



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Interacción Dinámica Suelo-
Estructura**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Civil

P R E S E N T A

Luis Alberto Mejia Bermejo

DIRECTOR DE TESIS

M.I. Agustín Demeneghi Colina



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., mayo 2017

Agradecimiento.

En lo personal agradezco infinitamente a mi familia por brindarme su apoyo en todas mis actividades escolares, su cariño y amor que siempre me demostraron y que fue uno de los motores esenciales para impulsarme y lograr mis metas, también agradezco su confianza que depositaron al respetar siempre mis decisiones.

A mis amigos y amigas que siempre estuvieron alentándome para lograr mi superación personal y también ser un factor de cambio positivo en nuestro círculo de amigos, así como el cariño y la confianza que siempre me brindaron al estar conmigo, ya que las amistades son la familia que escogemos para compartir nuestros días.

A mis profesores que estuvieron en mi formación académica desde los inicios de la misma, ya que ellos fueron forjando las ganas por superarme y seguir aprendiendo; y son ejemplos a seguir para mí, porque me demostraron que mientras estés dispuesto a aprender de tus errores, siempre habrá oportunidad de crecer y lograr lo que te propongas.

A todos los que hacen posible e integran INROADS, una asociación que significa mucho para mí por brindarme herramientas para mi formación personal y profesional, que he aprendido y seguramente seguiré aprendiendo mucho de todos ellos, también agradezco el haberme brindado la oportunidad de colaborar en Kansas City Southern de México una empresa formadora de mi perfil profesional.

Y así mismo agradezco a todas las personas que compartieron un momento de sus vidas con la mía, ya que aprendí también de ellas y fueron factores de superación para mí. Así como en memoria de mi primo Roberto E. Valeriano Mejía le dedico mi esfuerzo, esperando se encuentre en un mejor lugar.

“El éxito tiene una simple fórmula: da lo mejor de ti y puede que a la gente le guste”.

-Sam Ewing.

Índice.

Antecedentes.

Capítulo I. Introducción.

- 1.1 Justificación.
- 1.2 Objetivo.
- 1.3 Organización.

Capítulo II. Sistemas de un Grado de Libertad y Vibraciones.

- 2.1 Definición de un S1GDL.
- 2.2 Características de un S1GDL..
- 2.3 Propiedades Dinámicas.
- 2.4 Vibraciones.
- 2.5 Ejemplo.

Capítulo III. Dinámica del Medio Continuo.

- 3.1 Modelo de Winkler.
- 3.2 Modelo Elástico como Medio Continuo.
- 3.3 Modelación Avanzada.
- 3.4 Mecánica del Medio Continuo.
- 3.5 Ecuaciones Constitutivas de un Material Viscoelástico.
- 3.6 Vibración en un Estrato de Suelo Blando.
- 3.7 Métodos para Evaluar las Propiedades Dinámicas del Suelo.

Capítulo IV. Interacción Dinámica Suelo-Estructura

- 4.1 Conceptos Básicos sobre Interacción Dinámica Suelo-Estructura.
- 4.2 Energía Potencial y Cinética.
- 4.3 Ecuación de Equilibrio Dinámico.
- 4.4 Elementos que interviene en la IDSE.
- 4.5 Importancia del análisis.

Capítulo V. Aplicación.

- 5.1 Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.
- 5.2 Ejemplo.

Capítulo VI. Conclusiones.

Referencias.

Referencias Bibliográficas

Índice de Imágenes y Tablas

Índice de símbolos

Antecedentes.

“Desde el punto de vista geotécnico ¿Qué variables alteran el movimiento sísmico?, para responder a esta cuestión, debemos de conocer que cada tipo de onda viaja a una velocidad diferente que puede depender de la frecuencia. Como consecuencia de las diferentes velocidades de propagación, la dispersión geométrica, de las pérdidas por fricción interna y de las muchas discontinuidades e irregularidades que las ondas deben atravesar, las características del movimiento del terreno se alteran en intensidad y en contenido de frecuencia con la distancia. Además las condiciones locales: geología, estratigrafía, topografía, etc. En los sitios en donde se desea determinar las características del movimiento del terreno influyen en dichas características, y la forma en que se presenta tal influencia depende de los tipos de ondas sísmicas que contribuyen al movimiento del terreno en ese sitio de interés. Esto depende del mecanismo de cada temblor y de la posición relativa del sitio con respecto a la fuente, así como de las características de la corteza en la trayectoria de las ondas”. (Esteva, 1980).

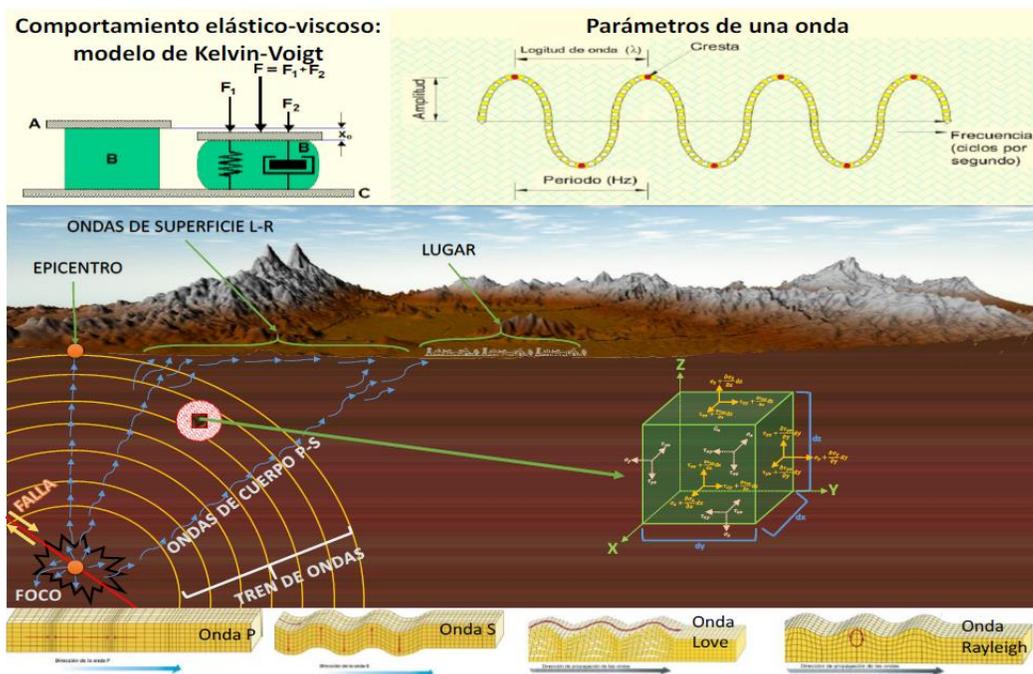


Ilustración 1 Transmisión de ondas en un medio infinito (Colindres, 1983; Isidro, 2012; Modelo de Kelvin-Voigt, 2014; ondas sísmicas, 2014).

En la Ciudad de México antes denominada Distrito Federal o Valle de México tiene una peculiaridad muy importante en el tema de “Ingeniería Geotécnica” y que influye en la “Ingeniería Estructural”, ya que la ciudad se encuentra en una cuenca endorreica, esto hace que todo escurrimiento superficial se almacene dentro de la cuenca que en su momento formaba ríos y lagos dentro de la misma; desde los primeros asentamientos

humanos se tiene el conocimiento que el Valle estaba formado por una serie de lagos (Lago de Texcoco, Lago de Chalco, Lago de Xochimilco, Lago de Zumpango y el Lago de Xaltocan) como podemos observar en la siguiente ilustración.

Se convirtió un reto por buscar la manera de establecerse en un lugar lleno de agua, lo que dio origen al invento de las chinampas (pequeñas islas) que les servirían como suelo de cultivo y algunas veces de tránsito o de vivienda, siendo un sistema útil y efectivo; por lo que el suelo donde se encontraban no era estable sino todo lo contrario era un suelo fangoso, húmedo y rico en nutrientes; en ocasiones cuando bajaba el tirante de los lagos y ríos estos los utilizaban para transitar y expandirse.

También las formaciones rocosas y volcánicas estaban presentes en el Valle, ya que está rodeada por una serie de sierras (Sierra de las Cruces, Sierra de Chichinautzin, Sierra Nevada, Sierra de Santa Catarina y Sierra del Tepeyac) así como cerros que se encontraban dentro del “Gran Lago” (Cerro de la Estrella y Cerro del Tepeyac) y algunos volcanes (Volcán Teuhtli, Volcán Tláloc, Volcán Guadalupe, Volcán del Ajusco, Volcán Chichinautzin y el Volcán Xitle) que en sus periodos de actividad volcánica ayudaron a la formación del suelo que hoy se tiene en la Ciudad de México, con la aportación de cenizas, lava y productos piroclásticos.



Ilustración 2. Lagos que conformaban el Valle de México

Gracias a estas actividades de establecer una civilización, el crecimiento poblacional y la urbanización dan origen a una necesidad primordial como lo son contar con viviendas, vialidades, instituciones académicas, edificaciones gubernamentales, parques, centros de recreación etc. Esto obligo que se empezara con la investigación de la interacción suelo-estructura para poder hacer más estables las edificaciones, ya que como se sabe el tipo de suelo y su cimentación influyen en su estabilidad.

El objetivo principal de las cimentaciones es de transmitir las cargas de una estructura a los estratos resistentes del subsuelo, en la forma estable y con asentamientos tolerables durante su vida útil.

La estratigrafía de la Zona de Lago.

De acuerdo con el modelo estratigráfico inicialmente propuesto por Marsal y Mazari, la secuencia de los suelos de la antigua zona de lago está integrada por:

- La Costra Superficial (CS): La cual en muchas partes está cubierta con rellenos artificiales de espesor variable; los más gruesos se encuentran en el centro Histórico y tiene varios metros de espesor, es prácticamente inexistente en las orillas del lago. En general está formado por 3 estratos, que constituyen una secuencia de materiales naturales cubiertos por un relleno artificial heterogéneo:
 - Relleno artificial (RA): Constituido por restos de construcción y por relleno arqueológico, su espesor varía entre 1 y 7 metros en el centro de la ciudad aunque bajo de la catedral en ocasiones excede los 15 metros. Este relleno es de unos dos metros en el resto del Centro Histórico y casi inexistente en el centro y las orillas del lago.
 - Suelo Blando (SB): Se le puede describir como un depósito aluvial blando de tan pequeño espesor que a veces pasa desapercibido, fue el sedimento fangoso que se depositó en el fondo del último lago; suele tener intercalados lentes de material eólico.
 - Costra Seca (Csec): Se formó como consecuencia de un descenso del nivel del lago durante el cual quedaron expuestas algunas zonas del fondo a los rayos solares con lo cual la costra seca quedó fuertemente consolidada.
- La Formación Arcillosa Superior (FAS): Con arcillas blandas a muy blandas, tiene un espesor que varía entre los 25 y 50 m; aunque es muy uniforme, se pueden identificar cuatro estratos, de acuerdo a su origen geológico, y con los efectos de la consolidación inducida por sobrecargas superficiales y por el bombeo profundo, dichos estratos tienen intercalados lentes duros que se pueden considerar como estratos secundarios.
 - Arcilla Preconsolidada Superior (APS): Este estrato superficial se ha endurecido por efecto del secado solar, por el ascenso capilar del agua, las sobrecargas externas y las que producen los rellenos.
 - Arcilla Normalmente Consolidada (ANC): Se localizan por debajo de la profundidad afectada por las sobrecargas superficiales y por arriba de los suelos consolidados por el bombeo profundo.
 - Arcilla Consolidada Profunda (ACP): El bombeo para abastecer a la ciudad de agua potable ha generado un fenómeno de consolidación, más significativo en las arcillas profundas que en las superficiales, se debe

aclarar que se trata de arcillas normalmente consolidadas en virtud de las pérdidas continuas de presión de agua que prevalece.

- Lentes Duros (LD): Los estratos de arcilla están interrumpidos o intercalados por lentes duros, que pueden ser costras de secado solar, arenas basálticas o vidrio pómez cuyo espesor varía desde unos centímetros hasta cerca de 2 metros.
- La Capa Dura (CD): Que separa las dos formaciones arcillosas, es un depósito heterogéneo que se desarrolló en el periodo climático del interglaciar Sangammon en el cual predominan limos arenosos con algo de arcilla y ocasionales gravas. Tiene una cementación muy errática y su espesor variable: es muy delgada en la zona central del lago de Texcoco que no llegó a secarse y alcanza unos 5 m en lo que fueron sus orillas. Tiene intercaladas, lentes de arcilla que se formaron en los ciclos húmedos del periodo interglaciar Sangammon, se generaron suelos limosos y limo-arenosos a veces erráticamente cementados con carbonato de calcio. Es muy variable en su espesor y resistencia.
- La Formación Arcillosa Inferior (FAI): Con arcillas más consolidadas, es una secuencia de estratos de arcilla separados por lentes duros, en un arreglo semejante al de la serie arcillosa superior. Su espesor es de unos 15 m al centro del lago y prácticamente desaparece en sus orillas.

Los Depósitos Profundos (DP): Constituidas por materiales granulares, esto es una serie de arenas y gravas aluviales limosas, cementadas con arcillas duras y carbonatos de calcio. La parte superior de estos depósitos, de 1 a 5 m, está más endurecida que la inferior, en donde se encuentran estratos menos cementados y hasta arcillas Preconsolidada.

México se encuentra en una zona de alta sismicidad debido a la interacción que tiene con cinco placas tectónicas, tal como se puede observar en la imagen adjunta (ilustración 4), en la que se presentan las cinco placas en las cuales está inmerso el país y lo hacen ser “un país con alta sismicidad”. El Distrito Federal hoy Ciudad de México, está ubicado dentro del eje Neovolcánico, caracterizado por una serie de cadenas montañosas que atraviesan la República Mexicana, en esta zona se encuentra la mayor cantidad de volcanes activos, así como el graben de Acambay.

Desde el punto de vista Geotécnico el Profesor Emilio Rosenbleuth analizó el riesgo sísmico de la ciudad de México, mencionando las fuentes que originan los sismos, resumidas en los siguientes textos:

Temblores locales: Se originan dentro de la cuenca o en sus inmediaciones. En el siglo XX se registraron sismos no destructivos de este tipo con magnitudes intermedias o bajas, pero posiblemente en el pasado hayan ocurrido otros más grandes. En años

recientes han ocurrido varios pequeños sismos en las lomas del poniente de la ciudad de México (Rosenbleuth & Ovando, 1990).

Temblores originados en la placa norteamericana: El gran temblor de 1912, originado en el graben de Acambay a unos 70 km al noroeste de la capital es uno de estos. Estos graben siguen amenazando a la ciudad, aunque se ha estimado que el período de retorno de los macro sismos que originan es del orden de un milenio, ver Figura 2.3, (Rosenbleuth & Ovando, 1990).

Temblores de subducción de la placa de Cocos bajo la de Norteamérica: Son los que mayores estragos han causado en la capital. Los temblores de Guerrero de 1909, 1957 y 1979 se originaron ahí, así como los de Michoacán de 1911 y los tristemente célebres de septiembre de 1985. Cerca de la placa de Rivera tuvieron lugar los temblores de Colima de 1932 y 2002 así como el de Manzanillo de 1995. El temblor de Manzanillo de 1932 es el de mayor magnitud que se haya registrado en nuestro país con $M=8.5$, (Rosenbleuth & Ovando, 1990).

Temblores de la placa de Cocos: Se originan a profundidades intermedias, entre 50 y 100 km con magnitudes que disminuyen conforme se alejan del litoral. Han alcanzado magnitudes en la escala de Richter de 8.0 cerca de la costa y alrededor de 6.5 bajo la cuenca de México. Estos temblores ocurren por fallamiento normal en la placa de Cocos subducida bajo la placa continental. Los temblores del Golfo de México, así como los de Jáltipan de 1957 y de Orizaba (o Cd. Serdán) de 1873, y más recientemente el de Tehuacán del 1999 tienen este origen, (Rosenbleuth & Ovando, 1990).

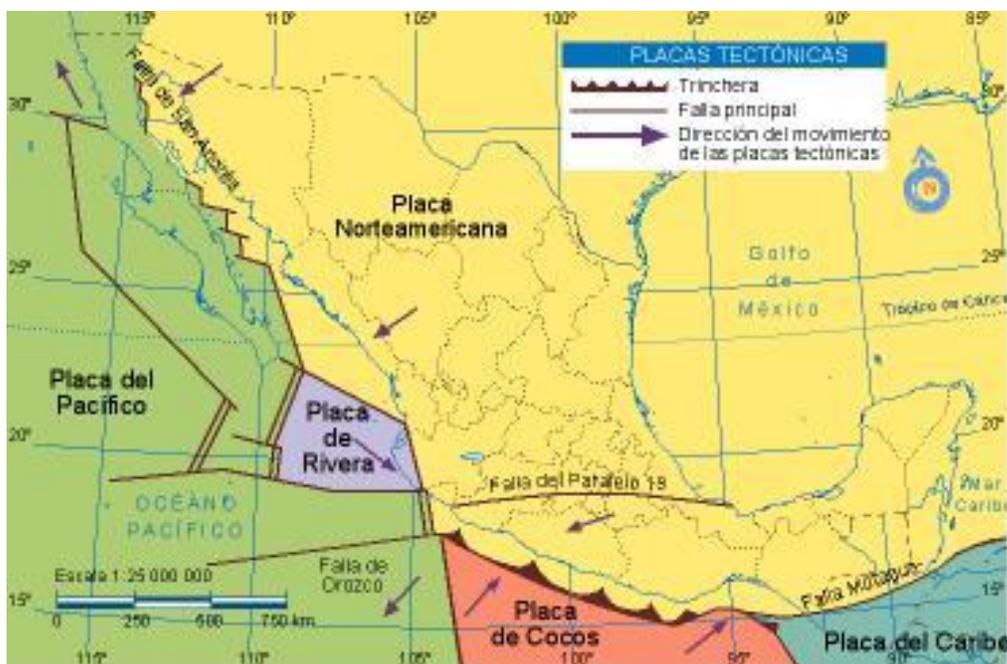


Ilustración 4 Placas Tectónicas que rodean México

Capítulo I. Introducción.

“Los sismos se originan al liberarse energía en el interior de la tierra, esto se produce por el movimiento de las placas tectónicas, que provocan una ruptura, originando una perturbación, pero, ¿qué ocurre con el subsuelo en el momento en que se desarrollan estos movimientos?; para explicarlo tenemos que imaginar que el suelo es una masa capaz de almacenar grandes cantidades de energía potencial y cuando ésta se libera se convierte en energía cinética provocando el movimiento de las partículas del subsuelo; sin embargo, no todas las partículas son afectadas en el mismo instante, la interacción entre partículas permite que se propague la energía generando un tren de ondas constituida por ondas de cuerpo (longitudinales y transversales) y de superficie (Love y Rayleigh) con una velocidad denominada celeridad, c ”.

“Desde el punto de vista de diseño sísmico, las ondas que causan afectación a la estructura son: la onda longitudinal (onda P o de compresión) la cual hace que las partículas oscilen a lo largo de la dirección de propagación, en cambio, la onda transversal (onda S o de cortante) hace que las partículas del medio oscilen en una dirección perpendicular a la dirección de propagación (Diaz, 2005)”; con el movimiento telúrico ocurren caídas bruscas de esfuerzos que se inician en un punto y se propagan a lo largo de ellas, a velocidades comparables a la de propagación de las ondas de cortante.

Las obras de ingeniería civil están cimentadas de una u otra forma sobre el suelo (fino o grueso) o sobre roca, además se utiliza el suelo excavado como elemento de construcción para terraplenes, diques y rellenos en general; por lo que, es importante conocer su estabilidad y comportamiento funcional, lo cual estarán regidos por el comportamiento del material en el cual se desplanta la obra. Así, la estrecha relación que hay entre el suelo, la subestructura y la superestructura es muy importante para el diseño de “los elementos estructurales” que conforman cualquier tipo de obra civil, ya que se debe asegurar la funcionalidad y la resistencia de los mismos.

Una de las áreas de mayor interés e importancia en la Ingeniería es la del diseño y análisis de estructuras, en este campo se deben hacer suposiciones acerca de las características y condiciones que conforman el modelo o diseño que realiza con el fin de simplificar y hacer posible el cálculo de parámetros que definen el resultado final.

En el caso de la Ciudad de México, como consecuencia de las características físico-químicas del suelo, donde se desplantan las estructuras se ha tenido que adoptar toda clase de cimientos, desde los más sencillos tales como “los cimientos superficiales” (zapatas corridas, zapatas aisladas, losas, etc.) hasta los más complejos como los intermedios (cajones de cimentación), profundos (pilotes, pilas, etc.) y mixtos (como los cajones con pilotes de fricción) además de una gran cantidad de variantes. Representa un reto no solo por las condiciones del suelo, sino también por la ubicación geográfica, ya que la Ciudad de México es propensa a la actividad sísmica (temblores), de los que se tiene registro desde la época prehispánica, y al igual que en el pasado, los temblores siguen afectando las obras de infraestructura.

Por lo que el procedimiento de Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE), cuyo propósito es hacer más confiable el proceso de diseño al considerar los espectros de diseño elástico, con los cuales se pretende representar de una manera más realista los niveles de demanda que se presentan ante los sismos de diseño y refleje correctamente los niveles de amplificación que se producen en la realidad para diferentes tipos de suelo; nos permite obtener un periodo efectivo representativo de un sistema suelo-cimentación-superestructura conllevándolos al cálculo de un espectro elástico representativo del sitio de estudio con los que se obtienen los parámetros de diseño sísmico.

“Hoy en día, se han desarrollado muchas investigaciones que permiten evaluar la importancia de las condiciones del sitio y los efectos de interacción dinámica suelo-estructura en la respuesta de estructuras apoyadas en suelos flexibles sometidas a eventos sísmicos. Por ejemplo: cuando una onda sísmica atraviesa un estrado de suelo flexible hace que estas se atenúen o se amplifiquen (Sánchez-Sesma, 1987) respecto a las que se tendrían en suelo firme, como resultado de fenómenos de difracción múltiple”.

“La importancia práctica de los efectos del sitio radica en que de ellos depende la caracterización del terreno de cimentación para fines de microzonificación la cual es fundamental en la reglamentación sísmica (Avilés y Pérez Rocha, 1997)”.

“La dimensión de la zona en donde se producen caídas bruscas de esfuerzos y desplazamientos relativos del orden de varias decenas de kilómetros para temblores de magnitud moderada, puede alcanzar varias centenas de kilómetros para magnitudes del orden de 7.5 o mayores. El punto que se determina como hipocentro o foco a partir de

los registros de sismógrafos es aquel en donde se inicia la ruptura y por tanto en donde se generan las primeras ondas (Esteve, 1980)".

Para poder analizar el subsuelo, es necesario idealizar el material mediante modelos de comportamiento que representen los fenómenos que ocurren en sitio, para el caso del subsuelo cuando está sometido a fuerzas sísmicas, ocurre una condición viscoelástica entendida como la relación que existe entre esfuerzo-deformación-tiempo, el efecto de esta condición dependerá de las propiedades mecánicas y dinámicas que tengan los materiales, por tanto, en un material sometido a fuerzas dinámicas (sismo) ocurrirán alteraciones que afectarán el estado de esfuerzos inicial de los materiales que interactúen, estas caídas de esfuerzos de compresión y de tensión, provocarán deformaciones, y se reflejarán en los cambios volumétricos y cambio en las propiedades mecánicas y dinámicas de los materiales.

I.1 Justificación.

Este trabajo se hace para proporcionar al ingeniero la sensibilidad que se debe tener para el análisis y diseño por sismo con base al método Interacción Dinámica Suelo-Estructura que se presenta en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 2004 (RCDF04) en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (NTCDS) y el apéndice A de dicha norma.

El trabajo se limita a comprar dos procedimientos: el método Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) que se encuentra en el apéndice de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo y en el cuerpo de la misma, donde el interés principal será comprobar la siguiente hipótesis:

“¿Qué tantas variaciones tienen los resultados obtenidos cuando se aplica el Cuerpo de la Norma Técnica Complementaria para Diseño por Sismo del RCDF04 y cuando se aplica el Apéndice de dichas Normas?”

I.2 Objetivo.

Presentar la teoría de Viscoelasticidad de los suelos (comportamiento dinámico de medios elásticos continuos) para entender cuáles son las propiedades de los suelos que influyen en el comportamiento dinámico.

Presentar el procedimiento de análisis sísmico para la construcción de espectros de diseño sísmico cuando se aplique IDSE, así como la obtención de los parámetros dinámicos para diseño sísmico utilizado en la teoría de las NTCDS-2004 y su apéndice.

Así como mostrar la importancia que tiene realizar este tipo de análisis de diseño por sismo.

I.3 Organización.

El trabajo está conformado por 6 capítulos, ordenados cronológicamente, a continuación, se describirá brevemente cada capítulo:

Capítulo II Sistemas de un Grado de Libertad y Vibraciones: En este capítulo se definirá lo que es un Sistema de un grado de Libertad, se hablará de sus características y condiciones, qué es rigidez, propiedades dinámicas, qué es ductilidad, modelos que describen a la vibración, para poder entender el desarrollo de la aplicación y el contenido del documento.

Capítulo III Dinámica del Medio Continuo: En el encontraremos las características del sistema “Suelo” (la Viscoelásticidad), así como las diferentes modelaciones que lo representan junto con la subestructura, detallando con mayor precisión la modelación avanzada, donde considera al suelo como medio continuo destacando las propiedades viscoelástica del mismo, ya que es muy útil en el análisis IDSE, por último, se habla de los métodos para evaluar las propiedades mecánicas del suelo.

Capítulo IV Interacción Dinámica: Se detallará con precisión el concepto de interacción dinámica suelo estructura, así como las ecuaciones representativas de este análisis, los factores que intervienen en la interacción dinámica suelo estructura, la ecuación de movimiento y sus variantes de acuerdo con el tipo de vibración y amortiguamiento.

Capítulo V Aplicación: Se realizará un ejemplo práctico donde se aplicará lo escrito en el Reglamento de Construcción del Distrito Federal 2004 en sus NTCDS, el cuerpo y el apéndice A de dicha norma, basado en la Teoría de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura, presentando los pasos realizados y la comparación al final de los resultados obtenidos en los métodos.

Capítulo VI Conclusiones: Se presentará de acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo anterior una conclusión relevante, también se dará respuesta a la hipótesis que se planteó desde un inicio.

Capítulo II. Sistema de un Grado de Libertad y Vibraciones.

II.1 Definición de un S1GDL.

Un sistema de un grado de libertad (S1GDL) es aquel que solo es posible un tipo de movimiento, es decir, la posición del sistema en cualquier instante puede ser definida por la de una sola coordenada.

Se trata de un cuerpo de masa **M** unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez lateral **K**, sometido a una fuerza **F(t)**, que es función del tiempo y genera un desplazamiento **U=Δx** con respecto a su posición original.

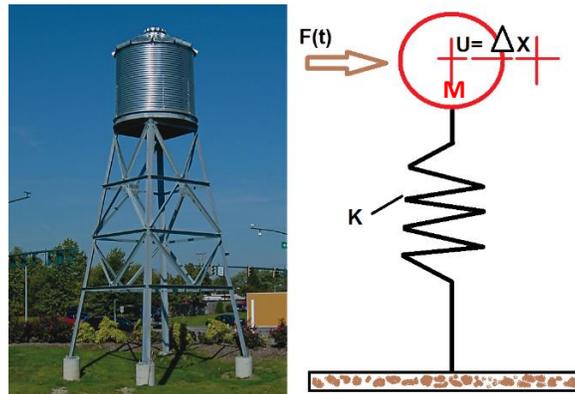


Imagen 1 Representación de un Sistema de Un Grado de Libertad

Donde:

F(t) Es la fuerza externa que es función del tiempo.

U=Δx El desplazamiento provocado por F(t), con respecto a su posición inicial.

K Rigidez de los elementos que soportan la masa

M Masa concentrada de la estructura

Esto es, la estructura se representa como un modelo ideal, cuyas propiedades pueden estudiarse y manipularse matemáticamente, para esto se plantean una serie de hipótesis:

- a) En primer lugar se asume que la base de la estructura se fija y que la losa es infinitamente rígida, esto es, no permite deformaciones.
- b) Se considera que la losa solo se puede desplazar de manera horizontal, por lo tanto, basta con conocer el desplazamiento de uno de los puntos para determinar la configuración deformada.
- c) Se examinan las distintas fuerzas que actúan sobre la losa de la estructura, y se considera su movimiento es originado por una fuerza externa $\mathbf{F(t)}$ que varía a través del tiempo.

Cabe mencionar la diferencia entre el análisis estático y dinámico de un sistema de 1 GDL, y esto es: la intervención en el segundo caso de la fuerza de inercia, la cual actúa en sentido opuesto a la aceleración de la masa del sistema.

II.2 Características de S1GDL.

El sistema de 1GDL se considera una estructura con comportamiento elástico, es decir, si se le impone un desplazamiento lateral, se generan fuerzas restitutivas proporcionales al desplazamiento, pero de sentido contrario. Donde la constante de proporcionalidad entre la fuerza de restitución elástica y el desplazamiento lateral, se denomina Rigidez lateral de la estructura (\mathbf{K}).

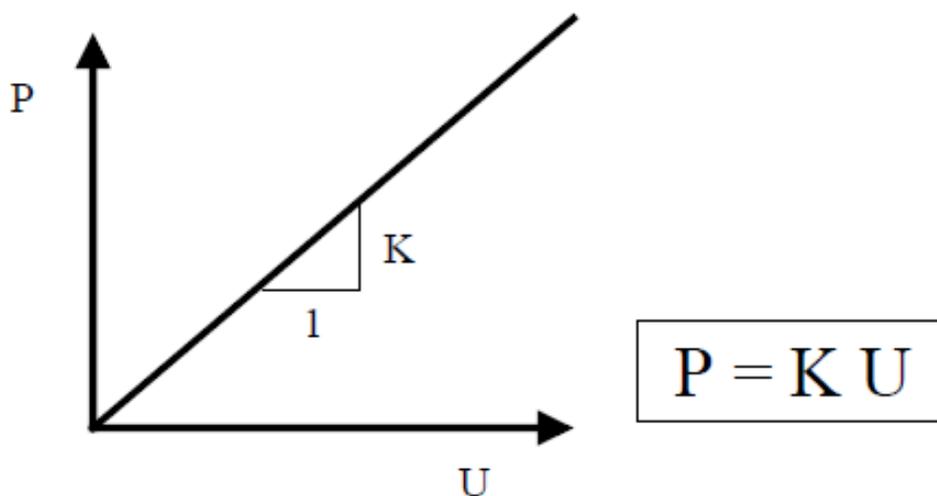


Imagen 2 Representación de un comportamiento Elástico-Lineal.

Rigidez (K)

Cuando se aplica una fuerza a una estructura, esta se desplaza en la dirección de la fuerza $\mathbf{F}(t)$, la rigidez se define como el cociente entre la fuerza aplicada en el centro de gravedad del cuerpo y el desplazamiento horizontal producido por dicha fuerza.

$$K = \text{Rigidez lateral} = \frac{\text{Fuerza lateral}}{\text{Desplazamiento}} = \frac{F(t) = P}{U = \Delta X}$$

La rigidez elástica se determina con fórmulas de la Mecánica de Materiales:

La rigidez elástica es determinada con fórmulas de la Mecánica de Materiales:

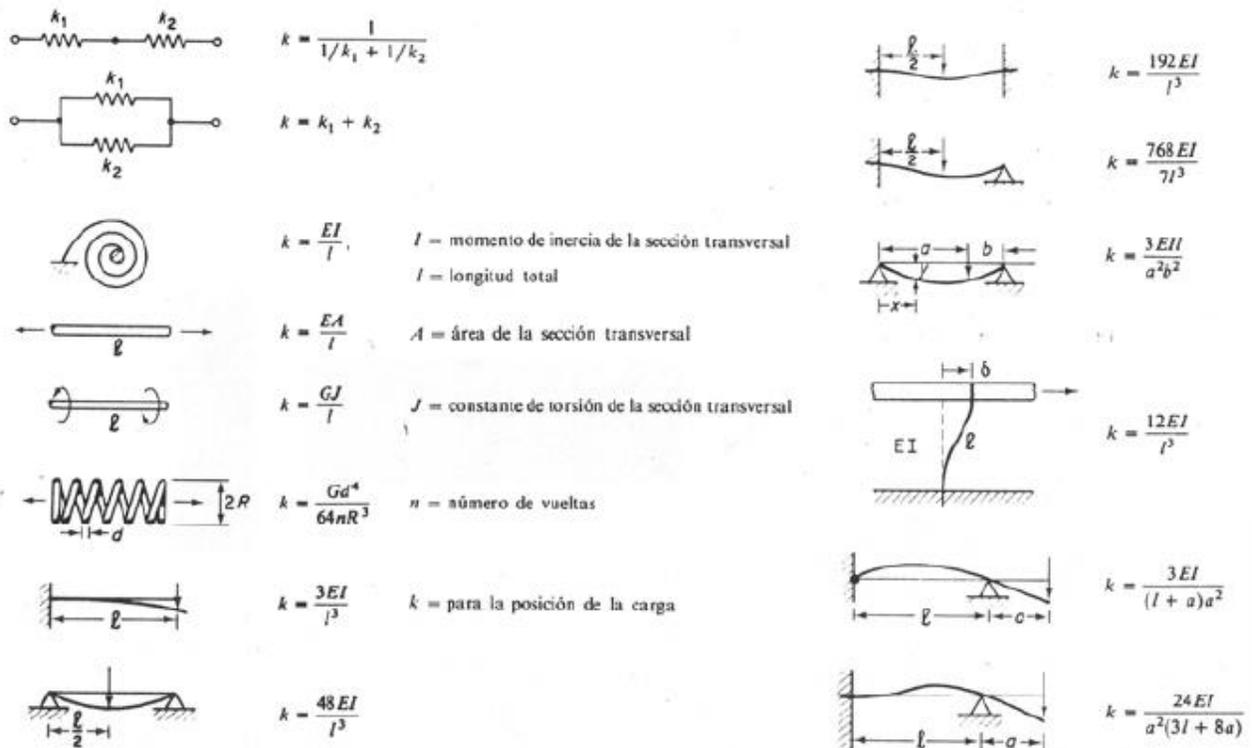


Imagen 3 Ecuaciones para determinar K según la Mecánica de Materiales.

Sistemas rígidos tienen deformaciones pequeñas (gran rigidez) y sistemas flexibles tienen deformaciones considerables (poca rigidez).

Se debe considerar un “Comportamiento Elástico Lineal”, para poder asegurar que los elementos estructurales que interactúan como soporte de la masa concentrada, no sufran deformaciones hasta llegar a la falla. Esto es, el material no debe de fluir (Estado Inelástico), aunque no haya fallado en ese momento es más factible que sufra algún tipo de falla posteriormente (estructural o de servicio). Lo podemos observar en la siguiente imagen, que representa el comportamiento al aplicar una carga “P”=F(t) y descarga a un material “n”, produciendo una deformación “U”.

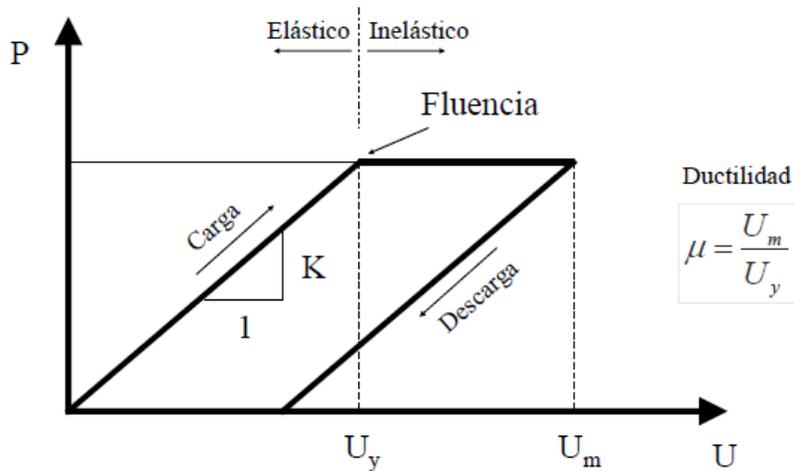


Imagen 4 Grafica de la Prueba "Carga-Descarga".

Al hablar del comportamiento Elástico Lineal, también cabe mencionar el concepto de **Ductilidad**:

La cual es una medida del grado de deformación plástica que puede ser soportada por el material hasta la fractura. Un material que experimenta poca o ninguna deformación plástica se denomina “Frágil” (medida de la incapacidad de un material a la deformación antes de fracturarse), donde la ductilidad puede expresarse cuantitativamente como alargamiento o encortamiento relativo porcentual o bien mediante el porcentaje de reducción de área. El alargamiento o encortamiento relativo porcentual de rotura, %EL, es el porcentaje de deformación plástica a rotura o bien:

$$\%EL = \frac{|L_f - L_o|}{L_o} \times 100$$

Donde:

L_f Longitud Final

L_o Longitud Original

El conocimiento de la ductilidad de un material es importante por lo menos por dos razones; en primer lugar, indica el grado en que una estructura o suelo podrá deformarse antes de producirse la falla; en segundo lugar, especifica el grado de deformación que puede permitirse durante las operaciones de conformación.

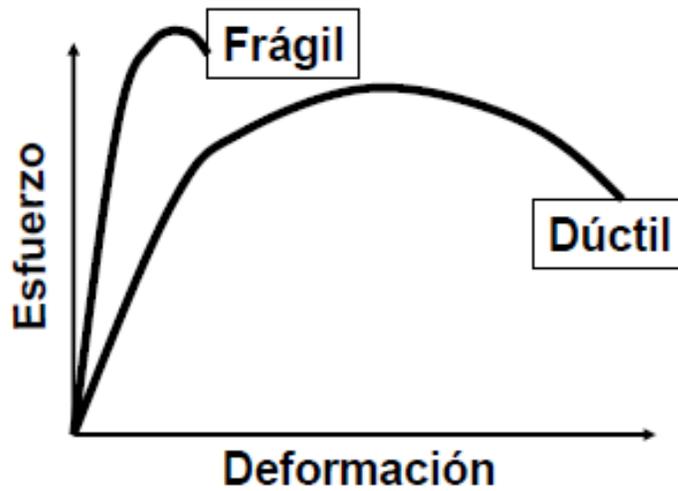


Imagen 5 Grafica Esfuerzo-Deformación (material dúctil y frágil).

Otra característica que se debe considerar es el mecanismo de disipación de energía, ya que la estructura al encontrarse en movimiento bajo la acción de algún agente externo y que este deje de actuar, el sistema continuara en movimiento durante algún tiempo, con oscilaciones de amplitud decreciente, hasta llegar al reposo. En este caso, se dice que el movimiento es amortiguado.

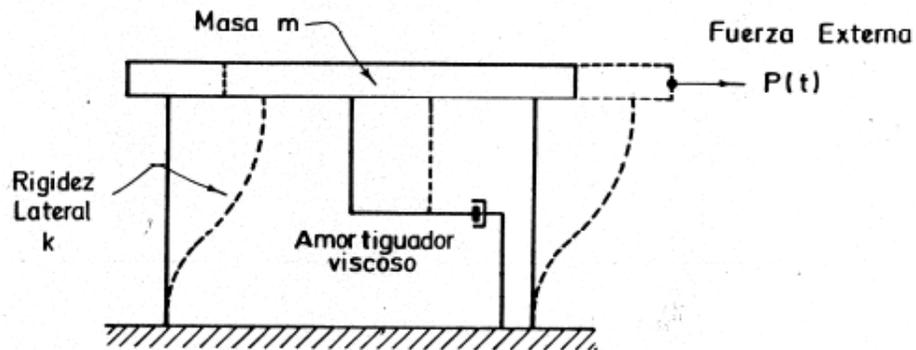


Imagen 6 Estructura idealizada, oscilador visco elástico de 1GDL.

El amortiguamiento se presenta en elementos estructurales y juntas, por las características de la fuerza restauradora elasto-plástica de los materiales, la disipación de energía del suelo, etc.

Modelos de Amortiguamiento:

- a) Métodos Fenomenológicos (Modela los mecanismo reales de disipación):
 - a. Histéresis Elasto-Plástico
 - b. Fricción en las Uniones Estructurales
 - c. Micro fisuras en el Material.
- b) Métodos Simplificados:
 - a. Introducción de amortiguador viscoso.
 - b. Se cuenta con una fracción del amortiguamiento crítico (el amortiguamiento crítico ($\beta=1$) marca la transición entre una respuesta oscilatoria y una respuesta no oscilatoria de una estructura).

Movimiento Armónico Simple (MAS).

Para poder entender el comportamiento de un sistema de **1GDL** al aplicarle una fuerza externa **$F(t)$** , es necesario hablar de **Vibraciones**. Hay diferentes tipos de fuerzas dinámicas que producen el movimiento de vibración en el suelo y las estructuras. Y para poder resolver problemas involucrados con la respuesta dinámica de los suelos y las

estructuras (*Interacción Dinámica Suelo-Estructura*), es necesario describir los eventos dinámicos que producen vibraciones.

Los tipos de vibraciones pueden estar divididos en dos grandes categorías: En Movimientos Periódicos y No Periódicos.

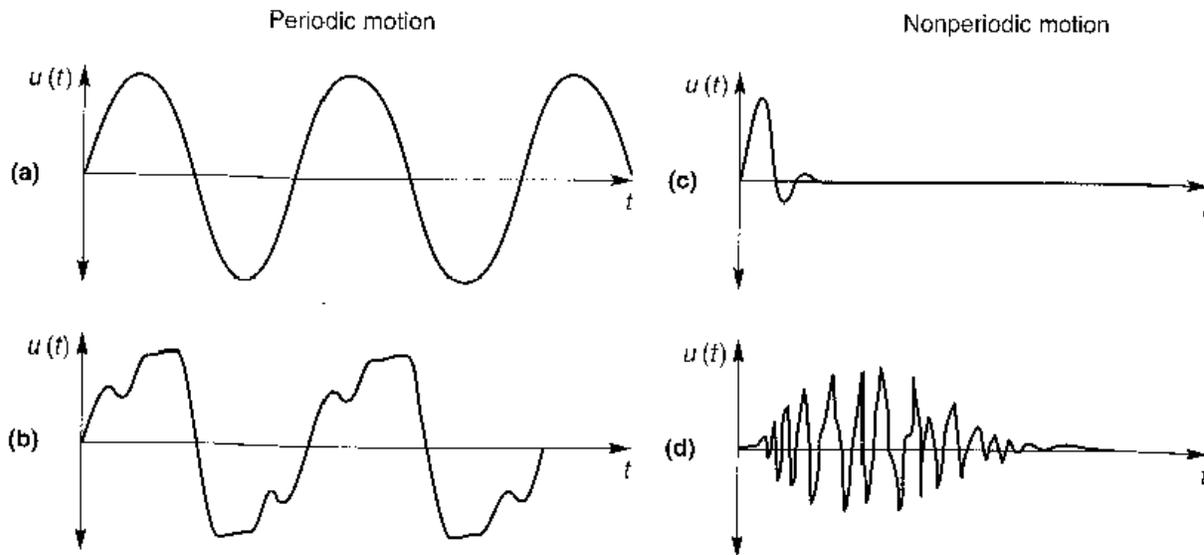


Imagen 7 Movimientos Periódico y No Periódico: (a) Movimiento Armónico Simple; (b) Movimiento Periódico General; (c) Movimiento Transitorio (Responsable por Fuerzas de Impacto); (d) Movimiento Transitorio (Movimiento Telúrico)

“Los Movimientos Periódicos” son aquellos que se repiten en intervalos regulares de tiempo, matemáticamente un movimiento $u(t)$, es periódico si existen más periodos T_f para cada $u(t+ T_f)= u(t)$ para toda t . Esta forma simple de movimiento periódico es representada por el “Movimiento Armónico Simple” con desplazamientos senoidal mente variados con el tiempo

Mientras que “los Movimientos No Periódicos” son aquellos que no repiten en intervalos constantes, pueden ser resultado de fuerzas impulsivas (explosiones de volcanes) o de larga duración de fuerzas transitorias (tráfico aéreo).

Para nuestro estudio, es importante solo hablar del “**Movimiento Armónico Simple**” (**MAS**):

El cual puede ser representado por movimientos senoidales y frecuencias constantes, hay tres características cuantitativas importantes que definen este movimiento: Amplitud, Frecuencia y periodo. El **MAS** puede estar descrito en diferentes formas, de las cuales dos son las más usuales: la notación trigonométrica y la notación compleja, las dos notaciones son equivalentes y son las más utilizadas en el estudio de problemas de Ingeniería Sísmica.

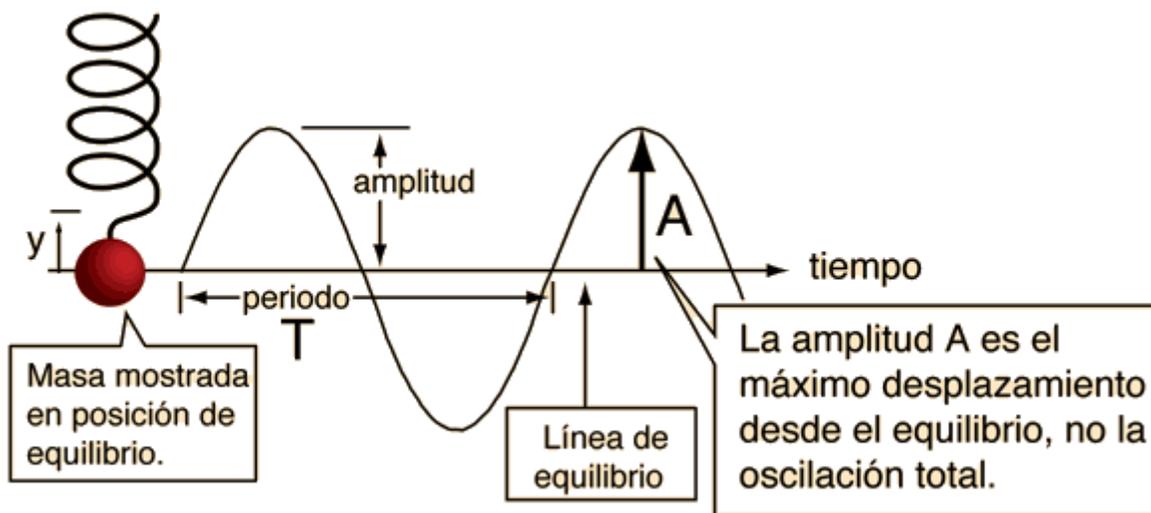


Imagen 8 Características Cuantitativas Importantes del MAS

Amplitud (A)

Es el valor máximo de un movimiento o señal. Se trata de la distancia que hay desde el punto de equilibrio (cero), hasta uno de los extremos del movimiento, puede ser el punto positivo o el negativo. Típicamente este valor puede medirse en metros (m) o kilómetros (km).

Periodo (T)

El tiempo que tarda en reproducirse una oscilación o ciclo; la unidad de medida, típicamente es el segundo (s).

Frecuencia (f)

El número de ciclos realizados por unidad de tiempo. Una frecuencia de 1 Hertz (Hz), equivale a 1 ciclo por segundos, mientras que 60 Hertz equivalen a 60 ciclos por cada segundo transcurrido.

Esta forma simple, puede estar expresada en términos de un desplazamiento $u(t)$, por ejemplo:

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Donde:

A representa el desplazamiento (amplitud)

ω Representa la Frecuencia circular

φ representa el periodo angular.

La frecuencia circular representa el grado de oscilación en términos de radianes por unidad de tiempo, donde 2π radianes corresponden a un ciclo del movimiento. Los periodos angulares describen la cantidad de tiempo por cada pico y el punto cero o de equilibrio, se desplazan de forma que describen una función senoidal. El desplazamiento será cero, cuando $\omega t + \varphi = 0$, por consecuencia $t = -\varphi / \omega$. Cuando A es positivo representa un movimiento que lleva a la función seno, y cuando $-A$ representa un retraso de la función seno.

El desplazamiento $u(t)$ no es el único parámetro que puede ser usado para describir el movimiento de vibración.

II.3 Propiedades Dinámicas.

El concepto de Frecuencia Circular es más fácil de entender ya que se considera el movimiento del vector rotacional de longitud A , como se muestra en la siguiente figura:

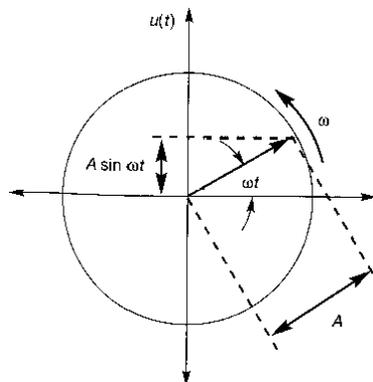


Imagen 9 Vector Rotacional representando al MAS con periodo angular cero.

Si el vector rotacional va con dirección contraria a las manecillas del reloj este origina una velocidad angular ω , desde una posición horizontal inicial, el desplazamiento $u(t)$, está dado por la componente vertical del vector:

$$u(t) = A \text{ sen } \omega t$$

La componente vertical incrementa a un valor máximo $\omega t = \pi/2$, donde decrece a cero en el instante donde $\omega t = \pi$ y regresa a un máximo negativo en $\omega t = 3\pi/2$, y continua a su posición original, y se repite el ciclo.

El tiempo requerido para que el vector rotacional para hace una revolución completa, es el tiempo requerido para un ciclo del movimiento, este tiempo se le conoce como **Periodo Natural de Vibración (T)**, y es relacionado a la frecuencia circular:

$$T = \frac{\text{Distancia angular para una Revolución}}{\text{Velocidad Angular}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(Esta expresado en segundos)

Otra propiedad es la **Frecuencia de Oscilación o Natural de Vibración (f)**, la cual es expresada en términos del número de ciclos que deben ocurrir en un periodo particular de tiempo. Esto es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

(Esta expresada en un ciclo por segundo o Hertz (Hz))

La **Frecuencia Circular de Vibración** está depende de la masa y la rigidez lateral de la siguiente manera:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

II.4 Vibraciones.

Es un movimiento oscilatorio que aparece, por lo general, en los sistemas mecánicos sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo. Distinguiremos entre vibraciones y oscilaciones. La diferencia entre ellas radica en que las vibraciones implica la existencia de energía potencial elástica, mientras que la oscilatoria no. Como se puede ver en la siguiente figura, representa los dos modelos que describen dichos movimientos:

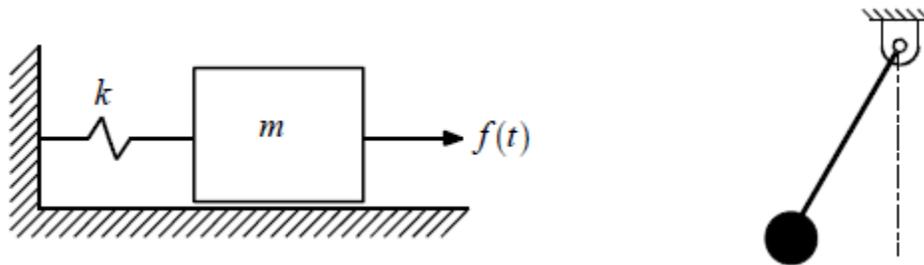


Imagen 10 Sistema Vibratorio y Sistema Oscilatorio.

Puesto que los sistemas vibratorios y oscilatorios se rigen por ecuaciones similares, es costumbre estudiarlos juntos y prescindir de la diferencia conceptual entre ambas.

Donde los grados de libertad son los parámetros necesarios para definir de forma unívoca la configuración del sistema vibratorio, por lo que también se deben considerar las siguientes características de los sistemas:

- Sistemas Discretos y continuos: Se le denomina Sistemas Discretos aquellos que pueden ser definidos por un número finito de grados de libertad y sistemas continuos aquellos que necesitan infinitos grados de libertad para ser exactamente definidos.

Matemáticamente, los sistemas discretos conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El movimiento vibratorio de los sistemas continuos, a excepción de unos pocos sistemas con geometrías sencillas, suele

ser irresolubles con métodos analíticos. Para resolverlos, suelen transformarse en discretos por técnicas de discretización como el Método de los Elementos Finitos.

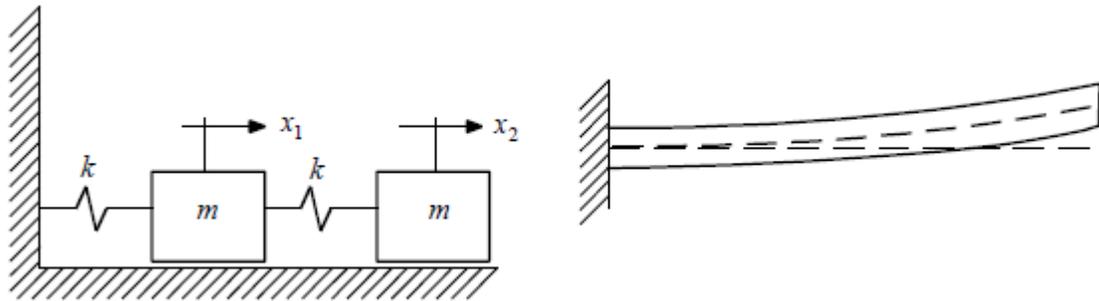


Imagen 11 Sistema discreto de 2 grados de libertad y sistema continuo.

- Sistemas lineales y no lineales: Sea un sistema mecánico que responde con movimientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a dos fuerzas $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Dicho sistema se denomina lineal si a una fuerza $f_3(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ responde con un movimiento $x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$. Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se puede obtener combinando las respuestas a cada una de las excitaciones simples.
- Sistemas definidos y semidefinidos: Se denomina definido cuando cualquier movimiento que en él se produzca conlleva a una variación de la energía potencial elástica. En cambio un sistema se dice semidefinido cuando existe algún movimiento que no conlleva variaciones de la energía potencial elástico.



Imagen 12 Sistema definido y Sistema semi-definido.

También se habla de Vibraciones libres y forzadas: Las vibraciones libres son las que se producen al sacar un sistema de su posición de equilibrio y dejarlo oscilar libremente,

mientras que las vibraciones forzadas son aquellas que se producen por acciones de fuerzas dependientes del tiempo. Y dichas fuerzas pueden ser **armónicas** (representadas por las funciones del tipo seno o coseno), **periódicas** (son aquellas que se reproducen en una cierta periodicidad), **impulsos** (responden al concepto mecánico de percusión) y **arbitrarias** (cualquier fuerza que no se incluya en uno de los apartados anteriores).

Vibraciones deterministas y aleatorias: Donde las vibraciones deterministas son aquellas que conocen las fuerzas excitadoras y se denominan aleatorias cuando solo se conocen los valores estadísticos de las excitaciones. En este último caso, no se puede calcular la respuesta exacta y, en su lugar se relacionan valores estadísticos de la excitación con los de la respuesta.

La respuesta vibratoria de los sistemas mecánicos suele estar formada por dos partes: una parte que tiende a cero con el tiempo y que se denomina respuesta transitoria y otra permanece, y se denomina estacionaria. Normalmente, la parte transitoria se debe a las condiciones iniciales y a las fuerzas independientes del tiempo mientras que la estacionaria se debe a fuerzas dependientes del tiempo.

La utilidad de los sistemas de un grado de libertad es por una parte sencilla y por otra, se da en la práctica en sistemas que son directamente asimilables a sistemas vibratorios de un grado de libertad.

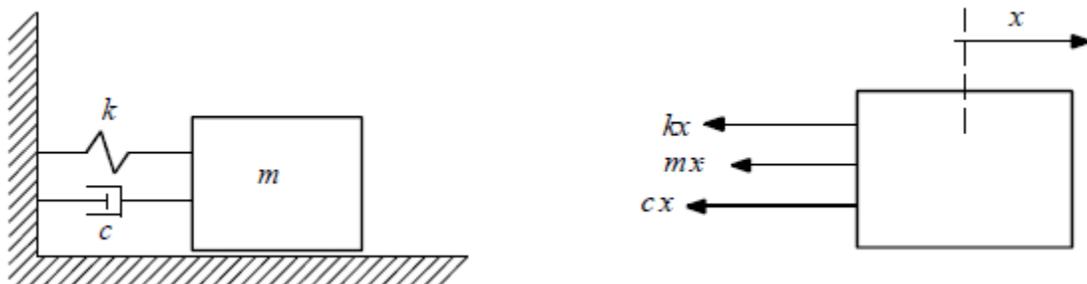


Imagen 13 Sistema básico de 1GDL y Diagrama de cuerpo libre del Sistema básico de 1GDL.

Como se ha venido mencionando que las vibraciones son importantes para comprender el comportamiento de un sistema de **1GDL** cuando se aplica una fuerza **F(t)** en un cierto

periodo de tiempo; así como se mencionó que se puede describir con las ecuaciones del Movimiento Armónico Simple; todo esto para poder llegar a la ecuación más relevante para el análisis IDSE que es la Ecuación de Movimiento o Equilibrio Dinámico de un Cuerpo Rígido, es necesario describir lo siguiente:

El desplazamiento no es el único parámetro que puede ser usado para describir el movimiento; de hecho unos parámetros son más importantes que otros. Si la variación del desplazamiento con respecto al tiempo se sabe, otros parámetros de interés pueden ser determinados mediante las expresiones del “**MAS**” y se obtienen las ecuaciones que describen la velocidad y la aceleración:

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{Desplazamiento}$$

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \omega A \operatorname{cos}(\omega t + \varphi) \quad \text{Velocidad}$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 u \quad \text{Aceleración}$$

Cuando la Amplitud del desplazamiento es A , la Amplitud de la Velocidad es ωA y la Amplitud de la Aceleración es $\omega^2 A$. Así la frecuencia y la amplitud del desplazamiento, la velocidad y la aceleración están relacionados de tal manera que conociendo la frecuencia y la amplitud de cualquiera de las tres, o conociendo dos amplitudes, se pueden calcular los valores faltantes. Es importante y útil las propiedades del movimiento armónico ya que se utilizan en “El plano Tripartito”, en donde un movimiento armónico puede ser completamente descrito en términos de la frecuencia y desplazamiento, y las amplitudes de la velocidad y la aceleración por un solo punto.

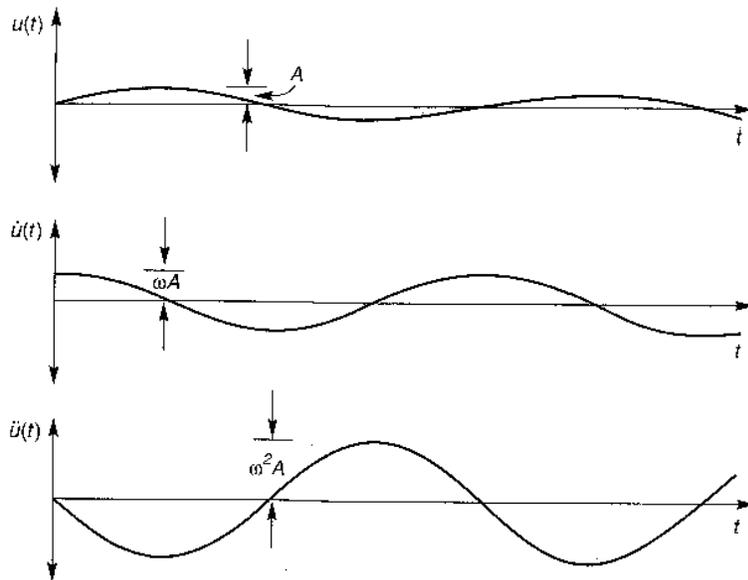


Imagen 14 Representación gráfica del desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

La relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración puede ser representada en términos de 3 vectores rotacionales con una velocidad angular ω con dirección contraria a las manecillas del reloj. La aceleración es un vector perpendicular con respecto al vector desplazamiento, mientras que la velocidad es un vector colonial pero con dirección opuesta al vector distancia.

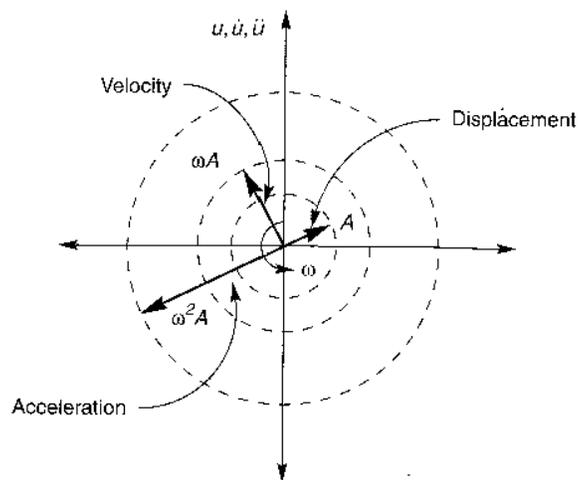
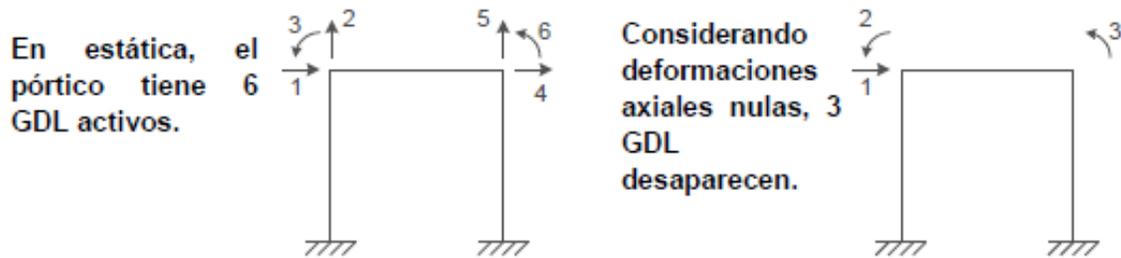


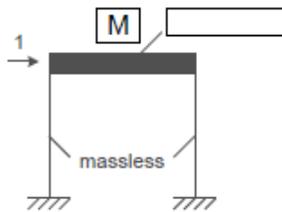
Imagen 15 Representación gráfica de los vectores rotacionales desplazamiento, velocidad y aceleración.

II.5 Ejemplos.

Para ejemplificar la representación de un S1GDL para las estructuras, podemos ver el siguiente marco:

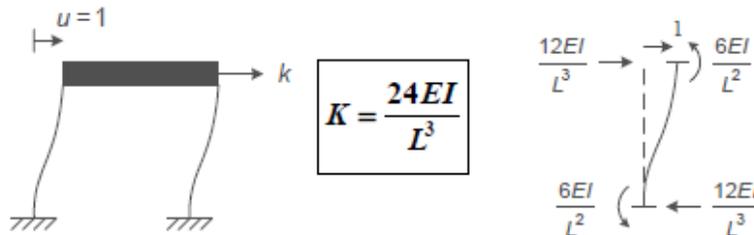


Solamente un GDL queda si el pórtico se supone como un piso (viga) rígido apoyado por columnas con masa relativamente pequeña.

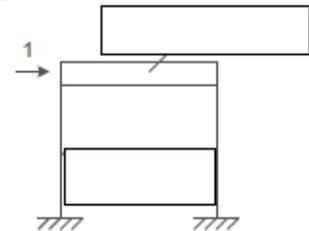


La masa de este sistema de 1 GDL es M, la masa del piso o techo.

La rigidez es determinada con fórmulas de la Mecánica de Materiales:



Considerando la flexibilidad de la viga, la rigidez lateral será:

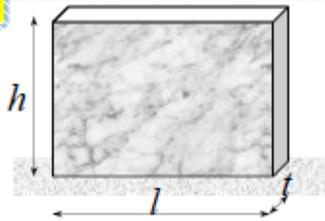


$$k_v = \frac{I_v}{L_v}$$

$$k_c = \frac{I_c}{L_c}$$

$$K_{\text{pórtico}} = \frac{24EI_c}{h^3} \left(\frac{1+6\gamma}{4+6\gamma} \right) \quad \gamma = k_v / k_c$$

La rigidez lateral de un muro es, considerando deflexiones por flexión y corte:



$$k_{\text{muro}} = \frac{Et}{4\left(\frac{h}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{l}\right)}$$

Capítulo III. Dinámica del Medio Continuo.

Ante acciones de tipo dinámico una estructura responde modificando su configuración alrededor de una posición de equilibrio estable. Estos cambios de configuración pueden alcanzar grandes amplitudes incluso para valores pequeños de la acción excitadora, pudiendo conducir al colapso de la estructura.

Las condiciones del terreno y los posibles fenómenos de interacción suelo-estructura son uno de los factores que mayor influencia pueden tener sobre la respuesta estructural.

En particular, cuando la estructura se asienta en un terreno rígido, los fenómenos de interacción son despreciables, ya que las frecuencias propias de la estructura no se ven alteradas por su interacción con el suelo, igualmente las características de las ondas no se ven alteradas por la presencia de la estructura. En este caso el contenido en frecuencias altas del terreno suele ser significativo, por lo que se ha observado, en términos generales, un mayor nivel de daños en estructuras rígidas que en estructuras flexibles.

Mientras que si la estructura se asienta en un terreno blando, los fenómenos de interacción suelo estructura cobran importancia, debiéndose incorporar en el análisis; las frecuencias naturales del sistema suelo-estructura disminuyen respecto a las de las estructuras cimentadas en suelo rígido, de igual manera, las ondas sísmicas sufren modificaciones apreciables debido a la presencia de la estructura. Un suelo blando tiende a filtrar el contenido en frecuencia del terremoto, amplificando los periodos largos. En general se ha observado un mayor daño en estructuras flexibles cuando las condiciones son de suelo blando.

Por esto mismo es que se tiene que tener muy claro la modelación del suelo para el estudio del sistema suelo-estructura, lo que a continuación se describirá.

En la modelación del suelo de soporte se distinguen tres corrientes: la “Winkleriana”, la del “Medio Continuo” y la de “Modelación Avanzada”. Las dos primeras proponen como parámetro principal la distribución de presiones de contacto en la interface suelo-

cimentación y la última adiciona parámetros de amortiguamiento, dinámicos, etc. Los parámetro requeridos por cada corriente dependen del comportamiento de la fundación (flexible o rígida) y de la naturaleza del suelo de soporte (arcilla, arena, etc.).

III.1 Modelo de Winkler.

La idealización del suelo se representa por medio de in sistema de resortes idénticos pero mutuamente independientes, con poca separación entre ellos y linealmente elásticos. De acuerdo con esta propuesta, la deformación está relacionada espacialmente con el lugar de carga.

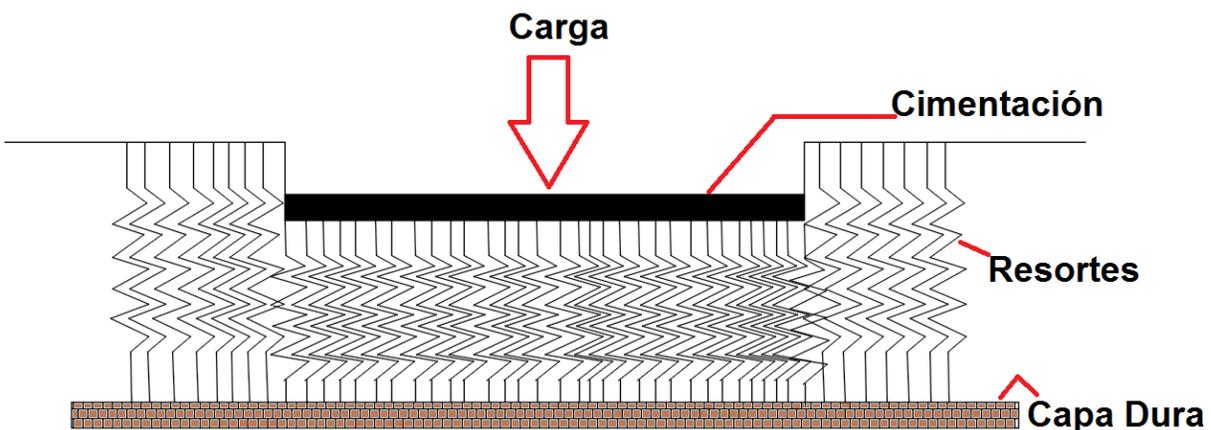


Imagen 16 Modelo de Winkler

La relación entre presión y deflexión en cualquier punto está dada por:

$$P = Uk = \Delta zK$$

Siendo Δz la deflexión, k el coeficiente de reacción del suelo de soporte y P la presión aplicada. De esta relación se deriva el primer inconveniente del modelo ya que es bastante complejo llegar a un valor de k que represente en forma certera la rigidez del suelo de soporte. Por este motivo es importante escoger o calcular de la mejor forma dicho coeficiente.

Uno de los inconvenientes que presenta este método es la independencia de los resortes ya que de esta manera se desprecia la **cohesión** entre las partículas del suelo bajo

efectos de compresión, presentando así una deflexión o deformación puntual en el sitio de carga, hecho que no representa la realidad.

III.2 Modelo Elástico como Medio Continuo.

Este modelo pretende un acercamiento conceptual a una representación física del suelo tomado como un medio infinito. Esta investigación comienza con los estudios de Boussinesq quien analiza un sólido semi-infinito, homogéneo, isotrópico, linealmente elástico sometido a una carga en dirección ortogonal al plano de capa, utilizando la teoría de elasticidad.

A lo que se quiere llegar con este modelo es a una función continua que represente el comportamiento del suelo de soporte, tomando como base dicho comportamiento se describe de mejor manera por medio de la curva deformación producida por una carga puntual. El modelo proporciona una mayor y más detallada información referente a deformaciones y esfuerzos en comparación con el modelo de Winkler, además se presenta una mayor seguridad y confiabilidad en los parámetros necesarios para el desarrollo del modelo ya que solo se necesita el módulo de elasticidad y la relación de Poisson, los cuales pueden obtenerse de una manera más confiable que el módulo de reacción del suelo de soporte.

El inconveniente de este método es el desarrollo matemático ya que solo se conocen unas pocas soluciones para casos específicos, pero a la hora de desarrollar un caso nuevo, los cálculos computacionales son de gran complejidad. Otro inconveniente que se presenta es que los asentamientos en las zonas alejadas del punto de aplicación de carga decrecen más rápidamente de lo que es predicho por el modelo. Por último se dice, como en todos los modelos que no es una representación muy ajustada al comportamiento real de un suelo.

III.3 Modelación Avanzada.

Idealización Elasto-Plástica.

Este modelo pretende tener en cuenta el comportamiento no solo elástico del suelo de soporte sino también sus deformaciones plásticas; para esto se plantea una combinación entre un resorte con elasticidad perfecta (Ley de Hooke) unido en serie con un elemento plástico formando de esta manera un sistema conocido como la unidad de St. Venant.

Para evitar una transición brusca del comportamiento elástico al plástico, son necesarias varias unidades dispuestas en paralelo, de esta forma dicha transición en el comportamiento va a ser gradual, muy semejante a la real del suelo de soporte.

La siguiente expresión presenta el módulo Elasto-plástico de dicho sistema:

$$\varepsilon_{ep} = E_e \sigma + E_p \log\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_u - \sigma}\right)$$

Donde:

E_e Es el Módulo Elástico del Suelo.

E_p Es el Módulo Plástico del Suelo.

σ Es el esfuerzo aplicado.

σ_u Es el esfuerzo último que puede soportar el suelo.

Aunque aparentemente el modelo funciona de forma correcta, surgen problemas a la hora de escoger los parámetros necesarios para su desarrollo y es difícil proporcionar la conexión exacta entre los resortes y la cimentación. (Noorzaei J. Non Lineae Soil-structure interaction in framed structured. Ph.D. Thesis, Civil Engineering Department, University of Roorkee, Roorkee, India, 1991).

El método no presenta un rendimiento razonable para predecir el comportamiento de la interacción suelo-cimentación.

Idealización Visco-Elástica.

Las características de la deformación real del suelo bajo la aplicación de una carga son dependientes del tiempo, teniendo en cuenta la permeabilidad de este; la aplicación de carga sobre unas capas de arcilla saturada tiene como efecto en primera instancia, el aumento en la presión de poros. Con el tiempo, la presión de poros se disipa dando paso al consecuente aumento en el esfuerzo efectivo del suelo. Esto conlleva a la dependencia del tiempo de los asentamientos de la fundación. Por este fenómeno se hace necesario considerar la deformación del suelo a través del tiempo.

Se presenta un modelo mecánico que comprende de una combinación de elementos elásticos, viscosos y plásticos, para lograr esto se conecta un resorte elástico a un amortiguador. Un ejemplo es el modelo de Shvedov que conecta el elemento elástico en serie con el viscoso y el luego en paralelo con el elemento plástico de St. Venant.

Este modelo considera de manera cercana los efectos de consolidación del suelo de soporte aunque se dice que no es posible poder determinar un modelo confiable para la representación de la dependencia del comportamiento del suelo de soporte con el tiempo.

Otro de los métodos más destacados para representar el comportamiento de un suelo son los que se describirán a continuación destacando principalmente 3 de ellos:

➤ Modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell se forma conectando en serie un embolo y un resorte. Al aplicar la fuerza F el resorte se alarga instantáneamente la magnitud (σ/E) y el embolo se moverá a la velocidad (σ/η) mientras se está aplicando la carga (entre t_0 y t_1). Al cesar la aplicación de la carga, la componente elástica se recupera de modo instantáneo, mientras que la componente viscosa de la deformación permanece indefinidamente, como se refleja en la imagen.

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

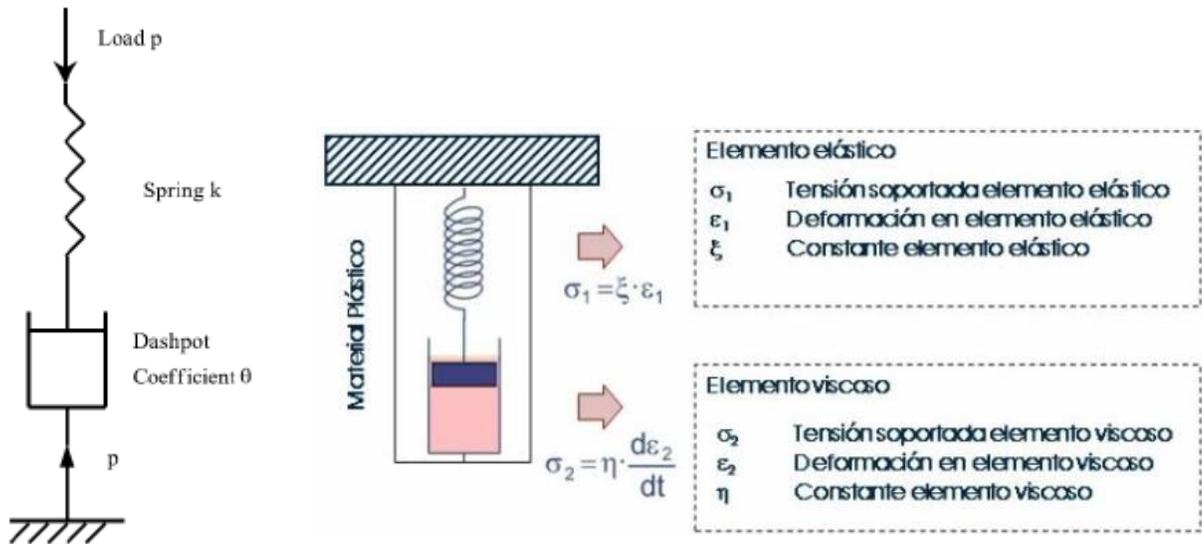


Imagen 17 Modelo de Maxwell.

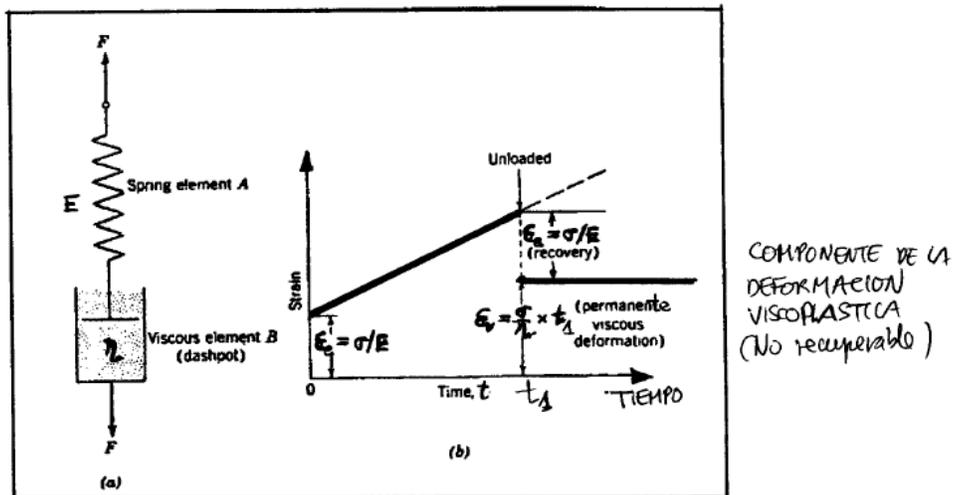


Imagen 18 Diagrama deformación-tiempo

➤ Modelo de Kelvin-Voigt.

En este modelo se realiza la conexión en paralelo de un embolo y un resorte, como se muestra en la figura que se presenta más adelante; donde se simula la deformación viscoelástica, pero no las instantáneas ni las viscoplásticas.

Al cargar este modelo, parte de la energía suministrada se almacena en el muelle y el resto se disipa progresivamente al moverse el embolo, lo que motiva a una deformación dependiente del tiempo hasta que se alcanza la deformación (σ/E) ; al

cabo de un tiempo infinito, el componente elástico soporta toda la carga; y el desplazamiento termina.

Al finalizar la aplicación de la carga ($t=t_1$) se recupera la forma original debido a la energía que se quedó almacenada en el resorte, pero la recuperación retardada por el embolo, no será total hasta que no haya transcurrido un tiempo infinito. Solo si el tiempo retardado τ' es pequeño, la recuperación total a efectos prácticos ocurre en un breve lapso de tiempo. La deformación que experimenta este modelo deformación elástica retardada-se denomina anelástica.

Se tiene lo siguiente:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$$

$$\sigma_e = E\varepsilon$$

$$\sigma_v = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

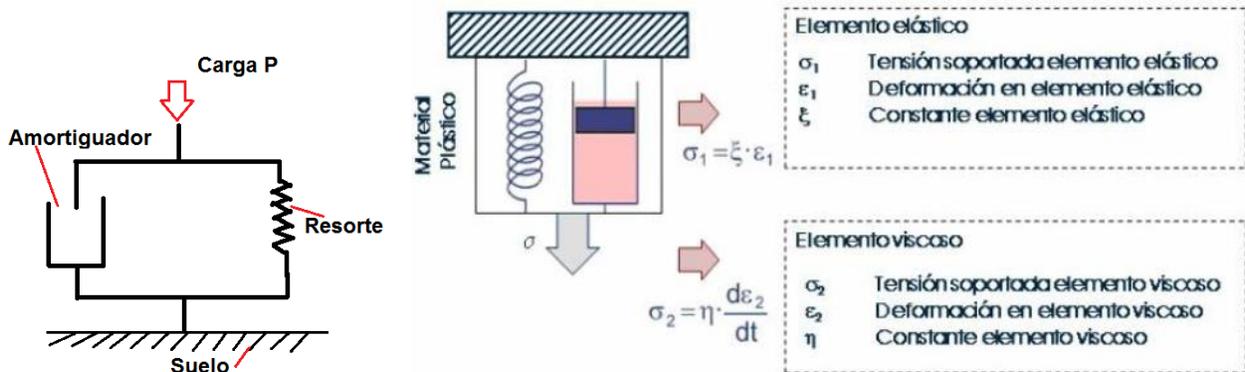


Imagen 19 Modelo de Kelvin-Voigt

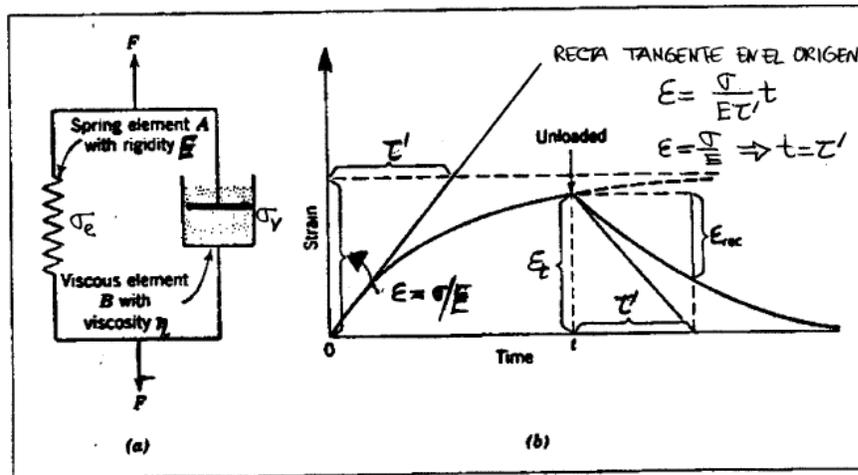


Imagen 20 Diagrama deformación-tiempo.

➤ Modelo de los cuatro Elementos o Modelo de Burgers.

Está constituido por la agrupación en serie de los modelos de Maxwell y de Kelvin-Voigt y modeliza materiales que presentan componentes de deformación instantánea, viscoelástica y viscoplástica. Al ser cargado, la deformación total se compone de una deformación elástica instantánea (ϵ_e), de una deformación elástica retardada anelástica (ϵ_a), que es la respuesta del modelo de Kelvin-Voigt y una deformación viscosa permanente (ϵ_v), las dos primeras deformaciones son recuperables en el momento que se elimine la carga.

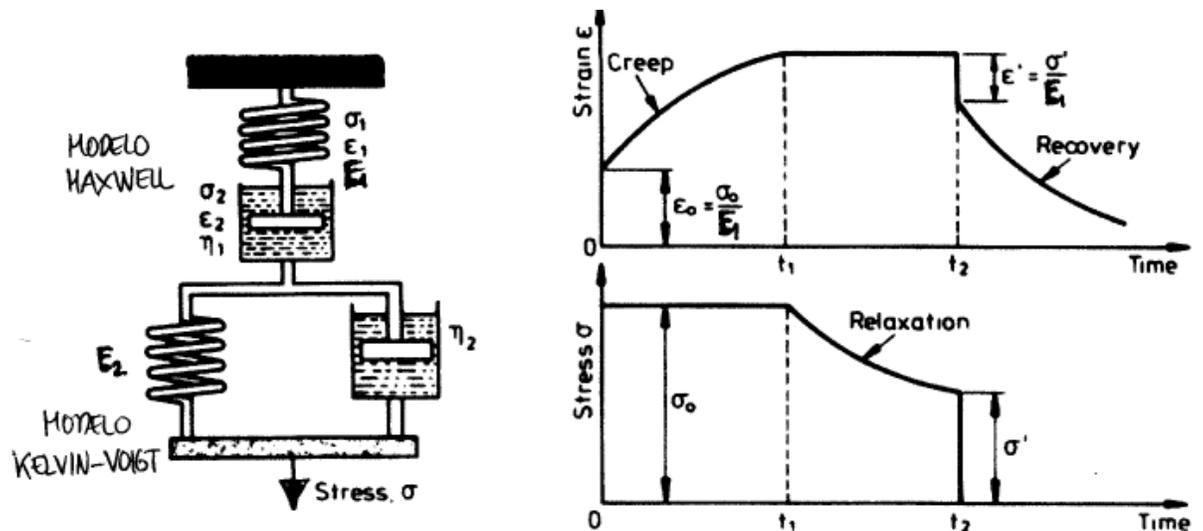


Imagen 21 Modelo de Burgers-Diagrama deformación-tiempo.

III.4 Mecánica del Medio Continuo Viscoelasticidad

“La Viscoelasticidad es el estudio de la relación esfuerzo-deformación-tiempo que existe en el comportamiento mecánico de los materiales, es importante en el diseño de obras construidas con materiales cuyas propiedades cambien con el tiempo y en las cuales la variación de la magnitud de las cargas influye en forma significativa. Dicho comportamiento difiere notablemente del que exhiben materiales que se pueden modelar mediante los cuerpos idealmente elástico o viscoso, ya que son materiales que se comportan como distintas combinaciones de ambos (Demeneghi, Puebla y Sanginés, 1986)”.

Comportamiento Viscoelástico.

Los modelos de comportamiento de los materiales que representa de mejor manera el comportamiento Viscoelástico son los modelos de Kelvin-Voigt, de Maxwell o de Burgers.

El cuerpo de Kelvin-Voigt consiste en un resorte y un amortiguador colocados en paralelo (*Imagen 19*), y por equilibrio de fuerzas se tiene:

$$P = P_H + P_N$$

Dividiendo entre el área A del modelo se tiene

$$\frac{P}{A} = \frac{P_H}{A} + \frac{P_N}{A}$$

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \quad (\text{ec.1 cap.III})$$

Por compatibilidad de deformaciones

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_N$$

En el resorte se cumple la Ley de Hooke

$$\varepsilon_H = \frac{\sigma_H}{E}$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material.

En el amortiguador se cumple la Ley de Newton

$$\varepsilon_N = \frac{\sigma_N}{\eta}$$

Donde η es el coeficiente de viscosidad del material.

Remplazando valores en la ecuación 1:

$$\sigma = \varepsilon_H E + \varepsilon_N \eta$$

$$\sigma = \eta \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) + E\varepsilon \quad (\text{ec. 2 cap. III})$$

La ecuación diferencial (ec. 2 cap. III.4) es la que representa el modelo de Kelvin-Voigt.

El uso de los cuerpos con comportamiento Viscoelástico tienen aplicación en el análisis y diseño de estructuras de concreto (fenómeno de flujo Viscoelástico o creep), en mecánica de rocas (conducta viscoelástica de las rocas sobre todo a largo plazo), entre otras aplicaciones.

En la mecánica de suelos se utiliza el modelo de Kelvin-Voigt para el estudio del fenómeno de consolidación en suelos finos totalmente saturados. La analogía en la mecánica de Terzaghi (Juárez Badillo y Rico, 1976) donde se muestra una estructura de suelo formada por cuerpos de Kelvin-Voigt en serie; donde la estructura sólida del suelo es representada por resortes y la resistencia al flujo del agua del suelo se representa por un amortiguador.

Por otro lado, el uso del comportamiento Viscoelástico de los materiales es la que comprende el fenómeno que tiene que tomar en cuenta la disipación de energía. En estos, la disipación de energía se considera proporcional a la velocidad de deformación del material, un ejemplo de lo anterior es el análisis de cuerpos sometidos a vibración.

Considerando un **S1GDL** sometido a una fuerza **F(t)**, la disipación de energía se considera proporcional a la velocidad de la masa, quedando la ecuación de movimiento:

$$F(t) - Ku - Cu = 0$$

$$C \left(\frac{du}{dt} \right) + Ku = F(t) \quad (\text{ec. 3 cap. III})$$

Podemos observar la similitud entre las ecuaciones 2 y 3, donde podemos concluir que la disipación de energía se puede tomar en cuenta empelando el modelo de Kelvin-Voigt.

En ingeniería sísmica interesa el movimiento de la base de un sistema estructural auxiliándose del principio de D'Alembert para establecer la ecuación de movimiento.

III.5 Ecuaciones Constitutivas de un Material Viscoelástico

Kelvin-Voigt considero que las componentes de esfuerzos en un sólido son la suma de dos términos: el primero proporcional a la deformación unitaria y el segundo proporcional a la velocidad de deformación unitaria (en donde se toma en cuenta la disipación de energía) quedando las ecuaciones de la Ley de Hooke generalizadas (Kolsky, 1963)

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + \lambda' \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) + 2G \varepsilon_x + 2\eta \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 4 cap. III})$$

$$\sigma_y = \lambda \varepsilon_v + \lambda' \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) + 2G \varepsilon_y + 2\eta \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 5 cap. III})$$

$$\sigma_z = \lambda \varepsilon_v + \lambda' \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) + 2G \varepsilon_z + 2\eta \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 6 cap. III})$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} + \eta \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 7 cap. III})$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} + \eta \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 8 cap. III})$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} + \eta \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} \right) \quad (\text{ec. 9 cap. III})$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (\text{ec. 10 cap. III})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{ec. 11 cap. III})$$

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G \quad (\text{ec. 12 cap. III})$$

$$K = \frac{EG}{3(3G - E)} \quad (\text{ec. 13 cap. III})$$

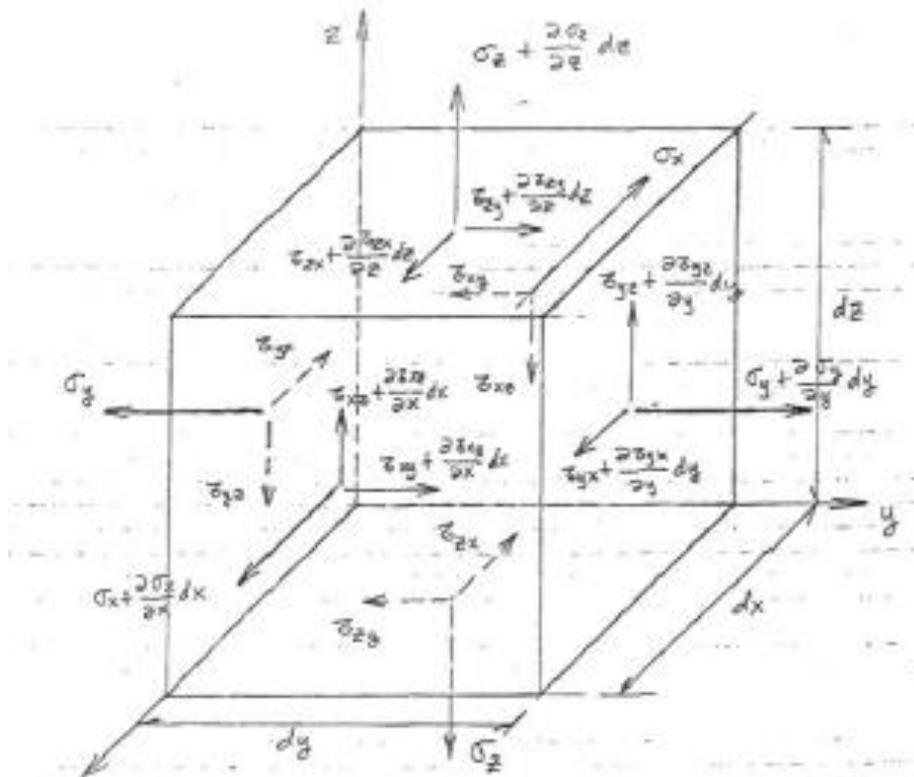


Imagen 22 Estado de Esfuerzo en un elemento

El módulo de compresibilidad (**K**); módulo de Young (**E**).

Primer parámetro de Lamé o coeficiente de amortiguamiento (**λ**): Este parámetro está asociado con la capacidad del suelo para disipar energía en otro tipo de energía, existen

dos tipos de amortiguamiento, su clasificación depende principalmente de la pérdida de energía y viscosidad.

1. Amortiguamiento Histerético: El cual corresponde a la pérdida de energía debido al deslizamiento en los contactos de las partículas, que genera la creación o pérdida de contactos, cuando la partícula es reacomodada. Puede ser calculado por medio de pruebas de laboratorio determinado mediante la curva de respuesta a la frecuencia en ensayos dinámicos, con base a la hipótesis de que un suelo tiene amortiguamiento de este tipo cuando la energía disipada por ciclo y la frecuencia de vibración son independientes.
2. Amortiguamiento Viscoso: Se debe a la pérdida de viscosidad debido al movimiento relativo entre el líquido y la partícula.

La relación de amortiguamiento se puede representar como:

$$\lambda = \frac{\text{Area de ciclo de Histeresis}}{4\pi * \text{Area bajo la Curva de respuesta de frecuencia}} \quad (\text{ec. 12.1 cap. III})$$

De algunas investigaciones se pueden concluir:

“A mayor deformación de un suelo sin alcanzar la falla, más alto será su amortiguamiento (Seed e Idriss, 1970)”.

“En suelos cohesivos el amortiguamiento aumenta desde menos de 5%, para una deformación de $10^{-4}\%$, además sugieren que existe un ligero decremento de amortiguamiento con la presión confinante (Kokusho, Yoshida y Esashi, 1982)”.

“El amortiguamiento disminuye por influencia con el esfuerzo efectivo principal, con la edad geológica, con la cementación del material, con índice de plasticidad, además que incrementa con la deformación angular (León et al. 1974)”.

“El amortiguamiento disminuye cuando la relación de vacíos es máxima, también se concluyó que las arcillas pre-consolidadas tienen un amortiguamiento mayor que las normales consolidadas” (Kokusho et al. 1982; Romo y Jaime, 1986; Jaime, 1987; Romo et al. 1989 y Fernandez, 2014).

Módulo de Rigidez Dinámico (**G**): Este parámetro es considerado el más importante de todos, ya que es un parámetro elástico que representa el cambio de forma que puede experimentar un espécimen de suelo cuando se le aplica esfuerzos cortantes, en una

prueba de torsión cíclica, se puede obtener mediante la pendiente de la gráfica deformación angular contra esfuerzo cortante, se obtendrán distintos módulos de rigidez como ciclos de histéresis se tengan. Con este parámetro se puede obtener el módulo de Young (**E**), en cuanto a los valores obtenidos, se puede saber que para una deformación angular alta se esperan módulos de rigidez bajos, en consecuencia, para deformaciones angulares bajas, los módulos de rigidez son altos, y a medida que la deformación angular aumenta, el módulo de rigidez decrece. Se puede calcular el valor medio durante un ciclo completo, el cual se puede aproximar por el módulo secante de cortante expresado como:

$$G_{sec} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\text{Esfuerzo Cortante } \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)}{\text{Deformacion angular } (\%)} \quad (\text{ec. 11.1 cap. III})$$

También se puede obtener un Módulo de Rigidez Dinámico Máximo (**G_{max}**), este módulo se obtiene en el rango de deformaciones angulares bajas, generalmente se toman valores bajo el límite de deformaciones elásticas lineales de aproximadamente $\gamma=5 \times 10^{-3}$ %, las actividades cotidianas están en este rango de deformación angular. Si se conocen las velocidades de propagación de onda V_p o V_s , es posible aplicar la teoría de elasticidad y obtener el módulo de Young (E) y el módulo de cortante dinámico.

$$G_{Max} = \rho V_s^2 = \left(\text{Densidad del material } \left(\frac{kg}{cm^3}\right) \right) \left(\text{Velocidad de onda cortante } \left(\frac{m}{s}\right) \right) \quad (\text{ec. 11.2})$$

Algunos parámetros que afectan los valores de (G) de un suelo son: la magnitud de la deformación angular (γ), el esfuerzo normal octaédrico efectivo (σ'_m), la relación de vacíos (e), el número de ciclos de carga (N), el grado de saturación.

Coeficiente de Poisson (**v**): Este parámetro representa la proporción de deformación que puede sufrir un espécimen de suelo sujeto a tensiones y compresiones, medido en materiales con comportamiento lineal e isótropo. Los métodos para la obtención de este parámetro son sumamente complicados, ya sean por los métodos de campo o laboratorio, aunque se acostumbra a determinarlo a partir del módulo de rigidez (G) y del módulo de elasticidad (E); de tal manera que queda expresado como:

$$\nu = \left(\frac{E}{2G}\right) - 1 \quad (\text{ec. 11.3 cap III})$$

III.6 Vibraciones en un Estrato de Suelo Blando.

Sea un estrato de suelo blando de espesor H, para hallar el movimiento de este estrato se tiene que resolver la ecuación de movimiento que representa una onda de cortante que se propaga en dirección vertical, con desplazamiento de partículas solo en la dirección del eje x:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \eta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}\right) \quad (\text{ec. 14 cap. III})$$

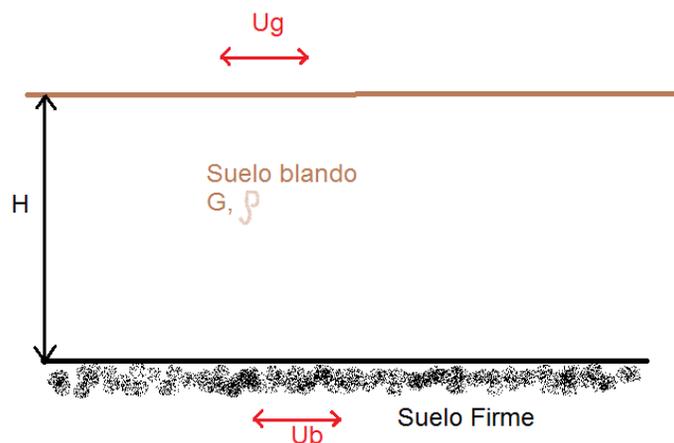


Imagen 23 Estrato de Suelo Blando.

Supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por:

$$X_b = C e^{i\Omega t} = C(\cos \Omega t + \text{sen } \Omega t) \quad (\text{ec. 15 cap. III})$$

Lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia Ω .

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al

análisis y diseño de la estructura incluyendo desde luego en este al de la subestructura. Sin embargo cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, lo cual consiste, en que en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración mientras que en la superficie del suelo blando la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme.

“Definamos la función de amplificación f_a como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración de la superficie del estrato entre la máxima aceleración de la base rígida”; obtenemos (Roesset, 1969):

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha \sen^2 \beta}} \quad (\text{ec. 16 cap. III})$$

Donde:

$$\alpha = \frac{H\Omega}{2C_s} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega\eta}{G}\right)^2} - 1}{1 + \left(\frac{\Omega\eta}{G}\right)^2}} \quad (\text{ec. 17 cap. III})$$

$$\beta = \frac{H\Omega}{2C_s} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega\eta}{G}\right)^2} + 1}{1 + \left(\frac{\Omega\eta}{G}\right)^2}} \quad (\text{ec. 18 cap. III})$$

η amortiguamiento del suelo blando

Ω frecuencia circular natural de la base rígida

H espesor del suelo blando

G Modulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando

ρ masa especifica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento, se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que:

$$\frac{\eta\Omega}{G} = 2\zeta \quad (\text{sea una constante})$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores (ecs.16, 17 y 18) se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones:

$\omega_n = \text{frecuencia circular del modo } n \text{ de vibrar}$

$$\omega_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \left(\text{en } \frac{1}{s}\right) \quad (\text{ec. 19 cap. III})$$

Para pequeños valores de $\frac{\eta\Omega}{G}$ la función de amplificación, para modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Rosset, 1969).

$$f_a = \frac{4}{(2n - 1)\pi 2\zeta} \quad (\text{ec. 20 cap. III})$$

Donde ζ es la fracción de amortiguamiento crítico.

En forma aproximada, se pueden calcular las frecuencias de vibración correspondientes a los máximos relativos de la función de amplificación, empleando las ecuaciones 19 y 20. Desafortunadamente no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio; en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en lo que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado.

El razonamiento anterior es válido también en términos del periodo de vibración de ondas que llegan a un sitio y del periodo de vibración del suelo blando. Así, la máxima respuesta de aceleración que se presenta cuando el periodo de vibración en la base firme coincide con el periodo natural del modo de vibrar más alto. Es decir la aceleración en la superficie del terreno blando será f_a (para ese “n” modo de vibrar donde f_a fue el máximo) veces mayor que la aceleración de la base, teniendo un amortiguamiento del suelo blando ζ , vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando

depende fundamentalmente del cociente T_{sn}/T , donde T_{sn} es el periodo natural de vibración del estrato blando y T es el periodo dominante de vibración de las ondas sísmicas.

$$T_{sn} = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{4H}{2n-1} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (\text{en segundos}) \quad (\text{ec. 21cap. III})$$

Para la estimación del periodo natural de vibración de un suelo estratigráfico véase Zeevaert (1973, 1980), para la determinación del módulo de rigidez dinámico de la arcilla del Valle de México se puede consultar a Jaime et al (1987)

El periodo de Vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural; sin embargo, el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación de una estructura.

$$T_1 = \sqrt{T_0^2 + T_x^2 + T_r^2} \quad (\text{ec. 18})$$

T_0 periodo fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida (se debe a la flexibilidad propia de la estructura).

T_x periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza.

$$T_x = 2\pi \sqrt{\frac{W_o'}{gK_x}} \quad (\text{en segundos})$$

Donde W_o' es el peso neto de la construcción al nivel de su desplante, incluyendo el peso de los cimientos y descontando el del suelo que es desplazado por la infraestructura en (Toneladas), Se supondrá que el desplazamiento de la base está restringido cuya rigidez vale K_x en (t/m), g es la aceleración de la gravedad en m/s^2

T_r periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza.

III.7 Métodos para Evaluar las Propiedades Dinámicas del Suelo.

Cuando hablamos de cargas dinámicas en el suelo ya sea por sismo o por otro tipo de agente generador, lo primero que se debe tener en claro es que el comportamiento esfuerzo-deformación con el que reacciona el suelo es de carácter no lineal, de allí surge la complejidad para la obtención de las propiedades dinámicas del suelo, ya sea por medio de pruebas de laboratorio o en pruebas de campo, esto, sin tomar en cuenta la incertidumbre que se tiene al extraer muestras representativas y las alteraciones que sufren en su transporte al laboratorio, el manejo de las pruebas en el laboratorio etc.

“Las propiedades dinámicas definen el comportamiento que asumirá el suelo ante un evento sísmico, las propiedades dinámicas que se requieren en la práctica profesional son: Módulo Dinámico equivalente de Young (E), Módulo Dinámico al Esfuerzo Cortante (G), Módulo Dinámico de Deformación Volumétrica (K_v), Relación de Poisson (ν), Amortiguamiento (ζ), propiedades esfuerzo-deformación; resistencia al esfuerzo cortante en función de la velocidad de aplicación de la carga, etc”. De acuerdo con Jaime, 1987; de las propiedades dinámicas las más importantes son el módulo de cortante dinámico y amortiguamiento, de las demás tienen menor importancia y tienden a caer dentro de intervalos relativamente pequeños (Fernández, 2014).

Cabe mencionar que no existe ninguna prueba que logre abarcar toda la amplitud de deformaciones que efectúan los distintos ciclos histerético de cargas, por otra parte, las pruebas de laboratorio tienen como ventaja principal, la economía de estas y como desventaja la alteración de las propiedades en la transportación de la muestra como el manejo en el laboratorio; las propiedades de campo tiene como ventaja, el análisis del suelo en las condiciones naturales, sin embargo suelen ser muy costosas.

Las Técnicas de análisis para la obtención de las propiedades dinámicas del suelo se clasifican en tres. De acuerdo con el estado actual del conocimiento, la clasificación queda como:

1. Los que se basan en análisis de registro de sismo (acelerógramas y sismoscopios).
2. Los que se basan en análisis de pequeños sismos generados artificialmente (captación de micro terremotos para la construcción de acelerógramas teóricos).
3. Los basados en métodos analíticos, que se apoyan en estudios de campo y laboratorio.

Cabe señalar que la primera técnica enlistada necesita de un sismo real para obtener resultados directos, desde el punto de vista de diseño necesitamos anticiparnos a los sismos, es por eso que para cuestiones de diseño nos enfocaremos en los métodos teóricos y analíticos, con los que podremos obtener propiedades dinámicas aproximadas.

- **Métodos de Campo.**

- a) Refracción Sísmica (V_s y V_p)
- b) Método de pozos cruzados o Crosshole (V_s)
- c) Método de arriba de la perforación o Uphole (V_s y V_p)
- d) Método de adentro de la perforación o Downhole (V_s)
- e) Sonda suspendida (V_s y V_p)

- **Métodos de Laboratorio.**

- a) Propagación de ondas (G , E , ν)
- b) Péndulo de Torsión (G , ζ)
- c) Columna Resonante (V_s , G , λ , γ)
- d) Triaxial Cíclica (ϵ , q , E , G , τ , γ)
- e) Corte simple cíclico (G , τ , γ , ζ)

Los métodos previamente mencionados inducen al suelo diferentes amplitudes de deformación angular, para cada rango de amplitud de deformación angular ocurre un fenómeno específico: por ejemplo, en los rangos de 10^{-4} a 10^{-2} % se dan asentamiento diferenciales.

Magnitud de deformación angular		10^{-6} (%)	10^{-5} (%)	10^{-4} (%)	10^{-3} (%)	10^{-2} (%)	10^{-1} (%)	1 (%)	10 (%)
Fenomeno		Propagación de ondas Vibración		Asentamientos diferenciales		Deslizamiento licuación			
Características mecánicas		Elastico		Elastico-plastico		Falla			
Pruebas de campo	Refracción sísmica (V_s y V_p)	←		→					
	Método de pozos cruzados o Crosshole (V_s y V_p)	←		→					
	Método de arriba de la perforación o Uphole (V_s y V_p)	←		→					
	Método de adentro de la perforación o Downhole (V_s)	←		→					
	Sonda suspendida (V_s y V_p)	←		→					
Pruebas de laboratorio	Propagación de ondas (G , E , ν)	←		→					
	Péndulo de torsión (G , ζ)			←		→			
	Columna resonante (V_s , G , γ , λ)			←		→			
	Triaxial cíclica (ϵ , q , E , G , τ , γ)					←		→	
	Corte simple cíclico (τ , γ , G , ζ)					←		→	
Mesa vibradora						←		→	
Sismos						←		→	

Imagen 24 Resumen de diferentes amplitudes de deformación angular (Colindres, 1983, pág. 184; Fernández, 2014, pág. 13; Flores, 2008, pág. 1).

Capítulo IV. Interacción Dinámica Suelo-Estructura.

“Por lo general, la mayoría de los análisis de respuesta sísmica no considera la presencia de la estructura. La respuesta obtenida de este tipo de análisis se denomina respuesta de campo libre. Cuando la estructura se desplanta sobre roca y es sometida a un sismo, la rigidez de la roca hace que los movimientos en la base de la estructura sean similares a los movimientos de campo libre. Por lo tanto, las estructuras sometidas en roca son consideradas como estructuras de base fija.” (Kramer, 1996)

“Por otro lado, la misma estructura respondería de forma diferente si estuviera desplantada en suelo blando. En primer lugar, la incapacidad de la cimentación de ajustarse a las deformaciones de los movimientos de campo libre podría causar que el movimiento de la base de la estructura modifique el movimiento de campo libre (interacción cinemática). En segundo lugar, la respuesta dinámica de la estructura por sí misma podría inducir deformaciones en el suelo donde se encuentra cimentada la estructura (interacción inercial). Este proceso, en el cual la respuesta del suelo influye el movimiento de la estructura y la respuesta de la estructura influye el movimiento del suelo es denominado interacción suelo-estructura.” (Kramer, 1996)

Las propiedades dinámicas del suelo y la estructura se activan con la excitación sísmica, pero, ¿Qué ocurre con la cimentación? ¿Cómo responde una cimentación rígida y una flexible ante los efectos IDSE? Para poder responder a estas preguntas, a continuación se presentara un resumen del trabajo que realizó el Doctor en Estructuras Luciano Roberto Fernández Sola presentado en mayo del 2013.

Para identificar los principales efectos que introduce el considerar que la base de las edificaciones es deformable, debemos primero analizar cualitativamente las diferencias fundamentales que tiene estos modelos, respecto a aquellos que consideran bases indeformables. Consideremos dos estructuras desplantadas, una sobre un lecho rocoso (base indeformable) y otra sobre un suelo de rigidez relativamente baja (base deformable), tal como se muestra en la figura:

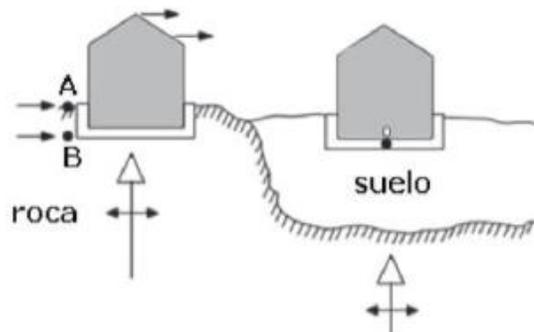


Imagen 25 Respuesta dinámica de una edificación sobre una roca y sobre suelo blando (Fernández S., 2013)

Queda claro que para el caso de la estructura con base indeformable, los movimientos en toda la cimentación son los mismos (punto A y B), por lo que la excitación en la base de la estructura (punto B), está definida por el movimiento en la superficie (punto A), además, esta excitación se considera que varía muy poco en todo el lecho rocoso. Recordemos que este movimiento queda definido por las características de la fuente sísmica (mecanismo de ruptura y magnitud del sismo) y por el decaimiento del movimiento con la distancia, definido por alguna ley de atenuación. Dada esta excitación, la respuesta de la superestructura estará dada exclusivamente por las propiedades de la misma (masa, rigidez y amortiguamiento), así como por los desplazamientos que sean permitidos por su deformabilidad e inercia.

Para describir la respuesta dinámica de la cimentación con base deformable, es necesario descomponer el problema en más partes. Para ello consideremos la figura siguiente:

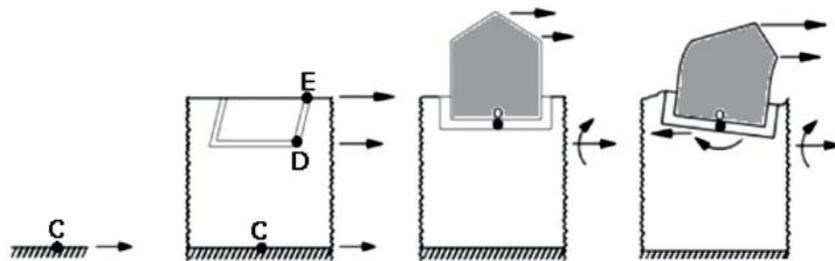


Imagen 246 Diferencia del movimiento en distintos puntos de un sistema suelo-cimentación-estructura (Fernández S., 2013)

El movimiento en el punto C corresponde al movimiento en el lecho rocoso definido anteriormente. La primera diferencia aparece, dado que el suelo que descansa sobre el lecho rocoso tendrá propiedades distintas a este, lo que se traduce en una variación del movimiento entre los puntos C, D y E, incluso en ausencia de la cimentación. Para el caso anterior (base indeformable), el movimiento en estos tres puntos sería el mismo. Esta variación en la mayoría de los casos se traduce en una amplificación del movimiento y un filtrado en el contenido de frecuencias del mismo; a estas modificaciones se les denomina “efectos de sitio”. Posteriormente, cuando se introduce la cimentación, que es un elemento de rigidez mayor que el suelo, es claro que el tiempo de desplazamiento impuesto en el terreno libre, en ausencia de esta, se verá modificado por la presencia de la misma. En general, esto produce una reducción en las amplitudes de los movimientos de alta frecuencia e introduce una excitación rotacional en la base de la cimentación (punto O), ya que los puntos E y D no pueden moverse independientemente entre ellos. A las modificaciones del movimiento, debidas a la presencia de un elemento de mayor rigidez, suele denominarse “Interacción Cinemática”, ya que en esta parte del fenómeno solamente interviene la difracción de ondas producida por el contraste de rigideces entre el terreno y la cimentación.

Si la estructura se somete a las traslaciones modificadas, tanto por los efectos de sitio, como por la rigidez de la cimentación y las rotaciones producidas por el movimiento diferencial entre los puntos E y D, los movimientos que experimenta el sistema serán compuestos por tres partes fundamentales, descritas a continuación:

1. Movimientos traslacionales originados por las fuerzas de inercia de la superestructura en el sistema deformable suelo-cimentación.
2. Desplazamientos originados por los giros impuestos en el sistema deformable, por los momentos de volteo causados por las fuerzas de inercia de la superestructura. Estos dos movimientos corresponden a un movimiento de cuerpo rígido de la superestructura respecto al terreno.
3. Finalmente, los desplazamientos permitidos por las propiedades y deformabilidad de la propia estructura (deformaciones producidas por las fuerzas de inercia

desarrolladas por la superestructura sobre el sistema suelo-cimentación) o mejor conocido como interacción inercial.

Para concretar, en la siguiente tabla se presentará las principales diferencias entre los análisis de edificaciones desplantadas sobre una base indeformable y deformable o dicho de otro modo, estructuras apoyadas sobre suelos con alta rigidez y sobre suelos con abaja rigidez.

Base Indeformable	Base Deformable
<p>No hay modificaciones del movimiento en los distintos puntos del terreno.</p> <p>No hay desplazamiento relativo de la cimentación respecto al terreno.</p> <p>No hay componente de movimiento de cuerpo rígido de la superestructura (cabeceo y traslación)</p>	<p>Existe una modificación del movimiento en los distintos puntos del terreno (Efectos de sitio)</p> <p>Existe una modificación del movimiento de campo libre, debido a la presencia de la cimentación (Interacción Cinemática)</p> <p>Existe un desplazamiento relativo de la cimentación respecto al terreno producido por las fuerzas de inercia de la superestructura (Interacción Inercial)</p>

Imagen 257 Diferencias principales entre base deformable e indeformable.

En la tabla se describen las características que modifican el comportamiento del sistema suelo-estructura desplantados sobre bases deformables; a partir de esto se puede decir que la interacción dinámica suelo estructura está compuesta por tres tipos de modificaciones, las cuales son producto de la flexibilidad del suelo; no obstante, solo dos de ellas definen la IDSE y estas son: la interacción inercial y la interacción cinemática, a partir de lo descrito surge una pregunta, y es, **¿Cómo toma en consideración los efectos de sitio, interacción inercial y cinemática el procedimiento de análisis presentado en el Apéndice A de la Normatividad Sísmica del D.F.?**

Efecto de sitio: Las modificaciones producidas por la variación de los materiales se toman en cuenta mediante el uso de los espectros de diseño reglamentarios y de los denominados espectros de sitio.

Interacción inercial: Este fenómeno está asociado con el alargamiento del periodo fundamental de la estructura y la modificación del amortiguamiento, en función de estos parámetros, la normatividad sísmica del Distrito Federal toma en cuenta la interacción inercial. Por otra parte, el amortiguamiento se modifica debido a dos fenómenos; el amortiguamiento histerético que aporta el suelo al sistema y la energía que se irradia en forma de ondas elásticas a través del suelo, debido al movimiento de la cimentación que produce perturbaciones en este.

Interacción cinemática: es el fenómeno que desde el punto de vista estructural es menos conocido y estudiado. En general se suele pensar, que el no considerar la interacción cinemática, está del lado de la seguridad debido a la reducción del movimiento de altas frecuencias que produce, y que la rotación de la cimentación introducida suele tener poca influencia en las aceleraciones y desplazamientos de la superestructura. Esta consideración es correcta para el caso de edificaciones robustas, con relaciones de esbeltez bajas y cimentaciones relativamente superficiales, sin embargo, para estructuras altas con cimentación profunda, el efecto de cabeceo puede introducir componentes de movimientos importantes, induciendo a que el diseño que no tome en cuenta la interacción cinemática, este del lado de la seguridad. Por otra parte, la interacción cinemática en términos de la modificación del movimiento, tiene una mayor influencia en las estructuras cimentadas con cajones de cimentación que en aquellas cimentadas con pilas (Fernández S., 2013). El enfoque de diseño más sencillo es el que ignora la interacción del cimiento con el suelo circundante. Según este enfoque, primero se estiman las deformaciones del terreno en campo libre y luego la cimentación se diseña para acomodarse a estas deformaciones. El resultado es satisfactorio cuando el suelo es mucho más rígido que la cimentación; en caso contrario es necesario considerar los efectos de interacción cinemática, ya que pueden afectar considerablemente las deformaciones circundantes. Estos efectos son debidos a la difracción de las ondas incidentes por la cimentación y hasta la fecha han sido poco estudiados, a diferencia de los efectos de interacción inercial debidos a la vibración de la estructura.

IV.1 Conceptos básicos sobre Interacción Dinámica Suelo-Estructura.

Se conoce como Interacción Suelo-Estructura a la modificación del movimiento de terreno (en la base de la estructura) provocado por la presencia de la estructura. Existe una mayor interacción en la medida en la que el movimiento en la base la estructura se ve más modificado por la presencia de la estructura.

Algunos de los factores de los que depende el grado de interacción que puede existir en la respuesta sísmica de una estructura son:

- a) Peso total de la estructura (W_T)
- b) Rigidez lateral de la estructura
- c) Altura de la estructura
- d) Relación de esbeltez de la estructura
- e) Tipo de cimentación (superficial, empotrada, piloteada, etc.)
- f) Tamaño de la cimentación
- g) Forma de la cimentación
- h) Rigidez de la cimentación
- i) Propiedades dinámicas del suelo
- j) Profundidad y estratigrafía del suelo
- k) Intensidad del movimiento sísmico
- l) Contenido de frecuencia del movimiento sísmico

En términos generales, los factores que afectan la interacción dinámica suelo-estructura se pueden clasificar en:

1. Características de la superestructura
2. Características de la cimentación
3. Características del suelo
4. Características del movimiento de terreno

Durante la respuesta sísmica de una estructura cimentada en roca, el movimiento en la base de la estructura (por ejemplo en el punto A) es prácticamente igual al movimiento que ocurriría en el mismo punto si la estructura no estuviera.

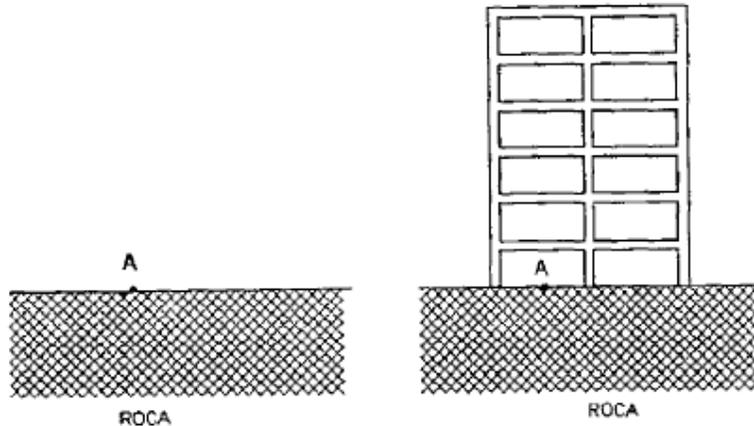


Imagen 26 Respuesta sísmica de una estructura en roca.

Así pues, en este caso el análisis sísmico puede limitarse al análisis de la respuesta de la estructura, modela su base como empotrada.

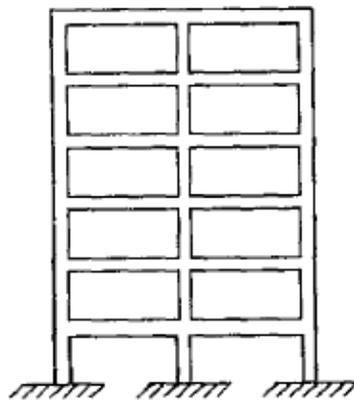


Imagen 27 Modelo para una estructura cimentada en roca.

En el caso de estructuras cimentadas en suelo y en forma particular en aquellas cimentadas sobre suelo blando existen diferentes motivos por los que el movimiento en la base de la estructura se ve modificado con respecto al que se vería sometido la misma estructura si esta estuviera sobre roca. Es importante visualizar cada uno de estos factores.

En primer lugar el movimiento en la superficie de la roca (punto A) será ligeramente diferente al que se ve sometido un punto en rocas pero que no se encuentra sobre la superficie (punto B). En general, el movimiento en el punto B será de menor intensidad que el movimiento en el punto A debido a que si bien la roca tiene una gran rigidez, no es completamente rígida. Esta modificación es muy pequeña por lo que suele despreciarse.

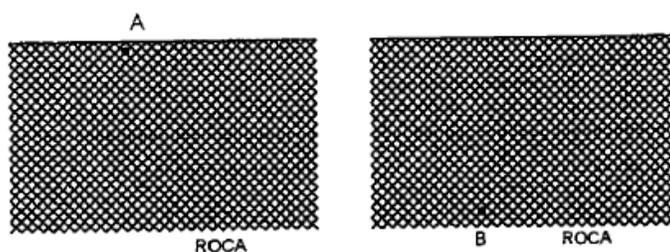


Imagen 28 Modificación del movimiento por la profundidad en roca.

El movimiento en roca a una cierta profundidad (punto B) será ligeramente diferente al de un punto en roca a la misma profundidad pero que por encima de este se encuentra un depósito de suelo en lugar de roca (punto C). Esta variación del movimiento también es muy pequeña y por lo general también suele despreciarse, por lo que es común el suponer que el movimiento en el punto A es igual al movimiento en el punto C.

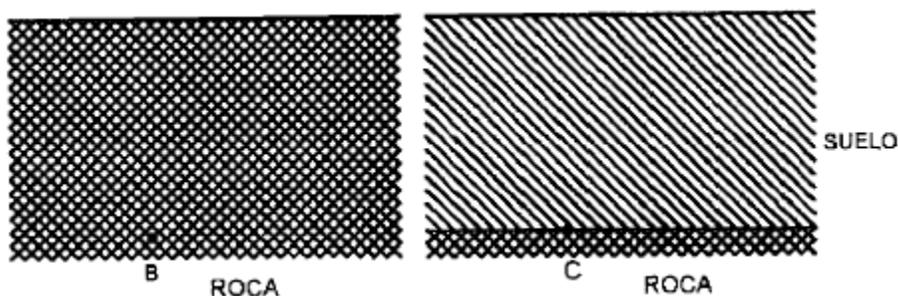


Imagen 29 Modificación del movimiento por la presencia del Suelo.

El movimiento en los depósitos de roca (punto C) será significativamente diferente al que puede ocurrir en la superficie (punto D) o a una pequeña profundidad (punto E). Esta modificación se debe a la respuesta dinámica del depósito del suelo el cual debido a su flexibilidad modifica en el movimiento sísmico. En general tanto la intensidad como el

contenido de frecuencia del movimiento se modifican. Entre más flexible (blando) el suelo sea en comparación a la roca mayor será la modificación del movimiento. Esta modificación del movimiento recibe el nombre de respuesta de sitio. Por lo general el movimiento en el punto C se ve amplificado al “pasar” por el depósito de suelo. En el caso de la zona del lago de la Ciudad de México el efecto del sitio juega un papel muy importante en la modificación de la respuesta estructural.

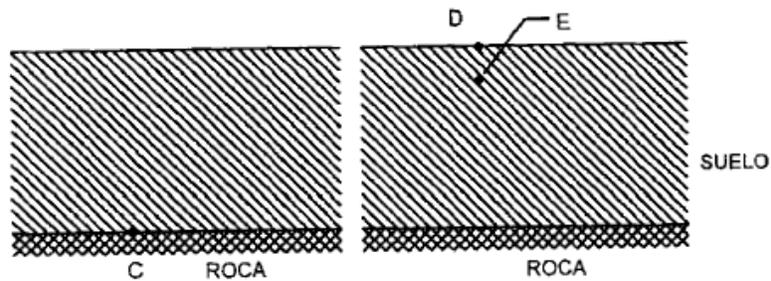


Imagen 30 Modificación del movimiento por efectos de sitio.

El movimiento a una cierta profundidad dentro del depósito del suelo (punto E) se ve modificado por la excavación para llegar a la profundidad de desplante de la cimentación (punto F).

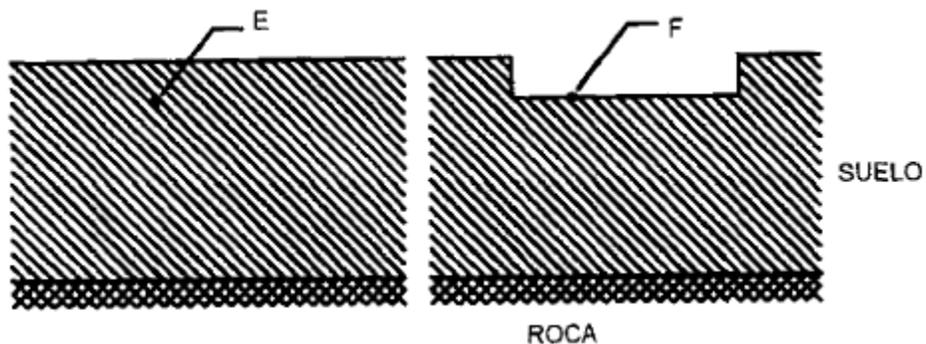


Imagen 31 Modificación del movimiento por la excavación.

El movimiento a nivel de desplante de la estructura (punto F) se verá modificado por la presencia de la cimentación (punto G), ya que debido a que la cimentación tiene una rigidez considerablemente mayor a la del suelo, este no podrá moverse de igual forma a como se movería sin la cimentación. Esta modificación del movimiento recibe el nombre

de interacción cinemática es el de filtrar el movimiento y no dejando pasar (o al menos disminuyendo su intensidad) altas frecuencias. Otros de los efectos de este tipo de interacción pueden ser cabeceo (rotación con respecto a un eje horizontal) y torsión (rotación respecto a un eje vertical). Alguno de los factores más importantes que determinan la importancia de la interacción cinemática son:

- a) Rigidez de la cimentación
- b) Forma de la cimentación
- c) Profundidad de desplante de la cimentación
- d) Tamaño de la cimentación
- e) Longitud de la onda del movimiento de terreno

En términos generales existirá una mayor interacción cinemática entre mayor sea el contraste entre la rigidez de la cimentación en comparación de la rigidez del suelo, y entre mayor sea el tamaño de la cimentación en comparación con la longitud de onda del movimiento de terreno.

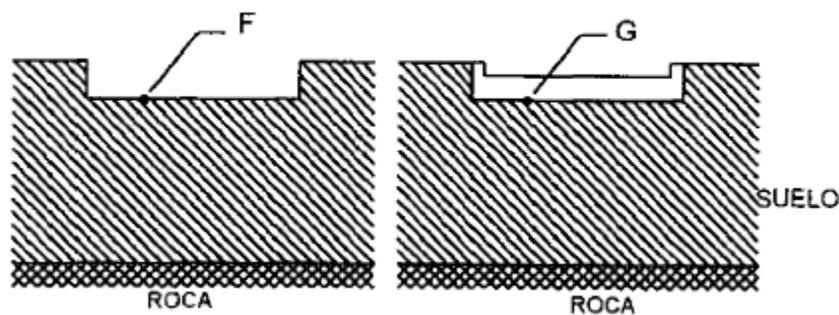


Imagen 32 Modificación del movimiento por interacción cinemática.

Por último, el movimiento en la base de la estructura (punto G) se ve modificado por la presencia y movimiento de la estructura (punto H). Esta modificación se le conoce como interacción inercial, debido a que es resultado de fuerzas de inercia que actúan como resultado de la masa de la estructura. Por lo general los efectos de la interacción inercial son más importantes que los debidos a la interacción cinemática. En términos generales existiría una mayor interacción inercial entre más blando sea el suelo, la estructura tenga

mayor masa y la estructura sea más esbelta. Los efectos principales de la interacción inercial es el de introducir una flexibilidad adicional al sistema dinámico y el incremento del amortiguamiento. Como resultado del incremento en flexibilidad se tendrá un incremento en el periodo fundamental de vibración del sistema y una modificación de las formas de vibración del sistema y una modificación de las formas modales de vibración.

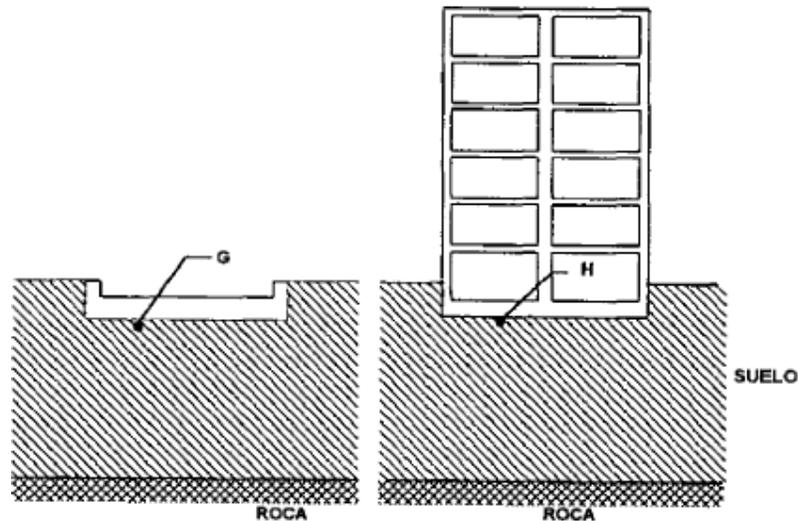


Imagen 33 Modificación del movimiento por interacción inercial.

IV.2 Energía Potencial y Cinética en el cálculo IDSE.

Propiamente sabemos que el movimiento causado por las ondas sísmicas produce una liberación de energía del suelo, la subestructura y la superestructura en este caso veremos como la energía potencial y cinética por medio de su interpretación matemática nos puede ayudar a definir características importantes del estudio IDSE.

Periodo Dominante del Sitio

La energía potencial de un depósito de suelo en una configuración cualquiera está dada por (Gómez, 2000; Mena y Perez Rocha, 2008):

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{H_s} G(z)A \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz \quad ec. IV.1$$

Mientras que la energía cinética vale:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^{H_s} \rho_s(z)A \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|^2 dz \quad ec. IV.2$$

Donde

H_s es el espesor de la estratigrafía

P_s es la densidad de la masa de suelo en función de Z

W es el desplazamiento lateral dependiente de z y t

G es el módulo de rigidez al corte del suelo

A es el área transversal unitaria normal al eje Z

Igualando las energías potencial y cinética (ecuaciones VI. 1 y 2)

$$\frac{1}{2} \int_0^{H_s} \rho_s(z)A \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^{H_s} G(z)A \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz \quad ec. IV.3$$

En un movimiento armónico:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \omega W \quad ec. IV.4$$

Reemplazando la ec.IV.4 en ec.IV.3

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{H_s} G(z) \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz}{\int_0^{H_s} \rho_s(z)W^2 dz} \quad ec. IV.5$$

Suponiendo que se conocen los desplazamientos horizontales en los nodos de un estrato de espesor h_n y el desplazamiento a la profundidad z es:

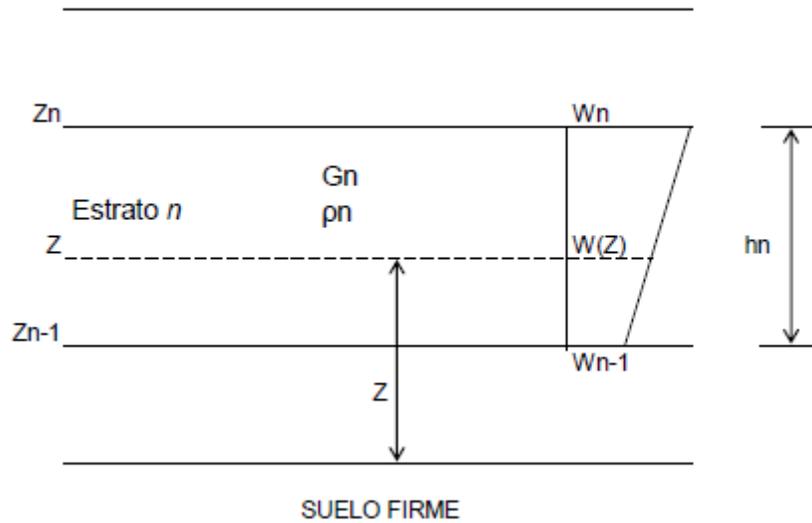


Imagen 34 Estrato de espesor h_n

$$W(z) = W_{n-1} + \frac{z - z_{n-1}}{h_n} (W_n - W_{n-1})$$

$$W(z) = W_{n-1} - \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_{n-1} + \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n$$

$$W(z) = \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{h_n - z + z_{n-1}}{h_n} W_{n-1}$$

$$W(z) = \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \text{ ec. IV. 6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \text{ ec. IV. 7}$$

Reemplazando las ec. IV.6 y 7 en la 5

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N G_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right|^2 dz}{\sum_{n=1}^N \rho_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \right|^2 dz} \text{ ec. IV. 8}$$

Resolviendo las integrales

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right|^2 dz = \left| \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right|^2 (z_n - z_{n-1}) = \left| \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right|^2 h_n$$

$$= \frac{(W_n - W_{n-1})^2}{h_n} \quad \text{ec. IV.9}$$

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \right|^2 dz = \frac{1}{h_n^2} \int_{z_{n-1}}^{z_n} (z(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^2 dz$$

$$= \frac{(z(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^3}{3h_n^2 (W_n - W_{n-1})}$$

$$= \frac{1}{3h_n^2 (W_n - W_{n-1})} \{ (z_n(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_n W_n)^3$$

$$- (z_{n-1}(W_n - W_{n-1}) + z_{n-1} W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^3 \}$$

$$= \frac{1}{3h_n^2 (W_n - W_{n-1})} \{ (W_n(z_n - z_{n-1}))^3 - (W_{n-1}(z_n - z_{n-1}))^3 \}$$

$$= \frac{(W_n^3 - W_{n-1}^3)h_n}{3(W_n - W_{n-1})} = \frac{(W_n - W_{n-1})(W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)h_n}{3(W_n - W_{n-1})}$$

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \right|^2 dz = \frac{h_n}{3} (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2) h_n \quad \text{ec - IV, 10}$$

Reemplazamos las ec.IV.9 y 10 en 8

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{G_n}{h_n} (W_n - W_{n-1})^2}{\sum_{n=1}^N \frac{h_n \rho_n}{3} (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)} \quad \text{ec. IV. 11}$$

Por otra parte, la deformación angular unitaria de un estrato de espesor h_i , es:

$$\varepsilon_e = \frac{\tau_i}{G_i}$$

Y la deformación lateral del estrato vale:

$$\delta_i = \frac{\tau_i}{G_i} h_i$$

Aplicando un esfuerzo unitario $\tau_i = 1$, el modo fundamental al nivel n de un estrato, se puede calcular aproximadamente con:

$$W_n = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i}$$

Pero,

$$W_n - W_{n-1} = \frac{h_n}{G_n}$$

Quedando la ecuación 11:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{h_n \rho_n}{3} (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)}$$

$$\omega^2 = \frac{3}{\frac{(\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n})^2}{\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n}} \sum_{n=1}^N h_n \rho_n \frac{1}{(\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n})^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} \right)^2 \right)}$$

$$\omega^2 = \frac{3}{\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n} * \sum_{n=1}^N h_n \rho_n (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)}$$

Donde

$$W_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i}} \quad \text{ec, IV.12}$$

Como el periodo del sitio T_s vale

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega}$$

Entonces:

$$T_s = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n} * \sum_{n=1}^N h_n \rho_n (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)} \quad \text{ec. IV.13}$$

En un deposito homogéneo, $H_s=h_1$ por lo que tenemos

$$v_s = \frac{G_1}{\rho_1}$$

Con lo que tenemos

$$T_s = \frac{2\pi H_s}{\sqrt{3} v_s}$$

El periodo de un espesor H_s debe ser

$$T_s = \frac{4 H_s}{v_s}$$

Por lo que hay que reemplazar $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ por 4 en la ecuación 13, quedando esta:

$$T_s = \frac{4}{\sqrt{g}} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{h_n}{G_n} * \sum_{n=1}^N h_n \rho_n (W_n^2 + W_n W_{n-1} + W_{n-1}^2)}$$

IV.3 Ecuación de Equilibrio Dinámico.

Al hablar de IDSE se debe de ilustrar el comportamiento dinámico de una masa, en el caso más sencillo “una masa de un grado de libertad”, y que se extiende a casos más complejos, es decir, de n grados de libertad; para poder así después extenderlo a un medio donde se han trazado elementos finitos para definir su comportamiento. Dado que se trata de un fenómeno en el que interviene la aceleración, la ecuación resultante del movimiento es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución numérica se puede llevar a cabo empleando el método de diferencias centrales o el de Newmark.

Para comprender el comportamiento dinámico de un cuerpo, consideremos el caso sencillo de una masa de un grado de libertad sometidas a las condiciones de movimiento, como se muestra en la siguiente imagen:

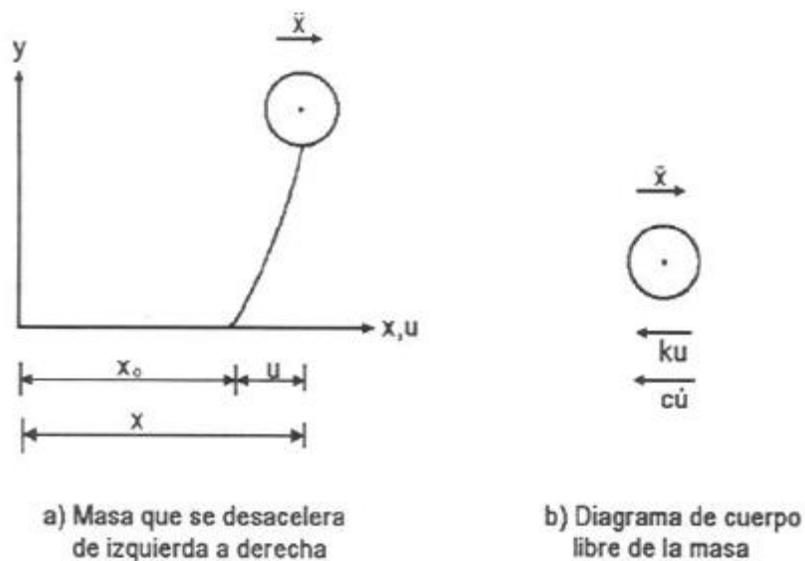


Imagen 35 Movimiento de una masa de un grado de Libertad

En la imagen anterior se puede observar el diagrama de cuerpo libre de la masa b), de la cual estableciendo la ecuación de equilibrio dinámico y utilizando el principio de D'Alembert, según el cual las fuerzas dinámicas se pueden agregar al equilibrio dinámico como una fuerza igual a $m\ddot{x}$, pero con sentido opuesto a la aceleración y se obtiene:

$$ku + c\dot{u} + m\ddot{x} = 0 \quad \text{ec. IV. 14}$$

Pero

$$x = x_0 + u, \quad u = x - x_0, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{u}$$

Sustituyendo lo anterior en la ec.IV.14

$$ku + c\dot{u} + m(\ddot{x}_0 + \ddot{u}) = 0$$

$$ku + c\dot{u} + m\ddot{u} = -m\ddot{x}_0 \quad \text{ec.IV.15}$$

Resulta interesante notar en la ec.IV.15 que el efecto en la aceleración de la base \ddot{x}_0 , es equivalente a aplicar una fuerza dinámica de magnitud $m\ddot{x}_0$ y sentido contrario a \ddot{x}_0 (Clough y Penzien, 1975)

Para sistemas de varios grados de libertad, la ec.IV.15 se debe cumplir en cada una de las masas del sistema, y se puede poner en forma matricial de la siguiente forma:

$$\underline{K}\underline{u} + \underline{C}\underline{\dot{u}} + \underline{M}\underline{\ddot{u}} = -\underline{M}\underline{\ddot{x}_0}$$

Donde K es la matriz de rigidez, C la matriz de amortiguamiento y M la matriz de masa, componentes de los elementos al sistema global; \underline{u} el vector de desplazamientos relativos entre los nudos de los elementos y la base del sistema ($u = x - x_0$), $\underline{\ddot{x}_0}$ es el vector de aceleración de la base del sistema, el cual para una base rígida tiene todos sus elementos son iguales a \ddot{x}_0 , siendo este valor igual a la magnitud de la aceleración de la base rígida del sistema.

Para darle una representación más grafica podemos mostrar un diagrama de cuerpo libre de una losa de una pérgola, cuando presenta un desplazamiento u , una velocidad \dot{u} y una aceleración \ddot{u} . Se considera para este diagrama el sentido positivo en dirección horizontal (eje X) hacia la derecha:

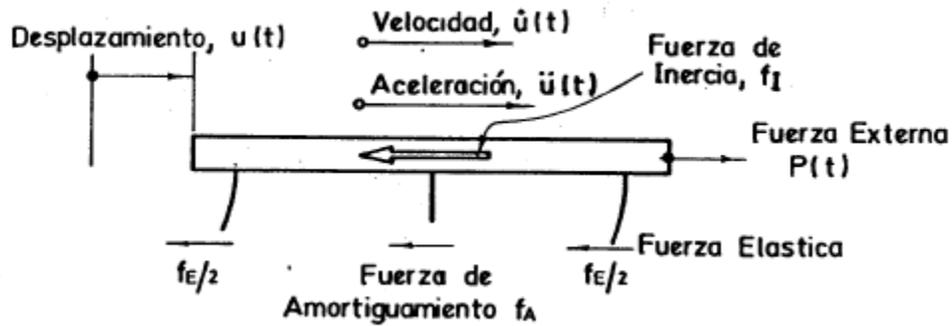


Imagen 36 DCL de una losa

Las fuerzas que actúan sobre la losa son:

$$\text{Fuerza externa } P(t)$$

$$\text{Fuerza de inercia } f_I = -m\ddot{u}(t)$$

$$\text{Fuerza de amortiguamiento viscoso } f_A = -c\dot{u}(t)$$

$$\text{Fuerza de restitución elástica } f_E = -ku(t)$$

Donde “c” representa el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

Según el principio de D’Alembert (que no es sino una reformulación de la segunda ley de Newton), la losa se encuentra en equilibrio dinámico, bajo la acción de las fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre.

$$f_I + f_A + f_E + P(t) = 0$$

O de igual manera

$$-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + P(t) = 0$$

$$P(t) = m\ddot{u} + c\dot{u} + ku$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden y representa el movimiento de la estructura.

Para el estudio de la respuesta de la estructura sometida a un movimiento en su base, se considera que la fuerza externa es nula. Sin embargo, se puede hallar una fuerza externa equivalente a la excitación sísmica. En la siguiente figura se muestra dos sistemas equivalentes, donde el primero presenta un desplazamiento en su base u_s y en el segundo la losa ha desplazado una cantidad u con respecto a su posición inicial, debido a una fuerza externa.

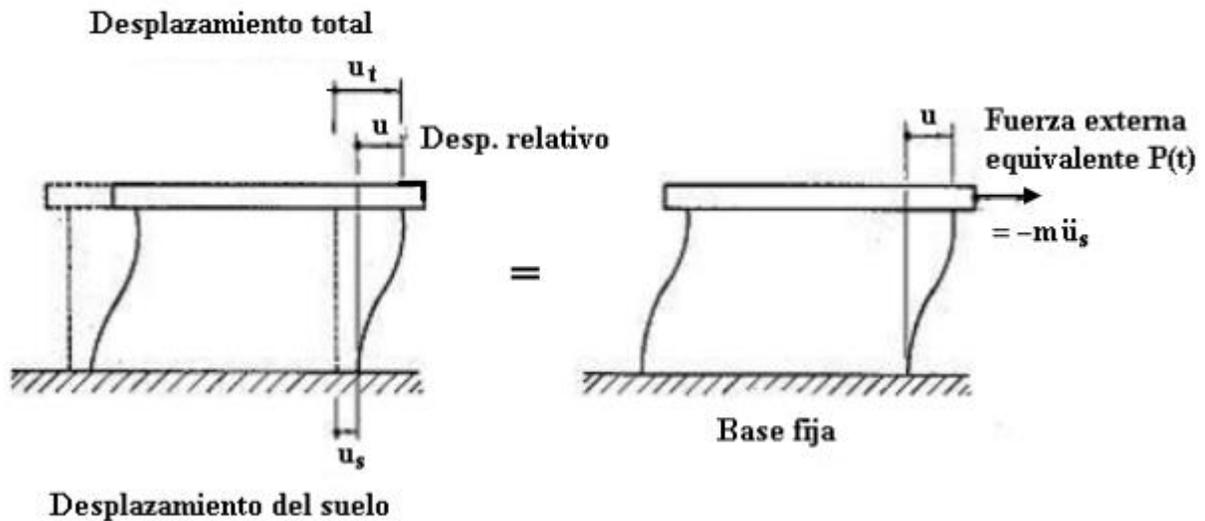


Imagen 37 Fuerza externa equivalente a la excitación sísmica.

El desplazamiento relativo u de la losa con respecto al suelo, se expresa como:

$$u = u_t - u_s$$

Si se deriva la expresión anterior se tiene

$$u = \ddot{u}_t - \ddot{u}_s$$

En el caso del desplazamiento de la base, las fuerzas que actúan sobre la losa son:

$$\text{Fuerza externa} \quad P(t) = 0$$

$$\text{Fuerza de inercia} \quad f_I = -m\ddot{u}_t$$

Fuerza de amortiguamiento viscoso $f_A = -c\dot{u}$

Fuerza de restitución elástica $f_E = -ku$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$-m\ddot{u}_t - c\dot{u} - ku = 0$$

$$-m(\ddot{u}_s + \ddot{u}) - c\dot{u} - ku = 0$$

De donde

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_s$$

Por lo que podemos concluir que el movimiento de la base de la estructura, es idéntico de aplicar sobre la masa de la estructura una fuerza equivalente, es decir:

$$P(t) = -m\ddot{u}_s$$

Movimiento de Onda Cortante.

Otra Aplicación de la ecuación de movimiento es al considerar el elemento de la imagen 36, la sumatoria de fuerzas en dirección x, la cual vale:

$$\sum F_x = \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz \right] dx dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy \right] dx dz + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dx \right] dz dy - \tau_{zx} dx dy - \tau_{yx} dx dz - \sigma_x dz dy$$

$$\sum F_x = \left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right] dx dy dz$$

Utilizando la segunda ley de Newton, despreciando las fuerzas de masa.

$$\sum F_x = [\rho dx dy dz] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

Es decir:

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right]$$

Procedimiento en forma similar

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \quad ec. IV. 16$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] \quad ec. IV. 17$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right] \quad ec. IV. 18$$

Son las ecuaciones de movimiento que se deben cumplir en cualquier clase de material.

Obtenemos a continuación las ecuaciones de movimiento para un sólido que cumple las leyes de comportamiento de Voigt, considerando una onda cortante que se propaga en dirección vertical, con desplazamiento de partículas solo en dirección del eje x, la ecuación de movimiento es:

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \eta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right) \quad ec. IV. 19$$

Remplazando la ec. IV. 19 y 20 en la ec. IV. 16

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon_v + 2 \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon_x \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \gamma_{yx}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \gamma_{zx}$$

Pero

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 u$$

Análogamente

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 u \quad \text{ec. IV. 21}$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 v \quad \text{ec. IV. 22}$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 w \quad \text{ec. IV. 23}$$

Consideremos un movimiento en el que no se presenta rotación

$$W_x = W_y = W_z = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla^2 u$$

Remplazando en las ecs. IV.21, 22 y 23

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + 2 \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \nabla^2 u \quad ec. IV. 24$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + 2 \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \nabla^2 v \quad ec. IV. 25$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] + 2 \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \right\} \nabla^2 w \quad ec. IV. 26$$

Las ecuaciones anteriores representan un movimiento consistente en ondas ir rotacionales (Kolsky, 1963). Se conocen también como ondas longitudinales de dilatación o de compresión. ondas primaras u ondas P.

Considerando ahora un movimiento en el que no se produce cambio de volumen:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

Sustituyendo en las ecs.

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 u \quad ec. IV. 27$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 v \quad ec. IV. 28$$

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 w \quad ec. IV. 29$$

Dichas ecuaciones corresponden al movimiento de ondas cortante que se propagan en el medio continuo. A estas ondas se les denominan también ondas secundarias u ondas S.

Velocidad de las ondas Sísmicas.

Considerando una onda de compresión, en la que solo se tiene desplazamiento en la dirección del eje x, despreciemos ademar el amortiguamiento, la ec.IV.24 queda:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{[\lambda + 2G]}{[\rho]} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad \text{ec. IV.30}$$

Por otra parte, dada una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ec. IV.31}$$

Su solución está dada por

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

En efecto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = cf'_1(x - ct) + cf'_2(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''_1(x - ct) + c^2 f''_2(x + ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1(x - ct) + f'_2(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_1(x - ct) + f''_2(x + ct)$$

Reemplazando en la ec.IV.31 apreciamos que esta se satisface idénticamente (Levi, 1980).

Vemos a continuación que la ec. Representa dos ondas que se transmiten a lo largo de los sentidos positivo y negativo del eje X. Tenemos la función $f_1(x - ct)$; para toda $t=t_0$ la ecuación tendrá una cierta configuración y valdrá $f_1(x - ct_0)$. Para el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, la función valdrá $f_1(x - ct_0 - c\Delta t)$; pero esta función es igual a la correspondiente a $t=t_0$, si agregamos a x la distancia $c\Delta t$. En efecto el nuevo argumento de la función vale $(x + c\Delta t_0 - ct_0 - c\Delta t) = (x + ct_0)$ y la función es $f_1(x - ct_0)$, que es igual a la correspondiente a $t=t_0$, por lo tanto, la función $f_1(x - ct_0)$ representa una onda que avanza a lo largo del eje X, con una velocidad constante c (celeridad de la onda).

De manera análoga, se comprueba que $f_2(x + ct_0)$, representa una onda que retrocede a lo largo del eje X, con la misma velocidad c (Levi, 1980).

Por lo anterior, la velocidad de una onda de compresión, de acuerdo a las ecuaciones IV.30 y 31 vale:

$$c_p = \sqrt{\frac{[\lambda + 2G]}{[\rho]}} \quad \text{ec. IV.32}$$

De la ec.IV.27, considerando únicamente desplazamiento en la dirección del eje X, y despreciando el amortiguamiento:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{[G]}{[\rho]} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

De acuerdo a la ec.IV.31, la velocidad de la onda cortante es:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{ec. IV.33}$$

Si consideramos ahora una onda de cortante que se propaga en dirección vertical, con desplazamiento de partículas solo en la dirección del eje X, la ecuación de movimiento es:

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \left[G + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Es decir

$$[\rho] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \eta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}\right) \quad \text{ec. IV.34}$$

Función de Transferencia.

Hagamos

$$F(t) = P - MU_b$$

Quedando la ecuación de movimiento

$$Mu + Cu + Ku = F(t) \quad ec. IV.35$$

Considerando que el movimiento $F(t)$ es estacionario

$$F(t) = F = D_f \text{sen}(\Omega t) \quad ec. IV.36$$

Donde D_f es la amplitud de la excitación.

En teoría de vibraciones se demuestra que la respuesta del sistema es igual a

$$u = \left(\frac{D_f}{K}\right) \frac{\text{sen}(\Omega t - \phi)}{K \sqrt{\left[\left(\frac{1-\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2\right]}} \quad ec. IV.37$$

Siendo

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_{crit}} = \frac{C}{2\sqrt{MK}}; C = \zeta 2\sqrt{MK}$$

Sea

$$u = D_y \text{sen}(\Omega t - \phi) \quad ec. IV.38$$

Donde

$$D_y = \frac{\left(\frac{D_f}{K}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{1-\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2\right]}} \quad ec. IV.39$$

La relación de amplitudes D_y/D_f es

$$\frac{D_y}{D_f} = \frac{1}{K \sqrt{\left[\left(\frac{1-\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2\right]}} \quad ec. IV. 40$$

En la ec.IV.37, ϕ es el ángulo de fase, dado por:

$$\tan(\phi) = \frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad ec. IV. 37.1$$

Resolviendo la ec.IV.35 mediante la función de transferencia. Sea

$$F(t) = D_f e^{i\Omega t} \quad ec. IV. 41$$

La respuesta del sistema estará dada por

$$u(t) = D_y e^{i\Omega t} \quad ec. IV. 42$$

Sea

$$u(t) = H_d(\Omega)F(t) \quad ec. IV. 43$$

Donde $H_d(\Omega)$ es función de transferencia.

Sustituyendo la ec.IV.41 en 43

$$u(t) = u = D_f H_d e^{i\Omega t}$$

$$u = D_f H_d i\Omega e^{i\Omega t}$$

$$u = -D_f H_d \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

Reemplazando en la ec.IV.35 y despejando H_d

$$H_d = H_d(\Omega) = \frac{1}{(K - M\Omega^2) + C\Omega} \quad ec. IV. 44$$

El módulo de la función de transferencia vale

$$|H_d(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{((K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2)}}$$

$$|H_d(\Omega)| = \frac{1}{K\sqrt{\left(\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\Omega\zeta}{\omega}\right)^2\right)}} \quad ec. IV. 45$$

Apreciamos que el módulo de la función de transferencia es igual a la relación de amplitudes Dy/Df dada por la ec.IV.40

$$H_d(\Omega) = A(\Omega) - iB(\Omega) \quad ec. IV. 46$$

Demostrando que el ángulo de fase está dado por:

$$\tan(\phi) = \frac{B}{A} \quad ec. IV. 47$$

En efecto, de la ec.IV.44

$$H_d = \frac{[(K - M\Omega^2) - C\Omega i]}{((K - M\Omega^2) + C\Omega)((K - M\Omega^2) - C\Omega i)}$$

$$H_d = \frac{K - M\Omega^2}{((K - M\Omega^2)^2 + C\Omega^2)} - \frac{C\Omega i}{((K - M\Omega^2)^2 + C\Omega^2)} \quad ec. IV. 48$$

$$\tan(\phi) = \frac{B}{A} = \frac{C\Omega}{K - M\Omega^2}$$

$$\tan(\phi) = \frac{2\sqrt{MK}\zeta\Omega}{K\left(1 - \frac{M}{K}\Omega^2\right)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{2\zeta\Omega\sqrt{M}\sqrt{K}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)}$$

Que coincide con la ec.IV.37.1

En la ec.IV.41 el fenómeno real está representado por la parte imaginaria de su segundo miembro

$$F(t) = \text{Im}(D_f e^{i\Omega t}) = D_f \text{sen}(\Omega t) \quad \text{ec. IV. 49}$$

La respuesta del sistema estará dada por la parte imaginaria de la ec.IV.42

$$u(t) = \text{Im}(D_y e^{i\Omega t}) \quad \text{ec. IV. 50}$$

Pero la ec.IV.43

$$u(t) = H_d(\Omega)F(t)$$

Donde $H_d(\Omega)$ es función de transferencia. Sustituyendo la ec.IV.41 en la 43

$$u(t) = u = H_d(\Omega)D_f e^{i\Omega t} \quad \text{ec. IV. 51}$$

En la ecuación anterior el fenómeno está representado por la parte imaginaria del segundo miembro

$$u = \text{Im}(H_d(\Omega)D_f e^{i\Omega t}) \quad \text{ec. IV. 52}$$

Sustituyendo la ec.IV.46 en 52

$$u = D_f \text{Im}([A(\Omega) - iB(\Omega)][\cos(\Omega t) + i\text{sen}(\Omega t)])$$

$$u = D_f [A(\Omega)\text{sen}(\Omega t) - B(\Omega)\cos(\Omega t)]$$

$$u = D_f [\sqrt{A^2 + B^2}] \text{sen}\left(\Omega t - \text{ang} \tan\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

$$u = D_f [\sqrt{A^2 + B^2}] \text{sen}(\Omega t - \phi)$$

Y de la ecuación

$$|H_d(\Omega)| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Queda la ecuación

$$u = \left(\frac{D_f}{K}\right) \frac{\text{sen}(\Omega t - \phi)}{K \sqrt{\left[\left(\frac{1-\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2\right]}}$$

Por lo tanto, las partes imaginarias de $F(t) = D_f e^{i\Omega t}$ y $u(t) = D_y e^{i\Omega t}$ representan el fenómeno de vibraciones dado por las cantidades $F(t) = D_f \text{sen}(\Omega t)$ y $u(t) = D_y \text{sen}(\Omega t)$.

IV.4 Elementos que intervienen en la IDSE.

Rigidez y Amortiguamiento Dinámico.

El amortiguamiento es el proceso causante de que un movimiento vibratorio disminuya su amplitud con el tiempo; su origen puede ser diversos: por rozamiento de dos superficies, como consecuencia de la fricción interna o histéresis del propio material, etc.

Para aproximar las distintas formas de amortiguamiento es habitual en dinámica estructural emplear un amortiguamiento viscoso. En este caso la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad.

$$F_a = c\dot{x}$$

Donde la constante c de amortiguamiento equivalente es tal que origina la misma disipación de energía que la producida por el amortiguamiento real de la estructura.

Amortiguamiento histérico.

El amortiguamiento histérico es la relación entre la energía disipada y la energía almacenada en los ciclos histéricos a los que es sometida una muestra de suelo durante una carga cíclica. Es la capacidad que tiene el suelo de disipar energía y depende principalmente de la magnitud de deformación inducida, aunque el índice de plasticidad influye también la capacidad que tienen las arcillas de disipar energía. Se observa la

tendencia que para una misma deformación angular, el amortiguamiento disminuye cuando el índice de plasticidad aumenta (Romo M, 1991)

Según Hardin y Drnevich (1972) en (Romo & Ovando-Shelley, 1996) la relación de amortiguamientos de los materiales Viscoelástico obedecen las reglas de Masing durante la carga cíclica en relación el módulo cortante:

$$\xi(\gamma) = \xi_{max} \frac{1 - G(\gamma)}{G_{max}}$$

Donde ξ_{max} , es el máximo valor de la relación de amortiguamiento antes de la falla del suelo.

Ahora considerando el sistema de un grado de libertad como el de la imagen:

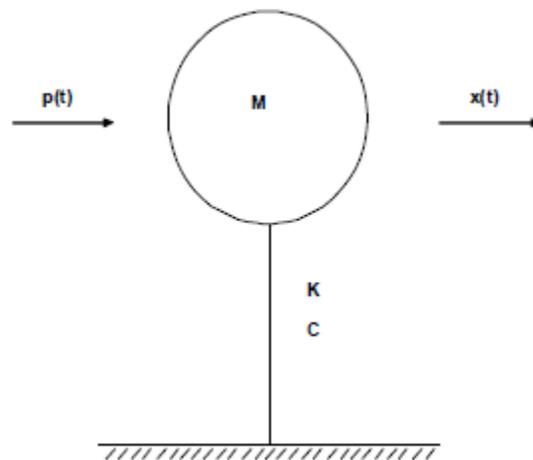


Imagen 38 Sistema de un grado de Libertad

La ecuación de equilibrio dinámico queda:

$$\underline{Kx} + \underline{C\dot{x}} + \underline{M\ddot{x}} = F(t)$$

Sean:

$$F(t) = Pe^{i\omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = i^2 \omega^2 X e^{i\omega t} = -\omega^2 X e^{i\omega t}$$

Reemplazando en la ecuación de equilibrio dinámico:

$$M(-\omega^2 X e^{i\omega t}) + C(i\omega X e^{i\omega t}) + K(X e^{i\omega t}) = P e^{i\omega t}$$

$$[M(-\omega^2) + C(i\omega) + K]X = P$$

Donde

$$\hat{K}(\omega) = \frac{P}{X} = K - M\omega^2 + C(i\omega)$$

$$\hat{K}(\omega) = K \left(1 - \frac{M}{K} \omega^2\right) + \frac{K}{K} C(i\omega)$$

$$\omega_e^2 = \frac{K}{M}$$

$$\hat{K}(\omega) = K \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right) + \frac{C(i\omega)}{K} \right]$$

Pero

$$\zeta_e = \frac{C}{2\sqrt{MK}}$$

Podemos representar la ecuación de la siguiente manera

$$\hat{K}(\omega) = K[k + i\omega c]$$

Donde

$$k = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}$$

$$c = \frac{2\zeta_e}{\omega_e^2}$$

El amortiguamiento histeretico (o amortiguamiento por fricción del material) se toma en cuenta multiplicando la ecuación $K(\omega) = K[k + i\omega c]$ por el factor $1 + i2\zeta_s$:

$$\hat{K}(\omega) = K_m^0[k_m + i\omega c_m](1 + i2\zeta_s)$$

$$\hat{K}(\omega) = K_m^0[k_m(1 + i2\zeta_s) + i\omega c_m(1 + i2\zeta_s)]$$

$$\hat{K}(\omega) = K_m^0[k_m - 2\zeta_s c_m \omega + i(\omega c_m + 2\zeta_s k_m)]$$

Sea

$$\hat{K}(\omega) = K_m(\omega) + i\omega C_m(\omega)$$

Igualamos las partes real e imaginaria

$$K_m(\omega) = K_m^0[k_m(1 + i2\zeta_s)]$$

$$\omega C_m = K_m^0[\omega c_m + 2\zeta_s k_m]$$

$$C_m = \frac{K_m^0[\omega c_m + 2\zeta_s k_m]}{\omega}$$

La ecuación $K_m(\omega) = K_m^0[k_m(1 + i2\zeta_s)]$ proporciona la rigidez dinámica y la ecuación $C_m = \frac{K_m^0[\omega c_m + 2\zeta_s k_m]}{\omega}$ el amortiguamiento dinámico de un sistema de un grado de libertad.

Vibraciones

Vibraciones libres.

Considerando un sistema de un grado de libertad, como se ha venido mencionado, donde se trata de un cuerpo de masa M unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez lateral. La rigidez K se define como en el cociente de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, dividida entre el desplazamiento horizontal, u , que produce dicha fuerza.

El amortiguamiento “C” toma en cuenta la disipación de energía que se produce durante el movimiento (fundamentalmente por fricción interna en el sistema). Se ha observado que la disipación de energía se puede representar mediante una fuerza que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del cuerpo.

Por el principio de D'Alembert como se ha mencionado, permite que la fuerza de inercia sea igual al producto $M\ddot{u}$, pero tiene sentido contrario a la aceleración.

El fenómeno físico que estamos estudiando consiste en dar inicialmente un desplazamiento horizontal δ_0 al cuerpo, para después soltarlo y dejarlo vibrar libremente.

Dando lugar a la ecuación de movimiento que se mencionó en el capítulo pasado:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad \text{ec. IV. 4.1}$$

Ahora, **suponiendo inicialmente que no hubiera amortiguamiento, C=0**

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad \text{ec. IV. 4.2}$$

La ec.IV.4.2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Su ecuación característica es:

$$M\lambda^2 + K\lambda^0 = 0, \quad M\lambda^2 + K = 0 \quad \text{ec. IV. 4.3}$$

La solución de la ecuación característica es:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K}{M}} i$$

$$\lambda_2 = \sqrt{-\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K}{M}} i$$

Sea la frecuencia circular natural del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{ec. IV. 4.4}$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por:

$$u = C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 e^{at} \operatorname{sen}(bt)$$

Donde a es la parte real y b la parte imaginaria del número complejo, por lo tanto la solución general:

$$u = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t) \text{ ec. IV. 4.5}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del sistema; si se deriva ambos miembros de la ecuación, se obtiene la siguiente expresión que permite calcular la velocidad de la vibración:

$$\dot{u} = -C_1 \omega \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \text{ ec. IV. 4.6}$$

De acuerdo con las condiciones iniciales para $t=0$ y $u=0$, reemplazamos en la ec.IV:4.6, mientras que $t=0$, y $u=\delta_0$, sustituyendo en la ec.IV.4.5, tenemos:

$$C_1 = \delta_0$$

$$C_2 = 0$$

$$u = \delta_0 \cos(\omega t) \quad \text{ec. IV. 4.7}$$

La ecuación puede estar expresada como:

$$u = \delta_0 \cos(\omega t) + 0 * \operatorname{sen}(\omega t)$$

Dicha ecuación describe la respuesta sísmica del sistema como un movimiento armónico simple, que también se expresa como:

$$u(t) = u_{max} \cos(\omega t - \phi)$$

Donde:

$$u_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Y

$$\phi = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

El término u_{max} representa la amplitud de oscilaciones y ϕ representa el ángulo de fase, el cociente ϕ/ω representa el tiempo del sistema en adquirir el máximo desplazamiento (u_{max}).

En la siguiente imagen se muestra la variación de y en función del tiempo.

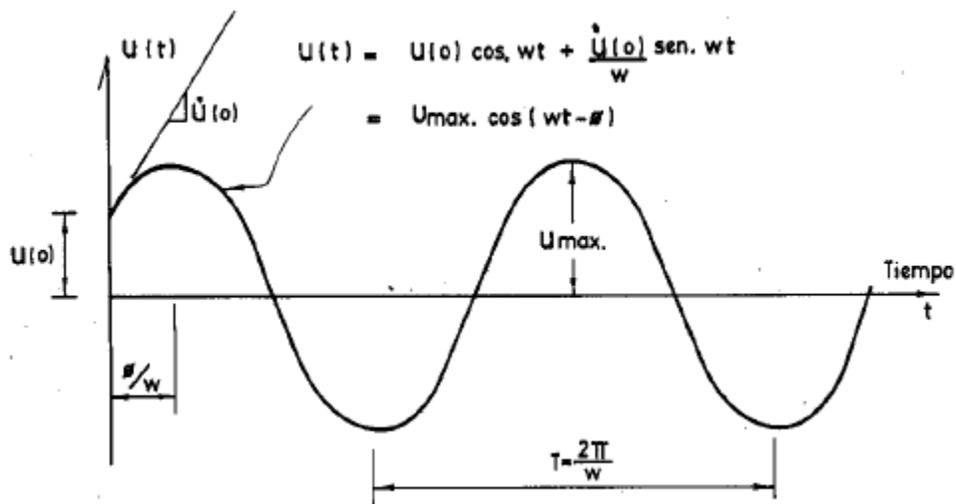


Imagen 39 Vibraciones libres sin amortiguamiento.

Se define el periodo T como el tiempo en que la masa cumple un ciclo de movimiento, es decir cuando la masa pasa por el mismo punto, con el mismo sentido del movimiento, tenemos que:

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ec. IV. 4.8}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{ec. IV. 4.9}$$

T es el periodo natural de vibración del sistema de un grado de libertad.

Se define la frecuencia natural del sistema como el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ec. IV. 4.10}$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{M}{K}}}{2\pi} \text{ ec. IV. 4.11}$$

La frecuencia mide el número de ciclos de movimiento por unidad de tiempo.

La velocidad de la masa se halla derivando con respecto al tiempo la ec. IV.4.7

$$\dot{u} = -\delta_0 \omega \text{ sen}(\omega t) \quad \text{ec. IV. 4.12}$$

La aceleración se obtiene derivando la ec. IV.4.12 con respecto al tiempo.

$$\ddot{u} = -\delta_0 \omega^2 \text{ cos}(\omega t) = -\omega^2 u \quad \text{ec. IV. 4.13}$$

Vemos que la aceleración es igual al desplazamiento multiplicado por el cuadrado de ω .

Vibraciones amortiguadas.

Consideremos ahora que si hay disipación de energía en el sistema, es decir, **existe amortiguamiento: $C \neq 0$** . El movimiento queda representado por la ec. IV.4.1

La ecuación característica es:

$$M\lambda^2 + C\lambda + K = 0, \quad M\lambda^2 + C\lambda + K = 0 \quad \text{ec. IV. 4.14}$$

Las raíces de la ec. IV.4.14 son

$$\lambda_1 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{C}{2M} - \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

Las raíces λ_1 y λ_2 pueden ser reales o complejas, dependiendo del valor del radical $\sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$, es decir, es función del signo de la cantidad $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}$. Distinguimos tres casos:

Caso 1: Dos raíces reales diferentes.

Si las raíces son reales: $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} > 0$ la solución de la ec.IV.4.1 está dada por:

$$u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{ec. IV.4.15}$$

En estas condiciones el sistema no vibra, sino que la masa, después de ser desplazada una distancia δ_0 regresa a su posición inicial. Este fenómeno ocurre cuando el amortiguamiento C es alto.

Caso 2: Una raíz real.

Se presenta cuando $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} = 0$ Solo existe una raíz que vale:

$$\lambda = -\frac{C}{2M}$$

La solución de la ecuación es:

$$u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$\dot{u} = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 (\lambda t e^{\lambda t} + e^{\lambda t})$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para $t=0$, $u=\delta_0$ y $t=0$ y $\dot{u} = 0$ tenemos:

$$C_1 = \delta_0$$

$$C_2 = -\lambda \delta_0$$

Por lo que la solución a la ecuación sería:

$$u = \delta_0 e^{\lambda t} (1 - \lambda t)$$

$$u = \delta_0 e^{-\left(\frac{C}{2M}\right)t} \left(1 + \left(\frac{C}{2M}\right)t\right) \quad \text{ec. IV. 4.16}$$

A continuación se muestra la variación de u en función del tiempo.



Imagen 40 Amortiguamiento Critico

El amortiguamiento para esta condición se denomina “amortiguamiento crítico” y vale:

$$\left(\frac{C_{crit}}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} = 0$$

$$C_{crit} = 2\sqrt{KM} \quad \text{ec. IV. 4.17}$$

Caso 3: Dos raíces complejas

Ahora

$$\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} < 0$$

Por lo tanto

$$\lambda_1 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} i$$

$$\lambda_2 = -\frac{C}{2M} - \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por:

$$u = C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 e^{at} \operatorname{sen}(bt) \quad \text{ec. IV. 4.18}$$

Donde “a” es la parte real y “b” es la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto:

$$a = -\frac{C}{2M} \quad \text{ec. IV. 4.19}$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} \quad \text{ec. IV. 4.20}$$

Derivando la ec. IV. 4.18

$$\dot{u} = e^{at} (-C_1 \operatorname{sen}(bt) + C_2 \cos(bt)) + ae^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt)) \quad \text{ec. IV. 4.21}$$

Para las condiciones iniciales, $t=0$, $u=\delta_0$ y $t=0$ y $\dot{u} = 0$, tenemos:

$$C_1 = \delta_0$$

$$C_2 = -\frac{a}{b} \delta_0$$

Por lo que la solución a la ecuación sería:

$$u = \delta_0 e^{at} \left(\cos(bt) - \frac{a}{b} \operatorname{sen}(bt) \right) \quad \text{ec. IV. 4.22}$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene la velocidad y la aceleración.

$$\dot{u} = - \left(\frac{a^2 + b^2}{b} \right) \delta_0 e^{\lambda t} \operatorname{sen}(bt) \quad \text{ec. IV. 4.23}$$

$$\ddot{u} = - \left(\frac{a^2 + b^2}{b} \right) \delta_0 e^{\lambda t} (a \operatorname{sen}(bt) + b \cos(bt)) \quad \text{ec. IV. 4.24}$$

Sea

$$\zeta = \frac{C}{C_{crit}} = \frac{C}{2\sqrt{MK}} \quad \text{ec. IV. 4.25}$$

Donde ζ se le denomina fracción del amortiguamiento crítico.

$$\zeta\omega = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{C}{2M}$$

Reemplazando en las ecs. IV. 4.19 y 20

$$a = -\zeta\omega \quad \text{ec. IV. 4.26}$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{1 - \left(\frac{C}{2\sqrt{MK}} \right)^2}$$

$$b = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{ec. IV. 4.27}$$

Reemplazando en la ec. IV. 4.22 tenemos

$$u = \delta_0 e^{-\zeta\omega t} \left(\cos(\omega \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right) \quad \text{ec. IV. 4.28}$$

Obtengamos el período en una vibración libre amortiguada. Los máximos y mínimos de u se presentan cuando su derivada con respecto al tiempo vale cero, es decir, cuando la velocidad $\dot{u} = 0$. De la ec.IV.4.23, los valores extremos ocurren para $bt = n\pi$, siendo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Para conocer si se trata de un máximo o un mínimo utilizamos el criterio de la segunda derivada; cuando esta es negativa se trata de un máximo y cuando esta es positiva se trata de un mínimo. En la ec.IV.4.24 vemos que para $bt = n\pi$, siendo $n = 0, 2, 4, \dots$, \ddot{u} es negativa, por lo tanto ocurren los máximos de u . Para $n = 1, 3, 5, \dots$, \ddot{u} es positiva, y ocurren los mínimos. Tomando el criterio ciclo: $bt = 2\pi$, en consecuencia el período T' de una vibración libre amortiguada vale:

$$T' = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{ec. IV. 4.29}$$

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{ec. IV. 4.30}$$

Pero

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

Por lo tanto:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{ec. IV. 4.31}$$

La frecuencia

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{ec. IV. 4.32}$$

Para valores pequeños de amortiguamiento, vemos que el período de una vibración amortiguada es ligeramente mayor que el de una vibración sin amortiguamiento, y que su frecuencia circular es ligeramente menor que la de una vibración sin amortiguamiento.

A continuación, podremos observar la variación de u en función del tiempo.

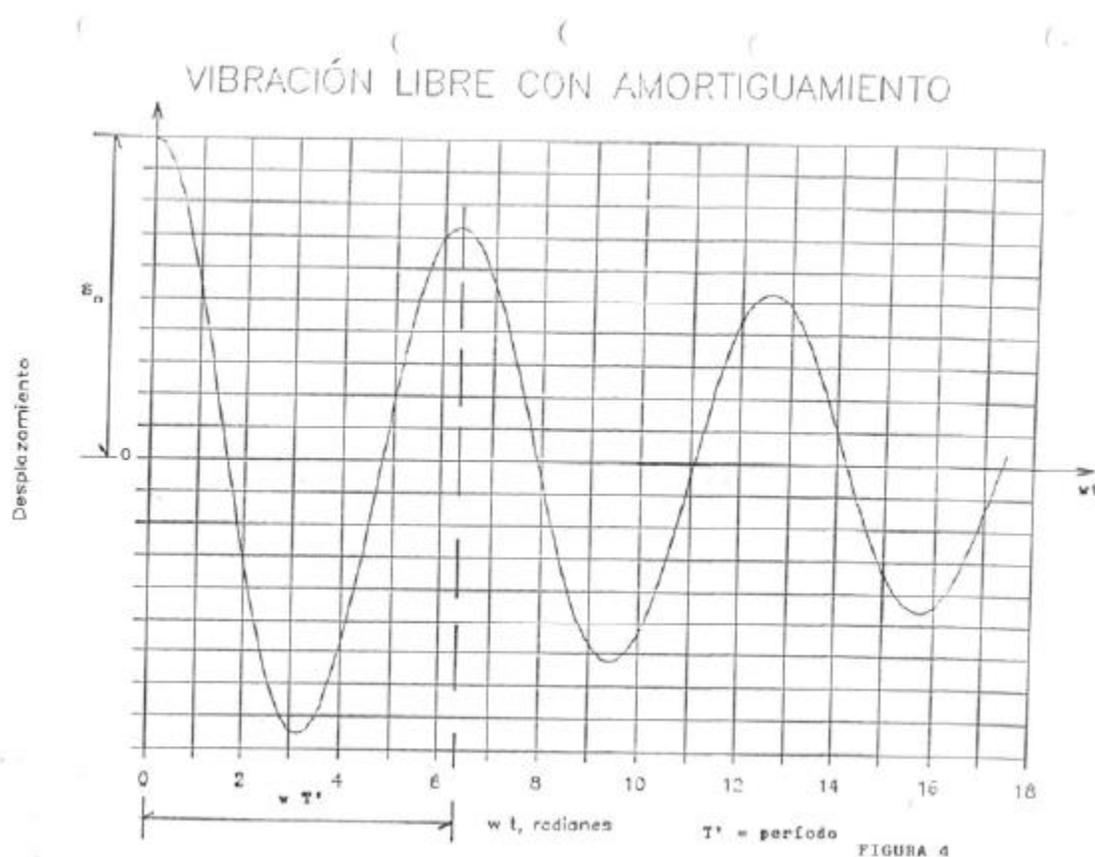


Imagen 41 Vibración libre con amortiguamiento

Obtengamos otras expresiones para el cálculo de u . El desplazamiento está dado por:

$$u = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \text{sen}(bt)) = e^{at}u'$$

$$u' = C_1 \cos(bt) + C_2 \text{sen}(bt)$$

Sea según la imagen

$$u' = u_m \text{sen}(bt + \phi)$$

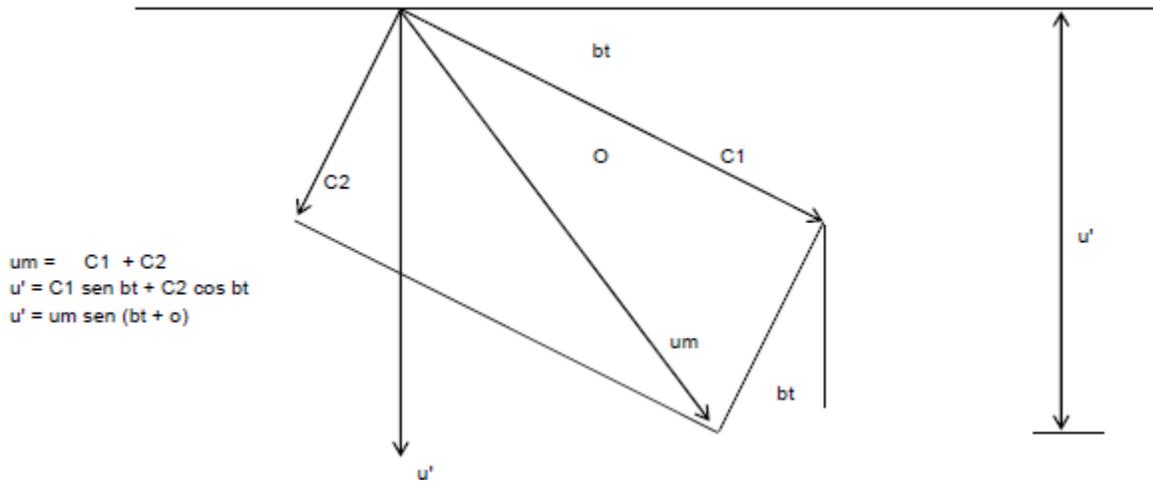


Imagen 42 Desplazamiento en funcion del angulo de fase.

Tenemos

$$u = e^{at} u_m \text{sen}(bt + \phi) \quad \text{ec. IV. 4.33}$$

$$\dot{u} = u_m e^{at} (b \text{cos}(bt + \phi) + a \text{sen}(bt + \phi)) \quad \text{ec. IV. 4.34}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales: $t=0, u=\delta_0$ y $t=0$ y $\dot{u} = 0$, tenemos

$$u_m = \frac{\delta_0}{\text{sen}(\phi)}$$

$$a \text{sen}(\phi) = -b \text{cos}(\phi)$$

$$\tan(\phi) = -\frac{b}{a} \quad \text{ec. IV. 4.35}$$

Por lo anterior

$$u = \left(\frac{\delta_0}{\text{sen}(\phi)} \right) e^{at} \text{sen}(bt + \phi) \quad \text{ec. IV. 4.36}$$

$$\dot{u} = \left(\frac{\delta_0}{\text{sen}(\phi)} \right) e^{at} (b \text{cos}(bt + \phi) + a \text{sen}(bt + \phi)) \quad \text{ec. IV. 4.37}$$

$$\ddot{u} = \left(\frac{\delta_0}{\text{sen}(\phi)} \right) e^{at} ([2ab * \cos(bt + \phi)] + [(a^2 - b^2) * \text{sen}(bt + \phi)]) \quad \text{ec. IV. 4.38}$$

De la siguiente figura

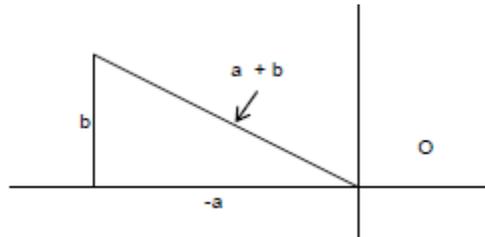


Imagen 43 Determinación del ángulo de fase.

$$\text{sen}(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{ec. IV. 4.39}$$

Sustituyendo en las ecs. IV. 4.26 y 27 en las ec. IV. 4.39

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \omega$$

Y

$$\text{sen}(\phi) = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad \text{ec. IV. 4.40}$$

Vibraciones de un bloque vertical.

Debido a peso propio, la fuerza del resorte vale

$$W = K\delta_{st}$$

Supongamos ahora que damos un desplazamiento vertical δ_0 y dejamos vibrar libremente el sistema (imagen 45b). La ecuación de movimiento es:

$$Mz + Cz + Kz + K\delta_{st} - W = 0$$

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = 0 \quad \text{ec.IV.4.41}$$

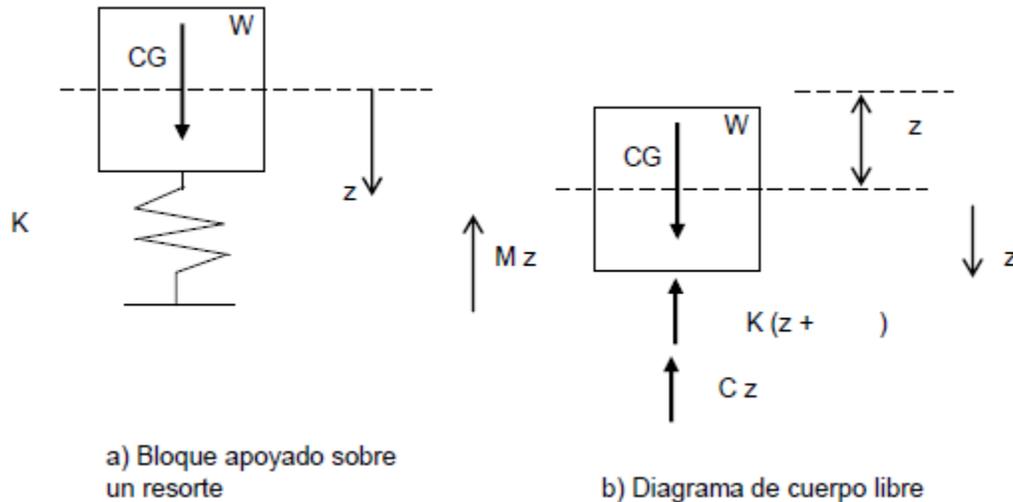


Imagen 44 Vibraciones de un bloque vertical

Vibraciones Estacionarias.

Son denominadas así aquellos movimientos en que la acción sobre el sistema es de tipo armónico.

a) Vibraciones Forzadas

Consideremos un cuerpo como el de la imagen 46, que se somete a una fuerza estacionaria dada por $P=P_0 \text{ sen } \Omega t$. La ecuación de movimiento queda:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \text{ sen}(\Omega t) \quad \text{ec.IV.4.42}$$

La respuesta de la masa después de un lapso inicial cuando se disipa un movimiento por vibración libre amortiguada, está dada por (Newmark y Rosenblueth, 1976).

$$u = \frac{P_0}{K} \frac{\text{sen}(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\Omega\zeta}{\omega}\right)^2}} \quad \text{ec.IV.4.43}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\Omega\zeta}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right) \quad \text{ec. IV. 4.44}$$

Siendo Ω es la velocidad de onda

La magnitud de la fuerza centrífuga es

$$P_m = Ma_n = Mr\Omega^2$$

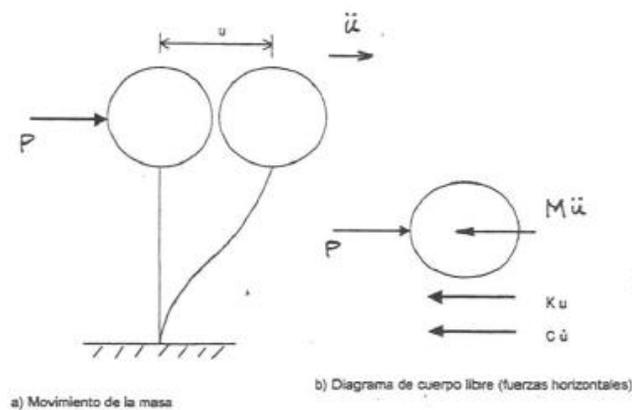


Imagen 45 Sistema de 1GDL

b) Movimientos estacionarios de la base.

Consideremos ahora un sistema de un grado de libertad como se muestra en la imagen 47, en el que la base se somete a un movimiento dado por:

$$u_b = A \sin(\Omega t) \quad \text{ec. IV. 4.45}$$

La velocidad y la aceleración de la base son:

$$\dot{u}_b = A\Omega \cos(\Omega t) \quad \text{ec. IV. 4.46}$$

$$\ddot{u}_b = -A\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad \text{ec. IV. 4.47}$$

La ecuación de movimiento está dada por

$$M\ddot{u}_g + C\dot{u} + Ku = 0 \quad \text{ec. IV. 4.48}$$

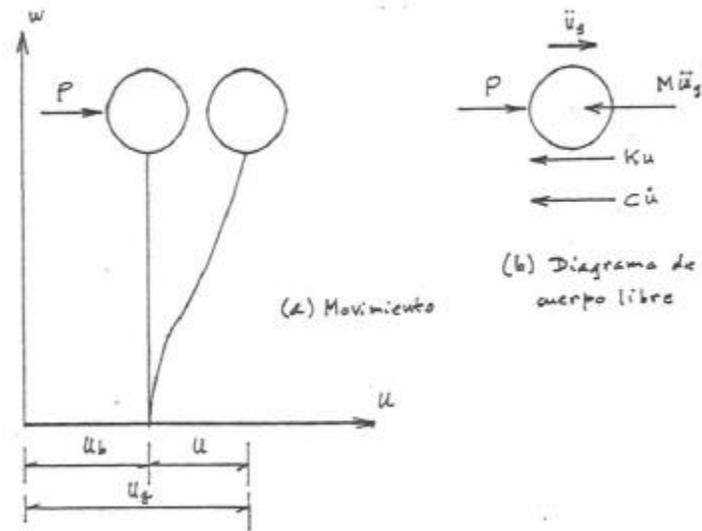


Imagen 46 Sistema de un grado de libertad

Pero de acuerdo a la imagen 46 $u_g = u_b + u$ ec. IV.4.49

$$M(\ddot{u}_b + \ddot{u}) + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_b \text{ ec. IV.4.50}$$

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = MA\Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \text{ ec. IV.4.51}$$

Vemos que la ec. IV.4.51 es similar a la ec. IV.4.42. En consecuencia podemos emplear la misma solución de esta ecuación, con

$$P_0 \text{sen}(\Omega t) = A\Omega^2 M \text{sen}(\Omega t)$$

Con este cambio de variable, la respuesta de la masa está dada por los siguientes movimientos relativos:

$$u = AB_d \text{sen}(\Omega t - \varphi) \text{ ec. IV.4.52}$$

$$\dot{u} = A\Omega B_d \cos(\Omega t - \varphi) \text{ ec. IV.4.53}$$

$$\ddot{u} = -A\Omega^2 B_d \text{sen}(\Omega t - \varphi) \text{ ec. IV.4.54}$$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\Omega}\right)^2}} \text{ ec. IV. 4.55}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\Omega}}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}\right) \text{ ec. IV. 4.56}$$

$$\omega = \text{frecuencia circular del sistema} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Los movimientos absolutos (movimientos generales) están dados por:

Desplazamiento $u_g = u_b + u$ ec. IV. 4.57

Velocidad $\dot{u}_g = \dot{u}_b + \dot{u}$ ec. IV. 4.58

Aceleración $\ddot{u}_g = \ddot{u}_b + \ddot{u}$ ec. IV. 4.59

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente del valor absoluto de la máxima aceleración general entre el valor absoluto de la máxima aceleración de la base.

$$f_a = \frac{\max|\ddot{u}_g|}{\max|\ddot{u}_b|} \text{ ec. IV. 4.60}$$

$$f_a = \max|\text{sen}(\Omega t) + B_d \text{sen}(\Omega t - \varphi)| \text{ ec. IV. 4.61}$$

En la siguiente figura se puede ver la variación de f_a con el cociente T_1/T , para amortiguamientos de 2 y 10% del amortiguamiento crítico, siendo $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ (masa que vibra) y $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ (base).

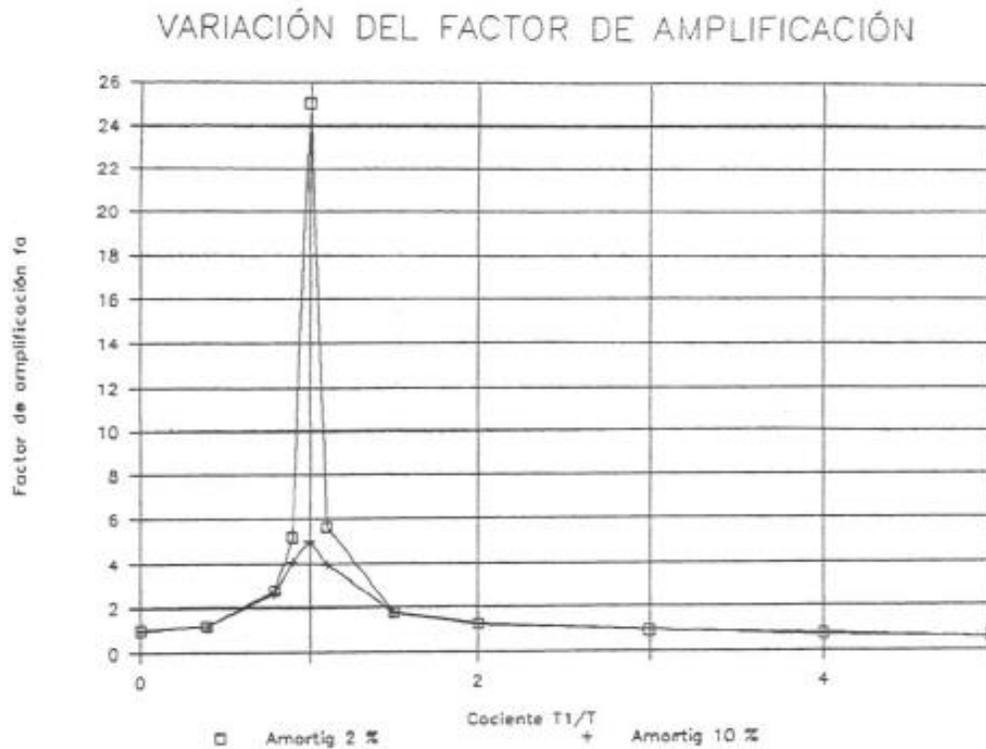


Imagen 47 Variación del Factor de Amplificación

Se observa en la imagen que la amplificación de la aceleración depende del cociente T_1/T y del amortiguamiento. La máxima amplificación ocurre cuando $T_1/T=1$; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor f_a . Para $T_1/T \rightarrow \infty$ la amplificación de la aceleración es nula.

Vibración Debida a Rotación.

Consideremos una masa como la que se muestra en la imagen 49, vibrando libremente. La fuerza de inercia vale $F=Mu$. De la imagen $u = \theta H, \ddot{u} = \ddot{\theta} H$. Por lo tanto $F = M\ddot{\theta} H$.

El momento de volteo al nivel de cimentación debido a la inercia de la masa es (Zeevaert, 1980):

$$O_T = FH = M\ddot{\theta} H^2$$

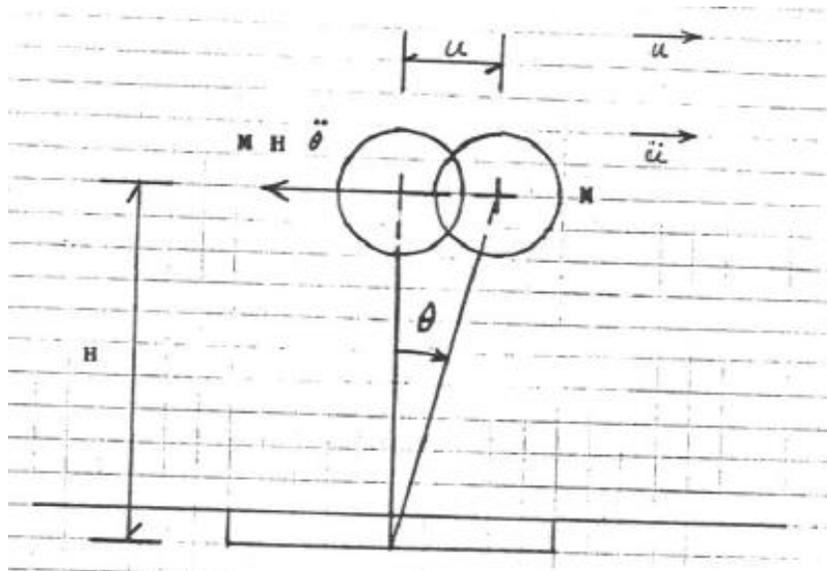


Imagen 48 Rotación de una masa de un grado de libertad

Supongamos ahora que la cimentación está sometida a un momento estacionario dado por $O_T = O_{T0} \text{sen}(\Omega t)$ en el diagrama de cuerpo libre de la cimentación (imagen 50) se muestran los momentos que actúan sobre ella. Por lo que el equilibrio de momentos conduce a

$$MH^2\ddot{\theta} + C_r\dot{\theta} + K_r\theta = O_{T0}\text{sen}(\Omega t) \text{ ec.IV.4.62}$$

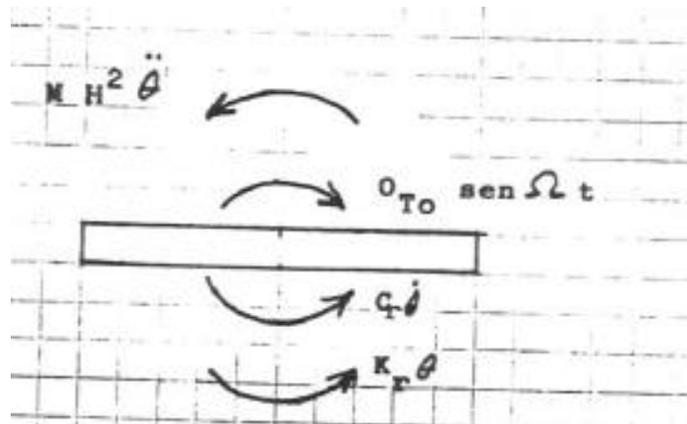


Imagen 49 DCL de la cimentación

Para un sistema de un grado de libertad sujeto a una fuerza vertical estacionaria, habíamos obtenido la siguiente ecuación de equilibrio dinámico (ec.IV.4.42)

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \text{sen}(\Omega t) \quad \text{ec. IV. 4.42}$$

Las ecs. IV.4.62 y 42 son similares, por lo que para hallar la solución de la ec. IV.4.62 podemos emplear la de la ec. IV.4.42, cambiando M por MH^2 y P_0 por O_{T0} . Por lo tanto, la solución de la ec. IV.4.62 es:

$$\theta = \frac{O_{T0}}{K_r} \frac{\text{sen}(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\Omega\zeta}{\omega}\right)^2}} \quad \text{ec. IV. 4.63}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\Omega\omega\zeta}{\omega}}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \quad \text{ec. IV. 4.64}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K_r}{MH^2}} = \frac{\sqrt{\frac{K_r}{M}}}{H} \quad \text{ec. IV. 4.65}$$

$$\zeta = \frac{C_r}{C_{crit}} = \frac{C_r}{2\sqrt{K_r MH^2}} = \frac{C_r}{2H\sqrt{K_r M}} \quad \text{ec. IV. 4.66}$$

Por lo anterior el periodo natural de vibración por la rotación de una masa está dado por:

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{MH^2}{K_r}} = 2H\pi \sqrt{\frac{M}{K_r}} \quad \text{ec. IV. 4.67}$$

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{WH^2}{gK_r}} \quad \text{ec. IV. 4.68}$$

Siendo W el peso de la masa y g la aceleración de la gravedad.

Espectro de Respuesta.

Cuando la base de un oscilador de un grado de libertad sufre un terremoto caracterizado por un acelerograma $a(t)$, por una historia de aceleraciones del terreno, el movimiento del sistema viene definido por la ecuación:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -ma(t) \quad \text{ec. IV. 4.69}$$

O, dividiendo por m

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z = -a(t) \quad \text{ec. IV. 4.70}$$

Esta ecuación puede integrarse fácilmente utilizando diversos procedimientos que no se van a detallar aquí. En particular, para cualquier sistema caracterizado por su amortiguamiento ξ y por su frecuencia natural ω_n es posible determinar el valor máximo de su respuesta a un acelerograma dado. Si estos valores máximos de respuesta se calculan para todos los posibles sistemas de un grado de libertad, y para todos los posibles valores de ξ y ω_n de interés y se grafican, se habrá obtenido el denominado espectro sísmico de respuesta del acelerograma $a(t)$.

Esta respuesta puede expresarse en desplazamientos, velocidades o aceleraciones, definidos en cada caso un espectro de desplazamiento (S_d), velocidad (S_v), o aceleración (S_a).

En general, y dado que se trata de obtener la solución a la ec. IV. 4.70, el espectro se obtiene para un amortiguamiento prefijado ξ y una historia de aceleraciones $a(t)$ conocida y se grafica en función de la frecuencia ω_n (o del periodo T)

$$S_d(\omega_n, \xi) = |z(t)|_{max} \quad \text{ec. IV. 4.71}$$

$$S_v(\omega_n, \xi) = |\dot{z}(t)|_{max} \quad \text{ec. IV. 4.72}$$

$$S_a(\omega_n, \xi) = |\ddot{z}(t) + a(t)|_{max} \quad \text{ec. IV. 4.73}$$

Donde S_d y S_v son valores relativos y S_a se refiere al valor total de la aceleración.

Estos espectros verifican las siguientes relaciones, lo que permite representar los tres espectros en una misma grafica empleado una escala trilogaritmica:

$$S_v = \omega_n S_d \quad \text{ec. IV. 4.74}$$

$$S_a = \omega_n^2 S_d \quad \text{ec. IV. 4.75}$$

Esto es así cuando lo que se está manejando son pseudoespectros de respuesta (véase, e.g., Barbat y Canet, 1994). Los pseudoespectros se obtienen a partir de los espectros de respuesta introduciendo algunas simplificaciones habituales en Ingeniería Estructural ($\xi < 0.2$, ...), que permiten una mayor facilidad de tratamiento sin pérdida de precisión para el rango de valores de T y ξ de interés.

- Para estructuras de periodos muy bajos ($T \rightarrow 0$), muy rígidas, $S_a \rightarrow |\ddot{u}(t)|_{max}$ siendo $|\ddot{u}(t)|_{max}$ la máxima aceleración del terreno (del acelerograma $a(t)$)
- Para estructuras de periodos muy largos ($T \rightarrow \infty$), muy flexibles, $S_d \rightarrow |u(t)|_{max}$ siendo $|u(t)|_{max}$ el desplazamiento máximo del terreno.

Por lo tanto, un espectro sísmico de respuesta resume la respuesta máxima de cualquier sistema de un grado de libertad a un acelerograma determinado $a(t)$. Puesto que para una determinada región geográfica es de esperar que los terremotos tengan una serie de características comunes, puede obtenerse un espectro de respuesta tipo (espectro suavizado de diseño) para esa región utilizando para ello los procedimientos desarrollados al efecto en Sismología.

La importancia de los espectros radica en que generalmente el proyectista solo está interesado en los valores máximos de la respuesta a la hora de diseñar el sistema para que resista la acción de un terremoto.

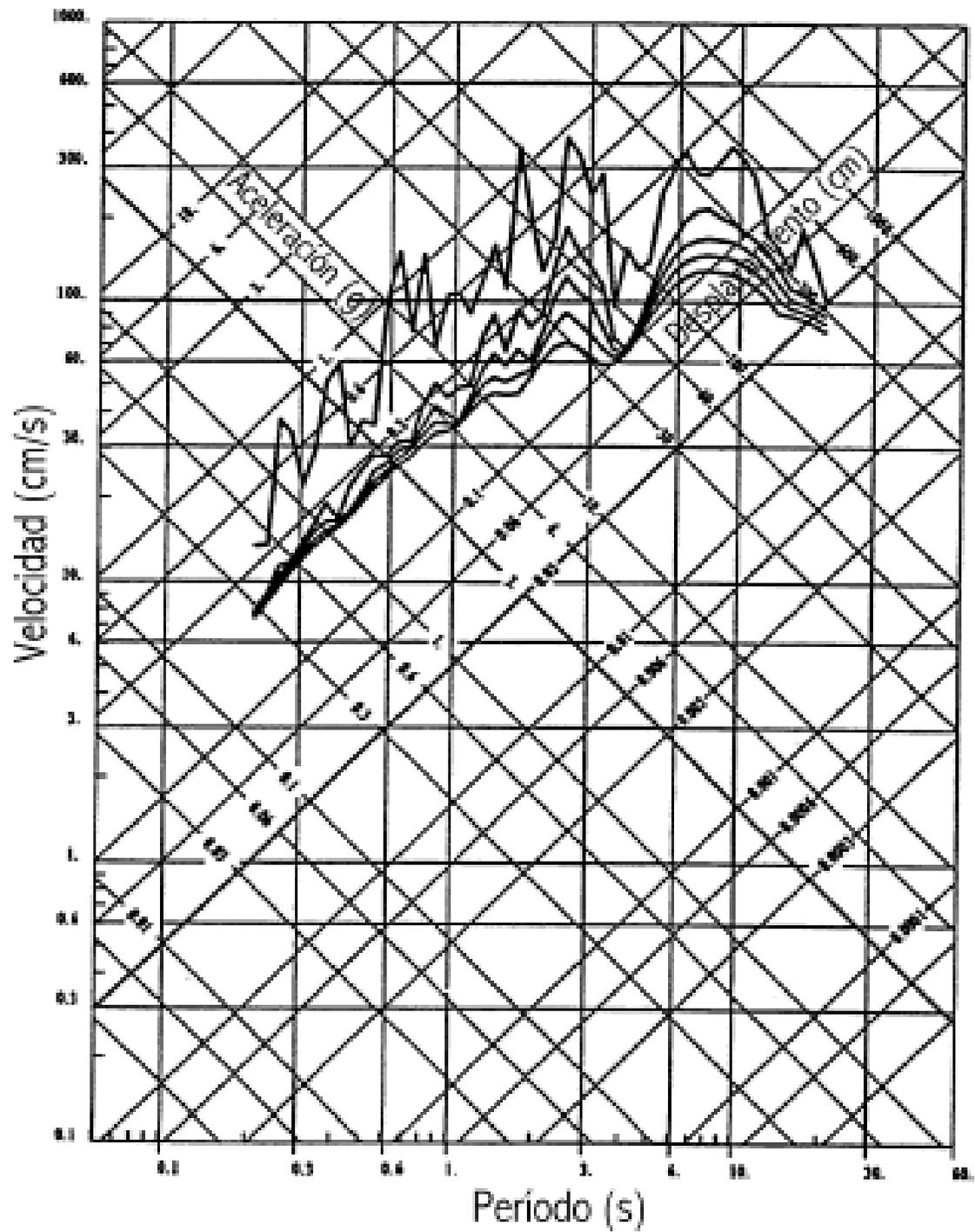


Imagen 50 Espectro sísmico de respuesta del terremoto de San Fernando (EE.UU., febrero de 1971) Representación trilogaritmica ($\xi = 0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$)

IV.5 Importancia del análisis

Consideremos el sistema de la siguiente figura, donde están representados la estructura y el terreno de cimentación:

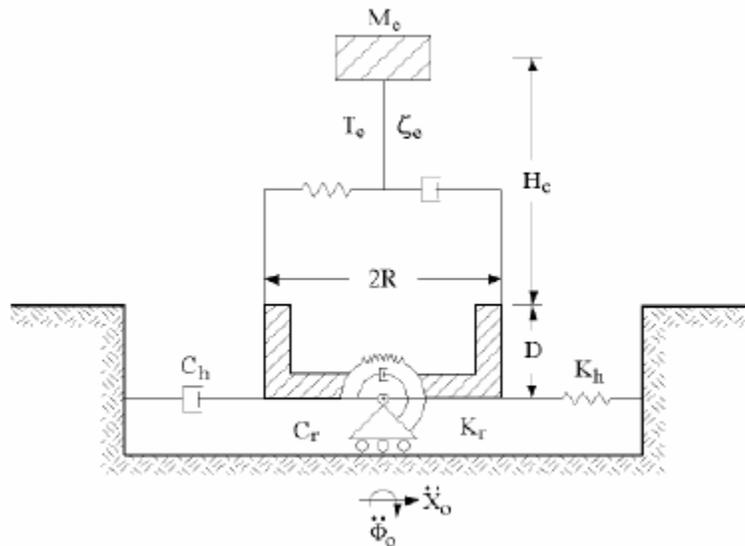


Imagen 51 Sistema Estructura-Suelo (Mena y Perez Rocha, 2008)

El sistema equivalente tiene tres grados de libertad que son:

$$X_e = \text{Deformación de la estructura}$$

$$X_c = \text{desplazamiento de la base de la cimentación relativo al movimiento } X_o \\ \text{de campo libre (traslación horizontal de la base de la cimentación)}$$

$$\phi_c = \text{Rotación de la cimentación}$$

El desplazamiento total de la estructura es:

$$X_t = X_o + X_c + (H_e + D)\phi_c + X_e$$

Podemos observar en la siguiente figura la representación de los grados de libertad.

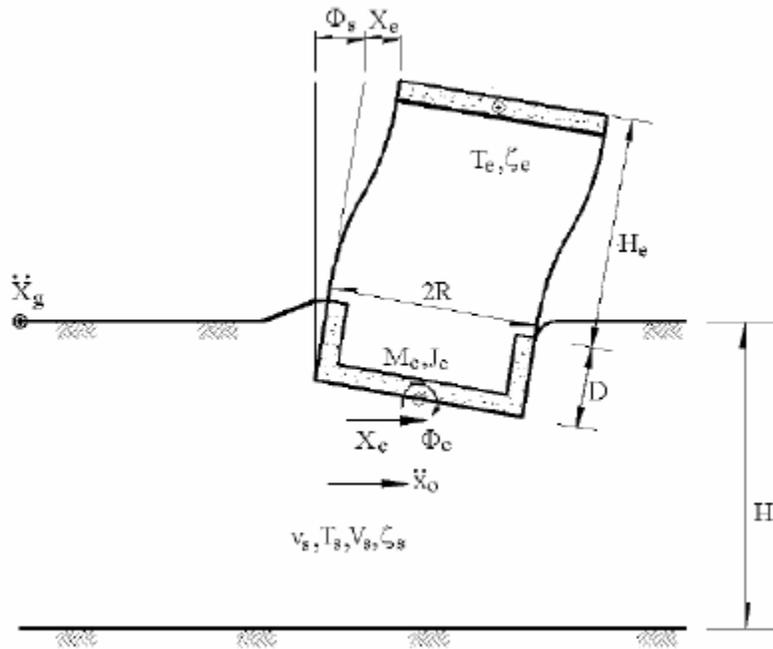


Imagen 52 Grados de Libertad del Sistema Equivalente (Mena y Rocha, 2008)

El equilibrio dinámico de la estructura es:

$$M_e X_e + M_e X_c + M_e(H_e + D)\phi_c + C_e X_e + K_e X_e = x_0(t)M_e \quad \text{ec. IV. 5.1}$$

Mientras que el equilibrio dinámico en la estructura de cimentación

$$M_e X_e + (M_e + M_c) X_c + \left(M_e(H_e + D) + \frac{M_c E}{2} \right) \phi_c + C_h X_c + C_{hr} \phi_c + K_h X_c + K_{hr} \phi_c = x_0(t)(M_e + M_c) \quad \text{ec. IV. 5.2}$$

De acuerdo a la siguiente figura: tenemos:

$$\tan(\phi_c) = \frac{X_r}{H_e + D}$$

Donde X_r es el desplazamiento de la masa M_e debido al giro ϕ_c

$$\phi_c \cong \frac{X_r}{H_e + D}$$

$$X_r \cong (H_e + D)\phi_c$$

$$\dot{X}_r \cong (H_e + D)\dot{\phi}_c$$

$$\ddot{X}_r \cong (H_e + D)\ddot{\phi}_c$$

La rotación de la base de la cimentación conduce a:

$$M_e(H_e + D)\ddot{X}_e + \left(M_e(H_e + D) + \frac{M_c D}{2}\right)\ddot{X}_c + M_e(H_e + D)^2\ddot{\phi}_c + C_h\dot{X}_c + C_{hr}\dot{\phi}_c + K_h\phi_c + K_{hr}X_c = x_0(t) \left(M_e(H_e + D) + \frac{M_c E}{2}\right) \quad \text{ec. IV.5.3}$$

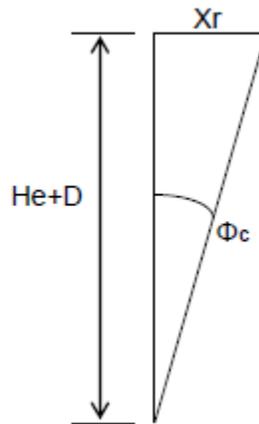


Imagen 53 Rotación de la base de la cimentación

Tomando momentos con respecto a un eje que pasa por el centro de la base de la cimentación. En las expresiones anteriores:

M_e Es la masa de la estructura

K_e Es la rigidez de la estructura

C_e Es el amortiguamiento de la estructura

H_e Es la altura de la estructura

M_c Es la masa de la cimentación

I_c Es el momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto al eje de rotación de su base

D Es la profundidad de desplante de la cimentación

E Es la altura del muro lateral de cimentación

K_h y C_h Son la rigidez y el amortiguamiento del suelo, respectivamente, en el modo de traslación de la cimentación e igualmente

K_r y C_r Son la rigidez y el amortiguamiento del suelo, en el modo de rotación de la cimentación y

$K_{hr}=K_{rh}$ y $C_{hr}=C_{rh}$ Representan la rigidez y el amortiguamiento del suelo acoplados, respectivamente.

Consideremos en campo libre un movimiento armónico con frecuencia ω (Mena y Perez Rocha, 2008). Los movimientos del sistema de las imágenes anteriores quedan:

$$x_0(t) \cong \ddot{X}_0 e^{i\omega t}$$

$$x_e(t) = X_e e^{i\omega t}, \quad \dot{x}_e(t) = i\omega X_e e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_e(t) = -\omega^2 X_e e^{i\omega t},$$

$$x_c(t) = X_c e^{i\omega t}, \quad \dot{x}_c(t) = i\omega X_c e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_c(t) = -\omega^2 X_c e^{i\omega t},$$

$$\phi_c(t) = \Phi_c e^{i\omega t}, \quad \dot{\phi}_c(t) = i\omega \Phi_c e^{i\omega t}, \quad \ddot{\phi}_c(t) = -\omega^2 \Phi_c e^{i\omega t}$$

Despreciando la masa de la cimentación y el momento de inercia de dicha masa, así como el acoplamiento entre la traslación y la rotación de la cimentación, la ecuación queda:

$$-\omega^2 M_e X_e - \omega^2 M_e X_c - \omega^2 M_e (H_e + D) \Phi_c + i\omega C_e X_e + K_e X_e = -\ddot{X}_0 M_e$$

$$(K_e - \omega^2 M_e) X_e - \omega^2 M_e X_c - \omega^2 M_e (H_e + D) \Phi_c + i\omega C_e X_e = -\ddot{X}_0 M_e$$

Dividimos entre $\omega^2 M_e$

$$\left(\frac{K_e}{\omega^2 M_e} - 1 \right) X_e - X_c - (H_e + D) \Phi_c + \frac{i\omega C_e X_e}{\omega^2 M_e} = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2}$$

$$\left(\frac{K_e}{\omega^2 M_e} + \frac{iC_e}{\omega M_e} - 1 \right) X_e - X_c - (H_e + D) \Phi_c = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K_e}{M_e}}$$

$$\omega_e^2 = \frac{K_e}{M_e}$$

$$\frac{K_e}{\omega^2 M_e} + \frac{iC_e}{\omega M_e} = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} + i \frac{2\sqrt{\frac{K_e}{M_e}} C_e}{\omega M_e 2\sqrt{M_e K_e}} = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} + 2i \frac{\omega_e}{\omega} \zeta_e = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} + 2i \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega_e} \zeta_e$$

$$\frac{K_e}{\omega^2 M_e} + \frac{iC_e}{\omega M_e} = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \left(1 + 2i \frac{\omega}{\omega_e} \zeta_e\right) = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} (1 + 2i \zeta'_e)$$

$$\zeta'_e = \frac{\omega}{\omega_e} \zeta_e$$

$$\left(\frac{\omega_e^2}{\omega^2} (1 + 2i \zeta'_e) - 1\right) X_e - X_c - (H_e + D)\Phi_c = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2} \quad \text{ec. IV.5.4}$$

Procedimiento en forma similar, la ecuación queda:

$$-\omega^2 M_e X_e - \omega^2 (M_e + M_c) X_c - \omega^2 (M_e (H_e + D)) \Phi_c + i\omega C_h X_c + K_h X_c = -\ddot{X}_0 M_e$$

Dividimos entre $\omega^2 M_e$ y se obtiene:

$$\left(\frac{\omega_h^2}{\omega^2} (1 + 2i \zeta'_h) - 1\right) X_c - X_e - (H_e + D)\Phi_c = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2} \quad \text{ec. IV.5.5}$$

Procediendo de forma similar en la ecuación:

$$-\omega^2 M_e (H_e + D) X_e - \omega^2 (M_e (H_e + D)) X_c - \omega^2 (M_e (H_e + D)) \Phi_c + i\omega C_r \Phi_c + K_r \Phi_c = -\ddot{X}_0 M_e (H_e + D)$$

Dividimos entre $\omega^2 M_e (H_e + D)$ y se obtiene:

$$\left(\frac{\omega_r^2}{\omega^2} (1 + 2i \zeta'_r) - 1\right) (H_e + D)\Phi_c - X_c - X_e = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2} \quad \text{ec. IV.5.6}$$

Las ec. IV.4,5 y 6 se pueden expresar de forma matricial (ec. IV.5.7):

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_e^2}{\omega^2}(1 + 2i\zeta'_e) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{\omega_h^2}{\omega^2}(1 + 2i\zeta'_h) - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{\omega_r^2}{\omega^2}(1 + 2i\zeta'_r) - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_e \\ X_c \\ (H_e + D)\Phi_c \end{Bmatrix} = -\frac{\ddot{X}_0}{\omega^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En la ecuación *ec. IV. 5.7*

$$\omega_e^2 = \frac{K_e}{M_e}$$

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{M_h}$$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_e(H_e + D)}$$

$$\zeta_e = \frac{\omega_e C_e}{2K_e}$$

$$\zeta_h = \frac{\omega C_h}{2K_h}$$

$$\zeta_e = \frac{\omega C_r}{2K_r}$$

Del sistema de ecuaciones (*ec. IV. 5.7*) despejamos X_e

$$\left[1 + 2i\zeta'_e - \frac{\omega^2}{\omega_e^2} - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} \frac{1 + 2i\zeta'_e}{1 + 2i\zeta'_h} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \frac{1 + 2i\zeta'_e}{1 + 2i\zeta'_r} \right] \omega_e^2 X_e = -\ddot{X}_0 \quad \text{ec. IV. 5.8}$$

Consideremos un oscilador de remplazo equivalente al sistema suelo, estructural, en el cual

$$\tilde{\omega}_e^2 \tilde{X}_e = -\ddot{X}_o \left[1 - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_e^2} + 2i\tilde{\zeta}_e \frac{\omega}{\tilde{\omega}_e} \right]^{-1} \quad \text{ec. IV. 5.9}$$

Despreciando los términos de amortiguamiento de segundo orden en la ecuación *ec. IV.5.8*, la pseudoaceleración del sistema suelo-estructura se reduce a

$$\tilde{\omega}_e^2 \tilde{X}_e = -\ddot{X}_o \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2} - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + 2i \left(\zeta'_e + (\zeta_h - \zeta'_e) \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + (\zeta_r - \zeta'_e) \right) \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \right]^{-1} \quad ec. IV.5.10$$

Para las condiciones de resonancia, $\omega = \tilde{\omega}_e$, la igualdad de las partes reales de las ecuaciones IV.5.9 y ec.IV.5.10 conducen a la siguiente frecuencia del sistema suelo-estructura

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_e^2} = \frac{1}{\omega_e^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \quad ec. IV.5.11$$

La igualdad de las partes imaginarias de las ecuaciones IV.5.9 y IV.5.10, para las condiciones de resonancia, permite obtener el amortiguamiento del sistema suelo-estructura:

$$\tilde{\zeta}_e = \zeta_e \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_e} \right)^2 + \zeta_h \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_h} \right)^2 + \zeta_r \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_r} \right)^2 \quad ec. IV.5.12$$

Para fines prácticos, la ecuación se ajusta, dando la siguiente expresión:

$$\tilde{\zeta}_e = \zeta_e \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_e} \right)^2 + \frac{\zeta_h}{1 + 2\zeta_h^2} \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_h} \right)^2 + \frac{\zeta_r}{1 + 2\zeta_r^2} \left(\frac{\tilde{\omega}_e}{\omega_r} \right)^2 \quad ec. IV.5.13$$

Respuesta de edificios al movimiento sísmico.

El movimiento tectónico como se sabe libera energía potencial que posteriormente se transmite a través de ondas sísmicas que atraviesan los estratos que conforman el suelo, dispersándose en todos los sentidos hasta llegar a la superficie, estas ondas activan las propiedades dinámicas del suelo, y en cierta forma el suelo responde tratando de disipar la energía en otros tipos de energía; pero ¿Qué pasa cuando la onda

atraviesa el suelo y llega a la base de la cimentación de cualquier estructura? En este punto se da un fenómeno muy difícil de comprender y sobre todo de modelar, llamado Interacción Suelo-Estructura, en función a esto se han desarrollado diversas teorías que tratan de explicar este comportamiento cuya finalidad primordial es la obtención de parámetros dinámicos representativos de este fenómeno. Cuando la onda impacta la estructura, es conveniente que esta tenga un comportamiento que garantice la seguridad en todos los aspectos; a causa de esto, se han desarrollado teorías que tratan de representar la respuesta del sistema suelo-estructura con la cual se pueda tener un diseño óptimo y que tome en consideración el comportamiento en conjunto. La principal ley que rige este comportamiento se puede expresar de la siguiente manera: “Las cargas inducidas al suelo deberán ser directamente proporcionales a las deformaciones, relacionadas por una constante de proporcionalidad denominada módulo de rigidez”, (K). La obtención del módulo de rigidez es uno de los objetivos de la interacción; a causa de esto, las teorías que analizan este fenómeno están enfocada a la obtención del módulo de rigidez desde el punto de vista estático o dinámico.

Las propiedades dinámicas de la estructura son una parte importante del estudio, ya que las respuestas de un edificio dependen tanto de las propiedades mecánicas y dinámicas del mismo así como de las características del movimiento del terreno al que se ve sometido. Debemos de tener claro que en la Vida Útil de cualquier estructura habrá momentos en los que estará sometido a cargas estáticas (Cargas Permanentes) y dinámicas (Cargas Accidentales), las primeras son función de las características de diseño y de uso de la edificación, mientras que las segundas son función del tiempo y de la zona donde este desplazada dicha estructura; a continuación se presentaran algunos conceptos básicos de Dinámica Estructural que permiten entender los principales factores que afectan la respuesta sísmica de los edificios:

Inercia: Este concepto se refiere a la propiedad de la materia de resistirse al movimiento o cambio de dirección del mismo. Las fuerzas necesarias para simular un sismo en una edificación, es un porcentaje del peso total de la estructura, esta propiedad es

importante, ya que en un sismo el movimiento oscilatorio depende en gran medida de la inercia de la estructura.

Periodo dominante de la estructura (T_e): Cuando un edificio se ve sometido a fuerzas dinámicas este oscilará con un periodo dominante a una determinada frecuencia que dependerá de la magnitud de las fuerzas dinámicas y de los grados de libertad de la estructura, el periodo dominante se puede definir como el tiempo en el cual un sistema masa-resorte completa un ciclo completo de tiempo. Tomando en cuenta que para edificios altos habrá tantos grados de libertad como número de entrepisos, se tiene que en estas estructuras podrían influir los modos superiores (segundo o tercero). Para el cálculo de los modos de vibrar se pueden utilizar los siguientes métodos: a) Para calcular el primer modo o modo fundamental, se puede utilizar los métodos combinados de: Stodola-Vianello-Newmark. El reglamento de construcción del Distrito Federal en la sección de diseño por sismo acepta y propone la llamada fórmula de Schwartz, para el cálculo del primer modo de vibración; b) Para calcular el segundo modo y los restantes, se puede utilizar el método de Holzer, métodos matriciales o programas de cómputo como SAP200, ETABS, ETC.

Desde el punto de vista estructural, el ingeniero civil se vale de un modelo matemático cuyas propiedades mecánicas y dinámicas se procuran sean las mismas que posee la estructura. Uno de los modelos más simples y usado para estimar la respuesta dinámica de la estructura es la de suponer que la estructura está conformada por un sistema de un grado de libertad, este modelo se caracteriza por ser un sistema dinámico en el que la masa está concentrada en un solo punto, en el que se aplican las fuerzas dinámicas laterales producto de la inercia del material, este provoca un desplazamiento lateral y luego se le quita de forma repentina, esta oscilará de un lado a otro de su posición de equilibrio en un movimiento que se le conoce como vibración. Esta oscilación continuará siempre con una amplitud, existe una gran cantidad de métodos que se han desarrollado para la explicación de esta amplitud, en la que se describe que la estructura puede ser modelada como un sistema de un grado de libertad amortiguado, sin amortiguamiento, , con amortiguamiento viscoso y fuerza externa.

Amortiguamiento crítico de la estructura: De acuerdo a la teoría clásica de dinámica estructural, “se puede definir como amortiguamiento a la capacidad de un material de disipar energía cinética en otro tipo de energía, actuando como una fuerza directamente proporcional a la velocidad relativa de la misma y con sentido contrario a ella, por otra parte el amortiguamiento crítico se refiere al amortiguamiento que suspende la vibración, o sea, a menor cantidad de amortiguamiento para el cual no ocurre vibración en el movimiento libre” (Colindres, 1983). El porcentaje de amortiguamiento del valor crítico considerando comportamiento viscoso en la estructura depende de muchas variables y de cada tipo de material, lo cual requiere de un estudio especial. En este estudio solo se mencionara que el valor que alcanza este parámetro esta entre 2 y 10% del valor crítico para la mayoría de los tipos de estructuras, para diseño se recomienda considerar un valor mínimo del 5%. En estructuras con dispositivos de amortiguamiento se pueden alcanzar valores mayores para este importante parámetro que puede atenuar los efectos nocivos de las vibraciones, siempre y cuando el diseño sea adecuado para cada caso. Es importante mencionar que los valores bajos de amortiguamientos se traducen en valores altos del periodo fundamental y viceversa. El valor del periodo fundamental generado por distintos valores de amortiguamiento varia del 0.02 al 0.5 %, aproximadamente.

Ductilidad de los edificios: Se dice que un sistema estructural es dúctil si es capaz de soportar deformaciones importantes a cargas laterales prácticamente constantes, sin alcanzar niveles excesivos de daños o de disminución de la resistencia ante aplicaciones subsecuentes de cargas, sin embargo, los fenómenos naturales son impredecibles y en el caso de un sismo, las cargas laterales pueden exceder los valores de cargas laterales estimadas en el análisis estructural, rebasando la ductilidad máxima y el ultimo mecanismo de disipación de energía que pueden soportar los miembros estructurales, conllevando la estructura a daños importantes o a su destrucción total, por tanto es necesario proporcionar una ductilidad a la estructura acorde al uso ya los eventos críticos esperados de acuerdo a la ubicación geográfica que tenga.

Rigidez: Es la capacidad de resistencia de un cuerpo a cambiar por la acción de fuerzas exteriores sobre el mismo. En las estructuras el concepto de rigidez es relativo a la capacidad de deformación de un miembro estructural ante la acción de fuerzas externas. Analizando nuevamente el sistema masa-resorte, la rigidez corresponde al elemento elástico, que reduce las desviaciones laterales a diferencia del amortiguador, que disipa la energía para que el sistema vuelva al reposo. La importancia del concepto, radica en la determinación de las deflexiones que presenta un miembro ante cargas externas y es por eso que la mayoría de métodos de análisis estructural utilizan matrices de rigideces para cuantificar fuerzas internas de una estructura.

Capítulo V. Aplicación.

La Ciudad de México es considerada una zona de peligro sísmico intermedio, de acuerdo con la Regionalización Sísmica de la República Mexicana.

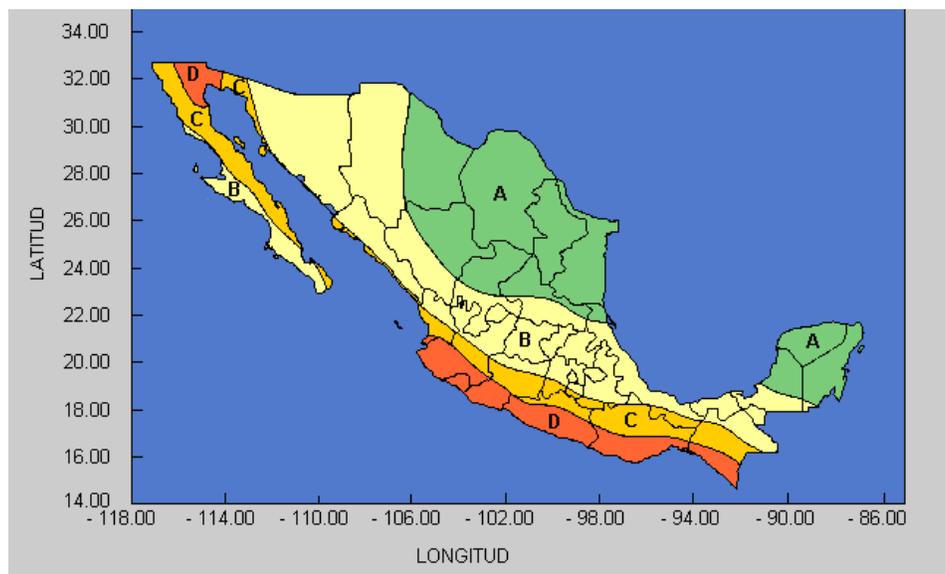


Imagen 54 Regionalización Sísmica de la República Mexicana.

En donde se observa que se encuentra en la Zona B. A continuación se mencionara brevemente algunas características de las 4 zonas:

- **Zona A, de baja sismicidad.** En esta zona no se han registrados ningún sismo de magnitud considerable en los últimos 80 años, ni se esperan aceleraciones del suelo mayores al 10 % de la aceleración de la gravedad.
- **Zona B, de media intensidad.** Esta zona es de moderada intensidad, pero las aceleraciones no alcanzan a rebasar el 70% de la aceleración de la gravedad.
- **Zona C, de alta intensidad.** En esta zona hay más actividad sísmica que en la zona B, aunque las aceleraciones del suelo tampoco sobrepasan el 70% de la aceleración de la gravedad.
- **Zona D, de muy alta intensidad.** Aquí es donde se han originado los grandes sísmicos históricos, y la ocurrencia de sismos es muy frecuente, además de que las aceleraciones del suelo sobrepasan el 70% de la aceleración de la gravedad.

Como se mencionó anteriormente, la zona B es de intensidad media, esto quiere decir que no se han registrado sismos de alta intensidad, pero los habitantes como los

ingenieros civiles en la práctica profesional conocen que el verdadero peligro en la Ciudad de México se encuentra en el material blando que conforma la estratigrafía del subsuelo, por ello, se pueden esperar altas aceleraciones, lo que implica, grandes sollicitaciones en la cimentación de estructuras desplantadas sobre todo en la Zona de Transición y de Lago, generando fuerzas de inercia que provocan grandes esfuerzos en los elementos que conforman la estructura y que pueden llevarlos a la falla.

Los registros de temblores provienen desde la época prehispánica, como el ocurrido en 1475, durante el reinado del Tlatoani Mexica Axayácatl, en el que varias construcciones de la gran Tenochtitlán quedaron en ruinas. Se abrió la tierra en algunas partes, se hundieron las cumbres de algunos cerros (Linda M., 2015). Al igual que en el pasado, los temblores siguen afectando a las obras civiles, por lo que en la Ciudad de México se realizó el “Reglamento de Construcción del Distrito Federal y sus Normas Técnicas Complementarias” ya que al tener un gran impulso en lo referente a la construcción de edificaciones de gran altura, desarrollo de urbanizaciones y obra pública en general se necesita cumplir con los estados límites de falla y servicio que se conocen actualmente.

V.1 Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo.

“Los requisitos de estas normas tienen como propósito obtener una seguridad adecuada tal que, bajo el sismo máximo probable, no habrá fallas estructurales mayores ni pérdidas de vidas, aunque pueden presentarse daños que lleguen a afectar el funcionamiento del edificio y requerir reparaciones importantes.

El Director Responsable de Obra, de acuerdo con el propietario puede decir que se diseñe el edificio para que satisfaga los requisitos más conservadores que los aquí establecidos, con el fin de reducir la posibilidad de pérdidas económicas en la construcción a cambio de una inversión inicial mayor.”

Las estructuras se analizan bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales no simultáneos del movimiento del terreno. Las deformaciones y fuerzas internas que

resulten se combinaran entre si como se especifican en estas Normas (combinándose con los efectos de fuerzas gravitacionales y de las otras acciones que correspondan, según los criterios que establecen las Normas Técnicas Complementarias sobre Criterio y Acciones para el Diseño Estructural de Edificaciones).

De acuerdo a las características de la estructura se podrá analizar por sismo mediante:

- Método Simplificado.
- Método estático.
- Método Dinámico.
- Apéndice A de las NTCDS (para estructuras ubicadas en las Zonas II y III).

En el análisis se tendrá en cuenta la contribución a la rigidez del todo el elemento estructural, o no, que sea significativa. Se calculan las fuerzas sísmicas, deformaciones y desplazamientos laterales de la estructura (incluyendo los giros por torsión y teniendo en cuenta los efectos de flexión de sus elementos y, y cuando sean significativos, los de fuerza cortante, fuerza axial y torsión de los elementos).

Se verifica que la estructura y su cimentación no rebasen ningún estado de límite de falla o servicio a que se refiere el reglamento.

El Distrito Federal hoy nombrado Ciudad de México se divide en tres Zonas de acuerdo al tipo de suelo y son las siguientes:

Zona I: Lomas, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o intercalados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos realmente blandos. En esta Zona, es frecuente la presencia de oquedades en rocas y de cavernas, así como túneles excavados en suelo para explotar minas de arena.

Zona II: Transición, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad, o menos y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre, el espesor de estas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros.

Zona III: Lacustre o de lago, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme a muy dura y de espesores variables desde centímetros a varios metros. Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

Adicionalmente, la Zona III está dividida en cuatro subzonas (IIIa, IIIb, IIIc y IIId).

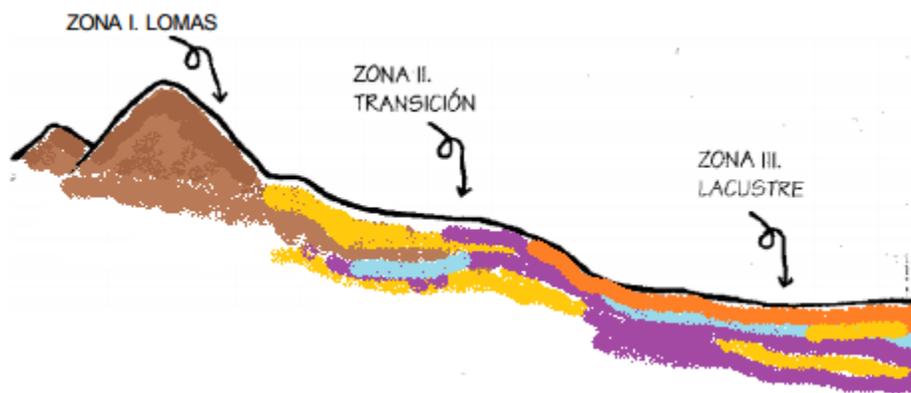


Imagen 55 Representación del perfil de la cuenca de la CDMX.

En la siguiente imagen podemos observar la zonificación de acuerdo al tipo de subsuelo de acuerdo al RCDF, el cual auxilia al ingeniero civil para la ubicación de la estructura a diseñar de acuerdo a sus coordenadas geográficas para saber que consideraciones

debe de tomar en cuenta de acuerdo al tipo de subsuelo se va a desplantar.

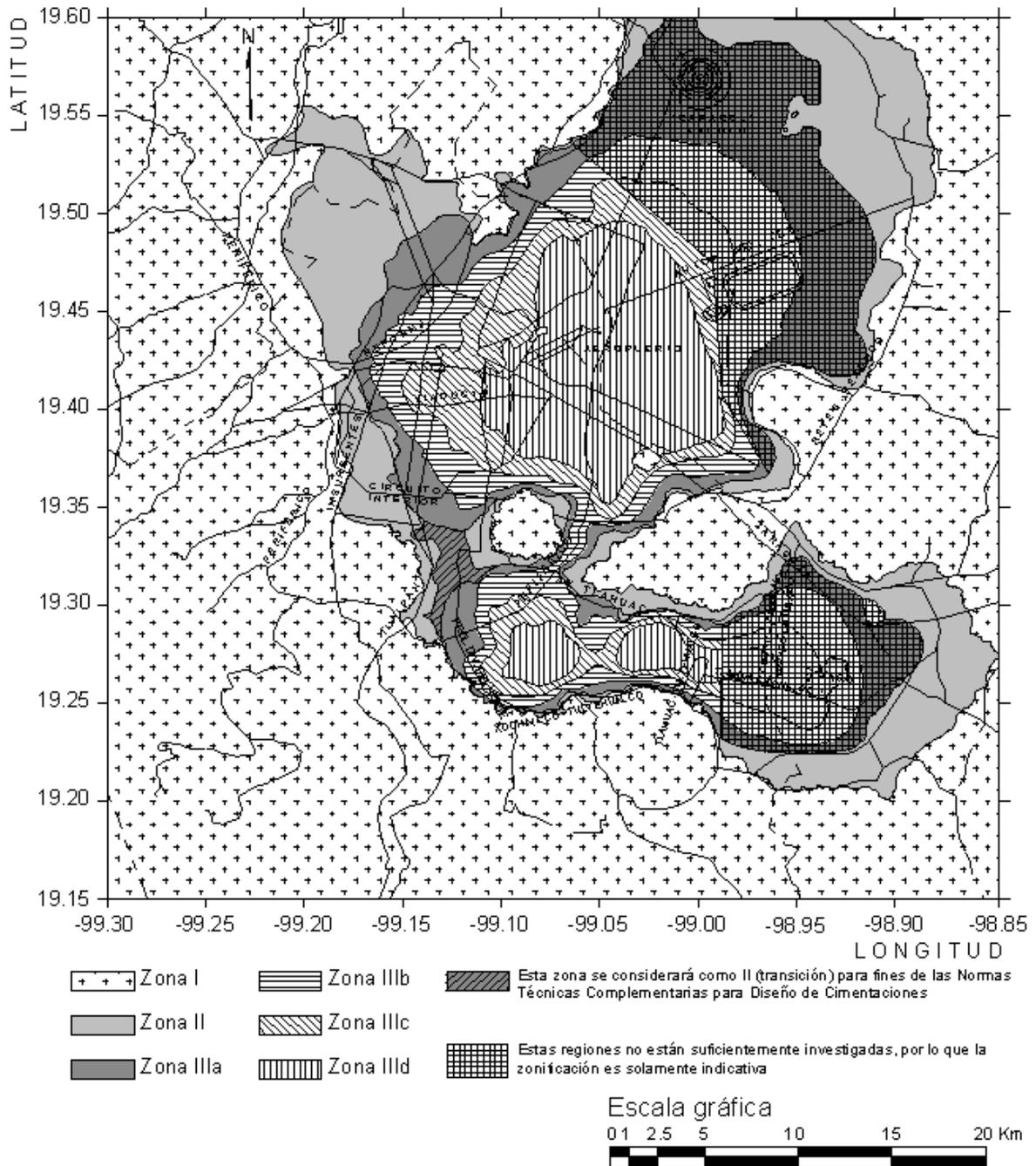


Imagen 56 Zonificación del D.F. para fines de diseño por sismo de acuerdo al RCDP

El coeficiente sísmico c , es el cociente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse que actúa en la base de la edificación por efecto del sismo (V_0) entre el

peso de la edificación sobre dicho nivel (W_0). El coeficiente sísmico para las edificaciones del grupo B según en el artículo 139 del reglamento se tomara en cuenta los siguientes valores: 0.16 en la zona I, 0.32 en I II, 0.40 en las zonas IIIa y IIIc, 0.45 en IIIb y 0.30 en III d, al menos que se emplee el método simplificado de análisis. Para casos del grupo A se incrementará el coeficiente sísmico 50%.

Cuando se aplique el método estático o un método dinámico, las fuerzas sísmicas calculadas podrán reducirse con fines de diseño empleando para ello los criterios que fija el capítulo 4 de las Normas Técnicas complementarias para Diseño por Sismo, de acuerdo a las características estructurales y del terreno. Para el método simplificado de análisis toman en cuenta todas las reducciones que procedan por los conceptos mencionados; por ello, las fuerzas calculadas por este método no deben sufrir reducciones adicionales.

El reglamento también considera la revisión de desplazamientos laterales, ya que las diferencias de estos desplazamientos de pisos consecutivos producidos por las fuerzas cortantes sísmicas de entrepiso no deben exceder de 0.006 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, salvo que no haya elementos incapaces de soportar deformaciones apreciables, como muros de mampostería, en tal caso el límite en cuestión será de 0.012. El desplazamiento será el que resulte del análisis con las Fuerzas Sísmicas Reducidas, según los criterios que se fijan en el capítulo 4, de estas normas, y se multiplicara por el factor de comportamiento Q , este mismo desplazamiento se ocupara para la revisión del cumplimiento de los requisitos de holguras de vidrios y separación de edificios colindantes (toda edificación deberá separarse de sus linderos con los predios vecinos una distancia de 5 cm).

Cuando se aplique el apéndice A, se observarán los límites que ahí se establecen para los desplazamientos.

En el Capítulo 4 “Reducción de Fuerzas Sísmicas” se menciona que para las fuerzas sísmicas calculadas por el método estático o del análisis dinámico modal, se empleara un factor de reducción Q' que se calculará de la siguiente manera:

$$Q' = Q; \quad \text{si se desconoce } T, \text{ o si } T \geq T_a$$

$$Q' = 1 + \frac{T}{T_a}(Q - 1); \quad \text{si } T < T_a$$

Donde T se tomará igual al periodo fundamental de vibración de la estructura cuando se utilice el método estático, e igual al periodo natural de vibración del modo que se considere cuando se utilice el análisis dinámico modal; T_a es un periodo característico del espectro de diseño. Y Q es el factor de comportamiento sísmico, el cual representa un comportamiento no lineal inelástico definido como el cociente de la resistencia lateral de fluencia necesaria para mantener elástico el sistema durante el movimiento del terreno entre la resistencia lateral de fluencia necesaria para mantener la demanda de ductilidad de desplazamiento, menor o igual a la ductilidad máxima tolerable.

Para el factor de comportamiento sísmico Q adoptará los valores especificados a continuación, según los requerimientos que cumplan:

Q=4	<p>a) La resistencia de todos los entrepisos está dada exclusivamente por marcos no contraventeados de acero, concreto reforzado o compuesto de los dos materiales, o bien por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado o de placa de acero o compuesto de los dos materiales, y son capaces de resistir por lo menos 50% de la fuerza sísmica actuante.</p> <p>b) Si hay muros de mampostería ligados a la estructura en la forma especificada en la sección 1.3.1, estos se deberán considerar en el análisis, pero su contribución a la resistencia ante fuerzas laterales solo se tomaran en cuenta si son de piezas macizas y los marcos, sean o no contra venteados, y los muros de concreto reforzado, de placas de acero o compuesto de los dos materiales, son capaces de resistir al menos 80% de las fuerzas laterales totales, sin la contribución de los muros de mampostería.</p> <p>c) El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la</p>
------------	--

	<p>acción de diseño no difiere en más de 35% del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos, el ultimo entrepiso queda excluido de este requisito.</p> <p>d) Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen los requisitos que fijan las Normas correspondientes para marcos y muros dúctiles.</p> <p>e) Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos con ductilidad alta que fijan las Normas correspondientes o están provistos de contraventeo excéntrico de acuerdo con las mismas Normas.</p>
Q=3	<p>b), d) o e) y en cualquier entrepiso deja den de satisfacerse las condiciones a) y c) pero la resistencia de todos los entrepisos esta suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas, por marcos rígidos de acero, marcos de concreto reforzado, por muros de concreto o de placa de acero o compuestos de los dos materiales, por combinaciones de estos y marcos o por diafragmas de madera.</p>
Q=2	<p>Cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas, con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero con ductilidad reducida o provistos de contraventeo con ductilidad normal o de concreto reforzado que no cumplan con los requisitos para ser considerados dúctiles, o muros de concreto reforzado, de placas de acero o compuestos de acero y concreto que no cumplen en ningún entrepiso especificado anteriormente, o por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dalas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero.</p> <p>También cuando la resistencia esta suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado o cuando se trate de estructuras de madera.</p>
Q=1.5	<p>Cuando la resistencia a fuerza laterales es suministrada en todos los entrepisos por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las Normas correspondientes, por las combinaciones de dichos muros con elementos antes descritos para Q=3 y Q=2, por marcos y armaduras de madera, así como de estructuras de acero indicadas en las Normas correspondientes.</p>

Q=1	Cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por materiales o elementos diferentes antes especificados, a menos que se compruebe que se puede utilizar alguno otro valor más grande que el que se especifica en este punto, así como algunas estructuras de acero que se indican en las Normas correspondientes.
------------	--

EL factor Q puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de está en dichas direcciones.

Se tiene dentro de las normas un apartado “6. Condiciones de Regularidad”, que como su nombre lo dice, trata de 11 condiciones de regularidad que debe de cumplir una estructura para ser considerada “estructura regular”, dentro de este apartado hay subtemas importantes como:

“6.2 Estructura Irregular” donde nos dice que aquella estructura que no satisfaga una o más de las 11 condiciones esa estructura será denominada “irregular”.

“6.3 Estructura Fuertemente Irregular” donde para ser considera como tal debe de cumplir con dos condiciones relacionadas con la excentricidad torsional calculada estáticamente y la rigidez de entrepisos.

“6.4 Correcciones por irregularidad” Donde el factor de reducción Q' , definido en la sección 4.1 de las normas y mencionado anteriormente, se multiplicara por 0.9 cuando no se cumpla con uno de las condiciones de las 11, por 0.8 cuando no se cumpla con dos o más condiciones, y por 0.7 cuando la estructura sea fuertemente irregular. Cabe mencionar que en ningún caso el factor Q' se tomara menor que uno.

Los puntos siguientes de la Norma hacen referencia a los métodos de análisis estático y dinámico, así como el apéndice A donde se trata el efecto IDSE.

Criterios de Diseño.

Los efectos combinados del alargamiento del periodo, el aumento del amortiguamiento

V.2 Ejemplo.

Aplicación del Método del Apéndice A de las NTCDS.

Así como el objetivo en general del Reglamento de Construcción y sus Normas Técnicas complementarias este análisis también busca obtener la seguridad adecuada tal que, bajo la acción de un sismo máximo probable, no habrá fallas estructurales de importancia ni pérdida de vidas, aunque se puedan presentar daños que lleguen afectar el funcionamiento de la estructura y requiera reparaciones importantes.

Utilizando el procedimiento de diseño sísmico en su apéndice “A” de las NTCDS, cuyo propósito es hacer más claro el diseño estructural y guiar hacia a los profesionistas al uso del reglamento donde los conceptos de diseño sean claros y eficientes.

“Ordaz et al. (2000,2003) señalan los fundamentos de la propuesta del apéndice normativo “A”, entre los que destacan los nuevos espectros de diseño elástico, con los cuales se pretende representar de una manera más realista los verdaderos niveles de demanda que presentan ante los sismos de diseño y reflejar correctamente los niveles de amplificación que se producen en la realidad para diferentes tipos de suelo.”

Sitio de estudio.

Para este ejemplo supondremos que la estructura estará situada en la Zona II (Transición) de la Ciudad de México y no se encuentran construcciones colindantes. Con la siguiente ubicación geográfica: Latitud 19.342732° y Longitud -99.145448°.

Para poder corroborar que se encuentra en la Zona II, se utilizara el mapa de “la Zonificación del D.F. para fines de diseño por sismo” (NTCDS, 2004). Para esto utilizamos la ubicación geográfica (longitud, latitud) en decimales para poder ubicarlo en el mapa y con una línea horizontal y vertical de color rojo se trazaron por estas coordenadas aproximadamente y obtuvimos que en efecto se encuentra en la Zona II.

al ser Zona dos se deberá de interpolar considerando que en la frontera entre las zonas I y II $T_s=0.5$ segundos y en la frontera entre Zonas II y III, $T_s=1$ segundo por lo que se tendrá que realizar este cálculo.

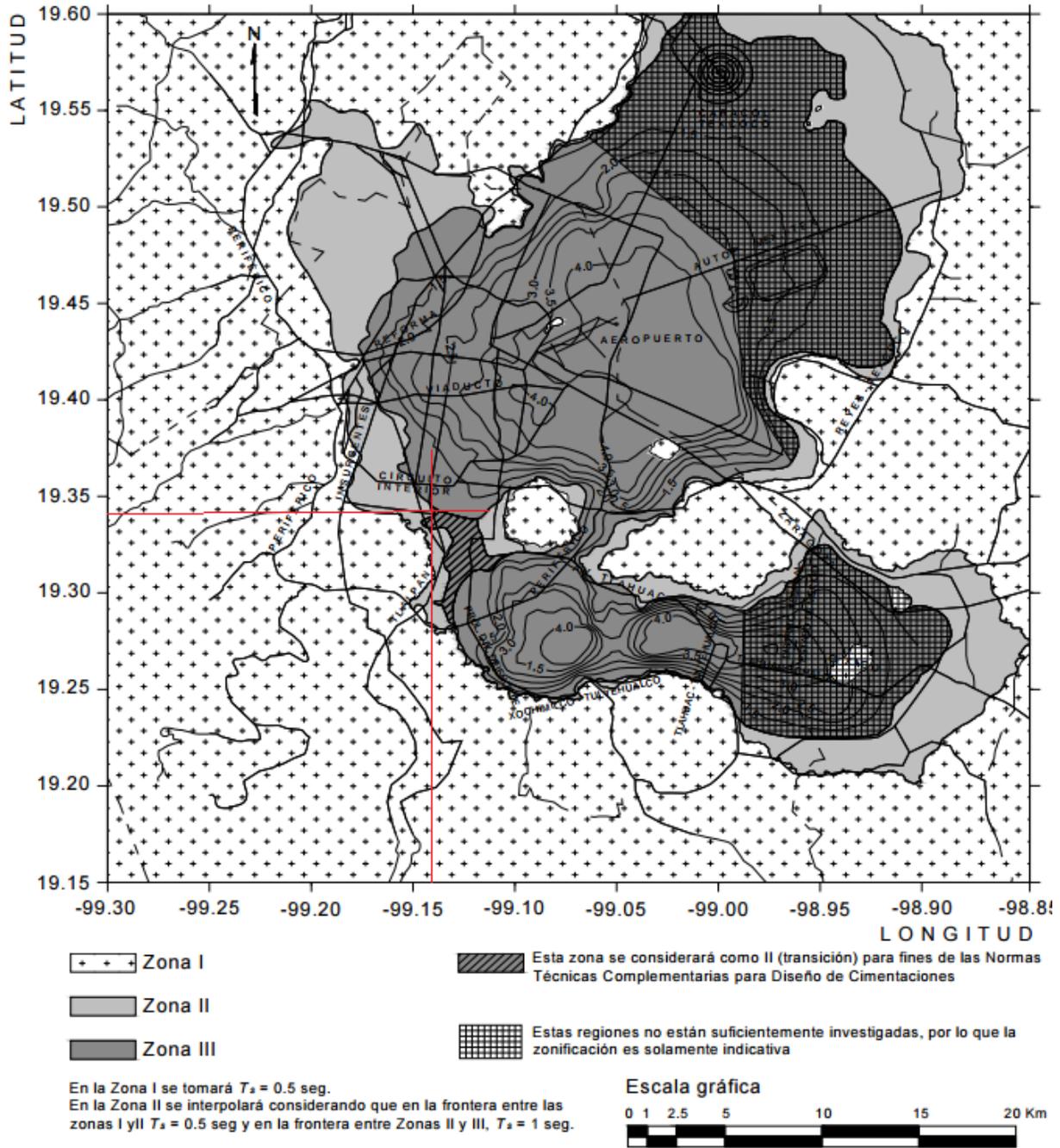


Imagen 58 Periodo predominante del suelo T_s

Para el cálculo de la interpolación del periodo predominante del suelo T_s se tiene la siguiente información:

	Frontera entre zonas I y II	Zona II	Frontera entre Zonas II y III
Longitud	-99.18	-99.14	-99.13
Periodo (s)	0.50	y	1.00

Se tomaron valores absolutos y se acomodaron de la siguiente manera para utilizarlos en la ecuación de interpolación:

$$(x_0, y_0) = (99.18, 0.50)$$

$$(x, y) = (99.14, y)$$

$$(x_1, y_1) = (99.13, 1.00)$$

Con esos datos, aplicamos el criterio de interpolación lineal y tenemos como resultado lo siguiente:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) = 0.50 + \frac{1 - 0.5}{99.13 - 99.18} (99.14 - 99.18) = 0.9$$

El valor obtenido anteriormente da como valor de $T_s=0.9$ segundos, sin embargo, el valor del periodo predominante del suelo depende íntimamente de las características dinámicas del material explorado en sitio, por tanto los resultados proporcionados por este mapa se toma como indicativo.

El siguiente mapa nos da un aproximado o un valor referente a la altura en la que se encontrara la capa dura (H_s). Donde nos da como referencia que está a 14-15 metros aproximadamente de profundidad.

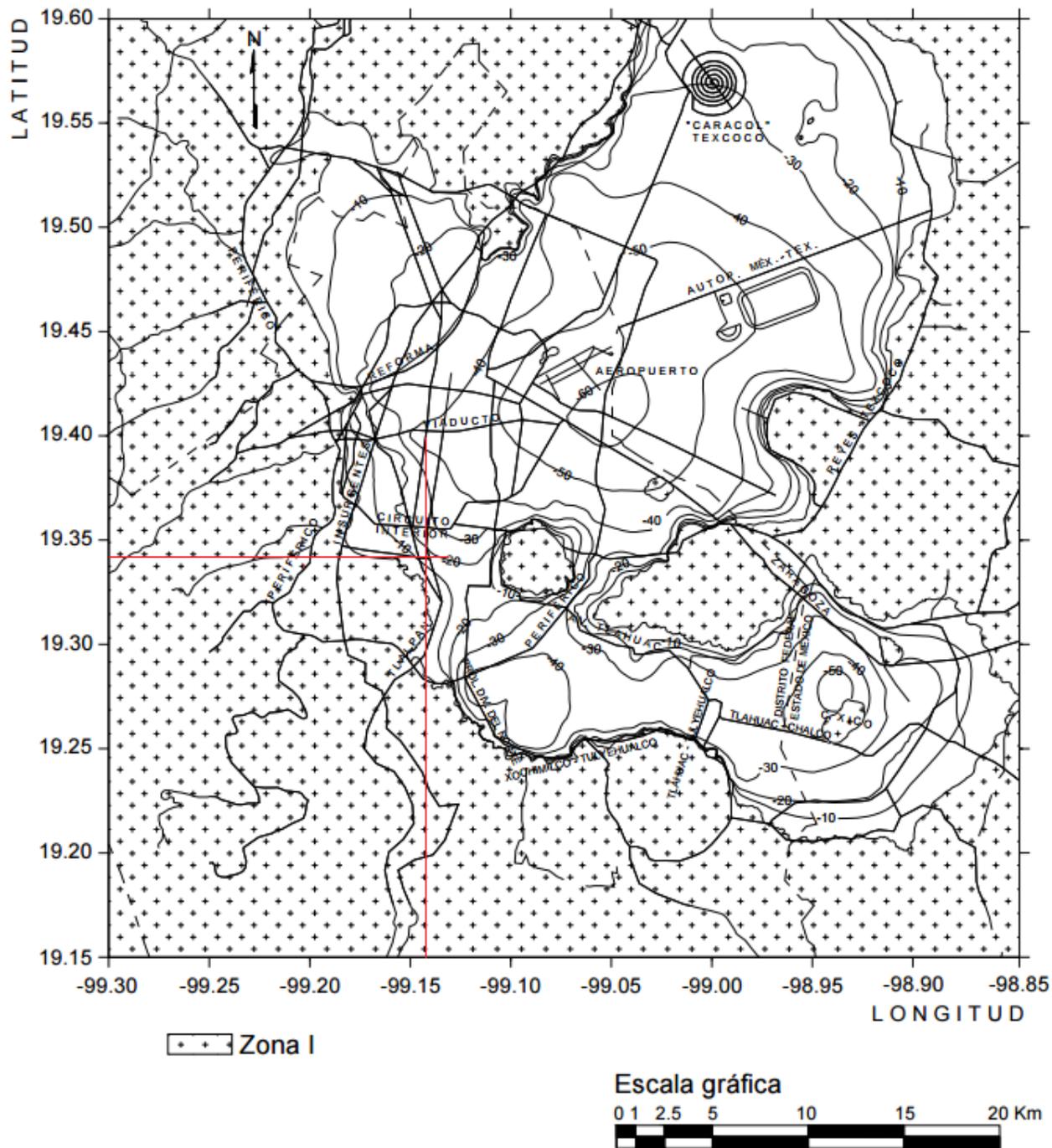


Imagen 59 Valores de H, en metros

Perfil estratigráfico.

El predio donde se desplantara la estructura se encuentra en la Zona Sur de la Ciudad de México, donde, de acuerdo a la zonificación geotécnica del Reglamento de Construcción en sus Normas Técnicas Complementarias de Cimentaciones, se ubica en la Zona de Transición, caracterizado por una serie de intervalos de estratos, principalmente arenosos, debido a los escurrimientos aluviales generados por las principales partes altas de los cerros sur-poniente, que se intercalan por estratos lacustres formando estratigrafías entrelazadas con propiedades erráticas; a continuación se presenta el perfil estratigráfico representativo de la zona:

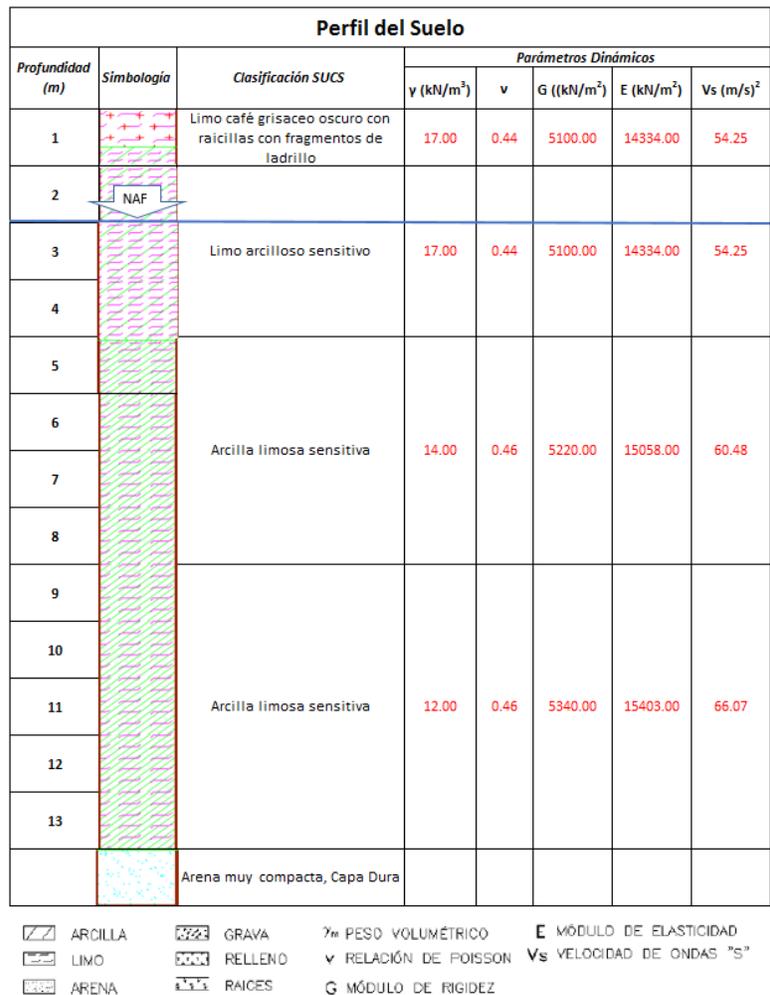


Imagen 60 Perfil estratigráfico

Parámetros Dinámicos del Suelo.

“Las propiedades dinámicas del suelo representan el comportamiento del conjunto de los estratos cuando están sometidos a una excitación sísmica que no induzca al suelo deformaciones residuales de gran importancia, la respuesta del suelo está gobernada por dos parámetros imprescindibles y estos son:

El Módulo de Cortante Dinámico (G) y El Porcentaje de Amortiguamiento Histerético (ζ). Otros parámetros también se activan en presencia de la excitación son el módulo de compresibilidad volumétrica, la relación de Poisson, la resistencia al corte estático de las arcillas y la compacidad de suelos granulares, estos parámetros tienen importancia según sean los cálculos y/o análisis que se tome en cuenta.

N.A.F.=	2.00	m
g=	9.81	m/s ²

Tabla 1 Valores del N.A.F. y de la aceleración de la gravedad.

Profundidad del estrato.	Peso Volumetrico. (γ)	Densidad ($\rho=\gamma/g$)	Velocidad de onda "S" (Vs)	Velocidad de onda "P" (Vp)
m	KN/m ³	KN*s ² /m ⁴	m/s	m/s
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.00	17.00	1.7329	54.25	165.73
4.00	17.00	1.7329	54.25	165.73
8.00	14.00	1.4271	60.48	222.21
13.00	12.00	1.2232	66.07	242.76

Tabla 2 Información de pruebas de campo y laboratorio.

Con la información de la tabla anterior se pudieron calcular algunas propiedades dinámicas de acuerdo a su relación que tienen con ella, se muestran en la siguiente tabla así como las expresiones para su cálculo son las siguientes:

$$\nu = \frac{0.5 \left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 1}{\left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 1}$$

$$G_i = \rho V_s^2$$

$$E = 2G(1 + \nu)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Relacione Poison (ν)	Modulo de Rigidez ($G_i = \rho V_s^2$)	Modulo de Elasticidad ($E = 2G(1 + \nu)$)	Rigidez del Suelo ($K = E / (3(1 - 2\nu))$)
<i>adimensional</i>	<i>kN/m²</i>	<i>kN/m²</i>	<i>kN/m²</i>
0.00	0.00	0.00	0.00
0.44	5100.11	14688.26	40797.14
0.44	5100.11	14688.26	40797.14
0.46	5220.15	15242.79	63506.88
0.46	5339.75	15592.08	64968.92

Tabla 3 Propiedades Dinámicas del Suelo.

El Periodo dominante del suelo.

En el ejemplo se dan como dato las velocidades de onda de corte y de compresión, en función de estos datos se pueden obtener los parámetros dinámicos.

Las siguientes ecuaciones se encuantra en el Reglamento de Construcción del D.F. en sus NTCDS, las cuales consideran el comportamiento del suelo elástico lineal con la que se puede obtener un periodo dominante del suelo mediante un modelo analítico para un suelo estratificado como el del ejemplo. Cabe mencionar que esto se realizara cuando la estructura lo justifique, ya que se determinara a partir de ensayes y análisis de dinámica de suelos.

$$T_s = \frac{4}{g} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{G_i} \right) \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i d_i (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \right)}$$

Donde $x_0=0$ (en la base) y x_i ($i=1,2,3,\dots,N$) está dada por

$$x_i = \frac{\sum_{j=i}^i \frac{d_j}{G_j}}{\sum_{j=1}^N \frac{d_j}{G_j}}$$

Donde:

d_i es el espesor del estrato i-esimo

G_i es el módulo de rigidez al corte del i-esimo estrato

γ_i es el peso volumétrico del i-esimo estrato

Para la aplicación de este criterio es necesario que la profundidad de exploración del subsuelo:

$$H_s = \sum_{i=1}^N d_i$$

Se efectuó hasta los depósitos firmes profundos en el sitio de interés, de lo contrario se estará excluyendo la influencia de la deformabilidad del subsuelo que se encuentra por debajo del nivel de exploración alcanzado.

En la siguiente tabla se observaran los cálculos para obtener el periodo predominante del suelo:

	No. De Estrato	d_i	Peso Volumetrico. (γ)	d_i/G_i	$\sum_{j=1}^i \frac{d_j}{G_j}$	x_i	$x_i^2 + x_i * x_{i-1} + x_{i-1}^2$	$\gamma_i d_i (x_i^2 + x_i * x_{i-1} + x_{i-1}^2)$
i	#	m	KN/m^3					
4	1	3.00	17.00	0.00059	0.00249	1.00000	2.34637	119.66477
3	2	1.00	17.00	0.00020	0.00190	0.76347	1.57432	26.76336
2	3	4.00	14.00	0.00077	0.00170	0.68463	0.86826	48.62276
1	4	5.00	12.00	0.00094	0.00094	0.37652	0.14177	8.50592

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{G_i} = \frac{0.002487}{}$$

$$\sum \gamma_i d_i (x_i^2 + x_i * x_{i-1} + x_{i-1}^2) = \frac{203.556816}{}$$

Tabla 4 Cálculos para obtener T_s

A continuación de muestra una tabla resumen de los cálculos promedios del suelo:

Tabla 5 Resumen de Cálculos promedio del suelo.

$T_s =$	0.9087	<i>segundos</i>
$\gamma_{media} =$	14.154	<i>KN/m3</i>
$V_{s_{media}} =$	57.227	<i>m/s</i>
$v_{promedio} =$	0.45	
$G_{medio} =$	4725.11	<i>kN/m2</i>

Amortiguamiento del suelo y relación de Poisson.

El alargamiento del periodo es producto de la deformabilidad del medio de soporte, en tanto que la modificación del amortiguamiento resulta de la capacidad del suelo para disipar energía no solo por comportamiento histerético (amortiguamiento material) y radiación de ondas (amortiguamiento geométrico), sino también por la difracción de las ondas incidentes por la cimentación. En vista que el cabeceo de la cimentación puede incrementar la respuesta relativa del edificio y por consiguiente reducir el amortiguamiento, es necesario equilibrar el amortiguamiento efectivo en función del amortiguamiento del suelo, manipulando el amortiguamiento de la estructura, para poder asegurar que el sistema suelo-cimentación disipe la energía y procure la estabilidad contra el colapso. Este fenómeno se presenta en estructuras esbeltas que son las más sensibles al cabeceo de la cimentación.

Los criterios de interacción de las normas consideran tanto el alargamiento del periodo debido a la deformabilidad del suelo como las modificaciones del amortiguamiento producto del comportamiento histerético y la radiación de ondas en el suelo.

El amortiguamiento del suelo y relación de Poisson se tomarán de acuerdo a lo recomendado en las NTCDs en la sección A.6.4, donde dice:

“Los valores de γ y H_s , así como los de amortiguamiento histerético y la relación de Poisson del suelo, se obtendrán a partir de estudios locales de mecánica de suelos o, si estos son insuficientes para obtenerlos, se adoptará: $\gamma=12.3 \text{ kN/m}^3$, $\zeta=0.03$ (%), $v=0.45$ y H_s se tomará de la Figura A.2 de las NTCDs.” (Imagen 61 de este documento).

Descripción de la Estructura	
Tipo:	B
Uso:	Oficinas
Forma en planta:	Regular y simétrica
Forma en elevación:	Regular y simétrica

Dimensión Planta					
Eje X (m)	Eje Y (m)		Área =	612	m ²
20	30.6				
No. Crujías en eje X	Distancia (m)		No. Crujías en eje Y	Distancia (m)	
1	5		1	6.12	
2	5		2	6.12	
3	5		3	6.12	
4	5		4	6.12	
			5	6.12	
Dimensión en X =	20	m	Dimensión en Y =	30.6	m

Dimensión en elevación (Eje Z)					
No. De Niveles	Altura (m)		Wtotal=	5663.16	Ton
1	3.5		Presión de Estr=	9.25	Ton/m ²
2	3.5				
3	3.5		Te=	0.80	segundos
4	3.5				
5	3.5				
6	3.5				
	H _{total} =	21			m

Dimensiones de la Cimentación					
Cajón			Área =	612	m ²
Largo	30.6	m	d _{cimentación} =	0.35	m
Ancho	20	m			
Df	3	m			
W _{cimentación} =	878.4	Ton	8617.10		kN
Presión de Cimentación=	1.44	Ton/m ²	14.08		kN/m ²
Presión de compensación	5.2	Ton/m ²	51		kN/m ²
Presión Total	10.69	Ton/m ²	104.86		kN/m ²
Presión Neta	5.49	Ton/m ²	53.86		kN/m ²

Con base al tipo de estructura y el suelo en el que se desplantara se considerara como solución de cimentaciones un cajón, el cual se propone diseñar como cimentación rígida, considerando que el cajón propuesto transferirá de manera uniforme las cargas al suelo de apoyo, al mismo tiempo que el cajón genera efectos de empotramiento para que la estructura actúe contras los efectos de volteo generados por las condiciones dinámicas ocasionadas por un sismo, aumentando con esto su estabilidad. El cajón deberá estar formado por muros, trabes y losas de concreto reforzado que en conjunto generen un efecto de rigidez, tal que las cargas de la superestructura se distribuyan uniformemente hacia la masa de suelo, así ganando ventaja en el comportamiento como cuerpo rígido a todo el conjunto.

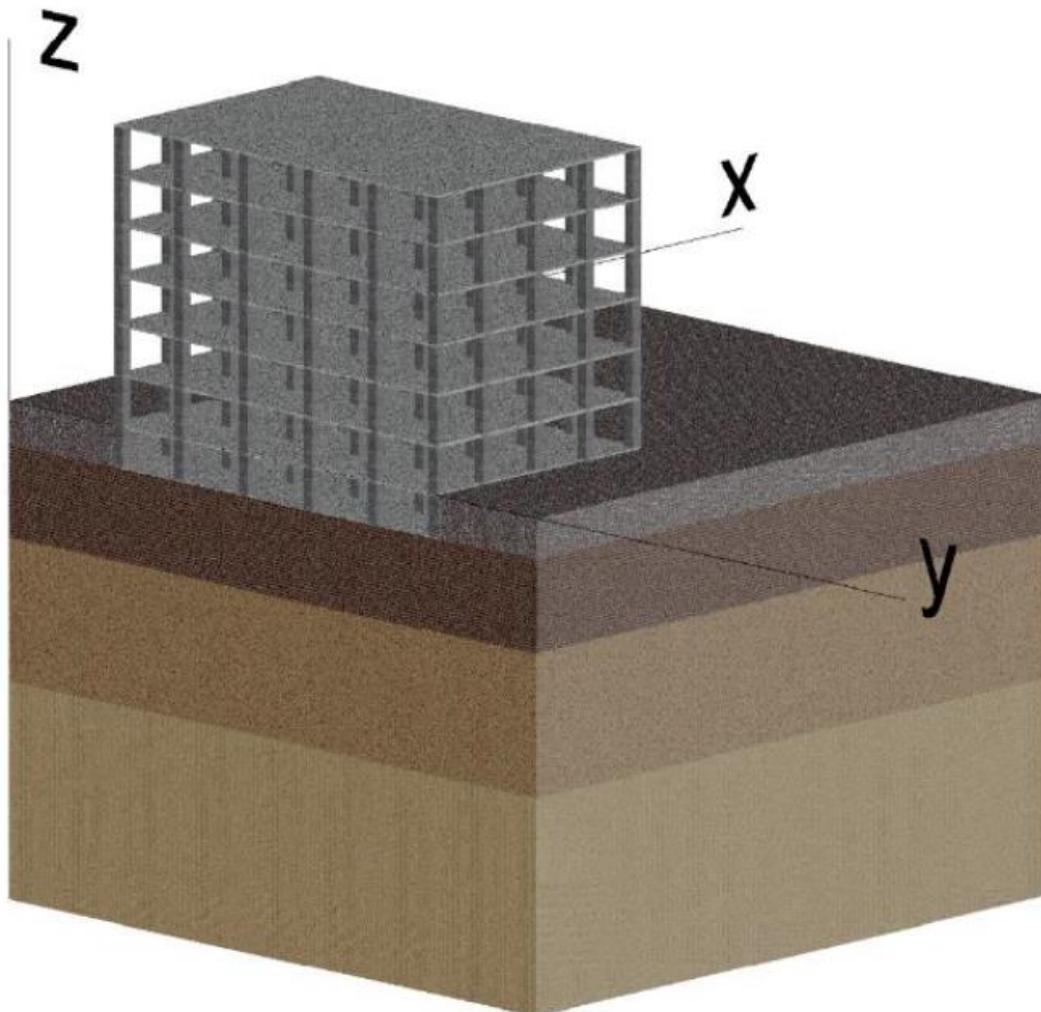


Imagen 61 Isométrico de la Estructura

Cimentación:

Parámetros Dinámicos:

Para llevar a cabo el análisis mediante el método del apéndice “A” de las NTCDS-2004 del RCDF, es necesario tomar en cuenta parámetros que generalmente son proporcionados por la (s) persona (s) responsable (s) (estructurista(s)); a continuación, se mostrara como se obtuvieron los parámetros que se deben considerar:

Factor de comportamiento sísmico Q se adoptará el valor especificado en la NTCDS-2004 en el punto 5, tomando en cuenta las características del diseño de la estructura para poder elegir el adecuado. En este caso se tomara en cuenta **$Q=2$ (punto 5.3 de las NTCDS-2004)**

“5.3 Requisitos para $Q=2$

Cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas, con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero con ductilidad reducida o provistos de contraventeo con ductilidad normal o de concreto reforzado que no cumplan con los requisitos para ser considerados dúctiles, o muros de concreto reforzado, de placas de acero o compuestos de acero y concreto que no cumplen en ningún entrepiso especificado anteriormente, o por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dalas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero.

También cuando la resistencia esta suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado o cuando se trate de estructuras de madera.” (NTCDS-2004)

Amortiguamiento crítico de la estructura: Se considerara el valor de **5%** el cual es recomendado por las NTCDS-2004 en la sección A 6.1 Análisis Estático:

*“..., ζ_e es el amortiguamiento efectivo del sistema suelo-estructura, el cual no se tomara menor que 0.05; en tanto que ζ_e es la fracción de amortiguamiento crítico de la estructura supuesta con base indeformable, la cual se tomara igual a **0.05**.”*

Periodo dominante de la estructura (T_e): Es necesario tener como dato el periodo de vibración de la estructura correspondiente al modo fundamental o primer modo de vibración; para efectos de practicidad se tomó como periodo dominante de la estructura un valor representativo de 0.8 segundos (**$T_e=0.8$ s**), el cual se puede determinar con un

“Análisis Dinámico Modal” o con el método “Reducción de las Fuerzas Cortantes” enunciadas en la NTCDS-2004.

Uso del apéndice A de la NTCDS.

El procedimiento de este método queda resumido en la siguiente tabla, donde se pueden observar las ecuaciones a emplear, las cuales han sido desarrolladas para la obtención de los parámetros de frecuencia, coeficientes de amortiguamiento, rigidez estática y finalmente rigidez dinámica, en los sentidos horizontal, vertical y en rotación. Uno de los propósitos de este trabajo es presentar la deducción matemática de las ecuaciones, con el fin de ilustrar los fundamentos matemáticos que las sostienen, dado que las especificaciones en la norma hacen que sea muy confusa la aplicación de las mismas, y con base en esto se desarrolló en el cuerpo de este trabajo las respectivas deducciones para la mayoría de las ecuaciones; sin embargo, los coeficientes de amortiguamiento, no se han podido deducir ya que la información que se tiene acerca de estos parámetros es poca, por lo que no existen referencias acerca de los fundamentos teóricos o libros en los que se hable acerca de la teoría en la que se basan, por lo que se sabe que se obtuvieron en un análisis probabilístico proveniente de los resultados de pruebas de laboratorio.

CIMENTACIONES SOMERAS	$K_m = K_m^o (k_m - 2\zeta \eta_m c_m)$ y $C_m = K_m^o (\eta_m c_m + 2\zeta k_m)/\omega$; $m = x, v, r$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta_m = \omega R_m / V_s$; donde $V_s = 4H_s / T_s$ y $R_v = R_x$ $\eta_s = \pi R_x / 2H_s$ $\eta_p = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} \pi R_r / 2H_s$	
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coeficiente de Rigidez	Coeficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = \frac{8 G R_x}{2-\nu} \left(1 + \frac{R_x}{2 H_s}\right) \left(1 + \frac{2 D}{3 R_x}\right) \left(1 + \frac{5 D}{4 H_s}\right)$	$k_x = 1$	$c_x = \frac{0.65 \zeta \eta_{xs}}{1 - (1 - 2 \zeta) \eta_{xs}^2}$; si $\eta_{xs} = \eta_x / \eta_s \leq 1$ $c_x = 0.576$; si $\eta_{xs} = \eta_x / \eta_s > 1$
Vertical	$K_v^o = \frac{4 G R_v}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R_v}{H_s}\right) \left(1 + 0.5 \frac{D}{R_v}\right) \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D}{R_v}\right) \frac{D/H_s}{1 - D/H_s}\right]$	$k_v = 1$	$c_v = 0$; si $\eta_v < \eta_p$ $c_v = 0.85 \frac{1 + 1.85 (1 - \nu) D / R_v}{1 + 0.5 D / R_v}$; si $\eta_v \geq \eta_p$
Cabeceo	$K_r^o = \frac{8 G R_r^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{R_r}{6 H_s}\right) \left(1 + \frac{2 D}{R_r}\right) \left(1 + 0.71 \frac{D}{H_s}\right)$	$k_r = 1 - 0.2 \eta_r$	$c_r = \frac{0.5 \zeta \eta_{rp}}{1 - (1 - 2 \zeta) \eta_{rp}^2}$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p \leq 1$ $c_r = 0.3 \eta_r^2 / (1 + \eta_r^2)$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p > 1$
CIMENTACIONES CON PILOTES	$K_m = K_m^o k_m$ y $C_m = 2 K_m^o c_m / \omega$; $m = x, v$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta = \omega d / V_s$; donde $V_s = 4 H_s / T_s$ $\eta_s = \pi d / 2 H_s$ $\eta_p = 3.4 \eta_s / \pi (1 - \nu)$	
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coeficiente de Rigidez	Coeficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = d E_s \left(\frac{E_p}{E_s}\right)^{0.21}$	$k_x = 1$	$c_x = 0.8 \zeta$; si $\eta \leq \eta_s$ $c_x = 0.8 \zeta + 0.175 (E_p/E_s)^{0.17} \eta$; si $\eta > \eta_s$
Vertical	$K_v^o = 1.9 d E_s \left(\frac{L}{d}\right)^{0.67}$	$k_v = 1$; si $L/d < 15$ $k_v = 1 + \sqrt{\eta}$; si $L/d \geq 50$ Interpolar linealmente para $15 \leq L/d < 50$	$c_v = 0$; si $\eta \leq \eta_p$ $c_v = \frac{0.413 \left(\frac{L}{d}\right)^{0.33}}{1 + \nu} \left(1 - e^{-(E_p/E_s)(L/d)^{-2}}\right)^{0.8}$; si $\eta > 1.5 \eta_p$ Interpolar linealmente para $\eta_p < \eta \leq 1.5 \eta_p$

Parámetros del suelo: $\zeta =$ amortiguamiento histerético, $\nu =$ relación de Poisson y $E_s = 2 G (1 + \nu) =$ módulo de elasticidad
Parámetros del pilote: $L =$ longitud, $d =$ diámetro y $E_p =$ módulo de elasticidad

Imagen 62 Tabla Rigideces y amortiguamientos de cimentaciones someras o con pilotes (NTCDS, RCFD 2004)

En el apéndice de la norma, en el punto A.6 Interacción Suelo-Estructura nos dice: "los efectos de interacción suelo-estructura se tomara en cuenta aplicando las modificaciones que contiene la presente sección. Estos efectos pueden despreciarse cuando se cumpla la condición:

$$\frac{T_e H_s}{T_s H_e} > 2.5$$

Donde

Hs profundidad de los depósitos firmes profundos en el sitio de interés, que se toma de la figura A.2 de la norma (imagen 67 de este documento).

He altura efectiva de la estructura*

Te periodo fundamental de la estructura supuesta con base indeformable

*Cuando se utilice el método estático He se tomara como 0.7 de la altura total, ..."

Por lo cual usaremos este criterio para evaluar el caso que estamos manejando, utilizando los datos ya obtenidos:

Te (s)	Ts (s)	He (m)	Hs (m)	TeHs/TsHe	TeHs/TsHe>2.5
0.8	0.91	14.7	13	0.78	No despreciar IDSE

Como podemos observar toma en cuenta la rigidez del suelo y de la estructura, y podemos afirmar que es necesario el análisis IDSE; por lo general las estructuras que no necesitan este análisis son aquellas que están desplantadas en materiales competentes, esto es en estratos duros que llegan a estar superficialmente y que las estructuras sean de poca altura, por ejemplo, una casa-habitación.

Se planteará para el análisis IDSE el análisis longitudinal y transversal (corte X-X' y Y-Y') ilustrados en la siguiente imagen, donde se representa el perfil de la estructura sobre el perfil de suelo con las propiedades dinámicas equivalentes a una manto homogéneo.

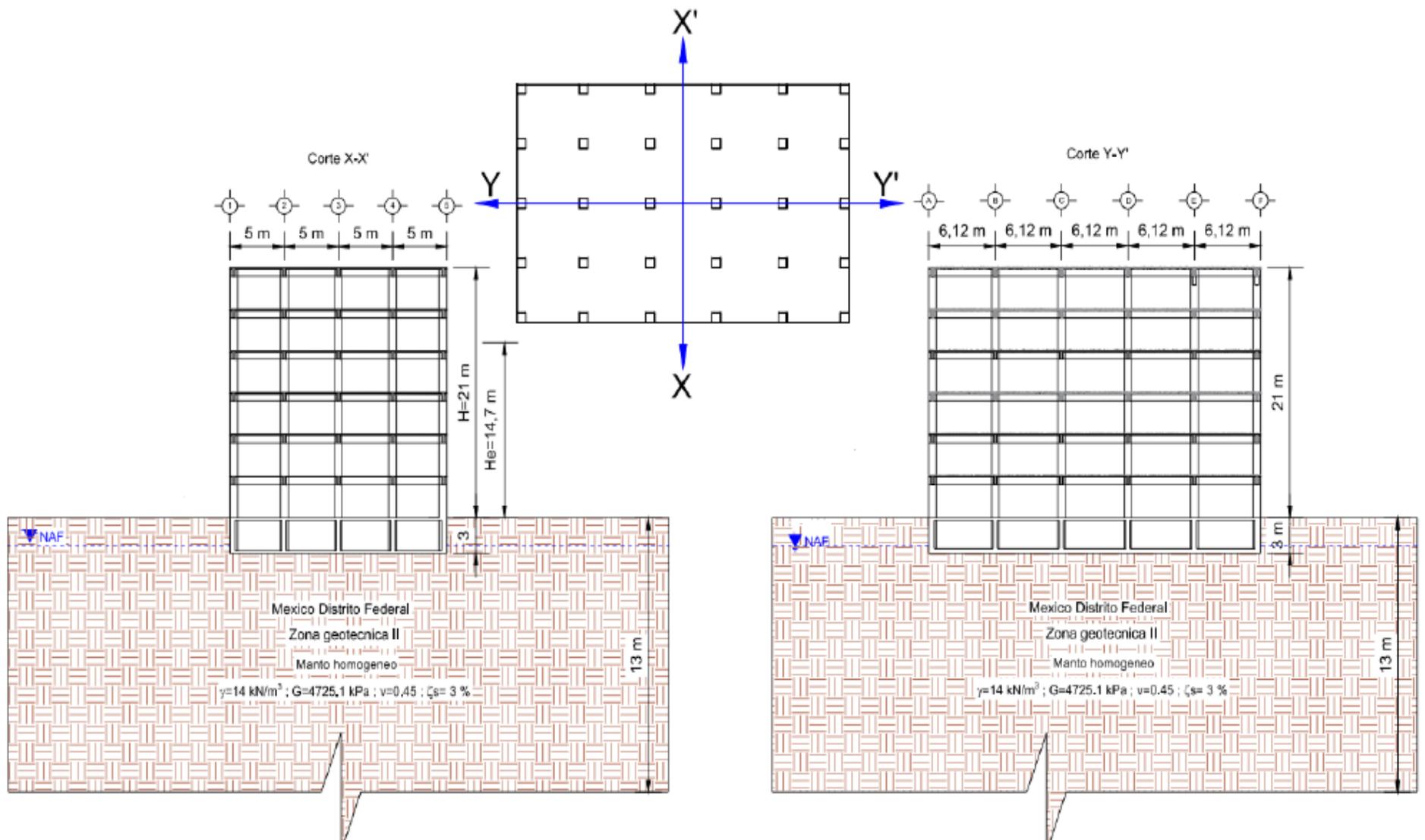


Imagen 65 Corte X-X' e Y-Y' de la estructura y el suelo

Cabe mencionar que lo que se está planteando desarrollar en este análisis se planteó para sensibilizar al ingeniero en geotecnia (ingeniero civil) con este procedimiento de cálculo y también con otros que están relacionados con los ingenieros estructuralistas (ingeniero civil), ya que por mucho tiempo se les ha dejado a estos últimos la toma de decisión del procedimiento de cálculo para analizar y diseñar la superestructura y la subestructura, sabiendo que en realidad es un problema de varias áreas dentro de la ingeniería civil y es importante que todas las áreas estén íntimamente relacionadas y comunicadas.

A continuación, se empezara con el cálculo del periodo, amortiguamiento y espectros de diseño con efectos de IDSE, dicho método es aplicable cuando se conocen los parámetros de la estructura, de la cimentación y del suelo que a continuación se presentan; cuando estos datos son conocidos se pueden calcular las rigideces estáticas y dinámicas de la cimentación, el periodo y amortiguamiento efectivo y finalmente los espectros de diseño sísmico reducidos y con los efectos de IDSE.

Calculo de las Rigideces Estáticas de la Cimentación:

Como sabemos esto representa el grado de deformabilidad del suelo ante la rigidez de la condición geométrica de la cimentación, para la obtención de estos parámetros, se debe conocer los parámetros dinámicos del suelo* para un manto homogéneo.

*Los cuales están representados en la imagen 66, y los cálculos se podrán observar en el anexo.

Hs=	13.00	m
T_s=	0.9087	segundos
γ_{media}=	14.154	kN/m³
V_{smedia} =	57.227	m/s
V_{promedio}=	0.45	
G_{medio}=	4725.11	kN/m²

Así como las propiedades geométricas de la cimentación para una profundidad de desplante, D=3 metros de profundidad, para una condición geométrica de círculos

equivalentes a la superficie de desplante, cuyos radios para los modos en traslación y rotación están dado por las ecuaciones:

$$R_x = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{0.5}$$

$$R_r = \left(\frac{4I}{\pi}\right)^{0.5}$$

Donde tenemos los valores siguientes para el lado corto y el lado largo de la estructura respectivamente:

<u>Corto</u>		
R_x =	13.957	m
R_r =	15.703	m

<u>Largo</u>		
R_x =	13.957	m
R_r =	12.695	m

Con estos valores se obtendrán las rigideces estáticas de la cimentación en ambos sentidos (corto lado izquierdo y largo lado derecho):

Horizontal	K°x=	770587.16	kN-m		K°x=	770587.16	kN-m
Cabeceo	K°r=	171415166.98	kN-m		K°r=	93410768.50	kN-m

Calculo de las Rigideces Dinámicas de la Cimentación:

El análisis de estos parámetros lleva a obtener las frecuencias fundamentales admisibles para ondas de corte “*Módulo de Vibración Horizontal*” (η_s) para el sentido corto y largo: **1.69** y compresión “*Modulo de Vibración por Cabeceo*” (η_p) para sentido corto: **6.29** y para el sentido largo **5.09**, las frecuencias críticas de un estrato uniforme están definidas por la frecuencia fundamental en vibración transversal y vertical, según se trate de oscilaciones de la cimentación en traslación horizontal o cabeceo respectivamente. Esto se debe a que las oscilaciones de traslación horizontal las generan principalmente ondas S, mientras que las de cabeceo las generan primordialmente las ondas P. Los resultados de las frecuencias fundamentales para el lado corto como se señalaron anteriormente,

se traducen como mayor influencia de ondas de compresión, esto significa que existe mayor probabilidad de volteo que de traslación horizontal.

Con los valores obtenidos podemos calcular la rigidez dinámica del suelo (K_x y K_r) y el amortiguamiento dinámico para el modo de traslación y rotación equivalente (C_x y C_r) para ambos sentidos:

<i>Corto</i>			<i>Largo</i>		
<i>K_x</i> =	719573.89	<i>kN/m</i>	<i>K_x</i> =	719573.89	<i>kN/m</i>
<i>C_x</i> =	114140.37	<i>kN*s/m</i>	<i>C_x</i> =	114140.37	<i>kN*s/m</i>
<i>K_r</i> =	97403788.32	<i>kN/m</i>	<i>K_r</i> =	60804546.75	<i>kN/m</i>
<i>C_r</i> =	1016654.58	<i>kN*s/m</i>	<i>C_r</i> =	584583.85	<i>kN*s/m</i>

Con los coeficientes de rigidez respectivos se calcularon dichas rigideces (**Sentido corto:** $k_x=1$ y $k_r=0.569$, **sentido largo:** $k_x=1$ y $k_r=0.0651$) y los coeficientes de amortiguamiento (**Sentido corto:** $c_x=0.576$ y $c_r=0.0057$, **sentido largo:** $c_x=0.576$ y $c_r=0.0057$). Esta rigidez dinámica (K_x y K_r) no es mas que la relación en estado estacionario entre la fuerza excitadora y el desplazamiento resultante en la dirección de la fuerza, para una cimentación rígida carente de masa y excitada armónicamente. K_x y K_r representa un resorte lineal que expresa tanto la rigidez como la inercia del suelo; la dependencia de la frecuencia se debe a su influencia en la inercia, puesto que la rigidez del suelo es esencialmente independiente de la frecuencia. En tanto que los términos C_x y C_r representan un amortiguador viscoso que expresa los amortiguamientos material y geométrico del suelo; el primero es básicamente independiente de la frecuencia y se debe al comportamiento histerético, mientras que el segundo es dependiente de la frecuencia y se debe a la radicación de ondas.

Calculo del Periodo y Amortiguamiento efectivo:

Desde el punto de vista de la ingeniería aplicada, es válido determinar el periodo y amortiguamiento efectivos del sistema en forma aproximada. Si se desprecian la masa de la cimentación W_c y su momento de inercia I_c , parámetros que tienen poca influencia

en el alargamiento del periodo y la modificación del amortiguamiento. Para el calculo del periodo efectivo primeramente se obtuvo el peso efectivo de la estructura cual es considerado como el 70% del peso total considerando el peso de la superestructura y de la subestructura ($0.7W_T$) para un análisis sísmico estático y cuyos valores son:

Estructura	$W_T=$	64172.70	kN
	$W_e=$	44920.89	kN

Con este valor de W_e , se realizaron las operaciones para obtener el periodo efectivo, el cual involucra el periodo de la estructura ($T_e=0.8$ s), el periodo en el modo de traslación (**sentido corto y largo: $T_x=0.5012$ s**) y el periodo en el modo traslacional (**sentido corto: $T_r=0.762$ s y sentido largo: $T_r=0.965$ s**). Para obtener el periodo efectivo tenemos la siguiente expresión:

$$T_{efec} = \sqrt{T_e^2 + T_x^2 + T_r^2}$$

Para obtener este valor se tuvieron que realizar iteraciones para que convergiera el método ya que debe ser evaluada para una excitación armónica de frecuencia $\omega=\omega'_e$ donde:

$$\omega'_e = \frac{2\pi}{T_{efec}}$$

En cuyo caso se obtuvieron los siguientes datos:

$T_e''=$	1.2135	segundos		$T_e''=$	1.3501	segundos
$\omega'_e=$	5.18	rad/s		$\omega'_e=$	4.65	rad/s
$\zeta'_e=$	0.077			$\zeta'_e=$	0.062	

Espectros de diseño elástico del apéndice A de las NTCDS-2004:

Se graficaron los espectros elásticos para poder visualizar el comportamiento de la gama de aceleraciones para diferentes periodos de oscilación, de esta manera obtenemos

espectros de aceleración transparentes y reducidos en el sentido corto y largo de la estructura, así como la variación del comportamiento sísmico con respecto a diferentes periodos. A continuación, se presenta un resumen de los resultados obtenidos:

Sentido corto de la estructura:

Sin IDSE:

$\beta= 1$
 $Q=2$
 $T_e=0.8$ s
 $a= 0.656$ g
 $a/QR=0.164$ g
 $V_0= 10,523.76$ kN

Con IDSE:

$\beta= 0.803$
 $Q'=1.858$
 $T_e=1.21$ s
 $a= 0.527$ g
 $a/QR=0.141$ g
 $V_0'= 9,105.63$ kN

Sentido largo de la estructura:

Sin IDSE:

$\beta= 1$
 $Q=2$
 $T_e=0.8$ s
 $a= 0.656$ g
 $a/QR=0.164$ g
 $V_0= 10,523.76$ kN

Con IDSE:

$\beta= 0.899$
 $Q'=1.908$
 $T_e=1.35$ s
 $a= 0.527$ g
 $a/QR=0.154$ g
 $V_0'= 9,922.67$ kN

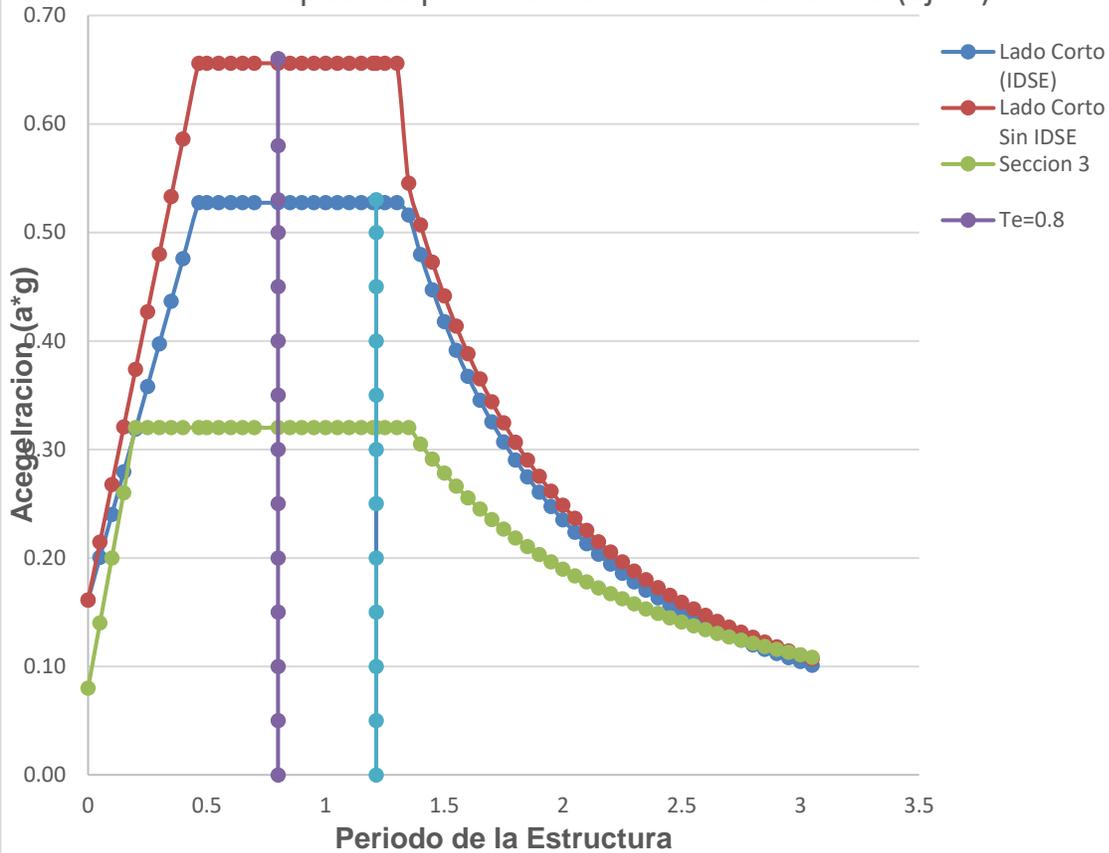
Como podemos observar el periodo dominante de la estructura de 0.8 segundos aumenta con la aplicación del apéndice A, con el que se obtiene un periodo defectivo de 1.21 s, con un amortiguamiento de 7.7% para el lado corto y 1.35 s con un amortiguamiento de 6.2% para el lado largo, estos resultados nos llevan a mencionar que debido a un incremento en el periodo se requiere un mayor amortiguamiento debido a que la sollicitación por los ciclos de histéresis del suelo, por otro lado como cumple con lo mencionado en el apéndice A de la NTCDS-2004 donde el amortiguamiento efectivo del sistema no debe ser considerado menor a 5%; por otro lado podemos observar que el cortante basal disminuye con el efecto IDSE.

Para obtener los espectros de diseño se calcularon los siguientes valores, de los cuales los seleccionados en color amarillo son los valores correspondientes para cada caso.

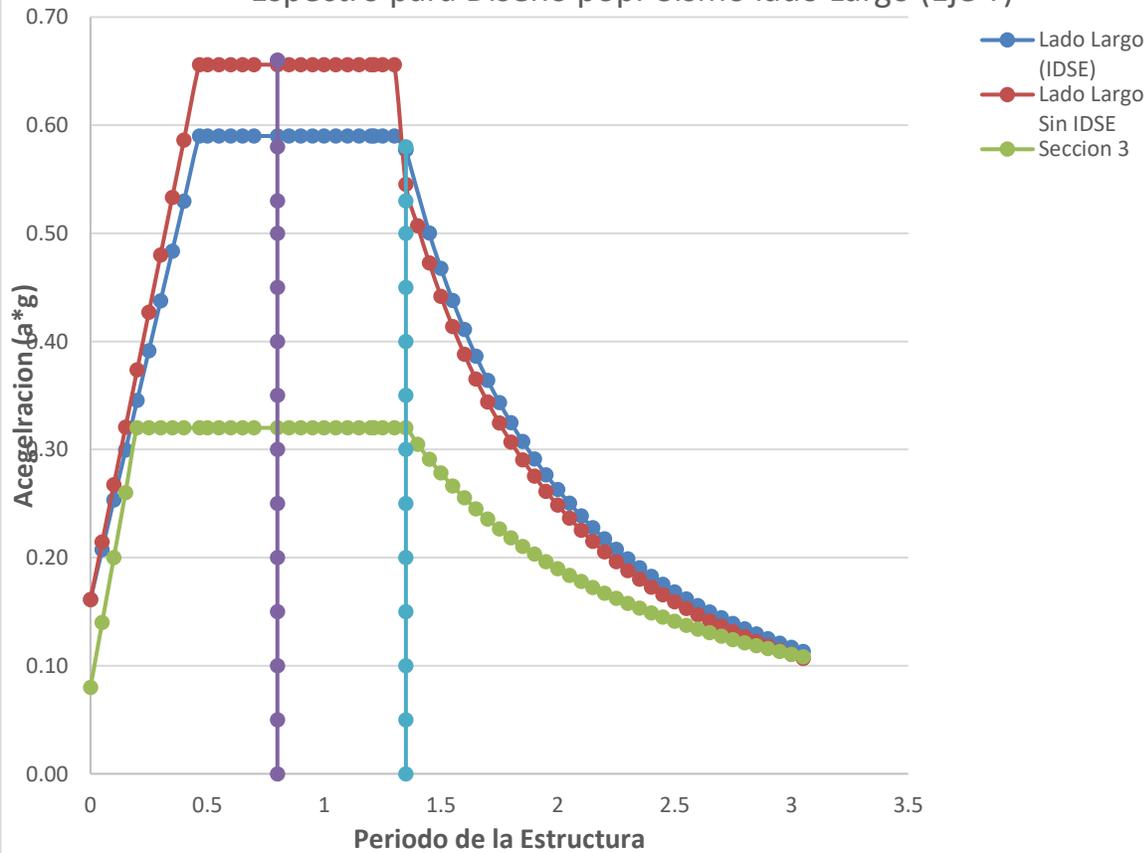
Espectros de diseño con IDSE					
En función del periodo dominante del sitio (T_s):					
a_0 =	0.161299	$0.5 \leq T_s \leq 1.5$			
	0.25	$T_s > 1.5$			
c =	0.65597	$0.5 < T_s \leq 1.5$			
	1.2	$1.5 < T_s \leq 2.5$			
	1.99567	$2.5 < T_s \leq 3.5$			
	0.7	$T_s > 3.5$			
		Lado Corto		Lado Largo	
Ta =	0.465628	$0.5 < T_s \leq 1.5$			
	1.5	$1.5 < T_s \leq 3.25$			
	3.84	$3.25 < T_s \leq 3.9$			
	0.85	$T_s > 3.9$			
Tb =	1.350	$T_s \leq 1.125$			
	1.090	$1.125 < T_s \leq 3.5$			
	4.200	$T_s > 3.5$			
k =	1.09	$0.5 \leq T_s \leq 1.65$			
	0.35	$T_s > 1.65$			
β_{corto} =	0.80393	$T_e'' \leq T_b$			
	0.000	$T_e'' > T_b$			
β_{largo} =	0.00000	$T_e'' \leq T_b$			
	0.899	$T_e'' > T_b$			
		Lado Corto		Lado Largo	
λ Zona II=	0.5				
λ Zona III=	0.6				
Q =	2				
ρ' lado corto=	0.9783	ρ' sin IDSE=	0.8312		
ρ' lado largo=	1.0000				
a =	0.000	$T_e'' \leq T_a$	a =	0.000	$T_e'' \leq T_a$
	0.5274	$T_a < T_e'' \leq T_b$		0.5900	$T_a < T_e'' \leq T_b$
	0.000	$T_e'' > T_b$		0.5273	$T_e'' > T_b$
Q' =	0.000	$T_e'' \leq T_a$	Q' =	0.000	$T_e'' \leq T_a$
	1.8583	$T_a < T_e'' \leq T_b$		1.9078	$T_a < T_e'' \leq T_b$
	0.000	$T_e'' > T_b$		1.908	$T_e'' > T_b$
R =	0.000	$T_e'' \leq T_a$	R =	0.000	$T_e'' > T_b$
	2.000	$T_e'' > T_a$		2.000	$T_e'' > T_a$
Q_e =	1.43458		Q_e =	1.35114	
Q'_e =	1.3730		Q'_e =	1.3188	
a''_e =	0.1920		a''_e =	0.1999	
a'_e =	0.1419		a'_e =	0.1546	
Vo'' =	11358.504	kN	Vo'' =	11957.64	kN
Vo =	9105.6316	kN	Vo =	9922.6779	kN
Vo''/Vo =	1.2474153		Vo''/Vo =	1.2050819	

A continuación, podremos observar gráficamente los espectros de diseño con IDSE (apéndice A), con el cuerpo de la norma (sin IDSE) y Sección 3 de las NTCDs-204.

Espectros para Diseño Sismico lado Corto (eje X)



Espectro para Diseño popr Sismo lado Largo (Eje Y)



Espectros de diseño cuando se aplica el Análisis Dinámico Modal de las NTCDs-2004:

En el capítulo 3 de las NTCDs-2004 se establece un criterio para construir el espectro de diseño cuando se aplique análisis dinámico modal para esclarecer en que consiste el método, se demuestra un fragmento de la normatividad, en donde se especifican las restricciones y los parámetros para construir dichos espectros:

Quando se aplique el análisis dinámico modal que especifica el Capítulo 9, se adoptará como ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico, "a", expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, la que se estipula a continuación:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 + (c - a_0) \frac{T}{T_a} ; & \text{si } T < T_a \\
 a &= c ; & \text{si } T_a \leq T \leq T_b \\
 a &= qc ; & \text{si } T > T_b
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

donde

$$q = (T_b/T)^r \tag{3.2}$$

Los parámetros que intervienen en estas expresiones se obtienen de la tabla 3.1.

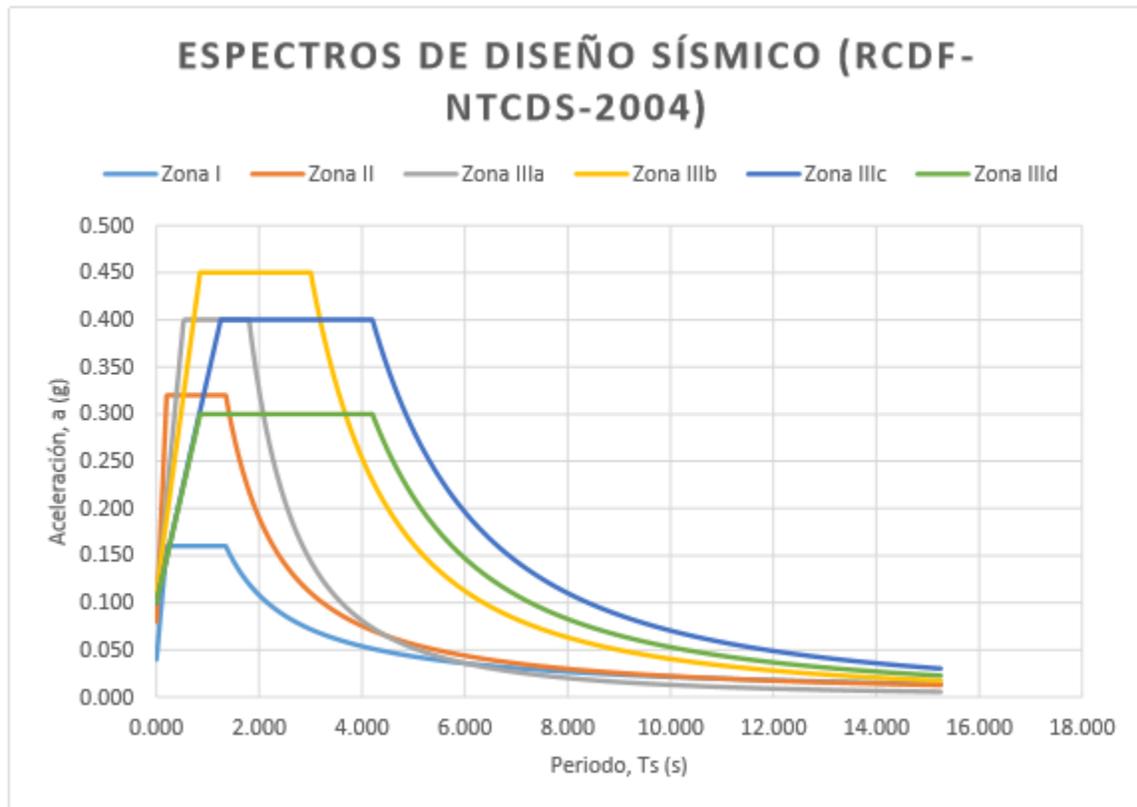
Tabla 3.1 Valores de los parámetros para calcular los espectros de aceleraciones

Zona	c	a ₀	T _a ¹	T _b ¹	r
I	0.16	0.04	0.2	1.35	1.0
II	0.32	0.08	0.2	1.35	1.33
III _a	0.40	0.10	0.53	1.8	2.0
III _b	0.45	0.11	0.85	3.0	2.0
III _c	0.40	0.10	1.25	4.2	2.0
III _d	0.30	0.10	0.85	4.2	2.0

¹ Periodos en segundos

Con base a lo establecido en el cuerpo de la norma se obtuvieron los espectros de aceleración para cada una de las zonas sísmicas, validos cuando se aplique un analisis dinámico modal, los espectros obtenidos tienen como característica principal la de ser

robustos y tener una reducción por sobre resistencia incluida. Por otro lado cabe mencionar que los espectros han sido creados para ser usados en edificios convencionales como oficinas, escuelas, entre otras edificaciones de una ciudad como la nuestra; en el caso de naves industriales, estos espectros no son los adecuados.



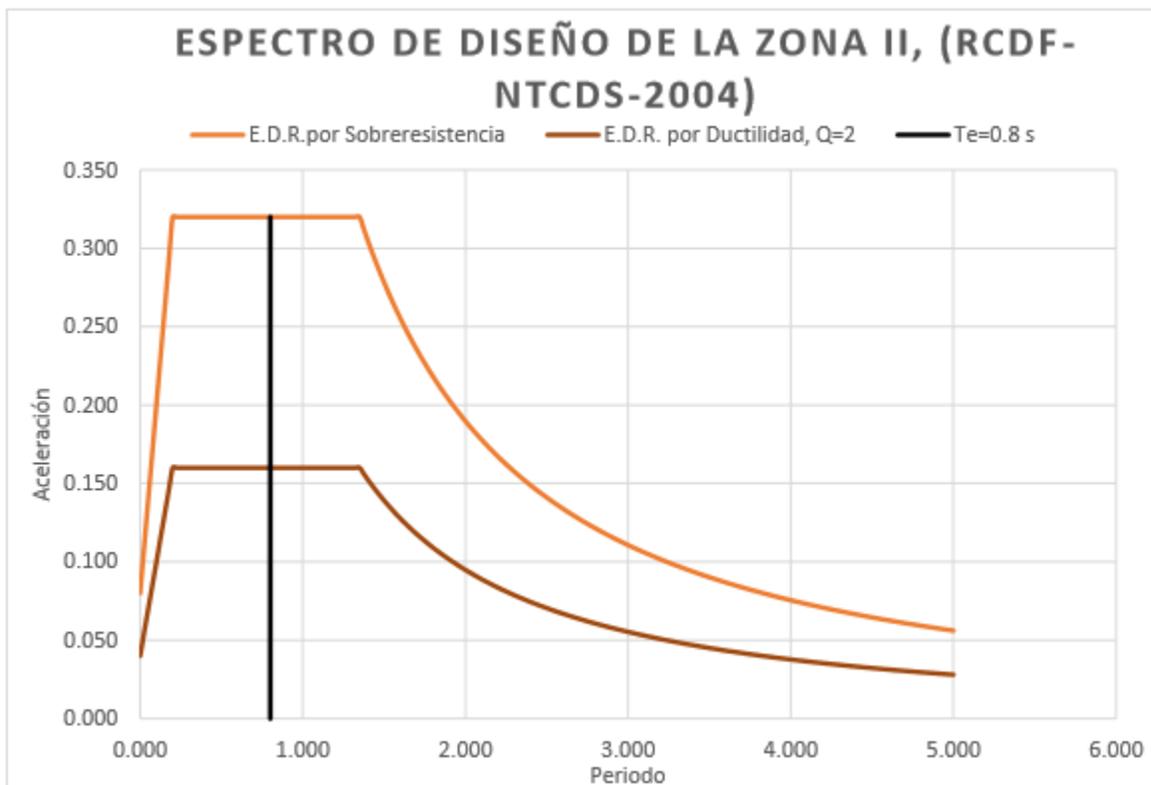
Conociendo la ubicación y el periodo de la estructura (T_e), podemos entrar en el espectro de diseño correspondiente y obtener mediante una extrapolación el valor de la aceleración, (a) para un modelo idealizado de la estructura, con este valor podemos calcular la fuerza sísmica ($F_{sismica}$), regida por la segunda ley de Newton y en la que se encuentra involucrado un parámetro de alta importancia y que se conoce como coeficiente sísmico, con el cual se puede obtener el cortante basal.

$$F_{sismica} = m * a = \frac{W}{g} * a = W * \frac{a}{g} = W * c$$

El coeficiente sísmico (c) puede definirse como el cociente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse que actúa en la base de la edificación por efecto del sismo, V_0 entre el peso de la edificación sobre dicho nivel, W_0 y el cual deberá tomarse de acuerdo al tipo de zona en que se encuentre la edificación cuando se aplique un análisis modal. La normatividad menciona lo siguiente:

“El coeficiente sísmico para las edificaciones clasificadas como el grupo B en el artículo 139 del Reglamento se tomará igual a 0.16 en la zona I, 0.32 en la II, 0.40 en la zona III_a y III_c, 0.45 en la III_b y 0.30 en la III_d, a menos que se emplee el método simplificado de análisis, en cuyo caso se aplicaran los coeficientes que fija el capítulo 7 en la tabla 7.1. Para las estructuras del grupo A se incrementa el coeficiente sísmico en 50%.”

De acuerdo con lo mencionado en la Norma a continuación se mostrara el espectro de diseño correspondiente a la zona II y se le aplicara la reducción por ductilidad aplicándole un factor de comportamiento sísmico $Q=2$:



Capítulo VI. Conclusión.

Del capítulo anterior se puede obtener las siguientes conclusiones:

Como podemos observar al construir el espectro de diseño por el criterio de la sección 3 con una aceleración $a=0.16g$, correspondiente a un periodo de la estructura, $T_e=0.8$ segundos, el cual nos lleva a obtener una sollicitación de fuerzas sísmicas conservador, lo que se traduce en una solución económica en lo que respecta al diseño estructura.

La ductilidad disminuye el efecto de la aceleración, sin embargo, considerar una reducción por ductilidad compromete a diseñar una estructura con un factor de comportamiento sísmico igual con 2, lo que significa que los elementos estructurales que componen la estructura tendrán una relación de deformación equivalente al factor de comportamiento sísmico.

Por otro lado, los espectros obtenidos cuando se aplica IDSE en los dos sentidos (largo y corto) de la estructura denotan resultados de aceleraciones relativamente semejante. Los resultados del espectro obtenido con el apéndice A son: **Sentido corto $T''_e= 1.21 s$ y $a=0.141g$, sentido largo $T''_e= 1.35 s$ y $a=0.154g$** . Los resultados obtenidos denotan un incremento mínimo de la aceleración, pero no es mayor al de la sección 3 de las NTCDS-2004, por lo que el dimensionamiento estructural será semejante.

Las mesetas del espectro obtenido con efectos de IDSE inicia en un periodo aproximado a 0.46 s, mientras que la meseta del espectro obtenido cuando se aplique análisis dinámico modal inicia con 0.2, la rama descendente inicia en 1.4 s aproximadamente para ambos criterios. Lo que se traduce en rangos de aceleraciones máximas para rangos de periodos de oscilaciones semejantes.

De acuerdo con el trabajo en general se obtiene las siguientes conclusiones:

- México en general tiene una gran actividad sísmica debido a que se encuentra rodeado de 5 placas tectónicas, que se encuentran en constante actividad en el

océano pacífico, y se ve reflejado en fallas geológicas, en sismicidad y vulcanismo dentro del país.

- Por lo que respecta a la Ciudad de México, se ve afectada por sismos que van desde pequeña a gran escala ya que su magnitud se ve afectada (amplificada) gracias al tipo de suelo que cuenta.
- Las propiedades dinámicas del suelo necesarias para el criterio IDSE se pueden obtener por medio de pruebas de laboratorio (propagación de ondas, péndulo de torsión libre, triaxial cíclica, corte simple cíclico, entre otros) así como pruebas en campo.
- Los suelos blandos amplifican los periodos mayores que un suelo rígido.
- Debido a los efectos viscosos de amortiguamiento, la resistencia dinámica de las arcillas es mayor que su resistencia estática gracias a su comportamiento ante acciones dinámicas y estáticas.
- El utilizar un sistema de un grado de libertad para el análisis IDSE es el adecuado ya que, al considerar una masa, un resorte y un amortiguador, se puede ver el fenómeno físico y expresarlo con la segunda ley de Newton; donde el resorte aporta la elasticidad al sistema y se encarga de regresarlo a su posición de equilibrio y el amortiguador se encarga de disipar la energía aportada por el exterior.
- La interacción dinámica suelo estructura esta conformada por la interacción inercial y cinemática del sistema.
- Los fenómenos de rotación y traslación de una cimentación rígida pueden ser analizado mediante un sistema de un grado de libertad.
- El modelo que mejor representa el comportamiento viscoelástico del suelo, es el modelo de Kelvin Voigt, el cual está compuesto por una unidad de Hooke y una de Newton (resorte y amortiguador).
- La NTCD-2004 se proponen mapas para la obtención del periodo predominante del suelo y la profundidad de la capa dura aproximada; pero estos valores son indicativos, por lo cual se deben tomar como tal.

- Los tipos de suelos en la Ciudad de México principalmente se dividen en tres zonas, los cuales son: lomas, transición y lago; por lo que en la zona de transición se presentan características mixtas, entre la zona de lago y de lomas por lo que hace que el perfil estratigráfico no tenga un comportamiento “no lineal” esto es ya que presenta una heterogeneidad en sus materiales. Y cabe mencionar que las teorías propuestas para el análisis sísmico que se encuentran en la NTCDS-2004 toman en cuenta modelos de suelo homogéneo.
- Los parámetros dinámicos del suelo más importantes en el diseño sísmico que se aplican en el criterio del apéndice A de la NTCDS-2004 son: el periodo predominante del suelo, el módulo de rigidez dinámico del suelo, la relación de Poisson y la velocidad de onda de corte.
- El análisis IDSE representado en el apéndice A, incluye el uso de espectros elásticos de respuesta del suelo con el que se toma en cuenta el efecto de sitio y trata de representar de una manera más realista los verdaderos niveles de demanda y los niveles de amplificación que se producen.
- Los resultados obtenidos de evaluar la ecuación $(T_e T_s / H_s H_e > 2.5)$ denotan que los efectos de IDSE se podrán despreciar en el caso de estructuras de poca altura desplantadas en zonas donde la capa dura este a nivel superficial, sin embargo, es conveniente mencionar que esta condición es difícil que se logre en cualquiera de las zonas geotécnicas (Lomas, Transición y Lago) debido a que es una condición difícil de encontrar en la Ciudad de México.
- El criterio del apéndice A es iterativo, sin embargo, en ninguno de los apartados de la normatividad sísmica se menciona, lo cual hace que se complique la aplicación.
- El período efectivo del sistema se evalúa mediante iteraciones porque los resortes K_x y K_r tienen que ser evaluados para una excitación armónica de frecuencia $\omega'_e = \omega_e$ esto es, $\omega'_e = \frac{2\pi}{T_e}$.
- La rigidez estática representa el grado de deformación del suelo ante la rigidez de la condición geométrica de la cimentación.

- Las oscilaciones de la estructura en traslación horizontal generan ondas S, mientras que las de cabeceo originan primordialmente ondas P.
- Los resultados del modelo ensayado dieron valores de frecuencia fundamentales predominantes por ondas de compresión en el sentido corto de la estructura, por lo cual, existe mayor probabilidad de volteo que de traslación horizontal.
- Los espectros obtenidos por el cap. 3 y el apéndice A (NTCDS, 2004) presentan las siguientes características:
 - El criterio del apéndice A es un procedimiento de análisis muy elaborado y difícil de aplicar.
 - Los valores de los factores de reducción por sobrerresistencia R establecida en el apéndice A no tienen justificación y están calibrados para arrojar resultados similares a los del cap. 3 (NTCDS, 2004).
 - El criterio del apéndice A y del cap. 3 (NTCDS, 2004) proporcionan parámetros de diseño similares.
 - Los espectros del cuerpo de la Norma solo funcionan para estructuras convencionales.
- La propuesta del apéndice A permitió llegar a diseños menos conservadores y racionales con respecto al procedimiento tradicional de las NTCDS-2004 que se ha venido utilizando sin grandes modificaciones en los últimos 15 años aproximadamente.
- El objetivo del presente trabajo se cumple ya que se fundamentó el modelo IDSE, se mostró la importancia del análisis en un ejemplo que engloba nuestra normatividad en la Ciudad de México, dando como resultado que es importante tomar en cuenta más variables que representan al fenómeno físico para tener diseños adecuados y asequibles.

Por último, de acuerdo con la hipótesis: ***“¿Qué tantas variaciones tienen los resultados obtenidos cuando se aplica el Cuerpo de la Norma Técnica Complementaria para Diseño por Sismo del RCDF04 y cuando se aplica el Apéndice de dichas Normas?***

Se responde que hay una variación muy importante que debe ser considerado por el ingeniero que se encargue del diseño estructural, ya que de acuerdo a lo manejado en este documento se está haciendo un diseño más certero al utilizar el apéndice A (que considera el análisis IDSE) ya que utiliza parámetros dinámicos del suelo que quitan incertidumbre al modelo y arrojan valores más apegados al fenómeno físico; mientras que los resultados obtenidos en el cuerpo de la norma, no están mal, pero tiene un grado mayor de incertidumbre al no considerar más variables importantes que representan al fenómeno físico haciendo que el diseño hablando económicamente sea más costoso.

Referencias.

Referencias Bibliográficas.

Aguilar B., H., Galicia M., Pérez-Rocha, L., Avilés, J., Veitez L., & Salazar M. (2003). **“Efecto del hundimiento regional en las propiedades dinámicas del suelo”**. XII Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica . Boston: Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos.

Avilés, Javier (1991). **“Respuesta sísmica de un sistema suelo estructura”**. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7,1, (pp 29-43). Obtenido en: <file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Goetecnia/Articulos/Respuesta%20Sismica%20de%20un%20sistema%20suelo-estructura.pdf>

Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. (1996). En **“Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth, Soil Dynamics and Earthquake Engineering”** (págs. Vol. 15, 1127).

Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. (1 de 3 de 2004). Obtenido de **“Bases para las nuevas disposiciones reglamentarias sobre interacción dinámica suelo-estructura”**: <http://goo.gl/ajvltO>

Botero, Carlos. Jaramillo, Diego & Rochel, Roberto (7 de mayo 2004). **“Evaluación de los efectos inerciales de interacción dinámica suelo-estructura para edificaciones ubicadas en Medellín”**. Revista Universidad EAFIT. Vol.40 No. 134. (pp 90-104). Obtenido de: <file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Goetecnia/Articulos/Evaluacion%20de%20los%20efectos%20inerciales%20de%20la%20ISED.pdf>

Bozzo, Luis M. & H. Barbat, Alex. (2000). “**Diseño sismo resistente de edificios, Técnicas convencionales y avanzadas**”. Editorial Reverte, Barcelona, España.

Obtenido en:
<file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Gootecnia/Zeaaver%20y%20Kramer/disec3b1o-sismorresistente-de-edificios-escrito-por-luis-m-bozzo-rotondo-alex-h-barbat.pdf>

Carrillo, León Wilmer Julian. (11 de junio de 2009). “**Estimación de los periodos naturales de vibración de viviendas de baja altura con muros de concreto**”. Vol.19-1, (pp 39-54) Facultad de ingeniería, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia.

Obtenido en:
<file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Estructuras/Estimacion%20de%20los%20periodos%20Naturales%20de%20Vibracion%20de%20Viviendas%20de%20Baja%20Altura%20con%20Muros%20de%20Concreto%20.pdf>

Cervantes, Ruiz Miguel & Blanco, Diaz Elena. (septiembre del 2002). “**Mecánica de Estructuras Libro 2 Métodos de Análisis**”. 2ª. Edición. Editorial UPC. Barcelona, España.

Obtenido en:
<file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Estructuras/Mecanica%20de%20Estructuras.pdf>

Deméneghi C., A. (2013). “**Apuntes de la clase mecánica del medio continuo del posgrado de ingeniería**”. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Deméneghi, A., Magaña, R., & Saginés, H. (1986). “**Apuntes de mecánica del medio continuo II**” (págs. 1-4). México, D. F.: Universidad Nacional Autónoma de México.

Diaz, A. (2005). “En **Dinámica de Suelos**” (págs. 57-59). México: Limusa, S. A. de C.

V. Esteva, L. (1980). X Reunión Nacional de Mecánica de Suelos. Excitaciones sísmicas en estructuras y cimentaciones (págs. 1-18). Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, A. C.

Herrera, B. Leonardo. (2013). Tesis: “**Evaluación de la interacción Dinámica Suelo-Estructura e edificaciones construida en ladera**”. Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín Colombia.

Isidoro, Coyolt Carlos (marzo 2016). “**Interacción Dinámica Suelo-Estructura**”. Universidad Nacional Autónoma de México. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. México.

Jaramillo, Aristóteles. Piña, José & Aguilar, Raúl. (14-16 de noviembre del 2012). “**Aplicación del método de cocientes espectrales para la reconfiguración detallada del mapa de Isoperiodos en la cuenca del valle de México**”. XXVI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica. Cancún, Quintana Roo (pp 1-6).

Juarez B., O. I. (2014). En Tesina: “**Procedimiento para obtener velocidades de onda (V_p y V_s) en campo con sonda suspendida**” (págs. 5-10). México: Universidad Nacional Autónoma de México. Obtenido de [HTTP://WWW.PTOLOMEO.UNAM.MX:8080/XMLUI/HANDLE/132.248.52.1_00/6931](http://WWW.PTOLOMEO.UNAM.MX:8080/XMLUI/HANDLE/132.248.52.1_00/6931)

Levi E. (1980). “**Elementos de mecánica del medio continuo**”. Limusa. Linda M”. (17 de 09 de 2015). Obtenido de Relación de los sismos ocurridos en la ciudad de México y sus efectos: <http://goo.gl/AmEXsY>

Meek, J., & J. P. Wolf. (1991). “**Insights on cutoff frequency for foundation on soil layer. Earthquake Engineering and Structural Dynamics**”, Vol. 20, 651-665.

Mena U., & Pérez-Rocha, L. (2008). “**En Manual de diseño de obras civiles, Diseño por Sismo**” (pág. Sección 3.1 y 3.5). México: Comisión Federal de Electricidad.

Miranda, Eduardo. “**Conceptos básicos sobre interacción dinámica suelo-estructura**” (pp 112-116). Centro Nacional de Prevención de Desastres. Obtenido en: <file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Estructuras/Conceptos%20basicos%20sobre%20IDSE.pdf>

Moreno de Luca, Leonardo. (2010). “**Efectos asociados con la interacción suelo-estructura en el diseño de edificaciones de concreto reforzado en Bucaramanga**”. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Ingeniería Civil , Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-

NTCDS. (2004). “**Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo**”. En Espectros para diseño sísmico (págs. 55-77). Distrito Federal.

Orea, Gonzales Agustín. (agosto 2012). Tesis “**Metodología para el diseño de una cimentación totalmente compensada**”. FI UNAM, Ciudad Universitaria.

Salinas, Basualdo Rafael. “**Introducción a la Dinámica Estructural**”, Ingeniería Antisísmica. Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería de España. Obtenido en: file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Estructuras/Ing%20Antisismica-DINAMICA-ESTRUCTURAL-ING_SALINAS.pdf

Sierra, García Laura. (junio 2014). Tesis: “Evolución de la respuesta dinámica en el tiempo por efecto del hundimiento regional considerando un sistema suelo-estructura atípico”. Universidad Nacional Autónoma de México, Programa de Maestría y doctorado de ingeniería. México.

Steven, L. Kramer. (1996) “**Geotechnical Earthquake Engineering**”. Universidad de Washington. Editorial: Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. Obtenido en: <file:///C:/Users/mejia/Dropbox/Tesis/revisadas/Gootecnia/Zeaaver%20y%20Kramer/tambien/Geotechnical%20Earthquake%20Engineering%20%20Kramer%20Dinamica%20de%20Suelos.pdf>

Zeevaert, L. (1980). "**Interacción Suelo-Estructura de Cimentación**". En L. Zeevaert, Comportamiento sísmico de cimentaciones (págs. 93-110). México: Limusa, S. A.

Zeevaert, L. (1983). "**Foundation Engineering for difficult subsoil conditions**". 2ª. Edición. Van Nostrand Reinhold Company. Toronto London Melbourne. Canadá.

Índice de Imágenes y Tablas

Ilustración 5 Transmisión de ondas en un medio infinito (Colindres, 1983; Isidro, 2012; Modelo de Kelvin-Voigt, 2014; ondas sísmicas, 2014).

Ilustración 6. Lagos que conformaban el Valle de México. (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/9a/Valley_of_Mexico_c.1519-fr.svg/250px-Valley_of_Mexico_c.1519-fr.svg.png)

Ilustración 7 Cuenca de México en el Cuaternario Superior (De acuerdo con Moser, 1975, modificado por José Juan Zamorano Orozco)

Ilustración 8 Placas Tectónicas que rodean México. (http://netmaps.mx/wp-content/uploads/2012/04/Mexico_Placas_tectonicas.jpg)

Imagen 63 Representación de un Sistema de Un Grado de Libertad.

Imagen 64 Representación de un comportamiento Elástico-Lineal.

Imagen 65 Ecuaciones para determinar K según la Mecánica de Materiales.

Imagen 66 Grafica de la Prueba "Carga-Descarga".

Imagen 67 Grafica Esfuerzo-Deformación (material dúctil y frágil).

Imagen 68 Estructura idealizada, oscilador visco elástico de 1GDL.

Imagen 69 Movimientos Periódico y No Periódico: (a) Movimiento Armónico Simple; (b) Movimiento Periódico General; (c) Movimiento Transitorio (Responsable por Fuerzas de Impacto); (d) Movimiento Transitorio (Movimiento Telúrico). (Kramer, Dinámica de Suelos, Apéndice A, página 528)

Imagen 70 Características Cuantitativas Importantes del MAS. (<https://www.fisicalab.com/apartado/concepto-oscilador-armonico>).

Imagen 71 Vector Rotacional representando al MAS con periodo angular cero. (Kramer, Dinámica de Suelos, Apéndice A, página 530).

Imagen 72 Sistema Vibratorio y Sistema Oscilatorio.

Imagen 73 Sistema discreto de 2 grados de libertad y sistema continuo.

Imagen 74 Sistema definido y Sistema semi-definido.

Imagen 75 Sistema básico de 1GDL y Diagrama de cuerpo libre del Sistema básico de 1GDL.

Imagen 76 Representación gráfica del desplazamiento, la velocidad y la aceleración. (Kramer, Dinámica de Suelos, Apéndice A, página 535).

Imagen 77 Representación gráfica de los vectores rotacionales desplazamiento, velocidad y aceleración. (Kramer, Dinámica de Suelos, Apéndice A, página 535).

Imagen 78 Modelo de Winkler

Imagen 79 Modelo de Maxwell.

Imagen 80 Diagrama deformación-tiempo.

Imagen 81 Modelo de Kelvin-Voigt

Imagen 82 Diagrama deformación-tiempo.

Imagen 83 Modelo de Burgers-Diagrama deformación-tiempo.

Imagen 84 Estado de Esfuerzo en un elemento

Imagen 85 Estrato de Suelo Blando.

Imagen 24 Resumen de diferentes amplitudes de deformación angular (Colindres, 1983, pág. 184; Fernández, 2014, pág. 13; Flores, 2008, pág. 1).

Imagen 25 Respuesta dinámica de una edificación sobre una roca y sobre suelo blando (Fernández S., 2013)

Imagen 866 Diferencia del movimiento en distintos puntos de un sistema suelo-cimentación-estructura (Fernández S., 2013).

Imagen 877 Diferencias principales entre base deformable e indeformable.

Imagen 88 Respuesta sísmica de una estructura en roca.

Imagen 89 Modelo para una estructura cimentada en roca.

Imagen 90 Modificación del movimiento por la profundidad en roca.

Imagen 91 Modificación del movimiento por la presencia del Suelo.

Imagen 92 Modificación del movimiento por efectos de sitio.

Imagen 93 Modificación del movimiento por la excavación

Imagen 94 Modificación del movimiento por interacción cinemática.

Imagen 95 Modificación del movimiento por interacción inercial.

Imagen 96 Estrato de espesor h_n

Imagen 97 Movimiento de una masa de un grado de Libertad.

Imagen 98 DCL de una losa.

Imagen 99 Fuerza externa equivalente a la excitación sísmica.

Imagen 100 Sistema de un grado de Libertad.

Imagen 101 Vibraciones libres sin amortiguamiento.

Imagen 102 Amortiguamiento Crítico.

Imagen 103 Vibración libre con amortiguamiento.

Imagen 104 Desplazamiento en función del ángulo de fase.

Imagen 105 Determinación del ángulo de fase.

Imagen 106 Vibraciones de un bloque vertical.

Imagen 107 Sistema de 1GDL.

Imagen 108 Sistema de un grado de libertad.

Imagen 109 Variación del Factor de Amplificación.

Imagen 110 Rotación de una masa de un grado de libertad.

Imagen 111 DCL de la cimentación.

Imagen 112 Espectro sísmico de respuesta del terremoto de San Fernando (EE.UU., febrero de 1971) Representación trilogaritmica ($\xi = 0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$)

Imagen 113 Sistema Estructura-Suelo (Mena y Perez Rocha, 2008).

Imagen 114 Grados de Libertad del Sistema Equivalente (Mena y Rocha, 2008)

Imagen 115 Rotación de la base de la cimentación.

Imagen 116 Regionalización Sísmica de la República Mexicana.

Imagen 117 Representación del perfil de la cuenca de la CDMX.

Imagen 118 Zonificación del D.F. para fines de diseño por sismo de acuerdo al RCDF.

Imagen 119 Mapa de la Zonificación del D.F.

Imagen 120 Periodo predominante del suelo Ts.

Imagen 121 Valores de H, en metros.

Imagen 122 Perfil estratigráfico

Imagen 123 Isométrico de la Estructura.

Imagen 124 Tabla Rigideces y amortiguamientos de cimentaciones someras o con pilotes (NTCDS, RCDF 2004).

Imagen 65 Corte X-X' e Y-Y' de la estructura y el suelo

Tablas:

Tabla 1 Valores del N.A.F. y de la aceleración de la gravedad.

Tabla 2 Información de pruebas de campo y laboratorio.

Tabla 3 Propiedades Dinámicas del Suelo.

Tabla 4 Cálculos para obtener Ts.

Tabla 6 Resumen de Cálculos promedio del suelo.

Índice de Símbolos.

A=área de la superficie neta de cimentación

a=ordenada de los espectros de diseño, como fracción de la aceleración de la gravedad
a₀=valor de a que corresponde a T=0
a_{mín}=resistencia mínima de diseño
c'=factor por el que se multiplican los pesos de los apéndices a la altura de desplante
c=coeficiente sísmico

C_r=amortiguamiento del suelo en el modo de rotación de la cimentación.
C_{vi}=amortiguamiento del pilote o zapata i en traslación en traslación vertical

C_x amortiguamiento del suelo en el modo de traslación horizontal de la cimentación
C_{xi}=amortiguamiento del pilote i en traslación horizontal
d=diámetro del pilote
d=diferencia en valores de los cocientes a/Q', expresados como fracción de la gravedad, que sería necesario aplicar en cada uno de los dos sentidos opuestos de una dirección dada, para que la estructura fallara o fluyera plásticamente

D=profundidad de desplante de la cimentación
d_i=espesor del i-ésimo estrato de la formación del suelo

E_p=módulo de elasticidad del material del pilote

E_s=módulo de elasticidad del suelo

g=aceleración de la gravedad

G=módulo de rigidez medio del suelo de soporte

G_i=módulo de rigidez al corte del i-ésimo estrato de la formación de suelo

G_s=módulo de rigidez dinámico promedio

H_e=altura efectiva de la estructura vibrando en su modo fundamental

H_s=profundidad de exploración hasta el primer estrato duro

H_s=profundidad de los depósitos firmes profundos en el sitio de interés

I=momento de inercia de la superficie neta de cimentación

k=variable para calcular el factor de reducción por ductilidad

K_r= rigidez del suelo en el modo de rotación de la cimentación

K_{vi}=rigidez del pilote o zapata i en traslación vertical

K_x=rigidez del suelo en el modo de traslación horizontal de la cimentación

K_{xi}=rigidez del pilote i en traslación horizontal

L =longitud del pilote

NAF =Nivel de Aguas Freáticas

p =variable usada para el cálculo de a y de Q'

Q =factor de comportamiento dúctil

R =factor de reducción por sobrerresistencia

R_r =radio del círculo equivalente a la superficie de desplante para el modo de rotación

R_x =radio del círculo equivalente a la superficie de desplante para el modo de translación

$T_{efe}=T''e=To$ =período efectivo del sistema suelo-estructura en la dirección de análisis

T_e =período fundamental de la estructura supuesta con base rígida, en la dirección que se analiza

T_e =período para el primer modo de vibrar de la estructura

$T_s=T_{s1}$ =período dominante más largo del terreno en el sitio de interés

T_s =Período predominante del suelo

$V''_{o,1}$ =fuerza cortante basal de la estructura corregida por interacción con el suelo, en la dirección que se analiza

V = fuerza cortante horizontal en el nivel que se analiza

$V_{o,1}$ =fuerza cortante basal de la estructura supuesta con base rígida, en la dirección que se analiza

V_o =fuerza cortante horizontal en la base de la construcción

V_s =velocidad de ondas de corte

W_0 =Peso de la estructura para el 60% de su confinamiento

W_e =peso efectivo de la estructura vibrando en su modo fundamental

β =factor reductivo por amortiguamiento suplementario, debido a la interacción suelo-estructura

γ_1 =peso volumétrico del i -ésimo estrato de la formación de suelo

γ_s =peso volumétrico medio del suelo

γ_s =peso volumétrico promedio del suelo

λ = variable para el cálculo de β

ν =relación de Poisson

ω =frecuencia

$\zeta_e = \zeta''_e$ =amortiguamiento efectivo del sistema suelo-estructura en la dirección de análisis

ζ_e =fracción de amortiguamiento crítico de la estructura supuesta con base rígida, en la dirección que se analiza

ζ_r = amortiguamiento efectivo del sistema suelo-estructura en la dirección de análisis

ζ_s =amortiguamiento histerético del suelo

ζ_x =coeficiente de amortiguamiento del suelo en el de translación

Apéndice "Ejemplo capítulo V".

Parámetros de la estructura						
W_{total}	T_e	ζ_e	H_e	Q_e	$W_e=0.7W_{Total}$	$Me=W_e/g$
kN	s	%	m		kN	kN*s²/m
64,172.70	0.80	5.00	14.70	2.00	44,920.89	4,579.09

Parámetros del Suelo							
T_s	H_s	V_s	ζ_e	$\nu \geq 0.45$	V_s	G_s	ρ_s
s	m	KN/m³	%		m/s	kN/m²	KN*s²/m⁴
0.91	13.00	14.15	3.00	0.45	57.23	4,725.11	1.44
					$V_s = \frac{4H}{T_s}$	$G_s = \rho V_s^2$	$\rho_s = \frac{V_s}{9.81}$

Resultados del análisis de IDSE con la tabla de la NTCDS-2004 que se muestran a continuación, utilizando las ecuaciones referentes a cimentaciones someras.

CIMENTACIONES SOMERAS	$K_m = K_m^o (k_m - 2\zeta \eta_m c_m)$ y $C_m = K_m^o (\eta_m c_m + 2\zeta k_m) / \omega$; $m = x, v, r$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta_m = \omega R_m / V_s$; donde $V_s = 4H_s / T_s$ y $R_v = R_x$ $\eta_s = \pi R_x / 2H_s$ $\eta_p = \sqrt{2(1-\nu)} / (1-2\nu) \pi R_x / 2H_s$	
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coefficiente de Rigidez	Coefficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = \frac{8 G R_x}{2-\nu} \left(1 + \frac{R_x}{2 H_s}\right) \left(1 + \frac{2 D}{3 R_x}\right) \left(1 + \frac{5 D}{4 H_s}\right)$	$k_x = 1$	$c_x = \frac{0.65 \zeta \eta_{xs}}{1 - (1 - 2 \zeta) \eta_{xs}^2}$; si $\eta_{xs} = \eta_x / \eta_s \leq 1$ $c_x = 0.576$; si $\eta_{xs} = \eta_x / \eta_s > 1$
Vertical	$K_v^o = \frac{4 G R_v}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R_v}{H_s}\right) \left(1 + 0.5 \frac{D}{R_v}\right) \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D}{R_v}\right) \frac{D/H_s}{1 - D/H_s}\right]$	$k_v = 1$	$c_v = 0$; si $\eta_v < \eta_p$ $c_v = 0.85 \frac{1 + 1.85 (1 - \nu) D / R_v}{1 + 0.5 D / R_v}$; si $\eta_v \geq \eta_p$
Cabeceo	$K_r^o = \frac{8 G R_r^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{R_r}{6 H_s}\right) \left(1 + \frac{2 D}{R_r}\right) \left(1 + 0.71 \frac{D}{H_s}\right)$	$k_r = 1 - 0.2 \eta_r$	$c_r = \frac{0.5 \zeta \eta_{rp}}{1 - (1 - 2 \zeta) \eta_{rp}^2}$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p \leq 1$ $c_r = 0.3 \eta_r^2 / (1 + \eta_r^2)$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p > 1$
CIMENTACIONES CON PILOTES	$K_m = K_m^o k_m$ y $C_m = 2 K_m^o c_m / \omega$; $m = x, v$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta = \omega d / V_s$; donde $V_s = 4 H_s / T_s$ $\eta_s = \pi d / 2 H_s$ $\eta_p = 3.4 \eta_s / \pi (1 - \nu)$	
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coefficiente de Rigidez	Coefficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = d E_s \left(\frac{E_p}{E_s}\right)^{0.21}$	$k_x = 1$	$c_x = 0.8 \zeta$; si $\eta \leq \eta_s$ $c_x = 0.8 \zeta + 0.175 (E_p/E_s)^{0.17} \eta$; si $\eta > \eta_s$
Vertical	$K_v^o = 1.9 d E_s \left(\frac{L}{d}\right)^{0.67}$	$k_v = 1$; si $L/d < 15$ $k_v = 1 + \sqrt{\eta}$; si $L/d \geq 50$ Interpolar linealmente para $15 \leq L/d < 50$	$c_v = 0$; si $\eta \leq \eta_p$ $c_v = \frac{0.413 \left(\frac{L}{d}\right)^{0.33} \left(1 - e^{-(E_p/E_s)(L/d)^2}\right)^{0.8}}{1 + \nu}$; si $\eta > 1.5 \eta_p$ Interpolar linealmente para $\eta_p < \eta \leq 1.5 \eta_p$

Parámetros del suelo: $\zeta =$ amortiguamiento histerético, $\nu =$ relación de Poisson y $E_s = 2 G (1 + \nu) =$ módulo de elasticidad
Parámetros del pilote: $L =$ longitud, $d =$ diámetro y $E_p =$ módulo de elasticidad

Cimentacion (Cajon)						
	Df=	3.00	m			
	Area=	612	m ²			
	Ixx=	47754.36	m ⁴			
	Iyy=	20400.00	m ⁴			
Rigidez Estatica						
	<u>Corto</u>			<u>Largo</u>		
	Rx =	13.957	m	Rx =	13.96	m
	Rr =	15.703	m	Rr =	12.70	m
Horizontal Cabeceo	K'x=	770,587.16	kN-m	K'x=	770,587.16	kN-m
	K'r=	171,415,166.98	kN-m	K'r=	93,410,768.50	kN-m
Rigidez Dinamica						
Modo de vibracion: Horizontal	ω=	7.85	rad/s			
	η _x =	1.92		η _x =	1.92	
	η _s =	1.69		η _s =	1.69	
	η _{xs} =	1.14		η _{xs} =	1.14	
	η _{xs} >1	cx=	0.576	η _{xs} >1	cx=	0.576
	η _{xs} <=1	cx=	0.000	η _{xs} <=1	cx=	0.000
		kx=	1		kx=	1
Cimentaciones someras	Kx=	719,573.89	kN/m	Kx=	719,573.89	kN/m
	Cx=	114,140.37	kN*s/m	Cx=	114,140.37	kN*s/m
Modo de vibracion: Cabeceo	η _r =	2.16		η _r =	1.74	
	η _p =	6.29		η _p =	5.09	
	η _{rp} =	0.3425		η _{rp} =	0.3425	
	η _{rp} >1	cr=	0.00000	η _{rp} >1	cr=	0.00000
	η _{rp} <=1	cr=	0.00577	η _{rp} <=1	cr=	0.00577
		kr=	0.56898		kr=	0.6515
Cimentaciones someras	Kr=	97,403,788.32	kN/m	Kr=	60,804,546.75	kN/m
	Cr=	1,016,654.58	kN*s/m	Cr=	584,583.85	kN*s/m

Para obtener el periodo y amortiguamiento efectivos del apéndice A de las NTCDS-2004, en el apartado A.6.3 se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{T}_e = \sqrt{T_e^2 + T_x^2 + T_r^2} \quad (A.20)$$

donde

$$T_x = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{W_e}{K_x}} \quad (A.21)$$

$$T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{W_e (H_e + D)^2}{K_r}} \quad (A.22)$$

$$\tilde{\zeta}_e = \zeta_e \left(\frac{T_e}{\tilde{T}_e} \right)^3 + \frac{\zeta_x}{1 + 2\zeta_x^2} \left(\frac{T_x}{\tilde{T}_e} \right)^2 + \frac{\zeta_r}{1 + 2\zeta_r^2} \left(\frac{T_r}{\tilde{T}_e} \right)^2 \quad (A.23)$$

donde

$$\zeta_x = \frac{\pi C_x}{\tilde{T}_e K_x} \quad (A.24)$$

$$\zeta_r = \frac{\pi C_r}{\tilde{T}_e K_r} \quad (A.25)$$

De lo anterior se obtiene los siguientes valores:

Periodos Naturales de la estructura	$T_x=$	0.5012	segundos		$T_x=$	0.5012	segundos
	$T_r=$	0.7625	segundos		$T_r=$	0.9651	segundos
Periodo, amortiguamiento y frecuencia efectiva del sistema	$T_e''=$	1.2135	segundos		$T_e''=$	1.3501	segundos
	$\omega'_e=$	5.18	rad/s		$\omega'_e=$	4.65	rad/s
	$\zeta_x=$	0.4106			$\zeta_x=$	0.3691	
	$\zeta_r=$	0.0270			$\zeta_r=$	0.0224	
	$\zeta'_e=$	0.077			$\zeta'_e=$	0.062	

Para la obtención de los espectros de diseño se ocuparon del apéndice A las siguientes formulas:

$$a = \begin{cases} a_o + (\beta c - a_o) \frac{T}{T_a}; & \text{si } T < T_a \\ \beta c; & \text{si } T_a \leq T < T_b \\ \beta c p \left(\frac{T_b}{T} \right)^2; & \text{si } T \geq T_b \end{cases} \quad (A.1)$$

donde

$$p = k + (1-k)(T_b/T)^2; \text{ y}$$

β es un factor de reducción por amortiguamiento suplementario, que es igual a uno cuando se ignora la interacción suelo-estructura.

El coeficiente de aceleración del terreno, a_o , el coeficiente sísmico c , el coeficiente k y los periodos característicos T_a y T_b del espectro de aceleraciones se obtendrán en función del periodo dominante del sitio, usando las siguientes expresiones:

$$a_o = \begin{cases} 0.1 + 0.15 (T_s - 0.5); & \text{si } 0.5 \leq T_s \leq 1.5 \text{ s} \\ 0.25; & \text{si } T_s > 1.5 \text{ s} \end{cases} \quad (A.2)$$

$$c = \begin{cases} 0.28 + 0.92 (T_s - 0.5); & \text{si } 0.5 < T_s \leq 1.5 \text{ s} \\ 1.2; & \text{si } 1.5 < T_s \leq 2.5 \text{ s} \\ 1.2 - 0.5 (T_s - 2.5); & \text{si } 2.5 < T_s \leq 3.5 \text{ s} \\ 0.7; & \text{si } T_s > 3.5 \text{ s} \end{cases} \quad (A.3)$$

$$T_a = \begin{cases} 0.2 + 0.65 (T_s - 0.5); & \text{si } 0.5 < T_s \leq 2.5 \text{ s} \\ 1.5; & \text{si } 2.5 < T_s \leq 3.25 \text{ s} \\ 4.75 - T_s; & \text{si } 3.25 < T_s \leq 3.9 \text{ s} \\ 0.85; & \text{si } T_s > 3.9 \text{ s} \end{cases} \quad (A.4)$$

$$T_b = \begin{cases} 1.35; & \text{si } T_s \leq 1.125 \text{ s} \\ 1.2 T_s; & \text{si } 1.125 < T_s \leq 3.5 \text{ s} \\ 4.2; & \text{si } T_s > 3.5 \text{ s} \end{cases} \quad (A.5)$$

$$k = \begin{cases} 2 - T_s; & \text{si } 0.5 < T_s \leq 1.65 \text{ s} \\ 0.35 & \text{si } T_s > 1.65 \text{ s} \end{cases} \quad (A.6)$$

Para realizar los análisis sísmicos, las ordenadas espectrales de aceleración obtenidas con la ec. A.1 podrán ser reducidas por los factores de ductilidad, Q' , y de sobrerresistencia, R , de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$Q' = \begin{cases} 1 + (Q-1) \sqrt{\frac{\beta}{k} \frac{T}{T_a}}; & \text{si } T \leq T_a \\ 1 + (Q-1) \sqrt{\frac{\beta}{k}}; & \text{si } T_a < T \leq T_b \\ 1 + (Q-1) \sqrt{\frac{\beta p}{k}}; & \text{si } T > T_b \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde

Q es el factor de comportamiento sísmico que se fija en el Capítulo 5.

La reducción por sobrerresistencia está dada por el factor

$$R = \begin{cases} \frac{10}{4 + \sqrt{T/T_a}}; & \text{si } T \leq T_a \\ 2; & \text{si } T > T_a \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Si del análisis se encuentra que en la dirección que se considera, la fuerza cortante V_o es menor que $a_{\min} W_o$, se incrementarán todas las fuerzas de diseño en una proporción tal que V_o iguale a ese valor; los desplazamientos no se afectarán por esta corrección. a_{\min} se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 1$ s o 0.05 cuando $T_s \geq 1$ s.

Las ordenadas espectrales que resultan de la aplicación de las expresiones anteriores son para las estructuras del grupo B, y habrán de multiplicarse por 1.5 para las estructuras del grupo A.

$$\beta = \begin{cases} \left(\frac{\zeta_e}{\zeta_e} \right)^\lambda; & \text{si } \tilde{T}_e \leq T_b \\ 1 + \left(\left(\frac{\zeta_e}{\zeta_e} \right)^\lambda - 1 \right) \frac{T_b}{\tilde{T}_e}; & \text{si } \tilde{T}_e > T_b \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

La fuerza cortante basal de la estructura en la dirección de análisis, corregida por interacción con el suelo, se calculará con la expresión

$$\tilde{V}_o = a' W_o - (a' - \tilde{a}') W_e \quad (\text{A.15})$$

donde

W_o peso total de la estructura, incluyendo cargas muertas y vivas;

W_e peso efectivo de la estructura que se tomará como $0.7 W_o$, excepto para estructuras de un solo nivel, en que se tomará igual a W_o ;

a' ordenada espectral de diseño para el periodo fundamental de la estructura con base rígida, usando $\beta = 1$; y

\tilde{a}' ordenada espectral de diseño para el periodo efectivo del sistema suelo-estructura, \tilde{T}_e , reemplazando a Q por $(Q-1)T_e^2/\tilde{T}_e^2 + 1$ y usando

Espectros de diseño con IDSE						
En funcion del periodo dominante del sitio (Ts):						
$a_0=$	0.161299	$0.5 \leq T_s \leq 1.5$	λ Zona II= 0.5 λ Zona III= 0.6 $Q= 2$ ρ' lado corto= 0.9783 ρ' Sin IDSE= 0.8312 ρ' lado largo= 1.0000			
	0.25	$T_s > 1.5$				
$c=$	0.65597	$0.5 < T_s \leq 1.5$				
	1.2	$1.5 < T_s \leq 2.5$				
	1.99567	$2.5 < T_s \leq 3.5$				
	0.7	$T_s > 3.5$				
		Lado Corto		Lado Largo		
$Ta=$	0.465628	$0.5 < T_s \leq 1.5$	$a=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$	$a=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$
	1.5	$1.5 < T_s \leq 3.25$	0.5274	$T_a < T_e'' \leq T_b$	0.5900	$T_a < T_e'' \leq T_b$
	3.84	$3.25 < T_s \leq 3.9$	0.000	$T_e'' > T_b$	0.5273	$T_e'' > T_b$
	0.85	$T_s > 3.9$				
$Tb=$	1.350	$T_s \leq 1.125$	$Q'=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$	$Q'=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$
	1.090	$1.125 < T_s \leq 3.5$	1.8583	$T_a < T_e'' \leq T_b$	1.9078	$T_a < T_e'' \leq T_b$
	4.200	$T_s > 3.5$	0.000	$T_e'' > T_b$	1.908	$T_e'' > T_b$
$k=$	1.09	$0.5 \leq T_s \leq 1.65$	$R=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$	$R=$ 0.000	$T_e'' > T_b$
	0.35	$T_s > 1.65$	2.000	$T_e'' > T_a$	2.000	$T_e'' > T_a$
$\beta_{corto}=$	0.80393	$T_e'' \leq T_b$	$Q_\epsilon=$ 1.43458		$Q_\epsilon=$ 1.35114	
	0.000	$T_e'' > T_b$	$Q'_\epsilon=$ 1.3730		$Q'_\epsilon=$ 1.3188	
			$a''_\epsilon=$ 0.1920		$a''_\epsilon=$ 0.1999	
$\beta_{largo}=$	0.00000	$T_e'' \leq T_b$	$a'_\epsilon=$ 0.1419		$a'_\epsilon=$ 0.1546	
	0.899	$T_e'' > T_b$	$Vo''=$ 11358.504	kN	$Vo''=$ 11957.64	kN
			$Vo=$ 9105.6316	kN	$Vo=$ 9922.6779	kN
		$Vo''/Vo=$ 1.2474153		$Vo''/Vo=$ 1.2050819		

Espectros de diseño Sin IDSE					
		Lado Corto		Lado Largo	
$a=$	0.000	$T_e \leq T_a$	$a=$ 0.000	$T_e \leq T_a$	
	0.6560	$T_a < T_e \leq T_b$	0.6560	$T_a < T_e \leq T_b$	
	0.000	$T_e > T_b$	0.000	$T_e > T_b$	
$Q'=$	0.000	$T_e \leq T_a$	$Q'=$ 0.000	$T_e'' \leq T_a$	
	1.9572	$T_a < T_e \leq T_b$	1.9572	$T_a < T_e'' \leq T_b$	
	0.000	$T_e > T_b$	0.000	$T_e'' > T_b$	
$R=$	0.000	$T_e \leq T_a$	$R=$ 0.000	$T_e'' > T_b$	
	2.000	$T_e'' > T_a$	2.000	$T_e'' > T_a$	
$\beta_{corto}=$	1.00000				
$\beta_{largo}=$		$a''_\epsilon=$ 0.1640	$a''_\epsilon=$ 0.1640		
		$a'_\epsilon=$ 0.1640	$a'_\epsilon=$ 0.1640		
		$Vo''=$ 10523.764	kN	$Vo''=$ 10523.764	kN
		$Vo=$ 10523.764	kN	$Vo=$ 10523.764	kN
		$Vo''/Vo=$ 1		$Vo''/Vo=$ 1	