



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN EDIFICIOS  
MEDIANTE TIEMPOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS  
PARA DETECCIÓN DE DAÑO

T E S I S  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:  
JESÚS MORALES VALDEZ

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. LUIS A. ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA, II-UNAM

COMITÉ TUTOR:  
DR. FRANCISCO J. SÁNCHEZ SESMA, II-UNAM  
DR. RUBÉN A. GARRIDO MOCTEZUMA, CINVESTAV-IPN

MÉXICO, D.F. (JUNIO) 2017



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu, FI-UNAM

Secretario: Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma, CINVESTAV-IPN

Vocal: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria, II-UNAM

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Francisco José Sánchez Sesma, II-UNAM

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. José Alberto Escobar Sánchez, II-UNAM

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería-UNAM.

TUTOR DE TESIS:

---

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria



*A Dios  
por permitirme llegar hasta este punto*

*A mis padres  
a quienes les debo todo lo que soy*

*A Rosario Salazar  
por acompañarme y ser parte de esta aventura*



# Agradecimientos

Antes que nada agradezco a Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto y por la familia que ahora poseo. A mis padres, por su apoyo incondicional y a quienes les debo todo lo que soy.

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM, especialmente a mi director de tesis el Dr. Luis A. Álvarez-Icaza por darme la oportunidad de trabajar con él, por sus acertadas y continuas asesorías. Además, le agradezco por el apoyo y las facilidades brindadas para llevar a cabo esta investigación doctoral, así como por su disponibilidad y amistad.

A los doctores Rubén Garrido y Francisco Sánchez Sesma, integrantes de mi Comité Tutorial, quienes con su tiempo, y sus valiosas sugerencias y comentarios condujeron a una mejora significativa del trabajo desarrollado. También agradezco la amistad brindada por ambos doctores. En especial al Dr. Sánchez Sesma quien ha sido una guía y un ejemplo.

A mis compañeros y amigos, Juan Camilo Molina, Aldo Romero, Antonio Concha, Javier Pliego, Pepe Piña y todos aquellos que no recordé al momento de escribir esto, pero que sin embargo contribuyeron con sus ideas y comentarios en el desarrollo de este trabajo.

A la familia Salazar Altamirano. En especial a Rosario Salazar, a quien deseo manifestar mi gratitud por dedicarme parte de su vida y compartir esta aventura juntos y llenarla de experiencias y enseñanzas; durante estos años ha sido una fuente apoyo incondicional.

A los miembros del jurado les agradezco sus revisiones y comentarios que enriquecieron esta tesis.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por las facilidades prestadas para realizar esta tesis y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca doctoral asignada durante la realización de este trabajo.



# Resumen

Actualmente, la mayoría de los métodos de monitoreo de salud estructural se desarrollan bajo el enfoque de análisis vibracional. De manera general, estos métodos presentan algunas limitantes en cuanto a la forma para procesar la información, el tiempo de cómputo, el nivel de instrumentación requerido y, sobre todo, no son sensibles al daño local. En este trabajo se superan esos problemas desarrollándose dos novedosos esquemas de identificación de parámetros bajo el enfoque de propagación de ondas que permiten identificar las características locales de los edificios y representan una solución alternativa a los métodos de análisis modal. El primero de ellos presenta una nueva técnica de identificación de daño y estimación de rigidez en edificios de múltiples pisos con base empotrada. Basado en el modelo de edificios a cortante, se obtiene la ecuación de onda unidimensional que permite estudiar la propagación de ondas en dirección vertical. La señal de excitación usada es un pulso Ricker que se propaga a través del edificio empleando el método de Thomson-Haskell. Bajo este enfoque, el edificio se supone que consiste en un medio estratificado, donde cada piso representa un estrato. Los tiempos de llegada del pulso a cada piso se utilizan para calcular la rigidez de las columnas. Los cálculos involucrados en este método crecen sólo linealmente con el número de pisos, en oposición a otros métodos de identificación, como el análisis modal, que crecen geoméricamente; esto hace que este enfoque sea un método alternativo interesante para evaluar la integridad de los edificios. El segundo esquema está conformado con un sistema de identificación en línea para edificios modelados como una de barra de cortante discretizada. Este modelo también se usa para diseñar un observador adaptable que permite estimar tanto las señales no medibles de desplazamiento y velocidad así como los parámetros desconocidos de velocidad de propagación y los coeficientes de amortiguamiento, todo en tiempo real. El diseño del observador adaptable se basa únicamente en mediciones de aceleración y no necesita de transformación de coordenadas. Utiliza el algoritmo de Mínimos Cuadrados normalizado con factor de olvido y un esquema de proyección paramétrica. Además, el esquema de identificación emplea una parametrización novedosa basada en filtros lineales integrales que eliminan las perturbaciones constantes y atenúan el ruido de medición. A partir de los parámetros identificados se logra la evaluación estructural. En el primer esquema de identificación se ha logrado determinar, localizar y cuantificar la presencia de daño, mientras en el segundo esquema aún está pendiente la cuantificación. Adicionalmente se explora la técnica de cocientes espectrales  $H/V$ , para identificar las frecuencias de vibración y con ello determinar la respuesta local y los efectos de sitio en el edificio prehispánico mejor conocido como la pirámide del Sol, ubicado en la zona arqueológica de Teotihuacán, México.



# Abstract

Currently, most structural health monitoring methods are developed under the vibrational analysis approach. In general, these methods have some limitations regarding the process of the information, the computation time, the level of instrumentation required and, especially, these methods are not sensitive to the local damage. In this work these problems are overcome by developing two novel parameter identification schemes under the wave propagation approach that allow to identify local characteristics of shear buildings, and represent an alternative solution to modal analysis methods. The first of them introduces a new damage identification technique to estimate stiffness in multi-storey buildings supported in solid ground. Based on a shear building model, a one dimensional wave equation for a vertically propagating shear wave is derived. A Ricker pulse is used as excitation signal and propagated through the building. Wave propagation in the building is based on the Thomson-Haskell method, where each story is represented as a single layer in a multiple stratum model. The wave arrival times of the pulse at each story are used to calculate the stiffness of the columns. The involved calculations in this method grow only linearly with the number of stories, as opposed to other identification methods, e.g. modal analysis, that grow geometrically; this makes this approach an interesting alternative method to assess building integrity. The second scheme is an on-line system identification for buildings modeled as discretized shear beams. A discretized shear beam model is introduced that is used to design an adaptive observer allowing to estimate displacements and velocities as well as the unknown shear wave velocities and damping coefficients in real-time. The adaptive observer design is based only on acceleration measurements, does not need a coordinate transformation, uses the normalized recursive Least Squares method with forgetting factor and a parameter projection scheme to achieve stronger convergence. Moreover, the proposed identification scheme employs a novel parameterization based on linear integral filters, which eliminates constant disturbances and attenuates measurement noise. From the identified parameters the structural evaluation is achieved. In the first identification scheme, it has been possible to determine, locate and quantify the presence of damage, while in the second scheme quantification is still pending. Additionally, the spectral ratio technique H/V is explored to identify the vibration frequencies and thus determine the local response and site effects in the prehispanic building better known as the Sun pyramid, located in the archaeological zone of Teotihuacán, México.



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| Índice de figuras   | III       |
| Índice de tablas  | v         |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Antecedentes . . . . .   | 3         |
| 1.1.1. Métodos modales para SHM . . . . .   | 4         |
| 1.1.2. Wavelets para SHM . . . . .  | 6         |
| 1.1.3. Métodos de reconocimientos de patrones para SHM . . . . .  | 6         |
| 1.1.4. Sistemas de identificación para SHM . . . . .  | 7         |
| 1.1.5. Métodos de propagación de onda para SHM . . . . .  | 8         |
| 1.2. Planteamiento del problema . . . . .   | 12        |
| 1.3. Hipótesis . . . . .  | 13        |
| 1.4. Objetivo . . . . .   | 13        |
| 1.5. Aportaciones . . . . .   | 14        |
| 1.5.1. Publicaciones . . . . .  | 15        |
| 1.6. Organización del trabajo . . . . .   | 16        |
| <b>2. Estimación de la rigidez mediante tiempos de propagación de onda</b>  | <b>17</b> |
| 2.1. Modelo de edificio de cortante y ecuación de onda . . . . .  | 17        |
| 2.1.1. Amortiguamiento . . . . .  | 19        |
| 2.2. Método de Thomson-Haskell para la propagación de ondas . . . . .   | 21        |
| 2.2.1. Formulación para edificios de múltiples pisos . . . . .  | 23        |
| 2.3. Cálculo de la rigidez . . . . .  | 25        |
| 2.4. Pulso de Ricker . . . . .  | 27        |
| 2.5. Ejemplo numérico . . . . .   | 28        |
| 2.6. Detección de daño . . . . .  | 32        |
| 2.6.1. Detección de daño con presencia de ruido de medición . . . . .   | 34        |
| <b>3. Estimación en tiempo real de parámetros en modelos de edificios bajo el enfoque de propagación de ondas</b> | <b>37</b> |
| 3.1. Modelo de un edificio de cortante y la ecuación de onda . . . . .  | 37        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 3.2.      | Semidiscretización espacial del modelo . . . . .                  | 40         |
| 3.3.      | Observador Adaptable . . . . .                                    | 43         |
| 3.3.1.    | Identificación Paramétrica . . . . .                              | 43         |
| 3.3.2.    | Estimador de estados . . . . .                                    | 48         |
| 3.4.      | Resultados experimentales, edificio de 5 pisos . . . . .          | 50         |
| <b>4.</b> | <b>Detección y localización de daño en edificios</b>              | <b>61</b>  |
| 4.1.      | Detección de daño en el piso 2 . . . . .                          | 61         |
| 4.1.1.    | Algoritmo de detección y localización de daño . . . . .           | 68         |
| 4.2.      | Detección de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                    | 70         |
| <b>5.</b> | <b>Respuesta de la pirámide del Sol al ruido ambiental</b>        | <b>77</b>  |
| 5.1.      | Descripción de la pirámide del Sol . . . . .                      | 77         |
| 5.2.      | Mediciones en la pirámide del Sol . . . . .                       | 78         |
| 5.2.1.    | Tratamiento de los datos . . . . .                                | 78         |
| 5.3.      | Cocientes espectrales H/V . . . . .                               | 79         |
| 5.3.1.    | Antecedentes de la técnica de cocientes espectrales H/V . . . . . | 79         |
| 5.4.      | Resultados experimentales . . . . .                               | 81         |
| <b>6.</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>85</b>  |
| 6.1.      | Trabajo futuro . . . . .  | 88         |
| <b>A.</b> | <b>Resultados de simulación de un edificio de 3 pisos</b>         | <b>103</b> |
| A.1.      | Fórmulas empleadas . . . . .                                      | 106        |
| A.2.      | Deducción de $\dot{S}$ y $\ddot{S}$ . . . . .                     | 106        |
| A.3.      | Deducción de la Ec. (2.24) . . . . .                              | 107        |
| <b>B.</b> | <b>Demostraciones del capítulo 3</b>                              | <b>109</b> |
| B.1.      | Demostración de la proposición 1 . . . . .                        | 109        |
| B.2.      | Deducción de la ecuación no homogénea . . . . .                   | 111        |
| B.3.      | Prueba de convergencia . . . . .                                  | 112        |
| B.3.1.    | Prueba de convergencia del observador adaptable . . . . .         | 112        |
| B.4.      | Excitación Persistente (EP) . . . . .                             | 113        |
| B.5.      | Parámetros acotados y diferenciables . . . . .                    | 114        |
| B.6.      | Integrales sobre intervalos de tiempo finito . . . . .            | 114        |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Daños en edificios debido al sismo de 1985, ciudad de México . . . . .                | 2  |
| 2.1. Edificio de cortante . . . . .  | 18 |
| 2.2. Modelo reológico de Kelvin . . . . .  | 20 |
| 2.3. Estrato equivalente a un piso del edificio . . . . .                                  | 21 |
| 2.4. Medio estratificado . . . . .   | 24 |
| 2.5. Pulso de Ricker . . . . .   | 28 |
| 2.6. Edificio de 9 pisos . . . . .   | 29 |
| 2.7. Respuesta del edificio de 9 pisos . . . . .   | 31 |
| 2.8. Spline de la respuesta del edificio de 9 pisos . . . . .                              | 32 |
| 2.9. Tiempo de viaje de onda respecto al módulo de Young en once eventos simulados .       | 34 |
| 2.10. Mediciones contaminadas con ruido Gaussiano . . . . .                                | 36 |
| 3.1. Edificio de cortante y modelo equivalente . . . . .                                   | 38 |
| 3.2. Barra de cortante elástica discretizada . . . . .                                     | 41 |
| 3.3. Proyección paramétrica . . . . .  | 48 |
| 3.4. Edificio de cinco pisos escala reducida . . . . .                                     | 51 |
| 3.5. Señal de excitación: Sismo de 1985 registrado por SCT, componente norte-sur . . .     | 52 |
| 3.6. Espectro en frecuencia de la respuesta del 5º piso debido a la excitación Chirp . . . | 52 |
| 3.7. Parámetros identificados de la ecuación de onda . . . . .                             | 53 |
| 3.8. Diagrama de Bode del filtro pasa alta que elimina el ruido de bajas frecuencias . .   | 55 |
| 3.9. Esquema para obtener las velocidades de referencia . . . . .                          | 56 |
| 3.10. Diagrama de Bode de la derivada numérica y del filtro propuesto . . . . .            | 56 |
| 3.11. Parámetros estructurales identificados . . . . .                                     | 57 |
| 3.12. Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso . . . . .                         | 57 |
| 3.13. Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso . . . . .                         | 58 |
| 3.14. Velocidad medida y estimada en el quinto piso . . . . .                              | 58 |
| 3.15. Velocidad medida y estimada en el tercer piso . . . . .                              | 59 |
| 4.1. Edificio con presencia de daño en el segundo piso . . . . .                           | 62 |
| 4.2. Espectro en frecuencia debido a señal Chirp con presencia de daño en el piso 2 . .    | 63 |
| 4.3. Parámetros identificados de la ecuación de onda con presencia de daño en el piso 2    | 63 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.4. Parámetros estructurales identificados con presencia de daño en el piso 2 . . . . .                                       | 64  |
| 4.5. Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso con presencia de daño en el piso 2 . . . . .                           | 66  |
| 4.6. Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso con presencia de daño en el piso 2                                     | 66  |
| 4.7. Velocidad medida y estimada en el quinto piso con presencia de daño en el piso 2 .  | 67  |
| 4.8. Velocidad medida y estimada en el tercer piso con presencia de daño en el piso 2 .  | 67  |
| 4.9. Esquema de detección y localización de daño . . . . .   | 69  |
| 4.10. Detección de daño en el piso 2 . . . . .   | 69  |
| 4.11. Edificio con presencia de daño en el segundo y quinto piso . . . . .   | 70  |
| 4.12. Espectro en frecuencia debido a la señal Chirp con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                        | 71  |
| 4.13. Parámetros identificados de la ecuación de onda con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                       | 72  |
| 4.14. Parámetros estructurales identificados con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . .                                    | 73  |
| 4.15. Detección de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .   | 74  |
| 4.16. Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                    | 74  |
| 4.17. Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                    | 75  |
| 4.18. Velocidad medida y estimada en el quinto piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                         | 75  |
| 4.19. Velocidad medida y estimada en el tercer piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5 . . . . .                         | 76  |
| 5.1. Pirámide del Sol . . . . .  | 78  |
| 5.2. Esquema de la distribución espacial de los sismómetros de banda ancha . . . . .   | 79  |
| 5.3. Resultados del H/V en los niveles A y B . . . . .   | 82  |
| 5.4. Resultados del H/V en los niveles C y D . . . . .   | 82  |
| 5.5. Comparación de las frecuencias de vibración correspondientes a la cima de la pirámide, calculada con H/V e IBEM . . . . . | 83  |
| 5.6. Registros sísmicos obtenidos en la cima, en las direcciones $x$ , $y$ y $x$ . . . . .                                     | 84  |
| 5.7. Registros sísmicos procesado correspondiente a la cima, en las direcciones $x$ , $y$ y $x$                                | 84  |
| A.1. Respuesta estructural . . . . .   | 104 |
| A.2. Frecuencias de vibración identificadas a partir de $u_0(\omega)/u_3(\omega)$ . . . . .                                    | 105 |

# Índice de tablas

|  |     |
|--|-----|
| 2.1. Parámetros del edificio . . . . .   | 29  |
| 2.2. Comparación de los tiempos de viaje de onda y rigideces analíticas e identificados .  | 30  |
| 2.3. Comparación de los tiempos de viaje de onda y rigideces analíticas e identificados<br>posteriores al spline . . . . .   | 31  |
| 2.4. Tiempos de propagación de onda identificados en once eventos simulados . . . . .  | 33  |
| 2.5. Cálculo de la rigidez en once eventos simulados . . . . .   | 34  |
| 2.6. Error de estimación de rigidez en once eventos simulados . . . . .  | 35  |
| 3.1. Parámetros del observador adaptable . . . . .   | 52  |
| 3.2. Parámetros estimados . . . . .  | 53  |
| 3.3. Comparación entre las frecuencias de vibración real y sus estimadas . . . . .   | 54  |
| 3.4. Masas de los pisos . . . . .  | 54  |
| 3.5. Comparación entre las rigidez analíticas y sus estimadas . . . . .  | 55  |
| 4.1. Variación de los parámetros estimados con presencia de daño en el segundo piso .  | 64  |
| 4.2. Comparación de las frecuencias de vibración con presencia de daño en el segundo piso  | 64  |
| 4.3. Comparación de las rigideces analíticas y estimadas con presencia de daño en el<br>segundo piso . . . . .   | 65  |
| 4.4. Variación de los parámetros estimados debido a la presencia de daño en los pisos 2<br>y 5 . . . . .   | 71  |
| 4.5. Comparación de las frecuencias de vibración con presencia de daño en los pisos 2 y 5  | 72  |
| 4.6. Comparación de las rigideces analíticas y estimadas con presencia de daño en los<br>pisos 2 y 5 . . . . .   | 73  |
| A.1. Características del edificio de tres pisos de concreto reforzado . . . . .  | 103 |
| A.2. Tiempos de viaje de onda identificados, con parámetros: $h = 3m$ , $\rho = 0.2446(\frac{t_f s^2}{m^4})$ ,<br>$\beta = 101.5(m/s)$ , para las tres capas . . . . . | 104 |
| A.3. Frecuencias de vibración identificadas . . . . .  | 105 |



# Capítulo 1

## Introducción

Las estructuras civiles siempre han formado parte del desarrollo urbano. Actualmente es difícil imaginar una ciudad sin puentes, edificios, rascacielos o cualquiera de las demás obras de ingeniería que distinguen a la sociedad moderna. En el caso de los edificios, éstos se caracterizan por ser cada vez más complejos, tanto en tamaño como en diseño, donde se usan nuevos conceptos y materiales para construir obras de mayor magnitud, más resistentes y durables. Sin embargo, independientemente de su naturaleza, cualquier edificio está expuesto a sufrir algún tipo de daño que pone en riesgo su integridad y operación, ya sea por el deterioro de los materiales y elementos que lo constituyen a lo largo de su vida útil, o bien a causa de fenómenos naturales casi inevitables que inciden negativamente en el funcionamiento de aquellos, como son los sismos de gran magnitud, huracanes, interacciones viento-estructura, entre otros. De manera que conocer la integridad de las estructuras en términos de su edad, uso y su nivel de seguridad para soportar dichos fenómenos es importante y necesario antes de que sus efectos lleguen a ser catastróficos e irreversibles, como se ve en la Fig. 1.1. Es por ello que el monitoreo continuo de las estructuras civiles se ha convertido en un tema de primordial importancia y tiene como objetivo principal la determinación y seguimiento de la integridad estructural y la evaluación de la naturaleza del daño en la misma. A menudo esto también es referido como *health monitoring*.

Recientemente, el interés en las técnicas para monitorear edificios y evaluar daño en ellos antes de ocurrir un colapso se ha incrementado en áreas diversas como son la ingeniería civil, sismológica, geofísica, mecánica, entre otras. Los métodos visuales o de localización experimental son los más simples para la identificación de daño y se caracterizan por ser no destructivos y locales, así son los métodos acústicos, ultrasónicos, magnéticos, radiográficos y térmicos, los cuales requieren del conocimiento previo de la zona dañada y de que ésta sea accesible para ser inspeccionada. Estos métodos no consideran el comportamiento global de las estructuras (Doebeling et al., 1997b), además de que muchas veces las pruebas para detección son caras y el tiempo requerido para llevarlas a cabo es grande (Chang et al., 2003). Debido a estas limitaciones, estos métodos solamente pueden detectar daño en las superficies de la estructura o cerca de ellas y no proporcionan información suficiente para determinar la extensión del daño. Esto ha propiciado el desarrollo de nuevas metodologías capaces de determinar si el daño está presente de manera global en toda la



Figura 1.1: Daños en edificios debido al sismo de 1985, ciudad de México

estructura a partir de la respuesta estructural medida. Los métodos vibracionales para evaluar el daño comúnmente se basan en el estudio de los cambios globales en los parámetros modales como son las frecuencias de vibración y los modos de vibración. Pruebas de laboratorio en (Calvi et al., 2006) han confirmado que estas frecuencias disminuyen a medida que el daño estructural se incrementa. Por esta razón, basta con que éstas cambien para saber que existe algún tipo de daño, aunque no se conozca la ubicación del mismo o cuan grande es. No obstante, estos métodos son importantes para saber que se ha producido un daño y entonces se pueda realizar una inspección más detallada para encontrar la ubicación exacta y gravedad del mismo. Estos métodos se caracterizan por operar en el dominio de la frecuencia y por procesar la respuesta estructural *fuera de línea*. Por lo tanto, la evaluación puede tomar mucho tiempo en completarse poniendo en riesgo vidas humanas y causando considerables pérdidas financieras. Como consecuencia, es necesario contar con métodos rápidos y fáciles de implementar, que brinden información de manera local para identificar los elementos dañados, que optimicen el tiempo de procesamiento de la respuesta estructural y que trabajen de manera automática para complementar la inspección visual y de esta manera obtener una detección temprana.

Por otra parte, el monitoreo de salud estructural (SHM, *Structural Health Monitoring*) es un área de actual interés que permite identificar la presencia de daño en edificios en función de cambios en sus parámetros a través de métodos de modelación analítica y de interpretación de datos. En éstos se compara la respuesta estructural antes y después de una acción sísmica. La idea principal es que los parámetros del edificio tales como las frecuencias de vibración y modos de vibración, cambian en función de algunas propiedades físicas de la misma, como la rigidez y el amortiguamiento. Por consiguiente, si se localiza daño en una estructura, se podría monitorear su evolución y de esta manera obtener un historial de ocurrencia tanto en localización como en

magnitud; así, los componentes dañados podrían ser reparados o reemplazados antes de que la estructura alcance un estado peligroso y ocurra una falla. De esta manera se puede reducir la pérdida de vidas humanas y el alto costo inherente.

Muchos de los recientes desarrollos en el área de monitoreo y evaluación estructural para detección de daño han sido en la transmisión de datos y requerimientos computacionales. En contraste, en este trabajo se abordan aspectos físicos del problema, en particular se presentan dos nuevos métodos basados en el enfoque de propagación de ondas, el cual es poco común en ingeniería civil. La intención es proponer enfoques alternativos al análisis vibracional, como herramientas para el monitoreo de salud estructural, estudiado tempranamente por (Todorovska y Trifunac, 2008a). La idea básica de este enfoque consiste en considerar que el movimiento sísmico no es más que la contribución de muchas ondas producidas por una fuente, y que la pérdida de rigidez en un edificio es debida a la presencia de daño, provocándose una reducción en los tiempos de propagación de ondas a través de la parte dañada. De manera similar, con los tiempos de propagación de onda, se podrían identificar los cambios de rigidez en la estructura y se estaría en posibilidad de ubicar y cuantificar la magnitud del daño. Por lo tanto, este tipo de métodos son potencialmente más sensibles al daño local en comparación con los métodos modales. Adicionalmente, para mejorar los métodos propuestos se introducen técnicas innovadoras de procesamiento de señales y herramientas de la teoría de Control Automático para su reformulación en tiempo real. Estas técnicas también son empleadas para desarrollar un algoritmo de detección y localización de daño. Por otra parte, también se explora la técnica de cocientes espectrales H/V para obtener la respuesta local y algunas propiedades mecánicas de la pirámide del Sol, ubicada en la zona arqueológica de Teotihuacán, México.

## 1.1. Antecedentes

El envejecimiento de los edificios durante su vida útil y el consecuente impacto sobre la seguridad y fiabilidad de los mismos debido a la degradación estructural caracterizada por la corrosión en los elementos y uniones, aunado a eventos extremos como sismos, derrumbes, vientos fuertes, explosiones, entre otros, propician el desarrollo de métodos de evaluación temprana para determinar las condiciones actuales de aquellos e indicar la presencia de daño o para saber que el edificio puede colapsar. No obstante, inspeccionar una estructura para localizar y evaluar daño no es una tarea fácil. Existen diversos métodos que se han desarrollado para determinar la presencia de éste, sin embargo, la complejidad de las mismas dificulta las tareas de inspección y no siempre es posible descubrirlo, especialmente cuando éste es pequeño o moderado. El estado del arte de estas técnicas se encuentra en: 1) detectar, 2) localizar y 3) cuantificar la presencia de daño al comparar el comportamiento estructural antes y después de estar sometidos a cargas sísmicas, e inclusive 4) predecir el resto de la vida útil de los mismos. Tradicionalmente los métodos de inspección globales han sido las herramientas comúnmente usadas para determinar la integridad de aquellos. Si bien estos métodos no determinan la ubicación del daño al menos proporcionan información

sobre la presencia de éste. A continuación se revisan algunas metodologías para monitoreo de salud estructural (SHM). Los métodos son clasificados haciendo notorias sus respectivas ventajas y limitaciones.

### 1.1.1. Métodos modales para SHM

En los últimos 40 años se han desarrollado metodologías indirectas de evaluación de daño, siendo de los primeros trabajos (Trifunac, 1972) en el cual se analizan datos recolectados en edificios instrumentados luego de pruebas de vibración ambiental y registros de vibración forzada. Un enfoque similar se utiliza en (Ivanović et al., 2000; Todorovska y Trifunac, 2007). Estos métodos, que han tenido rápido crecimiento, son comúnmente no destructivos y buscan monitorear cambios globales en las propiedades dinámicas de los edificios, como son las frecuencias naturales y los modos de vibración. La idea detrás de esta tecnología es que los parámetros modales, como las frecuencias de vibración, formas modales y amortiguamiento modal, están directamente relacionados con las propiedades físicas de las estructuras, como son la masa, el amortiguamiento y la rigidez. Por lo tanto, cambios en las propiedades físicas causarán cambios detectables en las propiedades modales (Doebbling et al., 1998). Algunos trabajos relacionados son (Sampaio y Maia, 2009; Hongping et al., 2011; Michel y Gueguen, 2010; Makarios, 2012; Huang et al., 2012) y (Balmes et al., 2008), donde la detección de daño se logra comparando dos estados diferentes de la estructura. En general, se supone que uno de ellos representa las condiciones no dañadas con respecto a las que identifican un comportamiento dañado. Estos cambios involucran degradación en los materiales, cambios en las propiedades geométricas y pérdida de masa o rigidez asociada con la aparición de grietas. En (Hwang y Kim, 2004), el daño es determinado por el promedio de la matriz de rigidez y de la respuesta en frecuencia a partir de datos experimentales. Por otra parte, (Farrar et al., 2001; Farrar y Worden, 2007) mencionan que las frecuencias naturales son los parámetros modales más sensibles a los cambios en los sistemas estructurales y mecánicos; la razón es que la reducción de la rigidez afecta directamente a los valores de estas frecuencias. (Doebbling et al., 1997a) estudia los efectos de mediciones estadísticas en la detección del daño en el puente del Cañón de Alamosa y reporta que las frecuencias de resonancia muestran menor variación estadística de fuentes de error aleatoria que otros parámetros modales. A pesar de estos resultados, (Das et al., 2016) indica que aunque las frecuencias naturales están correlacionadas con la presencia de daño, por sí mismas no proporcionan información sobre la localización de éste, pues es difícil excitar una estructura a altas frecuencias y los daños estructurales pueden pasar desapercibidos. Por su parte, (Vidal et al., 2014) desarrolla una metodología de detección de daño basada en los periodos de traslación fundamental y del amortiguamiento relativo de un edificio de concreto reforzado; estos parámetros son estimados aplicando la transformada rápida de Fourier y la técnica de *Randomdec* a mediciones de vibraciones ambiental antes y después de una acción sísmica. En (Kim et al., 2003) se presenta una técnica que identifica la presencia y localización de daño estructural usando funciones de respuesta en frecuencia. En (Roux et al., 2014) se propone un método basado en la frecuencia que emplea un esquema de inversión lineal y un proceso de deconvolución para la

localización del daño; esta metodología requiere un conocimiento a priori de las formas modales de la estructura y mediciones precisas de las variaciones de las frecuencias naturales, que se extraen de los datos de ruido ambiental en una sola ubicación del edificio. Sin embargo, un problema con estos métodos es que existen otros factores más allá del daño estructural que pueden producir cambios en las frecuencias naturales. De hecho, cambios en éstas no son siempre un indicador confiable de la presencia de daño debido a que pueden ser sensibles a influencias ambientales como la temperatura (Chang et al., 2003; Todorovska y Trifunac, 2008a), la lluvia y vientos fuertes (Clinton et al., 2006). Por consiguiente, daños pequeños o moderados que producen cambios ligeros en las frecuencias de vibración menores al 10 %, son frecuentemente difíciles de identificar (Trifunac et al., 2003). La baja sensibilidad de los cambios de frecuencia debidos al daño, requiere mediciones muy precisas (Salawu, 1997).

El efecto de las condiciones ambientales en las frecuencias naturales ha sido estudiado en la literatura. Por ejemplo, (Clinton et al., 2006; Nayeri et al., 2008; Herak y Herak, 2010) reportan ligeras variaciones de las frecuencias características en grandes edificios instrumentados debido a cambios en las condiciones ambientales como la temperatura, lluvia, vientos fuertes e interacción suelo-estructura. El cambio en las frecuencias indicado por estas referencias es esencialmente del orden del 3 % o menos en algunos casos (Mikael et al., 2013), dependiendo del modo de vibración analizado (Nayeri et al., 2008). Adicionalmente, (Mikael et al., 2013) concluye que el cambio máximo observado en la frecuencia y en el amortiguamiento es causado por la temperatura. De manera similar, (Farrar et al., 1997) reporta resultados de variabilidad de parámetros modales medidos en el puente del cañón de Alamosa causado por efectos ambientales, condiciones de servicio y debido al uso de métodos de reducción de datos. Los autores reportan que la frecuencia del primer modo varía aproximadamente 5 % durante el día debido al diferencial de temperatura. En consecuencia, el uso de cambios en las frecuencias modales como indicadores de daños requiere excluir las variaciones debidas a los efectos ambientales (Nayeri et al., 2008). En la práctica, esto se logra a través de una adecuada instrumentación de los edificios para la adquisición de datos en diferentes épocas del año y en diferentes condiciones climáticas.

Otros métodos para la detección y localización de daños en la literatura se basan en las formas modales de la estructura. (Rahai et al., 2006) presenta un algoritmo global para la detección de daños y la evaluación de edificios basada en los métodos de estimación de parámetros usando el análisis de elementos finitos y formas modales incompletas. (Jeong-Tae et al., 2003) presentan un método no destructivo para localizar y estimar el tamaño del daño en estructuras cuando se dispone de pocas frecuencias y/o formas modales. Por su parte en (Maia et al., 2003) se comparan varios métodos de detección de daños dependiendo de los cambios en las formas modales. En (Pandey et al., 1991) se propone usar la curvatura de la forma modal para determinar y localizar daño en estructuras comparando los cambios en el desplazamiento de las formas modales. Más tarde (Pandey y Bismas, 1994) introducen un método de detección y localización de daño basado en la derivada de las formas modales capaz de identificar la posición del daño. Otra técnica de localización de daños se presenta en (Zhang y Aktan, 1995); esta referencia propone emplear la diferencia

de curvatura de la superficie de carga uniforme; menciona que los cambios de esta curvatura son un indicador sensible de la ubicación del daño; además, la superficie de carga uniforme ha dado un índice más fiable que las formas modales en la ubicación del daño (Zhang, 1994). Sin embargo, (Das et al., 2016) menciona que la precisión para localizar daño estructural por el análisis de las formas modales depende del número y ubicación de los sensores.

### **1.1.2. Wavelets para SHM**

En otros casos, se analiza la respuesta estructural haciendo uso de técnicas de procesamiento de señales como wavelets, con la intención de recuperar parámetros estructurales y a partir de ellos determinar la presencia de daño en edificios como en (Spanos et al., 2006; Yam et al., 2003; Huang y Su, 2007). De manera similar, (Curadelli et al., 2008) presenta un esquema de detección de daño empleando el coeficiente de amortiguamiento instantáneo, determinado a partir de la transformada wavelet. En (Noh et al., 2011) se extraen tres características sensibles a daño (DSF) empleando wavelets y las respuestas de aceleración estructural registradas durante acciones sísmicas. El daño está directamente correlacionado con cambios en las DSF. Otros trabajos relacionados pueden ser encontrados en la literatura, sin embargo éstos no son estudiados en esta investigación debido a que no son de nuestro interés.

### **1.1.3. Métodos de reconocimientos de patrones para SHM**

Los avances tecnológicos han permitido explorar con técnicas más innovadoras que involucran reconocimiento y clasificación de patrones para la detección y localización de daño. Una revisión de esos métodos se presenta en (Sohn et al., 2003). Bajo esta idea, en (Sohn y Farrar, 2001) se expone un procedimiento basado en un conjunto de registros de aceleración. Los autores realizan un proceso de dos etapas con modelos autorregresivos (AR y ARX) y calculan el error entre una señal medida y la obtenida a partir de estos modelos, que a su vez son excitados con una señal de referencia obtenida por la normalización de datos de un conjunto de señales de aceleración. La premisa es que el error aumenta en presencia de daño en la estructura. En (Nair et al., 2006) las señales de vibración se asumen como la salida de un modelo de media móvil autorregresiva (ARMA). La hipótesis es que la reducción de rigidez induce cambios en los coeficientes de la parte autorregresiva del modelo. Además se introducen dos indicadores adicionales para señalar la ubicación del daño. Otros trabajos relacionados con las técnicas de reconocimiento de patrones son los métodos basados en redes neuronales (Zapico et al., 2003; Huang et al., 2002) y lógica difusa (Taha y Lucero, 2005). Estos métodos presentan un nuevo procedimiento para identificar las características dinámicas de los edificios y con ello diagnosticar si éstos han sido dañados luego de un evento extremo que incide de manera negativa en el comportamiento de aquellos. La evaluación se logra comparando los parámetros modales. Trabajos similares que también plantean un enfoque inverso usando redes neuronales son (Chakraverty, 2007; Khanmirza et al., 2011). Este último hace uso de un modelo auto-regresivo con entrada exógena (ARX) en cooperación con

una red neuronal para identificar los parámetros de rigidez, masa y amortiguamiento. En (Li-Ling et al., 2009; Kuwabara et al., 2013) se recupera la rigidez y se determina daño estructural respectivamente, haciendo uso del modelo ARX. Con esto se logra un seguimiento de los cambios en las características dinámicas. Note que los métodos basados en el reconocimiento de patrones demandan grandes historiales de tiempo de la estructura sin daño y un procesamiento intensivo de datos. Sin embargo, la principal desventaja de los métodos anteriores es que se basan en un modelo general de la estructura y, para cuantificar o localizar adecuadamente el daño, requieren un modelo de alto orden o un número elevado de sensores. Esto a su vez implica alta complejidad, debido a que el número de cálculos crece geométricamente con el orden del modelo. En otros casos, se requiere información de la situación sin presencia de daño, la cual puede ser difícil de obtener (Das et al., 2016). En el caso de algoritmos con redes neuronales, requieren de mucho esfuerzo computacional y de un entrenamiento previo de los diferentes tipos de daño.

#### 1.1.4. Sistemas de identificación para SHM

Por otra parte, en el área de control de vibraciones en edificios existen técnicas que pueden ser de utilidad para mejorar los sistemas de monitoreo actuales. Entre ellos se encuentran los sistemas adaptables, que son esquemas de identificación capaces de operar en tiempo real que evitan el almacenamiento de datos. Entre los trabajos relacionados se encuentran (Lus et al., 1999; Shih-Yu y Shih-Chieh, 2009), que hacen uso de técnicas de identificación adaptable para estimar los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento, cuando el edificio está sujeto a una excitación sísmica, logrando reproducir la respuesta física de éste. De manera similar, en (Jiménez-Fabián y Alvarez-Icaza, 2010; Angeles-Cervantes y Alvarez-Icaza, 2011) se presenta un esquema de identificación adaptable para recuperar las relaciones de los parámetros rigidez-masa y amortiguamiento-masa. Una limitante de estos métodos es que requieren de las mediciones de desplazamiento y velocidad, las cuales no son fáciles de obtener. Además de que no son robustos a perturbaciones y a ruido de medición. Un trabajo similar es presentado en (Yang y Lin, 2005) donde el daño es identificado usando el algoritmo de mínimos cuadrados y las señales de velocidad y desplazamiento se suponen conocidas. Por el contrario, en (Garrido y Concha, 2011; Garrido y Concha, 2012) se presenta un algoritmo capaz de recuperar las relaciones de parámetros rigidez-masa y amortiguamiento-masa a partir únicamente de mediciones de aceleración. Éste introduce filtros integrales lineales (FIL) en el algoritmo, que lo hacen robusto a ruido de medición y a perturbaciones constantes. Posteriormente, el método es complementado con un observador de estados que permite recuperar las señales no disponibles (Concha et al., 2016). En (Yang y Huang, 2007; Lei et al., 2012), se presenta un método de detección de daño a partir de los cambios en las frecuencias de vibración, calculadas a partir de los parámetros identificados mediante esquemas de identificación. La versatilidad de estos métodos radica en su aplicación en tiempo real. En (Ma y Pines, 2003), se presenta un método para detectar daño estructural basado en *funciones de transferencia de reverberación* (DTFs). Éstas permiten determinar la presencia, ubicación, tipo y cantidad de daño existente en edificios a partir de los cambios en la magnitud y el ángulo de fase en la respuesta de DTFs entre dos grados

de libertad sucesivos. El tipo de daño puede ser debido a la pérdida de masa o rigidez. Sin embargo, éste requiere de un gran número de cálculos que incrementan de manera no lineal con el número de pisos. Además, el modelo matemático empleado no contempla los efectos de amortiguamiento. Sin embargo, la mayoría de ellos emplea el modelo tradicional de edificios de cortante, que no permite estudiar las características de propagación del movimiento sísmico y que debido a la estructura del modelo complica la tarea de detección y cuantificación de daño.

### 1.1.5. Métodos de propagación de onda para SHM

Por otra parte, las propiedades estructurales que son investigadas tradicionalmente usando métodos de vibración también pueden ser analizadas usando métodos de propagación. Ambos enfoques son matemáticamente equivalentes y por lo tanto representan dos esquemas de solución alternativa de un mismo problema. De manera que un método puede ser preferible al otro dependiendo de la aplicación. Sin embargo, los métodos de propagación de onda tratan de superar la complejidad de los métodos vibratorios y la necesidad de contar con información a priori. Además, se usan principalmente para estructuras que pueden ser modeladas como un medio continuo (Safak, 1999), las cuales han sido menos estudiadas. Los métodos de propagación de onda permiten identificar características locales de los edificios analizando cambios en las características de propagación de las ondas sísmicas a través de ellos durante un sismo. En otras palabras, el movimiento telúrico se compone de muchos frentes de ondas que golpean al edificio con un poco de retraso de tiempo con respecto a la primera llegada. Por consiguiente, el movimiento resultante es una superposición infinita de muchas ondas que se propagan hacia arriba y hacia abajo (Todorovska y Trifunac, 2008b). Además, este tipo de métodos son potencialmente más sensibles a información local que aquellos basados en análisis vibracional y formas modales, lo que facilita la tarea de detección de daño (Safak, 1999). En consecuencia, se han desarrollado nuevos métodos de monitoreo, detección y localización de daño que muestran que éste puede ser detectado de manera precisa si se investigan no únicamente cambios en las frecuencias naturales, sino también en las características de propagación de las ondas sísmicas y algunos cambios permanentes en la configuración de la estructura (Safak y Hudnut, 2006). Bajo esta idea, en (Todorovska y Trifunac, 2008a; Todorovska y Trifunac, 2008b; Todorovska y Rahmani, 2013) se presenta un nuevo sistema de supervisión de salud estructural para edificios modelados como una barra a cortante elástica y dividida en capas. El método identifica cambios en los tiempos de llegada de las ondas que se propagan a través de la estructura, que es empleado como un indicador de daño. Éste es obtenido a partir de la respuesta a la función impulso calculada por la convolución de registros de respuesta en diferentes pisos provenientes de sensores de vibración. Además, se logra identificar la frecuencia fundamental empleando únicamente mediciones en la base y en el techo del edificio. Este es un método de escala intermedia que puede señalar la parte de la estructura que ha sido dañada utilizando datos de un número pequeño de sensores. De manera similar, en (Rahmani y Todorovska, 2014) se presenta un esquema de identificación para el mismo modelo, al que también se le estudian los efectos de torsión. Para ello se usan técnicas como la interferometría e inversión de onda, para

analizar registros sísmicos y a partir de ellos, se calculan las velocidades de propagación de la onda de cortante. La misma idea es seguida en (Ebrahimian et al., 2014) solo que ahora se emplea el modelo de la viga de Timoshenko con base rígida en lugar de la barra de cortante. Además se exploran dos técnicas de interferometría no paramétrica. La primera de ellas, estima la velocidad de fase en una banda de frecuencias a partir de la diferencia en fase entre el movimiento registrado en dos lugares ó posiciones distintas, mientras la otra estima las frecuencias de resonancia de manera aproximada con base en las características de propagación de onda. En (Zhang et al., 2011) se examina la propagación de ondas de manera unidimensional en edificios de múltiples pisos con excitación sísmica así como su eficiencia y sus posibles aplicaciones. En ese trabajo, el edificio es modelado por una serie de barras de cortante para columnas y muros, con masas concentradas en los pisos. La respuesta estructural en cada ubicación es obtenida a partir de un movimiento impulsivo, tal que el desplazamiento y la aceleración dependen de las características del edificio por encima de la ubicación del impulso. Otros trabajos relacionados son (Todorovska et al., 2001; Trifunac et al., 2003), que estiman la tendencia del número de onda en bajas frecuencias a partir de pares de registros en sitios vecinos para indicar la ubicación del daño en edificios. En la parte dañada se produce un aumento en la tendencia del número de onda; en caso contrario, ésta aumenta linealmente con la frecuencia. Sin embargo, este método no puede funcionar en altas frecuencias y no permite cuantificar la pérdida de rigidez. Para mejorar el análisis se necesitan datos de arreglos densos de sensores de movimiento en las estructuras, lo que es caro. El procesamiento de los datos puede requerir de mucho tiempo, retrasando una alerta temprana. De manera general, los métodos actuales de monitoreo de salud estructural desarrollados bajo el enfoque de propagación de ondas están limitados a operar en el dominio de la frecuencia y por lo tanto no son convenientes para aplicaciones en tiempo real. Los registros sísmicos deben estar disponibles y ser procesados antes de aplicar alguno de los métodos, pues éstos no son robustos a ruido de medición o a incertidumbres paramétricas. Los múltiples efectos de reflexión y transmisión también complican identificar de manera precisa las velocidades de propagación y otros parámetros estructurales. Por ejemplo, (Fukuwa y Matsushima, 1994) han estudiado y comparado las características de propagación de ondas en modelos con masas concentradas y una combinación de estos con modelos continuos en estructuras unidimensionales. Los autores reportan que la existencia de masas concentradas en las estructuras hace que las ondas sean dispersivas, incluso para el modelo continuo. Las masas concentradas también producen bandas de frecuencia de paso y retención, donde las ondas se propagan con velocidades variables. Los autores concluyen que la propagación de ondas en un sistema de masas agrupadas tiene un espectro de banda que depende del modelado de la masa y puede ser dispersivo, lo que indica que las ondas se propagan con una velocidad de fase que varía con la frecuencia. Además, los autores demostraron que la propagación de ondas en un edificio real también es dispersa y que un modelo continuo puede ser aproximado por un modelo discreto con masas concentradas (modelo de edificio de cortante) sólo en la primera banda de frecuencia de paso. Por otro lado, (Rahmani, 2014) investiga los efectos de agregar losas en el modelo unidimensional (1D) de barra de cortante en capas. Los resultados del modelo con losas sugieren un tiempo de propagación de pulso notablemente mayor en comparación con el modelo sin losas, presentan-

do una estructura más blanda y con efectos dispersivos. Esto, se atribuye a los retardos de fase adicional debidos a la dispersión en las losas. Por otra parte, los autores identifican el edificio de 9 pisos de la Biblioteca Millikan empleando el modelo de barra de cortante en capas, y estiman la velocidad de propagación de onda en la estructura usando las Funciones de Respuesta Impulso (IRFs) y filtros pasa-bajas para evitar la dispersión de las ondas. Esta referencia muestra que un modelo de barra de corte en capas con losas, que es un modelo mixto de estructura con masas concentradas, se deforma aproximadamente como un modelo de barra de cortante uniforme para frecuencias bajas; además, los autores demostraron que los resultados obtenidos coinciden con los resultados teóricos reportados en (Fukuwa y Matsushima, 1994). En (Rahmani, 2014), también se reporta que el modelo de barra de cortante con ajuste uniforme y el modelo de barra de cortante ajustado con losas es coincidente con el modelo sin losas en la banda de frecuencia de paso que contiene algunos modos de vibración. Actualmente, la mayoría de los métodos bajo este enfoque se encuentran desarrollados en lazo abierto, de manera que no garantizan una estimación precisa.

En este trabajo, se continúa con la línea de investigación de propagación de ondas planteada en (Todorovska y Trifunac, 2008b; Todorovska y Rahmani, 2013). La idea principal es mantener el enfoque de propagación de ondas, pero se mejora el proceso para calcular los tiempos de viaje de onda. Bajo esta premisa, se proponen dos metodologías distintas. La primera de ellas consiste en replantear el modelo dinámico que gobierna el comportamiento de los edificios a cortante, por uno de un medio estratificado comúnmente usado en geofísica para propagar un pulso de Ricker empleando el método de Thomson-Haskell (Haskell, 1953). Esto permite obtener retardos en tiempo y con ello determinar la presencia de daño. Éste es un método cuyo análisis se fundamenta en la evaluación de fenómenos transitorios en el tiempo y cuya ventaja radica en el análisis de las señales en los primeros instantes de tiempo en el que no existen múltiples reflexiones de las ondas propagadas, lo que permite una mayor facilidad para la detección de daño asociado a cambios en las propiedades mecánicas de los materiales que conforman la estructura. Un cambio en el tiempo de viaje de onda es definitivamente un claro indicador de daño estructural. La pérdida de rigidez está directamente relacionada con la reducción de la velocidad de propagación a través de la parte dañada. De manera que, repitiendo este proceso sobre largos periodos de tiempo se puede detectar daño progresivo antes de que el colapso ocurra. Algunas ventajas de usar este enfoque en comparación con los esquemas basados en la frecuencia y en las formas modales es sin duda el tiempo computacional y la aplicación de manera local. Este último permite determinar la presencia y la ubicación del daño en contraste con los métodos antes mencionados, que no son sensibles localmente, pues los retardos son usados como indicadores de daño relativo a las condiciones no dañadas. Además, se desarrolla un método para calcular la rigidez de los entrepisos y con ello se cuantifica la pérdida de rigidez en proporción a la magnitud del daño presente al comparar dos estados diferentes del edificios, uno con condiciones nominales y otro que identifica un comportamiento dañado. Se trata de un método original de fácil aplicación y evaluación.

Posteriormente se exploran algoritmos recursivos del área de control automático con el objetivo de transformar la forma de procesar la información para pasar de un proceso fuera de línea a uno

de identificación de parámetros en tiempo real. Para ello se emplea un modelo discretizado a partir del modelo continuo de barra a cortante. El sistema de identificación propuesto es un observador adaptable que emplea un observador de estados tipo Luenberger en conjunto con un esquema de identificación de Mínimos Cuadrados normalizados con factor de olvido. Al mismo tiempo se usa un esquema de proyección paramétrica que asegura únicamente parámetros positivos, característica útil para la estabilidad del algoritmo. Además, se presenta una nueva parametrización basada en filtros integrales lineales (FIL), que eliminan las perturbaciones constantes y atenúan el ruido de medición, lo que resulta útil para la identificación del modelo en tiempo continuo, incrementando la precisión y robustez del algoritmo propuesto. Por otra parte, éste únicamente necesita de mediciones de aceleración en comparación con los algoritmos tradicionales donde se requieren los desplazamientos y velocidades. De esta manera los parámetros de velocidad de cortante y coeficientes de amortiguamiento se estiman a partir únicamente de mediciones de aceleración. La inclusión de los filtros integrales lineales (FIL) también elimina las componentes de alta frecuencia del espectro en frecuencia en tiempo real, enfocándose en el ancho de banda de interés. Esto coincide con los trabajos de (Rahmani y Todorovska, 2013; Rahmani y Todorovska, 2014; Rahmani, 2014), que sugieren usar filtros pasa bajas con el objetivo de evitar la dispersión. Por otra parte, es claro que por razones de costo es conveniente reducir el número de sensores requeridos para caracterizar el comportamiento dinámico. No obstante, éste también es capaz de estimar las señales no disponibles de velocidad y desplazamiento. Además, se ha superado el problema de múltiples efectos de reflexión y transmisión generados por señales complejas y aleatorias, evitando usar técnicas de procesamiento de señales para estudiar el primer arribo de las ondas propagadas. Este método mantiene las ventajas de poder generar información local para tener mayor certeza de la ubicación del daño. Adicionalmente, el algoritmo de identificación propuesto supera al enfoque de propagación tradicional y a esquemas basados en las frecuencias de vibración y formas modales, tanto en la precisión para identificar los parámetros como en el tiempo requerido para la estimación, lo que permitiría implementar una ley de control en tiempo real para lograr la mitigación de vibraciones en edificios. El esquema de identificación planteado, a diferencia de los tradicionales, resuelve el problema de desacoplar los parámetros rigidez-masa y amortiguamiento-masa. Los resultados obtenidos hasta ahora comprueban la versatilidad de los métodos propuestos en comparación con los existentes en la literatura, como se mostrará más adelante. Ambas metodologías pueden ser empleadas para edificios de gran altura. La extensión del método de propagación de onda pretende ayudar a determinar y a localizar daño estructural en conjunto con métodos vibracionales. La intención con estos métodos es lograr una evaluación oportuna para brindar alertas tempranas que eviten la pérdida de vidas humanas y económicas. Los resultados experimentales bajo este enfoque muestran las ventajas sobre otras técnicas posibles en términos de estabilidad y convergencia de la solución, así como en la reducción del esfuerzo computacional.

Por otra parte, se explora la técnica de cocientes espectrales H/V comúnmente usada en geofísica para identificar las frecuencias de vibración y con ello estudiar la respuesta local del suelo y/o los efectos de sitio en diferentes puntos en el edificio prehispánico conocido como la pirámide del Sol. Esta técnica forma parte de los métodos no destructivos que evitan dañar la edificación,

pues se aplica a partir de mediciones de ruido ambiental. Por consiguiente, conocer el estado de la edificación resulta fácil de lograr en cualquier momento. Desde el punto de vista sismológico, el ruido ambiental consiste básicamente de ondas superficiales. Los resultados obtenidos muestran que la técnica de cocientes espectrales H/V es una herramienta bastante útil y prometedora para el monitoreo de salud estructural.

## 1.2. Planteamiento del problema

Todo edificio acumula daño gradualmente a lo largo de su vida útil, ya sea por el deterioro de los materiales que los constituyen, ocasionados por acciones físicas, químicas, mecánicas o bien por efectos de fenómenos naturales que inciden negativamente en el funcionamiento de los mismos. Afortunadamente, los métodos de monitoreo de salud estructural relacionan los cambios en la respuesta monitoreada con posibles daños o deterioro en la estructura a lo largo del tiempo. Existe una amplia diversidad de trabajos que abordan este tema desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, es bien conocido que en el área de ingeniería civil la mayoría de las técnicas para detección de daño se basan en el análisis modal, haciendo notorios los cambios en las frecuencias de vibración y en las formas modales principalmente. Sin embargo, la mayoría de estos métodos no son robustos cuando se aplican a estructuras reales y generalmente no son sensibles a daños locales y pequeños. En cambio, en sismología el análisis para los estudios de construcción se basa en los periodos del suelo, que están interrelacionados con las propiedades mecánicas de éste y de sus características para propagar el movimiento sísmico. La mayoría de estas técnicas están formuladas en el dominio de la frecuencia y operan fuera de línea a partir de registros de edificios instrumentados. Además, los algoritmos realizados bajo este enfoque no contemplan un lazo de retroalimentación que garantice la estabilidad y convergencia de los mismos, minimice el error entre el valor real y la estimación, reduciendo la precisión para recuperar parámetros estructurales. Otro tipo de limitaciones aparecen cuando, bajo una excitación sísmica aleatoria, se generan múltiples efectos de reflexión y dispersión complicando identificar los tiempos de viaje de onda. Un inconveniente más es sin duda el tiempo requerido para completar la adquisición de los datos, el tiempo para el procesamiento de los mismos y finalmente el tiempo de operación del algoritmo de detección de daño. Por lo tanto, resulta complicado detectar y localizar la presencia de daño en edificios empleando los métodos convencionales.

Por otra parte, actualmente no se cuenta con un método de propagación onda que opere en tiempo real. El reto más importante es sin duda poder localizar y evaluar la severidad del daño en tiempo real con el fin de emitir una alerta oportuna sobre las condiciones actuales de las edificaciones. Esto permitiría realizar el mantenimiento correctivo en la etapa más temprana con el fin de prolongar la vida útil de los inmuebles. Además, esto sin duda evitaría el riesgo y la pérdida de vidas humanas. En el mejor de los casos se podría implantar algoritmos de control para la mitigación de vibraciones en edificios e incrementar la seguridad y la confiabilidad de los mismos.

### 1.3. Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es:

«Existen diversas técnicas para identificar los tiempos de propagación de las ondas que se transmiten a través del edificio y que se registran en sensores colocados en la base y en el techo del mismo, o bien en los entre pisos si fuera el caso. Considerando que la velocidad de propagación de onda en dirección vertical está directamente relacionada con la rigidez lateral, la pérdida de ésta última a causa de daño ocasiona la reducción de la velocidad de propagación en la parte dañada, e incrementa el tiempo de viaje de onda. Esto provee una base para la inferencia sobre la presencia y ubicación de daño. Asimismo, se pueden calcular la variación de la rigidez lateral a partir de los cambios en las características de propagación y, si además se conoce la rigidez inicial de la misma, es posible localizar y estimar el daño comparando las rigideces de estos dos estados».

Esta metodología tiene la ventaja de poder adaptarse a cualquier tipo de modelo estructural, sin importar las características de diseño. Además, aceptan una amplia gama de procedimientos experimentales para recabar datos de la respuesta dinámica del sistema.

### 1.4. Objetivo

Esta investigación tiene como objetivo principal desarrollar una metodología robusta y automatizada que permita identificar los parámetros estructurales de un edificio a partir de las velocidades de propagación de ondas, con la intención de facilitar el monitoreo de la salud estructural del mismo en la etapa más temprana posible, y para saber cual es el estado de éste y darle mantenimiento si se requiere o simplemente para saber qué puede fallar. Esto genera grandes beneficios sociales y económicos pues asegura que el edificio esté en buen estado y ayuda a garantizar la seguridad de los usuarios. En este sentido se han propuesto tres metodologías distintas basadas en el enfoque de propagación de ondas cuyos objetivos son:

- La primera de ellas examina la posibilidad de desarrollar una metodología de identificación basada en el dominio de la frecuencia para estimar las velocidades de propagación en los entrepisos de un edificio, como un indicador de la presencia de daño.
- Plantear el problema de detección de daño como un sistema de identificación de parámetros en tiempo real, con el objetivo de desarrollar un nuevo método de identificación para estimar las velocidades de propagación y los factores de amortiguamiento. Esto como solución al problema de propagar ondas aleatorias y complejas que generalmente producen múltiples efectos de reflexión y dispersión.
- Utilizar la técnica de cociente espectral H/V y herramientas de procesamiento de señales para recuperar las frecuencias de vibración en puntos de medición sobre la pirámide del Sol, a partir únicamente de mediciones de ruido ambiental en las tres coordenadas cartesianas.

## 1.5. Aportaciones

A continuación se presentan las aportaciones de la presente tesis en el campo de monitoreo de salud estructural para edificios de cortante; observación e identificación en el área de control de vibraciones

- Se ha propuesto un modelo novedoso para edificios de cortante, el cual es replanteado como un medio continuo, caracterizado por las velocidades de propagación de onda y los coeficientes de amortiguamiento. Este modelo, tiene la ventaja de ser potencialmente más sensible a cambios en los parámetros locales, además, desacopla las relaciones de parámetros amortiguamiento-masa y rigidez-masa.
- Se ha propuesto un algoritmo para calcular los tiempos de propagación de ondas de manera automática a partir de la propagación de un pulso de Ricker desde la base del edificio. Para ello se hace uso del método de Thomson-Haskell, que mantiene la ventaja de resolver un sistema lineal de dos ecuaciones, aun cuando se analizan edificios de múltiples pisos.
- Se desarrolló un modelo para calcular la rigidez de los entre-pisos de un edificio a partir de los tiempos de viaje de onda. Si además se conoce la rigidez inicial de los mismos, es posible localizar y estimar el daño comparando las rigideces de estos dos estados. Esto provee una base para inferir la presencia y ubicación de daños en edificios.
- Se ha replanteado el problema de detección de daño como uno de identificación de parámetros en tiempo real. Para ello se usa una versión discretizada del modelo continuo propuesto y un observador adaptable, que combina un observador de estados y un esquema de identificación para estimar las señales no medibles y recuperar los parámetros desconocidos, en el mismo instante de tiempo. La ventaja principal es que el esquema de identificación opera a partir únicamente de mediciones de aceleración, creando una separación virtual con el estimador de estados. Además, se introducen filtros lineal integrales que eliminan el sesgo y atenúan el ruido de medición. Éstos últimos son empleados en la parametrización del modelo. La inclusión de los (FIL) también elimina las componentes de alta frecuencia del espectro en frecuencia en tiempo real, enfocándose en el ancho de banda de interés con el objetivo de evitar la dispersión.
- Se ha dado formalismo a la prueba de estabilidad y convergencia del observador adaptable propuesto. Al mismo tiempo se ha probado que el modelo de orden reducido empleado es equivalente al modelo de cortante clásico en la literatura, que constituye un caso particular del modelo propuesto.
- Se ha planteado en esquema de detección y localización de daño en tiempo real, luego de estudiar diferentes escenarios daño en diferentes pisos en un edificio de cinco pisos de escala reducida. El algoritmo es capaz de indicar el piso dañado al comparar los parámetros identificados y con los parámetros de referencia.

- Finalmente, se ha mostrado que la técnica de cocientes espectrales H/V es una herramienta útil para calcular las frecuencias de vibración local, a partir de mediciones de ruido ambiental en las tres componentes, Norte-Sur, Este-Oeste, Z-Z .

### 1.5.1. Publicaciones

Las publicaciones y artículos de congresos que han surgido de este trabajo de investigación son los siguientes:

#### Artículos en revistas especializadas:

- Morales-Valdez, J., Alvarez-Icaza, L., y Sánchez-Sesma, F. J. (2017b). Shear building stiffness estimation by wave traveling time analysis. *Aceptado para publicación en Structural Control and Health Monitoring*, pp. 1–26
- Morales-Valdez, J., Alvarez-Icaza, L., y Concha, A. (2017a). On-line adaptive observer for buildings based on wave propagation approach. *Aceptado para publicación en el Journal of Vibration and Control*, pp. 1–23

#### Artículos presentados en congresos internacionales:

- Pina-Flores, J., Matsushima, S., Sanchez-Sesma, F. J., Molina-Villegas, J. C., Morales-Valdez, J., Saenz-Castillo, M. A., Sierra-Alvarez, C. A., y Kawase, H. (2017). Imaging of heterogeneities in the earth with seismic scattered waves and ambient noise HV Spectral Ratio (HVSR) for preliminary seismic characterization of Sun Pyramid in Teotihuacán, México. *Sometido al IASPEI Symposium*, Kobe, Japón
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2016b). Observador adaptable en tiempo real de edificios mediante propagación de ondas. *Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático*, pp. 618–623, Medellín, Colombia
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014a). Building stiffness estimation by wave traveling times. *ASME 2014 Dynamic system and control conference*, pp. 1–8, San Antonio, TX, USA
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014b). Identificación de rigidez en los entrepisos de un edificio mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático*, pp. 48–53, Cancún, Quintana Roo
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014c). On-line environmental noise driven 3-DOF per story parametric identification of a building. *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pp. 2022–2027, Antibes, Francia
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013c). Identification of frequencies of vibration in buildings with wave travel times. *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 69–74, Ciudad de México, D.F

### Artículos presentados en congresos nacionales:

- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2016a). Identificación paramétrica en tiempo real de edificios mediante propagación de ondas. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 1–6, Querétaro
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2015). Identificación paramétrica en línea de edificios mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 563–568, Cuernavaca, Morelos
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013a). Identificación de frecuencias de vibración en edificios mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 290–295, Ensenada, BC
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013b). Identificación paramétrica tridimensional de un edificio mediante ruido ambiental. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 213–218, Ensenada, BC

## 1.6. Organización del trabajo

En este primer capítulo se presenta una introducción sobre el tema, se hace una revisión del estado del arte y se definen el problema y los objetivos de este trabajo de investigación. En el capítulo 2 se presenta un modelo matemático alternativo para edificios de cortante, que permite estudiar las características de propagación de onda de un movimientos sísmico. Para ello se desarrolla un sistema de identificación de tiempos de propagación automática y con la información obtenida se propone un modelo para calcular los valores de rigidez asociados a los entrepisos. Adicionalmente, se desarrolla un algoritmo de detección, localización y cuantificación de daño. Los resultados de simulación confirman la versatilidad del método propuesto. En el capítulo 3 se plantea un sistema de identificación en tiempo real para la detección de daño. Se propone un modelo de barra de cortante discretizado para el diseño de un observador adaptable, que permite recuperar los parámetros estructurales desconocidos así como las mediciones no disponibles de desplazamiento y velocidad. Los resultados experimentales en un edificio de 5 pisos de escala reducida validan el marco teórico desarrollado. En el capítulo 4 se diseña un algoritmo de detección y localización de daño a partir de las velocidades de propagación y de los coeficientes de amortiguamiento identificados por el observador adaptable. Los resultados experimentales muestran que algoritmo propuesto presenta un desempeño satisfactorio. En el capítulo 5 se explora la técnica de cocientes espectrales  $H/V$  para identificar las frecuencias de vibración y con ello obtener la respuesta local y los efectos de sitio en los puntos de medición sobre la pirámide del Sol y del suelo sobre el que se encuentra construida. La meta es relacionar las frecuencias de vibración y la amplificación relativa promedio asociada al punto de registro con la construcción de la edificación. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones sobre los resultados obtenidos, así como los trabajos futuros que se podrían extender de esta tesis.

## Capítulo 2

# Estimación de la rigidez mediante tiempos de propagación de onda

Para deducir la ecuación que gobierna la propagación de ondas en un medio, es necesario recurrir a la ley de Newton y a la ley de Hooke. La ley de Hooke es una ecuación constitutiva que relaciona esfuerzos con deformaciones y puede ser obtenida analizando un sistema masa-resorte. A continuación se presenta la deducción de la ecuación de onda a partir de un modelo de edificio de cortante. La diferencia entre un modelo y otro radica en su comportamiento continuo y en la manera de introducir amortiguamiento. Aquí, éste es impuesto de manera indirecta en el método de Thomson-Haskell, que es empleado para propagar el movimiento sísmico desde la base del edificio. Los tiempos de propagación de onda son identificados de manera automática en todos los pisos y se usan como indicadores de daño. Además, con ellos se introduce un modelo para estimar la rigidez de los entrepisos, que al ser comparada con su valor inicial permite determinar, localizar y evaluar el tamaño del daño presente.

### 2.1. Modelo de edificio de cortante y ecuación de onda

Considere el edificio de múltiples pisos mostrado en la Fig. 2.1(a) con un grado de libertad por cada uno de ellos, con desplazamientos únicamente en el eje  $Y$  y donde no existe torsión. El edificio es modelado como un sistema de  $n$  grados de libertad (GDL). Se supone que la masa de cada piso está concentrada en el techo y en el centro de éste, las columnas son flexibles a deformaciones laterales y rígidas en dirección vertical, cumpliendo con la hipótesis de diafragma de piso rígido, es decir, se considera que el piso es sólido en su propio plano pero flexible en la dirección vertical, (Paz, 1997). Además, la estructura tiene un comportamiento lineal y es soportada en una base empotrada de manera que la interacción-suelo estructura es despreciada. Por otra parte, este modelo también puede ser representado por un conjunto de  $n$  masas interconectadas por resortes lineales de rigidez  $k$  y amortiguadores, los cuales no serán considerados en esta etapa del modelado debido a que serán introducidos después por medio de un factor de calidad  $Q$  en la próxima subsección. Aunado a esto, el edificio es excitado por una acción sísmica  $\ddot{u}_g$  que produce las fuerzas de reacción o de

resistencia elástica  $F_{ki}$  y  $F_{ki+1}$  debidas a los resortes, así como la fuerza inercial  $F_{mi}$  generada por la masa  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivamente. La posición de las masas a lo largo del eje  $y$  es denotada por  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  mientras que  $\Delta y$  describe la distancia entre dos pares de ellas en estado estable, como se muestra en la Fig. 2.1(b).

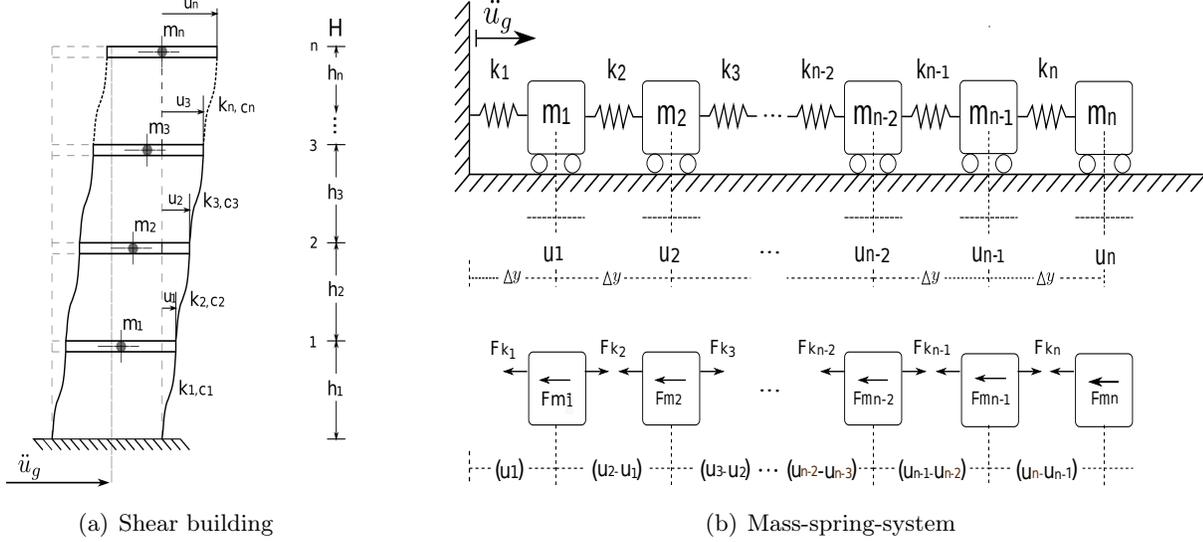


Figura 2.1: Edificio de cortante

La ecuación de onda es obtenida analizando el comportamiento de las masas en la Fig. 2.1(b). De acuerdo al principio D'Alembert, el equilibrio en cada instante de tiempo sobre la masa  $m_i$  debido a la excitación  $\ddot{u}_g$ , puede ser calculado como

$$\sum F_i = -F_{ki} - F_{mi} + F_{ki+1} \quad (2.1)$$

despejando la fuerza inercial  $F_{mi}$  debida a la reacción de la masa  $m_i$  y sustituyendo su valor por el producto de la masa por la aceleración, se obtiene

$$-F_{ki} + F_{ki+1} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

con base en la ley de Hooke, las fuerzas de resistencia elástica sobre la masa  $m_i$  son descritas como

$$F_{ki+1} = k(u_{i+1} - u_i) \quad (2.3)$$

$$F_{ki} = -k(u_i - u_{i-1}) \quad (2.4)$$

Sustituyendo las expresiones (2.3) y (2.4) en la Ec. (2.2) se obtiene

$$k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

reduciendo y factorizando términos semejantes, la Ec. (2.5) se puede reescribir como

$$k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Se puede observar que el término entre paréntesis en la Ec. (2.6) es similar a la aproximación de la segunda derivada del desplazamiento  $u$  mediante diferencias finitas centradas con respecto a la coordenada  $y$ , la cual tiene la siguiente forma, (LeVeque, 2007):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (2.7)$$

Ahora, multiplicando la Ec. (2.7) por  $(\Delta y)^2$  y sustituyéndola en la Ec. (2.6), se obtiene

$$k(\Delta y)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

despejando  $k(\Delta y)^2$  de la Ec. (2.8) y calculando el límite cuando  $\Delta y$  tiende a cero, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

donde  $\beta_i$  es la velocidad de propagación.

La Ec. (2.9) es conocida como la *ecuación de onda unidimensional* (1D), y es de uso común en Geofísica. Aquí es usada para describir la respuesta dinámica del edificio luego de propagar una onda a través de él o de que una acción sísmica actúe sobre el mismo. En ésta se observa que la segunda derivada con respecto al tiempo y con respecto al desplazamiento son proporcionales entre sí y que  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  representa la velocidad de propagación de las ondas de cortante, mientras que  $\mu$  y  $\rho$  son el módulo de cortante y la densidad de masa del material, respectivamente. Por consiguiente, los tiempos de propagación de onda se pueden calcular como  $\tau = \frac{h}{\beta}$ , donde  $h$  es la altura de entrepiso. Además, suponiendo que estos incrementan en la zona dañada, se pueden emplear como indicadores de daño, pues se pueden relacionar con la pérdida de rigidez en las partes afectadas adaptando la ecuación para calcular la rigidez de los entrepisos. Además, observe que bajo las consideraciones actuales el edificio ahora se supone como una barra elástica continua a cortante, que parte del reposo, está libre de esfuerzos en el techo y cuya dinámica es gobernada por la ecuación de onda (2.9). La excitación sísmica se aplica únicamente en la base del edificio.

### 2.1.1. Amortiguamiento

Las vibraciones sin amortiguamiento difícilmente ocurren en la naturaleza, pues todas ellas se atenúan después de cierto tiempo disipando parte de la energía ligada al movimiento. Los edificios son un tipo particular de sistemas vibratorios que requieren también introducir efectos de amortiguamiento para lograr la atenuación del movimiento. Tradicionalmente, la disipación de energía vibratoria ha sido asumida usando amortiguadores viscosos con la configuración reológica de Kelvin (ver, Fig.2.2), la cual requiere mucho más esfuerzo computacional debido a que los coeficientes de rigidez tienen que ser recalculados en cada frecuencia, incrementando el tiempo computacional. Sin embargo, en el enfoque de propagación de ondas el amortiguamiento es introducido por una constante  $Q$ , denominada factor de calidad, que es una medición de la pérdida de energía, consiguiéndose así la atenuación de la amplitud de las ondas propagadas a través de la estructura.

Por lo tanto, en ambos casos los amortiguamientos son equivalentes, siendo uno preferible al otro según la aplicación.

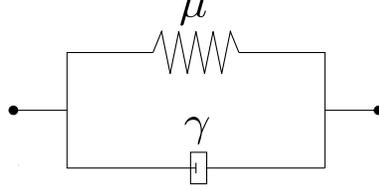


Figura 2.2: Modelo reológico de Kelvin

El modelo reológico de Kelvin es la combinación de un amortiguador viscoso y un resorte elástico conectado en paralelo, como se muestra en la Fig. 2.2, en el que se asume que no existe flexión, de manera que la deformación presentada por el resorte es la misma experimentada por el amortiguador y por lo tanto el esfuerzo  $\sigma$  en el modelo puede ser calculado como

$$\sigma = \mu\epsilon + \gamma\dot{\epsilon} , \quad (2.10)$$

donde  $\epsilon$  describe la deformación, y  $\gamma$  es una constante que cuantifica la reología viscosa. Transformando la Ec. (2.10) en el dominio de la frecuencia, produce

$$\sigma = \mu\epsilon + i\omega\gamma\epsilon , \quad (2.11)$$

donde  $\omega$  representa la velocidad de deformación. Note que la parte imaginaria incrementa linealmente con la frecuencia, lo que implica que a altas frecuencias se tiene mayor amortiguamiento. Para cuantificar este comportamiento se introduce un módulo de cortante que incorpora efectos de amortiguación (Kausel y Manolis, 2000)

$$\mu^* = \mu \left( 1 + i\omega\frac{\gamma}{\mu} \right) = \mu \left( 1 + \frac{i}{Q(\omega)} \right) , \quad (2.12)$$

donde el inverso del factor de calidad  $Q$  es definido por  $\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\omega\gamma}{\mu}$ . Además, en la práctica de mecánica de suelos es común usar la notación

$$\zeta = \frac{1}{2Q} , \quad (2.13)$$

donde  $\zeta$  es conocido como la fracción del amortiguamiento crítico debido a la semejanza con el amortiguamiento para sistemas de un GDL. Para propósitos prácticos, el factor de calidad  $Q$  es considerado constante y el modelo de Kelvin es abandonado. Bajo esta consideración, la velocidad de propagación de onda es expresada como

$$\beta^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left( 1 + \frac{i}{Q} \right)^{1/2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left( 1 + \frac{i}{2Q} \right) , \quad (2.14)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material. Finalmente, la Ec. (2.14) es reescrita como

$$\beta^* = \beta \left( 1 + \frac{i}{2Q} \right) . \quad (2.15)$$

En resumen, el factor de calidad es incorporado en el dominio de la frecuencia reemplazando el valor real  $\Psi = 1/\beta$  por uno complejo (Aki y Richards, 2002):

$$\Psi^* = \Psi + i\frac{1}{2Q}\Psi = \left(1 + \frac{i}{2Q}\right)\frac{1}{\beta}. \quad (2.16)$$

Observe que un valor alto de  $Q$  en la Ec. (2.16) implica una atenuación pequeña. Por ejemplo,  $Q = 25$  equivale a  $\zeta = 2\%$ . La inclusión del amortiguamiento se lleva a cabo por medio de las Ecs. (2.13) y (2.15) y su efecto se verá reflejado en la matriz de propagación, como se discutirá en la siguiente sección. Por lo tanto, tomando en cuenta que  $Q$  y  $\zeta$  son funciones fuertes de la frecuencia, se decidió usar el factor de calidad en vez del modelo reológico de Kelvin.

## 2.2. Método de Thomson-Haskell para la propagación de ondas

En esta sección se desarrolla una metodología para estimar la rigidez en un edificio, a partir de las mediciones de retardos en cada uno de los pisos, luego de propagar un pulso de Ricker desde la base de éste. El análisis comienza con un simple estrato, el cual equivale a un piso del edificio. Para esto, es necesario caracterizar el desplazamiento de áquel  $u(z, t)$ , en función del tiempo  $t$  y de la posición vertical  $z$  que es limitada por dos condiciones de frontera las cuales llamaremos interfaces. Por otra parte, el estrato se caracteriza por algunas propiedades del medio, como son la densidad del material ( $\rho$ ), el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), el módulo de cortante ( $\mu$ ) y velocidad de propagación ( $\beta$ ), tal como se muestra en la Fig. 2.3

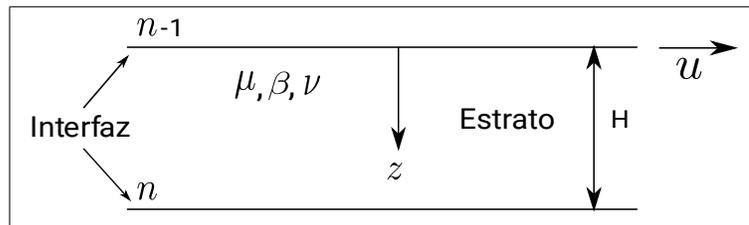


Figura 2.3: Estrato equivalente a un piso del edificio

Además, considere que el edificio parte del reposo, es decir,  $u(z, 0) = 0$  y  $\dot{u}(z, 0) = 0$  para todo  $0 \leq z \leq H$ , y que la excitación se da únicamente en la base del edificio, es decir,  $u(H, t) = u_g(t)$  y  $\mu\dot{u}_g(H, t) = 0$

Retomado la ecuación de onda (2.9), que gobierna la propagación de ondas en un medio estratificado. Ésta puede ser resuelta por diversos métodos, sin embargo, aquí se trabaja con el enfoque de la transformada de Fourier para analizar la respuesta vibratoria. Por lo tanto, aplicando la transformada directa de Fourier a la Ec. (2.9), se obtiene la ecuación escalar unidimensional de Helmholtz (Pujol, 2003):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z, \omega) + \kappa^2 u(z, \omega) = 0 \quad (2.17)$$

donde  $\kappa = \frac{\omega}{\beta}$  y  $\omega$  corresponde al ancho de banda de la señal de excitación.

Tomando en cuenta lo anterior, la solución general de la Ec. (2.17) está definida por (Kausel, 2006):

$$u(z, \omega) = \dot{S}(\omega) \exp(i\kappa z) + \dot{S}(\omega) \exp(-i\kappa z) \quad (2.18)$$

donde  $\dot{S}$  y  $\dot{S}$  son variables arbitrarias que describen la onda ascendente y descendente respectivamente, y para encontrarlas, la Ec. (2.18) es evaluada en las condiciones de frontera. Es decir, para el estrato presentado en la Fig. 2.3, el desplazamiento en la interfaz superior ( $n - 1$ ) es:

$$u(0, \omega) = u_{n-1}(\omega) = \dot{S}(\omega) + \dot{S}(\omega) \quad (2.19)$$

y el desplazamiento en la interfaz inferior ( $n$ ) es:

$$u(H, \omega) = u_n(\omega) = \dot{S}(\omega) \exp(i\kappa H) + \dot{S}(\omega) \exp(-i\kappa H) \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la solución del sistema formado por las Ecs. (2.19) y (2.20) en términos de  $\dot{S}$  y  $\dot{S}$  está dada por (más detalles en A.2):

$$\dot{S}(\omega) = i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(-i\kappa H) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \quad (2.21)$$

$$\dot{S}(\omega) = i \frac{u_n(\omega) - u_{n-1}(\omega) \exp(i\kappa H)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \quad (2.22)$$

sustituyendo las Ecs. (2.21) y (2.22) en la Ec. (2.18), el campo de desplazamiento dentro del estrato está dado por:

$$u(z, \omega) = i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(-i\kappa H) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \exp(i\kappa z) - i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(i\kappa H) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \exp(-i\kappa z) \quad (2.23)$$

donde:  $0 \leq z \leq H$

Note que la Ec. (2.23) también puede escribirse como (ver detalle en A.3):

$$u(z, \omega) = -\frac{\operatorname{sen}[\kappa(z - H)]}{\operatorname{sen}(\kappa H)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\operatorname{sen}(\kappa z)}{\operatorname{sen}(\kappa H)} u_n(\omega) \quad (2.24)$$

Esta nueva ecuación, (2.24), indica que el desplazamiento en cualquier punto dentro del estrato puede ser calculado a partir de los desplazamientos en las interfaces, pues dicha ecuación tiene la forma usual de la interpolación empleada en el método de elementos finitos. De igual forma, suponiendo que el medio es elástico, isótropo y lineal, la ley constitutiva de Hooke proporciona la relación entre *esfuerzo-deformación* para calcular los esfuerzos en cualquier profundidad dentro del estrato

$$\begin{aligned} \tau(z, \omega) &= \mu \frac{\partial u}{\partial z}(z, \omega) \\ &= \mu k \left\{ -\frac{\cos[\kappa(z - H)]}{\operatorname{sen}(\kappa H)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\cos(\kappa z)}{\operatorname{sen}(\kappa H)} u_n(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por lo tanto, los esfuerzos en las interfaces del estrato se obtienen evaluando la Ec. (2.25) en las fronteras  $u(t, 0)$  y  $u(t, H)$ , como se presenta a continuación

$$\begin{aligned}\tau(0, \omega) &= \tau_{n-1}(\omega) = \mu\kappa \left[ -\frac{\cos(\kappa H)}{\text{sen}(\kappa H)} u_{n-1}(\omega) + \frac{1}{\text{sen}(\kappa H)} u_n(\omega) \right] \\ \tau(H, \omega) &= \tau_n(\omega) = \mu\kappa \left[ -\frac{1}{\text{sen}(\kappa H)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\cos(\kappa H)}{\text{sen}(\kappa H)} u_n(\omega) \right]\end{aligned}\quad (2.26)$$

Reacomodando las Ecs. (2.24) y (2.26), estas se pueden reescribir como (Haskell, 1953):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_n(\omega) \\ \tau_n(\omega) \end{bmatrix}}_{F(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) & \frac{\beta}{\mu\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) \\ -\frac{\mu\omega}{\beta} \text{sen}\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) & \cos\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) \end{bmatrix}}_{P(z, z_0)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{n-1}(\omega) \\ \tau_{n-1}(\omega) \end{bmatrix}}_{F(z_0)}.\quad (2.27)$$

La Ec. (2.27) es conocida como la matriz de transferencia, que es la base del método de Thompson-Haskell y es probablemente el más notorio de esta clase de métodos debido a su simplicidad y facilidad en la implementación computacional. Esta matriz se caracteriza porque relaciona esfuerzos y desplazamientos en cada estrato, permitiendo calcular lo que ocurre en una interfaz ( $z_n$ ) si se conoce lo que sucede en la otra ( $z_{n-1}$ ), mediante el propagador matricial  $P(z, z_0)$ . La ventaja principal de la Ec. (2.27) es que es fácil de resolver una matriz de  $2 \times 2$ , formada por elementos que son funciones transcendentales de las propiedades del material del cual está constituido el estrato. Por consiguiente, resolver esto es más simple que algunos métodos propuestos en la literatura, entre ellos, el método de la matriz global (Obenchain y Cesnik, 2013; Ge y Chen, 2007) y diferencias finitas (Hall y Wang, 2009; Moczo et al., 2007; Pérez-Ruiz et al., 2005; Vossen et al., 2002; Graves, 1996). Además, este análisis se puede generalizar a edificios de múltiples pisos, donde el propagador siempre conservará sus dimensiones sin importar el número de grados de libertad. Por lo tanto, el método propuesto es una herramienta bastante útil para transmitir el movimiento sísmico a través de edificios de gran altura.

### 2.2.1. Formulación para edificios de múltiples pisos

Una vez que se sabe como describir los movimientos en las capas y las condiciones de fronteras en un piso, entonces se puede describir el comportamiento de un edificio de múltiples pisos, caracterizado por un conjunto de dos ecuaciones que relacionan las condiciones de frontera en la primera y la última interfaz, a través del propagador matricial. Para ello se considera un edificio de  $n$  pisos, con un grado de libertad por cada uno de ellos, los cuales representan estratos<sup>1</sup>, de manera que el edificio equivale a un medio estratificado soportado por una base rígida, libre de esfuerzos en el techo y excitado por una acción sísmica formada por la contribución de ondas planas (SH) con incidencia vertical, y que producen movimiento horizontal. Los desplazamientos en el techo y en las capas consecutivas son definidos como  $u_0, u_1, \dots, u_n$  numerados del techo hasta la base. Además

<sup>1</sup>En esta sección, un estrato es equivalente a un piso. Mientras que una capa puede describir un grupo de aquellos, sin embargo por facilidad un estrato será equivalente a una capa

las capas son heterogéneas e isotropas, de altura  $h_i$ , densidad de masa  $\rho_i$ , módulo de cortante  $\mu_i$  y velocidad de propagación  $\beta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectivamente, como se ilustra en la Fig. 2.4.

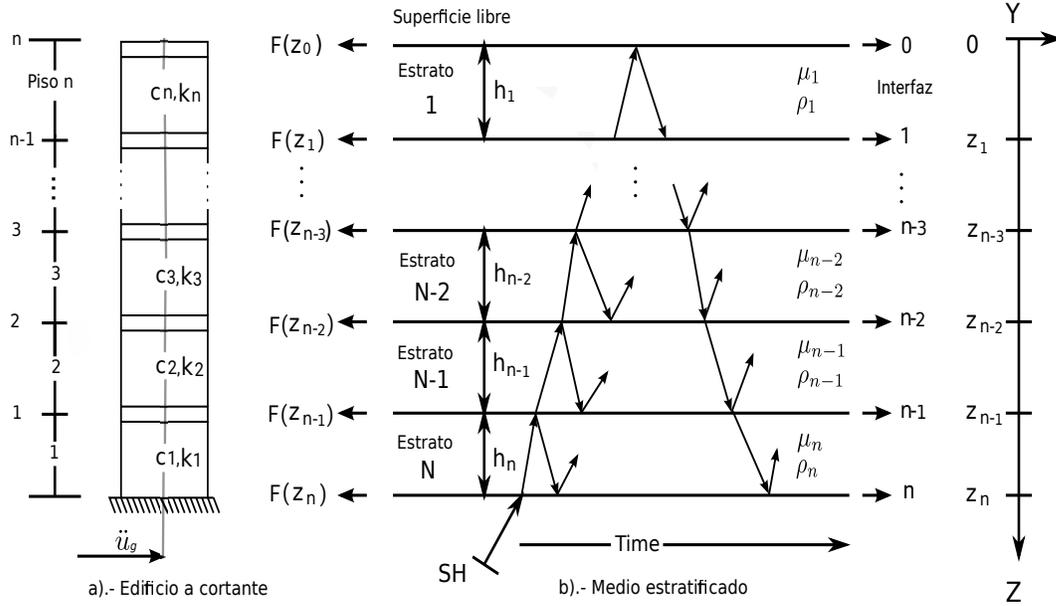


Figura 2.4: Medio estratificado

A partir de la relación entre capas e interfaces dada por la Ec. (2.27), se puede calcular la continuidad del campo de esfuerzos y desplazamientos en todos los pisos del edificio

$$\begin{aligned}
 F(z_0) &= F(z_0) , \\
 F(z_1) &= P_1 F(z_0) , \\
 F(z_2) &= P_2 F(z_1) , \\
 &\vdots \\
 F(z_{n-2}) &= P_{n-2} F(z_{n-3}) , \\
 F(z_{n-1}) &= P_{n-1} F(z_{n-2}) , \\
 F(z_n) &= P_n F(z_{n-1}) .
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Donde, la primera y la última interfaz poseen únicamente una capa en común, mientras que el resto de ellas tiene dos. Note que los subíndices describen la capa en estudio. Además, considerando que  $F(z_i)$  es continua en las interfaces de las capas de acuerdo a la Ec. (2.27), y si además ésta es conocida en algún punto, entonces, se puede proyectar a otro punto en cualquiera de las capas usando el propagador matricial  $P(z, z_i)$ . De esta manera se puede comenzar desde la interfaz (0) correspondiente al techo con  $F(0) = \{u(t), 0\}^T$  y  $F(z)$  puede ser calculada recursivamente en las interfaces de las capas  $z = z_1, z_2, \dots$ , haciendo posible propagar el movimiento en el interior de éstas últimas. Además, considerando que el techo está libre de esfuerzos, la respuesta del edificio hasta la base puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_n(\omega) \\ \tau_n(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega\alpha_n) & \frac{\gamma_n}{\omega} \operatorname{sen}(\omega\alpha_n) \\ -\frac{\omega}{\gamma_n} \operatorname{sen}(\omega\alpha_n) & \cos(\omega\alpha_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega\alpha_{n-1}) & \frac{\gamma_{n-1}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega\alpha_{n-1}) \\ -\frac{\omega}{\gamma_{n-1}} \operatorname{sen}(\omega\alpha_{n-1}) & \cos(\omega\alpha_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &\quad \dots \begin{bmatrix} \cos(\omega\alpha_1) & \frac{\gamma_1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega\alpha_1) \\ -\frac{\omega}{\gamma_1} \operatorname{sen}(\omega\alpha_1) & \cos(\omega\alpha_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(\omega) \\ \tau_0(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $\alpha_i = h_i/\beta_i$ . Sin embargo tomando en cuenta la nomenclatura presentada en la Ec. (2.27), la Ec. (2.29) puede ser expresada como

$$F(z) = \underbrace{P(z, z_{i-1})P(z_{i-1}, z_{i-2}) \cdots P(z_2, z_1)P(z_1, 0)}_{P(z,0)} F(0) \quad (2.30)$$

En este caso,  $P(z_n, 0)$  está compuesto por una cadena de propagadores desde la superficie libre hasta la base del medio estratificado, como resultado de la Ec. (2.29), la cual representa un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $u_0(\omega)$  y  $\tau_0(\omega)$ . Recordando nuevamente que el esfuerzo en el techo del edificio es nulo, es decir,  $\tau_0(\omega) = 0$  y considerando que  $u_n(\omega)$  contiene la señal de excitación en la base del mismo, entonces, el desplazamiento en el techo puede ser relacionado con el desplazamiento de su base mediante la expresión

$$u(0, \omega) = \frac{1}{P_{11}(z_n, 0)} u(H, \omega) \quad (2.31)$$

donde,  $P_{11}(z, 0)$  es el elemento (1,1) del propagador matricial. De manera que una vez que el desplazamiento y el esfuerzo son conocidos en el techo, la Ec. (2.27) puede ser aplicada para calcular los desplazamientos y esfuerzos en las capas restantes. Finalmente, los tiempos de viaje de onda son calculados transformando los resultados del dominio de la frecuencia al tiempo mediante la transformada inversa de Fourier y analizando el primer arribo de los desplazamientos obtenidos luego de propagar una señal. Además, la frecuencia fundamental del edificio puede ser calculada usando la expresión siguiente

$$f_1 = \frac{1}{4\tau_t} \quad (2.32)$$

donde,  $\tau_t$  corresponde al tiempo de viaje de onda total, desde la base hasta el techo del edificio. Por otra parte, la Ec. (2.32) adquiere mayor importancia al ser un primer indicador útil para confirmar la presencia de daño al comparar la frecuencia fundamental con el valor actual obtenido, luego de que una acción sísmica haya actuado en el edificio.

### 2.3. Cálculo de la rigidez

En el análisis modal, la frecuencia fundamental es el dato más importante para analizar la respuesta de los edificios, suponiendo que la magnitud de cambio en la frecuencia puede estar directamente relacionada con la cantidad de daño sufrido por aquellos después de estar sometidos a fuertes acciones sísmicas. Esta es una manera fácil y rápida para evaluar la integridad y el funcionamiento de estos. Sin embargo, saber que existe un cambio en la frecuencia fundamental no

es suficiente para garantizar la presencia y ubicación del daño. Por lo tanto, es preferible desarrollar métodos bajo el enfoque de propagación de ondas que además de determinar y localizar el daño presente, permiten hacer una cuantificación de la severidad y el progreso de éste. En esta sección se describe un modelo analítico novedoso que relaciona los tiempos de propagación en las diferentes capas de la estructura con la rigidez de aquellas. Para ello se hace uso de la Ec. (2.33), la cual describe la velocidad de propagación de las ondas de cortante

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.33)$$

donde  $\mu$  es el módulo de cortante, que se define como

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.34)$$

sustituyendo (2.34) en la Ec. (2.33), permite expresar el módulo de Young  $E$ , como

$$E = 2\rho(1 + \nu)\beta^2 \quad (2.35)$$

por otra parte, si los elementos estructurales son columnas, la rigidez de los entrepisos se puede calcular como

$$k = \sum_{columnas} \frac{12EI}{h^3} \quad (2.36)$$

y considerando que  $\beta = h/\tau$ , donde  $h$  es la altura de la columna y  $\tau$  el tiempo de propagación de onda, la ecuación de rigidez se puede reescribir como

$$k = \sum_{columnas} \frac{24\rho(1 + \nu)I}{h\tau^2} \quad (2.37)$$

con  $I$  equivalente al segundo momento de inercia de la columna con respecto a su eje central. Note que en la Ec. (2.37), el módulo de Poisson se puede considerar constante, al igual que la densidad de masa, obtenidos éstos a partir de las propiedades de los materiales. A diferencia de otros parámetros, el módulo de cortante generalmente se reduce dependiendo del módulo de Young. Por ejemplo, si el módulo de Young pierde capacidad elástica, entonces el módulo de cortante se reduce, produciendo una reducción en la velocidad de propagación de onda de acuerdo con la Ec. (2.33), haciendo notable la presencia de daño estructural. Otras variaciones de parámetros pueden ocurrir cuando parte de la sección transversal de las columnas es dañada, causando pérdida del momento de inercia  $I$ . Esto ocurre debido a que la velocidad de propagación es reducida dentro de la zona dañada, por lo que el retardo en el tiempo de llegada incrementa. Note que aun cuando no se tiene un conocimiento preciso de esos parámetros por no considerar factores como el revestimiento, paredes divisorias o muros, contenidos muy variables, entre otros, el daño estructural será evidente al comparar los tiempos de propagación de onda obtenidos de diferentes mediciones tomadas después de diferentes eventos sísmicos. Por lo tanto, la sensibilidad del algoritmo para el propósito de detección de daño ocurre principalmente en los tiempos de propagación de onda. En este trabajo se consideran diferentes densidades de masa y módulos de Poisson para cada estrato,

con el objetivo de probar la versatilidad del algoritmo de estimación propuesto para recuperar la rigidez dependiente de la capa (ver sección 2.5). Una vez que la rigidez es calculada empleando la Ec. (2.37), el daño puede ser detectado comparando el valor actual con registros históricos, o con cálculos basados en las propiedades de los materiales. Este método permite localizar el piso donde ocurrió el daño y es más simple que los métodos basados en identificación por análisis modal o espacio de estados. También permite una localización más precisa, si una vez que el piso dañado se identifica, se realizan pruebas adicionales en todas las columnas. Los tiempos de viaje de onda son obtenidos analizando los tiempos de arribo del pulso más prominente que viaja de la base al techo del edificio, como será explicado en la sección de resultados numéricos.

## 2.4. Pulso de Ricker

Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, por lo general se utilizan funciones analíticas dependientes del tiempo como señal de excitación, sin embargo, en la práctica se trabaja con datos de ancho de banda finitos, es decir,  $|\omega| \leq \omega_{max}$ . En este trabajo se utiliza el pulso de Ricker como señal de excitación para propagarse a través de todos los pisos/capas, debido a que permite un control directo sobre el periodo de muestreo de los datos y se le puede diseñar para excitar el modelo con énfasis en una determinada banda de frecuencia<sup>2</sup>. Éste a la vez, es equivalente a la segunda derivada de una función gaussiana y está definido por la siguiente expresión (Wang, 2015)

$$r(t) = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right) \exp^{-a^2} \quad (2.38)$$

con

$$a = \frac{\pi(t - t_s)}{t_p}, \quad (2.39)$$

donde,  $t_s$  define el centro del pulso,  $t_p$  indica el ancho del pulso y comúnmente es conocido como *periodo característico*, mientras  $\sqrt{6}t_p/\pi$  indica el periodo central. Por otra parte, en el dominio de la frecuencia el pulso de Ricker se define como

$$r(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b_p^2 \exp^{-b_p^2} \exp^{-i\omega t_s} \quad (2.40)$$

donde  $b_p = \omega/\omega_p$ ,  $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi/t_p$ , de lo anterior,  $f_p$  corresponde a la frecuencia de máxima energía conocida como *frecuencia característica*. A partir del parámetro  $t_p$ , existe una relación que permite calcular la frecuencia máxima como

$$f_{max} \approx 3 \frac{1}{t_p} \quad (2.41)$$

La importancia de la Ec. (2.41) radica en que con ésta se puede diseñar el pulso de Ricker con un ancho de banda determinado para excitar al edificio con énfasis en una frecuencia particular tomando en cuenta el tiempo de viaje de la onda y la altura de cada piso. La Fig. 2.5(a), muestra

---

<sup>2</sup>Es necesario que la función de transferencia del modelo y el pulso que lo excita presenten energía concentrada en el mismo intervalo de frecuencias.

un ejemplo del pulso de Ricker, caracterizado por los parámetros  $t_p = 1$  y  $t_s = 2.5$ , mientras que la Fig. 2.5(b) se muestra su espectro en frecuencia.

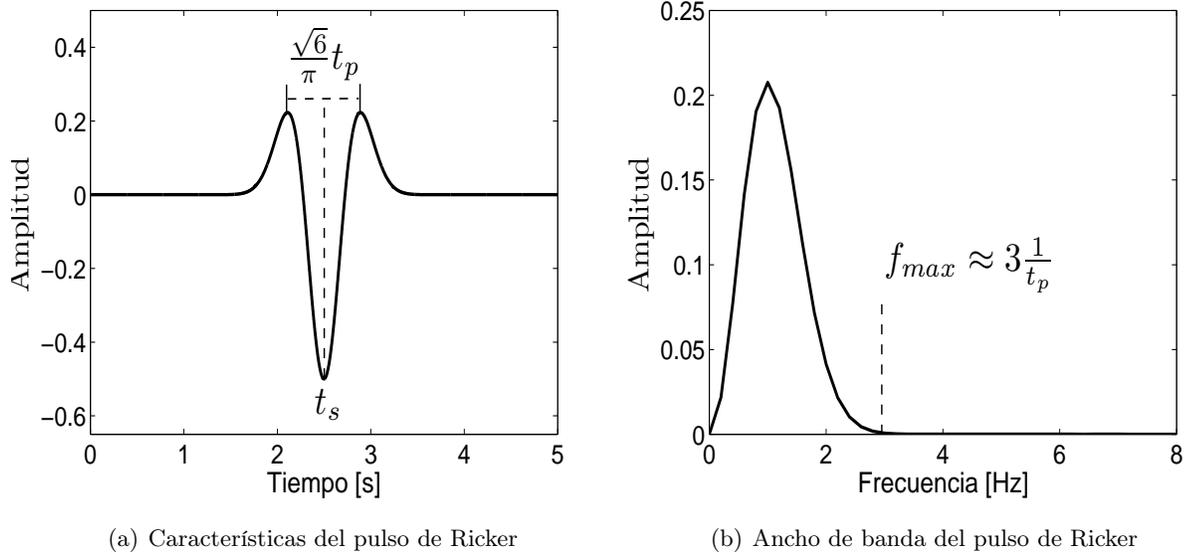


Figura 2.5: Pulso de Ricker

## 2.5. Ejemplo numérico

Esta simulación tiene como objetivo mostrar la versatilidad del algoritmo para identificar los tiempos de propagación de onda de manera automática y con ellos calcular los valores de rigidez en los entrepisos del edificio. La hipótesis de este enfoque consiste en encontrar el primer arribo de la señal propagada en cada uno de los pisos de la estructura. Para ello, dicha simulación está basada en los datos de un edificio de 9 pisos de concreto reforzado con veinte columnas de sección transversal cuadrada en cada piso, como se muestra en la Fig. 2.6. La altura de los pisos y la sección transversal de las columnas son diferentes, por lo tanto la rigidez también varía a lo largo de los pisos. La densidad de masa, el módulo de Young y otros parámetros de las capas fueron obtenidos de las propiedades de los materiales (McCormac y Brown, 2006) y aplicando ecuaciones estructurales estándares (Chopra, 1995; Hibbeler, 2011). La finalidad de usar un modelo heterogéneo y anisótropo, es probar la robustez del algoritmo propuesto, si bien la identificación de tiempos de propagación funciona bastante bien para el caso homogéneo (ver apéndice A), la intención ahora es validar la respuesta de éste, cuando todas las condiciones en los estratos son distintas. Note además, que el algoritmo desarrollado también es capaz de descubrir si ha ocurrido daño, y de ser así, determina su locación y severidad.

Para calcular los tiempos de propagación de onda en el edificio se usa un pulso de Ricker, el cual se aplica en su base y se propaga a lo largo de éste. Se resuelven las ecuaciones de la matriz de transferencia que dan como resultado el propagador de Thompson-Haskell (2.27), éste es resuelto en el dominio de la frecuencia para el ancho de banda de interés. Como resultado se

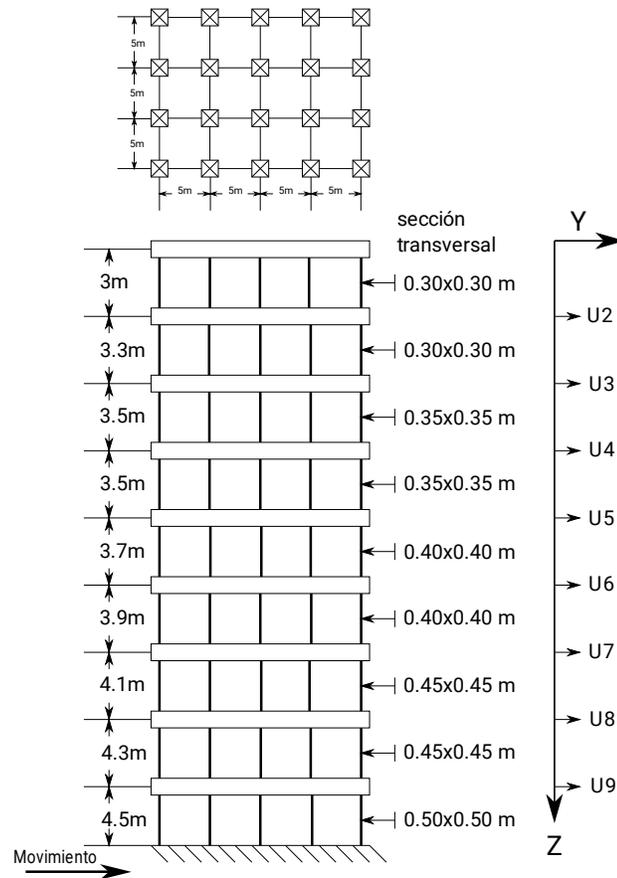


Figura 2.6: Edificio de 9 pisos

| Capa | Piso | $h(m)$ | $\rho\left(\frac{t_f}{m^3}\right)$ | $E\left(\frac{t_f}{m^2}\right)$ | $\nu$ | $fc\left(\frac{t_f}{m^2}\right)$ | $\beta(m/s)$ |
|------|------|--------|------------------------------------|---------------------------------|-------|----------------------------------|--------------|
|      |      |        |                                    | $1,0e + 005^*$                  |       |                                  |              |
| 1    | 9    | 3      | 2.1                                | 6.2610                          | 0.20  | 2000                             | 352.4571     |
| 2    | 8    | 3.3    | 2.2                                | 6.4156                          | 0.21  | 2100                             | 347.1361     |
| 3    | 7    | 3.5    | 2.3                                | 6.4915                          | 0.22  | 2150                             | 340.1064     |
| 4    | 6    | 3.5    | 2.4                                | 6.5666                          | 0.23  | 2200                             | 333.5005     |
| 5    | 5    | 3.7    | 2.5                                | 6.6408                          | 0.24  | 2250                             | 327.2757     |
| 6    | 4    | 3.9    | 2.6                                | 6.7142                          | 0.25  | 2300                             | 321.3951     |
| 7    | 3    | 4.1    | 2.7                                | 6.7868                          | 0.26  | 2350                             | 315.8267     |
| 8    | 2    | 4.3    | 2.8                                | 6.8586                          | 0.27  | 2400                             | 310.5424     |
| 9    | 1    | 4.5    | 2.9                                | 7.0000                          | 0.28  | 2500                             | 307.0648     |

Tabla 2.1: Parámetros del edificio

obtienen los desplazamientos en cada uno de los pisos del edificios usando la trasformado inversa de Fourier. Para calcular los tiempos de viaje de onda, las gráficas de la respuesta en tiempo como las

presentadas en la Fig. 2.7 son usadas, así como una traza simétrica con el objetivo de identificar la propagación del pulso más prominente, tomando en cuenta que a cada valor en magnitud le corresponde un valor en tiempo. La tabla 2.2 contiene un resumen de los hallazgos, es decir, los tiempos de propagación y rigideces nominales, así como de sus respectivos estimados usando la metodología propuesta. De lo anterior se puede apreciar que este método estima los tiempos de viaje de onda con buena precisión, aun cuando el tiempo de muestreo para la transformada inversa de Fourier es de 0.0005 s. Con un error de estimación de  $\pm 5\%$ , y  $\pm 10\%$  para el caso de la rigidez, en el peor de los casos. Sin embargo estos resultados son mejorados aplicando un *spline* en todo los desplazamientos obtenidos con el fin de aumentar la precisión, incrementando la resolución en el tiempo de discretización, como se ilustra en la Fig. 2.8. Los resultados al usar *splines* se muestran en la tabla 2.3, donde el error de estimación para los tiempos de propagación se reduce a  $\pm 1.2\%$  y  $\pm 2.3\%$  para la rigidez, en el peor de los casos. El tiempo utilizado para la transformada inversa de Fourier es de 0.001 s y se usaron 5000 puntos para la interpolación. El algoritmo desarrollado detecta el valor pico de cada sismograma y toma los dos valores vecinos de éste, a la izquierda y a la derecha, para construir la interpolación (spline) que mejora considerablemente la precisión de los resultados obtenidos, como se muestra en la Fig. 2.8<sup>3</sup>.

| Piso | Analítico $\tau(s)$ | Simulación $\hat{\tau}(s)$ | $\Delta\hat{\tau}/\tau(\%)$ | $k(t_f/m)$ | $\hat{k}(t_f/m)$ | $\Delta\hat{k}/k\%$ |
|------|---------------------|----------------------------|-----------------------------|------------|------------------|---------------------|
| 9    | 0.0085              | 0.0090                     | -5.73                       | 3756.6     | 3360.0           | 10.55               |
| 8    | 0.0095              | 0.0095                     | 0.06                        | 2892.1     | 2896.0           | -0.13               |
| 7    | 0.0103              | 0.0100                     | 2.82                        | 4544.1     | 4812.3           | -5.90               |
| 6    | 0.0105              | 0.0105                     | -0.05                       | 4596.6     | 4592.0           | 0.10                |
| 5    | 0.0113              | 0.0110                     | 2.70                        | 6712.5     | 7090.5           | -5.63               |
| 4    | 0.0121              | 0.0120                     | 1.10                        | 5795.2     | 5925.9           | -2.25               |
| 3    | 0.0130              | 0.0130                     | -0.14                       | 8075.9     | 8053.3           | 0.27                |
| 2    | 0.0138              | 0.0140                     | -1.10                       | 7074.7     | 6920.7           | 2.17                |
| 1    | 0.0147              | 0.0145                     | 1.05                        | 9602.2     | 9808.4           | -2.14               |

Tabla 2.2: Comparación de los tiempos de viaje de onda y rigideces analíticas e identificados

Se puede apreciar que el método estima los valores de rigidez con una mejor precisión con respecto a los resultados presentados en la tabla 2.2. Detalle de esto se puede observar en la tabla 2.3, que contiene un resumen de los tiempos de viaje de onda y rigideces nominales en comparación con los valores estimados empleando la metodología propuesta.

Observe que el método propuesto resulta satisfactorio pues los errores de estimación son bastante pequeños. Además, esta metodología evita cometer errores por el usuario al calcular los parámetros a partir de las mediciones, pues el algoritmo propuesto es capaz de operar de manera automática en comparación con la metodología tradicional que requiere únicamente de *trazas sísmicas*. Un inconveniente que el algoritmo puede presentar en su operación puede ocurrir ante

<sup>3</sup>En esta sección el superíndice ( $\wedge$ ) describe los parámetros estimados, mientras que ( $\sim$ ) describe el error de estimación entre el valor real y su estimado

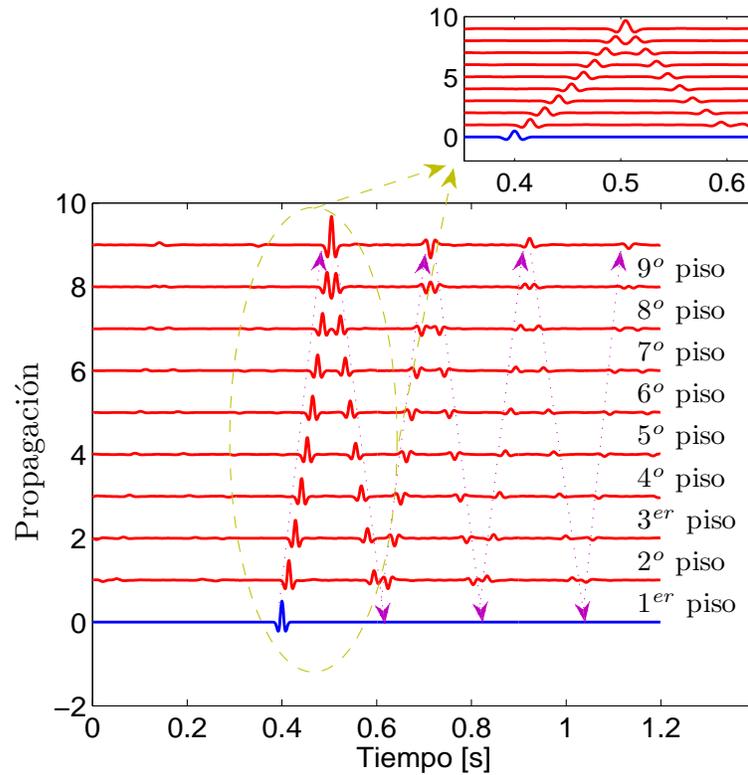


Figura 2.7: Respuesta del edificio de 9 pisos

| Piso | Análítico $\tau(s)$ | Simulación $\hat{\tau}(s)$ | $\Delta\hat{\tau}/\tau(\%)$ | $k(t_f/m)$ | $\hat{k}(t_f/m)$ | $\Delta\hat{k}/k\%$ |
|------|---------------------|----------------------------|-----------------------------|------------|------------------|---------------------|
| 9    | 0.0085              | 0.0086                     | 1.2154                      | 3756.6     | 3666.9           | 2.3871              |
| 8    | 0.0095              | 0.0094                     | -1.1432                     | 2892.1     | 2959.4           | -2.3262             |
| 7    | 0.0103              | 0.0103                     | 0.0249                      | 4544.1     | 4541.8           | 0.0498              |
| 6    | 0.0105              | 0.0105                     | 0.0130                      | 4596.6     | 4595.4           | 0.0260              |
| 5    | 0.0113              | 0.0113                     | -0.0052                     | 6712.5     | 6713.2           | -0.0105             |
| 4    | 0.0121              | 0.0121                     | -0.0096                     | 5795.2     | 5796.3           | -0.0193             |
| 3    | 0.0130              | 0.0130                     | -0.0201                     | 8075.9     | 8079.1           | -0.0402             |
| 2    | 0.0138              | 0.0138                     | -0.0128                     | 7074.7     | 7076.5           | -0.0256             |
| 1    | 0.0147              | 0.0146                     | -0.0611                     | 9602.2     | 9613.9           | -0.1224             |

Tabla 2.3: Comparación de los tiempos de viaje de onda y rigideces analíticas e identificados posteriores al spline

la presencia de señales con múltiples efectos de reflexión, pues no sería una tarea fácil decidir que pulso estudiar. Sin embargo, este problema puede ser superado empleando la convolución de los

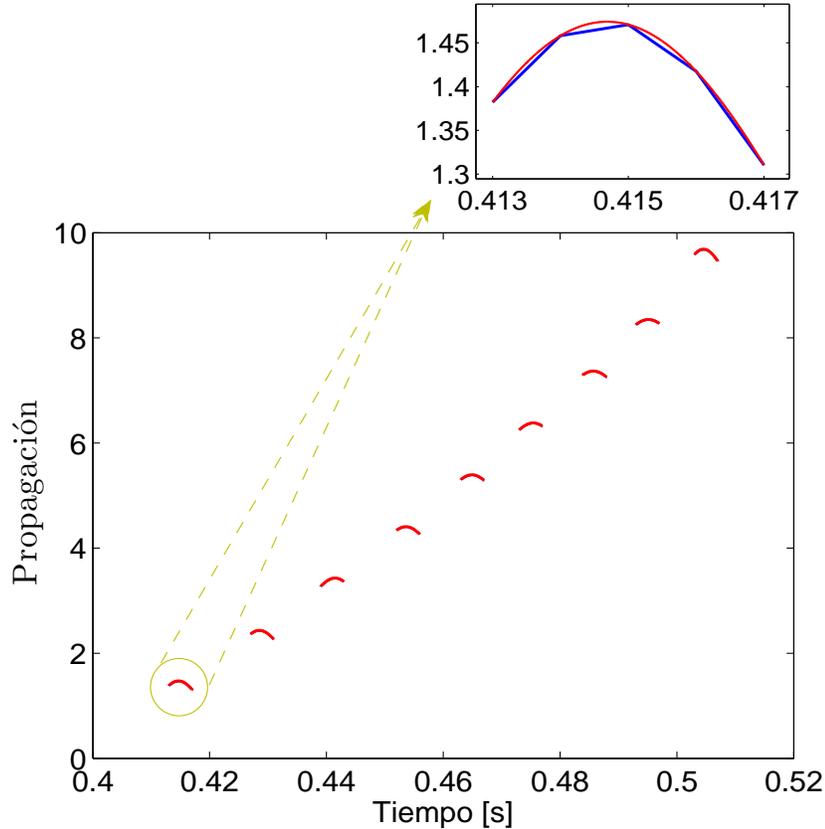


Figura 2.8: Spline de la respuesta del edificio de 9 pisos

registros de respuesta en diferentes pisos y/o con respecto a la base (Snieder y Safak, 2006). Esto facilita que se recuperen sismogramas similares a los presentados en la Fig. 2.7, en el que la metodología propuesta funciona satisfactoriamente. Lo mismo sucede cuando la señal de excitación es distinta al pulso de Ricker. Por otra parte, en el capítulo siguiente se presentará un algoritmo de adaptación retroalimentado capaz de identificar los tiempos de viaje de onda de manera automática, teniendo como base un modelo de referencia. Para el caso de señales contaminadas con ruido de medición, éste puede ser eliminado usando filtros pasa bandas con contenido frecuencial acorde con el ancho de banda de la respuesta estructural. Esto es bastante simple y fácil de realizar debido a que el procesamiento se puede llevar a cabo fuera de línea.

## 2.6. Detección de daño

La validación de la detección de daño es llevada a cabo simulando la reducción del módulo de Young  $E$  en el tercero, séptimo y noveno piso, suponiendo que se han producido diversas acciones sísmicas y que se ha inducido daño progresivo en el edificio. Se proponen cambios en cada una de las tres plantas, con el fin de identificar la pérdida de rigidez y la ubicación del daño. Para

el noveno piso, el porcentaje de reducción de  $E$  es  $d_{9th} = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20] \%$ , para el séptimo piso es  $d_{7th} = [0, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 19, 20] \%$  y finalmente, para el tercer piso es  $d_{3rd} = [0, 5, 5, 5, 8, 9, 10, 5, 11, 13, 15, 17, 20] \%$ . Es decir, todos los pisos dañados tienen diferentes niveles de reducción de  $E$ . El daño es detectado por el algoritmo comparando los tiempos de propagación actual con respecto a los obtenidos antes de que se indujeran daños, que sirven como valores de referencia. Se llevaron a cabo once simulaciones, en las cuales se calculan los tiempos de propagación de onda en cada piso a partir de la respuesta estructural, luego de propagar el pulso de Ricker tantas veces como el número de simulaciones.

La tabla 2.4 muestra los tiempos de propagación obtenidos en las diferentes simulaciones, haciendo notorio que los cambios en los retardos se presentan únicamente en los pisos 9, 7, y 3, indicando que se ha producido algún tipo de daños en aquellos. La Fig. 2.9 muestra la relación entre la pérdida del módulo de Young y los tiempos de propagación a partir de los datos recolectados en la tabla 2.4, donde éstos últimos incrementan a medida que se produce un daño estructural. Observe que para el último evento, en el que el daño acumulado es mayor, la diferencia entre los retardos obtenidos con respecto a los valores nominales que identifican condiciones no dañadas del edificio es de aproximadamente 12% para los tres pisos antes mencionados, mientras que en los restantes sin daño la diferencia es de 1.2% en el peor de los casos. Además, el progreso del daño es cuantificado sustituyendo los tiempos de propagación obtenidos dentro de la Ec. (2.37). Los resultados se muestran en las tablas 2.4 y 2.5. En ésta última, es claro que el noveno, séptimo y tercer piso sufren pérdida de rigidez, sin embargo, es en los dos últimos donde el porcentaje de reducción de rigidez inducido se recobra de manera precisa. Aparentemente el piso ocho también está dañado, sin embargo, observando que no existen cambios en los tiempo de propagación ni en la rigidez, es fácil asegurar que no existe daño ahí. Finalmente, el noveno piso tiene un error de estimación máximo de 2.4% aproximadamente, que es introducido debido a la discretización del modelo, más el error numérico generado. A pesar de esto, cuando se induce daño, la rigidez se reduce 20%. Estos cambios se deben a la degradación en los materiales, cambios en las propiedades geométricas y pérdida de masa o rigidez asociadas con grietas.

| Piso | $\hat{\tau}_0(s)$ | $\hat{\tau}_1(s)$ | $\hat{\tau}_2(s)$ | $\hat{\tau}_3(s)$ | $\hat{\tau}_4(s)$ | $\hat{\tau}_5(s)$ | $\hat{\tau}_6(s)$ | $\hat{\tau}_7(s)$ | $\hat{\tau}_8(s)$ | $\hat{\tau}_9(s)$ | $\hat{\tau}_{10}(s)$ |
|------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| 9    | 0.0086            | 0.0087            | 0.0088            | 0.0089            | 0.0090            | 0.0090            | 0.0091            | 0.0092            | 0.0094            | 0.0095            | 0.0096               |
| 8    | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094            | 0.0094               |
| 7    | 0.0103            | 0.0105            | 0.0106            | 0.0107            | 0.0108            | 0.0110            | 0.0110            | 0.0111            | 0.0112            | 0.0114            | 0.0115               |
| 6    | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105            | 0.0105               |
| 5    | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113            | 0.0113               |
| 4    | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121            | 0.0121               |
| 3    | 0.0130            | 0.0133            | 0.0134            | 0.0135            | 0.0136            | 0.0137            | 0.0138            | 0.0139            | 0.0141            | 0.0143            | 0.0145               |
| 2    | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139            | 0.0139               |
| 1    | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146            | 0.0146               |

Tabla 2.4: Tiempos de propagación de onda identificados en once eventos simulados

| Piso | $\hat{k}_0$ | $\hat{k}_1$ | $\hat{k}_2$ | $\hat{k}_3$ | $\hat{k}_4$ | $\hat{k}_5$ | $\hat{k}_6$ | $\hat{k}_7$ | $\hat{k}_8$ | $\hat{k}_9$ | $\hat{k}_{10}$ |
|------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 9    | 3666.9      | 3592.3      | 3525.4      | 3459.5      | 3393.1      | 3329.1      | 3261.3      | 3189.9      | 3113.0      | 3035.0      | 2967.4         |
| 8    | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4      | 2959.4         |
| 7    | 4541.8      | 4402.3      | 4311.4      | 4180.1      | 4138.0      | 4006.8      | 3963.2      | 3872.9      | 3822.1      | 3672.9      | 3622.1         |
| 6    | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4      | 4595.4         |
| 5    | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2      | 6713.2         |
| 4    | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3      | 5796.3         |
| 3    | 8079.1      | 7701.4      | 7647.0      | 7413.3      | 7325.7      | 7212.6      | 7177.5      | 7018.3      | 6853.5      | 6695.2      | 6464.6         |
| 2    | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5      | 7076.5         |
| 1    | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9      | 9613.9         |

$\hat{k} = (t_f/m)$

Tabla 2.5: Cálculo de la rigidez en once eventos simulados

### 2.6.1. Detección de daño con presencia de ruido de medición

Un problema común en soluciones reales es la presencia de ruido de medición que puede afectar considerablemente el desempeño del algoritmo de detección, y que puede llegar a generar falsas alarmas. Ésto se debe a que la diferencia en los tiempos de propagación para detectar 20 % de daño son bastante pequeñas, como se observa en la tabla 2.4. Detectar el primer arribo del movimiento puede ser bastante difícil cuando se tienen mediciones contaminadas, como las presentadas en la Fig. 2.10. Pueden aparecer diversos picos y ser inclusive más prominentes. Sin embargo, este pro-

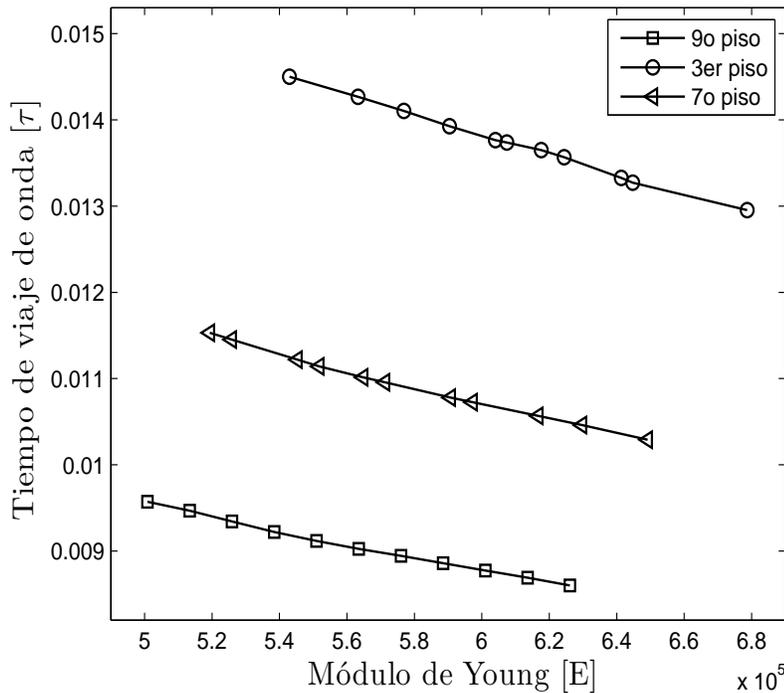


Figura 2.9: Tiempo de viaje de onda respecto al módulo de Young en once eventos simulados

| Piso | $\tilde{k}_0$ % | $\tilde{k}_1$ % | $\tilde{k}_2$ % | $\tilde{k}_3$ % | $\tilde{k}_4$ % | $\tilde{k}_5$ % | $\tilde{k}_6$ % | $\tilde{k}_7$ % | $\tilde{k}_8$ % | $\tilde{k}_9$ % | $\tilde{k}_{10}$ % |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 9    | 2.38            | 4.37            | 6.15            | 7.91            | 9.68            | 11.38           | 13.19           | 15.09           | 17.13           | 19.21           | 21.01              |
| 8    | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32           | -2.32              |
| 7    | 0.04            | 3.12            | 5.12            | 8.01            | 8.94            | 11.82           | 12.78           | 14.77           | 15.89           | 19.17           | 20.29              |
| 6    | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02            | 0.02               |
| 5    | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01              |
| 4    | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01           | -0.01              |
| 3    | -0.04           | 4.64            | 5.31            | 8.20            | 9.29            | 10.67           | 11.13           | 13.10           | 15.14           | 17.10           | 19.95              |
| 2    | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02           | -0.02              |
| 1    | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12           | -0.12              |

Tabla 2.6: Error de estimación de rigidez en once eventos simulados

blema puede ser superado repitiendo varias veces el mismo experimento para obtener el promedio de las tendencias de daño en los diferentes pisos y entonces descartar información falsa. Adicionalmente, el algoritmo propuesto es mejorado introduciendo un filtro pasa banda, tipo *Butterworth* de tercer orden con frecuencias de corte acordes con el ancho de banda del pulso de Ricker, es decir, 150 Hz. Entonces el ruido de medición es atenuado y en consecuencia el algoritmo de evaluación de daño se vuelve robusto, recuperándose los resultados obtenidos con condiciones sin ruido, como los presentados en las tablas 2.4, 2.5 y 2.6. Para aplicaciones reales, las frecuencias de corte del filtro pueden ser seleccionadas tomando en cuenta el ancho de banda de la respuesta estructural.

En esta simulación se usó ruido Gaussiano de media cero y varianza de 20%. El pulso de Ricker fue diseñado tomando en cuenta su longitud de onda, pues ésta debe ser menor que el tiempo de propagación. Por lo tanto los parámetros del pulso empleado son:  $t_s = 0.4$ ,  $t_p = 0.02$ . El tiempo de muestreo también es menor a la frecuencia fundamental, por lo menos la mitad de ésta. En ambos ejemplos se usó un tiempo de 0.001 s y 1024 puntos.

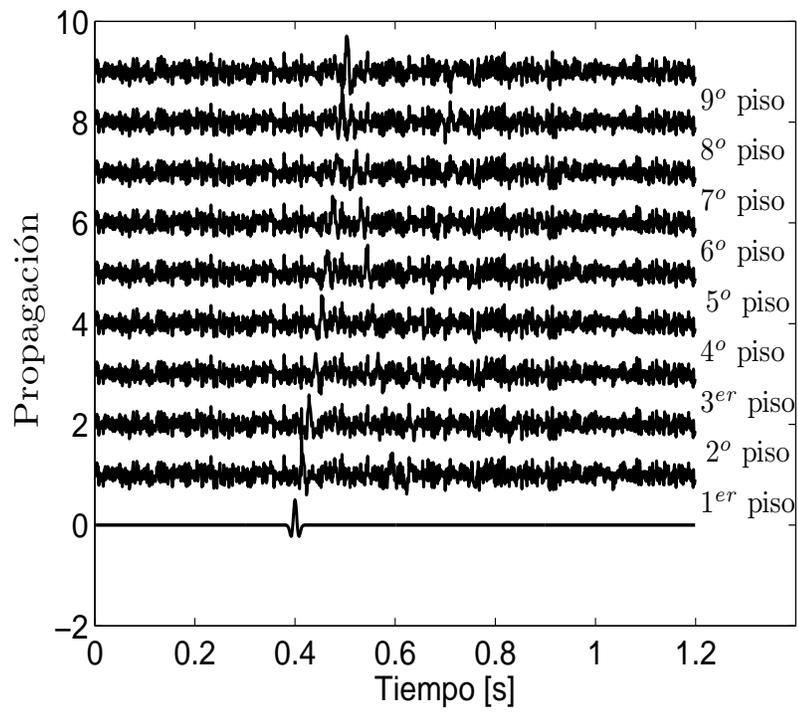


Figura 2.10: Mediciones contaminadas con ruido Gaussiano

## Capítulo 3

# Estimación en tiempo real de parámetros en modelos de edificios bajo el enfoque de propagación de ondas

En esta sección se presenta un novedoso método de identificación de sistemas en línea para edificios modelados como un medio continuo bajo el enfoque de propagación de ondas. Esto como solución alternativa a los métodos de análisis modal para la evaluación de salud estructural de edificios de múltiples pisos. Para ello, se introduce un nuevo modelo de barra de cortante discreta que se utiliza para diseñar un observador adaptable que permite estimar los desplazamientos y velocidades, así como los parámetros desconocidos de velocidad de propagación de onda y los coeficientes de amortiguamiento, todo ello en tiempo real. El diseño del observador adaptable se basa únicamente en mediciones de aceleración, no necesita de transformación de coordenadas y utiliza el método de Mínimos Cuadrados recursivo normalizado con factor de olvido y un esquema de proyección paramétrica para lograr una convergencia más fuerte. Además, el esquema de identificación propuesto emplea una nueva parametrización basada en filtros lineales integrales, que elimina perturbaciones constantes y atenúa el ruido de medición. La eficiencia del algoritmo se demuestra a través de resultados experimentales en un edificio de cinco pisos de escala reducida.

### 3.1. Modelo de un edificio de cortante y la ecuación de onda

Considere el edificio de múltiples pisos mostrado en la Fig. 3.1(a), que supone lo siguiente: a) el movimiento es restringido únicamente en un eje y por lo tanto los efectos de torsión son omitidos, b) la masa de cada piso es concentrada en su centro de masa, c) se supone que los diafragmas de los pisos son rígidos en su plano, pero flexibles para doblarse en dirección vertical, d) la estructura es soportada sobre piso rígido (Paz, 1997). Generalmente la dinámica de este sistema es modelada por una ecuación diferencial de segundo orden usando análisis vibracional (Chopra, 1995). En esta sección, se propone un modelo de propagación de ondas basado en el principio de movimiento inducido por ondas sísmicas. Para lograr esto, el edificio de cortante es representado por un conjunto

de  $n$  masas interconectadas por resortes lineales y amortiguadores viscosos lineales sometidos a la actividad sísmica  $\ddot{u}_g$ , como se muestra en la Fig. 3.1(b). Sea  $u_i$  el desplazamiento del  $i$ -ésimo piso correspondiente a la  $i$ -ésima masa en el tiempo  $t$ , donde  $m_i$  es la  $i$ -ésima masa,  $k_i$  y  $c_i$  la  $i$ -ésima rigidez del piso y coeficiente de amortiguamiento, respectivamente,  $h_i$  la altura de entrepisos y  $H$  la altura total del edificio. Considere  $n$  pisos consecutivos, como se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.1(b). El movimiento en la  $i$ -ésima masa está compuesto las por fuerzas de resistencia elástica ejercidas por los resortes y amortiguadores lineales, respectivamente, más la fuerza inercial producida por la  $i$ -ésima masa.

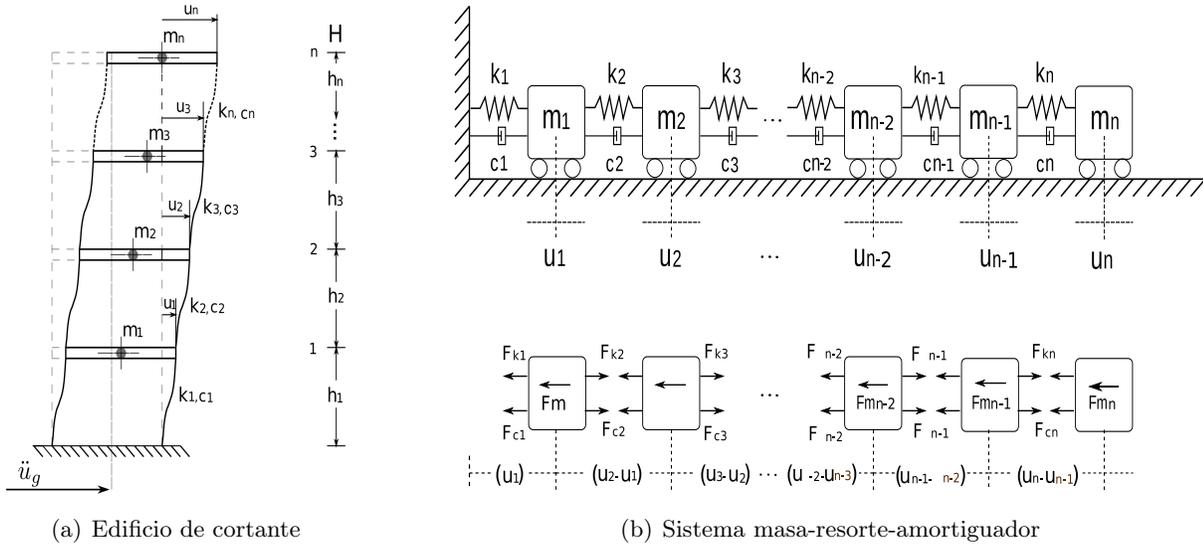


Figura 3.1: Edificio de cortante y modelo equivalente

La ecuación de onda es obtenida analizando el comportamiento de las masas en la Fig. 3.1(b). De acuerdo al principio D'Alembert, el movimiento en la  $i$ -ésima masa debido a la excitación sísmica  $\ddot{u}_g$  está dado por el balance de fuerzas entre las componentes  $i$ -ésima e  $(i \pm 1)$ , es decir

$$-F_{k_i} - F_{c_i} - F_{m_i} + F_{k_{i+1}} + F_{c_{i+1}} = 0 \quad (3.1)$$

considerando que la fuerza inercial  $F_{m_i}$  ejercida por la masa  $m_i$ , ésta dada por  $m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ , entonces la Ec. (3.1) produce<sup>1</sup>

$$-F_{k_i} - F_{c_i} + F_{k_{i+1}} + F_{c_{i+1}} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

Las fuerzas de resistencia elástica y de amortiguamiento que actúan sobre la masa  $m_i$  pueden

<sup>1</sup>Note que la derivada de  $u_i$  puede ser temporal o espacial a lo largo de la altura del edificio  $H$ . Por simplicidad, los argumentos se omiten en esta sección

ser descritas respectivamente como<sup>2</sup>

$$F_{k_i} = k(u_i - u_{i-1}) \quad (3.3a)$$

$$F_{c_i} = c(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) \quad (3.3b)$$

$$F_{k_{i+1}} = k(u_{i+1} - u_i) \quad (3.3c)$$

$$F_{c_{i+1}} = c(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) \quad (3.3d)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.3a)–(3.3d), en la Ec. (3.2) produce

$$k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) + c(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) - c(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

la cual puede ser reescrita como

$$k \underbrace{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}_{\partial^2 u_i / \partial y^2} + c \underbrace{(\dot{u}_{i+1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i-1})}_{\partial^2 \dot{u}_i / \partial y^2} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Los términos de la izquierda en la Ec. (3.5) son similares a la aproximación de segundo orden del desplazamiento  $u_i$  y de la velocidad  $\dot{u}_i$  respectivamente, calculadas por diferencias finitas centradas con respecto a la coordenada longitudinal  $y$ , que se expresan como (LeVeque, 2007)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial y^2} \approx \frac{\dot{u}_{i+1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.6b)$$

siendo  $(\Delta y)$  la longitud entre las masas  $i$ -ésima e  $(i \pm 1)$ . Multiplicando las Ecs. (3.6a) y (3.6b) por  $(\Delta y)^2$  y sustituyendo los productos resultantes en la Ec. (3.5), produce

$$(\Delta y)^2 \left( k \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial y^2} \right) = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Finalmente, reorganizando la Ec. (3.7) y tomando en cuenta el límite de ésta cuando  $\Delta y \rightarrow 0$  (Pellicer y Solà-Morales, 2004), se obtiene la ecuación de onda unidimensional con amortiguamiento de Kelvin (3.8). Que se usa para describir el movimiento de edificios de cortante, cuando se suponen como un medio continuo

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \beta_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \eta_i^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

donde,  $\beta_i > 0$  es la velocidad de propagación de onda y  $\eta_i \geq 0$  es una constante proporcional a la fuerza de amortiguamiento en la estructura. Las condiciones iniciales y de frontera para este modelo (3.8) son las siguientes:

$$u(y, 0) = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad (3.9a)$$

$$\dot{u}(y, 0) = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad (3.9b)$$

$$u(0, t) = u_g \quad 0 < t \quad (3.9c)$$

$$\frac{\mu \partial u}{\partial y}(H, t) = 0 \quad 0 < t \quad (3.9d)$$

---

<sup>2</sup>Por simplicidad, se supone por ahora que la rigidez  $k$  y el coeficiente viscoso  $c$  son iguales en todos los elementos

donde  $\mu$  es el módulo de cortante. Además, de acuerdo a las Ecs. (3.9a)–(3.9d) se supone lo siguiente:

- A1** El edificio está inicialmente en reposo de acuerdo a las Ecs. (3.9a) y (3.9b), y por lo tanto  $u(0)$ ,  $\dot{u}(0)$  y  $\ddot{u}(0)$  son cero.
- A2** Durante una actividad sísmica únicamente se excita la base de la estructura mediante el movimiento del terreno  $u_g$ , ver Ec. (3.9c).
- A3** El edificio está libre de esfuerzo en el techo de acuerdo con la Ec. (3.9d).

Una ventaja importante de este modelo es que permite replantear el modelo de edificio de cortante como un medio continuo, es decir, como una barra de cortante elástica, en la que los efectos de propagación de ondas pueden ser estudiados y utilizados como indicadores de salud estructural, comparando su valor actual con respecto a aquellos obtenido de las propiedades de los materiales. Hay que tener en cuenta que el modelo propuesto es válido sólo cuando el movimiento del edificio está en la región elástica y tiene un comportamiento lineal.

## 3.2. Semidiscretización espacial del modelo

Considerando la ubicación de los sensores en el edificio, el modelo continuo de barra de cortante elástica puede ser discretizado en puntos donde el comportamiento estructural es deseado, por ejemplo, en cada piso o grupo de ellos. En consecuencia, se producen diferentes velocidades de propagación y coeficientes de amortiguamiento como se muestra en la Fig. 3.2, donde el espacio vertical entre dos puntos de discretización se considera como una capa. Para lograr esto, se realiza una semidiscretización espacial basada en el método de diferencias finitas, que consisten en aproximar la variable de estado ( $u$ ) en un conjunto de puntos discretos localizados en el dominio espacial por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y algebraicas, que pueden ser resueltas en tiempo-real. No obstante, la Ec. (3.8) también puede ser resuelta por otros métodos como, *backstepping* (Smyshlyaev y Krstic, 2010; Ramm, 2001; Smyshlyaev y Krstic, 2004; Cheng et al., 2010), empleando transformada de Fourier (Todorovska y Trifunac, 2007), de manera numérica (Aslak y Ragnar, 2005) o por solución analítica (Haberman, 1983).

En los pisos 1 al  $(n - 1)$  se emplean diferencias finitas centradas de segundo orden, mientras que en el último de ellos ( $n$ ) se usa un *backward* de primer orden con el fin de evitar que el sistema discreto pierda orden. Además, en la base del edificio se usa la condición de frontera de Dirichlet

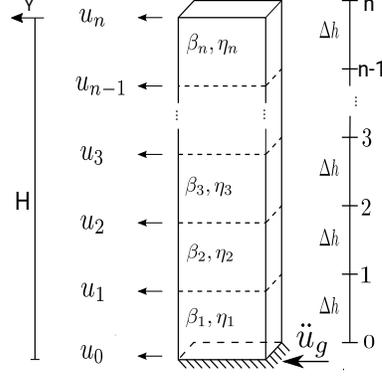


Figura 3.2: Barra de cortante elástica discretizada

(Lomax et al., 1999). Resultando el siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}_1 = \frac{1}{\Delta h^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}_2 = \frac{1}{\Delta h^2} (u_1 - 2u_2 + u_3) \quad (3.10b)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}_{n-1} = \frac{1}{\Delta h^2} (u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) \quad (3.10c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}_n = \frac{1}{\Delta h^2} (u_{n-1} - u_n) \quad (3.10d)$$

reescribiendo las Ecs. (3.10a)–(3.10d) produce

$$\underline{\Lambda}_c = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \dot{\underline{u}}_c = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_c = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Se obtiene un operador matricial tridiagonal por un vector de estado, más un vector de condiciones de frontera  $\underline{b}_c$  que depende del movimiento inducido por el sismo. Sin embargo, en la práctica no es posible medir el desplazamiento del suelo debido a la dificultad de establecer una marco de referencia estático y tampoco se puede obtener por integración numérica debido a que se puede generar *sesgo* y en bajas frecuencias se incrementa la amplitud del ruido de medición (Gavin et al., 1998). En consecuencia, el operador matricial tridiagonal es expandido para incluir un estado más, considerando que  $\ddot{u}_0 = \ddot{u}_g$ . Esto permite usar únicamente la aceleración del suelo  $\ddot{u}_g$  como señal de excitación en la condición de frontera del modelo discretizado. Por consiguiente, el movimiento sísmico en los pisos es producido como resultado de la propagación de dicho movimiento a través de las columnas y elementos que constituyen al edificio. Esto a diferencia del modelo de edificio de cortante clásico, que distribuye el movimiento sísmico en todos sus pisos en el mismo instante de

tiempo (Chopra, 1995; Paz, 1997).

Por lo tanto, la ecuación de onda con amortiguamiento de Kelvin es aproximada por:

$$\ddot{u} = \beta_M^2 \Lambda u + \eta_M^2 \Lambda \dot{u} + b \ddot{u}_g \quad (3.12)$$

donde, las matrices  $\beta_M^2$  y  $\eta_M^2 \in \mathcal{R}^{p \times p}$ , con  $p = (n + 1)$ , y se definen como

$$\beta_M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n^2 \end{bmatrix}, \quad \eta_M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Los elementos en las matrices (3.13) están relacionados con las propiedades de cada piso. Una ventaja importante es que la Ec. (3.12) no requiere de transformación de coordenadas para el diseño del observador adaptable en comparación con otros trabajos, como (Krstic y Smyshlyaev, 2008; Bastin y Gevers, 1988). Además

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}, \quad \ddot{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_{n-1} \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde  $\Delta h = H/(n+1)$  para pisos uniformemente espaciados. Observe que la condición de frontera es ubicada en la base del edificio, es decir, en  $H = 0$ . En este punto, la medición de aceleración se supone medible y equivalente a la acción sísmica, por lo tanto se satisface que  $\ddot{u}_0 = \ddot{u}_g$ . Por otra parte, las entradas  $u_0$  y  $\dot{u}_0 \in \mathcal{R}^+$  dentro de los vectores  $u$  y  $\dot{u} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  en (3.14) describen el desplazamiento y la velocidad del terreno, respectivamente, mientras que las restantes  $u_i$  y  $\dot{u}_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  corresponden a los desplazamientos y velocidades absolutas de cada piso; finalmente  $\ddot{u} \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  es el vector de aceleraciones absolutas. La matriz  $\Lambda \in \mathcal{R}^{p \times p}$  y el vector  $b \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  son resultado de la discretización y están directamente relacionadas con el número de pisos del edificio. Realizando el cambio de variable  $\dot{u} = v$  en la Ec. (3.12), permite expresar esa ecuación en espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.15)$$

cuya salida está dada por

$$z_{out} = (\ddot{u} - b \ddot{u}_g) = \begin{bmatrix} \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

Note que  $0_{p \times p}$  e  $I_{p \times p}$  denotan respectivamente las matrices nula e identidad de tamaño  $(p \times p)$ . Es importante notar que a pesar de que  $z = (\ddot{u} - b\ddot{u}_g)$  podría referirse a señales relativas, el término  $(b\ddot{u}_g)$  en la Ec. (3.16) únicamente cancela el primer estado  $(\ddot{u}_0)$  correspondiente a la condición de frontera, debido a que  $b = [1, 0, \dots, 0]$ . En consecuencia se preservan las mediciones de aceleración absoluta para todos los pisos restantes. Por lo tanto, la Ec. (3.15) representa un modelo alternativo y equivalente al de edificios de cortante en su representación en espacio de estados. Por otra parte, en la forma de sistemas lineales las Ecs. (3.15) y (3.16) se expresan como

$$\dot{x} = Ax + B\ddot{u}_g \quad (3.17)$$

$$z_{out} = Dx \quad (3.18)$$

donde

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Esta discretización espacial introduce pequeños errores en la representación debido a que el sistema dimensional infinito en la Ec. (3.12) es aproximado por un sistema concentrado. En este trabajo, la precisión del modelo discreto propuesto será medida comparando las mediciones de aceleración con las proporcionadas por el modelo (3.15)–(3.16).

### 3.3. Observador Adaptable

En esta sección, se asume ahora que las matrices  $\beta_M^2$  y  $\eta_M^2$  en la Ec. (3.15) son desconocidas y que los desplazamientos y velocidades no pueden ser directamente medidos durante una actividad sísmica, por lo tanto necesitan ser recuperados en tiempo real mediante el diseño de un observador adaptable, que combina un estimador de estados con un esquema de identificación y que además utiliza únicamente mediciones de aceleración. Las perturbaciones constantes son eliminadas y el ruido de medición es atenuado por medio de Filtros Integrales Lineales (FIL) que son incorporados en el esquema de identificación. A diferencia de otros trabajos en la literatura, el observador adaptable propuesto induce la separación entre el estimador de estado y el algoritmo de identificación, debido a que este último no depende de los estados, como se detallará más adelante.

#### 3.3.1. Identificación Paramétrica

Sea la ecuación de onda con amortiguamiento de Kelvin discretizada (3.12), la cual puede ser reescrita como

$$z_{out} = \beta_M^2 \Lambda u + \eta_M^2 \Lambda \dot{u}, \quad \text{con} \quad z_{out} = (\ddot{u} - b\ddot{u}_g) \quad (3.20)$$

donde  $z_{out}$  es la salida del sistema, la cual es medible; sean  $u$  y  $\dot{u}$  los vectores que contienen las mediciones no disponibles, entonces la Ec. (3.8) se puede reordenar como

$$\beta_M^2 \Lambda u = \psi \beta_V^2 = \psi \Theta_\beta, \quad \psi = \Lambda u \quad (3.21)$$

$$\eta_M^2 \Lambda \dot{u} = \dot{\psi} \eta_V^2 = \dot{\psi} \Theta_\eta, \quad \dot{\psi} = \Lambda \dot{u} \quad (3.22)$$

donde los elementos de las matrices diagonales  $\beta_M^2$  y  $\eta_M^2$  son usados como elementos en los vectores  $\beta_V^2$  y  $\eta_V^2$  de dimensiones  $\mathcal{R}^{p \times 1}$ ; por otra parte, las matrices  $\psi$  and  $\dot{\psi}$  y los vectores  $\Theta_\beta$  y  $\Theta_\eta$  están definidos como

$$\Theta_\beta = \beta_V^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1^2 \\ \beta_2^2 \\ \beta_3^2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1}^2 \\ \beta_n^2 \end{bmatrix}, \quad \psi = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_0 & -2u_1 & u_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_1 & -2u_2 & u_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & -2u_3 & u_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & -2u_{n-1} & u_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1} & -u_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\Theta_\eta = \eta_V^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_1^2 \\ \eta_2^2 \\ \eta_3^2 \\ \vdots \\ \eta_{n-1}^2 \\ \eta_n^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dot{u}_0 & -2\dot{u}_1 & \dot{u}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{u}_1 & -2\dot{u}_2 & \dot{u}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dot{u}_2 & -2\dot{u}_3 & \dot{u}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dot{u}_{n-2} & -2\dot{u}_{n-1} & \dot{u}_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dot{u}_{n-1} & -\dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

donde,  $\Theta_\beta, \Theta_\eta \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ . Por lo tanto, la Ec. (3.20) es ahora de la forma

$$z_{out} = \psi \Theta_\beta + \dot{\psi} \Theta_\eta \quad (3.25)$$

Observe que la Ec. (3.25) aún depende de las señales no medibles contenidas en  $\psi$  and  $\dot{\psi}$ . Una manera fácil de recuperar esas señales es integrando las mediciones de aceleración  $\ddot{u}$ . Sin embargo, los acelerómetros usualmente presentan una perturbación de voltaje constante en su salida, comúnmente conocida como sesgo u “offset”. En consecuencia, las velocidades y los desplazamientos de los pisos del edificio no pueden ser obtenidos integrando las mediciones de aceleración, debido a que la integración de señales contaminadas produce una salida con deriva (Gavin et al., 1998). Además, si las señales de aceleración se encuentran contaminadas con ruido de medición, entonces la integración numérica puede producir un gran error de estimación en los desplazamientos y velocidades (Boore y Bommer, 2005). Para superar esos problemas, se introducen filtros integrales lineales que eliminan las perturbaciones constantes y atenúan el ruido de medición.

Suponiendo que la aceleración del terreno está disponible, entonces la Ec. (3.25) es reescrita en el dominio de frecuencia empleando la transformación de Laplace

$$Z_{out}(s) = \Psi(s) \Theta_\beta + s \Psi(s) \Theta_\eta \quad (3.26)$$

Las perturbaciones constantes en la Ec. (3.26) son eliminadas aplicándole tres derivadas con respecto al tiempo (Concha, 2013). Después de esta operación, la Ec. (3.26) se convierte en

$$s^3 Z_{out}(s) = s^3 \Psi(s) \Theta_\beta + s^4 \Psi(s) \Theta_\eta \quad (3.27)$$

que además puede ser reescrita como

$$s^3 Z_{out}(s) = s\mathcal{L}[\ddot{\psi}]\Theta_\beta + s^2\mathcal{L}[\ddot{\psi}]\Theta_\eta \quad (3.28)$$

Obsérvese que mientras la Ec. (3.25) depende de señales no medibles, la Ec. (3.28) depende únicamente de señales de aceleración medibles, como sucede con la matriz  $\ddot{\psi}$

$$\ddot{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddot{u}_0 & -2\ddot{u}_1 & \ddot{u}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddot{u}_1 & -2\ddot{u}_2 & \ddot{u}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{u}_2 & -2\ddot{u}_3 & \ddot{u}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddot{u}_{n-2} & -2\ddot{u}_{n-1} & \ddot{u}_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddot{u}_{n-1} & -\ddot{u}_n \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

En el dominio del tiempo, la Ec. (3.27) es de la forma

$$z_{out}^{(3)} = \psi^{(3)}\Theta_\beta + \psi^{(4)}\Theta_\eta \quad (3.30)$$

donde el superíndice  $(j) = 1, 2, 3, \dots, n$ , representa la  $i$ -ésima derivada con respecto al tiempo. Por otra parte, el ruido que contamina las mediciones de aceleración es atenuado usando filtros integrales lineales (FIL), que son integrales durante periodos de tiempo finitos, como se describe en (Sagara y Zhao, 1990; Garnier et al., 2010). Desde el punto de vista de filtrado, los (FIL) son interpretados como una operación de pre-filtrado útil para la identificación de modelos en tiempo continuo. Esta operación puede atenuar los componentes de baja y alta frecuencia. Además, si a la Ec. (3.30) se le aplican cinco integrales sobre intervalos de tiempo finitos, se obtienen señales medibles que dependen únicamente de la aceleración. Las tres primeras integrales contrarrestan el efecto de las tres derivadas temporales en la Ec. (3.25), mientras las dos últimas filtran el ruido de medición. De acuerdo con (Garnier et al., 2010), los FIL son calculados usando el operador dado por la Ec. (3.31), acompañado del método de integración numérica trapezoidal

$$I_q\{\varphi(t)\} = \frac{1}{\delta^q} \int_{t-\delta}^t \int_{t_1-\delta}^{t_1} \cdots \int_{t_{q-1}-\delta}^{t_{q-1}} \varphi(t_q) dt_q \cdots dt_1 \quad (3.31)$$

el operador puede ser expresado en el dominio de la frecuencia como

$$|F_I(s)| = \left( \frac{1 - e^{-\bar{n}T_s s}}{s} \right)^q \quad (3.32)$$

donde,  $q$  es el número de integraciones sobre intervalos de tiempo finito de la señal  $\varphi(t)$ . El período de integración  $\delta \in \mathcal{R}^1$ , se define como

$$\delta = \bar{n}T_s \quad (3.33)$$

aquí,  $T_s$  es el tiempo de muestreo y  $\bar{n} > 0$  es el factor de longitud, que determina el tamaño de la ventana de integración, y que además, debe ser seleccionado apropiadamente para lograr buen

filtrado. Una posibilidad es usar la expresión de ganancia de los FIL, dada por

$$|F_I(j\omega)| = \left| \bar{n}T_s \frac{\text{sen}(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right|^q \quad (3.34a)$$

$$= |\bar{n}T_s \text{sinc}(\omega/\omega_s)|^q \quad \text{con} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{\bar{n}T_s} \quad (3.34b)$$

y ajustar la frecuencia de corte del filtro para que coincida con el ancho de banda del sistema. Una vez seleccionada la frecuencia de corte apropiada, se aplica el operador  $I_5[\cdot]$  a la Ec. (3.30), quedando de la siguiente forma (ver detalle en el apéndice B.6)

$$\Xi(t) = \Upsilon_\beta(t)\Theta_\beta + \Upsilon_\eta(t)\Theta_\eta \quad (3.35)$$

donde

$$\Xi(t) = \frac{\vartheta}{\delta^3} I_2 \left\{ \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j z_{out}(t - j\delta) \right\} \quad (3.36)$$

$$\Upsilon_\beta(t) = \frac{\vartheta}{\delta} I_4 \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \ddot{\psi}(t - j\delta) \right\} \quad (3.37)$$

$$\Upsilon_\eta(t) = \frac{\vartheta}{\delta^2} I_3 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \ddot{\psi}(t - j\delta) \right\} \quad (3.38)$$

de manera que,  $\Xi \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ ,  $\Upsilon_\beta$  y  $\Upsilon_\eta \in \mathcal{R}^{p \times p}$ ,  $\binom{n}{j}$  es la relación binomial y finalmente  $\vartheta \in \mathcal{R}^+$  es un grado de libertad que permite normalizar la amplitud de las señales filtradas. Por otra parte, a partir de la Ec. (3.35), la salida del sistema puede ser parametrizada como

$$\Xi(t) = \Upsilon(t)\Theta \quad (3.39)$$

donde  $\Theta = [\Theta_\beta^T, \Theta_\eta^T]^T \in \mathcal{R}^{2p \times 1}$  es el vector que contiene los parámetros reales del sistema y  $\Upsilon = [\Upsilon_\beta, \Upsilon_\eta] \in \mathcal{R}^{p \times 2p}$  es el regresor matricial, formado por las señales de aceleración filtradas.

### Algoritmo de Mínimos Cuadrados Normalizado (MCN) con factor de olvido

La estimación en línea consiste en ajustar continuamente los parámetros  $\Theta(t)$  hasta que la salida estimada  $\Theta(t)$  para el modelo de barra de cortante discreta converge a la salida real  $\Xi(t)$ , en el tiempo  $t$ , empleando la parametrización propuesta (3.39). Si esto sucede bajo la condición de excitación persistente, entonces los parámetros estimados  $\hat{\Theta}(t)$  convergerán también a los parámetros nominales  $\Theta = [\Theta_\beta^T, \Theta_\eta^T]^T$ , (Ioannou y Sun, 1989).

Sea  $\hat{\Theta} = [\hat{\Theta}_\beta^T, \hat{\Theta}_\eta^T]^T$  el vector que contiene los parámetros estimados en la Ec. (3.39), tal que la salida estimada está dada por

$$\hat{\Xi} = \Upsilon \hat{\Theta} \quad (3.40)$$

Entonces, los parámetros  $\hat{\Theta}$  son identificados usando el algoritmo de mínimos cuadrados normalizado con factor de olvido, dado por el siguiente par de ecuaciones

$$\dot{P} = \alpha P - \frac{P\Upsilon^T\Upsilon P}{\varpi^2} \quad (3.41)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = P\Upsilon^T\varepsilon \quad (3.42)$$

donde,  $\alpha$  es el factor de olvido,  $P$  es la matriz de covarianza, con  $P = P^T > 0 \in \mathcal{R}^{2p \times 2p}$ ,  $P(0) > 0$ ,  $1 > \alpha \geq 0 \in \mathcal{R}^+$ ,  $\varpi^2 = 1 + \|\Upsilon\Upsilon^T\|$ , que satisface,  $\Upsilon/\varpi \in \mathcal{L}_\infty$ , asegurando que el error de estimación tiende a cero, es decir,

$$\varepsilon = \frac{\Xi - \hat{\Xi}}{\varpi^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty \quad (3.43)$$

Además, definiendo la siguiente proyección paramétrica Ecs. (3.44) y (3.45), se asegura que los parámetros identificados siempre serán positivos  $\forall t > 0$

$$\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}(t) = \hat{\Theta}_{\beta_i}(t) + (\varsigma_1 - \hat{\Theta}_{\beta_i}(t)) \left( \frac{1}{2} - \frac{\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta_i}(t)}{2\sqrt{(\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta_i}(t))^2 + e^2}} \right) \quad (3.44)$$

$$\hat{\Theta}_{\eta_{i+}}(t) = \hat{\Theta}_{\eta_i}(t) + (\varsigma_2 - \hat{\Theta}_{\eta_i}(t)) \left( \frac{1}{2} - \frac{\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta_i}(t)}{2\sqrt{(\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta_i}(t))^2 + e^2}} \right) \quad (3.45)$$

donde  $\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}(t)$ ,  $\hat{\Theta}_{\eta_{i+}}(t)$  son las estimaciones proyectadas de  $\Theta_{\beta_i}$ ,  $\Theta_{\eta_i}$ , respectivamente, con  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $\varsigma_1 = 0.0001$  y  $\varsigma_2 = 0.0001$ , son las cotas inferiores para los parámetros estimados, mientras  $\chi_1 = 500$ ,  $\chi_2 = 500$ , son parámetros de ajuste para aproximar la función signo, finalmente  $e = 0.05$ . Observe que cuando  $e \approx 0$

$$\text{sign}(\hat{\Theta}_i(t)) \approx \frac{\chi_1 \hat{\Theta}_i(t)}{\sqrt{(\chi_1 \hat{\Theta}_i(t))^2 + e^2}} \quad (3.46)$$

lo anterior se puede apreciar en la Fig. 3.3(a). Lo que implica que  $\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}(t) \approx \varsigma_1$ , cuando  $\hat{\Theta}_{\beta_i}(t) < 0$ , y  $\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}(t) \approx \hat{\Theta}_{\beta_i}(t)$  cuando  $\hat{\Theta}_{\beta_i}(t) > \varsigma_1$ , como se muestra en la Fig. 3.3(b). Condiciones similares se aplican a  $\hat{\Theta}_{\eta_i}(t)$ , asegurando que los elementos de  $\hat{\Theta}_i(t) = [\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}^T(t), \hat{\Theta}_{\eta_{i+}}^T(t)]^T$  son siempre positivos. Además, las estimaciones proyectadas (3.44) y (3.45) tienen la ventaja de ser funciones continuamente diferenciables, característica útil para asegurar que el estimador de estado es estable (ver apéndice B.5). Por otra parte, la proyección paramétrica no tiene efecto en las propiedades de la estimación paramétrica, pues no es empleada en la Ec. (3.42). Por simplicidad, se considerará que  $\hat{\Theta}_{\beta_{i+}}(t) = \hat{\Theta}_{\beta_i}(t)$  para  $\hat{\Theta}_{\beta_i}(t) > \varsigma_1$  y  $\hat{\Theta}_{\eta_{i+}}(t) = \hat{\Theta}_{\eta_i}(t)$  para  $\hat{\Theta}_{\eta_i}(t) > \varsigma_2$ , debido a que las estimaciones proyectadas son bastante parecidas a las estimaciones proporcionadas por el método de MCN, tal que los vectores estimados cuyas entradas son los parámetros proyectados se definen como

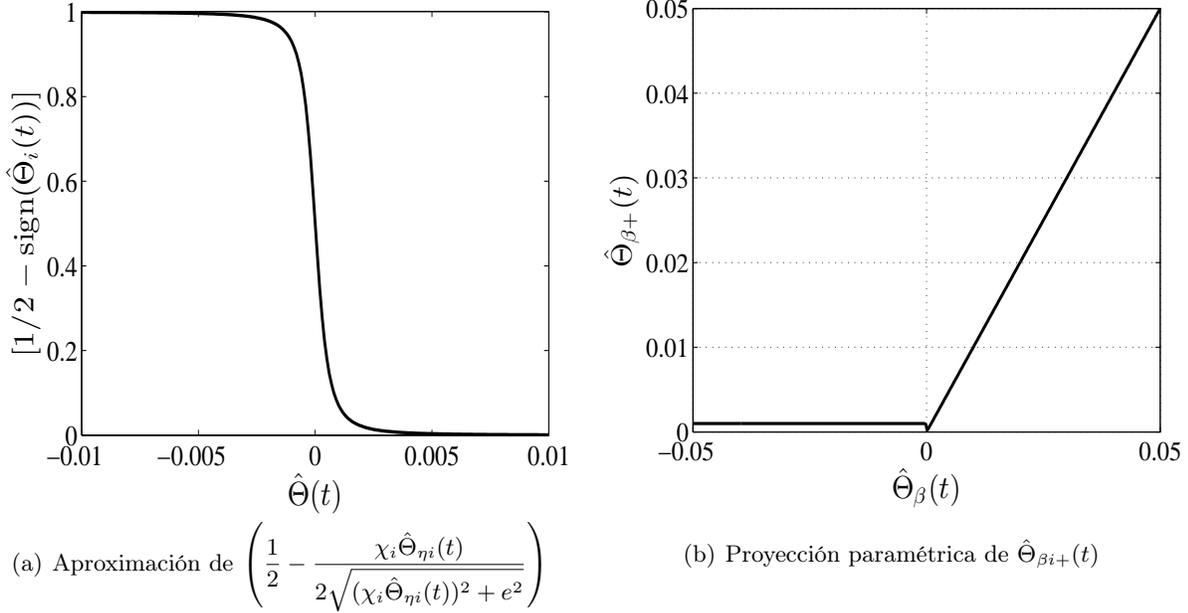


Figura 3.3: Proyección paramétrica

$$\hat{\Theta}_{\beta_+}(t) = [0, \hat{\Theta}_{\beta_{1+}}(t), \hat{\Theta}_{\beta_{2+}}(t), \dots, \hat{\Theta}_{\beta_{n+}}(t)]^T, \quad \hat{\Theta}_{\eta_+}(t) = [0, \hat{\Theta}_{\eta_{1+}}(t), \hat{\Theta}_{\eta_{2+}}(t), \dots, \hat{\Theta}_{\eta_{m+}}(t)]^T \quad (3.47)$$

La proyección paramétrica desarrollada en esta investigación está inspirada del trabajo de (Ake-lla y Subbarao, 2005). La prueba de la convergencia del algoritmo de identificación de parámetros se dará más adelante junto con la del estimador de estado, en el apéndice B.3.

### 3.3.2. Estimador de estados

Sea la Ec. (3.15) que describe la dinámica del modelo de barra de cortantes discreta. El par  $(A, D)$  de este modelo no es completamente observable, y como consecuencia de ello se diseña un estimador de estado reducido basado en el siguiente modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ l_{n \times 1} \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.48)$$

$$z_r(t) = (\ddot{u}_r + l \ddot{u}_g) = \begin{bmatrix} \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r & v_r \end{bmatrix}^T \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} u_r &= [u_1 - u_0, u_2 - u_0, u_3 - u_0, \dots, u_n - u_0]^T, \\ v_r &= [v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \dots, v_n - v_0]^T, \\ \ddot{u}_r &= [\ddot{u}_1 - \ddot{u}_0, \ddot{u}_2 - \ddot{u}_0, \ddot{u}_3 - \ddot{u}_0, \dots, \ddot{u}_n - \ddot{u}_0]^T, \quad l = [1, 1, \dots, 1]^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde  $u_r, v_r, \dot{v}_r \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración relativos, respectivamente;  $l \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  es el vector de distribución de la excitación sísmica;  $\beta_{Mr}^2 =$

$diag[\beta_1^2, \beta_2^2, \dots, \beta_n^2]$  y  $\eta_{Mr}^2 = diag[\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_n^2]$ , son matrices de orden reducido, ambas  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ . Además,

$$\Lambda_r = \frac{1}{\Delta h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

**Proposición 1.** *Sea el modelo de barra de cortante discreta propuesto en la Ec. (3.15), éste es equivalente al modelo de edificios de cortante (Chopra, 1995) a través de la Ec. (3.48)*

*Demostración.* Ver el apéndice B.1  $\square$   $\square$

Reescribiendo las Ecs. (3.48) y (3.49) en la forma de sistemas lineales

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r \ddot{u}_g, \quad x_r(0) = x_{r0} \quad (3.52)$$

$$z_r = D_r x_r \quad (3.53)$$

donde

$$A_r = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ l \end{bmatrix}, \quad D_r = \begin{bmatrix} \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix}, \quad x_r = [u_r^T, v_r^T]^T \quad (3.54)$$

Sea el observador adaptable propuesto, que utiliza el siguiente estimador de estado para estimar,  $x_r = [u_r^T, v_r^T]^T \in \mathcal{R}^{2n \times 1}$ ,

$$\dot{\hat{x}}_r(t) = \hat{A}_r(t) \hat{x}_r(t) + B_r \ddot{u}_g(t) + L \tilde{z}_r(t), \quad \tilde{z}_r(t) = z_r(t) - \hat{z}_r(t) \quad (3.55)$$

$$\hat{z}_r(t) = \hat{D}_r(t) \hat{x}_r(t) \quad (3.56)$$

Observe que el estimador de estados (3.55) es implementable, pues ahora el par  $(A_r, D_r)$  en (3.52)-(3.53) es completamente observable con rango  $2n$  (Jiménez-Fabián y Álvarez-Icaza, 2010), y por consiguiente todos los estados no medidos pueden ser estimados. Además, éste tiene la estructura de un estimador Luenberger (Luenberger, 1971), donde  $\hat{x}_r, \hat{z}_r \in \mathcal{R}^{2n \times 1}$ ,  $\hat{A}_r$  y  $\hat{D}_r$  son los estimados de  $x_r, z_r, A_r$  y  $D_r$ , respectivamente<sup>3</sup>. Además de esto, las matrices estimadas se definen como

$$\hat{A}_r(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ \widehat{\beta_{Mr}^2(t)} \Lambda_r & \widehat{\eta_{Mr}^2(t)} \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\hat{D}_r(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\beta_{Mr}^2(t)} \Lambda_r & \widehat{\eta_{Mr}^2(t)} \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde,  $\widehat{\beta_{Mr}^2(t)}$  y  $\widehat{\eta_{Mr}^2(t)}$  están conformadas por las estimaciones de  $\beta_{Mr}^2$  y  $\eta_{Mr}^2$ , las cuales son producidas por el algoritmo de MCN en las Ecs. (3.41) y (3.42), respectivamente, junto con el

<sup>3</sup>En esta sección, el superíndice ( $\wedge$ ) es usado para describir los parámetros estimados, mientras ( $\sim$ ) indica el error entre el valor real y el estimado

esquema de proyección (3.44) y (3.45).

Además, sea el error de estimación

$$\tilde{x}_r(t) = x_r(t) - \hat{x}_r(t) \quad (3.59)$$

cuya dinámica satisface

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \dot{x}_r(t) - \dot{\hat{x}}_r(t) \quad (3.60a)$$

$$= [\hat{A}_r(t) - L\hat{D}_r(t)]\tilde{x}_r(t) + \zeta_o(t) \quad (3.60b)$$

donde  $\zeta_o(t) = [\tilde{A}_r(t) - L\tilde{D}_r(t)]x_r(t)$ ; ver el apéndice B.2 para una formulación detallada.

**Proposición 2.** *Si la ganancia del observador  $L$  satisface*

$$L = [0_{n \times n} \quad \bar{\gamma}I_{n \times n}]^T, \quad \bar{\gamma} > 0 \quad (3.61)$$

1. *Entonces, el error de estimación  $\tilde{x}_r$  es acotado*
2. *Si, el vector estimado  $\hat{\Theta}$  satisface la condición excitación persistente (B.29), entonces la dinámica de  $\dot{\tilde{x}}_r$  se reduce a*

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = A_{r*}\tilde{x}_r(t), \quad A_{r*} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ (1 + \bar{\gamma})\beta_{Mr}^2 \Lambda_r & (1 + \bar{\gamma})\eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

*y por lo tanto, el error de estimación del estado converge a cero exponencialmente, pues la matriz resultante  $A_{r*}$  es Hurwitz.*

*Demostración.* Ver el apéndice B.3.1  $\square$ .

$\square$

### 3.4. Resultados experimentales, edificio de 5 pisos

En esta sección se presentan los resultados de identificación del edificio de cinco piso de escala reducida como el presentado en la Fig. 3.4. En general, el edificio está construido de aluminio, salvo tres de las cuatro columnas que son de latón, de sección transversal cuadrada de dimensiones 6.35 mm. El edificio tiene cinco pisos con una separación de entrepiso de 0.36 m y 0.315 m para el primero. El sistema de unión que sostiene al edificio tiene una altura de 0.045 m. Es decir, el edificio tiene una altura total de 1.80m y está montado sobre una mesa vibradora actuada por dos servomotores de la marca Parker, modelo 406T03LXR, los cuales pueden mover la mesa en las direcciones  $x$  y  $y$  en el plano horizontal. Sin embargo los experimentos fueron llevados únicamente en la dirección  $y$ . Además el edificio está instrumentado con acelerómetros que miden la aceleración absoluta en cada piso y a nivel de suelo. Estos sensores están basados en la tecnología MEMS, modelo ADXL203E, con un rango de medición de  $\pm 1.7g$ , con un ancho de banda de 0 – 50 Hz y una salida de 0 – 10 v. Estas dos últimas características se obtienen mediante un circuito acondicionador de señales. Para medir los desplazamientos de cada piso relativos a la plataforma de

la mesa vibradora, se usaron sensores de tecnología láser (OptoNCDT) de Micro-Epsilon, modelo ILD1302–200. Sin embargo, estos sensores son usados únicamente para validar los desplazamientos estimados por el observador adaptable. Con respecto a la adquisición de datos, se emplearon dos tarjetas electrónicas PCI–6221–M series de National Instruments. La comunicación entre las tarjetas y Simulink fue llevada a cabo usando el toolbox Matlab Real-Time Windows Target. Cabe señalar que todos los experimentos fueron llevados a cabo con un tiempo de muestreo de 0.001 s.

La excitación sísmica usada es el sismo de 1985, en la componente Norte-Sur, registrado en la ciudad de México por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT). Tomando en cuenta que el prototipo experimental empleado es de escala reducida, la señal de excitación también es escalada para que coincida con aquel, como se ilustra en la Fig. 3.5.



Figura 3.4: Edificio de cinco pisos escala reducida

Con el fin de caracterizar al edificio, éste es excitado usando la señal *Chirp* con un barrido frecuencial de 0.1 a 15 Hz y con esto se obtienen las frecuencias de vibración y el ancho de banda del mismo, como se muestra en la Fig. 3.6, que serán usadas como parámetros de referencia. Tomando en cuenta que la frecuencia máxima obtenida es de 10.13 Hz, se usa una frecuencia de corte de 25 Hz para el diseño de los filtros integrales, resultando el período de integración  $\delta = 0.040$  s. Los parámetros usados para el observador adaptable se presentan en la tabla 3.1. La meta es identificar las velocidades de propagación y los amortiguamientos de Kelvin para determinar las frecuencias de vibración y la rigidez lateral.

Note que los parámetros desconocidos parten de condiciones iniciales nulas, que son incorporadas en la Ec. (3.55). Posteriormente, éstos son identificados usando el observador adaptable

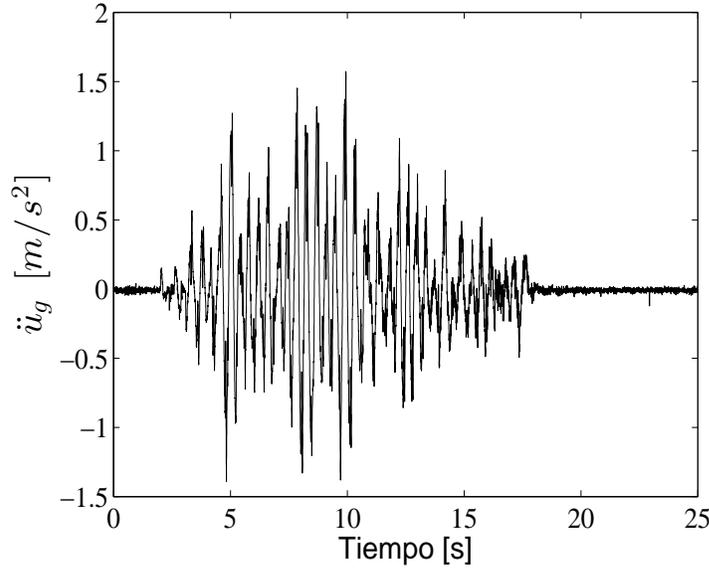


Figura 3.5: Señal de excitación: Sismo de 1985 registrado por SCT, componente norte-sur

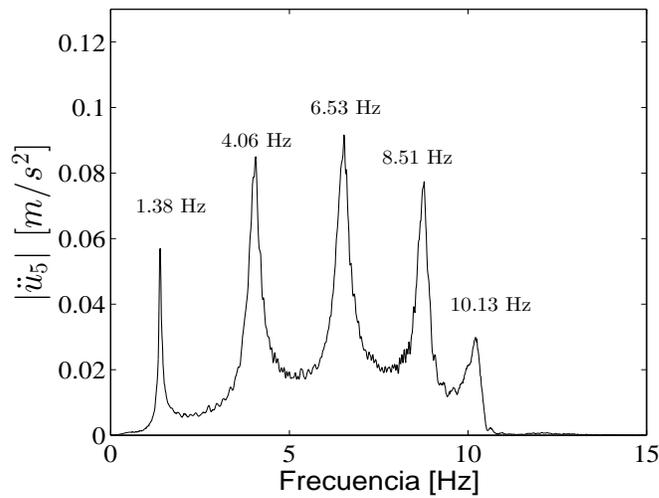


Figura 3.6: Espectro en frecuencia de la respuesta del 5º piso debido a la excitación Chirp

---

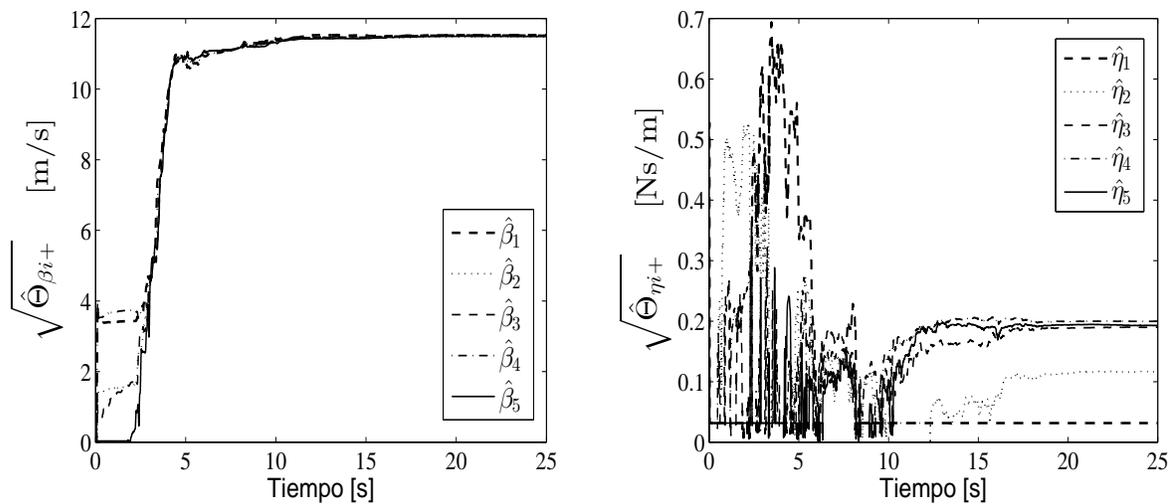

$$T_s = 0.001 \quad l = 40 \quad \alpha = 0.001 \quad P(0) = 10^5 * I_{(12 \times 12)} \quad L = [0_{5 \times 5} \quad \bar{\gamma} I_{6 \times 6}] \quad \text{con } \bar{\gamma} = 10^5$$


---

Tabla 3.1: Parámetros del observador adaptable

propuesto cuando el edificio es excitado únicamente en su base. Por consiguiente, las velocidades de propagación y los coeficientes de amortiguamiento de Kelvin son recuperados en todos los pisos, como se muestra en las Figs. 3.7(a) y 3.7(b), respectivamente. Detalle de éstos se encuentra en la tabla 3.2. Es claro que el algoritmo de identificación recupera propiedades estructurales similares

para todos los pisos, pues éstos están constituidos con el mismo material, tienen el mismo número de columnas con la misma separación de entrepisos, emulando un medio homogéneo. Además, tenga en cuenta que para este experimento los parámetros reales son desconocidos y no pueden ser comparados de manera directa con los valores estimados. En consecuencia el desempeño del algoritmo es validado comparando las frecuencias de vibración calculadas a partir de los parámetros estimados (como la raíz de los eigenvalores de la matriz estimada  $\hat{A}_r$ ), con respecto a las obtenidas a partir del barrido frecuencial de la señal Chirp. La tabla 3.3 contiene un resumen de la comparación anterior<sup>4</sup>. Observe que las frecuencias calculadas están suficientemente cerca de los valores de referencia proporcionados por la Chirp, a pesar de que no coinciden exactamente con ellos. Esto confirma el desempeño satisfactorio del algoritmo, pues el error de estimación entre las frecuencias reales y las estimadas es de 4.35 % aproximadamente, en el peor de los casos.



(a) Evolución de las velocidades de propagación identificadas (b) Evolución de los coeficientes de Kelvin identificados

Figura 3.7: Parámetros identificados de la ecuación de onda

| Piso | $\hat{\beta}_i$ [m/s] | $\hat{\eta}_i$ [N/m] |
|------|-----------------------|----------------------|
| 5    | 11.49                 | 0.1927               |
| 4    | 11.53                 | 0.1995               |
| 3    | 11.52                 | 0.1898               |
| 2    | 11.48                 | 0.1160               |
| 1    | 11.53                 | 0.0316               |

Tabla 3.2: Parámetros estimados

<sup>4</sup>A partir de esta sección, el subíndice  $N$  representa los parámetros nominales sin presencia de daño, que serán usados como valores de referencia en secciones futuras

| $f_{r_i} [Hz]$ | $\hat{f} [Hz]$ | $\Delta \hat{f}/f (\%)$ |
|----------------|----------------|-------------------------|
| 1.38           | 1.44           | -4.35                   |
| 4.06           | 4.22           | -3.94                   |
| 6.53           | 6.66           | -1.99                   |
| 8.51           | 8.56           | -0.59                   |
| 10.13          | 9.76           | 3.65                    |

Tabla 3.3: Comparación entre las frecuencias de vibración real y sus estimadas

Además, suponiendo que las masas de los pisos son conocidas con valores como los presentados en la tabla 3.4, la rigidez lateral de los entrepisos y los coeficientes de amortiguamiento son calculados empleando las siguientes expresiones

$$\hat{K} = M \widehat{\beta_{Mr}^2} \Lambda / \Delta h^2, \quad \hat{K} = [\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_n] \quad (3.63)$$

$$\hat{C} = M \widehat{\eta_{Mr}^2} \Lambda / \Delta h^2, \quad \hat{C} = [\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n], \quad M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n) \quad (3.64)$$

|                          |                         |                         |                         |                         |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $m_1 = 10.78 \text{ kg}$ | $m_2 = 9.17 \text{ kg}$ | $m_3 = 9.14 \text{ kg}$ | $m_4 = 9.12 \text{ kg}$ | $m_5 = 9.08 \text{ kg}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|

Tabla 3.4: Masas de los pisos

Las Figs. 3.11(a) y 3.11(b), muestran los parámetros de rigidez y amortiguamiento calculados a partir de las Ecs. (3.63) y (3.64), respectivamente. La tabla 3.5 presenta la comparación entre los valores de rigidez calculados a partir de los parámetros identificados con respecto a los calculados directamente usando los valores nominales de las propiedades mecánicas de los materiales (Hibbeler, 2011; Chopra, 1995). A diferencia de la rigidez, resulta impráctico determinar el factor de amortiguamiento a partir de propiedades mecánicas o de las dimensiones de la estructura (Chopra, 1995), etc, complicando hacer una comparación con los valores estimados. El error de estimación entre la rigidez analítica y la estimada es de 23% aproximadamente en todos los casos. Observe que ese error puede deberse a las condiciones del material, pues en condiciones ideales el latón posee un módulo de elasticidad de 63000 N/m, mientras el aluminio de 74000 N/m. Suponiendo que ambos metales han sufrido degradación desde se fabricación, debido a las condiciones actuales y su tiempo en almacenamiento, estos pueden sufrir variación en su rigidez hasta del 30% de su valor nominal de acuerdo con (Jiménez y Alvarez-Icaza, 2007), por lo que se consideran resultados satisfactorios.

Con el objetivo de evaluar el desempeño del observador adaptable, las Figs. 3.12(a) y 3.12(b) muestran la comparación entre el desplazamiento medido en el quinto y tercer piso con respecto a sus estimados, respectivamente. En ambos casos se nota una buena convergencia antes de los primeros 5 s. El error de estimación entre ellos se ilustra en las Figs. 3.12(b), 3.13(b) respectivamente. Es importante señalar que los desplazamientos son sometidos a una etapa de procesamiento para atenuar el ruido de baja frecuencia y eliminar sesgos. Esto se logra empleando un par de filtros

| Piso | $k_0$ | $k_{r_i} [N/m]$ | $\hat{k}_{r_i} [Ns/m]$ | $\Delta \hat{k}_{r_i} / k_{r_i} (\%)$ |
|------|-------|-----------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1    | 0     | 18415.00        | 14000.19               | 23.97                                 |
| 2    | 0     | 12203.00        | 9322.13                | 23.60                                 |
| 3    | 0     | 12164.00        | 9372.30                | 22.95                                 |
| 4    | 0     | 12252.00        | 9339.18                | 23.77                                 |
| 5    | 0     | 12111.00        | 9250.04                | 23.62                                 |

Tabla 3.5: Comparación entre las rigidez analíticas y sus estimadas

pasa altas de segundo orden colocados en serie, que tienen una frecuencia de corte  $f_c \approx 0.65$  Hz de acuerdo con el diagrama de Bode de la Fig. 3.8. Observe que esta frecuencia se ubica en  $-3$  dB antes de la ganancia máxima del filtro (Gavin et al., 1998). Además, este último no modifica el ancho de banda de la estructura, puesto que la frecuencia más baja de ésta se encuentra en 1.38 Hz. La Fig. 3.9 muestra a detalle la etapa de implementación de los filtros.

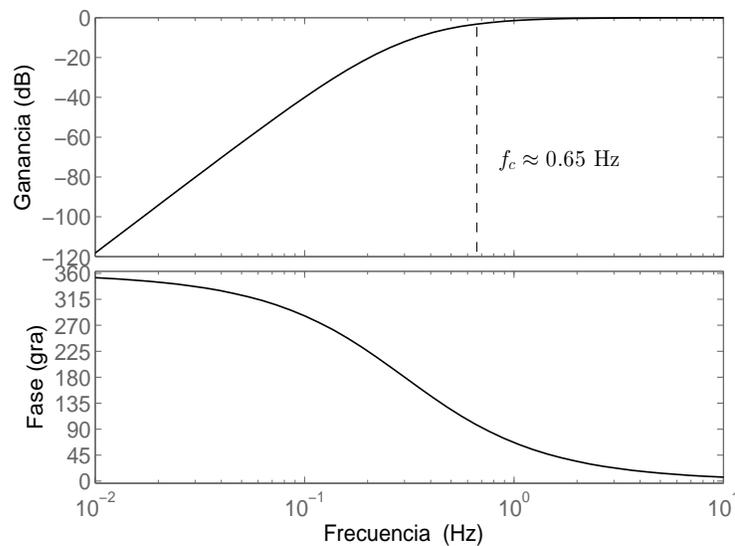


Figura 3.8: Diagrama de Bode del filtro pasa alta que elimina el ruido de bajas frecuencias

De manera similar, las velocidades correspondientes a los mismos pisos son también comparadas entre las señales medibles y las estimadas, como se muestra en las Figs. 3.14(a) y 3.15(a). No obstante, considerando que las velocidades no pueden ser medidas directamente, las señales de referencias son producidas filtrando los desplazamientos  $u_5$  y  $u_3$  mediante un filtro pasa-banda como el que se muestra en la Fig. 3.9, que evita incrementar el ruido de alta frecuencia como sucede con las derivadas convencionales. La Fig. 3.10 muestra la comparación entre ambos métodos para obtener la velocidad de referencia. En ésta se observa que el derivador numérico convencional tiende a incrementar la magnitud de las señales en altas frecuencias. Es decir, para el caso práctico cuando las señales de desplazamiento están contaminadas con ruido de alta frecuencias, éstas aumentarán

su magnitud con respecto a la señal. En contraste, el filtro pasa banda propuesto se comporta como un integrador convencional hasta la frecuencia de corte de 15 Hz aproximadamente. En este rango de frecuencias, la señal filtrada amplifica su magnitud gradualmente y no se produce defasamiento. Después de la frecuencia de corte, la señal filtrada es atenuada. Observe que la frecuencia de corte fue elegida tomando en cuenta el ancho de banda de la estructura, obtenido inicialmente mediante la señal Chirp.

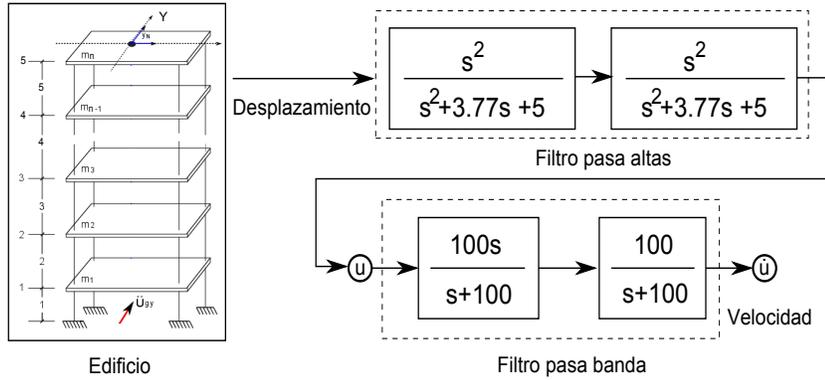


Figura 3.9: Esquema para obtener las velocidades de referencia

Las funciones de transferencia para el filtro pasa banda son las siguientes

$$f(s)_{hp} = \frac{100s}{s + 100} \quad f(s)_{lp} = \frac{100}{s + 100} \quad (3.65)$$

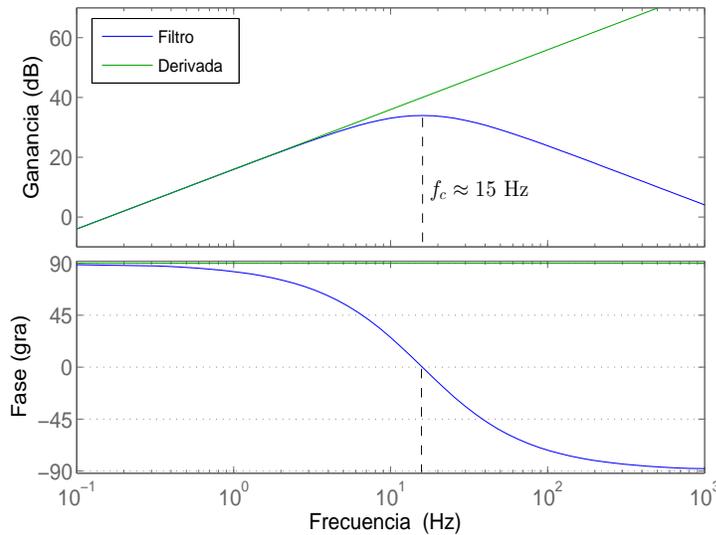


Figura 3.10: Diagrama de Bode de la derivada numérica y del filtro propuesto

donde  $f(s)_{hp}$  describe la frecuencia pasa alta, y  $f(s)_{lp}$  la frecuencia pasa baja. Los errores de estimación de la velocidad en el quinto y tercer piso son presentados en las Figs. 3.14(b) y 3.15(b),

respectivamente, que evidencian que los estados estimados convergen a las mediciones reales y que el observador adaptable opera satisfactoriamente. En ambos casos, los desplazamientos y velocidades poseen un error de estimación en estado estacionario de aproximadamente 4% en el peor de los escenarios. En este análisis, el quinto piso fue elegido debido a que presenta mayor desplazamiento y velocidad que el resto de los pisos. En cambio, el tercero fue elegido de manera arbitraria.

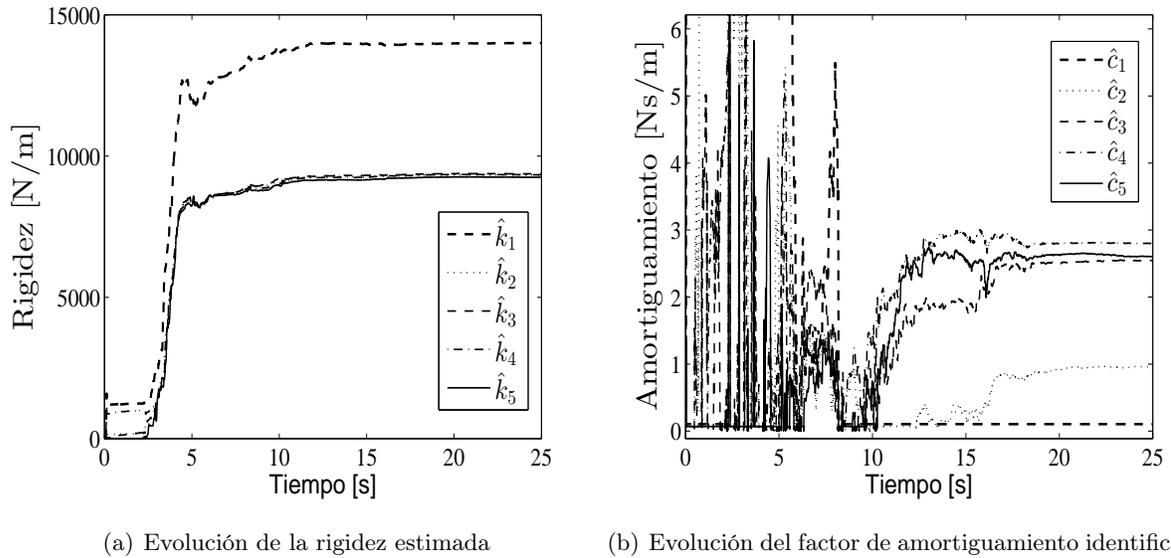


Figura 3.11: Parámetros estructurales identificados

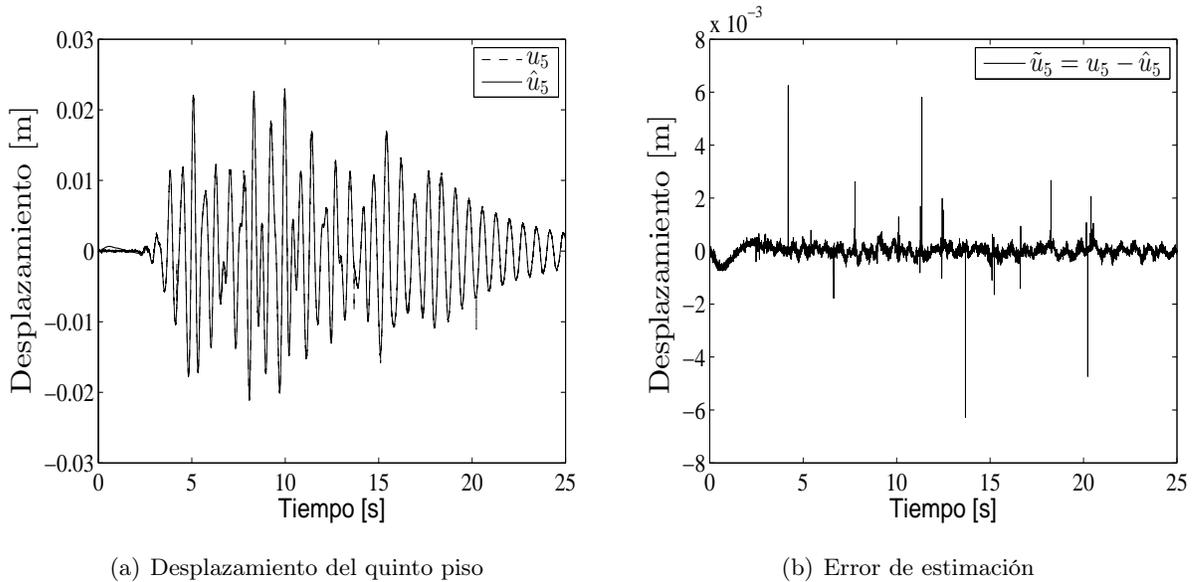


Figura 3.12: Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso

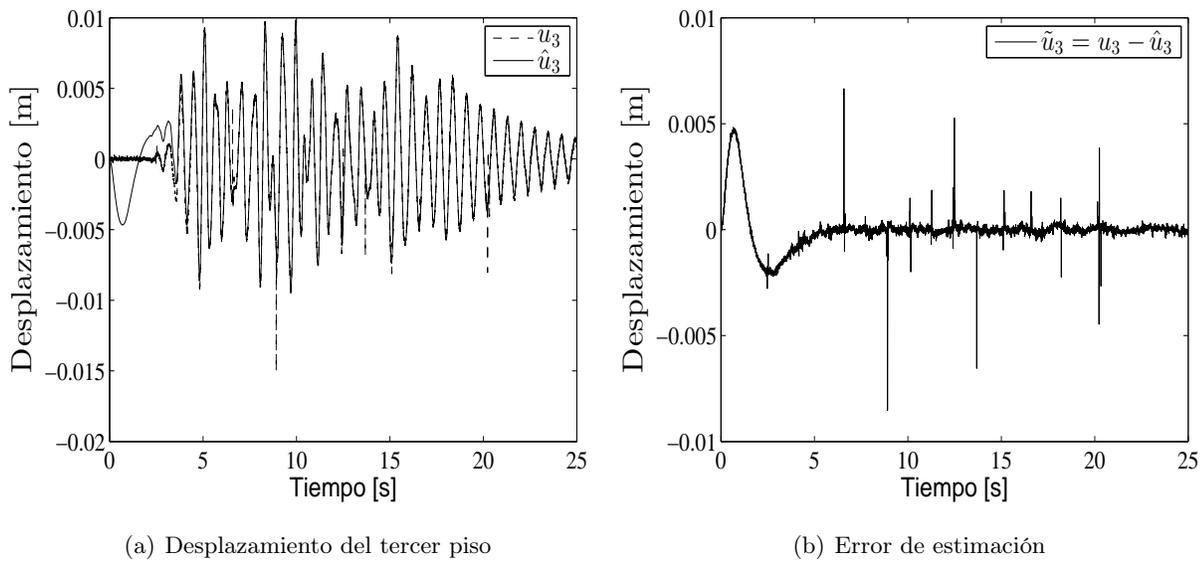


Figura 3.13: Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso

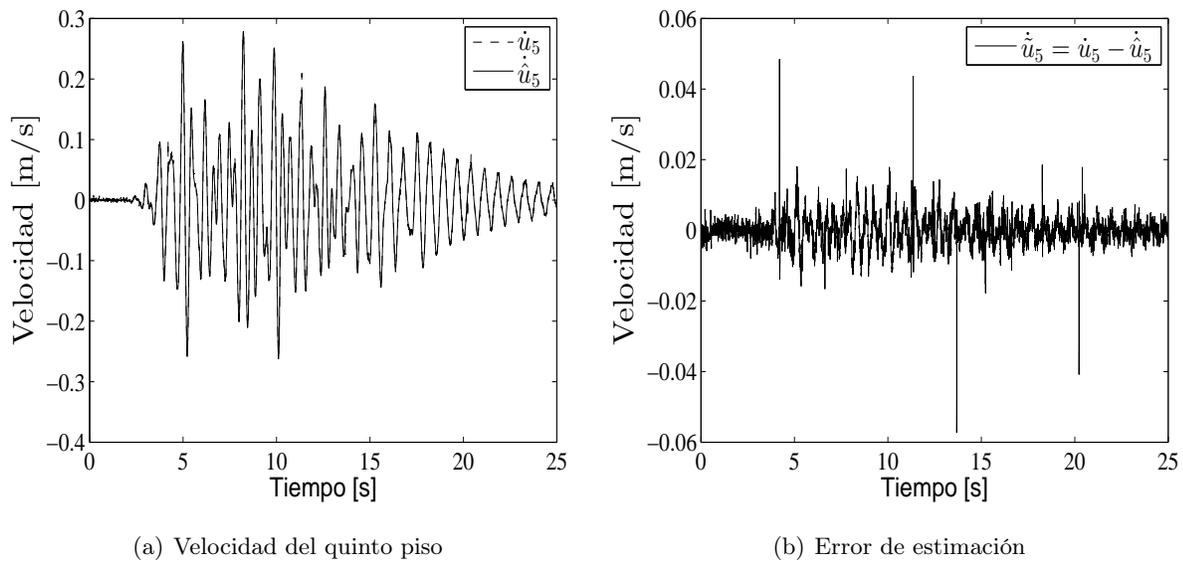
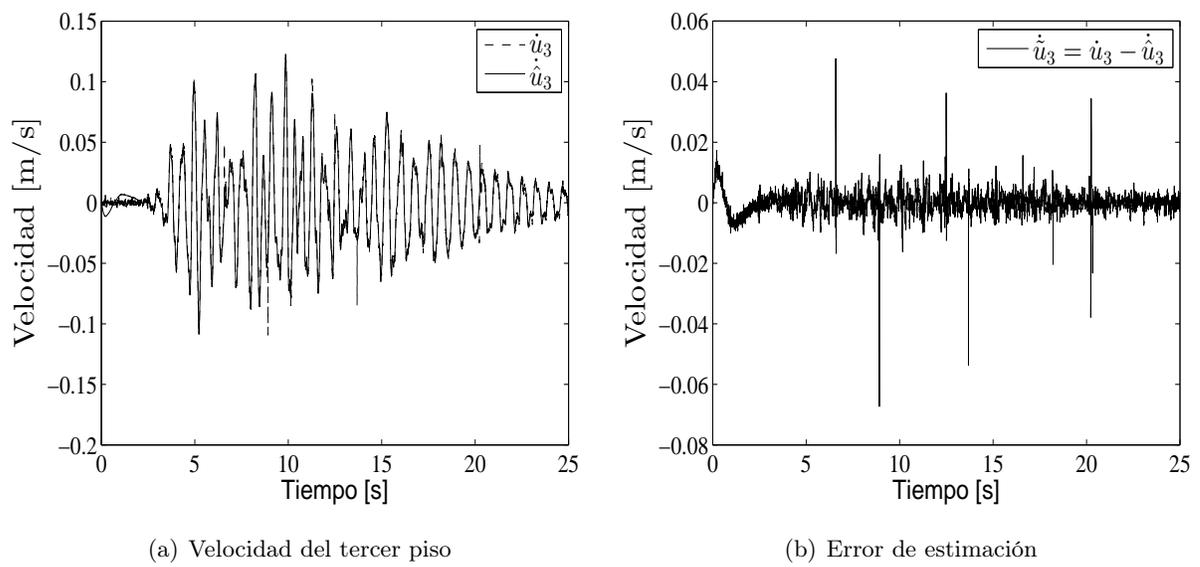


Figura 3.14: Velocidad medida y estimada en el quinto piso



(a) Velocidad del tercer piso

(b) Error de estimación

Figura 3.15: Velocidad medida y estimada en el tercer piso



## Capítulo 4

# Detección y localización de daño en edificios

En este capítulo se presenta un algoritmo de detección y localización de daño empleando las velocidades de propagación y los coeficientes de amortiguamiento de Kelvin, que caracterizan un comportamiento dañado. Estos parámetros se estiman usando el observador adaptable propuesto en el capítulo 3. La evaluación de daño en el edificio se lleva a cabo comparando los parámetros  $\beta$  y  $\eta$  en condiciones no dañadas obtenidas en ese capítulo 3 con respecto a los calculados aquí. La eficiencia del algoritmo es validada a partir de la información obtenida en dos experimentos distintos. En ambos casos se usa el edificio de cinco pisos de escala reducida del capítulo anterior. La inducción de daño se lleva a cabo en el piso 2 y posteriormente también en el 5. Los resultados demuestran que el algoritmo desarrollado es una herramienta prometedora en el área de monitoreo de salud estructural.

### 4.1. Detección de daño en el piso 2

En esta sección se estudia el problema de detección y localización de daño en el edificio de 5 pisos de escala reducida descrito en el apartado 3.4. A diferencia de allí, aquí el edificio se caracteriza por la presencia de daño en el segundo piso, como se indica en la Fig. 4.1, con columnas remarcadas en color negro. Éstas fueron maquinadas para emular daño por pérdida de rigidez. La sección transversal cuadrada de éstas es reducida de 6.35 mm a 5 mm, es decir, 23% menos aproximadamente. Es importante notar que para lograr esto, las columnas de latón y aluminio fueron numeradas y referenciada en posiciones específicas dentro del edificio con el fin de garantizar que después del maquinado, éstas fueran colocadas en su posición original. Así mismo, para la reconstrucción del prototipo experimental, se calibró el par ejercido en los tornillos de unión a 3 N/m. Esto permite igualar las condiciones de operación respecto a las pruebas sin daño en el apartado 3.4. Lo anterior produce una disminución en el ancho de banda de la respuesta estructural, como se puede apreciar con las frecuencias de vibración mostradas en la Fig. 4.2(a), que son calculadas luego de excitar el prototipo experimental con la señal Chirp, que contempla un barrido frecuencial de 0.1 a 15 Hz.

La Fig. 4.2(b), muestra una comparación entre las frecuencias de vibración calculadas en presencia de daño  $f_d$  con respecto a las obtenidas en condiciones nominales  $f_r$ , las cuales son usadas como valores de referencia. Es claro que las primeras presentan una disminución importante en el ancho de banda, evidenciando la presencia de daño.

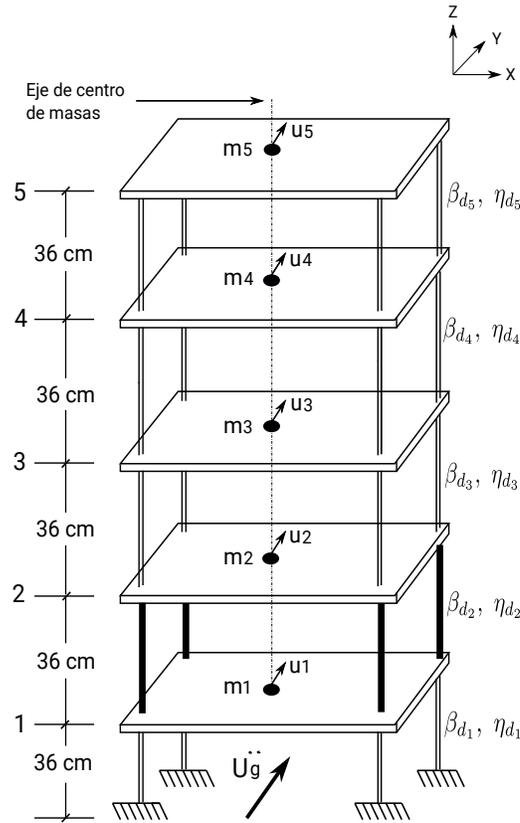
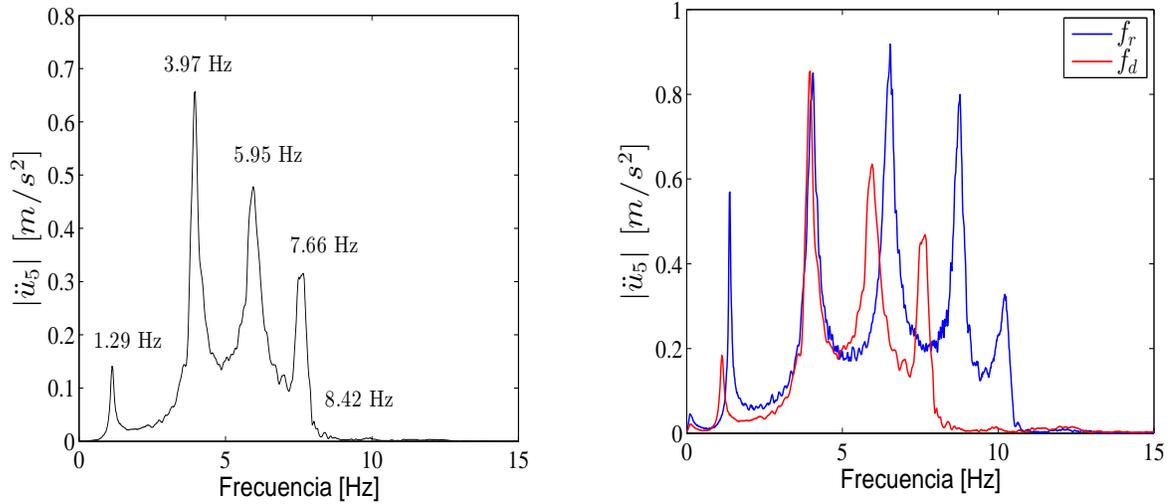


Figura 4.1: Edificio con presencia de daño en el segundo piso

En este experimento también se usó el sismo de 1985 mostrado en la Fig. 3.5 como señal de excitación. Los parámetros de velocidad de cortante y los coeficiente de amortiguamiento de Kelvin son identificados por el observador adaptable, luego de que el edificio es excitado únicamente en su base. Las Figs. 4.3(a) y 4.3(b) muestran los parámetros obtenidos, los cuales evidentemente son menores que los valores de referencia debido a la presencia de daño. Detalles de éstos se pueden encontrar en la tabla 4.1<sup>1</sup>.

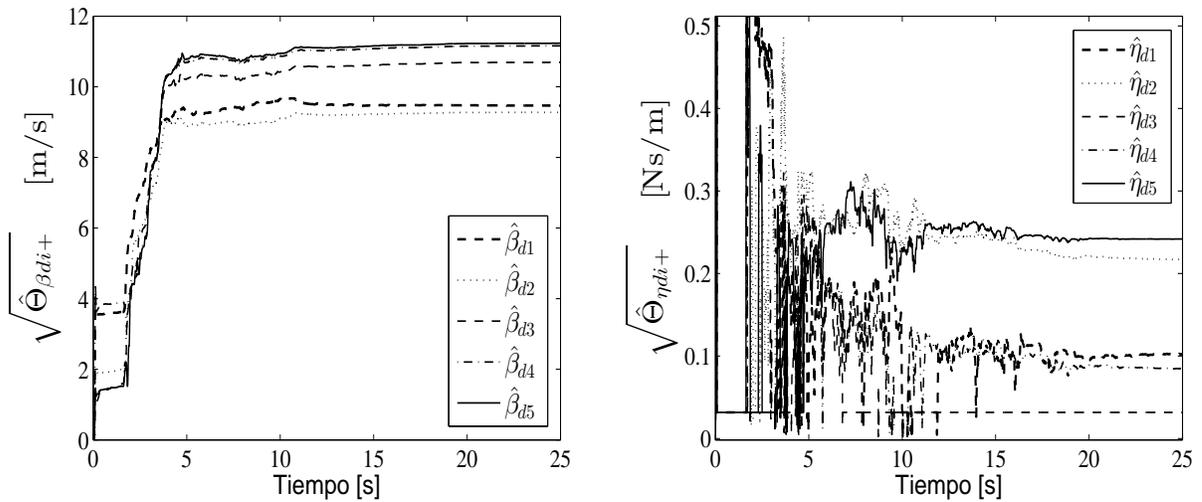
A partir de estos parámetros se obtienen las frecuencias de vibración, las cuales son comparadas con las de referencia y con las del experimento uno, como se muestra en la tabla 4.2. En ésta también se puede observar la comparación entre los valores nominales y los identificados luego de la presencia de daño. Es claro que todas las frecuencias de vibración sufren cambios y que el ancho de banda de la respuesta estructural se reduce.

<sup>1</sup>Note que el subíndice  $d$  se refiere a los valores obtenidos en presencia de daño



(a) Espectro en frecuencia de la respuesta del 5° piso en presencia de daño en el piso 2 (b) Comparación entre las frecuencias de referencia y las obtenidas en presencia de daño en el piso 2

Figura 4.2: Espectro en frecuencia debido a señal Chirp con presencia de daño en el piso 2



(a) Evolución de las velocidades de propagación identificadas (b) Evolución de los coeficientes de Kelvin identificados

Figura 4.3: Parámetros identificados de la ecuación de onda con presencia de daño en el piso 2

Por otra parte, considerando que la pérdida de masa en las columnas es pequeña con respecto a la masa de los pisos, es válido suponer que las masas son equivalentes a las del experimento uno, según la tabla 3.4. Por consiguiente, los valores de rigidez y de amortiguamiento son calculados empleando las Ecs. (3.63) y (3.64), como se muestra en las Figs. 4.4(a) y 4.4(b), respectivamente. La tabla 4.3, presenta los resultados de manera más detallada y la comparación con los valores nominales sin daño.

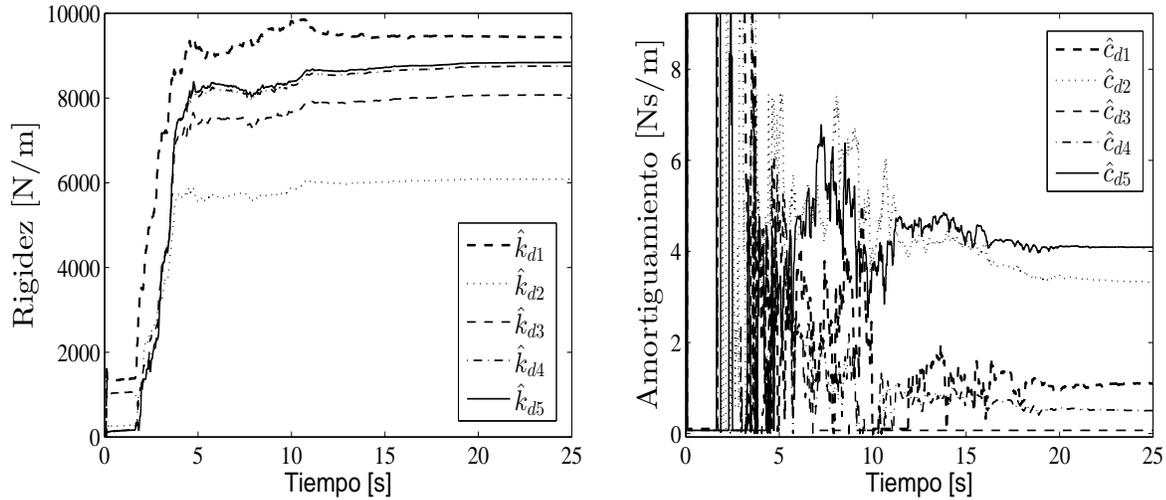
A partir de los resultados obtenidos y mostrados en la tabla 4.1, es claro que los parámetros

| Piso | $\beta_i$ [m/s] | $\hat{\beta}_{d_i}$ [m/s] | $\Delta\hat{\beta}_{d_i}/\hat{\beta}_i$ | $\hat{\eta}_i$ (N/m) | $\hat{\eta}_{d_i}$ (N/m) | $\Delta\hat{\eta}_{d_i}/\hat{\eta}_i$ |
|------|-----------------|---------------------------|---|----------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| 5    | 11.4903         | 11.2318                   | 2.25                                    | 0.1928               | 0.2417                   | -25.36                                |
| 4    | 11.5265         | 11.1583                   | 3.19                                    | 0.1995               | 0.0846                   | 57.59                                 |
| 3    | 11.5217         | 10.6920                   | 7.20                                    | 0.1899               | 0.0316                   | 83.36                                 |
| 2    | 11.4782         | 9.2738                    | 19.21                                   | 0.1161               | 0.2172                   | -87.08                                |
| 1    | 11.5310         | 9.4651                    | 17.91                                   | 0.0316               | 0.1022                   | -223.42                               |

Tabla 4.1: Variación de los parámetros estimados con presencia de daño en el segundo piso

| $f_{d_i}$ [Hz] | $\hat{f}_{d_i}$ [Hz] | $\Delta\hat{f}_{d_i}/f_i$ (%) | $f_{r_i}$ [Hz] | $(f_{r_i} - f_{d_i})/f_{r_i}$ (%) | $(f_{r_i} - \hat{f}_{d_i})/f_{r_i}$ (%) |
|----------------|----------------------|-------------------------------|----------------|-----------------------------------|---|
| 1.29           | 1.35                 | -4.65                         | 1.44           | 10.42                             | 6.25                                    |
| 3.97           | 3.68                 | 7.30                          | 4.22           | 5.92                              | 12.80                                   |
| 5.95           | 5.97                 | -0.34                         | 6.66           | 10.66                             | 10.36                                   |
| 7.66           | 7.43                 | 3.00                          | 8.56           | 10.51                             | 13.20                                   |
| 8.42           | 8.95                 | -6.29                         | 9.76           | 13.73                             | 8.30                                    |

Tabla 4.2: Comparación de las frecuencias de vibración con presencia de daño en el segundo piso



(a) Evolución de la rigidez estimada

(b) Evolución del factor de amortiguamiento identificado

Figura 4.4: Parámetros estructurales identificados con presencia de daño en el piso 2

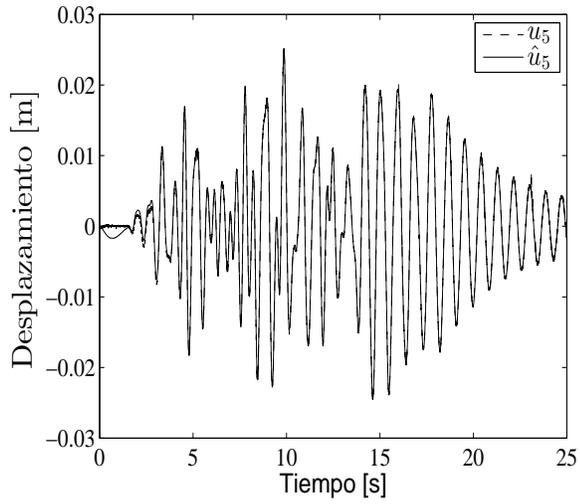
correspondientes al segundo piso son los más afectados debido a que presentan una diferencia de 19.21 % entre las velocidades de propagación nominales y aquellas que identifican un comportamiento dañado. Sin embargo, es difícil asegurar que el daño se encuentra en ese piso considerando que el resto de los parámetros también han sufrido cambios. Por ejemplo, el primer piso presenta una diferencia de 17.91 % entre los parámetros  $\beta_1$  y  $\hat{\beta}_{d_1}$  correspondientes a ese nivel, mientras en el tercer piso se produce una diferencia de 7.20 % en esos parámetros. Lo mismo sucede con las rigide-

| Piso | $k_0$ | $k_{r_i} [Ns/m]$ | $\hat{k}_{d_i} [N/m]$ | $\Delta \hat{k}_{d_i} / k_{r_i} (\%)$ |
|------|-------|------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| 1    | 0     | 14000.19         | 9433.10               | 36.62                                 |
| 2    | 0     | 9322.13          | 6085.24               | 34.72                                 |
| 3    | 0     | 9372.30          | 8071.05               | 18.88                                 |
| 4    | 0     | 9339.18          | 8752.05               | 6.28                                  |
| 5    | 0     | 9250.04          | 8838.48               | 4.50                                  |

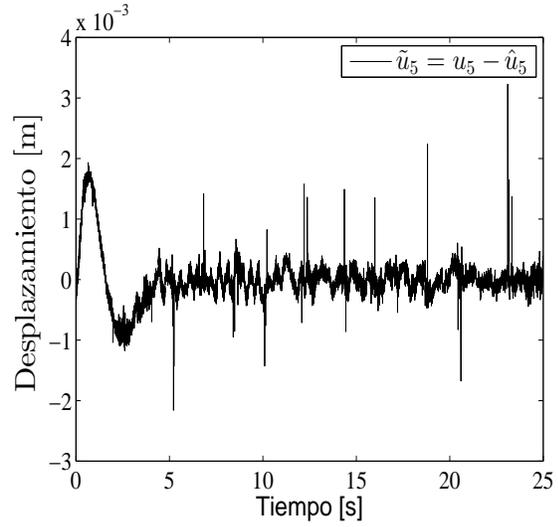
Tabla 4.3: Comparación de las rigideces analíticas y estimadas con presencia de daño en el segundo piso

ces calculadas en la tabla 4.3. A diferencia de estos parámetros, los coeficiente de amortiguamiento de Kelvin son mucho más aleatorios y dificultan aún más la tarea de detección y localización de daño. A pesar de esto, estos parámetros parecen tener un comportamiento opuesto a los de velocidad propagación, es decir, mientras estos últimos crecen, los coeficientes de amortiguamiento disminuyen y viceversa. Detalle de esto se encuentra en la tabla 4.1.

Por otra parte, las Figs. 4.5(a) y 4.6(a) presentan las mediciones de desplazamiento en el quinto y tercer piso, respectivamente, en comparación con sus estimados. En ambos casos se observa buena convergencia antes de 5 s. Lo que confirma nuevamente el desempeño satisfactorio del observador adaptable propuesto. Las Figs. 4.5(b) y 4.6(b) también corroboran lo anterior, al observar que el error de estimación disminuye a medida que transcurre el tiempo, resultando un error de 2% aproximadamente en estado estacionario. De manera similar, las Figs. 4.7(a) y 4.8(a) muestran una comparación entre las mediciones de velocidad y sus estimadas en el quinto y tercer piso, respectivamente. Al igual que sucede con los desplazamientos, la convergencia en ambos casos se logra antes de los 5 s. Por lo tanto, el error de estimación resultante es bastante pequeño, 4% aproximadamente en estado estacionario, ver Figs. 4.7(b) y 4.8(b) para más detalle. Note que las mediciones de velocidad fueron obtenidas empleando el filtro propuesto en la Ec. (3.65).

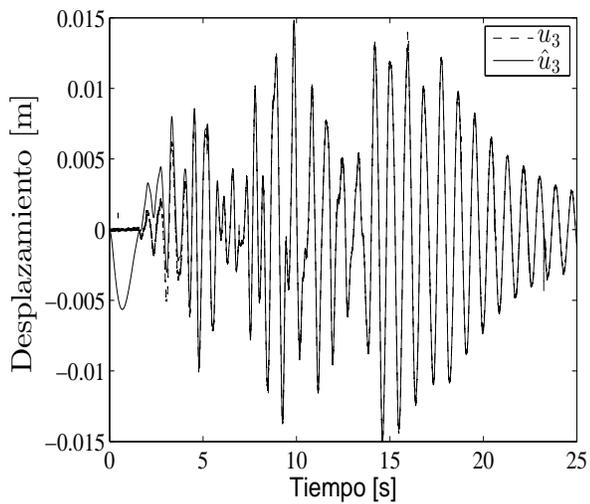


(a) Desplazamiento del quinto piso

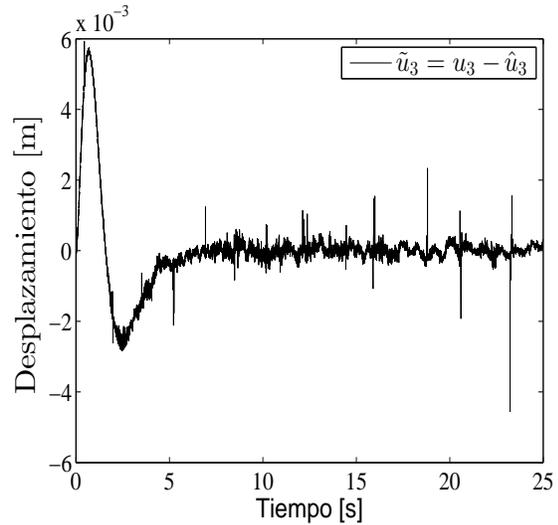


(b) Error de estimación

Figura 4.5: Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso con presencia de daño en el piso 2

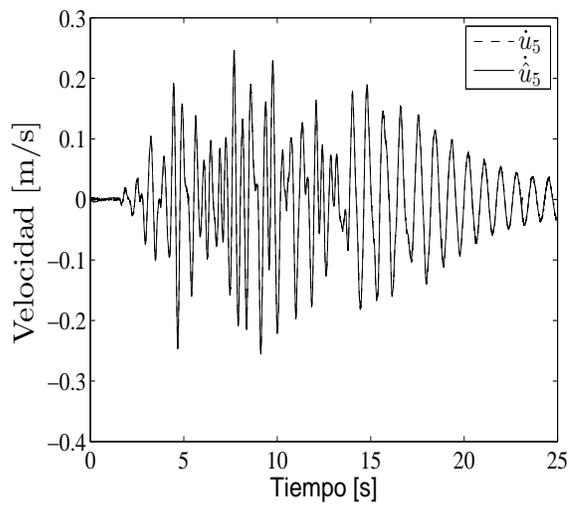


(a) Desplazamiento del tercer piso

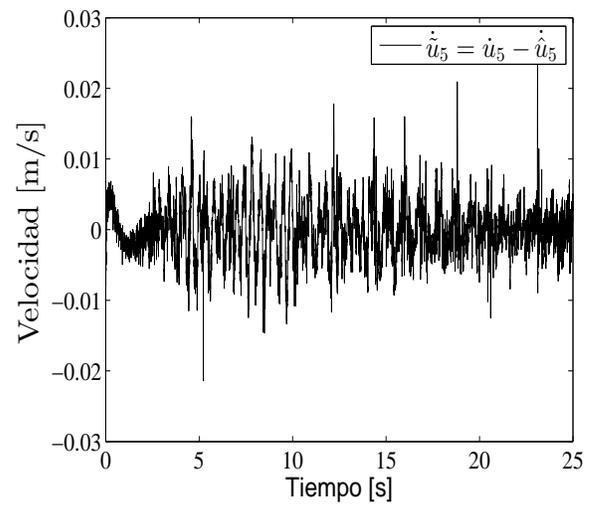


(b) Error de estimación

Figura 4.6: Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso con presencia de daño en el piso 2

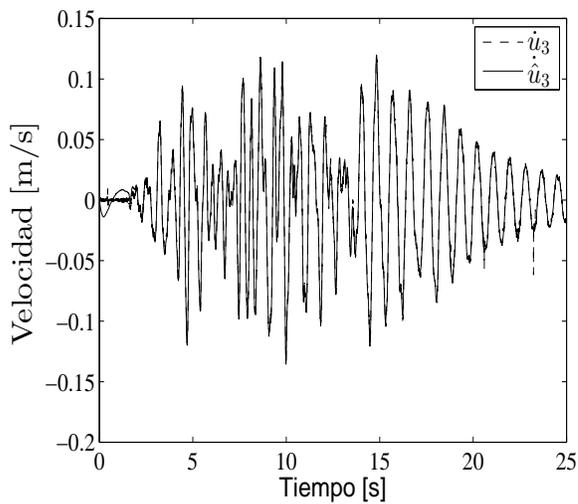


(a) Velocidad del quinto piso

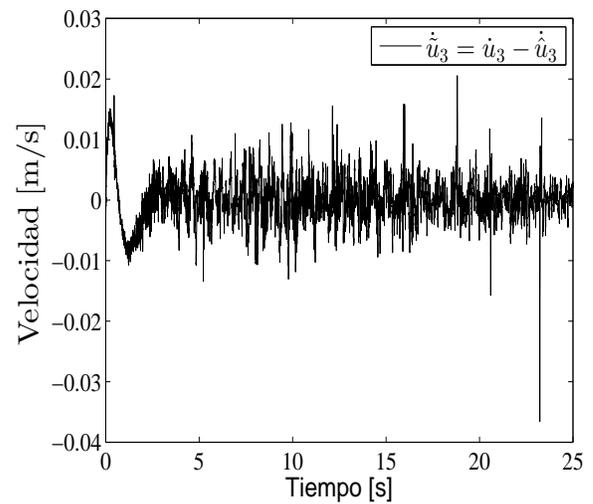


(b) Error de estimación

Figura 4.7: Velocidad medida y estimada en el quinto piso con presencia de daño en el piso 2



(a) Velocidad del tercer piso



(b) Error de estimación

Figura 4.8: Velocidad medida y estimada en el tercer piso con presencia de daño en el piso 2

#### 4.1.1. Algoritmo de detección y localización de daño

A continuación se presenta una metodología que define criterios para detectar y localizar la presencia de daño a partir de los parámetros de referencia que caracterizan un edificio en buen estado, con respecto a los parámetros identificados que caracterizan un comportamiento dañado, empleando el observador adaptable propuesto en el capítulo 3. El procedimiento es como se indica a continuación:

- Se obtienen las relaciones entre pares de parámetros nominales

$$\beta_{N_i} = \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}, \quad \eta_{N_i} = \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.1)$$

para  $i = n$

$$\beta_{N_i} = \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}, \quad \eta_{N_i} = \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} \quad (4.2)$$

- También se obtienen las relaciones entre pares de parámetros que indican daño

$$\beta_{D_i} = \frac{\beta_{d_i}}{\beta_{d_{i+1}}}, \quad \eta_{D_i} = \frac{\eta_{d_i}}{\eta_{d_{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.3)$$

para  $i = n$

$$\beta_{D_i} = \frac{\beta_{d_i}}{\beta_{d_{i-1}}}, \quad \eta_{D_i} = \frac{\eta_{d_i}}{\eta_{d_{i-1}}} \quad (4.4)$$

- Se calculan los errores relativos entre los parámetros de referencia y los que indican un comportamiento dañado, es decir

$$\varepsilon_{\beta_i} = \frac{\beta_{N_i} - \beta_{D_i}}{\beta_{N_i}} \times 100, \quad \varepsilon_{\eta_i} = \frac{\eta_{N_i} - \eta_{D_i}}{\eta_{N_i}} \times 100 \quad (4.5)$$

- Se determina la desviación estándar del vector de errores relativos

$$s_{\beta} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\varepsilon}_{\beta} - \varepsilon_{\beta_i})^2}, \quad s_{\eta} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\varepsilon}_{\eta} - \varepsilon_{\eta_i})^2} \quad (4.6)$$

- Si el error relativo  $\varepsilon_{\beta_i} > (\bar{\varepsilon}_{\beta} + s_{\beta}/2)$ , donde  $\bar{\varepsilon}_{\beta}$  es la media aritmética de los errores relativos. Entonces  $\tilde{\varepsilon}_{\beta_i} = [\varepsilon_{\beta_i} - (\bar{\varepsilon}_{\beta} + s_{\beta}/2)] > 0$ , en caso contrario, la diferencia anterior se considera nula. Condiciones similares se aplican con los valores de  $\varepsilon_{\eta_i}$ . Sin embargo, cuando  $\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} = [\varepsilon_{\eta_i} - (\bar{\varepsilon}_{\eta} + s_{\eta}/2)] < 0$ , se considera  $\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} = 100000$  para evitar indeterminación en los cálculos.
- Finalmente, el daño es localizado empleando la siguiente expresión

$$P_{dam} = \tilde{\varepsilon}_{\beta_i} + 1/\tilde{\varepsilon}_{\eta_i} \quad (4.7)$$

La Fig. 4.9 muestra el esquema de detección y localización de daño desarrollado. Que aplicado al experimento en anterior en el apartado 4.1, se confirma la presencia de daño en el segundo piso, como se muestra en la Fig. 4.10.

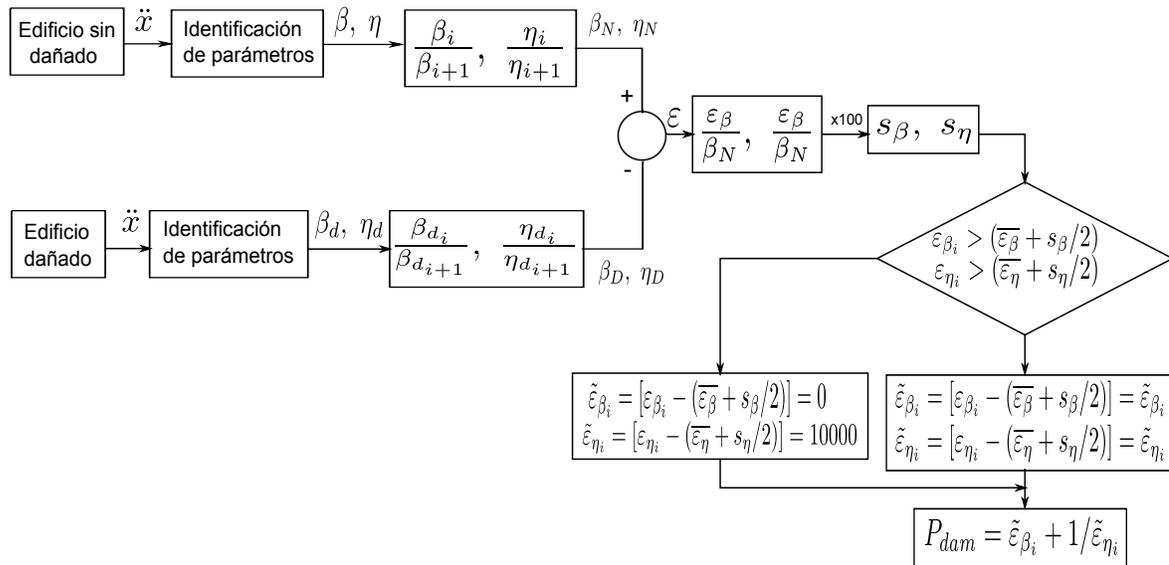


Figura 4.9: Esquema de detección y localización de daño

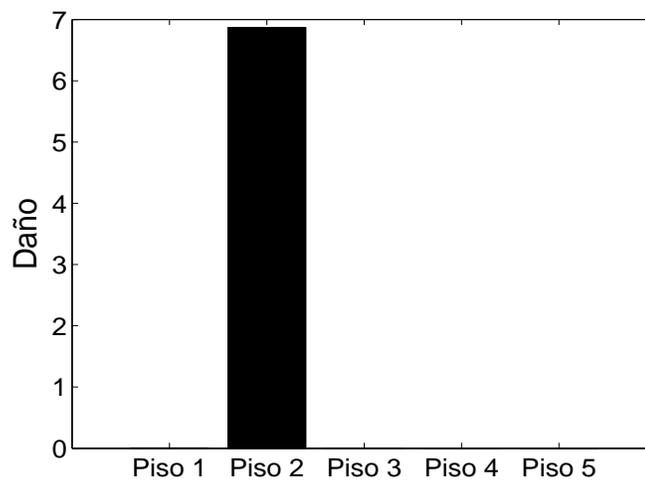


Figura 4.10: Detección de daño en el piso 2

## 4.2. Detección de daño en los pisos 2 y 5

De manera similar, en esta sección se investiga la detección y localización de daño en el segundo y quinto piso en el edificio de cinco pisos presentado en la sección 3.4. Las columnas en esos pisos fueron maquinadas para reducir el 23 % de su sección transversal cuadrada, cambiando de 6.35 mm a 5 mm, como se indica en la Fig. 4.11, con columnas remarcadas en color negro. Esto produce que las frecuencias de vibración de la estructura se reduzcan, como se muestra en la Fig. 4.12(a), obtenidas luego de aplicar un barrido frecuencial de 0.1 a 15 Hz mediante la señal Chirp. La Fig. 4.12(b) ilustra la reducción del ancho de banda de la respuesta estructural. Observe que las frecuencias de vibración se reducen considerablemente en comparación con la respuesta nominal. Sin embargo, es difícil localizar el piso dañado a partir los cambios en las frecuencias, aunque éstas aseguran la presencia de daño.

Es importante mencionar que la señal de excitación, las condiciones del modelo y los parámetros empleados por el observador adaptable son los mismos que en la sección 3.4.

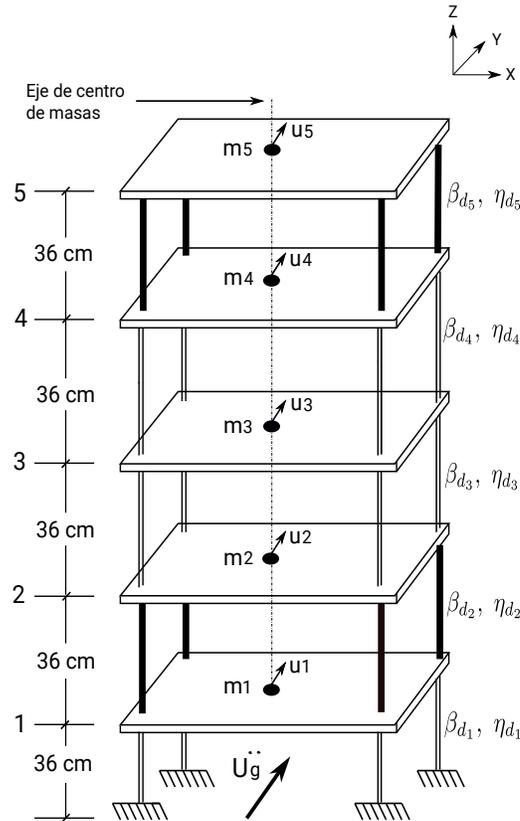
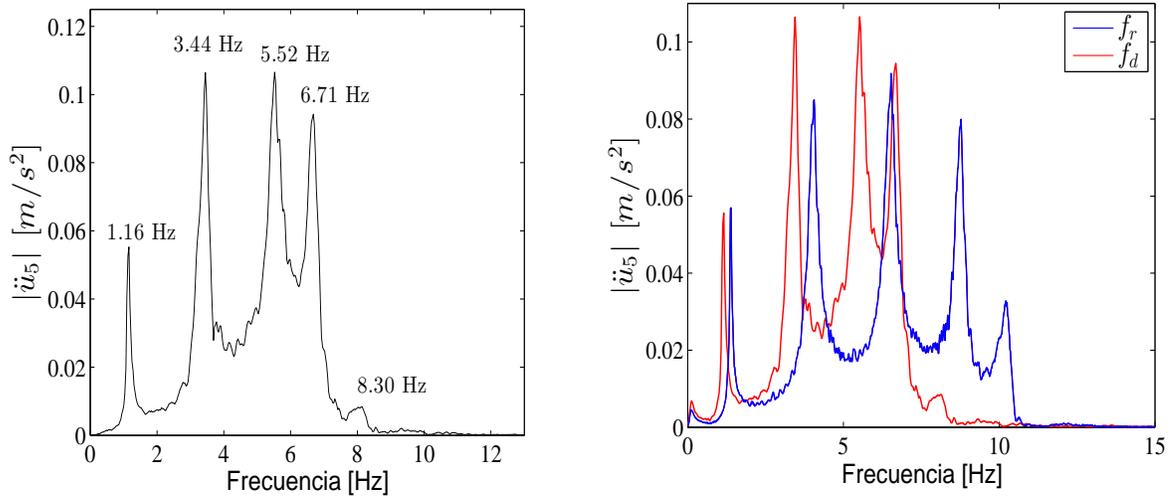


Figura 4.11: Edificio con presencia de daño en el segundo y quinto piso

Una vez caracterizadas las frecuencias de vibración, el edificio es excitado únicamente en su base mediante el sismo de 1985, mostrado en la Fig. 3.5, con el objetivo de identificar los parámetros estructurales  $\hat{\beta}_{d_i}$  y  $\hat{\eta}_{d_i}$ , empleando el observador adaptable propuesto en la sección 3.3. Los parámetros de velocidad de propagación de onda y los coeficientes de amortiguamiento que



(a) Espectro en frecuencia de la respuesta del 5° piso en presencia de daño en los pisos 2 y 5 (b) Comparación entre las frecuencias de referencia y las obtenidas en presencia de daño en los pisos 2 y 5

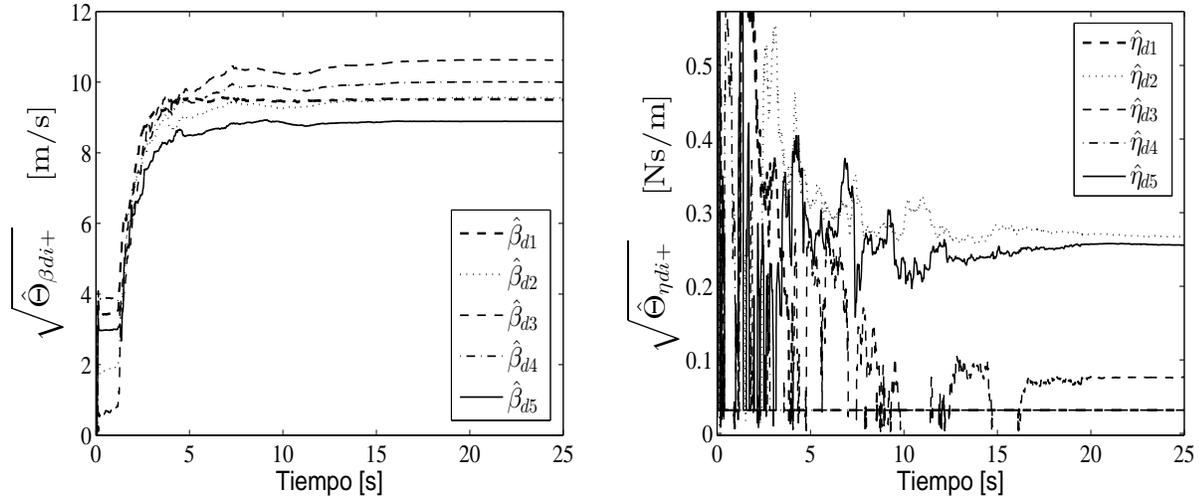
Figura 4.12: Espectro en frecuencia debido a la señal Chirp con presencia de daño en los pisos 2 y 5

describen el comportamiento dañado son mostrados en las Fig. 4.13(a) y 4.13(b), respectivamente. A partir de éstos, es notorio que las velocidades de propagación sufren una ligera disminución con respecto a los parámetros de referencia en la sección 3.4. Observe además que los parámetros  $\hat{\beta}_{d_2}$  y  $\hat{\beta}_{d_5}$  presentan mayor disminución que en los otros pisos restantes. Sin embargo, esto no asegura la localización de daño, pues los pisos uno y cuatro también presentan diferencias mayores al 13% entre los parámetros nominales y los que indican la presencia de daño. Por otra parte, observe que los coeficientes de amortiguamiento de Kelvin cambian de manera aleatoria en todos los casos aunque en ocasiones tienden a cambiar de manera inversa a las velocidades de propagación. Detalle de esto se puede encontrar en la tabla 4.4. Por otra parte, las frecuencias de vibración

| Piso | $\beta_i$ [m/s] | $\hat{\beta}_{d_i}$ [m/s] | $\Delta\hat{\beta}_{d_i}/\hat{\beta}_i$ | $\hat{\eta}_i$ (N/m) | $\hat{\eta}_{d_i}$ (N/m) | $\Delta\hat{\eta}_{d_i}/\hat{\eta}_i$ |
|------|-----------------|---------------------------|---|----------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| 5    | 11.49           | 8.88                      | 22.72                                   | 0.1928               | 0.2558                   | -32.67                                |
| 4    | 11.53           | 10.00                     | 13.27                                   | 0.1995               | 0.0316                   | 84.16                                 |
| 3    | 11.52           | 10.62                     | 7.81                                    | 0.1899               | 0.0766                   | 59.66                                 |
| 2    | 11.48           | 9.56                      | 16.72                                   | 0.1161               | 0.2666                   | -129.63                               |
| 1    | 11.53           | 9.50                      | 17.61                                   | 0.0316               | 0.0316                   | 0.000                                 |

Tabla 4.4: Variación de los parámetros estimados debido a la presencia de daño en los pisos 2 y 5

son calculadas como las raíces de los eigenvalores de la matriz de parámetros estimados  $\hat{A}_r$ . La tabla 4.5 presenta la comparación entre las frecuencias obtenidas usando el barrido frecuencial y las calculadas a partir de los resultados del observador adaptable. Note que el error porcentual entre éstas es mayor en los pisos 2 y 5, de acuerdo con la tabla 4.5, no obstante esta información



(a) Evolución de las velocidades de propagación identificadas (b) Evolución de los coeficientes de Kelvin identificados

Figura 4.13: Parámetros identificados de la ecuación de onda con presencia de daño en los pisos 2 y 5

es usada únicamente para determinar la presencia de daño y no para su localización. Nuevamente,

| $f_{d_i} [Hz]$ | $\hat{f}_{d_i} [Hz]$ | $\Delta \hat{f}_{d_i} / f_i (\%)$ | $f_r [Hz]$ | $(f_{r_i} - f_{d_i}) / f_{r_i} (\%)$ | $(f_{r_i} - \hat{f}_{d_i}) / f_{r_i} (\%)$ |
|----------------|----------------------|-----------------------------------|------------|--------------------------------------|--|
| 1.16           | 1.20                 | -3.45                             | 1.44       | 19.44                                | 16.67                                      |
| 3.44           | 3.47                 | -0.87                             | 4.22       | 18.48                                | 17.77                                      |
| 5.52           | 5.64                 | -2.17                             | 6.66       | 17.12                                | 15.32                                      |
| 6.71           | 7.16                 | -6.71                             | 8.56       | 21.61                                | 16.36                                      |
| 8.30           | 8.53                 | -2.77                             | 9.76       | 14.96                                | 12.60                                      |

Tabla 4.5: Comparación de las frecuencias de vibración con presencia de daño en los pisos 2 y 5

considerando que la masa perdida en las columnas debido al maquinado es pequeña en comparación con la masa de los pisos, ésta es despreciable y por lo tanto se supone que las masas de los pisos son iguales a las presentadas en la tabla 3.4. En consecuencia, la rigidez y el amortiguamiento de los entrepisos son calculados empleando las Ecs. (3.63) y (3.64), respectivamente, como se muestra en las Figs. 4.14(a) y 4.14(b). En éstas, nuevamente se observa que la rigidez en los pisos 2 y 5 es menor que en el resto de ellos, mientras el amortiguamiento es mayor. Detalles de esto se encuentran en la tabla 4.6.

Empleando la metodología propuesta en la sección 4.1.1 y usando de la información brindada por los parámetros identificados, como son los cambios en las velocidades de propagación y el incremento en los coeficientes de amortiguamiento de Kelvin, se determina la ubicación del daño en los pisos 2 y 5, como se ilustra en la Fig. 4.15. No obstante, los parámetros  $\hat{\beta}_{d_1}$  y  $\hat{\beta}_{d_4}$  correspondientes al primer y cuarto piso, se ven afectados debido a que son pisos aledaños y como consecuencia pre-

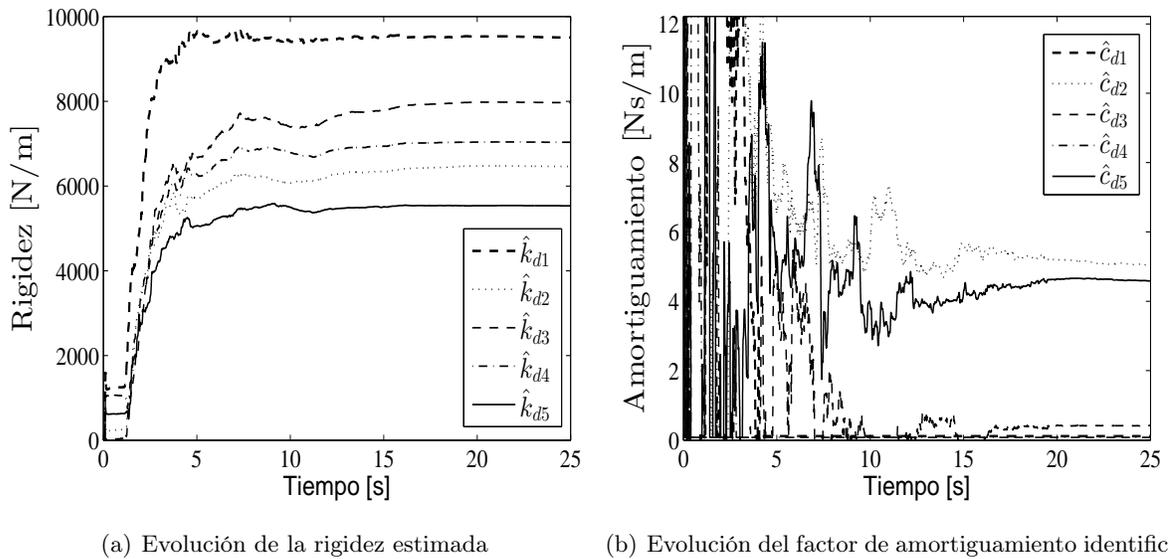


Figura 4.14: Parámetros estructurales identificados con presencia de daño en los pisos 2 y 5

| Piso | $k_0$ | $k_{r_i}$ [Ns/m] | $\hat{k}_{d_i}$ [N/m] | $\Delta\hat{k}_{d_i}/k_{r_i}$ (%) |
|------|-------|------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1    | 0     | 14000.19         | 9503.16               | 32.12                             |
| 2    | 0     | 9322.13          | 6460.31               | 30.70                             |
| 3    | 0     | 9372.30          | 7968.66               | 14.98                             |
| 4    | 0     | 9339.18          | 7032.02               | 24.70                             |
| 5    | 0     | 9250.04          | 5532.98               | 40.18                             |

Tabla 4.6: Comparación de las rigideces analíticas y estimadas con presencia de daño en los pisos 2 y 5

sentan efectos adversos. Sin embargo, a pesar de la variación con respecto a su valor de referencia, estos no presentan daño alguno.

Por otra parte, el observador de estados estima las señales no medibles sin problema alguno, como sucede con los desplazamientos en los pisos 5 y 3, mostrados en las Figs. 4.16(a) y 4.17(a), respectivamente, donde las señales estimadas son comparadas con las mediciones reales. Observe que éstas están ligeramente atenuadas debido a la presencia de daño en el segundo piso, que evita transmitir el movimiento sísmico a los pisos restantes, pues se genera un efecto retardante en esa ubicación. En ambos casos se observa que los estados estimados tienden a converger a las mediciones reales, manteniendo un buen acuerdo en la estimación, como se presenta en las Figs. 4.16(b) y 4.17(b), donde el error de estimación disminuye considerablemente después del transitorio, evidenciando que el observador adaptable funciona satisfactoriamente a pesar de la presencia de daño. De manera similar, las Figs. 4.18(a) y 4.19(a) ilustran las mediciones de velocidad junto a sus estimados en los pisos 5 y 3 respectivamente. Al igual que en el experimento anterior, las velocidades fueron obtenidas filtrando las señales de desplazamiento  $u_5$  y  $u_3$  con las frecuencias de corte seña-

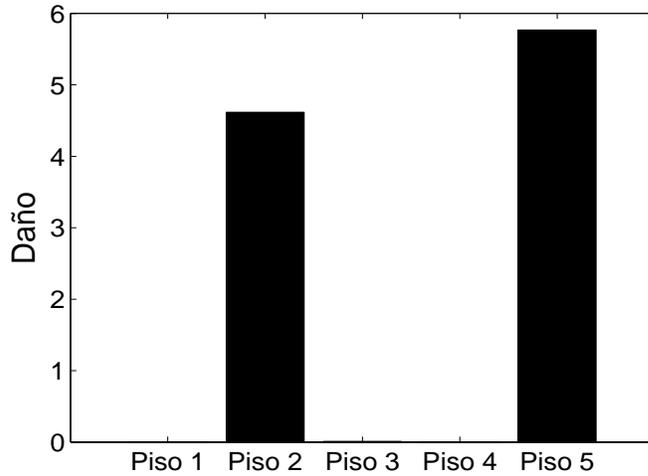


Figura 4.15: Detección de daño en los pisos 2 y 5

ladas en la Ec. (3.65). Finalmente las Figs. 4.18(b) y 4.19(b) muestran el error de estimación en los pisos antes mencionados, probando que el observador adaptable funciona satisfactoriamente.

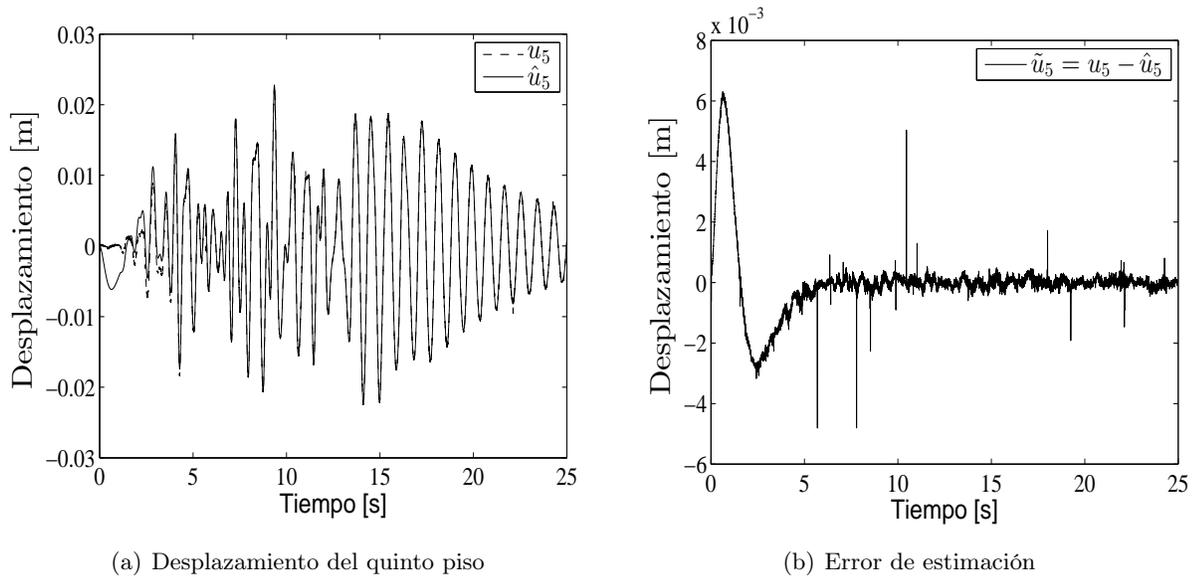


Figura 4.16: Desplazamiento medido y estimado en el quinto piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5

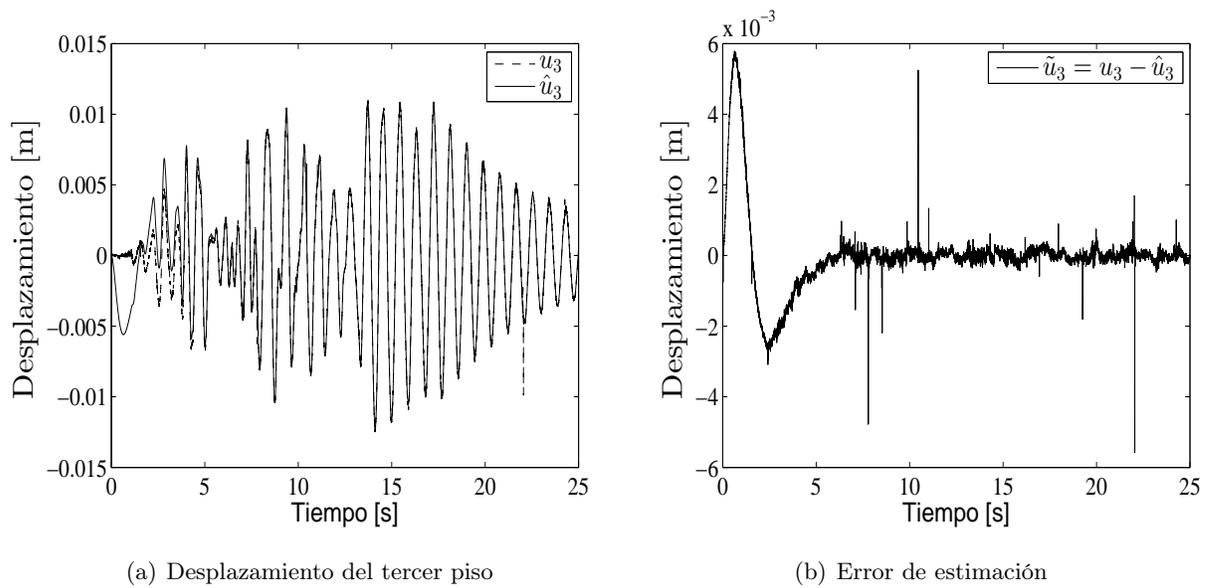


Figura 4.17: Desplazamiento medido y estimado en el tercer piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5

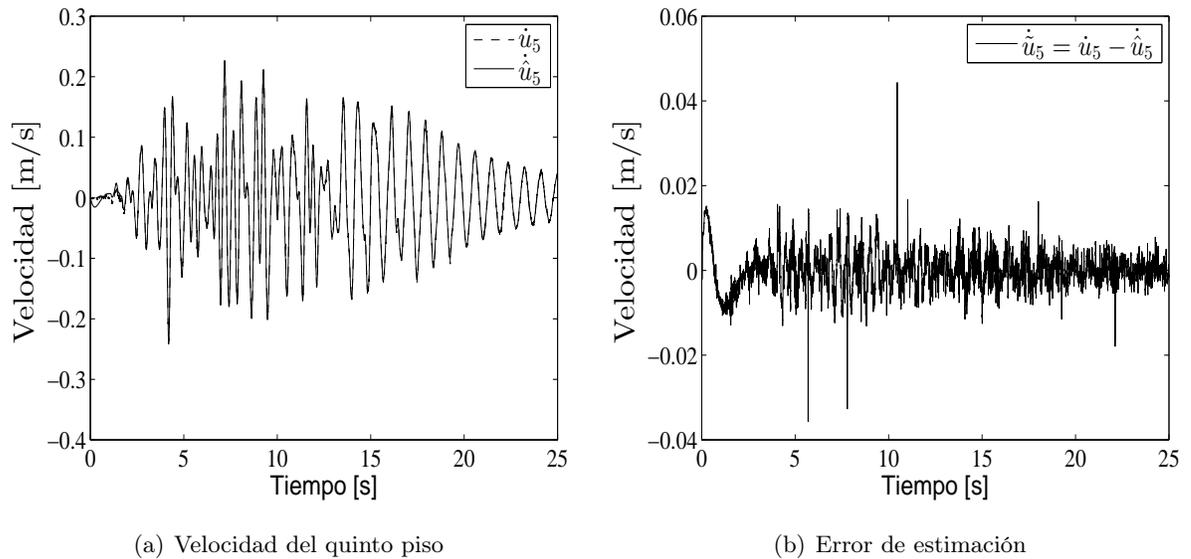


Figura 4.18: Velocidad medida y estimada en el quinto piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5

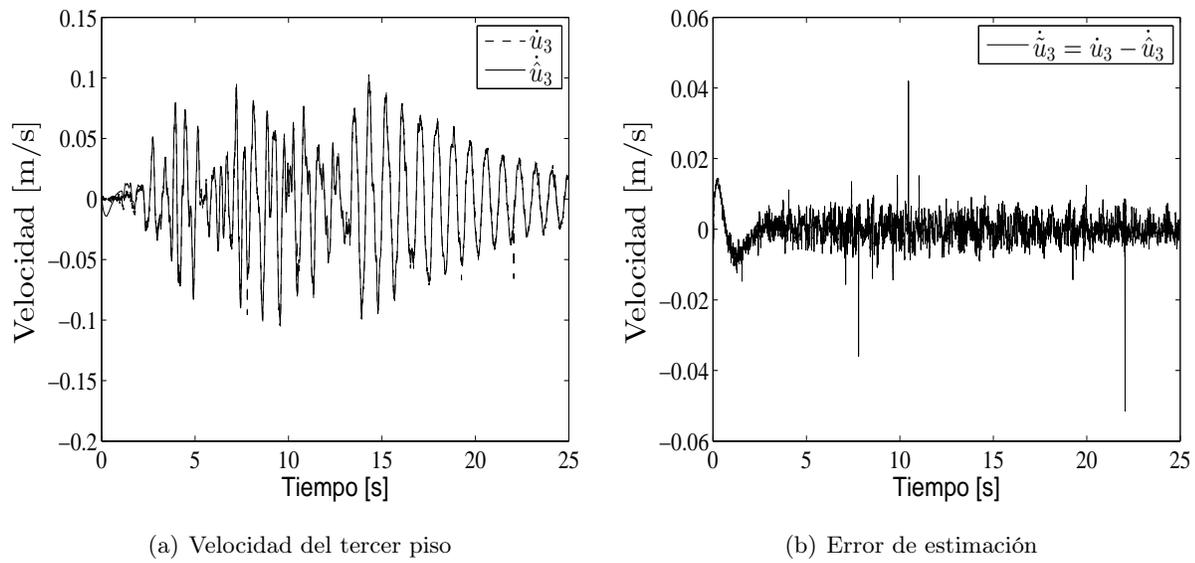


Figura 4.19: Velocidad medida y estimada en el tercer piso con presencia de daño en los pisos 2 y 5

## Capítulo 5

# Respuesta de la pirámide del Sol al ruido ambiental

En este capítulo se estudia la respuesta local de diversos puntos de la pirámide del Sol con mediciones de ruido ambiental y mediante su procesamiento. Empleando la técnica de cocientes espectrales H/V, se obtienen las frecuencias de vibración correspondientes al punto de medición. La pirámide presenta diversos efectos de amplificación en diferentes frecuencias de acuerdo a las propiedades del medio. Además, los resultados sugieren la presencia de irregularidades geométricas. En consecuencia, estos resultados preliminares deberán ser extendidos en trabajos futuros para caracterizar las propiedades mecánicas del monumento, la heterogeneidad en el interior de la pirámide y los efectos topológicos.

### 5.1. Descripción de la pirámide del Sol

La ciudad prehispánica de Teotihuacán fue uno de los centros urbanos más grande del mundo antiguo y es el sitio más explorado de Mesoamérica. En el centro de Teotihuacán destacan dos estructuras monumentales: La pirámide de la Luna y la del Sol. Esta última es la edificación más grande e importante dentro del conjunto arqueológico de Teotihuacán y una de las más grandes de Mesoamérica, pues mide 225 m por lado, es casi cuadrada y alcanza una altura de 65 m aproximadamente con 260 escalones. Ante tales dimensiones, no deja de sorprender que a diferencia de otros edificios, cuyos volúmenes son producto de la acumulación de diferentes construcciones, la pirámide del Sol fue construida en una sola etapa, durante la fase Tzacualli (1-150 d.C.). El edificio consta de cinco cuerpos troncocónicos superpuestos, como se ve en la Fig. 5.1. En cuanto a la construcción, se sabe que el núcleo de la pirámide consiste de diversas capas de tierra y tepetate molido, mezcladas con piedras y una gran cantidad de cerámica, lítica y fragmentos de carbón, no se usaron grandes rocas ni adobes (Sugiyama et al., 2014).



Figura 5.1: Pirámide del Sol

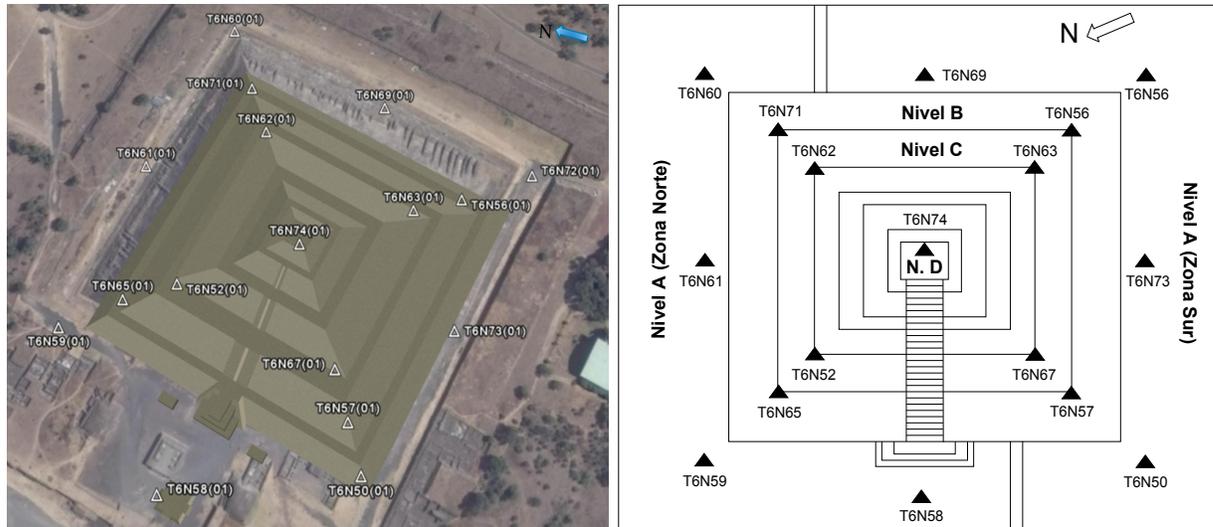
## 5.2. Mediciones en la pirámide del Sol

El experimento para la adquisición de datos estuvo conformado por 17 sismómetros triaxiales de banda ancha modelo 6TD de manufactura GURALP SYSTEM. Calibrados para registrar 50 muestras por segundo, y así obtener un ancho de banda de 0.02 – 25 Hz, de acuerdo con el teorema de muestreo de Nyquist. Las mediciones se hicieron a lo largo de más de 7 horas continuas. La distribución de los sismómetros fue realizada por niveles. El primer nivel (A) corresponde a la periferia de la pirámide, en la que se instalaron 11 sismómetros. El segundo nivel (B) es la parte más baja de la pirámide y el tercer nivel (C) la parte media. En estos dos últimos niveles se colocaron cuatro sismómetros en los cuatro vértices. El cuarto nivel (D) corresponde a la cúspide de la pirámide, en la cual se colocó únicamente un sensor. Detalle de esto puede ser apreciado en las Figs. 5.2(a) y 5.2(b)

### 5.2.1. Tratamiento de los datos

Una vez disponibles las mediciones de ruido sísmico ambiental se prosigue con el procesamiento de los datos, siguiendo el procedimiento recomendado en (Bensen et al., 2007) para la medición de curvas de dispersión, y quedándonos en la etapa de preparación de los datos, como se menciona a continuación.

- Datos crudos
- Se depuran los datos y se homogeniza el tamaño de las mediciones a 6 o 7 hrs.
- Se remueve la respuesta instrumental
- Se remueve la media



(a) Localización de los sensores en la pirámide del Sol

(b) Esquema de localización por niveles

Figura 5.2: Esquema de la distribución espacial de los sismómetros de banda ancha

- Se elimina la tendencia de los registros, para que inicien y terminen en cero
- Se eliminan las frecuencias por debajo de 0.1 Hz y superiores a los 25 Hz, empleando un filtro pasa-bandas, tipo *Butterworth* de cuarto orden
- Se mejora la línea base empleando la media móvil por ventaneo (*Moving Average*) con ventanas de 4096 puntos
- Las señales son normalizadas en tiempo, usando *One Bit*<sup>1</sup>, para evitar la pérdida de información

Lo anterior garantiza que los registros tengan la línea base y media cero.

### 5.3. Cocientes espectrales H/V

Después que se completa el procesamiento de los datos, es necesario obtener la respuesta local, empleando la técnica de cocientes espectrales H/V y con ello observar la amplificación de las frecuencias de vibración en el sitio de medición, para estudiar la distribución de las propiedades elásticas del suelo y de la pirámide del Sol. A continuación se hace una breve revisión de los antecedentes de la técnica de cocientes espectrales.

#### 5.3.1. Antecedentes de la técnica de cocientes espectrales H/V

Fue a partir del trabajo pionero de (Kanai, 1957) citado por (Leyton et al., 2011) sobre la estimación de la amplificación del sitio utilizando microtemores, que muchos autores dedicaron sus

<sup>1</sup>Es el método de normalización más agresivo, que conserva únicamente el signo de la seña cruda reemplazando todas las amplitudes positivas con 1 y todas las negativas con  $-1$ .

trabajos para estimar las características dinámicas del sitio de una manera rápida y económica. (Kanai, 1957) hizo la hipótesis de que los microtemores pueden considerarse como ruido en el rango de frecuencias de interés (0,1 a 10 Hz); Por lo tanto, cualquier amplificación observada debe ser producida por el suelo. Sin embargo, (Edwadia y Trifunac, 1973) señalaron que el espectro de los microtemores cambia durante el día, mostrando que no sólo la respuesta dinámica del suelo influye en los espectros, sino también las fuentes producidas por la actividad humana (tráfico, etc). Posteriormente, (Nogoshi y Igarashi, 1971) introdujeron por primera vez la idea de obtener el cociente espectral H/V en una sola estación entre las componentes horizontales sobre la vertical. Ellos mostraron su relación con la curva de elipticidad de la onda Rayleigh, y se aprovechó de la coincidencia entre el máximo de frecuencia más baja de la curva del cociente espectral H/V con la frecuencia de resonancia fundamental del suelo, utilizado como un indicador de la estructura subterránea. Posteriormente, (Nakamura, 1989) popularizó el uso del cociente espectral entre las componentes horizontales y vertical H/V a partir de microtemores, como uno de los métodos indirectos más utilizados para la estimación del periodo dominante de vibración del suelo. Este método proporciona información sobre los periodos de sitio y de la respuesta local, a partir del procesamiento de registros de ruido sísmico o de vibración ambiental, que consisten básicamente de ondas superficiales, con mayor energía en el modo fundamental, pues la mayoría de las fuentes de generación de ruido sísmico están cerca de la superficie. Por otra parte, diversos estudios han demostrado una correlación entre el pico observado en los resultados de HV y la frecuencia fundamental del suelo (Lermo y Chávez-García, 1993; Konno y Ohmachi, 1998); sobre esta técnica, se han propuesto diversas interpretaciones. Por ejemplo, Bard (1999) plantea que los cocientes espectrales H/V se relacionan con la elipticidad de ondas de Rayleigh debido a su predominancia en la componente vertical. Estas características dependen de la frecuencia y muestran un pico alrededor de la frecuencia fundamental para sitios en donde el contraste de impedancias entre materiales superficiales y profundos es grande. Sin embargo, algunos autores han mostrado algunas limitaciones de la técnica principalmente debido a la complejidad del subsuelo (Chávez-García et al., 2007). No obstante, las mediciones de vibración ambiental tienen el potencial de contribuir significativamente a la respuesta dinámica del suelo ante la excitación sísmica.

La técnica de cocientes espectrales como la conocemos fue introducida por (Arai y Tokimatsu, 2004), matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$[H/V](\omega) = \sqrt{\frac{E_1(x, \omega) + E_2(x, \omega)}{E_3(x, \omega)}} \quad (5.1)$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$  son las densidades de energía espectral del movimiento en dirección horizontal, y que además son ortogonales entre sí, mientras que  $E_3$  se refiere a la densidad de energía espectral en la dirección vertical. Esta técnica es muy atractiva, ya que elimina los efectos de fuente, patrón de radiación y trayecto que se presentan en los sismos. Por su simplicidad y economía se extendió rápidamente, incluso a otras aplicaciones. Por otra parte, (Sánchez-Sesma et al., 2011), propone una reformulación de la Ec. (5.1), suponiendo que el ruido ambiental es difuso. Por lo tanto, el

H/V se puede replantear en función de las funciones de Green, como

$$[H/V](\omega) = \sqrt{\frac{Im[G_{11}(x, x; \omega)] + Im[G_{22}(x, x; \omega)]}{Im[G_{33}(x, x; \omega)]}} \quad (5.2)$$

donde  $Im[G_{11}]$ ,  $Im[G_{22}]$  y  $Im[G_{33}]$  corresponden a la parte imaginaria de la función de Green  $G_{11}$ ,  $G_{22}$  y  $G_{33}$  respectivamente. La Ec.(5.2) vincula las mediciones promedio con propiedades intrínsecas del medio y permite el cálculo del cociente H/V. Este indicador toma en cuenta las contribuciones de ondas de Rayleigh, de Love y de volumen. Comúnmente, esta técnica es empleada para estudiar las características del suelo. Sin embargo, en este trabajo se usa para calcular la respuesta local en la pirámide del Sol. En sismología, las condiciones del sitio pueden generar cambios significativos en el movimiento sísmico del suelo produciendo daños concentrados (Sánchez-Sesma et al., 2011). Por otra parte, (Mulargia, 2012) menciona que el ruido no es difuso, excepto si satisface las siguientes consideraciones:

1. El campo de onda es un campo de ruido, es decir, las fases de onda son aleatorias
2. Las ondas son incidentes desde todas las direcciones con igual intensidad, es decir, el campo de ondas es azimutalmente isótropo. Cumpliendo con el principio de equipartición
3. La amplitud de onda es la misma en cualquier punto de un dominio espacial dado, es decir, el campo de onda es espacialmente homogéneo a alguna escala local

suponiendo que se satisfacen las condiciones anteriores, entonces el ruido es difuso, como sucede en este trabajo.

## 5.4. Resultados experimentales

A continuación se presentan los resultados de aplicar el cociente H/V a los registros obtenidos en la pirámide del Sol, luego de la etapa de procesamiento de señales. Estos estudios permiten calcular la frecuencia fundamental del terreno sobre el que se encuentra construida la pirámide y los periodos de la misma en diversos puntos. En nuestro análisis utilizamos ventanas de 60 s que proporcionan estimaciones espectrales fiables para frecuencias mayores de 0,6 Hz. Además se usó un criterio de normalización, que consiste en dividir cada componente por la raíz cuadrada de la suma de autocorrelaciones para los tres componentes, integrados en frecuencia. Esto garantiza que la energía total asociada para cada ventana sea igual. Posteriormente, se calculan los espectros de amplitud de Fourier (H/V), que son suavizados mediante la Función de Konno y Ohmachi al 30%, (Konno y Ohmachi, 1998). Para la estimación de los cocientes espectrales, se calcula el promedio vectorial de las componentes horizontales sobre la vertical, empleando la Ec. (5.2) propuesta en (Sánchez-Sesma et al., 2011; Salinas et al., 2014). Los cocientes espectrales H/V obtenidos se muestran en las Figs. 5.3(a), 5.3(b), 5.4(a) y 5.4(b), correspondiente a cada punto de medición, con los cuales se determinan las frecuencias características del suelo y de la estructura, respectivamente, así como la amplificación relativa promedio asociada al punto de registro.

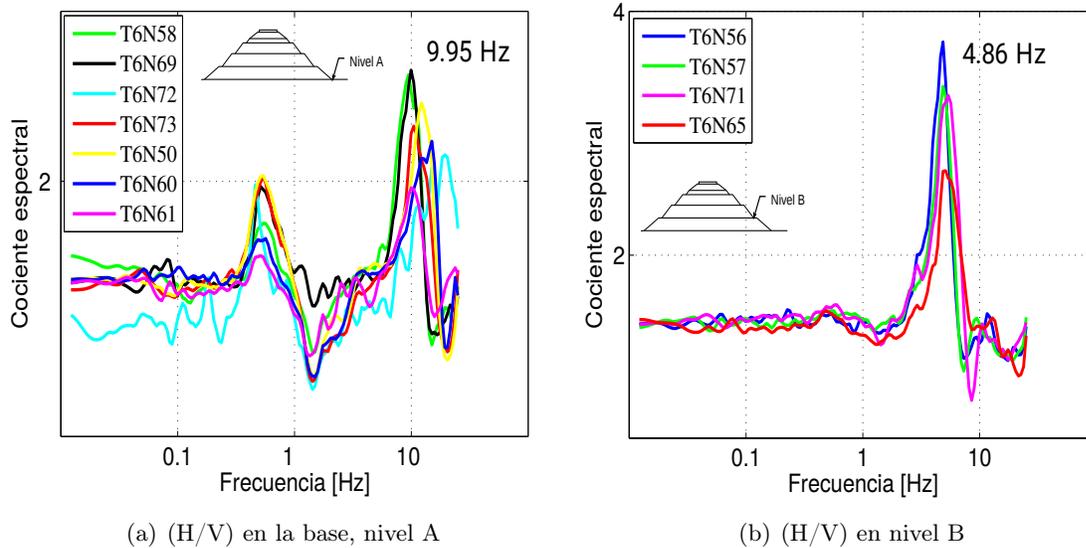


Figura 5.3: Resultados del H/V en los niveles A y B

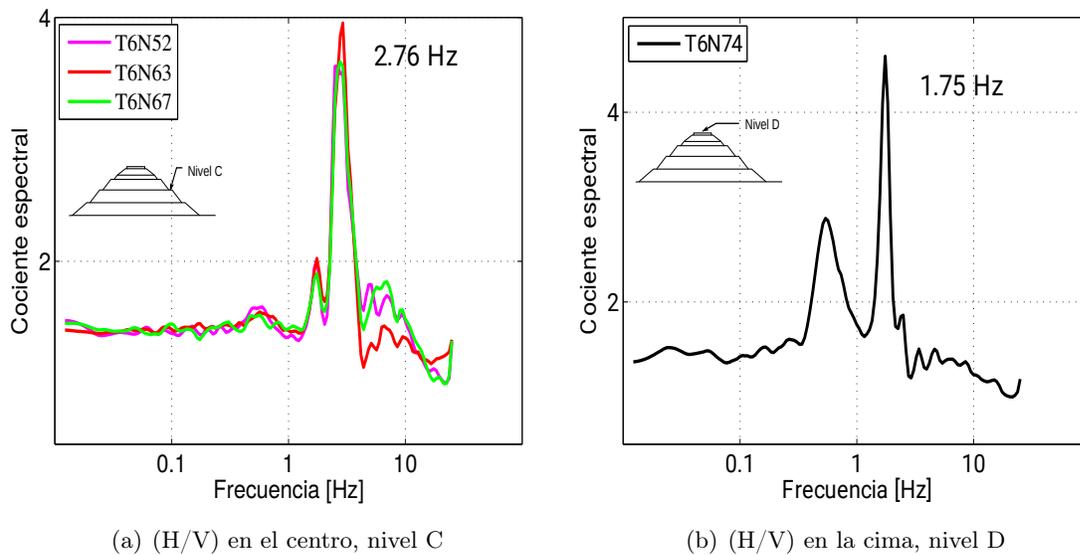


Figura 5.4: Resultados del H/V en los niveles C y D

Observe que la frecuencia local en la cima es de 1.747 Hz, mientras que en el centro de la pirámide es de 2.76 Hz. A nivel del primer piso, la frecuencia de vibración se encuentra a 4.86 Hz aproximadamente. Sin embargo, las frecuencias de vibración obtenidas en la periferia de la pirámide no son suficientemente claras, dependiendo del punto de medición, éstas varían de 9.95 Hz hasta 14.3 Hz en el peor de los casos. Estas frecuencias se atribuyen principalmente al contraste de velocidades en la superficie y el basamento, que suponen un suelo construido con varios materiales y en diversas cantidades, que genera diferentes rigideces del terreno. A pesar de esto, los resultados obtenidos se consideran satisfactorios pues estiman una aproximación de la respuesta del suelo.

Los mejores resultados obtenidos, fueron aquellos en los que las mediciones fueron llevadas a cabo en la superficie de la pirámide, como se observa en las Figs. 5.3(b), 5.4(a) y 5.4(b). Por otra parte, la Fig. 5.5 ilustra la comparación entre las frecuencias de vibración calculadas en la cima de la pirámide empleando la técnica de cocientes espectrales H/V e IBEM calculado en (Molina, 2015). El Método Indirecto de Elementos de la Frontera mejor conocido como IBEM es una herramienta numérica computacional inicialmente introducida por (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) para estudiar los efectos de amplificación en topografías irregulares 1D y posteriormente para 3D en (Sánchez-Sesma y Luzón, 1995). Tomando como referencia las frecuencias obtenidas experimentalmente con el H/V, en (Molina, 2015) se intenta recuperar las propiedades mecánicas de la edificación. En la Fig. 5.5, es claro que las frecuencias obtenidas con ambos métodos se encuentran bastante cercanas, siendo 1.747 Hz para el H/V y 1.77 Hz para el IBEM, es decir, se tiene un error de  $-1.31\%$  aproximadamente. En cuanto a la amplitud el H/V se encuentra en 4.6 unidades, mientras el IBEM en 5.31, valores que son razonablemente satisfactorios. En la misma figura, también se observa que aparece un pulso más pequeño en aproximadamente 0.8 Hz, ésto se atribuye a la presencia de irregularidades geométricas en la pirámide. Por otro lado, la Fig. 5.6 muestra los registros de ruido sísmico ambiental tomados en la cima de la pirámide en las tres componentes longitudinales  $x$ ,  $y$  y  $z$ . En cambio, la Fig. 5.7 ilustra los resultados luego del procesamiento de estas señales, caracterizadas por la corrección de su línea base.

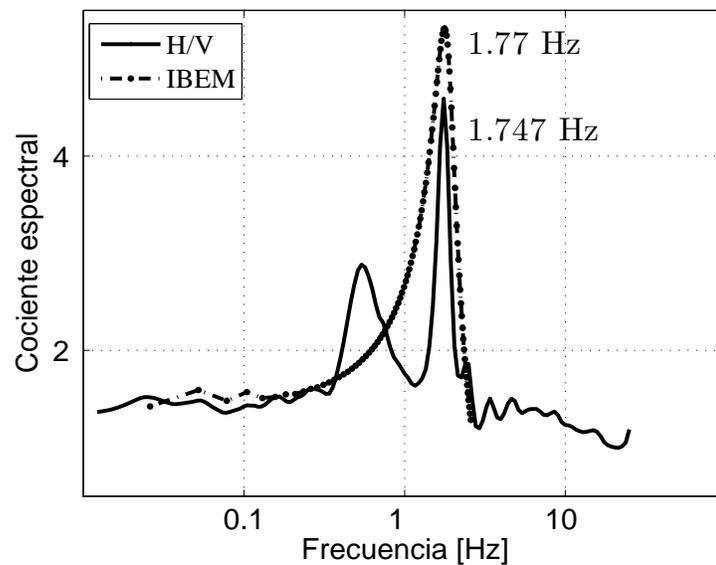


Figura 5.5: Comparación de las frecuencias de vibración correspondientes a la cima de la pirámide, calculada con H/V e IBEM

Es importante señalar que las frecuencias obtenidas pueden ser usadas como parámetros de referencia para el caso de detección de daño en experimentos futuros.

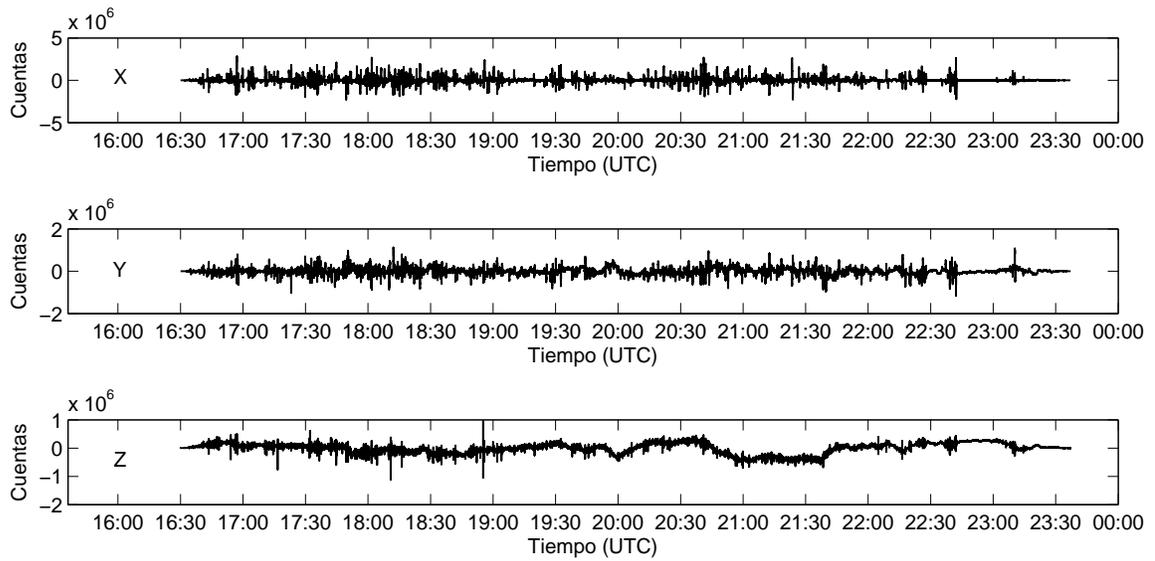


Figura 5.6: Registros sísmicos obtenidos en la cima, en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $x$

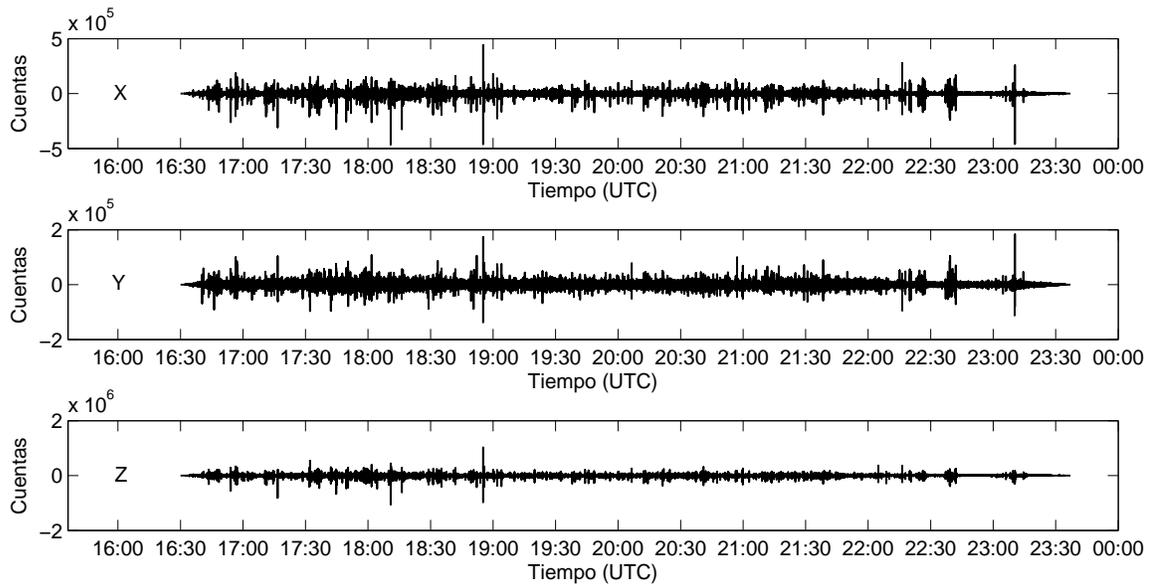


Figura 5.7: Registros sísmicos procesado correspondiente a la cima, en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $x$

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se presentaron dos sistemas de identificación para edificios capaces de lograr la detección, localización y cuantificación de daño en el mejor de los casos. Además se exploró la técnica de cocientes espectrales para obtener la respuesta local en la pirámide del sol. Al desarrollar estos enfoques se identificaron varias áreas de oportunidad como se menciona a continuación:

La mayoría de los métodos de monitoreo de salud estructural suelen depender de la extracción de propiedades modales como las frecuencias de vibración y las formas modales, que son usadas para inferir la presencia de daño. Sin embargo, estas propiedades representan características globales de una estructura que no son sensibles a los daños locales, especialmente cuando éste es pequeño. Además, el éxito de estos métodos depende del conocimiento previo de las condiciones ambientales que pueden afectar las características modales. Cambios en las frecuencias de vibración menores al 5 % son difíciles de atribuir a la presencia de daño. A diferencia de estos, los métodos bajo el enfoque de propagación de onda permiten obtener información local para una evaluación más certera. En este trabajo de tesis se ha mejorado la manera de calcular los tiempos de propagación de onda, mediante un algoritmo de operación automática. El objetivo es recuperar la sencillez del enfoque de propagación de onda y, sin embargo, ser capaz de obtener una mayor precisión en la localización de daños. Para este propósito, el edificio fue considerado como un medio estratificado en el que se propagan pulsos sísmicos. En consecuencia, se ha recuperado la relación entre el modelo de cortante clásico y un medio estratificado usando la ecuación de onda que permite implementar el método de propagación de onda. Posteriormente, se empleó el pulso de Ricker como señal de excitación y mediante el método de Thomson-Haskell se logró la propagación del movimiento a lo largo del edificio. Con los sismogramas obtenidos, se identificaron los tiempos de propagación de onda y con ellos se desarrolló una metodología para estimar la rigidez de entresijos para edificios de múltiples pisos. La hipótesis propuesta en la introducción fue confirmada, es decir, la reducción de la velocidad de propagación y el incremento en el tiempo de desplazamiento de la onda están relacionados con la pérdida de rigidez. De este modo, comparando los valores de rigidez obtenidos con datos nominales o con registros históricos, se pudo detectar y localizar la presencia de daño en el edificio simulado de manera más precisa, como se presentó en los resultados de simulación.

El método de identificación de daños propuesto tiene la ventaja de ser rápido en contraste con otros métodos debido a que se obtiene a partir de la solución de un sistema de ecuaciones que crece sólo geométricamente con el número de grados de libertad del edificio, en oposición a los métodos que crecen de forma no lineal. El método propuesto puede aplicarse a todo tipo de estructuras. Se pueden obtener resultados similares cuando el movimiento a nivel del suelo es diferente al pulso Ricker, incluso cuando éste es un registro sísmico. Sismogramas similares al de la Fig. 2.7 se pueden recuperar y analizar si se usan técnicas como la *convolución ó interferometría* (Snieder y Safak, 2006). El método puede modificarse si se desea una ubicación más precisa del daño, colocando sensores adicionales en la zona dañada. Los resultados de la simulación indican la capacidad del algoritmo para localizar y cuantificar los daños, sin embargo, es claro que son necesarios experimentos controlados para verificar la viabilidad del enfoque.

Las principales diferencias entre este trabajo y los resultados en (Todorovska y Trifunac, 2008a), (Todorovska y Trifunac, 2008b; Todorovska y Rahmani, 2013) son la aplicación de la ecuación de onda para modelar edificios de varios pisos, el algoritmo para medir el primer arribo de llegada del movimiento y el uso del pulso Ricker como señal de excitación. Estas modificaciones permiten localizar daños en pisos específicos con una mejor precisión. Además, las principales ventajas del método propuesto en este trabajo en comparación con otras técnicas de detección de daño son:

- La posibilidad de aplicación multi-escala que depende del número y ubicación de los sensores. Es posible comenzar con un número reducido de éstos y, dependiendo de los resultados, redistribuir o añadir sensores para obtener resultados más precisos.
- Para el caso en estudio sobre la detección de daños en columnas de edificios, la complejidad del análisis crece sólo geométricamente con el número de pisos, en contraste con otras técnicas donde este crecimiento es no lineal.
- La detección de daño depende de la medición del tiempo de llegada del movimiento, la cual es bastante precisa, y por lo tanto, los efectos del ruido de medición se reducen.

En una segunda etapa, se presentó un novedoso sistema de identificación en línea para edificios de múltiples pisos, modelados como una barra de cortante discreta, bajo el enfoque de propagación de ondas. Este método se desarrolla como una solución alternativa a los métodos de análisis modal para evaluar la salud estructural y como una mejora importante a los métodos de propagación tradicionales, los cuales se desarrollan en el dominio de la frecuencia y no son adecuados para aplicaciones en tiempo real. Para ello, se ha introducido el modelo de barra de cortante discreta que se utiliza para diseñar un observador adaptable que opera en tiempo real, y que permite estimar desplazamientos y velocidades, al mismo que se identifican las velocidades de propagación y los coeficientes de amortiguamiento. El modelo discretizado permite excitar el edificio únicamente en su base, mientras que el movimiento en los pisos es llevado a cabo por la propagación de la excitación. Ésto, a diferencia del enfoque tradicional donde la excitación sísmica es distribuida en todos los pisos en el mismo instante de tiempo (Chopra, 1995). Además, la discretización del modelo produce una matriz propagadora estable, característica útil para la convergencia del observador

adaptable. En cuanto al diseño del observador adaptable, éste se basa únicamente en mediciones de aceleración, no necesita de transformación de coordenadas, utiliza el método de Mínimos Cuadrados recursivos normalizados con factor de olvido y un esquema de proyección paramétrica para lograr una mejor convergencia. Además, el esquema de identificación propuesto emplea una nueva parametrización basada en filtros integrales lineales, que elimina las perturbaciones constantes y atenúa el ruido de medición, así como los efectos de dispersión. El observador adaptable propuesto tiene propiedades analíticas que lo hacen robusto a perturbaciones constantes y a ruido de medición. Por esta razón, puede convertirse en una herramienta fiable para el diagnóstico y localización de daños, comparando los parámetros actuales con otros de referencia. Ésto proporciona una base para la localización del daño en la etapa más temprana. Además, también se han estimado los desplazamientos y velocidades no medibles. La proyección paramétrica en el esquema de identificación garantiza una estimación estable del modelo. Hay que tener en cuenta que, si la discretización se realiza en grupos de pisos, el número de parámetros a identificar se puede reducir aún más. En cambio, se pueden colocar sensores adicionales si se desean resultados más refinados. Además, también se han superado los problemas de reflexiones múltiples producidas por señales aleatoria y complejas, evitando utilizar técnicas como la interferometría o convolución. La eficiencia del algoritmo se demuestra a través de resultados experimentales en un edificio de cinco pisos de escala reducida. Asimismo, se han obtenido los siguientes logros:

- Este trabajo proporciona mejoras a los planteamientos tradicionales sobre el monitoreo de salud estructural basados en el enfoque de propagación de ondas, donde el indicador de daño se define generalmente por un cambio relativo de la velocidad de propagación y del amortiguamiento, teniendo éxito en la detección y localización de daño estructural con resultados experimentales satisfactorios.
- No se había propuesto un esquema para estimar, simultáneamente y en tiempo real, el estado interno y los parámetros estructurales de edificios basados en el enfoque de propagación de onda; sólo se habían propuesto esquemas que operan fuera de línea y en el dominio de la frecuencia.
- Se ha validado experimentalmente que la presencia de daño en los edificios produce una reducción en la velocidad de propagación del movimiento sísmico, y que a la vez genera una reducción de la rigidez. A diferencia del coeficiente de amortiguamiento, que tiende a incrementar de manera aleatoria. De manera que tomando en cuenta ambos parámetros y los de un modelo referencia, se ha desarrollado un procedimiento de localización de daño. Con esto se muestra que el parámetro de velocidad de propagación es un buen indicador de la presencia de daño.
- Los resultados experimentales confirman que el observador adaptable propuesto es bastante prometedor para aplicaciones en tiempo real, además, éste podría trabajar en paralelo con algoritmos de control para mitigar el movimiento en edificios a causa de sismos.

Por otra parte, dadas las condiciones de un edificio real, es conveniente probar el algoritmo desarrollado con datos e información de campo obtenida a partir de edificios instrumentados. Ésto permitiría evaluar el rendimiento del algoritmo propuesto y en el peor de los casos, se estaría en la posibilidad de ajustar los umbrales para localización de daño.

Finalmente, en una tercera etapa se han presentado los resultados de caracterización de la pirámide del Sol, empleando la técnica de cocientes espectrales  $H/V$ . Se han obtenido los valores de la frecuencia características del suelo y de la estructura, respectivamente, así como la amplificación relativa promedio asociada al punto de registro. A partir de estos, se ha observado la presencia de irregularidades geométricas en el edificio histórico. Además, la frecuencia fundamental del suelo presenta variaciones dependiendo del punto de medición, esto se debe principalmente al contraste de impedancias entre el basamento y la superficie. Asimismo suponen un suelo construido con diversos materiales y en cantidades diferentes, que generan distintas rigideces del terreno.

## 6.1. Trabajo futuro

Finalmente, algunas formas en que podría extenderse este trabajo de tesis son:

1. Validar de manera experimental y con datos de campo, el desempeño del algoritmo de identificación automática que calcula los tiempos de propagación de onda de manera fuera de línea.
2. Replantear las condiciones de frontera para que el estimador de estados sea completamente observable y de rango completo. En la literatura existen técnicas para aproximar la condición de frontera usando diferencias finitas que podrían resolver el problema. En otros casos, se podría explorar con otras técnicas como elemento finito, que evita perder rango del sistema aunque la complejidad para resolver las ecuaciones resultantes incrementa ligeramente.
3. Estudiar otras formas de discretización con malla no uniforme, que permitan reducir el número de mediciones de aceleración y que se pueda emplear para modelos reducidos. Esto conllevaría a probar la estabilidad del modelo y posiblemente un rediseño del observador adaptable, para encontrar las condiciones y restricciones bajo las que operaría satisfactoriamente.
4. Para el caso del observador adaptable, sería conveniente extender el problema de detección y localización de daño, a la clasificación y cuantificación del mismo. Por consiguiente, sería conveniente usar datos de edificios reales con diferentes escenarios de daño, como son la pérdida de rigidez, masa y/o geometría.
5. Mejorar el algoritmo de localización de daño empleando umbrales adaptables y probar su desempeño de manera experimental.
6. Probar el desempeño del algoritmo con otro tipo de estimador de estados.

7. Extender los resultados de localización de daño para edificios con dos y tres grados de libertad por piso. Aprovechando las propiedades de los métodos bajo el enfoque de propagación de onda, se espera reducir las dimensiones de las matrices de estados y las dimensiones de los propagadores, considerando que la propagación es únicamente ascendente y descendente en dirección vertical y no en las direcciones horizontales. Por consiguiente el costo computacional sería menor.
8. En cuanto a la pirámide del Sol, es necesario implementar herramientas computacionales como el IBEM con el fin de recuperar las propiedades mecánicas de aquella. En el mejor de los casos se podría recurrir a técnicas como la tomografía con el fin de caracterizar de manera detallada, aquellas propiedades que conforman la pirámide y el suelo en el que se encuentra construida.



# Bibliografía

- Akella, M. R. y Subbarao, K. (2005). A novel parameter projection mechanism for smooth and stable adaptive control. *Systems and Control Letters*, 54(1):43–51.
- Aki, K. y Richards, P. (2002). *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2nd edition.
- Angeles-Cervantes, J. y Alvarez-Icaza, L. (2011). Identification of seismically excited buildings with two orthogonal horizontal components. *Journal of Vibration and Control*, 17(6):881–901.
- Arai, H. y Tokimatsu, K. (2004). S-wave velocity profiling by inversion of microtremor H/V spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(1):53–63.
- Aslak, T. y Ragnar, W. (2005). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*. Springer, second edition.
- Balmes, E., Basseville, M., Mevel, L., Nasser, H., y Zhou, W. (2008). Statistical model-based damage localization: A combined subspace-based and substructuring approach. *Structural Control and Health Monitoring*, 15:857–875.
- Bastin, G. y Gevers, M. R. (1988). Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):650–658.
- Bensen, G., Ritzwoller, M., Barmin, M., Levshin, A., Lin, F., Moschetti, M., Shapiro, N., y Yang, Y. (2007). Processing seismic ambient noise data to obtain reliable broad-band surface wave dispersion measurements. *Geophysical Journal International*, 169(3):1239–1260.
- Boore, D. M. y Bommer, J. J. (2005). Processing of strong-motion accelerograms: needs, options and consequences. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25(2):93–115.
- Calvi, G., Pinho, R., y Crowley, H. (2006). State-of-the-knowledge on the period elongation of RC buildings during strong ground shaking. *Proceedings of the First European Conference of Earthquake Engineering and Seismology*, pp. 1–10, Geneva, Switzerland.
- Chakraverty, S. (2007). Identification of structural parameters of two-storey shear building by the iterative training of neural networks. *Architectural Science Review*, 50(4):380–384.
- Chang, P. C., Flatau, A., y Liu, S. (2003). Review paper: Health monitoring of civil infrastructure. *Structural Health Monitoring*, 2(3):257–267.

- Cheng, M.-B., Radisavljevic, V., y Su, W.-C. (2010). Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 47(2):381–387.
- Chopra, A. (1995). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.
- Chávez-García, F., Dominguez, T., Rodríguez, M., y Pérez, F. (2007). Site effects in a volcanic environment: A comparison between HVSR and array techniques at Colima, México. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97:591–604.
- Clinton, J. F., Bradford, S. C., Heaton, T. H., y Favela, J. (2006). The observed wander of the natural frequencies in a structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96:237–257.
- Concha, A. (2013). *Identificación de sistemas mecánicos y biológicos*. PhD thesis, Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Concha, A., Alvarez-Icaza, L., y Garrido, R. (2016). Simultaneous parameter and state estimation of shear building. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 81:318–338.
- Curadelli, R., Riera, J., Ambrosini, D., y Amani, M. (2008). Damage detection by means of structural damping identification. *Engineering Structures*, 30:3497–3504.
- Das, S., Saha, P., y Patro, S. (2016). Vibration-based damage detection techniques used for health monitoring of structures: a review. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 6(3):477–507.
- Doebbling, S. W., Farrar, C. R., y Goodman, R. S. (1997a). Effects of measurement statics on the detection of damage in the Alamosa Canyon bridge. *Proceedings 15th International Modal Analysis Conference*, pp. 919–929, Orlando, FL.
- Doebbling, S. W., Farrar, C. R., y Prime, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, 30(2):91–105.
- Doebbling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., y Shevitz, D. W. (1997b). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review. *Los Alamos National Laboratory. Report LA-13070-MS*, pp. 1–136.
- Ebrahimian, M., Rahmani, M., y Todorovska, M. I. (2014). Nonparametric estimation of wave dispersion in high-rise buildings by seismic interferometry. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 43:2361–2375.
- Edwadia, F. y Trifunac, M. (1973). Comparison of earthquake and microtremor ground motion in El Centro, California. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 63(4):1227–1253.

- Farrar, C., Doebling, S. W., Cornwell, P., y Straser, E. G. (1997). Variability of model parameter measured on the Alamosa Canyon Bridge. *Proceedings of SPIE- The International Society for Optical Engineering*, pp. 1–34.
- Farrar, C. R., Doebling, S. W., y Nix, D. A. (2001). Vibration-based structural damage identification. *Philosophical Transaction Of The Royal Society*, 359(1778):131–149.
- Farrar, C. R. y Worden, K. (2007). An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transaction Of The Royal Society*, 365:303–315.
- Fukuwa, N. y Matsushima, S. (1994). Wave dispersion and optimal mass modeling for one dimensional periodic structure. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23:1165–1180.
- Garnier, H., Mensier, M., y Richard, A. (2010). Continuous-time model identification from sampled data: Implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13):1337–1357.
- Garrido, R. y Concha, A. (2011). Parametric identification of seismically excited building using acceleration measurements. *Proceedings of the 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 38–43.
- Garrido, R. y Concha, A. (2012). Estimation of the parameters of structures using acceleration measurements. *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on System Identification*, 45(16):1791–1796.
- Gavin, H. P., Morales, R., y Reilly, K. (1998). Drift-free integrators. *Review of Scientific Instruments*, 69(5):2171–2175.
- Ge, Z. y Chen, X. (2007). Wave propagation in irregularly layered elastic models: A boundary element approach with a global reflection/transmission matrix propagator. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97(3):1025–1031.
- Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3d elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(4):1091–1106.
- Haberman, R. (1983). *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, second edition.
- Hall, F. y Wang, Y. (2009). Elastic wave modeling by an integrated finite difference method. *Geophysical Journal International*, 177:104–114.
- Haskell, N. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1):17–34.
- Herak, M. y Herak, D. (2010). Continuous monitoring of dynamic parameters of the DGFSM building (Zagreb, Croatia). *Bulletin of Earthquake Engineering*, 8(3):657–669.

- Hibbeler, R. C. (2011). *Mechanics of Materials*. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River. Eighth edition.
- Hongping, Z., Lin, L., y Xiao-Qiao, H. (2011). Damage detection method for shear building using the changes in the first mode shape slopes. *Computer and Structures*, 89(9-10):733–743.
- Huang, C., Hung, S., Wen, C., y Tu, T. (2002). A neural network approach for structural identification and diagnosis of a building from seismic response data. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32:187–206.
- Huang, C. y Su, W. (2007). Identification of modal parameters of a time invariant linear system by continuous wavelet transformation. *Mechanical System and Signal Processing*, 21:1642–1664.
- Huang, Q., Xu, Y., Li, J., Su, Z., y Liu, H. (2012). Structural damage detection of controlled building structures using frequency response function. *Journal of Sound and Vibration*, 331(15):3476–3492.
- Hwang, H. y Kim, C. (2004). Damage detection in structures using a few frequency response measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1-2):1–14.
- Ioannou, P. y Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Ioannou, P. y Sun, J. (1989). *Robust Adaptive Control*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.
- Ivanović, S., Trifunac, M., Novikova, E., Gladkov, A., y Todorovska, M. (2000). Ambient vibration tests of a seven-story reinforced concrete building in Van Nuys, California, damaged by the 1994 Northridge earthquake. *Solid Dynamic and Earthquake Engineering*, 19:391–411.
- Jeong-Tae, K., Yeon-Sun, R., Hyun-Man, C., y Norris, S. (2003). Damage identification in beam-type structures: Frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures*, 25:57–67.
- Jiménez, R. y Alvarez-Icaza, L. (2007). A real-time estimation scheme for building with intelligent dissipation devices. *Mechanical System and Signal Processing*, 12:2427–2440.
- Jiménez-Fabián, R. y Alvarez-Icaza, L. (2010). An adaptive observer for shear building with an energy-dissipation device. *Control Engineering Practice*, 18:331–338.
- Kanai, K. (1957). The requisite conditions for predominant vibration of ground. *Bull. Earthquake Res. Ins. Tokio Univ.*, 31:457.
- Kausel, E. (2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge University Press. New York.
- Kausel, E. y Manolis, G. (2000). *Wave Motion in Earthquake Engineering*. WIT Press.

- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River. Third edition.
- Khanmirza, E., Khaji, N., y Majd, V. J. (2011). Model updating of multistory shear building for simultaneous identification of mass, stiffness and damping matrices using two different soft-computing methods. *Expert System with Applications*, 38:5320–5329.
- Kim, J.-T., Ryu, Y.-S., Cho, H.-M., y Stubbs, N. (2003). Damage identification in beam-type structures: Frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures*, 25:57–67.
- Konno, K. y Ohmachi, T. (1998). Ground-motion characteristics estimated from spectral ratio between horizontal and vertical components of microtremor. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(1):228–241.
- Krstic, M. y Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary Control of PDEs, A Course on Backstepping Designs*. SIAM.
- Kuwabara, M., Yoshitomi, S., y Takewaki, I. (2013). A new approach to system identification and damage detection of high-rise buildings. *Structural Control and Health Monitoring*, 20:703–727.
- Lei, Y., Jiang, Y., y Xu, Z. (2012). Structural damage detection with limited input and output measurement signals. *Mechanical System and Signal Processing*, 28:229–243.
- Lermo, L. y Chávez-García, F. (1993). Site effect evaluation using spectral ratios with only one station. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 83:1574–1594.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- Leyton, F., Montalva, G., y Ramírez, P. (2011). Effects of surface geology on seismic motion. *Proceedings of the 4th IASPEI / IAEEE International Symposium*, pp. 1–10, University of California Santa Barbara.
- Li-Ling, H., Lee-Hui, H., y Wun-Yan, J. (2009). Identification and variation of storey lateral stiffness in buildings. *Structural Control and Health Monitoring*, 16:200–222.
- Lomax, H., Pulliam, T. H., y Zingg, D. W. (1999). *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Springer.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 16(6):596–602.
- Lus, H., Betti, R., y Longman, R. (1999). Identification of linear structural systems using earthquake-induced vibration data. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 28:1449–1467.

- Ma, J. y Pines, D. J. (2003). Damage detection in a building structure model under seismic excitation using dereverberated wave mechanics. *Engineering Structures*, 25(3):385–396.
- Maia, N., Silva, J., Almas, E., y Sampaio, R. (2003). Damage detection in structures: from mode shape to frequency response function methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(3):489–498.
- Makarios, T. K. (2012). Identification on the mode shapes of spatial tall multi-storey buildings due to earthquake: The new modal time-histories method. *The Structural Design of Tall and Special Building*, 21(9):621–641.
- McCormac, J. y Brown, R. (2006). *Design of Reinforced Concrete (8th Ed.)*. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, USA,.
- Michel, C. y Gueguen, P. (2010). Time-frequency analysis of small frequency variations in civil engineering structures under weak and strong motions using a reassignment method. *Structural Health Monitoring*, 9(2):159–171.
- Mikael, A., Gueguen, P., Bard, P.-Y., Roux, P., y Langlais, M. (2013). The analysis of long-term frequency and damping wandering in buildings using the random decrement technique. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 103(1):236–246.
- Moczo, P., Robertssonb, J. O., y Eisnerc, L. (2007). The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation. *Advances in Geophysics*, 48:421–516.
- Molina, J. C. (2015). *Respuesta sísmica de valles aluviales tridimensionales con métodos simplificados*. Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013a). Identificación de frecuencias de vibración en edificios mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 290–295, Ensenada, BC.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013b). Identificación paramétrica tridimensional de un edificio mediante ruido ambiental. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 213–218, Ensenada, BC.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2013c). Identification of frequencies of vibration in buildings with wave travel times. *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 69–74, Ciudad de México, D.F.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014a). Building stiffness estimation by wave traveling times. *ASME 2014 Dynamic system and control conference*, pp. 1–8, San Antonio, TX, USA.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014b). Identificación de rigidez en los entresijos de un edificio mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático*, pp. 48–53, Cancún, Quintana Roo.

- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2014c). On-line environmental noise driven 3-DOF per story parametric identification of a building. *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pp. 2022–2027, Antibes, Francia.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2015). Identificación paramétrica en línea de edificios mediante tiempos de viaje de onda. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 563–568, Cuernavaca, Morelos.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2016a). Identificación paramétrica en tiempo real de edificios mediante propagación de ondas. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 1–6, Querétaro.
- Morales-Valdez, J. y Alvarez-Icaza, L. (2016b). Observador adaptable en tiempo real de edificios mediante propagación de ondas. *Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático*, pp. 618–623, Medellín, Colombia.
- Morales-Valdez, J., Alvarez-Icaza, L., y Concha, A. (2017a). On-line adaptive observer for buildings based on wave propagation approach. *Aceptado para publicación en el Journal of Vibration and Control*, pp. 1–23.
- Morales-Valdez, J., Alvarez-Icaza, L., y Sánchez-Sesma, F. J. (2017b). Shear building stiffness estimation by wave traveling time analysis. *Aceptado para publicación en Structural Control and Health Monitoring*, pp. 1–26.
- Mulargia, F. (2012). The seismic noise wavefield is not diffuse. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131:2853–2858.
- Nair, K. K., Kiremidjian, A. S., y Law, K. H. (2006). Time series-based damage detection and localization algorithm with application to the ASCE benchmark structure. *Journal of Sound and Vibration*, 291:349–368.
- Nakamura, Y. (1989). A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *Quarterly Report of RTRI*, 30(1):25–33.
- Nayeri, R. D., Masri, S. F., Ghanem, R. G., y Nigbor, R. L. (2008). A novel approach for the structural identification and monitoring of a full-scale 17-story building based on ambient vibration measurement. *Smart Materials and Structures*, 17(2):1–19.
- Nogoshi, M. y Igarashi, T. (1971). On the amplitude characteristics of microtremors (part 2). *Journal of the Seismological Society of Japan*, 24:26–40.
- Noh, H. Y., Nair, K. K., Lignos, D. G., y Kiremidjian, A. S. (2011). Use of wavelet-based damage-sensitive features for structural damage diagnosis using strong motion data. *Journal of Structural Engineering*, 137(10):1215–1228.

- Obenchain, M. B. y Cesnik, C. E. (2013). Producing accurate wave propagation time histories using the global matrix method. *Smart Material and Structures*, 22(12):1–11.
- Pandey, A. y Bismas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of Sound and Vibration*, 169(1):3–17.
- Pandey, A., Bismas, M., y Samman, M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shape. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332.
- Paz, M. (1997). *Structural Dynamics: Theory and Computation*. Fourth Edition, New York, NY, Chapman & Hall, International Thompson Publishing.
- Pellicer, M. y Solà-Morales, J. (2004). Analysis of a viscoelastic spring-mass model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 294:687–698.
- Pérez-Ruiz, J., Luzón, F., y García-Jerez, A. (2005). Simulation of an irregular free surface with a displacement finite-difference scheme. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 95(6):2216–2231.
- Pina-Flores, J., Matsushima, S., Sanchez-Sesma, F. J., Molina-Villegas, J. C., Morales-Valdez, J., Saenz-Castillo, M. A., Sierra-Alvarez, C. A., y Kawase, H. (2017). Imaging of heterogeneities in the earth with seismic scattered waves and ambient noise HV Spectral Ratio (HVSr) for preliminary seismic characterization of Sun Pyramid in Teotihuacán, México. *Sometido al IASPEI Symposium*, Kobe, Japón.
- Pujol, J. (2003). *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press. New York.
- Rahai, A., Bakhtiari-Nejad, F., y Esfandiari, A. (2006). Damage assessment of structure using incomplete measure mode shape. *Structural Control and Health Monitoring*, 14:808–829.
- Rahmani, M. (2014). *Wave method for structural system identification and health monitoring of buildings based on layered shear beam model*. PhD thesis, University of Southern California.
- Rahmani, M. y Todorovska, M. I. (2013). 1D system identification of buildings during earthquakes by seismic interferometry with waveform inversion of impulse responses —method and application to Millikan library. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47:157–174.
- Rahmani, M. y Todorovska, M. I. (2014). 1D System identification of a 54-story steel frame building by seismic interferometry. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 43(4):627–640.
- Ramm, A. (2001). An inverse problem for the heat equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 264:691–697.
- Roux, P., Guéguen, P., Baillet, L., y Hamze, A. (2014). Structural-change localization and monitoring through a perturbation-based inverse problem. *Acoustical Society of America*, 136(5):2586–2597.

- Safak, E. (1999). Wave-propagation formulation of seismic response of multistory buildings. *Journal of Structural Engineering*, 12:426–437.
- Safak, E. y Hudnut, K. (2006). Real-time structural monitoring and damage detection by acceleration and GPS sensors. *Proceedings of the 8th US National Conference on Earthquake Engineering*, pp. 1–10, San Francisco, California.
- Sagara, S. y Zhao, Z.-Y. (1990). Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems. *Automatica*, 26(1):63–74.
- Salawu, O. (1997). Detection of structural damage thorough changes in frequency: a review. *Engineering Structures*, 19(9):718–723.
- Salinas, V., Luzón, F., Gacía-Jerez, A., Sánchez-Sesma, F., Kawase, H., Matsushima, S., Suarez, M., Cuellar, A., y Campillo, M. (2014). Using diffuse field theory to interpret the H/V spectral ratio from earthquake records in Cibeles seismic station, México City. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 104(2):995–1001.
- Sampaio, R. y Maia, N. (2009). Strategies for an efficient indicator of structural damage. *Mechanical System and Signal Processing*, 23(6):1855–1869.
- Sánchez-Sesma, F. J., Rodríguez, M., Iturrarán-Viveros, U., Luzón, F., Campillo, M., Margerin, L., Garcia-Jerez, A., Martha Suarez, M. A. S., y Rodríguez-Castellanos, A. (2011). A theory for microtremor H/V spectral ratio: Application for layered medium. *Geophysical Journal International*, 186:221–225.
- Sastry, S. (1989). *Adaptive Control Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Shih-Yu, C. y Shih-Chieh, L. (2009). Application of real time adaptive identification techniques on damage detection and structural health monitoring. *Structural Control and Health Monitoring*, 16:154–177.
- Smyshlyaev, A. y Krstic, M. (2004). Closed-form boundary state feedback for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(12):2185 – 2202.
- Smyshlyaev, A. y Krstic, M. (2010). *Adaptive Control of Parabolic PDEs*. Princeton University Press, first edition.
- Sánchez-Sesma, F. y Campillo, M. (1991). Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6):2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F. y Luzón, F. (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S, and Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(1):269–284.

- Snieder, R. y Safak, E. (2006). Extracting the building response using seismic interferometry: Theory and application to the Millikan Library in Pasadena, California. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(2):586–598.
- Sohn, H. y Farrar, C. R. (2001). Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals. *Smart Materials and Structures*, 10(3):446–451.
- Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F. M., Shunk, D. D., Stinemates, D. W., Nadler, B. R., y Czarnecki, J. J. (2003). A review of structural health monitoring literature: 1996-2001. *Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS*, pp. 1–131.
- Spanos, P., Failla, G., Santini, A., y Pappatico, M. (2006). Damage detection in euler-bernuolli beams via spatial wavelet analysis. *Structural Control and Health Monitoring*, 13:472–487.
- Sugiyama, S., Sugiyama, N., y Sarabia, A. (2014). El interior de la Pirámide del Sol en Teotihuacán. *Arqueología Mexicana*, 25:24–29.
- Taha, M. R. y Lucero, J. (2005). Damage identification for structural health monitoring using fuzzy pattern recognition. *Engineering Structures*, 27:1774–1782.
- Todorovska, M., Ivanović, S., y Trifunac, M. (2001). Wave propagation in a seven-story reinforced concrete building II. Observed wavenumbers. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 21(3):225–236.
- Todorovska, M. I. y Rahmani, M. T. (2013). System identification of building by wave travel time analysis and layered shear beam models-spatial resolution and accuracy. *Structural Control and Health Monitoring*, 20(5):686–702.
- Todorovska, M. I. y Trifunac, M. D. (2007). Earthquake damage detection in the Imperial County Services Building I: The data and time-frequency analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27:564–576.
- Todorovska, M. I. y Trifunac, M. D. (2008a). Earthquake damage detection in the Imperial County Services Building III: Analysis of wave travel time via impulse response functions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28(5):387–404.
- Todorovska, M. I. y Trifunac, M. D. (2008b). Impulse response analysis of the Van Nuys 7-storey hotel during 11 earthquakes and earthquake damage detection. *Structural Control and Health Monitoring*, 15:90–116.
- Trifunac, M., Ivanović, S., y Todorovska, M. (2003). Wave propagation in a seven-story reinforced concrete building: III. Damage detection via changes in wavenumbers. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 23(1):65–75.
- Trifunac, M. D. (1972). Comparisons between ambient and forced vibration experiments. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1:133–150.

- Vidal, F., Navarro, M., Aranda, C., y Enomoto, T. (2014). Changes in dynamic characteristics of Lorca RC buildings from pre- and post-earthquake ambient vibration data. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 12(5):2095–2110.
- Vossen, R. V., Robertsson, J. O. A., y d Chris H. Chapman (2002). Finite-difference modeling of wave propagation in fluid-solid configuration. *Geophysics*, 67(2):618–624.
- Wang, Y. (2015). The Ricker wavelet and the Lambert W function. *Geophysical Journal International*, 200:111–115.
- Yam, L., Yan, Y., y Jiang, J. (2003). Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network identification. *Composite Structures*, 60:404–412.
- Yang, J. N. y Huang, H. (2007). Sequential non-linear least-square estimation for damage identification of structures with unknown input and unknown output. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 42(5):789–801.
- Yang, J. N. y Lin, S. (2005). Identification of parametric variations of structures based on least squares estimation and adaptive tracking technique. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(3):290–298.
- Zapico, J., Gonzáles, M., y k. Worden (2003). Damage assesment using neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):119–125.
- Zhang, R. R., Snieder, R., Gargab, L., y Seibi, A. (2011). Modeling of seismic wave motion in high-rise buildings. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26:520–527.
- Zhang, Z. (1994). Error study of bridge tests for the purpose of structure identification. *Proceedings of the 12th International Modal Analysis*, volume 2251, pp. 433–441.
- Zhang, Z. y Aktan, A. (1995). The damage indices for the constructed facilities. *Proceeding of IMAC13*, pp. 1520–1529.



## Apéndice A

# Resultados de simulación de un edificio de 3 pisos

A continuación se presentan los resultados de simulación de un edificio de tres pisos tomado de la literatura con el objetivo de evaluar el algoritmo de identificación propuesto bajo el enfoque de propagación de ondas. El edificio se caracteriza por sus propiedades homogéneas e isotropas, está formado por cuatro marcos y cuatro columnas con sección transversal cuadrada de 0.5 m en cada lado, construido de concreto reforzado, con características como las que se presentan en la tabla A.1. Algunos de estos parámetros fueron obtenidos empleando ecuaciones estándares en mecánica de materiales (ver sección A.1). Los tiempo de viaje de onda son obtenidos y con ello se calculan los valores de las frecuencias de vibración.

| Parámetros                  | Descripción               |
|-----------------------------|---------------------------|
| $W_v = 2,4 \frac{t_f}{m^3}$ | Peso volumétrico          |
| $E = 6300 \frac{t_f}{m^2}$  | Módulo de elasticidad     |
| $\nu = 0,25$                | Coefficiente de Poisson   |
| $fc = 250 \frac{kg}{cm^2}$  | Factor de carga           |
| $h = 3 \text{ m}$           | Altura de entrepiso       |
| $H = 9 \text{ m}$           | Altura total del edificio |

Tabla A.1: Características del edificio de tres pisos de concreto reforzado

El modelo empleado es excitado con un pulso de Ricker, el cual se aplica únicamente en la base del edificio y mediante el método de Thompson-Haskell se logra propagar del movimiento sísmico en cada uno de los pisos. Los tiempos de propagación de onda del modelo son recuperados empleando la metodología propuesta en el capítulo 2. La Fig. A.1(a) muestra la respuesta estructural obtenida, donde el pulso más destacado es aquel que se transmite a través de todos los pisos hasta llegar al techo por primera vez con un tiempo aproximado de 0.09 s. Luego es reflejado y propagado de regreso hacia el nivel de suelo. También se puede observar que el tiempo de propagación de entrepiso es de aproximadamente 0.03 s. Detalles de estos se pueden apreciar en la Fig. A.1(b).

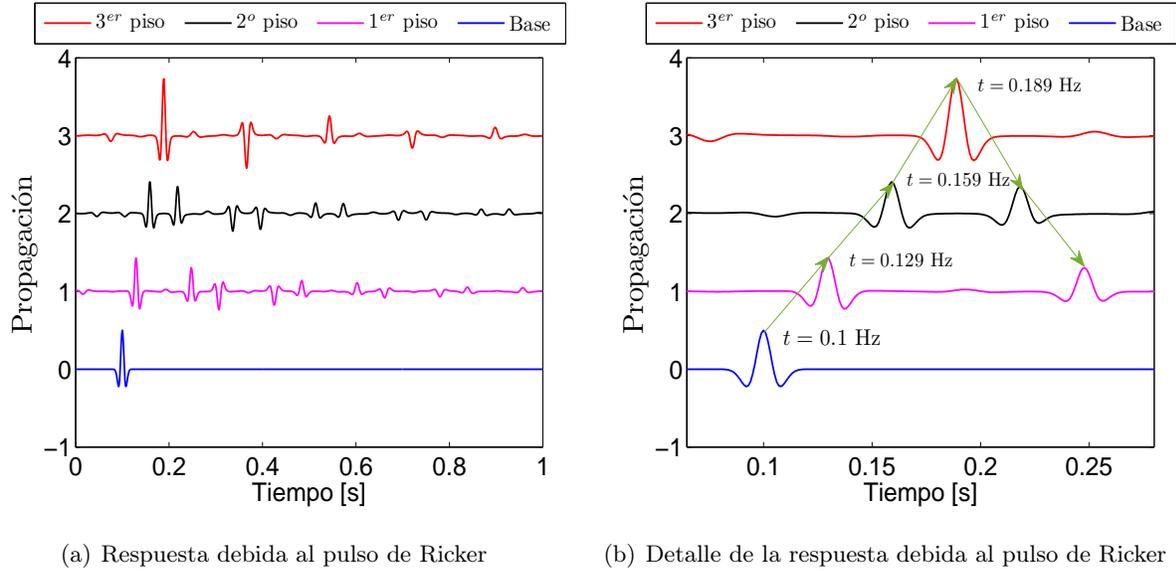


Figura A.1: Respuesta estructural

En la tabla A.2, se presentan los tiempos de viaje de onda calculados analíticamente y los identificados a partir de los resultados de simulación, que si bien no convergen a los valores reales son bastante cercanos a ellos, con un error de  $\pm 1.7\%$ .

| Capa                            | Analítico $\tau_i$ | $\hat{\tau}_i$ | $\Delta\hat{\tau}_i/\tau$ (%) |
|---------------------------------|--------------------|----------------|-------------------------------|
| 1                               | 0.0295             | 0.030          | -1.695                        |
| 2                               | 0.0295             | 0.030          | -1.695                        |
| 3                               | 0.0295             | 0.029          | 1.695                         |
| $\Sigma_{j=1}^3 \tau_t = 0.089$ |                    |                |                               |

Tabla A.2: Tiempos de viaje de onda identificados, con parámetros:  $h = 3m$ ,  $\rho = 0.2446(\frac{t_f s^2}{m^4})$ ,  $\beta = 101.5(m/s)$ , para las tres capas

Una vez obtenido el tiempo de propagación total  $\tau_t$  que demora el pulso de Ricker para ser transmitido de la base hasta llegar al techo por primera vez, se calcula la frecuencia fundamental de la estructura usando la expresión siguiente:

$$f_1 = \frac{1}{4\tau_t} \quad (\text{A.1})$$

y el resto de las frecuencias de vibración mediante:

$$f_j = (2j - 1) \frac{1}{4\tau_t}, \quad j = 2, 3, 4, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

La tabla A.3 contiene los valores de las frecuencias calculadas analíticamente y las obtenidas a partir de los resultados de simulación empleando las Ec. (A.1) y (A.2). Se puede apreciar que las

frecuencias identificadas alcanzan el valor esperado en todos los casos con un error menor al  $\pm 1\%$ , lo que es consistente con los valores obtenidos al graficar la función de transferencia correspondiente a la respuesta en la superficie libre y el movimiento sísmico en la base del edificio. Esto se puede apreciar en la Fig. A.2

| Análítica $f_i$ | identificada $\hat{f}_i$ | $\Delta \hat{f}_i / f$ (%) |
|-----------------|--------------------------|----------------------------|
| 2.8194          | 2.8090                   | 0.36                       |
| 8.4583          | 8.4270                   | 0.37                       |
| 14.0972         | 14.0449                  | 0.37                       |

Tabla A.3: Frecuencias de vibración identificadas

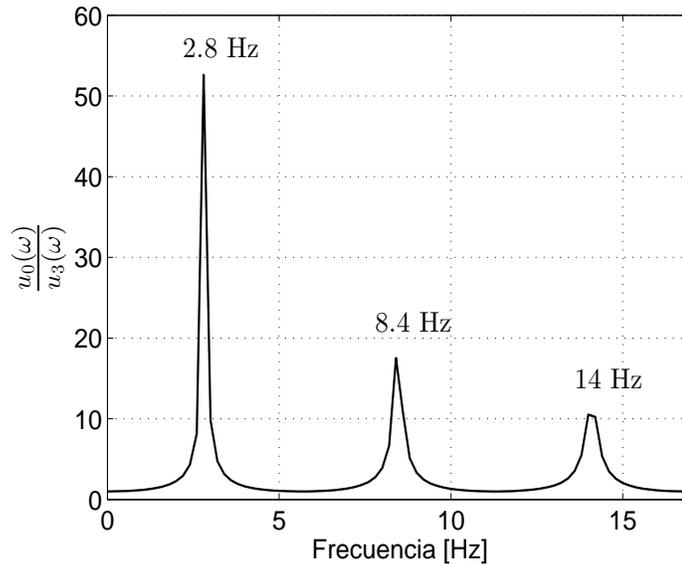


Figura A.2: Frecuencias de vibración identificadas a partir de  $u_0(\omega)/u_3(\omega)$

En este modelo resulta fácil implementar la metodología propuesta para determinar las frecuencias de vibración, pues se trata de un medio homogéneo, donde todos los estratos/pisos tienen las mismas propiedades, simulando un medio continuo que no presenta dificultad para su caracterización de manera directa, pues no se producen efectos de reflexión y dispersión en las interfaces intermedias. Para medios estratificados con propiedades heterogéneas, resulta difícil emplear la Ec. (A.2), debido a que se tendrían diferentes valores de  $\tau$  y diferentes efectos de reflexión. Además, la frecuencia fundamental es un parámetro global que no proporciona información del elemento dañado. Cambios en ella no siempre involucran la presencia de daño. Por esa razón se propone investigar cambios en la rigidez estructural a partir del tiempo de propagación, para obtener características locales de cada piso, como se presenta en la sección 2.3.

## A.1. Fórmulas empleadas

A partir de los valores presentados en la tabla A.1, el módulo de elasticidad se calcula como

$$E = 10000\sqrt{fc} \quad (\text{A.3})$$

la densidad del material como

$$\rho = \frac{W_v}{g_d}, \quad g_g = 9.81 \quad (\text{A.4})$$

A partir de las Ecs. (2.33) y (2.34), se obtiene el período fundamental del edificio

$$T_1 = \frac{4H}{\beta}, \quad \text{donde} \quad f_1 = \frac{\beta}{4H} \quad (\text{A.5})$$

y el resto de las frecuencias de vibración

$$T_j = \frac{4H}{(2j-1)\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}}, \quad \text{donde} \quad f_j = \frac{1}{T_j}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Deducción de $\acute{S}$ y $\grave{S}$

Sean las Ecs. (2.19) y (2.20) quienes definen los desplazamientos en las interfaces. Por simplicidad, se considera

$$S_a = \acute{S}(\omega), \quad S_b = \grave{S}(\omega), \quad u_a = u(0, \omega) = u_{n-1}(\omega), \quad \text{y} \quad u_b = u(H, \omega) = u_n(\omega) \quad (\text{A.7})$$

Reescribiendo (2.19) y (2.20) en las nuevas coordenadas

$$u_a = S_a + S_b \quad (\text{A.8})$$

$$u_b = S_a \exp(i\kappa H) + S_b \exp(-i\kappa H) \quad (\text{A.9})$$

de la Ec. (A.8),  $S_a = (u_a - B)$ , sustituyéndola en (A.9)

$$u_b = (u_a - S_b) \exp(i\kappa H) + S_b \exp(-i\kappa H) \quad (\text{A.10})$$

$$u_b = u_a \exp(i\kappa H) + S_b [\exp(-i\kappa H) - \exp(i\kappa H)] \quad (\text{A.11})$$

despejando  $S_b$  de (A.11)

$$S_b = \frac{u_b - u_a \exp(i\kappa H)}{[\exp(-i\kappa H) - \exp(i\kappa H)]} = \frac{u_b - u_a \exp(i\kappa H)}{[\cos(\kappa H) - i \operatorname{sen}(\kappa H)] - [\cos(\kappa H) + i \operatorname{sen}(\kappa H)]} \quad (\text{A.12})$$

$$S_b = \frac{u_b - u_a \exp(i\kappa H)}{-2i \operatorname{sen}(\kappa H)} = i \frac{u_b - u_a \exp(i\kappa H)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.13})$$

sustituyendo (A.13) dentro de (A.8)

$$S_a = u_a - i \frac{u_b - u_a \exp(i\kappa H)}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} = \frac{2u_a \operatorname{sen}(\kappa H) - i[u_b - u_a \exp(i\kappa H)]}{2 \operatorname{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.14})$$

considerando que,  $\text{sen}(o) = \frac{\exp(io) - \exp(-io)}{2i}$

$$S_a = \frac{u_a[\exp(i\kappa H) - \exp(-i\kappa H)]}{2i \text{sen}(\kappa H)} + \frac{i[u_a \exp(i\kappa H) - u_b]}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.15})$$

$$S_a = i \frac{u_a \exp(-i\kappa H) - u_a \exp(i\kappa H)}{2 \text{sen}(\kappa H)} + i \frac{u_a \exp(i\kappa H) - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} = i \frac{u_a \exp(-i\kappa H) - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.16})$$

A partir de las Ecs. (A.16) y (A.13), se encuentran las soluciones (2.21) y (2.22), respectivamente, tomando en cuenta las coordenadas originales en la Ec. (A.7).

### A.3. Deducción de la Ec. (2.24)

Considerado que,  $u_z = u(z, \omega)$  y retomando el cambio de variable (A.7), la Ec. (2.23) se puede reescribir como

$$u_z = i \frac{u_a \exp(-i\kappa H) - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} \exp(i\kappa z) - i \frac{u_a \exp(i\kappa H) - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} \exp(-i\kappa z) \quad (\text{A.17})$$

tomando en cuenta que,  $\exp(\pm io) = \cos(o) \pm i \sin(o)$

$$u_z = i \frac{u_a[\cos(\kappa H) - i \text{sen}(\kappa H)] - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} [\cos(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa z)] \quad (\text{A.18})$$

$$- i \frac{u_a[\cos(\kappa H) + i \text{sen}(\kappa H)] - u_b}{2 \text{sen}(\kappa H)} [\cos(\kappa z) - i \text{sen}(\kappa z)]$$

$$u_z = i \frac{u_a[\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) + i \cos(\kappa H) \text{sen}(\kappa z) - i \text{sen}(\kappa H) \cos(\kappa z) + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)]}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{-u_b[\cos(\kappa z) + \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$- i \frac{u_a[\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) - i \cos(\kappa H) \text{sen}(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa H) \cos(\kappa z) + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$\frac{-u_b[\cos(\kappa z) - \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$u_z = i \frac{u_a[\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) - i[\text{sen}(\kappa H) \cos(\kappa z) - \cos(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)] + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)]}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{-u_b[\cos(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$- i \frac{u_a[\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) + i[\text{sen}(\kappa H) \cos(\kappa z) - \cos(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)] + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$\frac{-u_b[\cos(\kappa z) - \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

considerando que,  $\text{sen}(o \pm \bar{o}) = \text{sen}(o) \cos(\bar{o}) \pm \cos(o) \text{sen}(\bar{o})$

$$u_z = i \frac{u_a [\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) - i \text{sen}(\kappa H - \kappa z) + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)] - u_b [\cos(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.21})$$

$$- i \frac{u_a [\cos(\kappa H) \cos(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa H - \kappa z) + \text{sen}(\kappa H) \text{sen}(\kappa z)] - u_b [\cos(\kappa z) - i \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$u_z = i \frac{u_a [\cos(\kappa H + \kappa z) - i \text{sen}(\kappa H - \kappa z)] - u_b [\cos(\kappa z) + i \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.22})$$

$$- i \frac{u_a [\cos(\kappa H + \kappa z) + i \text{sen}(\kappa H - \kappa z)] - u_b [\cos(\kappa z) - i \text{sen}(\kappa H)]}{2 \text{sen}(\kappa H)}$$

$$u_z = i \frac{[-2iu_a \text{sen}(\kappa H - \kappa z) - 2iu_b \text{sen}(\kappa z)]}{2 \text{sen}(\kappa H)} = \frac{u_a \text{sen}(\kappa H - \kappa z)}{\text{sen}(\kappa H)} + \frac{u_b \text{sen}(\kappa z)}{\text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.23})$$

considerando que,  $\text{sen}(o) = -\text{sen}(-o)$

$$u_z = \frac{-u_a \text{sen}(\kappa z - \kappa H)}{\text{sen}(\kappa H)} + \frac{u_b \text{sen}(\kappa z)}{\text{sen}(\kappa H)} \quad (\text{A.24})$$

La Ec. (2.24) es recuperada a partir de la Ec. (A.24), tomando en cuenta las coordenadas originales en (A.7).

## Apéndice B

# Demostraciones del capítulo 3

A continuación se presentan las pruebas que complementan el desarrollo teórico del capítulo 3.

### B.1. Demostración de la proposición 1

*Demostración.* Sea el modelo discretizado

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{p \times 1} \\ b \end{bmatrix} \ddot{u}_g$$

resulta conveniente tratar con mediciones relativas, para este propósito se introduce el siguiente cambio de variables

$$u_s = u - \iota u_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_s = \dot{u} - \dot{\iota} u_0 = v - \iota \dot{u}_0 = v_s \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_s = \dot{v} - \dot{\iota} v_0 = \dot{v} - \dot{\iota} \ddot{u}_g \quad (\text{B.1})$$

donde  $\iota = [1, 1, 1, \dots, 1]^T \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ . Tomando en cuenta la Ec. (B.1), la ecuación de onda con amortiguamiento de Kelvin discretizada puede ser reescrita como

$$\dot{v}_s = \beta_M^2 \Lambda u + \eta_M^2 \Lambda v + b \ddot{u}_g - \dot{\iota} \ddot{u}_g \quad (\text{B.2})$$

$$= \beta_M^2 \Lambda (u_s + \iota u_0) + \eta_M^2 \Lambda (v_s + \iota v_0) + b \ddot{u}_g - \dot{\iota} \ddot{u}_g \quad (\text{B.3})$$

$$= \beta_M^2 \Lambda u_s + \eta_M^2 \Lambda v_s + \beta_M^2 \Lambda \iota u_0 + \eta_M^2 \Lambda \iota v_0 - \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_g \\ \vdots \\ \ddot{u}_g \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (\text{B.4})$$

Observe que los términos  $\beta_M^2 \Lambda \iota u_0$  y  $\eta_M^2 \Lambda \iota v_0$  en la Ec. (B.4) siempre son nulos debido a que la suma de los elementos por filas dentro de las matrices  $\beta_M^2 \Lambda$  y  $\eta_M^2 \Lambda$  se cancelan, esto pasa debido a la estructura tridiagonal, es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1^2 & -2\beta_1^2 & \beta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & -2\beta_2^2 & \beta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1}^2 & -2\beta_{n-1}^2 & \beta_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n^2 & -\beta_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

de manera que la Ec. (B.4) es ahora de la forma

$$\dot{v}_s = \beta_M^2 \Lambda u_s + \eta_M^2 \Lambda v_s - \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_g \\ \vdots \\ \ddot{u}_g \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (\text{B.6})$$

que en espacio de estados, tiene la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} \\ \beta_M^2 \Lambda & \eta_M^2 \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{p \times 1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1} \ddot{u}_g \quad (\text{B.7})$$

Por otra parte, considerando que la primera entrada en los vectores  $u_s$  y  $v_s$  es 0, debido a que en la condición de frontera se satisface

$$u_{s(0)} = u_0 - u_0 = 0 \quad v_{s(0)} = v_0 - v_0 = 0 \quad \dot{v}_{s(0)} = \dot{v}_0 - \dot{v}_0 = 0, \quad (\text{B.8})$$

se obtiene un modelo reducido

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ l \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (\text{B.9})$$

$$z_r(t) = \begin{bmatrix} \beta_{Mr}^2 \Lambda_r & \eta_{Mr}^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r & v_r \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.10})$$

donde,  $u_r$ ,  $v_r$ ,  $\dot{v}_r$  y  $l$  fueron definidos en la Ec. (3.50), mientras la matriz  $\Lambda_r \in \mathcal{R}^{n \times n}$  lo fue en la Ec. (3.51). Observe que las matrices  $\beta_{Mr}^2$  and  $\eta_{Mr}^2 \in \mathcal{R}^{n \times n}$  tienen ahora la siguiente estructura

$$\beta_{Mr}^2 = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n^2 \end{bmatrix}, \quad \eta_{Mr}^2 = \begin{bmatrix} \eta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Definiendo las siguientes igualdades

$$\beta_{Mr}^2 \Lambda_r = -M^{-1}K, \quad \eta_{Mr}^2 \Lambda_r = -M^{-1}C \quad (\text{B.12})$$

donde  $M$ ,  $C$ ,  $K \in R^{n \times n}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del edificio, respectivamente. Sustituyendo (B.12) dentro de (B.9) y (B.10), se recupera el modelo típico de edificio de cortante y con esto se prueba que el modelo basado en el enfoque de propagación de ondas es equivalente al modelo de edificios de cortante. Finalmente, la Ec. (B.9) puede ser reescrita como

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r \ddot{u}_g \quad (\text{B.13})$$

$$z_r = D_r x_r \quad (\text{B.14})$$

donde las matrices  $A_r$ ,  $B_r$  y  $D_r \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$  fueron definidas en la Ec. (3.54). Además, considerando que  $\Lambda_r$  es una matriz diagonal dominante, y que  $\beta_{M_r}^2$  y  $\eta_{M_r}^2$  son matrices positivas definidas para  $t \geq 0$ , entonces  $A_r$  es Hurwitz.  $\square$

## B.2. Deducción de la ecuación no homogénea

A partir del error de estimación en los estados, Ec. (3.59)

$$\tilde{x}_r(t) = x_r(t) - \hat{x}_r(t)$$

cuya dinámica satisface

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_r(t) &= \dot{x}_r(t) - \dot{\hat{x}}_r(t) \\ &= A_r x_r(t) + B_r \ddot{u}_g(t) - \hat{A}_r(t) \hat{x}_r(t) - B_r \ddot{u}_g(t) - L \tilde{z}_r(t) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

tomando en cuenta que  $\tilde{z}_r = D_r x_r(t) - \hat{D}_r(t) \hat{x}_r(t)$ , entonces la Ec. (B.15) puede ser reescrita como

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = (A_r - L D_r) x_r(t) - [\hat{A}_r(t) - L \hat{D}_r(t)] \hat{x}_r(t) \quad (\text{B.16})$$

además, considerando que  $\hat{x}_r(t) = x_r(t) - \tilde{x}_r(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_r(t) &= (A_r - L D_r) x_r(t) - [\hat{A}_r(t) - L \hat{D}_r(t)] [x_r(t) - \tilde{x}_r(t)] \\ &= [\tilde{A}_r(t) - L \tilde{D}_r(t)] x_r(t) + [\hat{A}_r(t) - L \hat{D}_r(t)] \tilde{x}_r(t) \\ &= [\hat{A}_r(t) - L \hat{D}_r(t)] \tilde{x}_r(t) + \zeta_o \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

donde  $\zeta_o = [\tilde{A}_r(t) - L \tilde{D}_r(t)] x_r(t)$ , cuyas matrices  $\tilde{A}_r(t)$  y  $\tilde{D}_r(t)$  están definidas como

$$\tilde{A}_r(t) = A_r - \hat{A}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \widetilde{\beta_{M_r}^2(t)} \Lambda_r & \widetilde{\eta_{M_r}^2(t)} \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\tilde{D}_r(t) = D_r - \hat{D}_r(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{\beta_{M_r}^2(t)} \Lambda_r & \widetilde{\eta_{M_r}^2(t)} \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Además, debido a que  $\|\tilde{A}_r\|$ ,  $\|\tilde{D}_r\|$ ,  $\|L\|$  y  $\|x_r\|$  son acotadas, entonces  $\zeta_o$  es acotada también (ver el apéndice B.3 para más detalles).

### B.3. Prueba de convergencia

**Teorema 1.** Sea  $\|\Upsilon\Upsilon^T\|$ ,  $\Upsilon \in \mathcal{L}_\infty$  y  $\frac{\Upsilon}{m}$  satisfice la condición de excitación persistente (EP), entonces el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados normalizado, con factor de olvido  $\alpha > 0$  dado por las Ecs. (3.41) y (3.42), garantiza que  $P$ ,  $P^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ , y que  $\hat{\Theta}(t)$  converge exponencialmente a  $\Theta$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , (Ioannou y Fidan, 2006).

**Proposición 3.** De acuerdo al Teorema 1, si  $\Upsilon$  satisfice EP, implica que  $\hat{\Theta} \in \mathcal{L}_\infty$  es también acotado. Por lo tanto, las matrices estimadas  $\hat{A}_r$ ,  $\tilde{A}_r$ ,  $\hat{D}_r$ ,  $\tilde{D}_r$ , satisfacen las siguientes propiedades:

- (i)  $\|\hat{A}_r\|, \|\tilde{A}_r\|, \|\hat{D}_r\|, \|\tilde{D}_r\| \in \mathcal{L}_\infty$ , es decir, también son acotadas
- (ii)  $\hat{A}_r \rightarrow A_r$  y  $\hat{D}_r \rightarrow D_r$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , exponencialmente si los vectores  $\Upsilon_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , satisfacen EP y  $\Upsilon/m \in \mathcal{L}_\infty$ , con  $m^2 = 1 + \|\Upsilon\Upsilon^T\|$ . Entonces,  $\varepsilon \in \mathcal{L}_2$ .

*Demostración.* Asumiendo que el algoritmo recursivo normalizado de mínimos cuadrados con factor de olvido garantiza que los parámetros estimados son acotados y considerando que  $\widetilde{\beta_{Mr}^2}$  y  $\widetilde{\eta_{Mr}^2}$  son construidas empleando esos parámetros, entonces las matrices  $\widetilde{\beta_{Mr}^2}, \widetilde{\eta_{Mr}^2} \in \mathcal{L}_\infty$ , también son acotadas. Esto implica que  $\hat{A}_r, \hat{D}_r, \tilde{A}_r$  y  $\tilde{D}_r$  son también acotadas, condición que también se cumple de acuerdo con la proyección paramétrica (3.44)- (3.45), entonces  $\|\hat{A}_r\|, \|\tilde{A}_r\|, \|\hat{D}_r\|, \|\tilde{D}_r\| \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ . Además, si  $\Upsilon$  satisfice EP, entonces  $\hat{\Theta}(t)$  converge exponencialmente a  $\Theta$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $\widetilde{\beta_{Mr}^2} \rightarrow \beta_{Mr}^2$  y  $\widetilde{\eta_{Mr}^2} \rightarrow \eta_{Mr}^2$ , por lo que se concluye que  $\hat{A}_r \rightarrow A_r$  y  $\hat{D}_r \rightarrow D_r$  exponencialmente.  $\square$

#### B.3.1. Prueba de convergencia del observador adaptable

*Demostración.* Sea  $L$  la ganancia del observador, que satisfice

$$L = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -\bar{\gamma}I_{n \times n} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\gamma} > 0 \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo  $L = [0_{n \times n} - \bar{\gamma}I_{n \times n}]^T$  en la Ec. (3.60b) produce

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \hat{A}_{r*}(t)\tilde{x}_r(t) + \zeta_o(t) \quad (\text{B.21})$$

donde

$$\hat{A}_{r*}(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ (1 + \bar{\gamma})\widetilde{\beta_{Mr}^2}(t)\Lambda_r & (1 + \bar{\gamma})\widetilde{\eta_{Mr}^2}(t)\Lambda_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

La estabilidad para el observador adaptable (3.55) es determinada resolviendo la Ec. (B.21)

$$\tilde{x}_r(t) = \xi_s(t, t_0)\tilde{x}_r(t_0) + \int_{t_0}^t \xi_s(t, \tau_s)\zeta_o(t)d\tau_s \quad (\text{B.23})$$

donde  $\xi_s(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados asociada con  $\hat{A}_{r*}(t)$ . Basado en el análisis de estabilidad entrada-estado (Khalil, 2002), la solución puede ser estimada como

$$\|\tilde{x}_r(t)\| \leq \|\xi_s(t, t_0)\| \|\tilde{x}_r(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\xi_s(t, \tau_s)\| \|\zeta_o(t)\| d\tau_s \quad (\text{B.24})$$

Por otra parte, tomando en cuenta que la norma  $\|\zeta_o(t)\|$  es acotada de acuerdo con la proposición B.3, entonces la norma de  $\tilde{x}_r(t)$  es también acotada si la matriz de transición de estados  $\xi_s(t, \tau_s)$  satisface la desigualdad

$$\|\xi_s(t, \tau_s)\| \leq \mu_s \exp^{-\sigma(t-\tau_s)}, \quad \forall t \geq \tau_s \geq 0 \quad (\text{B.25})$$

para las constantes positivas  $\mu_s$  and  $\sigma$ . Para probar la desigualdad anterior es necesario que la matriz reducida  $\hat{A}_{r*}(t)$  satisfaga las siguientes condiciones:

1.  $\hat{A}_{r*} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$
2.  $\hat{A}_{r*}$  es diferenciable y  $\dot{\hat{A}}_{r*} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$
3.  $\text{Re}\{\lambda_i(\hat{A}_{r*}(t))\} < 0$ , para cada  $t$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$

Observe que las condiciones 1, 2 y 3 han sido probadas en el apéndice B.5 y por consiguiente la matriz  $\hat{A}_{r*}$  satisface todas las condiciones antes mencionadas. Esto implica que la matriz de transición  $\xi_s(t, \tau_s)$  asociada con  $\hat{A}_{r*}(t)$  satisface (B.25), y que la norma  $\|\tilde{x}_r\|$  es también acotada. Además, si  $\Upsilon$  cumple la condición de EP, entonces  $\tilde{A}_r, \tilde{A}_{r*}, \tilde{D}_r \rightarrow 0$  exponencialmente. Por otra parte, reescribiendo la Ec. (B.21) como

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = [A_{r*} - \tilde{A}_{r*}(t)]\tilde{x}_r(t) + \zeta_o(t) \quad (\text{B.26})$$

donde

$$A_{r*} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ (1 + \bar{\gamma})\beta_{M_r}^2 \Lambda_r & (1 + \bar{\gamma})\eta_M^2 \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

la dinámica del error de estimación  $\dot{\tilde{x}}_r(t)$  en la Ec. (B.26) puede ser reducida a (B.28), asumiendo que  $\tilde{A}_{r*}(t)$  y  $\zeta_o(t)$  tienden exponencialmente a cero

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = A_{r*}\tilde{x}_r(t) \quad (\text{B.28})$$

y por lo tanto, se asegura que la dinámica del error de estimación  $\dot{\tilde{x}} = [\hat{A}_r(t) - L\hat{D}_r(t)]\tilde{x}_r(t) + \zeta_o$ , es estable  $\forall t > 0$  y con esto,  $\hat{x}_r \rightarrow x_r$ , tal que  $\tilde{x}_r \rightarrow 0$  exponencialmente, cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## B.4. Excitación Persistente (EP)

Formalmente, la condición de EP garantiza la convergencia paramétrica.

Sea  $\Upsilon : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^{2n}$  continua a tramos, es de EP se existen las constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda > 0$  tal que

$$\alpha_2 I \geq \int_{t_0}^t \Upsilon(\tau_o) \Upsilon^T(\tau_o) d\tau \geq \alpha_1 I \quad \forall t_0 \geq 0 \quad (\text{B.29})$$

si  $\Upsilon$  es EP, entonces el sistema es exponencialmente estable (Sastrey, 1989).

## B.5. Parámetros acotados y diferenciables

De acuerdo con el algoritmo de MCN con factor de olvido (3.41)- (3.42) junto con el esquema de proyección paramétrica (3.44)- (3.45), garantizan que la estimación sea únicamente de parámetros positivos y acotados  $\hat{\Theta}_{\beta i+}$  y  $\hat{\Theta}_{\eta i+}$ , para todo  $t > 0$ , pues la función de aproximación *signo* también es acotada. Por lo tanto, las matrices estimadas  $\hat{\beta}_{Mr}^2$  y  $\hat{\eta}_{Mr}^2$  son siempre matrices definidas positivas. Además, hay que tener en cuenta que  $\hat{\Theta}_{\beta i+}$  y  $\hat{\Theta}_{\eta i+}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  en (3.44) son diferenciables, tal que su derivada temporal se define como

$$\dot{\hat{\Theta}}_{\beta i+}(t) = \frac{\dot{\hat{\Theta}}_{\beta i}(t)}{2} \left[ 1 + \frac{\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta i}(t)}{\sqrt{(\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta i}(t))^2 + e^2}} - \frac{\chi_1 (\varsigma_1 - \hat{\Theta}_{\beta i}(t))}{\sqrt{(\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta i}(t))^2 + e^2}} + (\varsigma_1 - \hat{\Theta}_{\beta i}(t)) \left[ \frac{\chi_1^3 \hat{\Theta}_{\beta i}^2(t)}{[(\chi_1 \hat{\Theta}_{\beta i}(t))^2 + e^2]^{3/2}} \right] \right] \quad (\text{B.30})$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{\eta i+}(t) = \frac{\dot{\hat{\Theta}}_{\eta i}(t)}{2} \left[ 1 + \frac{\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta i}(t)}{\sqrt{(\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta i}(t))^2 + e^2}} - \frac{\chi_2 (\varsigma_2 - \hat{\Theta}_{\eta i}(t))}{\sqrt{(\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta i}(t))^2 + e^2}} + (\varsigma_2 - \hat{\Theta}_{\eta i}(t)) \left[ \frac{\chi_2^3 \hat{\Theta}_{\eta i}^2(t)}{[(\chi_2 \hat{\Theta}_{\eta i}(t))^2 + e^2]^{3/2}} \right] \right] \quad (\text{B.31})$$

donde  $\hat{\Theta}_{\beta i}(t)$  y  $\hat{\Theta}_{\eta i}(t)$  son proporcionadas por el algoritmo de MCN. Además, las variables  $\dot{\hat{\Theta}}_{\beta i+}$  y  $\dot{\hat{\Theta}}_{\eta i+} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ , pues los términos del lado derecho dentro de los paréntesis en las Ecs. (B.30) y (B.31) son acotados. En consecuencia  $\hat{A}_{r*}$  es diferenciable, pues ésta depende de los parámetros estimados  $\hat{\Theta}_{\beta i}(t)$  y  $\hat{\Theta}_{\eta i}(t)$ , los cuales son positivos, acotados y diferenciables, tal que  $\hat{A}_{r*} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ . Además, dado a que  $\hat{\beta}_M^2$  y  $\hat{\eta}_M^2$  son matrices definidas positivas  $\forall t > 0$  y asumiendo que  $\Lambda_r$  es una matriz diagonal dominante, se asegura que todos los eigenvalores de la matriz  $\hat{A}_{r*}$  tienen una parte real estrictamente negativa  $\forall t > 0$ , tal que,  $Re\{\lambda_i(\hat{A}_{r*}(t)) < 0\}$  para cada instante de tiempo, donde  $i = 1, 2, \dots, 2n$ .

## B.6. Integrales sobre intervalos de tiempo finito

Sea la ecuación (3.30), que describe la salida del sistema derivada con respecto al tiempo tres veces para eliminar las perturbaciones constantes

$$z_{out}^{(3)} = \psi^{(3)} \Theta_\beta + \psi^{(4)} \Theta_\eta$$

donde el superíndice ( $j$ ),  $j = 1, 2, \dots, n$ , representa la  $j$ -ésima derivada temporal. Aplicando cinco integrales sobre intervalos de tiempo, se obtienen señales medibles dependiendo únicamente de la aceleración, para ello se hace uso del operador, Ec. (3.31), (Garnier et al., 2010; Sagara y Zhao, 1990).

Integrando ambos lados de la Ec. (3.30),

$$\int_{t-\delta}^t z_{out}^{(3)} = \int_{t-\delta}^t \psi^{(3)} \Theta_\beta + \int_{t-\delta}^t \psi^{(4)} \Theta_\eta \quad (\text{B.32})$$

$$z_{out}^{(2)}(t) - z_{out}^{(2)}(t - \delta) = \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \left[ \psi^{(3)}(t) - \psi^{(3)}(t - \delta) \right] \Theta_{\eta} \quad (\text{B.33})$$

Suponiendo que los intervalos de integración  $[t, t - \delta]$ ,  $[t_1, t_1 - \delta]$ ,  $[t_2, t_2 - \delta]$ ,  $[t_3, t_3 - \delta]$ , y  $[t_4, t_4 - \delta]$  son del mismo tamaño, por simplicidad se usará el intervalo  $[t, t - \delta]$  para evaluar la integral definida en los siguiente casos. Por consiguiente, al calcular la segunda integral de la Ec. (3.30), se produce

$$\begin{aligned} & \int_{t-\delta}^t z_{out}^{(2)}(t) - \int_{t-\delta}^t z_{out}^{(2)}(t - \delta) = \\ & \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \int_{t-\delta}^t \psi^{(3)}(t) \Theta_{\eta} - \int_{t-\delta}^t \psi^{(3)}(t - \delta) \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} & z_{out}^{(1)}(t) - 2z_{out}^{(1)}(t - \delta) + z_{out}^{(1)}(t - 2\delta) = \\ & \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \left[ \psi^{(2)}(t) - 2\psi^{(2)}(t - \delta) + \psi^{(2)}(t - 2\delta) \right] \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

donde  $\psi^{(2)} = \ddot{\psi}$ , conformada por mediciones de aceleración de acuerdo con la Ec. (3.29). Siguiendo con la tercera integración de la Ec. (3.30),

$$\begin{aligned} & \int_{t-\delta}^t z_{out}^{(1)}(t) - 2 \int_{t-\delta}^t z_{out}^{(1)}(t - \delta) + \int_{t-\delta}^t z_{out}^{(1)}(t - 2\delta) = \\ & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - 2\psi^{(2)}(t - \delta) + \psi^{(2)}(t - 2\delta) \right] \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} & z_{out}(t) - 3z_{out}(t - \delta) + 3z_{out}(t - 2\delta) - z_{out}(t - 3\delta) = \\ & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - 2\psi^{(2)}(t - \delta) + \psi^{(2)}(t - 2\delta) \right] \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Ahora si se aplican 2 integrales más para eliminar el ruido de medición. La cuarta integración queda

$$\begin{aligned} & \int_{t-\delta}^t [z_{out}(t) - 3z_{out}(t - \delta) + 3z_{out}(t - 2\delta) - z_{out}(t - 3\delta)] = \\ & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - 2\psi^{(2)}(t - \delta) + \psi^{(2)}(t - 2\delta) \right] \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Quinta integración

$$\begin{aligned} & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t [z_{out}(t) - 3z_{out}(t - \delta) + 3z_{out}(t - 2\delta) - z_{out}(t - 3\delta)] = \\ & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - \psi^{(2)}(t - \delta) \right] \Theta_{\beta} + \\ & \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \int_{t-\delta}^t \left[ \psi^{(2)}(t) - 2\psi^{(2)}(t - \delta) + \psi^{(2)}(t - 2\delta) \right] \Theta_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

De manera que la Ec. (3.30), es ahora de la forma

$$\Xi(t) = \Upsilon_{\beta}(t)\Theta_{\beta} + \Upsilon_{\eta}(t)\Theta_{\eta}$$

donde,  $\Xi(t) \in R^{p \times 1}$ ,  $\Upsilon_{\beta}(t)$  y  $\Upsilon_{\eta}(t) \in \mathcal{R}^{p \times p}$ , son el vector de salida y las matrices de estados conformadas por señales de aceleración filtradas, definidas en las Ecs. (3.36), (3.37) y (3.38), respectivamente. Además recuerde que  $\Theta_{\beta}$  y  $\Theta_{\eta}$  son los vectores de parámetros desconocidos, definidos en las Ecs. (3.23) y (3.24), respectivamente.