FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

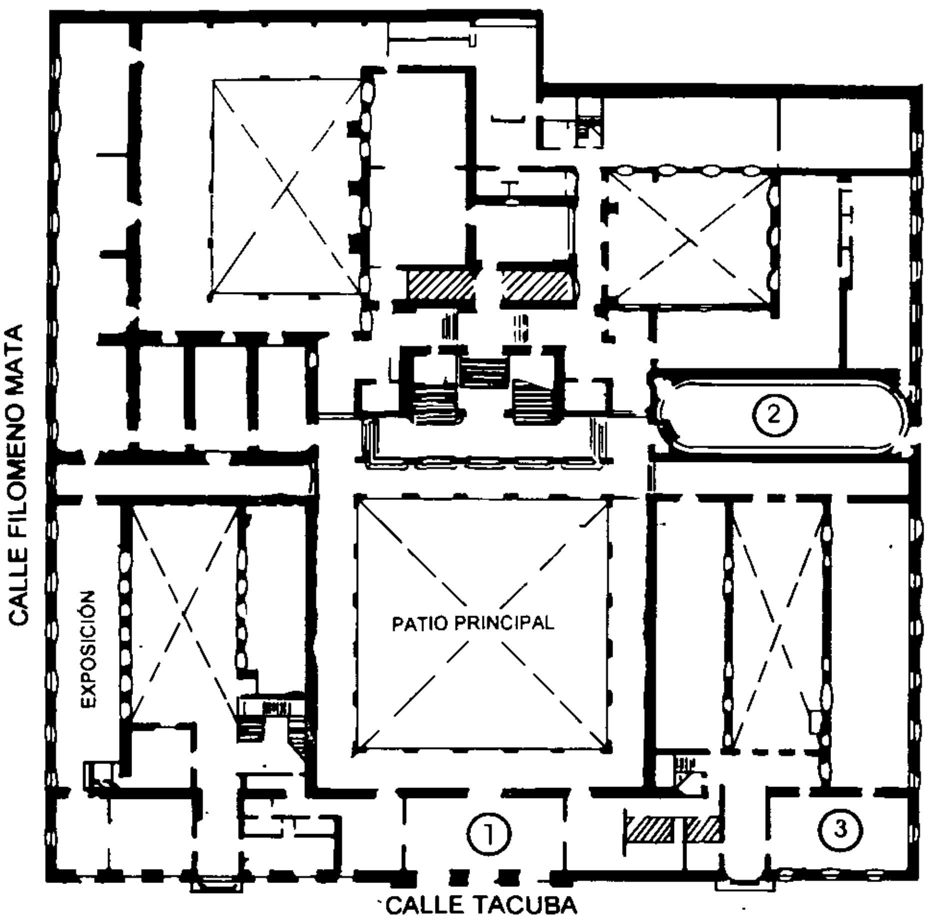
Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

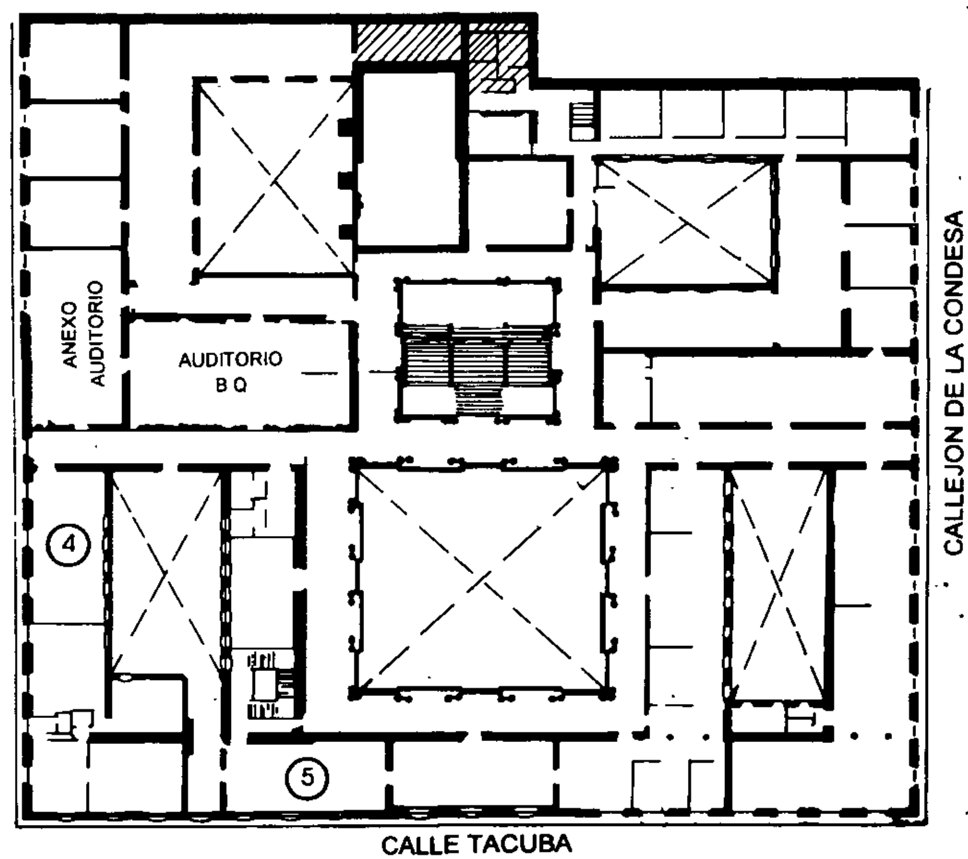
Atentamente
División de Educación Continua.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

PALACIO DE MINERIA

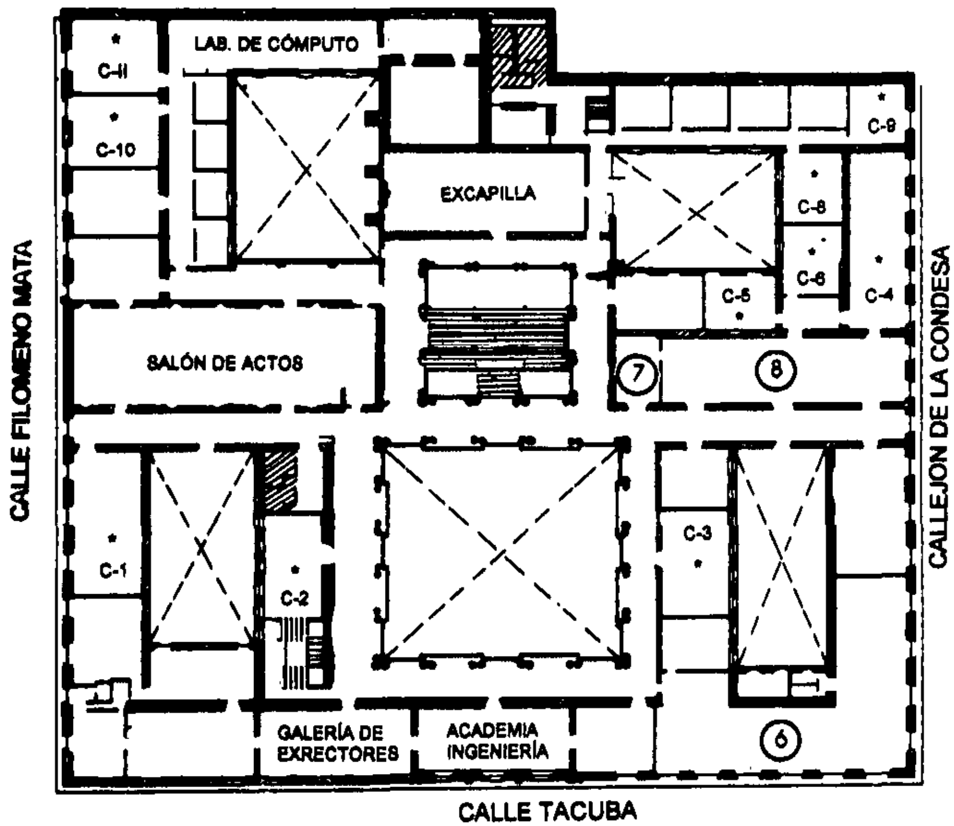


PLANTA BAJA



MEZZANINNE

PALACIO DE MINERIA



1er. PISO

GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

* AULAS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO
ADMINISTRACIÓN DE NEGOCIOS

MÓDULO III.- MATEMÁTICAS MERCANTILES EN LOS NEGOCIOS
Del 8 al 29 de mayo de 1999
Apuntes Generales

C.P. Humberto Pérez González
Palacio de Minería
1 9 9 9

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D F APDO Postal M-2285
Teléfonos 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

MATEMATICAS FINANCIERAS PARA NEGOCIOS

INSTRUCTOR: C.P. HUMBERTO PEREZ GONZALEZ

INTRODUCCION

LA IMPORTANCIA RELATIVA DEL INTERES SIMPLE Y CAPITALIZABLE

EL INTERES,- Fundamentalmente, el crecimiento de una suma principal representado el precio cargado por el uso de un dinero dentro de un determinado tiempo concedido. Nuestro concepto de utilidades económicas (ya sea en forma de interés o de algún otro tipo de rendimiento de la inversión) es periódico. La actividad económica es llevada a cabo durante períodos específicos de tiempo y se piensa en el rendimiento de la inversión en términos de rendimiento mensual, trimestral o anual.

EL INTERES SIMPLE.- Es el rendimiento (o crecimiento de) una cantidad de dinero por un período de tiempo. Se puede también considerar el interés simple como un rendimiento por más de un período de tiempo, si se supone que el interés en sí mismo no devenga un rendimiento, pero esta clase de situaciones rara vez ocurren en la realidad. El interés simple se aplica generalmente a inversiones a corto plazo y a operaciones de préstamo que implican un período de tiempo de un año o menos.

EL INTERES CAPITALIZABLE.- Es la retribución (o crecimiento de) una suma de dinero por dos o más períodos de tiempo, suponiendo que el crecimiento en cada uno de los períodos de tiempo es agregado a la suma principal al final del período y que produce una retribución en todos los períodos subsecuentes. Muchas inversiones importantes y transacciones de préstamo solicitado, comprenden más de un período de tiempo. Esto es particularmente cierto en una economía capitalista, en donde grandes cantidades de capital de larga duración son utilizadas productivamente y financiadas durante largos períodos de tiempo. Los hombres de negocios consideran y evalúan tales oportunidades de inversión en términos de series de retribuciones periódicas, pudiendo ser cada una de las mismas reinvertida, a su vez, para producir retribuciones futuras. El crecimiento del capital mediante la reinversión de ganancias es consecuentemente un aspecto común en el panorama económico debiendo ser tomado en cuanta al asignar un valor a las entradas y salidas de efectivo que están distribuidas sobre el tiempo en patrones diversos. Afortunadamente, la acumulación y reinversión de utilidades a intervalos periódicos es bastante análoga al proceso financiero de intereses capitalizables, de tal manera que las fórmulas desarrolladas para tratar las anualidades y los cálculos actuariales, son aplicables a los problemas de evaluación a los que se enfrenta el hombre de negocios.

INTERES COMPUESTO

El Interés Compuesto proviene de que, los intereses vencidos en vez de ser pagados a su vencimiento se agregan al capital que los produjo para a su vez dicha suma producira nuevos intereses.

La Capitalización de los intereses, o sea sumarlos al capital depende de los vencimientos de los mismos. Cuando en una operación el vencimiento de los intereses no se fijan de antemano, debe considerarse, que los mismos vences al final de cada año o sea al final de los períodos de tiempo a que se refiere la tasa, es decir, si existe una tasa anual se debe suponer que los intereses vencen anualmente, y por lo tanto su capitalización es anual. Si es una tasa semestral, la capitalización debe ser semestral, etc., en consecuencia todo calculo de interés, cuando el tiempo pasa de un período o unidad que se tome como base, debería hacer a interés compuesto y de hecho las operaciones a plazo largo se calculan efectivamente en esta forma.

En los problemas de interés simple aún cuando los períodos a que se refiera la tasa sean menores que el tiempo de la operación, los intereses se consideran vencidos hasta el final del plazo último y entonces no hay capitalización en los periodos a que se refiere la tasa. Así pues un préstamo al 6% en 3 años a interés simple no tiene vencimiento anual de interés, entonces se considera la operación a un período y al 18% por dicho período. De la misma manera un préstamo a interés simple al 1% mensual en 12 meses equivale a decir: 12% anual. Así es que al fijar la unidad de tiempo a que corresponda la tasa de interés de hecho se fija también cuando vencen los intereses y por lo tanto cuando deberá hacerse el pago.

Para que exista el interés compuesto es necesario que el tiempo sea mayor que un período o unidad de tiempo a que se refiera la tasa. El interés compuesto no se calcula distinto al interés simple del capital que se obtiene en el período anterior teniendo al fin de la operación una serie de cálculos de interés simple pero cada uno de ellos a base de un capital distinto cada vez mayor, aumentado con los intereses capitalizados.

FORMULA GENERAL

MONTO DE UN CAPITAL A INTERES COMPUESTO

Para obtener la fórmula General del Monto de un Capital a Interés Compuesto, es necesario tener presente lo siguiente:

1. Nos referimos siempre a unidades de tiempo que llamamos períodos, representando su número por "n".

2. A un capital inicial que representaremos por "P".

3. A un tanto por uno o tasa, que se representa por "i", que es el rédito de la unidad de moneda en una unidad de tiempo o sea un Período, sirve de base para la capitalización de intereses.

4. Al monto de un capital de interés compuesto, se representa por "S".

5. Que al fin de cada período hay que obtener la suma de capital e intereses con el objeto de conocer el nuevo que es el capital que servirá para calcular los interés del período siguiente.

6. Que los intereses de cada período se obtienen multiplicando por "i" el capital obtenido por la suma en el período anterior.

EL PROCEDIMIENTO QUE SE SIGUE PARA LA DEDUCCION DE LA FORMULA ES EL SIGUIENTE:

DEDUCCION DE LA FORMULA
MONTO DE UN CAPITAL A INTERES COMPUESTO

Capital inicial 1er. período	P
Interés al fin del 1er. período	Pi
Suma o Monto	$P + Pi - P(1 + i)$
Capital 2o. Período	$P(1 + i)$
Intereses 2o. período	$P(1 + i)\,i$
Suma o Monto	$P(1 + i) + P(1 + i) - P(1+i)^2$
Capital 3er. Período	$P(1+i)^2$
Interés 3er. Período	$P(1 + i)^2\,i$
Suma o Monto	$P(1+ i)^2 + (1+i)^2\,i - P(1+i)^3$
En General:	
Capital al Principio del "n" año	$P(+ i)^{n-1}$
Intereses al Final del "n" año	$P(1 + i)^{n-1}\,i$
Suma o Monto	$P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-1}\,i - P(1 + i)^n$
Por lo tanto:	

FORMULA GENERAL DEL MONTO DE UN CAPITAL A INTERESES COMPUESTO:	$S - P(+ I)^n$

EL VALOR DEL DINERO A TRAVES DEL TIEMPO

Las decisiones sobre estructura financiera, las de arrendar en vez de comprar, las técnicas de valuación de valores, el costo de capital, etc., son temas que no podrán comprenderse si no se posee un conocimiento del factor interés en las decisiones financieras.

¿Por qué el dinero tiene valor en el tiempo? Si una empresa o individuo dispone de dinero sobrante, lo puede invertir en activos líquidos, tales como CETES, pagarés bancarios, fondo de renta fija, etc. y recibir más dinero en un tiempo después. O al contrario, si usted recibe un préstamo ahora, deberá pagar una suma mayor en el futuro por el efecto del interés. El resultado es que $ 1,000 en la mano ahora son más valiosos que $ 1,000 que se van a recibir en el futuro. En realidad existen muchas opciones que ofrecen una tasa adecuada de interés; si se les somete a un buen análisis, será posible elegir aquellos que menos contribuyan a que la empresa avance hacia sus fines. Por lo que el lector debe aprender cómo se establece una rentabilidad para su mejor provecho.

1.1. Interés simple.- El interés simple es un porcentaje del capital original que se paga al transcurrir un año.

Supóngase una inversión original de $ 100,000 en una cuenta de ahorros bancaria al 20% anual.
Fórmula de interés simple:

$$V = p(1 + i) \qquad (1)$$

en donde: p = capital original
i = Tasa de interés dividida entre 100
v = Capital final

Sustitución:
$$v = 100{,}000\,(1 + .20)$$
$$v = 100{,}000\,(1.20)$$
$$v = 120{,}000$$

La tasa de interés simple no admite reinversión de los intereses ganados en el período

1.2. Interés simple en períodos no anuales.- Se puede expresar la tasa de interés en términos no anuales ajustando la dimensión tiempo en la ecuación (1) encontrando la tasa que guarde con la tasa anual la misma relación que el período en cuestión.

1) salvo que se especifique lo contrario, todas la tasas de interés serán con una base anual.

Ejemplo: Un capital de 100,000 a la tasa del 60% anual, durante 3 años:

Sustitución:
$$V = 100{,}000\,(1 + .60)^3$$
$$V = 100{,}000\,(1.60)^3$$
$$V = 100{,}000\,(4.096)$$
$$V = 409{,}600$$

Puesto que el efecto del interés compuesto es mecánico, se han formulado tablas para diversas combinaciones de i y n (ver tabla 1) eligiendo simplemente los valores de n e i, el usuario de la tabla puede leer el valor que alcanzará $ 1 al transcurrir el tiempo especificado. Supóngase que se desea saber el valor que tendrá $ 1, invertido al 5 por ciento de interés, una vez que transcurran 10 años. Se bajará por la primera o por última columna hasta llegar a 10 años y se leerá horizontalmente el renglón hasta llegar a la columna que dice 5 por ciento, o lo que es igual buscando en el cuerpo de la tabla el punto quedará en 1.6289, lo cual indica que $ 1 alcanzará un valor de $ 1.6289 en 10 años, invertido al 5 por ciento de interés compuesto anual.

Tabla 1 Valor de $1 colocado a interés compuesto

Por medio de la tabla se puede calcular el valor de cualquier múltiplo de \$ 1. Por ejemplo, supóngase que se guarda con el año. Supóngase la misma inversión a la fórmula de interés simple no anual

$$v = p\left(1 + \frac{i}{m}\right) \qquad (2)$$

En donde m: número de veces que cabe en un año

Sustitución $v = 100{,}000\left(1 + \frac{.3825}{12}\right)$

$v = 100{,}000 (1 + .031875)$
$v = 100{,}000 (1.031875)$
$v = 103{,}187.50$

Ahora supóngase que el período fuera de 2 años.

Sustitución: $v = 100{,}000 (1 + 2(.3825))$

$v = 100{,}000 (1 + .765)$

$v = 100{,}000 (1.765)$

$v = 176{,}500$

1.3. Interés compuesto.- Significa recibió intereses sobre intereses. El interés que se gana por el capital que se invierte en un período cualquiera se acumula de manera que el interés simple corresponde al período que sigue no se paga únicamente por el capital orinal, sino también por el capital acumulado de todos los períodos anteriores en los cuales se ganaron intereses. A este proceso se le conoce como capitalización.

Fórmula de interés compuesto:

$v = p (1 + i)^{n}$
En donde n: número de años en que se invertirá.
Han invertido \$ 100,000 al 5% por 10 años.
Sustitución: 1.6289 x 100,000 = 162,890

1.4. Interés compuesto en períodos no anuales.- Con frecuencia, el período de inversión es menor a un año, caso concreto son las tasas de interés de los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento que operan actualmente en el Sistema bancaria Mexicano, (tomados el 7 de Noviembre de 1988) 1 mes (38.25), 3,6,9 y 12 meses
(31.75), por lo que es preciso ajustar la fórmula de interés compuesto para que refleje el número de veces que la capitalización se repite en un año.

Fórmula para calcular. $v = p\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m.m}$ (4)

Ejemplo: calcular una inversión de un millón de pesos a las tasas anteriormente expuestas y determinar cuál de ellas es mejor.

A un mes:

Sustitución:

$$v = 1'000,000 \left(1 + \frac{.3825}{12} \right)^{1.12}$$
$$v = 1'000,000 (1 + .031875)^{12}$$
$$v = 1'000,000 (1.031875)^{12}$$
$$v = 1'000,000 (1.4557219)$$
$$v = 1'456,220$$

A 3 meses:

Sustitución:

$$v = 1'000,000 \left(1 + \frac{.3175}{4} \right)^{1.4}$$
$$v = 1'000,000 (1 + .079375)^{4}$$
$$v = 1'000,000 (1.079375)^{4}$$
$$v = 1'000,000 (1.357342)$$
$$v = 1'357,342$$

A 6 meses:

Sustitución:

$$v = 1'000,000 \left(1 + \frac{.3175}{2} \right)^{1.2}$$
$$v = 1'000,000 (1 + .15875)^{2}$$
$$v = 1'000,000 (1.15875)^{2}$$
$$v = 1'000,000 (1.342761)$$
$$v = 1'342,762$$

A 1 año:

Sustitución:

$$v = 1'000,000 (1 + .3175)$$
$$v = 1'000,000 (1.3174)$$
$$v = 1'317,500$$

Segundo ejemplo: Misma inversión por años a la tasa anual del 31.75% capitalizable trimestralmente.

Sustitución:

$$v = 1'000,000 \left(1 + \frac{.3175}{4} \right)^{2.4}$$
$$v = 1'000,000 (1 + 0.079375)^{8}$$
$$v = 1'000,000 (1.079375)^{8}$$
$$v = 1'000,000 (1.842378)$$
$$v = 1'842,378$$

Adviértase que, además de aumentarse el exponente de la fórmula del interés compuesto para que se refleje el mayor número de períodos de capitalización, también se ajusta la tasa de interés para que corresponda a los períodos más cortos. Esto se hizo dividiendo la tasa anual de interés simple entre el número de períodos de capitalización del año, obteniéndose una tasa de interés proporcional para los períodos más cortos.

También se podría leer la respuesta en las tablas de valor compuesto ya que se han cuadruplicado los períodos y dividido entre cuatro la tasa de interés, de manera que se buscarán 8 períodos a la tasa del 7.9375%

1.5. Valor actual o valor presente.- Una vez que se tiene el valor futuro por medio del cálculo del interés compuesto, se puede plantear el proceso inverso.

¿ Cuál es el valor actual de una suma prometida? El lector tendrá que contestar esta pregunta cada vez que examine proyectos que prometen una remuneración futuro pero exigen que la inversión se efectúe ahora. Por ejemplo, la decisión de invertir en un nuevo equipo o en la de una nueva computadora dependerá de que el interesado considera que la remuneración que se espera en el futuro del proyecto haga que valga la pena adquirir el equipo ahora, por lo que el descuento a valor actual es un instrumento fundamental en el proceso de evaluación.

Fórmula para calcular $p = \frac{v}{(1+i)^n}$ (5)

Ejemplo: supóngase que se le ofrece la alternativa de obtener 7'488,320 al cabo de 5 años 0 1'000,000 en este momento, supóngase también que actualmente no tiene necesidad de ese dinero y lo deposita en una cuenta de ahorros durante 5 años al 20% de interés anual ¿cuál sería su elección?

Sustitución:

$$p = \frac{2'488,320}{(1.20)^5}$$

$$p = \frac{2'488,320}{2.48832}$$

$$p = 1'000,000$$

La decisión será indiferente entre los 2'488,320 dentro de 5 años y el 1'000,000 ahora. El millón se define como el valor presente de 2'488,320 dentro de 5 años a la tasa de 20% anual.

Al igual que el interés compuesto se han formulando tablas de descuento como la que se ilustra (ver tabla 2)

Tabla 2 Valor actual de $ 1 pagadero al cabo de n años

Y la mecánica es igual a la que se utiliza para el interés compuesto.

1.6 Anualidades.- **¿cómo se manejan el interés compuesto y el valor actual cuando hay una serie de flujos de efectivo durante la vida de la inversión, en vez de un solo valor futuro del capital o de la ganancia que se espera al finalizar el período de inversión?**

Con frecuencia, las oportunidades de inversión consisten en una serie de flujos de efectivo, de manera que es necesario invertir anualmente una determinada cantidad hasta el momento en que se desea retirar el valor del capital.
Esto se podría comparar con un plan de ahorros periódicos en que se invirtiera cierta cantidad en cada período, dejando los fondos en depósito y ganando intereses hasta el momento de retirarlos. Por ejemplo se podría depositar 1'000,000 al principio de cada año en un pagaré bancario a la tasa de 31.75% anual, durante 4 años. A fines del primer año se tendría 1'317,500.
Al principio de segundo año se invertirían otro 1'000,000 ganando interés en el curso de éste solo por este millón, sino también por el 1'317,500 que quedó en la cuenta al finalizar el 1er. año. El proceso que se acaba de describir se conoce con el nombre de anualidad compuesta.

ver figura 1. Se puede ver que el 1er millón depositado al principio del año

Año

1 2 3 4

1 = 31.75 x 1 año	$ 1'317,500
i = 31.75% por 2 años	1'735,806
i = 31.75% por 3 años	2'286,925
i = 31.75% por 4 años	3'013,023
	$8'353,254

Figura 1

1 al 31.75% gana intereses por 4 años. El segundo millón depositado al comenzar el segundo año gana interés por tres años, al tercero por dos y el cuarto por uno. Al sumar todos los depósitos acumulados y los intereses devengados la suma final al finalizar el cuarto año será de $ 8'353,254 ver tabla 3 para cálculos de anualidades compuestas.

Fórmula para calcularlo: $v = p\left(\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right) =$ **(6)**

Sustitución: $v = 1'000{,}000 \left(\frac{(1+.3175)^{4+1} - 1}{.3175} - 1\right)$

Tabla 3 Monto de una anualidad anticipada de $1

$$v = 1'000{,}000 \left(\frac{(1.3175)^5 - 1}{.3175} - 1 \right)$$

$$v = 1'000{,}000 \left(\frac{3.9696 - 1}{.3175} - 1 \right)$$

$$v = 1'000{,}000 \left(\frac{2.9696}{.3175} - 1 \right)$$

$$v = 1'000{,}000\,(9.3532 - 1)$$

$$v = 1'000{,}000\,(8.3532)$$

$$v = 8'353{,}253$$

1.7 Valor actual de una anualidad.- Se puede plantear la pregunta contraria a la de la anualidad compuesta: ¿ cuánto se debe pagar por una serie de ingresos anuales iguales durante cierto número de períodos futuros. El lector encontrará este concepto en cualquier proyecto que exija la decisión de comprar ahora pero que declara los recursos mediante una serie de pagos e ingresos futuros iguales. La determinación del valor actual de una anualidad descontada al 5% se ilustra en la figura 2

Valor actual	1	2	3	4
.95238	Descuento a 1 año			
.90703		Descontado a dos años		
.86384			Descontado a tres años	
.82270				Descontado a cuatro años
3.54595				

Figura 2

Adviértase que, según aumenta el período de espera antes de recibir los fondos, aumenta igualmente el factor de descuento reflejando la continuidad de la oportunidad perdida de obtener una tasa positiva de interés.

Fórmula para calcular:

$$p = v \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

Ejemplo: vamos a seguir con el ejemplo de la figura 2, con un ingreso de \$ 1'000,000 anuales durante cuatro años al 5% de interés.

Sustitución:

$$p = 1'000,000 \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+0.5)^{4}}}{.05} \right]$$

$$p = 1'000,000 \left[\frac{1 - \frac{1}{1.215506}}{.05} \right]$$

$$p = 1'000,000 \left[\frac{1 - 0.8227026}{.05} \right]$$

$$p = 1'000,000 \left[3.565948 \right]$$

$$p = 3'545,948$$

La tabla 4 contiene el valor actual de una anualidad.

Continuando con el mismo ejemplo se encontrará el factor en la intersección de 4 años y 5% (3.5459)

$$1'000,000 \times 3.5459 = 3'545,900$$

Tabla 4 Valor actual de $1 por año en n años

1.8 Valor actual de una anualidad (flujos discontinuos)

¿Cómo se calcula el valor actual cuando los flujos anuales de efectivo son desiguales?

No todos los proyectos a los cuales se tendrá que aplicar el descuento al valor actual consisten en flujos de efectivo anuales e iguales. En realidad, la mayor parte de los proyectos e inversión tienen flujos que varían en importe de un año a otro, como se indica en la figura 3. En tal caso, la matemática puede ser algo más compleja pero la técnica es la misma. Cada flujo de efectivo se tiene que descontar a la tasa establecida de interés perdido y por el número de años que habrá de esperar para recibir ese ingreso en particular. En la figura 3 se puede ver que, al 5 por ciento, los $ 1,000 que se van a recibir 4 años después valen únicamente '822.70 que se calcularon leyendo el factor. 82270 en la tabla 2 y multiplicando por $ 1,000. De modo similar, los otros ingresos que se van a recibir dentro de 3 años, 2 años y 1 año, respectivamente, se descontarán según el factor correspondiente tomado de la tabla 2. El valor actual de los flujos de efectivo que se ilustran en la figura es de $ 2,314.98.

	Importe recibido	1	2	3	4	Fin del año
		$1,000	$500	$100	$1,000	
$ 952.38	1 = 5% n = 1					
453.52	Descontado al 5% en 2 años					
86.32	Descontado al 5% en 3 años					
822.70	Descontado al 5% en 4 años					
2,314.98						

Figura No. 3

Cuando los flujos de efectivo describen un patrón en que se combinan la anualidad y los flujos desiguales se emplea una combinación de las tablas 2 y 4. Por ejemplo, supóngase que se tiene un ingreso de $ 50 anuales durante 10 años y luego un pago de $1,000 al cabo de esos 10 años. Serán en realidad una combinación de anualidad y suma global. Se consultaría la tabla 4, encontrándose que el factor del valor actual de una anualidad al 5 porciento en 10 años en 7.7217, lo que da como valor actual de $ 50 anuales en 10 años:

7.7217 X $ 50 = $ 386.09

En la tabla 2 vería que el valor actual de la suma de $ 1,000 que se recibirá dentro de 10 años, al 5 por ciento, es:

.61391 X $ 1,00 = $ 613.91

El valor actual de todo el flujo de efectivo será por lo tanto la suma de los dos valores actuales, es decir, $ 1,000

***1.9. Financiamiento a plazos.*- El financiamiento a plazos plantea la siguiente pregunta: ¿cuánto se debe depositar en cantidades anuales iguales, para reunir una cantidad final x?**

Supóngase que se desea reunir $ 10'000,000 al cabo de 5 años y que la tasa de interés es del 45%

Fórmula para calcularlo:

$$p = \frac{v}{\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]} \qquad (8)$$

Sustitución:

$$p = \frac{10'000,000}{\left[\frac{(1+.45)^{5+1} - 1}{.45}\right] - 1}$$

$$p = \frac{10'000,000}{\left[\frac{(1.45)^{6} \quad 1}{.45}\right] - 1}$$

$$p = \frac{10'000,000}{\left[\frac{9.294114 - 1}{.45}\right] - 1}$$

$$p = \frac{10'000,000}{(18.431364) - 1}$$

$$p = \frac{10'000,000}{\left[\frac{8.294114}{.45}\right] - 1}$$

$$p = \frac{10'000,000}{17.431364}$$

$$p = 573,679$$

Se puede usar la tabla para obtener la respuesta, ahorrándose los complicados cálculos aritméticos.

A la inversa, el director de finanzas puede tener el deseo de saber cuánto debe retirar anualmente de una cuenta que gana intereses para agotarla por completo al cabo de n años. Este tipo de cálculo se encontrará con frecuencia cuando se trate de fondos de pensión, programas de seguros y pago de préstamos. El pago de un préstamo de $ 10,000 en abonos anuales iguales durante los 5 años siguiente en un caso típico.

Lo que en este caso se requiere realmente es calcular lo contrario del valor actual de una anualidad (ecuación 7) para hallar V. Conociendo P, la ecuación 9 se puede formular de este modo:

Fórmula:

$$V_n = \frac{P}{\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]}$$

Sustitución:

$$= \frac{\$\ 10{,}000}{4.3295} = \$\ 2{,}309.74 \qquad (9)$$

En vez de hacer todos los cálculos, se puede consultar la tabla 4. En la intersección de 5 años y 5 por ciento aparece el factor 4.3295 que es el denominador en la ecuación.

1.10. Saldos Insolutos.- o también llamados saldos declinantes, significan que el interés del préstamo se va calculando conforme al último saldo de la cuenta, es decir que al ir efectuando nuestros pagos se va reduciendo la deuda y sobre el capital que va quedando en la cuenta se paga el interés.

Fórmula para calcularlo:

$$R = P\left[\frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}\right] \qquad (10)$$

Ejemplo: Un préstamo de 1'000,000 a pagar en 10 años al 5% de interés anual sobre saldo insolutos.

$$R = 1'000{,}000\left[\frac{0.5}{1 - \frac{1}{(1+0.5)^{10}}}\right]$$

$$R = 1'000{,}000\left[\frac{.05}{1 - \frac{1}{1.6289}}\right]$$

$$R = 1'000{,}000\left[\frac{.05}{1 - 0.6139}\right]$$

$$R = 1'000{,}000\ (\ 0.1295\ )$$

$$R = 129{,}500$$

También podemos utilizar la tabla valor actual de una anualidad (tabla 4)

$$R = \frac{AN}{1\,f} \quad \begin{matrix}\text{Importe del préstamo} \\ \text{Factor}\end{matrix}$$

$$R = \frac{1'000,000}{7.772}$$

$$R = 128,667$$

4.11 Resumen de fórmulas y tablas

1. Interés simple:

$$v = p\,(1+i)$$

2. Interés simple no anual:

$$v = p\left[1 + \frac{i}{m}\right]$$

3. Interés compuesto:

$$v = p\,(1+i)^{n}$$

4. Interés Compuesto no anual:

$$v = p\left[1 + \frac{i}{m}\right]^{mm}$$

5. Valor presente:

$$p = \frac{v}{(1+i)^{n}}$$

6. Anualidades:

$$v = p\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

7. Valor actual de una anualidad:

$$p = v\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n}}}{i}\right]$$

8. Financiamiento a plazos:

$$p = \frac{v}{\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1}$$

9. Contra el valor actual de una anualidad

$$v = \left[\frac{p}{\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n}}}{i}} \right]$$

10. Saldos insolutos

$$R = p \left[\frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^{-n}}} \right]$$

1. Tabla de interés compuesto
2. Tabla de valor actual
3. Tabla de una anualidad anticipada
4. Tabla de valor actual por año.

LAS MATEMATICAS EN LAS FINANZAS

INTERES SIMPLE

El interés simple es un porcentaje del capital original que se paga al transcurrir un año. Como todas las tasas de interés, por lo regular se calculan con una base anual, observaremos ese acuerdo aquí, aunque la inversión se realice por un período mayor o menor de tiempo.

FORMULAPARA CALCULARLO

$$V = p(1 + 1)$$

en donde

p = Capital al principio del período
i = Tasa de interés
v = Valor del capital al finalizar el período

EJEMPLO

Supóngase que se ha efectuado una inversión inicial de 50,000 a una tasa del 20% de interés de interés simple anual, calcúlese el valor de esta inversión al finalizar el primer año.

en donde

$$v - 50{,}000\ (1 + .20)$$
$$v = 50{,}000\ (1.20)$$
$$v = 60{,}000$$

Interés simple en períodos distintos de un año

Para calcular el interés en periodos menores o mayores de un año, es preciso ajustar la dimensión tiempo en la ecuación, de manera que refleje el período específico que se considera. Por ejemplo, si el capital inicialmente invertido en el ejemplo anterior se depositara por un período de un mes, tendríamos:

$$v = 50{,}000\ \left(1 + \frac{.20}{.12}\right)$$

$$v = 50{,}000\ (1 + .0167)$$

Otra manera de atacar el problema es utilizando tablas, las cuales se han formulado para diversas combinaciones de intereses y períodos de tiempo, así es que el usuario elegirá simplemente los valores de n e i.

Ejemplo:

Se han invertido 10,000 al 10% durante 10 años

$$v = 10{,}000\ (2.5937)$$
$$v = 25{,}937$$

Interés compuesto en períodos no anuales

Con frecuencia, el período de inversión es menor de un año, por lo que es preciso ajustar la fórmula del interés compuesto para que se refleje el mayor número de veces que la capitalización se repetirá durante el año.

Fórmula para calcularla

$$v = p\ \left(\frac{1 + i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

en donde

v = Valor del capital al finalizar el período de inversión
p = Capital invertido
i = Tasa de interés simple anual
m = Número de veces que se capitaliza el interés durante el año
n = Número de años que dura la inversión

Ejemplo:

Si se invierten 400,000 por dos años al 40% de interés anual capitalizado trimestralmente, el valor del capital al finalizar el segundo año será:

$$v = 400{,}000 \left(1 + \frac{.40}{4} \right)^{4.2}$$

$$v = 400{,}000 (1 + .10)^{4.2}$$

v = 400,000 (1.10) 4.2

v = 400,000 (1.10) 4.2

v = 400,000 (2.1436)

v = 857,440

Adviértase que, además de aumentarse el exponente de la fórmula del interés compuesto para que corresponda a los períodos más cortos. Esto se hizo dividiendo la tasa anual de interés simple entre el número de períodos de capitalización del año, obteniéndose una tasa de interés proporcional para los períodos más cortos.

También se podría leer la repuesta en las tablas de valor compuestos ya que se han cuadruplicado los períodos y dividido entre cuatro tasa de interés, de manera que se buscarán 8 períodos (en vez de 2) y el 10% (en vez del 40%).

VALOR ACTUAL O VALOR PRESENTE

El hallar valores presentes es simplemente lo inverso de hallar el valor compuesto (o interés compuesto), para clarificar esto, supóngase que se ofrece la alternativa de obtener 1,276 al cabo de 5 años o 1,000 en este momento, supóngase también que se actualmente no tiene usted necesidad de ese dinero y lo depositará en una cuenta de ahorro durante 5 años al 5% de interés anual ¿Cuál sería su elección?.

FORMULA PARA CALCULARLO

$$P = \frac{v}{(1 + i)^{n}}$$

de donde

p = Capital inicial invertido
v = Valor del capital al transcurrir 11 años
i = Tasa de interés
n = Número de años

$$p = \frac{1{,}276}{(1 + .05)^{5}}$$

$$P = \frac{1{,}276}{(1 .05)^{5}}$$

$$P = \frac{1,276}{1,2763}$$

$$P = \$\,999.76$$

La elección sería indiferente entre 1,276 dentro de 5 años y 1,000 ahora.
los 1,000 se definen como el valor presente del 1,276 dentro de 5 años a la tasa del 5% anual.

Al igual que el interés compuesto, existen tablas de descuento para que el usuario elija los valores de i y n.

ANUALIDADES

Con frecuencia, las oportunidades de inversión consisten en una seria de flujos de efectivo, de manera que es necesario invertir anualmente una determinada cantidad hasta el momento en que se desea retirar el valor del capital. Esto se podría comparar con un plan de ahorros periódicos en que se invirtiera cierta cantidad en cada período, dejando los fondos en depósito y ganando intereses hasta el momento de retirarlos. Al proceso que se acaba de describir se le conoce con el nombre de anualidad compuesta.

Fórmula para calcularla

$$v = p\,\frac{(1 + 1)^{n+1} \quad -}{i} - 1$$

De donde

v = valor del capital al finalizar el período
p = anualidad
i = interés anual
n = número de años

Ejemplo:

Se podría depositar 1,000 al principio de cada año en una cuenta que parará el 5% anual, durante 4 años.

$$v = \frac{1,000\,(1.05)^{4+1} \quad -}{.0.5}\ 1$$

$$v = \frac{1,000\,(1.05)^{5} \quad - 1 -}{.0.5}\ 1$$

$$v = \frac{1,000\,(1.2763 \quad - 1 -}{.0.5}\ 1$$

$$v = \frac{1,000\,(1.2763 \quad - 1}{.0.5}$$

$$v = 1,000\,(5.5260 \quad - 1$$

$$v = 1,000\ 4.5260$$

$$v = 4526$$

Como en el caso del interés compuesto, también hay tablas de anualidad compuesta calculadas de antemano, y al igual que las anteriores, eligiendo la tasa y el número de periodos de inversión se encontrará el factor que multiplicado por nos dará la respuesta.

SALDOS INSOLUTOS O DECLINANTES

Significan que el interés del préstamo se va calculando conforme al último saldo de la cuenta, es decir que al ir efectuando nuestros pagos se va reduciendo la deuda y sobre lo que va quedando en la cuenta se pasa al interés.

Fórmula para calcularlo

$$R = P\,\frac{i}{1-(1+i)^{n}}$$

Ejemplo

$$P = 1{,}000\,\frac{.05}{1-(1+.05)^{-10}}$$

$$R = 1{,}000\,\frac{.05}{1-\frac{1}{(1+.05)^{-10}}}$$

$$R = 1{,}000\,\frac{.05}{1-\frac{1}{1.6289}}$$

$$R = 1{,}000\,\frac{.05}{1-.613911}$$

$$R = 1{,}000\,\frac{.05}{.386089}$$

$$R = 1{,}000\ (.129504)$$

$$R = 129.50$$

También podemos utilizar la tabla valor actual de una anualidad.

$$R = \frac{AN}{IF}\ \begin{matrix}\text{Importe del préstamo}\\ \text{Factor de la tabla}\end{matrix}$$

$$R = \frac{1{,}000}{7{,}772}$$

$$R = 130$$