica-

ciones que se les hagan a las estructuras.

- Cualquier modificación de la estructura o de la cimentación deberá ser revisada y aprobada por el director responsable de obra y/o corresponsable en seguridad estructural.
- En caso de que las estructuras o cimentaciones sean modificadas y no se les haya sometido a una revisión estructural, el propietario, el director responsable de obra y el corresponsable en seguridad estructural serán responsables del comportamiento de la edificación.
- Si las estructuras son modificadas inadecuadamente, pueden sufrir daños no solo por sismo, sino también por cargas gravitacionales.
- Cuando la edificación se encuentre ubicada en la zona III, los problemas antes mencionados se amplifican considerablemente.

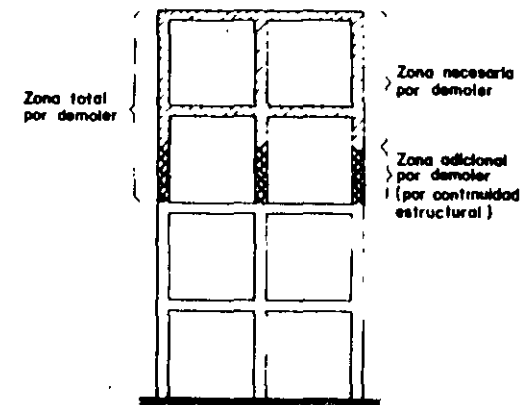


## 2.6 CAPITULO UNICO



a.- En este artículo se indica que:

- . Las edificaciones
  - . Las estructuras o
  - . Las instalaciones
- Que presenten:
- . Peligro para personas
  - . Peligro para bienes
- Deberán ser:
- . Apuntalados
  - . Reparados
  - . Demolidos parcial o totalmente
- Por el:
- . Propietario o
  - . Poseedor
- Previo dictamen técnico del Departamento del Distrito Federal y con forme a lo señalado en el Reglamento de Construcciones.
- Las demoliciones parciales incluirán toda parte de la estructura -- que se vea afectada, directa o indirectamente, por la continuidad estructural (Fig. 2.6.1-1)



DEMOLICION PARCIAL DEL EDIFICIO

Fig 2.6.1-1

## 2.6.1

82

### B.- Objetivos

Llevar a cabo, con la urgencia del caso, las reparaciones, refuerzos y demoliciones necesarias para evitar fallas en la estructura o el colapso parcial o total de la misma.

### c.- Recomendaciones

Al realizar:

- El apuntalamiento parcial o total de la estructura
- La reparación parcial o total de la estructura
- La demolición parcial de la estructura

Es indispensable que se tomen en cuenta los siguientes aspectos:

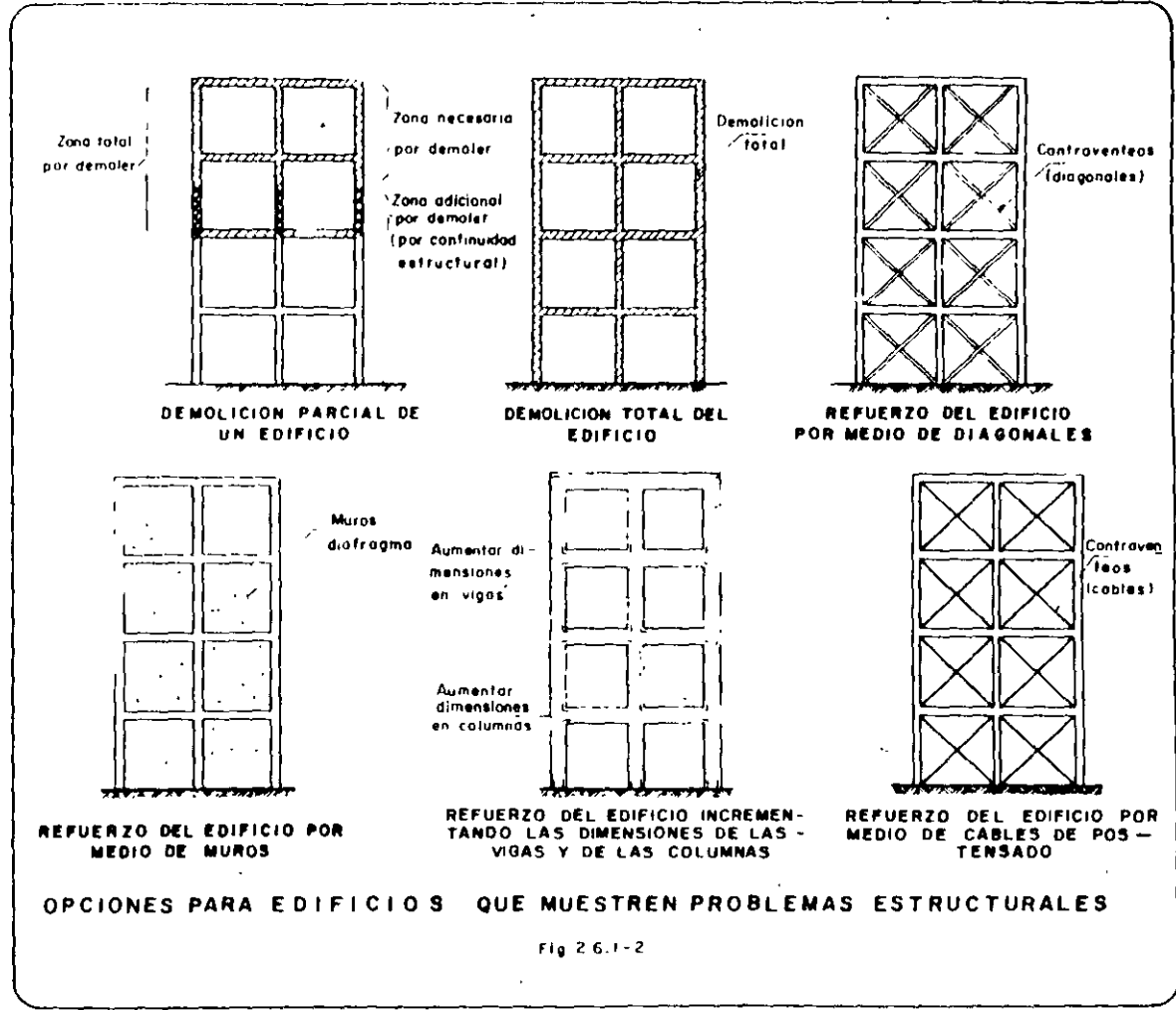
- Establecer la estructuración real del inmueble.
- Llevar a cabo un estudio para determinar la calidad de los materiales existentes en la estructura.
- Llevar a cabo, cuando el caso lo amerite, pruebas dinámicas que proporcionen índices del comportamiento real de la estructura, ante sismos de cierta magnitud, tan

to antes como después de las obras realizadas en ella.

- Analizar cuidadosamente la estructuración original y las características estructurales del edificio.
- Definir las causas que originan la inseguridad de la estructura.
- Establecer la nueva estructura o refuerzo del edificio o tomar la decisión de demolerlo parcial o totalmente.
- Tomar en cuenta en la cimentación y en el terreno los cambios a realizar en la estructura y llevar a cabo las medidas requeridas en la cimentación.
- Establecer cuidadosamente el proceso constructivo requerido para realizar las obras antes mencionadas (apuntalamientos, demoliciones parciales o totales, etc.)
- Contar con el visto bueno, por escrito, del Director Responsable de Obra y/o del Corresponsable en seguridad Estructural.
- Realizar la reparación, refuerzo o demolición requeridos.

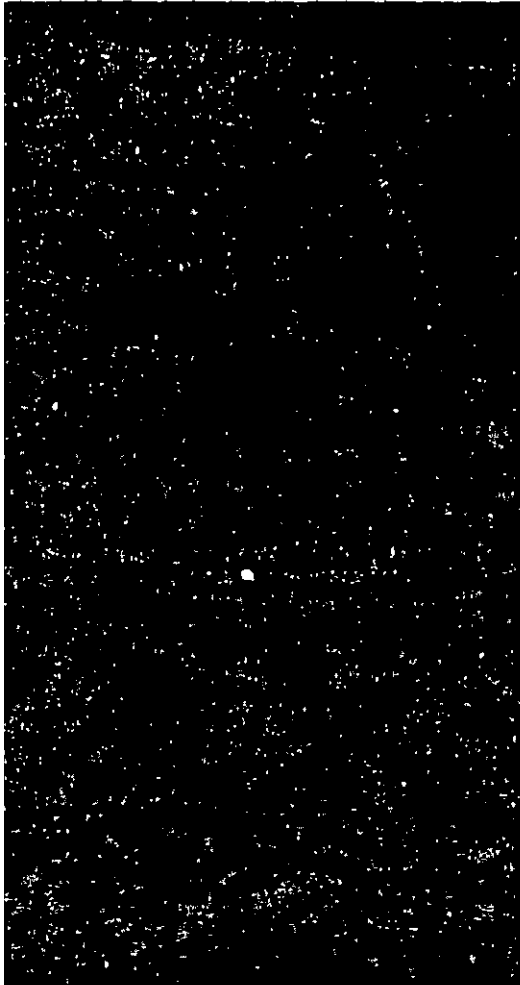


# 2.6.1



### **3.- Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo**

## 3.2 ESPECTROS PARA DISEÑO SISMICO



a.- En este artículo se indica que:

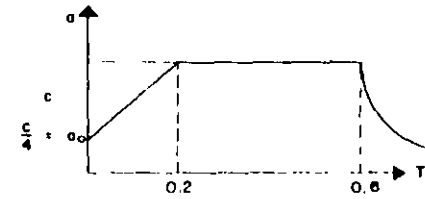
- Para el análisis dinámico modal- empleado en las estructuras, se- deberán utilizar los espectros de diseño mostrados a continua- ción (fig. 3.2-1)

b.- Objetivo

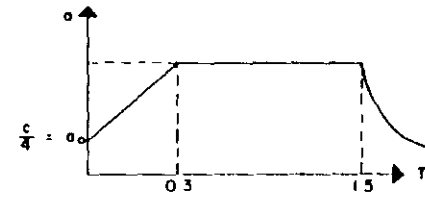
Definir las características de los espectros de diseño sísmico para - cada zona de la ciudad.

c.- Comentarios

- En el apendice de las NTC para - diseño por sismo se plantea una- alternativa para reducir el pla- to del espectro, en función de - los períodos del suelo y de la - estructura.

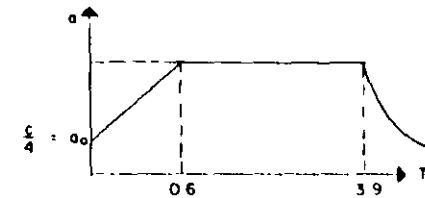


ZONA I



c = 0.4 Para estructuras del grupo B  
c = 0.6 Para estructuras del grupo A

ZONA II



ZONA III

### ESPECTROS DE DISEÑO

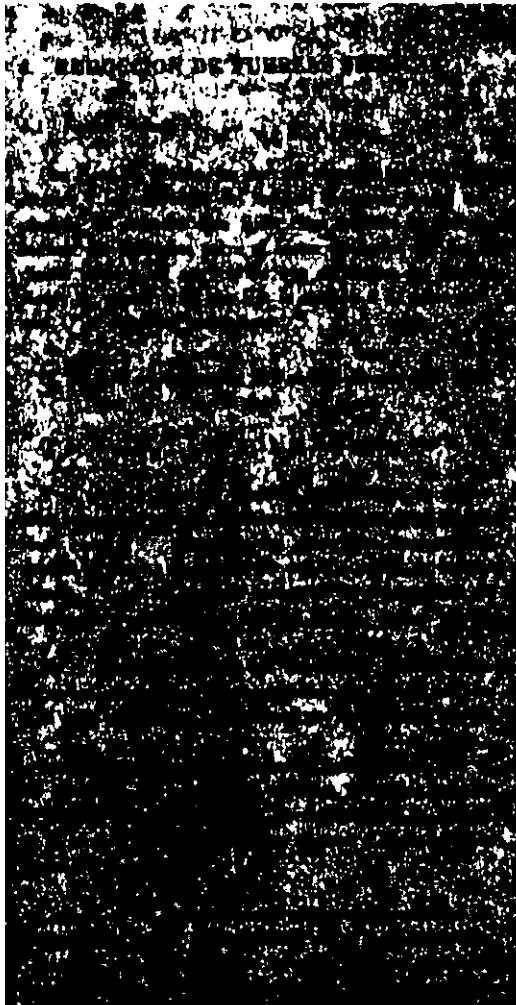
Fig. 2.3-1

NOTA. Los dibujos no están a escala.

### d.- Recomendaciones

- Se deberá, en la medida de lo posible, evitar que el periodo de vibración de la estructura este dentro del rango desfavorable del espectro de diseño para la zona donde se ubica el edificio.
- En general se recomienda:
  - . Construir estructuras flexibles en zona I.
  - . Construir estructuras rígidas en zona III.

### 3.3 REDUCCION DE FUERZAS SISMICAS



a.- En este artículo se indica que:

Nota.- No se consideró conveniente repetir lo señalado en el texto de este artículo.

b.- Objetivo

Definir la manera de obtener el factor de reducción ( $Q'$ ) de las fuerzas sísmicas, tanto para las estructuras consideradas como regulares como para las que no cumplen con las condiciones de regularidad.

c.- Comentarios

- El factor de reducción toma en cuenta el efecto de disipación de energía que por deformaciones inelásticas efectúan las estructuras ante la acción de las fuerzas sísmicas.
- El factor de reducción depende del tipo de estructuración, del detallado estructural y del proceso constructivo de la misma.

d.- Recomendaciones

- Para estructuraciones y materiales poco comunes se debe ser conservador al definir el factor de reducción. ( $Q'$ )

## 3.4 FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO

### 3.4.1 FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO

Se adoptarán los siguientes valores del factor de comportamiento sísmico a que se refiere la sección 207 de las normas y el artículo 207 del Reglamento:

1. Se usará  $Q = 4$  cuando se cumplan las condiciones siguientes:

1. La resistencia en todos los miembros se determine exclusivamente por fuerzas de momento y corte o por fuerzas de momento y fuerza axial, o bien por fuerzas de momento y fuerza axial y corte, o bien por fuerzas de momento y fuerza axial y corte y fuerza axial.

a.- En este artículo se presentan:

Los criterios para definir el factor de comportamiento sísmico de acuerdo al tipo de estructura en proyecto (ver tabla 3.4.1-1).

b.- Objetivo

Definir el factor de comportamiento sísmico ( $Q$ ) para cada estructura.

c.- Factores de comportamiento sísmico (ver tabla 3.4.-1)

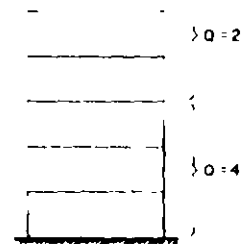
## 3.4

5. Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos rígidos que fijan las normas complementarias correspondientes.

II. Se adoptará  $Q = 3$  cuando se satisficere las condiciones 2, 4 y 5 del caso I y en cualquier otro caso de satisficere las condiciones 1 o 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con leas planas, por marcos rígidos de acero, por marcos de concreto reforzado por arcos de este material, por combinaciones de éstos y marcos o por diafragmas de madera contrachapada. Las estructuras con leas planas deberán además satisfacer los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

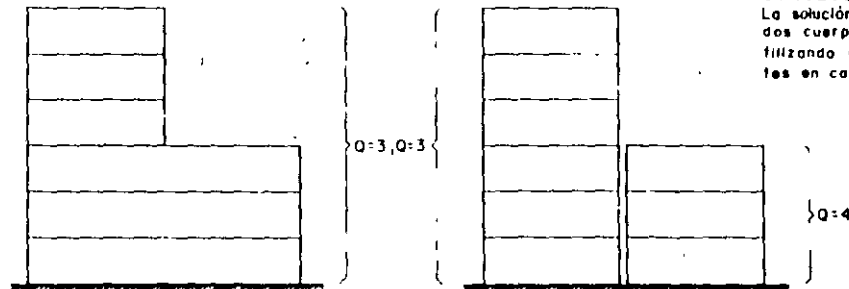
III. Se usará  $Q = 2$  cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por leas planas con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventados o no, o muros o columnas de concreto reforzado, que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o por muros de mampostería de piezas macizas contraventados por rastillos, dadas, columnas o traveses de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o diafragmas triangulados con duelas inclinadas o por sistemas de muros triangulados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará  $Q = 2$  cuando la resistencia lateral es suministrada por elementos de concreto prefabricado, con las excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

**EJEMPLO 1.** En aquellas estructuras en las que se presentan diferentes valores de  $Q$  como en el caso de la figura, se deberá utilizar el valor  $Q$  menor para toda la estructura.



**CONCLUSION:**  
Se deberá utilizar  $Q = 2$   
para toda la estructura.

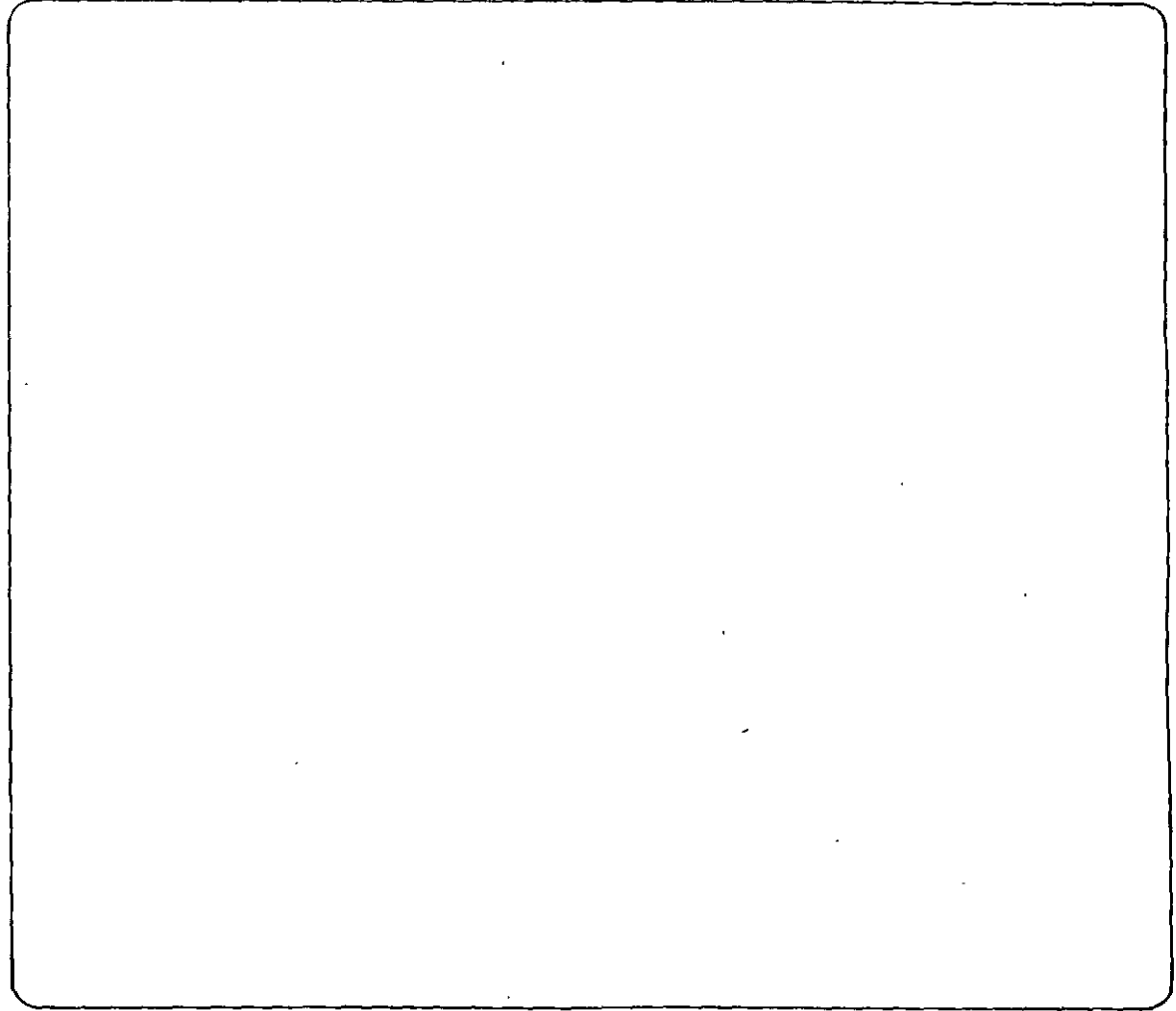
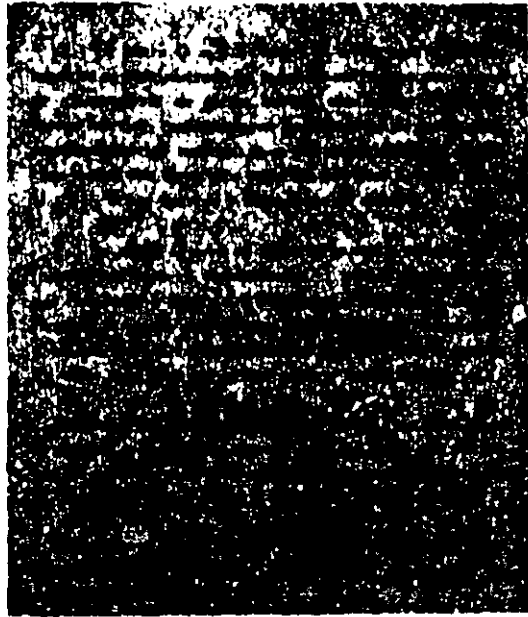
**EJEMPLO 2.** En aquellas estructuras en las que se presentan valores de  $Q$  diferentes pero que se puedan dividir, es conveniente definir los cuerpos independientes, cada uno de ellos con un valor de  $Q$  diferente.



**CONCLUSION:**  
La solución puede ser dividida en dos cuerpos independientes y utilizándose valores de  $Q$  diferentes en cada uno de ellos.

**DEFINICIONES DE  $Q$  EN ESTRUCTURACIONES COMPLEJAS**

### 3.4

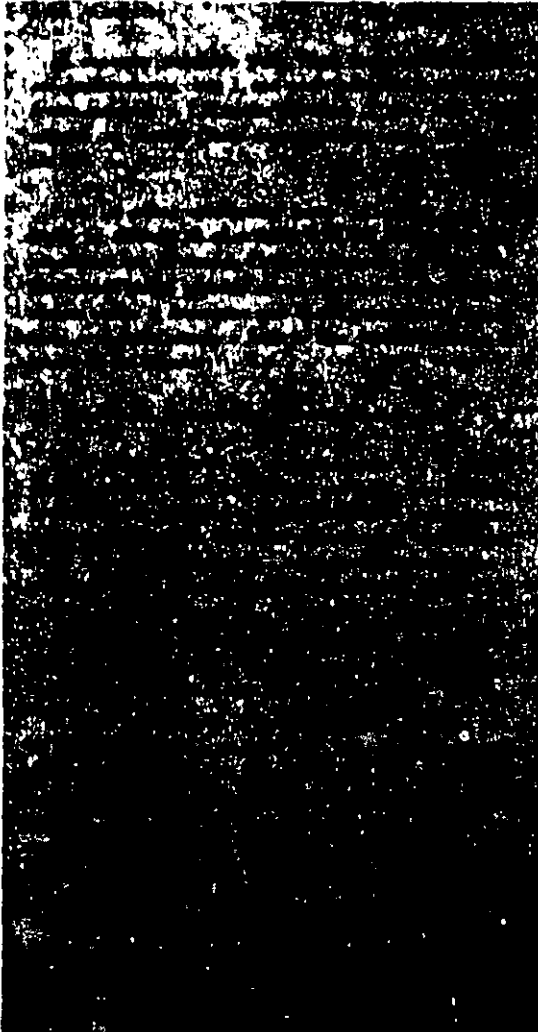




---

#### **4.- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto**

# 4.1 MATERIALES



a.- En este artículo se indica que:

- Para fines estructurales se tienen dos clases de concreto:

- . Clase 1 -  $\Delta vol. \geq 2.2 \text{ ton/m}^3$
- . Clase 2 -  $1.9 \text{ ton/m}^2 \leq \Delta vol. < 2.2 \text{ ton/m}^3$

donde:

$\Delta vol.$  = Peso volumétrico del concreto en estado fresco.

- La clase de concreto a emplear en cada obra depende de su clasificación:

- . Clase 1  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grupo A} \\ \text{Subgrupo B1} \end{array} \right.$
- . Clase 2  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Subgrupo B2} \end{array} \right.$

- La resistencia a compresión del concreto es:

- . Clase 1  $f'c > 250 \text{ kg/cm}^2$
- . Clase 2  $f'c < 250 \text{ kg/cm}^2$

- El módulo de elasticidad de los concretos se supondrá de la siguiente manera:

- . Clase 1  $E_c = 14,000 \sqrt{f'c}$
- . Clase 2  $E_c = 8,000 \sqrt{f'c}$

- La contracción por secado final de los concretos se supondrá:

- . Clase 1  $E_{cf} = 0.001$
- . Clase 2  $E_{cf} = 0.002$

- El coeficiente de deformación axial diferida se supondrá:

- . Clase 1  $C_f = 2.4$
- . Clase 2  $C_f = 5$

donde:

$$C_f = \frac{(\epsilon_f - \epsilon_i)}{\epsilon_i}$$

donde:

$\epsilon_f$  = deformación axial final

$\epsilon_i$  = deformación axial inmediata

b.- Objetivos

- Definir los tipos de concretos a emplear en los elementos estructurales.
- Definir las características principales de los tipos de concretos.
- Definir las características principales de los tipos de concreto.

11) Resistencia a compresión

Los concretos clase 1 tendrán una resistencia especificada,  $f'_c$ , igual o mayor que 250 kg/cm<sup>2</sup>. La resistencia especificada de los concretos clase 2 será inferior a 250 kg/cm<sup>2</sup>. En ambos casos deberá demostrarse que el nivel de resistencia del concreto estructural de toda construcción cumpla con la resistencia especificada. Se admitirá que un concreto cumpla con la resistencia especificada si satisface los requisitos prescritos en 11.3. El Corresponsable en Seguridad Estructural o el Director de Obras cuando el trabajo no requiera de Corresponsable, podrá autorizar el uso de resistencias,  $f'_c$ , distintas de las antes mencionadas.

Para diseñar se usará el valor nominal,  $f'_c$ , determinado con la expresión siguiente:

Para concretos clase- 1 y 2

$$f'_c = 0.85 f_{ci} \quad (1.7)$$

El valor  $f'_c$  es, en parte, una medida de la resistencia del concreto en la estructura. Para que sea válida la expresión (1.7) deben cumplirse los requisitos de compactación, colocación, compactación y curado prescritos en 11.3.

Se debe hacer un ensayo de un concreto de laboratorio para una resistencia media,  $f_{ci}$ , mayor que la especificada,  $f'_c$ , y que dicha resistencia sea la función del grado de control que se tenga al momento de concretar.

a) Resistencia a tensión

Se considerará que un concreto cumple con los esfuerzos requeridos si el nivel de resistencia del concreto cumple con el grado de control que se tenga al momento de concretar.

La resistencia a tensión por flexión y torsión en la estructura,  $f_r$ , se puede tomar igual a:

concreto clase 1  $1.2\sqrt{f'_c}$

concreto clase 2  $1.6\sqrt{f'_c}$

Para diseñar se usará el valor nominal,  $f_r$ , igual a 0.75  $f_r$ . También puede tomarse:

concreto clase 1  $1.2\sqrt{f'_c}$

concreto clase 2  $1.6\sqrt{f'_c}$

Para diseñar se usará el valor nominal,  $f_r$ , igual a 0.75  $f_r$ . También puede tomarse:

concreto clase 1  $1.2\sqrt{f'_c}$

concreto clase 2  $1.6\sqrt{f'_c}$

y el módulo de rotura,  $I_r$ , se puede tomar igual a:

concreto clase 1  $1.6\sqrt{f'_c}$

concreto clase 2  $1.2\sqrt{f'_c}$

En las expresiones anteriores,  $f'_c$  es la resistencia a compresión del concreto en kg/cm<sup>2</sup>. Los resultados se obtienen en esta forma:

## 4.1.2

### 14.2 Acero

Como refuerzo ordinario para concreto pueden usarse barras de acero y/o malla soldada de alambre. Las barras serán corrugadas, con la salvedad que se indique lo contrario, y deben cumplir con las normas NOM B4 o NOM B294, o R 457; se tomarán en cuenta las instrucciones al pie de algunas de estas normas incluidas en las Normas Complementarias. La malla cumplirá con la norma NOM B290. Se permite el uso de barras lisas de 6.4 mm de diámetro (N° 2) para estribos (donde así se indique en el texto de estas Normas), conectores de barras, los compases y como refuerzo para fuertes curvas por fricción (véase 2.1.5f). El acero de prefuerzo cumplirá con las normas NOM B298 o NOM B299.

Para alambres secundarios y torones especiales en su perfilado, se permite el uso de barras que cumplan con las normas B1A, B1B y B1C.

El módulo de elasticidad del acero de refuerzo ordinario,  $E_s$ , es superior igual a  $2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>; el de torones de prefuerzo es superior a  $1.9 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

El módulo de elasticidad del acero de refuerzo ordinario,  $E_s$ , es superior igual a  $2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>; el de torones de prefuerzo es superior a  $1.9 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

a.- En este artículo se indica que:

- Para reforzar concreto puede usarse:

- . Barras corrugadas de acero
- . Mallas soldadas de alambre
- . Barras lisas de 6.4 mm de diámetro (Solamente se puede usar como estribos y conectores de algunos --- elementos)

- El módulo de elasticidad se considerará:

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

- El acero de prefuerzo podrá ser:

- . Alambres
- . Torones
- . Barras

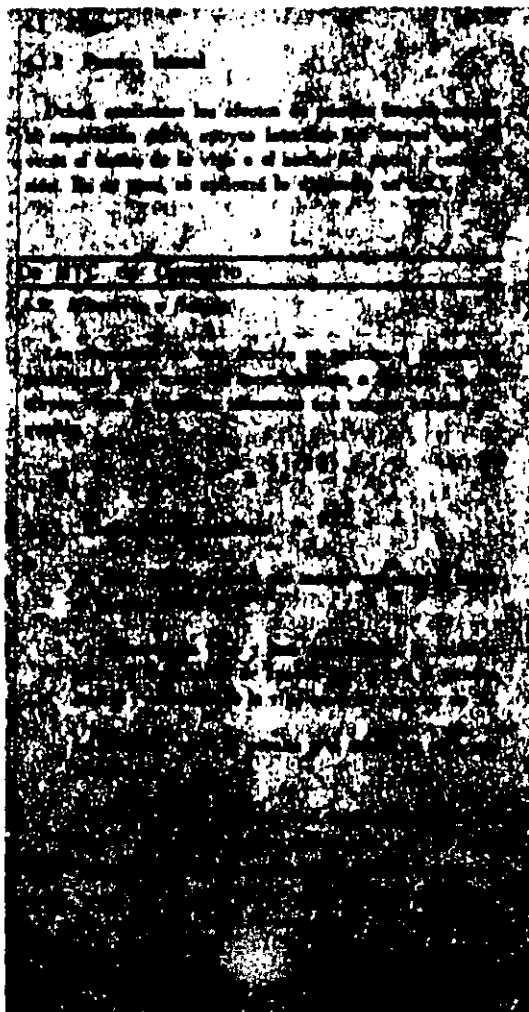
- El módulo de elasticidad se considerará:

- . para alambres  $E_{sp} = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- . para torones  $E_{sp} = 1.9 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

b.- Objetivo

- Definir los aceros de refuerzo y --- prefuerzo empleados en elementos de concreto.

## 4.2 VIGAS



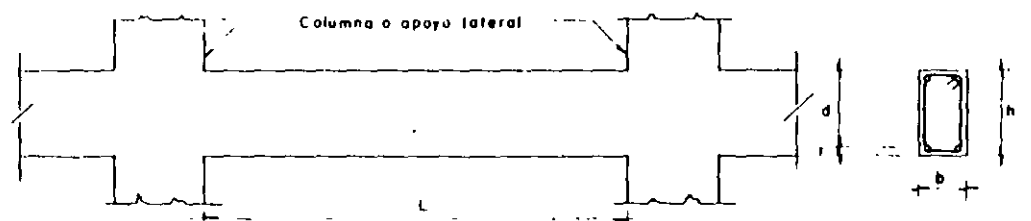
a.- En este artículo se indica que:

- Se deben analizar los efectos -- de pandeo lateral en las vigas -- de marcos comunes de acuerdo a -- lo siguiente:

$$l \geq \begin{cases} 35b & \text{(fig. 4.2.1-1)} \\ 35b_p & \text{(fig. 4.2.1-2)} \end{cases}$$

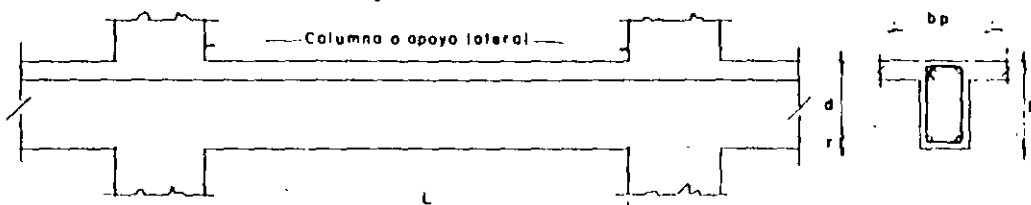
- Observaciones

En las NTCC únicamente se -- definen con claridad a los -- marcos dúctiles, sin que se -- establezca ningún nombre es -- pecífico para los otros mar -- cos estructurales de con -- creto. Con el objeto de po -- der tratar en este manual -- a ambos tipos de marcos, se -- denominará a los segundos -- como "marcos comunes".



VIGAS DE SECCION RECTANGULAR

Fig 4 2 I-1



VIGAS DE SECCION "T"

Fig 4 2 I-2

## 4.2.1

### b.- Objetivos

Evitar que se produzca pandeo lateral en las vigas de marcos comunes.

### c.- Recomendaciones

Es conveniente que las vigas de concreto de marcos comunes se diseñen tratando de evitar que presente pandeo lateral para ello se deberá asegurar lo siguiente:

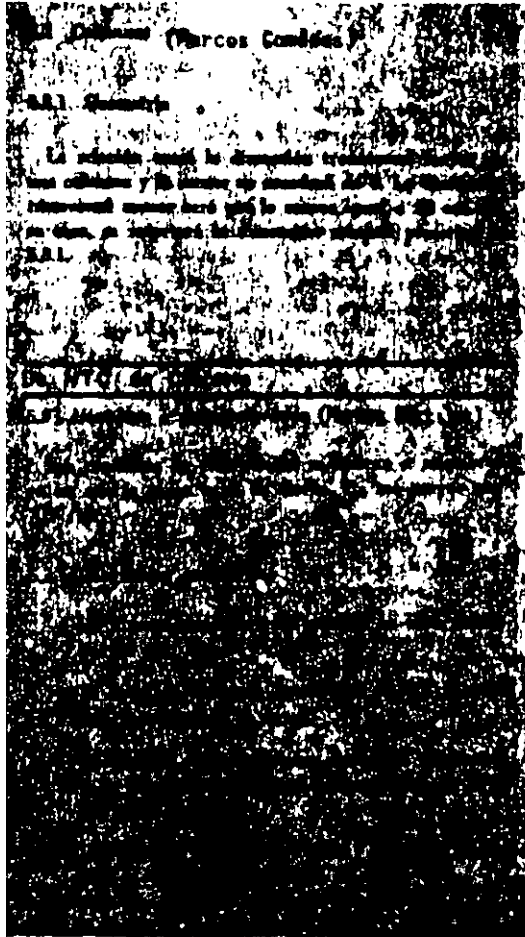
- . En vigas rectangulares

$$b \geq \frac{L}{35}$$

- . En vigas T

$$b_p \geq \frac{L}{35}$$

## 4.3 COLUMNAS



a.- En este artículo se indica que:

- las columnas de marcos comunes de  
berán cumplir lo siguiente: (Fig.  
4.3.1-2).

$$\frac{h}{b} \leq 4$$

$$b \geq 20 \text{ cm}$$

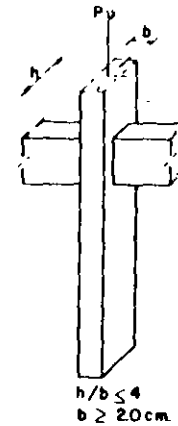
h = dimensión mayor de la co-  
lumna (peralte)

b = dimensión menor de la co-  
lumna (ancho)

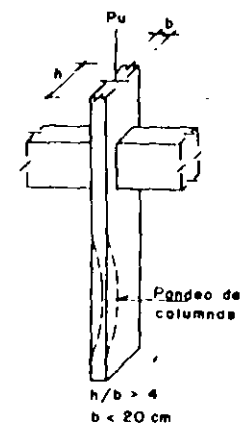
b.- Objetivos

- Evitar que se construyan colum-  
nas muy esbeltas.
- Limitar el pandeo de las columnas.

Recomendable



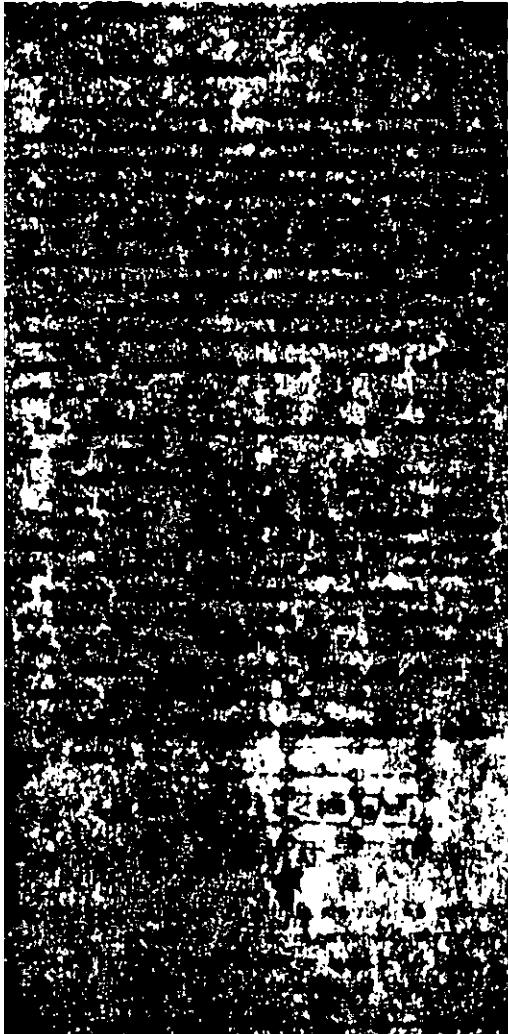
No recomendable



RELACION ANCHO-PERALTE DE COLUMNAS

Fig. 4.3.1-1

# 4.4 LOSAS

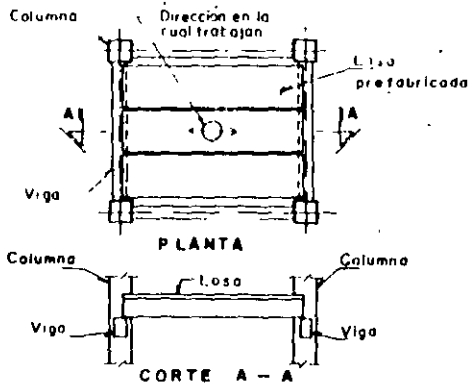


Clasificación de las losas según sus - condiciones de apoyo (fig. 4.4.1-1)

- losas apoyadas en traves paralelas
- losas apoyadas en su perimetro
- losas apoyadas directamente en las - columnas (Losas planas).

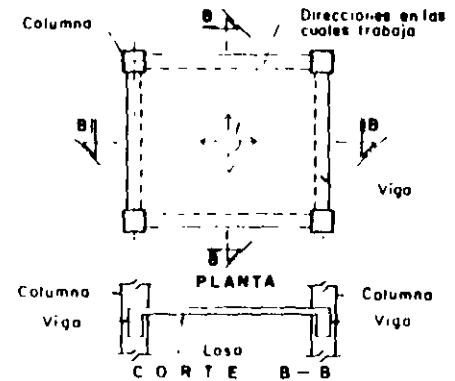
Clasificación de las losas según su -- geometría (fig. 4.4.1-2)

- losas macizas
- losas aligeradas
  - . Con bloques
  - . Con alveolos



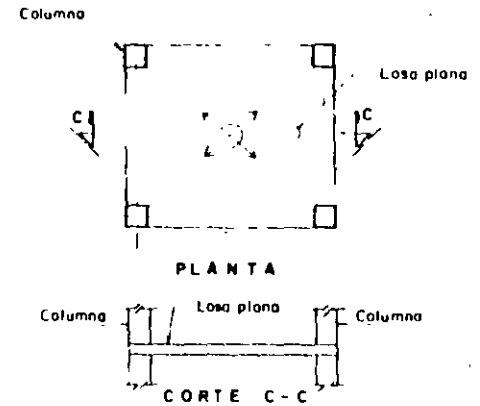
**LOSAS APOYADAS EN TRAVES PARALELAS**

(Se apoyan en las vigas)



**LOSAS APOYADAS EN SU PERIMETRO**

(Se apoyan en las vigas)



**LOSAS APOYADAS DIRECTAMENTE EN LAS COLUMNAS**

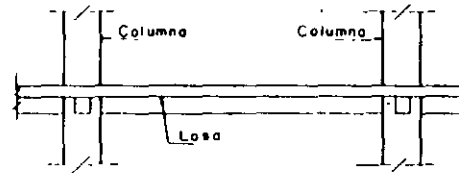
(Se apoyan en las columnas)

**CLASIFICACION DE LAS LOSAS SEGUN SUS CONDICIONES DE APOYO Fig 4 4 1 - 1**

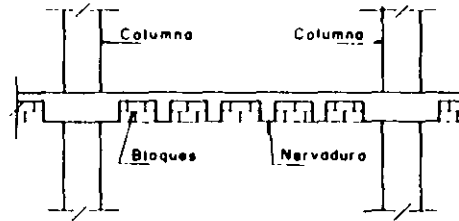


## 4.4.1

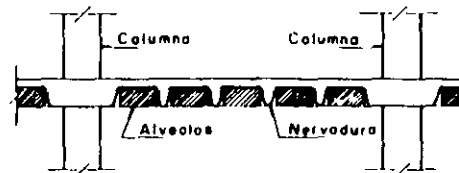
106



LOSAS MACIZAS



LOSAS ALIGERADAS  
(Bloques)



LOSAS ALIGERADAS  
(Alveolos)

### CLASIFICACION DE LAS LOSAS SEGUN SU GEOMETRIA

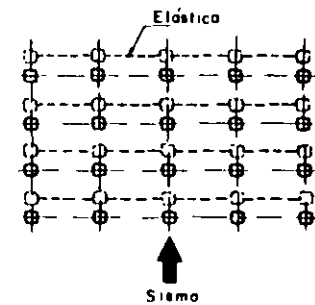
Fig 4.4.1 - 2

a.- En este artículo se indica que:

- Si las losas transmiten a marcos, muros u otros elementos rigidizantes, fuerzas horizontales.
- Estas fuerzas deben tomarse en cuenta en el diseño de la losa.
- Estas losas deben considerarse como diafragmas horizontales.

b.- Objetivo

Asegurar que las losas se diseñen como diafragmas horizontales cuando transmiten fuerzas de magnitud considerable.



a.- En este artículo se indica que:

- Los peraltes efectivos mínimos de las losas perimetralmente apoyadas que cumplen con los requisitos señalados en este artículo y que no requieren cálculo de deflexiones son:

$$\begin{aligned} f_s & 2000 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Si } w & 380 \text{ kg/m}^2 \\ d & \frac{\text{Perímetro de la viga}}{300} \end{aligned}$$

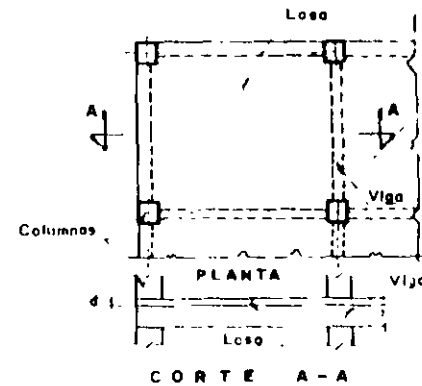
$$\begin{aligned} f_s & 2000 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Si } w & 380 \text{ kg/m}^2 \\ d & 0.034 \cdot f_s \cdot w \cdot \frac{\text{Perímetro de la viga}}{300} \end{aligned}$$

Nota: Para el cálculo del perímetro, la longitud de los lados discontinuos se incrementa en 50% si los apoyos de la losa no son monolíticos con ella y 25% cuando lo son. (fig. 4.4.2-1)

b. Objetivo

- Definir los peraltes mínimos de las losas perimetralmente apoyadas para evitar el cálculo de las deflexiones y asegurar un buen comportamiento de la losa estructural.

### EJEMPLO



$$\begin{aligned} \rho &= 1.25 A + 1.25 B + A + B \\ \rho &= 1.50 A + 1.50 B + A + B \end{aligned}$$

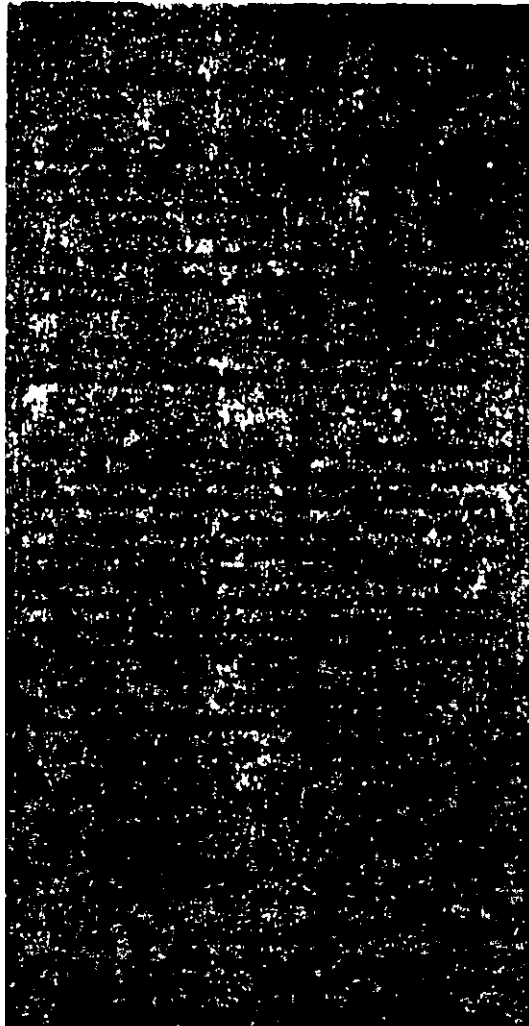
donde:

$\rho$  = Perímetro de la losa

### DETERMINACION DEL PERALTE DE LOSAS

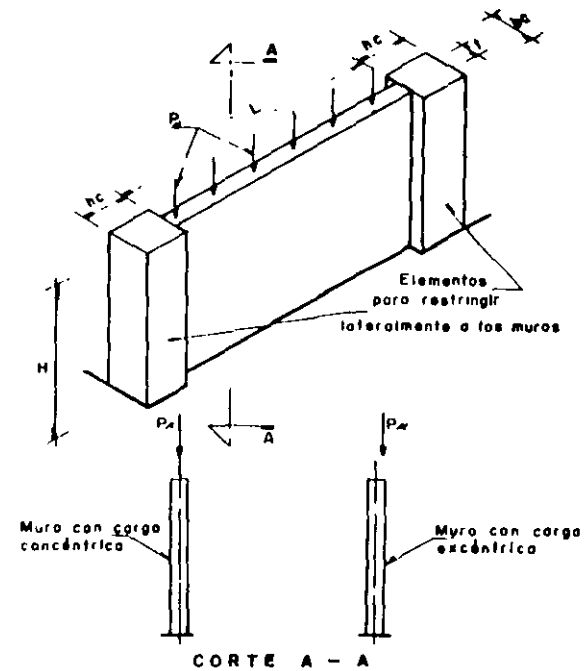
Fig 4 4 2 - 1

# 4.5 MUROS



a.- En este artículo se indica que:

- La clasificación de los muros sujetos a cargas verticales axiales o excéntricas conforme a su restricción lateral es:
  - . Muros restringidos lateralmente (fig. 4.5.1-1)
  - . Muros no restringidos lateralmente (fig. 4.5.1-2)
- La longitud efectiva de pandeo -- ( $H'$ ), desde el punto de vista de su dimensionamiento y estructuración, es la señalada en las figuras 4.5.1-1 y 4.5.1-2.
- Los elementos que restringen a -- los muros deben tener por lo menos un ancho igual a 2.5 veces el ancho del muro (fig. 4.5.1-3).



CORTE A - A

$$\begin{aligned}
 H' &= H && \text{SI } H/L \leq 0.35 \\
 H' &= H(1.3 - 0.85 H/L) && \text{SI } 0.35 < H/L < 0.8 \\
 H' &= \frac{L}{2} && \text{SI } H/L \geq 0.8
 \end{aligned}$$

Donde  $H'$  = Longitud efectiva de pandeo  
 $H$  = Altura del muro.  
 $L$  = Longitud horizontal del muro.

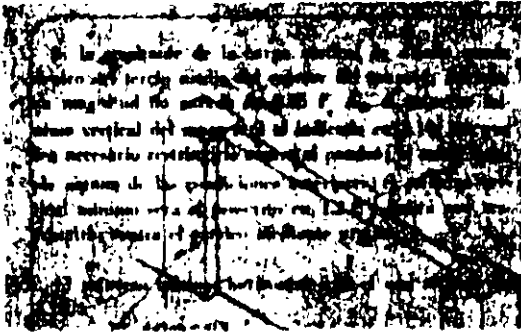
**MUROS RESTRINGIDOS LATERALMENTE**  
 Fig 4.5.1 - 1

b.- Objetivos

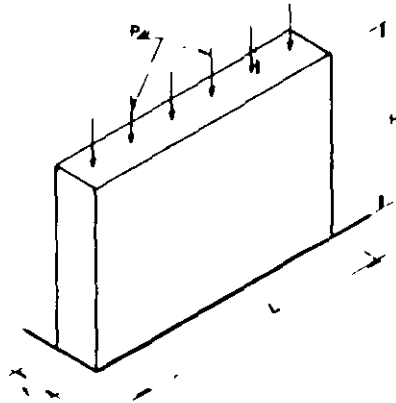
- Definir cuando se consideran los muros restringidos lateralmente y cuando no lo son.
- Definir las longitudes efectivas de pandeo de los muros.
- Definir las dimensiones de los elementos extremos de los muros para restringirlos lateralmente.

# 4.5.1

110



Muro no restringido lateralmente



$$H' = H \quad \text{Si } H/L \leq 0.35$$

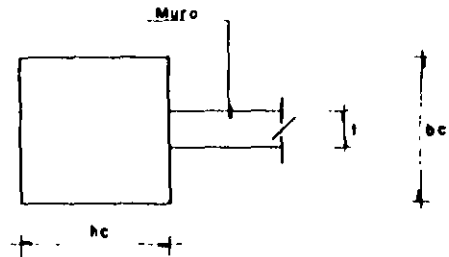
$$H' = 0.215 \left( \frac{H}{L} + 4.3 \right) H \leq 2H \quad \text{Si } H/L > 0.35$$

**MUROS NO RESTRINGIDOS LATERALMENTE**

Fig 4.5.1-2

### c.- Comentarios

- Es importante asegurar que los muros estén restringidos lateralmente, ya que de esta manera:
  - . Se reduce el riesgo de pandeo del muro.
  - . Se reducen los momentos actuantes.
  - . Se reducen las dimensiones del muro.



$$bc \geq 2.5l$$

**ELEMENTO PARA RESTRINGIR LATERALMENTE AL MURO**

Fig 4.5.1-3

## 4.5.2

a.- En este artículo se indica que:

- Los muros sujetos a la acción de cargas horizontales se pueden clasificar en: ( fig. 4.5-2-1)
- . Muros con cargas verticales y cargas horizontales pequeñas.
- . Muros con cargas verticales y cargas horizontales de consideración.

- El espesor del muro se determina:

- . Cuando P es pequeña

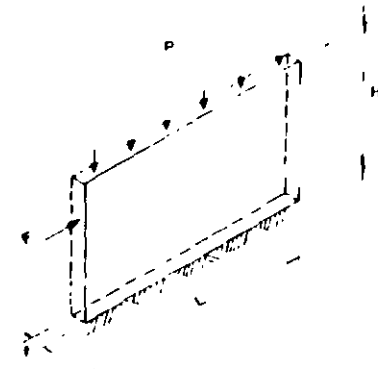
$$t \geq \begin{cases} \frac{L}{70} \\ 13 \text{ cm} \\ 0.06 H \end{cases}$$

- . Cuando P es de consideración

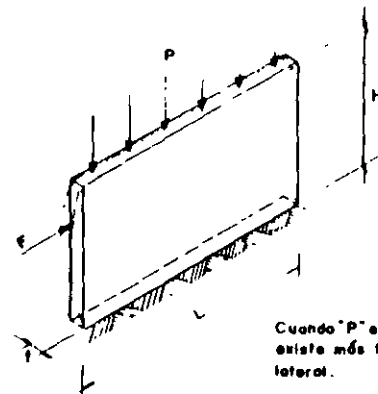
$$t \geq \begin{cases} \frac{L}{40} \\ 13 \text{ cm} \\ 0.06 H \end{cases}$$

donde H = altura no restringida

L = longitud del muro



CUANDO "P" ES PEQUEÑA



Cuando "P" es de consideración existe más tendencia al pandeo lateral.

CUANDO "P" ES DE CONSIDERACION

Fig 4.5 2-1

## 4.5.2

112

Los elementos extremos a que se refiere esta sección contarán, a todo lo largo, con el refuerzo transversal que se especifica en 5.3.4 para elementos a flexocompresión.

Un elemento extremo de un muro estructural se dimensionará como columna corta para que resista, como carga axial, la fuerza de compresión que le corresponda, calculada en la base del muro cuando sobre éste actúe el máximo momento de volteo causado por las fuerzas laterales y las cargas debidas a la gravedad, incluyendo el peso propio y las que le transmita el resto de la estructura. Se incluirán los factores de carga y de resistencia que correspondan.

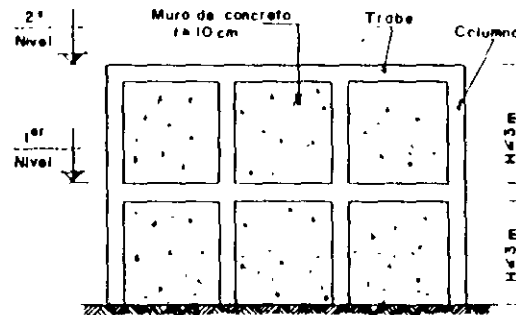
El refuerzo transversal de muros que tengan elementos extremos debe anclarse en los núcleos confinados de estos elementos de manera que pueda alcanzar su esfuerzo de fluencia.

En construcciones de no más de 2 niveles y con altura de entre piso menor o igual a 3 m. (fig. 4.5.2-2).

$$t \geq 10 \text{ cm}$$

b.- Objetivos

- Definir el espesor de los muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano.

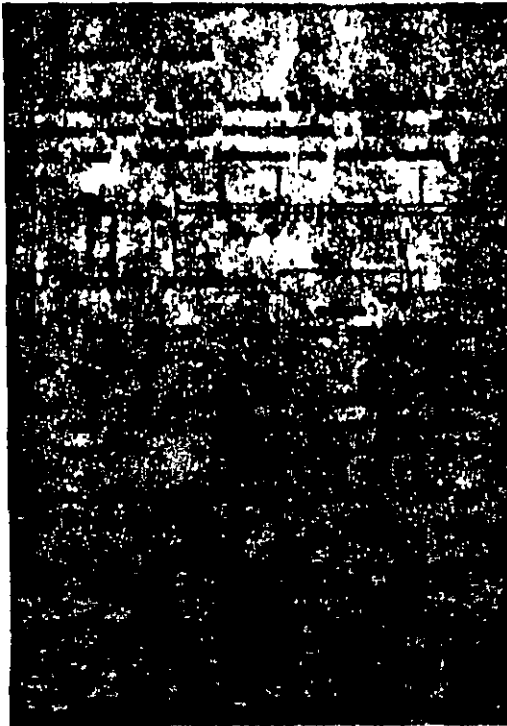


ESTRUCTURA DE DOS NIVELES

Fig 4.5.2-2



# 4.7 MIEMBROS A FLEXION



a.- En este artículo se indica que:

- En marcos dúctiles se consideraran miembros a flexión: (Fig. 4.7.1-1)

- . Todas las vigas
- . Las columnas si  $P_u \leq \frac{A_g f'_c}{10}$

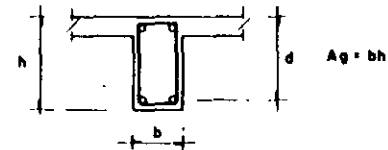
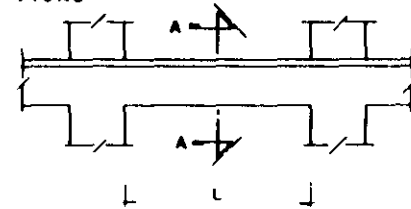
- Los miembros sujetos a flexión - deben cumplir:

- .  $d \leq l/4$
- .  $b \geq l/30$  (fig. 4.7.1-2)
- .  $\frac{h}{b} \leq 3.0$
- .  $b \geq 25 \text{ cm}$
- .  $b \leq b_c$  (fig. 4.7.1-3)
- .  $e \leq \frac{b_c}{10}$  (fig. 4.7.1-4)

donde:

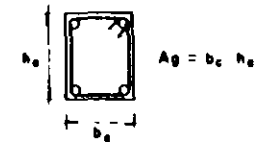
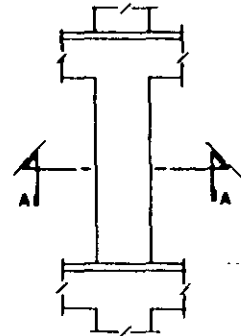
- $b_c$  = ancho de columna
- $e$  = excentricidad entre ejes de viga y columna
- $h$  = peralte de la viga
- $b$  = ancho de la viga
- $l$  = claro de la viga entre paños de apoyos
- $d$  = peralte efectivo de la viga.

VIGAS



CORTE A-A

COLUMNAS



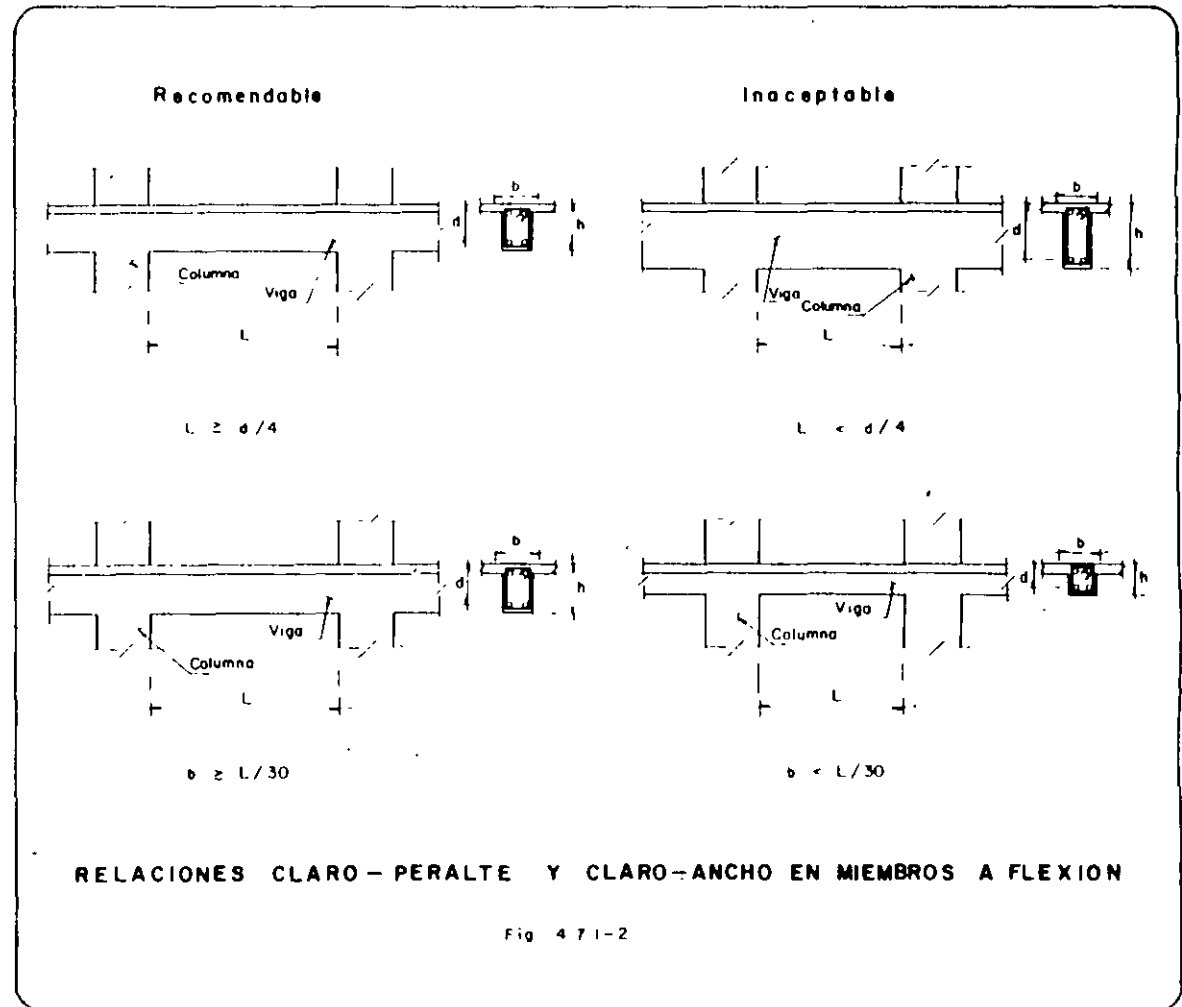
CORTE A-A

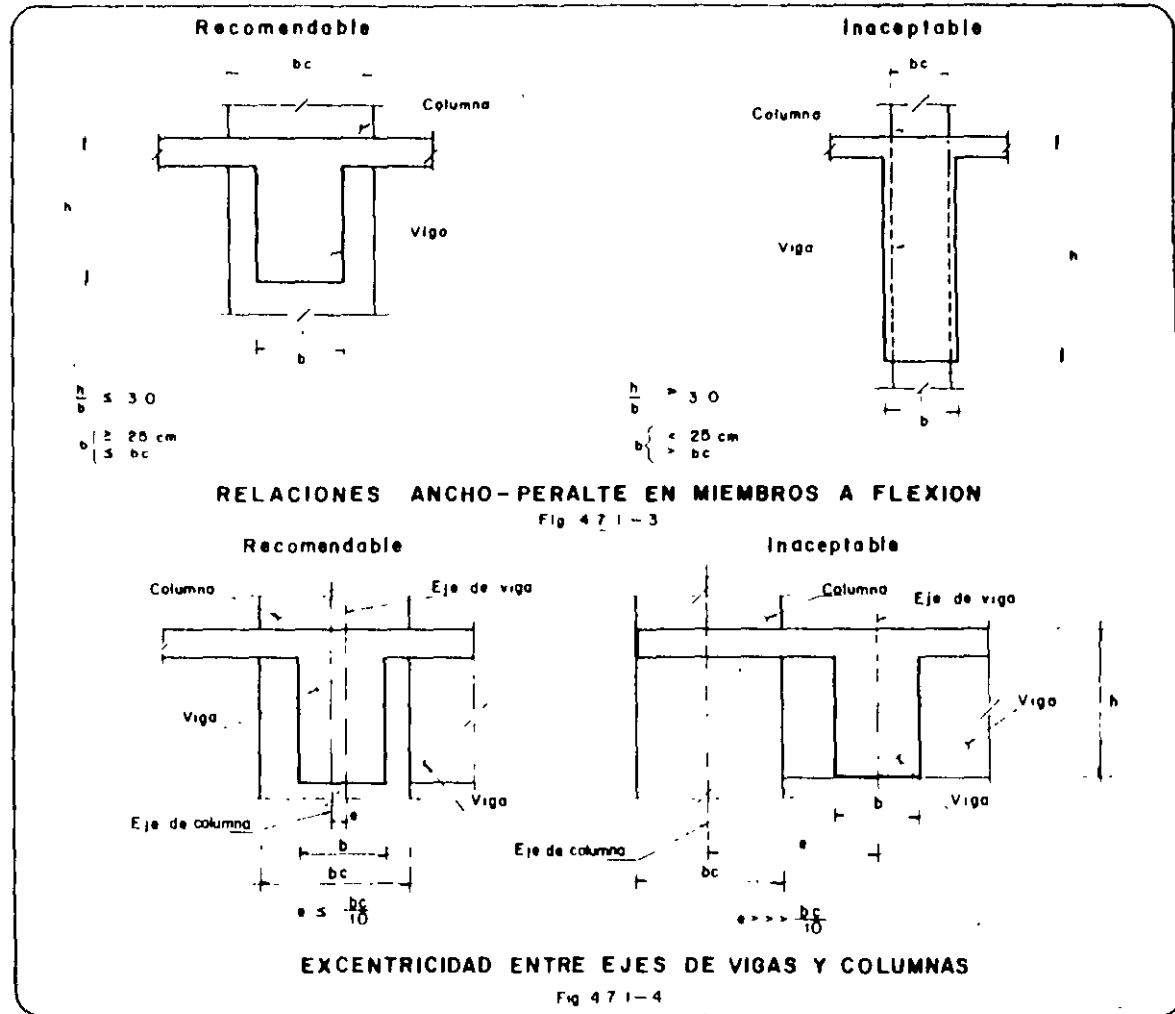
ELEMENTOS A FLEXION

Fig 4.7.1-1



## 4.7.1



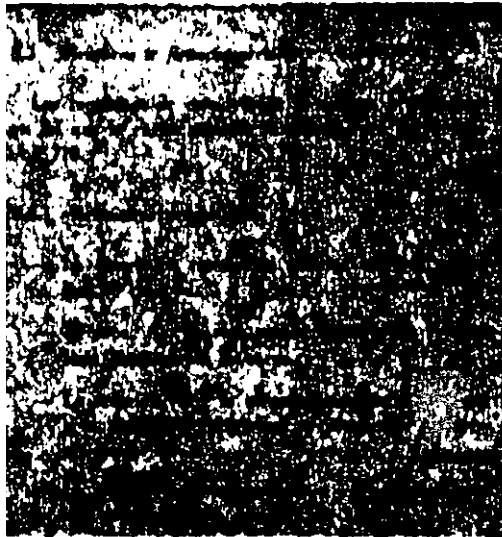


## 4.7.1

### b.- Objetivos

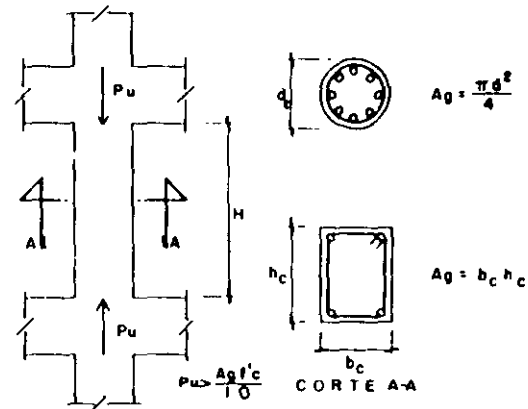
- Definir las dimensiones de los elementos estructurales de marcos dúctiles que trabajan a flexión.
- Evitar construir vigas demasiado esbeltas.
- Evitar que se presenten torsiones considerables en las trabes de marcos dúctiles.

# 4.8 MIEMBROS A FLEXO-COMPRESION

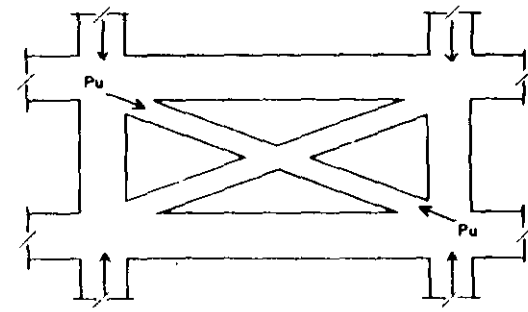


a.- En este artículo se indica que:

- Se considerarán miembros a flexocompresión (fig. 4.8.1-1).
- . Las columnas si  $P_u \leq \frac{A_g f'_c}{10}$
- . Las diagonales de contraventeo (si cumplen con los requisitos de las columnas).
- Los miembros a flexocompresión deben cumplir:
  - .  $b_c \geq 30 \text{ cm}$ ,  $d_c \geq 30 \text{ cm}$
  - .  $A_g \geq \frac{P_u}{0.5 f'_c}$  (fig. 4.8.1-2)
  - .  $b_c \geq 0.4 h_c$
  - .  $b_c \geq \frac{H}{15}$ ,  $d_c \leq \frac{H}{15}$  (fig. 4.8.1-3)



C O L U M N A S

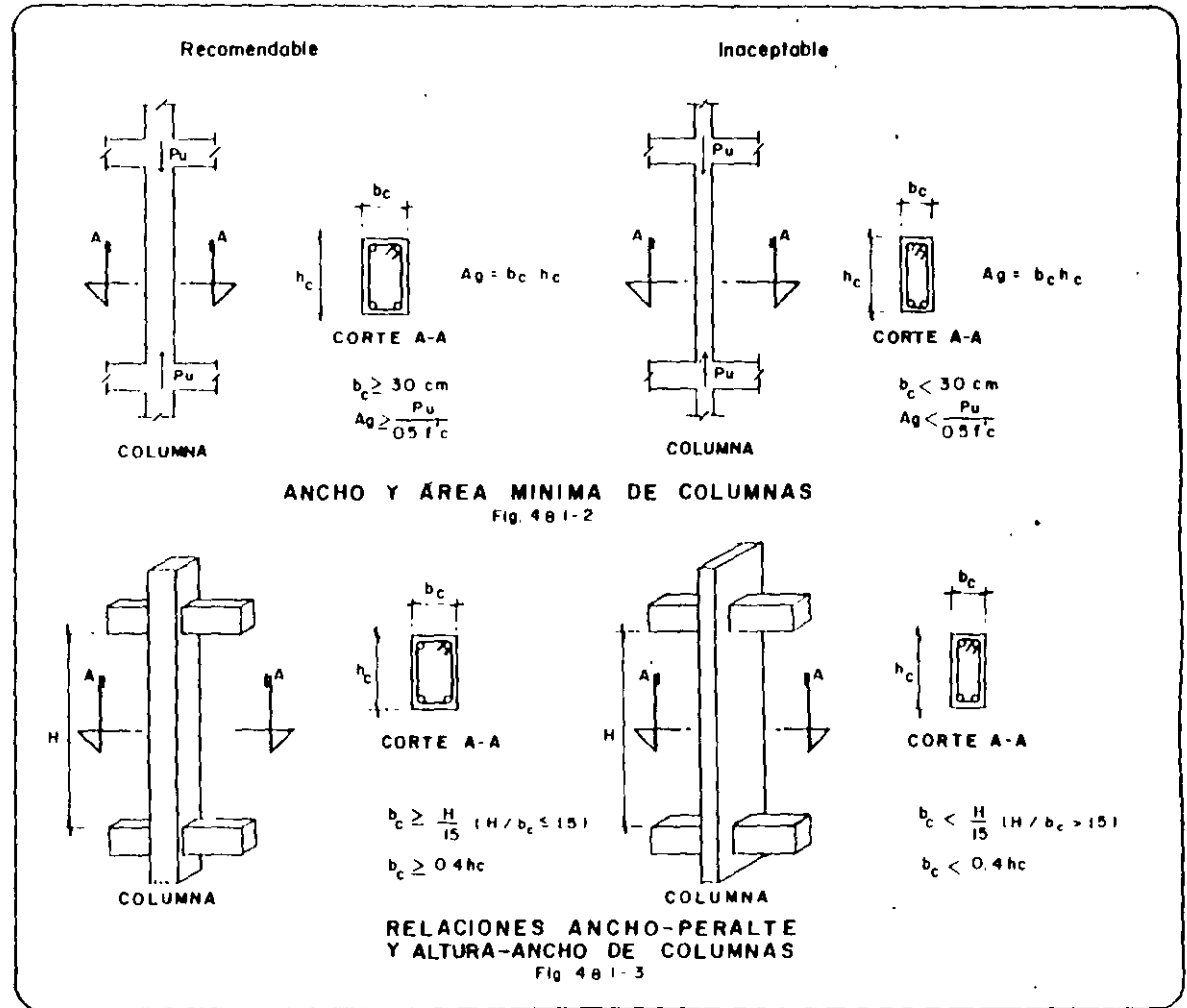


DIAGONALES DE CONTRAVENTE

ELEMENTOS A FLEXOCOMPRESION

Fig 4.8.1-1

# 4.8.1



## b.- Objetivos

- Definir a las columnas que se considera que trabajan a flexocompresión.
- Establecer las dimensiones mínimas y el área mínima de las columnas de marcos dúctiles, en función de la carga axial y de la calidad del concreto.
- Evitar que se construyan columnas demasiado alargadas.
- Evitar que se construyan columnas demasiado esbeltas donde se puedan presentar problemas de pandeo.

## 4.9 UNIONES VIGA-COLUMNA

a.- En este artículo se indica que:

- las barras longitudinales de vigas y columnas deberán cumplir:

$$\cdot h_{(columna)} / d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$\cdot h_{(viga)} / d_b(\text{barras de columna}) \geq 20$$

donde:

$h_{(columna)}$  = dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga considerada.

$h_{(viga)}$  = dimensión transversal de la viga en la dirección de las barras de la columna considerada.

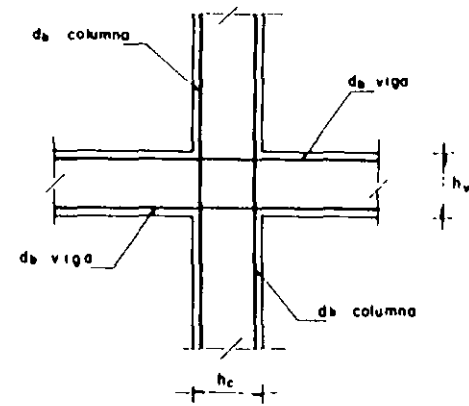
$d_b$  = diámetro de barra de viga o de columna, según sea el caso. (Fig. 4.9.1-1)

b.- Objetivo

Definir las dimensiones de las columnas y de las trabes de marcos dúctiles atendiendo al anclaje del acero de refuerzo en los nudos de la estructura.

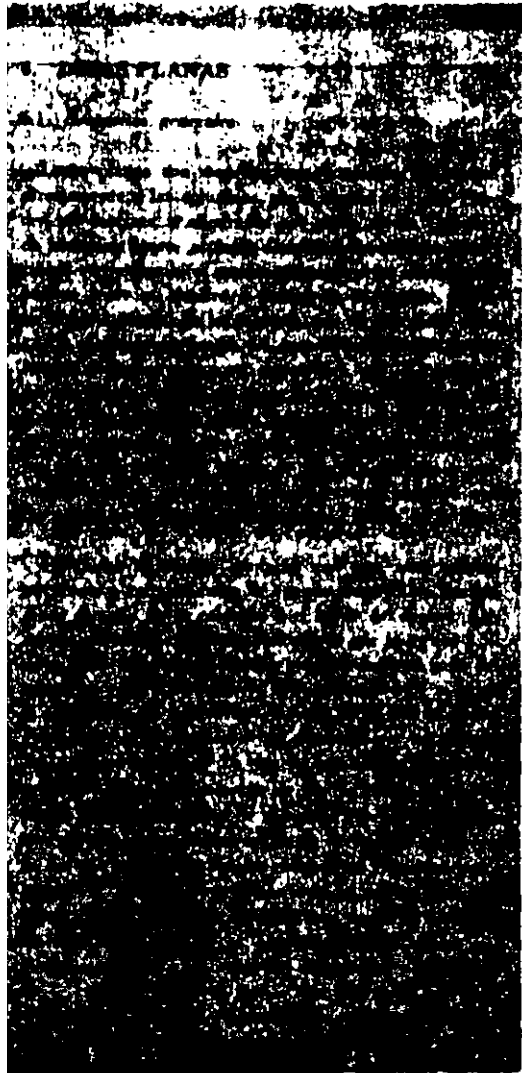
c.- Recomendaciones

- Es conveniente, que en el momento en que se lleve a cabo la estructuración, se definan los diámetros de las varillas que se van a emplear como refuerzo longitudinal de trabes y columnas de los marcos dúctiles, con el fin de poder establecer las dimensiones de estos elementos estructurales en función de los detalles de las uniones.



REFUERZO LONGITUDINAL EN NUDOS

Fig. 4.9.1-1



a.- En este artículo se indica que:

- Las losas planas son aquellas que transmiten las cargas directamente a las columnas, sin la ayuda de vigas (Fig. 4.10.1-1)

- Las losas planas se pueden clasificar en:

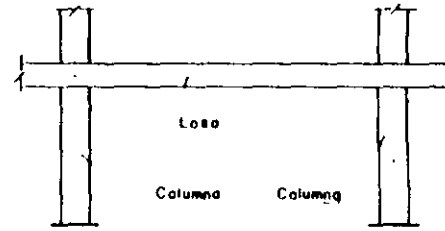
.Macizas.

.Aligeradas por medio de:

- \* Bloques de material ligero
- \* Alveolos (fig. 4.10.1 2)

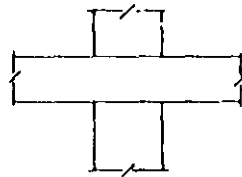
. De espesor constante.

. De espesor variable (fig.4.10.1 3)

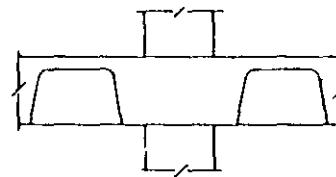


**LOSAS PLANAS**

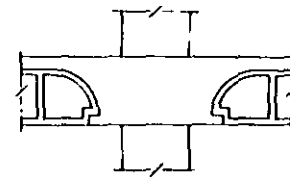
Fig. 4.10.1-1



**MACIZAS**



**ALIGERADAS  
(Alveolos)**



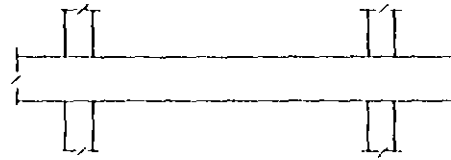
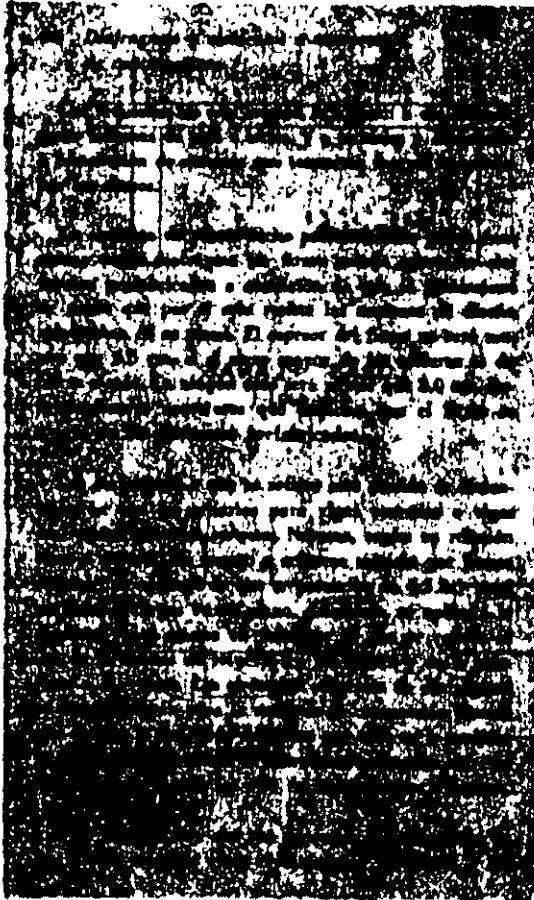
**ALIGERADAS  
(Bloques)**

**CLASIFICACION DE LAS LOSAS PLANAS**

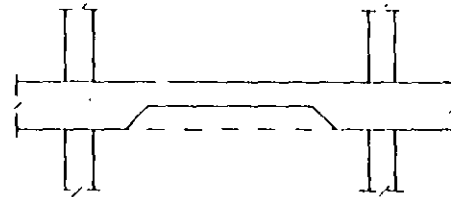
Fig 4.10.1-2



# 4.10.1



LOSA DE ESPESOR CONSTANTE



LOSA DE ESPESOR VARIABLE

## CLASIFICACION DE LAS LOSAS PLANAS

Fig 4.101-3

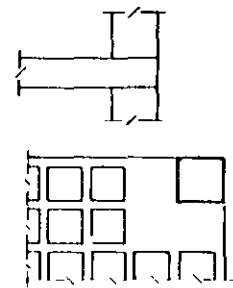
# 4.10.1

elementos verticales destinados a resistir las fuerzas laterales. En particular, se revisará el efecto de abocardamiento del diafragma en la proximidad de muros de vigas y columnas que forman parte de la estructura.

Los elementos de compresión de distribución horizontal y de longitud variable en la losa, como los contraejes, deben ser diseñados de acuerdo con el tipo de apoyo que se les da. En particular, se debe tener en cuenta el efecto de abocardamiento en la zona de apoyo.

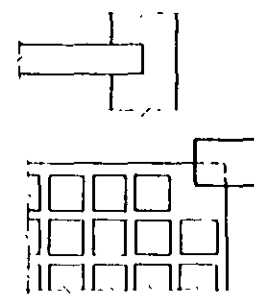
- Las losas planas se clasifican según su forma de apoyo (fig. ---- 4.10.1-4) en:
  - . Apoyadas en las columnas directamente.
  - . Apoyadas a través de ábacos
  - . Apoyadas a través de capiteles
  - . Apoyadas a través de ábacos y capiteles

**Recomendable**

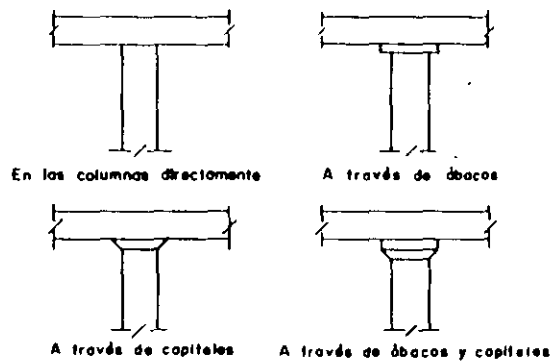


El paño de la columna coincide con el paño de la losa

**Inaceptable**



El paño de la columna no coincide con el paño de la losa



**TIPO DE APOYOS LOSA PLANA - COLUMNA**  
Fig 4.10.1-4

Fig 4.10.1-5

## 4.10.1

128

### b.- Objetivos

- Definir las losas planas
- Clasificar a las losas planas
- Definir la geometría de las losas planas (nervaduras, firmes, zonas macizas, etc.).
- Definir tipos de apoyos de losas planas.

Al cumplir con las especificaciones indicadas en este artículo se logran también los siguientes objetivos.

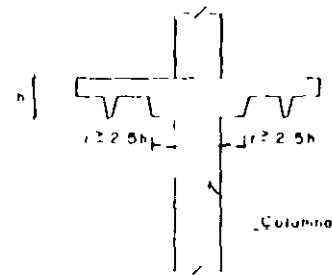
- . Asegurar un comportamiento adecuado en las estructuras en las cuales se emplean estos elementos, bajo la acción de sismos.
- . Evitar se presenten fallas en las losas planas por penetración de las columnas.
- . Tratar de proporcionar a estos sistemas de piso, la rigidez mínima necesaria para que presente comportamiento adecuado.

### c.- Comentarios

- El actual Reglamento incluye especificaciones para el diseño de losas planas bastante más conservadoras que las correspondientes al Reglamento establecido en 1977, lo que lleva a limitar el uso de estos elementos en algunos casos.
- Es recomendable no utilizar losas planas en edificios muy altos.
- Una posibilidad para disminuir la flexibilidad de una estructura a base de losa plana, es la inclusión de elementos resistentes a fuerzas cortantes (muros de cortante, contraventeos, etc.).

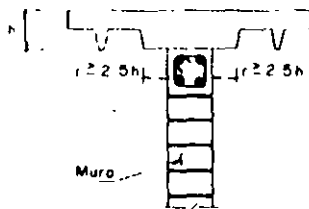
# 4.10.1

- Las losas aligeradas deberán:
  - . Contar con zonas macizas
    - . Adyacentes a las columnas
    - . Adyacentes a los muros de rigidez
- Contar con nervaduras cuyo ancho sea: (fig. 4 10.1-8)
  - . En ejes de columna
    - b. 25 cm
  - . Adyacentes a ejes de columnas
    - b. 20 cm
  - . El resto de ellas
    - b. 10 cm



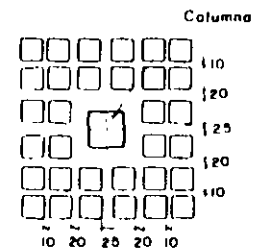
**ZONA MACIZA EN COLUMNAS**

Fig. 4 101- 7



**ZONA MACIZA EN MUROS**

Fig. 4 101- 6

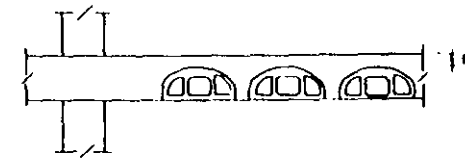


**NERVADURAS**

Fig. 4 101- 8

## 4.10.1

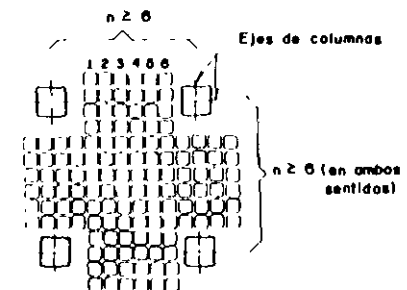
- El firme ubicado en la parte superior de las losas planas aligeradas deberá: (fig. 4.10.1-9).
  - . Ser monolítico con la losa
  - . Tener un espesor mayor o igual a 5 cm.
- En cada una de las dos direcciones de las losas planas (entre ejes de columnas) deberán existir por lo menos seis hileras de casetones alveolos (fig. 4.10.1-10).
- las losas planas se revisarán como diafragmas horizontales según los criterios para diafragmas y elementos de compresión de contra-venteos presentados en el 4.6 de NTC de concreto.



$t \geq 5 \text{ cm}$

**FIRME QUE SE APOYA EN LAS NERVADURAS**

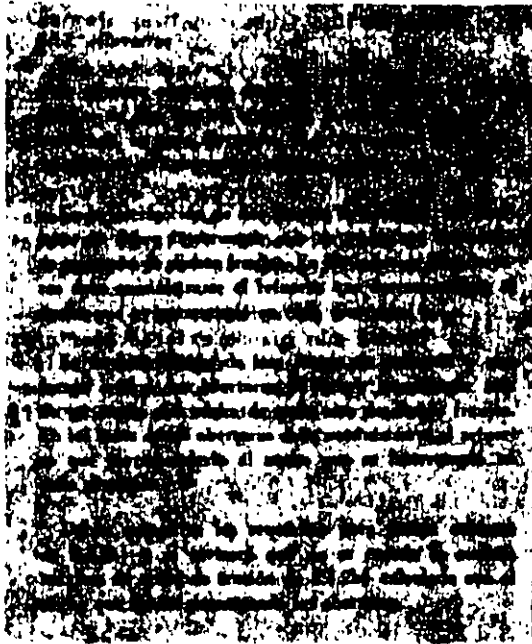
Fig 4.10.1-9



**NUMERO MINIMO DE CASETONES**

Fig 4.10.1-10

## 4.10.2

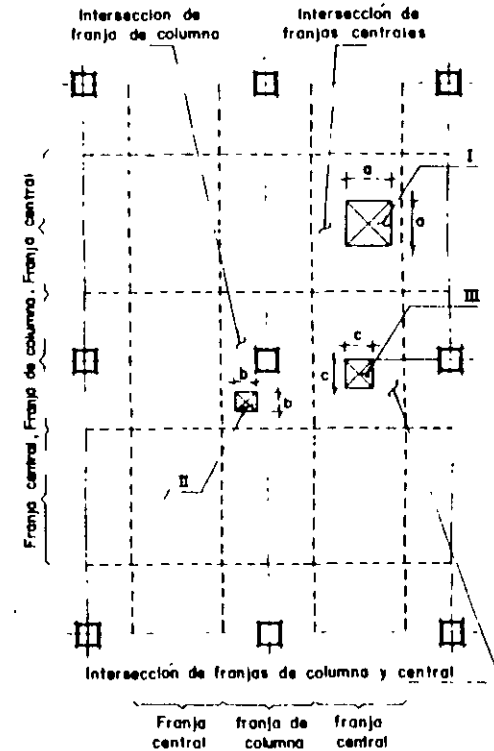


a - En este artículo se indica que:

- Se admiten aberturas en losas planas en: (Fig. 4.10.2-1)
  - . la intersección de dos franjas-centrales (I).
  - . De cualquier tamaño (a)
  - . la intersección de dos franjas de columnas (II).
  - . Donde  $b = \frac{1}{8}$  del ancho de la franja
  - . la intersección de franjas de columna y centrales.
    - . donde  $c = \frac{1}{4}$  del ancho de cada una de las franjas.

Nota: Para los tres casos se mantiene el refuerzo total interrumpido por la abertura, en ambas direcciones. (Fig. 4.10.1-2)

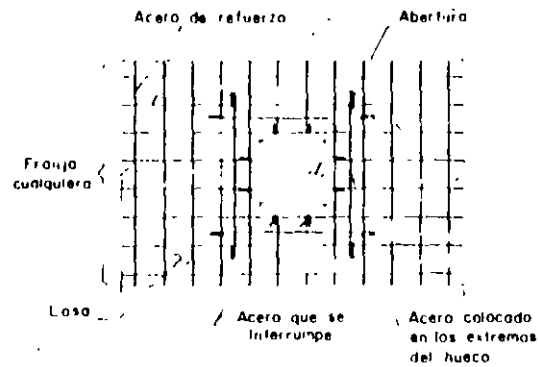
- Se deben cumplir:
  - . Los requisitos para fuerzas cortante (2.1.5. h).
  - . Revisar que no se exceda la cantidad máxima de acero a tensión (2.1.2. b) (descontando ancho de abertura).



ABERTURAS EN LOSAS PLANAS

Fig. 4.10.2-1

## 4.10.2



DETALLE DE ARMADO EN ABERTURAS  
EN LOSAS PLANAS

Fig 4 10 2 - 2

b.- Objetivo

- Evitar se presenten zonas débiles en losas planas, provocadas por la reducción del área resistente en la losa debido a las aberturas.
- Evitar se presente una discontinuidad en la transmisión de los esfuerzos a través de la losa.

c. Comentarios.

- Es necesario evitar que en losas planas se hagan aberturas muy grandes, para asegurar su buen comportamiento como diafragma. La parte más crítica en cuanto a la presencia de aberturas, es la zona maciza, debido a que se incrementa la posibilidad de falla de la losa por penetración de las columnas.
- El acero de refuerzo total se mantendrá aún cuando existan aberturas para asegurar la ductilidad de la losa, y evitar la formación de una zona con comportamiento de tipo frágil.

## 4.11 CONCRETO PREFABRICADO

### B.- Concreto prefabricado.

Se presentan algunos comentarios introductorios respecto a este tema.

#### a.- Aspectos generales

- Las estructuras de concreto reforzado pueden ser:
  - . Coladas en el lugar
  - . Integradas en su totalidad por elementos prefabricados.
  - . Mixtas (algunos elementos son prefabricados y otros colados en el lugar).
- Los elementos prefabricados pueden ser:
  - De concreto reforzado ordinario
  - Presforzados { pretensados  
                  postensados
- En este capítulo se analiza lo correspondiente a:
  - Estructuras totalmente prefabricadas.
  - Estructuras mixtas.

b.- Los edificios que incluyen elementos prefabricados de concreto ya sea en parte o en su totalidad presentan características diferentes a las correspondientes a edificios en los que todos sus elementos son colados en el lugar; a saber:

- Las secciones transversales de los elementos estructurales prefabricados son totalmente diferen-

tes a los correspondientes de las estructuras totalmente coladas en el lugar.

- . En las trabes de concretos de estructuras coladas en el lugar se utilizan secciones rectangulares o "T".
- . En elementos presforzados se emplean secciones transversales, rectangulares T, L, T invertidas, doble T, canal, Y, etc. Esto se debe a que para diseñar elementos presforzados se requiere lograr secciones transversales mínimas de concreto, para que la cantidad de acero de presfuerzo sea también mínima. En elementos presforzados la cuantía de presfuerzo está en función directa del área de la sección transversal de concreto. También es importante reducir las secciones transversales a un mínimo debido a que el peso del elemento influye de manera considerable en el costo de transporte y montaje.

En nuestro país varias empresas dedicadas al presfuerzo y a la prefabricación han estandarizado sus secciones transversales siendo aconsejable la utilización de estos elementos por presentar ventajas en lo correspondiente a calidad, tiempo y costo.



## 4.11.1

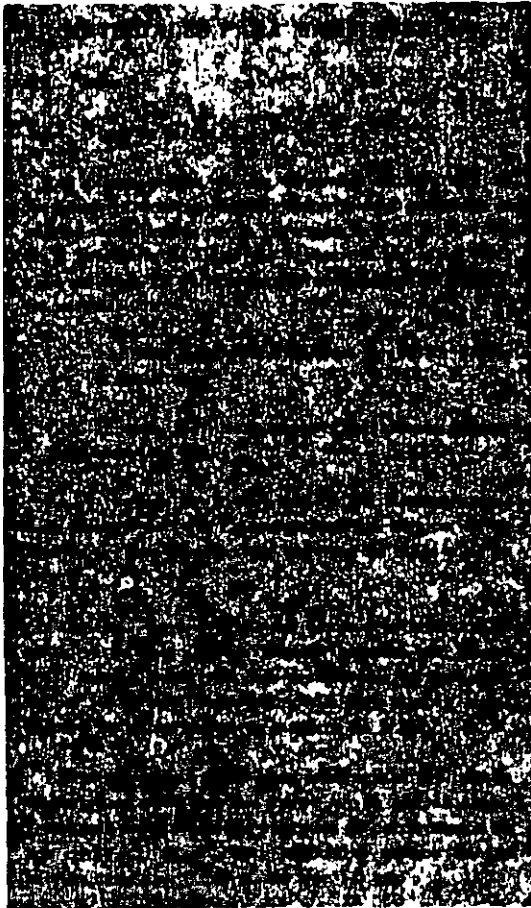
134

- En este documento se presentan algunas de las secciones transversales más utilizadas en nuestro medio. Se cuenta con un catálogo de productos prefabricados elaborado por la Asociación Nacional de Industriales del Prefuerzo y de la Prefabricación A.C. (ANIPPAC) en el que se presentan los elementos estandarizados por la empresa agrupadas en esa asociación.
- Las losas prefabricadas que se emplean como elementos de entrepiso y cubierta, principalmente en el caso de que sean pretensadas, trabajan como trabe-losa; es decir, trabajan en una sola dirección, a diferencia de las losas coladas "insitu" que por lo general trabajan en ambas direcciones (ya sean estas losas perimetralmente apoyadas o losas planas).
  - Por lo anterior, las estructuras (en planta) que se logran cuando se tienen elementos pretensados, cuentan, en una dirección, con travesantes portantes (de las losas) que forman con las columnas marcos sismo-resistentes.. En la otra dirección se tienen travesantes que solo resisten su peso propio, pero que forman parte de marcos que resisten los efectos sísmicos en esa dirección.
- Asimismo existen otros tipos de estructuraciones como es el caso de losas prefabricadas pretensadas apoyadas en muros de cortante.
- En el caso de estructuras coladas en el lugar se tienen travesantes portantes en ambas direcciones, las que forman marcos con las columnas, resistiendo también los efectos sísmicos.
  - Debido a lo antes mencionado, las estructuraciones en las que se emplean losas prefabricadas pretensadas son por lo general rectangulares; correspondiendo el claro mayor al de las losas; y el menor, al de los travesantes que las soportan. En el caso de soluciones coladas en el lugar, por lo general, se tienen retículas cuadradas.
- Las uniones entre elementos prefabricados son más complejas y muy diferentes de las empleadas para elementos colados en el lugar.

---

## **5.-Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería**

## 5.1 MATERIALES PARA MAMPOSTERIA



a - En este artículo se indica que:

- Para elementos estructurales de mampostería se podrán usar los diferentes tipos de piezas

Ladrillos y bloques cerámicos de barro, arcilla o similares.

- Bloques, ladrillos o tabiques y tabicones de concreto.

- Para diseño sísmico se considera lo siguiente:

- Las piezas macizas tienen las siguientes características.

$$A_{\text{neto}} = 0.75 A_t$$

$$t \geq 2\text{cm}$$

donde:

$A_{\text{neto}}$  = Área neta de la sección transversal más desfavorable.

$A_t$  = Área total de la sección de la pieza

$t$  = Espesor de las paredes de la pieza

- Las piezas huecas tienen las siguientes características

$$A_{\text{neto}} = 0.45 A_t$$

$$t_e = 1.5\text{ cm}$$

donde:

$t_e$  = espesor de las paredes exteriores de la pieza

b.- Objetivos

- Definir las características de las piezas que se emplean en elementos estructurales de mampostería.

## 5.1.2

138



a.- En este artículo se indica que:

- Los morteros deben cumplir lo siguiente:

.  $f'c \geq 40 \text{ kg/cm}^2$

.  $2.25 \leq \frac{V(\text{arena})}{\sum V(\text{cementantes})} \leq 3$

. Emplear la mínima cantidad de agua - requerida para facilitar su trabajabilidad.

b.- Objetivo.

- Definir las características principales de los morteros, que se emplean en elementos estructurales de mampostería.

## 5.1.3

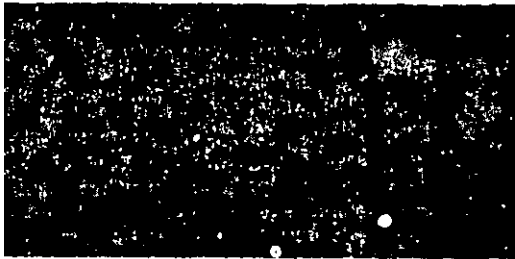


a.- In este artículo se indica que:

- El acero de refuerzo a emplear en:
  - . Castillos
  - . Dalas
  - . Refuerzo interior en piezas de mampostería
- Podría ser:
  - . Barras corrugadas
  - . Malla de acero
  - . Alambres corrugados laminados en frío

b.- Objetivo

- Definir los tipos de acero de refuerzo a emplear en los elementos estructurales de mampostería.



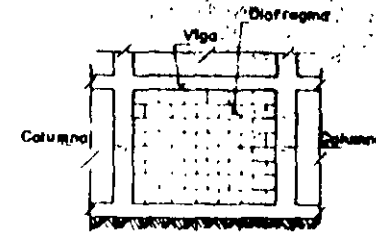
a.- En este artículo se indica que:

Los muros estructurales de mampostería se pueden clasificar en (fig. - 5.2.1-1).

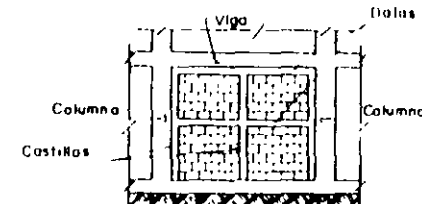
- Muros diafragma
- Muros confinados
- Muros de mampostería hueca reforzados interiormente.
- Muros no reforzados interiormente.
- Otras modalidades

b.- Objetivo

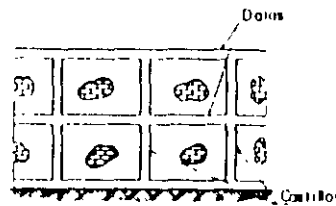
Definir los diferentes tipos de muros estructurales de mampostería que se pueden utilizar en los edificios.



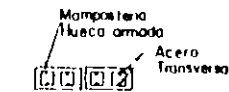
MURO DIAFRAGMA



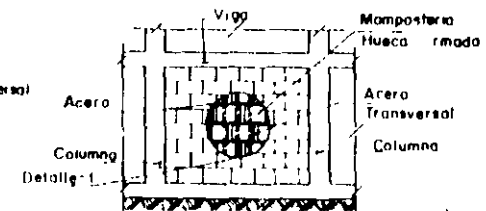
MURO DIAFRAGMA CONFINADO  
(Con dalias y castillos)



MURO CONFINADO



DETALLE - 1



MURO REFORZADO INTERIORMENTE

MUROS ESTRUCTURALES DE MAMPOSTERIA

Fig 5.2.1-1

# 5.2.2



a.- En este artículo se indica que:

- Los muros diafragmas son lo que se encuentran confinados por traveses y columnas que forman marcos estructurales (fig. 5.2.2-1a).
- También se tienen muros diafragmas que además de estar confinados por traveses y columnas como se indicó en el párrafo anterior, cuentan con dales y castillos (fig. 5.2.2-1b).
- Las uniones entre marcos y muros diafragma deberán diseñarse para:
  - Evitar el volteo del muro (fig. 5.2.2-1c).

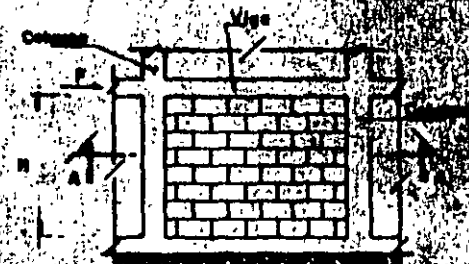


Fig. 5.2.2-1 a)

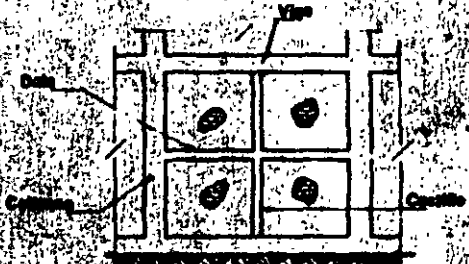


Fig. 5.2.2-1 b)



Fig. 5.2.2-1 c)

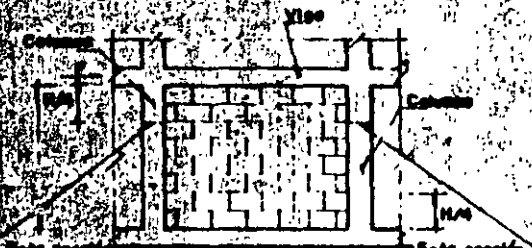


Fig. 5.2.2-1 d)

Este detalle debe resistir un cortante  $V = F/2$

Este detalle debe resistir un cortante  $V = F/2$

## MUROS DIAFRAGMA

Fig 5.2.2-1

## 5.2.2

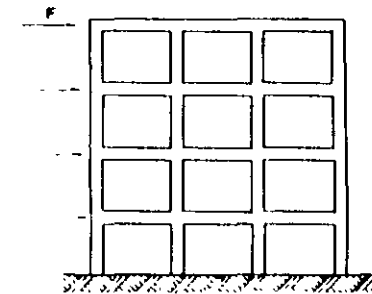
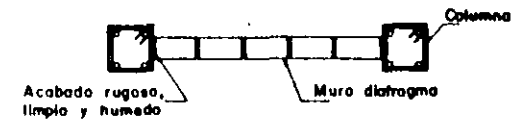
- a.- Que las columnas resistan al menos el 50% de la carga lateral que actúa en el tablero, en una longitud igual a una cuarta parte de la altura del tablero, medida a partir del paño de la viga. (fig. 5.2.2-1d)

### b.- Objetivo

Definir a los muros diafragma

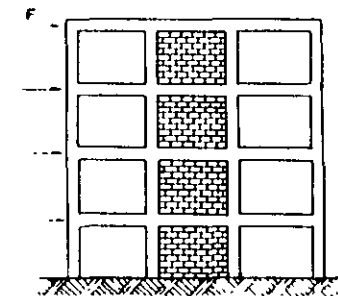
### c.- Comentarios

- Estos muros deberán estar adecuadamente ligados a las vigas y a las columnas de la estructura (para mayor información ver artículo 204 de este manual). (fig. 5.2.2.2)
- Las vigas y columnas deberán revisarse para que sean capaces de resistir las reacciones que les induce el tablero del muro.
- Cuando las dimensiones de los muros diafragma (longitud y altura) son considerables se deberán incluir adicionalmente dadas y castillos.



MARCO SIN MUROS DIAFRAGMA

(Marco poco rígido)



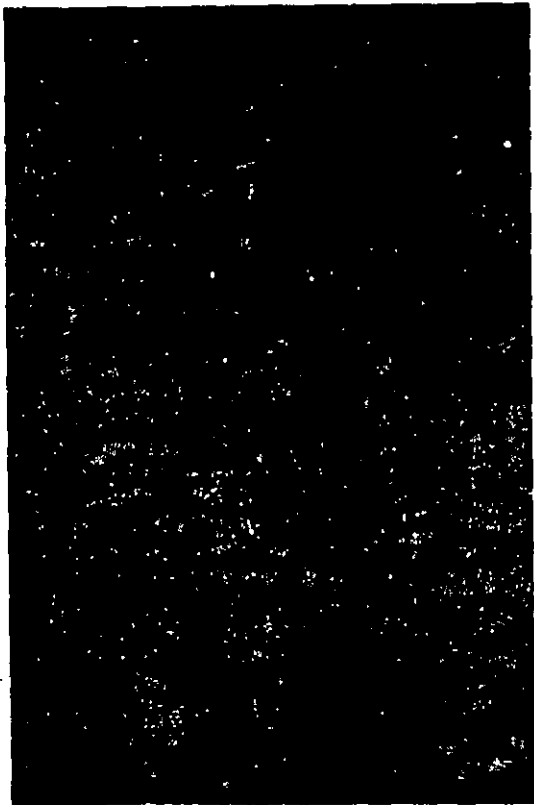
MARCO CON MUROS DIAFRAGMA

(Marco rígido)

Fig 5 2 2-3



# 5.2.3



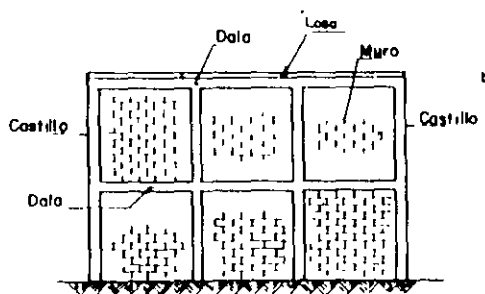
a - En este artículo se indica que:

- Los muros confinados son los que están reforzados con dalas y castillos únicamente (fig. 5.2.3.1.)
- las dalas y los castillos deberán cumplir con lo siguiente: (fig. 5.2.3.2)

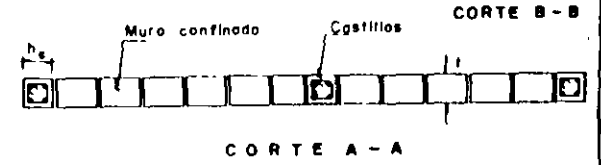
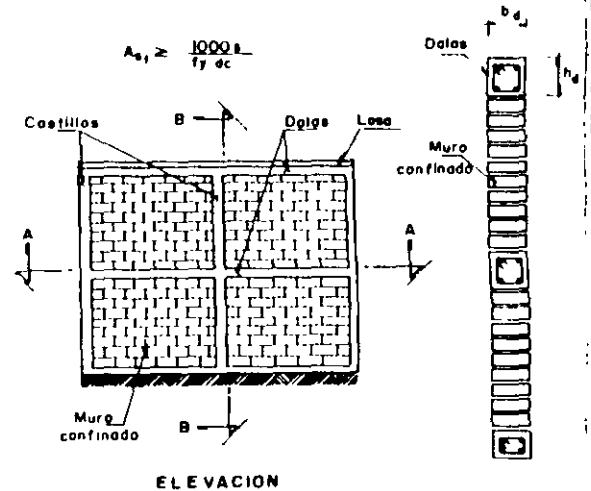
$b_c \leq t \leq y \leq d \leq t$   
 $f'c \geq 150 \text{ Kg/cm}^2$

Tener como mínimo 3 barras de refuerzo longitudinal, con una área  $A_s \geq (0.2 f'c/f_y) A_c$ , si  $A_c = b_c \cdot h_c$ .

- Anclar el acero de refuerzo longitudinal en los elementos extremos.

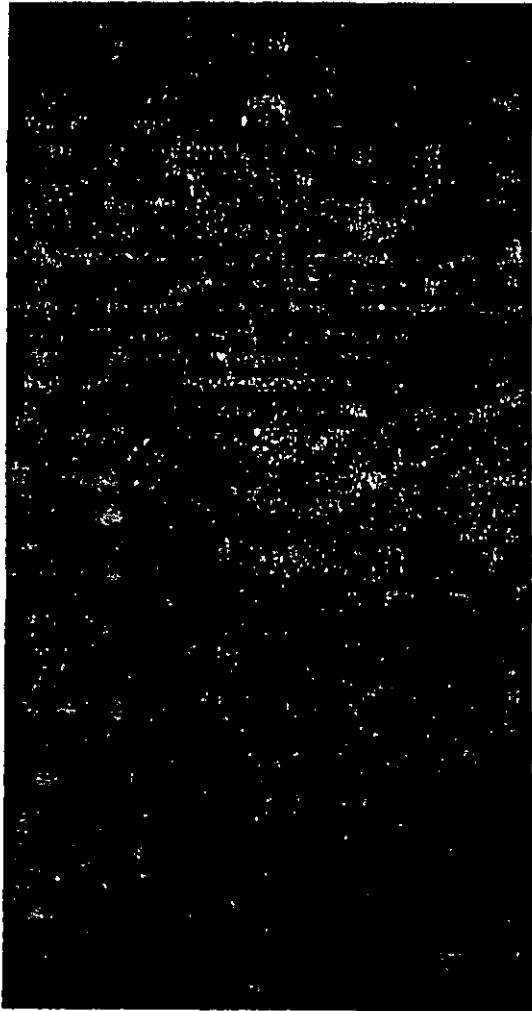


**MURO CONFINADO**  
 (Con dalas y castillos)  
 Fig 5.2.3-1



- Donde
- $t$  = Espesor del muro
  - $h_c$  = Peralte del castillo.
  - $b_c$  = Ancho del castillo
  - $b_d$  = Ancho de la dala
  - $h_d$  = Peralte de la dala.
  - $A_c$  = Área del castillo
  - $A_s$  = Área de acero longitudinal del castillo
  - $s$  = Separación de estribos
  - $d_c$  = Peralte de castillo

**MURO CONFINADO EN UN MARCO ESTRUCTURAL**  
 Fig 5.2.3-2



- Contar con castillos y dalas extremos e intermedios.

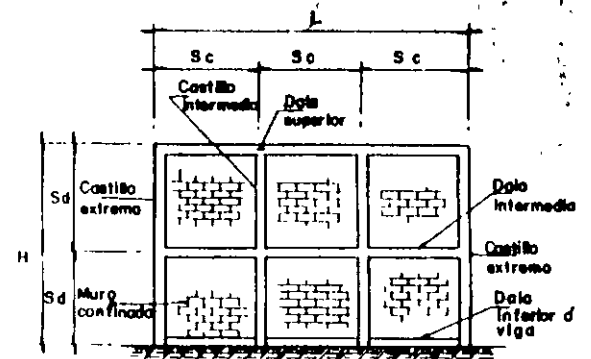
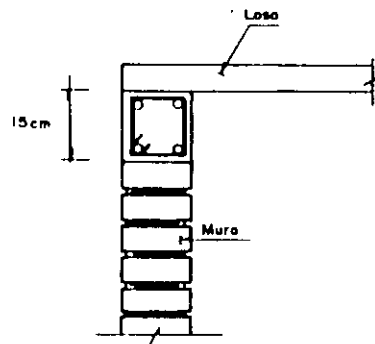
- Los castillos tendrán una separación entre sí que cumpla con: --- (fig. 5.2-3-3).

$$S_c \leq \begin{matrix} 1.5 H \\ 4 \text{ m} \end{matrix}$$

- Existirán dalas en los extremos -- horizontales (superior e inferior) cuando los muros no esten ligados a elementos resistentes horizontales de concreto cuyo peralte sea mayor o igual a 15 cm.

- Las dalas tendrán una separación vertical que cumpla con: (fig. 5.2-3-3).

$$S_d \leq 3m$$



Donde:

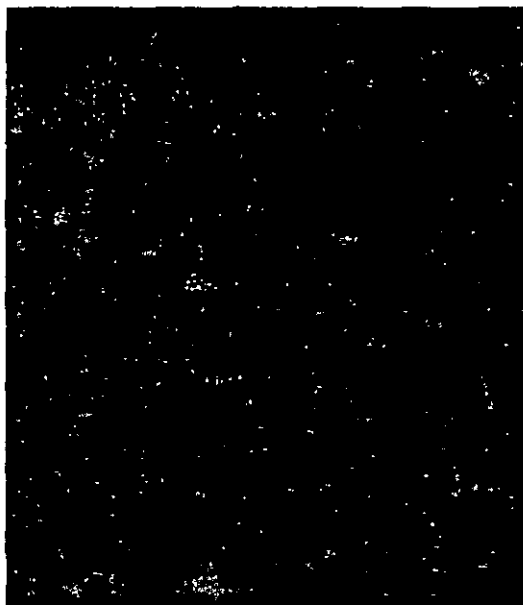
- Sc = Separación de castillos
- Sd = Separación de dalas

**SEPARACION DE DALAS Y CASTILLOS DE MUROS CONFINADOS**

Fig 5.2.3-3

## 5.2.3

146



- Cuando existan huecos se colocaran refuerzos a base de dalas y castillos en la periferia del hueco: (fig. 5.2.3-4)

$$\text{Si } a_1 \geq \frac{L}{4}$$

$$\text{ó } a_2 \geq \frac{H}{4}$$

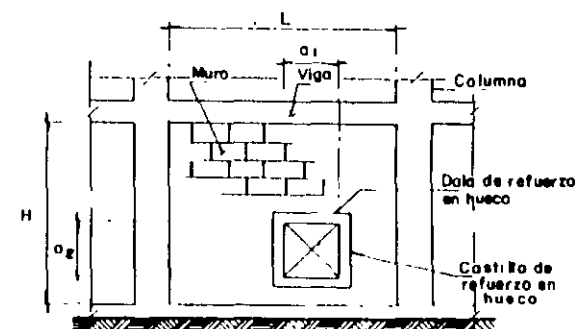
- No se requiere reforzar con dalas y castillos, los huecos de los muros de mampostería:

$$\text{Si } a_1 < \frac{L}{4}$$

$$\text{y } a_2 < \frac{H}{4}$$

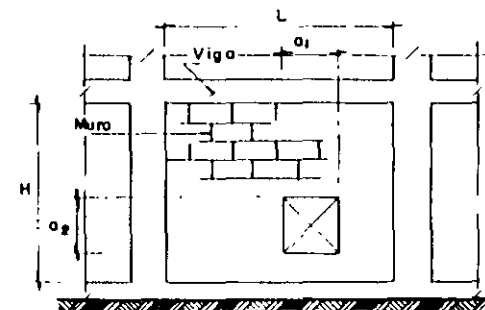
- El espesor del muro deberá cumplir con

$$t \geq \frac{H}{30} \quad (\text{fig. 5.2.3.5}).$$



$$\text{Si } a_1 \geq L/4 \quad \text{ó } a_2 \geq H/4$$

**HUECO CON REFUERZO PERIMETRAL**



$$\text{Si } a_1 < L/4 \quad \text{y } a_2 < H/4$$

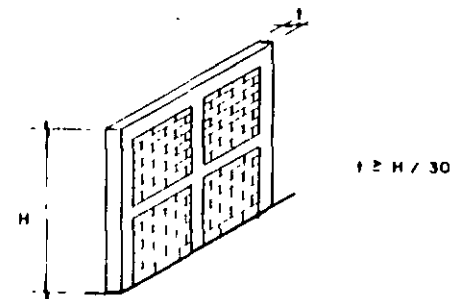
**HUECO SIN REFUERZO**  
(Sin dalas ni castillos)

**HUECOS EN MUROS DE MAMPOSTERIA**

Fig. 5.2.3-4

## b - Objetivos

- Definir a los muros confinados
- Definir las dimensiones mínimas de los castillos y de las dalas de -- los muros confinados.
- Definir la ubicación de las dalas- y de los castillos de los muros de mampostería para considerarlos con finados.



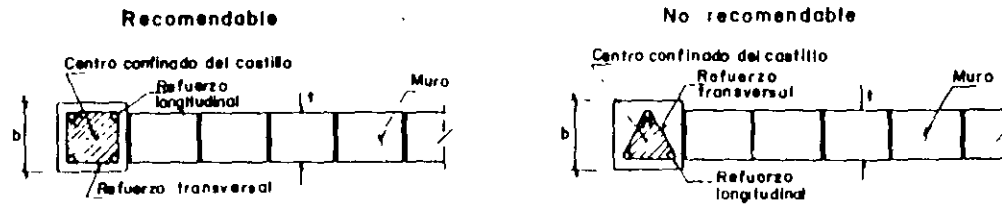
**MURO DE MAMPOSTERIA  
CONFINADO**

Fig 5.2.3-5

## c.- Recomendaciones

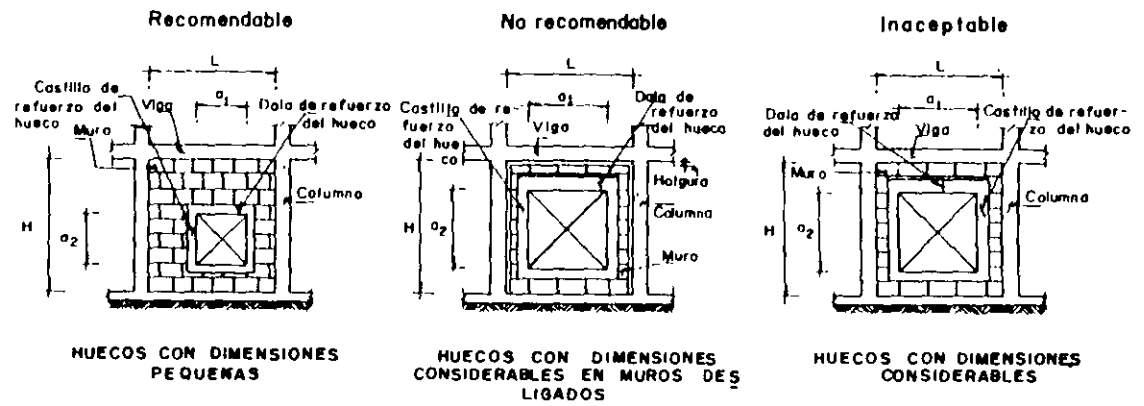
- Se recomienda que cuando las dimensiones de los muros de mampostería (longitud y altura) son grandes, - se emplean muros diafragma confinados, para evitar posibles fallas - o volteos perpendiculares a su plano.
- Si bien se especifica que el número mínimo de varillas que se deben colocar en dalas y castillos es de 3, se recomienda que sean cuatro - para cada uno de estos elementos - (fig. 5.3-6)
- Cuando se tienen huecos, de dimensiones considerables conviene desligar estos muros de la estructura, ya que su comportamiento es incierto (fig. 5.3-7).

# 5.2.3



## ARMADO DE LAS DALAS o CASTILLOS

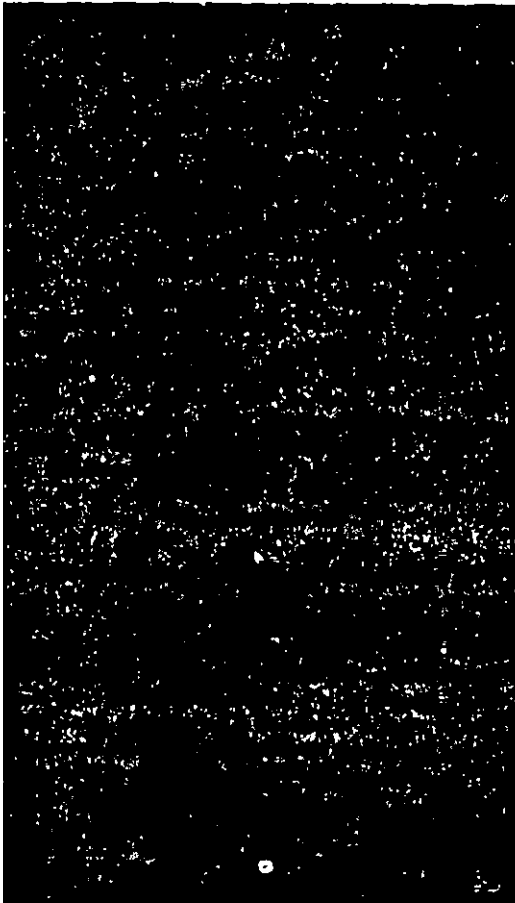
Fig 5 2 3-6



## HUECOS EN MUROS CONFINADOS

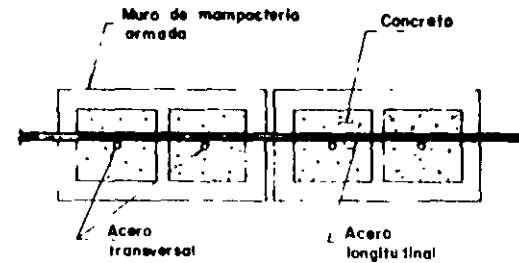
Fig 5 2 3-7

## 5.2.4

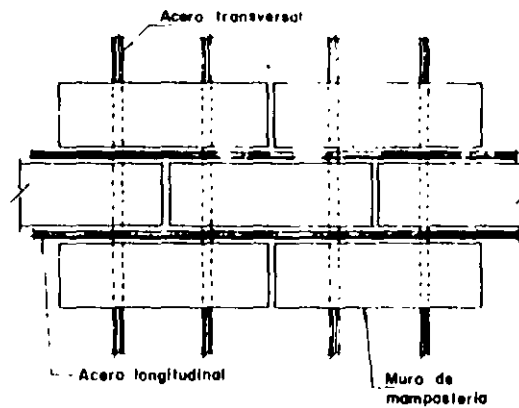


a.- En este artículo se indica que:

- Los muros son reforzados interiormente cuando se introducen varillas corrugadas o mallas en los huecos de las piezas o en sus juntas. Estas varillas de refuerzo están colocadas tanto horizontal como verticalmente. (fig. 5.2.4-1).



PLANTA

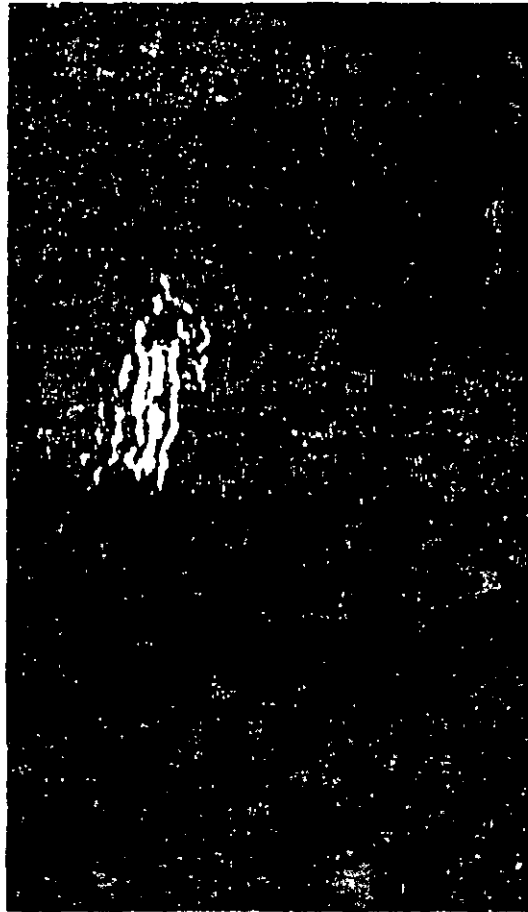


ELEVACION

### MUROS REFORZADOS INTERIORMENTE

Fig 5 2 4 - 1

# 5.2.4



- Se deberá cumplir que:

$$t \geq \frac{H}{30} \quad (\text{fig. 5.2.4.2})$$

- Cuando existan huecos:

$$a_1 \geq 60 \text{ cm y } a_2 \geq 60 \text{ cm.}$$

Se reforzarán los huecos en la dirección correspondiente, con al menos una varilla del número cuatro (fig. 5.2.4-3)

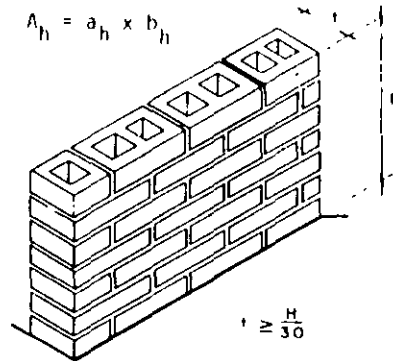
- Los huecos de las piezas de mampostería deberán cumplir con: (fig. 5.2.4-4)

$$a_h \geq 5 \text{ cm y } b_h \geq 5 \text{ cm}$$

$$A_h \geq 30 \text{ cm}^2$$

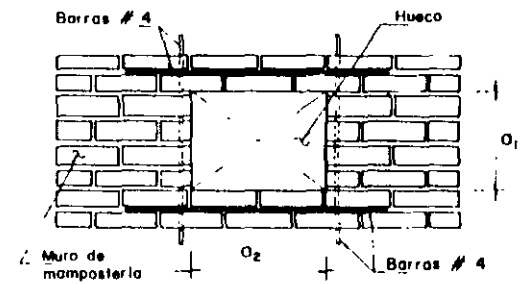
donde

$$A_h = a_h \times b_h$$



**MURO DE MAMPOSTERIA ARMADO**

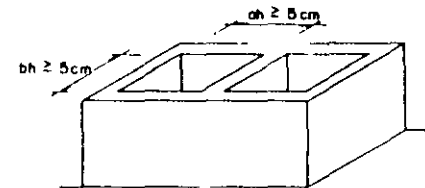
Fig 5.2.4-2



Si  $a_1$  y/o  $a_2 \geq 60$  cm entonces armar el hueco perimetralmente con una barra # 4 como mínimo

**DETALLE DE REFUERZO EN HUECOS DE MUROS DE MAMPOSTERIA REFORZADOS INTERIORMENTE**

Fig 5.2.4-3



**MAMPOSTERIA HUECA (BLOCK)**

Fig 5.2.4-4

### b.- Objetivo

- Definir a los muros de mampostería hueca reforzados interiormente.
- Definir las dimensiones mínimas de los muros.
- Definir las dimensiones mínimas de los huecos de las piezas de mampostería.
- Definir el refuerzo de los huecos de los muros reforzados interiormente.

### c.- Comentarios

- Este tipo de muros no se deberá emplear en edificios cuya altura total sea mayor o igual a 13 m.
- Estos muros requieren un control de calidad muy estricto. Debido a que el refuerzo necesario puede fácilmente omitirse por descuido o negligencia.



## 5.2.5



a.- En este artículo se indica que:

Los muros no reforzados son aquellos que no cumplen con las especificaciones de los muros diafragma, muros confinados y muros reforzados interiormente.

c - Observaciones.

- Este tipo de muros no deben usarse pues su carencia de confinamiento los hace muy vulnerables tanto a las acciones sísmicas como a los movimientos diferenciales.

## 5.2.6



a - En este artículo se indica que:

Pueden existir otras modalidades de -  
muros de mampostería que requieren de  
condiciones especiales para su empleo

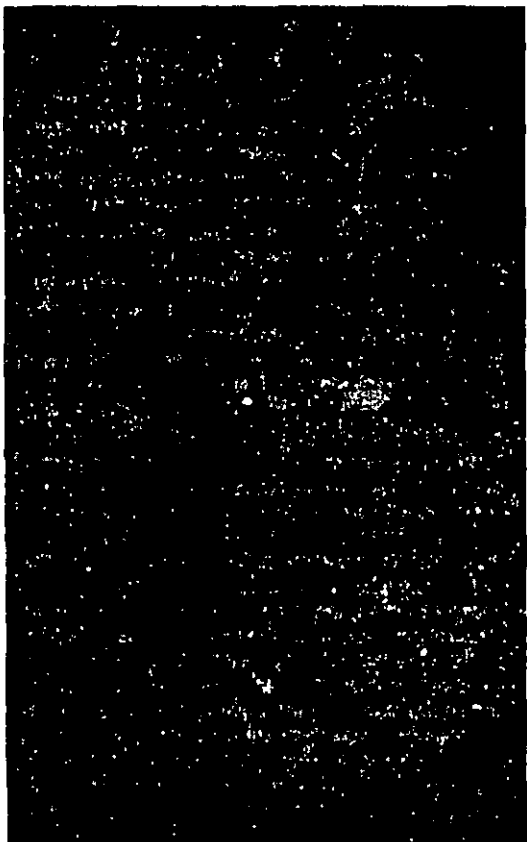
c.- Observaciones.

- En la actualidad se están desarro-  
llando diversos sistemas de muros -  
de mampostería que deberán ser ava-  
lados con estudios analíticos y ex-  
perimentales, y que a juicio del -  
D.D.F., puedan ser empleados con -  
las mismas condiciones de seguridad  
señaladas para los muros antes des-  
critos.

---

## **6.-Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metalicas**

## 6.1 TIPOS DE ESTRUCTURA Y METODOS DE ANALISIS



a.- En este artículo se indica que:

- Las estructuras metálicas deberán:
  - . Asegurar su estabilidad bajo cargas verticales.
  - . Contar con resistencia y rigidez suficientes para resistir las combinaciones de cargas -- verticales y horizontales.

- Las estructuras metálicas se clasifican en:

- . Estructuras Tipo 1
- . Estructuras Tipo 2

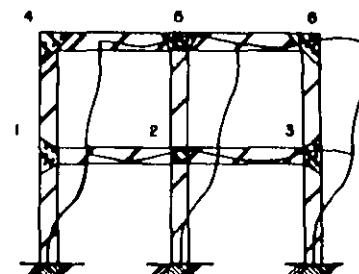
- Estructuras Tipo 1

(Marcos rígidos o estructuras -- continuas) (fig. 6.1-1).

Sus características principales son:

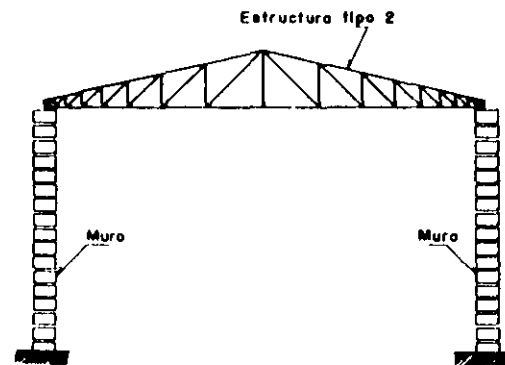
- . Las conexiones entre sus miembros son rígidas.
- . Sus conexiones presentan rotaciones relativas mínimas entre sus miembros.
- . Las conexiones transmiten al menos 1.25 veces el momento flexionante, la fuerza cortante y la fuerza normal de diseño que se presentan en los extremos de cada barra.

$$M_{conex.} \geq \begin{cases} 1.25M_{trabe} \\ 1.25V_{trabe} \\ 1.25P_{trabe} \end{cases}$$



**ESTRUCTURA TIPO 1**

Fig. 6.1-1



**ESTRUCTURA TIPO 2**

Fig. 6.1-2

## 6.1.1

Las estructuras del tipo 2 son las que están formadas por miembros unidos entre sí por medio de conexiones que permiten rotaciones relativas, y que son capaces de transmitir la totalidad de las fuerzas normales y cortantes, así como momentos no mayores del 20 por ciento de los momentos plásticos de diseño de los miembros considerados.

Las estructuras del tipo 1 pueden analizarse también utilizando métodos clásicos de plástica, cuando se les aplican cargas de sobrecarga de diseño.

El valor máximo permitido de desplazamiento relativo en los miembros de las estructuras del tipo 1 y 2, no debe ser mayor que el que se especifica en el artículo 10.1.1.1.

- Estructuras tipo 2. (fig. 6.1-2).

Sus características principales son:

- Las conexiones entre sus miembros permiten rotaciones relativas considerables.
- Las conexiones transmiten la totalidad de las fuerzas normales y cortantes y momentos flexionantes menores a  $0.2 M_p$  de diseño de los miembros que unen.
- Se utilizan en elementos secundarios.
- Se utilizan en marcos principales si se combinan con muros, - contraventeos, marcos rígidos o combinaciones de ellos, contando además con losas o diafragmas horizontales que proporcionan rigidez adecuada y capacidad para transmitir fuerzas horizontales.

b.- Objetivo

- Clasificar las estructuras metálicas y su comportamiento, para poder elegir de manera adecuada, la más conveniente en cada caso.
- Definir las características principales de las estructuras tipo 1 y tipo 2.

c.- Comentarios

- En suelos blandos es conveniente utilizar estructuras del tipo 1.

## 6.1.1

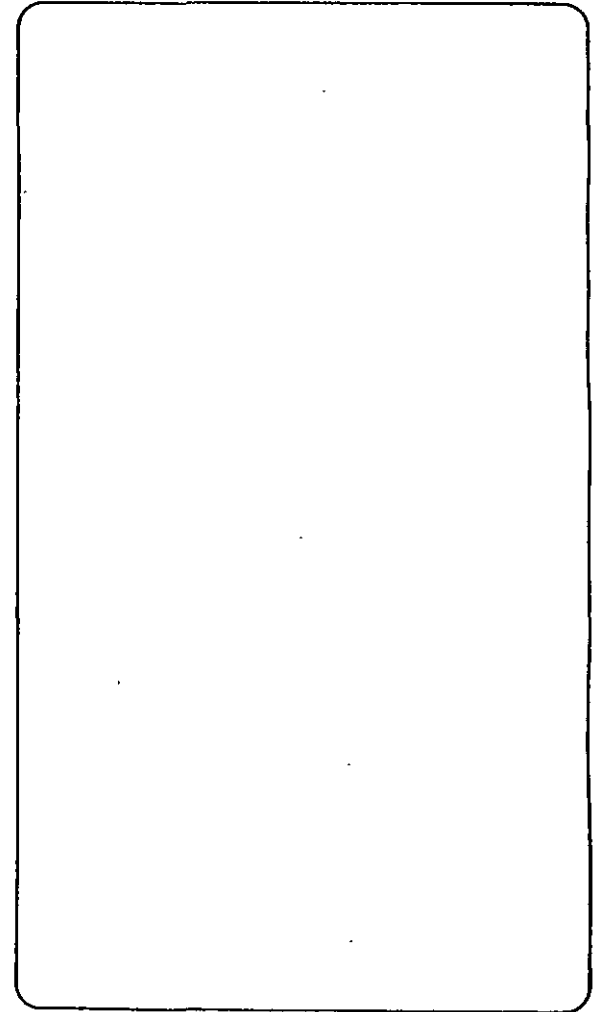
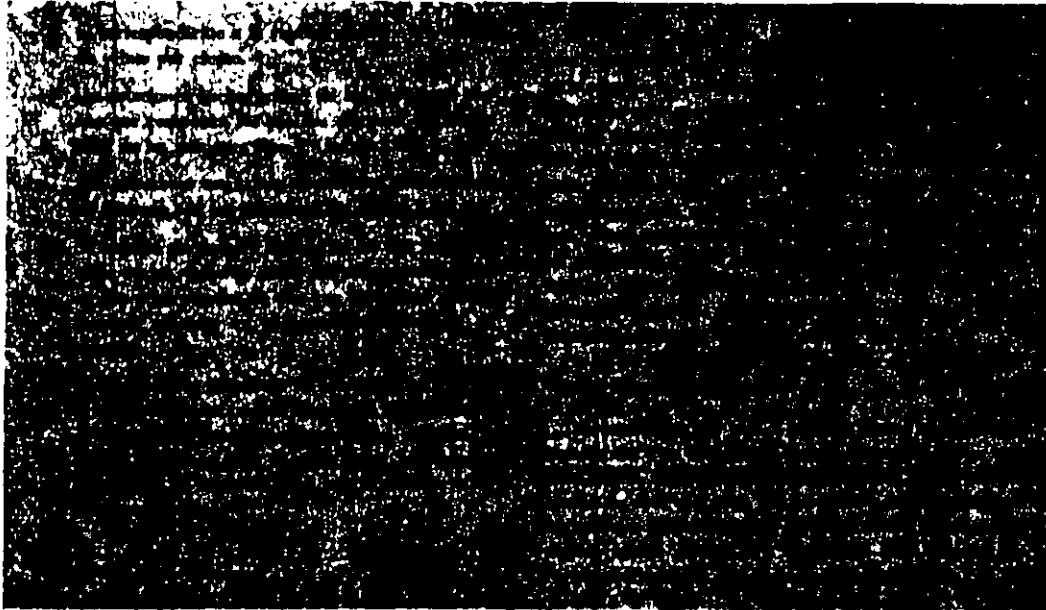


TABLA 2.3.1 VALORES MÁXIMOS ADMISIBLES DE LAS RELACIONES ANCHO/GRUESO

DESCRIPCIÓN DEL ELEMENTO	CLASIFICACIÓN DE LAS SECCIONES		
	TIPO 1 (DISEÑO PLÁSTICO)	TIPO 2 (COMPACTAS)	TIPO 3 (NO COMPACTAS)
ALAS DE ANGULOS, SEMICILINDROS Y DE ANGULOS DOPLES CON SEPARADORES, EN COMPRESIÓN. ELEMENTOS COMPRESIONADOS SOPORTADOS A LO LARGO DE UNO SOLO DE LOS BORDES LONGITUDINALES	—	—	$640/\sqrt{F_y}$
ATISADORES DE TIRES ARMADAS, SOPORTADOS A LO LARGO DE UN SOLO BORDE LONGITUDINAL	—	—	$800/\sqrt{F_y}$
ALMAS DE SECCIONES T	—	$540/\sqrt{F_y}$	$1100/\sqrt{F_y}$
PATINES DE SECCIONES I, H O T, Y DE CAVILES, EN FLECCIÓN	$460/\sqrt{F_y}$	$540/\sqrt{F_y}$	$830/\sqrt{F_y}$
PATINES DE SECCIONES I, H O T, Y DE CAVILES, EN COMPRESIÓN PARA PLACAS QUE SOBRESALLEN DE MIEMBROS COMPRESIONADOS (1)	$830/\sqrt{F_y}$	$830/\sqrt{F_y}$	$830/\sqrt{F_y}$
PATINES DE SECCIONES EN CAJÓN, LAMINADAS O SOLDADAS, EN FLECCIÓN; CORTAFUEROS ENTRE LINEAS DE REFUERZO, TORNILLOS O SOLDADURAS, ATISADORES SOPORTADOS A LO LARGO DE LOS DOS BORDES PARALELOS A LA FUERZA	$1600/\sqrt{F_y}$	$1600/\sqrt{F_y}$	$2100/\sqrt{F_y}$
ALMAS DE SECCIONES I O H Y PLACAS DE SECCIONES EN CAJÓN, EN COMPRESIÓN PURA (1)	$2100/\sqrt{F_y}$	$2100/\sqrt{F_y}$	$2100/\sqrt{F_y}$
ALMAS EN FLECCIÓN	$3300/\sqrt{F_y}$	$5300/\sqrt{F_y}$	$8000/\sqrt{F_y}$
ALMAS FLECCIONADAS	<p>Si <math>P_u/P_y \leq 0.28</math>, (2)</p> $\frac{3500}{\sqrt{F_y}} (1 - 1.4 P_u/P_y)$ <p>Si <math>P_u/P_y &gt; 0.28</math>,</p> $\frac{2100}{\sqrt{F_y}}$	<p>Si <math>P_u/P_y \leq 0.15</math>,</p> $\frac{5300}{\sqrt{F_y}} (1 - 2.7 P_u/P_y)$ <p>Si <math>P_u/P_y &gt; 0.15</math>,</p> $\frac{3339}{\sqrt{F_y}} (1 - 0.371 P_u/P_y)$	<p>Si <math>P_u/P_y \leq 0.15</math>,</p> $\frac{8000}{\sqrt{F_y}} (1 - 2.7 P_u/P_y)$ <p>Si <math>P_u/P_y &gt; 0.15</math>,</p> $\frac{5228}{\sqrt{F_y}} (1 - 0.598 P_u/P_y)$
SECCIONES (CANGULAS) MUELOS EN COMPRESIÓN AXIAL (3)	$132000/F_y$	$184000/F_y$	$232000/F_y$

(1) En miembros sometidos a compresión axial no existe la distinción basada en capacidad de rotación, por lo que los límites de almas y patines de perfiles comprimidos axialmente son los mismos para las secciones tipo 1 a 3.

(2)  $P_u$  es la fuerza axial de diseño.

(3) Ver 2.3.5.

## 6.2 ESTABILIDAD Y RELACIONES DE ESBELTEZ

a.- En este artículo se indica que:

- Los marcos contraventeados son -- los que cuentan con:
    - . Diagonales de contraventeo
    - . Muros de cortante
    - . Diagonales de contraventeo y muros de cortante.
  - Los sistemas de contraventeo de-- ben ser diseñados para:
    - . Evitar el pandeo de la estructu-- ra bajo la acción de cargas ver-- ticales (fig. 6.2.1-1).
    - . Conservar la estabilidad late-- ral de la estructura tomando en cuenta los efectos  $P\Delta$ . (fig. - 6.2.1-2)
  - Los muros ligados a la estructura se debe considerar que forman par-- te del sistema vertical de contra-- venteo.
  - Para analizar el pandeo y la esta-- bilidad lateral de la estructura, se considera a ésta como una arma-- dura vertical en voladizo.
  - Las vigas del sistema vertical de contraventeo se diseñarán como -- elementos a flexocompresión to-- mando en cuenta las fuerzas de -- compresión axial originadas por -- las cargas horizontales.
- $P_u \leq 0.85 P_y$

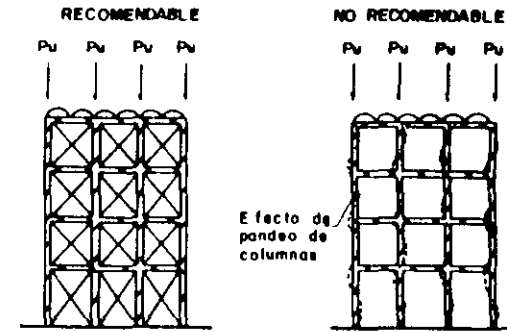


Fig 6.2.1-1

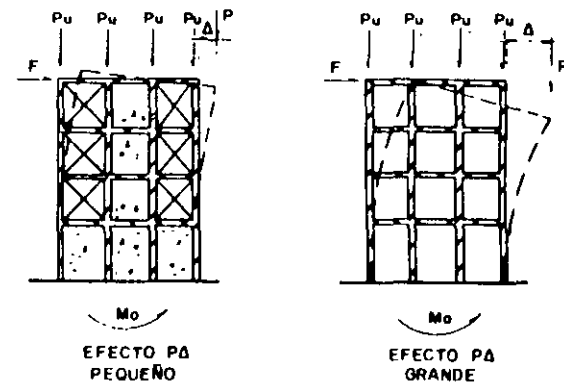


Fig 6.2.1-2



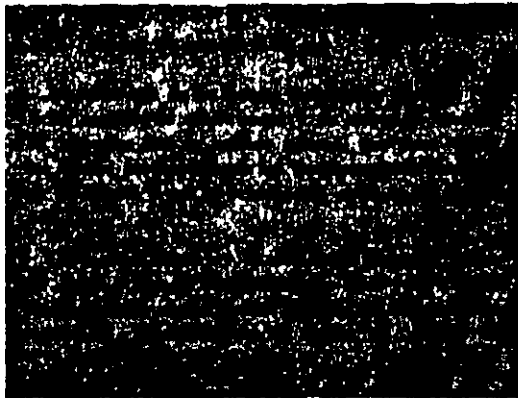
## b.- Objetivos

- Definir a los marcos contraventeados.
- Evitar el pandeo de la estructura
- Limitar el efecto  $P_u$ .

## c.- Comentarios

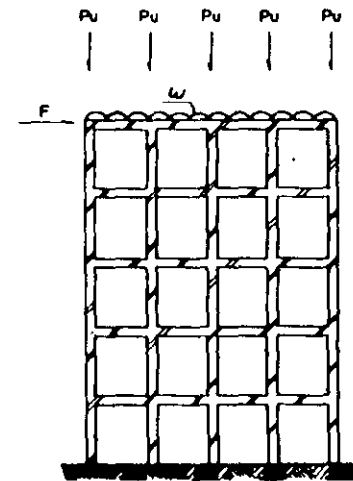
- Es importante tomar en cuenta el efecto  $P_u$  en este tipo de estructuras, ya que representa un momento adicional en las mismas.
- Es recomendable construir estructuras con marcos contraventeados en suelos compresibles.
- El momento de volteo de la estructura no se reduce por efectos de contraventeo.
- $P_u \leq 0.85 P_y$

## 6.2.2



a.- En este artículo se indica que:

- Los marcos sin contraventeo son aquellos que no cuentan con muros de cortante o diagonales de contraventeo.
- La resistencia de este tipo de marcos se determina mediante un análisis estructural adecuado, que tome en cuenta:
  - . Los desplazamientos laterales de cada uno de los niveles de la estructura. (efectos  $P\Delta$ ).
  - . La deformación axial de las columnas.
- Estos marcos deben ser estables: (fig. 6.2.2-1)
  - . Bajo cargas verticales
  - . Bajo cargas verticales y horizontales.
- $P_u \leq 0.75 P_y$



MARCOS SIN CONTRAVENTEIO

Fig. 6.2.2 - 1

## 6.2.2

### b.- Objetivo

- Definir a los marcos sin contraventeo.
- Proporcionar lineamientos para el análisis y dimensionamiento de marcos sin contraventeo .

### c.- Recomendaciones

- Es recomendable utilizar estructuras con marcos sin contraventeo en suelos duros.
- Es conveniente utilizar marcos sin contraventeos en estructuras o edificios de poca altura.

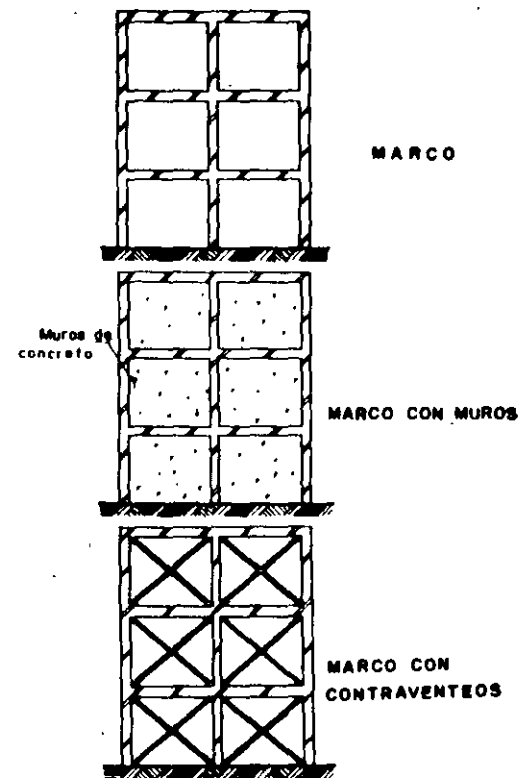
## 6.3 MARCOS DUCTILES

a.- En este artículo se indica que:

- Los marcos dúctiles de acero estructural sean marcos rígidos que cumplan con las especificaciones señaladas en el capítulo de las NTC para diseño por sismo.
- Los factores de comportamiento sísmico que se emplean en estos marcos son:
  - .  $Q = 4$
  - .  $Q = 3$
- Las estructuras con marcos dúctiles están integradas por: (fig. 6.2.1-1)
  - . Marcos
  - . Marcos con muros
  - . Marcos con contraventeos
- Cada uno de los marcos dúctiles deberán tener capacidad para resistir al menos el 25% de las fuerzas horizontales que les correspondieran si trabajan aislados del resto de la estructura.
- El acero empleado en los marcos dúctiles deberá tener:
  - . En la gráfica esfuerzo-deformación una zona de cedencia de deformación creciente bajo esfuerzo constante correspondiente a un alargamiento máximo, no menor del 1%.
  - . Un alargamiento correspondiente a la ruptura no menor al 20%.

b.- Objetivos

- Definir a los marcos dúctiles empleados en estructuras metálicas.



MARCOS DUCTILES DE ESTRUCTURAS METALICAS

Fig 6 2 1 - 1

# 6.3.2



a.- En este artículo se indica que:

- Se consideran miembros a flexión - de marcos dúctiles a: (fig. 6.3.2-1).
- . Todas las vigas
- . Las columnas si  $P_u \leq \frac{P_y}{10}$

\* Requisitos geométricos

- Todas las vigas deben ser de sección transversal (fig. 6.3.2-2).
- . I
- . Rectangular hueca
- . Secciones señaladas en el inciso - 1'.2-5)



SECCIONES "I"

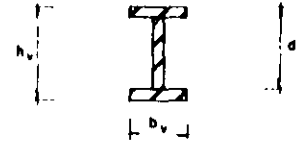
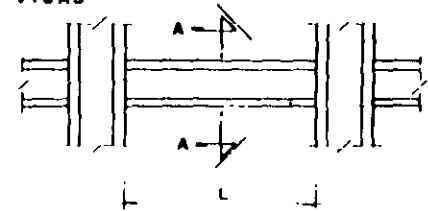


SECCIONES RECTANGULARES HUECAS

SECCIONES TRANSVERSALES DE VIGAS

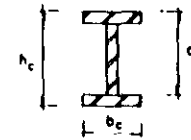
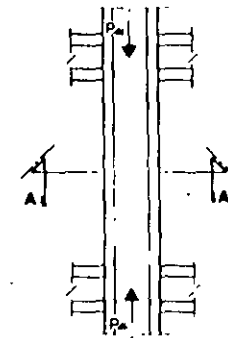
Fig 6.3.2-2

- VIGAS



CORTE A-A

- COLUMNAS



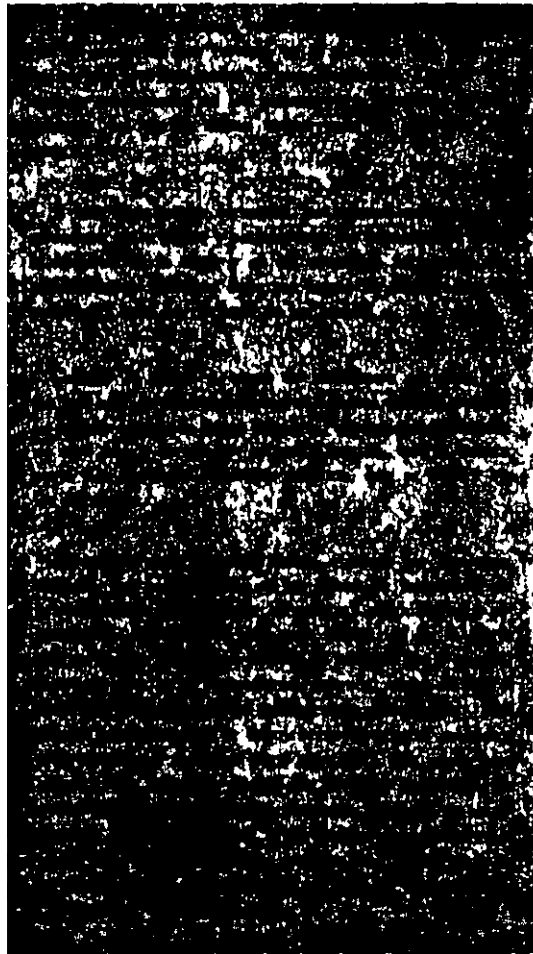
CORTE A-A

$$P_u \leq \frac{P_y}{10}$$

ELEMENTOS A FLEXION

Fig 6.3.2-1

## 6.3.2



- los elementos sujetos a flexión -  
deben cumplir los siguientes requisitos:

$$L \geq 5 h_v \quad (\text{fig. 6.3.2-3})$$

$$b_v \leq \begin{cases} b_c \\ h_{wc} \end{cases} \quad (\text{fig. 6.3.2-4})$$

$$e \leq \frac{h_c}{10} \quad (\text{fig. 6.3.2-5})$$

las traveses deberán ser de sección tipo I.

$$\frac{h_w}{t_w} \leq 5300/\sqrt{F_y} \quad (\text{fig. 6.3.2-6})$$

donde:

$h_v$  = peralte de la viga.

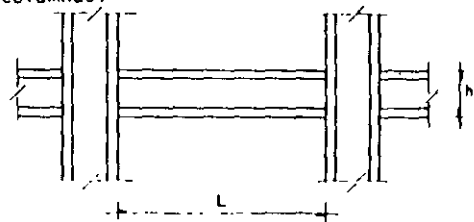
$b_v$  = Ancho del patín de la viga.

$b_c$  = Ancho de la columna.

$h_{wc}$  = Peralte del alma de la columna.

$h_c$  = peralte de la columna.

$e$  = excentricidad entre ejes de vigas y de columnas.

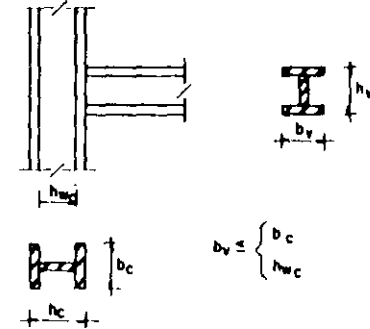


RELACION LARGO-PERALTE EN VIGAS

Fig 6.3.2-3

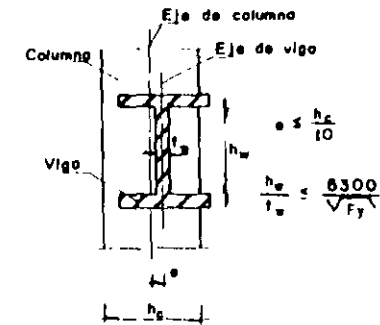
$h_w$  = Peralte del alma de la viga.

$t_w$  = Ancho del alma de la viga.



ANCHO MAXIMO DE VIGAS

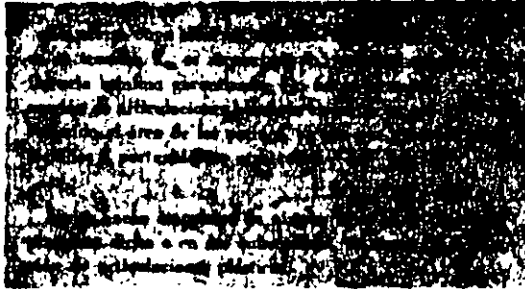
Fig 6.3.2-4



EXCENTRICIDAD DE EJES DE VIGAS Y COLUMNA Y RELACION PERALTE - ANCHO DE PATINES

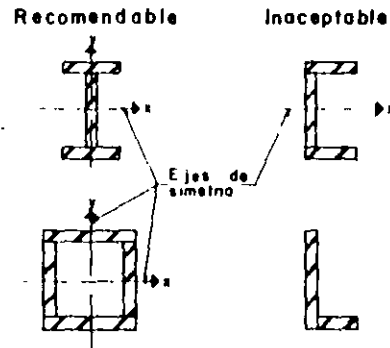
Fig 6.3.2-5

# 6.3.2

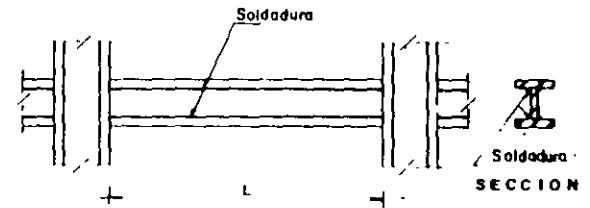


- Las secciones deberán tener dos ejes de simetría. (fig. 6.3.2-7).
- Los patines deberán estar conectados a las almas de las vigas - de sección I de manera continua en toda su longitud (fig. 6.3.2-8)
- En zonas de articulaciones plásticas el alma será capaz de resistir el cortante total.
- En vigas de sección variable se deberá cumplir: (fig. 6.3.2-9)

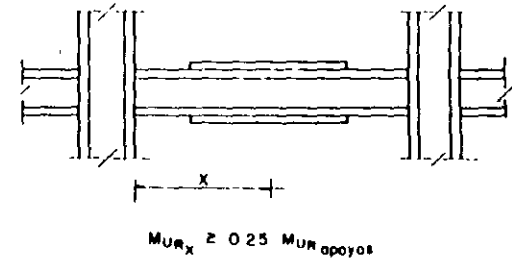
$$M_{uRx} \leq 0.25 M_{uR \text{ apoyos}}$$



**SECCIONES CON DOS EJES DE SIMETRÍA**  
Fig 6.3.2-7



**PATINES CONECTADOS A LAS ALMAS DE MANERA CONTINUA**  
Fig 6.3.2-8



**VIGAS DE SECCION VARIABLE**  
Fig 6.3.2-9

## 6.3.2

- En estructuras soldadas se deben evitar los agujeros en zonas de formación de articulaciones plásticas. (fig. 6.3.2-10).

- En estructuras atornilladas o remachadas los agujeros en las zonas de tensión se punzonarán en un diámetro menor del requerido y se completarán con taladro o escarificador.

- Las longitudes de las zonas de formación de articulaciones plásticas (para los fines antes mencionados) se consideran: (fig. 6.3.2-11).

En los extremos de las vigas ---  
 $lap = hv$ .

donde:

$lap$  = Longitud de la articulación plástica.

$hv$  = peralte de la viga

. En zonas intermedias

$lap = 2hv$

- No se permitirá la formación de articulaciones plásticas en zonas en que se haya reducido el área de los patines (por agujeros o por otras causas) si el acero presenta la siguiente característica (fig. 6.3.2-13).

$F_u \geq 1.5 F_y$

donde:

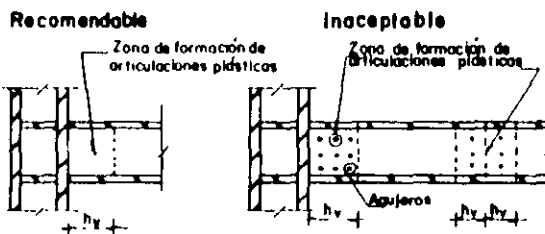
$F_u$  = esfuerzo mínimo especificado de ruptura en tensión.

$F_y$  = esfuerzo de fluencia mínimo

- No se harán empalmes en zonas de formación de articulaciones plásticas en:

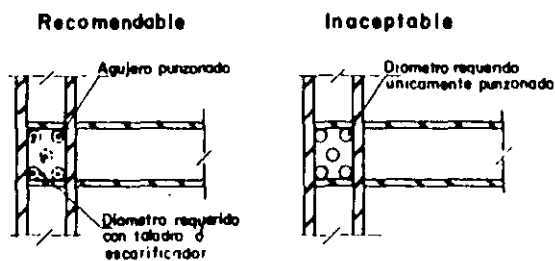
. Las vigas

. Las cubreplacas



**AGUJEROS EN ESTRUCTURAS SOLDADAS**

Fig. 6.3.2-10

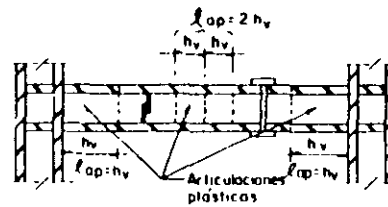


**AGUJEROS EN ESTRUCTURAS ATORNILLADAS O REMACHADAS**

Fig. 6.3.2-11

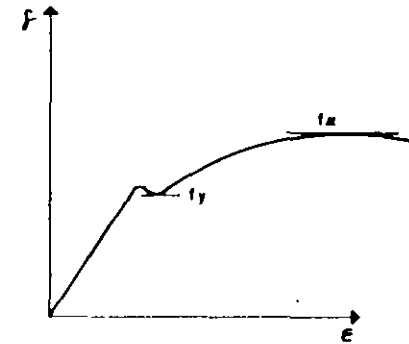


## 6.3.2



LONGITUD DE ARTICULACIONES  
PLÁSTICAS

Fig 6.3.2-12



ESFUERZO MINIMO DE RUPTURA DEL ACERO

Fig 6.3.2-13

b.- Objetivos

- Definir a los elementos metálicos de marcos dúctiles que trabajan a flexión.
- Asegurar el comportamiento adecuado de elementos de marcos dúctiles que trabajan a flexión (independiente de su dimensionamiento).

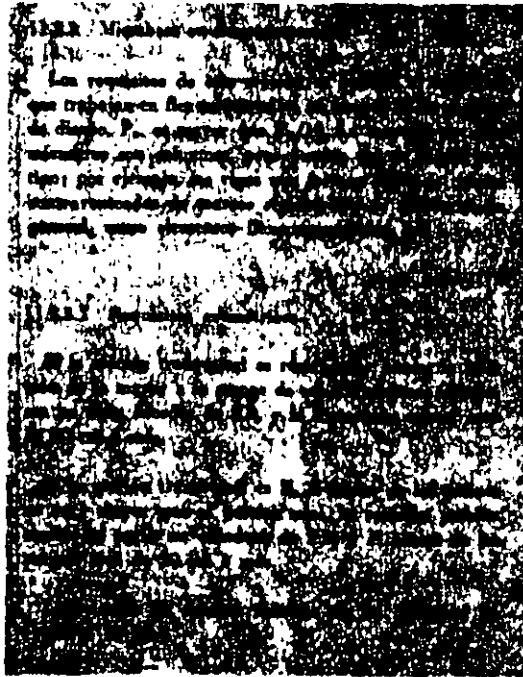
## 6.3.2



### c.- Comentarios

- No se permiten atiesadores y cubreplacas en zonas de formación de articulaciones plásticas de vigas, ya que de ser así se podrían formar las articulaciones plásticas en las columnas.
- No se permiten hacer agujeros en las zonas de formación de articulaciones plásticas, ya que de esta manera podría fallar el elemento por otras causas (fuerza cortante o fuerza normal) antes de que se presente la articulación plástica por flexión. (fig. 6.3.2-11).

# 6.3.3



a.- En este artículo se indica que:

- Se consideran miembros a flexocompresión a: (fig. 6.3.3-1)

. Columnas si  $P_u > \frac{P_y}{10}$

. Diagonales de contraventeo.

- Los miembros a flexocompresión deben cumplir los siguientes requisitos geométricos.

. Para secciones rectangulares -- huecas (fig. 6.3.3-2).

$$\frac{h_c}{b_c} \leq 2.0$$

$$b_c \geq 20 \text{ cm.}$$

. Para secciones H (fig. 6.3.3-3)

$$\frac{h_c}{1.5} \leq b_p \leq h_c$$

$$b_p \geq 20 \text{ cm.}$$

Donde:

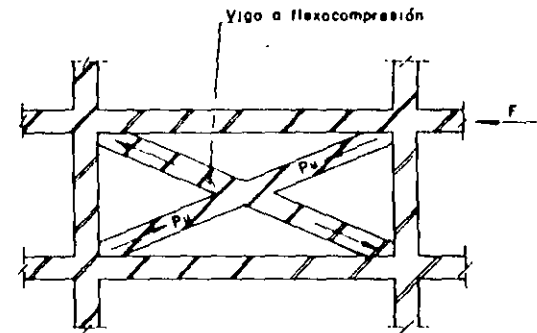
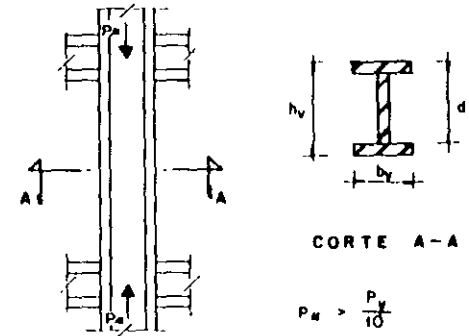
$b_p$  = ancho del patín.

$b_c$  = ancho de columna.

$h_c$  = peralte de columna.

- La relación de esbeltes de la columna deberá cumplir:

$$\frac{L'}{r} \leq 60$$

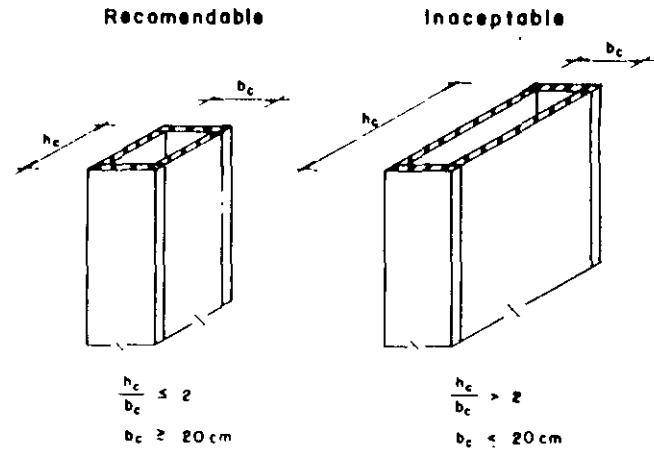


MIEMBROS A FLEXOCOMPRESION

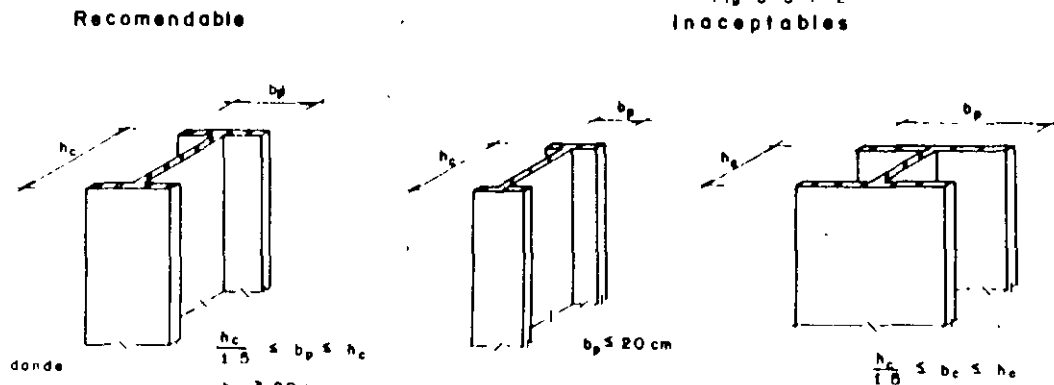
Fig 6.3.3-1

b.- Objetivos

- Definir a los elementos metalicos de marcos dúctiles que trabajan a flexocompresión.
- Asegurar el comportamiento adecuado de elementos de marcos dúctiles que trabajan a flexocompresión (independientemente de su dimensionamiento).



**COLUMNA DE SECCION RECTANGULAR HUECA**  
Fig 6 3 3-2  
Inaceptables



donde  
 h = Peralte de la columna  
 b = Ancho del patín

**COLUMNAS DE SECCION "H"**  
Fig 6 3 3-3

---

## Referencias

- 1.- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (1987)
- 2.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Concreto (1987).
- 3.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Mampostería (1987)
- 4.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Madera (1987)
- 5.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras Metálicas (1987)
- 6.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Cimentaciones --- (1987)
- 7.- Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo (1987)
- 8.- Normas Técnicas Complementarias para diseño por viento (1987)
- 9.- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (1977)
- 10.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Concreto (1977)
- 11.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Mampostería (1977)
- 12.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Madera (1977)
- 13.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras Metálicas (1977)
- 14.- Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Cimentaciones --- (1977)
- 15.- Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo (1977)

- 
- 16.- Normas Técnicas Complementarias para diseño por viento (1977)
- 17.- "Características Geológicas y Geotécnicas del Valle de México", COVITUR, Secretaría General de Obras, Departamento del Distrito Federal, (México, Sep. 1986).
- 18.- Marsal Raúl J. y Mazari Marcos "El subsuelo de la ciudad de México", Instituto de Ingeniería N° 505 (México, Mayo 1987)
- 19.- Manual de Diseño Geotécnico vol. 1 Secretaría General de Obras, Departamento del Distrito Federal. COVITUR (México, Agosto 1987).
- 20.- Bowles, Joseph "Diseño de estructuras de acero" Ed. Limusa
- 21.- Park and Pauley, "Diseño de estructuras de concreto", Ed. Limusa
- 22.- Esteva M. Luis y Rosenblueth Emilio, IMCYC. Diseño de estructuras resistentes, a sismos, (recopilación) varios autores.
- 23.- Rosenblueth, Emilio Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Ed. Diana
- 24.- Arnold, Christopher y Reitherman, Robert Configuración y diseño sísmico de edificios. Ed. Limusa (México, 1989)
- 25.- Bazan Zurita, Enrique y Meli Piralla, Roberto Manual de diseño sísmico de Edificios Ed. Limusa (México, 1985)
- 26.- Dowrick, D.J. Diseño de estructuras resistentes a sismos; para ingenieros y arquitectos Ed. Limusa (México, 1984)
- 27.- Meli Piralla, Roberto Diseño estructural Ed. Limusa (México, 1985)
- 28.- Wakabayashi Minoru, McGraw-Hill Book -- Company. Design of earthquake resistant buildings.
- 29.- Stratta James, L Prentice-Hall, Manual of seismic design
- 30.- Gonzalez Cuevas, D.M., y Robles F. V., F. Aspectos fundamentales del concreto reforzado (2a. ed.), Ed. Limusa, (México, 1985)

**Impreso por Editora e Impresora  
Internacional, S. A. de C. V.  
Czda. Aguilas 550, CP 01710**

**Prohibida la reproducción, total  
o parcial sin la autorización por escrito del  
Departamento del Distrito Federal**



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**COMPUTER METHODS IN STRUCTURAL ANALYSIS**

**EXPOSITOR: ING. JOSE LUIS TRIGOS  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**



*Computer Methods*  
*in*  
*Structural Analysis*

**H. B. HARRISON**

*School of Civil Engineering*  
*University of Sydney*

**PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey**

# Automatic Elastic-Plastic Analysis of Plane Frameworks **10**

## 10.1 Introduction

The rational design of rigid steel frameworks presupposes the availability of accurate methods for predicting the maximum strength of a frame and the deformations at working load. Linear-elastic methods of analysis are generally satisfactory in predicting working-load deflections, although the slender members that can be proportioned in high-strength steel may require that factors such as shear and axial strains be accounted for in addition to flexural strains. If working-load deflections are kept within reasonable limits, the influence of deformations upon the reliability of the linear-elastic procedures which predict the deflections is quite negligible, equilibrium equations being formulated for the unloaded frame geometry. No direct evidence of frame strength in a redundant steel structure is provided by studying the stress conditions at working load.

The simplest available theory for predicting the maximum load-carrying capacity of steel frames is the simple (or rigid) plastic theory (1), and test results on adequately stabilized beams and single-story rigid frames (2) have shown quite satisfactory agreement between observed and predicted maximum loads. As in linear-elastic analysis, simple plastic theory also presupposes that deformations have a negligible effect upon the equilibrium equations when formulated for the original unloaded shape of a structure. Heyman (3) has shown that the neglect of deformation moments in simple plastic theory can lead to an over estimation of frame strength, and Vickery (4) has demonstrated how the deformation effects in portal frames of mild steel are often compensated for by strain hardening. The agreement between observed and calculated collapse loads in tests on portal frames of mild steel has been attributed to the compensating action of strain hardening and deformation moments, both of

which are ignored in the simple plastic theory (5). The problem has been further studied by Horne and Medland (6) principally with reference to portal frames under vertical loading. General design guides for this class of frame have been produced, whereby it is possible to detect for a given frame whether strain-hardening effects are likely to cancel out the adverse effects of deformation.

Accepting, then, that the simple plastic theory for predicting the strength of steel frames has its limitations, the load factor for plastic failure ( $\lambda_p$ ) as determined by this theory is still an important frame parameter, and, for all but the simplest of structures, the manual methods for computing  $\lambda_p$  can be tedious and require, for a rapid solution, a considerable exercise of the analyst's intuition concerning the likely mode of failure. Once the generality of the matrix computer methods for linear-elastic frame analysis had been recognized, it was natural to expect that attention would be concentrated on the various types of nonlinear analysis that are feasible, using iterative techniques on a computer.

## 10.2 Elastic-Plastic Analysis

With regard to elastic plastic analysis of plane steel frames, Wang (7) first described the basic principles of an effective computer program, and the scheme described in this chapter is a development of Wang's technique. To appreciate the advantages of Wang's automated system for detecting where a plastic hinge may form in a frame under increasing load, and for subsequently dealing with the modified structure that results, it is informative to consider at first the nature of simple or rigid plastic analysis.

The encastered beam shown in Fig. 10.1(a) is a useful example, and an elastic analysis, whether by hand or by computer using any of the programs already described, would produce the result shown in Fig. 10.1(b). The significant conclusion is that the maximum bending moment occurs at the left-hand support, provided the material everywhere remains elastic. A plastic analysis of such a beam is inherently simple and direct, as it would begin with the intuitive and correct assumption that, at failure, plastic hinges will form at both supports and under the applied load. This information about the mode of failure is combined with static principles in Fig. 10.1(c), and the load factor at failure is immediately found.

Characteristic then of simple plastic analysis is the determination of the collapse load of a steel framework by the combination of equilibrium equations with an intuitively assumed mechanism of failure which is verified or discarded in the process. In general, trial-and-error procedures are involved. For highly redundant frameworks, the correct failure mechanism is rarely obvious from inspection, but satisfactory solutions can often be achieved after several mechanisms are examined with judicious use of the maximum and minimum principles (8). The elimination of the need for an elastic analysis of highly redundant frames has often been regarded as an advantage of plastic analysis, but when designs in high-strength steel are contemplated, the deformations at working load levels will be an important consideration; so the designer may have to carry out both elastic and plastic analyses, the former to check

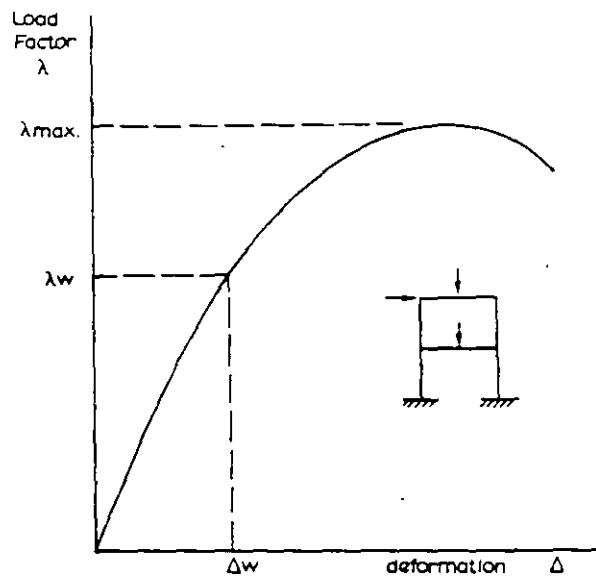
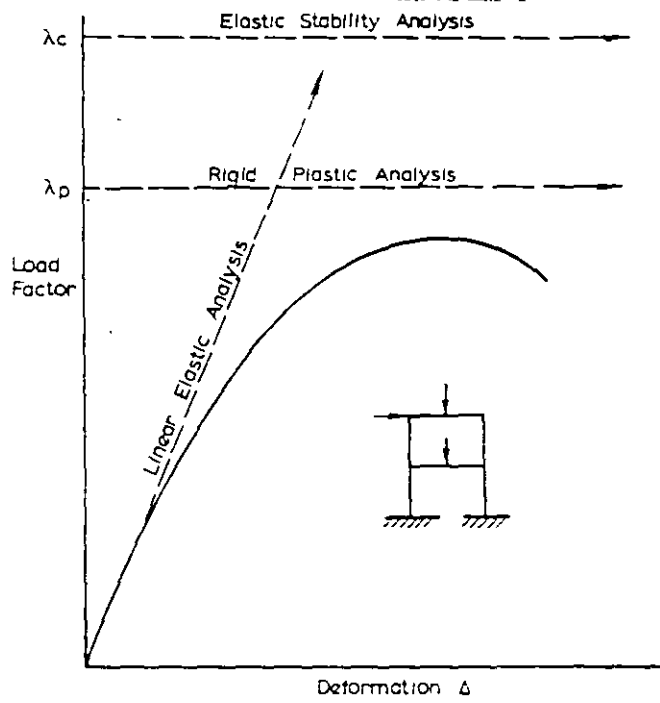
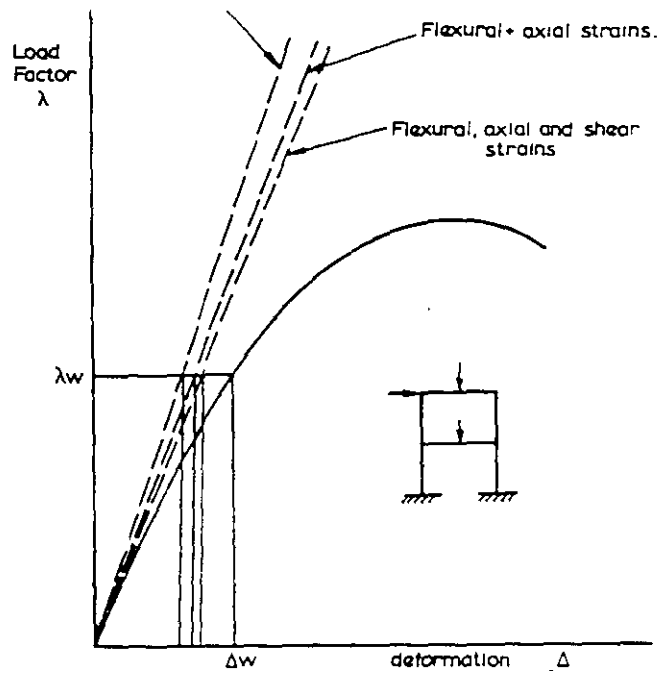
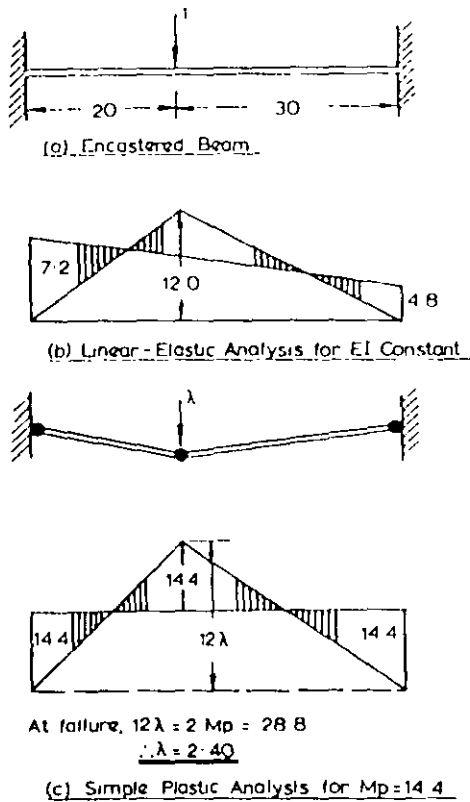


Fig 10.1 Linear-elastic and simple plastic analyses

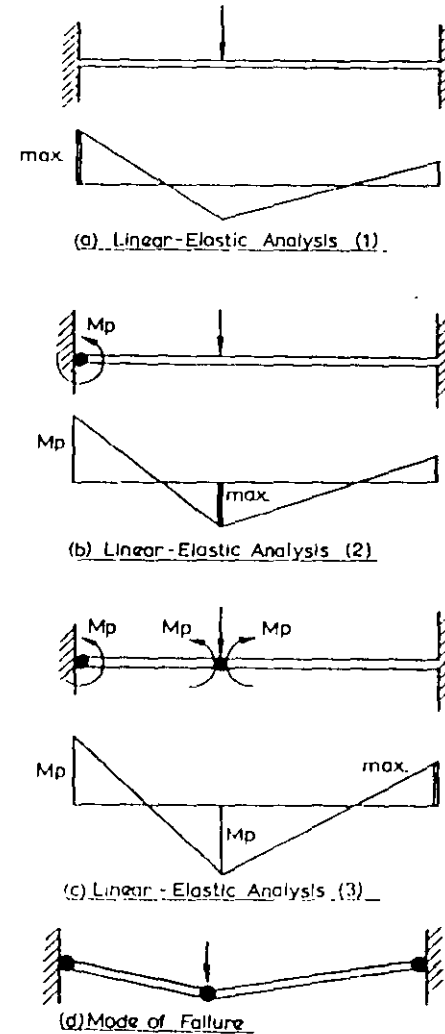


conditions at working load and the latter to give an estimate of overload strength. It is not easy to program a computer to make the intuitive judgments which help an experienced designer to achieve a satisfactory solution

If the same encastered beam is studied again, as in Fig 10.2, it can be seen that the failure load and mode could be determined from three successive linear-elastic analyses. The result of the first such analysis shown in Fig. 10.2(a) is the indication that the failure mode is very likely to involve a plastic hinge at the left-hand support. The second analysis in Fig. 10.2(b) is that of a cantilever propped at the left-hand support and loaded there with a constant anticlockwise end moment of value  $M_p$ , which is the full plastic value. This second analysis would indicate a peak moment under the load, so that a third elastic analysis could be made, as in Fig. 10.2(c). The

results of this final elastic analysis may be factored by the ratio of  $M_p$  to the computed moment value at the right-hand support, so that not only is the plastic failure load factor determined but also the deformations just prior to collapse

Fig 10.2 Elastic-plastic analysis



10.3 Automatic Elastic-Plastic Analysis

It is often the case that the form of an analysis carried out by hand would not be a desirable one to program for a computer. The procedure just described is a case in point, as it would be inefficient for a machine solution because of the necessity of providing, from the beginning, for the extra degrees of freedom and the corresponding new loading terms in the dimensioning of the various matrices affected by the degrees of freedom. If provision had to be made for an extra degree of freedom at every position where a plastic hinge was likely to form, a small frame would rapidly fill the available data-storage capacity of a computer.

The alternative system used by Wang does not involve the same difficulties and is illustrated by the encastered beam, shown again in Fig. 10.3. The beam is subjected to an elastic analysis under its working load, and the result is shown graphically and numerically in Fig. 10.3. The computed moment values at each joint, *A*, *B*, and *C* are

Fig. 10.3 Elastic-plastic analysis stage 1

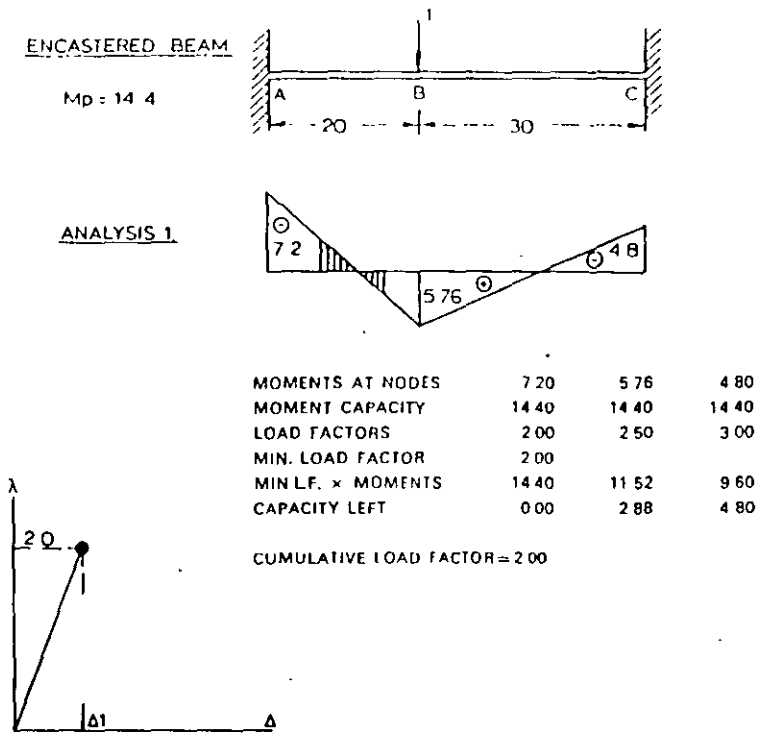
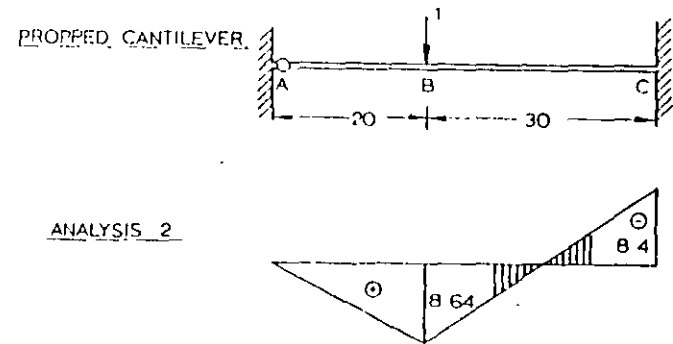
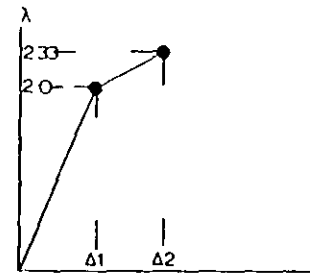


Fig. 10.4 Elastic-plastic analysis stage 2



MOMENTS AT NODES	0.00	8.64	8.40
MOMENT CAPACITY	0.00	2.88	4.80
LOAD FACTORS	—	0.33	0.57
MIN. LOAD FACTOR		0.33	
MIN L.F. x MOMENTS	0.00	2.88	2.80
CAPACITY LEFT	0.00	0.00	2.00

CUMULATIVE LOAD FACTOR = 2.33

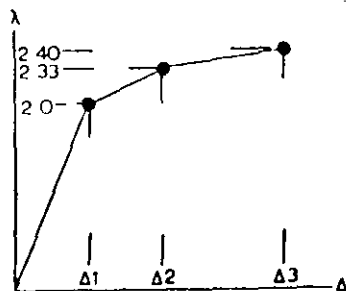
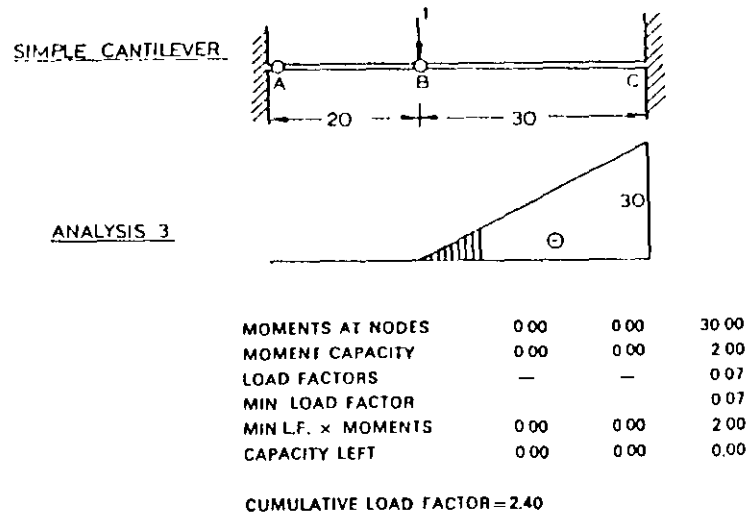


divided into the full plastic values to produce load factors of 2.0, 2.5, and 3.0, respectively. The position *A*, where the smallest of these factors is found, will be that where the first plastic hinge will be found if the working load is multiplied by the minimum load factor, which is 2.0. The computed deflections may be similarly factored so that the portion of the load-deflection curve shown in Fig. 10.3(c) is determined. At this stage, two separate operations are required. First, the moments at *A*, *B*, and *C* are factored by 2.0 and then subtracted from the full plastic values, which were 14.4, to give the residual capacities of 0, 2.88, and 4.80 shown in the figure. Second, the computer has to allow in its subsequent analyses for the existence of a free hinge at the end *A* of the member *AB*. This is a simple matter if the form of linear-elastic analysis being used is the displacement method, as explained for rigid plane frames in Chapters 7 and 8. Changes can be made to the member-stiffness matrix in

the manner shown in Figs 7.19 and 7.20, where the treatment of an internal hinged connection was discussed. The degree of freedom of a frame as measured by the possible unrestrained movements of nodes is unaffected by this change in member stiffness, so that the statics matrix  $[A]$  will undergo no alterations in either size or in the values of its elements. The frame-stiffness matrix  $[K]$  will be of the same size but will have some elements altered, since it is generated by the operation  $[A][S][A]^T$ , and changes would have been made to the four elements of  $[S]$ , which reflect the flexural stiffness of member  $AB$ .

The stage is then set for the second linear-elastic analysis of the beam, as in Fig 10.4. The computed moments at the member ends are divided into the available moment capacities and the minimum factor found after disallowing the division of zero

Fig 10.5 Elastic-plastic analysis stage 3



by zero at node  $A$ . The second plastic hinge is seen to form under the load when the additional load factor is 0.33 or the cumulative load factor is 2.33. If the sequence of operations is repeated, as in Fig 10.5, the load factor of 2.40 for plastic failure is determined by what appears to be a large effort in comparison with the simple calculation shown in Fig 10.4. However, the right solution was reached without the necessity for an intuitive guess as to the mechanism of failure and, further, the deformations at the onset of failure would have been evaluated in the process.

It can also be seen from Figs. 10.3 to 10.5 that the procedure is essentially cyclical. Deformations are calculated at each stage in the process, but these results have not been included in the tabulations. A collapse mechanism will have been reached in the analysis when the structure has been converted into a mechanism. The numerical indication of such a phenomenon can be in several forms. It may be that the coefficients in the stiffness equations would form a singular matrix so that zero division would be encountered in an attempted solution and would end the analysis. If this does not occur, the computed deformations would be very large, which would indicate that the load-deflection diagram has become horizontal. Wang (7) has explained the computer indications of frame failure, though some of his collapse criteria have been eliminated in the present program, for reasons which will be explained later.

### 10.4 Programming the Method of Elastic-Plastic Analysis

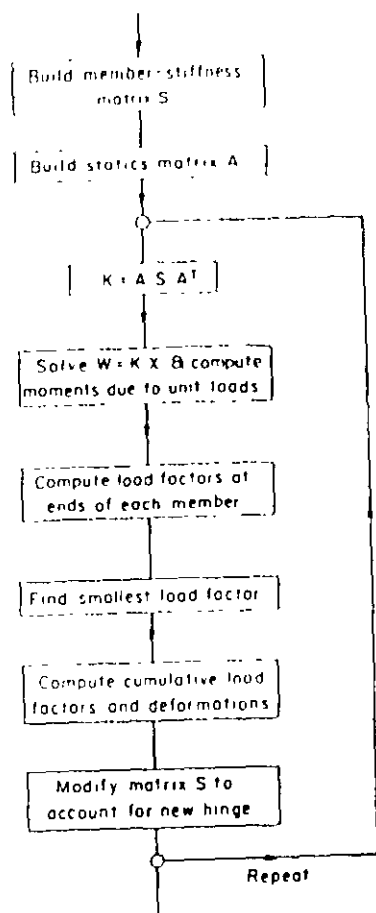
In Wang's original program, the statics and member-stiffness arrays  $[A]$  and  $[S]$  for the whole frame were prepared manually. In program *EPFO*, as listed in Appendix 10.1, all the required arrays are generated within the computer using elementary data in much the same form as that used by the linear-elastic programs *ELFO* and *ELFAS*, already described. To keep the program listing as short as possible, the member data have been confined to the barest minimum and comprises, for each member, the pair of connected joints, and the inertia, area and full plastic moment of the section. Members of the same material are presupposed, so that the elastic modulus is not included in the member data and, further, finite shear strains and the existence of initial internal hinges are not taken into account.

Either of the plane-frame linear analysis programs *ELFO* and *ELFAS* could have been modified to perform elastic-plastic analyses, but the former was preferred on the grounds of simplicity rather than efficiency since the statics matrix  $[A]$  for a complete framework could be generated only once and stored ready for use in all the successive linear analyses as each plastic hinge was located. The extra-storage requirement, in providing for both the array  $[A]$  and the frame-stiffness matrix, will decrease the maximum-sized frame that could otherwise be processed on any given machine. The essential alterations made to program *ELFO* in developing the elastic-plastic program *EPFO* are indicated on Fig 10.6, and the blocks on this flow diagram may be identified in the listing given in Appendix 10.1. Flow diagrams are at best an easy substitute for the listing of a program and have not been included generally in this book.

An essential part of the program is that concerned with the search for the position at which a plastic hinge will form for the smallest increase in load factor. This part

of the program follows Wang's original scheme, except for one alteration. It was found that erroneous results were produced for some frames because the load factors were computed by dividing the residual moment capacity by the absolute value of the moments caused by the unit or working loads. Such a procedure is satisfactory, provided the unit-load moments at the critical positions are of the same sign in the successive analysis of the frames of deteriorated stiffness. It may well be the case that the moment at the position with the least reserve of strength may be decreasing under increasing load. A test has been incorporated in the section of the program concerned with the finding of the smallest-load factor to determine whether such is the case, and, if so, the position in question is not included in the search for the smallest-load factor.

FIG. 10.6 Elastic-plastic analysis



In his program, Wang incorporated four separate tests to determine whether the collapse load for a frame had been reached. These were (1) large deformations, (2) zero division, (3) full plastic moment exceeded, and (4) load factor too small. The above considerations dispense effectively with the need for (3). The fourth test involved the minimum-load factor, which, if too small, would indicate that the load-deflection curve for a frame was close to horizontal. However, it was found that this test would frequently terminate prematurely the analysis for any frame where two plastic hinges might form simultaneously. This test has been omitted from the present program, since it is considered that a deformation limitation will determine effectively whether or not the load-displacement curve might be horizontal.

Accordingly, only two of Wang's four tests have been retained. These are the tests for large deformations and zero division. The latter test outputs the message "division by zero in inversion," and it effectively determines the stage at which a diagonal element in the frame-stiffness matrix ( $K$ ) contains only a zero term. In theory, this is the only necessary test, but the other is required also because rounding off errors in the arithmetic could delay the program termination and invalidate the calculation of plastic-hinge rotations, if these were desired.

This facility has not been included in program *EPFO* in order to keep the listing as short as possible. The theory is quite straightforward, however. Knowing the stress resultants for each member at the development of the final plastic hinge, the member deformations  $\{x\}$  may be computed from purely elastic considerations. Since, in the displacement method,  $\{SR\} = [S]\{x\}$  and the member-stiffness matrix  $[S]$  is square, it follows that

$$\{x\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} \tag{10.1}$$

The array  $[S]$  is the initial, unmodified member-stiffness matrix. However, it must be remembered that compatibility between member end rotations and joint rotations will not have been maintained in the process of an elastic-plastic solution, and the transformation

$$\{x\} = [A]^T \{X\} \tag{10.2}$$

will produce only the elastic components of the member-end deformations. Therefore, the amount of plastic-hinge rotation at all hinge locations except for the last to form may be evaluated by the operation

$$\{x_p\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} - [A]^T \cdot \{X\} \tag{10.3}$$

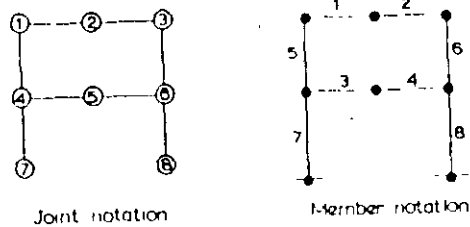
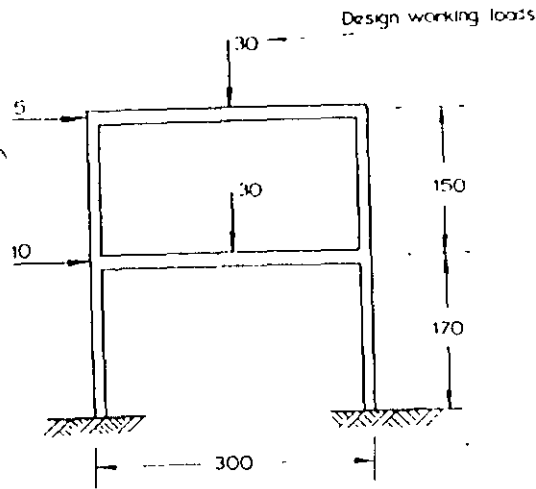
where the vectors  $\{SR\}$  and  $\{X\}$  are, respectively, the cumulative stress resultants and joint deformations when the last plastic hinge has formed. The vector  $\{x_p\}$ , as evaluated from equation (10.3), will have three elements per member comprising the extension and the rotation angles in radians at each end. The residual plastic extension should be zero, since this type of compatibility is not violated in the simple plastic theory. All the terms in  $\{x_p\}$  will be effectively zero except for those positions where plastic hinges formed early in the elastic-plastic analysis. The matter of the plastic-

large rotation capacity can be important when noncompact sections are used in a steel frame. These thin sections may have limited rotation capacity while resisting the full plastic value of an applied moment.

10.5 General Observations\*

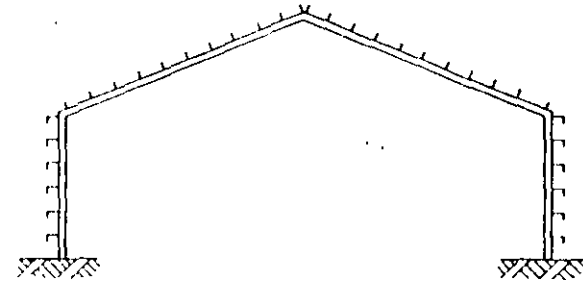
The application of the elastic-plastic program *EPFO* to a small but typical problem in plastic analysis has been demonstrated for the frame in Fig. 10.7 in Appendix 10.2. An important limitation of the scheme is the requirement that loads

Fig. 10.7 Rigid frame for elastic-plastic analysis



Properties of Sections } Beams  $I = 1000, A = 20, M_p = 4500$   
 Columns  $I = 500, A = 25, M_p = 4000$   
 Modulus  $E = 30,000$

Fig. 10.8 Industrial rigid frame

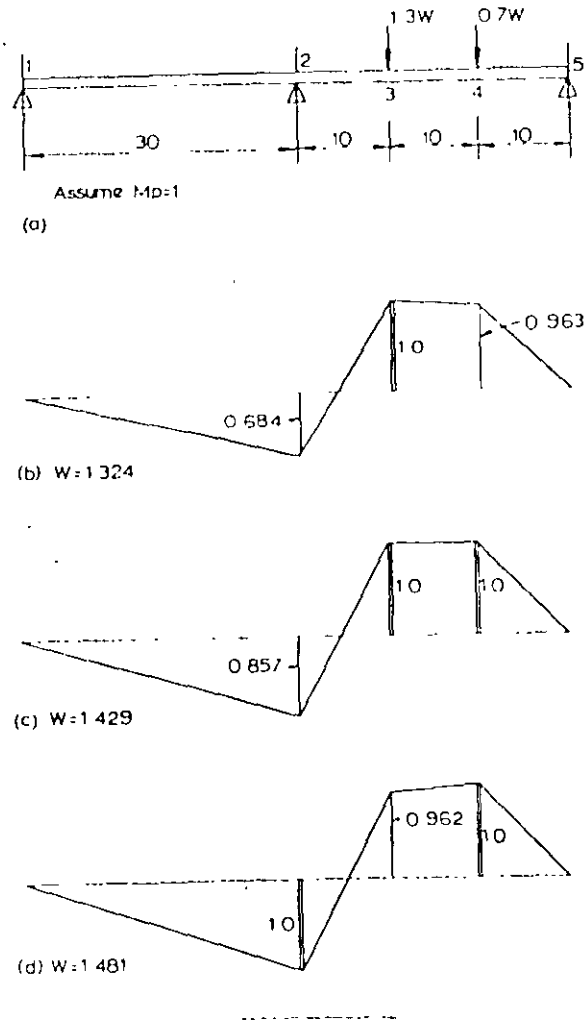


should act at joints only, so that distributed loading arrangements on frame members can present quite a problem if the "exact" location of a plastic hinge within such members is required. Industrial portal frames of the type shown in Fig. 10.8 are frequently designed on the basis of the simple plastic theory, and, if there are 10 purlin and girt spaces within each rafter and column, a computer of considerable size would be required by program *EPFO*, since the frame would need to be described as one of 40 members and 41 joints. Approximately 29,000 storage locations for real numbers would have to be declared. The necessary storage would be reduced to approximately 7,000 if each member were subdivided into 5 rather than 10 parts, and the errors involved would hardly be appreciable in any practical design. There are other ways of dealing with problems of this nature, and an effective scheme is to use interactive, time-sharing computers, which will be discussed in a later chapter.

One additional limiting factor should be mentioned. It can sometimes occur in steel frames that a plastic hinge which is formed early in the loading history may not be required in the collapse condition. The moment at such a section would decrease in magnitude, and a plastic hinge would not then exist. This phenomenon cannot be accounted for in the present program, as the process of free hinge insertion is irreversible. The calculated load factor for such a problem would err on the safe side, since the equilibrium and yield conditions would be satisfied but not the mechanism condition. The phenomenon has been mentioned by Finzi (9). The example of a two-span beam, which has been used by Neal (10) to demonstrate the problem, is shown in Fig. 10.9. For the loads shown in Fig. 10.9(a), an elastic analysis will produce a maximum moment at node 3, as can be seen in Fig. 10.9(b). However, a simple plastic analysis will predict a failure mechanism with plastic hinges at (2) and (4) but not at (3). This can be deduced from the moment diagram shown in Fig. 10.9(d). The results obtained from a computer analysis of this problem are in Appendix 10.3. It can be seen that the computer correctly detects the formation of the first hinge at node (3) and the second at (4) as shown in Fig. 10.9(c) but cannot account for the closing of the first formed hinge thereafter. Accordingly, it arrives at an invalid collapse mechanism.

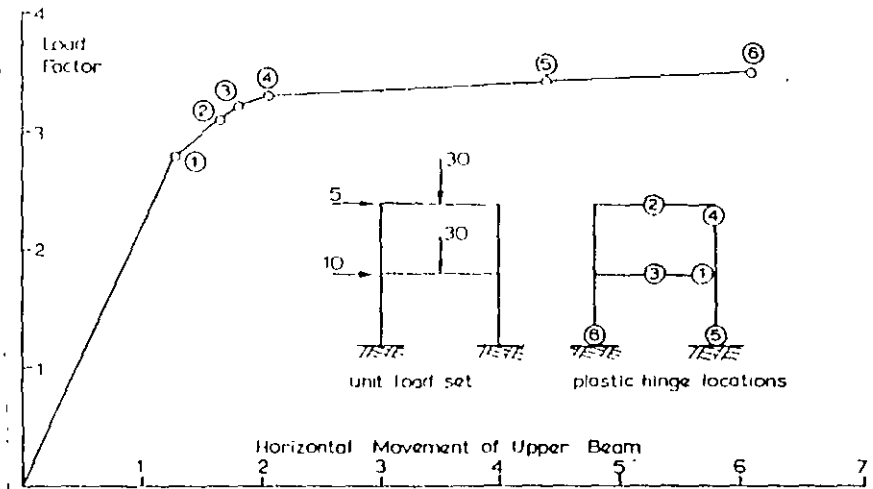


Fig. 10.9 Neal-Finzi problem



ism with a load factor smaller than the correct one. Consequently, it is desirable in any frame analysis to check the collapse mechanism arrived at by the computer to see whether or not it is valid. That shown in Fig. 10.10 for the rectangular rigid frame

Fig. 10.10 Computed load-sway curve for rigid frame in Fig. 10.7



is quite as expected. Even if the mechanism is not a valid one, the results of the computer analysis should still be useful to a designer; he would have a statically admissible set of stress resultants with no moment greater than the full plastic value, so that, as a consequence of the limit theorems (8), the computed load factor would be low and hence on the safe side.

References

1. BAKER, J. F., HORNE, M. R. and HEYMAN, J. *Plastic Behaviour and Design, The Steel Skeleton, Vol. II* London, Cambridge Univ. Press, 1956.
2. LAV, M. G. *The Experimental Bases for Plastic Design*, Uchug Univ., Fritz Eng. Lab., Report No. 297.3, March 1963.
3. HEYMAN, J. "Plastic Design of Pitched Roof Portal Frames," *Proc. Inst. Civil Engrs (London)*, 8, October 1957, 119-140.
4. VICKERY, B. J. "The Influence of Deformations and Strain Hardening on the Collapse Load of Rigid Frame Steel Structures," *Civil. Eng. Trans., I.E. Aust., CE3*, No. 2 (1961), 103-114.

5. HORN, M. R. "Instability and the Plastic Theory of Structures," *Trans. Eng. Inst. of Canada*, 4, No. 2 (1960), 31-43.
6. HORN, M. R. and MEDLAND, I. C. "Collapse Loads of Steel Frameworks Allowing for the Effect of Strain Hardening," *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 33, March 1966, 381-402.
7. WANG, C. K. "General Computer Program for Limit Analysis," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs., J. Struct. Div.*, 89, No. S16 (1963), 101-117.
8. GREENBERG, H. J. and PRAGER, W. "Limit Design of Beams and Frames," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, 77, February 1951 (Separate No. 59), 12.
9. FINZI, L. "Unloading Processes in Elastic-Plastic Structures," *9th Int. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, 1957.
10. NEAL, B. G. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman & Hall, London, 1963.

#### Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO

##### General Notes

1. The arrays are dimensioned and the data input from a file *PADATA* by statement lines 1000-1140. The degree of freedom is computed by lines 1150-1180.
2. Loads are input and the load vector (*VL*) assembled in statement lines 1190-1340.
3. Counters, variables, and arrays are set to zero and the nonzero parts of the member-stiffness matrix, namely, [*SF*] and [*S4*], established by statement lines 1350-1560.
4. The statics matrix [*A*] for the whole frame is generated by lines 1570-1970.
5. The frame-stiffness matrix [*AS47*] is generated from [*A*] and [*SF*] and [*S4*] by statement lines 1980-2090.
6. The stiffness matrix is augmented by the load vector and the equations solved by Gauss-Jordan elimination in statement lines 2100-2360.
7. Deflections larger than 1000 will terminate the run in lines 2370-2400. (Zero division in the equation solver is detected by statement line 2270.)
8. Stress resultants are calculated by statement lines 2410-2500, and the plastic hinge location *NPH* and corresponding smallest-load factor *SALG* are detected by lines 2520-2660.
9. Cumulative deformations and stress resultants are calculated by lines 2670-2770 and output by statement lines 2780-3210.
10. The member-stiffness matrix is modified according to the location of the plastic hinge by statement lines 3220-3320, and the program will proceed to find the next plastic hinge.

#### pendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

PROGRAM EPFO
1000 DIMENSION A(18,24),ASAT(18,19),CORD(9,2),JTYPE(9,1)
1010 + MCON(8,2),SMA(8),AREA(8),PM(8),OLEN(8),VL(18),
1020 + SF(16,2),SA(8),CSAT(24),SATX(24),ALG(16),CM(16),
1030 + C1(8),CX(18)
1040 $FILF PADATA
1050 10 READ(1) JFN
1060 IF(JFN)20,20,30
1070 20 STOP
1080 30 READ(1),JCT,NM,E
1090 PRINT 40,JFN
1100 40 FORMAT(///38H ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO.14//)
1110 DO 50 I=1,JCT
1120 50 READ(1),(CORD(I,J),J=1,2),(JTYPE(I,J),J=1,3)
1130 DO 60 I=1,NM
1140 60 READ(1),(MCON(I,J),J=1,2),SMA(I),AREA(I),PM(I)
1150 L=0
1160 DO 70 I=1,JCT
1170 DO 70 J=1,3
1180 70 L=L+JTYPE(I,J)
1190 READ(1),LN
1200 DO 72 I=1,L
1210 72 VL(I)=0.
1220 DO 77 I=1,LN
1230 77 READ(1),JN,(OLEN(J),J=1,3)
1240 LL=0
1250 LJ=JN-1
1260 IF(LJ)75,75,73
1270 73 DO 74 J=1,LJ
1280 DO 74 K=1,3
1290 74 LL=LL+JTYPE(J,K)
1300 75 DO 77 K=1,3
1310 IF(JTYPE(JN,K))77,77,76
1320 76 LL=LL+1
1330 VL(LL)=OLEN(K)
1340 77 CONTINUE
1350 NCYCL=0
1360 CLG=0.
1370 DO 90 I=1,L
1380 90 CX(I)=0
1390 DO 270 I=1,NM
1400 J1=MCON(I,1)
1410 J2=MCON(I,2)
1420 X=CORD(J1,1)-CORD(J2,1)
1430 Y=CORD(J1,2)-CORD(J2,2)
1440 270 OLEN(I)=SQRT(X*X+Y*Y)
1450 DO 280 I=1,NM

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

1460 SF(2+1,2) = 4.0 * F * SMA(I) / OLFN(I)
1470 SF(2+1-1,1) = SF(2+1,2)
1480 SF(2+1,1) = 0.5 * SF(2+1,2)
1490 SF(2+1-1,2) = SF(2+1,1)
1500 280 SA(I) = E * ARFA(I) / OLFN(I)
1510 M2 = 2 * NM
1520 M3 = 3 * NM
1530 DO 290 I = 1, M2
1540 290 CM(I) = 0
1550 DO 291 I = 1, NM
1560 291 CI(I) = 0
1570 NJ = 0
1580 NK = 0
1590 DO 295 I = 1, I
1600 DO 295 J = 1, M3
1610 295 A(I, J) = 0.0
1620 DO 450 J = 1, JCT
1630 DO 440 M = 1, NM
1640 NA = NJ
1650 IF (J - MCON(M, 1)) 340, 330, 340
1660 330 JF = MCON(M, 2)
1670 MJ = 2 * M - 1
1680 MF = MJ + 1
1690 GO TO 360
1700 340 IF (J - MCON(M, 2)) 440, 350, 440
1710 350 JF = MCON(M, 1)
1720 MJ = 2 * M
1730 MF = MJ - 1
1740 360 X = CORD(JF, 1) - CORD(J, 1)
1750 Y = CORD(JF, 2) - CORD(J, 2)
1760 D = SORT(X * X + Y * Y)
1770 S = Y / D
1780 C = X / D
1790 NN = 2 * NM + M
1800 IF (JTYPE(J, 1)) 380, 380, 370
1810 370 NA = NA + 1
1820 A(NA, MJ) = S / D
1830 A(NA, MF) = A(NA, MJ)
1840 A(NA, NN) = - C
1850 380 IF (JTYPE(J, 2)) 400, 400, 390
1860 390 NA = NA + 1
1870 A(NA, MJ) = - C / D
1880 A(NA, MF) = A(NA, MJ)
1890 A(NA, NN) = - S
1900 400 IF (JTYPE(J, 3)) 420, 420, 410
1910 410 NA = NA + 1
1920 A(NA, MJ) = 1.0
1930 420 IF (NA - NK) 440, 440, 430

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

1940 430 NK = NA
1950 440 CONTINUE
1960 NJ = NK
1970 450 CONTINUE
1980 455 NCYCL = NCYCL + 1
1990 DO 480 J = 1, L
2000 DO 460 I = 1, M2
2010 K = ((I + 1) / 2) * 2 - 1
2020 460 CSAT(I) = SF(I, 1) * A(J, K) + SF(I, 2) * A(J, K + 1)
2030 DO 470 I = 1, NM
2040 K = M2 + I
2050 470 CSAT(K) = SA(I) * A(J, K)
2060 DO 480 I = 1, L
2070 ASAT(I, J) = 0.0
2080 DO 480 K = 1, M3
2090 480 ASAT(I, J) = ASAT(I, J) + A(I, K) * CSAT(K)
2100 DO 490 I = 1, L
2110 490 ASAT(I, L + 1) = VI(I)
2120 KJ = L + 1
2130 DO 610 I = 1, L
2140 IP1 = I + 1
2150 TEMP = ABS(ASAT(I, J))
2160 K = I
2170 DO 520 J = 1, L
2180 IF (ABS(ASAT(J, I)) - TEMP) 520, 520, 510
2190 510 K = J
2200 TEMP = ABS(ASAT(J, I))
2210 520 CONTINUE
2220 IF (K - I) 530, 550, 530
2230 530 DO 540 J = I, KJ
2240 TEMP = ASAT(I, J)
2250 ASAT(I, J) = ASAT(K, J)
2260 540 ASAT(K, J) = TEMP
2270 550 IF (ASAT(I, I)) 570, 1000, 570
2280 570 TEMP = 1.0 / ASAT(I, I)
2290 DO 580 J = I, KJ
2300 580 ASAT(I, J) = ASAT(I, J) * TEMP
2310 DO 610 J = 1, L
2320 IF (I - J) 590, 610, 590
2330 590 TEMP = ASAT(I, I)
2340 DO 600 K = IP1, KJ
2350 600 ASAT(J, K) = ASAT(J, K) - TEMP * ASAT(I, K)
2360 610 CONTINUE
2370 XLMT = 1000.
2380 DO 620 I = 1, L
2390 IF (ABS(ASAT(I, KJ)) - XLMT) 620, 620, 1020
2400 620 CONTINUE
2410 DO 650 I = 1, M3

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

2420 CSAT(I) = 0.0
2430 DO 650 J = 1, L
2440 650 CSAT(I) = CSAT(I) - A(J) * ASAT(I, J + 1)
2450 DO 660 I = 1, M2
2460 K = ((I + 1) / 2) * 2 - 1
2470 660 SATX(I) = SF(I, 1) * CSAT(K) + SF(I, 2) * CSAT(K + 1)
2480 DO 670 I = 1, NM
2490 K = M2 + I
2500 670 SATX(K) = SA(I) * CSAT(I)
2510 CONTINUE
2520 DO 720 I = 1, M2
2530 K = (I + 1) / 2
2540 ZERO = 0.001 * PM(I)
2550 IF (ABS(SATX(I)) - ZERO) 700 700 710
2560 700 ALG(I) = 1. / F10
2570 GO TO 720
2580 710 ALG(I) = (PM(K) - ABS(CM(I))) / ABS(SATX(I))
2590 720 CONTINUE
2600 SALG = 1. / F10
2610 DO 750 I = 1, M2
2620 TEST = CM(I) * SATX(I)
2630 IF (TEST) 750, 730 730
2640 730 IF (ALG(I) - SALG) 740 750, 750
2650 740 SALG = ALG(I)
2660 NPH = 1
2670 750 CONTINUE
2680 DO 760 I = 1, M3
2690 760 SATX(I) = SALG * SATX(I)
2700 CLG = CLG + SALG
2710 DO 770 I = 1, M2
2720 770 CM(I) = CM(I) + SATX(I)
2730 DO 780 I = 1, NM
2740 K = M2 + I
2750 780 CT(I) = CT(I) + SATX(K)
2760 DO 790 I = 1, L
2770 ASAT(I, KJ) = ASAT(I, KJ) * SALG
2780 790 CX(I) = CX(I) + ASAT(I, KJ)
2790 I = (NPH + 1) / 2
2800 K = (NPH / 2) * 2 - NPH
2810 IF (K) 792, 793, 793
2820 792 J = MCON(I, 1)
2830 GO TO 799
2840 793 J = MCON(I, 2)
2850 799 PRINT 800, N, CYCL, J
2860 800 FORMAT(///15H PLASTIC HINGE, I3 18H FORMED IN MEMBER,
2870 + I3, 12H NEAR JOINT, I3)
2880 PRINT 810, CLG
2890 810 FOP = 1. / BH WHEN LOAD FACTOR = . / F10 5)

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

2900 CONTINUE
2910 PRINT 820
2920 820 FORMAT(//24H CUMULATIVE DEFORMATIONS/)
2930 PRINT 821
2940 821 FORMAT(42H JOINT X-MOVEMENT Y-MOVEMENT ROTATION/)
2950 LL = 0
2960 DO 830 I = 1, JCT
2970 DO 827 J = 1, 3
2980 IF (JTYPE(I, J)) 825 825, 826
2990 825 CSAT(J) = 0
3000 GO TO 827
3010 826 LL = LL + 1
3020 CSAT(J) = CX(I, L)
3030 827 CONTINUE
3040 830 PRINT 840, I, (CSAT(J), J = 1, 3)
3050 840 FORMAT(I5, 3F12.5)
3060 PRINT 850
3070 850 FORMAT(//19H CUMULATIVE MOMENTS/)
3080 PRINT 851
3090 851 FORMAT(81H MEMBER TERMINAL APPLIED MOMENTS NEAR
3100 + JOINTS PLASTIC VALUE/)
3110 DO 860 I = 1, NM
3120 K = 2 * I - 1
3130 860 PRINT 870, I, CM(K), CM(K + 1), MCON(I, 1), MCON(I, 2), PM(I)
3140 870 FORMAT(I5, 2X, 2F13.4, I5, 4H AND, I3, F14.4)
3150 PRINT 880
3160 880 FORMAT(//20H CUMULATIVE TENSIONS/)
3170 PRINT 885
3180 885 FORMAT(18H MEMBER TENSION/)
3190 DO 890 I = 1, NM
3200 K = M2 + I
3210 890 PRINT 900, I, CT(I)
3220 900 FORMAT(I5, F13.3)
3230 ITEST = ((NPH / 2) * 2) - NPH
3240 IF (ITEST) 910 920 920
3250 910 SF(NPH + 1, 2) = 0.75 * SF(NPH + 1, 2)
3260 SF(NPH + 1, 1) = 0.0
3270 SF(NPH, 1) = 0.0
3280 SF(NPH, 2) = 0.0
3290 GO TO 455
3300 920 SF(NPH - 1, 1) = 0.75 * SF(NPH - 1, 1)
3310 SF(NPH - 1, 2) = 0.0
3320 SF(NPH, 1) = 0.0
3330 SF(NPH, 2) = 0.0
3340 GO TO 455
3350 1000 PRINT * "ZERO DIVISION IN EQUATION SOLUTION"
3360 GO TO 1040
3370 1020 PRINT 1030, XI, MT, N, CYCL

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

3380 1030 FORMAT(/25H DEFORMATIONS LARGER THAN,1X F8.1,13H IN
3390 1 CYCLE NO 14//)
3400 1040 PRINT 1050, JFN
3410 1050 FORMAT(/33H ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO.13//)
3420 GO TO 10
3430 END

```

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME IN FIG. 10.7 USING PROGRAM *EPFO*

Member and load data and the joint and member identification are all shown in Fig. 10.7. Program *EPFO* will analyze the frame if the data are held in a file *EPFO.DAT* in the following sequence.

7					Frame number, joints, members,
8	8	10000			elastic modulus
0	320	1	1	1	Joint coordinates and type of restraint
150	320	1	1	1	
100	320	1	1	1	
0	170	1	1	1	
150	170	1	1	1	
100	170	1	1	1	
0	0	0	0	0	
100	0	0	0	0	
1	2	1000	20	4500	Member data connections, inertias,
2	3	1000	20	4500	areas and full plastic moment values
4	5	1000	20	4500	
5	6	1000	20	4500	
1	4	500	25	4000	
3	6	500	25	4000	
4	7	500	25	4000	
6	8	500	25	4000	
4					Number of loaded joints, joint number,
1	5	0	0		and load details for each of 4 joints
4	10	0	0		
2	0	-30	0		
5	0	-30	0		
-1					No additional frames

FRAME ANALYSIS BY PROGRAM *EPFO*

## ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 7

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 4 NEAR JOINT 6  
WHEN LOAD FACTOR = 2.78839

## Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.29598	-- 02253	00577
2	1.28749	-- 75690	-- 00056
3	1.27899	-- 03213	-- 00328
4	87326	-- 01511	00548
5	83365	-- 58992	-- 00151
6	83505	--- 02282	00071
7	00000	00000	00000
8	00000	00000	00000

## CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1526.6272	-4036.8124	1 AND 2 4500.0000
2	4036.8123	2947.5175	2 AND 3 4500.0000
3	-820.0844	-3613.8425	4 AND 5 4500.0000
4	3613.8424	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	1526.6272	1478.8986	1 AND 4 4000.0000
6	-2947.5176	-2149.3065	3 AND 6 4000.0000
7	-658.8142	-1625.3065	4 AND 7 4000.0000
8	-2350.6935	-2475.5974	6 AND 8 4000.0000

## CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-33.979
2	-33.979
3	5.589
4	5.589
5	-37.090
6	-46.562
7	-66.649
8	-100.654

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 1 NEAR JOINT 2  
WHEN LOAD FACTOR = 3.09097

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X MOVEMENT	Y MOVEMENT	ROTATION
1	1.65939	-- 02499	00665
2	1.65022	-- 84846	-- 00071
3	1.64108	-- 03559	-- 00358
4	1.03358	-- 01692	00700
5	1.03517	-- 75181	-- 00148
6	1.03676	-- 02512	00247
7	00000	00000	00000
8	00000	00000	00000

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1555 1385	-4500 0000	1 AND 2 4500 0000
2	4499 9999	3354 2146	2 AND 3 4500 0000
3	-675 3311	-4767 0109	4 AND 5 4500 0000
4	4267 0108	4500 0000	5 AND 6 4500 0000
5	1555 1385	1674 8157	1 AND 4 4000 0000
6	-3354 2146	-2143 9695	3 AND 6 4000 0000
7	-749 4846	-1984 1153	4 AND 7 4000 0000
8	-2356 0306	-2792 3476	6 AND 8 4000 0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-36 655
2	-36 655
3	6 370
4	6 370
5	-40 368
6	-52 361
7	-74 650
8	-110 808

PLASTIC HINGE 3 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 5  
WHEN LOAD FACTOR = 3.20376

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1 80385	-0 2591	00750
2	1 79407	-1 02136	-00213
3	1 78429	-0 3687	-00418
4	1 11243	-0 1760	00750
5	1 11455	-0 80837	-00147
6	1 11667	-0 7596	00330
7	00000	00000	00000
8	00000	00000	00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1732 9770	-4500 0000	1 AND 2 4500 0000
2	4499 9999	3681.6761	2 AND 3 4500 0000
3	-914 6529	-4500 0000	4 AND 5 4500 0000
4	4499 9999	4500 0000	5 AND 6 4500 0000
5	1732 9770	1732 8432	1 AND 4 4000 0000
6	-3681 6762	-2186 5909	3 AND 6 4000 0000
7	-818 1903	-2141 2518	4 AND 7 4000 0000
8	-2313 4091	-2895 4643	6 AND 8 4000 0000

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-39 172
2	-39 172
3	8 481
4	8 481
5	-41 553
6	-54 545
7	-77 651
8	-111 545

PLASTIC HINGE 4 FORMED IN MEMBER 6 NEAR JOINT 3  
WHEN LOAD FACTOR = 3.28408

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	2 07252	-0 2659	0 0812
2	2 06216	-1 12659	-00309
3	2 05181	-0 3778	-00434
4	1 25119	-0 1822	00908
5	1 25362	-1 13720	-00366
6	1 25605	-0 2644	00460
7	00000	00000	00000
8	00000	00000	00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1778 3386	-4500 0000	1 AND 2 4500 0000
2	4500 0000	4000 0001	2 AND 3 4500 0000
3	-1278 3381	-4500 0000	4 AND 5 4500 0000
4	4499 9999	4500 0000	5 AND 6 4500 0000
5	1778 3383	1970 3186	1 AND 4 4000 0000
6	-4000 0000	-2211 7188	3 AND 6 4000 0000
7	-691 9806	-2294 2142	4 AND 7 4000 0000
8	-2288 2812	-3089 9290	6 AND 8 4000 0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-41 411
2	-41 411
3	9 716
4	9 716
5	-41 856
6	-56 667
7	-80 378
8	-116 667

## Appendix 10 2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc (Contd)

PLASTIC HINGE 5 FORMED IN MEMBER 8 NEAR JOINT 8  
WHEN LOAD FACTOR = 3.42322

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	4.40574	-0.2932	.02088
2	4.39440	-3.20008	.01692
3	4.38306	-0.3778	-.01817
4	2.01805	-0.2011	.01801
5	2.02101	-2.63586	-.01365
6	2.02397	-0.2644	.01305
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000

## CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2404.4823	1 AND 2	4500.0000
2	4500.0017	2 AND 3	4500.0000
3	-1904.4811	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999	5 AND 6	4500.0000
5	2404.4811	1 AND 4	4000.0000
6	-4000.0000	3 AND 6	4000.0000
7	73.3582	4 AND 7	4000.0000
8	-1696.9710	6 AND 8	4000.0000

## CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-45.353
2	-45.354
3	11.842
4	11.842
5	-46.030
6	-56.667
7	-88.726
8	-116.667

PLASTIC HINGE 6 FORMED IN MEMBER 7 NEAR JOINT 7  
WHEN LOAD FACTOR = 3.49593

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	6.12163	-0.3074	.02890
2	6.10957	-4.48691	-.02549
3	6.09751	-0.3778	-.02674
4	2.68143	-0.2110	.02465
5	2.68574	-3.71442	-.02084

## Appendix 10 2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc (Contd)

6	2.69006	-0.2644	.01860
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000

## CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2731.6916	1 AND 2	4500.0000
2	4500.0070	2 AND 3	4500.0000
3	-2231.6903	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999	5 AND 6	4500.0000
5	2731.6906	1 AND 4	4000.0000
6	-4000.0000	3 AND 6	4000.0000
7	350.4624	4 AND 7	4000.0000
8	-1265.1170	6 AND 8	4000.0000

## CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-48.232
2	-48.233
3	17.261
4	17.261
5	-48.211
6	-56.667
7	-93.089
8	-116.667

DEFORMATIONS LARGER THAN 1000.0 IN CYCLE NO 7

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO 7

Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF THE NEAL-FINZI CONTINUOUS BEAM IN FIG. 10.9

The joint numbering system begins from the left-hand support as does the member identification, so that the data would be prepared in the following sequence:

8					Frame number, joints, members, elastic modulus
5	4	30,000			
Joint data					
0	0	0	0	1	
100	0	1	0	1	
400	0	1	1	1	
500	0	1	1	1	
600	0	1	0	1	
Member data					
1	2	100	10	100	
2	3	100	10	100	
3	4	100	10	100	
4	5	100	10	100	
Load data					
2					
3	0	-1.3	0		
4	0	-0.7	0		
-1					

Note. The dimensions and beam properties have been factored by 100 in comparison with the data in Fig. 10.9.

NEAL FINZI BEAM ANALYSIS BY PROGRAM LPFO

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 8

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 2 NEAR JOINT 3  
WHEN LOAD FACTOR = 1.32353

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	00000	00000	- 00114
2	00000	00000	00228
3	00000	- 24837	00175
4	00000	- 25899	- 00152
5	00000	00000	- 00313

Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	0000	68 3824	1 AND 2 100 0000
2	- 68 3824	- 100 0000	2 AND 3 100 0000
3	100 0000	- 96 3235	3 AND 4 100 0000
4	96 3235	- 0000	4 AND 5 100 0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	000
2	000
3	000
4	000

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 4  
WHEN LOAD FACTOR = 1.42857

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X MOVEMENT	Y MOVEMENT	ROTATION
1	00000	00000	- 00143
2	00000	00000	00286
3	00000	- 32540	00143
4	00000	- 30159	- 00190
5	00000	00000	- 00357

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	0000	85 7143	1 AND 2 100 0000
2	- 85 7143	100 0000	2 AND 3 100 0000
3	100 0000	- 100 0000	3 AND 4 100 0000
4	100 0000	- 0000	4 AND 5 100 0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	000
2	000
3	000
4	000

DEFORMATIONS LARGER THAN 10000 IN CYCLE NO. 3

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO. 8





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**METODOS DE RIGIDECES**

**EXPOSITOR: ING. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

MÉTODO DE RIGIDECES  
MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS

Agustín Deméneghi Colina\*

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait et al 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos cuando la estructura está empotrada;
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares;
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero;
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura;
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (1)$$

donde

- $\underline{K}$  = matriz de rigideces de la estructura
- $\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos
- $\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento
- $\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida a una carga uniformemente repartida  $w$  (fig 1). Utilizaremos la siguiente convención de signos, para una barra horizontal (fig 2): los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamiento horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b).

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Demos un giro  $\theta'_p$  en el extremo izquierdo de la barra. En la fig 3a se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la fig 3b se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro  $\theta'_q$  en el extremo derecho. Las figs 3c y 3d exhiben los elementos mecánicos provocados por un desplazamiento vertical  $\delta'_r$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento vertical  $\delta'_s$  en el nudo derecho, respectivamente. Las figs 3e y 3f muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento horizontal  $\delta'_u$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento horizontal  $\delta'_v$  en el nudo derecho. Las figs 3g y 3h contienen los momentos producidos por un giro de torsión  $\theta'_a$  en el nudo izquierdo y un giro de torsión  $\theta'_b$  en el nudo derecho.

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$  valen

$$M'_p = wL^2/12 + (4EI/L) \theta'_p + (2EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (2)$$

$$M'_q = -wL^2/12 + (2EI/L) \theta'_p + (4EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (3)$$

$$V'_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta'_p - (6EI/L^2) \theta'_q + (12EI/L^3) \delta'_r - (12EI/L^3) \delta'_s \quad (4)$$

$$V'_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta'_p + (6EI/L^2) \theta'_q - (12EI/L^3) \delta'_r + (12EI/L^3) \delta'_s \quad (5)$$

$$N'_u = (AE/L) \delta'_u - (AE/L) \delta'_v \quad (6)$$

$$N'_v = - (AE/L) \delta'_u + (AE/L) \delta'_v \quad (7)$$

$$M'_a = (GI_t/L) \theta'_a - (GI_t/L) \theta'_b \quad (8)$$

$$M'_b = - (GI_t/L) \theta'_a + (GI_t/L) \theta'_b \quad (9)$$

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valuar en forma aproximada (Beaufait et al 1970)

$$I_t \cong \frac{h b^3}{3} [1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left(\frac{b}{h}\right)^5] \quad (10)$$

$$h \geq b$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (11)$$

donde

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & s'_r & s'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI/L & -GI/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI/L & GI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(\underline{P}^e)'_m = \begin{bmatrix} -wL^2/12 \\ wL^2/12 \\ -wL/2 \\ wL/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\underline{K}'_m$  = matriz de rigidez de la barra  $m$

$\underline{\delta}'_m$  = vector de desplazamientos de la barra  $m$

$(\underline{P}^e)'_m$  = vector de cargas de empotramiento de la barra  $m$

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí (fig 4); en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En la fig 5 se presenta la transformación de un vector del sistema global x-y al sistema local x'-y'. Aplicando las ecuaciones de la fig 5 a la barra inclinada de la fig 6 (despreciando el efecto de torsión con eje de giro vertical):

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p & \theta'_q &= \theta_q \\
 \delta'_r &= \delta_r \cos \alpha - \delta_u \operatorname{sen} \alpha \\
 \delta'_s &= \delta_s \cos \alpha - \delta_v \operatorname{sen} \alpha \\
 \delta'_u &= \delta_r \operatorname{sen} \alpha + \delta_u \cos \alpha \\
 \delta'_v &= \delta_s \operatorname{sen} \alpha + \delta_v \cos \alpha \\
 \theta'_a &= \theta''_a \cos \alpha \\
 \theta'_b &= \theta''_b \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones de la fig 5 a la barra de la fig 7:

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p \cos \beta - \theta_a \operatorname{sen} \beta \\
 \theta'_q &= \theta_q \cos \beta - \theta_b \operatorname{sen} \beta \\
 \theta''_a &= \theta_p \operatorname{sen} \beta + \theta_a \cos \beta \\
 \theta''_b &= \theta_q \operatorname{sen} \beta + \theta_b \cos \beta
 \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} & & (15)
 \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{B}}' = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es decir

$$\delta_{\text{B}}' = \underline{T}_{\text{B}} \delta_{\text{B}} \quad (17)$$

donde

$$\underline{T}_{\text{B}} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$\theta_p' = \theta_p \cos \beta - \theta_a \text{sen } \beta \quad (19)$$

$$\theta_q' = \theta_q \cos \beta - \theta_b \text{sen } \beta \quad (20)$$

$$\delta_r' = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \text{sen } \alpha \quad (21)$$

$$\delta_s' = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \text{sen } \alpha \quad (22)$$

$$\delta_u' = \delta_r \text{sen } \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (23)$$

$$\delta_v' = \delta_s \text{sen } \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (24)$$

$$\theta_a' = \theta_p \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_a \cos \alpha \cos \beta \quad (25)$$

$$\theta_b' = \theta_q \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (26)$$

En el sistema local x'-z' (fig 6)

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^c)' \quad (27)$$

Pero

$$(\underline{P}^c)' = \underline{T}_m \underline{P}^c \quad (28)$$

y

$$\underline{P}'_m = \underline{T}_m \underline{P}_m \quad (29)$$

Sustituyendo la ec 29 en la ec 27

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^c)' \quad (30)$$

Sustituyendo las ecs 17 y 28 en la ec 30

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{T}_m \underline{P}^c$$

Premultiplicando por  $\underline{T}_m^{-1}$

$$\underline{P}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^c$$

donde

$$\underline{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (31)$$

En el sistema global

$$\underline{P}_m = \underline{K}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^c \quad (32)$$

donde

$$\underline{K}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \quad (33)$$

Sustituyendo las ecs 12, 18 y 31 en la ec 33, se obtiene la matriz  $\underline{K}_m$ , la cual se muestra en la tabla 1.

Para el vector de cargas de empotramiento:

$$\underline{P}_m^e = \underline{T}^{-1} (\underline{P}_m^e)' \quad (34)$$

Para una barra sometida a una carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $\underline{P}_m^e$  vale

$$\underline{P}_m^e = \begin{bmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ - (wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (35)$$

La ec 33 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ . Las ecs 34 ó 35 proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ .

En resumen, primero se utilizan la tabla 1 y las 34 ó 35 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos correspondientes al sistema global  $x-y-z$  (vector  $\underline{\delta}$ ). Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma: primero se determinan los desplazamientos en el sistema local, con el empleo de la ec 17 ó las ecs 19 a 26:

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (\text{ec } 17)$$

A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se determinan con la ec 11 ó con las ecs 2 a 9:

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (\text{ec } 11)$$



Ejemplo 1

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 8a.

Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 8b). En este ejemplo no se toman en cuenta los efectos de torsión ( $\beta = 0$ ).

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\alpha$
							Grados
1	$\theta_5$	$\theta_{11}$	$\delta_1$	$\delta_7$	$\delta_3$	$\delta_9$	68.2
2	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_9$	$\delta_{10}$	0
3	$\theta_6$	$\theta_{12}$	$\delta_2$	$\delta_8$	$\delta_4$	$\delta_{10}$	111.8

Empleando la tabla 1 se obtienen las matrices de rigidez de las barras 1, 2 y 3, las cuales se muestran en las tabla 2. La matriz de rigidez de la estructura completa en el sistema global es la suma de las matrices de todas y cada una de las barras.

Sumando las matrices de las barras 1, 2 y 3 (tabla 2) obtenemos

$$\underline{K} = \begin{bmatrix}
 \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} \\
 32578.02 & -664.2 & 12719.58 & 0 & -1877.77 & -1992.6 \\
 -664.2 & 32578.02 & 0 & -12719.58 & 1992.6 & 1877.77 \\
 12719.58 & 0 & 71622.66 & -66420 & -287.08 & 0 \\
 0 & -12719.58 & -66420 & 71622.66 & 0 & -287.08 \\
 -1877.77 & 1992.6 & -287.08 & 0 & 9080.45 & 3985.2 \\
 -1992.6 & 1877.77 & 0 & -287.08 & 3985.2 & 9080.45
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \delta_7 \\
 \delta_8 \\
 \delta_9 \\
 \delta_{10} \\
 \theta_{11} \\
 \theta_{12}
 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} GL \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \qquad \underline{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} GL \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \qquad \text{(ec 1)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_7 &= 0.00080245 \text{ m} & \delta_8 &= 0.00080245 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.00008378 \text{ m} & \delta_{10} &= 0.00008378 \text{ m} \\ \theta_{11} &= -0.00473308 & \theta_{12} &= 0.00473308 \end{aligned}$$

Además  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$

Los elementos mecánicos en cada barra se hallan con el empleo de la ec 11:

$$\underline{P}'_1 = \underline{K}'_1 \underline{\delta}'_1 + (\underline{P}^e_1)' \quad (\text{ec 11})$$

Las matrices de cada barra en el sistema local ( $\underline{K}'_m$ ) se obtienen con la ec 12. En la tabla 3 se exhiben estas matrices para las tres barras de la estructura.

El vector de desplazamientos  $\underline{\delta}'_m$  se halla con el uso de las ecs 19 a 26, mientras que los elementos mecánicos en cada barra (sistema local) se determinan con el empleo de las ecs 2 a 9. La tabla 4 contiene el cómputo de desplazamientos y elementos mecánicos para las barras 1, 2 y 3.

### Ejemplo 2

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 9a. Despreciar el fenómeno de acortamiento de barras.

### Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 9b):

#### SISTEMA GLOBAL x-y

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$
1	-	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$
2	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$	-

#### SISTEMA LOCAL x'-y'

Barra	$\theta'_p$	$\theta'_q$	$\delta'_r$	$\delta'_s$	$\theta'_a$	$\theta'_b$
1	-	$\theta'_2$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_3$
2	$\theta'_3$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_2$	-

Los desplazamientos están relacionados entre sí, de acuerdo con las ecs 19 a 26

Barra 1

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = \theta_3$$

Barra 2

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = -\theta_3$$

Las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento en el sistema global, se hallan con los valores de la tabla 1 y las ecs 34 ó 35:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} & \theta_2 & & & \\ & 7970.40 & & & \\ & 1992.60 & & \delta_1 & \\ & 0 & & 664.20 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \theta_3 & \\ & & & & & 384.38 & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}_1^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} & \theta_2 & & & \\ & 384.38 & & & \\ & 0 & & \delta_1 & \\ & 0 & & 664.20 & \\ & & & 1992.60 & \\ & & & & \theta_3 & \\ & & & & & 7970.4 & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global es la suma de las matrices de cada una de las barras, es decir

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} & \delta_1 & & & \\ & 1328.40 & & & \\ & 1992.60 & & \theta_2 & \\ & 1992.60 & & 8354.78 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \theta_3 & \\ & & & & & 8354.78 & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -48 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (\text{ec } 1)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.09671 \text{ m} \\ \theta_2 &= -0.020194 & \theta_3 &= -0.020194 \end{aligned}$$

Para obtener los elementos mecánicos en las barras, trabajamos en el sistema local, en el que las matrices  $\underline{K}'_m$  valen (ec 12):

$$\underline{K}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 & \delta'_1 & \theta'_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 & \delta'_1 & \theta'_2 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec 11

Barra 1

$$M'_2 = 7.75 \text{ t.m}$$

$$V'_1 = 0$$

$$M'_3 = - 7.76 \text{ t.m}$$

Barra 2

$$M'_3 = - 7.75 \text{ t.m}$$

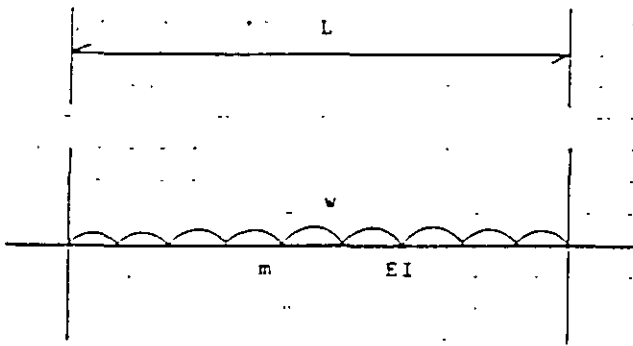
$$V'_1 = 0$$

$$M'_2 = - 7.76 \text{ t.m}$$

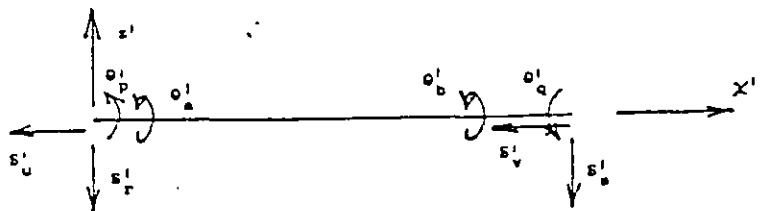
Los momentos obtenidos son de barra sobre nudo; éstos se exhiben en la fig 9c.

REFERENCIA

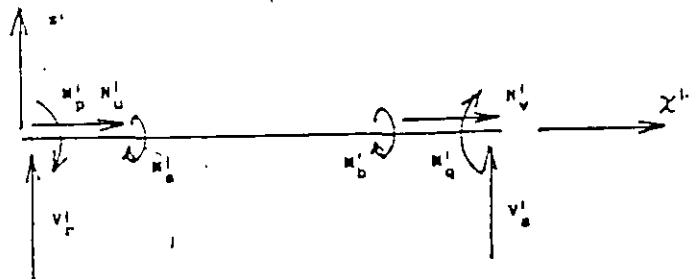
Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970



Barra m  
FIGURA 1



a) Desplazamientos



b) Elementos mecánicos  
(barra sobre nudo)

CONVENCIÓN DE SIGNOS

(ADSMRI9)

FIGURA 2

TABLA 1

NOMERE: MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA INCLINADA

FECHA: 23/04/96

PROGRAMA: MARIGBI

Sean	$D = 4 EI/L$ $F = GI/L$	$M = 6 EI/L2$		$N = 12 EI/L3$		$Q = AE/L$		
	$SA = \text{sen } A$ $CA = \text{cos } A$	$S2A = \text{sen}^2 A$ $C2A = \text{cos}^2 A$		$SB = \text{sen } B$ $CB = \text{cos } B$		$S2B = \text{sen}^2 B$ $C2B = \text{cos}^2 B$		
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb	
$D C2B$ $F S2B$	$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F SB CS$	tp
$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$D C2B$ $+ F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	tq
$- M CA CB$	$- M CA CB$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$M CA SB$	$M CA SB$	dr
$M CA CB$	$M CA CB$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- M CA SB$	$- M CA SB$	ds
$M SA CB$	$M SA CB$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$- M SA SB$	$- M SA SB$	du
$- M SA CB$	$- M SA CB$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$M SA SB$	$M SA SB$	dv
$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$D S2B$ $+ F C2B$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	ta
$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	$D S2B$ $+ F C2B$	tb

TABLA 2

NOMBRE: CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA INCLINADA  
 FECHA: 23/04/96  
 PROGRAMA: MARIBI43

11

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 1

	5	11	1	7	3	9			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
1110.049	555.0247	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	tp	5
555.0247	1110.049	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	tq	11
-114.832	-114.832	31913.82	-31913.8	12719.58	-12719.5	0	0	dr	1
114.8326	114.8326	-31913.8	31913.82	-12719.5	12719.58	0	0	ds	7
287.0818	287.0818	12719.58	-12719.5	5202.665	-5202.66	0	0	du	3
37.081	-287.081	-12719.5	12719.58	-5202.66	5202.665	0	0	dv	9
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 2

	11	12	7	8	9	10			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tp	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tq	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	0	0	0	0	dr	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	0	0	0	0	ds	8
0	0	0	0	66420	-66420	0	0	du	9
0	0	0	0	-66420	66420	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 3

	6	12	2	8	4	10			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
1110.049	555.0247	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	tp	6
555.0247	1110.049	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	tq	12
114.8326	114.8326	31913.82	-31913.8	-12719.5	12719.58	0	0	dr	2
-114.832	-114.832	-31913.8	31913.82	12719.58	-12719.5	0	0	ds	8
287.0818	287.0818	-12719.5	12719.58	5202.665	-5202.66	0	0	du	4
-287.081	-287.081	12719.58	-12719.5	-5202.66	5202.665	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

TABLA 3

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 1

	5	11	1	7	3	9				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
1110.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
	0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
	0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 2

	11	12	7	8	9	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	GL		
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tp'	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tq'	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2		0	0	0	0	dr'	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2		0	0	0	0	ds'	8
	0	0	0	0	66420	-66420	0	0	du'	9
	0	0	0	0	-66420	66420	0	0	dv'	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 3

	6	12	2	8	4	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
10.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
	0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
	0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	



TABLA 4

istema local

arra 1

	5	11	1	7	3	9		
p'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -2.51077 Mp'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -5.13775 Mq'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 1.420296 Vr'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vs'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Ma'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Mb'

istema local

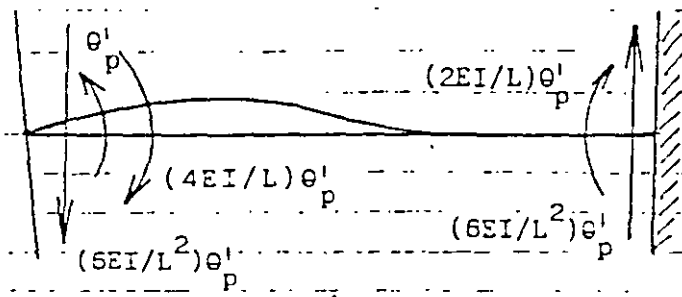
arra 2

p'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 5.137729 Mp'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 -5.13772 Mq'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 24 Vr'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 24 Vs'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 -11.1293 Vu'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 11.12933 Vv'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 0 Ma'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0	0 0 Mb'

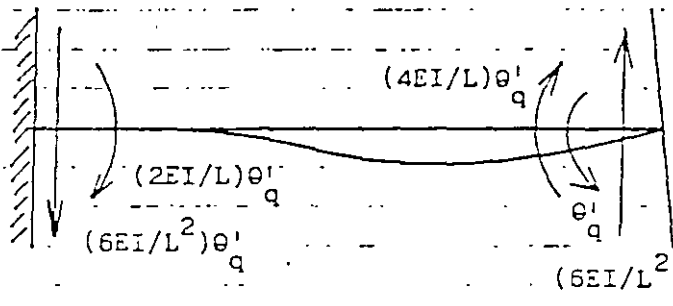
istema local

arra 3

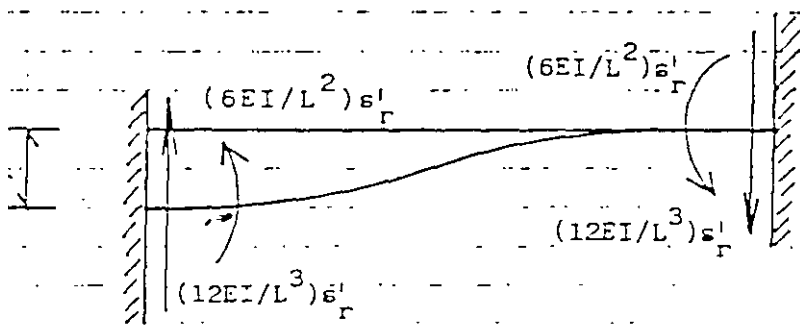
	5	11	1	7	3	9		
p'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 2.510777 Mp'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 5.137754 Mq'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vr'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 1.420296 Vs'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Ma'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Mb'



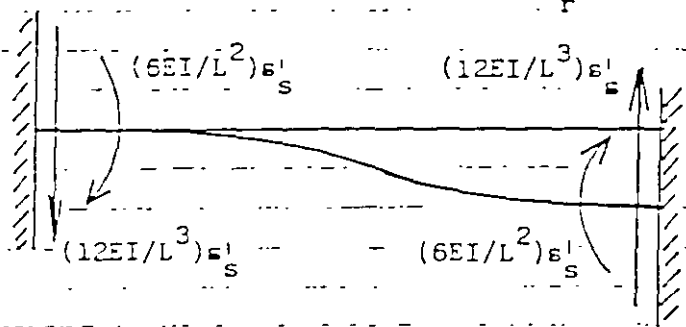
a) Giro  $\theta_p'$



b) Giro  $\theta_q'$



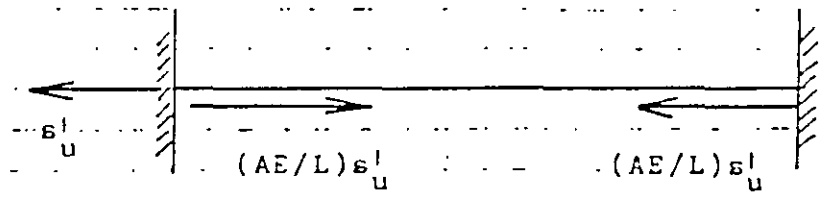
c) Desplazamiento  $\delta_r'$



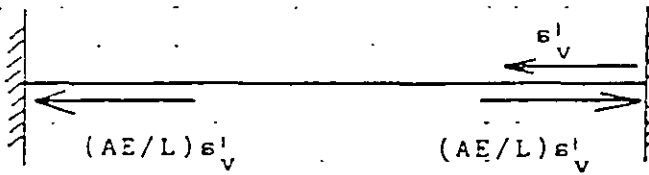
d) Desplazamiento  $\delta_s'$

ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3



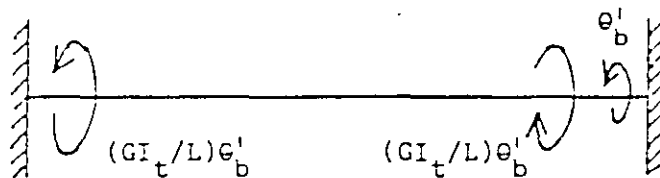
e) Desplazamiento  $s'_u$



f) Desplazamiento  $s'_v$



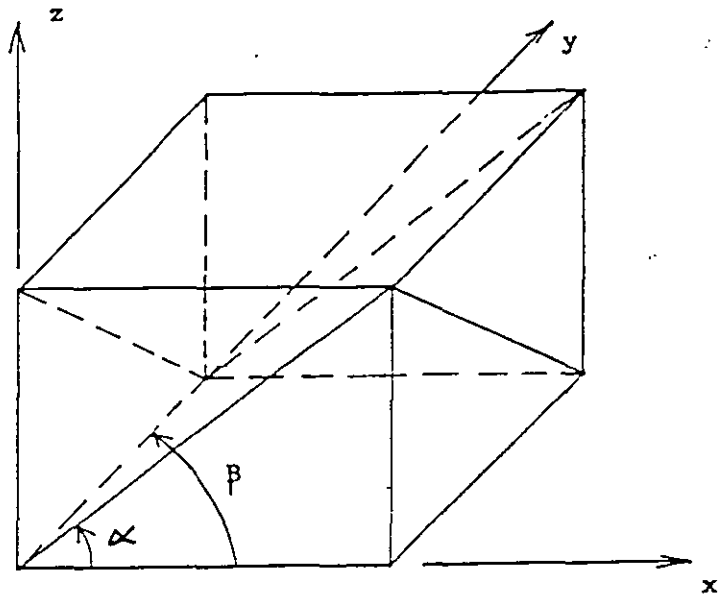
g) Giro  $\theta'_a$



h) Giro  $\theta'_b$

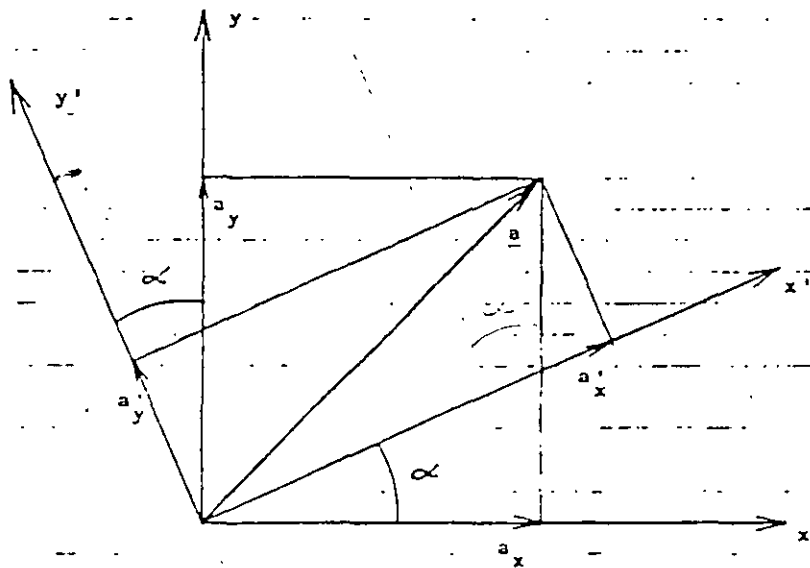
ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR  
DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3



MARCOS PLANOS ORTOGONALES ENTRE SÍ

FIGURA 4

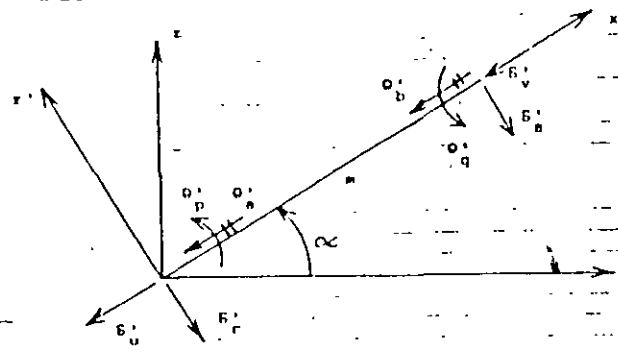


$$a'_x = a_x \cos \alpha + a_y \operatorname{sen} \alpha$$

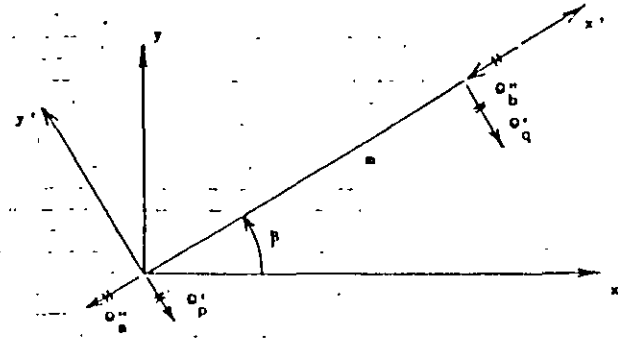
$$a'_y = -a_x \operatorname{sen} \alpha + a_y \cos \alpha$$

TRANSFORMACIÓN DE UN VECTOR DEL SISTEMA GLOBAL x-y AL SISTEMA LOCAL x'-y'

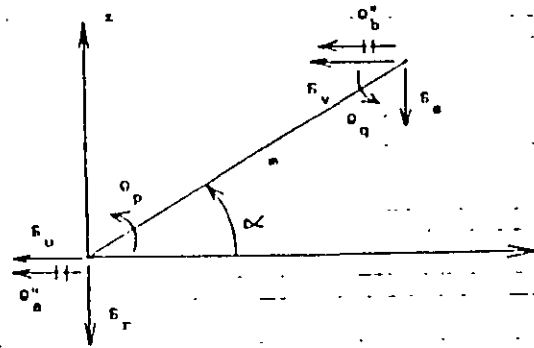
FIGURA 5



a) SISTEMA LOCAL  $x'-z'$



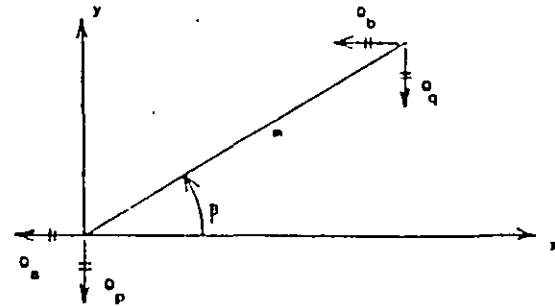
a) SISTEMA LOCAL  $x'-y'$



b) SISTEMA GLOBAL  $x-z$

DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA INCLINADA

FIGURA 6

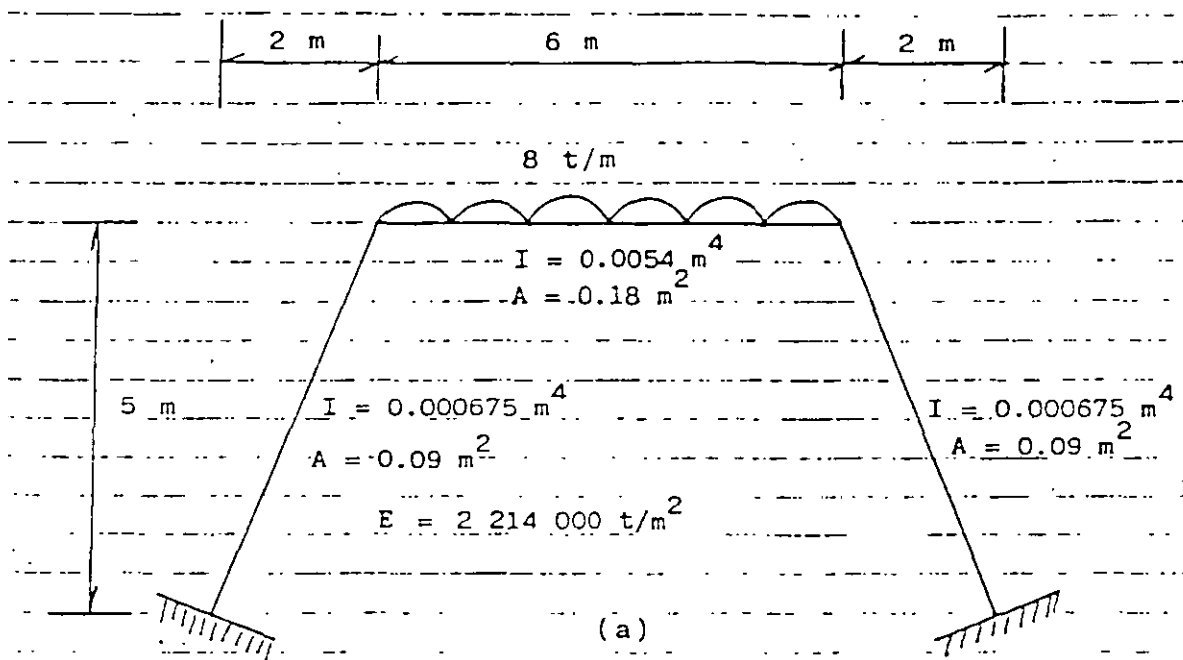


b) SISTEMA GLOBAL  $x-y$

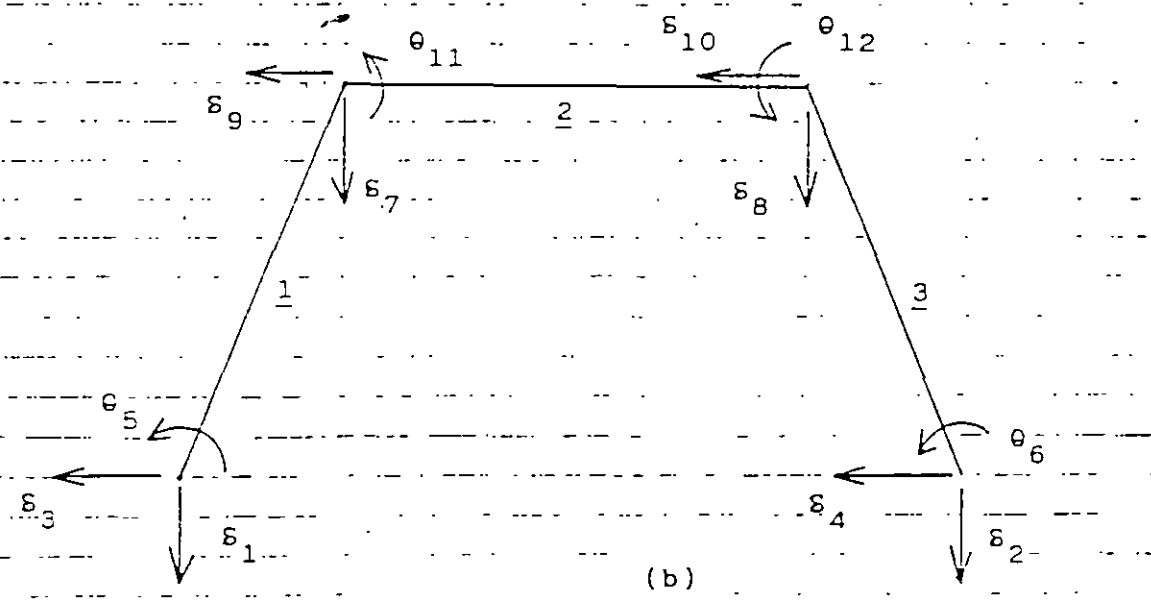
GIROS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO  $x-y$

FIGURA 7

05

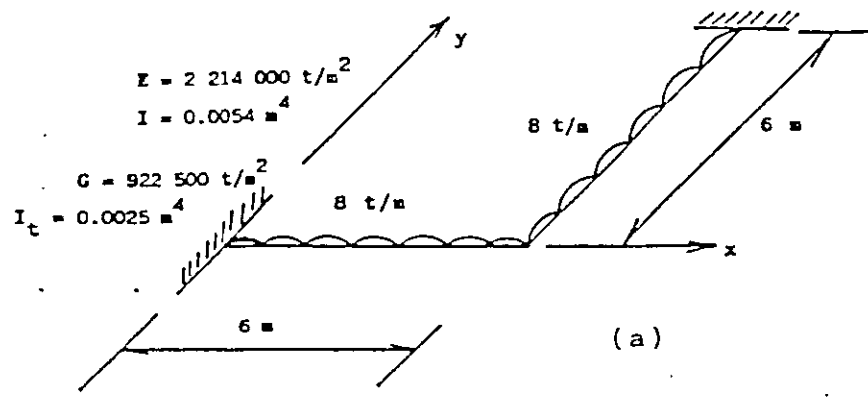


GEOMETRIA Y CARGAS EN LA ESTRUCTURA (EJEMPLO)

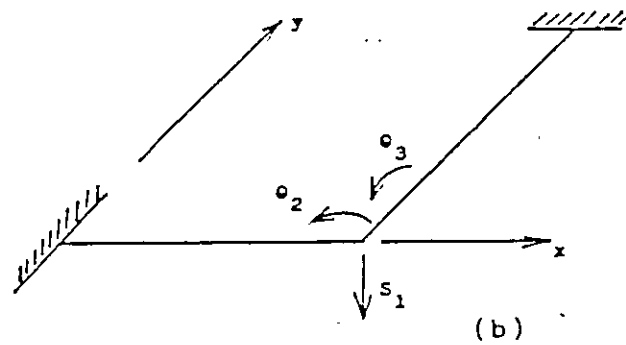


NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

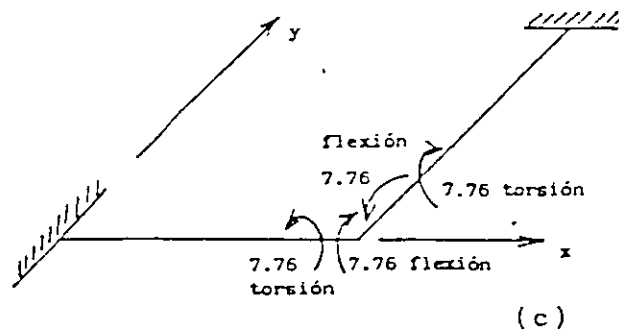
FIGURA 8



GEOMETRÍA Y CARGAS (EJEMPLO)



GRADOS DE LIBERTAD



MOMENTOS EN t.m

FIGURA 9

# Interacción estática suelo-estructura, considerando efectos de torsión y acortamiento de barras

Static soil-structure interaction, considering torsion and compression of bars

A Deméneghi, Profesor del Departamento de Geotecnia, Facultad de Ingeniería, UNAM

**RESUMEN.** Se presenta un procedimiento para el análisis de la interacción estática suelo-estructura en tres dimensiones, considerando el efecto de acortamiento de barras y de torsión, el cual toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo. Esta técnica permite además conocer los elementos mecánicos en cualquier nudo de la estructura, incluyendo desde luego la estructura de cimentación. Con el propósito de ilustrar el empleo del método, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación resuelto paso a paso.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se han desarrollado hasta la fecha técnicas de interacción estática suelo-estructura bastante útiles la mayoría de ellas; sin embargo, algunos de estos métodos están elaborados para aplicarse únicamente en dos dimensiones, de manera que el análisis de una estructura se realiza en un plano, lo cual hace que se pierda la visualización del fenómeno tridimensional. Se puede intentar hacer análisis en dos direcciones ortogonales y superponer los efectos para representar el fenómeno tridimensional, pero aún así el procedimiento es aproximado, y además no es posible conocer los elementos mecánicos en las vigas intermedias de la estructura de cimentación. Por lo tanto, es necesario desarrollar procedimientos que tomen en cuenta el efecto tridimensional en la interacción suelo-estructura.

En este artículo se presenta un método de interacción tridimensional que toma en cuenta toda la estructura (considerando efectos adicionales de acortamiento de barras y de torsión) y todos los estratos de suelo.

La técnica de interacción que se propone (Deméneghi 1983) consiste en considerar las reacciones del terreno de cimentación como cargas sobre la estructura, manejándolas como incógnitas. Después se calculan los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él (estas cargas son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones, por la tercera ley de Newton). Finalmente se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, lo que equivale a igualar los desplazamientos entre ambos medios; con esto se resuelve el problema, ya que se obtienen los hundimientos del suelo y las reacciones sobre la estructura. Como previamente se realizó el análisis estructural, es posible determinar además los giros en los nudos de la estructura. Con estos resultados se pueden calcular los elementos mecánicos en toda la estructura, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

## 2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Emplearemos el método de rigideces para llevar a cabo el análisis estructural. En este método, la ecuación general de equilibrio de la estructura es:

$$\underline{K} \underline{\delta} - \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (1)$$

donde  $\underline{K}$  = matriz de rigidez de la estructura  
 $\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos  
 $\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento  
 $\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa se obtienen mediante la suma de las matrices de rigidez y de los vectores de cargas, respectivamente, de todas y cada una de las barras que forman la estructura.

Hallemos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida al sistema de cargas mostrado en la fig 1. Los desplazamientos de la barra se indican en la fig 2a; los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y los fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b). Dando a la barra los desplazamientos indicados en la fig 2a, aparecen en dicha barra los elementos mecánicos dados por la siguiente ecuación:

$$\underline{P}_m' = \underline{K}_m' \underline{\delta}_m' + (\underline{P}_m')^e \quad (2)$$

donde



$$P_m' = \begin{Bmatrix} M_p' \\ M_q' \\ V_r' \\ V_s' \\ N_t' \\ N_u' \\ M_v' \\ M_w' \end{Bmatrix} \quad \delta_m' = \begin{Bmatrix} \theta_p' \\ \theta_q' \\ \delta_r' \\ \delta_s' \\ \delta_t' \\ \delta_u' \\ \theta_v' \\ \theta_w' \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez  $K_m'$  de la barra se muestra en la tabla 1. El vector de cargas de empotramiento vale

$$(P_m')^e = \begin{Bmatrix} wL^2/12 - (11/192)L^2 r_t - (5/192)L^2 r_s \\ -wL^2/12 + (5/192)L^2 r_t + (11/192)L^2 r_s \\ -wL/2 - (13/32)L r_t + (3/32)L r_s \\ -wL/2 + (3/32)L r_t + (13/32)L r_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí, en los que en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En las barras inclinadas de las figs 3 y 4, los desplazamientos del sistema local están relacionados con los desplazamientos del sistema global mediante las siguientes expresiones

$$\theta_p' = \theta_7 \cos \beta - \theta_8 \sin \beta \quad (4)$$

$$\theta_q' = \theta_8 \cos \beta - \theta_7 \sin \beta \quad (5)$$

$$\delta_r' = \delta_1 \cos \alpha - \delta_2 \sin \alpha \quad (6)$$

$$\delta_s' = \delta_2 \cos \alpha - \delta_1 \sin \alpha \quad (7)$$

$$\delta_t' = \delta_1 \sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha \quad (8)$$

$$\delta_u' = \delta_2 \sin \alpha + \delta_1 \cos \alpha \quad (9)$$

$$\theta_v' = \theta_7 \cos \alpha \sin \beta + \theta_8 \cos \alpha \cos \beta \quad (10)$$

$$\theta_w' = \theta_8 \cos \alpha \sin \beta + \theta_7 \cos \alpha \cos \beta \quad (11)$$

En el sistema global

$$P_F = K_m \delta_m - P_F^e \quad (12)$$

en que la matriz  $K_m$  está dada en la tabla 2.

En una barra inclinada sometida a carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $P_m^e$  en el sistema global vale

$$P_m^e = \begin{Bmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ - (wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

La matriz  $K_m$  de la tabla 2 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordinado general  $x-y-z$ . La ec 13 proporciona el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordinado general  $x-y-z$ .

La secuencia de cálculo es la siguiente: primero se emplean las ecs 12 y 13 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de cada una de las barras en el sistema global. Como mencionamos antes, la matriz de rigideces de la estructura completa se halla mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura. La determinación de los elementos mecánicos en la barra  $m$  requiere de la previa determinación de sus desplazamientos en el sistema local, con el empleo de las ecs 4 a 11. A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se hallan con la ec 2:

$$P_m' = K_m' \delta_m' + (P_m')^e \quad (2)$$

donde  $K_m'$  y  $(P_m')^e$  están dados en la tabla 1 y en la ec 3, respectivamente.

### 3. HUNDIMIENTOS DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN

Las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas: consideremos una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (fig 5), la presión vertical vale  $r_k d_k / a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor  $H_j$ , debida a la carga  $r_k$  vale

$$\delta_{ijk} = (1/E_{21}) H_j \sigma_{2jk}$$

Pero

$$\sigma_{2jk} = I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

donde  $I_{ijk}$  es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria actuando en el área  $a_k$  (Zeevaert 1973).

$E_{21}$  es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que produce. En consecuencia

$$\delta_{yk} = (1/E_{21}) H_j I_{yk} r_k d_k / a_k$$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale

$$\delta_y = (1/E_{21}) H_j \sum_{k=1}^{n_r} I_{yk} r_k d_k / a_k$$

donde  $n_r$  = número total de cargas  $r_k$

El asentamiento bajo el punto  $i$  vale

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} (1/E_{21}) H_j \sum_{k=1}^{n_r} I_{jk} r_k d_k / a_k \quad (14)$$

donde  $n_e$  = número total de estratos

En la ec 14 los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas  $r_k$ .

#### 4. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despega de la estructura. Analíticamente esto se alcanza sustituyendo los valores dados por la ec 14 en la ec 1. De esta manera desaparecen como incógnitas los desplazamientos lineales y quedan únicamente como incógnitas los giros en los nudos y las reacciones del terreno. Es fácil ver que el número de ecuaciones es el mismo que el de incógnitas, por lo que se puede resolver el sistema y despejar los giros y las reacciones. Empieando la ec 14, ya conocidas las reacciones, se pueden determinar también los hundimientos del terreno de apoyo.

#### 5 EJEMPLO

Presentamos en este inciso un ejemplo sencillo resuelto paso a paso, con el propósito de que el lector visualice las etapas requeridas para el análisis de interacción.

Se pide determinar las reacciones y los hundimientos del terreno, para la estructura mostrada en la fig 6, cuya cimentación es a base de una losa corrida. Se piden también los elementos mecánicos. La estratigrafía y propiedades del subsuelo se muestran en la fig 7. Despreciar efectos de acortamiento de barras.

##### a) Análisis estructural

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura, como se indica en la fig 8.

Como ilustración presentamos a continuación los de las barras 1 y 7, para el sistema global:

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$
1	$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$
7	$\theta_{10}$	$\theta_{16}$	$\delta_1$	$\delta_4$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$

A continuación hallaremos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Las demás matrices y vectores se obtienen en forma similar. Utilizando la tabla 2 con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$  se obtienen las matrices  $\underline{K}_1$  y  $\underline{K}_7$ , que se muestran en las tablas 3 y 4, respectivamente. La matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura (el rango de cada matriz se toma de 27 por 27). A manera de ejemplo, en la tabla 5 se presenta la matriz de rigideces de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

Determinemos a continuación los vectores de cargas de empotramiento de las barras 1 y 7. Aplicando la ec 3:

$$P_1^e = \begin{Bmatrix} 1.233 - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 \\ -1.233 - 0.4815 r_1 + 1.0593 r_2 \\ -1.72 - 1.747 r_1 + 0.4031 r_2 \\ -1.72 + 0.4031 r_1 + 1.747 r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{matrix}$$

GL = grado de libertad

$$P_7^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.72 - 1.747 r_1 + 0.4031 r_4 \\ -1.72 - 0.4031 r_1 + 1.747 r_4 \\ 1.233 - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_4 \\ -1.233 - 0.4815 r_1 + 1.0593 r_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 16 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \\ 17 \end{matrix}$$

Como ejemplo presentamos a continuación el vector de cargas de empotramiento de la estructura para los primeros 5 grados de libertad:

$$P^e = \begin{Bmatrix} -3.44 + 3.494 r_1 + 0.4031 r_2 + 0.4031 r_4 \\ -6.88 - 0.4031 r_1 - 5.241 r_2 - 0.4031 r_3 + 0.4031 r_5 \\ -3.44 - 0.4031 r_2 + 3.494 r_3 + 0.4031 r_6 \\ -6.88 + 0.4031 r_1 + 5.241 r_4 + 0.4031 r_7 + 0.4031 r_7 \\ -13.76 + 0.4031 r_2 + 0.4031 r_4 + 6.988 r_5 + 0.4031 r_6 \\ \quad \quad \quad + 0.4031 r_8 \end{Bmatrix}$$

El vector de cargas concentradas, para los primeros cinco grados de libertad, está dado por

$$P^c = \begin{pmatrix} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ec 1 y tomando en cuenta que por simetría

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_9 \quad \delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = \delta_8$$

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

$$\theta_{10} = \theta_{11} = -\theta_{14} = \theta_{15} = \theta_{22} = -\theta_{23} = -\theta_{26} = -\theta_{27}$$

$$\theta_{13} = \theta_{16} = -\theta_{20} = -\theta_{25}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (que representa el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente):

Grado de libertad 1:

$$773.14 \delta_1 - 773.14 \delta_2 - 1662.24 \theta_{10} - 3.494 r_1 + 0.8062 r_2 - 3.44 \cdot 9.6 = 0 \quad (a)$$

Grado de libertad 2

$$-773.14 \delta_1 - 859.767 \delta_2 - 86.62 \delta_3 + 1662.24 \theta_{10} - 186.23 \theta_{13} + 0.8062 r_1 + 5.241 r_2 + 0.4031 r_3 - 6.88 = 0 \quad (b)$$

Grado de libertad 5

$$-346.48 \delta_2 - 346.48 \delta_3 + 744.92 \theta_{13} - 1.6124 r_2 - 6.988 r_3 - 13.76 = 0 \quad (c)$$

Grado de libertad 10

$$-831.12 \delta_1 + 831.12 \delta_2 + 2692.76 \theta_{10} - 310.23 \theta_{13} - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 - 1.233 = 0 \quad (d)$$

Grado de libertad 13

$$-186.23 \delta_2 - 186.23 \delta_3 - 620.46 \theta_{13} - 1154.32 \theta_{15} - 1.0593 r_2 - 0.4815 r_3 - 2.465 = 0 \quad (e)$$

b) Cálculo de las deformaciones del terreno de cimentación

Haciendo  $i = 1$  en la ec 14

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^2 (1/E_{21j}) H_j \sum_{k=1}^9 I_{jk} r_k d_k / a_k \quad (A)$$

Como se indicó en el inciso 3, el valor de influencia  $I_{jk}$  representa el esfuerzo en el punto  $ij$  debido a una presión unitaria colocada en el área  $k$ . Calculemos como ejemplo un valor de influencia, digamos el  $I_{115}$ . En la fig 9 se muestra la planta del área 5 y del punto 1. Colocamos una presión unitaria en el área 5 y

calculamos el esfuerzo bajo el punto 1, a la mitad del estrato 1, es decir, a una profundidad de 1.2 m. Aplicando la ecuación de Boussinesq, se obtiene un esfuerzo vertical de 0.002988. Los demás valores de influencia se hallan en forma similar. Sustituyendo estos valores en la ec (A):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0154(2.4) [0.2271(4.3r_1)/4.6225 \\ &+ 0.009375(6.45r_2)/9.245 + 0.0001528(4.3r_3)/4.6225 \\ &+ 0.009375(6.45r_4)/9.245 + 0.002988(8.6r_5)/18.49 \\ &+ 0.0001625(6.45r_6)/9.245 + 0.0001528(4.3r_7)/4.6225 \\ &+ 0.0001625(6.45r_8)/9.245 + 0.00002824(4.3r_9)/4.6225] \\ &+ 0.0222(2.0)[0.1139(4.3r_1)/4.6225 \\ &+ 0.04407(6.45r_2)/9.245 + 0.002284(4.3r_3)/4.6225 \\ &+ 0.04407(6.45r_4)/9.245 + 0.028026(8.6r_5)/18.49 \\ &+ 0.002638(6.45r_6)/9.245 + 0.0022836(4.3r_7)/4.6225 \\ &+ 0.002638(6.45r_8)/9.245 + 0.0005157(4.3r_9)/4.6225] \end{aligned}$$

Por simetría

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_3 \quad (f)$$

En forma análoga se obtienen  $\delta_2$  y  $\delta_3$

$$\delta_2 = 0.0036877 r_1 + 0.020326 r_2 + 0.0021424 r_3 \quad (g)$$

$$\delta_3 = 0.0028714 r_1 + 0.010629 r_2 + 0.025023 r_3 \quad (h)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs (f), (g) y (h) en las ecs (a), (b), (c), (d) y (e), resolviendo el sistema de ecuaciones de la (a) a la (h):

$$r_1 = 3.2353 \text{ t/m} \quad r_2 = 1.0817 \text{ t/m} \quad r_3 = 1.1488 \text{ t/m}$$

$$\theta_{10} = 0.003760 \quad \theta_{13} = -0.0007646$$

$$\delta_1 = 0.04558 \text{ m} \quad \delta_2 = 0.03638 \text{ m} \quad \delta_3 = 0.04953 \text{ m}$$

Como ilustración hallaremos los elementos mecánicos en las barras 1 y 7, para lo que se aplican las ecs 2 y 3, y la tabla 1.

Barra 1

$$\begin{aligned} M'_{10} &= -1.403 \text{ t-m} & M'_{12} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V'_1 &= 4.8 \text{ t} & V'_2 &= 1.042 \text{ t} \\ M'_{11} &= -1.404 \text{ t-m} & M'_{15} &= 1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

Barra 7

$$\begin{aligned} M'_{11} &= -1.403 \text{ t-m} & M'_{17} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V'_1 &= 4.8 \text{ t} & V'_4 &= 1.042 \text{ t} \\ M'_{10} &= 1.404 \text{ t-m} & M'_{16} &= -1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

## 6. CONCLUSIONES

Como se puede apreciar en los incisos anteriores, se puede resolver el problema de la interacción estática suelo-estructura en una estructura tridimensional, incluyendo acortamiento de barras y momentos de torsión, para marcos planos ortogonales, tomando en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo

Uno de los aspectos importantes es que para aplicar esta técnica en la práctica profesional, es necesario elaborar programas de computadora que resuelvan el problema de manera expedita.

## 7. REFERENCIAS

Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M. 1970. *Computer methods of structural analysis*. Prentice-Hall.

Deméneghi, A. 1983. Interacción suelo-estructura. *Rev Ingeniería*. Vol LIII No 4: 80-90.

Zeevaert, L. 1973. *Foundation engineering for difficult subsoil conditions*. Van Nostrand Reinhold.

TABLA 1  
MATRIZ DE RIGIDEZ  $K_{ij}$  DE UNA BARRA (SISTEMA LOCAL)

$\theta_p'$	$\theta_q'$	$\delta_r'$	$\delta_s'$	$\delta_u'$	$\delta_v'$	$\theta_a'$	$\theta_b'$	
4EI/L	2EI/L	-6EI/L <sup>2</sup>	6EI/L <sup>2</sup>	0	0	0	0	$\theta_p'$
2EI/L	4EI/L	-6EI/L <sup>2</sup>	6EI/L <sup>2</sup>	0	0	0	0	$\theta_q'$
-6EI/L <sup>2</sup>	-6EI/L <sup>2</sup>	12EI/L <sup>3</sup>	-12EI/L <sup>3</sup>	0	0	0	0	$\delta_r'$
6EI/L <sup>2</sup>	6EI/L <sup>2</sup>	-12EI/L <sup>3</sup>	12EI/L <sup>3</sup>	0	0	0	0	$\delta_s'$
0	0	0	0	AE/L	-AE/L	0	0	$\delta_u'$
0	0	0	0	-AE/L	AE/L	0	0	$\delta_v'$
0	0	0	0	0	0	GI/L	-GI/L	$\theta_a'$
0	0	0	0	0	0	-GI/L	GI/L	$\theta_b'$

TABLA 2  
MATRIZ DE RIGIDEZ  $K_{ij}$  DE UNA BARRA INCLINADA (SISTEMA GLOBAL)

Sección		$D = 4EI/L$	$M = 6EI/L^2$	$N = 12EI/L^3$	$Q = AE/L$	$F = GI/L$		
		SA = sen $\alpha$	S2A = sen <sup>2</sup> $\alpha$	SB = sen $\beta$	S2B = sen <sup>2</sup> $\beta$			
		CA = cos $\alpha$	C2A = cos <sup>2</sup> $\alpha$	CB = cos $\beta$	C2B = cos <sup>2</sup> $\beta$			
$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\theta_a$	$\theta_b$	
D C2B	(D2) C2B	-M CB CA	M CB CA	M CB SA	-M CB SA	-D CB SB	-(D2) CB SB	$\theta_p$
-F S2B	-F S2B					-F CB SB	-F SB CB	
(D2) C2B	D C2B	-M CB CA	M CB CA	M CB SA	-M CB SA	-(D2) CB SB	-D CB SB	$\theta_q$
-F S2B	+F S2B					-F CB SB	+F CB SB	
-M CA CB	-M CA CB	N C2A	-N C2A	-N CA SA	N CA SA	M CA SB	M CA SB	$\delta_r$
		+Q S2A	-Q S2A	+Q CA SA	-Q CA SA			
M CA CB	M CA CB	-N C2A	N C2A	N CA SA	-N CA SA	-M CA SB	-M CA SB	$\delta_s$
		-Q S2A	+Q S2A	-Q CA SA	+Q CA SA			
M SA CB	M SA CB	-N CA SA	N CA SA	N S2A	-N S2A	-M SA SB	-M SA SB	$\delta_u$
		+Q CA SA	-Q CA SA	+Q C2A	-Q C2A			
-M SA CB	-M SA CB	N CA SA	-N CA SA	-N S2A	N S2A	M SA SB	M SA SB	$\delta_v$
		-Q CA SA	+Q CA SA	-Q C2A	+Q C2A			
-D CB SB	-(D2) CB SB	M CA SB	-M CA SB	-M SA SB	M SA SB	D S2B	(D2) S2B	$\theta_a$
+F CB SB	-F CB SB					+F C2B	-F C2B	
-(D2) CB SB	-D CB SB	M CA SB	-M CA SB	-M SA SB	M SA SB	(D2) S2B	D S2B	$\theta_b$
-F CB SB	+F CB SB					-F C2B	+F C2B	

TABLA 3  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1,  $K_1$

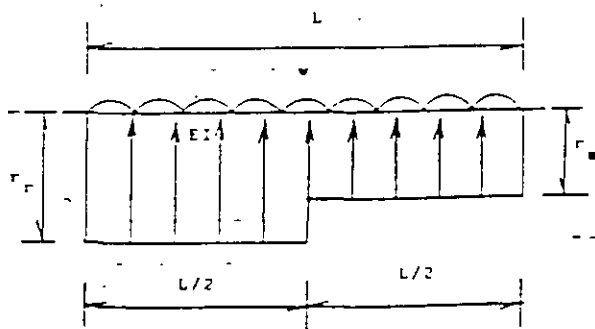
$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$	
2382.530	1191.265	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{10}$
1191.265	2382.530	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{12}$
-831.115	-831.115	386.565	-386.565	0	0	$\delta_1$
831.115	831.115	-386.565	386.565	0	0	$\delta_2$
0	0	0	0	310.08	-310.08	$\theta_{11}$
0	0	0	0	-310.08	310.08	$\theta_{13}$

TABLA 4  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 7,  $K_7$

$\theta_{10}$	$\theta_{16}$	$\delta_1$	$\delta_4$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$	
310.08	-310.08	0	0	0	0	$\theta_{10}$
-310.08	310.08	0	0	0	0	$\theta_{16}$
0	0	386.565	-386.565	831.115	831.115	$\delta_1$
0	0	-386.565	386.565	-831.115	-831.115	$\delta_4$
0	0	831.115	-831.115	2382.530	1191.265	$\theta_{11}$
0	0	831.115	-831.115	1191.265	2382.530	$\theta_{17}$

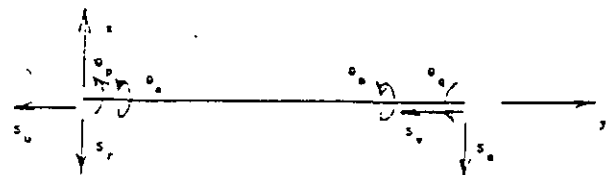
TABLA 5  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA  $K$  PARA LOS PRIMEROS CINCO GRADOS DE LIBERTAD.  
SISTEMA GLOBAL

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	
773.130	-386.565	0	-386.565	0	$\delta_1$
-386.565	859.750	-386.565	0	-86.619	$\delta_2$
0	-386.565	773.130	0	0	$\delta_3$
-386.565	0	0	859.750	-86.619	$\delta_4$
0	-86.619	0	-86.619	346.477	$\delta_5$

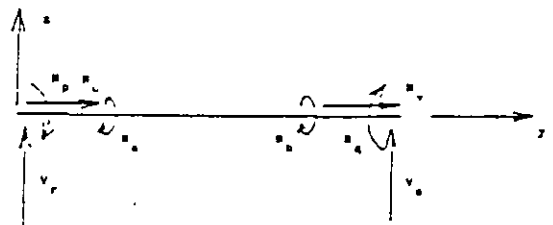


GEOMETRÍA Y CARGAS  
BARRA DE CIMENTACION

FIGURA 1

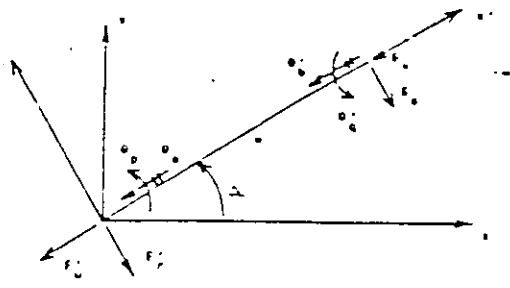


a) Desplazamientos

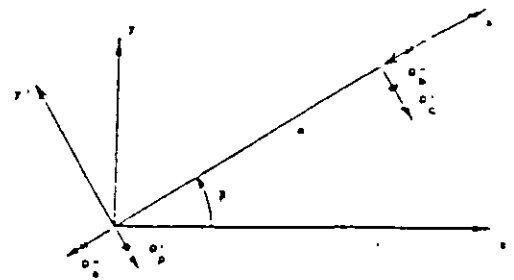


b) Elementos mecánicos  
(barra sobre nudo)

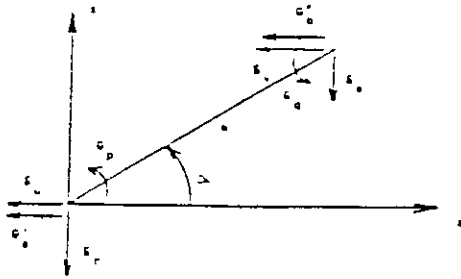
CONVENCIÓN DE SIGNOS FIGURA 2



a) SISTEMA LOCAL  $x'-y'$

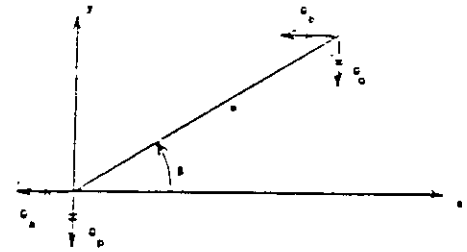


b) SISTEMA LOCAL  $x''-y''$



c) SISTEMA GLOBAL  $x-z$

DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA TRAPEZADA

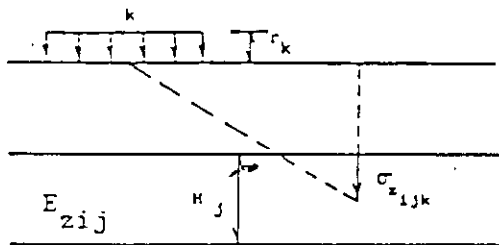


d) SISTEMA GLOBAL  $x-y$

CIRCOS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO  $x-y$

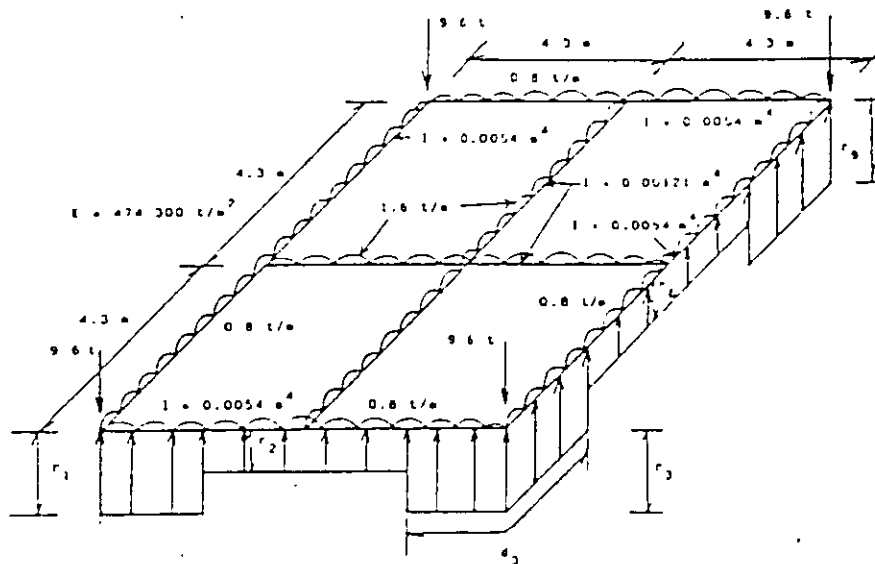
FIGURA 3

FIGURA 4



CÁLCULO DE LOS HUNDIMIENTOS DEL TERRENO

FIGURA 5



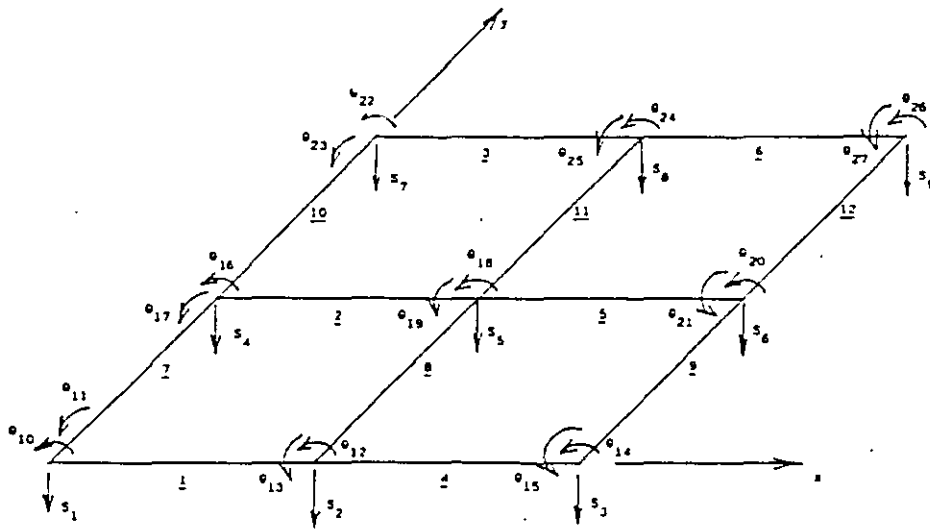
GEOMETRÍA Y SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

FIGURA 6

$1/E_z = 0.0154 \text{ m}^2/\text{t}$	2.4 m Estrato 1
$1/E_z = 0.0222 \text{ m}^2/\text{t}$	2.0 m Estrato 2

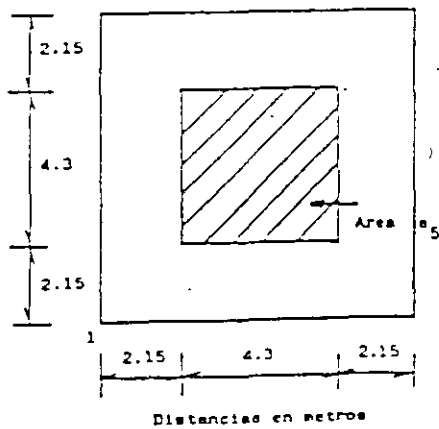
ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES (EJEMPLO)

FIGURA 7



NUMERACION DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD

FIGURA 8



DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE INFLUENCIA

FIGURA 9

## EJEMPLO DE INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA

Agustín Deméneghi Colina\*

Determinar los desplazamientos y los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 1. Las propiedades son:

Estructura	E = 1,130,000 t/m <sup>2</sup>		
	I = 0.05163 m <sup>4</sup>		
Terreno de cimentación	Estrato 1	M <sub>z</sub> = 0.002 m <sup>2</sup> /t	
	Estrato 2	M <sub>z</sub> = 0.0018 m <sup>2</sup> /t	

Hágase la hipótesis de que la estructura se puede considerar continua en sus extremos, con un momento flexionante en ellos que tienda a cero.

### Solución

#### a) Análisis estructural

El sistema de cargas sobre la estructura se muestra en la fig 2. La numeración de barras y grados de libertad en la fig 3. Se desprecian efectos de acortamiento de barras y de torsión.

La matriz de rigidez de la barra 1 vale (ec 2)

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_4 & & & & & \\ & \theta_5 & & & & \\ & & \delta_1 & & & \\ & & & \delta_2 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58341.9 & 29170.95 & -21878.21 & 21878.21 \\ 29170.95 & 58341.9 & -21878.21 & 21878.21 \\ -21878.21 & -21878.21 & 10939.1 & -10939.1 \\ 21878.2 & 21878.2 & -10939.1 & 10939.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la barra 2 vale (ec 2)

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_5 & & & & & \\ & \theta_6 & & & & \\ & & \delta_2 & & & \\ & & & \delta_3 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58341.9 & 29170.95 & -21878.21 & 21878.21 \\ 29170.95 & 58341.9 & -21878.21 & 21878.21 \\ -21878.21 & -21878.21 & 10939.1 & -10939.1 \\ 21878.2 & 21878.2 & -10939.1 & 10939.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas de empotramiento de la barra 1 vale (ec 4)

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM



$$r_{1e} = \begin{bmatrix} 4.9333 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 \\ -4.9333 + 0.41667 r_1 + 0.91667 r_2 \\ -7.4 + 0.375 r_1 + 1.625 r_2 \\ -7.4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

El vector de cargas de empotramiento de la barra 2 vale (ec 4)

$$r_{2e} = \begin{bmatrix} -4.9333 - 0.91667 r_2 - 0.41667 r_3 \\ -4.9333 + 0.41667 r_2 + 0.91667 r_3 \\ -7.4 + 0.375 r_2 + 1.625 r_3 \\ -7.4 + 1.625 r_2 + 0.375 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de la estructura están dados por suma de las matrices y vectores de las barras 1 y 2, respectivamente. No se considera el grado de libertad 5 ( $\theta_5$ ) porque por simetría es igual a cero.

$$K = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_6 \\ 10939.1 & -10939.1 & 0 & -21878.2 & 0 \\ -10939.1 & 21878.2 & -10939.1 & 21878.2 & -21878.2 \\ 0 & -10939.1 & 10939.1 & 0 & 21878.2 \\ -21878.2 & 21878.2 & 0 & 58341.9 & 0 \\ 0 & -21878.2 & 21878.2 & 0 & 58341.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

$$r_e = \begin{bmatrix} -7.4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 \\ -14.8 + 0.375 r_1 + 3.25 r_2 + 0.375 r_3 \\ -7.4 + 1.625 r_2 + 0.375 r_3 \\ 4.9333 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 \\ -4.9333 + 0.41667 r_2 + 0.91667 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

$$r_{1c} = \begin{bmatrix} -35 \\ -50 \\ -35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Tomando en cuenta que por simetria  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $\theta_4 = -\theta_6$ , y utilizando la ecuacion matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$10939.1 \delta_1 - 10939.1 \delta_2 - 21878.12 \theta_4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 - 7.4 - 35 = 0 \quad (a)$$

$$-21878.2 \delta_1 + 21878.2 \delta_2 + 43756.4 \theta_4 + 0.75 r_1 + 3.25 r_2 - 14.8 - 50 = 0 \quad (b)$$

$$-21878.2 \delta_1 + 21878.2 \delta_2 + 58341.9 \theta_4 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 + 4.9333 = 0 \quad (c)$$

b) Hundimientos del terreno

Se emplea la ec 5

$$\delta_i = \delta_{o1} + \sum_{j=1}^{n_e} M_{ij} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

Los valores de influencia  $I_{ijk}$ , se obtienen aplicando presiones unitarias y calculando los esfuerzos producidos por estas presiones unitarias. Por ejemplo, el valor  $I_{111}$  se determina aplicando una presion unitaria en el área 1 (área de 2 por 2 m<sup>2</sup>) y calculando el esfuerzo normal vertical  $\sigma_z$  bajo el punto 1, en el primer estrato, a la profundidad  $z = 0.8/2 = 0.4$  m. Aplicando la ecuación de Boussinesq se halla un  $\sigma_z = I_{111} = 0.4878$ . Los demas valores de influencia se obtienen en forma similar.

En la tabla 1 se presentan los valores de influencia del terreno de cimentacion y en la tabla 2 las magnitudes de los elementos de la matriz de flexibilidades del suelo. Tomando en cuenta que por simetria  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $r_1 = r_3$ , se obtienen los hundimientos  $\delta_i$  en funcion de las cargas  $r_i$ :

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (d)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (e)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones a a e:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.021759 \text{ m} & \delta_2 &= 0.020075 \text{ m} & \theta_4 &= 0.0010381 \\ r_1 &= 26.129 \text{ t/m} & r_2 &= 11.271 \text{ t/m} & & \end{aligned}$$

e) Elementos mecánicos

Como ejemplo, determinaremos los elementos mecánicos en la barra 1. Aplicando las ecs 6 a 9

$$M'_4 = 0 \quad M'_5 = 9.717 \text{ t.m} \quad V'_1 = 35 \text{ t} \quad V'_2 = 25 \text{ t}$$

f) Expansiones del subsuelo

Para estimar el efecto de una expansión del subsuelo, consideremos que los puntos 1 y 3 sufren un levantamiento en campo libre de 2.5 cm. La ec  $d'$  queda

$$\delta_1 = -0.025 + 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (d')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones  $a$  a  $e$  (con la ec  $d'$  en lugar de la ec  $d$ ), se halla

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0003896 & \delta_2 &= 0.005754 \text{ m} & \theta_4 &= -0.0002122 \\ r_1 &= 35.247 \text{ t/m} & r_2 &= 2.153 \text{ t/m} & & \end{aligned}$$

Hallemos los elementos mecánicos en la barra 1, aplicando las ecs 6 a 9

$$M'_4 = 0 \quad M'_5 = 46.189 \text{ t.m} \quad V'_1 = 35 \text{ t} \quad V'_2 = 25 \text{ t}$$

Nótese el incremento de la reacción  $r_1$  de 26.129 a 35.247 t/m y la disminución de la reacción  $r_2$  de 11.271 a 2.153 t/m. También es significativo el incremento del momento flexionante en el nudo 5, que pasa de 9.717 a 46.189 t.m, con un aumento de 375 %.

TABLA 1

RECULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA  
 NTO. ESTRATO, CARGA, VALOR DE INFLUENCIA

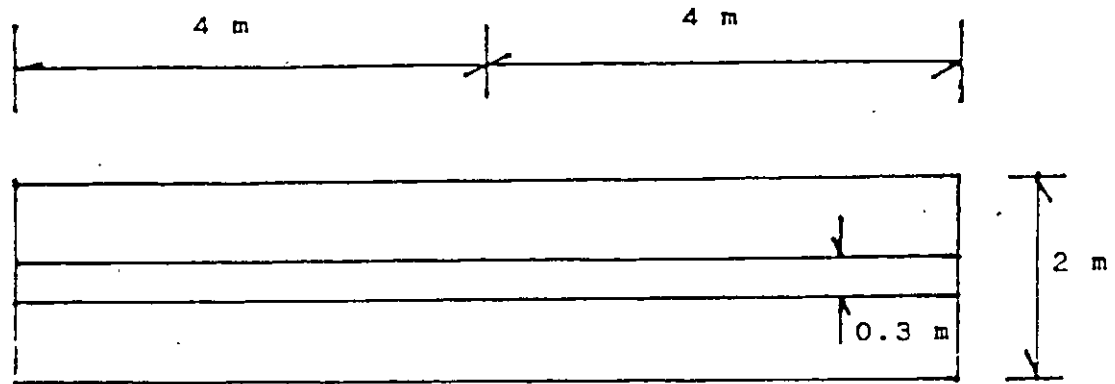
1	1	.4878484
1	2	7.820726E-04
1	3	7.838011E-06
2	1	.2963525
2	2	2.385181E-02
2	3	4.414916E-04
1	1	7.368624E-04
1	2	.9756968
1	3	7.368624E-04
2	1	2.162087E-02
2	2	.592705
2	3	2.162087E-02
1	1	7.838011E-06
1	2	7.820726E-04
1	3	.4878484
2	1	4.414916E-04
2	2	2.385181E-02
2	3	.2963525

TABLA 2

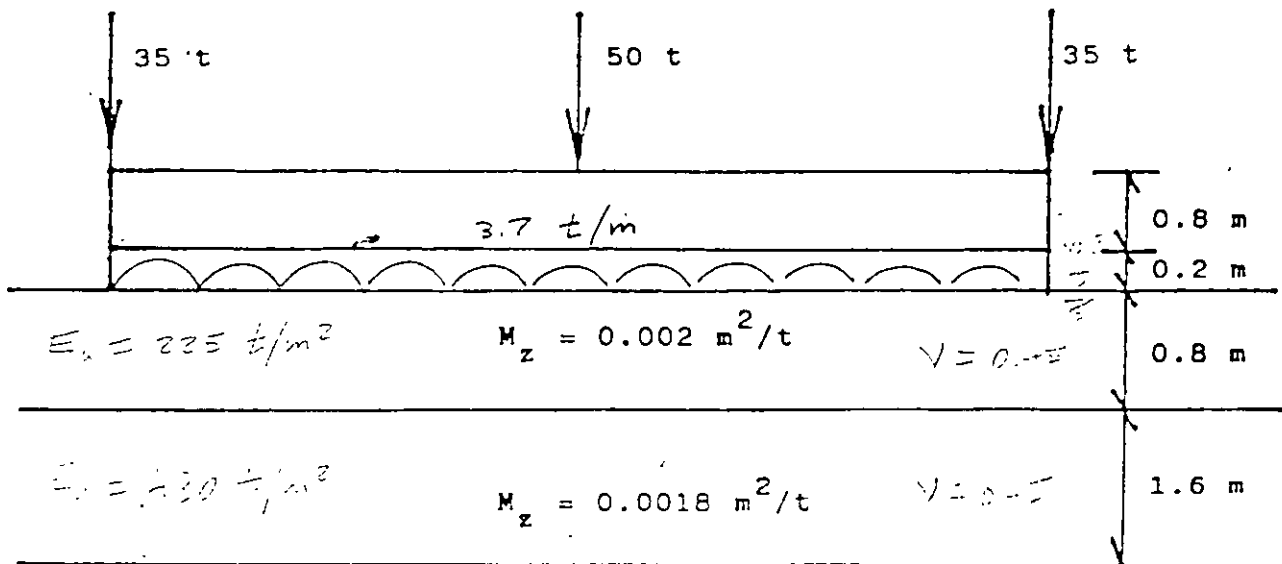
MATRIZ DE FLEXIBILIDADES DEL SUELO

K, FLE(I,K)

1	8.170263E-04
2	3.497227E-05
3	6.420184E-07
1	3.172354E-05
2	1.634053E-03
3	3.172354E-05
1	6.420184E-07
2	3.497227E-05
3	8.170263E-04



PLANTA

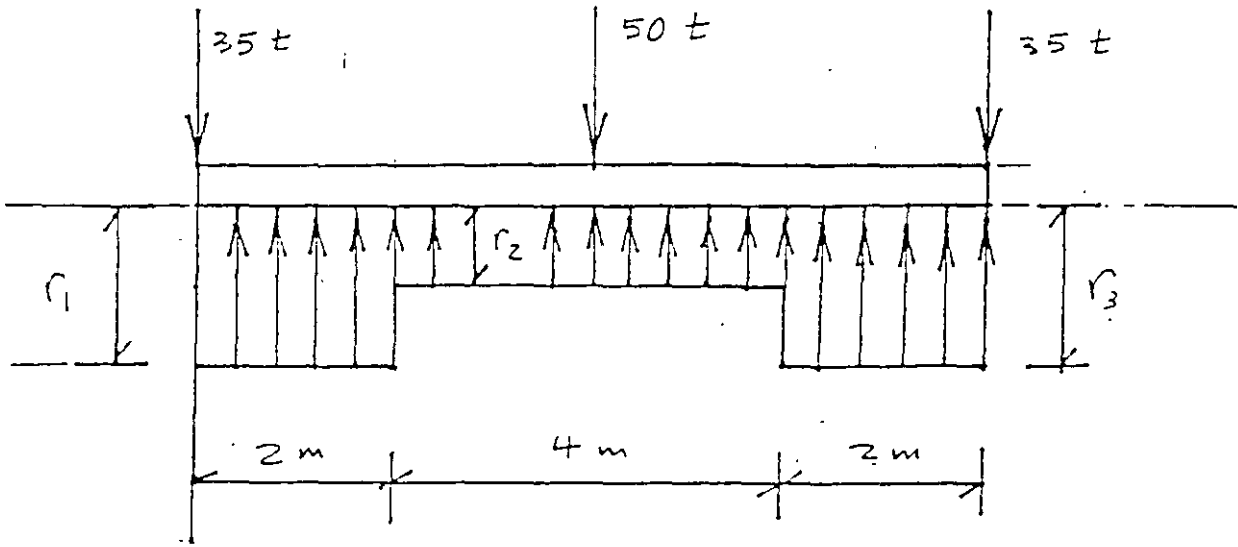


Roca

ELEVACION

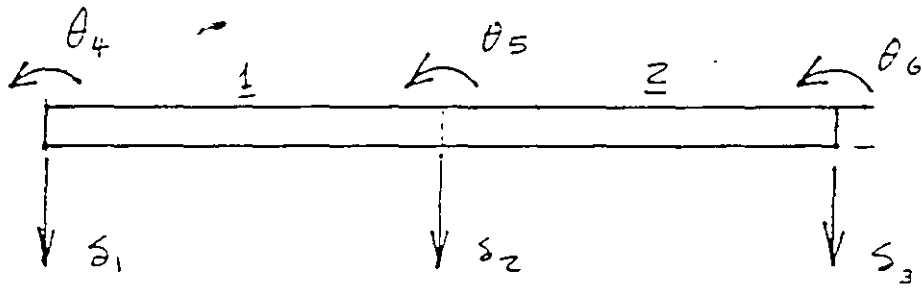
CARACTERISTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO  
DE CIMENTACION

FIGURA 1



SISTEMA DE CARGAS

FIGURA 2



NUMERACIÓN DE BARRAS Y  
GRADOS DE LIBERTAD

FIGURA 3



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**CIMENTACIONES SOMERAS**

**EXPOSITOR: ING. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**

## APUNTES DE CIMENTACIONES

## 5. CIMENTACIONES SOMERAS

Agustín Deméneghi Collina\*  
Héctor Sanginés García

En un cimiento somero, como en toda cimentación, se debe revisar su estabilidad tanto para los estados límite de falla como para los estados límite de servicio. Es decir, se debe verificar que se tenga una seguridad razonable para evitar que se presente una falla por resistencia al corte del terreno de cimentación, y que las deformaciones que sufra éste no afecten el comportamiento de los elementos de cimentación y de la propia estructura.

Cabe aclarar que en la revisión de una cimentación existen otros factores que deben tomarse en cuenta adicionalmente, pero la falla por resistencia al corte y las deformaciones del terreno de cimentación están entre los más importantes.

### 5.1 Profundidad de desplante

En una cimentación somera el estrato de apoyo se encuentra a poca profundidad, por lo que la profundidad de desplante debe ser tal que el cimiento quede desplantado satisfactoriamente en dicho estrato de apoyo.

Cabe aclarar que en el estudio de mecánica de suelos se define el estrato de apoyo de la cimentación, por lo que todos los elementos de esta deberán quedar desplantados en él. Durante la construcción de los cimientos se deberá verificar que se cumpla con esta disposición, evitando que los cimientos queden sobre suelo con sustancia orgánica, basura o material en estado suelto. El proceso constructivo deberá ser tal que no se afecte el terreno de cimentación, es decir, no se deberán alterar ni la estructura ni la humedad originales del terreno de cimentación, salvo que el estudio de mecánica de suelos establezca otras especificaciones. En muchas ocasiones, conviene colar una plantilla de concreto pobre de  $f'_c = 60 \text{ kg/cm}^2$  de 3 cm de espesor, inmediatamente después de llegar al fondo del corte.

La profundidad de desplante deberá ser tal que se cumpla con los requisitos de seguridad de la cimentación. En este sentido, se propone una profundidad de desplante y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad de la cimentación; el proceso se repite hasta determinar la profundidad de desplante que cumpla con lo anterior.

En general, es importante que los cimientos queden desplantados sobre el mismo estrato, ya que si se apoyan en materiales diferentes se

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM



pueden presentar asentamientos diferenciales en la estructura de cimentación.

El desplante de los cimientos deberá quedar abajo del suelo sujeto a erosión superficial o interna. Por ejemplo, en puentes el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de la profundidad de socavación de los materiales del lecho del río. Además, en cualquier cimentación somera existen suelos especialmente susceptibles a la erosión por agua o por viento, como son las arenas o los limos no plásticos, los que deberán protegerse para evitar que se descubran los cimientos.

Cuando el terreno de cimentación es una arcilla de tipo expansivo, el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de esta arcilla, para evitar que los movimientos por cambios de volumen de ella dañen la estructura de cimentación. Si los cimientos quedan por arriba de la arcilla expansiva, deberán tomarse las precauciones correspondientes para que la estabilidad de la cimentación no resulte afectada.

No existe una profundidad mínima de desplante aceptada de manera general por los ingenieros de mecánica de suelos, pero a manera de ejemplo, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1966 dice que "los cimientos deberán desplantarse, por lo menos, 50 cm bajo la superficie del terreno (...) Se exceptúan de este requisito las construcciones cimentadas directamente sobre roca". Por otra parte, se puede considerar en una cimentación somera una profundidad de desplante máxima de 2.5 m, a partir de la cual se trataría ya de una cimentación intermedia o profunda.

## 5.2 Determinación del área de la cimentación

El área de un cimiento somero es aquella para la cual la cimentación cumple con los requisitos de seguridad correspondientes. Por lo tanto, en la práctica se supone una cierta área y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad; se procede por tanteos, hasta hallar el área que haga que el cimiento cumpla con todos y cada uno de los requisitos de seguridad, al mínimo costo.

Con el propósito de reducir el número de tanteos, se puede estimar en forma aproximada la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación, y hallar un área preliminar para iniciar los cálculos.

La capacidad de carga admisible del terreno de cimentación es aquella presión vertical media de contacto entre la subestructura y el terreno, que garantiza un comportamiento adecuado de la cimentación. Se entiende por comportamiento adecuado que exista un factor de seguridad razonable contra una falla por resistencia al corte del suelo, y que el asentamiento del cimiento no produzca daños a la estructura, ni afecte su buen funcionamiento. Usualmente la capacidad de carga admisible se halla dividiendo la capacidad de carga última del suelo entre un cierto factor de seguridad. Sin embargo, se debe

verificar que la capacidad de carga admisible o presión media de contacto no produzca asentamientos excesivos del cimiento. En la tabla 4.1 se muestran valores de asentamientos permisibles para diferentes clases de cimientos someros.

Por lo anterior, la capacidad de carga admisible o presión media de contacto vale

$$q_a = \Sigma Q / A \quad (5.1)$$

donde  $\Sigma Q$  = sumatoria de cargas al nivel de desplante del cimiento  
 $A$  = área de contacto entre cimiento y suelo

Despejando  $A$  de la ec 5.1

$$A = \Sigma Q / q_a \quad (5.2)$$

Por otra parte, se define la capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión como la diferencia de la presión de contacto menos la presión total previamente existente al nivel de desplante de la subestructura, es decir

$$q_{an} = q_a - \gamma D_f \quad (5.3)$$

donde  $q_{an}$  = capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión  
 $q_a$  = presión de contacto o capacidad de carga admisible  
 $\gamma$  = peso volumétrico natural del suelo  
 $D_f$  = profundidad de desplante

En la tabla 5.1 se presentan valores aproximados de la capacidad de carga admisible neta del terreno, para diferentes tipos de suelo.

TABLA 5.1  
 CAPACIDAD DE CARGA ADMISIBLE NETA APROXIMADA DEL SUELO  
 $q_{an}$ , t/m<sup>2</sup>

<u>Tipo de suelo</u>	<u>Zapatas</u>	<u>Losa de cimentación</u>
Arcilla blanda, arena suelta	3.5-6.0	1.5-2.0
Arcilla de consistencia media	5.0-8.0	2.0-3.0
Arena medianamente compacta, arcilla firme	7.0-10.0	3.0-5.0
Arena compacta, toba cementada	9.0-13.0	5.0-7.0
Arena muy compacta, roca sana	12.0-20.0	8.0-12.0

Cabe aclarar que el área A no se puede calcular directamente de la ec 5.2, pues  $\Sigma Q$  no se conoce a priori, ya que depende del área del cimiento, por lo que para estimar en forma aproximada esta área se procede de la siguiente forma:

La resultante de cargas  $\Sigma Q = \Sigma Q' + W_{cim}$ , en que  $\Sigma Q'$  es la carga al nivel de la superficie del terreno o al nivel de piso terminado y  $W_{cim}$  es el peso del cimiento (incluyendo el peso del relleno que está sobre él),

$$\Sigma Q / A = \Sigma Q' / A + W_{cim} / A$$

pero  $W_{cim} / A \approx \gamma D_f$       Y       $q_a = q_{an} + \gamma D_f = \Sigma Q / A$   $\frac{\Sigma Q'}{A} + \gamma D_f$

$\therefore q_{an} + \gamma D_f \approx \Sigma Q' / A + \gamma D_f$   $\frac{\Sigma Q}{A} = \frac{q_a}{\gamma} = \frac{\Sigma Q'}{A} + \frac{W_{cim}}{A}$

Y  $q_{an} \approx \Sigma Q' / A$   $q_a = \frac{\Sigma Q'}{A} + \gamma D_f$

$A \approx \Sigma Q' / q_{an}$  (5.4)

pero  $q_{an} = q_a - \gamma D_f = \frac{\Sigma Q'}{A} - \gamma D_f$

La ec 5.4 permite estimar en forma aproximada el área del cimiento.

### 5.3 Zapatas corridas

#### 5.3.1 Mecánica de suelos

En ocasiones se tiene que utilizar una retícula a base de zapatas corridas, de tal forma que el peso total que se trasmite en un tablero al nivel de cimentación se reparte en las cuatro zapatas corridas que limitan al tablero. Para ilustrar esta situación, consideremos el tablero de la fig 5.1a y sea  $\Sigma Q$  la carga que trasmite la estructura al nivel de la cimentación. Se pueden calcular los semianchos  $b_1$  y  $b_2$  de las zapatas corridas de la fig 5.1b considerando que cada zapata toma una carga proporcional al área tributaria correspondiente del tablero. Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales, y llamando  $q_a$  a la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación y  $w$  al peso unitario de la estructura

$$w = \Sigma Q / a_1 a_2 \tag{5.5}$$

el ancho  $b_2$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación cuadrática

$$4a_2 q_a b_2^2 + [a_1^2 w - 4 a_1 a_2 q_a - a_1 w (2 a_2 - a_1)] b_2 + w a_1^2 (2 a_2 - a_1) = 0 \tag{5.6}$$

### 5.2.2 Diseño estructural

Las alas de una zapata corrida se deben revisar por los siguientes conceptos: (a) tensión diagonal, (b) flexión, y (c) temperatura. A continuación se detalla la revisión de cada uno de ellos. Cabe aclarar que lo que rige en general en el diseño de una zapata de concreto es la tensión diagonal.

#### a) Tensión diagonal

En una zona cercana al paño de la columna o muro que llega a la zapata se puede presentar una falla por tensión diagonal, ocasionada esta a su vez por esfuerzo cortante (fig 5.5). Esta revisión se lleva a cabo verificando que la fuerza cortante última a una distancia "d" del paño de la columna o muro sea menor que la fuerza cortante resistente.

Para la fuerza cortante resistente, las Normas de Concreto establecen lo siguiente

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

donde

- b = ancho del elemento
- d = peralte efectivo del elemento
- p = cuantía o porcentaje de acero
- $f_c^* = 0.8 f'_c$
- $F_R$  = factor de resistencia

En elementos anchos, como losas, zapatas y muros, en los que el ancho b no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ( $b \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M / V d$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cR}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo.

#### b) Flexión

La sección crítica por flexión en el ala de la zapata depende del material que forme la columna o muro que llega a la zapata. En la fig 5.6 se presenta la sección crítica por flexión para tres diferentes tipos de material.

La revisión por flexión se realiza verificando que el momento último en la sección crítica sea menor que el momento resistente en dicha sección. A continuación se presenta un resumen de las expresiones necesarias para la revisión por flexión de las Normas de Concreto.

El momento resistente dado por las Normas de concreto es el siguiente:

$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5 q) \quad (5.7)$$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f'_c} / f_y \quad (5.8)$$

mientras que el máximo es  $0.75p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje balanceado que vale

$$p_b = (f''_c / f_y) [4800 / (f_y + 6000)] \quad (5.9)$$

donde

$$f''_c = 0.85 f^*_c \quad \text{si } f^*_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.10)$$

$$f''_c = (1.05 - f^*_c / 1250) f^*_c \quad \text{si } f^*_c > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.11)$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último,  $M_u$ , está dado por las siguientes expresiones

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f''_c} \quad (5.12)$$

$$p = q f''_c / f_y \quad (5.13) \quad A_s = p b d \quad (5.14)$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde

$s$  = separación entre varillas

$a_s$  = área de la varilla que se emplea

$d$  = distancia para la que se requiere el área  $A_s$

$A_s$  = área de acero requerida

### c) Temperatura

El acero longitudinal en la zapata se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto):

$$A_s = 66000 (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.16)$$

en que

$A_s$  = área de acero requerida por temperatura, para un espesor  $h/2$  de la losa de la zapata, en  $\text{cm}^2/\text{m}$   
 $h/2$  = semiespesor de la losa de la zapata, en cm

Cuando el elemento estructural está en contacto con el suelo, se recomienda emplear por temperatura un área de acero igual a  $1.5 A_s$ . Empleando  $1.5 A_s$  en vez de  $A_s$  en la ec 5.16, dado que los cimientos

están siempre en contacto con el terreno, obtenemos la siguiente expresión

$$A_s = 66000 (1.5) (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.17)$$

### Ejemplo 5.3. Zapata corrida sometida a carga vertical

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.7. La longitud de la zapata  $L = 6$  m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga  $F_c = 1.4$ .

En el terreno de cimentación  $F_R = 0.45$

Solución

a) Mecánica de suelos

a.1) Estado límite de falla

En un suelo cohesivo, la revisión de la seguridad por resistencia al corte del suelo es satisfactoria cuando se cumple la desigualdad 2.1:

$$\Sigma Q F_c / A < c_u N_c F_R + p_v \quad (2.1)$$

$$\text{Sea } q_{cu} = \Sigma Q F_c / A \quad (2.2)$$

$$q_{Rc} = c_u N_c F_R + p_v \quad (2.3)$$

$$\text{Por lo tanto } q_{cu} < q_{Rc} \quad (2.4)$$

En las expresiones anteriores:

$\Sigma Q F_c$  = suma de las acciones verticales a tomar en cuenta en la combinación considerada, afectada por su respectivo factor de carga,

$A$  = área del cimiento,  $m^2$

$p_v$  = presión vertical total a la profundidad de desplante por peso propio del suelo,  $t/m^2$

$\gamma$  = peso volumétrico del suelo,  $t/m^3$

$c_u$  = cohesión aparente,  $t/m^2$ , determinada en ensaye triaxial UU

$B$  = ancho de la cimentación, m

$N_c$  es el coeficiente de capacidad de carga, dado por

$$N_c = 5.14 (1 + 0.25 D_f/B + 0.25 B/L) \quad (2.8)$$

para  $D_f/B < 2$  y  $B/L < 1$ , donde  $D_f$  es la profundidad de desplante en metros. En caso de que  $D_f/B$  y  $B/L$  no cumplan las desigualdades

anteriores, dichas relaciones se considerarán iguales a 2 y 1, respectivamente.

La desigualdad 2.2 se aplica al nivel de desplante del cimiento, por lo que hay que valorar el peso del relleno y de la zapata

$$W_r = (1.3 - 0.2)(0.4)(1.5) = 0.66 \text{ t}$$

$$W_z = [(1.3)(0.2) + (0.2)(0.4)](2.4) = 0.816 \text{ t}$$

La suma de cargas al nivel de desplante del cimiento vale  $0.66 + 0.816 + 10.4 = 11.876 \text{ t}$ , es decir,  $\Sigma Q = 11.876 \text{ t}$  (por cada metro de longitud de zapata).  $A = 1.3(6) = 7.8 \text{ m}^2$ .

Sustituyendo en la ec 2.2  $q_{cu} = \Sigma Q F_c / A = 12.79 \text{ t/m}^2$

Sustituyendo en la ec 2.8, con  $B = 1.3 \text{ m}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $D_r = 0.6 \text{ m}$

$$N_c = 6.011$$

Sustituyendo en la ec 2.3  $q_{Rc} = c_u N_c F_R + p_v = 13.52 \text{ t/m}^2$

Se observa que  $q_{cu} < q_{Rc}$ , por lo tanto se cumple la desigualdad 2.4.

#### a.2) Estado límite de servicio

El asentamiento instantáneo de la zapata se puede calcular empleando la siguiente expresión, que proporciona el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado apoyado sobre un medio semiinfinito

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left( L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde  $q =$  incremento neto de presión =  $8.18 \text{ t/m}^2$   
 $B =$  ancho del rectángulo =  $1.3/2 = 0.65 \text{ m}$   
 $L =$  longitud del rectángulo =  $6/2 = 3 \text{ m}$   
 $E =$  módulo de elasticidad del medio =  $1600 \text{ t/m}^2$   
 $\nu =$  relación de Poisson del medio =  $0.25$

Nótese que el área cargada se divide entre cuatro. Sustituyendo valores en la ec 3.19  $\delta = 0.0032 \text{ m}$

El asentamiento debido a toda el área se obtiene multiplicando por cuatro el calculado con la ec 3.19, por lo tanto

$$\delta_T = 4 \delta = 0.0128 \text{ m} = 1.28 \text{ cm}$$

que resulta menor que el asentamiento permisible de  $3 \text{ cm}$ .

#### b) Diseño estructural

##### b.1) Revisión por cortante (tensión diagonal)

La revisión por cortante se lleva a cabo a una distancia  $d$  del paño

del muro (fig 5.6). Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto.

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

$$\text{donde } f_c^* = 0.8 f_c'$$

En elementos anchos, como losas, zapatas y muros, en los que el ancho  $b$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$  ( $b \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M / V d$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cR}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo.

Como trabajamos por metro de longitud de zapata  $b = 100$  cm. Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm; y dado que el diámetro de la varilla del No 4 es de 1.27 cm, su mitad vale 0.64 cm, por lo que el peralte efectivo del acero de la zapata es  $d = 20 - 3.6 = 16.4$  cm.

En este caso se cumple ampliamente que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo.  $M / V d = 0.645 / 3.341(0.164) = 1.177 < 2$ , por lo tanto cumple como elemento ancho. Sustituyendo en la ec 5.6 se obtiene  $V_{cR} = 8298$  kg.

Como se mencionó antes, el cortante último se halla a una distancia "d" del paño del muro (fig 5.8)

$$V = 8.66(0.386) = 3.34 \text{ t} \quad V_u = F_c V = 4.63 \text{ t} = 4630 \text{ kg}$$

Se observa que  $V_{cR} > V_u \quad \therefore$  Cumple

## b.2) Flexión

El momento flexionante en la sección crítica vale (fig 5.8)

$$M = q_n l^2 / 2 = 8.66 (0.55)^2 / 2 = 1.31 \text{ t.m}$$

y el momento último  $M_u = F_c M = (1.4) (1.31) = 1.83 \text{ t.m}$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{f_c'} / f_y \quad (5.8)$$

mientras que el máximo es  $0.75p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje balanceado que vale

$$p_b = (f_c'' / f_y) [4800 / (f_y + 6000)]$$

donde



$$f_c^* = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = (1.05 - f_c^* / 1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último  $M_u$  está dado por las siguientes expresiones

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f_c^*} \quad (5.12)$$

$$p = q f_c^* / f_y \quad (5.13) \quad A_s = p b d \quad (5.14)$$

Sustituyendo valores se obtienen los siguientes resultados

$$p_{\min} = 0.00236 \quad p_{\max} = 0.0114$$

$$p = 0.00186 \quad \therefore \text{rige } p_{\min} \quad A_s = p b d = 3.87 \text{ cm}^2$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde  $a_s$  = área de la varilla que se emplea  
 $d$  = distancia para la que se requiere el área  $A_s$   
 $A_s$  = área de acero requerida

Sustituyendo valores ( $a_s = 1.27 \text{ cm}^2$ , varilla No 4),  $s = 32 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se necesitan varillas del No 4 @ 32 cm.

El acero longitudinal se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión

$$A_s = [65000 (h/2) / f_y (h/2 + 100)] (1.5) \quad (5.16)$$

en que  $A_s$  = área de acero requerida por temperatura, en  $\text{cm}^2 / \text{m}$   
 $h$  = <sup>50 cm</sup> espesor del elemento (dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo), en cm

Sustituyendo valores  $A_s = 2.14 \text{ cm}^2 / \text{m}$

Aplicando la ec 5.16, con varillas del No 3 ( $a_s = 0.71 \text{ cm}^2$ ),  $s = 23 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se requieren por temperatura, en la dirección longitudinal de la zapata, varillas del No 3 @ 23 cm.

En la fig 5.9 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

La reacción del suelo en una zapata corrida sometida a fuerza vertical y momento puede ser de tipo trapezoidal o de tipo triangular, tal como se indica en la fig 5.10 (en el inciso 3.5 se indica la forma de hallar estas reacciones). El cálculo del cortante y del momento en las secciones críticas se realiza con alguno de estos diagramas de reacción. Sin embargo, este procedimiento resulta laborioso, por lo que en ocasiones se sustituyen, para fines de

cálculo, los diagramas trapecial o triangular por una reacción uniforme equivalente, la cual se obtiene dividiendo la carga Q entre el ancho reducido B' (Meli 1985):

$$B' = B - 2e \quad (5.17) \quad e = M / Q \quad (5.18)$$

$$q' = Q / B' \quad (5.19)$$

En la fig 5.11 se muestra la reacción  $q'$ , la cual, repetimos, no corresponde a la reacción real del terreno, sino que únicamente se emplea para fines de cálculo. Con esta reacción  $q'$  se determinan el cortante y el momento en las secciones críticas correspondientes.

#### Ejemplo 5.4 Zapata corrida sometida a carga vertical y momento

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.12. La longitud de la zapata  $L = 8$  m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga  $F_c = 1.1$ .

En el terreno de cimentación  $F_n = 0.45$

Giro permisible = 0.82 %

Asentamiento permisible = 5 cm

Solución

a) Mecánica de suelos

El ancho de la zapata se obtiene empleando la ec 5.4

$$A = \Sigma Q' / c_{an} \quad (5.4)$$

Cuando existe momento se tiene que trabajar con el ancho reducido B' (ec 2.15, inciso 2.2)

$$B' = B - 2e$$

donde B = ancho del cimiento

$$e = M / \Sigma Q$$

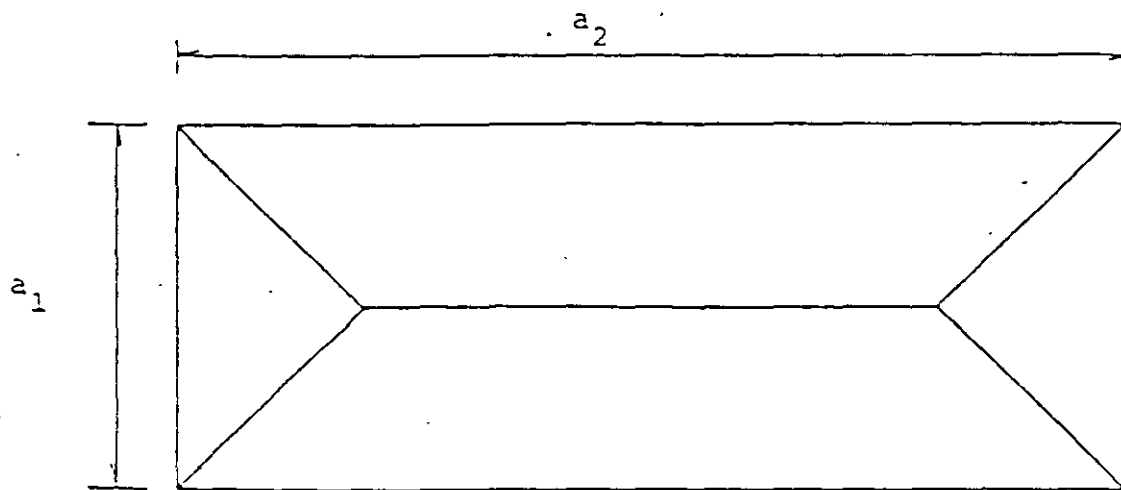
Consideremos inicialmente que no existe momento, entonces el ancho B' = B ; trabajando por unidad de longitud del cimiento  $A = B(1) = B$ ; de la ec 5.4

$$B' = \Sigma Q' / c_{an} = 15 / 13 = 1.15 \text{ m}$$

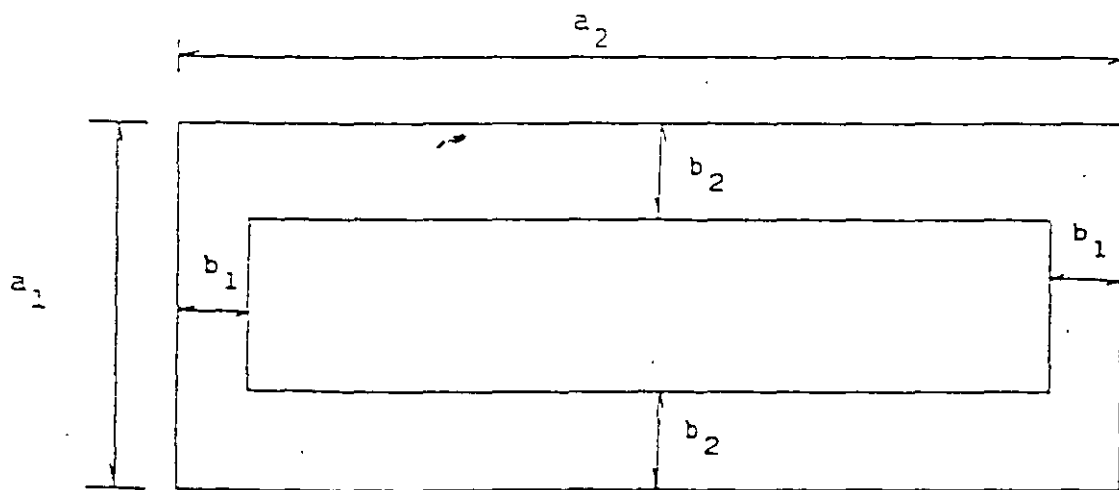
Si existe momento  $B = B' + 2e$

$$e = M / 1.1 (\Sigma Q') \quad (\text{considerando un 15 \% de incremento debido al peso del cimiento})$$

$$e = 0.30 \text{ m}$$



a) Tablero con áreas tributarias



b) Planta de las zapatas corridas

FIG 5.1 DETERMINACIÓN DE ANCHOS DE ZAPATAS CORRIDAS

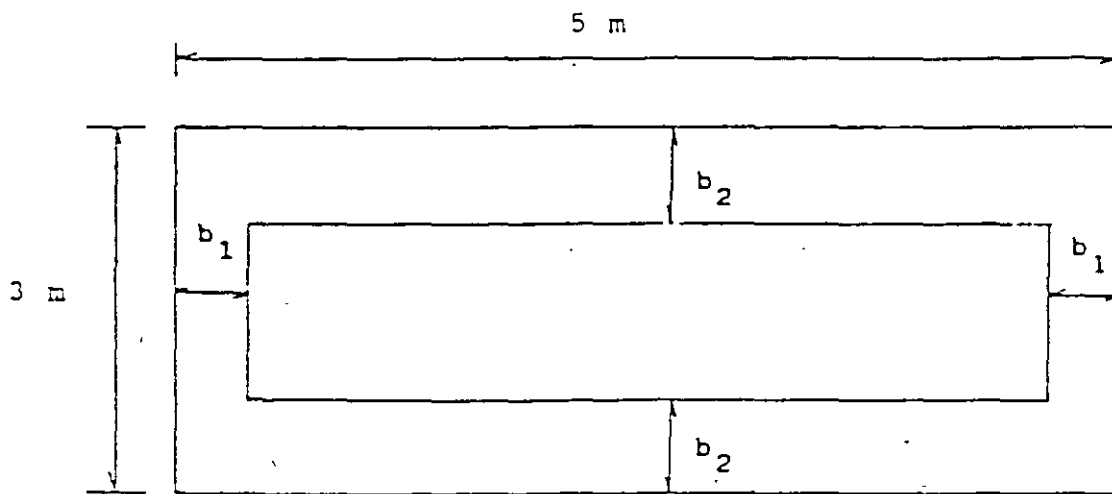


FIG 5.2 ZAPATAS DEL EJEMPLO 5.1

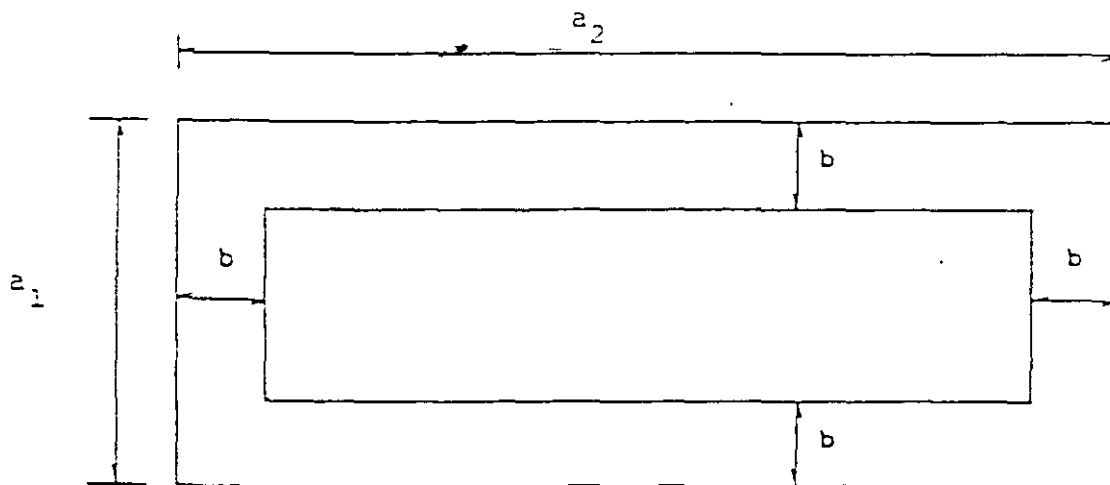


FIG 5.3 ZAPATAS CORRIDAS CON ANCHO ÚNICO

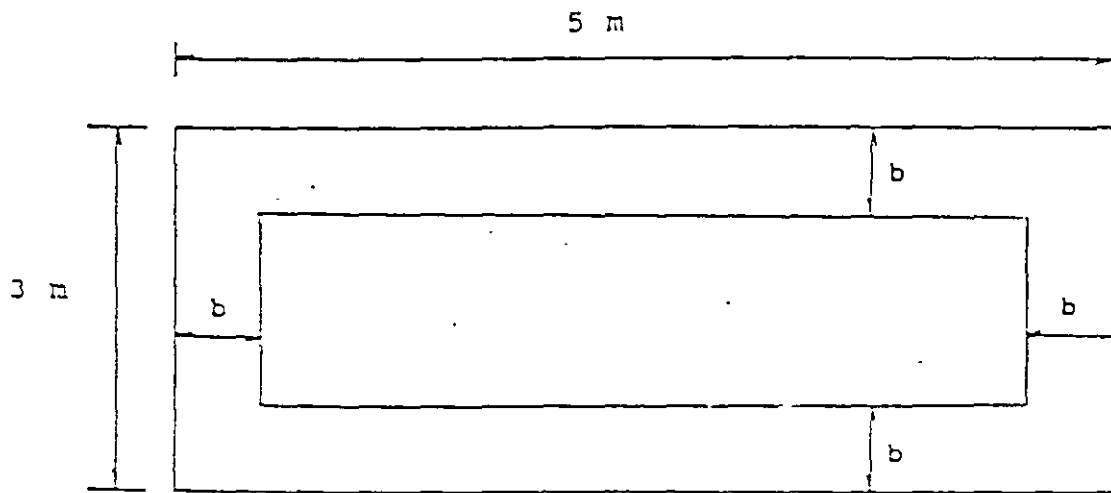


FIG 5.4 ZAPATAS CORRIDAS DEL EJEMPLO 5.2

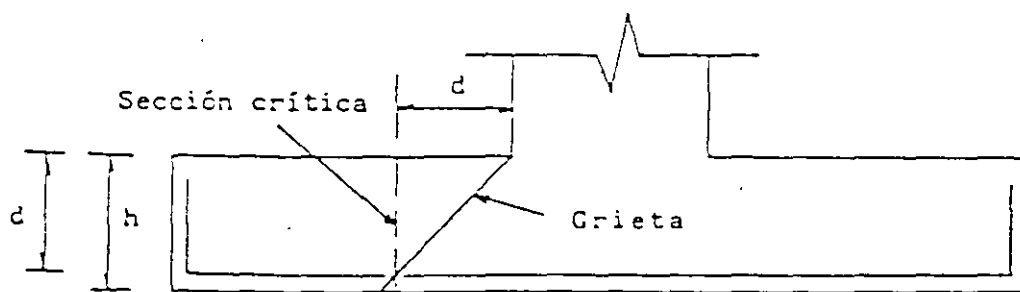
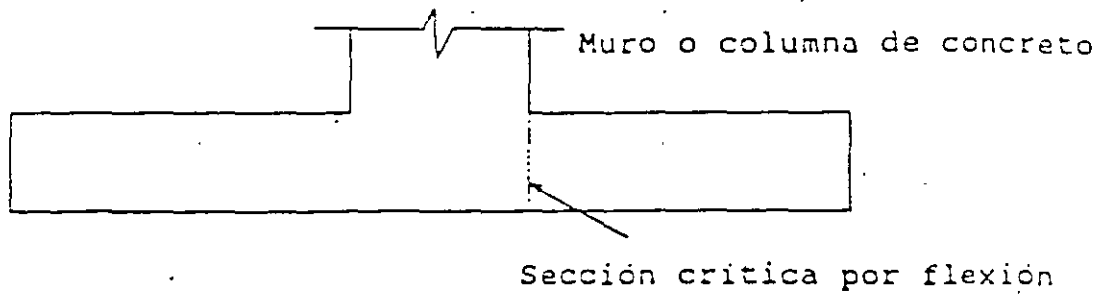
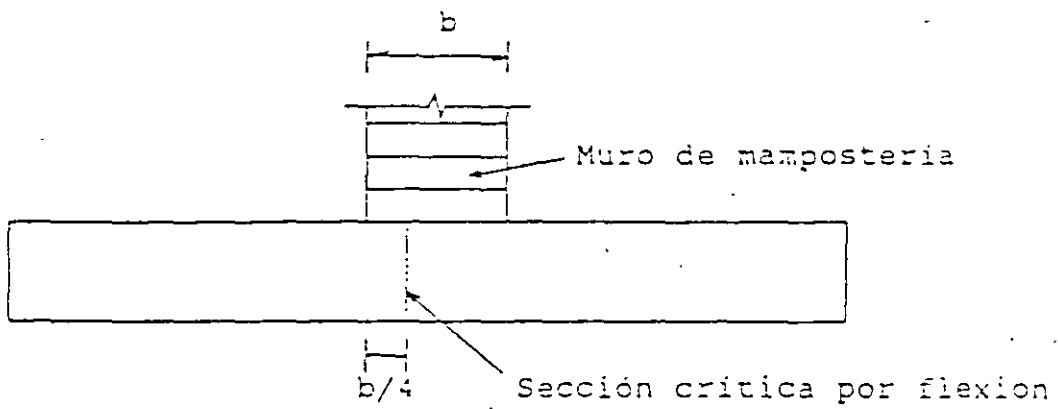


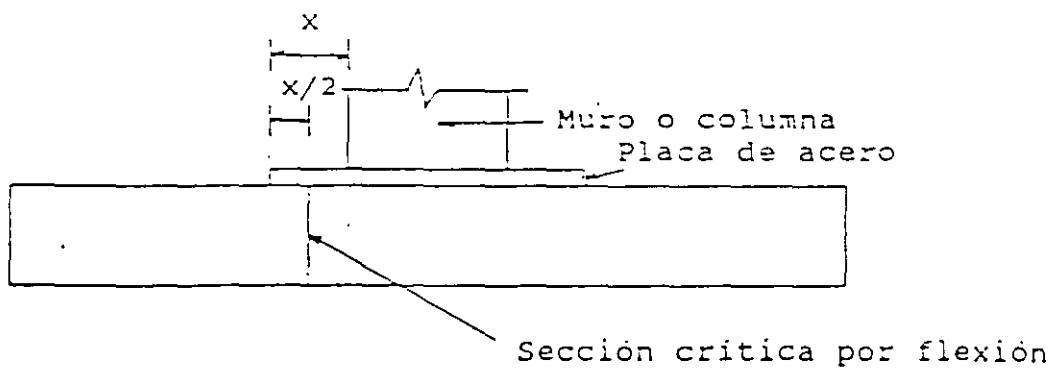
FIG 5.5 SECCIÓN CRÍTICA POR CORTANTE



a) Muro o columna de concreto reforzado

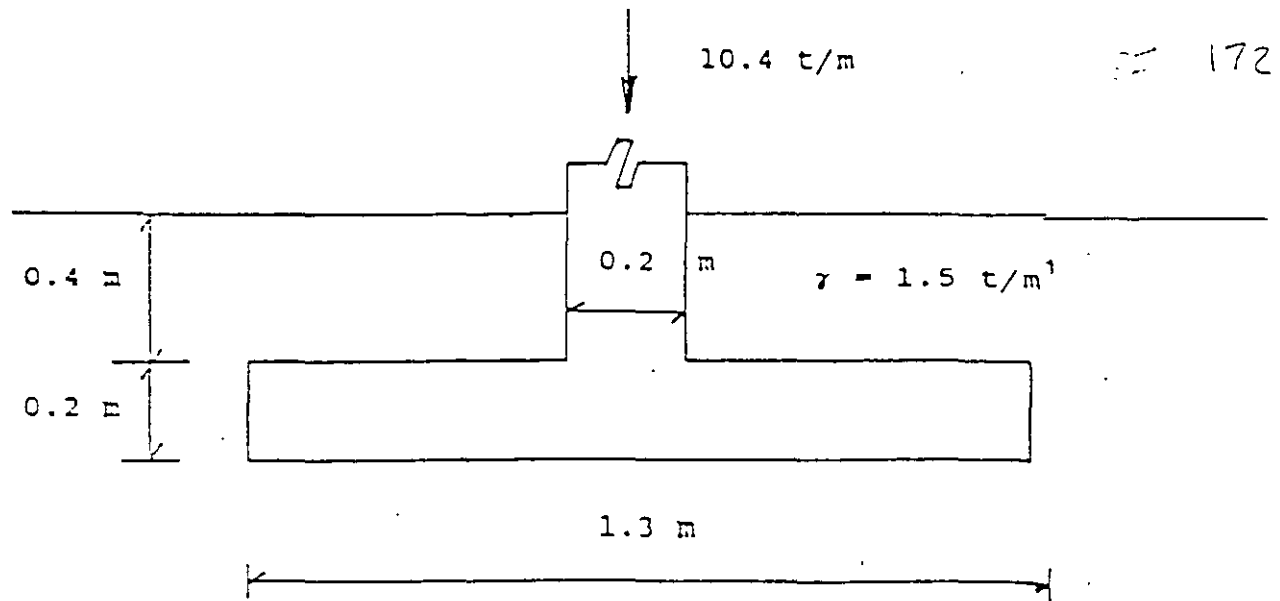


b) Muro de mampostería



c) Muro o columna con pedestal de placa de acero

FIG 5.6 SECCIONES CRÍTICAS POR FLEXIÓN



$c = 6 \text{ t/m}^2$        $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$       Toba parcialmente cementada

$E_{ep} = 1600 \text{ t/m}^2$        $\nu = 0.25$

FIG 5.7 ZAPATA CORRIDA SOMETIDA A CARGA VERTICAL  
(EJEMPLO 5.3)

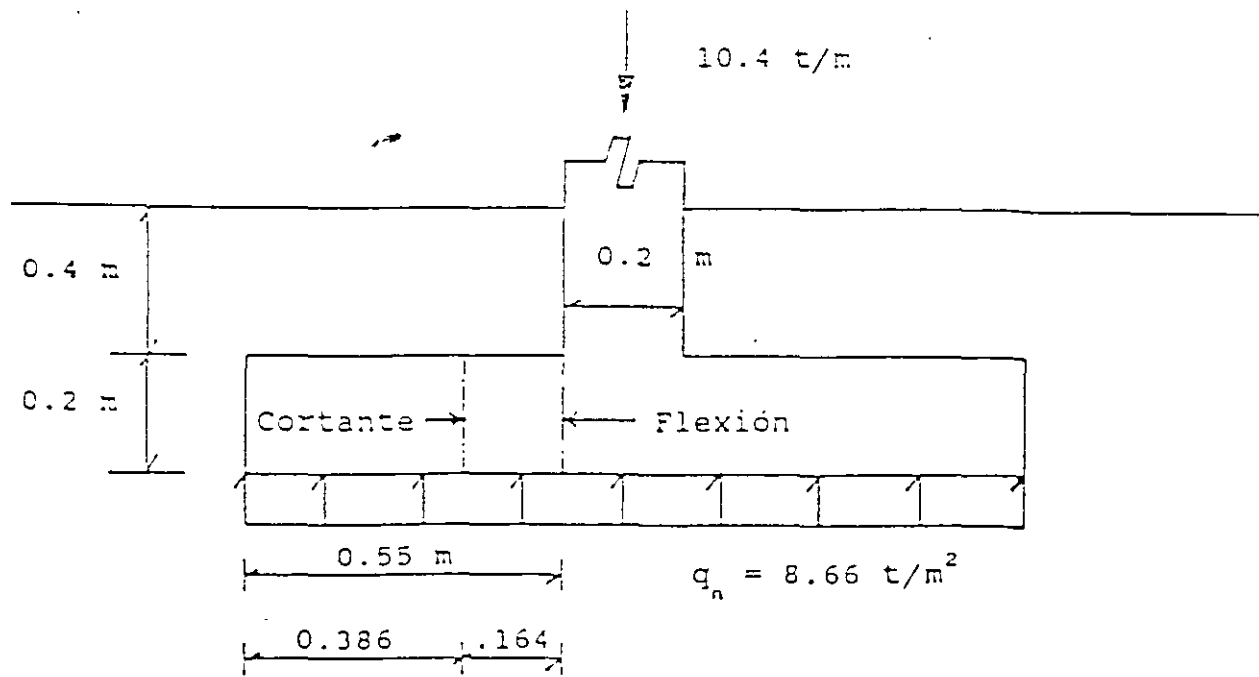


FIG 5.8 REACCIÓN DEL TERRENO Y SECCIONES CRITICAS POR CORTANTE  
Y POR FLEXIÓN (EJEMPLO 5.3)

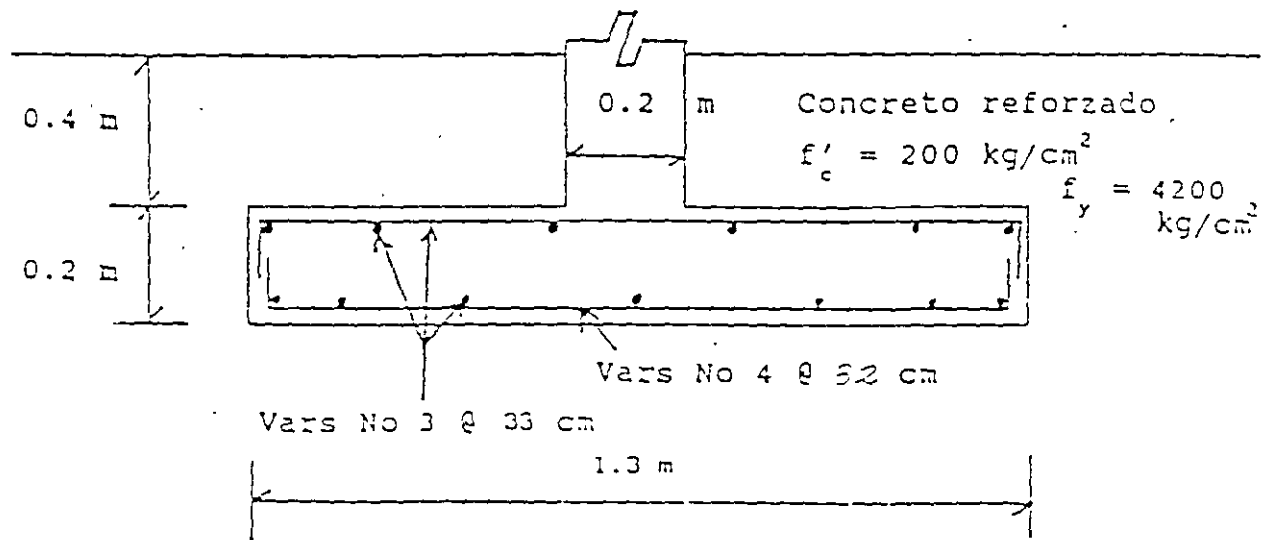
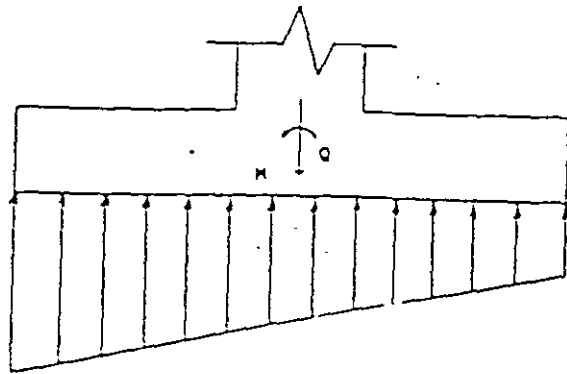
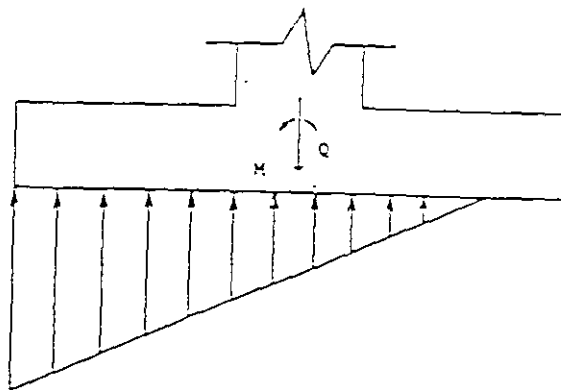


FIG 5.9 CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE LA ZAPATA (EJEMPLO 5.3)





a) Reacción trapecial



b) Reacción triangular

FIG 5.10 REACCIÓN DEL TERRENO TRAPEZIAL O TRIANGULAR

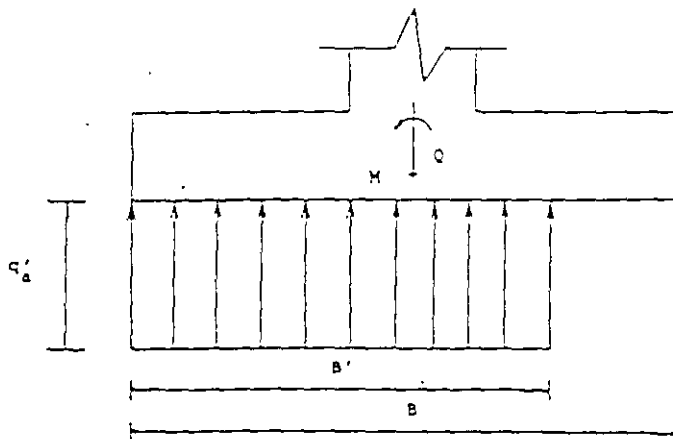


FIG 5.11 REACCIÓN DEL TERRENO RECTANGULAR

### EJEMPLO DE DISEÑO ESTRUCTURAL DE UNA ZAPATA RECTANGULAR

Hacer el diseño estructural de la zapata rectangular de concreto reforzado de la fig 1

Columna de 25 por 30 cm. Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm Profundidad de desplante = 60 cm. Considerar en el concreto reforzado  $f_c' = 200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .  $\Sigma Q = 26 \text{ t}$ ,  $M_y = 4.2 \text{ t}\cdot\text{m}$ ,  $M_x = 6.8 \text{ t}\cdot\text{m}$

#### Solución

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale

$$\Sigma Q = 26 + 1.7(2)(0.3)2.4 + 0.25(0.3)(0.3)(2.4) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(1.6) = 30.098 \text{ t}$$

$$e_x = M_y / \Sigma Q = 4.2 / 30.098 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / \Sigma Q = 6.8 / 30.098 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.421 \text{ m}, L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$$

La presión de contacto media entre cimiento y terreno vale

$$q = 30.098 / 1.7(2) = 8.852 \text{ t/m}^2$$

El incremento neto de presión en el contacto cimiento-terreno es

$$q_n = 8.852 - 1.6(0.6) = 7.892 \text{ t/m}^2$$

#### a) Penetración

De acuerdo con las Normas de Concreto, la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual a  $d/2$ , siendo  $d$  el peralte efectivo de la losa (fig 2)

Revisaremos la penetración de la columna en la dirección del eje  $y$

Cuando haya transferencia de momento se supondrá que una fracción de momento dada por

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 - d)/(c_2 + d)}} \quad (1)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(0.3 - 0.264)/(0.25 + 0.264)}} \\ \alpha = 0.412$$

se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño  $v_u$  se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (fig 2), es decir

$$v_{AB} = V/A_c + \alpha M_c A_B / J_c \quad (2)$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d) \quad (3)$$

$$A_c = 0.5692 \text{ m}^2$$

$$J_c = d(c_1 + d)^2/6 + (c_1 + d)d^2/6 + d(c_2 + d)(c_1 + d)^2/2 \quad (4)$$

$$J_c = 0.031206 \text{ m}^4$$

En columnas rectangulares  $c_1 = 0.3 \text{ m}$  es la dimensión paralela al momento transmitido y  $c_2 = 0.25 \text{ m}$  es la dimensión perpendicular a  $c_1$

En las expresiones anteriores,  $V$  es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta  $q_n$ , restando a la reacción del terreno las presiones debidas a peso propio de zapata y relleno.

$$q_n = 8.852 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 7.652 \text{ t/m}^2$$

$$V = 7.652 [1.7(2) - (0.25 + 0.264)(0.3 + 0.264)] = 23.799 \text{ t}$$

$$c_{1c} = (0.3 + 0.264)/2 = 0.282 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ec 2

$$v_{AB} = 23.799 / 0.5692$$

$$+ 0.412(6.8)(0.282) / 0.031206 = 67.13 \text{ t/m}^2$$

$$v_{ABu} = F_c v_{AB} = 1.4(67.13) = 93.98 \text{ t/m}^2$$

El esfuerzo cortante de diseño  $v_{ABu}$  (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores

$$v_{cR1} = F_R (0.5 - \gamma) \sqrt{f_c'} \quad (5)$$

$$v_{cR1} = 0.8 (0.5 - 1.7/2) \sqrt{160} = 13.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{cR2} = F_R \sqrt{f_c'} \quad (6)$$

$$v_{cR2} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c' = 0.8 f_c' \quad (7)$$

a menos que se suministre refuerzo  $\gamma = 1.7/2 = 0.85$  es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción

Se observa que

$$v_{ABu} = 9.40 \text{ kg/cm}^2 < v_{cR2} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 \therefore \text{Cumple}$$

#### b) Tensión diagonal

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia  $d$  del paño de la columna. Haremos la revisión en la dirección del eje  $y$ . Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto (fig 3).

Cálculo del cortante último

Las fuerzas se calculan con la reacción neta del terreno (tomando en cuenta el efecto de los dos momentos  $M_x$  y  $M_y$ ). La reacción vale

$$q' = \Sigma Q / B'L' = 30.098 / 1.421(1.5482) = 13.681 \text{ t/m}^2$$

$$\text{La reacción neta } q_n' = 13.681 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 12.481 \text{ t/m}^2$$

Hallemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata,  $b = 1 \text{ m}$ )

$$V = 12.481(0.586) = 7.314 \text{ t}$$

$$M = 12.481(0.586)^2/2 = 2.143 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$V_u = 1.4(7.314) = 10.24 \text{ t}$$

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cr} = F_R b d (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} \quad (8)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cr} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (9)$$

donde  $f_c^* = 0.8 f_c$

En elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho  $B$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$  ( $B \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M/Vd$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cr}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo (Normas de Concreto)

Como trabajamos por metro de ancho de zapata  $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ . Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm, y puesto que el diámetro de la varilla del N° 4 es de 1.27 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es  $d = 30 - 3.6 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$ .

En este caso se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo

$$B > 4d, \quad B = 170 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/Vd = 1.11 < 2 \quad \therefore \text{cumple como elemento ancho}$$

$$V_{cr} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5(0.8)(100)(26.4) \sqrt{150}$$

$$V_{cr} = 13357 \text{ kg} > V_u = 10240 \text{ kg} \quad \therefore \text{Cumple}$$

### c) Flexión

Haremos el diseño por flexión en la dirección del eje  $y$ . El momento flexionante en la sección crítica vale

$$M = 12.481(0.85)^2/2 = 4.509 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_u = 1.4(4.509) = 6.312 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El acero mínimo por flexión es

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{f_c^*} / f_y \quad (10)$$

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es 0.75  $p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje balanceado

$$p_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} \quad (11)$$

donde

$$f_c'' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = (1.05 - f_c^*/1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesario para soportar un momento resistente  $M_R$  está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_R}{F_R b d^2 f_c''}}$$

donde

$$p = q f_c'' / f_y \quad (12)$$

$$p = 0.002492$$

$$A_s = p b d \quad (13)$$

$$A_s = 6.578 \text{ cm}^2$$

Si hacemos  $M_u = M_R$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (14)$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(6.312 \times 10^5)}{0.9(100)(26.4)(136)}} = 0.07695$$

La separación de varillas es

$$s = a_s d / A_s \quad (15)$$

donde

$$a_s = \text{área de la varilla que se emplea} = 1.27 \text{ cm}^2 \text{ (N}^\circ 4)$$

$$d = \text{distancia para la que se requiere el área de acero}$$

$$A_s, \quad d = 100 \text{ cm}$$

$$A_s = \text{área de acero requerida} = 6.578 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo valores  $s = 19 \text{ cm}$ . En consecuencia, se necesitan varillas N° 4 a cada 19 cm en el lecho inferior. Procediendo en forma similar, se obtiene que se requieren varillas del N° 4 a cada 20 en la dirección del eje  $x$  (rige el porcentaje de acero mínimo por flexión)

### d) Temperatura

El acero del lecho superior se proporciona por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto)

$$A_s = \frac{66000(1.5)(h/2)}{f_y (h/2 - 100)} \quad (16)$$

en que

$$A_s = \text{área de acero necesaria por temperatura, en cm}^2/\text{m, para el semiespesor de losa } h/2$$

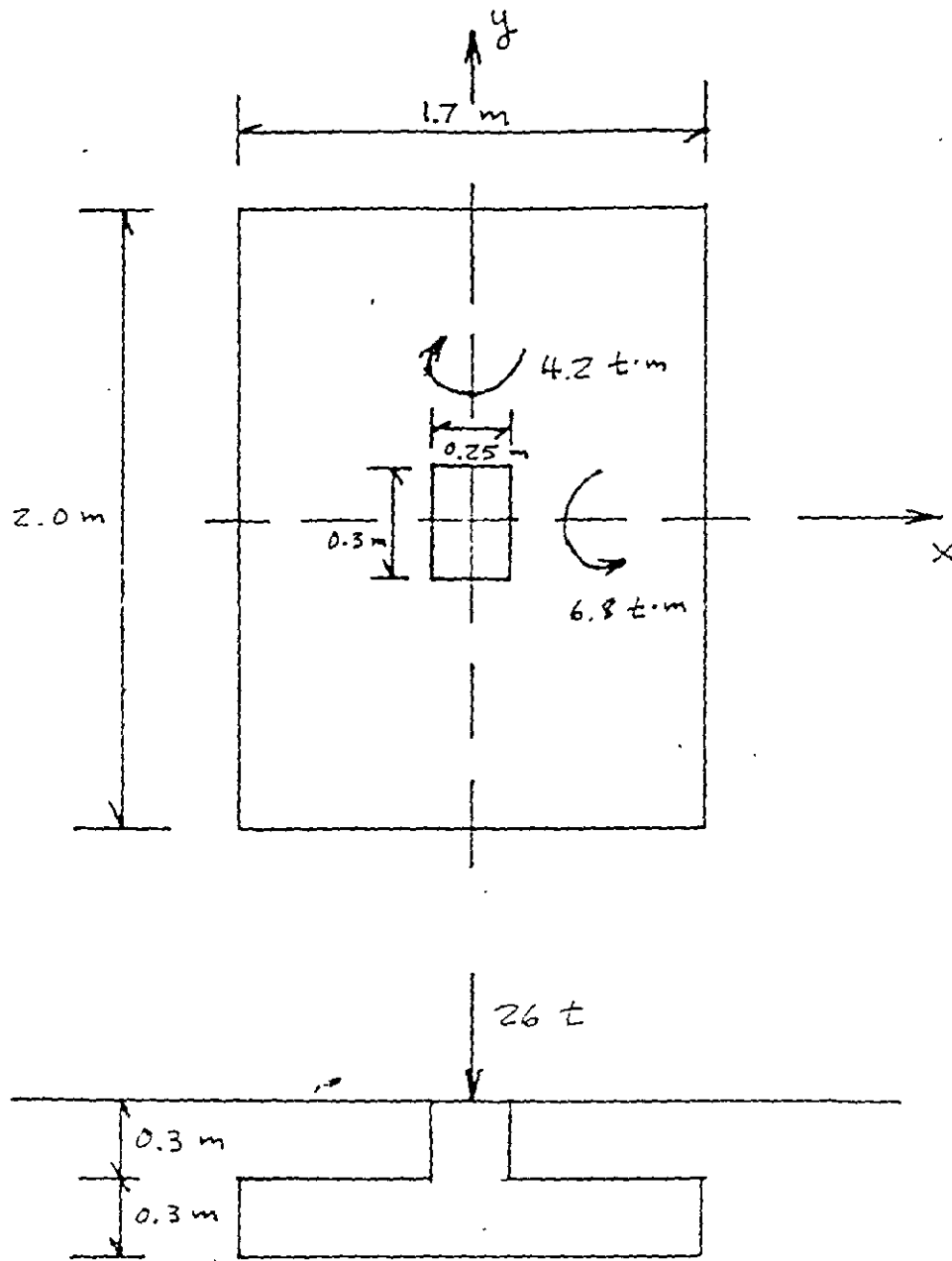
$$h/2 = \text{semiespesor de la losa de la zapata} = 30/2 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Sustituyendo valores } A_s = 3.075 \text{ cm}^2$$

Aplicando la ec. 15, con varillas del N° 3 ( $a_s = 0.71 \text{ cm}^2$ ),  $s = 23 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se necesitan por temperatura varillas del N° 3 a cada 23 cm en el lecho superior.

En la fig. 4 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

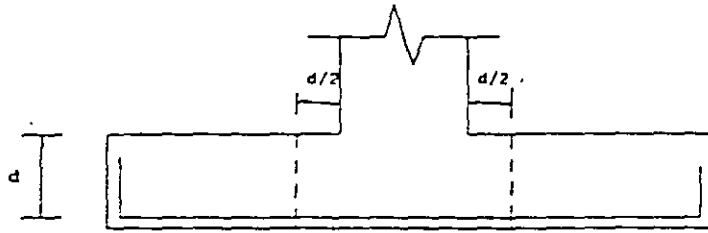
(ACDEZAP)



$D_r = 53\%$  ,  $\phi^* = 37^\circ$  ,  $\gamma_d = 1.6 \text{ t/m}^3$   
 Arena  $\epsilon_s = 2.6$

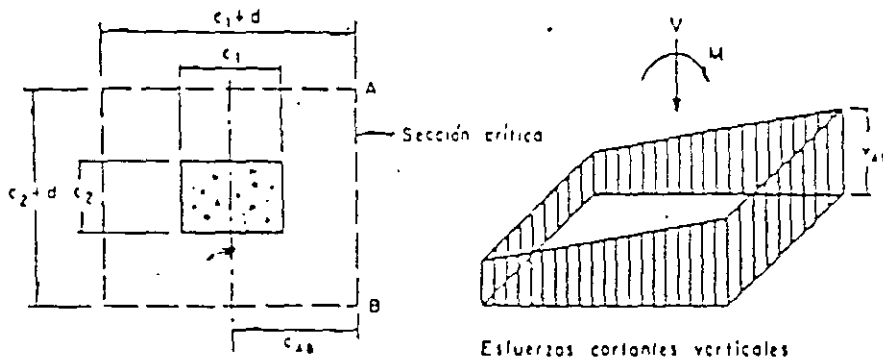
SUELO FRICCIONANTE

FIGURA 1



SECCIÓN CRÍTICA POR PENETRACIÓN

(a)



$$v_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{dMc_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

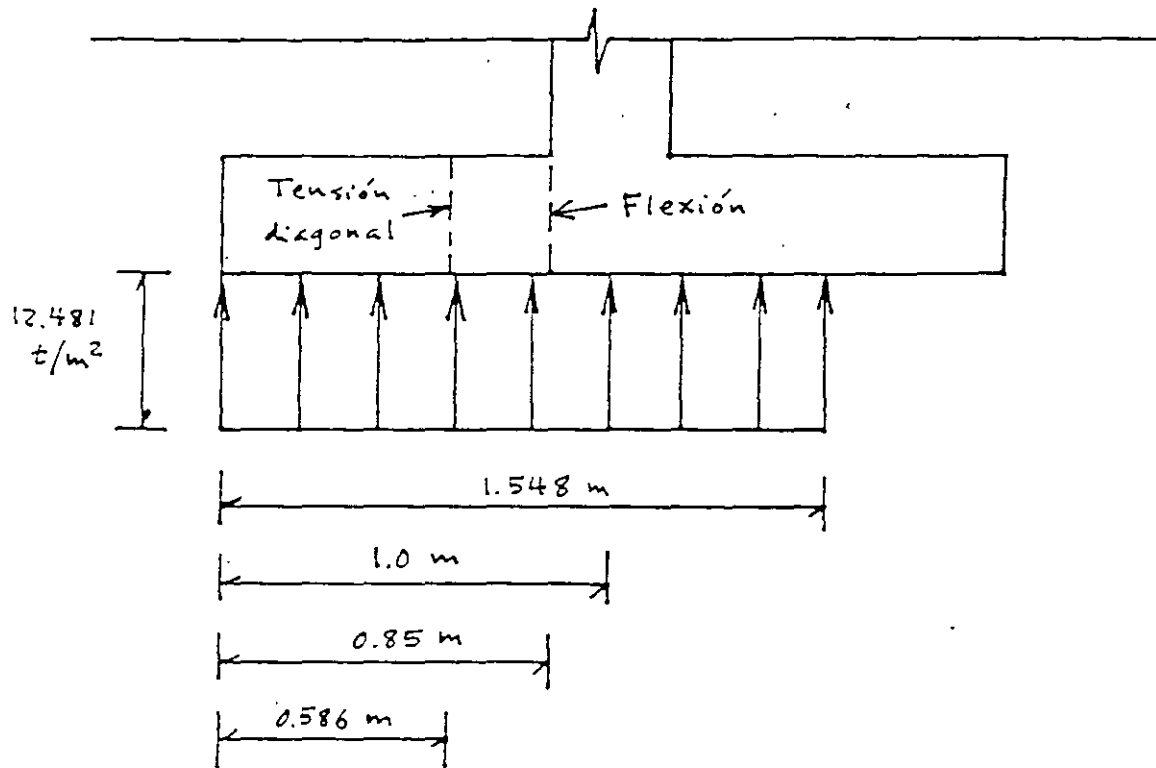
$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)c^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

Calculo del esfuerzo cortante máximo para una columna laminar

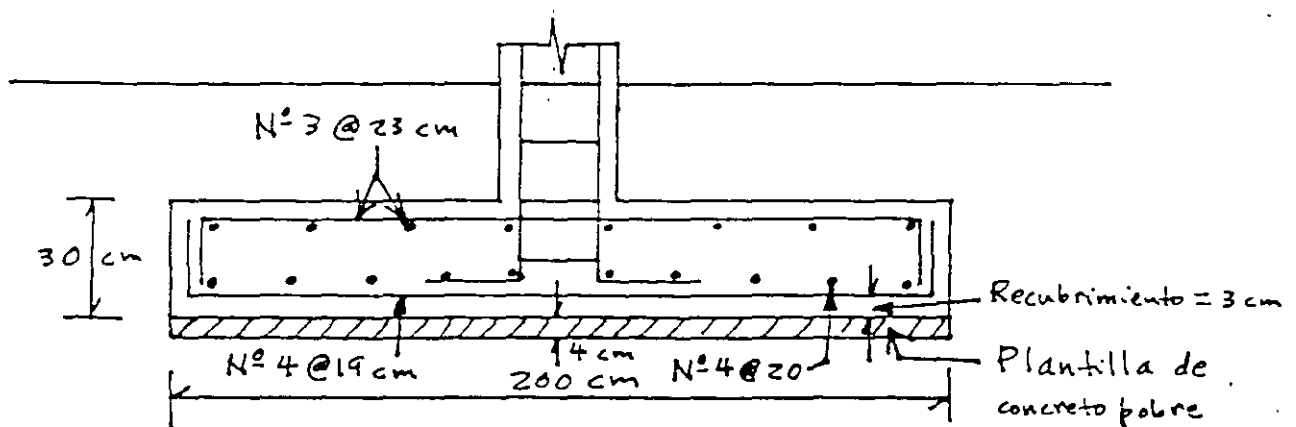
TRANSMISIÓN DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA  
(NORMAS DE CONCRETO 1987)

(b)

FIGURA 2



SECCIONES CRÍTICAS POR TENSION DIAGONAL  
Y POR FLEXIÓN  
FIGURA 3



CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES  
DE LA ZAPATA  
FIGURA 4

APUNTES DE CIMENTACIONES  
ZAPATAS DE COLINDANCIA

Agustín Deméneghi Colina\*

La zapata de colindancia que recibe un muro de carga exhibe un momento de desequilibrio debido a la falta de coincidencia entre la línea de acción de la carga del muro y del diagrama de reacción del terreno de cimentación.

Este momento de desequilibrio lo toma la estructura de la zapata mediante torsión a lo largo de la longitud de la zapata. Esta torsión ocurre en la zapata y en la trabe de enrase de la zapata.

Supongamos que los extremos de la zapata permanecen fijos. En el centro del claro el momento de torsión vale cero, por lo que la mitad de la zapata se puede considerar como empotrada en un extremo y libre en el otro. Una viga de longitud  $x$ , empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a un momento de torsión  $M_x$  en su extremo libre, sufre un giro que vale

$$\theta_x = (x/G I_t) M_x$$

Llamando  $M'$  al momento de desequilibrio por unidad de longitud de la zapata (fig. 1), el momento en una distancia  $dx$  vale  $M' dx$ , y el giro debido a  $dM$  está dado por

$$d\theta = (x/G I_t) M' dx$$

El giro en el centro del claro vale

$$\theta_c = \int_0^{L/2} (M' x / G I_t) dx = M' L^2 / 8 G I_t \quad (1)$$

Sin embargo, debido al giro  $\theta_c$ , el suelo reacciona con un momento que se puede valorar en forma aproximada haciendo la hipótesis que es igual a la mitad del dado por la fórmula de Fröhlich, es decir

$$M_c' = \frac{\pi E_s B^2 \theta_c}{32 (1 - \nu^2)}$$

Sea

$$K_n = M_c' / \theta_c = \pi E_s B^2 / 32 (1 - \nu^2) \quad (2)$$

es decir

$$M_c' = K_n \theta_c \quad (3)$$

El nuevo momento  $M'$  es igual al momento inicial  $M_0'$  menos  $M_c'$ . Con este nuevo valor se aplican repetidamente las ecs. 1, 2 y 3, hasta que la variación de  $M'$  sea despreciable.

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait *et al.* 1970)

$$I_t \cong (h b^3 / 3) [ 1 - 0.63 b/h + 0.052 (b/h)^4 ] \quad h \geq b \quad (4)$$

\*Profesor del Departamento de Geotecnia, División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, Facultad de Ingeniería UNAM

$$\text{Acero } f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Longitud de la zapata 6 m

$$F_z = 1.4$$

Terreno de cimentación

Arena medianamente compacta

$$\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$$

*Solución*

Cálculo del momento  $M_o'$  y de  $\Sigma Q$

$$M_o' = 0.923 \text{ t-n/m} \quad \Sigma Q = 5.134 \text{ t/m}$$

Consideremos únicamente el momento de inercia de la trabe. Empleando la ec 4.

$$I_x = 0.00102 \text{ m}^4$$

El módulo de rigidez del concreto está dado por

$$G = E/2(1+\nu) = 565.685 \text{ kg/cm}^2$$

El procedimiento iterativo para conocer el momento de torsión consiste en:

a) Aplicando la ec 1. con  $M' = M_o' = 0.923 \text{ t-n/m}$

$$\theta_z = 0.007208$$

b) De la ec 2

$$K_{tz} = M_o' / \theta_z = \pi E_s B^3 / 32(1-\nu^2)$$

c) Sustituyendo valores  $K_{tz} = 30.1593 \text{ t-n/m}$ . De la ec 3

$$M_o' = K_{tz} \theta_z = 0.2174 \text{ t-n/m}$$

El nuevo valor de  $M'$  vale  $0.923 - 0.2174 = 0.6826 \text{ t-n/m}$

Se repiten los pasos (a) a (c), hasta que la variación de  $M'$  sea despreciable. En cada iteración  $M'$  se obtiene restando a  $M_o' = 0.923 \text{ t-n/m}$  el valor calculado de  $M_o'$ .

A continuación presentamos los valores obtenidos en la última iteración:

$$M' = 0.7471 \text{ t-n/m}, \quad \theta_z = 0.005834, \quad M_o' = 0.1759 \text{ t-n/m}$$

Cálculo del refuerzo por torsión

El momento de torsión a una distancia  $d'$  del paño del eje donde termina la trabe vale

$$T = 0.7471(5.772)/2 = 2.156 \text{ t-m} \quad (d' = 11.4 \text{ cm})$$

$$T_u = F_z T = 3.0184 \text{ t-m}$$

Como se trata de una trabe con muro de carga,  $V = 0$

Aplicando la ec 5  $T_{cR} = 136.610 \text{ kg-cm}$

Aplicando la ec 6  $T_{cR} = 34.152.6 \text{ kg-cm}$

Verificamos que se cumplan las condiciones dadas por las expresiones 7 y 8

$$\text{a) } T_u = 301.840 \text{ t-n/m} > T_{cR} = 34.153 \text{ t-n/m}$$

$$\text{b) } (T_u/T_{cR})^2 + (V_u/V_{cR})^2 = 4.88 \geq 1$$

Se cumplen las condiciones (a) y (b) por lo que sí se requiere refuerzo por torsión.

Cálculo del acero de refuerzo por torsión

Acero transversal

Aplicando las ecs 11 y 10

$$\Omega = 1.5 \quad A_{st}/s = 0.06278 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Empleando una separación  $s = 7.5 \text{ cm}$ ,  $A_s = 0.471 \text{ cm}^2$ . Por lo tanto, se requieren estribos del No 2.5 a cada 7.5 cm ( $a_s = 0.495 \text{ cm}^2$ )

Acero longitudinal

Empleando la ec 12,  $A_{st} = 13.6 \text{ cm}^2$ . Por lo tanto se requieren 4 varillas del No 5 más 2 varillas del No 6, como acero longitudinal por torsión



El momento de torsión se toma con respecto al centroide de la trabe. La sección crítica es a una distancia  $d'$  del paño de la trabe de liga. Se emplean las siguientes expresiones (Normas de Concreto 1996).

$$T_{OR} = 0.6 F_R (\sum x^2 y) \sqrt{f_c} \quad (5)$$

$$T_{eR} = 0.25 T_{OR} \quad (6)$$

$x$  = ancho de la trabe.  $y$  = peralte de la trabe

$T_{OR}$  = momento torsionante resistente de diseño de un miembro sin refuerzo para torsión, kg·cm

$T_{eR}$  = momento con que contribuye el concreto en un miembro reforzado por torsión, kg·cm

Para proporcionar refuerzo por torsión se deben cumplir simultáneamente las dos siguientes condiciones:

$$a) T_u > T_{eR} \quad (7)$$

$$b) (T_u / T_{OR})^2 + (V_u / V_{eR})^2 \geq 1 \quad (8)$$

Si no se cumple alguna de las dos condiciones anteriores los efectos de la torsión pueden despreciarse

Refuerzo por cortante

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{eR}}$$

es decir

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - V_{eR}}{F_R f_y d} \quad (\text{cm}^2 / \text{cm, dos ramas}) \quad (9)$$

Refuerzo por torsión

$$A_{tr} = \frac{s (T_u - T_{eR})}{F_R \Omega (\lambda_1 \lambda_2) f_y}$$

es decir

$$\frac{A_{tr}}{s} = \frac{T_u - T_{eR}}{F_R \Omega (\lambda_1 \lambda_2) f_y} \quad (\text{cm}^2 / \text{cm, una rama}) \quad (10)$$

$$\Omega = 0.67 + 0.33 (\lambda_1 / \lambda_2) \leq 1.5 \quad (11)$$

El refuerzo total es la suma del requerido por cortante y por torsión

La separación no debe ser mayor que el ancho de los estribos ni de la altura de los mismos, ni mayor que 30 cm

Acero longitudinal por torsión

$$A_{li} = (2 A_{tr} / s) (\lambda_1 + \lambda_2) (f_{cs} / f_c) \quad (12)$$

*Ejemplo*

Revisar la seguridad del terreno de cimentación y hacer el diseño estructural de la zapata de la fig. 2.  
 Concreto  $f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$   $E_c = 141\,421 \text{ kg/cm}^2$

### Diseño estructural de la losa de la zapata

El momento de desequilibrio en la zapata es de  $M_o' = 0.923 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ . La trabe por torsión toma  $M' = 0.7471 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ , mientras que el suelo toma  $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ . Por lo tanto, el momento sobre el suelo es  $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ .

$$e = M_s' / \Sigma Q = 0.1759 / 5.134 = 0.03426 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e = 0.5315 \text{ m} \quad q' = \Sigma Q / B' = 9.66 \text{ t}/\text{m}^2$$

En la fig 3 se exhiben la geometría y las fuerzas que actúan sobre la zapata

#### Diseño por flexión

$$d = 0.15 - 0.036 = 0.114 \text{ m}$$

$$M = 0.5288 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M_s = 0.7403 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$\rho = 0.00154$$

$$\rho_{\text{mín}} = 0.00236$$

$$A_{\text{mín}} = 2.687 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{\text{temper}} = 3.075 \text{ cm}^2/\text{m}, \text{ por lo tanto, rige armado por temperatura}$$

Se emplearán varillas del N° 3 a cada 23 cm. en el lecho inferior

#### Revisión por cortante

$$V = 2.006 \text{ t}/\text{m}$$

$$V_u = 2.809 \text{ t}/\text{m}$$

$$M = 0.2485 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M/Vd = 1.09 < 2 \text{ Cumple como elemento ancho}$$

$$V_{\text{res}} = 5768 \text{ kg} > V_u = 2809 \text{ kg} \therefore \text{Cumple}$$

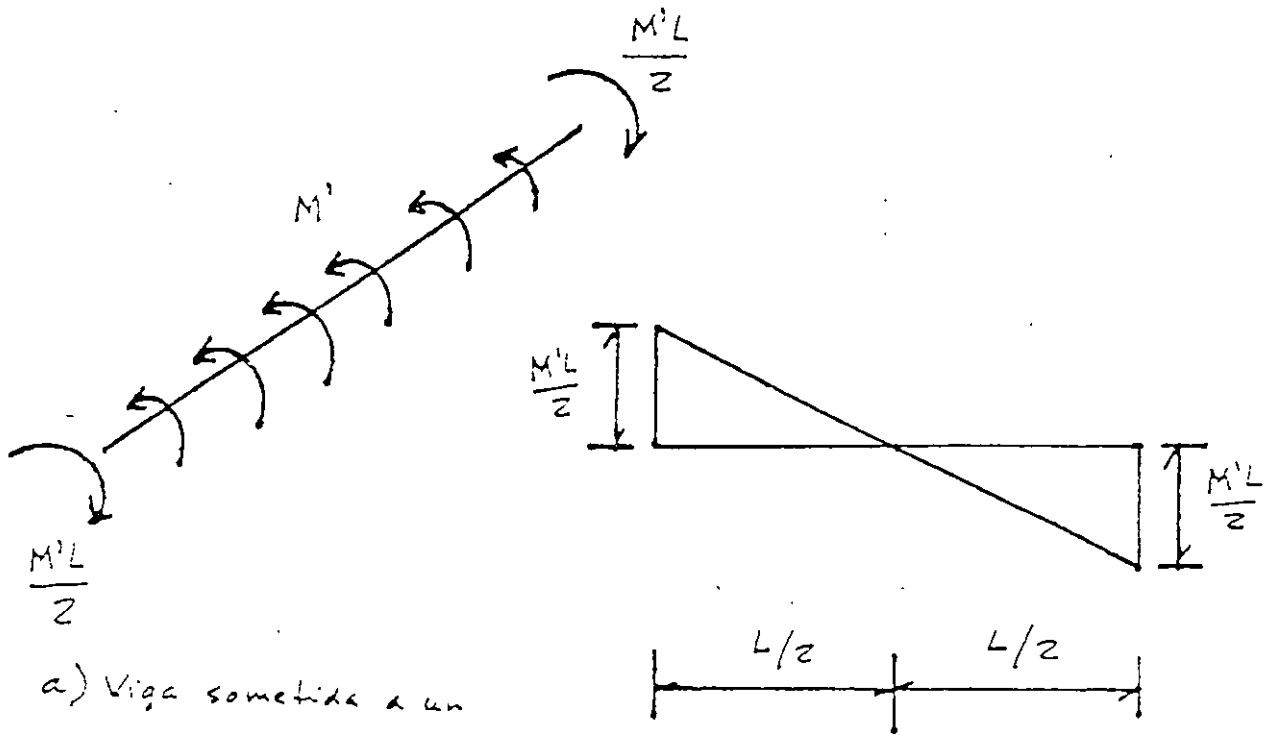
En la fig 4 se muestra el armado de la zapata

### Referencias

Beaufait, F. W., Rowan, W. H., Hoadley, P. G. y Hackett, R. M. *Computer Methods of Structural Analysis*. Prentice-Hall, 1970

Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Departamento del Distrito Federal, 1996

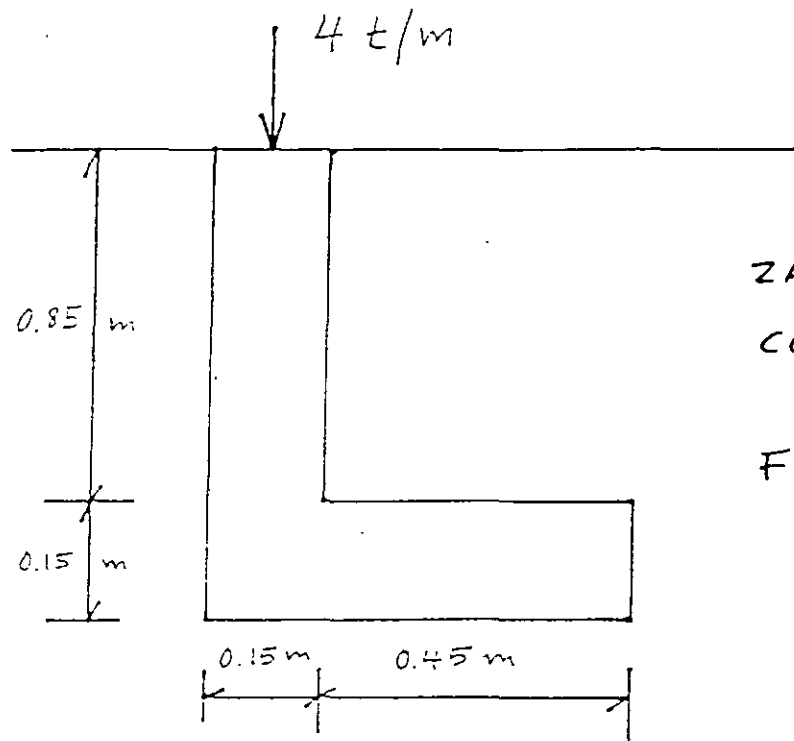
(ACZAPCOL)



a) Viga sometida a un momento de torsión  $M'$  por unidad de longitud

b) Variación del momento de torsión a lo largo de la viga

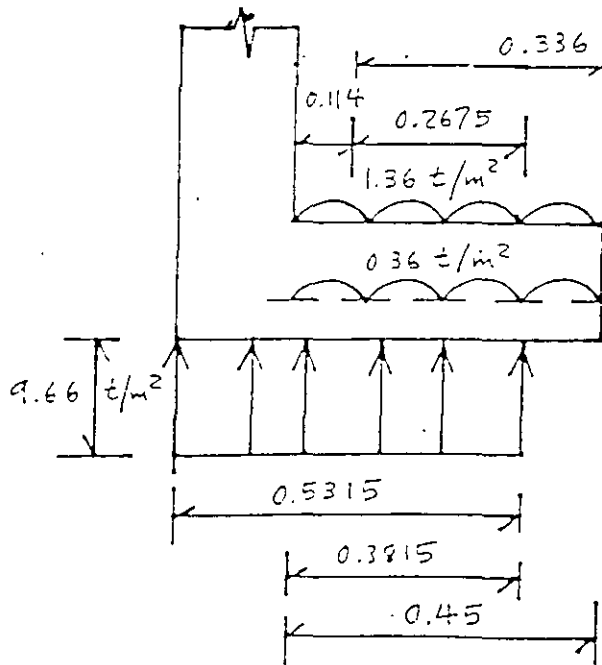
FIGURA 1



ZAPATA DE COLINDANCIA

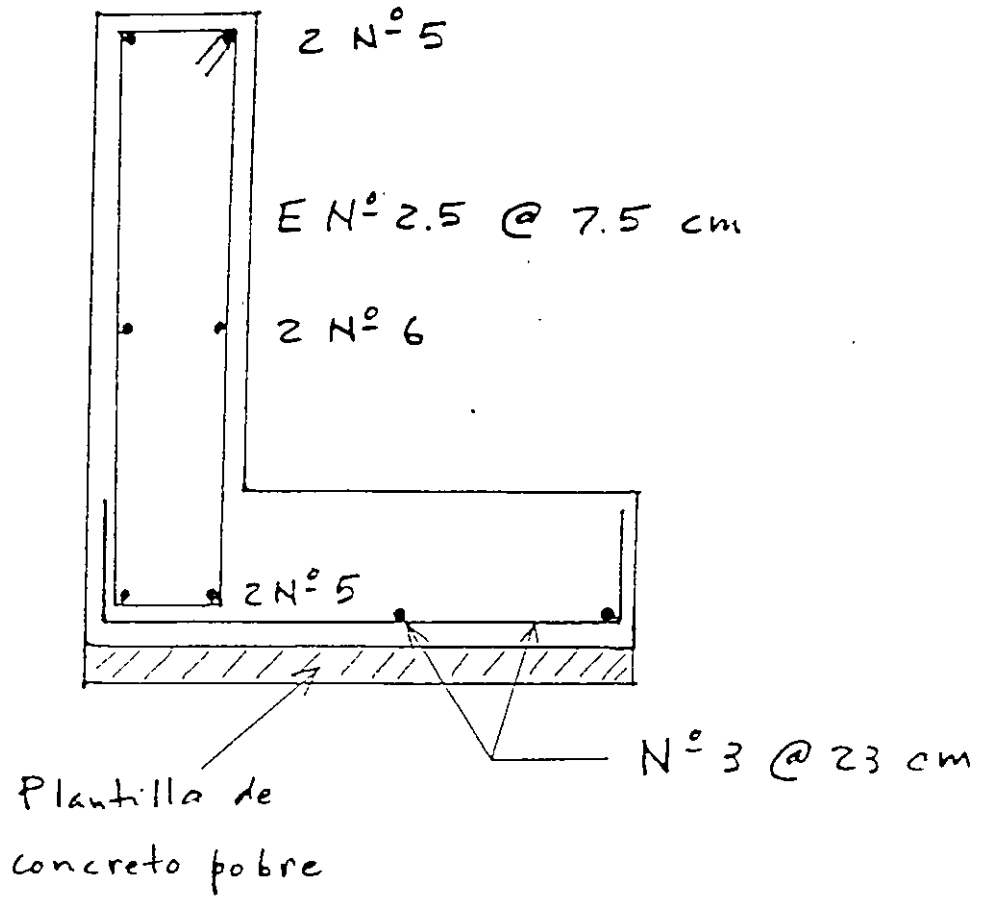
FIGURA 2

$$E_s = 800 \text{ t/m}^2, \nu = 0.25$$



FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA LOSA DE LA ZAPATA

FIGURA 3



ARMADO DE LA ZAPATA

FIGURA 4

## APUNTES DE CIMENTACIONES CIMENTOS DE MAMPOSTERÍA

El ancho de un cimiento de mampostería se obtiene de manera análoga a lo visto para cimientos de concreto reforzado. "En cimientos de piedra brasa la pendiente de las caras inclinadas, medida desde la arista de la dala o muro, no será menor que 1.5 (vertical) : 1 (horizontal).

"En cimientos de mampostería de forma trapezoidal con un talud vertical y el otro inclinado, tales como cimientos de lindero, deberá verificarse la estabilidad del cimiento a torsión. De no efectuarse esta verificación, deberán existir cimientos perpendiculares a ellos a separaciones no mayores de las que señala la siguiente tabla:

Presión de contacto con el terreno, $p$ , $t/m^2$	Claro máximo, en metros	
	Caso 1	Caso 2
$p \leq 2.0$	5.0	10.0
$2.0 < p \leq 2.5$	4.5	9.0
$2.5 < p \leq 3.0$	4.0	7.5
$3.0 < p \leq 4.0$	3.0	6.0
$4.0 < p \leq 5.0$	2.5	4.5

"En todo cimiento deberán colocarse dalas de concretos reforzado, tanto sobre los cimientos sujetos a momento de volteo como sobre los perpendiculares a ellos. Los castillos deben empotrarse en los cimientos no menos de 40 cm.

"En la tabla anterior, el claro máximo permisible se refiere a la distancia entre los ejes de los cimientos perpendiculares, menos el promedio de los anchos medios de éstos. Los casos 1 y 2 corresponden respectivamente a mampostería ligada con mortero de cal y con mortero de cemento. No deberán existir planos definidos de falla transversales al cimiento".

"Las piedras que se empleen en elementos estructurales deberán satisfacer los requisitos siguientes.

Resistencia mínima a compresión en dirección normal a los planos de formación	150 $kg/cm^2$
Resistencia mínima a compresión en dirección paralela a los planos de formación	100 $kg/cm^2$
Absorción máxima	4%
Resistencia al intemperismo máxima pérdida de peso después de 5 ciclos en solución saturada de sulfato de sodio	10%

"Las piedras no deberán ser labradas, pero se evitará en lo posible el empleo de piedras de formas redondeadas y de cantos rodados. Por lo menos el 70% del volumen del elemento estará constituido por piedras con un peso mínimo de 30 kg cada una.

"Los morteros que se empleen para mampostería de piedras naturales deberán cumplir con los requisitos siguientes:

- a) La relación volumétrica entre la arena y la suma de cementantes se encontrará entre 2.25 y 5
- b) La resistencia mínima en compresión será de 15  $kg/cm^2$

“La mampostería se desplantará sobre una plantilla de mortero o concreto que permita obtener una superficie plana. En las primeras hiladas se colocarán las piedras de mayores dimensiones. Cuando las piedras sean de origen sedimentario se colocarán de manera que los lechos de estratificación queden normales a la dirección de las compresiones. Las piedras deberán humedecerse antes de colocarlas y se acomodarán de manera de llenar lo mejor posible el hueco formado por las otras piedras. Los vacíos se rellenarán completamente con piedra chica y mortero”.

(Normas de Mampostería, cap 6).



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**METODO ITERACTIVO**

**EXPOSITOR: ING. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
SEPTIEMBRE DEL 2000**



INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA  
MÉTODO ITERATIVO

Agustín Deméneghi Colina\*

La interacción suelo-estructura se puede resolver mediante un método iterativo. Esto tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o un programa de computadora que sustituye al terreno de cimentación por "resortes", que representan el módulo de reacción de dicho terreno. Dado que no se conoce *a priori* la constante del resorte, pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un método iterativo, que consiste en suponer valores iniciales de las "constantes de los resortes", y con ellas computar por una parte las deformaciones de la estructura, y por otra las deformaciones del suelo; la diferencia entre deformaciones de estructura y suelo permite ajustar la "constante del resorte"; el procedimiento se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y terreno. Esta técnica tiene la ventaja de que converge rápidamente, de tal forma que usualmente a la tercera iteración se alcanzan resultados satisfactorios.

Las expresiones que se emplean son las siguientes:

a) En el terreno de cimentación se entra con las cargas (o reacciones)  $r_l$  y se determinan las deformaciones  $\delta_l$  con la matriz de flexibilidades del suelo (se puede iniciar con la reacción uniforme igual a la sumatoria de cargas verticales entre la longitud total de los cimientos); los módulos de reacción  $K_{vl}$  se obtienen

$$K_{vl} = \frac{r_l d_l}{\delta_l} \quad (1)$$

b) En la estructura se entra con las  $K_{vl}$  y se calculan las deformaciones  $\delta_l$ ; las reacciones  $r_l$  por unidad de longitud (en t/m) se obtienen

$$r_l = \frac{K_{vl} \delta_l}{d_l} \quad (2)$$

donde  $d_l$  es la longitud en que actúa  $r_l$ .

Con estos valores de  $r_l$  se entra nuevamente al suelo (inciso a), y el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y suelo.

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Ilustraremos el proceso anterior con el ejemplo del capítulo anterior. Cabe aclarar que no se obtendrán los mismos resultados pues en este ejemplo en particular se supone que la reacción ( terreno (a través de los "resortes") esta concentrada en los nudos, mientras que en el ejemplo anterior la reacción del suelo se tomaba como repartida. Si se usaran más "resortes" se alcanzaria una mayor coincidencia entre ambos métodos.

En el terreno de cimentación se habia obtenido

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (3)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (4)$$

En la estructura la matriz de rigidez  $K$  no cambia. Los vectores de empotramiento y de cargas concentradas valen

$$P^e = \begin{bmatrix} -7.4 & -35 \\ -14.8 & -50 \\ -7.4 & -35 \\ 4.9333 \\ -4.9333 \end{bmatrix} \quad P^c = \begin{bmatrix} K_{v1} \delta_1 \\ K_{v2} \delta_2 \\ K_{v3} \delta_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la simetria  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $\delta_4 = -\delta_6$ , y aplicando la ecuación matricial

$$K \delta + P^c + P^e = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$(10\,939.1 + K_{v1}) \delta_1 - 10\,939.1 \delta_2 - 21\,878.2 \theta_4 - 42.4 = 0 \quad (5)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + (21\,878.2 + K_{v2}) \delta_2 + 43\,756.4 \theta_4 - 64.8 = 0 \quad (6)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + 21\,878.2 \delta_2 + 58\,341.9 \theta_4 + 4.9333 = 0 \quad (7)$$

1ra iteración

Iniciemos el proceso considerando una reacción uniforme

$$r = (35(2) + 50 + 3.7(8)) / 8 = 18.7 \text{ t/m}$$

Sean  $r_1 = r_2 = 18.7 \text{ t/m}$

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.015944	0.031743	2345.7	2356.4

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020700	0.022280	24.28	13.12

2da iteración

Terreno de cimentación. Con los  $r_1$  anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.020312	0.022979	2390.7	2283.8

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020587	0.022403	24.61	12.79

3ra iteración

Terreno de cimentación. Con los  $r_1$  anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.020570	0.022461	2392.8	2277.7

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020589	0.022422	24.63	12.77

Apreciamos que en la tercera iteración prácticamente coinciden las deformaciones de suelo y estructura.

### 3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

#### 3.6.1 Deformación vertical de un rectángulo cargado

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isotrópico, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida  $q$ , está dado por la fórmula de Schleicher (Terzaghi 1943)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left( L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde  $B$  = ancho del rectángulo  
 $L$  = longitud del rectángulo  
 $E$  = módulo de elasticidad del medio  
 $\nu$  = relación de Poisson del medio

Si el cimiento es cuadrado, la ec 3.19 se convierte en

$$\delta = \frac{2 q B (1 - \nu^2) \ln (1 + \sqrt{2})}{\pi E} \quad (3.19')$$

$$\delta = \frac{1.763 q B (1 - \nu^2)}{\pi E} \quad (3.19'')$$

La rigidez lineal vertical se define como el cociente de la carga vertical concentrada  $Q_v$  entre el asentamiento vertical que produce dicha carga. En un cimiento de planta cuadrada de ancho  $B$ , la rigidez lineal vertical está dada por

$$K_v = \frac{0.891 E B}{1 - \nu^2} \quad (3.19''')$$

(En la ec 3.19''' el asentamiento se calcula bajo el centro del cuadrado.)

Cuando el medio elástico tiene un espesor  $H$ , el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme  $q$  está dado por la fórmula de Steinbrenner (Juárez Badillo y Rico 1980)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/\pi E] \left[ L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{L^2 + H^2}}{L (B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{B^2 + H^2}}{B (L + A)} \right] + (q/2\pi E) (1-\nu-2\nu^2) H \operatorname{ang} \tan \frac{LB}{HA} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + H^2} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig 3.12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y  $\nu$ , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_z = (1/E) [ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) ] \quad (3.22)$$

donde  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y  $\epsilon_z$  es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por

$$\delta = \epsilon_z H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato.

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

### 3.6.2 Circulo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert 1973)

$$\delta_v = \frac{\pi (1 - \nu^2) R q}{2 E} \quad (3.24)$$

El desplazamiento horizontal de un círculo sometido a una carga horizontal  $Q_h$  está dado por (Richart et al 1970)

$$\delta_h = \frac{(7 - 8 \nu) Q_h}{32 (1 - \nu) G R} \quad (3.25)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale (Richart et al 1970)

$$\theta = [ 3 (1 - \nu) M ] / 8 G R^3 \quad (3.26)$$

en que  $G = E / 2 (1 + \nu)$  (3.26)

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal

vertical se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_v = Q_v / \delta_v = 2 E R / (1 - \nu^2) \quad (1.27)$$

La rigidez lineal horizontal se define como la carga horizontal entre el desplazamiento horizontal que produce:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} = \frac{32 (1 - \nu) G R}{7 - 8 \nu} \quad (1.28)$$

La rigidez angular o rigidez a la rotación se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_r = M / \theta = 8 G R^3 / 3 (1 - \nu) \quad (3.29)$$

### 3.6.3. Giro de un rectángulo sometido a momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento  $M$  (fig 3.13) se puede calcular determinando la carga de tipo trapezoidal (ecs 3.14 y 3.15) o triangular (ecs 3.17 y 3.18) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número  $n$  de cargas uniformes (fig 3.9) y se determinan los esfuerzos normales  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  con las ecs 3.6 a 3.9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ec 3.22) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec 3.23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig 3.9, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6.1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo  $I$  en el sentido que se está analizando, y se determina el radio equivalente a un círculo que tenga el mismo momento de inercia del rectángulo (Normas de Sismo 1987):

$$R = ( 4 I / \pi )^{1/4} \quad (3.29)$$

Con el radio equivalente  $R$  se emplea la ec 3.25 para determinar el giro de la cimentación de planta rectangular.

El criterio anterior es válido cuando la longitud del cimiento es similar al ancho del mismo. Para valores de la longitud mayores que

tres veces el ancho del cimiento; es conveniente usar la fórmula de Fröhlich para un cimiento continuo (de longitud infinita) de ancho B (Zeevaert 1973)

$$\theta = \text{ang tan} [16 (1 - \nu^2) \bar{M} / \pi E B^2] \quad (3.30)$$

donde  $\bar{M}$  es el momento por unidad de longitud del cimiento (t.m/m).