



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES CONTINUOS POR MODOS
DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR PARA SISTEMAS DE GRADO
RELATIVO TRES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JESÚS MENDOZA AVILA

TUTOR PRINCIPAL
DR. LEONID FRIDMAN, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

-

Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

-

Vocal: Dr. Fridman Leonid

-

1 er. Suplente: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel

-

2 do. Suplente: Dr. Castaños Luna Fernando

-

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de ingeniería, UNAM

TUTOR DE TESIS:
DR. LEONID FRIDMAN

FIRMA

A mi familia por su apoyo incondicional

Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas que han influido de alguna manera en el desarrollo de este trabajo:

A mi mamá Argelia, mi papá Vicente y mi tía Sara por todo el cariño y el apoyo que me dan.

Al Dr. Leonid Fridman y al Dr. Jaime Moreno por los conocimientos compartidos y la amistad brindada.

A los compañeros del grupo de Control por Modos Deslizantes por sus observaciones y comentarios hacia el trabajo realizado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) CVU 711867 por el financiamiento otorgado para mis estudios de maestría.

Índice general

Agradecimientos	VII
1. Introducción	11
1.1. Estado del arte	12
1.2. Motivación	12
1.3. Objetivos	13
1.4. Contribuciones	13
1.5. Organización de la tesis	14
1.6. Notación	14
2. Marco teórico	15
2.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	15
2.2. Homogeneidad ponderada	17
2.3. Enfoque Formas Generalizadas	18
2.3.1. Representación en suma de cuadrados	20
2.4. Control por Modos Deslizantes	20
2.4.1. Algoritmo Twisting Continuo	23
3. Algoritmo Twisting Continuo para sistemas de grado relativo tres	25
3.1. Planteamiento del problema	25
3.2. Algoritmo Twisting continuo para sistemas de grado relativo tres	26
3.3. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov	27
3.3.1. Sistema nominal	27
3.3.2. Sistema perturbado	34
3.4. Ajuste de las ganancias del controlador para cota arbitraria de la perturbación	36

3.5. Precisión del Algoritmo Twisting Continuo de tercer orden . . .	44
4. Función de Lyapunov para el Algoritmo Twisting Continuo de orden superior	47
4.1. Planteamiento del problema	47
4.2. Idea de construcción de funciones de Lyapunov	48
4.3. Ejemplo: Algoritmo Twisting Continuo	49
4.4. Función candidata de Lyapunov	51
5. Implementación: Péndulo de rueda inercial	55
5.1. Modelo matemático	56
5.2. Esquema de control	58
5.3. Resultados experimentales	59
6. Conclusiones	63
Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

Algunos de los problemas que se presentan en la implementación de controladores en sistemas físicos son la incertidumbre paramétrica, las dinámicas parásitas o no modeladas y las perturbaciones. Por lo tanto, se hace necesario el uso de controladores robustos que tengan un buen desempeño al implementarlos en sistemas inciertos.

Existen reportados en la literatura varios enfoques de control que buscan lidiar con sistemas inciertos (Rediseño de Lyapunov, *Backstepping*, Control basado en pasividad [Khalil, 2002]). Sin embargo, el Control por Modos Deslizantes (SMC) ha llegado a ser una de las técnicas más eficientes para estabilizar sistemas bajo ciertos tipos de incertidumbres ofreciendo, en teoría, una compensación exacta de perturbaciones acotadas y acopladas al canal de control, además de convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema a una superficie de deslizamiento [Utkin, 1992, Edwards y Spurgeon, 1998, Shtessel *et al.*, 2014].

Los controladores por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSMC) [Levant, 2001, Levant, 2003, Levant, 2005b] aseguran para sistemas de grado relativo r con perturbaciones, no desvanecientes, acotadas y acopladas, convergencia en tiempo finito a modos deslizantes de orden n , en general, por medio de una señal de control discontinua lo cual provoca el efecto de *Chattering* que se presenta como oscilaciones acotadas de alta frecuencia en los estados del sistema y que no es deseado debido a que causa daño en los actuadores [Utkin, 1992, Levant, 2005b].

1.1. Estado del arte

Recientemente, han sido desarrollados controladores por modos deslizantes de orden superior [Torres *et al.*, 2017, Moreno, 2016, Fridman *et al.*, 2015a, Laghrouche *et al.*, 2017, Edwards y Shtessel, 2016, Kamal *et al.*, 2016] que aseguran para sistemas de grado relativo r con perturbaciones Lipschitz, no desvanecientes y acopladas al canal de control, convergencia en tiempo finito a modos deslizantes de orden $(n + 1)$, por medio de una señal de control continua, lo cual puede reducir significativamente el *Chattering*.

Una de las principales características de algoritmos como el Control Integral Discontinuo (CID) [Zamora *et al.*, 2013, Moreno, 2016] y el Algoritmo Twisitng Continuo (CTA) [Torres-González *et al.*, 2015, Torres *et al.*, 2017] es la homogeneidad [Bacciotti y Rosier, 2005]. Para sistemas perturbados de segundo orden (por ejemplo: sistemas mecánicos) los algoritmos mencionados tienen grado de homogeneidad negativo, y los pesos de homogeneidad son tres para la posición, dos para la velocidad y uno para la aceleración, lo cual permite asegurar la correspondiente precisión con respecto al tiempo de muestreo.

Ademas, tales controladores [Zamora *et al.*, 2013, Torres *et al.*, 2017] pueden ser considerados como una extensión integral para controladores homogéneos con los mismos pesos de homogeneidad asegurando, en teoría, convergencia en tiempo finito y compensación exacta de perturbaciones para un doble integrador.

Para analizar la estabilidad y diseñar la ganancias del CTA para sistemas de grado relativo dos en [Torres-González *et al.*, 2015, Torres *et al.*, 2017] se aplica la metodología de diseño de funciones de Lyapunov (FL) para una clase de sistemas homogéneos propuesta en [Sánchez y Moreno, 2014, Sánchez y Moreno, 2016] que consiste en proponer formas generalizadas (FG) como funciones candidatas de Lyapunov (FCL) analizando las condiciones del Teorema Directo de Lyapunov por medio de herramientas para el análisis de la positividad de polinomios como Teorema de Pólya [Pólya, 1928] y representación en suma de cuadrados [Parrilo, 2000].

1.2. Motivación

Algoritmos de control por modos deslizantes como [Zamora *et al.*, 2013] y [Torres *et al.*, 2017] poseen para sistemas de grado relativo dos propiedades

como robustez ante perturbaciones Lipschitz en el tiempo y convergencia en tiempo-finito a modos deslizantes de orden tres, lo cual los hacen algoritmos de gran interés para la comunidad de Control por Modos Deslizantes. Además, la estructura homogénea de dichos algoritmos permite tratarlos extendiendo, a sistemas homogéneos, métodos de análisis de sistemas lineales.

En este trabajo de tesis se busca generalizar a sistemas de grado relativo tres el controlador CTA [Torres *et al.*, 2017]. Para encontrar condiciones de las ganancias que aseguren la estabilidad del algoritmo se recurre al diseño de FL utilizando la metodología de FG propuesta en [Sánchez y Moreno, 2014].

1.3. Objetivos

- Proponer un diseño sistemático de funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos tipo Algoritmo *Twisting* Continuo.
- Diseñar las ganancias del Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden de tal forma que se asegure la convergencia al origen en tiempo finito de las trayectorias de un sistema perturbado de tercer orden .
- Probar la convergencia a cero en tiempo finito de las trayectorias de un sistema de tercer orden en lazo cerrado con el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden por medio del diseño de funciones de Lyapunov para dicho sistema.
- Probar experimentalmente la teoría desarrollada en el trabajo de investigación implementando el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden en el Péndulo de Rueda Inercial.

1.4. Contribuciones

- Propuesta de construcción de funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos tipo Algoritmo *Twisting* Continuo.
- Función de Lyapunov para el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden
- Diseño de ganancias y prueba de estabilidad para el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden.

1.5. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas y de teoría de control necesarias para el desarrollo de la tesis. El Capítulo 3 presenta el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden, el diseño de ganancias y análisis de estabilidad. En el Capítulo 4 se muestra el diseño de una función de Lyapunov para el Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden. En el Capítulo 5 se muestran los resultados de la implementación del Algoritmo *Twisting* Continuo de tercer orden en el péndulo de rueda inercial. Finalmente, en el Capítulo 6 se encuentran las conclusiones obtenidas con la realización de este trabajo.

1.6. Notación

A lo largo de este escrito aparecerán ecuaciones con expresiones como $|\cdot|^\gamma \text{sign}(\cdot)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ para hacer más compacta la escritura de dichas ecuaciones se adopta la siguiente notación

$$[\cdot]^\gamma = |\cdot|^\gamma \text{sign}(\cdot), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

este operador preserva el signo de su argumento.

Observación 1.1. Para cualquier $\gamma, \lambda \geq 0$ se tiene

- Para cualquier entero impar γ , $[\cdot]^\gamma = \cdot^\gamma$, para cualquier entero par, γ , $|\cdot|^\gamma = \cdot^\gamma$ y $[\cdot]^0 = \text{sign}(\cdot)$.
- $[\cdot]^\gamma [\cdot]^\lambda = |\cdot|^{\gamma+\lambda}$, $[\cdot]^0 [\cdot]^\gamma = |\cdot|^\gamma$, y $[\cdot]^0 |\cdot|^\gamma = [\cdot]^\gamma$.
- Para $\gamma > 0$, $\frac{d}{d\cdot} [\cdot]^\gamma = \gamma |\cdot|^{\gamma-1}$ y $\frac{d}{d\cdot} |\cdot|^\gamma = \gamma [\cdot]^{\gamma-1}$, donde la derivada está definida.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan los conceptos matemáticos y de teoría de control base para el desarrollo de esta tesis.

2.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Se puede entender que un punto de equilibrio es estable si las trayectorias del sistema que empiezan en una vecindad del punto de equilibrio permanecen alrededor del dicho punto, de otro modo, este es inestable. Un punto de equilibrio es asintóticamente estable si todas las trayectorias que inician en una vecindad del punto de equilibrio no solo permanecen cerca del punto de equilibrio sino que además tienden al equilibrio a medida que el tiempo tiende a infinito [Khalil, 2002].

Lo anterior refiere al concepto de estabilidad de puntos de equilibrio o estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde $f(0) = 0$ y $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \neq 0$.

Definición 2.1. [Khalil, 2002] El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (2.1) es

- Estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \ \forall t \geq 0$$

- Inestable si no es estable.
- Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser elegida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

△

Para determinar si un punto de equilibrio de un sistema como (2.1) es estable se aplica el Teorema Directo de Lyapunov.

Teorema 2.1. [Khalil, 2002] Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2.1) y sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.2)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.4)$$

entonces $x=0$ es global y asintóticamente estable. △

Una función $V(x)$ que satisfacen la condición (2.2) se conoce como **definida positiva**, además, si $-V(x)$ es definida positiva entonces $V(x)$ es **definida negativa**. Una función continuamente diferenciable $V(x)$ que satisface las condiciones (2.2) y (2.4) es llamada **Función de Lyapunov**.

El Teorema 2.1 puede ser extendido a sistemas descritos por inclusiones diferenciales de Filipov [Filipov, 1988]

$$\dot{x} \in F(x) \quad (2.5)$$

donde F es un mapa multi-valuado.

Teorema 2.2. [Bacciotti y Rosier, 2005] Sea $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapa multi-valuado tal que la existencia (local) de soluciones de (2.5) este asegurada. Se asume que existe una función de Lyapunov estricta en el amplio V , i.e., una función $V = V(x, t)$ tal que, para algunas funciones $a, b, c \in \mathbb{K}_0^\infty$,

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|) \quad \forall t \in [0, +\infty), x \in \mathbb{R}^n,$$

$$t_1 \leq t_2 \implies V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1)) \leq - \int_{t_1}^{t_2} C(\|x(\tau)\|) d\tau$$

para cada par (t_1, t_2) y cada solución $x(\cdot) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.5). Entonces el origen de (2.5) es uniforme, global y asintóticamente estable. △

2.2. Homogeneidad ponderada

Uno de los conceptos claves en el desarrollo de esta tesis es la homogeneidad ponderada [Zubov y Boron, 1964].

Definición 2.2. [Bacciotti y Rosier, 2005] Para un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ un conjunto de números reales positivos.

- La familia de dilataciones de un parámetro $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ (asociado con r) se define como

$$\delta_\epsilon^r(x) := (\epsilon^{r_1}x_1, \dots, \epsilon^{r_n}x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0. \quad (2.6)$$

Los números r_i son los pesos de homogeneidad de las coordenadas.

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \epsilon > 0. \quad (2.7)$$

- Un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice r -homogénea de grado k si la componente f_i es δ^r -homogénea de grado $k + r_i$ para cada i ; es decir,

$$f_i(\epsilon^{r_1}x_1, \dots, \epsilon^{r_n}x_n) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \forall i \in [1, n]. \quad (2.8)$$

△

Considere la inclusión diferencial de Filipov [Filipov, 1988]

$$\dot{x} \in F(x) \quad (2.9)$$

donde F es un mapa multi-valuado.

Definición 2.3. [Levant, 2005a] Un mapa multi-valuado $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es r -homogéneo de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\lambda^m (\delta^r)^{-1} F(\delta^r x) = F(x).$$

El sistema (2.9) es r -homogéneo de grado m si el mapa multi-valuado F es r -homogéneo de grado m . △

Ejemplo 2.1. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -[x_1]^{1/4} - [x_2]^{1/3} - [x_3]^{1/2} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -[x_1]^0 - [x_2]^0 - [x_3]^0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

aplicando la transformación (2.6) a (2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon^4 \dot{x}_1 &= \epsilon^3 x_2 \\ \epsilon^3 \dot{x}_2 &= \epsilon^2 x_3 \\ \epsilon^2 \dot{x}_3 &= -[\epsilon^4 x_1]^{1/4} - [\epsilon^3 x_2]^{1/3} - [\epsilon^2 x_3]^{1/2} + \epsilon^1 x_4 \\ \epsilon^1 \dot{x}_4 &= -[\epsilon^4 x_1]^0 - [\epsilon^3 x_2]^0 - [\epsilon^2 x_3]^0,\end{aligned}\tag{2.11}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \epsilon^{-1} x_2 \\ \dot{x}_2 &= \epsilon^{-1} x_3 \\ \dot{x}_3 &= \epsilon^{-1} (-[x_1]^{1/4} - [x_2]^{1/3} - [x_3]^{1/2} + x_4) \\ \dot{x}_4 &= \epsilon^{-1} (-[\epsilon^4 x_1]^0 - [\epsilon^3 x_2]^0 - [\epsilon^2 x_3]^0),\end{aligned}\tag{2.12}$$

se puede ver que el sistema (2.10) cumple con la condición (2.8), por lo tanto, (2.10) es un campo vectorial homogéneo de grado $k = -1$ y pesos $r = [4, 3, 2, 1]$ para las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 , respectivamente.

Observación 2.1. El grado de homogeneidad $k = -1$ se puede definir como el peso de homogeneidad de la variable de tiempo t [Shtessel *et al.*, 2014]. \triangle

Teorema 2.3. [Bhat y Bernstein, 1997] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial homogéneo de grado $k < 0$. Si f es localmente atractivo, entonces el origen de f es estable globalmente y en tiempo-finito. \triangle

2.3. Enfoque Formas Generalizadas

En [Sánchez y Moreno, 2014] se presenta un método de construcción de FCL para una clase de HOSMC. Dicho método consiste en proponer una clase de funciones parametrizadas como una familia de FL, tal parametrización permite elegir una adecuada FCL, además de determinar sistemáticamente su positividad definida y la negatividad definida de su derivada [Sánchez y Moreno, 2016].

Definición 2.4. [Sánchez y Moreno, 2016] La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **forma generalizada** de grado m si

- f es una función homogénea (de grado m para algún vector de pesos \mathbf{r}).
- f consiste de sumas, productos y sumas de productos de términos como

$$a|x_k|^p, \quad b|x_k|^q, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq p, q \in \mathbb{Q}. \quad (2.13)$$

△

Ejemplo 2.2. Formas generalizadas

$$\begin{aligned} F(x) &= |x_1|^{\frac{3}{2}} - x_1|x_2|^2 + |x_2|^3 \\ G(x) &= |x_1|^{\frac{7}{2}} - x_1^2|x_2|^3 - |x_1|^{\frac{5}{2}}|x_2|^2 + |x_2|^7 \end{aligned}$$

El proceso de diseño de FL por medio de FG [Sánchez y Moreno, 2016] puede ser resumido en los siguientes pasos

1. Obtener el grado de homogeneidad k y los pesos r de el sistema $\dot{x} = f(x)$ descrito por FG.
2. Elegir una FG $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (de grado de homogeneidad m con los pesos \mathbf{r}) dada por

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|^{\frac{m}{r_i}} + P(\alpha_j, x); \quad j > n \quad (2.14)$$

$P(\alpha_j, x)$ consiste de términos cruzados con coeficientes α_j .

3. Calcular la FG $W(x) = -\dot{V}(x)$.
4. Aplicar el cambio de variables adecuado de x a z para transformar $V(x), W(x)$ en los conjuntos de polinomios $V(z), W(z)$.
5. Determinar los coeficientes de $V(x)$ y los parámetros del sistema tal que los conjuntos de polinomios $V(z), W(z)$ son definidos positivos. Esto puede ser hecho a través del Teorema de Pólya o representación en Sumas de Cuadrados.

2.3.1. Representación en suma de cuadrados

Un polinomio multivariado $p(x_1, \dots, x_n) = p(x)$ es una suma de cuadrados si existen los polinomios $f_1(x), \dots, f_m(x)$ tal que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x). \quad (2.15)$$

Es claro que si $f(x)$ es una suma de cuadrados implica que $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ [Parrilo, 2000].

La condición de suma de cuadrados (2.15) es equivalente a la existencia de una matriz semi-definida positiva Q tal que

$$p(x) = Z^T(x)QZ(x), \quad (2.16)$$

donde $Z(x)$ es un vector de monomios propiamente elegido [Choi *et al.*, 1995]. La condición de suma de cuadrados (2.15) es computacionalmente manejable [Parrilo, 2000].

SOSTOOLS es un *toolbox* de MATLAB para resolver programas de suma de cuadrados. La técnica detrás está basada sobre la descomposición en suma de cuadrados para polinomios multivariados [Choi *et al.*, 1995], la cual puede ser eficientemente calculada usando programación semi-definida [Prajna *et al.*, 2002].

2.4. Control por Modos Deslizantes

El control por Modos Deslizantes, esta técnica de control robusto que asegura convergencia a cero en tiempo-finito para sistemas controlables SISO aún en presencia de perturbaciones no desvanecientes, acotadas y acopladas al canal de control. El diseño de SMC consta de dos pasos: la elección adecuada de una superficie de deslizamiento y la selección de un controlador, que logre la convergencia de las trayectorias del sistema a dicha superficie [Utkin, 1992, Edwards y Spurgeon, 1998, Shtessel *et al.*, 2014].

Los controladores por modos deslizantes se puede clasificar en cinco generaciones [Fridman *et al.*, 2015b] como a continuación se describe.

1. Primera generación: Modos Deslizantes Convencionales

Los controladores por modos deslizantes de primer orden (FOSMC) [Utkin, 1992] logran convergencia en tiempo-finito de las trayectorias

del sistema a una superficie de deslizamiento compensando, en teoría, exacto perturbaciones acotadas y acopladas al canal de control. Sin embargo, el FOSMC genera una señal de control discontinua lo cual provoca el efecto *chattering*, además, aunque la superficie de deslizamiento converge a cero en tiempo-finito, los estados lo hacen de manera asintótica y se requieren derivadas de alto orden para el diseño de la superficie de deslizamiento.

2. Segunda generación: Modos Deslizantes de Segundo Orden

Los controladores de esta generación aseguran convergencia en tiempo-finito a modos deslizantes de segundo orden, es decir, para sistemas de grado relativo dos respecto al control no se necesita el diseño de una superficie de deslizamiento y los estados del sistema convergen a cero en tiempo-finito con información de la salida y su primera derivada. Además con estos controladores se logra precisión cuadrática de convergencia con respecto al paso de muestreo. Sin embargo, la convergencia en tiempo-finito para sistemas de grado relativo arbitrario y el *chattering* debido a la acción de control discontinua son problemas aún abiertos. El Algoritmo Twisting [Emel'Yanov *et al.*, 1986] corresponde a esta generación.

3. Tercera generación: Algoritmo Super-Twisting

El algoritmo Super-Twisting (STA) [Levant, 1993] logra convergencia en tiempo-finito a modos deslizantes de segundo orden para sistemas de grado relativo uno con respecto al control. Para sistemas de grado relativo superior es necesario el diseño de una superficie de deslizamiento con lo cual los estados del sistemas convergen a cero de forma asintótica, además, se requieren derivadas del estado de alto orden para el diseño de la variable de deslizamiento. Las principales ventajas de este algoritmo son la compensación teóricamente exacta de perturbaciones Lipschitz en el tiempo y la generación de señal de control continua reduciendo significativamente el *chattering*. Otra característica interesante del STA es que puede ser usado como diferenciador [Levant, 1998].

4. Cuarta generación: Controladores por Modos Deslizantes de Orden Arbitrario

El Algoritmo Nested HOSM [Levant, 2001] pertenece a esta generación. Este controlador asegura estabilidad en tiempo-finito de la salida σ y

compensación exacta de perturbaciones acotadas y acopladas al canal del control para sistemas SISO de grado relativo r , usando información de $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$. Sin embargo, este algoritmo produce señal de control discontinua provocando el efecto de *chattering*.

5. Quinta generación: Controladores continuos por Modos Deslizantes de Orden Arbitrario

A esta generación corresponden los controladores continuos por modos deslizantes de orden superior [Zamora *et al.*, 2013, Fridman *et al.*, 2015a, Torres-González *et al.*, 2015, Moreno, 2016, Edwards y Shtessel, 2016, Kamal *et al.*, 2016, Laghrouche *et al.*, 2017, Torres *et al.*, 2017] que aseguran para sistemas de grado relativo r con perturbaciones, Lipschitz, no desvanecientes y acopladas, convergencia en tiempo finito a modos deslizantes de orden $(n + 1)$, con información de la salida y sus $(r - 1)$ derivadas, por medio de una señal de control continua, lo cual puede reducir significativamente el *Chattering*. Para sistemas perturbados de segundo orden (por ejemplo: sistemas mecánicos) estos algoritmos logran precisión cúbica para la posición, cuadrática para la velocidad y lineal para la aceleración.

Generación	Señal de control	<i>Chattering</i>	Convergencia	Perturbación	Información	Precisión
1	Discontinua	Si	Asintótica	Acotada	$\sigma, \dot{\sigma}$	τ
2	Discontinua	Si	Tiempo-finito	Acotada	$\sigma, \dot{\sigma}$	τ^2
3	Continua	No	Asintótica	Lipschitz	$\sigma, \dot{\sigma}$	τ^2
4	Continua	No	Tiempo-finito	Acotada	$\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}$	τ^2
5	Continua	No	Tiempo-finito	Lipschitz	$\sigma, \dot{\sigma}$	τ^3

Tabla 2.1: Características de los controladores por modos deslizantes para sistemas de grado relativo dos (σ representa la variable de deslizamiento y τ el tiempo de muestreo).

2.4.1. Algoritmo Twisting Continuo

El CTA [Torres-González *et al.*, 2015] es un controlador de quinta generación, para sistemas de grado relativo dos asegura convergencia a cero en tiempo-finito aún en presencia de perturbaciones Lipschitz en el tiempo acopladas al canal de control $|\dot{\phi}(x, t)| < C$.

$$\begin{aligned} u &= -k_1[\sigma]^{\frac{1}{3}} - k_2[\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + z, \\ \dot{z} &= -k_3[\sigma]^0 - k_4[\dot{\sigma}]^0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

Las ganancias k_1 , k_2 y k_3 deben ser diseñadas adecuadamente para cumplir con la tarea de control [Torres-González *et al.*, 2015, Torres *et al.*, 2017].

Capítulo 3

Algoritmo Twisting Continuo para sistemas de grado relativo tres

En el presente capítulo se muestra un algoritmo tipo CTA para sistemas de grado relativo tres, se proponen conjuntos de ganancias que aseguran la convergencia en tiempo finito a modos deslizantes de tercer orden y mediante el teorema directo de Lyapunov se demuestra la estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado, además, se analiza la robustez del algoritmo ante cierto tipo de perturbaciones.

3.1. Planteamiento del problema

Considere el triple integrador perturbado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u + \phi(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $\phi(t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación Lipschitz en el tiempo.

El objetivo de control consiste en estabilizar en tiempo finito el origen del sistema (3.1), a pesar del efecto de la perturbación $\phi(t)$, por medio de una señal de control continua.

3.2. Algoritmo Twisting continuo para sistemas de grado relativo tres

Para cumplir con el objetivo de control planteado se propone un controlador tipo CTA

$$\begin{aligned} u &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [x_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [x_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [x_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [x_1]^0 - k_5 L [x_2]^0 - k_6 L [x_3]^0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde k_i ; $i = 1, \dots, 6$ son las ganancias del controlador.

El sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [x_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [x_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [x_3]^{1/2} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_4 L [x_1]^0 - k_5 L [x_2]^0 - k_6 L [x_3]^0 + \dot{\phi}(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $x_4 = z + \phi(t)$ es un estado virtual. El sistema (3.3) tiene un campo vectorial homogéneo de grado $k = -1$ y pesos $r = [4, 3, 2, 1]$ para las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 , respectivamente (ver Ejemplo 2.1).

El grado de homogeneidad negativo de (3.3) asegura, con una selección correcta de las ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 6$, convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema (3.3) al origen, además, el integrador \dot{z} converge a la perturbación $\phi(t)$ por lo que puede ser compensada, en teoría, exactamente.

Teorema 3.1. *Sea el triple integrador perturbado (3.1) y sea la ley de control*

$$\begin{aligned} u &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [x_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [x_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [x_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [x_1]^0 - k_5 L [x_2]^0 - k_6 L [x_3]^0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

existen ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 6$ y el factor de escala $L > \frac{|\dot{\phi}(t)|}{\mu}$ tal que los estados del sistema en lazo cerrado (3.3) convergen a cero globalmente y en tiempo-finito. \triangle

Demostración. A partir de los Lemas 3.1 y 3.2 se puede probar la convergencia a cero de las trayectorias del sistemas (3.3). \square

Observación 3.1. La constante μ es la cota máxima para la cual las condiciones de estabilidad del sistema nominal se conservan, por lo tanto, el factor de escalamiento L asegura estabilidad para cota arbitraria de la derivada de la perturbación del sistema (3.1). \triangle

Observación 3.2. El Teorema 3.1 engloba dos casos particulares de CTA para sistemas de grado relativo tres

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [x_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [x_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [x_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [x_1]^0 - k_5 L [x_2]^0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [x_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [x_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [x_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [x_1]^0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

A primera vista los algoritmos (3.5) y (3.6) son más simples que (3.2) pero la libertad en la elección de k_5 y k_6 puede ser usado para mejorar el desempeño del controlador en lazo cerrado. \triangle

3.3. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

Para analizar la estabilidad del origen del sistema (3.3) se propone una FCL cuyo diseño se presenta en la Sección 4.

3.3.1. Sistema nominal

Se considera el sistema nominal ($\dot{\phi} = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1 [x_1]^{1/4} - k_2 [x_2]^{1/3} - k_3 [x_3]^{1/2} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_4 [x_1]^0 - k_5 [x_2]^0 - k_6 [x_3]^0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde el conjunto de ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 6$ se elige de tal forma que asegure la estabilidad del origen del sistema y el factor de escalamiento $L = 1$.

Sea la FCL

$$\begin{aligned} V(x) &= \alpha_1 |x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_2 |x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_3 |x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_4 |x_4|^7 + \alpha_5 [x_1]^{\frac{5}{4}} x_3 \\ &\quad + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 [x_2]^{\frac{5}{3}} x_3 - \alpha_8 x_2 [x_4]^4 - \alpha_9 x_3 x_4^5 - \alpha_{10} x_1 x_4^3, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde las constantes α_i son los coeficientes de la función. La derivada de (3.8) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.7) está dada por $W(x) = -\dot{V}(x)$

$$\begin{aligned}
W(x) = & \alpha_5 k_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} + \alpha_5 k_2 [x_1]^{\frac{5}{4}} x_2^{\frac{3}{2}} + \alpha_5 k_3 [x_1]^{\frac{5}{4}} [x_3]^{\frac{1}{2}} - \alpha_5 [x_1]^{\frac{5}{4}} x_4 \\
& - \frac{7}{4} \alpha_1 [x_1]^{\frac{3}{4}} x_2 - \alpha_6 x_1 x_3 - \beta_1 x_1 x_4^2 + \alpha_7 k_1 [x_1]^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{5}{2}} \\
& + \frac{7}{2} \alpha_3 k_1 [x_1]^{\frac{1}{4}} [x_3]^{\frac{5}{2}} - \alpha_9 k_1 [x_1]^{\frac{1}{4}} x_4^5 - \frac{5}{4} \alpha_5 |x_1|^{\frac{1}{4}} x_2 x_3 \\
& + \beta_2 x_2^2 + \alpha_7 k_3 x_2^{\frac{5}{2}} [x_3]^{\frac{1}{2}} - \alpha_7 x_2^{\frac{5}{2}} x_4 - \frac{7}{3} \alpha_2 [x_2]^{\frac{4}{3}} x_3 - \beta_3 x_2 x_4^3 \\
& - \frac{5}{3} \alpha_7 x_2^{\frac{2}{3}} x_3^2 + \frac{7}{2} \alpha_3 k_2 x_2^{\frac{1}{2}} [x_3]^{\frac{5}{2}} - \alpha_9 k_2 x_2^{\frac{1}{2}} x_4^5 + \frac{7}{2} \alpha_3 k_3 |x_3|^3 \\
& - \frac{7}{2} \alpha_3 [x_3]^{\frac{5}{2}} x_4 + \beta_4 x_3 x_4^4 - \alpha_9 k_3 [x_3]^{\frac{1}{2}} x_4^5 + \beta_5 x_4^6,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde los coeficientes β_i ; $i = 1, \dots, 7$ son

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 3\alpha_{10} (k_4 [x_1]^0 + k_5 [x_2]^0 + k_6 [x_3]^0), \\
\beta_2 &= \alpha_7 k_2 - \alpha_6, \\
\beta_3 &= 4\alpha_8 (k_4 [x_1]^0 + k_5 [x_2]^0 + k_6 [x_3]^0) [x_4]^0 - \alpha_{10}, \\
\beta_4 &= \alpha_8 [x_4]^0 - 5\alpha_9 (k_4 [x_1]^0 + k_5 [x_2]^0 + k_6 [x_3]^0), \\
\beta_5 &= \alpha_9 + 7\alpha_4 (k_4 [x_1]^0 + k_5 [x_2]^0 + k_6 [x_3]^0) [x_4]^0.
\end{aligned}$$

Determinar si las FG (3.8) y (3.9) son definidas positivas es complicado, sin embargo, dicho problema puede ser tratado usando procedimientos para probar la positividad de polinomios, por ejemplo, SOSP.

Las FG (3.8) y (3.9) pueden ser representadas como FC mediante el cambio de variables

$$|x_1| = y_1^8, \quad |x_2| = y_2^6, \quad |x_3| = y_3^4, \quad |x_4| = y_4^2. \tag{3.10}$$

donde $y_i \geq 0$ en todos los casos. Aplicando el cambio de variables (3.10) a las FG (3.8) y (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
V(y) = & \alpha_1 y_1^{14} + \alpha_2 y_2^{14} + \alpha_3 y_3^{14} + \alpha_4 y_4^{14} + \alpha_5 y_1^{10} y_3^4 [x_1]^0 [x_3]^0 \\
& + \alpha_6 y_1^8 y_2^6 [x_1]^0 [x_2]^0 + \alpha_7 y_2^{10} y_3^4 [x_2]^0 [x_3]^0 \\
& - \alpha_8 y_2^6 y_4^8 [x_2]^0 [x_4]^0 - \alpha_9 y_3^4 y_4^{10} [x_3]^0 [x_4]^0 \\
& + \alpha_{10} y_1^8 y_4^6 [x_1]^0 [x_4]^0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
W(y) = & \alpha_5 k_1 y_1^{12} + \alpha_5 k_2 y_1^{10} y_2^2 [x_1]^0 [x_2]^0 + \alpha_5 k_3 y_1^{10} y_3^2 [x_1]^0 [x_3]^0 \\
& - \alpha_5 y_1^{10} y_4^2 [x_1]^0 [x_4]^0 - \alpha_6 y_1^8 y_3^4 [x_1]^0 [x_3]^0 - \beta_1 y_1^8 y_4^4 [x_1]^0 \\
& - \frac{7}{4} \alpha_1 y_1^6 y_2^6 [x_1]^0 [x_2]^0 + \alpha_7 k_1 y_1^2 y_2^{10} [x_1]^0 [x_2]^0 \\
& + \frac{7}{2} \alpha_3 k_1 y_1^2 y_3^{10} [x_1]^0 [x_3]^0 - \alpha_9 k_1 y_1^2 y_4^{10} [x_1]^0 [x_4]^0 \\
& - \frac{5}{4} \alpha_5 y_1^2 y_2^6 y_3^4 [x_2]^0 [x_3]^0 + \beta_2 y_2^{12} + \alpha_7 k_3 y_2^{10} y_3^2 [x_2]^0 [x_3]^0 \\
& - \alpha_7 y_2^{10} y_4^2 [x_2]^0 [x_4]^0 - \frac{7}{3} \alpha_2 y_2^8 y_3^4 [x_2]^0 [x_3]^0 \\
& - \beta_3 y_2^6 y_4^6 [x_2]^0 [x_4]^0 - \frac{5}{3} \alpha_7 y_2^4 y_3^8 - \frac{7}{2} \alpha_3 k_2 y_2^2 y_3^{10} [x_2]^0 [x_3]^0 \\
& - \alpha_9 k_2 y_2^2 y_4^{10} [x_2]^0 [x_4]^0 + \frac{7}{2} \alpha_3 k_3 y_3^{12} + \beta_4 y_3^4 y_4^8 [x_3]^0 \\
& - \frac{7}{2} \alpha_3 y_3^{10} y_4^2 [x_3]^0 [x_4]^0 - \alpha_9 k_3 y_3^2 y_4^{10} [x_3]^0 [x_4]^0 + \beta_5 y_4^{12}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Evaluando las funciones (3.11) y (3.12) en cada hiper-octante del espacio de estados se consiguen los conjuntos de polinomios, $v_i(y)$

$$\begin{aligned}
v_1(y) &= a_1 y_1^{14} + a_6 y_1^8 y_2^6 + a_5 y_1^{10} y_3^4 + a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad + a_7 y_2^{10} y_3^4 - a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} - a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_2(y) &= a_1 y_1^{14} - a_6 y_1^8 y_2^6 - a_5 y_1^{10} y_3^4 - a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad + a_7 y_2^{10} y_3^4 - a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} - a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_3(y) &= a_1 y_1^{14} - a_6 y_1^8 y_2^6 + a_5 y_1^{10} y_3^4 + a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad - a_7 y_2^{10} y_3^4 + a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} - a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_4(y) &= a_1 y_1^{14} + a_6 y_1^8 y_2^6 - a_5 y_1^{10} y_3^4 + a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad - a_7 y_2^{10} y_3^4 - a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} + a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_5(y) &= a_1 y_1^{14} + a_6 y_1^8 y_2^6 + a_5 y_1^{10} y_3^4 - a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad + a_7 y_2^{10} y_3^4 + a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} + a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_6(y) &= a_1 y_1^{14} + a_6 y_1^8 y_2^6 - a_5 y_1^{10} y_3^4 - a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad - a_7 y_2^{10} y_3^4 + a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} - a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_7(y) &= a_1 y_1^{14} - a_6 y_1^8 y_2^6 + a_5 y_1^{10} y_3^4 - a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad - a_7 y_2^{10} y_3^4 - a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} + a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14}, \\
v_8(y) &= a_1 y_1^{14} - a_6 y_1^8 y_2^6 - a_5 y_1^{10} y_3^4 + a_{10} y_1^8 y_4^6 + a_2 y_2^{14} \\
&\quad + a_7 y_2^{10} y_3^4 + a_8 y_2^6 y_4^8 + a_3 y_3^{14} + a_9 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_4^{14},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_8(y) = & \alpha_5 k_1 y_1^{12} - \alpha_5 k_2 y_1^{10} y_2^2 - \alpha_5 k_3 y_1^{10} y_3^2 - \alpha_5 y_1^{10} y_4^2 + \alpha_6 y_1^8 y_3^4 + \beta_1 y_1^8 y_4^4 \\
& + \frac{7}{4} \alpha_1 y_1^6 y_2^6 - \alpha_7 k_1 y_1^2 y_2^{10} - \frac{7}{2} \alpha_3 k_1 y_1^2 y_3^{10} - \alpha_9 k_1 y_1^2 y_4^{10} - \frac{5}{4} \alpha_5 y_1^2 y_2^6 y_3^4 \\
& + \beta_2 y_2^{12} + \alpha_7 k_3 y_2^{10} y_3^2 + \alpha_7 y_2^{10} y_4^2 - \frac{7}{3} \alpha_2 y_2^8 y_3^4 + \beta_3 y_2^6 y_4^6 - \frac{5}{3} \alpha_7 y_2^4 y_3^8 \\
& - \frac{7}{2} \alpha_3 k_2 y_2^2 y_3^{10} + \alpha_9 k_2 y_2^2 y_4^{10} + \frac{7}{2} \alpha_3 k_3 y_3^{12} + \beta_4 y_3^4 y_4^8 + \frac{7}{2} \alpha_3 y_3^{10} y_4^2 \\
& + \alpha_9 k_3 y_3^2 y_4^{10} + \beta_5 y_4^{12},
\end{aligned}$$

Seleccionando *a priori* un conjunto de ganancias k_i ; $i = 0, \dots, 6$ (e.g. por simulación) y usando SOSTOOLS, los coeficientes α_i ; $i = 0, \dots, 12$ pueden ser determinados de tal forma que los polinomios (3.11) y (3.12) sean formas cuadráticas definidas positivas. Sin embargo, los resultados conseguidos por SOSTOOLS son, por lo general, semi-definidos positivos, entonces se definen $\bar{V}(y) = V(y) - \epsilon(y_1^{14} + y_2^{14} + y_3^{14} + y_4^{14}) \geq 0$ y $\bar{W}(y) = W(y) - \epsilon(y_1^{12} + y_2^{12} + y_3^{12} + y_4^{12}) \geq 0$ de tal forma que (3.11) y (3.12) son estrictamente definidas positivas y, por lo tanto, se asegura que (3.8) y (3.9) son FG definidas positivas.

	Ganancias k_i	Coeficientes α_j	
D_1	$k_1 = 8$ $k_2 = 11$	$\alpha_1 = 37.34$	$\alpha_2 = 78.94$
	$k_3 = 11$ $k_4 = 0.12$	$\alpha_3 = 1.256$	$\alpha_4 = 0.0001572$
	$k_5 = 0.05$ $k_6 = 0.02$	$\alpha_5 = 1.176$	$\alpha_6 = 31.39$
		$\alpha_7 = 10.86$	$\alpha_8 = 0.03006$
		$\alpha_9 = 0.0002092$	$\alpha_{10} = 0.2225$
D_2	$k_1 = 8$ $k_2 = 12$	$\alpha_1 = 62.54$	$\alpha_2 = 147.3$
	$k_3 = 11$ $k_4 = 0.1$	$\alpha_3 = 1.802$	$\alpha_4 = 0.0001696$
	$k_5 = 0.05$ $k_6 = 0$	$\alpha_5 = 1.754$	$\alpha_6 = 54.63$
		$\alpha_7 = 21.59$	$\alpha_8 = 0.03838$
		$\alpha_9 = 0.0002144$	$\alpha_{10} = 0.2552$
D_3	$k_1 = 8$ $k_2 = 12$	$\alpha_1 = 116.1$	$\alpha_2 = 288.5$
	$k_3 = 12$ $k_4 = 0.05$	$\alpha_3 = 3.478$	$\alpha_4 = 0.0002545$
	$k_5 = 0$ $k_6 = 0$	$\alpha_5 = 2.166$	$\alpha_6 = 79.92$
		$\alpha_7 = 38.48$	$\alpha_8 = 0.03935$
		$\alpha_9 = 0.0001706$	$\alpha_{10} = 0.4537$

Tabla 3.1: Conjuntos de ganancias y coeficientes que asegura la definición positiva de las funciones (3.8) y (3.9)

De los resultados obtenidos utilizando SOSTOOLS el siguiente lema pueden ser establecidos ($\epsilon = 1 \times 10^{-8}$).

Lema 3.1. Sean el sistema (3.7), la función de Lyapunov

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_2|x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_3|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_4|x_4|^7 + \alpha_5[x_1]^{\frac{5}{4}}x_3 + \alpha_6x_1x_2 + \alpha_7[x_2]^{\frac{5}{3}}x_3 - \alpha_8x_2[x_4]^4 - \alpha_9x_3x_4^5 - \alpha_{10}x_1x_4^3, \quad (3.13)$$

y su derivada $W(x) = -\dot{V}(x)$ a lo largo de la trayectorias de (3.7). Existen ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 6$ y coeficientes α_j ; $j = 1, \dots, 12$ tal que las funciones $V(x)$ y $W(x)$ son formas generalizadas definidas positivas. \triangle

Demostración. En la Tabla 3.1 se muestran conjuntos de ganancias k_i y coeficientes α_j obtenidos mediante la solución de un problema de suma de cuadrados por medio de SOSTOOLS. \square

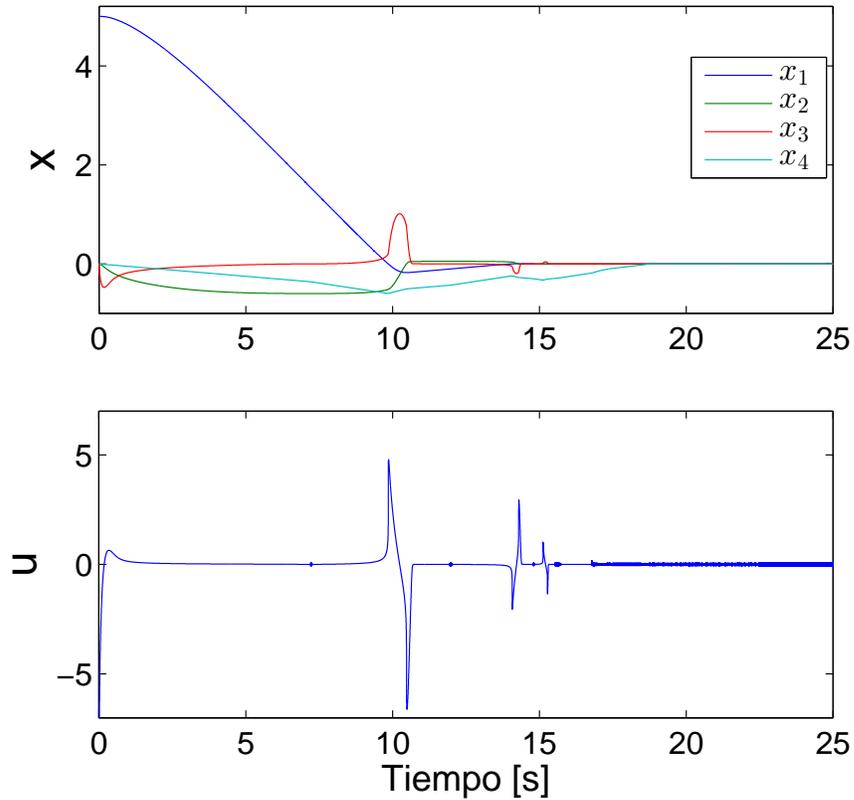


Figura 3.1: Sistema (3.7) con el conjunto de ganancias D_1 .

Ejemplo ilustrativo 1: Sistema nominal

Las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3 muestran simulaciones del sistemas (3.1) (método de solución: Euler y tiempo de muestreo: 1[ms]) donde $\phi(t) = 0$ en lazo cerrado con el controlador (3.2) donde las ganancias k_i están dadas por la Tabla 3.1 y condiciones iniciales $x_0 = [5, 0, 0, 0]^T$.

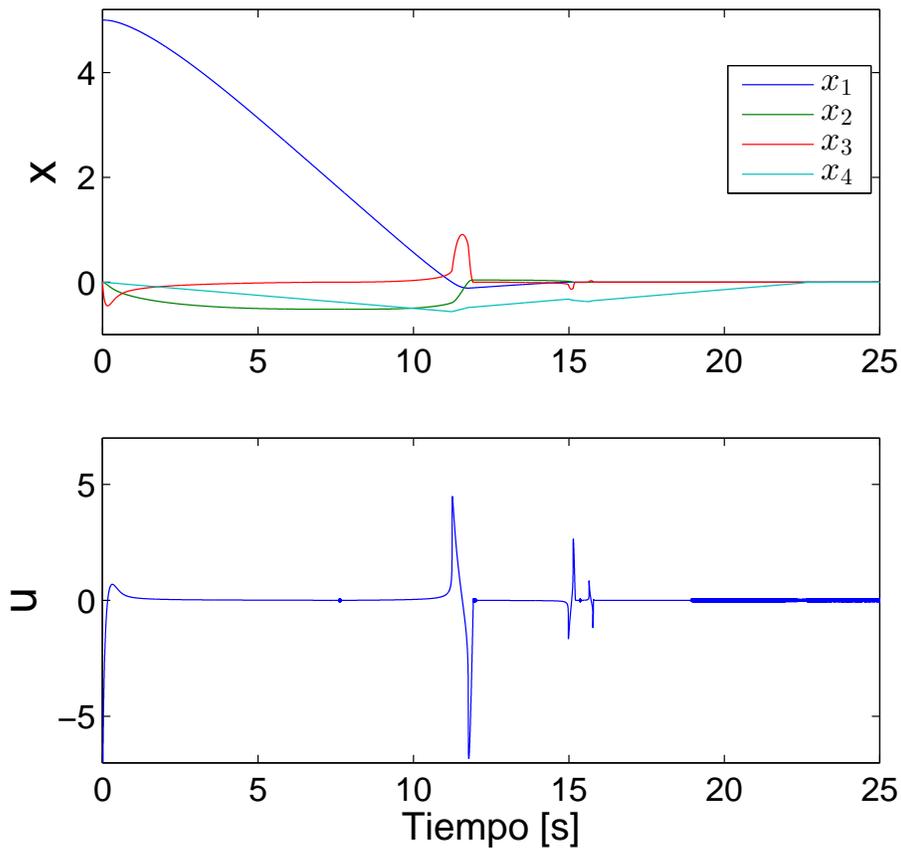


Figura 3.2: Sistema (3.7) con el conjunto de ganancias D_2 .

En las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se puede observar que los estados x del sistema en lazo cerrado 3.7 convergen al origen en tiempo-finito y la señal de control u es continua.

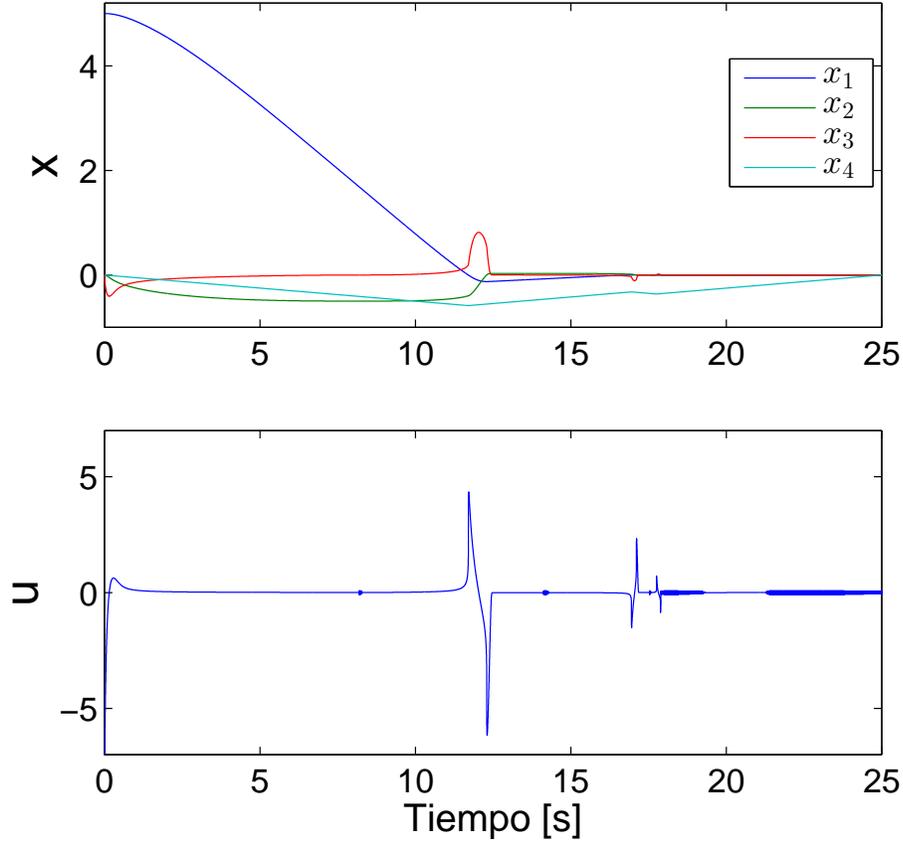


Figura 3.3: Sistema (3.7) con el conjunto de ganancias D_3 .

3.3.2. Sistema perturbado

Para analizar el efecto de la perturbación $\phi(t)$ sobre el sistemas (3.3) se considera el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_1[x_1]^{1/4} - k_2[x_2]^{1/3} - k_3[x_3]^{1/2} + x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -k_4[x_1]^0 - k_5[x_2]^0 - k_6[x_3]^0 + \mu,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde la constante $\mu = |\dot{\phi}(t)|$ es la cota de la perturbación.

Lema 3.2. *Sea el sistema (3.14) y*

- *Sea el conjunto de ganancias y coeficientes D_1 de la Tabla 3.1 y el factor de escala $L > \frac{|\dot{\phi}(t)|}{\mu}$ donde $\phi(t)$ es Lipschitz y $\mu = 0.0003698$,*
- *Sea el conjunto de ganancias y coeficientes D_2 de la Tabla 3.1 y el factor de escala $L > \frac{|\dot{\phi}(t)|}{\mu}$ donde $\phi(t)$ es Lipschitz y $\mu = 0.0003233$,*
- *Sea el conjunto de ganancias y coeficientes D_3 de la Tabla 3.1 y el factor de escala $L > \frac{|\dot{\phi}(t)|}{\mu}$ donde $\phi(t)$ es Lipschitz y $\mu = 0.0004427$,*

los estados x_1, x_2, x_3 y x_4 convergen al origen globalmente y en tiempo-finito. \triangle

Demostración. Se considera la FL (3.8) del sistema nominal (3.7) como FCL para el sistema perturbado (3.14)

$$\begin{aligned} V_p(x) = & \alpha_{p1}|x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_{p2}|x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_{p3}|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_{p4}|x_4|^7 \\ & + \alpha_{p5}[x_1]^{\frac{5}{4}}x_3 + \alpha_{p6}x_1x_2 + \alpha_{p7}[x_2]^{\frac{5}{3}}x_3 \\ & - \alpha_{p8}x_2[x_4]^4 - \alpha_{p9}x_3x_4^5 - \alpha_{p10}x_1x_4^3, \end{aligned} \quad (3.15)$$

y derivada de (3.15) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.14) está dada por $W_p(x) = -\dot{V}_p(x)$

$$\begin{aligned} W(x) = & \alpha_{p5}k_1|x_1|^{\frac{3}{2}} + \alpha_{p5}k_2[x_1]^{\frac{5}{4}}x_2^{\frac{1}{3}} + \alpha_{p5}k_3[x_1]^{\frac{5}{4}}[x_3]^{\frac{1}{2}} \\ & - \alpha_5[x_1]^{\frac{5}{4}}x_4 - \frac{7}{4}\alpha_{p1}[x_1]^{\frac{3}{4}}x_2 - \alpha_{p6}x_1x_3 - \beta_{p1}x_1x_4^2 \\ & + \alpha_{p7}k_1[x_1]^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{2}\alpha_{p3}k_1[x_1]^{\frac{1}{4}}[x_3]^{\frac{5}{2}} - \alpha_{p9}k_1[x_1]^{\frac{1}{4}}x_4^5 \\ & - \frac{5}{4}\alpha_{p5}|x_1|^{\frac{1}{4}}x_2x_3 + \beta_{p2}x_2^2 - \alpha_{p7}x_2^{\frac{5}{3}}x_4 + \alpha_{p7}k_3x_2^{\frac{5}{3}}[x_3]^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{7}{3}\alpha_{p2}[x_2]^{\frac{4}{3}}x_3 - \beta_{p3}x_2x_4^3 - \frac{5}{3}\alpha_{p7}x_2^{\frac{2}{3}}x_3^2 - \frac{7}{2}\alpha_{p3}k_2x_2^{\frac{1}{3}}[x_3]^{\frac{5}{2}} \\ & - \alpha_{p9}k_2x_2^{\frac{1}{3}}x_4^5 + \frac{7}{2}\alpha_{p3}k_3|x_3|^3 - \frac{7}{2}\alpha_{p3}[x_3]^{\frac{5}{2}}x_4 + \beta_{p4}x_3x_4^4 \\ & - \alpha_{p9}k_3[x_3]^{\frac{1}{2}}x_4^5 + \beta_{p5}x_4^6, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde los coeficientes β_{pi} ; $i = 1, \dots, 7$ son

$$\begin{aligned} \beta_{p1} &= 3\alpha_{p10} (k_4[x_1]^0 + k_5[x_2]^0 + k_6[x_3]^0 \pm \mu), \\ \beta_{p2} &= \alpha_{p7}k_2 - \alpha_{p6}, \\ \beta_{p3} &= 4\alpha_{p8} (k_4[x_1]^0 + k_5[x_2]^0 + k_6[x_3]^0 \pm \mu) [x_4]^0 - \alpha_{p10}, \\ \beta_{p4} &= \alpha_{p8}[x_4]^0 - 5\alpha_{p9} (k_4[x_1]^0 + k_5[x_2]^0 + k_6[x_3]^0 \pm \mu), \\ \beta_{p5} &= \alpha_{p9} + 7\alpha_{p4} (k_4[x_1]^0 + k_5[x_2]^0 + k_6[x_3]^0 \pm \mu) [x_4]^0. \end{aligned}$$

De la misma forma que en la Sección 3.3, aplicando el cambio de variables (3.10) a las funciones (3.15) y (3.16) y obteniendo los conjuntos de polinomios $V_{pi}(y)$ y $W(y)_{pi}$, es posible determinar los coeficientes α_i usando SOSTOOLS fijando previamente las ganancias por algún conjunto de la Tabla 3.1 y la constante μ en el valor máximo posible. \square

3.4. Ajuste de las ganancias del controlador para cota arbitraria de la perturbación

De acuerdo con el Lema 3.2, los conjuntos de ganancias de la Tabla 3.1 logran la estabilidad del sistema (3.1) en lazo cerrado con la ley de control (3.2) cuando la cota de la derivada temporal de la perturbación satisface $|\dot{\phi}(t)| < \mu$. Sin embargo, para una cota diferente la estabilidad no puede ser asegurada.

Como una solución a dicho problema se puede hacer un escalamiento de las ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 6$ del controlador (3.2) que permita mantener la estabilidad del sistema (3.14) para cota arbitraria de la derivada de la perturbación $\phi(t)$.

Tomando ventaja de la homogeneidad del sistema (3.14) se propone un cambio de variables

$$z_1 = Lx_1 \quad z_2 = Lx_2 \quad z_3 = Lx_3 \quad z_4 = Lx_4 \quad (3.17)$$

donde la constante $0 < L \in \mathbb{R}$ es el factor de escala. Aplicando el cambio de variables (3.17) a el controlador (3.2) una nueva ley de control es definida como

$$\begin{aligned} u &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [z_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [z_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [z_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [z_1]^0 - k_5 L [z_2]^0 - k_6 L [z_3]^0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

entonces la estabilidad del sistema (3.3) se mantiene para cualquier cota de $\dot{\phi}(t)$ seleccionando el factor de escala como $L > \frac{|\dot{\phi}(t)|}{\mu}$, donde μ está dado por el Lema 3.2.

Ejemplo ilustrativo 2: sistema perturbado

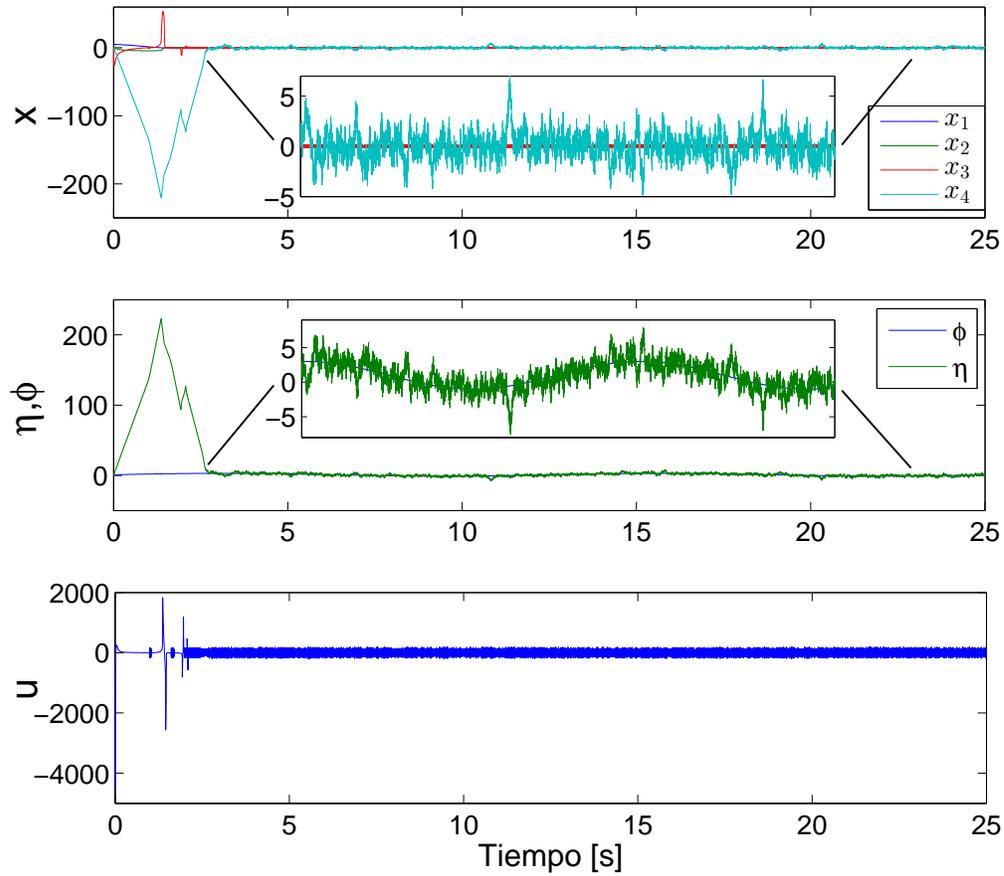


Figura 3.4: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_1 y $L = 2704$.

Simulaciones del sistema (3.1) (método de solución: Euler, tiempo de muestreo: 1[ms]) donde $\phi(t) = 2 \sin(0.5t) + 1$ en lazo cerrado con el controlador (3.2) con un conjunto de ganancias de la Tabla 3.1, L correspondiente y condiciones iniciales $x_0 = [5, 0, 0, 0]^T$, se muestran en las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6.

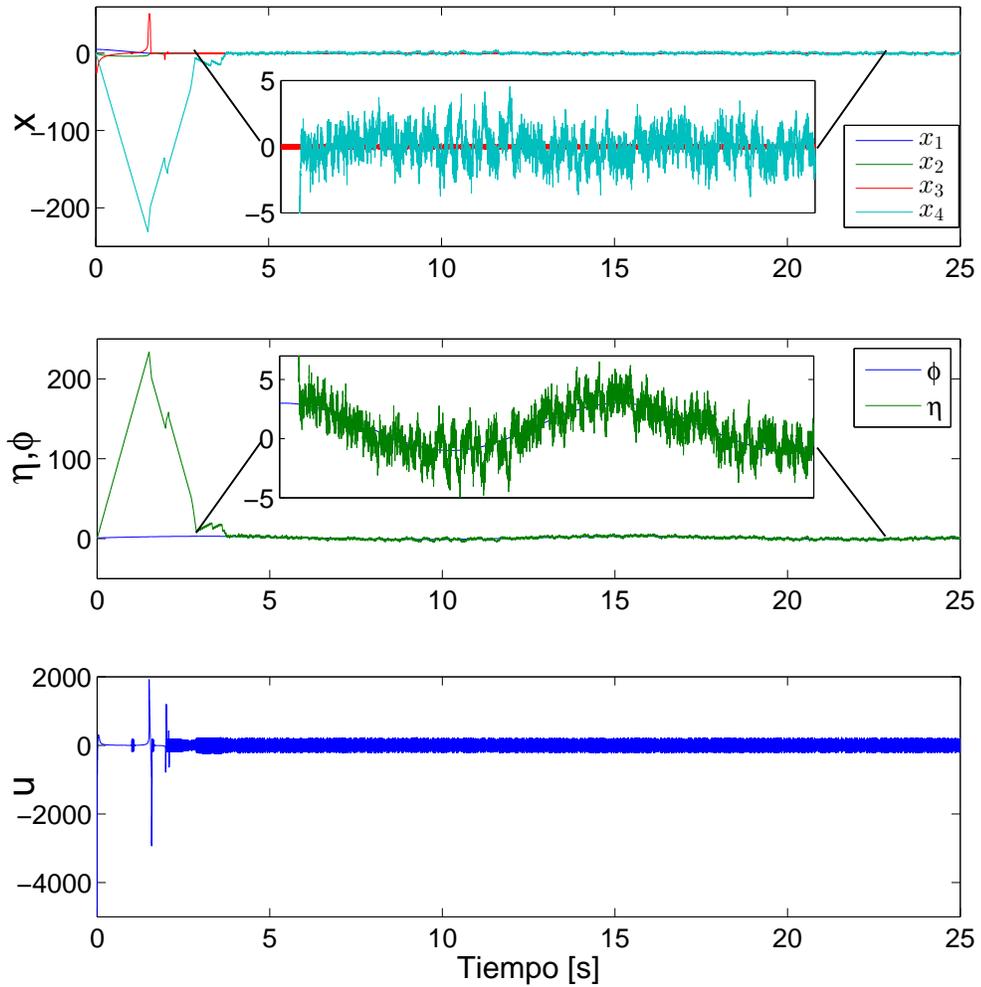


Figura 3.5: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_2 y $L = 3095$.

En las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se puede observar que los estados x de el sistema 3.1 convergen al origen en tiempo-finito, la extensión integral η converge a la perturbación ϕ y la señal de control u es continua.

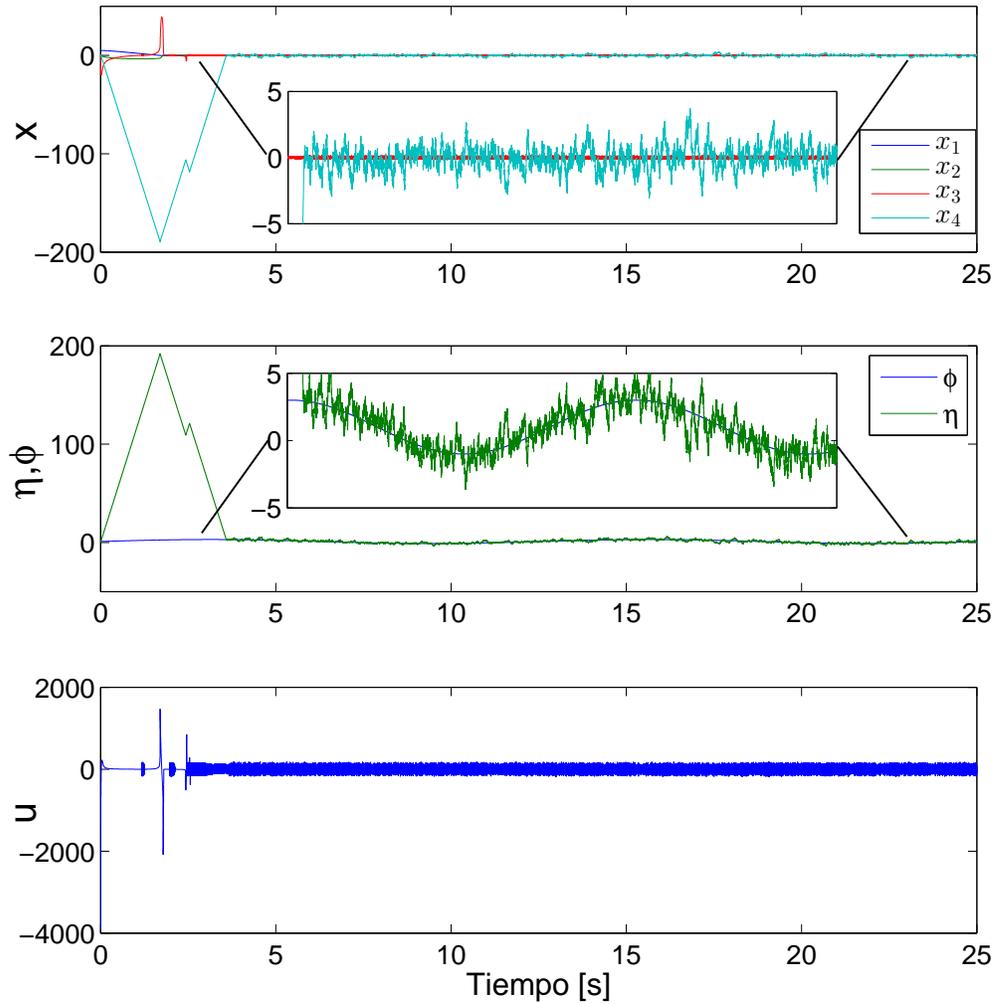


Figura 3.6: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_3 y $L = 2260$.

Sin embargo, debido a que el valor de L se diseña de acuerdo a las condiciones dadas por el Lema 3.2 las ganancias de controlador (3.2) se sobre-estiman provocando que las señales de los estados tengan mucho ruido.

Ejemplo ilustrativo 3: sistema perturbado

Debido a que las condiciones del Lema 3.2 son suficientes mas no necesarias la constante de escalamiento L puede ser diseñada de tal forma que se mejore el desempeño del controlador (3.2).

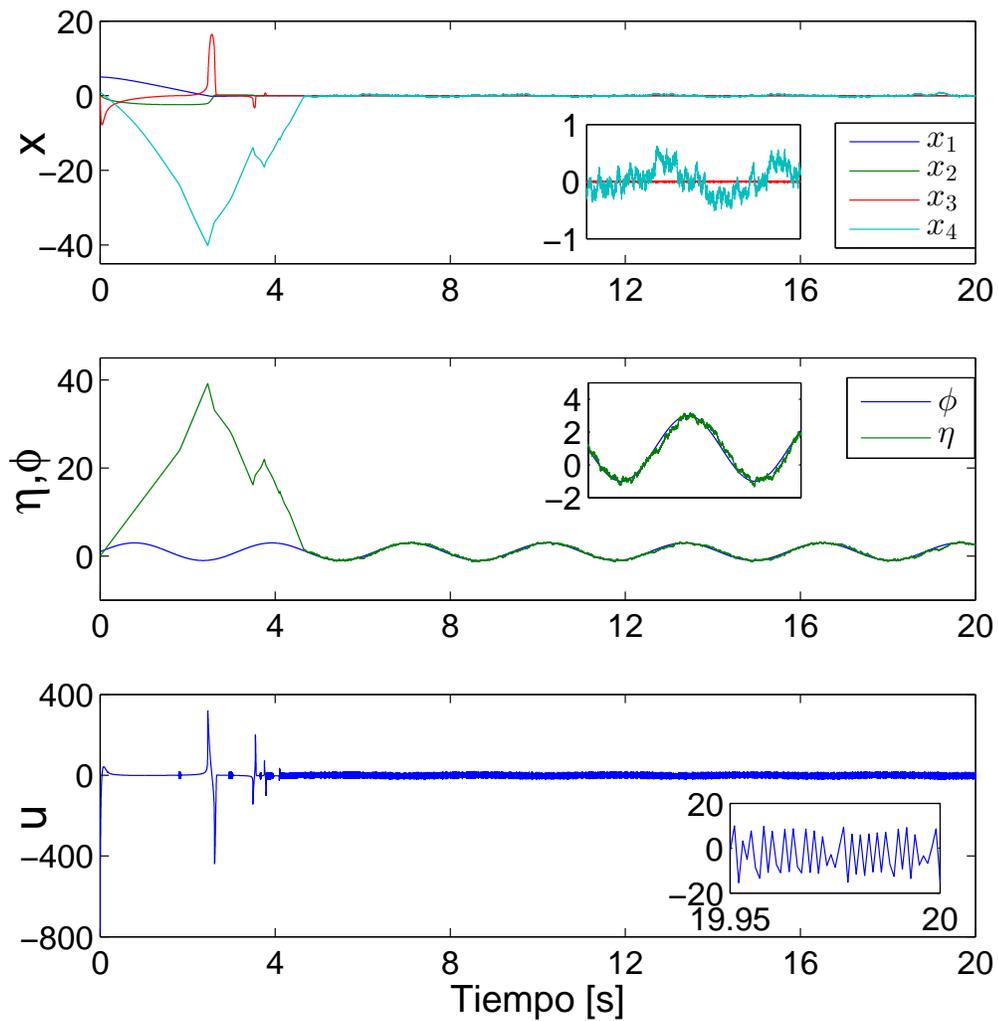


Figura 3.7: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_1 y $L = 264$.

Simulaciones del sistema (3.1) (método de solución: Euler, tiempo de muestreo: 1[ms]) donde $\phi(t) = 2 \cos(2t) + 1$ en lazo cerrado con el controlador (3.2) con un conjunto de ganancias de la Tabla 3.1, L correspondiente y condiciones iniciales $x_0 = [5, 0, 0, 0]^T$, se muestran en las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9.

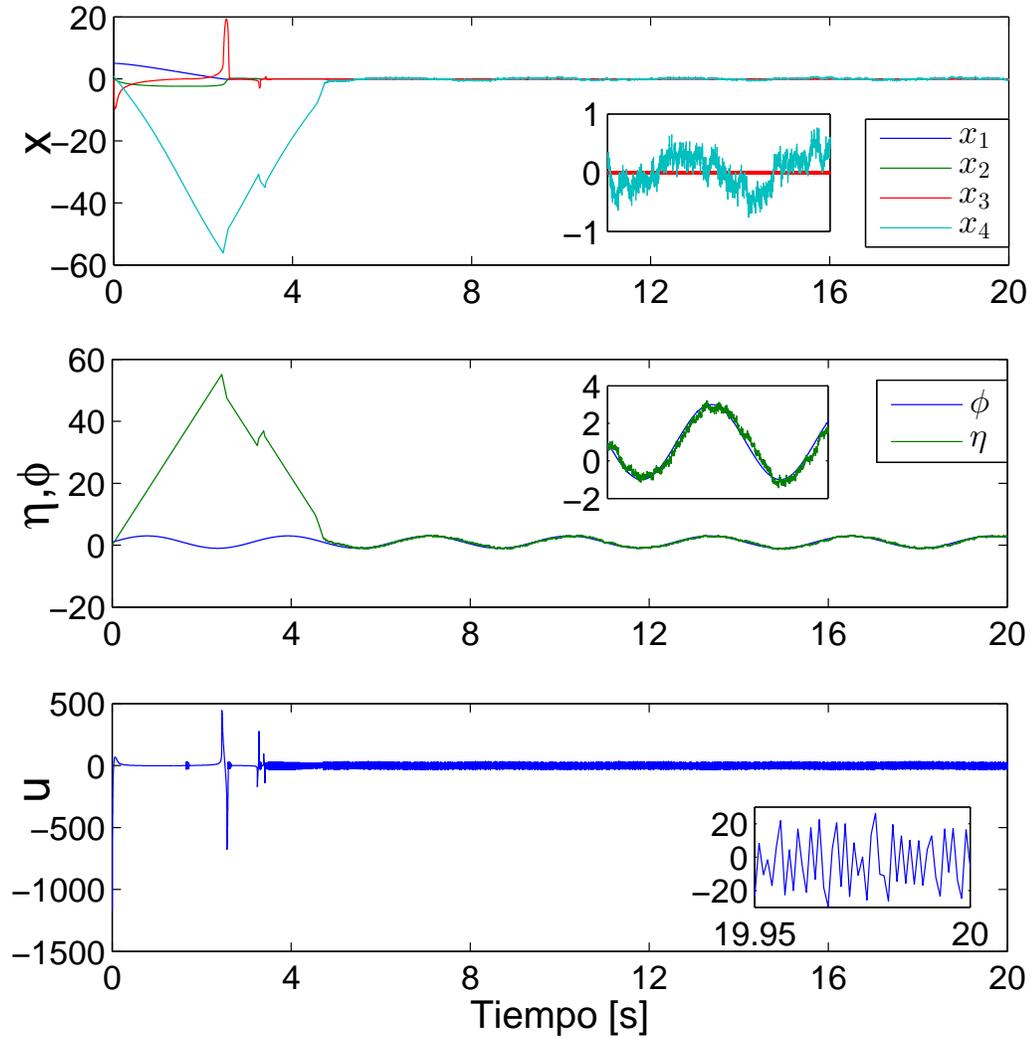


Figura 3.8: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_2 y $L = 450$.

En las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9 se puede observar que los estados x de el sistema 3.1 convergen al origen en tiempo-finito, la extensión integral η converge a la perturbación ϕ y la señal de control u es continua. Los picos presentes en la gráfica del integrador η y del control u se deben a que el controlador (3.2)

no está saturado, sin embargo, el algoritmo (3.3) tiene convergencia global, por lo cual, en simulación, dichos picos no tienen algún efecto negativo en la estabilidad del sistema (3.3).

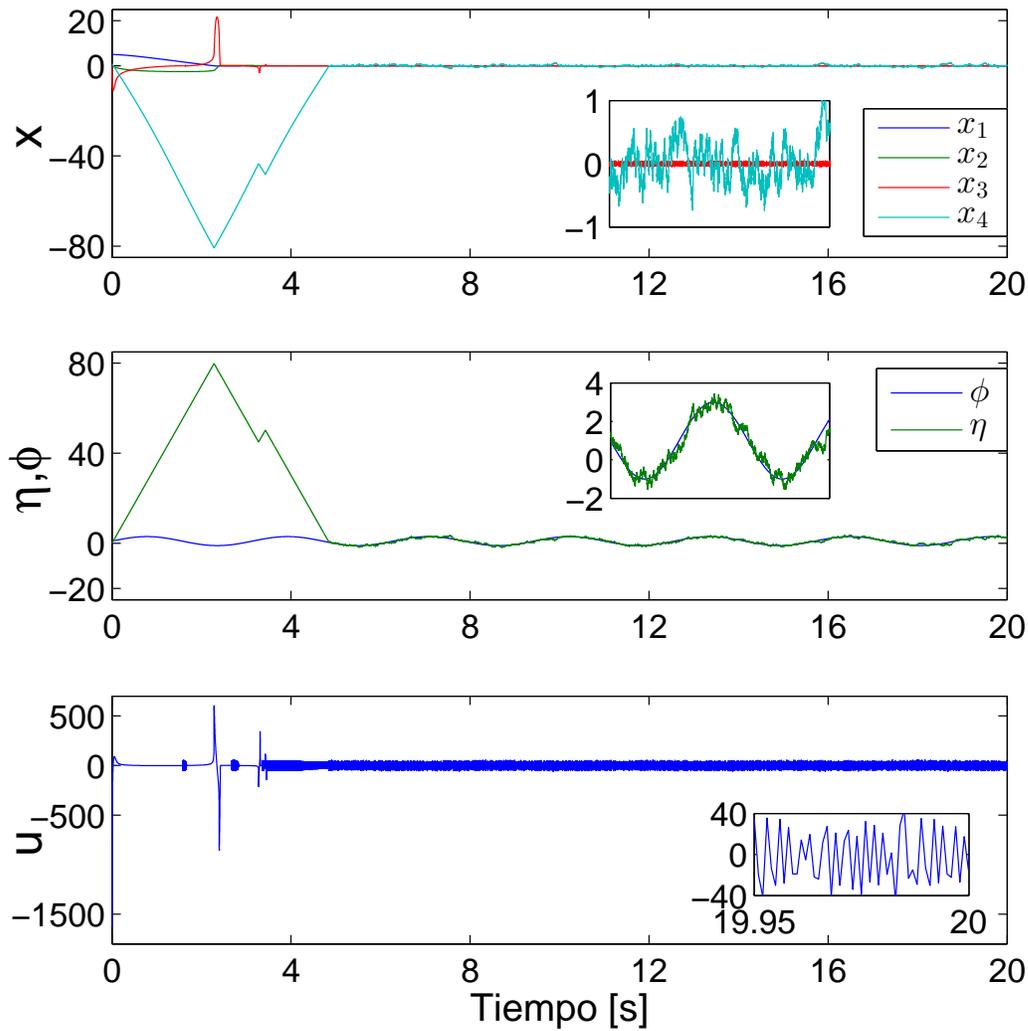


Figura 3.9: Sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_3 y $L = 700$.

3.5. Precisión del Algoritmo Twisting Continuo de tercer orden

Para algoritmos por modos deslizantes de orden superior la precisión se define como el supremo de los estados cuando el sistema se está en estado estacionario [Levant, 1993]. De acuerdo con los pesos de homogeneidad del controlador (3.2), la precisión con la cual los estados del sistema (3.3) convergen a cero con respecto al tiempo de muestreo τ está dada por

$$|x_1| \leq \lambda_1 \tau^4, \quad |x_2| \leq \lambda_2 \tau^3, \quad |x_3| \leq \lambda_3 \tau^2, \quad |x_4| \leq \lambda_4 \tau, \quad (3.19)$$

donde λ_i son constantes. Esto lo podemos comprobar analizando la precisión de los estados del sistema (3.3) en la simulación presentada en la Figura 3.7 donde se utiliza el método de integración de Euler con un tiempo de muestreo $\tau = 0.001$.

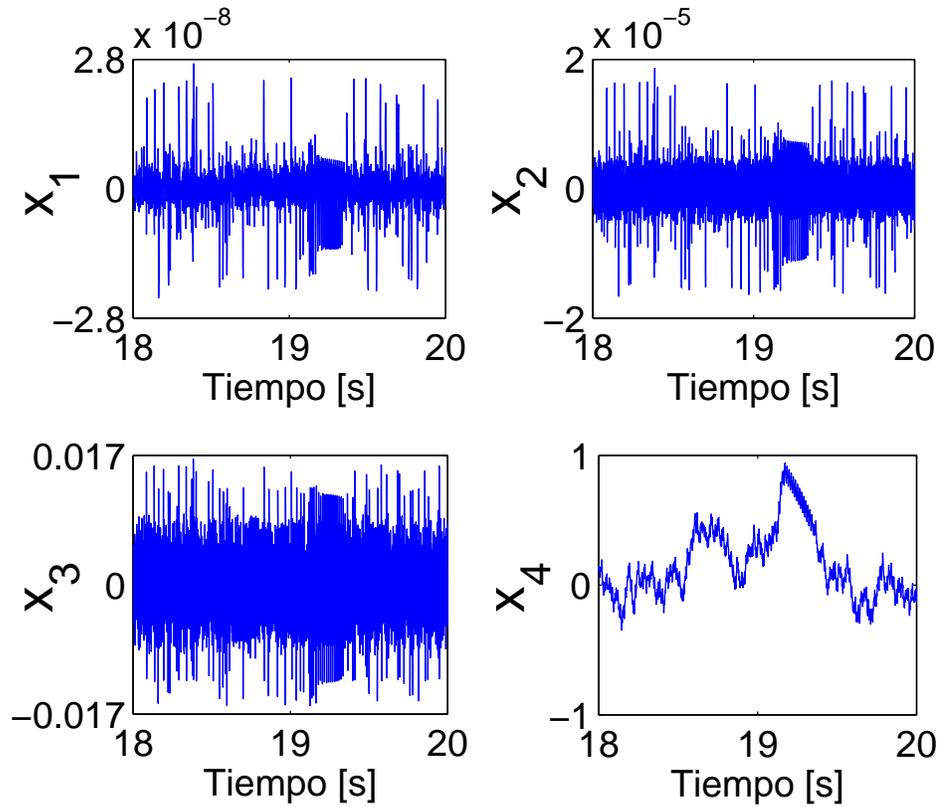


Figura 3.10: Precisión de convergencia a cero de los estados del sistema (3.3) con tiempo de muestreo $\tau = 0.001$

De la Figura 3.10 y la ecuación (3.19), las constantes λ_i son determinadas como

$$\lambda_1 = 970, \quad \lambda_2 = 428, \quad \lambda_3 = 268, \quad \lambda_4 = 90.$$

y dichos valores son verificados (es decir, λ_i conservan su valor) realizando la misma simulación pero con $\tau = 0.0001$ como se muestra Figura 3.11.

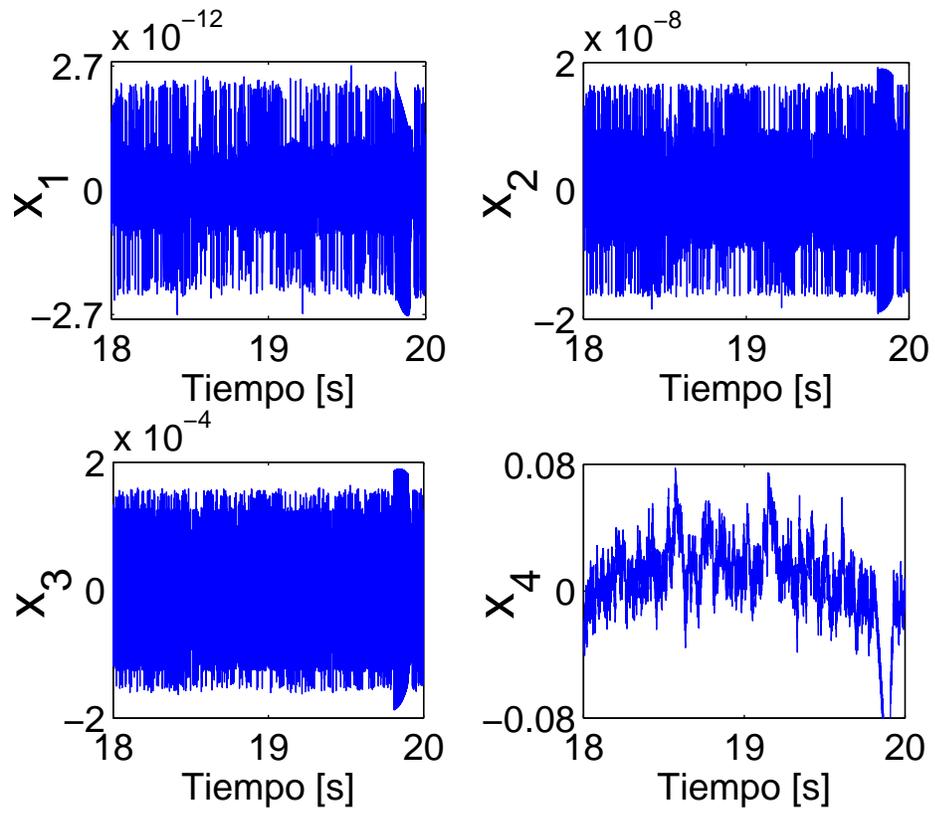


Figura 3.11: Precisión de convergencia a cero de los estados del sistema (3.3) con tiempo de muestreo $\tau = 0.0001$

Capítulo 4

Función de Lyapunov para el Algoritmo Twisting Continuo de orden superior

4.1. Planteamiento del problema

Considere el CTA de orden $n + 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \vdots &\quad \vdots \\ \dot{x}_n &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{n+1}} - \dots - k_n[x_n]^{\frac{1}{2}} + x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{n+1}[x_1]^0 - \dots - k_{2n}[x_n]^0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ son los estados, un conjunto de ganancias k_i ; $i = 1, \dots, 2n$ puede ser seleccionado (por ejemplo: mediante simulación, experimentalmente, etc.), de tal manera que las trayectorias del sistema (4.1) converjan al origen en tiempo finito y diseñando una función de Lyapunov esto se puede probar formalmente.

Par un sistema como tres (4.1) un buen conjunto de FCL son las FG [Sánchez y Moreno, 2016]. Una FCL para el sistema (4.1) puede ser construida como

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|^{\frac{m}{r_i}} + P(\alpha_j, x); \quad j > n \tag{4.2}$$

donde n es el orden del sistema, m es el grado de homogeneidad de la función $V(x)$, r_i son los pesos de homogeneidad de la variable correspondiente y

$P(\alpha_j, x)$ son términos cruzados entre las variables x_i . Sin embargo, es difícil determinar cuales y cuantos términos cruzados son necesarios para que (4.2) sea una FL del sistema (4.17). Por esta razón se desea desarrollar una forma sistemática de construir FL para sistemas como (4.17).

4.2. Idea de construcción de funciones de Lyapunov

La idea de diseño de FCL para CTA de orden superior consta de tres pasos. Primero, se puede observar que el sistema (4.1) está formado por dos subsistemas:

- un sistema (nominal) homogéneo de orden n controlado por una realimentación de estados continua

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{n+1}} - \dots - k_n[x_n]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

- y el CTA de orden n

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= -k_2[x_2]^{\frac{1}{n}} - \dots - k_n[x_n]^{\frac{1}{2}} + x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{n+2}[x_2]^0 - \dots - k_{2n}[x_n]^0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Segundo, se construyen FG's de grado m de la forma (4.2) como FL para ambos sistemas, $V_H(x)$ para el sistema (4.3) y $V_{SM-1}(x)$ para el sistema (4.4).

Finalmente, se propone la FCL para el sistema (4.1) como

$$V(x) = V_H(x) + V_{SM-1}(x) + P_{1n+1}(x_1, x_{n+1}) \tag{4.5}$$

donde $P_{1n+1}(x_1, x_{n+1})$ son términos cruzados de las variables x_1 y x_{n+1} .

Una vez obtenidas $V_H(x)$ y $V_{SM-1}(x)$, el problema de diseñar una FCL (4.7) apropiada es reducido a encontrar los términos cruzados $P_{1n+1}(x_1, x_{n+1})$. Este problema es más simple que encontrar la FCL de la forma (4.2) y puede ser tratado con SOS o el método de Polya [Sánchez y Moreno, 2016]. Además,

encontrar $V_H(x)$ para el sistema (4.3) puede ser resuelto usando la FL del mismo sistema pero de orden $(n - 1)$, i.e.

$$V_H(x) = V_{H-1}(x) + P_H(x), \quad (4.6)$$

donde $V_{H-1}(x)$ es una FL para la realimentación de estados continua de orden $(n - 1)$ y $P_H(x)$ son términos extra. De igual forma, determinar $V_{SM-1}(x)$ para el sistema (4.4) puede ser descompuesto como

$$V_{SM-1}(x) = V_{H-1}(x) + V_{SM-2}(x) + P_{2n+1}(x_2, x_{n+1}) \quad (4.7)$$

donde $V_{H-1}(x)$, $V_{SM-2}(x)$ son FL de los correspondientes subsistemas de (4.4) y $P_{2n+1}(x_2, x_{n+1})$ son términos cruzados de las variables x_2 y x_{n+1} . Se puede ver que el proceso de diseño de FCL para sistemas como (4.1) puede ser hecho de forma recursiva.

Por lo tanto, comenzando con un sistema de segundo orden con realimentación de estados continua

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -k_{n-1}[x_{n-1}]^{\frac{1}{3}} - k_n[x_n]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y el Algoritmo Super-Twisting

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -k_n[x_n]^{\frac{1}{2}} + x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{2n}[x_n]^0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

y construyendo para ellos FG como FL de la forma (4.2), es (en principio) posible construir FCL para sistemas de orden $n + 1$.

4.3. Ejemplo: Algoritmo Twisting Continuo

Para ejemplificar la idea de diseño de FCL para el algoritmo CTA de orden arbitrario se considera el sistema de tercer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ son los estados y k_i ; $i = 1, \dots, 4$ son las ganancias.

1. **Dividir el sistema (4.10) en dos partes.**

El algoritmo(4.10) está compuesto por dos subsistemas, primero, una realimentación de estados homogénea de segundo orden formada por x_1 y x_2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.11)$$

y segundo, el algoritmo STA formado por x_2 y x_3

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_4[x_2]^0.\end{aligned}\quad (4.12)$$

2. **Obtener FL para los subsistemas (4.11) y (4.12)** De la ecuación (4.2) FL's de quinto grado para (4.12) y (4.11) están dadas por

$$V_{STA}(x) = \alpha_{STA1}|x_2|^{\frac{5}{2}} + \alpha_{STA2}|x_3|^5 + \alpha_{STA3}x_2x_3^3, \quad (4.13)$$

y

$$V_{H2}(x) = \alpha_{H21}|x_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_{H22}|x_2|^{\frac{5}{2}} + \alpha_{H23}x_1x_2, \quad (4.14)$$

respectivamente.

3. **FL para el algoritmo CTA** Una FCL para el sistema (4.10) puede ser construida como

$$V_{CTA}(x) = V_{H2}(x) + V_{STA}(x) + P_{13}(x_1, x_3) \quad (4.15)$$

donde $V_{H2}(x)$ es una FL del sistema (4.11), $V_{STA}(x)$ es una FL para el STA (4.12) y $P_{13}(x_1, x_3)$ son términos cruzados de las variables x_1 y x_3 . Por lo tanto, con $P_{13}(x_1, x_3) = -\alpha_4x_1[x_3]^2$ y sustituyendo (4.13) y (4.14) en la ecuación (4.15) una FCL para el sistema (4.10) está dada por

$$\begin{aligned}V_{CTA}(x) &= \alpha_1|x_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_2|x_2|^{\frac{5}{2}} \\ &\quad + \alpha_3|x_3|^5 - \alpha_4x_1[x_3]^2 \\ &\quad + \alpha_5x_2x_3^3 + \alpha_6x_1x_2.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Seleccionando las ganancias k_i de (4.10) y los coeficientes α_i de la ecuación (4.16) de acuerdo a [Torres-González *et al.*, 2015] la positividad definida de (4.16) y la negatividad definida de su derivada está asegurada.

4.4. Función de Lyapunov para el Algoritmo Twisting Continuo de tercer orden

Sea el sistema nominal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{4}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{2}} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_4[x_1]^0 - k_5[x_2]^0 - k_6[x_3]^0,\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ son los estados del sistema y k_i ; $i = 1, \dots, 6$ son las ganancias del controlador. Para diseñar una FCL para el algoritmo (4.17) se siguen los pasos presentados en la Sección 4.2.

1. **Dividir el sistema (4.17) en dos partes** Se puede observar que el algoritmo (4.17) está compuesto por dos sub-sistemas, primero una realimentación de estados homogénea formada por los estados x_1, x_2 y x_3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{4}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{4.18}$$

y segundo, un Algoritmo Twisting Continuo (CTA) formado por x_2, x_3 y x_4

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_2[x_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{2}} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_5[x_2]^0 - k_6[x_3]^0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

2. **Obtener FL para los subsistemas (4.18) y (4.19)** Recursivamente, del sistema (4.19) dos subsistemas pueden ser obtenidos,

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_2[x_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[x_3]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{4.20}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= -k_3[x_3]^{\frac{1}{2}} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_6[x_3]^0.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Por lo tanto, una FL para (4.19) está dada por

$$V_{CTA}(x) = V_{H2}(x) + V_{STA}(x) + P_{24}(x_2, x_4)\tag{4.22}$$

donde $V_{H2}(x)$ es FL para (4.18), $V_{STA}(x)$ es FL para (4.21) y $P_{24}(x_2, x_4)$ son términos cruzados de las variables x_2 y x_4 .

Con base en el sistema (4.20), una FL para (4.18) puede ser construida como

$$V_{H3}(x) = V_{H2}(x) + P_{H3}(x) \quad (4.23)$$

donde $P_{H3}(x)$ son términos necesarios para conseguir la FL.

De la ecuación (4.2) una FL de grado de homogeneidad siete para el sistema (4.21) está dada por

$$V_{STA}(x) = \alpha_{STA1}|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_{STA2}|x_4|^7 + \alpha_{STA3}x_3x_4^5, \quad (4.24)$$

y una FL de grado de homogeneidad siete para (4.20) está dada por

$$V_{H2}(x) = \alpha_{H21}|x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_{H22}|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_{H23}x_2^{\frac{5}{3}}x_3. \quad (4.25)$$

Por lo tanto, con $P_{24}(x_2, x_4) = -\alpha_{CTA4}x_2[x_4]^4$ y sustituyendo (4.24) y (4.25) en la ecuación (4.22) una FL para el sistema (4.19) está dada por

$$\begin{aligned} V_{CTA}(x) = & \alpha_{CTA1}|x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_{CTA2}|x_3|^{\frac{7}{2}} \\ & + \alpha_{CTA3}|x_4|^7 - \alpha_{CTA4}x_2[x_4]^4 \\ & - \alpha_{CTA5}x_3x_4^5 + \alpha_{CTA6}x_2^{\frac{5}{3}}x_3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Con $P_{H3}(x) = \alpha_{H31}|x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_{H34}[x_1]^{\frac{5}{4}}x_3 + \alpha_{H36}x_1x_2$ y sustituyendo (4.25) en la ecuación (4.23) una FL para el sistema (4.18) está dada por

$$\begin{aligned} V_{H3}(x) = & \alpha_{H31}|x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_{H32}|x_2|^{\frac{7}{3}} \\ & + \alpha_{H33}|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_{H34}[x_1]^{\frac{5}{4}}x_3 \\ & + \alpha_{H35}x_2^{\frac{5}{3}}x_3 + \alpha_{H36}x_1x_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

3. **FL para el algoritmo CTA de tercer orden** Una FCL para el sistema (4.17) puede ser diseñada como

$$V(x) = V_{H3}(x) + V_{CTA}(x) + P_{14}(x_1, x_4), \quad (4.28)$$

donde $V_{H3}(x)$ es una función de Lyapunov del sistema (4.18), $V_{CTA}(x)$ es una función de Lyapunov para (4.19) y $P_{14}(x_1, x_4)$ son términos cruzados de x_1 and x_4 .

Finalmente, con $P_{14}(x_1, x_4) = -\alpha_{10}x_1x_4^3$ y sustituyendo las ecuaciones (4.26) y (4.27) en la ecuación (4.28), una FL para el sistema (4.17) está dada por

$$\begin{aligned}
 V(x) = & \alpha_1|x_1|^{\frac{7}{4}} + \alpha_2|x_2|^{\frac{7}{3}} + \alpha_3|x_3|^{\frac{7}{2}} + \alpha_4|x_4|^7 + \alpha_5[x_1]^{\frac{5}{4}}x_3 \\
 & + \alpha_6x_1x_2 + \alpha_7[x_2]^{\frac{5}{3}}x_3 - \alpha_8x_2[x_4]^4 - \alpha_9x_3x_4^5 - \alpha_{10}x_1x_4^3,
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Las condiciones de FL de $V(x)$ y $W(x) = -\dot{V}(x)$ se prueba en el Capítulo 3 por el Lema 3.1.

Capítulo 5

Implementación: Péndulo de rueda inercial

El péndulo de rueda inercial es un sistema mecánico que consiste de un péndulo con un disco simétrico unido al extremo que está libre para girar alrededor de un eje paralelo al eje de rotación del péndulo. El disco es accionado por un motor CD y el par de acoplamiento generado por la aceleración angular del disco puede ser utilizado para controlar activamente el sistema [Spong *et al.*, 2001].

Este apartado cuenta con dos sensores para medir los ángulos del péndulo y del disco, ambas velocidades angulares son estimadas por medio de diferenciadores robustos y exactos [Levant, 2003], se supone que los diferenciadores convergen antes de que el controlador actúe y por lo tanto se puede considerar al sistema como de estado medible.

Las leyes de control se programan en MATLAB y SIMULINK, para la comunicación entre el sistema y la computadora se utiliza una tarjeta de adquisición de datos DSpace y el tiempo de muestreo es de 1 [ms].

EL péndulo de rueda inercial es un sistema no lineal y sub-actuado por lo cual es un equipo interesante para la teoría de control.



Figura 5.1: Péndulo de rueda inercial.

5.1. Modelo matemático

La posición angular de la rueda es una variable cíclica y no tiene efecto en la dinámica del sistema, por lo tanto, puede ser omitida en el modelo matemático del péndulo de rueda inercial.

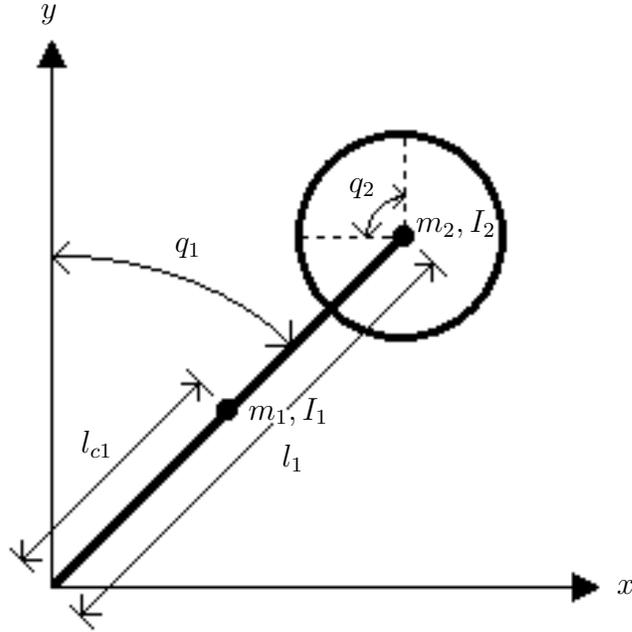


Figura 5.2: Diagrama de coordenadas del péndulo de rueda inercial.

El modelo matemático en variables de estado del sistema en la Figura 5.2 [Spong *et al.*, 2001] está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{d_{22}}{\det D}\phi(x_1) - \frac{d_{12}}{\det D}u, \\ \dot{x}_3 &= \frac{d_{21}}{\det D}\phi(x_1) + \frac{d_{11}}{\det D}u, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde x_1 es la posición angular del péndulo [rad], x_2 es la velocidad angular del péndulo [rad/s], x_3 es la velocidad angular del disco [rad/s] y u es la entrada de control [Nm]. Además,

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= -\bar{m}g \sin(x_1), \\ \bar{m} &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \\ \det D &= d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}, \\ d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2, \\ d_{12} &= d_{21} = d_{22} = I_2, \end{aligned}$$

y los parámetros del sistema son

$$\begin{aligned}\bar{m} &= 0.2514[kg], & d_{11} &= 0.0479[kgm^2], & d_{12} &= 0.0027[kgm^2], \\ d_{21} &= 0.0027[kgm^2], & d_{22} &= 0.0027[kgm^2], & g &= 9.8[m/s^2].\end{aligned}$$

En los experimentos realizados en el péndulo de rueda inercial el objetivo de control consiste en llevar a cero las variables $[x_1, x_2, x_3]$ a partir de una condición inicial distinta de cero, dejando libre la posición angular de la rueda, por medio de la ley de control (3.18). Para obtener del sistema (5.1) un sistema de la forma (3.1) se aplica linealización exacta por realimentación de estados.

Primero se define el difeomorfismo local $(-\pi/2 < x_1 < \pi/2)$

$$\begin{aligned}z_1 &= d_{11}x_2 + d_{12}x_3, \\ z_2 &= \bar{m}g \sin(x_1), \\ z_3 &= \bar{m}g \cos(x_1)x_2,\end{aligned}\tag{5.2}$$

[Spong *et al.*, 2001]. Aplicando la transformación (5.2) [Spong *et al.*, 2001] al sistema (5.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -\bar{m}g \left(x_2^2 - \bar{m}g \frac{d_{22}}{\det D} \cos(x_1) \right) \sin(x_1) - \frac{d_{12}}{\det D} \bar{m}g \cos(x_1)u.\end{aligned}\tag{5.3}$$

5.2. Esquema de control

Se define la ley de linealización exacta por retroalimentación de estados [Spong *et al.*, 2001]

$$u = -\frac{1}{\frac{d_{12}}{\det D} \bar{m}g \cos(x_1)} \left[v + \bar{m}g \left(x_2^2 - \bar{m}g \frac{d_{22}}{\det D} \cos(x_1) \right) \sin(x_1) \right]\tag{5.4}$$

de tal forma que, en lazo cerrado, el sistema (5.1) queda

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= v + \phi(t),\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde $\phi(t)$ es una variable Lipschitz en el tiempo que representa incertidumbre paramétrica dinámicas no modeladas y la entrada de control v está dada

por

$$\begin{aligned} v &= -k_1 L^{\frac{3}{4}} [z_1]^{1/4} - k_2 L^{\frac{2}{3}} [z_2]^{1/3} - k_3 L^{\frac{1}{2}} [z_3]^{1/2} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4 L [z_1]^0 - k_5 L [z_2]^0 - k_6 L [z_3]^0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde las ganancias k_i están dadas por la Tabla 3.1 y la constante L se determina experimentalmente, de tal forma que se logre el objetivo de control.

5.3. Resultados experimentales

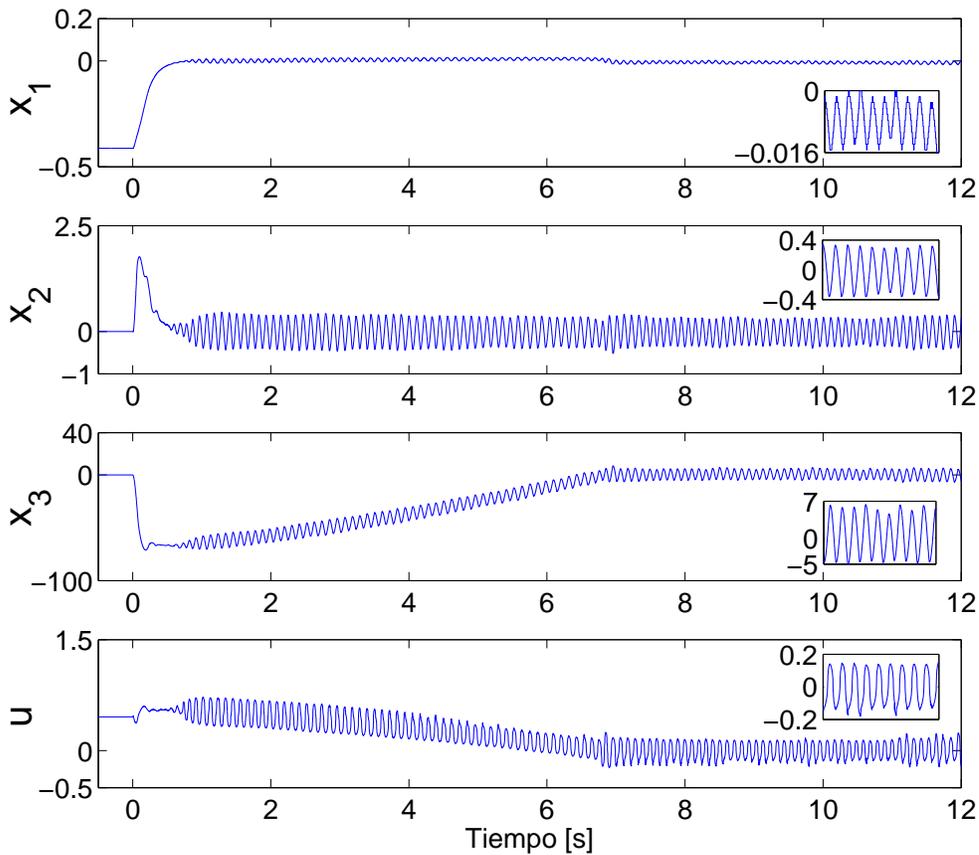


Figura 5.3: Péndulo de rueda inercial en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_1 .

En la Figura 5.3 se muestran los resultados experimentales de la implementación del controlador (5.5), con el conjunto de ganancias D_1 de la Tabla 3.1 y $L = 75$, en el péndulo de rueda inercial. Se puede observar que los estados del sistema (5.1) x_1, x_2 y x_3 convergen a una vecindad del origen desde la condición inicial $x_0 = [0.4, 0, 0]$ y la señal de control u es continua.

En la Figura 5.4 se muestran los resultados obtenidos en la implementación en el péndulo de rueda inercial del controlador (5.5) con el conjunto de ganancias D_2 de la Tabla 3.1 y $L = 75$.

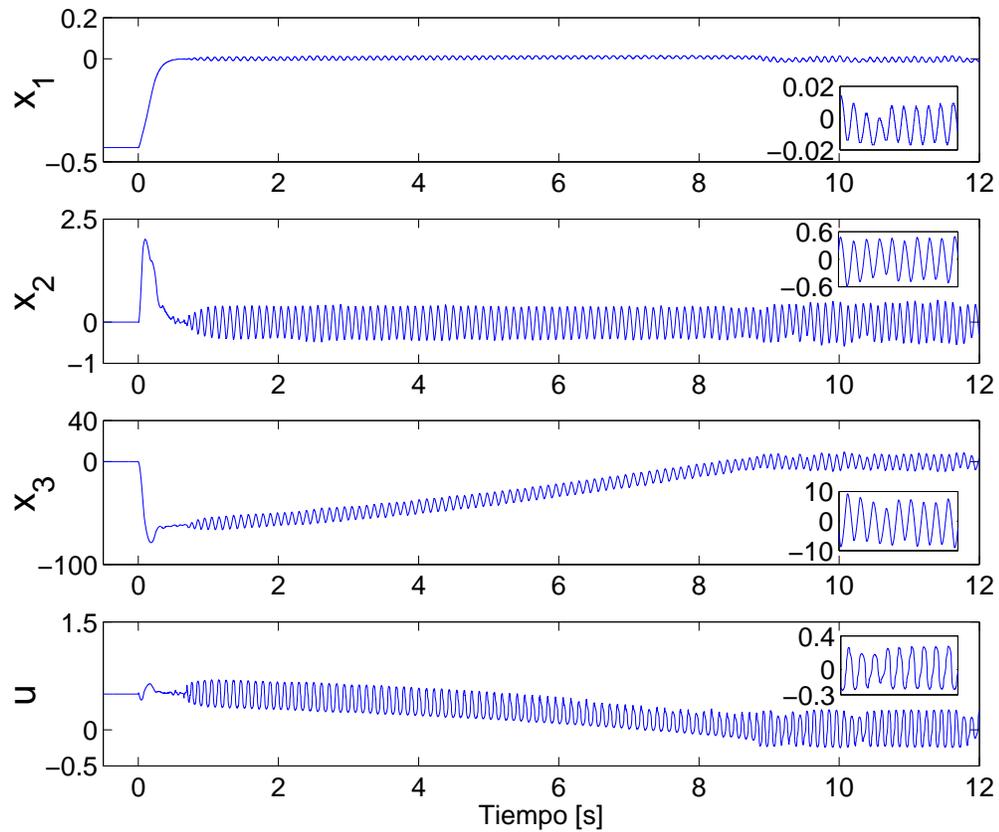


Figura 5.4: Péndulo de rueda inercial en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_2 .

De la Figura 5.4 se observa que los estados x_1, x_2 y x_3 de (5.1) convergen

a una vecindad del origen del sistema desde la condición inicial $x_0 = [0.4, 0, 0]$ y la señal de control u es continua.

En la Figura 5.5 se presentan los resultados experimentales del péndulo de rueda inercial en lazo cerrado con el controlador (5.5) con el conjunto de ganancias D_3 de la Tabla 3.1 y $L = 75$.

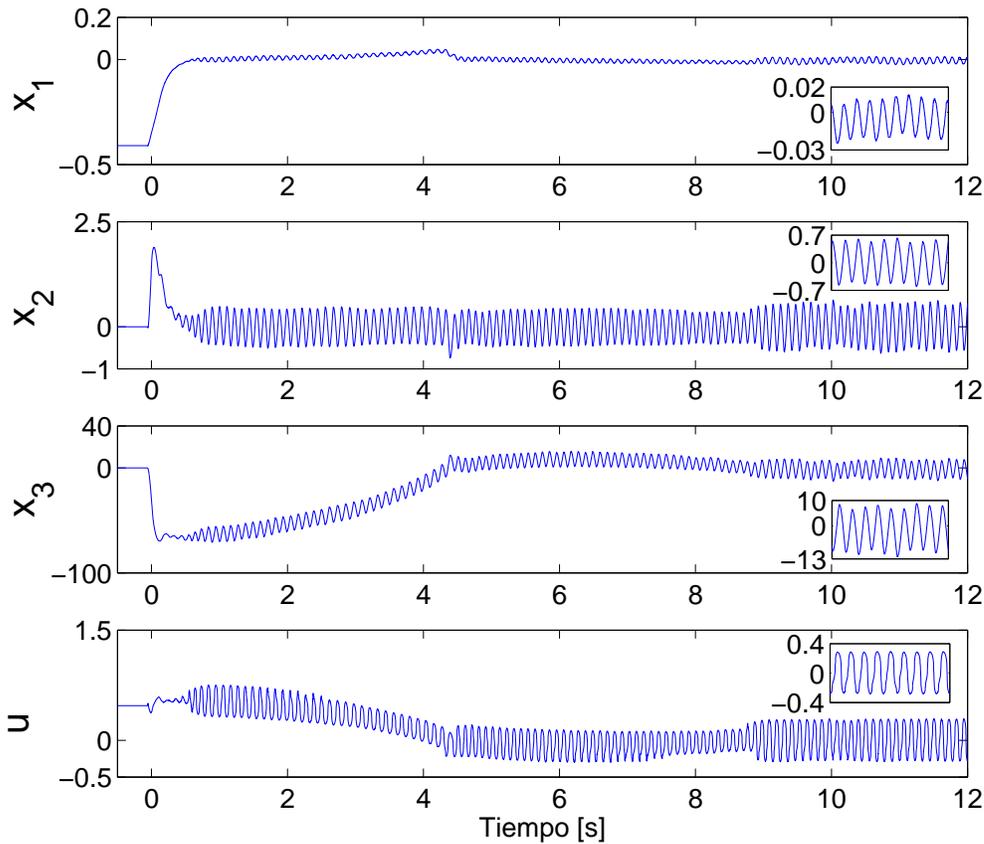


Figura 5.5: Péndulo de rueda inercial en lazo cerrado con el controlador (3.2) con el conjunto de ganancias D_3 .

De la Figura 5.5 se puede ver que las trayectorias de (5.1) convergen a una vecindad del origen del sistema desde la condición inicial $x_0 = [0.4, 0, 0]$ y la señal de control u es continua.

A pesar que en la teoría los estados de (5.1) deben converger al origen en tiempo-finito, en la práctica debido a la discretización esto no se logra.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se presentó el algoritmo Twisting continuo de tercer orden el cual es un controlador por modos deslizantes de quinta generación capaz de asegurar para sistemas de grado relativo tres, en teoría, convergencia a cero en tiempo-finito compensando exactamente perturbaciones Lipschitz en el tiempo por medio de una señal de control continua. Se presentaron conjuntos de ganancias que aseguran la estabilidad del algoritmo y por medio del diseño de una función de Lyapunov se logro probar dicha estabilidad.

Se propuso una idea sistemática y recursiva para la construcción de funciones de Lyapunov para el Algoritmo Twisting Continuo de orden superior basado en el enfoque de formas generalizadas. Dicha idea fue validada para segundo orden y permitió obtener por primera vez una función de Lyapunov para el Algoritmo de Twisting Continuo de tercer orden. Sin embargo, para ordenes superiores no hemos podido demostrar la validez de dicha idea aunque esperamos poder hacerlo en el futuro cercano.

Finalmente, se presentaron resultados experimentales de la implementación del CTA de tercer orden en un péndulo de rueda inercial con lo cual se valido el conjunto de ganancias para el cual se obtuvo prueba de estabilidad en teoría..

Bibliografía

- [Bacciotti y Rosier, 2005] Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, Berlin, 2nd edición.
- [Bhat y Bernstein, 1997] Bhat, S. P. y Bernstein, D. S. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. En *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volumen 4, pp. 2513–2514. IEEE.
- [Choi *et al.*, 1995] Choi, M.-D., Lam, T. Y., y Reznick, B. (1995). Sums of squares of real polynomials. En *Proceedings of Symposia in Pure mathematics*, volumen 58, pp. 103–126. American Mathematical Society.
- [Edwards y Shtessel, 2016] Edwards, C. y Shtessel, Y. B. (2016). Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica*, 65:183–190.
- [Edwards y Spurgeon, 1998] Edwards, C. y Spurgeon, S. K. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. CRC, Padstow, UK.
- [Emel’Yanov *et al.*, 1986] Emel’Yanov, S., Korovin, S., y Levantovskii, L. (1986). Higher-order sliding modes in binary control systems. En *Soviet Physics Doklady*, volumen 31, p. 291.
- [Filipov, 1988] Filipov, A. F. (1988). Differential equations with discontinuous right-hand side. En *Amer. Math. Soc*, pp. 191–231.
- [Fridman *et al.*, 2015a] Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., y Chalanga, A. (2015a). *Continuous Nested Algorithms : The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers*, pp. 5–35. Springer International Publishing, Cham.
- [Fridman *et al.*, 2015b] Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., y Chalanga, A. (2015b). Continuous nested algorithms: The fifth

- generation of sliding mode controllers. En *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pp. 5–35. Springer.
- [Kamal *et al.*, 2016] Kamal, S., Moreno, J. A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., y Fridman, L. M. (2016). Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica*, 69:308–314.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). Nonlinear systems.
- [Laghrouche *et al.*, 2017] Laghrouche, S., Harmouche, M., y Chitour, Y. (2017). Higher order super-twisting for perturbed chains of integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263.
- [Levant, 1998] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *automatica*, 34(3):379–384.
- [Levant, 2001] Levant, A. (2001). Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE transactions on Automatic Control*, 46(9):1447–1451.
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941.
- [Levant, 2005a] Levant, A. (2005a). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830.
- [Levant, 2005b] Levant, A. (2005b). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11):1812–1816.
- [Moreno, 2016] Moreno, J. A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. En *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 142–147.
- [Parrilo, 2000] Parrilo, P. A. (2000). *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. Tesis doctoral, California Institute of Technology.

- [Pólya, 1928] Pólya, G. (1928). Über positive darstellung von polynomen. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 73:141–145.
- [Prajna *et al.*, 2002] Prajna, S., Papachristodoulou, A., y Parrilo, P. A. (2002). Introducing sostools: A general purpose sum of squares programming solver. En *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volumen 1, pp. 741–746. IEEE.
- [Sánchez y Moreno, 2014] Sánchez, T. y Moreno, J. A. (2014). A constructive Lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. En *Decision and Control, Proceedings of the 53rd IEEE Conference on*, volumen 1, pp. 5500–5505. IEEE.
- [Sánchez y Moreno, 2016] Sánchez, T. y Moreno, J. A. (2016). *Construction of Lyapunov Functions for High Order Sliding Modes*, pp. 77–99. The Institution of Engineering and Technology (IET), London.
- [Shtessel *et al.*, 2014] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., y Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer.
- [Spong *et al.*, 2001] Spong, M. W., Corke, P., y Lozano, R. (2001). Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 37(11):1845–1851.
- [Torres *et al.*, 2017] Torres, V., Sanchez, T., Fridman, L., y Moreno, J. A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*.
- [Torres-González *et al.*, 2015] Torres-González, V., Fridman, L. M., y Moreno, J. A. (2015). Continuous twisting algorithm. En *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, pp. 5397–5401. IEEE.
- [Utkin, 1992] Utkin, V. I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*, volumen 116. Springer-Verlag Berlin.
- [Zamora *et al.*, 2013] Zamora, C. A., Moreno, J. A., y Kamal, S. (2013). Control integral discontinuo para sistemas mecánicos. En *2013 Congreso Nacional de Control Automático (CNCA AMCA)*, pp. 11–16, Ensenada, Baja California, Mexico. Asociación de México de Control Automático (AMCA).
- [Zubov y Boron, 1964] Zubov, V. I. y Boron, L. F. (1964). *Methods of AM Lyapunov and their Application*. Noordhoff Groningen.