



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“ESTUDIOS DE BALANCE DE MATERIA EN
SISTEMAS YACIMIENTO-ACUÍFERO
NATURALMENTE FRACTURADOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A:

GILBERTO CASTILLO GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO



CIUDAD UNIVERSITARIA, NOVIEMBRE DE 2010



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
60-I-749

SR. GILBERTO CASTILLO GONZÁLEZ

Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Fernando Samaniego Verduzco y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

ESTUDIOS DE BALANCE DE MATERIA EN SISTEMAS YACIMIENTO-ACUÍFERO NATURALMENTE FRACTURADOS

- RESUMEN
- I INTRODUCCIÓN
- II REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA
- III ECUACIÓN DE BALANCE DE MATERIA PARA YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS
- IV CÁLCULO DE LA ENTRADA DE AGUA PROPORCIONADA POR UN ACUÍFERO NATURALMENTE FRACTURADO
- V ECUACIÓN DE BALANCE DE MATERIA MODIFICADA PARA UN YACIMIENTO DE GAS HOMOGÉNEO, CONSIDERANDO LA SATURACIÓN DE GAS RESIDUAL EN LA ZONA INVADIDA DE AGUA
- VI EJEMPLO DE APLICACIÓN
- CONCLUSIONES
- NOMENCLATURA
- APÉNDICES
- REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

CD. Universitaria, D. F., a 18 de Agosto del 2010

El Presidente del Comité de Titulación de Ingeniería en Ciencias de la Tierra

DR. RICARDO JOSÉ PADILLA Y SÁNCHEZ

RJPYS*RGTS*srs



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

Aceptación de Trabajo Escrito

Mtro. José Gonzalo Guerrero Zepeda
Director de la Facultad de
Ingeniería de la U.N.A.M.
Presente.

En atención a su oficio en el que nos informa que hemos sido designados sinodales del Examen Profesional del señor CASTILLO GONZALEZ GILBERTO registrado con número de cuenta 09639736-9 en la carrera de INGENIERÍA PETROLERA, nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo desarrollado por el citado alumno.

Atentamente,

ING. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS

FECHA DE ACEPTACIÓN: Oct/20/2010

DR. FERNANDO SAMANIEGO
VERDUZCO

FECHA DE ACEPTACIÓN: Octubre 14, 2010.

DR. EDGAR RENE RANGEL GERMAN

FECHA DE ACEPTACIÓN: 20-Oct-2010

M.L. MARIO BÉCERRA ZEPEDA

FECHA DE ACEPTACIÓN: 15/10/2010

DR. RAFAEL RODRIGUEZ NIETO
FECHA DE ACEPTACIÓN: 12/10/10

FECHA DE EMISIÓN: 11 de Octubre de 2010.

DEDICATORIA

*Este trabajo quiero dedicárselo en primer lugar a mi madre Irene González Camaño, por haber sembrado un objetivo ambicioso en mi mente y en mi corazón, por tu apoyo, amor y ternura; porque a ti te debo todo lo soy y lo que he conseguido, gracias a ti he llegado hasta aquí, gracias por impulsarme, orientarme, guiarme, corregirme y sobre todo por aquello que has hecho y dejado de hacer por procurarme lo mejor. Porque cada vez que he necesitado algo has estado ahí para ayudarme. **Mama, este es tu regalo...***

A mi padre Jaime Castillo, a mis hermanas Edith y Elena, porque han sido mi ejemplo, mi apoyo y porque siempre estuvieron cerca en todos aquellos buenos y malos momentos, a mi familia María del Carmen, Jorge, María Guadalupe, Angélica (keka), Santiago y Martín Morales, por ser un apoyo fundamental en mi vida, una de las motivaciones más grandes para seguir siempre adelante, por estar siempre ahí, por sus palabras de apoyo, por su amor y por toda la confianza que han depositado en mí. A mis primos Daniel Castillo Ayala, Claudio Castillo Piña y Sergio Piña Castillo

Lo dedico a aquellas personas que compartieron durante este largo trayecto momentos de alegría, de diversión, de tristeza, de aburrimiento, pero sobre todo por darle sabor a mi vida; mis amigos (as): María Esther Rosado Vázquez, Ángel Vázquez Morín, José David Guzmán Arévalo, Enrique Ayala Gómez, Rubén Rodríguez Tapia, Jesús Gutiérrez Mojica, Juan Carlos Sabido Alcántara, Omar Rubio Nava, Roberto Zúñiga Vázquez, Rocío del Mar León, Erika Rodríguez Guzmán, José Antonio Palomares, Carlos Sánchez Ramos, Edgar López, Pedro Zapatero Flores (†), Fernando Trauwvitz Rosas, Guillermo Cárdenas Vences Lourdes Soto Aguirre, Laura Chávez Viviano, José Robles, Enrique Bobadilla García, Jorge Pérez Soto, Lidia Lucely Meneses Páez, Ricardo Noel Pacheco, Miguel Ángel González Laguna, Luis Enrique Rodríguez Manso, Alfredo Sánchez.

GRACIAS.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy especial y sincera al Dr. Fernando Samaniego Verduzco por apoyarme en este proyecto, por su disposición siempre amable y paciente. Gracias por compartir sus conocimientos conmigo y por ser guía y ejemplo para mi vida profesional.

A los Sinodales: Dr. Héber Cinco Ley, Ing. Manuel Villamar Viguera, Dr. Edgar Rangel Germán y al Dr. Rafael Rodríguez Nieto, gracias por el tiempo dedicado, su consejo y punto de vista para mejorar este trabajo.

Agradezco también a la Ing. Elsa Hilario Ramírez y al Lic. Franco Antonio Vázquez, por permitirme compartir mi trabajo con ellos, por su contribución tan valiosa y por el apoyo que me brindaron durante la elaboración de este trabajo.

GRACIAS.

Índice

Resumen	v
Capítulo 1 Introducción	1
1.1. Tipos de YNF de Acuerdo a su Capacidad de Almacenamiento	2
1.2. Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura	2
1.3. Saturación de Gas Residual, S_{gr}	3
Capítulo 2 Revisión Bibliográfica	5
2.1. Modelos de Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura	5
2.1.1. Warren y Root	5
2.1.2. Kazemi	8
2.1.3. De Swaan	9
2.1.4. Rodríguez de la Garza	10
2.2. Modelos de Entrada de Agua al Yacimiento	12
2.2.1. van Everdingen y Hurst	12
2.2.2. Carter y Tracy	13
Capítulo 3 Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados	15
3.1. Balance de Materia	15
3.2. Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados, Considerando una Formación de Doble Porosidad	16
3.2.1. Consideraciones del Modelo	17
3.3. Solución Gráfica de la Ecuación de Balance de Materia	18

Capítulo 4 Cálculo de la Entrada de Agua Proporcionada por un Acuífero Naturalmente Fracturado	20
4.1. Modelo de Cloosmann de un Acuífero para Yacimientos Naturalmente Fracturados ...	20
4.2. Consideraciones del Modelo	21
4.2.1. Caso Radial	22
4.3. Cálculo de la Entrada Adimensional de Agua	24
Capítulo 5 Ecuación de Balance de Materia Modificada para un Yacimiento de Gas Homogéneo, Considerando la Saturación de Gas Residual en la Zona Invasada de Agua	33
5.1. EBM Modificada para un Yacimiento de Gas con Empuje de Agua	33
5.2. Procedimiento para Estimar el Volumen de Gas Atrapado en la Región Invasada por Agua y la Entrada de Agua al Yacimiento de Gas	34
5.3. Representación Gráfica de la Ecuación de Balance de Materia para un Yacimiento de Gas	37
Capítulo 6 Ejemplo de Aplicación	39
6.1. Cálculo del Volumen de Gas Atrapado en la Región Invasada por Agua y la Entrada de Agua, Considerando la Saturación de Gas Residual	39
6.2. Cálculo de los Parámetros del Acuífero	40
6.3. Procedimiento de Cálculo para la EBM Modificada	40
6.4. Gráficas de los Cálculos con y sin Saturación de Gas Residual, S_{gr}	46
6.5. Sensibilidad de los Cálculos de Balance de Materia para la Variación del Gasto de Gas, q_g	49
Conclusiones	53
Nomenclatura	55
Apéndice A Derivación de la Ecuación de Balance de Materia para un Yacimiento Bajosaturado de Aceite, Naturalmente Fracturado	59
Apéndice B Derivación de la Ecuación para la Distribución de Presión de un Acuífero Naturalmente Fracturado – Caso Radial	64
Apéndice C Derivación del Radio r_1, de la Presión p_1, del Frente de Agua de Invasión y de la Presión Promedio \bar{p}, en la Región Invasada por Agua ..	99
Apéndice D Derivación de la Ecuación del Volumen para el Gas Atrapado G_t, en la Región Invasada por Agua	107
Referencias	111

Resumen

Los propósitos de esta tesis son; 1) Presentar una solución para la Ecuación de Balance de Materia (EBM), para Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF), cuya zona de hidrocarburos contiene aceite negro; 2) Presentar un modelo de entrada de agua de un acuífero naturalmente fracturado y 3) Emplear una versión simple de la EBM para estimar el volumen original de hidrocarburos, para predecir el comportamiento de yacimientos, considerando la saturación de gas residual.

Se inicia con una definición breve de los YNF, proporcionando una clasificación del tipo de yacimiento, de acuerdo a su capacidad de almacenamiento; se incluye una descripción de la transferencia de fluidos matriz-fractura, además de una introducción con respecto a la saturación de gas residual.

Se incluye una revisión bibliográfica en la cual se plantean modelos que describen la transferencia de fluidos matriz-fractura sujetos a diferentes regímenes de flujo y se revisan métodos para determinar el volumen de entrada de agua del acuífero hacia el yacimiento.

Se presenta la EBM derivada por Peñuela y cols.^{27*} para YNF volumétricos (cerrados en su frontera exterior), en la cual se emplea un modelo matemático que considera un fluido de tipo aceite negro originalmente bajosaturado, en un medio poroso compuesto de sistemas interdependientes de matriz y fractura, que se produce a través de una red de fracturas.

* Las referencias se citan de forma completa al final de la tesis

Se revisa el modelo de Closmann⁹ para un acuífero naturalmente fracturado, donde hay dos tipos básicos de roca, definidos en términos de porosidad y la permeabilidad de la matriz es más pequeña que la permeabilidad de la fractura. La matriz puede considerarse como un medio poroso compuesto de variaciones en sus propiedades, buenas y malas, las cuales se encuentran a menudo en yacimientos carbonatados; las designaciones de buenas y malas son en gran parte arbitrarias. Un ejemplo sería: buena porosidad mayor de 12% y mala porosidad de 2 a 12%, con el resto de la roca no productiva. En algunos casos, puede ser suficiente especificar solo un tipo de roca. Además se presenta un ejemplo del cálculo del volumen de entrada de agua adimensional.

Se discute la modificación para la EBM de Lutes y cols.²⁴, para yacimientos de gas que tienen condiciones de empuje de agua, que incorpora un modelo de entrada de agua que considera los gradientes de presión y efectos de la permeabilidad relativa a través de la región invadida por agua en el yacimiento. Los cálculos del balance considerando la saturación de gas residual se realizan para determinar la cantidad de gas atrapado y para cuantificar la magnitud de la presión detrás del frente de agua.

Introducción

El balance de materia es un concepto físico fundamental que se utiliza ampliamente en muchas ramas de la ingeniería. En Ingeniería de Yacimientos, es un método poderoso para la estimación de los volúmenes originales de aceite, gas y del acuífero. La ventaja del método de balance de materia es que al emplearlo para el ajuste del comportamiento de los yacimientos, se incorporan los efectos del aceite y gas original contenidos en áreas que no se han perforado todavía. La desventaja es que no se puede aplicar hasta después que la producción ha iniciado y transcurrido un tiempo de explotación.

La complejidad asociada a YNF, limita la Ingeniería de Yacimientos al uso de versiones simples de la EBM determinar el volumen de hidrocarburos original y predecir el comportamiento de yacimientos. La EBM para YNF, utiliza un modelo matemático que considera un fluido, aceite negro originalmente bajosaturado en un medio poroso, compuesto de sistemas interdependientes de matriz y fractura.

La comunicación deficiente matriz-fractura daría inicialmente una alta producción de aceite que disminuye rápidamente, porque el aceite se produce básicamente de la red de fracturas. La reducción de la presión de poro debido a la producción tiende a cerrar las fracturas, dejando en el yacimiento considerables reservas de aceite en el sistema de matriz.

1.1. Tipos de YNF de Acuerdo a su Capacidad de Almacenamiento

Desde un punto de vista la capacidad de almacenamiento de YNF, puede clasificarse en tres grupos.

1. Yacimientos tipo A: tienen una alta capacidad de almacenamiento en el sistema de matriz y una baja capacidad de almacenamiento en el sistema de fracturas.
2. Yacimientos tipo B: tienen más o menos la misma capacidad de almacenamiento en la matriz y fractura.
3. Yacimientos tipo C: la capacidad de almacenamiento es exclusivo de la red de fracturas.

Para yacimientos convencionales de tipo A y C la EBM es aplicable asumiendo un modelo de porosidad simple. Sin embargo, en yacimientos naturalmente fracturados las fracturas no solo ayudan a la permeabilidad en un yacimiento en producción, además contribuyen con la capacidad de almacenamiento.

El aspecto más importante y difícil de modelar en un YNF es el intercambio de los fluidos matriz-fractura. El problema de su análisis se inicia con la imposibilidad de obtener núcleos que incluyan fracturas representativas del yacimiento, los cuales permitan efectuar pruebas de desplazamiento confiables, y la simplicidad de los modelos que se han propuesto que no consideran algunos de los fenómenos que ocurren en este tipo de yacimientos.

1.2. Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura

La caracterización de YNF constituye el primer análisis para el desarrollo de estudios integrales de campos petroleros. En nuestro país, principalmente en el Sureste y en la Región Marina de la Sonda de Campeche, este análisis ha recibido una gran atención en la formulación del modelo de doble porosidad para describir los flujos presentes en las fracturas y en los bloques de la matriz.

Una parte muy importante de la producción y de las reservas mundiales de hidrocarburos se encuentran en yacimientos naturalmente fracturados, conocidos también como yacimientos de doble porosidad.

Los bloques de matriz contienen el mayor volumen poroso del yacimiento y alimentan de aceite a las fracturas, las cuales son un medio de alta permeabilidad y baja porosidad efectiva que rodean a los bloques de la matriz. La recuperación de aceite en YNF depende de muchas variables, siendo el modelado del intercambio de fluidos entre los bloques de matriz y fracturas un elemento importante para la simulación del comportamiento de estos sistemas.

Las fracturas se definen como superficies planas de discontinuidad, en donde la roca ha perdido cohesión, debido a los procesos de alteración y deformación a que ha estado sometida, las cuales pueden ser ocupados por fluidos.

1.3. Saturación de Gas Residual, S_{gr}

Actualmente se llevan a cabo grandes esfuerzos para optimizar la explotación de los yacimientos; sin embargo, aún se continúa dejando grandes volúmenes remanentes de aceite y gas, debido principalmente a la baja eficiencia de los mecanismos de producción.

Si se desea alcanzar la recuperación máxima, entonces es necesario conocer los mecanismos de entrapamiento que pueden actuar en los yacimientos para poder limitarlos lo más posible. En particular es importante determinar la distribución microscópica y macroscópica en un yacimiento de gas en el cual ha quedado gas remanente como resultado de la invasión por agua de un acuífero del yacimiento, lo que permitirá el diseño e implementación de procesos eficientes para su movilización posible. El volumen de gas que permanece en la zona invadida por agua del yacimiento se le denomina saturación de gas residual, S_{gr} . Con frecuencia se asocia este

concepto con una saturación de gas irreductible, que representa la saturación a la cual el gas remanente se vuelve inmóvil o completamente atrapado. Los valores típicos de S_{gr} fluctúan entre un 25 a 50 % del volumen de poros.

A partir de pruebas de laboratorio y de campo se ha podido apreciar que a nivel microscópico la saturación residual S_{gr} depende principalmente de la permeabilidad, distribución del tamaño de poros, heterogeneidad de la roca, así como de las propiedades de los fluidos (gas y agua). A nivel macroscópico, la S_{gr} depende en gran medida del arreglo de los pozos, ritmos de explotación, intervalos disparados y de las heterogeneidades de la formación.

Revisión Bibliográfica

Se han desarrollado múltiples investigaciones en relación con los YNF por la importancia que tienen a nivel mundial. Sin embargo, en esta tesis solamente se comentan los trabajos en los que se toma en cuenta bloques de igual tamaño, así como otros que puedan considerarse básicos o relacionados con el tema.

2.1. Modelos de Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura

2.1.1. Warren y Root³⁶

Los autores propusieron una aproximación consistente en dos modelos superpuestos para modelar el sistema. Las fracturas se tratan como un medio continuo y los bloques como un medio discontinuo, en el cual las fracturas forman un sistema ortogonal orientado con los ejes principales de permeabilidad.

Una de las características del modelo de Warren y Root es que considera que el flujo de la matriz a las fracturas ocurre bajo régimen pseudoestacionario (flujo PSS, de las palabras "*Pseudo Steady State*"); la transferencia matriz-fracturas (el gasto) se relaciona con la diferencia entre la presión de la matriz y la presión de las fracturas. El flujo hacia los pozos es solamente a través de la red de fracturas, actuando la matriz como una fuente que suministra el fluido. Las ecuaciones correspondientes para el flujo radial son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \frac{\alpha_1 k_m}{\mu} (p_m - p_f) &= 0 \\ \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{k_f}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) \right] + \frac{\alpha_1 k_m}{\mu} (p_m - p_f) &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (1)$$

sujetas a las condiciones de frontera siguientes:

$$p_m(r, 0) = p_f(r, 0) = p_i, \quad t = 0;$$

$$q = -2\pi r_w \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p_m}{\partial r}, \quad r = r_w, \quad t > 0;$$

$$p_m = p_f = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0.$$

Definiendo los parámetros adimensionales siguientes:

$$p_D = \left(\frac{2\pi k_f h}{q\mu} \right) [p_i - p(r, t)]; \quad \text{Presión adimensional}$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad \text{Radio adimensional}$$

$$t_D = \frac{k_f t}{[(c_m \phi_m + c_f \phi_f) \mu r_w^2]}; \quad \text{Tiempo adimensional}$$

$$\lambda = \frac{\alpha_1 k_m r_w^2}{k_f}; \quad \text{Capacidad del líquido a fluir de la matriz a las fracturas}$$

$$\omega = \frac{c_f \phi_f}{(c_m \phi_m + c_f \phi_f)}. \quad \text{Capacidad de almacenamiento en las fracturas}$$

Empleando los parámetros adimensionales, la Ec. (1) y las condiciones de frontera se pueden reescribir en forma adimensional:

$$\left. \begin{aligned} (1-\omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} - \lambda (p_{fD} - p_{mD}) &= 0 \\ \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) \right] - \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} - (1-\omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (2)$$

y

$$\begin{aligned} p_{mD} = p_{fD} = 0, \quad t_D = 0; \\ \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = -1, \quad r_D = 1, \quad t_D > 0; \\ p_{mD} = p_{fD} = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

La solución obtenida empleando el método de la transformada de Laplace a la Ec. (2) es la siguiente:

$$p_{fD}(r_D, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0[\sqrt{s f(s)}]}{s \sqrt{s f(s)} K_1[\sqrt{s f(s)}]} \right\}, \dots\dots\dots (3)$$

donde:

$$f(s) = \frac{\omega(1-\omega) s + \lambda}{(1-\omega) s + \lambda}.$$

K_0 y K_1 son las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo, de orden cero y uno respectivamente, s es la variable de transformación de Laplace. La transformada inversa de la Ec. (3) es la solución para la presión adimensional en las fracturas.

$$p_{fD}(1, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ 0.80908 + \ln(t_D) + Ei \left[-\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - Ei \left[-\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\}. \dots\dots\dots (4)$$

2.1.2. Kazemi²⁰

El autor tomó en cuenta la posibilidad de que parte de la producción en los pozos proviniera directamente de los bloques y no solo a través de las fracturas; en el modelo del autor el flujo puede ocurrir entre los bloques de matriz y las fracturas, o entre fracturas adyacentes, pero no entre bloques de matriz. El flujo entre la matriz y las fracturas es proporcional a un “factor de forma” generalmente representado como σ , y la fuerza de empuje es la diferencia de potencial entre un bloque de matriz y las fracturas circundantes.

Kazemi resolvió las ecuaciones de Barenblatt bajo las mismas consideraciones que Warren y Root,³⁶ obteniendo la solución siguiente:

$$p_{fD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0 \left[V_D \sqrt{s f(s)} \right]}{s} \right\}, \dots\dots\dots (5)$$

donde $f(s)$ se ha definido por medio de la Ec. (3). Las aproximaciones para las funciones Bessel que intervienen en la Ec. (5) permiten la transformación inversa y la solución obtenida en función del radio es:

$$p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ 0.80908 + \ln \left(\frac{t_D}{r_D^2} \right) + Ei \left[-\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - Ei \left[-\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right\}. \dots\dots\dots (6)$$

La solución se considera como una buena aproximación para $t_D > 100 r_D^2$

También encontró que en el caso de régimen transitorio (flujo USS, de las palabras “*Unsteady State*”), el periodo de transición tiene mayor duración que el correspondiente a flujo pseudoestacionario.

2.1.3. De Swaan¹²

El autor caracterizó el comportamiento de presión del YNF, considerando un modelo de transferencia analítico transitorio matriz-fractura (los parámetros empleados en su solución fueron la difusividad hidráulica de la matriz, en forma adimensional y el área de las fracturas por volumen total de roca).

De Swaan consideró un bloque de matriz sumergido totalmente en agua; es decir, sujeto a un cambio de saturación unitaria en su superficie, absorbiendo agua y liberando aceite a un ritmo que puede describirse por medio de una función exponencial decreciente.

$$\left(t \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{\sigma}{\mu_w L^2} \right)_{Modelo} = \left(t \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{\sigma}{\mu_w L^2} \right)_{Matriz} \dots \dots \dots (7)$$

El gasto de imbibición de agua hacia el bloque de matriz por unidad de longitud de fractura es:

$$q_{imb} = \frac{N_{maR}}{\tau_l} \int_0^t \exp^{-(t-\theta)/\tau_l} \frac{\partial S_w}{\partial \theta} d\theta \dots \dots \dots (8)$$

La ecuación de continuidad se expresa como sigue:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = h_f \phi_f \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{N_{maR}}{\tau_l} \int_0^t \exp^{-(t-\theta)/\tau_l} \frac{\partial S_w}{\partial \theta} d\theta.$$

La solución a la ecuación de continuidad obtenida por el autor está expresada por la Ec. (9):

$$S_w = \begin{cases} 0, & t < t_{if} \\ 1 - \exp^{-t/\tau_l} \int_0^{t_N/\tau_l} \exp^{-y} I_0(2\sqrt{ty/\tau_l}) dy, & t > t_{if} \end{cases} \dots \dots \dots (9)$$

donde t_{if} es el tiempo necesario de inyección de agua en las fracturas para la producción del aceite móvil y t_{iN} es el tiempo necesario de inyección de agua en la matriz para la producción del aceite recuperable.

En otros estudios se ha concluido que además de la expansión de fluidos, la reducción del volumen poroso, la diferencia de potencial entre la matriz y la fractura, la imbibición y la segregación gravitacional, las variables como la infiltración del aceite y la continuidad capilar influyen mucho en el comportamiento de la transferencia matriz-fractura, por lo que deben de considerarse en la simulación.

2.1.4. Rodríguez de la Garza²⁹

El autor se enfocó en el estudio y obtención de relaciones para describir el proceso de imbibición natural y al empleo de estas relaciones en modelos teóricos simples.

El enfoque empleado en este trabajo, consiste en que el yacimiento se considera como un medio de doble porosidad. Esto permitió formular dos problemas: 1) El problema de flujo en las fracturas y 2) el problema de flujo en los bloques de matriz, que permitió establecer una solución analítica para el intercambio de fluidos matriz-fractura por efectos de imbibición.

En el proceso de intercambio de fluidos el autor consideró que actúa solamente el fenómeno de imbibición, la presión capilar en las fracturas es aproximadamente cero, la permeabilidad relativa al agua se avalúa corriente arriba, esto es en las fracturas, y que las permeabilidades relativas en las fracturas varían linealmente con la saturación de agua

La ecuación que gobierna el proceso de desplazamiento lineal de aceite, que se origina en las fracturas es la siguiente:

$$-\frac{q}{A} \frac{\partial f_w}{\partial x} + q_{imb}(x,t) = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t}, \quad x > 0 \quad y \quad t > 0. \quad \dots\dots\dots (10)$$

sujeta a las condiciones inicial y de frontera siguientes:

$$S_w(x,0) = 0;$$

$$S_w(x,t) = 1.$$

El intercambio de fluidos matriz-fractura en los bloques de matriz se expresa por medio de la Ec. (11):

$$-q_{imb}(x,t) = \phi_m \frac{\partial S_{wm}}{\partial t}, \quad \dots\dots\dots (11)$$

sujeta a la condición de frontera siguiente:

$$S_{wm}(x,0) = S_{wim}.$$

La solución para la estimación de la saturación de agua en las fracturas es la siguiente:

$$S_{wm}(x_D, t_D) = J\left(\frac{x_D}{\theta}, t_D - \frac{\omega}{\theta} x_D\right), \quad \dots\dots\dots (12)$$

donde:

$$J(\chi, \psi) = \begin{cases} \exp[-(\chi + \psi)] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\psi}{\chi}}\right)^k I_k(2\sqrt{\chi\psi}), & \sqrt{\frac{\psi}{\chi}} \leq 1 \\ 1 - \exp[-(\chi + \psi)] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\psi}{\chi}}\right)^{-k} I_k(2\sqrt{\chi\psi}), & \sqrt{\frac{\psi}{\chi}} \geq 1 \end{cases};$$

$$x_D = \frac{x}{L};$$

$$t_D = \frac{\alpha p_{cmi} t}{\phi_m (1 - S_{wi} - S_{or})_m};$$

$$\theta = \frac{q/AL}{\alpha p_{cmi} \frac{k_m}{\mu_w}} ;$$

$$\omega = \frac{\phi}{\phi_m (1 - S_{or} - S_{wi})_m} .$$

La solución para la saturación de agua en los bloques de matriz está dada por la Ec. (13):

$$S_{wm}^* (x_D, t_D) = S_{wm} (x_D, t_D) - \exp \left\{ - \left[t_D + (1 - \omega) \right] \frac{x_D}{\theta} \right\} * I_0 \left[2 \sqrt{\frac{x_D}{\theta} \left(t_D - \frac{\omega}{\theta} x_D \right)} \right] . \dots\dots\dots (13)$$

El ritmo de imbibición en los bloques de matriz se obtiene empleando la ecuación siguiente:

$$q_{Dimb} (x_D, t_D) = S_{wm}^* (x_D, t_D) - S_{wm} (x_D, t_D) . \dots\dots\dots (14)$$

Esto es, el ritmo de imbibición en el punto x_D a cualquier tiempo t_D es directamente igual a la diferencia entre los valores de las saturaciones de agua normalizada en la matriz y en las fracturas.

2.2. Modelos de Entrada de Agua al Yacimiento

2.2.1. van Everdingen y Hurst^{10, 11, 28,34}

Para el manejo de la entrada de agua en yacimientos, es generalmente deseable que se tenga una descripción funcional del comportamiento del acuífero, la cual se obtiene por medio de las soluciones obtenidas por van Everdingen y Hurst en estado transitorio, para yacimientos homogéneos e isotrópicos. Este método utiliza un sistema de valores de permeabilidad, porosidad y compresibilidad; se requiere generalmente de

un ajuste de la historia de la presión promedio del yacimiento para determinar los mejores valores.

En la solución para el problema de entrada de agua al yacimiento propuesto por estos autores, se toman en cuenta las suposiciones siguientes: 1) Existe flujo radial de agua a través del acuífero, 2) La caída de presión es constante a través del acuífero durante todo el tiempo y 3) Las propiedades del acuífero son constantes y uniformes.

$$W_e = U \Delta p W_{eD}, \dots\dots\dots (15)$$

donde:

$$U = 1.119 f h \phi c_{w+f} r_a^2. \dots\dots\dots (16)$$

La ecuación para el tiempo adimensional en años es:

$$t_D = \frac{2.309 k t}{\phi \mu_w c_{w+f} r_a^2}. \dots\dots\dots (17)$$

Las soluciones de van Everdingen y Hurst también son útiles en estudios relacionados con el comportamiento de yacimientos fracturados.

2.2.2. Carter y Tracy^{2, 8}

Los autores emplearon la solución a gasto constante para la ecuación de difusividad, a diferencia de van Everdingen y Hurst, Carter y Tracy asumen gasto de flujo de agua constante en cada intervalo de tiempo finito. Utilizando la técnica de Carter y Tracy, la entrada acumulativa de agua a cualquier tiempo t_n , se puede calcular directamente con el valor obtenido anteriormente al tiempo t_{n-1} .

$$W_{en} = W_{e(n-1)} + \left[t_{Dn} - t_{D(n-1)} \right] \left[\frac{U \Delta p_n - W_{e(n-1)} p'_D(t_{Dn})}{p_D(t_{Dn}) - t_{D(n-1)} p'_D(t_{Dn})} \right], \dots\dots\dots (18)$$

donde U es la constante de entrada de agua de van Everdingen y Hurst definida por la Ec. (16), t_D es el tiempo adimensional en años definida por la Ec. (17), ambos para geometría de flujo radial; $p_D(t_{Dn})$ es la solución adimensional de Carter y Tracy de la ecuación de difusión al tiempo t_{Dn} , $p'_D(t_{Dn})$ es la primera derivada de $p_D(t_{Dn})$ con respecto a t_{Dn} y el subcripto n se refiere a un tiempo actual y $n-1$ a un tiempo previo. La solución para la presión es la siguiente:

$$p_n = \frac{1}{2C_n U} \left[-E_n + \sqrt{E_n^2 + 4(G - G_{pn}) K z_n C_n U} \right], \dots\dots\dots (19)$$

donde:

$$C_n = \frac{t_{Dn} - t_{D(n-1)}}{p_D(t_{Dn}) - t_{D(n-1)} p'_D(t_{Dn})};$$

$$K = \frac{T p_{cs}}{5.615 T_{cs}};$$

$$E_n = GK \frac{z_i}{p_i} + W_{pn} B_w - W_{e(n-1)} [1 - C_n p'_D(t_{Dn})] - C_n U p_i.$$

Entonces, la Ec. (18) puede reescribirse de la forma siguiente:

$$W_{en} = W_{e(n-1)} [1 - C_n p'_D(t_{Dn})] + C_n U \Delta p_n, \dots\dots\dots (20)$$

donde la caída de presión se expresa como:

$$\Delta p_n = p_i - p_n.$$

Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados

3.1. Balance de Materia

Dentro de los artículos y capítulos de libros utilizados como lectura previa para el desarrollo de esta tesis, en el Capítulo 5 del libro de Towler³², durante el estudio de la derivación de la EBM, se observó la duplicación de términos en la Ec. (5.21) de dicho procedimiento.

$$\begin{aligned}
 & N_{f oi} B_{oi} - (N_{f oi} + G_{f gi} R_{vi} - G_{f g} R_v - N_p) B_o \\
 & + G_{f gi} B_{gi} - (G_{f gi} + N_{f oi} R_{si} - N_{f o} R_s - G_p) B_g \\
 & + (-W_e) + B_w W_p - (N_{f oi} B_{oi} + G_{f gi} B_{gi}) c_t \Delta p \\
 & + \underbrace{(-W_e) + B_w W_p - (N_{f oi} B_{oi} + G_{f gi} B_{gi}) c_t \Delta p}_{\text{Términos duplicados}} = 0.
 \end{aligned}$$

Los términos anteriores se repetirían equivocadamente dentro de la ecuación final (5.23), que tendría dos veces la entrada de agua, la producción de agua, la expansión del agua y de la formación. La ecuación de balance de materia final en el capítulo mencionado es la correcta, la cual también se obtuvo en esta tesis:

$$\begin{aligned}
 & N_p \left(\frac{B_o - R_s B_g}{1 - R_v R_s} \right) + G_p \left(\frac{B_g - R_v B_o}{1 - R_v R_s} \right) \\
 &= N_{f oi} \left\{ \frac{[B_o - B_{oi} + B_g (R_{si} - R_s) + R_v (B_{oi} R_s - B_o R_{si})]}{1 - R_v R_s} \right\} \\
 &+ G_{f gi} \left\{ \frac{[B_g - B_{gi} + B_o (R_{vi} - R_v) + R_s (B_{gi} R_v - B_g R_{vi})]}{1 - R_v R_s} \right\} \\
 &+ W_e - B_w W_p + (N_{f oi} B_{oi} + G_{f gi} B_{gi}) \left(\frac{S_{wi} c_w + c_f}{1 - S_w} \right) \Delta p. \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

Lo expuesto anteriormente tiene la finalidad de ayudar al lector en caso de tener la necesidad de desarrollar la derivación de la EBM.

3.2. Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados, Considerando una Formación de Doble Porosidad²⁷

La EBM para yacimientos naturalmente fracturados, utiliza un modelo matemático, que considera un fluido de tipo aceite negro originalmente bajosaturado, en un medio poroso compuesto de sistemas interdependientes de matriz y fractura.

Una de las suposiciones básicas de la EBM convencional, es que las propiedades de la roca como la porosidad y la compresibilidad tienden a presentar cierta uniformidad. Para un medio de doble porosidad, en YNF, esta consideración no es válida. La variación de la porosidad de la fractura y matriz con respecto a la presión, muestran que las fracturas son altamente compresibles comparadas con la compresibilidad de la matriz, en la forma mostrada en la **Fig. 1**.

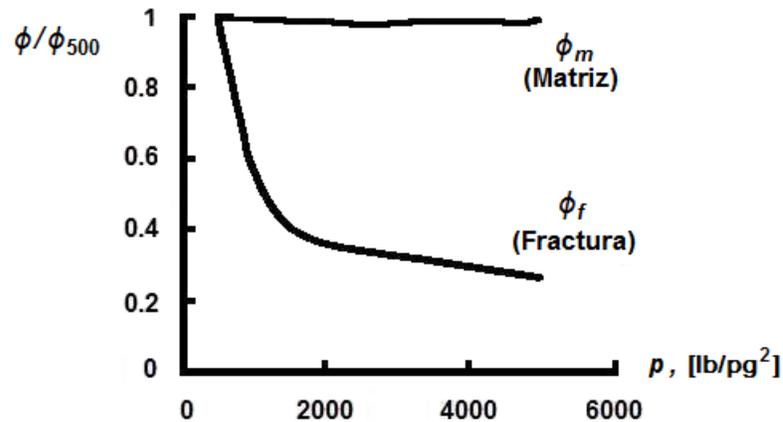


Fig. 1.- Porosidad normalizada del sistema de fracturas y matriz (con respecto a una presión de confinamiento efectiva de 500 lb/pg^2).²⁷

La ecuación que se presenta en esta sección puede aplicarse a un YNF que contiene aceite negro originalmente bajosaturado, almacenado parcialmente en un medio poroso (matriz), que se produce a través de una red de fracturas.

3.2.1. Consideraciones del Modelo²⁷

La derivación de la EBM para un yacimiento volumétrico (cerrado en su frontera externa) está basada en las consideraciones siguientes:

1. El yacimiento es un sistema isotérmico.
2. El yacimiento está compuesto de cuatro componentes: reserva de aceite, gas superficial, producción de agua y roca naturalmente fracturada.
3. La reserva está compuesta de cuatro fases: aceite, gas, agua y roca naturalmente fracturada.
4. En los yacimientos, el componente gas superficial existe libremente en la fase de gas y se disuelve en la fase de aceite.
5. La fase roca está compuesta de dos comunicaciones hidráulicas: el sistema fracturado y el sistema de matriz-roca (porosidad primaria).
6. Las fracturas y la matriz son compresibles.

7. No hay inyección de fluido (agua y/o gas) dentro del yacimiento.
8. La porosidad de la fractura, la porosidad de la matriz-roca y la saturación inicial de agua son uniformes en todo el yacimiento.
9. La presión es uniforme por todo el yacimiento.

La forma general de la EBM para yacimientos naturalmente fracturados es la siguiente:²⁷

$$\begin{aligned}
 & N_m \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] \\
 & + N_f \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wfi} c_w + c_f}{1 - S_{wfi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] \\
 & = N_p \left[B_o + (R_p - R_s) B_g \right], \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

donde N_m es el aceite original *in-situ* en la matriz de la roca y N_f es el aceite original *in-situ* en el sistema de fracturas, N_p es la producción acumulativa de aceite y R_p es la razón de producción acumulativa gas-aceite. La derivación de la ecuación se incluye en el Apéndice A.

3.3. Solución Gráfica de la Ecuación de Balance de Materia

Un método de solución para la EBM fue presentada por Havlena y Odeh¹⁷. Este método, conocido como el método de línea recta, consiste de arreglar la EBM para obtener grupos variables que al graficarse resultan en una línea recta.

Definiendo las variables siguientes:

$$F = N_p \left[B_o + (R_p - R_s) B_g \right]; \dots\dots\dots (23)$$

$$E_{om} = B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s)B_g + \left(\frac{S_{wmi}c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} ; \dots\dots\dots (24)$$

$$E_{of} = B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s)B_g + \left(\frac{S_{wfi}c_w + c_f}{1 - S_{wfi}} \right) \Delta p B_{oi} ; \dots\dots\dots (25)$$

donde E_{om} representa la expansión de la fase aceite original en el sistema de matriz y E_{of} es la expansión de la fase aceite original en la red de fracturas.

La Ec. (22) puede expresarse en la forma compacta siguiente:

$$F = N_m E_{om} + N_f E_{of} . \dots\dots\dots (26)$$

La EBM para yacimientos naturalmente fracturados puede escribirse en una forma alterna dividiendo la Ec. (26) por E_{om} , obteniéndose:

$$\frac{F}{E_{om}} = N_m + N_f \frac{E_{of}}{E_{om}} . \dots\dots\dots (27)$$

Por lo tanto, una gráfica de F/E_{om} contra E_{of}/E_{om} resultará en una línea recta con pendiente N_f y N_m es la intercepción (al origen) con respecto al eje y. En la **Fig. 2**, se ilustra este diagnóstico.

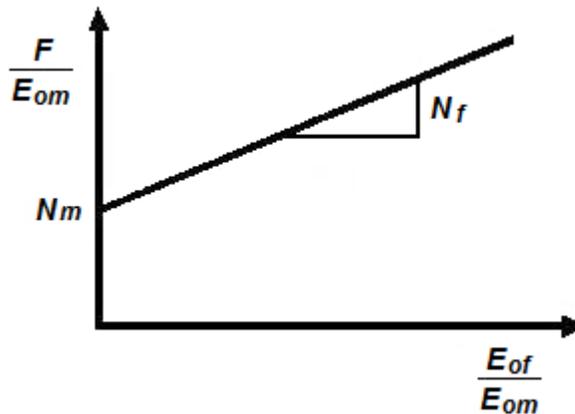


Fig. 2.- Gráfica de un YNF fracturado, originalmente bajosaturado.^{11, 17}

Cálculo de la Entrada de Agua Proporcionalada por un Acuífero Naturalmente Fracturado

4.1. Modelo de Closmann de un Acuífero para Yacimientos Naturalmente Fracturados⁹

Este modelo se considera para el uso en yacimientos fracturados carbonatados, donde hay dos tipos básicos de roca, definidos en términos de porosidad. En estos casos la permeabilidad de la matriz es generalmente mucho más pequeña que la permeabilidad de la fractura.

La matriz puede considerarse como un compuesto de variaciones amplias buenas y malas, que se encuentran a menudo en yacimientos carbonatados; las designaciones de buenas y malas son en gran parte arbitrarias. Un ejemplo sería: buena porosidad mayor de 12% y mala porosidad de 2 a 12%, con el resto de la roca no productiva. En algunos casos, puede ser suficiente especificar solo un tipo de roca.

Para el caso de presión constante en el contacto original agua-aceite (COAA), el modelo para el yacimiento fracturado, incluirá las características adicionales de las condiciones de frontera y de dos tipos básicos de roca. La ecuación determina la distribución de la presión y de ella una función de entrada acumulativa de agua adimensional.

4.2. Consideraciones del Modelo⁹

Con excepción de la introducción de los dos tipos de roca, las consideraciones empleadas en el modelo de Closmann⁹ son similares a las de Warren y Root:³⁶

1. La porosidad primaria o de la matriz se puede dividir en dos tipos básicos, buenas y malas. La matriz está compuesta de un conjunto de paralelepípedos rectangulares idénticos en tamaño y forma. Algunos de estos bloques proporcionan una buena porosidad al sistema y otros proporcionan una mala porosidad.
2. La porosidad secundaria está contenida en un sistema de fracturas ortogonales, orientadas de modo que cada una sea paralela a uno de los ejes principales de la permeabilidad. Las fracturas son de ancho uniforme.
3. El flujo puede ocurrir solamente de la matriz a las fracturas, y a través de las fracturas al límite interno del acuífero.

Aplicando las leyes de conservación de masa, Darcy y una ecuación de estado, el flujo de agua del Acuífero Naturalmente Fracturado (ANF) hacia la zona original de aceite, puede describirse por medio de las ecuaciones siguientes:

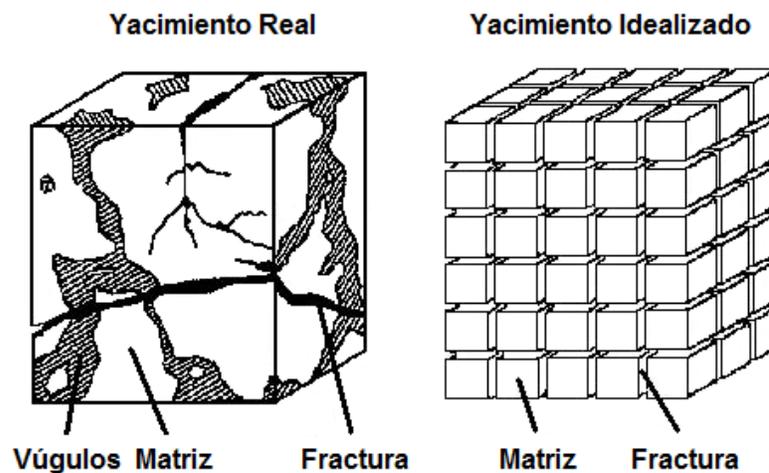


Fig. 3.- Idealización heterogénea del medio poroso naturalmente fracturado.³⁶

4.2.1. Caso Radial

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\mu \phi_f c_f}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu \phi_{m1} c_{m1} \beta_1 (1 - \beta)}{k_f \beta} \frac{\partial p_{m1}}{\partial t} + \frac{\mu \phi_{m2} c_{m2} \beta_2 (1 - \beta)}{k_f \beta} \frac{\partial p_{m2}}{\partial t}, \dots (28)$$

donde β es la fracción de volumen total de las fracturas, β_1 es la fracción de volumen de roca buena en la matriz y β_2 es la fracción de volumen de roca mala en la matriz.

El flujo de fluidos de la matriz hacia las fracturas se considera que se presenta bajo condiciones pseudoestacionarias, expresada por medio de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial p_{m1}}{\partial t} = - \frac{\alpha k_{m1}}{\mu \phi_{m1} c_{m1}} (p_{m1} - p_f); \dots (29)$$

$$\frac{\partial p_{m2}}{\partial t} = - \frac{\alpha k_{m2}}{\mu \phi_{m2} c_{m2}} (p_{m2} - p_f), \dots (30)$$

donde α es el factor de forma para los bloques del yacimiento. Este factor de forma tiene unidades del recíproco del área y se calcula por medio de las dimensiones del bloque del yacimiento ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 de acuerdo al procedimiento propuesto por Warren y Root³⁶.

Las Ecs. (28) a (30) describen completamente el flujo de agua en el ANF, sujetos a las condiciones siguientes:

Inicial.

$$p_f = p_{m1} = p_{m2} = p_i; \quad r_a \leq r \leq r_e; \quad t = 0. \dots (31)$$

De frontera interna.

$$p_f = p_a; \quad r = r_a; \quad t > 0. \dots (32)$$

De frontera externa.

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = 0 ; \quad r = r_e ; \quad t > 0. \quad \dots\dots\dots (33)$$

La solución para la presión en las fracturas p_f , se incluye en el Apéndice B.

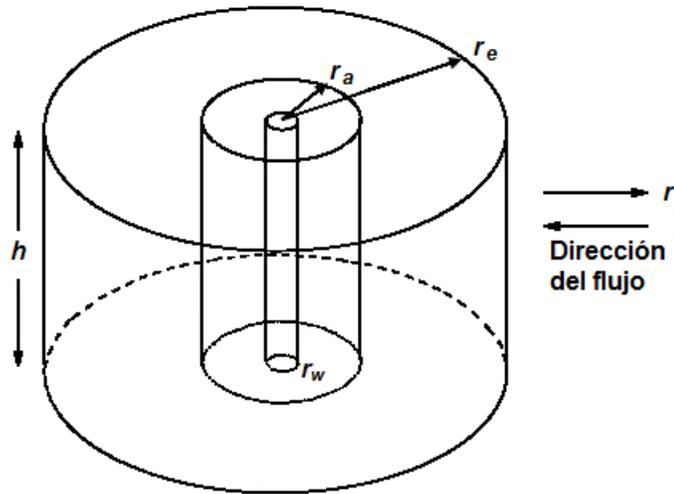


Fig. 4.- Volumen de control para la derivación de la ecuación de continuidad para el flujo radial.¹⁴

La entrada acumulativa de agua se expresa por medio de la Ec. (34):

$$W_e = 2 \pi r_a h \beta \int_0^t \frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial r} \right)_{r=r_a} dt', \quad \dots\dots\dots (34)$$

donde el agua que fluye hacia el yacimiento desde el acuífero se define como positiva. Podemos expresar la entrada de agua acumulativa dimensional W_e como una función de la entrada de agua acumulativa adimensional W_{eD} , como sigue:

$$W_e = 2 \pi \phi_f c_f \beta r_a^2 h (p_i - p_a) \left\{ \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right) \right\}. \quad \dots\dots (35)$$

En unidades del sistema inglés W_e puede expresarse:

$$W_e = 1.119 \phi_f c_f \beta r_a^2 h (p_i - p_a) W_{eD} \quad bl_w @ c.y., \dots\dots\dots (36)$$

donde:

$$W_{eD} = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right). \dots\dots\dots (37)$$

La función W_{eD} se deriva en el Apéndice B.

4.3. Cálculo del la Entrada Adimensional de Agua

La sumatoria de la Ec. (37) se evalúa para cada una de las raíces de la Ec. (B-13); debido a que el procedimiento de cálculo en la sumatoria es análogo para cada una de las raíces, en esta tesis se presenta el cálculo únicamente para la primera raíz, obtenida empleando la Ec. (B-13); la tabla de valores obtenidos por medio de este procedimiento incluye la de cada una de las raíces.

Para efectuar este procedimiento es necesario calcular los parámetros que intervienen en la Ec. (37).

Tabla 1.- Datos del sistema yacimiento-acuífero.

DATOS	
Alto del bloque l_1 , pies	456
Largo del bloque l_2 , pies	500
Ancho del bloque l_3 , pies	1,000
Permeabilidad de la matriz tipo 1 k_{m1} , md	2
Permeabilidad de la matriz tipo 2 k_{m2} , md	0.3
Permeabilidad de las fracturas k_f , darcy	1,000
Porosidad de la matriz tipo 1 ϕ_{m1}	0.18
Porosidad de la matriz tipo 2 ϕ_{m2}	0.12
Porosidad de las fracturas ϕ_f	0.02
Compresibilidad de la matriz tipo 1 c_{m1} , [lb/pg ²] ⁻¹	4.1x10 ⁻⁶
Compresibilidad de la matriz tipo 2 c_{m2} , [lb/pg ²] ⁻¹	4.7x10 ⁻⁶
Compresibilidad de las fracturas c_f , [lb/pg ²] ⁻¹	30x10 ⁻⁶
Viscosidad del agua μ_w , cp	0.55
Radio interno del acuífero r_a , pies	14,361,6
Radio externo del acuífero r_e , pies	143,616
Altura del yacimiento h , pies	913
Fracción del volumen total de las fracturas β	0.0015
Fracción del volumen de roca de la matriz tipo 1 β_1	1.0
Fracción del volumen de roca de la matriz tipo 2 β_2	0.0

Por medio de la ecuación Ec. (B-2b) se calcula el radio externo adimensional:

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_a} = \frac{14,361.6}{143,616} = 10[adim].$$

El factor de forma se calcula por medio de las Ecs. (B-9a) y (B-9b):

$$\ell = \frac{3l_1l_2l_3}{l_1l_2 + l_2l_3 + l_3l_1} = \frac{3(456)(500)(1,000)}{(456)(500) + (500)(1,000) + (1,000)(456)} = 577.703[pies];$$

$$\alpha = \frac{60}{\ell^2} = \frac{60}{577.703} = 0.0001798 \left[\frac{1}{pies^2} \right].$$

Para los términos adimensionales siguientes se emplean las Ecs. (B-6a) y (B-6b).

$$\gamma_1 = \frac{(1-\beta)}{\beta} \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} = \frac{(1-0.0015)}{0.0015} (1) \frac{(0.18)(4.1 \times 10^{-6})}{(0.02)(30 \times 10^{-6})} = 818.77[adim];$$

$$\gamma_2 = \frac{(1-\beta)}{\beta} \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} = \frac{(1-0.0015)}{0.0015} (0) \frac{(0.12)(4.7 \times 10^{-6})}{(0.02)(30 \times 10^{-6})} = 0.00[adim].$$

De las Ecs. (B-7a) y (B-8a) se obtiene:

$$\delta_1 = 0.001 \frac{\alpha k_{m1} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m1} c_{m1}}$$

$$\delta_1 = 0.001 \frac{(0.0001798)(2)(0.02)(30 \times 10^{-6})(14,361.6^2)}{(1,000)(0.18)(4.1 \times 10^{-6})} = 0.0603 [adim];$$

$$\delta_2 = 0.001 \frac{\alpha k_{m2} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m2} c_{m2}}$$

$$\delta_2 = 0.001 \frac{(0.0001798)(0.3)(0.02)(30 \times 10^{-6})(14,361.6^2)}{(1,000)(0.12)(4.7 \times 10^{-6})} = 0.0118 [adim].$$

De la Ec. (B-27d), el denominador no tiene cambios de signo en la ecuación de tercer grado $\sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c$; por lo tanto, tiene tres raíces reales negativas. Para calcular los términos a , b y c Ecs. (B-27a), (B-27b) y (B-27c) respectivamente, se necesita obtener el valor de s , el cual se calculó al resolver la Ec. (B-13) por medio del procedimiento descrito en el Apéndice B. Para obtener las soluciones, se empleó el programa MATEMÁTICA 6; como se muestra en la **Fig. 5**, se obtuvieron las raíces de la Ec. (B-13) para un valor de $r_{eD} = 10$, los valores se incluyen en la **Tabla 2**.

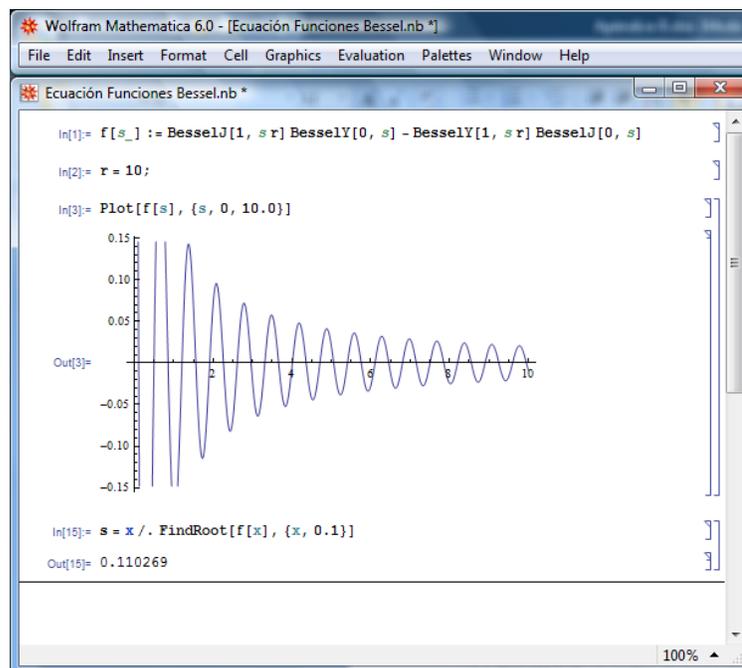


Fig. 5.- Raíces de la ecuación $J_1(s r_{eD})Y_0(s) - Y_1(s r_{eD})J_0(s) = 0$.

Tabla 2.- Raíces de la Ec. (B-13) y expresión en términos de funciones de Bessel.

s	$\frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})}$
0.110269	0.003507
0.497884	0.033770
0.855429	0.090107
1.20868	0.172846
1.56029	0.282218
1.91107	0.418374
2.26138	0.581407
2.61138	0.771378
2.96118	0.988328
3.31083	1.23228
3.66038	1.50326
4.00985	1.80128
4.35926	2.12634
4.70862	2.47846
5.05794	2.85763
5.40722	3.26387
5.75648	3.69717
6.10572	4.15754
6.45495	4.64498
6.80415	5.15948
7.15334	5.70106
7.50253	6.26972
7.85170	6.86544
8.20086	7.48824
8.55001	8.13811
8.89916	8.81506
9.24830	9.51909
9.59744	10.25020
9.94657	11.00840

La primera raíz de la Ec. (B-13) es $s=0.110269$; con el valor de s y los obtenidos previamente se evalúan los términos a , b y c .

$$a = \delta_1 + \delta_2 + s^2 + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2$$

$$a = 0.0603 + 0.0118 + (0.110269)^2 + (818.77)(0.0603) + (0.0)(0.0118) = 49.4511[adim];$$

$$b = \delta_1 \delta_2 (1 + \gamma_1 + \gamma_2) + s^2 (\delta_1 + \delta_2)$$

$$b = (0.0603)(0.0118)(1 + 818.77 + 0.0) + (0.110269)^2 (0.0603 + 0.0118) = 0.5858[adim];$$

$$c = s^2 \delta_1 \delta_2 = (0.110269)^2 (0.0603)(0.0118) = 0.00000868[adim].$$

Con base en lo anterior se obtuvieron las tres raíces de la ecuación de tercer grado, como se ilustra en la **Fig. 6**.

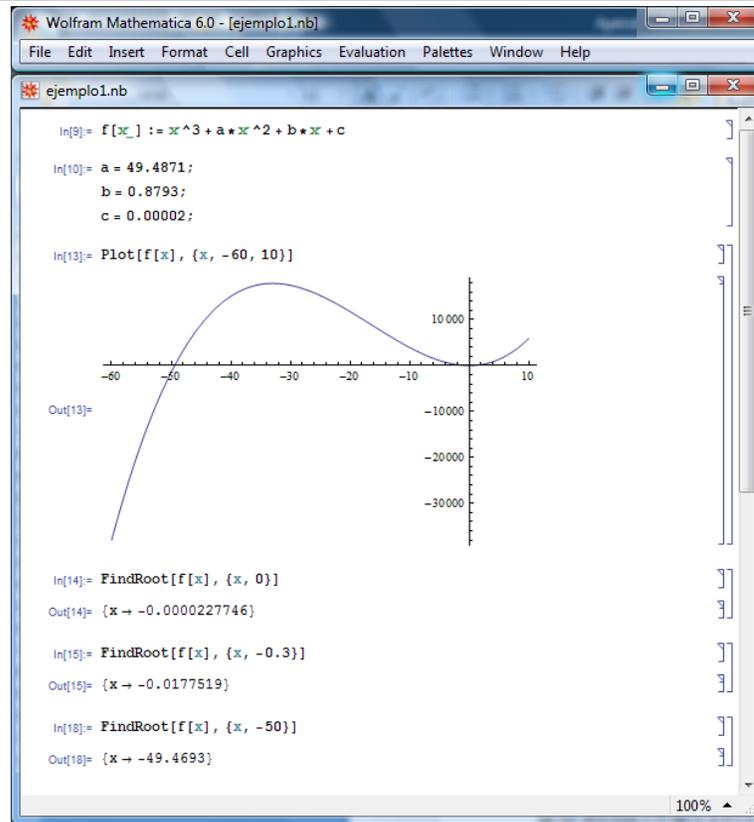


Fig. 6.- Raíces reales negativas de la ecuación cúbica $\sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c$.

$$\xi_1 = -0.0000148359;$$

$$\xi_2 = -0.011834;$$

$$\xi_3 = -49.4393.$$

Los términos M , N y S que se emplean en la Ec. (37), se obtienen de las Ecs. (B-29a), (B-29b) y (B-29c), respectivamente:

$$M = \frac{\xi_1^2 - \xi_1(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}$$

$$M = \frac{(-0.00001484)^2 - (-0.00001484)(0.0603 + 0.0118) + (0.0603)(0.0118)}{(-0.00001484 - (-0.011834))(-0.00001484 - (-49.4393))} = 0.00122[adim];$$

$$N = \frac{\xi_2^2 - \xi_2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}$$

$$N = \frac{(-0.011834)^2 - (-0.011834)(0.0603 + 0.0118) + (0.0603)(0.0118)}{(-0.011834 - (-0.00001484))(-0.011834 - (-49.4393))} = -0.00292[adim];$$

$$S = \frac{\xi_3^2 - \xi_3(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}$$

$$S = \frac{(-49.4393)^2 - (-49.4393)(0.0603 + 0.0118) + (0.0603)(0.0118)}{(-49.4393 - (-0.00001484))(-49.4393 - (-0.011834))} = 1.0017[adim].$$

Para el cálculo del tiempo adimensional se empleó un valor de $t = 0.1$ [años].

$$t_D = \frac{2,309 k_f t}{\phi_f \mu_w c_f r_a^2} = \frac{2,309(1,000)(0.1)}{(0.02)(0.55)(30 \times 10^{-6})(14,361.6)^2} = 3,392[adim].$$

La **Fig. 7**, muestra la solución de la expresión $s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD}) / [J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})]$, incluida en la sumatoria de la Ec. (37), cuyos términos son las funciones de Bessel y la primera raíz de la Ec. (B-13). Los valores se listan en la **Tabla 2**.

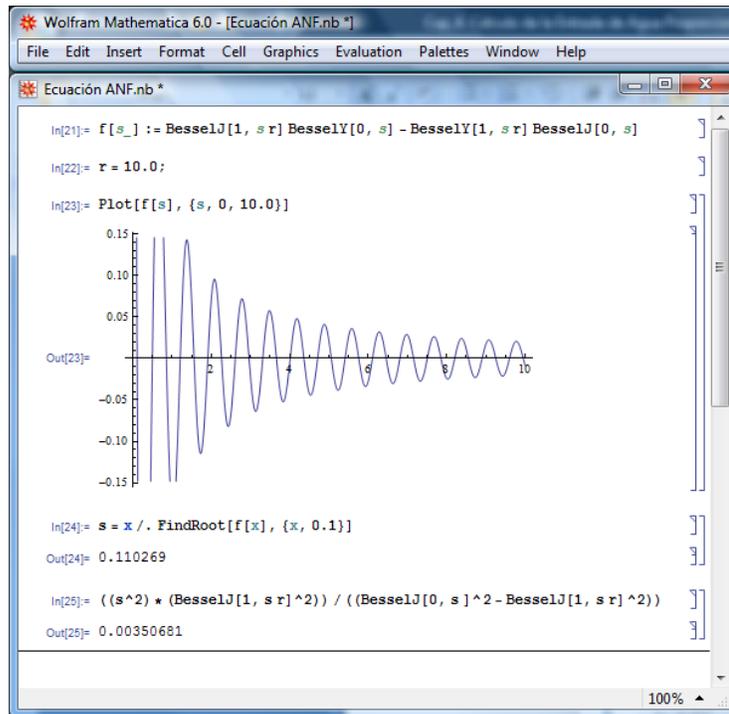


Fig. 7.- Solución de la función $s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD}) / [J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})]$

El valor obtenido empleando la primera raíz de la Ec. (B-13), s y el radio adimensional $r_{eD} = 10$ es 0.003507.

La Ec. (37) se puede reescribir en una forma más compacta empleando los términos definidos y calculados previamente.

$$W_{eD} = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \{1 + \gamma_1 + \gamma_2\} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right);$$

$$W_{eD} = \frac{10^2 - 1}{2} \{1 + 818.77 + 0.00\} - 2(0.003507) * \left[\frac{0.00122}{(-0.00001484)^2} \exp^{-0.00001484 * 3,392} + \frac{-0.00292}{(-0.011834)^2} \exp^{-0.011834 * 3,392} + \frac{1.0017}{(-49.4393)^2} \exp^{-49.4393 * 3,392} \right] = 3,520 [adim].$$

Los resultados para los periodos de tiempo diferentes se incluyen en la **Tabla 3**.

La **Fig. 8**, ilustra el comportamiento de la entrada de agua adimensional, W_{eD} contra el tiempo adimensional t_D , empleando el modelo descrito por la Ec. (37) para un ANF, para un radio adimensional $r_{eD} = 10$, fracción de volumen de fracturas $\beta = 0.0015$, fracción de volumen de matriz tipo 1 $\beta_1 = 1$ y considerando un solo tipo de roca, por lo tanto, la fracción de volumen de matriz tipo 2 es $\beta_2 = 0$.

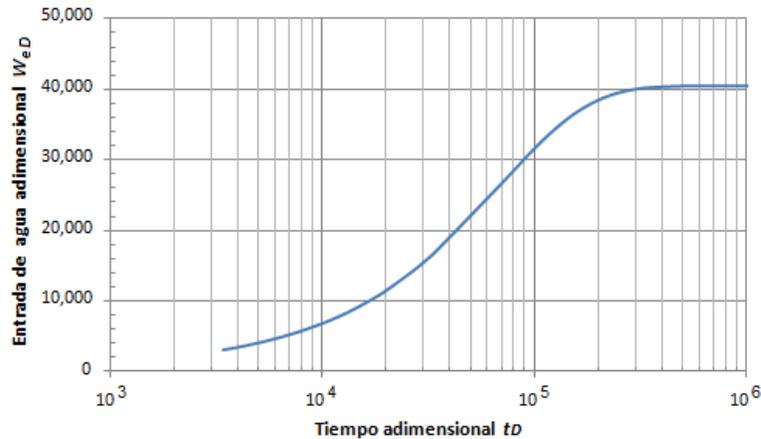


Fig. 8.- Entrada de agua adimensional del ANF

Tabla 3.- Entrada de agua adimensional para un radio adimensional $r_{eD} = 10$, para
 1) Cloosmann (ANF), 2) van Everdingen y Hurst (VEH homogéneo) y 3) Cloosmann (Homogéneo).

ANF		VEH		Cloosmann	
t_D	W_{eD}	t_D	W_{eD}	t_D	W_{eD}
339	434	15	9.97	3	1.60
678	944	20	12.32	7	4.37
1,357	1,626	22	13.22	10	6.39
2,035	2,187	24	14.05	14	8.21
2,714	2,690	26	14.95	17	9.91
3,392	3,158	28	15.78	20	11.53
4,410	3,815	30	16.59	24	13.07
5,428	4,433	32	17.38	27	14.54
6,446	5,023	34	18.16	31	15.96
7,463	5,590	36	18.91	34	17.31
8,481	6,140	38	19.65	41	19.86
10,177	7,024	40	20.37	47	22.21
11,873	7,875	42	21.07	54	24.37
13,570	8,697	44	21.76	61	26.36
16,962	10,272	46	22.42	68	28.19
20,354	11,763	48	23.07	102	35.39
27,139	14,524	50	23.71	136	40.16
30,531	15,803	52	24.33	170	43.32
33,924	17,019	54	24.94	204	45.41
67,848	26,336	56	25.53	237	46.79
101,771	31,968	58	26.11	271	47.71
135,695	35,373	60	26.67	305	48.31
169,619	37,432	65	28.02	339	48.71
203,543	38,676	70	29.29	678	49.49
237,467	39,429	75	30.49	1,018	49.50
271,390	39,883	80	31.61	1,357	49.50
305,314	40,158	85	32.67	1,696	49.50
339,238	40,325	90	33.66	2,035	49.50
508,857	40,558	95	34.60	2,375	49.50
678,476	40,557	100	35.48	2,714	49.50
1,356,952	40,579	120	38.51	3,053	49.50
1,696,189	40,579	140	40.89	3,392	49.50
2,374,665	40,579	160	42.75	6,785	49.50
3,053,141	40,579	180	44.21	10,177	49.50
3,731,617	40,579	200	45.36	13,570	49.50
4,070,855	40,579	240	46.95	16,962	49.50
4,410,092	40,579	280	47.94	20,354	49.50
5,088,568	40,579	320	48.54	23,747	49.50
		360	48.91		
		400	49.14		
		440	49.28		
		480	49.36		

La **Fig. 9**, compara los resultados para la entrada adimensional de agua obtenidos empleando la Ec. (37) con los calculados utilizando el método de van Everdingen y Hurst para un yacimiento homogéneo (valores tomados de la referencia 10); para el ejemplo, se tendrán que cambiar los parámetros siguientes: fracción de volumen de fracturas $\beta = 0.0$ (acuífero homogéneo), fracción de volumen de matriz tipo 1 $\beta_1 = 0.5$, fracción de volumen de matriz tipo 2 $\beta_2 = 0.5$ y la permeabilidad de las fracturas $k_f = 10$ darcys; los datos empleados en ambos casos corresponden a una dimensión radial adimensional acuífero-yacimiento de $r_{eD} = 10$. Los resultados para otros tiempos se incluyen en la **Tabla 3**.

Las curvas de la **Fig. 9** no presentan un ajuste claro a tiempos cortos; sin embargo, para tiempos largos las curvas se ajustan perfectamente. Es decir, para las propiedades particulares de este ANF, a partir de un tiempo t_D de 70 la entrada de agua coincide con la entrada de agua correspondiente a un acuífero homogéneo.

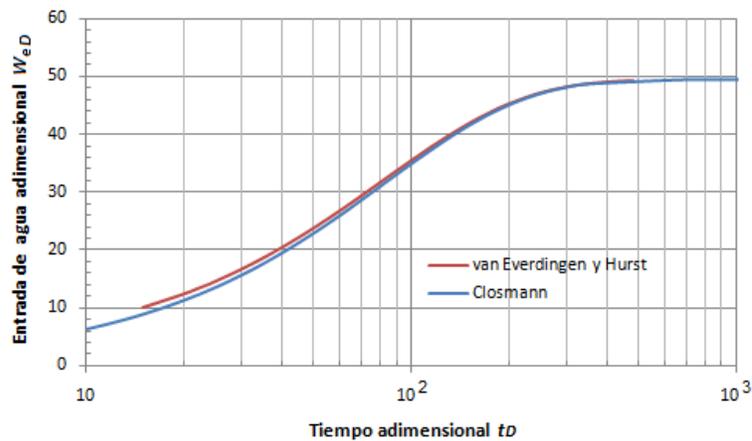


Fig. 9.- Comparación de métodos de entrada de agua adimensional.

Ecuación de Balance de Materia Modificada para un Yacimiento de Gas Homogéneo, Considerando la Saturación de Gas Residual en la Zona Invadida de Agua

5.1. EBM Modificada para un Yacimiento de Gas con Empuje de Agua

Lutes y cols.²⁴ presentaron un modelo que predice el desempeño de la producción de yacimientos de gas en condiciones de empuje de agua. El modelo incorpora una técnica modificada de entrada de agua, la cual describe gradientes de presión y efectos de la permeabilidad relativa a través de la región invadida por agua en el yacimiento. Con base en lo anterior la EBM expresada por la Ec. (38),

$$GB_{gi} = (G - G_p)B_g + W_e [bl_{c.y.}] \dots\dots\dots (38)$$

se modificó para incluir el término de gas atrapado, como sigue:

$$GB_{gi} = (G - G_p - G_t)B_g + G_t B_{gt} + W_e [bl_{c.y.}] \dots\dots\dots (39)$$

Reacomodando términos en esta Ec. (39) se obtiene:

$$GB_{gi} = GB_g - G_p B_g - G_t B_g + G_t B_{gt} + W_e;$$

$$G_p B_g = GB_g - GB_{gi} - G_t B_g + G_t B_{gt} + W_e;$$

$$G_p B_g = G(B_g - B_{gi}) + G_t(B_{gt} - B_g) + W_e [bl_{c.y.}] \dots\dots\dots (40)$$

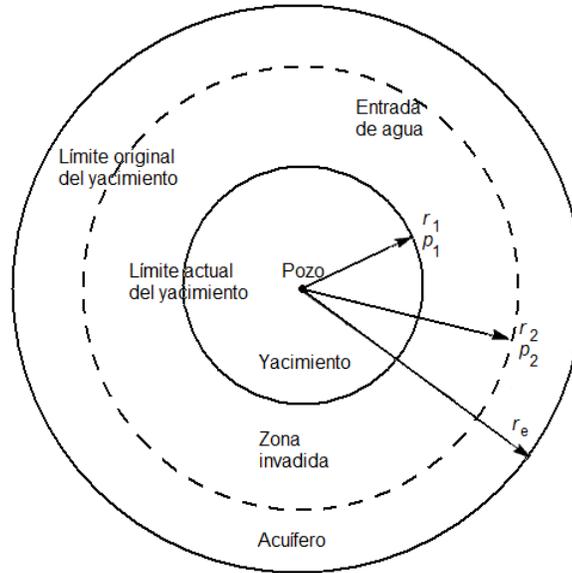


Fig. 10.- Modelo del yacimiento para la EBM modificada; donde r_2 es el radio del contacto original agua-gas, r_1 es el radio del nuevo contacto agua-gas a un tiempo t , p_2 es la presión inicial en r_2 y p_1 es la presión en r_1 al tiempo t .^{19, 24}

5.2. Procedimiento para Estimar el Volumen de Gas Atrapado en la Región Invasada por Agua y la Entrada de Agua al Yacimiento de Gas

Las ecuaciones y el procedimiento del cálculo del balance de materia, presión del yacimiento y entrada de agua, presentadas por Lutes y cols.^{19, 24}, se resumen a continuación:

- 1) Calcular el radio original del yacimiento (contacto agua-gas), Ec. (C-3).

$$r_2 = \left[\frac{5.615 G B_g}{\pi h \phi (1 - S_{wi})} \right]^{1/2} \text{ [pies]}. \dots\dots\dots (41)$$

- 2) Para una cierta producción de gas G_p , suponer (proponer) una presión p_2 [lb/pg²] en el contacto original agua-gas del yacimiento.

3) Empleando el método de Carter y Tracy^{2, 8} se calcula la entrada de agua W_e asociada con la presión p_2 .

$$W_{en} = W_{e(n-1)} + (t_{Dn} - t_{D(n-1)}) \frac{U \Delta p_n - W_{e(n-1)} p'_D(t_{Dn})}{p_D(t_{Dn}) - t_{D(n-1)} p'_D(t_{Dn})} [bl_{c.y.}], \dots\dots\dots (42)$$

donde:

$$\Delta p_n = (p_i - p_n) [lb/pg^2].$$

Para el uso de la ecuación de entrada de agua de Carter y Tracy, es necesario especificar la presión adimensional $p_D(t_D)$ y la primera derivada $p'_D(t_D)$. Para un acuífero radial se tiene:²

$$p_D(t_D) = 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}}, \quad t_D \leq 0.01; \dots\dots\dots (43)$$

$$p_D(t_D) = \frac{370.529\sqrt{t_D} + 137.582 t_D + 5.69549 t_D \sqrt{t_D}}{328.834 + 265.488\sqrt{t_D} + 45.2157 t_D + t_D \sqrt{t_D}}, \quad 0.01 < t_D < 500; \dots (44)$$

$$p_D(t_D) = \left(\frac{\ln(t_D)}{2} + 0.40454 \right) \left(1 + \frac{1}{2t_D} \right) + \frac{1}{4t_D}, \quad t_D > 500. \dots\dots\dots (45)$$

Para la primera derivada se tiene:

$$p'_D(t_D) = \frac{1}{\sqrt{\pi t_D}}, \quad t_D \leq 0.01; \dots\dots\dots (46)$$

$$p'_D(t_D) = \frac{716.441 + 46.7984\sqrt{t_D} + 270.038 t_D + 71.0098 t_D \sqrt{t_D}}{1269.86\sqrt{t_D} + 1204.73 t_D + 618.618 t_D \sqrt{t_D} + 538.072 t_D^2 + 142.41 t_D^2 \sqrt{t_D}}, \quad 0.01 < t_D < 500; \dots\dots\dots (47)$$

$$p'_D(t_D) = \frac{1}{2t_D} - \frac{1}{2t_D^2} \left(\frac{\ln(t_D)}{2} + 0.40454 \right), \quad t_D > 500. \dots\dots\dots (48)$$

4) Calcular el radio de la zona no invadida, Ec. (C-4).

$$r_1 = \left[r_2^2 - \frac{5.615 W_e}{\pi h \phi (1 - S_{gr} - S_{wi})} \right]^{1/2} \text{ [pies]}. \dots\dots\dots (49)$$

5) Considerando flujo radial calcular la presión p_1 , que se tiene en el frente del agua de invasión, Ec. (C-9).

$$p_1 = p_2 - \frac{141.24 q_w \mu_w \ln(r_2/r_1)}{k_{rw} k h} \left[\frac{lb}{pg^2} \right], \dots\dots\dots (50)$$

donde:

$$q_w = \frac{\Delta W_e}{\Delta t} \left[\frac{bl_{w@c.y.}}{día} \right].$$

6) Calcular la presión promedio \bar{p} , en la región invadida por agua. La derivación de la Ec. (51) se incluye en el Apéndice C, Ec. (C-14):

$$\bar{p} = p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\frac{1}{4} - \frac{r_1^2}{2} \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] \left[\frac{lb}{pg^2} \right]. \dots\dots\dots (51)$$

7) Calcular el volumen de gas atrapado G_t , en la región invadida. La derivación de la Ec. (52) se incluye en el Apéndice D:

$$G_t = X \left(p_2 - \frac{Y}{2} \right) (r_2^2 - r_1^2) + X Y r_1^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \text{ [pies}^3_{c.e.}], \dots\dots\dots (52)$$

donde:

$$X = 111.23 \frac{h \phi S_{gr}}{\bar{z} T} \text{ [pies]};$$

$$Y = \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} [1].$$

8) A partir de la Ec. (40), estimar W_e .

$$\left. \begin{aligned} B_{gt} &= 0.00503 \frac{\bar{z} T}{\bar{p}} \left[\frac{bl_{c.y.}}{pies^3_{c.e.}} \right] \\ B_g &= 0.00503 \frac{z_1 T}{p_1} \left[\frac{bl_{c.y.}}{pies^3_{c.e.}} \right] \end{aligned} \right\}; \dots\dots\dots (53)$$

$$W_e = G_p B_g - G(B_g - B_{gi}) - G_t(B_{gt} - B_g) [bl_{c.y.}]. \dots\dots\dots (54)$$

9) Compare el valor para la entrada de agua W_e obtenida en el paso 8 con la estimación para W_e calculada en el paso 3; si los valores no están dentro de una tolerancia específica, repetir los pasos del 2 al 9.

Los cálculos de balance se realizan para determinar la cantidad de gas atrapado y para cuantificar la magnitud probable de la presión detrás del frente de agua.

5.3. Representación Gráfica de la Ecuación de Balance de Materia para un Yacimiento de Gas

Al graficar los datos en la forma mostrada en la **Fig. 11**, se ajustarán a una línea recta si el yacimiento es volumétrico; es decir, no hay entrada de agua, $W_e = 0$ y $W_p = 0$. Si hay entrada de agua al yacimiento, la gráfica de p/z contra G_p ya no será necesariamente una línea recta, pudiendo mostrar cierta curvatura en la forma indicada en la **Fig. 11**; es decir, debido a la entrada de agua al yacimiento la presión disminuye más lentamente.

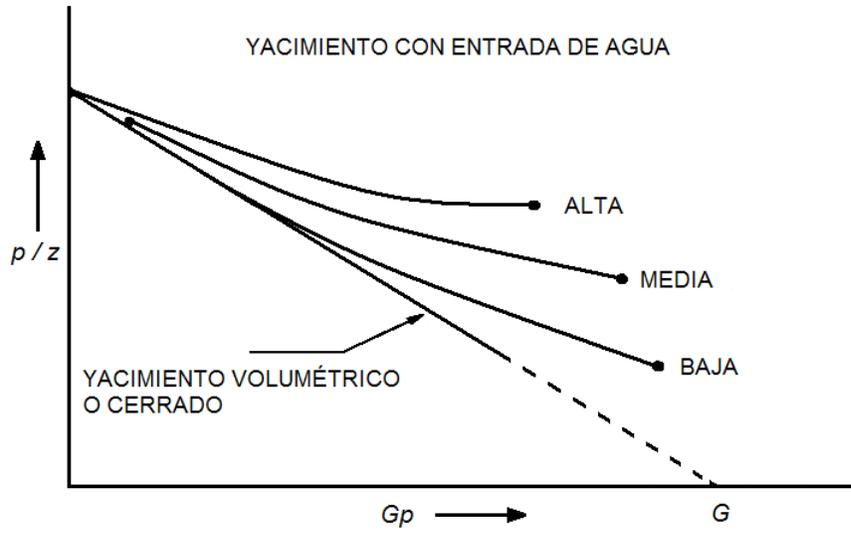


Fig. 11.- Efecto de la entrada de agua.³

Ejemplo de Aplicación

6.1. Cálculo del Volumen de Gas Atrapado en la Región Invasada por Agua y la Entrada de Agua, Considerando la Saturación de Gas Residual

Para aplicar la EBM se debe determinar la entrada de agua W_e como función del tiempo, W_e la cual depende del tamaño del acuífero y de la caída de presión entre el acuífero y el yacimiento. En esta tesis se emplea el método de Carter y Tracy en régimen de flujo transitorio, para el cálculo de entrada de agua.

Tabla 4.- Datos del sistema.

Presión inicial p_i , [lb/pg ²]	5,000
Porosidad ϕ	0.15
Espesor h , [pies]	100
Saturación de agua inicial S_{wi}	0.25
Viscosidad del agua μ_w , [cp]	0.35
Radio del yacimiento r_2 , [pies]	8,340
Radio del acuífero r_e , [pies]	Infinito
Compresibilidad del agua c_w , [lb/pg ²] ⁻¹	3.00×10^{-6}
Compresibilidad de la formación c_f , [lb/pg ²] ⁻¹	3.25×10^{-6}
Gasto de gas q_g , [pies ³ _{c.e.} /día]	100×10^{-6}
Permeabilidad del yacimiento k , [md]	50
Permeabilidad relativa del agua a S_{gr} , k_{rw} , [md]	0.2
Permeabilidad del agua k_w , [md]	10
Saturación de gas residual, S_{gr}	0.25
Volumen original de gas G , [pies ³ _{c.e.}]	6.434×10^{11}
Factor de volumen del gas B_{qg} , [bl _{c.y.} /pies ³ _{c.e.}]	0.0006804
Factor z	1.008
Temperatura del yacimiento T , [°F]	211
Densidad relativa del gas ρ_{rg}	0.65
Factor de volumen del agua B_{wv} , [bl _{c.y.} /bl _{c.e.}]	1.02

Tabla 5.- Datos PVT.

p [lb/pg ²]	z
7,000	1.159
6,000	1.083
5,000	1.008
4,000	0.946
3,500	0.920
3,000	0.900
2,500	0.892
2,000	0.897
1,500	0.911
1,000	0.933
500	0.963

6.2. Cálculo de los Parámetros del Acuífero

Para el procedimiento necesitamos calcular la constante de entrada de agua U Ec. (16) y la constante de conversión del tiempo real a tiempo adimensional t_D Ec. (17).

$$U = 1.119(1)(100)(0.15)(3 \times 10^{-6} + 3.25 \times 10^{-6})(8,340^2) = 7,296.82 \left[\frac{bl_{c.y.}}{lb/pg^2} \right];$$

$$t_D = \frac{2.309(50)t}{(0.15)(0.35)(3 \times 10^{-6} + 3.25 \times 10^{-6})(8,340^2)} = 5.0585t.$$

6.3. Procedimiento de Cálculo para la EBM Modificada

- 1) Calcular el radio original del yacimiento.

$$r_2 = \left[\frac{5.615(6.434 \times 10^{11})(0.0006804)}{\pi(100)(0.15)(1-0.25)} \right]^{1/2} = 8,340 [pies].$$

- 2) Para una producción acumulativa G_p dada, suponer (proponer) una presión p_2 en el contacto original agua-gas del yacimiento.

$$p_2 = 4,835.682 [lb/pg^2].$$

- 3) Calcular la entrada de agua W_e correspondiente a p_2 . Para $t = 0.5$ [años], empleando las Ecs. (44) y (47):

$$p_D(t_D) = \frac{370.529\sqrt{2.529} + 137.582(2.529) + 5.69549(2.529)\sqrt{2.529}}{328.834 + 265.488\sqrt{2.529} + 45.2157(2.529) + (2.529)\sqrt{2.529}} = 1.1043;$$

$$p'_D(t_D) = \frac{716.441 + 46.7984\sqrt{2.529} + 270.038(2.529) + 71.0098(2.529)^{3/2}}{1269.86\sqrt{2.529} + 1204.73(2.529) + 618.618(2.529)^{3/2} + 538.072(2.529)^2 + 142.41(2.529)^{5/2}} = 0.14137.$$

Por lo tanto, la entrada de agua al $t = 0.5$ [años] es:

$$W_{en} = 0 + (2.529 - 0) \frac{(7,296.82)(5,000 - 4,835.6820) - (0)(0.14137)}{1.1043 - (0)(0.14137)} = 2,746,030 \left[bl_{c.y.} \right].$$

- 4) Calcular por medio de la Ec. (49) el radio del yacimiento (de la zona de gas) no invadida por el agua.

$$r_1 = \left[8,340^2 - \frac{5.615(2,746,030)}{\pi(100)(0.15)(1 - 0.25 - 0.25)} \right]^{1/2} = 8,301 \left[pies \right].$$

- 5) Calcular utilizando la Ec. (50) la presión p_1 en el radio del yacimiento r_1 (en el frente del agua de invasión).

$$q = \frac{(2,746,030 - 0)}{(0.5 - 0)(365)} = 15,047 \left[\frac{bl_{c.y.}}{dia} \right];$$

$$p_1 = 4,835.6820 - \frac{141.24(15,047)(0.35) \ln \left(\frac{8,340}{8,300.67} \right)}{(0.2)(50)(100)} = 4,832 \left[\frac{lb}{pg^2} \right].$$

6) Calcular empleando la Ec. (51) la presión promedio \bar{p} , en la región invadida por el agua.

$$\bar{p} = 4,835.6820 - \frac{282.49(15,047)(0.35)}{(0.2)(50)(100)} \left[\frac{1}{4} - \frac{(8,300.67^2) \ln\left(\frac{8,340}{8,300.67}\right)}{2(8,340^2 - 8,300.67^2)} \right] = 4,834 \left[\frac{lb}{pg^2} \right].$$

7) Calcular por medio de la Ec. (52) el volumen de gas atrapado G_t , en la región invadida por el agua.

$$X = 111.23 \frac{(100)(0.15)(0.25)}{(1.000)(671)} = 0.6217 [pies];$$

$$Y = \frac{141.24(15,047)(0.35)}{(0.2)(50)(100)} = 744 [1];$$

$$G_t = (0.6217) \left(4,835.6820 - \frac{744}{2} \right) (8,340^2 - 8,300.67^2) + (0.6217)(744) \ln\left(\frac{8,340}{8,300.67}\right) = 1,966,632,037 [pies^3_{c.e.}].$$

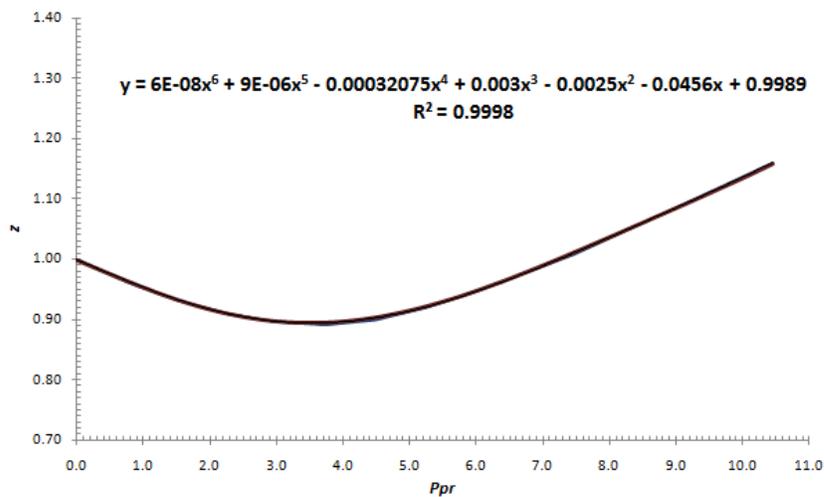


Fig. 12.- Gráfica del factor de volumen del gas (ajuste de un polinomio).

8) Calcular W_e por medio de la Ec. (54):

$$B_{gt} = 0.00503 \frac{(1.000)(671)}{(4,834)} = 0.0006981 \left[\frac{bl_{c.y.}}{pies^3_{c.e.}} \right];$$

$$B_g = 0.00503 \frac{(1.000)(671)}{(4,832)} = 0.0006983 \left[\frac{bl_{c.y.}}{pies^3_{c.e.}} \right];$$

$$W_e = (18,250,000,000)(0.0006983) - (6.434 \times 10^{11})(0.0006983 - 0.0006981) \\ - (1,966,632,037)(0.0006981 - 0.0006983) = 2,746,030 [bl_{c.y.}].$$

9) Comparar la entrada de agua W_e calculada en el paso 8 con la obtenida en el paso 3; si los valores no están dentro de una tolerancia específica, repetir los pasos del 2 al 9.

$$|W_{e \text{ paso 3}} - W_{e \text{ paso 8}}| = |2,746,030 - 2,746,030| = 0.00$$

Los resultados para los periodos de tiempo diferentes se incluyen en las **Tablas 6 a 9** siguientes.

Las presiones en los contactos original y actual, y de la región invadida por el agua, son sin duda una parte muy importante en la EBM Modificada discutida en esta tesis. Estas presiones determinan el comportamiento de flujo y la distribución de fluidos a través del yacimiento, posterior a un periodo de producción. Las curvas de presión, radio de gas, volumen de gas atrapado y entrada de agua, se muestran en las gráficas siguientes.

Tabla 6.- Entrada de agua al yacimiento de gas.

t [años]	t_D	p_D	p'_D	C	W_e [bl _{c.v.}]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	2.5293	1.1043	0.14137	2.2903	2,746,030
1.0	5.0585	1.3671	0.07893	2.1664	6,947,666
1.5	7.5878	1.5333	0.05533	2.0179	12,127,297
2.0	10.1170	1.6560	0.04276	1.8995	18,033,487
2.5	12.6463	1.7535	0.03491	1.8061	24,507,731
3.0	15.1755	1.8346	0.02952	1.7308	31,441,180
3.5	17.7048	1.9041	0.02559	1.6687	38,755,147
4.0	20.2340	1.9648	0.02259	1.6163	46,390,743
4.5	22.7633	2.0188	0.02023	1.5714	54,302,779
5.0	25.2925	2.0675	0.01832	1.5324	62,455,925
5.5	27.8218	2.1117	0.01674	1.4980	70,822,188
6.0	30.3511	2.1523	0.01541	1.4675	79,379,173
6.5	32.8803	2.1898	0.01428	1.4401	88,108,876
7.0	35.4096	2.2247	0.01331	1.4153	96,996,817
8.0	40.4681	2.2877	0.01171	1.4153	115,314,405
9.0	45.5266	2.3436	0.01046	2.6340	134,128,709
10.0	50.5851	2.3929	0.00945	2.5759	153,420,950
11.0	55.6436	2.4395	0.00862	2.5247	173,201,677
12.0	50.7021	2.4812	0.00792	2.4790	193,522,207
12.5	63.2314	2.5009	0.00761	1.2406	203,843,218

Tabla 7.- Presión en el COAG y Producción acumulativa de gas.

p_2 [lb/pg ²]	p_{pr2}	z_2	p_2/z_2 [lb/pg ²]	G_p [pies ³ _{c.e.} /año]	q_w [bl _{c.v.} /día]
5,000.00	7.4627	1.0115	4,943	0.0	0.0
4,835.68	7.2174	1.0000	4,836	1.825 x10 ¹⁰	15,047
4,704.50	7.0216	0.9910	4,747	3.650 x10 ¹⁰	23,023
4,595.54	6.8590	0.9837	4,672	5.475 x10 ¹⁰	28,382
4,502.81	6.7206	0.9775	4,606	7.300 x10 ¹⁰	32,363
4,422.47	6.6007	0.9723	4,548	9.125 x10 ¹⁰	35,475
4,351.86	6.4953	0.9678	4,497	1.095 x10 ¹¹	37,991
4,289.05	6.4016	0.9638	4,450	1.278 x10 ¹¹	40,077
4,232.59	6.3173	0.9603	4,407	1.460 x10 ¹¹	41,839
4,181.38	6.2409	0.9572	4,368	1.643 x10 ¹¹	43,354
4,134.53	6.1709	0.9544	4,332	1.825 x10 ¹¹	44,675
4,091.36	6.1065	0.9518	4,298	2.008 x10 ¹¹	45,843
4,051.29	6.0467	0.9495	4,267	2.190 x10 ¹¹	46,888
4,013.86	5.9908	0.9473	4,237	2.373 x10 ¹¹	47,834
3,978.66	5.9383	0.9453	4,209	2.555 x10 ¹¹	48,701
3,914.80	5.8430	0.9418	4,157	2.920 x10 ¹¹	50,185
3,855.84	5.7550	0.9386	4,108	3.285 x10 ¹¹	51,546
3,799.94	5.6716	0.9356	4,061	3.650 x10 ¹¹	52,855
3,745.09	5.5897	0.9328	4,015	4.015 x10 ¹¹	54,194
3,688.63	5.5054	0.9300	3,966	4.380 x10 ¹¹	55,673
3,657.94	5.4596	0.9285	3,940	4.563 x10 ¹¹	56,553

Tabla 8.- Radio del CAG, Presión en el CAG y Presión promedio en la zona invadida.

r_1 [pies]	ρ_1 [lb/pg ²]	ρ_{pr1}	z_1	ρ_1/z_1 [lb/pg ²]	\bar{p} [lb/pg ²]	\bar{p}_{pr}	z	\bar{p}/z [lb/pg ²]
8,340	5,000	7.4627	1.0115	4,943	5,000	7.4627	1.0115	4,943
8,301	4,832	7.2174	0.9998	4,833	4,834	7.2148	0.9999	4,834
8,240	4,691	7.0216	0.9901	4,738	4,698	7.0115	0.9906	4,742
8,165	4,566	6.8590	0.9817	4,651	4,581	6.8370	0.9827	4,661
8,078	4,452	6.7206	0.9742	4,570	4,478	6.6829	0.9759	4,588
7,982	4,346	6.6007	0.9674	4,492	4,385	6.5442	0.9699	4,521
7,878	4,245	6.4953	0.9611	4,417	4,299	6.4170	0.9645	4,458
7,767	4,148	6.4016	0.9552	4,342	4,220	6.2988	0.9596	4,398
7,649	4,054	6.3173	0.9496	4,269	4,146	6.1876	0.9551	4,341
7,524	3,961	6.2409	0.9443	4,194	4,075	6.0819	0.9509	4,285
7,394	3,869	6.1709	0.9393	4,119	4,007	5.9805	0.9470	4,231
7,258	3,776	6.1065	0.9344	4,042	3,941	5.8824	0.9433	4,178
7,116	3,683	6.0467	0.9297	3,962	3,877	5.7867	0.9397	4,126
6,968	3,589	5.9908	0.9252	3,879	3,814	5.6927	0.9364	4,073
6,815	3,492	5.9383	0.9209	3,793	3,752	5.5998	0.9332	4,021
6,487	3,291	5.8430	0.9127	3,606	3,629	5.4165	0.9271	3,914
6,131	3,072	5.7550	0.9054	3,393	3,504	5.2295	0.9214	3,803
5,744	2,826	5.6716	0.8993	3,142	3,373	5.0340	0.9159	3,683
5,318	2,540	5.5897	0.8953	2,837	3,232	4.8232	0.9106	3,549
4,841	2,192	5.5054	0.8951	2,449	3,073	4.5870	0.9054	3,394
4,580	1,982	5.4596	0.8975	2,209	2,984	4.4532	0.9030	3,304

Tabla 9.- Volumen de gas atrapado en la región invadida y entrada de agua.

X [pies]	Y	G_f [pies ³ c.e.]	B_{gt} [bl _{c,y} /pies ³ c.e.]	B_g [bl _{c,y} /pies ³ c.e.]	W_e [bl _{c,y}]
0.6146	0.0	0.0	0.0006828	0.0006828	0.0
0.6217	744	1.967 x10 ⁰⁹	0.0006981	0.0006983	2,746,030
0.6276	1,138	4.881 x10 ⁰⁹	0.0007117	0.0007124	6,947,666
0.6326	1,403	8.374 x10 ⁰⁹	0.0007241	0.0007257	12,127,297
0.6370	1,600	1.226 x10 ¹⁰	0.0007356	0.0007386	18,033,487
0.6409	1,754	1.641 x10 ¹⁰	0.0007466	0.0007514	24,507,731
0.6445	1,878	2.076 x10 ¹⁰	0.0007571	0.0007642	31,441,180
0.6478	1,981	2.525 x10 ¹⁰	0.0007674	0.0007772	38,755,147
0.6509	2,068	2.983 x10 ¹⁰	0.0007776	0.0007907	46,390,743
0.6537	2,143	3.447 x10 ¹⁰	0.0007876	0.0008047	54,302,779
0.6565	2,208	3.915 x10 ¹⁰	0.0007976	0.0008195	62,455,925
0.6590	2,266	4.384 x10 ¹⁰	0.0008078	0.0008351	70,822,188
0.6615	2,318	4.851 x10 ¹⁰	0.0008181	0.0008519	79,379,173
0.6639	2,365	5.317 x10 ¹⁰	0.0008286	0.0008701	88,108,876
0.6662	2,407	5.777 x10 ¹⁰	0.0008395	0.0008899	96,996,817
0.6705	2,481	6.687 x10 ¹⁰	0.0008622	0.0009369	115,314,405
0.6747	2,548	7.556 x10 ¹⁰	0.0008875	0.0009948	134,128,709
0.6787	2,613	8.370 x10 ¹⁰	0.0009165	0.0010742	153,420,950
0.6827	2,679	9.106 x10 ¹⁰	0.0009510	0.0011898	173,201,677
0.6865	2,752	9.731 x10 ¹⁰	0.0009944	0.0013783	193,522,207
0.6884	2,796	9.978 x10 ¹⁰	0.0010214	0.0015280	203,843,218

6.4. Gráficas de los Cálculos con y sin Saturación de Gas Residual, S_{gr}

La **Fig. 13**, muestra el comportamiento de la presión p_1 en el contacto actual agua-gas (en el frente del agua de invasión), con y sin saturación de gas residual. La curva de presión que considera la saturación de gas residual declina más, debido a que entra menor cantidad de agua al yacimiento ya que no se tiene un desplazamiento total de gas, como se considera en la EBM normal a $S_{gr} = 0$, curva superior.

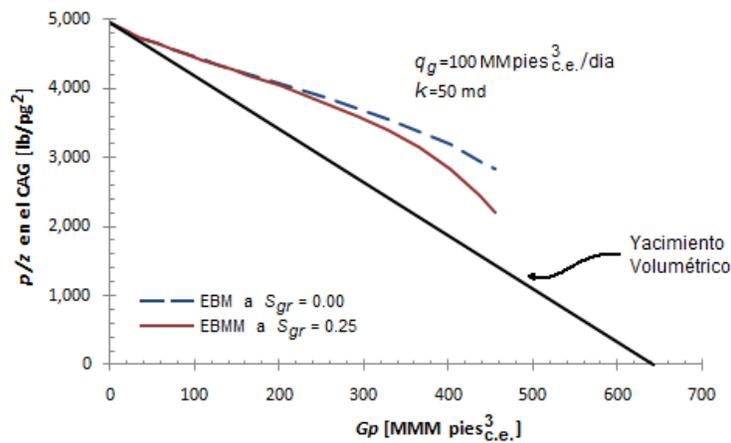


Fig. 13.- Comportamiento de la presión p_1 en el CAG (al frente del agua de invasión).

En la **Fig. 14**, se ilustra el comportamiento de la presión en el contacto original agua-gas (COAG) (curvas superiores), la presión en la región invadida por el agua (curvas intermedias) y la presión en el contacto agua-gas (CAG) en el frente del agua de invasión (curvas inferiores); se observa que conforme la saturación residual de gas aumenta las curvas para el comportamiento de la presión aumentan su separación.

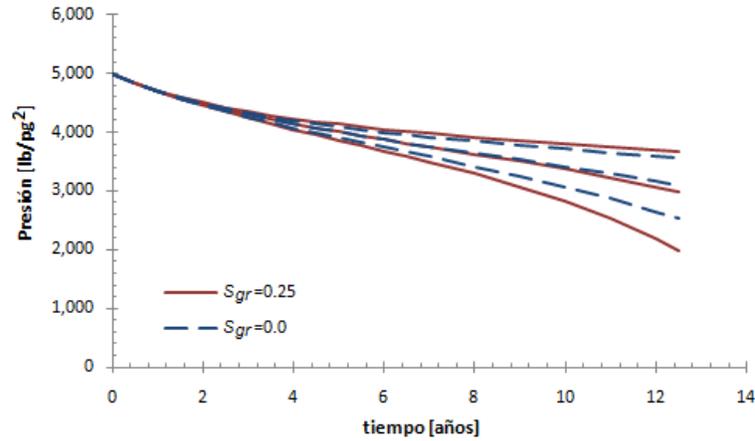


Fig. 14.- Comportamiento de las presiones de interés p_2 , \bar{p} y p_1 .

En la Fig. 15, se observa la reducción del radio del yacimiento de gas debido a la entrada de agua, la cual disminuirá más rápidamente conforme aumente la saturación de gas residual, ya que se tiene menor volumen de gas móvil en el sistema, por lo tanto menor entrada de agua.

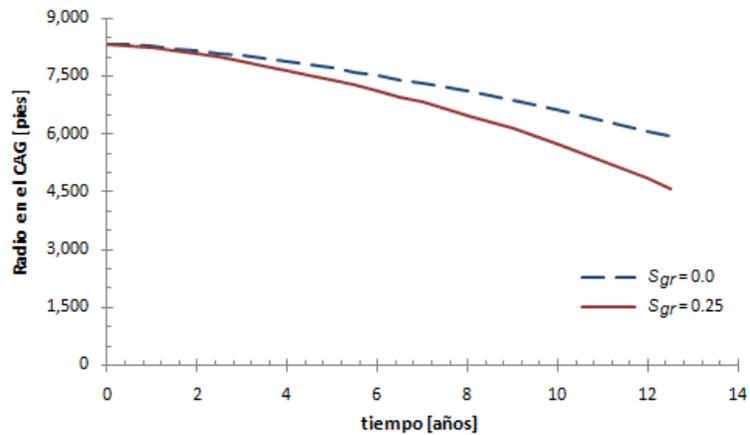


Fig. 15.- Reducción del radio del yacimiento de gas causado por la entrada de agua del acuífero.

La Fig. 16, muestra la variación del volumen de gas atrapado en la región invadida por agua, considerando la saturación de gas residual, el cual alcanza un valor de 99.78 MMM pies³_{c.e.} después de un periodo de producción de 12.5 años. La EBM normal no considera la saturación residual; por lo tanto, no se tiene volumen de gas atrapado en la región invadida por agua.

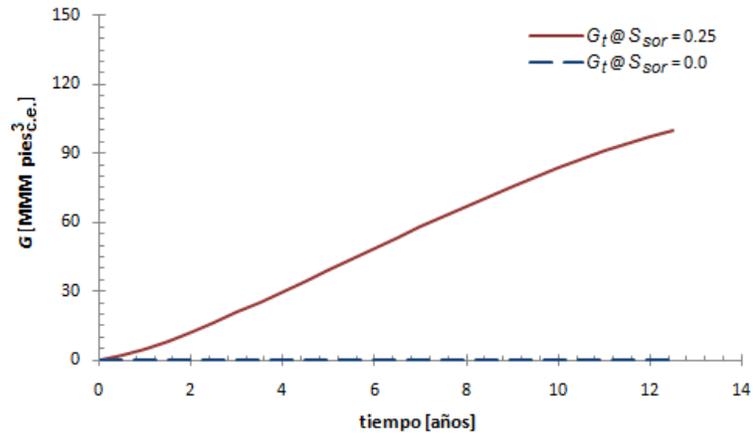


Fig. 16.- Volumen de gas atrapado en la región invadida por agua.

En la **Fig. 17**, se ilustra la entrada de agua del acuífero hacia el yacimiento. La curva superior no considera la saturación de gas residual; este comportamiento del sistema yacimiento-acuífero está descrito por la Ec. (38), la cual considera que el agua hace un barrido completo ($S_{gr} = 0$) en toda la región invadida. En la curva inferior se toma en cuenta la saturación de gas residual, con lo cual se tiene un volumen de gas atrapado (no desplazable) lo que da como resultado una entrada de agua menor a la estimada para el caso anterior. Lo expuesto anteriormente reafirma lo planteado en las **Figs 13 y 15**.

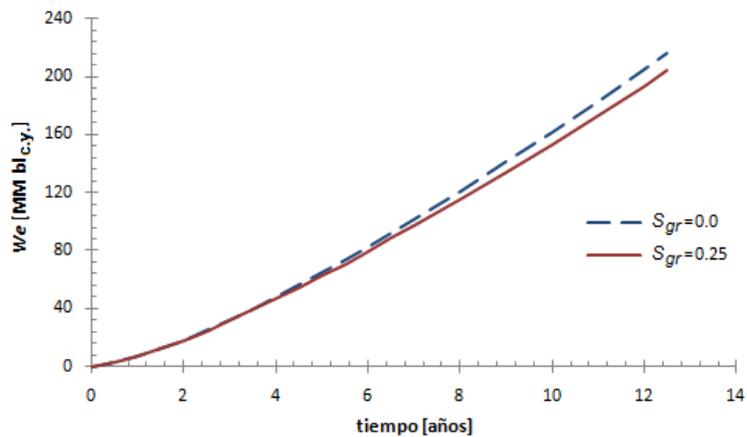


Fig. 17.- Entrada de agua W_e al yacimiento de gas.

6.5. Sensibilidad de los Cálculos de Balance de Materia para la Variación del Gasto de Gas, q_g

En las gráficas siguientes se muestran los resultados obtenidos empleando la EBM modificada, variando el gasto de gas. En este caso se consideran los mismos datos del sistema yacimiento-acuífero y de presión-producción. En las figuras que se presentan a continuación se incluyen los resultados obtenidos para el ejemplo anterior, considerando la variación del gasto.

La **Fig. 18**, ilustra la declinación de la presión en el radio del yacimiento de gas actual (contacto agua-gas); las curvas superiores en los tres casos se obtuvieron con la EBM normal (Ec. 38), la cual no considera la saturación de gas residual. Las curvas inferiores se calculan por medio de la EBM Modificada (Ec. 40), considerando la saturación de gas residual mayor a cero. A menor producción de gas, se tiene un mantenimiento de presión mayor debido a que al aumentar el tiempo de explotación el acuífero tiene más tiempo para su expansión como resultado de la explotación del yacimiento.

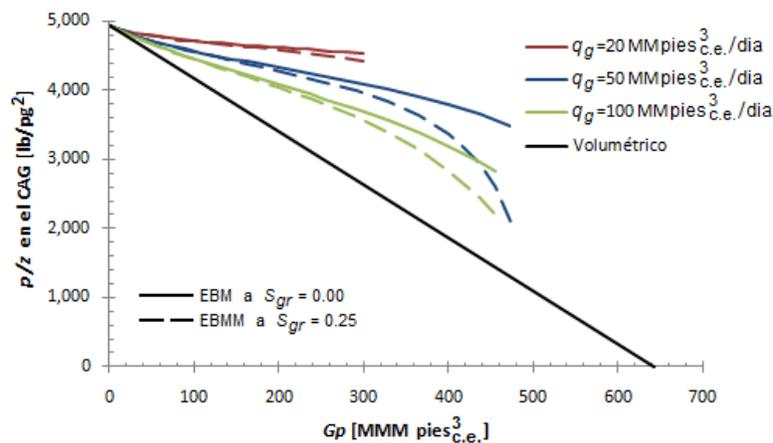


Fig. 18.- Gráfica del comportamiento de un yacimiento de gas para diferentes producciones.

La **Fig. 19**, muestra la reducción del radio del yacimiento de gas debido a la entrada de agua del acuífero hacia el yacimiento. A mayor producción de gas se tendrá una mayor zona invadida de agua y menor radio del yacimiento (saturado por gas).

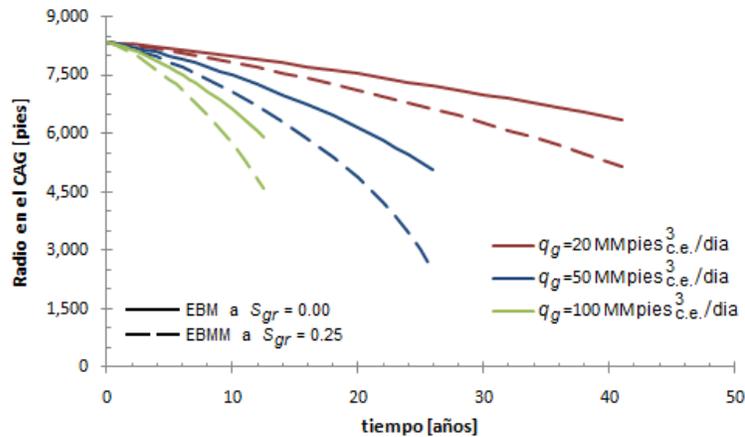


Fig. 19.- Radio del yacimiento de gas actual en el contacto agua-gas.

La **Fig. 20**, ilustra la producción acumulativa de gas a diferentes gastos de producción, en la cual el ejemplo para $q_g = 100$ MM pies³_{c.e.}/D tiene una producción de gas mayor en un periodo de tiempo menor que en el caso donde se tiene un $q_g = 50$ MM pies³_{c.e.}/D, que tiene una producción acumulativa de gas aproximadamente igual, pero en un periodo de tiempo mayor. El caso a $q_g = 20$ MM pies³_{c.e.}/D tiene menor producción de gas en un periodo de tiempo mucho mayor que en los casos anteriores. Debido a que se establece un gasto de producción constante para los tres casos, las gráficas para las saturaciones residuales $S_{gr} = 0$ y $S_{gr} = 0.25$ son las mismas en cada caso.

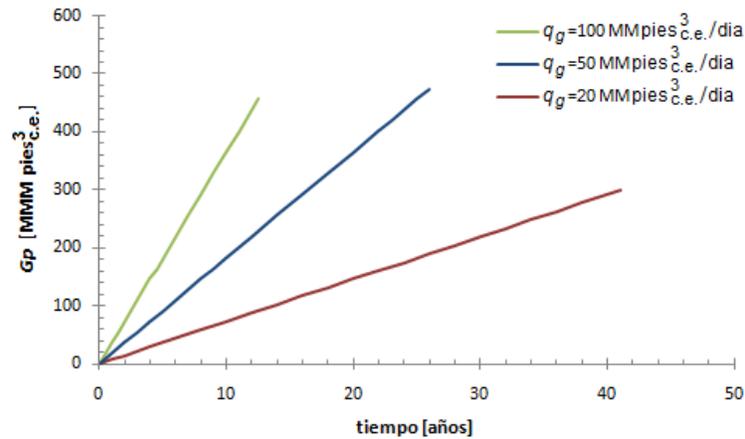


Fig. 20.- Producción acumulativa de gas.

En la Fig. 21, se muestra el volumen de gas atrapado en la región invadida por agua, para una saturación de gas residual $S_{gr} = 0.25$. A mayor gasto de gas, se incrementa el volumen de gas atrapado en la región invadida, debido a que la invasión por el agua ocurre en tiempos más cortos.

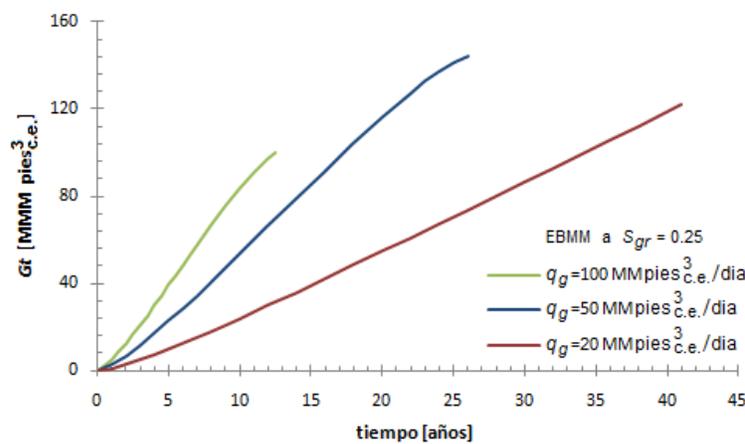


Fig. 21.- Volumen de gas atrapado en la región invadida por agua.

La **Fig. 22**, ilustra el comportamiento de la entrada de agua del acuífero hacia el yacimiento, en la cual se observa que conforme se incrementa el gasto de gas se tendrá una entrada de agua mayor en un periodo de tiempo menor; el caso contrario se presenta cuando se tiene un gasto de gas menor, en que la entrada de agua se incrementa con el tiempo hasta alcanzar valores mayores que los que resultan en los casos anteriores. En la figura, se muestra la diferencia entre los casos en estudio, considerando valores para la saturación de gas residual de $S_{gr} = 0.0$ y $S_{gr} = 0.25$. Como se esperaría físicamente, conforme aumenta la saturación S_{gr} , la entrada de agua al yacimiento disminuye.

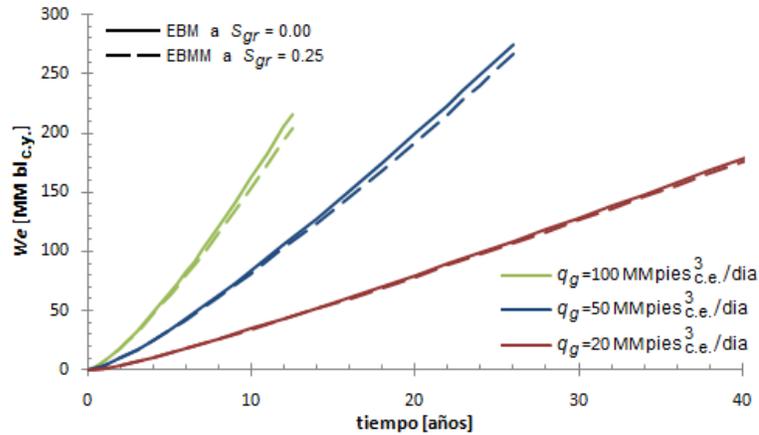


Fig. 22.- Entrada de agua del acuífero hacia un yacimiento de gas.

Conclusiones

Con base en el estudio y resultados obtenidos en esta tesis relacionados con el flujo de fluidos en sistemas naturalmente fracturados, EBM y modelo de entrada de agua, además de la versión de la EBM para predecir el comportamiento de un yacimiento homogéneo de gas, el cual considera la saturación de gas residual, se pueden establecer las conclusiones siguientes:

Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados

- 1) La ecuación propuesta puede emplearse en forma sencilla, para obtener una estimación simultánea del volumen de aceite original en la matriz de la roca y en la red de fracturas, en una formación naturalmente fracturada.
- 2) No es recomendable tratar de estimar el volumen de aceite original N_m y N_f con la EBM en yacimientos con alta entrada de agua, debido a la incertidumbre que introduce en el ajuste del comportamiento el tener caídas de presión reducidas.
- 3) La suposición más importante usada en la derivación de la EBM en un YNF, es el flujo instantáneo de hidrocarburos de la matriz a las fracturas. En yacimientos con comunicación limitada entre la matriz y las fracturas, se tendrán errores grandes.

Modelo del Acuífero Naturalmente Fracturado

- 4) El uso de la función para la entrada de agua proporcionada por un ANF, W_{eD} proporciona medios para incluir más de dos datos petrofísicos disponibles para los yacimientos fracturados. Es útil en casos de fuerte o débil empuje de agua.

- 5) El modelo de un ANF difiere en forma importante con respecto a uno homogéneo; propiedades como la permeabilidad de la matriz y de la red de fracturas, presión en la matriz y en las fracturas son parámetros claves en la definición del modelo.
- 6) Se observó en la representación gráfica *log-log*, que la función de entrada de agua adimensional presenta una notable sensibilidad a los cambios en los parámetros del acuífero.
- 7) Lo más adecuado para generar cada curva de entrada de agua, es utilizar un número considerable de puntos para definirla correctamente hasta antes de que la curva alcance su comportamiento asintótico.

Ecuación de Balance de Materia Modificada

- 8) Esta metodología es novedosa debido al manejo de la saturación de gas residual; solamente en una versión anterior de la EBM se ha incorporado este efecto, lo que proporciona resultados más confiables al cuantificar la entrada natural de agua.
- 9) A pesar de la simplicidad en el método de solución planteado en esta tesis para la EBM modificada, existe la necesidad de que la información sea de calidad y que haya poca dispersión de los datos de comportamiento del yacimiento, ya que al no cumplirse este requerimiento se pueden obtener resultados indeseados debido al carácter iterativo de la solución.
- 10) Dependiendo del valor de la saturación de gas residual S_{gr} , aumentará el volumen de gas atrapado en la región invadida por agua.
- 11) Aplicando el método discutido para la EBM a otros yacimientos donde se tenga disponible una historia de explotación apropiada, a través del ajuste de estos datos de comportamiento se pueden estimar los parámetros relevantes del sistema yacimiento-acuífero (como el volumen original de aceite N y el volumen de agua, V_w).

Nomenclatura

A	Área transversal del yacimiento, $pies^2$
B_g	Factor de volumen del gas ($B_g < 1$), $bl_g @ c.y./pies^3 @ c.s.$
B_{gn}	Factor de volumen del gas a la presión p_n ($B_{gn} < 1$), $bl_g @ c.y./pies^3 @ c.s.$
B_{gt}	Factor de volumen del gas atrapado ($B_{gt} < 1$), $bl_g @ c.y./pies^3 @ c.s.$
B_o	Factor de volumen del aceite ($B_o > 1$), $bl_{o+gd} @ c.y./bl_o @ c.s.$
B_{ot}	Factor de volumen del aceite atrapado ($B_o > 1$), $bl_{o+gd} @ c.y./bl_o @ c.s.$
B_w	Factor de volumen del agua, $bl_w @ c.y./bl_w @ c.s.$
c_f	Compresibilidad de las fracturas, $[lb/pg^2]^{-1}$
c_m	Compresibilidad de la matriz, $[lb/pg^2]^{-1}$
c_o	Compresibilidad del aceite, $[lb/pg^2]^{-1}$
c_t	Compresibilidad total, $[lb/pg^2]^{-1}$
c_w	Compresibilidad del agua, $[lb/pg^2]^{-1}$
c_{w+f}	Compresibilidad efectiva del acuífero ($c_w + c_f$), $[lb/pg^2]^{-1}$
C_n	Función de t_{Dn} , <i>adimensional</i>
E_n	Función de t_{Dn} , $bl @ c.y.$
E_{of}	Expansión de la fase aceite en el sistema de matriz, $bl_{o+gd} @ c.y./bl_o @ c.s.$
E_{om}	Expansión de la fase aceite en la red de fracturas, $bl_{o+gd} @ c.y./bl_o @ c.s.$
f	Representa la proporción en la que el acuífero rodea el yacimiento (0-1)
f_w	Flujo fraccional de agua
F	Producción de aceite, gas y agua, $bl_{o+g+w} @ c.y.$
F_n	Función de t_{Dn} , lb/pg^2
$G = G_{fg}$	Volumen original de gas, $pies^3 @ c.s.$

G_p	Volumen producido acumulado de gas, $pies^3 @ c.s.$
G_{pn}	Volumen producido acumulado de gas al tiempo t_n , $pies^3 @ c.s.$
G_t	Volumen de gas atrapado en la región invadida por agua, $pies^3 @ c.s.$
h	Espesor del neto del yacimiento, $pies$
h_f	Longitud de la fractura
J	Función de x_D , θ , t_D y ω , <i>adimensional</i>
k	Permeabilidad absoluta, md
k_f	Permeabilidad de las fracturas, <i>darcy</i>
k_m	Permeabilidad de la matriz, md
k_{rw}	Permeabilidad relativa al agua, md
k_w	Permeabilidad efectiva al agua, md
K	Constante, $(bl * [lb/pg^2]) / pies^3$
K_n	Función de t_{Dn} , lb/pg^2
$\ell = L$	Dimensión equivalente del bloque $\ell = 3\ell_1\ell_2\ell_3 / (\ell_1\ell_2 + \ell_2\ell_3 + \ell_3\ell_1)$, $pies$
ℓ_1	Altura del bloque del acuífero, $pies$
ℓ_2	Longitud del bloque del acuífero, $pies$
ℓ_3	Ancho del bloque del acuífero, $pies$
n	1) Número de moles para la ley de los gases reales. 2) Subíndice para la variable de la transformada inversa de Hankel y de Fourier del seno finito.
$N = N_{fo}$	Volumen original de aceite, $bl_o @ c.s.$
N_f	Volumen original de aceite en el sistema de fracturas, $bl_o @ c.s.$
N_m	Volumen original de aceite en la matriz de la roca, $bl_o @ c.s.$
N_{maR}	Volumen de aceite recuperable de la matriz, $bl_o @ c.s.$
N_p	Volumen producido acumulado de aceite, $bl_o @ c.s.$
N_t	Volumen de aceite atrapado en la región invadida por agua, $bl_o @ c.s.$
p	Presión estática del yacimiento, lb/pg^2
\bar{p}	Presión promedio en la región invadida por agua, lb/pg^2
p_1	Presión al frente del agua de invasión, lb/pg^2
p_2	Presión en el contacto original, posterior a un periodo de producción, lb/pg^2
p_{1D}	Caída de presión en la matriz tipo 1, <i>adimensional</i>
p_{2D}	Caída de presión en la matriz tipo 2, <i>adimensional</i>
p_a	Presión en el contacto agua-aceite, lb/pg^2
p_{cs}	Presión a condiciones estándar, lb/pg^2
p_{cm}	Presión capilar en la matriz, lb/pg^2
p_f	Presión del fluido en las fracturas, lb/pg^2
p_{fD}	Caída de presión en las fracturas, <i>adimensional</i>

p_i	Presión inicial del yacimiento y acuífero, lb/pg^2
p_m	Presión del fluido en la matriz, lb/pg^2
p_{mD}	Presión en la matriz, <i>adimensional</i>
p_n	Presión al tiempo t_n , lb/pg^2
q_g	Gasto de gas, $pies^3 @ c.s./día$
q_w	Gasto de agua, $bl @ c.y./día$
q_{imb}	Gasto de imbibición de agua
q_{iny}	Gasto de inyección de agua
r	Distancia radial del acuífero, <i>pies</i>
r_1	Radio de la región no invadida por agua, <i>pies</i>
$r_2 = r_a$	Radio original del yacimiento, <i>pies</i>
r_a	Radio interno del acuífero, <i>pies</i>
r_D	Distancia radial (r/r_a), <i>adimensional</i>
r_e	Radio externo del acuífero, <i>pies</i>
r_{eD}	Radio externo del acuífero (r_e/r_a), <i>adimensional</i>
r_w	Radio del pozo, <i>pies</i>
R	Constante universal de los gases
R_p	Razón gas-aceite acumulado producido (G_p/N_p), $pies^3_g @ c.s./bl_o @ c.s.$
R_s	Razón gas disuelto-aceite, $pies^3_{gd} @ c.s./bl_o @ c.s.$
R_v	Razón aceite volátil-gas, $bl_o @ c.s./pies^3_{gd} @ c.s.$
s	Variable de la transformada de Hankel
S_g	Saturación de gas, <i>fracción</i>
S_{gr}	Saturación de gas residual, <i>fracción</i>
S_o	Saturación de aceite, <i>fracción</i>
S_{or}	Saturación de aceite residual, <i>fracción</i>
S_w	Saturación de agua, <i>fracción</i>
S_{wf}	Saturación de agua en el sistema de fracturas, <i>fracción</i>
S_{wm}	Saturación de agua en la matriz, <i>fracción</i>
$S_{wm}(x_D, t_D)$	Saturación de agua en los bloques de matriz
$S_{wm}^*(x_D, t_D)$	Saturación de agua en las fracturas
t	Tiempo, <i>años</i>
t_D	Tiempo, $2.309kt/\phi_f\mu_w c_{w+f}r_a^2$ <i>adimensional</i>
t_D	Tiempo, $2,309k_f t/\phi_f\mu_w c_f r_a^2$ <i>adimensional</i> (para la ecuación de Cloosmann)
t_{Dn}	Tiempo adimensional en función del tiempo t_n , <i>adimensional</i>
T	Temperatura del yacimiento, $^{\circ}R$
T_{cs}	Temperatura a condiciones estándar, $^{\circ}R$

u	Variable de las funciones modificadas de Bessel
U	Constante de entrada de agua, $bl @ c.y. / (lb/pg^2)$
V_{Hcs}	Volumen de hidrocarburos, $bl @ c.s.$ o $pies^3 @ c.s.$
V_p	Volumen de roca, $pies^3_{poros}$
W_e	Entrada acumulativa de agua al yacimiento, $bl_w @ c.y.$
W_{en}	Volumen acumulado de entrada de agua al tiempo t_n , $bl_w @ c.y.$
W_{eD}	Entrada acumulativa de agua, <i>adimensional</i>
W_p	Volumen producido acumulado de agua, $bl_w @ c.s.$
W_{pn}	Volumen producido acumulado de agua al tiempo t_n , $bl_w @ c.s.$
x	Coordenada en espacio, <i>pies</i>
x_D	Coordenada en espacio, <i>adimensional</i>
y	Parámetro de integración
z	Factor de compresibilidad del gas, <i>fracción</i>
\bar{z}	Factor de compresibilidad del gas a la \bar{p} , <i>fracción</i>
z_n	Factor de compresibilidad del gas a la presión p_n , <i>fracción</i>
α	Factor de forma de los bloques del yacimiento $60/\ell^2$, $pies^{-2}$
α_1	Factor de forma de los bloques del yacimiento $1/\ell^2$, $pies^{-2}$
β	Fracción de volumen total de las fracturas
β_1	Fracción de volumen de roca buena en la matriz
β_2	Fracción de volumen de roca mala en la matriz
φ_{FB}	Coefficiente de Fourier-Bessel, $J_1^2(s_1 r_{eD}) / s_1^2 [J_0^2(s_1) - J_1^2(s_1 r_{eD})]$
δ_1	$\delta_1 = 0.001(\phi_f c_f / \phi_{m1} c_{m1})(\alpha k_{m1} r_a^2 / k_f)$, caso radial, <i>adimensional</i>
δ_2	$\delta_2 = 0.001(\phi_f c_f / \phi_{m2} c_{m2})(\alpha k_{m2} r_a^2 / k_f)$, caso radial, <i>adimensional</i>
θ	Parámetro de integración
μ_w	Viscosidad del agua, <i>cp</i>
$-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3$	Raíces de la ecuación cúbica
σ	1) Tensión interfacial agua-aceite para modelo de De Swaan. 2) Variable de la transformada de Laplace
τ_I	Constante de imbibición propuesta, $1 - 1/e = 0.63$
ϕ_f	Porosidad del sistema de fracturas, <i>fracción</i>
ϕ_m	Porosidad en la matriz, <i>fracción</i>

Subíndices:

i	Valor inicial
1	Matriz del acuífero con buenas propiedades, tipo 1
2	Matriz del acuífero con malas propiedades, tipo 2

Apéndice A

Derivación de la Ecuación de Balance de Materia para un Yacimiento Bajosaturado de Aceite, Naturalmente Fracturado

Aplicando las consideraciones expuestas previamente, la derivación de la ecuación de balance de materia para yacimientos naturalmente fracturados, está basada en el modelo presentado en la **Fig. 1.**²⁷

Para un yacimiento volumétrico (que no tiene asociado un acuífero), la aplicación de un balance de materia al sistema de fracturas, requiere de los términos siguientes:

$$V_{ofi} + V_{gfi} = V_{of2} + V_{gf2} + V_{o1} + V_{g1} - V_{o2} - V_{g2} + \Delta V_{wf} + \Delta V_f. \quad \dots\dots\dots (A-1)$$

El aceite original contenido en el sistema de fracturas se calcula por la expresión:

$$V_{ofi} = N_f B_{oi}. \quad \dots\dots\dots (A-2)$$

No se tiene gas originalmente en el sistema de fracturas:

$$V_{gfi} = 0. \quad \dots\dots\dots (A-3)$$

Un aceite originalmente bajosaturado no presenta gas libre. El aceite en el sistema de fracturas después de una caída de presión puede estimarse por medio de la Ec. (A-4):

$$V_{of2} = N_f B_o. \dots\dots\dots (A-4)$$

Y el gas libre que se presenta en las fracturas después de la caída de presión, se calcula empleando la expresión siguiente:

$$V_{gf2} = N_f (R_{si} - R_s) B_g. \dots\dots\dots (A-5)$$

El aceite original *in-situ* en el sistema de fracturas puede calcularse utilizando un método estático, basado en la Ec. (A-6):

$$N_f = \frac{V_p \phi_{fi} (1 - S_{wfi})}{B_{oi}}. \dots\dots\dots (A-6)$$

Por otro lado, el aceite que fluye hacia las fracturas del sistema de matriz de la roca, se calcula considerando la expansión del aceite original, empleando el balance de materia siguiente en el sistema de matriz:

$$V_{o1} = N_m B_o + \Delta V_m + \Delta V_{wm} - N_m B_{oi}, \dots\dots\dots (A-7)$$

donde:

$$N_m = \frac{V_p \phi_{mi} (1 - S_{wmi})}{B_{oi}}; \dots\dots\dots (A-8)$$

$$\Delta V_m = V_p \phi_{mi} c_m \Delta p; \dots\dots\dots (A-9)$$

$$\Delta V_{wm} = V_p \phi_{mi} S_{wmi} c_w \Delta p. \dots\dots\dots (A-10)$$

Sustituyendo las Ecs. (A-8) a (A-10) en la Ec. (A-7):

$$V_{o1} = N_m B_o + \Delta V_m + \Delta V_{wm} - N_m B_{oi} \quad \Rightarrow \quad V_{o1} = N_m (B_o - B_{oi}) + \Delta V_m + \Delta V_{wm};$$

$$V_{o1} = N_m (B_o - B_{oi}) + V_p \phi_{mi} c_m \Delta p + V_p \phi_{mi} S_{wmi} c_w \Delta p;$$

$$V_{o1} = N_m (B_o - B_{oi}) + V_p \phi_{mi} (S_{wmi} c_w + c_m) \Delta p.$$

De la ecuación (A-8) obtenemos $V_p \phi_{mi}$:

$$V_p \phi_{mi} = \frac{N_m B_{oi}}{(1 - S_{wmi})}$$

Sustituyendo en la expresión anterior para V_{o1} :

$$V_{o1} = N_m (B_o - B_{oi}) + \frac{N_m B_{oi}}{(1 - S_{wmi})} (S_{wmi} c_w + c_m) \Delta p;$$

$$V_{o1} = N_m \left[B_o - B_{oi} + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] \dots \dots \dots (A-11)$$

Suponiendo que la fase gas fluye directamente al sistema de fracturas, tan pronto como se libera de la solución en el sistema de la matriz. El gas libre que entra en el sistema de fracturas se calcula con:

$$V_{g1} = N_m (R_{si} - R_s) B_g \dots \dots \dots (A-12)$$

La producción de aceite se calcula empleando la expresión siguiente:

$$V_{o2} = N_p B_o \dots \dots \dots (A-13)$$

La producción de gas se calcula por medio de la Ec. (A-14):

$$V_{g2} = N_p (R_p - R_s) B_g \dots \dots \dots (A-14)$$

La expansión del sistema de fracturas se expresa por medio de la Ec. (A-15):

$$\Delta V_f = V_p \phi_{fi} c_f \Delta p \dots \dots \dots (A-15)$$

La expansión del agua congénita en el sistema de fracturas se obtiene de la expresión siguiente:

$$\Delta V_{wf} = V_p \phi_{fi} S_{wfi} c_w \Delta p \cdot \dots \dots \dots (A-16)$$

Sustituyendo las ecuaciones previas en la Ec. (A-1):

$$N_f B_{oi} + 0 = N_f B_o + N_f (R_{si} - R_s) B_g + N_m \left[B_o - B_{oi} + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] + N_m (R_{si} - R_s) B_g - N_p B_o - N_p (R_p - R_s) B_g + V_p \phi_{fi} S_{wfi} c_w \Delta p + V_p \phi_{fi} c_f \Delta p ;$$

Reacomodando términos:

$$N_m \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] + N_f [B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g] + V_p \phi_{fi} (S_{wfi} c_w + c_f) \Delta p = N_p [B_o + (R_p - R_s) B_g] .$$

De la Ec. (A-6) se obtiene $V_p \phi_{fi}$:

$$V_p \phi_{fi} = \frac{N_f B_{oi}}{(1 - S_{wfi})}$$

Sustituyendo esta expresión en la EBM anterior:

$$N_m \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] + N_f [B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g] + \frac{N_f B_{oi}}{(1 - S_{wfi})} (S_{wfi} c_w + c_f) \Delta p = N_p [B_o + (R_p - R_s) B_g] ;$$

$$N_m \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] + N_f [B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g] + N_f \frac{(S_{wfi} c_w + c_f)}{(1 - S_{wfi})} \Delta p B_{oi} = N_p [B_o + (R_p - R_s) B_g] ;$$

$$\begin{aligned}
 & N_m \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wmi} c_w + c_m}{1 - S_{wmi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] \\
 & + N_f \left[B_o - B_{oi} + (R_{si} - R_s) B_g + \left(\frac{S_{wfi} c_w + c_f}{1 - S_{wfi}} \right) \Delta p B_{oi} \right] \\
 & = N_p \left[B_o + (R_p - R_s) B_g \right], \dots\dots\dots (A-17)
 \end{aligned}$$

donde:

- $N(B_o - B_{oi})$ Expansión del aceite y gas disuelto en el aceite.
- $N(R_{si} - R_s) B_g$ Expansión del gas disuelto liberado.
- $N \left(\frac{S_{wi} c_w + c_f}{1 - S_{wi}} \right) \Delta p B_{oi}$ Expansión de la formación y del agua.
- $N_p B_o$ Volumen de aceite producido.
- $N_p (R_p - R_s) B_g$ Volumen de gas disuelto liberado producido.
- $W_p B_w$ Volumen de agua producido.
- $B_t = B_o + (R_{si} - R_s) B_g$ Factor de volumen de dos fases.
- $B_{ti} = B_{oi}$ A condiciones iniciales superiores a la presión de saturación, p_b
- $N(B_t - B_{ti})$ Expansión del aceite con su gas disuelto y gas disuelto liberado.
- $V_p = \frac{NB_{oi}}{(1 - S_{wi})}$ Volumen de poros.
- $S_{fluido} = \frac{V_{fluido}}{V_{poros}}$ Saturación de fluido.
- $R_p = \frac{G_p}{N_p}$ Razón gas-aceite acumulado producido.

La Ec. (A-17) es la Ecuación de Balance de Materia para Yacimientos Naturalmente Fracturados (EBMYNF), en que el aceite originalmente es bajosaturado.

Apéndice B

Derivación de la Ecuación para la Distribución de Presión de un Acuífero Naturalmente Fracturado – Caso Radial

Definiendo las variables adimensionales siguientes:

$$p_{fD} = \text{Caída de presión en las fracturas} = \frac{p_i - p_f}{p_i - p_a}; \quad \dots\dots\dots (B-1a)$$

$$p_{1D} = \text{Caída de presión en la matriz tipo 1} = \frac{p_i - p_{m1}}{p_i - p_a}; \quad \dots\dots\dots (B-1b)$$

$$p_{2D} = \text{Caída de presión en la matriz tipo 2} = \frac{p_i - p_{m2}}{p_i - p_a}; \quad \dots\dots\dots (B-1c)$$

$$r_D = \text{Radio adimensional} = \frac{r}{r_a}; \quad \dots\dots\dots (B-2a)$$

$$r_{eD} = \text{Radio adimensional externo} = \frac{r_e}{r_a}; \quad \dots\dots\dots (B-2b)$$

$$t_D = \text{T tiempo adimensional} = \frac{k_f t}{\phi_f \mu c_f r_a^2}. \quad \dots\dots\dots (B-3)$$

Derivando parcialmente las Ecs. (B-1a), (B-1b), (B-1c), (B-2a) y (B-3) con respecto a p_{fD} , p_{1D} , p_{2D} , r y t , se obtiene:

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial p_f} = -\frac{1}{p_i - p_a};$$

$$\frac{\partial p_{1D}}{\partial p_{m1}} = -\frac{1}{p_i - p_a};$$

$$\frac{\partial p_{2D}}{\partial p_{m2}} = -\frac{1}{p_i - p_a};$$

$$\frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_a};$$

$$\frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2}; \quad \Rightarrow \quad \partial t = \frac{\phi_f \mu c_f r_a^2}{k_f} \partial t_D.$$

Reescribiendo la Ec. 28 en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) &= \frac{\mu \phi_f c_f}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} \\ &+ \frac{\mu \phi_{m1} c_{m1}}{k_f} \frac{\beta_1 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{m1}}{\partial t} + \frac{\mu \phi_{m2} c_{m2}}{k_f} \frac{\beta_2 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{m2}}{\partial t}. \quad \dots (B-4) \end{aligned}$$

Empleando la regla de la cadena y utilizando las derivadas parciales de las variables adimensionales, se obtiene:

$$r = r_a r_D;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_a} \frac{\partial}{\partial r_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\partial p_f}{\partial p_{fD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r} \frac{\partial r_D}{\partial r_D} = \frac{1}{\frac{\partial p_{fD}}{\partial p_f}} \frac{\partial r_D}{\partial r} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_i - p_a} \right)} \frac{1}{r_a} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{\partial p_f}{\partial p_{fD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t} \frac{\partial t_D}{\partial t_D} = \frac{1}{\frac{\partial p_{fD}}{\partial p_f}} \frac{\partial t_D}{\partial t} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_i - p_a} \right)} \frac{k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{[-(p_i - p_a)] k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_{m1}}{\partial t} = \frac{\partial p_{m1}}{\partial p_{1D}} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t} \frac{\partial t_D}{\partial t_D} = \frac{1}{\frac{\partial p_{1D}}{\partial p_{m1}}} \frac{\partial t_D}{\partial t} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_i - p_a} \right)} \frac{k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_{m1}}{\partial t} = \frac{[-(p_i - p_a)] k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_{m2}}{\partial t} = \frac{\partial p_{m2}}{\partial p_{2D}} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t} \frac{\partial t_D}{\partial t_D} = \frac{1}{\frac{\partial p_{2D}}{\partial p_{m2}}} \frac{\partial t_D}{\partial t} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_i - p_a} \right)} \frac{k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_{m2}}{\partial t} = \frac{[-(p_i - p_a)] k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para r , $\partial/\partial r$, $\partial p_f/\partial r$, $\partial p_f/\partial t$, $\partial p_{m1}/\partial t$ y $\partial p_{m2}/\partial t$ en la Ec. (B-4), se obtiene:

$$\frac{1}{r_a r_D} \frac{1}{r_a} \frac{\partial}{\partial r_D} \left\{ \cancel{r_D} \frac{[-(p_i - p_a)]}{\cancel{r_a}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right\} =$$

$$\frac{\cancel{\mu} \cancel{\phi}_f \cancel{c}_f}{\cancel{k}_f} \frac{[-(p_i - p_a)] \cancel{k}_f}{\cancel{\phi}_f \cancel{\mu} \cancel{c}_f r_a^2} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \frac{\cancel{\mu} \phi_{m1} c_{m1}}{\cancel{k}_f} \frac{\beta_1 (1 - \beta)}{\beta} \frac{[-(p_i - p_a)] \cancel{k}_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} +$$

$$\frac{\cancel{\mu} \phi_{m2} c_{m2}}{\cancel{k}_f} \frac{\beta_2 (1 - \beta)}{\beta} \frac{[-(p_i - p_a)] \cancel{k}_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D}.$$

Eliminando términos:

$$\frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left\{ r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right\} = \frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_1 (1 - \beta)}{\beta} \frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_2 (1 - \beta)}{\beta} \frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D};$$

$$\frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} * \left\{ \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) \right\} = \frac{[-(p_i - p_a)]}{r_a^2} * \left\{ \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_1 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_2 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} \right\};$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_1 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} + \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} \frac{\beta_2 (1 - \beta)}{\beta} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior en la forma siguiente

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \gamma_1 \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} + \gamma_2 \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D}, \dots \dots \dots (B-5)$$

donde:

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \beta)}{\beta} \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f}; \dots \dots \dots (B-6a)$$

$$\gamma_2 = \frac{(1 - \beta)}{\beta} \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f}. \dots \dots \dots (B-6b)$$

La expresión anterior es la ecuación de difusión en términos de variables adimensionales, para el caso radial.

De las Ecs. (B-1a), (B-1b) y (B-1c) despejamos p_f , p_{m1} y p_{m2} , respectivamente:

$$p_{fD} = \frac{p_i - p_f}{p_i - p_a} \Rightarrow p_{fD}(p_i - p_a) = p_i - p_f \Rightarrow p_f = p_i - p_{fD}(p_i - p_a);$$

$$p_{1D} = \frac{p_i - p_{m1}}{p_i - p_a} \Rightarrow p_{1D}(p_i - p_a) = p_i - p_{m1} \Rightarrow p_{m1} = p_i - p_{1D}(p_i - p_a);$$

$$p_{2D} = \frac{p_i - p_{m2}}{p_i - p_a} \Rightarrow p_{2D}(p_i - p_a) = p_i - p_{m2} \Rightarrow p_{m2} = p_i - p_{2D}(p_i - p_a).$$

En términos de variables adimensionales, las Ecs. 29 y 30, se convierte en las expresiones siguientes:

$$\frac{[-(p_i - p_a)]k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} = - \frac{\alpha k_{m1}}{\mu \phi_{m1} c_{m1}} \left[\cancel{p_i} - p_{1D}(p_i - p_a) - \cancel{p_i} + p_{fD}(p_i - p_a) \right];$$

$$\frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} = - \frac{\alpha k_{m1} \cancel{\phi_f} \cancel{\mu} c_f r_a^2}{k_f \cancel{\phi_{m1}} c_{m1}} \left[\frac{p_{fD}(\cancel{p_i} - p_a) - p_{1D}(\cancel{p_i} - p_a)}{-(\cancel{p_i} - p_a)} \right];$$

$$\frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} = \frac{\alpha k_{m1} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m1} c_{m1}} (p_{fD} - p_{1D});$$

$$\frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} = \delta_1 (p_{fD} - p_{1D}), \dots \dots \dots (B-7)$$

donde:

$$\delta_1 = \frac{\alpha k_{m1} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m1} c_{m1}}; \dots \dots \dots (B-7a)$$

$$\frac{[-(p_i - p_a)]k_f}{\phi_f \mu c_f r_a^2} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} = - \frac{\alpha k_{m2}}{\mu \phi_{m2} c_{m2}} \left[\cancel{p_i} - p_{2D}(p_i - p_a) - \cancel{p_i} + p_{fD}(p_i - p_a) \right];$$

$$\frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} = - \frac{\alpha k_{m2} \cancel{\phi_f} \cancel{\mu} c_f r_a^2}{k_f \cancel{\phi_{m2}} c_{m2}} \left[\frac{p_{fD}(\cancel{p_i} - p_a) - p_{2D}(\cancel{p_i} - p_a)}{-(\cancel{p_i} - p_a)} \right];$$

$$\frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} = \frac{\alpha k_{m2} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m2} c_{m2}} (p_{fD} - p_{2D});$$

$$\frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} = \delta_2 (p_{fD} - p_{2D}), \dots \dots \dots (B-8)$$

donde:

$$\delta_2 = \frac{\alpha k_{m2} \phi_f c_f r_a^2}{k_f \phi_{m2} c_{m2}}, \dots\dots\dots (B-8a)$$

donde α es el factor de forma para los bloques del yacimiento. Este factor de forma tiene dimensiones del recíproco del área y se calcula a partir de las dimensiones del bloque del yacimiento l_1 , l_2 y l_3 de acuerdo a un procedimiento propuesto por Warren y Root³⁶ y Morales.²⁵

$$\alpha = 60/l^2, \dots\dots\dots (B-9a)$$

donde:

$$l = \frac{3l_1 l_2 l_3}{l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1}. \dots\dots\dots (B-9b)$$

Las Ecs. (B-5), (B-7) y (B-8), describen el modelo para el flujo en un acuífero naturalmente fracturado, sujeto a las condiciones siguientes:

Inicial

$$p_{1D} = p_{2D} = p_{fD} = 0 \quad , \quad 1 \leq r_D \leq r_{eD} \quad , \quad t_D = 0. \dots\dots\dots (B-10a)$$

De frontera interna

$$p_{fD} = 1 \quad , \quad r_D = 1 \quad , \quad t_D > 0. \dots\dots\dots (B-10b)$$

De frontera externa

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} = 0 \quad , \quad r_e = r_{eD} \quad , \quad t_D > 0. \dots\dots\dots (B-10c)$$

Se define, la transformada finita de Hankel.³³

$$\mathcal{H}\{f(r)\} = \bar{f}(s) = \int_a^b f(r) B_n(sr) r dr ,$$

donde:

$$B_n(sr) = J_n(sb)Y_n(sa) - Y_n(sb)J_n(sa).$$

En particular, para el caso de la presión adimensional en las fracturas $f(r) = p_{fD}(r_D, t_D)$, obteniéndose:

$$\bar{p}_{fD} = \int_1^{r_{eD}} p_{fD}(r_D, t_D) B_0(sr_D) r_D dr_D, \dots\dots\dots (B-11)$$

donde:

$$B_0(sr_D) = J_0(sr_D)Y_0(s) - Y_0(sr_D)J_0(s). \dots\dots\dots (B-12)$$

La expresión anterior es una función para la transformada de Hankel, donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel del primer y segundo tipo, respectivamente, de orden cero; por lo tanto: $B_n(sr) = B_0(sr_D)$.

Los valores de s son raíces positivas de la ecuación siguiente:

$$J_n(sb)Y_n(sa) = Y_n(sb)J_n(sa);$$

$$J_1(sr_{eD})Y_0(s) - Y_1(sr_{eD})J_0(s) = 0, \dots\dots\dots (B-13)$$

donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primer tipo, de orden 0 y 1, respectivamente, y Y_0 y Y_1 son las funciones de Bessel de segundo tipo, de orden 0 y 1, respectivamente.^{13,21,22,26}

Para obtener las soluciones de la Ec. (B-13) se empleo el programa MATEMÁTICA 6 como se muestra en la **Fig. 1-B**, con base en lo anterior se obtuvieron las primeras raíces y cuyos valores se listan en la **Tabla 1-B**, para diferentes radios externos adimensionales del acuífero r_{eD} .

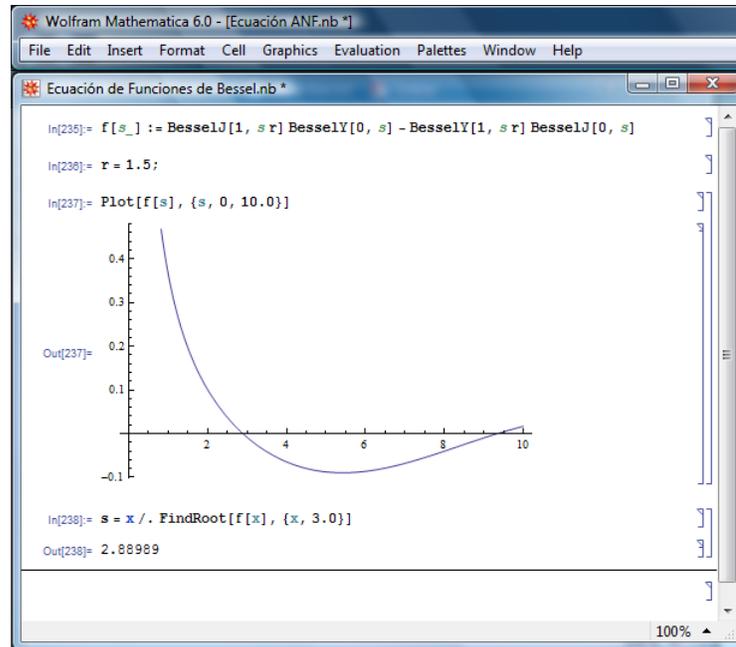


Fig. 1-B. Gráfica de la Ec. (B-13). 1) proponer un radio r_{eD} , 2) fijar un rango en el eje de las abscisas y 3) de la gráfica seleccionar el valor más cercano a la primera raíz.

Tabla 1-B.- Primeras raíces correspondientes a las funciones de Bessel de la ecuación $J_1(s r_{eD})Y_0(s) - Y_1(s r_{eD})J_0(s) = 0$.

r_{eD}	s_1	r_{eD}	s_1
1.5	2.889866	16	0.0610626
2.0	1.3607772	17	0.0566830
2.5	0.86605809	18	0.0528588
3.0	0.62559772	19	0.0494927
3.5	0.4850079	20	0.0465086
4.0	0.3934562	30	0.0286505
4.5	0.3294432	40	0.0204483
5.0	0.2623583	50	0.0157890
5.5	0.2463840	60	0.0128038
6.0	0.2180720	70	0.0107363
6.5	0.1952570	80	0.00922393
7.0	0.1765098	90	0.00807204
7.5	0.1608540	100	0.00716691
8.0	0.1475980	200	0.00330375
8.5	0.1362410	300	0.00221162
9.0	0.1264117	400	0.00154014

9.5	0.1178270	500	0.00120695
10	0.1102694	600	0.000989581
11	0.0975920	700	0.000836969
12	0.0873916	800	0.000724132
13	0.0790199	900	0.000637431
14	0.0720346	1000	0.000568798
15	0.0661241		

Los valores de s se pueden obtener de tablas de funciones matemáticas o de la solución de la serie dada por Abramowitz y Stegun¹; para valores de s que no se encuentren en tablas o no sean válidos para la solución, las raíces de la Ec. (B-13) se pueden obtener por un procedimiento numérico iterativo.

Aplicando la transformada de Hankel expresada por la Ec. (B-11), a la ecuación diferencial parcial (B-5):

$$\int_1^{r_{ed}} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} B_0(sr_D)r_D dr_D + \int_1^{r_{ed}} \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} B_0(sr_D)r_D dr_D = \int_1^{r_{ed}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} B_0(sr_D)r_D dr_D + \gamma_1 \int_1^{r_{ed}} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} B_0(sr_D)r_D dr_D + \gamma_2 \int_1^{r_{ed}} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} B_0(sr_D)r_D dr_D \dots \dots \text{(B-H)}$$

Integrando por partes, el lado izquierdo de la Ec. (B-H):

$$\int_1^{r_{ed}} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} B_0(sr_D)r_D dr_D + \int_1^{r_{ed}} \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} B_0(sr_D)r_D dr_D = ;$$

$$u = B_0(sr_D)r_D \quad du = [B_0(sr_D) + r_D B_0'(sr_D)s] dr_D ;$$

$$dv = \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} dr_D \quad v = \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} ;$$

$$B_0(sr_D)r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \Big|_1^{r_{ed}} - \int_1^{r_{ed}} [B_0(sr_D) + r_D B_0'(sr_D)s] \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} dr_D + \int_1^{r_{ed}} \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} B_0(sr_D)r_D dr_D = .$$

Por la definición del límite inferior de la transformada de Hankel, cuando $r_D = 1$ y de la Ec. (B-12), se obtiene:

$$B_0(s) = J_0(s) Y_0(s) - Y_0(s) J_0(s) = 0;$$

$$B_0(sr_D) \Big|_{r_D=1}^{r_{eD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_{eD}} - B_0(s) \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_{eD}} \Big|_{r_D=1}^{r_{eD}} - \int_1^{r_{eD}} B_0(sr_D) \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} dr_D - \int_1^{r_{eD}} sr_D B_0'(sr_D) \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} dr_D + \int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} B_0(sr_D) dr_D = .$$

Quedando:

$$- \int_1^{r_{eD}} sr_D B_0'(sr_D) \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} dr_D = .$$

Aplicando una segunda integración por partes, a la expresión anterior:

$$u = sr_D B_0'(sr_D) \quad du = [s^2 r_D B_0''(sr_D) + s B_0'(sr_D)] dr_D ;$$

$$dv = \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} dr_D \quad v = p_{fD} ;$$

$$- sr_D B_0'(sr_D) p_{fD} \Big|_1^{r_{eD}} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} [s^2 r_D B_0''(sr_D) + s B_0'(sr_D)] dr_D = .$$

De la condición de frontera interna Ec. (B-10b), cuando $t_D > 0$, $p_{fD} = 1$ y $r_D = 1$:

$$- p_{fD} sr_{eD} B_0'(sr_{eD}) + p_{fD} s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1}^{r_{eD}} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} [r_D s^2 B_0''(sr_D) + s B_0'(sr_D)] dr_D = ;$$

$$s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1}^{r_{eD}} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} [r_D s^2 B_0''(sr_D) + s B_0'(sr_D)] dr_D = . \dots\dots\dots (B-Ha)$$

Derivando la Ec. (B-12) con respecto a r_D :

$$B_0(sr_D) = J_0(sr_D) Y_0(s) - Y_0(sr_D) J_0(s);$$

$$s B_0'(sr_D) = s J_0'(sr_D) Y_0(s) - s Y_0'(sr_D) J_0(s);$$

$$s^2 B_0''(s r_D) = s^2 J_0''(s r_D) Y_0(s) - s^2 Y_0''(s r_D) J_0(s).$$

Sustituyendo las expresiones $s B_0'(s r_D)$ y $s^2 B_0''(s r_D)$ anteriores en la Ec. (B-Ha), se obtiene:

$$s B_0'(s r_D) \Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_D} p_{fD} \left\{ r_D \left[s^2 J_0''(s r_D) Y_0(s) - s^2 Y_0''(s r_D) J_0(s) \right] + \left[s J_0'(s r_D) Y_0(s) - s Y_0'(s r_D) J_0(s) \right] \right\} dr_D = .$$

Desarrollando operaciones dentro de la integral:

$$s B_0'(s r_D) \Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_D} p_{fD} \left\{ \frac{s^2 r_D J_0''(s r_D) Y_0(s) - s^2 r_D Y_0''(s r_D) J_0(s)}{\quad} + \frac{s J_0'(s r_D) Y_0(s) - s Y_0'(s r_D) J_0(s)}{\quad} \right\} dr_D = .$$

Factorizando $s J_0(s)$ y $s Y_0(s)$:

$$s B_0'(s r_D) \Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_D} p_{fD} \left\{ s Y_0(s) \left[s r_D J_0''(s r_D) + J_0'(s r_D) \right] - s J_0(s) \left[s r_D Y_0''(s r_D) + Y_0'(s r_D) \right] \right\} dr_D = . \quad \dots \text{ (B-Hb)}$$

La ecuación diferencial de Bessel de orden ν es:²⁶

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Si $\nu = 0$ y dividiendo por x , se obtiene la ecuación modificada de Bessel de orden cero.

$$x y'' + y' + x y = 0.$$

A partir de la ecuación de Bessel de orden cero:

$$\frac{x y''}{s r_D J_0''(s r_D) + J_0'(s r_D)} + \frac{y'}{\quad} = \frac{-x y}{-s r_D J_0(s r_D)};$$

$$s r_D Y_0''(s r_D) + Y_0'(s r_D) = -s r_D Y_0(s r_D).$$

Con base en la definición anterior, la Ec. (B-Hb) se reduce a:

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} \left\{ sY_0(s) \underbrace{[sr_D J_0''(sr_D) + J_0'(sr_D)]}_{-sr_D J_0(sr_D)} - sJ_0(s) \underbrace{[sr_D Y_0''(sr_D) + Y_0'(sr_D)]}_{-sr_D Y_0(sr_D)} \right\} dr_D =;$$

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} \left\{ sY_0(s) [-sr_D J_0(sr_D)] - sJ_0(s) [-sr_D Y_0(sr_D)] \right\} dr_D =;$$

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} + \int_1^{r_{eD}} p_{fD} \left\{ -s^2 J_0(sr_D) Y_0(s) r_D + s^2 Y_0(sr_D) J_0(s) r_D \right\} dr_D =;$$

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} - \int_1^{r_{eD}} p_{fD} \left\{ s^2 J_0(sr_D) Y_0(s) r_D - s^2 Y_0(sr_D) J_0(s) r_D \right\} dr_D =.$$

Factorizando s y r_D :

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} - s^2 \int_1^{r_{eD}} p_{fD} \underbrace{\{J_0(sr_D) Y_0(s) - Y_0(sr_D) J_0(s)\}}_{B_0(sr_D)} r_D dr_D =;$$

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} - s^2 \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{fD} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{fD}} =;$$

$$sB_0'(sr_D)\Big|_{r_D=1} - s^2 \bar{p}_{fD} =. \dots\dots\dots (B-Hc)$$

Desarrollando las integrales del lado derecho de la Ec. (B-H):

$$\begin{aligned} &= \int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} B_0(sr_D) r_D dr_D + \gamma_1 \int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} B_0(sr_D) r_D dr_D + \gamma_2 \int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} B_0(sr_D) r_D dr_D ; \\ &= \frac{\partial}{\partial t_D} \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{fD} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{fD}} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t_D} \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{1D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{1D}} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial t_D} \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{2D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{2D}} ; \end{aligned}$$

$$= \frac{d\bar{p}_{fD}}{dt_D} + \gamma_1 \frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} + \gamma_2 \frac{d\bar{p}_{2D}}{dt_D}. \dots\dots\dots (B-Hd)$$

Igualando las Ecs. (B-Hc) y (B-Hd):

$$s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1} - s^2 \bar{p}_{fD} = \frac{d\bar{p}_{fD}}{dt_D} + \gamma_1 \frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} + \gamma_2 \frac{d\bar{p}_{2D}}{dt_D}. \dots\dots\dots (B-14)$$

Aplicando la transformada de Hankel a las Ecs. (B-7) y (B-8), y utilizando la Ec. (B-11) se obtiene:

$$\int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} B_0(sr_D) r_D dr_D = \int_1^{r_{eD}} \delta_1 (p_{fD} - p_{1D}) B_0(sr_D) r_D dr_D ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{1D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{1D}} = \delta_1 \left[\underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{fD} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{fD}} - \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{1D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{1D}} \right];$$

$$\frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} = \delta_1 (\bar{p}_{fD} - \bar{p}_{1D}). \dots\dots\dots (B-15)$$

$$\int_1^{r_{eD}} \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} B_0(sr_D) r_D dr_D = \int_1^{r_{eD}} \delta_2 (p_{fD} - p_{2D}) B_0(sr_D) r_D dr_D ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{2D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{2D}} = \delta_2 \left[\underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{fD} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{fD}} - \underbrace{\int_1^{r_{eD}} p_{2D} B_0(sr_D) r_D dr_D}_{\bar{p}_{2D}} \right];$$

$$\frac{d\bar{p}_{2D}}{dt_D} = \delta_2 (\bar{p}_{fD} - \bar{p}_{2D}). \dots\dots\dots (B-16)$$

La Transformada de Laplace se define como sigue: ³¹

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} = \bar{f}^*(\sigma) = \int_0^{\infty} \bar{f}(t) e^{-\sigma t} dt ;$$

$$\bar{p}_{fD}^* = \int_0^{\infty} \bar{p}_{fD} e^{-\sigma t_D} dt_D \dots \dots \dots (B-17)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (B-14), se obtiene:

$$s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} 1 dt_D - s^2 \int_0^{\infty} \overbrace{\bar{p}_{fD}}^{\bar{p}_{fD}^*} e^{-\sigma t_D} dt_D$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d\bar{p}_{fD}}{dt_D} e^{-\sigma t_D} dt_D + \gamma_1 \int_0^{\infty} \frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} e^{-\sigma t_D} dt_D + \gamma_2 \int_0^{\infty} \frac{d\bar{p}_{2D}}{dt_D} e^{-\sigma t_D} dt_D \dots (B-La)$$

Empleando formulas de recurrencia,²⁹ la transformada de la unidad es $1/\sigma$, e integrando por partes el primer término del lado derecho de la expresión anterior, tomando en cuenta las condiciones establecidas en la Ec. (B-10a).

$$u = e^{-\sigma t_D} \quad du = -\sigma e^{-\sigma t_D} dt_D ;$$

$$dv = \frac{d\bar{p}_{fD}}{dt_D} dt_D \quad v = \bar{p}_{fD} ;$$

$$e^{-\sigma t_D} \bar{p}_{fD} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{p}_{fD} \sigma e^{-\sigma t_D} dt_D ; \quad \Rightarrow \quad \sigma \int_0^{\infty} \bar{p}_{fD} e^{-\sigma t_D} dt_D .$$

Considerando similarmente una integración por partes para los términos segundo y tercero del lado derecho de la Ec. (B-La), se obtiene:

$$\frac{s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1}}{\sigma} - s^2 \bar{p}_{fD}^* = \underbrace{\sigma \int_0^{\infty} \bar{p}_{fD} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{fD}^*} + \underbrace{\gamma_1 \sigma \int_0^{\infty} \bar{p}_{1D} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{1D}^*} + \underbrace{\gamma_2 \sigma \int_0^{\infty} \bar{p}_{2D} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{2D}^*} ;$$

$$\frac{s B_0'(sr_D) \Big|_{r_D=1}}{\sigma} - s^2 \bar{p}_{fD}^* = \sigma \bar{p}_{fD}^* + \gamma_1 \sigma \bar{p}_{1D}^* + \gamma_2 \sigma \bar{p}_{2D}^* \dots \dots \dots (B-18)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las Ecs. (B-15) y (B-16), utilizando la Ec. (B-17), tomando en cuenta las condiciones anteriores, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} e^{-\sigma t_D} dt_D = \delta_1 \left(\underbrace{\int_0^{\infty} \bar{p}_{fD} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{fD}^*} - \underbrace{\int_0^{\infty} \bar{p}_{1D} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{1D}^*} \right).$$

Integrando por partes:

$$u = e^{-\sigma t_D} \quad du = -\sigma e^{-\sigma t_D} dt_D ;$$

$$dv = \frac{d\bar{p}_{1D}}{dt_D} dt_D \quad v = \bar{p}_{1D} ;$$

$$e^{-\sigma t_D} \bar{p}_{1D} \Big|_0^{\infty} + \underbrace{\sigma \int_0^{\infty} \bar{p}_{1D} e^{-\sigma t_D} dt_D}_{\bar{p}_{1D}^*} = \delta_1 (\bar{p}_{fD}^* - \bar{p}_{1D}^*);$$

$$\sigma \bar{p}_{1D}^* = \delta_1 (\bar{p}_{fD}^* - \bar{p}_{1D}^*). \quad \dots \dots \dots (B-19)$$

Empleando análogamente el procedimiento para la Ec. (B-16), se obtiene:

$$\sigma \bar{p}_{2D}^* = \delta_2 (\bar{p}_{fD}^* - \bar{p}_{2D}^*). \quad \dots \dots \dots (B-20)$$

Los resultados obtenidos anteriormente en las Ecs. (B-18), (B-19) y (B-20), constituye un sistema lineal de tres ecuaciones simultáneas con su incógnita, \bar{p}_{fD}^* , \bar{p}_{1D}^* y \bar{p}_{2D}^* . Despejando \bar{p}_{1D}^* y \bar{p}_{2D}^* de las Ecs. (B-19) y (B-20):

$$\sigma \bar{p}_{1D}^* = \delta_1 (\bar{p}_{fD}^* - \bar{p}_{1D}^*) \quad \Rightarrow \quad \sigma \bar{p}_{1D}^* + \delta_1 \bar{p}_{1D}^* = \delta_1 \bar{p}_{fD}^* \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{1D}^* = \frac{\delta_1 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_1};$$

$$\sigma \bar{p}_{2D}^* = \delta_2 (\bar{p}_{fD}^* - \bar{p}_{2D}^*) \quad \Rightarrow \quad \sigma \bar{p}_{2D}^* + \delta_2 \bar{p}_{2D}^* = \delta_2 \bar{p}_{fD}^* \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{2D}^* = \frac{\delta_2 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_2}.$$

Sustituyendo \bar{p}_{1D}^* y \bar{p}_{2D}^* expresadas por las ecuaciones anteriores, en la Ec. (B-18):

$$\frac{s B_0'(sr_D)|_{r_D=1}}{\sigma} - s^2 \bar{p}_{fD}^* = \sigma \bar{p}_{fD}^* + \gamma_1 \sigma \frac{\delta_1 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_1} + \gamma_2 \sigma \frac{\delta_2 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_2}.$$

Despejando \bar{p}_{fD}^* :

$$\frac{s B_0'(sr_D)|_{r_D=1}}{\sigma} = \sigma \bar{p}_{fD}^* + s^2 \bar{p}_{fD}^* + \gamma_1 \sigma \frac{\delta_1 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_1} + \gamma_2 \sigma \frac{\delta_2 \bar{p}_{fD}^*}{\sigma + \delta_2};$$

$$\frac{s B_0'(sr_D)|_{r_D=1}}{\sigma} = \bar{p}_{fD}^* \left(\sigma + s^2 + \frac{\gamma_1 \sigma \delta_1}{\sigma + \delta_1} + \frac{\gamma_2 \sigma \delta_2}{\sigma + \delta_2} \right);$$

$$\bar{p}_{fD}^* = \frac{\frac{s B_0'(sr_D)|_{r_D=1}}{\sigma}}{\sigma + s^2 + \frac{\gamma_1 \sigma \delta_1}{\sigma + \delta_1} + \frac{\gamma_2 \sigma \delta_2}{\sigma + \delta_2}};$$

$$\bar{p}_{fD}^* = - \frac{2}{\pi \sigma \left(\sigma + s^2 + \frac{\gamma_1 \sigma \delta_1}{\sigma + \delta_1} + \frac{\gamma_2 \sigma \delta_2}{\sigma + \delta_2} \right)}, \dots \dots \dots (B-21)$$

donde:

$$s B_0'(sr_D)|_{r_D=1} = - \frac{2}{\pi s}. \dots \dots \dots (B-22)$$

Para el caso restringido donde $\beta = 1$ (uniforme) acuífero naturalmente fracturado con propiedades constantes, sustituyendo este valor en las Ecs. (B-6a) y (B-6b), la Ec. (B-21) se reduce a:

$$\gamma_1 = \frac{(1-\beta)}{\beta} \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} = (0) \beta_1 \frac{\phi_{m1} c_{m1}}{\phi_f c_f} = 0;$$

$$\gamma_2 = \frac{(1-\beta)}{\beta} \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} = (0) \beta_2 \frac{\phi_{m2} c_{m2}}{\phi_f c_f} = 0;$$

$$\bar{p}_{fD}^* = - \frac{2}{\pi \sigma (\sigma + s^2)}. \dots \dots \dots (B-23)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace con respecto al tiempo a la Ec. (B-23):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\};$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1}\left\{f\left(\bar{p}_{fD}^*\right)\right\};$$

$$\bar{p}_{fD}^* = -\frac{2}{\pi\sigma(\sigma+s^2)} = \frac{A}{\pi\sigma} + \frac{B}{(\sigma+s^2)}. \quad \dots\dots\dots (B-23a)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\pi\sigma(\sigma+s^2)$.

$$-\frac{2\cancel{\pi\sigma(\sigma+s^2)}}{\cancel{\pi\sigma(\sigma+s^2)}} = \frac{A\cancel{\pi\sigma(\sigma+s^2)}}{\cancel{\pi\sigma}} + \frac{B\pi\sigma(\cancel{\sigma+s^2})}{(\cancel{\sigma+s^2})};$$

$$-2 = A(\sigma+s^2) + B\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad -2 = A\sigma + As^2 + B\pi\sigma;$$

$$-2 = \sigma(A+B\pi) + As^2; \quad \text{si} \quad A+B\pi=0;$$

$$A = -\frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2}{\pi s^2}.$$

Sustituyendo los valores de A y B en la Ec. (B-23a)

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1}\left\{f\left(\bar{p}_{fD}^*\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{\pi\sigma}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{(\sigma+s^2)}\right\};$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1}\left\{f\left(\bar{p}_{fD}^*\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{\pi\sigma s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{\pi s^2(\sigma+s^2)}\right\};$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1}\left\{f\left(\bar{p}_{fD}^*\right)\right\} = -\frac{2}{\pi s^2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma}\right\} + \frac{2}{\pi s^2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(\sigma+s^2)}\right\}.$$

Empleando las formulas de recurrencia,³¹ la transformada inversa de $1/\sigma$ es la unidad y de $1/(\sigma+s^2)$ es $e^{-s^2 t_D}$, por lo tanto, se obtiene:

$$\bar{p}_{fD} = -\frac{2}{\pi s^2} + \frac{2}{\pi s^2} e^{-s^2 t_D} \dots \dots \dots (B-24)$$

Aplicando la transformada inversa de Hankel a la Ec. (B-24):³³

$$p_{fD} = \mathcal{H}^{-1} \left\{ f(\bar{p}_{fD}) \right\} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2 J_n^2(sb)}{J_n^2(sa) - J_n^2(sb)} \bar{f}(s) B_n(sr).$$

Empleando la transformada inversa de Hankel de $-2/\pi s^2 = 1$. Para sustituir términos en la transformada inversa, se utiliza la definición de la Ec. (B-13):

$$p_{fD} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \left(e^{-s^2 t_D} \right) B_0(s_n r_D).$$

Eliminando términos y reacomodando, se obtiene:

$$p_{fD} = 1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-s^2 t_D} B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \dots \dots \dots (B-25)$$

La Ec. (B-25) es la distribución de caída de presión para el caso limite en un yacimiento uniforme.

Como puede demostrar para el caso del yacimiento compuesto, la Ec. (B-21) puede reescribir como sigue:

$$\bar{p}_{fD}^* = -\frac{2}{\pi \sigma \left[\frac{\sigma(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2) + s^2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2) + (\gamma_1 \delta_1 \sigma)(\sigma + \delta_2) + (\gamma_2 \delta_2 \sigma)(\sigma + \delta_1)}{(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)} \right]};$$

$$\bar{p}_{fD}^* = -\left[\frac{2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\pi \sigma \left(\sigma^3 + \sigma^2 \delta_1 + \sigma^2 \delta_2 + \underline{\sigma \delta_1 \delta_2} + s^2 \sigma^2 + \underline{s^2 \delta_1 \sigma} + \underline{s^2 \sigma \delta_2} + s^2 \delta_1 \delta_2 \right)} + \frac{(\gamma_1 \delta_1 \sigma^2 + \underline{\gamma_1 \delta_1 \sigma \delta_2} + \underline{\gamma_2 \delta_2 \sigma^2} + \underline{\gamma_2 \delta_2 \sigma \delta_1})}{\pi \sigma \left(\sigma^3 + \sigma^2 \delta_1 + \sigma^2 \delta_2 + \underline{\sigma \delta_1 \delta_2} + s^2 \sigma^2 + \underline{s^2 \delta_1 \sigma} + \underline{s^2 \sigma \delta_2} + s^2 \delta_1 \delta_2 \right)} \right];$$

$$\bar{p}_{fD}^* = -\frac{2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\pi \sigma \left[\sigma^3 + \sigma^2 (\delta_1 + \delta_2 + s^2 + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2) + \sigma (\delta_1 \delta_2 + s^2 \delta_1 + s^2 \delta_2 + \gamma_1 \delta_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_2 \delta_1) + s^2 \delta_1 \delta_2 \right]};$$

$$\bar{p}_{fD}^* = -\frac{2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\pi \sigma \left[\sigma^3 + \sigma^2 (\delta_1 + \delta_2 + s^2 + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2) + \sigma (\delta_1 \delta_2 [1 + \gamma_1 + \gamma_2] + s^2 [\delta_1 + \delta_2]) + s^2 \delta_1 \delta_2 \right]};$$

$$\bar{p}_{fD}^* = -\frac{2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\pi \sigma (\sigma^3 + a \sigma^2 + b \sigma + c)}, \dots \dots \dots (B-26)$$

donde:

$$a = \delta_1 + \delta_2 + s^2 + \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2; \dots \dots \dots (B-27a)$$

$$b = \delta_1 \delta_2 (1 + \gamma_1 + \gamma_2) + s^2 (\delta_1 + \delta_2); \dots \dots \dots (B-27b)$$

$$c = s^2 \delta_1 \delta_2. \dots \dots \dots (B-27c)$$

Considerando de la Ec. (B-26) la función:

$$\frac{(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\sigma^3 + a \sigma^2 + b \sigma + c}. \dots \dots \dots (B-27d)$$

Esta función no tiene cambios de signo en el denominador, por lo tanto, tiene tres raíces reales negativas. El denominador puede reescribirse en términos de sus factores como sigue:

$$(\sigma + \xi_1)(\sigma + \xi_2)(\sigma + \xi_3);$$

$$\sigma^3 + \sigma^2 \xi_1 + \sigma^2 \xi_2 + \sigma \xi_1 \xi_2 + \sigma^2 \xi_3 + \sigma \xi_1 \xi_3 + \sigma \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_2 \xi_3;$$

$$\sigma^3 + \sigma^2 (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \sigma (\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3) + \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$

donde $-\xi_1, -\xi_2,$ y $-\xi_3$ son los ceros reales negativos, los cuales pueden encontrarse analíticamente por medio de formulas estándar para raíces cúbicas.

La Ec. (B-26), puede invertirse con respecto al tiempo t_D , aplicando la transformada inversa de Laplace por el método siguiente.³¹

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f \left(\bar{p}_{fD}^* \right) \right\};$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f \left(\bar{p}_{fD}^* \right) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \frac{2(\sigma + \delta_1)(\sigma + \delta_2)}{\pi \sigma (\sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c)} \right\};$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f \left(\bar{p}_{fD}^* \right) \right\} = - \frac{2}{\pi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sigma^2 + \sigma(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\sigma(\sigma + \xi_1)(\sigma + \xi_2)(\sigma + \xi_3)} \right\},$$

donde:

$$\frac{\sigma^2 + \sigma(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\sigma(\sigma + \xi_1)(\sigma + \xi_2)(\sigma + \xi_3)} = \frac{A}{\sigma} + \frac{B}{(\sigma + \xi_1)} + \frac{C}{(\sigma + \xi_2)} + \frac{D}{(\sigma + \xi_3)}; \quad \dots\dots\dots \text{(B-La)}$$

$$\bar{p}_{fD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ f \left(\bar{p}_{fD}^* \right) \right\} = - \frac{2}{\pi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{\sigma} + \frac{B}{(\sigma + \xi_1)} + \frac{C}{(\sigma + \xi_2)} + \frac{D}{(\sigma + \xi_3)} \right\}. \quad \dots\dots\dots \text{(B-Lb)}$$

Multiplicando ambos miembros de la Ec. (B-La) por σ , cuando $\sigma = 0$.

$$\frac{\cancel{\sigma}^0 [\cancel{\sigma}^0 + \sigma(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2] \cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}(\cancel{\sigma} + \xi_1)(\cancel{\sigma} + \xi_2)(\cancel{\sigma} + \xi_3)} = \frac{A\cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma}} + \frac{B\cancel{\sigma}}{(\sigma + \xi_1)} + \frac{C\cancel{\sigma}}{(\sigma + \xi_2)} + \frac{D\cancel{\sigma}}{(\sigma + \xi_3)};$$

$$A = \frac{\delta_1\delta_2}{\xi_1\xi_2\xi_3}.$$

Multiplicando ambos miembros de la Ec. (B-La) por $(\sigma + \xi_1)$, cuando $\sigma = -\xi_1$.

$$\frac{[\sigma^2 + \sigma(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2](\cancel{\sigma + \xi_1})^0}{\sigma(\cancel{\sigma + \xi_1})(\sigma + \xi_2)(\sigma + \xi_3)} = \frac{A(\cancel{\sigma + \xi_1})^0}{\sigma} + \frac{B(\cancel{\sigma + \xi_1})^0}{(\cancel{\sigma + \xi_1})} + \frac{C(\cancel{\sigma + \xi_1})^0}{(\sigma + \xi_2)} + \frac{D(\cancel{\sigma + \xi_1})^0}{(\sigma + \xi_3)};$$

$$B = \frac{\xi_1^2 - \xi_1(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{-\xi_1(-\xi_1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_3)} = - \frac{\xi_1^2 - \xi_1(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_1(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}.$$

Multiplicando ambos miembros de la Ec. (B-La) por $(\sigma + \xi_2)$, cuando $\sigma = -\xi_2$.

$$C = - \frac{\xi_2^2 - \xi_2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_2(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}.$$

Multiplicando ambos miembros de la Ec. (B-La) por $(\sigma + \xi_3)$, cuando $\sigma = -\xi_3$.

$$D = -\frac{\xi_3^2 - \xi_3(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}.$$

Sustituyendo los valores de A , B , C y D en la Ec. (B-Lb):

$$\begin{aligned} \bar{p}_{fD} = & -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\delta_1\delta_2}{\xi_1\xi_2\xi_3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sigma} \right\} - \frac{\xi_1^2 - \xi_1(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_1(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\sigma + \xi_1)} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{\xi_2^2 - \xi_2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_2(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\sigma + \xi_2)} \right\} - \frac{\xi_3^2 - \xi_3(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{\xi_3(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\sigma + \xi_3)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Por fórmulas de recurrencia, la transformada inversa de $1/\sigma=1$, $1/(\sigma + \xi_1)=e^{-\xi_1 t_D}$, $1/(\sigma + \xi_2)=e^{-\xi_2 t_D}$ y $1/(\sigma + \xi_3)=e^{-\xi_3 t_D}$, por lo tanto:

$$\bar{p}_{fD} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{M}{\xi_1} e^{-\xi_1 t_D} + \frac{N}{\xi_2} e^{-\xi_2 t_D} + \frac{S}{\xi_3} e^{-\xi_3 t_D} - \frac{\delta_1\delta_2}{\xi_1\xi_2\xi_3} \right), \dots\dots\dots (B-28)$$

donde:

$$M = \frac{\xi_1^2 - \xi_1(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}; \dots\dots\dots (B-29a)$$

$$N = \frac{\xi_2^2 - \xi_2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}; \dots\dots\dots (B-29b)$$

$$S = \frac{\xi_3^2 - \xi_3(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1\delta_2}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}. \dots\dots\dots (B-29c)$$

Se puede demostrar que:

$$\frac{M}{\xi_1} + \frac{N}{\xi_2} + \frac{S}{\xi_3} = \frac{\delta_1\delta_2}{\xi_1\xi_2\xi_3}. \dots\dots\dots (B-29d)$$

Finalmente la función \bar{p}_{fD} , puede invertirse por medio de la fórmula siguiente, obtenida como resultado de una expansión de Fourier-Bessel.

$$p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_{fD}(s_n, t_D) s_n^2 B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \dots\dots\dots (B-30)$$

La función $p_{fD}(r_D, t_D)$ debe aproximarse a la unidad en periodos largos. Puede reescribirse la expresión para la caída de presión de la manera siguiente:

A partir de los factores del denominador de la Ec. (B-26) y de la Ec. (B-27c), se tiene que $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = c = \delta_1 \delta_2 s^2$, entonces el término constante de la Ec. (B-28), se convierte en:

$$-\frac{\delta_1 \delta_2}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = -\frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 \delta_2 s^2} = -\frac{1}{s^2};$$

$$\bar{p}_{fD} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{M}{\xi_1} e^{-\xi_1 t_D} + \frac{N}{\xi_2} e^{-\xi_2 t_D} + \frac{S}{\xi_3} e^{-\xi_3 t_D} - \frac{1}{s^2} \right);$$

$$\bar{p}_{fD} = -\frac{1}{\pi s^2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{M}{\xi_1} e^{-\xi_1 t_D} + \frac{N}{\xi_2} e^{-\xi_2 t_D} + \frac{S}{\xi_3} e^{-\xi_3 t_D} \right) \dots\dots\dots (B-31)$$

Sustituyendo la Ec. (B-31), dentro de la Ec. (B-30). Por fórmulas de recurrencia, la inversa de $-2/\pi s^2 = 1$

$$p_{fD}(r_D, t_D) = 1 + \frac{\pi^2}{\cancel{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \cancel{*} \cancel{2} \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right);$$

$$p_{fD}(r_D, t_D) = 1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right), \dots\dots\dots (B-32)$$

donde $\xi_{1,n}$, $\xi_{2,n}$ y $\xi_{3,n}$ se evalúan para cada valor de s_n en la sumatoria.

$$\bar{p}_{fD}^* \rightarrow -\frac{2}{\pi \sigma s^2}.$$

Entonces:

$$\bar{p}_{fD} = -\frac{2}{\pi s^2}.$$

y

$$p_{fD} = 1.$$

La entrada acumulativa de agua, se obtiene por la relación siguiente:^{10,11,34}

$$W_e = \int_0^t q dt'.$$

Velocidad de un fluido en un medio poroso $v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$, Ley de Darcy.

$$v = \frac{q}{A} = \frac{q}{2\pi r h} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad q = -2\pi r h \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Por lo tanto:

$$W_e = 2\pi r_a h \beta \int_0^t \frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial r} \right)_{r=r_a} dt',$$

donde $\partial p_f / \partial r$ y dt , se definen al principio de este apéndice:

$$W_e = 2\pi \cancel{r}_a h \beta \int_0^{t_D} \frac{\cancel{K}_f}{\cancel{K}_f} \left(\frac{-(p_i - p_a) \partial p_{fD}}{\cancel{r}_a \partial r_D} \right)_{r_D=1} \frac{\cancel{\varphi}_f \cancel{c}_f r_a^2}{\cancel{K}_f} \partial t_D.$$

Reorganizando:

$$W_e = 2\pi \varphi_f c_f \beta r_a^2 h (p_i - p_a) \left[-\int_0^{t_D} \left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \partial t_D \right];$$

$$W_e = 2\pi \varphi_f c_f \beta r_a^2 h (p_i - p_a) W_{eD}; \quad \dots\dots\dots (B-33)$$

$$W_{eD} = -\int_0^{t_D} \left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \partial t_D. \quad \dots\dots\dots (B-34)$$

donde $r_D = 1$, corresponde a la posición del contacto agua aceite.

La Ec. (B-34) requiere de $\partial p_{fD}/\partial r_D$, derivando parcialmente la Ec. (B-32) con respecto a r_D :

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \left[p_{fD}(r_D, t_D) = 1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right) \right];$$

$$\frac{\partial}{\partial r_D} p_{fD}(r_D, t_D) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 \frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right).$$

$B_0(s_n r_D)$ Se define en la Ec. (B-12), derivando parcialmente:

$$\frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) = J_0(s_n r_D) Y_0(s_n) - Y_0(s_n r_D) J_0(s_n);$$

$$\frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) = Y_0(s_n) J_1(s_n r_D) (-s_n) - J_0(s_n) Y_1(s_n r_D) (-s_n);$$

$$\frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) = s_n [J_0(s_n) Y_1(s_n r_D) - Y_0(s_n) J_1(s_n r_D)].$$

La derivada parcial $\partial p_{fD}/\partial r_D$ está valuada en $r_D = 1$, sustituyendo el valor de r_D en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) = s_n [J_0(s_n) Y_1(s_n) - Y_0(s_n) J_1(s_n)].$$

Por fórmulas de recurrencia:⁵

$$J_n(s) Y_{n+1}(s) - Y_n(s) J_{n+1}(s) = -\frac{2}{\pi s};$$

$$J_0(s_n) Y_1(s_n) - Y_0(s_n) J_1(s_n) = -\frac{2}{\pi s_n};$$

$$\frac{\partial}{\partial r_D} B_0(s_n r_D) = s_n \left[-\frac{2}{\pi s_n} \right] = -\frac{2}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la derivada parcial de $p_{fD}(r_D, t_D)$:

$$\left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{r}\right) \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D}\right);$$

$$\left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D}\right).$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (B-34), desarrollando la integral:

$$W_{eD} = -\int_0^{t_D} \left[-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D}\right) \right] dt_D;$$

$$W_{eD} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} \int_0^{t_D} \left(\frac{M}{\xi_{1,n}} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}} e^{-\xi_{3,n} t_D}\right) dt_D.$$

Integrando por partes el primer término de la expresión anterior:

$$u = \frac{M}{\xi_{1,n}} \quad du = (0) dt_D;$$

$$dv = e^{-\xi_{1,n} t_D} dt_D \quad v = -\frac{e^{-\xi_{1,n} t_D}}{\xi_{1,n}};$$

$$-\frac{M}{\xi_{1,n}} \frac{e^{-\xi_{1,n} t_D}}{\xi_{1,n}} \Big|_0^{t_D} - \int_0^{t_D} -\frac{e^{-\xi_{1,n} t_D}}{\xi_{1,n}} (0) dt_D;$$

$$-\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{M}{\xi_{1,n}^2}.$$

Considerando similarmente una integración por partes para los términos segundo y tercero, quedando finalmente:

$$W_{eD} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} - \frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} - \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} - \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right). \dots\dots (B-35)$$

La ecuación para W_{eD} contiene un término constante y un término que involucra al tiempo.

$$W_{eD} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right).$$

Término constante
Término que involucra al tiempo

Como $t_D \rightarrow \infty$, el término constante debe aproximarse al valor límite obtenido de un balance de materia, es decir:

$$W_e \rightarrow \pi(r_e^2 - r_a^2) h \beta \phi_f c_f \Delta p + \pi(r_e^2 - r_a^2) h (1 - \beta) \beta_1 \phi_{m1} c_{m1} \Delta p + \pi(r_e^2 - r_a^2) h (1 - \beta) \beta_2 \phi_{m2} c_{m2} \Delta p, \dots\dots (B-36a)$$

donde:

$$\Delta p = p_i - p_a. \dots\dots\dots (B-36b)$$

El término constante puede obtenerse por un procedimiento basado en la transformada de Laplace de la función p_{fD} , de una manera similar a la usada en la referencia 34.

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (B-5). La ecuación diferencial parcial, se convierte en una ecuación diferencial ordinaria.

$$\bar{p}_{fD}(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} p(t_D) dt_D ;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} \left(\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) dt_D = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} \left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + \gamma_1 \frac{\partial p_{1D}}{\partial t_D} + \gamma_2 \frac{\partial p_{2D}}{\partial t_D} \right) dt_D.$$

Para el primer término del lado derecho, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial r_D^2} dt_D = \frac{\partial^2}{\partial r_D^2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} p_{fD} dt_D}_{\bar{p}_{fD}} = \frac{d^2 \bar{p}_{fD}}{dr_D^2}.$$

Considerando similarmente el mismo procedimiento para los demás términos de la igualdad:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fD}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{fD}}{dr_D} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} \left(\frac{dp_{fD}}{dt_D} + \gamma_1 \frac{dp_{1D}}{dt_D} + \gamma_2 \frac{dp_{2D}}{dt_D} \right) dt_D.$$

Integrando por partes el primer término:

$$u = e^{-\sigma t_D} \quad du = -\sigma e^{-\sigma t_D} dt_D;$$

$$dv = \frac{dp_{fD}}{dt_D} dt_D \quad v = p_{fD};$$

$$e^{-\sigma t_D} p_{fD}(t_D) \Big|_0^{\infty} + \underbrace{\sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t_D} p_{fD} dt_D}_0 = \sigma \bar{p}_{fD}.$$

El procedimiento de integración es similar para el segundo y tercer término:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fD}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{fD}}{dr_D} = \sigma \bar{p}_{fD} + \gamma_1 \sigma \bar{p}_{1D} + \gamma_2 \sigma \bar{p}_{2D}. \quad \dots\dots\dots (B-37)$$

La solución general de la presión es la siguiente:^{7,30}

$$\bar{p}(r, \sigma) = [AJ_0(r\sqrt{\sigma}) + BY_0(r\sqrt{\sigma})];$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, \sigma) = [AJ_0(r_D\sqrt{\sigma}) + BY_0(r_D\sqrt{\sigma})](1 + \gamma_1 + \gamma_2), \quad \dots\dots\dots (B-38)$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente, de orden cero.¹⁸ A y B son dos constantes, los cuales satisfacen la ecuación anterior.

Como $\bar{p}_{fD}(r_D, \sigma)$ es la transformación de la caída de presión en un punto en la formación, y porque en un punto aún no afectado por la producción, la presión absoluta es igual a la presión inicial, es necesario que $\bar{p}_{fD}(r_D, \sigma)$ deba acercarse a cero a medida que r_{eD} se hace grande. Las soluciones para A y B son las expresiones algebraicas simultáneas siguientes:

$$A = \frac{Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD})}{\sigma \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + Y_0(\sqrt{\sigma}) J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) \right]};$$

$$B = \frac{J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD})}{\sigma \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + Y_0(\sqrt{\sigma}) J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) \right]},$$

donde J_1 y Y_1 son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente, de primer orden. Sustituyendo estas constantes en la Ec. (B-38). Se obtiene la solución general por caída de presión.

$$\bar{p}_{fD}(r_D, \sigma) = \frac{Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(r_D \sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(r_D \sqrt{\sigma})}{\sigma \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2).$$

Para que la expresión anterior pueda utilizarse se debe derivar con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} = \frac{-Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_1(r_D \sqrt{\sigma}) \sqrt{\sigma} - J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_1(r_D \sqrt{\sigma}) \sqrt{\sigma}}{\sigma \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2);$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} = - \frac{\sqrt{\sigma} \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_1(r_D \sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_1(r_D \sqrt{\sigma}) \right]}{\sigma \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2);$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} = - \frac{\left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_1(r_D \sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_1(r_D \sqrt{\sigma}) \right]}{\sqrt{\sigma} \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2).$$

Para encontrar la producción acumulativa de fluido $\bar{Q}(\sigma)$ por caída de presión, la transformada para el gradiente de presión en $r_D = 1$ es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} &= - \frac{Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_1(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_1(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma} \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2); \\ - \left(\frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} &= \frac{J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_1(\sqrt{\sigma}) - Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_1(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma} \left[Y_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma} r_{eD}) Y_0(\sqrt{\sigma}) \right]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2). \quad \dots \text{(B-39a)} \end{aligned}$$

El signo negativo se introdujo para hacer la producción $\bar{Q}(\sigma)$ positiva, reorganizando términos se obtiene:

Teorema.^{7,34} La transformada de $\int_0^\infty p(t') dt'$ se expresa por:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t p(t') dt' & du &= p(t') dt'; \\ dv &= e^{-\sigma t} dt & v &= -\frac{e^{-\sigma t}}{\sigma}; \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} \int_0^t p(t') dt' dt = \frac{-e^{-\sigma t}}{\sigma} \int_0^t p(t') dt' \Big|_0^\infty + \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \underbrace{e^{-\sigma t} p(t')}_{\bar{p}} dt' = \frac{\bar{p}}{\sigma}.$$

La transformada de la integración $p(t')$ con respecto a t' de 0 a t , es \bar{p}/σ si:

$$e^{-\sigma t} \int_0^t p(t') dt' = 0 \quad \text{Para } t \text{ infinito.}$$

El teorema muestra que la integración con respecto al tiempo, introduce un operador adicional σ , en el denominador de la Ec. (B-39a).

$$\bar{W}_e(\sigma) = \frac{J_1(\sqrt{\sigma}r_{eD})Y_1(\sqrt{\sigma}) - Y_1(\sqrt{\sigma}r_{eD})J_1(\sqrt{\sigma})}{\sigma^{3/2} [Y_1(\sqrt{\sigma}r_{eD})J_0(\sqrt{\sigma}) + J_1(\sqrt{\sigma}r_{eD})Y_0(\sqrt{\sigma})]} (1 + \gamma_1 + \gamma_2). \dots\dots\dots (B-39b)$$

Las expansiones para Y_0 y Y_1 se dan en la referencia 23

$$Y_0(\sigma) \cong - \left[\log \frac{\sigma}{2} + \lambda \right];$$

$$Y_1(\sigma) \cong \frac{1}{\sigma},$$

donde λ , es la constante de Euler igual a 0.57722, y el término logarítmico consiste de logaritmos naturales cuando σ es pequeño.

En la **Fig. 2-B**, se muestra el comportamiento de las funciones modificadas de Bessel de cero y primer orden, $J_0(\sqrt{\sigma}r_{eD})$ se hace cada vez más grandes y $Y_0(\sqrt{\sigma}r_{eD})$ se acercan a cero a medida que aumenta el argumento ($\sqrt{\sigma}r_{eD}$), en la cual se puede observar que $J_0(\infty) \rightarrow \infty$ y $Y_0(\infty) \rightarrow 0$.

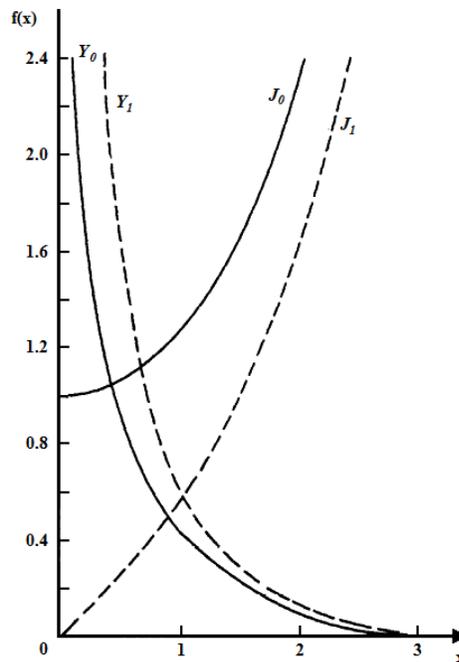


Fig. 2-B. Comportamiento de las funciones de Bessel.¹

Valores reales y pequeños de σ , en las expansiones para Y_0 y Y_1 , reducen la Ec. (B-39b), obteniendo:

$$\overline{W}_e(\sigma) = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2\sigma} (1 + \gamma_1 + \gamma_2). \quad \dots\dots\dots (B-40)$$

Aplicando el teorema de la transformada inversa de Laplace⁷, a la expresión anterior:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} f(\sigma) e^{\sigma t_D} d\sigma = 0;$$

$$\overline{W}_e(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \frac{r_{eD}^2 - 1}{2\sigma} (1 + \gamma_1 + \gamma_2) d\sigma; \quad \text{Si } \sigma \rightarrow s.$$

Reorganizando:

$$\overline{W}_e(s) = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (1 + \gamma_1 + \gamma_2) \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \frac{1}{s} ds = \frac{r_{eD} - 1}{2} (1 + \gamma_1 + \gamma_2);$$

$$\overline{W}_e(s) = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (1 + \gamma_1 + \gamma_2) \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \frac{1}{s} ds; \quad \dots\dots\dots (B-41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \frac{1}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \overline{W}_e(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{e^{\sigma t_D} I_1(\sqrt{s} r_{eD}) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s} r_{eD}) I_1(\sqrt{s})}{s^{3/2} [K_1(\sqrt{s} r_{eD}) I_0(\sqrt{s}) + K_0(\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s} r_{eD})]} ds. \end{aligned}$$

Si $s = u^2 e^{\pm\pi i}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \frac{1}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{\sigma t_D} \overline{W}_e(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{e^{-u t_D} [I_1(u e^{\pm\pi i/2} r_{eD}) K_1(u e^{\pm\pi i/2}) - K_1(u e^{\pm\pi i/2} r_{eD}) I_1(u e^{\pm\pi i/2})]}{u^2 [K_1(u e^{\pm\pi i/2} r_{eD}) I_0(u e^{\pm\pi i/2}) + K_0(u e^{\pm\pi i/2}) I_1(u e^{\pm\pi i/2} r_{eD})]} ds. \end{aligned}$$

Las funciones modificadas de Bessel del primer y segundo tipo, de argumentos $s e^{\pm i\pi/2}$, pueden expresarse por funciones regulares de Bessel en términos de valores complejos, de la forma siguiente.³⁴

$$\begin{aligned}
 I_0(u e^{\pm i\pi/2}) &= J_0(u); \\
 K_0(u e^{\pm i\pi/2}) &= \mp \frac{\pi i}{2} [J_0(u) \mp i Y_0(u)]; \\
 I_1(u e^{\pm i\pi/2}) &= \pm i J_1(u); \\
 K_1(u e^{\pm i\pi/2}) &= -\frac{\pi}{2} [J_1(u) \mp i Y_1(u)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{st_D} \frac{1}{s} ds = \\
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} \left[\pm i J_1(ur_{eD}) \left[-\frac{\pi}{2} (J_1(u) \mp i Y_1(u)) \right] + \frac{\pi}{2} [J_1(ur_{eD}) \mp i Y_1(ur_{eD})] [\pm i J_1(u)] \right]}{u^2 \left[-\frac{\pi}{2} [J_1(ur_{eD}) \mp i Y_1(ur_{eD})] J_1(u) + \left[\mp \frac{\pi i}{2} (J_0(u) \mp i Y_0(u)) \right] [\pm i J_1(ur_{eD})] \right]} du;
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{st_D} \frac{1}{s} ds = -\frac{1}{\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} [J_1(ur_{eD})Y_1(u) - Y_1(ur_{eD})J_1(u)]}{u^2 [J_1(ur_{eD})Y_0(u) + Y_1(ur_{eD})J_0(u)]} du.$$

La serie de expansión de la ecuación anterior es:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{s_n} e^{st_D} \frac{1}{s} ds = -2 \sum_{u_n} \frac{e^{-u_n^2 t_D} [J_1(u_n r_{eD})Y_1(u_n) - Y_1(u_n r_{eD})J_1(u_n)]}{u_n^2 \lim_{du} \frac{d}{du} [J_1(ur_{eD})Y_0(u) + Y_1(ur_{eD})J_0(u)]}. \dots\dots\dots (B-42)$$

Fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned}
 J_1'(u) &= J_0(u) - J_1(u)/u; \\
 J_0'(u) &= -J_1(u); \\
 J_1(u)Y_0(u) - J_0(u)Y_1(u) &= 2/\pi u.
 \end{aligned}$$

Por fórmulas de recurrencia y la Ec. (B-13), la Ec. (B-42) se reduce a:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{s_n} e^{st_D} \frac{1}{s} ds = -2 \sum_{u_n}^{\infty} \frac{e^{-u_n^2 t_D} J_1^2(u_n r_{eD})}{u_n^2 [J_0^2(u_n) - J_1^2(u_n r_{eD})]}.$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (B-41), la solución para Q es finalmente:

$$W_e = \underbrace{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (1 + \gamma_1 + \gamma_2)}_{\text{Término constante}} - 2 \sum_{u_n}^{\infty} \frac{e^{-u_n^2 t_D} J_1^2(u_n r_{eD})}{u_n^2 [J_0^2(u_n) - J_1^2(u_n r_{eD})]} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Término que involucra al tiempo}}.$$

El término constante de la expresión anterior, se sustituye dentro de la Ec. (B-35), por el término constante de dicha ecuación:

$$W_{eD} = \underbrace{\frac{r_{eD}^2 - 1}{2} (1 + \gamma_1 + \gamma_2)}_{\text{Término constante}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \underbrace{\left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right)}_{\text{Término que involucra al tiempo}}.$$

La expresión final para la función de flujo adimensional es entonces:

$$W_{eD} = \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} \left\{ 1 + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_1 \frac{\varphi_{m1} c_{m1}}{\varphi_f c_f} + \frac{1 - \beta}{\beta} \beta_2 \frac{\varphi_{m2} c_{m2}}{\varphi_f c_f} \right\} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})} * \left(\frac{M}{\xi_{1,n}^2} e^{-\xi_{1,n} t_D} + \frac{N}{\xi_{2,n}^2} e^{-\xi_{2,n} t_D} + \frac{S}{\xi_{3,n}^2} e^{-\xi_{3,n} t_D} \right). \dots (B-43)$$

La **Fig. 3-B**, muestra la programación de las funciones de Bessel en la Ec. (B-43) y cuyos valores se incluyen en la **Tabla 2-B**, para diferentes valores de r_{eD} .

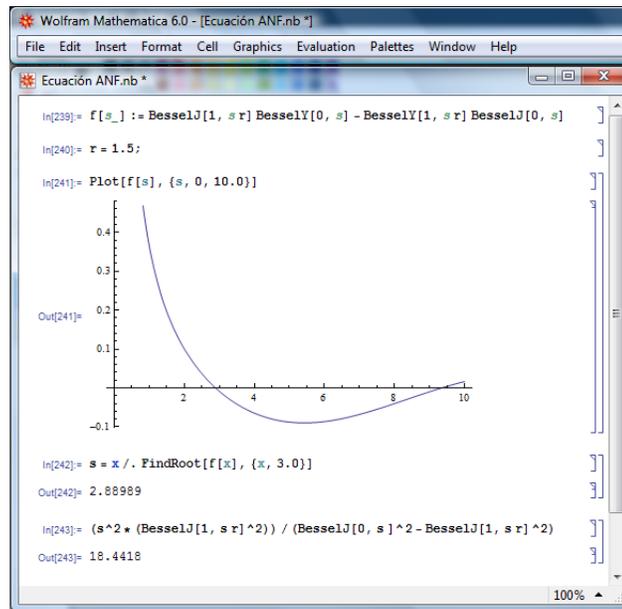


Fig. 3-B. Solución de la función

Tabla 2-B.- Valores del término en funciones de Bessel.

r_{eD}	$\frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})}$	$\varphi_{FB} = \frac{J_1^2(s_n r_{eD})}{s_n^2 [J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})]}$	r_{eD}	$\frac{s_n^2 J_1^2(s_n r_{eD})}{J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})}$	$\varphi_{FB} = \frac{J_1^2(s_n r_{eD})}{s_n^2 [J_0^2(s_n) - J_1^2(s_n r_{eD})]}$
1.5	18.4418	0.264412	16	0.000859861	61.848
2.0	2.23788	0.652663	17	0.000722002	69.94
2.5	0.655335	1.164865	18	0.000613052	78.5284
3.0	0.275865	1.80101162	19	0.000525697	87.6133
3.5	0.141715	2.5610814	20	0.000454753	97.19486
4.0	0.0825625	3.4450626	30	0.000148457	220.3302
4.5	0.0524529	4.452947	40	0.0000687383	393.1627
5.0	0.0354981	5.5847337	50	0.0000382649	615.716
5.5	0.0252075	6.84043	60	0.0000238656	888.009
6.0	0.0185897	8.2200267	70	0.0000160775	1210.06
6.5	0.0141334	9.72355	80	0.0000114507	1581.87
7.0	0.0110181	11.351001	90	8.50574E-06	2003.45
7.5	0.0087715	13.1024	100	6.52934E-06	2474.812
8.0	0.00710833	14.977716	200	1.18268E-06	9927.5115
8.5	0.00584922	16.977	300	4.44619E-07	22362.6
9.0	0.0048774	19.100258	400	2.23834E-07	39781.8
9.5	0.00411456	21.3475	500	1.31965E-07	62186.529
10	0.00350681	23.71873	600	8.5902E-08	89577.4
11	0.00261547	28.8332	700	5.98462E-08	121955
12	0.00200904	34.4437	800	4.38069E-08	159320
13	0.00158104	40.5504	900	3.32951E-08	201673
14	0.00126963	47.1533	1000	2.60649E-08	249014
15	0.00103719	54.25255			

Para tiempos cortos:

$$W_{eD} \approx 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}}. \dots\dots\dots (B-44)$$

Para tiempos largos, la Ec. (B-43) puede ser evaluada con buena exactitud usando el primer término de las series como sigue:

$$W_{eD} \approx (1 + \gamma_1 + \gamma_2) \left\{ \frac{r_{eD}^2 - 1}{2} - 2\varphi_{FB} e^{-\xi_{1,1}^{(0)} t_D} \right\}, \dots\dots\dots (B-45)$$

donde $\xi_{1,1}^{(0)}$ es la primera raíz aproximada de la expresión $\xi^3 + a\xi^2 + b\xi + c = 0$. Esto se obtiene de la relación siguiente:

$$\xi_{1,1}^{(0)} \approx \frac{s_1^2}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}, \dots\dots\dots (B-46)$$

donde s_1 es la primera raíz de la Ec. (B-12) y φ_{FB} es el coeficiente correspondiente de Fourier-Bessel. Los valores para φ_{FB} se incluyen en la **Tabla 2-B**.

$$\varphi_{FB} = \frac{J_1^2(s_1 r_{eD})}{s_1^2 J_0^2(s_1) - J_1^2(s_1 r_{eD})}. \dots\dots\dots (B-47)$$

La Ec. (B-45), da resultados con un margen de error del 8 por ciento para $t_D > 1,000$ y aun mejores de alrededor de 2.5 por ciento para $t_D > 2,000$, con $r_{eD} \leq 10$.

Apéndice C

Derivación del Radio r_1 , de la Presión p_1 , del Frente de Agua de Invasión y de la Presión Promedio \bar{p} en la Región Invasada por Agua

Para obtener r_2 que es el radio del contacto original agua-gas **Fig. 5**, se emplea la definición para el volumen original de hidrocarburos.

$$V_{Hcs} = \frac{\pi r^2 h \phi (1 - S_{wi})}{5.615 B}; \dots\dots\dots (C-1)$$

$$G = \frac{\pi r^2 h \phi (1 - S_{wi})}{5.615 B_g} [pies^3 @ c.e.]. \dots\dots\dots (C-2)$$

Para obtener el radio del contacto original agua-gas, se considera $r = r_2$:

$$r_2 = \left[\frac{5.615 GB_g}{\pi h \phi (1 - S_{wi})} \right]^{1/2} [pies]. \dots\dots\dots (C-3)$$

Para obtener el radio r_1 de la zona no invadida por agua, se considera el volumen que entra de agua por medio de la Ec. (C-1), obteniéndose la expresión siguiente:

$$W_e = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(S_{gi} - S_{gr})}{5.615} dV_p .$$

Si $V_p = \pi r^2 h \phi$, entonces $dV_p = 2 \pi r h \phi dr$; sustituyendo esta diferencial del volumen poroso en la ecuación anterior, se obtiene:

$$W_e = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2 \pi r h \phi (S_{gi} - S_{gr})}{5.615} dr = \frac{2 \pi h \phi (S_{gi} - S_{gr})}{5.615} \int_{r_1}^{r_2} r dr.$$

Integrando:

$$W_e = \frac{2 \pi h \phi (S_{gi} - S_{gr})}{5.615} \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{2 \pi h \phi (S_{gi} - S_{gr}) (r_2^2 - r_1^2)}{5.615 \cdot 2};$$

$$W_e = \frac{\pi h \phi (S_{gi} - S_{gr})}{5.615} (r_2^2 - r_1^2) [bl @ c.y.].$$

Despejando al radio del frente de agua de invasión, r_1 .

$$r_1^2 = r_2^2 - \frac{5.615 W_e}{\pi h \phi (S_{gi} - S_{gr})} [pies^2];$$

$$r_1 = \left[r_2^2 - \frac{5.615 W_e}{\pi h \phi (S_{gi} - S_{gr})} \right]^{1/2} [pies]. \dots\dots\dots (C-4)$$

Para obtener la presión promedio en la región invadida por agua \bar{p} , se emplea la ecuación de los gases reales, $pV = znRT$:

$$n = p \frac{V}{zRT}. \dots\dots\dots (C-5)$$

Integrando con respecto a la diferencial de moles (masa) dn y considerando $p = \bar{p}$:

$$\int dn = \bar{p} \frac{V}{zRT}.$$

Despejando la presión promedio en la región invadida por agua \bar{p} , obtenemos:

$$\bar{p} = \frac{\int dn}{V/zRT} \dots\dots\dots (C-6)$$

Sustituyendo la Ec. (C-5) en la expresión anterior se obtiene:

$$\bar{p} = \frac{\int d(pV/zRT)}{V/zRT} = \frac{\int p/zRT dV}{V/zRT};$$

$$\bar{p} = \frac{\int pdV}{V}, \dots\dots\dots (C-7)$$

Nota: La Ec. (C-7) se derivó de acuerdo al procedimiento planteado en el artículo de Lutes y cols.²⁴. Al final de este Apéndice se plantea un desarrollo alternativo para esta ecuación tomando en cuenta la variabilidad del factor z con respecto a la presión.

Sustituyendo la diferencial del volumen dV , en la Ec. (C-7), se obtiene la expresión siguiente:

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} p 2\pi r h \phi dr}{\pi(r_2^2 - r_1^2) h \phi};$$

$$\bar{p} = \frac{2 \int_{r_1}^{r_2} p r dr}{(r_2^2 - r_1^2)} \dots\dots\dots (C-8)$$

Empleando la ley de Darcy para flujo radial a gasto constante, tomando en cuenta que $A = 2\pi r h$:

$$q = \frac{k_w A dp}{\mu_w dr} \Rightarrow q = \frac{2\pi r h k_w dp}{\mu_w dr}.$$

Separando variables e integrando.

$$\int_p^{p_2} dp = \frac{q\mu_w}{2\pi hk} \int_r^{r_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow p|_p^{p_2} = \frac{q\mu_w}{2\pi hk} \ln(r)|_r^{r_2}.$$

Evaluando con respecto a los límites de integración y considerando que q_w [bl_{w@c.y.}/dia], μ_w [cp], k_w [md], h [ft] y p [psi].

$$p_2 - p = \frac{q_w\mu_w}{2\pi hk} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \times \frac{1000\cancel{md}}{1\cancel{darcy}} \times \frac{1\cancel{darcy}}{9.869E-13\cancel{m^2}} \times \frac{9.29E-2\cancel{m^2}}{1\cancel{ft^2}} \times \frac{1E-3\cancel{Pa^*s}}{1\cancel{cp}} \\ \times \frac{5.615\cancel{ft^2}}{1\cancel{bl}} \times \frac{1\cancel{dia}}{86400\cancel{s}} \times \frac{1.4504E-4\cancel{psia}}{1\cancel{Pa}}.$$

La ecuación para flujo radial que expresa la presión en cualquier radio es la siguiente:

$$p = p_2 - \frac{141.24 q_w \mu_w \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{k_w h} \left[\text{lb/pg}^2 \right]. \dots\dots\dots (C-9)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. (C-8) y considerando que la permeabilidad de agua es $k_w = k_{rw}k$, se obtiene:

$$\bar{p} = \frac{2 \int_{r_1}^{r_2} \left[p_2 - \frac{141.24 q_w \mu_w \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{k_{rw} k h} \right] r dr}{(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Reorganizando términos en la expresión anterior:

$$\bar{p} = \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[\int_{r_1}^{r_2} p_2 r dr - \int_{r_1}^{r_2} \frac{141.24 q_w \mu_w \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{k_{rw} k h} r dr \right];$$

$$\bar{p} = \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[p_2 \int_{r_1}^{r_2} r dr - \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \int_{r_1}^{r_2} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) r dr \right];$$

$$\bar{p} = \frac{2}{(r_2^2 - r_1^2)} \left\{ p_2 \int_{r_1}^{r_2} r dr - \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \int_{r_1}^{r_2} [\ln(r_2) - \ln(r)] r dr \right\};$$

$$\bar{p} = \frac{2 \left\{ p_2 \int_{r_1}^{r_2} r dr - \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\int_{r_1}^{r_2} r \ln(r_2) dr - \int_{r_1}^{r_2} r \ln(r) dr \right] \right\}}{(r_2^2 - r_1^2)} \dots\dots\dots (C-10)$$

Desarrollando la primera integral de la Ec. (C-10):

$$p_2 \int_{r_1}^{r_2} r dr = p_2 \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = p_2 \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} \dots\dots\dots (C-11)$$

Análogamente para la segunda integral de la Ec. (C-10).

$$\int_{r_1}^{r_2} r \ln(r_2) dr = \frac{r^2}{2} \ln(r_2) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{r_2^2}{2} \ln(r_2) - \frac{r_1^2}{2} \ln(r_2) \dots\dots\dots (C-12)$$

La tercera integral de la Ec. (C-10), se desarrolla por medio de una integración por partes.

$$u = \ln r \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{r} dr;$$

$$dv = r dr \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r^2}{2};$$

$$-\int_{r_1}^{r_2} r \ln(r) dr = -\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr = -\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{2} dr;$$

$$-\int_{r_1}^{r_2} r \ln(r) dr = -\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{r^2}{4} \Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{r_2^2}{2} \ln r_2 + \frac{r_1^2}{2} \ln r_1 + \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{4} \dots\dots\dots (C-13)$$

Sustituyendo los términos de las Ecs. (C-11) a la (C-13) en la Ec. (C-10):

$$\bar{p} = \frac{2 \left\{ p_2 \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} - \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\frac{r_2^2}{2} \ln(r_2) - \frac{r_1^2}{2} \ln(r_2) - \frac{r_2^2}{2} \ln(r_2) + \frac{r_1^2}{2} \ln(r_1) + \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{4} \right] \right\}}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

Reduciendo términos, se obtiene:

$$\bar{p} = \frac{2 \left\{ p_2 \frac{\cancel{(r_2^2 - r_1^2)}}{\cancel{2}} - \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[-\frac{r_1^2}{2} \ln(r_2) + \frac{r_1^2}{2} \ln(r_1) + \frac{\cancel{(r_2^2 - r_1^2)}}{4} \right] \right\}}{(r_2^2 - r_1^2)};$$

$$\bar{p} = p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left\{ \frac{r_1^2 [\ln(r_1) - \ln(r_2)]}{2 (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{1}{4} \right\} [lb/pg^2];$$

$$\bar{p} = p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{r_1^2 [\ln(r_2) - \ln(r_1)]}{2 (r_2^2 - r_1^2)} \right\} [lb/pg^2].$$

Finalmente, la presión promedio para la zona invadida por agua es:

$$\bar{p} = p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\frac{1}{4} - \frac{r_1^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 (r_2^2 - r_1^2)} \right] [lb/pg^2]. \dots\dots\dots (C-14)$$

Para el desarrollo de la presión promedio se realizó el procedimiento y las consideraciones siguientes, las cuales nos llevan a una presión promedio diferente a la que plantean los autores.

Empleando la ley de los gases reales para la presión en la región invadida por agua y considerando la presión y el factor z como valores promedio:

$$\bar{p}V = \bar{z}nRT. \quad \dots\dots\dots (C-15)$$

Despejando el número de moles n :

$$n = \frac{\bar{p}V}{\bar{z}RT}. \quad \dots\dots\dots (C-16)$$

Integrando con respecto a la diferencial del número de moles dn :

$$\int dn = \bar{p} \frac{V}{\bar{z}RT}.$$

Despejando la presión promedio \bar{p} en la región invadida por agua, se obtiene:

$$\bar{p} = \frac{\int dn}{\frac{V}{\bar{z}RT}}. \quad \dots\dots\dots (C-17)$$

Consideraciones:

- La presión promedio \bar{p} , considera un factor z promedio, \bar{z} .
- Para la integral se considera a la presión p y al factor z como variables.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, la Ec. (C-16) queda de la manera siguiente:

La presión y el factor z son variables en la Ec. (C-16).

$$n = \frac{pV}{zRT}.$$

Sustituyendo la expresión anterior para el número de moles en la Ec. (C-17), se obtiene:

$$\bar{p} = \frac{\int \frac{pV}{zRT}}{V/\bar{z}RT};$$

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{p}{z} dV}{V/\bar{z}}. \dots\dots\dots (C-18)$$

La presión promedio obtenida a través de este desarrollo considera valores promedio y dentro de la integral se consideran valores variables, por lo tanto, nuestra ecuación difiere de la expresión obtenida por los autores, dado que consideran en todo momento valores promedio.

Apéndice D

Derivación de la Ecuación del Volumen para el Gas Atrapado G_t , en la Región Invasada por Agua

Para el cálculo del volumen de gas atrapado en la zona del yacimiento que ha sido invadida por el agua del acuífero, se utiliza la definición para el volumen de gas, Ec. (C-1); por lo tanto, el volumen de gas atrapado G_t :

$$G_t = \frac{\pi r^2 h \phi (1 - S_{wi})}{5.615 B_{gt}} = \frac{V_p S_{gi}}{5.615 B_{gt}} \left[\text{pies}^3 @ c.e. \right].$$

En el yacimiento no se tiene un desplazamiento total de gas, por lo que es necesario considerar la saturación residual de gas; con base en lo anterior, el volumen de gas atrapado se expresa por medio de la ecuación volumétrica siguiente:

$$G_t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{S_{gr}}{5.615 B_{gt}} dV_p, \dots\dots\dots (D-1)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} V_p &= \pi r^2 h \phi \\ dV_p &= 2 \pi r h \phi dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (D-2)$$

Sustituyendo la diferencial del volumen poroso dV_p , en la Ec. (D-1) e integrando con respecto a la diferencial del radio.

$$G_t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\pi r h \phi S_{gr}}{5.615 B_{gt}} dr;$$

$$G_t = \frac{2\pi h \phi S_{gr}}{5.615 B_{gt}} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{2\pi h \phi S_{gr}}{5.615 B_{gt}} \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2};$$

$$G_t = \frac{2\pi h \phi S_{gr}}{5.615 B_{gt}} \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} [pies^3 @ c.e.]. \dots\dots\dots (D-3)$$

En el volumen de gas atrapado G_t , el factor de volumen del gas B_{gt} , se obtiene empleando la definición para este parámetro de la manera siguiente:

$$B_{gt} = \frac{V_{gt} [bl @ c.y.]}{V_{gt} [pies^3 @ c.e.]}$$

Dado que el cálculo de B_{gt} se realiza en la zona invadida de agua, entonces la presión a condiciones de yacimiento es igual a la presión promedio en la región invadida por agua $p = \bar{p}$.

$$B_{gt} = \frac{\bar{z} n R T}{\frac{\bar{p}}{n R T_{cs}} p_{cs}} = \frac{\bar{z} T}{\bar{p}} \frac{p_{cs}}{T_{cs}}$$

En particular si empleamos unidades del sistema inglés, $T @ cs = 60 [^{\circ}F] = 520 [R]$ y $p @ cs = 14.7 [lb/pg^2]$, entonces:

$$B_{gt} = \frac{14.7}{520} \frac{1 [bl]}{5.615 [pies^3]} \frac{\bar{z} T}{\bar{p}};$$

$$B_{g_t} = 0.00503 \frac{\bar{z}T}{\bar{p}} \left[\frac{bl @ c.y.}{pies^3 @ c.e.} \right]. \dots\dots\dots (D-4)$$

Sustituyendo la Ec. (D-4) en la Ec. (D-3), se obtiene:

$$G_t = \frac{2\pi h \phi S_{g_r} (r_2^2 - r_1^2)}{5.615} \frac{\bar{p}}{0.00503 \bar{z}T}.$$

Reduciendo términos:

$$G_t = 111.23 \frac{h \phi S_{g_r} (r_2^2 - r_1^2)}{\bar{z}T} \bar{p} [pies^3 @ c.e.]. \dots\dots\dots (D-5)$$

Sustituyendo la Ec. (C-14) del Apéndice C, en la Ec. (D-5):

$$G_t = 111.23 \frac{h \phi S_{g_r} (r_2^2 - r_1^2)}{\bar{z}T} \left\{ p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\frac{1}{4} - \frac{r_1^2}{2} \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] \right\} [pies^3 @ c.e.];$$

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) \left\{ p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \left[\frac{1}{4} - \frac{r_1^2}{2} \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] \right\} [pies^3 @ c.e.], \dots\dots\dots (D-6)$$

donde:

$$X = 111.23 \frac{h \phi S_{g_r}}{\bar{z}T} [pies].$$

Desarrollando los términos de la Ec. (D-6), se obtiene:

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) \left\{ p_2 - \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \frac{1}{4} + \frac{282.49 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} \frac{r_1^2}{2} \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right\} [pies^3 @ c.e.];$$

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) \left\{ p_2 - \frac{141.24 q_w \mu_w}{2 k_{rw} k h} + \frac{141.24 q_w \mu_w r_1^2}{k_{rw} k h} \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right\} \left[\text{pies}^3 @ c.e. \right];$$

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) \left\{ p_2 - \frac{Y}{2} + Y r_1^2 \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right\} \left[\text{pies}^3 @ c.e. \right], \dots \dots \dots (D-7)$$

donde:

$$Y = \frac{141.24 q_w \mu_w}{k_{rw} k h} [1].$$

Aplicando nuevamente un desarrollo de términos a la Ec. (D-7), para obtener un modelo más práctico:

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) p_2 - X (r_2^2 - r_1^2) \frac{Y}{2} + X \cancel{(r_2^2 - r_1^2)} Y r_1^2 \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{\cancel{(r_2^2 - r_1^2)}};$$

$$G_t = X (r_2^2 - r_1^2) p_2 - X (r_2^2 - r_1^2) \frac{Y}{2} + XY r_1^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Finalmente se obtiene el volumen de gas atrapado G_t , en la región invadida por agua.

$$G_t = X \left(p_2 - \frac{Y}{2} \right) (r_2^2 - r_1^2) + XY r_1^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \left[\text{pies}^3 @ c.e. \right]. \dots \dots \dots (D-8)$$

Referencias

1. Abramowitz M. y Stegun I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau Standards (1970). 1059 p.
2. Agarwal R.G.: "Unsteady-State Performance of Water-Drive Gas Reservoirs", PhD. dissertation, Texas A&M U., College Station (1967).
3. Agarwal R.G., Al-Hussainy R. y Ramey H.J.: "The Importance of Water Influx in Gas Reservoirs", *JPT*, Vol. 17, No 11 (nov. 1965) 1336-1342; *Trans. AIME*. Vol. 234. Paper Number 1244-PA. DOI 10.2118/1244-PA.
4. Aguilera R.: "Effect of Fracture Compressibility on Gas-in-Place Calculations of Stress-Sensitive Naturally Fractured Reservoirs", *SPE Gas Technology* (may 2006) 15-17. Paper Number 100451. DOI 10.2118/100451-MS.
5. Andrews L.C.: *Special Functions of Mathematics for Engineers*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York (1992). 479 p.
6. Aronosfsky J.S., Masse L. y Natanson S. G.: "A Model for the Mechanism of Oil Recovery from the Porous Matrix Due to Water Invasion in Fractured Reservoirs", *SPE Journal* (oct. 1957). Paper Number 932-G.
7. Carslaw H.S. y Jaeger J.C.: *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon, Oxford (1947). 510 p.
8. Carter R.D. y Tracy G.W.: "An Improved Method for Calculating Water Influx", *JPT*, (dec. 1960) 58-60; *Trans. AIME*, Vol. 219 (1960) 415-417. Paper Number 1626-G.
9. Closmann P.J.: "An Aquifer Model for Fissured Reservoirs", *SPE Journal*, Vol. 15, No. 5 (oct. 1975), Paper Number 4434-PA. DOI 10.2118/4434-PA.
10. Craft B.C. y Hawkins M.F.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey (1991). 431 p.

11. Dake L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific, Amsterdam (1978). 443 p.
12. de Swaan A.: "Theory of Waterflooding in Fractured Reservoirs", *SPE Journal* Vol. 18. No. 2 (abr. 1978). Paper Number 5892. DOI 10.2118/5892-PA.
13. Edwards C.H. y Penney D.C.: *Cálculo y Geometría Analítica*. 2a ed., Prentice Hall Hispanoamérica, México (1987). 1152 p.
14. Escobar F.H.: *Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos*. Universidad Surcolombiana, Neiva-Huila, Colombia (2001). 220 p.
15. Fetkovich M.J.: "A Simplified Approach to Water Influx Calculations – Finite Aquifer Systems", *JPT*, Vol. 23, No. 7 (jul. 1971) 814-828. Paper Number 2603-PA. DOI 10.2118/2603-PA.
16. Graham J.W. y Richardson J.G.: "Theory and Application of Imbibition Phenomena in Recovery of Oil", *JPT*, Vol. 11, No. 2 (feb. 1959), Paper Number 1143-G. DOI 10.2118/1143-G.
17. Havlena D. y Odeh A.S.: "The Material Balance as an Equation of a Straight-Line", *JPT* Vol. 15, No. 8 (ago. 1963). Paper Number 559-PA. DOI 10.2118/559-PA.
18. Hildebrand F.B.: *Advanced Calculus for Applications*. 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1976). 733 p.
19. Hower T.L. y Jones R.E.: "Predicting Recovery of Gas Reservoirs Under Waterdrive Conditions", *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, (oct. 1991) 6-9. Paper Number 22937-MS. DOI 10.2118/22937-MS.
20. Kasemi H.: "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution", *SPEJ*, Vol. 9, No.4 (dic. 1969) 451-462. Paper Number 2156-A. DOI 10.2118/2156-A.
21. Klins M. A., Bouchard A. J. y Cable C. L.: "A Polynomial Approach to the van Everdingen - Hurst Dimensionless Variables for Water Encroachment", *SPE Reservoir Engineering*, Vol. 3, No. 1 (feb. 1988) 320-326. Paper Number 15433-PA. DOI 10.2118/15433-PA.
22. Kreyszig E.: *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Limusa-Wiley, México (1967).
23. Lebedev N.N.: *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1965). 308 p. Inc Pag. 111.
24. Lutes J.L., Chiang C.P., Rossen R.H. y Brady M.M.: "Accelerated Blowdown of a Strong Water-Drive Gas Reservoir", *JPT*, Vol. 29, No 12 (dic. 1977) 1533-1538. Paper Number 6166-PA. DOI 10.2118/6166-PA.

25. Morales G.G.: "Caracterización del Sistema Matriz-Fractura para Flujo Transitorio y Pseudoestacionario para Tamaño Múltiple de Bloque", Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ingeniería (2009).
26. O'Neill Peter V.: *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Volumen 1, Cengage Learning, México, D.F. (2008). 549 p.
27. Peñuela G., Idrodo E.A., Ordoñez A., Medina C.E. y Meza N.S.: "A New Material-Balance Equation for Naturally Fractured Reservoirs Using a Dual-System Approach", *SPE Western Regional Meeting*, (mar. 2001) 26-30, Paper Number 68831. DOI 10.2118/68831-MS.
28. Pirson S.J.: *Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos*. Omega, Barcelona (1965). 786 p.
29. Rodríguez de la Garza F.: "Modelo Analítico del Desplazamiento Lineal de Aceite por Inyección de Agua en Yacimientos Fracturados", *AIMP Ingeniería Petrolera*, Junio de 1988.
30. Sneddon I.N.: *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. Oliver and Boyd, Edinburgh (1961). 184 p.
31. Spiegel M.R.: *Transformadas de Laplace. Theory and Problems*. McGraw Hill, México (1991). 261 p.
32. Towler B.F.: *Fundamental Principles of Reservoir Engineering*. SPE, Richardson, Texas (2002). 232 p.
33. Tranter C.J.: *Integral Transforms in Mathematical Physics. 2nd ed.*, J. Wiley, New York (1951). 133 p.
34. van Everdingen A.F. y Hurst W.: "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs", *Trans. AIME*, Vol. 186 (1949) 305-324. Paper Number 949305-G.
35. van Golf-Racht T.: *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific, Amsterdam (1982). 710 p.
36. Warren J.E. y Root P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoir", *SPE Journal*, Vol. 3, No. 3 (sep. 1953) 245-255. Paper Number 426-PA.