



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Efectos del Tamaño de Bloque en  
el Comportamiento de Presión de  
Yacimientos Naturalmente  
Fracturados**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

**DIEGO ALBERTO CALDERÓN RUÍZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**ING. HÉCTOR ÉRICK GALLARDO FERRERA**



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017**



## Agradecimientos

A Dios, por permitirme vivir alabando y glorificando su nombre. Por todos los dones que me ha dado, y porque pronto vendrá.

A mis padres, Roy y Mari, por apoyarme en cada decisión que tomo. Por impulsarme a buscar mis sueños y ser feliz. Por ser los mejores del mundo. ¡Los amo tanto!

A mi hermano, Eduardo, porque es mi mejor amigo.

A mi Mamaita y Papaito, por todo el amor que me dan, por sus oraciones intercesoras.

A mi tía Yeni, que es como mi segunda mamá. Que su amor traspasa fronteras, y que sus oraciones son escuchadas para que esté bien.

A mi tío Lenin, porque sé que siempre puedo contar con él. Sus palabras siempre me llenan de ánimo.

A Michelito y Robert, por su cariño y gran apoyo. ¡Los quiero hasta Utah!

A mi mejor amigo, Omar, que es mi hermano de otra sangre. Porque siempre que lo necesité, estuvo ahí.

A Arturo, Alberto y Francisco. ¡Son geniales! Gracias por su amistad y momentos tan llenos de dicha.

A Paola, porque eres la alegría y amor de mi vida. Gracias por enseñarme a ver el mundo de manera increíble. ¡Palbangmin!

A los ingenieros Marlene y Sabido, por confiar en mí. Por su apoyo y grandes enseñanzas. ¡Gracias!

A la maestra Elia, porque aprendí mucho, y porque me enseñó que siempre hay que seguir aprendiendo.

Al Ing. Érick Gallardo, por ser un amigo, por su paciencia y tiempo. Porque me motivó a hacer siempre lo correcto, y a dar lo mejor de mí.

A la UNAM, por ser la mejor decisión de mi vida. Porque aprendí mucho. Espero algún día poder devolverle, al menos, un poco de lo tanto que me ha dado.

**El amor es lo único que somos capaces de percibir  
que trasciende las dimensiones del tiempo y del espacio  
Brand – Interstellar**

# Contenido

<b>Listado de Figuras.....</b>	<b>6</b>
<b>Listado de Tablas .....</b>	<b>9</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>10</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>12</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>13</b>
<b>1. Revisión de la literatura.....</b>	<b>15</b>
1.1. Aspectos geológicos .....	15
1.1.1. Tipos de Yacimientos Naturalmente Fracturados .....	16
1.1.2. Distribuciones asociadas a los parámetros geológicos de un Yacimiento Naturalmente Fracturado .....	18
1.2. Aspectos de pruebas de presión.....	22
1.2.1. Modelos de doble porosidad.....	22
1.2.2. Modelos de doble permeabilidad.....	23
1.2.3. Modelos de flujo lineal, bilineal y trilineal .....	24
1.3. Tipos de flujo interporoso en los modelos de doble porosidad.....	26
1.3.1. Flujo en estado pseudo-estacionario.....	26
1.3.2. Flujo en estado transitorio .....	27
1.3.3. Coeficiente de daño interporoso .....	27
<b>2. Planteamiento del problema .....</b>	<b>29</b>
2.1. Modelo matemático .....	30
2.2. Solución general .....	31
2.2.1. Solución para flujo interporoso en estado pseudo-estacionario .....	32
2.2.2. Solución para flujo interporoso en estado transitorio .....	32
2.3. Soluciones particulares .....	32
2.3.1. Función de Distribución Uniforme.....	33
2.3.2. Función de Distribución Bimodal .....	33

2.3.3.	Función de Distribución Exponencial.....	34
2.3.4.	Función de Distribución Normal.....	35
<b>3.</b>	<b>Efectos de los tipos de distribución.....</b>	<b>37</b>
3.1.	Efectos de los tipos de distribución en régimen pseudo-estacionario .....	37
3.2.	Efectos de los tipos de distribución en régimen transitorio.....	52
3.3.	Efecto del tipo de flujo interporoso en los modelos de doble porosidad...	65
3.4.	Algoritmo para la reproducción de las curvas obtenidas .....	68
	<b>Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>72</b>
	<b>Referencias .....</b>	<b>74</b>
	<b>Apéndice A.....</b>	<b>77</b>
A.1.	Para flujo en estado transitorio.....	77
A.2.	Para flujo en estado pseudo-estacionario .....	80
	<b>Apéndice B.....</b>	<b>83</b>
B.1.	Función de distribución Uniforme .....	84
B.2.	Función de distribución Bimodal .....	86
B.3.	Función de distribución Exponencial .....	88
B.4.	Función de distribución Normal.....	88
	<b>Apéndice C.....</b>	<b>91</b>
C.1.	Desarrollo del modelo de Warren y Root (régimen pseudo-estacionario)	91
C.2.	Desarrollo del modelo de Jalali y Erzagui (régimen transitorio) .....	94
	<b>Apéndice D.....</b>	<b>97</b>
D.1.	Génesis de fracturas durante etapas diagenéticas y de deformación estructural .....	97
D.2.	Tipologías de fracturas respecto a su origen .....	98

D.2.1.	Fracturas de Cizalla.....	98
D.2.2.	Fracturas de Extensión.....	99
D.2.3.	Fracturas de Tensión.....	99
D.2.4.	Fracturas Tectónicas .....	99
D.2.5.	Fracturas Regionales.....	99
D.2.6.	Fracturas Contraccionales.....	100
D.2.7.	Fracturas Relacionadas a la Superficie .....	100

## Listado de Figuras

<b>Fig 1.1.</b> Clasificación propuesta por Nelson para Yacimientos Naturalmente Fracturados (Nelson, 2001).....	17
<b>Fig 1.2.</b> Distribución bimodal, en la cual, se observan dos picos, que sobresalen y definen a este tipo de distribución (Belani, 1988).....	19
<b>Fig 1.3.</b> Distribución exponencial de intensidad de fractura, tomando en cuenta la litología y tamaño de grano (Belani, 1988).....	20
<b>Fig 1.4.</b> Distribución Normal observada en muestras extraídas de yacimientos (Belani, 1988).....	21
<b>Fig 1.5.</b> Modelos propuestos para YNF. Cada uno posee parámetros y suposiciones que los hacen diferentes el uno del otro. ....	22
<b>Fig 1.6.</b> Descripción de un sistema de doble porosidad.....	23
<b>Fig 1.7.</b> Descripción de un sistema de doble permeabilidad.....	23
<b>Fig 1.8.</b> Trayectorias de flujo en geometría líneal. ....	24
<b>Fig 1.9.</b> Trayectorias de flujo en geometría bilineal.....	25
<b>Fig 1.10.</b> Trayectorias de flujo en geometría trilineal. ....	25
<b>Fig 1.11.</b> Descripción geométrica del coeficiente de daño interporoso. (Cinco-Ley, Samaniego, Kucuk, 1985).....	28
<b>Fig 3.1.</b> Comparativo de los diferentes modelos de probabilidad y el modelo base en régimen pseudo-estacionario.....	40
<b>Fig 3.2.</b> Cálculo del error relativo porcentual para los modelos de distribución en régimen pseudo-estacionario. ....	41
<b>Fig 3.3.</b> Cálculo de la función derivada para los diferentes modelos en estado pseudo-estacionario.....	42
<b>Fig 3.4.</b> Cálculo de la función segunda derivada para los diferentes modelos en estado pseudo-estacionario. ....	43
<b>Fig 3.5.</b> Curva tipo y función derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de $\omega f$ . ....	45
<b>Fig 3.6.</b> Función derivada y segunda derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de $\omega f$ . ....	46

<b>Fig 3.7.</b> Curva tipo y función derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de $\lambda$ .	49
<b>Fig 3.8.</b> Función derivada y segunda derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de $\lambda$ .	50
<b>Fig 3.9.</b> Primer y segunda derivada, para estudiar el efecto de $\lambda$ en la amplitud de las curvas en régimen ps-estacionario.	51
<b>Fig 3.10.</b> Comparativo de los diferentes modelos de probabilidad y el modelo base en régimen transitorio.	54
<b>Fig 3.11.</b> Cálculo del error relativo porcentual para los modelos de distribución en régimen transitorio.	55
<b>Fig 3.12.</b> Cálculo de la función derivada para los diferentes modelos en estado transitorio.	56
<b>Fig 3.13.</b> Cálculo de la función segunda derivada para los diferentes modelos en estado transitorio.	57
<b>Fig 3.14.</b> Curva tipo y función derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de $\omega f$ .	59
<b>Fig 3.15.</b> Función primer y segunda derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de $\omega f$ .	60
<b>Fig 3.16.</b> Curva tipo y función derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de $\lambda$ .	62
<b>Fig 3.17.</b> Función primer y segunda derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de $\lambda$ .	63
<b>Fig 3.18.</b> Primer y segunda derivada, para estudiar el efecto de $\lambda$ en la amplitud de las curvas en régimen transitorio.	64
<b>Fig 3.19.</b> Curva tipo y función primera derivada, para una distribución Normal, en regímenes ps-estacionario y transitorio.	66
<b>Fig 3.20.</b> Funciones primer y segunda derivada, para una distribución Normal, en regímenes ps-estacionario y transitorio.	67
<b>Fig 3.21.</b> Algoritmo para obtener las curvas tipo para los diferentes modelos de distribución de probabilidad.	69



**Fig 3.22.** Algoritmo para obtener la función derivada para los diferentes modelos de distribución de probabilidad..... 70

**Fig 3.23.** Algoritmo para obtener la función segunda derivada para los diferentes modelos de distribución de probabilidad. .... 71

## Listado de Tablas

<b>Tabla 1.1.</b> Clasificación de los tipos de YNF (Nelson, 2001). .....	16
<b>Tabla 1.2.</b> Clasificación de los tipos de YNF tomando en cuenta los aspectos del sistema poroso (Nelson, 2001).....	17
<b>Tabla 3.1.</b> Parámetros generales considerados para la solución numérica de los modelos en estado pseudo-estacionario.....	38
<b>Tabla 3.2.</b> Parámetros particulares considerados para la solución numérica de los modelos en estado pseudo-estacionario.....	38
<b>Tabla 3.3.</b> Parámetros utilizados para análisis comparativo en régimen pseudo-estacionario.....	47
<b>Tabla 3.4.</b> Parámetros utilizados para análisis comparativo de la amplitud de las curvas.....	48
<b>Tabla 3.5.</b> Parámetros generales considerados para la solución numérica de los modelos en régimen transitorio. ....	52
<b>Tabla 3.6.</b> Parámetros particulares considerados para la solución numérica de los modelos en régimen transitorio. ....	52
<b>Tabla 3.7.</b> Parámetros utilizados para análisis comparativo en estado transitorio.	61

## Resumen

La utilización de modelos de densidad de probabilidad, para representar el tamaño de bloque, permite un estudio realista en yacimientos naturalmente fracturados. Es por eso que, este trabajo presenta una revisión de la literatura sobre los diferentes modelos de interpretación de pruebas de presión, en modelos de doble porosidad con flujos pseudo-estacionario y transitorio, que consideran variaciones en el tamaño de bloque de matriz usando modelos de densidad de probabilidad. Los parámetros geológicos que gobiernan el flujo interporoso en yacimientos naturalmente fracturados, están directamente relacionados con la intensidad de fractura que el sistema presenta.

Diferentes autores estudiaron el comportamiento geológico de los yacimientos naturalmente fracturados. Han encontrado que los parámetros siguen cierta distribución de frecuencia, y tomando en cuenta esa distribución, es posible realizar clasificaciones. Los modelos han sido desarrollados tomando diferentes aproximaciones. Sin embargo, los modelos de doble porosidad son más comunes en la industria petrolera.

La función de flujo interporoso es definida a partir de la manera en que la presión cambia con el tiempo dentro del bloque de matriz. Es por esa razón que, para cada régimen de flujo, se definen cuatro diferentes funciones de distribución de probabilidad, tales como, uniforme, bimodal, exponencial y normal. Se ha observado que existen más modelos relacionados con los parámetros geológicos, sin embargo, se utilizan los cuatro mencionados porque son más comunes en condiciones reales.

En cierta manera, las funciones de flujo interporoso son una solución parcial para la ecuación de difusividad, ya que todas las expresiones están en el espacio matemático de Laplace. El algoritmo de Gaver-Stehfest, para invertir las soluciones, es utilizado para obtener resultados numéricos que validan los

modelos de probabilidad propuestos. Para comparar el comportamiento (modelo base), los modelos de Warren-Root y Jalali-Erzagui son utilizados. Se observa que los modelos estudiados son numéricamente similares a los modelos base.

## Abstract

Utilization of probability density models, to represent block size, allows a realistic study in naturally fractured reservoirs. That is why, this work presents a literature review about different models on interpretation of pressure tests, in double porosity models with interporosity, pseudo-steady and transient, flow, that considers variations in matrix block size using probability density models. Geological parameters that governs interporosity flow in naturally fractured reservoirs, are directly related with fracture intensity that the system present.

Different authors studied the geological behavior of naturally fractured reservoirs. They have found that the parameters follow certain frequency distribution, and taking account that distribution, a classification can be made. The models have been developed using different approaches. However, double porosity models are common in petroleum industry.

Interporosity flow function is defined in the way that the pressure changes in time within the matrix block. That is why, for each flow regime, four different probability functions are defined, such as, uniform, bimodal, exponential and normal distribución. Has been observed that there are more models related with geological parameters, however, the ones used in this work are more often find in realistic conditions.

In somehow, interporosity flow functions are a partial solution in diffusivity equation, because the whole expressions are in Laplace mathematical space. Gaver-Stehfest algorithm, to invert solutions, is used to obtain numerical results that validates the proposed probability models. To compare their behavior (base models), Warren-Root's model and Jalali-Erzagui's models are used. It is observed that the studied models and the base models are numerically similar.

## Introducción

El objetivo principal de este trabajo, es presentar una revisión de la literatura sobre los diferentes modelos para la interpretación de pruebas de presión, en yacimientos naturalmente fracturados de doble porosidad con flujo interporoso pseudo-estacionario y transitorio, que consideran variaciones en el tamaño de bloque de la matriz a través del uso de funciones de densidad de probabilidad.

Se ha observado que los parámetros geológicos que gobiernan el flujo interporoso en un yacimiento naturalmente fracturado, se encuentran directamente relacionados con la intensidad de fracturamiento dentro del sistema. Para representar esta situación, en forma realista, se han utilizado diferentes modelos de distribución de probabilidad, que relacionan el tamaño de bloque con la frecuencia de ocurrencia.

La inclusión de modelos de distribución de probabilidad, para representar el tamaño de bloque, permite un estudio más realista de los sistemas naturalmente fracturados. Por esa razón, en el presente trabajo se analizan cuatro funciones de probabilidad en dos diferentes regímenes de flujo.

En el **Capítulo I**, se presentan las razones por las cuales se deben incluir los modelos de densidad de probabilidad. Se muestran los modelos de probabilidad, que, de acuerdo a la información de casos de campo, son más comunes en este tipo de yacimientos.

En el **Capítulo II**, se presentan los cuatro modelos de densidad de probabilidad para los regímenes pseudo-estacionario y transitorio. Además, se muestran los parámetros necesarios para el funcionamiento adecuado de cada modelo.

En el **Capítulo III**, se presenta el análisis de cada una de las funciones de densidad de probabilidad. El análisis se realizó a través de la obtención del gráfico de diagnóstico, y funciones primer y segunda derivada, a través de la inversión numérica de las soluciones propuestas, con el algoritmo de Gaver-Stehfest.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas a través del análisis numérico llevado a cabo. Así mismo, las recomendaciones para desarrollos futuros. Se presentan los Anexos, en los que se muestran todos los desarrollos matemáticos necesarios para la validación de los modelos

# 1. Revisión de la literatura

Un yacimiento naturalmente fracturado, por sus siglas (YNF), se define como un sistema geológico natural en el que existen discontinuidades en la porosidad primaria, a pesar de la deformación y de los procesos diagenéticos, mismos que afectan en forma significativa el flujo de los fluidos a través de la roca del yacimiento. Estos sistemas se caracterizan por superponer medios con un alto contraste de permeabilidad (normalmente las fracturas) sobre otros de alta porosidad (usualmente la matriz).

Existen diferentes modelos para representar el flujo de fluidos en los YNF durante una prueba de presión, siendo uno de los más empleados el de doble porosidad. Normalmente, éstos consideran una distribución uniforme de las propiedades de cada medio. En este capítulo se realizará una revisión de diferentes fuentes sobre aspectos relacionados a los modelos de yacimientos naturalmente fracturados usados en la práctica, sus limitantes e implicaciones.

## 1.1. Aspectos geológicos

Las fracturas pueden ser causadas por esfuerzos tectónicos, y por su rigidez, las rocas carbonatadas, como calizas y dolomías, y rocas clásticas muy compactas son más susceptibles a ceder a los esfuerzos, y formar este tipo de yacimientos. Sin embargo, otros mecanismos pueden ocasionar discontinuidades en las rocas, como la reducción de esfuerzos verticales a causa de erosión en formaciones superiores (expansión de la roca almacén), o bien, la deshidratación de arcillas, que permite la expansión en capas inferiores y provoca fracturas.



La caracterización de este tipo de yacimientos se vuelve compleja, debido a que el movimiento de los fluidos puede ocurrir tanto en la matriz y las fracturas de la roca, como entre ambas, por lo que es necesario describir a los elementos anteriores con precisión.

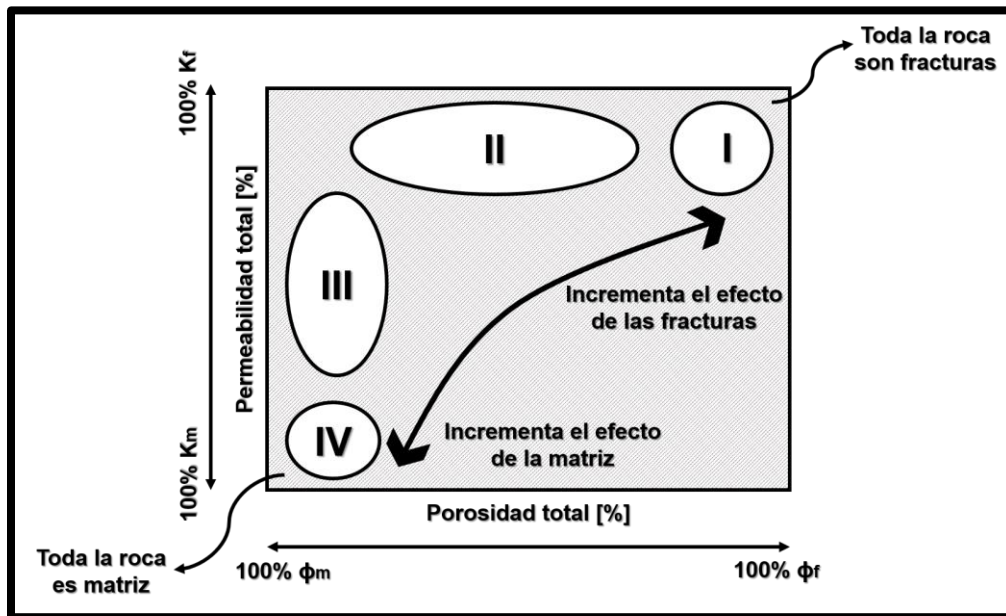
### 1.1.1. Tipos de Yacimientos Naturalmente Fracturados

La clasificación de este tipo de yacimientos estudiada para este trabajo es provista por **Nelson (2001)**, como una extensión del trabajo de **Hubbert y Willis (1955)**, **Tabla 1.1**. Para mayor detalle, consultar el **Apéndice D**.

*Tabla 1.1. Clasificación de los tipos de YNF (Nelson, 2001).*

Tipo YNF	Descripción
<b>Tipo I</b>	Las fracturas proveen la porosidad y permeabilidad principales del yacimiento, mientras que la matriz posee, poca o nula, porosidad y permeabilidad
<b>Tipo II</b>	Las fracturas proveen la permeabilidad principal del yacimiento, mientras que la matriz de la roca provee la mayor capacidad de almacenamiento, que, a su vez, posee una poca o baja permeabilidad
<b>Tipo III</b>	Las fracturas proveen ayuda adicional en la permeabilidad del yacimiento que es económicamente rentable
<b>Tipo IV</b>	Las fracturas no proveen permeabilidad o porosidad adicionales, pero crean barreras de flujo

Como se aprecia en la **Fig. 1.1**, los primeros tres tipos de yacimientos describen atributos en las fracturas que contribuyen al desplazamiento de los fluidos hacia el pozo productor. El cuarto tipo no sólo describe el sistema de fracturas, sino su anisotropía y la distribución de fracturas en el yacimiento.



**Fig 1.1. Clasificación propuesta por Nelson para Yacimientos Naturalmente Fracturados (Nelson, 2001).**

Sin embargo, la clasificación anterior sólo toma en cuenta los aspectos del sistema fracturado. Es por ello que Nelson (2001) propone una clasificación que toma en cuenta los aspectos del sistema poroso, **Tabla 1.2**.

**Tabla 1.2. Clasificación de los tipos de YNF tomando en cuenta los aspectos del sistema poroso (Nelson, 2001).**

Tipo de porosidad	Características
-------------------	-----------------

<b>Porosidad simple</b>	Existe un medio por el cual los fluidos se mueven. Las combinaciones pueden ser, solo matriz, fracturas, o matriz-fracturas con propiedades promedio.
<b>Porosidad doble</b>	Existen dos medios por los cuales los fluidos se mueven. Los fluidos fluyen de una fractura hacia otra fractura; sin embargo, no se mueven entre bloques de matriz, solo de la matriz a la fractura.
<b>Porosidad doble – permeabilidad doble</b>	Existen dos medios de flujo. Los fluidos fluyen de una fractura a otra, de la matriz a otra fractura, y de una matriz a otra.

### **1.1.2. Distribuciones asociadas a los parámetros geológicos de un Yacimiento Naturalmente Fracturado**

Los parámetros geológicos son necesarios para describir y definir a un YNF. Sin embargo, estos no son constantes, y varían a través de todo el yacimiento. Dichos parámetros son:

- Composición
- Tamaño de grano
- Porosidad
- Tamaño de bloque/Intensidad de fractura
- Posición estructural

Al estudiar un YNF surge la necesidad de mejorar los modelos existentes para su interpretación, de tal manera que se aproximen lo más posible al comportamiento real del yacimiento. Debida a la alta heterogeneidad de este tipo de yacimientos, las funciones de densidad de probabilidad son una herramienta

muy útil. Una función de densidad de probabilidad (FDP) asigna una probabilidad de ocurrencia, de alguna propiedad, en un dominio o región.

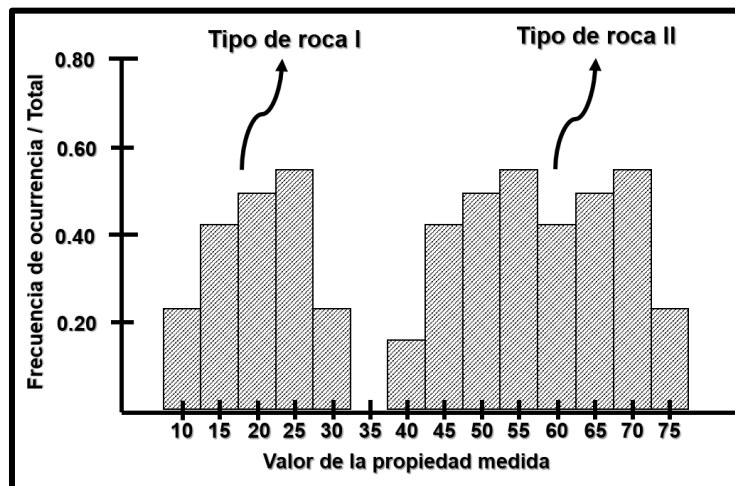
### 1.1.2.1 Distribución Uniforme

Una distribución uniforme, a veces llamada distribución rectangular, es una distribución que representa una probabilidad de ocurrencia constante.

### 1.1.2.2 Distribución Bimodal

Este tipo de distribución marca la tendencia de dos eventos con igual o diferente probabilidad de ocurrencia. Puede establecerse entonces, una relación doblemente uniforme. Este tipo de distribución ocurre naturalmente en yacimientos donde la intensidad de fracturamiento es muy alta. En una región del sistema será muy intenso, mientras que, en otra región, será mínimo.

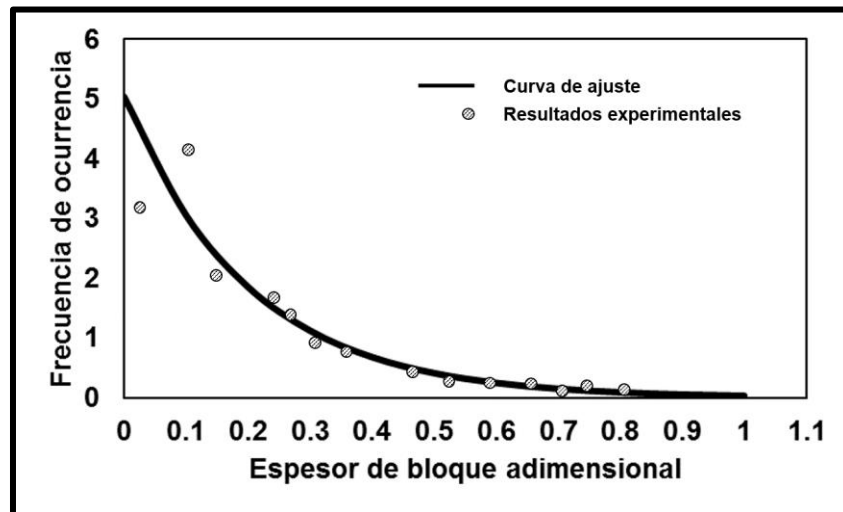
Por ejemplo, se toman muestras de roca en diferentes regiones de un mismo yacimiento. A dichas muestras se les mide algún tipo de propiedad física, y se grafica el número de ocurrencias de la propiedad, contra el valor de la dicha propiedad. Gráficamente, se observaría:



**Fig 1.2. Distribución bimodal, en la cual, se observan dos picos, que sobresalen y definen a este tipo de distribución (Belani, 1988).**

### 1.1.2.3 Distribución Exponencial

La distribución exponencial es un modelo bastante útil y apegado a la realidad. Con este modelo, podemos representar la distribución de probabilidad a través del tiempo y del espacio.



**Fig 1.3. Distribución exponencial de intensidad de fractura, tomando en cuenta la litología y tamaño de grano (Belani, 1988).**

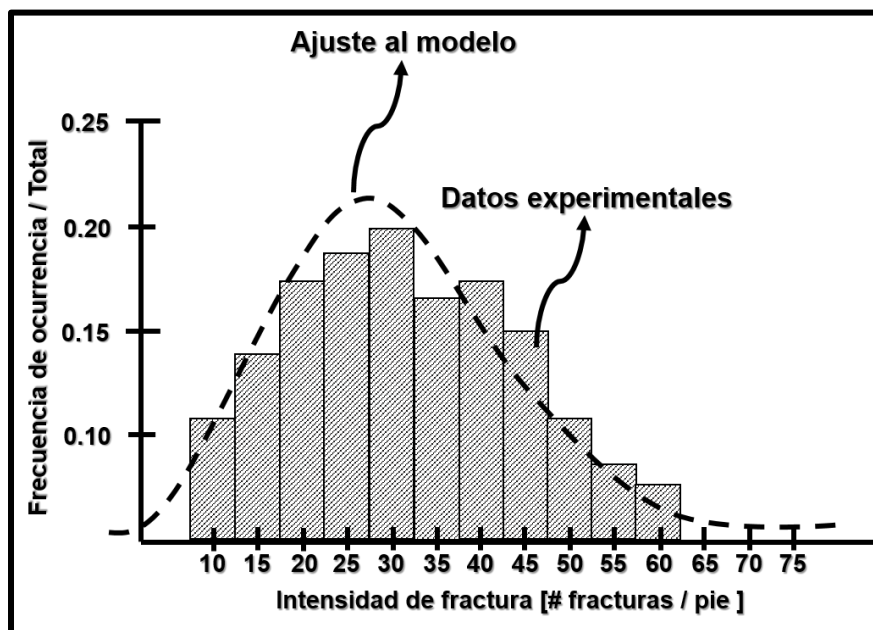
En la **Fig. 1.3** se observa la manera en cómo la intensidad de las fracturas se expresa sobre los diferentes tipos de litología y tamaño de grano en las rocas. Muchos autores, como Stearns y Friedman (1972), han investigado dicha relación. En general, rocas con un alto porcentaje de constituyentes quebradizos tendrán una intensidad de fractura mayor, que aquellas con un bajo porcentaje (asumiendo el mismo estado de esfuerzos regional para los dos tipos de roca en el ejemplo anterior). En la mayoría de las rocas sedimentarias que forman yacimientos, los principales componentes quebradizos son cuarzo, feldespato, dolomita, y algunas veces, calcita.

#### 1.1.2.4 Distribución Normal

Esta función de distribución es bastante utilizada, ya que describe con una precisión muy alta un sinnúmero de fenómenos naturales. La característica principal es que es una curva en forma de campana, a la que se le conoce como la campana de Gauss.

Por ejemplo, se toman muestras de roca en el mismo yacimiento, y se les mide alguna propiedad petrofísica. Posteriormente, se grafica la ocurrencia de dicha propiedad contra su valor. Si el yacimiento es lo suficiente homogéneo, la campana será muy cerrada, en comparación con un yacimiento heterogéneo, que será muy abierta. Sin embargo, se observará la tendencia a algún valor.

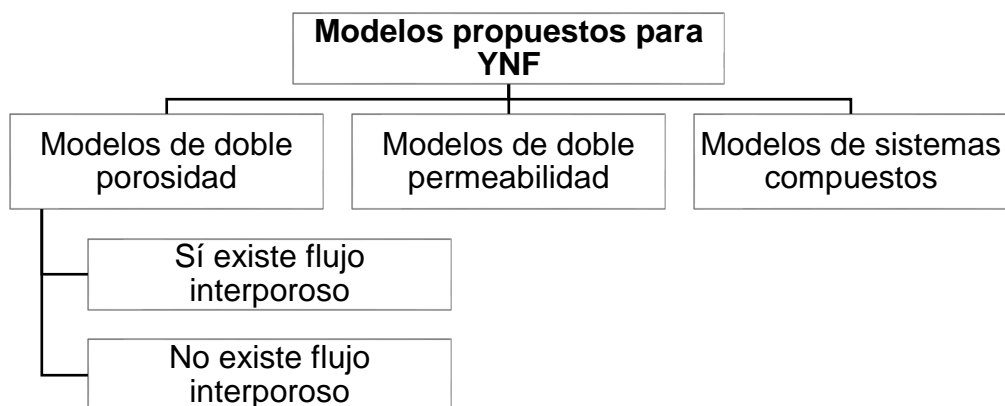
En la **Fig. 1.4**, se observa la frecuencia de ocurrencia de intensidad de fracturas, en muestras de rocas obtenidas de la caliza Madison, en Sheep Mountain, Wyoming, E.U. Las muestras de roca fueron tomadas de un anticlinal asimétrico. Las rocas son una mezcla de calizas y dolomías (Belani, 1988).



**Fig 1.4. Distribución Normal observada en muestras extraídas de yacimientos (Belani, 1988).**

## 1.2. Aspectos de pruebas de presión

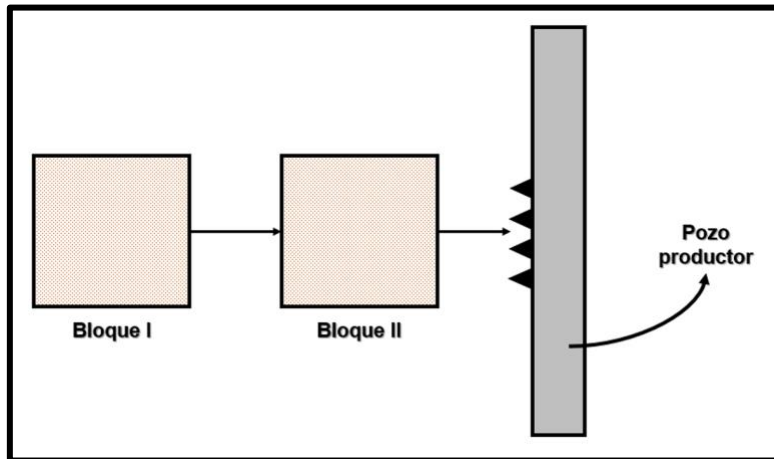
Las heterogeneidades en el yacimiento son identificadas a través de variaciones en la respuesta de presión. Sin embargo, puede tomar una cantidad de tiempo significativa antes que las heterogeneidades se vuelvan evidentes. Es por ello, que se han propuesto diferentes modelos que representen la respuesta de presión en este tipo de yacimientos, algunos de los cuales se esquematizan en la **Fig. 1.5** y se describen a continuación.



**Fig 1.5. Modelos propuestos para YNF. Cada uno posee parámetros y suposiciones que los hacen diferentes el uno del otro.**

### 1.2.1. Modelos de doble porosidad

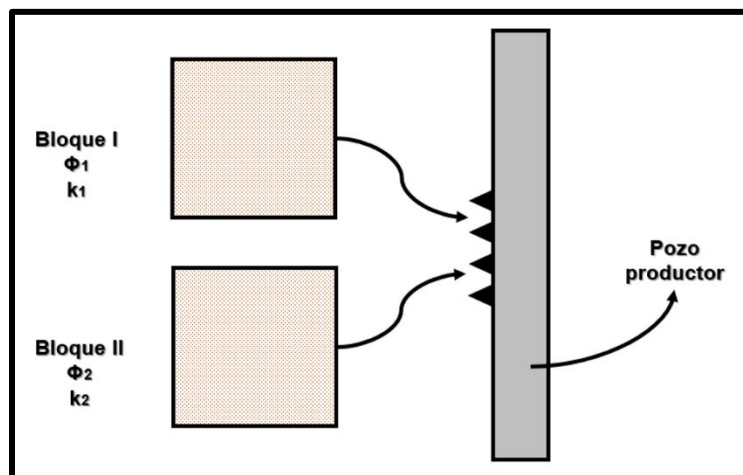
Estos modelos asumen la existencia de dos regiones porosas dentro de la formación. Una región, de alta conductividad (fracturas), y la región de baja conductividad (bloques de matriz). Este modelo fue introducido por Barenblatt (1960), y asume un sistema poroso de baja permeabilidad, los bloques de matriz, rodeados por la red de fracturas de alta permeabilidad. Los bloques de matriz no aportan a la producción del pozo, sino solo a las fracturas, y éstas, conducen el fluido al pozo. Otra suposición que estos modelos toman en cuenta, es que todos los bloques de matriz son homogéneos, y tienen el mismo tamaño, **Fig. 1.6**.



*Fig 1.6. Descripción de un sistema de doble porosidad.*

### 1.2.2. Modelos de doble permeabilidad

Estos modelos complementan a los modelos de doble porosidad. Es decir, consideran que no solo las fracturas aportan fluido al pozo, sino también, los bloques de matriz **Fig. 1.7**. Una suposición importante es que, los bloques son homogéneos en sí mismos, pero no necesariamente iguales a los bloques circundantes. En los modelos de doble permeabilidad, puede ocurrir el fenómeno de flujo cruzado. Este fenómeno se presenta debido a las diferentes propiedades de cada bloque.



*Fig 1.7. Descripción de un sistema de doble permeabilidad.*

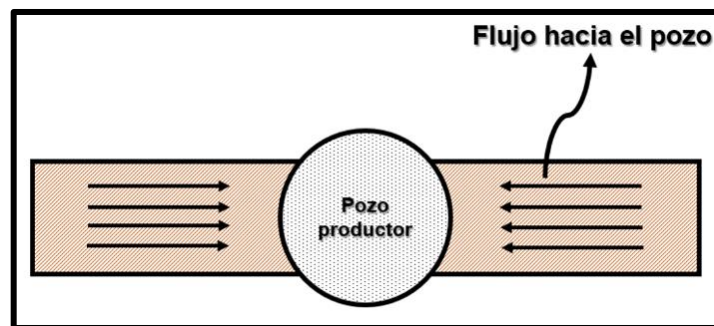


### 1.2.3. Modelos de flujo lineal, bilineal y trilineal

Las discontinuidades en las trayectorias de flujo hacia el pozo producen diferentes geometrías de flujo dentro del yacimiento. Las trayectorias pueden ser estructurales, estratigráficas o una combinación de ambas

Si las trayectorias de flujo son convergentes y perpendiculares al pozo, se dice que existe flujo radial dentro del yacimiento. Esto puede ocurrir cuando las propiedades del yacimiento son homogéneas y el intervalo de interés es producido en todo su espesor. Sin embargo, cuando las condiciones estructurales y estratigráficas del yacimiento cambian, la geometría de flujo también lo hace.

Cuando las trayectorias de flujo son convergentes entre sí, se dice que existe un flujo lineal. Esta geometría de flujo se presenta cuando el pozo está produciendo a través de una fractura. Sin embargo, en yacimientos que tienen una longitud muy grande y poco ancho, el flujo lineal se presenta como una desviación tardía al flujo radial, **Fig. 1.8**.

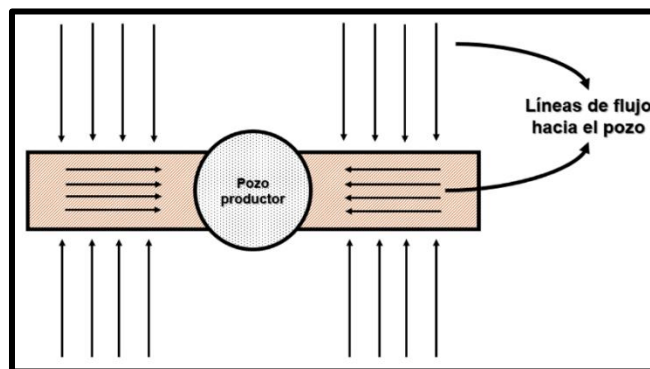


**Fig 1.8. Trayectorias de flujo en geometría lineal.**

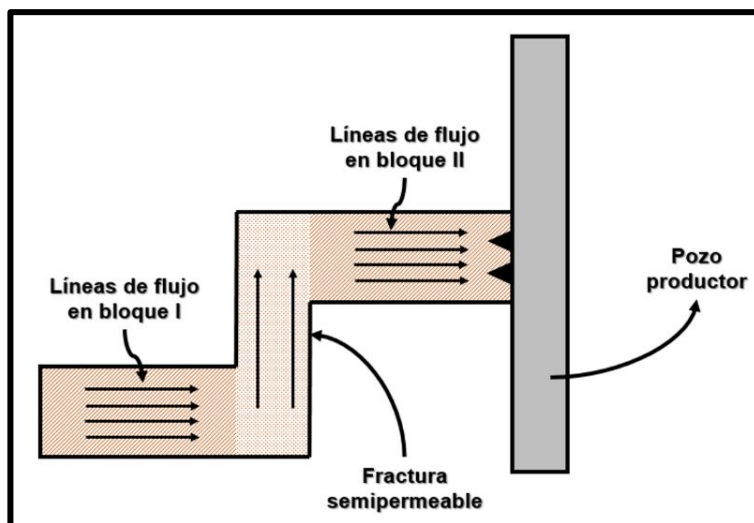
La geometría de flujo bilineal es la combinación de dos flujos lineales. Se observa cuando los fluidos se mueven hacia las fracturas, y de las fracturas hacia el pozo. Es decir, cuando se comienza a producir un YNF, las fracturas aportarán fluido al pozo (flujo lineal). Sin embargo, al aumentar la diferencia de presión entre las fracturas y la matriz, se vencen las fuerzas capilares, y la matriz comienza a aportar fluido a las fracturas. Dentro de la matriz se observará un flujo lineal hacia

las fracturas, solo si no existe ninguna restricción al flujo y la cara del bloque de matriz esté completamente libre, **Fig. 1.9**.

La geometría de flujo trilineal es una combinación de tres flujos lineales que viajan hacia el pozo. Estas geometrías no son tan comunes de observar, ya que podría confundirse con una geometría de flujo lineal, debido a que se puede observar la transición entre una geometría lineal y otra. Cuando en un yacimiento, dos bloques de matriz o dos fracturas, se encuentran separados por una fractura rellena por algún sólido pero que es permeable, el flujo trilineal se hace presente. Los fluidos se moverán a través del primer bloque o fractura (primer flujo lineal), hacia la discontinuidad (segundo flujo lineal), para llegar al segundo bloque o fractura (tercer flujo lineal) y finalmente al pozo.



**Fig 1.9. Trayectorias de flujo en geometría bilineal.**



**Fig 1.10. Trayectorias de flujo en geometría trilineal.**

### **1.3. Tipos de flujo interporoso en los modelos de doble porosidad**

El primer modelo de doble porosidad, introducido por Barenblat (1960), ha sido modificado por diversos autores: Warren y Root (1963), Odeh (1965), Kazemi (1969), de Swan (1976), entre otros. No obstante, en todos los casos se considera que la red de fracturas provee la movilidad y la matriz el almacenamiento.

Para entender los modelos de doble porosidad deben definirse dos conceptos fundamentales: el coeficiente de almacenamiento ( $\omega$ ) que expresa el contraste entre los dos sistemas porosos, y define la contribución de la red de fracturas al almacenamiento total del sistema, que en general es muy baja comparada con el aporte de los bloques de matriz; y el coeficiente de flujo interporoso ( $\lambda$ ) que describe la habilidad de los bloques de matriz de aportar fluido hacia las fracturas, y su valor es función de la geometría de los bloques y la permeabilidad de matriz.

#### **1.3.1. Flujo en estado pseudo-estacionario**

En 1963, Warren y Root presentaron la solución de un modelo de doble porosidad en estado pseudo estacionario dentro de la matriz. Fue hasta 1984, que Moench demostró que el régimen de flujo pseudo estacionario era el resultado del daño en la superficie de los bloques de matriz, ya que la precipitación de minerales restringía los canales de flujo. Para el desarrollo del modelo, los autores hicieron las siguientes consideraciones:

- a) Los bloques de matriz son homogéneos e isotrópicos, y se encuentran en un arreglo de paralelepípedos idénticos.
- b) La porosidad secundaria está contenida en un sistema continuo ortogonal de fracturas uniformes.
- c) El flujo puede ocurrir de la matriz a las fracturas, más no entre los bloques de matriz.

### **1.3.2. Flujo en estado transitorio**

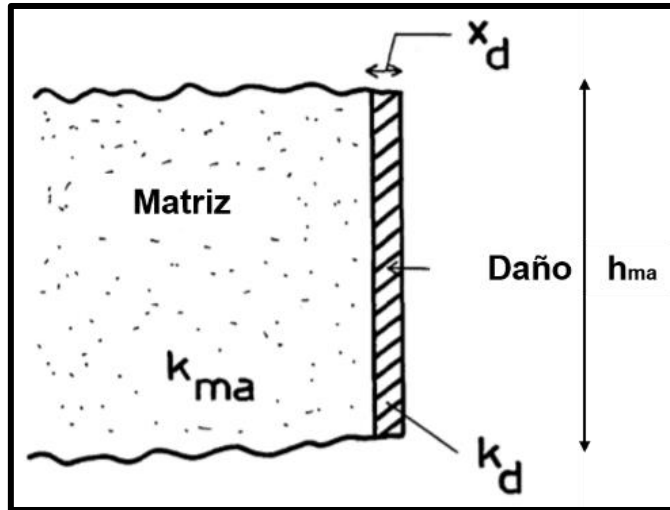
Kazemi, en 1969, propuso un modelo en régimen de flujo transitorio en la matriz. Es decir, tomó en cuenta que la matriz no tiene restricción al flujo, por lo que puede aportar a las fracturas libremente. Las consideraciones son casi las mismas que en el modelo de flujo pseudo estacionario, a excepción del régimen de flujo.

Cuando existe flujo en estado transitorio, los bloques de matriz reaccionan casi inmediatamente a cualquier cambio de presión en las fracturas. A tiempos cortos, la matriz y las fracturas están produciendo, pero la velocidad de cambio de presión en las fracturas es más rápida que los bloques de matriz. A tiempos largos, se observa el comportamiento de un sistema homogéneo, donde el total del sistema es alcanzado.

### **1.3.3. Coeficiente de daño interporoso**

La depositación de minerales en la superficie de los bloques de matriz reduce la interacción entre la matriz y las fracturas. Esta situación retrasa el aporte de fluidos de la matriz a las fracturas, y, de acuerdo a Cinco Ley et al. (1985), puede ser tratado como un daño.

Cinco Ley et al., además de Moench (1983), presentaron el coeficiente de daño interporoso, que, al ser incluido en el análisis teórico, demuestra que la condición de flujo pseudoestacionario es una particularidad del flujo en régimen transitorio. Para coeficientes de daño considerablemente grandes, se ha demostrado gráficamente que la diferencia de los valores obtenidos entre los modelos pseudoestacionario y transitorio es bastante pequeña. El daño, presentado por Cinco Ley y colaboradores puede visualizarse como se muestra en la **Fig. 1.11**.



**Fig 1.11. Descripción geométrica del coeficiente de daño interporoso. (Cinco-Ley, Samaniego, Kucuk, 1985).**

## 2. Planteamiento del problema

**Warren y Root (1963)**, y otros autores, han propuesto modelos para yacimientos naturalmente fracturados, en los cuales se asume el tamaño de bloque de matriz constante. Sin embargo, estudios geológicos y geomecánicos, comúnmente, han reportado ocurrencias de patrones de fractura no uniformes que dependen de la litología, espesor de yacimiento, grado de diagénesis y ambiente regional de esfuerzos. Por ejemplo, **Johns (1968)** presenta que, de muestras tomadas en diferentes regiones de diferentes yacimientos, se ha encontrado que la longitud de fractura tiene una distribución exponencial

Prácticas como, considerar el flujo interporoso en estado pseudoestacionario y no utilizar funciones de distribución de probabilidad para representar el tamaño de bloques de matriz, son comunes. **Braester (1984)** encontró que la respuesta de presión es influenciada por el tamaño de bloque de matriz en una prueba de interferencia. Cinco Ley et al. (1985) demostró que la zona de transición es afectada significativamente a diferentes tamaños de matriz. A su vez, demostró que el modelo de Warren y Root puede ser utilizado considerando el daño en la superficie de los bloques de matriz. Gracias a los trabajos previos, **Belani y Jalali-Yazdi (1988)** pudieron extender el modelo discreto presentado por Cinco Ley et al., presentando una solución con un modelo continuo de función de densidad de probabilidad para el tamaño de bloque de matriz.

Se observó entonces que es necesario considerar una función de distribución de probabilidad, que describa el comportamiento de las propiedades de un yacimiento naturalmente fracturado, como el tamaño de bloque.

## 2.1. Modelo matemático

La ecuación de difusión para yacimientos naturalmente fracturados, propuesta por **Belani (1988)**, es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} Q_m, \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

misma que posee las siguientes condiciones:

- Flujo en geometría radial en el sistema fracturado.
- Fluido ligeramente compresible, cuyas propiedades son constantes.
- No se toman en cuenta los efectos de la gravedad y la inercia.
- Las propiedades petrofísicas de la roca son constantes en el tiempo.

La diferencia principal entre un modelo de yacimiento homogéneo y uno de doble porosidad es el término  $Q_m$ . Dicho término considera el aporte adicional de la matriz a las fracturas, y su inclusión es crítica en la formulación del modelo, ya que la distribución geométrica domina el flujo interporoso.

En los modelos donde se considera un tamaño de bloque constante, el aporte de fluidos de la matriz a la fractura depende de la capacidad de almacenamiento, permeabilidad y el tamaño del bloque de matriz que aporta. En los modelos que consideran una distribución no uniforme de fracturas, con una distribución aleatoria de tamaños de bloque, el aporte matricial se define como:

$$Q_m = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh, \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

donde  $Q(h)$  es la contribución efectiva del bloque de matriz a la fractura, y  $f(h)$  es la probabilidad de ocurrencia de aporte del bloque de matriz de tamaño  $h$ . Los límites  $h_{\max}$  y  $h_{\min}$ , son los tamaños máximo y mínimo, respectivamente, que un bloque de matriz puede tener. Al sustituir la **Ec. (2.2)** en la **Ec. (2.1)**, obtenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh, \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

## 2.2. Solución general

De acuerdo al modelo presentado por Belani y Jalali-Yazdi, la presión adimensional en el fondo de pozo en el espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{Dwf} = \frac{K_o(x) + S_D x K_1(x)}{s[C_D s(K_o(x) + S_D x K_1(x)) + x K_1(x)]}, \quad (2.4)$$

donde  $s$  es la variable de Laplace relacionada con el tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2}, \quad (2.5)$$

y el argumento de la función de Bessel:

$$x = \sqrt{s f(s)}. \quad (2.6)$$

Los parámetros adimensionales utilizados para el desarrollo de los modelos se encuentran a continuación:

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_f), \quad (2.a)$$

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_m), \quad (2.b)$$

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_f c_f + \phi_m c_m}, \quad (2.c)$$

$$\omega_m = 1 - \omega_f, \quad (2.d)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m r_w^2}{k_f h^2}, \quad (2.e)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (2.f)$$

$$z_D = \frac{z}{h}, \quad (2.g)$$

$$h_D = \frac{h}{h_{m\acute{a}x}}, \quad (2.h)$$



donde  $p_D$  es la caída de presión,  $\omega$  el coeficiente de almacenamiento,  $\lambda$  el coeficiente de flujo interporoso,  $\alpha$  el factor de forma de los bloques de matriz (que para geometrías rectangulares posee un valor de tres),  $r_D$  el radio adimensional,  $z_D$  es el punto adimensional ubicado normal a la interfase matriz-fractura,  $h_D$  es el tamaño adimensional del bloque de matriz, y los subíndices  $m$  y  $f$  referencian a la matriz y las fracturas, respectivamente.

La variación entre flujo pseudo-estacionario y el flujo transitorio es la ecuación que se añade en el argumento de la función de Bessel, en la **Ec. (2.4)**. Las soluciones para flujo interporoso en estado pseudo-estacionario y transitorio se presentan a continuación, y se desarrollan con detalle en el **Apéndice A**.

### 2.2.1. Solución para flujo interporoso en estado pseudo-estacionario

Para el flujo entre el bloque de matriz y la fractura, en condiciones de flujo pseudo-estacionario (PSS), la ecuación es:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \left( \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \right) f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

### 2.2.2. Solución para flujo interporoso en estado transitorio

El argumento de la función de Bessel, que describe el flujo en estado transitorio (USS) es:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \sqrt{\frac{\lambda}{3\omega_m s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

## 2.3. Soluciones particulares

A continuación, se presentan los modelos, en flujo pseudo-estacionario y flujo transitorio, para cuatro diferentes funciones de densidad de probabilidad. Los

desarrollos para los regímenes de flujo pseudo-estacionario y transitorio, para cada función de distribución de probabilidad, se encuentran en el **Apéndice B**.

### 2.3.1. Función de Distribución Uniforme

La función de distribución de probabilidad Uniforme, se define como:

$$f(h_D) = \frac{1}{1 - \frac{h_{\min}}{h_{\max}}}, \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

de esta manera, para flujo en estado pseudo-estacionario se tiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m v_{uni} \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

donde  $v_{uni}$  es

$$v_{uni} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}}. \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

Por otro lado, para flujo estado transitorio se tiene:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m v_{uni}}{2\sqrt{3}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda. \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

### 2.3.2. Función de Distribución Bimodal

La función de distribución de probabilidad Bimodal, se define como:

$$f(h_D) = \frac{1}{1 - \frac{h_1}{h_{\max}} + \frac{h_2}{h_{\max}} - \frac{h_3}{h_{\max}}}, \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

con lo que para flujo en estado pseudo-estacionario se tiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m v_{bim} \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\omega_m s}} \right) + \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\omega_m s}} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

y para flujo en estado transitorio:

$$f(s) = \omega_f + \left[ \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda + \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_3} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda \right] \frac{\omega_m v_{bim}}{2\sqrt{3}}, \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

donde  $v_{bim}$  se define como:

$$v_{bim} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_3}}}. \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

### 2.3.3. Función de Distribución Exponencial

La función de distribución de probabilidad Exponencial, se define como:

$$f(h_D) = \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-ah_{rat}} - e^{-a}}, \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

donde  $h_{rat} = \frac{h_{min}}{h_{max}}$ , y  $a$  es la constante de decaimiento. De esta manera, la función para flujo interporoso en estado pseudo-estacionario es

$$f(s) = \omega_f + \omega_m v_{exp} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\omega_m s + \lambda} \exp \left( -a \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}} \right) d\lambda, \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

y para flujo en estado transitorio:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m v_{exp}}{\sqrt{3\omega_m S}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m S}{\lambda}}\right) \exp\left(-a \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}}\right) d\lambda, \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

donde  $v_{exp}$  se define como:

$$v_{exp} = \frac{a\sqrt{\lambda_{min}}}{2 \left[ \exp\left(-a \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}\right) - \exp(-a) \right]}. \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

### 2.3.4. Función de Distribución Normal

La función de distribución de probabilidad Normal, se define como:

$$f(h_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2}, \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

donde  $\sigma$  es la desviación estándar, que es la medida de la dispersión de los datos con respecto a la media  $\mu$ , parámetros que se calculan como:

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}, \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

$$\sigma \leq \frac{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}}{5\sqrt{2}}. \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

Para esta distribución, cuando el flujo interporoso se encuentra en estado pseudo-estacionario se tiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m v_{nor} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}} - \mu\right)^2\right]}{\lambda^{3/2} \left(1 + \frac{\omega_m S}{\lambda}\right)} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

y para flujo transitorio:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m^{1/2} v_{nor}}{\sqrt{3s}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} - \mu\right)^2\right] d\lambda, \quad \dots (2.25)$$

donde  $v_{nor}$  se define como:

$$v_{nor} = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{2\pi}} \cdot \dots (2.26)$$

### 3. Efectos de los tipos de distribución

A continuación, se presenta un comparativo del efecto sobre la curva tipo para las funciones de probabilidad propuestas en el Capítulo II. El análisis comparativo toma en cuenta que, para las soluciones particulares en régimen pseudo-estacionario, el modelo de Warren y Root es válido como modelo base. Para el análisis en estado transitorio, el modelo de Jalali y Ershagui. Dichos modelos, son deducidos en el **Apéndice C**.

#### 3.1. Efectos de los tipos de distribución en régimen pseudo-estacionario

El modelo base se presenta a continuación. Dicha ecuación se encuentra en el espacio de Laplace, y es necesario invertir la solución a través del algoritmo de Gaver-Stehfest.

$$\bar{p}_{Dwf} = \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}K_1(\sqrt{sf(s)})}, \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

donde  $f(s) = \frac{\omega_f(1-\omega_f)s+\lambda}{(1-\omega_f)s+\lambda}$

La Ec. (3.1) toma en cuenta que el tamaño de bloque de matriz es constante, es por ello que solo aparece  $\lambda$ . Sin embargo, en los modelos de probabilidad, es necesario incluir las variables que mayor frecuencia presentaron en los estudios petrofísicos. Para el análisis en estado pseudo-estacionario, se tomaron en cuenta los siguientes parámetros. Además, no se considera daño ni efecto de almacenamiento.

**Tabla 3.1. Parámetros generales considerados para la solución numérica de los modelos en estado pseudo-estacionario.**

$\omega_m = 0.95$	$\lambda_{\min} = 9 \times 10^{-5}$	$\lambda_2 = 1.05 \times 10^{-4}$	$t_{D\text{final}} = 1 \times 10^6$
$\omega_f = 0.05$	$\lambda = 1 \times 10^{-4}$	$\lambda_3 = 1.2 \times 10^{-4}$	$S_D = 0$
$\lambda_{\max} = 1.1 \times 10^{-4}$	$\lambda_1 = 9.9 \times 10^{-5}$	$t_{D\text{inicial}} = 1$	$C_D = 0$

**Tabla 3.2. Parámetros particulares considerados para la solución numérica de los modelos en estado pseudo-estacionario.**

$a_{exp} = 1$	$\sigma_{nor} = \frac{(1 - \mu_{nor})}{5\sqrt{2}}$
$\mu_{nor} = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$	$N_{Steh} = 10$

La **Fig. 3.1** muestra el comportamiento de la presión adimensional con respecto del tiempo adimensional. Se observa que los modelos de probabilidad se ajustan al modelo base propuesto. Dicho comportamiento, es debido a que el coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , utilizado para el modelo de Warren y Root, es cercano a los valores, de  $\lambda$  máximo y mínimo, necesarios para los modelos de probabilidad. Sin embargo, el comportamiento pudiera cambiar al existir una variación en los parámetros particulares de los modelos, como el incremento o decremento del coeficiente de decaimiento exponencial, o la desviación estándar en el modelo de distribución Normal.

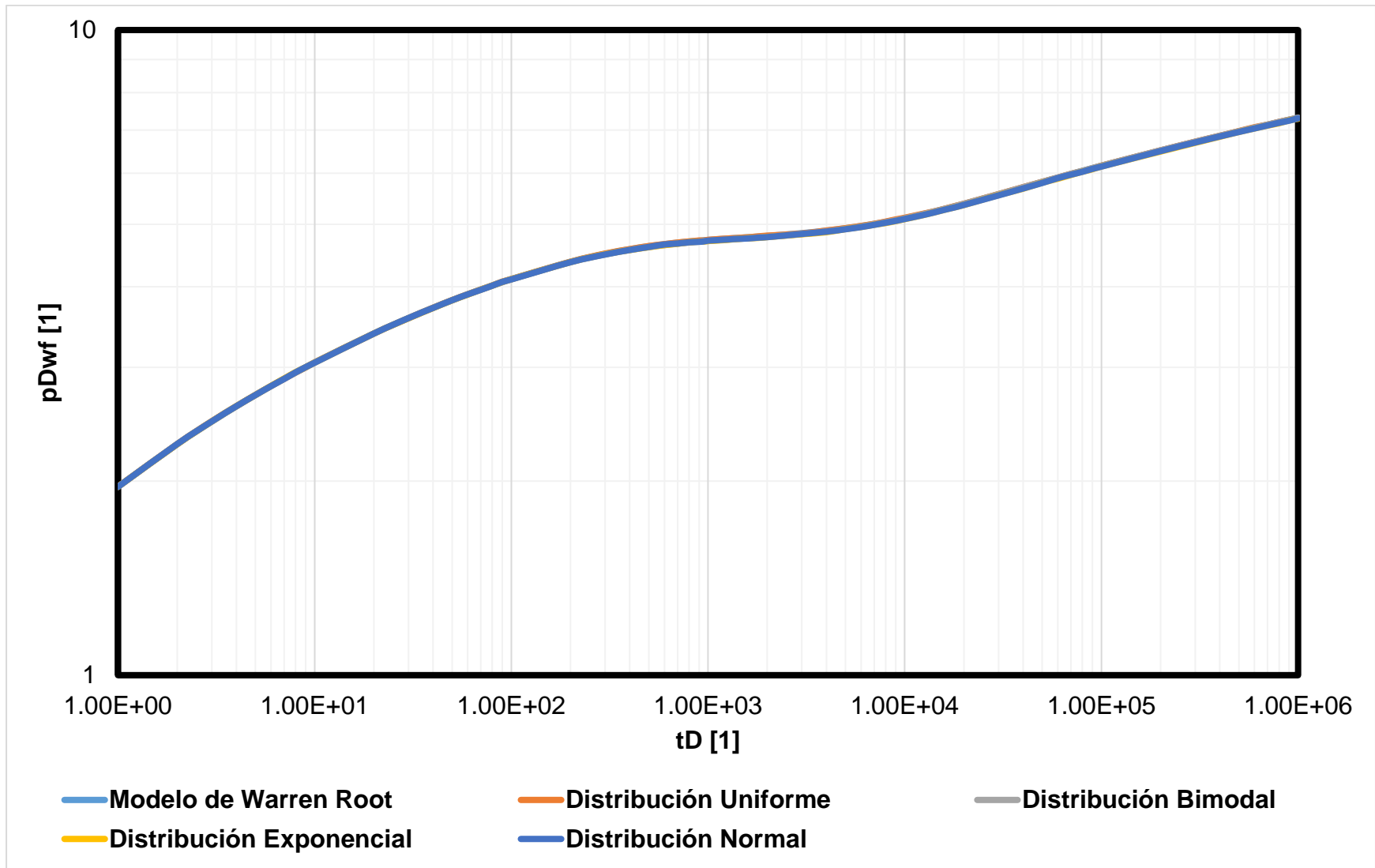
Una herramienta útil para visualizar el ajuste entre el modelo base y los modelos de probabilidad que se proponen, es calcular el error relativo porcentual.

Para el cálculo, se asume que el valor “real” es el obtenido por el modelo de Warren y Root, mientras que el valor “calculado” será el obtenido a través de los modelos de densidad. Se observa que el error máximo relativo porcentual se obtiene con el modelo de distribución Exponencial, con cerca de 0.5 [%] de diferencia con respecto al modelo base. El comportamiento de la variación se encuentra en la **Fig. 3.2**. Cabe mencionar que, las curvas producidas a partir de los modelos de probabilidad, toman en cuenta los mismos valores que los que se utilizan en el modelo base.

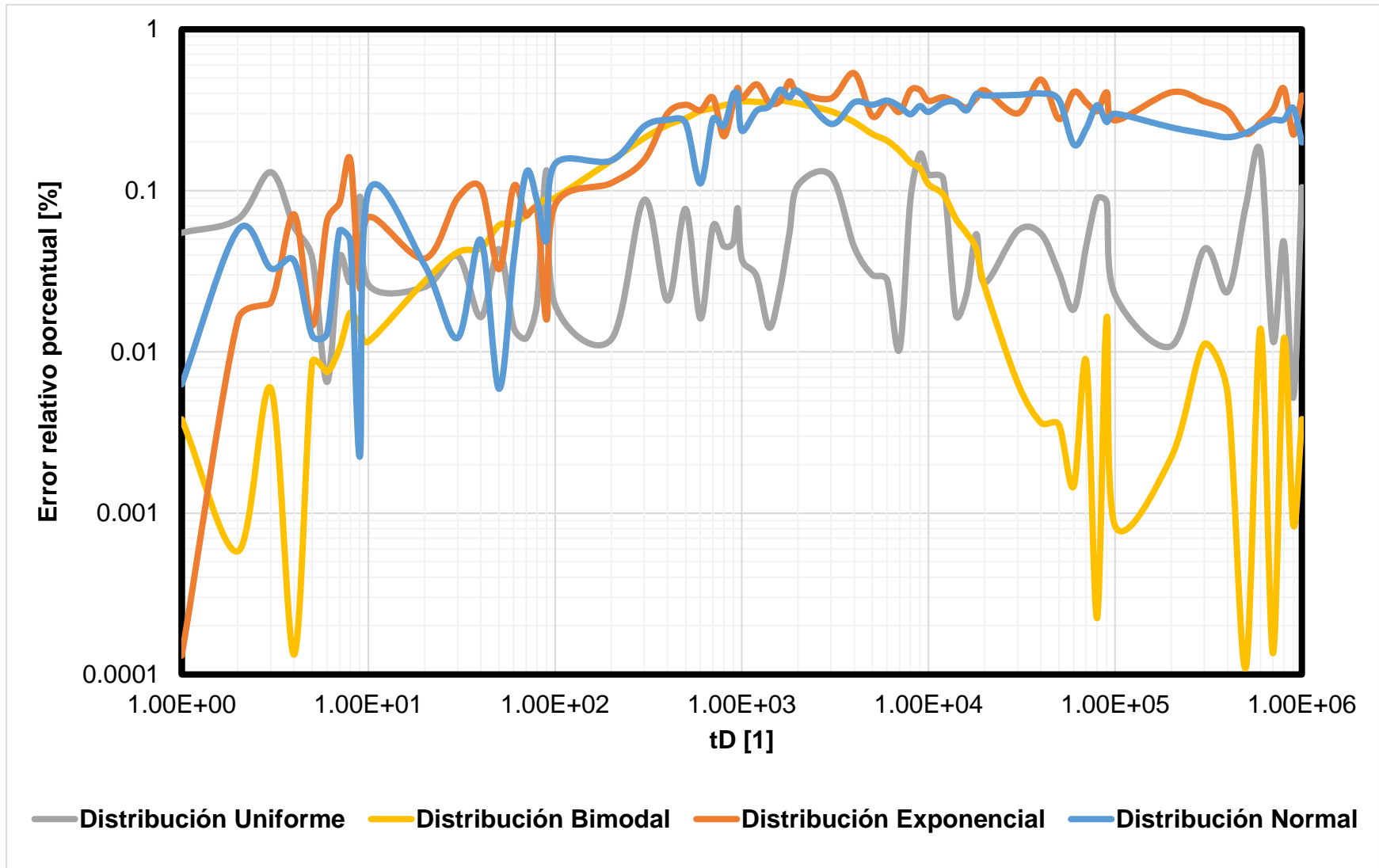
Las funciones primer y segunda derivada (**Fig. 3.3.** y **Fig. 3.4.**, respectivamente) son una herramienta de gran utilidad para el estudio del comportamiento de presión en YNF's. Con la función primer derivada, es posible visualizar el tiempo al cual ocurre la transición, del aporte sistema fracturado, al sistema fracturas-matriz. Además, es posible observar la duración del mismo periodo. En la curva de la función primer derivada, se aprecia un solo valle, cuya cresta, indica el comienzo del período de aporte del sistema acoplado.

La función segunda derivada, por otro lado, indica la rapidez con la que la función primer derivada cambia. La utilidad de esta herramienta radica en que es posible visualizar efectos de manera más detallada, ya que las herramientas log-log hacen menos visibles los comportamientos esperados, y es necesario tener cambios bruscos de presión.

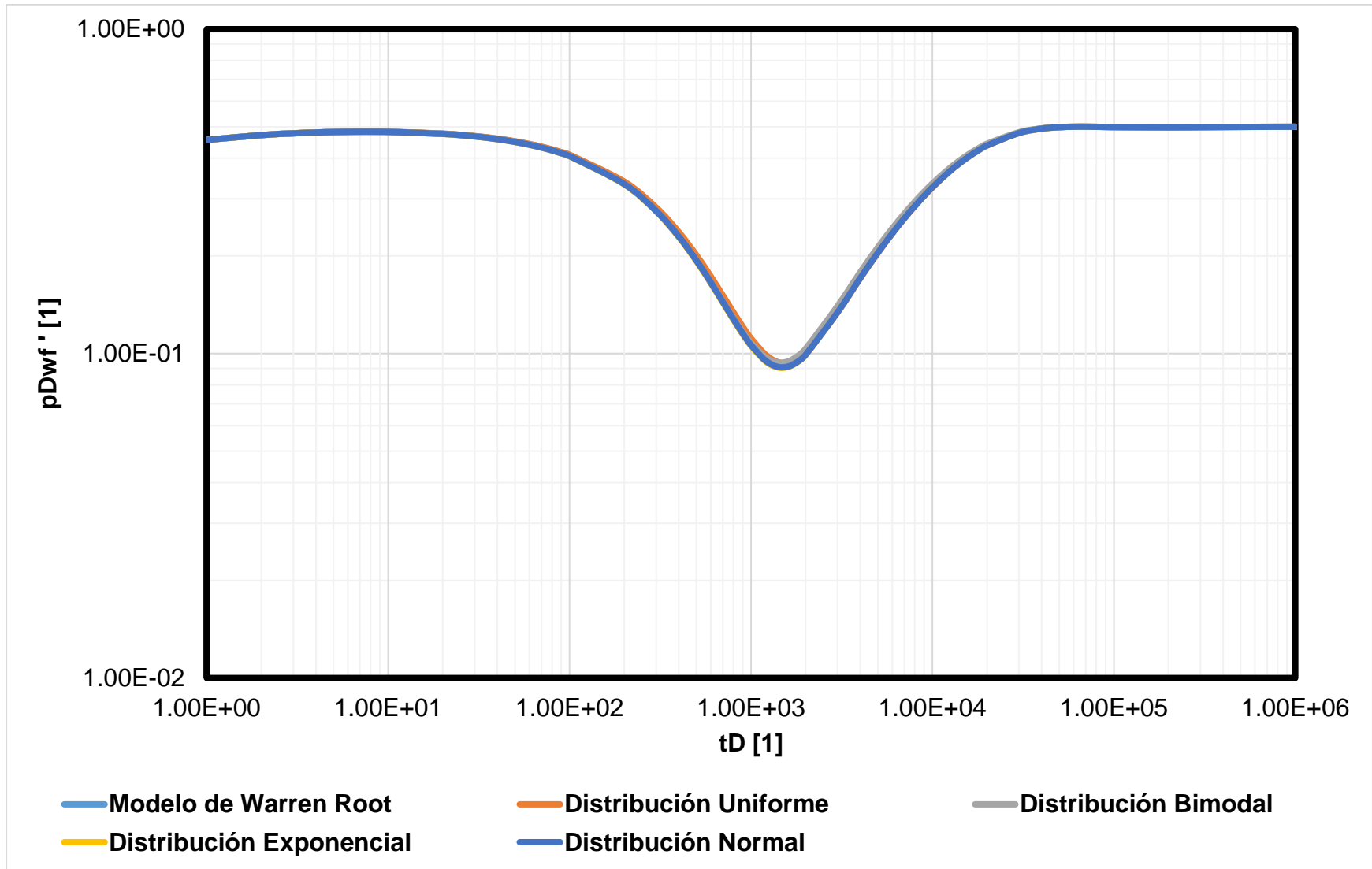




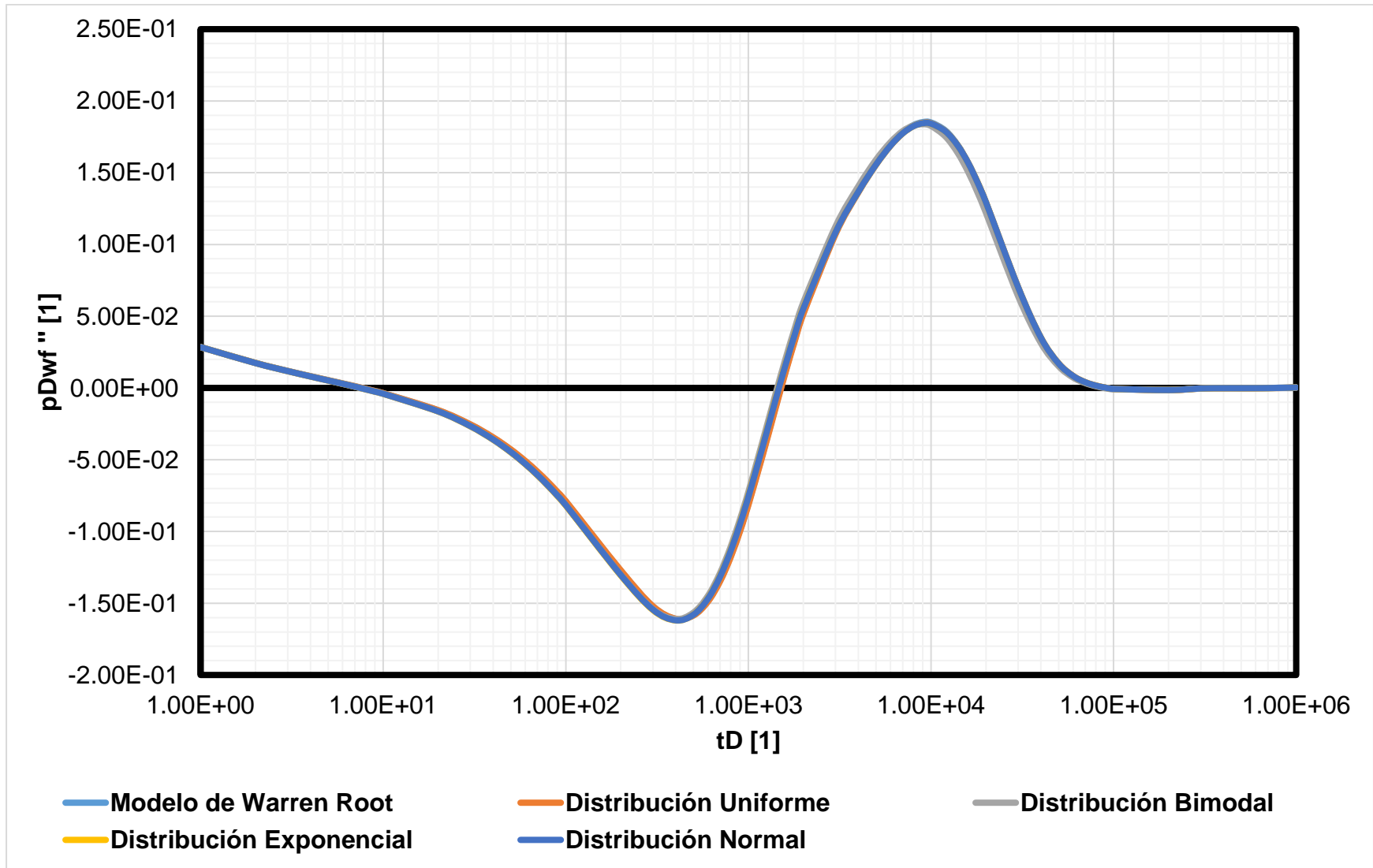
*Fig 3.1. Comparativo de los diferentes modelos de probabilidad y el modelo base en régimen pseudo-estacionario.*



**Fig 3.2. Cálculo del error relativo porcentual para los modelos de distribución en régimen pseudo-estacionario.**



*Fig 3.3. Cálculo de la función derivada para los diferentes modelos en estado pseudo-estacionario.*



**Fig 3.4. Cálculo de la función segunda derivada para los diferentes modelos en estado pseudo-estacionario.**

El período de transición se ve afectado por el coeficiente de almacenamiento de las fracturas,  $\omega_f$ . En la **Fig. 3.5.**, el período de transición fracturas-sistema es menos sensible conforme aumenta el coeficiente de almacenamiento en las fracturas. Es decir que, la tasa de cambio, entre el sistema fracturado y el sistema acoplado, es menos pronunciada, por lo que el período de transición es cada vez menos apreciable en la curva tipo. Con la ayuda de la función derivada, es posible apreciar los cambios en la pendiente de curva de  $p_{D\omega_f}$  contra  $t_D$ .

Con coeficientes de almacenamiento pequeños, el tiempo al cual se alcanza el período de transición es más corto, comparado con el tiempo para alcanzar el mismo estado, pero con  $\omega_f$  más mayores; de igual manera, la duración del período de transición es mayor con  $\omega_f$  pequeños.

En la **Fig. 3.6.** se aprecia el comportamiento de la función derivada y segunda derivada, en un gráfico semi-logarítmico. Se observa que la función segunda derivada interseca al eje de las abscisas tres veces. Por lo que se puede interpretar que, al tiempo adimensional donde se lleva a cabo la primera intersección con dicho eje (yendo de izquierda a derecha), marca el tiempo al cual comienza el aporte de fluidos por parte de la matriz cercana al pozo a la red de fracturas, lo que provoca un efecto de recarga cercana al pozo, y por consiguiente el cambio de la presión es más lento, y la segunda derivada decrece vuelve e interseca por segunda vez con el eje de las abscisas. La disminución en el valor de la segunda derivada continua hasta que nuevamente el aporte total de la red de fracturas gobierna el ritmo de abatimiento de la presión observado, momento en el que ocurre la tercera intersección. En este momento, el comportamiento observado es característico de un modelo radial homogéneo del sistema matriz-fractura.

En este trabajo no se reportan los comportamientos obtenidos para otros tipos de distribución, dado que se observan patrones muy similares. Sin embargo, el algoritmo para la construcción de las curvas, en lenguaje de Visual Basic 6, se añade al final del **Capítulo 3.**

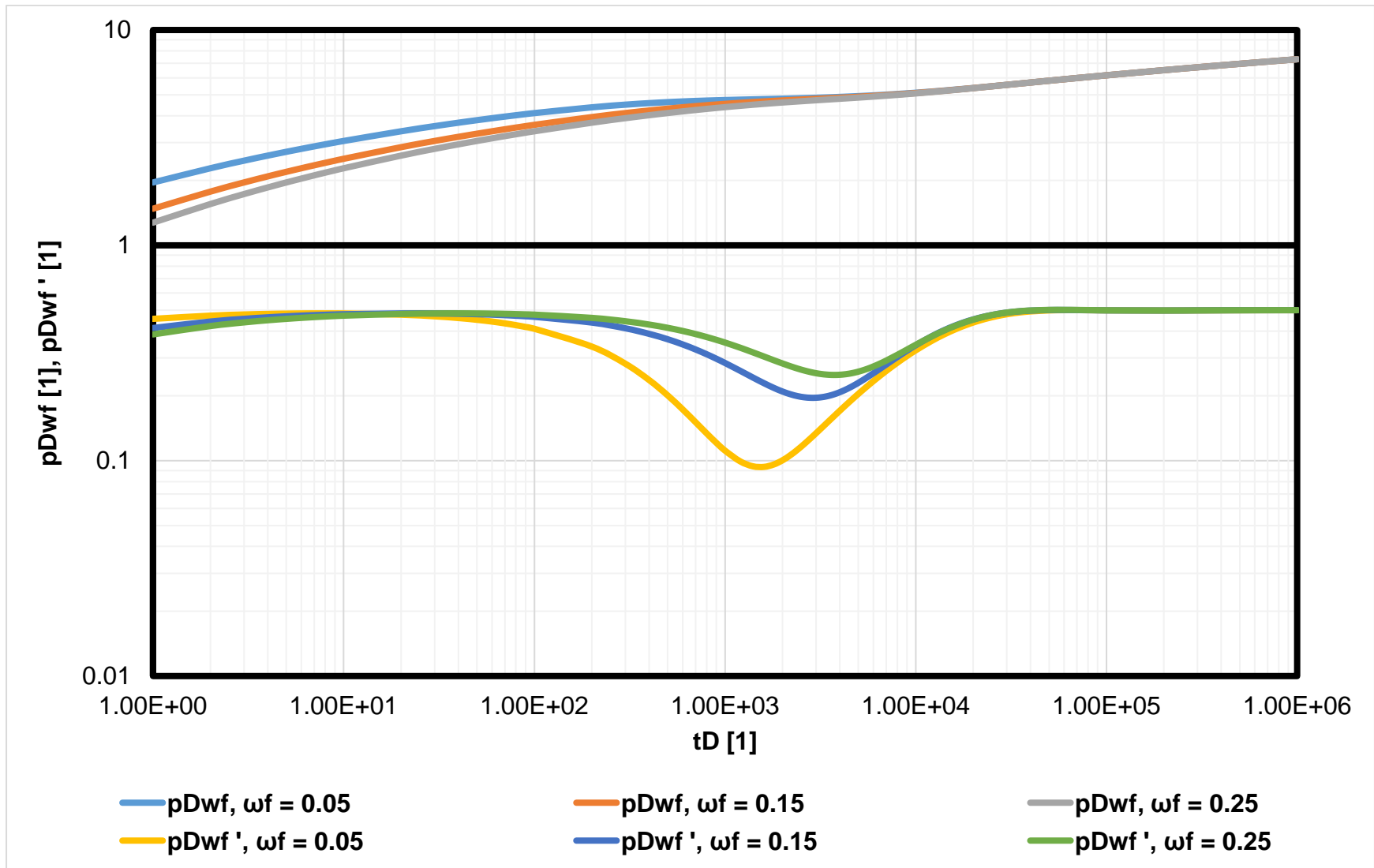


Fig 3.5. Curva tipo y función derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de  $\omega_f$ .

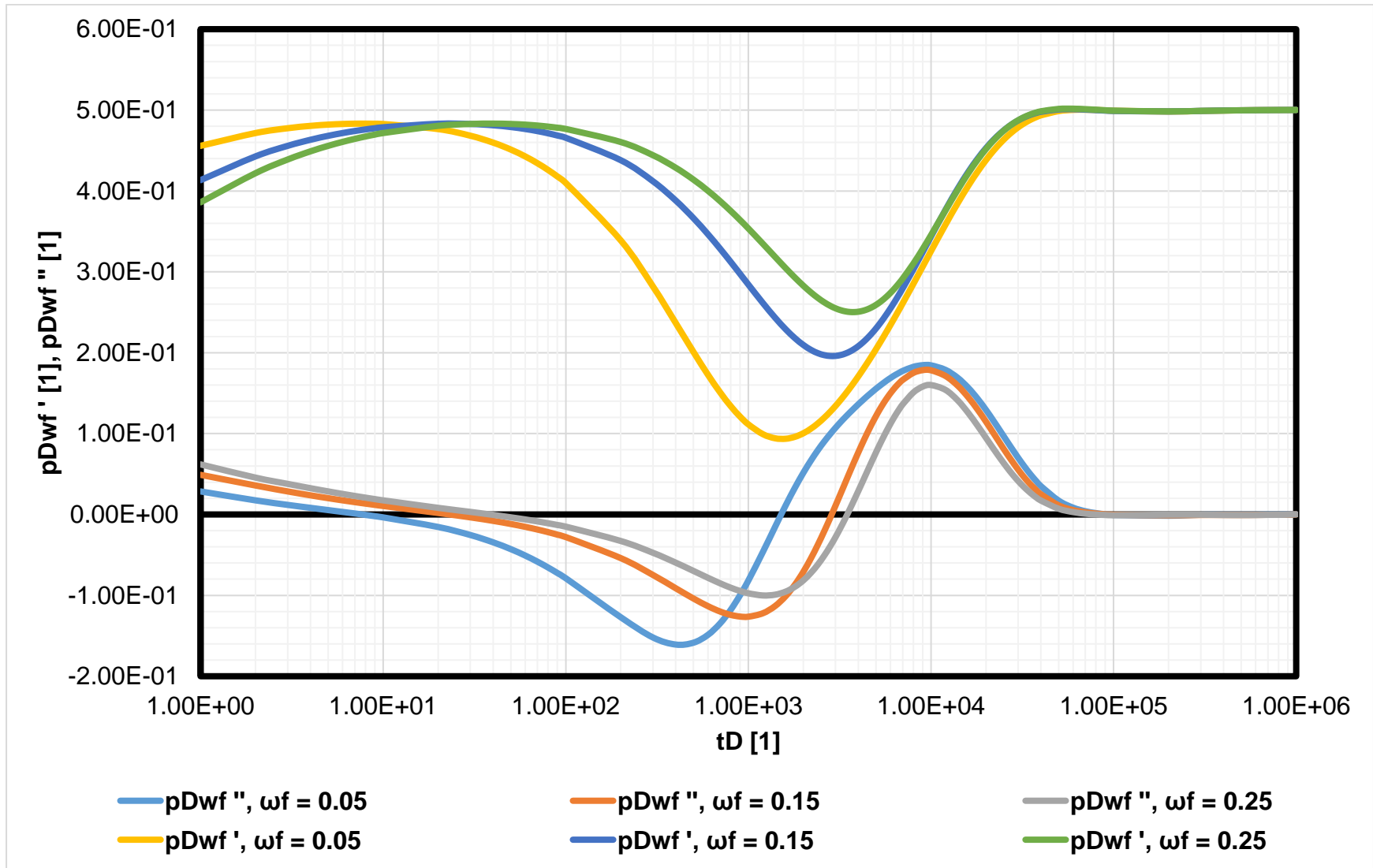


Fig 3.6. Función derivada y segunda derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de  $\omega_f$ .

El coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , tiene un efecto sobre la curva tipo en cualquiera de las funciones de distribución de probabilidad. Dicho efecto, se ilustra en la **Fig. 3.7**. A valores de  $\lambda$  pequeños, el tiempo en el cual se alcanza la transición, fracturas-sistema acoplado, es mayor que el tiempo a valores de  $\lambda$  más grandes. En la **Tabla 3.3**, se encuentran los parámetros utilizados para el análisis.

**Tabla 3.3. Parámetros utilizados para análisis comparativo en régimen pseudo-estacionario.**

<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$\lambda_{mín} = 9x10^{-5}$	$\lambda_{mín} = 5x10^{-5}$	$\lambda_{mín} = 1.3x10^{-4}$
$\lambda_{máx} = 1.1x10^{-4}$	$\lambda_{máx} = 9x10^{-5}$	$\lambda_{máx} = 1.7x10^{-4}$

Para los 3 casos, las pendientes en cada una de las regiones es la misma. Sin embargo, el tiempo al cual las pendientes comienzan a cambiar es diferente para cada caso, manteniéndose el mismo tiempo de transición fracturas-sistema. Es decir, la amplitud del valle en la función derivada, para cualquiera de los tres casos, es el mismo.

La función segunda derivada confirma el comportamiento descrito con anterioridad. Ya que, la amplitud en los valles para los tres casos es el mismo. La intersección con el eje horizontal de la gráfica semilogarítmica posee una traslación hacia la derecha proporcional para cada caso.

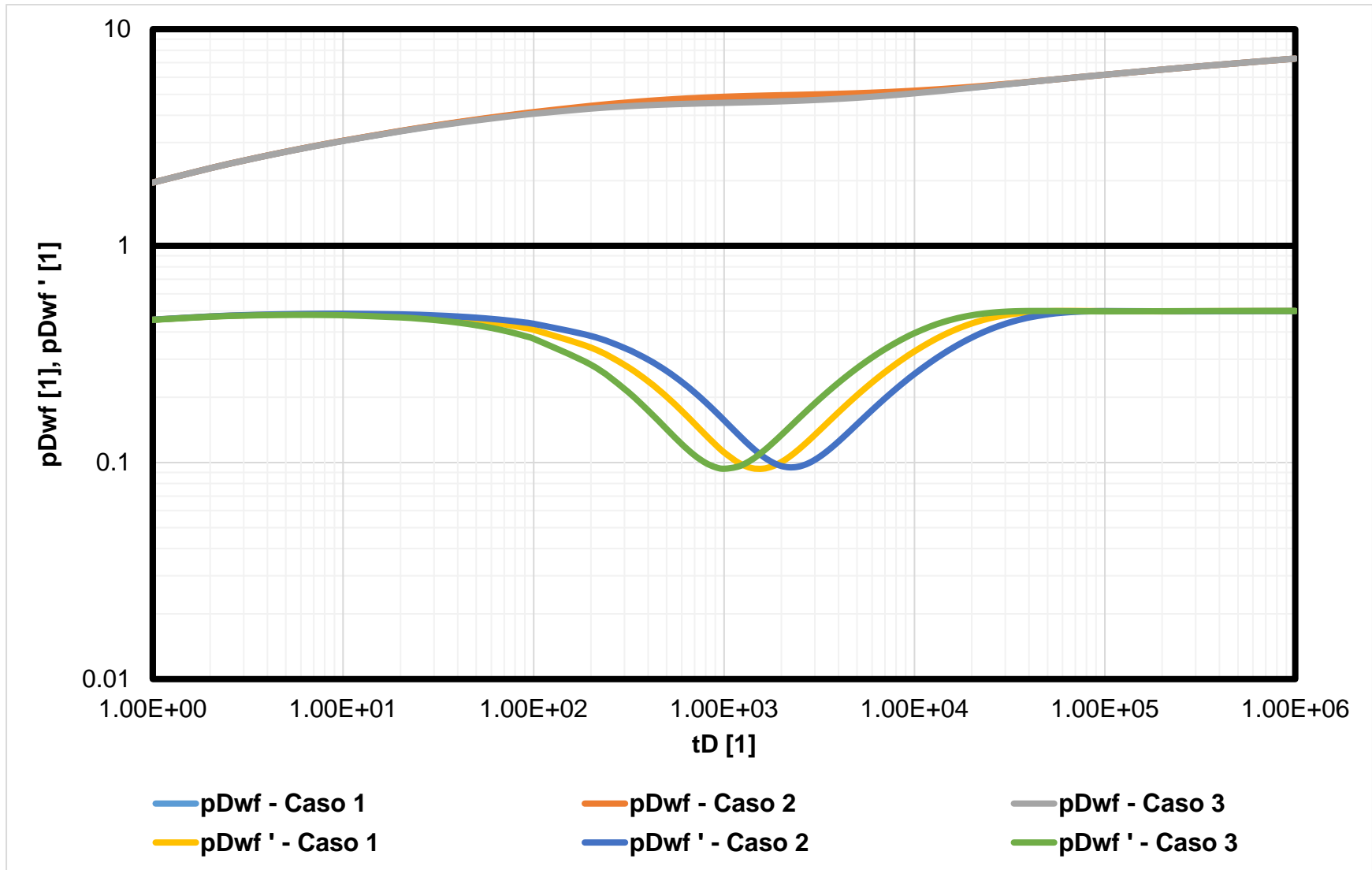
Otro comportamiento observado, en la función segunda derivada, es el siguiente. Conforme los valores de  $\lambda_{máx}$  y  $\lambda_{mín}$  se acercan entre sí (mayor homogeneidad del yacimiento), el período de transición posee una mayor amplitud. Es decir, la distancia entre el valle y la cresta en la curva de la segunda derivada es mayor, **Fig. 3.9.**, caso 3. Por lo que, entre mayor sea la diferencia



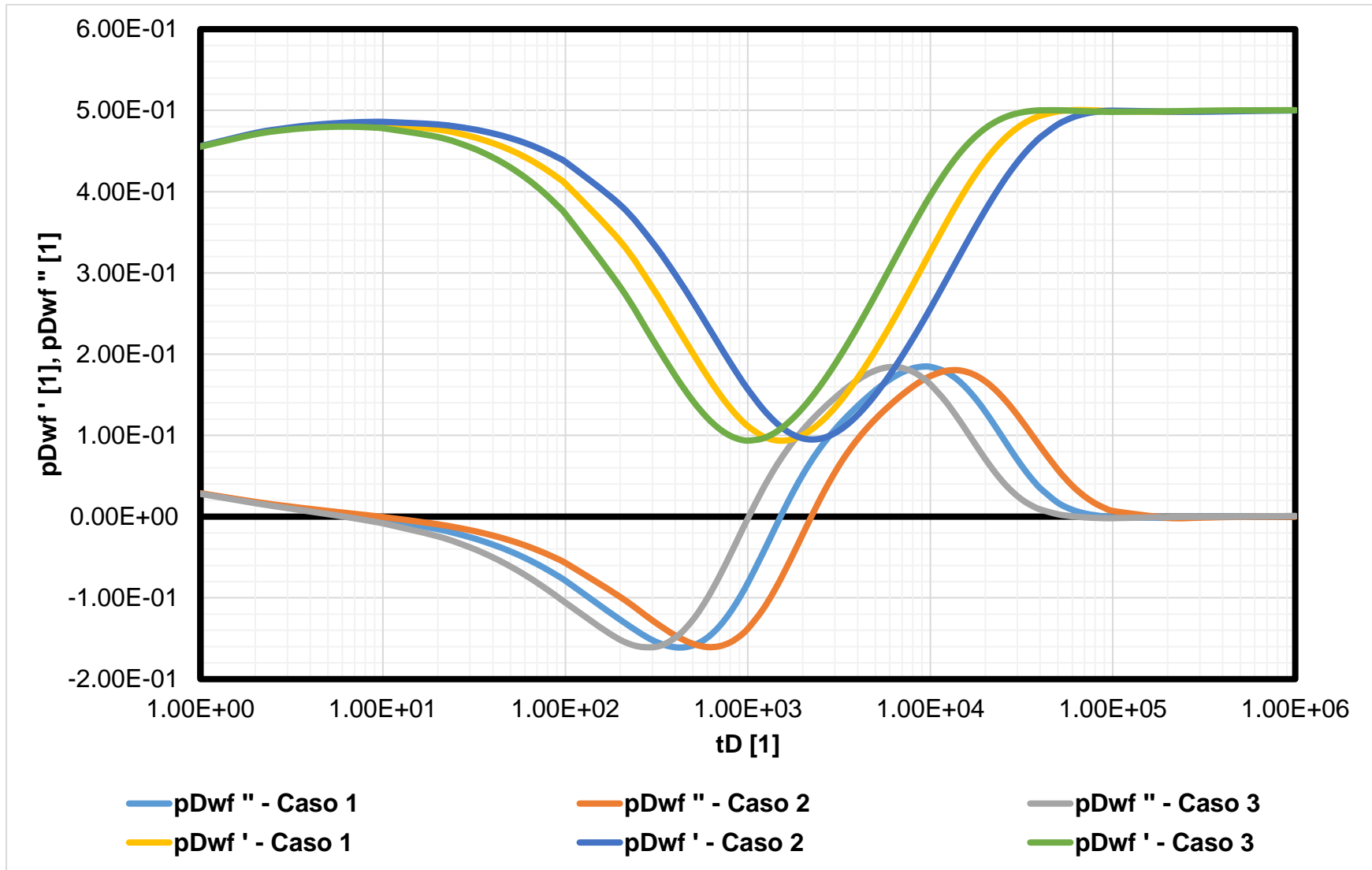
entre los valores de coeficientes de transferencia matriz-fractura (mayor heterogeneidad del yacimiento), menor será el efecto que se observa durante el período de transición. En la **Tabla 3.4.** se encuentran los valores utilizados para el análisis.

**Tabla 3.4. Parámetros utilizados para análisis comparativo de la amplitud de las curvas.**

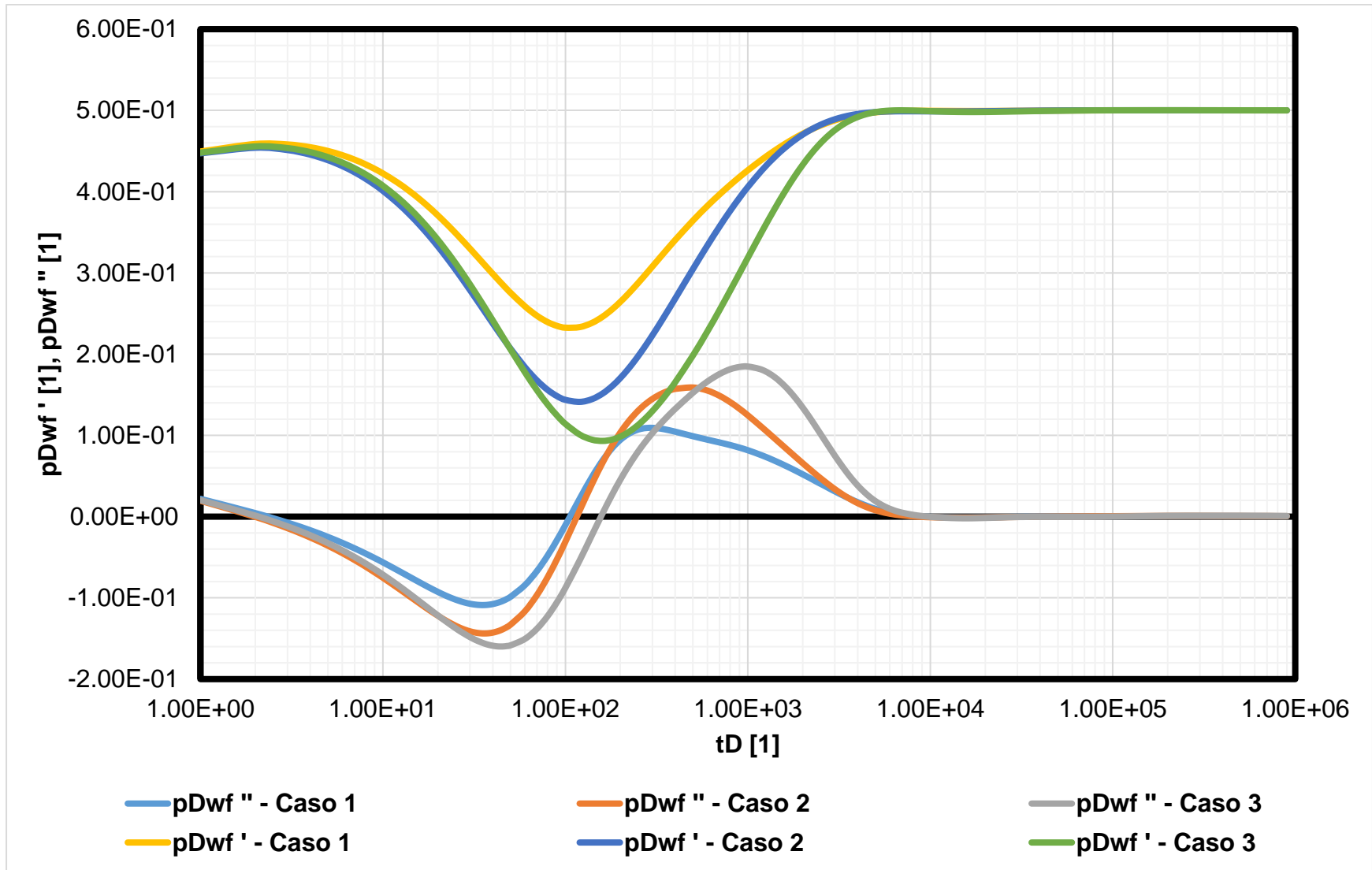
<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$\lambda_{min} = 9x10^{-4}$	$\lambda_{min} = 9x10^{-4}$	$\lambda_{min} = 9.5x10^{-4}$
$\lambda_{max} = 9x10^{-3}$	$\lambda_{max} = 3.5x10^{-3}$	$\lambda_{max} = 9.9x10^{-4}$
$\Delta\lambda_1 = 8.1x10^{-3}$	$\Delta\lambda_2 = 2.6x10^{-3}$	$\Delta\lambda_3 = 4x10^{-5}$



*Fig 3.7. Curva tipo y función derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de  $\lambda$ .*



**Fig 3.8. Función derivada y segunda derivada, para una distribución Uniforme con diferentes valores de  $\lambda$ .**



**Fig 3.9. Primer y segunda derivada, para estudiar el efecto de  $\lambda$  en la amplitud de las curvas en régimen ps-estacionario.**

### 3.2. Efectos de los tipos de distribución en régimen transitorio

Para analizar este tipo de régimen, es necesario establecer un modelo base. Dicho modelo, es el presentado por Jalali y Erzagui (1987), en donde la función de transferencia matriz-fractura se define como:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \sqrt{\frac{\lambda}{\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right), \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

Se observa en la **Ec. (3.2)**, que el tamaño de bloque se considera constante, es por ello, que solo aparece un valor de  $\lambda$  en la ecuación. Sin embargo, para los modelos de distribución de probabilidad, los valores de  $\lambda$  mínimo y máximo son cercanos al valor de  $\lambda$  propuesto para un tamaño de bloque constante.

**Tabla 3.5. Parámetros generales considerados para la solución numérica de los modelos en régimen transitorio.**

$\omega_m = 0.95$	$\lambda_{\min} = 9.9 \times 10^{-5}$	$\lambda_2 = 1.05 \times 10^{-4}$	$t_{D\text{final}} = 1 \times 10^6$
$\omega_f = 0.05$	$\lambda = 5 \times 10^{-5}$	$\lambda_3 = 1.2 \times 10^{-4}$	$S_D = 0$
$\lambda_{\max} = 9.9 \times 10^{-4}$	$\lambda_1 = 9.9 \times 10^{-5}$	$t_{D\text{inicial}} = 1$	$C_D = 0$

**Tabla 3.6. Parámetros particulares considerados para la solución numérica de los modelos en régimen transitorio.**

$a_{exp} = 1$	$\sigma_{nor} = \frac{(1 - \mu_{nor})}{5\sqrt{2}}$
---------------	--

---

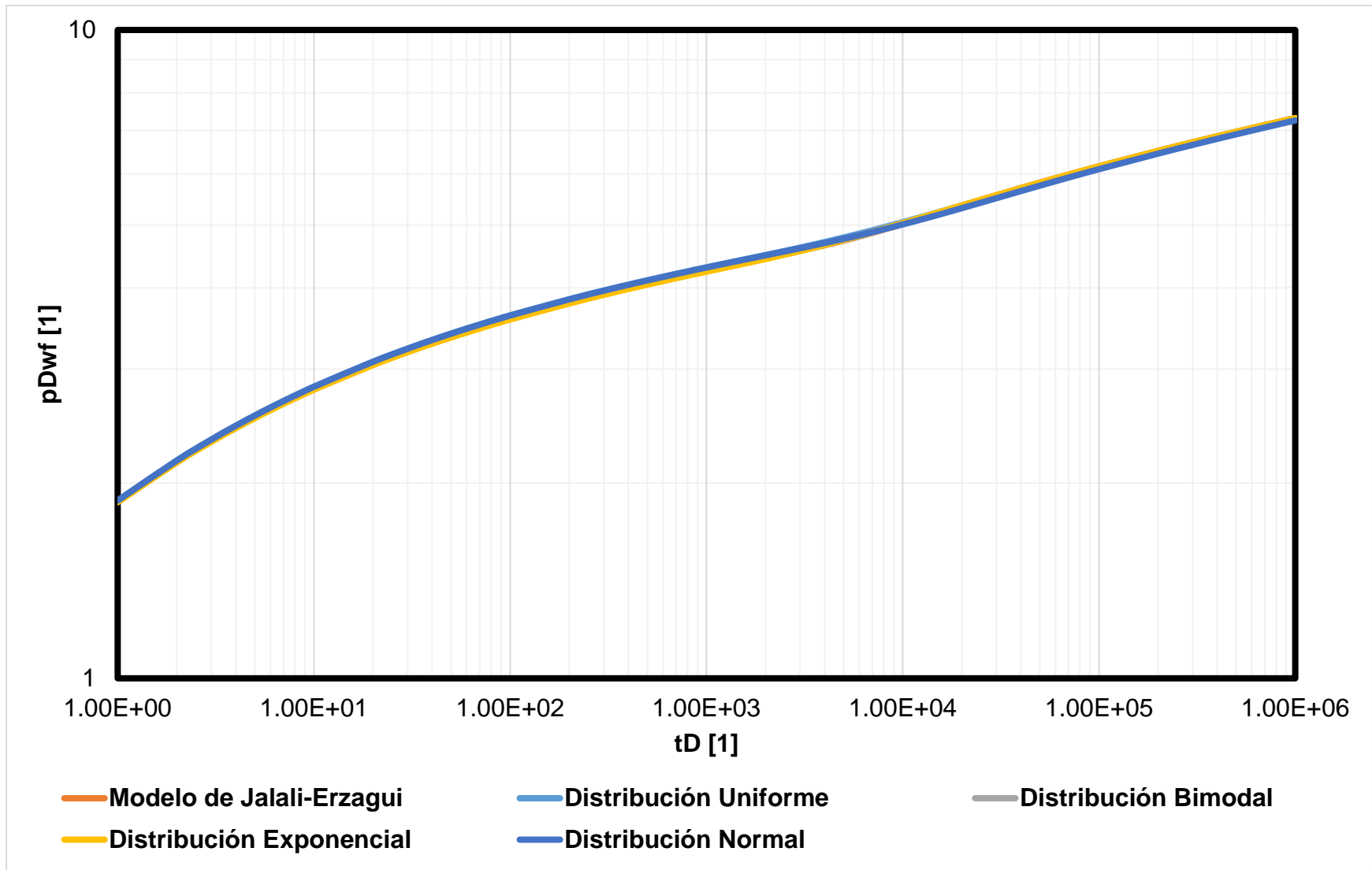
$$\mu_{nor} = \sqrt{\frac{\lambda_{mín}}{\lambda_{máx}}} \quad N_{Steh} = 10$$

---

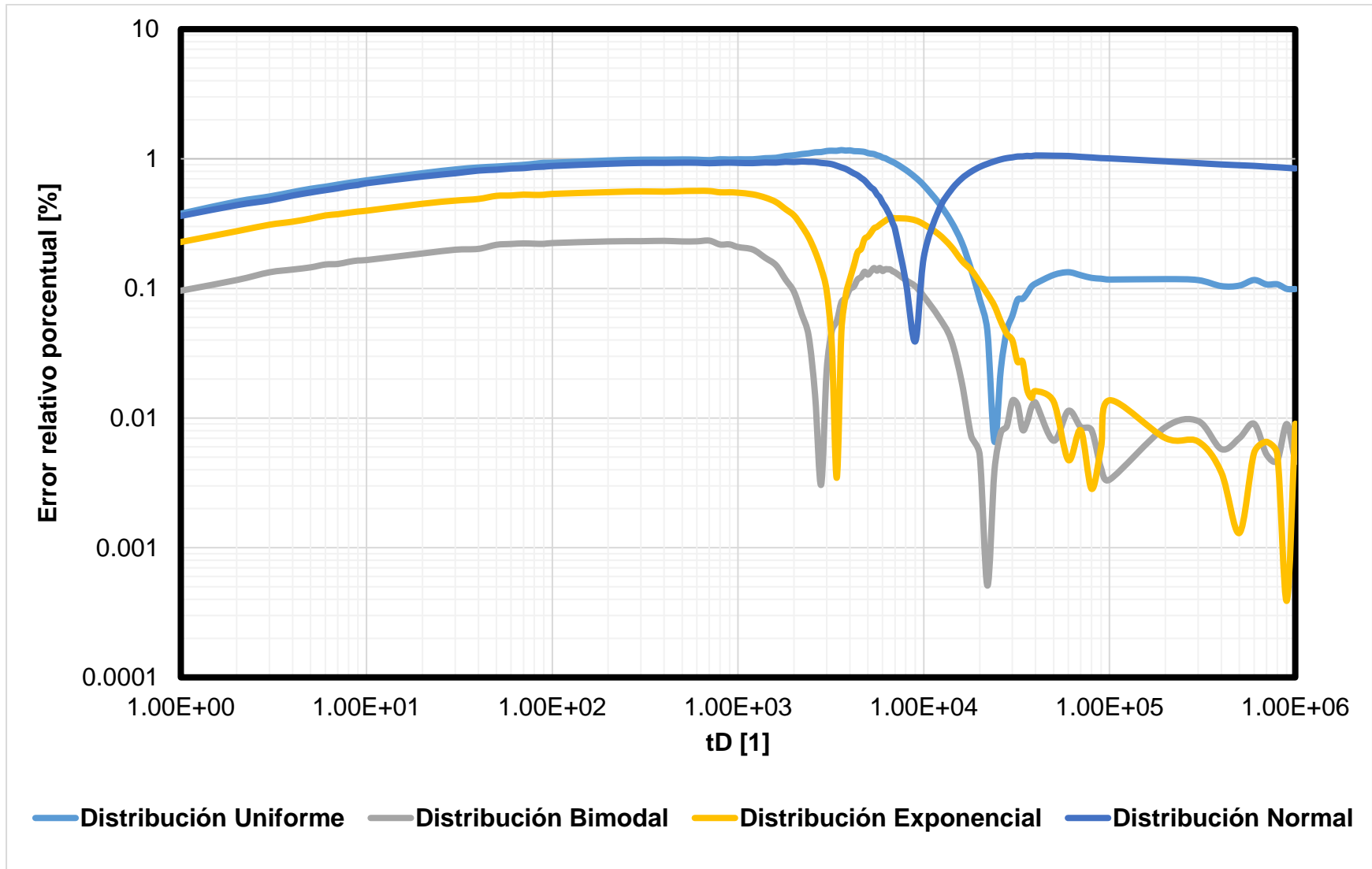
En la **Fig. 3.10** se observa la curva tipo construida con las consideraciones anteriores. Las curvas que resultan de los modelos de probabilidad se sobreponen a la curva del modelo base. Para la validación, se calcula el error relativo porcentual, tomando como referencia el modelo base de Jalali y Erzagui. El error máximo se obtiene con el modelo de distribución Exponencial, con una desviación del modelo base de cerca de 1.20 [%] (**Fig. 3.11**). El error puede disminuir al ajustar los parámetros de las distribuciones de probabilidad.

Así mismo, se utilizan las funciones primer y segunda derivada para analizar el comportamiento de la presión en régimen transitorio. Se observa que los modelos no se sobreponen de manera adecuada al modelo base. Sin embargo, ofrece una oportunidad para realizar curvas tipo para cada tipo de distribución, según sea el caso de los datos de campo obtenidos.

Los parámetros, como el coeficiente de almacenamiento en la matriz y el coeficiente de flujo interporoso impactan invariablemente sobre el comportamiento de la curva tipo. Para llevar a cabo el análisis comparativo y observar los efectos de la presión adimensional con respecto al tiempo, se toma en cuenta el modelo de distribución Exponencial.

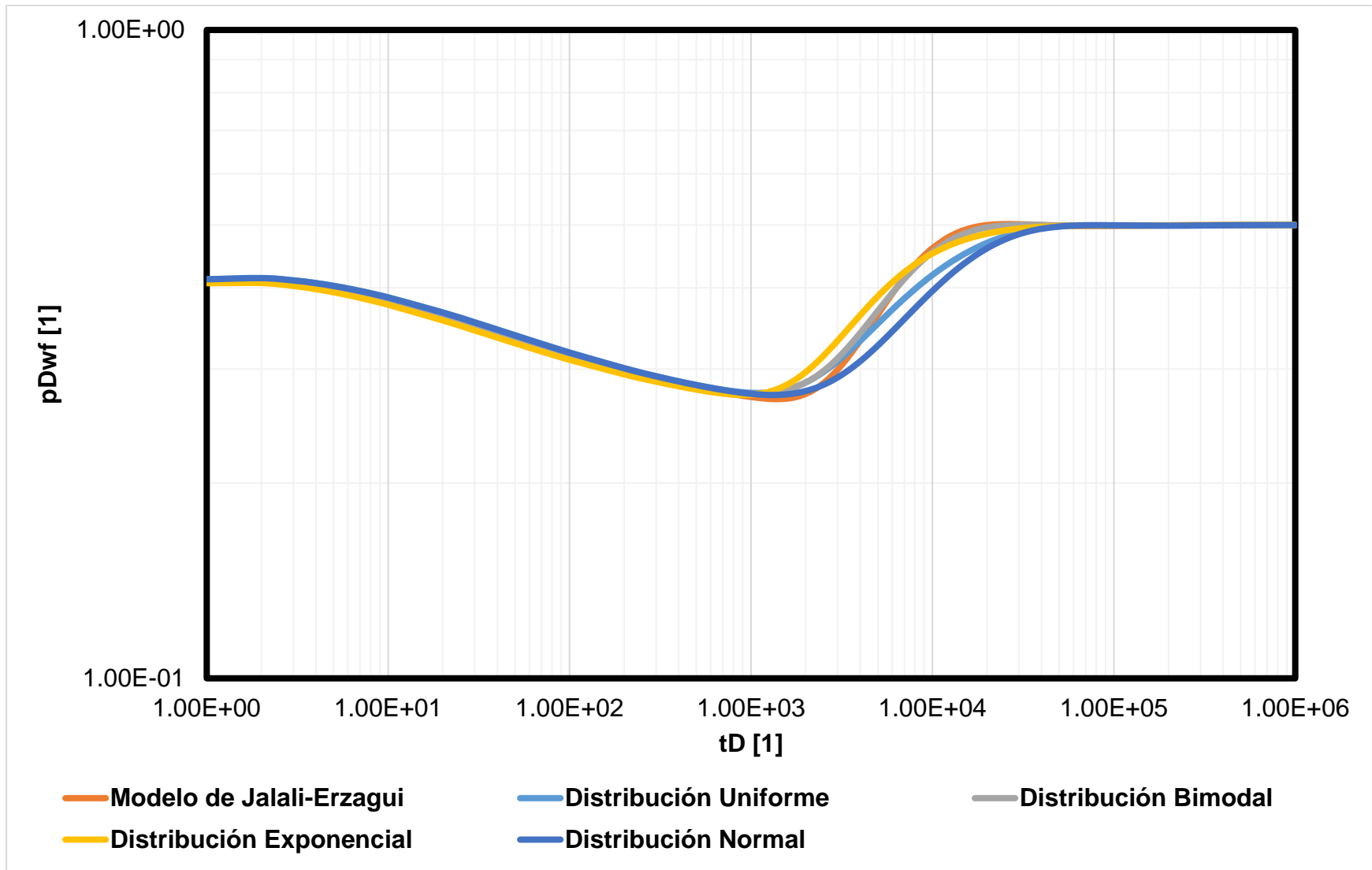


*Fig 3.10. Comparativo de los diferentes modelos de probabilidad y el modelo base en régimen transitorio.*

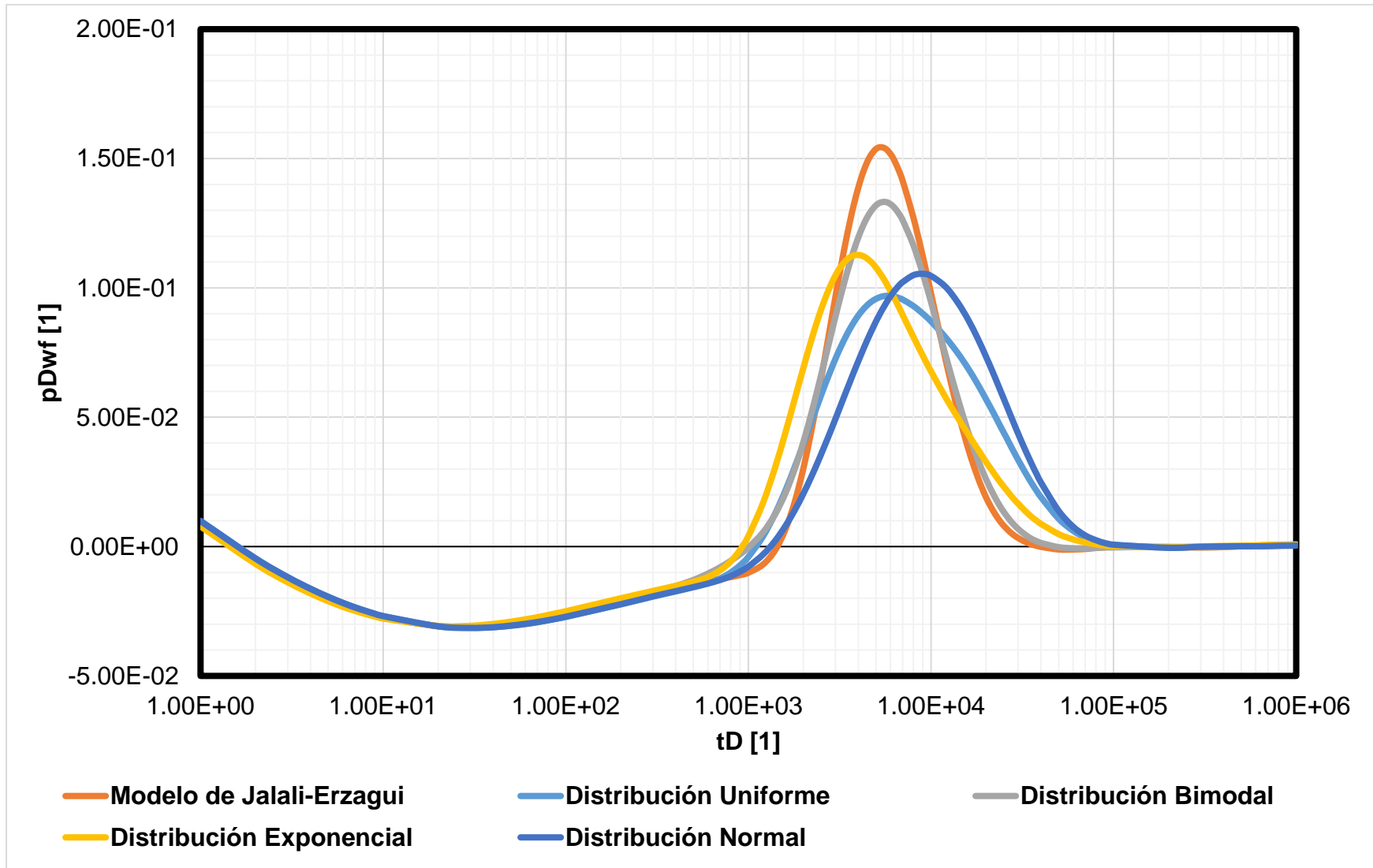


**Fig 3.11. Cálculo del error relativo porcentual para los modelos de distribución en régimen transitorio.**





*Fig 3.12. Cálculo de la función derivada para los diferentes modelos en estado transitorio.*



*Fig 3.13. Cálculo de la función segunda derivada para los diferentes modelos en estado transitorio.*

Del mismo modo que en flujo pseudo-estacionario, se observa que, a valores pequeños de coeficiente de almacenamiento en fracturas, el tiempo al cual se alcanza el flujo radial fracturas-sistema, es mayor que el tiempo que toma alcanzar el mismo estado, pero a valores de coeficiente de almacenamiento en fracturas mayores. Es decir, el período de transición es menor cuanto mayor es el coeficiente de almacenamiento en las fracturas (**Fig. 3 14**).

A pesar de que en cada uno de los casos de  $\omega_f$  el inicio del período de transición es diferente, el tiempo al cual alcanzan el final de dicho período es el mismo. El cambio de presión a  $\omega_f$  pequeños es más pronunciado que a  $\omega_f$  mayores.

El comportamiento de la primer y segunda derivada presentan un comportamiento similar al régimen pseudo-estacionario. Es decir, se observan tres intersecciones con el eje horizontal, en el caso de la función segunda derivada. Sin embargo, en la **Fig. 3.15**. se aprecia la existencia de puntos de inversión. En donde los tres casos de la segunda derivada, a tiempos cortos, poseen un orden vertical determinado. A partir de dichos puntos, el orden se invierte, siguiendo el mismo patrón. Los puntos de inversión, indican que, a coeficientes de almacenamiento más grandes, la amplitud de onda de la función segunda derivada se va haciendo más pequeña, es decir, la curva se va haciendo menos sensible ya que se va asemejando a un comportamiento de yacimiento homogéneo.

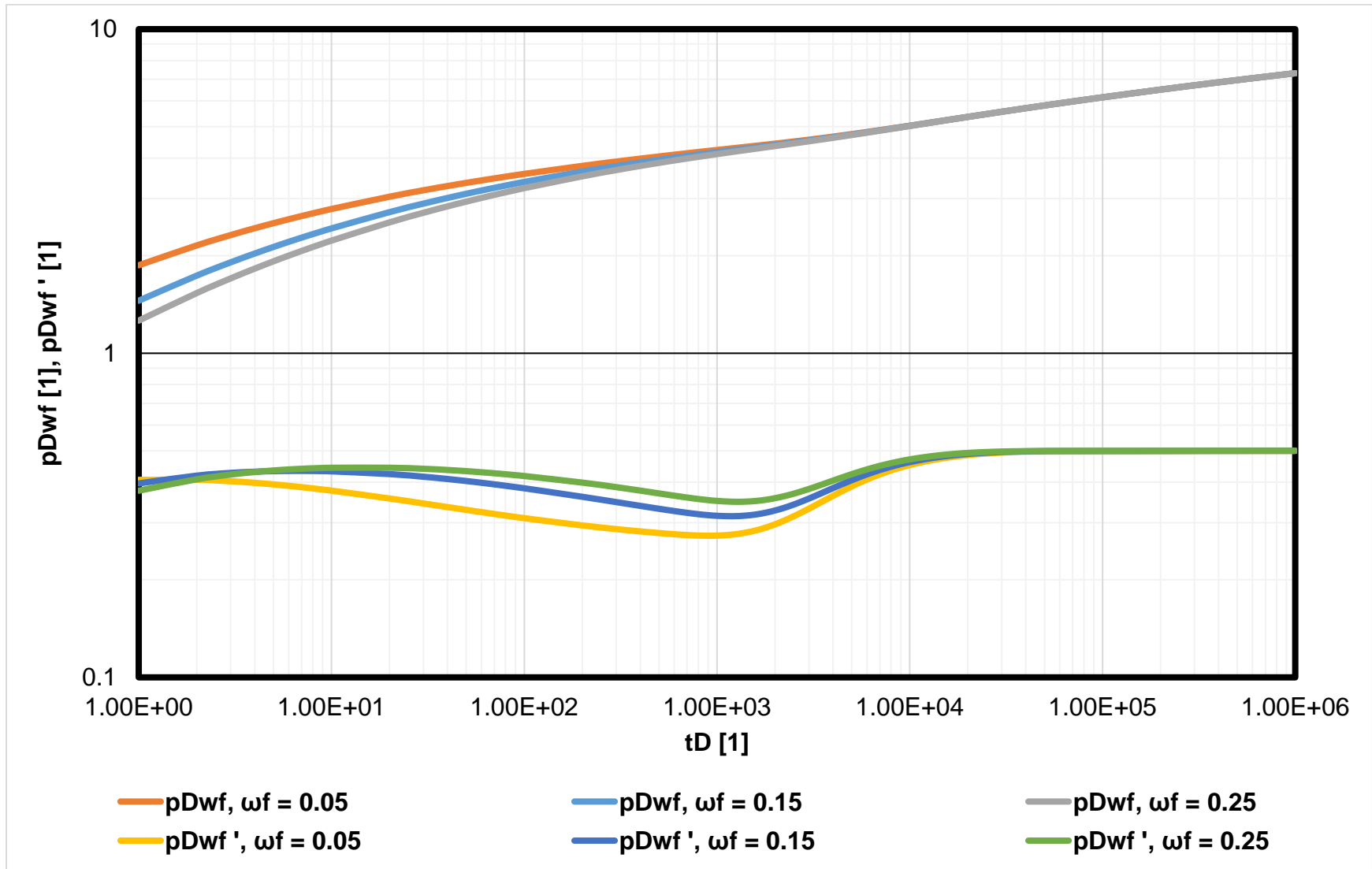


Fig 3.14. Curva tipo y función derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de  $\omega_f$ .

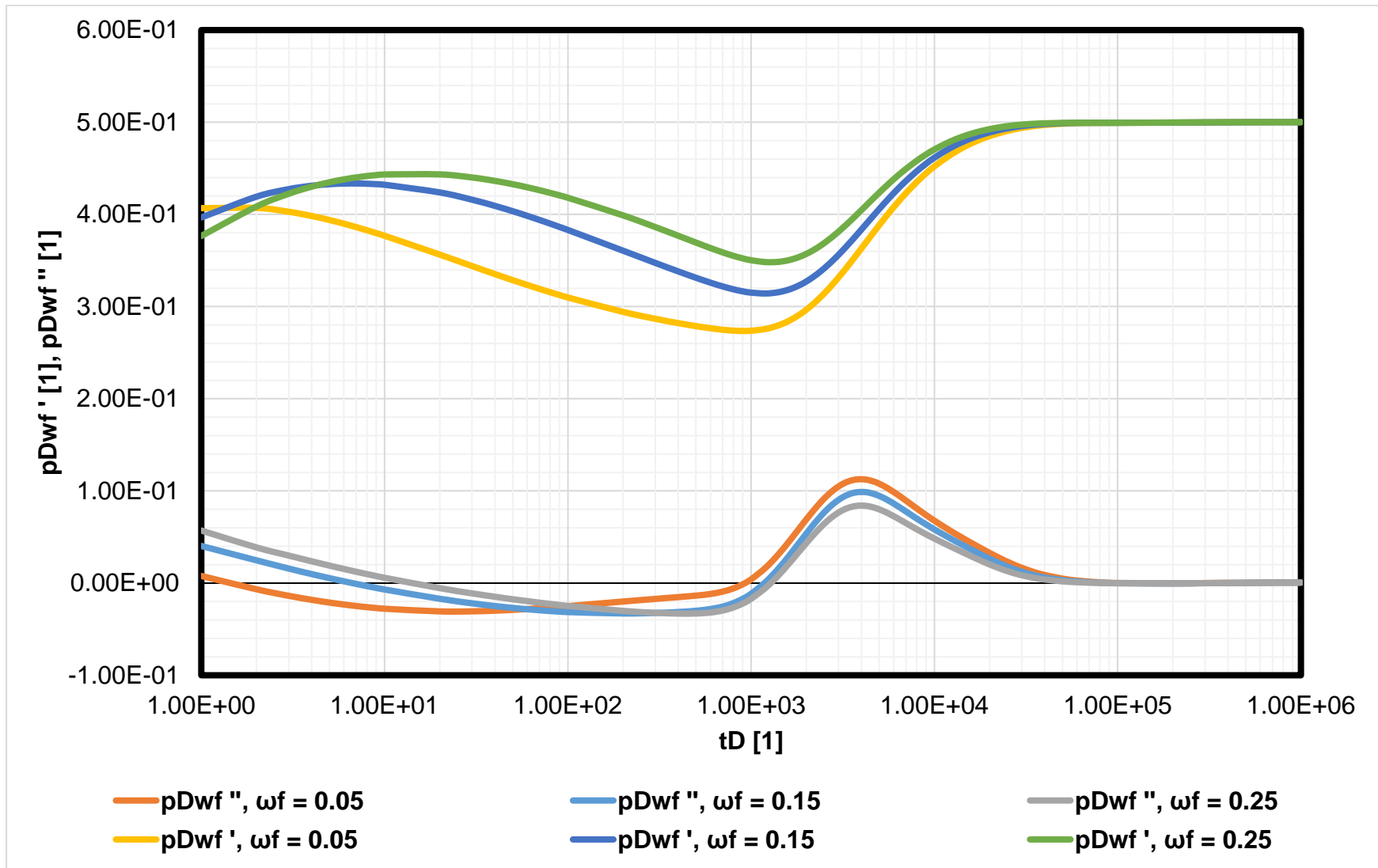


Fig 3.15. Función primer y segunda derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de  $\omega_f$ .

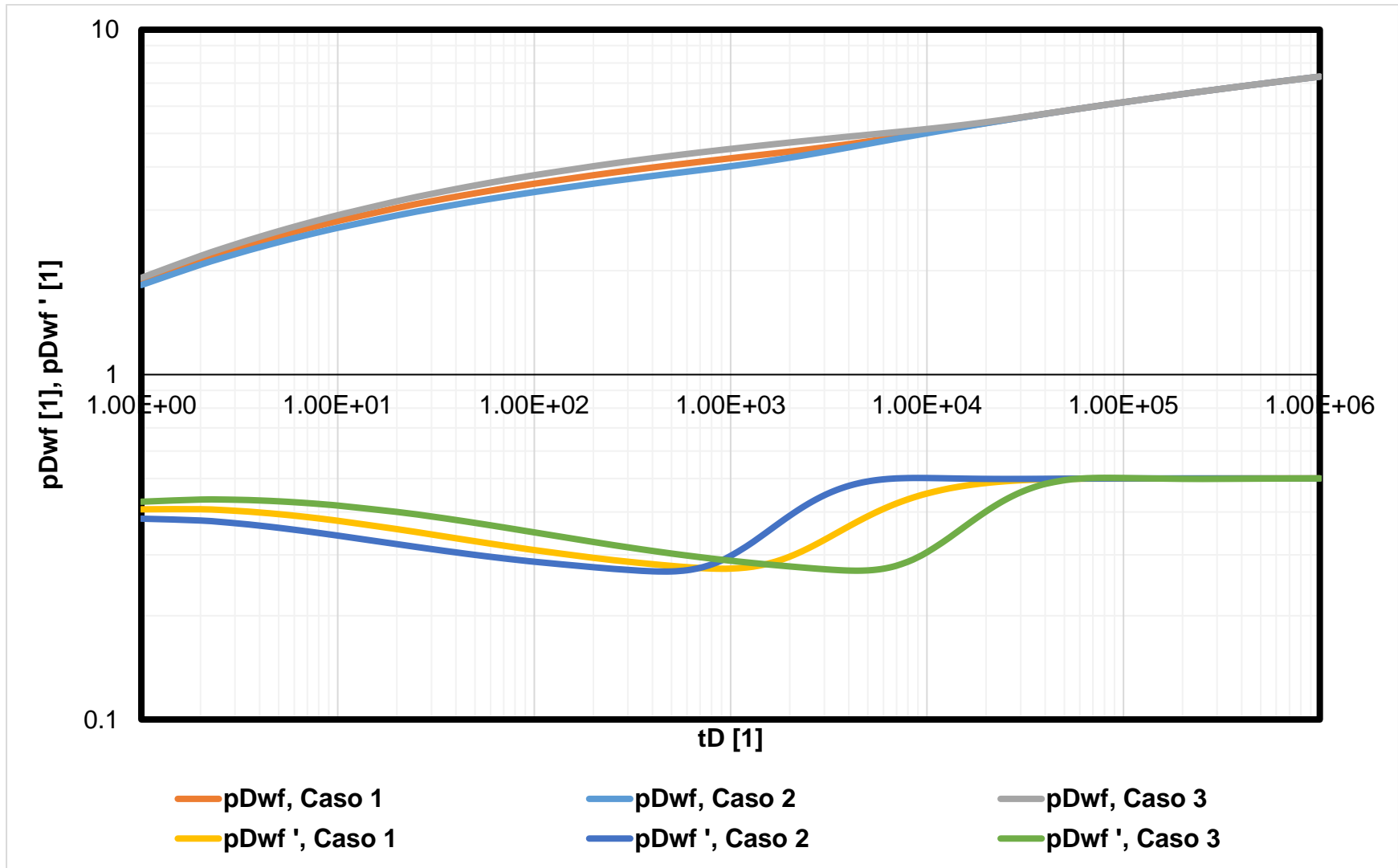
El coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , impacta de manera significativa en el comportamiento de la curva tipo. Se observa que, a  $\lambda$  mínimo y máximo pequeños, el tiempo al cual se alcanza el estado de transición es mayor que el tiempo que le toma al sistema alcanzar el mismo estado a valores de  $\lambda$  mínimo y máximo un orden de magnitud mayores. La razón es que a valores de coeficiente de flujo interporoso mayores, la facilidad con la que la matriz aporta al sistema fracturado es mayor, por lo que la onda de presión se comunica con mayor facilidad a través de todo el bloque de matriz. En la **Fig. 3.15.** se observa el comportamiento de la curva tipo y la función derivada, con los datos propuestos en la **Tabla 3.7.**

**Tabla 3.7. Parámetros utilizados para análisis comparativo en estado transitorio.**

<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$\lambda_{mín} = 9.9x10^{-5}$	$\lambda_{mín} = 7.9x10^{-4}$	$\lambda_{mín} = 9x10^{-5}$
$\lambda_{máx} = 7x10^{-4}$	$\lambda_{máx} = 9.9x10^{-4}$	$\lambda_{máx} = 9.9x10^{-5}$

De igual manera, en la **Fig. 3.17.**, el comportamiento de la segunda derivada complementa el de la función primer derivada. A valores de coeficiente de transferencia mayores, la cresta se encuentra desplazada hacia la izquierda. Es decir que, el período que transcurre entre la primer y la segunda intersección con el eje horizontal se reduce a valores de  $\lambda$  máximo y mínimo elevados.

Otro efecto importante, es la amplitud entre los valores del coeficiente de transferencia matriz-fractura. Se observa que a valores de  $\lambda$  máximo y mínimo alejados entre sí, la curva de la segunda derivada interseca primero el eje horizontal del gráfico semi-logarítmico. Además, la amplitud de la cresta va disminuyendo conforme la separación entre los coeficientes disminuye. En la **Tabla 3.4.** se encuentran los valores de los parámetros de análisis.



**Fig 3.16.** Curva tipo y función derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de  $\lambda$ .

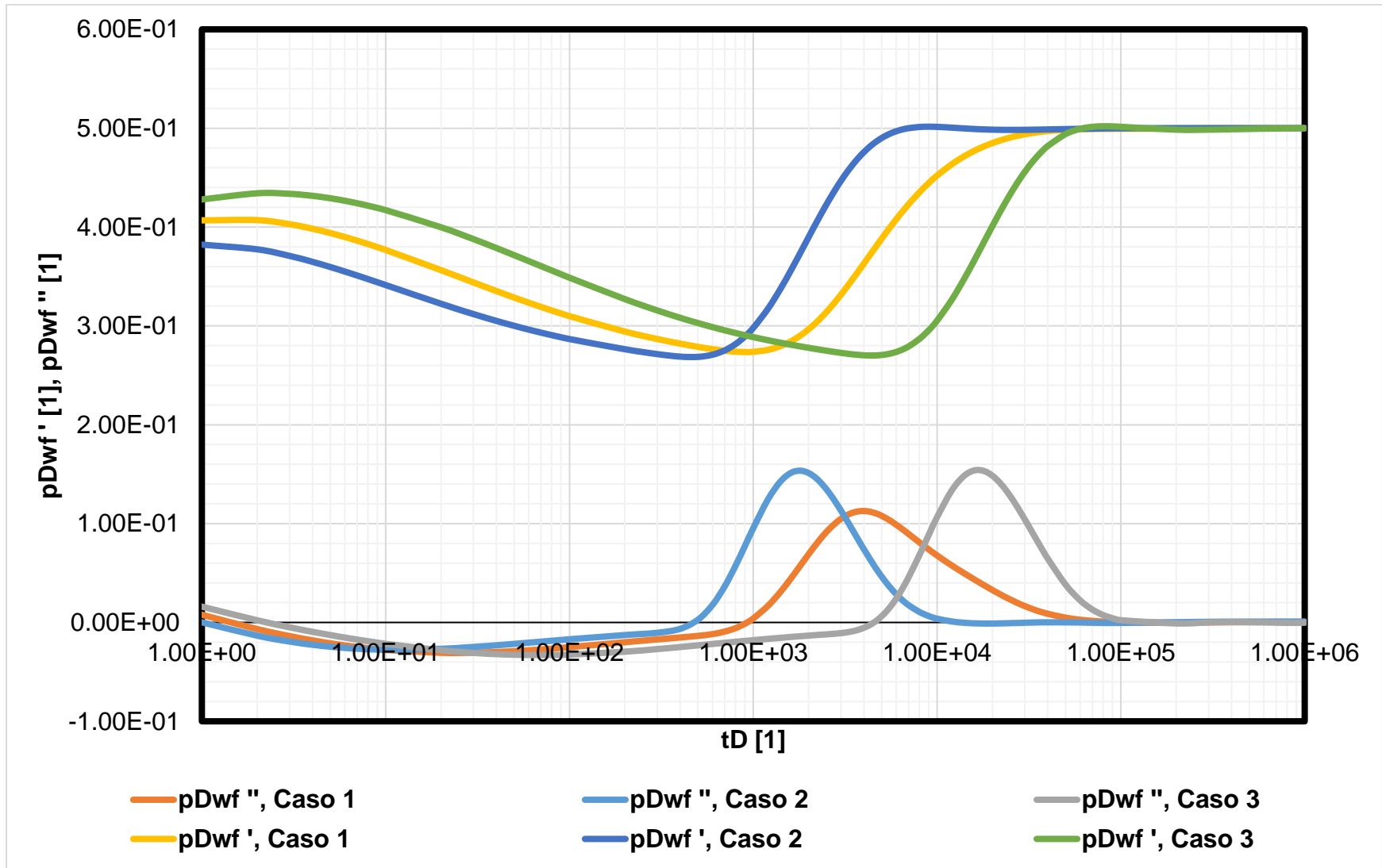


Fig 3.17. Función primer y segunda derivada, para una distribución Exponencial con diferentes valores de  $\lambda$ .



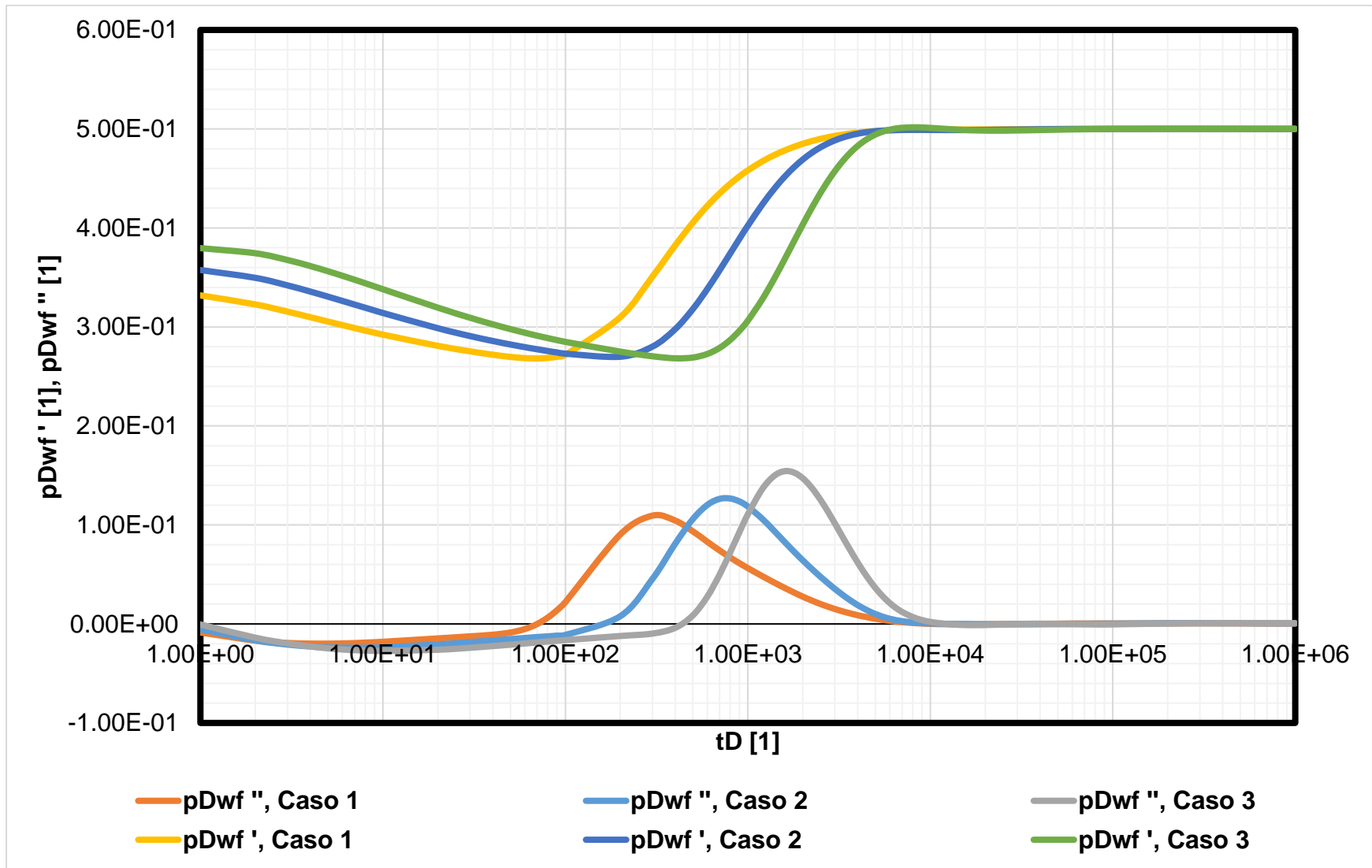


Fig 3.18. Primer y segunda derivada, para estudiar el efecto de  $\lambda$  en la amplitud de las curvas en régimen transitorio.

### **3.3. Efecto del tipo de flujo interporoso en los modelos de doble porosidad**

Para llevar a cabo este análisis, se tomará en cuenta la función de distribución Normal con los mismos parámetros para ambos regímenes de flujo. Se observa que para ambos regímenes el período de flujo interporoso termina al mismo tiempo, sin embargo, el tiempo al cual inicia el aporte de la matriz a las fracturas es diferente. Para el régimen pseudo-estacionario, a tiempos cortos se observa el aporte del sistema de fracturas en flujo radial; en régimen transitorio el aporte de los bloques de matriz comienza casi inmediatamente que el pozo es abierto a producción, por lo que la duración de flujo interporoso es mucho mayor que en comparación del flujo pseudo-estacionario.

La función segunda derivada presenta un comportamiento particular. En régimen pseudo-estacionario, la amplitud de la curva es mayor que la amplitud que se presenta en la curva en régimen transitorio. Lo anterior es debido a que los cambios en la presión son más susceptibles en régimen pseudo-estacionario, ya que la onda de presión se mueve de manera diferente dentro del bloque de matriz.

**Fujiwara (1989)**, encontró que la tasa de flujo es mucho mayor en régimen transitorio que en régimen pseudo-estacionario durante el período de flujo interporoso. Al existir un mayor gasto, el régimen transitorio provee una producción acumulada mucho mayor. En el período de aporte fracturas-sistema acoplado, ambos regímenes poseen, aproximadamente, la misma tasa de flujo.

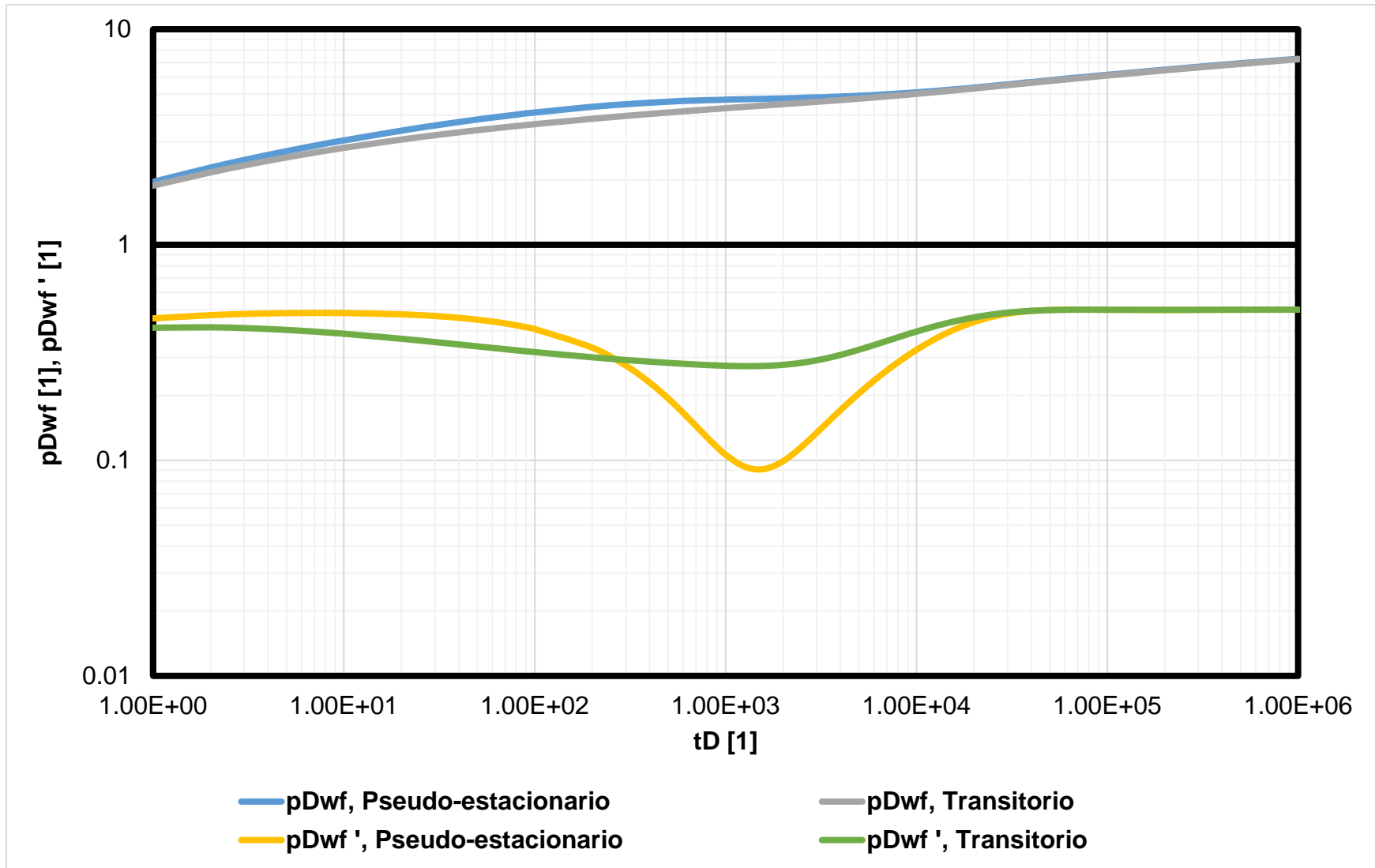
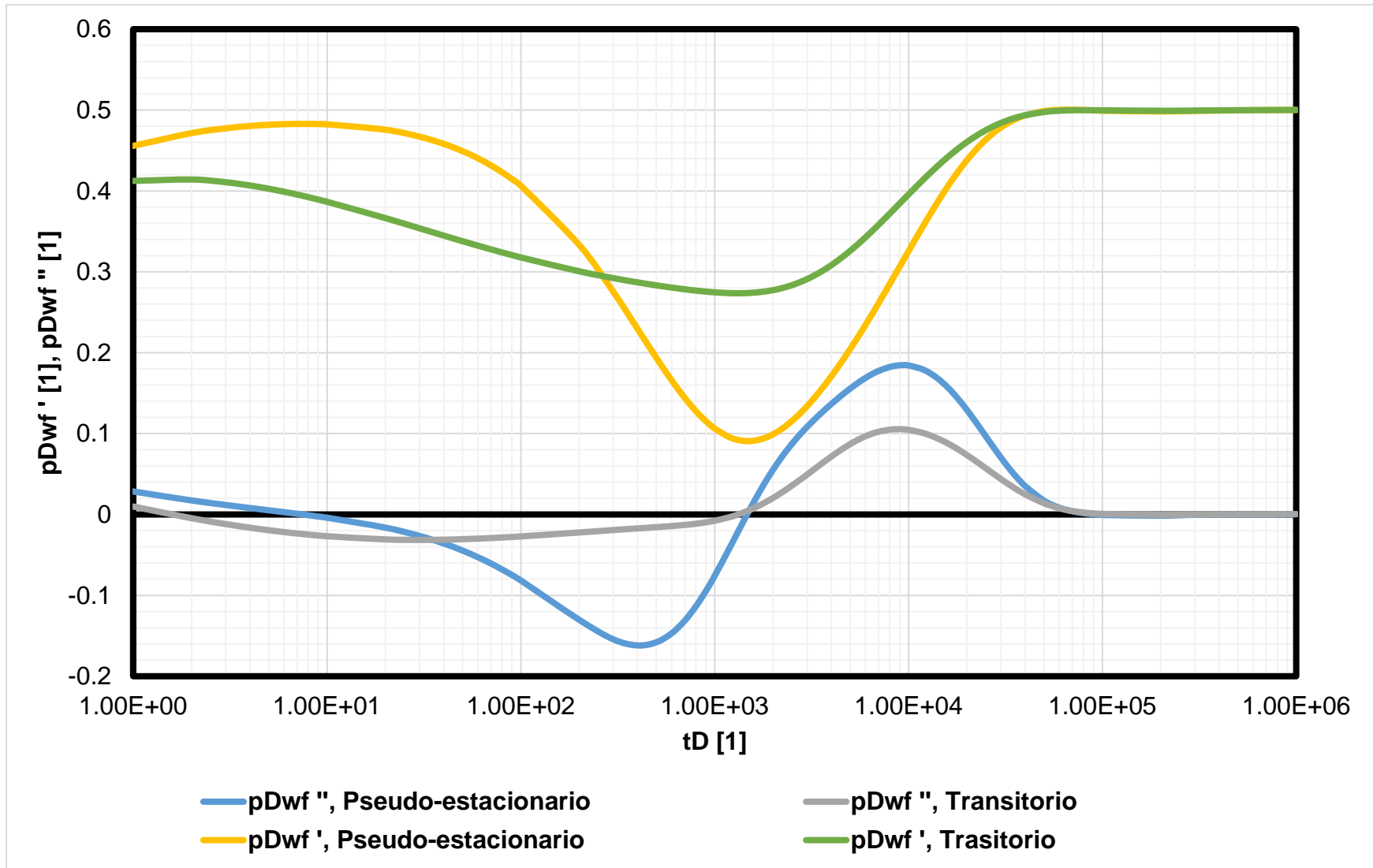


Fig 3.19. Curva tipo y función primera derivada, para una distribución Normal, en regímenes ps-estacionario y transitorio.



**Fig 3.20. Funciones primer y segunda derivada, para una distribución Normal, en regímenes ps-estacionario y transitorio.**

### 3.4. Algoritmo para la reproducción de las curvas obtenidas

Como se mencionó con anterioridad, el algoritmo para la obtención de resultados, se programó en lenguaje Visual Basic 6, a través de la herramienta Microsoft Excel.

A continuación, se presentan los diagramas de flujo para el cálculo de las curvas tipo, primeras y segundas derivadas con el inversor numérico de Gaver-Stehfest. Las ecuaciones utilizadas para calcular numéricamente las funciones primer y segunda derivada se presentan a continuación.

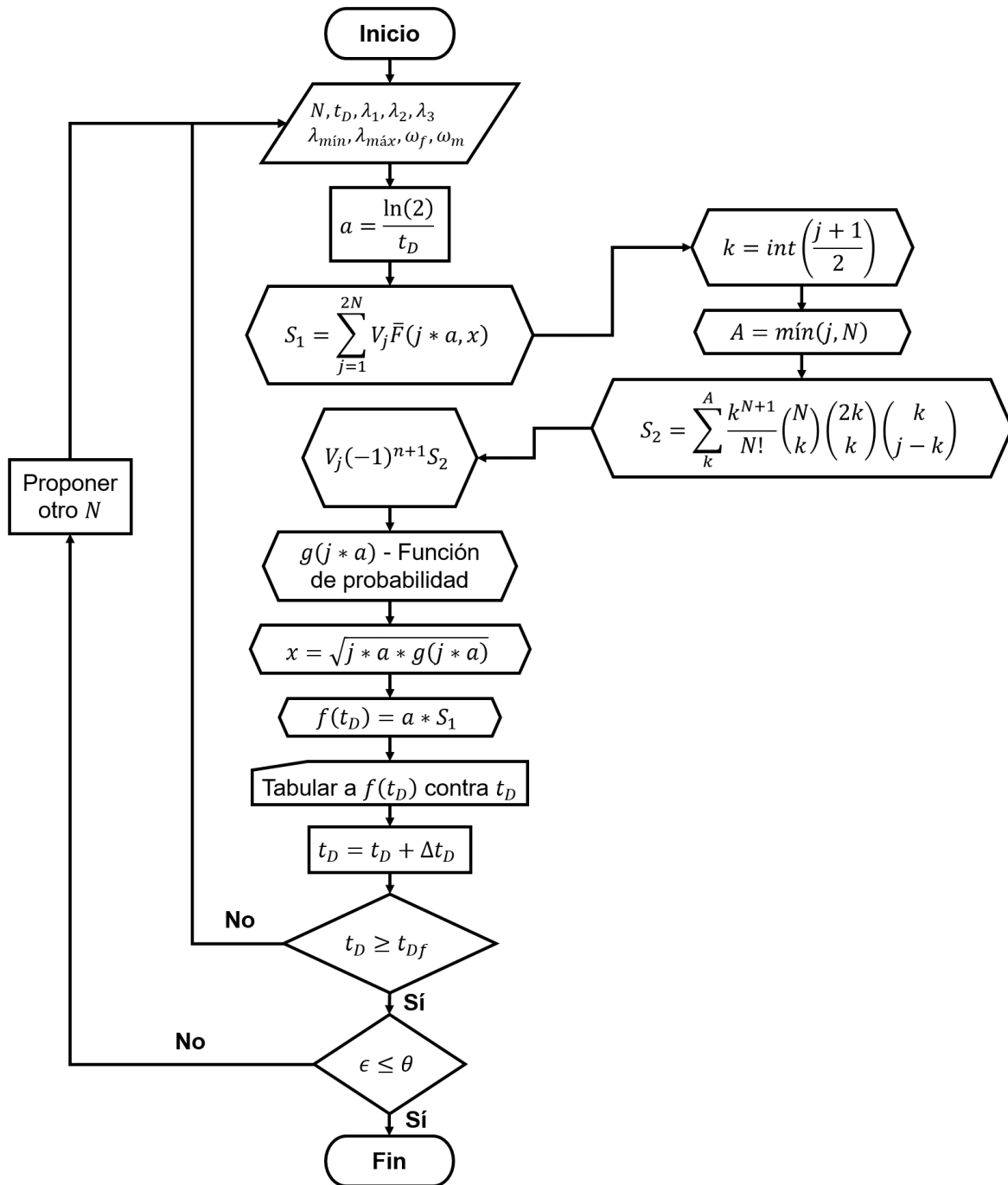
$$p_{D_{wf}}' = t_D * \frac{\partial p_{D_{wf}}}{\partial t_D}, \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$p_{D_{wf}}'' = t_D * \frac{\partial p_{D_{wf}}}{\partial t_D} + t_D^2 * \frac{\partial^2 p_{D_{wf}}}{\partial t_D^2}, \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

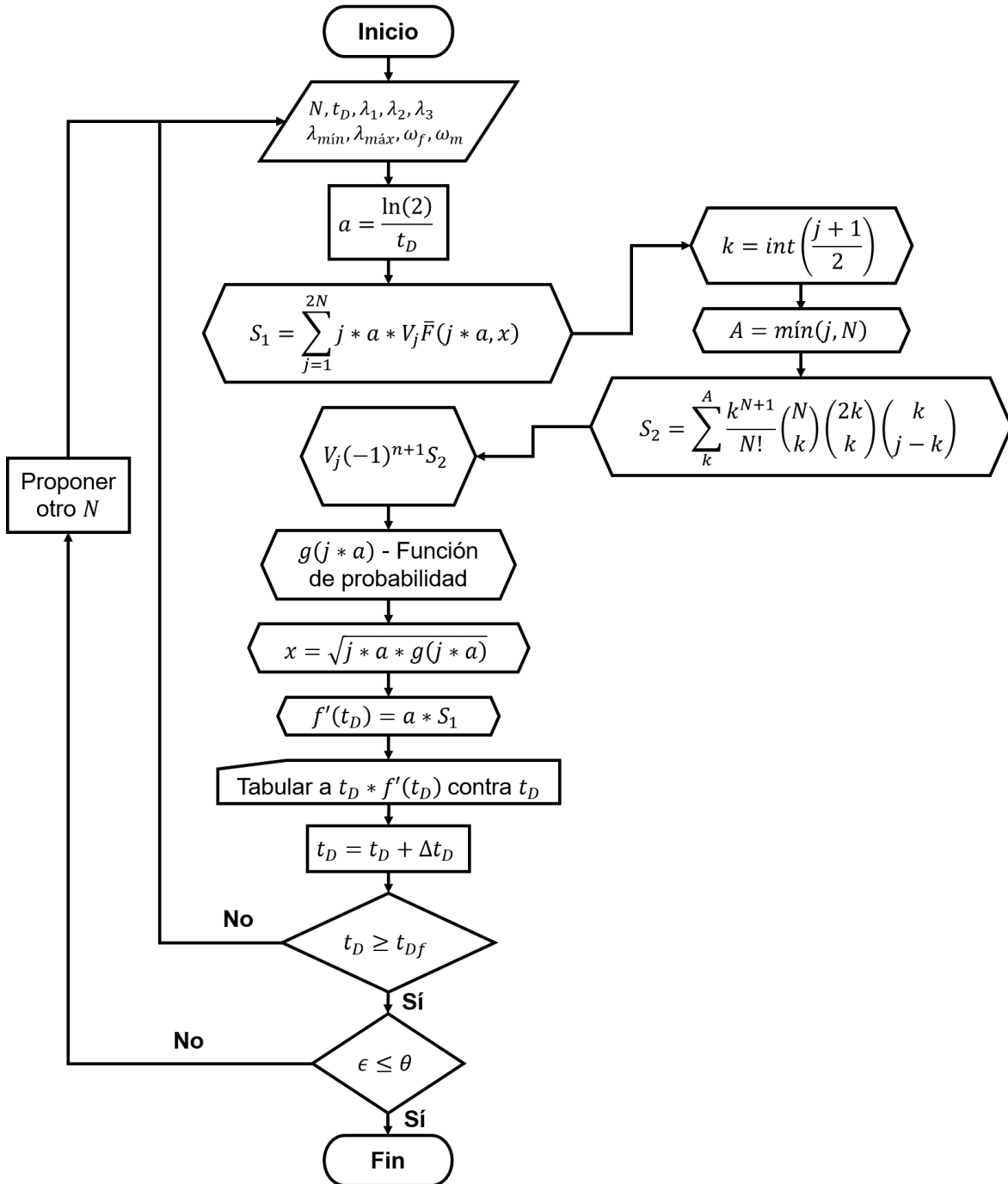
$$\frac{\partial p_{D_{wf}}}{\partial t_D} = \mathcal{L}^{-1} \left( s * \overline{p_{D_{wf}}} \right), \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 p_{D_{wf}}}{\partial t_D^2} = \mathcal{L}^{-1} \left( s^2 * \overline{p_{D_{wf}}} \right), \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

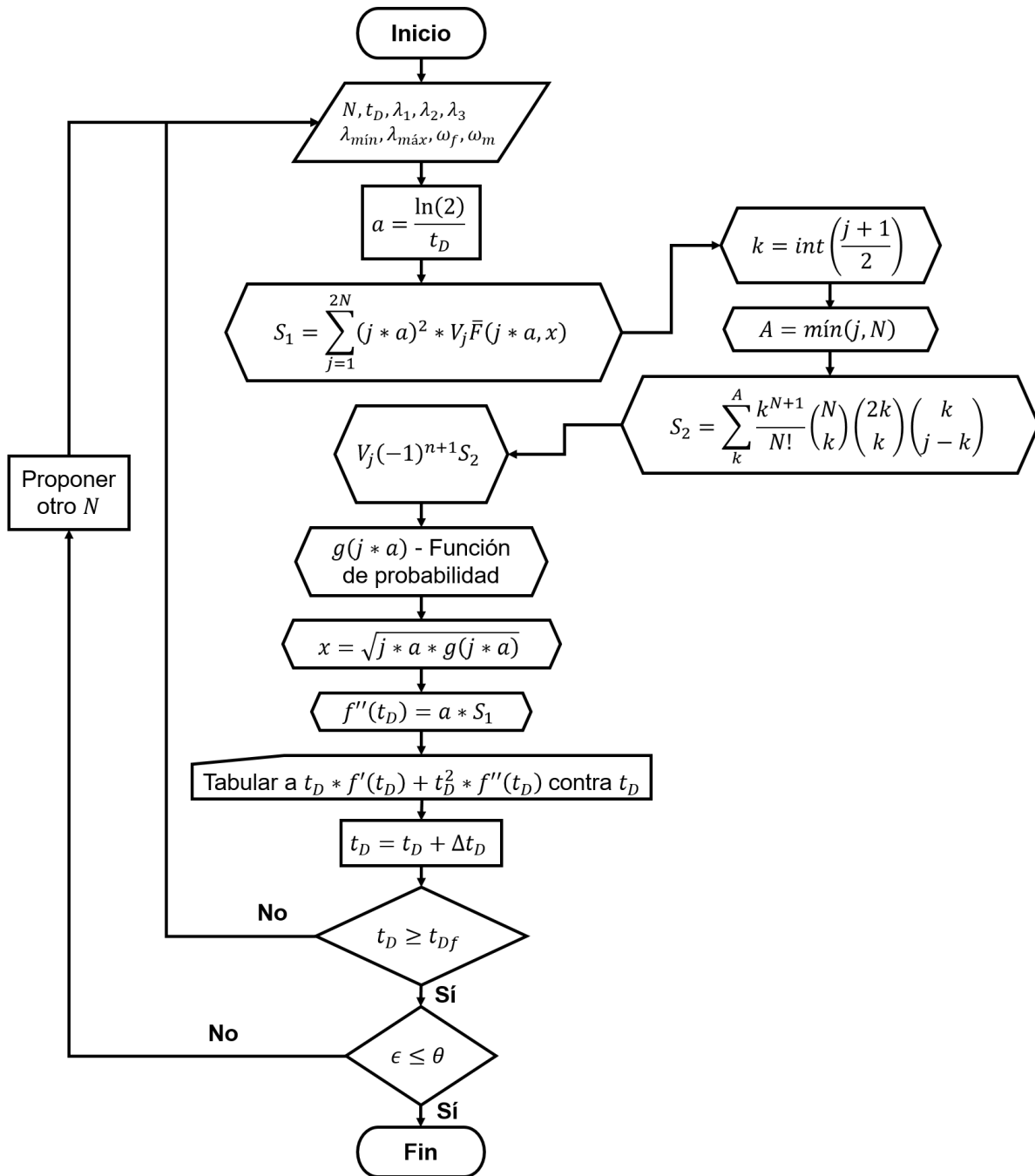
Para las funciones de probabilidad implícitas, se utiliza el algoritmo de cálculo de integrales a través de la regla del trapecio.



**Fig 3.21. Algoritmo para obtener las curvas tipo para los diferentes modelos de distribución de probabilidad.**



**Fig 3.22. Algoritmo para obtener la función derivada para los diferentes modelos de distribución de probabilidad.**



**Fig 3.23. Algoritmo para obtener la función segunda derivada para los diferentes modelos de distribución de probabilidad.**



## Conclusiones y recomendaciones

Las conclusiones obtenidas a partir de los resultados de esta tesis son:

1. Se obtuvo una revisión bibliográfica que muestra las razones geológicas del por qué utilizar modelos de probabilidad para la caracterización de YNF. Así mismo, se validaron los modelos propuestos a través de las expresiones establecidas por otros autores.
2. La heterogeneidad de los yacimientos naturalmente fracturados hace necesario utilizar modelos que consideren una variabilidad en las propiedades petrofísicas críticas, como el tamaño de bloques de matriz.
3. La información petrofísica, recolectada del yacimiento, es de mucha ayuda para seleccionar la función de probabilidad que representa mejor la distribución de propiedades en el sistema.
4. El algoritmo de Gaver-Stehfest resultó ser de gran utilidad para invertir las soluciones en el espacio de Laplace.
5. Los modelos de distribución de probabilidad se ajustan adecuadamente a los modelos de Warren y Root (pseudo-estacionario) y Jalali y Erzagui (transitorio), lo que se demuestra al obtener una desviación máxima del 1.35% en el modelo de distribución Normal para régimen transitorio.
6. Cuando el valor de  $\lambda_{mín}$  es muy cercano al valor de  $\lambda_{máx}$ , el comportamiento de la curva tipo obtenida es parecido al de un modelo que considera un espesor de bloque constante.
7. El coeficiente de flujo interporoso domina el tiempo al cual comienza el aporte de la matriz al sistema fracturado. Por otro lado, el coeficiente de almacenamiento en la fractura rige la intensidad del cambio fracturas-bloques de matriz. Es decir, la profundidad del valle en la función derivada para ambos regímenes de flujo.

8. Los bloques de matriz no aportan al mismo tiempo. Comenzarán a aportar a las fracturas los bloques cercanos al pozo conforme la onda de presión se expande a través del yacimiento.
9. Bajo los mismos parámetros para el análisis numérico y la misma función de distribución de probabilidad, el tiempo al cual se alcanza el final del período de transición es el mismo para ambos regímenes de flujo, que es cuando el valor de la pendiente tiende a 0.5, que es la pendiente característica para flujo en geometría radial.
10. La función segunda derivada es de gran utilidad para analizar el comportamiento de presión en los yacimientos naturalmente fracturados, debido a su gran sensibilidad a los cambios, y particularidad. Es decir, permite identificar el tipo de régimen de flujo en la matriz.

Las recomendaciones a partir de los resultados obtenidos son:

1. Llevar a cabo estudios más detallados sobre la función segunda derivada como herramienta de análisis de pruebas de presión en YNF.
2. Desarrollar modelos para diferentes geometrías de flujo y de bloque de matriz, como bloques cilíndricos o esféricos, será de gran utilidad para caracterizar yacimientos naturalmente fracturados. Ya que proveerán una gama más amplia de soluciones a pruebas de presión.
3. Extender el análisis del efecto de almacenamiento, utilizando los modelos de probabilidad presentados en este trabajo. Así mismo, comparar los resultados con datos reales.

## Referencias

1. Aguilera, R. 1980. *Naturally Fractured Reservoirs*. Tulsa: The Petroleum Publishing Company.
2. Arango, M. 2016. *Caracterización de Yacimientos Naturalmente Fracturados para una Distribución Normal con Tamaño Múltiple de Bloques*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.
3. Barenblat, G.E., Zheltov, I.P., Kochina, I.N. 1960. *Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks*. Appl. Math Mech. 24: 1286-1303.
4. Belani, A.K. 1988. *Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs*. Tesis de maestría, Stanford University, Stanford, California.
5. Belani, A.K., y Jalali, Y. 1988. *Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs*. Artículo SPE 18171 presentado en la SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, 2-5 Octubre. <http://dx.doi.org/10.2118/18171-MS>.
6. Bourdet, D. 2002. *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. París, Francia: Elsevier.
7. Braester, C. 1984. *Influence of Block Size on the Transition Curve for a Drawdown Test in a Naturally Fractured Reservoir*. SPE J. 24 (5): 498-504. SPE-10543-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/10543-PA>.
8. Cinco-Ley, H., Samaniego, F. 1982. *Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs*. Artículo de SPE 11026 presentado en SPE 57th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, 26-29 septiembre. <http://dx.doi.org/10.2118/11026-MS>.
9. Cinco-Ley, H., Samaniego-V., F., y Kuchuk, F. 1985. *The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoirs with Multiple Block*

- Size. Artículo de SPE 14168 presentado en la Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, Nevada, 22-26 septiembre. <http://dx.doi.org/11026-PA>.
10. Fujiwara, K. 1989. *Rate Decline Analysis for Naturally Fractured Reservoirs*. Tesis de maestría, Stanford University, Stanford, California.
  11. Gringarten, A.C. 1987. *How to Recognize Double Porosity Systems from Well Tests*. Artículo de SPE 16437, JPT.
  12. Hubbert, M.K., Willis, D.G. 1955. *Important Fractured Reservoirs in the United States*. 45th World Pet. Cong. Proc., Section I/A-1, pp. 58–81.
  13. Johns, R.T. 1989. *Comparison of Pressure Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs*. Tesis de maestría, Stanford University, Stanford, California.
  14. Kazemi, H. 1969. *Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoir with Uniform Fracture Distribution*. SPE J9 (4): 451-462. SPE-2156-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/2156-PA>.
  15. Moench, A.F. 1984. *Double-Porosity Models for a Fissured Groundwater Reservoir with Fracture Skin*. Water Resources Research, Vol. 20, No. 7, 831 - 846.
  16. Moinfar, A., Narr, W., Hui, M-H., Mallison, B., y Lee, S.H. 2011. *Comparison of Discrete-Fracture and Dual-Permeability Models for Multiphase Flow in Naturally Fractured Reservoirs*. Artículo de SPE 142295 presentado en SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, Texas, 21-23 febrero. <http://dx.doi.org/10.2118/142295-MS>.
  17. Montazer, G.H., Tahami, S.A., Moradi, B., y Safari, E. 2011. *Effects of Different Block Size Distributions in Pressure Transient Response of Naturally Fractured Reservoirs*. Brazilian Journal of Petroleum and Gas 5 (3): 139-147. ISSN 1982-0593. <http://dx.doi.org/10.5419/bjpg2011-0014>.
  18. Nelson, R.A. 2001. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. Gulf Professional Publishing.
  19. Odeh, A.S. 1965. *Unsteady State Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*. Society of Petroleum Engineers Journal (March): 60-65.

20. Pulido, H., Galicia-Muñoz, G., Valdés-Pérez, A., y Díaz-García, F. 2011. *Improve Reserves Estimation using Interporosity Skin in Naturally Fractured Reservoirs*. Artículo presentado en Proceedings Thirty - Sixth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, Stanford, California.
21. Stearns, D.W., Friedman, M. 1972. *Reservoirs in Fractured Rocks*. AAPG Memoir: 82-106.
22. de Swan, O.A. 1976. *Analytical Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoirs Properties by Well Testing*. Society of Petroleum Engineers.
23. Stehfest, H. 1970. Algorithm 368: *Numerical Inversion of Laplace Transform*. Communications of the ACM 13 (1): 47-49. <http://dx.doi.org/10.1145/361953.361969>.
24. Warren, J.E., y Root, P.J. 1963. *Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*. SPE J. 3 (3): 245-55. SPE-426-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/426-PA>.

# Apéndice A

## A.1. Para flujo en estado transitorio

Partiendo de la **Ec. (2.3)**, en forma adimensional y desarrollada:

$$\frac{\partial^2 P_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial P_{Df}}{\partial t_D} + \frac{\mu}{k_f} \left( -\frac{2\pi k_f h_f r_w^2}{qB\mu} \right) \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 U(h_D) f(h_D) dh_D, \dots\dots\dots (A.1)$$

El aporte de la matriz a las fracturas está dado por:

$$U(h_D) = -\frac{k_m}{\mu h^2} \left( -\frac{qB\mu}{2\pi k_f h_f} \right) \frac{\partial P_{Dm}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0}, \dots\dots\dots (A.2)$$

El flujo de fluidos dentro de la matriz está dado por:

$$\frac{\partial^2 P_{Dm}}{\partial z_D^2} = \frac{3\omega_m}{\lambda} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D}, \dots\dots\dots (A.3)$$

Combinando las **Ecs. (A.1)** y **(A.2)**, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 P_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial P_{Df}}{\partial t_D} - \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{\lambda}{3} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} f(h_D) dh_D, \dots\dots\dots (A.4)$$

- Condición inicial para las fracturas y la matriz:

$$P_{Df} = P_{Dm} = 0; t_D = 0, \dots\dots\dots (A.5)$$

- Condiciones de frontera interna:

$$C_D \frac{\partial P_{Dw}}{\partial t_D} - \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = 1; r_D = 1, \dots\dots\dots (A.6)$$

$$P_{Dw} = P_{Df} - S_D \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D}; r_D = 1, \dots\dots\dots (A.7)$$

- Condición de frontera externa:

$$P_{Df} = 0; r_D \rightarrow \infty, \dots\dots\dots (A.8)$$

- Condiciones de frontera para el bloque de matriz:

$$P_{Dm} = P_{Df}; z_D = 0, \dots\dots\dots (A.9)$$

$$\frac{\partial P_{Dm}}{\partial z_D} = 0; z_D = 1, \dots\dots\dots (A.10)$$

Aplicando la transformada de Laplace de la **Ec. (A.3)** a la **Ec. (A.10)**, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Dm}}{\partial z_D^2} = \frac{3\omega_m}{\lambda} s \bar{P}_{Dm}, \dots\dots\dots (A.11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{P}_{Df} - \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \frac{\lambda}{3} \frac{\partial \bar{P}_{Dm}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} f(h_D) dh_D, \dots\dots\dots (A.12)$$

$$\bar{P}_{Df} = \bar{P}_{Dm} = 0; t_D = 0, \dots\dots\dots (A.13)$$

$$C_D s \bar{P}_{Dw} - \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \frac{1}{s}; r_D = 1, \dots\dots\dots (A.14)$$

$$\bar{P}_{Dw} = \bar{P}_{Df} - S_D \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D}; r_D = 1, \dots\dots\dots (A.15)$$

$$\bar{P}_{Df} = 0; r_D \rightarrow \infty, \dots\dots\dots (A.16)$$

$$\bar{P}_{Dm} = \bar{P}_{Df}; z_D = 0, \dots\dots\dots (A.17)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{Dm}}{\partial z_D} = 0; z_D = 1, \dots\dots\dots (A.18)$$

Resolviendo la ecuación diferencial **(A.11)**, se obtiene:

$$\bar{P}_{Dm} = C_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} z_D\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} z_D\right), \quad \dots\dots\dots (A.19)$$

Aplicando la condición de la ecuación (A.17):

$$\bar{P}_{Dm} = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0)$$

$$\bar{P}_{Dm} = C_1 = \bar{P}_{Df}, \quad \dots\dots\dots (A.20)$$

Derivando la **Ec. (A.19)**, y aplicando la condición de la **Ec. (A.18)**:

$$C_2 = -\bar{P}_{Df} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right), \quad \dots\dots\dots (A.21)$$

Derivando la **Ec. (A.19)** y evaluando a  $z_D = 0$ , se obtiene:

$$\left.\frac{\partial \bar{P}_{Dm}}{\partial z_D}\right|_{z_D=0} = -\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \bar{P}_{Df} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right), \quad \dots\dots\dots (A.22)$$

Sustituyendo la **Ec. (A.22)** en la **Ec. (A.12)**, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{P}_{Df} - \int_{\frac{h_{mín}}{h_{máx}}}^1 \frac{\lambda}{3} \left[ -\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \bar{P}_{Df} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) \right] f(h_D) dh_D$$

Multiplicando por una constante:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{P}_{Df} + \int_{\frac{h_{mín}}{h_{máx}}}^1 \frac{\lambda}{3} \left(\frac{\omega_m s}{\omega_m s}\right) \left[ \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \bar{P}_{Df} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) \right] f(h_D) dh_D$$

Arreglando términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} &= \omega_f s \bar{P}_{Df} \\ &+ \omega_m s \bar{P}_{Df} \int_{\frac{h_{mín}}{h_{máx}}}^1 \left(\frac{\lambda}{3\omega_m s}\right) \left[\left(\frac{\lambda}{3\omega_m s}\right)^{-\frac{1}{2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right)\right] f(h_D) dh_D \end{aligned}$$



Finalmente, obtenemos la ecuación general:

$$r_D^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} - r_D^2 s f(s) \bar{P}_{Df} = 0, \quad \dots\dots\dots (A.23)$$

donde,

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \sqrt{\frac{\lambda}{3\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D$$

## A.2. Para flujo en estado pseudo-estacionario

Para la condición de flujo pseudo-estacionario, la **Ec. (A.3)** se vuelve:

$$\frac{\partial^2 P_{Dm}}{\partial z_D^2} = \frac{3\omega_m}{\lambda} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} = E(t_D), \quad \dots\dots\dots (A.24)$$

Resolviendo la ecuación diferencial **(A.24)**, se obtiene:

$$P_{Dm} = \frac{1}{2} E(t_D) z_D^2 + D_1 z_D + D_2, \quad \dots\dots\dots (A.25)$$

Aplicando las condiciones de frontera, **Ecs. (A.9)** y **(A.10)**, se obtiene:

$$P_{Dm} = \frac{1}{2} E(t_D) z_D^2 - E(t_D) z_D + P_{Df}, \quad \dots\dots\dots (A.26)$$

$$\left. \frac{\partial P_{Dm}}{\partial z_D} \right|_{z_D=0} = -E(t_D) = -\frac{3\omega_m}{\lambda} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D}, \quad \dots\dots\dots (A.27)$$

Sustituyendo la **Ec. (A.27)** en la **Ec. (A.4)**:

$$\frac{\partial^2 P_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial P_{Df}}{\partial t_D} - \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{\lambda}{3} \left( -\frac{3\omega_m}{\lambda} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} \right) f(h_D) dh_D$$

$$\frac{\partial^2 P_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial P_{Df}}{\partial t_D} + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (A.28)$$

Se sabe que:

$$Q(h) = -\frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial P_m}{\partial z} \Big|_{z=interface}$$

Y, además:

$$Q(h) = \phi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\phi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} = -\frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial P_m}{\partial z} \Big|_{z=interface}, \quad \dots\dots\dots (A.29)$$

Obteniendo el valor promedio de la **Ec. (A.29)**:

$$\frac{\partial P_m}{\partial t} \left( \frac{1}{h-0} \right) \int_0^h h^2 dh = -\frac{k_m}{\mu \phi_m c_m} (P_m - P_f)$$

$$\frac{h^2}{3} \frac{\partial P_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\mu \phi_m c_m} (P_f - P_m), \quad \dots\dots\dots (A.30)$$

$$\frac{\partial P_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\mu \phi_m c_m h^2} (P_f - P_m), \quad \dots\dots\dots (A.31)$$

Escribiendo la **Ec. (A.31)** en variables adimensionales:

$$\frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{\lambda}{\omega_m} (P_{Df} - P_{Dm}), \quad \dots\dots\dots (A.32)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las **Ecs. (A.28)** y **(A.31)**:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{P}_{Df} + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 s \bar{P}_{Dm} f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (A.33)$$

$$s \bar{P}_{Dm} = \frac{\lambda}{\omega_m} (\bar{P}_{Df} - \bar{P}_{Dm}), \quad \dots\dots\dots (A.34)$$

Despejando, de la ecuación anterior, a  $\bar{P}_{Dm}$ :

$$s\bar{P}_{Dm} = \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \bar{P}_{Df}, \quad \dots\dots\dots (A.35)$$

Sustituyendo la **Ec. (A.35)** en la **Ec. (A.33)**:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{P}_{Df} + \omega_m s \bar{P}_{Df} \int_{h_{m\acute{a}x}}^1 \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (A.36)$$

Despejando y ordenando la ecuación anterior, se obtiene:

$$r_D^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{Df}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial \bar{P}_{Df}}{\partial r_D} - r_D^2 s f(s) \bar{P}_{Df} = 0, \quad \dots\dots\dots (A.37)$$

donde,

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{h_{m\acute{a}x}}^1 \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} f(h_D) dh_D$$

## Apéndice B

Las definiciones y cambios de variable necesarios se describen a continuación. Dos ecuaciones se derivan de la **Ec. (2.e)**, esenciales para el desarrollo del modelo:

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\text{máx}}^2}, \quad \dots\dots\dots (B.1)$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\text{mín}}^2}, \quad \dots\dots\dots (B.2)$$

Dividiendo la **Ec. (B.1)** entre la **Ec. (B.2)**:

$$\frac{\lambda_{\text{mín}}}{\lambda_{\text{máx}}} = \left( \frac{h_{\text{mín}}}{h_{\text{máx}}} \right)^2, \quad \dots\dots\dots (B.3)$$

Dividiendo la **Ec. (B.1)** entre la **Ec. (2.e)**, utilizando la definición de la **Ec. (2.f)**, despejamos:

$$h_D = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{mín}}}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (B.4)$$

Despejando a  $\lambda$  de la ecuación anterior:

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{mín}}}{h_D^2}, \quad \dots\dots\dots (B.5)$$

Derivando la **Ec. (B.5)** con respecto a  $h_D$ :

$$\frac{d\lambda}{dh_D} = -2 \frac{\lambda_{\text{mín}}}{h_D^3}, \quad \dots\dots\dots (B.6)$$

Despejando la **Ec. (B.6)** para realizar el cambio de variable, se obtiene:

$$dh_D = -\frac{h_D^3}{2\lambda_{\min}} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.7)$$

Sustituyendo la **Ec. (B.4)** en la **Ec. (B.7)**, se obtiene:

$$dh_D = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.8)$$

### B.1. Función de distribución Uniforme

- Solución para flujo pseudo-estacionario

Sustituyendo las **Ecs. (B.8)** y **(2.8)**, en la **Ec. (2.6)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{\min}}{h_{\max}}} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots (B.9)$$

Ordenando los términos de la **Ec. (B.9)**:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\omega_m s + \lambda} \right) d\lambda$$

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\omega_m s \lambda^{-1} + 1} \right) d\lambda$$

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\left[ (\omega_m s)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \right]^2 + 1} \right) d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.10)$$

Completando el factor de integración para el cambio de variable:

$$u = (\omega_m s)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \dots\dots\dots (B.11)$$

$$du = -\frac{1}{2} (\omega_m s)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.12)$$

Sustituyendo las **Ecs. (B.11)** y **(B.12)** en la **Ec. (B.10)**, se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{u^2 + 1}, \dots\dots\dots (B.13)$$

Resolviendo la **Ec. (B.13)**, y regresando a las variables originales:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \right) \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}} \right) \right], \dots\dots\dots (B.14)$$

- Solución para flujo transitorio:

Sustituyendo las **Ecs. (B.8)** y **(2.8)**, en la **Ec. (2.7)**:

$$\begin{aligned} f(s) &= \omega_f \\ &+ \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \sqrt{\frac{\lambda}{3\omega_m s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{\min}}{h_{\max}}} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \dots\dots\dots (B.15) \end{aligned}$$

Ordenando los términos de la **Ec. (B.15)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(s) &= \omega_f + \frac{1}{2} \frac{\omega_m \sqrt{\frac{1}{3\omega_m s}} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda \\ f(s) &= \omega_f + \frac{\omega_m}{2\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}} \right) \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda, \dots\dots\dots (B.16) \end{aligned}$$

La **Ec. (B.16)** puede ser resuelta numéricamente, o bien, a través de una expansión polinómica.

## B.2. Función de distribución Bimodal

Se define el siguiente parámetro para esta función de distribución, a partir de la **Ec. (B.4)**:

$$\frac{h_n}{h_{m\acute{a}x}} = \sqrt{\frac{\lambda_{m\acute{i}n}}{\lambda_n}}, \quad \dots\dots\dots (B.17)$$

donde  $h_1 < h_2 < h_3 < h_{m\acute{a}x}$  corresponde a  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_{m\acute{i}n}$ .

- Solución para flujo pseudo-estacionario

Sustituyendo las **Ecs. (B.8)** y **(2.11)**, en la **Ec. (2.6)**:

$$\begin{aligned} f(s) &= \omega_f \\ &+ \omega_m \int_{\lambda_{m\acute{i}n}}^{\lambda_{m\acute{a}x}} \left( \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{h_1}{h_{m\acute{a}x}} + \frac{h_2}{h_{m\acute{a}x}} - \frac{h_3}{h_{m\acute{a}x}}} \right) \left( \frac{-\lambda^{\frac{1}{2}}_{m\acute{i}n}}{2\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots (B.18) \end{aligned}$$

Ordenando la **Ec. (B.18)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}_{m\acute{i}n}}{1 - \frac{h_1}{h_{m\acute{a}x}} + \frac{h_2}{h_{m\acute{a}x}} - \frac{h_3}{h_{m\acute{a}x}}} \int_{\lambda_{m\acute{i}n}}^{\lambda_{m\acute{a}x}} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\omega_m s + \lambda} \right) d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.19)$$

Dado que la distribución es Bimodal, es necesario dividir en dos intervalos de integración:

$$\begin{aligned} f(s) &= \omega_f \\ &+ \omega_m \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}_{m\acute{i}n}}{1 - \frac{h_1}{h_{m\acute{a}x}} + \frac{h_2}{h_{m\acute{a}x}} - \frac{h_3}{h_{m\acute{a}x}}} \left[ \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\left[ (\omega_m s)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \right]^2 + 1} \right) d\lambda \right. \\ &\left. + \int_{\lambda_{m\acute{i}n}}^{\lambda_3} -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\left[ (\omega_m s)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \right]^2 + 1} \right) d\lambda \right], \quad \dots\dots\dots (B.20) \end{aligned}$$

Utilizando los cambios de variable propuestos en las **Ecs. (B.11)** y **(B.12)**, se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \frac{h_1}{h_{\max}} + \frac{h_2}{h_{\max}} - \frac{h_3}{h_{\max}}} \left( \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{u^2 + 1} + \int_{u_{\min}}^{u_3} \frac{du}{u^2 + 1} \right), \quad \dots\dots\dots (B.21)$$

Resolviendo la **Ec. (B.21)** y regresando a las variables originales, finalmente se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_3}}} \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\omega_m s}} \right) + \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\omega_m s}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\omega_m s}} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (B.22)$$

- Solución para flujo transitorio

Sustituyendo las **Ecs. (B.8)** y **(2.11)**, en la **Ec. (2.7)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\lambda}{\sqrt{3\omega_m s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) f(h_D) \left( \frac{-\lambda^{\frac{1}{2}}}{2\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots (B.23)$$

Ordenando los términos de la **Ec. (B.23)**, y aplicando el criterio de la distribución Bimodal:

$$\begin{aligned} f(s) &= \omega_f \\ &+ \omega_m \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{3\omega_m s}}}{2 \left( 1 - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_3}} \right)} \left[ \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda \right. \\ &\left. + \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_3} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}} \right) d\lambda \right], \quad \dots\dots\dots (B.24) \end{aligned}$$



### B.3. Función de distribución Exponencial

- Solución para flujo pseudo-estacionario

Sustituyendo las **Ecs. (B.8) y (2.14)**, en la **Ec. (2.6)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \right) \left( \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-ah_{rat}} - e^{-a}} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots (B.25)$$

Ordenando los términos de la ecuación anterior, se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{a\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2(e^{-ah_{rat}} - e^{-a})} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\omega_m s + \lambda} \right) e^{-a\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}}} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.26)$$

- Solución para flujo transitorio

Sustituyendo las **Ecs. (B.8) y (2.14)**, en la **Ec. (2.7)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots (B.27)$$

Ordenando la **Ec. (B.27)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(s) \\ = \omega_f \\ + \omega_m \frac{a\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3\omega_m s}(e^{-ah_{rat}} - e^{-a})} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) e^{-a\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}}} d\lambda, \quad \dots\dots\dots (B.28) \end{aligned}$$

### B.4. Función de distribución Normal

- Solución para flujo pseudo-estacionario

Sustituyendo las **Ecs. (B.8) y (2.17)**, en la **Ec. (2.6)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda}{\omega_m s + \lambda} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots (B.29)$$

Ordenando los términos de la **Ec. (B.29)**, se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\omega_m s + \lambda} \right) \left( e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} - \mu\right)^2} \right) d\lambda$$

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left( \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{\frac{\omega_m s}{\lambda} + 1} \right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} - \mu\right)^2} d\lambda, \quad \dots (B.30)$$

- Solución para flujo transitorio

Sustituyendo las **Ecs. (B.8)** y **(2.17)**, en la **Ec. (2.7)**:

$$f(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \sqrt{\frac{\lambda}{3\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} d\lambda \right), \quad \dots (B.31)$$

Ordenando los términos de la **Ec. (B.31)**, se obtiene:

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3\omega_m s}\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} d\lambda$$

$$f(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3\omega_m s}\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega_m s}{\lambda}}\right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} - \mu\right)^2} d\lambda, \quad \dots (B.32)$$

Integrando la **Ec. (2.17)** para obtener la probabilidad acumulada:

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(h_D) = \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{h_D - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dh_D, \quad \dots (B.33)$$

Tomando en cuenta que  $h_D$  varía entre 0 y 1, la **Ec. (B.33)** puede ser escrita como:

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(h_D) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h_D - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \frac{h_{\min} = \sqrt{\lambda_{\min}}}{h_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}}}, \quad \dots\dots\dots (B.34)$$

Quando  $h_D = 1$ , corresponde al valor de  $\lambda_{\min}$ ,  $\Phi_{\mu,\sigma^2}(1) = 0$ . Por otro lado, cuando  $h_D = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$ , corresponde al valor de  $\lambda_{\max}$ ,  $\Phi_{\mu,\sigma^2} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \right) = 1$ . Se puede establecer un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$1 - \operatorname{erf} \left( \frac{1 - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 0$$

$$1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 1$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene:

$$\sigma \leq \frac{1 - \mu}{5\sqrt{2}}, \quad \dots\dots\dots (B.35)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}, \quad \dots\dots\dots (B.36)$$

## Apéndice C

### C.1. Desarrollo del modelo de Warren y Root (régimen pseudo-estacionario)

Se define la presión en matriz y la presión en fractura de manera siguiente:

$$p_m(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_m(V) dV}{\int_V g_m(V) dV}, \quad \dots\dots\dots (C.1)$$

$$p_f(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_f(V) dV}{\int_V g_f(V) dV}, \quad \dots\dots\dots (C.2)$$

donde  $g_f$  y  $g_m$  son funciones para los sistemas fracturas y matriz, respectivamente. Además,  $g_m(V) = 1$  dentro de la matriz y  $g_m(V) = 0$  fuera de ella;  $g_f(V) = 1$  dentro del sistema de fracturas y  $g_f(V) = 0$  fuera de él.

El volumen  $V$  en cuestión debe ser pequeño comparado con el volumen del yacimiento, y, además, grande comparado con el volumen del sistema matricial. Por lo tanto:

$$\int_V g_m(V) dV = \phi_m, \quad \dots\dots\dots (C.3)$$

$$\int_V g_f(V) dV = \phi_f, \quad \dots\dots\dots (C.4)$$

Warren y Root toman en cuenta un yacimiento de espesor uniforme horizontal, homogéneo e isótropo. Así mismo, flujo monofásico de fluido ligeramente

compresible. Aplicando el teorema de Green sobre el volumen  $V$  para obtener una forma aplicable de la ecuación de continuidad:

$$\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} + \frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial^2 p_f}{\partial y^2} - \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t}, \quad \dots\dots\dots (C.5)$$

donde los ejes  $x$  y  $y$  coinciden con los principales ejes de permeabilidad. En la **Ec. (C.5)**, las compresibilidades  $c_m$  y  $c_f$  son totales. Asumiendo que:

- Las fuerzas externas son constantes.
- No existe interacción entre la matriz y las fracturas, es decir, la porosidad de la matriz no depende de la presión de las fracturas, y viceversa.
- La variación de la porosidad de fractura con respecto a la presión de fractura es despreciable.

se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$c_m \cong c_o + \frac{c_r + S_{wc} c_w}{1 - S_{wc}}, \quad \dots\dots\dots (C.6)$$

$$c_f \cong c_o, \quad \dots\dots\dots (C.7)$$

La ecuación que describe el flujo dentro de la matriz, y que refleja sus propiedades geométricas, se escribe como:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\sigma_f k_m}{\mu} (p_f - p_m), \quad \dots\dots\dots (C.8)$$

Los grupos, para obtener expresiones adimensionales, se escriben a continuación:

- Grado de anisotropía:

$$\bar{k}_f = \sqrt{k_{fx} k_{fy}}$$

$$K = \sqrt{\frac{k_{fx}}{k_{fy}}}, \quad \dots\dots\dots (C.a)$$

- Parámetro de cambio de coordenadas:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Ky}{x}\right), \dots\dots\dots (C.b)$$

- Tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{\bar{k}_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2}, \dots\dots\dots (C.c)$$

- Radio de frontera externa adimensional:

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w}, \dots\dots\dots (C.d)$$

Llevando a cabo un cambio de coordenadas, y escribiendo las **Ecs. (C.5) y (C.8)** en variables adimensionales, se obtiene:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial \theta^2} - (1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D}, \dots\dots\dots (C.9)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \lambda (p_{Df} - p_{Dm}), \dots\dots\dots (C.10)$$

- Condiciones iniciales y de frontera externa:

$$p_{Dm} = p_{Df} = 0; \text{ para } t_D = 0, \xi, \theta \geq 0$$

$$p_{Df} = 0; \text{ para } t_D > 0, \xi \rightarrow \infty, \theta \geq 0$$

- Condiciones de frontera interna:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi_r} d\theta = -1; t_D > 0, R = \frac{1}{\sqrt{K \cos^2 \theta + \frac{1}{K} \sin^2 \theta}}$$

Se observa que la forma de las ecuaciones es elipsoidal, por lo que asume que existe una diferencia de presión constante entre la solución radial y la solución en forma de elipse, con el objetivo de evitar a  $K$  como un parámetro que aparece en la solución final. Para cumplir con lo propuesto, se añade una expresión complementaria:

$$p_{Dw}(t_D) = p_{Df}^*(1, t_D) - S^*, \quad \dots\dots\dots (C. 11)$$

donde  $S^* = \ln\left(\frac{K+1}{s\sqrt{K}}\right)$  se define como el daño a la formación causado por la anisotropía. Además,  $p_{Df}^*(1, t_D)$  representa la solución en fondo de pozo para el problema simétrico.

Resolviendo las ecuaciones en el plano de Laplace, tomando en cuenta las condiciones de frontera e iniciales, la solución resulta:

$$\overline{p_{Df}^*}(1, t_D) = \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}K_1(\sqrt{sf(s)}), \quad \dots\dots\dots (C. 12)$$

$$\text{donde } f(s) = \frac{\omega_f(1-\omega_f)s+\lambda}{(1-\omega_f)s+\lambda}$$

## C.2. Desarrollo del modelo de Jalali y Erzagui (régimen transitorio)

En este modelo se toma en consideración lo siguiente:

- Capa de yacimiento fracturado delgada.
- Dos capas de matriz, cada una con su propia porosidad, permeabilidad, compresibilidad, espesor y régimen de flujo.
- La transferencia intermatricial ocurre en régimen pseudo-estacionario o transitorio, o en una combinación.

Los autores definieron los parámetros para cada estrato, como a continuación se presenta:

$$\omega_1 = \frac{\frac{n}{2}\phi_{m1}c_{m1}}{\frac{n}{2}\phi_{m1}c_{m1} + \frac{(2-n)}{2}\phi_{m2}c_{m2} + \phi_f c_f}, \quad \dots\dots\dots (C. 13)$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{(2-n)}{2} \phi_{m2} c_{m2}}{\frac{n}{2} \phi_{m1} c_{m1} + \frac{(2-n)}{2} \phi_{m2} c_{m2} + \phi_f c_f}, \quad \dots\dots\dots (C.14)$$

$$\lambda_1 = \frac{k_{m1} r_w^2}{k_f \left(\frac{n}{2}\right)^2}, \quad \dots\dots\dots (C.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{k_{m2} r_w^2}{k_f \left(\frac{(2-n)H}{2}\right)^2}, \quad \dots\dots\dots (C.16)$$

$$\omega_f = 1 - (\omega_1 + \omega_2), \quad \dots\dots\dots (C.17)$$

La ecuación de difusión del sistema se define como:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + V_{m1} + V_{m2}, \quad \dots\dots\dots (C.18)$$

donde  $V_{m1}$  y  $V_{m2}$  representan la contribución matriz-fractura, y matemáticamente, en régimen transitorio, se definen como:

$$V_{m1} = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \lambda_1 \frac{\partial \Delta p_{Dm1}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0}, \quad \dots\dots\dots (C.19)$$

$$V_{m2} = -\left(\frac{2-n}{2}\right)^2 \lambda_2 \frac{\partial \Delta p_{Dm2}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0}, \quad \dots\dots\dots (C.20)$$

y además, las variables adimensionales se definen como:

$$z_D = \frac{z}{H}, \quad \dots\dots\dots (C.21)$$

$$C_D = \frac{C}{2\pi h r_w^2 (\phi_f c_f + \phi_m c_m)}, \quad \dots\dots\dots (C.22)$$



La ecuación de transferencia matriz-fractura en régimen transitorio, y en el espacio de Laplace, se escribe como:

$$f(s) = 1 - \omega_m + \frac{\sqrt{n\omega_1\lambda_1}}{\sqrt{2s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\omega_1s}{n\lambda_1}}\right) + \frac{\sqrt{(2-n)\omega_2\lambda_2}}{\sqrt{2s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\omega_2s}{(2-n)\lambda_2}}\right), \dots\dots\dots (C.23)$$

Para normalizar el modelo a una sola capa, se asume que:

$$\phi_{m1}c_{m1} = \phi_{m2}c_{m2} = \phi_m c_m$$

$$\frac{k_{m1}}{n^2} = \frac{k_{m2}}{(1-n)^2} = k_m$$

Por lo que, asumiendo que es régimen transitorio (n=0), y las consideraciones normalizadas, se obtiene:

$$f(s) = 1 - \omega_m + \omega_m \sqrt{\frac{\lambda}{\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right), \dots\dots\dots (C.24)$$

## **Apéndice D**

### **D.1. Génesis de fracturas durante etapas diagenéticas y de deformación estructural**

Existen tres principales fenómenos naturales que producen fracturas en los yacimientos. El tectonismo regional, la erosión de capas suprayacentes y la deshidratación de arcillas y reducción de volúmenes de roca

En orden de magnitud, el tectonismo regional tiene mayor impacto en la creación de fracturas naturales. Este fenómeno es una combinación de dos aspectos, los esfuerzos de compresión o elongación, y la rigidez de las rocas donde los esfuerzos actúan. El movimiento tectónico genera un estado de esfuerzos que deforma a las rocas. Existen rocas que por su composición mineralógica tienen la capacidad de deformarse sin perder la continuidad, ejemplo de estas rocas, son aquellas que pueden formar anticlinales como trampas sello en yacimientos petroleros. Por otro lado, existen rocas que, por su alto contenido de cuarzo y otros minerales quebradizos, tienden a perder su continuidad bajo un estado de esfuerzos. Sin embargo, existen estados de esfuerzos tectónicos tan fuertes, que, a pesar de su composición mineralógica, las rocas se fracturan.

Otra causa de fracturas naturales en las rocas, es una pérdida de esfuerzos de carga verticales a causa de la erosión de capas de roca suprayacentes. La génesis de las rocas comienza cuando los sedimentos se depositan en una cuenca, y comienzan a ser sepultados a causa de capas de sedimentos que se depositan posteriormente. Con el paso del tiempo, los sedimentos se consolidan a kilómetros bajo la superficie y con ello, una presión de confinamiento se crea. Por lo que a mayor profundidad, mayor presión de confinamiento. Sin embargo, cuando el proceso de sepultamiento es alterado, ocurre un desbalance de esfuerzos

verticales, creando fracturas en el plano horizontal. Dichas alteraciones pueden ser un cambio en el nivel del mar, una disminución o aumento. Cuando es una disminución del nivel, las rocas en la superficie se erosionan, perdiendo peso.

Las arcillas poseen un alto contenido de agua. Cuando se depositan y son sepultadas, comienza el proceso de diagénesis. La compactación de las arcillas produce una pérdida de volumen de agua que se encuentra embebida en la matriz. Dicha pérdida, ocasiona una reducción de volumen de roca abrupto, lo que ocasiona que las rocas circundantes se expandan hacia la roca que se contrae (arcillas). Si la compresibilidad de la roca que se expande es lo suficientemente alta, no se fracturará. El caso contrario ocurre cuando la compresibilidad es baja, su ductilidad es alta, y la roca se fractura. Este tipo de fenómeno tiende a ocasionar fracturas planares en el eje vertical.

## **D.2. Tipologías de fracturas respecto a su origen**

Nelson (2001), observó tres tipos de fracturas de acuerdo a las tres direcciones de esfuerzos: Cizalla, Extensión y Tensión. Así mismo, considera que los esfuerzos compresivos son positivos, mientras que los tensiles son negativos.

### **D.2.1. Fracturas de Cizalla**

Este tipo de fracturas se forman cuando los tres principales esfuerzos son compresivos, por lo que tienen un sentido de desplazamiento paralelo al plano de fractura. Forman un ángulo agudo con la dirección del esfuerzo compresivo máximo principal, y un ángulo obtuso con la dirección del esfuerzo compresivo mínimo principal. El ángulo agudo entre las fracturas de cizalla es llamado ángulo conjugado y depende de:

1. Las propiedades mecánicas de la roca
2. La magnitud absoluta del esfuerzo principal mínimo
3. La magnitud del esfuerzo principal intermedio.

### **D.2.2. Fracturas de Extensión**

Este tipo de fracturas se forman cuando los tres principales esfuerzos son compresivos. A diferencia de las fracturas de cizalla, se forman paralelamente a la dirección de los esfuerzos principales mayor e intermedio, y perpendicular a la dirección del esfuerzo principal menor. En experimentos de laboratorio, se ha observado que este tipo de fracturas se forman, muy a menudo, en sincronía con las fracturas de cizalla.

### **D.2.3. Fracturas de Tensión**

Este tipo de fracturas tienen un sentido de desplazamiento perpendicular hacia y lejos del plano de fractura. Así mismo, son paralelas a la dirección de los esfuerzos principales mayor e intermedio. Sin embargo, al menos un esfuerzo principal tiene que ser negativo o de tensión. Además, se ha observado que las fracturas de tensión sólo ocurren cerca de la superficie.

De igual manera, Nelson (2001), propone otras tipologías de fracturas: Tectónicas, Regionales, Contraccionales y Relacionadas a la Superficie.

### **D.2.4. Fracturas Tectónicas**

Este tipo de fracturas son aquellas que su origen puede ser atribuido o asociado a un evento tectónico local, y cuyo origen esté basado en la orientación, distribución y morfología de la fractura. Éstas son formadas por la aplicación de fuerzas superficiales, y se ha observado que tienden a ser fracturas de cizalla. Así mismo, se ha observado una relación entre las fracturas tectónicas y el fallamiento en las rocas, y es por esa relación, que es posible determinar la dirección del esfuerzo principal.

### **D.2.5. Fracturas Regionales**

Este tipo de fracturas son aquellas que se desarrollan sobre una gran área sobre la corteza terrestre con un cambio relativo ligero en la orientación. De acuerdo al autor, la orientación varía sólo de 15 a 20 grados por cada 80 millas. Así mismo, los espaciamientos entre fracturas varían entre 1 y 20 pies.

#### **D.2.6. Fracturas Contraccionales**

Esta clase de fracturas es una colección de fracturas de tensión y extensión, asociadas a una reducción abrupta de volumen a través de la roca. Es por eso, que estas fracturas son el resultado de disecación, sinéresis, gradientes térmicos y cambios de fase mineralógicos.

#### **D.2.7. Fracturas Relacionadas a la Superficie**

Esta clase diversa de fracturas incluyen fracturas durante la liberación de esfuerzos causados por capas de roca suprayacentes. Estas fracturas por lo regular son irregulares en forma. Para mayor información y detalle sobre estas cuestiones, consultar el libro *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs* (Nelson, 2001).