

**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# **CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y  
CIMENTACIONES**

**MODULO I: ANÁLISIS  
ESTRUCTURAL**

**TEMA  
APUNTES DE CIMENTACIONES  
INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA  
II**

**EXPOSITOR: ING. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
MARZO DEL 2003**

TABLA 1												
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 1)												
Delta 1	Delta 2	Delta 3	Delta 4	Theta 5	Theta 6	Delta 7	Delta 8	Delta 9	Delta 10	Theta 11	Theta 12	
31913.82	0	12719.58	0	-114.832	0	-31913.8	0	-12719.5	0	-114.832	0	Delta 1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Delta 2
12719.58	0	5202.665	0	287.082	0	-12719.5	0	-5202.66	0	287.082	0	Delta 3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Delta 4
-114.832	0	287.082	0	1110.049	0	114.833	0	-287.082	0	555.025	0	Theta 5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Theta 6
-31913.82	0	-12719.5	0	114.833	0	32578.02	-664.2	12719.58	0	-1877.77	-1992.6	Delta 7
---	---	---	---	---	---	-664.2	32578.02	0	-12719.58	1992.6	1877.77	Delta 8
-12719.5	0	-5202.665	0	-287.081	0	12719.58	0	71622.66	-66420	-287.08	0	Delta 9
---	---	---	---	---	---	0	-12719.58	-66420	71622.66	0	-287.08	Delta 10
-114.832	0	287.082	0	555.025	0	-1877.77	1992.6	-287.08	0	9080.45	3985.2	Theta 11
---	---	---	---	---	---	-1992.6	1877.77	0	-287.08	3985.2	9080.45	Theta 12
TABLA 2						TABLA 3						
VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO						VECTOR DE CARGAS CONCENTRADAS						
(EJEMPLO 1)						(EJEMPLO 1)						
0	Delta 1					Qv1	Delta 1					
0	Delta 2					Qv2	Delta 2					
0	Delta 3					Qh3	Delta 3					
0	Delta 4					Qh4	Delta 4					
0	Theta 5					M5	Theta 5					
0	Theta 6					M6	Theta 6					
-24	Delta 7					0	Delta 7					
-24	Delta 8					0	Delta 8					
0	Delta 9					0	Delta 9					
0	Delta 10					0	Delta 10					
24	Theta 11					0	Theta 11					
-24	Theta 12					0	Theta 12					
(Acise)												

**TABLA 4**  
**NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO 2)**

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\alpha$
						grados
1	$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_3$	90
2	$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_2$	$\delta_2$	$\delta_4$	90
3	$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	-	0

**TABLA 5**  
**MATRIZ DE RIGIDEZ DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)**

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	
664.2	-664.2	0	0	0	0	-1992.6	-1992.6	$\delta_1$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\delta_2$
0	0	184.24	0	423.76	0	423.76	0	$\delta_3$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\delta_4$
0	0	423.76	0	1299.52	0	649.76	0	$\theta_5$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\theta_6$
-1992.6	1992.6	423.76	0	649.76	0	9269.92	3985.2	$\theta_7$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\theta_8$

**TABLA 6**  
**VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)**

-4.62	$\delta_1$
-4.62	$\delta_2$
0	$\delta_3$
0	$\delta_4$
0	$\theta_5$
0	$\theta_6$
4.62	$\theta_7$
-4.62	$\theta_8$

**TABLA 8**  
**PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN. EJEMPLO 3**

Estrato	$A_{cf}$	$s_{cf}$	$A_{cv}$	$s_{cv}$	$v$	$K_o$	$\gamma, t/m^3$
1	360	1.69	733	0.705	0.295	0.418	1.8
2	480	1.67	879	0.715	0.295	0.418	1.8

(Acise, Acisef3, lsezc24, lsezc3, lsezc31, lsezc32)

TABLA 9					
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 3)					
Delta 1	Delta 2	Delta 3	Theta 4	Theta 6	
21365.442	-21365.442	0	-34184.707	0	Delta 1
-21365.442	42730.884	-21365.442	34184.707	-34184.707	Delta 2
-34184.707	34184.707	0	72927.375	0	Theta 4
TABLA 10					
VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 3)					
RELACIÓN DE POISSON = 0.295					
Punto	Izijk	Ixijk	Iyijk		
1,1,1	0.4868711	0.227869	0.2098534		
1,1,2	0.00174314	0.01330678	0.03461443		
1,1,3	1.8865E-05	0.00262627	0.00566201		
1,2,1	0.2791369	0.03057748	0.00698428		
1,2,2	0.0402185	0.06823199	0.00918785		
1,2,3	0.000992	0.00672907	0.00316839		
2,1,1	0.00163603	0.0152252	0.02429731		
2,1,2	0.9737421	0.455738	0.4197068		
2,1,3	0.001636	0.01522519	0.02429731		
2,2,1	0.03557754	0.04996888	0.00492169		
2,2,2	0.5582739	0.06115496	0.01396855		
2,2,3	0.03557754	0.04996888	0.00492169		
3,1,1	1.8865E-05	0.00262627	0.00566202		
3,1,2	0.00174314	0.01330677	0.03461443		
3,1,3	0.4868711	0.227869	0.2098534		
3,2,1	0.000992	0.00672907	0.00316839		
3,2,2	0.0402185	0.06823199	0.00918784		
3,2,3	0.2791369	0.03057749	0.00698429		
(Aceise)					

TABLA 11					
VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 4)					
RELACIÓN DE POISSON = 0.5					
Punto	Izijk	Ixijk	Iyijk	nu	Iijk
1,1,1	0.4868711	0.3181542	0.265932	0.5	0.194828
1,1,2	0.001743138	0.05265242	0.003130734	0.5	-0.02614844
1,1,3	1.88649E-05	0.003480822	0.000038445	0.5	-0.00174077
1,2,1	0.2791369	0.05794332	0.02975186	0.5	0.23528931
1,2,2	0.0402185	0.09123936	0.004802749	0.5	-0.00780255
1,2,3	0.000992	0.0114948	0.000126474	0.5	-0.00481864
2,1,1	0.001636028	0.04312015	0.002917856	0.5	-0.02138298
2,1,2	0.9737421	0.6363085	0.531864	0.5	0.38965585
2,1,3	0.001635999	0.04312015	0.002917856	0.5	-0.021383
2,2,1	0.03557754	0.06498982	0.004221957	0.5	0.00097165
2,2,2	0.5582739	0.1158866	0.05950371	0.5	0.47057875
2,2,3	0.03557754	0.06498982	0.004221957	0.5	0.00097165
3,1,1	1.88649E-05	0.003480822	0.000038445	0.5	-0.00174077
3,1,2	0.001743138	0.05265242	0.003130734	0.5	-0.02614844
3,1,3	0.4868711	0.3181542	0.265932	0.5	0.194828
3,2,1	0.000992	0.0114948	0.000126474	0.5	-0.00481864
3,2,2	0.0402185	0.09123936	0.004802749	0.5	-0.00780255
3,2,3	0.2791369	0.05794332	0.02975186	0.5	0.23528931
(Isezc3)					

TABLA 12  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1,  $K_1$

$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$	
2382.530	1191.265	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{10}$
1191.265	2382.530	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{12}$
-831.115	-831.115	386.565	-386.565	0	0	$\delta_1$
831.115	831.115	-386.565	386.565	0	0	$\delta_2$
0	0	0	0	310.08	-310.08	$\theta_{11}$
0	0	0	0	-310.08	310.08	$\theta_{13}$

TABLA 13  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 7,  $K_7$

$\theta_{10}$	$\theta_{16}$	$\delta_1$	$\delta_4$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$	
310.08	-310.08	0	0	0	0	$\theta_{10}$
-310.08	310.08	0	0	0	0	$\theta_{16}$
0	0	386.565	-386.565	831.115	831.115	$\delta_1$
0	0	-386.565	386.565	-831.115	-831.115	$\delta_4$
0	0	831.115	-831.115	2382.530	1191.265	$\theta_{11}$
0	0	831.115	-831.115	1191.265	2382.530	$\theta_{17}$

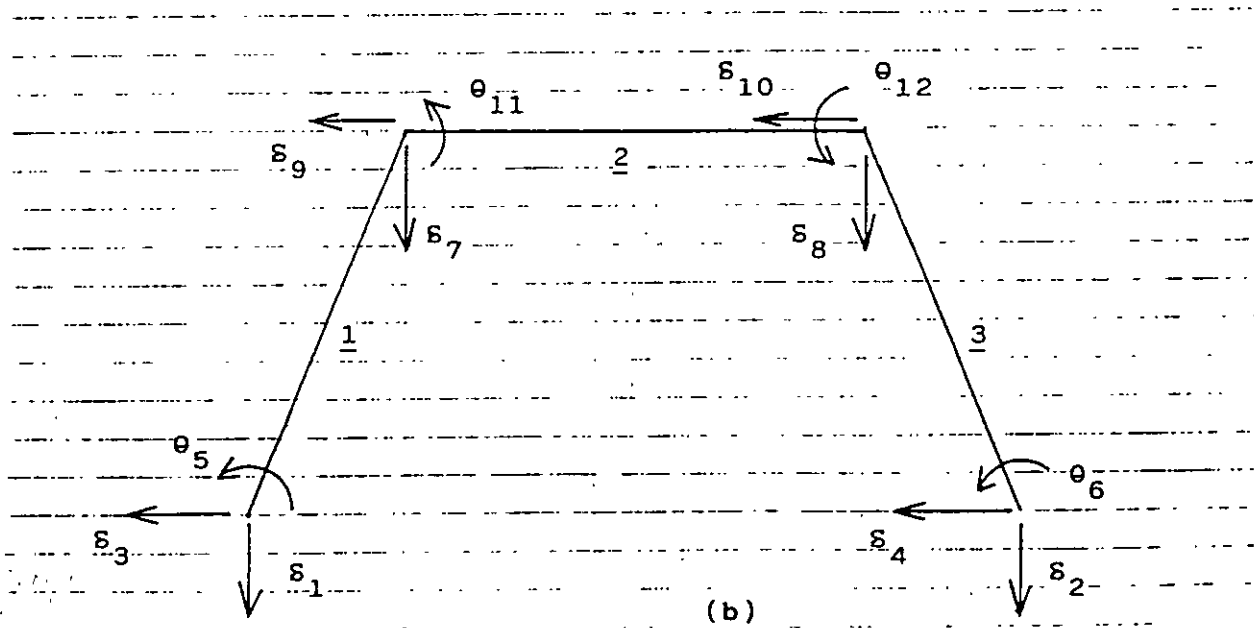
TABLA 14  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA  $K$ , PARA LOS PRIMEROS CINCO GRADOS DE LIBERTAD. SISTEMA GLOBAL

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	
773.130	-3866.565	0	-386.565	0	$\delta_1$
-386.565	859.750	-386.565	0	-86.619	$\delta_2$
0	-386.565	773.130	0	0	$\delta_3$
-386.565	0	0	859.750	-86.619	$\delta_4$
0	-86.619	0	-86.619	346.477	$\delta_5$

**TABLA 7**  
 Proposed average values of  $\bar{k}_{q1}$  for 1-ft X 1-ft square plates and long  
 1-ft wide strips, after Karl Terzaghi (1955)

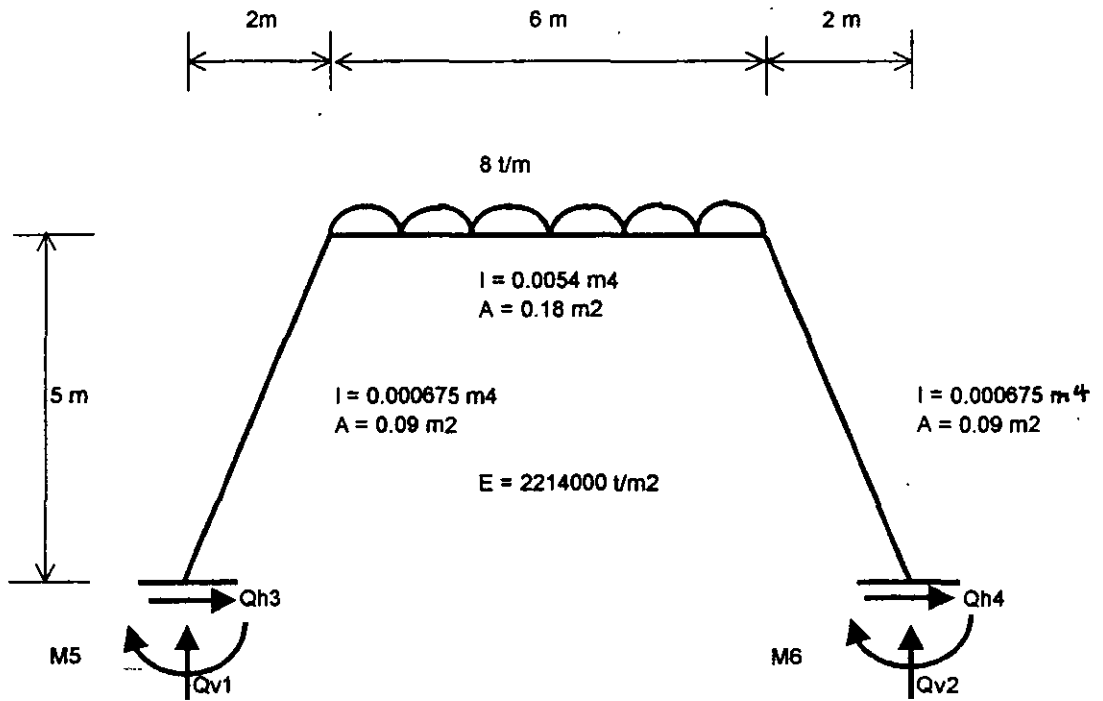
	Average $\bar{k}_{q1}$ values		Range of $\bar{k}_{q1}$ values	
	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>
Sand: loose	40	1.29	20-60	0.64-1.92
medium	130	4.17	60-300	1.92-9.62
dense	500	16.10	300-1000	9.62-32.1
Clay: stiff	75	2.41	50-100	1.6-3.21
very stiff	150	4.82	100-200	3.21-6.42
hard	300	9.64	300	9.60

For dry sand multiply by 1.5 and for submerged sand by 0.6. Here 1 ton = 2000 lb.



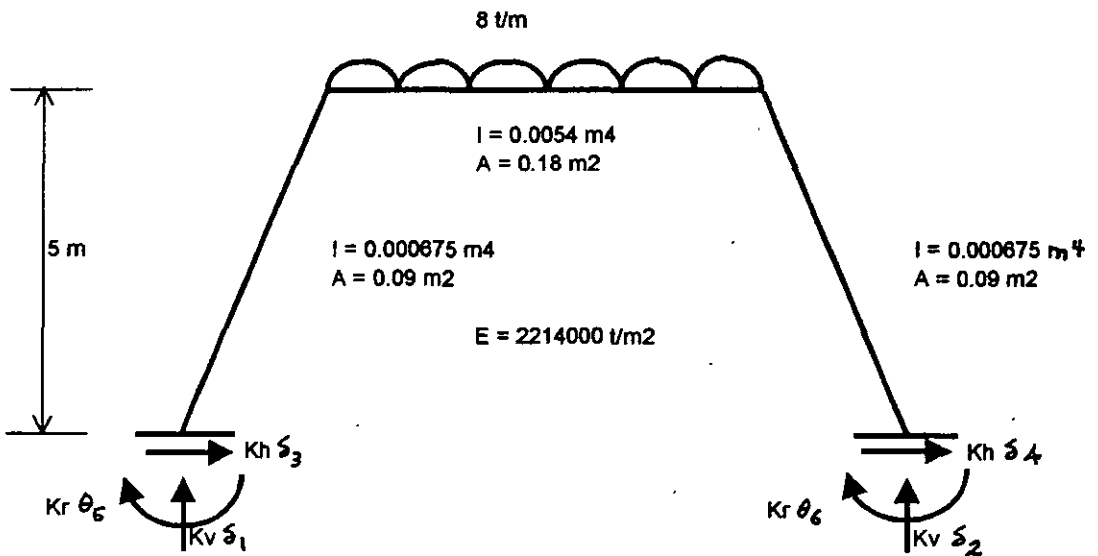
NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

FIGURA 2



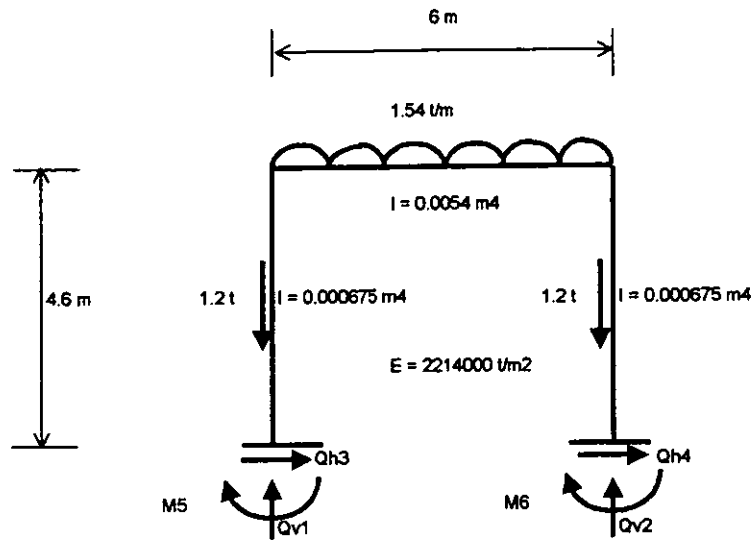
(Acisef)

GEOMETRÍA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
BARRAS INCLINADAS  
FIGURA 1

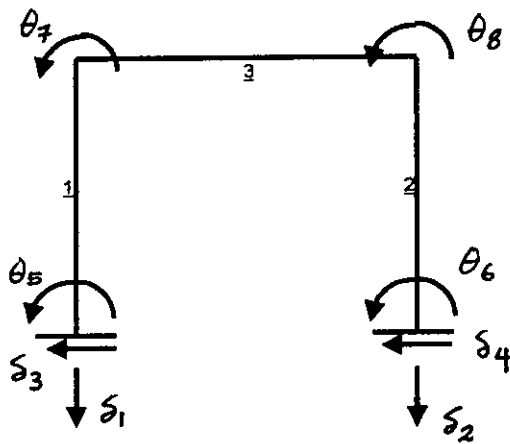


REACCIONES DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN  
FIGURA 3

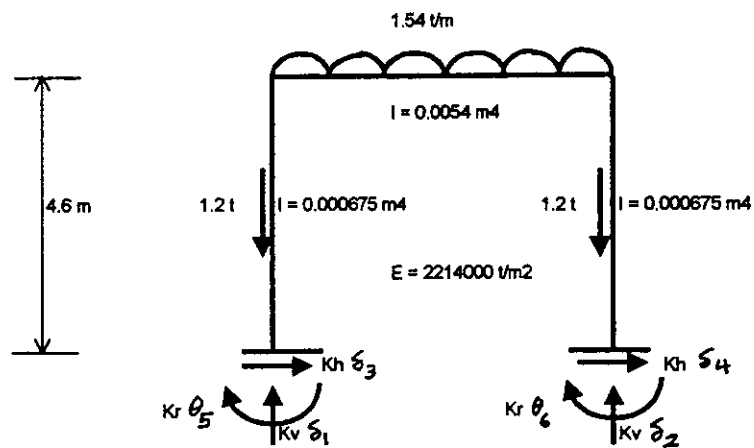




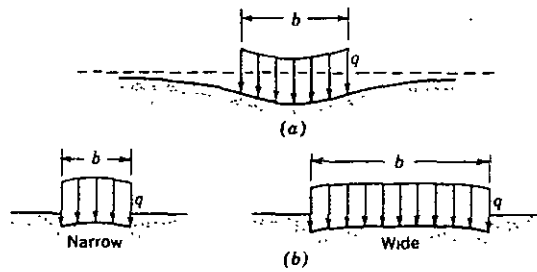
GEOMETRÍA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
FIGURA 4



NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD  
FIGURA 5

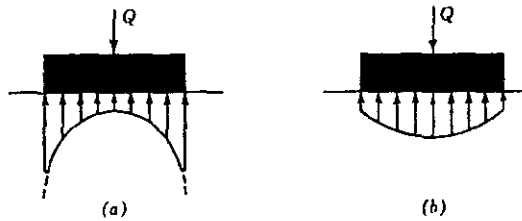


REACCIONES DEL TERRENO  
FIGURA 6



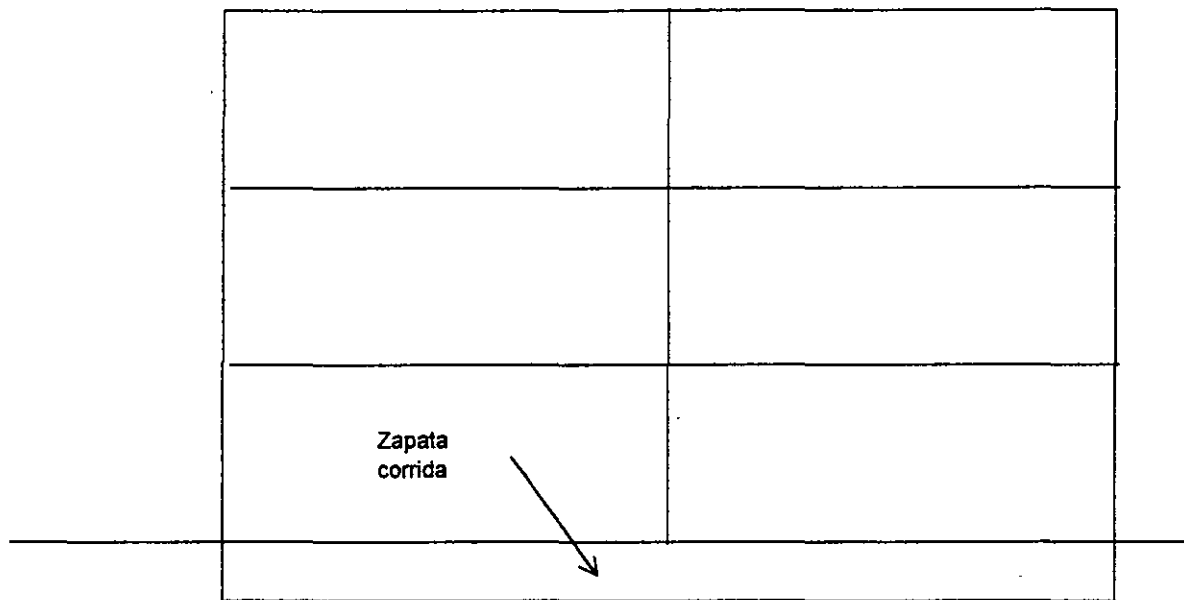
Profile of distortion settlement of a uniform load on the surface of a soil mass. (a) Homogeneous elastic isotropic material, such as a saturated clay; (b) homogeneous elastic material whose rigidity increases with confinement, such as a cohesionless sand or gravel. (Sowers, 1962)

FIGURA 7



Contact pressure on the base of a rigid foundation on the surface of a soil mass. (a) Homogeneous elastic isotropic material, such as a saturated clay; (b) homogeneous elastic material whose rigidity increases with confinement, such as a cohesionless sand or gravel. (Sowers, 1962)

FIGURA 8



MARCO ESTRUCTURAL (a)



DIAGRAMA DE ASENTAMIENTOS (b)

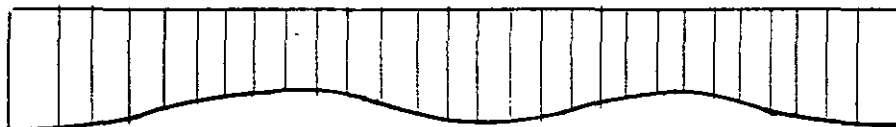
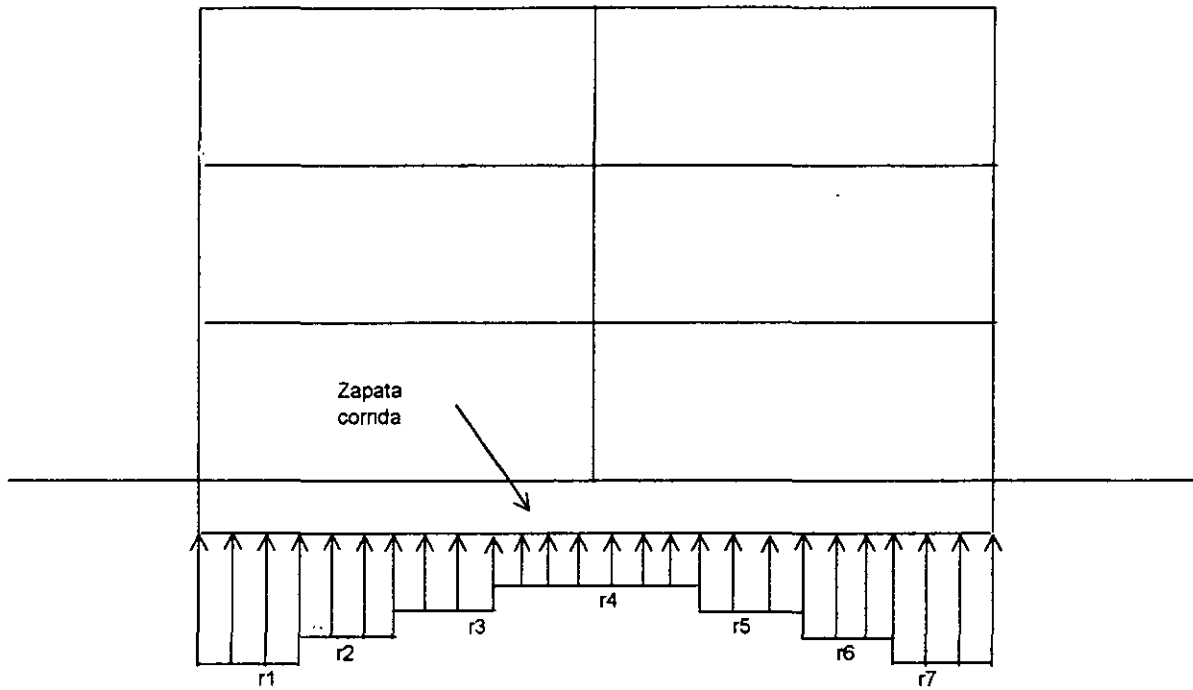


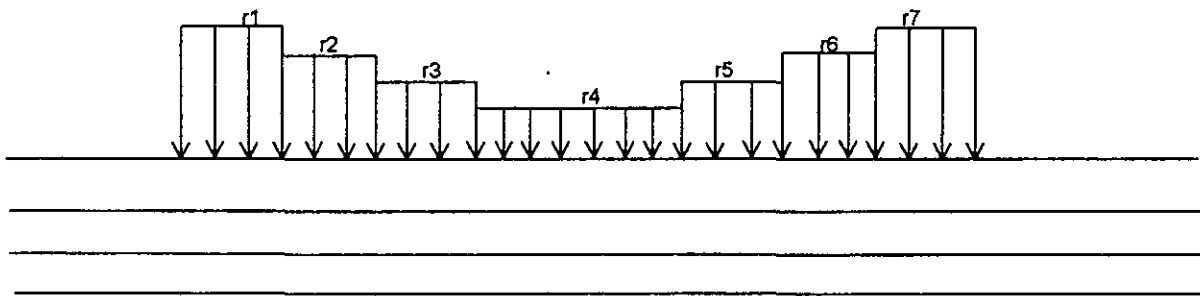
DIAGRAMA DE REACCIONES (c)

(Acisef3)

MARCO ESTRUCTURAL CON CIMENTACIÓN  
A BASE DE ZAPATA CORRIDA  
FIGURA 9

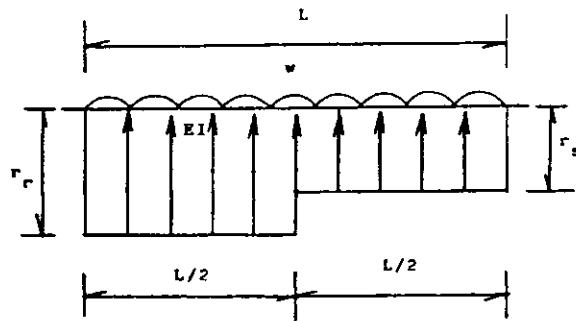


(a) REACCIONES DEL TERRENO



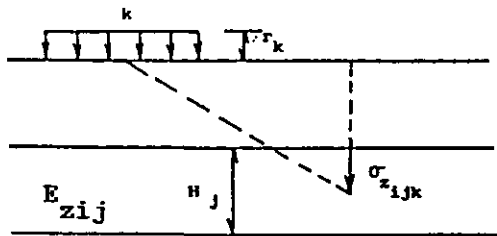
(b) CARGAS SOBRE EL TERRENO

CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA Y EL SUELO  
FIGURA 10



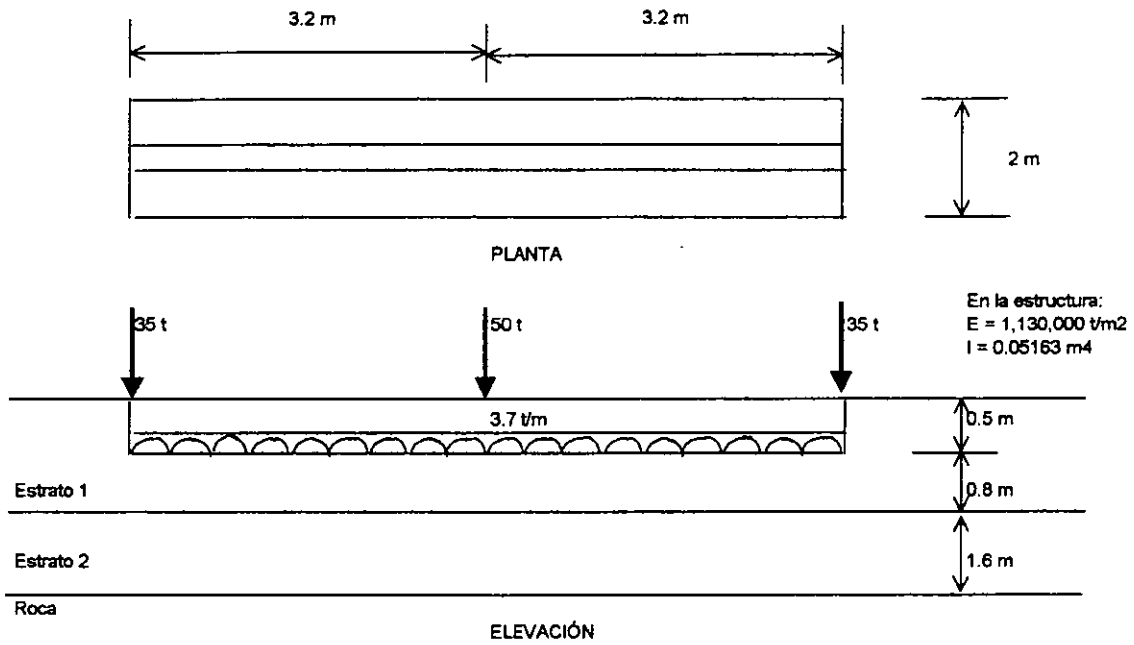
GEOMETRÍA Y CARGAS  
BARRA DE CIMENTACIÓN

FIGURA 11  
(Deméneghi, 1996)

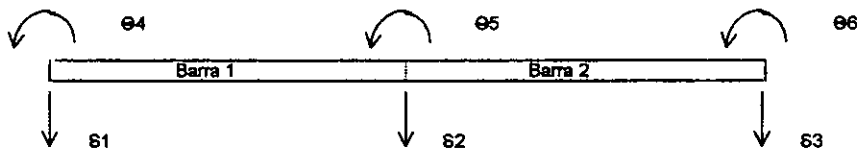


CÁLCULO DE LOS HUNDIMIENTOS  
DEL TERRENO

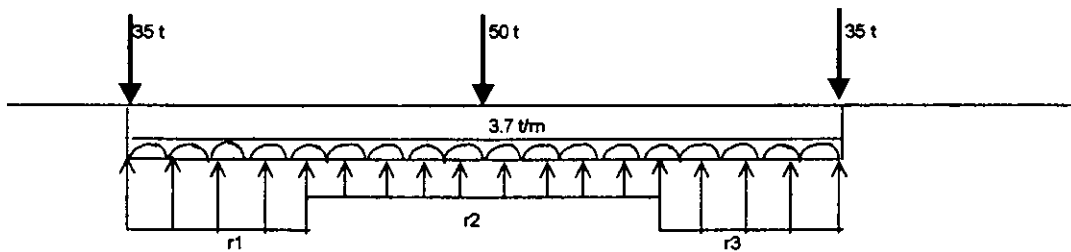
FIGURA 12  
(Deméneghi, 1996)



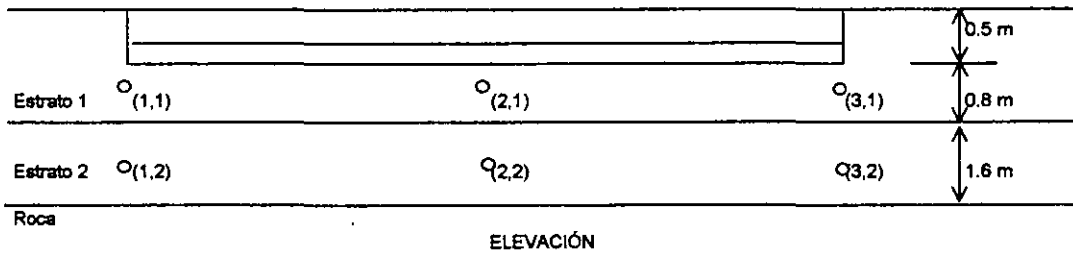
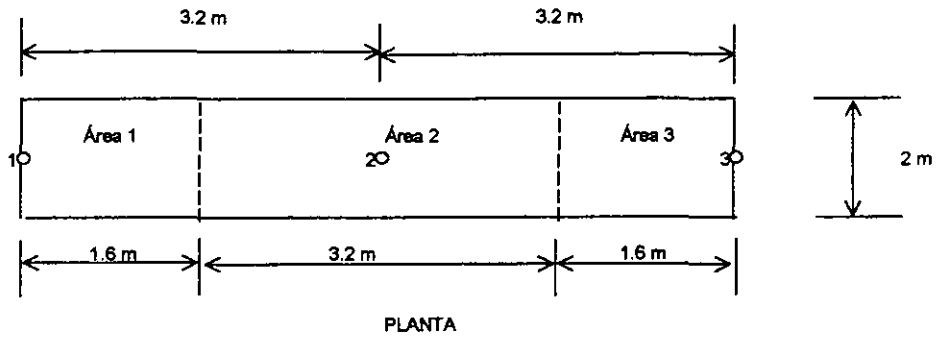
CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 13



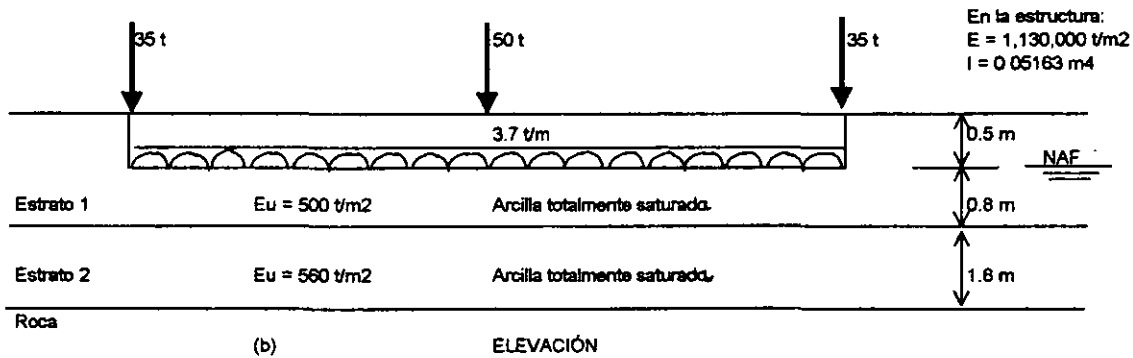
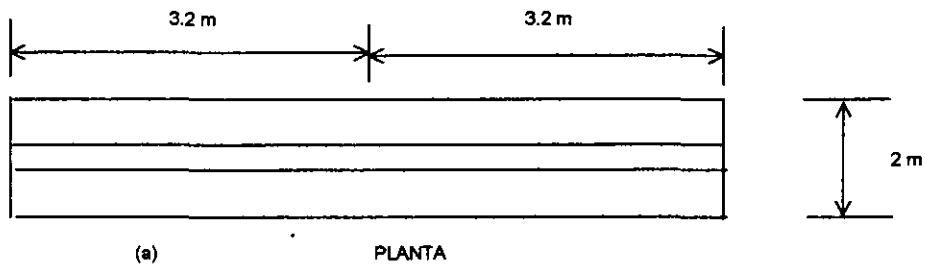
NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 14



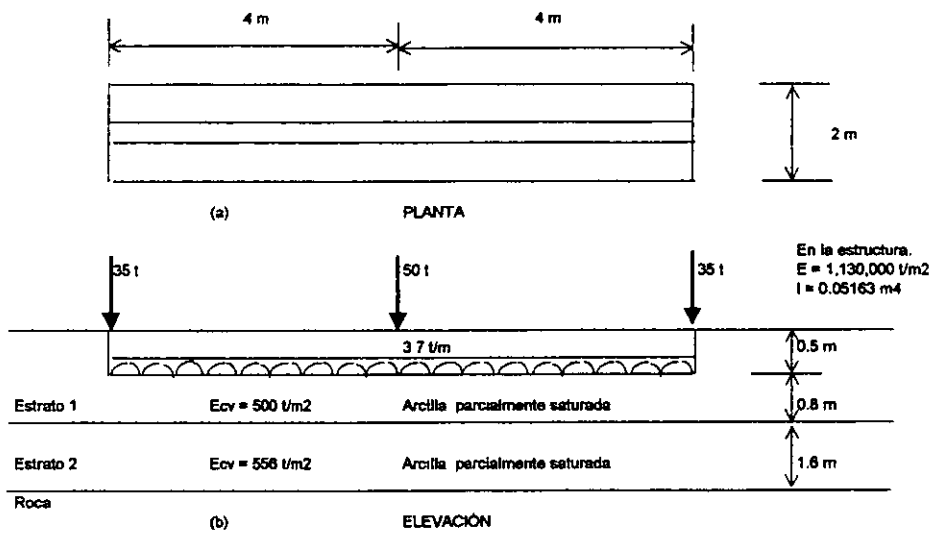
SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 15



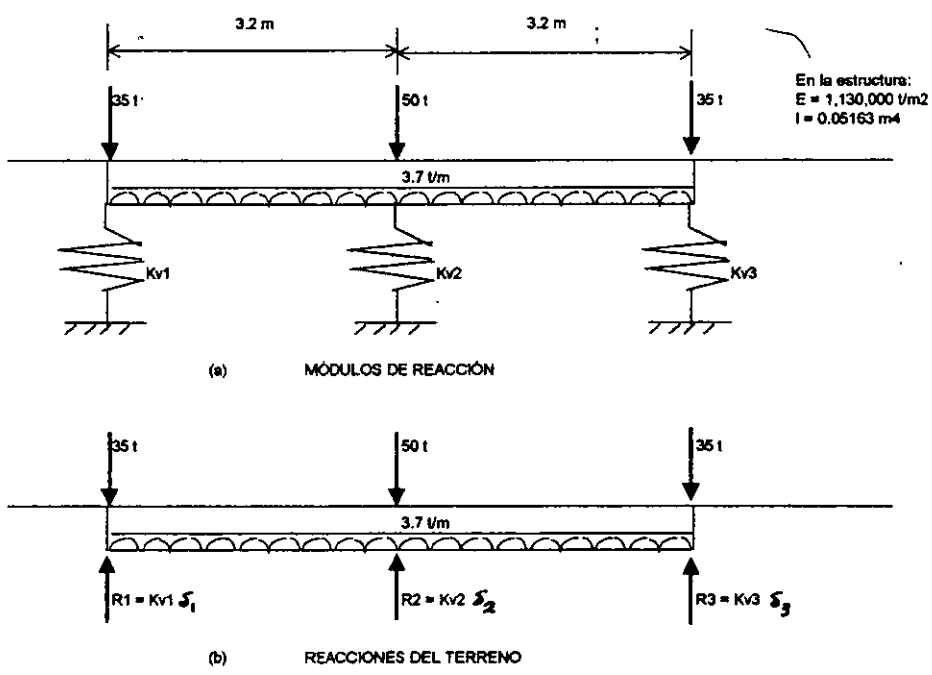
CÁLCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 3)  
FIGURA 16



CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN (EJEMPLO 4)  
FIGURA 17

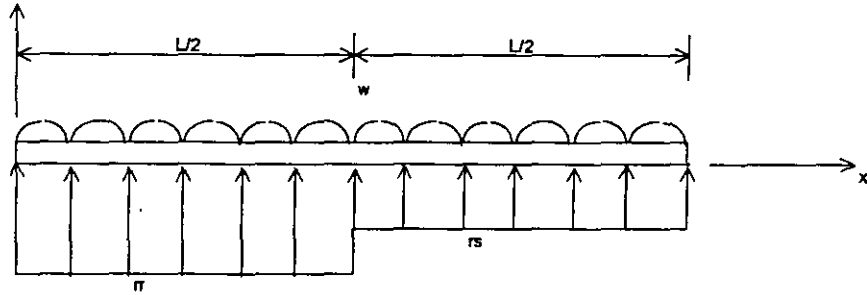


CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN (EJEMPLO 5) FIGURA 18

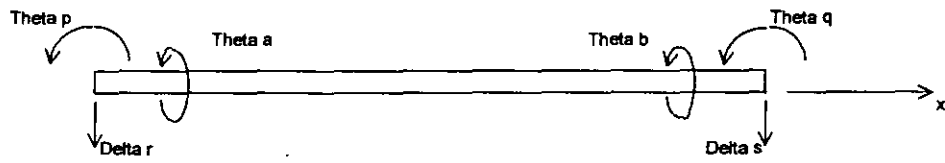


MÉTODO ITERATIVO (EJEMPLO 6) FIGURA 19





a) Cargas sobre la barra



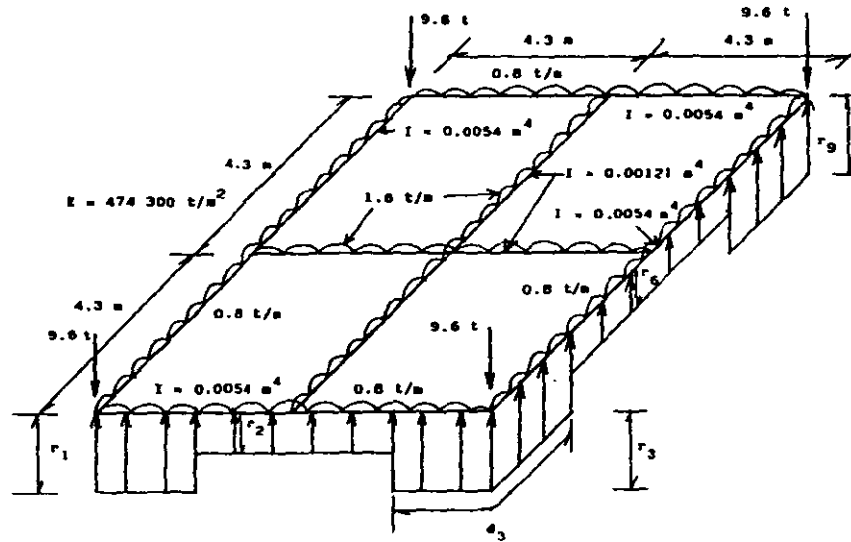
b) Grados de libertad



c) Elementos mecánicos  
(Barra sobre nudo)

(Acisef3)

ELEMENTOS MECÁNICOS SOBRE UNA BARRA DE CIMENTACIÓN  
SISTEMA GLOBAL  
FIGURA 20



GEOMETRÍA Y SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

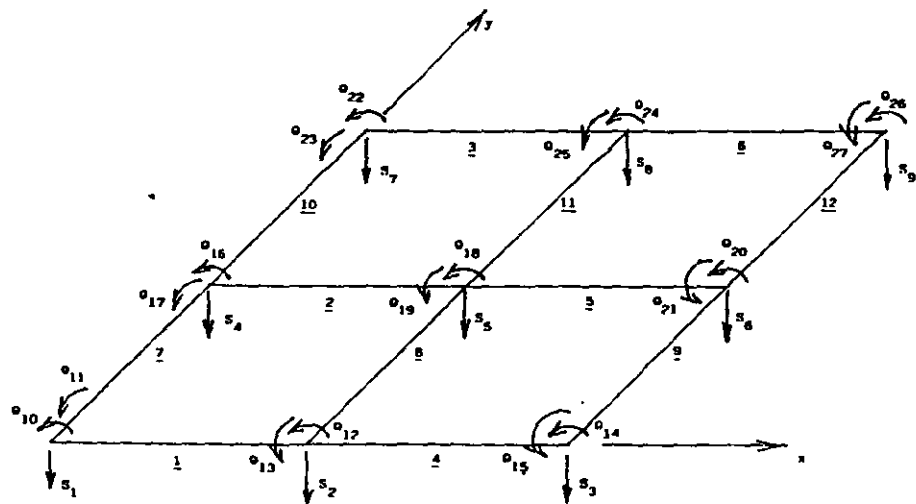
(Deméneghi, 1996)

FIGURA 21

$1/E_s = 0.0154 \text{ m}^2/t, \nu=0$	2.4 m	Estrato 1
$1/E_s = 0.0222 \text{ m}^2/t, \nu=0$	2.0 m	Estrato 2

ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES (EJEMPLO)

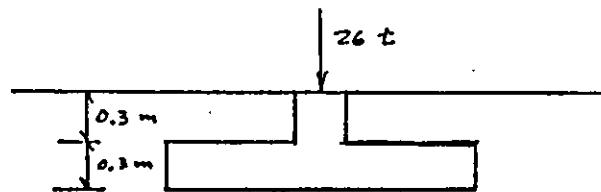
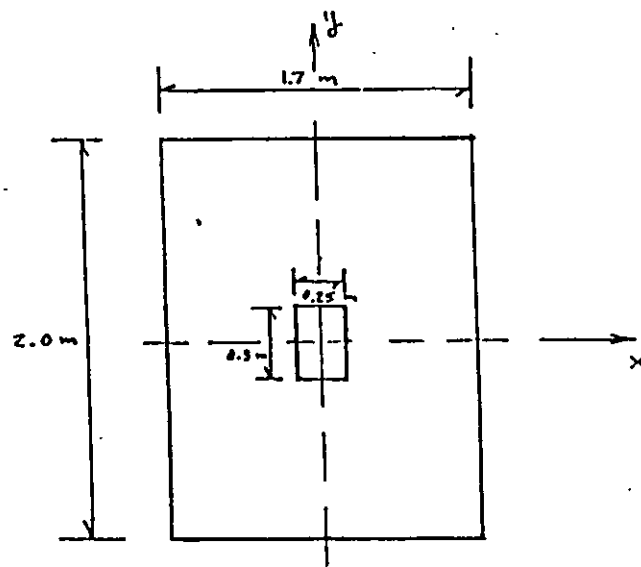
FIGURA 22



NUMERACION DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD

(Deméneghi, 1996)

FIGURA 23



$$D_r = 58\% , \phi^* = 37^\circ , \gamma_1 = 1.6 \text{ t/m}^3$$

Arena  $c_u = 2.6$

$N = 15$  golpes

SUELO FRICCIONANTE

FIGURA E-1

# ANEXO I

## MÉTODO DE RIGIDECES MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS

Agustín Deméneghi Colina\*

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait et al 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos cuando la estructura está empotrada;
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares;
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero;
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura;
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (1)$$

donde

- $\underline{K}$  = matriz de rigideces de la estructura
- $\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos
- $\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento
- $\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida a una carga uniformemente repartida  $w$  (fig 1). Utilizaremos la siguiente convención de signos, para una barra horizontal (fig 2): los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamiento horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b).

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Demos un giro  $\theta'_p$  en el extremo izquierdo de la barra. En la fig 3a se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la fig 3b se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro  $\theta'_q$  en el extremo derecho. Las figs 3c y 3d exhiben los elementos mecánicos provocados por un desplazamiento vertical  $\delta'_r$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento vertical  $\delta'_s$  en el nudo derecho, respectivamente. Las figs 3e y 3f muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento horizontal  $\delta'_u$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento horizontal  $\delta'_v$  en el nudo derecho. Las figs 3g y 3h contienen los momentos producidos por un giro de torsión  $\theta'_a$  en el nudo izquierdo y un giro de torsión  $\theta'_b$  en el nudo derecho.

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$  valen

$$M'_p = wL^2/12 + (4EI/L) \theta'_p + (2EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (2)$$

$$M'_q = -wL^2/12 + (2EI/L) \theta'_p + (4EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (3)$$

$$V'_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta'_p - (6EI/L^2) \theta'_q + (12EI/L^3) \delta'_r - (12EI/L^3) \delta'_s \quad (4)$$

$$V'_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta'_p + (6EI/L^2) \theta'_q - (12EI/L^3) \delta'_r + (12EI/L^3) \delta'_s \quad (5)$$

$$N'_u = (AE/L) \delta'_u - (AE/L) \delta'_v \quad (6)$$

$$N'_v = - (AE/L) \delta'_u + (AE/L) \delta'_v \quad (7)$$

$$M'_a = (GI_t/L) \theta'_a - (GI_t/L) \theta'_b \quad (8)$$

$$M'_b = - (GI_t/L) \theta'_a + (GI_t/L) \theta'_b \quad (9)$$

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valuar en forma aproximada (Beaufait et al 1970)

$$I_t \cong \frac{h b^3}{3} [1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left(\frac{b}{h}\right)^5] \quad (10)$$

$$h \geq b$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (11)$$

donde

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI/L & -GI/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI/L & GI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(\underline{P}^e)'_m = \begin{bmatrix} WL^2/12 \\ -WL^2/12 \\ -WL/2 \\ -WL/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\underline{K}'_m$  = matriz de rigidez de la barra m

$\underline{\delta}'_m$  = vector de desplazamientos de la barra m

$(\underline{P}^e)'_m$  = vector de cargas de empotramiento de la barra m

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí (fig 4); en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En la fig 5 se presenta la transformación de un vector del sistema global x-y al sistema local x'-y'. Aplicando las ecuaciones de la fig 5 a la barra inclinada de la fig 6 (despreciando el efecto de torsión con eje de giro vertical):

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p & \theta'_q &= \theta_q \\
 \delta'_r &= \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \\
 \delta'_s &= \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \\
 \delta'_u &= \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \\
 \delta'_v &= \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \\
 \theta'_a &= \theta''_a \cos \alpha \\
 \theta'_b &= \theta''_b \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones de la fig 5 a la barra de la fig 7:

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p \cos \beta - \theta''_a \sin \beta \\
 \theta'_q &= \theta_q \cos \beta - \theta''_b \sin \beta \\
 \theta''_a &= \theta_p \sin \beta + \theta_a \cos \beta \\
 \theta''_b &= \theta_q \sin \beta + \theta_b \cos \beta
 \end{aligned}$$

Sean

$$\delta'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{\delta}_m = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es decir

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (17)$$

donde

$$\underline{T}_m = \begin{array}{cccccccc} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta \end{array} \right] & \begin{array}{l} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{array} \end{array} \quad (18)$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$\theta'_p = \theta_p \cos \beta - \theta_a \text{sen } \beta \quad (19)$$

$$\theta'_q = \theta_q \cos \beta - \theta_b \text{sen } \beta \quad (20)$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \text{sen } \alpha \quad (21)$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \text{sen } \alpha \quad (22)$$

$$\delta'_u = \delta_r \text{sen } \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (23)$$

$$\delta'_v = \delta_s \text{sen } \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (24)$$

$$\theta'_a = \theta_p \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_a \cos \alpha \cos \beta \quad (25)$$

$$\theta'_b = \theta_q \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (26)$$



En el sistema local  $x'-z'$  (fig 6)

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (27)$$

Pero

$$(\underline{P}^e)'_m = \underline{T}_m \underline{P}^e_m \quad (28)$$

y

$$\underline{P}'_m = \underline{T}_m \underline{P}_m \quad (29)$$

Sustituyendo la ec 29 en la ec 27

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (30)$$

Sustituyendo las ecs 17 y 28 en la ec 30

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{T}_m \underline{P}^e_m$$

Premultiplicando por  $\underline{T}_m^{-1}$

$$\underline{P}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^e_m$$

donde

$$\underline{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} \quad (31)$$

En el sistema global

$$\underline{P}_m = \underline{K}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^e_m \quad (32)$$

donde

$$\underline{K}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \quad (33)$$

Sustituyendo las ecs 12, 18 y 31 en la ec 33, se obtiene la matriz  $\underline{K}_m$ , la cual se muestra en la tabla 1.

Para el vector de cargas de empotramiento:

$$\underline{P}_m^e = \underline{T}^{-1} (\underline{P}_m^e)' \quad (34)$$

Para una barra sometida a una carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $\underline{P}_m^e$  vale

$$\underline{P}_m^e = \begin{bmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ - (wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (35)$$

La ec 33 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ . Las ecs 34 ó 35 proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ .

En resumen, primero se utilizan la tabla 1 y las 34 ó 35 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos correspondientes al sistema global  $x-y-z$  (vector  $\underline{\delta}$ ). Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma: primero se determinan los desplazamientos en el sistema local, con el empleo de la ec 17 ó las ecs 19 a 26:

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (\text{ec } 17)$$

A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se determinan con la ec 11 ó con las ecs 2 a 9:

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (\text{ec } 11)$$

**Ejemplo 1**

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura d la fig 8a.

**Solución**

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 8b). En este ejemplo no se toman en cuenta los efectos de torsión ( $\beta = 0$ ).

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\alpha$
							Grados
1	$\theta_5$	$\theta_{11}$	$\delta_1$	$\delta_7$	$\delta_3$	$\delta_9$	68.2
2	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_9$	$\delta_{10}$	0
3	$\theta_6$	$\theta_{12}$	$\delta_2$	$\delta_8$	$\delta_4$	$\delta_{10}$	111.8

Empleando la tabla 1 se obtienen las matrices de rigidez de las barras 1, 2 y 3, las cuales se muestran en las tabla 2. La matriz de rigidez de la estructura completa en el sistema global es la suma de las matrices de todas y cada una de las barras.

Sumando las matrices de las barras 1, 2 y 3 (tabla 2) obtenemos

$$\underline{K} = \begin{bmatrix}
 \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} \\
 32578.02 & -664.2 & 12719.58 & 0 & -1877.77 & -1992.6 \\
 -664.2 & 32578.02 & 0 & -12719.58 & 1992.6 & 1877.77 \\
 12719.58 & 0 & 71622.66 & -66420 & -287.08 & 0 \\
 0 & -12719.58 & -66420 & 71622.66 & 0 & -287.08 \\
 -1877.77 & 1992.6 & -287.08 & 0 & 9080.45 & 3985.2 \\
 -1992.6 & 1877.77 & 0 & -287.08 & 3985.2 & 9080.45
 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad \underline{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (\text{ec 1})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_7 &= 0.00080245 \text{ m} & \delta_8 &= 0.00080245 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.00008378 \text{ m} & \delta_{10} &= 0.00008378 \text{ m} \\ \theta_{11} &= -0.00473308 & \theta_{12} &= 0.00473308 \end{aligned}$$

Además  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$

Los elementos mecánicos en cada barra se hallan con el empleo de la ec 11:

$$\underline{P}'_1 = \underline{K}'_1 \underline{\delta}'_1 + (\underline{P}^e)' \quad (\text{ec 11})$$

Las matrices de cada barra en el sistema local ( $\underline{K}'_m$ ) se obtienen con la ec 12. En la tabla 3 se exhiben estas matrices para las tres barras de la estructura.

El vector de desplazamientos  $\underline{\delta}'_m$  se halla con el uso de las ecs 19 a 26, mientras que los elementos mecánicos en cada barra (sistema local) se determinan con el empleo de las ecs 2 a 9. La tabla 4 contiene el cómputo de desplazamientos y elementos mecánicos para las barras 1, 2 y 3.

### Ejemplo 2

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 9a. Despreciar el fenómeno de acortamiento de barras.

### Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 9b):

#### SISTEMA GLOBAL x-y

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$
1	-	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$
2	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$	-

#### SISTEMA LOCAL x'-y'

Barra	$\theta'_p$	$\theta'_q$	$\delta'_r$	$\delta'_s$	$\theta'_a$	$\theta'_b$
1	-	$\theta'_2$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_3$
2	$\theta'_3$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_2$	-

Los desplazamientos están relacionados entre sí, de acuerdo con las ecs 19 a 26

Barra 1

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = \theta_3$$

Barra 2

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = -\theta_3$$

Las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento en el sistema global, se hallan con los valores de la tabla 1 y las ecs 34 ó 35:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_1^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 384.38 & 0 & 0 \\ 0 & 664.20 & 1992.60 \\ 0 & 1992.60 & 7970.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global es la suma de las matrices de cada una de las barras, es decir

$$K = \begin{bmatrix} \delta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1328.40 & 1992.60 & 1992.60 \\ 1992.60 & 8354.78 & 0 \\ 1992.60 & 0 & 8354.78 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -48 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (\text{ec 1})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.09671 \text{ m} \\ \theta_2 &= -0.020194 & \theta_3 &= -0.020194 \end{aligned}$$

Para obtener los elementos mecánicos en las barras, trabajamos en el sistema local, en el que las matrices  $\underline{K}'_m$  valen (ec 12):

$$\underline{K}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 & \delta'_1 & \theta'_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 & \delta'_1 & \theta'_2 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec 11

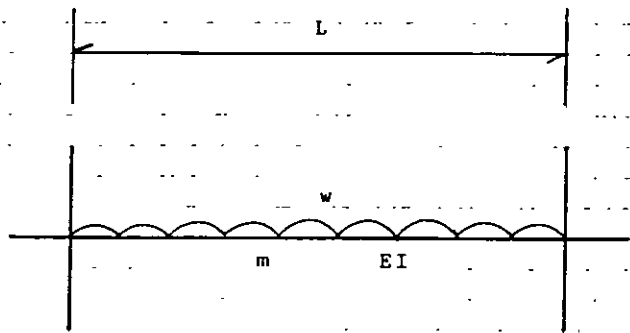
Barra 1  
 $M'_2 = 7.75 \text{ t.m}$                        $V'_1 = 0$                        $M'_3 = - 7.76 \text{ t.m}$

Barra 2  
 $M'_3 = - 7.75 \text{ t.m}$                        $V'_1 = 0$                        $M'_2 = - 7.76 \text{ t.m}$

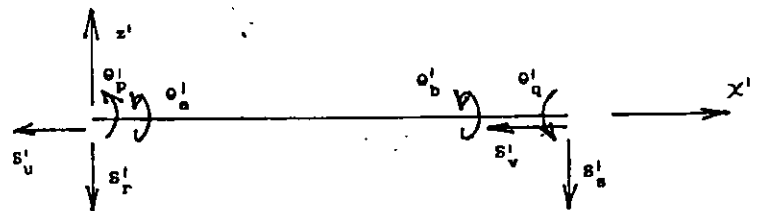
Los momentos obtenidos son de barra sobre nudo; éstos se exhiben en la fig 9c.

REFERENCIA

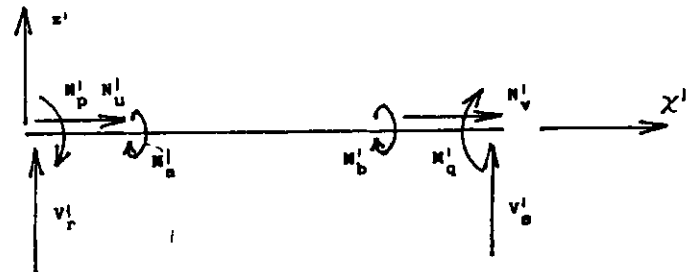
Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970



Barra m  
**FIGURA 1**



a) Desplazamientos



b) Elementos mecánicos  
 (barra sobre nudo)

CONVENCIÓN DE SIGNOS

(ADSMRI9)

**FIGURA 2**

TABLA 1

NOMBRE: MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA INCLINADA

FECHA: 23/04/96

PROGRAMA: MARIGBI

Sean	$D = 4 EI/L$ $F = Git/L$	$M = 6 EI/L^2$		$N = 12 EI/L^3$		$Q = AE/L$		
	$SA = \text{sen } A$ $CA = \text{cos } A$	$S2A = \text{sen}^2 A$ $C2A = \text{cos}^2 A$		$SB = \text{sen } B$ $CB = \text{cos } B$		$S2B = \text{sen}^2 B$ $C2B = \text{cos}^2 B$		
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb	
$D C2B$ $+ F S2B$	$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F SB CB$	tp
$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$D C2B$ $+ F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	tq
$- M CA CB$	$- M CA CB$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$M CA SB$	$M CA SB$	dr
$M CA CB$	$M CA CB$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- M CA SB$	$- M CA SB$	ds
$M SA CB$	$M SA CB$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$- M SA SB$	$- M SA SB$	du
$- M SA CB$	$- M SA CB$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$M SA SB$	$M SA SB$	dv
$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$D S2B$ $+ F C2B$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	ta
$(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	$D S2B$ $+ F C2B$	tb



TABLA 2

NOMBRE: CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA INCLINADA

FECHA: 23/04/96

PROGRAMA: MARIBI43

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 1

	5	11	7	1	7	3	9			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb			
1110.049	555.0247	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	0	tp	5
555.0247	1110.049	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	0	tq	11
-114.832	-114.832	31913.82	-31913.8	12719.58	-12719.5	0	0	0	dr	1
114.8326	114.8326	-31913.8	31913.82	-12719.5	12719.58	0	0	0	ds	7
287.0818	287.0818	12719.58	-12719.5	5202.665	-5202.66	0	0	0	du	3
37.081	-287.081	-12719.5	12719.58	-5202.66	5202.665	0	0	0	dv	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 2

	11	12	7	8	9	10				
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb			
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	0	tp	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	0	tq	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	0	0	0	0	0	dr	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	0	0	0	0	0	ds	8
0	0	0	0	66420	-66420	0	0	0	du	9
0	0	0	0	-66420	66420	0	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global

Matriz de rigidez de la barra 3

	6	12	2	8	4	10				
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb			
1110.049	555.0247	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	0	tp	6
555.0247	1110.049	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	0	tq	12
114.8326	114.8326	31913.82	-31913.8	-12719.5	12719.58	0	0	0	dr	2
-114.832	-114.832	-31913.8	31913.82	12719.58	-12719.5	0	0	0	ds	8
287.0818	287.0818	-12719.5	12719.58	5202.665	-5202.66	0	0	0	du	4
-287.081	-287.081	12719.58	-12719.5	-5202.66	5202.665	0	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

**TABLA 3**

**stema local**

**Matriz de rigidez de la barra 1**

	5	11	1	7	3	9				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
1110.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
	0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
	0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

**Sistema local**

**Matriz de rigidez de la barra 2**

	11	12	7	8	9	10				GL
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tp'	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tq'	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2		0	0	0	0	dr'	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2		0	0	0	0	ds'	8
	0	0	0	0	66420	-66420	0	0	du'	9
	0	0	0	0	-66420	66420	0	0	dv'	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

**Sistema local**

**Matriz de rigidez de la barra 3**

	6	12	2	8	4	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
1110.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
	0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
	0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
	0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
	0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

TABLA 4

Sistema local

Barra 1

tp'	5	11	1	7	3	9	ta'	tb'
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -2.51077 Mp'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -5.13775 Mq'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 1.420296 Vr'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vs'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Ma'
	0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Mb'

Sistema local

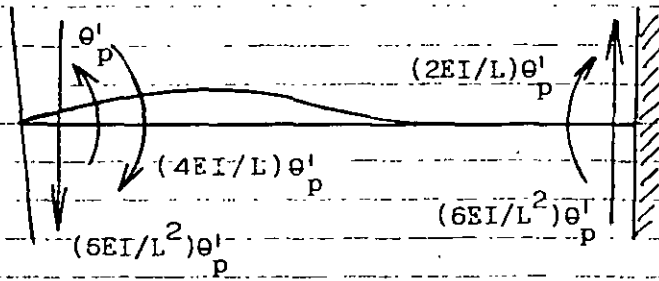
Barra 2

tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 5.137729 Mp'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -5.13772 Mq'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vr'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vs'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -11.1293 Vu'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 11.12933 Vv'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Ma'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Mb'

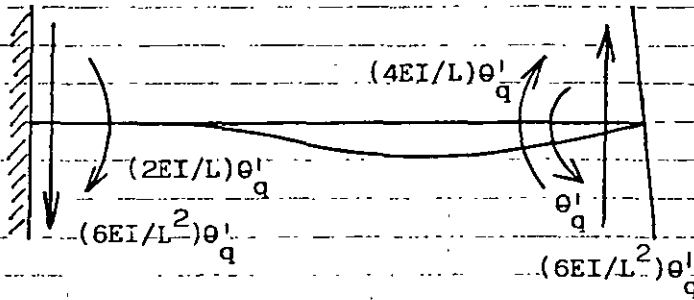
Sistema local

Barra 3

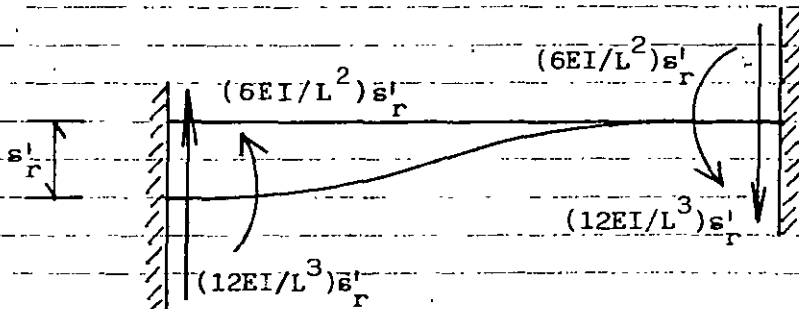
tp'	5	11	1	7	3	9	ta'	tb'
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 2.510777 Mp'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 5.137754 Mq'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vr'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 1.420296 Vs'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Ma'
	0	0.004733	0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Mb'



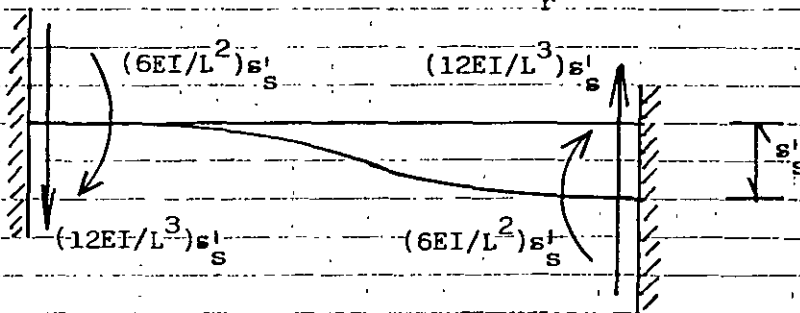
a) Giro  $\theta'_p$



b) Giro  $\theta'_q$



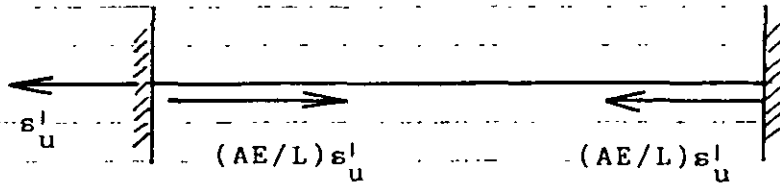
c) Desplazamiento  $s'_r$



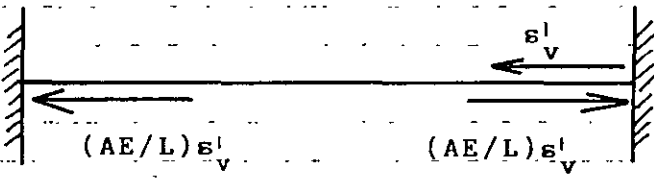
d) Desplazamiento  $s'_s$

ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR DESPLAZAMIENTOS  
ANGULARES Y LINEALES

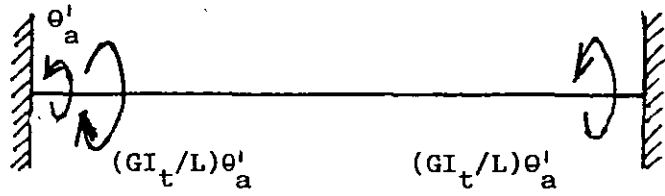
FIGURA 3.



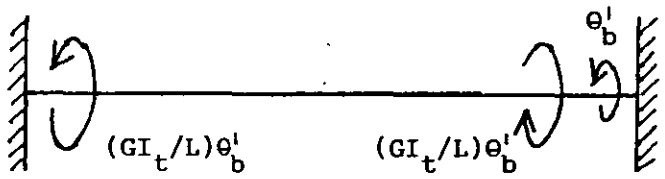
e) Desplazamiento  $s'_u$



f) Desplazamiento  $s'_v$



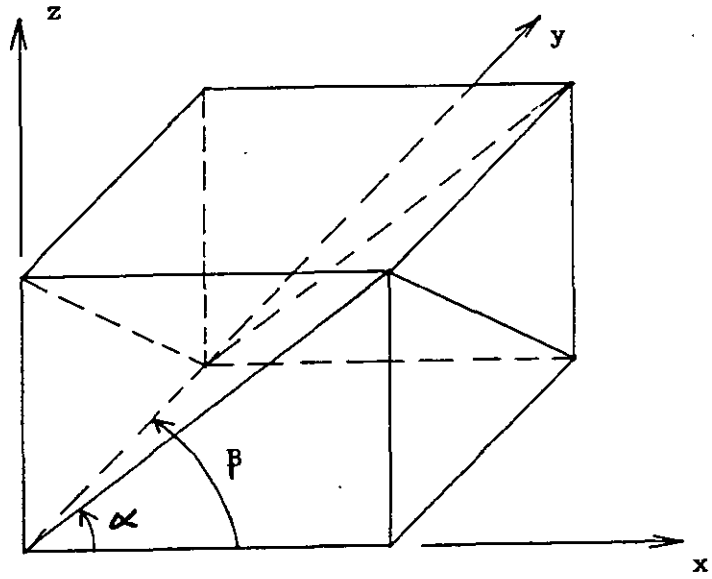
g) Giro  $\theta'_a$



h) Giro  $\theta'_b$

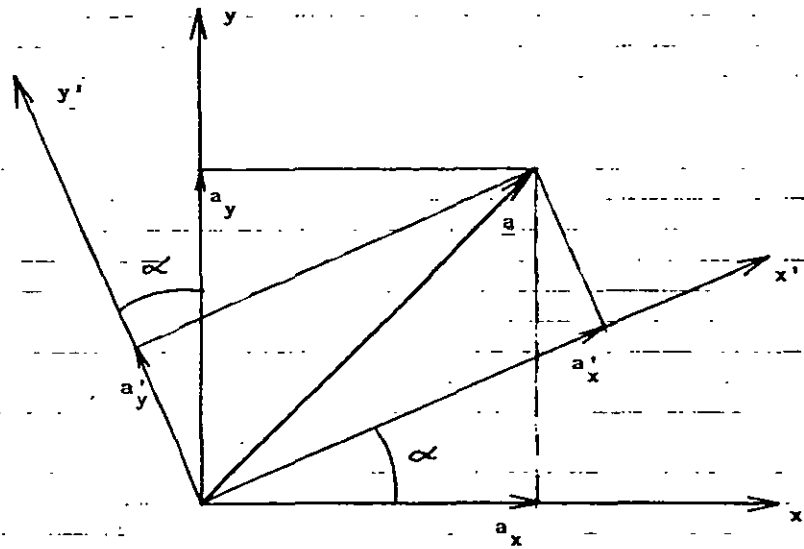
ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR  
DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3



MARCOS PLANOS ORTOGONALES ENTRE SÍ

FIGURA 4

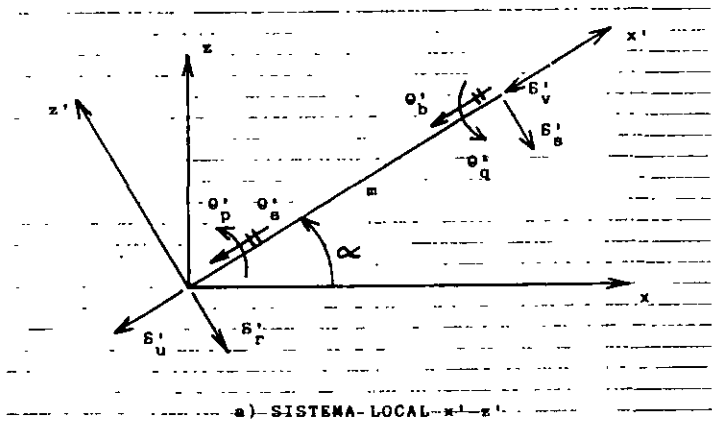


$$a'_x = a_x \cos \alpha + a_y \operatorname{sen} \alpha$$

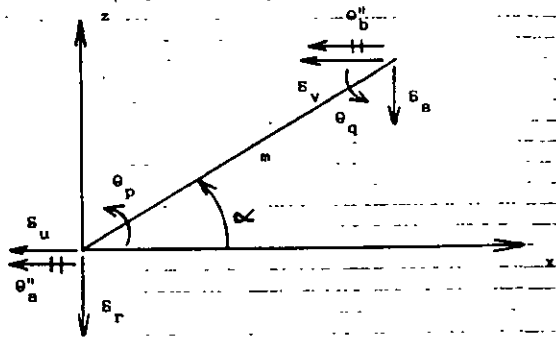
$$a'_y = -a_x \operatorname{sen} \alpha + a_y \cos \alpha$$

TRANSFORMACIÓN DE UN VECTOR DEL SISTEMA GLOBAL x-y AL SISTEMA LOCAL x'-y'

FIGURA 5



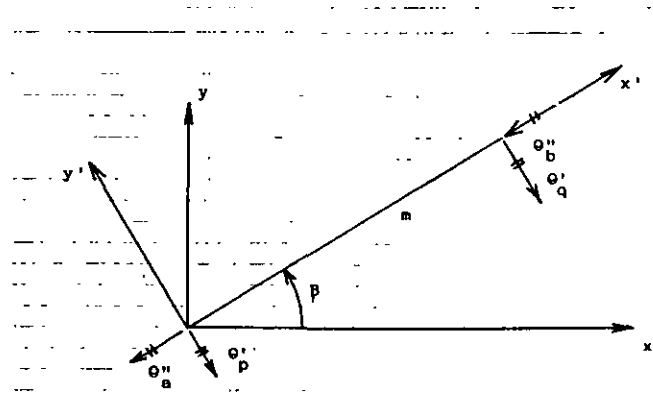
a) SISTEMA LOCAL  $x'-z'$



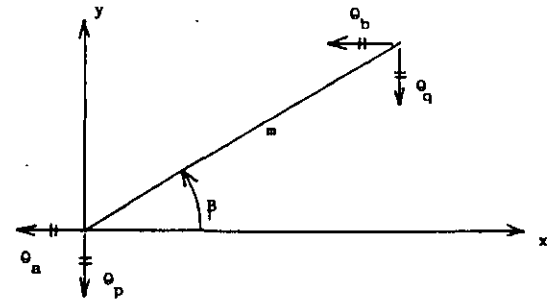
b) SISTEMA GLOBAL  $x-z$

DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA INCLINADA

FIGURA 6



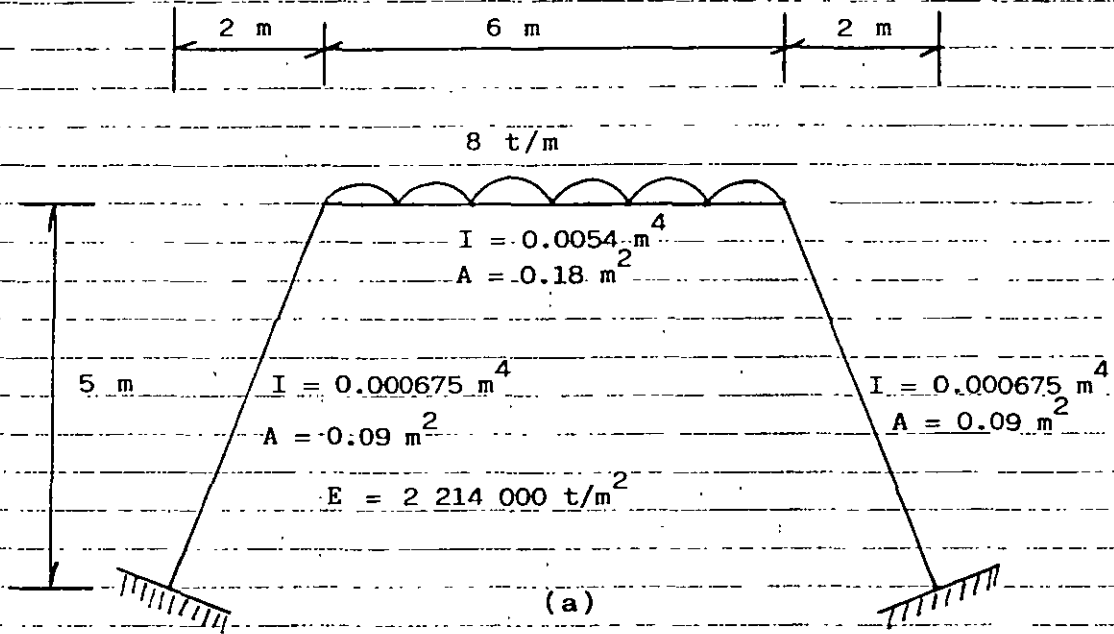
a) SISTEMA LOCAL  $x'-y'$



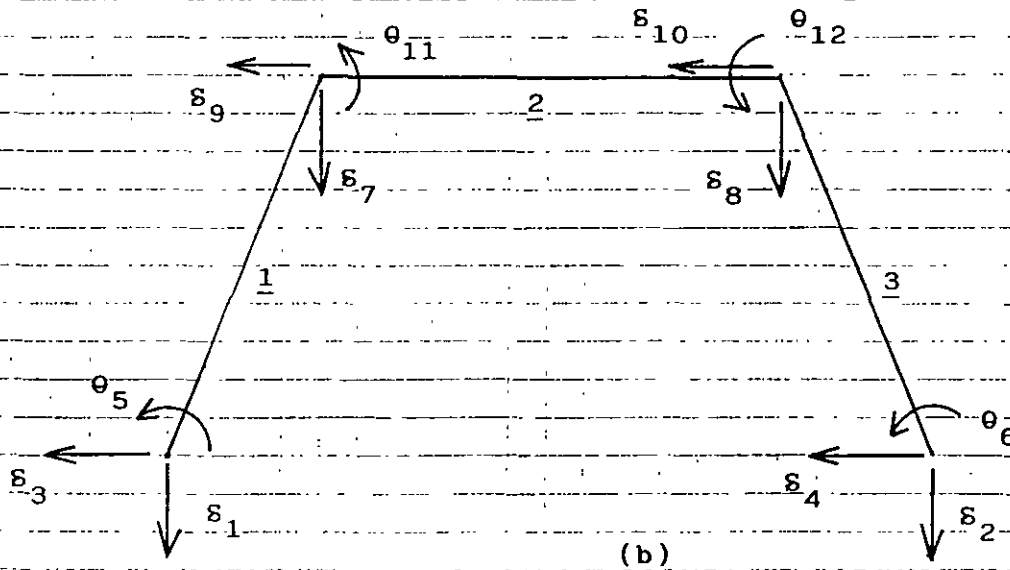
b) SISTEMA GLOBAL  $x-y$

GIROS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO  $x-y$

FIGURA 7



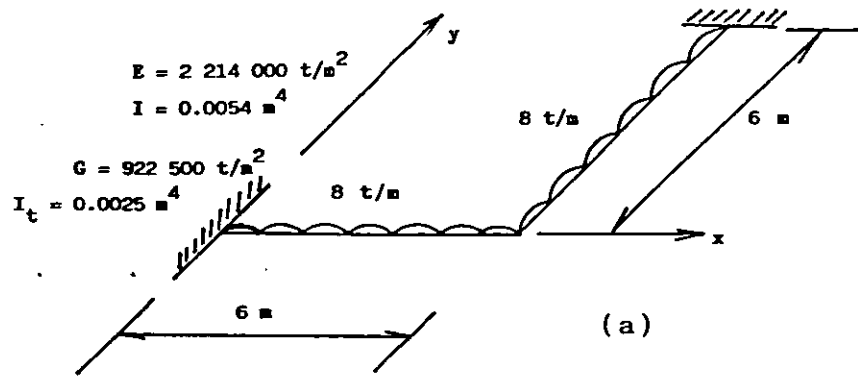
GEOMETRÍA Y CARGAS EN LA ESTRUCTURA (EJEMPLO)



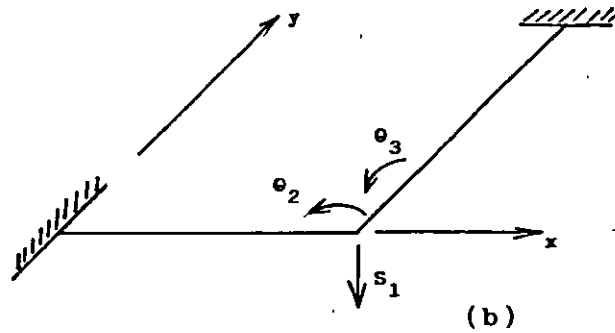
NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

FIGURA 8

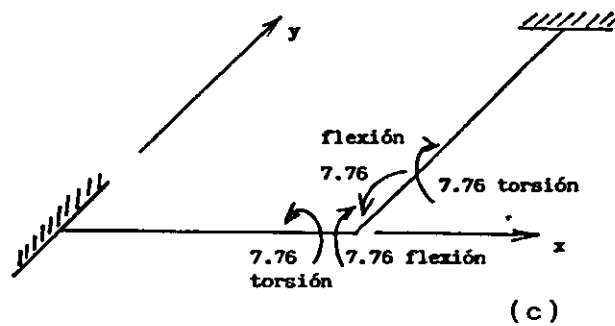




GEOMETRÍA Y CARGAS (EJEMPLO)



GRADOS DE LIBERTAD



MOMENTOS EN t.m

FIGURA 9

ANEXO 2

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA. SISTEMA GLOBAL

MARCO CON BARRAS ORTOGONALES

SIN CONSIDERAR ACORTAMIENTO DE BARRAS, NI EFECTOS DE TORSIÓN

Barras horizontales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_s$

Elementos mecánicos (barra sobre nudo)

$$M_p = wL^2 + (4EI/L) \theta_p + (2EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s$$

$$M_q = -wL^2 + (2EI/L) \theta_p + (4EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s$$

$$V_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta_p - (6EI/L^2) \theta_q + (12EI/L^3) \delta_r - (12EI/L^3) \delta_s$$

$$V_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta_p + (6EI/L^2) \theta_q - (12EI/L^3) \delta_r + (12EI/L^3) \delta_s$$

Barras verticales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_u$	$\delta_v$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_q$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_u$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_v$

Elementos mecánicos (barra sobre nudo)

$$M_p = wL^2 + (4EI/L) \theta_p + (2EI/L) \theta_q + (6EI/L^2) \delta_u - (6EI/L^2) \delta_v$$

$$M_q = -wL^2 + (2EI/L) \theta_p + (4EI/L) \theta_q + (6EI/L^2) \delta_u + (6EI/L^2) \delta_v$$

$$V_u = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta_p + (6EI/L^2) \theta_q + (12EI/L^3) \delta_u - (12EI/L^3) \delta_v$$

$$V_v = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta_p - (6EI/L^2) \theta_q - (12EI/L^3) \delta_u + (12EI/L^3) \delta_v$$

ANEXO 3

MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA DE UNA RETÍCULA DE CIMENTACIÓN,  $\alpha = 0$   
 SISTEMA GLOBAL  
 SIN CONSIDERAR ACORTAMIENTO DE BARRAS

DIRECCIÓN  $x$ ,  $\beta = 0$

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	0	0	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	0	0	$\delta_s$
0	0	0	0	$GI/L$	$-GI/L$	$\theta_a$
0	0	0	0	$-GI/L$	$GI/L$	$\theta_b$

DIRECCIÓN  $y$ ,  $\beta = 90^\circ$

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$	
$GI/L$	$-GI/L$	0	0	0	0	$\theta_p$
$-GI/L$	$GI/L$	0	0	0	0	$\theta_q$
0	0	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\delta_r$
0	0	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\delta_s$
0	0	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$4EI/L$	$2EI/L$	$\theta_a$
0	0	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$2EI/L$	$4EI/L$	$\theta_b$

VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO. BARRA DE CIMENTACIÓN. SISTEMA GLOBAL

$$P_m^e = \begin{bmatrix} [wL^2/12 - (11/192)L^2 r_r - (5/192)L^2 r_s] \cos \beta \\ [-wL^2/12 + (5/192)L^2 r_r + (11/192)L^2 r_s] \cos \beta \\ [-wL/2 + (13/32)L r_r + (3/32)L r_s] \cos \alpha \\ [-wL/2 + (3/32)L r_r + (13/32)L r_s] \cos \alpha \\ [-wL^2/12 + (11/192)L^2 r_r + (5/192)L^2 r_s] \sin \beta \\ [wL^2/12 - (5/192)L^2 r_r - (11/192)L^2 r_s] \sin \beta \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix}$$

## ANÁLISIS SÍSMICO DE CIMENTACIONES

Agustín Deméneghi Colina\*

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del Estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al análisis y diseño de la estructura, incluyendo desde luego en éste al de la estructura de cimentación.

Sin embargo, cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, el cual consiste en que, en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración, mientras que en la superficie del suelo blando la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme (fig 1).

El comportamiento anterior se debe a que ocurre, por lo menos en forma parcial, la resonancia del suelo blando. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 2, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$x_0 = a \sin \Omega t$$

La velocidad de la base vale  $\dot{x}_0 = a \Omega \cos \Omega t$

y la aceleración  $\ddot{x}_0 = -a \Omega^2 \sin \Omega t$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976).

Desplazamiento relativo  $y = a B_d \sin (\Omega t - \phi)$

Velocidad relativa  $\dot{y} = a \Omega B_d \cos (\Omega t - \phi)$

Aceleración relativa  $\ddot{y} = -a \Omega^2 B_d \sin (\Omega t - \phi)$

En las expresiones anteriores

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM.

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}\right]^2 + \left[2\zeta \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)}\right]^2}}$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema

$$\omega_1 = \sqrt{K / M}$$

Los desplazamientos absolutos están dados por

Desplazamiento	$x = x_0 + y$
Velocidad	$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{y}$
Aceleración	$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{y}$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max \ddot{x} / \max \ddot{x}_0$$

En la fig 3 se muestra la variación de  $f_a$  con el cociente  $T_1 / T$ , para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los periodos están dados por

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 \text{ (masa que vibra)} \quad \text{y} \quad T = 2\pi / \Omega \text{ (base)}$$

Se observa en la fig 3 que la amplificación de la aceleración depende del cociente  $T_1 / T$  y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando  $T_1 / T = 1$ ; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor  $f_a$ . Para  $T_1 / T \rightarrow \infty$  la amplificación de la aceleración es nula.

Un fenómeno similar sucede en el suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del ejemplo anterior. Consideremos un estrato de espesor  $H$  como el indicado en la fig 1, y supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por

$$x_0(t) = C \exp(i\Omega t) = C (\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia  $\Omega$ .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación  $f_a = A(\Omega)$  como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtiene (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta} \quad (1)$$

donde

$$\alpha = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} - 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (2)$$

$$\beta = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} + 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (3)$$

donde  $C_s = \sqrt{G / \rho}$  = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando

$\eta$  = amortiguamiento del suelo blando

$\Omega$  = frecuencia circular natural de la base rígida

$H$  = espesor del suelo blando

$G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando

$\rho$  = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que  $\eta \Omega / G = 2 \zeta$  sea una constante. Aplicando las ecs 1 a 3 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$\omega_n$  = frecuencia circular del modo  $n$  de vibrar

$$\omega_n = (2n - 1) \pi \sqrt{G / \rho} / 2 H = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad (4)$$

Para pequeños valores de  $(\eta \Omega / G)$ , la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969):

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2\zeta) \quad (5)$$

$\zeta$  = fracción del amortiguamiento crítico

En la fig 4 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor  $H = 30.5$  m, con una velocidad de la onda de cortante en el suelo blando  $C_s = 229$  m/s y un peso volumétrico del suelo  $\gamma = 2$  t/m<sup>3</sup>.

La función de amplificación se obtiene empleando las ecs 1 a 3, considerando que  $\eta \Omega / G = 2 \zeta$ .

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18, para un amortiguamiento del suelo blando de 20 % del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los "picos" de la función de amplificación (fig 4), empleando las ecs 4 y 5. En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20 % del amortiguamiento crítico.

TABLA 1  
VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN A ( $\omega_n$ )

n	$\omega_n$ s <sup>-1</sup>	f ciclos/s	$T_{sn}$ s	A ( $\omega_n$ )
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.03	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad A(\omega_n) = 4 / (2n - 1)\pi (2\zeta)$$

$$f = \omega_n / 2\pi \quad T_{sn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio; en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los períodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima respuesta de aceleración se presenta cuando el período de vibración de la base firme coincide con el período natural del primer modo de vibrar, siendo esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo (fig 4). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3.18 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento

suelo es de 20 % . Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente  $T_{s1} / T$ , donde  $T_{s1}$  es el período natural de vibración del estrato blando y  $T$  es el período dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Para un estrato de suelo homogéneo (fig 1), los períodos de vibración están dados por

$$T_{sn} = 4 H \sqrt{\rho / G} / (2n - 1) \quad (6)$$

$n = 1, 2, \dots$

donde  $\rho$  = masa específica del suelo  
 $G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para  $n = 1$ :

$$T_{s1} = 4 H \sqrt{\rho / G} \quad (7)$$

Para la estimación del período natural de vibración de un suelo estratificado véase Zeevaert (1973, 1980). Para la determinación del módulo de rigidez dinámico de la arcilla del valle de México, puede consultarse a Jaime et al (1987).

El período de vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural. Sin embargo, cuando el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación horizontal de la cimentación. Así, el período de vibración acoplado de una estructura vale (Normas de Sismo 1987):

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2} \quad (8)$$

donde  $T_o$  = período fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida (este período se debe a la flexibilidad propia de la estructura)

$T_x$  = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza

$T_r$  = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza

El período natural de vibración por rotación de una masa está dado por



$$T_r = 2 \pi \sqrt{M H^2 / K_r} = 2 \pi H \sqrt{M / K_r} \quad (9)$$

$$T_r = 2 \pi \sqrt{W H^2 / g K_r} \quad g = \text{aceleración de la gravedad} \quad (10)$$

Las Normas de Sismo, en el inciso A.7 del Apéndice, establecen que "para el cálculo de  $T_x$  se supondrá que el desplazamiento de la base está restringido por un elemento elástico cuya rigidez vale  $K_x$ , en t/m:

$$T_x = 2 \pi (W'_0 / g K_x)^{1/2} \quad (11)$$

donde  $T_x$  está en segundos,  $W'_0$  es el peso neto de la construcción al nivel de su desplante, incluyendo el peso de los cimientos y descontando el del suelo que es desplazado por la infraestructura, en toneladas, y "g" es la aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ . El valor de  $W'_0$  no se tomará menor de  $0.7 W_0$ .

"Para el cálculo de  $T_r$  se supondrá que la rotación de la base está restringida por un elemento elástico de rigidez  $K_r$ , en t.m/radián:

$$T_r = 2 \pi (J / g K_r)^{1/2} \quad (12)$$

donde  $T_r$  está en segundos y "J" es el momento neto de inercia del peso de la construcción, en  $t.m^2$ , con respecto al eje de rotación descontando el momento de inercia de la masa del suelo desplazado por la infraestructura. Esta diferencia no se tomará menor de 0.7 veces el momento de inercia calculado con el peso de la construcción.

"Tratándose de construcciones que se apoyan sobre zapatas corridas con dimensión mayor en la dirección que se analiza o sobre losa o cascarón que abarque toda el área de cimentación, y que posean suficiente rigidez y resistencia para suponer que su base se desplaza como cuerpo rígido, los valores de  $K_x$  y  $K_r$  se obtendrán de la tabla 1, en que G es el módulo de rigidez medio, en  $t/m^2$ , del estrato en que se apoya la construcción, y los radios equivalentes  $R_x$  y  $R_r$ , en metros, se calcularán empleando las expresiones

$$R_x = (A / \pi)^{1/2} \quad (13)$$

$$R_r = (4 I / \pi)^{1/4} \quad (14)$$

"en las que A, en  $m^2$ , es el área de la superficie neta de cimentación, e I, en  $m^4$ , es el momento de inercia de dicha superficie neta con respecto a su eje centroidal perpendicular a la dirección que se analiza" (Normas de Sismo 1987).

Una vez que se conocen los periodos de vibración del suelo  $T_{s1}$  y de la estructura  $T_1$ , se puede emplear el espectro de respuesta sísmica de Zeevaert (1980) para la determinación del factor de amplificación  $f_a$  (fig 5), definido como el cociente de la máxima aceleración en el centro de gravedad de la estructura entre la máxima aceleración en la superficie del terreno blando. Para entrar en el espectro de la fig 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1} \quad (15)$$

donde  $g_1 = g_o g_r (T'_1)^2 / (g_o T_r^2 + g_r T_o^2)$  (16)

$$T'_1 = \sqrt{T_o^2 + T_r^2}$$

$$g_o = 1 - \zeta_o^2$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2$$

Vemos en el espectro que la máxima respuesta se obtiene cuando  $T_1 / T_{s1} = 1$ . Por lo visto anteriormente, no se puede evitar la amplificación de la aceleración de un suelo blando, pero sí es factible evitar que coincidan el período natural de vibración del suelo con el período natural de vibración de una estructura.

La aceleración en la superficie del terreno la proporciona, en la ciudad de México, el Reglamento de Construcciones en las Normas de Sismo. Así, en el inciso 3 de éstas se señala que "la ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico "a", expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por la siguiente expresión:

$$a = (1 + 3 T / T_a) c / 4, \text{ si } T \text{ es menor que } T_a$$

La aceleración en la superficie del suelo se obtiene haciendo  $T = 0$  en esta expresión (pues para  $T = 0$  la estructura vibra igual que la superficie del terreno), por lo tanto  $a = c_s = c / 4$  en la superficie.

Las aceleraciones para las diferentes zonas estratigráficas del Distrito Federal se presentan a continuación (artículo 206 del Reglamento):

Zona	Coficiente sísmico c	Coficiente $c_s$ (superficie)	Aceleración (superficie) $\text{cm/s}^2$
I	0.16	0.04	39
II	0.32	0.08	78
III	0.40	0.10	98

Vemos entonces que, por ejemplo, en la zona III la aceleración de diseño de la superficie del terreno es de  $98 \text{ cm/s}^2$ .

También se puede utilizar el siguiente criterio para hallar "c" (Normas de Sismo, Apéndice): "en sitios en que se conozca el período dominante del terreno  $T_{s1}$ , y que se hallen en las partes sombreadas de la fig 3.1 (de esas Normas), también se adoptará  $c = 0.4$  para estructuras del grupo B, y  $0.6$  para las del A; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = 1.6 T_{s1} / (4 + T_{s1}^2) \quad (17)$$

Vemos que el coeficiente sísmico depende del período de vibración dominante del suelo  $T_{s1}$ . Considerando que el coeficiente sísmico en la superficie  $c_s = c / 4$  y que la aceleración en la superficie, en  $\text{cm/s}^2$ , es igual a  $c_s$  por 980, en la fig 6 se presenta la variación de esta aceleración en función del período  $T_{s1}$ .

#### EJEMPLO

Determinar la respuesta de aceleración de un edificio sobre un estrato de suelo blando, con las siguientes características:

Masa = 217.5 t.s<sup>2</sup>/m

Peso = 2133 t

Período de la estructura  $T_0 = 0.3$  s

Amortiguamiento en la estructura  $\zeta_0 = 5$  %

Período por rotación  $T_r = 0.76$  s

Amortiguamiento en el terreno de cimentación  $\zeta_r = 15$  %

Período por traslación  $T_x = 0.22$  s

Período del terreno de cimentación  $T_{s1} = 2.4$  s

#### Solución

El período acoplado de la estructura vale

$$T_1 = \sqrt{T_0^2 + T_x^2 + T_r^2} = 0.85 \text{ s}$$

Obtenemos el cociente  $T_1 / T_{s1} = 0.35$

Para entrar en el espectro de la fig 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1}$$

$$g_1 = g_0 g_r (T'_1)^2 / (g_0 T_r^2 + g_r T_0^2)$$

donde  $T'_1 = \sqrt{T_0^2 + T_r^2} = 0.817 \text{ s}$

$$g_o = 1 - \zeta_o^2 = 0.9975$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2 = 0.9775$$

Sustituyendo  $g_1 = 0.98$   $\zeta_o = 0.141$

Es decir, el sistema acoplado tiene un amortiguamiento de 14.1 % .

Entrando al espectro para diseño sísmico (fig 5, Zeevaert 1980), se obtiene un factor de amplificación  $f_a = 1.9$  .

Considerando una aceleración en la superficie de  $98 \text{ cm/s}^2$ , la aceleración en el centro de gravedad de la estructura está dada por  $(98)(1.9) = 186 \text{ cm/s}^2$  .

#### REFERENCIAS

- Jaime, A, Romo, M P, Ovando, E y Legorreta, H, "Algunos aspectos del comportamiento dinámico de la arcilla del valle de México", Simposio sobre Generación, Propagación y Efectos de Temblores, SMF, SMMS, UGM y SMIS, México, D F, abril de 1987
- Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (RCDF), 1987
- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1986
- Roesset, J M, "Fundamentals of soil amplification", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969
- Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973
- Zeevaert, L, Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Limusa, 1980

Temblores

TABLA 1

Valores de  $K_x$ ,  $K_r$  y  $K_v$ 

En la zona II

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_r$ (2)	$K_v$ Losa	$K_v$ Zapata
$< 1$ m	$11GR_x$	$7GR_r^3$	$20GR_x$	$12GR_x$
$\geq 3$ m	$16GR_x$	$11GR_r^3$	$29GR_x$	$20GR_x$

En la zona III

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_r$			$K_v$
		Sobre el terreno	Sobre pilotes de fricción (3)	Sobre pilotes de punta (4)	
$< 1$ m	$7GR_x$	$6GR_r^3$	$7GR_r^3$	$6GR_r^3 + \frac{1}{1/43GR_r^3 + 1/K_p}$	$12GR_x$
$\geq 3$ m	$8GR_x$	$9GR_r^3$	$11GR_r^3$	$9GR_r^3 + \frac{1}{1/43GR_r^3 + 1/K_p}$	$16GR_x$

1. Para profundidades de desplante intermedias entre 1 y 3 m interpólese linealmente entre los valores de la tabla.
2. Para estructuras cimentadas sobre pilotes o pilas en la zona II supóngase  $K_r$  infinita.
3. Si éstos son capaces de resistir por adherencia con el suelo circundante, al menos la mitad del peso bruto de la construcción incluyendo el de sus cimientos. Cuando tienen menos de esta capacidad, interpólese linealmente entre los valores consignados en la tabla.
4.  $K_p$  se calculará teniendo en cuenta los pilotes de punta que contribuyan a resistir el momento de volteo, calculando la rigidez de estos elementos ante fuerza axial como si su punta no se desplazara verticalmente.

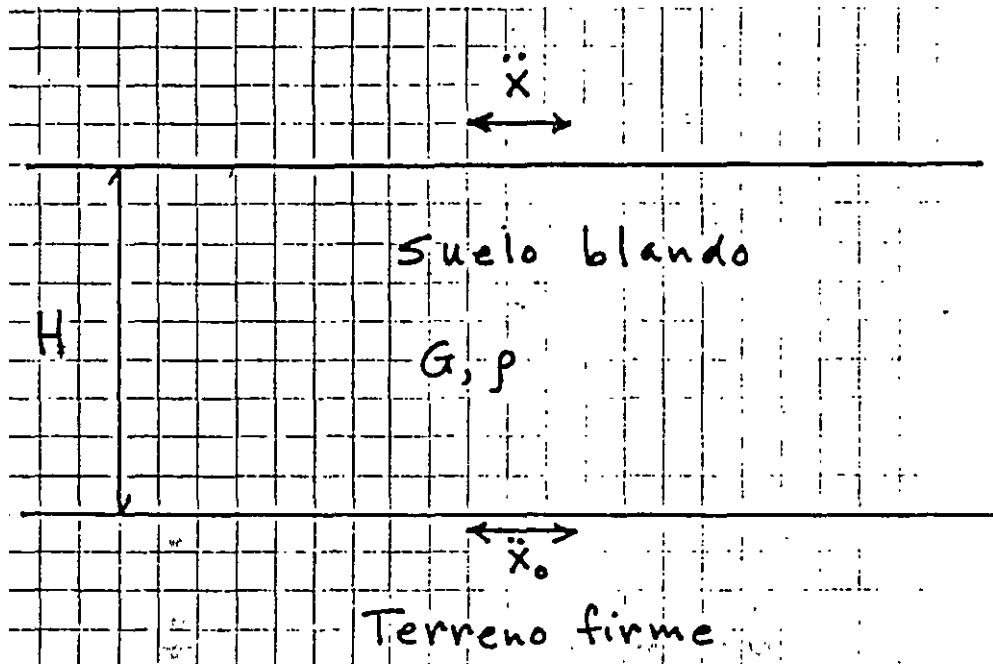


FIG 1

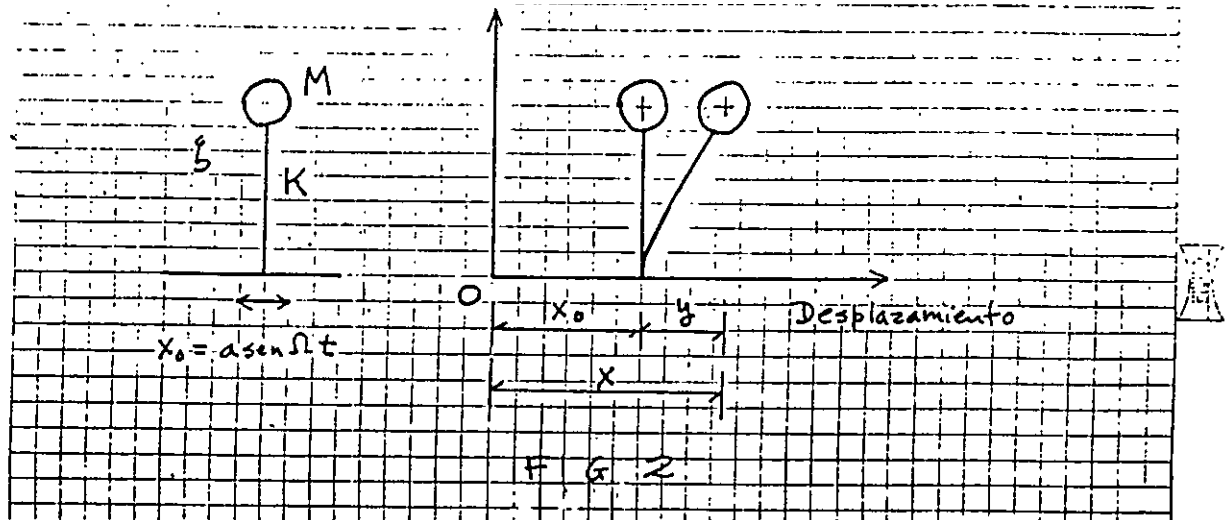


FIG 2

### VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

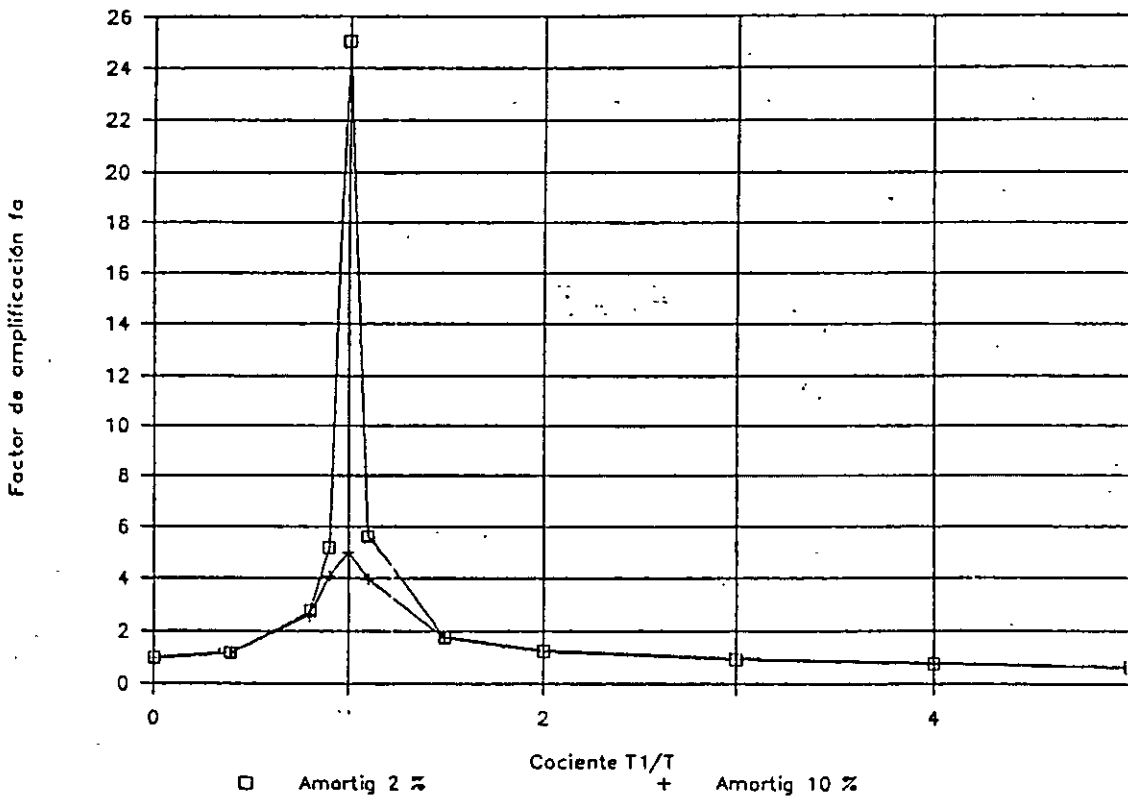


FIG 3

# VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRÍTICO

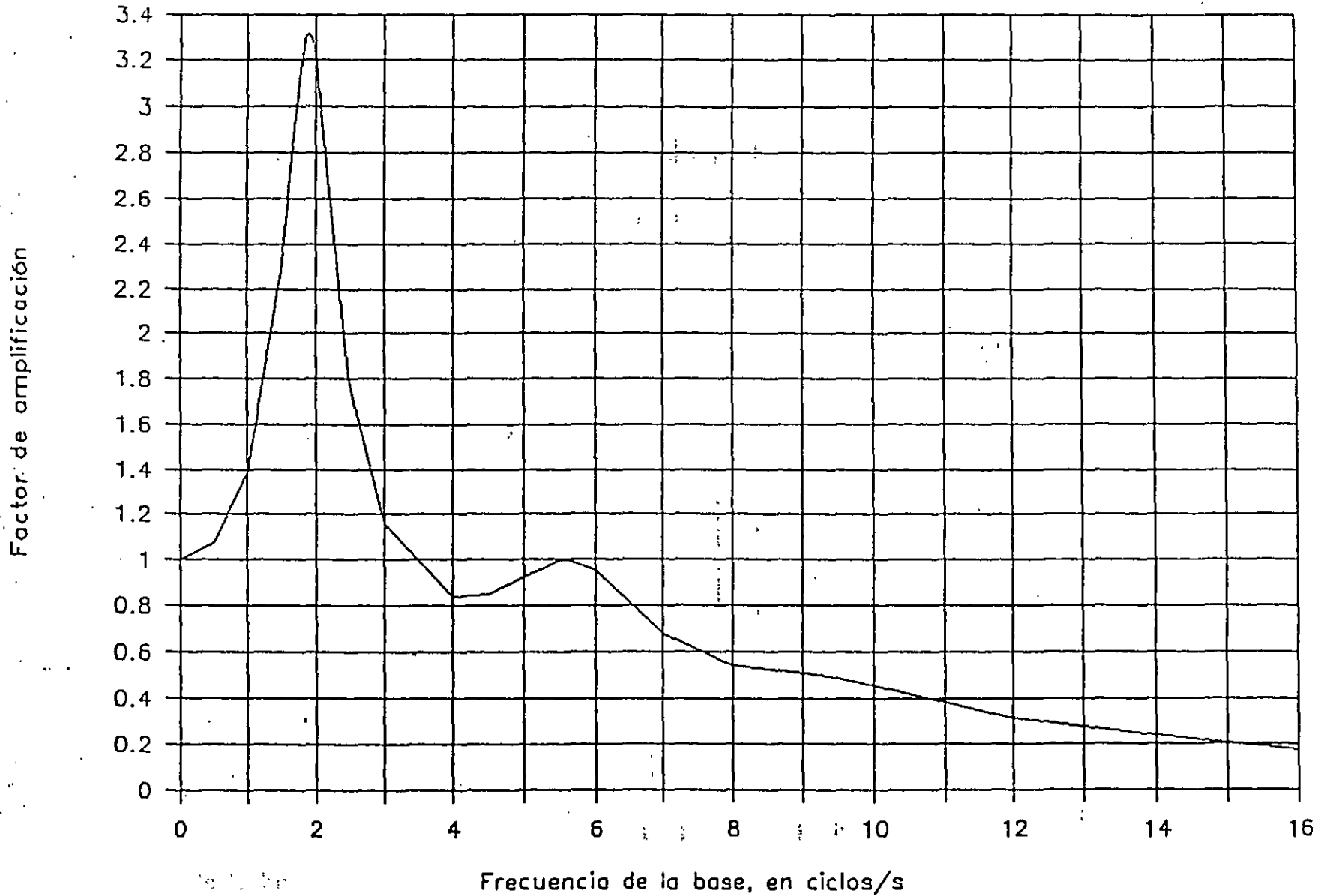
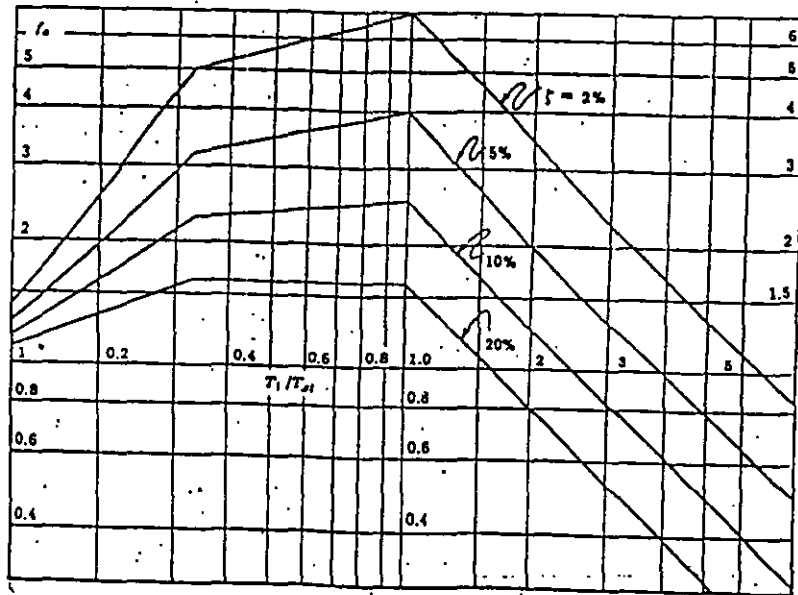


FIG 4





Espectro envolvente para diseño sísmico. (Zeevaert 1980)

FIG 5

ESPECTRO DE RESPUESTA DEL TERRENO  
CIUDAD DE MÉXICO

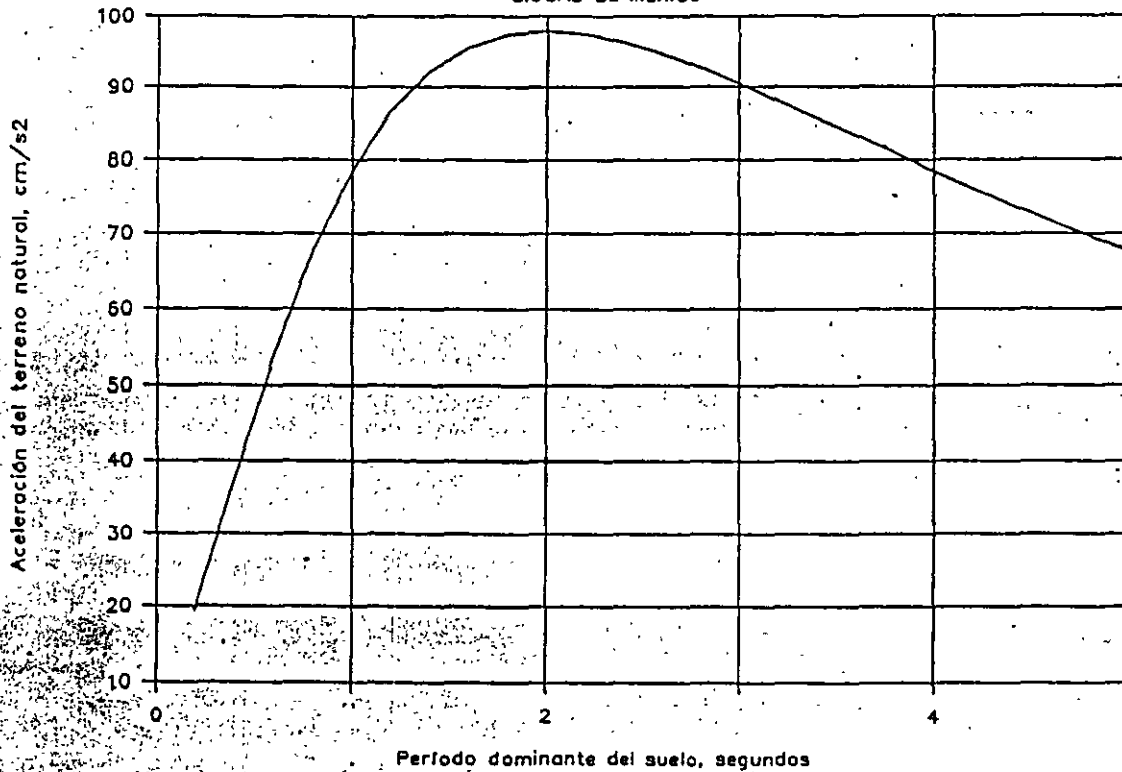


FIG 6

**APUNTES DE DINÁMICA DE SUELOS  
VIBRACIONES DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD**

Agustín Deméneghi Colina\*  
Margarita Puebla Cadena\*  
Héctor Sanginés García\*

**VIBRACIONES LIBRES**

Consideremos un sistema de un grado de libertad, como el mostrado en la fig 1. Se trata de un cuerpo de masa  $M$  unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez lateral. La rigidez  $K$  se define como el cociente de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, dividida entre el desplazamiento horizontal que produce dicha fuerza, es decir

$$K = P/\delta$$

El amortiguamiento  $C$  toma en cuenta la disipación de energía que se produce durante el movimiento (fundamentalmente por fricción interna en el sistema). Se ha observado que la disipación de energía se puede representar mediante una fuerza que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del cuerpo; esta fuerza vale  $C\dot{u}$ .

Por el principio de D'Alembert, la fuerza de inercia es igual al producto  $M\ddot{u}$  pero tiene sentido contrario a la aceleración. Esta fuerza de inercia se agrega al equilibrio dinámico del cuerpo.

El fenómeno físico que estamos estudiando consiste en dar inicialmente un desplazamiento horizontal  $\delta_0$  al cuerpo, para después soltarlo y dejarlo vibrar libremente.

La ecuación de movimiento (equilibrio dinámico, fig 1b) da lugar a la siguiente expresión

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

Supongamos inicialmente que no hubiera amortiguamiento,  $C = 0$  en la ec 1

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (2)$$

La ec 2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Su ecuación característica es

$$M\lambda^2 + K\lambda^0 = 0, \quad M\lambda^2 + K = 0 \quad (3)$$

La solución de la ecuación característica es

$$\lambda_1 = \sqrt{-K/M} = \sqrt{K/M} i$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-K/M} = -\sqrt{K/M} i$$

$$\text{Sea } \omega = \sqrt{K/M} \quad (4)$$

$\omega$  = frecuencia circular natural del sistema:

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por

$$u = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt$$

Donde  $a$  es la parte real y  $b$  la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto

$$u = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (5)$$

$$\dot{u} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \quad (6)$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para  $t = 0$ ,  $\dot{u} = 0$ . Reemplazando en la ec 6,  $C_2 = 0$ . Para  $t = 0$ ,  $u = \delta_0$ . Sustituyendo en la ec 5,  $\delta_0 = C_1$ , y

$$u = \delta_0 \cos \omega t \quad (7)$$

En la fig 2 se muestra la variación de  $u$  en función del tiempo  $t$ .

---

\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Se define el período  $T$  como el tiempo en que la masa cumple un ciclo de movimiento, es decir, cuando la masa pasa por el mismo punto, con el mismo sentido del movimiento. En la fig 2 observamos que  $\omega T = 2\pi$ , y

$$T = 2\pi/\omega \quad (8)$$

$$T = 2\pi \sqrt{M/K} \quad (9)$$

$T$  es el período natural de vibración del sistema de un grado de libertad.

Se define la frecuencia natural del sistema como el inverso del período

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad (10)$$

$$f = \sqrt{K/M} / 2\pi \quad (11)$$

La frecuencia mide el número de ciclos de movimiento por unidad de tiempo.

La velocidad de la masa se halla derivando con respecto al tiempo la ec 7

$$\dot{u} = -\omega \delta_0 \text{sen } \omega t \quad (12)$$

La aceleración se obtiene derivando la ec 12 con respecto al tiempo

$$\ddot{u} = -\omega^2 \delta_0 \text{cos } \omega t = -\omega^2 u \quad (13)$$

Vemos que la aceleración es igual al desplazamiento multiplicado por el cuadrado de  $\omega$ , con signo contrario.

#### Ejemplo

Una masa se mueve en vibración libre, con una amplitud de 4 cm y un período de 0.75 s. Hallar la máxima velocidad y la máxima aceleración, suponiendo un amortiguamiento nulo.

#### Solución

$$T = 2\pi/\omega \quad \omega = 2\pi/T = 8.378 \text{ s}^{-1}$$

$$\dot{x} = -8.738(4) = -33.51 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{x} = -280.735 \text{ cm/s}^2$$

#### Ejemplo

En un sistema de un grado de libertad se da un desplazamiento inicial  $\delta_0 = 5.08$  cm a una masa de 3.63 kg de peso. La constante del resorte es  $K = 0.7143$  kg/cm. Calcular la frecuencia del sistema en ciclos por segundo, considerando un amortiguamiento nulo.

#### Solución

$$M = 3.63/9.81 = 0.37 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}$$

$$K = 71.43 \text{ kg/m}$$

$$\omega = (K/M)^{1/2} = 13.894 \text{ s}^{-1}$$

$$f = \omega/2\pi = 2.211 \text{ ciclos/s} = 2.211 \text{ Hz}$$

## VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Consideremos ahora que sí hay disipación de energía en el sistema (fig 1), es decir, existe amortiguamiento:  $C \neq 0$ . El movimiento queda representado por la ec 1

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (\text{ec } 1)$$

La ecuación característica es

$$M\lambda^2 + C\lambda + K = 0, \quad M\lambda^2 + C\lambda + K = 0 \quad (14)$$

Las raíces de la ec 14 son

$$\lambda_1 = -C/2M + \sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$$

$$\lambda_2 = -C/2M - \sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$$

Las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  pueden ser reales o complejas, dependiendo del valor del radical  $\sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$ , es decir, es función del signo de la cantidad  $(C/2M)^2 - K/M$ . Distinguimos tres casos:

#### I. Dos raíces reales diferentes

Si las raíces son reales:  $(C/2M)^2 - K/M > 0$ . La solución de la ec 1 está dada por

$$u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (15)$$

En estas condiciones, el sistema no vibra, sino que la masa, después de ser desplazada una distancia  $\delta_0$ , regresa a su posición inicial. Este fenómeno ocurre cuando el amortiguamiento  $C$  es alto.

#### II. Una raíz real

Se presenta cuando  $(C/2M)^2 - K/M = 0$ . Sólo existe una raíz real que vale

$$\lambda = -C/2M$$

La solución de la ec 1 es

$$u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$\dot{u} = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 (t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t})$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para  $t = 0$ ,  $u = \delta_0$ , por lo tanto  $C_1 = \delta_0$ . Para  $t = 0$ ,  $\dot{u} = 0$ , y  $C_2 = -\lambda \delta_0$ . En consecuencia, la solución de la ec 1 es

$$u = \delta_0 e^{\lambda t} (1 - \lambda t)$$

$$u = \delta_0 e^{-(C/2M)t} [1 + (C/2M)t] \quad (16)$$

En la fig 3 se muestra la variación de  $u$  en función del tiempo.

El amortiguamiento para esta condición se denomina amortiguamiento crítico y vale

$$(C_{\text{crit}}/2M)^2 - K/M = 0$$

$$C_{\text{crit}} = 2 \sqrt{MK} \quad (17)$$

III. Dos raíces complejas

Ahora  $(C/2M)^2 - K/M < 0$ , y

$$\lambda_1 = -C/2M + \sqrt{K/M - (C/2M)^2} i$$

$$\lambda_2 = -C/2M - \sqrt{K/M - (C/2M)^2} i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por

$$u = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt \quad (18)$$

Donde  $a$  es la parte real y  $b$  la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto

$$a = -C/2M \quad (19)$$

$$b = \sqrt{K/M - (C/2M)^2} \quad (20)$$

Derivando la ec 18

$$\dot{u} = e^{at} (-C_1 b \sin bt + C_2 b \cos bt) + a e^{at} (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) \quad (21)$$

Para  $t = 0$ ,  $u = \delta_0$ ; de la ec 18:  $C_1 = \delta_0$ .

Para  $t = 0$ ,  $\dot{u} = 0$ . Reemplazando en la ec 21:  $C_2 = -a \delta_0 / b$

Sustituyendo en la ec 18

$$u = \delta_0 e^{at} [\cos bt - (a/b) \sin bt] \quad (22)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtienen la velocidad y la aceleración

$$\dot{u} = -[(a^2 + b^2)/b] \delta_0 e^{at} \sin bt \quad (23)$$

$$\ddot{u} = -[(a^2 + b^2)/b] \delta_0 e^{at} (a \sin bt + b \cos bt) \quad (24)$$

$$\text{Sea } \zeta = C/C_{\text{crit}} = C/(2 \sqrt{MK}) \quad (25)$$

A  $\zeta$  se denomina fracción del amortiguamiento crítico.

$$\zeta \omega = \zeta \sqrt{K/M} = C/2M$$

Reemplazando en las ecs 19 y 20

$$a = -\zeta \omega \quad (26)$$

$$b = \sqrt{K/M} \sqrt{1 - [C/(2 \sqrt{MK})]^2}$$

$$b = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (27)$$

Reemplazando en la ec 22

$$u = \delta_0 e^{-\zeta \omega t} \left[ \cos \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + (\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}) \sin \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \quad (28)$$

Obtengamos el período en una vibración libre amortiguada. Los máximos y mínimos de  $u$  se presentan cuando su derivada con respecto al tiempo vale cero, es decir, cuando la velocidad  $\dot{u}$  es nula. De la ec 23, los valores extremos ocurren para  $bt = n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para conocer si se trata de un máximo o un mínimo, utilizamos el criterio de la segunda derivada: cuando ésta es negativa se trata de un máximo y cuando ésta es positiva se trata de un mínimo. En la ec 24 vemos que para  $bt = n\pi$ ,  $n = 0, 2, 4, \dots$ ,  $\ddot{u}$  es negativa, por lo tanto ocurren los máximos de  $u$ . Para  $n = 1, 3, 5, \dots$ ,  $\ddot{u}$  es positiva, y ocurren los mínimos. Tomando el primer ciclo:  $bt = 2\pi$ , en consecuencia el período  $T'$  de una vibración libre amortiguada vale

$$T' = 2\pi/b = 2\pi/(\omega \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (29)$$

$$T' = 2\pi \sqrt{M/K} / \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (30)$$

Pero  $T = 2\pi \sqrt{M/K}$  (ec 9)

Por lo tanto  $T' = T / \sqrt{1 - \zeta^2}$  (31)

La frecuencia  $\omega' = 2\pi/T' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$  (32)

Para valores pequeños de amortiguamiento, vemos que el período de una vibración amortiguada es ligeramente mayor que el de una vibración sin amortiguamiento, y que su frecuencia circular es ligeramente menor que la de una vibración sin amortiguamiento.

La fig 4 muestra la variación de  $u$  en función del tiempo.

Obtengamos otras expresiones para el cálculo de  $u$ . El desplazamiento está dado por

$$u = e^{at} (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) = e^{at} u'$$

$$u' = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt$$

Sea (fig 5)  $u' = u_m \sin (bt + \phi)$

$$u = e^{at} u_m \sin (bt + \phi) \quad (33)$$

$$\dot{u} = u_m e^{at} [b \cos (bt + \phi) + a \sin (bt + \phi)] \quad (34)$$

Condiciones iniciales: para  $t = 0$ :  $u = \delta_0$  y  $\dot{u} = 0$

Sustituyendo en las ecs 33 y 34

$$u_m = \delta_0 / \sin \phi$$

$$a \sin \phi = -b \cos \phi$$

$$\tan \phi = -b/a \quad (35)$$

Por lo anterior

$$u = (\delta_0 / \sin \phi) e^{at} \sin (bt + \phi) \quad (36)$$

$$\dot{u} = (\delta_0 / \sin \phi) e^{at} [b \cos (bt + \phi) + a \sin (bt + \phi)] \quad (37)$$

$$\ddot{u} = (\delta_0 / \sin \phi) e^{at} [2ab \cos (bt + \phi) + (a^2 - b^2) \sin (bt + \phi)] \quad (38)$$

También (fig 6)

$$\sin \phi = b / \sqrt{a^2 + b^2} \quad (39)$$

Sustituyendo las ecs 26 y 27 en la ec 39

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \omega$$

$$\text{y } \sin \phi = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\tan \phi = \sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta \quad (40)$$

*Ejemplo*

A una masa de 8 kg ( $\text{kg} = \text{kg}_f$ ) se da un desplazamiento inicial de 3 cm y se deja vibrar libremente. La rigidez de la barra es de 2 kg/cm. Considerando un porcentaje de amortiguamiento crítico  $\zeta = 5\%$ , calcular el tiempo que tarda en alcanzar la posición de desplazamiento nulo, así como la velocidad y la aceleración para ese instante.

*Solución*

$$M = 8/9.81 = 0.8155 \text{ kg.s}^2/\text{m}$$

$$\zeta = C/(2\sqrt{MK}), C = 2\zeta \sqrt{MK} = 1.2771 \text{ kg.s/m}$$

Aplicando las ecs 19 y 20

$$a = -0.783020, b = 15.64082$$

Usando la ec 35

$$\tan \phi = -15.64082/(-0.78302) = 19.97499$$

$$\phi = 1.5207755 \text{ rad}$$

Aplicando la ec 36, con  $u = 0$

$$\sin (15.64082t + 1.5207755) = 0$$

$$t = 0.103627 \text{ s}$$

Usando las ec 37 y 38

$$\dot{u} = -0.4332 \text{ m/s}$$

$$\ddot{u} = 0.67839 \text{ m/s}^2$$

## VIBRACIÓN DE UN BLOQUE VERTICAL

Debido a peso propio, la fuerza en el resorte vale (fig 7)

$$W = K \delta_{st}$$

Supongamos ahora que damos un desplazamiento vertical  $\delta_0$  y dejamos vibrar libremente el sistema (fig 7b). La ecuación de movimiento es

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz + K\delta_{st} - W = 0$$

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = 0 \quad (41)$$

*Ejemplo*

Una masa de 3.63 kg de peso se apoya sobre un resorte de constante  $K = 0.3572 \text{ kg/cm}$ . La masa se desplaza hacia abajo 5.08 cm y se permite vibrar libremente. Hallar: (a) el tiempo

requerido por la masa para moverse 2.54 cm hacia arriba, después de haberse soltado, y (b) la velocidad y aceleración de la masa para esa posición.

*Solución*

$$(a) M = 0.37 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

$$K = 35.72 \text{ kg/m}$$

$$\omega = (K/M)^{1/2} = 9.826 \text{ s}^{-1}$$

$$z = \delta_0 \cos \omega t = 5.08 \cos 9.826t = 2.54$$

$$9.826t = \arccos 0.5, t = 0.1066 \text{ s}$$

$$(b) \dot{z} = -\delta_0 \omega \sin \omega t = 43.23 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{z} = -\delta_0 \omega^2 \cos \omega t = 245.13 \text{ cm/s}^2$$

## VIBRACIONES ESTACIONARIAS

Se denominan vibraciones estacionarias aquellos movimientos en que la acción sobre el sistema es de tipo armónico.

### a) Vibraciones forzadas

Consideremos un cuerpo como el de la fig 8, que se somete a una fuerza estacionaria dada por  $P = P_0 \sin \Omega t$ . La ecuación de movimiento es

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \sin \Omega t \quad (42)$$

La respuesta de la masa —después de un lapso inicial cuando se disipa un movimiento por vibración libre amortiguada—, está dada por (Newmark y Rosenblueth, 1976)

$$u = \frac{P_0}{K} \frac{\sin(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}} \quad (43)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \{ (2\zeta\Omega/\omega) / [1 - (\Omega/\omega)^2] \} \quad (44)$$

$$\omega = \text{frecuencia circular} = \sqrt{K/M}$$

### Ejemplo

Un motor que pesa 160 kg está apoyado en cuatro resortes que tienen una rigidez de 133.9 kg/cm (cada uno). El motor tiene una masa desbalanceada que pesa 28.4 g, localizada a 15 cm de distancia del eje de rotación. Sabiendo que el motor está restringido a moverse verticalmente, determinar (a) la velocidad en rpm a la cual ocurre la resonancia, y (b) la amplitud de la vibración del motor para una velocidad de 1200 rpm.

*Solución*

$$a) \omega = \sqrt{K/M}$$

$$\text{Velocidad de resonancia} = 547 \text{ rpm}$$

$$b) \omega = 1200 \text{ rpm} = 125.6 \text{ rad/s}$$

La magnitud de la fuerza centrífuga es

$$P_m = M a_n = M r \omega^2 = M(0.15)(125.6)^2 = 15.3 \text{ lb}$$

$$u = 0.00135 \text{ plg}$$

### b) Movimiento estacionario de la base

Consideremos ahora un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 9, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$u_b = A \sin \Omega t \quad (45)$$

La velocidad y la aceleración de la base son

$$\dot{u}_b = A \Omega \cos \Omega t \quad (46)$$

$$\ddot{u}_b = -A \Omega^2 \sin \Omega t \quad (47)$$

La ecuación de movimiento está dada por

$$M\ddot{u}_g + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (48)$$

$$\text{Pero, de la fig 8 } \ddot{u}_g = \ddot{u}_b + \ddot{u} \quad (49)$$

$$M(\ddot{u}_b + \ddot{u}) + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (50)$$

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_b \quad (51)$$

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = A \Omega^2 M \sin \Omega t \quad (51)$$

Vemos que la ec 51 es similar a la ec 42. En consecuencia, podemos emplear la misma solución de esta ecuación, con

$$P_0 \sin \Omega t = A \Omega^2 M \sin \Omega t$$

Con este cambio de variable, la respuesta de la masa está dada por los siguientes movimientos relativos

$$u = A B_d \sin(\Omega t - \varphi) \quad (52)$$

$$\dot{u} = A \Omega B_d \cos(\Omega t - \varphi) \quad (53)$$

$$\ddot{u} = -A \Omega^2 B_d \sin(\Omega t - \varphi) \quad (54)$$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + (2\zeta\omega/\Omega)^2}} \quad (55)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \{ (2\zeta\Omega/\omega) / [1 - (\Omega/\omega)^2] \} \quad (56)$$

$$\omega = \text{frecuencia circular del sistema} = \sqrt{K/M}$$

Los movimientos absolutos (movimientos generales) están dados por (fig 8)

$$\text{Desplazamiento: } u_g = u_b + u \quad (57)$$

$$\text{Velocidad: } \dot{u}_g = \dot{u}_b + \dot{u} \quad (58)$$

$$\text{Aceleración: } \ddot{u}_g = \ddot{u}_b + \ddot{u} \quad (59)$$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente del valor absoluto de la máxima aceleración general entre el valor absoluto de la máxima aceleración de la base

$$f_a = \max |\ddot{u}_g| / \max |\ddot{u}_b| \quad (60)$$

$$f_a = \max |\sin \Omega t + B_d \sin (\Omega t - \varphi)| \quad (61)$$

En la fig 10 se exhibe la variación de  $f_a$  con el cociente  $T_1/T$ , para amortiguamientos de 2 y 10% del amortiguamiento crítico, siendo  $T_1 = 2\pi/\omega$  (masa que vibra) y  $T = 2\pi/\Omega$  (base).

Se observa en la fig 10 que la amplificación de la aceleración depende del cociente  $T_1/T$  y del amortiguamiento. La máxima amplificación ocurre cuando  $T_1/T = 1$ ; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor  $f_a$ . Para  $T_1/T \rightarrow \infty$  la amplificación de la aceleración es nula.

#### Ejemplo

Hallar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración (movimientos relativos) de la masa de la fig E-1, para  $t = 25$  s. Movimiento de la base  $u_b = 5 \sin 3t$  ( $u_b$  en cm,  $t$  en s).

#### Solución

$$\Omega = 3 \text{ s}^{-1}, M = 10/981 = 0.010194 \text{ k.s}^2/\text{cm}, \omega = \sqrt{5/0.010194} = 22.174 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Sustituyendo valores en la ecs 55 y 56: } B_d = 0.01869, \varphi = 0.01380$$

Reemplazando en las ecs 52 a 54

$$u = 5(0.01869) \sin (3t - 0.0138) = 0.09345 \sin (3t - 0.0138)$$

$$\dot{u} = 0.2804 \cos (3t - 0.0138)$$

$$\ddot{u} = -0.8410 \sin (3t - 0.0138)$$

$$\text{Para } t = 25 \text{ s: } u = -0.03742 \text{ cm}, \dot{u} = 0.2569 \text{ cm/s}, \ddot{u} = 0.3368 \text{ cm/s}^2$$

vale  $F = M\ddot{u}$ . De la figura  $u = \theta H$ ,  $\ddot{u} = \ddot{\theta} H$ . Por lo tanto  $F = M \ddot{\theta} H$ .

El momento de volteo al nivel de cimentación, debido a la inercia de la masa es (Zeevaert, 1980)

$$O_T = F H = M \ddot{\theta} H^2 = M H^2 \ddot{\theta}$$

Supongamos ahora que la cimentación está sometida a un momento estacionario dado por  $O_T = O_{T_0} \sin \Omega t$ . En el diagrama de cuerpo libre de la cimentación (fig 12) se muestran los momentos que actúa sobre ella. El equilibrio de momentos conduce a

$$M H^2 \ddot{\theta} + C_r \dot{\theta} + K_r \theta = O_{T_0} \sin \Omega t \quad (62)$$

Para un sistema de un grado de libertad sujeto a una fuerza vertical estacionaria, habíamos obtenido la siguiente ecuación de equilibrio dinámico (ec 42)

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F_0 \sin \Omega t \quad (42)$$

Las ecuaciones 62 y 42 son similares, por lo que para hallar la solución de la ec 62 podemos emplear la de la ec 42, cambiando  $M$  por  $MH^2$  y  $P_0$  por  $O_{T_0}$ . Por lo tanto, la solución de la ec 62 es

$$\theta = \frac{O_{T_0}}{K_r} \frac{\sin (\Omega t - \alpha)}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}} \quad (63)$$

$$\alpha = \tan^{-1} [(2\zeta\omega\Omega)/(\omega^2 - \Omega^2)] \quad (64)$$

$$\omega = \sqrt{K_r / MH^2} = \sqrt{K_r / M} / H \quad (65)$$

$$\zeta = C_r / C_{crit} = C_r / (2\sqrt{K_r M H^2}) = C_r / (2H\sqrt{K_r M}) \quad (66)$$

Por lo anterior, el período natural de vibración por rotación de una masa está dado por

$$T_r = 2\pi \sqrt{M H^2 / K_r} = 2\pi H \sqrt{M / K_r} \quad (67)$$

$$T_r = 2\pi \sqrt{W H^2 / g K_r} \quad (68)$$

siendo  $W$  = peso de la masa y  $g$  = aceleración de la gravedad

## VIBRACIÓN DEBIDA A ROTACIÓN

Consideremos una masa como la indicada en la fig 11, vibrando libremente. La fuerza de inercia

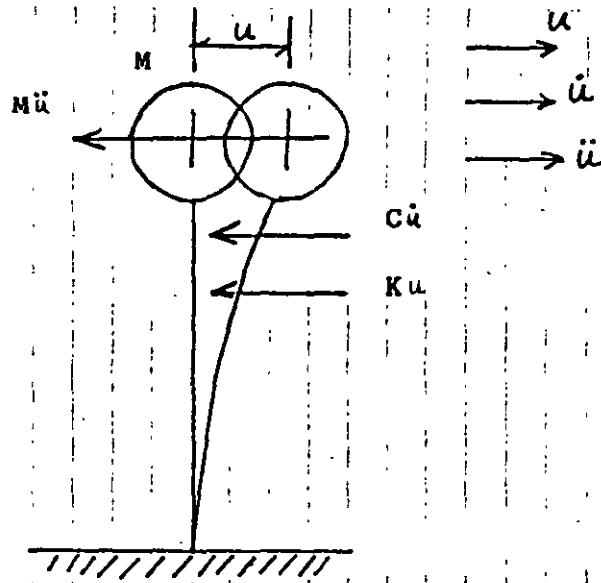
## REFERENCIAS

Newmark, N M y Rosenblueth, E, *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 1976

Zeevaert, L, *Interacción Suelo-Estructura de Cimentación*, Limusa, 1980

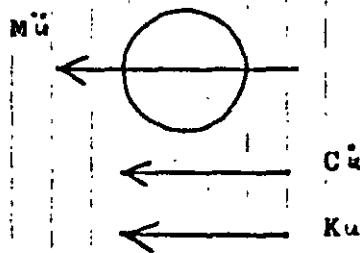
(Dsvibr)





VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

(a)



FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA MASA

(b)

FIGURA 1

# VIBRACIÓN LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

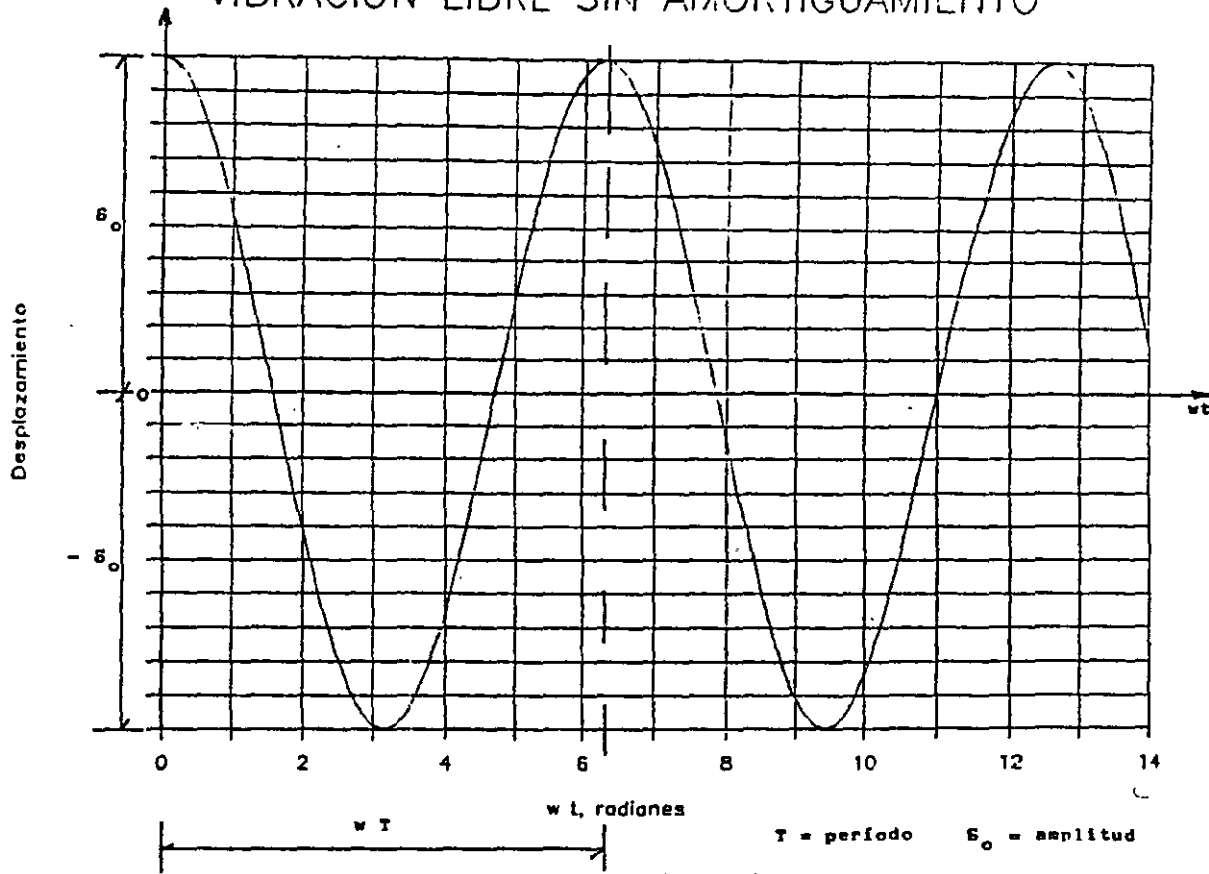


FIGURA 2

# MOVIMIENTO PARA AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

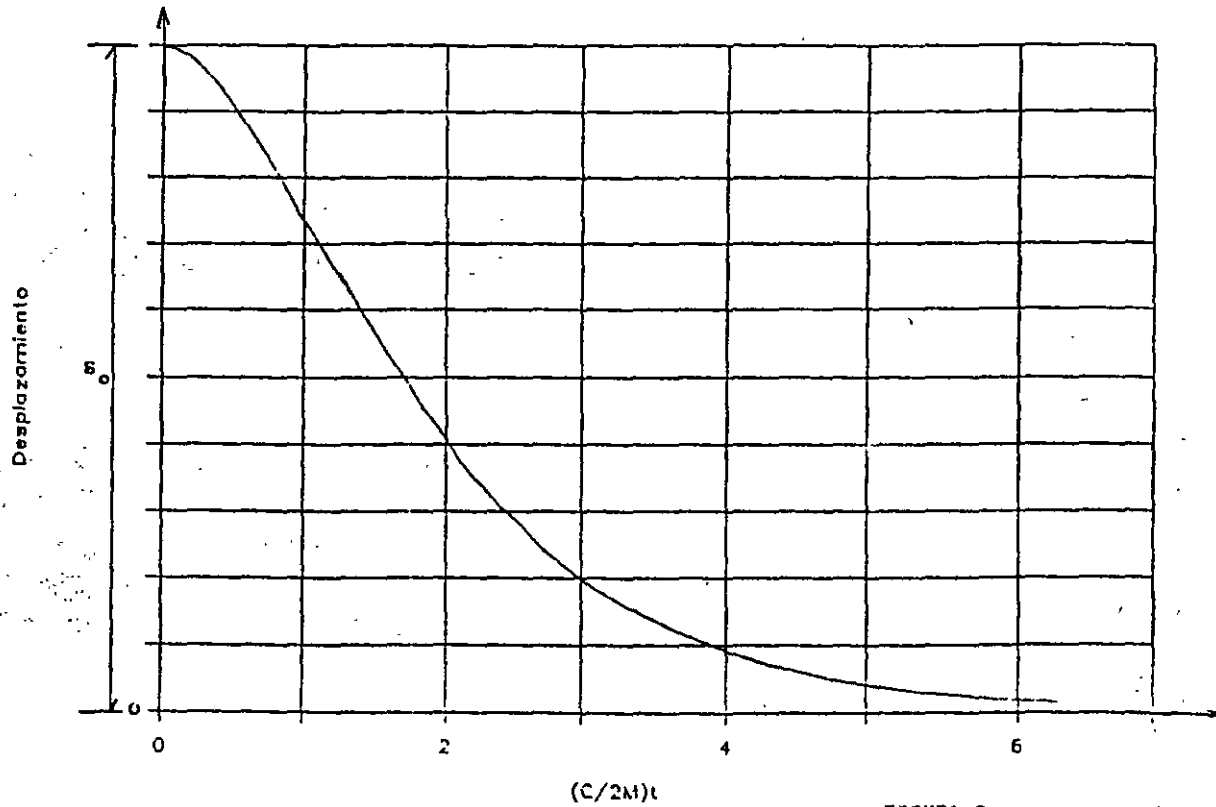


FIGURA 3

# VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

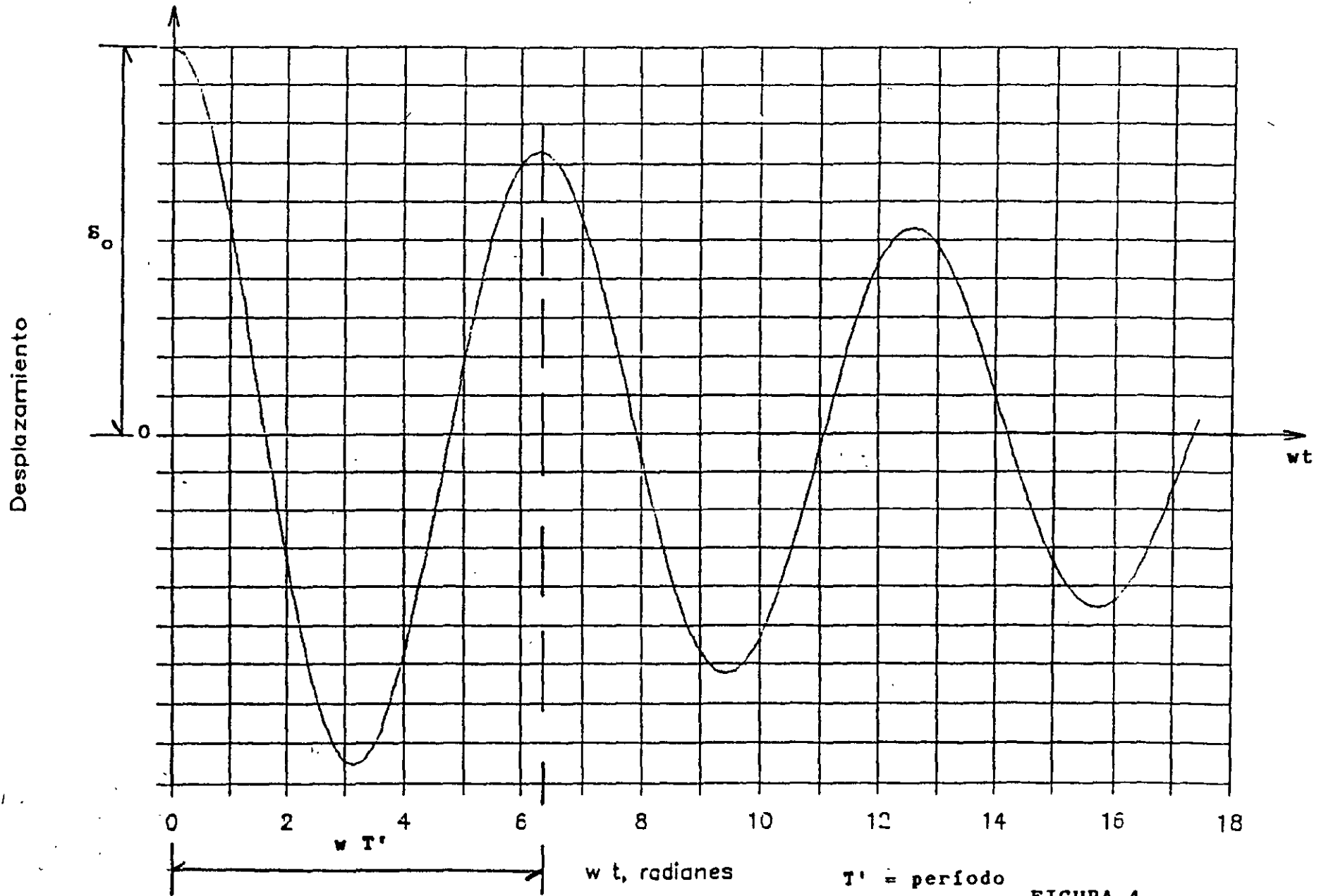
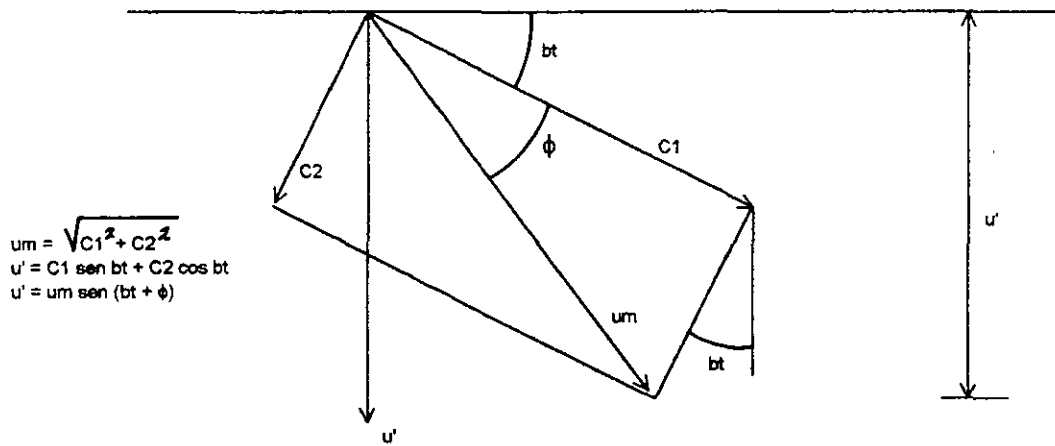
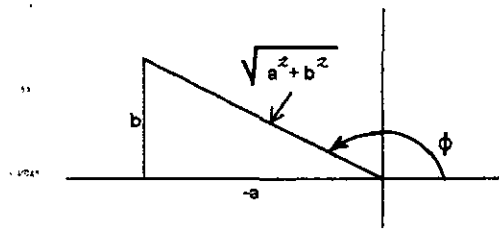


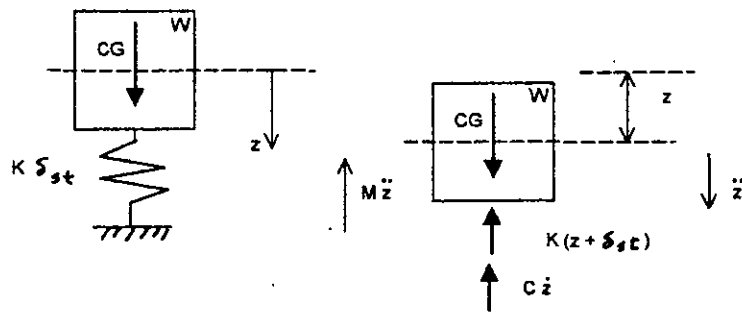
FIGURA 4



DESPLAZAMIENTO EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO DE FASE  
 FIGURA 5



DETERMINACIÓN DEL ÁNGULO DE FASE  
 FIGURA 6

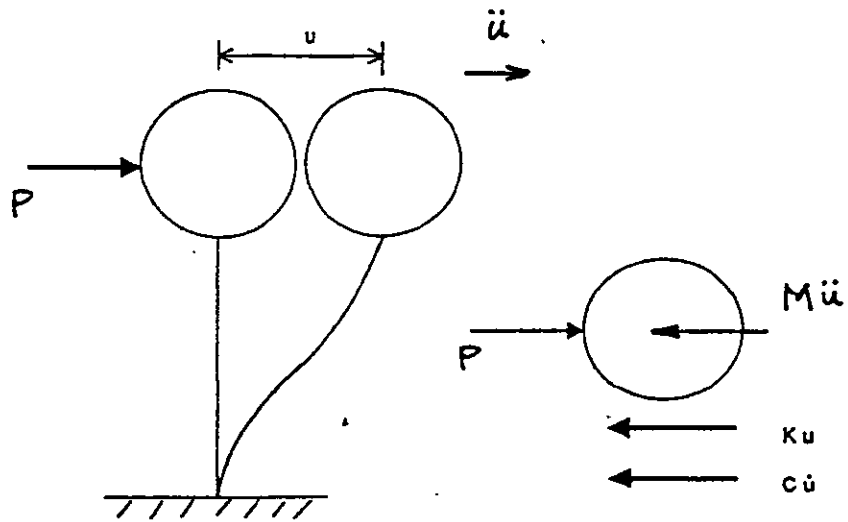


a) Bloque apoyado sobre un resorte

b) Diagrama de cuerpo libre

VIBRACIÓN DE UN BLOQUE VERTICAL  
 FIGURA 7

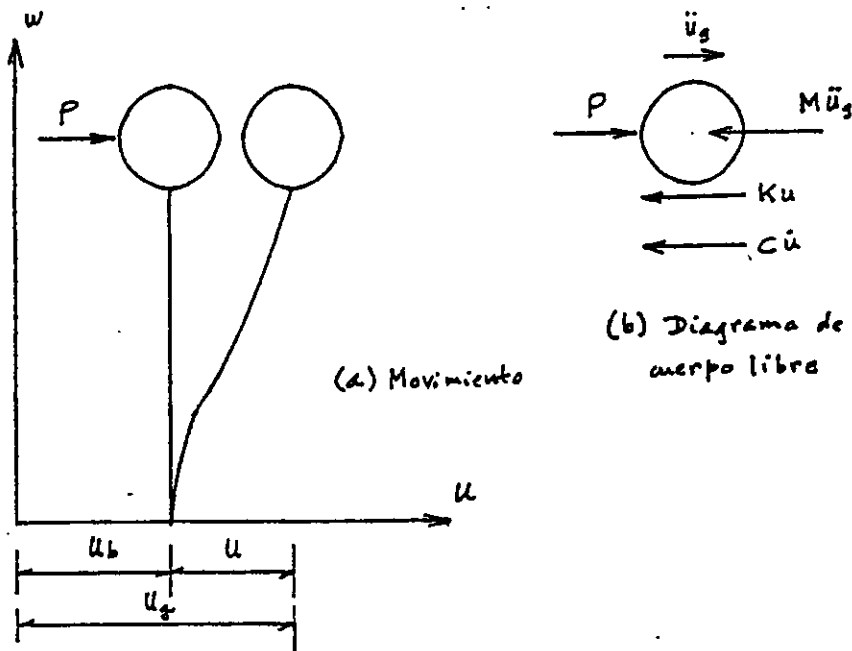
(Dsvibrf)



a) Movimiento de la masa

b) Diagrama de cuerpo libre (fuerzas horizontales)

SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD  
FIGURA 8



(a) Movimiento

(b) Diagrama de cuerpo libre

SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD  
FIGURA 9

# VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

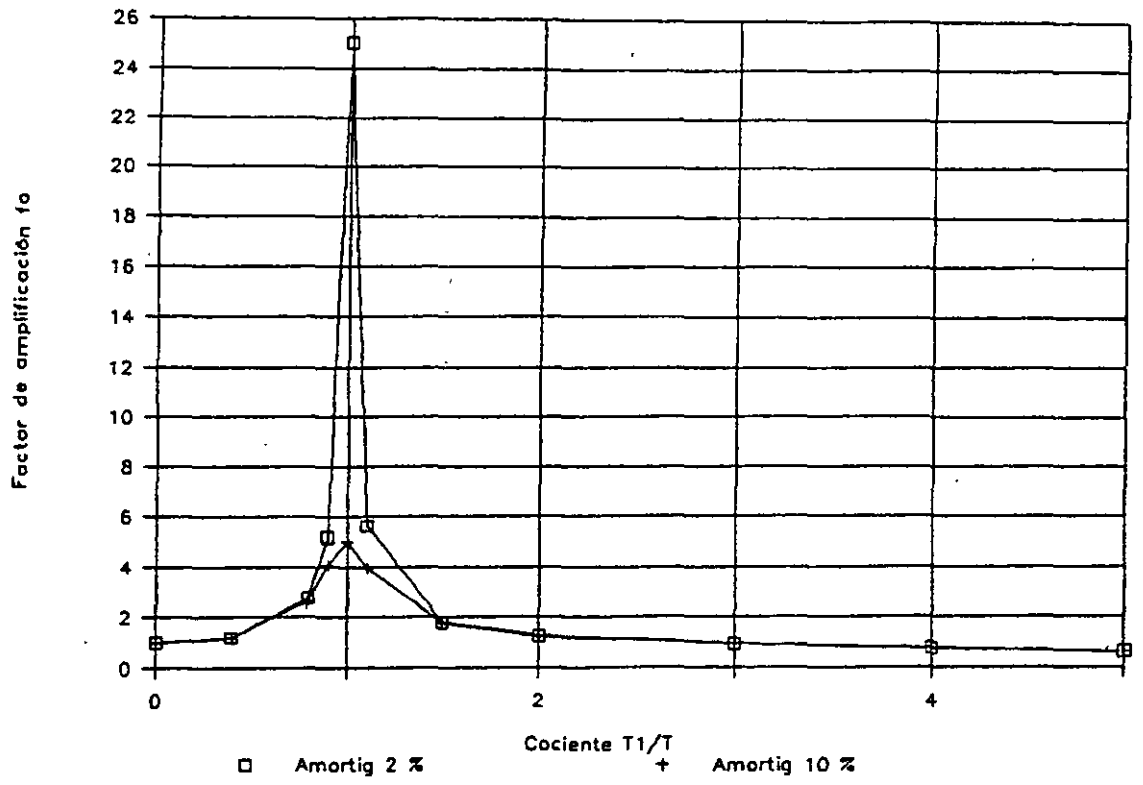
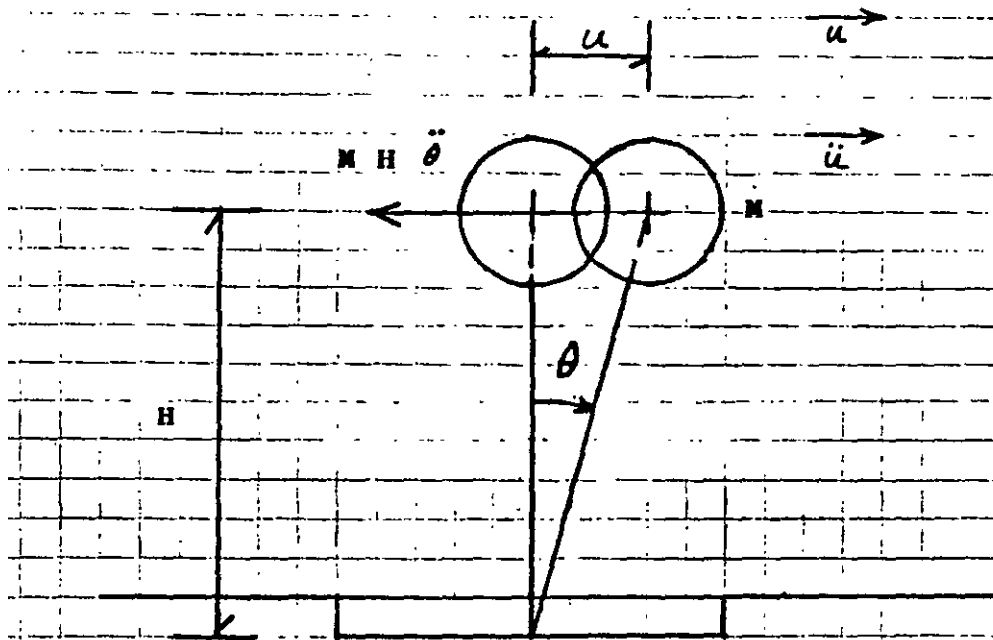


FIGURA 10



ROTACIÓN DE UNA MASA DE UN GRADO DE LIBERTAD

FIGURA 11

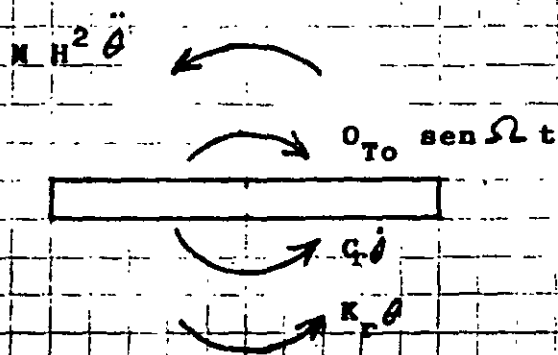


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA CIMENTACIÓN

FIGURA 12



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# **CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANALISIS Y  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y  
CIMENTACIONES**

**MODULO I: ANALISIS  
ESTRUCTURAL**

**TEMA**

**INGENIERIA SISMICA  
ANALISIS DINAMICO**

**EXPOSITOR: ING. AMILCAR GALINDO SOLÓRZANO  
PALACIO DE MINERÍA  
MARZO DEL 2003**

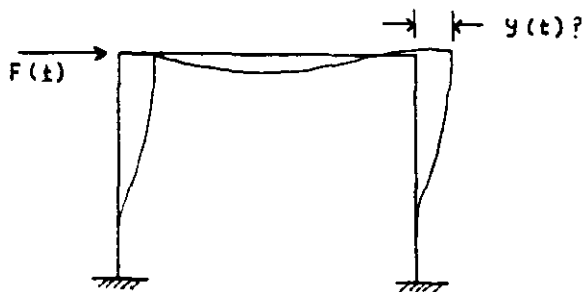


## ANÁLISIS DINÁMICO

### Definición

Se denomina análisis dinámico al procedimiento que permite calcular la respuesta de una estructura, en función del tiempo, ante la acción de una carga que es también variable con el tiempo. La respuesta que con mayor frecuencia se calcula es el desplazamiento, ya que si se conoce la posición de los puntos de la estructura en cada instante, es posible también conocer los elementos mecánicos internos en cada instante.

Se ilustra en seguida la definición anterior para el caso sencillo de una estructura de un sólo grado de libertad:



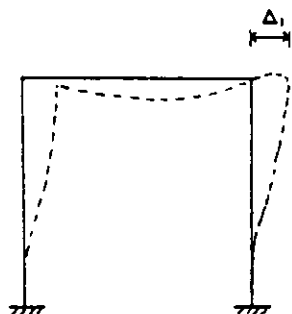
*Conocida la función  $F(t)$   
determinar  $y(t)$*

Se observa que la diferencia de un análisis dinámico con un análisis estático estriba en que el primero incluye el efecto del tiempo en tanto que el segundo, no. Aparte de esto, los dos procedimientos de análisis se rigen por los mismos principios; las relaciones entre fuerzas internas y desplazamientos son idénticas.

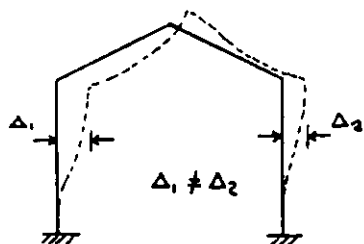
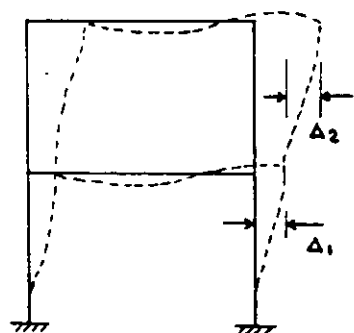
Las acciones exteriores variables con el tiempo y que requieren análisis dinámicos son por ejemplo el sismo, el viento y la carga de los vehículos sobre los puentes. Otras acciones tienen una variación muy lenta con el tiempo y por ello se caracterizan como cargas estáticas, por ejemplo las cargas vivas sobre los edificios.

Grado de libertad

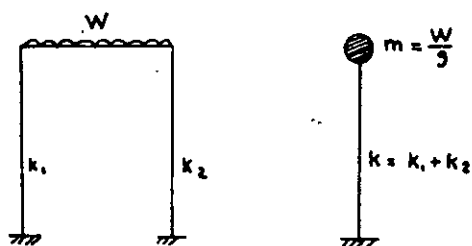
Se denomina grado de libertad al número mínimo de coordenadas que deben conocerse para definir la posición de un sistema en un instante dado. Un marco --



*Estructura de un grado de libertad*



*Estructuras de dos grados de libertad*



*Péndulo: Representación de una estructura de un grado de libertad.*

de un solo piso es una estructura de un solo grado de libertad, porque basta conocer el desplazamiento en la parte superior de las columnas para definir la deformada del sistema. En cambio, un marco de dos pisos es una estructura de dos grados de libertad, porque la deformada queda definida cuando conocemos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , los desplazamientos relativos de cada entrepiso.

Un marco con un solo piso, pero con el cabezal a dos aguas es una estructura de dos grados de libertad porque la deformada queda definida al conocer  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , los desplazamientos en el tope de cada columna que no son iguales por la acción de "tijereteo" de la cumbrera.

Por comodidad, el comportamiento de una estructura de un grado de libertad puede asimilarse al de un péndulo, constituido por una masa sobre un vástago. La masa es  $\frac{W}{g}$  donde  $W$  es el peso concentrado en el piso y la rigidez del vástago es  $k$ , igual a la suma de las rigideces de las columnas del entrepiso.

ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

Notación

Consideremos un péndulo oscilando en torno a su posición inicial de equilibrio. El sistema es de un solo grado de libertad porque su posición queda definida -



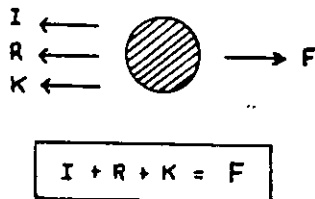
$y(t) =$  Desplazamiento  
 $\dot{y}(t) =$  Velocidad  
 $\ddot{y}(t) =$  Aceleración

si se conoce en cada instante el desplazamiento "y". En cada instante la velocidad de la masa será la primera derivada de y respecto al tiempo,  $\frac{dy}{dt}$  según la notación de Leibnitz o  $\dot{y}(t)$  según la notación de Newton; de igual modo la aceleración será la segunda derivada de y respecto al tiempo:  $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}(t)$

En lo sucesivo emplearemos la notación de Newton.

Ecuación General del Equilibrio dinámico

D'Alembert, a fines del siglo XVIII estableció la ecuación general del equilibrio dinámico que nos dice que una masa en movimiento en un instante cualquiera se encuentra en equilibrio bajo la acción de cuatro fuerzas:



F = fuerza exterior, causante del movimiento

I = fuerza de inercia, que se opone al movimiento

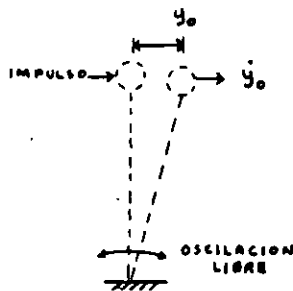
R = fuerza de amortiguamiento, debida a fricción

K = fuerza de restitución elástica, por la que el cuerpo trata de recuperar su posición original

Planteada de esta manera la ecuación del equilibrio dinámico parece ser muy sencilla, pero en realidad es complicada porque las cuatro fuerzas involucradas son funciones del tiempo y aplicadas a un caso particular conducen a una ecuación diferencial en la que debe despejarse la función del desplazamiento:  $y(t)$ .

Aplicada a sistemas de un grado de libertad en que se introducen algunas hipótesis simplificadoras, la ecuación general de equilibrio dinámico conduce a -- una ecuación diferencial matemáticamente soluble. En seguida, se presentan algunos casos particulares de análisis dinámico de estos sistemas:

a) Oscilación libre no amortiguada



$$F(t) = 0$$

$$R(t) = 0$$

Se supone en este caso que el sistema oscila libremente después de recibir un impulso -- (fuerza de corta duración) que le produce un desplazamiento inicial " $y_0$ " y una velocidad inicial " $\dot{y}_0$ ". La fuerza exterior y el amortiguamiento son nulos.

La ecuación del equilibrio dinámico se reduce entonces a:

$$I + K = 0$$

Pero por la segunda ley de Newton, la fuerza de inercia es igual a la masa por la aceleración:  $I = m\ddot{y}(t)$ . Si por otro lado se supone que el sistema es -- elástico lineal la fuerza de restitución elástica puede expresarse como --  $K = k y(t)$  donde  $k$  es la rigidez que puede obtenerse como

$$k = \frac{F}{y_p} \left[ \frac{\text{Ton}}{\text{cm}} \right]$$

donde  $F$  es una fuerza estática

$y_p$  es el desplazamiento producido por  $F$

En consecuencia, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m \ddot{y}(t) + k y(t) = 0$$

Dividiendo por  $m$  y llamando  $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

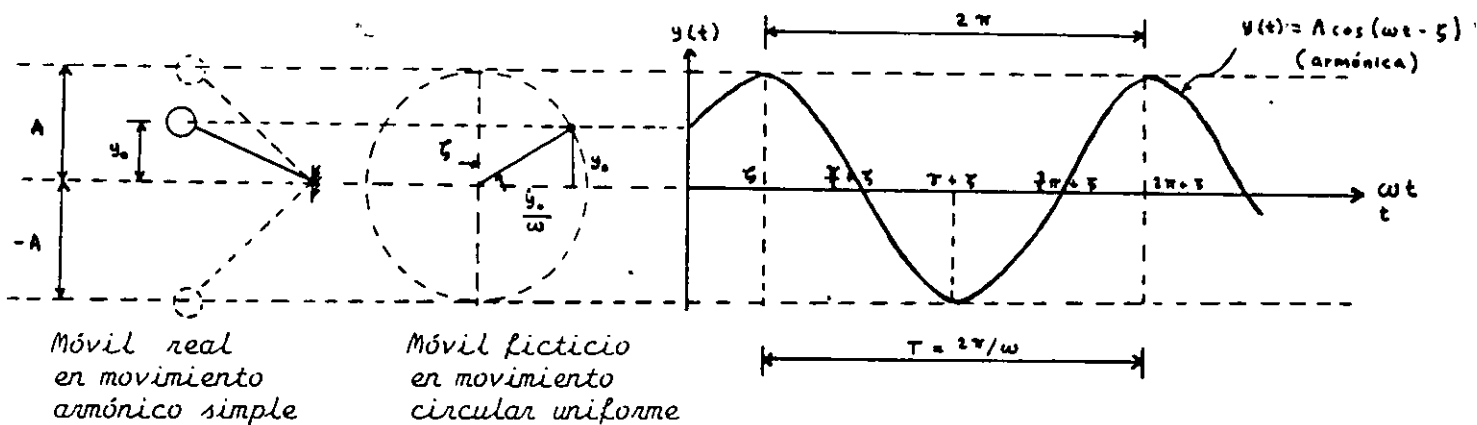
Solución que puede también escribirse:

$$y(t) = A \cos(\omega t - \zeta)$$

Donde  $A =$  amplitud  $= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2} =$  Máximo desplazamiento del móvil

$$\zeta = \text{fase} = \text{ang tan } \frac{\dot{y}_0}{\omega y_0}$$

Cuya representación gráfica es:



Se observa que la posición del móvil real puede definirse en cada instante -- si se le correlaciona con la de un móvil ficticio en movimiento circular uniforme.

Se llama período  $T$ , al tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa. Sus unidades son (seg.)

Se llama frecuencia,  $n$ , al número de oscilaciones completas que da el móvil - en la unidad de tiempo:  $n = \frac{1}{T}$

Unidades: ciclos/seg = Hertz

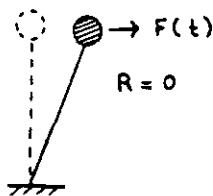
$\omega$  es la frecuencia angular natural; de la gráfica se deduce

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sus unidades son  $\frac{1}{\text{seg}}$  ó  $\frac{\text{radian}}{\text{seg}}$

El período  $T$  y la frecuencia  $\omega$  reciben el calificativo de "propios" porque -- no dependen más que de características propias de la estructura: su rigidez  $k$  y su masa  $m$ . Estas características son muy importantes porque definen la respuesta de una estructura ante una acción dinámica.

b) Oscilación forzada no amortiguada



Se supone en este caso, que el móvil sin - amortiguamiento se mueve bajo la acción de una fuerza exterior variable con el tiempo,  $F(t)$

Introduciendo las mismas hipótesis expresadas anteriormente, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación es necesario conocer la función  $F(t)$

Suponiendo que la fuerza exterior es una fuerza cíclica de variación armónica, de la forma

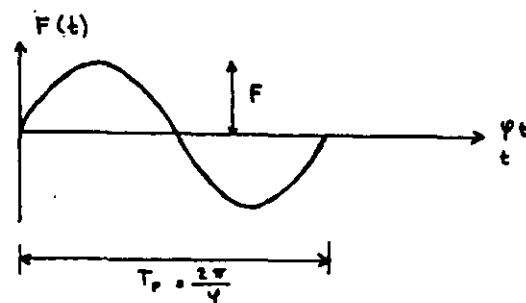
$$F(t) = F \sin \varphi t$$

Donde

$\varphi$  = frecuencia angular de la fuerza

$F$  = Valor máximo que puede adquirir la fuerza

$T_F$  = Período de la fuerza



En consecuencia,

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F \sin \varphi t$$

Dividiendo entre

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin \varphi t$$

Ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = \underbrace{A \cos(\omega t - \zeta)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t}_{\textcircled{2}}$$

El término  $\textcircled{1}$  representa el efecto de la oscilación propia y  $\textcircled{2}$  el de la fuerza.

En los casos de interés práctico el efecto de la fuerza es mucho mayor que el de la oscilación propia, por lo que en forma aproximada se puede escribir

$$y(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t$$

como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,  $m = \frac{k}{\omega^2}$

$$\therefore y(t) = \frac{F}{k} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t$$

pero  $\frac{F}{k} = y_{est, F}$  = desplazamiento causado por una fuerza estática-  
de valor F

$$y(t) = y_{est, F} \frac{1}{1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2} \sin \varphi t$$

La función  $\sin \varphi t$  puede tener como valor máximo = 1 por lo que,

$$y_{max} = y_{est, F} \frac{1}{1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}$$

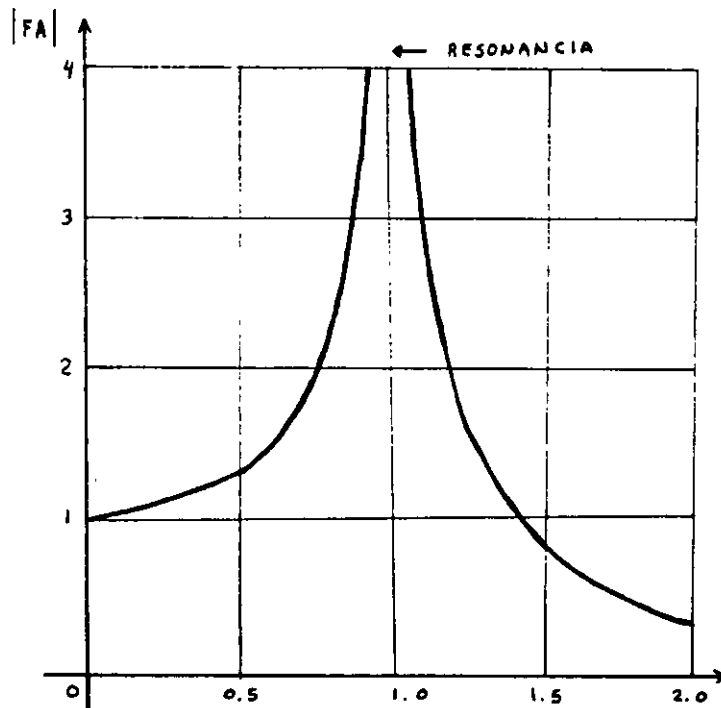
Al término  $\frac{1}{1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}$  se le llama factor de amplificación

dinámica =  $(FA)$ , representa la relación entre el desplazamiento máximo causado por una fuerza dinámica de variación armónica y una fuerza estática:

$$FA = \frac{y_{m\acute{a}x} (d n F)}{y_{est\acute{a}t}}$$

$$FA = \frac{1}{1 - \left(\frac{\psi}{\omega}\right)^2}$$

Es interesante observar en una gráfica cómo varía el factor de amplificación - en función de la relación  $\frac{\psi}{\omega}$  :

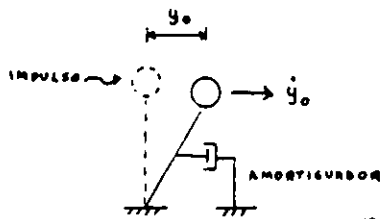


$\frac{\psi}{\omega}$	FA
0	1
1/2	1.33
1	$\infty$
$\sqrt{2}$	1
2	0.33

Se observa que si  $\psi = \omega$  el factor de amplificación es  $\infty$ , y la deformación - tiende al infinito. A este caso se le llama resonancia.

El concepto de resonancia tiene una gran trascendencia en Ingeniería Sísmica.- Cuando el período del suelo coincide con el período predominante de la excitación sísmica al nivel de roca basal, las aceleraciones a nivel de terreno natural se amplifican considerablemente; por otro lado si el período de un edificio coincide con el período del suelo en que se asienta, aumenta el riesgo de daños.



c) Oscilación libre amortiguada

$$R(t) \neq 0$$

$$F = 0$$

Se supone, como en el primer caso, que el móvil oscila libremente después de recibir un impulso que le produce un desplazamiento  $y_0$  y una velocidad  $\dot{y}_0$  iniciales; pero ahora se introduce el efecto del amortiguamiento

La ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\ddot{y}(t) + R(t) + ky(t) = 0$$

Para resolver esta ecuación es preciso conocer la función  $R(t)$ . Con fines de ingeniería se estudian diferentes tipos de amortiguamiento, pero en Ingeniería Sísmica interesa particularmente el llamado amortiguamiento viscoso en el que la fuerza de amortiguamiento en cada instante es proporcional a la velocidad del móvil en ese instante ( $R(t) = \beta \dot{y}(t)$ ) ya que estudios experimentales realizados en modelos físicos y en edificios reales han permitido demostrar que el amortiguamiento de las construcciones comunes es aproximadamente viscoso.

Por lo que puede escribirse

$$m\ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + ky(t) = 0$$

Donde  $\beta$  es un coeficiente de proporcionalidad entre fuerza y velocidad, cuyas unidades son Ton  $\frac{\text{seg}}{\text{cm}}$

Dividiendo entre  $m$ , recordando que  $\frac{k}{m} = \omega^2$  y haciendo  $\frac{\beta}{m} = 2\varepsilon$ , se tiene:

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Donde:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2m} = \text{Factor de amortiguamiento.}$$

La anterior es una ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = e^{-\epsilon t} A^* \cos(\omega^* t - \zeta^*)$$

donde

$e$  = base de los logaritmos Neperianos

$$A^* = \text{amplitud amortiguada} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \epsilon y_0}{\omega^*}\right)^2}$$

$$\zeta^* = \text{fase amortiguada} = \arctan \frac{\dot{y}_0 + \epsilon y_0}{\omega^* y_0}$$

$$\omega^* = \text{frecuencia angular amortiguada} = \sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}$$

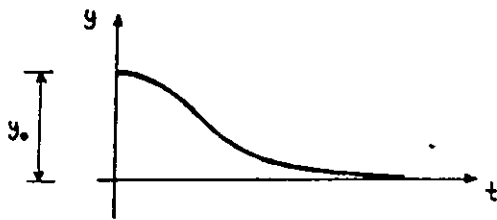
Se denomina "porcentaje de amortiguamiento" a la relación

$$\nu, = \frac{\epsilon}{\omega} \cdot 100, \quad \nu = \frac{\epsilon}{\omega}$$

por lo que

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu^2}$$

Cuando  $\epsilon = \omega$ ,  $\nu = 1$ , se tiene el caso de amortiguamiento crítico y después de recibir el impulso el móvil regresa a su posición de equilibrio lentamente, sin oscilar:



*Amortiguamiento crítico*

Los amortiguamientos de las estructuras se expresan en función de  $\nu$ , porcentaje del amortiguamiento crítico. En forma experimental, se ha demostrado que los edificios comunes tienen porcentajes de amortiguamiento muy pequeños - - (del 2 al 7%) (valor medio: 5%) por lo que  $\omega^* \doteq \omega$



del equilibrio dinámico será:

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación, se requiere conocer la función  $F(t)$ . Consideremos en seguida algunos subcasos correspondientes a diversas funciones  $F(t)$

d 1) La fuerza exterior es una función armónica del tiempo

Sea

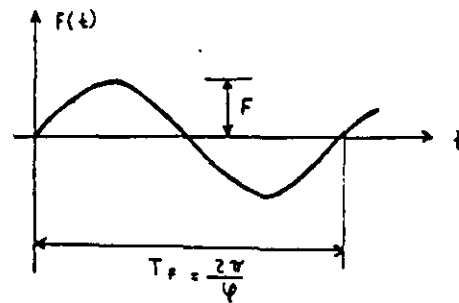
$$F(t) = F \sin \varphi t$$

donde

$F$  = valor máximo de la  
fuerza

$\varphi$  = frecuencia de la -  
fuerza

$T_F$  = período de la fuerza



Bajo esta consideración:

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = F \sin \varphi t$$

Dividiendo entre  $m$ , recordando que

$$\frac{\beta}{m} = 2\zeta = 2\nu\omega \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

se tiene

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega\dot{y}(t) + \omega^2y(t) = \frac{F}{m} \sin \varphi t$$

Ecuación diferencial cuya solución es

$$y(t) = \underbrace{e^{-\zeta t} A^* \cos(\omega t - \zeta^*)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{F}{k} \left[ \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\nu}{\omega})^2)^2 + 4\nu^2 (\frac{\nu}{\omega})^2}} \right]}_{\textcircled{2}} \sin(\varphi t - \zeta)$$

El término  $\textcircled{2}$  representa el efecto de la fuerza y el término  $\textcircled{1}$  el de la oscilación propia. En los casos de interés  $\textcircled{2}$  es mucho mayor que  $\textcircled{1}$  por lo que en forma aproximada

$$y(t) = \frac{F}{k} \left[ \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\nu}{\omega})^2]^2 + 4\nu^2 (\frac{\nu}{\omega})^2}} \right] \sin(\varphi t - \zeta)$$

donde

$$\zeta = \text{fase} = \arctan \frac{2\nu \frac{\nu}{\omega}}{1 - (\frac{\nu}{\omega})^2}$$

Pero  $\frac{F}{k} = y_{estp}$  y

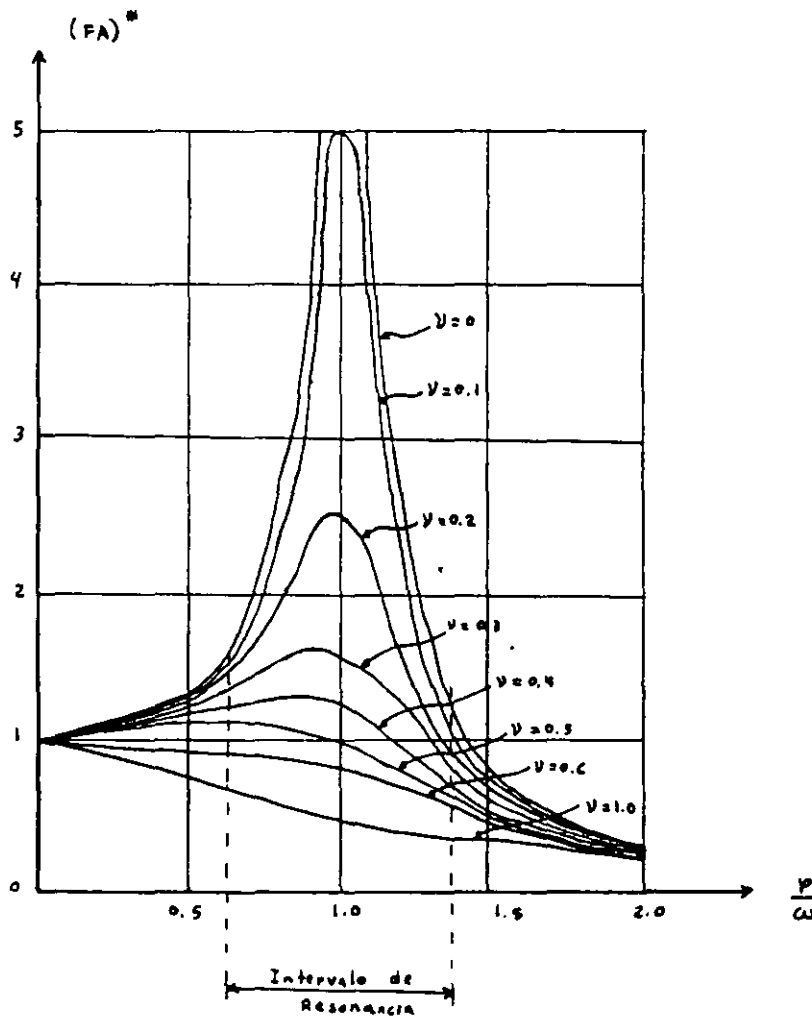
Al término  $\frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\nu}{\omega})^2]^2 + 4\mathcal{D}^2 (\frac{\nu}{\omega})^2}}$  se le denomina "factor de amplificación dinámica amortiguada" y se le representa por  $(FA)^M$  por lo que

$$y(t) = y_{estp} (FA)^M \text{sen}(\nu t - \xi)$$

Como el máximo valor de la función  $\text{sen}$  es 1,

$$y_{max} = y_{estp} (FA)^M$$

la siguiente gráfica muestra la variación de  $(FA)^M$  en función de  $(\frac{\nu}{\omega})$ :



impulso.

Por otra parte, aplicando el principio de la cantidad de movimiento:

Fuerza. tiempo = masa. velocidad

$$F(z) dz = m \dot{y}.$$

$$\dot{y} = \frac{F(z)}{m} dz$$

Substituyendo en la ecuación anterior,

$$y(t) = \frac{F(z)}{\omega m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Pero este desplazamiento es el causado por un solo impulso, por lo que substituímos  $y(t)$  por  $dy$

$$dy = \frac{F(z)}{\omega m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Para obtener el desplazamiento total en el instante  $t$  integramos el efecto de todos los impulsos que actúan desde  $t=0$  hasta  $t=t$ :

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{F(z)}{m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Si se introduce el efecto del amortiguamiento, el resultado anterior se modifica como sigue:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{F(z)}{m} e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz$$

A esta integral se le llama la "Integral de Duhamel" y se le asigna gran importancia en Ingeniería Sísmica. Se enfatiza que la ecuación anterior es la solución de la ecuación general .

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Donde  $F(t)$  es una función cualquiera

Se observa que el amortiguamiento atenúa considerablemente el efecto de resonancia, ya que para  $\frac{\nu}{\omega} = 1$ , los desplazamientos máximos dinámicos son aproximadamente 5 veces el estático para  $\nu = 10\%$  y no  $\infty$  como para  $\nu = 0$

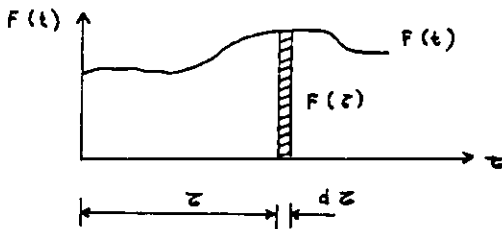
A mayor amortiguamiento menor amplificación dinámica.

El efecto es más acentuado en la zona de resonancia, para:  $0.7 < \frac{\nu}{\omega} < 1.3$

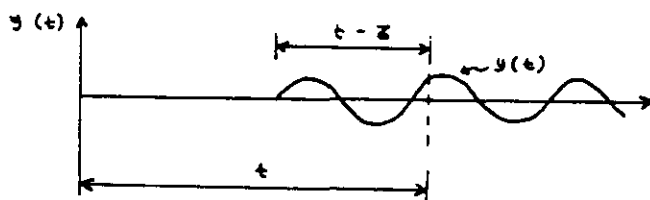
El amortiguamiento tiene, en resumen, un efecto favorable en el comportamiento dinámico de las estructuras, de ahí el alto interés que existe en determinar su valor efectivo en estructuras reales.

d 2) La fuerza exterior es una función cualquiera

Para resolver este caso descomponemos la acción de la fuerza en la acción de una serie de impulsos, cada uno de los cuales actúa durante un intervalo de tiempo muy pequeño



Consideremos el desplazamiento "y" que en el instante  $t$  produce el impulso  $F(z)$  que actúa en el instante  $z$



Si no se considera el amortiguamiento:  $y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$

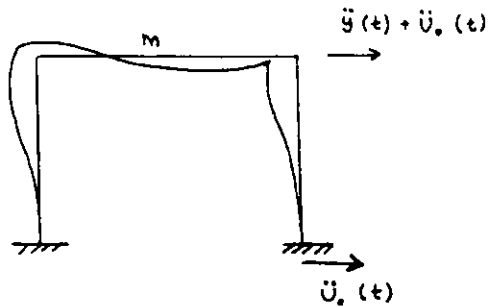
Pero el impulso se aplica con  $y_0 = 0$  por lo que:

$$y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin [(t-z)\omega]$$

Habiéndose substituido  $t$  por  $t-z$  ya que éste es el tiempo de acción del - -

d 3) La fuerza exterior es la acción sísmica

Denominando  $U_h(t)$  al desplazamiento del terreno por sismo a la profundidad  $h$ ,  $U_o(t)$  al desplazamiento del terreno a profundidad  $o$ , en la base de una estruc-



tura,  $y(t)$  al desplazamiento relativo de la estructura respecto a su base, en la masa de la estructura actuará durante un sismo la aceleración  $\ddot{y}(t) + \ddot{U}_o(t)$  y como no actúa ninguna fuerza exterior, la ecuación del equilibrio dinámico es una estructu-

ra de un grado de libertad queda:

$$m (\ddot{y}(t) + \ddot{U}_o(t)) + p \dot{y}(t) + ky(t) = 0$$

de donde puede obtenerse:

$$m \ddot{y}(t) + p \dot{y}(t) + ky(t) = -m \ddot{U}_o(t)$$

Dividiendo entre  $m$ :

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\omega \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \ddot{U}_o(t)$$

(Se elimina el signo por ser irrelevante en el segundo miembro de la igualdad anterior, ya que el sismo es alternante) comparando esta última expresión con la escrita al final del subcaso anterior es evidente que la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{U}_o(\tau) e^{-\delta\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t-\tau)] d\tau$$

Es importante destacar que el comportamiento sísmico puede analizarse como si actuase una fuerza exterior de valor  $-m \ddot{U}_o(t)$  pero que en realidad el sismo no es un problema de fuerza exterior impuesta a la estructura, sino de deformación impuesta.



Interesa el desplazamiento máximo, para el cual se tendrán los elementos mecánicos internos máximos.

Este vale:

$$y_{max} = \frac{1}{\omega} \left| \int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz \right|_{max}$$

Al valor absoluto máximo de la integral

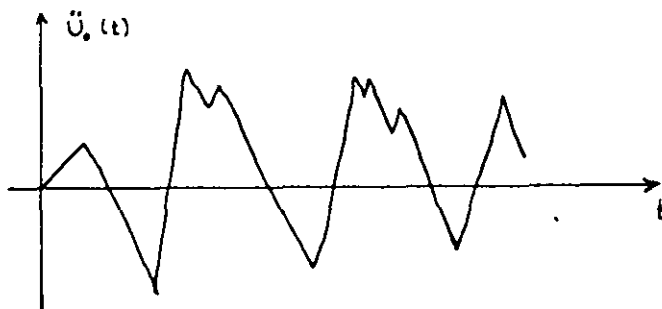
$$\int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz \quad \text{se le llama "Espectro de velocidad" --}$$

y se le representa por  $S_v$

$$S_v = \left| \int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen} \omega(t-z) dz \right|_{max}$$

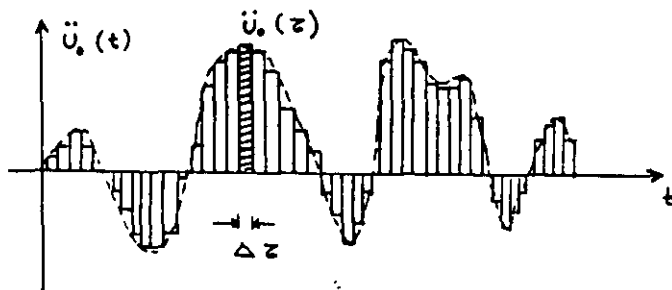
$$y_{max} = \frac{S_v}{\omega}$$

La integral anterior no puede resolverse directamente porque la función  $\ddot{u}_0(z)$  no es integrable. Esta función es el acelerograma registrado en la base de la estructura durante el sismo cuyo efecto interesa estudiar.



*Acelerograma real*

La integral se resuelve por diferencias finitas, discretizando el acelerograma en impulsos que actúan a un intervalo  $\Delta z$ .



*Acelerograma discretizado*

Se recomienda tomar  $\Delta z = 0.1 T$ , siendo  $T$  el período de la estructura por analizar.

De esta manera:

$$S_v = \left| \sum_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] \Delta z \right|_{\max}$$

Existen programas de computadora que aplican este procedimiento para la obtención de espectros a partir del acelerograma.

De la expresión obtenida para la oscilación libre no amortiguada:

$$y(t) = A \cos(\omega t - \zeta)$$

$$y_{\max} = A$$

Derivando se obtiene la velocidad:

$$\dot{y}(t) = -\omega A \text{sen}(\omega t - \zeta)$$

$$\dot{y}_{\max} = \omega A$$

$$\dot{y}_{\max} = \omega y_{\max}$$

Derivando otra vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t - \zeta)$$

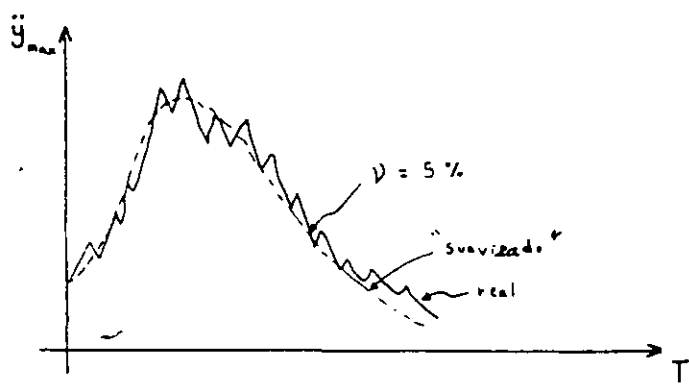
$$\ddot{y}_{\max} = \omega^2 A$$

$$\ddot{y}_{\max} = \omega^2 y_{\max} = \omega \dot{y}_{\max}$$

De estos resultados se infiere que a partir del espectro de velocidad se pueden obtener espectros de desplazamiento ( $s_d$ ) y de aceleración mediante las expresiones:

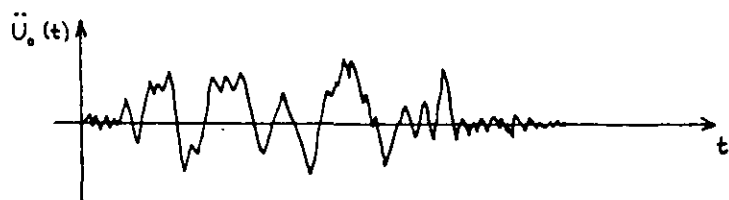
$$s_d = \frac{S_v}{\omega}$$

$$s_a = \omega S_v$$

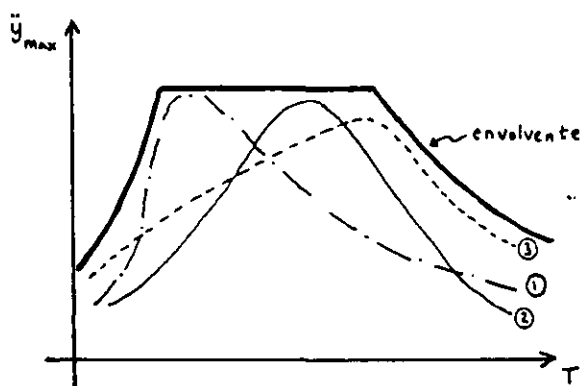


*Espectro de aceleraciones  
 ( Espectro de respuesta para un sismo  
 cuyo acelerograma se conoce: )*

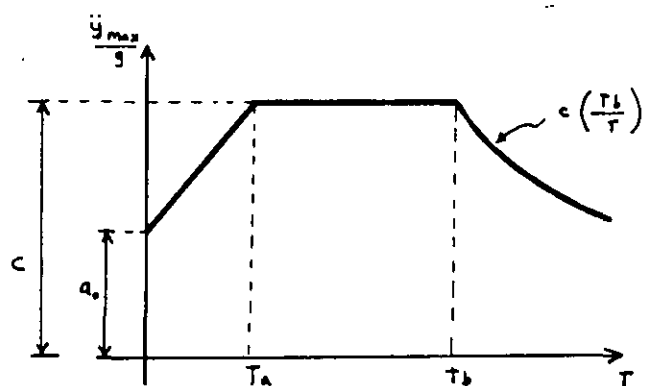
En la práctica de diseño el más usual es el espectro de aceleraciones, gráfica que en función del período de una estructura -- permite obtener la aceleración máxima de la misma durante un sismo conocido por su acelerograma. Del cálculo se obtiene una curva irregular, con muchos picos, la que se suaviza por procedimientos matemáticos.



A la envolvente de los espectros de respuesta de los sismos que probablemente ocurrirán en la vida de la estructura se le llama espectro de diseño.



*Espectro de diseño como envolvente de espectros de respuesta*



*Espectro de diseño en Reglamentos Mexicanos*

Los Reglamentos de construcción suelen incluir espectros de diseño para las -- estructuras en la zona de su jurisdicción.

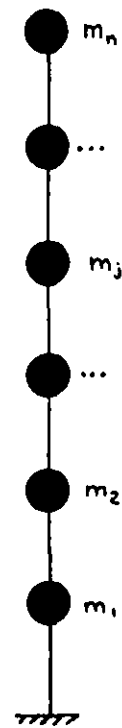
## ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS DE GRADOS DE LIBERTAD MULTIPLES.

Modelización de edificios altos

Sin mucho error un edificio de "n" pisos puede discretizarse como un sistema de "n" masas, considerando las masas concentradas al nivel de los pisos. Si se desprecian los acortamientos o alargamientos de las columnas y los movimientos de la cimentación este sistema tendrá 3 grados de libertad por piso: Dos desplazamientos horizontales paralelos a los ejes principales de la planta y un giro en torno a un eje vertical. El sistema tendrá entonces un total de "3n" grados de libertad.

Puede realizarse una simplificación ulterior si se aplican las siguientes hipótesis:

- a) El sismo actúa paralelamente a uno de los ejes principales de la planta y los desplazamientos horizontales son paralelos a ese eje.
- b) Las fuerzas cortantes sísmicas están aplicadas en el centro de torsión de cada entrepiso y en consecuencia los giros en cada planta son nulos.

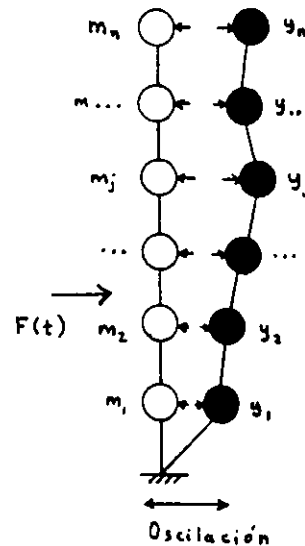


De esta manera el sistema se transforma en un sistema de "n" grados de libertad como el que se muestra en la figura en donde la rigidez de los elementos que conectan a las masas es la suma de las rigideces de los elementos de entrepiso en la dirección de análisis.

Se ha obtenido así el modelo de una estructura, paso que es indispensable dar previamente al análisis dinámico de cualquier estructura. El análisis dinámico que se realice será tanto más aproximado al comportamiento real cuanto mejor sea el modelo de partida.

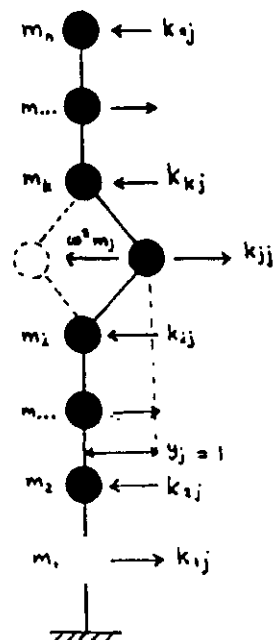
Propiedades dinámicas de un sistema de "n" grados de libertad

El problema del análisis dinámico de un sistema de  $n$  grados de libertad consiste en determinar los desplazamientos  $y_1, y_2 \dots y_j \dots y_n$  en cada instante de su oscilación bajo la acción de una excitación exterior  $F(t)$  variable con el tiempo.



Para resolver este problema consideramos en primer término que todas las masas se mantiene fijas y que la única que oscila es la masa  $m_j$  con un

desplazamiento máximo  $y_j = 1$



En estas condiciones, cuando el desplazamiento en  $j$  es máximo (1) sobre esa masa actúa la fuerza  $k_{jj}$  y en las demás masas aparecen las reacciones  $k_{1j}, k_{2j} \dots k_{kj}, k_{kj} \dots k_{nj}$  necesarias para que dichas masas permanezcan fijas.

En general:

$k_{jj}$  = Fuerza que debe aplicarse en  $m_j$  para que tenga un desplazamiento unitario, estando las demás masas fijas.

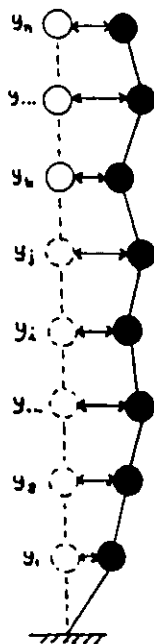
$k_{\lambda j}$  = Reacción que aparece en  $\lambda$  cuando  $m_j$  tiene un desplazamiento unitario y las demás masas están fijas.

Sobre la masa  $m_j$  actúa además la fuerza de inercia que vale: masa  $\times$  aceleración =  $m_j \cdot \omega^2 y_j = m_j \omega^2$

Estas dos fuerzas están en equilibrio:



Si ahora soltamos todas las masas para que el sistema tome la configuración  $y_1, y_2 \dots y_n$ , sobre la masa  $m_j$  aparecerán las fuerzas  $(k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j$  (porque ahora el desplazamiento no es 1 sino  $y_j$ ) y las fuerzas  $k_{j1} y_1, k_{j2} y_2 \dots k_{j\lambda} y_\lambda, k_{j\kappa} y_\kappa \dots k_{jn} y_n$



$$(k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j + k_{j1} y_1 + k_{j2} y_2 + \dots + k_{j\lambda} y_\lambda + k_{j\kappa} y_\kappa + \dots + k_{jn} y_n = 0$$

Estas fuerzas se encuentran en equilibrio.

Una ecuación similar se puede escribir para todas las demás masas, por lo que se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 (k_{11} - \omega^2 m_1) y_1 + k_{12} y_2 + \dots + k_{1j} y_j + \dots + k_{1n} y_n &= 0 \\
 k_{21} y_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2) y_2 + \dots + k_{2j} y_j + \dots + k_{2n} y_n &= 0 \\
 \dots & \\
 k_{j1} y_1 + k_{j2} y_2 + \dots + (k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j + \dots + k_{jn} y_n &= 0 \\
 \dots & \\
 k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \dots + k_{nj} y_j + \dots + (k_{nn} - \omega^2 m_n) y_n &= 0
 \end{aligned} \right\} (A)$$

A las ecuaciones (A) se les denomina "Ecuaciones generales del equilibrio -- dinámico de un sistema de n grados de libertad". Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial así:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{y\} = 0 \dots \dots (A)$$

Donde [K]= Matriz simétrica de rigideces

$$= \begin{bmatrix}
 k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\
 k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\
 \dots & & & & & \\
 k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\
 \dots & & & & & \\
 k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn}
 \end{bmatrix}$$

[K] es una matriz simétrica porque los elementos ubicados simétricamente respecto a la diagonal son iguales:  $k_{\lambda j} = k_{j \lambda}$  por el principio de Müller-Breslau.

[M]= Matriz diagonal de masas

$$= \begin{bmatrix}
 m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & & & & & \\
 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\
 \dots & & & & & \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n
 \end{bmatrix}$$

(Una matriz diagonal es aquella en que todos sus elementos son 0, excepto los alojados en la diagonal).

$$\left\{ y \right\} = \begin{array}{l} \text{Vector o} \\ \text{Matriz columna de} \\ \text{desplazamientos} \end{array} = \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{array} \right\}$$

(Un vector o matriz columna es una matriz que cuenta con una sola columna)

Examinando la ecuación (A) se observa que para que el producto del primer miembro sea 0, es preciso que el vector  $\{y\}$  sea 0, o bien que el determinante de  $([K] - \omega^2 [M])$  sea 0. La primera alternativa es una solución trivial que se -- desecha ya que corresponde al caso en que  $y_1 = y_2 = \dots = y_j = \dots = y_n = 0$ , es decir cuando todo el sistema no se ha apartado de la posición de equilibrio. Se adopta entonces, la segunda posibilidad:

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0 \dots \dots (B)$$

Ecuación que expandida se escribe de esta manera:

$$\left| \begin{array}{cccc} (k_{11} - \omega^2 m_1) & k_{12} & \dots & k_{1j} \dots k_{1n} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega^2 m_2) \dots & k_{2j} & \dots k_{2n} \\ \dots & & & \\ k_{j1} & k_{j2} \dots & (k_{jj} - \omega^2 m_j) \dots & k_{jn} \\ \dots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} \dots & k_{nj} \dots & (k_{nn} - \omega^2 m_n) \end{array} \right| = 0 \dots \dots (B)$$

A la ecuación (B) se le denomina "Ecuación de los valores característicos de un sistema de n grados de libertad". Esta ecuación es de grado n en  $\omega^2$  del tipo de:



$$c + c_1 \omega^2 + c_2 (\omega^2)^2 + \dots + c_j (\omega^2)^j + \dots + c_n (\omega^2)^n = 0$$

Y tiene por solución  $n$  raíces:  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$

Tomando una de estas raíces y llevándola a las ecuaciones (A):

$$([K] - \omega^2 [M]) \{y\}_\lambda = 0 \dots (c)$$

Se obtiene la ecuación (c) de la cual puede despejarse el vector  $\{y\}_\lambda$ .

Sin embargo, la ecuación (c) no es una ecuación determinada y existe un número infinito de vectores  $\{y\}_\lambda$  que la satisfacen. Pero todos estos vectores -- son proporcionales entre sí.

Ejemplo de vectores proporcionales:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -2 \\ -3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Por lo que para hacer determinada a la ecuación (c) se recurre al siguiente artificio:

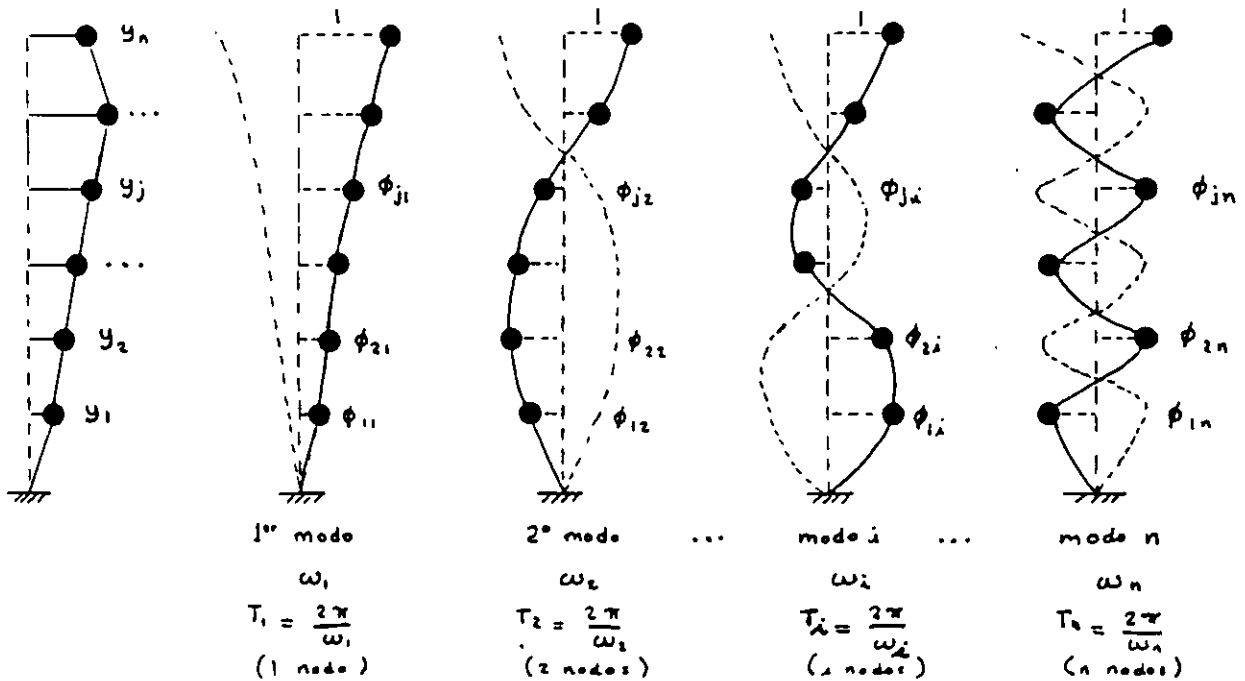
Arbitrariamente se asigna el valor 1 a uno de los desplazamientos, por ejemplo el de la última masa:

$$\begin{bmatrix} y_{1\lambda} \\ y_{2\lambda} \\ \dots \\ y_{j\lambda} \\ \dots \\ y_{n\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{Haciendo} \quad \phi_{j\lambda} = \frac{y_{j\lambda}}{y_{n\lambda}} \quad \text{Se obtiene:} \quad \begin{bmatrix} \phi_{1\lambda} \\ \phi_{2\lambda} \\ \dots \\ \phi_{j\lambda} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \{\phi_j\}_\lambda$$

Al vector  $\{\phi_j\}_\lambda$  se le designa "vector de desplazamientos normalizados" correspondientes a la frecuencia  $\omega_\lambda$ .

Lo anterior significa que el movimiento de un sistema de  $n$  grados de libertad puede descomponerse en  $n$  movimientos simples, cada uno con su frecuencia  $\omega_\lambda$  y su ley de oscilación  $\{\phi_j\}_\lambda$ . A cada uno de estos movimientos se le llama modo.

La ley  $\{\phi_j\}_\lambda$  muestra la proporción que guardan entre sí los desplazamientos de las masas durante todo el movimiento, por lo que los desplazamientos  $\phi_{j\lambda}$  son - adimensionales y están a escala arbitraria.



Se llama "nodo" a un punto que no se mueve dentro de cada modo. El número de nodos en cada ley corresponde con el número del modo.

Las amplitudes de las leyes de oscilación cumplen con la propiedad de ortogonalidad, es decir:

$$\sum_{j=1}^n m_j \phi_{j\lambda} \phi_{jk} = 0 \quad (\lambda \neq k; \lambda, k = 1, 2 \dots n)$$

En donde:

$m_j$  = masa en el punto  $j$

$\phi_{j\lambda}$  = Amplitud del punto  $j$  en el modo  $\lambda$

$\phi_{jk}$  = Amplitud del punto  $j$  en el modo  $k$

que puede escribirse

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_k = 0 \quad (i \neq k)$$

Estas propiedades permiten la solución de sistemas de  $n$  grados de libertad sometidos a oscilaciones forzadas.

El primer modo tiene una influencia preponderante en la definición de la respuesta total, por eso se designa "modo fundamental" y a su período se le llama "período fundamental".

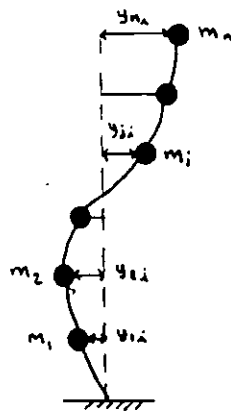
Los modos por encima del primero se denominan "modos superiores" y su influencia decrece al aumentar el número del modo; por esa razón se recomienda en muchos casos calcular únicamente los tres primeros modos.

En el procedimiento matemático que se ha desarrollado se ha considerado una oscilación libre sin amortiguamiento, sin embargo, al igual que para los sistemas de un grado de libertad puede considerarse que para el modo  $\lambda$   $\omega_\lambda^* \cong \omega_\lambda$   $T_\lambda^* \cong T_\lambda$ . Donde  $\omega_\lambda^*$  y  $T_\lambda^*$  son la frecuencia y el período amortiguados del modo  $\lambda$ .

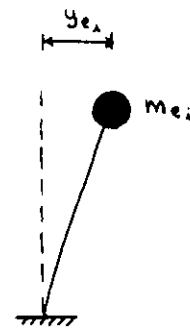
El procedimiento explicado es imposible de aplicar manualmente para  $n > 3$ . Aún con computadoras su aplicación es laboriosa. Por estas razones se han desarrollado métodos numéricos para el cálculo aproximado manual de las frecuencias y leyes características.

Reducción de un sistema de 'n' grados de libertad a un sistema con una sola masa.

Consideremos un sistema de  $n$  grados de libertad oscilando con los desplazamientos  $y_{1\lambda}, y_{2\lambda}, \dots, y_{j\lambda}, \dots, y_{n\lambda}$  correspondientes a las masas  $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_n$  y al modo  $\lambda$ . Encontraremos la masa equivalente  $m_{e\lambda}$  de un sistema de un solo grado de libertad, que produzca el mismo cortante en la base para el mismo evento sísmico.



*Sistema de n grados de libertad oscilando en el modo  $\lambda$*



*Sistema equivalente de un solo grado de libertad*

En ambas figuras las energías potenciales deben ser iguales:

$$E_{p\lambda} = E_{pe}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j y_{j\lambda}^2 = \frac{1}{2} m_{e\lambda} y_{e\lambda}^2$$

$$m_{e\lambda} = \frac{1}{y_{e\lambda}^2} \sum_{j=1}^n m_j y_{j\lambda}^2$$

Por otra parte, las frecuencias de oscilación deben también ser iguales:

$$\omega_\lambda = \omega_{e\lambda}$$

Substituyendo estas frecuencias por las expresiones que proporciona el método -

de Rayleigh:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i}}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i}^2}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{y_{e,i}}}$$

$$\frac{1}{y_{e,i}} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i}}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i}^2}$$

Substituyendo en (1)

$$m_{e,i} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^n m_j y_{j,i} \right]^2}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j,i}^2}$$

Este resultado permite calcular la respuesta para uno de los modos de un sistema de  $n$  grados de libertad con los mismos procedimientos explicados antes para un solo grado de libertad.

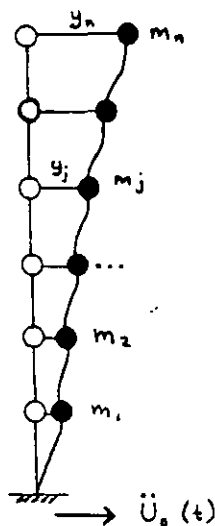
Análisis sísmico de sistemas de  $n$  grados de libertad.

Considerando un sistema de  $n$  grados de libertad, sometido a una aceleración -- sísmica  $\ddot{U}_0(t)$ , llamando  $y_j(t)$  al desplazamiento relativo de la masa  $m_j$  respecto a la base, las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$[M]\{\ddot{y}_j\} + [C]\{\dot{y}_j\} + [K]\{y_j\} = [M]\{1\}\ddot{U}_0$$

Donde

$$[M] = \text{matriz diagonal de -- masas} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$



$$[K] = \text{Matriz simétrica de rigideces} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{\ddot{y}_j\}$ ,  $\{\dot{y}_j\}$ ,  $\{y_j\}$  = Matrices columna de aceleraciones, Velocidades y desplazamientos

$$\{ \ddot{y}_j \} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_j \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \{ \dot{y}_j \} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_j \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \{ y_j \} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$\{ 1 \} \ddot{U}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{U}_0 = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_0 \\ \ddot{U}_0 \\ \vdots \\ \ddot{U}_0 \\ \vdots \\ \ddot{U}_0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de amortiguamiento  $[c]$  es una matriz compacta y simétrica de la forma:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jj} & \dots & c_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Sin embargo esta matriz presenta dos problemas:

- 1) No existe un procedimiento que permita determinar físicamente los valores de los elementos
- 2) Si la matriz no satisface el principio de ortogonalidad respecto a los nodos que caracteriza a las matrices de rigidez y de masas  $[K]$ ,  $[M]$ , se - -

obtiene un sistema de ecuaciones acopladas y los modos propiamente no existen.

Aún cuando experimentalmente se ha demostrado que hay alguna interferencia entre los modos, este efecto es despreciable, sobre todo cuando las amplitudes son pequeñas y la estructura permanece en el rango elástico, por lo que con fines de diseño se puede asignar a cada uno de los modos un porcentaje de amortiguamiento ( $\nu = 2-5\%$ )

De este modo, para el modo  $i$  la ecuación del movimiento será:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = - [\Psi]_i^T [M] \{1\} \ddot{U}_0$$

Donde se ha realizado el cambio de variable

$$\{y\} = [\Psi] \{\eta\}$$

$[\Psi]$  = Matriz ortonormal de vectores

$\{\eta\}$  = Matriz columna de las coordenadas generalizadas del modo normal de vibración.

De esta ecuación se llega a la siguiente solución:

$$y_{ji} = c_i \phi_{ji} \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \ddot{U}_0(z) e^{-\nu_i \omega_i (t-z)} \sin \omega_i (t-z) dz$$

(En forma similar al caso de un grado de libertad)

Donde:

$y_{ji}$  = desplazamiento en el instante  $t$  de la masa  $j$  debido al modo  $i$

$c_i = \frac{\sum_j m_j \phi_{ji}}{\sum_j m_j \phi_{ji}^2}$  = Factor de participación del modo  $i$  en el movimiento total.

$\nu_i, \omega_i$  = Porcentaje de amortiguamiento y frecuencia del modo  $i$

### Análisis dinámico modal paso a paso

Este procedimiento de análisis consiste en el cálculo de los desplazamientos de cada masa, para cada modo en cada instante. La suma de los desplazamientos modales dará el desplazamiento total de cada masa en cada instante. El cálculo se realiza aplicando la expresión anterior, donde  $\ddot{u}_g(z)$  representa el acelerograma del sismo de interés. La integración se ejecuta mediante una suma de -- diferencias finitas, como se explicó anteriormente para un sistema de un solo-grado de libertad.

Por otra parte el cálculo debe realizarse para varios sismos representativos, cada uno con diferente función  $\ddot{u}_g(z)$  (El Reglamento del D. F. especifica el uso de por lo menos cuatro movimientos).

Lo expuesto indica que si bien el método paso a paso tiene el atractivo de -- ofrecer el conocimiento de todos los desplazamientos de las masas en función del tiempo, a partir del conocimiento de la función de la excitación, requiere de trabajos excesivamente laboriosos, aún con el auxilio de computadoras -- muy potentes.

Por esta razón este procedimiento se aplica únicamente con fines de investigación y sólo en muy limitadas ocasiones con fines de diseño.

Cabe señalar que en todo lo expuesto hasta ahora se ha considerado que las -- estructuras tienen un comportamiento elástico lineal. El método de análisis paso a paso tiene la ventaja de permitir considerar de una manera directa un comportamiento no lineal.



### Análisis dinámico modal espectral

Este procedimiento parte del enfoque más práctico de calcular los desplazamientos máximos para cada modo.

A partir de la expresión:

$$y_{ji} = c_i \phi_{ji} \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \ddot{U}_0(z) \text{sen } \omega_i (t-z) dz$$

El desplazamiento máximo será:

$$y_{ji \max} = \frac{c_i \phi_{ji}}{\omega_i} S_v(\nu_i, \omega_i, t)$$

Donde  $S_v =$  Espectro de velocidad =  $\left| \int_0^t \ddot{U}_0(z) e^{-\nu_i \omega_i (t-z)} \text{sen } \omega_i (t-z) dz \right|_{\max}$

Si se emplea, como es más común, el espectro de aceleraciones:  $S_a = \frac{S_v}{\omega}$

$$y_{ji \max} = \frac{c_i \phi_{ji}}{\omega_i} S_a(\nu, \tau)$$

Determinados los desplazamientos máximos para cada modo, queda el problema de determinar los máximos totales. Estos no son la suma de los máximos modales, porque los últimos no ocurren simultáneamente, es decir:

$$y_{j \max} \neq \sum_{i=1}^n y_{ji \max}$$

Un criterio de combinación de respuestas modales que da resultados aproximados para estructuras comunes (con distribución regular de masas y rigideces) es el de tomar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados:

$$y_{j_{max}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ji_{max}}^2}$$

o bien:

$$y_{j_{max}} = \sqrt{y_{j1_{max}}^2 + y_{j2_{max}}^2 + \dots + y_{ji_{max}}^2 + \dots + y_{jn_{max}}^2}$$

Este criterio es aplicable a cualquier respuesta de la estructura, por lo que en general:

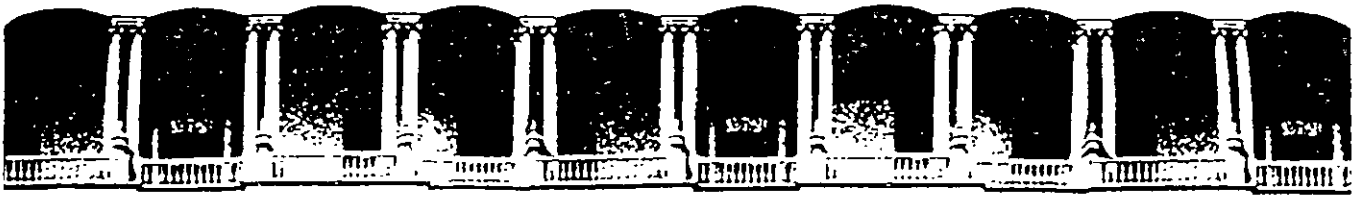
$$R_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_{i_{max}}^2}$$

Donde  $R$  puede ser desplazamiento total, desplazamiento relativo, fuerza constante, etc...

El procedimiento de análisis dinámico modal espectral es el que normalmente se aplica en la práctica de diseño de edificios altos. Existen en el mercado numerosos programas de computadora que facilitan su empleo.

#### Bibliografía

- Bazán E. y Meli R. "Manual de Diseño Sísmico de Edificios".- Editorial - Limusa. México, 1985.
- Beles A, Ifrim M, García Yagüe A, "Elementos de Ingeniería Sísmica"- Editorial Omega. Barcelona, 1975.
- Biggs J. "Dynamic Analysis of One - Degree Systems" y "Analysis of - - - Multidegree Systems" en "Fundamentals of Earthquake Engineering for - - - Buildings" Massachusetts Institute of Technology. 1972.



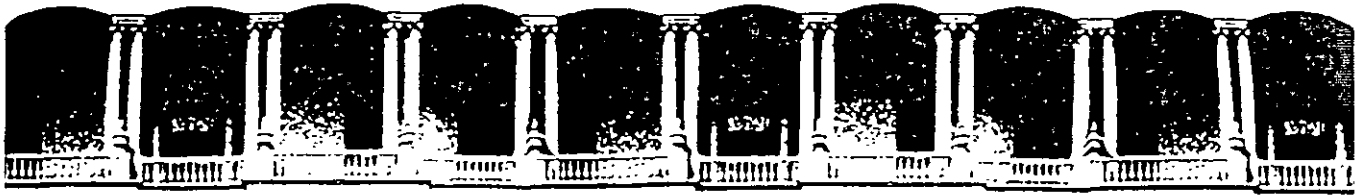
**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# **CURSOS ABIERTOS**

## **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

### **MÓDULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**EXPOSITOR: M. en I. IGNACIO ENRIQUE HERNÁNDEZ QUINTO  
PALACIO DE MINERÍA  
MARZO DEL 2003**



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**ANALISIS ESTRUCTURAL**

**Coordinador Académico**

**Ing. Ignacio Enrique Hernández Quinto**

**OBJETIVO**

Proporcionar a los asistentes los conocimientos necesarios sobre las bases teóricas y la normatividad vigente en materia de análisis, cálculo y diseño de estructuras. Así como también las bases para el conocimiento de la interacción suelo-cimentación-estructura y el método del elemento finito para el análisis de estructuras.

**TEMARIO**

**1.- INTRODUCCION.**

El proceso de diseño y construcción de edificaciones.

Ing. Ignacio Enrique Hernández Quinto 10 de marzo

**2.- METODOS ENERGETICOS**

- 2.1 Introducción
- 2.2 Obtención de desplazamientos
- 2.3 Ecuaciones básicas de análisis por flexibilidad
- 2.4 Elección de la estructura primaria
- 2.5 Ejemplos

Ing. Trinidad Adolfo Almazán Jaramillo 11, 12 y 13 de marzo

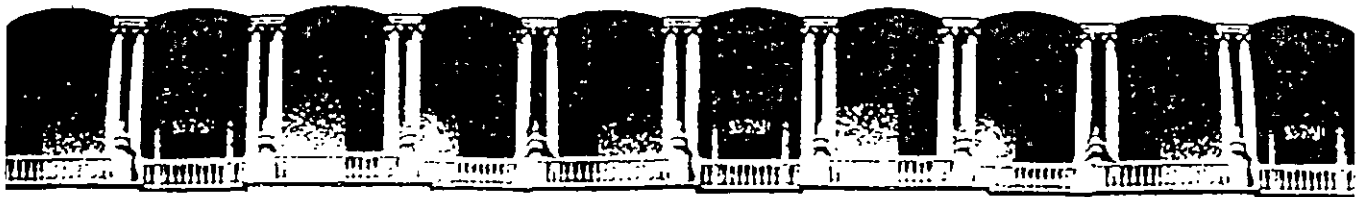
**3.- METODO DE RIGIDECES**

- 3.1 Introducción
- 3.2 Rigideces angulares y lineales
- 3.3 Matrices de rigidez
- 3.4 Transformaciones
- 3.5 Aplicaciones

Ing. Ignacio Enrique Hernández Quinto 14, 15 y 17 de marzo

**4.- ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS**

- 4.1 Introducción
- 4.2 Vibraciones libres y forzadas, sin y con amortiguamiento
- 4.3 Análisis sísmico dinámico modal
- 4.4 Respuestas dinámicas



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

4.5 Estructura tridimensional

Ing. Amílcar Galindo Solórzano 18 de marzo

**5.- INTERACCION SUELO-CIMENTACION-ESTRUCTURA**

5.1 Introducción

5.2 Análisis estructural discretizando la rigidez del suelo (resorte)

5.3 Analizando su rigidez y la flexibilidad del suelo

M. en I. Agustín Deméneghi Colina 19 de marzo

**6.- INTRODUCCION AL METODO DE ELEMENTO FINITO**

6.1 Tipo de elementos finitos, rectangulares y triangulares para estados planos y de esfuerzos

6.2 Elementos isoparamétricos

6.3 Determinación de la rigidez de un elemento por medio del principio de trabajo virtual

Dr. Roberto Gómez Martínez 20 de marzo

# **ANALISIS ESTRUCTURAL**

## CONTENIDO

### CAPITULO 1. INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL

1.1	Introducción.....	1
1.2	Equilibrio, compatibilidad y relación entre fuerzas y desplazamientos .....	3
1.2.1	Equilibrio.....	3
1.2.2	Compatibilidad.....	4
1.2.3	Relación entre fuerzas y desplazamientos.....	5
1.3	Tipos de estructuras.....	6
1.3.1	Armaduras .....	6
1.3.2	Vigas.....	6
1.3.3	Marco planos .....	7
1.3.4	Retícula o emparrillado.....	8
1.3.5	Estructuras tridimensionales .....	8
1.4	Grado de Hiperestaticidad.....	9
1.5	Grado de libertad (Indeterminación cinemática).....	13

### CAPITULO 2. METODO DE LAS RIGIDECES

2.1	Sistemas de referencia.....	15
2.2	Determinación de la matriz de rigideces.....	18
2.2.1	Rigidez axial.....	20
2.2.2	Rigidez al corte.....	21
2.2.3	Rotación del sistema local al global .....	31
2.3	Acoplamiento de barras.....	34

2.5	Armaduras en el plano .....	38
2.5.1	Ejemplo .....	39
2.6	Armaduras en el espacio.....	46
2.7	Vigas continuas .....	55
2.7.1	Ejemplo .....	55
2.8	Marcos planos .....	66
2.8.1	Ejemplos.....	68
2.9	Retícula o emparrillado .....	81
2.9.1	Ejemplo .....	84
2.10	Estructuras en el espacio.....	90

### **CAPITULO 3. MODIFICACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES.**

3.1	Matriz de rigideces modificada .....	95
3.2	Condensación de los grados de libertad .....	98
3.3	Matrices de Permutación.....	100

### **CAPITULO 4. METODO DE LAS SUBESTRUCTURAS**

4.1	Formulación del método de las subestructuras .....	101
4.2	Armaduras .....	107
4.3	Marcos.....	116

### **CAPITULO 5. TEORIA DE ELASTICIDAD**

5.1	Esfuerzos .....	124
5.1.1	Esfuerzos en punto .....	124
5.1.2	Esfuerzos en planos inclinados .....	126
5.2	Ecuación de equilibrio .....	129



5.3	Esfuerzos en planos perpendiculares .....	130
5.4	Esfuerzos en planos oblicuos .....	131
5.5	Variación del esfuerzo con la variación del elemento .....	133
5.6	Esfuerzos principales .....	136
5.7	Esfuerzos cortantes máximos .....	137
5.8	Deformaciones .....	138
5.9	Ecuación de continuidad .....	141
5.10	Relación esfuerzo-deformación.....	142

## **CAPITULO 6. FUNDAMENTOS DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS**

6.1	Descripción general y alcance del método.....	148
6.2	Campo de desplazamiento .....	149
6.3	Funciones de forma .....	152
6.3.1	Funciones de forma para un elemento armadura.....	152
6.3.2	Funciones de forma para un elemento viga.....	155
6.3.3	Funciones de forma para un elemento triangular.....	158
6.3.4	Funciones de forma para un elemento rectangular .....	162
6.3.5	Resumen de las funciones de forma .....	166
6.4	Matriz de rigideces del elemento finito.....	166
6.4.1	Matriz de rigideces para un elemento sujeto a carga axial.....	168
6.4.2	Matriz de rigideces para un elemento viga .....	170
6.5	Esfuerzo y deformaciones planas.....	173
6.5.1	Matriz de rigideces de un elemento triangular para esfuerzos planos.....	174
6.5.2	Matriz de esfuerzos .....	180

6.5.3	Ejemplo de aplicación para esfuerzos planos.....	182
6.6	Deformaciones planas.....	191
6.7	Análisis de esfuerzos en cuerpos de revolución .....	192
6.7.1	Matriz de rigidez de un elemento triangular.....	193
6.7.2	Matriz de esfuerzos para un elemento axisimétrico.....	199
	BIBLIOGRAFIA.....	200

# INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL 1

## 1.1 INTRODUCCION

El análisis estructural es un paso intermedio en el proceso a seguir para la construcción de cualquier obra civil y tiene como finalidad el determinar el comportamiento de la estructura que la soportará, es decir, los efectos producidos por las diferentes acciones que obrarán en la construcción. El comportamiento de la estructura se puede expresar a través de desplazamientos, reacciones y fuerzas internas (elementos mecánicos). A partir de estos últimos se define la resistencia que debe tener la estructura para soportar las cargas que obrarán sobre ésta y con los desplazamientos se revisarán las condiciones de servicio, para esto los desplazamientos actuantes serán menores o iguales que los permisibles establecidos por los reglamentos de construcción. Si esta condición no se cumple deberán cambiarse las dimensiones de la estructura y analizarla nuevamente. De lo anterior se observa que el análisis y el diseño de una estructura es un proceso iterativo y que el análisis estructura es una herramienta necesaria para diseñar una estructura y así poder construirla.

Por otro lado para poder realizar el análisis de una estructura, se debe tener bien definidas sus condiciones de frontera o condiciones de apoyo, ya que una estructura bajo las mismas condiciones de carga pero diferentes condiciones de apoyo tiene comportamiento diferente.

Un apoyo es la representación gráfica del número de reacciones necesarias en el punto donde se encuentra dicho apoyo, para establecer el diagrama de cuerpo libre en la estructura. Las diferentes condiciones de apoyo se obtienen a partir de la continuidad de los elementos o de la forma en que se conectan, por ejemplo un elemento ya sea de madera, concreto o acero se apoya en forma directa sobre otro elemento como se indica en la figura 1.1 a.

Se observa que los desplazamientos horizontal y angular pueden ser diferentes de cero, sin embargo en la dirección vertical el muro restringe el desplazamiento dando origen a una reacción en la dirección vertical el muro restringe el desplazamiento dando origen a una reacción vertical  $R_v$ . La idealización del apoyo de esta estructura se puede representar como se indica en la figura 1.1.b. Este apoyo se conoce como libre o directo y es la representación esquemática de una reacción.

Si la viga de la figura 1.1 se sujeta como se indica en la figura 1.2, el desplazamiento horizontal se restringe dando origen a una nueva reacción y su idealización se muestra en la figura 1.2.c. Este apoyo se conoce como articulación y es la representación esquemática de dos reacciones, una vertical y otra horizontal.

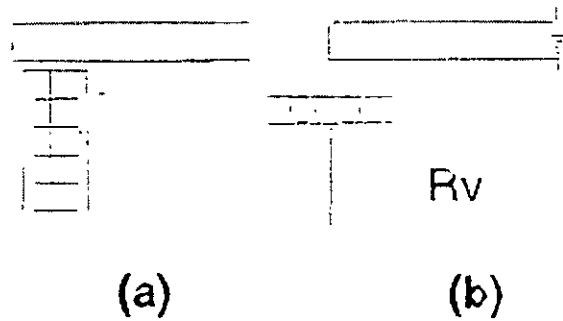


Figura 1.1

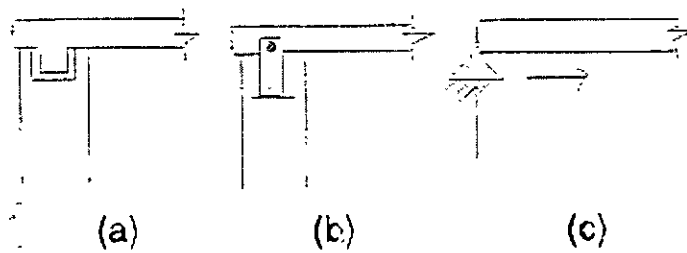


Figura 1.2

Si ese mismo elemento se conecta a otro de tal manera que el desplazamiento angular sea cero, además de los desplazamientos vertical y horizontal como se indica en la figura 1.3.a se da origen al apoyo que se conoce como comportamiento, el cual es la representación de tres reacciones como se muestra en la figura 1.3.b.

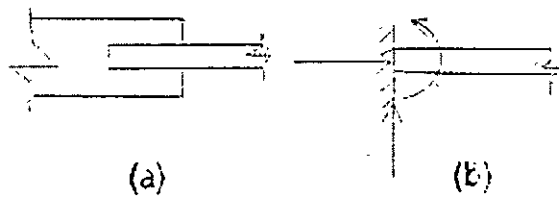


Figura 1.3

Finalmente si se conecta el elemento de la forma que muestra en la figura 1.4. se obtiene el apoyo que es la representación esquemática de dos reacciones como se indica en las figuras 1.4.a y 1.4.b respectivamente.

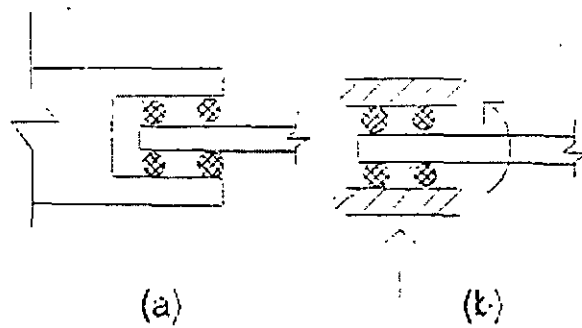


Figura 1.4

De los cuatro casos anteriores, se puede concluir que si hay desplazamiento en el apoyo no hay reacción y si hay desplazamiento.

## 1.2. EQUILIBRIO, COMPATIBILIDAD Y RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS.

En la sección anterior se definió el objetivo del análisis como la determinación de los desplazamientos, reacciones y fuerzas internas bajo cualquier condición de carga. Sin importar el método utilizado para lograr este objetivo es necesario cumplir con las condiciones de equilibrio, compatibilidad y la relación entre fuerzas y desplazamientos.

### 1.2.1 EQUILIBRIO

La solución correcta de la estructura debe satisfacer las condiciones de equilibrio estático, no solo para la estructura completa, sino también para cualquier parte de ella tomada como un cuerpo libre.

En un espacio tridimensional si el vector fuerza resultante es igual a cero, también sus componentes deben ser igual a cero, por lo que se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad 1.1.a$$

En estas ecuaciones las expresiones  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  y  $\sum F_z$  son las sumas algebraicas de las componentes en x, y & z respectivamente de todos los vectores fuerza que actúan en el cuerpo libre. Igualmente, si el vector momento resultante es igual a cero, las ecuaciones de momento de equilibrio estático son:

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad 1.1.b$$

Donde  $\sum M_x$ ,  $\sum M_y$  &  $\sum M_z$  son las sumas algebraicas de los momentos respecto a los ejes x, y & z respectivamente, de todos los pares y fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre.

Las ecuaciones 1.1 representan las condiciones de equilibrio estático tridimensional. Si la estructura es plana y las cargas están en el plano que contiene a la estructura y los pares tienen sus vectores normales a ese plano, solo son útiles tres de las seis ecuaciones de equilibrio. Considerando que las fuerzas están en el plano x-y, evidentemente las ecuaciones  $\sum F_z = 0$ ,  $\sum M_x = 0$  y  $\sum M_y = 0$  se satisfacen automáticamente. Las ecuaciones restantes  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M_z = 0$  son las ecuaciones de equilibrio estático que toda estructura en el plano x-y debe cumplir.

Las ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse a cualquier estructura como cuerpo libre y si se cumplen en ésta, entonces deberán cumplirse también en cualquier punto, elemento, nodo o cualquier parte de ella tomada como cuerpo libre como ya se mencionó anteriormente.

### 1.2.2 COMPATIBILIDAD

En las estructuras donde el número de las incógnitas es igual al número de ecuaciones de equilibrio estático, se puede determinar el valor de las reacciones y de las fuerzas internas que estén presentes en el sistema estructural para lograr el equilibrio del mismo. Sin embargo hay estructuras que tienen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio estático, por lo tanto se ve la necesidad de plantear ecuaciones adicionales para poder determinar todas las incógnitas. Estas condiciones se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura, por lo que, también reciben el nombre de condiciones de continuidad. Usualmente estas condiciones son de interés en los nodos de la estructura, por lo que se define la compatibilidad como: el desplazamiento de un nodo debe ser igual al desplazamiento de los extremos de las barras que concurren al nodo.

Para ilustrar esta condición, considérese la viga mostrada en la figura 1.5, la cual tiene tres reacciones y solamente se pueden utilizar dos ecuaciones de equilibrio  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M_z = 0$ , por lo que hay que establecer una tercera ecuación.

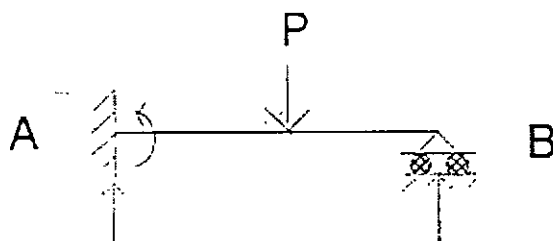
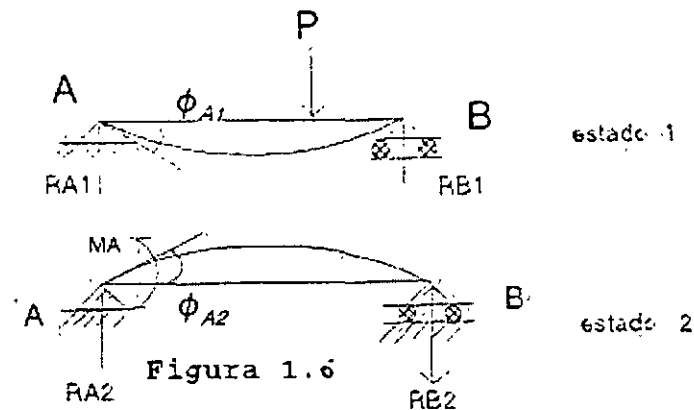


Figura 1.5

Utilizando el principio de superposición de causas y efectos ( la respuesta de una estructura, debida a un número de cargas aplicadas simultáneamente, se obtiene

mediante la suma de las respuestas de las cargas individuales, aplicando por separado cada una de ellas) la viga de la figura 1.5 se puede descomponer en dos estados como se muestra en la figura 1.6, de tal manera que si sumamos el estado 1 con el estado 2 se obtiene la viga inicial.



Se observa que en el extremo A de la viga de la figura 1.5 de desplazamiento angular vale cero

$$\varphi_A = 0$$

Y de la figura 1.6 para satisfacer esta condición de compatibilidad,

$$A_1 + \varphi A_2 = 0$$

La cual es la tercera ecuación necesaria para determinar las tres reacciones de la viga.

### 1.2.3 RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS

Para definir la relación entre fuerzas y desplazamientos de cualquier sistema estructural, es necesario utilizar las leyes constitutivas ( propiedades ) de un material dado y los conceptos de equilibrio y compatibilidad. Hay dos formas básicas para expresar estas relaciones. La primera relación fuerza-desplazamiento de la forma:

$$P = KD$$

Donde P es la fuerza, D los desplazamientos y K la rigidez de la estructura. La rigidez tiene unidades de fuerza por longitud y puede definirse como la fuerza necesaria para mantener el elemento de una unidad de desplazamiento. Esta relación es la base para el método de las rigideces, la segunda relación se puede expresar:

$$D = FP$$

En este caso F define la flexibilidad del elemento estructural y está dada en unidades de longitud por fuerza. Puede considerarse que un coeficiente de flexibilidad es el

desplazamiento generado por una carga unitaria. Esta relación es la base para el método de las fuerzas.

### 1.3 TIPO DE ESTRUCTURAS

Las estructuras de acuerdo a su comportamiento se pueden clasificar en dos grandes grupos las estables y las inestables. Estas últimas son aquellas que no son capaces de soportar un sistema general de cargas a menos de que éste sea controlado. Las estructuras estables son aquellas capaces de soportar un sistema general de cargas cuyos valores están limitados a que no ocurra una falla por deformación excesiva y a su vez se pueden subdividir en **isostáticas e hiperestáticas**. Las isostáticas son aquellas que se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio, es decir el número de incógnitas (reacciones y fuerzas internas) es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden utilizar. Por el contrario si no se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio se dice que son hiperestáticas. También se puede hacer la clasificación de las estructuras en torno a los elementos mecánicos que estarán presentes en las mismas.

Para determinar los elementos mecánicos que estarán presentes en una estructura sujeta a un sistema general de cargas, se parte de considerar que la estructura esta en equilibrio y como consecuencia cualquier punto o fracción de la también debe estar en equilibrio.

#### 1.3.1 ARMADURAS

Si se traza una sección a-a en la armadura mostrada en la figura 1.7.a, se observará que para lograr el equilibrio de la porción de la estructura comprendida entre la sección a-a y el apoyo A se requiere de dos fuerzas normales  $N_1$  y  $N_2$  a la sección resultará una situación similar, ya que las fuerzas necesarias para lograr el equilibrio serán normales a la sección de las barras, a estas fuerzas también se les conoce como fuerzas axiales.

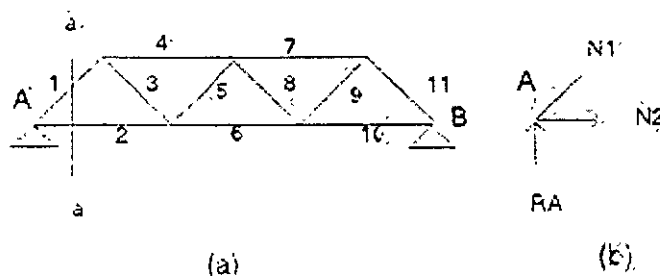
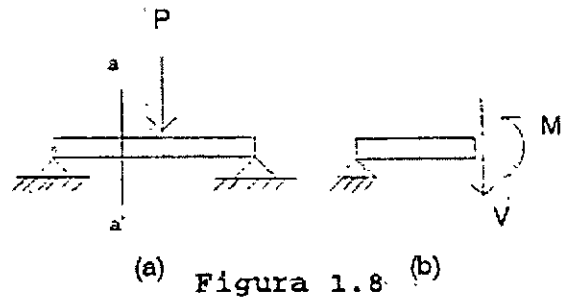


Figura 1.7

#### 1.3.2 VIGAS

Si se traza la sección a-a en la viga mostrada en la figura 1.8 a, para lograr el equilibrio vertical se requiere una fuerza  $V$  que tendrá la misma magnitud pero sentido contrario a la reacción, a esta fuerza se le llama fuerza cortante, estas dos fuerzas producen un par que será contrarrestado por un momento  $M$ , que genere otro par de igual magnitud pero de sentido contrario, figura 1.8 b, así se concluye que la viga estará sujeta a fuerza cortante y momento flexionante.

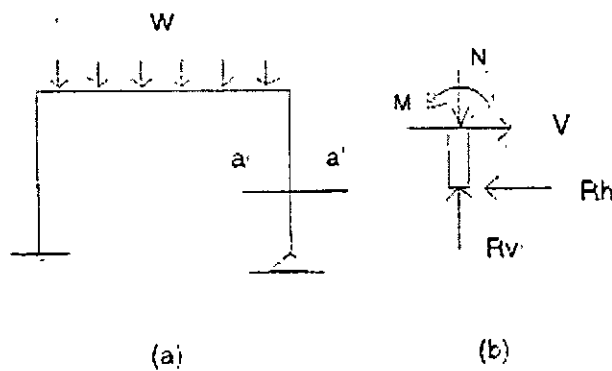




(a) Figura 1.8 (b)

### 1.3.3 MARCO PLANOS

Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.9, a se requiere una fuerza normal  $N$  a la sección para equilibrar la reacción vertical, una fuerza cortante  $V$  para equilibrar la reacción horizontal, estas dos fuerzas ( $R_h$  y  $V$ ) forman un par que será equilibrado por un momento  $M$  que genere otro par de igual magnitud pero sentido contrario, así los elementos mecánicos que estarán presentes en un marco serán: fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 1.9. b.



(a) (b)

Figura 1.9

### 1.3.4 RETICULA O EMPARRILLADO

Una retícula es una estructura en la cual la carga se aplica perpendicular al plano que contiene la estructura, si se analiza la sección a-a de la retícula mostrada en la figura 1.10.a se observa que los elementos mecánicos necesarios para plantear el diagrama de cuerpo libre de la parte de la estructura comprendida entre la sección y el apoyo A son fuerza cortante  $V_y$ , momento flexionante  $M_z$  y momento torsionante  $M_x$  como se indica en la figura 1.10 b

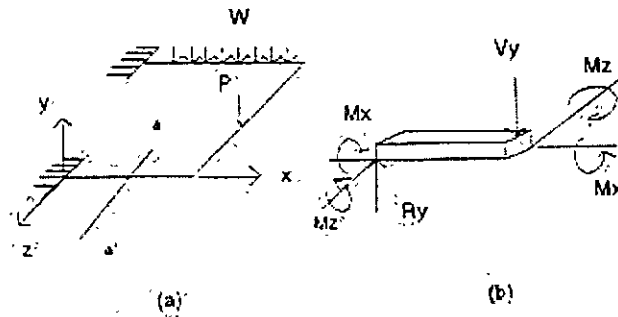


Figura 1.10

### 1.3.5 ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

Estas estructuras también se conocen como marcos tridimensionales y para su análisis es necesario referirlas a un sistema coordenado tridimensional. Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.11.a se observa que para lograr el equilibrio de la porción mostrada en la figura 1.11 b se requiere una fuerza axial  $N$ , dos fuerzas cortantes una en la dirección "  $y$  " y la otra en la dirección "  $z$  " que denominaremos como  $V_y$  y  $V_z$  respectivamente, en un momento torsionante alrededor del eje longitudinal de la barra  $M_x$  y dos momentos flexionantes uno alrededor del eje "  $y$  " y otro alrededor del eje "  $z$  "  $M_y$  y  $M_z$  respectivamente.

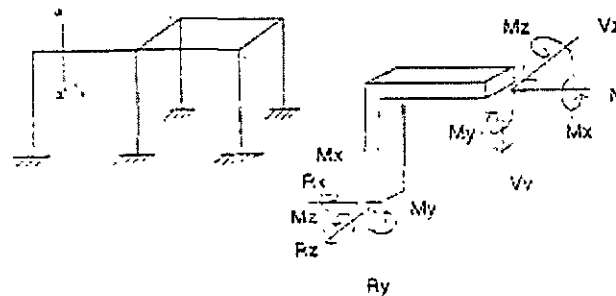


Figura 1.11

## 1.4 GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Las estructuras hiperestáticas (estáticamente indeterminadas) pueden ser externamente y/o internamente indeterminadas. Si el número de reacciones excede el número de ecuaciones de equilibrio disponibles, se dice que la estructura es externamente indeterminada. Si algunas fuerzas internas (elementos mecánicos) no pueden determinarse por la estática a pesar de que todas las reacciones sean conocidas, la estructura se clasifica como internamente indeterminada. Para ilustrar lo anterior considérese la viga de la figura 1.12 la cual tiene 5 reacciones y solo se tienen disponibles 3 ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum F_z = 0$ ), lo cual da un número mayor de reacciones ( incógnitas ) por lo tanto la viga se clasifica como externamente indeterminada.

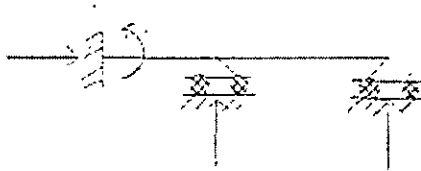


Figura 1.12

La armadura de la figura 1.13 tiene 3 reacciones para cualquier condición de carga y se dispone de tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  y  $\sum M_z$ ). Como el número de reacciones es igual al número de ecuaciones de equilibrio, la armadura es isostática externamente, sin embargo las fuerzas en las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta una de las barras diagonales como se muestra en la figura 1.13 b, las fuerzas en las otras barras ya se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio, por lo que las fuerzas internas en la armadura exceden a las ecuaciones de equilibrio en una fuerza, lo cual indica que la armadura es hiperestática internamente.

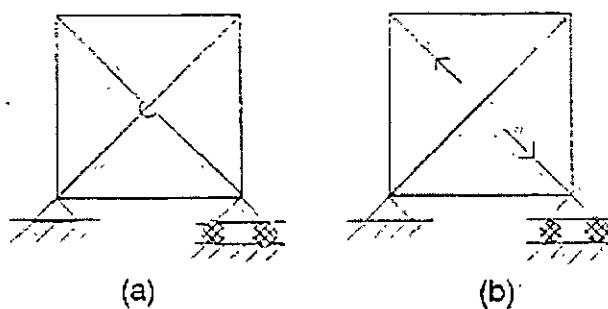


Figura 1.13

El marco de la figura 1.14 tiene seis reacciones y se tienen disponibles tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  y  $\sum M_z$ ). El número de reacciones es mayor al número de ecuaciones de equilibrio, lo cual hace que el marco sea hiperestático externamente. Las fuerzas internas (N, V y M) en todas las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta la barra horizontal inferior, como se

muestra en la figura 1.14. b, las fuerzas internas en las otras barras ya se pueden calcular con las ecuaciones de la estática, por lo que las fuerzas internas del marco exceden en tres a las ecuaciones de equilibrio, lo cual implica que el marco es hiperestático internamente.

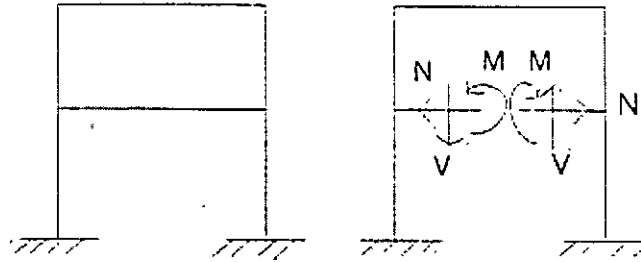


Figura 1.14 a y b

De lo anterior el grado de hiperestaticidad de una estructura se define con el número de reacciones y de fuerzas internas que exceden al número de ecuaciones de equilibrio estático, así:

$$\begin{aligned}
 GH &= GH_i + GH_e \\
 GH &= N.F.I. - N.E.E. \\
 GH &= N.R. - N.E.E.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Donde:

$GH_i$ ,  $GH_e$ , y  $GH$  son el grado de hiperestaticidad total, interno y externo respectivamente

N.F.I. es el número de fuerzas internas (elementos mecánicos); N.R. es el número de reacciones y N.E.E. es el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles.

El grado de hiperestaticidad puede ser negativo, igual a cero o mayor que cero, estos valores representan:

- $GH > 0$  estructura hiperestática
- $GH = 0$  estructuras isostáticas
- $GH < 0$  estructuras inestable

Para ilustrar las aplicaciones de la expresión (1.1) se determinará el grado de hiperestaticidad para las estructuras de las figuras 1.15 a las 1.19

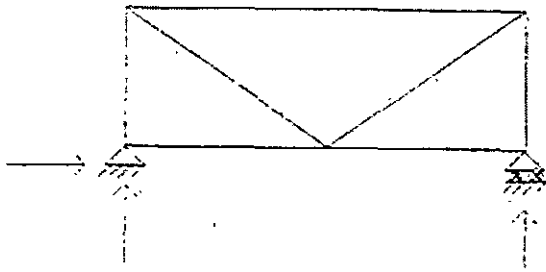


Figura 1.15

$$GHe = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 0$$

$$GH = 0$$

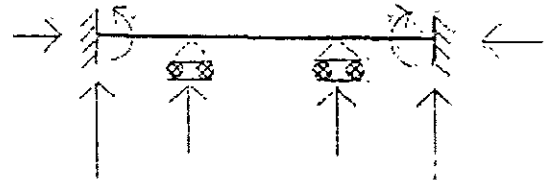


Figura 1.16

$$GH = 8 - 3 = 5$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 5$$

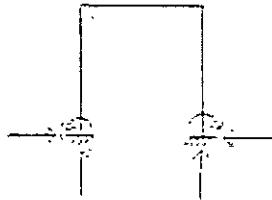


Figura 1.17

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 3$$

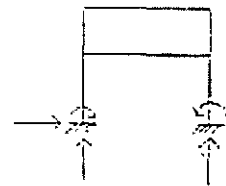


Figura 1.18

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 6 - 3 = 3$$

$$GH = 6$$

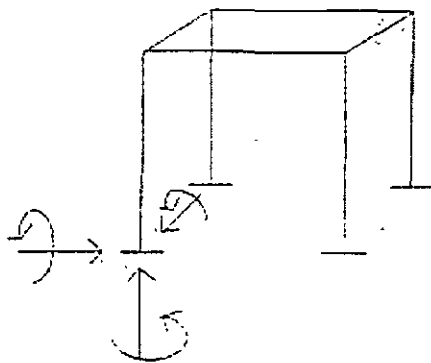


Figura 1.19

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 12 - 6 = 6$$

$$GH = 9$$

En las estructuras de la 1.15 a la 1.19 se determinó el grado de hiperestaticidad por inspección, es decir, estableciendo el número de reacciones, fuerzas internas y el

número de ecuaciones de equilibrio estático que se pueden plantear en una estructura determinada. Para ciertas estructuras, especialmente para aquellas que tienen un gran número de barras, es difícil aplicar este enfoque, por lo que se recomienda utilizar la ecuación (1.2) que resulta de hacer un planteamiento formal.

Considérese una estructura cualquiera con NB barras, NN nodos y NR reacciones. Las incógnitas son elementos mecánicos EM y las reacciones NR en cada barra y apoyos respectivos, es decir:

$$I = NEM * NB + NR$$

En cada nodo se pueden plantear N ecuaciones de equilibrio estático NEE, así las ecuaciones que se generan en la estructura son:

$$E = NEE * NN$$

Si la estructura es isostática, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas

$$NEM * NB + NR = NEE * NN$$

Por lo que el grado de hiperestaticidad es el número de incógnitas menos el número de ecuaciones

$$GH = NEM * NB + NR - NEE * NN \quad (1.2)$$

Donde:

NEM: número de elementos mecánicos en las barras de la estructura en estudio.

NEM = 1 en armaduras solo hay fuerza normal

NEM = 2 en vigas cuando solo exista fuerza cortante y momento flexionante

NEM = 3 en vigas y marcos en el plano por presentarse fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

NEM = 3 en retículas o parrillas se tiene presente fuerza cortante, momento torsionante y momento flexionante.

NEM = 6 en marco en el espacio por estar presente los seis elementos mecánicos (N, Vy Vz Mx, My, y Mz)

NN: número de nodos

NR: número de reacciones

NB: número de barras

NEE: número de ecuaciones de equilibrio por nodo

NEE = 2 armaduras en el plano

NEE = 3 armaduras en el espacio

NEE = 2 vigas con fuerza cortante y momento flexionante

NEE = 3 vigas y marcos con fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

NEE = 3 retículas o parrillas

NEE = 6 marcos en el espacio.

El uso de la ecuación ( 1.2) se ilustra con la aplicación de las estructuras de las figuras 1. 15 a 1.19.

Para la estructura de la figura 1.15 por ser armadura se tiene solo un elemento mecánico por barra que es la fuerza normal, por lo que NEM, = 1 nueve barras NB = 9, tres reacciones NR = 3, por nodos se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  por lo tanto NEE = 2 y por último tiene seis nodos incluyendo los apoyos NN = 6, sustituyendo en la ecuación (1.2).

$$GH = 1 * 9 + 3 - 2 * 6 = 0$$

Para la viga en la figura 1.16 los elementos mecánicos por barra son tres NEM = 3, el número de reacciones es 8 NR = 8, el número de ecuaciones que se pueden plantear son tres (  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  &  $M_z = 0$  ) NEE = 3 y tiene cuatro nodos NN = 4 que aplicando la ecuación (1.2) resulta:

$$GH = 3 * 3 + 8 - 3 * 4 = 5$$

El marco de la figura 1.17 se tiene NEM = 3, NB = 3, NR = 6, NEE = 3 y NN = 4

$$GH = 3 * 3 + 6 - 3 * 4 = 3$$

Para el marco de la figura 1. 18 se tiene NEM = 3, NB = 6 NR = 6, NEE = 3 y NN = 6, así:

$$GH = 3 * 6 + 6 - 3 * 6 = 6$$

Finalmente para el marco de la figura 1. 19 se tiene NEM = 6, NB = 8 NR = 24 y NN = 8, así:

$$GH = 6 * 8 + 24 - 8 * 6 = 24$$

Que comparando los resultados se observa que son los mismos.

## 1.5 GRADO DE LIBERTAD ( INDETERMINACIÓN CINEMATICA)

El grado de libertad está relacionado con los desplazamientos desconocidos en la estructura; como máximo un nodo puede tener seis desplazamientos desconocidos ( 3 lineales y 3 angulares). El grado de libertad se define como el mínimo número de desplazamientos necesarios para definir la configuración deformada de la estructura. Si se consideran los desplazamientos de los nodos únicamente, el grado de libertad se puede definir como el número posible de desplazamientos de una estructura y se puede determinar a partir de la siguiente expresión.

$$GL = NN * DN - NDR \quad (1.3)$$

Donde:

GL : grado de libertad

NN : número de nodos incluyendo los de frontera

DN : número de desplazamientos por nodo

NDR : número de desplazamientos restringidos

La expresión anterior se puede leer como: el grado de libertad es igual al número de nodos incluyendo los de frontera por el número de movimientos posibles en cada nodo menos los desplazamientos restringidos.

La expresión ( 1.3) también se ilustra aplicándola a las estructuras de las figuras 1. 15 a 1.19.

La armadura de la figura 1.5 tiene 6 nodos  $NN = 6$ , dos desplazamientos por nodo  $DN = 2$  y tres reacciones  $NR = 3$ , así:

$$GL = 6 * 2 - 3 = 9$$

La viga de la figura 1. 16 tiene cuatro nodos  $NN = 4$ , tres desplazamientos por nodo (dos lineales (horizontales) y vertical) y uno angular  $DN = 3$  y ocho reacciones  $NR = 8$ , así:

$$GL = 4 * 3 - 8 = 4$$

Para el marco de la figura 1. 17,  $NN = 4$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$  así:

$$GL = 4 * 3 - 6 = 6$$

Para el marco de la figura 1. 18,  $NN = 6$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$ , así

$$GL = 6 * 3 - 6 = 12$$

Y finalmente para el marco de la figura 1. 19 se tiene  $NN = 8$ ,  $ND = 24$ , así

$$GL = 8 * 6 - 6 - 24 = 24$$

El grado de hiperestaticidad está relacionado con el método de las flexibilidades o de las fuerzas y nos indica el número de incógnitas (elementos mecánicos y reacciones) que exceden las ecuaciones de equilibrio estáticos y con esto el número de ecuaciones que hay que plantear adicionalmente a las de equilibrio estático, para poder analizar la estructura. Y el grado de libertad esta relacionado con el método de las rigideces y nos indica el número de desplazamientos desconocidos que tenemos en dicha estructura y así plantear las ecuaciones necesarias para conocerlos, y a partir de estos determinar los elementos mecánicos.



Es un método de análisis general para estructuras que se puedan modelar a base de elementos barra, como es el caso de vigas, armaduras en el plano, armaduras en el espacio, marco planos, retículas y estructuras en el espacio,

Vale la pena mencionar que es el método más adecuado para su programación, y todos los paquetes formales para el análisis estructural en computadora lo utilizan.

En términos generales, el método de las rigideces consiste en establecer a través del equilibrio y la compatibilidad la relación que hay entre las cargas y los desplazamientos que estas generan en la estructura, a partir de dicha relación se pueden conocer los desplazamientos en los nodos de la estructura y a partir de estos los elementos mecánicos en cada una de las barras que forman la estructura.

Como se puede observar para conocer los elementos mecánicos en las barras que forman la estructura, hay que conocer primero los desplazamientos de los nodos de la misma, razón por la cual también se le conoce como el método de los desplazamientos.

## 2.1 SISTEMAS DE REFERENCIA

En general; se tienen dos sistemas de referencia, uno llamado local ( $x,y,z$ ) para poder hablar de cada elemento que forma parte de un sistema estructural y otro llamado sistema global ( $x, y,z$ ), que será el que se utilice para hablar en su totalidad de todo el sistema estructural.

Es importante señalar que en el sistema local, el eje  $x$  deberá coincidir con el eje longitudinal de la barra y dependiendo de esto los otros dos ejes se establecerán considerando un sistema coordenado derecho.

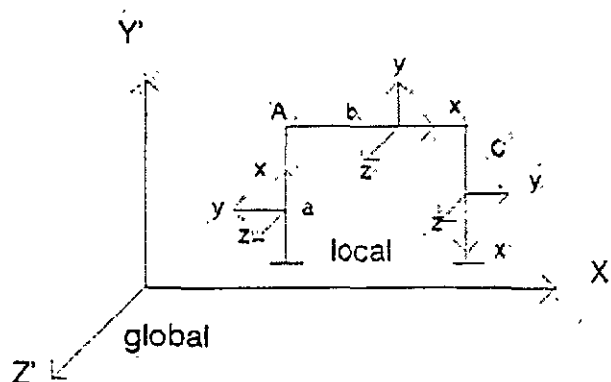


Figura 2.1

Considérese una barra cualquiera a la cual se le indica con el número uno el extremo donde inicia y con el número dos donde termina como se muestra en la figura 2.2

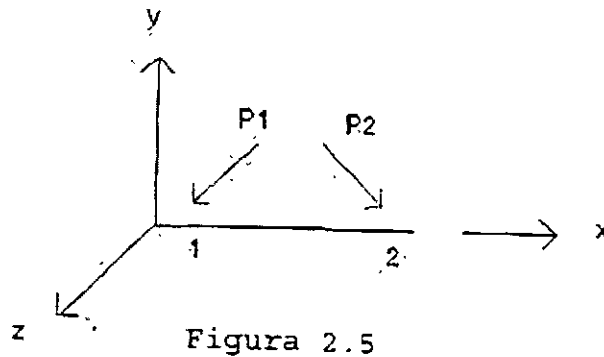


Por compatibilidad:

$$\vec{d}_i = \vec{d}_{2a} + \vec{d}_{1b} + \vec{d}_{1c} + \vec{d}_{1d}$$

Esta última condición indica que el vector desplazamiento en el extremo de las barras que concurren a un nodo debe ser igual al vector desplazamiento de dicho nodo.

Por otro lado considérese una barra en el sistema local tridimensional y que puede estar sujeta a los vectores de cargas P1 y P2 en el extremo 1 y 2 respectivamente como se indica en la figura 2.5



Estos sin importar su magnitud y dirección, generan los vectores de desplazamiento  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  respectivamente.

Acoplando los vectores de cargas y desplazamiento en forma matricial, se puede establecer la relación entre estos vectores a través de una matriz de coeficientes que se define como la matriz de rigidez de la barra así

$$\begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{bmatrix}$$

En forma condensada se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \vec{P} \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} \vec{D} \end{bmatrix}$$

Que es la ecuación fuerza-desplazamiento de un elemento barra en el sistema local.

## 2.2 DETERMINACION DE LA MATRIZ DERIGIDECES

La rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario. Para ser más específicos, la palabra desplazamiento en el concepto anterior, deberá especificarse en detalle mencionando su carácter (lineal o angular) y su localización, como cada elemento tiene dos extremos, la palabra desplazamiento se interpreta como desplazamiento generalizado en los extremos de un elemento. En el sistema coordenado tridimensional el vector que representa el desplazamiento en un punto tiene seis componentes, tres lineales y, tres angulares, como se indica en la figura 2.6.

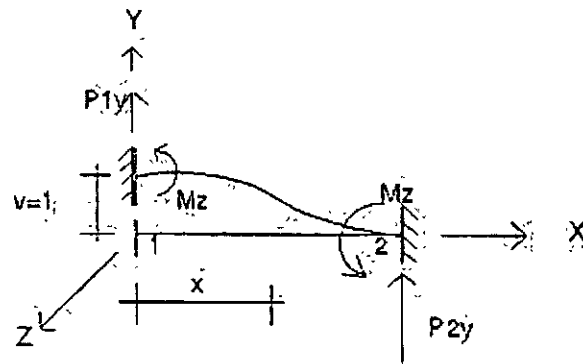


Figura 2.10

Al igual que el desplazamiento la fuerza debe de entenderse como una fuerza generalizada que el sistema coordenado tiene seis componentes como se indica en la figura 2.7.

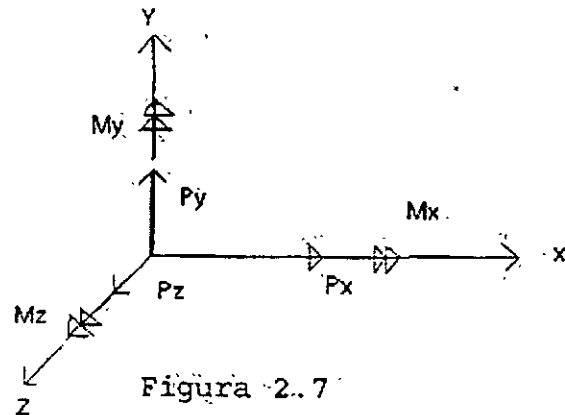


Figura 2.7

Representando en forma matricial al desplazamiento y la fuerza generalizados:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \phi \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Así la rigidez será la fuerza generalizada que produce un desplazamiento unitario.

De acuerdo a la fuerza generalizada se tienen tantos tipos de rigideces como elementos mecánicos, es decir, rigidez axial, al corte, a la flexión y a la torsión.

Para facilitar la determinación de las rigideces se considerará un elemento empotrado al cual se le inducirán desplazamientos (lineales o angulares) unitarios. Se le llamará rigidez de un elemento empotrado a las acciones ejercidas sobre este elemento debido a las restricciones impuestas al inducir el desplazamiento unitario.

Estos desplazamientos se inducirán de uno en uno y se supondrán positivos respecto a los ejes de referencia.

La restricciones y los desplazamientos asociados con el sistema de referencia x, y, & z, para deducir las rigideces del elemento se indican en la figura 2.8 a y 2.8. b respectivamente.

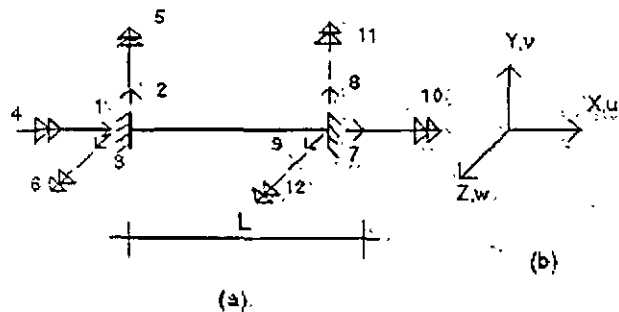


Figura. 2.8

En la figura las flechas con una sola punta denotan traslación y las flechas con doble punta indican rotación. En el extremo 1 las traslaciones son numeradas 1, 2 y 3 y las rotaciones como 4, 5 y 6. Similarmente en el extremo 2 de la barra, el 7, 8 y 9 son traslaciones y 10, 11 y 12 son rotaciones. En todos los casos los desplazamientos se toman en el orden x, y & z respectivamente.

La rigideces se determinan a partir de la relación que existe entre los desplazamientos y las fuerzas generalizadas, esta relación de acuerdo a la resistencia de materiales esta dada por las ecuaciones de la 2.1.a a la 2.1. f

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA} \quad (2.1.a)$$

$$\frac{d^2v_b}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.b)$$

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{f_b v_y}{AG} \quad (2.1.c)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{M_x}{GJ_m} \quad (2.1.d)$$

$$\frac{d^2w_b}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (2.1.e)$$

$$\frac{dw_s}{dx} = -\frac{f_z v_z}{AG} \quad (2.1.f)$$

### 2.2.1 RIGIDEZ AXIAL

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "x" como se indica en la figura 2.9

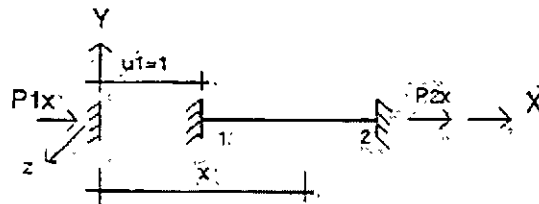


Figura 2.9

De la figura 2.9 se tiene que:

$$N_x = P_{1x}$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1.a)

$$\frac{du}{dx} = \frac{P_{1x}}{EA}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación resulta:

$$U = -\frac{P_{1x}}{EA}x + C_1$$

Aplicando las condiciones de frontera: si  $x=0$ , de donde

$$0 = -\frac{P_{1x}L}{EA} + 1$$

$$P_{1x} = \frac{EA}{L}$$

Por equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

$$P_{1x} + P_{2x} = 0$$

$$P_{2x} = -\frac{EA}{L}$$

En la figura 2.9 las acciones restringidas  $P_{1x}$  y  $P_{2x}$  surgen al aplicar el desplazamiento en el extremo uno del elemento en la dirección positiva del eje  $x$ . Este desplazamiento causa una fuerza de compresión en la barra. En el extremo 1 de la barra esta fuerza es equilibrada por la acción restringida  $EA/L$  en la dirección positiva de  $x$  y en el extremo 2 de la barra la acción restringida tiene el mismo valor pero en la dirección negativa de  $x$ .

## 2.2.2 RIGIDEZ AL CORTE

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "y" como se indica en la figura 2.10

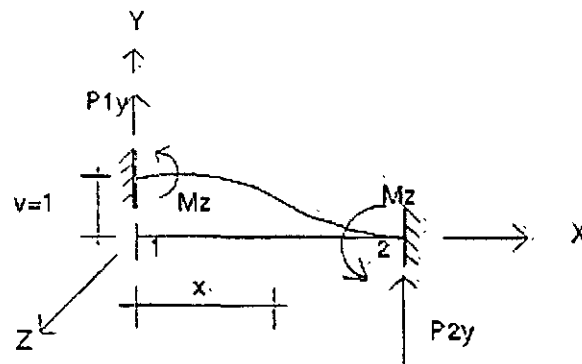


Figura 2.10

De la figura 2.10 se tiene:

$$\begin{aligned} V_y &= -P_{1y} \\ M_z &= M_{1z} - P_{1y}X \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 2.1. b

$$\frac{dv_s}{dx} = -f_b \frac{P_{1y}}{AG} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2v_b}{dx^2} = -(M_{1z} - P_{1y}x) \frac{1}{EI_z} \quad (2.4)$$

Integrando la ecuación (2.4)

$$\frac{dv_b}{dx} = + \frac{P_{1y}x^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z}X}{EI_z} + C_1 \quad (2.5)$$

Aplicando las condiciones de frontera: en  $x=0$ ,  $\frac{dv_b}{dx} = 0$  de donde  $C_1 = 0$ ; si  $x = \frac{L}{2}$ ,

$\frac{dv_b}{dx} = 0$ , de donde:

$$0 = \frac{P_{1y}L^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z}L}{EI_z}$$

$$M_{1z} = \frac{P_{1y}L}{2} \quad (2.6)$$

sustituyendo en la ecuación ( 2.5) resulta:

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{P_{1y}X^2}{2EI_z} - \frac{P_{1y}LX}{2EI_z} \quad (2.7)$$

por otro lado sabemos que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx}$$



Sustituyendo las ecuaciones 2.3 y 2.7 en la ecuación anterior

$$\frac{dv}{dx} = \frac{P_{1y}X^2}{2EI_z} - \frac{P_{1y}LX}{2EI_z} - f_{fy} \frac{P_1}{AG}$$

Integrando

$$v = \frac{P_{1y}L^3}{6EI_z} - \frac{P_{1y}L^3}{4EI_z} - f_{fy} \frac{P_{1y}X}{AG} + C_2$$

Aplicando las condiciones de frontera: si  $x = 0$ ,  $V_{x=0} = 1$ , de donde  $C_2 = 0$ ; si  $x = L$ ,  $v_{x=L} = 0$  de donde:

$$0 = \frac{P_{1y}L^3}{6EI_z} - \frac{P_{1y}L^3}{4EI_z} - f_{fy} \frac{P_{1y}L}{AG} + 1$$

$$0 = -P_{1y} \left[ \frac{L^3}{12EI_z} + f_{fy} \frac{L}{AG} \right] + 1$$

$$0 = \frac{P_{1y}L^3}{12EI_z} \left[ 1 + f_{fy} \frac{12EI_z}{GAL^2} \right] + 1$$

Si llamamos factor de cortante a:

$$\sigma_y f_{fy} \frac{12EI_z}{GAL^2}$$

Sustituyendo y despejando  $P_{1y}$  se tiene

$$P_{1y} = \frac{12EI_z}{(1 + \phi_y)L^3} \quad (2.8)$$

sustituyendo en la ecuación 2.6

$$M_{1z} = \frac{6EI_z}{(1 + \phi_y)L^2} \quad (2.9)$$

Por equilibrio

$$\sum F_y = P_{1y} + P_{2y} = 0$$

Por lo tanto

$$P_{2y} = \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^2}$$

$$\sum M_1 = M_{1z} + M_{2z} + P_{2y}L = 0 \quad (2.10)$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} + M_{2z} = \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^2} = 0$$

Por lo tanto

$$M_{2z} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \quad (2.11)$$

Las ecuaciones 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11 representan las acciones restringidas, necesarias para lograr el equilibrio al aplicar el desplazamiento en el eje "y". En el extremo 1, las acciones restringidas para mantener el equilibrio son una fuerza cortante de  $\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3}$  en el sentido positivo del eje y un momento de  $\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}$  positivo alrededor del eje "z". En el extremo 2 del elemento las acciones restringidas son las mismas solo que la fuerza cortante actúa negativamente en el eje "y".

En forma similar se puede determinar las acciones restringidas (rigideces del elemento) para los desplazamientos

A continuación. En las figuras 2.11 al 2.22 se representan las rigideces de un elemento para los doce posibles desplazamientos en los extremos del mismo, como se indicó en la figura 2.8.

En cada caso las diferentes acciones restringidas (rigideces del elemento) se dibujan como vectores. Las flechas con una punta representan un vector de fuerza y las flechas con doble punta representan un vector momento. Todos los vectores se dibujan en el sentido positivo y en el caso de que una acción restringida sea negativa un signo menos antecede a las expresiones para los coeficientes de rigidez.

1).- Desplazamiento en dirección "x", extremo 1

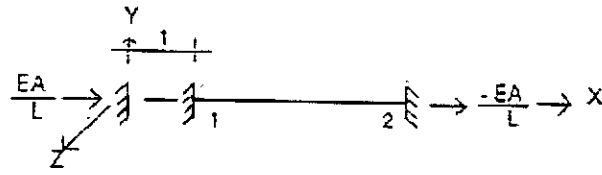


Figura 2.11

2).- Desplazamiento en dirección "y", extremo 1

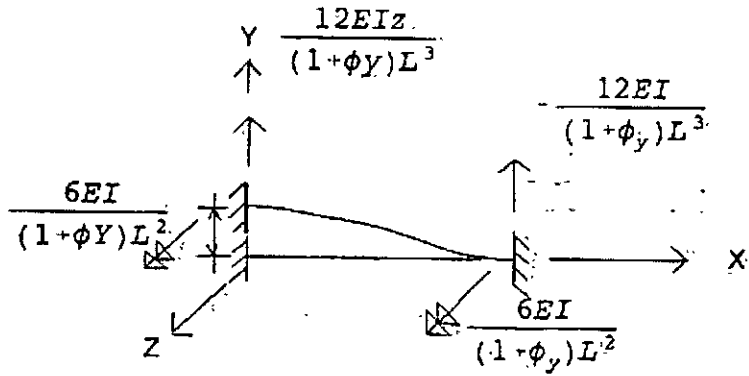


Figura 2.12

3).- Desplazamiento en dirección "z", extremo 1

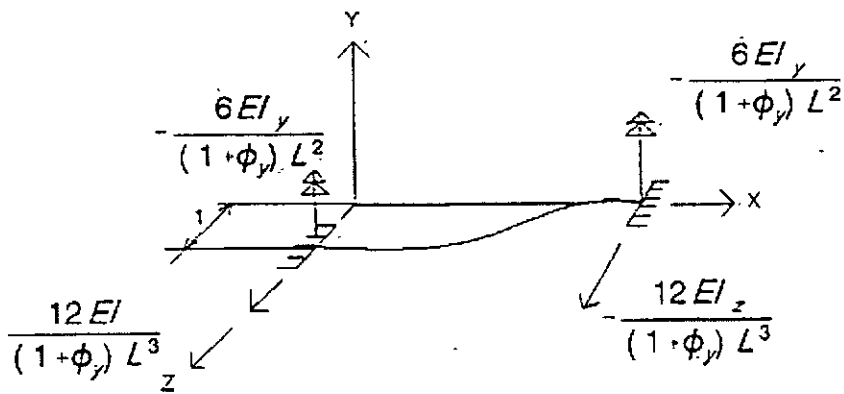


Figura 2.13

4).- Giro alrededor del eje "x", extremo 1

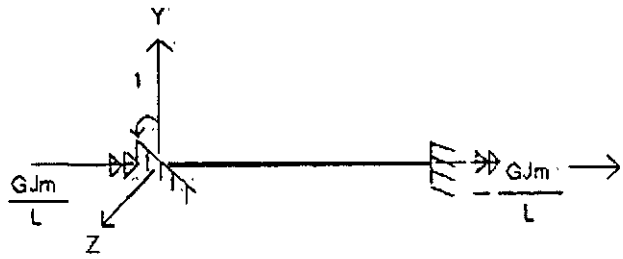


Figura 2.14

5).- Giro alrededor del eje "y", extremo 1

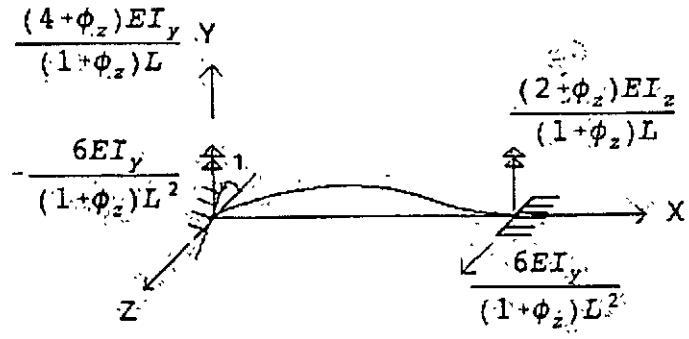


Figura 2.15

6).- Giro alrededor del eje "z", extremo 1

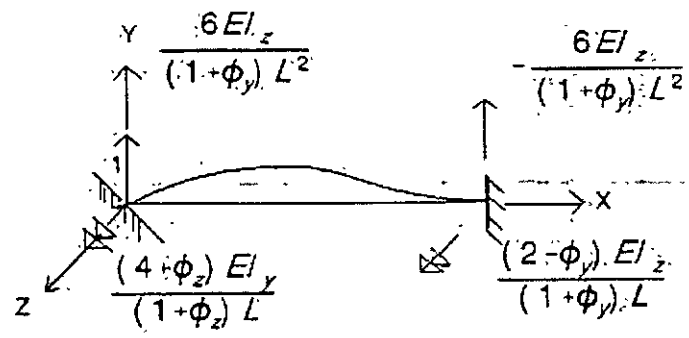


Figura 2.16

7).- Desplazamiento en la dirección X, extremo 2

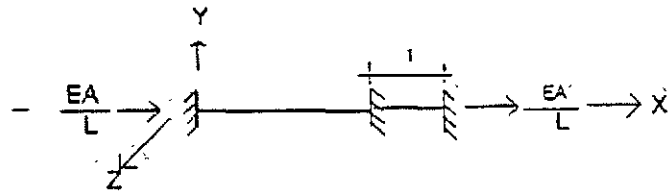


Figura 2.17

8).- Desplazamiento en la dirección Y, extremo 2

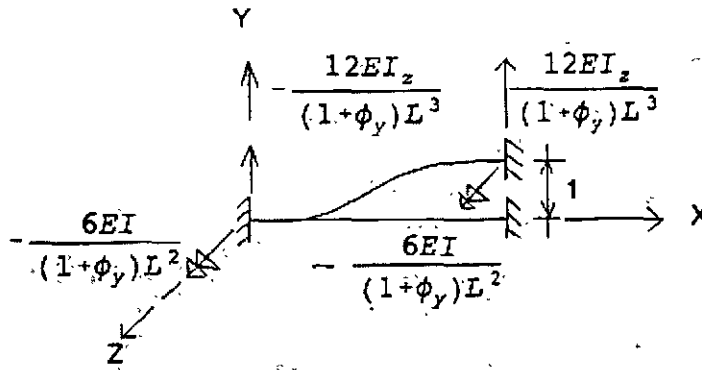


Figura 2.18

9).- Desplazamiento en la dirección Z, extremo 2

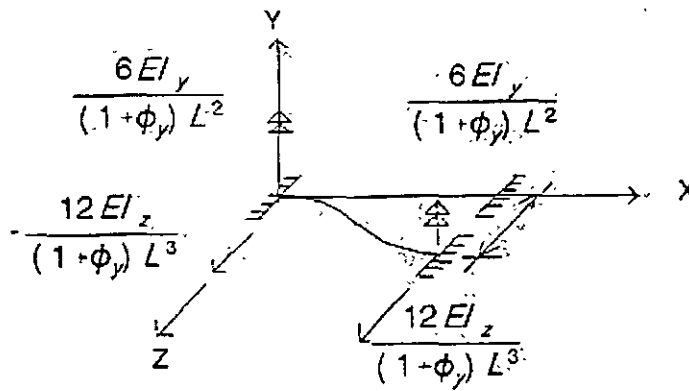


Figura 2.19

10).- Giro alrededor del eje "x", extremo 2

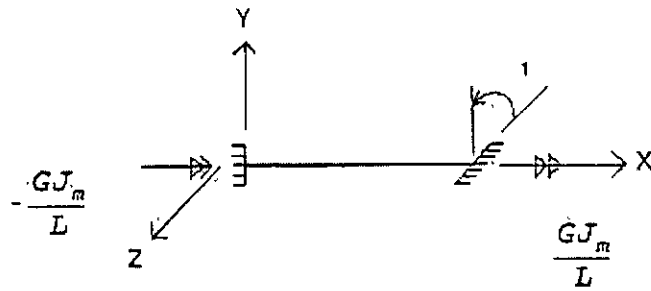


Figura 2.20

11.- Giro alrededor del eje "y", extremo 2

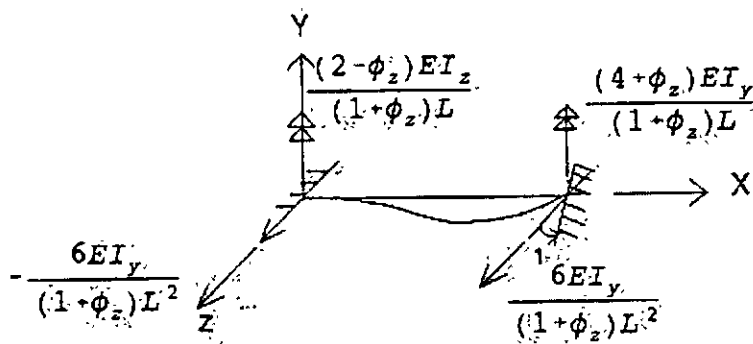


Figura 2.21

12).- Giro alrededor del eje "z", extremo 2

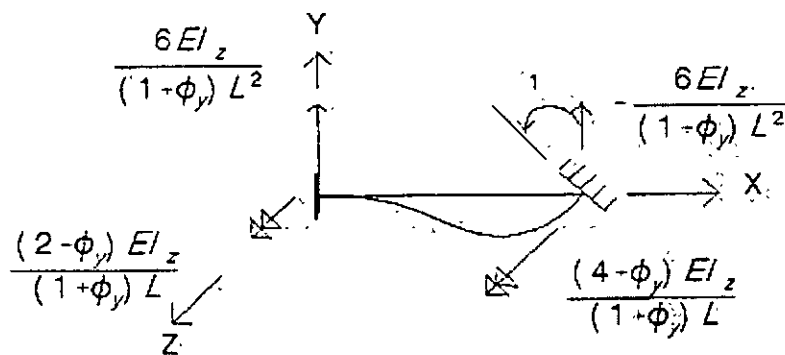


Figura 2.22

Se estableció que la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra esta dada por

$$\vec{P} = K \vec{D}$$

Sustituyendo el valor del vector P y los valores mostrados en las figuras de la 2.1 a la 2.22 que corresponde a la matriz de rigidez y el vector de desplazamientos de una barra en el espacio tridimensional resulta la ecuación (2.12).

Si se desea considerar únicamente flexión, tomando en cuenta que la influencia de la fuerza cortante es pequeña, es decir que  $\phi_i = 0$ , la ecuación fuerza-desplazamiento resulta la ecuación (2.13).

Particionando el vector de cargas, la matriz de rigideces y el vector desplazamiento y refiriéndolos a los extremos 1 y 2 la ecuación fuerza-desplazamiento en forma condensada se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Donde  $K_{ij}$  son submatrices de 6 x 6.

$$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{(1+\phi)xL^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{-12EI_x}{(1+\phi)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{(1+\phi)L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{(1-\phi)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJm}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJm}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{(4+\phi)EI_y}{(1-\phi)L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1-\phi)L^2} & 0 & \frac{(2-\phi)EI_y}{(1+\phi)L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi)EI_x}{(1+\phi)L} & 0 & \frac{-6EI_x}{(1-\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi)EI_x}{(1+\phi)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_x}{(1+\phi)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi)L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{(1-\phi)L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJm}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJm}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{(2-\phi)EI_y}{(1+\phi)L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{(4-\phi)EI_y}{(1-\phi)L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi)EI_x}{(1+\phi)L} & 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4-\phi)EI_x}{(1-\phi)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \phi_{1x} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \phi_{2x} \\ \phi_{2y} \\ \phi_{2z} \end{bmatrix}$$

ECUACION 2.12 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL

$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} =$	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \phi_{1x} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \phi_{2x} \\ \phi_{2y} \\ \phi_{2z} \end{bmatrix}$
	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	
	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	
	0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GJm}{L}$	0	0	
	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	
	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	
	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	
	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	
	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	
	0	0	0	$-\frac{GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0	
	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	
	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	

ECUACION 2.13 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL



## 2.3 ROTACION DEL SISTEMA LOCAL AL GLOBAL

En la figura 2.23. a se muestra el vector de cargas generalizado en el sistema local, en las figuras 2.23.b, 2.23.c y 2.23.d se muestran los ángulos que forman el sistema local con los ejes  $x'$ ,  $y'$  &  $z'$  respectivamente, estos últimos corresponden en el sistema global.

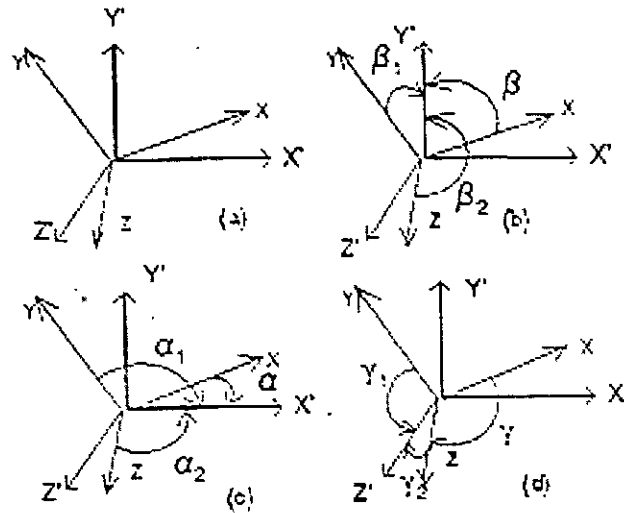


Figura 2.23

por cosenos directores tenemos; para las cargas

$$P'_x = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha_1 + P_z \cos \alpha_2$$

$$P'_y = P_x \cos \beta + P_y \cos \beta_1 + P_z \cos \beta_2$$

$$P'_z = P_x \cos \gamma + P_y \cos \gamma_1 + P_z \cos \gamma_2$$

ahora para los momentos

$$M'_x = M_x \cos \alpha + M_y \cos \alpha_1 + M_z \cos \alpha_2$$

$$M'_y = M_x \cos \beta + M_y \cos \beta_1 + M_z \cos \beta_2$$

$$M'_z = M_x \cos \gamma + M_y \cos \gamma_1 + M_z \cos \gamma_2$$

si llamamos

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= l_1 \\ \cos\beta_1 &= m_1 \\ \cos\gamma_1 &= n_1 \end{aligned}$$

sustituyendo y usando notación matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

en forma simplificada

$$\bar{P}' = T \bar{P} \quad (2.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{P}' &= \text{Vector de cargas en el sistema global} \\ T &= \text{Matriz de rotación} \\ \bar{P} &= \text{Vector de cargas en el sistema local} \end{aligned}$$

Por otro lado, un vector de cargas P realiza la misma cantidad de trabajo en cualquier sistema de referencia; por lo tanto:

$$\bar{p}' \bar{d}' = \bar{p} \bar{d} \quad (2.15)$$

de la ecuación 2.14 se obtiene

$$\bar{p}' = \bar{p}' T'$$

sustituyendo en la ecuación (2.15)

de donde:

$$\bar{P}' T' \bar{d}' = \bar{p}' \bar{d}' \quad (2.16)$$

A las ecuaciones (2.14) y (2.16) se le llama "Principio de Contragradencia".

Sabemos que la ecuación fuerza-desplazamiento para una barra está dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto matricial resulta

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= K_{11} \bar{d}_1 + K_{12} \bar{d}_2 \\ \bar{P}_2 &= K_{21} \bar{d}_1 + K_{22} \bar{d}_2 \end{aligned}$$

premultiplicando por T y sustituyendo la ecuación (2.14)

$$\begin{aligned} T \bar{P}_1 &= T K_{11} T' \bar{d}'_1 + T K_{12} T' \bar{d}'_2 \\ T \bar{P}_2 &= T K_{21} T' \bar{d}'_1 + T K_{22} T' \bar{d}'_2 \end{aligned}$$

pero

$$T \bar{P} = \bar{P}'$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{P}'_1 &= T K_{11} T' \bar{d}'_1 + T K_{12} T' \bar{d}'_2 \\ \bar{P}'_2 &= T K_{21} T' \bar{d}'_1 + T K_{22} T' \bar{d}'_2 \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$T K_y T' \bar{d}'_2 = K'_y$$

Representa la rotación de las submatrices de rigideces del sistema local al global, por lo que:

$$\bar{P}'_1 = K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2$$

$$\vec{P}'_2 = K'_{21} \vec{d}'_2 + K'_{22} \vec{d}'_2$$

Estas dos últimas expresiones representan las ecuaciones fuerza desplazamiento de la barra en el sistema global.

Conocidas las submatrices de rigidez de las barras en el sistema global se puede hacer la conexión o acoplamiento de las barras aplicando las condiciones de equilibrio y compatibilidad como se plantearon anteriormente. La aplicación de estas dos ecuaciones conduce a la determinación de la ecuación fuerza-desplazamiento en el sistema global de la estructura a la cual se aplicaron.

### 2.3 ACOPLAMIENTO DE BARRAS

Considérese, la estructura de la figura 2.24 a la cual se le aplican vectores de carga nodales.

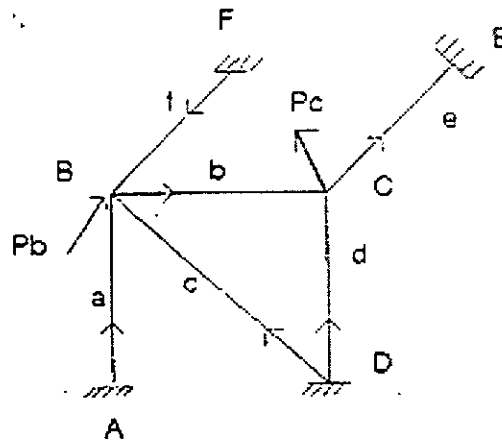


Figura 2.24

De la figura 2.24 por equilibrio

$$\begin{aligned} \vec{P}'_B &= \vec{P}'_{2a} + \vec{P}'_{2c} + \vec{P}'_{1b} + \vec{P}'_{2f} \\ \vec{P}'_C &= \vec{P}'_{2b} + \vec{P}'_{2c} + \vec{P}'_{1e} + \vec{P}'_{1b} + \vec{P}'_{2f} \end{aligned}$$

por compatibilidad

$$\begin{aligned} \vec{d}'_{1a} &= 0 & \vec{d}'_{2a} &= \vec{d}'_B \\ \vec{d}'_{1b} &= \vec{d}'_B & \vec{d}'_{2b} &= \vec{d}'_C \\ \vec{d}'_{1c} &= 0 & \vec{d}'_{2c} &= \vec{d}'_B \\ \vec{d}'_{1d} &= 0 & \vec{d}'_{2d} &= \vec{d}'_C \\ \vec{d}'_{1e} &= \vec{d}'_C & \vec{d}'_{2e} &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{d}_{1f} = 0 \quad \bar{d}_{2f} = \bar{d}_B$$

por otro lado, la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= K'_{11} \bar{d}_1 + K'_{12} \bar{d}_2 \\ \bar{P}_2 &= K'_{21} \bar{d}_1 + K'_{22} \bar{d}_2\end{aligned}$$

aplicando estas ecuaciones para cada barra se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{1a} &= (K'_{12})_a \bar{d}_B ; \bar{P}_{2a} = (K'_{22})_a \bar{d}_B \\ \bar{P}_{1b} &= (K'_{11})_b \bar{d}_B + (K'_{12})_b \bar{d}_c \\ \bar{P}_{2b} &= (K'_{21})_b \bar{d}_B + (K'_{22})_b \bar{d}_c \\ \bar{P}_{1c} &= (K'_{12})_c \bar{d}_B ; \bar{P}_{2c} = (K'_{22})_c \bar{d}_B \\ \bar{P}_{1d} &= (K'_{12})_d \bar{d}_c ; \bar{P}_{2d} = (K'_{22})_d \bar{d}_c \\ \bar{P}_{1e} &= (K'_{11})_e \bar{d}_c ; \bar{P}_{2e} = (K'_{21})_e \bar{d}_c \\ \bar{P}_{1f} &= (K'_{12})_f \bar{d}_B ; \bar{P}_{2f} = (K'_{22})_f \bar{d}_c\end{aligned}$$

sustituyendo en las ecuaciones (2.17)

$$\begin{aligned}\bar{P}_B &= (K'_{22})_a \bar{d}_B + (K'_{22})_c \bar{d}_B + (K'_{11})_b \bar{d}_B + (K'_{12})_b \bar{d}_c + (K'_{22})_f \bar{d}_B \\ \bar{P}_c &= (K'_{21})_b \bar{d}_B + (K'_{22})_d \bar{d}_c + (K'_{11})_e \bar{d}_c + (K'_{22})_b \bar{d}_c\end{aligned}$$

expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_c + (K'_{11})_b + (K'_{22})_f & (K'_{12})_b \\ (K'_{21})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_d + (K'_{11})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_c \end{bmatrix}$$

en forma simplificada

$$\bar{P}' = \bar{K}' \bar{D}'$$

que es la ecuación fuerza-desplazamiento en la estructura sistema global.

En donde:

$D'$  = Vector desplazamiento de la estructura

$K'$  = Matriz de rigideces del sistema estructural

$P'$  = Vector de cargas en los nodos de la estructural

En forma práctica, la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural se puede ensamblar observando los extremos de las barras que concurren a un nodo y las barras que interconectan los diferentes nodos, así.

Los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces se obtienen sumando las submatrices cruzadas de las barras que unen dos nodos.

El sentido de la numeración de los nodos tienen mucha importancia ya que si es adecuada, se puede reducir el ancho de banda de la matriz de rigideces y por consecuencia, el tiempo de máquina que resulta muy costoso.

Si, en una estructura cualquiera de los nodos que intervienen en la formación de la matriz tiene un desplazamiento conocido: (igual a cero) es necesario anular la fila y la columna que corresponda según lo observado en el acoplamiento anterior ya que

dicho grado de libertad no participa. También es importante que la estructura que se analiza sea estable, pues si no, la matriz de rigideces no tiene inversa única.

**Ejemplo.-** Determinar en forma práctica la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura que se muestra en la figura (2.25).

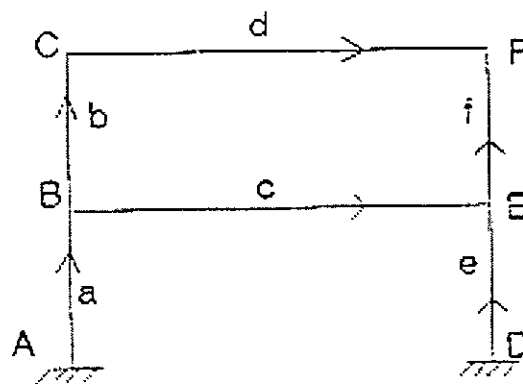


Figura 2.25

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_B \\ \bar{P}_B \\ \bar{P}_F \\ \bar{P}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} + K'_{11c} & K'_{12b} & 0 & K'_{12c} \\ K'_{21b} & K'_{22b} + K'_{11d} & K'_{12d} & 0 \\ 0 & K'_{21d} & K'_{22d} + K'_{22f} & K'_{21f} \\ K'_{21c} & 0 & K'_{12f} & K'_{22c} + K'_{22e} + K'_{11f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_c \\ \bar{d}_F \\ \bar{d}_E \end{bmatrix}$$

## 2.5 ARMADURAS EN EL PLANO

Para la aplicación del método de rigideces se requiere conocer las submatrices de rigidez de cada barra en el sistema global., lo cual se logra con la expresión:

$$K'_y = T K_y T'$$

Para el caso de armadura en el plano la matriz de rotación "T" se determina a partir de la figura 2.26

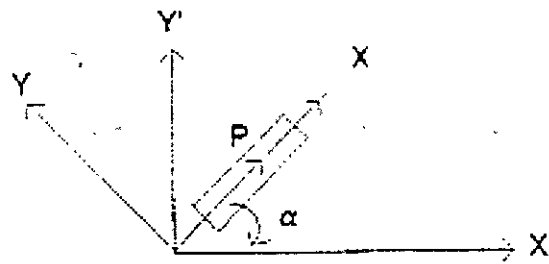


Figura 2.26

$$\begin{aligned} P_{x'} &= P \cos\alpha \\ P_{y'} &= P \sin\alpha \end{aligned}$$

llamando:  $\cos\alpha = c$ ;  $\sin\alpha = m$  y escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} P$$

en forma compacta se puede escribir

$$\vec{P}' = T \vec{P}$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix}$$



Por otro lado, de la matriz de rigideces general de doce por doce para una barra armadura resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \quad K_{12} = -\frac{EA}{L}$$
$$K_{21} = -\frac{EA}{L} \quad K_{22} = \frac{EA}{L}$$

Haciendo la rotación al sistema global se tiene

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \left[ \frac{EA}{L} \right] \begin{bmatrix} 1 & m \end{bmatrix}$$
$$K'_{11} = \left[ +\frac{EA}{L} \right] \begin{bmatrix} 1^2 & 1m \\ m1 & m^2 \end{bmatrix}$$

de las expresiones anteriores se concluye

$$K_{12} = K_{21} = -K_{11}$$
$$K_{22} = K_{11}$$

2.5.1 Ejemplo.- Analizar la estructura mostrada en la figura 2.27

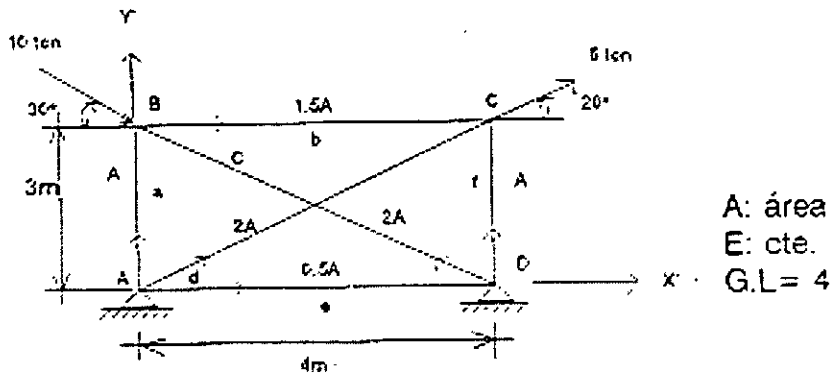


Figura 2.27

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por:

$$\bar{P}' = K' \bar{D}'$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}'_B \\ \bar{P}'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_c + (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ (K'_{21})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_d + (K'_{22})_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}'_B \\ \bar{d}'_C \end{bmatrix}$$

donde:

$$\bar{P}'_B \begin{bmatrix} P'_{XB} \\ P'_{YB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cos 30^\circ \\ -10 \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_C \begin{bmatrix} P'_{XC} \\ P'_{YC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos 20^\circ \\ 5 \sin 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

De lo anterior el vector de cargas y el vector desplazamientos

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \\ 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} d'_{XB} \\ d'_{YB} \\ d'_{XC} \\ d'_{YC} \end{bmatrix}$$

Barra	L	Ai	l	m	l <sup>2</sup>	lm	m <sup>2</sup>
a	3	1	0	1	0	0	1
b	4	1.5	1	0	1	0	0
c	5	2	-0.8	0.6	0.64	-0.48	0.36
d	5	2	0.8	0.6	0.64	0.48	0.36
e	4	0.5	1	0	1	0	0
f.	3	1	0	1	0	0	1

Sustituyendo en:

$$K'_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix} = K'_{22}$$

$$K'_{12} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix} = K'_{21}$$

$$(K'_{11})_a = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_b = \frac{E(1.5)A}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_c = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ 0.048 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & -0.192 \\ -0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_d = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ 0.048 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & -0.192 \\ -0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})^f = (K'_{11})_a$$

Sólo se determinó  $K'_{11}$  de cada barra ya que  $K'_{12} = K'_{21}$  y  $K'_{22} = K'_{11}$ .

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8.660 \\ -5.000 \\ 4.698 \\ 1.710 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.631 & -0.192 & -0.356 & 0 \\ -0.192 & 0.477 & 0 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.631 & 0.192 \\ 0 & 0 & 0.192 & 0.477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1B}' \\ d_{1B}' \\ d_{1C}' \\ d_{1C}' \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema aplicando cualquier método de solución de ecuaciones simultáneas

$$\begin{bmatrix} d_{1XB}' \\ d_{1YB}' \\ d_{1XC}' \\ d_{1YC}' \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \\ 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en los nodos se procede a calcular la fuerza en cada barra, así la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra está dada por:

$$\bar{P}_1' = K_{11}' \bar{d}_1' + K_{12}' \bar{d}_2'$$

$$\bar{P}_2' = K_{21}' \bar{d}_1' + K_{22}' \bar{d}_2'$$

por compatibilidad

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1a}' &= 0 & \bar{d}_{2a}' &= \bar{d}_B' \\ \bar{d}_{1b}' &= \bar{d}_B' & \bar{d}_{2b}' &= \bar{d}_c' \\ \bar{d}_{1c}' &= 0 & \bar{d}_{2c}' &= \bar{d}_B' \\ \bar{d}_{1d}' &= 0 & \bar{d}_{2d}' &= \bar{d}_c' \\ \bar{d}_{1e}' &= 0 & \bar{d}_{2e}' &= 0 \\ \bar{d}_{1f}' &= 0 & \bar{d}_{2f}' &= \bar{d}_c' \end{aligned}$$

sustituyendo para cada barra:

Barra (a):

$$\bar{P}'_{1a} = (K'_{11})_a = (0) + (K'_{12})_a \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{1a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.69626 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2a} = (K'_{21})_a = (0) + (K'_{22})_a \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{2a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.086 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.69626 \end{bmatrix}$$

Barra (b):

$$\bar{P}'_{1b} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2b} = \begin{bmatrix} -1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra (c):

$$\bar{P}'_{1c} = \begin{bmatrix} -0.266 & 0.192 \\ 0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.59502 \\ -5.69626 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2c} = \begin{bmatrix} 7.59502 \\ -5.69626 \end{bmatrix}$$

Barra (d):

$$\bar{P}'_{1d} = \begin{bmatrix} 0.256 & -0.192 \\ -0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.76378 \\ -4.32284 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2d} = \begin{bmatrix} 5.76378 \\ 4.32284 \end{bmatrix}$$

Barra (e):

$$\bar{P}'_{1e} = \bar{P}'_{2e} = 0 \quad (\text{no trabaja})$$

Barra (f):

$$P'_{1f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.61274 \end{bmatrix}$$

$$P'_{1f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.61274 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo B:

$$\bar{P}'_B = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2c} + \bar{P}'_{1B}$$

$$\begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.5950 \\ -5.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0653 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Nodo C:

$$\bar{P}'_C = \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{2d} + \bar{P}'_{2f}$$

$$\begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0653 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.7638 \\ 4.3228 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.6127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

Para la rotación del sistema global al local sabemos que:

$$P' = TP$$

premultiplicando por  $T^t$

$$T^t P = T^t TP ; \text{ pero } T^t T = I$$

$$P = T^t P'$$

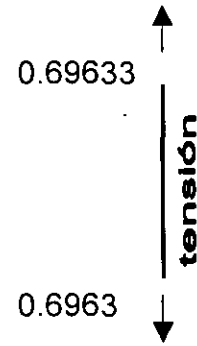
Para una barra  $i$

$$P_{1i} = \begin{bmatrix} \text{cosa} & \text{sena} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_{1i} \\ P'_{2i} \end{bmatrix}$$

Barra (a):

$$P_{1a} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.6963 \end{bmatrix} = 0.6963 \text{ ton}$$

$$P_{2a} = 0.6963 \text{ ton}$$



Por lo que la barra (a) trabaja a tensión con 0.69 ton.

Barra (b):

$$P_{1b} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1.0658 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.0658 \text{ ton}$$

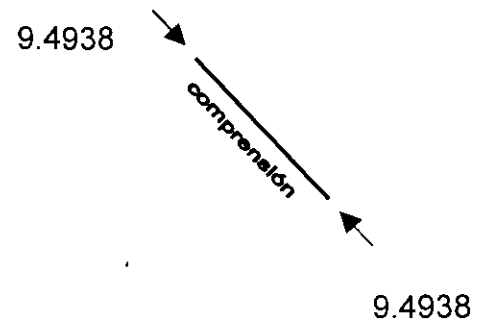
$$P_{2b} = -1.0658 \text{ ton}$$



Barra (c):

$$P_{1c} = [0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -7.5950 \\ 5.6963 \end{bmatrix} = 9.4938 \text{ ton}$$

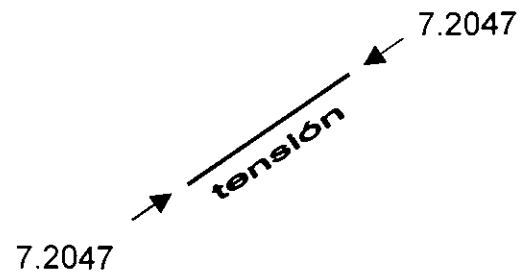
$$P_{2c} = -9.4938 \text{ ton}$$



Barra (d):

$$P_{1d} = [0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -5.7638 \\ -4.3228 \end{bmatrix} = -7.2047 \text{ ton}$$

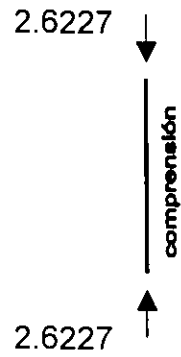
$$P_{2d} = 7.2047 \text{ ton}$$



Barra (f):

$$P_{1f} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6127 \end{bmatrix} = 2.6127 \text{ ton}$$

$$P_{2f} = -2.6127 \text{ ton}$$



Representando en forma esquemática los resultados para toda la armadura:

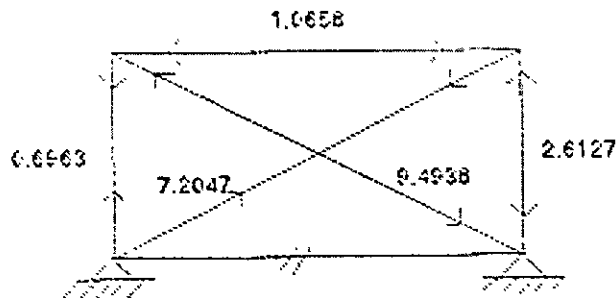


Figura 2.28

## 2.6 ARMADURAS EN EL ESPACIO

Para la determinación de las submatrices de rigideces para una barra en sistema global, se sabe.

$$K_{ij} = T K T^T$$

La matriz de rotación "T" se determina a partir de la figura 2.29.



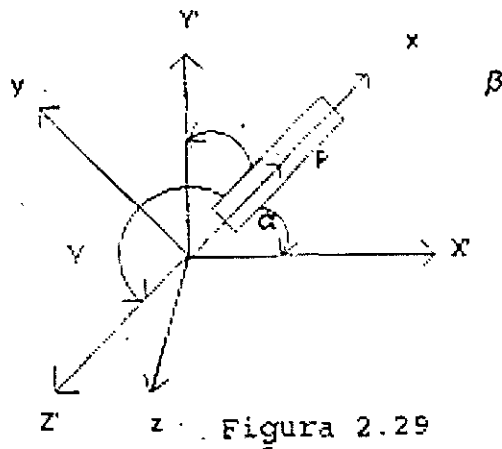


Figura 2.29

$$P'_x = P \cos \alpha$$

$$P'_y = P \cos \beta$$

$$P'_z = P \cos \gamma$$

Llamando  $\cos \alpha = l$ ,  $\cos \beta = m$  &  $\cos \gamma = n$

$$\begin{bmatrix} P'_z \\ P'_y \\ P'_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} P$$

$$P' = T P$$

$$T = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

donde:

De la matriz de rigideces general de 12 x 12 para un elemento armadura se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

efectuando la rotación de las submatrices:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m & 1n \\ m1 & m^2 & mn \\ n1 & nm & n^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m & 1n \\ m1 & m^2 & mn \\ n1 & nm & n^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = K'_{11} \quad K'_{22} = K'_{11}$$

**EJEMPLO:** Determinar la fuerza en cada barra de la estructura mostrada en la figura (2.30). Considerar EA constante.

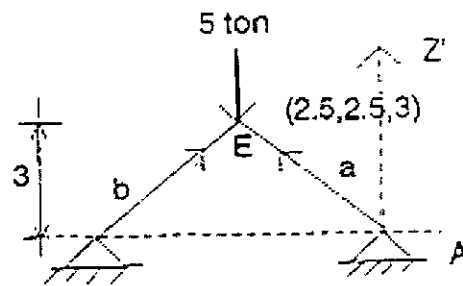
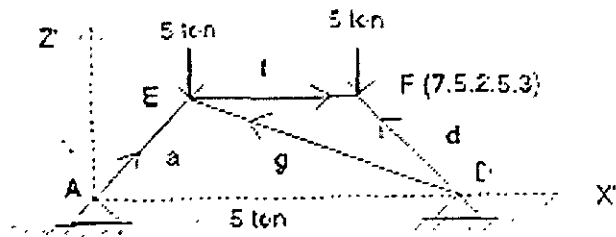
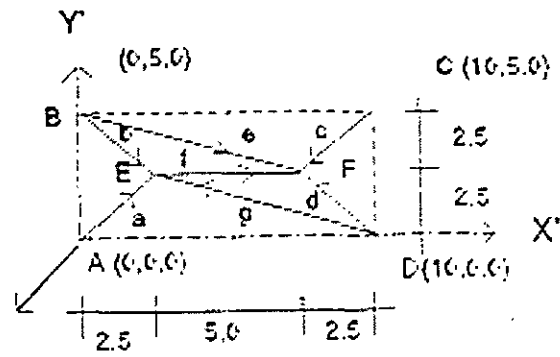


Figura 2.30

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura.

$$\begin{bmatrix} P'_E \\ P'_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_b + (K'_{22})_f + (K'_{22})_g & (K'_{22})_f \\ (K'_{21})_f & (K'_{22})_c + (K'_{22})_d + (K'_{22})_e + (K'_{22})_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_E \\ d'_F \end{bmatrix}$$

Vector de cargas y desplazamiento.

$$P_{E_i} = \begin{bmatrix} P'_{XE} \\ P'_{YE} \\ P'_{ZE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad P_{F_i} = \begin{bmatrix} P'_{XF} \\ P'_{YF} \\ P'_{ZF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad d_i = \begin{bmatrix} d'_z \\ P'_{yi} \\ P'_{zi} \end{bmatrix}$$

Para la determinación de las submatrices de rigideces se organizan los datos de las barras en la siguiente tabla, para lo cual el cálculo de la longitud de las barras se hace a partir de la expresión.

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

“y” para el cálculo de los cosenos directores:

$$l = \cos \alpha = \frac{X_2 - X_1}{L}$$

$$m = \cos \beta = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

$$n = \cos \gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{L}$$

Barra	$L_i$	$A_i E_i$	$l$	$m$	$n$	$l^2$	$m^2$	$n^2$
a	4.637	1	0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
b	4.637	1	0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
c	4.637	1	-0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
d	4.637	1	-0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
e	8.456	1	0.887	-0.296	0.355	0.787	0.088	0.126
f	5.000	1	1.000	0	0	1.000	0	0
g	8.456	1	0.887	0.296	0.355	0.787	0.088	0.126

Sustituyendo estos valores en las submatrices se tiene:

$$(K'_{11})_a = EA \begin{bmatrix} 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_b = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_c = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ 0.063 & 0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_d = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_e = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.032 & 0.037 \\ -0.031 & 0.010 & -0.012 \\ -0.037 & -0.012 & 0.015 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_f = EA \begin{bmatrix} 0.200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_g = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.031 & -0.037 \\ -0.031 & 0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & 0.015 \end{bmatrix}$$

Sólo se ha calculado el  $K'_{11}$  de cada barra ya que  $K_{22}' = K_{11}'$  y  $K_{12}' = K_{21}' = K_{11}'$ .  
Sustituyendo en la ec. Fuerza-desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.419 & -0.031 & 0.113 & -0.200 & 0 & 0 \\ -0.031 & 0.136 & 0.012 & 0 & 0 & 0 \\ 0.113 & 0.012 & 0.195 & 0 & 0 & 0 \\ -0.200 & 0 & 0 & 0.419 & -0.031 & -0.113 \\ 0 & 0 & 0 & -0.031 & 0.136 & -0.012 \\ 0 & 0 & 0 & -0.113 & -0.012 & 0.195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{XE} \\ d'_y E' \\ \theta'_{ZE} \\ d'_{XF} \\ d'_{yF} \\ \theta'_{ZF} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema por cualquier método de solución se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d'_x \\ d'_y \\ d'_z \\ d'_x \\ d'_y \\ d'_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 5.49 \\ 3.81 \\ -29.06 \\ -5.49 \\ -3.81 \\ -29.06 \end{bmatrix}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$P_1' = K_{11}' D_1' + K_{12}' D_2'$$

$$P_2' = K_{21}' D_2' + K_{22}' D_2'$$

por compatibilidad

$$\begin{aligned} d_{1a}' &= 0 & d_{2a}' &= D_E' \\ d_{1b}' &= 0 & d_{2b}' &= D_E' \\ d_{1c}' &= 0 & d_{2c}' &= D_F' \\ d_{1d}' &= 0 & d_{2d}' &= D_F' \\ d_{1e}' &= 0 & d_{2e}' &= D_F' \\ d_{1f}' &= D_E' & d_{2f}' &= D_F' \\ d_{1g}' &= 0 & d_{2g}' &= D_L' \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra.

Barra "a"

$$P_{1a}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a}' = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P'_{1c} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P'_{1d} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.073378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "e"

$$P'_{1e} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & 0.037 \\ 0.031 & -0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2e} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

Barra "f"

$$P'_{1f} = \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P'_{2f} = \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra "g"

$$P'_{1g} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & 0.037 \\ 0.031 & -0.010 & -0.012 \\ 0.037 & -0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ 29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2g} = \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix}$$

Comprobación por equilibrio

$$\bar{P}'_L = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{1f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_L = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{1f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global a local

$$\bar{P} = \bar{T} \bar{P}'$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = [0.539 \ 0.539 \ 0.647] \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix} = 2.9574 \text{ ton}$$

$$P'_{2a} = 2.9574 \text{ ton}$$



Barra "b"

$$P'_{1b} = [0.539 \ -0.539 \ 0.647] \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix} = 3.85 \text{ ton}$$

$$P'_{2a} = -3.85 \text{ ton}$$



y así para el resto de las barras.

Finalmente:



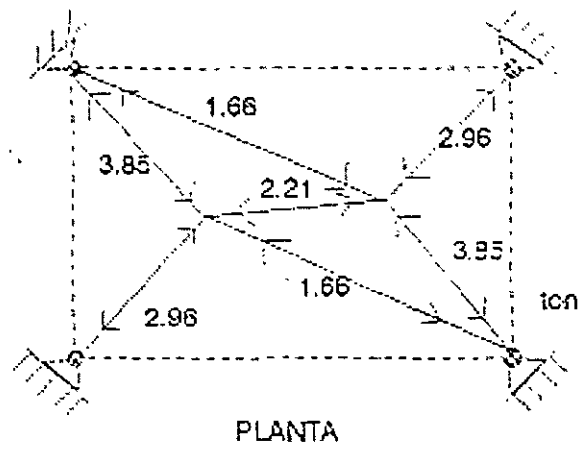


Figura 2.31

## 2.7 VIGAS CONTINUAS:

2.7.1 Ejemplo.- Determinar los elementos mecánicos de la viga mostrada en la figura 2.35

2.32 considerando la influencia de la fuerza cortante (término  $1+\phi_y$ ).

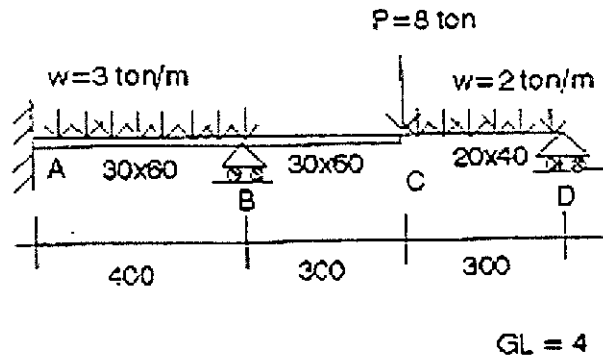


Figura 2.32

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura está dada por:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} & 0 \\ K'_{21b} & K'_{22b} + K'_{11c} \\ 0 & K'_{21c} & K'_{22c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \\ D_D \end{bmatrix}$$

Vectores de empotramiento (acciones)

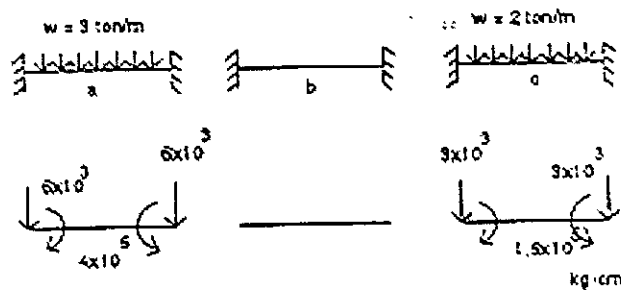


Figura 2.33

Sustituyendo en el vector de cargas y utilizando unidades en kilogramos y centímetros, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{yB} \\ M_{zB} \\ P_{yC} \\ M_{zC} \\ P_{yD} \\ M_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \\ D_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ d_{yD} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

Como el transformador es igual a la matriz identidad  $T = 1$  para este caso de vigas continuas debido a que el sistema local coincide con el sistema global, entonces:

$$K_{ij} = K_{ij}'$$

de la matriz general de 12 x 12 se tiene que:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{12} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\phi_y = \frac{12f_y EI_z}{GA L^2}$$

el factor de forma está dado por la expresión

$$f_y = \int \frac{Q^2}{r^2 I_z b^2} dA$$

y para secciones rectangulares es igual a 1.2

Para determinar el módulo de elasticidad se considera un valor de  $E = 800 \sqrt{J_c}$  y para el módulo de elasticidad al corte un valor de  $G = 0.4E$

Para determinar las submatrices de rigidez de cada barra se sugiere hacer la siguiente tabla:

Barra	L	A	I <sub>z</sub>	E	G	φ <sub>γ</sub>	EI <sub>z</sub>
a	400	1800	5.4x10 <sup>5</sup>	1.13x10 <sup>5</sup>	4.53x10 <sup>4</sup>	6.75x10 <sup>2</sup>	6.11x10 <sup>1</sup>
b	300	1800	5.4x10 <sup>5</sup>	1.13x10 <sup>5</sup>	4.53x10 <sup>4</sup>	6.75x10 <sup>2</sup>	6.11x10 <sup>1</sup>
c	300	800	1.07x10 <sup>5</sup>	1.13x10 <sup>5</sup>	4.53x10 <sup>4</sup>	5.3x10 <sup>2</sup>	1.21x10

Sustituyendo en las submatrices para cada barra se obtiene:

Barra "a"

$$K'_{11a} = \begin{bmatrix} 10732 & 2146379 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12a} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21a} = K'_{12a} \quad K'_{22a} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K'_{11b} = \begin{bmatrix} 24246 & 3636905 \\ 3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12b} = \begin{bmatrix} -24246 & 3636905 \\ -3636905 & 3.42 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21b} = K'_{12b} \quad K'_{22b} = \begin{bmatrix} 24246 & -2146390 \\ -3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K'_{11c} = \begin{bmatrix} 5107 & 766065 \\ 766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12c} = \begin{bmatrix} -5107 & 766065 \\ -766065 & 74576488 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21c} = K'_{12c} \quad K'_{22c} = \begin{bmatrix} -5107 & -766065 \\ -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la matriz de rigideces de la estructura se tiene

$$K = \begin{bmatrix} 34978 & 1490535 & -24246 & 3636905 & 0 & 0 \\ 1490535 & 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 & 766065 \\ -24246 & -3636905 & 29353 & -2870840 & -5107 & 766065 \\ 3636905 & 3.42 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & -766065 & 74576448 \\ 0 & 0 & -5701 & -766065 & 5107 & -766065 \\ 0 & 0 & 766065 & 74576448 & -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura y eliminando los grados de libertad restringidos, es decir los correspondientes a  $d'_{yB} = 0$  y  $d'_{yD} = 0$  el sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11000 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 \\ -3636905 & 29353 & -2870840 & 766065 \\ 3.42 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & 74576448 \\ 0 & 766065 & 74576448 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{zb} \\ \Phi_{yc} \\ \Phi_{zc} \\ \Phi_{zd} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{zb} \\ \Phi_{yc} \\ \Phi_{zc} \\ \Phi_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0021897 \\ -1.316115 \\ -0.004304 \\ 0.0095435 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores de desplazamiento en cada nodo resultan:

$$\begin{bmatrix} d_{yB} \\ \Phi_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{yc} \\ \Phi_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.316115 \\ -4.314 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{yD} \\ \Phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.5445 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= d'_B & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_C & d'_{2c} &= d'_D \end{aligned}$$

Para conocer los elementos mecánicos en cada barra se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento que está dada por:

$$P_1' = K_{11}'d_1' + K_{12}'d_2'$$

$$P_2' = K_{21}'d_1' + K_{22}'d_2'$$

Barra "a"

$$P_{1a}' = K_{11a}'(0) + K_{12a}'d_B'$$

$$\begin{bmatrix} P_{Y1}' \\ M_{Z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77E8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4700 \\ -606547 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a}' = K_{21a}'(0) + K_{22a}'d_B'$$

$$\begin{bmatrix} P_{Y2}' \\ M_{Z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4700 \\ -1274405 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barras b y c se tiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P_{Y1}' \\ M_{Z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674532 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Y2}' \\ M_{Z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P_{Y1}' \\ M_{Z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2708 \\ -963629 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Y2}' \\ M_{Z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 150036 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio

$$P_B' = P_{2a}' + P_{1b}'$$

Nodo "B"

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ -1274405 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12994 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Nodo "C"

$$P'_C = P'_{2b} + P'_{1C}$$

$$\begin{bmatrix} -11 \times 10^5 \\ -1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2708 \\ -263629 \end{bmatrix}$$

Nodo "D"

$$P'_D = P'_{2C}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \times 10^5 \\ -1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

se observa que en los nodos B y C no se cumple el equilibrio, correspondiente al grado de libertad  $dy$  (\*), esto es debido a que hay apoyo y este debe ser capaz de absorber toda la carga que le llegue.

Los elementos mecánicos finales, figura 2.34.c, se obtienen sumando a los vectores de carga (calculados) en cada extremo de las barras figura 2.32.a los vectores iniciales de empotramiento figura 2.34.b. Estos últimos se obtienen multiplicando por menos uno el vector de cargas inicialmente considerando (acciones) figura 2.33.

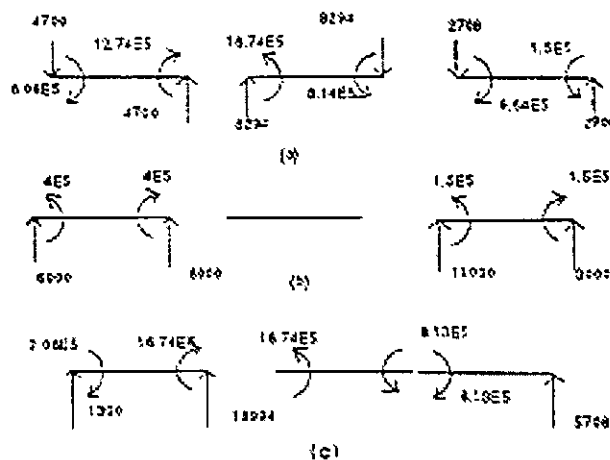


Figura 2.34

Resolver el problema anterior despreciando la influencia de la fuerza cortante en los desplazamientos.

La ecuación  $P=KD$  es la misma al valuar las submatrices de rigidez para cada elemento se debe considerar  $\phi_Y = 0$ .

Barra "a"

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 11456 & 2291250 \\ 2291250 & 6.11 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12a} = \begin{bmatrix} -11456 & 2291250 \\ -2291250 & 3.055 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21a} = K'_{12a} \quad K_{22a} = \begin{bmatrix} 11456 & -2291250 \\ -2291250 & 6.11 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} 27156 & 4073333 \\ 4073333 & 8.1466 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12b} = \begin{bmatrix} -27156 & 4073333 \\ -407333 & 4.0733 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21b} = K'_{12b} \quad K_{22b} = \begin{bmatrix} 27156 & -4073333 \\ -4073333 & 8.1466 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} 5378 & 806667 \\ 806667 & 1.613 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12c} = \begin{bmatrix} -5378 & 806667 \\ -806667 & 8.0666 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21c} = K'_{12c} \quad K_{22c} = \begin{bmatrix} 5378 & -806667 \\ -806667 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38612 & 1782083 & -27156 & 407333 & 0 & 0 \\ 1782083 & 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.073 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -27156 & -4073333 & 32534 & 3266666 & -5378 & 806667 \\ 4073333 & 4.073 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & -806667 & 8.066 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -5378 & -806667 & 5378 & -806667 \\ 0 & 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & -806667 & 1.61333 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \Phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \Phi_{zC} \\ d_{yD} \\ \Phi_{zD} \end{bmatrix}$$

eliminando las restricciones:



$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.0733 \times 10^8 & 0 \\ -4073333 & 32534 & 3266666 & 806667 \\ 4.0733 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & 8.0667 \times 10^7 \\ 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \Phi_{zC} \\ \Phi_{zD} \end{bmatrix}$$

Solucionando:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \Phi_{zC} \\ \Phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00211 \\ -1.26632 \\ -0.00428 \\ 0.009405 \end{bmatrix}$$

Comparando éstos desplazamientos con los que se obtuvieron al considerar  $\emptyset_Y$  se observa que estos últimos resultan ligeramente menores.

2.7.2 Ejemplo.- Analizar la estructura que se muestra en la figura 2.35

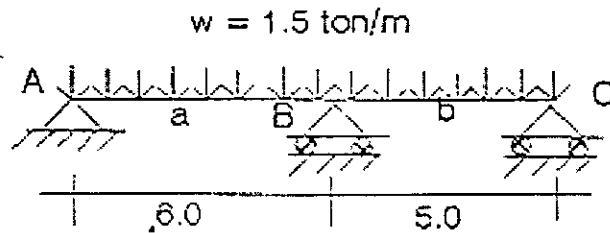


Figura 2.35

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P' = K' D'$$

$$\begin{bmatrix} P'_A \\ P'_B \\ P'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_a & (K'_{12})_a & 0 \\ (K'_{21})_a & (K'_{22})_a & (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ 0 & (K'_{21})_b & (K'_{22})_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_A \\ d'_B \\ d'_C \end{bmatrix}$$

Como no hay fuerza horizontal, no se genera fuerza axial, por lo tanto el desplazamiento horizontal en los nodos V y C son ceros y como no hay desplazamiento vertical en ninguno de los tres nodos, se puede considera únicamente un grado de libertad por nodo (giro alrededor del eje z), lo que implica que sólo se considerará momento flexionante, así el grado de libertad es: G.L. = 3.

Para determinar el vector de cargas se tiene que:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{WL_a^2}{12} = \frac{(1.5)(6)^2}{12} = 4.5 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{WL_b^2}{12} = \frac{(1.5)(5)^2}{12} = 3.125 \text{ Ton-m}$$

Representándolos en la viga y considerando positivo al momento que representado como vector sería normal al plano que lo contiene:

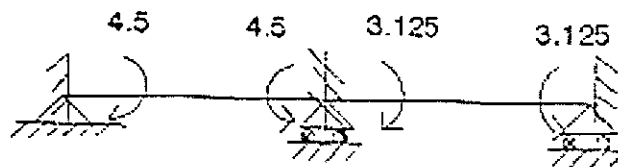


Figura 2.36

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$K_y = T K_y T'$$

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{WL_a^2}{12} = \frac{(1.5)(6)^2}{12} = 4.5 \text{ Ton-m}$$

Como en este caso, el sistema local coincide con el sistema global, puesto que el eje de la barra tiene la dirección de las "x" (en caso contrario sí se utilizaría un transformador); la matriz de rigideces es la misma, así de la matriz general de rigideces, considerando sólo flexión y despreciando la deformación por cortante, es decir  $\emptyset_Y$  se tiene:

$$K = K' = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

donde:

$$K'_{11} = K'_{22} = \frac{4EI}{L} \quad Y \quad K'_{12} = K'_{21} = \frac{2EI}{L}$$

sustituyendo:

$$(K'_{11})_a = \frac{4EI}{6} = 0.667 EI$$

$$(K'_{12})_a = \frac{4EI}{6} = 0.333 EI$$

$$(K'_{11})_b = \frac{4EI}{5} = 0.80 EI$$

$$(K'_{12})_b = \frac{2EI}{5} = 0.40 EI$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura:

$$\begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0.333 & 1.467 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.68 \\ 1.87 \\ 2.97 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad:

$$\bar{d}_{2a} = \Phi_B$$

$$\bar{d}_{1b} = \Phi_B$$

$$\bar{d}_{2b} = \Phi_C$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra:

Barra "a"

$$P_{1a}' = 0.667 EI (-7.68 / EI) + 0.333 EI (1.87 / EI) = -4.5 \text{ ton}$$

$$P_{2a}' = 0.333 EI (-7.68 / EI) + 0.667 EI (1.87 / EI) = -1.31 \text{ ton}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = 0.8 EI (1.87 / EI) + 0.4 EI (2.970) = 2.685 \text{ ton}$$

$$P_{2b}' = 0.4 EI (1.87 / EI) + 0.8 EI (2.970 / EI) = 3.125 \text{ ton}$$

Comprobación del equilibrio:

$$P_A' = P_{1a}'; P_B' = P_{2a}' + P_{1b}'; P_C' = P_{2b}' \text{ Si checan}$$

Para obtener los momentos finales se hace lo siguiente: En las figuras 2.36 a y b se representan las acciones y los valores obtenidos con las ecuaciones fuerza-desplazamiento de la barra, respectiva.

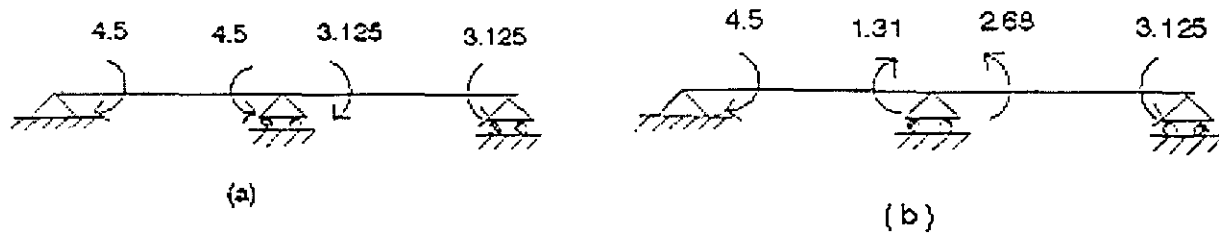


Figura 2.36

Para poder sumar los momentos de las figuras 2.37 a y 2.37 b es necesario que ambos sean acciones o reacciones por lo que multiplica por menos uno a los momentos de la figura 2.37 a para sumarlos con los de la figura 2.37 b y así encontrar los momentos finales, estos se representan en la figura 2.37.d

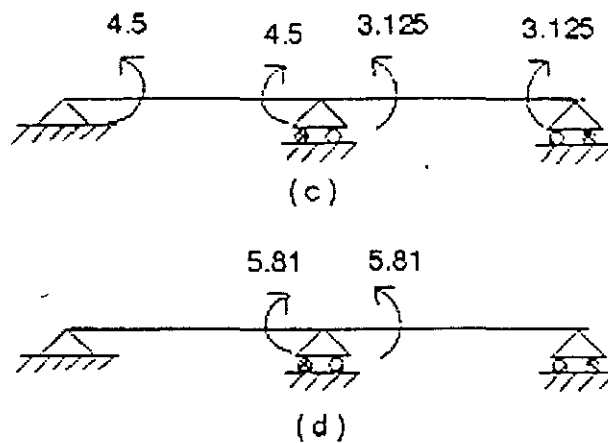


Figura 2.37

## 2.8 MARCOS PLANOS

Se sabe que las submatrices de rigidez en el sistema global están dadas por:

$$K'_{ij} = T K_j T'$$

en el caso de marcos planos, la matriz de rotación o transformador se determina a partir de la figura 2.38

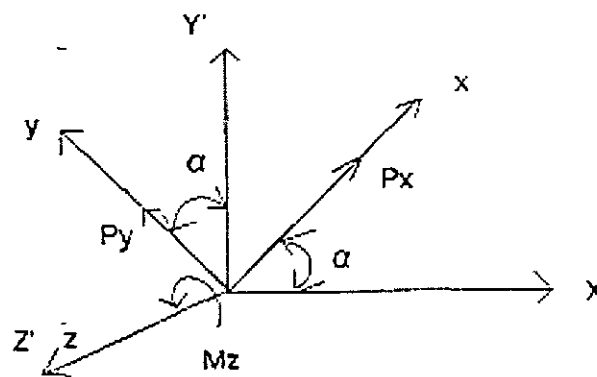


Figura 2.38

$$P'_x = P_x \cos \alpha - P_y \operatorname{sen} \alpha$$

$$P'_y = P_x \operatorname{sen} \alpha + P_y \cos \alpha$$

$$M'_z = M_x$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

utilizando la notación  $\cos \alpha = l$  y  $\text{sen} \alpha = m$ , el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12 x 12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento marco despreciando el efecto de la fuerza cortante en las deformaciones resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) lm - \frac{6EI_z}{L^2} m \\ \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) lm \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2 \frac{6EI_z}{L^2} L \\ -\frac{6EI_z}{L^2} m \quad \frac{6EI_z}{L^2} l \quad \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -\left( \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 \right) - \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) lm - \frac{6EI_z}{L^2} m \\ -\left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} lm \right) - \left( \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \right) \frac{6EI_z}{L^2} m \\ \frac{6EI_z}{L^2} m \quad \frac{6EI_z}{L^2} l \quad \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) lm \frac{6EI_z}{L^2} m \\ \left( \frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) lm \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2 - \frac{6EI_z}{L^2} l \\ \frac{6EI_z}{L^2} m \quad -\frac{6EI_z}{L^2} l \quad \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

2.8.1. Analizar el marco mostrado en la figura 2.39

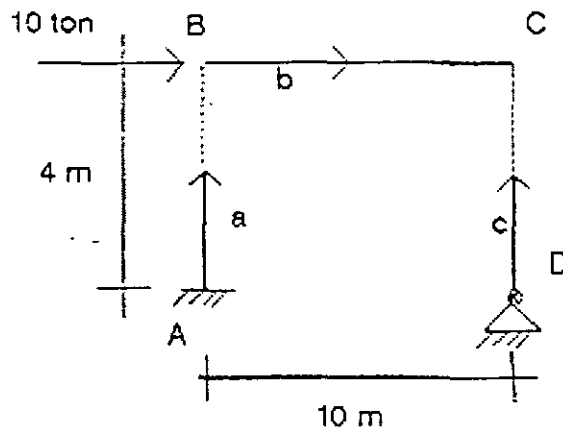


Figura 2.39

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 7$  y su ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \\ P'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} & K'_{12b} & 0 \\ K'_{21b} & K'_{22b} + K'_{22c} & K'_{21c} \\ 0 & K'_{12c} & K'_{11c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \\ D'_D \end{bmatrix}$$

Para valuar las submatrices de rigidez y con estas la ecuación fuerza-desplazamiento, se sugiere organizar la información en la siguiente tabla. Las unidades que se manejan en este problema son toneladas y centímetros.

Barra	A	E	I	EA	EI	L	I	m
a,c	900	221.359	67500	$1.922 \times 10^5$	$1.4941 \times 10^7$	400	0	1
b	1800	221.359	540000	$3.9844 \times 10^8$	$1.953 \times 10^8$	1000	1	0

Sustituyendo en las submatrices:

Barras "a" y "b"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix}$$



Barra "b"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & 1.434 & 717.204 \\ 0 & 717.204 & 4.781 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.781 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401.27 & 0 & 560.31 & -398.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 499.49 & 717.20 & 0 & -1.43 & 717.2 & 0 & 0 & 0 \\ 560.31 & 717.2 & 6.276 \times 10^5 & 0 & -717.20 & 2.39 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ -398.45 & 0 & 0 & 401.25 & 0 & 560.31 & -2.80 & 0 & 560.31 \\ 0 & -1.43 & -717.2 & 0 & 499.49 & -717.20 & 0 & -489.06 & 0 \\ 0 & 717.2 & 2.39 \times 10^5 & 560.31 & -717.2 & 6.276 \times 10^5 & -560.31 & 0 & 74708.5 \\ 0 & 0 & 0 & -2.8 & 0 & -560.3 & 2.80 & 0 & -560.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -498.06 & 0 & 0 & 498.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 560.31 & 0 & 74708.5 & -560.31 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{XB} \\ d'_{YB} \\ \phi'_{ZB} \\ d'_{YC} \\ \phi'_{ZC} \\ d'_{XD} \\ d'_{YD} \\ \phi'_{ZD} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuación resulta de 9 x 9, sin embargo el grado de libertad que se terminó al inicio del problema es GL = 7 por lo que hay que eliminar los renglones y columnas correspondientes a  $d'_{XD}$  y  $d'_{YD}$  cuyos valores son conocidos, dado que son igual con cero. La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura considerando sus condiciones de frontera resulta:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401.27 & 0 & 560.31 & -398.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 499.49 & 717.20 & 0 & -1.43 & 717.20 & 0 \\ 560.31 & 717.2 & 6.276 \times 10^5 & 0 & -717.20 & 2.39E5 & 0 \\ -398.45 & 0 & 0 & 401.25 & 0 & 560.31 & 560.31 \\ 0 & -1.43 & -717.2 & 0 & 499.49 & -717.20 & 0 \\ 0 & 717.2 & 2.39 \times 10^5 & 560.31 & -717.2 & 6.276 \times 10^5 & 74708.5 \\ 0 & 0 & 0 & 560.31 & 0 & 74708.5 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{XB} \\ d'_{YB} \\ \phi'_{ZB} \\ d'_{XC} \\ d'_{YC} \\ \phi'_{ZC} \\ \phi'_{ZD} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} d'_{XB} \\ d'_{YB} \\ \phi'_{ZB} \\ d'_{XC} \\ d'_{YC} \\ \phi'_{ZC} \\ \phi'_{ZD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \\ 3.34 \\ -4.7 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-4} \\ -1.2 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= d'_B & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_D & d'_{2c} &= d'_C \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global:

$$P'_1 = K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2$$

$$P'_2 = K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a}(0) + K'_{12a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{X1} \\ P'_{Y1} \\ M'_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74708.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a}(0) + K'_{22a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{X2} \\ P'_{Y2} \\ M'_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.4942 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.07 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se obtiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -152.02 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ -2.34 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ 884.8 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio:

Nodo B:

$$P_B' = P_{2a}' + P_{1b}'$$
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

Nodo D:

$$P_c' = P_{2b}' + P_{2c}'$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ 884.80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

## ROTACION DEL SISTEMA GLOBAL AL LOCAL

La rotación del sistema global al local se hace mediante la matriz de rotación traspuesta, en igual forma que en armaduras, así.

$$P = T' P'$$

Barra a:

$$P_{1a} = (T')_a P'_{1a}$$

$$P_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ 7.79 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ -7.79 \\ 1452.03 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se tiene:

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix} \quad P_{2b} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ 2.21 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{2c} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ -2.21 \\ 884.80 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.40. a se muestran las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en los extremos de cada barra y en la figura 2.40. b se muestran las fuerzas axiales.

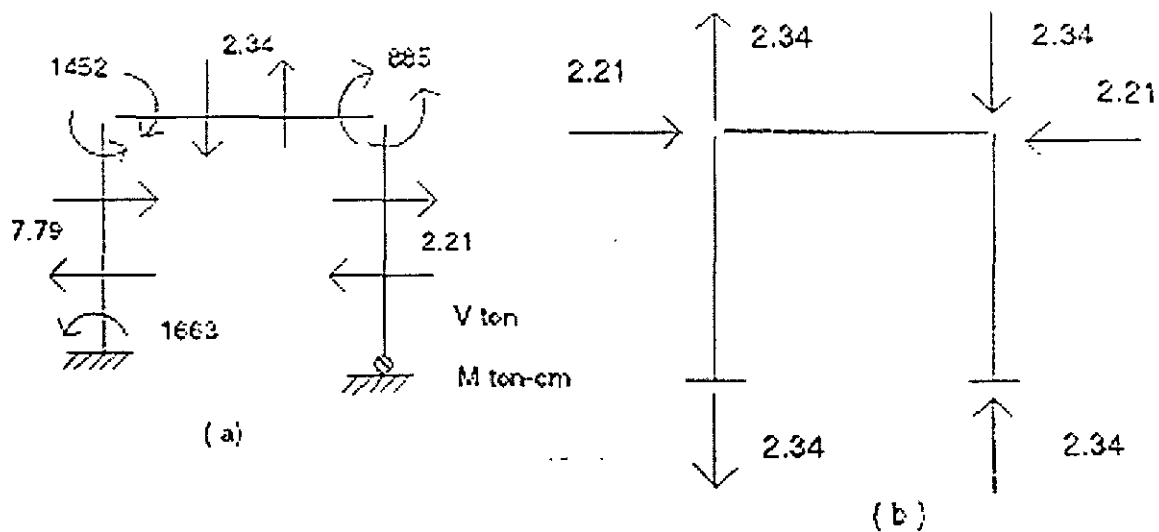


Figura 2.40

2.8.2. Ejemplo.- Analizar el marco que se muestra en la figura 2.41, considérese que la barra "d" esta articulada en sus extremos.

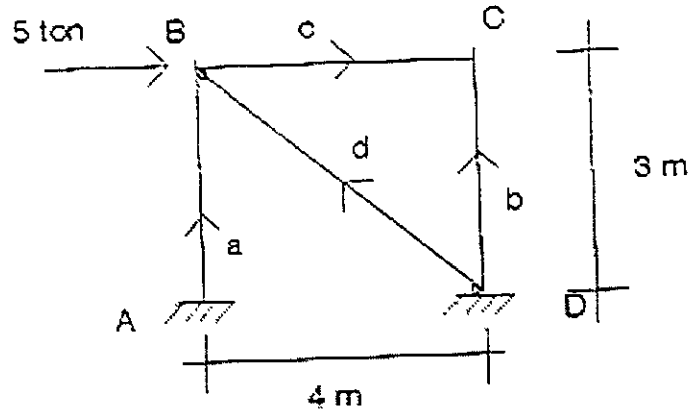


Figura 2.41

Las propiedades

consideradas para cada barra se muestran en la siguiente tabla. Las unidades utilizadas para este problema son toneladas y centímetros.

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 6$  y su ecuación fuerza-desplazamiento es:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{22d} + K'_{22c} & K'_{12c} \\ K'_{21a} & K'_{22a} + K'_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \end{bmatrix}$$

Barra	A	E	I	EA	EI	L	I	m
a y b	900	141.421	67500	127279	9545918	300	0	1
c	1250	141.421	260417	176776	36828433	400	1	0
d	2520	6	5927040	15120	35562240	500	-0.8	0.6

Las unidades consideradas son toneladas y centímetros. Sustituyendo en las submatrices.

Barras a y b

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & 0 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12 x 12 en el sistema local, la matriz de rigideces para el elemento diagonal el cual sólo estará sujeto a carga axial resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se tiene:

$$K' = TKT'$$

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 1-m & 0 \\ m & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 1^2 \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} m & 0 \\ \frac{EA}{L} & 1m & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} 1-m & 0 \\ m & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 1^2 \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} m & 0 \\ \frac{EA}{L} & 1m & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

Barra D

$$K' = TKT'$$

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465.537 & -14.515 & 636.395 & -441.94 & 0 & 0 \\ -14.515 & 442.054 & 1381.066 & 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 636.395 & 1381.066 & 495563.33 & 0 & -1881.066 & 184142.17 \\ -441.94 & 0 & 0 & 446.183 & 0 & 636.395 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 & 0 & 431.168 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 & 636.395 & -1381.066 & 495563.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{XB} \\ d'_{YB} \\ \phi'_{ZB} \\ d'_{XC} \\ d'_{YC} \\ \phi'_{ZC} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} d'_{VB} \\ d'_{YB} \\ \phi'_{ZB} \\ d'_{XC} \\ d'_{YC} \\ \phi'_{ZC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19279 \\ 7.54633 \times 10^{-3} \\ -1.99028 \times 10^{-4} \\ 0.19124 \\ -1.14398 \times 10^{-3} \\ -1.95852 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= 0 & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_B & d'_{2c} &= d'_C \\ d'_{1d} &= 0 & d'_{2d} &= d'_B \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global.

$$P'_1 = K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2$$

$$P'_2 = K'_{21} D'_2 + K'_{22} D'_2$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a}(0) + K'_{12a} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{X1} \\ P'_{Y1} \\ M'_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a}(0) + K'_{22a} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{X2} \\ P'_{Y2} \\ M'_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

Barra "b"



$$P_{1b} = K_{11b}(0) + K_{12b} d_C$$

$$\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b} = K_{21b}(0) + K_{22b} d_C$$

$$\begin{bmatrix} P_{X2} \\ P_{Y2} \\ M_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19124 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = K_{11c} d_B + K_{12c} d_C$$

$$\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{1c} = K_{21c} d_B + K_{22c} d_C$$

$$\begin{bmatrix} P_{X2} \\ P_{Y2} \\ M_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368228.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ -0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d} = K_{11d}(0) + K_{12d} d_B$$

$$\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d}' = K_{21d}'(0)' + K_{22d}' d_B'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2}' \\ P_{y2}' \\ M_{z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo B.

$$P_B' = P_{2a}' + P_{1c}' + P_{2d}'$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nodo C.

$$P_C' = P_{2b}' + P_{2c}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local.

$$P = T' p'$$

Barra "a"

$$P_{1a}' = (T')_a P_{1a}'$$

$$P_{1a}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.20 \\ 0.69 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.20 \\ -0.69 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.69 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49 \\ -0.69 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.69 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.24 se representan fuerzas cortantes y momentos flexionantes y en la figura 2.43 fuerzas normales.

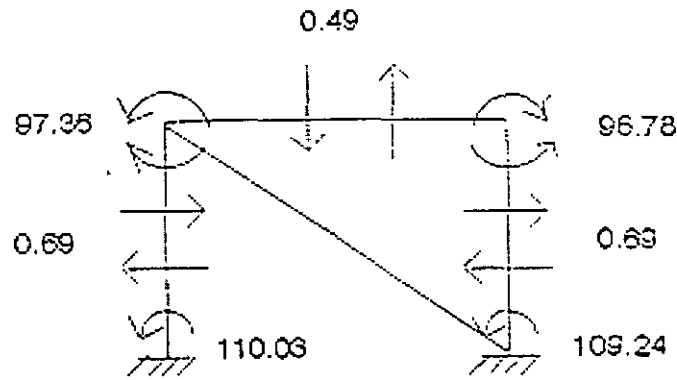


Figura 2.42

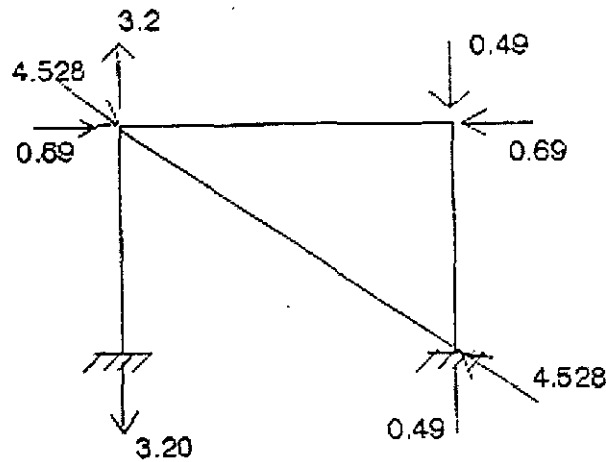


Figura 2.43

## 2.9 RETICULA O EMPARRILLADO.

Una retícula es una estructura a la cual se le aplica la carga en planos perpendiculares al plano que la contiene. Por lo cual será una estructura con tres grados de libertad por nodo, uno lineal y dos angulares como se vio en el capítulo uno.

En igual forma que en armaduras y marcos primero se determinará las submatrices de rigidez el sistema global, para esto se sabe que:

$$k_{ij} = TK_{ij} T'$$

y en el caso de retículas la matriz de rotación T se determinará a partir de la figura 2.45

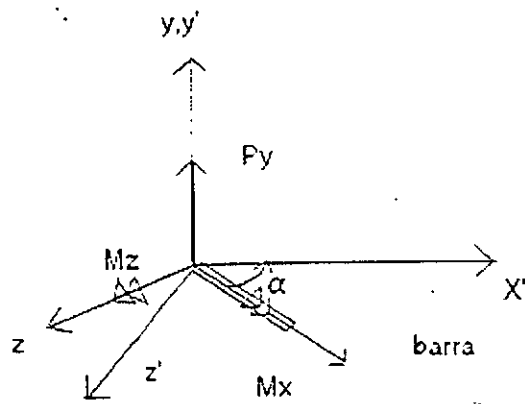


Figura 2.45

de la figura 2.45 se puede observar que:

$$M'_x = M_x \cos \alpha - M_z \operatorname{sen} \alpha$$

$$P'_y = P_y$$

$$M'_z = M_x \operatorname{sen} \alpha + M_z \cos \alpha$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12X12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento retícula es de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

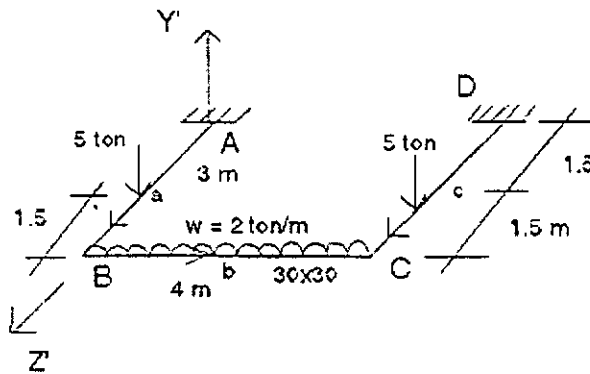
$$K'_{11} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} 1^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & -\frac{6EI}{L^2} m \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) 1m \\ -\frac{6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} 1 \\ \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) 1m & \frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} 1^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} 1^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m & -\left( \frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right) 1m \\ -\frac{6EI}{L^2} m & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L} 1 \\ -\left( \frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right) 1m & -\frac{6EI}{L^2} 1 & -\frac{GJ}{L} m^2 + \frac{2EI}{L} 1^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}'$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} - 1^2 \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) 1m \\ \frac{6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6EI}{L} 1 \\ \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) 1m - \frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} 1^2 \end{bmatrix}$$

2.9.1 Ejemplo.- Analizar la retícula mostrada en la figura 2.46



$$E = \sqrt{f'_c} \text{ kg/cm}^2$$

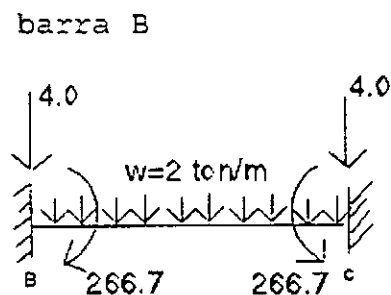
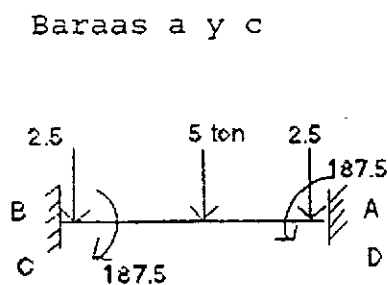
$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

Figura 2.46

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{1b} & K'_{12b} \\ K'_{21} & K'_{22b} + K'_{22c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas para determinar el vector de caras serán toneladas para las cortantes y toneladas-centímetro para los momentos, así:



$$M = \frac{Pl}{8} = 187.5 \text{ Ton-cm} \quad M = \frac{wl^2}{12} = 266.7 \text{ Ton-cm}$$

$$V = \frac{P}{2} = 2.5 \text{ Ton} \quad V = \frac{wl}{2} = 4 \text{ Ton}$$

El vector de cargas y el de desplazamientos se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} M'_{XB} \\ P'_{yB} \\ M'_{ZB} \\ M'_{ZB} \\ M'_{XC} \\ P'_{yC} \\ M'_{Zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \\ -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi'_{XB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{ZB} \\ \phi'_{Xc} \\ d'_{yc} \\ \phi'_{Zc} \end{bmatrix} = ?$$

Para valuar las submatrices de rigidez para cada barra se sugiere organizar la información en la siguiente tabla.

Barra	E	G	I	J	L	EI	GJ	I	m
a y c	221.36	88.54	540000	370980	300	$1.195 \times 10^7$	$3.2846 \times 10^7$	0	1
b	221.36	88.54	67500	114210	400	$1.4941 \times 10^7$	$1.0112 \times 10^7$	1	0

Para determinar el momento polar de inercia J se utiliza la expresión  $J = \beta b^3 h$  donde  $\beta$  es función de la relación h/b, como se indica en la siguiente tabla.

h/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.245	0.263	0.281	0.3	0.313	0.33

Sustituyendo en las matrices transformadas al sistema global:

Barras a y c

$$K'_{11a,c} = \begin{bmatrix} 1593733 & .3 & -7968 & .87 & 0 \\ -7968 & .87 & 53 & .13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948 & .56 & 0 \end{bmatrix}$$



$$K'_{12a,c} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21a,c} = K'^t_{12a,c}$$

$$K'_{22a,c} = \begin{bmatrix} 1593733.3 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K'_{11b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & 2.80 & 560.31 \\ 0 & 560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12b} = \begin{bmatrix} -25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & -560.31 & 74708.67 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'^t_{12}$$

$$K'_{22b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & -560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \\ -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1619013.7 & 7968.87 & 0 & -25280.38 & 0 & 0 \\ 7968.37 & 55.93 & 560.31 & 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & 560.31 & 258905.89 & 0 & -560.31 & 74708.67 \\ -25280.38 & 0 & 0 & 1619013.7 & 7968.87 & 0 \\ 0 & -2.80 & -560 & 7968.87 & 55.93 & -560.31 \\ 0 & 560 & 74708.67 & 0 & -560.31 & 258905.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{XB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{ZB} \\ \phi'_{xc} \\ d'_{yc} \\ \phi'_{zc} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \phi'_{XB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{ZB} \\ \phi'_{xc} \\ d'_{yc} \\ \phi'_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001976 \\ -0.418715 \\ -0.001447 \\ 0.001976 \\ -0.4187151 \\ 0.0014479 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{a} &= d'_{B} \\ d'_{1b} &= d'_{B} & d'_{2b} &= d'_{c} \\ d'_{1c} &= 0 & d'_{2c} &= d'_{c} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra en el sistema global:

$$P'_1 = K_{11} d'_1 + K_{12} d'_2$$

$$P'_1 = K_{21} d'_1 + K_{22} d'_2$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} d'_{1a} + K'_{12} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{1a} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & -109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.0014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} d'_{1a} + K'_{22a} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1593733.33 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las otras barras se tiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.50 \\ -158.5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

Comprobación de equilibrio:

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1b}$$

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} \text{ si cumple}$$

$$P'_c = P'_{2b} + P'_{2c}$$

Para la rotación del sistema global al local se sabe que:

$$P = T' P'$$

Barra "a"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ 6.5 \\ 1762 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barras b y c

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ 6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

Los elementos mecánicos finales se obtienen en forma similar a los de los marcos así

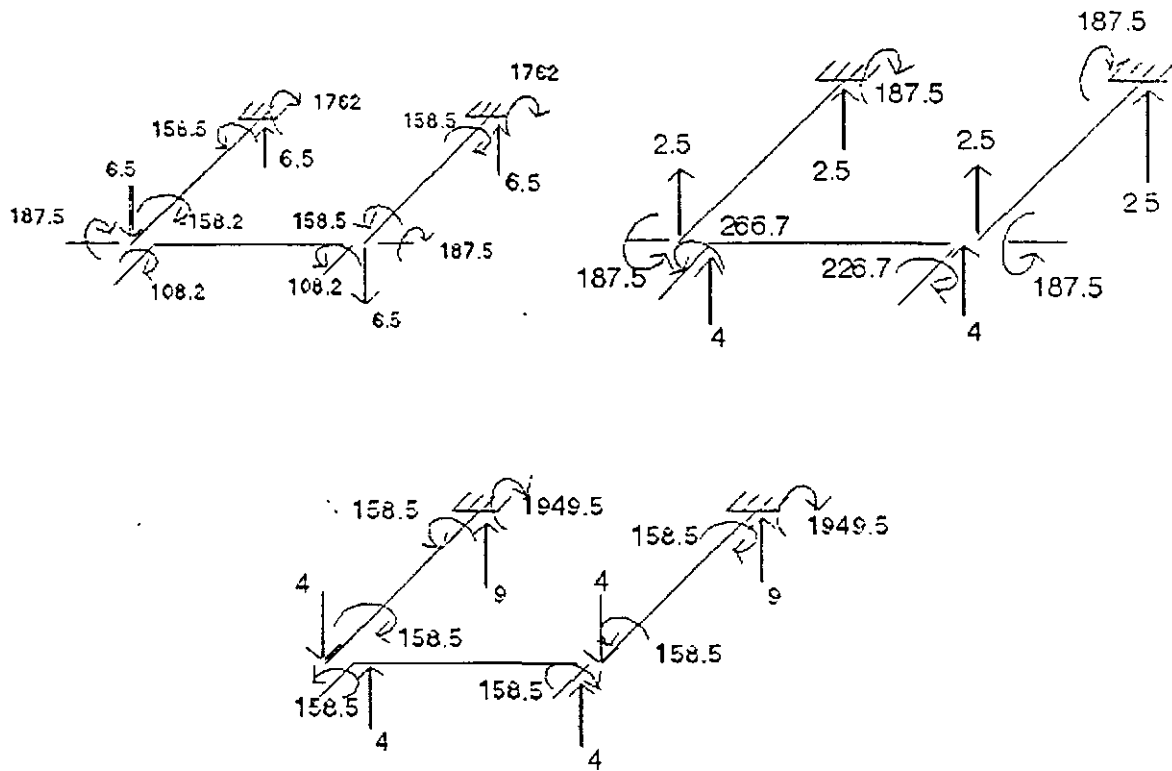


Figura 2.47

## 2.10 ESTRUCTURAS EN EL ESPACIO

Rotación del sistema local al global de una barra en el espacio:

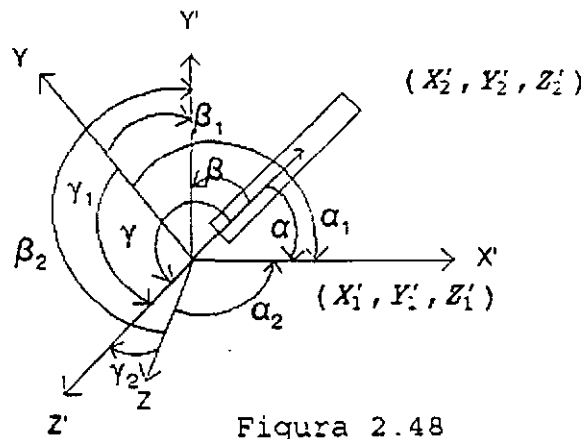


Figura 2.48

Se sabe:

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x'_2 - x'_1}{L} \quad \cos \beta = \frac{y'_2 - y'_1}{L} \quad \cos \gamma = \frac{z'_2 - z'_1}{L}$$

Por otro lado:

$$P_{x'} = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha_1 + P_z \cos \alpha_2$$

$$P_{y'} = P_x \cos \beta + P_y \cos \beta_1 + P_z \cos \beta_2$$

$$P_{z'} = P_x \cos \gamma + P_y \cos \gamma_1 + P_z \cos \gamma_2$$

en igual forma para momentos en forma matricial y llamando

$$\cos \alpha_1 = l_1; \cos \beta_1 = m_1; \cos \gamma_1 = n_1$$

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

de donde:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix}$$

De la matriz de rotación Y, m, y n representan los cosenos directores del eje "x" en el sistema global de referencia. Para determinar los cosenos directores Y, m, y n, del eje "y" partimos de seleccionar a dicho eje perpendicular a los ejes x y z' de tal forma que el producto vectorial de z' con x coincida con el eje y; así:

$$\bar{y} = \bar{z} \cdot x \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & n \end{bmatrix} = -m_1 \cdot 1_j + 1_i + O_k$$

como y no es unitario entonces:

$$y = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \bar{y}$$

si llamamos  $D = \sqrt{l^2 + m^2}$ , entonces

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{m}{D} \\ \frac{1}{D} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$l_1 = -\frac{m}{D}; \quad m_1 = \frac{1}{D} \quad y \quad n_1 = 0$$

El eje z se determinará por la condición de ortogonalidad

$$\bar{z} = x \cdot X \cdot y = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \frac{1}{D} [-n l_i - m n_j + (l^2 + m^2) k]$$

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{D} [-n l_i - m n_j + (l^2 + m^2) k]$$

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{n^2(l^2 + m^2)}}{(l^2 + m^2)} + \frac{(l^2 + m^2)}{(l^2 + m^2)}$$

$$\bar{z} = 1$$

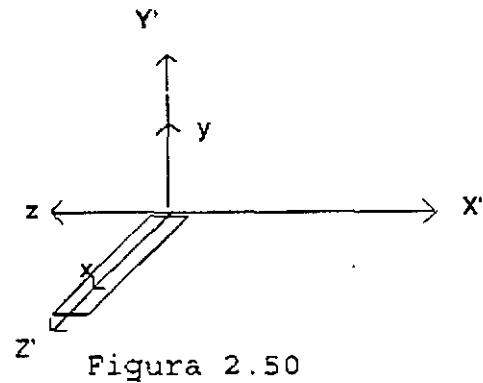
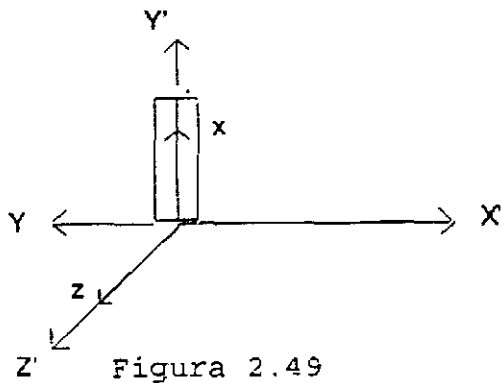
por lo que  $\bar{z} = \bar{z}$  y  $l_2 = -n \frac{l}{D}$  ;  $m_2 = -m \frac{n}{D}$

$$n_3 = \frac{l^2 + m^2}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \sqrt{l^2 + m^2} = D$$

finalmente el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} l & -\frac{m}{D} & -\frac{nl}{D} & 0 & 0 & 0 \\ m & \frac{l}{D} & -\frac{mn}{D} & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -\frac{m}{D} & -\frac{ln}{D} \\ 0 & 0 & 0 & m & \frac{l}{D} & -\frac{mn}{D} \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & D \end{bmatrix}$$

En el caso de que el eje "x" coincida con y' los ejes "z" ' & "z'" coincidirán como se muestra en la siguiente figura 4.29.



y el transformador resulta:



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y en el caso de que el eje "x" coincida con z' los ejes "y" y "y'" coincidirán también como se muestra en la figura 2.50, el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 MATRIZ DE RIGIDECES MODIFICADA

La matriz de rigideces se modifica con la finalidad de considerar diversas condiciones de frontera. Supóngase una estructura como se muestra en la siguiente figura:

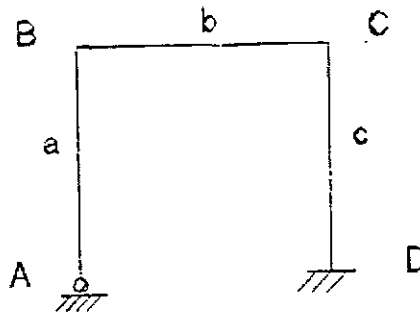
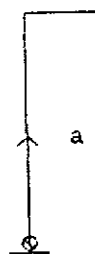


Figura 3.1

Si se consideran únicamente los grados de libertad de los nodos B y C para el análisis del marco, entonces la matriz de rigideces de la barra "a" debe modificarse para tomar en cuenta el grado de libertad del nodo A. La modificación se realiza considerando las condiciones de frontera es decir:



$$\begin{aligned}
 M_1 &= 0 & \phi_1 &\neq 0 \\
 N_1 &\neq 0 & U_1 &= 0 \\
 V_1 &\neq 0 & V_1 &= 0
 \end{aligned}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo las condiciones de frontera en el extremo 1

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$0 = K_{33} \Phi_1 + K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \Phi_2$$

$$\Phi = -K_{33}^{-1} (K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \Phi)$$

en forma matricial:

$$\phi_1 = K_{33}^{-1} \begin{bmatrix} K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Es decir que a partir del vector desplazamiento en el extremo 2 se puede determinar el giro en el extremo 1.

Por otro lado se tiene:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

lo cual se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} \phi_1 + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo el valor de  $\Phi_1$  :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} - K^{-1}_{33} [K_{34} \ K_{35} \ K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} - K^{-1}_{33} [K_{34} \ K_{35} \ K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

esto es:

$$\overline{P}_2 \quad \overline{K}_{22} \quad \overline{d}_2$$

donde  $K^*_{22}$  es la matriz de rigideces modificada.

La matriz de rigideces modificada es la que se utilizará para efectuar el acoplamiento de las barras cuando no se incluya el grado de libertad del nodo "A", así:

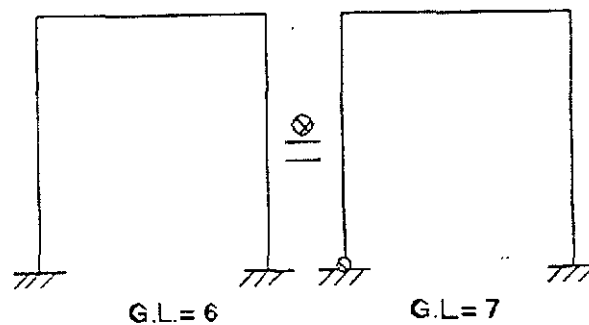
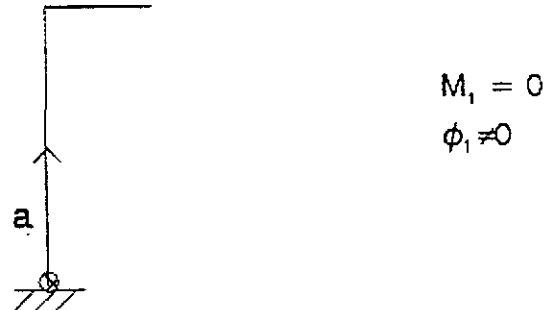


Figura 3.2

### 3.2 CONDENSACION DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

El procedimiento anterior se puede simplificar condensando los grados de libertad de las fuerzas que son nulas:



La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra "a" que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

que se puede arreglar y particionar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{23} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{63} \\ K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

en forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}' & K_{12}' \\ K_{21}' & K_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{bmatrix}$$

de la segunda ecuación

$$P_2' = K_{21}' U_1' + K_{22}' U_2'$$

pero  $P_2' = 0$  entonces

$$U_2' = -K_{22}^{-1} K_{21}' U_1'$$

de la ecuación 1

$$P_1' = K_{11}' U_1' + K_{12}' U_2'$$

sustituyendo  $U_2$

$$P_1' = K_{11}' U_1' - K_{12}' K_{22}^{-1} K_{21}' U_1'$$

$$P_1' = (K_{11}' - K_{12}' K_{22}^{-1} K_{21}') U_1'$$

de donde:

$$K_{11}' - K_{12}' K_{22}^{-1} K_{21}' = K_{11}''$$

para el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \\ K_{43} \\ K_{53} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{31} \ K_{32} \ K_{34} \ K_{35} \ K_{36}]$$

Sustituyendo condensaciones de frontera  $U_1 = 0$  y  $V_1 = 0$  lo que consiste en eliminar los renglones y columnas correspondientes, así:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{34} \ K_{35} \ K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo al modificar la matriz de rigideces de la barra "a", de lo anterior se puede decir que la operación de condensación consiste en compactar los grados de libertad de una estructura, a aquellos que son de interés para el analista, al modular un problema dado. Generalmente los grados de libertad compactados son aquellos en donde no hay carga pero si desplazamiento.

### **3.3 MATRICES DE PERMUTACION**

Estas matrices se forman mediante la permutación de renglones o columnas en la matriz identidad. Si se premultiplican se intercambian renglones y se postmultiplica se intercambian columnas.

Para ilustrar lo anterior intercambiar el primer renglón por el tercero, así como la primer columna por la tercera de la siguiente matriz.

En la aplicación del método de las rigideces para estructuras de alto grado de hiperestaticidad cinemática en computadoras de poca memoria central, es necesario particionar la estructura en un número arbitrario de subestructuras, tomando en cuenta la capacidad de la máquina.

Se llama partición estructural a la división de la estructura completa en un número dado de subestructuras donde las uniones o fronteras de cada subestructuras se fijan arbitrariamente, es conveniente tomar particiones estructurales correspondientes a particiones físicas reales. Como las propiedades de rigidez de cada subestructura pueden valuarse a partir de sus condiciones de frontera y de las propiedades geométricas y elásticas de cada barra que la componen, entonces cada subestructura puede tratarse en forma independiente aplicando el método directo de las rigideces para condensar los grados de libertad correspondientes a los nodos intermedios (los que no están en las fronteras) a los grados de libertad en las fronteras (las fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes), para después hacer el acoplamiento de las subestructuras condensadas (este proceso se conoce como relajación de las fronteras) a través de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, el sistema de ecuaciones resultante permite determinar los desplazamientos en los grados de libertad.

Cabe aclarar que el sistema estructural puede ser cualquiera por complejo que este sea, solo aquí se presenta el de la figura 4.1 para que resulte mas ilustrativo.

Como primer paso es dividir la estructura en un número conveniente de subestructuras, a las que se les imponen fronteras fijas ( estas fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes ). Esta división es arbitraria, se hace cuidando la capacidad de la microcomputadora, para este ejemplo se elige la partición que se muestra en la figura 4.1



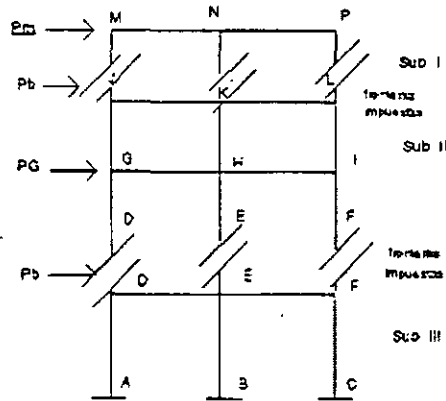


Figura 4.1

En la subestructura I los nodos M, N y P y en la subestructura II los nodos G, H e I se denominan nodos interiores, mientras que en la subestructura III no hay nodos interiores.

Una vez hecha la partición se procede al análisis de cada subestructura en forma independiente asumiendo las fronteras impuestas ( que como ya se mencionó son comunes a dos subestructuras adyacentes), para condensar los grados de libertad a las fronteras, así como para determinar los vectores de empotramiento (reacciones en las fronteras necesarias para que los desplazamientos sean cero).

Al condensar los grados de libertad a las fronteras, las subestructuras (fig. 4.1) se pueden considerar como elementos equivalentes como se ilustra en la figura 4.2

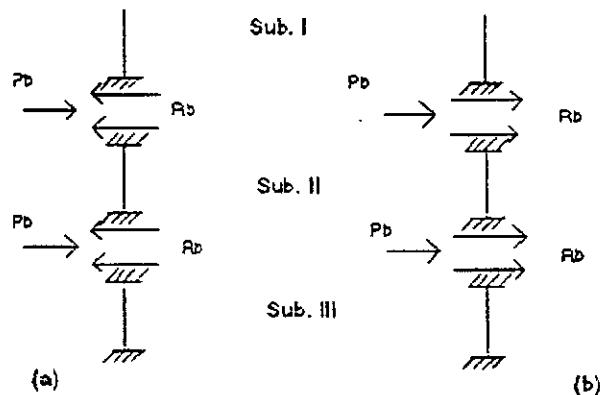


Figura 4.2

Cuando las fronteras son relajadas las reacciones y cualesquiera fuerzas aplicadas en ellas, pueden no estar en equilibrio, por lo tanto la relajación inducirá desplazamientos de magnitud tal que se satisfaga el equilibrio en las fronteras.

Para hacer el acoplamiento (relajación de las fronteras) a los vectores  $R_b$  se les cambia el signo para poder sumarlos con los vectores  $P_b$  que son las cargas aplicadas directamente en las fronteras como se indica en la figura 4.2.b

El acoplamiento de los elementos equivalentes de la figura 4.2 queda definido por las mismas reglas que para el ensamble de barras por el método directo.

Por otro lado el orden de las submatrices va a coincidir puesto que los puntos de unión o fronteras son comunes entre subestructuras adyacentes.

Al solucionar el sistema de ecuaciones que resulte del acoplamiento, se obtienen los desplazamientos en las fronteras de las diferentes subestructuras, naturalmente la solución de los desplazamientos en las fronteras implica un número pequeño de incógnitas en comparación con la solución de la estructura completa.

Finalmente se determinan los desplazamientos en los nodos interiores provocados por las cargas aplicadas directamente sobre dichos nodos mas un desplazamiento que se le llama de corrección por la influencia de los desplazamientos de las fronteras.

#### 4.1 FORMULACION DEL METODO DE LAS SUBESTRUCTURAS.

Se sabe que la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural está dado por:

$$P = K D$$

Si denotamos al vector de los desplazamientos en las fronteras (comunes a dos subestructuras) por  $U_b$  y el vector de desplazamientos en los nodos interiores (cada uno ocurre en un punto interior de solamente una subestructura) por  $U_i$  y a las correspondientes fuerzas en las fronteras y en los nodos interiores por  $P_b$  y  $P_i$  respectivamente, así la ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix}$$

4.1

El total de desplazamientos en cualquier punto del sistema estructural, se calcula por la superposición de dos vectores tal que:

$$U = U^{\alpha} + U^{\beta} \quad 4.2$$

donde  $U^{\alpha}$  denota el vector de desplazamientos debido a las cargas  $P_i$  cuando  $U_b = 0$  y  $U^{\beta}$  representa la corrección necesaria a los desplazamientos  $U^{\alpha}$  teniendo en cuenta los desplazamientos  $U_b$  cuando  $P_i = 0$ , por lo que el vector de desplazamientos se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_b^{\alpha} \\ U_i^{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_b^{\beta} \\ U_i^{\beta} \end{bmatrix} \quad 4.3$$

donde:

$\begin{bmatrix} U_b^{\alpha} \\ U_i^{\alpha} \end{bmatrix}$  Es el vector de desplazamientos cuando las fronteras están fijas; por lo que  $U_b^{\alpha} = 0$

$\begin{bmatrix} U_b^{\beta} \\ U_i^{\beta} \end{bmatrix}$  Representa la corrección debida a la relajación de las fronteras.

Similarmente correspondiendo a los desplazamientos  $U^{\alpha}$  y  $U^{\beta}$  las cargas pueden expresarse como:

$$P = P^{\alpha} + P^{\beta} \quad 4.4$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b^{\alpha} \\ P_i^{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_b^{\beta} \\ P_i^{\beta} \end{bmatrix}$$

donde por definición:

$$P_i^{\alpha} = P_i \quad \text{y} \quad P_i^{\beta} = 0 \quad 4.5$$

de la segunda ecuación del sistema 4.1 cuando las fronteras están fijas ( $U^{\alpha}_b = 0$ ), se tiene

de donde:

$$U^{\alpha}_i = K_{bi} U^{\alpha}_i \quad 4.6$$

de la primer ecuación del sistema 4.1

$$P^{\alpha}_i = K_{bi} U^{\alpha}_i$$

sustituyendo la ecuación 4.6

$$P^{\alpha}_b = K_{bi} K^{-1}_{ii} P_i \quad 4.7$$

donde  $P^{\alpha}_b$  representa las reacciones necesarias en las fronteras para mantener a  $U_b = 0$  cuando las cargas en los nodos interiores son aplicadas, es decir la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores sobre las fronteras en cada subestructura ver figura 4.3. a.

Cuando las fronteras de las subestructuras son relajadas, los desplazamientos  $U^{\beta}$  pueden determinarse a partir del sistema de ecuaciones 4.1. así, considerando la segunda ecuación de este sistema:

pero  $P^{\beta}_i = 0 = 0$ , entonces;  $P^{\beta}_i = K_{ib} U^{\beta}_b + K_{ii} U^{\beta}_i$ ,

$$U^{\beta}_i = -K^{-1}_{ii} K_{ib} U^{\beta}_b \quad 4.8$$

Se puede observar que la ecuación 4.7 representa la corrección de los desplazamientos en los nodos interiores por la relajación de las fronteras.

De la ecuación 4.1

$$P^{\beta}_b = K_{bb} U^{\beta}_b$$

que sustituyendo la ecuación 4.8 se obtiene:

$$P^{\beta}_b = K_{bb} U^{\beta}_b - K_{bi} K^{-1}_{ii} K_{ib} U^{\beta}_b$$

factorizando:

$$P^{\beta}_b = [K_{bb} - K_{bi}K^{-1}_uK_{ib}]U_b$$

si llamamos

$$K_b = K_{bb} - K_{bi}K^{-1}_uK_{ib}$$

la ecuación 4.8 se puede escribir

$$P^{\beta}_b = K_b U_b$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces en las fronteras (condensación de la matriz de rigideces a los grados de libertad correspondientes a las fronteras de las subestructuras),  $U_b$  representa los desplazamientos en las fronteras y es el vector de cargas en las fronteras considerando la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores.

De la ecuación 4.4

$$P^{\beta}_b = P_b - P^{\alpha}_b \quad 4.10$$

donde  $P_b$  es la carga aplicada directamente en las fronteras y  $P^{\alpha}_b$  es la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores, ver figura 4.3.b.

Para el acoplamiento como ya se indicó las subestructuras se consideran como elementos equivalentes ver figura 4.3 y se aplica el método directo de las rigideces para establecer la ecuación fuerza-desplazamiento, así:

$$P^{\beta}_b = K_b U^{\beta}_b$$

aquí  $P^{\beta}_b$  se considera como

$$P^{\beta}_b = K_b - \Sigma P^{\beta}_b$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces del sistema acoplado y  $U^{\beta}_b$  es el vector de desplazamientos en las fronteras (impuestas inicialmente) de toda estructura.

Para ilustrar este método se presentan ejemplos numéricos aplicados a la solución de armadura y marcos.

## 4.2 ARMADURAS

Aplicando el método de las subestructuras determinar la fuerza en cada una de las barras de la estructura que se muestra en la figura 4.3

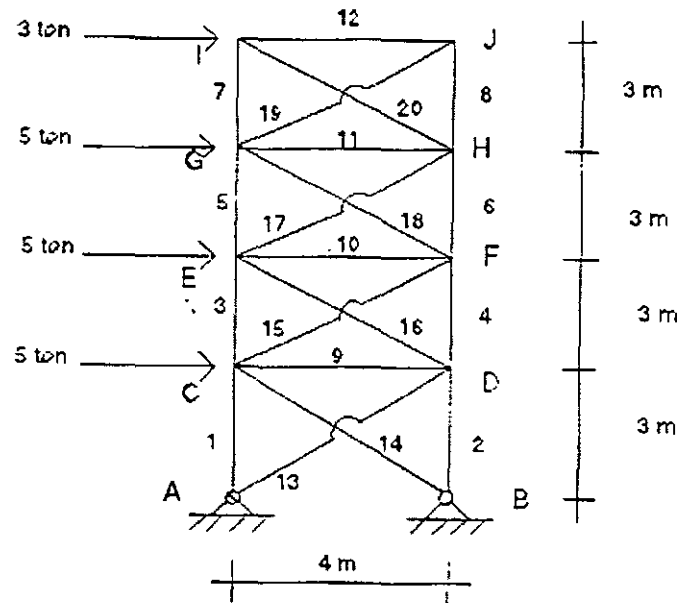


Figura 4.3

Para realizar la partición de la estructura hay varias opciones, algunas de estas se ilustran en la figura 4.4

En el primer caso figura 4.4.a, para la subestructura superior resulta una matriz de  $8 \times 8$  la cual se condensaría a una de  $4 \times 4$  y, para las dos subestructuras siguientes resulta una matriz de  $8 \times 8$ , las cuales no se condensan y filialmente para la subestructura inferior resulta una matriz de  $4 \times 4$  la cual también no se condensa por lo cual al hacer el acoplamiento de los elementos equivalentes (relajación de las fronteras) resultará una matriz de  $12 \times 12$ . Para la partición mostrada en la figura 4.4.b. la estructura intermedia de una matriz de  $12 \times 12$ , la cual al condensar resulta de  $8 \times 8$  y al hacer la relajación de las fronteras se tendría que trabajar con una matriz de  $8 \times 8$ . Para la partición mostrada en la figura 4.4.c, en la subestructura superior

inicialmente se maneja una matriz de  $12 \times 12$  que al condensar resulta de  $4 \times 4$  y para la subestructura inferior inicialmente la matriz es de  $8 \times 8$ , que al condensar también resulta de  $4 \times 4$ .

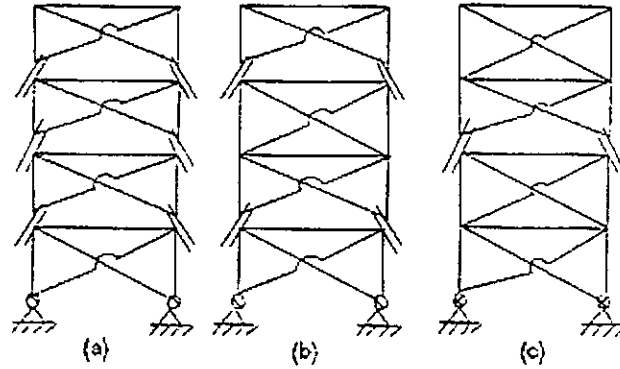


Figura 4.4

En este ejemplo se trabajará con la opción que muestra la figura 4.4c

En la figura 4.4 se muestra la topología considerable en las subestructuras, se puede observar que los nodos E y F (fronteras) son comunes para ambas subestructuras.

#### ANÁLISIS DE LA SUBESTRUCTURA I

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento para esta subestructura resulta:

$$\begin{bmatrix} P'_E \\ P'_F \\ P'_G \\ P'_H \\ P'_I \\ P'_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_{17} + (K'_{11})_{15} & 0 & (K'_{12})_5 & (K'_{12})_{17} & 0 & 0 \\ 0 & (K'_{11})_{18} + (K'_{11})_6 & (K'_{12})_{18} & (K'_{12})_6 & 0 & 0 \\ (K'_{21})_5 & (K'_{21})_{18} & (K'_{22})_5 + (K'_{22})_{18} + (K'_{11})_{11} + (K'_{11})_{19} + (K'_{11})_7 & (K'_{12})_{11} & (K'_{12})_7 & (K'_{12})_{19} \\ (K'_{21})_1 & (K'_{21})_6 & (K'_{21})_{11} & (K'_{22})_6 + (K'_{22})_{17} + (K'_{22})_{11} + (K'_{11})_{20} + (K'_{11})_8 & (K'_{12})_{20} & (K'_{12})_8 \\ 0 & 0 & (K'_{21})_7 & (K'_{21})_{20} & (K'_{22})_7 + (K'_{22})_{20} + (K'_{11})_{12} & (K'_{12})_{12} \\ 0 & 0 & (K'_{21})_{19} & (K'_{21})_8 & (K'_{21})_{12} & (K'_{22})_8 + (K'_{22})_{19} + (K'_{11})_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_E \\ D'_F \\ D'_G \\ D'_H \\ D'_I \\ D'_J \end{bmatrix}$$

Las submatrices de rigidez en el sistema global para un elemento barra armadura están dadas por:

$$K'_{11} = K'_{22} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m \\ 1m & m^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = -K'_{11}$$

Por comodidad y rapidez se recomienda hacer la siguiente tabla para organizar la información:

Barra	EA	L	I	M	I <sup>2</sup>	M <sup>2</sup>	Im
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo:

Barras 5,6,7 y 8

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 17 y 19

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ 9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 11 y 12

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 18 y 20

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces y particionando en la forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}
 12.8 & 9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & -9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9.6 & 40.5 & 0 & 0 & 0 & -33.3 & -9.6 & -7.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 12.8 & -9.6 & -12.8 & 9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -9.6 & 40.5 & 9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -12.8 & 9.6 & 50.6 & 0 & -25.0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & -9.6 \\
 0 & -33.3 & 9.6 & -7.2 & 0 & 81.0 & 0 & 0 & 0 & -33.3 & -9.6 & -7.2 \\
 -12.9 & -9.6 & 0 & 0 & -25.0 & 0 & 50.6 & 0 & -12.8 & 9.6 & 0 & 0 \\
 -9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 & 0 & 0 & 0 & 81.0 & 9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & 9.6 & -7.2 & -9.6 & -25.0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33.3 & 9.6 & -7.2 & -9.6 & 40.5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & -9.6 & 0 & 0 & -25.0 & 0 & 37.8 & 9.6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 & 0 & 0 & 9.6 & 40.5
 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Para obtener la matriz de rigideces condensada para esta subestructura se aplica la ecuación:

$$K_{bi} = K_{ii} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

realizando operaciones:

$$K_{bi} = \begin{bmatrix} 4.42 & 0.02 & -4.42 & -0.018 \\ 0 & 0 & 0 & -0.003 \\ -4.42 & 0.018 & 4.42 & 0.02 \\ 0 & -0.0057 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en nodos interiores producto de la influencia de las cargas aplicadas directamente en los nodos interiores están dadas por:

$$\begin{aligned}
 P_{ii}^{\alpha} &= (K_{bi} K_{ii}^{-1})_I P_{ii} \\
 P_{ii}^{\alpha} &= (K_{ii}^{-1})_I P_{ii}
 \end{aligned}
 \quad
 P_{ii}^{\alpha} = \begin{bmatrix} P'_{GX} \\ P'_{GY} \\ P'_{HX} \\ P'_{HY} \\ P'_{IX} \\ P'_{IY} \\ P'_{JX} \\ P'_{JY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

haciendo operaciones resulta:

$$P^{\alpha_{bl}} = \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} ; D^{\alpha_{bl}} = \begin{bmatrix} 0.463 \\ 0.165 \\ 0.398 \\ -0.150 \\ 0.829 \\ 0.211 \\ 0.791 \\ -0.172 \end{bmatrix} \times 10^4$$

## SUBESTRUCTURA II

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento  $P' = K' D'$  para esta subestructura resulta:

$$\begin{bmatrix} P'_E \\ P'_F \\ P'_C \\ P'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_{10} + (K'_{22})_{16} + (K'_{12})_3 & (K'_{12})_{10} & (K'_{21})_3 & (K'_{21})_{16} \\ (K'_{21})_{10} & (K'_{22})_{15} + (K'_{22})_{10} + (K'_{22})_4 & (K'_{21})_{15} & (K'_{21})_4 \\ (K'_{21})_3 & (K'_{12})_{15} & (K'_{22})_{15} + (K'_{22})_4 + (K'_{11})_6 + (K'_{11})_{13} + (K'_{11})_3 & (K'_{12})_6 \\ (K'_{12})_{16} & (K'_{12})_4 & (K'_{21})_6 & (K'_{22})_2 + (K'_{22})_{13} + (K'_{22})_4 + (K'_{11})_{16} + (K'_{11})_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_E \\ D'_F \\ D'_C \\ D'_D \end{bmatrix}$$

En igual forma que para la subestructura I, para valuar las rigideces de la subestructura II se hace la siguiente tabla:

Barra	EA	L	I	M	L <sup>2</sup>	M <sup>2</sup>	Lm
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo

Barras 1,2,3 y 4

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 13 y 15

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ -9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 9 y 10

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 14 y 16

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces resulta:

37.8	-9.6	-25.0	0	0	0	-12.8	9.6
-9.6	40.5	0	0	0	-33.3	9.6	-7.2
-25.0	0	37.8	9.6	-12.8	-9.6	0	0
0	0	9.6	40.5	-9.6	-7.2	0	-33.3
0	0	-12.8	-9.6	50.6	0	-25.0	0
0	-33.3	-9.6	-7.2	0	81.0	0	0
-12.8	9.6	0	0	-25.0	0	50.6	0
9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	0	81.0

particionando la matriz de rigideces en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

Para condensar a los grados de libertad en las fronteras se aplica la fórmula:

$$K_{bll} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

después de realizar operaciones se obtiene:

$$K_{bll} = \begin{bmatrix} 32.40 & -5.53 & -27.10 & 2.38 \\ -5.32 & 23.80 & -2.36 & -4.73 \\ -27.10 & -2.38 & 32.40 & 5.53 \\ 2.36 & -4.73 & 5.55 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en los nodos interiores están dados por:

$$P^{\alpha}_b = K_b K^{-1}_u P^{\alpha}_i$$

$$P^{\alpha}_{ill} = \begin{bmatrix} P_{CX} \\ P_{CY} \\ P_{DX} \\ P_{DY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{\alpha}_{ill} = K^{-1}_u P^{\alpha}_{ill}$$

realizando operaciones:

$$P^{\alpha}_{bll} = \begin{bmatrix} -0.825 \\ 0.620 \\ -1.675 \\ -1.250 \end{bmatrix} \quad U_{ill} = \begin{bmatrix} 1307.25 \\ 0 \\ 645.85 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### RELAJACION DE LAS FRONTERAS.

El acoplamiento de las subestructuras se hace considerándolas como elementos equivalentes.

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P^{\beta}_b = K_b D^{\beta}_b$$

donde:

$$P^{\beta}_b = P_b - \Sigma P^{\beta}_b$$

el vector de cargas aplicado directamente en las fronteras resulta:

$$P_b = \begin{bmatrix} P_{EX} \\ P_{EY} \\ P_{FX} \\ P_{FY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$P_b^B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.83 \\ 0.62 \\ -1.68 \\ -1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.46 \\ 7.73 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene en este caso particular sumando las submatrices condensadas para las subestructuras I y II, así:

$$K_b = K_{bI} + K_{bII}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene:

$$\begin{bmatrix} 9.48 \\ 7.63 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.82 & -5.55 & -31.52 & 2.36 \\ -5.53 & 23.80 & -2.36 & -4.76 \\ -31.52 & -2.36 & 36.82 & 5.55 \\ 2.36 & -4.76 & 5.55 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} D_{EX} \\ D_{EY} \\ D_{FX} \\ D_{FY} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} D_{EX} \\ D_{EY} \\ D_{FX} \\ D_{FY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31636.12 \\ 11445.58 \\ 31125.70 \\ -11057.01 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

corrección de los desplazamientos en los nodos interiores:

$$D_{II}^{\beta} = (K_{II}^{-1} K_{Ib})^I D_b$$

$$D_{III}^{\beta} = -(K_{III}^{-1} k_{Ib})^{II} D_B$$

sustituyendo valores en las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$D_{II}^{\beta} = \begin{bmatrix} 48219.06 \\ 11494.74 \\ 48296.60 \\ -11004.82 \\ 65141.43 \\ 11490.29 \\ 65128.16 \\ -11014.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \quad D_{III}^{\beta} = \begin{bmatrix} 141452.51 \\ 7429.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

por lo que los desplazamientos totales en los nodos interiores se obtienen con la expresión:

$$D_I = D_I^{\alpha} + D_I^{\beta}$$

sustituyendo:

$$D_{II} = \begin{bmatrix} 52849.06 \\ 13144.74 \\ 52276.60 \\ -1254.82 \\ 73431.43 \\ 13600.29 \\ 73038.16 \\ -12734.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} D_{Gx} \\ D_{Gy} \\ D_{Hx} \\ D_{Hy} \\ D_{Ix} \\ D_{Iy} \\ D_{Jx} \\ D_{Jy} \end{bmatrix}; \quad D_{III} = \begin{bmatrix} 12759.76 \\ 7424.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} D_{Cx} \\ D_{Cy} \\ D_{Dx} \\ D_{Dy} \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, se procede a determinar las fuerzas en cada una de las barras, para lo cual se sigue el mismo procedimiento que cuando se aplica el método directo de las rigideces. Aquí se ilustra el procedimiento únicamente para dos barras.

Por compatibilidad:

$$\begin{aligned} D'_{1,1} &= 0 & D'_{2,1} &= D'_C \\ D'_{1,3} &= D'_C & D'_{2,3} &= D'_E \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$\begin{aligned} P'_1 &= K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2 \\ P'_2 &= K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2 \end{aligned}$$

Barra 1

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.72 \end{bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13.39 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local:

$$P = T^t P$$

Barra 1

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} = -24.72 \text{ ton.}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} = 24.72 \text{ ton.}$$

Barra 3

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} = -13.39 \text{ ton.}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} = 13.39 \text{ ton.}$$

Se deja al lector la determinación de la fuerza en las otras barras, así como la comprobación del equilibrio.

### 4.3 MARCOS

Aplicando el método de las subestructuras, determinar los desplazamientos y los elementos mecánicos del marco mostrado en la figura 4.6.

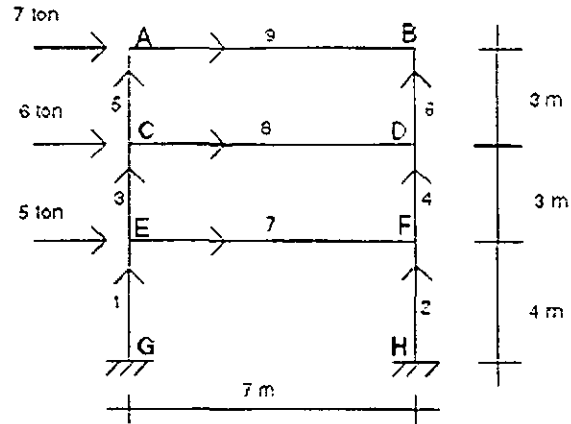


Figura 4.6

Utilizar secciones de 40x80 para las traveses y 40x40 para las columnas, un  $f'c$  de  $250 \text{ kg/cm}^2$  por lo tanto un módulo de elasticidad de 14000

La partición se realiza en los nodos C y D como se muestra en la figura 4.7. Vale la pena mencionar que la partición de la estructura es arbitraria, en un momento dado el número de subestructuras, así como su tamaño se puede considerar en función del tamaño de las matrices por invertir como se mencionó en el problema anterior.

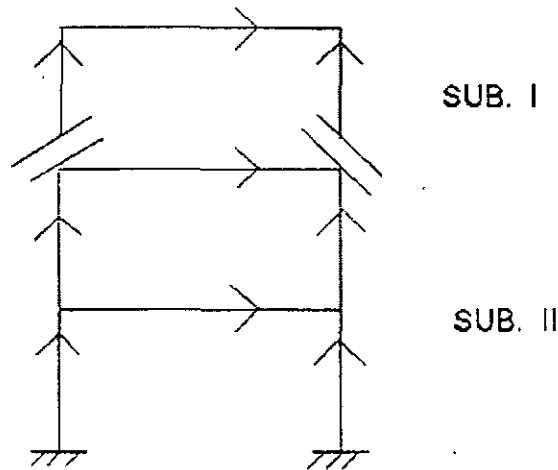


Figura 4.7

### ANÁLISIS DE SUBESTRUCTURA I

La matriz de rigideces de la subestructura I en el sistema global está dada por:



$$\begin{vmatrix}
 (K'_{22})_3 + (K'_{11})_8 & (K'_{12})_8 & (K'_{21})_5 & 0 \\
 (K'_{12})_8 & (K'_{22})_4 + (K'_{22})_8 & 0 & (K'_{21})_4 \\
 (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_1 + (K'_{11})_7 + (K'_{11})_3 & (K'_{12})_7 \\
 0 & (K'_{12})_4 & (K'_{21})_7 & (K'_{22})_2 + (K'_{22})_7 + (K'_{11})_4
 \end{vmatrix}$$

Valuando las submatrices de rigideces para cada barra en igual forma que en el método directo, sustituyendo y patrocinando en:

$$K_I = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\begin{vmatrix}
 10.3 & 0 & 31.5 & -10.1 & 0 & 0 & -21.0 & 0 & 31.5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 11.9 & 46.3 & 0 & -0.13 & 46.3 & 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 31.5 & 46.3 & 27884.2 & 0 & -46.3 & 10794 & -31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 0 & 0 \\
 -10.1 & 0 & 0 & 10.3 & 0 & 31.5 & 0 & 0 & 0 & -0.021 & 0 & 31.5 \\
 0 & -0.13 & -46.3 & 0 & 11.9 & -46.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 \\
 0 & 46.3 & 10794 & 31.5 & -46.3 & 27884.2 & 0 & 0 & 0 & -31.5 & 0 & 3148.2 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 -21.0 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 & 10.4 & 0 & -13.8 & -10.1 & 0 & 0 \\
 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20.8 & 46.3 & 0 & -0.13 & 46.3 \\
 31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 0 & 0 & -13.8 & 46.3 & 32606.5 & 0 & -46.3 & 10794 \\
 0 & 0 & 0 & -0.21 & 0 & -31.5 & -10.1 & 0 & 0 & 10.4 & 0 & -13.8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 & -0.13 & -46.3 & 0 & 20.8 & -46.3 \\
 0 & 0 & 0 & 31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 46.3 & 10794 & -13.8 & -46.3 & 32606.5
 \end{vmatrix} \cdot 10^2$$

Todos los valores de la matriz de rigideces han redondeado a un decimal por falta de espacio.

Condensando a los grados de libertad en la frontera se tiene:

$$K_{bi} = K_{bb} - K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

$$K_{bi} = \begin{vmatrix}
 1022.59 & -1.30 & 1753.87 & -1017.52 & 1.3 & -911.09 \\
 -1.30 & 520.27 & 4522.06 & -1.34 & 14.25 & 4522.06 \\
 1753.87 & 4522.06 & 259384.1 & -9111.29 & -422.18 & 934633.9 \\
 -1017.52 & -1.34 & -911.29 & 1022.59 & 1.30 & 1753.87 \\
 1.3 & 14.25 & -422.18 & 1.30 & 520.27 & -4522.06 \\
 -911.09 & 4522.06 & 934633.9 & 1753.87 & -4522.06 & 2593829.7
 \end{vmatrix}$$

El vector de empotramiento para la subestructura I, está dado por:

$$K_{bl}^{\beta} = K_{bl} - K_{ll}^{-1} P_l^{\alpha}$$

$$P_{ll}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; P_{bl}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1.723 \\ 0.142 \\ -262.75 \\ -1.676 \\ -0.142 \\ -255.55 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos para los nodos interiores:

$$D_{bl}^{\alpha} = K_{bl} - K_{ll}^{-1} P_l^{\alpha}$$

$$D_{ll}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 12.05 \times 10^{-5} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## ANALISIS DE LA SUBESTRUCTURA II

Matriz de rigideces para esta subestructura está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} (K'_{11})_5 & 0 & (K'_{12})_5 & 0 \\ 0 & (K'_{11})_6 & 0 & (K'_{12})_6 \\ (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_5 + (K'_{11})_9 & (K'_{11})_9 \\ 0 & (K'_{21})_6 & (K'_{21})_9 & (K'_{22})_6 + (K'_{22})_9 \end{bmatrix}$$

Valuando las submatrices, sustituyendo y patrocinando se obtiene:

0.21	0	-31.5	0	0	0	-21.0	0	-31.5	0	0	0
0	11.8	0	0	0	0	0	-11.8	0	0	0	0
-31.5	0	6296.4	0	0	0	31.5	0	3148.2	0	0	0
0	0	0	0.21	0	-31.5	0	0	0	-0.21	0	-31.5
0	0	0	0	11.8	0	0	0	0	0	-11.8	0
0	0	0	-31.5	0	6296.4	0	0	0	31.5	0	3148.2
<hr/>											
-21.0	0	31.5	0	0	0	10.3	0	31.5	-10.1	0	0
0	-11.8	0	0	0	0	0	11.9	46.3	0	-0.13	46.3
-31.5	0	3148.2	0	0	0	31.5	46.3	27884.2	0	-46.3	1079.4
0	0	0	0-0.21	0	31.5	-10.1	0	0	10.3	0	31.5
0	0	0	0	-11.8	0	0	-0.13	-45.3	0	11.9	-46.3
0	0	0	-31.5	0	3148.2	0	46.3	10794	31.5	-46.3	27884.2

La matriz condensada a los grados de libertad resulta:

$$K_{bII} = K_{bb} - K_{bI} K^{-1}_{II} K_{Ib}$$

$$K_{bII} = \begin{bmatrix} 7.58 & -0.0103 & -1279.11 & -7.58 & +0.0103 & 1279.12 \\ -0.0103 & 0.59 & 214.39 & -0.0025 & -0.602 & 214.39 \\ -1279.11 & 214.39 & 359588.9 & 1277.38 & -215.22 & -209481.9 \\ -7.58 & -0.0025 & 1277.38 & 7.58 & 0.0103 & -1279.12 \\ 0.103 & -0.602 & -215.22 & 0.0103 & 0.59 & -214.39 \\ 1279.12 & 214.39 & -209481.9 & -1279.12 & 214.39 & 359588.9 \end{bmatrix}$$

El vector de empotramiento para ésta subestructura, está dado por;

$$P_{bII}^{\beta} = K_{bI} - K_{II}^{-1} P_I^{\alpha}$$

$$P_{III}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{bII}^{\beta} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ -1.43 \\ 554.19 \\ -3.47 \\ 1.43 \\ 545.37 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos en los nodos interiores está dado por:

$$D_{III}^{\alpha} = K_{II}^{-1} P_{III}^{\alpha}$$

$$D_{III}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## RELAJACION DE FRONTERAS

El acoplamiento de las subestructuras se hace como ya se mencionó con los elementos equivalentes, a través de la ecuación fuerza-desplazamiento

$$P_b^{\beta} = K_b D_b$$

donde:

$$P_{bII}^{\beta} = P_b - P_{B_i}^{\beta} P_{bII}^{\beta}$$

el vector de cargas  $P_b$  aplicado directamente en la fronteras resulta

$$P_B = \begin{bmatrix} P_{CX} \\ P_{CY} \\ M_{CZ} \\ P_{DX} \\ P_{DY} \\ M_{DZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo para obtener

$$P_b^{\beta} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.723 \\ 0.142 \\ -262.75 \\ -1.676 \\ -0.142 \\ -255.55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.53 \\ -1.43 \\ 554.19 \\ -3.47 \\ 1.43 \\ 545.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.253 \\ 1.288 \\ -291.44 \\ 5.146 \\ -1.288 \\ -289.82 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene para este caso particular sumando las dos submatrices condensadas

$$K_b = K_{bI} + K_{bII}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza desplazamiento se obtiene:

11.253	1030.17	-1.31	474.76	-1025.1	1.31	368.03	$D_{cx}$
1.288	-1.31	520.86	4736.45	-1.34	-14.85	4736.45	$D_{cy}$
-291.44	474.76	4736.45	2953430	366.09	-4737.4	725152	$D_{cz}$
5.146	-1025.1	-1.34	366.09	1030.17	1.31	474.75	$D_{dx}$
-1.288	1.31	-14.85	-4737.4	1.31	520.86	-4736.45	$D_{dy}$
-289.82	368.03	4736.45	725152	474.75	-4736.45	2953418	$D_{dz}$

Solucionando el sistema se obtienen los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad en las fronteras, así:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_{CX} \\ D_{CY} \\ D_{CZ} \\ D_{DX} \\ D_{DY} \\ D_{DZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.716 \\ 0.020 \\ -5.0 \times 10^{-4} \\ 1.713 \\ -0.020 \\ -5.2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos  $D_{CZ}$  y  $D_{DZ}$  corresponden a los desplazamientos angulares alrededor de "z" en los nodos "D" y "C" respectivamente.

### CORRECCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LOS NODOS INTERIORES.

Esta corrección para la subestructura I esta dada por

$$D_{II}^{\beta} = - (K_{II}^{-1} K_{bI})_I D_{bI}$$

en esta ecuación todos los términos corresponden a la subestructura I, por lo cual se les ha asignado el subíndice I. Después de efectuar operaciones, resulta:

$$U_{II}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en igual forma para la subestructura II

$$D_{III}^{\beta} = - (K_{III}^{-1} K_{bII})_{II} D_{bII}$$

sustituyendo:

$$D_{III}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-4} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES EN NODOS INTERIORES

Estos desplazamientos se obtiene sumando los desplazamientos generados directamente por las cargas P más los desplazamientos corrección así:

$$D_i = D_i^\alpha + D_i^\beta$$

para la subestructura I

$$D_{ii} = D_{ii}^\alpha + D_{ii}^\beta$$

sustituyendo:

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} D_{EX} \\ D_{EY} \\ D_{EZ} \\ D_{FX} \\ D_{FY} \\ D_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.193 \\ 0.015 \\ -8.72 \times 10^{-4} \\ 1.194 \\ -0.015 \\ -8.69 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en forma similar para la subestructura II

$$D_{iii} = D_{iii}^\alpha + D_{iii}^\beta$$

sustituyendo:

$$D_{iii} = \begin{bmatrix} D_{AX} \\ D_{AY} \\ D_{AZ} \\ D_{BX} \\ D_{BY} \\ D_{BZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-5} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.997 \\ 0.216 \\ -2.38 \times 10^{-4} \\ 1.994 \\ -0.022 \\ -2.37 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas en los ejemplos fueron toneladas para las cargas y centímetros como unidad de longitud, por lo que los desplazamientos lineales resultan en centímetros y los angulares en radianes.

Conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, los elementos mecánicos se determinan aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra como se hizo cuando se aplicó el método directo de las rigideces.

## 5.1 ESFUERZOS.

Considérese un cuerpo sólido homogéneo sometido a un sistema de cargas que lo mantienen en equilibrio. Si el cuerpo se corta por un plano N como se indica en la figura 5.1. a

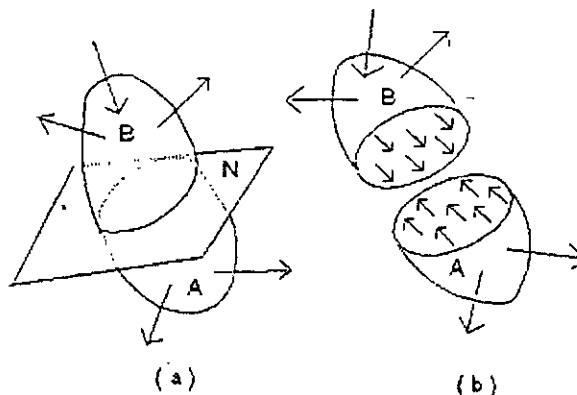


Figura 5.1

El cuerpo se ha dividido en dos partes, parte A y parte B, por el plano de corte N. A la acción que ejerce una parte sobre la otra en la superficie de corte se les llama fuerzas de interacción. Las fuerzas de interacción en la parte A equivalen a la resultante de las cargas que obran en la parte B y viceversa. Si se retira la parte B el sistema de fuerzas de interacción aplicadas a la parte A están en desequilibrio; sin embargo la parte A esta en equilibrio, es decir las fuerzas de interacción son equilibradas por el sistema de fuerzas exteriores  $P_1, P_2, \dots, P_n$  que actúan sobre esta parte del cuerpo.

## 5.1.1 ESFUERZO EN UN PUNTO.

El esfuerzo medio o promedio es el cociente de dividir a la fuerza  $F$  entre el área internos ocasionados por  $F$ , pero no precisa la forma en que están distribuidos en la sección. El esfuerzo promedio es más explícito en cuanto a la distribución en tanto que el área de la sección sea más pequeña.

Considérese un cuerpo por el cual se ha hecho pasar un plano de corte N, el cual está definido por la normal exterior al mismo. Sea  $P$  un punto cualquiera de la sección en estudio,  $\Delta A$  un elemento de área que lo contiene y  $\Delta F$  sea la resultante de las fuerzas que obran en el elemento de área. Si se reduce el contorno de  $\Delta A$  alrededor del punto  $P$ , entonces el área  $\Delta A$  y la resultante de cargas  $\Delta F$  en dicha área disminuirán y tenderán a cero. Al límite

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

se le denomina esfuerzo en el punto P de superficie situado en el plano de corte N.

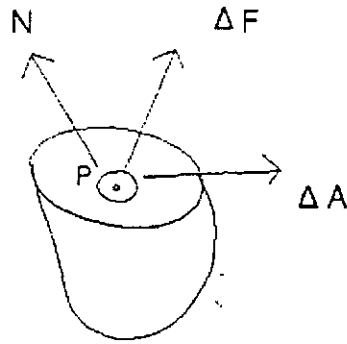


Figura 5.2

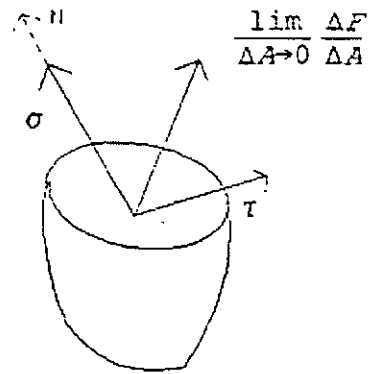


Figura 5.3

Este esfuerzo es un vector y es susceptible de descomponerse en dos, uno perpendicular al plano N y otro contenido en el mismo. Estas componentes reciben los nombres de esfuerzo normal  $\sigma$  y esfuerzo tangencial  $\tau$  en el punto respectivamente. Así:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad ; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$$

en donde  $\Delta N$  y  $\Delta V$  son las componentes normal y tangencial de la fuerza  $\Delta F$  correspondientes al elemento de área  $\Delta A$ , figura 5.3.

Para este trabajo los planos de corte se harán de tal manera que sean perpendiculares a uno de los ejes coordenados X, Y o Z.

Al esfuerzo normal asociado a un plano cuya normal es N, se denotará como  $\sigma_N$  y al esfuerzo tangencial como  $\tau_N$ ; sin embargo este último se puede descomponer en dos de acuerdo a los ejes que forman el plano por lo cual se denotará  $\tau_{Nj}$  donde el primer índice indica el plano al cual pertenece y el segundo índice indica la dirección del mismo. Figura 5.4



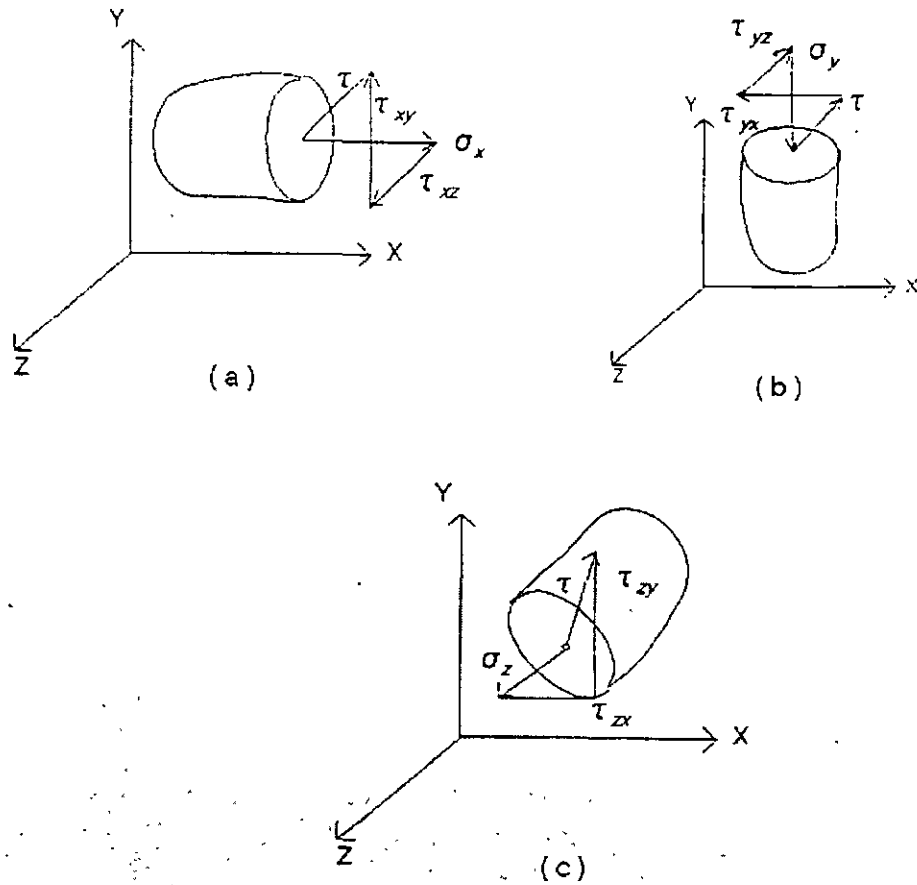


Figura 5.4

donde:  $\sigma_i$  es el esfuerzo normal en el plano y  $\tau_{ij}$  esfuerzo tangencial plano y, dirección j

### 5.1.2 ESFUERZOS EN PLANOS PARALELOS.

Separaremos de un cuerpo sólido un elemento infinitamente pequeño en forma de paralelepípedo cuyo volumen es  $dx dy dz$ , el cual se encuentra en equilibrio, figura 5.5

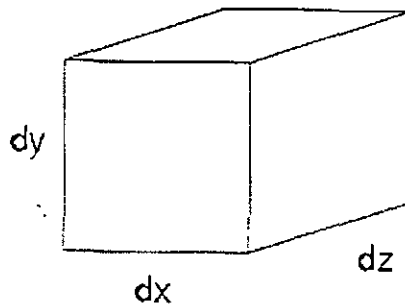


Figura 5.5

La acción que ejercen las partes suprimidas del cuerpo sobre el elemento aislado, los reemplazamos por fuerzas y los esfuerzos que generan, dichas fuerzas las descomponemos en tres componentes en cada cara, resultando así  $6 \times 3 = 18$  esfuerzos. Además se considera que en el cuerpo existen las llamadas fuerzas másicas ( fuerzas de cuerpo que son debidas a la gravedad ), también estas fuerzas se descomponen en 3 componentes X, Y, y Z figura 5.6

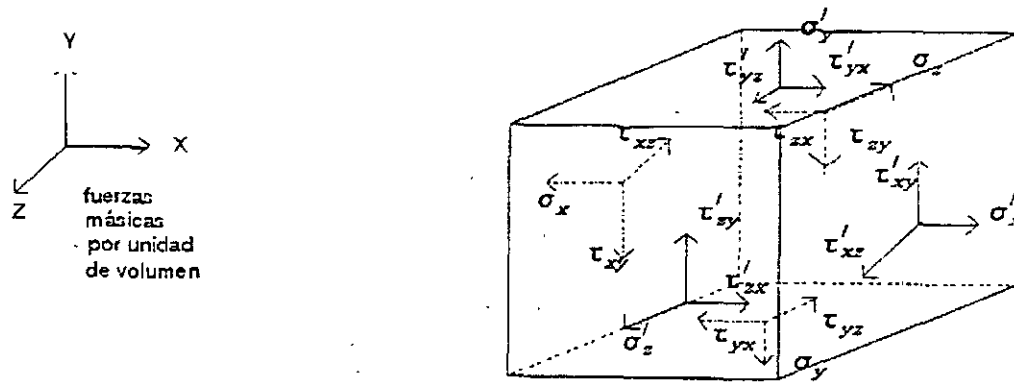
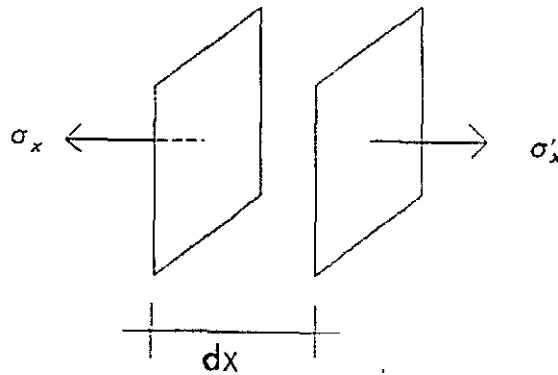


Figura 5.6

Aislando dos planos paralelos:



$$\sigma'_x = \sigma_x + d\sigma_x$$

sea  $\phi$  función de  $(x,y,z)$  entonces  $\phi = \phi(x,y,z)$ , se sabe que la diferencial de  $\phi$  está dada por:

$$d\phi = \frac{\delta \phi}{\delta x} dx + \frac{\delta \phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \phi}{\delta z} dz$$

si la función  $\sigma_x$  es igual a la función  $\phi$  y se considera que  $\sigma_x$  es función única y exclusivamente de la variable "x", entonces:

por lo que:

$$d\sigma = \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx$$
$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\delta\phi}{\delta z} + dx$$

en forma análoga para los otros esfuerzos:

$$\sigma'_y = \sigma_{yx} + \frac{\delta\sigma_y}{\delta z} dy$$
$$\sigma'_z = \sigma_{zx} + \frac{\delta\sigma_z}{\delta y} dz$$
$$\tau'_{xy} = \tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} dx$$
$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta x} dx$$
$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y} dy$$
$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta y} dy$$
$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} dz$$
$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\delta\tau_{zy}}{\delta z} dz$$

representando estos esfuerzos en el cubo elemental se obtiene la figura 5.7

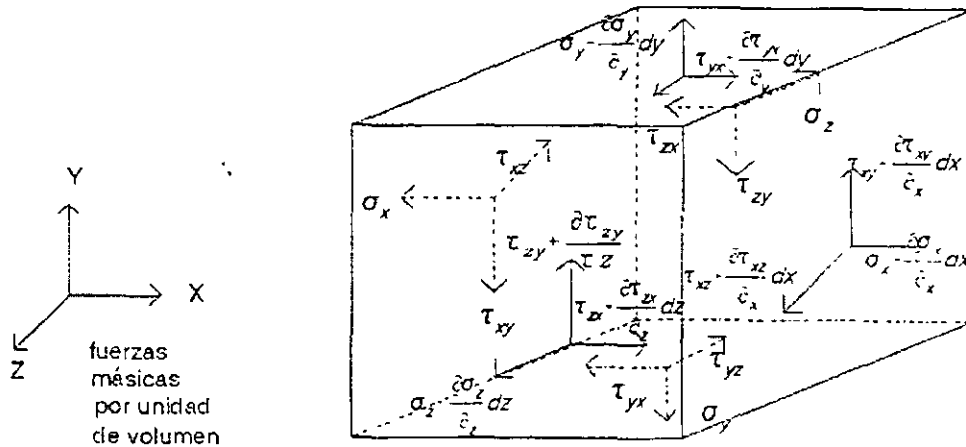


Figura 5.7

## 5.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Considérese que las fuerzas de cuerpo actúan en el centro de gravedad del paralelepípedo figura 5.7 y que se encuentra en equilibrio; entonces deben verificarse las 6 ecuaciones de equilibrio estático.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  resulta:

$$-\sigma_x d_y d_z + \left( \sigma_x + \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} d_x \right) d_y d_z - \tau_{xz} d_x d_z + \left( \tau_{xz} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} d_x \right) d_x d_z + \tau_{zx} d_x d_z + \left( \tau_{zx} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} d_z \right) d_x d_z + x d_x d_y d_z = 0$$

desarrollando:

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} d_x d_y d_z + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} d_x d_y d_z + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} d_x d_y d_z + x d_x d_y d_z = 0$$

dividiendo entre  $d_x d_y d_z$

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} + x = 0$$

En forma similar para las otras dos ecuaciones de equilibrio se obtiene respectivamente:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ y } \Sigma F_z = 0$$

$$\frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + y = 0$$

$$\frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} + z = 0$$

A estas tres ecuaciones se les llama ecuaciones de Navier o de equilibrio interno.

### 5.3 ESFUERZOS EN PLANOS PERPENDICULARES.

Aplicando las últimas tres ecuaciones de equilibrio ( suma de momentos igual a cero ) se puede conocer la relación de los esfuerzos en planos perpendiculares. Así aplicando  $\Sigma M_z = 0$  de la figura 5.8

$$\left( \tau_{yx} - \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} d_y \right) d_z d_x \frac{d_y}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} d_x \right) d_z d_y \frac{d_x}{2} + \tau_{yx} d_z d_x \frac{d_y}{2} - \tau_{xy} d_z d_y \frac{d_x}{2} = 0$$

reordenando términos y dividiendo entre  $dx dy dz$ :

$$\tau_{yx} - \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} d_y - \tau_{xy} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} d_x = 0$$

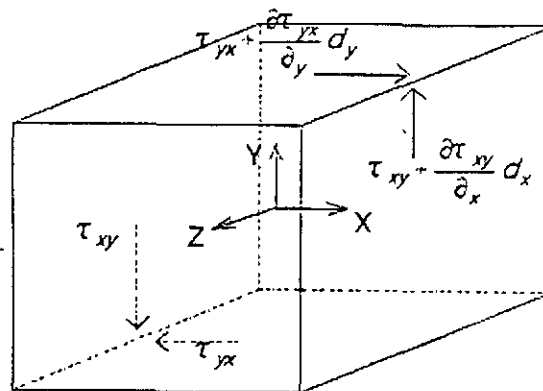


Figura 5.8

aplicando límites cuando  $dx$  y  $dy$  tiendan a cero, resulta finalmente:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

En forma similar aplicando  $\Sigma M_y = 0$  y  $\Sigma M_x = 0$  se obtiene

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De lo anterior los 18 esfuerzos incógnitas figura 5.6 se han reducido a seis que son:

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_y, \sigma_y, \tau_{yz} \text{ y } \sigma_z$$

Agrupando los esfuerzos de 3 caras únicamente obtenemos lo que se conoce como tensor de esfuerzos.

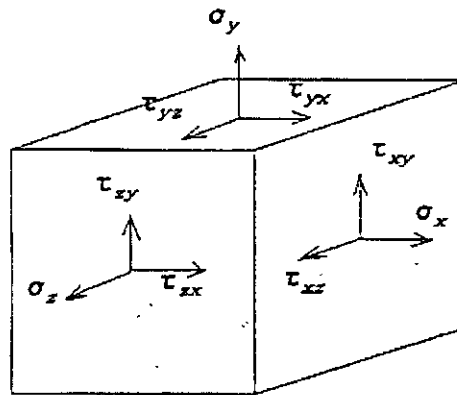


Figura 5.9

$$\tau_x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \tau_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = \left[ \begin{Bmatrix} \tau_x \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_y \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_z \end{Bmatrix} \right]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a esta agrupación se le llama tensor de esfuerzos.

#### 5.4 ESFUERZOS EN PLANOS OBLICUOS.

Para conocer los esfuerzos que actúan sobre las caras oblicuas pertenecientes a la superficie, se requiere establecer una relación de los esfuerzos que actúan en las tres áreas elementales paralelas a los planos coordenados, como se muestra en la figura 5.10

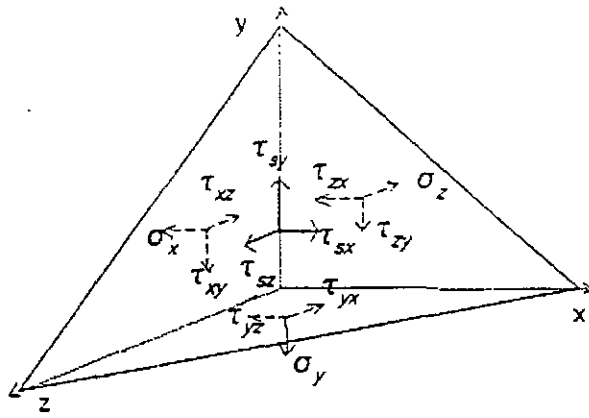


Figura 5.10

por equilibrio:

$$\sum FX = 0$$

$$0 = \tau_{sx} ds - \sigma_x \frac{dzdy}{2} - \tau_{yx} \frac{dxdy}{2} - \tau_{zx} \frac{dxdy}{2}$$

pero:

$$\frac{dzdy}{2} = ds \cos(s, x)$$

$$\frac{dxdy}{2} = ds \cos(s, y)$$

$$\frac{dxdy}{2} = ds \cos(s, z)$$

$$0 = \tau_{sx} dx - \sigma_x ds \cos(s, x) - \tau_{yx} ds \cos(s, y) - \tau_{zx} ds \cos(s, z)$$

de donde:

$$\tau_{sx} = \sigma_x \cos(s, x) + \tau_{yx} \cos(s, y) + \tau_{zx} \cos(s, z)$$

Aplicando las otras dos ecuaciones de equilibrio  $\sum Fy = 0$  y  $\sum Fz = 0$  se obtiene respectivamente:

$$\tau_{sy} = \sigma_y \cos(s, y) + \tau_{xy} \cos(s, x) + \tau_{zy} \cos(s, z)$$

$$\tau_{sz} = \sigma_z \cos(s, z) + \tau_{xz} \cos(s, x) + \tau_{yz} \cos(s, y)$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tau_{sx} \\ \tau_{sy} \\ \tau_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(s, x) \\ \cos(s, y) \\ \cos(s, z) \end{bmatrix}$$

a este sistema de ecuaciones se les llama ecuaciones de superficie o ecuaciones de Cauchy.

### 5.5. VARIACION DEL ESFUERZO CON LA VARIACION DEL ELEMENTO.

Considérese un cuerpo sólido sometido a un sistema de cargas que se encuentra en equilibrio por el cual se trazan dos planos de corte el a-a y el b-b como se muestra en la figura 5.11

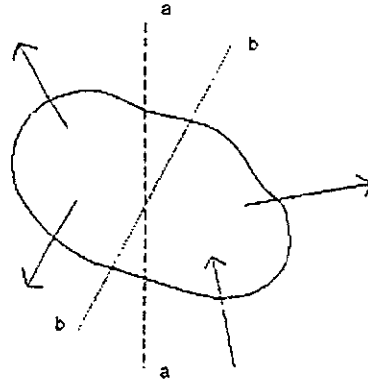


Figura 5.11

El plano de corte se traza perpendicularmente a la dirección de la resultante  $r$ , el cual se representa en la figura 5.12.

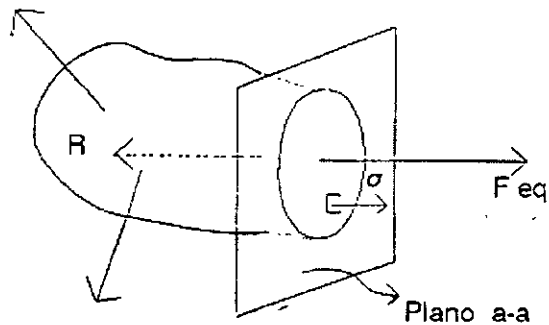


Figura 5.12

Cualquier elemento o punto situado en el plano de corte estará sometido únicamente a esfuerzo axial, mientras que si trazamos un plano de corte inclinado respecto de la dirección de la resultante, cualquier elemento situado en dicho plano estará sometido a esfuerzo normal y tangencial como se puede ver en la figura 5.13.

Si se particulariza a un estado plano de esfuerzos, donde únicamente se tengan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  como los esfuerzos en un punto, es decir  $\sigma_z = 0$  para  $i = x, y$ ; como se ilustra en la figura 5.14.



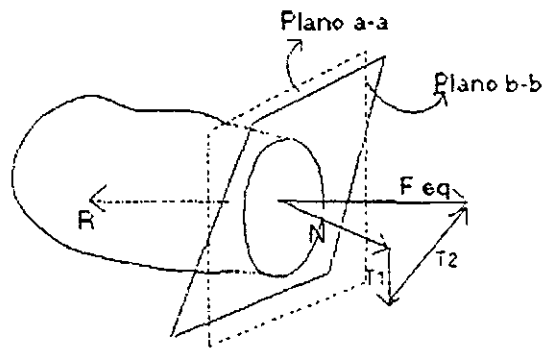


Figura 5.13

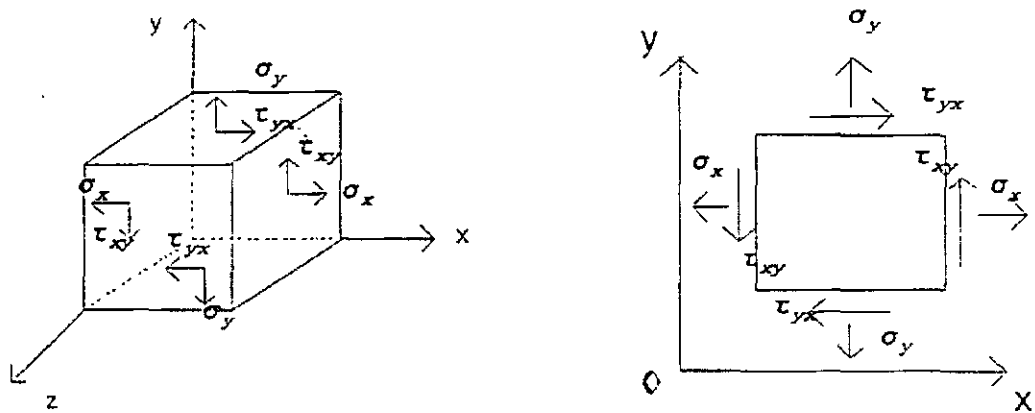


Figura 5.14

Los esfuerzos que actúan sobre cualquier plano "N" que contenga al eje Z y que está inclinado respecto a los ejes "X" e "Y" se representan en la figura 5.15

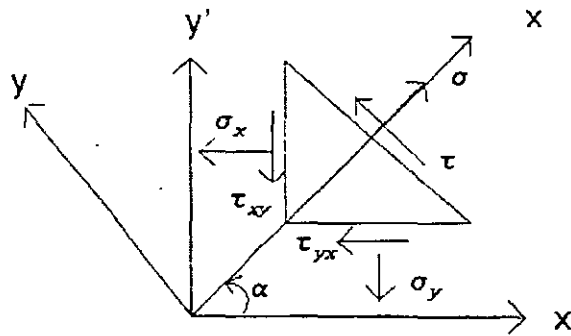


Figura 5.15

Si el área de la cara inclinada es una cantidad A; las áreas de las otras caras serán  $A \cos \alpha$  y  $A \sin \alpha$  para los planos x e y respectivamente, como se indica en la figura 5.16

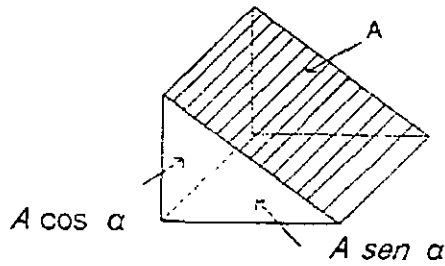


Figura 5.16

para aplicar el equilibrio dibujamos el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.17

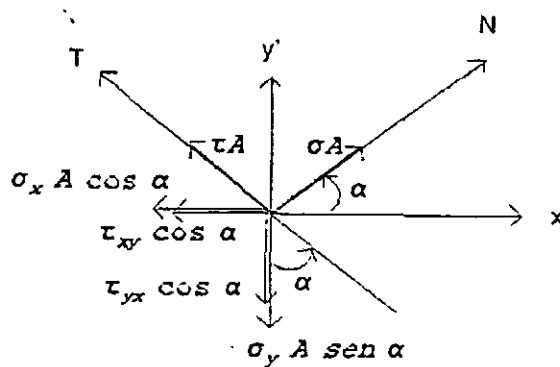


Figura 5.17

Aplicando  $\sum F_n = 0$

$$0 = \sigma A - \sigma_x A \cos \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} A \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \sin \alpha + \tau_{yx} A \cos \alpha \sin \alpha$$

de donde:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

sustituyendo

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma = \sigma_x \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_y \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) - 2\tau_{xy} \left( \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Simplificando términos:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad 5.1$$

Aplicando  $\Sigma F_t = 0$

$$0 = \tau A + \sigma_x A \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} A \sin^2 \alpha - \sigma_y A \sin \alpha - \tau_{xy} A \cos^2 \alpha$$

de donde:

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

sustituyendo las identidades trigonométricas anteriores:

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Las ecuaciones 5.1 y 5.2 representan el esfuerzo normal y cortante que están en función de dos esfuerzos en planos perpendiculares en dirección "X" e "Y".

## 5.6 ESFUERZOS PRINCIPALES.

Con frecuencia el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo y los planos donde se presentan tales esfuerzos. En general se determinan los planos donde se presentan los esfuerzos máximos y mínimos tanto normales como tangenciales, lo cual se logra igualando con cero las derivadas con respecto al ángulo de inclinación de las ecuaciones 5.1 y 5.2. Así para localizar el plano de un esfuerzo normal máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.1 respecto de  $\alpha$  y se iguala con cero.

$$\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2) \sin 2\alpha = 0$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

a partir de esta ecuación se puede encontrar dos direcciones perpendiculares entre sí, para las cuales el esfuerzo tangencial es nulo. Estas direcciones se llaman direcciones principales y los esfuerzos normales corresponden a los esfuerzos principales.

La magnitud de los esfuerzos principales se obtiene sustituyendo los valores de las funciones  $\sin 2\alpha$  y  $\cos 2\alpha$  correspondientes en la ecuación 5.1. Si

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

gráficamente:

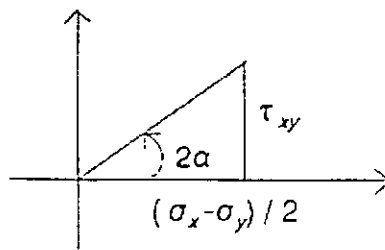


Figura 5.18

de donde:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) / 2}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

sustituyendo en la ecuación 5.1 se tiene:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

## 5.7 ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS.

De manera similar al estudio realizado antes para los esfuerzos normales se

procede con el esfuerzo cortante. Así para encontrar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.2 con respecto a  $\alpha$  y se iguala con cero. Después de efectuada esta operación se tiene:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) / 2}{\tau_{xy}}$$

donde  $\alpha$  define el plano donde el esfuerzo cortante es máximo o mínimo.

Haciendo la sustitución en la ecuación 5.2 de las funciones  $\operatorname{cos} 2\alpha$  y  $\operatorname{sen} 2\alpha$  determinadas en forma análoga a la de la figura 5.18 resulta:

$$\tau = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esta ecuación da los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Se observa que el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo.

El sentido definido de esfuerzo cortante siempre se puede determinar por sustitución directa de  $\alpha$  en la ecuación 5.2 (correspondiente al plano de máximo o mínimo esfuerzo cortante).

## 5.8 DEFORMACIONES

Considérese un cuerpo elástico, homogéneo e isótropo, sujeto de tal forma que no tiene movimiento de cuerpo rígido. Entonces todo corrimiento de sus puntos será originado por sus deformaciones. Así el punto "p" después de deformarse el cuerpo toma la posición p', gráficamente se tiene;

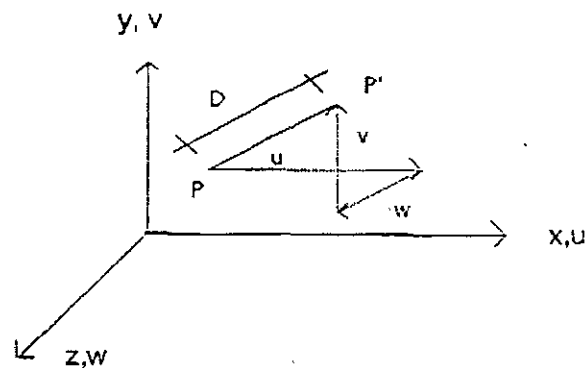


Figura 5.19

donde  $u,v$  y  $w$  son las proyecciones del desplazamiento  $pp'$  sobre los ejes coordenados.

Si se considera un elemento diferencial del cuerpo con dimensiones  $dx,dy,dz$  al deformarse, sus longitudes varían y se deforman los ángulos formados por sus caras, que inicialmente son rectas.

Se define como deformación lineal unitaria en un punto y en la dirección de P a P' como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{D}}{\Delta L}$$

Por facilidad considerese solamente una cara del cuerpo para determinar las deformaciones (estado plano de deformaciones), figura 5.20.

Si el cuerpo no se deforma, todos los puntos se desplazan,  $u$  en la dirección  $x$  y  $v$  en la dirección  $y$ ; pero como el cuerpo se deforma, entonces los puntos se desplazan  $u + du$  y  $v + dv$  respecto a cada eje.

Cuando la variación es respecto al eje  $x$ , entonces:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx \quad y \quad dv = \frac{\delta v}{\delta x} dx$$

si la variación es respecto al eje y, entonces:

$$du = \frac{\delta u}{\delta y} dy \quad ; \quad dv = \frac{\delta v}{\delta y} dy$$

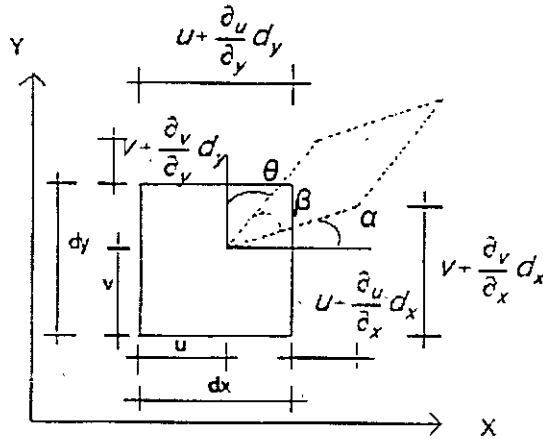


Figura 5.20

La deformación lineal unitaria en dirección X, será:

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\delta u}{\delta x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

La deformación lineal unitaria en dirección Y será:

$$\epsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\delta v}{\delta y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\delta v}{\delta y}$$

Generalizando a un espacio tridimensional:

$$\epsilon = \frac{\delta u}{\delta x}$$

La deformación angular se denota como  $\gamma_{xy}$  e indica la distorsión del cuerpo en plano Z ( formado por ejes x e y ).

De la figura 5.20 se tiene:  $\gamma_{xy} = \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$

para ángulos pequeños la tangente del ángulo es igual al ángulo en radianes, así:

$$\alpha = \frac{(v + \frac{\delta v}{\delta x} dx) - v}{dx + \frac{\delta u}{\delta x} dx} = \frac{\frac{\delta v}{\delta x}}{1 + \frac{\delta u}{\delta x}}$$

de donde:

$$\alpha = \frac{\delta v}{\delta x}$$

y

$$\theta = \frac{(u + \frac{\delta u}{\delta y} dy) - u}{dy + \frac{\delta u}{\delta y} dy} = \frac{\frac{\delta u}{\delta y}}{1 + \frac{\delta v}{\delta y}}$$

de donde:

$$\theta = \frac{\delta u}{\delta y}$$

así se tiene que:

$$\gamma_v = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

En general para un cuerpo en el espacio tridimensional se tiene lo siguiente:

$$\gamma_x = \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}$$

Resumiendo se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \quad \gamma_v = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z}$$

$$\epsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}$$

A estas seis expresiones se les conoce como relaciones de Cauchy.

## 5.9. ECUACIONES DE CONTINUIDAD.

Estas ecuaciones relacionan las deformaciones lineales con las angulares y se obtienen de las relaciones de Couchy derivando las deformaciones angulares como se indica:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} &= \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y^2} + \frac{\delta^3 v}{\delta x^2 \delta y} \\ \frac{\delta^2 \gamma_{xz}}{\delta x \delta z} &= \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta z^2} + \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta z} \\ \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta y \delta z} &= \frac{\delta^3 v}{\delta y \delta z^2} + \frac{\delta^3 w}{\delta y^2 \delta z}\end{aligned}$$

Las derivadas parciales tercera de u, v y w se obtienen derivando de las relaciones de Couchy las deformaciones lineales de tal manera que se obtenga el término deseado, así:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} &= \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y^2} & ; & & \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} &= \frac{\delta^3 v}{\delta x^2 \delta y} \\ \frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta z^2} &= \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta z^2} & ; & & \frac{\delta^2 \epsilon_z}{\delta x^2} &= \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta z} \\ \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta z^2} &= \frac{\delta^3 v}{\delta y \delta z^2} & ; & & \frac{\delta^2 \epsilon_z}{\delta y^2} &= \frac{\delta^3 w}{\delta y^2 \delta z}\end{aligned}$$

Sustituyendo en las primeras expresiones anteriores se obtienen las primeras 3 ecuaciones de compatibilidad, así:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} &= \frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2 \delta y} \\ \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta x \delta z} &= \frac{\delta^3 \epsilon_y}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_z}{\delta y^2} \\ \frac{\delta^2 \gamma_{xz}}{\delta x \delta z} &= \frac{\delta^3 \epsilon_x}{\delta z^2} + \frac{\delta^3 w}{\delta x^2}\end{aligned} \tag{5.3a}$$

Derivando nuevamente de las relaciones de Couchy las deformaciones angulares como se indica en seguida:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} &= \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} + \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta z} \\ \frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} &= \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta z} + \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta y} &= \frac{\delta^2 u}{\delta z \delta y} + \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\end{aligned}$$



multiplicador por -1 la primera de estas ecuaciones y sumándola con las otras dos se obtiene:

$$-\frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta z} + \frac{\delta\gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta\gamma_{zx}}{\delta y} = \frac{2\delta^2 w_{xz}}{\delta x \delta y}$$

derivando parcialmente respecto de z toda la ecuación se obtiene:

$$\frac{\delta}{\delta z} \left( -\frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta z} + \frac{\delta\gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta\gamma_{zx}}{\delta y} \right) = \frac{2\delta^3 w}{\delta x \delta y \delta z}$$

de las relaciones de Couchy se tiene que:

$$\epsilon_z = \frac{\delta u}{\delta z}$$

derivando parcialmente respecto de "x" e "y" resulta:

$$\frac{\delta^2 \epsilon_z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta y \delta z}$$

sustituyendo se obtiene:

$$\frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{\delta\gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta\gamma_{zx}}{\delta y} - \frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta z} \right) = \frac{2\delta^2 \epsilon_z}{\delta x \delta y}$$

En forma similar se obtienen las otras 2 ecuaciones;

$$\frac{\delta}{\delta z} \left( -\frac{\delta\gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta y} + \frac{\delta\gamma_{xy}}{\delta z} \right) = \frac{2\delta^2 \epsilon_x}{\delta y \delta z}$$

$$\frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta x} - \frac{\delta\gamma_{zx}}{\delta y} + \frac{\delta\gamma_{xy}}{\delta z} \right) = \frac{2\delta^2 \epsilon_y}{\delta x \delta z}$$

Las ecuaciones 5.3.a y 5.3.b. constituyen las seis ecuaciones de continuidad o compatibilidad que relacionan las deformaciones angulares con las deformaciones lineales.

## 5.10 RELACION ESFUERZO-DEFORMACION.

La solución de los problemas físicos de la teoría de elasticidad referente a las deformaciones que ocurren en un cuerpo elástico bajo la acción de fuerzas exteriores aplicadas a él no será posible mientras que los esfuerzos y deformaciones no estén relacionados por un ley física (Ley de Hooke)

Para deformaciones pequeñas la forma lineal es la más sencilla y más racional por lo tanto, se puede pensar que los esfuerzos son función de las deformaciones, es decir:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \\ \sigma_y &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \\ \sigma_z &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \\ \tau_{xy} &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \\ \tau_{yz} &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \\ \tau_{zx} &= f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})\end{aligned}$$

por lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_{13}\epsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= a_{21}\epsilon_x + a_{22}\epsilon_y + a_{23}\epsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx} \\ &\vdots \\ \tau_{zx} &= a_{61}\epsilon_x + a_{62}\epsilon_y + a_{63}\epsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}\end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

en forma reducida:

$$\{ \sigma \} = [ E ] \{ \epsilon \} \quad 5.4.a$$

o bien,

$$\{ \epsilon \} = [ E ]^{-1} \{ \sigma \} \quad 5.5$$

Para cuerpos elásticos isotrópicos las ecuaciones anteriores adquieren la forma más simple, se puede deducir a partir de la ley de Hooke aplicada a las barras elásticas sometidas a tensión o compresión.

En la figura 5.21 se muestra la gráfica del comportamiento del acero, se observa claramente dos zonas bien definidas, la elástica (lineal) y la no elástica (no lineal), el punto A marca el punto de proporcionalidad.

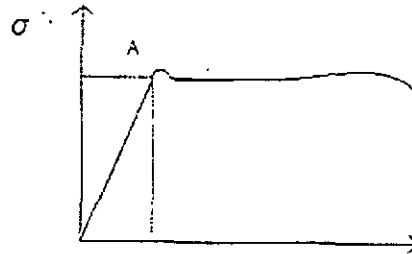


Figura 5.21

Esta gráfica es diferente para los distintos materiales y depende de la composición química y estructural de material.

En casi todos los materiales, el alargamiento longitudinal cuando hay solamente tensión, es acompañado por deformaciones transversales, siendo estas deformaciones proporcionales y de sentido contrario al alargamiento, como se muestra en la figura 5.22.

La deformación transversal en función de la deformación longitudinal se puede escribir como:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \mu \epsilon_x$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de proporcionalidad y se conoce como coeficiente de Poisson. Este coeficiente es constante para cada material, pero diferente para los distintos materiales.

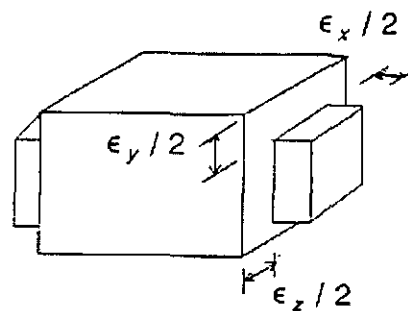


Figura 5.22

Además de las consideraciones hechas anteriormente se admitirá la proposición de que en un material elástico, homogéneo e isótropo el esfuerzo normal no genera distorsión angular y el esfuerzo cortante no genera alargamiento. Sobre esta base se determinaran las relaciones entre esfuerzo y deformación.

Considérese un paralelepípedo de aristas iguales a la unidad, sometido a la acción de fuerzas normales como se muestra en la figura 5.23.

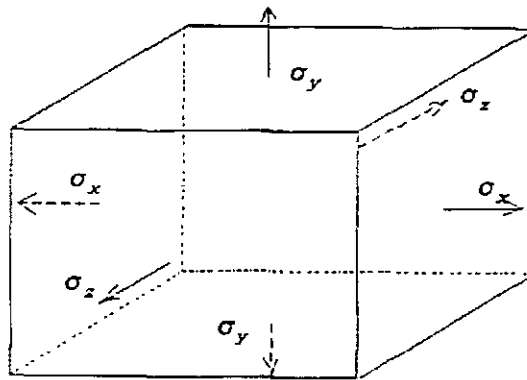


Figura 5.23

Si se considera que solamente actúa el esfuerzo  $\sigma_x$ , es decir  $\sigma_x \neq 0$  y  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , la deformación lineal unitaria por este esfuerzo es:

$$\epsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}$$

Bajo la acción del esfuerzo  $\sigma_y$ , es decir  $\sigma_y \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_z = 0$ , la deformación en la dirección x será:

$$\epsilon_x'' = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

Analógicamente para  $\sigma_z \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . la deformación en la dirección x será:

$$\epsilon_x''' = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

Por el principio de superposición de causas y efectos la deformación total a lo largo del eje x cuando actúan los tres esfuerzos simultáneamente es:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x' + \epsilon_x'' + \epsilon_x''' \\ \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

expresión que se puede escribir:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

En forma similar para lograr la deformación lineal unitaria a lo largo de los ejes "y" y "z" se tiene respectivamente:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

La proporcionalidad entre los esfuerzos tangenciales y las distorsiones angulares que se desarrollan en las caras del paralelepipedo están dadas por:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

donde G es el módulo de elasticidad al corte.

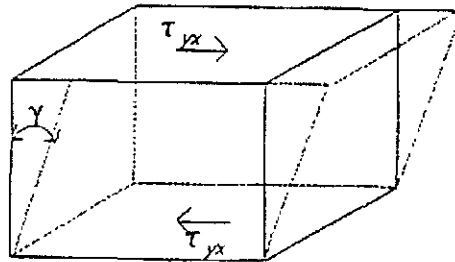


Figura 5.24

Arreglando en forma matricial las seis ecuaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

A este arreglo se le conoce como la ecuación generalizada de Hooke.

Considerando la relación entre los módulos de elasticidad axial y al corte que está dada por

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

la ecuación generalizada de Hooke se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 - \mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la ecuación 5.5 la ecuación 5.6 se puede escribir como.

$$\{\epsilon\} = [E]^{-1} \{\sigma\}$$

Al considerar la relación inversa se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

que de acuerdo a la ecuación 5.4.a en forma compacta se puede escribir:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

## 6.1 DESCRIPCION GENERAL Y ALCANCE DEL METODO

La formulación del método de los elementos finitos data de 1943 aplicado a problemas de torsión en vigas, pero no es sino hasta 1960 cuando tuvo su auge, esto fue posible sobre todo a los progresos en el campo de la computación, ya que como en el método de las rigideces, el planteamiento del método de los elementos finitos conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, que en general resultan relativamente grandes por lo cual para su manejo y solución se requiere de las computadoras.

El método de los elementos finitos se desarrolló como una extensión de las técnicas del análisis estructural matricial.

Se puede pensar que el método de los elementos finitos es una generalización del método de las rigideces por lo que su enfoque es más amplio y se puede aplicar a casi todas las áreas de ingeniería.

En muchos de los casos de ingeniería se requiere determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un continuo elástico. Estos casos pueden variar desde problemas bidimensionales de esfuerzos de deformación plana, sólidos en revolución, flexión de placas y hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un elemento finito cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él infinito, lo cual hace una estructura continua. La discretización de la estructura se logra siguiendo los siguientes puntos:

1. El sistema o continuo se divide en un número finito de elementos a través de líneas o superficies imaginarias.
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante nodos en puntos discretos situados en sus contornos.
3. Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
4. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en nodos tal que equilibre los esfuerzos y cualquier carga repartida, permitiendo así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma  $P = K D$

Si se supone que de alguna manera se ha logrado definir la relación de rigideces entre las fuerzas y los desplazamientos de los nodos al igual que en el método de las rigideces, inicialmente para cada elemento, con la compatibilidad y el equilibrio se puede determinar la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural  $P = k D$ . La solución de esta ecuación se puede encontrar en forma similar que para el método directo de las rigideces.

Después de solucionada la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural para los desplazamientos nodales, pueden calcularse los esfuerzos internos de cada elemento.

Aunque este proceso obliga a que exista equilibrio en los puntos nodales, en general no hay imposición del equilibrio a lo largo de las fronteras del elemento, lo cual significa, por ejemplo, que un análisis del elemento finito puede determinar que los esfuerzos en los puntos A y B figura 6.1 cada uno en un elemento distinto, sean diferentes.

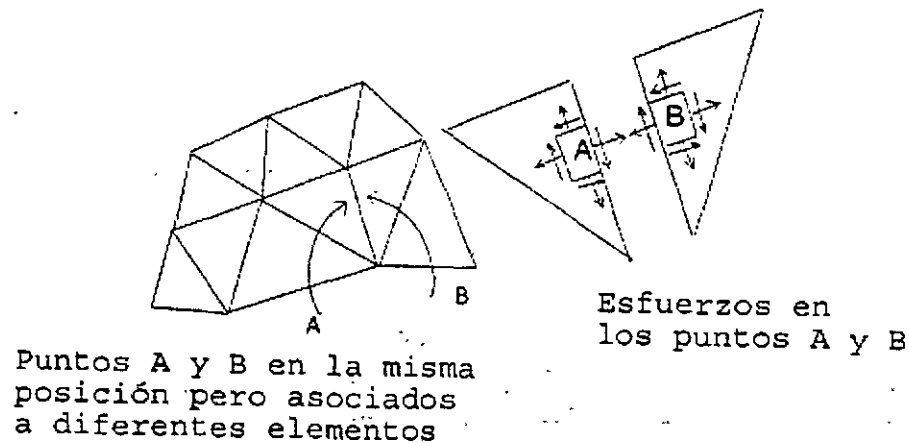


Figura 6.1.

Por otro lado no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamiento escogidos satisfagan las condiciones de compatibilidad o continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente esta condición puede no cumplirse en el contorno de los elementos, aunque es evidente que dentro de cada elemento si se cumplirá a causa de la unicidad de los desplazamientos ya que los mismos están representados por funciones continuas.

Por lo anterior es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones en cuanto a la igualdad de los esfuerzos y la continuidad de los desplazamientos. Al reducir el tamaño de los elementos finitos, la discrepancia entre los esfuerzos en las fronteras de elementos adyacentes disminuirá y el campo de desplazamientos convergerá en uno que sea continuo.

## 6.2 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

Un campo de desplazamiento es una función de las coordenadas que definen la forma del desplazamiento de un elemento.

Por ejemplo para un elemento armadura el campo de desplazamiento es lineal y esta dado por:



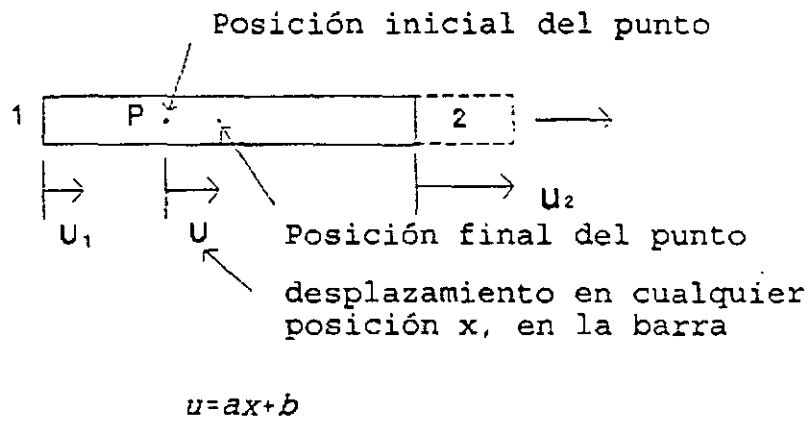


Figura 6.2

Para un elemento viga:

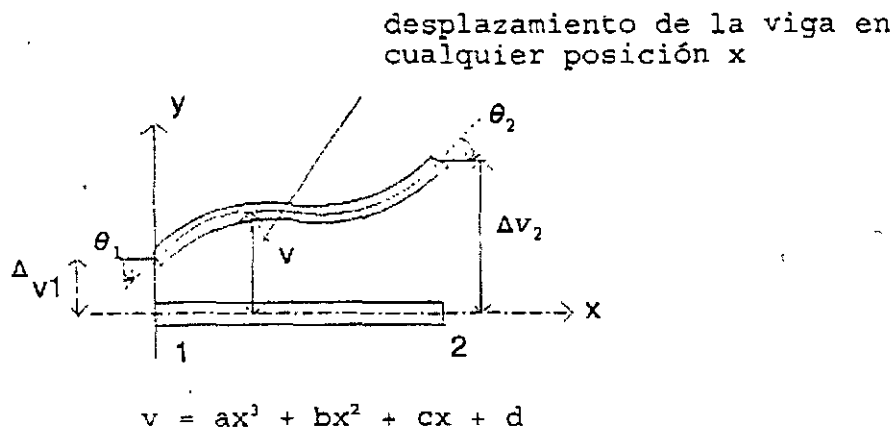


Figura 6.3

Para un elemento triangular:

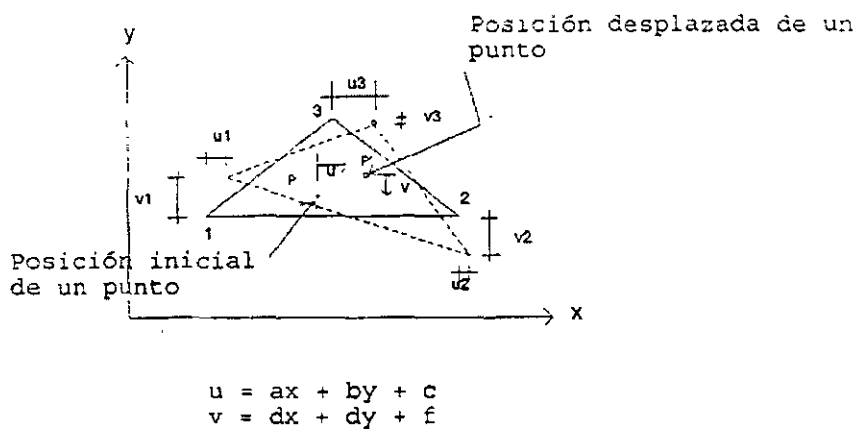
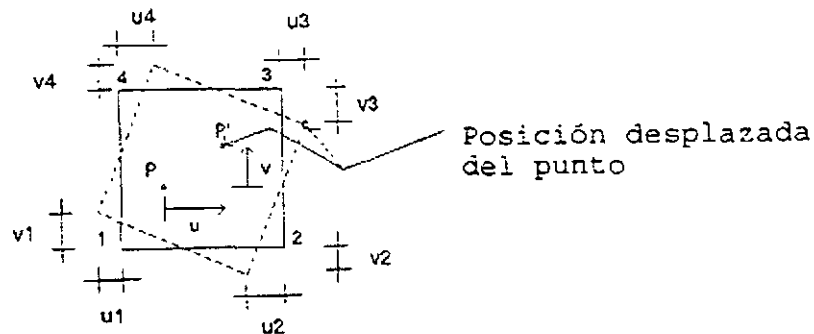


Figura 6.4

Para un elemento rectangular:



$u, v$  desplazamiento en cualquier posición

$$u = a + bx + cy + dxy$$

$$v = e + fx + gy + hxy$$

Figura 6.5

Las ecuaciones debajo de las figuras describen los posibles desplazamientos del elemento en términos de algunos parámetros desconocidos  $a, b, c, d, \dots$ , etc. Las formas más comunes en relación a los campos de desplazamiento son polinomios, para problemas unidimensionales y bidimensionales se toman del triángulo de Pascal.

			$a_0$			1
		$a_1 0$		$a_2 y$		2
		$a_3 x^2$	$a_3 xy$	$a_5 y^3$		3
	$a_3 x^3$	$a_7 x^2 y$	$a_8 xy^2$	$a_9 y^2$		4
	$a_{10} x^4$	$a_{11} x^3 y$	$a_{12} x^2 y^2$	$a_{13} xy^3$	$a_{14} x^4$	...

Si se utilizan todos los términos que están arriba de cierto nivel, en el campo de desplazamientos, se dice que el polinomio está completo, lo cual es deseable ya que así se incrementa la convergencia, aunque algunos elementos están basados en polinomios incompletos.

Cabe hacer notar que el campo de desplazamientos son supuestos que pueden o no ser la forma exacta del desplazamiento del elemento.

El objetivo de los elementos finitos es determinar los coeficientes de los campos de desplazamiento seleccionados, que minimizan el potencial total de la estructura, o bien el error que introduce la aproximación en las ecuaciones diferenciales rectoras del equilibrio. Mientras más pequeño sea el elemento finito se tendrá más oportunidad de minimizar el error por la aproximación.

### 6.3 FUNCIONES DE FORMA

En las figuras 6.1 a la 6.5 se han mostrado los campos de desplazamiento para cuatro elementos y también los movimientos posibles de los nodos es decir los desplazamientos nodales. Para que estos desplazamientos se clasifiquen como grados de libertad deben constituir el mínimo número de elementos de desplazamientos necesario para describir completamente la deformación en cualquier punto del elemento. Para que esto sea cierto el campo de desplazamiento elegido debe escribirse en función de los desplazamientos nodales en vez de los coeficientes polinomiales  $a, b, c$ , etc. A los campos de desplazamiento en función de los desplazamientos nodales se les conoce como funciones de forma.

#### 6.3.1 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO ARMADURA

Considérese el elemento que se muestra en la figura 6.6 con los grados de libertad nodales  $U_1$  y  $U_2$  y el campo de desplazamientos elegido:

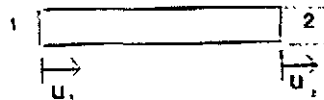


Figura 6.6

De la figura se observa que si  $x=0$  el desplazamiento debe ser  $u_1$  y si  $x=L$  el desplazamiento debe ser  $u_2$

Al aplicar estas dos condiciones, se obtiene:

$$U_1 = a(0) + b$$

$$U_2 = a(L) + b$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

denotando el vector de desplazamientos nodales por "DN", a la matriz de coeficientes por "A" y al vector formado por las constantes como "a", tenemos:

$$[D_N] = [A][a] \quad 6.2$$

solucionado para  $[a]$

$$[a] = [A]^{-1} [D_N] \quad 6.3$$

así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Expresado en forma matricial el campo de desplazamientos dado en la ecuación 1

$$u = [1 \ x] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

en forma condensada se puede escribir como:

$$u = [P][a] \quad 6.4$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la 4. se obtiene

$$u = [P][A]^{-1} [D_N] \quad 6.5$$

si llamamos  $[N] = [P][A]^{-1}$  el campo de desplazamientos se puede escribir

$$u = [N][D_N] \quad 6.6$$

como el campo de desplazamientos quedo expresado en términos de los desplazamientos nodales,  $[N]$  se define como la matriz de las funciones de forma. Cada elemento de  $[N]$  es una función de forma que multiplica a un desplazamiento nodal (grado de libertad). Así:

$$u = [x \ 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

haciendo el producto

$$u = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \ \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede decir que las funciones de forma para el desplazamiento nodal  $u_1$  (grado de libertad 1) es:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad 6.7.1$$

y para el desplazamiento nodal 2 (grado de libertad 2) es:

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad 6.7.2$$

La validez de estas funciones de interpolación se muestra sustituyendo los valores de  $x=0$  y  $x=L$ , es decir:

$$\text{si } x = 0 \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1$$

$$\text{si } x = L \quad u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2$$

Las gráficas del campo de desplazamientos y de las funciones de interpolación se muestra en la figura 6.7

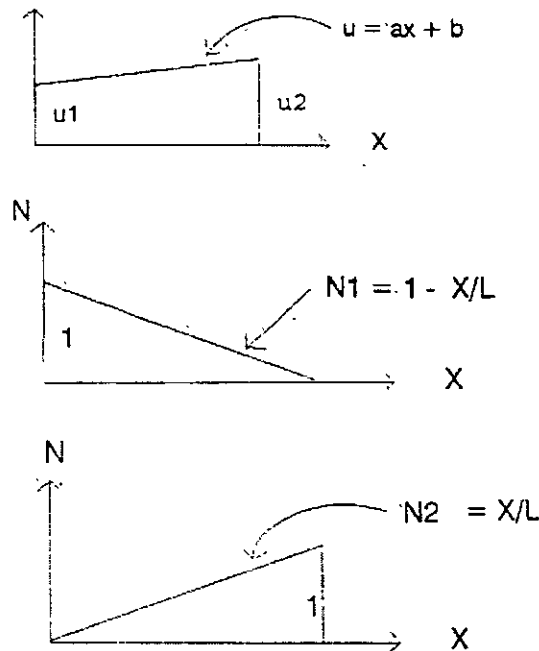


Figura 6.7

Se observa que las funciones de forma tienen un valor unitario cuando son valuadas en su nodo correspondiente y un valor de cero en cualquier otro nodo.

Cabe aclarar que la elección del campo de desplazamientos no es arbitraria. Se observa que para describir el campo de desplazamientos nodales, deben de poder definirse de manera única los coeficientes de los polinomios a,b,c, etc. Esto requiere que haya tantos coeficientes como grados de libertad para el elemento. Si esto es cierto la matriz  $A$  resultará cuadrada y por lo tanto se puede invertir para encontrar

$$[a] = [A]^{-1} [D_N]$$

Esto se generaliza para cualquier elemento finito que se considere.

### 6.3.2 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO VIGA

Considérese los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos nodales  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  como se muestra en la figura 6.8

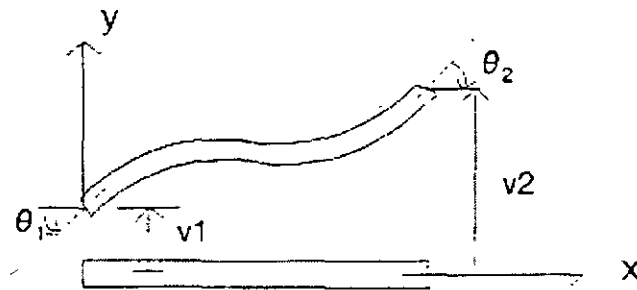


Figura 6.8

Las condiciones de frontera para este elemento son para  $x = 0$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_1$  y  $v = v_1$ ; para  $x = L$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_2$  y  $v = v_2$

El campo de desplazamientos para este elemento fue planteado como

$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad 6.8$$

De donde se puede obtener:

$$\frac{dv}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad 6.9$$

Estas funciones se determinan partiendo que el campo cúbico de desplazamientos satisfacen las condiciones de frontera:

Substituyendo estas condiciones de frontera:

$$\text{si } x = 0 \quad v_1 = d$$

$$\theta_1 = c$$

$$x = L \quad v_2 = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

$$\theta_2 = 3aL^2 + 2bL + c$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D_N] = [A] \{a\}$$

Al solucionar:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ \frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[a] = [A]^{-1} [D_N]$$

Expresando en forma matricial el campo de desplazamientos

$$v = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D] = [P] [a]$$

Sustituyendo el vector [a]

$$v = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

En forma condensada

$$[D] = [N] [DN]$$

Desarrollando el producto

$$v = \left[ \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1, \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x, -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}, \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De donde las funciones de forma resultan:

$$N_1 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$$

$$N_2 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$$

$$N_3 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$N_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Las funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  Y  $N_4$  corresponden a los desplazamientos nodales respectivamente.

A estas funciones de forma también se les conoce como polinomios de interpolación, polinomios de Hermite o polinomios de Hermitianos.

En la figura 6.9 se muestran las gráficas de las funciones de forma y se observa que cumplen la propiedad de que sean igual a la unidad cuando se valuan en su nodo correspondiente y cero en cualquier otro.



### 6.3.3 FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTO TRIANGULAR

Considérese los desplazamientos nodales  $U_1, V_1, U_2, V_2$  Y  $U_3, V_3$  correspondientes a los grados de libertad "x" y "y" de los nodos 1, 2 y 3 respectivamente, según se ilustra en la figura 6.10.

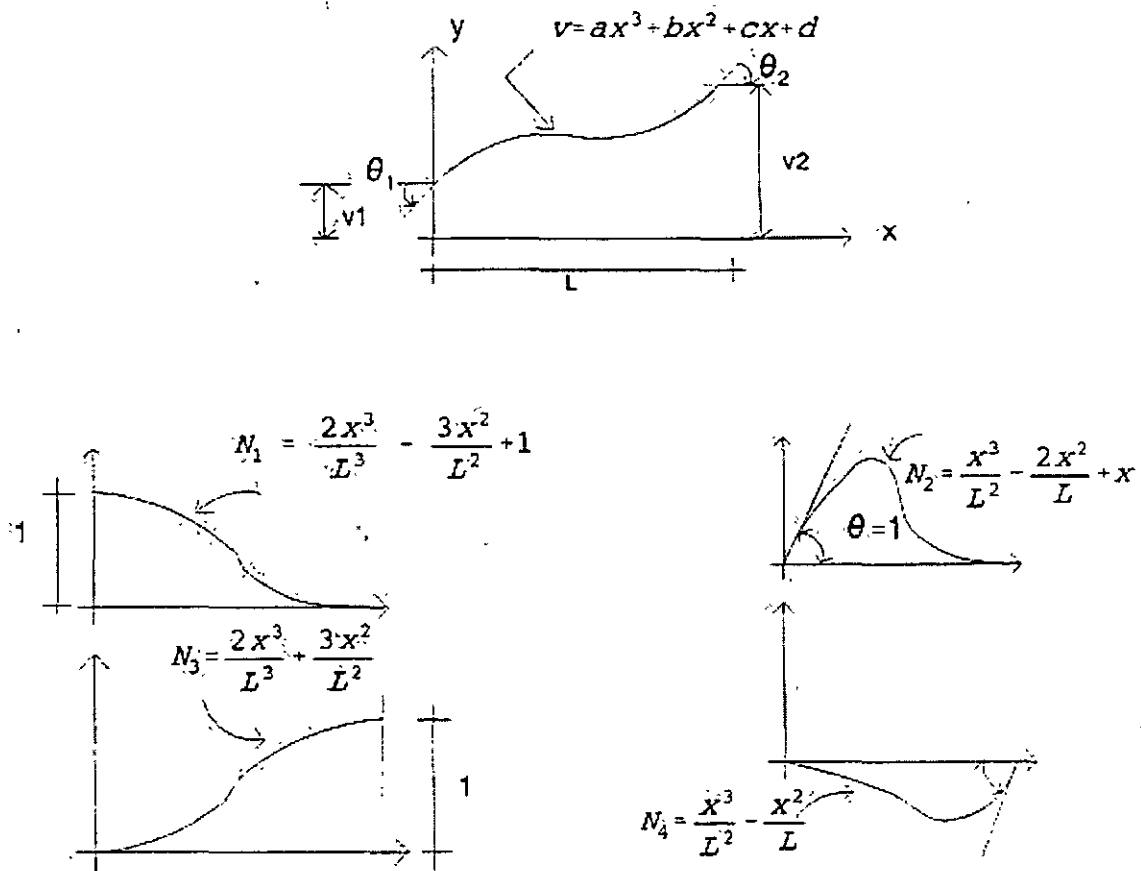


Figura 6.9

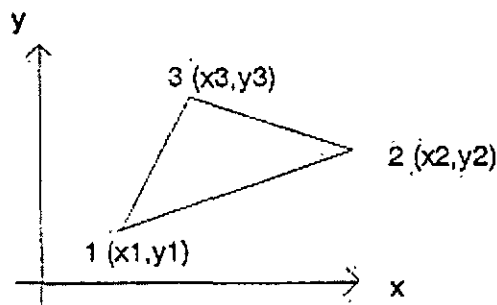


Figura 6.10

Se supondrá el campo de desplazamientos dado por:

$$\begin{aligned} u &= ax + by + c \\ v &= dx + ey + f \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

$$\begin{aligned} x = x_1, y = y_1 &\Rightarrow u = u_1 \text{ \& } v = v_1 \\ x = x_2, y = y_2 &\Rightarrow u = u_2 \text{ \& } v = v_2 \\ x = x_3, y = y_3 &\Rightarrow u = u_3 \text{ \& } v = v_3 \end{aligned}$$

Si se aplican estas condiciones a los campos de desplazamiento:

$$\begin{aligned} u_1 &= ax_1 + by_1 + c \\ v_1 &= dx_1 + ey_1 + f \\ u_2 &= ax_2 + by_2 + c \\ v_2 &= dx_2 + ey_2 + f \\ u_3 &= ax_3 + by_3 + c \\ v_3 &= dx_3 + ey_3 + f \end{aligned}$$

En forma matricial y ordenando el vector desplazamientos, primero en la dirección x y después todos en la dirección y.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

En forma compacta.

$$[DN] = [A] [a]$$

Solucionado:

En forma compacta.

$$[DN] = [A] [a]$$

Solucionando:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

En forma condensada:

$$[a] = [A]^{-1} [D_N]$$

donde:

$$DET = \frac{1}{2} [(y_1 x_3 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_1 y_2 - y_1 x_2)]$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ r \\ f \end{bmatrix}$$

En forma condensada:

$$[D] = [P] [a]$$

Sustituyendo el vector  $\{a\}$  y considerando como nueva constante cada término de la matriz  $A^{-1}$

En forma condensada:

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN]$$

Donde:

$$[N] = [P] [A]^{-1}$$

Por lo que desarrollando :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando

$$N_1 = \frac{1}{2DET} (a_1x + b_1y + c_1)$$

$$a_1 = y_2 - y_3$$

$$b_1 = x_3 - x_2$$

$$c_1 = x_2y_3 - x_3y_2$$

$$N_2 = \frac{1}{2DET} (a_2x + b_2y + c_2)$$

$$a_2 = y_3 - y_1$$

$$b_2 = x_1 - x_3$$

$$c_2 = x_3y_1 - x_1y_3$$

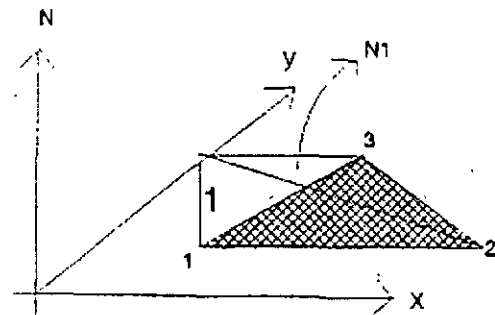
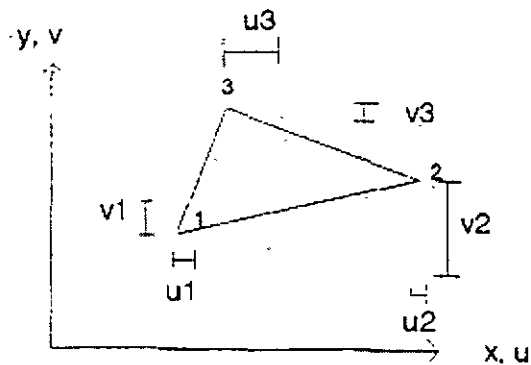
$$N_3 = \frac{1}{2DET} (a_3x + b_3y + c_3)$$

$$a_3 = y_1 - y_2$$

$$b_3 = x_2 - x_1$$

$$c_3 = x_1y_2 - x_2y_1$$

Estas son las funciones de forma para el elemento triangular. En la figura 6.11 se muestra la gráfica de estas funciones:



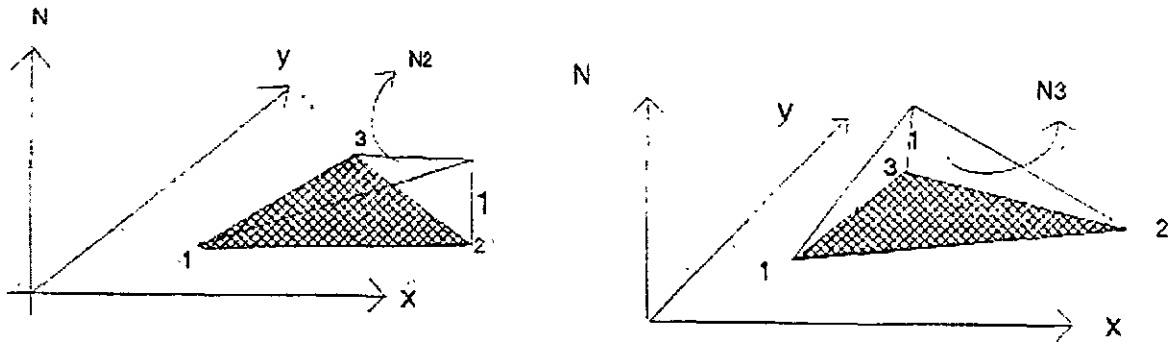


Figura 6.11

Obsérvese que cada función satisface el requisito de ser igual a la unidad en su nodo correspondiente e igual a cero cuando es valuada en los otros nodos.

### 6.3.4 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR

Considérese los grados de libertad  $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3;$  y  $u_4, v_4;$  correspondientes a los grados de libertad de los nodos 1, 2, 3 y 4 respectivamente como se muestra en la figura 6.12

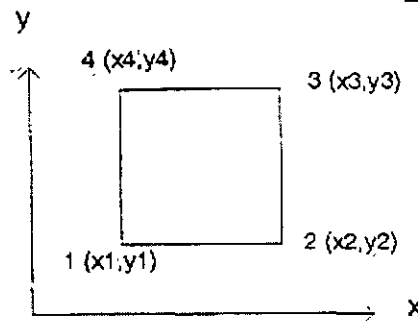


Figura 6.12

El campo de desplazamientos está dado por:

$$u = a + bx + cy + dxy$$

$$v = e + fx + gy + hxy$$

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

si	$x = x_1;$	$y = y_1$	entonces	$u = u_1;$	$v = v_1$
	$x = x_2;$	$y = y_2$	entonces	$u = u_2;$	$v = v_2$
	$x = x_3;$	$y = y_3$	entonces	$u = u_3;$	$v = v_3$
	$x = x_4;$	$y = y_3$	entonces	$u = u_4;$	$v = v_4$

Si se aplican estas condiciones al campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a + bx_1 + cy_1 + dx_1y_1 \\
 v_1 &= e + fx_1 + gy_1 + hx_1y_1 \\
 u_2 &= a + bx_2 + cy_2 + dx_2y_2 \\
 v_2 &= e + fx_2 + gy_2 + hx_2y_2 \\
 u_3 &= a + bx_3 + cy_3 + dx_3y_3 \\
 v_3 &= e + fx_3 + gy_3 + hx_3y_3 \\
 u_4 &= a + bx_4 + cy_4 + dx_4y_4 \\
 v_4 &= e + fx_4 + gy_4 + hx_4y_4
 \end{aligned}$$

En forma matricial y ordenando el vector desplazamientos primero los de la dirección x (desplazamientos  $u_1$ ) y después todos los de la dirección y (desplazamientos  $v_1$ ).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ r \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Se observa que al solucionar este sistema se tiene que invertir una matriz de 4 x 4, dada la dificultad para efectuar esta inversa con literales se sugiere hacerlo numéricamente, resultando así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ r \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Donde  $a_i, b_i, c_i$  y  $d_i$  son nuevas constantes de  $[A]^{-1}$

En forma reducida:

$$[a] = [A]^{-1} [DN]$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

En forma condensada:

$$[D] = [P] [a]$$

Sustituyendo el vector [a]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Desarrollando:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy \\ N_2 &= a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy \\ N_3 &= a_3 + b_3x + c_3y + d_3xy \\ N_4 &= a_4 + b_4x + c_4y + d_4xy \end{aligned}$$

Estas son las funciones de forma para el elemento rectangular. En la figura 6.,13 se representan los que serían las gráficas de estas funciones.

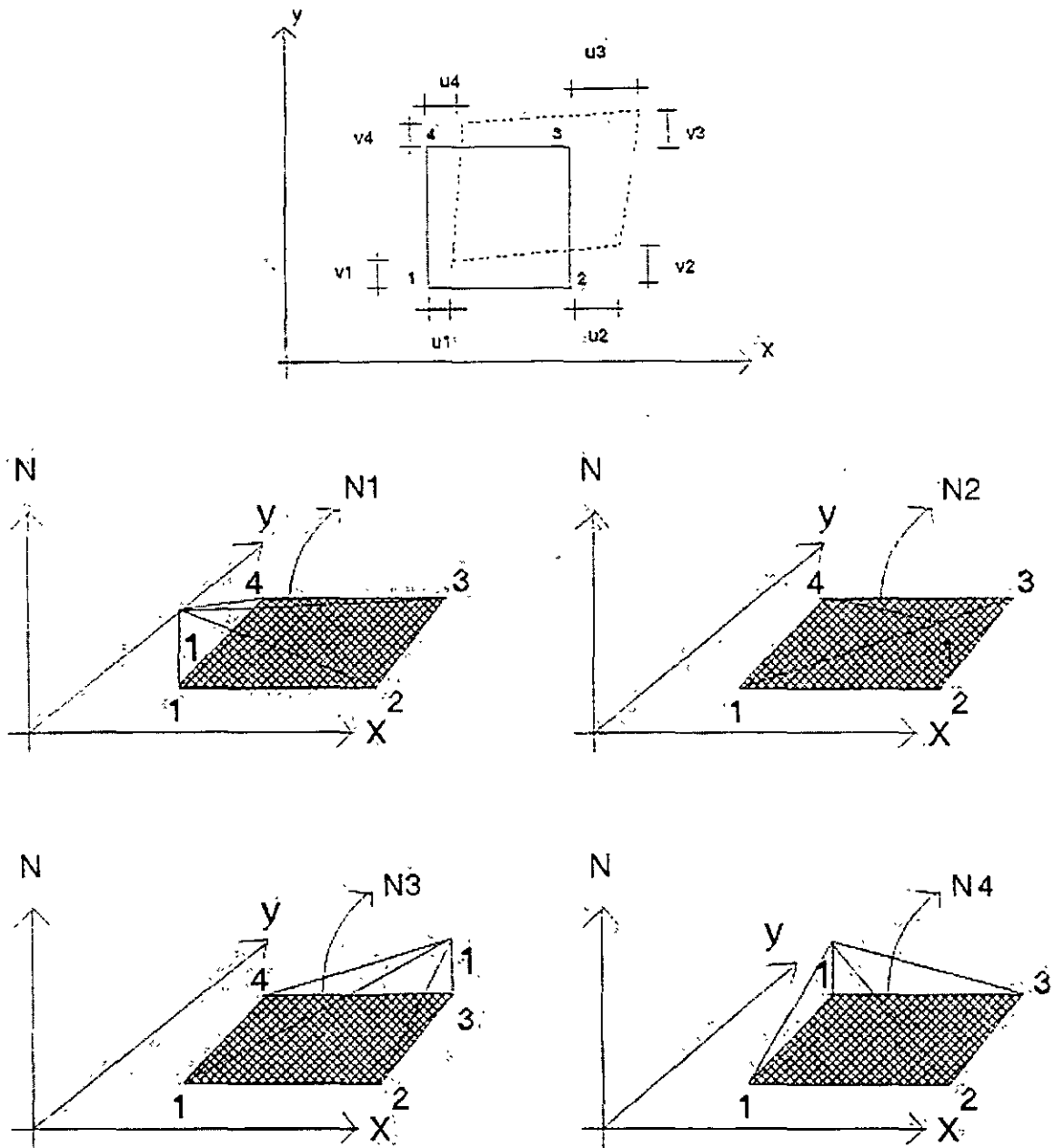


Figura 6.13



### 6.3.5 RESUMEN DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En base a los cuatro casos planteados anteriormente, el planteamiento de las funciones de forma se puede generalizar para cualquier tipo de elemento (finito) considerando lo siguiente:

- Los campos de desplazamientos definen la forma supuesta del desplazamiento del elemento en términos de coeficientes polinomiales.

$$[D] = [P] [a] \quad 6.16$$

- Los coeficientes del campo polinomial supuesto están relacionados con los desplazamientos nodales, al forzar que el campo de desplazamientos sea igual al desplazamiento deseado en los nodos.

$$[DN] = [A] [a] \quad 6.17$$

- Expresando el desplazamiento en cualquier punto del elemento en términos de los desplazamientos nodales, se tiene:

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN] \quad 6.18$$

- Las funciones de forma resultan:

$$N = [P] [A]^{-1} \quad 6.19$$

y son el inicio deseado para plantear las matrices de rigidez. Estas funciones de forma deben poseer la prioridad fundamental de ser iguales a 1 cuando son evaluadas en las coordenadas de su nodo asociado y grado de libertad, y cero en todos los demás nodos y grados de libertad.

### 6.4 MATRIZ DE RIGIDECES DEL ELEMENTO FINITO.

Para determinar la matriz de rigideces hay varios enfoques, entre otros se tiene el de la energía potencial, los residuos ponderados y el método de Galerkin. El desarrollo siguiente se hará considerando la energía potencial.

En este enfoque se plantea que la energía potencial total del sistema esté en un valor estacionario, en el caso de equilibrio estable, este corresponde al valor mínimo del potencial.

La energía potencial se puede escribir como:

$$\phi = u + u_e$$

donde  $u$  es la energía de deformación interna y  $u_e$  la energía potencial externa (de las cargas aplicadas).

Recuerdese que la energía de deformación interna se puede escribir como:

$$u = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon^T \sigma d_{vol} \quad 6.20$$

Pero:

$$\sigma = E \epsilon$$

sustituyendo:

$$u = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon^T E \epsilon \sigma d_{vol} \quad 6.21$$

Considerando que la deformación unitaria se puede conocer a partir de los desplazamientos y que éstos pueden ponerse en función de los desplazamientos nodales, a través de las funciones de forma, la deformación se puede escribir como:

$$[\epsilon] = [B] [DN] \quad 6.22$$

donde  $\{DN\}$  son los desplazamientos nodales y  $[B]$  se conoce como la matriz de desplazamientos-deformación. Sustituyendo 6.22 en 6.21, para esto:

$$[\epsilon]^T = [DN]^T [B]^T \quad 6.23$$

por lo que:

$$u = \frac{1}{2} \int D_N^T [B]^T [E] [B] D_N d_{vol} \quad 6.24$$

por otro lado la energía potencial externa en términos de las cargas que actúan en dirección de los grados de libertad se puede escribir como:

$$u_e = -P_1 D_{N1} - P_2 D_{N2} + \dots + P_n D_{Nn} \quad 6.25$$

$$U_e = -[DN]^T [P]$$

sustituyendo en la energía potencial total:

$$\phi = \frac{1}{2} \{D_N\}^t \left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] \{D_N\} - \{D_N\}^t [P]$$

aplicando el principio estacionario de la energía:

$$\frac{\partial \phi}{\partial D_N} = 0$$

$$\left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] \{D_N\} - [P] = 0$$

de donde:

$$[P] = \left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] \{D_N\} \quad 6.26$$

esta expresión es la relación fuerza-desplazamiento del elemento:

$$[P] = [K] \{D_N\} \quad 6.27$$

del elemento, por lo que la matriz de rigideces resulta:

$$[K] = \int [B]^b [E] [B] d_{vol} \quad 6.28$$

siendo [K] la matriz de rigideces del elemento y depende de la matriz constitutiva [E] del mismo y de la matriz desplazamientos-deformación [B], esta última es función del campo de desplazamiento seleccionado y la relación entre la deformación y el desplazamiento en cualquier punto del elemento. Como la matriz [E] es simétrica, la matriz de rigideces también será simétrica.

#### 6.4.1 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO SUJETO A CARGA AXIAL.

En la figura 6.14 se muestran los grados de libertad y las cargas nodales.



Figura 6.14

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como:

$$U = \left[ 1 - \frac{X}{L} \quad \frac{X}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$U = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}$$

$$\epsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial N_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\epsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial N_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 6.29$$

de acuerdo a la ecuación 6.22 se puede escribir:

$$\epsilon_x = [B] \{DN\}$$

que es la relación desplazamiento-deformación deseada, así:

$$B \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad 6.30$$

La expresión para determinar la matriz de rigideces se determinó como:

$$K = \int_{vol} B^T E B \, d_{vol}$$

De la teoría de elasticidad la matriz constitutiva E solo tiene un término y es precisamente el módulo de elasticidad axial E. Sustituyendo:

$$K = \int_{vol} \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} d_{vol}$$

El volumen diferencial para un elemento axial puede expresarse como:

$$d_{vol} = dA dX$$

para un elemento barra de sección constante y módulo de elasticidad axial constante:

$$K = EA \int^L \begin{bmatrix} \bar{L} & -L \\ -L & L \end{bmatrix} dX$$

$$K \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

sustituyendo la ecuación 6.27 se obtiene la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 6.31$$

#### 6.4.2 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO VIGA.

En la figura 6.15 se muestran los grados de libertad considerados.

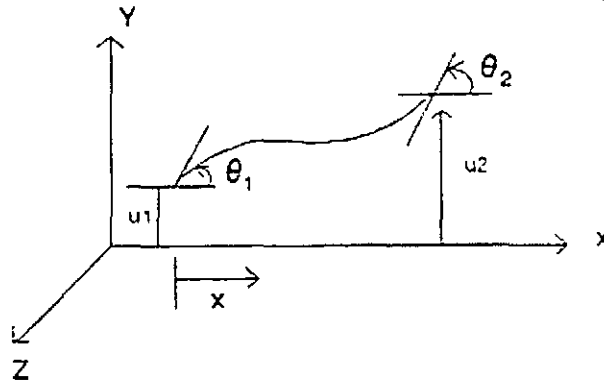


Figura 6.15

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como:

$$V = \left[ \left( \frac{2X^3}{L^3} - \frac{3X^2}{L^2} + 1 \right) \left( \frac{X^3}{L^2} - \frac{2X^2}{L} + X \right) \left( -\frac{2X^3}{L^3} + \frac{3X^2}{L^2} \right) \left( \frac{X^3}{L^2} - \frac{X^2}{L} \right) \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$V = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, de la teoría de elasticidad:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

por lo tanto:

$$B = Y \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} - \frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \quad 6.33$$

la expresión para evaluar la matriz de rigideces esta dada por:

$$K = \int_{vol} B' E B d_{vol}$$

considerando que el elemento viga es de sección constante, que la matriz constitutiva  $E$ , solo contiene el módulo de elasticidad axial  $E$  y que:

$$\int_{vol} = \int_0^L dx \int_A dA$$

$$K = \int_0^L dx \int_A Y^2 \int_A dA \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix} dA$$

la integral de área es función únicamente de "y" por lo que:

$$\int Y^2 dA = I$$

$$K = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1'' & N_1'' & N_1'' & N_2'' & N_1'' & N_3'' & N_1'' & N_4'' \\ N_2'' & N_1'' & N_2'' & N_2'' & N_2'' & N_3'' & N_2'' & N_4'' \\ N_3'' & N_1'' & N_3'' & N_2'' & N_3'' & N_3'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix} dx$$

Desarrollando la integral.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Si se observa esta matriz, es la misma que la obtenida con el método directo de las rigideces, considerando flexión y cortante únicamente.

## 6.5 ESFUERZO Y DEFORMACIONES PLANAS

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales.

Solamente se estudiará el elemento triangular, que es el más sencillo, pero el procedimiento es totalmente general. Este mismo problema se puede analizar utilizando elementos más elaborados, que se introducen en idéntica forma.

En ambos casos de esfuerzos y deformaciones planas, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos  $u$  y  $v$  en las direcciones de los ejes cartesianos  $x$  e  $y$  respectivamente.

Cuando todas las fuerzas se aplican en el plano que contiene a la estructura, digamos en el plano  $x$ - $y$  y los esfuerzos que se producen son  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  mientras que  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  y  $\tau_{yz}$  son cero, se trata de un problema de esfuerzos planos.

En la figura 6.16 se muestra el estado de esfuerzos en un elemento diferencial.

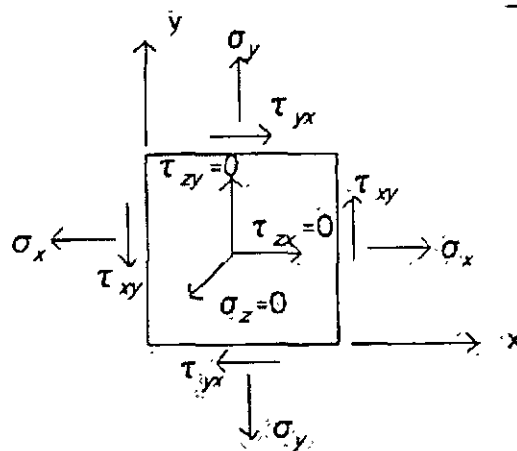


Figura 6.16

Por lo tanto las deformaciones presentes serán  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  mientras que  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{yz}$  son nulas.

Las vigas de gran peralte, los contrafuertes para presas y en general todo elemento de sección transversal (dirección  $z$ ) pequeña respecto de sus otras dimensiones son estructuras para las cuales es aplicable la teoría de los esfuerzos planos.

Por otro lado se dice que un cuerpo está en estado de deformaciones planas si la deformación lineal unitaria en la dirección  $z$  se conserva igual a cero, pero el esfuerzo en la misma dirección es diferente a cero ( $\epsilon_z = 0$  y  $\sigma_z \neq 0$ ).



En la figura 6.17 se muestra el estado de esfuerzos para un problema de deformaciones planas.

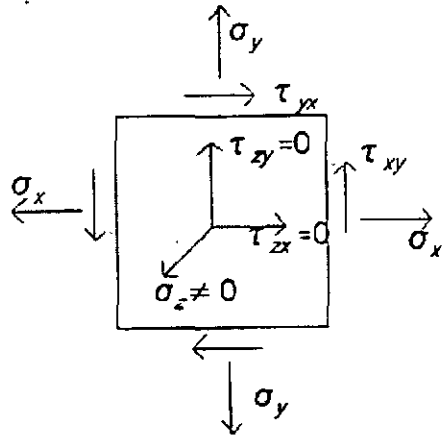


Figura 6.17

En la práctica los problemas de deformaciones planas que ocurren en estructuras en que la dimensión en la dirección  $z$  es mucho más grande que las otras dos dimensiones y también la sección perpendicular al eje  $z$  es constante.

Para analizar este tipo de estructuras se toma una sección transversal representativa de espesor unitario para propósitos de análisis.

Como ejemplo de estructuras a las que se les puede aplicar esta teoría se tienen las presas de gravedad incluyendo su cimentación, terraplenes, vertedores, etc.

### 6.5.1 MATRIZ DE RIGIDECES DE UN ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESFUERZOS PLANOS.

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.18.

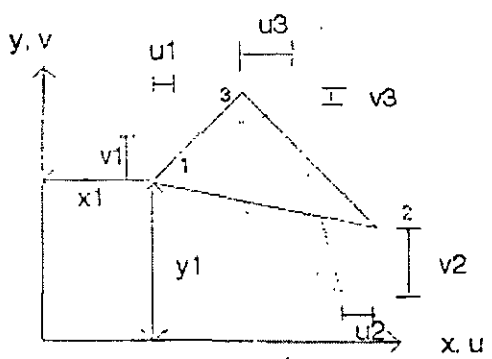


Figura 6.18

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

De la teoría de la elasticidad para un problema de esfuerzos planos, todos los elementos están sujetos a tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  como se indica en la figura 6.19.

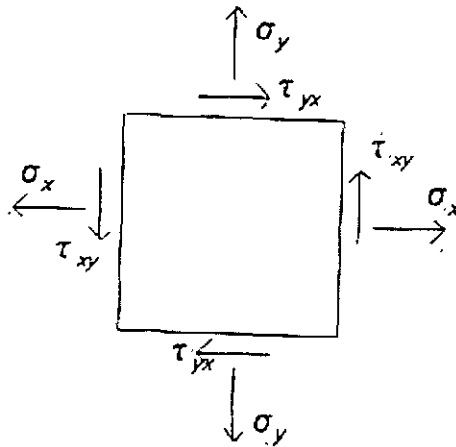


Figura 6.19

Las deformaciones correspondientes:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3$$

$$\gamma^{xy} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 X & 0 & N_2 X & 0 & N_3 X & 0 \\ 0 & N_1 Y & 0 & N_2 Y & 0 & N_3 Y \\ N_1 Y & N_1 X & N_2 Y & N_2 X & N_3 Y & N_3 X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

La cual se puede expresar como:

$$[E] = [B] \{DN\}$$

Donde:

$$N_1 X = \frac{\partial N_1}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_1 x + b_1 y + c_1) \right] \frac{a_1}{2DET} = \frac{y_2 - y_3}{2DET}$$

$$N_2 X = \frac{\partial N_2}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_2 x + b_2 y + c_2) \right] \frac{a_2}{2DET} = \frac{y_3 - y_1}{2DET}$$

$$N_3 X = \frac{\partial N_3}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_3 x + b_3 y + c_3) \right] \frac{a_3}{2DET} = \frac{y_1 - y_2}{2DET}$$

$$N_{1,y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_1 x + b_1 y + c_1) \right] \frac{b_1}{2DET} = \frac{x_3 - x_2}{2DET}$$

$$N_{2,y} = \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_2 x + b_2 y + c_2) \right] \frac{b_2}{2DET} = \frac{x_1 - x_3}{2DET}$$

$$N_{3,y} = \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (\alpha_3 x + b_3 y + c_3) \right] \frac{b_3}{2DET} = \frac{x_2 - y_1}{2DET}$$

6.36

Para considerar la matriz constitutiva, en la teoría de elasticidad se planteó que:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{(1+\mu)}{E} \sigma_{xy}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Considerando la relación inversa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

y como en forma compacta se puede escribir:

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{(1 - \mu^2)}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\mu E}{(1 - \mu^2)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1 - \mu)}{2(1 - \mu^2)} \quad 6.37$$

sustituyendo en la expresión para valuar la rigidez:

$$K = \int [B]^T [E] [B] d_{vol}$$

$$K = \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{1,y} \\ 0 & N_{1,y} & 0 \\ N_{2,x} & 0 & N_{2,y} \\ 0 & N_{2,y} & N_{2,x} \\ N_{3,x} & 0 & N_{3,y} \\ 0 & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} t d_A$$

Para este elemento ningún término  $N_{1,x}$   $N_{1,y}$  .... etc. Contiene las variables x o y.

Como resultado de ello la integración sobre el área produce sencillamente el área del elemento y solo se efectúa la multiplicación de matrices, resultando:

$$K = \frac{t}{4DET} \begin{bmatrix} E_{11}a_1^2 - E_{33}b_1^2 & a_1E_{12}b_1 - b_1E_{33}a_1 & a_1E_{11}a_1 - b_1E_{33}b_2 & a_1E_{12}b_2 - b_1E_{33}a_2 & a_1E_{11}a_3 - b_1E_{33}b_3 & a_1E_{12}b_3 - b_1E_{33}a_3 \\ a_1E_{12}b_1 - b_1E_{33}a_1 & E_{11}b_1^2 - E_{33}a_1^2 & b_1E_{21}a_2 - a_1E_{33}b_2 & b_1E_{22}b_2 - a_1E_{33}a_2 & b_1E_{21}a_3 - a_1E_{33}b_3 & b_1E_{22}b_3 - a_1E_{33}a_3 \\ a_1E_{11}a_1 - b_1E_{33}b_2 & b_1E_{21}a_2 - a_1E_{33}b_2 & E_{11}a_2^2 - E_{33}b_2^2 & a_2E_{12}b_2 - b_2E_{33}a_2 & a_2E_{11}a_3 - b_2E_{33}b_3 & a_2E_{12}b_3 - b_2E_{33}a_3 \\ a_1E_{12}b_2 - b_1E_{33}a_2 & b_1E_{22}b_2 - a_1E_{33}a_2 & a_2E_{12}b_2 - b_2E_{33}a_2 & E_{22}b_2^2 - E_{33}a_2^2 & b_2E_{21}a_3 - a_2E_{33}b_3 & b_2^2E_{22}b_3 - a_2E_{33}a_3 \\ a_1E_{11}a_3 - b_1E_{33}b_3 & b_1E_{21}a_3 - a_1E_{33}b_3 & a_2E_{11}a_3 - b_2E_{33}b_3 & b_2E_{21}a_3 - a_2E_{33}b_3 & E_{11}a_3^2 - E_{33}b_3^2 & a_3E_{12}b_3 - b_3E_{33}a_3 \\ a_1E_{12}b_3 - b_1E_{33}a_3 & b_1E_{22}b_3 - a_1E_{33}a_3 & a_2E_{12}b_3 - b_2E_{33}a_3 & b_2^2E_{22}b_3 - a_2E_{33}a_3 & a_3E_{12}b_3 + b_3E_{33}a_3 & E_{22}b_3^2 - E_{33}a_3^2 \end{bmatrix}$$

donde:

t = espesor

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3 & a_2 &= y_3 - y_1 & a_3 &= y_1 - y_2 \\ b_1 &= x_3 - x_2 & b_2 &= x_1 - x_3 & b_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

6.38

$$DET = \frac{1}{2}(b_3a_2 - a_3b_2)$$

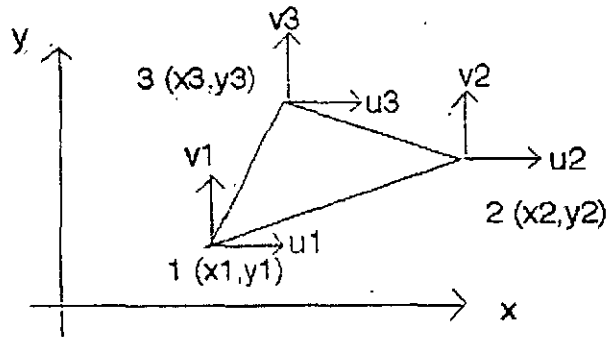


Figura 6.20

La numeración de los nodos se realizó en sentido antihorario. El área o el determinante también se puede calcular como:

$$A = \text{DET} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & y_1 \\ 1 & X_2 & y_2 \\ 1 & X_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 Y_3 - x_3 Y_2) + (x_2 Y_1 - x_1 Y_3) + (x_1 Y_2 - Y_2 Y_1)]$$

La ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

6.39

Donde:

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Ahora puede utilizarse la matriz de rigideces en la misma forma que se utilizó para los elementos barra, en el método de las rigideces directo para determinar los desplazamientos nodales.

### 6.5.2 MATRIZ DE ESFUERZOS.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales de cada elemento:

$$[DN] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los esfuerzos se sabe que:

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

$$[\epsilon] = B DN$$

Sustituyendo:

$$[\sigma] = [E] [B] [DN]$$

Llamando  $[S] = [E] [B]$  matriz de esfuerzo, se puede escribir:

$$[\sigma] = [S] [DN] \quad 6.40$$

por lo que:

$$S = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{DET} \begin{bmatrix} E_{11} a_1 & E_{12} b_1 & E_{11} a_1 & E_{12} b_2 & E_{11} a_3 & E_{12} b_3 \\ E_{21} a_1 & E_{22} b_1 & E_{21} a_2 & E_{22} b_2 & E_{21} a_3 & E_{33} b_3 \\ E_{33} b_1 & E_{33} a_1 & E_{33} b_2 & E_{33} b_2 & E_{33} b_3 & E_{33} a_3 \end{bmatrix} \quad 6.41$$

Para cada elemento se tendrán tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . en base a estos se puede calcular las direcciones y esfuerzos principales para cada elemento.

Si se analiza la matriz de esfuerzos S se observa que ninguno de los términos es función de x o y. Esto significa que los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son constantes a través del elemento. Estos esfuerzos pueden considerarse como esfuerzos medios del elemento.



### 6.5.3 EJEMPLO DE APLICACIÓN PARA ESFUERZOS PLANOS.

Analizar la placa rectangular que se muestra en la figura 6.21, usar un elemento finito triangular, desprecie el peso del cuerpo.

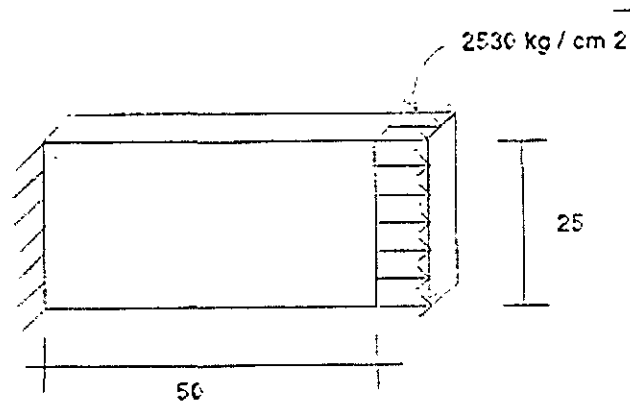


Figura 6.21

Datos:

Espesor  $t = 2.54 \text{ cm}$

Módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Relación de Poisson  $\mu = 0.25$

Para plantear la ecuación fuerza-desplazamiento de la placa, primero hay que idealizarla. En este caso particular la idealización se hace considerando los elementos finitos.

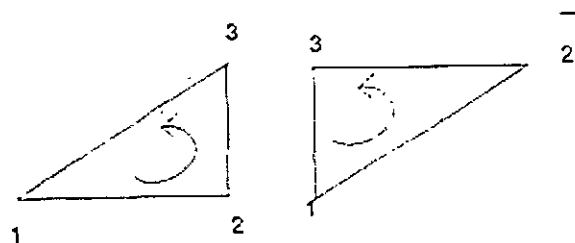


Figura 6.22

Así:

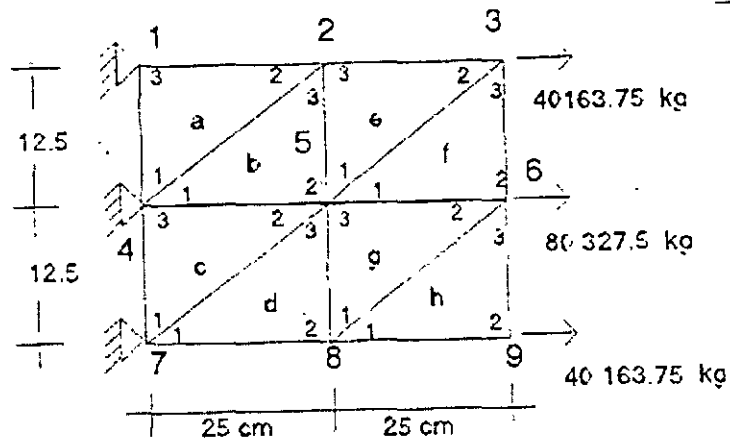


Figura 6.23

Se observa que todos los vértices de los triángulos están numerados de 1 a 3 en sentido contrario a las manecillas del reloj, estos números indican el vértice que llega a un nodo. Los números dentro de los círculos representan la numeración de los nodos.

Las cargas en los nodos se obtienen por áreas tributarias, así:

$$P_{3x} = 2530 \times 2.54 \times 6.25 = 40163.75 \text{ kg}$$

$$P_{6y} = 2530 \times 2.54 \times 12.50 = 80227.50 \text{ kg}$$

Al igual que el método directo de las rigideces la ecuación fuerza desplazamiento para el sistema estructural esta dada por:  $P' = DN'$

$$\begin{bmatrix} P'_2 \\ P'_3 \\ P'_5 \\ P'_6 \\ P'_8 \\ P'_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{22a}^1 + K_{33b}^1 + K_{33e}^1 & K_{32e}^1 & K_{32b}^1 + K_{31e}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23c}^1 & K_{22c}^1 + K_{33f}^1 & K_{21e}^1 + K_{31f}^1 & K_{32f}^1 & 0 & 0 \\ K_{23b}^1 + K_{13c}^1 & K_{12e}^1 + K_{13f}^1 & K_{22b}^1 + K_{22c}^1 + K_{33d}^1 + K_{11e}^1 + K_{11f}^1 - K_{33g}^1 & K_{12f}^1 + K_{32g}^1 & K_{32d}^1 + K_{31g}^1 & 0 \\ 0 & K_{23f}^1 & K_{21f}^1 + K_{22g}^1 & K_{22f}^1 + K_{22k}^1 + K_{33g}^1 & K_{21c}^1 + K_{31v}^1 & K_{32h}^1 \\ 0 & 0 & K_{23d}^1 + K_{13g}^1 & K_{12g}^1 + K_{13h}^1 & K_{22d}^1 + K_{11k}^1 + K_{11h}^1 & K_{12a}^1 \\ 0 & 0 & 0 & K_{23h}^1 & K_{21h}^1 & K_{22h}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{N2}^1 \\ D_{N3}^1 \\ D_{N5}^1 \\ D_{N6}^1 \\ D_{N8}^1 \\ D_{N9}^1 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas y el de desplazamientos quedan definidos por:

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ P'_{x3} \\ P'_{y3} \\ P'_{x5} \\ P'_{y5} \\ P'_{x6} \\ P'_{y6} \\ P'_{x8} \\ P'_{y8} \\ P'_{x9} \\ P'_{y9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40163.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 803027.50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40163.75 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \\ U_8 \\ V_8 \\ U_9 \\ V_9 \end{bmatrix}$$

para obtener la matriz de rigideces de cada elemento triangular es necesario conocer los valores de la matriz constitutiva que están dados por la ecuación 6.37.

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{2 \times 10^6}{1-(0.25)^2} = 2.13 \times 10^6$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} = \frac{0.25 (2 \times 10^6)}{1-(0.25)^2} = 0.53 \times 10^6$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} = \frac{2 \times 10^6 (1-0.25)}{2[1-(0.25)^2]} = 0.8 \times 10^6$$

De la ecuación 6.38 se puede evaluar las matrices de rigideces para cada elemento.

Recuérdese que la matriz de rigideces es independiente de la posición del sistema global por lo que los elementos a, e, c y g tienen las mismas propiedades de rigidez así mismo, los elementos los elementos b, f, d y h.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos d, e, c, y g se consideran las coordenadas las coordenadas del elemento "a".

NODO	X	Y
1	0.0	12.5
2	25.0	25.0
3	0.0	25.0

$$\begin{aligned}
 a_1 &= Y_2 - Y_1 = 0 & b_1 &= x_3 - x_2 = 0 \\
 a_2 &= Y_3 - Y_1 = 12.5 & b_2 &= x_1 - x_3 = 0 \\
 a_3 &= Y_1 - Y_2 = 12.5 & b_3 &= x_2 - x_1 = 25 \\
 DET &= \frac{1}{2}(b_3 a_2 - a_3 b_2) = 156.25
 \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación 6.38

$$K_a^1 = \begin{bmatrix} 2032000 & 0 & 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 \\ 0 & 5410200 & -673100 & 0 & 673100 & -5410200 \\ 0 & -673100 & 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 \\ -1016000 & 0 & 0 & 508000 & 1016000 & -508000 \\ -2032000 & 673100 & -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 \\ 1016000 & -5410200 & 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 \end{bmatrix}$$

Los números que se han puesto arriba y a la derecha de la matriz corresponden a los grados de libertad (por nodo u y v) de los elementos y nos ayudan a particionar la matriz de rigideces en:

$$K_b^1 = \begin{bmatrix} K_{11a} & K_{12a} & K_{13a} \\ K_{21a} & K_{22a} & K_{23a} \\ K_{31a} & K_{32a} & K_{33a} \end{bmatrix}$$

lo que nos da las submatrices para sustituir en la ecuación fuerza-desplazamiento para el sistema estructural.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos b, d, f y h se consideran las coordenadas del elemento "b"

NODO	X	Y
1	0	12.5
2	25.0	12.5
3	25.0	25.0

$$\begin{aligned}
 a_1 &= Y_2 - Y_3 = 12.5 & b_1 &= x_3 - x_2 = 0 \\
 a_2 &= Y_3 - Y_1 = 12.5 & b_2 &= x_1 - x_3 = 0 \\
 a_3 &= Y_1 - Y_2 = 0 & b_3 &= x_2 - x_1 = 25
 \end{aligned}$$

$$DET = \frac{1}{2}(b_3 a_2 - a_3 b_2) = 156.25$$

$$K_b^1 = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 & 0 & -673100 \\ 0 & 508000 & 1016000 & -508000 & -1016000 & 0 \\ -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 & -2032000 & 673100 \\ 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 & 1016000 & -5410200 \\ 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 & 2032000 & 0 \\ -673100 & 0 & 673100 & -508000 & -5410200 & 5410200 \end{bmatrix}$$

particionando se puede escribir:

$$K_b^1 = \begin{bmatrix} K_{11b} & K_{12b} & K_{13b} \\ K_{21b} & K_{22b} & K_{23b} \\ K_{31b} & K_{32b} & K_{33b} \end{bmatrix}$$

sustituyendo las submatrices correspondientes en la ecuación fuerza-desplazamiento se obtiene:

0	6769100	-1689100	-1352550	1016000	-4064200	1689100	0	0	0	0	0	0	0	U <sub>1</sub>
0	-1689100	11836400	673100	-508000	1689100	-10820400	0	0	0	0	0	0	0	U <sub>2</sub>
440163.75	-1352550	673100	3384550	0	0	-1689100	-2032000	1016400	0	0	0	0	0	U <sub>3</sub>
0	1016000	-508000	0	5918200	-1689100	0	673100	-5410200	0	0	0	0	0	U <sub>4</sub>
0	-4064200	1689100	0	-1689100	13538200	-3378200	-2705100	1689100	-4064000	1689100	0	0	0	U <sub>5</sub>
0	1689100	-10820400	-1689100	0	-3378200	23672800	1689100	-10116000	-1016000	1689100	-110820400	0	0	U <sub>6</sub>
80327.5	0	0	-2032000	673100	-2705100	1689100	6769100	-1689100	0	-1689100	2032000	1016000	0	U <sub>7</sub>
0	0	0	1016000	-5410200	1689100	-10116000	-1689100	11836400	-1689100	0	6731100	-5410200	0	U <sub>8</sub>
0	0	0	0	0	-4064000	1689100	0	-1689100	6769100	-1689100	-1352550	673100	0	U <sub>9</sub>
0	0	0	0	0	01689100	-10820400	-1689100	0	-1689100	11836400	1016000	-508000	0	U <sub>10</sub>
401163.75	0	0	0	0	0	0	-2032000	673100	-1352550	1016000	3384550	-1689100	0	U <sub>11</sub>
0	0	0	0	0	0	0	1016000	-5410200	673100	-508000	-1689100	5918200	0	U <sub>12</sub>

Solucionando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d_{X2} \\ d_{Y2} \\ d_{X3} \\ d_{Y3} \\ d_{V5} \\ d_{Y5} \\ d_{X6} \\ d_{Y6} \\ d_{X8} \\ d_{Y8} \\ d_{X9} \\ d_{Y9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.94858 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \\ 6.08817 \times 10^{-2} \\ 1.7609 \times 10^{-4} \\ 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.318 \times 10^{-3} \\ 6.222 \times 10^{-2} \\ 4.1946 \times 10^{-3} \\ 3.22126 \times 10^{-2} \\ 5.216 \times 10^{-3} \\ 6.376 \times 10^{-2} \\ 8.1336 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

para determinar las fuerzas que actúan en cada elemento se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}' & K_{12}' & K_{13}' \\ K_{21}' & K_{22}' & K_{23}' \\ K_{31}' & K_{32}' & K_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DN_1' \\ DN_2' \\ DN_3' \end{bmatrix}$$

que desarrollando se puede escribir:

$$\begin{aligned} P_1' &= K_{11}'DN_1' + K_{12}'DN_2' + K_{13}'DN_3' \\ P_2' &= K_{21}'DN_1' + K_{22}'DN_2' + K_{23}'DN_3' \\ P_3' &= K_{31}'DN_1' + K_{32}'DN_2' + K_{33}'DN_3' \end{aligned}$$

Por compatibilidad:

$$\begin{array}{llll} D_{1a}' = 0 & D_{1c}' = 0 & D_{1e}' = DN_5' & D_{1e}' = DN_8' \\ D_{2a}' = DN_2^1 & D_{2c}' = DN_2^1 & D_{2c}' = DN_3' & D_{2c}' = DN_6' \\ D_{3a}' = 0 & D_{3c}' = 0 & D_{3c}' = DN_2' & D_{3c}' = DN_5' \\ D_{1b}' = 0 & D_{1d}' = 0 & D_{1d}' = DN_5' & D_{1d}' = DN_8' \\ D_{2b}' = 0 & D_{2d}' = DN_8' & D_{2d}' = DN_6' & D_{2d}' = DN_9' \\ D_{3b}' = DN_5^1 & D_{3d}' = DN_5^1 & D_{3d}' = DN_3' & D_{3d}' = DN_6' \end{array}$$

aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada elemento:

elemento "a":

$$\begin{aligned} P_{1a}' &= \begin{bmatrix} 0 & -1016000 \\ -673100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2422.04 \\ -19846.95 \end{bmatrix} \\ P_{2a}' &= \begin{bmatrix} 135255 & -1016000 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.14 \\ -1211.02 \end{bmatrix} \\ P_{3a}' &= \begin{bmatrix} -1352550 & -1016000 \\ 673100 & -508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42303.18 \\ 21057.97 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elementos "b", "c" y "d":

$$P_{2b}' = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.43 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 \\ -741.949 \end{bmatrix}$$

$$P_{3b}' = \begin{bmatrix} 203200 & 0 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ -1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -582.14 \\ 450.87 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c}' = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ -1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41160.56 \\ 669.99 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.217 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ 1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139292.92 \\ 232.91 \end{bmatrix}$$

$$P_{3d}' = \begin{bmatrix} -203200 & 1016000 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.2178 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1666.21 \\ 559.19 \end{bmatrix}$$

y así para los otros elementos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_{1ve}' \\ P_{1ye}' \\ P_{2ve}' \\ P_{2ye}' \\ P_{3ve}' \\ P_{3ye}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -679.14 \\ -1099.71 \\ 39971.91 \\ 339.57 \\ -393000.2 \\ 760.14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{1vf}' \\ P_{1yf}' \\ P_{2vf}' \\ P_{2yf}' \\ P_{3vf}' \\ P_{3yf}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40297.42 \\ -95.87 \\ 54276.17 \\ 435.43 \\ 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{1vg}' \\ P_{1yg}' \\ P_{2vg}' \\ P_{2yg}' \\ P_{3vg}' \\ P_{3yg}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 714.32 \\ 311.18 \\ 46378.38 \\ -357.16 \\ -41092.71 \\ -668.34 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{1vh}' \\ P_{1vh}' \\ P_{2vh}' \\ P_{2vh}' \\ P_{3vh}' \\ P_{3vh}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40007.23 \\ 78.27 \\ 40163.78 \\ -0.0145 \\ -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

comprobación del equilibrio.

Nodo 2

$$P_2' = P_{2a}' + P_{3b}' + P_{3e}'$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.41 \\ -1211.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -582.144 \\ 450.878 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -39300.20 \\ 760.14 \end{bmatrix}$$

Nodo 3

$$P_3' = P_{2e}' + P_{3f}'$$
$$\begin{bmatrix} 40163.75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39971.99 \\ 339.57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

nodo 5

$$P_5' = P_{2b}' + P_{2c}' + P_{3d}' + P_{1e}' + P_{3g}'$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 \\ -741.95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41160.56 \\ 669.99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1664.21 \\ 599.19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -679.14 \\ -1099.71 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40297.42 \\ -95.87 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -41093.7 \\ 665.34 \end{bmatrix}$$

Nodo 6

$$P_6' = P_{2f}' + P_{2g}' + P_{eh}'$$
$$\begin{bmatrix} 80327.50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40105.68 \\ 435.43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40378.38 \\ 9357.16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

Nodo 8

$$P_8' = P_{2d}' + P_{1g}' + P_{1h}'$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39292 \\ 232.91 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 714.32 \\ -311.18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40007.23 \\ 78.27 \end{bmatrix}$$

para determinar los esfuerzos en cada elemento, se requiere conocer la matriz de esfuerzos [S] que está dada por la ecuación 6.41 y sustituirla en la ecuación 6.40.

la matriz de esfuerzos para los elementos a, e, c y g resulta:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -85200 & 42400 \\ 0 & -770400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ 964000 & 0 & 0 & 32000 & 64000 & -32000 \end{bmatrix}$$

y para los elementos b, d, f y h

$$S = \begin{bmatrix} 85200 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix}$$



Así, sustituyendo para cada elemento en la ecuación 6.40

$$[\sigma] = [S] [DN]$$

Elemento "a"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -18200 & 42400 \\ 0 & -170400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ -6400 & 0 & 0 & -32000 & -64000 & -32000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2510.20 \\ 625.110 \\ -23.28 \end{bmatrix}$$

elemento "b"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -852000 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0432 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \\ 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2435.79 \\ 14.20 \\ -18.38 \end{bmatrix}$$

en igual forma para los otros elementos:

Elemento c y d:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2592.79 \\ 645.15 \\ 42.20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2579.98 \\ 18.87 \\ 52.42 \end{bmatrix}$$

Elemento e y f:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2517.92 \\ 34.64 \\ 21.39 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2538.42 \\ -10.69 \\ 6.04 \end{bmatrix}$$

Elemento g y h:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2543.52 \\ -9.80 \\ -22.49 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2520.14 \\ -2.46 \\ -4.93 \end{bmatrix}$$

## 6.6 DEFORMACIONES PLANAS

Para determinar la matriz de rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas se sigue el mismo procedimiento que para un elemento triangular para esfuerzos planos, encontrando que las funciones de forma, la matriz desplazamiento-deformación [S] son las mismas, únicamente la matriz constitutiva es diferente. En este caso el esfuerzo normal  $\sigma_z$  no es nulo, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de esfuerzo. Sin embargo la deformación  $\epsilon_z$  si es nula, por lo tanto:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = \mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$Y_{xy} = 2(1 + \mu) \frac{\tau_{xy}}{E}$$

pero:

$$\epsilon_z = 0 = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

de donde:

$$\sigma_z = \gamma \sigma_x + \mu \sigma_y$$

Sustituyendo en las deformaciones lineales  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu \sigma_x + \mu \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \mu^2) - \frac{\sigma_y}{E} (1 + \mu^2)$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu \sigma_x + \mu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\sigma_x}{E} (1 + \mu^2) + \frac{\sigma_y}{E} (1 - \mu^2)$$

Arreglando en forma matricial las ecuaciones correspondientes a las deformaciones lineales  $\epsilon_x, \epsilon_y$  y la deformación angular  $\tau_{xy}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ Y_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (1 - \mu^2) - (-\mu^2) & 0 \\ -(1 + \mu^2) (1 - \mu^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

en forma compacta:

$$[\sigma] = [E] [\varepsilon]$$

por lo que la matriz constitutiva se puede escribir:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{12} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

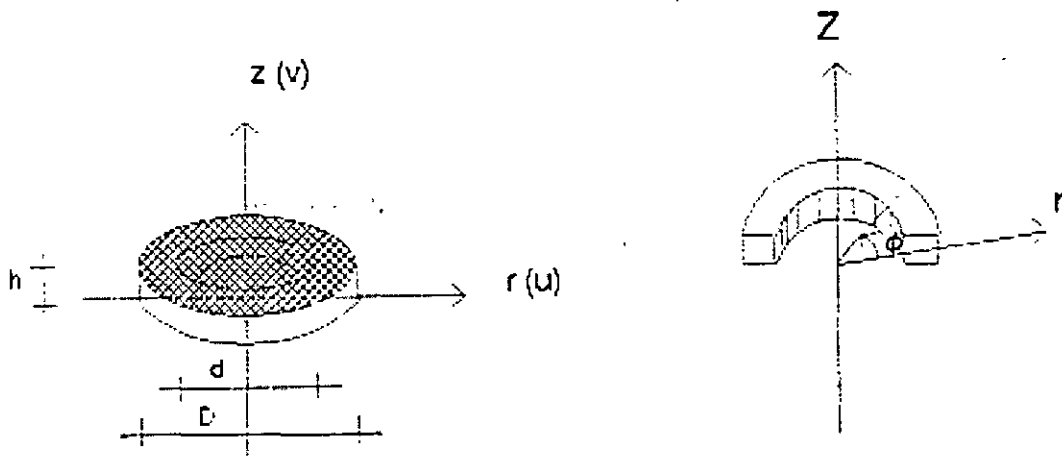
por lo que la ecuación 6.31 sigue siendo válida para valuar la matriz rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas.

Las ecuaciones 6.40 y 6.41 por consiguiente son válidas para este tipo de elementos y la solución de la ecuación 6.41 da como resultado los esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  y por medio de la expresión:

$$\sigma_z = \mu\sigma_x + \mu\sigma_y$$

## 6.7 ANALISIS DE ESFUERZOS EN CUERPOS DE REVOLUCION.

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución, existiendo entonces asimetría. Los problemas matemáticos que se presentan son muy similares a los de esfuerzos y deformaciones planas, ya que el problema se trata en forma bidimensional. Por simetría el estado de deformaciones y por consiguiente el de esfuerzos esta definido completamente por las dos componentes de desplazamientos. En la figura 6.24 se representa una de tales secciones.

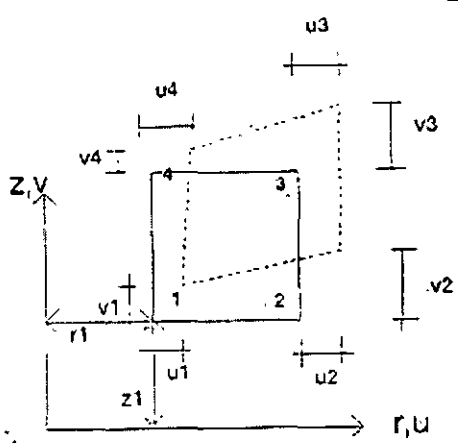


Si  $r$  y  $z$  representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto respectivamente y  $u$  y  $v$  los desplazamientos correspondientes, es fácil ver que si se utiliza un elemento rectangular las ecuaciones de desplazamiento planteadas en las ecuaciones 6.5 pueden usarse para este problema, por consiguiente las funciones de forma expresadas por las ecuaciones 6.15 también son válidas, únicamente se hará el cambio de  $r$  por  $x$  y por  $z$ .

También se puede utilizar un elemento triangular, en este caso se pueden usar las mismas funciones de desplazamiento utilizadas para esfuerzos y deformaciones planas. Sin embargo en este trabajo se planteará como ya se mencionó para un elemento rectangular.

**6.7.1 MATRIZ DE RIGIDECES DE UN ELEMENTO RECTANGULAR PARA UN PROBLEMA AXISMETRICO.**

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.25.

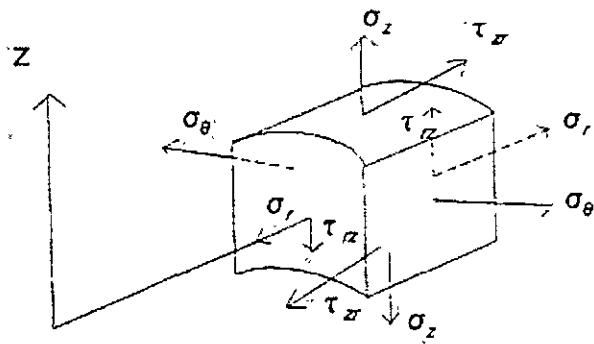


**FIGURA 6.25**

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó así:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

de la teoría de la elasticidad para un sólido axisimétrico el estado de esfuerzos queda definido por:



**FIGURA 6.26**

Por lo que las deformaciones a considerar en un sólido de revolución de revolución serán  $\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta$  y  $\gamma_{rz}$ , así el vector de deformación queda definido por:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos:

$$\epsilon_r = \frac{\partial N_1}{\partial r} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} u_4$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial N_1}{\partial z} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} v_4$$

$$\epsilon_\theta = \frac{N_1}{r} u_1 + \frac{N_2}{r} u_2 + \frac{N_3}{r} u_3 + \frac{N_4}{r} u_4$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial N_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} u_4 + \frac{\partial N_1}{\partial r} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} v_4$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{2z} & 0 & N_{3z} & 0 & N_{4z} \\ N_{1\theta} & 0 & N_{2\theta} & 0 & N_{3\theta} & 0 & N_{4\theta} & 0 \\ N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

esta ecuación se puede expresar en forma compacta como:

$$[ \epsilon ] = [ B ] [ DN ]$$

donde:

$$\begin{aligned}
N_{1r} &= \frac{\partial N_1}{\partial r} = b_1 + d_1 z \\
N_{2r} &= \frac{\partial N_2}{\partial r} = b_2 + d_2 z \\
N_{3r} &= \frac{\partial N_3}{\partial r} = b_3 + d_3 z \\
N_{4r} &= \frac{\partial N_4}{\partial r} = b_4 + d_4 z \\
N_{1z} &= \frac{\partial N_1}{\partial z} = c_1 + d_1 r \\
N_{2z} &= \frac{\partial N_2}{\partial z} = c_2 + d_2 r \\
N_{3z} &= \frac{\partial N_3}{\partial z} = c_3 + d_3 r \\
N_{4z} &= \frac{\partial N_{41}}{\partial z} = c_4 + d_4 r
\end{aligned}$$

Para definir la matriz constitutiva se aplica cada una de las componentes del vector deformación en términos de los esfuerzos que la generan, así:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{t_{rz}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} t_{rz}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ t_{rz} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ t_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}$$

en forma reducida:

$$[\sigma] = [E][\epsilon]$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta:

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{32} = E_{23} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

sustituyendo la matriz desplazamiento-deformación y la matriz constitutiva en la ecuación 6.28 se puede evaluar la matriz de rigideces. Recordando que la integral de volumen ha de extenderse a todo el anillo de material, se tiene:

$$K^e = 2\pi \int B' E B r dr dz$$

sustituyendo se obtendría:



$$k^e = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{1\theta} & N_{1z} \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{1r} \\ N_{2r} & 0 & N_{2\theta} & N_{2z} \\ 0 & N_{2z} & 0 & N_{2r} \\ N_{3r} & 0 & N_{3\theta} & N_{3z} \\ 0 & N_{3z} & 0 & N_{3r} \\ N_{4r} & 0 & N_{4\theta} & N_{4z} \\ 0 & N_{4z} & 0 & N_{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{2z} & 0 & N_{3z} & 0 & N_{4z} \\ N_{1\theta} & 0 & N_{2\theta} & 0 & N_{3\theta} & 0 & N_{4\theta} & 0 \\ N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \end{bmatrix} r dr dz$$

como puede observarse las matrices desplazamiento-deformación  $[B]$  dependen de las coordenadas  $r$  y  $z$  por lo que la integral no puede realizarse tan sencillamente como en el caso de esfuerzos y deformaciones planas. Hay dos alternativas para realizar esta integral, la primera es una integración numérica, la segunda una multiplicación explícita y una integración término a término.

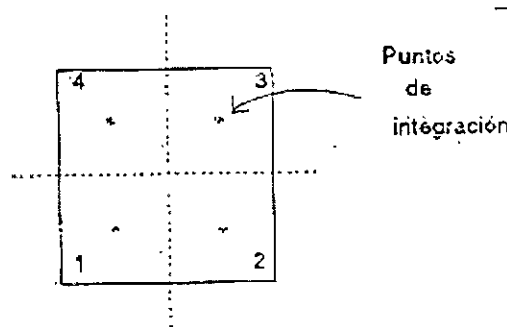
El procedimiento aproximado más sencillo es valuar la matriz desplazamiento-deformación  $[B]$  en el centro de gravedad de cada elemento, así:

$$K^e = 2\pi B r \Delta$$

siendo  $\Delta$  el área del elemento.

Esta aproximación se basa en la demostración de que si la integración numérica es de orden tal que permita determinar exactamente el volumen del elemento, entonces la solución converge hacia la solución exacta cuando se aumenta indefinidamente el número de elementos.

Se puede seguir un procedimiento de integración más elaborado calculando el valor del integrado en varios puntos del elemento rectangular con 4 puntos (dos en cada dirección) se obtiene buena aproximación. Figura 6.27.



**FIGURA 6.27**

En general los puntos de integración se eligen considerando que el número de puntos de integración por tres deberá ser mayor el grado de libertad (número de nodos por 2), menos los grados de libertad restringidos, esto es para que la matriz  $K$  sea no singular.

Aplicando la cuadratura de Gauss la matriz de rigideces se obtiene con:

$$K_y^e = 2\pi r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j B_i^T E B_j \Delta$$

donde n son los puntos de integración elegidos en cada dirección y  $W_i, W_j$  son los coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss.

Para obtener las coordenadas de los puntos de integración, así como a los coeficientes de peso de las fórmulas de cuadratura de Gauss se utiliza la tabla 8.1 pag. 228 del libro "El método de los elementos finitos" de O. C. Zienkiewicz.

### 6.7.2 MATRIZ DE ESFUERZOS PARA UN ELEMENTO AXISIMETRICO.

En este tipo de elementos el esfuerzo varía con respecto a las coordenadas por lo que es conveniente valuar dicho esfuerzo en el centroide del elemento y el procedimiento a seguir es el mismo que en esfuerzos y deformaciones planas, solo habrá que incluir los desplazamientos nodales correspondientes a los grados de libertad  $U_4$  y  $V_4$  de la ecuación 6.40.

$$[\sigma] = [S] [DN]$$

una vez valuada la matriz desplazamiento-deformación  $[B]$  en el centroide del elemento se hace el producto con la matriz constitutiva para obtener la matriz esfuerzo.

$$[S] = [E] [B]$$

## BIBLIOGRAFÍA

1. R.K. Livesley; Matriz Methods of Structural Análisis, Pergamon Press.
2. J.S. Przemieniecki; Theory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw Hill.
3. H. Kardestuncer; Introducción al Análisis Estructural con Matrices; Mc Graw Hill.
4. Jeffrey p. Laible; Análisis Estructural; Mc Graw Hill.
5. A. Gali y A. M Neville; Análisis Estructural; Diana.
6. J. Esterlin Kinney; Análisis de Estructuras Indeterminadas; Cecsca.
7. Carlos Magdaleno; Análisis Matricial de Estructuras Reticulares.
8. Heberto Martínez C; Análisis y diseño estructural; Representaciones y Servicios de Ingeniería.
9. Filonenko Borobich; Theory of Elasticity; Mir.
10. S. Timoshenko and J. N. Goodier; Teoría de la elasticidad; Urmo; s.a. de Edic.
11. Richard H. Gallager; Finite element Method; Mc Graw Hill.
12. Analysis of framed structural; J.M. Gere and W. Weaver; Van Nostrand Company.