



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – TRANSPORTE

**DESARROLLO DE UN SISTEMA AVANZADO DE INFORMACIÓN AL VIAJERO PARA EL
CÁLCULO DE RUTAS MÁS CORTAS EN SISTEMAS DE TRANSPORTE MULTIMODAL
CON INFORMACIÓN MIXTA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DAVID LÓPEZ FLORES

TUTOR PRINCIPAL
ANGÉLICA DEL ROCÍO LOZANO CUEVAS, INSTITUTO DE INGENIERÍA
COMITÉ TUTOR
RICARDO ACEVES GARCÍA, FACULTAD DE INGENIERÍA
LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA, INSTITUTO DE INGENIERÍA
MAURIZIO BRUGLIERI, POLITECNICO DI MILANO
PASQUALE CAROTENUTO, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Ricardo Aceves García
Secretario: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria
Vocal: Dra. Angélica del Rocío Lozano Cuevas
1er. Suplente: Dr. Maurizio Bruglieri
2do. Suplente: M.en I. Pasquale Carotenuto

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

ANGÉLICA DEL ROCÍO LOZANO CUEVAS


FIRMA

Desarrollo de un Sistema Avanzado de Información al Viajero para el cálculo de rutas más cortas en sistemas de transporte multimodal con información mixta

DAVID LÓPEZ FLORES¹

Tutora: Dra. Angélica del Rocío Lozano Cuevas
Grupo de Investigación en Ingeniería de Transporte y Logística
Instituto de Ingeniería, UNAM

¹Contacto: dlopezfl en iingen.unam.mx
dmitrailer en gmail.com

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Angélica del Rocío Lozano Cuevas por ser mi guía en la realización de este trabajo y en general en mi formación como investigador. También agradezco a los sinodales; Dr.

Ricardo Aceves García, Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria, Dr. Maurizio Bruglieri y el M.en I. Pasquale Carotenuto por sus valiosos aportes a este trabajo así como los artículos que se desprendieron de éste.

Índice

Introducción.....	1
1 Sistemas Inteligentes de Transporte.....	3
1.1 Panorama de los Sistemas Inteligentes de Transporte	3
1.2 Componentes de los Sistemas Avanzados de Información al Viajero	5
1.3 Desarrollos de Sistemas Avanzados de Información al Viajero	8
2 Redes.....	11
2.1 Grafos Dirigidos.....	12
2.2 Red multimodal.....	13
2.3 Híper grafos dirigidos	15
2.4 Redes espacio-temporales	16
2.5 Redes dependientes del tiempo	18
3 Rutas más cortas en sistemas de transporte.....	20
3.1 Rutas más cortas con información en tiempo real	21
3.2 Rutas más cortas sin información en tiempo real.....	27
4 Híper red combinada con tiempo real	43
4.1 Modelo de híper red combinada con tiempo real.....	44
4.1.1 Arcos/híper arcos	44
4.1.2 Estados	47
4.1.3 Híper rutas y <i>tiempo esperado</i>	51
4.2 Ejemplo de un modelo HiCoTiR.....	52

4.3	Representación Geográfica del modelo HiCoTiR.....	55
5	Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real	59
5.1	Algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real.....	59
5.1.1	Inicialización.....	61
5.1.2	Ciclos	62
5.1.3	Concatenación.....	63
5.1.4	Optimalidad.....	66
5.2	Pseudo-código del algoritmo HiRCoCoTiR	67
5.3	Resultado mínimo y complejidad	72
5.4	Ejemplo de solución con el algoritmo HiRCoCoTiR	75
6	Desarrollo de un Sistema avanzado de información al viajero	80
6.1	Sistema Avanzado de Información al Viajero	80
6.2	Ciudad Universitaria, UNAM	82
6.3	Zona metropolitana del valle de México.....	86
6.4	Tiempos de ejecución.....	89
7	Congestión en el transporte público.....	97
7.1	La congestión en modelos de asignación de pasajeros de transporte público.....	97
7.2	La congestión en sistemas de transporte público con una función de utilidad.....	100
7.3	Modelo de híper red combinada con tiempo real considerando congestión	102
7.4	Algoritmo de híper rutas más cortas combinadas con información en tiempo real y congestión en el transporte público.....	107
7.5	Desarrollo de un Sistema Avanzado de Información al Viajero considerando la congestión en los vehículos de transporte público.....	109
	Conclusiones.....	116
A.	Anexo I: Congestión en modelos de asignación de pasajeros de transporte público	119
A.1	Redes por <i>secciones</i>	119
A.2	Nodo de falla.....	121
A.3	Otros modelos	123
	Referencias	126

Introducción

El objetivo de esta tesis es desarrollar la parte fundamental del *software* de un Sistema Avanzado de Información al Viajero (SAIV) para una red de transporte multimodal. En este trabajo se desarrollan: el modelo de red y el algoritmo para encontrar rutas más cortas, y se realiza la digitalización de la red y la interfaz de usuario para acceder al SAIV. El resto de los módulos de un SAIV (como los dispositivos GPS de localización de vehículos, los validadores de posicionamiento de vehículos y depuradores de datos) están fuera del alcance de este trabajo.

El SAIV desarrollado en esta tesis considera que el transporte público tiene las siguientes características:

1. Se tiene información en tiempo real sobre los tiempos de llegada a las paradas de los vehículos de algunas líneas de algunos modos de transporte público.
2. Se desconocen los tiempos de llegada de los vehículos de transporte público del resto de las líneas y períodos de tiempo, sólo se conocen las frecuencias de paso, es decir el sistema de transporte público está basado en frecuencias para el resto de las líneas y periodos de tiempo.

Combinar ambos tipos de transporte público (con y sin información en tiempo real) es un problema nuevo en muchas ciudades de países en desarrollo, donde el sistema de transporte público carece de horarios (el tiempo de espera sólo se puede aproximar mediante la frecuencias) y existe información en tiempo real para algunas o todas las líneas de algunos modos. Este problema nunca se ha abordado explícitamente en la literatura, pero empieza a surgir en muchas ciudades del mundo. Se utilizan dos tipos de redes para modelar el problema:

1. Redes dependientes del tiempo para el período de tiempo en que se dispone de información en tiempo real.
2. Híper redes para el período de tiempo en el que no hay información en tiempo real.

La híper red descrita en este trabajo puede mutar arcos en híper arcos (o viceversa) para modelar la transición entre las redes dependientes del tiempo y las híper redes. Por ejemplo, cuando se dispone de

información en tiempo real de una línea de transporte público en el instante de tiempo t , pero solo se sabe la frecuencia de esa línea en el tiempo $t + 1$, entonces, existen parejas ordenadas de nodos (i, j) que en el tiempo t son arcos, pero en el tiempo $t + 1$ mutan para formar parte de hiper arcos. Esta mutación de arcos en hiper arcos da la posibilidad de combinar en un único modelo, sistemas de transporte público basados en frecuencia y en tiempo real.

El modelo que describe el problema del párrafo anterior se llama Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR). Para encontrar hiper rutas multimodales más cortas en la HiCoTiR se desarrolló el algoritmo de corrección de etiquetas llamado Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR). El algoritmo HiRCoCoTiR toma en cuenta restricciones sobre los modos utilizados en un viaje, restringe el número de transferencias modales y calcula un conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones, donde los elementos del conjunto *Pareto* son parejas que contienen el tiempo de viaje de la hiper ruta y el número de transferencias.

El documento está organizado de la siguiente forma, para describir la creación del Sistema Avanzado de Información al Viajero presentado en esta tesis. En el Capítulo 1 se estudian los Sistemas Inteligentes de Transporte y como éstos han ayudado al humano a mejorar la calidad del transporte, además se presenta la descripción y la utilidad de los Sistemas Avanzados de Información al Viajero. En el Capítulo 2 se presenta la teoría de grafos, hiper grafos y redes dependientes del tiempo que sustentan este trabajo. El Capítulo 3 está dedicado al estado del arte de algoritmos de rutas más cortas donde el transporte público puede o no tener información en tiempo real, al final del capítulo se enuncian las diferencias principales del modelo HiCoTiR y el algoritmo HiRCoCoTiR con el resto de los trabajos de la literatura, y además se muestra que el tema presentado en esta tesis no ha sido abordado en la literatura.

En el Capítulo 4 se describe el desarrollo de la hiper red que modela un sistema de transporte multimodal donde el transporte público está basado en frecuencias pero existe información en tiempo real para algunas líneas y para algunos instantes de tiempo; este modelo incluye preferencias de usuarios sobre los modos utilizados. Al final del capítulo se describe el proceso para almacenar la hiper red en una base de datos geo-referenciada. En el Capítulo 5 se presenta la descripción del algoritmo que encuentra hiper rutas más cortas en el modelo de hiper red descrito en el Capítulo 4. El Capítulo 5 contiene el pseudocódigo del algoritmo y un ejemplo en una red ficticia. En el Capítulo 6 se describe el desarrollo del *software* del SAIV y se muestran dos ejemplos de aplicación, el primero en la red de transporte público y peatonal en la Ciudad Universitaria (CU) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y el segundo en la en la red de transporte público y peatonal de un área al sur de la Ciudad de México (CDMX). Además se calculan los tiempos de ejecución promedio del algoritmo en diferentes escenarios de las redes de transporte público de CU y del sur de la CDMX.

Al final de la tesis, en el Capítulo 7, se considera la congestión en los vehículos de transporte público. La capacidad en sistemas de transporte público incide directamente en el tiempo total de viaje, si el vehículo está lleno algunos usuarios preferirán esperar un vehículo con espacio disponible y algunos otros abordaran el vehículo a como dé lugar. Este capítulo es el principio de una nueva investigación, de la que ya se tiene una función de utilidad que calcula cómo los usuarios perciben el tiempo mientras viajan en vehículos congestionados. Con esta función se construye una extensión del modelo HiCoTiR y el algoritmo HiRCoCoTiR para considerar la congestión en los vehículos de transporte público. Por último, se presentan las conclusiones, el anexo y las referencias.

1 Sistemas Inteligentes de Transporte

Los Sistemas Inteligentes de Transporte (SIT) son aplicaciones tecnológicas que recolectan y procesan datos relacionados con el transporte con el objetivo de hacer más eficiente su uso o proporcionar mejor información acerca de su funcionamiento (Rye, 2006). En este capítulo además de mostrar un panorama de los SIT también se estudian los Sistemas Avanzados de Información al Viajero (SAIV).

En la Sección 1.1 se muestran algunas aplicaciones de los SIT, sus beneficios y la clasificación de éstos. En la Sección 1.2 se estudian los elementos y las características principales que tienen los SAIV y además se hace una descripción de la problemática del transporte en la Zona Metropolitana del Valle de México. En la Sección 1.3 se presentan los diferentes SAIV que se han implementado en el mundo y se explica por qué el SAIV que se propone en esta tesis se diferencia de los demás y cuál es la necesidad del mundo actual que permite resolver.

1.1 Panorama de los Sistemas Inteligentes de Transporte

La globalización convirtió al transporte en un sistema complejo dependiente de múltiples actores económicos, políticos y de personas comunes. El transporte da forma a las urbes y viceversa; conocerlo y planearlo de una forma sustentable es una prioridad que muchos países están adoptando, en donde un crecimiento caótico perjudica a la sociedad.

En la actualidad la concentración personas en ciudades crece anualmente, se estima que en 2016 el 53% de la población mundial vivía en áreas urbanas (Banco Mundial, 2016); esta cifra es aún mayor en México, según conteos del 2010, el 77.8% de la población vive en áreas urbanas (INEGI, 2010). Si la tendencia sigue, las concentraciones aumentarán lo que agravará problemas como contaminación y congestión. En la Ciudad de México (CDMX) se calcula que el 45.5% de las emisiones de gases de efecto invernadero son provocadas por el transporte (Secretaría del Medio Ambiente, 2012). La transición a un transporte donde las emisiones de contaminantes se reduzcan considerablemente es un proceso lento debido al gran número de vehículos que existen en la actualidad. Según la *Directorate-General for Energy and Transport* (comisión de la Unión Europea que se encarga de regular el transporte), para el año

2050 habrá más de 3 billones de automóviles en el mundo (European Commission, 2011) y se estima que en promedio un usuario pasará alrededor de 106 horas al año en el tráfico (Lerner, 2011), por lo que el uso de energías alternativas no es la única prioridad hacia un transporte sustentable, también es necesario poner atención en disminuir considerablemente la congestión urbana. Dicha congestión causa pérdidas monetarias e impacta negativamente la calidad de vida de las personas.

El transporte terrestre, marítimo y aéreo debe ser considerado como un todo integral, una misma máquina que funcione coordinadamente para satisfacer nuestras necesidades. En el caso del transporte de personas es necesario cambiar el concepto de la elección entre transporte público o privado y combinar el uso de ambos para obtener sus beneficios al mismo tiempo que evitar sus desventajas (Spickermann et al., 2014). Para integrar los diferentes modos de transporte es necesario crear centros multimodales eficientes donde las transferencias de productos o personas sean fáciles, de rápido acceso a la información y seguras, con el objetivo de atraer a los usuarios al uso combinado de transporte y con esto ayudar a reducir la emisiones de gases contaminantes (European Commission, 2011).

Una de las formas de coordinar los diferentes modos de transporte son los Sistemas de Inteligentes de Transporte (SIT), que en la actualidad juegan un papel fundamental. Desde 1960 ciudades como Los Ángeles, Chicago y Detroit desarrollaron sistemas de vigilancia de tráfico con información en tiempo real y observaron el impacto positivo que tuvieron los SIT (Adler & Blue, 1998). En el condado de Oakland, Michigan, la aplicación de los SIT para información de tráfico en tiempo real incrementó la velocidad promedio de los autos en un 33% y se estima un 25% en la reducción de demoras al implementar un sistema de control de semáforos. En Filadelfia, Pensilvania, mediante el uso de SIT se reportó un 40% en la reducción del tráfico y un 8% de reducción en incidentes de tráfico. La aplicación de SIT en Denver, Colorado, estima una reducción de costos de entre 800,000 a 1,000,000 de dólares anuales debido a la reducción de retrasos en el tráfico. En la ciudad de San Francisco a lo largo de 10 años se incrementó en un 5% el uso de trenes, desde que se comenzó a informar en tiempo real las llegadas (Peng et al., 2000).

Artemio Daza & de la Torre Romero (2006) realizaron una serie de entrevistas sobre el uso de los SIT a empresas de transporte mexicanas, ahí observaron que el uso de sistemas de navegación y el pago anticipado de casetas de cobro son los sistemas que más se conocen, además, encontraron que las empresas estarían dispuestas a aceptar el uso de tecnologías como la inspección electrónica de permisos y de seguridad. Aunque existe cierta curiosidad por adoptar los SIT, no es posible imponer nuevos conceptos en transporte, es necesario promover una forma sustentable de transporte soportada con información transparente, haciendo especial énfasis en el uso combinado de transporte mediante centros multimodales que resulten en un beneficio para el usuario y el transportista. Según el Instituto Mexicano del Transporte los SIT para el transporte público y el privado son la principal prioridad a desarrollar para mejorar la operación dentro del sistema de transporte mexicano (Artemio Daza & Espinoza Rescala, 2004). Actualmente en México los SIT son utilizados a cuenta-gotas, en la red carretera y de autopistas urbanas (pago inteligente), el sistemas de monitoreo de tráfico en tiempo real en algunas ciudades, información en tiempo real de las esperas del *Metrobús* en la Ciudad de México y disponibilidad de bicicletas y espacios libres en módulos de renta de bicicletas compartidas.

El Internet, las computadoras personales y los teléfonos móviles abren nuevos horizontes en el desarrollo de los SIT pues es posible llevar información de los sistemas de transporte a cualquier lugar donde el usuario se encuentre conectado. Hoy en día los SIT ya no son exclusivos de los gobiernos y las empresas, sino que están al alcance de todos. Los SIT ofrecen a los viajeros información y comunicación

sobre la infraestructura del transporte y los vehículos. Sus funciones son mejorar la seguridad, reducir el desgaste del vehículo, disminuir los tiempos de transporte y optimizar el consumo de combustible. De acuerdo con Ontario Traffic Manual (2007) los SIT pueden ser clasificados en tres categorías:

- Sistemas Avanzados de Gestión de Tráfico (SAGeT).
 - Sistema Adaptativo de Control del Tráfico (SACTra)
 - Sistemas Avanzados de Información al Viajero (SAIV).
 - Sistemas Avanzados de Transporte Público (SATP).
- Integración de Infraestructura-Vehículo (IIV).
- Integración Vehículo-Vehículo (IVV).

Estos tres componentes coordinados son una herramienta poderosa para que los tomadores de decisiones y usuarios tengan a su alcance un panorama más amplio del problema de la movilidad y hagan un uso eficiente de las redes de transporte.

Este trabajo se enfoca en el uso de Sistemas Avanzados de Información al Viajero (SAIV) con Información de Localización de Vehículos (ILV), estos sistemas le brindan al usuario del transporte público y privado información en tiempo real sobre: tráfico, lugares disponibles de estacionamiento, arribo a las paradas de los vehículos de transporte público, disponibilidad de bicicletas en centros de préstamo, entre otros. Además, un SAIV utiliza esta información en tiempo real para calcular rutas óptimas con uno o más modos de transporte. Debido a la escasa aplicación de los SAIV en México, existe un amplio campo donde avanzar en su desarrollo e implementación que puede llevar al transporte mexicano a la par de los países desarrollados.

1.2 Componentes de los Sistemas Avanzados de Información al Viajero

Sin importar qué tan bien planeado esté el transporte público las demoras son frecuentes, aun cuando los vehículos circulen en un carril exclusivo pues existen condiciones que son poco predecibles como: tráfico, fallas mecánicas, accidentes viales o un incremento en el número de pasajeros (Amberg et al., 2011). En algunos países las demoras en el transporte público son compensadas informando en tiempo real el arribo del siguiente vehículo o su localización, esta información tiene un impacto en los usuarios ya que perciben una reducción en los tiempos de espera, aumenta su disposición a pagar (Watkins et al., 2011), incrementa su percepción de seguridad (Dziekan & Kottenhoff, 2007), atrae nuevos usuarios (Tang & Thakuriah, 2012) y los usuarios alteran los proceso de decisión sobre cuál ruta o modos usar en su viaje (Wu et al., 2010)

Los SAIV que informan en tiempo real el tiempo de arribo a la parada del siguiente vehículo son los más relevantes para los usuarios del transporte público, de acuerdo a una encuesta realizada en Dublín por Caulfield & O'Mahony (2007). La implementación de este tipo de SAIV no es cara si se compara con la adquisición de más vehículos para aumentar el nivel de servicio, del lado del *software* existe una gran cantidad de herramientas *open-source* confiables para entornos de producción, como gestores de bases de datos (*PostgreSQL*) y sistemas de información geográfica en WEB (*OpenLayers*), entre otros. Por otro lado el *hardware* es cada vez más económico, un GPS que transmita por la red celular cuesta alrededor de 2000 pesos, el costo de la señal es aproximadamente 200 pesos mensuales por equipo e instalar pantallas en ocho paradas cuesta alrededor de 3 millones de pesos (Dziekan & Kottenhoff, 2007). Los SAIV son una alternativa económica para impulsar cambios en los hábitos de transporte, como disuadir el uso del

coche o incrementar el uso de estacionamientos de transferencia (*park-and-ride*) (Skoglund & Karlsson 2012).

Los SAIV que informan en tiempo real el tiempo de espera en las paradas de transporte público requieren principalmente dos cosas: *software* y *hardware*. Se necesitan al menos las siguientes componentes para implementarlos (Borole et al., 2013):

1. Unidades GPS: determinan la ubicación geográfica de los vehículos.
2. Validador de GPS: se encarga de filtrar los resultados inválidos y almacenar los resultados válidos. Los resultados inválidos se pueden deber a una falla en la comunicación entre el GPS y el servidor donde se reciben los datos, o a que los vehículos se encuentran fuera de servicio.
3. Servidor de GPS: recibe toda la información del validador GPS y procesa esta información para encontrar: la velocidad del vehículo, el nombre de la ruta, el identificador del vehículo, etcétera. Con esta información el servidor predice el tiempo estimado de arribo del vehículo a la parada.
4. Red con información en tiempo real: esta red obtiene del servidor GPS las velocidades de los diferentes vehículos y además obtiene tiempos de recorrido (de servidores de información del tráfico) en tiempo real, con esta información predice el tiempo de recorrido entre cada par de paradas de transporte público.
5. Planeador de viaje: utiliza un algoritmo para encontrar rutas óptimas de acuerdo a las preferencias del usuario.
6. Interfaz de usuario: es el lugar desde donde se consulta las ruta más corta de acuerdo a las preferencias personales como: origen, destino, hora de llegada, hora de salida, transferencias máximas, distancia máxima a pie, modos de transporte, costo o tiempo. Esta información es presentada en un mapa en WEB.

En los países donde han sido implementados los SAIV, el transporte público tiene horarios. A diferencia de éstos, en México el transporte público funciona con base en frecuencias, por lo que se abre un nuevo campo para la investigación, que requiere un SAIV que combine información en tiempo real de los tiempos de espera de algunas líneas de transporte, y las frecuencias de los vehículos para los modos donde no se pueda obtener información en tiempo real. Aún no han sido implementados SAIV en ciudades como las nuestras, donde todos los modos de transporte público funcionan con base en frecuencias y puede existir información en tiempo real para algunas líneas de algunos modos de transporte público por un intervalo de tiempo.

La Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM) compuesta por la CDMX y la parte sur del Estado de México está entre las 10 urbes más pobladas del planeta (United Nations, 2016) y los servicios de transporte se han modernizado en los últimos años aunque todavía falta terreno por recorrer para tener un transporte de calidad. Hoy en día la red de transporte de la ZMVM está compuesta por los siguientes modos (ver Figura 1.1):

1. Ciudad de México:
 - 1.1 La red bicicletas compartidas *Ecobici* cuenta con 444 módulos de renta de bicicletas (Ecobici Sistema de Transporte Individual, 2016).
 - 1.2 La red de *Bus Rapid Transit* (BRT) *Metrobús* tiene 6 líneas y actualmente se está construyendo la línea 7 (Metrobús, 2017). En la mayoría de las paradas de *Metrobús* hay

pantallas donde se informa en tiempo real el tiempo estimado de espera de los siguientes vehículos.

- 1.3 La red de trolebús tiene 8 líneas y algunas de estas cuentan con carriles exclusivos de circulación.
- 1.4 La red de autobuses *MI* tiene 96 líneas, de las cuales 12 rutas son servicio exprés y 6 rutas brindan servicio las 24 horas (Red de Transporte de Pasajeros del Distrito Federal, 2017).
- 1.5 La red de metro tiene 12 líneas y actualmente se está ampliando la línea 12. Existen dos líneas de metro con paradas en el Estado de México.
- 1.6 Hay una línea de tren ligero.
- 1.7 Hay una línea de tren suburbano que conecta el sur poniente de Estado de México con el nororiente de la CDMX.
- 1.8 335 líneas¹ de microbuses y “peseros”. Algunas de estas líneas tienen paradas en el Estado de México (Laboratorio para la ciudad, 2017).
- 1.9 Hay aproximadamente de 1,600,000 automóviles particulares registrados en la CDMX. (FIMEVIC, 2002).
- 1.10 Hay aproximadamente de 104,000 taxis registrados en la CDMX (FIMEVIC, 2002).
- 1.11 En varios puntos de la zona centro de la ciudad el estacionamiento en la calle es regulado con parquímetros.
- 1.12 En varios puntos de la ciudad se ha mejorado la accesibilidad de los peatones creando cruces peatonales protegidos y de acceso universal.
2. Estado de México:
 - 2.1 La red de BRT *Mexibus* tiene 3 líneas y actualmente se está construyendo la línea 4.
 - 2.2 Hay una línea de tren suburbano que conecta el sur poniente de Estado de México con el nororiente de la CDMX. Es la misma línea de tren que se menciona en el punto 1.7.
 - 2.3 La red de teleférico *Mexicable* tiene 1 línea.
 - 2.4 158 líneas¹ de microbuses y “peseros”. Algunas de estas líneas tienen paradas en la CDMX (Laboratorio para la ciudad, 2017).
 - 2.5 Hay aproximadamente de 800,000 automóviles particulares registrados en el Estado de México que pertenecen a la ZMVM. (FIMEVIC, 2002).
 - 2.6 Hay aproximadamente de 6,000 taxis registrados en el Estado de México que pretenden a la ZMVM. (FIMEVIC, 2002).

¹No existe un dato oficial de las líneas de “peseros” y microbuses en la CDMX y el Estado de México. El conteo y

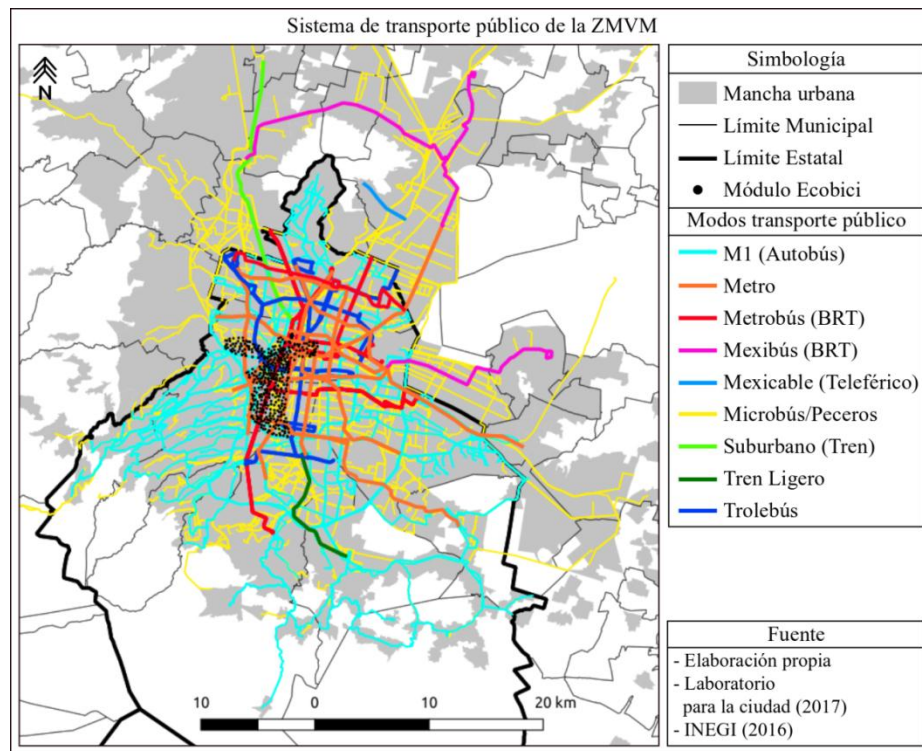


Figura 1.1 Transporte público de la ZMVM

De aquí que el transporte de la ZMVM es una monstruo donde la desorganización y la falta de información son de los principales problemas a resolver. Esta investigación tiene el propósito de desarrollar un SAIV para encontrar rutas más cortas multimodales en sistemas de transporte, donde todos los modos de transporte público están basados en frecuencias pero existe información en tiempo real de los tiempos de espera para algunas líneas de algunos modos. Dicho SAIV incrementaría el nivel de satisfacción del usuario de transporte de la ZMVM, ayudaría a hacer un uso más eficiente de la red de transporte pues el usuario podría planear por anticipado la combinación de modos que mejor se ajuste a sus necesidades y además atraerá nuevos usuarios al transporte público.

1.3 Desarrollos de Sistemas Avanzados de Información al Viajero

Antes de que el internet se convirtiese en una vía de comunicación masiva, la única forma de obtener información actualizada relativa al transporte público era vía telefónica (cuando la administración del transporte público lo tenía disponible) y en el mejor de los casos se podían solicitar itinerarios óptimos de viaje o retrasos en el sistema. En caso de que no existiera el servicio telefónico, lo único que se podía saber sobre el transporte público eran horarios y mapas impresos, lo cual es una gran desventaja tanto para el usuario como el operador, pues es imposible (y caro) actualizar constantemente la información. A mediados de los 90 se desarrollaron sistemas de rutas más cortas asistidos por computadoras, sin embargo estos sistemas no estaban disponibles al público y eran de uso exclusivo de agencias de transporte y centros de servicio al cliente (Peng & Huang, 2000). Esto cambió con la llegada del Internet pues a través de un servidor en línea fue posible poner a disposición del público sistemas para encontrar rutas más cortas. Peng & Huang (2000) propusieron uno de los primeros sistemas para encontrar rutas más cortas donde es posible crear rutas a través de un mapa geo referenciado interactivo, su sistema fue un parte aguas pues permitió a los usuarios interactuar con los mapas del transporte público mediante consultas

escritas o simplemente señalando el punto deseado sobre el mapa. Este mapa interactivo con capacidad de encontrar rutas óptimas, puede entregar información adicional como: lugares de interés cercanos, paradas cerradas, cambios de horario; además al estar la información digitalizada es fácilmente actualizable y está disponible a cualquier persona con acceso a Internet.

Los sistemas de navegación por GPS son quizás los primeros SAIV que estuvieron disponibles para las masas. Este tipo de SAIV son mapas interactivos que guían a los conductores a través de la red vial, donde es casi imposible perderse buscando una dirección, sin embargo, si estos mapas interactivos no reciben información extra como tráfico o calles cerradas la información que reporten no siempre es válida. Diversos proyectos integran los sistemas de navegación por GPS con estacionamientos inteligentes (Li et al., 2010) e información turística (Gandy & Meitner, 2008).

Es común que diferentes agencias de transporte tengan funcionando un SAIV para los modos que controlan y aunque son de gran ayuda no es posible encontrar rutas óptimas que combinen modos controlados por otras agencias. En el último par de años *Google Transit* ha intentado resolver este problema imponiendo un estándar, llamado *Googel Transit Feed Service*, para el manejo de la información relativa al transporte público, pero su sistema depende enteramente de que las agencias de transporte quieran alinearse con este estándar. Peng & Kim (2008) también observaron este problema, pero en vez de proponer un estándar crearon un plataforma que extrae la información de las diferentes agencias de transporte público y mediante tecnología *xml* integra las plataformas de las diferentes agencias de transporte en un solo lugar donde se pueden hacer consultas de rutas más cortas multimodales.

El proyecto *PITA (Personal Intelligent Travel Assistant)* de Rothkrantz et al. (2005) ofrece una solución donde la información sobre los arribos del vehículo se extrae de los sistemas de información ya existentes o se obtiene mediante una colaboración de los usuarios (*Crowdsourcing*²), es decir, aquellos usuarios que lo deseen pueden a través de su dispositivo móvil proveer información relevante (tiempo de espera o demoras) del modo que están utilizando, el objetivo principal de *PITA* es brindar la mejor información posible en cada punto del viaje, sin embargo sólo se aplicó para un sistema de trenes. Chiu et al. (2005) desarrollaron *MIRAS* para encontrar rutas multimodales en el sistema de transporte público de Hong Kong, donde además es posible reservar taxis o camionetas para grupos de turistas. Rodier & Shaheen (2010) crearon un servicio en San Francisco, CA, para estacionamientos cercanos a paradas de transporte público con el objetivo de invitar a los usuarios a realizar parte de su trayecto en tren, metro o autobús. Los autores creen que si el usuario conoce de antemano donde puede dejar su coche en un lugar seguro y en un horario fijo, éste es más propenso a tomar transportes alternativos con el fin de evitar el tráfico.

El proyecto *PATH2Go* (Zhang et al., 2011b) no considera los cambios de modos, su función es comparar las diferentes alternativas monomodales que tiene el usuario para ir del origen al destino. La aplicación *BayTriper* (Jariyasunant et al., 2011b) y el portal *Goroo* para Chicago son servicios que integran rutas multimodales e información en tiempo real. Li et al. (2012) diseñaron un SAIV para San

²*Crowdsourcing* es un término relativamente nuevo que se identifica con cualquier actividad colaborativa a través del Internet (Estelles-Arolas & Gonzalez-Ladron-de-Guevara, 2012).

Francisco, CA, donde es posible encontrar rutas más cortas usando una combinación de transporte público y privado. El SAIV de Alves et al. (2012) funciona en el sistema de transporte público de Lisboa, Portugal y penaliza rutas con muchas transferencias o distancias excesivas caminado con el fin de evitar rutas no deseables. Para estimar el tiempo de viaje entre cada par de paradas, primero recopilaban la información GPS de cuatro meses de cada uno de los autobuses y tranvías. Una vez depurada toda la información del GPS, crearon un perfil de velocidades por zona de la ciudad, día de la semana a cada 5 minutos, para cada uno de los tramos entre cada par de paradas consecutivas. Usando la información en tiempo real y las velocidades promedio obtenidas de los datos históricos, crearon un modelo de predicción de arribo de los autobuses a las paradas, que ajusta la hora de llegada dependiendo de la diferencia que hay entre la velocidad promedio obtenida con tiempo real con la velocidad promedio obtenida de los datos históricos.

Borole et al. (2013) desarrollaron un SAIV para dos rutas del sistema de autobuses de Mumbai, que consistió en la instalación de GPS y servidores para procesar la diferente información e interfaz de usuario; encontraron que su sistema puede atender a 200 usuarios con un tiempo promedio de respuesta de 43 segundos. Miao (2014) desarrolló un SAIV para trenes, autobuses y bicicletas de préstamo, que minimiza el tiempo de viaje y el número de transferencias modales. En el SAIV de Gkiotsalitis & Stathopoulos (2015) la preferencias del usuarios sobre la selección de modos a abordar son tomadas en cuenta. Lo et al. (2005), Ranade et al. (2005), Rehrl et al. (2007) y Huang (2007) crearon planeadores de viajes multimodales disponibles en web, sin embargo ninguno de éstos considera información en tiempo real, por lo que estrictamente no son considerados un SAIV. En Seattle existe el portal *OneBusAway*, en Dublín el *DublinBus* y en Los Ángeles el *511*, que informan en tiempo real el arribo del siguiente autobús, sin embargo estas aplicaciones carecen de un sistema de ruteo.

Diversas aplicaciones para teléfonos móviles como *Moovit*, *Google Maps*, *City Transit*, *Citty Mapper*, entre otras, encuentran rutas multimodales con información en tiempo real en diversas ciudades del mundo. *Moovit* además de calcular rutas también tiene la posibilidad de reportar incidentes como, retrasos en el sistema, altos niveles de congestión, accidentes o líneas fuera de servicio; esta información es recolectada por los usuarios directamente en la aplicación y utilizada en el cálculo de la ruta más corta.

Todos los SAIV mencionados anteriormente suponen que el sistema de transporte público tiene horarios, lo que los hace poco útiles para el transporte público basado en frecuencias, si bien determinan una ruta no es posible asegurar que sea la más rápida. En el transporte público con horarios se sabe de qué línea es el vehículo que llegará primero a la parada y cuánto es el tiempo de espera, mientras que en el transporte público basado en frecuencias es imposible conocer de qué línea es el vehículo que llegará primero a la parada y el tiempo de espera es una variable aleatoria. Así que si se aplicara cualquiera de los SAIV mencionados en párrafos anteriores a un transporte público basado en frecuencias, los algoritmos supondrían que el tiempo de espera es determinista y considerarían un orden predeterminado de los arribos de la líneas a la parada; estas dos suposiciones no tienen sentido en los sistemas de transporte público basados en frecuencias. En general, las rutas más cortas en sistemas de transporte público basado en frecuencias se presentan como un estrategia de viaje, en donde existen paradas de decisión a lo largo de la ruta donde el usuario tiene que abordar el primer vehículo que le convenga para llegar a su destino y dependiendo del vehículo que arribe la ruta puede cambiar, al contrario del transporte público basado en horarios en donde en todas las paradas los usuarios saben exactamente de qué línea es el vehículo que abordarán y qué recorrido harán.

2 Redes

Uno de los primeros modelos matemáticos de una red de transporte lo planteó el Leonhard Euler en el problema de los puentes de *Königsberg*, el problema consiste en encontrar un recorrido a pie cruzando todos los puentes la ciudad pasando sólo una vez por cada uno y regresando al punto origen. En la imagen izquierda de la Figura 2.1 se observa un mapa de la ciudad de *Königsberg* y a la derecha se observa el modelo de la red de transporte que se propone para encontrar la solución al problema. Para resolver el problema no es necesario modelar toda la red de calles de *Königsberg* solo es necesario representar los puentes con una arista y cada área de la ciudad que unen los puentes, con un nodo. Este problema a pesar de su simpleza tuvo un gran impacto en el desarrollo de la teoría de grafos que es parte fundamental en el desarrollo de los modelos de redes de transporte.



Figura 2.1 Modelado del problema de los puentes de Königsberg (imagen de Wikipedia, con licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0)

En la actualidad las rutas de transporte son sistemas complejos, de gran escala y son el fundamento de la economía y la sociedad a través del movimiento de personas y productos (Nagurney, 2007). De acuerdo con Rodrigue et al. (2013) el término red de transporte se refiere a una estructura de arcos que unen a un conjunto de localizaciones, llamadas nodos. Un arco es la una unión entre un par de nodos y todos los arcos y nodos forman una red. La red de transporte puede estar asociada a (Rodrigue et al., 2013):

- Rutas tangibles:
 - Carreteras
 - Calles
 - Sistemas de rieles.

- Rutas no tangibles:
 - Corredores marítimos
 - Corredores aéreos.

El común denominador al momento de representar redes de transporte es el movimiento de personas o bienes del punto A al B, este movimiento puede ser modelado con una línea que une dos puntos, sin embargo las características de esta línea y de los puntos difieren dependiendo de la estructura de la red de transporte que se considere. También es posible modelar el transporte utilizando cadenas de *Markov* (Häme & Hakula, 2013) o redes neuronales (Celikoglu & Cigizoglu, 2007), sin embargo estos modelos no están en los alcances de esta tesis.

En este capítulo se presentan las bases de teoría de grafos que se usa para modelar sistemas de transporte. En la Sección 2.1 se muestran las principales definiciones de grafos dirigidos. En la Sección 2.2 se definen de forma general las redes multimodales, estas redes son un tipo especial de grafos dirigidos que modelan redes de transporte multimodales, en esta sección también se define el concepto de *viabilidad* que más adelante servirá para definir el modelo de esta tesis. En la Sección 2.3 se muestran los conceptos básicos de hiper grafos e hiper redes multimodales que ayudan a modelar sistemas de transporte público. Por último, en las secciones 2.4 y 2.5 están los conceptos básicos de redes espacio-temporales y redes dependientes del tiempo, respectivamente. Ambos tipos de redes sirven para modelar sistemas de transporte dinámicos.

2.1 Grafos Dirigidos

Cuando se trabaja con problemas de transporte el uso de grafos dirigidos resulta una forma natural de modelar el sentido de las calles (Kay et al., 1977). A continuación se enuncian las principales definiciones de los grafos dirigidos.

Definición 1. Un grafo dirigido G es una pareja (V, A) , donde $V = (v_1, v_2, v_3 \dots v_n)$ es un conjunto no vacío de nodos y $A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_m)$ es un conjunto de parejas ordenadas de nodos llamados arcos que se denotan por $a = (u, v)$.

Definición 2. Dos nodos son adyacentes si existe un arco que los una.

Definición 3. Sea G un grafo dirigido. Sea $\{u, v\} \in V$ y $a \in A$ tal que $a = (u, v)$. Al nodo u se le nombra el nodo cola de a , $t(a)$, y al nodo v , el nodo cabeza de a , $h(a)$.

La Figura 2.2 muestra un grafo dirigido donde las flechas son los arcos y los puntos son los nodos del grafo.

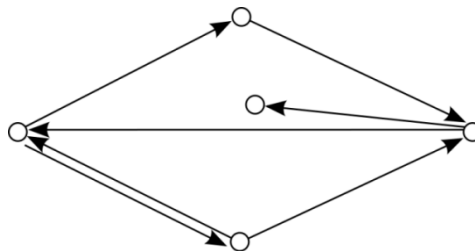


Figura 2.2 Grafo dirigido

Definición 4. La estrella saliente de $u \in V$ es el conjunto de arcos que salen de u y se define por $\Gamma(u) = \{(u, v) \in A : v \in V\}$. La estrella entrante de $u \in V$ es el conjunto de arcos que entran a u y se define por $\Gamma^{-1}(u) = \{(v, u) \in A : v \in V\}$.

Es posible modelar una ruta de una red de transporte utilizando los conceptos de camino dirigido y ruta dirigida.

Definición 5. Un camino dirigido es una secuencia no vacía de nodos y arcos $c = (v_0, a_0, v_1, a_1 \dots a_n, v_n)$ tal que el nodo cola de a_i es v_{i-1} el nodo cabeza de a_i es v_i .

Definición 6. Una ruta dirigida es el conjunto mínimo de caminos dirigidos sin ciclos, tal que cualquier nodo de la ruta está conectado con el resto.

Definición 7. Un grafo dirigido G es conexo si para toda pareja de nodos $\{u, v\} \in V$, existe un camino $c = (v_0, a_0, v_1, a_1 \dots a_n, v_n)$.

Definición 8. Un ciclo en un grafo dirigido G es un camino dirigido $c = (v_0, a_0, v_1, a_1 \dots a_n, v_n)$ tal que $v_0 = v_n$.

Definición 9. Un árbol dirigido G es un grafo dirigido conexo sin ciclos, tal que G tiene n nodos y $n - 1$ arcos.

Definición 10. Un grafo dirigido $G = (V, A)$ es una red si V es un conjunto de nodos, A es un conjunto de arcos y todo arco $a \in A$ tiene asignado un valor real no-negativo $c(a)$ que recibe el nombre de la capacidad del arco a .

Es posible crear modelos más robustos de redes de transporte si se asignan características especiales a los arcos o a los nodos. Por ejemplo los arcos que representan calles pueden tener asociados los siguientes atributos: número de carriles, capacidad, velocidad o tiempo de recorrido. A los nodos se les puede asignar valores como tiempos de espera o equipamiento (semáforos, pasos peatonales, señalamientos, entre otros). Para un análisis más extenso de la teoría de grafos consultar Voloshin (2009) o Kay et al. (1977).

2.2 Red multimodal

Juntando un número finito de redes asociadas a diferentes modos de transporte se modela una red de transporte multimodal. Sea G_m la red que modela una red transporte del algún modo m , donde todos los arcos de G_m están asociados al modo m . Sea G_m una red monomodal y sea $M = \{1, 2, 3 \dots m\}$ un conjunto de modos de transporte tal que $m > 1$.

Definición 11. Una red G es multimodal si está formado por un conjunto de redes monomodales, $G \in (G_1, G_2, \dots G_m)$ tal que $i \in M$.

Definición 12. Sea G una red multimodal. Sea $a = (u, v) \in A$, a es un arco de transferencia si cumple que $u \in G_i$ y $v \in G_j$ para $1 \leq \{i, j\} \leq m, i \neq j$.

Definición 13. Sea p_{od} una ruta en G . p_{od} es una ruta monomodal si todos los arcos que la componen pertenecen al mismo modo de transporte.

Definición 14. Sea p_{od} una ruta en G . p_{od} es una ruta multimodal si está compuesta por al menos dos rutas monomodales.

Además para todo $u \in G$, se cumple que la estrella entrante y saliente de un nodo u , $\Gamma^{-1}(u)$ y $\Gamma(u)$, contienen únicamente arcos del mismo modo o al menos un arco de *transferencia*, lo que implica que la única forma de conectar redes monomodales es mediante arcos de *transferencia*. La Figura 2.3 muestra un ejemplo de red multimodal. Cada red monomodal de la Figura 2.3 está unida por arcos de *transferencia* que se muestran como líneas punteadas.

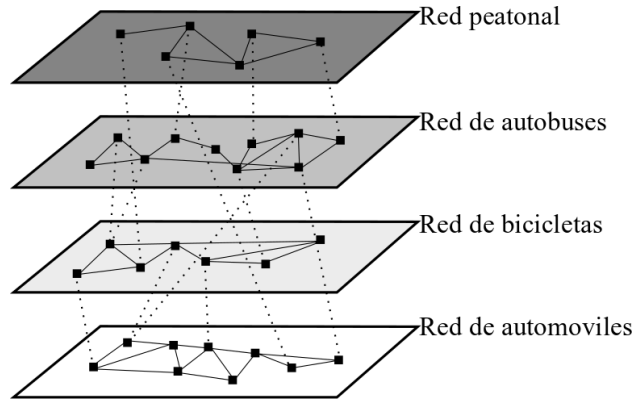


Figura 2.3 Diferentes capas de una red multimodal, las líneas punteadas representan un arco de transferencia modal. Figura adaptada de Bousquet et al. (2009)

Cuando se desea encontrar rutas dentro de una red transporte multimodal es importante tomar en consideración que las rutas sean acordes a lo que sucede en el mundo real. Por ejemplo, si se comienza una ruta en automóvil particular y después se abandona para tomar transporte público, ya no será posible continuar la ruta en el automóvil particular; también es probable que si parte de la ruta es en bicicleta o a pie, el trayecto debe estar limitado por la distancia, pues el usuario común no es un deportista de alto rendimiento. Para restringir las rutas de manera que sean realizables en la vida real se introduce el concepto de *viabilidad*. Lozano & Storchi (2001) definen una ruta *viable* en una red multimodal como aquella que:

- No usa más de una vez algún modo restringido.
- No usa ciertos modos restringidos a menos que partan del origen.

Además, es razonable pedir cotas superiores para las distancias de modos no motorizados (pie y bicicleta), entonces la definición de *viabilidad* puede ser extendida de la siguiente forma:

Definición 15. Una ruta multimodal es viable si:

- No utiliza más de una vez un modo restringido a lo largo de la ruta
- No usa ciertos modos restringidos a menos que partan del origen
- La longitud de alguna sub-ruta de un modo no motorizado es menor a una distancia dada.

La *viabilidad* de una ruta depende de la estructura específica de la ciudad, las características de la red de transporte y de las preferencias del usuario (Lozano & Storchi, 2001).

2.3 Híper grafos dirigidos

Los híper grafos dirigidos donde sus híper arcos tienen asociado un costo permiten modelar redes de transporte público basados en frecuencias, pues permiten plasmar el fenómeno de esperar un sistema de transporte en determinada parada. A diferencia de las redes cuyos arcos representan un costo (distancia, tiempo, comodidad, etcétera) a los híper arcos de los híper grafos dirigidos se les puede asociar una distribución de probabilidad que representa la frecuencia de paso de una línea de transporte público. A continuación, se definen los conceptos principales de los híper grafos.

Definición 16. Un híper grafo dirigido o es un pareja $H = (V, E)$, en donde $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un conjunto no vacío de nodos y $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ es un conjunto de híper arcos.

Definición 17. Sea H un híper grafo dirigido. Un híper arco o h-arco, $e \in E$ es una pareja ordenada de conjuntos de nodos $e = (t(e), h(e))$. Donde $t(e) \subset V$ denota el conjunto de los nodos cola y $h(e) \subset V$ denota el conjunto de los nodos cabeza. Es decir, el h-arco conecta subconjuntos de V (Voloshin, 2009).

En el híper grafo dirigido que se muestra en la Figura 2.4 los puntos son nodos, las flechas son arcos y las flechas curvadas son híper arcos, este híper grafo tiene dos híper arcos, e_1 y e_6 , y doce arcos $e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}$ y e_{14} . En una red de transporte público basado en frecuencias, cada uno de los híper arcos e_1 y e_6 representa tres líneas de transporte público que paran en su nodo cola.

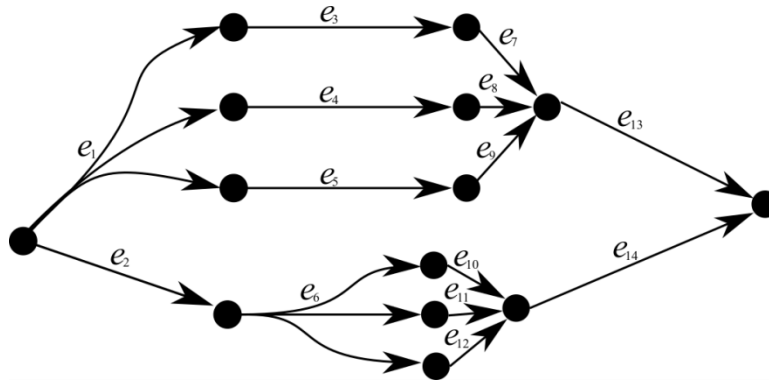


Figura 2.4 Representación de un híper grafo

Definición 18. La cardinalidad de un híper arco, es igual al número de nodos contenidos en él y se denota por $|e|$. El tamaño del híper grafo H es la suma de las cardinalidades de los híper arcos, es decir, $|H| = \sum |e|$ (Voloshin, 2009).

Definición 19. La estrella saliente de $u \in V(H)$ es el conjunto de arcos que salen de u y se define por $\Gamma(u) = \{(u, h(e)) \in E : e \in E\}$. La estrella entrante $u \in V(H)$ es el conjunto de arcos que entran a u y se define por $\Gamma^{-1}(u) = \{(t(e), u) \in E : e \in E\}$ (Voloshin, 2009).

Para modelar una ruta en una red de transporte se utilizan los conceptos de híper camino dirigido e híper ruta dirigida.

Definición 20. Un híper camino, r_{od} , que conecta un origen o y un destino d es una secuencia de nodos e híper-arcos, $r_{od} = (o = t(e_1), e_1, t(e_2), e_2, \dots, e_m, d)$, en donde $t(e_{i+1}) \in h(e_i)$ para $i = \{1, 2, 3 \dots m - 1\}$ y $d \in h(e_m)$ (Voloshin, 2009).

Definición 21. Una hiper ruta p_{od} es el conjunto mínimo sin ciclos de hiper caminos r_{od} , tal que el destino d está conectado a cualquier nodo que pertenezca a p_{od} (Nguyen & Pallottino 1989).

Definición 22. Un hiper grafo dirigido $H = (V, E)$ es una hiper red si V es un conjunto de nodos, E es un conjunto de hiper arcos y todo hiper arco $a \in H$ tiene asignado un valor real no-negativo $c(a)$ que recibe el nombre de la capacidad del hiper arco a (Voloshin, 2009).

Para un análisis más extenso de la teoría de hiper grafos consultar Voloshin (2009) o Berge & Minieka (1973).

Una hiper red multimodal está formada por un conjunto de nodos, un conjunto de hiper arcos y un conjunto de modos. Lozano & Storchi (2002) proponen seis conjuntos de modos:

- Transporte sobre rieles (metro y tren).
- Transporte público en superficie (autobús, taxi, etc.).
- Transporte privado con necesidades de estacionamiento (automóviles y motocicletas).
- Transporte privado sin necesidades de estacionamiento (bicicletas).
- Transporte a pie.
- Transferencias modales. Por ejemplo, abandonar el modo sobre rieles y continuar por algún modo diferente.

Los hiper arcos de la hiper red se clasifican en:

- *Híper arcos de abordaje*, que representan la acción de esperar algún modo de transporte
- *Arcos de viaje*, que representan la acción de viajar por algún modo de transporte
- *Arcos de transferencia*, que representan la acción de abandonar algún modo y aproximarse a un nuevo modo de transporte.

Cada tipo de hiper arco tiene asociado diferentes costos, a los *arcos de viaje* y los *arcos de transferencia* se les asocia un tiempo de recorrido, mientras que a los *hiper arcos de abordaje* se les asocia una distribución de probabilidad en función de la frecuencia de paso de la líneas de transporte público que representan.

Si se desea encontrar hiper rutas más cortas en redes de transporte multimodal, es posible que en alguna parada pasen vehículos de más de una línea de transporte público que acerquen al usuario a su destino. El conjunto de líneas de transporte que acerquen al usuario a su destino recibe el nombre de *conjunto atractivo* (Lozano & Storchi, 2002) y se define como:

Definición 23. Sea H una hiper red multimodal. Un conjunto atractivo es el conjunto de líneas, tal que el usuario está dispuesto a abordar el primer vehículo que pase de esas líneas.

2.4 Redes espacio-temporales

Las redes espacio-temporales son una manera de representar redes dependientes del tiempo haciéndolas ver como independientes del tiempo, es decir, convierten sucesos en el tiempo en eventos estáticos de la red. Una red espacio-temporal está compuesta por: un conjunto de nodos, un conjunto de arcos y un conjunto de instantes de tiempo. En cada instante de tiempo existe una réplica de la red original con las características propias del instante de tiempo, es decir, la topología de la red es igual en

cada instante de tiempo, sin embargo, sus adyacencias cambian. Además de los arcos que representan calles o vías de la red de transporte, esta red tiene arcos que conectan un nodo con su réplica en el siguiente instante de tiempo (George et al., 2006). Un ejemplo de red Espacio-Temporal con siete instantes de tiempo y cuatro nodos, se muestra en la Figura 2.5.

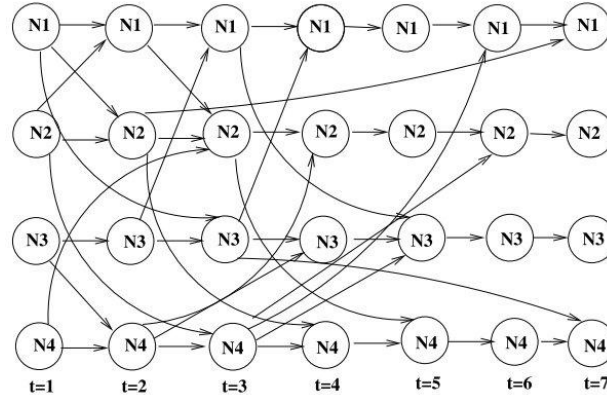


Figura 2.5 Red Espacio-Temporal (George et al., 2006)

Una red espacio-temporal para un modo de transporte público es una red compuesta por nodos físicos y de eventos, los nodos físicos representan intersecciones, mientras que los nodos eventos representan una parada de alguna línea de transporte público en un tiempo dado. Los nodos de eventos se dividen en llegadas y salidas, y cada uno de estos nodos está asociado a un tiempo t para alguna parada dada. Dos nodos de eventos en dos paradas diferentes son adyacentes, si pertenecen a la misma línea de transporte y si el horario de salida de la primera parada corresponde al horario de llegada de la segunda parada, esto es, si un vehículo parte de la Parada A en un horario t_i , el nodo de salida que corresponde a dicho evento es adyacente al nodo de llegada del evento “llegar a la parada B” en un horario t_j , si y sólo si $t_i < t_j$. También, dos nodos de eventos de la misma parada son adyacentes si su tiempo t es consecutivo (Schulz, 2005). La Figura 2.6 muestra un ejemplo de una red espacio temporal donde los tiempos asociados a cada nodo se muestran junto al nodo.

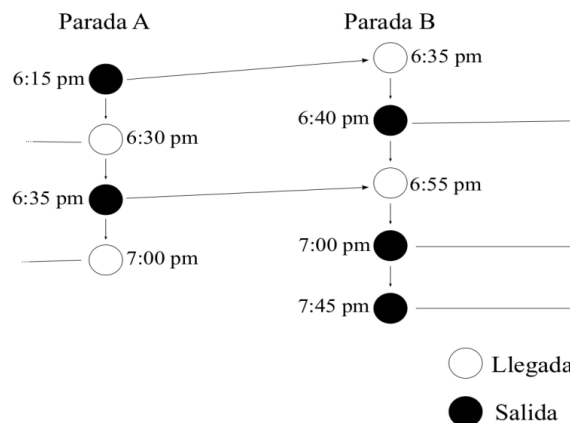


Figura 2.6 Paradas en una red espacio-temporal. Modificación de Pajor (2009)

Pajor (2009) propone un modelo de red espacio-temporal donde se agregan a la red otros nodos de eventos que representan *transbordos*³, él menciona que su modelo representa de manera más precisa las condiciones reales de la red, pues es posible añadir el tiempo de *transbordo*. En su modelo los nodos de llegada representan eventos en el tiempo, sin embargo, a diferencia del modelo que se muestra en la Figura 2.5, los eventos de salida se representan con dos nodos, uno de transferencia y uno de salida. Las adyacencias entre estos nodos tiene la siguiente forma:

- Para cada evento existe una adyacencia del nodo de transferencia, v_t , al nodo de salida, v_s .
- Los nodos de llegada, v_l , y los de salida, v_t , se unen de forma análoga al modelo mostrado en la Figura 2.6.
- Los nodos de transferencia son adyacentes si su tiempo t es consecutivo.
- Un nodo de llegada, v_l , es adyacente a uno de transferencia, v_t , si y solo si es posible recorrer la ruta (v_l, v_t, v_s) y llegar al nodo de salida, v_s , antes de que parta el vehículo.

La Figura 2.7 muestra un ejemplo del modelo de red propuesto por Pajor (2009).

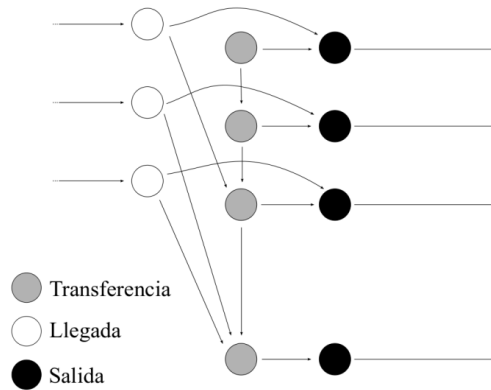


Figura 2.7 Red espacio-temporal de Pajor (2009)

2.5 Redes dependientes del tiempo

Las redes dependientes del tiempo son redes donde cada parada de transporte público se representa con un nodo, al contrario de las redes espacio-temporales donde cada parada se representa con un conjunto de nodos. Los arcos que unen las paradas tienen asociados una función f cuyo dominio es el espacio de tiempo T sobre el que se está trabajando (Stølting & Jacob, 2004). Esta función cumple que $f(t) \geq t$, tal que t está en los instantes de tiempo T . Schulz (2005) define la longitud de un arco (u, v) como $l = f(t) - t$ donde t es el tiempo de partida del nodo u . Resulta inmediato, por la condición anterior, que l es positivo y además $f(t) = t'$ para alguna $t' \geq t$. Para evitar discontinuidades en el tiempo la función f debe respetar las propiedades FIFO así que para toda $\{x, y\} \in T$ tal que $x \leq y$ entonces $f(x) - x \leq f(y) - y$.

³Un *transbordo* es la acción de abandonar una línea de transporte y abordar otra, siempre y cuando ambas pertenezcan al mismo modo.

El costo de una ruta en redes dependientes del tiempo difiere del costo de una ruta en redes estáticas pues dependiendo de la hora de partida el costo puede ser distinto. Delling (2008) define el costo de una ruta en redes dependientes del tiempo de forma recursiva como $c(t) = f(t) + c'(t + f(t))$, donde, $c(t)$ es el costo de la ruta $p = (u_1, u_2, u_3 \dots u_n)$, en el tiempo t tal que u_i es un nodo de la red, $f(t)$ es el costo del arco (u_1, u_2) en el tiempo t y $c'(t + f(t))$ es el costo de la ruta $p' = (u_2, u_3, u_4 \dots u_n)$ en el tiempo $t + f(t)$.

3 Rutas más cortas en sistemas de transporte

El problema de la ruta más corta consiste en encontrar la ruta entre dos pares de nodos tal que su costo (tiempo, precio, comodidad, entre otros) sea el menor. A lo largo del tiempo diversos algoritmos han sido desarrollados para resolver el problema de la ruta más corta, entre los más usados están *Dijkstra*, *Bellman–Ford*, A^* , *Floyd–Warshall*, *k-rutas*, entre otros. En la Sección 3.1 se revisa el estado del arte sobre algoritmos de rutas más cortas en sistemas de transporte donde el transporte público tiene información en tiempo real de los tiempos de arribo de los vehículos a las paradas y en la Sección 3.2 se revisan algoritmos utilizados cuando el transporte público no tiene información en tiempo real. Esta sección no incluye investigación sobre rutas más cortas que consideran exclusivamente el uso del vehículo privado y a menos que se indique lo contrario, todos los modos de transporte público tienen itinerarios.

En un estudio realizado por Bast et al. (2015) donde comparan diferentes algoritmos indican que una red es “realmente” multimodal si:

1. Incluye al menos un modo no restringido (peatonal, bicicleta o taxi) o un modo privado (coches o motos)
2. Incluye modos de transporte público.

Si una red multimodal solo incluye modos de transporte público y los modos restringidos (peatonal o bicicleta) solo sirven para transferencias modales, entonces es posible hacer modificaciones a la red para combinar todos los modos de transporte público en uno sólo y usar algoritmos monomodales que calculan rutas en milisegundos. Sin embargo, si se considera al menos un modo restringido o privado la complejidad aumenta considerablemente (Bast et al., 2015) y por lo tanto se necesitan diferentes técnicas para encontrar soluciones en tiempos suficientemente bajos. El algoritmo y el modelo de red que se proponen en esta tesis son “realmente” multimodales, al contrario de la mayoría de los algoritmos que se mencionan en este capítulo. A continuación solo se afirma que una red es multimodal si cumple con la definición de Bast et al. (2015).

3.1 Rutas más cortas con información en tiempo real

Muchos modelos de transporte donde el transporte público tiene información en tiempo real sobre el tiempo de espera de los vehículos en las paradas, usan redes espacio-temporales; este tipo de redes crecen muy rápido si se aplican a sistemas de transporte de dimensiones reales, por lo que resulta difícil encontrar soluciones exactas en tiempos razonablemente cortos. En general, las soluciones que se dan al problema buscan reducir el tamaño de la red mediante diferentes heurísticas y encuentran soluciones con derivaciones del algoritmo de *Dijkstra*.

Chiu et al. (2005) modelan el sistema de transporte público de Hong Kong con una red orientada a objetos. Definen tres objetos:

1. *Nodo*, objeto que representa lugares, paradas, intersecciones, etcétera. Son los puntos origen y destino.
2. *Arco*, objeto que conecta nodos y representa calles, banquetas, puentes, etcétera. Los arcos tienen asociado un costo que varía con el tiempo.
3. *Ruta*, objetos que describen la secuencia de nodos y arcos que siguen las líneas de transporte público. Todos los arribos de los vehículos de cada línea a las paradas son actualizados en tiempo real.

Los autores encuentran rutas más cortas usando una modificación del algoritmo de *Dijkstra*. Esta modificación itera sobre líneas completas de transporte público en lugar de arcos con el objetivo de recorrer la red en menor tiempo. Debido a que la red tiene información en tiempo real es necesario utilizar tres heurísticas para reducir el tamaño de la red, las cuales son:

1. Restringir el área de búsqueda en la red. Solo se buscan rutas en la porción de red que contenga al origen y al destino.
2. Restringir el costo. Las rutas que superen cierto límite de precio serán descartada de la búsqueda.
3. Mantener una base de datos. Esta base de datos tiene la información de todas las rutas directas entre cada par de puntos. Si algún par origen-destino no está en esta base de datos, se depuran todas las rutas que no sirvan para el cálculo y se inicia una nueva búsqueda en la parada más cercana al destino. A partir de este punto se busca una ruta directa en la base de datos.

Rothkrantz et al. (2005) usan una red dinámica discreta para modelar el sistema de trenes de Holanda y con el algoritmo DYNET encuentran rutas más cortas, sin embargo los autores no especifican cómo se construye la red. El algoritmo DYNET hace dos recorridos en la red para encontrar la ruta más corta, el primer recorrido lo hace en el sentido de la red y encuentra la ruta que sale del origen lo más pronto posible y llega al destino a la hora más temprano posible. En el segundo recorrido lo hace en el sentido inverso de la red y optimiza la ruta del primer recorrido mediante la búsqueda de la última hora de salida tal que llegue al destino a la misma hora que se encontró en la ruta del primer recorrido.

Li et al. (2010) modelan un sistema de transporte multimodal con estacionamientos de transferencia, *park-and-ride*, el término *park-and-ride* se refiere al estacionamiento de uso exclusivo para el cambio de modo entre el transporte privado y el transporte público (Spillar, 1997). Los autores dividen la red de transporte en dos conjuntos:

1. La red de calles formada por:
 - a. Los arcos que representan entradas a estacionamientos.
 - b. Los arcos que representa calles por donde circulan automóviles particulares y peatones.
2. La red de transporte público formada por:
 - a. Una red espacio temporal que modela el transporte público.
 - b. Los arcos que conectan la red de calles con la red de transporte público (cambios de modo).

Los tiempos de viaje en la red de transporte público cambian según el día de la semana y cuando existe información en tiempo real que actualiza los tiempos de espera en las paradas. Para encontrar las rutas más cortas los autores dividen el procedimiento en dos pasos:

1. Usando el algoritmo bidireccional de *Dijkstra* encuentran la ruta más corta del origen a la parada o estacionamiento más cercano, en caso de ser necesario también usan este procedimiento para la ruta más corta entre el destino a la parada o estacionamiento más cercano.
2. Para calcular la ruta más corta en la red de transporte público
 - a. Utilizan una adaptación del algoritmo de *Goldberg-Radzik* para encontrar las rutas más cortas entre un par de paradas de transporte público.
 - b. Después utilizan una adaptación del algoritmo de *k-rutas* propuesto por Jiménez & Marzal (1999) con el fin de proveer diferentes opciones al usuario.

Su sistema solo fue probado para un área de San Francisco y no reportan tiempos de ejecución. Los autores no especifican la complejidad del algoritmo y lo aplicaron para una red peatonal, de autobuses, de metro y de automóviles.

Jariyasunant et al. (2011b) dividen una red de transporte en dos grupos: la red estática y la red dinámica. La red estática es una red espacio-temporal que se compone de tres sub-redes:

1. *Sub-red de espera*. Se forma por un conjunto de nodos y arcos en un tiempo t . Representan la acción de esperar en una parada.
2. *Sub-red a pie*. Es un conjunto de nodos y arcos que no dependen del tiempo. Representan la acción de caminar a través de la red.
3. *Sub-red de abordaje*. Es un conjunto de nodos y arcos que dependen de un tiempo t , pues la condiciones del tránsito varían a lo largo del día. Representan la acción de abordar un vehículo de algún modo de transporte.

Para crear la red dinámica el modelo supone que existe información en tiempo real de:

- Los tiempos de espera de los vehículos de transporte público en las paradas.
- Los tiempos de viajes en algunos arcos en la red (tráfico en tiempo real).

Si algún autobús está retrasado la *sub-red de espera* se actualiza añadiendo el retraso r al tiempo de espera, esta acción modifica los nodos y arcos asociados al tiempo t y los reemplaza por nodos y arcos asociados al tiempo $t + r$, por lo que existen consecuencias sobre los subsecuentes nodos y arcos cuyos tiempos sean mayores a t . El tiempo de los arcos de la *sub-red de abordaje* se actualiza con la información en tiempo real del tránsito. Los autores resuelven el problema con el algoritmo *k-rutas* más

cortas, para que el usuario pueda elegir la ruta que más le acomode entre un número de soluciones posibles.

Cuando el usuario hace una consulta al algoritmo de Jariyasunant et al. (2011b), el primer paso es pre-calcular todos las *rutas factibles* (aquellas que son posibles dado una hora de partida) en la red estática, este pre-cálculo reduce el tamaño de la red y acota el número de consultas a los servicios de información en tiempo real (Jariyasunant et al., 2011b). Para reducir el tamaño de la red, los autores proponen que solo se puedan hacer transferencias o abordajes a aquellas rutas cuyas paradas se encuentren en un radio menor a una distancia dada, esta restricción simula el comportamiento humano donde solo se está dispuesto a caminar menos de cierta distancia para abordar un vehículo de transporte público. Sólo se consideran aquellas rutas que tengan a lo más cuatro transferencias, pues un número mayor de transferencias resulta incómodo para el usuario. Resulta inmediato que al simular el comportamiento humano y acotar el número de transferencias posibles se reduce significativamente el tamaño de la red, pues las opciones que tiene el usuario para iniciar su viaje se reducen a un puñado (Bast et al., 2007).

Una vez creado el conjunto de *rutas factibles*, la información de los arcos de las *rutas factibles* se actualiza con la información en tiempo real. En el momento en el que se retrasa un autobús (la información en tiempo real se actualiza), se recalcula el conjunto de los *rutas factibles*; la actualización remueve todas aquellas rutas que no puedan ser alcanzadas debido al retraso, y agrega un costo a aquellas rutas que se vieron afectadas por el retraso del autobús. Para mantener la lista de *rutas factibles* suficientemente pequeña, los autores proponen dos restricciones:

- No se calculan las rutas con más de w transferencias modales.
- Para alguna pareja origen-destino fija, se remueven todas aquellas rutas cuyo tiempo histórico más rápido sea mayor que el de alguna otra ruta con menor tiempo. Es decir, se remueven las rutas tradicionalmente lentas.

En la construcción de la ruta más corta, el algoritmo busca el conjunto de paradas que se encuentren cerca del origen, después busca en la lista de *rutas factibles* y selecciona aquellas que tengan una parada cerca del destino. Utilizando esta información, se encuentran las rutas más cortas con el algoritmo de las k -*rutas* más cortas. Los autores probaron su algoritmo en la red de transporte de Washington, DC, y obtuvieron un máximo de tres segundos en el cálculo de rutas, sin embargo, el pre-cálculo de las *rutas factibles* llegó a tardar hasta 99 minutos. Los autores no especifican la complejidad del algoritmo y lo aplicaron para una red peatonal y de autobuses.

Zhang et al. (2011a) usan una red multimodal que dividen en: transporte público y transporte privado. La red de transporte privado está compuesta de nodos y arcos físicos, es decir, cada elemento tiene una representación en el mundo real, los nodos representan intersecciones y los arcos representan calles. La red de transporte público consta de nodos físicos y nodos de eventos, estos últimos están asociados a las salidas y llegadas del vehículo de algún modo de transporte. Los arcos de la red de transporte público se dividen en dos: arcos que representan el movimiento del vehículo de un punto a otro y arcos que unen nodos de eventos, es decir, estos arcos representan la acción de esperar o hacer un transbordo entre líneas. Las redes de transporte público y privado se unen con arcos de transferencia que usualmente representan un recorrido a pie.

El algoritmo que resuelve el problema primero inicializa cada una de las redes, después las compila y por último las une en una sola. En el punto de compilación de la red, para el caso de transporte público identifica y elimina aquellos nodos de eventos que no puedan ser alcanzados debido a la hora de partida. Una vez terminado el proceso de compilación, se utiliza el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar las rutas más cortas. Para una red con alrededor 15,000 nodos, 20,000 arcos, 1,700 paradas de autobús y 121,000 eventos de llegada/salida, el algoritmo toma alrededor de 370 segundos en calcular una ruta. Los autores no especifican la complejidad del algoritmo y lo aplicaron para una red peatonal, de bicicletas y de autobuses.

Alves et al. (2012) desarrollan un modelo para encontrar rutas más cortas en el sistema de autobuses y tranvías de Lisboa, Portugal. Su modelo de red está orientado a objetos y consiste de las siguientes componentes:

1. *Secciones*, representación abstracta que conecta grupos de paradas.
2. *Calles*, representación de las calles donde circulan los vehículos
3. *Secciones comunes*, segmentos de calle por donde circulan diferentes líneas de transporte público.
4. *Paradas y grupos*, puntos donde los usuarios abordan los vehículos de transporte público.
5. *Bloques de censo*, referencias que se utilizan para determinar el origen y destino de los usuarios
6. *Red de transporte*, elemento que contiene todos los puntos mencionados anteriormente y además incluye una red peatonal y arcos de transferencia.

Para encontrar rutas más cortas los autores usan el algoritmo de rutas más cortas con ventanas de tiempo basado en *Dijkstra*. Este algoritmo restringe el acceso a los nodos para los intervalos de tiempo donde no hay un vehículo disponible en la parada. Para evitar que el algoritmo calcule rutas indeseables (transferencias excesivas o caminar largas distancias) se agregan penalizaciones a la función objetivo.

Li et al. (2012) construyen una red de transporte similar a la Li et al. (2010), dividiendo a la red de transporte en la red de calles y la red de transporte público. Las paradas de autobús son divididas en dos tipos: las paradas con horarios y las que no tienen horarios. Como existe un gran número de paradas en la red, los autores restringen los transbordos/transferencias entre las paradas con horario y entre las paradas sin horario, esto es, no es posible hacer transbordos/transferencias directas entre una parada con horario y otra sin horario. También proponen una distancia máxima entre paradas para los transbordos/transferencias.

Para reducir aún más el tamaño de la red los autores sólo consideran para el cálculo de la ruta más corta la porción de red que contiene el origen y el destino más una distancia extra, esto es, cuando se introduce un origen y un destino se encuentra el cuadrante extendido que contiene la pareja origen-destino y en la porción de red contenida en este cuadrante se encuentra la ruta más corta. En la Figura 3.1 el origen y el destino son los puntos negros, el cuadrante que los contiene es el recuadro punteado y el cuadrante extendido es el recuadro en negro.

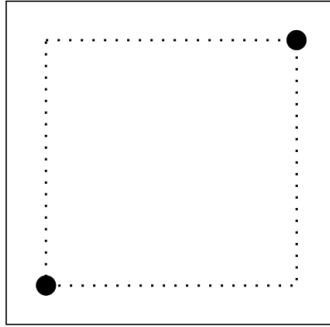


Figura 3.1 Cuadrante de búsqueda de rutas más cortas

Para encontrar rutas más cortas los autores usan una combinación de algoritmos similar a los utilizados en Li et al. (2010) y proponen un conjunto de reglas de *dominancia* basadas en: la última hora de partida, la llegada más temprana, el menor número de transferencias y la menor distancia a pie. Este conjunto de reglas elimina rutas similares y reporta al usuario sólo aquellas que se consideren mejores de acuerdo a las reglas de *dominancia*. Aunque los autobuses tienen información de localización con GPS, el sistema reporta la posición de estos cada 60 o 120 segundos, entonces para obtener una estimación del tiempo de arribo a la parada, los autores usan un modelo de regresión que estima dinámicamente los tiempos de llegada de los vehículos a las paradas. Este modelo de predicción funciona con una combinación de datos históricos de cada parada y el *tiempo esperado* de arribo de acuerdo al itinerario. Los autores compararon el modelo de predicción con un estudio de campo donde era posible conocer la posición del autobús cada segundo, y encontraron que el modelo es suficientemente cercano a los horarios de arribo reales. El sistema está en marcha desde el 2010 para casi todo el sistema de transporte público de San Francisco.

Borole et al. (2013) no profundizan sobre el modelo de red que utilizan para modelar el sistema de transporte público más allá de una red que consta de un conjunto de arcos y nodos que se actualizan constantemente. Con un algoritmo de búsqueda en abanico (*Breadth First Search*) encuentran rutas más cortas, sin embargo no detallan cómo lo aplican a la red para encontrar soluciones.

Miao (2014) presenta una optimización al algoritmo de *Dijkstra* para encontrar rutas en un sistema de trenes, autobuses y bicicletas de préstamo (este modo no es privado ni restringido, por lo que este modelo no puede ser considerado multimodal). El autor define una red donde los nodos representan paradas, módulos de préstamo e intersecciones de calles, y los arcos representan líneas de transporte público y calles (donde circulan las bicicletas). Para hacer transbordos entre líneas de un mismo modo, el autor asocia con arcos a las paradas de transporte público que cumplan los siguientes criterios:

- Paradas en lados opuestos de la calle donde arribe la misma línea de transporte público pero en diferente dirección.
- Paradas en lados opuestos de la calle donde arriben diferentes líneas de transporte público pero que no estén dentro de una distancia caminable.
- Paradas en el mismo lado de la calle que se encuentren a una distancia caminable.
- Una parada de metro se asocia con una parada de autobús (o bicicleta) si están dentro de una distancia caminable.

Los únicos puntos de transbordo y transferencia modal pueden ser las paradas de autobús, de metro y centros de préstamo de bicicleta. Para encontrar rutas más cortas, Miao (2014) propone una aceleración del algoritmo de *Dijkstra* usando matrices de transferencia de líneas. Estas matrices en vez de considerar las paradas donde se puede realizar una transferencia, consideran parejas de líneas donde es posible acceder de una línea a otra mediante una transferencia. Es decir, si l y m son dos líneas de transporte público tal que se puede hacer una transferencia entre ellas, la entrada a_{lm} en la matriz de transferencia de líneas es igual a 1. Los autores usan las líneas de transporte público, en vez de las paradas, como entradas de la matriz, pues el número de líneas de transporte público es mucho menor que el número de paradas y por lo tanto es más fácil buscar puntos de transferencia en esta matriz. Además de la matriz donde sólo se necesita una transferencia/transbordo para cambiar de línea, se crean las matrices donde se necesitan dos y tres transferencias/transbordos.

La idea central del algoritmo que es la siguiente:

- Se busca, si es que existe, la ruta entre O y D que no requiera ninguna transferencia o transbordo. Lo que implica sólo buscar en la red de transporte a la que pertenezca O .
- Se busca, si es que existe, la ruta entre O y D que requiera al menos una transferencia o transbordo. Entonces, usando la matriz de transferencia se obtienen las líneas de transporte público con al menos una transferencia y después se buscan los puntos donde es posible realizar el transbordo/transferencia de acuerdo a la hora de partida. Se encuentra la ruta más corta en una subred que contiene únicamente los arcos y nodos de las líneas obtenidas en la matriz de transferencia.
- El procedimiento se repite para las matrices de dos y tres transferencias.

Al final del algoritmo se obtiene un conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones. Con el propósito de personalizar las rutas que calcula el algoritmo, se asignan grados de influencia a cada variable. Por ejemplo, si el usuario no gusta de realizar transferencias, el tiempo de viaje de todos los arcos de transferencia se aumenta para que el algoritmo las evite en la medida de lo posible.

El modelo de Gkiotsalitis & Stathopoulos (2015) permite restringir las rutas por un conjunto de preferencias del usuario. La red está formada por nodos (intersecciones o paradas de transporte público) y arcos (calles o líneas de transporte público) con las siguientes características:

- Cada arco pertenece a un único modo de transporte.
- El tiempo de viaje del arco (i, j) depende de la hora en la que se parte del nodo i . Este tiempo de viaje se obtiene de la información en tiempo real del tráfico. Si no existe información en tiempo real del tráfico para algún intervalo de tiempo, se toma el tiempo de viaje de algún servicio de predicción del tráfico o se pone un valor predefinido.
- Los arcos (i, j) de transporte público tienen asignado un conjunto de itinerarios, que indican la hora de partida de la parada i . Este itinerario indica los intervalos de tiempo en el que (i, j) puede ser usado.

Los cambios de modo son representados en el nodo, es decir un nodo puede ser adyacente a más de un modo de transporte. El tiempo que toma cambiar de modo se calcula como el tiempo de espera hasta que el arco esté disponible más el tiempo de viaje del arco. Las preferencias del usuario son: máxima distancia caminada, consumo máximo de combustible, máxima distancia recorrida y máximo número de

transferencias. La distancia caminando, el consumo de combustible y la distancia recorrida son atributos relacionados con los arcos y por lo tanto su cálculo se contabiliza en éstos, mientras que el número de transferencias es un atributo de la ruta. Para poder ordenar las rutas los autores definen una regla de *dominancia* que compara las rutas de acuerdo a las preferencias del usuario. Una ruta p *domina* a una ruta p' si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Ambas rutas terminan en el mismo nodo.
2. Si el tiempo de viaje de p es menor que el de p' .
3. Si todos los recursos consumidos por p son menos que los consumidos por p' . Por ejemplo, tiempo caminando, consumo de combustible o distancia recorrida.
4. Si el número de transferencias de p es menor que el de p' .

Los autores proponen un algoritmo de etiquetas que va comparando rutas de acuerdo a las reglas de *dominancia*, el algoritmo comienza del nodo origen y va escaneando los nodos de la red hasta llegar al destino. Para mejorar los tiempos de ejecución usan una heurística que encuentra rutas sub-óptimas. De acuerdo con Gkiotsalitis & Stathopoulos (2015) los resultados de su heurística se encuentran a una distancia despreciable del óptimo si se considera que es una aplicación de rutas de transporte público, donde una diferencia de 3~4 minutos es aceptable. Los autores probaron el algoritmo y la heurística en redes aleatorias variando el número de preferencias del usuario, el número de modos, la cantidad de nodos y arcos. El algoritmo tuvo tiempos de ejecución entre 1 y más de 200 segundos, mientras que la heurística encontró rutas sub óptimas con una diferencia máxima del 8% respecto al óptimo y tiempos de ejecución entre .01 y 21 segundos.

3.2 Rutas más cortas sin información en tiempo real

La literatura en rutas más cortas es muy basta, a continuación se presentan los modelos de rutas más cortas en sistemas de transporte más relevantes para esta investigación así como los últimos avances en este campo. Los siguientes modelos no hacen uso explícito de información en tiempo real, son modelos de transporte que dependen del tiempo o están basados en frecuencias.

El modelo de Ziliaskopoulos & Wardell (2000) es una red formada por nodos, arcos, modos e intervalos de tiempo discretos. Cada arco tiene asociado un tiempo de viaje en cada instante de tiempo y para cada uno de los modos. Los nodos también tienen asociado un tiempo de espera que depende del modo del arco de entrada y del modo del arco de salida, esto es, si se entró al nodo por un modo diferente al que se salió, esta espera representa el tiempo que toma hacer la transferencia entre modos. Si el modo de entrada es igual al modo de salida, entonces, la espera se asocia al tráfico sobre el arco o los ciclos de semáforos. Además, existen casos especiales para el nodo origen y el destino, que pueden tener asociada una espera que representa la salida o entrada de un estacionamiento.

El modelo asocia a cada nodo i una matriz que contiene los tiempos mínimos de viaje de todas las rutas que llegan a i por cada uno de los arcos entrantes de i . El objetivo es encontrar la ruta más corta de todas las rutas que entran a i . Para encontrar la ruta mínima Ziliaskopoulos & Wardell (2000) desarrollaron el algoritmo de corrección de etiquetas *Time-Dependant Intermodal Least Time Path* (TDILTP). El principal problema del algoritmo es que la ruta óptima puede contener ciclos, sin embargo, los autores mencionan que no es frecuente encontrar este tipo de soluciones en redes reales. Los tiempos de ejecución son de 13 segundos para una red con 1000 nodos, 2747 arcos, 30 líneas de transporte público

y 100 intervalos de tiempo. La complejidad del algoritmo es $O(|T|^2|V|^2)$, donde T es el conjunto de intervalos de tiempo y V es el número de nodos. Aplicaron el algoritmo para una red peatonal, de automóviles y de autobuses.

Lozano & Storchi (2002) modelan una red de transporte multimodal donde el transporte público está basado en frecuencias, es decir, solo es posible aproximar los tiempos de espera de los vehículos de transporte público mediante una distribución de probabilidad que depende de las frecuencias de las líneas de transporte público. Los autores modelan preferencias de los usuarios sobre los modos utilizados usando *estados* y *viabilidad* de las rutas. A grandes rasgos el *estado* de un nodo es una llave que indica el comportamiento del usuario dentro de la red y la *viabilidad* de una ruta indica cual concatenación de modos es posible de acuerdo a las preferencias del usuario sobre el uso de los modos, para una descripción más detallada de los *estados* ver el Capítulo 4, Sección 4.1.2 de este trabajo. En su modelo los arcos representan calles, banquetas, rieles, etcétera. Los hiper arcos representan la acción de abordar una línea de transporte público en donde el peso de cada hiper arco es igual al inverso de la frecuencia de la línea de transporte público. Lozano & Storchi (2002) desarrollaron un algoritmo de corrección de etiquetas llamado *Shortests Viable Hyperpath Problem* que encuentra el conjunto *Pareto-Optimal* de hiper rutas multimodales más cortas con a lo más w transferencias modales. Como se desconocen los tiempos de espera de las diferentes líneas de transporte público, el resultado se presenta como una estrategia de viaje donde el usuario aborda el primer vehículo de la línea de transporte que pase por la parada donde se encuentra.

Lo et al. (2005) encuentran rutas en el sistema de transporte público de Hong Kong. Ellos modelan la red de transporte público con una red dirigida que contiene información de tarifas, descuentos en cambios de modos y transferencias probables. Con el objetivo de capturar los cambios de tarifas entre zonas a cada nodo de la red se le asocian las siguientes variables:

- *Localización*: variable que indica el lugar en el espacio que ocupa el nodo.
- *Estado de transferencia*: variable que indica los modos de transporte que se han utilizado.
- *Número de transferencia previas*: cantidad de transferencias modales que se han realizado.
- *Indicador de acenso o descenso*: indicador binario tal que es 1(0) si se encuentra en el nodo cola (cabeza) de un arco.

Para modelar que tipo de transferencia es posible realizar se construye una gráfica de *estados* (ver el Capítulo 4, Sección 4.1.2 de este trabajo) y las transferencias entre diferentes modos solo son posibles si las paradas de ambos modos se encuentran dentro de una distancia caminable. Con el objetivo de facilitar la localización de los lugares donde es posible realizar una transferencia modal se construye un *grafo bipartito*⁴ donde los nodos representan paradas de transporte público y los arcos indican cuando existe una transferencia modal entre cada par de paradas. Los autores utilizan el algoritmo de *Floyd-Warshall* para encontrar rutas más rápidas o más baratas, ellos pre-calculan todas la rutas posibles y las almacenan en una base de datos para su consulta.

⁴Sea V es un conjunto de nodos y A es un conjunto de aristas (parejas no ordenadas de vértices). Un grafo $G = (V, A)$ es bipartito si es posible partir a V en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tal que cada arista conecte vértices de diferentes conjuntos.

Ranade et al. (2005) crearon el sistema llamado *Mumbai Navigator*, para el sistema de autobuses y trenes de Mumbai, India. El sistema de transporte público de Mumbai funciona con base en frecuencias, por lo que aproximaron los tiempos de espera con una distribución de *Poisson* para cada una de las líneas de transporte. Ranade et al. (2005) modelan la red de transporte con un conjunto de ecuaciones y restricciones que describen su comportamiento y encuentran rutas más cortas construyendo un *árbol* de soluciones cuyo origen es la *raíz* del *árbol* y cada ramificación es una línea de transporte público. El *tiempo esperado* de viaje se calcula como: el tiempo de espera de los vehículos que pertenecen a un sub-conjunto de líneas que llevan al usuario al destino, más la probabilidad combinada de abordar cualquier vehículo que pertenece a las líneas. El cálculo del tiempo de espera es similar al propuesto por Lozano & Stochi (2002) y el sub-conjunto de autobuses que llevan al destino es similar al *conjunto atractivo* definido por Lozano & Stochi (2002). Sin embargo, Ranade et al. (2005) obtienen el *conjunto atractivo a priori* del cálculo de la ruta más corta al contrario de Lozano & Stochi (2002) que obtienen este conjunto conforme se va construyendo la ruta más corta. Los autores comentan que su sistema tuvo una recepción buena dentro de la población de Mumbai, sin embargo, en fechas recientes el sistema se encuentra fuera de funcionamiento.

Chang et al. (2007) aplican el modelo de Ziliaskopoulos & Wardell (2000) para encontrar rutas más cortas para el transporte de materiales peligrosos usando diferentes modos de transporte. En este caso lo importante no es minimizar el tiempo de viaje, sino minimizar el costo de la ruta y el riesgo asociado a tomar ciertas calles o carreteras. Este riesgo está en función de la cantidad de gente expuesta durante el transporte de materiales peligrosos. En vez de definir el costo de un arco como el tiempo de viaje, Chang et al. (2007) definen el costo de un arco como $\rho_{ij}^m(t) + \alpha^m \tau_{ij}^m(t)$, donde:

- $\rho_{ij}^m(t)$ es el riesgo asociado a tomar el arco (i, j) con modo m en el tiempo t .
- α^m factor de disgusto de usar el modo m . Por ejemplo, los viajes en camión están más expuestos a los accidentes que los viajes en tren, por lo tanto es preferible que el transporte de materiales se realice mayormente por tren.
- $\tau_{ij}^m(t)$ es el tiempo de viaje del arco (i, j) con modo m en el tiempo t .

De forma similar el costo que toma hacer una transferencia se calcula como el riesgo que implica hacer dicha transferencia. Definiendo el costo de la forma mencionada el párrafo anterior los autores encuentran las rutas más seguras usando el TDILTP de Ziliaskopoulos & Wardell (2000).

De forma similar el costo que toma hacer una transferencia se calcular como el riesgo que implica hacer dicha transferencia. Definiendo el costo de la forma mencionada el párrafo anterior los autores encuentran las rutas más seguras usando el TDILTP de Ziliaskopoulos & Wardell (2000).

Huang (2007) modela una red de transporte público con un modelo de red basado en patrones. Esta red está definida por un conjunto V de nodos, un conjunto P de *patrones* y un conjunto S de paradas de transporte público. Un patrón $p \in P$ es un conjunto ordenado de paradas de transporte público $p = \{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$ tal que $s_i \in S$ y s_i es la parada anterior a s_{i+1} . De acuerdo con su modelo los *patrones* y nodos de transferencia entre modos son objetos espacio-temporales que representan los arribos a las paradas de los vehículos que pertenecen a las líneas de transporte público. Los autores desarrollan el algoritmo *Pattern First Search* (PFS) para encontrar rutas más cortas en su modelo de red, este algoritmo comienza en el nodo n_i tal que el tiempo de arribo t_i al nodo n_i sea el mínimo entre todos los tiempos de

arribo. Si n_i es el nodo destino, el algoritmo para. En caso contrario, se empieza una iteración en el nodo n_i ; para cada patrón p' que pase por el nodo n_i se busca la línea v_i que llegue más temprano al nodo n_i y que salga del nodo después del tiempo t_i . Si es posible encontrar la línea v_i , se actualizan todas las etiquetas del nodo n_i . Se busca el siguiente patrón que pase por el nodo n_i y se repite el proceso, hasta que el nodo en turno en la iteración sea el nodo destino. Los autores probaron su algoritmo en la red de transporte público de Milwaukee y con tiempos de ejecución de poco segundos.

Zografos & Androutsopoulos (2008) desarrollan un algoritmo que encuentra la ruta más cortas en un sistema de transporte público con ventanas de tiempo. Su algoritmo determina el itinerario que optimiza lexicográficamente⁵ el tiempo total de viaje, el número de transferencias, el tiempo caminando y el tiempo de espera. Para el cálculo de la ruta se imponen dos ventanas de tiempo, una que determina el tiempo de salida del nodo origen y otra que determina el tiempo de llegada al nodo destino.

En su modelo de red los nodos representan paradas de transporte público, las líneas de transporte se representan con rutas de la red y para hacer cambios de modo se añaden arcos peatonales entre paradas de transporte público. Cada nodo (parada de transporte público) tiene asociado un conjunto de intervalos de tiempo que representan el itinerario del modo de transporte que pasa por esa parada. Y el peso de todos los arcos depende del intervalo de tiempo actual. El algoritmo propuesto por Zografos & Androutsopoulos (2008) comienza en forma inversa, empezando por el último tiempo de llegada al nodo destino, t_d hasta la hora de salida más temprana del nodo origen, t_o . Y encuentra itinerarios ordenados lexicográficamente desde todos los nodos hasta el nodo destino, d , partiendo en cualquier intervalo de tiempo entre t_o y t_d . Dado un tiempo t tal que $t_o \leq t \leq t_d$ el itinerario con ruta mínima del nodo v al destino d se puede determinar comparando (en términos lexicográficos) las siguientes alternativas:

1. El nuevo itinerario partiendo en el tiempo t que incluye el arco (v, w) que es adyacente al itinerario mínimo (lexicográficamente) de la ruta de w a d .
2. El itinerario que se produce al añadir una unidad de tiempo al itinerario mínimo actual del nodo v al nodo d partiendo en el tiempo t .
3. Cualquier otro itinerario que se genera al añadir un arco peatonal (v, u) al itinerario mínimo (lexicográficamente) del nodo u al nodo d partiendo en el tiempo t .

Los autores probaron su algoritmo para la red de transporte público de Atenas, Grecia. La complejidad de su algoritmo es $O(|N|^3|S|T)$, donde $|N|$ es el número de nodos de la red, $|S|$ es el número de modos, and T es el número de intervalos de tiempo entre t_o y t_d . Además, los autores presentan una serie de experimentos computacionales donde varían el tamaño de T , obteniendo resultados satisfactorios para aplicar su algoritmo en instancias reales. Para ventanas de tiempo de 100 minutos se obtiene resultados en un 1 segundo y en ventanas de tiempo de 500 minutos se obtiene resultados en aproximadamente 6 segundos.

Bousquet et al. (2009) proponen un algoritmo de etiquetación para encontrar rutas más cortas multimodales de ida y de vuelta. Se observa que se puede dar el caso donde la mejor ruta en la mañana sea

⁵ Un orden lexicográfico es una generalización en la forma en la que se ordena el alfabeto. Por ejemplo, la palabra *aaa*, precede a la palabra *aba*, pues la letra *a* precede a la letra *b* en el alfabeto.

en automóvil particular, y el regreso por la tarde sea mejor en una ruta en transporte público, vista globalmente esa ruta resulta imposible, pues implicaría dejar el auto en el destino, entonces el objetivo de Bousquet et al. (2009) es encontrar la mejor estrategia para el viaje en ambos sentidos, de ida y de regreso. Definen una red de transporte multimodal con una red multimodal dependiente del tiempo al que le añaden una serie de *nodos de transición* que no pertenecen a ninguna red monomodal y representan estacionamientos de vehículos privados (automóviles o bicicletas). También usan una serie de restricciones para la *viabilidad* de las rutas, donde existen seis *estados* posibles para las rutas. El *estado* asociado a una ruta indica cómo se han utilizado los vehículos privados durante el viaje, los *estados* son los siguientes:

1. Bicicleta y automóvil disponibles: *estado* que se encuentra asociado al origen de la ruta
2. Automóvil disponible: *estado* que indica que el automóvil se abandonó pero puede volver a ser utilizado. Por ejemplo: el vehículo se encuentra en un estacionamiento y será recogido al regreso de la ruta
3. Bicicleta disponible: *estado* que indica que la bicicleta se abandonó pero puede volver a ser utilizada.
4. No hay vehículos disponibles: *estado* que indica que los vehículos privados no pueden ser utilizados. Por ejemplo: el vehículo se encuentra en el origen y no es posible utilizarlo al regreso de la ruta.
5. Usando el automóvil: *estado* que indica que el modo del último arco de la ruta es de automóvil.
6. Usando la bicicleta: *estado* que indica que el modo del último arco de la ruta es de bicicleta.

Cada uno de los *estados* asociados a las rutas asegura que durante su construcción éstas sean *viabiles*, por ejemplo, si la ruta se encuentra en el *estado usando el automóvil* es imposible pasar al estado *usando la bicicleta* pues primero es necesario abandonar el coche (*automóvil disponible*).

Para encontrar rutas más cortas los autores proponen un algoritmo que supone que existe un nodo v_0 , que representa el lugar donde está estacionado el vehículo privado. El algoritmo a grandes rasgos tiene los siguientes pasos:

1. Encontrar el *árbol* de rutas más cortas del origen a todos los *nodos de transición*.
2. Encontrar la ruta más corta de cada *nodo de transición* al destino y la ruta más corta del origen al destino.
3. Encontrar el *árbol* de rutas más cortas del destino a todos los nodos de transición y la ruta más corta del destino al origen.
4. Encontrar la ruta más corta de cada *nodo de transición* al nodo v_0 .

Los autores no especifican la red donde aplicaron el algoritmo, sin embargo, el tamaño de la red es considerablemente grande. Mencionan que toma entre 1 segundo y un minuto encontrar rutas bidireccionales, pero conforme crece el número de *nodos de transición* encontrar resultados es muy tardado si se desea aplicar el algoritmo en una red real.

Wang et al. (2009) definen una red multimodal $G(V, E)$ donde V es el conjunto de nodos y E es el conjunto de arcos y aristas (pareja no ordenada de nodos que sin dirección asociada). Ellos dividen su red en tres niveles:

- El *nivel físico* está definido por las aristas $E_s \subset E$ y los nodos $V_s \subset V$, donde los nodos representan el punto inicial y final del segmento de calle que se encuentra dentro del área de estudio. Es decir, si $\{s_i, s_j\} \in E_s$, para toda $\{i, j\}$ se cumple que $s_i \cap s_j = \emptyset$ o $s_i \cap s_j = n_k$, tal que $n_k \in V_s$, lo que implica que las aristas que representan calles no tienen nodos intermedios, es decir, sólo se pueden conectar en sus puntos finales.
- El *nivel lógico* se compone de vías, intersecciones y restricciones de vueltas. Sea $E_r \subset E$ el conjunto de arcos y $V_r \subset V$ el conjunto de nodos en la red que modela el *nivel lógico*. Si $r \in E_r$ y $v \in V_r$, entonces, para toda $r \in E_r$ existe un $s \in V_s$ tal que r divide a s , es decir, los arcos del *nivel lógico* definen las características del *nivel físico* como: el sentido, las restricciones de modo, las intersecciones, etcétera.
- El *nivel aplicativo* consta de dos modos de transporte: el modo público y el modo privado.
 - Los modos públicos están gobernados por el sentido de la calle, las paradas, los horarios y las líneas de transporte, y se puede acceder a ellos cuando esté disponible algún vehículo de acuerdo a los horarios de arribo a la parada.
 - Los modos privados solo están gobernados por el sentido de la calle y se puede acceder a ellos en cualquier momento del tiempo.

Wang et al. (2009) no consideran que el metro/tren pertenezca a ninguno de los tres niveles mencionados, ya que este modo tiene su propia capa física (sistema de rieles), sin embargo, el modo está conectado con el resto de los modos por el *nivel físico* a través de las estaciones de metro/tren

Para encontrar rutas más cortas los autores desarrollaron un algoritmo basado en la estructura jerárquica de la red, donde el usuario define un origen, un destino y un número de transferencias máximas. El algoritmo forma un conjunto con todas las rutas de transporte público que parten del destino y un conjunto con todas las rutas de transporte público que llegan al origen, si existe un elemento común en ambos conjuntos, el algoritmo termina, si no, entonces se forma un conjunto con todas las rutas que parten del origen y que tiene una transferencia, si este conjunto intersecta al conjunto destino, entonces el algoritmo termina, si no, se continua el procedimiento hasta encontrar una solución, o hasta que el número máximo de transferencias modales sea superado.

La principal ventaja del modelo de Wang et al. (2009) es la simplicidad en términos de representación y mantenimiento de la red, si se desea agregar una línea de transporte no implica la reconstrucción de toda la red solo una pequeña modificación en la tabla del *nivel aplicativo*. Los autores no hacen uso explícito de horarios en los autobuses, por lo que sería interesante considerar horarios o tiempo real en este modelo.

Bast et al. (2010) desarrollan un algoritmo llamado TRANSIT para encontrar rutas más cortas en sistemas de transporte público con horarios. Su algoritmo obtiene resultado en decimas de segundos lo que supera por mucho a todos los algoritmos mencionados en esta tesis. Los autores probaron el TRANSIT en toda la red de transporte de Suiza, Nueva York y en una porción grande de la red de trenes y carreteras de Estados Unidos. El modelo de la red de transporte de Bast et al. (2010) es una red espacio temporal, donde cada parada de transporte tiene asociados tres nodos: uno nodo de salida, un nodo de llegada y un nodo de transferencia, además cada uno de estos nodos tienen un nodo similar por cada intervalo de tiempo. Por ejemplo, si A es una parada de transporte público se le asocian los nodos:

- $Ad@t$: nodo de *salida* de la parada A en el tiempo t .
- $Aa@t$: nodo de *llegada* de la parada A en el tiempo t .

- $At@t$: nodo de *trasferencia* de la parada A en el tiempo t .

Cada uno de los nodos se conecta mediante alguno de los siguientes arcos:

- Arco de *viaje*: es un arco que conecta al nodo de *salida* de la parada A en el tiempo t con el nodo de *llegada* de la parada B en el tiempo t' , si existe una línea de transporte que sale de A en tiempo t y llega a B en el tiempo t' , es decir, existe un arco de $Ad@t$ a $Ba@t'$.
- Arco de *paso*: es un arco que conecta al nodo de *llegada* de la parada A en el tiempo t , con el nodo de *salida* de la parada A en el tiempo t' , si t y t' son horarios consecutivos del vehículo de transporte, es decir, existe un arco de $Aa@t$ a $Ad@t'$.
- Arco de *abordaje*: es un arco entre cada nodo de *trasferencia* en un instante de tiempo, $At@t$, con un nodo de *partida* en el mismo instante de tiempo, $Ad@t$.
- Arco de *espera*: es un arco entre cada par de nodos de *trasferencia* consecutivos en el tiempo.
- Arco de *trasferencia*: Las transferencias sólo son posibles si existe un nodo de *partida* en la parada cuyo hora de partida sea menor que el tiempo que toma hacer la transferencia, es decir, existe un arco hacia $Ad@t$ si el tiempo que toma llegar al nodo de *partida* es anterior a t .

El modelo de Bast et al. (2010) representa de manera fidedigna todas las acciones del usuario dentro del transporte público por lo que su modelo es muy robusto. Dicha representación tiene un precio, pues la red que modela el sistema en cada instante del tiempo es sumamente grande y resulta imposible encontrar rutas más cortas utilizando técnicas comunes. Entonces, los autores proponen un algoritmo de pre-procesamiento que además de calcular resultados óptimos extremadamente rápido también disminuye considerablemente el espacio de almacenamiento necesario para el modelo de red. Para encontrar rutas más cortas hacen una serie de pre-cálculos que incluye lo siguiente:

- Organizar en una tabla las rutas incidentes en A por tiempo. Con esta tabla y con los horarios de cada línea de transporte es posible conocer en décimas de segundo las rutas más cortas sin transferencias entre cualquier par de paradas.
- Organizar en una tabla *patrones de transferencia*, esto es, encontrar aquellos nodos donde se efectúa una transferencia tal que este nodo pertenece a una ruta óptima.
- Construir una *red de consulta* independiente del tiempo que se forma a partir de los *patrones de transferencia*. Una *red de consulta* traduce a arcos las rutas óptimas entre las parejas: origen-destino, origen-nodo de transferencia y nodo de transferencia-destino.

A partir de la *red de consulta* es posible encontrar con el algoritmo de *Dijkstra* rutas más cortas en décimas de segundo. Para realizar cada uno de los pre-cálculos los autores utilizan diversas heurísticas, con el fin de obtener resultado en tiempos razonables. La desventaja de estas heurísticas es que entregan resultados que no son óptimos, sin embargo, en diferentes experimentos demuestran que los resultados están suficientemente cerca del óptimo para una aplicación de la vida real, donde diferencias de minutos son despreciables.

El modelo de Ayed et al. (2011) modela un sistema de transporte multimodal con una *red de transferencia* basado en una red multimodal dependiente del tiempo. Los autores proponen dos enfoques al problema: por *redes relevantes* y un enfoque híbrido.

Para obtener una *red relevante* se divide a la *red de transferencia* en dos componentes, el *inter-componente* y la *intra-componente* (Ayed et al., 2008). El *inter-componente* está formado por todas las rutas de la *red de transferencia* que tienen al menos dos arcos en dos redes monomodales diferentes, es decir, son las rutas con al menos un cambio de modo. Las *intra-componentes* forman el conjunto de rutas de la *red de transferencia* sin cambios de modo. Entonces dados un origen, un destino, una hora de inicio, las rutas más cortas del origen a los nodos de transferencia, las rutas más cortas entre los nodos de transferencia de un mismo modo y las rutas más cortas de los nodos de transferencia al destino, es posible calcular todas las rutas más cortas que contengan *inter-componentes*. Entonces, se define una *red relevante* como aquel que está formado por:

- Todos los nodos origen-destino.
- Todos los nodos de transferencia.
- Los arcos con las rutas más cortas de las *intra-componentes* vistas como arcos.

Para construir las *redes relevantes* los autores utilizan el algoritmo de *Dijkstra* y un algoritmo de colonia de hormigas. Una vez contruidos las *redes relevantes* se calculan las rutas más cortas.

El enfoque híbrido hace un paso intermedio en la construcción de la *red relevante* llamada *red abstracta*. Una *red abstracta* está conformada sólo por los nodos transferencia y un nodo es adyacente a otro si existe una ruta monomodal que los una. A partir de la *red de transferencia* y la *red abstracta* se construye la *inter red relevante*, que se compone por lo siguiente:

- Los nodos de la *red abstracta* más el nodo origen y el nodo destino.
- Los arcos de la *red abstracta*.
- Los arcos que forman las rutas más cortas de la *red de transferencia*.
- Los arcos que forman las rutas más cortas del origen a todos los nodos de transferencia.
- Los arcos que forman las rutas más cortas de todos los nodos de transferencia al destino.

En la *inter red relevante* se eliminan aquellas rutas que se dominen entre sí, es decir, aquellos que no son comparables por el número de transferencias y el tiempo de recorrido. A partir de la *inter red relevante* se calculan las rutas más cortas con el algoritmo de *Dijkstra*. Los autores obtienen los mejores resultados con el enfoque híbrido, con un tiempo de cálculo de 636 segundos para redes con 4000 nodos, 15000 arcos y 5 modos. Los autores no especifican la complejidad del algoritmo ni los diferentes modos de transporte donde lo aplicaron.

Antsfeld & Walsh (2012) desarrollaron un algoritmo basado en el algoritmo TRANSIT de Bast et al. (2010) que encuentra rutas multimodales bi-criterio. Su modelo de red consiste en dos capas:

- La red de *paradas*: formada por nodos que representan paradas que se conectan por arcos que representan líneas de transporte y por arcos que representan trasbordos/trasferencias entre paradas.
- La red de *eventos*: compuesta por nodos de *llegada* y nodos de *salida* que se pueden conectar mediante los siguientes arcos:
 - Arco de *salida*: es un arco que conecta al nodo de *salida* de la parada *A* en el tiempo *t* con el nodo de *llegada* de la parada *B* en el tiempo *t'*, si existe una línea de transporte que sale de *A* en tiempo *t* y llegada a *B* en el tiempo *t'*.

- Arco de *paso*: es un arco que conecta al nodo de *llegada* de la parada A en el tiempo t , con el nodo de *salida* de la parada A en el tiempo t' , si t y t' son horarios consecutivos del vehículo de transporte.
- Arco de *cambio*: une nodos de *llegada* con nodos de *salida* de la misma parada si la llegada es antes que la salida.
- Arco de *espera*: une nodos de *salida* de la misma parada si el tiempo de la primera llegada es anterior al de la segunda llegada.

Para encontrar rutas más cortas utilizan el algoritmo TRANSIT de Bast et al. (2010), solo que en vez de buscar *patrones de transferencia* en la red de eventos, encuentran estos patrones en la *red de paradas*, y asocian cada *patrón de transferencia* a intervalos de tiempo para solventar el hecho de que la red de *paradas* es independiente del tiempo. Los autores resuelven el problema bi-criterio simplemente normalizando con una utilidad lineal el costo de cada arco, es decir, hacen un costo a partir de la combinación de dos valores, por ejemplo, el tiempo más el precio del boleto de transporte público.

Los autores proponen una serie de técnicas de aceleración para los pre-cálculos necesarios del TRANSIT tales como: eliminar las rutas de paradas cercanas que tengan el mismo *patrón de transferencia*, agrupar los *patrones de transferencia* por intervalos de tiempo largos y paralelizar la búsqueda de *patrones de transferencia* que no estén relacionados por el tiempo. Antsfeld & Walsh (2012) reportan que el cálculo de la rutas más cortas no es inferior al de Bast et al. (2010), pero sí logran acelerar los pre-cálculos.

Noh et al. (2012) utilizan híper redes para modelar un sistema de transporte público con itinerarios. Como las redes espacio-temporales aumentan su tamaño considerablemente conforme aumentan los intervalos de tiempo, los autores usan una híper red que tiene menos nodos y arcos que una red espacio-temporal, y así disminuyen los tiempos de ejecución del algoritmo. Los híper arcos de la híper red de Noh et al. (2012) se construyen de una forma poco convencional. Los híper arcos generalmente unen conjuntos de nodos con conjuntos de nodos, sin embargo para los objetivos del modelo los autores definen un híper arco como $E = (e_a, e_b)$ donde $\{e_a, e_b\} \subset A$ y A es el conjunto de arcos de la híper red, es decir, los híper arcos de la red unen conjuntos de arcos. Estos híper arcos representan la acción de abordar y descender de los vehículos de transporte público. Cada línea de algún modo transporte está representada por un arco cuyos nodos adyacentes representan paradas, y las transferencias entre líneas o el descenso de un vehículo de transporte público lo definen los híper arcos. Los arcos tienen asociado un costo que representa el tiempo de viaje y un costo que representa la hora de partida; puesto que la hora de partida depende de las decisiones pasadas, ésta se calcula con un modelo *Logit*.

Con un algoritmo de corrección de etiquetas encuentran rutas más cortas en donde el usuario selecciona un origen, un destino y un tiempo preferido de llegada. La búsqueda de la ruta más corta comienza del nodo destino, donde primero se definen las adyacencias posibles de acuerdo a las restricciones temporales que dependen de:

- Los tiempos de transferencia o transbordo
- Los tiempos de viaje del vehículo que arriba a la parada.

Todos los arcos e híper arcos que pueden ser usados de acuerdo a las restricciones temporales se añaden a un conjunto Q , del cual se van seleccionando para concatenarlos. Una vez que el conjunto Q está vacío el algoritmo termina. No se presenta una aplicación en una red real, sin embargo, demuestran que la

complejidad del algoritmo es $O(K^2L \cdot \text{Log}(L))$ donde K es el número máximo de hiper arcos adyacentes a un arco y L es el número de arcos de la red.

Xu et al. (2012) presentan un algoritmo para encontrar las k -rutas más cortas en un sistema de transporte público con horarios y a lo más dos transferencias. Su modelo es una red dependiente del tiempo donde definen un *costo generalizado* de la ruta como la suma de lo siguiente:

- El tiempo de viaje.
- Penalización por transferencia.
- Costo monetario del viaje: precio del boleto más el costo estimado del tiempo de viaje.

La razón para encontrar k -rutas es que existen factores subjetivos como la comodidad, que no pueden ser calculados, entonces, al mostrar al usuario más opciones éste tomará la que más le convenga. Para encontrar las k -rutas más cortas de acuerdo al *costo generalizado* utilizan un algoritmo de etiquetas en dos fases, que a grandes rasgos tiene el siguiente procedimiento.

1. La primera fase consiste en encontrar todas las rutas con menos de dos transferencias entre un par origen-destino:
 - 1.1. Primero definen el conjunto de paradas que son *lógicas* para hacer transferencias, se observa que es posible que dos líneas de transporte compartan dos o más paradas de transferencia, por ejemplo, aquellas líneas que son paralelas en parte de su recorrido. Entonces, sólo seleccionan una de las paradas que comparten y la definen como parada *lógica*.
 - 1.2. A partir del conjunto de paradas *lógicas* de transferencia, con un algoritmo encuentran todas las rutas con menos de dos transferencias y calculan el *costo generalizado* de cada una de ellas.
2. En la segunda fase agrupan las rutas encontradas en conjuntos tales que todas las rutas del mismo conjunto tienen el mismo tiempo de viaje (sin esperas), las mismas transferencias, la misma tarifa, pero diferentes tiempos de espera en las paradas.
3. Se compara el *costo generalizado* de las rutas de los conjuntos del paso 2 y se guardan las k mejores rutas.

Los autores aplicaron su algoritmo para el distrito de Haidan, Beijín en China y obtuvieron resultados en aproximadamente un segundo, además en futuras investigaciones planean adaptar su algoritmo para sistemas de información con tiempo real.

Artigues et al. (2013) proponen una serie de algoritmos de etiquetación para resolver el problema bi-objetivo de rutas multimodales *viabiles* óptimas en tiempo y considerando el número de transferencias. En su modelo asocian a cada ruta *estados* y relacionan estos *estados* con un autómata no determinístico finito. Este autómata indica las posibles transiciones entre los *estados* de acuerdo a las reglas de *viabilidad*. Artigues et al. (2013) observan que dependiendo del *estado* de una ruta pueden existir pares de rutas que terminen en el mismo nodo, pero que una tenga más posibilidades de expandirse, es decir, existen rutas que *dominan* a las demás. A grandes rasgos una ruta *domina* a otra si el tiempo y el número de transferencias son menores o iguales en la primera que en la segunda. Artigues et al. (2013) proponen la siguiente definición de *dominancia*.

Definición 24. Sean s y s' dos estados, $s \ll s'$, s domina a s' , si para cualquier pareja de modos $(m, m') \in M$, tal que m es un modo posible para el estado s , una de las siguiente condiciones se cumple:

- $\delta(m, m', s') = \emptyset$
- $\delta(m, m', s') = \delta(m, m', s)$
- $\delta(m, m', s) = s$ y $\delta(m, m', s') = s'$,

donde $\delta(m, m', s)$ es la función que indica el estado resultante de transbordar del modo m al modo m' .

La Definición 24 mejora la definición de *dominancia* propuesta por Lozano & Storchi (2001) pues permite comparar casos especiales no considerados por Lozano & Storchi (2001). Los autores proponen tres algoritmos para encontrar rutas *viabiles* mínimas en tiempo y con un número de transferencias modales acotadas. En su primer algoritmo proponen una variante del algoritmo de Lozano & Storchi (2001) con algunas mejoras y correcciones, donde la principal diferencia es que el algoritmo de Artigues et al. (2013) es de ajuste de etiquetas al contrario del de Lozano & Storchi (2001) que es de corrección de etiquetas. El segundo algoritmo utiliza K cubetas (*buckets*) donde en la cubeta k se almacenan la ruta *viabie* con k transferencias modales. Al contrario del primer algoritmo donde se extraen híper rutas de cola de prioridades FIFO, este algoritmo extrae de esta lista de *cubetas* la ruta *viabie* con menor tiempo de la *cubeta* con menor número de transferencias. El algoritmo termina cuando se encuentra el destino en la *cubeta* 0 o cuando todas las *cubetas* están vacías. Por último, en el tercer algoritmo utiliza técnicas bidireccionales, es decir el algoritmo simultáneamente encuentra rutas que comienzan en el origen y rutas que terminan en el destino. Almacenan las rutas en *cubetas* similares a las del algoritmo anterior, solo que las *cubetas* de este algoritmo además de estar organizadas por trasferencias están organizadas en rutas que empiezan en el origen y rutas que terminan en el destino. El algoritmo termina cuando las *cubetas* están vacías o se encuentra una ruta mínima sin transferencias.

Los autores mencionan que cualquier de los tres algoritmos se puede acelerar con técnicas de *búsqueda orientada*, sin embargo, no profundizan en el tema. Al final se presentan una serie de ejemplos reales y comparan los tiempos de ejecución de cada uno de los algoritmos.

Delling et al. (2013) proponen dos algoritmos y tres heurísticas para encontrar rutas más cortas multimodales donde el sistema de transporte público tiene horarios. En su modelo integran cuatro tipos de redes: una red de transporte público dependiente del tiempo y redes peatonales de bicicleta y de automóvil independientes del tiempo; la unión entre las cuatro redes es a través de arcos de trasferencia.

Para determinar qué rutas son *dominantes* definen cuatro criterios: hora de llegada al destino, número de transferencias, tiempo caminando y costo. Entonces, una ruta p domina a una ruta p' , si p es estrictamente mejor en algún criterio que p' . Con esta regla de *dominancia* se obtiene un conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones. Los autores observan que el conjunto *Pareto-Optimal* puede contener muchas rutas que sean similares en algún criterio pero que pueden ser descartadas, por ejemplo, si la ruta p llega considerablemente más temprano que la ruta p' pero en p' se caminó unos segundo menos que en p entonces ambas rutas estarán dentro del conjunto *Pareto-Optimal*. Sin embargo, resulta poco lógico que por ahorrarse unos segundos caminando se llegue considerablemente más tarde al destino, por lo que p' no debería de estar en el conjunto *Pareto-Optimal*. Para sortear este tipo de problemas los autores proponen usar lógica difusa donde los criterios de dominancia se cumplan si su diferencia es considerable, así si la

diferencia entre los tiempos caminando es de unos pocos segundos, entonces según la lógica difusa ambos tiempos son iguales y por lo tanto p domina a p' .

Para resolver el problema de rutas multimodales más cortas usando los criterios de *dominancia* los autores prueban el algoritmo *multi-label-correcting* (MLC) de Pyrga et al. (2008) y el algoritmo *multimodal multicriteria* RAPTOR (MCR) que es una extensión del algoritmo McRAPTOR propuesto por Delling et al. (2013). El cuello de botella de ambos algoritmos es la red peatonal, ya que es muy grande y densa, los autores proponen una técnica para reducirla que consiste en borrar arcos innecesarios entre parejas de paradas de transporte público, de forma tal que al momento de la consulta solo se pueda viajar por el mínimo de arcos peatonales necesarios para conectar cualquier pareja de paradas.

Las heurísticas que probaron incluyen relajar los criterios de dominancia del conjunto *Pareto-Optimal*, reducir los criterios de *dominancia* y limitar la distancia caminando. Los autores encontraron que el algoritmo y heurística que mejor se desempeñan son el MCR y MCR relajando los criterios de dominancia, respectivamente.

Häme & Hakula (2013) usan procesos de decisiones de *Markov* para encontrar rutas más cortas en sistemas de transporte público con horarios. Los autores observan que a pesar de que se conocen los horarios del transporte público (están controlados) es incierto que arriben a la parada en la hora prevista (es azaroso el arribo). Su objetivo es maximizar la confiabilidad de la ruta propuesta pues es posible que ciertas rutas no pueda ser realizadas por causas de retrasos (tráfico, sobre demanda de servicio en paradas, etcétera). Entonces, la hora de arribo a las paradas de los vehículos de transporte público es una variable aleatoria, donde las variables son independientes si pertenecen a líneas distintas y pueden o no ser independientes si pertenecen a la misma línea.

Los autores construyen la red de la siguiente forma. Los nodos representan cada una de las paradas del transporte público y tienen asociados los horarios de arribo de cada línea (definidos como una variable aleatoria), un línea de transporte público la definen como una secuencia de nodos y variables aleatorias de tiempo que a su vez se descomponen en segmentos con una hora de inicio y una hora de fin aleatorios. De manera similar definen segmentos para las rutas a pie acotadas por una distancia máxima y para evitar que se caminen distancias largas los autores restringen el número de segmentos a pie consecutivos. Las transferencias entre modos son posibles si y sólo si:

- El nodo final de un segmento dado es igual al nodo de inicio de algún otro segmento
- La hora final del primer segmento es menor que la hora de inicio del segundo. Dependiendo de la hora final y de la hora de inicio se le asigna una probabilidad a dicha transferencia. La probabilidad de transferir de cualquier modo al modo peatonal siempre es uno pues el modo peatonal siempre está disponible.

El objetivo del problema es encontrar una política de viaje óptima que maximice la probabilidad de alcanzar el destino. Para encontrar esta política se reduce el conjunto de segmentos a aquellos que se pueden alcanzar dentro del intervalo de tiempo del viaje y después se clasifican los segmentos de acuerdo a la probabilidad de alcanzar el nodo final de cada segmento. De esta forma todos los segmentos que terminen en el mismo nodo quedarán clasificados, dicha clasificación se hace antes de encontrar la ruta más corta. Durante la clasificación los autores proponen, aunque no lo aplican, re-optimizar la

clasificación utilizando información en tiempo real sobre tiempos de espera en las paradas de transporte público.

El problema queda definido como un proceso de decisiones de *Markov* $(S, A, P(\cdot, \cdot), R(\cdot, \cdot))$ donde los parámetros se definen como:

- S es el conjunto de *estados* y está compuesto por rutas y cada elemento $s \in S$, está asociado con un conjunto S' de estados consecutivos a s .
- A es el conjunto de acciones. A está formado por subconjuntos de acciones que están disponibles para cada elemento de S , los subconjuntos definen una clasificación para los sucesores de cada segmento.
- $P(\cdot, \cdot)$ es la probabilidad de que cierta acción de un estado en determinado instante conduzca a un nuevo estado en el instante consecutivo.
- $R(\cdot, \cdot)$ es la recompensa esperada inmediata recibida después de que se realizó la transición entre dos estados con cierta probabilidad de transición.

Häme & Hakula (2013) aplican su modelo en la red de transporte de Helsinki y presentan una serie de resultados utilizando diferentes métodos de solución. Los autores no especifican la complejidad del algoritmo y lo aplicaron para una red de autobuses, metro y trenes.

Khani et al. (2014) modelan transporte público con horarios usando el *Google Transit Feed Specification* (GTFS) y un modelo de *red basada en viajes*. Su modelo supone que los usuarios no hacen transferencias en cualquier parada de transporte público sino sólo en aquellas donde se cruzan dos o más líneas de transporte. Usando esta suposición los autores crean una *red de jerarquía* que elimina todos los nodos que no son una parada de transferencia. Las paradas de transferencia se unen con *arcos de transferencia* si:

1. La distancia entre paradas es menor que 1/4 de milla.
2. Existe al menos una línea que usa una parada pero no la otra.

El modelo de *red basada en viajes* se define como una red $G(N, P, T)$ donde N es un conjunto de nodos (nodos y nodos de transferencia), P es un conjunto de *viajes*, cada *viaje* $p \in P$ pertenece a una línea de transporte $r \in R$ y T es un conjunto de *arcos de transferencia*. Los *viajes* p tienen asociados una lista de paradas $S(p)$ y el itinerario de cada una de las paradas contenidas en $S(p)$. Las paradas n tienen asociadas un conjunto $A(n)$ que contiene todos los *viajes* que pasan por n . También, cada nodo tiene asociado un conjunto $T(n)$ que contiene la lista de todas las paradas donde es posible hacer transferencia desde n , en el caso de que n no sea una parada de transferencia $T(n) = \emptyset$

Khani et al. (2014) menciona que la principal ventaja del modelo de *red basada en viajes* es que cualquier par de paradas contenidas en un *viaje* se conectan directamente, al contrario de otras representaciones donde sólo las paradas consecutivas se conectan directamente. Además, como $S(p)$ contiene los itinerarios de cada parada no es necesario expandir la red para representar cada instante de tiempo. Otra ventaja es que todas las paradas n tal que $T(n) = \emptyset$ pueden ser excluidas del cálculo de la ruta más corta.

Los autores encuentran rutas más cortas en su modelo de red usando tres algoritmos. El primer algoritmo se llama *Trip-Based Shortest Path* (TBSP) en donde se van recorriendo los *viajes* que contienen al origen y se selecciona el menor tiempo de arribo posible a cada parada, solo se hacen transferencias en los nodos tal que $T(n) \neq \emptyset$. El algoritmo termina cuando el *viaje* en curso contenga al destino y no pueda ser mejorado por ningún otro *viaje*. El segundo algoritmo es el *Trip-Based Shortest Path** (TBSP*) que usa tiempos estimados entre la parejas origen-destino para reducir el espacio de búsqueda en la red y poder optimizar los tiempos de ejecución, sin embargo, este algoritmo a pesar de su rapidez puede llegar a resultados sub-óptimos. Por último, el algoritmo *Trip-Based Shortest Hyperpath* (TBHP) asume que los usuarios tiene un tiempo preferido de llegada a su destino con una ventana de tiempo aceptable. Por ejemplo, un usuario prefiere llegar a las 8:00AM, pero no le importa si llegan entre 7:30AM y 8:00AM. Estas ventanas de tiempo se agregan a cada parada. Este algoritmo va concatenando todos los *viajes* que partan de cada parada cuyo itinerario se encuentre en la ventana de tiempo, el resultado es una estrategia que el usuario debe seguir para llegar a su destino. La probabilidad de abordar un *viaje* se calcula con un modelo *Logit* que depende de la utilidad de cada *viaje*.

Los algoritmos se probaron en el sistema de transporte público de Sacramento, CA, donde el TBSP* obtuvo los mejores tiempo de ejecución en centésimas de segundo. El TBSP y el TBHP obtuvieron resultado en décimas de segundo lo cual también es muy bueno.

Liu et al. (2014) desarrollan dos algoritmos de corrección de etiquetas para encontrar rutas más cortas bi-criterio con ventanas de tiempo en sistemas de transporte urbano. El primer algoritmo recorre la red en el sentido original y es una extensión del algoritmo que resuelve problemas con un solo criterio. Este algoritmo considera que existen ventanas de tiempo para las llegadas de algunos modos de transporte. El algoritmo va actualizando el tiempo de cada ruta del origen hasta algún nodo i y si la ruta que está siendo analizada no es *dominada* (de acuerdo al conjunto de *Pareto*) por ninguna otra ruta hasta el nodo i , la ruta analizada se añade al conjunto de soluciones. El segundo algoritmo recorre la red en sentido inverso y además de considerar ventanas de tiempo también considera el retraso que implican los cambios de modo. Este algoritmo además de comprobar que la ruta que se esté analizando *domine* a las demás rutas desde i hasta el destino, también determina la ventana de tiempo del nodo i para que la ruta analizada sea factible, es decir, que sea posible realizar todas las transferencias modales dentro del horario establecido. Los autores probaron ambos algoritmos en redes cuadrículas aleatorias con 40,000 nodos, 80,000 arcos y 300 modos. Obtuvieron tiempos de ejecución 9.48 segundos para el primer algoritmo y hasta 11.8 segundos para el segundo. Liu et al. (2014) consideran el modo peatonal únicamente para transferencias modales, por lo que la red de transporte público se reduce significativamente. Los autores mencionan que la mayoría de las redes de transporte público no son mayores a 2,500 nodos y 800 líneas de transporte, en este tipo de redes los tiempos de ejecución no pasan de 1.16 segundos por lo que afirman que sus algoritmos pueden aplicarse en instancias reales.

Verbas & Mahmassani (2015) encuentran hiper rutas más cortas dependientes del tiempo en un sistema de transporte público basado en frecuencias donde los modos peatonales y de bicicletas se usan para transferencias modales o para iniciar y terminar viajes. Los autores modelan la red usando una representación por *patrones* que se explica a continuación. Sea $G = (N, A, T, P)$ donde N es un conjunto de nodos, A es un conjunto de arcos, T es un conjunto discreto de instantes de tiempo y P es un conjunto de *patrones*. Un *patrón* p es el subconjunto de paradas que una o más líneas de transporte tienen en

común, por ejemplo, si las paradas de la línea l son $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ y las paradas de la línea m son (p_4, p_5, p_6, p_7) , entonces, los *patrones* son:

- $p_1 = (p_1, p_2, p_3)$, patrón que contiene a la línea l .
- $p_2 = (p_4, p_5)$, patrón que contiene a las líneas l y m .
- $p_3 = (p_6, p_7)$, patrón que contiene a la línea m .

Cada arco $(i, j) \in A$ tiene asociados arreglos de atributos (t, x) tal que $t \in T$ y $x \in P_{ij}(t)$, donde, $P_{ij}(t)$ es el conjunto de *patrones* que contiene al arco (i, j) en el tiempo t . Cada arco (i, j) tiene asociado un tiempo de viaje y un tiempo de espera para cada instante de tiempo y cada patrón que lo contenga.

Verbas & Mahmassani (2015) definen el problema de la híper ruta más corta con un modelo de programación matemática cuya función objetivo es minimizar el tiempo de viaje dada las probabilidades:

- De arribar a un nodo j en el tiempo t si se entra por el arco (i, j) usando el patrón $P_{ij}(t)$.
- De continuar el viaje por el arco (j, h) en el tiempo t usando el patrón $P_{jh}(t)$.

Para resolver el modelo matemático los autores usan un algoritmo híbrido de corrección y de ajuste de etiquetas. En los algoritmos de ajuste de etiquetas primero se escanean los nodos con etiquetas mínimas en cada intervalo de tiempo (Verbas & Mahmassani, 2015), en cambio en el algoritmo de los autores primero se busca el nodo con etiqueta mínima para todos los intervalos de tiempo y después se comienza a escanear ese nodo. El algoritmo calcula explícitamente el número de transferencias, penalizaciones por congestión y toma en cuenta restricciones como la disponibilidad de estacionamientos de bicicletas.

Casey et al. (2014) presentan una comparación de nueve algoritmos para rutas más cortas multimodales donde se considera el transporte público y el automóvil privado. En el artículo se discuten las ventajas y desventajas de cada algoritmo así como los criterios que se deben de considerar para la selección de algún algoritmo. En Bast et al. (2015) se presenta un análisis exhaustivo de modelos de rutas más cortas para sistemas de transporte multimodales y monomodales donde el transporte público está basado en frecuencias. En el documento se estudian algoritmos para:

- Redes reales estáticas, este caso solo considera el problema de ruteo para vehículos particulares.
- Redes de transporte público con itinerarios.
- Redes de transporte multimodal donde el transporte público tiene itinerarios.

Como se mencionó al principio del capítulo, una red es multimodal si además de transporte público incluye al menos un modo no restringido (peatonal o bicicleta) o uno restringido (bicicleta compartida, automóvil o motocicleta). Salvo los trabajos de Lozano & Storchi (2002), Bousquet et al. (2009), Wang et al. (2009), Li et al. (2010), Ayed et al. (2011), Zhang et al. (2011a), Antsfeld y Walsh (2012), Artigues et al. (2013) y Dellling et al. (2013) los modelos que han sido descritos en este capítulo no son multimodales. El modelo de Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR) desarrollado en esta tesis es multimodal y considera modos no restringidos y restringidos.

Los algoritmos de Lozano & Storchi (2002), Khani et al. (2014) y Artigues et al. (2013) estudiados en este capítulo junto con los algoritmos de Spiess & Florian (1989) y Nguyen & Pallottino (1989),

encuentran híper rutas en redes de transporte público basados frecuencias, es decir, es imposible saber tiempos exactos de espera de todos los vehículos de las líneas transporte público o cuál vehículo llegará primero en una parada. El algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR) desarrollado en esta tesis encuentra híper rutas más cortas en redes multimodales donde el transporte público está basado en frecuencias pero por un intervalo de tiempo hay un subconjunto de líneas para las que es posible conocer horarios de llegada de los vehículos a las paradas de transporte público, es decir, existe información en tiempo real.

El resto de los algoritmos (Häme & Hakula, 2013; Borole et al., 2013; Khani et al., 2014; Miao, 2014, Gkiotsalitis & Stathopoulos, 2015, por mencionar algunos de los trabajos más recientes) estudiados en este capítulo, encuentran rutas más cortas (con y sin información en tiempo real) considerando que es posible conocer horarios de llegada de los vehículos a las paradas para todos los modos transporte público, o suponen que dado un itinerario hay una probabilidad de que los vehículos lleguen a tiempo. El algoritmo HiRCoCoTiR considera que todo el transporte público está basado en frecuencias pero por un periodo de tiempo existen algunas líneas de algunos modos de transporte público con información en tiempo real.

Si el modelo HiCoTiR no tuviera en cuenta las restricciones sobre la secuencia de modos utilizados y el número máximo de transferencias modales, podría ser considerado un caso especial del modelo de Verbas & Mahmassani (2015). Las diferencias entre la HiCoTiR con respecto al modelo de Verbas & Mahmassani (2015) son que ese último modelo:

1. No es multimodal.
2. No considera restricciones sobre los modos por lo que no plasma de forma fiel el comportamiento de los usuarios en redes de transporte público (Bast et al., 2015).
3. No limita explícitamente el número de transferencias modales, esto puede ocasionar que el modelo de Verbas & Mahmassani (2015) encuentre rutas con un número excesivo de transferencias modales, lo que resulta incómodo para algunos usuarios.

En el Capítulo 4 se describe la construcción de la Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR) y en el Capítulo 5 se presenta el algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR).

4 Híper red combinada con tiempo real

El modelo que se presenta en este capítulo combina redes dependientes del tiempo con híper redes multimodales.

Gran cantidad de modelos han sido desarrollados para encontrar rutas más cortas en redes dependientes del tiempo o en redes espacio-temporales; en el Capítulo 3 se incluye una descripción de los trabajos más recientes sobre este tema. Las híper redes se utilizan para modelar sistemas de transporte público basado en frecuencias (Lozano & Storchi, 2002; Khani et al., 2014; Spiess & Florian, 1989; Nguyen & Pallottino, 1989), ya que permiten estimar los tiempos de espera de los vehículos que pertenecen al conjunto de líneas de algún modo de transporte público. Los híper arcos en una híper red tienen asociada una distribución de probabilidad que en el caso del transporte público se expresa en función de la frecuencia de paso de los vehículos de transporte público que pertenecen a un conjunto de líneas.

A diferencia del transporte público con horarios, en el transporte público basado en frecuencias el usuario solo conoce una aproximación del tiempo de espera que depende del tiempo que tardan en llegar a la parada los vehículos de transporte público que pertenecen al conjunto de líneas que el usuario está dispuesto a abordar. Por lo tanto, una híper ruta en transporte público define una estrategia donde el usuario en cada parada abordará el primer vehículo que llegue de cualquier línea, siempre y cuando la línea pertenezca a su estrategia (*conjunto atractivo*).

Uno de los supuestos que generalmente no cambia cuando se considera el transporte público basado en frecuencias es que el intervalo de tiempo entre dos vehículos consecutivos de la misma línea se distribuye exponencialmente. Esta suposición implica que la distribución de los intervalos de tiempo es:

1. Regular si $\alpha = 1/2$.
2. Irregular si $\alpha = 1$.

Este supuesto no siempre se cumple, Li et al. (2015) estudiaron el transporte público de Chicago y encontraron que los tiempos entre dos autobuses consecutivos de la misma línea tienen distribuciones

similares a las de Erlang, Log-logistic y Gamma. Sería interesante en trabajos futuros explorar la posibilidad de incluir más de una distribución para el cálculo de las frecuencias y así tener un modelo más robusto.

En la Sección 4.1 se describe la construcción de la Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR) y se presentan los conceptos de arcos/híper arcos, *estados*, *viabilidad* y *tiempo esperado de viaje* de la híper ruta. En la Sección 4.2 se presenta un ejemplo del modelo HiCoTiR, y en la Sección 4.3 se describe la construcción de la base de datos geo-referenciada que almacena al modelo HiCoTiR.

4.1 Modelo de híper red combinada con tiempo real

Sea G una red que modela un sistema de transporte multimodal (de acuerdo con la definición de Bast et al. (2015)), donde todos los modos de transporte público están basados en frecuencias pero por un periodo de tiempo existen líneas con información en tiempo real sobre los tiempos de espera de los vehículos en las paradas. Dado que G modela sistemas de transporte público donde los modos están basados en frecuencias, es suficiente que G sea una híper red, además G cambia con el tiempo por lo que el tiempo de sus arcos es función dependiente del tiempo. Entonces, sea $G = (V, H, T, M)$ una Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR), tal que V es el conjunto de nodos, H es el conjunto de arcos e híper arcos y $T = \{t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots (|T| - 1)\Delta t\}$ es un conjunto discreto de instantes de tiempo. Los itinerarios del transporte público que se obtienen de la información en tiempo real deben de estar contenidos en T , de lo contrario pueden existir vehículos que arriben a una parada en un instante de tiempo que no existe en T y por lo tanto no se consideraran en el modelo. Entonces, sea T^i el conjunto de llegadas a la parada i que se obtiene a partir de la información en tiempo real, $T^i \subseteq T$ para toda $i \in V$. Por último, $M = \{M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7\}$ es el conjunto de modos disponibles, tal que;

- $M1$:= Peatonal.
- $M2$:= Bicicleta particular.
- $M3$:= Bicicleta pública.
- $M4$:= Transporte público basado en frecuencias (tren, metro, BRT, autobús).
- $M5$:= Transporte público con información en tiempo real (tren, metro, BRT, autobús).
- $M6$:= Automóvil particular.
- $M7$:= Transferencias modales (peatonal).

La clasificación de los modos implícitamente divide la híper red en *capas* donde cada *capa* está formada por sub-híper redes cuyos arcos son del mismo modo y cada una de estas capas está conectada por arcos de transferencia modal (ver la Figura 2.3 que se encuentra en la página 14).

4.1.1 Arcos/híper arcos

Los usuarios en una red de transporte realizan una serie de acciones durante su viaje como abordar un autobús, caminar/conducir en una calle, entrar a una estación de metro, cambiar de modo de transporte, etc. Para modelar las acciones de los usuarios, los arcos e híper arcos del modelo HiCoTiR se construyen en términos de la *acción* que representan. Todos los arcos peatonales, de bicicleta y de automóvil particular representan únicamente la *acción* de caminar, conducir o manejar, es decir, la *acción* de viajar se *asocia* a todos los arcos $(u, v) \in H$ tal que, el modo de $(u, v) \in \{M1, M2, M3, M6\}$. Descender de o

abordar un vehículo privado no es una *acción*; cuando el usuario deja o entra a su vehículo privado automáticamente está cambiando de modo, entonces la acción de abordar al o descender del vehículo está implícita en los arcos de transferencia modal (*M7*). Por otro lado, si el usuario se encuentra en la red de transporte público puede realizar cuatro *acciones*:

1. Abordar un vehículo en una parada de transporte público.
2. Viajar en un vehículo de transporte público.
3. Descender de un vehículo de transporte público.
4. Hacer un transbordo entre dos líneas del mismo modo de transporte público.

Para modelar dos paradas consecutivas de transporte público se necesitan al menos tres arcos (u, v) , (v, w) y (w, z) , donde (u, v) representa la *acción* de *abordar* un vehículo en la parada u , (v, w) representa la *acción* de *viajar* en el vehículo y (w, z) representa la *acción* de *descender* del vehículo en la parada z . La *acción* de hacer un transbordo entre dos líneas del mismo modo de transporte público se representa con un arco que une dos paradas. La *acción* de *esperar* un vehículo no está considerada en los arcos, como esta *acción* no representa movimiento se modela en los nodos de G .

Se define el conjunto $act = \{1, 2, 3, 4\}$ que describe la *acción* que realiza el usuario en una red de transporte. Las *acciones* asociadas a los arcos/híper arcos tienen los siguientes valores:

- 1: *acción* que representa abordar un vehículo. Es para uso exclusivo de los modos *M4* y *M5*.
- 2: *acción* que representa descender de un vehículo. Es para uso exclusivo de los modos *M4* y *M5*.
- 3: *acción* que representa caminar, conducir o viajar en un modo de transporte. Cualquier modo puede usar esta *acción*.
- 4: *acción* que representa el transbordo entre dos líneas del mismo modo de transporte. Es para uso exclusivo de los modos *M4* y *M5*.

Dependiendo de la *acción* un arco puede tener diferentes pesos. Suponga que la *acción* de un arco $(i, j) \in A$ es 3 y el modo del arco (i, j) es *M1*, *M2*, *M3* o *M7*, entonces, el tiempo de viaje se define como $\tau_{ij}(t) = c$ donde c es una constante para todo $t \in T$. Si la *acción* de un arco (i, j) es 4, entonces, el tiempo de viaje se define como $\tau_{ij}(t) = c$ donde c es una constante para todo $t \in T$. Si la *acción* del arco $(i, j) \in A$ es 3 y el modo del arco (i, j) es *M4*, *M5* o *M6*, entonces, el tiempo de viaje es $\tau_{ij}(t) = f(t)$.

Si la *acción* del arco $(i, j) \in H$ es 2 y el modo es *M4* o *M5*, entonces, $\tau_{ij}(t) = 0$ para toda $t \in T$, este modelo supone que descender de un vehículo de transporte público siempre es posible y no existen penalizaciones por realizar la *acción*.

Cuando la *acción* de un arco/híper arco de modo *M4* o *M5* es 1 existen dos opciones para calcular el peso del arco/híper arco y éstas dependen de la información en tiempo real disponible. Suponga que de acuerdo a la información en tiempo real un vehículo de transporte público llega a la parada i a las 9:15am y después de esta hora no hay predicciones disponibles. Si un usuario llega a i antes de las 9:15am, ella/él conoce el tiempo exacto de espera, pero si el usuario llega después de las 9:15am ella/él solo podrá saber la frecuencia de paso de los vehículos que pertenecen a las líneas que él/ella está dispuesto a abordar. Este modelo supone que cuando no existe tiempo real disponible sólo se conocen las frecuencias del transporte público. Por lo tanto, existen dos paradigmas para calcular el peso de una arco/híper arco con *acción* 1

que dependen del instante de tiempo t y de la información en tiempo real disponible. El primer paradigma supone que el usuario conoce el tiempo exacto de espera para que arribe el siguiente vehículo a la parada de transporte público, mientras que el segundo paradigma supone que el usuario puede aproximar el tiempo de espera usando las frecuencias de las líneas asociadas a los vehículos que está dispuesto a abordar en la parada. A continuación se modelan ambos paradigmas.

Sea $T_l^i \subseteq T$ el conjunto de instantes de tiempo que corresponden a las llegadas a la parada i de los vehículos de transporte público de la línea l , T_l^i se obtiene con algún servicio de información en tiempo real. Suponga que el arco (i, j) está asociado con la acción 1 (abordaje) y la línea l de transporte público, donde el nodo i representa la parada del vehículo. El tiempo de viaje del arco (i, j) es $\tau_{ij}(t) = 0$ si $t \in T_l^i$ y $\tau_{ij}(t) = \infty$ si $t \notin T_l^i$ y $t < t_l^i$ para alguna $t_l^i \in T_l^i$, en otras palabras, si el usuario se encuentra en la parada i cuando el vehículo de transporte público está llegando, el arco (i, j) está disponible y el usuario puede abordar el vehículo, pero si el usuario llega a la parada i cuando no hay vehículos disponibles (pero ella/él conoce el tiempo exacto de espera), el arco (i, j) no está disponible y el usuario tienen que esperar en i hasta que el arco esté disponible. Sea $\xi_{kij}^l(t)$ el tiempo de espera en el nodo i del vehículo de la línea l cuando el usuario entra por el arco (k, i) hacia el arco (i, j) en el tiempo t . Se define el tiempo de espera en el nodo i del vehículo de la línea l con la ecuación (4.1).

$$\xi_{kij}^l(t) = \begin{cases} t_l^i - t & \text{si } t \leq t_l^i \text{ para alguna } t_l^i \in T_l^i \text{ y } t \notin T_l^i \\ 0 & \text{si } t \leq t_l^i \text{ para alguna } t_l^i \in T_l^i \text{ y } t \in T_l^i \end{cases} \quad (4.1)$$

Si un usuario llega a la parada i en el tiempo t y $t > t_l^i \forall t_l^i \in T_l^i$, entonces en la parada i no hay información en tiempo real disponible por lo que el usuario solo puede saber las frecuencias de paso de los vehículos de las líneas que está dispuesto a abordar, es decir, ella/él únicamente puede aproximar el tiempo de espera en i a través de las frecuencias. Además el modelo supone que en el transporte público basado en frecuencias los intervalos de tiempo entre dos vehículos consecutivos de la misma línea se distribuyen exponencialmente. Entonces, si $t > t_l^i \forall t_l^i \in T_l^i$, el peso del hiper arco (i, j) de acción 1 en el tiempo t es igual al inverso de la frecuencia de la línea asociada a (i, j) . La frecuencia de la línea asociada a (i, j) en el tiempo t es $\phi_{ij}^l(t)$, a pesar de que las frecuencias del transporte público varían a lo largo del día no cambian en periodos de tiempo cortos (una hora), por lo que no es absurdo pedir que $\phi_{ij}^l(t) = c$ si $t > t_l^i \forall t_l^i \in T_l^i$.

Sea L el conjunto de líneas de transporte público tal que solo se conocen las frecuencias de paso de los vehículos y sea $L_i \subseteq L$, el subconjunto de líneas cuyos vehículos paran en i , es razonable suponer que para algún origen-destino el usuario podría utilizar algunas de las líneas cuyos vehículos paran en i para llegar a su destino. Entonces, sea $L_i'(t) \subseteq L_i$ el conjunto atractivo, definido como el conjunto de líneas cuyos vehículos el usuario está dispuesto a abordar para llegar a su destino. El conjunto atractivo define el concepto de hiper arco de abordaje $e' = (i, \Gamma'(i))$ donde $\Gamma'(i) \subseteq \Gamma(i)$. Un hiper arco de abordaje contiene el conjunto de aros $\{(i, j_1), (i, j_2) \dots (i, j_n)\}$ asociados a cada una de las líneas del conjunto atractivo, tal que $j_i \in \Gamma'(i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Se definen los siguientes valores para $L_i'(t)$:

- $\phi_{e'}(t) = \sum_{j \in h(e')} \phi_{ij}^l(t)$ tal que $l \in L_i'(t)$.
- $\omega_{e'}(t) = \alpha / \phi_{e'}.$

- $\pi_{e',l}(t) = \varphi_{ij}^l(t)/\phi_{e'}(t)$.

Donde $\phi_{e'}(t)$ es la frecuencia combinada del *conjunto atractivo* en el tiempo t . $\omega_{e'}(t)$ es el tiempo promedio de espera en la parada i del *conjunto atractivo* en el tiempo t , el factor α es utilizado para modelar la distribución del intervalo de tiempo entre dos vehículos consecutivos de la misma línea, este modelo supone que todos los intervalos de tiempo entre vehículos consecutivos de la misma línea son independientes e irregulares, por lo que $\alpha = 1$ (Spiess & Florian, 1989). Finalmente, $\pi_{e',l}(t)$ es la probabilidad de abordar en la parada i un vehículo de la línea j que pertenece al *conjunto atractivo*.

Dependiendo del instante de tiempo, un arco de *acción* 1 (abordaje) puede o no ser parte de un hiper arco de *abordaje*. Por ejemplo, suponga que un usuario espera en la parada i los vehículos de las líneas l , m y n . Sean (i, j_1) , (i, j_2) y (i, j_3) arcos de *acción* 1 asociados a las líneas l , m y n , respectivamente. El usuario sabe que el vehículo que pertenece a línea l llega a i a las 9:05am, pero ella/él sólo conoce las frecuencias de paso de las líneas m y n . Si el usuario llega a i antes de las 9:05am, entonces el hiper arco de *abordaje* es $e' = (i, \Gamma'(i) = \{j_2, j_3\})$ pues el usuario conoce exactamente el tiempo de espera del vehículo de la línea l ; en el diagrama izquierdo de la Figura 4.1 e' se representa con arcos curvados mientras que (i, j_1) se representa con un arco recto. Si el usuario llega a i después de las 9:05am ella/él solo conoce la frecuencia de paso de la línea l , por lo tanto el hiper arco de *abordaje* después de las 9:05am es $e' = (i, \Gamma'(i) = \{j_1, j_2, j_3\})$, en el diagrama derecho de la Figura 4.1 e' se representa con arcos curvos.

Según el modelo HiCoTiR existe la posibilidad de que antes de las 9:05 am arribe a la parada i algún vehículo de las líneas m o n , pues los tiempos de espera de los vehículos que pertenecen a estas líneas únicamente pueden ser aproximados, entonces, el usuario tiene la posibilidad de abordar algún vehículo de las líneas m o n si alguno de estos llega a la parada i antes que un vehículo de la línea l ; como solo se conocen las frecuencias de paso de m o n , los vehículos que pertenecen a estas líneas se pueden abordar en cualquier instante de tiempo, pero no se puede saber su hora de llegada a la parada. A diferencia de otros modelos (Khani et al., 2014, Huang, 2007, Gkiotsalitis & Stathopoulos, 2015, Häme & Hakula, 2013, para mencionar algunas obras recientes) que sólo consideran itinerarios en el transporte público (o la probabilidad de que un vehículo de transporte público llegue a tiempo) o sólo consideran frecuencias, el modelo HiCoTiR utiliza la mutación de arcos en hiper arcos para integrar itinerarios y frecuencias en un solo modelo.

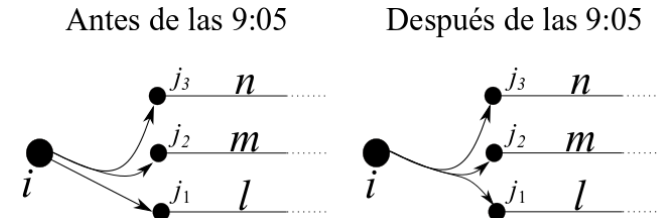


Figura 4.1. Híper arco de abordaje antes y después de las 9:05am

4.1.2 Estados

Para modelar el comportamiento del usuario que viaja en la red de transporte se definen restricciones en la secuencia de los modos que utilizada. Por ejemplo, una restricción es que sólo se puede abordar el automóvil (modo $M6$) una vez por viaje, si el usuario abandona el modo $M6$ este modo no puede ser

abordado otra vez en otra parte del viaje pues el vehículo se quedó estacionado en otro lugar. También se pueden añadir restricciones que modelen las preferencias personales de los usuarios en el uso de los modos. Por ejemplo, pueden existir usuarios que una vez que usaron una bicicleta pública no quieren volver a utilizarla en otra parte del viaje o que prefieren no utilizar autobús en ninguna parte del viaje.

Se definen dos tipos de restricciones sobre los modos: las *restricciones lógicas* y las *restricciones de preferencia*. Las *restricciones lógicas* son aquellas que están definidas por factores físicos como son, no abordar dos veces el mismo modo privado en dos diferentes partes de la ruta, y estas restricciones no varían para diferentes usuarios. Las *restricciones de preferencia* son aquellas que se definen por preferencias personales de cada usuario como la disposición a pagar versus el tiempo de viaje o la comodidad. Ya que las *restricciones de preferencia* son únicas para cada usuario, permiten definir modelos de red personalizados que se utilizan para encontrar rutas más cortas *ad hoc*. Para restringir la secuencia de modos de un viaje de acuerdo a las *restricciones lógicas* y/o de *preferencia* se define la *viabilidad* de una ruta (Lozano & Storchi, 2002). Una hiper ruta multimodal es *viable* si las rutas que la componen cumplen con las *restricciones lógicas* y de *preferencia*. Se observa que de acuerdo a las *restricciones de preferencia* una ruta puede ser *viable* para algunos usuarios y *no viable* para otros.

Lozano & Storchi (2001) definen el *estado* de una hiper ruta para identificar la combinación de modos utilizados en un viaje, y de ahí es posible construir un *autómata de estados no determinístico finito* (AEF) para determinar cuál secuencia de *estados* es *viable* (Artigues et al., 2013). Un AEF es una quinteta $A = (S, M, \delta, s_0, F)$, donde $S = \{1, 2, \dots, |S|\}$ es el conjunto de *estados*, s_0 es el estado inicial, F es el conjunto de *estados* finales y $\delta: M \times M \times S \rightarrow S$, es una función de *transición* entre *estados* tal que $\delta(m, m', s)$ calcula el *estado* resultante cuando se hace una transferencia del modo m al modo m' , desde el *estado* s . Si $\delta(m, m', s) = \emptyset$ la transferencia del modo m al modo m' desde el estado s no es posible.

Para los modos M_i tal que $1 \leq i \leq 7$ se construye el AEF que se muestra en la Figura 4.2. Sea $A = (S, M, \delta, 0, F)$ un AEF donde: $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, 17\}$, $M = \{M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7\}$ y $F = \{13, 17, 16\}$. Además, el AEF considera las siguientes *restricciones lógicas* y de *preferencia*.

- Sólo es posible abordar los modos $M2$ y $M6$ al inicio del viaje (*restricción lógica*).
- Una vez abandonados los modos $M2$ y $M6$ no pueden ser abordados otra vez (*restricción lógica*).
- Los modos $M2$ y $M3$ no pueden ir consecutivos (*restricción de preferencia*).
- El modo $M3$ sólo puede ser usado una vez por viaje (*restricción de preferencia*).

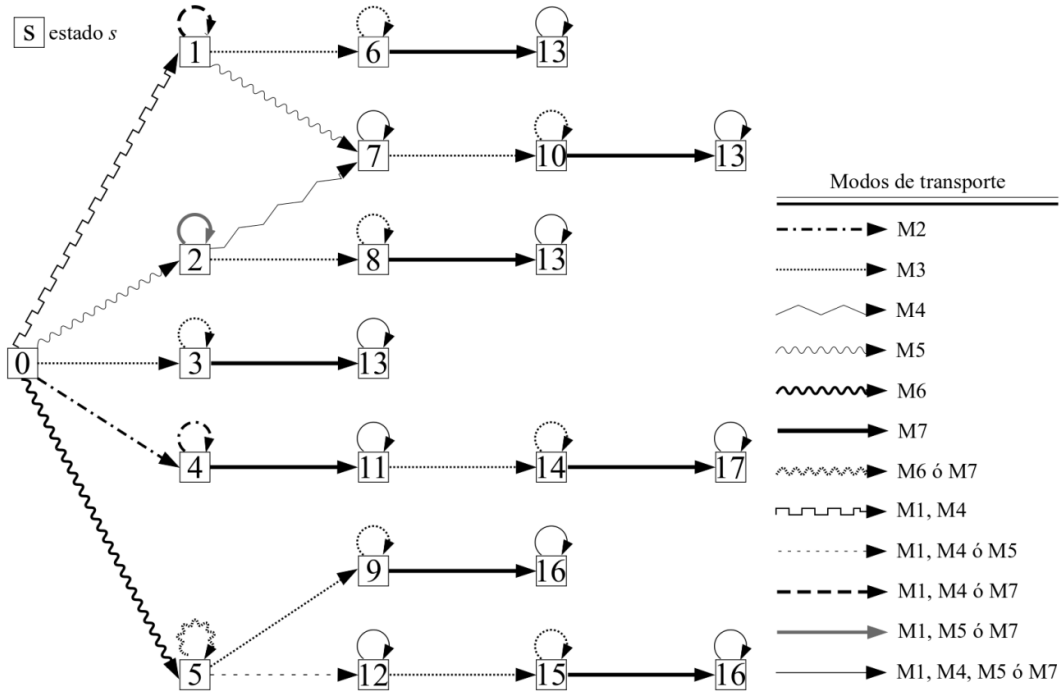


Figura 4.2 Grafo dirigido del AEF

De acuerdo con la Figura 4.2 éstos son algunos de los valores para $\delta(m, m', s)$:

- $\delta(M1, 0) = 1$
- $\delta(M3, 0) = 3$
- $\delta(M3, M1, 9) = 16$
- $\delta(M5, M3, 7) = 10$

De acuerdo al grafo dirigido que se muestra en la Figura 4.2, si un viaje termina en el modo $M3$ se obtiene una híper ruta p_{oj} con *estado* 3, mientras p_{oj} continúe por $M3$ la ruta tendrá el mismo *estado*. Si se concatena un arco (i, j) con modo $M7$, la nueva híper ruta p_{oi} tendrá *estado* 13 y únicamente podrá continuar por los modos $M1, M4, M5$ ó $M7$.

Entre cada pareja de *estados*, s y s' , tal que los modos aceptados en s también son aceptados en s' , se puede determinar qué *estado* es preferible sobre el otro, esta relación define la *dominancia* entre *estados*. La *dominancia* entre *estados* es un orden entre parejas de híper rutas que permite conocer cuál híper ruta tiene más posibilidades crecer.

De acuerdo con Artigues et al. (2013) la relación de *dominancia* que propone Lozano & Storchi (2001) no puede ser generalizada para cualquier AEF, entonces, Artigues et al. (2013) proponen la siguiente relación de *dominancia*.

Definición 25. Sean s y s' dos *estados*, s domina a s' , $s \ll s'$, si para cualquier pareja de modos $\{m, m'\} \in M$, tal que m es un modo posible para el *estado* s , una de las siguientes condiciones se cumple:

- $\delta(m, m', s') = \emptyset$.
- $\delta(m, m', s') = \delta(m, m', s)$.

- $\delta(m, m', s) = s$ y $\delta(m, m', s') = s'$.

Usando la Definición 25 se construye el conjunto de *estados* preferidos sobre s , PS_s , como el conjunto de *estados* que *dominan* a s . La Tabla 4.1 muestra los conjuntos de *estados* preferidos por cada *estado* s :

Tabla 4.1 Conjunto de estados dominados por s

Estados	PS_s
1	1
2	2
3	3,6,8,10
4	4
5	5
6	3,6,8,10
7	7
8	3,6,8,10
9	3,9,15
10	3,6,8,10
11	7,11
12	7,12
13	7,11,12,13,16,17
14	3,6,8,9,10,14
15	3,6,8,9,10,15
16	7,11,12,13,16,17
17	7,11,12,13,16,17

Suponga que la híper ruta p_{id} , resulta de la concatenación del híper arco $e = (i, h(e))$ con la híper ruta p_{jd} tal que $j \in h(e)$ y p_{jd} es una híper ruta *viable*. Por construcción todos los híper arcos de la HiCoTiR tienen modo $M4$ y los únicos *estados* posibles para p_{jd} son los *estados* 2, 7, 11, 12, 13, 16 y 17 pues estos *estados* son los asociados a híper rutas que terminan en algún modo de transporte público. Lozano & Storchi (2002) definen una *híper transición* entre *estados* como $s_x * s_y = s(e)$, si la secuencia de modos utilizados en s contiene los modos usados en s_x y en s_y . Por ejemplo, suponga que $e = (i, h(e))$ es un híper arco de modo $M4$ tal que $h(e) = \{j_1, j_2\}$, además, 7 y 11 son los *estados* de las híper rutas p_{j_1d} y p_{j_2d} respectivamente. Cuando se concatena e a la híper ruta p_{j_1d} se obtiene la híper ruta p_{id} con *estado* 7, si después se concatena p_{id} a la híper ruta p_{j_2d} con *estado* 11, la híper ruta resultante p_{id} tiene *estado* 11, pues este *estado* contiene todos los modos usados en los *estados* 7 y 11. La Tabla 4.2 muestra la *híper transición* entre los *estados* de la Figura 4.2. Los únicos *estados* donde puede haber una *híper transición* son los siguientes: 2, 7, 11, 12, 13, 16 y 17, es decir, los *estados* asociados a las híper rutas que terminan en el modo $M4$.

Tabla 4.2 Híper transición de estados

s_x	s_y						
	2	7	11	12	13	16	17
2	2	7	11	12	13	16	17
7	7	7	11	12	13	16	17
11	11	11	11	12	13	16	17
12	12	12	12	12	13	16	17
13	13	13	13	13	13	16	17
16	16	16	16	16	16	16	17
17	17	17	17	17	17	17	17

4.1.3 Híper rutas y tiempo esperado

Dado un nodo i , un destino d , un arco de entrada (k, i) , un modo m , un instante de tiempo t y un estado s , se define una híper ruta $p_{ki}^s(t)$ como una secuencia de arcos/híper arcos, modos e instantes de tiempo. Sea $p_{ki}^s(t) = \{(h_0, m_0, t_0), (h_1, m_1, t_1), (h_p, m_p, t_p)\}$ una híper ruta de i a d , donde $h_x \in H$, $m_x \in M$, $t_x \in T$ para todo $0 \leq x \leq p$. El tiempo esperado de viaje de i a d entrando por el arco (k, i) con estado s en el tiempo t , $\lambda_{ki}^s(t)$, de una híper ruta $p_{ki}^s(t)$ se define recursivamente y se muestra en la ecuación (4.2).

$$\lambda_{ki}^s(t) = \begin{cases} \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^{s'} \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) & \text{si } (i, j) \text{ no es parte de un híper arco} \\ \omega_{e'}(t) + \sum_{j \in h(e')} \pi_{e', l}(t) \lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t)) & \text{si } e' \text{ es un híper arco de abordaje} \end{cases} \quad (4.2)$$

Si en el tiempo t la acción de (i, j) es 2, 3 ó 4 o si la acción de (i, j) es 1 y el tiempo de espera se conoce exactamente ((i, j) no es híper arco de *abordaje*), entonces el tiempo esperado de viaje de la híper ruta se calcula como la suma de los tiempos descritos a continuación:

- El tiempo de espera en el nodo i del vehículo de la línea l cuando el usuario entra por el arco (k, i) hacia el arco (i, j) en el tiempo t , $\xi_{kij}^l(t)$.
- El tiempo de recorrido del arco (i, j) evaluado en el instante de tiempo actual más el retraso asociado al tiempo de espera, $t + \xi_{kij}^l(t)$, es decir, $\tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right)$.
- El tiempo esperado de viaje hasta el nodo j cuando se entra por el arco (i, j) evaluado en el instante de tiempo actual más el tiempo de espera, $\xi_{kij}^l(t)$, más el tiempo de viaje del arco (i, j) , $\tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right)$, es decir, $\lambda_{ij}^{s'} \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$.

Miller-Hooks & Mahmassani (2000) señalan que el tamaño de cada intervalo de tiempo debe ser menor o igual que cualquier tiempo de viaje de un arco, de lo contrario, es posible estar en la cabeza y en la cola de un arco al mismo tiempo, lo cual resulta absurdo. Esta condición se puede extender para la concatenación de arcos a las híper rutas para evitar que existan anomalías en el tiempo.

Condición 1. Suponga que un arco (i, j) con tiempo de viaje $\tau_{ij}(t)$ se concatena con una híper ruta y que $\xi_{ikj}^l(t) = 0$. El tiempo de viaje esperado $\lambda_{ij}^{s'} \left(t + \tau_{ij}(t) \right)$ debe cumplir que $t + \tau_{ij}(t) =$

$n\Delta t + r = t'$ tal que r es el residuo de la división $\tau_{ij}(t)/t$ y n es un entero positivo. Si $r \neq 0$ se cumple que:

1. Si $r < \Delta t/2$ y $n > 0$ entonces $t' = n\Delta t$
2. Si $r \geq \Delta t/2$ o $n = 0$ entonces $t' = (n + 1)\Delta t$.

Se observa que cuando $r \neq 0$ no existe un valor para $\lambda_{ij}^s(t + \tau_{ij}(t))$ pues los instantes de tiempo son discretos, por lo que es necesario hacer la corrección se presenta en la Condición 1.

Cuando se concatena un híper arco de *abordaje* $e' = (i, h(e'))$ a la híper ruta $p_{ij}^{s'}(t)$, tal que $j \in h(e')$, el *tiempo esperado* de viaje se calcula como la suma de los tiempos siguientes:

- El tiempo promedio de espera del conjunto *atractivo*, $\omega_{e'}(t)$, en el instante de tiempo actual.
- El tiempo que resulta de la probabilidad combinada de los *tiempos esperados* de viaje del conjunto *atractivo*, $\sum_{j \in h(e')} \pi_{e',l}(t) \lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t))$.

Para asegurar que $t + \omega_{e'}(t)$ sea igual a algún instante de tiempo contenido en T se sigue un procedimiento análogo al de la Condición 1. La concatenación de híper arcos cumple que $t + \omega_{e'}(t)$ es igual a $n\Delta t$ o igual a $(n + 1)\Delta t$ dependiendo del residuo de la división $\omega_{e'}(t)/t$.

La Figura 4.3 muestra una representación gráfica del cálculo recursivo del *tiempo esperado* de viaje, $\lambda_{ki}^s(t)$. El paso 1 que se muestra en la Figura 4.3 es el cálculo del *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta con tres nodos, el paso 2 es el cálculo del *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta con cuatro nodos utilizando el *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta de paso 1 pero ajustando el instante de tiempo. Finalmente, el paso n es el cálculo del *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta con $n + 2$ nodos y se calcula utilizando el *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta del paso n evaluada en el instante de tiempo apropiado.

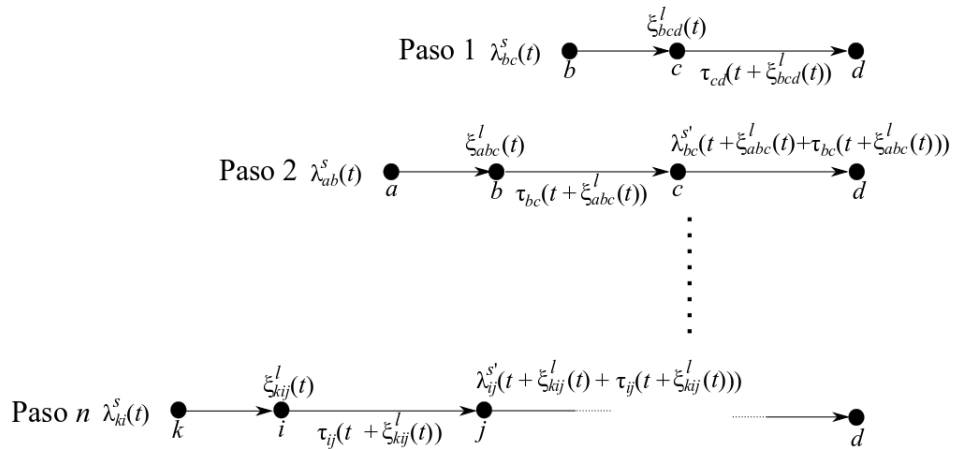


Figura 4.3. *Tiempo esperado* de viaje de la híper ruta $p_{ki}^s(t)$

4.2 Ejemplo de un modelo HiCoTiR

A continuación se muestra como modelar una red de transporte multimodal con una HiCoTiR. La Figura 4.4 muestra un ejemplo de red de transporte compuesta por:

- Dos líneas de metro con información en tiempo real. Los trenes de la línea 1 parten de la parada m_1 y llega a la parada m_3 en 30 minutos. Los horarios de salida de los trenes de la línea 1 en la parada m_1 son 9:10, 9:15 y 9:20. Los trenes de la línea 2 parten de la parada m_2 y llegan a la parada m_3 en 10 minutos. Los horarios de salida de la línea 2 en la parada m_2 son 9:05, 9:15 y 9:25. Cuando no se dispone de información en tiempo real las líneas 1 y 2 tienen una frecuencia de paso de 5 trenes cada hora.
- Dos líneas de autobuses basados en frecuencias. Los autobuses de la línea $a_1 - a_3$ tienen una frecuencia de 5 autobuses/hora. Los autobuses parten de la parada a_1 y llegan a la parada a_3 en 15 minutos. Los autobuses de línea $a_1 - a_2$ tienen una frecuencia de 8 autobuses/hora y el tiempo de recorrido entre la parada a_1 y a_2 es de 5 minutos.
- Tres paradas de transferencia: (1) de la parada m_1 a la parada a_1 con un tiempo de 4 minutos, (2) de la parada a_2 a la parada m_2 con un tiempo de 1 minuto y (3) de la parada a_3 a la parada m_3 con un tiempo de 4 minutos.

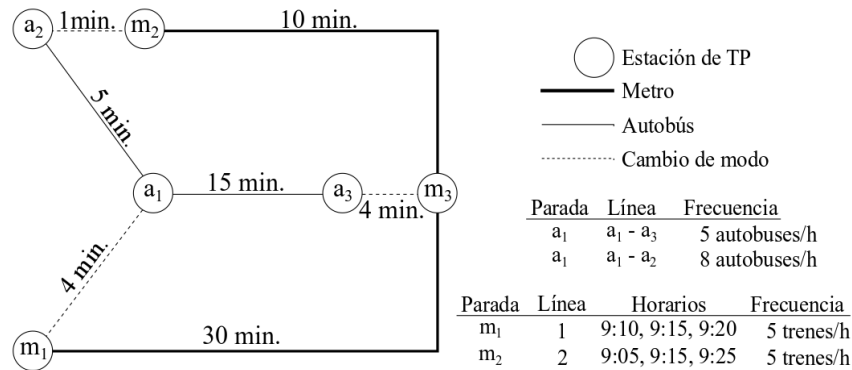


Figura 4.4 Ejemplo de red de transporte público

Sea $G = (V, H, T, M)$ una HiCoTiR, tal que V es el conjunto de nodos, H es el conjunto de hiper arcos, $T = \{9:00, 9:01, 9:02 \dots 10:00\}$ el conjunto de instantes de tiempo y $M = \{M1, M2, M3\}$ el conjunto de modos, donde $M1$ es el metro, $M2$ es el autobús y $M3$ son transferencias modales. La Figura 4.5, muestra la HiCoTiR G que modela al sistema de transporte que se muestra en la Figura 4.4. El conjunto de nodos de G es $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, d\}$, en donde los nodos $0, 2, 6, 7, 11$ y d representan las paradas de transporte público m_1, a_1, a_2, m_2, a_3 y m_3 respectivamente. Es necesario incluir todas las *acciones* que se realizan entre cada pareja de paradas de transporte público. Para modelar las diferentes *acciones* se insertan tres arcos consecutivos entre cada pareja de paradas, por ejemplo, las paradas m_1 y m_3 del metro tienen asociados los nodos 0 y d , respectivamente, entonces se insertan los nodos auxiliares 1 y 12 tal que: el arco $(0, 1)$ con modo metro representa la *acción* 1, el arco $(1, 12)$ con modo metro representa la *acción* 3 y el arco $(12, d)$ con modo metro representa la *acción* 2.

Dependiendo de la hora a la que se arribe al nodo inicial de un arco de abordaje (*acción* 1), tal que su línea asociada tiene información en tiempo real, el arco se modela con un arco o con un hiper arco. Por ejemplo, el arco $(0, 1)$ está asociado al metro, si el usuario llega al nodo 0 antes de las 9:20 es posible saber exactamente cuánto tiempo hay que esperar en la parada hasta que pase el siguiente tren, por lo tanto, entre las 9:00 y las 9:20 el arco $(0, 1)$ estará representado por un arco con tiempo de viaje 0 (este ejemplo no considera tiempos asociados al abordaje de un vehículo). Si el usuario llega a la parada 0 después de las 9:20 es imposible obtener el tiempo de espera exacto en la parada, entonces, el arco $(0, 1)$

es un híper arco con una frecuencia de paso de 5 trenes por hora (12 minutos de espera en promedio en la parada).

En este modelo el autobús no tiene información en tiempo real por lo que los arcos de *abordaje* de las líneas $a_1 - a_2$ y $a_1 - a_3$ están modelados con híper arcos para cualquier instante de tiempo. Los vehículos de las líneas de autobús parten de la misma parada, entonces, $(2, \{4,3\})$ es el híper arco que representa el *abordaje* de a ambas líneas. Este híper arco tiene una frecuencia de 5 y 8 autobuses por hora (12 y 7.5 minutos de espera en promedio en la parada), para las líneas $a_1 - a_2$ y $a_1 - a_3$, respectivamente.

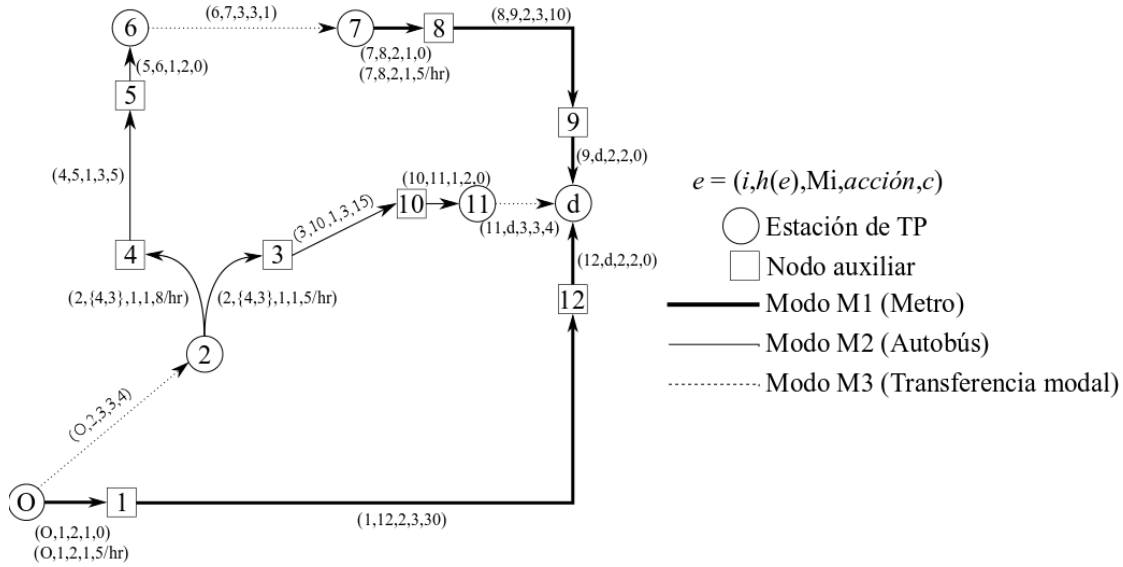


Figura 4.5 Modelo de híper red multimodal dependiente del tiempo

Cada arco/híper arco de G tiene asociado una quinteta de valores $(i, h(e), Mi, acción, c)$ tal que $i \in V$, $h(e) \in V$, $e \in H$, $Mi \in M$, $acción \in \{1,2,3,4\}$ y $c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo el arco $(O, 2)$ tiene asociada la quinteta $(O, 2, 3, 3, 4)$, es decir, el arco $(O, 2)$ tiene un nodo inicial O , un nodo final 2, el arco representa una transferencia modal, su *acción* es viaje (*acción* 3) y tiene un tiempo de recorrido de 4 minutos. La híper red que se muestra en la Figura 4.5 no tiene restricciones para ningún modo de transporte y su gráfica del AEF se muestra en la Figura 4.6

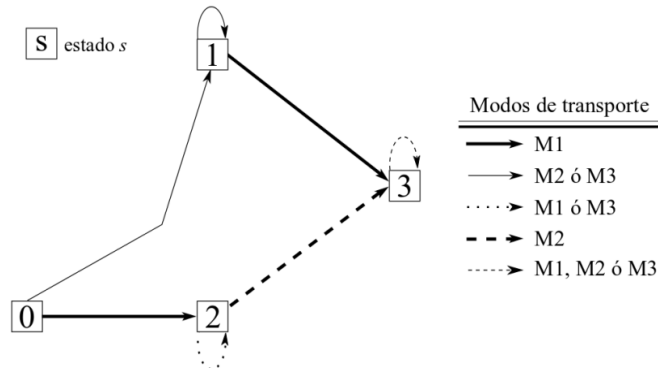


Figura 4.6 Gráfica del AEF de la híper red que se muestra en la Figura 4.5

4.3 Representación Geográfica del modelo HiCoTiR

Para modelar una HiCoTiR con el objetivo de usarla en un SAIV es conveniente almacenar la hiper red en un Sistema de Información Geográfico (SIG). De acuerdo con Foote & Lynch (1995) un SIG es una base de datos digital de propósito específico, donde el principal medio de referencia es un sistema de coordenadas espacial. Los SIG requieren al menos los siguientes medios:

- Entrada de datos desde: mapas, fotografías aéreas, satélites, encuestas y otras fuentes relacionas.
- Almacén, recuperación y consulta de datos.
- Transformación, análisis y modelado de datos. Esto incluye el análisis de estadísticas geo-espaciales.
- Presentación de datos tales como mapas, informes y planos.

Debido a la complejidad de las grandes ciudades es difícil crear un modelo que abarque todas las características de una red de transporte multimodal, por lo que se han creado diferentes modelos en SIG para estudiar problemas específicos. Por ejemplo, Chen et al. (2011) crearon un SIG-T (Sistema de Información Geográfico para Transporte) para el sistema de transporte del Guangzhou, China fue creado específicamente para urbanistas y tomadores de decisiones con el objetivo de evaluar demandas de viaje, flujos y toma de decisiones en infraestructura. En Gil (2015) el autor utiliza toda la información disponible en *OpenStreetMap* y desarrolla un SIG-T para evaluar la accesibilidad y sustentabilidad de barrios urbanos y conurbados.

Las redes de transporte multimodales desarrolladas en un SIG o en mapas web geo-referenciados son elementos de suma importancia para encontrar rutas óptimas, pues su creación ayuda a:

- Mostrar en un dispositivo móvil o computadora las rutas más cortas para que los usuarios puedan seguir instrucciones.
- Actualizar fácilmente la red de acuerdo a la evolución de las ciudades. Las ciudades están en constante cambio, cada año nuevas vialidades y líneas de transporte son creadas.
- Proveer una lógica a todos los datos digitales del transporte para que un algoritmo los procese.
- Dar información de transporte accesible, fácil y rápidamente.

Aunque son varios los estudios que resuelven el problema de rutas más cortas multimodales y la construcción teórica de una red multimodal, son pocos los trabajos que reportan cómo se construyen estas redes en un SIG o en un mapa WEB geo-referenciado. Bielli et al. (2006) y Wang et al. (2009) construyen una multimodal programando en un SIG una estructura de datos basada en los niveles de jerarquía de Mainguenaud (1996). Los niveles de jerarquía son:

- Nivel *físico*: formado por coordenadas espaciales que definen la localización de objetos como: estacionamientos, calles, intersecciones, etc.
- Nivel *lógico*: es el modelado de la red de transporte. Es decir, representa cómo se relacionan los objetos de la red para dar forma a un sistema de transporte. Por ejemplo, direcciones de calle, restricciones de la red, adyacencias de calles, etc.
- Nivel *aplicativo*: el uso que le dan los modos de transporte a la red. Por ejemplo, líneas de metro o paradas de transporte público.

Mahrous (2012) utiliza las capacidades de visualización 3-D de los SIG para superponer diferentes líneas de autobús que comparten la misma calle, esta visualización ayuda al usuario a comprender mejor un mapa con los resultados de los algoritmos de ruteo. Elias (2007) construye la red peatonal de Hanover, Alemania, usando mapas topológicos, catastrales y archivos CAD del interior de edificios públicos. El autor transforma los polígonos del mapa catastral y los archivos CAD en líneas que utiliza para crear una estructura de red que se combina con el mapa topológico. Mandloi & Thill (2010) desarrollaron una red en un SIG 3-D que modela el movimiento de las personas dentro de los edificios. Los autores asignan nodos a todos los elevadores y escaleras del edificio, y con arcos verticales unen los nodos correspondientes de pisos superiores e inferiores.

Aunque hoy en día existe una gran cantidad de información digital disponible de redes de transporte, todavía es común que ciertos elementos de las ciudades no estén digitalizados en un formato adecuado o simplemente no exista ninguna información disponible. Liu (2011) recolectó mediante trabajo en campo el interior de las plataformas de tren de Múnich, Alemania, para crear un sistema de información que guíe a los usuarios dentro de las plataformas.

A continuación, se muestra con un ejemplo la construcción de la base de datos de la HiCoTiR. Para construir en un SIG la HiCoTiR que se muestra en la Sección 4.2, se propone la base de datos cuyo esquema se muestra en la Figura 4.7. A continuación, se definen cada uno de los campos de la base de datos.

- La tabla geoespacial de *arcos* tiene los siguientes campos:
 - **Identificador:** número entero único para cada campo.
 - **Geometría**⁶: coordenadas que indican la posición, la forma y la proyección del objeto en el espacio.
 - **Longitud:** distancia asociada al arco.
 - **Nombre:** palabra para identificar al objeto que representa en el mundo real.
 - **Modo:** identificador que relaciona al arco con algún modo de transporte.
 - **Línea:** nombre de la línea de transporte público asociada al arco.
 - **Sub-línea:** nombre de la sub-línea⁷ de transporte público asociada al arco.
 - **Acción:** identificador que relaciona el tipo de *acción* (1, 2, 3 o 4) con un arco.
 - **Tiempo:** tiempo de recorrido del arco.
 - **From_id:** identificador asociado al identificador del nodo, que corresponde al nodo cabeza del arco.
 - **To_id:** identificador asociado al identificador del nodo, que corresponde al nodo cola del arco.
- La tabla geoespacial de *nodos*, contiene los siguientes campos:
 - **Identificador:** número entero único para cada campo.
 - **Geometría:** coordenadas que indican la posición del objeto en el espacio.

⁶El nombre de este campo se hereda de la nomenclatura estándar para bases de datos georeferenciadas. Este campo se llama *Geometry* y describe la proyección, la localización y la forma del elemento en el espacio.

⁷En este trabajo una sub-línea se entiende como el subconjunto de paradas que pertenecen al conjunto de paradas de una o más líneas. Un ejemplo de sub-líneas se puede encontrar en la línea 1 de Metrobús de la CDMX.

- **Nombre:** palabra para identificar al objeto que representa en el mundo real.
- La tabla de *paradas*, contiene los siguientes campos:
 - **Identificador:** número entero único para cada campo.
 - **Identificador de parada:** identificador asociado al identificador del nodo, que corresponde al nodo que representan una parada de transporte público.
 - **Tiempo real:** itinerario con la información en tiempo real de las llegadas a las paradas de los vehículos transporte público.
 - **Frecuencia:** número que determina la frecuencia de paso de los vehículos de transporte público asociados a la línea de transporte que llega a la parada.
 - **Modo:** nombre del modo que llega a la parada.
 - **Línea:** nombre de la línea del vehículo que llega a la parada.
 - **Sub-línea:** nombre de la sub-línea del vehículo que llega a la parada.

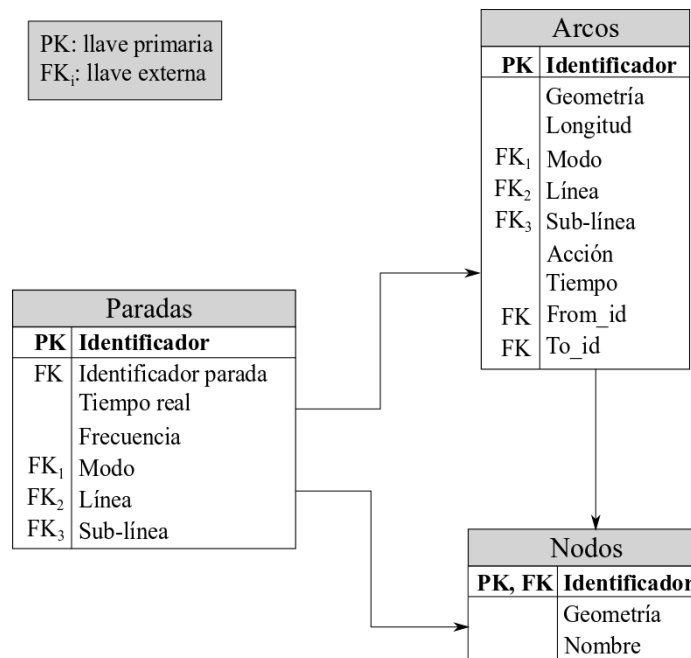


Figura 4.7 Diagrama de la base de datos que almacena la HiCoTiR

Existen diferentes programas para digitalizar redes de transporte y procesar bases de datos espaciales, en este trabajo no se profundiza sobre el tema pero se puede consultar López (2010) para conocer una técnica de digitalización de hiper redes de transporte y el manejo de base de datos. La Tabla 4.3, la Tabla 4.4 y la Tabla 4.5 muestran la base de datos asociada a la hiper red que muestra en la Figura 4.5. El campo Geometría es una cadena larga de caracteres por lo que no se muestra en la Tabla 4.3 y la Tabla 4.4. Además, también se omite el campo Longitud en la Tabla 4.4 pues carece de sentido para motivos del ejemplo.

Tabla 4.3 Tabla de nodos

Identificador	Nombre
O	m_1
1	-
2	a_1
3	-
4	-
5	-
6	a_2
7	m_2
8	-
9	-
10	-
11	a_3
12	-
d	m_3

Tabla 4.4 Tabla de arcos

Identificador	Modo	Línea	Sub-línea	Acción	Tiempo	From_id	To_id
1	$M1$	1	-	acción 1	0	O	1
2	$M1$	1	-	acción 3	30	1	12
3	$M1$	1	-	acción 2	0	12	d
4	$M3$	-	-	acción 3	4	O	2
5	$M2$	$a_1 - a_2$	-	acción 1	0	2	4
6	$M2$	$a_1 - a_2$	-	acción 3	5	4	5
7	$M2$	$a_1 - a_2$	-	acción 2	0	5	6
8	$M3$	-	-	acción 3	1	6	7
9	$M1$	2	-	acción 1	0	7	8
10	$M1$	2	-	acción 3	10	8	9
11	$M1$	2	-	acción 2	0	9	d
12	$M2$	$a_1 - a_3$	-	acción 1	0	2	3
13	$M2$	$a_1 - a_3$	-	acción 3	15	3	10
14	$M2$	$a_1 - a_3$	-	acción 2	0	10	11
15	$M3$	-	-	acción 3	4	11	d

Tabla 4.5 Tabla de paradas

Identificador	Id parada	Tiempo Real	Frecuencia	Modo	Línea	Sub-línea
1	O	9:10, 9:15, 9:20	5	$M1$	1	-
2	2	-	8	$M2$	$a_1 - a_2$	-
3	2	-	5	$M2$	$a_1 - a_3$	-
4	6	-	-	$M2$	-	-
5	7	9:05, 9:15, 9:25	5	$M1$	2	-
6	11	-	-	$M2$	-	-
7	d	-	-	$M1$	-	-

5 Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real

En un estudio realizado por Schulz (2005) de algoritmos para encontrar rutas más cortas con transferencias mínimas en redes dependientes del tiempo que modelan reglas de transferencia realistas, demostró que los algoritmos para redes dependientes del tiempo son entre 1.9 y 2 veces más rápidos que los algoritmos para redes espacio temporales. En este trabajo se modela el sistema de transporte público con información en tiempo real mediante una red dependiente del tiempo, y para el resto de los modos se utiliza una red dirigida o una híper red. Hasta el momento no existen trabajos en la literatura que modelen sistemas de transporte público basados en frecuencias y que tengan información en tiempo real para algunas líneas en un lapso de tiempo; el algoritmo que se propone a continuación encuentra híper rutas más cortas en este modelo.

En la Sección 5.1 se describe el funcionamiento del algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR) que encuentra las híper rutas más cortas en el modelo HiCoTiR y en la Sección 5.2 se presenta el pseudocódigo del algoritmo. En la Sección 5.3 se demuestra matemáticamente que el algoritmo HiRCoCoTiR converge y los resultados que encuentra son mínimos, además se determina la complejidad computacional máxima. Por último, en la Sección 5.4 se presenta un ejemplo de aplicación del algoritmo en la red mostrada en la Sección 4.2.

5.1 Algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real

El algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR) encuentra híper rutas más cortas en la HiCoTiR. El resultado del algoritmo HiRCoCoTiR es un conjunto *Pareto-Optimal* de híper rutas, $p_{ki}^s(t)$, con *tiempo esperado* mínimo, $\lambda_{ki}^s(t)$, y un número de transferencias modales entre 0 y w .

Existen arcos de la HiCoTiR cuyo costo (tiempo de viaje o frecuencia) es el mismo para todos los instantes de tiempo, por lo tanto el *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta compuesta por estos arcos es

el mismo para todos los instantes de tiempo. Las híper rutas cuyo *tiempo esperado* no varía con el tiempo siempre se pueden concatenar con cualquier arco en cualquier instante de tiempo (siempre y cuando se satisfagan las restricciones *lógicas* y de *preferencia*). Por ejemplo, una híper ruta compuesta únicamente de arcos peatonales tiene el mismo tiempo de viaje para cualquier instante de tiempo, pues el tiempo de viaje de los arcos peatonales es constante, entonces, la híper ruta peatonales se puede concatenar con cualquier arco de la híper red. Para identificar si el tiempo de viaje de un arco varía con el tiempo se define una variable booleana b_{ij} para el arco (i, j) tal que:

- Si $\tau_{ij}(t) = c$ para toda $t \in T$, entonces, $b_{ij} = 0$.
- Si $\tau_{ij}(t) = f(t)$ para toda $t \in T$, entonces, $b_{ij} = 1$.

La siguiente definición indica cuándo el *tiempo esperado* de viaje de una híper ruta varía con el tiempo.

Definición 26. Sea p_{od}^s una híper ruta tal que $b_{ij} = 0$ para todos los arcos que la componen. Sea t_c el tiempo comodín tal que $\lambda_{od}^s(t) = \lambda_{od}^s(t_c)$ para toda $t \in T$.

Las siguientes etiquetas describen las características de cada elemento de la híper red, donde el tiempo t representa el instante de tiempo en el cual se inició del viaje. Se observa que en caso de ser necesario es posible asociar el *tiempo comodín*, t_c , a todas las etiquetas que a continuación de describen.

- $p_{ki}^s(t)$ = híper ruta de i hasta d con *estado* s , entrando por el arco (k, i) en el tiempo t .
- $C_e^*(t)$ = *tiempo esperado* mínimo desde el destino d hasta i en el tiempo t tal $e = (i, h(e))$ es el último híper arco de la híper ruta asociada a $C_e^*(t)$.
- $h_e^*(t)$ = conjunto de nodos cabeza del híper arco e en el tiempo t .
- $\Phi_e^*(t)$ = frecuencia combinada de las líneas asociadas al híper arco e que se abordan en el tiempo t .
- $\lambda_{ki}^s(t)$ = *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta $p_{ki}^s(t_c)$ entrando por el arco (k, i) en el tiempo t .
- $w_{ki}^s(t)$ = número de transferencias modales de la híper ruta $p_{ki}^s(t)$
- $\tau_{ij}(t)$ = tiempo de viaje del arco (i, j) en el tiempo t .
- $\xi_{kij}^l(t)$ = tiempo de espera en la parada i del vehículo de la línea l entrando por el arco (k, i) al (i, j) en el tiempo t .
- $LA_h(t)$ = arco último de la híper ruta $p_{ki}^s(t)$.
- $s(e) = \text{estado}$ de la híper ruta $p_{ki}^{s(e)}(t)$ que resulta de la híper *transición* de s y s' .
- $s = \text{estado}$ de la híper ruta $p_{ki}^s(t)$.
- $lastlabel_s(i_k(t))$ = último *tiempo esperado* de viaje hasta el nodo i entrando por el arco (k, i) con *estado* s en el tiempo t y número de transferencias modales menor que $w_{ki}^s(t)$.
- w_{max} = número de transferencias máximas.
- W = contador de transferencias globales.
- w = contador de transferencias locales
- o = nodo origen.
- d = nodo destino.

- $(i, j)_{mod}$ = modo asociado al arco (i, j) .
- $acción(i, j)$ = acción asociada al arco (i, j) .
- b_{ij} = variable booleana que indica si el arco tiene o no información en tiempo real.
- t_c = instante de *tiempo comodín*, toda función asociada a t_c tiene el mismo valor en todos los instantes de tiempo.
- Q_{now} y Q_{next} son conjuntos que almacenan parejas $[i, s]$ tal que $i \in V$ y $s \in S$.
- P_i almacena las hiper rutas $p_{ki}^s(t_c)$ y las hiper rutas $p_{ki}^s(t)$ para toda $k \in \Gamma^{-1}(i)$ y $t \in T$.
- Λ_i almacena los *tiempos esperados* de viaje $\lambda_{ki}^s(t_c)$ y los *tiempos esperados* de viaje $\lambda_{ki}^s(t)$ para toda $k \in \Gamma^{-1}(i)$ y $t \in T$.
- $camina_{ij}^s(t)$ = tiempo de viaje del modo peatonal asociado a la hiper ruta $p_{ki}^s(t)$.
- $bici_{ij}^s(t)$ = tiempo de viaje del modo bicicleta asociado a la hiper ruta $p_{ki}^s(t)$.
- t_{camina} = máximo tiempo de viaje peatonal.
- t_{bici} = máximo tiempo de viaje en bicicleta

A continuación se describen los pasos del algoritmo HiRCoCoTiR y en la Sección 5.2 se presenta el pseudocódigo.

5.1.1 Inicialización

Sea $d \in V$ el nodo destino. El algoritmo HiRCoCoTiR comienza inicializando las etiquetas $C_e^*(t) = \infty$, $\Phi_e^*(t) = \infty$ y $\lambda_{ij}^s(t) = \infty$ para toda $\{i, j\} \in V \setminus d$, $e \in E$, $s \in S$ y $t \in T$. También se inicializan las etiquetas $Q_{now} = \{[d, 0]\}$, $Q_{next} = \emptyset$, $h_e^*(t) = \emptyset$, $\Lambda_i = \emptyset$ y $P_i = \emptyset$ para toda $e \in H$ y $i \in V \setminus d$. Además, $w = 0$, $camina_{ij}^s(t) = 0$ y $bici_{ij}^s(t) = 0$ para toda $\{i, j\} \in V$, $s \in S$ and $t \in T$. El usuario establece los valores t_{camina} y t_{bici} . Por último, $p_{id}^0(t_c) = (d)$, $P_d = \{p_{id}^0(t_c)\}$, $\lambda_{id}^0(t_c) = 0$ y $\Lambda_d = \{\lambda_{id}^0(t_c)\}$ para toda $i \in \Gamma^{-1}(d)$. Se observa que el instante de *tiempo comodín* se asocia a la hiper ruta $p_{id}^0(t_c)$ ya que por construcción $\lambda_{id}^0(t) = 0$ para toda $t \in T$.

Una vez inicializadas todas las etiquetas se busca la información en tiempo real con el procedimiento *ConsultaTR*. Al momento de la consulta se buscan todas las parada que queden dentro de un radio de 1km del origen (aproximadamente 20 minutos caminando), solo se busca información en tiempo real de las paradas cercanas al origen pues es imposible caminar a aquellas paradas que se encuentran más lejos y llegar antes de que parta el último vehículo del cual se posea información; según Jariyasunant et al. (2011a) las predicciones de los tiempos de espera en las paradas de transporte público sólo alcanzan 20 minutos hacia el futuro. La selección de paradas dentro del radio reduce el número de líneas con información en tiempo real que el usuario puede utilizar, solo se pueden conocer las frecuencias de la líneas que hacen parada fuera del radio de 1km, sin embargo este radio puede crecer conforme se mejoren las predicciones.

Si dos paradas consecutivas de la línea l están dentro del radio de 1km, entonces es posible inferir el tiempo de viaje entre estas paradas y usarlo en el cálculo de la hiper ruta más corta; el siguiente ejemplo aclara esta afirmación. Suponga que existen dos paradas consecutivas, a_1 y a_2 , con información en tiempo real de las llegadas de los vehículos a las paradas que pertenecen a las líneas l_1 y l_2 , pero no existe información en tiempo real para los vehículos de la línea l_3 . También suponga que el tiempo de viaje estático entre a_1 y a_2 es de 10 minutos (ver Figura 5.1). El vehículo de la línea l_1 llega a a_1 a las 9:00am

y llega a a_2 a las 9:05, mientras que el vehículo de la línea l_2 llega a a_1 a las 9:03am y llega a a_2 a las 9:10am, entonces el tiempo de viaje del arco (i_1, j_1) a las 9:00am es de 5 minutos y el tiempo de viaje del arco (i_2, j_2) a las 9:03 es de 7 minutos. Después de las 9:03am no hay información en tiempo real disponible en la parada a_1 , entonces, el tiempo de viaje después de las 9:03am entre las paradas a_1 y a_2 es el máximo de los tiempos de viaje con y sin información en tiempo real, es decir, en este ejemplo el tiempo de viaje de los arcos (i_1, j_1) , (i_2, j_2) y (i_3, j_3) es de 10 minutos para todos los instantes de tiempo posteriores a las 9:03am.

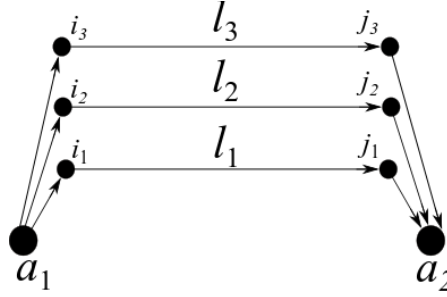


Figura 5.1 Ejemplo de dos paradas consecutivas y tres líneas de transporte

Por lo tanto, en *ConsultaTR* además de actualizar las llegadas de transporte público a las paradas seleccionadas también es posible inferir el tiempo de viaje de los arcos con *acción 3* asociados a algún modo de transporte público siempre y cuando exista información en tiempo real en paradas consecutivas de la línea de transporte asociadas al arco de *acción 3*.

5.1.2 Ciclos

En cada iteración el algoritmo extrae el primer elemento $[j, s]$ del conjunto Q_{now} . Si $Q_{now} = \emptyset$ y $W \leq w_{max}$, todos los elementos de Q_{next} se pasan a Q_{now} y se agrega una unidad al número de transferencias globales W . La razón de los conjuntos Q_{now} y Q_{next} es que el algoritmo HiRCoCoTiR primero encuentra hiper rutas más cortas sin transferencias modales, una vez que Q_{now} este vacío todos los elementos de Q_{next} pasan a Q_{now} y el algoritmo HiRCoCoTiR busca todas las hiper rutas más cortas con una transferencia, este proceso se repite hasta que $W > w_{max}$.

Si $Q_{now} \neq \emptyset$ y $W \leq w_{max}$, se itera sobre los nodos $i \in \Gamma^{-1}(j)$ y se verifica para cada nodo que:

- Si $(i, j)_{mod} = M7$ (transferencia) y $j = d$, entonces, se cambia el modo del arco (i, j) por el modo $M1$ (peatonal) pues no tiene sentido práctico que la ruta comience con un arco de transferencia.
- Si el arco $(i, j)_{mod} = M7$ (transferencia) y $i = o$, entonces, se cambia el modo del arco (i, j) por el modo $M1$ (peatonal) pues no tiene sentido práctico que la ruta termine con un arco de transferencia.
- Si $i = o$, se añade a $\Gamma^{-1}(i)$ un nodo virtual i' y se añade un arco virtual (i', i) a A . El tiempo asociado a (i', i) es el tiempo requerido para entrar a la red de transporte, por ejemplo, el tiempo que toma entrar a una estación de metro o el tiempo que toma abordar un auto/bicicleta.

Además, por cada $i \in \Gamma^{-1}(j)$ se itera sobre los nodos $k \in \Gamma^{-1}(i)$ y se verifica que no se cumpla que $(k, i)_{mod} = (i, j)_{mod} = M7$, pues no tiene sentido concatenar dos arcos de transferencia.

Ahora, para cada $t \in T$, se obtiene de P_j la híper ruta hasta j con *estado* s en el tiempo t , $p_{ij}^s(t)$. Si $p_{ij}^s(t) \notin P_j$, entonces, se obtiene de P_j la híper ruta hasta j con *estado* s en el tiempo t_c , $p_{ij}^s(t_c)$.

Se verifican los siguientes casos:

- Si el último arco de la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ tiene modo $M7$ y $(i,j)_{mod} = M7$, entonces se toma el siguiente $i \in \Gamma^{-1}(j)$, ya que de lo contrario se podrían concatenar dos arcos de modo $M7$ lo cual no tiene sentido.
- Si $b_{ij} = 1$, $accion(i,j) = 1$ (*abordaje*), la híper ruta hasta j entrando por el arco (i,j) con *estado* s no depende del tiempo, $p_{ij}^s(t_c) \neq \emptyset$ y el último arco de $p_{ij}^s(t_c)$ es un arco de viaje, entonces se rompe el ciclo y el algoritmo continúa en el siguiente instante de tiempo. Si no se rompiera el ciclo, se estaría abordando una línea de transporte público sin información en tiempo real a través de un arco que depende del tiempo, lo cual no tiene sentido pues solo es posible abordar los vehículos de las líneas de transporte público sin información en tiempo real a través de arcos que no tengan tiempo real.

Antes de concatenar el arco (i,j) a la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ (ó $p_{ij}^s(t_c)$), se verifica que el último *tiempo esperado* de viaje de $p_{ij}^s(t)$ (ó $p_{ij}^s(t_c)$), $lastlabel_s(j_i(t))$ (ó $lastlabel(j_i(t_c))$), sea mayor que el *tiempo esperado* de viaje $\lambda_{ij}^s(t)$ (ó $\lambda_{ij}^s(t_c)$). El objetivo de esta condición es eliminar híper rutas *dominadas* con respecto al número de transferencias, es decir, previene que se concatenen híper rutas hasta j con *estado* s si ya han sido encontradas otras híper rutas hasta j con *estado* s que tienen menor número de transferencias y además son más rápidas. En caso de que la condición se cumpla, se procede a concatenar el arco (i,j) .

5.1.3 Concatenación

Si $accion(i,j) \in \{2,3,4\}$ ó $accion(i,j) = 1$ y $t \leq t_l^i$ para alguna $t_l^i \in T_l^i$, entonces con el procedimiento *calculaDelta* se concatena el arco (i,j) a la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ (o $p_{ij}^s(t_c)$). Si $accion(i,j) = 1$ y $t > t_l^i$ para toda $t_l^i \in T_l^i$, entonces, con el procedimiento *calculaHiperDelta* se concatena el híper arco de *abordaje* (i,j) a la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ (ó $p_{ij}^s(t_c)$). Las funciones de ambos procedimientos deben evaluarse en un instante de tiempo contenido en T para que sean consideradas por el algoritmo. Por ejemplo, si $t + \xi_{kij}^l(t) = t'$ y $t' \notin T$, entonces se debe añadir una variable r tal que $t + \xi_{kij}^l(t) + r = t'$ y $t' \in T$, en la Sección 4.1.1 se muestra cómo calcular r . Para simplificar la notación en los siguientes párrafos no se hace explícita r .

5.1.3.1 calculaDelta

Primero se verifican que se cumplan las condiciones de tiempo de viaje máximo en bicicleta y peatonal. Si $(i,j)_{mod} = M1$ y el tiempo de viaje del arco (i,j) evaluado en el instante de tiempo $t + \xi_{kij}^l(t)$ más el tiempo de viaje peatonal de la híper ruta $p_{ij}^s\left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}\left(t + \xi_{kij}^l(t)\right)\right)$ es mayor que t_{camina} , la concatenación no procede, es decir, si $\tau_{ij}\left(t + \xi_{kij}^l(t)\right) + camina_{ij}^s\left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}\left(t + \xi_{kij}^l(t)\right)\right) > t_{camina}$ la concatenación no se realiza y se pasa al siguiente $i \in \Gamma^{-1}(j)$. Análogamente, si $(i,j)_{mod} = \{M2, M3\}$ y $\tau_{ij}\left(t + \xi_{kij}^l(t)\right) +$

$bici_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) > t_{bici}$ la concatenación no se realiza y se pasa al siguiente $i \in \Gamma^{-1}(j)$.

Con el procedimiento *CalculaEstadoTransferencias*, se encuentra el *estado* s' que resulta de la concatenación de la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ con el arco (i, j) y además se determina si la concatenación genera una transferencia local w . *CalculaEstadoTransferencias* está basado en el AEF mostrado en la Figura 4.2 de la Sección 4.1.2.

Si la concatenación es *viable*, $s' \neq 0$, y el *tiempo esperado* de viaje, $\xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t) \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ es menor que el *tiempo esperado* de viaje alguna híper ruta *viable* $p_{ki}^{s''}(t)$, entonces con el procedimiento *EstadosPreferidos* se encuentra el conjunto PS_s . Si no se cumple la condición mencionada la concatenación no se realiza y se pasa al siguiente $i \in \Gamma^{-1}(j)$.

Si $\xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t) \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ es menor que el *tiempo esperado* de al menos una híper ruta $p_{ki}^{s''}(t)$, tal que $s'' \in PS_s$, entonces se actualizan las siguientes etiquetas:

- $p_{ki}^{s'}(t) = p_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) \cup (i, j)$.
- $w_{ki}^{s'}(t) = w_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) + w$.
- $\lambda_{ki}^{s'}(t) = \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$.
- Si $(i, j)_{mod} = M1$, entonces, $camina_{ki}^{s'}(t) = \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + camina_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$, de lo contrario $camina_{ki}^{s'}(t) = camina_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$.
- Si $(i, j)_{mod} \in \{M1, M3\}$, entonces, $bici_{ki}^{s'}(t) = \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + bici_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$, de lo contrario $bici_{ki}^{s'}(t) = bici_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$.
- $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^{s''}(t)$.
- $P_i = P_i \setminus p_{ki}^{s''}(t)$. La híper ruta $p_{ki}^{s'}(t)$ *domina* a $p_{ki}^{s''}(t)$.
- Si $b_{ij} = 0$ y $b_{jl} = 0$ para todos los arcos (j, l) de la híper ruta $p_{ij}^s \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ entonces $t = t_c$.

Se añade $\lambda_{ki}^{s'}(t)$ (ó $\lambda_{ki}^{s'}(t_c)$) al conjunto Λ_i y se añade $p_{ij}^{s'}(t)$ (o $p_{ij}^{s'}(t_c)$) al conjunto P_i . Si el modo del arco a concatenar $(i, j)_{mod} = M7$ se añade $[i, s']$ a *Qnext* al menos que ya se encuentre en *Qnext*. Si $(i, j)_{mod} \neq M7$ se añade $[i, s']$ a *Qnow* al menos que ya se encuentre en *Qnow*. Si $t = t_c$ se omiten los siguientes instantes de tiempo y se pasa directamente al siguiente $k \in \Gamma^{-1}(i)$.

5.1.3.2 calculaHiperDelta

El procedimiento *calculaHiperDelta*, se encarga de concatenar el híper arco e , con la híper ruta $p_{ij}^s(t)$, tal que $j \in h(e)$. Por construcción e tiene modo $M4$, por lo tanto, la concatenación de e con $p_{ij}^s(t)$ siempre es *viabile* pues necesariamente la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ tiene estado 2, 7, 11, 12, 13, 16 ó 17 (ver *híper transición de estados* en la Sección 4.1.2).

En *CalculaHiperDelta* primero se obtiene la híper ruta $p_{ki}^{s'}(t)$ (ó $p_{ki}^{s'}(t_c)$) tal que el último arco de esta híper ruta es un híper arco de *abordaje e*. Si $p_{ki}^{s'}(t) \neq \emptyset$, entonces, con el procedimiento *determinaHiperEstados* se encuentra el estado $s(e)$ que resulta de la *híper transición* entre los estados s y s' . Si $p_{ki}^{s'}(t) = \emptyset$, entonces $s(e) = s$.

Si el *tiempo esperado* de la híper ruta $p_{ij}^s(t + \omega_e(t))$, es menor que el *tiempo esperado* de alguna híper ruta $p_{ki}^{s''}(t)$ tal que $s'' \in S$, entonces, se actualiza la frecuencia del híper arco e usando la frecuencia de la línea l que corresponde al arco (i, j) , es decir, $\Phi_e^*(t) = \Phi_e^*(t) + \varphi_{ij}^l(t)$.

Si $\Phi_e^*(t) = \varphi_{ij}^l(t)$, entonces $C_e^*(t)$ es igual al *tiempo esperado* de la híper ruta $p_{ij}^s(t + \omega_e(t))$ más el tiempo promedio de espera en la parada i , es decir, $C_e^*(t) = \lambda_{ij}^s(t + \omega_e(t)) + 1/\varphi_{ij}^l(t)$. Si $\Phi_e^*(t) \neq \varphi_{ij}^l(t)$, entonces, $C_e^*(t)$ se calcula como la probabilidad combinada del *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta asociada a $C_e^*(t)$ con el *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta $p_{ij}^s(t + \omega_e(t)) \cup (i, j)$, es decir, $C_e^*(t) = C_e^*(t) - (C_e^*(t) + \lambda_{ij}^s(t + \omega_e(t))) \varphi_{ij}^l(t) / \Phi_e^*(t)$.

Si $C_e^*(t)$ es menor que el *tiempo esperado* de viaje de alguna híper ruta $p_{ki}^{s''}(t)$ tal que $s'' \in S$, se encuentra el conjunto de *estados* preferidos, $PS_{s(e)}$. De lo contrario, la concatenación no procede.

Si $C_e^*(t)$ es menor que el *tiempo esperado* de al menos una híper ruta $p_{ki}^{s''}(t)$, tal que $s'' \in PS_{s(e)}$, entonces se actualizan las siguientes etiquetas:

- $p_{ki}^{s(e)}(t) = p_{ki}^{s'}(t) \cup p_{ij}^s(t + \omega_e(t)) \cup (i, j),:$
- $\lambda_{ki}^{s(e)}(t) = C_e^*(t)$
- $h_e^*(t) = h_e^*(t) \cup (i, j)$
- $w_{ij}^{s(e)}(t) = \max\{w_{ij}^s(t + \omega_e(t)), w_{ki}^{s'}(t)\}$
- $camina_{ki}^{s(e)}(t) = \max\{camina_{ij}^s(t + \omega_e(t)), camina_{ij}^{s'}(t)\}.$
- $bici_{ki}^{s(e)}(t) = \max\{bici_{ij}^s(t + \omega_e(t)), bici_{ij}^{s'}(t)\}.$
- $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^{s''}(t).$
- $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^{s'}(t).$
- $P_i = P_i \setminus p_{ki}^{s''}(t).$
- $P_i = P_i \setminus p_{ki}^{s'}(t).$
- $\Lambda_i = \Lambda_i \cup \lambda_{ki}^{s(e)}(t)$
- $P_i = P_i \cup p_{ki}^{s(e)}(t)$

- Si $b_{jl} = 0$ para todos los arco (j, l) de las híper rutas $p_{ij}^s(t + \omega_e(t))$ y $p_{ki}^{s'}(t)$, entonces, $t = t_c$.

La pareja $[i, s']$ se añade a $Qnow$ si aún no se encuentra ahí. Si $t = t_c$ se omiten los siguientes instantes de tiempo y se pasa directamente al siguiente $k \in \Gamma^{-1}(i)$.

5.1.4 Optimalidad

El algoritmo termina cuando $Qnow = \emptyset$ o $W > w_{max}$. Cuando $Qnow$ se encuentra vacío es un indicador de que:

1. No existe una híper ruta hasta j que *domine* a cualquier híper ruta $p_{ij}^s(t)$ para toda $\{i, j\} \in V$, $s \in S$ y $t \in T$, lo que se interpreta como, no existe una pareja $[j, s]$ que satisfaga la condición de $lastlabel_s(j_i(i))$.
2. Es imposible concatenar cualquier arco (i, j) con cualquier híper ruta $p_{ij}^s(t)$ para toda $\{i, j\} \in V$, $s \in S$ y $t \in T$, pues dicha concatenación no produce híper rutas más cortas hasta i de las que previamente ya han sido producidas. O también, es posible que dicha concatenación no sea *viable* o sobrepase el límite de transferencias globales.

Por otro parte, si $W > w_{max}$ no es necesario seguir calculado híper rutas pues el usuario no quiere resultados con más transferencias de las que ella/él estableció.

El resultado del algoritmo es un conjunto *Pareto-Optimal* de parejas $(\lambda_{o'o}^s(t), w_{i'i}^s(t))$, tal que, $\lambda_{o'o}^s(t)$ y $w_{o'o}^s(t)$ son el *tiempo esperado* de viaje y el número de trasferencias de la híper ruta $p_{o'o}^s(t)$, respectivamente. El tiempo t indica la hora de partida del nodo origen, cuando $t = t_c$ significa que el usuario puede salir del origen cuando lo desee.

La Figura 5.2 muestra un diagrama de flujo simplificado del algoritmo HiRCoCoTiR, esta figura representa los pasos descritos en las Secciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3.

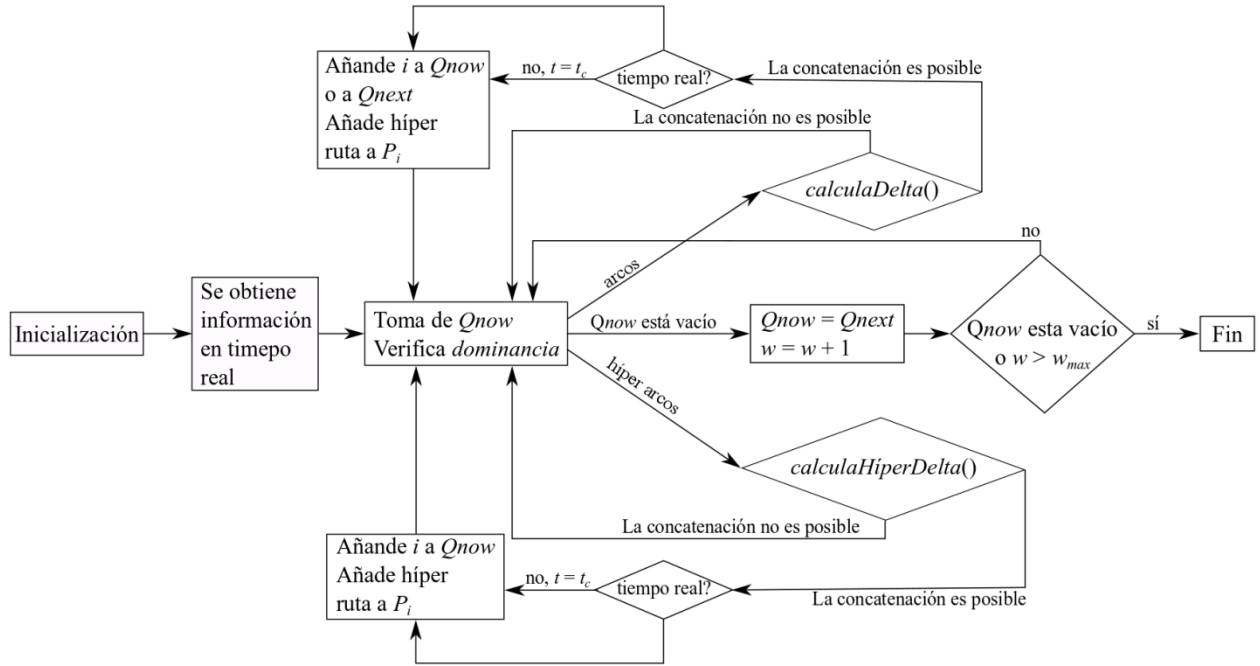


Figura 5.2 Diagrama de flujo simplificado

5.2 Pseudo-código del algoritmo HiRCoCoTiR

Procedimiento. *Híper Rutas más Cortas con Información en Tiempo Real*

Sea d el nodo destino y sea $0 \in S$, el estado inicial.

$T = \{t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, (|T| - 1)\Delta t\}$

$\lambda_{ki}^s(t) = \infty \forall \{k, i\} \in V \setminus d, t \in T, s \in S$

$C_e^*(t) = \infty \forall t \in T, e \in E$: e es un hiper arco de *abordaje*

$\Phi_e^*(t) = \infty \forall t \in T, e \in E$: e es un hiper arco de *abordaje*

$h_e^*(t) = \emptyset \forall t \in T, e \in E$: e es un hiper arco de *abordaje*

$camina_{ki}^s(t) = 0 \forall \{k, i\} \in V, t \in T, s \in S$

$bici_{ki}^s(t) = 0 \forall \{k, i\} \in V, t \in T, s \in S$

$\Lambda_i = \emptyset \forall i \in V \setminus d$

$P_i = \emptyset \forall i \in V \setminus d$

$\lambda_{kd}^0(t_c) = 0 \forall k \in \Gamma^{-1}(d)$

$P_d = \{p_{kd}^0(t_c)\}$

$\Lambda_d = \{\lambda_{kd}^0(t_c)\}$

$W = 0$

$Qnow = \{(d, 0)\}$

$Qnext = \emptyset$

ConsultaTR #función que consulta la información en tiempo real en las paradas que se encuentran a 1km del origen, además esta función actualiza el tiempo de algunos arcos

WHILE($W \leq w_{max}$ **AND** $Qnow \neq \emptyset$){

WHILE($Qnow \neq \emptyset$){

SELECT(j, s) **FROM** $Qnow$;

$Qnow = Qnow \setminus (j, s)$;

FOR($i \in \Gamma^{-1}(j)$){


```

( $s, w$ ) = dameEstadosyTransferencias( $s_x, (i, j), t$ );
IF  $\left( s \neq 0 \text{ AND } \left( \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) \leq \lambda_{ij}^{s_y}(t) \right) \right)$ 
   $PS_s = preferredStates(s)$ ;
ELSE
   $PS_s = \emptyset$ ;
FOR ( $s_y \in PS_s$ ) {
  IF  $\left( \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) \leq \lambda_{ij}^{s_y}(t) \right)$  {
     $p_{ki}^{s_x}(t) = p_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) \cup (i, j)$ ;
     $\lambda_{ki}^s(t) = \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ ;
     $w_{ki}^s(t) = w_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) + w$ ;
    IF  $((i, j)_{mod} = M1)$ 
       $camina_{ki}^s(t) = \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) + camina_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ ;
    ELSE IF  $((i, j)_{mod} \in \{M3, M4\})$ 
       $bici_{ki}^s(t) = \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) + bici_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ ;
    ELSE {
       $camina_{ki}^s(t) = camina_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ ;
       $bici_{ki}^s(t) = bici_{ij}^{s_x} \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$ ;
    }
  };
  IF  $\left( b_{ij} = 0 \text{ AND } b_{jl} = 0 \forall (j, l) \text{ en la hiper ruta } p_{ij}^s \left( t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left( t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right) \right)$ 
     $t = t_c$ ;
     $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^{s_y}(t)$ ;
     $P_i = P_i \setminus p_{ki}^{s_y}(t)$ ;
     $\Lambda_i = \Lambda_i \cup \lambda_{ki}^s(t)$ ;
     $P_i = P_i \cup p_{ki}^s(t)$ ;
    IF  $((i, s) \notin Q_{now} \text{ AND } w = 0)$   $Q_{now} = Q_{now} \cup [i, s]$ ;
    IF  $((i, s) \notin Q_{next} \text{ AND } w = 1)$   $Q_{next} = Q_{next} \cup [i, s]$ ;
    BREAK;
  }
}

```

Sub-procedimiento. *CalculaHiperDelta* $(s_x, (i, j), (k, i), t, h_e^*(t), p_{ij}^{s_x}(t))$

```

GET  $p_{ki}^s(t)$  FROM  $P_i$ 
IF  $(p_{ki}^s(t) \neq \emptyset)$ 
   $s(e) = getHyperState(s_x, s)$ ;
ELSE
   $s(e) = s_x$ ;
IF  $\left( \lambda_{ij}^{s_x} \left( t + \Phi_e^*(t) \right) < \lambda_{ki}^{s_y}(t) \right)$  {
   $\Phi_e^*(t) = \Phi_e^*(t) + \varphi_{ij}^l(t)$ ;

```

```

IF  $(\Phi_e^*(t) = \varphi_{ij}^l(t))$ 
   $C_e^*(t) = \lambda_{ij}^{s_x}(t + \Phi_e^*(t)) + \frac{1}{\varphi_{ij}^l(t)};$ 
ELSE
   $C_e^*(t) = C_e^*(t) - (C_e^*(t) - \lambda_{ij}^{s_x}(t + \Phi_e^*(t))) \left( \varphi_{ij}^l(t) / \Phi_e^*(t) \right);$ 
IF  $(C_e^*(t) \leq \lambda_{ki}^{s_y}(t))$ 
   $PS_{s(e)} = preferredStates(s, s_x);$ 
ELSE
   $PS_{s(e)} = \emptyset;$ 
FOR  $(s_y \in PS_s)\{$ 
  IF  $(C_e^*(t) \leq \lambda_{ki}^{s_y}(t))\{$ 
     $p_{ki}^{s(e)}(t) = p_{ij}^{s_x}(t + \Phi_e^*(t)) \cup p_{ki}^s(t) \cup (i, j);$ 
     $\lambda_{ki}^{s(e)}(t) = C_e^*(t);$ 
     $h_e^*(t) = h_e^*(t) \cup (i, j);$ 
     $w_{ki}^{s(e)}(t) = \max\{w_{ij}^{s_x}(t + \omega_e(t)), w_{ki}^s(t)\};$ 
     $camina_{ki}^{s(e)}(t) = \max\{camina_{ij}^{s_x}(t + \omega_e(t)), camina_{ki}^s(t)\};$ 
     $bici_{ki}^{s(e)}(t) = \max\{bici_{ij}^{s_x}(t + \omega_e(t)), bici_{ki}^s(t)\};$ 
     $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^{s_y}(t);$ 
     $\Lambda_i = \Lambda_i \setminus \lambda_{ki}^s(t);$ 
     $P_i = P_i \setminus P_{ki}^{s_y}(t);$ 
     $P_i = P_i \setminus p_{ki}^s(t);$ 
    IF  $(b_{jl} = 0 \forall (j, l) \text{ en la híper ruta } p_{ij}^{s_x}(t + \omega_e(t)) \text{ AND } p_{ki}^s(t))$ 
       $t = t_c;$ 
       $\Lambda_i = \Lambda_i \cup \lambda_{ki}^{s(e)}(t);$ 
       $P_i = P_i \cup p_{ki}^{s(e)}(t);$ 
      IF  $((i, s(e)) \notin Q_{now}) Q_{now} = Q_{now} \cup [i, s(e)]$ 
      BREAK;
    }
  }
}

```

Sub-procedimiento. *CalculaEstadoTransferencias* $(s_x, (i, j)_{mod}, t, w_{ij}^s(t))$

```

 $(s, k) = (0, 0);$ 
SWITCH  $(i, j)_{mod}$ 
CASE  $(\in M1)\{$ 
  IF  $(s_x = 0) s = 1;$ 
  IF  $(s_x = 5) s = 12;$ 
  IF  $(s_x \in \{1, 2, 7, 11, 12, 13, 16, 17\}) s = s_x;$ 
  BREAK;
}
CASE  $(\in M2)\{$ 

```

```

    IF( $s_x \in \{0,4\}$ ) $s = 4$ ;
    BREAK;
}
CASE( $\in M3$ ){
    IF( $s_x = 0$ ) $s = 3$ ;
    IF( $s_x = 1$ ) $s = 6$ ;
    IF( $s_x = 2$ ) $s = 8$ ;
    IF( $s_x = 5$ ) $s = 9$ ;
    IF( $s_x = 7$ ) $s = 10$ ;
    IF( $s_x = 11$ ) $s = 14$ ;
    IF( $s_x = 12$ ) $s = 15$ ;
    IF( $s_x \in \{3,6,8,9,10,14,15\}$ ) $s = s_x$ ;
    BREAK;
}
CASE( $\in M4$ ){
    IF( $s_x = 0$ ) $s = 1$ ;
    IF( $s_x = 2$ ) $s = 7$ ;
    IF( $s_x = 5$ ) $s = 12$ ;
    IF( $s_x \in \{1,7,11,12,13,16,17\}$ ) $s = s_x$ ;
    BREAK;
}
CASE( $\in M5$ ){
    IF( $s_x = 0$ ) $s = 2$ ;
    IF( $s_x = 1$ ) $s = 7$ ;
    IF( $s_x = 5$ ) $s = 12$ ;
    IF( $s_x \in \{2,7,11,12,13,16,17\}$ ) $s = s_x$ ;
    BREAK;
}
CASE( $\in M6$ ){
    IF( $s_x \in \{0,4\}$ ) $s = 4$ ;
    BREAK;
}
CASE( $\in M7$ ){
    IF( $w_{ij}^s(t) \leq w_{max}$ ){
         $k = w_{ij}^s(t) + 1$ ;
        IF( $s_x = 4$ ) $s = 11$ ;
        IF( $s_x = 14$ ) $s = 17$ ;
        IF( $s_x \in \{3,6,8,10\}$ ) $s = 13$ ;
        IF( $s_x \in \{9,15\}$ ) $s = 16$ ;
        BREAK;
    }
}
DEFAULT
    PRINT("Error en el cálculo de estados");

Sub-procedimiento.determinaHiperEstados( $s_x, s_z$ )
    IF( $s_x > s_z$ )
         $s(e) = s_z$ ;
    ELSE

```

$$s(e) = s_x;$$

Sub-procedimiento. *estadosPreferidos* (s)

$PS_s = \emptyset$;

IF($s = 1$) $PS_s = \{1\}$;

IF($s = 2$) $PS_s = \{2\}$;

IF($s = 4$) $PS_s = \{4\}$;

IF($s = 5$) $PS_s = \{5\}$;

IF($s = 7$) $PS_s = \{7\}$;

IF($s = 9$) $PS_s = \{3, 9, 15\}$;

IF($s = 11$) $PS_s = \{7, 11\}$;

IF($s = 12$) $PS_s = \{7, 12\}$;

IF($s = 14$) $PS_s = \{3, 6, 8, 9, 10, 14\}$;

IF($s = 15$) $PS_s = \{3, 6, 8, 9, 10, 15\}$;

IF($s \in \{3, 6, 8, 10\}$) $PS_s = \{3, 6, 8, 10\}$;

IF($s \in \{13, 16, 17\}$) $PS_s = \{7, 11, 12, 13, 16, 17\}$;

5.3 Resultado mínimo y complejidad

Para demostrar que el algoritmo HiRCoCoTiR siempre encuentra un resultado mínimo primero se demostraran los Lemas 1, 2 y 3. Después se determinará que la complejidad del algoritmo HiRCoCoTiR es al menos del orden de $O(|V|^5|T|^2|S|k)$.

Lema 1. *El algoritmo HiRCoCoTiR converge en un número finito de pasos.*

Para demostrar el Lema 1 es suficiente probar que Q_{now} y Q_{next} se vacían después de un número finito de pasos. Suponga que Q_{now} se vacía después de un número finito de pasos, entonces por construcción del algoritmo Q_{next} se vaciará después de un número finito de pasos, ya que Q_{next} se llena con Q_{now} a los más W veces tal que $W < \infty$. Entonces, para demostrar el Lema es suficiente probar que Q_{now} se vacía después de un número finito de pasos.

Suponga que Q_{now} no se vacía después de un número finito de pasos, entonces, existe al menos una pareja nodo-estado $[i, s]$ que entra a Q_{now} un número infinito de veces, lo que implica que la etiqueta $\lambda_{ki}^s(t)$ es mejorada infinitamente, por lo tanto hay un número infinito de hiper rutas más cortas hasta i lo que contradice que G es finita. ■

Lema 2. *En cada paso del algoritmo $\lambda_{ki}^s(t)$ es igual a un número finito o un número infinito. Si $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$, entonces no existe una hiper ruta con estado s desde i hasta d , entrando por el arco (k, i) en el tiempo t . Si $\lambda_{ki}^s(t) < \infty$ tal que $c < \infty$, entonces c es una cota superior de la hiper ruta con estado s más corta desde i hasta d , entrando por el arco (k, i) en el tiempo t .*

Se demostrará el Lema 2 por inducción sobre el número de arcos de la ruta de i a d . Supongamos que el número de arcos de la hiper ruta de i a d $|A(p_{ki}^s(t))| = 0$, entonces $\lambda_{id}^s(t) = 0$ para toda: $i \in \Gamma^{-1}(d)$, $t \in T$. Si $|A(p_{ki}^s(t))| = 1$, entonces $\lambda_{ki}^s(t) = \xi_{kid}^l(t) + \tau_{id}(t + \xi_{kid}^l(t)) + \lambda_{id}^{s'}(t + \xi_{kid}^l(t) + \tau_{id}(t + \xi_{kid}^l(t)))$. Es inmediato que $\lambda_{id}^{s'}(t + \xi_{kid}^l(t) + \tau_{id}(t + \xi_{kid}^l(t))) = 0$ ya que $\lambda_{id}^s(t) = 0$ para toda $t \in T$. Por construcción del modelo HiCoTiR $\xi_{kid}^l(t) < \infty$, entonces, $\tau_{id}(t + \xi_{kid}^l(t)) < \infty$ ya que $\xi_{kid}^l(t)$ se calcula como un

tiempo de espera en i hasta que el arco (i, d) esté disponible en el tiempo t . Por lo tanto, si $|A(p_{ki}^s(t))| = 1$, entonces, $\lambda_{ki}^s(t) < c$ si $\xi_{kid}^l(t) < \infty$ o $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$ si $\xi_{kid}^l(t) \geq \infty$.

Suponga que el Lema 2 es válido para híper rutas $p_{ki}^s(t)$ tal que $|A(p_{ki}^s(t))| = p$. Sea $p_{ki}^s(t)$ tal que $|A(p_{ki}^s(t))| = p + 1$. Hay dos casos, se concatena un arco o se concatena un híper arco.

Si se concatena un arco (i, j) . Entonces $\lambda_{ki}^s(t) = \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)))$. Por inducción se sabe que $\lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))) < c$ ó $\lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))) \geq \infty$. Si $\lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))) \geq \infty$, entonces no existe una híper ruta hasta j , por lo tanto $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$. Ahora, si $\lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))) < c$ y se sabe que $\xi_{kij}^l(t) < \infty$, entonces, $\tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) < \infty$ ya que $\xi_{kij}^l(t)$ se calcula también como un tiempo de espera en i hasta que el arco (i, j) esté disponible en el tiempo t . Por lo tanto, si $|A(p_{ki}^s(t))| = p + 1$, entonces, $\lambda_{ki}^s(t) < c$ si $\xi_{kij}^l(t) < \infty$ o $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$ si $\xi_{kij}^l(t) \geq \infty$.

Si se concatena un híper arco e . Entonces, $\lambda_{ki}^s(t) = \omega_{e'}(t) + \sum_{j \in h(e')} \pi_{e',l}(t) \lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t))$. Por inducción sabemos que $\lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t)) < c$ ó $\lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t)) \geq \infty$. Si $\lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t)) \geq \infty$, entonces no existe una híper ruta hasta j , por lo tanto $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$. Por otro lado si $\lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t)) < c$, por definición $\omega_{e'}(t) < \infty$ y $\pi_{e',l}(t) < 1$ para toda $t \in T$, entonces $\lambda_{ki}^s(t) < c$.

■

Lema 3. Cuando termina el algoritmo $\lambda_{ki}^s(t) \leq \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)))$ si el último arco de $p_{ki}^s(t)$ es un arco, o $\lambda_{ki}^s(t) \leq \omega_{e'}(t) + \sum_{j \in h(e')} \pi_{e',l}(t) \lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t))$ si el último arco de $p_{ki}^s(t)$ es un híper arco. Las desigualdades se cumplen para toda $i \in \Gamma^{-1}(j)$, $t \in T$.

Se demostrará por contradicción, suponga que existe $i \in \Gamma^{-1}(j)$, $t \in T$ tal que $\lambda_{ki}^s(t) > \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{s'}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)))$ o que $\lambda_{ki}^s(t) > \omega_{e'}(t) + \sum_{j \in h(e')} \pi_{e',l}(t) \lambda_{ij}^{s'}(t + \omega_{e'}(t))$. Entonces por construcción del algoritmo, es posible que i ingrese a Q_{now} o Q_{next} lo que contradice que el algoritmo ha terminado.

■

Teorema 1. Cuando el algoritmo HiRCoCoTiR termina, todos los elementos de la estructura Λ_i son iguales a un número infinito o un número finito. Si $\lambda_{ki}^s(t) \geq \infty$, entonces no existe una híper ruta con estado s desde i hasta d , entrando por el arco (k, i) en el tiempo t . Si $\lambda_{ki}^s(t) < \infty$, entonces la híper ruta con estado s desde i hasta d , entrando por el arco (k, i) en el tiempo t es mínima.

Por el Lema 1 se sabe que el algoritmo converge. Por el Lema 2 se sabe que si existe una híper ruta con estado s de i hasta d entrando por el arco (k, i) en el tiempo t , entonces, $\lambda_{ki}^s(t) < c$.

Sea, $p_{ki}^s(t) = \{i, e_i, j, e_j, \dots d\}$ la híper ruta que corresponde a la etiqueta $\lambda_{ki}^s(t)$. Suponga que existe $p_{ki}^{*s}(t) = \{i, e_i, l, e_l, \dots d\}$ con etiqueta $\lambda_{ki}^{*s}(t)$ tal que $\lambda_{ki}^{*s}(t) < \lambda_{ki}^s(t)$, entonces $\lambda_{ki}^s(t) > \xi_{kim}^l(t) + \tau_{im} \left(t + \xi_{kim}^l(t) \right) + \lambda_{im}^{s'} \left(t + \xi_{kim}^l(t) + \tau_{im} \left(t + \xi_{kim}^l(t) \right) \right)$, lo que contradice el Lema 3, cuando el algoritmo ha finalizado no existe un nodo en $\Gamma(i)$ con una etiqueta tal que $\lambda_{ki}^s(t) > \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) + \lambda_{ij}^{s'} \left(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij} \left(t + \xi_{kij}^l(t) \right) \right)$. Por lo tanto, la etiqueta $\lambda_{ki}^s(t)$ de la híper ruta $p_{ki}^s(t)$ es mínima. ■

Lema 4. En el algoritmo HiRCoCoTiR la cardinalidad de $Qnow$ es a lo más $|V||S|$, es decir, $|Qnow| \leq |V||S|$. Donde V es el conjunto de nodos de la híper red y S es el conjunto de estados.

Se demostrará por contradicción, suponga que $|Qnow| > |V||S|$, entonces existen dos parejas (v, s_i) y (v, s_j) tal que $s_i = s_j$, lo que contradice la definición del algoritmo ya que si $(v, s_i) \in Qnow$, (v, s_j) no puede entrar a $Qnow$. ■

Lema 5. En el algoritmo HiRCoCoTiR se necesitan a lo más $|V|^2|T||S|$ iteraciones para actualizar todas las etiquetas de algún nodo $i \in V$.

Por definición el tamaño de la matriz Λ_i es $|V||T||S|$. Sea $p_{ki}^s(t) \in \Lambda_i$, se necesitan a lo más $|\Gamma^{-1}(i)|$ pasos en el algoritmo para asegurar que la etiqueta $\lambda_{ki}^s(t)$ quede fija, para asegurar que las etiquetas de $\lambda_{ki}^s(t)$ queden fijas para todo i se necesitan $\sum_{i \in V} |\Gamma^{-1}(i)| = |V|$ pasos. Entonces, para actualizar todas las etiquetas de la matriz Λ_i se necesitan a lo más $|V|^2|T||S|$ iteraciones del algoritmo. ■

Teorema 2. El algoritmo HiRCoCoTiR tiene una complejidad computacional de a lo más $O(|V|^5|T|^2|S|w)$, donde V es el conjunto de nodos de la híper red, T es el conjunto de instantes de tiempo, S es el conjunto de estados y w es el máximo número de transferencias admitidas.

Sea $[j, s]$ una pareja nodo-estado extraída de $Qnow$, de los tres ciclos FOR del procedimiento principal, es inmediato que el nodo (j, s) se itera a lo más $|V|^2|T|$ veces. Por el Lema 4, se sabe que $|Qnow| = |V||S|$ y por el Lema 5 se sabe que se necesitan a lo más $|V|^2|T||S|$ iteraciones del algoritmo para actualizar todas las etiquetas de la matriz Λ_i . Si $Qnow$ se vacía y llena a lo más w veces, entonces, se necesitan a lo más $|V|^5|T|^2|S|w$ iteraciones para terminar el algoritmo HiRCoCoTiR. Por lo tanto, el la complejidad computacional del algoritmo HiRCoCoTiR es a lo más $O(|V|^5|T|^2|S|w)$. ■

Como se demostró en Lema 1, el algoritmo termina en número finito de pasos por lo que es imposible que se formen un número infinito de ciclos. Sin embargo, por la construcción del algoritmo HiRCoCoTiR es posible que se formen algunos ciclos no realistas. Por ejemplo, sea $p_{uu} = (u, v, w, u)$ un ciclo tal que todos los arcos de p_{uu} son peatonales y p_{uu} tiene un tiempo de viaje de 7 minutos. El nodo u representa una parada de transporte público donde el siguiente vehículo arribar'a en un tiempo de 8 minutos. Entonces, la híper ruta óptima p_{od} contiene el ciclo p_{uu} pues el algoritmo HiRCoCoTiR asume que el usuario prefiere estar en movimiento. Aunque este ciclo no es realista tampoco afecta el tiempo total de viaje pues en vez de esperar 8 minutos en la parada u el algoritmo hará el ciclo de 7 minutos y después

esperará un minuto en u para abordar el siguiente vehículo de transporte público. Un comportamiento similar se puede observar si el tiempo de viaje de un arco cambia significativamente a lo largo del conjunto de instantes de tiempo. Aunque el algoritmo forma ciclos siempre mantiene los *tiempos esperados* de viaje y estos ciclos son omitidos en la visualización de la ruta para no confundir al usuario.

5.4 Ejemplo de solución con el algoritmo HiRCoCoTiR

Las híper rutas de O a d que se muestran en la Figura 5.4, la Figura 5.5 y la Figura 5.6 son los resultados de aplicar el algoritmo HiRCoCoTiR de 9:00 a 10:00 de la mañana con intervalos de tiempo de un minuto a la HiCoTiR que se muestra en la Figura 5.3.

La híper ruta que se muestra en la Figura 5.4 tiene *estado* final 2 y no tiene transferencias modales. Los *tiempos esperados* mínimos para cada instante de tiempo se muestran en la Tabla 5.1. Si se parte a las 9:21 del nodo O no existe información en tiempo real sobre el arribo de los trenes. De acuerdo con el algoritmo HiRCoCoTiR las híper rutas en los instantes de tiempo donde no es posible conocer el tiempo exacto de espera en las paradas están asociadas a un *tiempo comodín*, entonces el *tiempo esperado* de viaje de la híper ruta que se muestra en la Figura 5.4 para cualquier horario entre las 9:20am y las 10:00am es de 42 minutos.

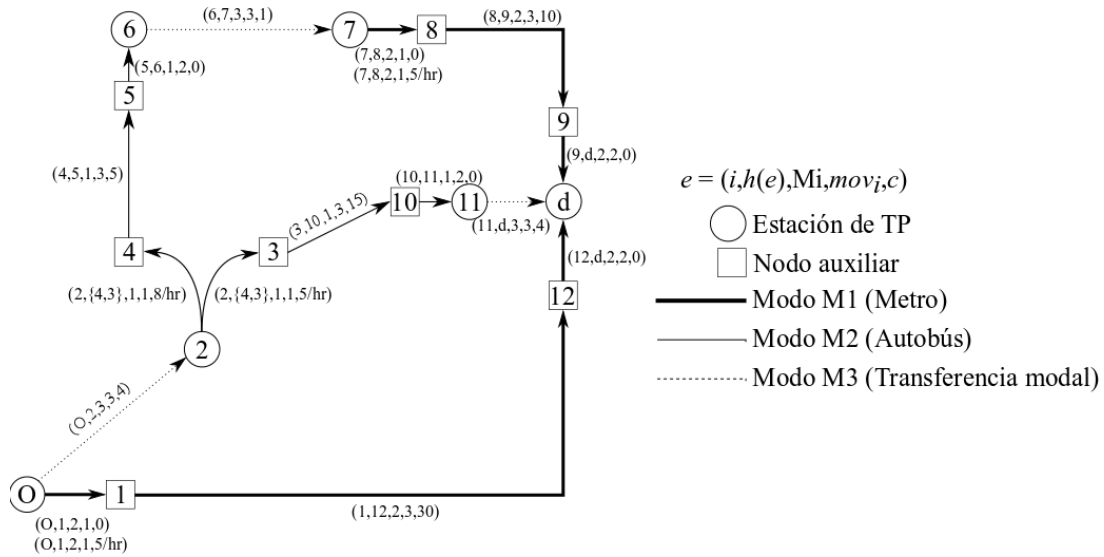


Figura 5.3 Ejemplo de HiCoTiR

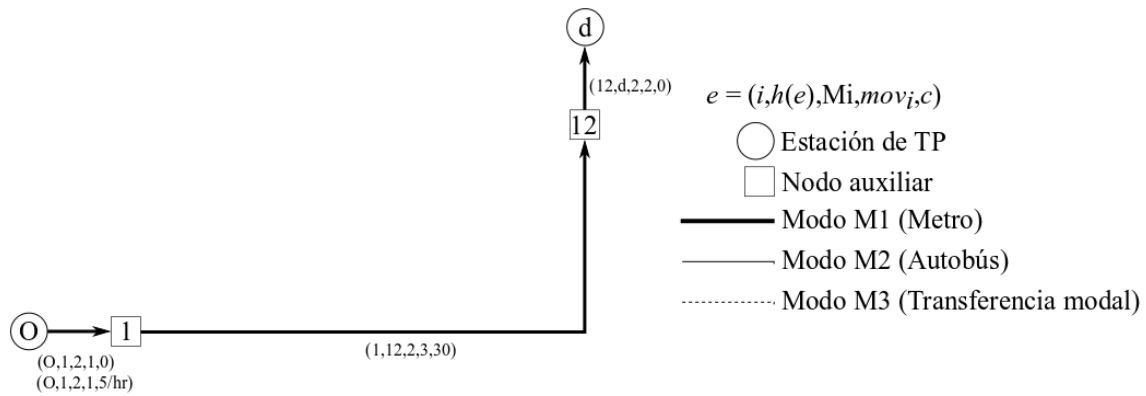


Figura 5.4 Resultado 1

Tabla 5.1 Resultados de la Figura 5.4

Hora	Tiempo esperado
comodín	42
9:00	40
9:01	39
9:02	38
9:03	37
9:04	36
9:05	35
9:06	34
9:07	33
9:08	32
9:09	31
9:10	30
9:11	34
9:12	33
9:13	32
9:14	31
9:15	30
9:16	34
9:17	33
9:18	32
9:19	31
9:20	30

La híper ruta que se muestra en la Figura 5.5 tiene *estado* final 1, no tiene transferencias modales y su *tiempo esperado* es de 35 minutos. Esta híper ruta no aborda modos con información en tiempo real por lo que para cualquier horario entre las 9:00am y las 10:00am su *tiempo esperado* es el mismo. A pesar de que la ruta contiene dos arco de transferencia modal, estos arcos no cuentan como transferencias ya que de acuerdo con el algoritmo HiRCoCoTiR, si el modo del primer o el último arco de un híper ruta es de transferencia, el modo de estos arcos se convierte a peatonal pues el usuario no está cambiando de modo de transporte solo inicia o finaliza su viaje.

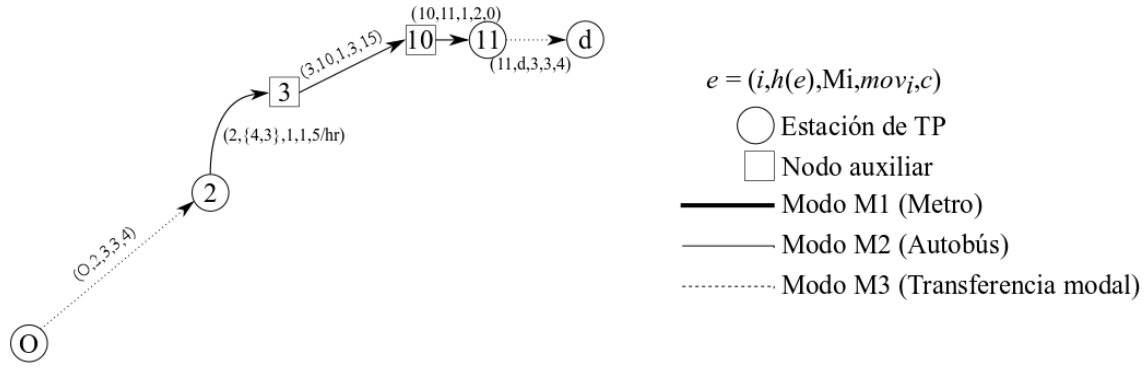


Figura 5.5 Resultado 2

La hiper ruta que se muestra en la Figura 5.6 tiene *estado* final 1, tiene una transferencia modal y los *tiempos esperados* mínimos para cada instante de tiempo y el tiempo comodín se muestran en la Tabla 5.2. Este resultado es interesante pues combina el uso de transporte público con y sin información en tiempo real, observe que la sub-hiper ruta $(O, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d)$ aborda el autobús (sin información en tiempo real) y el metro (con información en tiempo real).

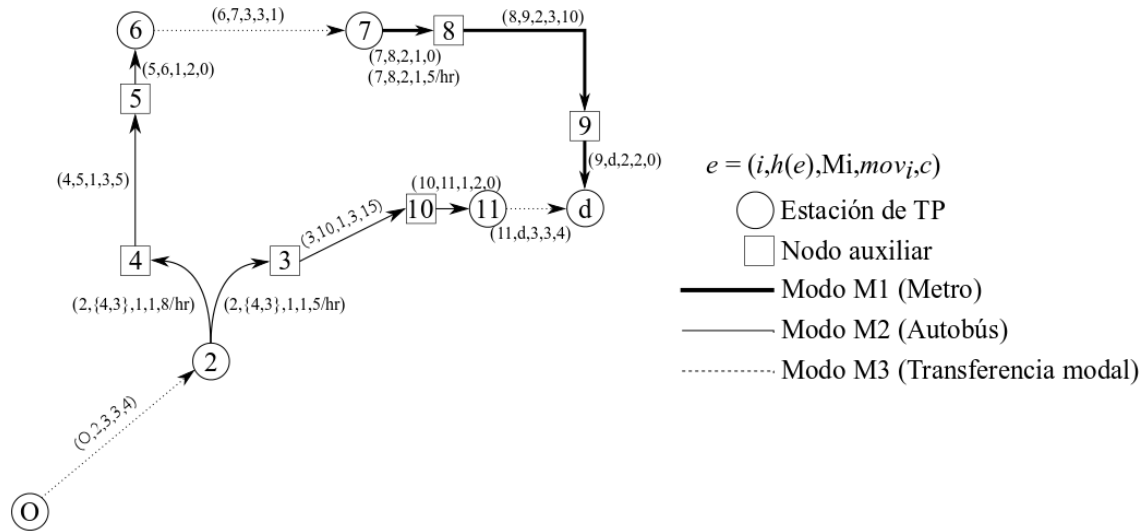


Figura 5.6 Resultado 3

Tabla 5.2 Resultados de la Figura 5.6

Hora	<i>Tiempo esperado</i>
comodín	31.15
9:00	25.77
9:01	31.31
9:02	30.69
9:03	30.08
9:04	29.46
9:05	28.85
9:06	28.23
9:07	27.61
9:08	27
9:09	26.38
9:10	25.77

Cada híper ruta del conjunto de soluciones tiene diferentes *tiempos esperados* para las diferentes horas de partida, entonces, se define un conjunto *Pareto-Optimal* para cada hora de partida. Los conjuntos de soluciones para cada instante de tiempo se muestran en la Tabla 5.3, en donde los tiempos marcados en negro forman parte del conjunto *Pareto-Optimal* de cada instante de tiempo, por ejemplo, el conjunto *Pareto-Optimal* del horario *comodín* lo forman las rutas que se muestran en la Figura 5.5 y la Figura 5.6

Es posible establecer un conjunto *Pareto-Optimal* único si solo se consideran el *tiempo esperado* mínimo de todo el conjunto de soluciones. Entonces, el conjunto *Pareto-Optimal* es la híper ruta que se muestra en la Figura 5.6, partiendo a las 9:00am o a las 9:10am con un *tiempo esperado* de 25.76 minutos.

Tabla 5.3 Pareto-Optimal

Horarios	Resultado de la Figura 5.4 (sin transferencias)	Resultado de la Figura 5.5 (sin transferencias)	Resultado de la Figura 5.6 (1 transferencia)
Comodín	42	35	31.15
9:00	40	-	25.77
9:01	39	-	31.31
9:02	38	-	30.69
9:03	37	-	30.08
9:04	36	-	29.46
9:05	35	-	28.85
9:06	34	-	28.23
9:07	33	-	27.61
9:08	32	-	27
9:09	31	-	26.38
9:10	30	-	25.77
9:11	34	-	-
9:12	33	-	-
9:13	32	-	-
9:14	31	-	-
9:15	30	-	-
9:16	34	-	-
9:17	33	-	-
9:18	32	-	-
9:19	31	-	-
9:20	30	-	-

6 Desarrollo de un Sistema avanzado de información al viajero

Un Sistema Avanzado de Información al Viajero (SAIV) para la consulta de hiper rutas más cortas multimodales en el modelo HiCoTiR, fue desarrollado con base en el algoritmo HiRCoCoTiR que se presenta en el Capítulo 5. El SAIV puede ser consultado en dispositivos móviles y computadoras. El SAIV que se describe a continuación es similar al *hiperPuma* (<http://hiperpuma.iingen.unam.mx>) que desde el 2013 ofrece un servicio para encontrar hiper rutas más cortas multimodales en el sistema de transporte público de Ciudad Universitaria, UNAM, donde actualmente los autobuses de este sistema funcionan a base frecuencias.

En la Sección 6.1 se presentan el *software* necesario para el desarrollo del SAIV, el *hardware* del SAIV está fuera de los alcances de esta tesis. En la Sección 6.2 se presenta un ejemplo de aplicación del SAIV en Ciudad Universitaria, UNAM y en la Sección 6.3 se presenta otro ejemplo de aplicación en una red de transporte público en la parte sur de la CDMX. Finalmente, en la Sección 6.4 se presenta los tiempos de ejecución del SAIV en diferentes escenarios con el objetivo de mostrar que el SAIV responde lo suficientemente rápido para aplicarlo en instancias reales.

6.1 Sistema Avanzado de Información al Viajero

El SAIV que se presenta en este capítulo tiene seis componentes principales:

1. Servidor *Tomcat*. Aquí se almacenan la base de datos geo-espacial del modelo HiCoTiR, el algoritmo HiRCoCoTiR programado en *java* y la aplicación que se encarga de obtener la información en tiempo real de las llegas de los vehículos de transporte público a las paradas.
2. Base de datos geo-referenciada. Esta base está alojada en *PostgreSQL* y contiene toda la información estática de la HiCoTiR.
3. Algoritmo HiRCoCoTiR programado en *java*.

4. Aplicación *java* para la consulta de itinerarios de las líneas de transporte público con información en tiempo real. Esta aplicación se conecta con servicios de predicciones en tiempo real de arribos de vehículos de transporte público a las paradas.
5. Servicios de predicciones en tiempo real. Servicios externos que informan en tiempo real el tiempo de espera en las paradas de los vehículos de transporte público. Estos servicios no fueron desarrollados por el autor solo se consumen.
6. Interfaz de usuario disponible en una página web. Esta interfaz se programó en HTML5 y usa el API *OpenLayers* para el despliegue de mapas.

La Figura 6.1 muestra el flujo de la información en el SAIV. Cuando se inicia el servidor *Tomcat* se almacena en memoria toda la información estática de la HiCoTiR para que el algoritmo HiRCoCoTiR pueda hacer consultas rápidas de cualquier información relativa a la red de transporte. Además, el servidor *Tomcat* se encarga de manejar todas las visitas de los usuarios dentro del servicio. Cada que un usuario hace una consulta, el algoritmo solicita de la aplicación de tiempo real la información actualizada de los itinerarios de las líneas de transporte público en las paradas dentro de 1km de radio del origen. La aplicación en tiempo real obtiene la información de las paradas solicitadas de algún servicio de información en tiempo real, como por ejemplo de *OneBusAway*, *DublinBus* o *511*. El algoritmo HiRCoCoTiR que se encarga de encontrar la hiper ruta más corta solicitada. Al final del proceso el usuario recibe en su dispositivo el conjunto *Pareto-Optimal* de hiper rutas más cortas desplegadas en un mapa geo-referenciado.

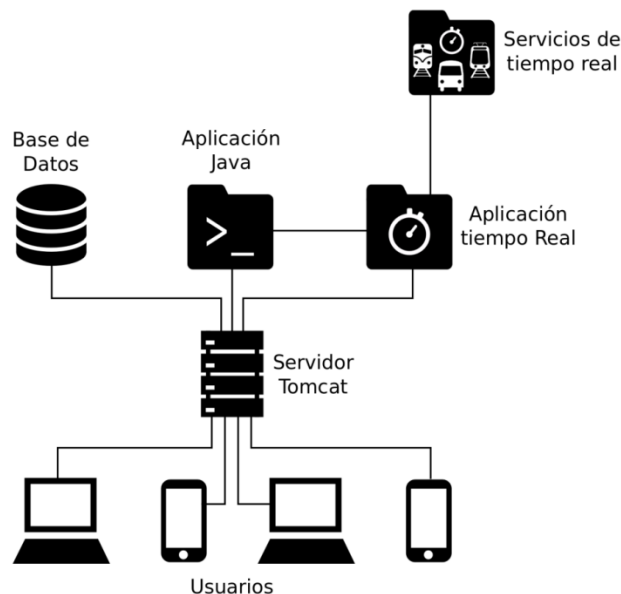


Figura 6.1 Arquitectura del Sistema Avanzado de Información al Viajero

La Figura 6.2 muestra la interfaz de usuario (IU). En la IU el usuario llena la información necesaria para que el algoritmo calcule hiper rutas más cortas. El diseño de la IU es simple y similar a las plataformas existentes para que los usuarios estén familiarizados. El panel derecho de la IU muestra un mapa donde se pueden seleccionar origen y destino haciendo clic derecho sobre cualquier punto del mapa. Cuando se selecciona un punto cercano a un módulo de bicicleta compartida o parada de transporte público, el punto seleccionado se desplazará levemente para coincidir con el módulo/parada. Si no existe ningún módulo/parada cercano el punto seleccionado se desplazará a la esquina

más cercana, en este desarrollo no es posible seleccionar puntos en la mitad de las calles, a menos de que el punto esté en la base de datos geoespacial. En el panel izquierdo de la IU se llenan los siguientes campos:

- Origen y destino: estos recuadros se autocompletan para una fácil selección. Si se selecciona sobre el mapa el origen o destino, los recuadros se llenan automáticamente.
- Máximo número de transferencias: se puede elegir entre 1 y 4 transferencias modales.
- Combinación de modos posibles: para el ejemplo que se muestra en la Figura 6.2 se pueden elegir las siguientes combinaciones; peatonal+bicicleta+transporte público, peatonal+transporte público y peatonal+bicicleta.
- Día y hora de partida.

La IU se puede enriquecer para mostrar mapas estáticos de los modos, también es posible agregar globos en las paradas o módulos de bicicletas compartidas para obtener información adicional como horas de arribo, frecuencias, nombre, bicicletas disponibles, etc. Por las capacidades de rastreo vía GPS que tiene *OpenLayers*, es posible poner iconos sobre el mapa que indiquen el movimiento de los vehículos de transporte público en tiempo real.

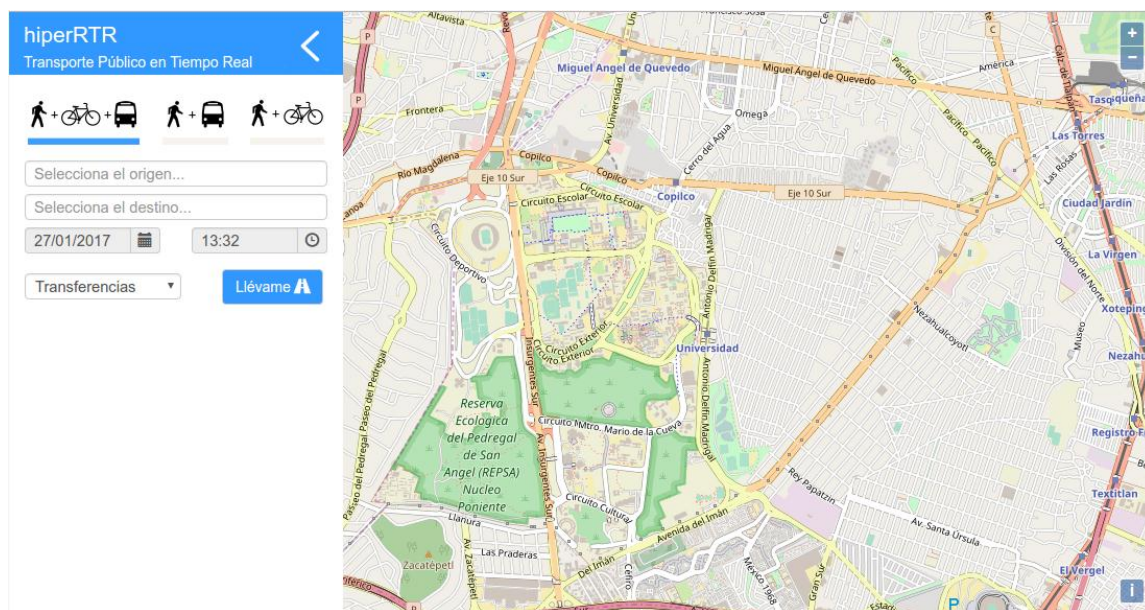


Figura 6.2 Interfaz de usuario del SAIV

6.2 Ciudad Universitaria, UNAM

Ciudad Universitaria (CU) se fundó en 1954 y se localiza en la parte sur de la Ciudad de México, tiene un área construida de $2,685,396 \text{ m}^2$ y cubre una superficie de $7,000,000 \text{ m}^2$. Hoy en día aproximadamente 184,500 personas estudian o trabajan en CU, de los cuales 109,214 son alumnos de licenciatura, 23,851 son alumnos de posgrado, 26,393 son profesores, investigadores o técnicos

académicos y tiene 25,000⁸ personas destinadas a asuntos administrativos (UNAM 2016). Diariamente en CU circulan automóviles particulares, autobuses de transporte público (conocidos como Pumabús), taxis y bicicletas (las bicicletas de préstamo dentro de CU se llaman Bicipuma), por lo que la actividad vehicular dentro del campus suele ser intensa en las horas pico. El sistema de transporte público de CU tiene una red de ciclovías de 7 km de extensión y 13 módulos para préstamo de bicicletas que son de uso exclusivo de la comunidad universitaria. Además, hay una flota de 65 autobuses (*Pumabuses*) que se distribuyen en 13 líneas con 84 paradas y 3 terminales, el sistema Pumabús es gratuito para todo el público. La Figura 6.3 muestra un mapa del sistema de transporte público de CU y de los senderos peatonales más comunes.

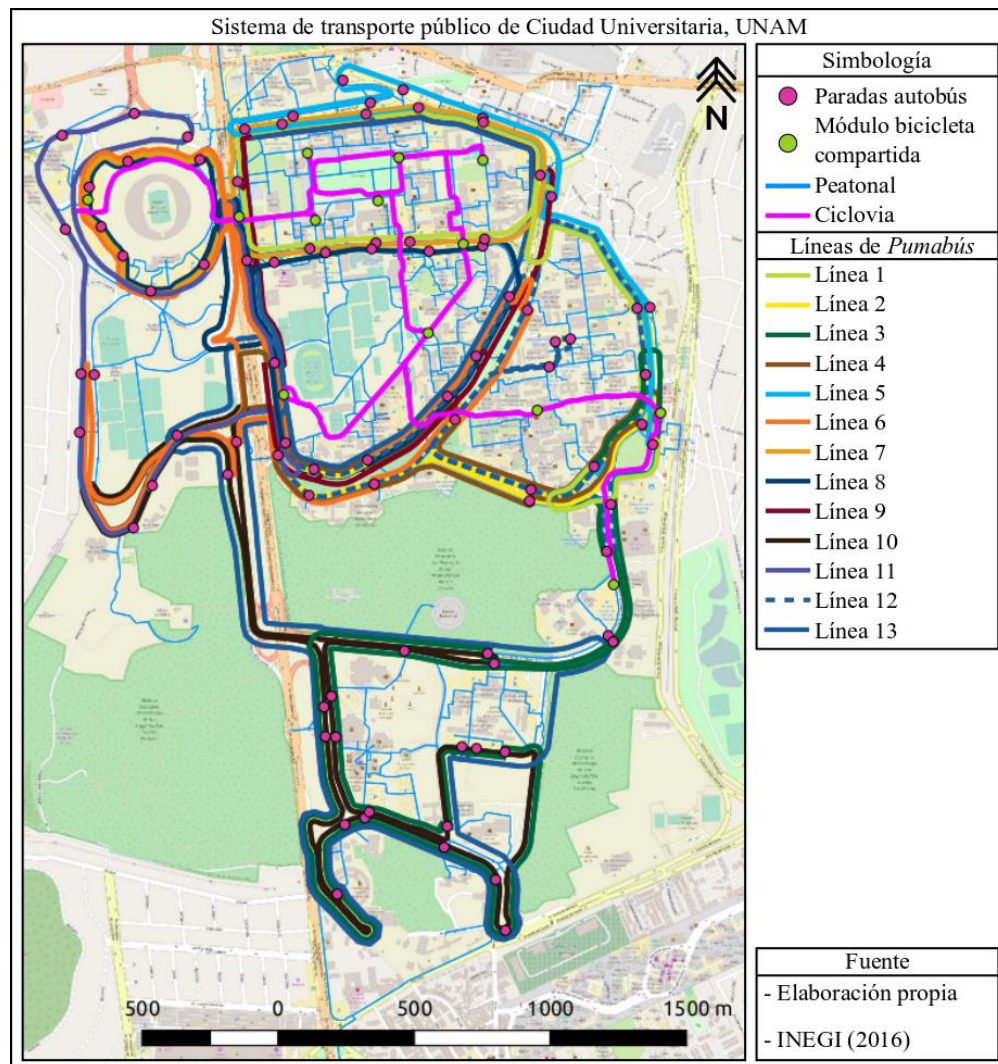


Figura 6.3 Híper red del transporte público de CU

⁸ Existen 28,400 personas destinadas a asuntos administrativos en toda la UNAM, sin embargo, no existe el dato del número exacto de trabajadores dentro de CU. El número de trabajadores reportado es una aproximación.

La HiCoTiR que modela el transporte de CU cuenta con 944 nodos y 2554 arcos, divididos de la siguiente forma:

- 293 nodos son origen o destino, estos nodos representan paradas de autobús, módulos de préstamo de bicicletas, facultades, edificios, bibliotecas, comedores, etc. El resto de los nodos sólo funcionan como conectores entre arcos o híper arcos.
- 1686 arcos peatonales, 616 arcos de autobús (205 arcos de abordaje, 205 arcos de descenso y 206 arcos de paso), 48 arcos de bicicleta y 216 arcos de transferencia modal.

La Figura 6.4 muestra dos soluciones de una consulta al SAIV de la parada de autobús *o* a la parada de autobús *d*, el 25 de agosto del 2016 a las 9:00am, con un máximo de tres transferencias modales. En este ejemplo se reprodujo el caso donde todas las líneas de Pumabús tienen información en tiempo real de la llegadas de los siguientes dos autobuses y el tiempo de arribo de los vehículos en cada parada varía entre las 9:00am y las 9:20am. La primera solución no tiene información en tiempo real mientras que la segunda sí. Se observa que el SAIV desarrollado en este trabajo siempre entrega al menos una híper ruta sin información en tiempo real para el caso donde el usuario pierda las llegadas de los vehículos que pertenecen a las líneas con información en tiempo real. La Figura 6.5 muestra un esquema de las soluciones que aparecen en la Figura 6.4.

La primera solución (imagen izquierda en la Figura 6.4 y Figura 6.5) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones sin información en tiempo real. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 43 minutos, una transferencia modal y las siguientes indicaciones:

1. En la parada *o* aborde un vehículo de la línea 6 (naranja) de autobús.
2. Descienda en la parada *e* y ahí aborde un vehículo de la línea 10 (negra) de autobús.
3. Descienda en la parada *f* y camine hasta el destino *d*.

La segunda solución (imagen derecha en la Figura 6.4 y Figura 6.5) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones con información en tiempo real. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 35 minutos, una transferencia modal y las siguientes indicaciones.

1. En la parada *o* aborde a las 9:07 el vehículo de línea 1 (azul) de autobús.
2. Descienda en la parada *c* y espere ahí hasta las 9:12am para abordar un vehículo de la línea 7 (roja).
3. Descienda en la parada *d* y ahí aborde el primer vehículo que pase de las líneas 3 (azul claro) o 4 (café).
 - 3.1. Si abordó un vehículo de la línea 3, descienda en la parada *f* y camine hasta el destino *d*.
 - 3.2. Si abordó un vehículo de la línea 4, descienda en la parada *e* y en esa parada aborde el vehículo de la línea 10 (negra)
 - 3.2.1. Descienda en la parada *f* y camine hasta el destino *d*.

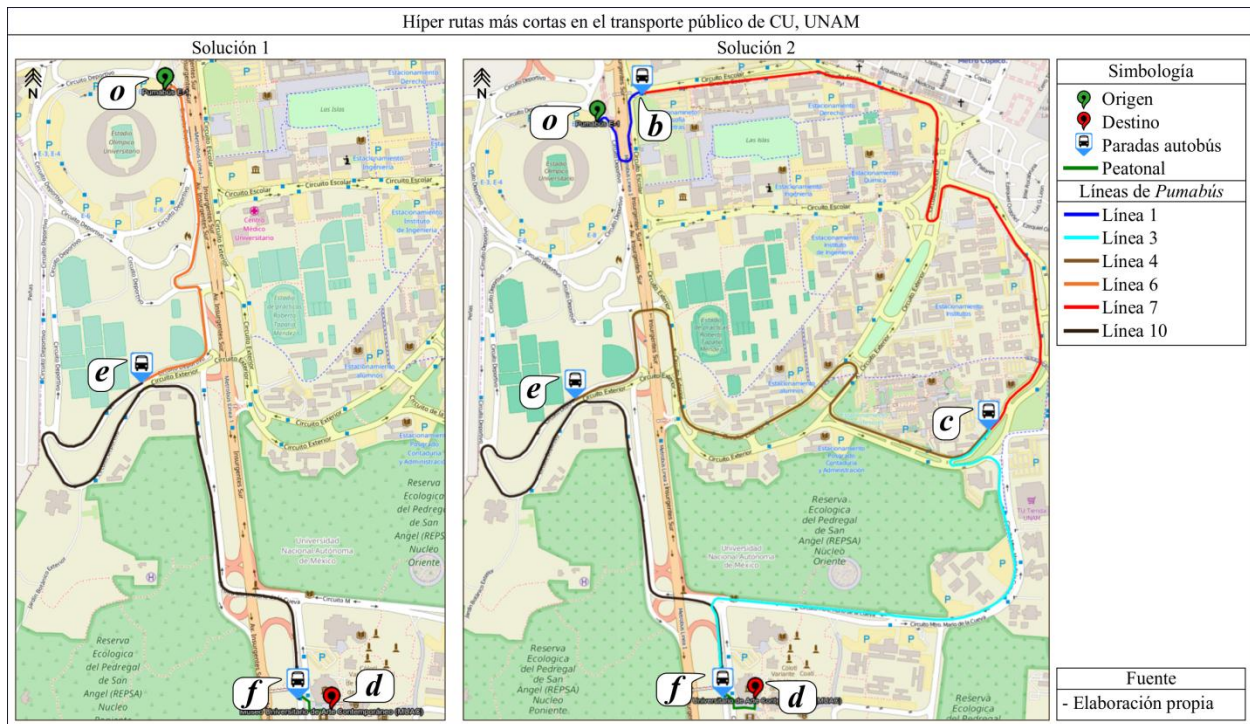


Figura 6.4 Solución del SAIV

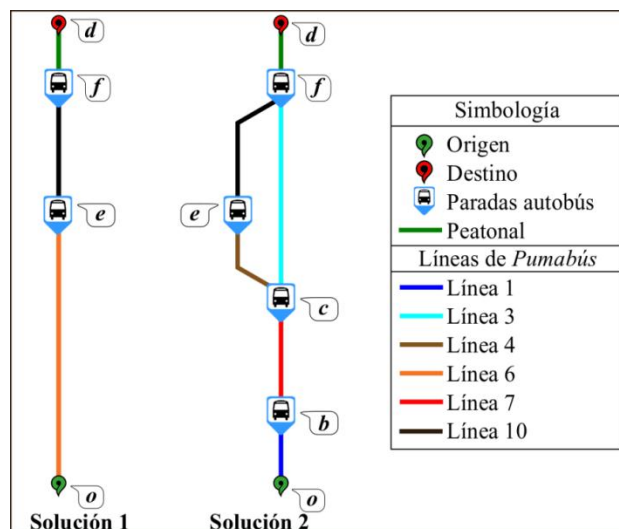


Figura 6.5 Esquema de la solución que se muestra en la Figura 6.4

No existe información en tiempo real en las paradas *c* y *e*, pues se encuentran a más de un kilómetro del origen. Por lo tanto, de acuerdo al modelo HiCoTiR, solo se conocen las frecuencias de las líneas 3, 4 y 10. La solución 1 parece la más corta en cuanto distancia, sin embargo, debido a que las frecuencias de las líneas 6 y 10 son muy bajas tiene un tiempo de espera en paradas prolongado. La solución 2 a pesar de recorrer más distancia es más corta en cuanto a tiempo, pues por la información en tiempo real se conocen los tiempos de espera en las paradas *o* y *b*, además como la frecuencia de las líneas 3 y 4 es alta el tiempo aproximado de espera en la parada *c* es corto. Dependiendo de las preferencias del usuario, ella/él puede optar por una ruta corta pero tardada o una ruta larga pero rápida.

6.3 Zona metropolitana del valle de México

La zona metropolitana del valle de México (ZMVM) es el núcleo urbano más poblado de México. El primer asentamiento localizado en esta área data del 9500-7000 a.C. pero no fue hasta el 1325 d.C. que esta zona, llamada en aquel entonces Tenochtitlan, comenzó a concentrar grandes cantidades de personas convirtiéndose en una de las ciudades más grandes de Mesoamérica. En 1521 Tenochtitlan fue tomada por conquistador Hernán Cortez y la ciudad se anexó al Imperio Español. Tras la caída del Imperio, alrededor del 1821, México se transformó en una república y la ciudad se volvió en la capital del país. Hoy día en la ZMVM viven alrededor de 20 millones de personas, es el centro político, académico y financiero del país, y es la séptima ciudad más poblada del planeta (United Nations, 2016). La Figura 6.6 muestra la mancha urbana de la ZMVM que se extiende desde la Ciudad de México (CDMX) hasta la parte sur y oriente del Estado de México.

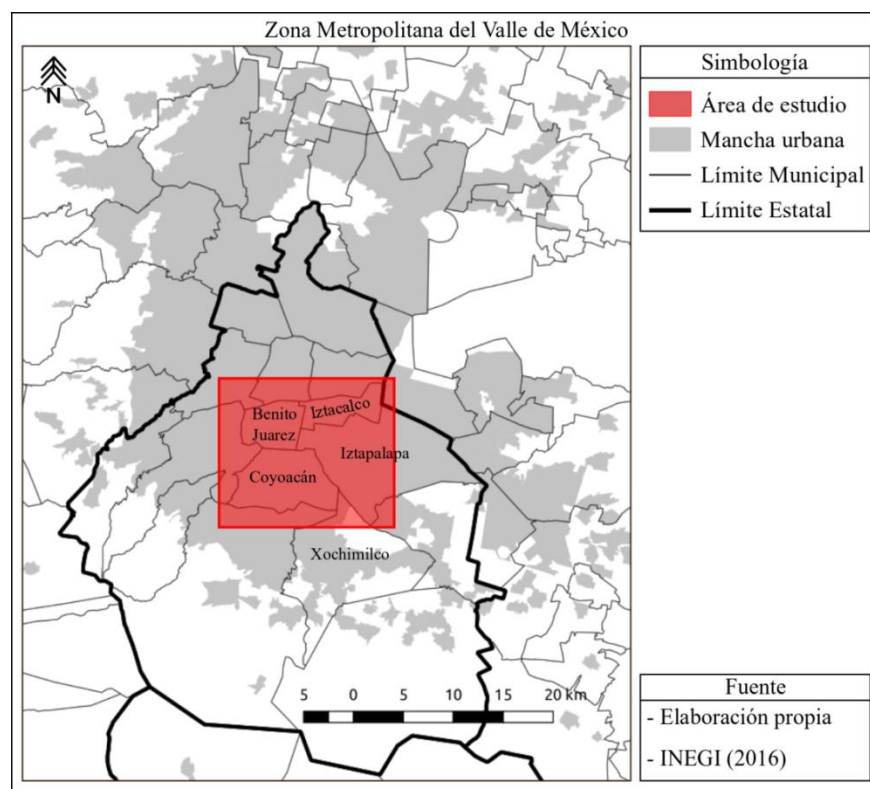


Figura 6.6 Área de estudio

La administración del sistema de transporte público de la ZMVM está dividida en dos Estados, existen modos que son administrados por un Estado, modos administrados por asociaciones público-privadas y modos (microbuses y peseros) que son administrados por miles de micro concesionarias. Hay pocas líneas de transporte público que circulan entre la CDMX y Estado de México y por lo general al llegar a los límites estatales es necesario cambiar de modo de transporte. Como se presentó en la Sección 1.2 en la ZMVM los modos de transporte son (ver la Figura 1.1 que se encuentra en la página 8) los siguientes:

- 12 líneas de metro (administración pública).
- 6 líneas de BRT, llamado *Metrobús* (administración pública-privada).
- 3 líneas de BRT, llamado *Mexibús* (administración pública-privada).

- 96 líneas de autobús, llamados M1 (administración pública).
- 8 líneas de trolebús (administración pública).
- 1 línea de tren ligero (administración pública).
- 1 línea de teleférico, llamado *Mexicable* (administración pública-privada).
- 493 líneas de microbuses/peseros (administración privada).
- Una línea de tren suburbano (administración pública-privada).
- 444 módulos de renta de bicicletas compartidas llamadas *Ecobici* (administración pública-privada).

El caso de estudio que a continuación se presenta considera una área del sur de la CDMX (ver Figura 6.6), que comprende las delegaciones Benito Juárez, Coyoacán, Iztacalco, más de la mitad de la delegación Iztapalapa y la parte norte de la delegación Xochimilco. En el área de estudio viven aproximadamente 3.2 millones de personas, la delegación Benito Juárez es uno de los principales centros laborales de la ZMVM e Iztapalapa es la delegación más poblada de la CDMX (INEGI, 2015). El sistema de transporte público del área de estudio consta de los siguientes modos de transporte público:

- Tres líneas de *Metrobús*: secciones de las líneas 1 y 3. La línea 2 está contenida completamente en el área de estudio.
- Siete líneas de Metro: secciones de las líneas A, 2, 3, 4, 7, 8, 9.
- Cinco líneas de *M1*: las líneas 39, 39-A, 47-A, 57-A y CB están completamente contenidas en la zona de estudio.
- Cuatro líneas de trolebús: secciones de las líneas CCE, K y Q. La línea M está completamente contenida en la zona de estudio
- Una línea de tren ligero: una sección de la única línea está contenida en la zona de estudio.
- 229 módulos de *Ecobici*: aproximadamente el 50% del sistema.

La HiCoTiR que modela el sistema de transporte del área de estudio se almacenó en una base de datos geoespacial y se muestra en la Figura 6.7. Esta hiper red cuenta con 39,871 nodos y 120,776 arcos, divididos de la siguiente forma:

- 39,258 nodos son origen/destino de los cuales 394 representan una parada de transporte público y 229 representan un módulo de *Ecobici*. El resto de los nodos sólo funcionan como conectores entre arcos o hiper arcos.
- 107,558 son arcos peatonales, 9776 son arcos de bicicleta, 212 arcos de metro (53 arcos de abordaje, 53 arcos de descenso y 53 arcos de paso), 767 arcos de *Metrobús* (235 arcos de abordaje, 235 arcos de descenso, 291 arcos de paso y 6 arcos de transbordo), 370 arcos de *M1* (124 arcos de abordaje, 125 arcos de descenso y 117 arcos de paso), 50 arcos de tren ligero (13 arcos de abordaje, 13 arcos de descenso, 24 arcos de paso), 525 arcos de trolebús (175 arcos de abordaje, 175 arcos de descenso, 173 arcos de paso y 2 arcos de transbordo) y 1508 arcos de transferencia modal.

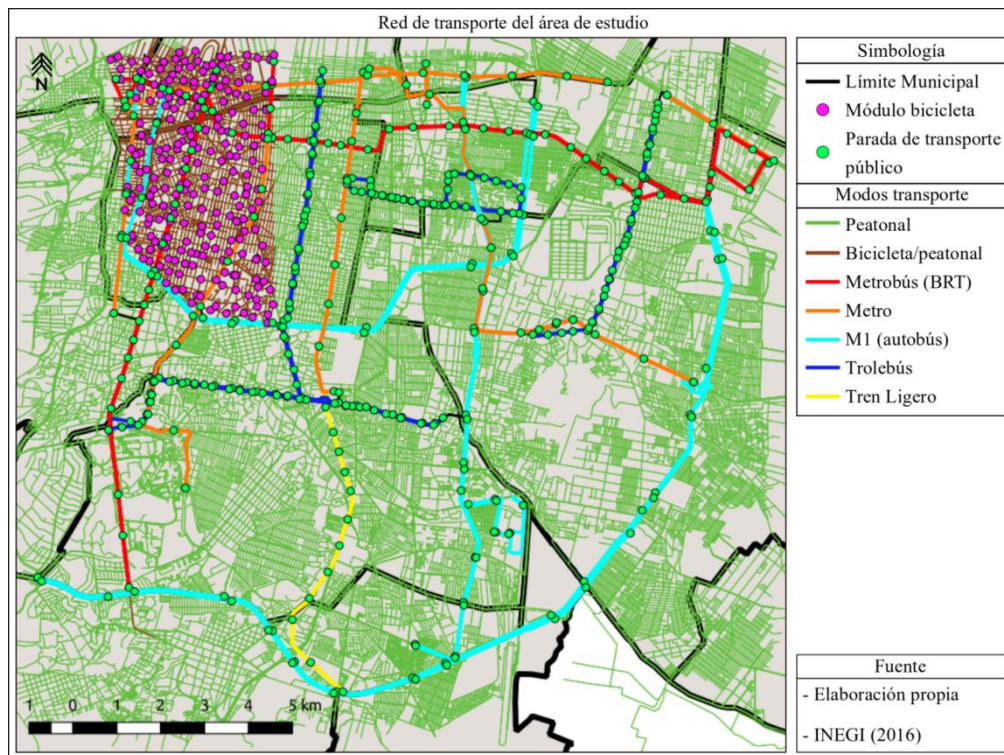


Figura 6.7 Red de transporte del área de estudio

La Figura 6.8 muestra dos soluciones de una consulta al SAIV de la parada de *Metrobús* o al módulo de *Ecobici* *d* el 25 de agosto del 2016 a las 9:00am con un máximo de tres transferencias modales. En estos ejemplos se reprodujo el caso donde el *Metrobús*, el metro y el tren ligero tienen información en tiempo real de la llegadas de los siguientes dos vehículos, el tiempo de salida de los vehículos en cada parada varía entre las 9:00am y las 9:20am. La primera solución no tiene información en tiempo real mientras que la segunda sí. La Figura 6.9 muestra un esquema de las soluciones que aparecen en la Figura 6.8.

La primera solución (imagen izquierda en la Figura 6.8. y la Figura 6.9) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones sin información en tiempo real. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 35 minutos, una transferencia modal y las siguientes indicaciones.

1. En la parada o aborde el primer vehículo que pase de la líneas *A*, *B* o *C* de *Metrobús*.
 - 1.1. Si abordó un vehículo de la línea *A* o *B* descienda en la parada *e* y camine hacia el módulo de *Ecobici* *e'*. En el módulo de *Ecobici* *e'* aborde una bicicleta y condúzcala hasta el destino *d*.
 - 1.2. Si abordó un vehículo de la línea *C* descienda en la parada *c*. En *c* hay dos opciones, quedarse en la parada *c* o abandonar *c*.
 - 1.2.1. Si decidió quedarse en la parada *c*, aborde el primer vehículo que pase de las líneas *A* o *B* de *Metrobús*, descienda en la parada *e* y camine hacia el módulo de *Ecobici* *e'*. En el módulo de *Ecobici* *e'* aborde una bicicleta y condúzcala hasta el destino *d*.
 - 1.2.2. Si abandono la parada *c* camine al módulo de *Ecobici* *c'*, en ese módulo aborde una bicicleta y condúzcala hasta el destino *d*.

La segunda solución (imagen derecha de la Figura 6.8. y la Figura 6.9) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones con información en tiempo real. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 25 minutos, una transferencia modal y las siguientes indicaciones:

1. En la parada *o* aborde a las 9:05 el vehículo de la línea A de *Metrobús*.
2. Desciende en la parada *d* y camine al módulo de *Ecobici* *d'*.
3. En el módulo de *Ecobici* *d'* aborde una bicicleta y condúzcala hasta el destino *d*.

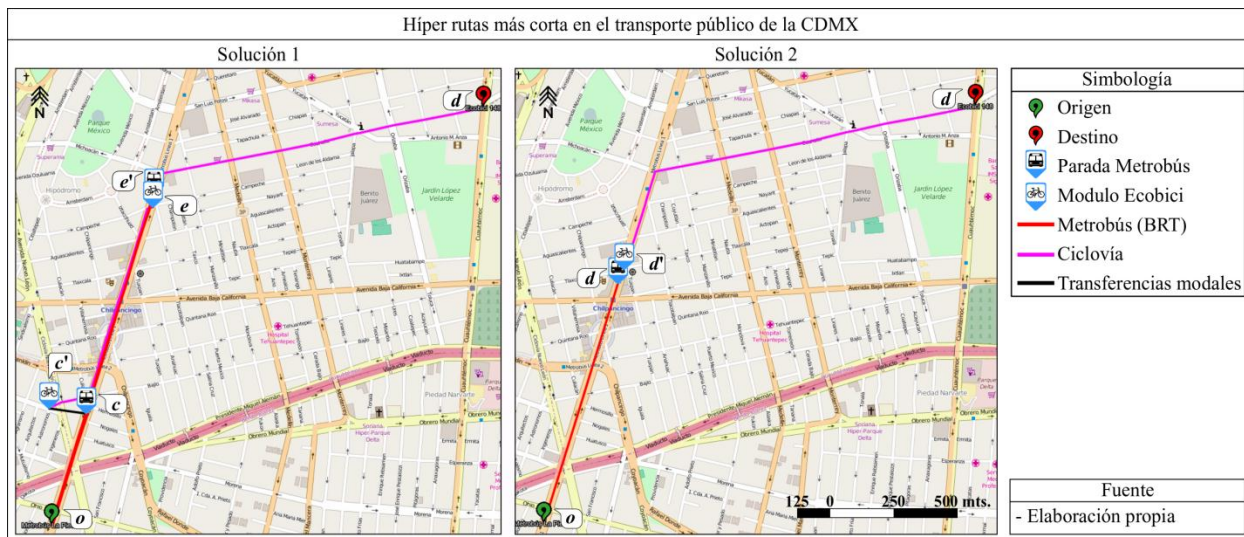


Figura 6.8 Solución del SAIV

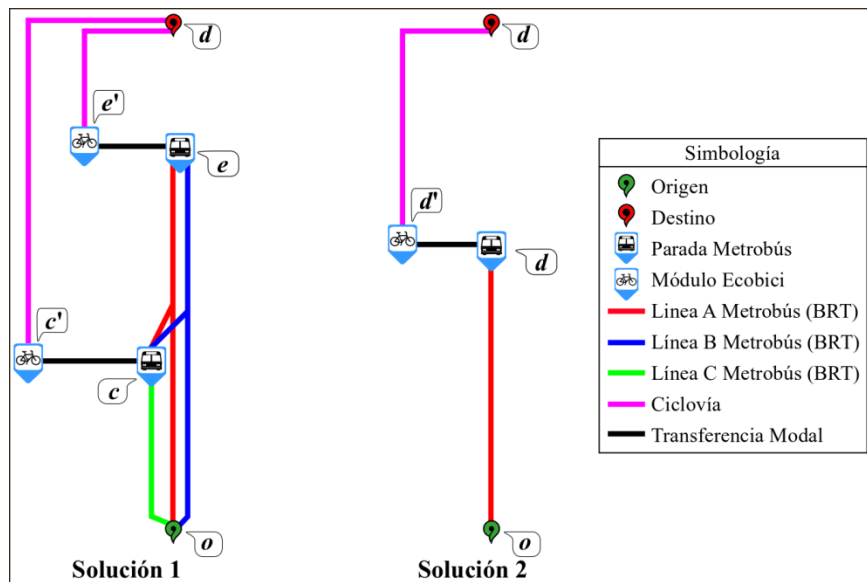


Figura 6.9 Esquema de la solución que se muestra en la Figura 6.8

6.4 Tiempos de ejecución

Se realizaron seis series de experimentos para probar los tiempos de ejecución del SAIV en diferentes escenarios en la HiCoTiR de Ciudad Universitaria y en la del área de estudio de la CDMX. Los experimentos se realizaron en una computadora de 64-bits con 7.7 GB de RAM y un procesador Intel

Core i5-2500K CPU@3.30GHz×4. Las características particulares de cada una de las series de experimentos se muestran en la Tabla 6.1 y todas las series comparten las siguientes características:

- El horario de salida es a las 9:00am.
- Máximo de 3 transferencias modales.
- Los intervalos de tiempo son de un minuto.
- Las predicciones en tiempo real de las llegas de vehículos de transporte público a las paradas varían entre las 9:00am y las 9:20am.
- En cada experimento de las series se prueban 500 orígenes-destinos aleatorios. Para obtener números aleatorios verdaderos (Haahr, 2016) se usó una aplicación de <http://www.random.org> que usa el ruido atmosférico para obtener la aleatoriedad de los números.

Tabla 6.1 Características particulares de cada serie de experimentos

Serie	Número de predicciones en tiempo real en cada parada	Número de nodos de la HiCoTiR	Radio desde el origen para obtener información en tiempo real	Tiempo máximo caminando	Tiempo máximo en bicicleta	Área de estudio
1	1	944	300mts	15min	30min	CU
2	2	944	300mts	15min	30min	CU
3	2	39,871	1km	15min	30min	CDMX
4	2	944	Variable	15min	30min	CU
5	2	Variable	1km	15min	30min	CDMX
6	2	Variable	1km	Sin límite	Sin límite	CDMX

La primera y la segunda series constan de 13 experimentos cada una y se aplicaron a la HiCoTiR de CU, UNAM. Las consultas al SAIV de cada experimento de ambas series tienen las siguientes restricciones:

- Solo toma en cuenta la información en tiempo real de las paradas que se encuentran dentro de un radio de 300mts (aproximadamente 5 minutos caminando) del origen. CU es relativamente pequeño y no es necesario caminar distancias largas para encontrar una parada de Pumabús.
- El tiempo máximo caminando es de 15 minutos.
- El tiempo en máximo en bicicleta (Bicipuma) es de 30 minutos.
- El primer experimento de ambas series considera que no existen líneas de autobús con información en tiempo real, el segundo experimento considera que existe una línea con tiempo real y así sucesivamente hasta completar las doce⁹ líneas de Pumabús.
- En la primera serie de experimentos se asume que en cada parada solo se puede predecir la hora de llegada del siguiente autobús de cada una de las líneas, mientras que en la segunda serie se puede predecir la hora de llegada de los siguientes dos autobuses de cada una de las líneas.

⁹Al momento en el que se realizaron estos experimentos la línea 13 no estaba en funcionamiento, por lo que no se incluye en el reporte presentado en esta sección.

La Figura 6.10 muestra los tiempos de ejecución de la primera (línea continua) y segunda (línea punteada) series de experimentos. Los tiempos de ejecución de todos los experimentos de ambas series son bajos, máximo 1.26 segundos, por lo que es factible la implementación el SAIV en CU. Los tiempos de ejecución en ambas aumentan moderadamente conforme aumenta el número de líneas con información en tiempo real, lo cual es un punto favorable si en el futuro aumentan las líneas de transporte público en CU.

Si $r_i^{1,2}$ es la razón entre los tiempos de ejecución del experimento i de la primera y la segunda serie, tal que $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$, se observa que las razones se disparan a partir del experimento 7 lo que indica que los tiempos de ejecución se ven afectados considerablemente cuando aumenta el número de líneas con tiempo real tal que se puede predecir el arribo de los siguientes dos autobuses a las paradas.

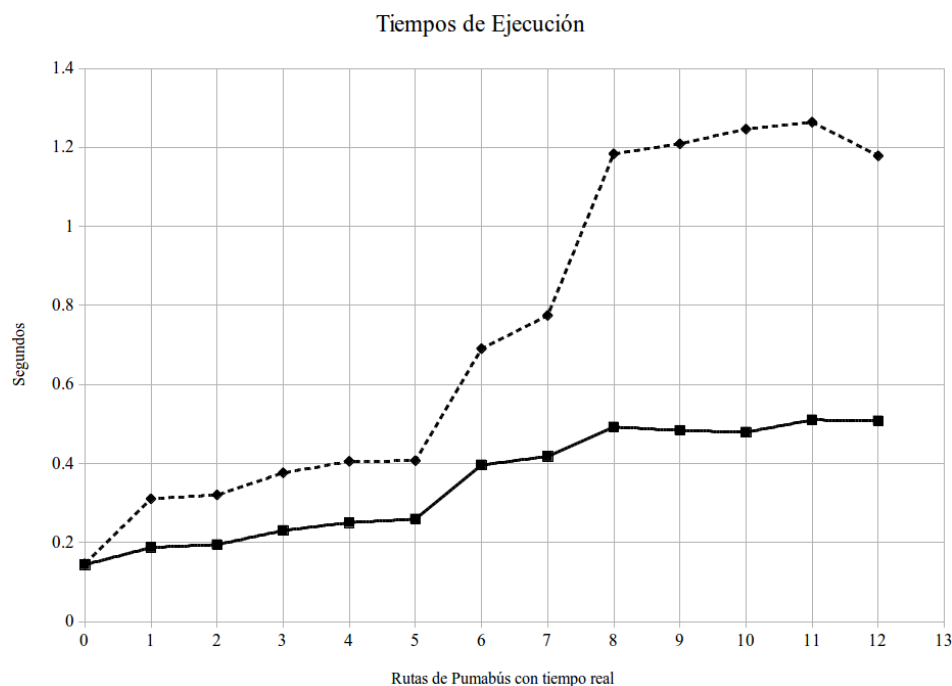


Figura 6.10 La línea continua corresponde a la primera serie de experimentos y la línea punteada corresponde a la segunda serie

En los siguientes párrafos se compara la segunda y la tercera serie de experimentos. La tercera serie consta de 18 experimentos y se aplicó en la HiCoTiR del área de estudio de la CDMX (en el futuro se referirá a esta red como la HiCoTiR de la CDMX). Las consultas al SAIV de cada experimento de la tercera serie tienen las siguientes restricciones:

- Toma en cuenta información en tiempo de las paradas que se encuentran dentro de un radio de 1km (aproximadamente 15 minutos caminando) del origen. Se observa que el radio de la segunda serie es de 300mts, el motivo de considerar diferentes radios es que la densidad de paradas de transporte público en la CDMX es menor que la de CU, para comparar los tiempos de ejecución en escenarios similares se decidió optar por estos radios.
- En cada parada se puede predecir la hora de llegada de los siguientes dos vehículos.
- El tiempo máximo caminando es de 15 minutos.

- El tiempo en máximo en bicicleta es de 30 minutos.
- El primer experimento considera que no existen líneas de transporte público con información en tiempo real, el segundo experimento considera que existe una línea de transporte público con tiempo real y así sucesivamente hasta completar las diecisiete líneas de transporte público contenidas en el HiCoTiR de la CDMX.

La Figura 6.11 muestra los tiempos de ejecución de la segunda (línea punteada) y la tercera (línea continua) series de experimentos. Si $r_i^{2,3}$ la razón entre los tiempos de ejecución del experimento i de la segunda y la tercera serie, tal que $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$, se observa que $r_1^{2,3}$ es aproximadamente 25, sin embargo, conforme van aumentando las líneas de transporte público con información en tiempo real, la razón decrece hasta aproximadamente 3.5. El decrecimiento en la razones se relaciona con la densidad de paradas de transporte público, en CU la densidad de paradas es mayor en la CDMX. Conforme se agregan líneas de transporte público con información en tiempo real, los tiempos de ejecución crecen más rápido en la HiCoTiR de CU que en la HiCoTiR de la CDMX (en esta red se mantienen casi constantes), pues la densidad de paradas de transporte público en CU es mayor que en la CDMX. Por lo tanto, otra característica de la red que impacta en los tiempos de ejecución es la densidad de paradas de transporte público.

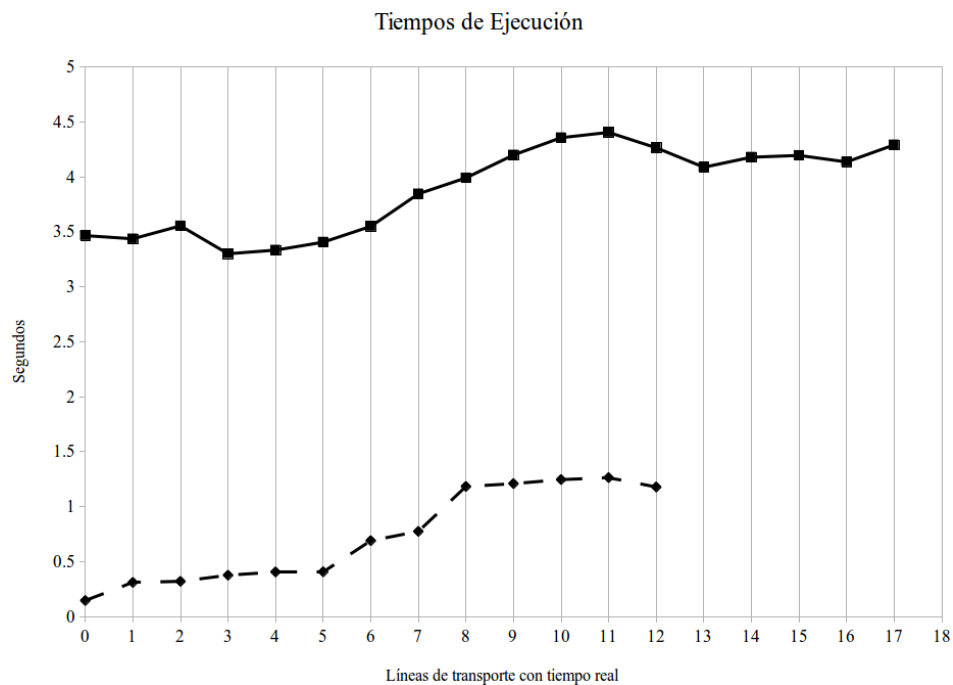


Figura 6.11 La línea punteada corresponde a la segunda serie de experimentos y la línea continua corresponde a la tercera serie

La cuarta serie consta de 14 experimentos y se aplicó en la HiCoTiR de CU. Las consultas al SAIV de cada experimento de la serie tienen las siguientes restricciones:

- En las paradas de transporte público se puede predecir el arribo de los siguientes dos autobuses.
- Todas las líneas de transporte público tienen información en tiempo real.
- El tiempo máximo caminando es de 15 minutos.
- El tiempo en máximo en bicicleta es de 30 minutos.

En esta serie de experimentos se aumenta el radio de consulta de las paradas con información en tiempo real. El primer experimento de la serie considera un radio desde el origen de 300mts, el segundo experimento considera un radio de 600mts, el tercero un radio de 900mts y así sucesivamente hasta llegar a un radio de 4200mts. Se observa en la Figura 6.12 que la gráfica crece linealmente conforme aumenta el radio de consulta, este comportamiento es deseable pues aumentar paradas con información en tiempo real no impacta significativamente los tiempos de ejecución. Sin embargo, a partir del radio de 1500mts los tiempos de ejecución son largos para considerarlos en un SAIV.

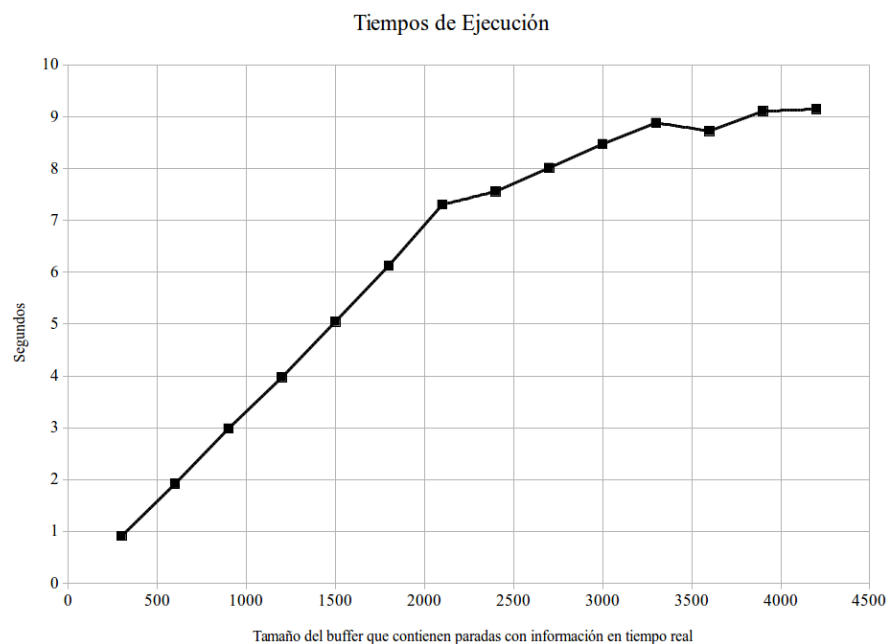


Figura 6.12 Tiempos de ejecución promedio cuando se aumenta el radio de consulta de paradas con información en tiempo real

La quinta y sexta series de experimentos se realizaron en la HiCoTiR de la CDMX, en estas series se incrementa el tamaño de red de acuerdo con la porción contenida en los círculos concéntricos que se muestran en la Figura 6.13. El primer círculo (esquina superior izquierda) tiene un radio de 5km y contiene 8,115 nodos, el segundo círculo tiene un radio de 6km y contiene 10,205 nodos. Los círculos concéntricos aumentan su radio un kilómetro a la vez hasta un círculo de 19km de radio que contiene 39,569 nodos. La sexta serie tiene 19 experimentos y las siguientes restricciones:

- En las paradas de transporte público se puede predecir el arribo de los siguientes dos autobuses.
- Todas las líneas de transporte público tienen información en tiempo real.
- El tiempo máximo caminando es de 15 minutos.
- El tiempo en máximo en bicicleta es de 30 minutos.

La sexta serie consta de seis experimentos y tiene las mismas restricciones que la quinta serie excepto que no considera cotas superiores para caminar y andar en bicicleta.

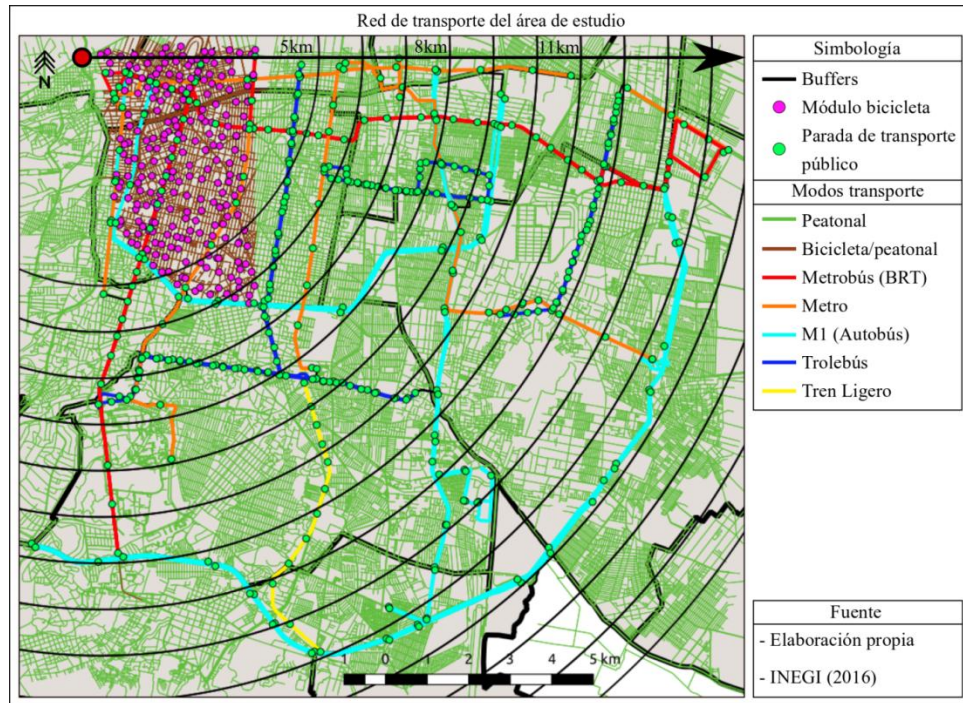


Figura 6.13 Círculos que contiene porciones de la red de transporte del sur de la CDMX

El resultado de los experimentos se muestra en la Figura 6.14, la línea continua (quinta serie) se mantiene casi constante conforme aumenta el tamaño de la red, debido a las restricciones peatonales y de bicicleta la red sólo crece en los alrededores del origen, destino y las paradas de transporte público, por lo que el número de nodos de esta serie de experimentos se mantiene relativamente constante. La línea punteada (sexta serie) de la Figura 6.14 crece muy rápido porque no hay restricciones para caminar y andar en bicicleta, evidentemente, conforme aumenta el tamaño de los círculos esta red crece más rápido que la red con restricciones. El experimento de la sexta serie, para la porción de red contenida en un radio de 11km agotó la memoria virtual del algoritmo, y aunque es posible asignar más memoria, los tiempos de ejecución para el círculo de 10km son lentos (25secs.) para un SAIV.

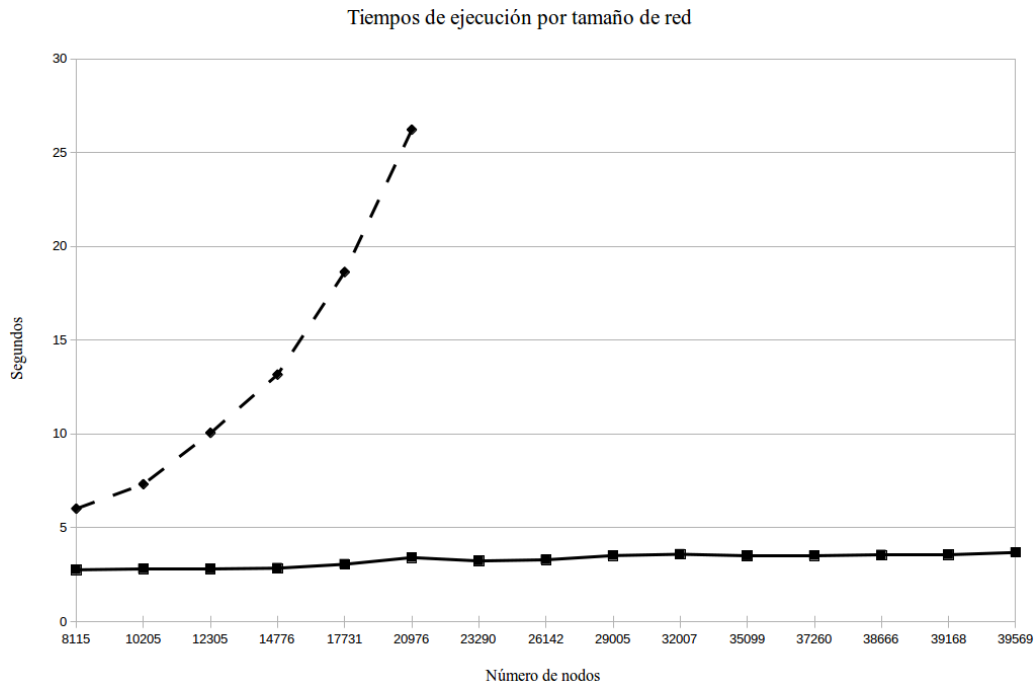


Figura 6.14 La línea punteada corresponde a la quinta serie de experimentos y la línea punteada corresponde a la sexta serie

De las siete series de experimentos se concluye que las características del sistema de transporte público, del modelo HiCoTiR y del algoritmo HiRCoCoTiR que más impactan los tiempos de ejecución son:

1. Densidad de paradas de transporte público con información en tiempo real.
2. El número de predicciones en tiempo real de las llegadas de los vehículos de transporte público a las paradas.
3. La cantidad de paradas alrededor del origen con información en tiempo real.
4. El tamaño de la red.

Un punto débil del algoritmo HiRCoCoTiR (sin considerar restricciones de estacionamiento) se puede observar en la sexta serie de experimentos donde no se consideran cotas peatonales. La red de automóviles es casi tan grande y densa como la red peatonal y en la vida real esta red no tiene restricciones de distancia, es de esperar que considerar los vehículos en el modelo impacte negativamente los tiempos de ejecución. La forma actual del algoritmo HiRCoCoTiR no considera restricciones de estacionamiento ni el tiempo necesario para encontrar un lugar de estacionamiento, ambos valores reducirían significativamente el tamaño de la red y modelarían de forma real el comportamiento de un usuario en automóviles, con lo que sería posible aplicar el SAIV en redes multimodales donde se considere el automóvil.

Las series 1, 2 y 3 de experimentos consideran condiciones reales que los usuarios enfrentan en una red de transporte con modos peatonales y de transporte público. Es decir, los tiempos caminando/bicicleta están acotados y solo se considera información en tiempo real de las paradas de transporte público cerca del origen. Obtener información en tiempo real de paradas lejos del origen carece de sentido pues las predicciones en tiempo real solo alcanzan unos minutos en el futuro, entonces, es imposible llegar a

paradas lejanas antes de que parta el último vehículo del cual se posea información en tiempo real. Además, los tiempos de ejecución de las series 1, 2 y 3 se mantienen debajo de los 4 segundos, tener tiempos de respuesta rápidos en una página web es importante para mantener la atención del usuario. Nah (2004) encontró que 2 segundos es el tiempo de espera tolerable para obtener información de una página web, pero el autor apunta que el período de tiempo se puede alargar si se proporciona a los usuarios algún tipo de retroalimentación como las barras de carga. Egger et al. (2012) encuentran que si un usuario obtiene información antes de los 4 segundos su opinión del sitio donde navega es aceptable. Por lo tanto, los tiempos de respuesta del algoritmo HiRCoCoTiR son buenos, pero no excelentes para la aplicación de un SAIV en entornos de producción. En trabajos futuros se deben estudiar algunas mejoras del algoritmo HiRCoCoTiR que reduzcan los tiempos de ejecución.

7 Congestión en el transporte público

La congestión de los vehículos de transporte público incide directamente en el comportamiento del usuario y en los tiempos de recorrido. Por ejemplo, si el vehículo está lleno hay usuarios que prefieren esperar un vehículo con espacio disponible, otros abordan el vehículo a como dé lugar o algunos prefieren alterar su ruta con tal de viajar más cómodos. En este capítulo se propone una extensión del modelo HiCoTiR y del algoritmo HiRCoCoTiR para considerar la congestión en los vehículos de transporte público. Se aplica el modelo con congestión en un caso de estudio en Ciudad Universitaria.

En la Sección 7.1 se estudia la congestión en los vehículos del transporte público desde la perspectiva de los modelos de asignación de pasajeros de transporte público, mientras que en la Sección 7.2 la congestión se considera como la percepción del tiempo del usuario mientras viaja en vehículos de transporte público saturados. En la Sección 7.3 se adapta el modelo HiCoTiR para que considere la congestión en los vehículos de transporte público con una función de utilidad. En la Sección 7.4 se adapta el algoritmo HiRCoCoTiR para encontrar rutas más cortas en sistemas de transporte público congestionados. Por último, en la Sección 7.5 se extiende el SAIV presentado en el Capítulo 6 para que considere la congestión en los vehículos de transporte público y se muestra un ejemplo de aplicación.

7.1 La congestión en modelos de asignación de pasajeros de transporte público

A continuación se exponen diferentes métodos que se usan para modelar tiempos de espera en modelos de asignación de pasajeros de transporte público (basados en horarios o frecuencias) considerando congestión (o restricciones de capacidad). Primero se enuncian los tres principales artículos sobre este tema y en las siguientes sub-secciones se muestran diferentes modelos de red que se utilizan para calcular los tiempos de espera de vehículos de transporte público considerando congestión. Los artículos de Spiess & Florian (1989), de Cea & Fernández (1993) y Wu et al. (1994) son los cimientos de gran parte de los modelos de asignación de pasajeros de transporte público considerando congestión. El trabajo de Spiess & Florian (1989) fue el primero en definir estrategias de viaje utilizando híper rutas. Los autores modelan el tiempo de espera en paradas de transporte público usando las ecuaciones (7.1) y (7.2).

$$\phi_{e'} = \sum_{j \in h(e')} \phi_{ij}^l \text{ tal que } l \in L'_i \quad (7.1)$$

$$\omega_{e'} = \frac{\alpha}{\phi_{e'}} \quad (7.2)$$

Donde, ϕ_{ij}^l es la frecuencia de la línea l asociada al arco (i, j) que pertenece al híper arco de *abordaje* e' . $\phi_{e'}$ es la frecuencia combinada del híper arco e' asociada al *conjunto atractivo*, L'_i . $\omega_{e'}$ es el tiempo promedio de espera en la parada i del *conjunto atractivo*. El factor α se usa para modelar la distribución de los intervalos de tiempo entre los vehículos del *conjunto atractivo*, cuando $\alpha = 1$ la distribución es irregular y cuando $\alpha = 1/2$ la distribución es constante. Los autores asocian a los arcos funciones que representan un costo de incomodidad por viajar en vehículos llenos, sin embargo su modelo no describe enteramente la realidad por las siguientes razones (Spiess & Florian, 1989):

- Se asocia el mismo nivel de incomodidad a todos los pasajeros, cuando en realidad los pasajeros que entran primero tiene más posibilidades de encontrar un asiento y por consiguiente viajan más cómodos que los últimos en entrar.
- El tiempo que un vehículo se detiene en una parada depende del volumen de pasajeros que sube y baja, pero esta dependencia no está considerada.
- Todos los pasajeros en una determinada parada pueden abordar cualquier vehículo de su *conjunto atractivo*. Este modelo no considera que a veces el usuario tiene que esperar un tiempo extra hasta que pase un vehículo con capacidad disponible.

En el modelo de Cea & Fernández (1993) el tiempo de espera en las paradas depende del flujo de pasajeros, los autores, al igual que Spiess & Florian (1989), consideran un conjunto *atractivo* de líneas. Pero, de Cea & Fernández (1993) no usan híper redes para modelar el sistema de transporte público, ellos usan una modelación por *secciones* donde sub-conjuntos de paradas consecutivas de líneas paralelas de transporte público se representan con un único arco en la red, esto es, cada arco de la red está asociado a una *sección* $s \in S$ tal que s está definida por un conjunto no vacío y finito de líneas de transporte público.

La Figura 7.1 muestra un ejemplo de una *red por secciones*, de acuerdo con la imagen izquierda de la Figura 7.1 para llegar del nodo i al k se pueden abordar los vehículos que pertenecen las líneas l_1 (negra) y l_2 (azul). En la imagen derecha de Figura 7.1 el arco (i, k) con etiqueta $s_1(l_1, l_2)$ representa las *secciones* de las líneas l_1 (negra) y l_2 (azul). La modelación por *secciones* de un sistema de transporte público reduce significativamente el tamaño de la red, sin embargo, las funciones de costo de los arcos deben de considerar las características del conjunto de líneas que representan y es posible que estas características no sean homogéneas en todas líneas lo que dificulta establecer el costo de los arcos.

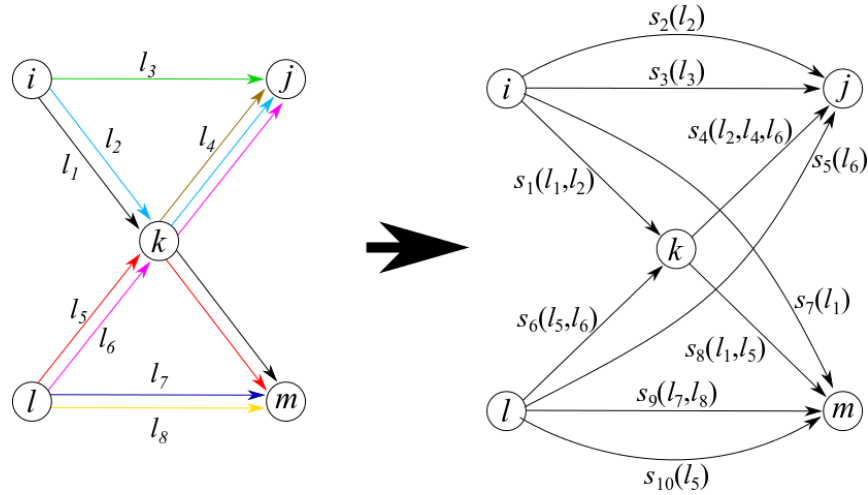


Figura 7.1 Red por secciones. A la izquierda de la figura se muestra una representación de las líneas de transporte en una red. A la derecha de la figura se muestra la representación por secciones de la red de transporte. Imagen adaptada de Szeto et al. (2013)

Para representar la capacidad en los vehículos de transporte público de Cea & Fernández (1993) introducen el concepto de *frecuencia efectiva* que es la reducción aparente de la frecuencia de la línea que se percibe por no poder abordar un vehículo que está lleno. Si no existe congestión los usuarios abordan cualquier vehículo del conjunto *atractivo*, entonces el tiempo de espera solo depende de las frecuencias de las líneas. Sin embargo, cuando se considera la capacidad, el tiempo de espera también depende del flujo de pasajeros, por lo que los autores definen el tiempo de espera de una línea de transporte con la ecuación (7.3).

$$\omega_l = \frac{\alpha_l}{\varphi_l} + \beta_l \left(\frac{v_l}{\varphi_l k_l} \right)^n \quad (7.3)$$

El parámetro α_l es análogo al de Spiess & Florian (1989), φ_l es la frecuencia de la línea l , v_l es el número de pasajeros a bordo de la línea l , k_l es la capacidad de un vehículo de la línea l , β_l y n son parámetros de calibración. En este modelo la capacidad de los vehículos de transporte público no está acotada, es decir, v_l puede ser mayor que $\varphi_l k_l$. El parámetro β_l se asocia a la agresividad del usuario al momento de abordar, si β_l es pequeño el tiempo de espera se reduce sin importar que los vehículos estén llenos, es decir, el usuario empujará con tal de abordar, si β_l es grande el usuario preferirá esperar algún vehículo menos saturado. El parámetro n define la importancia de la capacidad, para n grande la capacidad del vehículo toma más relevancia que para n pequeña. Se observa que si no existe flujo de pasajeros, es decir si $v_l = 0$, entonces la ecuación (7.3) es similar a la ecuación (7.2):

Entonces, de Cea & Fernández (1993) modelan la capacidad en el transporte público con la *frecuencia efectiva* que se define en la ecuación (7.4).

$$\varphi'_l = \frac{\alpha_l}{\omega_l} \quad (7.4)$$

Si los vehículos están vacíos $\varphi'_l = \varphi_l$. El tiempo de espera con congestión, ω_s , de las líneas de transporte público asociadas al arco con *sección* s se define con la ecuación (7.5).

$$\omega_s = \frac{\alpha}{\sum_{l \in S} \phi_l'} \quad (7.5)$$

El modelo de Wu et al. (1994) es una combinación de los modelos de de Spiess & Florian (1989) y de Cea & Fernández (1993). Wu et al. (1994) utilizan híper redes para modelar el sistema de transporte público y definen el tiempo de espera del conjunto *atractivo* de forma similar a Spiess & Florian (1989) pero agregan un costo por congestión similar al de Cea & Fernández (1993), es decir el tiempo de espera se define con la ecuación (7.6).

$$\omega_{e'} = \frac{\alpha}{\phi_{e'}} + w_{e'}(v) \quad (7.6)$$

Donde $w_{e'}(v)$ es una función que depende del flujo de pasajeros y de la capacidad de los vehículos. Esta función se puede construir en base teórica o mediante un estudio empírico, para propósitos de prueba los autores proponen la función asimétrica que se muestra en la ecuación (7.7).

$$w_{e'}(v) = \beta \left(\frac{u_{e'} + \gamma \cdot v_{e'}}{K_{e'}} \right)^n \quad (7.7)$$

Donde $u_{e'}$ es el número de pasajeros que desean abordar los vehículos de las líneas del conjunto *atractivo*, $v_{e'}$ es el número de pasajeros dentro de todos los vehículos de las líneas del conjunto *atractivo* y $K_{e'}$ es la suma de las capacidades de los vehículos de las líneas del conjunto *atractivo*. Los parámetros β y n representan la agresividad del usuario y la importancia de la capacidad, respectivamente. Finalmente el parámetro γ es un número entre 0 y 1.

En el Anexo A se presentan trabajos basados en Spiess & Florian (1989), de Cea & Fernández (1993) y Wu et al. (1994), existen otros trabajos de asignación de pasajeros de transporte público (Bell et al., 2015; Cortés et al., 2013; Gao et al., 2004; Lam et al., 1999; Li et al., 2008; Nguyen et al., 1998; Trozzi et al., 2013; Yin et al., 2004) pero en estos casos el cálculo del tiempo de espera es igual a alguno de los tres artículos mencionados.

7.2 La congestión en sistemas de transporte público con una función de utilidad

La congestión en vehículos de transporte público también se modela con una función de utilidad. Obtener esta función de utilidad sirve para: investigar la disposición de los usuarios de pagar viajes en transporte público, aplicar costos por viajar durante las horas pico en sistemas de transporte y estimar la demanda del transporte, entre otros. Whelan & Crockett (2009) realizaron una encuesta en el sistema de trenes del Reino Unido para intentar obtener la función de utilidad del tiempo de viaje en vehículos congestionados, esta utilidad se calcula con un *multiplicador de congestión*, esto es, si el usuario no encuentra un asiento disponible el tiempo de viaje se multiplica por un escalar que depende de los niveles de congestión. Los autores mencionan que los datos recolectados no son suficientes para obtener una función de utilidad ya que éstos se ajustan a varias funciones.

Basado en el estudio empírico de Whelan & Crockett (2009), Qin (2014) propone dos funciones de utilidad del tiempo de viaje en vehículos de transporte público congestionados. Qin (2014) plantea dos escenarios, el primero supone que hay una penalización por no encontrar un asiento disponible, la ecuación (7.8) define la utilidad de este escenario.

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + (1 - \theta)\beta\tau_{ij}e^{\alpha(\theta-1)}, \quad (7.8)$$

tal que τ_{ij} es el tiempo de viaje del arco (i, j) , θ es el *factor de carga* (la razón de los asientos disponibles entre el número de personas abordo), α es un parámetro arbitrario que puede fijarse en 5 y β es un parámetro que se debe calibrar de acuerdo con θ .

El segundo escenario supone que hay una pequeña penalización por no encontrar un asiento, pero esta penalización crece exponencialmente cuando la congestión dentro del vehículo excede un cierto umbral. La ecuación (7.9) define la utilidad de este escenario.

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + \frac{\rho\tau_{ij}}{1 + e^{\alpha(1-\theta)}} + \beta\tau_{ij}e^{\gamma(\theta-\delta)}, \quad (7.9)$$

donde δ es el umbral de congestión, α y γ son parámetros arbitrarios y, β y ρ son parámetros que se calibran de acuerdo a θ y δ . Qin (2014) usa las ecuaciones (7.8) y (7.9) en casos numéricos para comparar modelos de minimización de costos en diferentes escenarios.

Tirachini et al. (2013) también utilizan el trabajo de Whelan & Crockett (2009) para un modelo de estimación de demanda en transporte público, ellos comparan los casos cuando el transporte público tiene niveles bajos de ocupación versus niveles altos. Batarce et al. (2016) encuentran que el *multiplicador de congestión* en el sistema de transporte público de Chile es similar al de Whelan & Crockett (2009). Hörcher et al. (2017) llevaron a cabo un estudio utilizando el *Smart Card* (sistema de pago que lleva un registro de las entradas y salidas del transporte público) y servicios de geo-localización de vehículos donde estimaron los *multiplicadores de congestión* en el transporte público de Hong Kong, los autores encontraron que los *multiplicadores de congestión* son ligeramente menores a los de Whelan & Crockett (2009) y Batarce et al. (2016).

Kroes et al. (2014) encontraron *multiplicadores de congestión* para el metro, tren, trenes regionales, autobuses y tranvías de la Île-de-France. Todos los *multiplicadores de congestión* encontrados por Kroes et al. (2014) son menores que los reportados en Whelan & Crockett (2009), Batarce et al. (2016) y Hörcher et al. (2017), lo que puede implicar que a los parisinos no les importa tanto viajar en vehículos congestionados como a los británicos, chilenos y hongkoneses. Finalmente, en Li & Hensher (2011) se encuentra una revisión exhaustiva sobre funciones de utilidad del tiempo de viaje en vehículos de transporte público saturados, dependiendo del propósito de la investigación, la utilidad se mide con: multiplicadores de tiempo (*multiplicadores de congestión*), dinero/tiempo, dinero/viaje y minutos/minutos.

A continuación se propone una extensión del modelo HiCoTiR que considera los *multiplicadores de congestión* y después se presenta una extensión del algoritmo HiRCoCoTiR que encuentra rutas más cortas en sistemas de transporte multimodales donde todos los modos de transporte público están congestionados y están basados en frecuencias pero por un periodo de tiempo existen líneas con información en tiempo real sobre los tiempos de espera de los vehículos en las paradas. Los *multiplicadores de congestión* miden la congestión en los vehículos de transporte público en términos del tiempo, por lo que su integración en el modelo HiCoTiR y en el algoritmo HiRCoCoTiR es relativamente directa.

7.3 Modelo de híper red combinada con tiempo real considerando congestión

En la presente investigación la congestión en los vehículos de transporte público se mide con el *multiplicador de congestión*. Dado que el objetivo de la investigación es minimizar el tiempo de viaje en los sistemas de transporte público el *multiplicador de congestión* se adapta de forma apropiada al modelo que se presenta en esta sección. El modelo que se presenta a continuación supone que existe una asignación de pasajeros de transporte público, es por esta razón que los modelos presentados en la Sección 7.1 y el Anexo A de momento no son considerados, pues son insumos para realizar asignaciones de pasajeros de transporte público.

Para modelar un sistema de transporte público de autobuses, bicicletas compartidas y peatones donde los autobuses están congestionados, basados en frecuencias y por un periodo de tiempo existe información en tiempo real de las llegadas de algunas líneas, se construye una Híper red Combinada con Tiempo Real y Congestión (HiCoTiRCo) similar a la presentada en el Capítulo 4. Sea $G = (V, H, T, M)$ una HiCoTiRCo, tal que V es el conjunto de nodos, H es el conjunto de arcos e híper arcos y $T = \{t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, (|T| - 1)\Delta t\}$ es un conjunto discreto de instantes de tiempo. Sea T^i el conjunto de llegadas a la parada i que se obtiene a partir de la información en tiempo real, $T^i \subseteq T$ para toda $i \in V$. Sea $M = \{M1, M2, M3, M4, M5\}$ el conjunto de modos, tal que:

1. $M1 :=$ Peatonal.
2. $M2 :=$ Bicicletas compartidas.
3. $M3 :=$ Autobuses basados en frecuencias.
4. $M4 :=$ Autobuses con información tiempo real.
5. $M5 :=$ Transferencias modales (peatonal).

En el modelo HiCoTiRCo los arcos/híper arcos se asocian a *acciones* que representan el movimiento del usuario dentro de una red de transporte. Las *acciones* asociadas a los arcos/híper arcos tienen los siguientes valores:

- 1: *acción* que representa abordar un vehículo. Es para uso exclusivo del autobús.
- 2: *acción* que representa descender de un vehículo. Es para uso exclusivo del autobús.
- 3: *acción* que representa caminar, conducir o viajar en un modo de transporte. Cualquier modo puede usar esta acción.

El tiempo de espera de los autobuses depende de si existe o no información en tiempo real en el instante de tiempo t . Los modelos del tiempo de espera y el tiempo de viaje de un arco se siguen directamente de los resultados presentados en el Capítulo 4 y se resumen a continuación.

Sea $\xi_{kij}^l(t)$ el tiempo de espera en la parada i del vehículo de la línea l cuando un usuario entra por el arco (k, i) al arco (i, j) en el tiempo t , tal que la *acción* del arco (i, j) es 1 y $t \leq t_l^i \forall t_l^i \in T_l^i$, es decir, en la parada i en el instante de tiempo t existe información en tiempo real de los arribos a la parada de los vehículos de la línea l . $\xi_{kij}^l(t)$ toma los valores que se muestran en la ecuación (7.10).

$$\xi_{kij}^l(t) = \begin{cases} t_l^i - t & \text{si } t \leq t_l^i \text{ tal que } t_l^i \in T_l^i \text{ y } t \notin T_l^i \\ 0 & \text{si } t = t_l^i \end{cases} \quad (7.10)$$

Por otro lado, si en la parada i en el instante de tiempo t se tiene que $t > t_l^i \forall t_l^i \in T_l^i$, entonces, en la parada i no existe información en tiempo real de los vehículos de la línea l , por lo tanto, el tiempo de espera de algún vehículo de la línea l es igual al inverso de la frecuencia de l (Spiess & Florian, 1989), además en la parada i existe un *conjunto atractivo* (Lozano & Storchi, 2002) de líneas de autobús, $L_i'(t)$, tal que, $t > t_l^i$ para toda $t_l^i \in T_l^i$ y $l \in L_i'(t)$. Entonces, el tiempo de espera de los vehículos que pertenecen a las líneas del *conjunto atractivo* es: $\omega_{e'}(t) = 1/\phi_{e'}(t)$, donde $\phi_{e'}(t) = \sum_{j \in h(e')} \varphi_{ij}^l(t)$ tal que $l \in L_i'(t)$.

El tiempo de viaje del arco (i, j) , $\tau_{ij}(t)$, se define en la ecuación (7.11):

$$\tau_{ij}(t) = \begin{cases} c & \text{si el modo de } (i, j) \text{ es } M1, M2, M3 \text{ o } M5 \\ 0 & \text{si la acción de } (i, j) \text{ es } 2 \\ t_j - t_i & \text{si el modo de } (i, j) \text{ es } M4, t < t_l^i \text{ para alguna } t_l^i \in T_l^i \text{ y } t \in T_l^i \\ \infty & \text{si el modo de } (i, j) \text{ es } M4, t < t_l^i \text{ para alguna } t_l^i \in T_l^i \text{ y } t \notin T_l^i \end{cases} \quad (7.11)$$

tal que c es una constante.

El modelo HiCoTiRCo modela la congestión en los vehículos de transporte público con una función de utilidad del tiempo de viaje que describe cómo los usuarios perciben el tiempo mientras viajan en vehículos congestionados. La función de utilidad que se propone a continuación está basada en el trabajo de Qin (2014).

Los supuestos para los niveles congestión dentro de los autobuses y en qué circunstancias los usuarios están dispuestos a abordar un autobús congestionado, son los siguientes:

1. Si hay asientos disponibles o el usuario percibe que puede viajar de pie pero cómodamente, entonces, ella/él abordará el autobús sin penalización.
2. Si el usuario percibe que hay espacio disponible en el autobús pero que viajará incómodo, entonces, ella/él abordará el autobús con una penalización.
3. Si el usuario percibe que no hay espacio disponible en el autobús, ella/él no lo abordará. Siempre habrá alguien que intentará abordar un autobús empujando a los demás, pero hay otros usuarios que nunca empujarán para entrar.

Obtener el *factor de carga* θ de cada vehículo de transporte público es difícil, en general, este factor se calcula como el promedio del sistema por hora. Entonces en el modelo HiCoTiRCo θ no varía en el lapso de una hora, pues es más fácil obtener mediante trabajo de campo *factores de carga* por hora.

Sea θ_k^l el *factor de carga* de la línea l en la parada k , tal que $\theta_k^l = f_k^l / a^l$ donde f_k^l es el volumen de personas por hora en los vehículos de la línea l en la parada k y a^l es el número de asientos por hora en los vehículos de la línea l . Sea $\underline{\delta}$ la *cota inferior del factor de carga* que se define como el valor del *factor de carga* tal que un usuario percibe que puede viajar sentado o de pie cómodamente. Sea $\bar{\delta}$ la *cota superior del factor de carga* que se define como el valor del *factor de carga* tal que un usuario percibe

que es imposible abordar el autobús. Usando la ecuación (7.8) con $\alpha = 5$ y los umbrales de la ecuación (7.9), se define la ecuación (7.12) como el *multiplicador por congestión* cm_{kij}^l del tiempo de viaje del arco (i, j) cuando se aborda un vehículo de la línea l en la parada k .

$$cm_{kij}^l = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_k^l < \underline{\delta} \\ \beta(1 - \theta_k^l)e^{(\alpha(\theta_k^l - \underline{\delta}))} & \text{si } \underline{\delta} \leq \theta_k^l \leq \bar{\delta} \\ \infty & \text{si } \theta_k^l > \bar{\delta} \end{cases} \quad (7.12)$$

El parámetro β modela la paciencia del usuario, es decir, si β tiende a $-\infty$, cm_{kij}^l crece, lo que significa que el usuario prefiere esperar un vehículo vacío (el usuario es paciente). Si β tiende a cero, cm_{kij}^l decrece, entonces al usuario no le importa si el vehículo está lleno, ella/él aborda a como dé lugar (el usuario es impaciente). Para entender mejor la ecuación (7.12), la Figura 7.2 muestra el gráfico de cm_{kij}^l sobre θ_k^l con los siguientes valores: $\underline{\delta} = 1.4$, $\bar{\delta} = 2.5$ y $\beta \in \{-0.06, -0.09, -0.12, -0.15, -0.18\}$. Los valores de cm_{kij}^l cuando $\theta_k^l > \bar{\delta}$ se excluyen para una mejor representación.

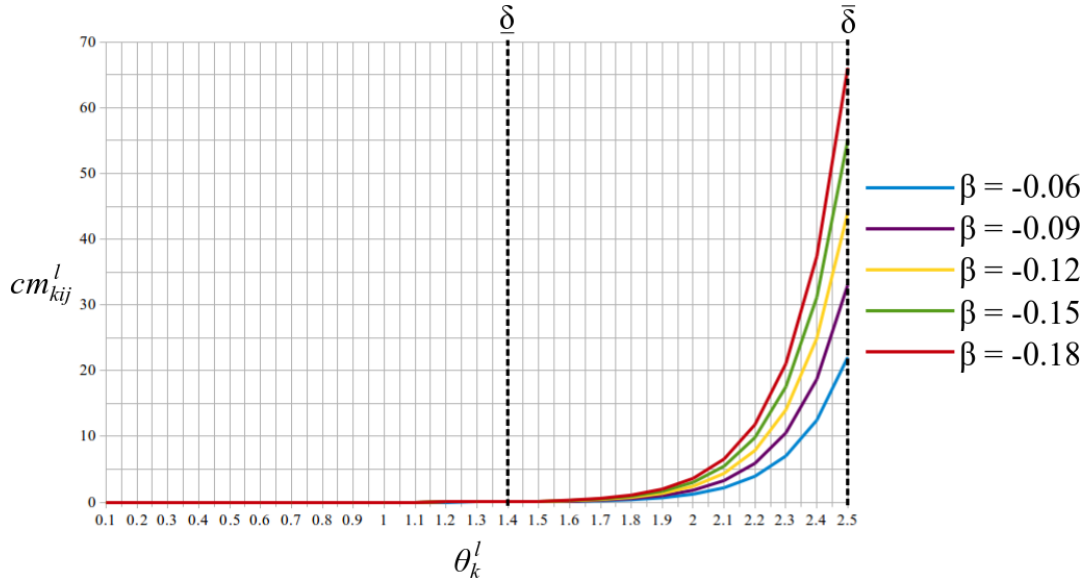


Figura 7.2. Gráfica del *multiplicador por congestión* sobre el *factor de carga*

La calibración de β es difícil y debe ser cuidadosamente realizada para determinar adecuadamente la paciencia del usuario, pero existen estudios empíricos que miden cómo una persona promedio percibe el tiempo de viaje en vehículos de transporte público congestionados. Sea θ_c el *factor de carga* cuando el número de usuarios al interior de un vehículo de transporte público es igual a la capacidad del vehículo y sea cm_c el *multiplicador por congestión* de una persona promedio cuando el número de usuarios al interior de un vehículo de transporte público es igual a la capacidad del vehículo. Whelan y Crockett (2009) encontraron que si $\theta_c = 2$ entonces $cm_c = 2.5$, para el sistema trenes del Reino Unido. Hörcher et al. (2017) calcularon $cm_c = 1.98$ para una densidad de pasajeros dentro del vehículo de 6 pasajeros/m² (utilizando el número de asientos y la superficie de un vehículo, es posible convertir la densidad de pasajeros a *factor de carga*) para el sistemas de trenes de Hong Kong. Batarce et al. (2016) encontraron que $cm_c = 2.5$, para una densidad de 6 pasajeros/m² dentro del metro y de los autobuses de Chile. Kroes

et al. (2014) investigaron los *multiplicadores por congestión* del sistema de transporte público de la Île-de-France y encontraron que si $\theta_c = 2.5$ entonces:

- $cm_c = 1.54$ para el metro.
- $cm_c = 1.55$ para trenes y trenes regionales.
- $cm_c = 1.71$ para autobuses y tranvías.

Obviamente no existe un consenso sobre cm_c pues estos multiplicadores se obtienen con trabajo de campo y los datos recolectados dependen de la idiosincrasia del país, los modos existentes, la infraestructura del transporte público, entre otros. Sin embargo, a partir de estos estudios es posible saber cómo una persona promedio (de un país determinado usando un modo particular de transporte) considera el cm_c . Con la ecuación (7.12) y usando θ_c , $\underline{\delta}$ y cm_c de algún estudio empírico, es posible obtener un punto de partida para la calibración de β . Para ilustrar el procedimiento de calibración considere la gráfica de la Figura 7.2 y suponga que $\theta_c = 2$ y $cm_c = 2.5$ (como en Whelan y Crockett (2009)) si $\underline{\delta} = 1.4$ entonces:

$$cm_{kij}^l = 2.5 = (1 - 2)\beta e^{(5(2-1.4))} \quad (7.13)$$

Despejando β de la ecuación (7.13) se obtiene que $\beta \approx -0.12$. Por lo tanto, el *multiplicador por congestión* de un persona promedio (según los resultados de Whelan & Crockett (2009)) se calcula con la ecuación (7.13) con $\beta = -0.12$ y $\underline{\delta} = 1.4$. Además, es razonable suponer que la *cota inferior del factor de carga*, $\underline{\delta}$, es siempre menor que θ_c , en caso contrario si $\underline{\delta} > \theta_c$ entonces existe alguien que considera cómodo un vehículo lleno, lo cual parece irrazonable. En la gráfica que se muestra en la Figura 7.2, la línea amarilla representa el *multiplicador por congestión* de un usuario promedio, la línea azul representa el *multiplicador por congestión* de un usuario impaciente (el multiplicador es pequeño si hay congestión) y la línea roja representa el *multiplicador por congestión* de un usuario paciente (el multiplicador es grande si hay congestión).

Si se considera la congestión en los vehículos de transporte público, entonces la *penalización de viaje con congestión*, ρ_{ij} , para el arco (i, j) de acción 3 asociado a los modos $M3$ o $M4$ se define con la ecuación (7.14).

$$\rho_{ij}(t) = \tau_{ij}(t)cm_{kij}^l, \quad (7.14)$$

donde $\tau_{ij}(t)$ y $cm_{kij}^l(t)$ se definen como en las ecuaciones (7.11) y (7.12) respectivamente.

El comportamiento del usuario en redes de transporte también se modela con restricciones en los modos utilizados. En este caso particular, la bicicleta está restringida, es decir, si la bicicleta se conduce y se entrega en el módulo de préstamo de bicicletas, no se puede volver a conducir una bicicleta en otra parte del viaje (ésta es una *restricción de preferencia* que puede no ser válida para todos los usuarios). Para saber cuál secuencia de modos es *viable*, se construye un autómata de *estados* no determinístico y finito (AEF) similar al definido en el Capítulo 4 (ver Figura 7.3). La *dominancia* e hiper transiciones entre *estados* se siguen directamente de las estudiadas en el Capítulo 4.

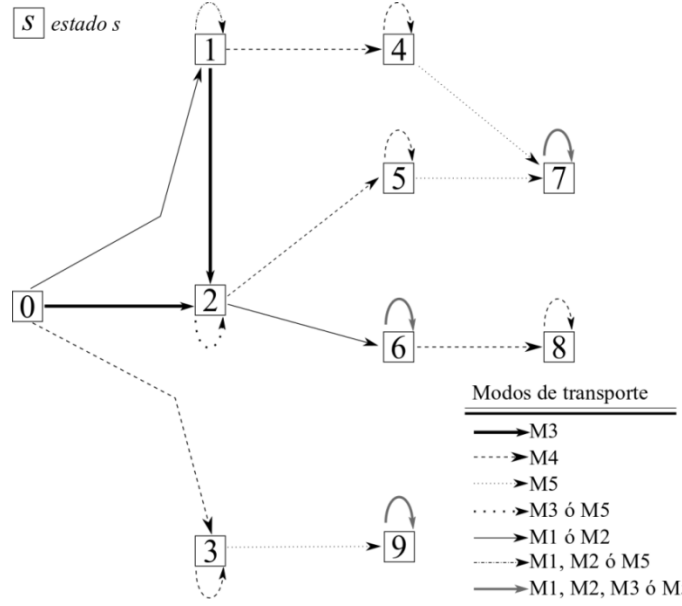


Figura 7.3. Grafo dirigido del AEF donde la bicicleta está restringida

Se define recursivamente el *tiempo esperado de viaje con congestión*, $\lambda_{ki}^{*s}(t)$, de una híper ruta del nodo i al d asociada al *estado* s en el instante de tiempo t entrando por el arco (k, i) . La definición de $\lambda_{ki}^{*s}(t)$ se muestra en la ecuación (7.15) donde $t' = t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))$.

$$\lambda_{ki}^{*s}(t) = \begin{cases} \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{*s'}(t') & \text{si } (i, j) \text{ no es híper arco} \\ \omega_{e'}(t) + \sum_{j \in h(e')} \pi_{e',l}(t) \lambda_{ij}^{*s'}(t + \omega_{e'}(t)) & e' \text{ es un híper arco de } \textit{abordaje} \end{cases} \quad (7.15)$$

Se observa que $\rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))$ no se agrega al instante de tiempo de $\lambda_{ij}^{*s'}$ pues la *penalización de viaje con congestión* es una percepción del tiempo del usuario más no el tiempo que transcurre en la realidad. Si se recorriesen $\rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))$ unidades el instante de tiempo de $\lambda_{ij}^{*s'}$ habría contradicciones al momento de obtener la información en tiempo real. Por ejemplo, suponga que un usuario se encuentra en la parada de autobús A , a las 9:05 y un autobús llega en ese momento, después el autobús llega a la parada B a las 9:08. Si $\xi_{kij}^l(9:05) = 0$, $\tau_{AB}(9:05) = 3$ entonces $\lambda_{ij}^{*s'}(9:05 + 0 + 3) = \lambda_{ij}^{*s'}(9:08)$ lo que concuerda que tanto el usuario como el autobús llegaron a B a las 9:08. Ahora, si $\rho_{ij}(9:05) = 2$ y se recorren estas unidades en el instante de tiempo de $\lambda_{ij}^{*s'}$ se tiene que $\lambda_{ij}^{*s'}(9:05 + 0 + 3 + 2) = \lambda_{ij}^{*s'}(9:10)$ lo que implica que el autobús llega a B a las 9:10 lo que contradice la información en tiempo real. Por lo tanto, la *penalización de viaje con congestión* se agrega únicamente al *tiempo esperado de viaje* con el objetivo de que el algoritmo calcule híper rutas más cortas considerando que la congestión en los vehículos de transporte público se percibe como un tiempo de viaje extra.

7.4 Algoritmo de híper rutas más cortas combinadas con información en tiempo real y congestión en el transporte público

Para encontrar híper rutas más cortas en el modelo HiCoTiRCo se utiliza una adaptación del algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Información en Tiempo Real (HiRCoCoTiR) descrito en el Capítulo 5. La Figura 7.4 muestra el flujo de información del algoritmo HiRCoCoTiR con Congestión en el transporte público (HiRCoCoTiRCo), este algoritmo encuentra el conjunto *Pareto-Optimal* de híper rutas, $p_{kl}^{*s}(t)$, con *tiempo esperado con congestión* mínimo, $\lambda_{kl}^{*s}(t)$, y un número de transferencias modales entre 0 y w .

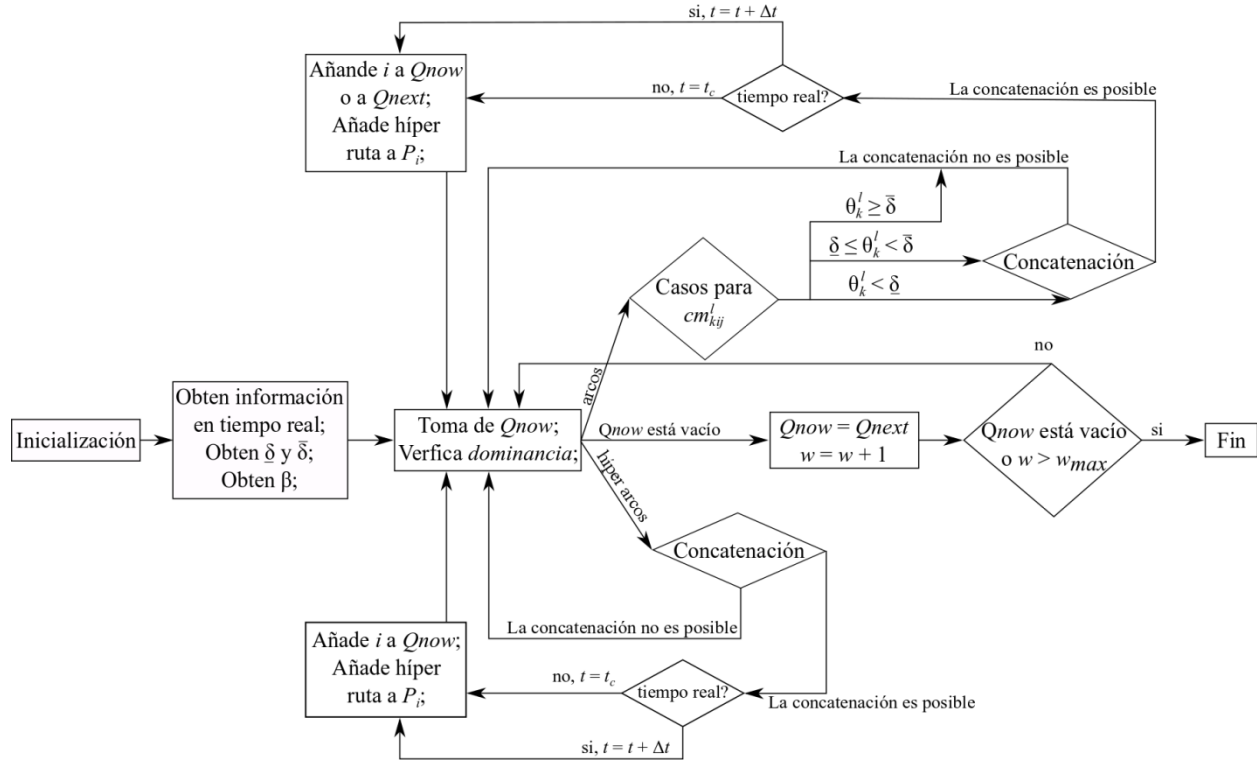


Figura 7.4. Diagrama de flujo del algoritmo HiRCoCoTiRCo

Todos los resultados calculados por el algoritmo HiRCoCoTiRCo incluyen una híper ruta sin información en tiempo real para el caso donde el usuario pierda alguna llegada de autobús con tiempo real. El algoritmo HiRCoCoTiRCo es similar al algoritmo HiRCoCoTiR, solo que antes de comenzar el cálculo de la híper ruta más corta, el algoritmo HiRCoCoTiRCo encuentra el *multiplicador con congestión* de la siguiente forma:

1. Busca la información en tiempo real de las paradas a un 1km de radio del origen.
2. Se obtienen las cotas inferiores y superiores de *factores de carga*. Éstas pueden obtenerse respondiendo un pequeño cuestionario, por ejemplo:
 - a) ¿Quieres viajar sentado?
 - b) ¿Está bien si viajas cómodamente de pie?
 - c) ¿Abordarías un autobús lleno?

Si la pregunta a) es afirmativa y la b) negativa entonces $\underline{\delta} = 1$. Si b) es afirmativa entonces $\underline{\delta} = 1.4$ (de acuerdo con Qin (2014) 1.4 es el umbral del *factor de carga* donde un usuario promedio

se siente cómodo dentro de un vehículo, sin embargo, no existe investigación que respalde el umbral propuesto por Qin (2014)). Si c es negativa entonces $\bar{\delta} < 2.5$ (o $\bar{\delta} < 2$ dependiendo del tipo de vehículo). Si c es positivo, $\bar{\delta} \geq 2.5$ (o $\bar{\delta} \geq 2$). Como $\bar{\delta}$ depende del número de asientos y de la capacidad del vehículo, en teoría puede ser cualquier número mayor que $\underline{\delta}$.

3. Se obtiene β' de acuerdo con θ_c y cm_c (como en la ecuación (7.13)). Usando β' y un cuestionario es posible calibrar β para establecer si el usuario es paciente o impaciente. Algunos ejemplos de preguntas pueden ser:
 - a) ¿Tienes prisa por llegar?
 - b) ¿Prefieres esperar un vehículo con lugar disponible?
 Si la pregunta a) es afirmativa entonces $\beta > \beta'$. Si la pregunta b) es afirmativa entonces $\beta \leq \beta'$.

El algoritmo HiRCoCoTiRCo agrega arcos de la siguiente forma. De Q_{now} se obtiene $[j, s]$ y se comienzan a recorrer todos los arcos $(i, j) \in \Gamma^{-1}(j)$, $(k, i) \in \Gamma^{-1}(i)$ y los instantes de tiempo $t \in T$. Con los arcos (i, j) , (k, i) y el instante de tiempo t , se toma del conjunto de resultados la híper ruta $p_{ij}^s(t)$ y se verifica si no hay otra híper ruta hasta j que domine a $p_{ij}^s(t)$. Si la híper ruta no es dominada, se comprueba si (i, j) es un arco o parte de un híper arco. Cuando (i, j) es un arco se calcula $\xi_{kij}^l(t)$ y se verifican los siguientes casos:

1. Si la acción de (i, j) es diferente de 3, entonces, $cm_{kij}^l = 0$ ya que el usuario está abordando o descendiendo de un vehículo de transporte público, por lo tanto, la penalización de viaje con congestión de (i, j) es $\rho_{ij}(t) = 0$.
2. Si la acción de (i, j) es 3 y el modo del arco es $M1$, $M2$ o $M5$, entonces, $cm_{kij}^l = 0$, pues el usuario no está dentro un vehículo de transporte público, por lo tanto, la penalización de viaje con congestión de (i, j) es $\rho_{ij}(t) = 0$.
3. Si la acción de (i, j) es 3 y el modo del arco es $M3$ ó $M4$. Con los parámetros $\underline{\delta}$, $\bar{\delta}$ y β se obtiene θ_k^l y se comprueban los siguientes casos:
 - 3.1. Si $\theta_k^l \leq \underline{\delta}$, entonces, $cm_{kij}^l = 0$ pues el usuario está cómodo dentro del vehículo, por lo tanto, la penalización de viaje con congestión de (i, j) es $\rho_{ij}(t) = 0$.
 - 3.2. Si $\underline{\delta} \leq \theta_k^l \leq \bar{\delta}$, se calcula cm_{kij}^l según la ecuación (7.12) y la penalización de viaje con congestión es: $\rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) = \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) cm_{kij}^l$.
 - 3.3. Si $\theta_k^l > \bar{\delta}$ el usuario no desea abordar un vehículo lleno, por lo que no procede la concatenación de (i, j) y se pasa al siguiente instante de tiempo t .
4. Se obtiene el estado resultante de la concatenación del arco (i, j) con la híper ruta $p_{ij}^s(t)$, y se comprueba si la condición, $\xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{*sx}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t))) \leq \lambda_{ki}^{*sy}(t)$ es válida. Si la condición es válida, se actualizan todas las etiquetas de forma similar a la estudiada en el Capítulo 5, donde $\lambda_{ki}^{*s}(t) = \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \rho_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)) + \lambda_{ij}^{*sx}(t + \xi_{kij}^l(t) + \tau_{ij}(t + \xi_{kij}^l(t)))$. Si la condición no es válida, la concatenación se detiene y se pasa al siguiente instante de tiempo t .

El proceso de concatenación cuando (i, j) es parte de un híper arco de *abordaje* es igual al estudiado en el Capítulo 5.

Si (i, j) es un arco de transferencia modal, entonces, se añade el par nodo-estado $[i, s]$ a Q_{next} , pero si el modo de (i, j) es peatonal, bicicleta o autobús, se añade $[i, s]$ a Q_{now} . Mientras haya elementos en Q_{now} , el algoritmo continúa obteniendo elementos de Q_{now} . Cuando Q_{now} esté vacío, entonces, todos los elementos de Q_{now} se pasan a Q_{next} , Q_{next} se vacía y se agrega una transferencia modal. El algoritmo finaliza cuando se alcanza el número máximo de transferencias establecidas por el usuario o cuando es imposible mejorar cualquier híper ruta ya construida, es decir, cuando Q_{now} y Q_{next} están vacíos. Se observa que el *tiempo de viaje esperado con congestión* no es el tiempo de viaje real del usuario, es el tiempo de viaje que percibe el usuario mientras viaja en vehículos de transporte público congestionados.

7.5 Desarrollo de un Sistema Avanzado de Información al Viajero considerando la congestión en los vehículos de transporte público

Se desarrolla un Sistema Avanzado de Información al Viajero (SAIV) cuya base de datos geo referenciada es igual que la descrita en la Sección 4.3; únicamente es necesario agregar el campo *factor de carga* a la tabla de paradas que se muestra en la Figura 4.7. A la interfaz de usuario que se muestra en la Figura 6.2 del Capítulo 6 se le añade una pantalla que contiene un cuestionario cuyo objetivo es calibrar los parámetros $\underline{\delta}$, $\bar{\delta}$ y β . Si el usuario desea omitir el cuestionario se toman parámetros por defecto. En un trabajo futuro se tiene pensado agregar la posibilidad de hacer cuentas personales con el objetivo de que cada usuario conteste el cuestionario una sola vez y en algunas rutas obtener retroalimentación del usuario para calibrar de forma más precisa β .

hiperRTR
Transporte público en tiempo real

1. ¿Quieres viajar sentado?
2. ¿Esta bien si viajas comodamente de pie?
3. ¿Abordarías un autobús lleno?
4. ¿Tienes prisa por llegar?
5. ¿Prefieres esperar un vehículo con lugar disponible?

Figura 7.5 Cuestionario en la interfaz de usuario para calibrar los parámetros $\underline{\delta}$, $\bar{\delta}$ y β

Se presenta un ejemplo de aplicación del SAIV en Ciudad Universitaria (CU), donde se considera la congestión en los vehículos transporte público. Con base en un estudio de Cifuentes (2016) de flujo de pasajeros entre las 14:00hrs y 15:00hrs en el transporte público de CU, se estimó el *factor de carga* θ usando la capacidad y la demanda de los autobuses por hora. Para calcular θ con los datos de Cifuentes (2016) se utilizó el número de usuarios por hora que abordan una línea en una parada, la frecuencia de las líneas y la capacidad de asientos por hora de la línea. Por ejemplo, en la parada A hay un flujo de 72.13 personas por hora en la línea 8, la frecuencia de la línea 8 es de 2.21 vehículos por hora y la capacidad de cada autobús es de 100 pasajeros de los cuales 30 pueden ir sentados. Por lo tanto, la línea 8 puede transportar 221.42 pasajeros por hora de los cuales 68.64 irán sentados, entonces, usando aritmética simple se obtiene que el *factor de carga* por hora de la línea 8 es de 1.05, es decir en promedio no es posible encontrar asientos disponibles en la línea 8 durante la hora de estudio. En la Figura 7.6 se muestran los *factores de carga* por hora en cada parada y para cada línea¹⁰ del transporte público de CU.

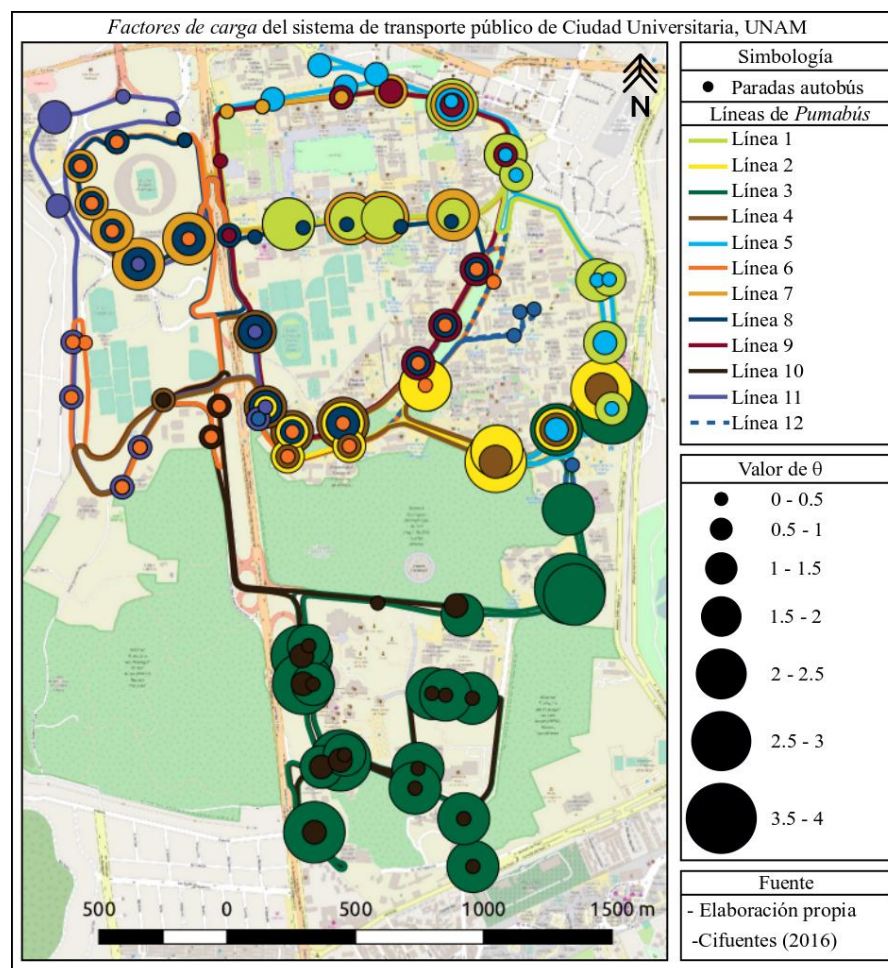


Figura 7.6 Factor de carga por hora para cada parada y cada línea de transporte público de CU

¹⁰Al momento en el que se realizó el estudio de Cifuentes (2016) la línea 13 aún no estaba en funcionamiento.

De los datos de Cifuentes (2016) también se obtiene la densidad de pasajeros por hora dentro del vehículo o *VOC* (*volume over capacity*) por sus siglas en ingles. En el ejemplo del párrafo de arriba el $VOC = 0.325$. Tanto $\bar{\delta}$ como $\underline{\delta}$ son factores que están relacionados con la densidad de pasajeros dentro del vehículo, pero que están en función del número de pasajeros sentados, entonces se calculan $\bar{\delta}$ y $\underline{\delta}$ usando VOC y θ . Continuando con el ejemplo, el VOC es igual a 0.325 cuando $\theta = 1.05$, entonces, si $\underline{\delta}$ y $\bar{\delta}$ se calculan para vehículos al 60% y 100%, respectivamente, se tiene que $\underline{\delta} = 1.935$ y $\bar{\delta} = 3.22$.

A continuación se muestran dos consultas al SAIV cuyas características principales se muestran en la Tabla 7.1. La primera consulta no considera la congestión en los vehículos de transporte público mientras que la segunda sí la considera. En la consulta donde se considera la congestión se toman los siguientes valores por defecto:

1. La *cota inferior del factor de carga*, $\underline{\delta}$, es el 50% de la capacidad total por hora de la línea.
2. La *cota superior del factor de carga*, $\bar{\delta}$, es el 100% de la capacidad total por hora de la línea.
3. La capacidad máxima de los autobuses, θ_c , es el 110% de la capacidad total por hora de la línea.
4. Los *factores de carga* de cada línea en cada parada corresponden a los mostrados en la Figura 7.6.
5. El *multiplicador por congestión*, cm_c , de una persona promedio cuando los vehículos de transporte público se encuentran a su capacidad máxima es 1.7. En la ZMVM es común encontrar que los vehículos de transporte público llevan más personas de las que el fabricante recomienda que viajen, por lo que se elige que θ_c se calcule para vehículos al 110%; el ejemplo que se muestra a continuación no tiene datos reales pues el $cm_c = 1.7$ de Kroes et al. (2014) se calcula para vehículos al 100% no al 110%.

Tabla 7.1 Consultas al SAIV sin considerar y considerando la congestión en los vehículos de transporte público

Consulta al SAIV	No. hiper ruta	Considera congestión	Tiempo esperado	No. transferencias	Tiene tiempo real	Figura
1	1	No	34min	0	No	Imagen izquierda de la Figura 7.7
1	2	No	10min	0	Si	Imagen izquierda de la Figura 7.10
2	1	Sí	82min	2	No	Imagen derecha de la Figura 7.7
2	2	Sí	21min	2	Si	Imagen derecha de la Figura 7.10

Las dos consultas al SAIV se hicieron de la parada de autobús *o* a la parada de autobús *d* el 25 de agosto del 2016 a las 17:00am con un máximo de tres transferencias modales. Además se reprodujo el caso donde todas las líneas de *Pumabús* tienen información en tiempo real de la llegadas de los siguientes dos autobuses y el tiempo de arribo de los vehículos en cada parada varía entre las 17:00am y las 17:20am.

La primera hiper ruta de la primera consulta (imagen izquierda en la Figura 7.7 y la Figura 7.8) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones sin información en tiempo real y sin considerar

congestión en el transporte público. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 34 minutos y las siguientes indicaciones:

1. En el origen aborde un vehículo de la línea 3 (verde) de autobús.
2. Descienda en el destino d .

La primera híper ruta de la segunda consulta (imagen derecha en la Figura 7.7 y La Figura 7.8) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones sin información en tiempo real y considerando congestión en el transporte público. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 82 minutos, dos transferencias modales y las siguientes indicaciones.

1. Camine al módulo de bicicletas compartidas a' y aborde una bicicleta.
2. Conduzca la bicicleta hasta el módulo b' y entregue la bicicleta es ese módulo.
3. Camine hasta la parada de autobús a y aborde un vehículo de la línea 10 (negra) de autobús.
4. Descienda en el destino d .

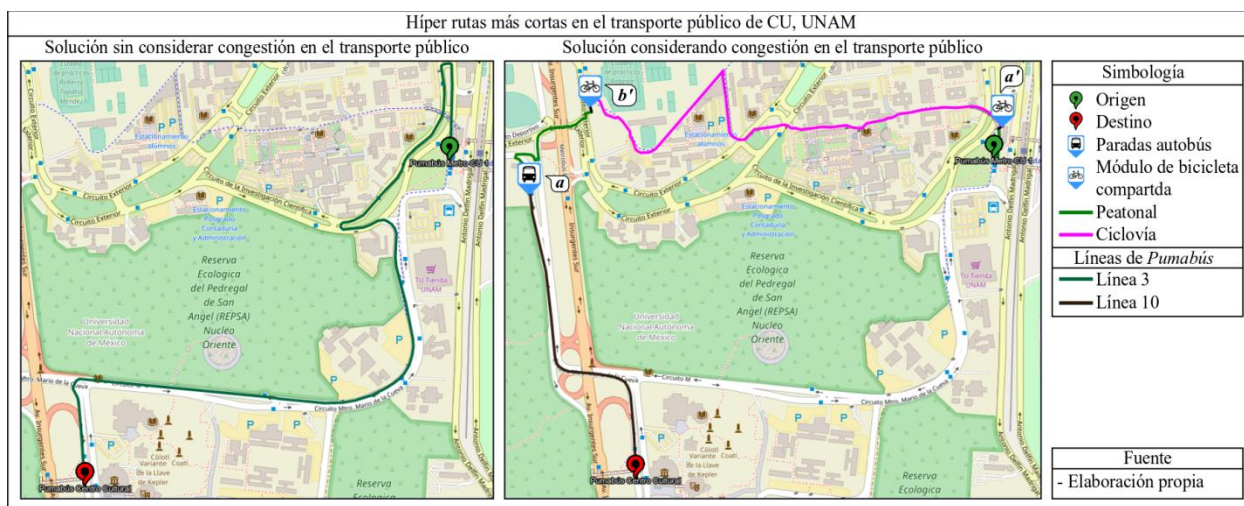


Figura 7.7 La imagen de la izquierda muestra una híper rutas sin tiempo real y sin considerar congestión en el transporte público. La imagen de la derecha muestra una híper rutas sin tiempo real y considerando congestión en el transporte público

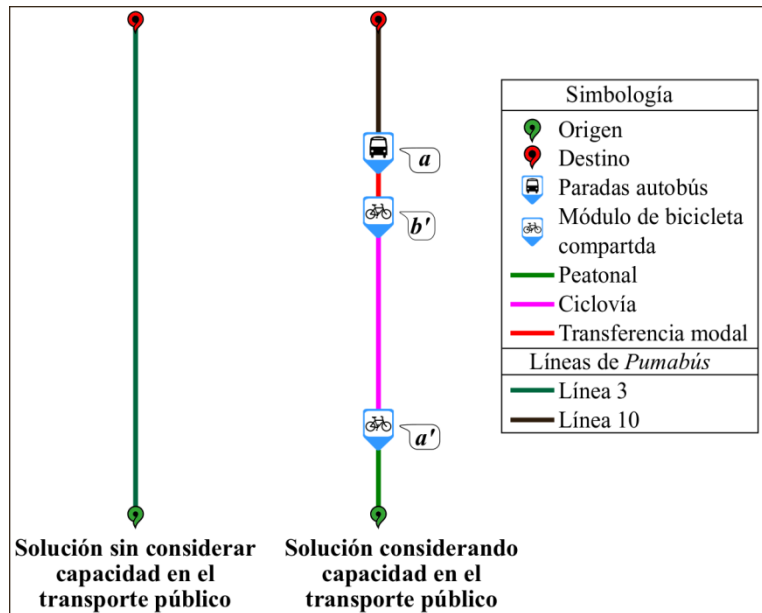


Figura 7.8 Esquema de las híper rutas que se muestran en la Figura 7.7

La Figura 7.9 muestra el *factor de carga* por hora de cada una de las paradas de la línea 3. Esta línea tiene una frecuencia promedio de 2.1 autobuses por hora, los vehículos de esta línea puede transportar 86 personas de las cuales 29 están sentadas. Como $\underline{\delta}$ se calcula para vehículos al 50% de la capacidad y $\overline{\delta}$ para vehículos al 100% de la capacidad, entonces, $\underline{\delta} = 1.48$ y $\overline{\delta} = 2.96$. Se observa que entre el origen (parada o de la Figura 7.9) y el destino (parada d de la Figura 7.9) hay 5 arcos de viaje que están congestionados, donde el *tiempo de viaje con congestión* de cada arco tiene las siguientes características:

1. No es posible viajar por los arcos (o, b) y (e, f) pues el *factor de carga* en ambos casos es mayor que la *cota superior del factor de carga*.
2. El *tiempo de viaje con congestión* del arco (g, d) es 80% más largo que el tiempo de viaje real del arco.
3. El *tiempo de viaje con congestión* los arcos (b, c) y (c, e) es alrededor del 17% más largo que el tiempo de viaje real.

Debido a que es no es posible viajar por los arcos (o, b) y (e, f) , y que el *tiempo de viaje con congestión* del arco (g, d) casi duplica al tiempo de viaje de (g, d) , lo que más conviene es usar una ruta alternativa donde el usuario viaje más cómodo. Usar la bicicleta y abordar un vehículo de la línea 10 es la mejor opción, esta línea no está congestionada (ver Figura 7.6) pero tiene una frecuencia muy baja (1 autobús la hora) por lo que el *tiempo esperado con congestión* de viaje es muy largo.

Entre la parada f y la g no hay congestión en la línea 3, entonces, una opción que parece buena es caminar de la parada o hasta f y ahí abordar el primer vehículo que pase de las líneas 3 ó 10, sin embargo, esta opción se descarta en el algoritmo pues es muy tardado caminar hasta la parada f y además hay que esperar al menos 20 minutos a que pase un autobús de la línea 3 o 10 para llegar al destino.

En redes de transporte público congestionadas es posible que los usuarios usen rutas que no sean directas en aras de la comodidad, pues en ocasiones los usuarios valoran más la comodidad que la

rapidez, siempre y cuando no sacrifiquen tanto su tiempo. Este ejemplo es un caso extremo donde es difícil elegir entre rutas rápidas y llenas o rutas lentas y vacías, pues la diferencia de los tiempos de viaje entre ambas rutas es muy grande y a menos que el usuario disponga de mucho tiempo libre le convendrá optar por la ruta más cómoda. En el siguiente ejemplo se muestra un caso donde preferir la comodidad no impacta de manera tan drástica el tiempo de recorrido de la ruta.

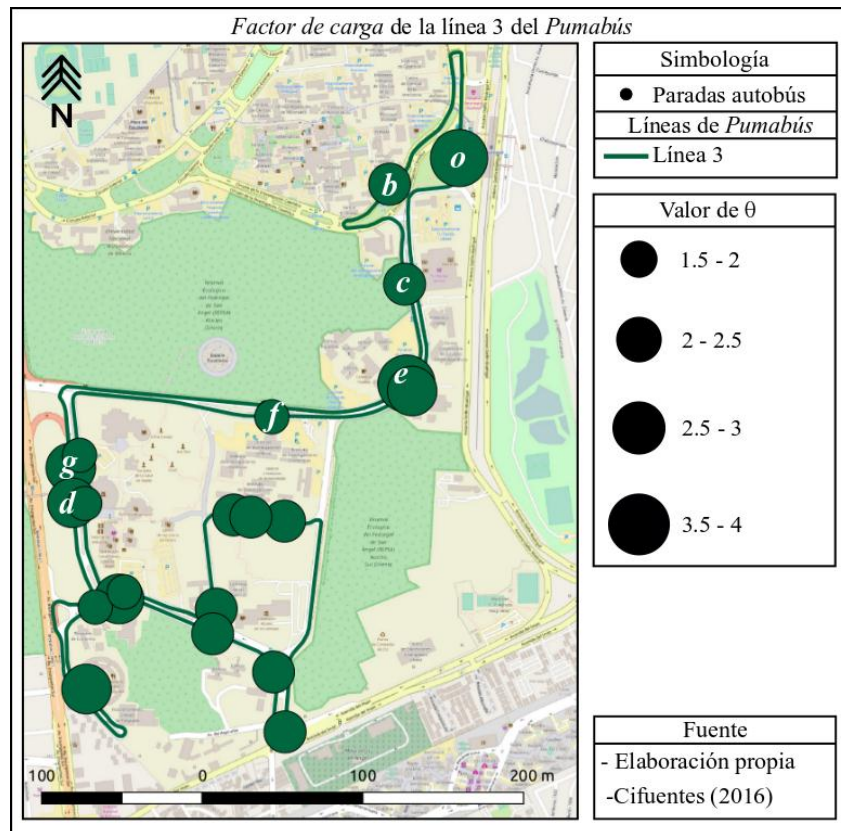


Figura 7.9 Factor de carga por hora para cada parada de la línea 3 del Pumabús

La segunda hiper ruta de la primera consulta (imagen izquierda en la Figura 7.10 y la Figura 7.11) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones con información en tiempo real y sin considerar congestión en el transporte público. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 10 minutos y las siguientes indicaciones:

1. Camine a la parada *a* de Pumabús y aborde a las 17:05 el vehículo de la línea 4 (café).
2. Descienda en la parada *b* y aborde a las 17:06 el vehículo de la línea 3 (verde).
3. Descienda en el destino *d*.

La segunda hiper ruta de la segunda consulta (imagen derecha en la en la Figura 7.10 y la Figura 7.11) es la más rápida del conjunto *Pareto-Optimal* de soluciones con información en tiempo real y considerando congestión en el transporte público. Esta solución tiene un *tiempo esperado* de 21 minutos, dos transferencias modales y las siguientes indicaciones.

1. Camine a la parada *a* de Pumabús y aborde a las 17:05 el vehículo de la línea 4 (café).
2. Descienda en la parada *b* y aborde a las 17:06 el vehículo de la línea 3 (verde).

3. Descienda en la parada *e* y camine a la parada *f* de Pumabús
4. En la parada *f* de Pumabús aborde a las 17:15 el vehículo de la línea 10.
5. Descienda en el destino *d*.

En los dos ejemplos que se muestran en la Figura 7.10 se conocen los tiempos de espera en las paradas y en ambos ejemplos es necesario abordar el vehículo de la línea 4 en la parada *a* y después abordar el vehículo de la línea 3 en la parada *b*. Debido a la congestión en los vehículos de la línea 3 no se puede viajar por el arco (*e, f*), por lo que es necesario descender en la parada *e* y caminar hasta *f* y ahí abordar el vehículo de la línea 10. La diferencia entre el tiempo percibido y el tiempo real de las híper rutas considerando y sin considerar la congestión es de 11 minutos que no es mucho si el usuario prefiere viajar cómodo.

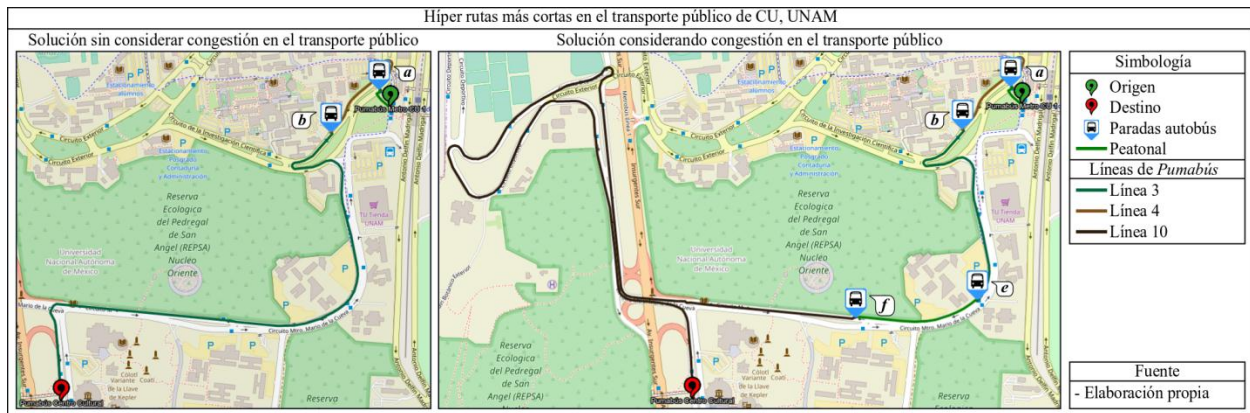


Figura 7.10 La imagen de la izquierda muestra una híper rutas con tiempo real y sin considerar congestión en el transporte público. La imagen de la derecha muestra una híper rutas con tiempo real y considerando congestión en el transporte público

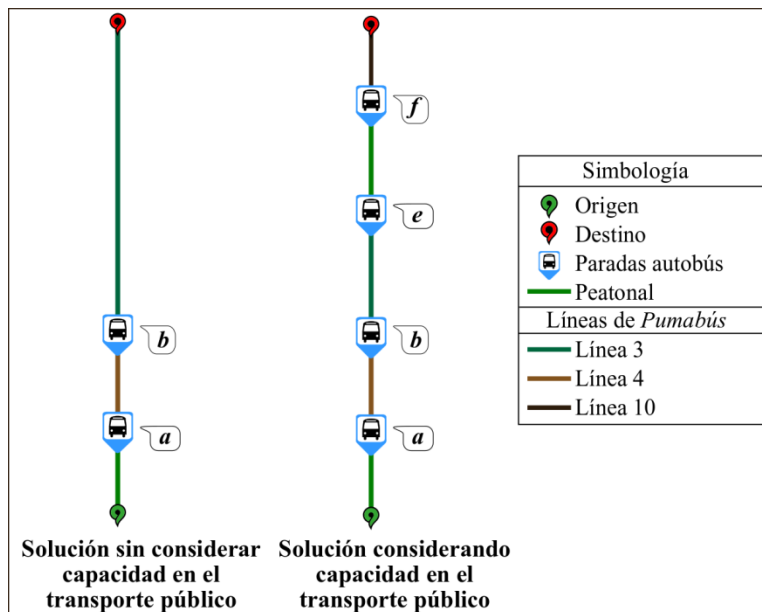


Figura 7.11 Esquema de las híper rutas que se muestran en la Figura 7.10

Conclusiones

No existe en la literatura ni en desarrollos comerciales un Sistema Avanzado de Información para el Viajero (SAIV) que encuentre hiper rutas más cortas en una red de transporte multimodal tal que el transporte público esté basado en frecuencias pero exista información en tiempo real de las llegadas de algunas líneas durante un período de tiempo. En esta tesis se propone la Híper red Combinada con Tiempo Real (HiCoTiR) que modela el sistema de transporte descrito en las líneas anteriores y se propone el algoritmo Híper Rutas más Cortas Combinadas con Tiempo Real (HiRCoCoTiR) que encuentra en el modelo HiCoTiR hiper rutas más cortas con respecto del tiempo y un numero de transferencias modales acotadas. Los aspectos más destacados del modelo HiCoTiR y del algoritmo HiRCoCoTiR son los siguientes:

- El modelo HiCoTiR combina redes dependientes del tiempo e hiper redes para modelar el problema que enfrenta un usuario cuando solo puede aproximar el tiempo de espera de algunos vehículos de transporte público (transporte público basado en frecuencias) pero conoce el tiempo de espera de otros vehículos de transporte público (transporte público con información en tiempo real de las llegadas). En el modelo HiCoTiR, dependiendo del instante de tiempo, los arcos de *abordaje* mutan en hiper arcos de *abordaje* (o viceversa), esta mutación permite que se integren en un solo modelo el problema de aproximar el tiempo de espera de algunos vehículos de transporte público y el conocimiento del tiempo de espera de otros.
- El algoritmo HiRCoCoTiR encuentra hiper rutas más cortas cuando el usuario conoce los tiempos de llegada exactos de algunas líneas de transporte público y sólo conoce las frecuencias del resto de las líneas. Otros algoritmos (ver Capítulo 3) encuentran rutas más cortas en sistemas de transporte público donde se conocen los tiempos de espera o en donde solo se pueden aproximar, pero no existe algoritmos en la literatura que encuentren rutas más cortas donde se conocen los tiempos de espera de algunos vehículos de transporte y solo se pueden aproximar los tiempos de espera de los demás vehículos de transporte público.

- Los conceptos de *estados* y *viabilidad* personalizan las elecciones del usuario de los modos que prefiere o puede abordar. Hay usuarios que además de minimizar su tiempo de viaje, prefieren combinaciones específicas de modos o usar ciertos modos en lugar de otros. Este nivel de personalización en los SAIV no existe en aplicaciones comerciales y, de acuerdo con Bast et al. (2015), Comi & Nuzzolo (2016), Nuzzolo et al. (2015) y el autor de esta tesis, la personalización en la búsqueda de rutas más cortas es uno de los próximos pasos a los que debe apuntar la investigación en SAIV. Algunas aplicaciones comerciales presentan diferentes opciones para llegar al destino, pero estas opciones no están basadas en las preferencias del usuario. En futuros desarrollos, el SAIV puede tener una herramienta que cree automáticamente *autómatas de estados no determinístico finito* (AEF) que capturaren las restricciones y preferencias de los usuarios sobre los modos, esta herramienta puede hacer cuestionarios o preguntar opiniones sobre los viajes que hicieron los usuarios para la creación del AEF.
- El algoritmo HiRCoCoTiR limita explícitamente el número de transferencias modales pues las rutas con número excesivo de transferencias son molestas para los usuarios; otros modelos que limitan el número de transferencias usando penalizaciones pueden producir resultados con un número excesivo de transferencias modales.
- El modelo HiCoTiR representa de forma realista el comportamiento del usuario en redes de transporte, pues limita explícitamente el número de transferencias, y con los conceptos de *estados* y *viabilidad* se indican los modos que prefieren abordar los usuarios, cuáles modos es imposible abordar en determinados lugares o cuáles secuencias de modos están restringidas.
- El algoritmo HiRCoCoTiR es de los pocos algoritmos que encuentran hiper rutas más cortas en una red multimodal "verdadera" (Bast et al., 2015), es decir, los modos no restringidos (peatonales y bicicleta) y restringidos (bicicleta compartida, automóvil o motocicleta) no se usan únicamente para transferencias modales. La mayoría de los modelos "multimodales" (ver Capítulo 3) consideran andar en bicicleta y caminar sólo para transferencias modales por lo que no cumplen con la definición de multimodalidad de Bast et al. (2015).
- Los tiempos de ejecución del SAIV en la red peatonal y de transporte público (incluidas las bicicletas compartidas) de las zonas de estudio (ZMVM y CU) son lo suficientemente cortos para entornos de producción. Pero, si se considera la red de vehículos privados (automóvil o motocicleta) los tiempos de ejecución del algoritmo HiRCoCoTiR crecen demasiado ya que la forma actual del algoritmo no considera restricciones de estacionamiento ni el tiempo necesario para encontrar un lugar de estacionamiento, ambos valores reducirían significativamente el tamaño de la red y sería posible aplicar el SAIV en redes multimodales donde se considere el automóvil.
- Los tiempos de ejecución del algoritmo HiRCoCoTiR en la red de prueba de la ZMVM son prometedores para escalar el SAIV a toda la red de transporte de la ZMVM donde se consideren los todos modos de transporte público (incluida la red de bicicletas compartidas) y el modo peatonal.

En este trabajo se considera que en el transporte público basado en frecuencias el intervalo de tiempo entre dos vehículos consecutivos de la misma línea se distribuye exponencialmente, pero sería interesante en trabajos futuros explorar la posibilidad de incluir más de una distribución (Erlang, Log-logistic y/o Gamma) y así tener un modelo más robusto.

La información sobre capacidad y demanda permite modelar de forma más realista redes congestionadas, donde a veces los usuarios no consiguen abordar el primer vehículo que llega a una parada y tienen que esperar un vehículo con capacidad disponible. Para modelar la congestión en el modelo HiCoTiRCa se necesita una asignación de pasajeros de transporte público, que no es fácil de hacer, sin embargo hoy en día es más sencillo obtener datos por la políticas de *datos abiertos* de los gobiernos y además existen diversos estudios (ver Sección 7.2) que se pueden adaptar y que facilitan el desarrollo del modelo HiCoTiRCa. Ésta es una investigación en curso y por el momento se están explorando opciones, donde al parecer el *multiplicador de congestión* es el camino que más promete, sin embargo no se descarta abordar el problema de congestión en el transporte público usando los modelos presentados en la Sección 7.1 y el Anexo A.

En futuras investigaciones se desea explorar diferentes métodos para medir la congestión en el transporte público para refinar el modelo HiCoTiRCa y el algoritmo HiRCoCoTiRCa para mejorar el SAIV propuesto en la Sección 7.5. La aplicación del SAIV considerando congestión en el transporte público puede tener un impacto positivo en cómo la gente usa el transporte público y además es un tema que se ha abordado poco desde la perspectiva de los SAIV.

A. Anexo I: Congestión en modelos de asignación de pasajeros de transporte público

En este anexo se presentan los trabajos que modelan tiempos de espera en las paradas de transporte público usando variaciones de los modelos de asignación de pasajeros de transporte público con congestión de Spiess & Florian (1989), de Cea & Fernández (1993) y Wu et al. (1994). En la Sección A.1 los tiempos de espera de vehículos de transporte público con restricciones de capacidad, se modelan usando redes por *secciones*, en la Sección A.2 los tiempos de espera se modelan con nodos de falla y finalmente en la Sección A.3 se describen técnicas *ad-hoc* para modelar los tiempos de espera.

A.1 Redes por secciones

Szeto et al. (2011) y Jiang et al. (2013) utilizan variables estocásticas para definir los tiempos de espera. Los autores además usan la frecuencia *efectiva* de la ecuación (7.4) que se muestra en la página 99 para modelar la congestión en las líneas de transporte. Si los tiempos de espera de los vehículos que pertenecen a las líneas están distribuidos exponencialmente entonces, el valor esperado y la varianza del tiempo de espera en la parada están dados por las ecuaciones (A.1) y (A.2), respectivamente.

$$[\omega_s] = \frac{\alpha}{\sum_{l \in S} \phi'_l} \quad (\text{A.1})$$

$$Var[\omega_s] = \frac{\alpha^2}{(\sum_{l \in S} \phi'_l)^2} \quad (\text{A.2})$$

Además, los autores agregan a su modelo un costo por congestión, *con*, que es una penalización por abordar un vehículo saturado. Dado que *con* está más ligado a modelos de asignación de pasajeros de transporte público, no será descrito en la presente tesis pero Szeto et al. (2011) puede ser consultado para

profundizar en el tema. Szeto et al. (2011) y Jiang et al. (2013) definen el tiempo de espera efectivo del primer vehículo de la *sección* s , mediante la ecuación (A.3).

$$E_{\omega_s} = E[\omega_s] + E[con] + \rho\sqrt{Var[\omega_s] + Var[con]} \quad (A.3)$$

Lam et al. (2002) observan que las frecuencias de las líneas de transporte dependen de los movimientos de abordaje y de descenso de los usuarios, esto es, hay paradas donde el volumen de pasajeros es muy alto y por lo tanto los vehículos están estacionados más tiempo de lo acostumbrado. El volumen de usuarios afecta directamente al funcionamiento del sistema y altera el tiempo entre llegadas de los vehículos que se encuentran detrás. Los autores proponen que la frecuencia de las líneas sea dependiente del volumen de pasajeros. A diferencia del resto de los modelos donde la frecuencia es una distribución de probabilidad, Lam et al. (2002) proponen un modelo de frecuencias elásticas definido de la siguiente forma: el ascenso y el descenso de usuarios en cada parada determina el tiempo que pasa un vehículo estacionado, por lo tanto, este tiempo se modela con una función que depende del número de pasajeros. Sea $dt_n^l(v)$, el tiempo que pasa un vehículo de la línea l en la parada n tal que existe un flujo de pasajeros v . Ahora si $t_{i,i+1}$ es el tiempo de recorrido entre las paradas consecutivas i y $i + 1$, entonces, el tiempo total de recorrido de un vehículo de la línea l con n paradas, es representado en la ecuación (A.4).

$$T_l(v) = \sum_{i=0}^n t_{i,i+1} + \sum_{i=0}^n dt_i^l(v) \quad (A.4)$$

La ecuación (A.4) supone que la capacidad de los vehículos que pertenecen a las líneas de transporte público siempre alcanza para satisfacer la demanda. La frecuencia de la línea l se define en la ecuación (A.5).

$$\varphi_l = \frac{n_l}{T_l(v)} \quad (A.5)$$

Donde n_l es el número de vehículos de la línea l . Si se sustituye la ecuación (A.5) en la ecuación (7.5) se obtiene el tiempo de espera.

Szeto et al. (2013) usan la frecuencia elástica de Lam et al. (2002) pero con variables estocásticas. El tiempo de recorrido de los arcos de la *sección* s se muestra en la ecuación (A.6).

$$T_s = \sum_{l \in S} \pi_s^l T_s^l \quad (A.6)$$

Donde π_s^l es la probabilidad de abordar un vehículo de la línea l que pertenece a la *sección* s y T_s^l es el tiempo de recorrido de un vehículo de la línea l de la *sección* s . Se observa que tanto T_s^l como T_s solo consideran el tiempo en el que los vehículos se encuentran en movimiento, es decir, no consideran el tiempo que pasa un vehículo estacionado en una parada. π_s^l se obtiene dividiendo la frecuencia de la línea l entre la suma de las frecuencias de las líneas de la *sección* s , como se muestra en la ecuación (A.7).

$$\pi_s^l = \frac{\varphi_l}{\sum_{l \in S} \varphi_l} \quad (\text{A.7})$$

La frecuencia de una línea l se muestra en la ecuación (A.8) y se define usando el número de vehículos de la línea l y el valor esperado y la varianza del tiempo que toma a los vehículos recorrer la línea l .

$$\varphi_l = \frac{n_l}{E[\Theta_l]} \left(1 + \frac{Var[\Theta_l]}{E^2[\Theta_l]} \right) \quad (\text{A.8})$$

Tal que n_l es el número de vehículos de la línea l , Θ_l es el tiempo de recorrido de la línea l que considera el tiempo que pasa el vehículo en movimiento y el tiempo que el vehículo permanece en las paradas, entonces, si dt^l es el tiempo promedio que permanece un vehículo en cada parada de la línea l , con la ecuación (A.9) se define Θ_l .

$$\Theta_l = n_l \cdot dt^l + \sum_{s \in S_l} T_s \quad (\text{A.9})$$

El valor esperado y la varianza de Θ_l se definen en las ecuaciones (A.10) y (A.11) respectivamente.

$$E[\Theta_l] = n_l \cdot dt^l + \sum_{s \in S_l} E[T_s] \quad (\text{A.10})$$

$$Var[\Theta_l] = \sum_{s \in S_l} Var[T_s] + \sum_{s \in S_l} \sum_{s' \neq s, s' \in S_l} Cov[T_s, T_{s'}] \quad (\text{A.11})$$

Donde el valor esperado y la varianza del tiempo de espera se calculan con las ecuaciones (A.1) y (A.2) respectivamente. Y el tiempo de espera efectivo se calcula con la ecuación (A.3).

Szeto & Jiang (2014) definen el tiempo de espera usando la ecuación (7.5) pero considerando frecuencias normales en lugar de frecuencias *efectivas*. Al tiempo de espera le agregan una penalización por congestión asociada a la parada donde se abordan los vehículos que pertenecen a las líneas de la *sección s*. Esta penalización por congestión se define como en la ecuación (A.12).

$$w_s = \theta \left(\frac{av_s + b\bar{v}_s}{\sum_{l \in S} \varphi_l k_l} \right)^n \quad (\text{A.12})$$

Tal que v_s es el número de pasajeros que desean abordar los vehículos que pertenecen a las líneas de la *sección s*, \bar{v}_s es el número de pasajeros a bordo de líneas de la *sección s*, φ_l es la frecuencia de la línea l y k_l es la capacidad de la línea l . Los parámetros de calibración θ , n , a y b modelan diferentes efectos del flujo que se reflejan en los tiempos de espera, dichos parámetros se relacionan con la percepción del usuario sobre los niveles de congestión (Szeto & Jiang, 2014).

A.2 Nodo de falla

El nodo de falla representa el momento donde los usuarios no pueden abordar una línea de transporte. La Figura A.1 muestra cómo se construye una híper red con un nodo de falla, aunque no se muestra explícitamente se puede hacer una construcción análoga para redes. En la Figura A.1 el nodo de falla

divide a un híper arco, el lado izquierdo de la figura muestra un híper arco de *abordaje* $e = (i, \{j, k, h\})$ y el resultado de la división del híper arco e por un conjunto de nodos se muestra en el lado derecho de la Figura A.1, que tiene un híper arco de abordaje $e = (i, \{j', k', h'\})$ y los arcos (j', j) , (k', k) y (h', h) tienen asociado el costo de abordar los vehículos que pertenecen a las líneas l_1 , l_2 y l_3 respectivamente.

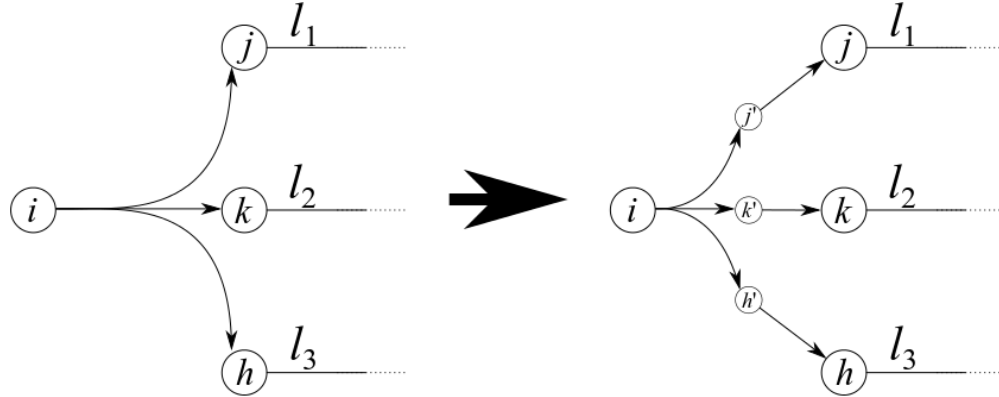


Figura A.1 Representación del transporte público usando un nodo de falla

Kurauchi et al. (2003) usan híper redes para modelar el transporte público y definen el tiempo de espera del conjunto *atractivo* como en el modelo de Spiess & Florian (1989). Cada línea l del conjunto *atractivo* tiene costo de abordaje de $-\theta \ln(1 - q_l)$, donde q_l es la probabilidad de no abordar un vehículo de la línea l y θ es un parámetro de agresividad del usuario. Por ejemplo, si los vehículos de la línea l_1 de la Figura A. tiene una probabilidad de no abordaje de q_{l_1} , entonces, el peso del arco (j', j) es $-\theta \ln(1 - q_{l_1})$. Este modelo supone que el usuario evita paradas congestionadas independientemente del retraso que implique no abordar un vehículo, esto es, el modelo asume que el usuario prefiere vehículos que se aborden en paradas vacías, en lugar abordar vehículos en paradas congestionadas donde el tiempo de espera sea corto. El modelo propuesto por Schmöcker et al. (2008) considera líneas con espera mínima, mejorando la definición de q_l .

Schmöcker et al. (2008) observan que si la probabilidad de no abordar es q_l , el retraso esperado por no abordar es $TID \times q_l$, tal que TID es la duración de un intervalo de tiempo. Entonces, la probabilidad de no abordar el vehículo actual pero sí abordar algún vehículo en los siguientes intervalos de tiempo está dada por la ecuación (A.13).

$$TID \left(q_l(1 - q_l) + 2q_l^2(1 - q_l) + 3q_l^3(1 - q_l) + \dots + nq_l^n(1 - q_l) \right) = TID \frac{q_l}{1 - q_l} \quad (\text{A.13})$$

Los autores mencionan que su formulación no considera que q_l puede variar con el tiempo, es decir, es posible que en el futuro la probabilidad de no abordar sea mayor o menor.

El modelo de Schmöcker & Bell (2009) es similar al de Kurauchi et al. (2003), pero definen la probabilidad de abordaje en términos de la capacidad y la demanda. En la ecuación (A.14) se define la probabilidad de abordar un vehículo de la línea l en la parada i .

$$q_{l_i} = 1 - \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{K_l - v_{l_i}}{u_{l_i}}, 1 \right\} \right\} \quad (\text{A.14})$$

Donde K_l es la capacidad de los vehículos de la línea l , u_{l_i} es el número de usuarios que desean abordar vehículos que pertenecen a la línea l en la parada i y v_{l_i} es el número de usuarios a bordo de los vehículos de la línea l en la parada i . Si $q_{l_i} = 0$ el usuario puede abordar l en i , mientras que si es igual a 1 es imposible que aborde.

A.3 Otros modelos

Los autores que se presentan a continuación usan técnicas *ad-hoc* para modelar los tiempos de espera de vehículos de transporte público congestionados, estas técnicas son diferentes a las redes por *secciones* o los nodos de falla.

Nielsen (2000) modela un sistema de transporte público con horarios, y propone tres tiempos de espera para vehículos con capacidad infinita. El autor supone que los usuarios poseen cierto conocimiento de los horarios, entonces, si el tiempo entre llegadas de vehículos consecutivos de la misma línea es largo, los usuarios llegan a la parada en un horario cercano a la hora de salida, por el contrario si el tiempo es corto, los usuarios llegan a la parada a cualquier hora. Nielsen (2000) propone una cota de 12 minutos entre llegadas para diferenciar los tiempos de espera:

- Si los tiempos entre llegadas son mayores a 12 minutos el tiempo de espera es de 6 minutos.
- Si los tiempos entre llegadas se encuentran entre 0 y 6 minutos el tiempo de espera es $1/(2\phi_l)$.
- Si los tiempos entre llegadas se encuentran entre 6 y 12 minutos el tiempo de espera es:

$$\omega_l = \frac{h_l^2 + \sigma_l^2}{2h_l} \quad (\text{A.15})$$

Donde h_l es el tiempo entre llegadas de vehículos consecutivos de la línea l y σ_l es la desviación estándar de h_l . Entonces, ω_l depende la precisión del servicio, es decir, entre menos retrasados lleguen los vehículos menor será el tiempo de espera.

El autor menciona que si se considera la capacidad de los vehículos se puede usar una fórmula similar a la ecuación (7.3) que se muestra en la página 99, pero no hace referencia a cómo se aplicaría esta fórmula para calcular los tiempos de espera.

En Nguyen et al. (2001) modelan un sistema de transporte público con una red espacio-temporal. En estas redes el tiempo de espera se calcula como la hora de arribo del vehículo a la parada menos la hora de arribo del usuario a la parada. La Figura A.2 muestra una porción de una red espacio-temporal con arcos de abordaje a los vehículos de la línea l en cuatro instantes de tiempo, en este ejemplo cada nodo i_k está asociado al instante de tiempo t_k tal que $0 \leq k \leq 3$ y el nodo j está asociado al instante t_4 . El flujo de usuarios de los arcos de abordaje (i_k, j) es $y_{i_k j}$ para todo $0 \leq k \leq 3$.

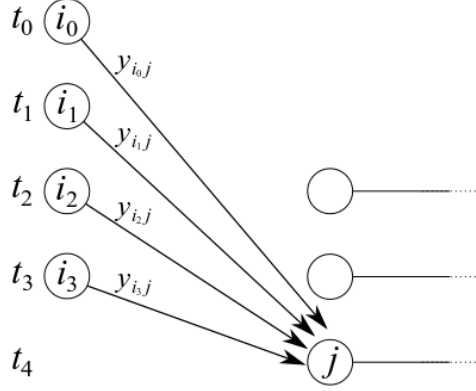


Figura A.2 Red espacio-temporal de los arcos de abordaje de la línea l , en cuatro instantes de tiempo

Para modelar la congestión asocian una penalización por abordaje a todos los arcos de la red que se muestra en la ecuación (A.16).

$$W_l(Y) = \theta \left(\max \left\{ 0, \sum_{k=0}^m y_{i_k j} - \rho u_l \right\} \right)^n \quad (\text{A.16})$$

Donde θ es un escalar positivo que representa la agresividad del usuario al momento de abordar. ρ y n son escalares positivos ligados a la importancia que se le da a la capacidad del vehículo, u_l es la capacidad la línea l y $y_{i_k j}$ es el flujo de pasajeros de cada uno de los arcos de abordaje a los vehículos de la línea l , con $k = \{0, 1, 2, 3 \dots |\Gamma^{-1}(j)|\}$. Hamdouch & Lawphongpanich (2008) usan un modelo similar al de Nguyen et al. (2001) pero ellos definen la penalización por abordaje usando la ecuación (A.17).

$$W_{i_k j} = \max \left\{ 0, \frac{y_{i_k j}}{u_{i_k j}} - \alpha \right\} \quad (\text{A.17})$$

Donde $u_{i_k j}$ es capacidad del arco (i_k, j) en el instante de tiempo i_k y $\alpha \in [0, 1]$ es un umbral que indica cuando un viaje se vuelve incómodo debido al nivel de congestión dentro del vehículo.

Bouzaïene-Ayari et al. (2001) proponen dos modelos para el tiempo de espera donde los intervalos de tiempo entre vehículos consecutivos de una misma línea tienen una distribución de *Erlang*. El primer modelo supone que la capacidad de los vehículos es estricta, es decir si la demanda es mayor que la capacidad entonces el tiempo de espera es infinito. En este caso, el tiempo de espera de los vehículos de la línea l se define en términos del volumen de pasajeros y la capacidad de los vehículos de la línea, usando las ecuaciones (A.18), (A.19) y (A.20):

$$\omega_l(v_l) = a_l + b_l \left(\frac{v_l}{K_l - v_l} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$a_l = \frac{1}{2\varphi_l} \left(1 + \frac{1}{K_l} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$b_l = \frac{\beta}{2\varphi_l} \left(\frac{1}{K_l} + \frac{\varphi_l}{K_l + \varphi_l} \right) \quad (\text{A.20})$$

Tal que K_l es la capacidad de la línea l y β es un parámetro entre 0 y 1. La ecuación (A.19) es estrictamente creciente y conforme la demanda se acerca a la capacidad, $\omega_l(v_l)$ tiende a infinito, al ser una función con capacidades estrictas se tiene que $k_l > v_l$. Los autores mencionan que las capacidades estrictas en modelos de asignación de pasajeros de transporte público suelen ser complicadas, especialmente si la red está muy congestionada. Los autores proponen un modelo alternativo sin capacidades estrictas, es decir, la demanda puede sobrepasar la capacidad y el tiempo de espera crece pero nunca es infinito. En este caso el tiempo de espera de los vehículos de la línea l se define en términos del volumen de pasajeros y la capacidad de los vehículos de la línea usando la ecuación (A.21):

$$\omega_l(v_l) = \frac{1}{2\varphi_l} \left[\left(1 + \frac{1}{k_l} \right) + \left(\psi \frac{v_l}{K_l} \right)^\tau \right], \quad (\text{A.21})$$

donde k_l , ψ y τ son parámetros

Referencias

- Adler, Jeffrey L., and Victor J. Blue. 1998. "Toward the Design of Intelligent Traveler Information Systems." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 6 (3): 157–172. doi:10.1016/S0968-090X(98)00012-6.
- Alves, David, Luis M Martinez, and José M Viegas. 2012. "Retrieving Real-Time Information to Users in Public Transport Networks: An Application to the Lisbon Bus System." *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 54 (2011): 470–482. doi:10.1016/j.sbspro.2012.09.765.
- Amberg, Bastian, Boris Amberg, and Natalia Kliwera. 2011. "Increasing Delay-Tolerance of Vehicle and Crew Schedules in Public Transport by Sequential, Partial-Integrated and Integrated Approaches." *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 20 (January): 292–301. doi:10.1016/j.sbspro.2011.08.035.
- Antsfeld, Leonid, and Toby Walsh. 2012. "Finding Multi-Criteria Optimal Paths in Multi-Modal Public Transportation Networks Using the Transit Algorithm." In *Transport Systems World Congress*, 25. <http://www.cse.unsw.edu.au/~twalsh/awitsworld12.pdf>.
- Artemio Daza, Jorge, and Juan Carlos Espinoza Rescala. 2004. *Hacia Una Arquitectura Nacional Para Los Sistemas Inteligentes de Transporte*. Sanfandila, Querétaro. <http://trid.trb.org/view.aspx?id=1094801>.
- Artemio Daza, Jorge, and Martha Elizabeth de la Torre Romero. 2006. *Servicios de ITS Por Parte de Las Empresas*. México.
- Artigues, Christian, Marie José Huguet, Fallou Gueye, Frédéric Schettini, and Laurent Dezou. 2013. "State-Based Accelerations and Bidirectional Search for Bi-Objective Multi-Modal Shortest Paths." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 27 (February): 233–259. doi:10.1016/j.trc.2012.08.003.
- Ayed, H., C. Galvez-Fernandez, Z. Habbas, and D. Khadraoui. 2011. "Solving Time-Dependent Multimodal Transport Problems Using a Transfer Graph Model." *Computers & Industrial Engineering* 61 (2). Elsevier Ltd: 391–401. doi:10.1016/j.cie.2010.05.018.
- Ayed, Hedi, Djamel Khadraoui, Zineb Habbas, Pascal Bouvry, and Jean François Merche. 2008. "Transfer Graph Approach for Multimodal Transport Problems." In *Communications in Computer and Information Science*, edited by Hoai An Le Thi, Pascal Bouvry, and Tao Pham Dinh, 14:538–547. *Communications in Computer and Information Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-87477-5_57.
- Banco Mundial. 2016. "Población Urbana (% Del Total)." Banco Mundial Group. <http://datos.bancomundial.org/indicador/SP.URB.TOTL.IN.ZS/countries/1W?display=graph>.
- Bast, Hannah, Daniel Delling, Andrew Goldberg, Matthias Müller-Hannemann, Thomas Pajor, Peter Sanders, Dorothea Wagner, and Renato F Werneck. 2015. "Route Planning in Transportation Networks." *Data*

- Structures and Algorithms. Microsoft Research Technical Report, April, 1–65. <http://research.microsoft.com/apps/pubs/default.aspx?id=207102%5Chttp://arxiv.org/abs/1504.05140>.
- Bast, Hannah, Erik Carlsson, Arno Eigenwillig, Robert Geisberger, Chris Harrelson, Veselin Raychev, and Fabien Viger. 2010. “Fast Routing in Very Large Public Transportation Networks Using Transfer Patterns.” In *Algorithms – ESA 2010*, edited by Mark de Berg and Ulrich Meyer, 6346:290–301. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-15775-2_25.
- Bast, Holger, Stefan Funke, Peter Sanders, and Dominik Schultes. 2007. “Fast Routing in Road Networks with Transit Nodes.” *Science* (New York, N.Y.) 316 (5824): 566. doi:10.1126/science.1137521.
- Batarce, Marco, Juan Carlos Muñoz, and Juan de Dios Ortúzar. 2016. “Valuing Crowding in Public Transport: Implications for Cost-Benefit Analysis.” *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 91 (September). Elsevier Ltd: 358–378. doi:10.1016/j.tra.2016.06.025.
- Bell, Michael G.H., Michiel Bliemer, and Mark Raadsen. 2015. *Frequency-based Transit Assignment Revisited*. Working Paper ITLS-WP-15-17. Sydney.
- Berge, Claude, and Edward Minieka. 1973. *Graphs and Hypergraphs*. Oxford: North-Holland publishing company Amsterdam.
- Bielli, Maurizio, Azedine Boulmakoul, and Hicham Mouncif. 2006. “Object Modeling and Path Computation for Multimodal Travel Systems.” *European Journal of Operational Research* 175 (3): 1705–1730. doi:10.1016/j.ejor.2005.02.036.
- Borole, Nilesh, Dillip Rout, Nidhi Goel, P. Vedagiri, and Tom V. Mathew. 2013. “Multimodal Public Transit Trip Planner with Real-Time Transit Data.” *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 104 (December). Elsevier B.V.: 775–784. doi:10.1016/j.sbspro.2013.11.172.
- Bousquet, Aurelie, Sophie Constans, and El Faouzi Nour-Eddin. 2009. “On the Adaptation of a Label-Setting Shortest Path Algorithm for One-Way and Two-Way Routing in Multimodal Urban Transport Networks.” In *International Network Optimisation Conference (INOC'09)*, 1–8. Pisa, Italy. <http://www.di.unipi.it/optimize/Events/proceedings/M/B/2/MB2-2.pdf>.
- Bouzaïene-Ayari, Belgacem, Michel Gendreau, and Sang Nguyen. 2001. “Modeling Bus Stops in Transit Networks: A Survey and New Formulations.” *Transportation Science* 35 (3): 304–321. doi:10.1287/trsc.35.3.304.10148.
- Casey, Bradley, Ashish Bhaskar, Hao Guo, and Edward Chung. 2014. “Critical Review of Time-Dependent Shortest Path Algorithms: A Multimodal Trip Planner Perspective.” *Transport Reviews* 34 (4): 522–539. doi:10.1080/01441647.2014.921797.
- Caulfield, Brian, and Margaret O'Mahony. 2007. “An Examination of the Public Transport Information Requirements of Users.” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 8 (1): 21–30. doi:10.1109/TITS.2006.888620.
- Celikoglu, Berk, and Hikmet Kerem Cigizoglu. 2007. “Modelling Public Transport Trips by Radial Basis Function Neural Networks.” *Mathematical and Computer Modelling* 45 (3–4): 480–489. doi:10.1016/j.mcm.2006.07.002.
- Chang, Elaine, Evangelos Floros, and Athanasios Ziliaskopoulos. 2007. “An Intermodal Time-Dependent Minimum Cost Path Algorithm.” In *Dynamic Fleet Management*, 38:113–132. Boston, MA: Springer US. doi:10.1007/978-0-387-71722-7_6.
- Chen, Shaopei, Jianjun Tan, Christophe Claramunt, and Cyril Ray. 2011. “Multi-Scale and Multi-Modal GIS-T Data Model.” *Journal of Transport Geography* 19 (1). Elsevier Ltd: 147–161. doi:10.1016/j.jtrangeo.2009.09.006.
- Chiu, D.K.W., O.K.F. Lee, Ho-fung Leung, E.W.K. Au, and M.C.W. Wong. 2005. “A Multi-Modal Agent Based Mobile Route Advisory System for Public Transport Network.” In *Proceedings of the 38th Annual Hawaii International Conference on System Sciences*, 0:92b–92b. IEEE. doi:10.1109/HICSS.2005.30.
- Cifuentes, Sonia Marcela. 2016. “Modelación Y Diagnóstico Del Sistema de Transporte Pumabús.” Universidad Nacional Autónoma de México. <http://132.248.9.195/ptd2016/septiembre/515047053/Index.html>.
- Cortés, Cristián E., Pedro Jara-Moroni, Eduardo Moreno, and Cristobal Pineda. 2013. “Stochastic Transit Equilibrium.” *Transportation Research Part B: Methodological* 51 (May): 29–44. doi:10.1016/j.trb.2013.02.001.

- de Cea, Joaquín, and Enrique Fernández. 1993. "Transit Assignment for Congested Public Transport Systems: An Equilibrium Model." *Transportation Science* 27 (2): 133–147. doi:10.1287/trsc.27.2.133.
- Comi, Antonio, and Agostino Nuzzolo. 2016. "Individual Utility-Based Path Suggestions in Transit Trip Planners." *IET Intelligent Transport Systems* 10 (4): 219–226. doi:10.1049/iet-its.2015.0138.
- Delling, Daniel. 2008. "Time-Dependent SHARC-Routing." In *Algorithms - ESA 2008*, edited by Dan Halperin and Kurt Mehlhorn, 332–343. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-87744-8_28.
- Delling, Daniel, Julian Dibbelt, Thomas Pajor, Dorothea Wagner, and Renato F. Werneck. 2013. "Computing Multimodal Journeys in Practice." In *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 7933 LNCS:260–271. doi:10.1007/978-3-642-38527-8_24.
- Dziekan, Katrin, and Karl Kottenhoff. 2007. "Dynamic at-Stop Real-Time Information Displays for Public Transport: Effects on Customers." *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 41 (6): 489–501. doi:10.1016/j.tra.2006.11.006.
- Ecobici Sistema de Transporte Individual. 2016. "Estadísticas de ECOBICI." *Estadísticas de ECOBICI*. https://www.ecobici.df.gob.mx/noticias/detalle_noticia.php?TU5fTk9USUNJQVM=&&MTMx.
- Egger, S., T. Hossfeld, R. Schatz, and M. Fiedler. 2012. "Waiting Times in Quality of Experience for Web Based Services." In *2012 Fourth International Workshop on Quality of Multimedia Experience*, 86–96. IEEE. doi:10.1109/QoMEX.2012.6263888.
- Elias, Birgit. 2007. "Pedestrian Navigation - Creating a Tailored Geodatabase for Routing." In *2007 4th Workshop on Positioning, Navigation and Communication*, 41–47. IEEE. doi:10.1109/WPNC.2007.353611.
- Estelles-Arolas, Enrique, and Fernando Gonzalez-Ladron-de-Guevara. 2012. "Towards an Integrated Crowdsourcing Definition." *Journal of Information Science* 38 (2): 189–200. doi:10.1177/0165551512437638.
- European Commission. 2011. *White Paper on Transport*. Transport. Luxemburgo. doi:10.2832/30955.
- Foote, Kenneth, and Margaret Lynch. 1995. "Geographic Information Systems as an Integrating Technology: Context, Concepts, and Definitions." *The Geographer's Craft Project*. http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/intro/intro_f.html.
- FIMEVIC 2002. "Problemas de Movilidad en la Ciudad de México". Fideicomiso para el mejoramiento de las vías de comunicación del Distrito Federal. <http://www.fimevic.df.gob.mx/problemas/1diagnostico.htm>
- Gandy, Ryan, and Michael J. Meitner. 2008. "Advanced Traveler Information Systems: Bringing Environmental Information to Recreational Driving." *Landscape and Urban Planning* 85 (3–4): 185–194. doi:10.1016/j.landurbplan.2007.11.008.
- Gao, Ziyou, Huijun Sun, and Lian Long Shan. 2004. "A Continuous Equilibrium Network Design Model and Algorithm for Transit Systems." *Transportation Research Part B: Methodological* 38 (3): 235–250. doi:10.1016/S0191-2615(03)00011-0.
- George, Betsy, Sangho Kim, and Shashi Shekhar. 2006. "Spatio-Temporal Network Databases and Routing Algorithms: A Summary of Results." In *Advances in Spatial and Temporal Databases*, edited by Dimitris Papadias, Donghui Zhang, and George Kollios, 2121:460–477. *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-73540-3_26.
- Gil, Jorge. 2015. "Building a Multimodal Urban Network Model Using OpenStreetMap Data for the Analysis of Sustainable Accessibility." In *OpenStreetMap in GIScience*, edited by Jamal Jokar Arsanjani, Alexander Zipf, Peter Mooney, and Marco Helbich, 229–251. Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-14280-7_12.
- Gkiotsalitis, Konstantinos, and Antony Stathopoulos. 2015. "A Mobile Application for Real-Time Multimodal Routing Under a Set of Users' Preferences." *Journal of Intelligent Transportation Systems* 19 (2): 149–166. doi:10.1080/15472450.2013.856712.
- Haahr, Mads. 2016. "True Random Number Service." <https://www.random.org/>.
- Hamdouch, Younes, and Siriphong Lawphongpanich. 2008. "Schedule-Based Transit Assignment Model with Travel Strategies and Capacity Constraints." *Transportation Research Part B: Methodological* 42 (7–8): 663–684. doi:10.1016/j.trb.2007.11.005.

- Häme, Lauri, and Harri Hakula. 2013. "Dynamic Journeying under Uncertainty." *European Journal of Operational Research* 225 (3). Elsevier B.V.: 455–471. doi:10.1016/j.ejor.2012.10.027.
- Hörcher, Daniel, Daniel J. Graham, and Richard J. Anderson. 2017. "Crowding Cost Estimation with Large Scale Smart Card and Vehicle Location Data." *Transportation Research Part B: Methodological* 95 (January): 105–125. doi:10.1016/j.trb.2016.10.015.
- Huang, Ruihong. 2007. "A Schedule-Based Pathfinding Algorithm for Transit Networks Using Pattern First Search." *GeoInformatica* 11 (2): 269–285. doi:10.1007/s10707-006-0011-y.
- INEGI. 2010. "Población Rural Y Urbana." *Cuentame... Población*. http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/rur_urb.aspx?tema=P.
- INEGI. 2015. "División delegacional." *Cuentame... Población*. http://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/df/territorio/div_municipal.aspx?tema=me&e=09.
- Jariyasunant, Jerald, Daniel B. Work, Branko Kerkez, Raja Sengupta, Steven Glaser, and Alexandre Bayen. 2011a. *Mobile Transit Trip Planning with Real-Time Data*. University of California Transportation Center, Working Papers. <http://econpapers.repec.org/RePEc:cdl:uctcwp:qt51t364vz>.
- Jariyasunant, Jerald, Eric Mai, and Raja Sengupta. 2011b. "Algorithm for Finding Optimal Paths in a Public Transit Network with Real-Time Data." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2256 (2256): 34–42. doi:10.3141/2256-05.
- Jiang, Y., W.Y. Szeto, T.M. NG, and Sin C. HO. 2013. "The Reliability-Based Stochastic Transit Assignment Problem with Elastic Demand." *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies* 10: 831–850. doi:10.11175/easts.10.831.
- Jiménez, Víctor M., and Andrés Marzal. 1999. "Computing the K Shortest Paths: A New Algorithm and an Experimental Comparison." In *Algorithm Engineering*, edited by Jeffrey S. Vitter and Christos D. Zaroliagis, 1668:15–29. *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/3-540-48318-7_4.
- Kay, E., J. A. Bondy, and U. S. R. Murty. 1977. "Graph Theory with Applications." *Operational Research Quarterly* (1970-1977) 28 (1). Oxford, UK, UK: Elsevier Science Ltd.: 237. doi:10.2307/3008805.
- Khani, Alireza, Mark Hickman, and Hyunsoo Noh. 2014. "Trip-Based Path Algorithms Using the Transit Network Hierarchy." *Networks and Spatial Economics* 15 (3): 635–653. doi:10.1007/s11067-014-9249-3.
- Kroes, Eric, Marco Kouwenhoven, Laurence Debrincat, and Nicolas Pauget. 2014. "Value of Crowding on Public Transport in Île-de-France, France." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2417 (2417): 37–45. doi:10.3141/2417-05.
- Kurauchi, Fumitaka, Michael G H Bell, and Jan-Dirk Schmöcker. 2003. "Capacity Constrained Transit Assignment with Common Lines." *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 2 (4): 309–327. doi:10.1023/B:JMMA.0000020426.22501.c1.
- Laboratorio para la ciudad. 2017. "Rutas mapaton." <http://datos.labcd.mx/dataset>
- Lam, William H.K., Z.Y. Gao, K.S. Chan, and H. Yang. 1999. "A Stochastic User Equilibrium Assignment Model for Congested Transit Networks." *Transportation Research Part B: Methodological* 33 (5): 351–368. doi:10.1016/S0191-2615(98)00040-X.
- Lam, William H.K., Jing Zhou, and Zhao-han Sheng. 2002. "A Capacity Restraint Transit Assignment with Elastic Line Frequency." *Transportation Research Part B: Methodological* 36 (10): 919–938. doi:10.1016/S0191-2615(01)00042-X.
- Lerner, Wilhelm. 2011. *The Future of Urban Mobility*. Arthur D Little. Germany. http://www.adlittle.com/downloads/tx_adlreports/ADL_Future_of_urban_mobility.pdf.
- Li, Jing-Quan, Kun Zhou, Liping Zhang, and Wei-Bin Zhang. 2010. "A Multimodal Trip Planning System Incorporating the Park-and-Ride Mode and Real-Time Traffic/transit Information." In *Proceedings ITS World Congress*, 65–76. Busan. [http://floridaapts.lctr.org/e-library/update in website/tripplanner.pdf](http://floridaapts.lctr.org/e-library/update%20in%20website/tripplanner.pdf).
- Li, Jing-Quan, Kun Zhou, Liping Zhang, and Wei-Bin Zhang. 2012. "A Multimodal Trip Planning System With Real-Time Traffic and Transit Information." *Journal of Intelligent Transportation Systems* 16 (2): 60–69. doi:10.1080/15472450.2012.671708.

- Li, Qianfei, Peng (Will) Chen, and Yu (Marco) Nie. 2015. "Finding Optimal Hyperpaths in Large Transit Networks with Realistic Headway Distributions." *European Journal of Operational Research* 240 (1). Elsevier B.V.: 98–108. doi:10.1016/j.ejor.2014.06.046.
- Li, Zheng, and David a. Hensher. 2011. "Crowding and Public Transport: A Review of Willingness to Pay Evidence and Its Relevance in Project Appraisal." *Transport Policy* 18 (6). Elsevier: 880–887. doi:10.1016/j.tranpol.2011.06.003.
- Li, Zhi-Chun, William Lam, and A. Sumalee. 2008. "Modeling Impact of Transit Operator Fleet Size Under Various Market Regimes with Uncertainty in Network." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2063 (1): 18–27. doi:10.3141/2063-03.
- Liu, Lu. 2011. "Data Model and Algorithms for Multimodal Route Planning with Transportation Networks." *Technischen Universität München*. <http://mediatum.ub.tum.de/doc/1004678/1004678.pdf>.
- Liu, Linzhong, Juhua Yang, Haibo Mu, Xiaojing Li, and Fang Wu. 2014. "Exact Algorithms for Multi-Criteria Multi-Modal Shortest Path with Transfer Delaying and Arriving Time-Window in Urban Transit Network." *Applied Mathematical Modelling* 38 (9–10). Elsevier Inc.: 2613–2629. doi:10.1016/j.apm.2013.10.059.
- Lo, Hong K., C. W. Yip, and Brian Mak. 2005. "Passenger Route Guidance System for Multi-Modal Transit Networks." *Journal of Advanced Transportation* 39 (3): 271–288. doi:10.1002/atr.5670390304.
- López, David. 2010. "Híper Rutas Más Cortas Con Respecto Del Tiempo Entre Las Instalaciones Dentro de Ciudad Universitaria: Un Modelo de Transporte Multimodal." *Universidad Nacional Autónoma de México*. <http://132.248.52.100:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/3941>.
- Lozano, Angelica, and Giovanni Storchi. 2001. "Shortest Viable Path Algorithm in Multimodal Networks." *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 35 (3): 225–241. doi:10.1016/S0965-8564(99)00056-7.
- Lozano, Angélica, and Giovanni Storchi. 2002. "Shortest Viable Hyperpath in Multimodal Networks." *Transportation Research Part B: Methodological* 36 (10): 853–874. doi:10.1016/S0191-2615(01)00038-8.
- Mahrous, Reem Fawzy. 2012. "Multimodal Transportation Systems : Modelling Challenges." *University of Twente*. https://www.itc.nl/library/papers_2012/msc/upm/mahrous.pdf.
- Mainguenaud, Michel. 1996. "Constraint-Based Queries in a Geographical Database for Network Facilities." *Computers, Environment and Urban Systems* 20 (2): 139–151. doi:10.1016/S0198-9715(96)00005-1.
- Mandloi, Deelesh, and Jean-Claude Thill. 2010. "Object-Oriented Data Modeling of an Indoor/Outdoor Urban Transportation Network and Route Planning Analysis." In *Geospatial Analysis and Modelling of Urban Structure and Dynamics*, 99:197–220. doi:10.1007/978-90-481-8572-6_11.
- Metrobús. 2017. "Metrobús." <http://www.metrobus.df.gob.mx/>.
- Miao, Fang. 2014. "Dynamic Public Transport Transfer Algorithm Based on Multi-Source Real-Time Information." In *CICTP 2014*, 1121–1131. Reston, VA: American Society of Civil Engineers. doi:10.1061/9780784413623.109.
- Miller-Hooks, Elise D., and Hani S. Mahmassani. 2000. "Least Expected Time Paths in Stochastic, Time-Varying Transportation Networks." *Transportation Science* 34 (2): 198–215. doi:10.1287/trsc.34.2.198.12304.
- Nagurney, Anna. 2007. "Mathematical Models of Transportation and Networks." In *Mathematical Models in Economics, II*:39. *Encyclopedia of Life Support Systems*.
- Nah, Fiona Fui-Hoon. 2004. "A Study on Tolerable Waiting Time: How Long Are Web Users Willing to Wait?" *Behaviour & Information Technology* 23 (3): 153–163. doi:10.1080/01449290410001669914.
- Nguyen, Sang, and Stefano Pallottino. 1989. "Hyperpaths and Shortest Hyperpaths." In *Combinatorial Optimization*, edited by Bruno Simeone, 1403:258–271. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/BFb0083470.
- Nguyen, Sang, Stefano Pallottino, and Michel Gendreau. 1998. "Implicit Enumeration of Hyperpaths in a Logit Model for Transit Networks." *Transportation Science* 32 (1): 54–64. doi:10.1287/trsc.32.1.54.
- Nguyen, Sang, Stefano Pallottino, and Federico Malucelli. 2001. "A Modeling Framework for Passenger Assignment on a Transport Network with Timetables." *Transportation Science* 35 (3): 238–249. doi:10.1287/trsc.35.3.238.10152.

- Nielsen, Otto Anker. 2000. "A Stochastic Transit Assignment Model Considering Differences in Passengers Utility Functions." *Transportation Research Part B: Methodological* 34 (5): 377–402. doi:10.1016/S0191-2615(99)00029-6.
- Noh, Hyunsoo, Mark Hickman, and Alireza Khani. 2012. "Hyperpaths in Network Based on Transit Schedules." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2284 (1): 29–39. doi:10.3141/2284-04.
- Nuzzolo, Agostino, Umberto Crisalli, Antonio Comi, and Luca Rosati. 2015. "Individual Behavioural Models for Personal Transit Pre-Trip Planners." *Transportation Research Procedia* 5. Elsevier B.V.: 30–43. doi:10.1016/j.trpro.2015.01.015.
- Ontario Traffic Manual . 2007. "Advanced Traffic Management System". Ontario Traffic Management Committee. Ministry of Transportation Ontario. Canada.
- Pajor, Thomas. 2009. "Multi-Modal Route Planning." Universität Karlsruhe. <http://www.iti.uni-karlsruhe.de/extra/publications/p-mmpr-09.pdf>.
- Peng, Zhong-Ren, and Eok Kim. 2008. "A Standard-Based Integration Framework for Distributed Transit Trip Planning Systems." *Journal of Intelligent Transportation Systems* 12 (1): 13–28. doi:10.1080/15472450701849642.
- Peng, Zhong-Ren, Edward Beimborn, and Malindi Neluheni. 2000. A Framework for the Evaluation of the Benefits of Intelligent Transport Systems. Milwaukee, Wisconsin. <http://escholarship.org/uc/item/2f37v7zq.pdf>.
- Peng, Zhong-Ren, and Ruihong Huang. 2000. "Design and Development of Interactive Trip Planning for Web-Based Transit Information Systems." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 8 (1–6): 409–425. doi:10.1016/S0968-090X(00)00016-4.
- Pyrga, Evangelia, Frank Schulz, Dorothea Wagner, and Christos Zaroliagis. 2008. "Efficient Models for Timetable Information in Public Transportation Systems." *Journal of Experimental Algorithmics* 12 (2): 1. doi:10.1145/1227161.1227166.
- Qin, Feifei. 2014. "Investigating the In-Vehicle Crowding Cost Functions for Public Transit Modes." *Mathematical Problems in Engineering* 2014: 1–13. doi:10.1155/2014/502708.
- Ranade, Abhiram, M. Srikrishna, K. Tilak, and M. Datar. 2005. "Mumbai Navigator." *Indian Journal of Transport Management* Jan-March.
- Red de Transporte de Pasajeros del Distrito Federal. 2017. "Red de rutas." <http://www.rtp.gob.mx/redderutas.html>.
- Rehrl, Karl, Stefan Brunsch, and Hans-Joachim Mentz. 2007. "Assisting Multimodal Travelers: Design and Prototypical Implementation of a Personal Travel Companion." *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 8 (1): 31–42. doi:10.1109/TITS.2006.890077.
- Rodier, Caroline J., and Susan a. Shaheen. 2010. "Transit-Based Smart Parking: An Evaluation of the San Francisco Bay Area Field Test." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 18 (2). Elsevier Ltd: 225–233. doi:10.1016/j.trc.2009.07.002.
- Rodrigue, Jean-Paul, Claude Comtois, and Brian Slack. 2013. *The Geography of Transport Systems*. 3 edition. Routledge.
- Rothkrantz, Léon, Dragos Datcu, and Martijn Beelen. 2005. "Personal Intelligent Travel Assistant: A Distributed Approach." In *IC-AI*, 24–30. Las Vegas, Nevada: CSREA Press. https://www.researchgate.net/profile/Leon_Rothkrantz2/publication/220835654_Personal_Intelligent_Travel_Assistant_A_distributed_approach/links/5497f3a50cf20f487d31c98d.pdf.
- Rye, Tom. 2006. *Intelligent Transport Systems, Reference Material for COMPETENCE*. Edinburgh.
- Schmöcker, Jan-Dirk, and Michael G H Bell. 2009. "The Build-up of Capacity Problems during the Peak Hour." In *Schedule-Based Modeling of Transportation Networks*, 46:1–23. Boston, MA: Springer US. doi:10.1007/978-0-387-84812-9_11.
- Schmöcker, Jan-Dirk, Michael G.H. Bell, and Fumitaka Kurauchi. 2008. "A Quasi-Dynamic Capacity Constrained Frequency-Based Transit Assignment Model." *Transportation Research Part B: Methodological* 42 (10): 925–945. doi:10.1016/j.trb.2008.02.001.
- Schulz, Frank. 2005. "Timetable Information and Shortest Paths." Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- Secretaría del Medio Ambiente. 2012. *Sexto Informe de Trabajo de La Secretaría Del Medio Ambiente Del GDF. Distrito Federal, México*.

- Skoglund, Tor, and I.C. MariAnne Karlsson. 2012. "Appreciated—but with a Fading Grace of Novelty! Traveller's Assessment Of, Usage of and Behavioural Change given Access to a Co-Modal Travel Planner." *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 48 (January): 932–940. doi:10.1016/j.sbspro.2012.06.1070.
- Spickermann, Alexander, Volker Grienitz, and Heiko A. von der Gracht. 2014. "Heading towards a Multimodal City of the Future?" *Technological Forecasting and Social Change* 89 (November). Elsevier Inc.: 201–221. doi:10.1016/j.techfore.2013.08.036.
- Spiess, Heinz, and Michael Florian. 1989. "Optimal Strategies: A New Assignment Model for Transit Networks." *Transportation Research Part B: Methodological* 23 (2): 83–102. doi:10.1016/0191-2615(89)90034-9.
- Spillar, Robert. 1997. *Park-and-Ride Planning and Design Guidelines*. Edited by Parsons Brinckerhoff Inc. New York. <http://cdn.wspgroup.com/8kzmue/park-and-ride-planning-and-design-guidelines.pdf>.
- Stølting Brodal, Gerth, and Riko Jacob. 2004. "Time-Dependent Networks as Models to Achieve Fast Exact Time-Table Queries." *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 92 (2). Elsevier B.V.: 3–15. doi:10.1016/j.entcs.2003.12.019.
- Szeto, W.Y., Muthu Solayappan, and Yu Jiang. 2011. "Reliability-Based Transit Assignment for Congested Stochastic Transit Networks." *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 26 (4): 311–326. doi:10.1111/j.1467-8667.2010.00680.x.
- Szeto, W.Y., and Y. Jiang. 2014. "Transit Assignment: Approach-Based Formulation, Extragradient Method, and Paradox." *Transportation Research Part B: Methodological* 62 (April). Elsevier Ltd: 51–76. doi:10.1016/j.trb.2014.01.010.
- Szeto, W.Y., Yu Jiang, K.I. Wong, and Muthu Solayappan. 2013. "Reliability-Based Stochastic Transit Assignment with Capacity Constraints: Formulation and Solution Method." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 35 (October). Elsevier Ltd: 286–304. doi:10.1016/j.trc.2011.09.001.
- Tang, Lei, and Piyushimita Vonu Thakuriah. 2012. "Ridership Effects of Real-Time Bus Information System: A Case Study in the City of Chicago." *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 22 (June). Elsevier Ltd: 146–161. doi:10.1016/j.trc.2012.01.001.
- Tirachini, Alejandro, David A. Hensher, and John M. Rose. 2013. "Crowding in Public Transport Systems: Effects on Users, Operation and Implications for the Estimation of Demand." *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 53 (July). Elsevier Ltd: 36–52. doi:10.1016/j.tra.2013.06.005.
- Trozzi, Valentina, Ioannis Kaparias, Michael G.H. Bell, and Guido Gentile. 2013. "A Dynamic Route Choice Model for Public Transport Networks with Boarding Queues." *Transportation Planning and Technology* 36 (1): 44–61. doi:10.1080/03081060.2012.745720.
- UNAM. 2016. "Agenda 2016." *Universidad Nacional Autónoma de México*. <http://www.planeacion.unam.mx/Agenda/2016/disco/>.
- United Nations. 2016. *The World's Cities in 2016 – Data Booklet (ST/ESA/SER.A/392)*. New York. http://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/urbanization/the_worlds_cities_in_2016_data_booklet.pdf.
- Verbas, İ. Ömer, and Hani S. Mahmassani. 2015. "Finding Least Cost Hyperpaths in Multimodal Transit Networks." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2497 (February): 95–105. doi:10.3141/2497-10.
- Voloshin, Vitaly I. 2009. *Introduction to Graph and Hypergraph Theory*. New York: Nova Science Publishers.
- Wang, Xin-bo, Gui-jun Zhang, Zhen Hong, Hai-feng Guo, and Li Yu. 2009. "Modeling and Implementing Research of Multimodal Transportation Network." In *2009 First International Conference on Information Science and Engineering*, 2100–2103. IEEE. doi:10.1109/ICISE.2009.752.
- Watkins, Kari Edison, Brian Ferris, Alan Borning, G. Scott Rutherford, and David Layton. 2011. "Where Is My Bus? Impact of Mobile Real-Time Information on the Perceived and Actual Wait Time of Transit Riders." *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 45 (8). Elsevier Ltd: 839–848. doi:10.1016/j.tra.2011.06.010.
- Whelan, Gerard Andrew, and Jon Crockett. 2009. "An Investigation of the Willingness to Pay to Reduce Rail Overcrowding." In *First International Conference on Choice Modelling*, 16. Harrogate, England. <http://www.icmconference.org.uk/index.php/icmc/icmc2009/paper/view/31>.

- Wu, Jia Hao, Michael Florian, and Patrice Marcotte. 1994. "Transit Equilibrium Assignment: A Model and Solution Algorithms." *Transportation Science* 28 (3): 193–203. doi:10.1287/trsc.28.3.193.
- Wu, Wenjing, Zhicai Juan, and Qingyu Luo. 2010. "Short-Term Choice of Travelers with Effect of Traffic Information." *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology* 10 (2). China Association for Science and Technology: 100–105. doi:10.1016/S1570-6672(09)60037-4.
- Xu, Wangtu, Shiwei He, Rui Song, and Sohail S. Chaudhry. 2012. "Finding the K Shortest Paths in a Schedule-Based Transit Network." *Computers & Operations Research* 39 (8). Elsevier: 1812–1826. doi:10.1016/j.cor.2010.02.005.
- Yin, Yafeng, William H K Lam, and Mark a Miller. 2004. "A Simulation-Based Reliability Assessment Approach for Congested Transit Network." *Journal of Advanced Transportation* 38 (1): 27–44. doi:10.1002/atr.5670380104.
- Zhang, Jianwei, Feixiong Liao, Theo Arentze, and Harry Timmermans. 2011a. "A Multimodal Transport Network Model for Advanced Traveler Information Systems." *Procedia Computer Science* 5 (January): 912–919. doi:10.1016/j.procs.2011.07.127.
- Zhang, Liping, Jing-Quan Li, Kun Zhou, Somak Gupta, Meng Li, Wei-Bin Zhang, Mark Miller, and James Misener. 2011b. "Traveler Information Tool with Integrated Real-Time Transit Information and Multimodal Trip Planning." *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2215 (December): 1–10. doi:10.3141/2215-01.
- Ziliaskopoulos, Athanasios, and Whitney Wardell. 2000. "An Intermodal Optimum Path Algorithm for Multimodal Networks with Dynamic Arc Travel Times and Switching Delays." *European Journal of Operational Research* 125 (3): 486–502. doi:10.1016/S0377-2217(99)00388-4.
- Zografos, Konstantinos G., and Konstantinos N. Androustopoulos. 2008. "Algorithms for Itinerary Planning in Multimodal Transportation Networks." *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 9 (1): 175–184. doi:10.1109/TITS.2008.915650.