



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ENERGÍA - SISTEMAS ENERGÉTICOS

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA CONVERSIÓN DE POTENCIA ELÉCTRICA EN UN  
GENERADOR TERMOELÉCTRICO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
Daniel Esquivel Velazquez

TUTOR PRINCIPAL  
FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE  
DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS

MEXICO, CDMX. Mayo 2017

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. William Vicente y Rodríguez  
Secretario: M. en I. Augusto Sánchez Cifuentes  
Vocal: Federico Méndez Lavielle  
1<sup>er.</sup> Suplente: Gabriel León de los Santos  
2<sup>d o.</sup> Suplente: Margarita Navarrete Montesinos

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería

**TUTOR DE TESIS:**

FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

## *Resumen*

*Se modela matemáticamente el funcionamiento de un generador termoeléctrico, que opera con pares portadores de carga (electrón-huecos), mediante el suministro y la extracción de calor en el depósito térmico superior e inferior del sistema, respectivamente. Lo anterior genera una diferencia de temperaturas que establece una potencia eléctrica de salida del dispositivo. Desde el punto de vista teórico el problema anterior representa una formulación inversa del caso cuando se establece una diferencia de temperaturas constante entre depósitos térmicos; el planteamiento considera un flujo de calor a la entrada de la zona caliente y el flujo de calor de salida, representa una situación que atiende a los requerimientos físicos de una manera más acorde con el fenómeno físico. Las propiedades de los portadores de carga como el coeficiente Seebeck, la conductividad térmica, el coeficiente de transferencia de calor, área, perímetro, longitud, etc. se consideran uniformes. A partir del conocimiento de estas propiedades se desarrollan las ecuaciones de flujo de calor unidireccional en las fronteras del dispositivo acopladas al efecto Seebeck, efecto Joule, conductividad térmica y convección, generando con ello dos ecuaciones no lineales y dependientes entre sí, después de aplicar las correspondientes condiciones en la frontera.*

*Para reducir el número de parámetros físicos, las ecuaciones gobernantes se escriben en forma adimensional, obteniendo nuevos parámetros que engloban una multiplicidad de propiedades sin perder de vista la física del problema. Posteriormente, se solucionan las ecuaciones de forma numérica para dos casos de interés: cuando el efecto convectivo es despreciable en primera aproximación y un segundo caso considerando la presencia del efecto convectivo. Finalmente, se obtienen familias de curvas que describen de forma adimensional y física las temperaturas de operación en las fronteras del sistema y así como la corriente eléctrica generada. En conclusión, este modelo considera una fuente de calor de entrada proveniente de la radiación solar o dispositivos térmicos disipadores de energía como su principal suministro de energía y a un reservorio o al ambiente como la zona de extracción de calor en el dispositivo, permite cuantificar las condiciones de operación térmica del mismo, dependiente de las propiedades del sistema TEG. La importancia del estudio anterior, se basa en la mayor relevancia que ha cobrado recientemente el estudio de estos dispositivos debido a la búsqueda de alternativas para generar energía limpia.*

# Índice

Resumen	i
Índice de Figuras	iv
Índice de Tablas	v
Nomenclatura	1
Símbolo	1
Capítulo 1	2
Introducción	2
1.1 Antecedentes y aplicaciones de dispositivos termoeléctricos	3
1.2 Antecedentes	9
1.3 Objetivos	11
Capítulo 2	13
Principios básicos	13
2.1 Termoelectricidad	13
2.2 Efecto Joule	17
2.3 Conducción de Calor	17
2.4 Convección	18
2.5 Generador Termoeléctrico	19
Capítulo 3	20
Formulación Física del problema	20
3.1 Análisis matemático del Generador Termoeléctrico, TEG	22
3.2 Modelo matemático adimensional	29
Capítulo 4	32
Solución teórica de la generación de energía en el sistema TEG	32
4.1. Ecuaciones de flujo de calor finales	36
Capítulo 5	40
Resultados	40
5.1 Primer caso “Convección despreciable”	40

5.4 Validación del modelo teórico _____	54
Capítulo 6 _____	57
Conclusiones _____	57
Anexo _____	58
1. Análisis dimensional _____	58
2. Desarrollo de la solución teórica del flujo de calor en los elementos $p$ y $n$ _____	58
3. Programas FORTRAN _____	61
3.1 Propiedades del material termoeléctrico BiTe _____	70
Referencias _____	72

## Índice de Figuras

Figura 1. Emisiones de CO <sub>2</sub> anual a nivel mundial. ....	3
Figura 2. Difusión de carga de la zona caliente a la zona fría de un material conductor. ....	14
Figura 3. Unión termoeléctrica. ....	15
Figura 4. Esquema sencillo de un generador termoeléctrico TEG. ....	19
Figura 5. Modelo del flujo de calor en un TEG. ....	20
Figura 6. Modelo teórico de un generador termoeléctrico. ....	21
Figura 7. Balance de energía en el TEG. ....	25
Figura 8. Parámetros adimensionales. ....	38
Figura 9. Curvas de temperaturas adimensional para los depósitos de alta y baja temperatura como función del parámetro $\varepsilon_2$ y en ausencia de convección en un TEG. ....	42
Figura 10. Temperatura adimensional en las fronteras variando la eficiencia de flujo de calor en un TEG. ....	43
Figura 11. Temperatura alta y baja en las fronteras con parámetro variable $\varepsilon_2$ . ....	44
Figura 12. Curvas de alta y baja temperatura $\varepsilon_1 = 1$ . ....	45
Figura 13. Temperatura adimensional en las fronteras $\varepsilon_1 = 1$ . ....	46
Figura 14. $\eta = 5\% \mid \varepsilon_2 \text{ variable}$ . ....	47
Figura 15. $\eta = 10\% \mid \varepsilon_2 \text{ variable}$ . ....	47
Figura 16. $\eta = 15\% \mid \varepsilon_2 \text{ variable}$ . ....	48
Figura 17. Temperatura superior, $\varepsilon_2$ variable. ....	48
Figura 18. Temperatura superior, $\varepsilon_2$ variable. ....	49
Figura 19. Temperatura adimensional dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 0$ . ....	50
Figura 20. Temperatura dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 1$ . ....	51
Figura 21. Temperatura dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 2$ . ....	52
Figura 22. Temperatura dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 3$ . ....	52
Figura 23. Temperatura dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 4$ . ....	53
Figura 24. Temperatura dependiente de la posición, $\varepsilon_1 = 5$ . ....	53
Figura 25. Salida de corriente eléctrica a una eficiencia térmica del 10%. ....	56

## Índice de Tablas

Tabla 1. Algunos estudios previos en dispositivos termoeléctricos _____	4
Tabla 2. Intervalo de valores del coeficiente de transferencia de calor por convección __	18
Tabla 3. Propiedades físicas del TEG _____	54
Tabla 4. Validación teórica con $h=50$ _____	56

## *Nomenclatura*

<i>Símbolo</i>		Unidad
$T$	Temperatura	$K$
$T_{\infty}$	Temperatura ambiente	$K$
$Pot$	Potencia eléctrica	$W$
$Q_C$	Flujo de calor caliente	$W$
$Q_F$	Flujo de calor frío	$W$
$Q_J$	Energía disipada Joule	$W$
$\alpha$	Coefficiente Seebeck	$V/K$
$V$	Voltaje	$V$
$R$	Resistencia	$\Omega$
$\rho$	Resistividad eléctrica	$\Omega \cdot m$
$k$	Conductividad Térmica	$W/mK$
$h$	Coefficiente convectivo	$W/m^2K$
$A$	Área	$m^2$



# Capítulo 1

En este capítulo se presenta una breve introducción sobre la problemática de la conversión de energía y las tecnologías limpias en desarrollo para mitigarla, entre ellas los generadores termoeléctricos (TEG) forman parte, uniendo estudios previos en una revisión bibliográfica sobre el desarrollo de dichos dispositivos, además se presentan el objetivo general y particular de este trabajo

## Introducción

El consumo de energía se ha incrementado drásticamente desde el descubrimiento de los combustibles fósiles, aunado a la revolución industrial, a la invención de dispositivos que dependen de la electricidad y al crecimiento de las ciudades. Los combustibles fósiles en 2014 suministraron a la población el 81% del consumo de energía a nivel mundial y el resto solo fue proporcionado por fuentes renovables y energía nuclear [1]. Provocando a la fecha que se tengan niveles históricos de 400PPM de CO<sub>2</sub> en el aire (véase Figura 1), principal gas de efecto invernadero [2]. En los últimos años, se ha empezado a generar un nuevo enfoque para explorar y desarrollar tecnologías “limpias” alternativas para atender la creciente demanda de energía, tales como; las turbinas eólicas, plantas mareomotrices, biomasa, separación del Hidrógeno, energía geotérmica, paneles solares fotovoltaicos y generadores termoeléctricos; que ha comenzado a desempeñar un papel importante en la búsqueda de reducir los problemas de demanda energética, ambientales y emisión de gases de efecto invernadero al ambiente. En este trabajo de tesis, se analiza un generador termoeléctrico (TEG), una de las muchas tecnologías limpias, para demostrar su potencial para generar energía a partir de una fuente de calor y abrir una dirección de apoyo a la creciente demanda de energía.

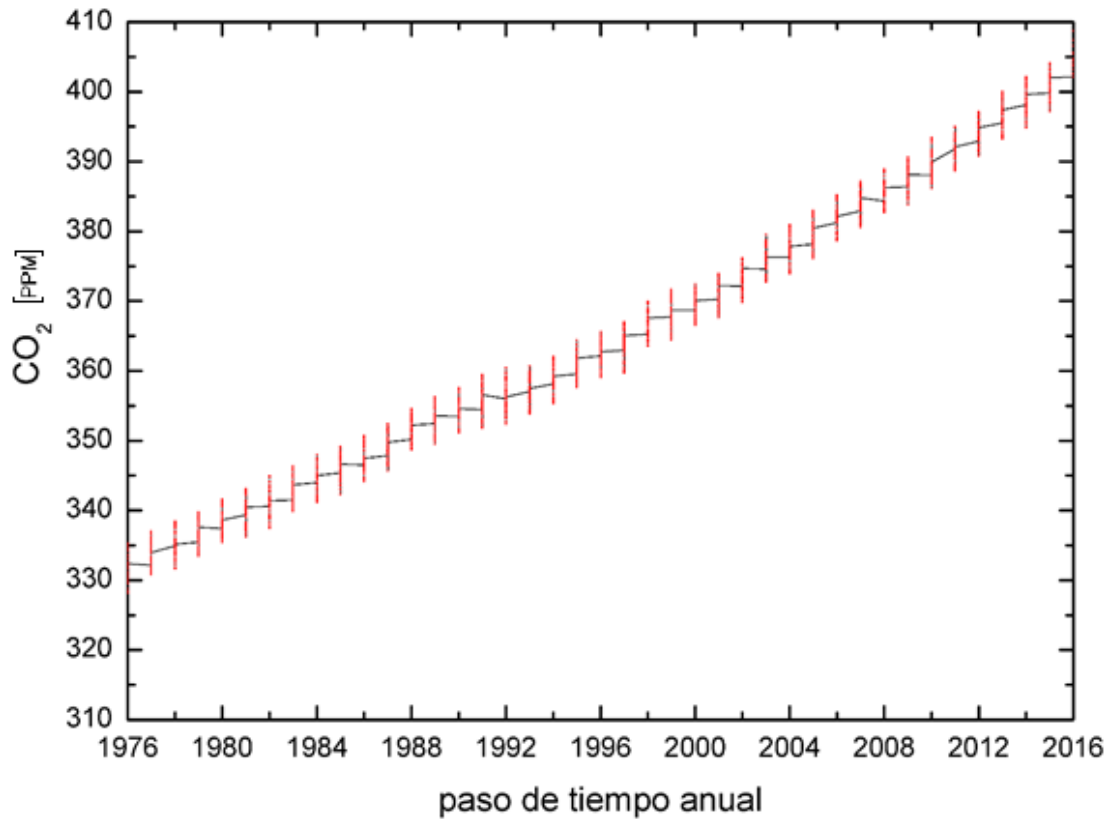


Figura 1. Emisiones de CO<sub>2</sub> anual a nivel mundial.

### 1.1 Antecedentes y aplicaciones de dispositivos termoelectricos

La generación de energía integrada por dispositivos termoelectricos ha tomado gran importancia en las últimas décadas. Estos sistemas de semiconductores están íntimamente ligados a la temperatura y electricidad [3], con la facultad de convertir directamente la energía térmica en eléctrica y viceversa [4-6].

Un generador termoelectrico es un motor térmico que intercambia calor con un reservorio caliente y frío provocando una diferencia de temperaturas entre las caras del módulo, produciendo una cierta cantidad de trabajo eléctrico por efecto Seebeck [6, 7]. Además, comparado con los proveedores mecánicos de generación de energía eléctrica, tales como, intercambiadores de calor y turbinas de vapor que utilizan un fluido de trabajo, la

conversión de energía en un generador termoeléctrico tiene un gran atractivo en términos de su simplicidad debido a que son dispositivos que colectan o recuperan energía térmica sin utilizar partes móviles, carecen de un fluido de trabajo que participe directamente, silencio durante la operación, portabilidad y compactos [4]. En las últimas décadas se ha despertado un gran interés en los dispositivos termoeléctricos debido a la gran versatilidad que poseen tanto para ser acoplados a diversas aplicaciones. En la Tabla 1 se presentan resumidamente los avances teóricos y experimentales reportados en la literatura como principales aportaciones desarrolladas por estos grupos de investigación.

Tabla 1. Algunos estudios previos en dispositivos termoeléctricos

<b>Grupo</b>	<b>Aplicación</b>	<b>Tipo</b>	<b>Año</b>
i. Domenicali CA <i>Instituto Franklin , Philadelphia, Pennsylvania</i>	Modelado de la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en un conductor calentado eléctricamente	Teórico	1954
ii. Mahan GD <i>Departamento de Física y Astronomía Universidad de Tennessee Knoxville, Tennessee</i>	Modelo que variar las propiedades del material semiconductor a lo largo de la longitud del dispositivo, cuyos coeficientes varían con la temperatura.	Teórico	1991
iii. Chen J <i>Laboratorio de materiales semiconductores y aplicaciones Universidad de Xiamen, Rep. de China</i>	Simulación numérica y análisis de un STEG nanoestructurado no homogéneo dopado	Numérico	2015
iv. Shanse S <i>Laboratorio de materiales semiconductores y aplicaciones Universidad de Xiamen, Rep. de China</i>	Propuesta de un método sencillo para seleccionar materiales tipo p y n en un generador termoeléctrico	Numérico	2014
v. Suter C <i>Departamento de Ingeniería Mecánica y Procesos, Zurich, Suiza.</i>	Análisis de una pila termoeléctrica acoplada a un sistema de generación de energía geotérmica	Numérico	2012

vi. Champier D <i>Laboratorio de Ciencias e Ingeniería Aplicada a la Mecánica y Eléctrica Universidad de Pau, Francia</i>	Estudio de la posibilidad de acoplar un TEG en estufas de leña para proporcionar electricidad que permita el uso de un ventilador eléctrico aumentando la proporción de aire para lograr una combustión más completa en el sistema.	Experimental	2011
vii. Shen ZG Laboratorio de Tecnologías de bajo grado de utilización de energía y sistema Universidad de Chongqing, China	Análisis unidimensional en estado estacionario de un TEG, cuyo objetivo principal es comprender como impacta a la eficiencia del sistema la variación de la convección $h$ en una SSHT.	Numérico	2015
viii. Reddy BVK Departamento de Ingeniería Mecánica y Ciencia de los Materiales Universidad de Pittsburgh, EUA	Análisis de un nuevo material compuesto en un TED (dispositivos termoelectricos) integrados, donde $W$ , $Q_c$ , $\eta$ , $I$ son estudiadas.	Teórico	2013
ix. Xiao H Facultad de Ingeniería Eléctrica Universidad de Chongqing, Chongqing, China	Modelado y análisis del proceso de transferencia irreversible de un generador termoelectrico de múltiples elementos.	Teórico	2013

Siguiendo los comentarios anteriores se tienen las aportaciones siguientes:

**i. Domenicali CA.**

Domenicali retoma la teoría termodinámica de los procesos irreversibles como las desarrolladas por Onsager, de Groot, y Callen para derivar de una manera directa, la ecuación diferencial en derivadas parciales para la distribución de la temperatura estacionaria en un conductor calentado eléctricamente. La forma correcta de la ecuación, para el caso especial de un conductor químicamente homogéneo es,  $\nabla \cdot k \nabla T_{abs} + (1/\sigma) - \tau J \cdot \nabla T = 0$ ; sin embargo, en el caso de un conductor no homogéneo, la ecuación anterior se reemplaza por la siguiente ecuación:  $\nabla \cdot k \nabla T_{abs} + (1/\sigma) J^2 + J \cdot \nabla_{T_{abs}} \pi^{abs} - \tau J \cdot \nabla T = 0$ ; de tal manera que se pueda mantener el efecto Peltier en la ecuación anterior [8].

## **ii. Mahan GD.**

Mahan propone variar las propiedades del material semiconductor a lo largo de la longitud del dispositivo. Esta variación sería continua y se propone un perfil específico de dopaje frente a la longitud, muestra cómo aumenta la eficiencia del dispositivo. Este autor calcula la eficiencia por integración numérica a lo largo de la longitud del dispositivo, del extremo frío al extremo caliente. Esto permite imponer cualquier configuración de dopaje y también incluir variaciones de los parámetros del dispositivo con la temperatura. Se utiliza su código numérico para calcular la eficiencia de algunos materiales dopados homogéneamente, cuyos coeficientes varían con la temperatura [9].

## **iii. Chen J**

Este grupo de trabajo simula numéricamente el análisis de un TEG (Generador Termoeléctrico) nanoestructurado no homogéneo dopado, estableciendo un nuevo modelo de la TEG solar (STEG) con altos rendimientos de conversión. El STEG se compone de un colector de panel plano sin concentración óptica, pero con la concentración térmica de placa plana. La eficiencia máxima calculada en el presente documento es mucho más grande que la reportada en trabajos previos. Se discuten los problemas de optimización del sistema. Los resultados muestran que el STEG hecho de materiales nanoestructurados, permiten el incremento del coeficiente Seebeck sin una reducción en la conductividad eléctrica [10,11] y bajando la conductividad térmica contribuyen a un flujo mayor de portadores de carga [12]. El sistema anterior posee un gran potencial para aumentar la eficiencia de conversión de energía solar en el futuro [13].

## **iv. Shanse S.**

Este autor y su equipo de la Universidad de Xiamen utilizan la ecuación de Domenicali y la ecuación de flujo de calor para analizar a partir de un método de diferencias finitas en una dimensión los perfiles de temperatura y flujo de calor en un TEG (Generador Termoeléctrico), incluyendo simultáneamente el efecto Peltier, Fourier, Joule y Thomson, propiedades de los materiales termoeléctricos y basándose en datos experimentales para los materiales termoeléctricos tipo-n  $\text{PbTe}_{1-y}\text{I}_y$  y tipo-p  $\text{PbTe}:\text{Na}/\text{Ag}_2\text{Te}$ , a una temperatura dada

en las fronteras, determinan las condiciones de operación a partir de la corriente calculada y los parámetros del material obteniendo la eficiencia del dispositivo TEG [14].

**v. Suter C.**

Este grupo de trabajo modela y soluciona numéricamente el comportamiento de una pila termoeléctrica que comprende una matriz de Bi-Te basado en un módulo TEC (Convertidor Termoeléctrico), considerando durante la conversión de calor geotérmico. En este caso, la eficiencia de conversión de calor a electricidad oscila alrededor del ~5% cuando el modulo opera a una diferencia de temperaturas de 200K. Un gradiente de temperatura a través de los termoelementos dentro de una matriz se impone a través de un intercambiador de calor de placas paralelas de Cu, operando con agua caliente y fría en la configuración de canal en contraflujo. El rendimiento del TEC se determina en función de los siguientes parámetros: entrada de agua caliente y las temperaturas de salida (313 a 413) K y (303 a 293) K, respectivamente, longitud de la pila (300 - 1500 mm), longitud del termoelemento (0,5 - 4 mm) y alturas de canal caliente / frío (0,2-2 mm) [15]. El modelo se resuelve numéricamente utilizando el software CFD (Computational Fluid Dynamic) ANSYS CFX 13.0 [16], para analizar la eficiencia de conversión de energía térmica a electricidad y el volumen que ocupa como una función del gradiente de temperaturas considerando la entrada de agua caliente, la salida de agua fría y los parámetros geométricos.

**vi. Champier D.**

Este autor y su equipo de trabajo en la Universidad de Pau estudian la mejora de las estufas de fuego abierto tradicional, que se caracterizan por su baja eficiencia, un reto importante para los países en desarrollo. Proponen la idea de añadir un TEG (Generador Termoeléctrico) para proporcionar electricidad que permita no sólo el uso de un ventilador eléctrico aumentando la proporción de aire para lograr una combustión más completa en las estufas de leña, sino también la satisfacción de las necesidades básicas: luz, teléfono y otros dispositivos electrónicos. Para probar los módulos TEG, construyeron un dispositivo experimental en su laboratorio donde un calentador de gas simula la estufa de leña. La configuración del generador se describe incluyendo el regulador eléctrico que estabiliza la tensión fluctuante

de los módulos y almacena la energía en una batería. El rendimiento del generador depende principalmente de la transferencia de calor a través de los módulos y sobre todo en las resistencias de contacto térmico [17].

**vii. Shen ZG.**

Este grupo de la Universidad de Chongqing, realizan un análisis unidimensional en estado estacionario, proponen un modelo teórico integral que tome en cuenta el efecto Peltier, efecto Joule, efecto Thomson, la conducción de calor de Fourier, utilizando un método de elementos finitos e integral, para reflejar el impacto de la dependencia de la temperatura en los materiales termoeléctricos [18], el efecto Thomson es considerado utilizando la integral promedio del coeficiente Seebeck [19]. Su principal objetivo es comprender como impacta la eficiencia del TEG, variando la convección  $h$  en una SLTC (Superficie Lateral de Transferencia de Calor) y se enfatiza particularmente el análisis anterior para dos materiales termoeléctricos comerciales [3].

**viii. Reddy BVK.**

Estos autores analizan un nuevo material compuesto en un TED (Dispositivos Termoeléctricos) integrados y proponen una alternativa a los TED convencionales, su rendimiento en términos de potencia  $W$ , entrada de calor  $Q_C$ , la eficiencia de conversión  $\eta$ , y la corriente eléctrica  $I$  producida son estudiadas utilizando soluciones analíticas. Las fronteras superior e inferior de los TED son sometidas a un diferencial de temperatura mientras que las superficies laterales se expusieron a condiciones ambientales o adiabáticas [20].

**ix. Xiao H.**

Este grupo de trabajo se basa en las teorías básicas de la generación de energía termoeléctrica y la ciencia térmica, desarrollando el modelo de un TEG (Generador Termoeléctrico) tomando en cuenta el efecto de la transferencia de calor entre la pareja de elementos TEG al entorno. Además, las características de un generador termoeléctrico de múltiples elementos

con irreversibilidad se investigan y se formulan sus ecuaciones para estudiar la exergía que se ha aplicado al proceso de transferencia de calor irreversible, en particular enfocándose en el proceso de convección natural que conlleva una gran pérdida de exergía en el sistema TEG [21].

## 1.2 Antecedentes

En este trabajo de tesis se toman en cuenta varias ideas de los anteriores trabajos de investigación, estableciendo como referencia principal el trabajo *i)* de Domenicali, el cual desarrolla de manera directa la ecuación diferencial en derivadas parciales para la distribución de la temperatura estacionaria en un conductor calentado eléctricamente no homogéneo donde se observa el flujo de calor por conducción, el efecto Joule, el efecto Peltier y el efecto Thomson que se añade a la ecuación de gobierno  $\nabla \cdot k \nabla T_{abs} + (1/\sigma)J^2 + J \cdot \nabla_{T_{abs}} \pi^{abs} - \tau J \cdot \nabla T = 0$ . Se considera el efecto Peltier solo para el caso cuando el material o medio conductor es no homogéneo, esto quiere decir que nuestro material ha sido dopado positiva o negativamente lo que hoy en día se conocen como semiconductores entre los más conocidos, el tipo P (cargados positivamente) y los tipo N (cargados negativamente). Años más tarde *ii)* Mahan GD, a partir de la ecuación general de Domenicali, considera un material no homogéneo conductor y tomando en cuenta que no hay variaciones significativas perpendiculares del flujo de calor, vuelve unidimensional la ecuación general en derivadas parciales de Domenicali y despreciando además el efecto Thomson, obtiene dos ecuaciones: la primera para un balance de energía y la segunda establece la ecuación de flujo de calor en el elemento; posteriormente y con ayuda de la contribución de *iii)* Chen J, este autor retoma la ecuación de Mahan para resolver numéricamente las ecuaciones de balance de energía y flujo de calor considerando temperatura constante en las fronteras, proponiendo materiales nanoestructurados en su investigación y reporta como aumenta el coeficiente Seebeck sin afectar a la conductividad eléctrica y bajando la conductividad térmica, se contribuye a un flujo mayor de portadores de carga [12]. Por otra parte *v)* Shanse S, proporciona información importante sobre materiales comerciales actuales, principalmente el Bi-Te utilizados en módulos TEG (Generador Termoeléctrico) con eficiencia que oscila alrededor del ~5%



cuando el módulo opera a una diferencia de temperaturas de 200K y finalmente *vii*) Shen ZG, *viii*) Reddy BVK y *ix*) Xiao H, estos autores son de vital importancia sus contribuciones, debido a la peculiaridad de agregar a la convección como un nuevo término en la ecuación de balance de energía. Su principal objetivo es comprender como impacta la eficiencia del TEG, variando la convección  $h$  en una SLTC (Superficie Lateral de Transferencia de Calor). Las fronteras superior e inferior de los TEG son sometidas a un diferencial de temperatura mientras que las superficies laterales se expusieron a condiciones ambientales o adiabáticas. La base principal de este trabajo de tesis es retomar el enfoque de Shen ZG, Reddy BVK y Xiao H, agregando un nuevo término de convección a la ecuación de balance de energía, modelando matemáticamente el funcionamiento de un generador termoeléctrico, dejando de lado la temperatura constante y proponer flujos de calor conocidos en las fronteras superior e inferior.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo matemático unidimensional que modele el funcionamiento de un generador termoeléctrico, considerando el suministro y la extracción de calor  $Q$  uniformes en el depósito térmico superior e inferior del sistema, respectivamente. Es importante mencionar que la configuración térmica anterior representa el problema inverso del que suele considerarse como punto de partida para el estudio térmico de los generadores termoeléctricos, donde siempre se considera las temperaturas  $T$  de los depósitos de la zona superior e inferior uniformes.

### 1.3.2 Objetivos particulares

- Revisar la literatura publicada del tema abarcando artículos y patentes de materiales comerciales.
- Desarrollar un modelo analítico unidimensional de un TEG considerando el efecto Seebeck, efecto Joule, flujo de calor de Fourier y efecto Convectivo; además de considerar la influencia de los parámetros geométricos tales como el área transversal del elemento termoeléctrico, el perímetro del mismo y la longitud.
- Formulación matemática para el caso cuando el flujo de calor en las fronteras ya se conoce  $Q$ , representando una situación más acorde al fenómeno físico, usando una situación más realista en los depósitos de calor cuando no se encuentran a temperatura constante, sino que más bien estos depósitos reciben y expulsan cantidades uniformes de calor.
- Conocer propiedades reales del coeficiente Seebeck, así como la influencia que ejercen la conductividad térmica, la resistencia eléctrica y obviamente las dimensiones geométricas de los materiales comerciales utilizados para el presente estudio.

- Obtención de dos ecuaciones no lineales acopladas entre sí, junto con la correspondiente derivación de las condiciones térmicas en la frontera, las ecuaciones gobernantes se escriben en forma adimensional a partir de variables físicas conocidas
- Solucionar de forma numérica las ecuaciones para dos casos de interés: cuando el efecto convectivo se desprecia en primera aproximación y un segundo caso considerando la presencia del efecto convectivo
- Obtener familias de curvas que describan de forma adimensional las temperaturas de operación en las fronteras del sistema, así como la corriente eléctrica generada.

## Capítulo 2

En el presente capítulo se establecerán las bases teóricas involucradas en el fenómeno Termoeléctrico, así mismo, se describirá y desarrolla el modelo teórico de un TEG; incluyendo el principio de operación y propiedades del mismo sistema.

### Principios básicos

#### 2.1 Termoelectricidad

Los mecanismos de conversión de la termoelectricidad no fueron bien comprendidos hasta el descubrimiento de los electrones a finales del siglo XIX. Ahora se sabe que la energía solar, el campo eléctrico o la energía térmica libera electrones de su enlace atómica incluso a temperatura ambiente, donde los electrones se liberan para moverse aleatoriamente [5,22]. Sin embargo, cuando se aplica una diferencia de temperatura a través de un conductor como se muestra en la figura 2, la región caliente del conductor produce electrones libres con mayor energía en consecuencia hay una difusión de los electrones desde el extremo caliente hacia la región fría. Se genera una fuerza electromotriz (FEM) de tal manera que una corriente eléctrica fluye contra el gradiente de temperatura; durante este proceso se generan efectos reversibles e irreversibles, los primeros son el efecto Seebeck, Peltier y Thomson y por otro lado, tenemos al efecto Joule, la conducción de calor y la disipación de energía al ambiente por convección como representantes de los segundos efectos. Para comprender mejor el fenómeno termoeléctrico a continuación se describen algunos conceptos fundamentales.

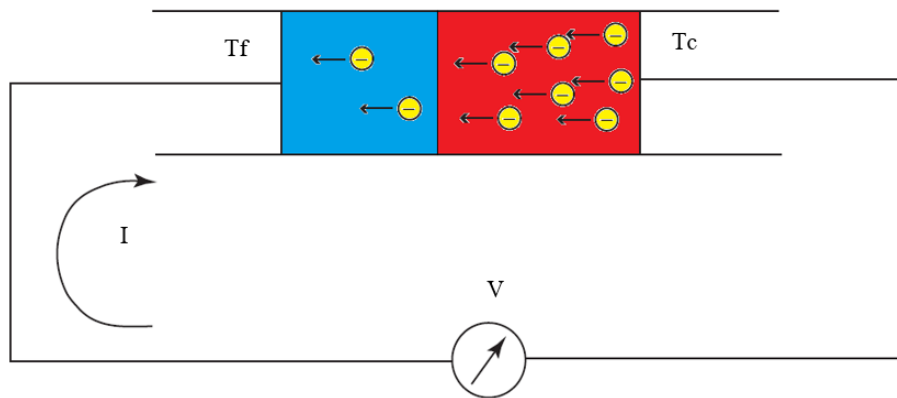


Figura 2. Difusión de carga de la zona caliente a la zona fría de un material conductor.

### 2.1.1 Efecto Seebeck

En 1821, Thomas Johann Seebeck descubrió que una fuerza electromotriz se produce por un circuito hecho de dos materiales disimiles, cuando una de las uniones se calienta generando una diferencia de temperaturas en sus extremos; durante sus primeras observaciones notó que una aguja imantada cercana al circuito se alteraba, asevera erróneamente que se trataba de un fenómeno termomagnético, después se dio a conocer que el origen del campo magnético era inducido debido a la corriente generada en el circuito, esta última generada por una diferencia de temperaturas. Lo anterior se conoce ahora como el efecto Seebeck [5,23,24]. Una vez que se reconoce que el efecto Seebeck es la conversión de una diferencia de temperatura en una corriente eléctrica, como se muestra en la Figura 3, el elemento conductor A está unido en ambos extremos al elemento conductor B y un voltímetro es insertado en el elemento conductor B. Al imponerse una diferencia de temperatura entre los dos simultáneamente se genera una diferencia de potencial o tensión  $V$  que detecta el voltímetro. El coeficiente de Seebeck  $\alpha$ , relaciona el diferencial de potencial  $V$  respecto a una diferencia de temperatura  $\Delta T = T_h - T_c$  usualmente se mide en  $\mu V / K$ .

$$\alpha_{AB} = \frac{V}{\Delta T} \left[ \frac{\mu V}{K} \right]$$

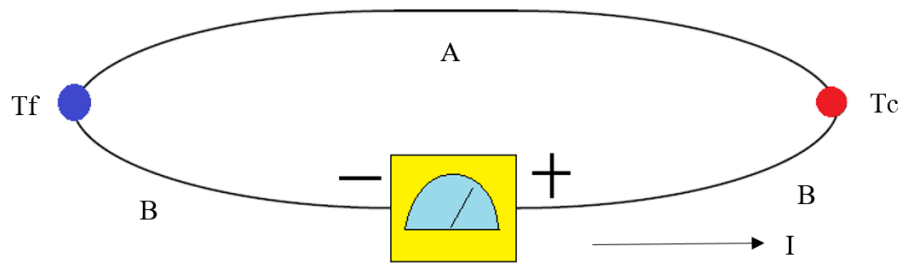


Figura 3. Unión termoeléctrica.

### 2.1.2 Efecto Peltier

El enfriamiento termoeléctrico o efecto Peltier fue descubierto en el año 1834, 13 años después al efecto Seebeck, inverso a este último y en este se propone el suministro de una corriente eléctrica provocando una diferencia de temperaturas en las uniones de dos conductores disimiles. El calor absorbido/liberado de Peltier viene dado por la siguiente expresión:

$$Q_{peltier} = \pi_{AB} I \quad ,$$

Donde  $\pi_{AB}$  es el coeficiente Peltier de la unión de los elementos conductores o termopar y  $Q_{peltier}$  representa la cantidad de energía térmica necesaria que es transportada, por unidad de carga a través del material. Varias condiciones reportadas por Zemansky [24], se enumeran a continuación:

- a) La cantidad de calor Peltier producida por unidad de tiempo es proporcional a la intensidad de corriente; es decir igual a  $\pi_{AB} I$ , siendo  $\pi_{AB}$  el llamado coeficiente Peltier, que es igual a la cantidad de calor producida cuando una unidad de carga circula por la una unión.
- b) El calor Peltier es reversible, si se invierte el sentido de la corriente, permaneciendo constante su valor.
- c) El coeficiente Peltier depende de la temperatura y de los materiales que lo forman

- d) Se acepta el convenio de considerar a  $\pi_{AB}$  positivo cuando una corriente eléctrica que pasa de A a B y que ocasiona una absorción de calor en la unión.

Además, Thomson relaciona el voltaje de Seebeck cuando se tiene una diferencia de temperaturas en las uniones con el efecto Peltier, donde  $Q$  indica la cantidad de calor transportado en el material. La energía térmica generada por el efecto Seebeck se representa mediante la siguiente expresión,

$$Q_{peltier} = \alpha_{AB} TI \quad ,$$

Siendo esta última, una ecuación termoeléctrica importante que define la energía térmica reversible.

### 2.1.3 Efecto Thompson

Cuando la corriente fluye en un material conductor con un gradiente de temperatura, el calor se absorbe o se libera a través del hilo dependiendo del material y la dirección de la corriente. El calor de Thomson es proporcional tanto a la corriente eléctrica como al gradiente de temperatura [5]. Cuando la corriente eléctrica se mueve de la unión fría a la caliente, los electrones absorben energía y con ello aumenta su energía potencial. Cuando la corriente se mueve de la unión caliente a la fría, los electrones ceden energía, con ello disminuye su energía potencial; si los pasos de unión fría a caliente y caliente a fría se realizan a través de un mismo conductor los efectos mencionados se cancelan. Si los pasos anteriores se realizan en distintos materiales, los cambios de energía potencial no necesariamente se cancelan, produciendo un cambio en las temperaturas [25]. El coeficiente Thomson es único entre los tres coeficientes termoeléctricos porque es el único coeficiente termoeléctrico directamente medible en materiales individuales.

## 2.2 Efecto Joule

El efecto Joule representa la aplicación del principio de conservación de la energía a la transformación de energía eléctrica a calor [26], debido al transporte de corriente eléctrica en un material conductor, físicamente el elemento conductor se calienta disipando energía al ambiente en forma de calor, teniendo la siguiente expresión

$$Q_J = RI^2 \quad ,$$

Donde  $Q_J$  es la energía disipada al ambiente por efecto Joule,  $R$  es la resistencia que se opone al elemento conductor e  $I$  es la intensidad de corriente que circula en este último.

## 2.3 Conducción de Calor

La conducción de calor es la transferencia de energía de la zona más energética de un material hacia las adyacentes menos energéticas, como resultado de interacciones moleculares entre estas. La rapidez o razón de la conducción de calor a través de un medio homogéneo depende de la configuración geométrica de este, su espesor y el material de que este hecho, así como la diferencia de temperaturas a través de él [27]. Por lo tanto, la razón de conducción de calor a través de una capa plana es proporcional a la diferencia de temperatura a través de esta y al área de transferencia de calor, inversamente proporcional al espesor de esa capa, donde la constante de proporcionalidad  $k$ , que es la conductividad térmica del material nos indica una medida de la capacidad del material para conducir calor. Por lo tanto, la rapidez de la transferencia de calor se reduce a su forma diferencial

$$Q_k = -kA \frac{dT}{dx} \quad ,$$

La ecuación anterior se conoce como la ley de Fourier de la conducción de calor, en honor a él, quien la expresó por primera vez en su texto de transferencia de calor en 1822.



## 2.4 Convección

La convección es el modo de transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacente que está en movimiento y comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos. La convección recibe el nombre de convección forzada si el fluido es forzado a fluir sobre la superficie mediante medios externos como un ventilador, una bomba, del otro lado, se dice que es convección natural o libre si el movimiento del fluido es causado por las fuerzas de empuje que son inducidas por las diferencias de densidad debidas a la variación de la temperatura en ese fluido [27]; se observa que la rapidez de la transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa a partir de la ley de Newton del enfriamiento como

$$Q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad ,$$

Donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $A_s$  es el área superficial a través de la cual tiene lugar la transferencia de calor por convección,  $T_s$  es la temperatura de la superficie y  $T_\infty$  es la temperatura del fluido suficientemente alejado de esta superficie. En la Tabla 2 se muestran los valores típicos del coeficiente convectivo  $h$  a diferentes condiciones.

Tabla 2. Intervalo de valores del coeficiente de transferencia de calor por convección

<b>Tipo de Convección</b>	<b><math>h, W/m^2\text{°C}</math></b>
Convección libre de gases	2-5
Convección libre de líquidos	10-1000
Convección forzada de gases	25-250
Convección forzada de líquidos	50-20000
Ebullición y condensación	2500-100000

## 2.5 Generador Termoeléctrico

Un generador termoeléctrico es donde la energía térmica se convierte en energía eléctrica sin partes móviles. Un circuito eléctrico simple para un generador termoeléctrico se muestra en la Figura 4. La pareja termoeléctrica está compuesta por dos elementos: un semiconductor de tipo  $p$  y un semiconductor de tipo  $n$ . Por convención, el signo del coeficiente Seebeck  $\alpha$  representa el potencial del lado frío con respecto al lado caliente.

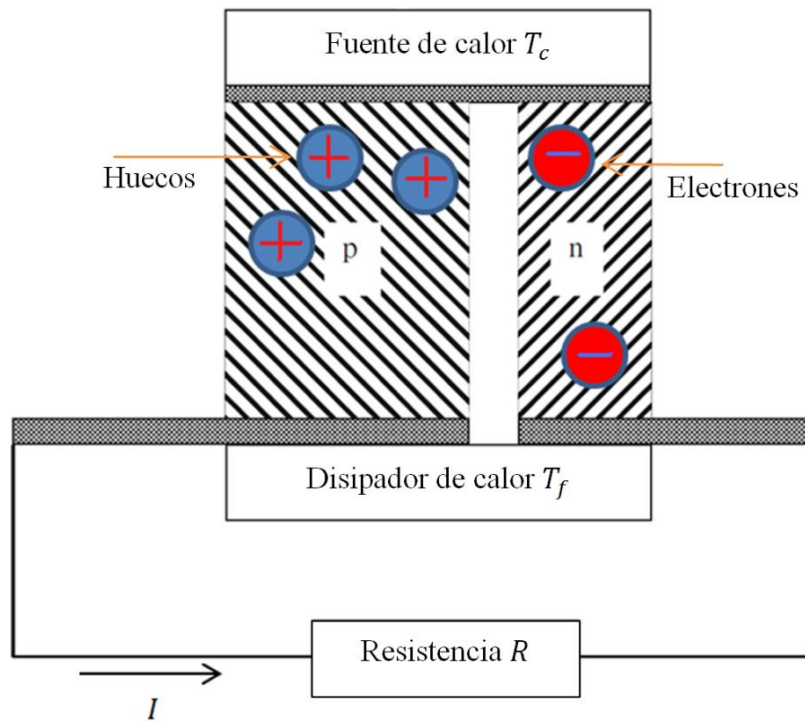


Figura 4. Esquema sencillo de un generador termoeléctrico TEG.

Si los electrones se difunden desde el extremo caliente hasta el frío, entonces el lado frío es negativo con respecto al lado caliente y el coeficiente de Seebeck es negativo para un semiconductor tipo  $n$ . En un semiconductor de tipo  $p$ , por otra parte, los huecos se difundirían desde el extremo caliente al frío. El lado frío será positivo con respecto al lado caliente que volvería a  $\sigma$  una cantidad positiva.

## Capítulo 3

A continuación se presenta el desarrollo del modelo matemático de funcionamiento en un dispositivo TEG, considerando el caso cuando el flujo de calor en las fronteras es uniforme, iniciando el análisis a partir de los flujos de energía involucrados en el sistema se identifican tres efectos importantes: conducción, convección y efecto Joule, obteniendo como resultado dos ecuaciones que describen dicho fenómeno dependiente de las propiedades del TEG.

### Formulación Física del problema

Para obtener un análisis teórico del fenómeno de transferencia de calor en un generador termoeléctrico, se considera a los elementos integrados en el sistema ( $p$  y  $n$ ) de iguales características geométricas, esto permitirá realizar el modelo a partir de un solo elemento, como se aprecia en la figura 5.

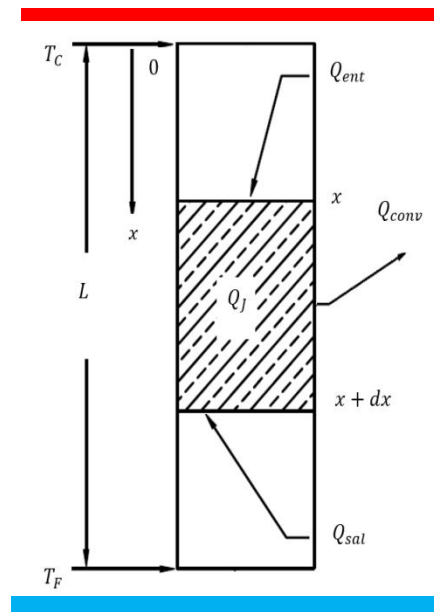


Figura 5. Modelo del flujo de calor en un TEG.

El análisis involucra dos reservorios de alta y baja temperatura, en la zona superior se suministra energía en forma de calor ( $Q_C$ ) y en la zona inferior se extrae energía en un reservorio de baja temperatura ( $Q_F$ ). La figura 6, señala todas las dimensiones y propiedades que involucran al modelo considerando área, longitud, propiedades de los materiales como conductividad térmica, resistividad eléctrica, coeficiente Seebeck, además señala los flujos de calor de alta y baja temperatura respectivamente, mencionados anteriormente como principales reservorios de energía que permiten el funcionamiento de un generador termoeléctrico; por otro lado se reitera que las temperaturas superior e inferior son desconocidas por el momento y cuyo objetivo principal de esta tesis es obtener un modelo teórico que permita calcularlas.

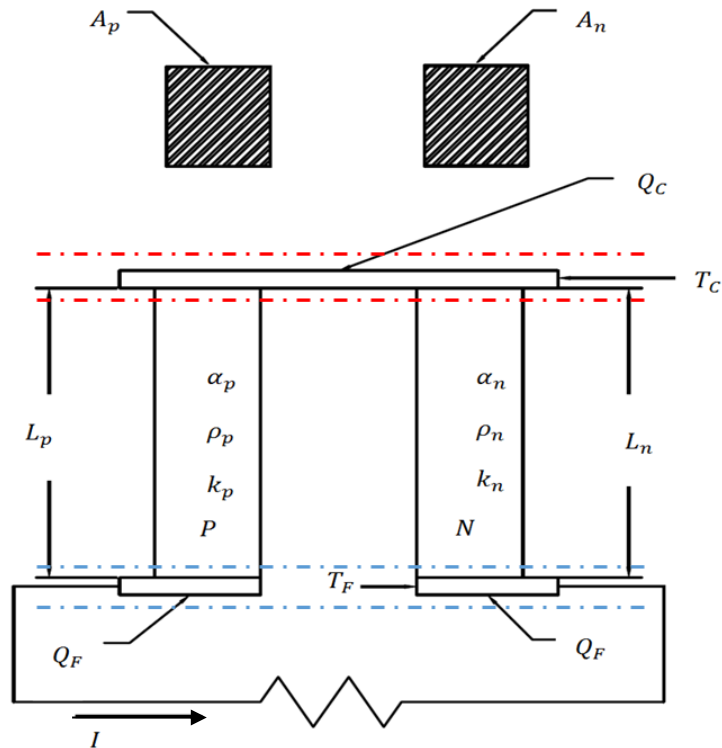


Figura 6. Modelo teórico de un generador termoeléctrico.

### 3.1 Análisis matemático del Generador Termoeléctrico, TEG

A partir de las consideraciones mencionadas anteriormente y considerando a la Figura 5 y 6, como principales sistemas para realizar el análisis, entonces el flujo de calor se caracteriza adecuadamente así como el correspondiente balance de energía del sistema TEG.

#### 3.1.1 Flujo de calor

El flujo de calor se considera en el análisis, sólo si se parte de la suposición existente de un gradiente de temperaturas desconocido por el momento en las fronteras del sistema TEG. El sistema de referencia utilizado es un eje positivo  $x$  hacia abajo como se observó en la Figura 5.

$$\dot{Q}_C = q_p + q_n \quad (x = 0) \quad (1)$$

$$\dot{Q}_F = q_p + q_n \quad (x = L) \quad (2)$$

El flujo de calor en los elementos  $p$  y  $n$  está gobernado por la transferencia de calor por conducción y una nueva variante física que permite la conversión de una pequeña porción del flujo de energía en potencia eléctrica, función del coeficiente Seebeck y la temperatura, para el elemento “ $p$ ” se tiene que:

$$q_p = \alpha_p T I - k_p A_p \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Y para el elemento “ $n$ ”

$$q_n = \alpha_n T I - k_n A_n \frac{dT}{dx} \quad (4)$$

Sustituyendo estas expresiones de las variables  $q_p$  y  $q_n$  en las ecuaciones 1 y 2, para cada condición de frontera tanto en  $x = 0$  como en  $x = L$ , obtenemos las siguientes ecuaciones representativas del fenómeno

Flujo de entrada

$$\dot{Q}_C = q_p + q_n = (|\alpha|_p + |\alpha|_n)T_C I - k_p A_p \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} - k_n A_n \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (5)$$

Flujo de salida

$$\dot{Q}_F = q_p + q_n = (|\alpha|_p + |\alpha|_n)T_F I - k_p A_p \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} - k_n A_n \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} \quad (6)$$

El coeficiente Seebeck posee un signo negativo en los elementos tipo  $n$  debido a una carga extra de electrones y por convención se establece un valor absoluto para la suma de este coeficiente en los elementos  $p$  y  $n$ , manteniendo una relación entre ambos complementario y presente en el fenómeno físico de los dispositivos TEG, esto es:

$$\alpha = |\alpha|_p + |\alpha|_n$$

### 3.1.2 Balance de energía

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores y apreciables en la Figura 5, se procede a realizar un balance de energía del sistema TEG, analizando los principales fenómenos de interés involucrados en el modelo representativo para cada elemento  $p$  y  $n$ . Se consideran presentes el flujo de calor por conducción en la zona superior e inferior del elemento, el efecto Joule por calentamiento del mismo y la convección por disipación de energía al ambiente en las fronteras laterales del sistema. Lo anterior se escribe matemáticamente como,

$$q_{ent} + q_J - q_{sal} - q_{conv} = 0 \quad , \quad (7)$$

Desglosando cada uno de los flujos de energía obtenemos las siguientes relaciones de acuerdo a cada fenómeno presente en el modelo.

$$q_{ent} = -kA \frac{dT}{dx} \quad , \quad (8)$$

$$q_{sal} = q_{ent} + \left( \frac{\partial q_{ent}}{\partial x} \right) dx \quad , \quad (9)$$

$$q_J = \frac{I^2 \rho}{A} dx \quad (10)$$

y

$$q_{conv} = hP(T - T_{\infty})dx \quad . \quad (11)$$

De forma detallada se muestra en la figura 7. El significado físico a cada ecuación de flujo de energía mencionada anteriormente.

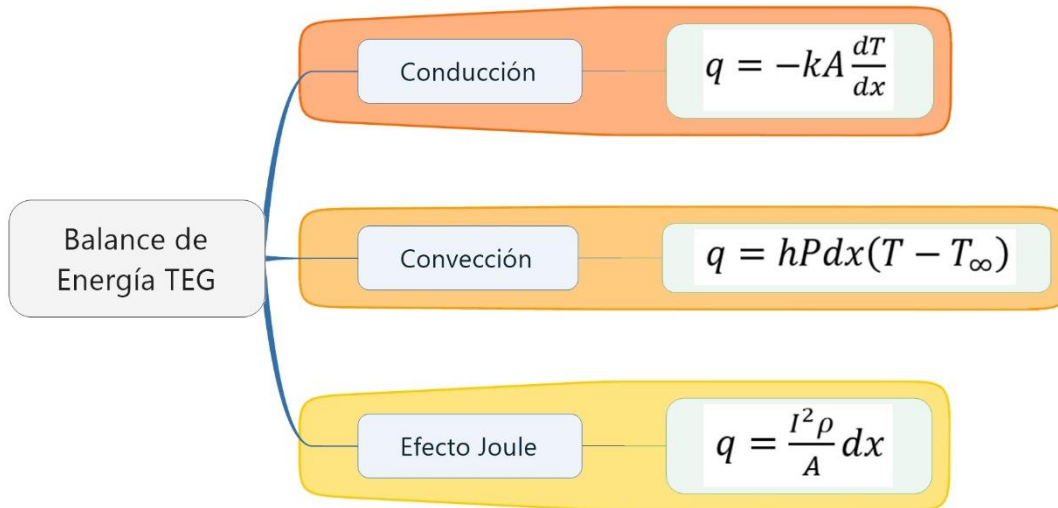


Figura 7. Balance de energía en el TEG

### 3.1.3 Modelos de flujo de calor en los portadores $p$ y $n$

Con todos los fenómenos identificados previamente en el modelo, se substituyen las expresiones anteriores en el modelo de balance de energía para un sistema TEG (ecuación 7), primero se modela para el elemento  $p$  y posteriormente al elemento  $n$ .

Balance de energía para el elemento  $p$ :

$$q_{p_{ent}} - \left( q_{p_{ent}} + \frac{\partial q_{p_{ent}}}{\partial x} dx \right) + \frac{I^2 \rho_p}{A_p} dx - hP_p (T - T_{\infty}) dx = 0 \quad . \quad (12)$$

$$-\frac{dq_{p_{ent}}}{dx} dx + \frac{I^2 \rho_p}{A_p} dx - hP_p (T - T_{\infty}) dx = 0 \quad . \quad (13)$$

Y considerando que el flujo de calor en el elemento  $p$  por conducción se deriva utilizando la ley de Fourier, se tiene entonces que,



$$\frac{dq_{p_{ent}}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( -k_p A_p \frac{dT}{dx} \right) = -k_p A_p \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = -k_p A_p \frac{d^2 T}{dx^2} \quad . \quad (14)$$

Sustituyendo en la ecuación (13) la expresión anterior, se genera una ecuación diferencial de segundo orden donde el diferencial infinitesimal  $dx$  es factor común en la ecuación, lo que permite reacomodar cada uno de los términos, obteniendo la siguiente expresión:

$$k_p A_p \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{l^2 \rho_p}{A_p} - h P_p (T - T_\infty) = 0 \quad . \quad (15)$$

Manipulando ahora a la ecuación y dejando al elemento de mayor orden sin coeficientes constantes, finalmente se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden función de la temperatura y la posición, esto es:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{l^2 \rho_p}{A_p^2 k_p} - \frac{h P_p}{k_p A_p} (T - T_\infty) = 0 \quad . \quad (16)$$

Balance de energía para el elemento  $n$

Se modela al elemento  $n$  de forma similar al elemento anterior, siguiendo el mismo procedimiento. Por lo tanto se tiene que,

$$q_{n_{ent}} - \left( q_{n_{ent}} + \frac{\partial q_{n_{ent}}}{\partial x} dx \right) + \frac{l^2 \rho_n}{A_n} dx - h P_n (T - T_\infty) dx = 0 \quad . \quad (17)$$

$$-\frac{dq_{n_{ent}}}{dx} dx + \frac{l^2 \rho_n}{A_n} dx - h P_n (T - T_\infty) dx = 0 \quad . \quad (18)$$

Y utilizando el flujo de calor en el elemento  $N$  por difusión, mediante el uso de la ley de Fourier, se tiene que,

$$\frac{dq_{n_{ent}}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( -k_n A_n \frac{dT}{dx} \right) = -k_n A_n \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = -k_n A_n \frac{d^2 T}{dx^2} \quad . \quad (19)$$

$$k_n A_n \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2 \rho_n}{A_n} - h P_n (T - T_\infty) = 0 \quad . \quad (20)$$

Y finalmente

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2 \rho_n}{A_n^2 k_n} - \frac{h P_n}{k_n A_n} (T - T_\infty) = 0 \quad . \quad (21)$$

El voltaje en un generador termoeléctrico (TEG) depende de los coeficientes Seebeck  $(|\alpha|_p + |\alpha|_n)[V/K]$  y la diferencia de temperaturas de las fronteras superior e inferior  $(\Delta T)[K]$ , por lo tanto el voltaje del sistema se relaciona con la siguiente expresión  $V = (|\alpha|_p + |\alpha|_n)(T_C - T_F)$ . Por otro lado, la corriente eléctrica  $I$  es desconocida en el modelo, pero ésta se relaciona con propiedades físicas de los portadores de carga y a partir de una revisión de la literatura la corriente eléctrica es función de la suma de los coeficientes Seebeck ligada a la diferencia de temperaturas en las fronteras y la resistencia de cada elemento  $R_p$ ,  $R_n$  y  $R_L$  [5]. A partir de la ley de Ohm la corriente eléctrica se expresa de la siguiente forma considerando las propiedades anteriores,

$$I = \frac{(|\alpha|_p + |\alpha|_n)(T_C - T_F)}{R_L + R_p + R_n} \quad . \quad (22)$$

El modelo se centra en el dispositivo TEG por lo tanto la resistencia  $R_L$  externa al modelo de análisis se considera despreciable, la resistencia eléctrica del modelo también se expresa de la siguiente forma considerando el caso general cuando la longitud y área transversal en los elementos P y N son iguales y  $R_L = 0$ .

$$R = \frac{(\rho_p + \rho_n)L}{A} = \rho \frac{L}{A}$$

$$R = R_p + R_n$$

$$\alpha = |\alpha|_p + |\alpha|_n$$

Reduciendo la ecuación 22, obtenemos la siguiente relación compacta

$$I = \frac{\alpha(T_C - T_F)}{R} \quad (23)$$

La corriente eléctrica de la ecuación (23) está en función de las variables con las que se están trabajando se sustituye en las ecuaciones de flujo de calor y ecuaciones diferenciales obtenidas a partir del balance de energía y que corresponden a las Ecs. (5), (6), (16) y (21); obteniendo que,

$$\dot{Q}_C = T_C \frac{\alpha^2(T_C - T_F)}{R} - k_p A_p \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} - k_n A_n \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad , \quad (24)$$

$$\dot{Q}_F = T_F \frac{\alpha^2(T_C - T_F)}{R} - k_p A_p \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} - k_n A_n \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad , \quad (25)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\rho_p}{A_p^2 k_p} \frac{\alpha^2(T_C - T_F)^2}{R^2} - \frac{hP_p}{k_p A_p} (T - T_\infty) = 0 \quad (26)$$

y

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\rho_n}{A_n^2 k_n} \frac{\alpha^2(T_C - T_F)^2}{R^2} - \frac{hP_n}{k_n A_n} (T - T_\infty) = 0 \quad . \quad (27)$$

### 3.2 Modelo matemático adimensional

Debido a la gran cantidad de propiedades que intervienen en el modelo se considera prudente llevar a cabo un análisis a partir de un modelo adimensional considerando las siguientes relaciones: se elige una longitud característica del sistema que viene dada por la distancia que existe entre la frontera superior e inferior del sistema, expresada con el símbolo  $L$  y la segunda considera una temperatura característica; estas dos propiedades se relacionan con la posición y la temperatura para obtener los nuevos valores adimensionales  $\chi$  y  $\theta$  respectivamente. Esto nos lleva a utilizar las siguientes variables adimensionales:

$$\chi = \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_K} = \frac{\bar{T}}{\Delta T_K} \quad ,$$

Con la adimensionalización anterior aparece una diferencia de temperatura característica  $\Delta T_K$  que se define más adelante.

#### 3.2.1 Balance de energía en las fronteras de los elementos P y N

Aplicando las relaciones anteriores, el flujo de calor en la zona superior se expresa de la siguiente forma,

Frontera  $\chi = 0$ :

$$\dot{Q}_C = \frac{\alpha^2(\theta_C \Delta T_K)(\theta_C - \theta_F) \Delta T_K}{R} - \frac{k_p A_p \Delta T_K}{L} \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{k_n A_n \Delta T_K}{L} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \quad (28)$$

Y de esta manera, el flujo de calor se escribe en forma adimensional dependiendo solamente de las propiedades del modelo y la diferencia de temperaturas característica.

$$\frac{\dot{Q}_C L}{k_p A_p \Delta T_K} = \frac{\alpha^2(\theta_C)(\theta_C - \theta_F) \Delta T_K L}{R k_p A_p} - \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \quad (29)$$

El flujo de calor adimensional a la entrada del sistema es una variable en el orden de la unidad, debido a que es el principal flujo de energía que se necesita para que opere el sistema, a partir de esta consideración en la entrada del dispositivo termoeléctrico, es posible deducir las propiedades físicas que intervienen en la temperatura característica. Lo anterior es equivalente a escribir,

$$\frac{\dot{Q}_C L}{k_p A_p \Delta T_K} \sim 1$$

Y por consiguiente se obtiene de la expresión anterior que la temperatura característica,

$$\Delta T_K = \frac{\dot{Q}_C L}{k_p A_p}$$

La relación anterior define claramente la delta de temperatura característica necesaria para este problema de transferencia de calor. Es importante mencionar lo anterior ya que para el caso donde los depósitos térmicos son regulados por sus temperaturas, el proceso de adimensionalización se hubiera basado en las temperaturas características de los depósitos térmicos. Sustituyendo  $\Delta T_K$  en la ecuación de flujo de calor se tiene que,

$$\psi_C = 1 = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L^2}{R k_p^2 A_p^2} \theta_C (\theta_C - \theta_F) - \left. \frac{d\theta_p}{d\chi} \right|_{\chi=0} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \left. \frac{d\theta_n}{d\chi} \right|_{\chi=0} \quad . \quad (30)$$

Se realiza el mismo procedimiento para la parte inferior, aplicándolo al análisis de flujo de calor en la zona fría. Los detalles son los siguientes.

Frontera  $\chi = 1$ :

$$\dot{Q}_F = \frac{\alpha^2 (\theta_F \Delta T_K) (\theta_C - \theta_F) \Delta T_K}{R} - \frac{k_p A_p \Delta T_K}{L} \left. \frac{d\theta_p}{d\chi} \right|_{\chi=1} - \frac{k_n A_n \Delta T_K}{L} \left. \frac{d\theta_n}{d\chi} \right|_{\chi=1} \quad ;$$

Por lo que,

$$\frac{\dot{Q}_{FL}}{k_p A_p \Delta T_K} = \frac{\alpha^2 (\theta_L \Delta T_K) (\theta_C - \theta_F) L}{R k_p A_p} - \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=1} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=1}$$

Retomando la consideración de la temperatura característica, se observa que el flujo de calor adimensional en la zona fría es una relación entre el flujo a la salida del elemento termoeléctrico respecto al flujo de entrada, esto es:

$$\psi_F = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C} = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L^2}{R k_p^2 A_p^2} \theta_F (\theta_C - \theta_F) - \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=1} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=1} \quad (31)$$

### 3.2.2 Flujo de calor en el elemento diferencial

En las ecuaciones diferenciales de segundo orden se realiza el mismo procedimiento; esto es, conociendo los valores de las propiedades que relacionan a la temperatura característica, obtenemos dos nuevas ecuaciones diferenciales de flujo de calor.

$$\frac{1}{L} \frac{d}{d\chi} \left( \frac{1}{L} \Delta T_K \frac{d\theta_p}{d\chi} \right) - \frac{h P_p}{k_p A_p} \Delta T_K \theta_p + \frac{\alpha^2 (\Delta T_K \theta_C - \Delta T_K \theta_F)^2 \rho_p}{A_p^2 k_p R^2} = 0 \quad (32)$$

Dejando al término diferencial de mayor orden sin ningún parámetro, obtenemos para el elemento diferencial  $p$  la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 \theta_p}{d\chi^2} - \frac{h P_p L^2}{k_p A_p} \theta_p + \frac{\alpha^2 \Delta T_K L^2 \rho_p}{A_p^2 k_p R^2} (\theta_C - \theta_F)^2 = 0 \quad (33)$$

De igual forma para el elemento diferencial  $n$  obtenemos la ecuación siguiente,

$$\frac{d^2 \theta_n}{d\chi^2} - \frac{h P_n L^2}{k_n A_n} \theta_n + \frac{\alpha^2 \Delta T_K L^2 \rho_n}{A_n^2 k_n R^2} (\theta_C - \theta_F)^2 = 0 \quad (34)$$

## Capítulo 4

En este capítulo se realiza la solución teórica a las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente a partir del balance de energía del modelo presentado en la Figura 6, posteriormente se sustituyen en las ecuaciones de flujo de calor a la entrada y salida del sistema, dependiente de dos parámetros principales y la eficiencia térmica del sistema TEG dada por los reservorios de energía en las fronteras superior e inferior respectivamente.

### Solución teórica de la generación de energía en el sistema TEG

Agrupando las cuatro ecuaciones en su forma adimensional, las dos primeras en su forma de ecuación diferencial de conducción de calor en el TEG y los flujos de calor en la frontera superior e inferior dependientes de la temperatura y la posición.

Para el elemento  $n$

$$\frac{d^2\theta_n}{d\chi^2} - \frac{hP_n L^2}{k_n A_n} \theta_n + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{k_n^2 A_n \rho_n} (\theta_C - \theta_F)^2 = 0 \quad , \quad (35)$$

Para el elemento  $p$

$$\frac{d^2\theta_p}{d\chi^2} - \frac{hP_p L^2}{k_p A_p} \theta_p + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 = 0 \quad , \quad (36)$$

Flujo de calor adimensional reservorio de alta temperatura

$$\psi_C = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L^2}{R k_p^2 A_p^2} \theta_C (\theta_C - \theta_F) - \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \quad , \quad (37)$$

Y flujo de calor adimensional reservorio de baja temperatura

$$\psi_F = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L^2}{R k_p^2 A_p^2} \theta_F (\theta_C - \theta_F) - \frac{d\theta_p}{d\chi} \Big|_{\chi=1} - \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{d\theta_n}{d\chi} \Big|_{\chi=1} \quad . \quad (38)$$

Tomando en cuenta lo anterior, se solucionan las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de los elementos  $p$  y  $n$ . Primero se obtiene la solución a la ecuación diferencial de flujo de calor en el elemento  $n$ . Esta solución es trivial y viene dada por la expresión siguiente,

$$\theta_n = C_1 e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \quad (39)$$

De igual forma se resuelve la ecuación diferencial de flujo de calor para el elemento  $p$ ,

$$\theta_p = C_3 e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \quad (40)$$

En las dos ecuaciones anteriores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son cuatro constantes de integración que se determinan con ayuda de las condiciones en la frontera del sistema. Aplicando las condiciones de frontera correspondientes para los elementos  $n$  y  $p$  se tiene que en:

$$\chi = 0 : \theta = \theta_C \quad y \quad \chi = 1 : \theta = \theta_F \quad .$$

De esta manera se obtienen las distribuciones de la temperatura en los elementos  $n$  y  $p$  en función de la posición que vienen dadas por las siguientes ecuaciones: Modelo de distribución de temperatura a lo largo del elemento  $n$

$$\theta_n = - \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi}} e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi}} e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \quad (41)$$

Modelo de distribución de temperatura a lo largo del elemento  $p$



$$\begin{aligned}
\theta_p = & - \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} - e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + \\
& \frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} - e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \quad (42)
\end{aligned}$$

Para acoplar las soluciones anteriores a las ecuaciones de flujo de calor a la entrada y salida de las fronteras del modelo TEG, las soluciones dadas por las Ecs. (41) y (42) se derivan y evalúan en  $\chi = 0$  y  $\chi = 1$ . El procedimiento anterior, genera para el elemento  $n$  la expresión siguiente,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_n}{d\chi} = & - \sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} - e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}} e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - \\
& \sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} - e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}} e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \quad (43)
\end{aligned}$$

Para la posición  $\chi = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\theta_n}{d\chi} \right|_{\chi=0} = & - \frac{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} - e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}} \left( 2\theta_F - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) - \right. \\
& \left. \theta_C \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) \quad (44)
\end{aligned}$$

De manera similar para la posición  $\chi = 1$ , se tiene que,

$$\frac{d\theta_n}{d\chi}\Big|_{\chi=1} = -\frac{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}} \left( -2\theta_C + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) + \theta_F \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) \quad (45)$$

Para el elemento P se deriva la temperatura adimensional respecto a la posición obteniendo la expresión siguiente,

$$\frac{d\theta_p}{d\chi} = -\frac{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \theta_F + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} - \frac{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \theta_F + e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}} \chi} \quad (46)$$

y evaluando la ecuación (47) en  $\chi = 0$  se tiene que,

$$\frac{d\theta_p}{d\chi}\Big|_{\chi=0} = -\frac{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} \left( 2\theta_F - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) - \theta_C \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) \quad (47)$$

Y en  $\chi = 1$  obtenemos equivalentemente que,

$$\frac{d\theta_p}{d\chi}\Big|_{\chi=1} = -\frac{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} \left( -2\theta_C + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \right) \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) + \theta_F \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \quad (48)$$

#### 4.1. Ecuaciones de flujo de calor finales

Al sustituir los resultados anteriores en función de la posición  $\chi = 0$  y  $\chi = 1$  se obtienen los siguientes modelos de flujo de calor en la zona de alta y baja temperatura de las ecuaciones (37) y (38), respectivamente.

Flujo de calor en el reservorio de alta temperatura  $\dot{\psi}_C$ :

$$\dot{\psi}_C = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{\rho k_p^2 A_p} \theta_C (\theta_C - \theta_F) + \frac{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}}} \left( 2\theta_F - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \right) \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) - \theta_C \left( e^{\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_p L^2}{k_p A_p}}} \right) + \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}{e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} - e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}}} \left( 2\theta_F - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \right) \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) - \theta_C \left( e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \quad (49)$$

Flujo de calor en el reservorio de baja temperatura:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_F = & \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{\rho k_p^2 A_p} \theta_F (\theta_C - \theta_F) + \frac{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}{e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}} \left( -2\theta_C + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_p h P_p L} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) + \theta_F \left( e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} + e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \right) \right) + \frac{k_n A_n}{k_p A_p} \frac{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}}{e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}}} \left( -2\theta_C + \right. \\
 & \left. \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) + \theta_F \left( e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}} + e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}}} \right) \right) \quad (50)
 \end{aligned}$$

Por último y debido a la similitud de las propiedades de los elementos  $p$  y  $n$  tales como la conductividad térmica, resistividad eléctrica y escalas geométricas tales como el área transversal y el perímetro de los elementos; considerando las siguientes similitudes se reducen la cantidad de variables en el modelo, por otro lado manteniendo dimensiones idénticas de los elementos se reducen costos y tiempo durante el proceso de producción de los dispositivos TEG [28]. Por lo anterior, se consideran las restricciones siguientes:

$$A_p = A_n = A \quad , \quad k_p = k_n = k \quad , \quad \frac{k_n A_n}{k_p A_p} = \frac{k A}{k A} \sim 1 \quad , \quad P_p = P_n = P$$

Y consiguiente, los flujos de calor en ambas fronteras se escriben como,

$$\psi_C = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{\rho k^2 A} \theta_C (\theta_C - \theta_F) + 2 \frac{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}}{e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} - e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}}} \left( 2\theta_F - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{\frac{\rho k^2 A}{hPL^2}} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} + e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} \right) \right) - \theta_C \left( e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} + e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} \right) \right) , \quad (51)$$

y

$$\psi_F = \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{\rho k^2 A} \theta_F (\theta_C - \theta_F) - 2 \frac{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}}{e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} - e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}}} \left( 2\theta_C - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{\frac{\rho k^2 A}{hPL^2}} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - \left( e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} + e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} \right) \right) - \theta_F \left( e^{\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} + e^{-\sqrt{\frac{hPL^2}{kA}}} \right) \right) . \quad (52)$$

En las ecuaciones anteriores, se identifican dos parámetros adimensionales:  $\varepsilon_1$  que representa la competencia de la conducción de calor en el elemento respecto a la disipación de energía en la superficie lateral por convección y  $\varepsilon_2$  considera la generación de potencial eléctrica, compitiendo con la conducción de calor y la resistividad eléctrica del elemento, como se describe en la Figura 8.

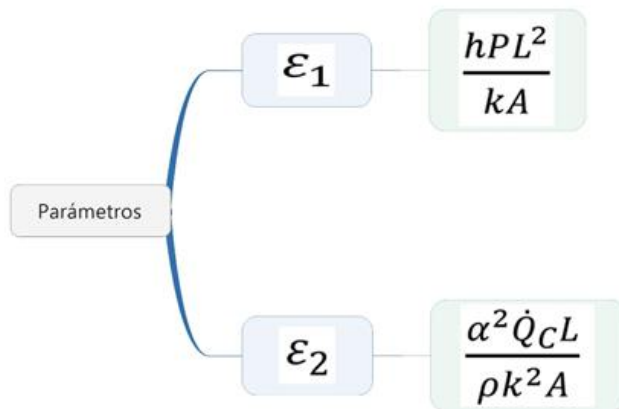


Figura 8. Parámetros adimensionales

De esta manera se obtienen dos nuevas ecuaciones de flujo de calor considerando los parámetros adimensionales y estas se escriben compactamente como,

$$\dot{\psi}_C = \varepsilon_2 \theta_C (\theta_C - \theta_F) + 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_F - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 (2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}})) - \theta_C (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) \quad , \quad (53)$$

$$\dot{\psi}_F = \varepsilon_2 \theta_F (\theta_C - \theta_F) - 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_C - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 (2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}})) - \theta_F (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) \quad . \quad (54)$$

Estas últimas dos ecuaciones se encuentran acopladas entre sí, donde  $\psi$  representa los flujos de calor en las fronteras superior e inferior respectivamente, dependientes de dos parámetros esenciales para la operación del sistema TEG  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

## Capítulo 5

En este capítulo se da solución de forma numérica a las ecuaciones que modelan el flujo de energía en un TEG, considerando dos casos particulares: el primero cuando la convección no existe en el modelo y un segundo caso donde se toma en cuenta la convección. Para este fin, se obtienen curvas que modelan el comportamiento de las fronteras de alta y baja temperatura en función de la eficiencia del sistema, la variación de la temperatura en función de la posición; simulaciones numéricas que por cierto se realizan con datos reales para validar el modelo teórico de un TEG y obtener también la salida de corriente eléctrica en dicho sistema.

### Resultados

#### 5.1 Primer caso “Convección despreciable”

Cuando la convección tiende a cero se observa que hay una indeterminación en el sistema de ecuaciones (53) y (54), ya que el término  $\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}}$  queda indeterminado. Para resolver lo anterior, se aplica la regla de l'Hôpital que permite evaluar límites de funciones cuando estas quedan indeterminadas utilizando el método de la derivada. EL procedimiento anterior conduce a los límites de las expresiones siguientes,

$$\psi_C = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2 \theta_C (\theta_C - \theta_F) + 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_F - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) - \theta_C (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right)$$

$$\psi_F = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2 \theta_F (\theta_C - \theta_F) - 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_C - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 \left( 2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) + \theta_F (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right)$$

En consecuencia, se obtiene el modelo siguiente de ecuaciones que depende exclusivamente del parámetro  $\varepsilon_2$ . Se considera además que la eficiencia de flujo de calor en un TEG, como suele ocurrir en situaciones prácticas, toma valores numéricos del 5, 10 y 15%; situación que se presenta fácilmente considerando que el modelo permite controlar los flujos de calor a la entrada y a la salida.

$$\dot{\psi}_C = \varepsilon_2 \theta_C (\theta_C - \theta_F) - 2(\theta_C + \theta_F)$$

y

$$\dot{\psi}_F = \varepsilon_2 \theta_F (\theta_C - \theta_F) + 2(\theta_C - \theta_F)$$

En la Figura 9 se aprecia las curvas que modelan el comportamiento de las temperaturas de los depósitos térmicos en las zonas de alta y baja temperatura como una función del parámetro adimensional  $\varepsilon_2$  y diferentes valores de la eficiencia del flujo de calor del sistema TEG. Las tres curvas superiores corresponden a la temperatura del depósito de alta temperatura mientras que las inferiores se refieren a la temperatura del depósito inferior. Se observa una tendencia de la temperatura del depósito de alta temperatura disminuye para valores crecientes de la temperatura del depósito inferior, es importante mencionar que la temperatura del depósito de baja temperatura no siempre es creciente ya que alcanza un máximo alrededor de  $\varepsilon_2 \sim 50$ . De esta manera se encuentra mucha sensibilidad a este parámetro y serán las condiciones de enfriamiento en el depósito de baja temperatura donde se decida cuál es la forma más fácil de generar el efecto de enfriamiento.



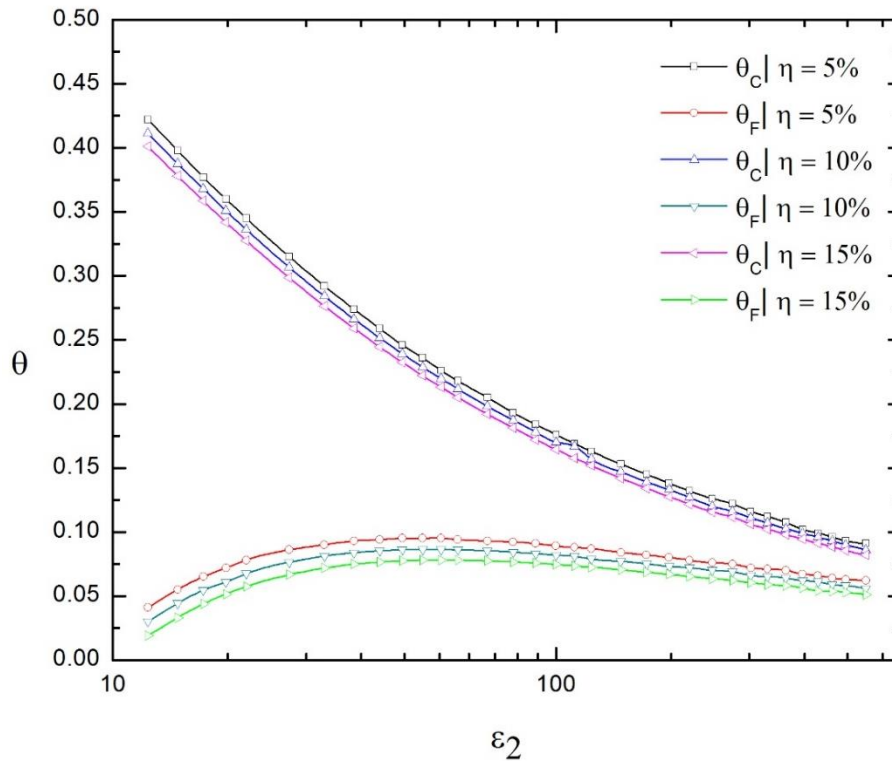


Figura 9. Curvas de temperaturas adimensional para los depósitos de alta y baja temperatura como función del parámetro  $\varepsilon_2$  y en ausencia de convección en un TEG.

También se obtiene una segunda gráfica, como se aprecia en la Figura 10, que permite observar para diferentes eficiencias de flujo de calor del sistema, las temperaturas adimensionales en las fronteras de alta y baja temperatura; estas curvas permiten observar claramente como al aumentar la eficiencia, la temperatura necesaria en el reservorio caliente disminuye. Es importante mencionar que la convección no juega ningún papel y por ende, este caso es el más crítico ya que representa aquellas situaciones donde los depósitos alcanzan sus valores de mayor inflexión.

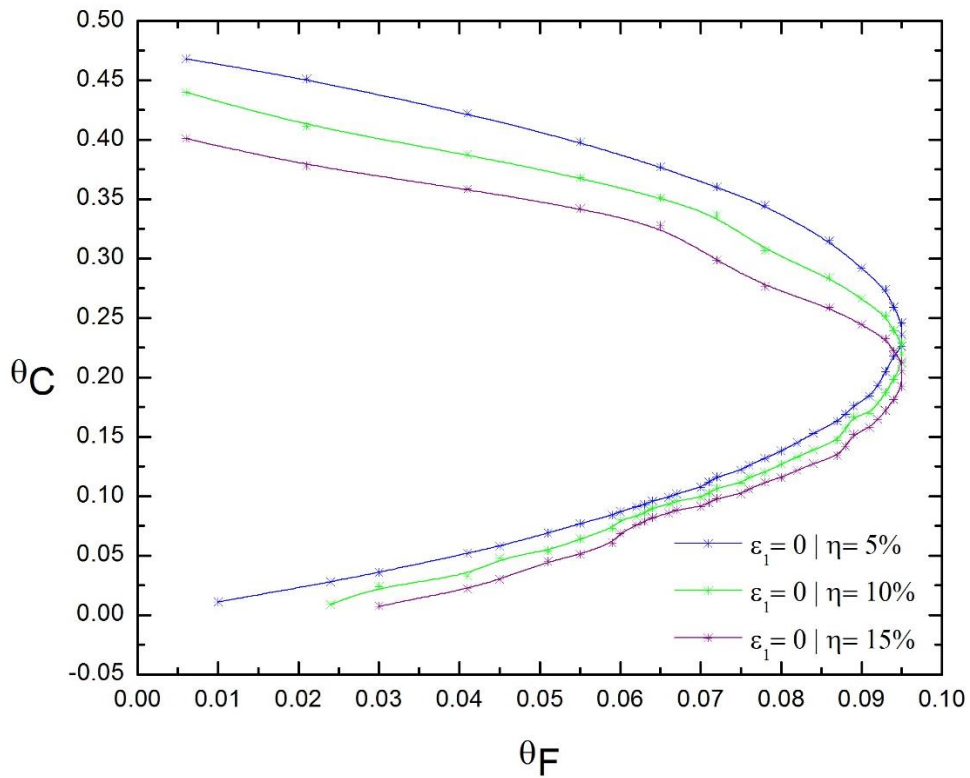


Figura 10. Temperatura adimensional en las fronteras variando la eficiencia de flujo de calor en un TEG.

## 5.2 Segundo caso “con Convección”

En este caso general se toman en cuenta los dos parámetros que afectan al sistema de ecuaciones del modelo; observando además que  $\varepsilon_1$  tiene un rango de variación bajo de  $0 < \varepsilon_1 < 5$  cuando el coeficiente convectivo toma valores típicos de convección libre en un fluido gaseoso como el aire, caso fundamental de interés en el dispositivo TEG, por otro lado el parámetro  $\varepsilon_1$ , depende de una función exponencial. Por lo tanto, se propone una solución numérica del sistema siguiente de ecuaciones no lineales:

$$\psi_C = \varepsilon_2 \theta_C (\theta_C - \theta_F) + 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_F - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 (2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}})) - \theta_C (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) \quad y$$

$$\psi_F = \varepsilon_2 \theta_F (\theta_C - \theta_F) - 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{e^{-\sqrt{\varepsilon_1}} - e^{\sqrt{\varepsilon_1}}} \left( 2\theta_C - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\theta_C - \theta_F)^2 (2 - (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}})) - \theta_F (e^{\sqrt{\varepsilon_1}} + e^{-\sqrt{\varepsilon_1}}) \right) \quad .$$

Considerando que los valores límites de operación del parámetro  $\varepsilon_1$  varían entre  $1 < \varepsilon_1 < 5$  en la Figura 11, se presentan los resultados numéricos de la temperatura en las fronteras, tomando como referencia también el caso cuando no hay convección, esto es, cuando  $\varepsilon_1 = 0$ . Se observa para valores bajos de  $\varepsilon_1$  el comportamiento es similar al modelo cuando no hay convección, destacando que nunca es superior la diferencia de temperaturas que existe entre las fronteras de alta y baja temperatura.

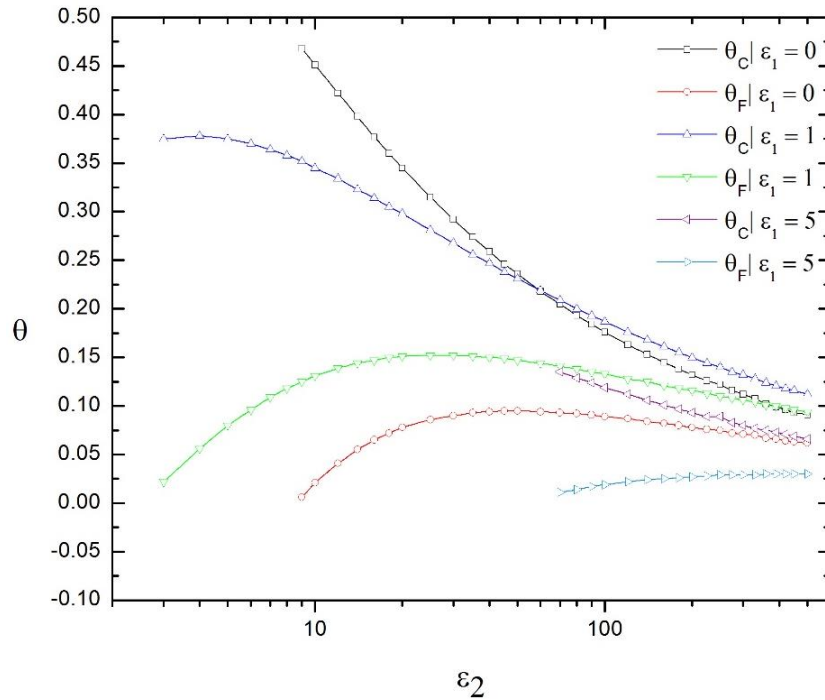


Figura 11. Temperatura alta y baja en las fronteras con parámetro variable  $\varepsilon_2$

Complementariamente en la Figura 12 y para  $\varepsilon_1 = 1$  se generan las curvas que representan las temperaturas de operación del sistema variando la eficiencia con los valores siguientes 5, 10 y 15% y considerando obviamente al parámetro  $\varepsilon_2$  como variable.

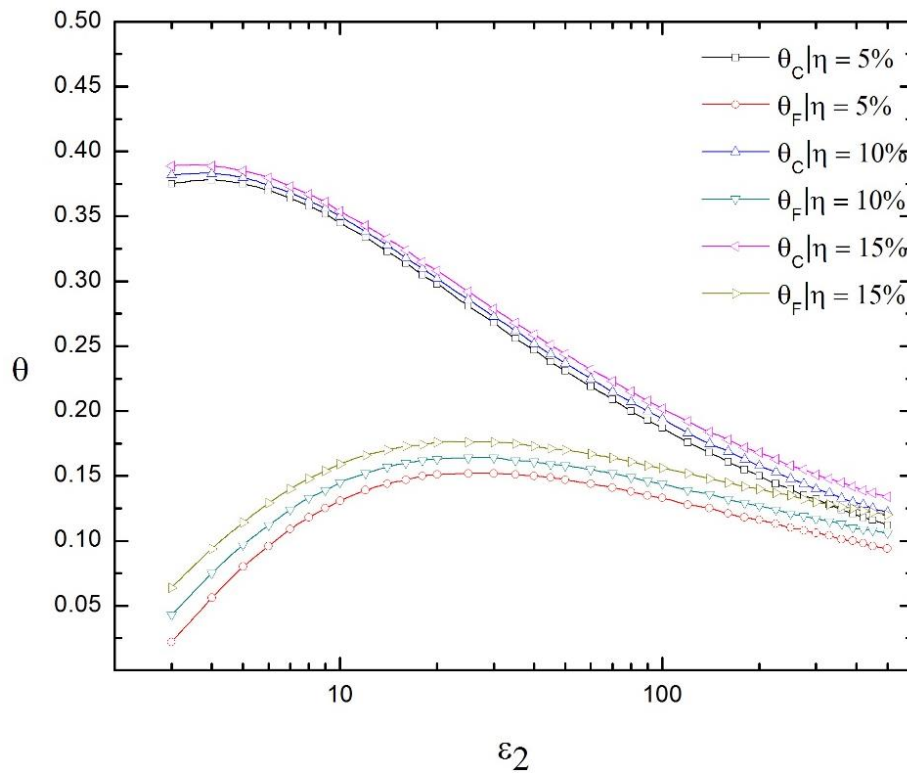


Figura 12. Curvas de alta y baja temperatura  $\varepsilon_1 = 1$

La curva anterior permite observar claramente la diferencia de temperaturas que existe entre las fronteras de alta y baja temperatura donde  $\theta_C$  representa la alta temperatura adimensional y  $\theta_F$  para baja temperatura adimensional a diferentes eficiencias térmicas en el dispositivo TEG. La Figura 13, presenta un valor fijo del parámetro  $\varepsilon_1$  correspondiente a temperaturas de los depósitos térmicos superior e inferior y se aprecia una eficiencia alta con un ligero incremento en la  $\Delta\theta$  para  $\varepsilon_2$  bajos.

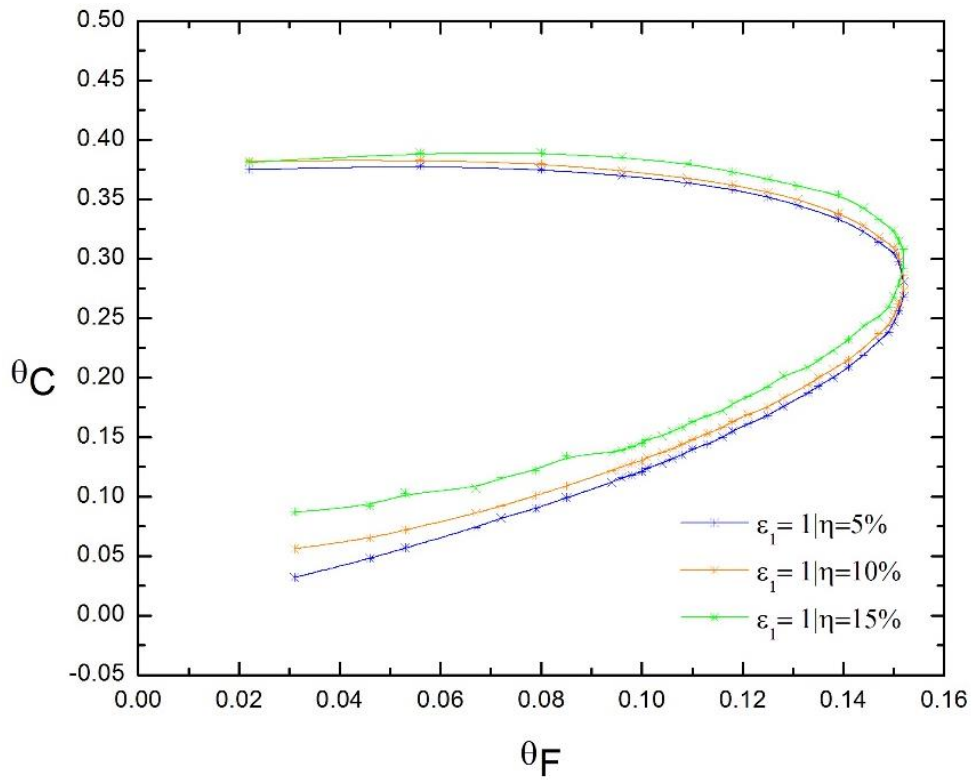


Figura 13. Temperatura adimensional en las fronteras  $\varepsilon_1 = 1$

Se pueden comparar las eficiencias al 5, 10 y 15% variando  $\varepsilon_1$  de 1 a 5, agregando a  $\varepsilon_1 = 0$  como referencia en las Figuras 14-16 y se observa que para una misma eficiencia, El parámetro  $\varepsilon_1$  conforme aumenta afecta drásticamente en todos los casos a las temperaturas de operación de las fronteras del sistema. El cambio más significativo se encuentra con  $\varepsilon_1 = 1$ , cuando supera gradualmente la curva de referencia cuando no existe convección, manteniendo una diferencia de temperaturas de operación mayor; este incremento depende principalmente de las propiedades termoeléctricas de los materiales y que tan benéfico es la interacción de las fronteras laterales con el ambiente [29].

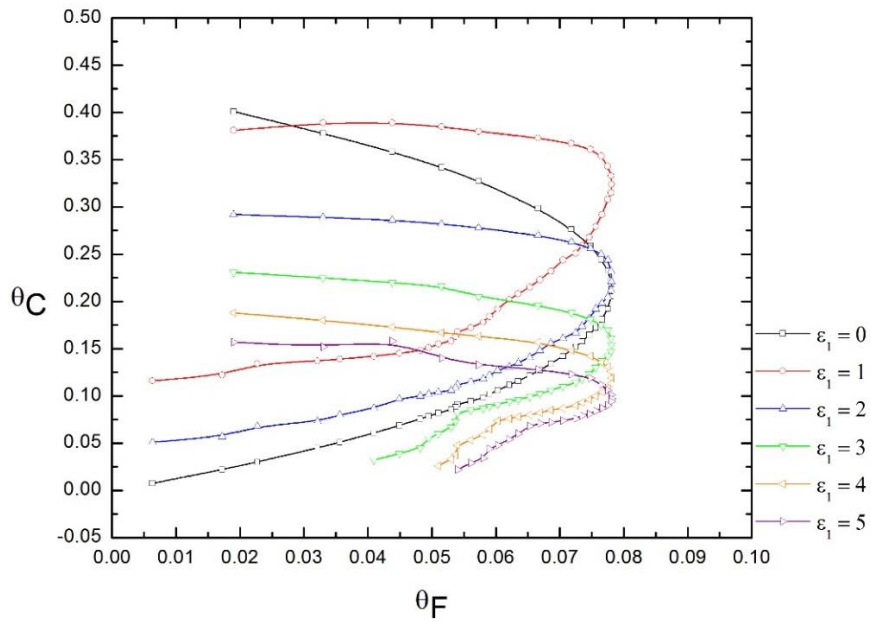


Figura 14.  $\eta = 5\% \mid \epsilon_2$  variable

Para una eficiencia térmica del 10% en el dispositivo TEG, con el parámetro  $\epsilon_2$  variable, se obtienen los siguientes valores de temperatura en las fronteras.

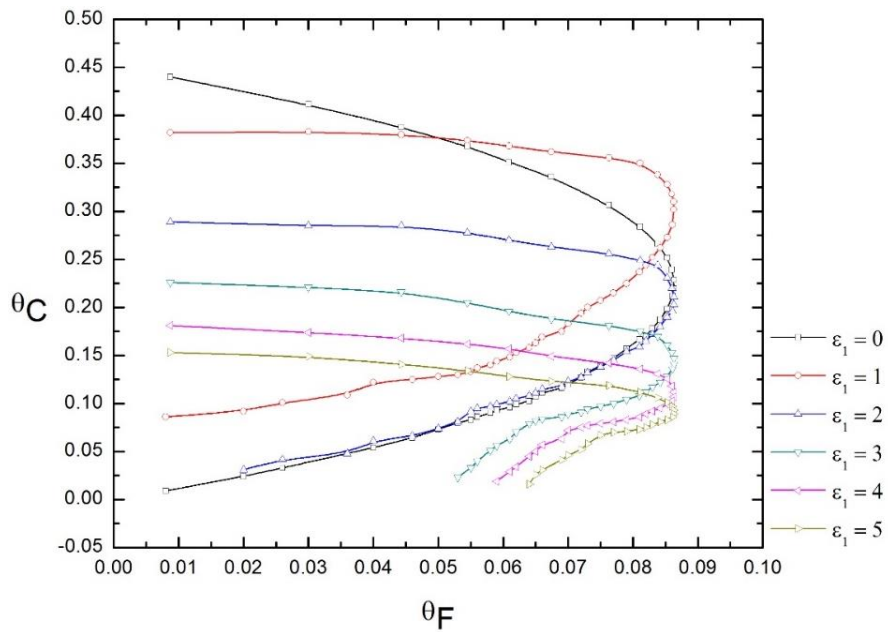


Figura 15.  $\eta = 10\% \mid \epsilon_2$  variable

Finalmente se analiza el caso para una eficiencia del 15% y  $\varepsilon_2$  variable

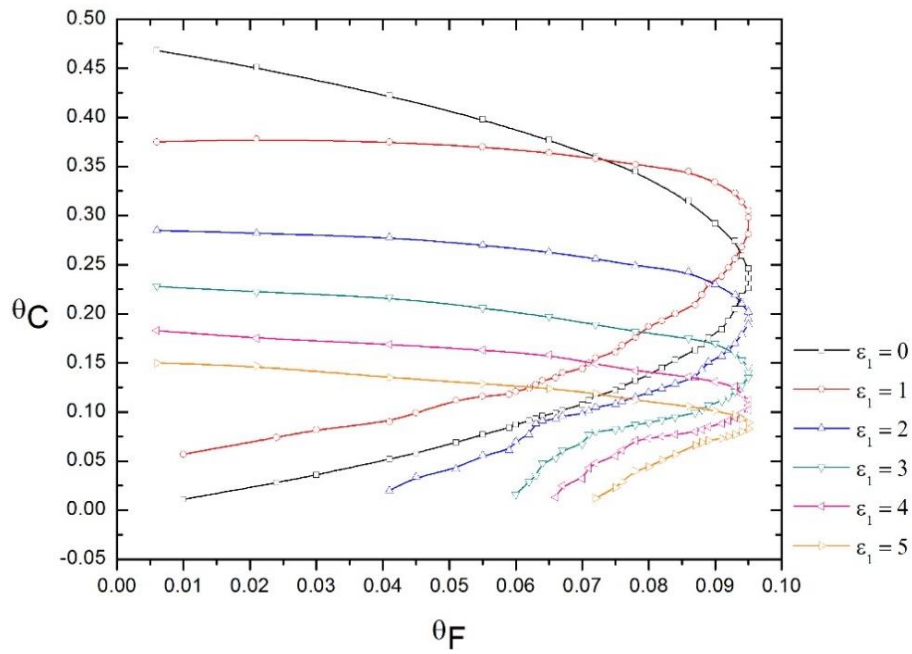


Figura 16.  $\eta = 15\% \mid \varepsilon_2$  variable

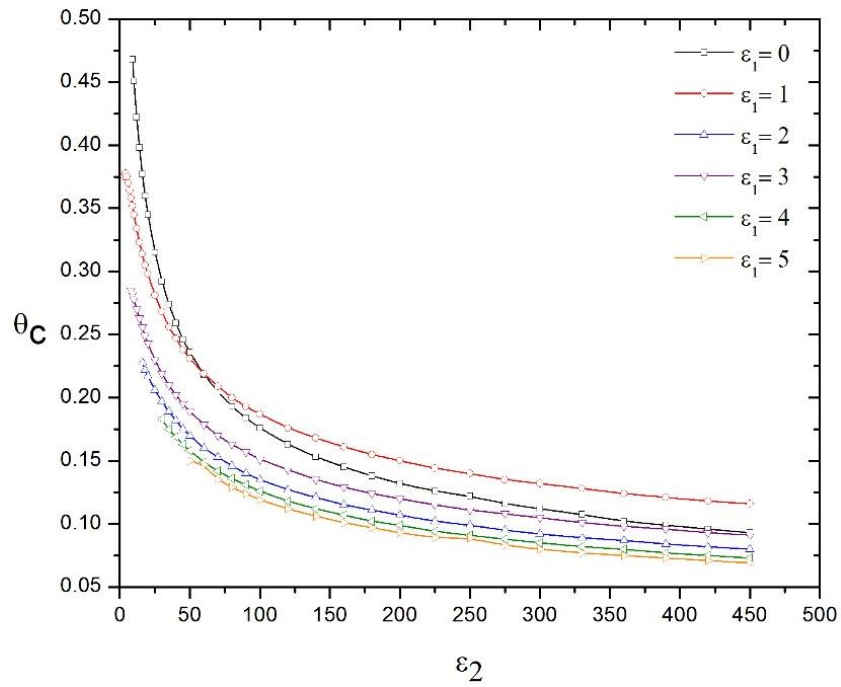


Figura 17. Temperatura superior,  $\varepsilon_2$  variable

En la Figura 17 se muestra el comportamiento de la temperatura a alta temperatura, donde se observa que solo  $\varepsilon_1 = 1$  en valores de  $\varepsilon_2$  mayores a 100 la temperatura se coloca por encima de la temperatura de operación cuando no se tiene convección.

Viendo de otra forma el parámetro dependiente de la convección  $\varepsilon_1$ , al incrementar este parámetro hay un decremento en la alta temperatura de operación. De igual forma y conforme aumenta  $\varepsilon_2$  también decae la temperatura en el reservorio superior, dejando en evidencia que estos parámetros solo funcionan para bajos valores reflejando que para valores altos en  $\varepsilon_2$  la temperatura tiende a cero.

Se realiza el caso cuando  $\varepsilon_1$  es variable recordando que este parámetro relaciona a la convección y manteniendo valores de  $\varepsilon_2$  variable, se obtiene la Figura 18, donde se observa como decae la alta temperatura  $\theta_C$  a lo largo que aumenta  $\varepsilon_1$  y para valores muy altos de  $\varepsilon_2$  decae aún más el valor de la alta temperatura.

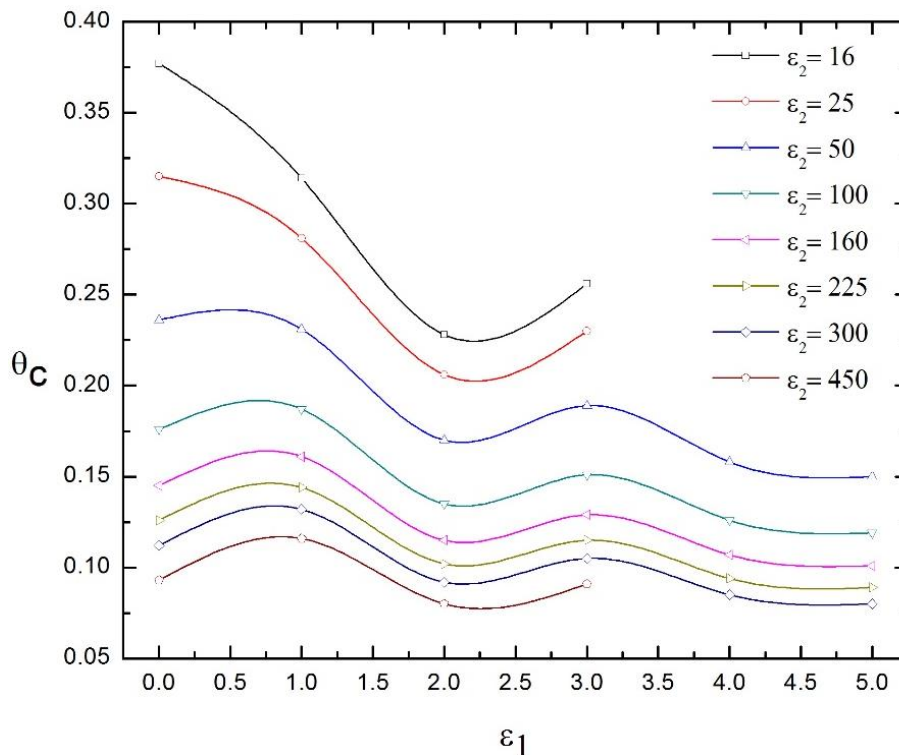


Figura 18. Temperatura superior,  $\varepsilon_2$  variable



### 5.3 Variación de la temperatura respecto a la posición dependiente del parámetro $\varepsilon_1$

En esta subsección se modelan las temperaturas que tienen los elementos  $p$  y  $n$  a lo largo de su longitud característica, considerando que los parámetros  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son ambos variables. Para lo anterior, se toma en cuenta el caso cuando no hay convección; es decir,  $\varepsilon_1 = 0$  y se va variando este parámetro hasta llegar al valor de  $\varepsilon_1 = 5$ .

En la Figura 19 se aprecia la distribución de temperatura como función de la coordenada longitudinal para  $\varepsilon_1 = 0$ . En esta figura se observa un aumento de la temperatura después de la frontera superior (en  $\chi = 0$ ). Lo anterior se debe a que el dispositivo TEG transforma parte del flujo de calor a una salida de potencia eléctrica aunada al efecto Joule en el modelo.

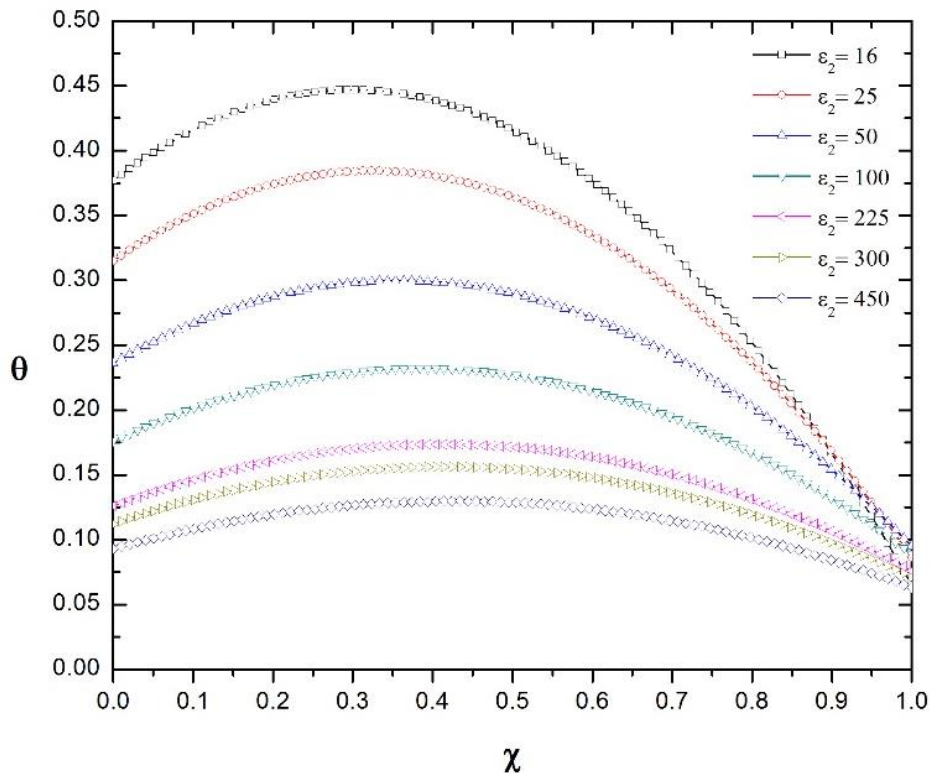


Figura 19. Temperatura adimensional dependiente de la posición,  $\varepsilon_1 = 0$

Para el caso cuando  $\varepsilon_1 = 0$  es diferente de cero descritas en la Figuras 20-24, el incremento de temperatura en el interior del sistema TEG ya no se presenta tan pronunciadamente, esto se debe a que parte de la energía es disipada al ambiente por convección dependiendo el valor que tome  $\varepsilon_1$ , la disipación va a ser mayor y en algunos va permanecer una diferencia de temperaturas muy baja; esto también depende del valor de  $\varepsilon_2$ , ya que al incrementarse este valor el sistema deja de ser funcional como se observa en las siguientes curvas de temperatura dependientes de la posición. En las Figuras 20-24, el lector tiene la opción de solo ver la Figura 20 y la 24 para comparar como baja la temperatura adimensional en las fronteras al aumentar  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

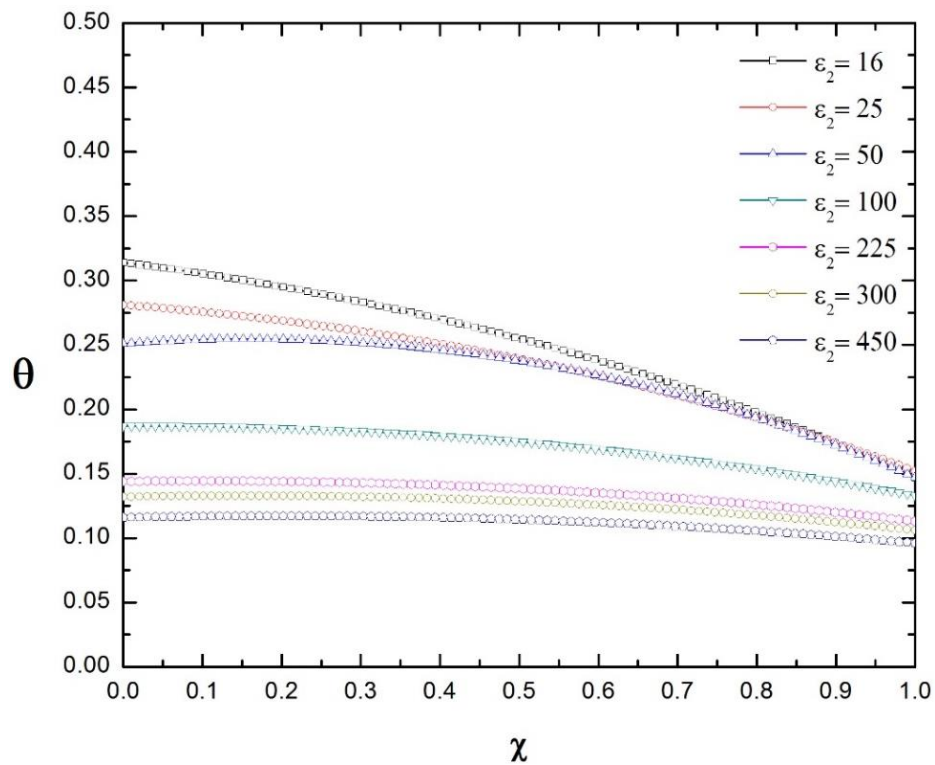


Figura 20. Temperatura dependiente de la posición,  $\varepsilon_1 = 1$

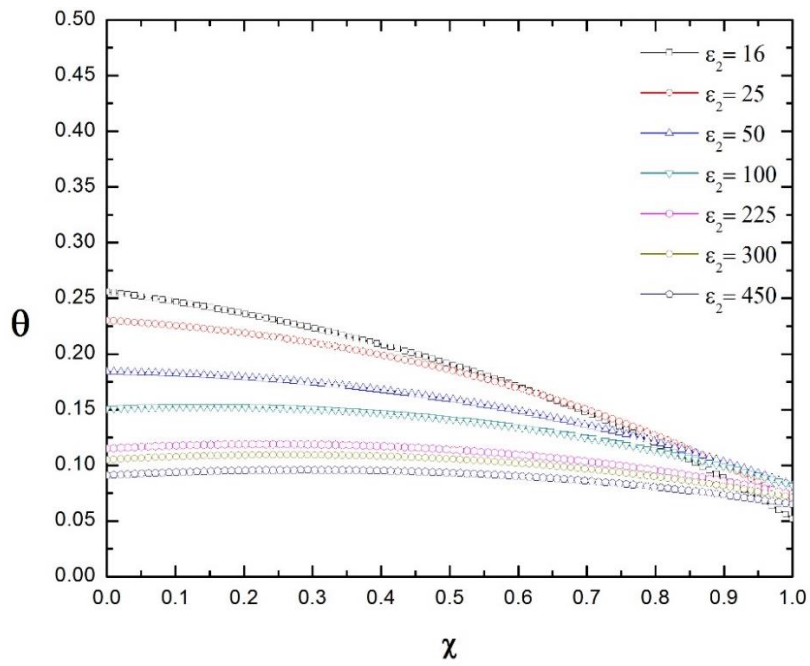


Figura 21. Temperatura dependiente de la posición,  $\epsilon_1 = 2$

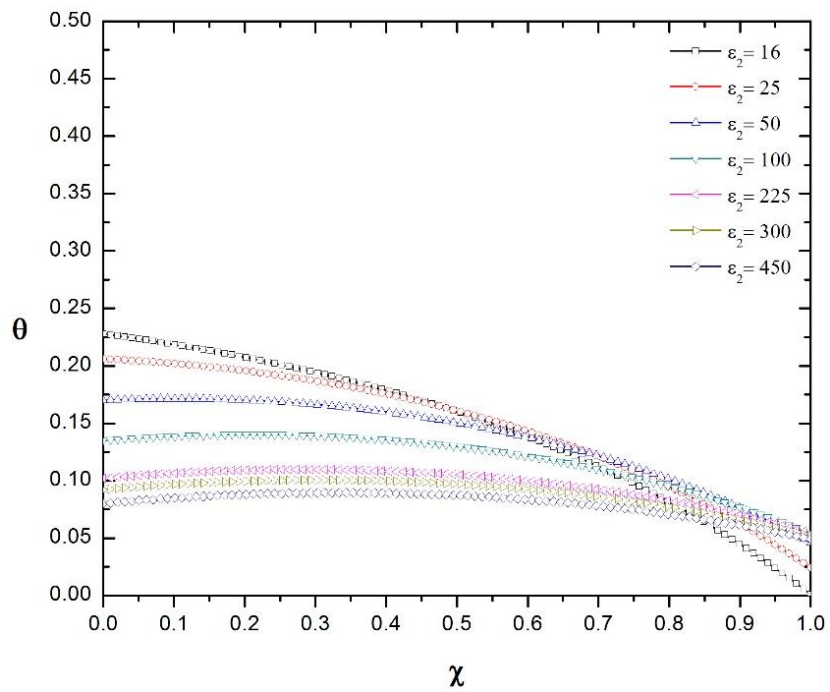


Figura 22. Temperatura dependiente de la posición,  $\epsilon_1 = 3$

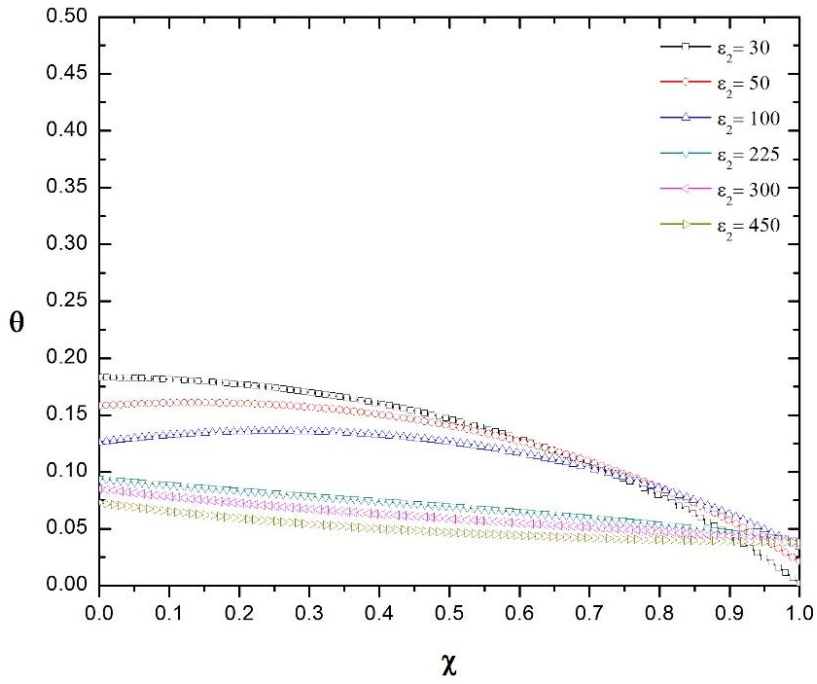


Figura 23. Temperatura dependiente de la posición,  $\varepsilon_1 = 4$

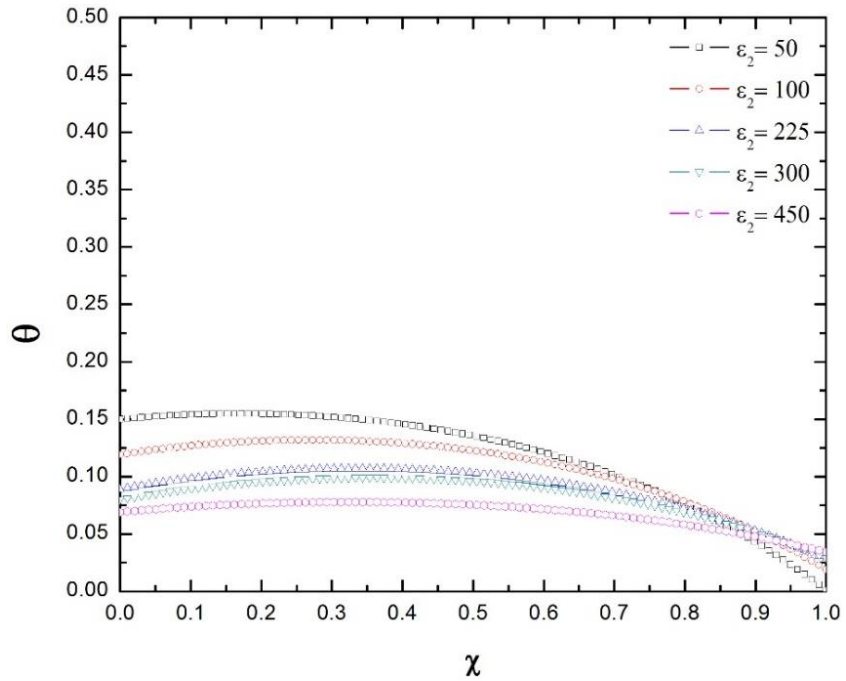


Figura 24. Temperatura dependiente de la posición,  $\varepsilon_1 = 5$

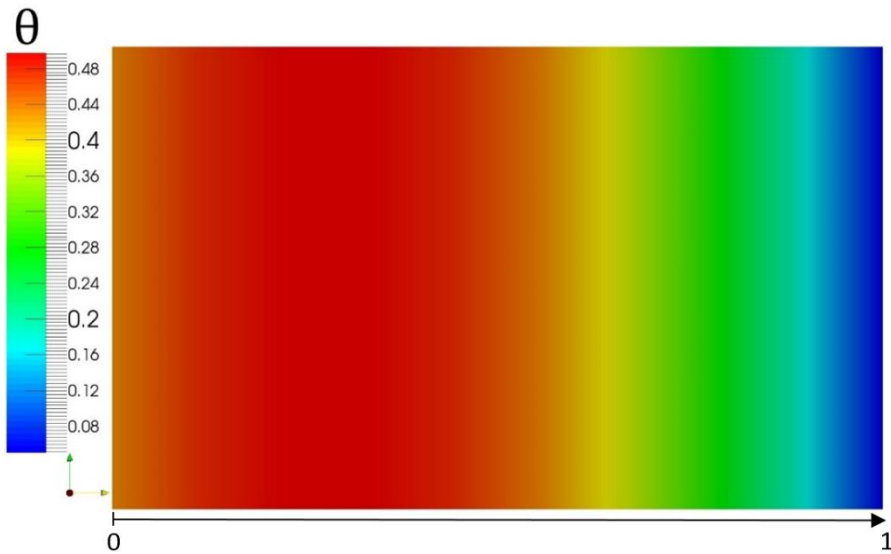
#### 5.4 Validación del modelo teórico

Para validar nuestro modelo, se procede a realizar los siguientes dos análisis: el primero cuando no existe convección  $\varepsilon_1 = 0$  en el sistema TEG y otro con un coeficiente convectivo de  $h = 50$ , generalizando de esta manera la variación de la temperatura con las ecuaciones del anexo 4 y utilizando varias propiedades reales características que se presentan en la siguiente tabla

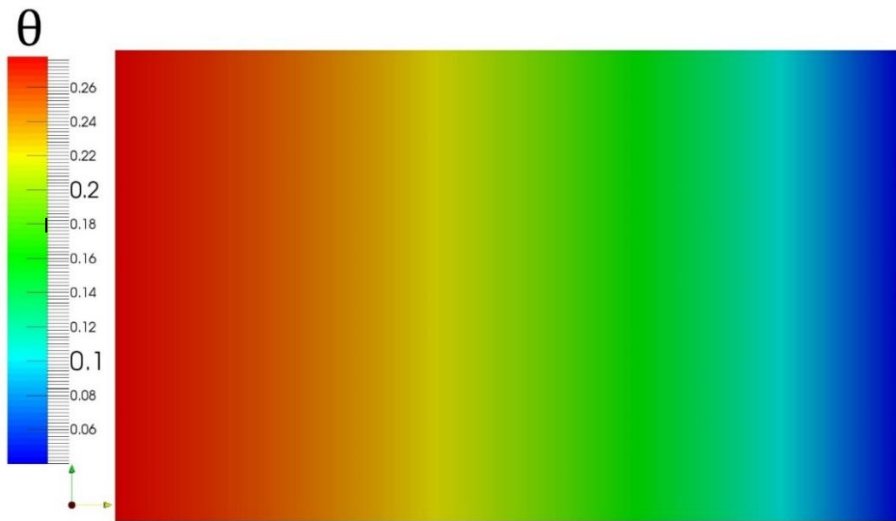
Tabla 3. Propiedades físicas del TEG

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
$\alpha$	0.00034	$V/K$
$\rho$	0.0000117	$\Omega \cdot m$
$\kappa$	1.83	$W/mK$
$\dot{Q}$	1.821	$J$
$A$	0.00000225	$m^2$
$P$	0.006	$m$
$l$	0.005	$m$
$h$	50	$W/m^2K$

Para el primer caso, cuando  $\varepsilon_1 = 0$  obtenemos el siguiente perfil considerando las propiedades anteriores, se observa que hay una generación de energía por efecto Joule como se predijo en las curvas de temperatura dependientes de la posición.



Para el segundo caso cuando existe una convección baja  $h = 50$  se obtiene el siguiente perfil de temperaturas, se observa como decae la temperatura de la zona del reservorio a alta temperatura a la zona de baja temperatura de manera constante debido a la presencia de la convección.



Finalmente se convierten a su forma física las temperaturas en las fronteras superior e inferior de del sistema TEG teniendo una  $\Delta T_K = 552K$  y una temperatura ambiente a  $T_\infty = 300K$  y comparando con dos modelos teóricos de la literatura obtenemos los siguientes resultados.

Tabla 4. Validación teórica con  $h=50$

$h = 50$	$T_c$ [K]	% $E$	$T_f$ [K]	% $E$
<i>Presente estudio</i>	446	1%	322	7.4%
<i>Teorico Ref. [3]</i>	450		300	
<i>Teorico Ref. [20]</i>	450		300	

Los estudios teóricos con los que se compara este modelo consideran temperaturas que sean iguales para ambas referencias; sin embargo, en nuestro caso las temperaturas de operación en las fronteras fueron encontradas a partir de las propiedades físicas involucradas en el sistema TEG, teniendo la ventaja de también calcular la corriente eléctrica de operación, utilizando los parámetros anteriores se obtiene la siguiente curva, figura 25, con un valor del 10% para la eficiencia.

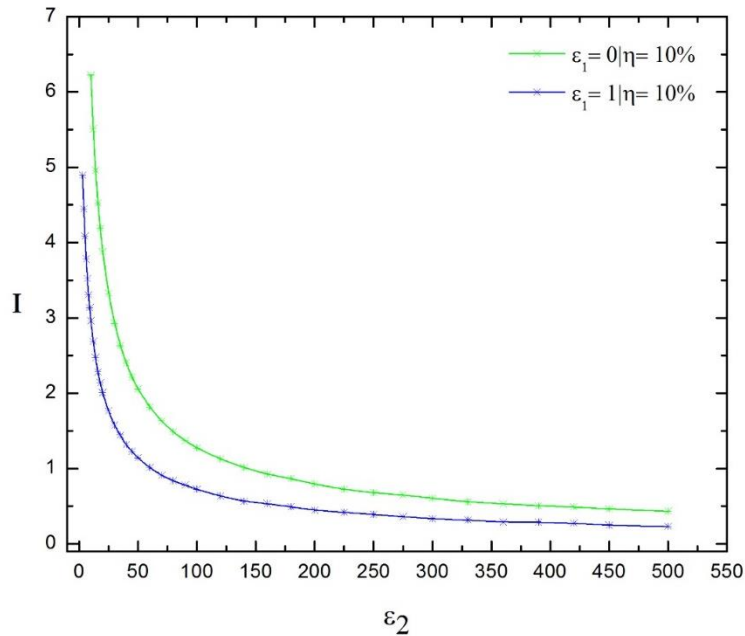


Figura 25. Salida de corriente eléctrica a una eficiencia térmica del 10

## Capítulo 6

### Conclusiones

A partir del modelo teórico de conversión de potencia eléctrica en un dispositivo TEG se generan dos ecuaciones acopladas de flujo de energía que describen su funcionamiento, debido a la gran variedad de propiedades que aparecen en dichas ecuaciones se transforman a su forma adimensional a partir de variables físicas conocidas, obteniendo dos nuevos parámetros que engloban en su interior una multiplicidad de propiedades sin perder la física del problema. El primero de ellos  $\varepsilon_1$  dependiente de la convección y  $\varepsilon_2$  responsable de la conversión de una pequeña parte del flujo de energía en forma de calor a un potencial eléctrico. Posteriormente, se solucionan las ecuaciones de forma numérica para un primer caso cuando la convección tiende a cero y un segundo caso considerando a la convección con valores variables, obteniendo familias de curvas que describen de forma adimensional la temperatura de operación en las fronteras y su variación respecto a la longitud del elemento TEG. Para validar el modelo se compara y se utilizan propiedades de un dispositivo comercial de Bismuto de Telurio (BiTe). Finalmente el modelo aporta la opción de considerar el caso cuando los reservorios en las fronteras superior e inferior se mantienen uniformes suministrando energía al sistema TEG y disipando a un reservorio de baja energía o al ambiente como la zona de extracción de calor en el dispositivo, modelando las condiciones de operación del mismo dependiente de sus propiedades. Actualmente ha tomado mayor relevancia el estudio de estos dispositivos debido a la búsqueda de alternativas para generar energía limpia. Como trabajo futuro se pretende realizar pruebas experimentales con varios dispositivos TEG comerciales para después manufacturar y realizar pruebas experimentales con elementos conductores cambiando geometrías, condiciones ambientales y seguir la misma línea de investigación manteniendo flujos de calor uniformes en las fronteras para obtener la eficiencia térmica de estos dispositivos.



## Anexo

### 1. Análisis dimensional

$$\frac{QL}{kA\Delta T_K} = \frac{W \cdot m}{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot m^2 \cdot K} = \frac{W \cdot m}{W \cdot m} = 1$$

$$\frac{\alpha^2 \Delta T_K^2}{R} \frac{L}{kA\Delta T_K} = \frac{\alpha \Delta T_K}{R} \frac{\alpha \Delta T_K L}{kA\Delta T_K} = \frac{V \cdot K^{-1} \cdot K}{\Omega} \cdot \frac{V \cdot K^{-1} \cdot K \cdot m}{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot m^2 \cdot K} = A \cdot V \frac{m}{W \cdot m} = \frac{W \cdot m}{W \cdot m} = 1$$

$$\Delta T_K = \frac{W \cdot m}{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot m^2} = \frac{K \cdot W \cdot m}{W \cdot m} = K$$

$$\frac{hPL^2}{kA} \frac{\Delta T_K}{\Delta T_K} = \frac{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} \cdot m \cdot K \cdot m^2}{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot m^2 \cdot K} = \frac{W \cdot m}{W \cdot m} = 1$$

### 2. Desarrollo de la solución teórica del flujo de calor en los elementos $p$ y $n$

Obtención de las constantes para el elemento N

$$\theta_n = C_1 e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$\chi = 0$$

$$\theta_C = C_1 e^{\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}(0)} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{hP_n L^2}{k_n A_n}}(0)} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$C_1 = \theta_C - C_2 - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$\chi = 1$$

$$\theta_F = \left( \theta_C - C_2 - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 \right) e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$C_2 = \frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi}}$$

$$C_1 = - \frac{\theta_C + e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi}}$$

$$\theta_n = - \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} - e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi}} e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$\theta_F + e^{\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2 e^{-\sqrt{\frac{h P_n L^2}{k_n A_n}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C}{k_n \rho_n h P_n L} (\theta_C - \theta_F)^2$$

Obtención de las constantes para el elemento  $p$

$$\theta_p = C_3 e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$\chi = 0$$

$$\theta_C = C_3 e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} (0)} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} (0)} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$C_3 = \theta_C - C_4 - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_C L}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$\chi = 1$$

$$\theta_F = \left( \theta_C - C_4 - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 \right) e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} (1)} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} (1)} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2$$

$$C_4 = \frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}}$$

$$C_3 = - \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} \chi}$$

$$\theta_p = - \frac{\theta_F + e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} \chi} +$$

$$\frac{\theta_F + e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} \left( \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2 - \theta_C \right) - \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2}{e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}} - e^{\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}}}} e^{-\sqrt{\frac{h P_p L^2}{k_p A_p}} \chi} + \frac{\alpha^2 \dot{Q}_{CL}}{k_p^2 A_p \rho_p} (\theta_C - \theta_F)^2$$

### 3. Programas FORTRAN

! Caso 1 con conveccion

```
Program eqnlz  
  implicit none
```

```
INTEGER      ITMAX, N  
REAL         ERRREL  
PARAMETER   (N=2)  
INTEGER      K, NOUT  
REAL        FNORM, X(N), XGUESS(N)  
EXTERNAL    FCN, NEQNF, UMACH
```

```
      DATA XGUESS/.5, .1/  
      ERRREL = 0.0001  
      ITMAX  = 100
```

```
CALL UMACH (2, NOUT)  
CALL NEQNF (FCN, ERRREL, N, ITMAX, XGUESS, X, FNORM)  
WRITE (NOUT,99999) (X(K),K=1,N), FNORM  
99999 FORMAT (' The solution to the system is', /, ' X = (',  
F5.3,&  
2X,F5.3,')', /, ' with FNORM =', F5.3, //)
```

```
END program eqnlz
```

---

```
SUBROUTINE FCN (X, F, N)
```

```
INTEGER      N  
REAL         X(N), F(N)  
REAL         SQRT, EXP  
INTRINSIC    SQRT, EXP
```

```
F(1) = 11.94*X(1)*(X(1)-X(2))+((2*SQRT(1.82))/(EXP(-SQRT(1.82))-  
EXP(SQRT(1.82))))*&  
(2*X(2)-6.55*(X(1)-X(2))*(X(1)-X(2))*(2-(EXP(SQRT(1.82))+EXP(-  
SQRT(1.82)))))-&  
X(1)*(EXP(SQRT(1.82))+EXP(-SQRT(1.82))))-1
```

```
F(2) = 11.94*X(2)*(X(1)-X(2))-((2*SQRT(1.82))/(EXP(-SQRT(1.82))-  
EXP(SQRT(1.82))))*&  
(2*X(1)-6.55*(X(1)-X(2))*(X(1)-X(2))*(2-(EXP(SQRT(1.82))+EXP(-
```



```
RETURN
END subroutine
```

.....

```
!temperatura adimensional sin conveccion
program tempadvsinh
  implicit none
  real a, b
  real Tc, Tf
  integer nx,ny,nz
  integer i,j,k,l
  real lx,ly,lz
  real tx,ty,tz
  real, allocatable, dimension(:,:,)::xx,yy,zz,Tad
  !guardararchivo
  integer ig, pt
  integer i_sample,n_serie
  character(2)serie
  character(3)sample
  character(15)outputfield

  a=0
  b=11.94
  Tc=0.432
  Tf=0.051

  !malla
  nx=10
  ny=10
  nz=10
  lx=3
  ly=5
  lz=3

  allocate (xx (nx,ny,nz) , yy (nx,ny,nz) , zz (nx,ny,nz) , Tad (nx,ny,nz))

  tx=lx/(float(nx))
  write(6,*)tx
  ty=ly/(float(ny))
  write(6,*)ty
  tz=lz/(float(nz))
  write(6,*)tz

  do k=1,nz
```

```

do j=1,ny
  do i=1,nx
    xx(i,j,k)=tx*(float(i-1))
    yy(i,j,k)=ty*(float(j-1))
    zz(i,j,k)=tz*(float(k-1))
    write(6,*)xx(i,j,k),yy(i,j,k),zz(i,j,k)
  end do
end do
end do
!write(6,*)xx,yy,zz

!do l=0,100

do k=1,nz
  do j=1,ny
    do i=1,nx
      Tad(i,j,k)=((-b*((Tc-Tf)**2)/2)*((float(j-1))/9)**2)&
+ (Tf-Tc+(b/2)*((Tc-Tf)**2))*((float(j-1))/9)&
+Tc
      write(6,*)Tad(i,j,k)
    enddo
  enddo
enddo

n_serie=91
i_sample=0
ig=1
pt=1

write(6,*)'::::::::::::::::::SAVE FIELD:::::::::::::::::'
write(sample,'(i3.3)')i_sample
write(serie,'(i2.2)')n_serie
outputfield='field_//serie//sample//.dat'
open(44,file=outputfield,form='formatted')
write(6,*)i_sample
i_sample=i_sample+1
ig=1

WRITE(44,*)'VARIABLES = "X", "Y", "Z","Tad"'
WRITE(44,*)'ZONE I=',nx,' J=',ny,' K=',nz,'
DATAPACKING=POINT'
do k=1,nz
  do j=1,ny
    do i=1,nx
      write(44,134)xx(i,j,k),yy(i,j,k),zz(i,j,k),Tad(i,j,k)
    enddo
  enddo
enddo

```

```

        enddo
    enddo
    close(44)
134
format(F4.2,2X,F4.2,2X,F4.2,2X,F12.4,6X,F8.4,6X,F8.4,6X,F8.4,6X,F8
.4)
    !write(6,*)Tad(i,j,k)

    !enddo

end program tempadvsinh

```

.....

```

!temperatura adimensional con conveccion
program tempadv
implicit none
real a, b
real Tc, Tf
integer nx,ny,nz
integer i,j,k,l
real lx,ly,lz
real tx,ty,tz
real, allocatable, dimension(:, :, :)::xx,yy,zz,Tad
!guardararchivo
integer ig, pt
integer i_sample,n_serie
character(2)serie
character(3)sample
character(15)outputfield

a=1.8214
b=11.94
Tc=0.278
Tf=0.04

!malla
nx=10
ny=10
nz=10
lx=3
ly=5
lz=3

allocate(xx(nx,ny,nz),yy(nx,ny,nz),zz(nx,ny,nz),Tad(nx,ny,nz))

```



```

tx=lx/(float(nx))
write(6,*)tx
ty=ly/(float(ny))
write(6,*)ty
tz=lz/(float(nz))
write(6,*)tz

do k=1,nz
  do j=1,ny
    do i=1,nx
      xx(i,j,k)=tx*(float(i-1))
      yy(i,j,k)=ty*(float(j-1))
      zz(i,j,k)=tz*(float(k-1))
      write(6,*)xx(i,j,k),yy(i,j,k),zz(i,j,k)
    end do
  end do
end do
!write(6,*)xx,yy,zz

!do l=0,100

do k=1,nz
  do j=1,ny
    do i=1,nx
      Tad(i,j,k)=(-(Tf+(exp(-sqrt(a)))*(b/a)*((Tc-Tf)**2)-Tc)-
((b/a)*(Tc-Tf)&
**2))/(exp(-sqrt(a))-exp(sqrt(a)))*exp(sqrt(a))*((float(j-
1))/9))&
+((Tf+(exp(sqrt(a)))*(b/a)*((Tc-Tf)**2)-Tc)-
((b/a)*(Tc-Tf)&
**2))/(exp(-sqrt(a))-exp(sqrt(a)))*exp(-sqrt(a))*((float(j-
1))/9))&
+((b/a)*(Tc-Tf)**2)
      write(6,*)Tad(i,j,k)
    enddo
  enddo
enddo

n_serie=90
i_sample=0
ig=1
pt=1

write(6,*)':::::::::::::::::SAVE FIELD:::::::::::::::::'
write(sample,'(i3.3)')i_sample
write(serie,'(i2.2)')n_serie

```

```

outputfield='field_'//serie//sample//'.dat'
open(44,file=outputfield,form='formatted')
write(6,*)i_sample
i_sample=i_sample+1
ig=1

WRITE(44,*)'VARIABLES = "X", "Y", "Z","Tad"'
WRITE(44,*)'ZONE I=',nx,' J=',ny,' K=',nz,'
DATAPACKING=POINT'
do k=1,nz
do j=1,ny
do i=1,nx
write(44,134)xx(i,j,k),yy(i,j,k),zz(i,j,k),Tad(i,j,k)
enddo
enddo
enddo
close(44)
134
format(F4.2,2X,F4.2,2X,F4.2,2X,F12.4,6X,F8.4,6x,F8.4,6x,F8.4,6x,F8
.4)
!write(6,*)Tad(i,j,k)

!enddo

end program tempadv

```

.....

```

program PbSnTe
implicit none
real oxp,oxn,sigmap, sigman, kp,kn
real oxps,oxns,sigmaps, sigmans, kps,kns
real resistividadp, resistividadn
real resistividadps, resistividadns
real T
integer i
real ox,sigma,k,r

oxps=0
oxns=0
sigmaps=0
sigmans=0
kps=0
kns=0

do i=300,800

T=float(i)

```

```

    oxp=(3.821203E-17*T**5) - (9.49083E-14*T**4) + (8.648769E-
11*T**3) &
    - (3.556152E-8*T**2) + (6.80366E-6*T) - (4.40752E-4)
    oxn=(2.800502E-18*T**5) - (7.003341E-15*T**4) + (8.500587E-
12*T**3) &
    - (5.754601E-9*T**2) + (1.629824E-6*T) - (2.786129E-4)

    sigmap=(-1.021713E-8*T**5) + (2.610834E-5*T**4) - (2.497777E-
2*T**3) &
    + (1.133756*T**2) - (2.728566E3*T) + (3.977257E5)
    sigman=(7.795516E-9*T**5) - (1.970185E-5*T**4) + (1.774757E-
2*T**3) &
    - (5.836094*T**2) - (3.849606E2*T) + (4.877652E5)

    resistividadp=1/sigmap
    resistividadn=1/sigman

    kp=- (6.020716E-14*T**5) + (1.685395E-10*T**4) - (1.851765E-
7*T**3) &
    + (1.026943E-4*T**2) - (3.144958E-2*T) + 6.002589
    kn=(1.098018E-13*T**5) - (3.359249E-10*T**4) + (4.194853E-
7*T**3) &
    - (2.596344E-4*T**2) + (7.41657E-2*T) - (4.678652)

write(6,*)T,oxp,oxn,sigmap,sigman,resistividadp,resistividadn,kp,k
n

    oxps=oxp+oxps
    oxns=oxn+oxns
    sigmaps=sigmap+sigmaps
    sigmans=sigman+sigmans
    resistividadps=resistividadp+resistividadps
    resistividadpns=resistividadpn+resistividadpns
    kps=kp+kps
    kns=kn+kns

    enddo

    ox=((oxps/(800-300)) - (oxns/(800-300)))
    sigma=((sigmaps/(800-300)) + (sigmans/(800-300)))/2
    r=((resistividadps/(800-300)) + (resistividadpns/(800-300)))/2
    k=((kps/(800-300)) + (kns/(800-300)))/2

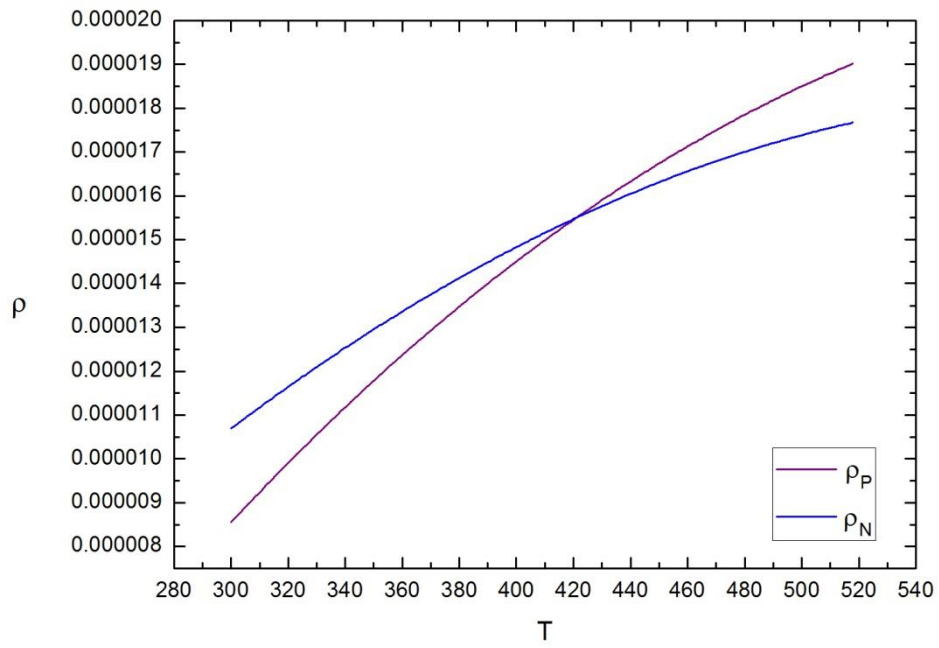
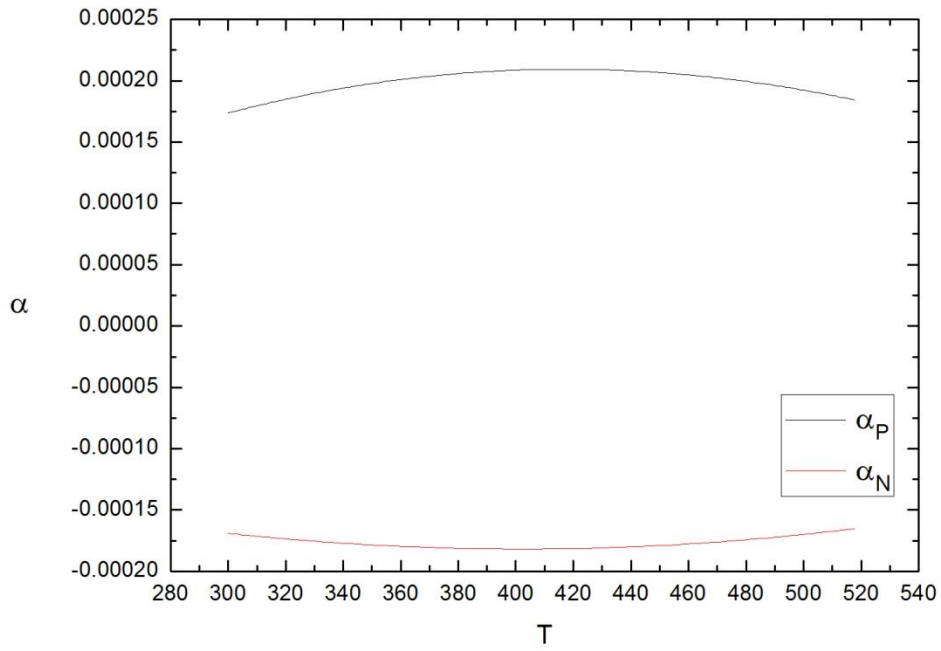
    write(6,*)oxps
    write(6,*)oxns

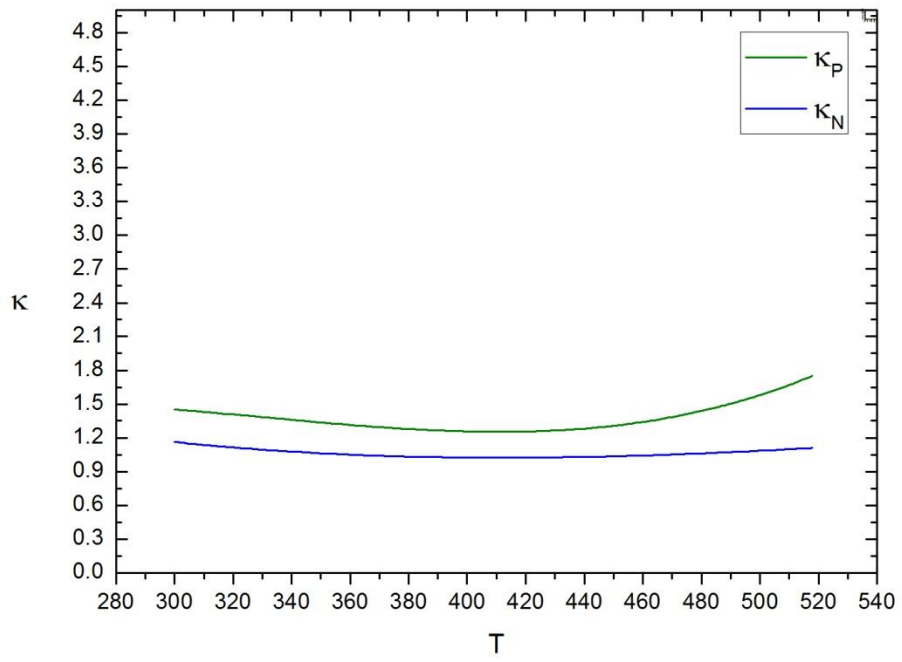
```

```
write(6,*) sigmaps
write(6,*) sigmans
write(6,*) resistividadps
write(6,*) resistividadns
write(6,*) kps
write(6,*) kns

write(6,*) 'alfa', ox
write(6,*) 'sigma', sigma
write(6,*) 'resistividad', r
write(6,*) 'conductividad', k
end program PbSnTe
```

### 3.1 Propiedades del material termoeléctrico BiTe





## Referencias

- [1] «Eart system research laboratory,» 2016. [En línea]. Available: <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/obop/mlo>.
- [2] «Energy information administration,» 2016. [En línea]. Available: <http://www.eia.gov/totalenergy>.
- [3] Z. G. Shen, S. Y. Wu, X. L y Y. G, «Theoretical modeling of thermoelectric generator with particular emphasis on the effect of side heat transfer,» *Energy*, vol. 95, pp. 367-379, 2016.
- [4] L. E. Bell, «Coling, Heating, Generating Power and Recovering Waste Heat with Thermoelectric Systems,» *Science*, vol. 321, pp. 1457-1461, 2008.
- [5] H. S. Lee, *Thermal Designs: Heat Sinks, Thermoelectrics, Heat Pipes, Compact Heat Exchangers and Sollar Cells*, Canada: John Wiley and Sons, 2010.
- [6] A. Martínez, D. Astrain y A. Rodríguez, «Dynamic model for simulation of thermoelectric self cooling applications,» *Energy*, vol. 55, pp. 1114-1126, 2013.
- [7] D. Yang y H. Yin, «Energy Conversion Efficiency of a Novel Hybrid Solar System for Photovoltaic Thermoelectric and Heat Utilization,» *IEEE*, vol. 26, pp. 662-670, 2011.
- [8] C. A. Domenicali, «Stationary temperature distribution in an electrically heated conductor,» *Applied Physics*, vol. 25, pp. 1310-1311, 1954.
- [9] H. D. Mahan, «Inhomogeneous thermoelectrics,» *Applied physics*, vol. 70, pp. 4551-4554, 1991.

- [10] W. Huang, C. D. Koong y G. Liang, «Theoretical study on thermoelectric properties of Ge nanowires based on electronic band structures,» *IEEE Electron*, vol. 31, pp. 1026-1028, 2010.
- [11] T. C. Harman, P. J. Taylor, M. P. Walsh y B. E. LaForge, «Quantum odt superlattice thermoelectric material and devices,» *Science*, vol. 297, pp. 2229-2232, 2002.
- [12] G. D. Mahan y J. O. Sofo, «The best thermoelectric,» *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 93, pp. 7436-7439, 1996.
- [13] J. Chen y S. Su, «Simulation Investigation of High-Efficiency Solar thermoelectric Generators With Inhomogeneously Doped Nanomaterials,» *IEEE Transactions on industrial electronics* , vol. 62, pp. 3569-3575, 2015.
- [14] S. Su, T. Liu, J. Wang y J. Chen, «Evaluation of temperature dependent thermoelectric performances based on  $\text{PbTe}_{1-y}\text{Iy}$  and  $\text{PbTe}:\text{Na}/\text{Ag}_2\text{Te}$  materials,» *Energy*, vol. 70, pp. 79-85, 2014.
- [15] C. Suter, Z. Jovonovic y A. Steinfeld, «A 1kWe thermoelectric stack for geothermal power generation Modeling and geometrical optimization,» *Applied Energy*, vol. 99, pp. 379-385, 2012.
- [16] ANSYS, «ANSYS CFX 13.0». 2011.
- [17] D. Champier, J. P. Bédécarrats, T. Kousksou, M. Rivaletto, F. Strub y P. Pignolet, «Study of TE (thermoelectric) generator incorporated in a multifunction wood stove,» *Energy*, vol. 36, pp. 1518-1526, 2011.
- [18] P. Li, L. Cai, P. Zhai, X. Tang, Q. Zhang y M. Niino, «Design of a Concentration Solar Thermoelectric Generator,» *Electronic Materials*, vol. 39, pp. 1522-1530, 2010.



- [19] E. J. Sandoz-Rosado, S. J. Weinstein y R. J. Stevens, «On the Thomson effect in thermoelectric power devices,» *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 66, pp. 1-7, 2013.
- [20] B. Reddy, «Thermoelectric Performance of Novel Composite and Integrated Devices Applied to Waste Heat Recovery,» *Journal of Heat Transfer*, vol. 35, pp. 1-11, 2013.
- [21] H. Xiao, «Detailed Model and Irreversible Transfer Process Analysis of a Multi-Element Thermoelectric Generator System,» *Electronic Materials*, vol. 40, pp. 1195-1201, 2011.
- [22] S. Kasap, «Thermoelectric effects in metals: Thermocouples,» *e-Boklet*, pp. 1-11, 2001.
- [23] H. Callen, *Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics*, New York: John Wiley and Sons, 1985.
- [24] M. Zemansky, *Advanced Engineering Thermodynamics*, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [25] F. Gutierrez, *Optimización de un sistema de refrigeración termoeléctrica empleando el método de minimización de generación de entropía*, Mexico DF, 2016.
- [26] G. Santamarina y A. Castejon, *Electrotecnia*, España: Editex, 2009.
- [27] A. Yunus y J. Afshin, *Transferencia de calor y masa*, Mexico D.F.: McGraw-Hill, 2011.
- [28] F. Meng y I. Chen, «A numerical model a comparative investigation of a thermoelectric generator,» *Energy*, vol. 36, pp. 3513-3522, 2011.

