FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

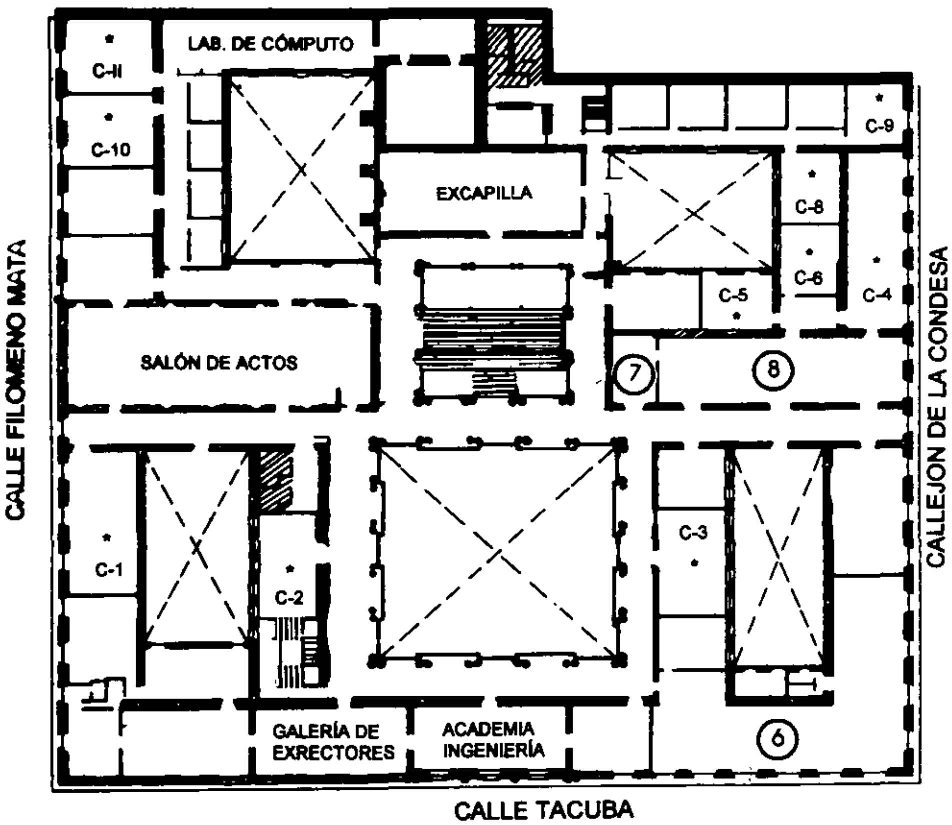
Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

Atentamente
División de Educación Continua.

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

PALACIO DE MINERIA



1er. PISO

GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

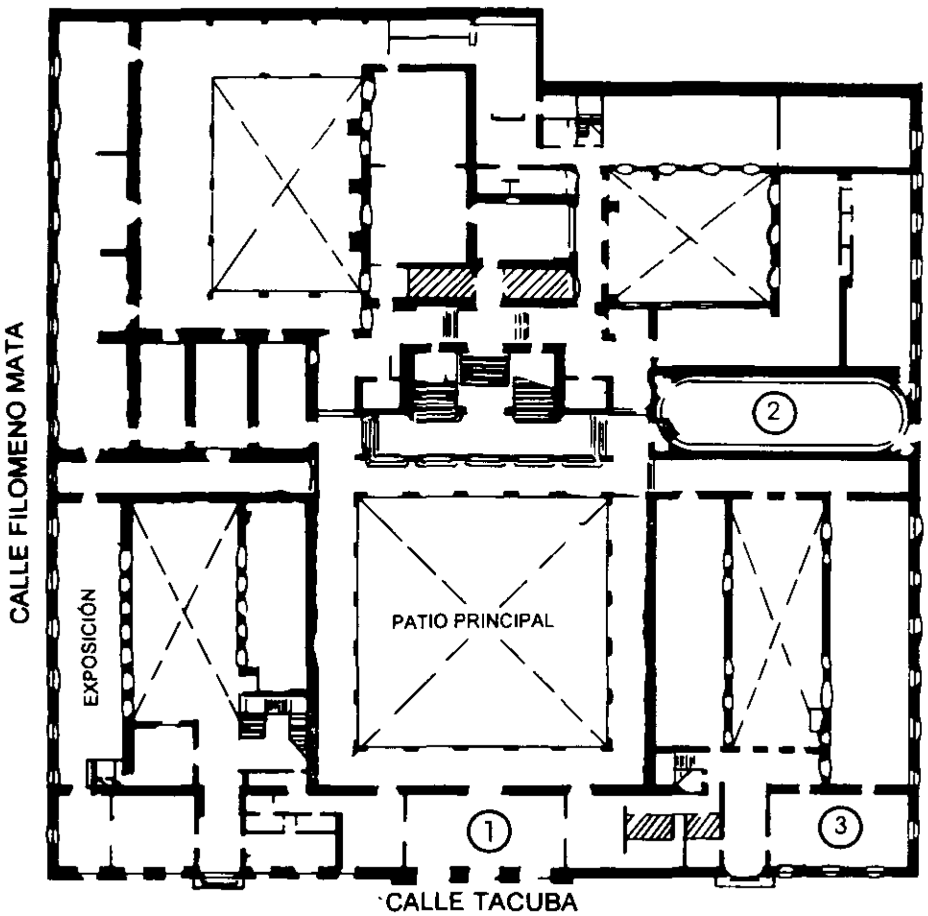
SANITARIOS

* AULAS

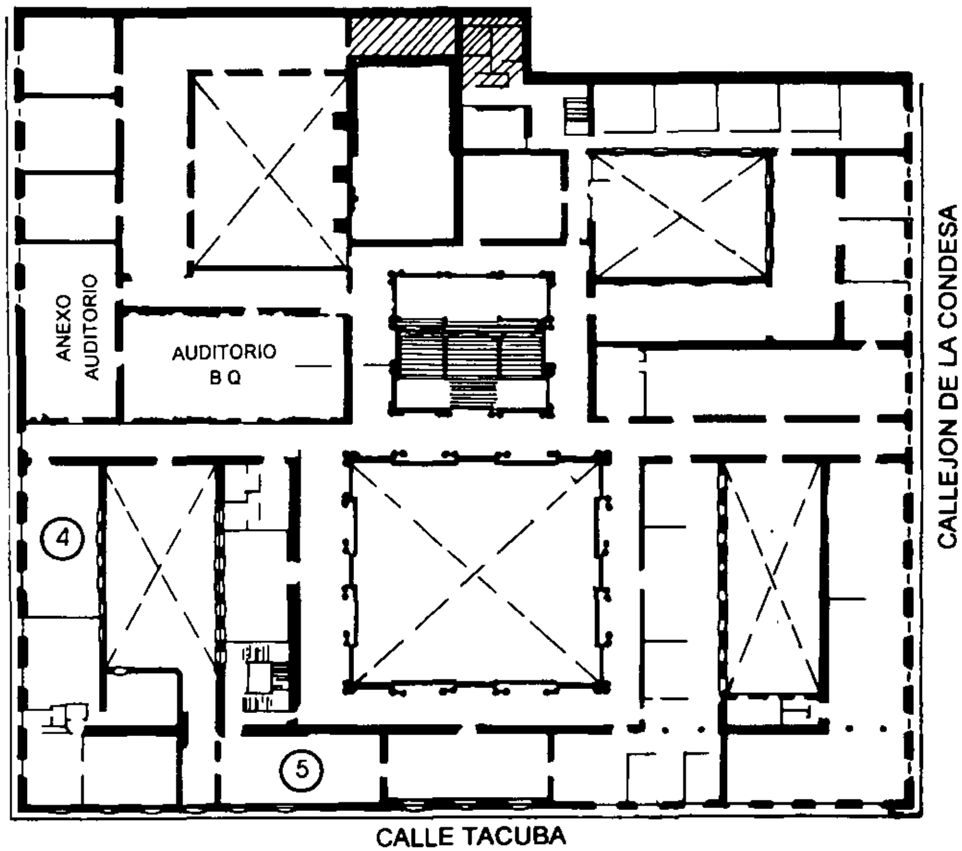
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

PALACIO DE MINERIA



PLANTA BAJA



MEZZANINNE

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

PROGRAMA DE CAPACITACIÓN PARA CAMINOS Y PUENTES FEDERALES 1999

ESTADÍSTICA APLICADA AL ANÁLISIS DE AFORO

Temario

M. en I. Rafael P. Brito Ramírez
Palacio de Minería
1999.

Palacio de Minería   Calle de Tacuba 5   Primer piso   Deleg. Cuauhtémoc 06000   México, D.F.   APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 5512-8955   5512-5121   5521-7335   5521-1987   Fax 5510-0573   5521-4021 AL 25

FACULTAD DE INGENIERIA, U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS INSTITUCIONALES

CAMINOS Y PUENTES FEDERALES DE INGRESO Y SERVICIOS CONEXOS
PROGRAMA DE CURSOS 1999

CURSO:

ESTADISTICA APLICADA AL ANALISIS DE AFORO

OBJETIVO DEL CURSO:	Al final del curso el participante sabrá identificar los conceptos de la estadística que se involucran en el análisis de aforo.
A QUIEN VA DIRIGIDO:	Administradores de las plazas de aforo, aforadores y encargados de turno.
DURACION:	8 horas
INSTRUCTORES:	M. en I. Rafael Pedro Brito Ramírez — 9 eventos

TEMARIO:

1 Introducción
- 1.1 Definición de conceptos.

2 Muestreo y procesamiento de datos.
- 2.1 Números aleatorios.
- 2.2 Muestreo aleatorio.

3 Distribución de frecuencias.
- 3.1 Distribución de frecuencias por valores.
- 3.2 Distribución de frecuencias por intervalos.
- 3.3 Polígono de frecuencias (histograma).
- 3.4 Polígono de frecuencias acumuladas (ojiva).

4 Parámetros Descriptivos.
- 4.1 Medidas de tendencia central.
- 4.2 Medidas de dispersión.

5 Leyes de Probabilidades.
- 5.1 Variables aleatorias discretas.
- 5.2 Variables aleatorias continuas.

6 Distribución Normal.
- 6.1 Estimaciones de los parámetros de una distribución de probabilidaes
  - 6.1.1 Puntual.
  - 6.1.2 Por intervalos.

7 Regresión y correlación.
- 7.1 Diagramas de dispersión.
- 7.2 Curvas de regresión.
- 7.3 Métodos de los mínimos cuadrados.
- 7.4 Error estándar de la estimación.
- 7.5 Coeficiente de correlación.

8 Aplicaciones al análisis de aforo.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES
PROGRAMA DE CAPACITACIÓN PARA CAMINOS Y PUENTES FEDERALES 1999

ESTADÍSTICA APLICADA AL ANÁLISIS DE AFORO

Apuntes Generales

M. en I. Rafael P. Brito Ramírez
Palacio de Minería
1999.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos 5512-8955 5512-5121 5521-7335 5521-1987 Fax 5510-0573 5521-4021 AL 25

ESTADISTICA APLICADA

AL

ANALISIS DE AFORO

DEFINICION DE CONCEPTOS

EXPERIMENTO

Para fines de este curso, se entenderá por experimento a todo proceso de observación de un fenómeno o variable de interés. Así, un experimento puede ser planeado y realizado por el hombre, o puede ser efectuado por la naturaleza, en caso de un fenómeno natural.

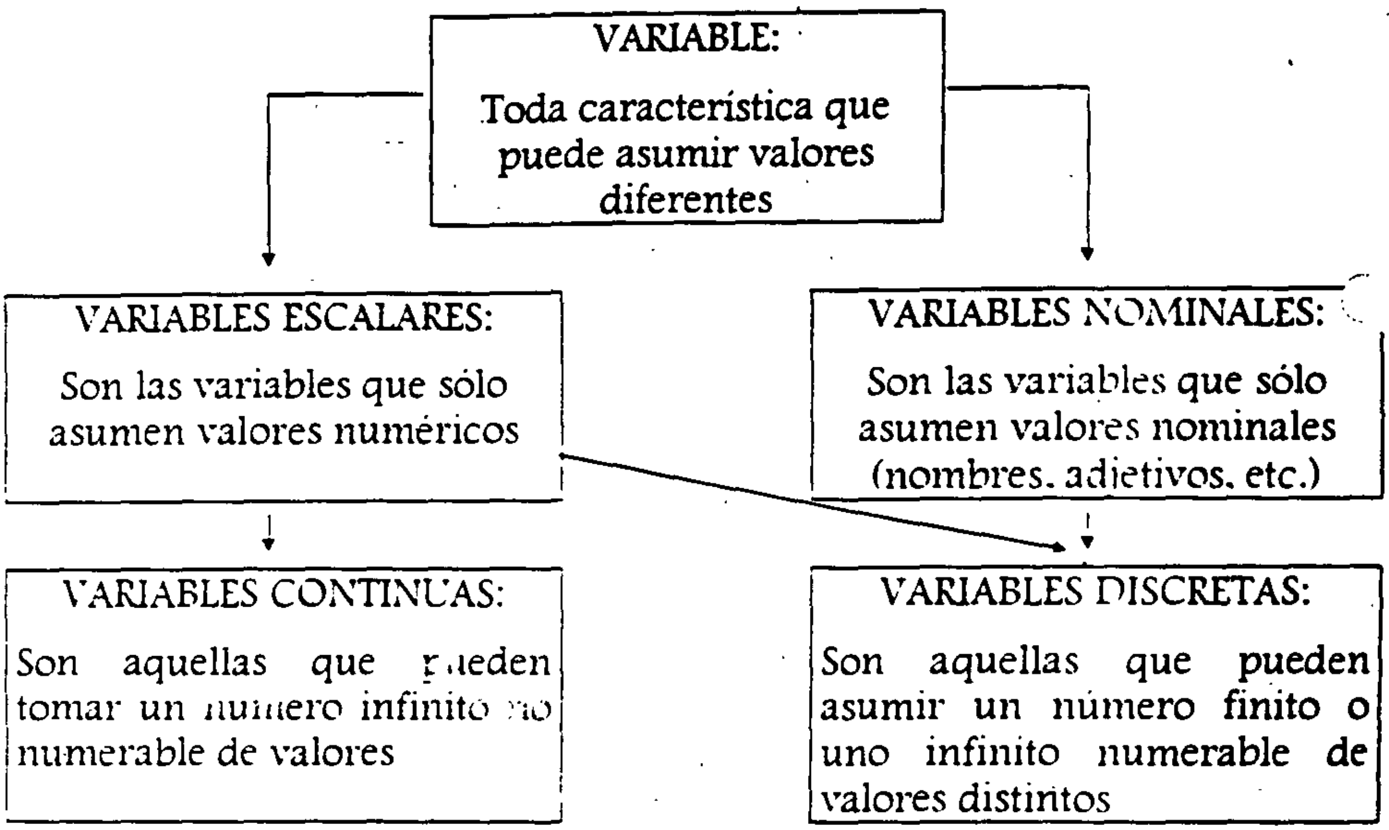
Por ejemplo, el lanzar una moneda o un dado y observar la cara que queda hacia arriba, es un experimento planeado y realizado por el hombre. El observar la cantidad de agua que llueve anualmente en una localidad, es un experimento asociado a un fenómeno natural.

DATO: Es el resultado de la realización de un experimento.

MUESTRA: Es un grupo o colección de datos.

VARIABLES ALEATORIAS

De acuerdo con ciertas características, las de variables se clasifican de la siguiente manera:



Una variable aleatoria es una variable tal que no puede predecirse con certeza el valor que asumirá al realizarse un experimento. Por ejemplo, la resistencia o carga de falla de unas vigas es una variable aleatoria, ya que antes de romper una viga tomada al azar no se puede precisar cuál será su resistencia. En la siguiente tabla se presentan los resultados experimentales con 15 vigas de concreto reforzado, observándose que éstos varian de unas a otras de manera aleatoria.

Pruebas de Vigas de Concreto Reforzado

Número de la Viga	Carga de Agrietamiento, en Kg. X	Carga de Falla en Kg, Y
1	4 700	4 790
2	3 840	4 220
3	3 270	4 360
4	2 310	4 680
5	2 950	4 270
6	4 810	4 810
7	2 720	4 590
8	2 720	4 490
9	4 310	4 310
10	2 950	4 630
11	4 220	4 920
12	2 720	4 340
13	2 720	4 340
14	2 630	4 770
15	2 950	4 630

A todo experimento se le puede asociar al menos una variable aleatoria, dependiendo ésta del problema que se tenga planteado; por ejemplo, en el caso de la resistencia de las vigas, la variable aleatoria puede ser directamente dicha resistencia, en cuyo caso su espacio de valores sería:

$$S1 = (X : 0 < X < \infty)$$

La variable también pudo haber sido una cuyo espacio de valores fuera:

$$S2 = (\text{Exito, Fracaso})$$

en donde el éxito ocurriria si la viga cumpliera alguna especificación de que resistiera más de cierta cantidad, por ejemplo 4600 Kg, y el fraca ocurriera si resistiera menos, es decir:

Exito: si $X \geq 4600$ Kg

Fracaso: si $X < 4600$ Kg

PROBABILIDAD.- Es una medida de la certidumbre que se le asocia a la ocurrencia u observación de un resultado determinado, al realizarse el experimento correspondiente a un fenómeno o variable.

La teoría de probabilidades es una rama de las matemáticas aplicadas que trata lo concerniente a la asignación y manejo de probabilidades.

ESTADISTICA: Es la rama de las matemáticas que se encarga de enseñar las reglas para colectar, organizar, presentar y procesar los datos obtenidos al realizar varias veces el experimento asociado a un fenómeno de interés, y para inferir conclusiones acerca de este último. Proporciona, además, los métodos para el diseño de experimentos y para tomar decisiones cuando aparecen situaciones de incertidumbre.

ESTADISTICA <

* DESCRIPTIVA.- Trata lo concerniente a la obtención, organización, procesamiento y presentación de datos.
* INFERENCIAL.- Trata lo concerniente a los métodos para inferir conclusiones acerca del fenómeno del cual provienen los datos

MUESTREO: Es el proceso de adquisición de una muestra.

MUESTREO <

* CON REEMPLAZO.- Cuando cada elemento observado se reintegra al lote del cual fue extraído, antes de extraer el siguiente.
* SIN REEMPLAZO.- Cuando cada elemento observado no se reintegra al lote.

POBLACION: Total de datos que se pueden obtener al realizar una secuencia exhaustiva de experimentos sobre el fenómeno de interés.

POBLACION <

- *DISCRETA.- Tiene un número finito o un número infinito numerable de datos posibles.
- *CONTINUA.- Tiene un número infinito no numerable de datos posibles.

Ejemplos:

1.	Experimento:	- Lanzamiento de una moneda diez veces.
	Población:	- Sucesión infinita numerable de "caras" y "cruces": discreta.
	Muestra:	- Grupo de 10 observaciones.
2.	Experimento:	- Medición de la resistencia a compresión simple del concreto hidráulico utilizado en una carretera, al probar 87 corazones extraídos de la carpeta.
	Población:	- Sucesión infinita de valores no numerables: continua.
	Muestra:	- Grupo de 87 observaciones.

MUESTRA ALEATORIA: Es una muestra obtenida de tal manera que *todos* los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser observados y, además, la observación de un elemento *no afecta* la probabilidad de observar cualquier otro, es decir, si son independientes.

MUESTREO Y PROCESAMIENTO DE DATOS

Cuando se obtiene una muestra, ésta debe ser ALEATORIA para que represente adecuadamente a la población de procedencia.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS:. Es una tabla como la que se presenta en la siguiente hoja, que contiene números que constituyen una muestra aleatoria.

Las tablas que se usen para obtener una muestra aleatoria deben contener números con mayor número de digitos que los que tiene el total de elementos de la población que se va a muestrear. Por ejemplo, si se va a obtener una muestra aleatoria de un lote de varillas que tiene 10,000 elementos, la tabla que se use deberá tener números aleatorios con cinco o más dígitos.

Método de Muestreo Aleatorio

1.- Se enumeran los elementos de la población.

2.- Se fija el criterio de selección de los números aleatorios (por ejemplo, se define qué renglones y qué columnas se van a leer).

3.- Se indica qué dígitos se van a eliminar en caso de que los números de la tabla tengan mas digitos que los necesarios.

4.- Se leen los números, de acuerdo con lo fijado en los puntos 2 y 3, y se extraen del lote los elementos que tienen los números leídos. Estos constituyen la muestra física con la cual realizar los experimentos; las observaciones constituirán la muestra aleatoria deseada.

NOTA: Todos los números que se repitan se consideran sólo una vez.
Tambien se eliminan los numeros mayores que el tamaño del lote.

TABLA A

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

Columna / Renglón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238	59649
2	18629	81053	05520	91962	04739	13092	37662	94822	94730	06496	35090
3	73115	47498	47498	87637	99016	00060	88824	71013	18735	20286	23153
4	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393	44812
5	30405	03946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353	68668
6	16631	35006	85900	32388	52390	52390	16815	69298	38732	38480	73817
7	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35083	19687	11052
8	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	235552	35970	19124	63318
9	31624	76384	17463	03941	44167	64486	64758	75366	76554	01601	12614
10	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806

Ejemplo:

Se tiene un lote de 1,000 pernos cuya calidad se va a verificar estadísticamente, para lo cual se decide tomar una muestra representativa de 40 elementos, usando la tabla de números aleatorios anexa, para medir su resistencia al esfuerzo cortante.

Se decide el criterio de tomar todos los renglones impares eliminando el último dígito.

Para esto, se identifican todos los pernos con números del uno al mil; la muestra física quedaría integrada por los pernos correspondientes a los números 0415, 0006, 0394, 0998, 0530, 0394, 0160, etc. La muestra estadística sería el grupo de las 40 resistencias que se obtengan al probar los pernos.

PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR PUNTOS DE MUESTREO EN UN TRAMO CARRETERO.

Para obtener muestras o realizar pruebas en un segmento carretero, se puede utilizar la Tabla I de Números Aleatorios, con el fin de seleccionar los sitios donde se colectarán los datos. El procedimiento es el siguiente:

1. Definir la longitud del o de los tramos a muestrear.

2. Determinar el número de datos que se colectarán de cada tramo o señalar el espaciamiento "promedio" de los sitios correspondientes.

3. De una tabla de números aleatorios común, leer números del 1 al 28, para seleccionar las subcolumnas A de la Tabla I que se emplearán para cada tramo.

4. En cada columna seleccionada, localizar los números iguales o menores que el número de datos requeridos para cada tramo.

5. Multiplicar la longitud de cada tramo por los valores decimales correspondientes que se ubican en la subcolumna B, y adicionar este resultado al cadenamiento del inicio del tramo para obtener el cadenamiento de la sección a muestrear.

6. Multiplicar el ancho del tramo por los valores decimales de la subcolumna C correspondientes, para obtener la distancia medida a partir del lado izquierdo del camino, donde se ubicará el sitio de muestreo.

TABLA I - NÚMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Columna No. 1			Columna No. 2			Columna No. 3			Columna No. 4			Columna No. 5			Columna No. 6			Columna No. 7		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
15	.033	.576	05	.048	.879	21	.013	.220	18	.089	.716	17	.024	.863	30	.030	.901	12	.029	.3 6
21	.101	.300	17	.074	.156	30	.036	.853	10	.102	.330	24	.060	.032	21	.096	.198	18	.112	.2 4
23	.129	.916	18	.102	.191	10	.052	.746	14	.111	.925	26	.074	.639	10	.100	.161	20	.114	.848
30	.158	.434	06	.105	.257	25	.061	.954	28	.127	.840	07	.167	.512	29	.133	.388	03	.121	.656
24	.177	.397	28	.179	.447	29	.062	.507	24	.132	.271	28	.194	.776	24	.138	.062	13	.178	.640
11	.202	.271	26	.187	.844	18	.087	.887	19	.285	.899	03	.219	.166	20	.168	.564	22	.209	.421
16	.204	.012	04	.188	.482	24	.105	.849	01	.326	.037	29	.264	.284	22	.232	.953	16	.221	.311
08	.208	.418	02	.208	.577	07	.139	.159	30	.334	.938	11	.282	.262	14	.259	.217	29	.235	.356
19	.211	.798	03	.214	.402	01	.175	.641	22	.405	.295	14	.379	.994	01	.275	.195	28	.264	.941
29	.233	.070	07	.245	.080	23	.196	.873	05	.421	.282	13	.394	.405	06	.277	.475	11	.287	.199
07	.260	.073	15	.248	.831	26	.240	.981	13	.451	.212	06	.410	.157	02	.296	.497	02	.336	.992
17	.262	.308	29	.261	.087	14	.255	.374	02	.461	.023	15	.438	.700	26	.311	.144	15	.393	.4 8
25	.271	.180	30	.302	.883	06	.310	.043	06	.487	.539	22	.453	.635	05	.351	.141	19	.437	.655
06	.302	.672	21	.318	.088	11	.316	.653	08	.497	.396	21	.472	.824	17	.370	.811	24	.466	.773
01	.409	.406	11	.376	.936	13	.324	.585	25	.503	.893	05	.488	.118	09	.388	.484	14	.531	.014
13	.507	.693	14	.430	.814	12	.351	.275	15	.594	.603	01	.525	.222	04	.410	.073	09	.562	.678
02	.575	.654	27	.438	.676	20	.371	.535	27	.620	.894	12	.561	.980	25	.471	.530	06	.601	.675
18	.591	.318	08	.467	.205	08	.409	.495	21	.629	.841	08	.652	.508	13	.486	.779	10	.612	.859
20	.610	.821	09	.474	.138	16	.445	.740	17	.691	.583	18	.668	.271	15	.515	.867	26	.673	.112
12	.631	.597	10	.492	.474	03	.494	.929	09	.708	.689	30	.736	.634	23	.567	.798	23	.738	.770
27	.651	.281	13	.499	.892	27	.543	.387	07	.709	.012	02	.763	.253	11	.618	.502	21	.753	.614
04	.661	.953	19	.511	.520	17	.625	.171	11	.714	.049	23	.804	.140	28	.636	.148	30	.758	.851
22	.692	.089	23	.591	.770	02	.699	.073	23	.720	.695	25	.828	.425	27	.650	.741	27	.765	.563
05	.779	.346	20	.604	.730	19	.702	.934	03	.748	.413	10	.843	.627	16	.711	.508	07	.780	.534
09	.787	.173	24	.654	.330	22	.816	.802	20	.781	.603	16	.858	.849	19	.778	.812	04	.818	.187
10	.818	.837	12	.728	.523	04	.838	.166	26	.830	.384	04	.903	.327	07	.804	.675	17	.837	.353
14	.895	.631	16	.753	.344	15	.904	.116	04	.843	.002	09	.912	.382	08	.806	.952	05	.854	.818
26	.912	.376	01	.806	.134	28	.969	.742	12	.884	.582	27	.935	.162	18	.841	.414	01	.867	.133
28	.920	.163	22	.878	.884	09	.974	.046	29	.926	.700	20	.970	.582	12	.918	.114	08	.915	.538
03	.945	.140	25	.939	.162	05	.977	.494	16	.951	.601	19	.975	.327	03	.992	.399	25	.975	.584

TABLA I - NÚMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Columna No. 8			Columna No. 9			Columna No. 10			Columna No. 11			Columna No. 12			Columna No. 13			Columna No. 14		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
09	.042	.071	14	.061	.935	26	.038	.023	27	.074	.779	16	.073	.987	03	.033	.091	26	.035	.175
17	.141	.411	02	.065	[illegible]	[illegible]	.066	.371	06	.084	.396	23	.078	.056	07	.047	.391	17	.089	.363
02	.143	.221	03	[illegible]	.228	27	.073	.876	24	.098	.524	17	.096	.076	28	.064	.113	10	.149	[illegible]
05	.162	.899	16	.122	.945	09	.095	.568	10	.133	.919	04	.153	.163	12	.066	.360	28	.238	.075
03	.285	.016	18	.158	.430	05	.180	.741	15	.187	.079	10	.254	.834	26	.076	.552	13	.244	.767
28	.291	.034	25	.193	.469	12	.200	.851	17	.227	.767	06	.284	.628	30	.087	.101	24	.262	.366
08	.369	.557	24	.224	.572	13	.259	.327	20	.276	.571	12	.305	.616	02	.127	.187	08	.264	.651
01	.436	.386	10	.225	.223	21	.264	.681	01	.245	.988	25	.319	.901	06	.144	.068	18	.285	.311
20	.450	.289	09	.233	.838	17	.283	.645	04	.317	.291	01	.320	.212	25	.202	.674	02	.340	.131
18	.155	.789	20	.290	.120	23	.363	.063	29	.350	.911	08	.416	.372	01	.247	.025	29	.353	.478
23	.488	.715	01	.297	.242	20	.364	.366	26	.380	.104	13	.432	.556	23	.253	.323	06	.309	.270
14	.496	.276	11	.337	.760	16	.395	.363	28	.425	.864	02	.489	.827	24	.320	.651	20	.387	.248
15	.503	.342	19	.389	.064	02	.423	.540	22	.487	.526	29	.503	.787	10	.328	.365	14	.392	.694
04	.515	.693	13	.411	.474	08	.432	.736	05	.552	.511	15	.518	.717	27	.338	.412	03	.408	.077
16	.532	.112	20	.447	.893	10	.476	.468	14	.564	.357	28	.524	.998	13	.356	.991	27	.440	.280
22	.557	.357	22	.478	.321	03	.508	.774	11	.572	.306	03	.542	.352	16	.401	.792	22	.461	.830
11	.559	.620	29	.481	.993	01	.601	.417	21	.594	.197	19	.585	.462	17	.423	.117	16	.527	.003
12	.650	.216	27	.562	.403	22	.687	.917	09	.607	.524	05	.695	.111	21	.481	.838	30	.531	.486
21	.672	.320	04	.566	.179	29	.697	.862	19	.650	.572	07	.733	.838	08	.560	.401	25	.678	[illegible]
13	.709	.273	08	.603	.758	11	.701	.605	18	.664	.101	11	.744	.948	19	.564	.190	21	.725	.014
07	[illegible]	.687	15	.632	.927	07	.728	.498	25	.674	.428	18	.793	.748	05	.571	.054	05	.797	.595
30	.780	.285	06	.707	.107	14	.745	.679	02	.697	.674	27	.802	.967	18	.587	.584	15	.801	.927
19	.845	.097	28	.737	.161	24	.819	.444	03	.767	.928	21	.826	.487	15	.604	.145	12	.836	.294
26	.846	.366	17	.846	.130	15	.840	.823	16	.809	.529	24	.835	.832	11	.641	.298	04	.854	.982
29	.861	.307	07	.874	.491	25	.863	.568	30	.838	.294	26	.855	.142	22	.672	.156	11	.884	.928
25	.906	.874	05	.880	.828	06	.878	.215	13	.845	.470	14	.861	.462	20	.674	.887	19	.886	.832
24	.919	.809	23	.931	.659	18	.930	.601	08	.855	.524	20	.874	.625	14	.752	.881	07	.929	.932
10	.952	.555	26	.960	.365	04	.954	.827	07	.867	.718	30	.929	.056	09	.774	.560	09	.932	.206
06	.961	.504	21	.978	.194	28	.963	.004	12	.881	.722	09	.935	.582	29	.921	.752	01	.970	.692
27	.969	.811	12	[illegible]	.183	19	.988	.020	23	.937	.872	22	.947	.797	04	.959	.099	23	.973	.082

TABLA I - NÚMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Columna No. 15			Columna No. 16			Columna No. 17			Columna No. 18			Columna No. 19			Columna No. 20			Columna No. 21		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
15	.023	.979	19	.062	.588	13	.045	.004	25	.027	.290	12	.052	.075	20	.030	.881	01	.010	.946
11	.118	.465	25	.080	.218	18	.086	.878	06	.057	.571	30	.075	.493	12	.034	.291	10	.014	.939
07	.134	.172	09	.131	.295	26	.126	.990	26	.059	.026	28	.120	.341	22	.043	.893	09	.032	.346
01	.139	.230	18	.136	.381	12	.128	.661	07	.105	.176	27	.145	.689	28	.143	.073	06	.093	.180
16	.145	.122	05	.147	.864	30	.146	.337	18	.107	.358	02	.209	.957	03	.150	.937	15	.151	.012
20	.165	.520	12	.158	.365	05	.169	.470	22	.128	.827	26	.272	.818	04	.154	.867	16	.185	.455
06	.185	.481	28	.214	.184	21	.244	.433	23	.156	.440	22	.299	.317	19	.158	.359	07	.227	.277
09	.211	.316	14	.215	.757	23	.270	.849	15	.171	.157	18	.306	.475	29	.304	.615	02	.304	.400
14	.248	.348	13	.224	.840	25	.274	.407	08	.220	.097	20	.311	.653	06	.369	.633	30	.316	.074
25	.249	.890	15	.227	.809	10	.290	.925	20	.252	.066	15	.348	.156	18	.390	.536	18	.328	.799
13	.252	.577	11	.280	.898	01	.323	.490	04	.268	.576	16	.381	.710	17	.403	.392	20	.352	.288
30	.273	.088	01	.331	.925	24	.352	.291	14	.275	.302	01	.411	.607	23	.404	.182	26	.371	.216
18	.277	.689	10	.399	.992	15	.361	.155	11	.207	.589	13	.417	.715	01	.415	.457	19	.448	.754
22	.372	.958	30	.417	.787	29	.374	.882	01	.358	.305	21	.472	.484	07	.437	.696	13	.487	.598
10	.461	.075	08	.439	.921	08	.432	.139	09	.412	.089	04	.478	.885	24	.446	.546	12	.546	.640
28	.519	.536	20	.472	.484	04	.467	.266	16	.429	.834	25	.479	.080	26	.485	.768	24	.550	.038
17	.520	.090	24	.498	.712	22	.508	.880	10	.491	.203	11	.566	.104	15	.511	.313	03	.604	.780
03	.523	.519	04	.516	.396	27	.632	.191	28	.542	.306	10	.576	.659	10	.517	.290	22	.621	.930
26	.573	.502	03	.548	.688	16	.661	.836	12	.563	.091	29	.665	.397	30	.556	.853	21	.629	.154
19	.634	.206	23	.597	.508	19	.675	.629	02	.593	.321	19	.739	.298	25	.561	.837	11	.634	.908
24	.635	.810	21	.681	.114	14	.680	.890	30	.692	.198	14	.749	.759	09	.574	.599	05	.696	.459
21	.679	.841	02	.739	.298	28	.714	.508	19	.705	.445	08	.756	.919	13	.613	.762	23	.710	.078
27	.712	.366	29	.792	.038	06	.719	.441	24	.709	.717	07	.798	.183	11	.698	.783	29	.726	.585
05	.780	.497	22	.829	.324	09	.735	.040	13	.820	.739	23	.834	.647	14	.715	.179	17	.749	.916
23	.861	.106	17	.834	.647	17	.741	.906	05	.848	.866	06	.837	.978	16	.770	.128	04	.802	.186
12	.865	.377	16	909	.608	11	.747	.205	27	.867	.633	03	.849	.964	08	.815	.385	14	.835	.319
29	.882	.635	06	.914	.420	20	.850	.047	03	.883	.333	24	.851	.109	05	.872	.490	08	.870	.546
08	.902	.020	27	.958	.856	02	.859	.356	17	.900	.443	05	.859	.935	21	.885	.999	28	.871	.539
04	.951	.482	26	.981	.976	07	.870	.612	21	.914	.483	17	.863	.220	02	.958	.177	25	.971	.369
02	.977	.172	07	.983	.624	03	.916	.463	29	.950	.753	09	.863	.147	27	.961	.980	27	.984	.252

TABLA I - NÚMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Columna No. 22			Columna No. 23			Columna No. 24			Columna No. 25			Columna No. 26			Columna No. 27			Columna No. 28		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
12	.051	.032	26	.051	.187	08	.015	.521	02	.039	.005	16	.026	.102	21	.050	.952	29	.042	.039
11	.068	.980	03	.053	.256	16	.068	.994	16	.061	.599	01	.033	.886	17	.085	.403	07	.105	.293
17	.089	.309	29	.100	.159	11	.118	.400	26	.068	.054	04	.088	.686	10	.141	.624	25	.115	.420
01	.091	.371	13	.102	.465	21	.124	.565	11	.073	.812	22	.090	.602	05	.154	.157	09	.126	.612
10	.100	.709	24	.110	.316	18	.153	.158	07	.123	.649	13	.114	.614	06	.164	.841	10	.205	.144
30	.121	.744	18	.114	.300	17	.190	.659	05	.126	.658	20	.136	.576	07	.197	.013	03	.210	.054
02	.166	.056	11	.123	.208	26	.192	.676	14	.161	.189	05	.138	.228	16	.215	.363	23	.234	.533
23	.179	.529	09	.138	.182	01	.237	.030	18	.166	.040	10	.216	.565	08	.222	.520	13	.266	.799
21	.187	.051	06	.194	.115	12	.283	.077	28	.248	.171	02	.233	.610	13	.269	.477	20	.305	.603
22	.205	.543	22	.234	.480	03	.286	.318	06	.255	.117	07	.278	.357	02	.288	.012	05	.372	.223
28	.230	.688	20	.274	.107	10	.317	.734	15	.261	.928	30	.405	.273	25	.333	.633	26	.385	.111
19	.243	.001	21	.331	.292	05	.337	.844	10	.301	.811	06	.421	.807	28	.348	.710	30	.422	.315
27	.267	.990	08	.346	[illegible]	25	.441	.336	24	.363	.025	12	.426	.583	20	.362	.961	17	.453	.783
15	.283	.440	27	.382	.979	27	.469	.786	22	.378	.792	08	.471	.708	14	.511	.989	02	.460	.916
16	.352	.089	07	.387	.865	24	.473	.237	27	.379	.959	18	.473	.738	26	.540	.903	27	.461	.841
03	.377	.648	28	.411	.776	20	.475	.761	19	.420	.557	19	.510	.207	27	.587	.643	14	.483	.095
06	.397	.769	16	.444	.999	06	.557	.001	21	.467	.943	03	.512	.329	12	.603	.745	12	.507	.375
09	.409	.428	04	.515	.993	07	.610	.238	17	.494	.225	15	.640	.329	29	.619	.895	28	.509	.748
14	.465	.406	17	.518	.827	09	.617	.041	09	.620	.081	09	.665	.354	23	.623	.333	21	.583	.804
13	.499	.651	05	.539	.620	13	.641	.648	30	.623	.106	14	.680	.884	22	.624	.076	22	.587	.993
04	.539	.972	02	.623	.271	22	.664	.291	03	.625	.777	26	.703	.622	18	.670	.904	16	.689	.339
18	.560	.747	30	.637	.374	04	.668	.856	08	.651	.790	29	.739	.394	11	.711	.253	06	.727	.298
26	.575	.892	14	.714	.364	19	.717	.232	12	.715	.599	25	.759	.386	01	.790	.392	04	.731	.814
29	.756	.712	15	.730	.107	02	.776	.504	23	.782	.093	24	.803	.602	04	.813	.611	08	.807	.983
20	.760	.920	19	.771	.552	29	.777	.548	20	.810	.371	27	.842	.491	19	.843	.732	15	.833	.757
05	.847	.925	23	.780	.662	14	.823	.223	01	.841	.726	21	.870	.435	03	.844	.511	19	.896	.464
25	.872	.891	10	.924	.888	23	.848	.264	29	.862	.009	28	.906	.367	30	.858	.299	18	.916	.384
24	.874	.135	12	.929	.204	30	.892	.817	25	.891	.873	23	.948	.367	09	.929	.199	01	.948	.610
08	.911	.215	01	.937	.714	28	.943	.190	04	.917	.264	11	.956	.142	24	.931	.263	11	.976	.799
07	.940	.065	25	.974	.398	15	.975	.962	13	.958	.990	17	.993	.989	15	.939	.947	24	.978	.633

Ejemplo:

Para evaluar la calidad del pavimento, se obtendrán muestras de un cami... con ancho de 6m y longitud de 5030m, que va del cadenamiento 10 + 00 al 60 + 30. Un análisis visual del camino indica que éste puede dividirse en los tres tramos siguientes, con diferentes condiciones de la superficie de rodamiento:

1. <u>Longitud de cada tramo:</u>

Tramo 1:	10 + 00	a	28 + 90	(1890m)
Tramo 2:	28 + 90	a	42 + 62	(1372m)
Tramo 3:	42 + 62	a	60 + 30	(1768m)

Tomado de: The Asphalt Institute. "Asphalt Overlays and Pavement Rehabilitation". Manual Series No. 17 (MS-17). U.S.A., November 1977.

2. <u>Número de datos para cada tramo.</u>

Se desean obtener muestras de la estructura del camino a intervalos promedio de 500 m en los tramos 1 y 3, y de 300 m en el tramo 2. El número de datos de cada tramo sería:

Tramo 1: $n = 1890/500 = 3.8 = 4$ sitios

Tramo 2: $n = 1372/300 = 4.5 = 5$ sitios

Tramo 3 $n = 1768/500 = 4.5 = 5$ sitios

3. Determinación de las columnas de la Tabla I para el muestreo.

De una tabla de números aleatorios se sacan, para seleccionar las columnas A de la Tabla I, 3 números del 1 al 28, y éstos resultan ser: 23, 16 y 15.

4. Números aleatorios obtenidos.

Para el tramo 1, se usa la columna 23 y se encuentra que:

Columna A	Columna B	Columna C
4	.515	.993
3	.053	.256
2	.623	.271
1	.937	.714

Para el tramo 2, con la columna 16 se tiene:

Columna A	Columna B	Columna C
5	.147	.864
4	.516	.396
3	.548	.688
2	.739	.298
1	.331	.925

Para el tramo 3, se usa la columna 15:

Columna A	Columna B	Columna C
4	.951	.482
3	.523	.519
2	.977	.172
1	.139	.230

5. Determinación de las posiciones longitudinales (cadenamientos) de los sitios de muestreo.

Con los números de la columna B de los cuadros anteriores se tienen que:

Para el tramo 1, de 1890 m:

Longitud del x tramo	Columna B	= Distancia	+Cadenamiento inicial	=Cadenamiento de muestreo
1890	0.515	973	10+00	19+73
1890	0.053	100	10+00	11 +00
1890	0.623	1177	10+00	21 +77
1890	0.937	1771	10+00	27+71

Para el tramo 2, de 1372 m:

Longitud del x tramo	Columna B	= Distancia	+Cadenamiento inicial	=Cadenamiento de muestreo
1372	0.147	202	28+90	30+92
1372	0.516	708	28 +90	35 +98
1372	0.548	752	28+90	36+42
1372	0.739	1014	28+90	39+04
1372	0.331	454	28+90	33+44

Para el tramo 3, de 1768m:

Longitud del x tramo	Columna B	= Distancia+	+Cadenamiento inicial	=Cadenamiento de muestreo
1768	0.951	1681	42+62	59+43
1768	0.523	925	42+62	51 +87
1768	0.977	1727	42+62	59+89
1768	0.139	246	42+62	45+08

6. Determinación de las posiciones transversales de muestreo.

Puesto que el ancho del camino es de 6m, se tiene que:

Para el tramo 1:

Ancho del camino x	Columna C	=Distancia del borde izquierdo, m
6	0.993	5.9
6	0.256	1.5
6	0.271	1.6
6	0.714	4.3

Para el tramo 2:

Ancho del camino x	Columna C	=Distancia del borde izquierdo, m
6	0.864	5.2
6	0.396	2.4
6	0.688	4.1
6	0.298	1.8
6	0.925	5.6

Para el tramo 3:

Ancho del camino x	Columna C	=Distancia del borde izquierdo, m
6	0.482	2.9
6	0.519	3.1
6	0.172	1.0
6	0.230	1.4

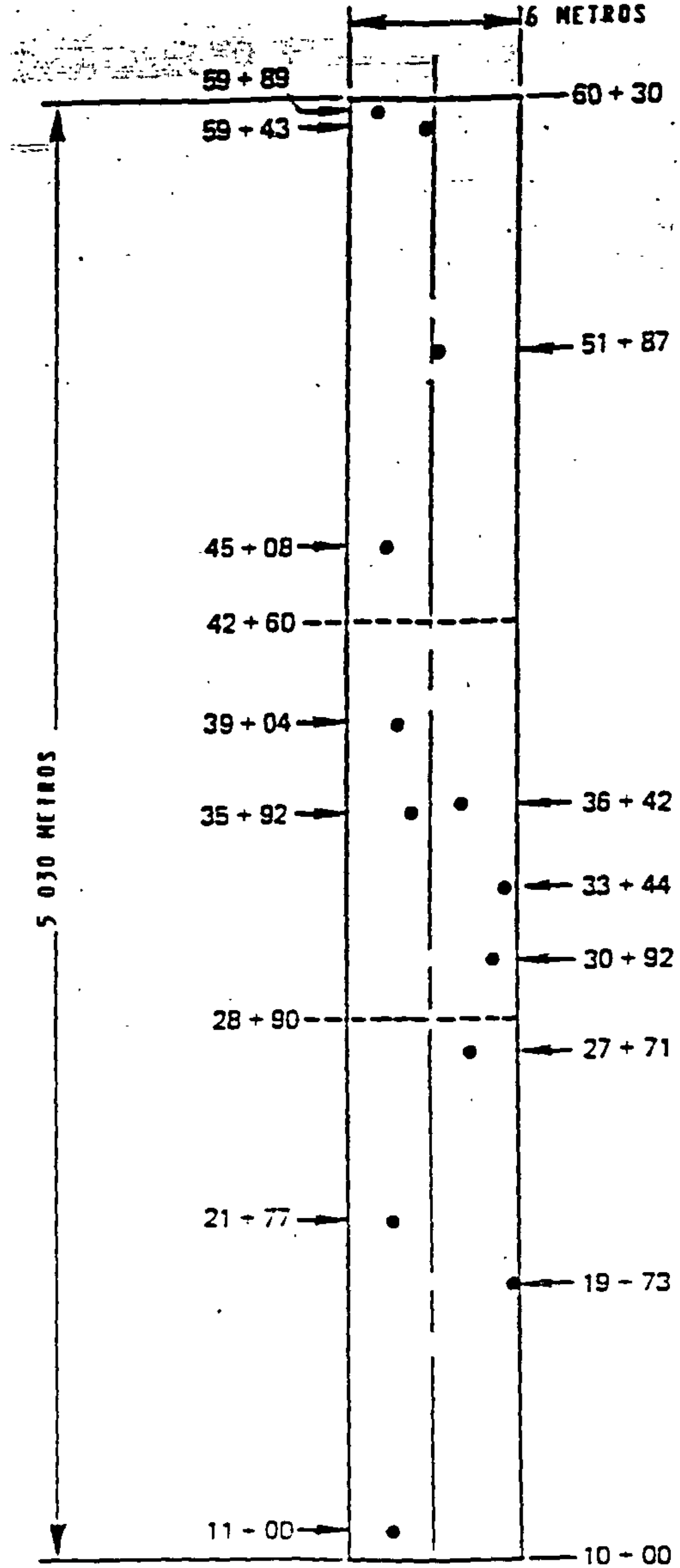


FIGURA 1 PUNTOS DE MUESTREO

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

FRECUENCIA DE UN EVENTO.- Es el número de veces que ocurre el eve... al obtener una muestra de la población correspondiente.

FRECUENCIA RELATIVA DE UN EVENTO.- Es el cociente de su frecuencia entre el total de elementos (tamaño) de la muestra.

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.- Es la acumulación (suma) de las frecuencias relativas hasta un valor dado, partiendo del valor (o del intervalo) más pequeño. En otras palabras, es la frecuencia de valores menores o iguales que un valor dado.

FRECUENCIA COMPLEMENTARIA.- Es la frecuencia de valores mayores que un valor dado = número de datos – frecuencia acumulada.

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.- Con objeto de facilitar la interpretación de los datos que se tienen en una muestra, es conveniente agruparlos por valores o por intervalos de valores, formando así una tabla de distribución de frecuencias.

Para facilitar el cálculo de las frecuencias, se ordenan los datos en forma creciente o decreciente de valores, formando así una tabla de datos ordenados.

El cálculo de las frecuencias se ilustrará con el siguiente ejemplo:

emplo:

un tramo carretero se determinó la compacidad relativa de la sub–base, eccionando al azar 30 sitios para obtener la muestra correspondiente. s datos, redondeados a las unidades y ordenados en forma creciente, eron:

$$\underbrace{7,\ 59,}_{A}\quad \underbrace{65,\ 67,\ 67,\ 67,\ 69,}_{B}\quad \underbrace{72,\ 73,\ 73,\ 77,\ 78,\ 78,}_{C}$$

$$\underbrace{81,\ 81,\ 83,\ 83,\ 83,\ 84,\ 84,\ 87,\ 88,\ 89,\ 89,}_{D}$$

$$\underbrace{91,\ 91,\ 93,\ 95,\ 97,\ 99}_{E}$$

terminar las distribuciones de frecuencias de los valores individuales enidos y de un agrupamiento por intervalos de los mismos.

la T· ıla A se muestra la distribución de frecuencias por valores lividual :s.

TABLA A

Distribuciones de Frecuencias por Valores

Compacidad Relativa	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Acumulada
57	1	1/30	1/30
59	1	1/30	2/30
65	1	1/30	3/30
67	3	3/30	6/30
69	1	1/30	7/30
72	1	1/30	8/30
73	2	2/30	10/30
77	1	1/30	11/30
78	2	2/30	13/30
81	2	2/30	15/30
83	3	3/30	18/30
84	2	2/30	20/30
87	1	1/30	21/30
88	1	1/30	22/30
89	2	2/30	24/30
91	2	2/30	26/30
93	1	1/30	27/30
95	1	1/30	28/30
97	1	1/30	29/30
99	1	1/30	30/30

¿Cuál es la frecuencia relativa de valores menores o iguales que 84? : 20/30
¿Cuál es la frecuencia relativa de 83? : 3/30 = 1/10 = 10%
¿Cuál es la frecuencia del valor 67? : 3

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS POR INTERVALOS

Para la distribución de frecuencias por intervalos se requieren los siguientes conceptos:

Límites de clase: Son los valores mínimo y máximo de cada intervalo
Marcas de clase: Son los valores medios de cada intervalo de clase
Límites reales de clase: Son los valores mínimo y máximo que son frontera entre los intervalos. Estos deben tener una cifra decimal más que los datos.

Para el ejemplo en cuestión se tienen los siguientes resultados:

Evento	Límites de Clase		Límites Reales de Clase		Marcas de Clase
	Inferior	Superior	Inferior	Superior	
A	51	60	50.5	60.5	55.5
B	61	70	60.5	70.5	65.5
C	71	80	70.5	80.5	75.5
D	81	90	80.5	90.5	85.5
E	91	100	90.5	100.5	95.5

Las distribuciones de frecuencias correspondientes se muestran en la Tabla B.

TABLA B

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS POR INTERVALOS

Evento	Elementos en los intervalos	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
A: 51-60	59, 57	2	2/30=0.067(6.7%)	2	0.067
B: 61-70	67, 65, 69, 67, 67	5	5/30=0.166(16.6%)	2+5=7	0.067+0.166=0.233
C: 71-80	72, 73, 73, 77, 78, 78	6	6/30=0.200(20%)	13+11=24	0.233+0.200=0.433
D: 81-90	83, 88, 84, 89, 83, 84, 89, 87,81, 83, 81	11	11/30=0.367(36.7%)	13+11=24	0.433+0.367=0.800
E: 91-100	99, 91, 97, 95, 91, 93	6	6/30=0.200(20%)	24+6=30	0.800+0.200=1.000
		30	1.000		

PROCEDIMIENTO DE AGRUPAMIENTO

A mayor número de datos se requiere mayor número de intervalos. Pero se recomienda que este número esté entre 5 y 20, suponiendo que en promedio caigan 5 o más elementos en cada intervalo. Así, si se tienen 30 datos, se recomienda usar 30/5 = 6 intervalos.

Ejemplo:

El proceso de agrupamiento se indicará al mismo tiempo que se realiza el siguiente ejemplo.

En el proceso de control de calidad del concreto utilizado en la cimentación de un puente, se obtuvieron 30 datos de resistencia a compresión correspondientes a otros tantos cilindros elaborados con muestras del material. Los datos redondeados a las unidades y ordenados en for creciente de valores, fueron los siguientes:
159, 161, 163, 163, 163, 167, 167, 167, 167, 168, 168, 168, 169, 169, 170, 171, 171, 173, 174, 175, 175, 175, 178, 179, 181, 181, 183, 184, 187, 191 Kg/cm^2. Obtener la tabla de distribución de frecuencias.

Solución:

1.- Determinación del rango de la muestra

Rango = valor máximo − valor mínimo = 191−159 = 32

2.- Determinación del número de intervalos

Número de intervalos = 30/5 = 6

3.- Determinación de los límites de clase

Ancho de los intervalos = Rango/número = 32/6 = 5.3

Tomaremos un ancho de 6 cm, con lo cual el rango del agrupamiento es $6 \times 6 = 36$ cm. La diferencia de rangos es $36-32 = 4$, que se reparte en los dos intervalos extremos equitativamente. Por lo tanto, los intervalos resultan ser:

157-162, 163-168, 169-174, 175-180, 181-186, 187-192.

4. Integración de la tabla:

Intervalo	Límites Reales		Frec.	Frecuencia Relativa	Frec. Acum.	Frecuencia Relativa Acumulada
	Inferior	Superior				
157–162	156.5	162.5	2	2/30=0.067	2	0.067
163–168	162.5	168.5	10	10/30=0.333	12	0.400
169–174	168.5	174.5	7	7/30=0.233	19	0.533
175–180	174.5	180.5	5	5/30=0.167	24	0.800
181–186	180.5	192.5	4	4/30=0.133	22	0.933
187–192	185.5	192.5	2	2/30=0.067	30	1.000
			$\Sigma = 30$	$\Sigma = 1.000$		

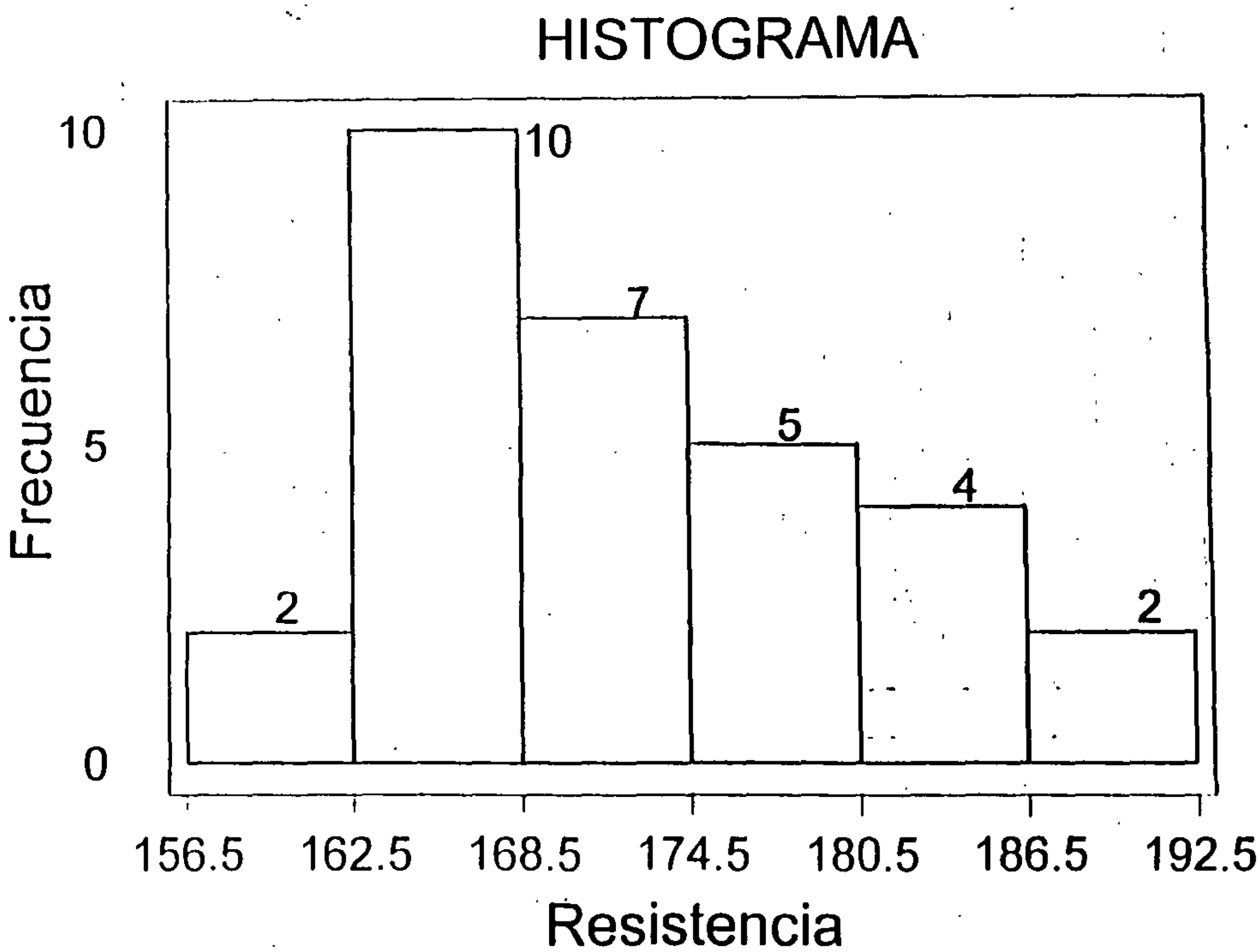
PRESENTACION GRAFICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Las distribuciones de frecuencias y de frecuencias relativas, se pueden presentar en forma gráfica mediante el HISTOGRAMA, que es una gráfica de barras en la que la altura de cada barra corresponde a la frecuencia asociada a cada intervalo a valor.

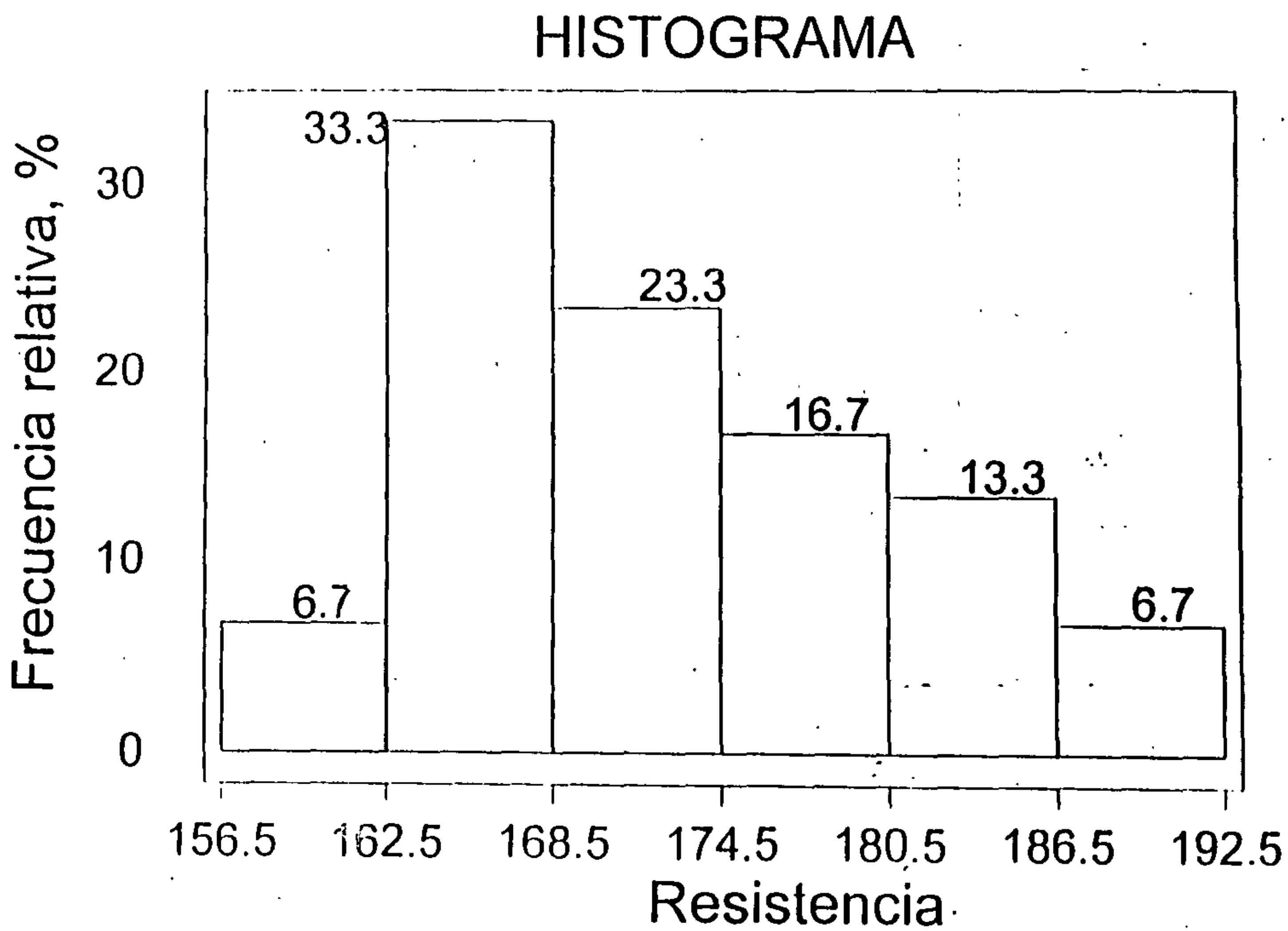
Otra opción consiste en unir con rectas los puertos definidos por las marcas de clase, tomadas como abscisas, y las frecuencias correspondientes tomadas como ordenadas, formando así la gráfica denominada POLIGONO DE FRECUENCIAS.

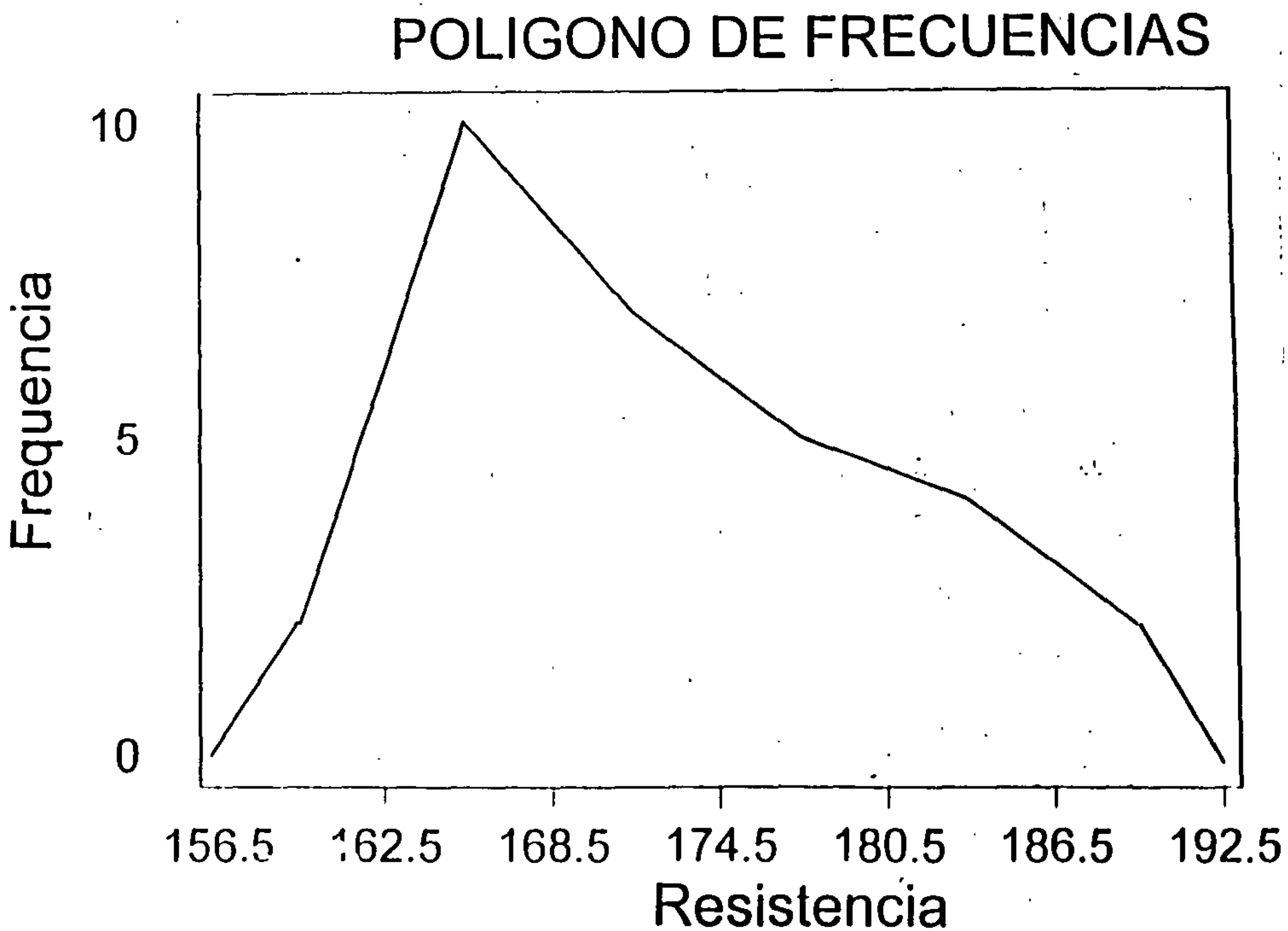
Por otra parte, las distribuciones de frecuencias acumuladas, relativas acumuladas y complementarias, se pueden representar mediante gráficas denominadas POLIGONOS DE FRECUENCIAS ACUMULADAS. En las dos primeras, las abscisas de los puntos son los límites reales superiores de clase de cada intervalo, y las ordenadas son las frecuencias acumuladas hasta el intervalo correspondiente.

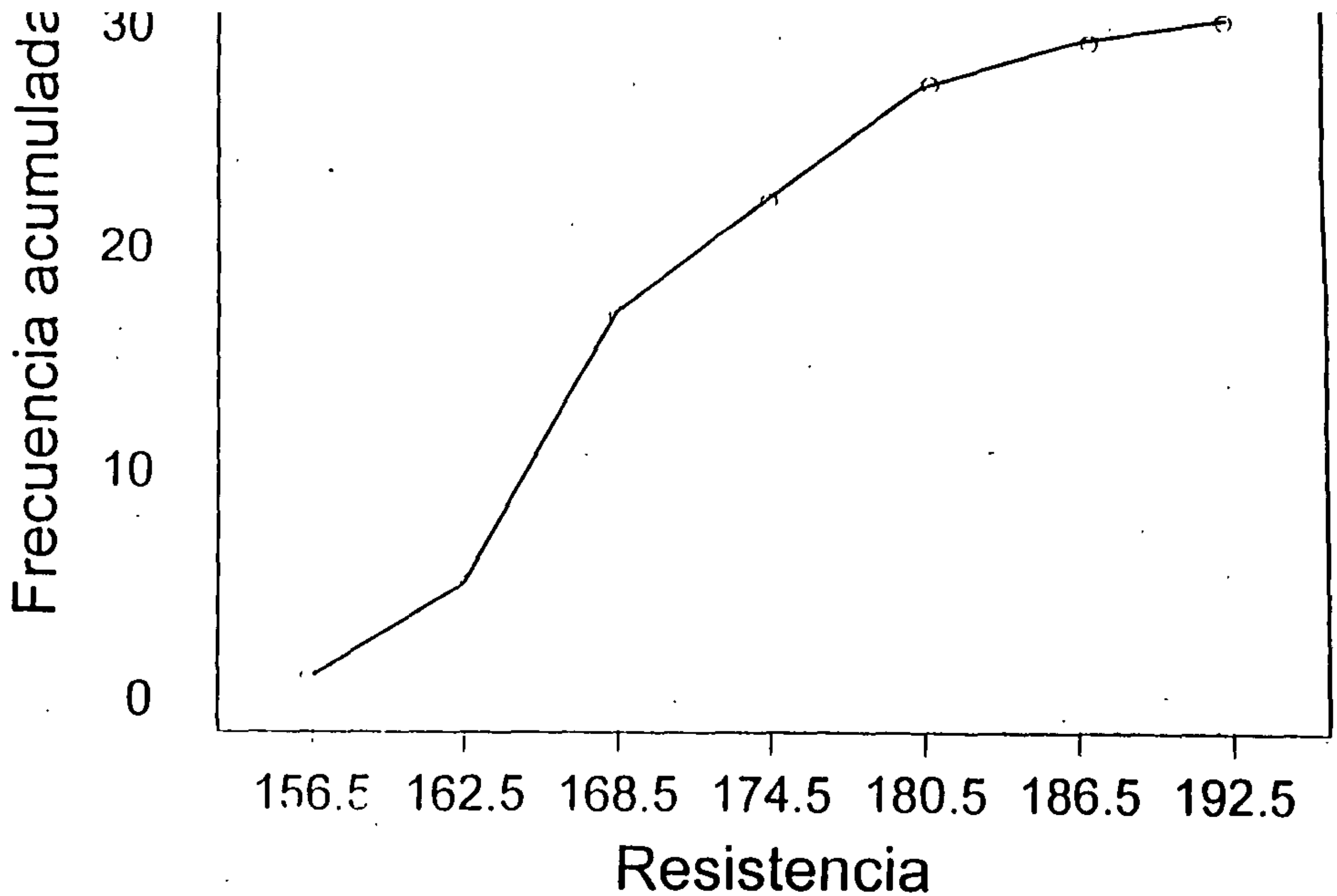
En las siguientes cinco figuras se muestran las gráficas asociadas al ejemplo que se está presentando.


HISTOGRAMA
Frecuencia
10
5
0
2
10
7
5
4
2
156.5
162.5
168.5
174.5
180.5
186.5
192.5
Resistencia

28

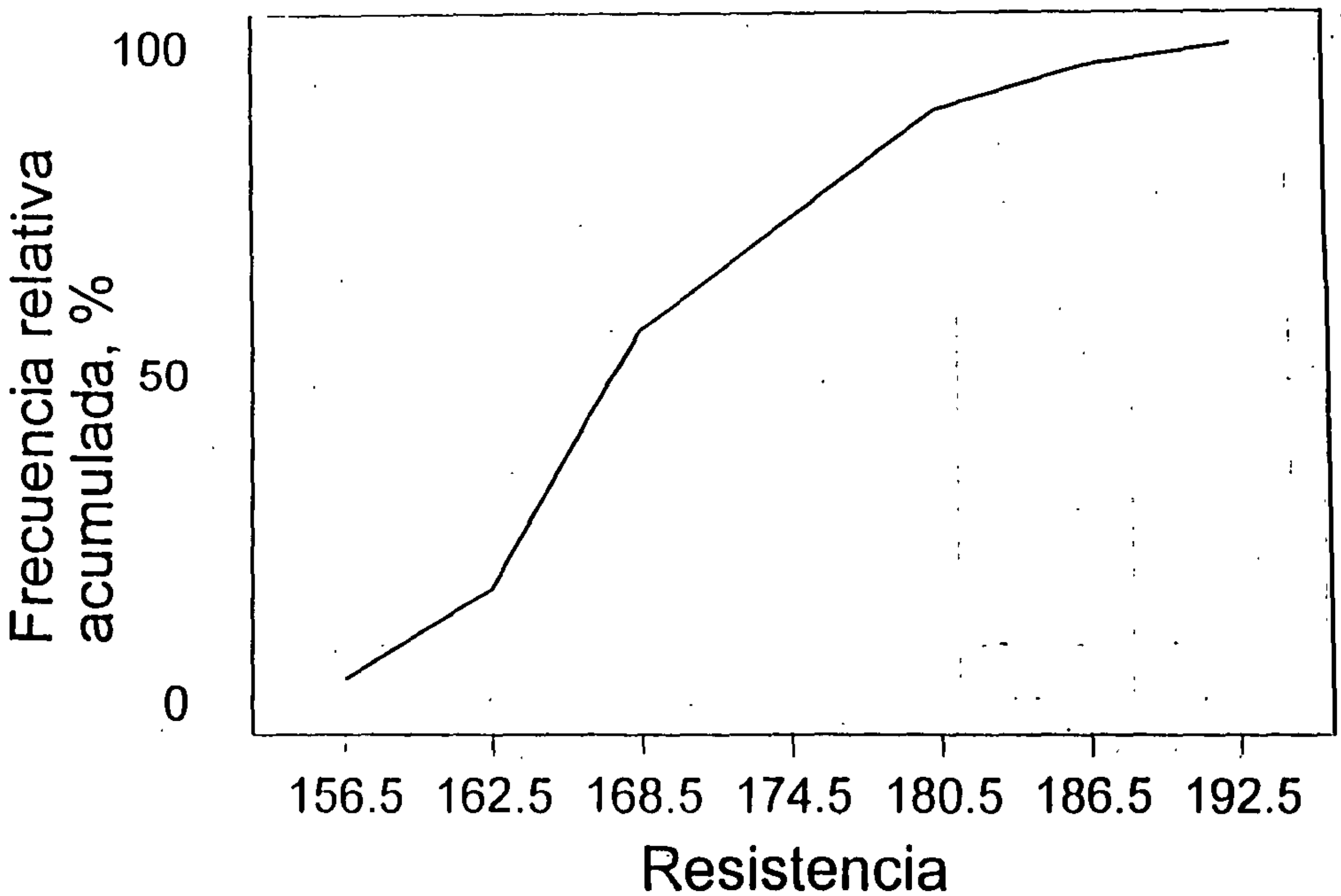

HISTOGRAMA
Frecuencia relativa, %
33.3
23.3
16.7
13.3
6.7
6.7
0
10
20
30
156.5
162.5
168.5
174.5
180.5
186.5
192.5
Resistencia


POLIGONO DE FRECUENCIAS
Frequencia
10
5
0
156.5
162.5
168.5
174.5
180.5
186.5
192.5
Resistencia


Frecuencia acumulada
30
20
10
0
156.5
162.5
168.5
174.5
180.5
186.5
192.5
Resistencia

31

POLIGONO DE FRECUENCIAS
RELATIVAS ACUMULADAS



Ejemplo:

En un estudio sobre la calidad de las soldaduras ejecutadas en el proceso de ensamble de elementos de acero, se obtuvo una muestra aleatoria de 100 secciones, a las cuales se les contó el número de defectos de la soldadura colocada.

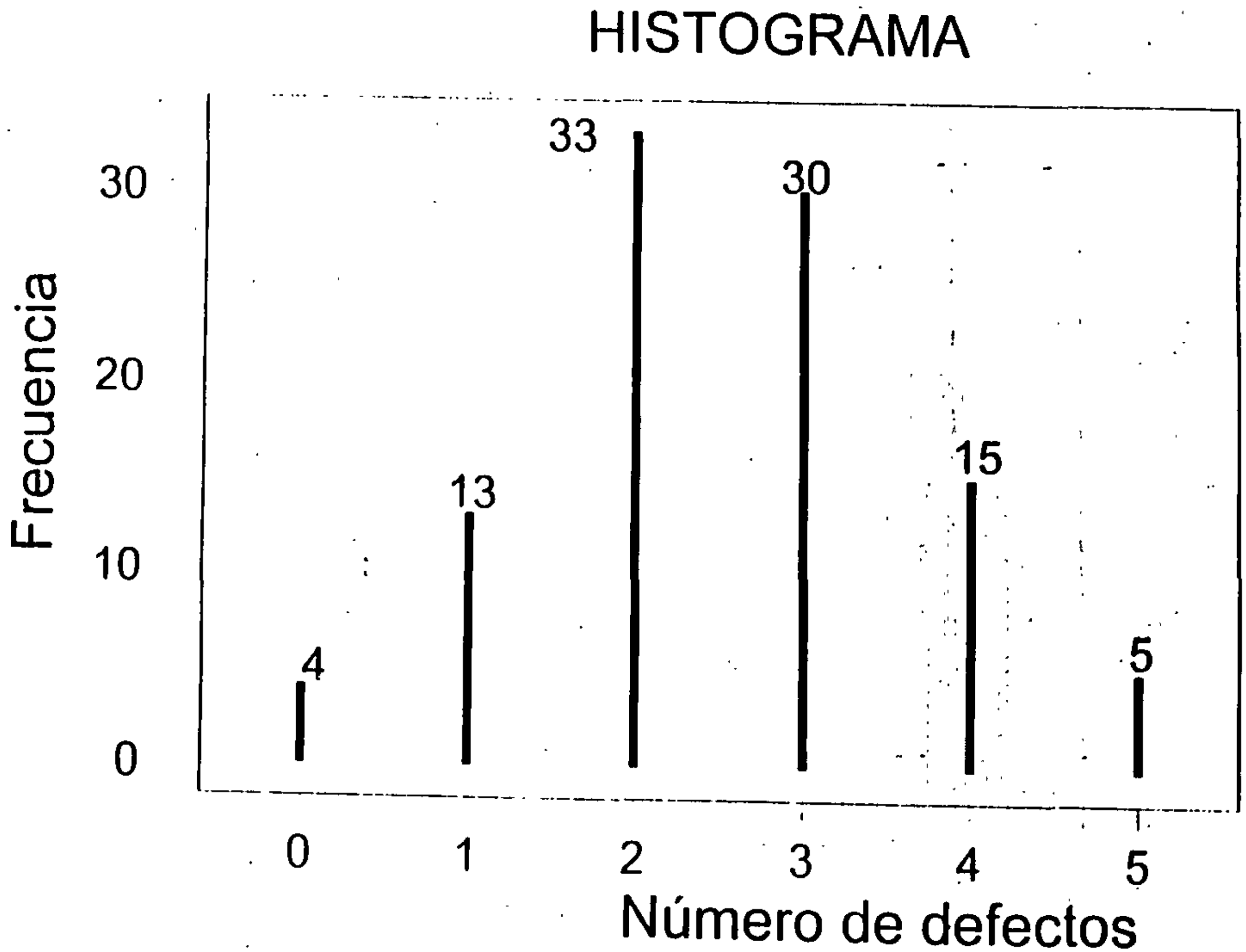
La distribución de frecuencias que se obtuvo fue la siguiente:

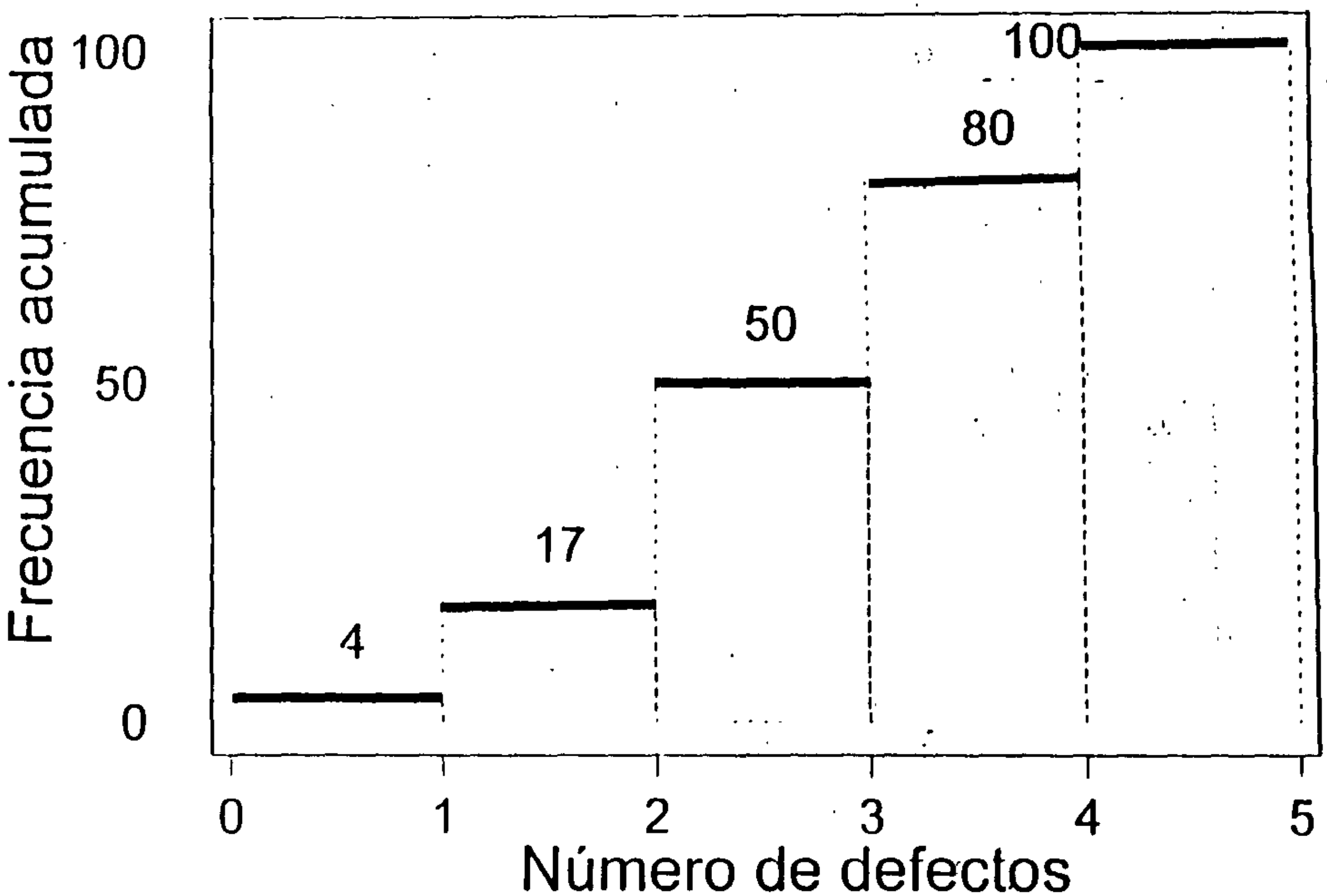
Número de defectos	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada Complementaria.
0	4	4	96 (100 − 4)
1	13	17	83 (100 − 17)
2	33	50	50 (100 − 50)
3	30	80	20 (100 − 80)
4	15	95	5 (100 − 95)
5	5	100	0 (100 −100)
	100		

El histograma, en este caso, no se forma con barras rectangulares sino con líneas verticales que parten de las marcas de clase, en el eje horizontal, y tienen altura igual a la frecuencia correspondiente.

Por su parte, el polígono de frecuencias se dibuja ahora como una "escalera", en la que cada peldaño tiene una altura igual a la frecuencia acumulada asociada a cada intervalo de clase.

En las siguientes dos figuras se presentan estas dos gráficas.


HISTOGRAMA
Frecuencia
0
10
20
30
4
13
33
30
15
5
0
1
2
3
4
5
Número de defectos


Frecuencia acumulada
100
50
0
4
17
50
80
100
0
1
2
3
4
5
Número de defectos

VALORES CARACTERISTICOS DE POSICION CENTRAL Y DE DISPERSION

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

VALOR MEDIO O PROMEDIO ARITMÉTICO

Para datos no agrupados

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Donde X_i son los valores de los datos y n es el tamaño de la muestra.

Si los datos están agrupados, f_j es la frecuencia del j-ésimo intervalo y x_j es la marca de clase correspondiente, entonces.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{K} f_j \, x_j \qquad K = \text{número de intervalos}$$

Ejemplo:

Sea el ejemplo enunciado anteriormente de los defectos en secciones (soldadura. Calcular el promedio aritmético.

j	Número de defectos x	Frecuencia	f x
1	0	4	4 x 0 = 0
2	1	13	13 x 1 = 13
3	2	33	33 x 2 = 66
4	3	30	30 x 3 = 90
5	4	15	15 x 4 = 60
K=6	5	5	5 x 5 = 25
		100	254

$\bar{x}$ = 254/100 = 2.54 defectos por monoblock

MODO.- Es el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia en una muestra. Si los datos están agrupados, el modo es la marca de clase del intervalo que tiene la mayor frecuencia.

MEDIANA.- Es el valor de la variable que corresponde al 50% de las frecuencias relativas acumuladas.

Ejemplo:

En el problema de los defectos de secciones de soldadura el modo es 2. En el problema de las resistencias del concreto el modo es 165.5 kg/cm^2.

MEDIDAS DE DISPERSION

RANGO = Máximo valor observado – mínimo valor observado

VARIANCIA.- Si los datos no están agrupados:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Si los datos están agrupados:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum f_i\, x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Donde las x_i son los valores de las marcas de clase de los intervalos o son los valores de agrupamiento, según corresponda.

DESVIACION ESTANDAR

$$S = \sqrt{S^2}$$

COEFICIENTE DE VARIACION

$$V = S/\bar{x}$$

la compacidad relativa de un suelo compactado, de los cuales se obtuvo la distribución de frecuencias indicada en la siguiente tabla. Calcular las medidas de dispersión.

j	Compacidad Relativa	Marca de Clase	Frecuencia	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
1	55 - 63	59	2	118	-21.3	453.7	907.4
2	64 - 72	68	6	408	-12.3	151.3	907.8
3	73 - 81	77	7	539	- 3.3	10.9	76.3
4	82 - 90	86	9	774	5.7	32.5	292.5
5	91 - 99	95	6	570	14.7	216.1	1296.6
			30	2409			3480.6

$\bar{x} = 2409/30 = 80.3$

$S^2 = 3480.6/30 = 116$

$S = \sqrt{116} = 10.8$

$V = 10.8/80.3 = 0.134$ (13.4%)

LEYES DE PROBABILIDADES

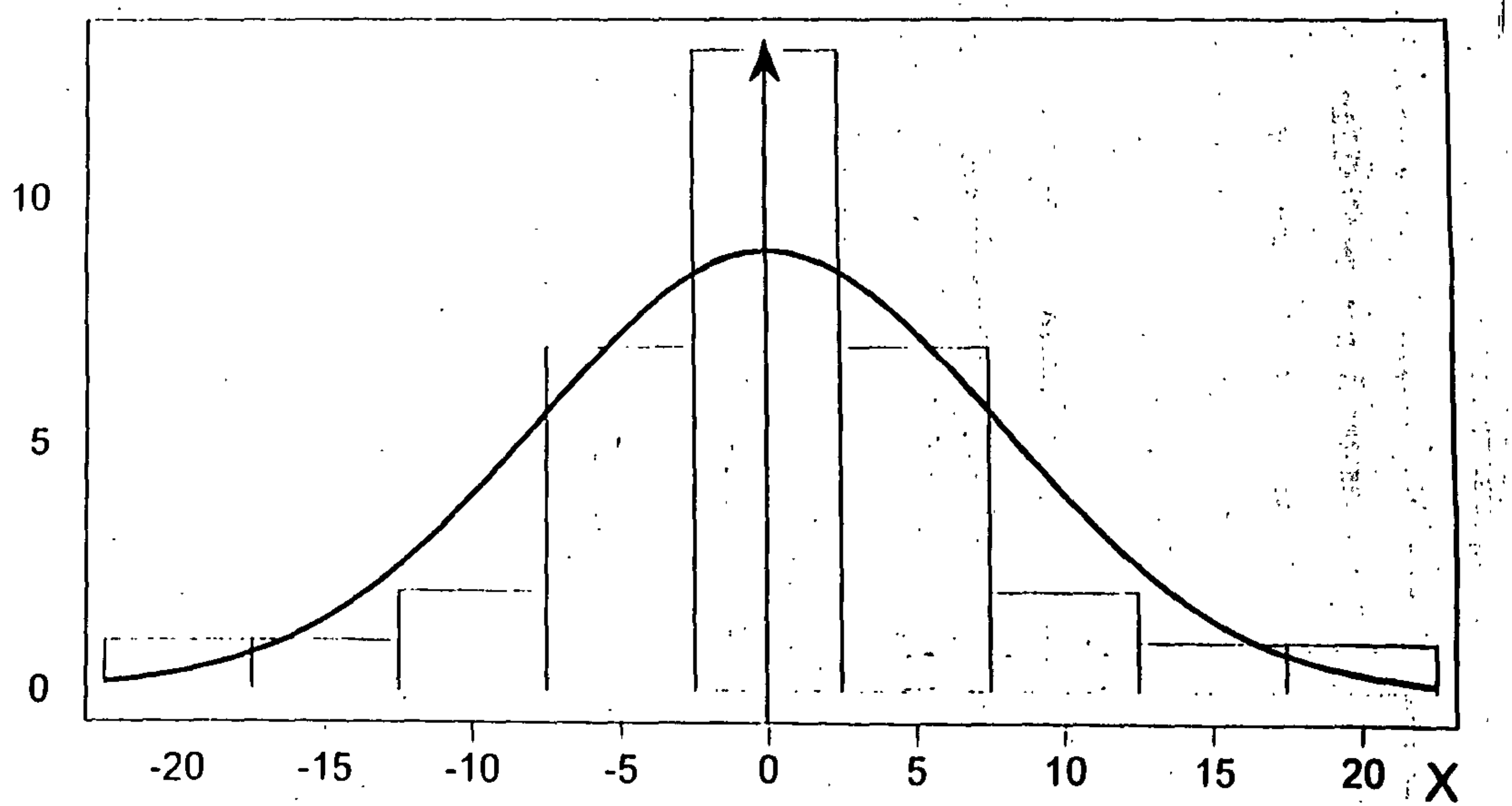
El comportamiento de una variable aleatoria se describe mediante su ley de probabilidades, la cual puede especificarse de diferentes formas. La manera más común de hacerlo es mediante su DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES. A fin de evitar confusión, se empleará una letra mayúscula para denotar una variable aleatoria, y la minúscula correspondiente para los valores que puede asumir.

Por ejemplo, en la figura que aparece en la siguiente hoja, se muestra el histograma asociado al muestreo realizado a una variable aleatoria continua X y, superpuesta, se presenta una curva que corresponde a una función analítica, que se asocia a una ley de probabilidades, que sigue aproximadamente la forma del histograma y puede servir para "modelar" matemáticamente el comportamiento aleatorio de la variable X.

Existen varias leyes de probabilidades de carácter teórico; en la práctica, para cada variable aleatoria se escoge una que modele adecuadamente su comportamiento aleatorio, lo cual se establece al compararla con el histograma de los datos correspondientes a un muestreo.

Es importante mencionar que cada distribución de probabilidades tiene parámetros que caracterizan su posición central y su dispersión. De los primeros se tiene a la media, la mediana y el modo; de los segundos se tiene a la variancia, la desviación estándar y el coeficiente de variación. Los valores que se asignan a estos parámetros en cada caso particular, se estiman con base en una muestra aleatoria de la variable que se trate; la

HISTOGRAMA CON CURVA DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES



media se estima con el promedio aritmético, y la desviación estándar con la desviación estándar de la muestra.

LEYES DE PROBABILIDADES PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Si la variable aleatoria X es discreta y puede asumir los valores x_i, su distribución de probabilidades, f(x), será el conjunto de todas las probabilidades:

$$P(x_i) = P(x = x_i); \; i = 1,2,\ldots,n$$

La cual se lee "probabilidad de que $x = x_i$". Esto es

$$f(x) = \{P(x = x_i)\} \quad i = 1,2\ldots, n$$

Para que una distribución de probabilidades satisfaga los tres axiomas de la teoría de probabilidades, se deben cumplir los siguientes requisitos:

A) $0 \leq (P\ x_i) \leq 1$ para toda x_i

B) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1 \; ; \; i = 1,2,\ldots,n$

donde n es el número total de valores que puede asumir X

C) $P(x_m \leq X \leq x_r) \; \sum_{i=m}^{i=r} P(x_i) \; ; m<r,$

donde las x_i están ordenadas en forma creciente, es decir

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$

Otra forma de especificar la ley de probabilidades de una variable aleatoria es mediante la DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, F(·) que se define como el conjunto de las sumas parciales de las probabilidades $P(x_i)$, correspondientes a todos los valores de X menores o iguales que x_i. Por lo tanto, esta función da las probabilidades de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x_m para cualquier m, es decir:

$$F(x) = \{F(x_m)\};\ m = 1,2,\ldots,n$$

En donde

$$F(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P(x_i) = P(X \leq x_m);\ m = 1,2,\ldots,n$$

Ejemplo:

Sea X la variable aleatoria discreta "número total de carros que se detienen en una esquina debido a la luz roja de un semáforo". Si las probabilidades asociadas a cada valor, son:

$$P(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI} \quad x = 0 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 1 \\ 0.3 & \text{SI} \quad x = 2 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 3 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 4 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 5 \\ 0 & \text{SI} \quad x = 6 \end{cases}$$

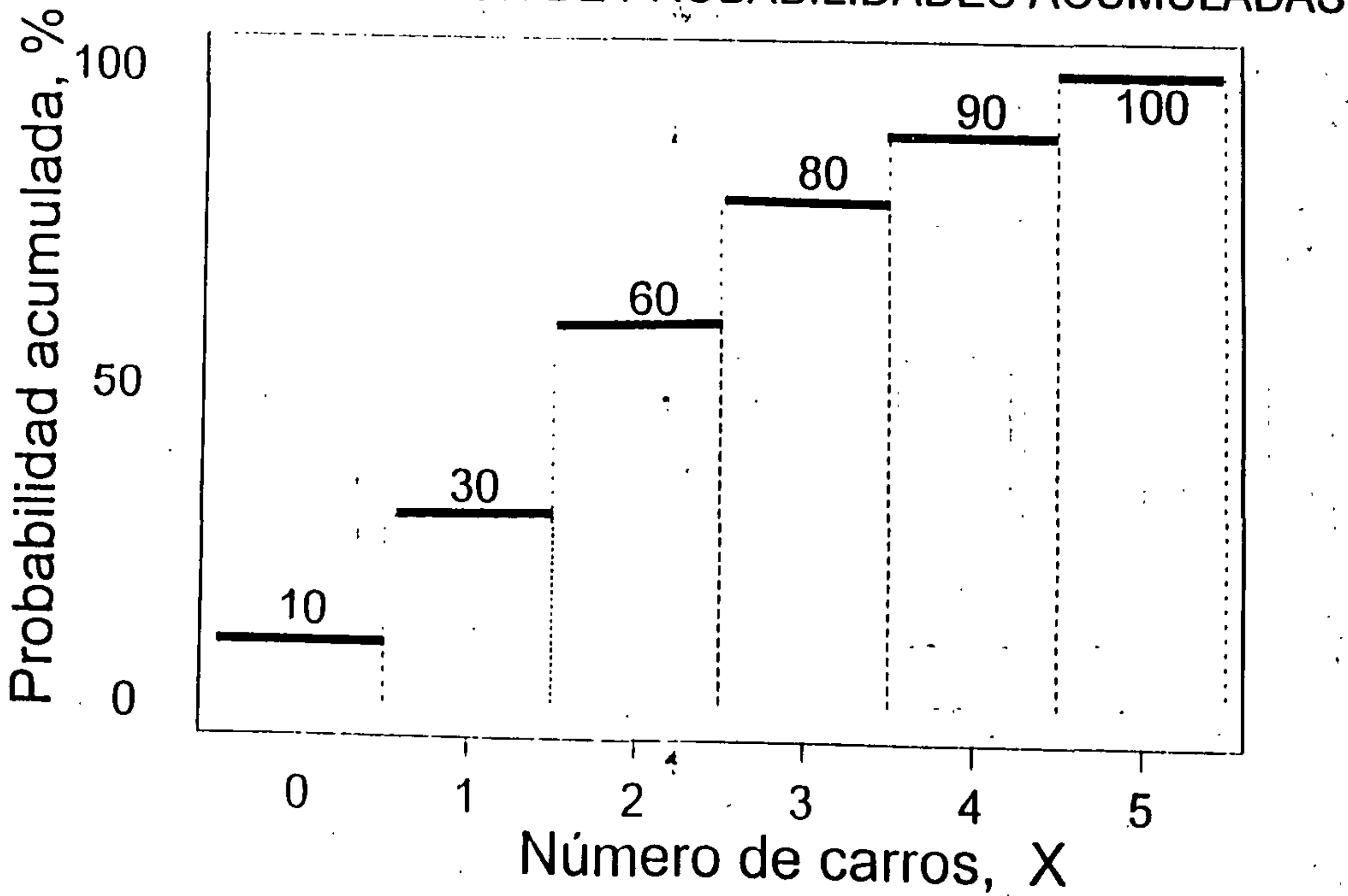
Las distribuciones de probabilidades y la de probabilidades acumuladas correspondientes serán:

x	f(x)	F(x)
<0	0	0
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
>6	0	1.0

$$\text{o sea } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x < 0 \\ 0.1, & \text{SI } 0 < x \leq 1 \\ 0.3, & \text{SI } 1 < x \leq 2 \\ 0.6, & \text{SI } 2 < x \leq 3 \\ 0.8, & \text{SI } 3 < x \leq 4 \\ 0.9, & \text{SI } 4 < x \leq 5 \\ 1.0, & \text{SI } 5 < x \end{cases}$$

Las gráficas de estas distribuciones se presentan en las figuras de las siguientes dos páginas.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS



En el caso de una variable aleatoria continua, X, la probabilidad de que ésta tome un valor comprendido entre x y x+ dx está dada por f(x)dx, donde f(x) es la densidad de probabilidades de x. Por lo tanto, la probabilidad de que X asuma valores comprendidos en el intervalo $x_1 \leq X \leq x_2$ es:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

La interpretación gráfica de esta probabilidad es que corresponde al área bajo la curva de f(x) comprendida entre x_1 y x_2, como se muestra en la figura de la siguiente hoja.

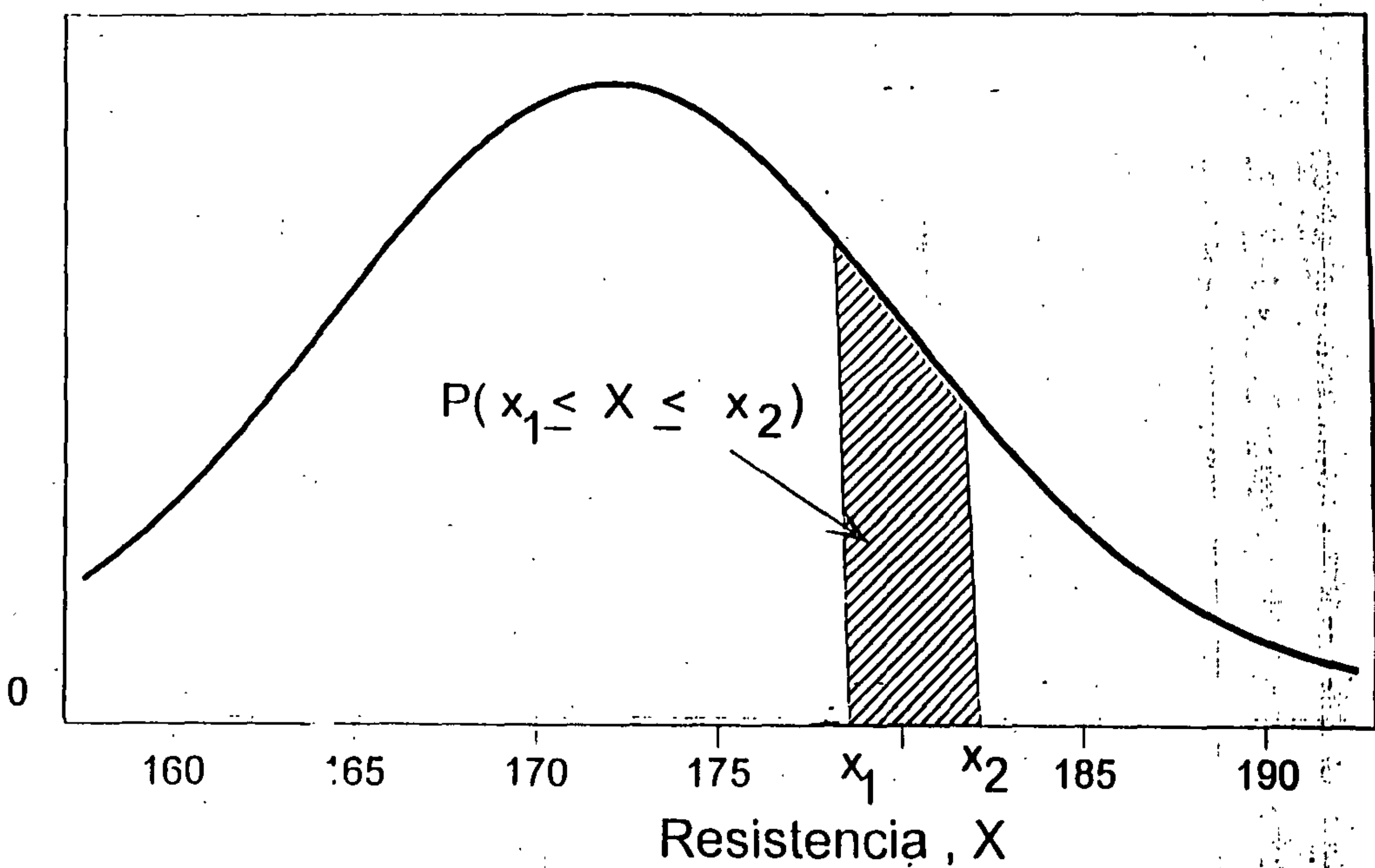
Puesto que $F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$ y en virtud de la ecuación anterior, se tiene que la distribución de probabilidades acumuladas es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(U)dU$$

donde U es sólo una variable muda de integración. El valor de esta integral es igual al área bajo la curva de f(x) a la izquierda de x. De esta ecuación se concluye que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(U)dU\right) = f(x)$$

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES



Algunas propiedades de F(x) son:

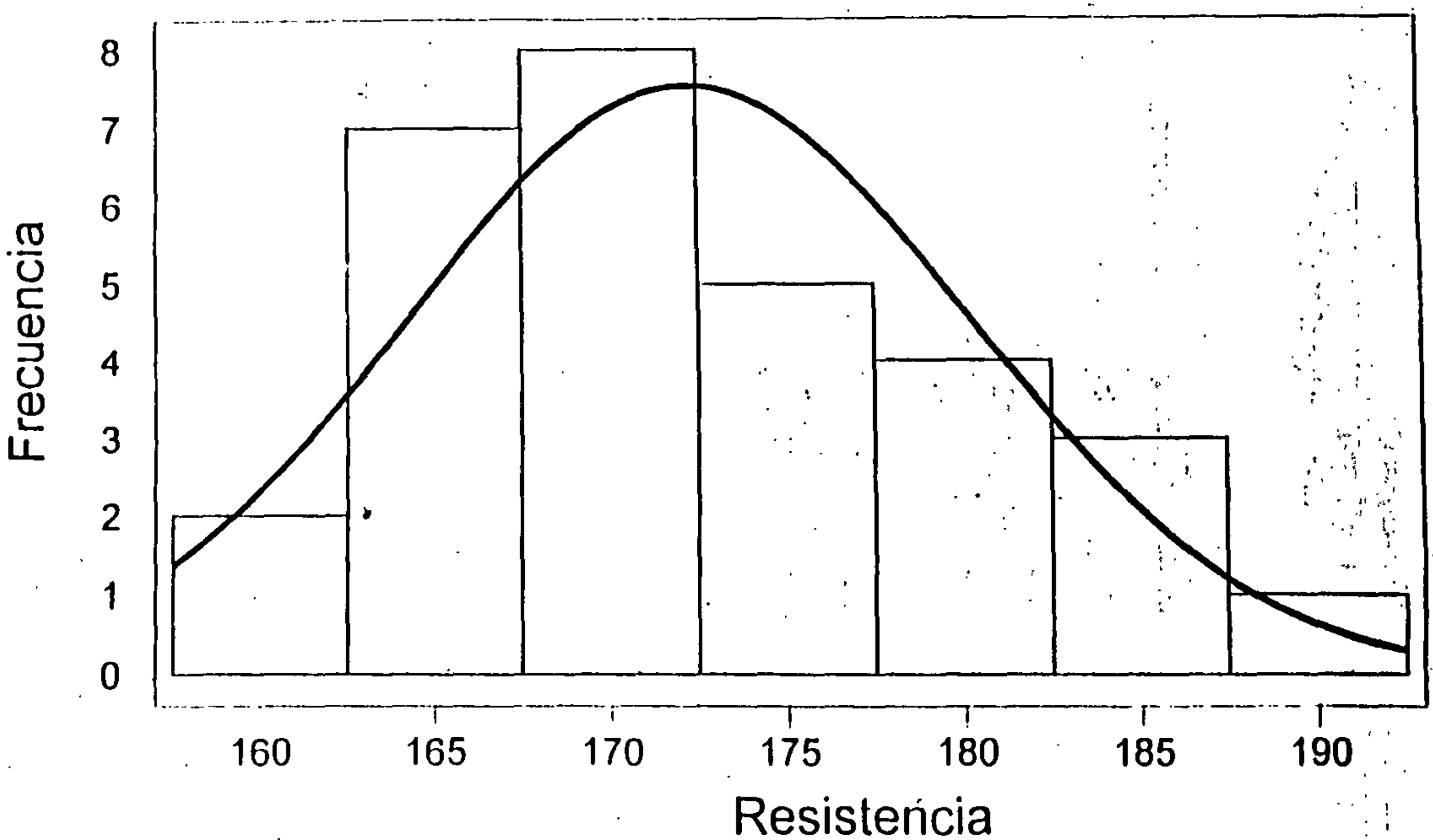
$$0 \leq F(x) \leq 1$$
$$F(-\infty) = 0$$
$$F(\infty) = 1$$
$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

Para satisfacer los axiomas de la teoria de probabilidades se necesita que:

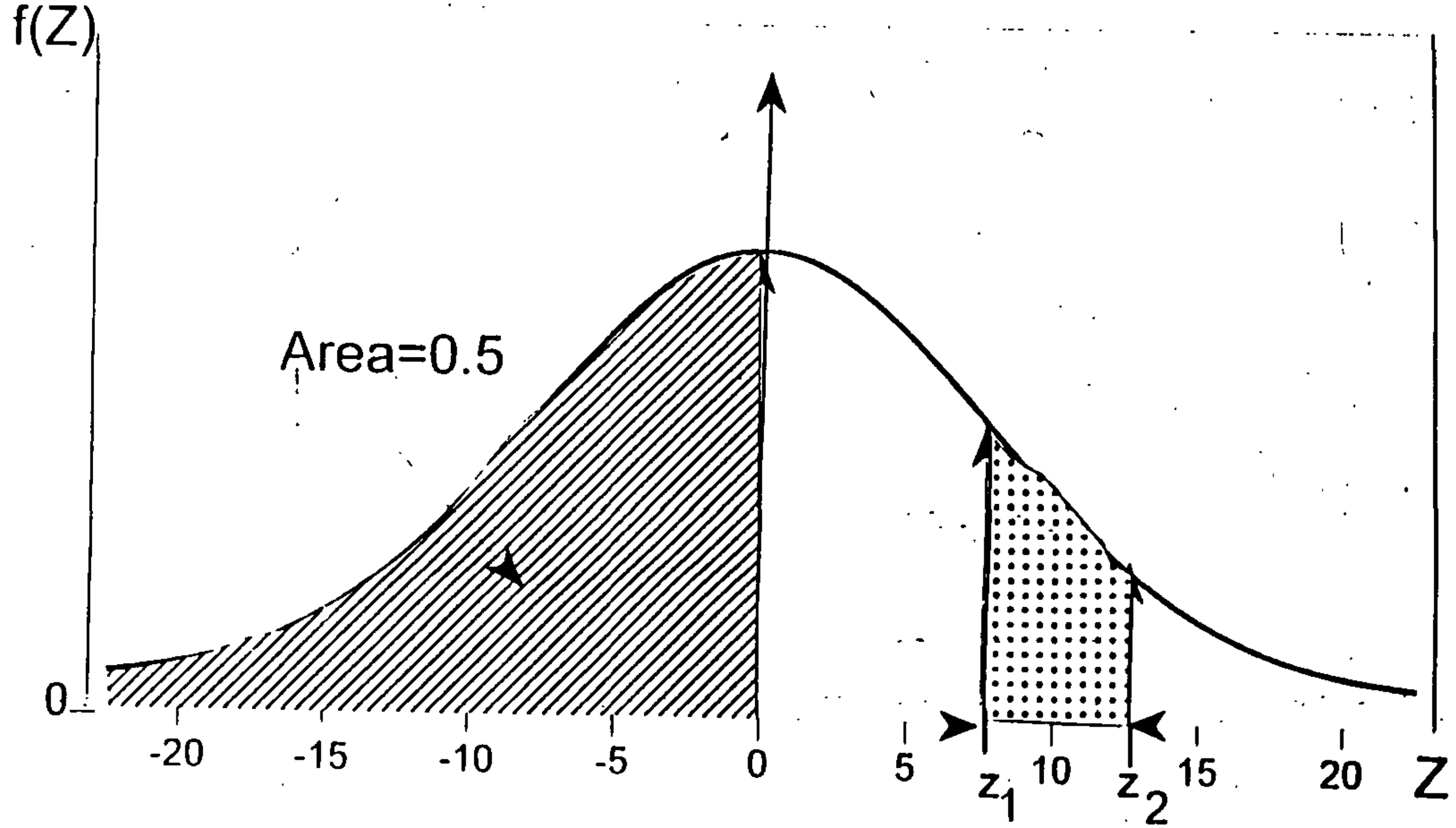
$F(x) \geq 0$ para toda x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

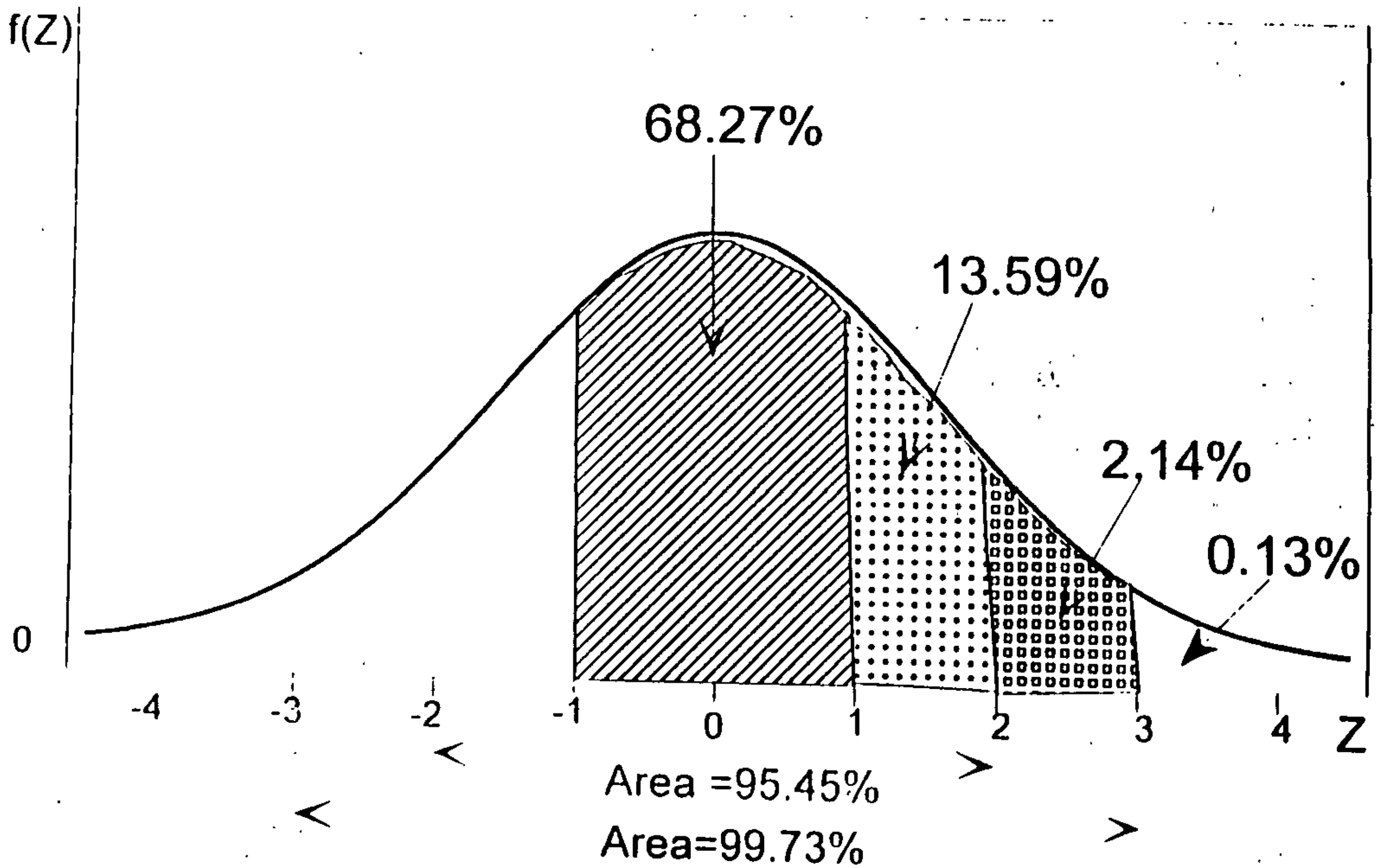
HISTOGRAMA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES



DISTRIBUCION NORMAL



DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES NORMAL ESTANDAR



La utilidad de la distribución normal estándar radica en que

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

Donde

$$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \quad \text{y} \quad z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$$

Ejemplo:

Como resultado de una larga serie de experimentos probando a compresión cilindros de concreto, se ha estimado que la media de la resistencia es de 240 kg/cm² y la desviación estándar de 30 kg/cm².

Suponiendo que la distribución de probabilidades es normal,

A) ¿Cuál es la probabilidad de que otro cilindro tomado al azar resista menos de 240 kg/cm²?.

B) ¿Cuál es la probabilidad de que resista más de 330 kg/cm²?.

C) ¿Cuál es la probabilidad de que su resistencia esté en el intervalo de 210 a 240 kg/cm²?.

Solución:

A) Para emplear las tablas de la distribución normal es necesario estandarizar la variable X, empleando $\mu=240$ y $\sigma=30$, con $X = 240$:

$$Z = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

Recurriendo a la tabla de la distribución normal se obtiene:

$$P[X \leq 240] = p[Z \leq 0] = 0.5$$

B) El valor estandarizado de la variable, para $x = 330\ kg/cm^2$, es

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

Por lo que

$$P[X \geq 330] = p[Z \geq 3] = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

C) Los valores estandarizados de la variable, para $x_1 = 210$ y $x_2 = 240$ son:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

Por lo que

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$

Ejemplo:

Se ha encontrado que la variable aleatoria "error en la medición de las distancias entre dos puntos" tiene distribución normal con media cero. Si se sabe que el tamaño verdadero de una línea es de 2m y que la variancia de su medición es de 9 cm^2, calcular la probabilidad de que en una medición la longitud que se registre sea

a. Menor de 195 cm.

b Mayor de 203 cm.

c. Comprendida entre 198 y 202 cm.

Solución

a. $P(X < 195) = ?$ con $\mu = 200$ cm y $\sigma = \sqrt{9} = 3$ cm.

$$Z = \frac{195 - 200}{3} = \frac{-5}{3} = -1.67$$

$P(X<195) = P(Z<-1.67) = 0.0475 = 4.75\%$

b. $Z = \dfrac{203 - 200}{3} = 1$

$P(X > 203) = 1-P(X < 203) = 1-P(Z<1) = 1-0.8413=0.1587=15.87\%$

c. $P(198 \leq X \leq 202) = ?$

$$Z_1 = \frac{198 - 200}{3} = -0.67, \quad Z_2 = \frac{202 - 200}{3} = 0.67$$

$P(198 \leq X \leq 202) = P(-0.67 < Z < 0.67) = 2 \times 0.2486 = 0.4972 = 49.72\%$

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES.

A menudo resulta necesario inferir información acerca de una población o variable aleatoria mediante el uso de muestras extraídas de ella; una parte básica de dicha inferencia consiste en estimar los valores de los parámetros de la población (media, variancia, etc.) a partir de las estadísticas correspondientes de la muestra. Otra parte importante es la selección de una distribución de probabilidades que se ajuste razonablemente a los datos de la muestra.

Una estadística es una variable aleatoria que se obtiene mediante una función que se calcula con los datos de las muestras: por ejemplo, el promedio aritmético y la desviación estándar son dos estadísticas.

Si el estimador de un parámetro de la población consiste en un solo valor de una estadística, se le conoce como *estimador puntal* del parámetro.

La estimación de un parámetro de una población mediante un par de números entre los cuales se encuentra, con cierta probabilidad, el valor de dicho parámetro, se llama *estimación por intervalos* del mismo.

Sea S una estadística obtenida de una muestra de tamaño n para estimar el valor del parámetro θ, y sea σ_s la desviación estándar (conocida o estimada) de su distribución de probabilidades. La probabilidad, $1-\alpha$, de que el valor de θ se localice en el intervalo de $S - z_c\,\sigma_s$ a $S + z_c\,\sigma_s$, donde z_c es una constante, se escribe en la forma:

$$P[\,S - z_c\,\sigma_s \leq \theta \leq S + z_c\,\sigma_s\,] = 1 - \alpha$$

Si se fija el valor de $1-\alpha$, se puede obtener el valor de z_C necesario para que se satisfaga la ecuación anterior, con lo cual queda definido el *intervalo de confianza* del parámetro θ, $(S \pm z_C \, \sigma_S)$, correspondiente al nivel de *confianza* $1-\alpha$.

La constante z_C que fija el intervalo de confianza se conoce como valor crítico. Si la distribución de S es normal, el valor de z_C correspondiente a uno de α se obtiene de la tabla de áreas bajo la curva normal o de la tabla siguiente:

Valores de z_C para distintos niveles de confianza

Nivel de confianza, en porcentaje	z_c
99.73	3.00
99.00	2.58
98.00	2.33
96.00	2.05
95.45	2.00
95.00	1.96
90.00	1.64
80.00	1.28
68.27	1.00
50.00	0.674

Ejemplo:

Sea el promedio aritmético $\bar{X}$ una estadística con distribución normal. Las probabilidades o niveles de confianza de que $\mu_{\bar{X}}$ (o μ de la población) se encuentre localizada entre los límites $\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}$, $\bar{X} \pm 2\sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ son 68.26, 95.44 y 99.73%, respectivamente, obteniéndose dichos valores de la tabla de áreas bajo la curva normal. Lo anterior significa que el interv...

$\bar{X} \pm 3\,\sigma_{\bar{X}}$ contendrá a $\mu_{\bar{X}}$ en el 99.73 por ciento de las muestras de tamaño n, por lo que los intervalos de confianza de 68.26, 95.44 y 99.73 por ciento para estimar a μ son:

$$(\bar{X}-\sigma_{\bar{X}}, \bar{X}+\sigma_{\bar{X}}) \;,\; (\bar{X}-2\,\sigma_{\bar{X}}, \bar{X}+2\sigma_{\bar{X}}) \quad y \quad (\bar{X}-3\,\sigma_{\bar{X}}, \bar{X}+3\,\sigma_{\bar{X}})$$

lo cual se aprecia en la figura inmediata anterior:

ESTIMACIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA MEDIA.

Los límites de confianza para la media de una población con variable aleatoria X asociada están dados por

$$\bar{X} \pm z_C\ \sigma_{\bar{X}}$$

en donde z_c depende del nivel de confianza deseado. Si X tiene distribución normal, z_c puede obtenerse en forma directa de la tabla anterior. Por ejemplo, los límites de confianza de 95 y 99 por ciento para estimar la media, μ, de la población son: $\bar{X} \pm 1.96\ \sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 2.58\ \sigma_{\bar{X}}$, respectivamente. Al obtener estos límites hay que usar el valor calculado de X para la muestra correspondiente.

Entonces, los límites de confianza para la media de la población quedan dados por: $\bar{X} \pm z_c\ \sigma/\sqrt{n}$.

Ejemplo:

Las mediciones de los diámetros de una muestra aleatoria de 100 tubos de albañal mostraron una media de 32 cm y una desviación estándar de 2 cm. Obténganse los límites de confianza de : a. 95 por ciento

b. 97 por ciento

para el diámetro medio de todos los tubos.

Solución

a. De la tabla anterior los límites de confianza del 95 por ciento son:

$$\bar{X} \pm 1.96\, \sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 1.96\,(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.392 \text{ cm.}$$

o sea 31.608 y 32.392, en donde se ha empleado el valor de la desviación estándar de la muestra para estimar el de σ de la población, puesto que la muestra es suficientemente grande (mayor de 30 elementos). Esto significa que con una probabilidad de 95 por ciento, el valor de μ se encuentra entre 31.608 y 32.392 cms.

b. Si $Z = z_c$ es tal que el área bajo la curva normal a la derecha de z_c es el 1.5 por ciento del área total, entonces el área entre 0 y z_c es 0.5−0.015 = 0.485, por lo que de la tabla de áreas bajo la curva normal se obtiene $z_c = 2.17$. Por tanto, los límites de confianza del 97 por ciento son:

$$\bar{X} \pm 2.17\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 2.17(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.434 \text{ cm}$$

y el intervalo de confianza respectivo es (31.566 cm, 32.434 cm).

Ejemplo:

Una muestra aleatoria de 50 valores de compacidad relativa tiene un promedio aritmético de 72 puntos. con desviación estándar igual a 10. Calcular:

a. El intervalo de confianza del 95% para la media del total de calificaciones.

b. El tamaño de muestra necesario para que el error en la estimación de la media no exceda de 2 puntos, considerando el mismo nivel de confianza.

Solución:

a. Si se estima a σ de la población con la desviación estándar S_x de la muestra y se considera que la población es finita, los límites de confianza son, puesto que

$$\overline{X} = 72,\ Z_c = 1.96,\ S_X = 10 \text{ y } n = 50,$$

$$72 \pm 1.96\ (10/\sqrt{50})$$

$$72 \pm 1.96\ (1.4142)$$

$$72 \pm 2.77$$

y el intervalo de confianza respectivo es: (69.23, 74.77)

b. Puesto que el error en la estimación de la media es.

$$\text{Error en la estimación} = Z_c\ \sigma/\sqrt{n}$$

$$\text{en este caso se tendría} = Z_c\ \sigma/\sqrt{n} < 2$$

o sea, para un nivel de confianza de 95%,

$$1.96\ (10/\sqrt{n}) < 2$$

$$19.6/\sqrt{n} < 2$$

Elevando al cuadrado la desigualdad, queda

$$394.16/n < 4$$

$$\text{o sea } 96 < n$$

Por lo cual, se requieren al menos 96 elementos en la muestra para que el error en la estimación no exceda de 2 puntos, para

$$1-\alpha = 0.95.$$

7

[illegible]

7.1 INTRODUCCION

Es muy común que en la práctica se desee saber si existe o no *relación* entre dos o más variables. Frecuentemente una ley física relaciona variables en tal forma que una de ellas, la *dependiente*, pueda expresarse como una función de la otra o las otras, las *independientes*. Por ejemplo, la fórmula $y=kx$ relaciona la deformación x con la fuerza y aplicada a un resorte; la fórmula $y=\frac{1}{2}gx^2$ permite predecir la distancia y que un cuerpo recorre en un tiempo x al caer en el vacío; la presión de una masa de gas depende de su temperatura y volúmen; la superficie de un círculo depende de su radio, etc.

En estos tipos de problemas interesa determinar la expresión matemática, también llamada *modelo matemático*, que explique el comportamiento del fenómeno en estudio en términos de valores de algunos indicativos que inciden en el mismo. En matemáticas se dice que se desea definir la expresión analítica que relacione al conjunto de valores conocidos que influyen en el fenómeno (variable independiente) con el conjunto de valores asociados al mismo fenómeno y que también se conocen (variable dependiente). El *análisis de regresión* resuelve este problema.

Por lo que se refiere al *análisis de correlación*, puede decirse que es un estudio estadístico tendiente a especificar el grado de confianza con que el modelo representa al fenómeno físico. Con este estudio se obtienen bandas de confianza de los estimadores y se establecen variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas que permiten probar hipótesis estadísticas sobre sus valores.

En lo que sigue se considerará que los fenómenos que se estudiarán son producidos por un solo agente, es decir, que el comportamiento de los fenómenos será explicado por la presencia de una sola variable independiente.

7.2. PUNTOS MUESTRALES.

Para hacer el estudio estadístico de algún fenómeno, del agente que lo produce y de la relación funcional que existe entre ellos, deberá observarse y medirse la característica asociada al fenómeno en presencia de valores, asignados u observados por el investigador, de los agentes externos que producen el mismo fenómeno.

Así por ejemplo, si se trata de encontrar la relación que existe entre la deformación de un resorte y la fuerza que lo produce, deberá tomarse un resorte y medirse físicamente la fuerza requerida para producir la elongación que se quiera en el resorte. Los valores de la deformación, es decir, de la variable independiente, pueden ser elegidos arbitrariamente por el investigador o medidos directamente en presencia del experimento. En cual quier caso se obtendrá un conjunto de valores de la deformación y las correspondientes fuerzas productivas. El conjunto de parejas ordenadas (deformación, fuerza) se llaman los *puntos muestrales* del experimento.

En la figura 7.1 se presenta un diagrama del experimento considerado y en la tabla 7.1 se tienen los puntos muestrales obtenidos, en donde los valores de la variable independiente x, representativos de las deformaciones del resorte, expresadas en centímetros, fueron fijados arbitrariamente, y los correspondientes de la variable dependiente *y* son las fuerzas medidas en kilográmos.

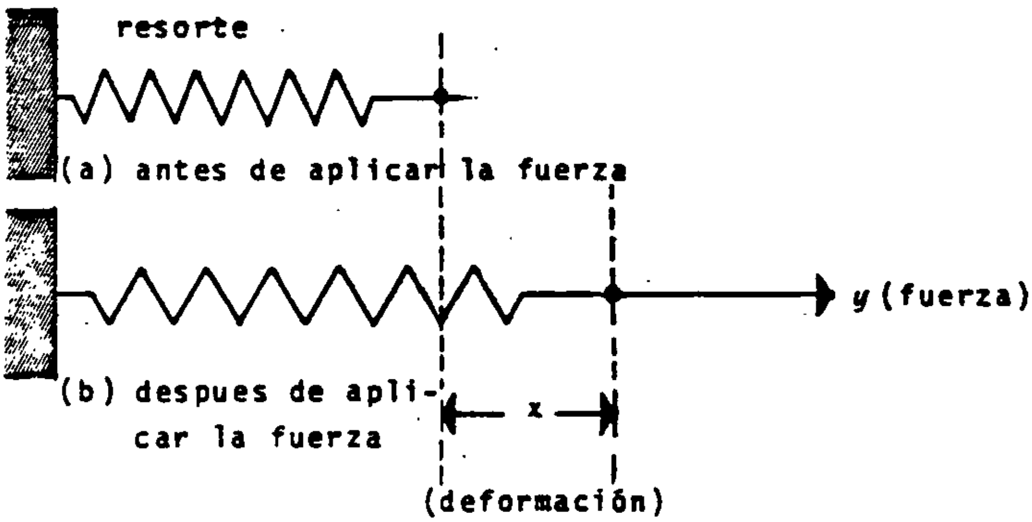


Figura 7.1 Diagrama de un resorte deformado debido a la aplicación de una fuerza.

Deformación (cm) x	Fuerza (kg) *y*
1	9.00
1	11.00
1	10.00
2	22.00
2	17.00
2	18.75
3	30.00
3	32.50
3	25.00
4	37.50
4	42.50
4	45.00

Tabla 7.1 Valores observados al deformar un resorte

Debe hacerse notar que los valores anotados en la tabla 7.1 no son extrictamente correctos. Todos ellos tienen *errores inherentes* al procedimiento de medición utilizado. En el análisis estadístico que se haga sobre ellos deberá tenerse en cuenta esto, de manera que la relación que se busca entre deformación y fuerza muestre, en lo posible, solo dicha relación y no los errores incurridos al hacer la medición.

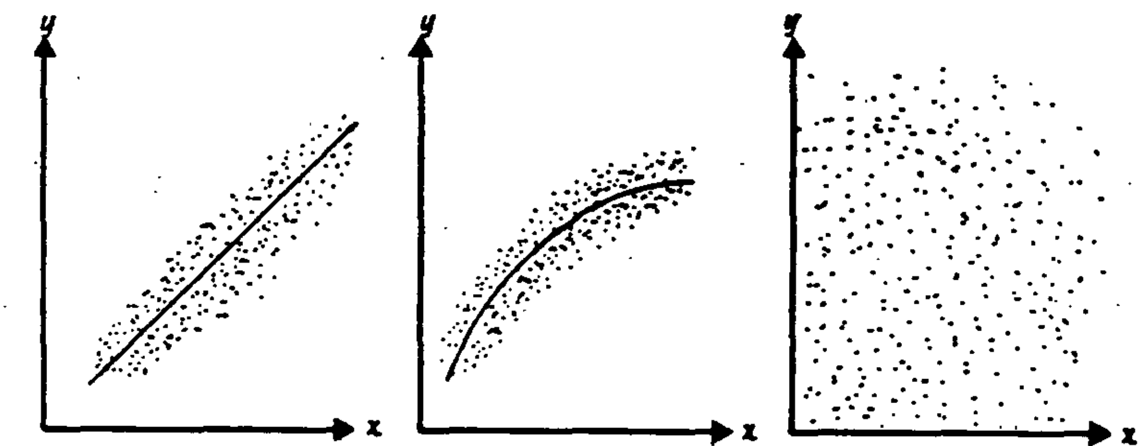
Finalmente, debe decirse que, dependiendo de la forma enque se obtengan los valores muestrales de la variable independiente, se pueden definir dos tipos de problemas. El problema de regresión es del *Tipo I* si los efectos en la variable dependiente y se miden para ciertos valores del factor x escogidos previamente por el experimentador. El problema es de *Tipo II* cuando los valores de x y y son escogidos al azar en la forma en que ellos se presentan. Aunque existen algunas diferencias para analizar los dos tipos de problemas, en este trabajo no se hace diferencia entre ellos.

Los datos de la tabla 7.1 corresponden a un problema del tipo I.

7.3. [redacted]

Una incognita importante que debe despejarse en el análisis de regresión es la *forma general* de la expresión matemática que se piensa puede explicar el comportamiento del fenómeno en base a los indicativos seleccionados; la forma puede deducirse del conocimiento del propio fenómeno, o por consideraciones gráficas al representar en una gráfica el conjunto de puntos muestrales.- Por ejemplo, la formula $y=kx$ que se mencionó en el primer inciso, proviene del conocimiento o *hipótesis* de que la deformación en el resorte es directamente proporcional a la fuerza que lo produce.

Si no se tiene un conocimiento sólido del fenómeno en estudio que permita conocer a priori la forma de la expresión matemática buscada, un procedimiento gráfico puede resolver el problema. En efecto, dibujando los valores observados de la variable - independiente x con sus correspondientes valores observados de - la variable dependiente y en un sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene un conjunto de puntos conocidos como *diagrama de dispersión*. Si hay una relación definida entre las variables asociadas, se apreciará en el diagrama una tendencia o camino - trazado a través de la superficie del diagrama de dispersión, como se muestra en las figuras 7.2 (a) y 7.2(b). Por el contrario, si no existe tal relación definida, se observará una dispersión caótica de los puntos en el plano coordenados, como se muestra - en la figura 7.2(c).



(a) Relación lineal (b) Relación no lineal (c) No hay relación

Figura 7.2. Diagrama de Dispersión

En caso de que el diagrama de dispersión muestra una tendencia de los puntos a aproximarse a una linea recta, como en el caso (a) de la figura 7.2, se dice que existe una *relación lineal* entre las variables. En el caso (b) de la figura 7.2, aunque se aprecia la existencia de una relación entre las variables, esta no es lineal y así se llama, *relación no lineal*.

En la figura 7.3 aparece el diagrama de dispersión de los - puntos muestrales de la tabla 7.1. En ella se aprecia la tendencia de los puntos a aproximarse o *ajustarse* a una linea recta.

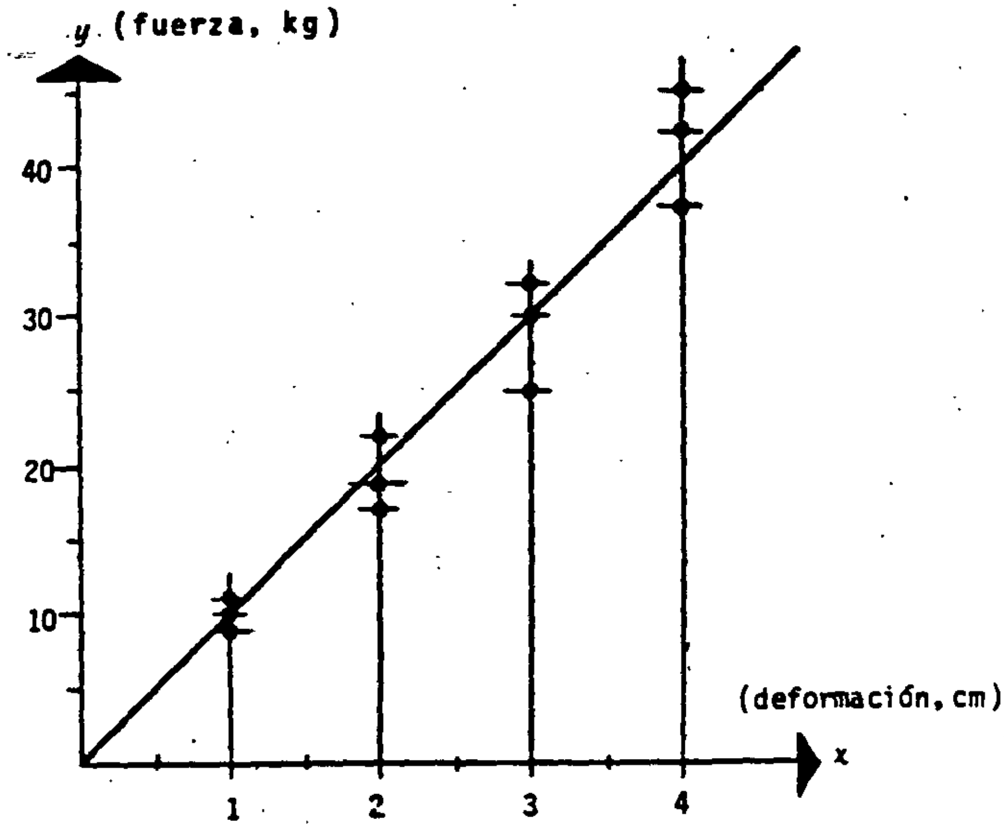


Figura 7.3. Diagrama de dispersión del problema del resorte.

7.4. CURVA DE REGRESION

La *curva de regresión* es aquella a la cual tienden a aproximarse los puntos del diagrama de dispersión. En particular, la curva de regresión es una *recta de regresión* cuando la relación funcional entre las dos variables es lineal. La ecuación de la curva de regresión se llama *ecuación de regresión.*

En el análisis de regresión es importante indicar explícitamente cual es la variable independiente y cual la dependiente, expresando que la curva de regresión o su ecuación de regresión es de "y *sobre* x" cuando sirva para predecir valores de la variable dependiente y dados los valores de la variable independiente x. La interpretación de la función inversa no es necesariamente útil, pudiendo no servir la ecuación de regresión para expresar los valores de x en terminos de y. Un ejemplo puede aclarar lo anterior:

De registros históricos de una ciudad se obtiene el número de carros de bomberos que se tienen en un año (variable dependiente) y el de incendios que han ocurrido en el mismo plazo (variable independiente); un modelo matemático puede expresar, entonces, que se requieren tantos carros de bomberos para atacar tantos incendios anuales en la ciudad y hasta aquí no hay ningún problema. Si se determina la función inversa de la obtenida, se tendrá un modelo que permite predecir el número de incendios que van a ocurrir en la ciudad cuando exista cierto número determinado de carros de bombero, lo cual, a todas luces, no tiene ningún significado.

En el caso del problema del resorte que se ha venido analizando, la curva de regresión es una recta y aquí sí cabe la interpretación de y *sobre* x y de x *sobre* y.

Para obtener la ecuación de regresión de un fenómeno en estudio, después de haber determinado la forma general de ésta del digrama de dispersión, considerando que la curva de regresión tenga la curvatura adecuada para eliminar los errores inherentes al procedimiento de medición de valores y contenga la información relevante al fenómeno mismo, deben determinarse los valores de los parámetros desconocidos que afectan a los valores de los indicadores que inciden en el problema.

En el caso de la regresión lineal, que será el único que aquí se estudie, se tiene una ecuación de regresión de la forma

$$y = a_0 + a_1 x \tag{7.1}$$

con dos parámetros por determinarse, que son la ordenada a_0 al origen de la recta y su pendiente a_1. Existen diferentes métodos para determinar estos parámetros; el que aquí se estudiará es el de los *mínimos cuadrados*.

7.5. METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Considérese un cierto experimento del que se han obtenido los puntos muestrales de la tabla 7.2 y graficados en el diagrama de dispersión de la figura 7.4.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
...	...
...	...
x_n	y_n

Tabla 7.2 Puntos Muestrales

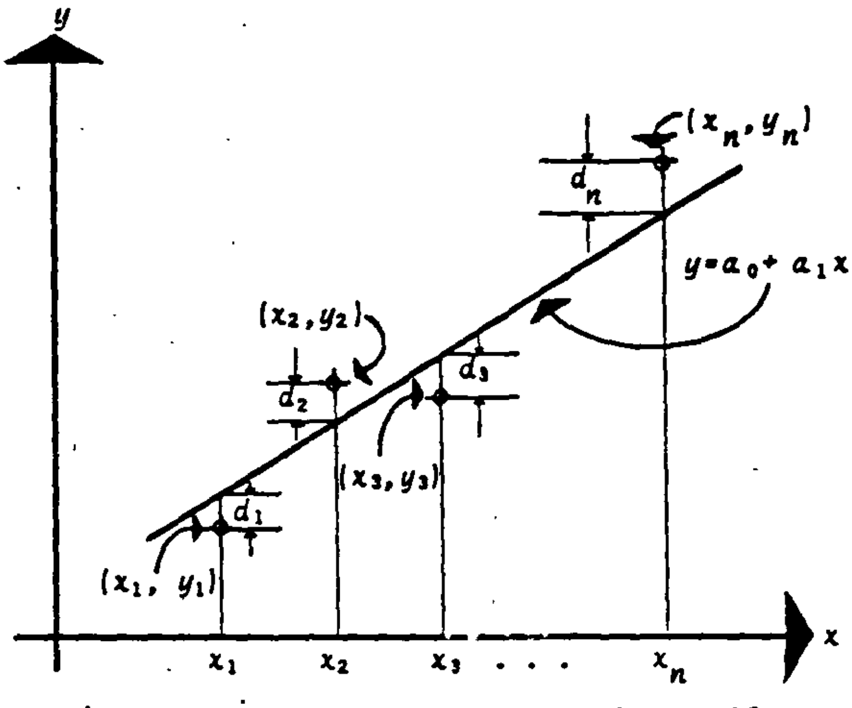


Figura 7.4 Residuos del diagrama de dispersión

Se llama [redacted] a la diferencia de ordenadas de un punto muestral y de la recta de regresión correspondientes a una misma abscisa. Así, el residuo d_1 entre el punto muestral (x_1, y_1) y la recta de regresión de ecuación $y = a_0 + a_1 x$ vale

$$d_1 = y_1 - y_1' \qquad (7.2)$$

en donde $$y_1' = a_0 + a_1 x_1' \qquad (7.3)$$

en forma similar se obtienen los residuos $d_2, d_3, \ldots, d_n$ para los otros puntos muestrales. Una medida de la *bondad del ajuste* de la recta de regresión a los puntos muestrales esta dada por la cantidad $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2$, en donde los residuos se han elevado al cuadrado para eliminar la posibilidad de que su suma valga cero por ser cada uno de ellos positivo, negativo o nulo.

El método de los mínimos cuadrados establece que de todas las rectas de regresión que se pueden ajustar al conjunto de puntos muestrales dados, la *mejor* es aquella que tenga la propiedad de que la suma de los cuadrados de sus residuos sea mínima:

$$\boxed{\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2}$$

Aplicando este criterio a los puntos muestrales de la tabla 7.2, se tiene:

$$\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2 \tag{7.4}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que en esta expresión las únicas variables son los parámetros a_0 y a_1, deberán encontrarse los valores de los mismos, de manera que hagan mínima la suma. Para este objeto se aplicará la condición necesaria conocida para que una función de dos variables independientes tenga un punto extremo, es decir, se igualará con cero las primeras derivadas parciales de la función con respecto a cada uno de sus variables. Derivando con respecto a a_0 la suma de los residuos al cuadrado, se obtiene:

$$\frac{\delta}{\delta a_0} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{\delta}{\delta a_0} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta a_0} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2 \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right] (-1)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

$$= -2 \left[\sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 n - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \right] = 0$$

luego
$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (7.5)$$

Derivando con respecto a a_1, se obtiene:

$$\frac{\delta}{\delta a_1} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{\delta}{\delta a_1} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta a_1} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2 \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right] (-x_i)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2)$$

$$= -2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right] = 0$$

por lo tanto
$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (7.6)$$

Agrupando las ecuaciones (7.5) y (7.6), se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas cuya solución proporciona, tal vez, un punto extremo para la suma de los residuos al cuadrado. Este sistema, que se reescribe a continuación eliminando los índices de las variables independiente y dependiente y los límites de las sumatorias por comodidad, recibe el nombre de sistema de *ecuaciones normales*.

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \Sigma x = \Sigma y \\ a_0 \Sigma x + a_1 \Sigma x^2 = \Sigma xy \end{cases} \qquad (7.7)$$

Aplicando la condición suficiente para que el punto extremo proporcione un valor mínimo a la función objetivo considerada, se demuestra que efectivamente la solución del sistema de ecuaciones normales (7.7) define el mínimo de la suma de los residuos al cuadrado del método de los mínimos cuadrados. No se hace la demostración de esto último por no tener mayor importancia en la exposición de este tema, pero puede dejarse como tarea al lector interesado.

Resolviendo el sistema de ecuaciones normales (7.7), se obtienen los valores de los parámetros a_0 y a_1 de la recta de regresión (7.1) que mejor se ajusta al conjunto de puntos muestrales de la tabla 7.2 de acuerdo con el criterio de los mínimos cuadrados. Estos son:

$$a_0 = \frac{(\Sigma y)\ (\Sigma x^2) - (\Sigma x)\ (\Sigma xy)}{n\ \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad (7.8)$$

ordenada al origen

$$a_1 = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x)\ (\Sigma y)}{n\ \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad (7.9)$$

pendiente

Estos valores, sustituidos en la recta de regresión (7.1), proporciona la ecuación de la recta de regresión de y sobre x. Por medio de ella se pueden estimar o predecir valores de y dados valores de x. Si el problema consiste en estimar valores de x para valores dados de y, deberá usarse una curva de regresión de x sobre y como antes ya se mencionó, lo cual significa solo intercambiar las variables en el diagrama de dispersión de manera que x sea la variable dependiente y y la independiente, o intercambiar x y y en las ecuaciones (7.8) y (7.9).

Ejemplo 7.1 Obtener las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y para el problema del resorte.

a) Para la regresión de y sobre x se tiene:

x	y	x^2	xy	y^2
1	9.00	1	9.00	81.0000
1	11.00	1	11.00	121.0000
1	10.00	1	10.00	100.0000
2	22.00	4	44.00	484.0000
2	17.00	4	34.00	289.0000
2	18.75	4	37.50	351.5625
3	30.00	9	90.00	900.0000
3	32.50	9	97.50	1056.2500
3	25.00	9	75.00	625.0000
4	37.50	16	150.00	1406.2500
4	42.50	16	170.00	1806.2500
4	45.00	16	180.00	2025.0000
30	300.25	90	908.00	9245.3125

$$a_0 = \frac{(300.25)(90) - (30)(908.00)}{(12)(90) - (30)^2} = \frac{-217.50}{180} = -1.21$$

$$a_1 = \frac{(12)(908.00) - (30)(300.25)}{(12)(90) - (30)^2} = \frac{1888.50}{180} = 10.49$$

luego la recta de regresion de y sobre x es:

$$y = -1.21 + 10.49x$$

b) Para obtener la ecuación de la regresión de x sobre y se deben intercambia x y y en las ecuaciones (7.8) y (7.9) obteniendose:

$$a_0 = \frac{(\Sigma x)(\Sigma y^2) - (\Sigma y)(\Sigma yx)}{n\ \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$a_1 = \frac{n\ \Sigma yx - (\Sigma y)(\Sigma x)}{n\ \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

Sustituyendo en ellas los valores de las sumas ya calculadas, se tiene:

$$a_0 = \frac{(30)\,(9245.3125) - (300.25)\,(908.00)}{(12)\,(9245.3125) - (300.25)^2}$$

$$= \frac{4732.3750}{20793.6875} = 0.23$$

$$a_1 = \frac{(12)\,(908.00) - (300.25)\,(30)}{(12)\,(9245.3125) - (300.25)^2} =$$

$$= \frac{1888.50}{20793.6875} = 0.09$$

y la recta de regresión de x sobre y es:

$$x = 0.23 + 0.09\,y$$

Despejando y de esta ecuación se obtiene $y = -2.51 + 11.01x$, lo que muestra que las ecuaciones de regresión de y sobre x y de x sobre y no son iguales.

En la figura 7.5 se muestran las dos rectas de regresión. Observese que se intersectan en el punto de coordenadas ($\bar{x} = \frac{30}{12} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{300.25}{12} = 25.02$). La demostración de ésto se le pide al lector en uno de los ejercicios de fin de capítulo.

Una de las aplicaciones más interesantes que se tienen de las rectas, o en general de las curvas de regresión, es cuando la variable independiente x representa al tiempo y los puntos muestrales contienen información sobre los valores de la variable dependiente en varios instantes del tiempo. En este caso la línea o curva de y sobre x se llama *tendencia* y se utiliza con fines de *estimación, predicción o pronóstico*. Los datos muestrales ordenados según la variable tiempo se llaman *series cronológicas o de tiempo*.

La notación sujeto

El ejercicio 7.1 de fin de capítulo se refiere a una serie cronológica.

7.6. ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMACION

En el inciso anterior se estableció que la suma de los resi

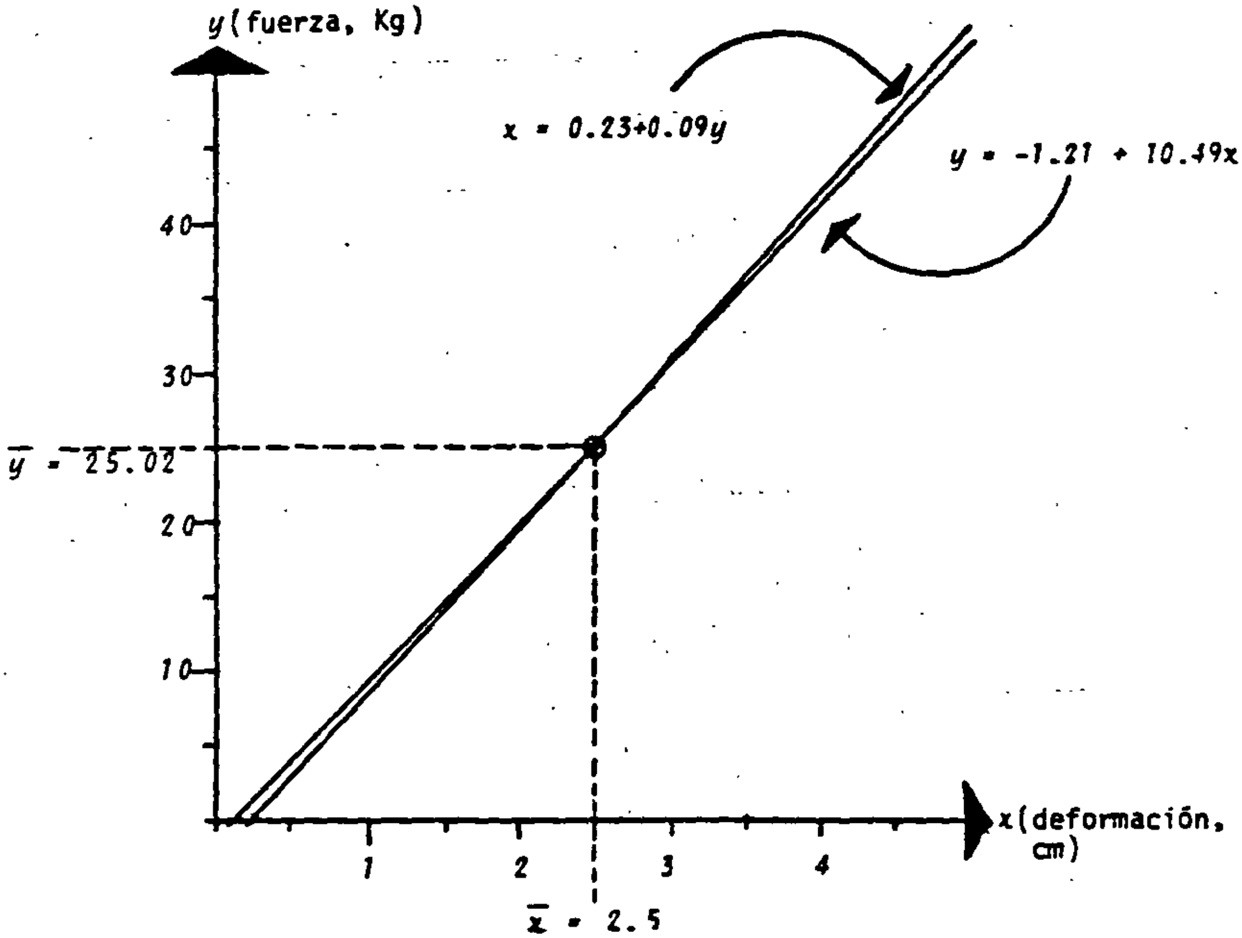


Figura 7.5 Rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y para el problema del resorte.

duos al cuadrado, que se usa en el método de los mínimos cuadrados, es una medida de la bondad del ajuste de la recta de regresión a los puntos muestrales. La raíz cuadrada del promedio de esta suma, llamada el *error estándar de la estimación*, también mide la dispersión de los datos con respecto a la recta de regresión. Representando al error estándar de la estimación con $S_{y|x}$ y con y'_i al valor estimado de y por medio de la ecuación de regresión (7.1) de y sobre x para un valor dado de x_i, se tendrá que:

$$S_{y|x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i)^2}{n}} \qquad (7.10)$$

no es aplicable
usar 7.14

en donde $$y'_i = a_0 + a_1 x_i \qquad (7.11)$$

a_0 y a_1 están definidos en (7.8) y (7.9), respectivamente.

Recordando que la desviación estándar de y, definida por:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}} \qquad (7.12)$$

mide la dispersión de los valores observados y_i con respecto a su valor medio y que, si esos valores están normalmente distribuidos, entonces en el 95% de los casos, por ejemplo, los valores estarán contenidos en el intervalo de $\bar{y}$ - $1.96\ S_y$ a $\bar{y}+1.96\ S_y$, en donde se toma a S_y como un estimador de σ_y. Esto se muestra en la figura 7.6. se note los ing tos

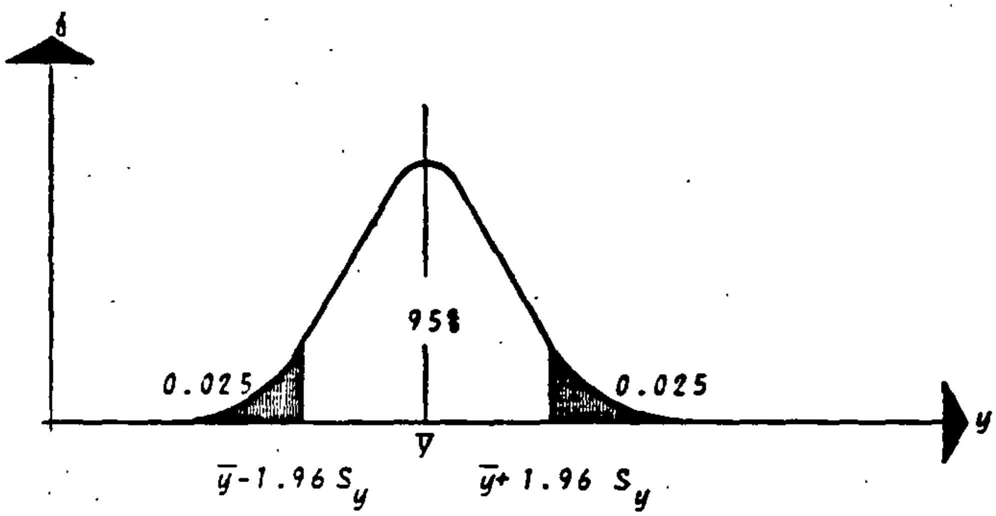


Figura 7.6 Intervalo de confianza de los valores y_i

Comparando las expresiones (7.10) y (7.12), y aceptando que los valores observados de la variable dependiente pa a un mismo valor de x_i estan normalmente distribuidos con media y'_i (la ordenada de la curva de regresión para el valor de x_i dado), puede decirse, en forma semejante a lo establecido en la figura 7.6, que en el 95% de los casos, para ese valor dado de x_i, los valores pronosticados y^p_i de la variable dependiente deben estar en el intervalo.

$$y'_i - 1.96\ S_{y|x} \leq y^p_i \leq y'_i + 1.96\ S_{y|x} \qquad (7.13)$$

Este resultado se muestra gráficamente en la figura 7.7

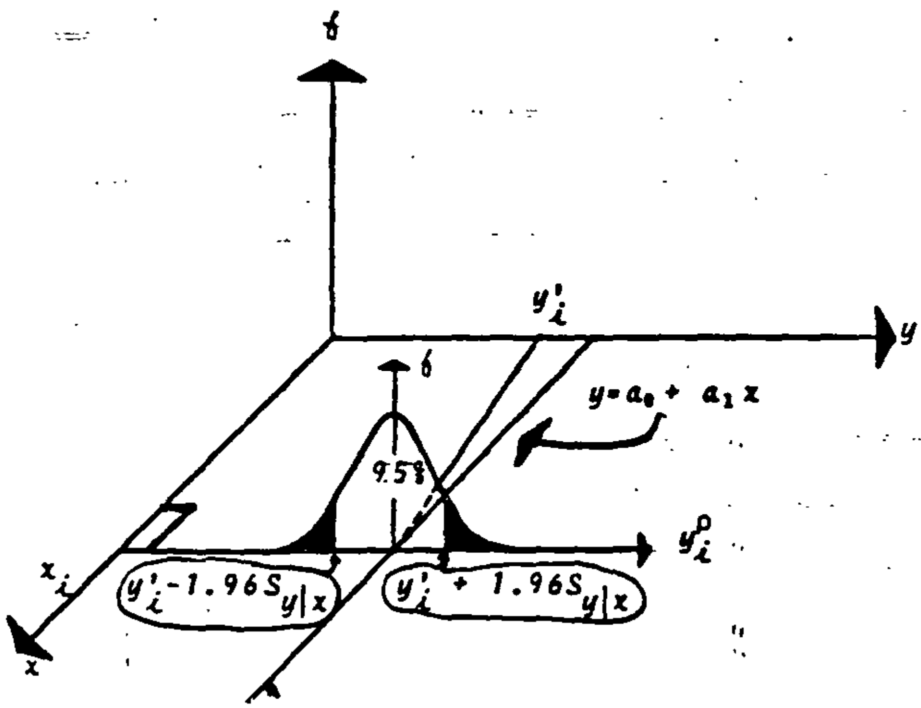


Figura 7.7 Intervalo de confianza para los valores pronosticados de y con la ecuación de regresión

Lo anterior es verdadero en caso de que n, el número de puntos muestrales, sea suficientemente grande. Si n no es grande, no puede aceptarse que los valores de la variable dependiente correspondientes a una x_i esten normalmente distribuidos, ni que el error estándar de la estimación de la muestra sea un buen estimador del de la población. Más adelante se establecerán expresiones que permitan determinar intervalos de confianza para los valores predichos a través de la ecuación de regresión obtenida de muestras pequeñas.

La formula (7.10) no es fácil de aplicar para calcular el error estándar de la estimación, ya que en ella se requiere obtener previamente los valores pronosticados y'_i para cada x_i de los puntos muestrales. A continuación se establecerá otra forma de la misma expresión de más fácil aplicación. De (7.10) se tiene:

$$n \; S^2_{y|x} = \Sigma (y - y')^2$$

En donde por comodidad se han vuelto a eliminar los índices y los límites de la sumatoria. De acurdo con (7.1), $y' = a_0 + a_1 x$, luego:

$$n\, S_{y\,x}^2 = \Sigma\,(y-a_0-a_1x)^2$$

$$= \Sigma\,(y-a_0-a_1x)\;(y-a_0-a_1x)$$

$$= \Sigma\left[y\;(y-a_0-a_1x) - a_0\cdot(y-a_0-a_1x) - a_1x\;(y-a_0-a_1x)\right]$$

$$= \Sigma\,(y^2-a_0y-a_1xy)-a_0\,\Sigma\,(y-a_0-a_1x)-a_1\,\Sigma\,(xy-a_0x-a_1x^2)$$

$$= \Sigma\;y^2-a_0\;\Sigma y-a_1\Sigma xy- a_0\left[\Sigma y - a_0 n - a_1\,\Sigma\,x\right] -$$

$$- a_1\left[\Sigma xy - a_0\,\Sigma\,x - a_1\,\Sigma\,x^2\right]$$

El contenido de los dos paréntesis rectangulares valen cero por (7.7), luego:

$$S_{y|x} = \sqrt{\frac{\Sigma\,y^2 - a_0\,\Sigma\,y - a_1\,\Sigma\,xy}{n}} \qquad (7.14)$$

Ejemplo 7.2 Calcular el error estándar de la estimación de y sobre x en el problema del resorte. ¿ De qué tamaño cabe esperar se necesite la fuerza aplicada al resorte de manera que éste se deforme 2.5 cm?

$S_{fuerza\,|\,def=2.5} = S_{x|y}$

De la tabla del inciso (a) del ejemplo 7.1 se tiene que:

$n=12$, $\Sigma\,y^2 = 9245.3125$, $\Sigma\,y = 300.25$ y $\Sigma\,xy = 908.00$

Además, ahí mismo se tiene que:

$a_0 = -1.21$ y $a_1 = 10.49$

Luego

$$S_{y|x} = \sqrt{\frac{9245.3125 - (-1.21)(300.25)-10.49(908.00)}{12}}$$

$$= 2.64$$

Aceptando que los valores de las fuerzas para una deformación dada tenga distribución normal y $S_{y|x}$ sea un buen estimador, entonces los límites de confianza al 95% de $y(2.5)$ son:

$$y'_i \pm 1.96\ S_{y|x} = a_0 + a_1\ x_i \pm 1.96\ S_{y|x}$$

$$= -1.21 + 10.49(2.5) \pm 1.96(2.64)$$

$$= 25.02 \pm 5.17$$

luego cabe esperar que en el 95% de los casos la fuerza requerida para producir una elogación de 2.5 cm vaya de 19.84 a. 30.19 kg.

7.7. COEFICIENTE DE CORRELACION.

Hasta este momento se ha aceptado al error estándar de la estimación como un buen indicador de que tan bien se ajusta una recta de regresión al conjunto de puntos muestrales que la producen. Sin embargo, este error estándar de la estimación tiene unidades, lo que dificulta decir en un momento dado si un error estándar es o no pequeño. El error estándar de la estimación en el problema del resorte de 2.64 kg puede parecer enorme al compararlo con el obtenido de 0.00098 m al correlacionar el perímetro de un círculo con su radio o insignificante al estudiar la tendencia histórica del consumo de energía eléctrica en el país que es de $2x10^6$ kilowatt-hora.

A fin de poder hacer comparaciones entre los errores estándar de la estimación de diferentes problemas, convendría que estos errores fueran adimensionales y variaran dentro de un rango único. Para obtener este indicador, se partirá de la identidad siguiente, en donde se vuelven a eliminar los índices como se ha venido haciendo.

$$y - \bar{y} = (\ y' - \bar{y}\ ) + (\ y - y'\ )$$

Se recuerda que $\bar{y}$ es la media de los valores y_i y y' esta definida en (7.11). Elevando ambos miembros al cuadrado, se tiene:

$$(y - \bar{y})^2 = (y' - \bar{y})^2 + 2(y' - \bar{y})(y - y') + (y - y')^2 \qquad (7.15)$$

pero por (7.11)

$$(y' - \bar{y})(y - y') = (a_0 + a_1 x - \bar{y})(y - a_0 - a_1 x)$$

$$= a_0 (y - a_0 - a_1 x) + a_1 (xy - a_0 x - a_1 x^2) -$$

$$- \bar{y} (y - a_0 - a_1 x)$$

Aplicando ésta expresión a todos los puntos muestrales y sumando miembro a miembro las obtenidas, se obtiene:

$$\Sigma (y' - \bar{y})(y - y') = a_0 \Sigma (y - a_0 - a_1 x) + a_1 \Sigma (xy - a_0 x - a_1 x^2) -$$

$$\bar{y} \Sigma (y - a_0 - a_1 x)$$

en donde todas las sumas del segundo miembro valen cero de acuerdo con (7.5) y (7.6). Teniendo en cuenta éste resultado y haciendo lo propio con (7.15), se obtiene:

$$\Sigma (y - \bar{y})^2 = \Sigma (y' - \bar{y})^2 + \Sigma (y - y')^2 \qquad (7.16)$$

El primer miembro de esta expresión es la desviación total de la variable dependiente con respecto a su media. La primera suma del segundo miembro se llama la *desviación explicada* de los puntos muestrales por la recta de regresión y la segunda la *desviación inexplicada* por la misma recta de regresión. En la figura 7.8 se muestran gráficamente estos conceptos.

Se llama ~~coeficiente de determinación~~ y se representa con r^2, al cociente de la desviación explicada entre la total. De acuerdo con esta definición, y teniendo en cuenta (7.16), se obtiene:

$$r^2 = \frac{\Sigma (y' - \bar{y})^2}{\Sigma (y - \bar{y})^2} \qquad (7.17)$$

$\Sigma (y' - \bar{y})^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2 - \Sigma (y - y')^2 \Rightarrow$

$$r^2 = \frac{\Sigma (y-\bar{y})^2 - \Sigma (y-y')^2}{\Sigma (y - \bar{y})^2}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma (y-y')^2}{\Sigma (y-\bar{y})^2}$$

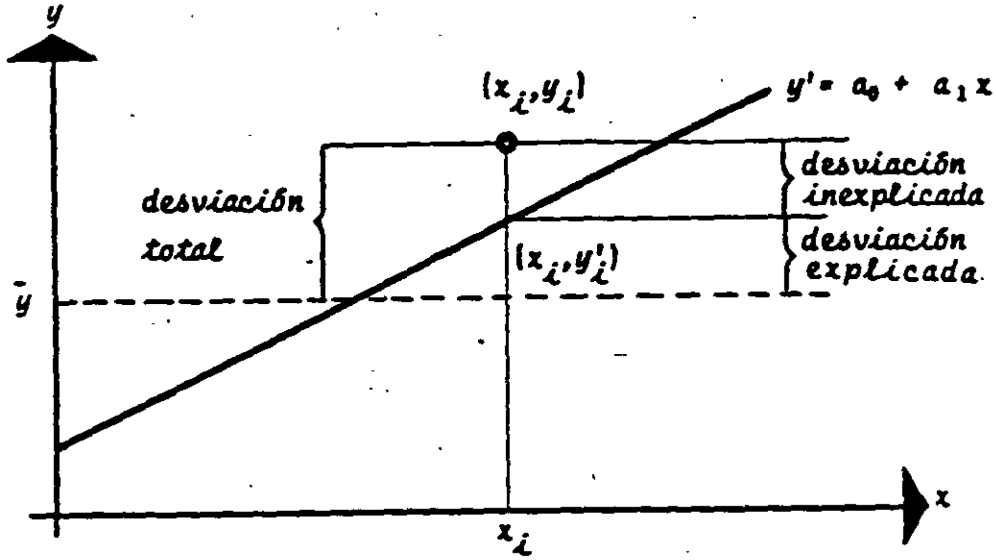


Figura 7.8 Desviaciones explicada e inexplicada de la recta de regresión.

Dividiendo entre n cada una de las sumas, se obtiene por (7.10) y (7.12) que:

$$r^2 = 1 - \frac{S^2_{y|x}}{S^2_y} \qquad (7.17)$$

De (7.17) se deduce que si $y' = y$ para todo valor de x, el coeficiente de determinación valdrá uno y la recta de regresión explicara todas las variaciones de la variable dependiente; en este caso se dice que el ajuste dado por la recta de regresión es perfecto. Por el contrario, también se obtiene de (7.17) que el valor más pequeño del coeficiente de determinación es cero, y ocurre cuando y' no explica ninguna variación de la variable dependiente y; en este otro caso se dice que el ajuste es imperfecto y corresponde a una recta de regresión horizontal de ecuación $y = \bar{y}$.

Aunque matematicamente pueda afirmarse que cualquier valor del coeficiente de determinación comprendido en el intervalo de cero a uno representa la fracción de valores de y explicados por la ecuación de regresión, debe tenerse en cuenta que precisamente éste resultado es puramente matemático. Esto significa que existen problemas en donde los valores de las variables dan valores grandes para r^2, sin que el significado de ellas muestre la existencia de una correlación entre las mismas. Un ejemplo de esto se muestra en el ejercicio 7.4 de final de capítulo.

La nueva medida asocia el valor uno a un ajuste perfecto y valor cero a un ajuste del todo imperfecto. La raíz cuadrada de esta medida, que guarda las mismas características, recibe el nombre de [redacted] y se utiliza como medida comparativa entre ajustes. El coeficiente de correlación de la muestra se representa con r y se determinará su valor con:

$$r = \sqrt{1 - \frac{S^2_{y|x}}{S^2_y}} \qquad (7.19)$$

El valor aritmético de la raíz varia de 0 a 1 con el significado que ya se ha establecido. Aceptando el doble signo de la raíz, puede decirse que el coeficiente de correlación varia de -1 a 0 y de 0 a 1. Los coeficientes de correlación negativos se utilizan para *correlaciones negativas*, es decir, para aquellas con rectas de regresión de pendiente negativa en las que se establece una relación inversa entre x y y, ya que un incremento positivo de x le corresponde una disminución en el valor de y. Los coeficientes de correlación positivos, por el contrario, se usan en *correlaciones positivas* definidas por rectas de regresión de pendiente positiva, en las que un incremento positivo de x corresponde un incremento del mismo signo en y.

A continuación se establece otra forma de la expresión (7.19) que proporciona directamente el signo del coeficiente de correlación. En efecto, de (7.12) se tiene:

$$S^2_y = \frac{1}{n} \Sigma (y - \bar{y})^2$$

desarrollando el cuadrado y separando las sumas de los términos:

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \Sigma\,(y^2 - 2y\,\bar{y} + \bar{y}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\Sigma\, y^2 - 2\bar{y}\,\Sigma y + n\,\bar{y}^2\right]$$

pero $$\bar{y} = \frac{1}{n}\,\Sigma\, y$$

luego $$S_y^2 = \frac{1}{n}\left[\Sigma\, y^2 - \frac{2}{n}\,(\Sigma y)^2 + \frac{1}{n}\,(\Sigma y)^2\right]$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\left[\Sigma\, y^2 - \frac{1}{n}\,(\Sigma y)^2\right] \qquad (7.20)$$

Llevando esta expresión y la (7.14) a (7.19), se obtiene:

$$r = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{n}\left[\Sigma\, y^2 - a_0\Sigma y - a_1\Sigma xy\right]}{\frac{1}{n}\left[\Sigma\, y^2 - \frac{1}{n}\,(\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - \frac{1}{n}\,(\Sigma y)^2 - \Sigma\, y^2 + a_0\,\Sigma\, y + a_1\,\Sigma\, xy}{\Sigma\, y^2 - \frac{1}{n}\,(\Sigma\, y)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_0\,\Sigma\, y + a_1\,\Sigma\, xy - \frac{1}{n}\,(\Sigma y)^2}{\frac{1}{n}\left[n\,\Sigma\, y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

Sustituyendo a_0 y a_1 por sus valores dados en (7.8) y (7.9)

$$r = \sqrt{\frac{\left[(\Sigma\, y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)\right]\Sigma y + \left[n\,\Sigma\, xy - (\Sigma x)(\Sigma y)\right]\Sigma xy - \frac{1}{n}\left[n\,\Sigma\, x^2 - (\Sigma x)^2\right](\Sigma y)^2}{\left[n\,\Sigma\, x^2 - (\Sigma x)^2\right]\frac{1}{n}\left[n\,\Sigma\, y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$r = \sqrt{\frac{n\,(\Sigma y)^2(\Sigma x^2) - n(\Sigma x)(\Sigma xy)(\Sigma y) + n^2(\Sigma xy)^2 - n(\Sigma x)(\Sigma y)(\Sigma xy) - n(\Sigma x^2)(\Sigma y)^2 + (\Sigma x)^2(\Sigma y)^2}{\left[n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2\,(\Sigma xy)^2 - 2n(\Sigma xy)\,(\Sigma x)\,(\Sigma y) + (\Sigma x)^2\,(\Sigma y)^2}{\left[n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left[n\,\Sigma xy - (\Sigma x)\,(\Sigma y)\right]^2}{\left[n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$\therefore\ r = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x)\,(\Sigma y)}{\sqrt{\left[n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right]\left[n\,\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]}} \qquad (7.21)$$

(+) directamente proporcionales
(−) inversamente proporcionales

x y y deben ser normalmente distribuidas.

Ejemplo 7.3 Calcular el coeficiente de correlación del problema del resorte.

De la tabla del inciso (a) del ejemplo 7.1 se tiene que
$n=12,\ \Sigma x=30,\ \Sigma y=300.25,\ \Sigma x^2=90,\ \Sigma y^2= 9245.3125,\ \Sigma xy=908.00$

luego

$$r = \frac{(12)(908.00) - (30)(300.25)}{\sqrt{\left[(12)(90) - (30)^2\right]\left[(12)(9245.3125) - (300.25)^2\right]}}$$

$$r = 0.976$$

El valor relativamente alto obtenido para el coeficiente de correlación es indicativo de que las dos variables consideradas estan *linealmente correlacionadas*. Sin embargo, este resultado se esta obteniendo de valores observados en un muestreo de las mismas variables que definen el experimento en estudio. Luego cabe preguntarse si el valor alto del coeficiente de correlación obtenido del muestreo es solo debido al azar; si en realidad el coeficiente de correlación, no de la muestra, sino de la población completa, es significativamente diferente de cero, etc. Estas y otras preguntas se contestaran en la siguiente seccion al establecer, sin demostración, la distribución de probabilidad de ciertas variables aleatorias.

7.8. CONFIABILIDAD DE LAS MEDIDAS DE CORRELACION

Supóngase que ρ es el coeficiente de correlación de una población de parejas de variables aleatorias (x,y), el cual fué estimado por el coeficiente de correlación r obtenido de una muestra de dicha población. Pruebas de significancia o de hipótesis sobre valores de ρ requieren del conocimiento de la distribución de probabilidad del coeficiente de correlación r de las muestras. En las siguientes subsecciones se establecen las variables aleatorias con su distribución de probabilidad que resuelven tales problemas.

7.8.1. [illegible]ara probar la hipótesis de que el coeficiente de correlación de la población teórica es significativamente diferente de cero, se usa la variable

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (7.22)$$

que tiene distribución t de Student con $n-2$ grados de libertad.

7.8.2. [illegible]
Para probar la hipótesis estadística de que ρ adquiere algún valor particular ρ_0 diferente de cero, y para obtener intervalos de confianza de ρ, se usa la variable:

$$u = \frac{1}{2} \ Ln \ \frac{1+r}{1-r} \qquad (7.23)$$

en donde el logaritmo es natural. La variable aleatoria u tiene distribución normal de media

PRESENTACIÓN

La Secretaría de Comunicaciones y Transportes, para la elaboración de los programas de construcción de carreteras nuevas, de modernización y conservación de la red en operación, requiere conocer las características de movimientos de bienes y personas que utilizan el transporte por carretera, con objeto de conformar una red convenientemente estructurada para atender con eficiencia la demanda del transporte en el país.

Para este fin, la información que en el campo de la ingeniería de tránsito proporcionan los estudios de origen-destino y pesaje dinámico, resulta básica, pues permite conocer el deseo de movimiento de los usuarios, así como los datos relativos al motivo de viaje, tipo y toneladas de productos transportado y el peso de los vehículos utilizados, entre otros datos.

En este documento la Dirección General de Servicios Técnicos da a conocer, la síntesis de la información más sobresaliente de los estudios de origen-destino y peso, que efectuó en seis puntos de la red carretera del país en el año de 1996, mismos que se enlistan en el índice de este documento.

DIRECCIÓN GENERAL DE SERVICIOS TÉCNICOS

Dirección de Vialidad y Proyectos

Subdirección de Ingeniería de Tránsito

INTRODUCCIÓN

Los estudios de origen, destino y peso han sido diseñados para obtener información acerca del movimiento de bienes y personas, desde varias zonas de origen hacia otras de destino, a través de encuestas realizadas por medio de entrevista directa a todos los conductores que transitan por el lugar de estudio y medición dinámica del peso de los vehículos de carga, durante las 24 horas de los días de muestra.

La información obtenida de estos estudios, posibilita profundizar en el conocimiento real de la demanda del transporte, dado que permite analizar sus características que, relacionadas con otras circunstancias entre los medios rural y urbano, coadyuvan en la planeación de los sistemas de transporte y en particular en la localización, proyecto y programación de carreteras nuevas, así como en modernización y conservación de las ya existentes.

Estos estudios también se han orientado al conocimiento detallado de una serie de elementos que conforman el problema general de pesos y dimensiones de los vehículos que circulan por la red carretera con objeto de fundamentar por una parte, la normativa para el proyecto estructural de la infraestructura y por otro, establecer los límites legales sobre el peso y las dimensiones de los vehículos.

La entrevista directa a los conductores, se realizó aplicando la cédula de encuesta como la que se presenta al final de esta introducción , la medición del peso de los vehículos de carga, se hizo de manera directa por medio de pesadoras dinámicas y la medición física de las dimensiones mediante longímetros, los resultados se proporcionan en forma detallada para los cinco tipos de camiones más usuales, agrupando al resto en el rubro de "otros", como se muestra a continuación.

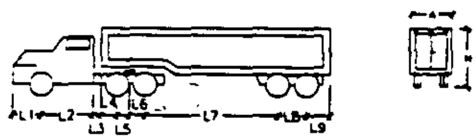
TIPO DE VEHÍCULO	DESCRIPCIÓN
A	Automóviles
U	Vehiculos Utilitarios
B	Autobuses
C2	Camión unitario de dos ejes
C3	Camión unitario de tres ejes
T3-S2	Tractor de tres ejes con semiremolque de dos ejes
T3-S3	Tractor de tres ejes con semiremolque de tres ejes
T3-S2-R4	Tractor de tres ejes con semiremolque de dos ejes y remolque de cuatro ejes
Otros	Otras combinaciones de camiones

Las dimensiones fueron obtenidas conforme a los siguientes esquemas:

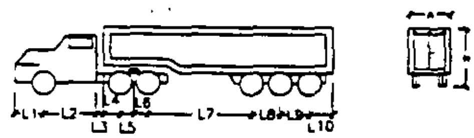
C2

C3

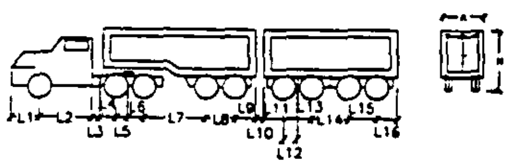
T3−S2



T3−S3



T3−S2−R4



La información sintetizada de los estudios de origen-destino y peso, incluye entre otros aspectos: la ubicación y periodo del estudio; el volumen de tránsito y su composición vehicular; el promedio de pasajeros y de tripulantes por vehículo; el motivo de viaje; las toneladas transportadas por tipo de producto; el peso bruto vehicular, y por eje y las principales rutas de origen y destino agrupadas de acuerdo a la importancia de su volumen de tránsito.

Para facilitar el uso y manejo de la información aquí contenida, se ha incluido en esta presentación un disquete con la información antes descrita. Para consultas de mayor detalle se tiene a disposición en medios magnéticos la base de datos con toda la información recopilada.

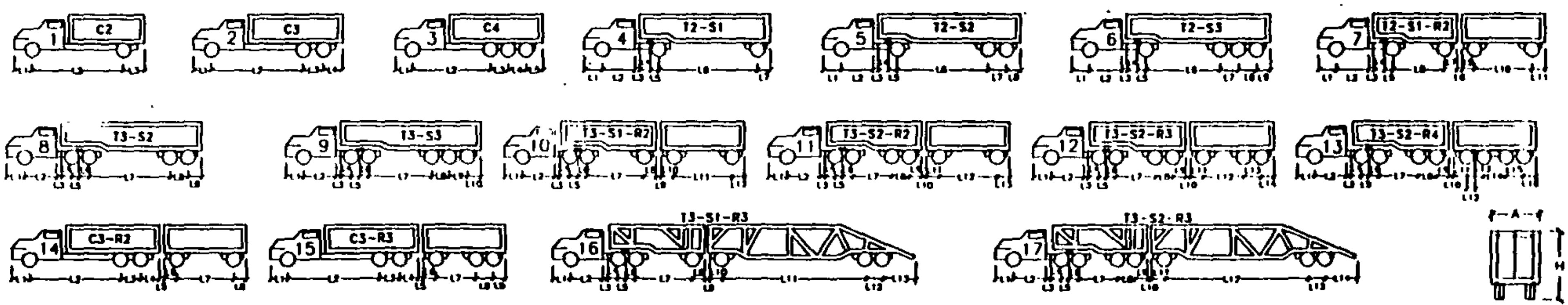
SEM	AÑO	MES	DIA	DS	HORA

DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS

DIRECCION DE VIALIDAD Y PROYECTOS

CARRETERA: ______________________ KM: __________ ESTACION: __________

			VARIABLES (M)																	
	T. VEH.	PLACA	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15	L16	A	H
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
	T. VEH.	PLACA	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15	L16	A	H
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				



DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS

DIRECCION DE VIALIDAD Y PROYECTOS

SUBDIRECCION DE INGENIERIA DE TRANSITO

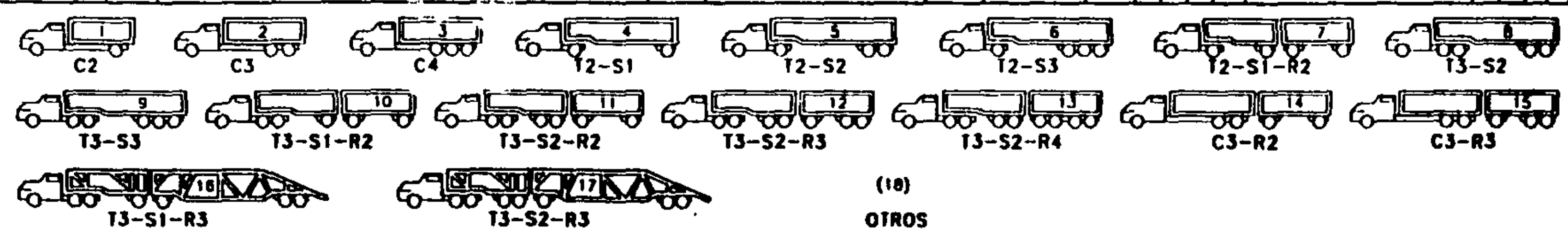
DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA

ESTUDIO DE ORIGEN Y DESTINO, PESOS Y DIMENSIONES

SEN	AÑO	MES	DIA	DS	HORA

CARRETERA:__________________ KM:____________ ESTACION:____________

	PLACA	TIPO	ORIGEN		DESTINO		CARGA					T P							
			POBLACION	EDO	POBLACION	EDO	POBLACION INTERMEDIA	EDO	MARCA	AÑO	COMBUSTIBLE		TIPO DE CARGA	TON	I	E	MI	EMPAQUE UTILIZADO	PSD (Kg.)
1											G D O				I	E	MI		
2											G D O				I	E	MI		
3											G D O				I	E	MI		
4											G D O				I	E	MI		
5											G D O				I	E	MI		
6											G D O				I	E	MI		
7											G D O				I	E	MI		
8											G D O				I	E	MI		
9											G D O				I	E	MI		
10											G D O				I	E	MI		
11											G D O				I	E	MI		
12											G D O				I	E	MI		
13											G D O				I	E	MI		
14											G D O				I	E	MI		



A = AUTOMOVIL
P = PICK UP
B = AUTOBUS
G = GASOLINA
D = DIESEL
O = OTROS
T = TRABAJO
P = PASEO
I = IMPORTACION
E = EXPORTACION
MI = MERCADO INTERNO

SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
Dirección General de Servicios Técnicos
Dirección de Vialidad y Proyectos
Subdirección de Ingeniería de tránsito

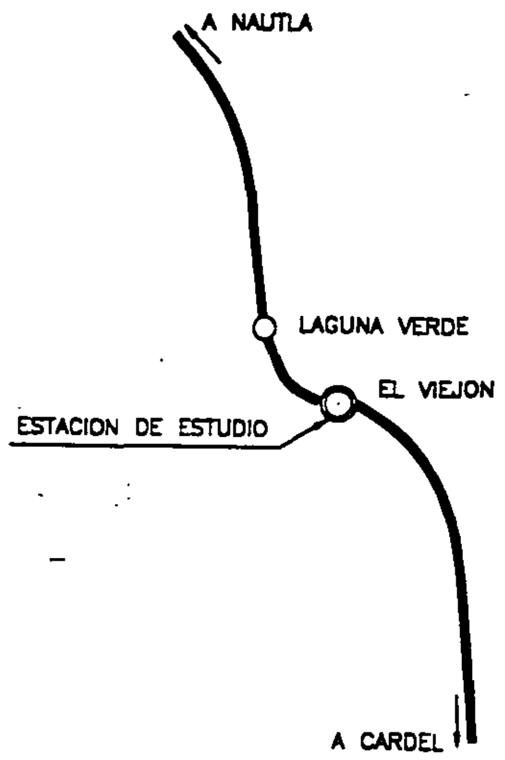
ESTUDIO DE ORGEN,DESTINO,PESO Y DIMENSIONES EN LA ESTACION "EL VIEJON"

CARRETERA: POZA RICA – VERACRUZ

TRAMO: NAUTLA – CARDEL

Km: 176 + 000

ESTUDIO EFECTUADO DEL 15 AL 18 DE OCTUBRE DE 1996



SINTESIS DEL ESTUDIO DE ORIGEN, DESTINO Y PESO

ESTACION "EL VIEJON"

CARRETERA POZA RICA - VERACRUZ — LUGAR: Km. 176+000

TRAMO: NAUTLA -CARDEL — FECHA: DEL 15 AL 18 DE OCTUBRE DE 1998

1.-VOLUMENES DE TRANSITO

HACIA:	VERACRUZ	6969
HACIA:	POZA RICA	7041
TOTAL AFORADO		14010

	HACIA: VERACRUZ	HACIA: POZA RICA	AMBOS SENTIDOS
PROMEDIO DIARIO	1742	1760	3503
MAXIMO HORARIO	192	225	313

TRANSITO DIARIO	HACIA: VERACRUZ	MAXIMO HORARIO A.M.	MAXIMO HORARIO P.M.	HACIA: POZA RICA	MAXIMO HORARIO A.M.	MAXIMO HORARIO P.M.	TOTAL
LUNES							
MARTES	1568	81	140	1650	211	120	3218
MIERCOLES	1834	133	173	1835	225	128	3669
JUEVES	1767	93	144	1761	213	102	3528
VIERNES	1800	100	192	1795	187	116	3595
SABADO	-						
DOMINGO							
TOTAL	6969			7041			14010

2.- CLASIFICACION VEHICULAR

TIPO DE VEHICULO	HACIA: VERACRUZ	HACIA: POZA RICA	TOTAL	%
A	3023	3067	6090	43
U	1439	1436	2875	21
B	773	760	1533	11
C2	570	589	1159	8
C3	244	253	497	4
T3-S2	394	377	771	6
T3-S3	374	446	820	6
T3-S2-R4	85	95	180	1
OTROS	67	18	85	1
TOTAL	6969	7041	14010	101

3.- PROMEDIO DE PASAJEROS POR VEHICULO Y POR SENTIDO

TIPO DE VEHICULO	HACIA : VERACRUZ	HACIA : POZA RICA	AMBOS SENTIDOS
AUTOMOVILES	2.34	2.29	2.32
AUTOBUSES	24.65	27.55	26.09

4.- PROMEDIO DE TRIPULANTES POR TIPO DE VEHICULO

TIPO DE VEHICULO	HACIA : VERACRUZ	HACIA : POZA RICA	AMBOS SENTIDOS
U	2.08	2.18	2.13
B	1.23	1.22	1.22
C2	1.68	1.68	1.68
C3	1.36	1.34	1.35
T3-S2	1.20	1.24	1.22
T3-S3	1.18	1.19	1.19
T3-S2-R4	1.14	1.11	1.12
OTROS	1.40	1.33	1.39

5.- MOTIVO DEL VIAJE (AUTOMOVILES)

MOTIVO	HACIA : VERACRUZ		HACIA : POZA RICA		AMBOS SENTIDOS	
TRABAJO	2571	85%	2707	88%	5278	87%
PASEO	452	15%	360	12%	812	13%

6.- CAMIONES CON CARGA Y SIN CARGA POR SENTIDO

TIPO DE	HACIA : VERACRUZ		HACIA : POZA RICA		AMBOS SENTIDOS	
VEHICULO	CON CARGA	SIN CARGA	CON CARGA	SIN CARGA	CON CARGA	SIN CARGA
C2	305	265	309	280	614	545
C3	146	98	187	66	333	164
T3-S2	296	98	300	77	596	175
T3-S3	247	127	349	97	596	224
T3-S2-R4	55	30	69	26	124	56
OTROS	42	25	12	6	54	31
TOTAL	1091	643	1226	552	2317	1195

SENTIDO 1 HACIA : VERACRUZ

TIPO DE PRODUCTO	TONELADAS TRANSPORTADAS												
	C2		C3		T3-S2		T3-S3		T3-S2-R4		OTROS		SUB
	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VI
1.- FORESTALES	1	3	5	66	4	84	3	72	1	42			14
2.- AGRICOLAS	66	240	23	245	15	259	52	1705	3	130	2	10	161
3.- ANIMALES	30	85	9	51	13	257	3	92					55
4.- MINERALES			2	27	1	20	8	200					11
5.- DERIV. DEL PETROLEO	12	38	5	15	12	209	13	426	6	251			48
6.- INORGANICOS	9	54	2	31	2	40	4	109					17
7.- INDUSTRIALES	145	476	84	693	222	3522	135	2835	37	1015	34	266	657
8.- VARIOS	42	213	16	125	27	488	29	522	8	208	6	73	128
TOTAL	305	1109	146	1253	296	4879	247	5961	55	1646	42	349	1091
PROMEDIO DE TONELADAS TRANSPORTADAS POR TIPO DE VEHICULO		4		9		16		24		30		8	

SENTIDO 2 HACIA : POZA RICA

TIPO DE PRODUCTO	TONELADAS TRANSPORTADAS												
	C2		C3		T3-S2		T3-S3		T3-S2-R4		OTROS		SU
	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE
1.- FORESTALES	4	34			2	38	3	93					9
2.- AGRICOLAS	48	306	82	1300	102	2568	56	1863	26	1020			314
3.- ANIMALES	30	134	17	155	24	443	3	88	1	48	3	32	78
4.- MINERALES	3	13			2	50	10	302					15
5.- DERIV. DEL PETROLEO	20	114	9	153	4	60	17	568	5	177			55
6.- INORGANICOS	4	31	3	44	2	56	22	728	4	217			35
7.- INDUSTRIALES	170	663	58	674	150	3978	204	6303	25	1045	9	182	61
8.- VARIOS	30	159	18	234	14	317	34	1079	8	381			10
TOTAL	309	1454	187	2560	300	7510	349	11024	69	2888	12	214	122
PROMEDIO DE TONELADAS TRANSPORTADAS POR TIPO DE VEHICULO		5		14		25		32		42		18	

TONELADAS TRANSPORTADAS POR TIPO DE PRODUCTO Y POR SENTIDO

AMBOS SENTIDOS

TIPO DE PRODUCTO	TONELADAS TRANSPORTADAS													
	C2		C3		T3-S2		T3-S3		T3-S2-R4		OTROS		SUBTOTAL	
	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.	No. DE VEH.	TON.
1.- FORESTALES	5	37	5	68	6	122	6	165	1	42			23	432
2.- AGRICOLAS	114	546	105	1545	117	2827	108	3568	29	1150	2	10	475	9646
3.- ANIMALES	60	219	26	206	37	700	6	180	1	48	3	32	133	1385
4.- MINERALES	3	13	2	27	3	70	18	502					26	612
5.- DERIV. DEL PETROLEO	32	152	14	168	16	269	30	994	11	428			103	2011
6.- INORGANICOS	13	85	5	75	4	96	26	837	4	217			52	1310
7.- INDUSTRIALES	315	1139	142	1367	372	7500	339	9138	62	2060	43	448	1273	21652
8.- VARIOS	72	372	34	359	41	805	63	1601	16	589	6	73	232	3799
TOTAL	614	2563	333	3813	596	12389	596	16985	124	4534	54	583	2317	40647
PROMEDIO DE TONELADAS TRANSPORTADAS POR TIPO DE VEHICULO		4		11		21		28		37		10		18

DISTRIBUCION DEL PESO PROMEDIO POR EJE Y POR TIPO DE VEHICULO DEL TOTAL DE CAMIONES REGISTRADOS

CARRETERA: POZA RICÁ - VERACRUZ KM: 176+000 EST.: "EL VIEJON"

TIPO DE VEHICULO	TOTAL DE VEHICULOS	PESO BRUTO VEHICULAR PROM. (TON.)	PESO PROMEDIO POR EJE (TON.)								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
C2	1159	7.13	2.08	5.01							
C3	497	18.68	3.81	7.55	7.42						
T3-S2	771	35 49	4.03	7.52	7.66	7.72	8.54				
T3-S3	820	43.[illegible]	4.12	8.38	8.62	7.37	7.44	8.16			
T3-S2-R4	180	59.42	4.43	7.38	7.43	7.08	7.86	6.00	5.85	6.47	7.28

DISTRIBUCION DEL PESO PROMEDIO POR EJE Y POR TIPO DE VEHICULO DEL TOTAL DE VEHICULOS CARGADOS

CARRETERA: POZA RICA - VERACRUZ KM: 176+000 EST.: "EL VIEJON"

TIPO DE VEHICULO	TOTAL DE VEHICULOS CARGADOS	PESO BRUTO VEHICULAR PROM. (TON.)	PESO PROMEDIO POR EJE (TON.)								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
C2	614	8.97	2.33	6 57							
C3	333	23.26	4.11	9.51	9.55						
T3-S2	596	40.43	4.04	8.56	8.72	9.05	9.99				
T3-S3	596	51.95	4.16	9.89	10.17	8.98	9.03	9.89			
T3-S2-R4	124	73.40	4.46	8.91	8.95	9.01	10.01	7.50	7.26	8.16	9.16

DISTRIBUCION PROMEDIO DE LAS DIMENSIONES POR TIPO DE VEHICULO

CARRETERA : POZA RICA - VERACRUZ KM: 76+000 EST: "EL VIEJON"

TIPO DE VEHICULO	TOTAL DE VEHICULOS	DISTANCIA (m)																		
		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15	L16	A	L	H
C2	1159	0.88	4.18	1.88														2.44	6.95	3.21
C3	497	0.97	4.73	1.50	2.41													2.51	9.61	3.70
T3-S2	771	0.92	2.99	1.18	0.52	0.70	0.98	7.48	1.34	1.43								2.51	17.50	3.92
T3-S3	820	0.94	3.09	1.2[illegible]	0.68	1.04	1.63	5.90	1.31	1.30	1.30							2.48	18.39	3.88
T3-S2-R4	180	1.02	2.80	1.2[illegible]	1.18	0.75	0.84	5.86	1.30	1.16	1.26	1.37	0.88	1.22	4.58	1.31	1.22	2.51	28.24	3.75

VEHICULOS CON EXCESO DE DIMENSIONES EN PROMEDIO POR TIPO DE VEHICULO

CARRETERA : POZA RICA - VERACRUZ KM: 76+000 EST: "EL VIEJON"

TIPO DE VEHICULO	TOTAL DE VEHICULOS CON EXCESO DE DIMENSIONES	ANCHO A	LARGO L	ALTURA H
C2				
C3				
T3-S2				
T3-S3				
T3-S2-R4	46	2.55	31.11	3.88

VOLUMENES DE TRANSITO POR RUTA

RUTAS PRINCIPALES				A	U	B	C2	C3	T3-S2	T3-S3	T3-S2-R4	OTROS	A+U	B	C	TOTAL	% DEL TOTAL	PROMEDIO DIARIO
LAGUNA VERDE	VER	EL FARALLON	VER	1078	487	69	89	2	1	2	0	1	1565	69	95	1699	12.13	425
LAGUNA VERDE	VER	VERACRUZ	VER	862	331	294	46	5	0	4	0	2	993	294	57	1334	9.52	334
POZA RICA DE HIDALGO	VER	VERACRUZ	VER	498	180	155	112	63	26	20	11	1	678	155	226	1059	7.56	265
MARTINEZ DE LA TORRE	VER	VERACRUZ	VER	229	83	84	63	36	17	11	3	2	312	84	132	528	3.77	132
LAGUNA VERDE	VER	JOSE CARDEL	VER	294	72	119	33	1	0	4	0	3	366	119	41	526	3.76	132
POZA RICA DE HIDALGO	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	245	116	113	14	7	3	5	0	0	361	113	29	503	3.59	126
PALMA SOLA	VER	JOSE CARDEL	VER	348	44	1	21	1	0	1	0	1	392	1	24	417	2.98	104
LAGUNA VERDE	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	123	48	128	7	0	1	3	0	0	171	128	11	310	2.21	78
TAMPICO	TAMPS	VERACRUZ	VER	87	57	59	20	14	13	23	6	0	144	59	76	279	1.99	70
PALMA SOLA	VER	VERACRUZ	VER	126	80	10	42	7	4	2	0	2	206	10	57	273	1.95	68
TUXPAM DE RODRIGUEZ CANO	VER	VERACRUZ	VER	89	35	27	18	11	6	20	2	1	124	27	56	207	1.48	52
NAUTLA	VER	VERACRUZ	VER	103	49	8	20	8	2	4	1	1	152	8	36	197	1.41	49
VEGA DE ALATORRE	VER	VERACRUZ	VER	106	56	3	21	6	1	1	0	0	162	3	31	196	1.40	49
VEGA DE ALATORRE	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	91	38	2	17	2	1	2	0	0	129	2	22	153	1.09	38
MONTERREY	N L	VERACRUZ	VER	18	12	3	18	20	20	57	1	3	30	3	119	152	1.09	38
TUXPAM DE RODRIGUEZ CANO	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	80	29	29	3	0	0	1	0	0	109	29	4	142	1.01	36
PALMA SOLA	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	78	34	1	10	1	0	0	0	0	112	1	11	124	0.89	31
PALMA SOLA	VER	EL FARALLON	VER	77	27	0	3	0	0	1	0	0	104	0	4	108	0.77	27
PAPANTLA DE OLARTE	VER	VERACRUZ	VER	53	17	14	6	3	1	1	0	0	70	14	13	97	0.69	24
LAGUNA VERDE	VER	ZEMPOALA	VER	20	17	41	9	1	0	0	0	0	37	41	10	88	0.63	22
HEROICA MATAMOROS	TAMPS	VERACRUZ	VER	27	20	28	3	1	7	0	1	0	47	28	12	87	0.62	22
PALMA SOLA	VER	TINAJITAS	VER	57	18	1	10	1	0	0	0	0	75	1	11	87	0.62	22
HEROICA MATAMOROS	TAMPS	TUXTLA GUTIERREZ	CHIS	29	38	6	6	1	7	0	0	1	67	6	14	86	0.61	22
POZA RICA DE HIDALGO	VER	VILLAHERMOSA	TAB	25	14	14	9	5	4	13	0	0	39	14	31	84	0.60	21
VEGA DE ALATORRE	VER	JOSE CARDEL	VER	47	13	1	20	1	1	1	0	0	60	1	23	84	0.60	21
SAN RAFAEL	VER	VERACRUZ	VER	34	19	0	12	8	2	3	0	0	53	0	25	78	0.56	20
HEROICA MATAMOROS	TAMPS	FRONTERA HIDALGO	CHIS	23	33	1	3	4	1	3	0	7	56	1	18	75	0.54	19
PAPANTLA DE OLARTE	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	50	17	0	3	2	0	0	0	0	67	0	5	72	0.51	18
REYNOSA	TAMPS	TAPACHULA	CHIS	5	2	0	2	0	24	7	27	1	7	0	61	68	0.49	17
REYNOSA	TAMPS	VERACRUZ	VER	16	18	9	3	1	7	11	3	0	34	9	25	68	0.49	17
NAUTLA	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	37	20	6	3	2	0	0	0	0	57	6	5	67	0.48	17
REYNOSA	TAMPS	FRONTERA HIDALGO	CHIS	16	29	2	6	2	7	1	0	2	45	2	18	65	0.46	16
MARTINEZ DE LA TORRE	VER	XALAPA ENRIQUEZ	VER	19	15	29	1	0	1	1	0	1	34	29	4	64	0.46	16
TAMPICO	TAMPS	COATZACOALCOS	VER	10	4	28	6	3	1	7	3	0	14	28	20	62	0.44	16
TAMPICO	TAMPS	XALAPA ENRIQUEZ	VER	20	16	19	4	1	1	1	0	0	36	19	7	62	0.44	16
MONTERREY	N L	VILLAHERMOSA	TAB	1	1	1	7	4	9	25	10	3	2	1	58	61	0.44	15
TAMPICO	TAMPS	VILLAHERMOSA	TAB	9	8	21	0	3	4	6	4	0	17	21	17	55	0.39	14
MONTERREY	N L	TAPACHULA	CHIS	2	1	0	7	1	33	3	4	0	3	0	48	51	0.36	13
POZA RICA DE HIDALGO	VER	ORIZABA	VER	7	4	4	2	3	18	10	6	0	11	4	39	51	0.36	13
POZA RICA DE HIDALGO	VER	CORDOBA	VER	13	9	0	12	7	2	6	0	1	22	0	28	50	0.36	13
NUEVO LAREDO	TAMPS	VERACRUZ	VER	4	7	0	3	5	22	5	1	1	11	0	37	48	0.34	12

I. VOLÚMENES DE TRÁNSITO EN LA RED NACIONAL DE CARRETERAS PAVIMENTADAS

El conocimiento del volumen y tipo de vehículos que circulan en la red de carreteras permite determinar el grado de ocupación y las condiciones en que opera cada segmento de la red; el análisis de su evolución histórica es fundamental para definir las tendencias de su crecimiento y para planear con oportunidad las acciones que se necesitan para evitar que alguno de sus tramos deje de prestar el nivel de servicio que demanda el tránsito usuario.

Por lo que se refiere a la infraestructura, dicha información es básica para estudiar el potencial de captación de tránsito de nuevos tramos, así como para definir sus características geométricas y estructurales. En la red en operación, estos datos son útiles para priorizar las necesidades de mantenimiento, programar su modernización o reconstrucción e identificar la necesidad de rutas alternas.

Para conocer la magnitud y variación estacional de los volúmenes de tránsito, durante 1998 se efectuaron conteos del tránsito durante todo el año en la red de estaciones maestras. Asimismo, se instalaron 3500 estaciones de aforo con clasificación vehicular en periodos de siete días, distribuidos en toda la red carretera nacional pavimentada.

Con el análisis de los datos de las mediciones del tránsito antes referidas, se obtuvo la información que se presenta en esta publicación, tanto en impreso como en medios magnéticos Los datos que contiene este volumen se describen a continuación.

Los datos se agruparon por entidad federativa. Cada estado cuenta con un mapa índice, que indica el numero que se le asignó a cada carretera para su localización en los listados de infomación.

EL contenido de cada uno de los listados, por columna, es el siguiente.

1 - **LUGAR.**- Contiene los nombres de los puntos generadores, como son, ciudades, poblaciones y entronques.

2.- **km.**- Kilómetro del punto generador antes referido.

3.- **TE** (Tipo de Estación).- Considerando el sentido en que crece el kilometraje de la carretera, el número "1" indica que el aforo fue efectuado antes del punto generador, el "2" que fue realizado en el punto generador y el "3" que el aforo se llevó a cabo después del punto generador.

4.- **SC** (Sentido de Circulación).- El número "1" indica que los datos corresponden al sentido de circulación en que crece el cadenamiento del camino, el "2" al sentido en que decrece el kilometraje y el "0" a ambos sentidos.

5.- **TDPA.**- Es el tránsito diario promedio anual 1998 registrado en el punto generador.

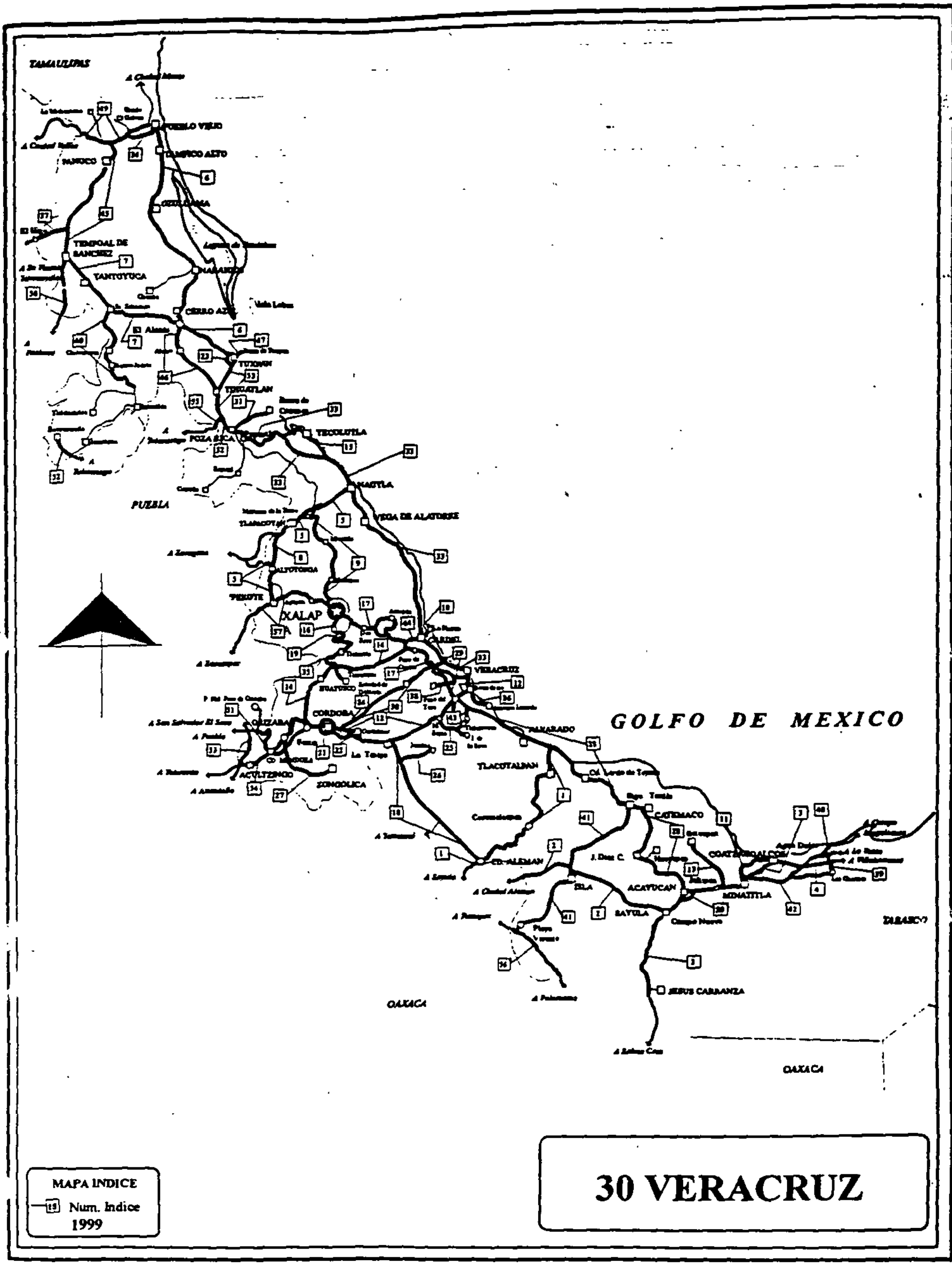
6.- **CLASIFICACION VEHICULAR.**- Se refiere a los tipos de vehículos que integran al tránsito, ésta se proporciona en porciento del TDPA, de acuerdo a la siguiente simbología.

TIPO DE VEHÍCULO	DESCRIPCIÓN
A	Automóviles
B	Autobuses
C2	Camiones Unitarios de 2 ejes.
C3	Camiones Unitarios de 3 ejes
T3S2	Tractor de 3 ejes con semiremolque de 2 ejes.
T3S3	Tractor de 3 ejes con semiremolque de 3 ejes.
T3S2R4	Tractor de 3 ejes con semiremolque de 2 ejes y remolque de 4 ejes.
Otros	Considera otro tipo de combinaciones de camiones de carga.

7.- **K'.**- Este factor es útil para determinar el volúmen horario de proyecto, el dato que se proporciona es aproximado y se obtuvo a partir de relacionar los volúmenes horarios más altos registrados en la muestra de aforo semanal y el tránsito diario promedio anual.

8.- **D** (Factor Direccional)-. Este factor se obtuvo de dividir el volumen de tránsito horario en el sentido de circulación más cargado entre el volumen en ambos sentidos a la misma hora.

Adicionalmente, se presentan algunos histogramas de los puntos más representativos de los aforos de muestra semanal que indican la variación en porcentaje de los volúmenes registrados por día de la semana.


TAMAULIPAS
PUEBLO VIEJO
TAMPICO ALTO
PANUCO
TEMPOAL DE SANCHEZ
TANTOYUCA
NARANJOS
CERRO AZUL
TUXPAN
POZA RICA
TECOLUTLA
PUEBLA
NAUTLA
VEGA DE ALATORRE
ALTOTONGA
PEROTE
XALAPA
VERACRUZ
HUATUSCO
CORDOBA
ORIZABA
ACULTZINGO
ZONGOLICA
ALVARADO
TLACOTALPAN
GOLFO DE MEXICO
CATEMACO
COATZACOALCOS
MINATITLAN
ACAYUCAN
SAYULA
CD. ALEMAN
JESUS CARRANZA
OAXACA
30 VERACRUZ
MAPA INDICE
Num. Indice
1999

CARRETERAS AFORADAS

Num. INDICE	CARRETERA
1	BUENAVISTA - TUXTEPEC
2	CD. ALEMAN - SAYULA
3	COATZACOALCOS - SALINA CRUZ
4	COATZACOALCOS - VILLAHERMOSA
5	PEROTE - NAUTLA
6	TUXPAN - TAMPICO
7	ALAZAN - TEMPOAL DE SANCHEZ
8	ALTOTONGA - TLAPACOYAN
9	BANDERILLA - MARTINEZ DE LA TORRE
10	CARDEL - LA PLAYITA
11	COATZACOALCOS - MINATITLAN (VIA ANTICAS)
12	CORDOBA - ENT. BOTICARIA
13	COSOLEACAQUE - SOTEAPAN
14	FORTIN - CONEJOS
15	GUTIERREZ ZAMORA - LA GUADALUPE
16	JALAPA - COATEPEC
17	JALAPA - VERACRUZ
18	LA TINAJA - SANTA CRUZ
19	LAS TRANCAS - COATEPEC
20	LIBRAMIENTO DE ACAYUCAN
21	LIBRAMIENTO DE CORDOBA - PEÑUELAS
22	LIBRAMIENTO DE CUITLAHUAC
23	LIBRAMIENTO DE TUXPAN
24	LIBRAMIENTO DE YANGA
25	MATA DE ESPINO - IGNACIO DE LA LLAVE
26	MATA REDONDA - JOACHIN
27	ORIZABA - ZONGOLICA
28	PASO DEL TORO - ACAYUCAN
29	PASO DEL TORO - LAGUNA DE SAN JULIAN
30	PEÑUELAS - T. C. (XALAPA - VERACRUZ)
31	POZA RICA - CAZONES
32	POZA RICA - T. C. (TULANCINGO - TUXPAN)
33	POZA RICA - VERACRUZ
34	PUEBLO VIEJO - T. C. (CD. VALLES - TAMPICO)
35	PUERTO RICO - TOTUTLA
36	RAMAL A ANTON LIZARDO
37	RAMAL A EL HIGO
38	RAMAL A JAMAPA
39	RAMAL A LAS CHOAPAS
40	SAN SEBASTIAN - LLANO DE ENMEDIO
41	SANTIAGO TUXTLA - PLAYA VICENTE
42	T. C. (COATZACOALCOS - SALINA CRUZ) - NUEVO TEAPA
43	T. C. (PASO DEL TORO - ACAYUCAN) - ENT. EL CALLEJON
44	TAMARINDO - JOSE CARDEL
45	TEMPOAL - CANOAS
46	TIHUATLAN - POTRERO DEL LLANO
47	TUXPAN - BARRA DE TUXPAN
48	CAMPO MAGALLANES - AGUA DULCE
49	CD VALLES - TAMPICO
50	PACHUCA - TEMPOAL
51	PUEBLA - CORDOBA (CUOTA)
52	SAN ALEJO - HUAYACOCOTLA
53	SAN SALVADOR EL SECO - AZUMBILLA
54	TEHUACAN - CORDOBA
55	TULANCINGO - TUXPAN
56	TUXTEPEC - ENT. PALOMARES
57	ZACATEPEC - JALAPA

55 CARR TULANCINGO - TUXPAN CLAVE 00608 RUTA . MEX-130 AÑO : 1998

LUGAR	ESTACION KM	TE	SC	TDPA	CLASIFICACION VEHICULAR EN PORCIENTO A	B	C2	C3	T3S2	T3S3	T3S2R4	OTROS	A	B	C	K'	D
T. IZQ VENUSTIANO CARRANZA	127.08	3	0	1905	78.7	3.2	5.1	2.9	4.2	4.1	0.4	1.4	79	3	18	0.070	
LIM EDOS. TERM PUE PPIA VER	146.00																
T. DER POZA RICA	150.94	1	0	8601	73.7	4.1	5.4	3.5	5.3	5.3	1.4	1.3	74	4	22	0.080	
T. DER POZA RICA	150.94	3	0	9188	73.1	3.9	6.6	3.3	4.6	4.5	2.3	1.7	73	4	23	0.066	
TIHUATLAN	171.20	1	0	8132	62.1	10.0	7.4	4.1	7.4	7.2	0.1	1.7	62	10	28	0.071	
TIHUATLAN	171.20	3	0	8306	64.6	12.8	7.6	5.6	3.7	4.1	0.1	1.5	65	13	22	0.097	
TUXPAN	206.50	1	0	4746	78.7	6.4	6.4	3.6	2.0	2.1	0.3	0.5	79	6	15	0.104	

56 CARR TUXTEPEC - ENT PALOMARES CLAVE . 00180 RUTA : MEX-147 AÑO : 1998

LUGAR	ESTACION KM	TE	SC	TDPA	CLASIFICACION VEHICULAR EN PORCIENTO A	B	C2	C3	T3S2	T3S3	T3S2R4	OTROS	A	B	C	K'	D
T. C. TUXTEPEC - OAXACA	0.00	3	0	2609	77.3	8.7	6.9	2.1	2.3	0.6	0.0	2.1	77	9	14	0.094	
X. C EL RODEO - REFORMA	15.20	3	0	1712	61.9	11.5	19.0	2.0	2.3	2.1	0.0	1.2	62	12	26	0.081	
LIM EDOS TERM OAX PPIA VER	40.00																
X. C. PLAYA VICENTE - EL TOMATE	48.16	1	0	1675	66.1	4.6	20.6	3.8	0.6	0.8	0.3	3.2	66	5	29	0.098	
X. C. PLAYA VICENTE - EL TOMATE	48.16	3	0	1492	78.7	8.5	4.6	2.0	3.2	0.9	0.2	1.9	79	9	12	0.093	
T. DER XOCHIAPA	65.00	3	0	1479	80.2	0.8	6.1	3.8	4.7	1.4	0.5	2.5	80	1	19	0.112	
T. IZQ SAN JUAN EVANGELISTA	87.00	1	0	1420	74.8	7.8	4.2	1.9	8.1	1.6	0.3	1.3	75	8	17	0.122	
LIM EDOS TERM VER PPIA OAX	87.00																
MARIA LOMBARDO DE CASO	110.50	1	0	1343	75.4	5.2	7.1	3.4	2.9	3.2	0.3	2.5	75	5	20	0.107	
T. C COATZACOALCOS - SALINA CRUZ	194.00	1	0	1065	75.3	6.2	7.8	2.5	2.5	3.1	0.1	2.5	75	6	19	0.102	

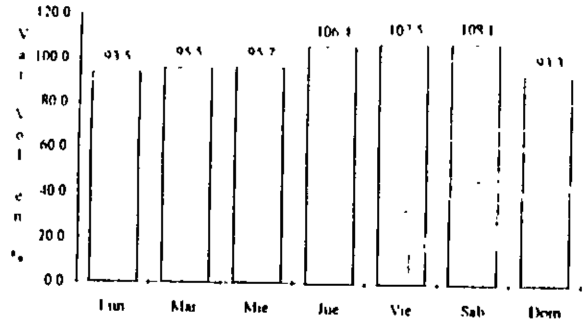
57 CARR ZACATEPEC - JALAPA CLAVE : 00486 RUTA : MEX-140 AÑO : 1998

LUGAR	ESTACION KM	TE	SC	TDPA	CLASIFICACION VEHICULAR EN PORCIENTO A	B	C2	C3	T3S2	T3S3	T3S2R4	OTROS	A	B	C	K'	D
ZACATEPEC	0.00	3	0	7185	70.8	3.4	6.8	5.0	5.2	5.3	0.9	2.6	71	3	26	0.076	
ALCHICHICA	24.00	3	1	4020	64.8	7.8	7.6	8.6	2.8	4.3	1.1	3.0	65	8	27	0.075	0.558
ALCHICHICA	24.00	3	2	4040	65.2	7.9	9.0	7.3	2.8	2.7	1.4	3.7	65	8	27	0.096	0.558
LIM EDOS TERM PUE PPIA VER	28.64																
SAN ANTONIO LIMON	35.00	1	0	7882	64.0	7.7	7.9	8.0	3.1	3.5	1.9	3.9	64	8	28	0.089	
PEROTE	46.30	1	0	8315	65.8	5.8	8.6	9.1	2.3	3.4	1.5	3.5	66	6	28	0.073	
PEROTE	46.30	3	0	8505	69.0	3.1	9.1	6.6	4.8	4.9	0.4	2.1	69	3	28	0.082	
T IZQ VILLA ALDAMA	54.90	1	0	7608	66.4	3.7	10.7	6.1	6.9	3.6	0.1	2.5	66	4	30	0.069	
BANDERILLA	91.50	1	0	8900	69.5	6.2	8.4	5.7	4.4	3.3	0.3	2.2	70	6	24	0.069	
T IZQ NAOLINCO	95.00	1	0	10860													
T IZQ NAOLINCO	95.00	3	0	11011	67.8	5.1	9.2	5.6	5.0	4.9	0.9	1.5	68	5	27	0.077	
JALAPA	102.00	1	0	15420													

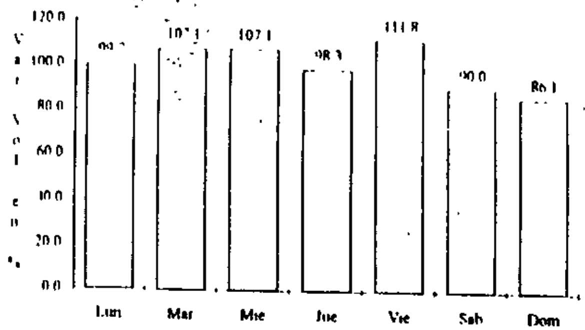
RR TULANCINGO - TUXPAN

CLAVE 00608

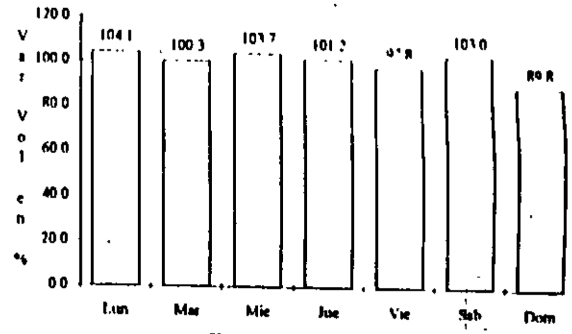
RUTA: MEX-130



Km 1.80 Sent 0



Km: 95.70 Sent 0

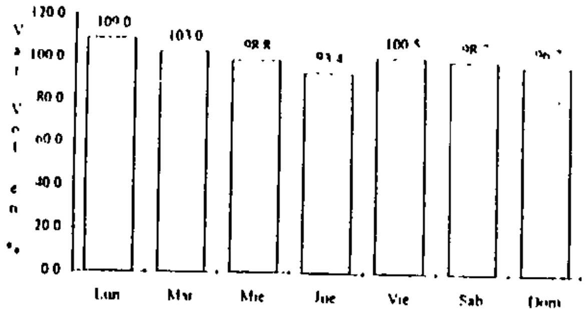


Km: 206.50 Sent: 0

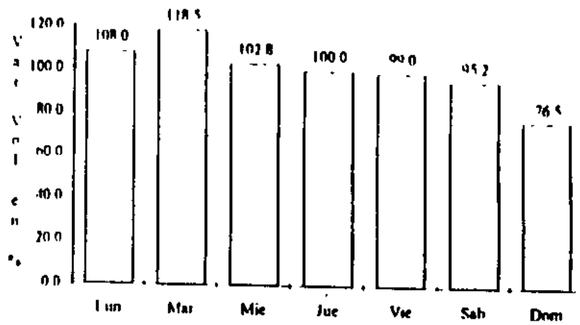
56 CARR TUXTEPEC - ENT PALOMARES

CLAVE 00180

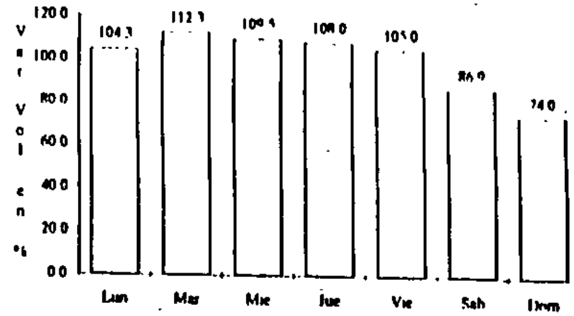
RUTA: MEX-147



Km 0.00 Sent 0



Km 87.00 Sent: 0

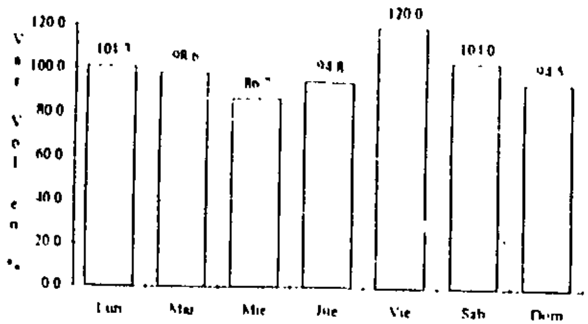


Km: 194.00 Sent: 0

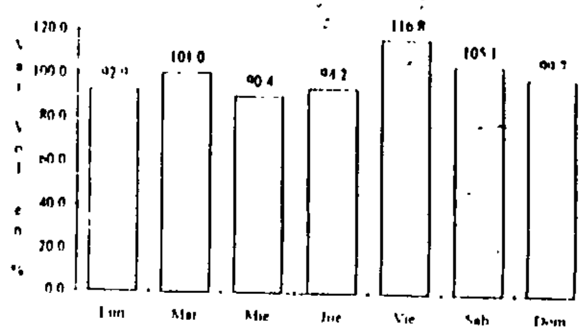
57 CARR ZACATEPEC - JALAPA

CLAVE 00486

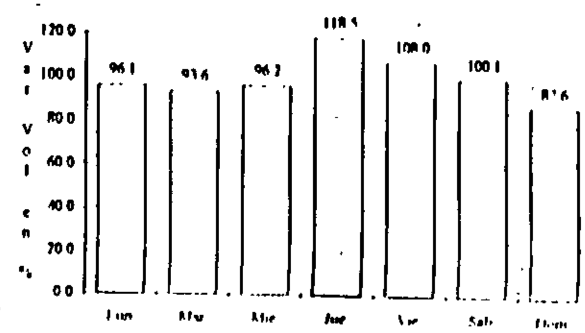
RUTA: MEX-140



Km 0.00 Sent: 0



Km 46.30 Sent 0



Km 95.00 Sent 0

II. VOLÚMENES DE TRÁNSITO EN ESTACIONES PERMANENTES.

Con el objeto de conocer el comportamiento de las corrientes de tránsito durante todo el año, se instaló un conjunto de aparatos automáticos contadores de vehículos, distribuidos en diferentes tramos de la red carretera. Con este mismo propósito también se dispone de los volúmenes de tránsito que se registran en las casetas de cobro de Caminos y Puentes Federales de Ingresos y Servicios Conexos, que constituyen una de las fuentes más completas de información, en virtud de que su sistema de operación exige una clasificación detallada del tipo de vehículos que utilizan las obras a su cargo. Ambas informaciones, entre otras aplicaciones, son utilizadas para correlacionar esas variaciones con los resultados de los conteos vehiculares de siete días que se efectúan en la red de carreteras para hacerlos representativos para todo el año.

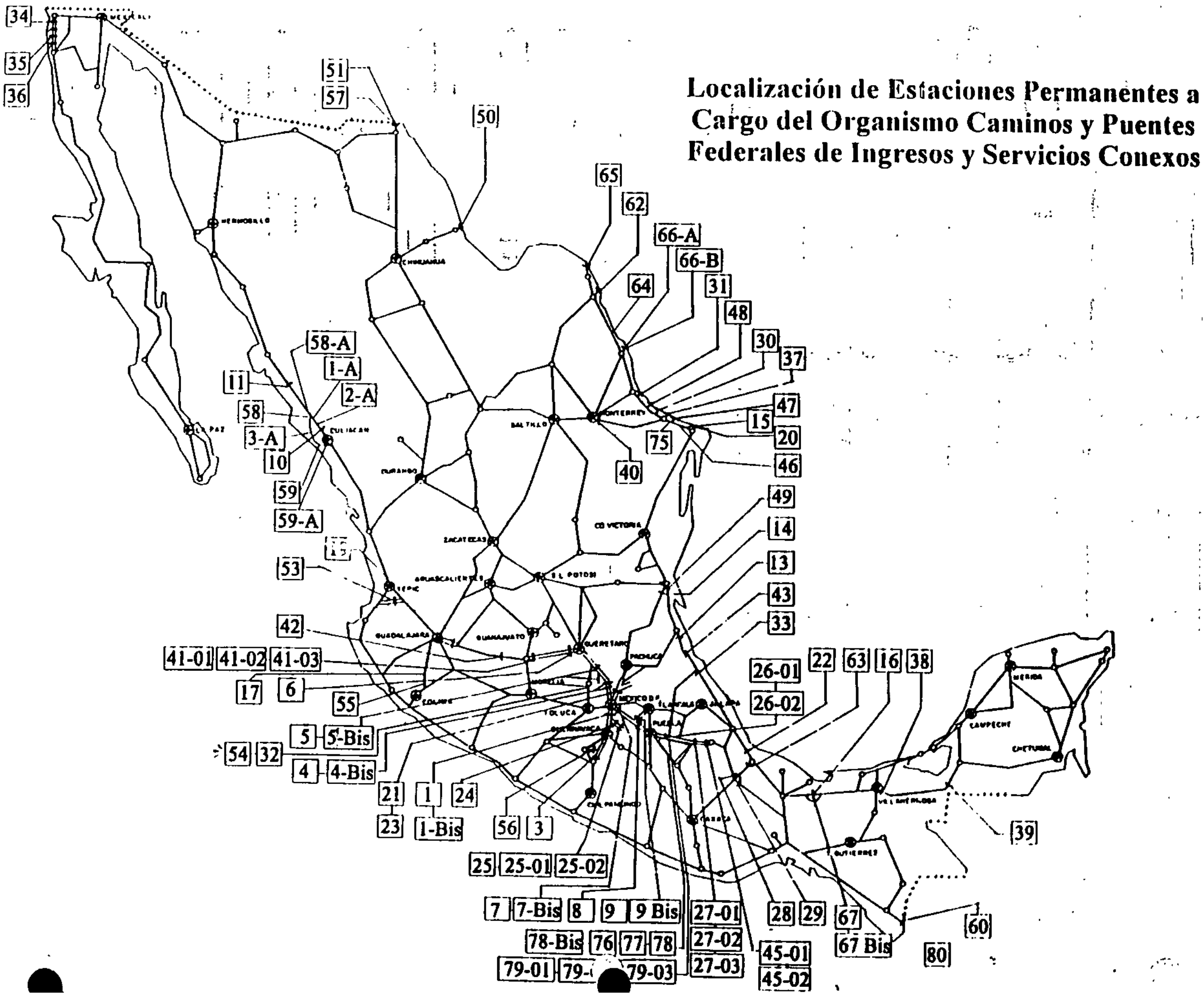
Los datos provenientes de las casetas de cobro, consignados en esta sección del libro fueron proporcionados por el citado organismo a excepción de los meses de noviembre y diciembre mismos que fueron estimados a partir de datos históricos; los datos se presentan en listados que contienen la información de los volúmenes de tránsito mensuales por tipo de vehículo, el total anual y el Tránsito Diario Promedio Anual (TDPA)

La simbología correspondiente a la clasificación vehicular es la siguiente:

TIPO DE VEHÍCULO	DESCRIPCIÓN
A	Automóvil
AR	Automóvil con remolque
B	Autobuses
C2	Camión de dos ejes
C3	Camión de tres ejes
C4	Camión de cuatro ejes
C5	Camión de cinco ejes
C6	Camión de seis ejes
C7	Camión de siete ejes
C8 ó más	Camión de ocho ó más ejes
VNC	Vehículos no clasificados

También se presentan dos histogramas de la variación de los volúmenes de tránsito, uno mensual y otro diario promedio semanal, expresados en porciento

Localización de Estaciones Permanentes a Cargo del Organismo Caminos y Puentes Federales de Ingresos y Servicios Conexos



SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS
DIRECCION DE VIALIDAD Y PROYECTOS
SUBDIRECCION DE INGENIERIA DE TRÁNSITO

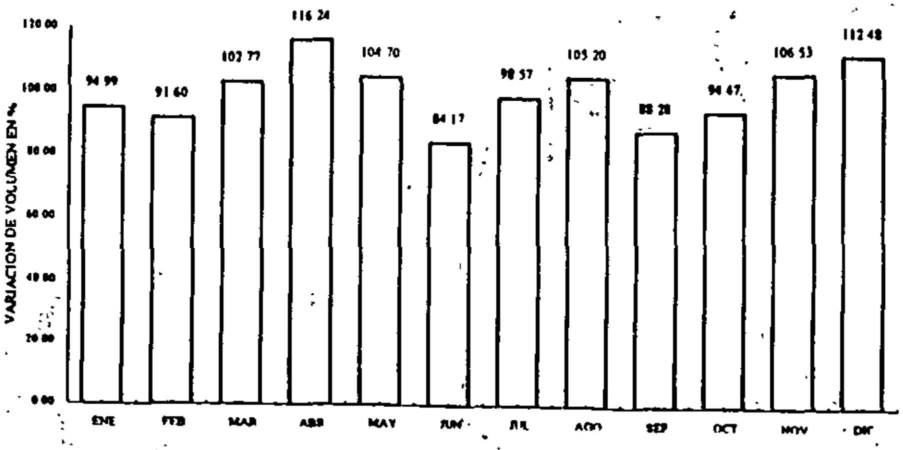
VOLUMENES REGISTRADOS EN LA ESTACION MAESTRA

Caseta: Tepoztlán, Mor. **C.P.F.I.S.C. Num. 24** **Ambos Sentidos** **1998**

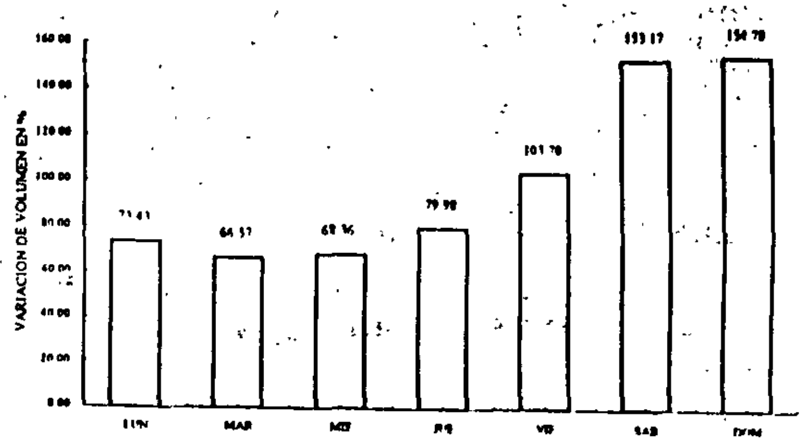
MES	A	AR	B	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	VNC	A	B	C	TOTAL MENSUAL
ENERO	133,817	130	17,360	3,752	673	58	1,715	676	24	524	1,674	133,947	17,360	7,422	160,403
FEBRERO	128,146	147	17,181	3,996	671	93	1,632	706	31	458	1,625	128,293	17,181	7,587	154,686
MARZO	143,836	149	19,871	4,176	785	62	1,561	740	41	504	1,821	143,985	19,871	7,869	173,546
ABRIL	166,882	129	20,183	3,529	781	75	1,479	588	31	599	2,016	167,011	20,183	7,082	196,292
MAYO	148,274	102	19,402	3,365	846	62	1,620	610	22	523	1,977	148,376	19,402	7,048	176,803
JUNIO	116,107	126	17,625	2,997	821	48	1,378	586	29	455	1,972	116,233	17,625	6,314	142,144
JULIO	140,164	118	17,707	3,285	845	48	1,401	535	24	421	1,908	140,282	17,707	6,559	166,456
AGOSTO	150,048	126	18,461	3,544	840	64	1,453	512	11	420	2,167	150,174	18,461	6,844	177,646
SEPTIEMBRE	122,555	109	16,566	3,721	1,021	50	1,846	577	13	360	2,254	122,664	16,566	7,588	149,072
OCTUBRE	128,318	126	18,199	7,761	700	19	1,338	584	11	329	2,146	128,443	18,199	10,742	159,530
NOVIEMBRE *	148,381	148	19,154	7,239	563	37	1,321	655	10	427	1,966	148,529	19,154	10,252	179,902
DICIEMBRE *	156,419	123	19,038	8,245	668	29	2,359	788	11	568	1,702	156,542	19,038	12,668	189,951
*Cifras Estimadas															
TOTAL	1,682,947	1,533	220,747	55,610	9,214	645	19,103	7,557	258	5,588	23,229	1,684,480	220,747	97,975	2,026,431
MAXIMO	166,882	149	20,183	8,245	1,021	93	2,359	788	41	599	2,254	167,011	20,183	12,668	196,292
PROMEDIO	140,246	128	18,396	4,634	768	54	1,592	630	22	466	1,936	140,373	18,396	8,165	168,869
										PORCENTAJE	1.15%	83.13%	10.89%	4.83%	100.00%

T.D.P.A. = 5,552

VARIACION MENSUAL



VARIACION DIARIA PROMEDIO SEMANAL



SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS
DIRECCION DE VIALIDAD Y PROYECTOS
SUBDIRECCION DE INGENIERIA DE TRÁNSITO

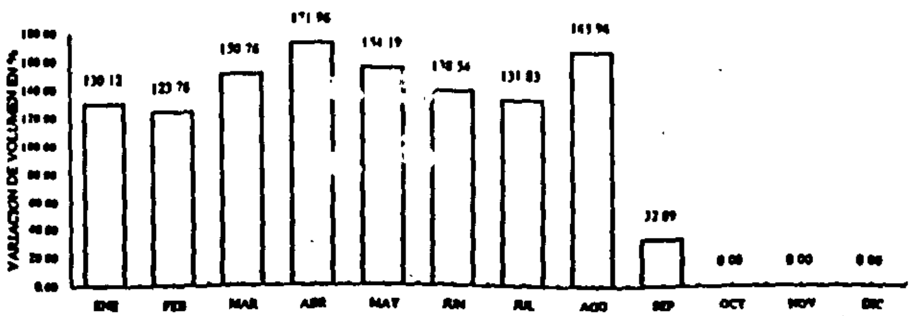
VOLUMENES REGISTRADOS EN LA ESTACION MAESTRA

Caseta: Huixtla, Chis. **C.P.F.I.S.C. Num. 80** **Ambos Sentidos** **1998**

MES	A	AR	B	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	VNC	A	B	C	TOTAL MENSUAL
ENERO	21,930	82	1.859	2.214	1.494	118	4,806	2,064	145	944	1,336	22,012	1,859	11,785	36,992
FEBRERO	18,770	83	4,181	2,220	1,478	97	4,482	1,588	80	897	1,307	18,853	4,181	10,842	35,183
MARZO	23,233	96	3.152	2,756	1,990	136	6,064	2,533	128	1,059	1,705	23,329	3,152	14,674	42,860
ABRIL	28,490	83	3,538	2,796	2,147	104	6,394	2,314	88	982	1,951	28,573	3,538	14,825	48,887
MAYO	24,101	67	2,483	2,658	2,261	103	6,668	2,346	85	1,100	1,963	24,168	2,483	15,221	43,835
JUNIO	19,218	52	4,080	2,411	2,277	145	5,976	2,256	113	899	1,958	19,270	4,080	14,077	39,385
JULIO	21,930	82	1,859	2,214	1,494	118	4,806	2,064	145	944	1,823	22,012	1,859	11,785	37,479
AGOSTO	26,586	117	3,984	2,813	2,250	114	6,333	2,131	95	1,023	1,735	26,703	3,984	14,759	47,181
SEPTIEMBRE	4,897	21	780	619	517	40	1,423	444	19	209	382	4,918	780	3,271	9,351
OCTUBRE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NOVIEMBRE *	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DICIEMBRE *	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
*Cifras Estimadas															
TOTAL	189,155	683	25,916	20,701	15,916	975	46,952	17,740	898	8,057	14,160	189,838	25,916	111,239	341,153
MAXIMO	28,490	117	4,181	2,813	2.277	145	6,668	2,533	145	1,100	1,963	28,573	4,181	15,221	48,887
PROMEDIO	15,763	57	2,160	1,725	1.326	81	3,913	1,478	75	671	1,180	15,820	2,160	9,270	28,429
										PORCENTAJE	4 15%	55 65%	7 60%	32 61%	100 00%

T.D.P.A. = 935

VARIACION MENSUAL



VARIACION DIARIA PROMEDIO SEMANAL