

**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS**

**Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.**

**El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.**

**Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.**

**Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.**

**Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.**

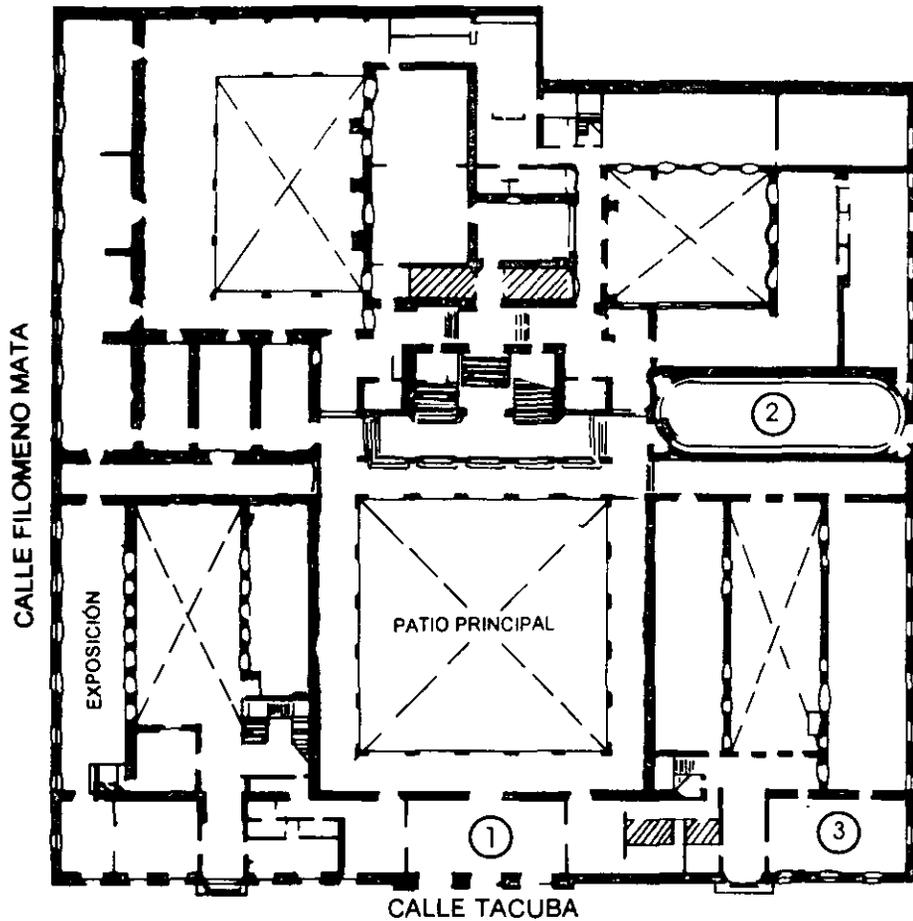
**Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.**

**Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.**

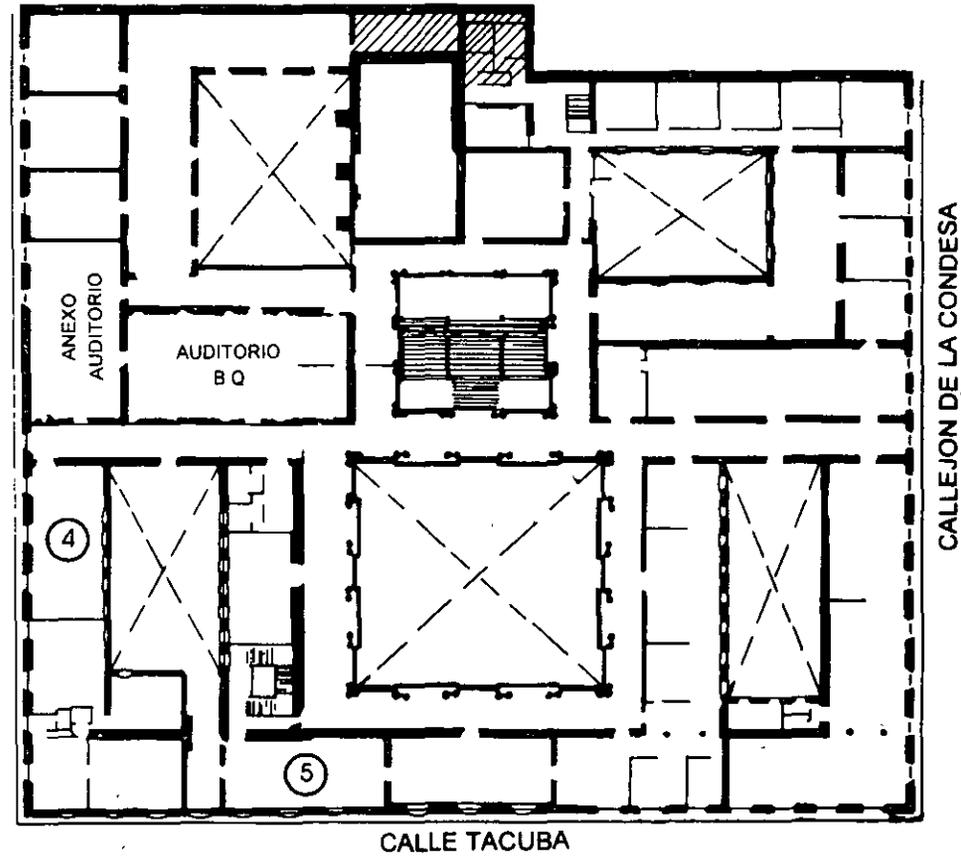
**Atentamente**

**División de Educación Continua.**

# PALACIO DE MINERIA

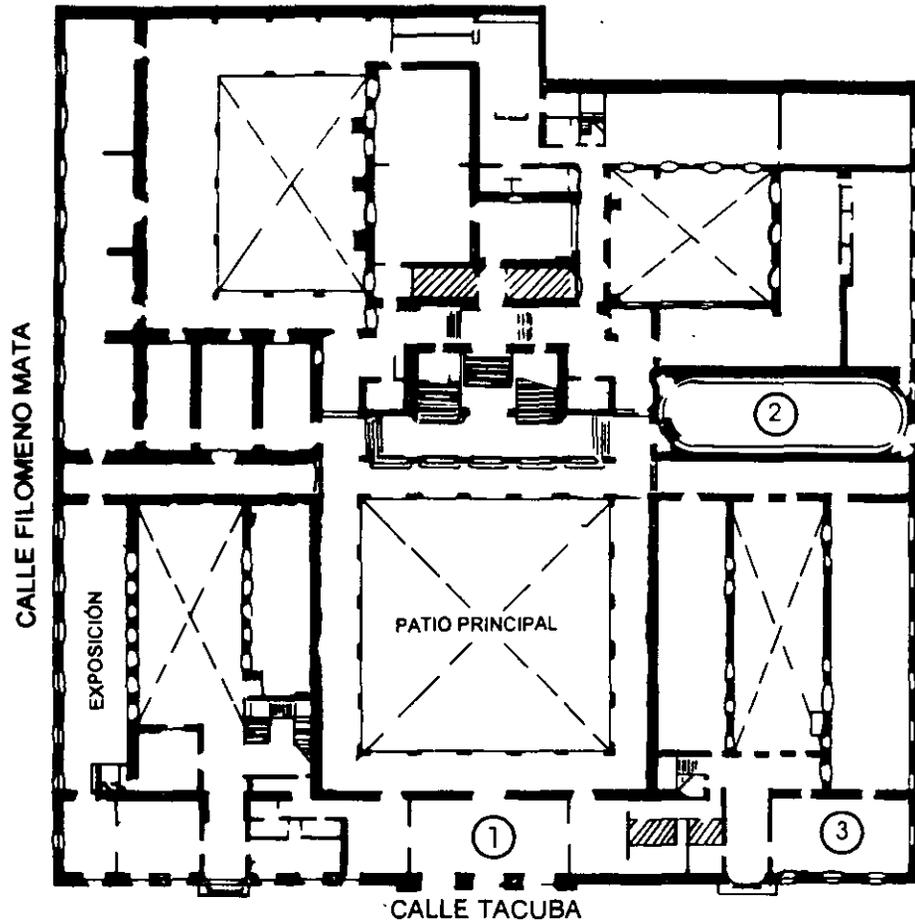


PLANTA BAJA

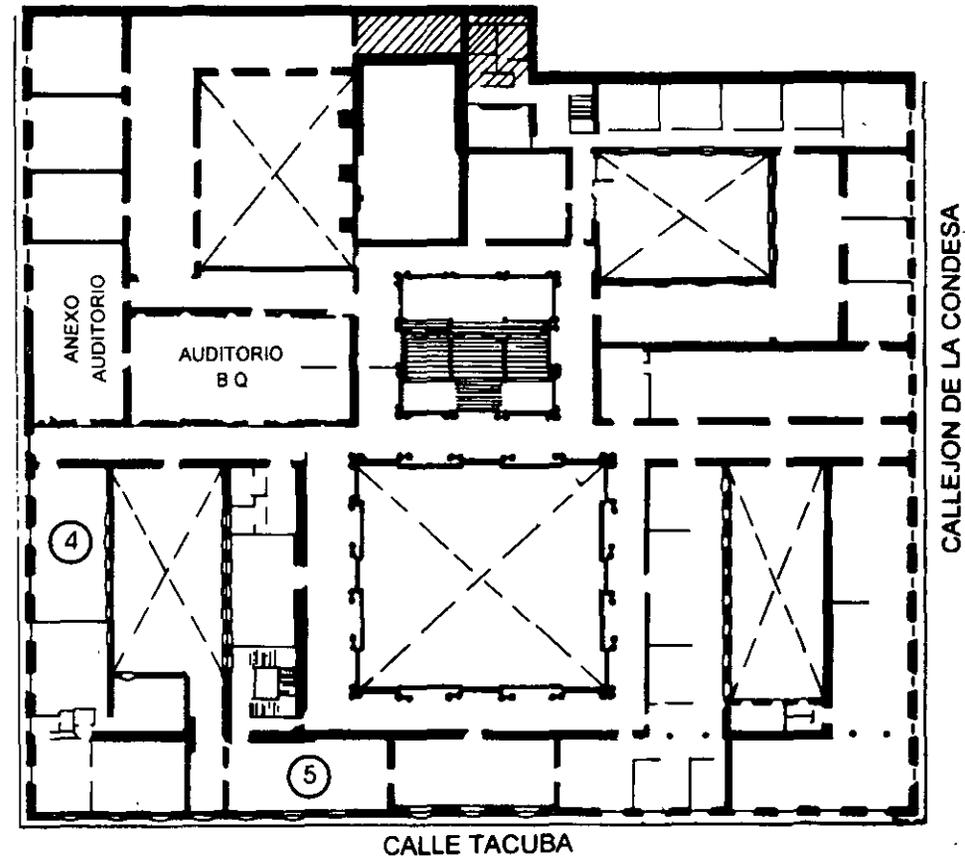


MEZZANINNE

# PALACIO DE MINERIA



PLANTA BAJA



MEZZANINNE



## INDICE

<b>Tema</b>	<b>páginas</b>
<b>Puntas de pilote</b> .....	<b>1-11</b>
<b>Características generales del concreto y del acero</b> .....	<b>12-28</b>
<b>Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal</b> .....	<b>29-38</b>
<b>Influencia de los agregados en los concretos estructurales del Distrito Federal</b> .....	<b>39-50</b>
<b>Influencia de las características de los agregados en el comportamiento de las estructuras de concreto</b> .....	<b>51-71</b>
<b>Adherencia y anclaje</b> .....	<b>72-87</b>



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

<b>Flexión</b>	<b>88-140</b>
<b>Walls</b>	<b>141-216</b>
<b>Teoría de fuerza cortante</b>	<b>217-286</b>
<b>Flexo-comprensión y efectos de esbeltez en columnas</b>	<b>287-340</b>
<b>Comentarios a las Normas Técnicas para diseño y construcción de estructuras de concreto</b>	<b>341-380</b>
<b>Computer methods in structural analysis</b>	<b>381-396</b>
<b>Método interactivo</b>	<b>397-403</b>
<b>Cimentaciones someras</b>	<b>404-435</b>
<b>Torsión</b>	<b>436-479</b>



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**Requisitos de ductibilidad para estructuras de concreto**  
.....**480-499**

**Cortante**  
.....**500-543**

**Muros**  
.....**544-557**



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**PUNTAS DE PILOTES**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

La tabla 8.2 muestra los cuadros de diseño publicados por la Cement and Concrete Association (Asociación de Cemento y Concreto)<sup>8,10</sup> sobre longitudes máximas de pilotes para pilotes de sección cuadrada en diversas condiciones de levantamiento. Los cuadros de diseño también proporcionan los momentos flexionantes ocasionados por el peso propio durante el levantamiento, y los momentos de resistencia última para diversas secciones cuadradas y octagonales.

Cuando las condiciones de hundimiento son de moderadamente difíciles a difíciles, resulta ventajosa una espiral o hélice. La hélice se coloca normalmente dentro de las barras principales pero Saurin indica que es mejor colocarla fuera de ellas. La reducción en la cubierta de concreto sobre la hélice no es perjudicial, ya que parte del pilote está normalmente abatiada por la unión en la cabeza del larguero.

La figura 8.19a y b muestra detalles típicos de refuerzo en pilotes de concreto precolado. George Wimpey & Co. diseñó el pilote octagonal de 787 mm mostrado en la figura 8.19b para la terminal marina de la Irish Refining Company en Cork, Irlanda del Norte.

### 8.9.3. Puntas de pilotes

Cuando los pilotes se hunden por completo en suelos suaves, no requieren de punta. Los extremos de los pilotes se cue-

lan usualmente en forma de un punto achatado como lo muestra la figura 8.20a. Se prefiere una punta más afilada (figura 8.20b) para hundimiento en arcillas rígidas o arenas y gravas compactas. La punta de hundimiento de metal comúnmente localizada en pilotes de concreto, hundidos en condiciones tanto suaves como rígidas, se basa en un diseño utilizado para evitar que los pilotes de madera se agrieten o escobillen, y en condiciones suaves no se requiere de punta de metal de ningún tipo. Cuando se deben hundir los pilotes en suelo con pedruscos o pedregones, se requiere de una punta como la que muestra la figura 8.20c para despedazar las rocas o para evitar el rompimiento del extremo inferior del pilote cuando éste empuja pedruscos o pedregones hacia un lado. El área de la parte superior de la punta metálica, en contacto con el concreto del pilote, debe ser lo bastante grande para asegurar que el esfuerzo a compresión del concreto se encuentre dentro de límites de seguridad.

Cuando se requiere que los pilotes penetren en roca, por ejemplo para obtener resistencia lateral, se utiliza un aditamento especial de roca como lo muestra la figura 8.20d. Pero si se hunden en roca sólida, se recomienda la "punta Oslo" (figura 8.20e). Este diseño es particularmente adecuado para hundimiento en una superficie de roca inclinada cuando, después de golpes cuidadosos de un martillo pesado con una caída corta, el extremo afilado del punto de tierra hueco se sujeta a la roca, evitando que el punto se deslice dentro de la

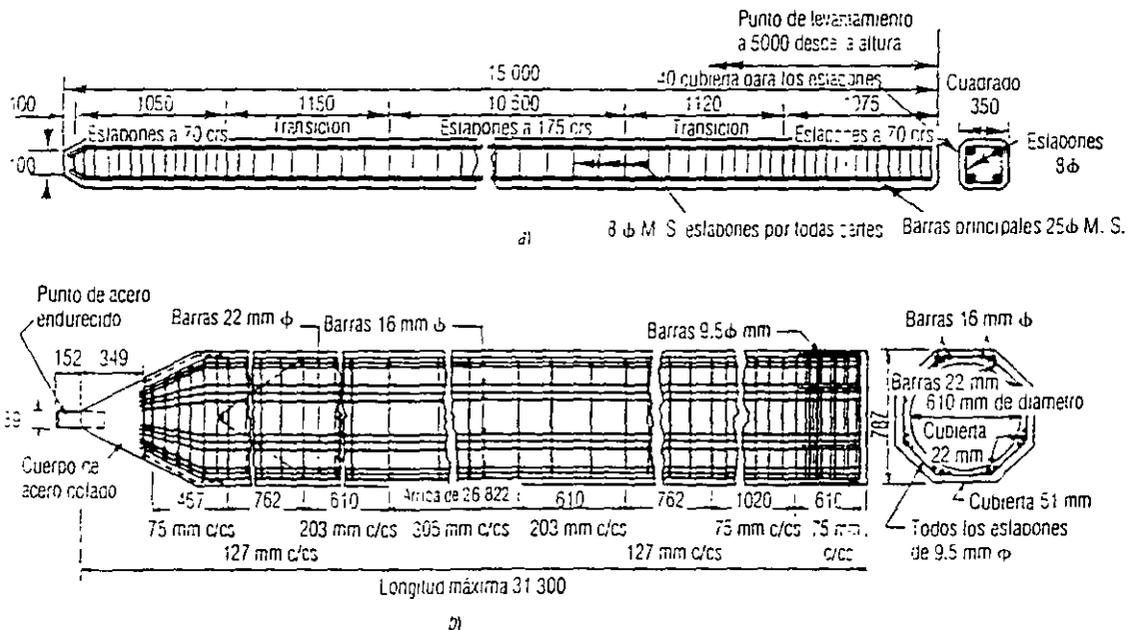
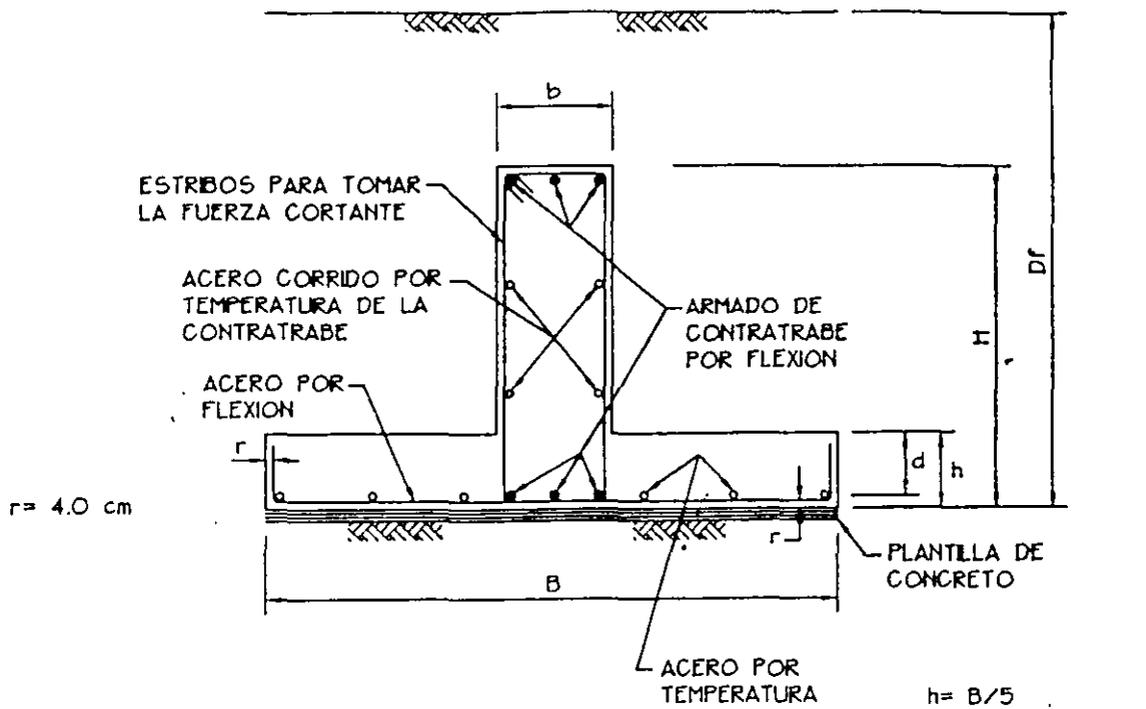


Figura 8.19. Detalles típicos de pilotes precolados de concreto reforzado. a) R. C. detalles para un pilote de 350 × 350 × 15 000 mm. b) R. C. detalles para un pilote hueco octagonal de 787 mm. (Todas las distancias son en mm)



$$h = B/5$$

$$\frac{Lp}{30} \leq h \leq \frac{Lp}{20}$$

$$b \geq \frac{h}{4}$$

$Lp =$  DIMENSION MAYOR DEL EDIFICIO EN PLANTA

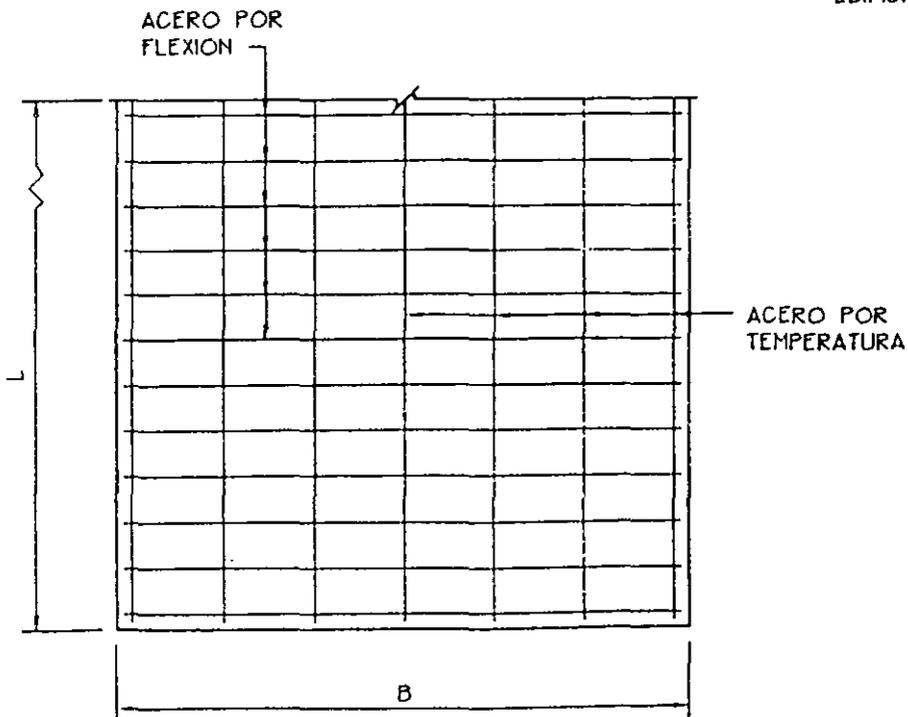
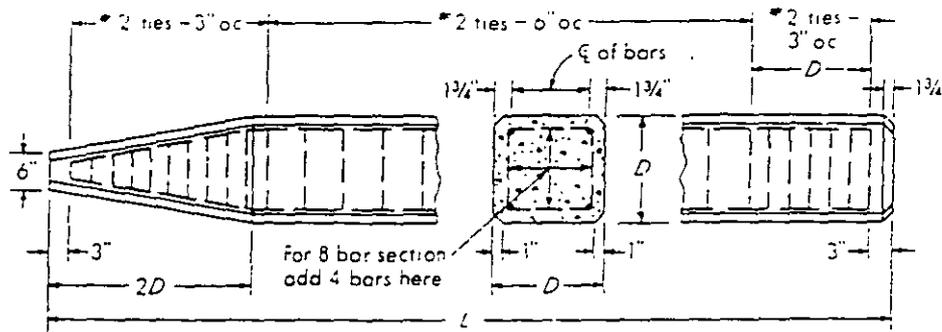
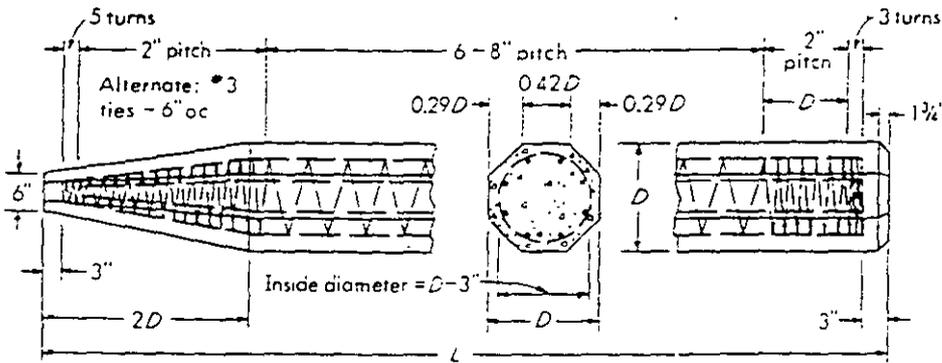


FIG. 1.1.24a DISPOSICION DEL ACERO DE REFUERZO EN UNA ZAPATA CORRIDA.



Square piles



Octagonal piles

Spiral wire

D, in.	16	20	24
Size	#5	#4	#3

Fig. 9-5 Typical details of precast concrete piles. (After Chellis [9].)

after which withdrawal of the mandrel empties the casing. The casing may also be driven with a driving tip on the point, providing a shell that is ready for filling with concrete immediately, or the casing may be driven open-end, the soil entrapped in the casing being jettied out after the driving is completed.

Various methods with slightly different end results are available and patented. Figure 9-6 indicates some of the commonly available patented cast-in-place piles, and is intended to be representative only. It may be noted that they are basically of three types: (1) shell or cased, (2) shell-less (uncased), or (3) pedestal types.

#### 9-4 STEEL PILES

These members are usually rolled H shapes or pipe piles. Wide-flange beams or I-beams may also be used; however, the H shape is especially proportioned to withstand the hard driving stresses to which the pile may be subjected. In the H pile the flanges and web are of equal thickness (the standard WF and I shapes have a thinner

Puesto que los esfuerzos durante el hincado son tan severos, es necesario proporcionar un concreto de muy buena calidad. Las Tablas 23 y 24 sintetizan las recomendaciones del "Foundation Code" para el concreto, los periodos del curado y separación de las cabezas. Los pilotes deben colocarse separadamente, o en todo caso, en fila, pero nunca en grupos, debido a las dificultades prácticas de asegurar un colado y curado adecuado. Los pilotes de concreto precolados, se fabrican en sección cuadrada hasta de 16 plg por lado. No obstante que se han colado pilotes cuadrados y rectangulares más grandes, hasta de 24 plg por lado, el código recomienda el uso de formas octagonales para secciones mayores de 16 plg.

Las Figs. 120 y 121 muestran algunos diseños típicos, ingleses y americanos, de pilotes de concreto precolado. En el caso de los pilotes de Morganza, menores de 100 pies de longitud, se le dio al contratista la opción de colar pilotes de sección cuadrada u octagonal y eligió la forma octagonal.

Los pilotes de concreto precolado, manufacturados con cemento de alto contenido de alúmina, produjeron grandes proble-

mas en el pasado. A menos que se hinquen los pilotes poco después del colado, digamos de 24 a 28 horas\* (Manning, 1949), pueden volverse muy frágiles, impidiendo completamente su hincado; parece que en climas cálidos esta condición se agrava aún más (Golder, 1956) aunque un curado hecho con todo cuidado puede aliviar el problema (Hodgson, 1949).

Los pilotes de concreto pueden tener juntas longitudinales y trabajar satisfactoriamente.\* Se rompe el concreto y se empalma el refuerzo anterior con el nuevo, cuando menos en una longitud de 40 diá. Toda la basura y el material suelto deberá removerse, después de lo cual, se colará el nuevo tramo. Se dará la atención normal al curado y endurecimiento del concreto antes de que se hinque el nuevo tramo agregado.

#### Pilotes de Concreto Presforzado

Se mencionó anteriormente que los pilotes de concreto presforzado tienen ventajas en su manejo sobre los pilotes convencionales precolados y por ello son cada

- \* Pero el Código recomienda esperar dos días.
- \* Aunque los pretensados presentan dificultades.

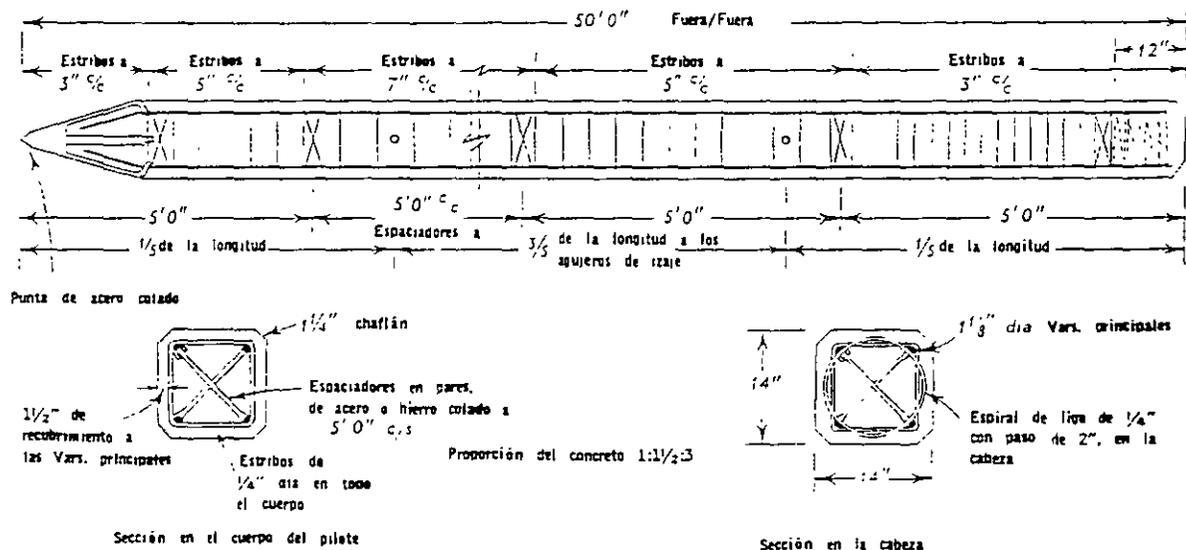
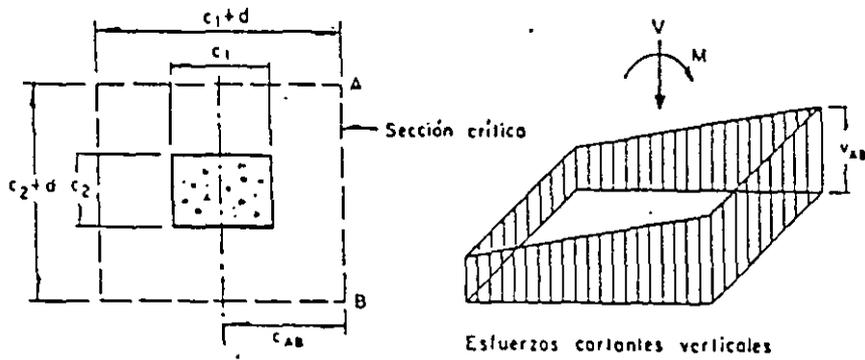


FIG. 120. Diseño típico de pilotes de concreto precolado (Práctica Británica)

(Stent Precast Concrete Ltd.)



$$v_{A0} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M c_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

Calculo del esfuerzo cortante maximo para una columna interior

FIG 5.16 TRANSMISION DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA (NORMAS DE CONCRETO 1987)

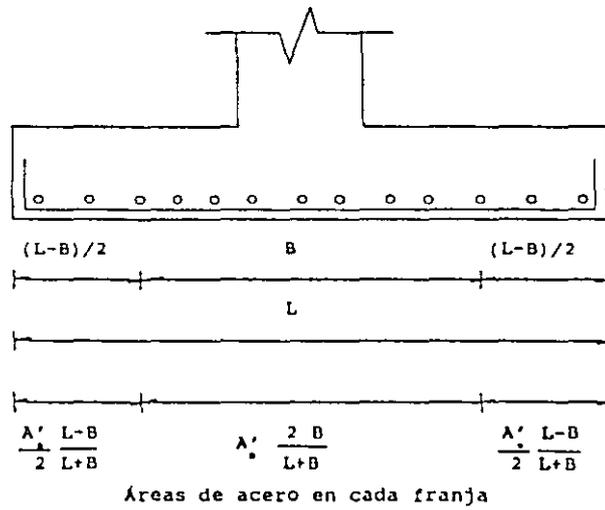
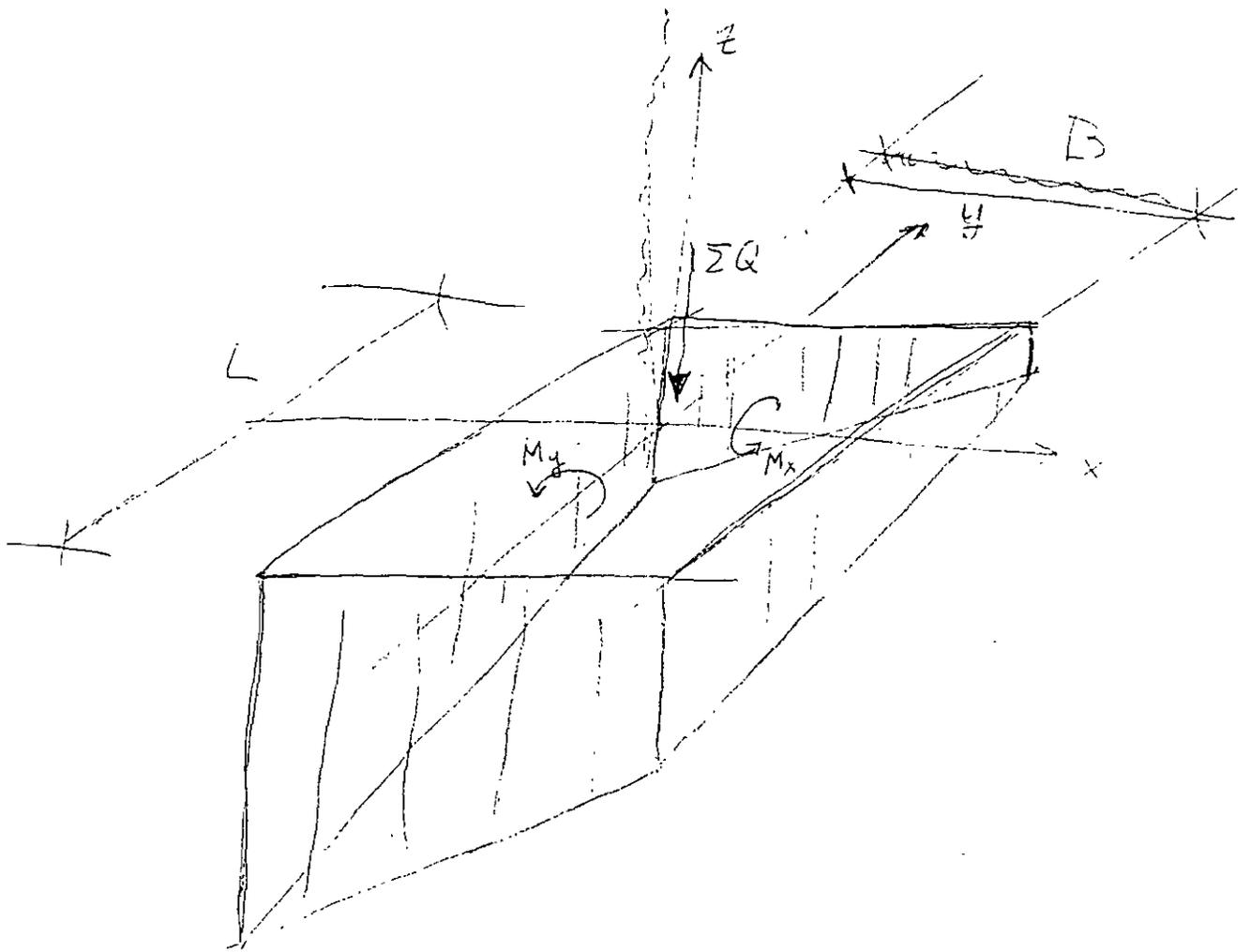
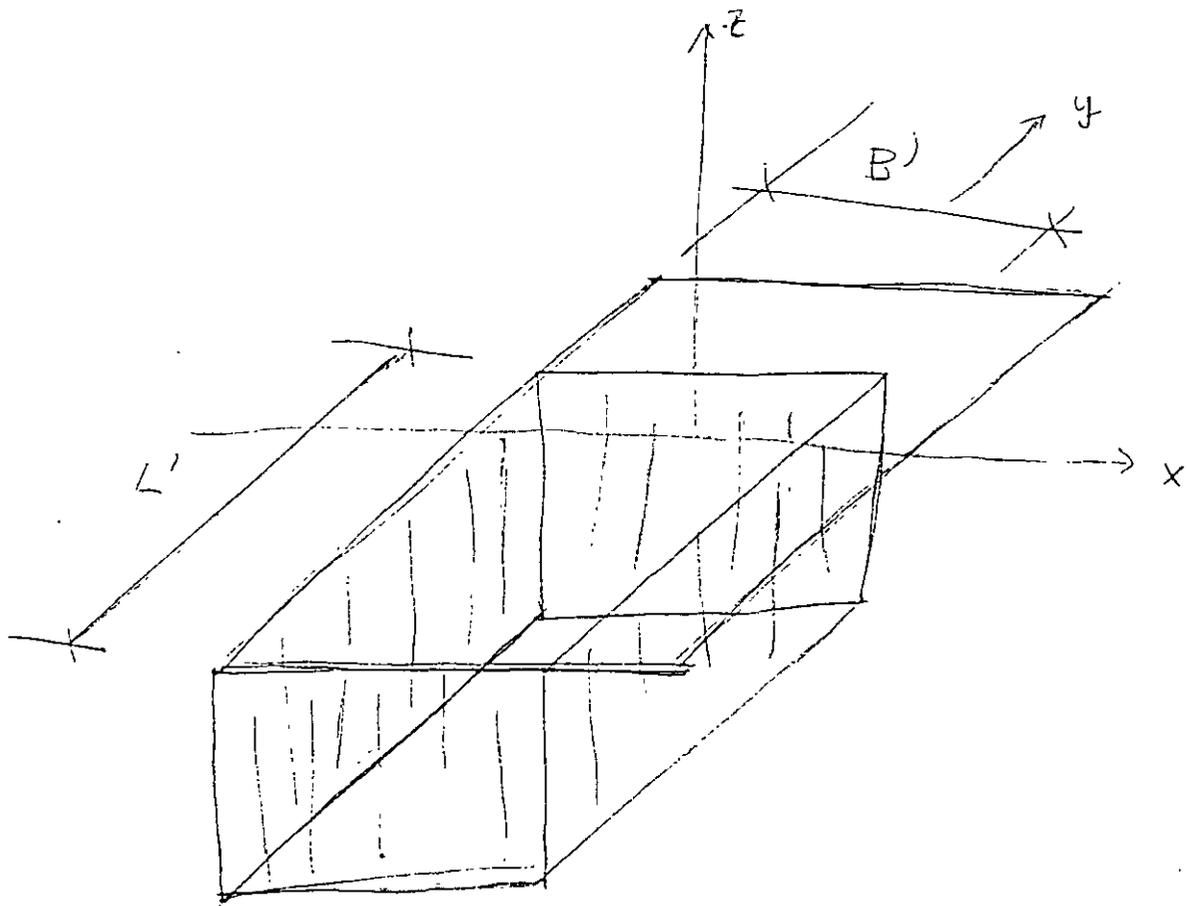
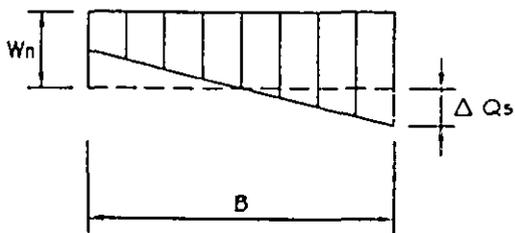
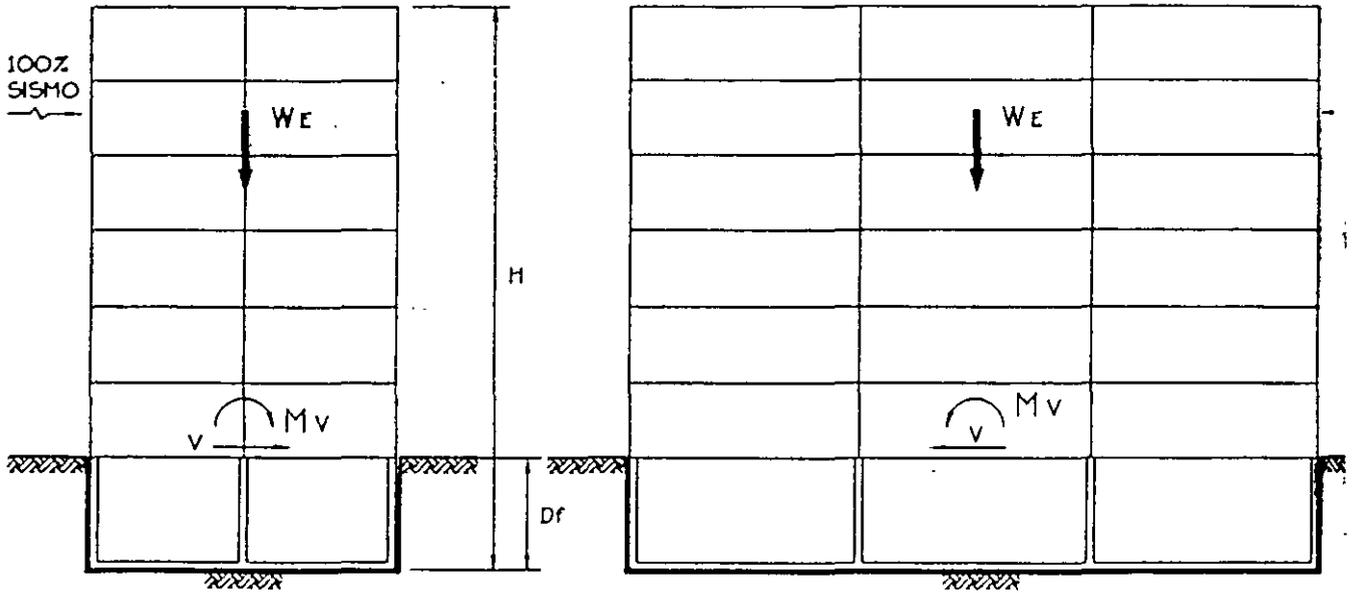
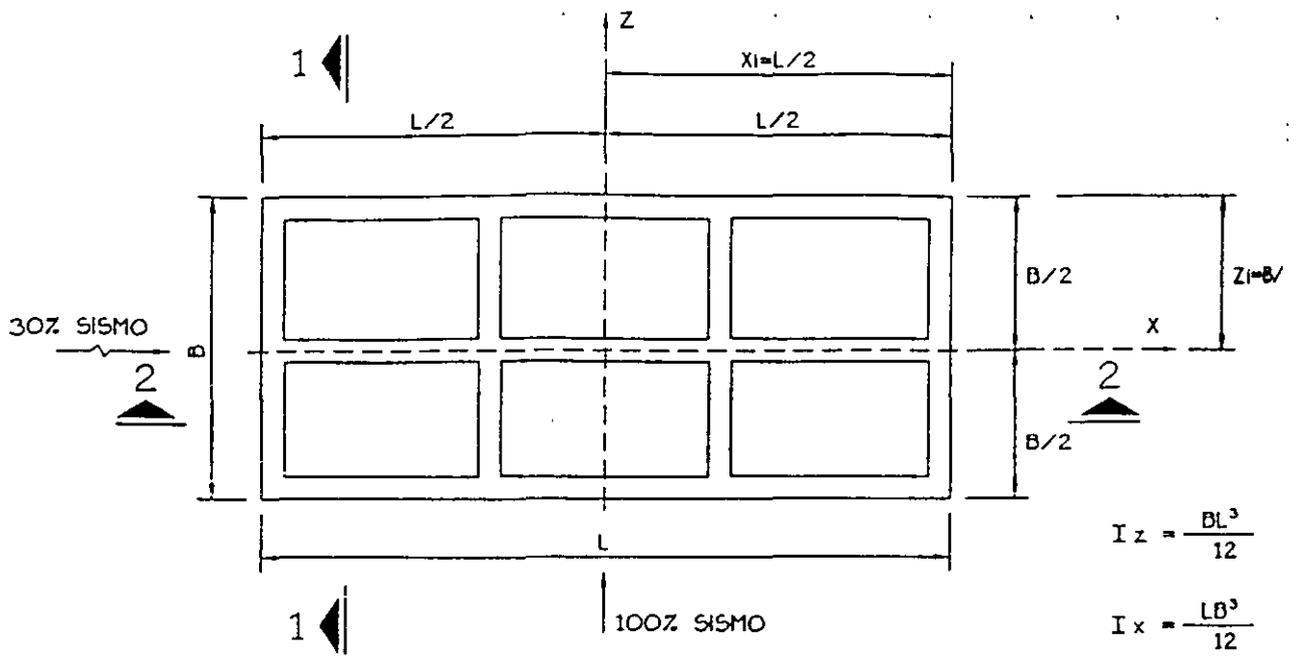


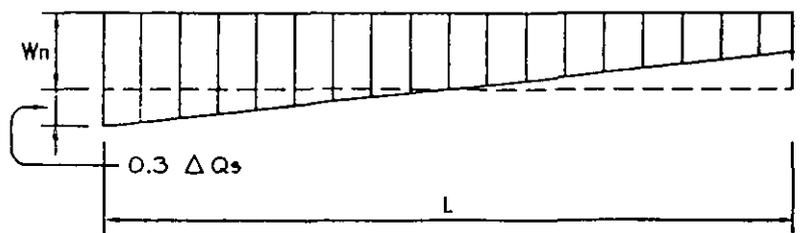
FIG 5.17 DISTRIBUCIÓN DEL ACERO DE REFUERZO EN EL LADO LARGO (MELI 1985)







CORTE 1 - 1



CORTE 2 - 2

FIG. 11.28 DIAGRAMA DE PRESIONES POR EFECTO SISMICO (REF. 6)

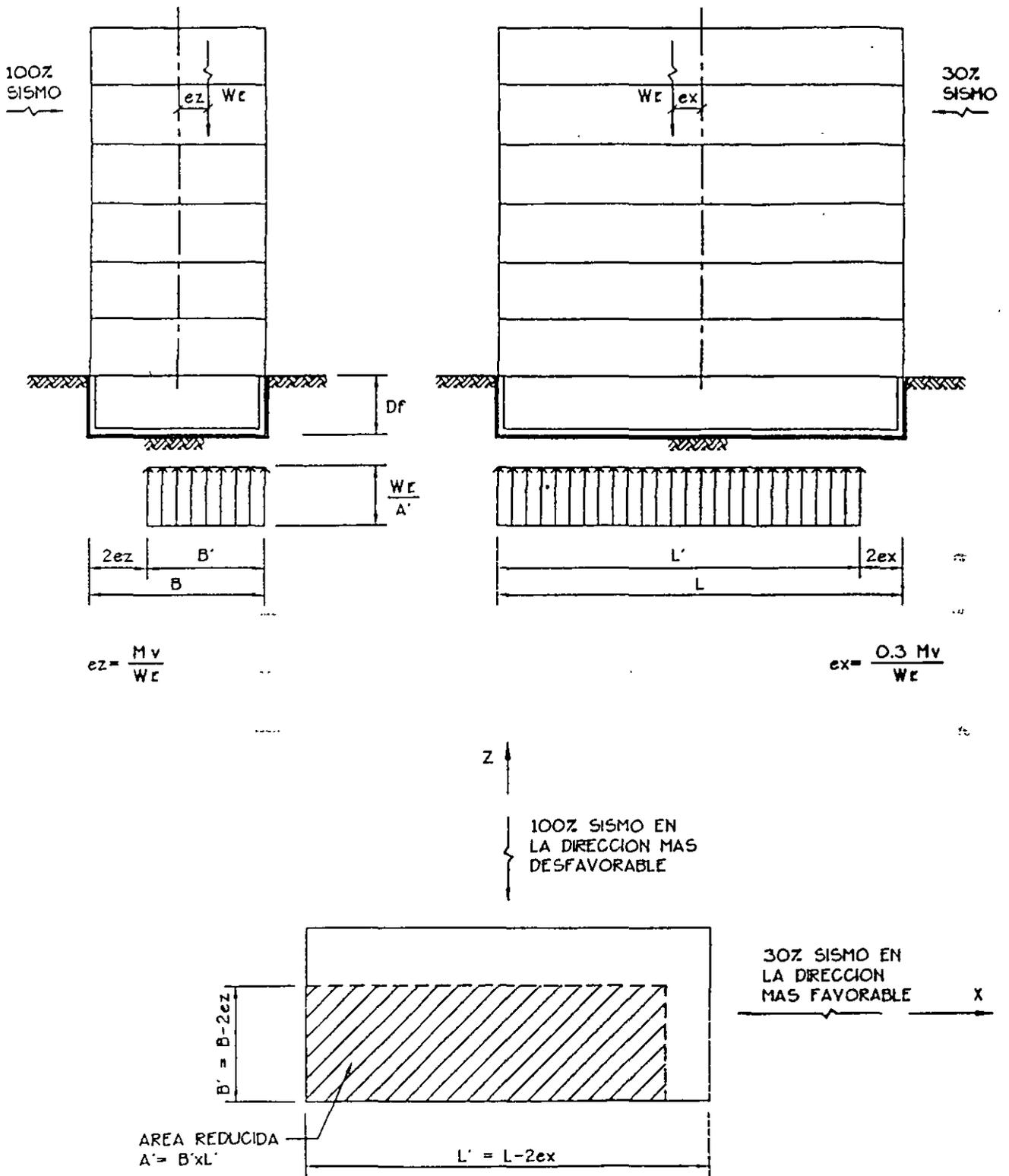
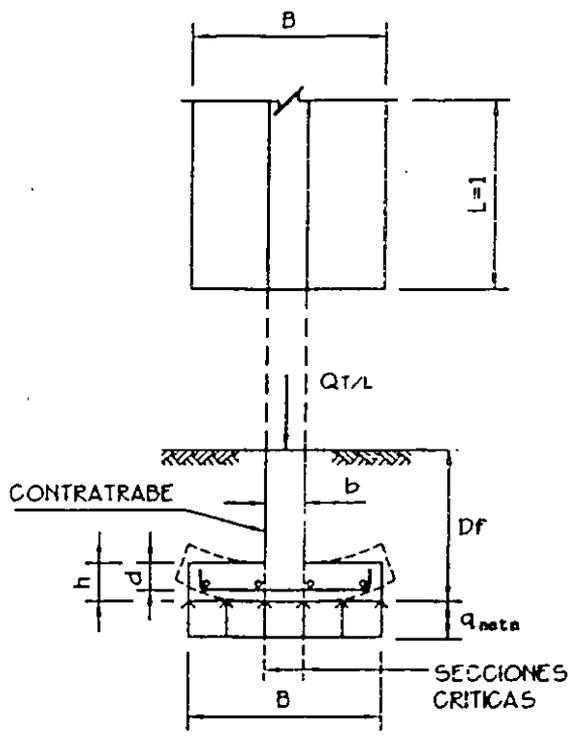
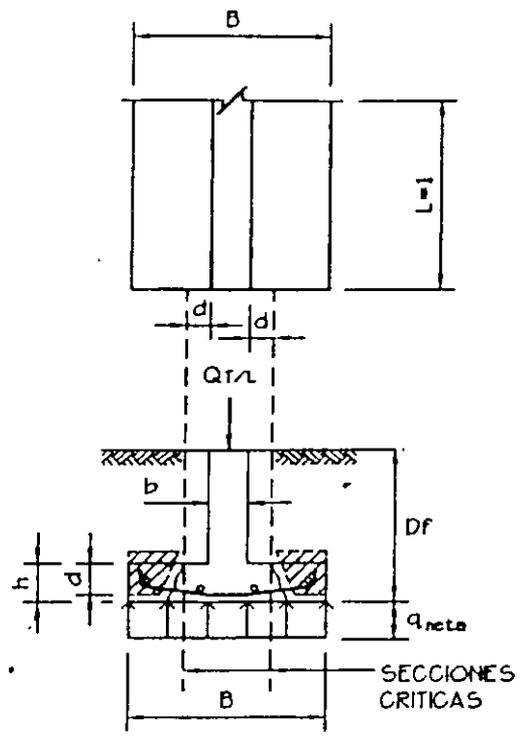


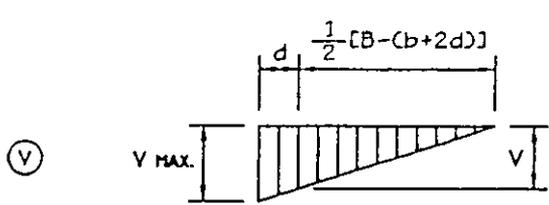
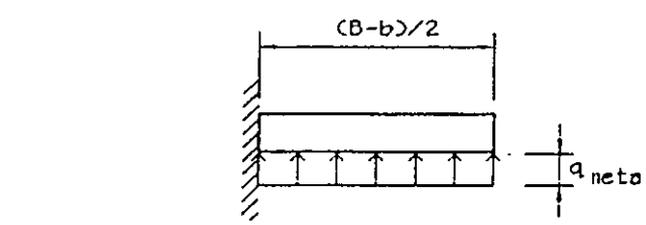
FIG. 1.129 CONDICIONES PARA LA REVISION SISMICA SEGUN EL REGLAMENTO DE CONSTRUCCION. (REF. 6)



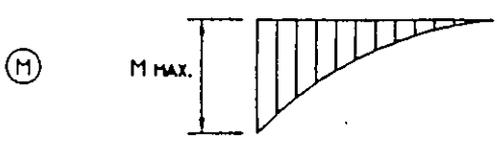
a).- SECCION CRITICA POR FLEXION



b).- SECCION CRITICA POR CORTANTE.



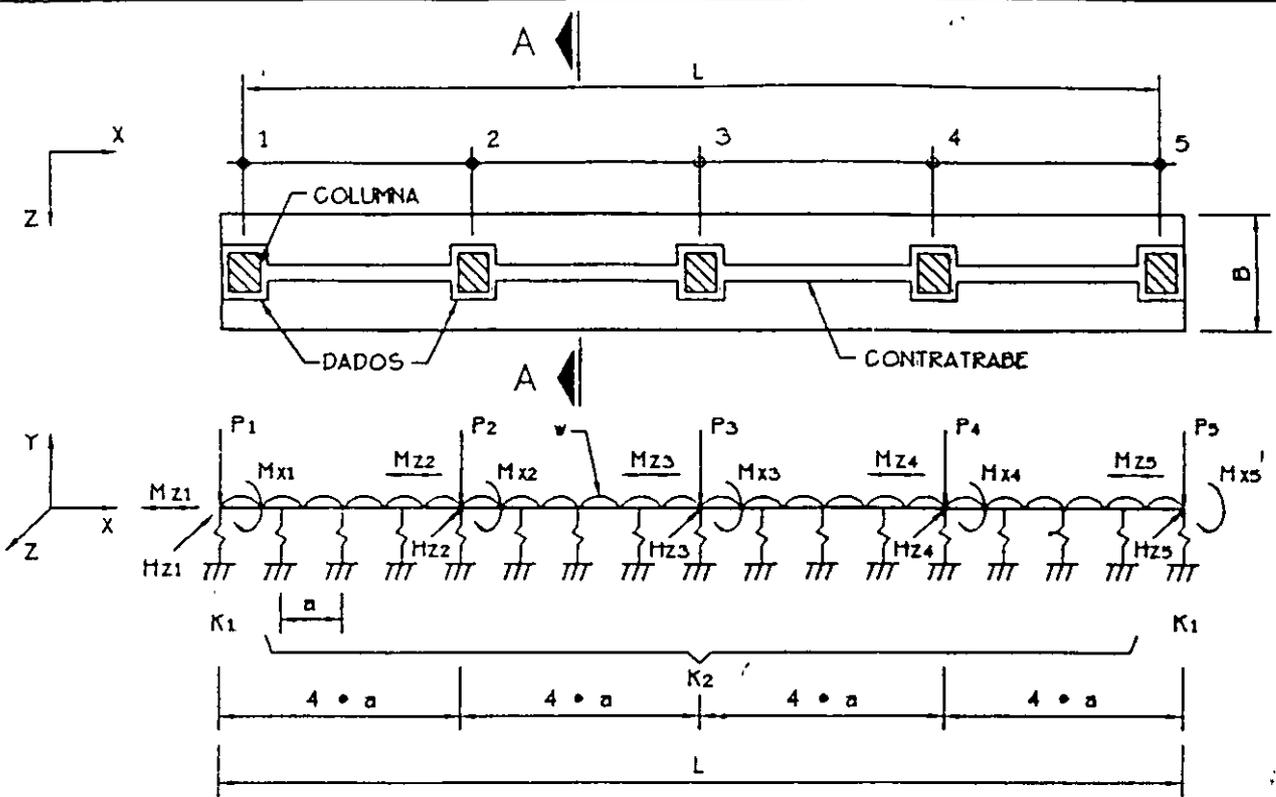
$$V = \frac{q_{neta}}{2} [B - (b + 2d)] ; \quad V_u = (F.C.)V$$



$$M_{MAX} = \frac{1}{2} \left[ \frac{B-b}{2} \right]^2 q_{neta} ; \quad M_u = (F.C.)M_{MAX}$$

c).- DIAGRAMAS DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE POR LONGITUD UNITARIA DE ZAPATA

FIG. 1.1.23 SECCIONES CRITICAS PARA DISEÑO POR FLEXION Y CORTANTE EN UNA ZAPATA CORRIDA.



$$Q_{T/L} = \frac{\sum P_i}{L} = \left[ \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)}{L} + w \right] 1.1 \quad \text{--- RESULTANTE DE CARGAS VERTICALES POR UNIDAD DE LONGITUD}$$

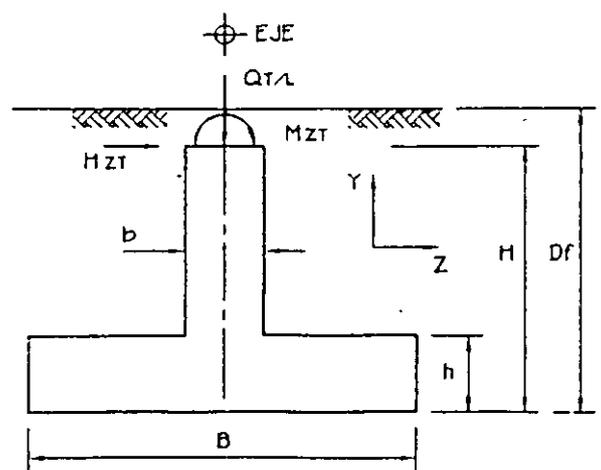
$$H_{ZT} = \frac{\sum M_{z_i}}{L} = \frac{(H_{z1} + H_{z2} + H_{z3} + H_{z4} + H_{z5})}{L} \quad \text{--- RESULTANTE DE FUERZAS HORIZONTALES EN DIRECCION DEL MOMENTO DE VOLTEO POR UNIDAD DE LONGITUD.}$$

$$M_{ZT} = \sum M_{z_i} / L + (\sum H_{z_i} / L) H \quad \text{--- RESULTANTE DE MOMENTO DE VOLTEO AL NIVEL DEL DESPLANTE POR UNIDAD DE LONGITUD}$$

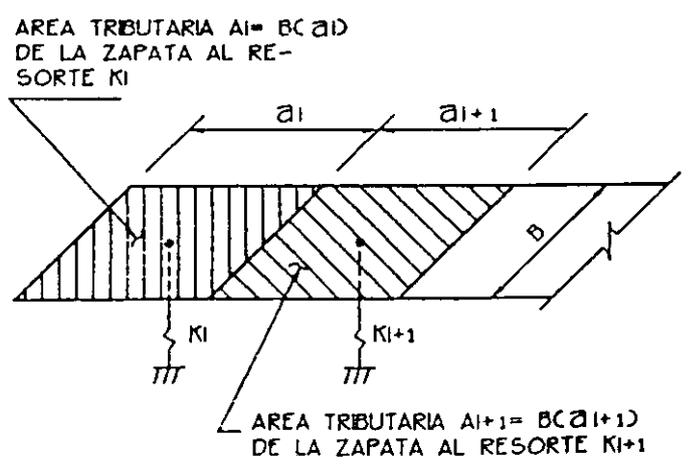
K1 RIGIDEZ DE LOS RESORTES EXTREMOS  
 K2 RIGIDEZ DE LOS RESORTES INFERIORES

\* FACTOR QUE TOMA EN CUENTA EL PESO PROPIO DE LA ZAPATA

a).- PLANTA DE UNA ZAPATA CORRIDA Y SU MODELO CON CARGAS PARA SU ANALISIS



b).- CORTE A-A



c).- AREAS TRIBUTARIAS A CADA RESORTE KI QUE REPRESENTA AL SUELO EN EL MODELO

FIG. 1.22 MODELO PARA ANALISIS Y DISEÑO DE UNA ZAPATA CORRIDA



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MÓDULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CONCRETO  
Y DEL ACERO**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

## CAPÍTULO 2

### Características generales del concreto y del acero

2.1 Introducción./ 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple./ 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido./ 2.4 Fatiga./ 2.5 Módulos elásticos./ 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura./ 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo.

#### 2.1 Introducción

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla, en proporciones determinadas, de cemento, agregados y agua. El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo. Algunas veces se añaden ciertas sustancias, llamadas aditivos o adicionantes, que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El concreto simple, sin refuerzo, es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir tensiones, se emplea refuerzo de acero, generalmente en forma de barras, colocado en las zonas donde se prevé que se desarrollarán tensiones bajo las acciones de servicio. El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto.

El uso del refuerzo no está limitado a la finalidad anterior. También se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al con-

creto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación de concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama *concreto reforzado*.

El concreto presforzado es una modalidad del concreto reforzado, en la que se crea un estado de esfuerzos de compresión en el concreto antes de la aplicación de las acciones. De este modo, los esfuerzos de tensión producidos por las acciones quedan contrarrestados o reducidos. La manera más común de presforzar consiste en tensar el acero de refuerzo y anclarlo en los extremos del elemento.

Para dimensionar estructuras de concreto reforzado es necesario utilizar métodos que permitan combinar el concreto simple y el acero, de tal manera que se aprovechen en forma racional y económica las características especiales de cada uno de ellos. Esto implica el conocimiento de estas características; en las páginas siguientes se describirán algunas de las más importantes.

Existen otras características del concreto, tales como su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a la abrasión, a la intemperie, etc., que no se tratarán, ya que no es necesario su conocimiento detallado para establecer métodos de dimensionamiento. El lector puede consultar a este respecto algún texto de tecnología del concreto, como los de Neville [2.2, 2.19], el de Troxell, Davis y Kelly [2.1] o el de Orchard [2.3], recomendados al final de este capítulo.

#### 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple

Se ha indicado que el objeto principal del estudio del comportamiento del concreto es la obtención de las relaciones acción-respuesta del material, bajo la gama total de sollicitaciones a que puede quedar sujeto. Estas características acción-respuesta pueden describirse claramente mediante curvas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados bajo distintas condiciones.

En este caso, el esfuerzo es comúnmente una medida de la acción ejercida en el espécimen, y la deformación, una medida de la respuesta. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en algunos casos, como por ejemplo en asentamientos y contracciones, esta relación se invierte; es decir, las solicitaciones quedan medidas por la deformación y la respuesta está representada por los esfuerzos respectivos.

Para conocer el comportamiento del concreto simple es necesario determinar las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a los distintos tipos de acciones a que puede estar sometido. En el caso más general sería necesario analizar todas las combinaciones de acciones a que puede estar sujeto un elemento. Hasta la fecha, sólo se han establecido las relaciones esfuerzo-deformación para las combinaciones más comunes. Así, se han hecho estudios sobre el comportamiento del concreto sujeto a estados uniaxiales de compresión y tensión, a estados biaxiales de compresión y tensión, y a estados triaxiales de compresión.

### 2.2.1 *Modos de falla y características esfuerzo-deformación bajo compresión axial*

#### MODOS DE FALLA

La figura 2.1 muestra un cilindro de concreto simple ensayado en compresión axial. En cilindros con relación de lado a diámetro igual a dos, como el que se muestra en la figura, la falla suele presentarse a través de planos inclinados respecto a la dirección de la carga. Esta inclinación es debida principalmente a la restricción que ofrecen las placas de apoyo de la máquina contra movimientos laterales. Si se engrasan los extremos del cilindro para reducir las fricciones, o si el espécimen es más esbelto, las grietas que se producen son aproximadamente paralelas a la dirección de aplicación de la carga. Al comprimir un prisma de concreto en estas condiciones, se desarrollan grietas en el sentido paralelo al de la compresión, porque el concreto se expande transversalmente.

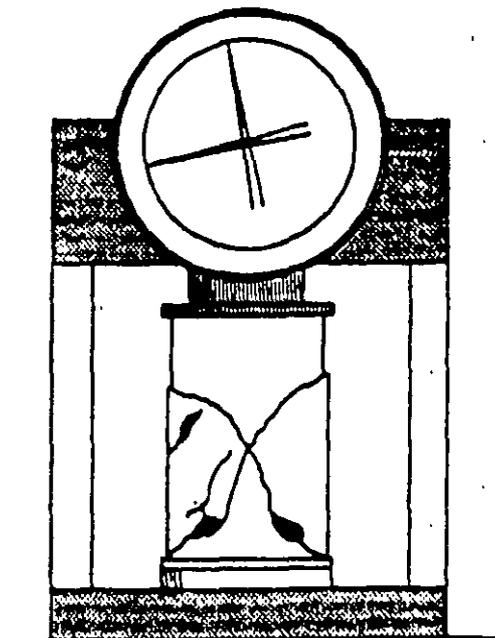


Figura 2.1 Falla en compresión de un cilindro de concreto.

Las grietas se presentan de ordinario en la pasta y muy frecuentemente entre el agregado y la pasta. En algunos casos también se llega a fracturar el agregado. Este microgrietamiento es irreversible y se desarrolla a medida que aumenta la carga, hasta que se produce el colapso.

#### CURVAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las curvas esfuerzo-deformación se obtienen del ensaye de prismas sujetos a carga axial repartida uniformemente en la sección transversal mediante una placa rígida. Los valores del esfuerzo resultan de dividir la carga total aplicada,  $P$ , entre el área de la sección transversal del prisma,  $A$ , y representan valores promedio obtenidos bajo la hipótesis de que la distribución de deformaciones es uniforme y de que las características esfuerzo-deformación del concreto son constantes en toda la masa. El valor de la deformación unitaria,  $\epsilon_c$ , es la relación entre el acortamiento total,  $a$ , y la longitud de medición,  $l$  (figura 2.2).

Puesto que el concreto es un material heterogéneo, lo anterior es una idealización del fe-

nómeno. Según la distribución de la pasta y del agregado en la masa, los esfuerzos, considerados como la carga soportada en un área diferencial, variarán de un punto a otro de una misma sección. Sin embargo, esta variación no es significativa desde el punto de vista del diseño estructural.

**CURVA TÍPICA BAJO CARGA DE CORTA DURACIÓN**

La curva que se presenta en la figura 2.2 corresponde a un ensaye efectuado en un tiempo relativamente corto, del orden de unos cuantos minutos desde la iniciación hasta el colapso. Se puede apreciar que el concreto no es un material elástico y que la parte inicial de estas curvas no es rigurosamente recta. Sin embargo, sin gran error puede considerarse una porción recta hasta aproximadamente el 40 por ciento de la carga máxima. Se observa, además, que la curva llega a un máximo y después tiene una rama descendente. El colapso se produce comúnmente a una carga menor que la máxima.

En el ensaye de prismas o cilindros de concreto simple, la carga máxima se alcanza a una deformación unitaria del orden de 0.002, si la longitud de medición es del mismo orden de magnitud que el lado del espécimen. El colapso del prisma, que corresponde al extremo de la rama descendente, se presenta en ensayes de corta duración a deformaciones que varían entre 0.003 y 0.007, según las condiciones del espécimen y de la máquina de ensaye.

**EFFECTO DE LA EDAD**

Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su capacidad de carga con la edad. Este proceso de hidratación puede ser más o menos efectivo, según sean las condiciones de intercambio de agua con el ambiente, después del colado. Por lo tanto, el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

La figura 2.3 muestra curvas esfuerzo-deformación de cilindros de 15 X 30 cm, fabricados de un mismo concreto y ensayados a distintas edades. Todos los cilindros fueron curados en las mismas condiciones hasta el día del ensaye. Las curvas se obtuvieron aplicando incrementos de deformación constantes. Se determinan así ramas descendentes más extendidas que las obtenidas comúnmente bajo incrementos constantes de carga. Se puede observar que la deformación unitaria para la carga máxima, es del orden de 0.0015 a 0.0020.

El aumento de resistencia con la edad depende también del tipo de cemento, sobre todo a edades tempranas. La figura 2.4 muestra el aumento de resistencia con la edad para cilindros de 15 X 30 cm, hechos con cemento normal (tipo I), y de alta resistencia inicial (tipo III), que son los dos tipos más empleados en estructuras de concreto reforzado. Después de los primeros tres meses, el aumento en resistencia es relativamente pequeño.

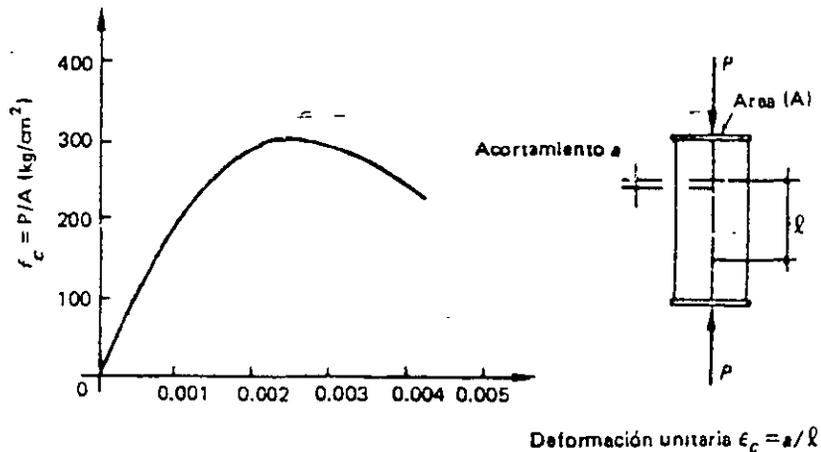


Figura 2.2 Curva esfuerzo-deformación en compresión axial de un espécimen sujeto a carga de corta duración.

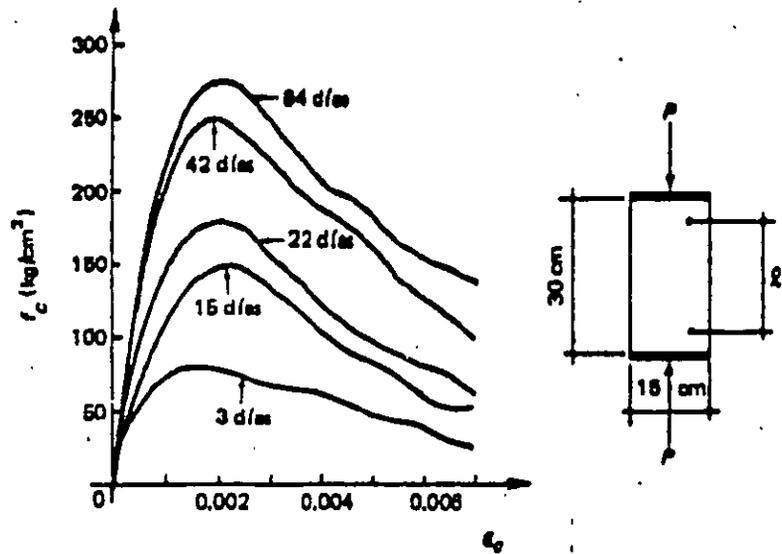


Figura 2.3 Efecto de la edad al ensayar en la resistencia.

#### EFFECTO DE LA RELACIÓN AGUA/CEMENTO

La resistencia del concreto depende de la relación agua/cemento: a mayor relación agua/cemento, menor resistencia. En la figura 2.5 se presentan curvas esfuerzo-deformación, correspondientes a distintas relaciones.

Puede observarse en las figuras 2.3 y 2.5 que la forma de la curva esfuerzo-deformación depende de la resistencia. Para resistencias bajas, la pendiente de la rama descendente es muy suave. Para resistencias altas, la curva es muy pronun-

ciada en su parte superior, y la rama descendente es más corta. También se nota que la pendiente de la tangente inicial a la curva aumenta a medida que crece la resistencia.

#### EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA

La figura 2.6 muestra resultados de ensayos de cilindros realizados a distintas velocidades de carga. En este tipo de ensayos se aplicó la carga a una velocidad constante y se midió el tiempo necesario para alcanzar la resistencia,

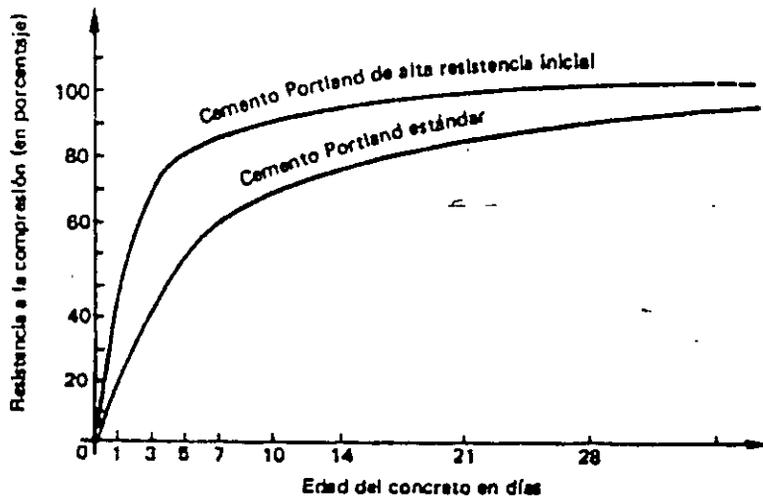


Figura 2.4 Variación de la resistencia con la edad.

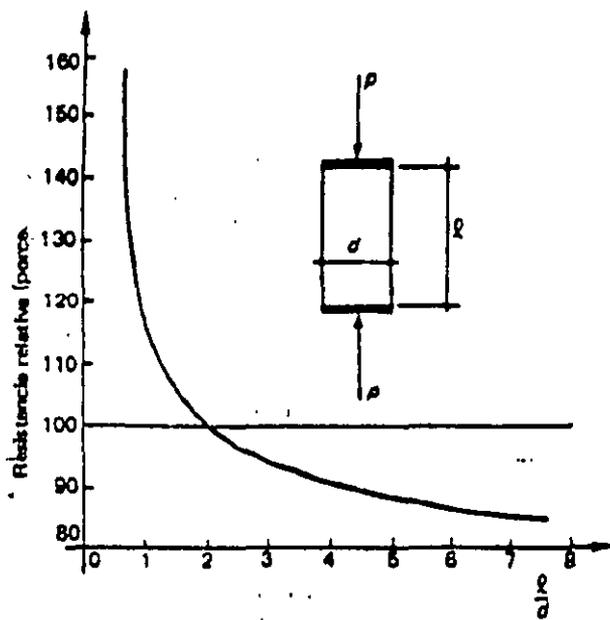


Figura 2.8 Efecto de la relación de esbeltez.

#### EFFECTO DE LA ESBELTEZ Y DEL TAMAÑO DEL ESPÉCIMEN

El efecto de la relación de esbeltez sobre la resistencia a la compresión de un prisma se muestra de manera cualitativa en la figura 2.8, en la que arbitrariamente se ha tomado como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos. Como medida de la esbeltez se toma la relación entre la longitud, medida en dirección de la carga, y el lado menor de un prisma, o el diámetro de un cilindro.

Para esbelteces mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente, para esbelteces de seis o más. Por el contrario, para especímenes de esbelteces menores que dos, la resistencia aumenta indefinidamente, y en teoría sería infinita para un espécimen de altura nula.

En especímenes geoméricamente semejantes pero de distinto tamaño, la resistencia disminuye, dentro de ciertos límites, mientras mayor sea el espécimen. Esto es debido a que en materias frágiles, como el concreto, la probabilidad de que existan zonas de resistencia baja aumenta con el tamaño del espécimen. La fi-

gura 2.9 muestra el efecto del tamaño de un cilindro en su resistencia a la compresión.

#### 2.2.2 Compresión triaxial

Los ensayos efectuados en cilindros de concreto bajo compresión triaxial muestran que la resistencia y la deformación unitaria correspondiente crecen al aumentar la presión lateral de confinamiento. En estos ensayos, el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando el espécimen de aceite a cierta presión y aplicando una carga axial hasta la falla mediante dispositivos como el ilustrado esquemáticamente en la figura 2.10 (a).

En la figura 2.10 (b) se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de los ensayos realizados por Brandtzaeg [2.6]. Corresponden a distintas presiones de confinamiento lateral, desde 38 hasta 286 kg/cm<sup>2</sup>. Se puede observar que el incremento de la resistencia es función directa del incremento de la presión de confinamiento. Con presiones de confinamiento adecuadas pueden obtenerse resistencias de más de 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

El efecto de la presión lateral sobre la resistencia se ilustra en la figura 2.10 (c), donde se presenta una gráfica del esfuerzo axial,  $f_1$ , necesario para producir la falla del cilindro, contra la presión lateral,  $f_2$ . Los resultados obtenidos de los ensayos pueden representarse, aproximadamente, por medio de la expresión

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2 \quad (2.1)$$



Figura 2.9 Efecto del tamaño.

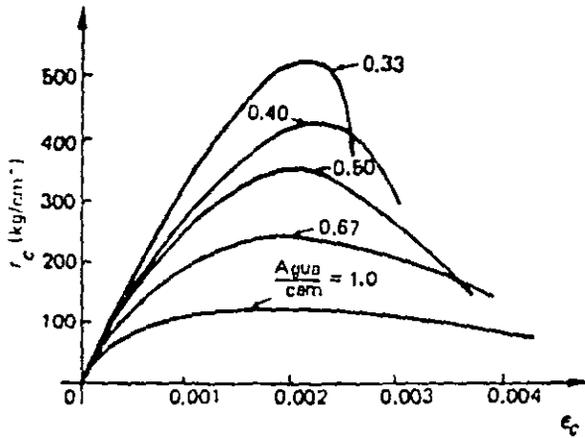


Figura 2.5 Efecto de la relación agua/cemento.

Se puede observar que la resistencia de un cilindro en el que la carga máxima se alcanza en centésimas de segundo es aproximadamente 10 por ciento mayor que la de uno que alcanzó la carga máxima en 66 segundos. Por otra parte para un cilindro en que la carga máxima se alcanza en 69 minutos, la resistencia disminuye aproximadamente en un 10 por ciento.

En ensayos a velocidad de carga constante, las ramas descendentes de las curvas esfuerzo-deformación no son muy extendidas, debido

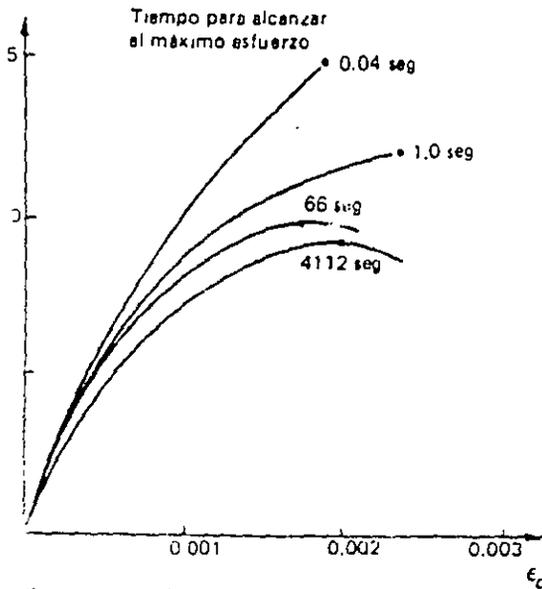


Figura 2.6 Efecto de la velocidad de carga (Iiatano [2.4]).

a que las características de las máquinas de ensayo hacen que el colapso ocurra súbitamente, una vez que se alcanza la carga máxima.

En la figura se muestra que las pendientes de las tangentes iniciales a las curvas crecen al aumentar la velocidad. No es posible determinar en todos los casos la rama descendente. Al igual que en otros tipos de ensayo, las deformaciones correspondientes a las cargas máximas son del orden de 0.002.

EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

La figura 2.7 muestra curvas obtenidas ensayando cilindros a distintas velocidades de deformación, desde una milésima de deformación unitaria por minuto, hasta una milésima por cien días. En esta figura,  $f_{c(0.001)}$  representa la resistencia obtenida cuando la velocidad de deformación unitaria en el ensayo es de 0.001 por minuto. Como puede apreciarse, esta variable tiene un efecto notable sobre las características de la curva esfuerzo-deformación, especialmente sobre la carga máxima. Si la velocidad de deformación es muy grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave. La deformación unitaria correspondiente a la carga máxima sigue siendo del orden de 0.002. Puede observarse que la resistencia disminuye muy poco con incrementos importantes en la duración del ensayo.

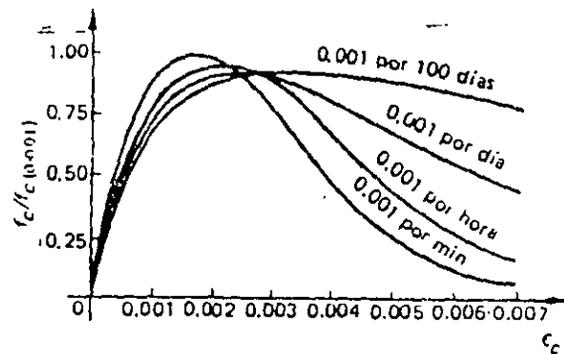


Figura 2.7 Efecto de la velocidad de deformación (Rüsch [2.5]).

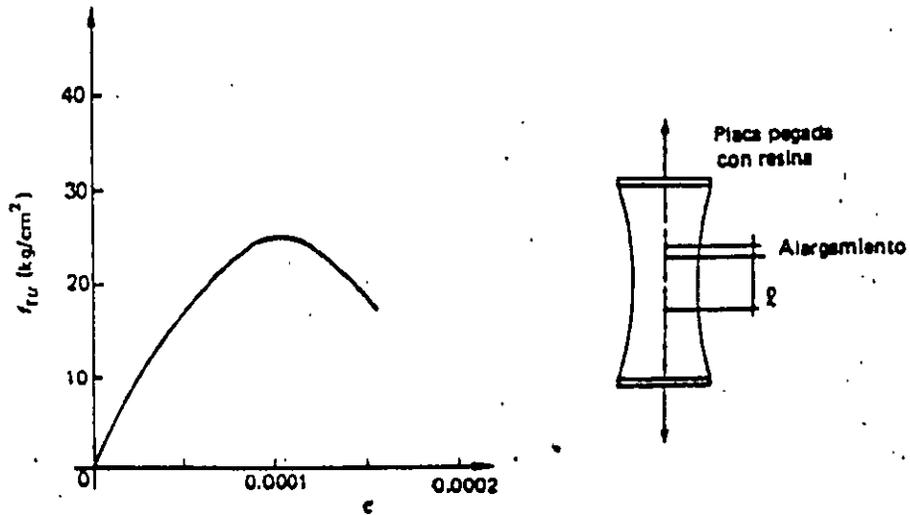


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación en tensión uniaxial.

muestra en la figura 2.12 (a). La carga se aplica a través de un material relativamente suave, como triplay o corcho. Si el material fuera perfectamente elástico, se originarían esfuerzos de tensión uniformemente distribuidos en la mayor parte del plano diametral de carga, como se muestra en la figura 2.12 (b).

La resistencia en tensión se calcula con la fórmula:

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = \frac{2P}{\pi dl} \quad (2.2)$$

deducida de la teoría de la elasticidad. (Véase, por ejemplo, la referencia 2.9.)

En la expresión (2.2):

$P$  = carga máxima

$d$  = diámetro del espécimen

$l$  = longitud del espécimen

En realidad, el concreto no es elástico y, además, la resistencia en tensión que se mide no es la resistencia en tensión uniaxial como la

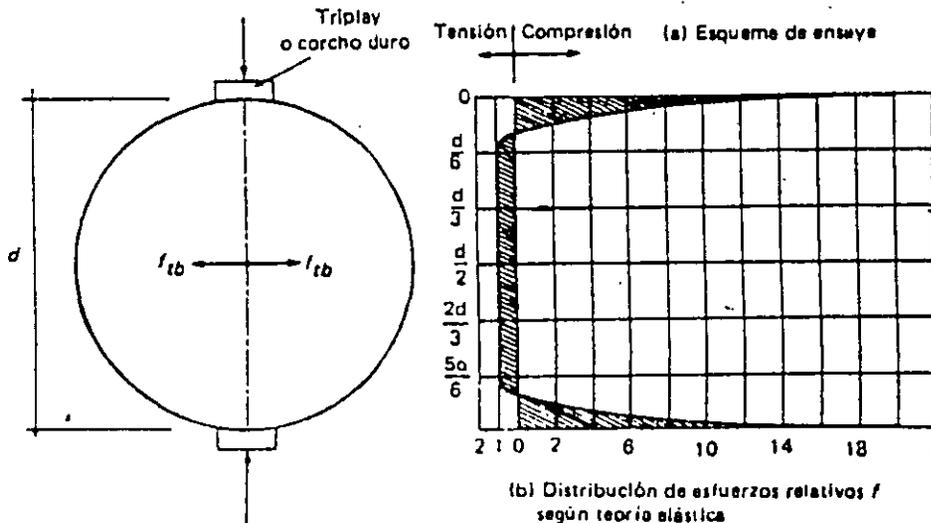


Figura 2.12 Distribución de esfuerzos y tipo de carga en tensión indirecta.

que se obtendría en el ensaye mostrado en la figura 2.11. Sin embargo, lo que se pretende es tener una medida de la resistencia del concreto a la tensión por medio de un ensaye fácil y reproducible por muchos operadores en distintas regiones. Esto se logra satisfactoriamente con el ensaye brasileño.

Para concretos fabricados con agregados de Santa Fe (ciudad de México), la relación entre la resistencia a la compresión de un cilindro y su resistencia a la tensión, obtenida del ensaye brasileño, está dada por la expresión

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = 6 \text{ kg/cm}^2 + 0.06 f'_c \quad (2.3)$$

válida para

$$150 \text{ kg/cm}^2 \leq f'_c \leq 450 \text{ kg/cm}^2$$

donde

$(f_{tb})_{\text{máx}}$  = resistencia en tensión del ensaye brasileño

$f'_c$  = resistencia a la compresión simple de un cilindro de...  
15 X 30 cm.

Esta expresión es solamente aproximada y se presenta para dar una idea de los órdenes de magnitud relativos. Para valores bajos de  $f'_c$ , la resistencia en tensión es del orden de  $0.10 f'_c$ , mientras que para valores altos disminuye a  $0.07 f'_c$ .

El conocimiento de la resistencia a la tensión del concreto es importante para el diseño en tensión diagonal y para otros tipos de comportamiento, en donde la tensión es el fenómeno predominante.

#### 2.2.4 Flexión

Para algunas aplicaciones, tales como pavimentos de concreto, es necesario conocer aproximadamente la resistencia a la flexión del concreto simple. Esta se determina frecuentemente ensayando un prisma de concreto li-

brememente apoyado, sujeto a una o dos cargas concentradas. La falla es brusca, con una grieta única que fractura el espécimen.

El esfuerzo teórico de tensión en la fibra inferior correspondiente a la rotura se calcula mediante la expresión

$$f_r = \frac{Mc}{I} \quad (2.4)$$

en la que  $f_r$  es el módulo de rotura,  $M$  es el momento flexionante correspondiente a la carga máxima aplicada,  $c$  es el medio peralte, e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal del prisma.

Al aplicar la expresión (2.4) se supone que el concreto es elástico hasta la rotura, hipótesis que, como se ha indicado, no es correcta para toda la escala de carga.

Esta prueba proporciona una medida de la resistencia del concreto a flexión, o más bien, a la tensión debida a flexión. Normalmente, el módulo de rotura es mayor que la resistencia a la tensión obtenida del ensaye brasileño.

Se ha observado que el esfuerzo máximo de rotura en flexión depende, entre otras variables, de la resistencia a la compresión, de la relación peralte a claro y de las condiciones de curado. Debido a que la medición de deformaciones es difícil de realizar, no existen muchos datos experimentales sobre las características esfuerzo-deformación de prismas sujetos a flexión simple.

El módulo de rotura como medida de la resistencia a la tensión, tiene varias desventajas. La principal es que el punto de tensión máxima se presenta en la superficie externa del espécimen, que está sujeta en forma importante a esfuerzos de contracción originados por cambios en el ambiente. Por esta razón, la dispersión de datos de ensayos de módulo de rotura es mayor que la dispersión obtenida en el ensaye brasileño, la que a su vez es mayor que la dispersión de datos de pruebas en compresión. Es difícil establecer relaciones generales entre los valores de  $f_r$  y  $f'_c$ , ya que la relación depende del tipo de concreto.

### 2.2.5 Otras condiciones de esfuerzos

La determinación de la resistencia del concreto simple a un estado de esfuerzo cortante puro no tiene mucha importancia práctica, porque dicho estado implica siempre la presencia de tensiones principales de la misma magnitud que el esfuerzo cortante, las cuales originan la falla cuando el elemento podría aún soportar esfuerzos cortantes mayores. Algunos procedimientos indirectos indican que la resistencia al esfuerzo cortante es del orden del 20 por ciento de la resistencia a la compresión.

También se han realizado ensayos en concreto simple sujetando especímenes de diversos tipos a otras combinaciones de esfuerzos. Entre éstos cabe mencionar los ensayos efectuados por McHenry [2.10], utilizando cilindros huecos sujetos a una presión interior y a una carga axial longitudinal, en los que se provoca un estado combinado de esfuerzos de tensión y compresión; los llevados a cabo por Bresler [2.11], sometiendo cilindros a combinaciones de esfuerzos de torsión y compresión axial, y los de Kupfer, Hilsdorf y Rüsck [2.12] en placas y prismas cargados a través de dispositivos especiales, para evitar alteraciones de los estados de esfuerzos estudiados.

### 2.2.6 Criterio de falla

A pesar de los estudios que se han realizado no se tiene todavía una teoría de falla sencilla y que permita predecir con precisión aceptable la resistencia del concreto simple. Se ha intentado hacer adaptaciones, entre otras, de las teorías de Mohr, de Coulomb, de esfuerzos cortantes y de deformaciones limitativas. K. Newman y J. Newman han utilizado con buenos resultados criterios de falla basados en teorías energéticas, las cuales parecen ser las más adecuadas para el caso del concreto [2.13]. En la referencia 2.14 se presenta un resumen de los estudios efectuados para determinar la resistencia del concreto a estados combinados de esfuerzos y las distintas teorías de falla que se han propuesto hasta la fecha.

## 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido

### 2.3.1 Conceptos generales

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aun cuando no se incremente la carga.

Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La figura 2.13 muestra una curva típica de deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación y en el horizontal, el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño, el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente el 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen, se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la figura 2.13, la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido representa las deformaciones que

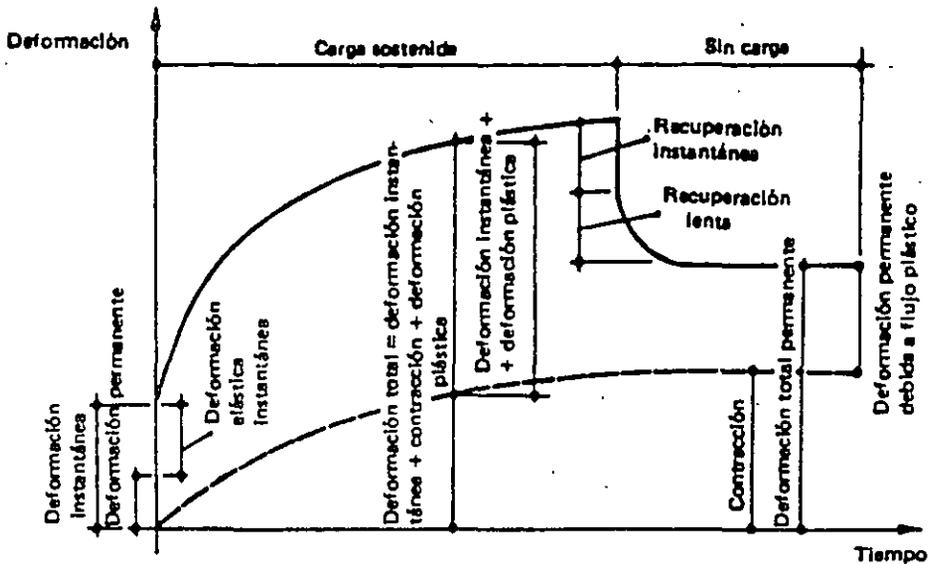


Figura 2.13 Curva típica deformación-tiempo, bajo condiciones ambientales constantes.

produce el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción.

Para efectos de diseño estructural, no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas; en muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total, incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales de dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

### 2.3.2 Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando e hidrata el cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambientales especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que

otro de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en ambiente húmedo se contraerá menos que en ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento, la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que otra pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen en general en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente, la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

### 2.3.3 Flujo plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de una carga. Las teorías que

se han desarrollado para explicarlo son complejas y caen fuera del alcance de este texto. Puede consultarse a este respecto la referencia 2.15. Se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un reajuste interno de las partículas que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50% de la resistencia. Para niveles mayores la relación ya no es proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante.

En la figura 2.13 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que, para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan a las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla y la humedad ambiente.

Es interesante mencionar que, como el flujo plástico aumenta con el nivel de carga, este fenómeno tiende a aliviar las zonas de máximo esfuerzo y, por lo tanto, a uniformar los esfuerzos en un elemento.

#### 2.3.4 Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. En la figura 2.14 se muestra el efecto de la permanencia de una carga según los ensayos de Rüsck [2.5]. En el eje horizontal se representan deformaciones unitarias, y en el eje vertical valores relativos,  $f_c/f'_c$ , de los esfuerzos aplicados con respecto a la resistencia en una prueba de corta duración (20 minutos aproximadamente).

Se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de especímenes sujetos a distintas velocidades de deformación, con lo que se produjeron fallas a diferentes edades. La línea de trazo continuo corresponde a un espécimen en el que la falla se produjo en 20 minutos. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo.

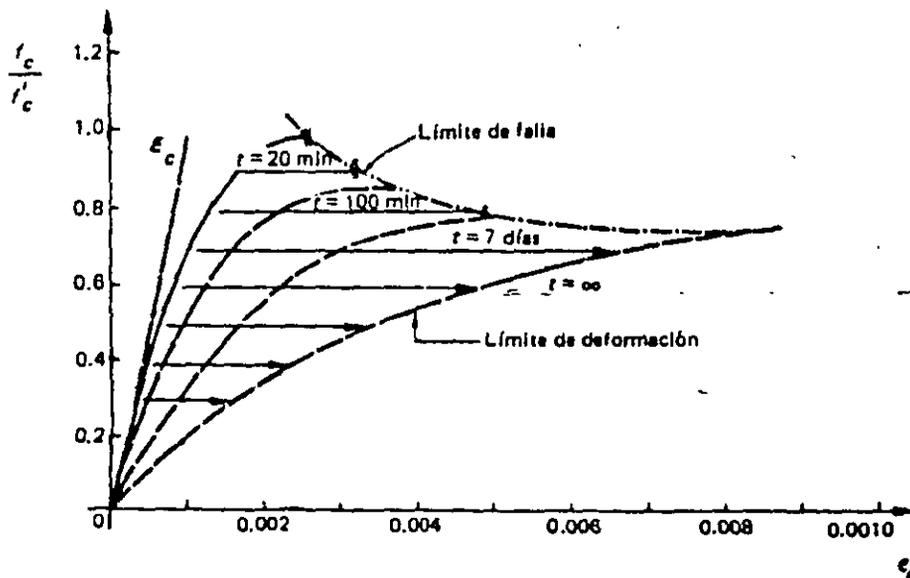


Figura 2.14 Efecto de la permanencia de la carga (Rüsck) [2.5].

gente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de cargas de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos elásticos menores que los correspondientes a las definiciones mencionadas anteriormente.

El módulo secante se usa en ensayos de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM [2.17] recomienda la pendiente de la línea que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.0005 y al 40 por ciento de la carga máxima.

Se ha observado que, después de varios ciclos de carga y descarga a esfuerzos relativamente pequeños, la relación esfuerzo-deformación tiende a convertirse en una relación prácticamente lineal. Como es difícil determinar el módulo tangente inicial de una manera reproducible, se recurre a veces a aplicaciones previas de carga y descarga, con objeto de rectificar la curva esfuerzo-deformación, y se considera la pendiente de la curva así obtenida como el módulo de elasticidad. El método para determinar el módulo tangente en esta forma se describe con detalle en la referencia 2.17. El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico. Se han propuesto varias expresiones para predecir el módulo de elasticidad a partir de estas variables. Por ejemplo, el Reglamento ACI presenta la ecuación

$$E_c = w^{1.5} \frac{4270}{15-100} \sqrt{f'_c} \quad (2.5)$$

donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad en  $\text{kg/cm}^2$ ,  $w$  es el peso volumétrico del concreto en  $\text{ton/m}^3$  y  $f'_c$  es la resistencia del concreto en  $\text{kg/cm}^2$ . El Reglamento del D.F., propone la ecuación

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (2.6)$$

que es aplicable únicamente a concretos fabricados con agregados típicos de la ciudad de México. Estas ecuaciones dan únicamente valores aproximados, porque existen otras varia-

bles importantes, como el tipo de agregado. Las diferencias entre los valores reales y los calculados con estas ecuaciones pueden ser muy grandes. Cuando se requieren estimaciones de cierta precisión, conviene determinar el módulo de elasticidad del concreto usado en particular.

En algunos análisis elásticos se suelen emplear  $G$ , el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y  $\mu$ , el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20. Con frecuencia se supone  $\mu$  igual a 0.18.

## 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura

El concreto está sometido a cambios volumétricos por temperatura. Se han determinado algunos coeficientes térmicos que oscilan entre 0.000007 y 0.000011 de deformación unitaria por grado centígrado de cambio de temperatura. Los valores anteriores corresponden a concreto de peso volumétrico normal (del orden de  $2.2 \text{ ton/m}^3$ ). Para concretos fabricados con agregados ligeros, los coeficientes pueden ser muy distintos de los mencionados.

## 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. En las figuras 2.15 y 2.16 se muestran curvas de ambos tipos de acero, típicas de barras europeas.

Los diámetros usuales de las barras producidas en México, varían de  $1/4$  pulg a  $1 1/2$  pulg. (Algunos productores han fabricado barras corrugadas de  $3/16$  pulg,  $3/32$  pulg y  $3/16$  pulg.) En otros países se usan diámetros aun mayores. Todas las barras, con excepción del alambrión de  $1/4$  pulg, que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie, para mejorar

Se muestran además dos envolventes: la inferior, llamada *límite de deformación* y la superior, *límite de falla*. La primera muestra las deformaciones máximas que se obtienen al aplicar indefinidamente distintos porcentajes de la resistencia, inferiores a un cierto valor crítico. La segunda envolvente indica las deformaciones a la falla, correspondientes a porcentajes de carga superiores al valor crítico. La intersección entre estas dos envolventes indica, teóricamente, el porcentaje de la resistencia por debajo del cual el espécimen puede soportar la carga indefinidamente.

En la figura puede observarse que si se carga un espécimen al 80 por ciento de su resistencia de corta duración, se producirá la falla eventualmente a una deformación del orden de 0.0055. En cambio, si se le sujeta solamente al 40 por ciento de su resistencia de corta duración, el espécimen sufrirá una deformación del orden de 0.0025 después de un tiempo muy largo y mantendrá su carga indefinidamente.

Se puede decir, con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomar indefinidamente, sin fallar, cargas hasta del 60 por ciento de su capacidad. Cargas mayores que el 70-80 por ciento, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.

## 2.4 Fatiga

Se han hecho diversos estudios sobre elementos de concreto sujetos a repeticiones de carga. Cuando un elemento falla después de un número muy grande de repeticiones de carga, se dice que ha fallado por *fatiga*. Este tipo de sollicitación tiene importancia práctica, ya que elementos como vigas de puente, durmientes de ferrocarril o cimentaciones de maquinaria están sujetos a muchas repeticiones de carga.

Se mencionó anteriormente que un elemento de concreto en compresión no puede soportar indefinidamente fracciones de su resistencia estática mayores que un 70 por ciento. Cuando a un elemento de concreto se le aplican

compresiones del orden de la mitad de su resistencia estática, falla después de aproximadamente diez millones de repeticiones de carga. Se ha encontrado también que si la carga se aplica intercalando periodos de reposo, el número de ciclos necesario para producir la falla aumenta considerablemente.

Los estudios experimentales se han hecho aplicando los ciclos de carga y descarga a velocidades bastante más rápidas que las que se presentan en la práctica y, por lo tanto, sus resultados en general son conservadores.

Se puede estimar que el concreto simple en compresión, toma diez millones o más de repeticiones de carga al 50 por ciento de su resistencia estática. En flexión, el mismo número de aplicaciones puede alcanzarse con ciclos de carga y descarga con valor máximo del orden de 35-50 por ciento de su resistencia estática. Se han hecho estudios limitados de fatiga en torsión, que tienen un interés práctico menor.

Para ciertos materiales, como el acero, se ha encontrado que, aplicando ciclos de carga y descarga y llevando el esfuerzo máximo hasta un cierto valor, existe un límite de este esfuerzo por debajo del cual se puede soportar un número indefinido de ciclos. En concreto, se han llevado los ensayos hasta 10 millones de aplicaciones de carga, sin que se haya comprobado la existencia de límites semejantes. En las referencias 2.16 y 2.18 se trata ampliamente el tema de fatiga en el concreto.

## 2.5 Módulos elásticos

Para estimar deformaciones debidas a cargas de corta duración, donde se puede admitir un comportamiento elástico sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación mostradas, resulta obvio que el concepto convencional de módulo de elasticidad no tiene sentido en concreto. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tan-

Tabla 2.1 Diámetros, pesos, áreas, y perímetros de barras.

Barra Núm.	Diámetro pulg	Diámetro mm	Peso kg/m	Área cm <sup>2</sup>	Perímetro cm
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	3/4	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

## OBSERVACIONES

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a la norma de la Secretaría de Comercio, NOM B6-1974. Según esta norma, el diámetro nominal y el área de una barra corresponden a los que tendría una barra lisa, sin corrugaciones, del mismo peso por metro lineal; todas las barras, con excepción de la No. 2, están corrugadas.

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las barras laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2 300 hasta 4 200 kg/cm<sup>2</sup>. El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia de 4 000 a 6 000 kg/cm<sup>2</sup>. En la figura 2.17 se representa la gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México. En los países escandinavos se usan varillas con límites de fluencia hasta de 9 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en refuerzos con detalles soldados es la soldabilidad. La soldadura de aceros trabajados en frío debe hacerse con cuidado. Otra propiedad importante es la facilidad de doblado, que es una medida indirecta de ductilidad y un índice de su trabajabilidad.

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por alambres lisos unidos por puntos de

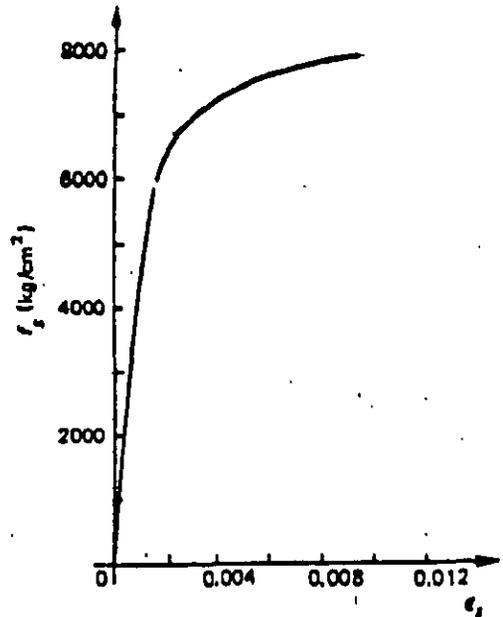


Figura 2.17 Gráfica esfuerzo-deformación de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido, de fabricación nacional.

soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con refuerzos de fluencia del orden de 5 000 kg/cm<sup>2</sup>. El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm y los diámetros de 2 a 7 mm, aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos, se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial, para mejorar la adherencia.

El acero que se emplea en estructuras reforzadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia última varía entre 14 000 y 22 000 kg/cm<sup>2</sup> y su límite de fluencia, definido por el esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12 000 y 19 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Como ilustración, en la figura 2.18 se presentan, atendiendo al grado de calidad, algunas curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero, y dos curvas esfuerzo-deformación para concreto con una resistencia de 250 kg/cm<sup>2</sup>, correspondientes a cargas de corta y larga duración.

El módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco. De la compa-

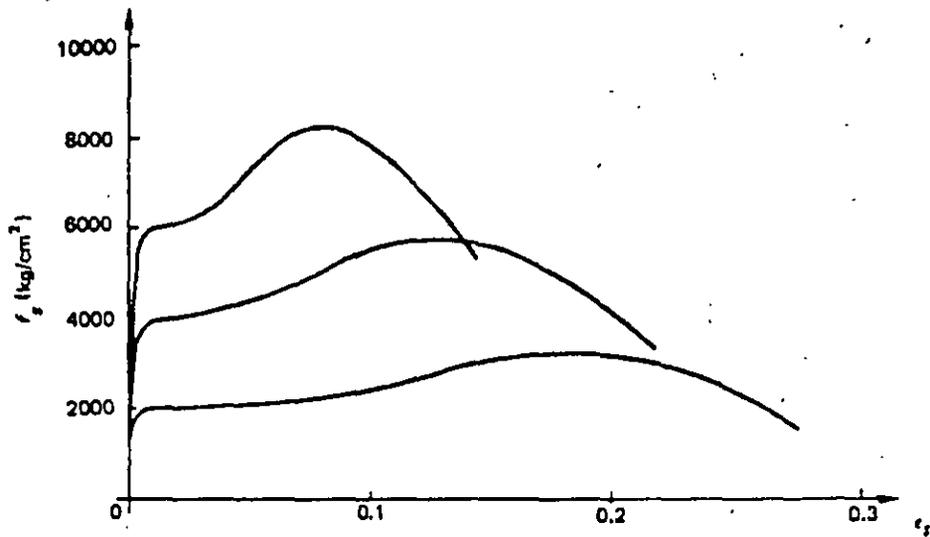


Figura 2.15 Curvas esfuerzo-deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo de fabricación europea.

su adherencia al concreto. La tabla 2.1 proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como la nomenclatura para identificarlas.

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Este límite se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de barras laminadas en caliente,

como se ve en la figura 2.15. El acero trabajado en frío no tiene un límite de fluencia bien definido (figura 2.16). En este caso, el límite de fluencia suele definirse trazando una paralela a la parte recta de la curva esfuerzo-deformación desde un valor de la deformación unitaria de 0.002; la intersección de esta paralela con la curva define el límite de fluencia.

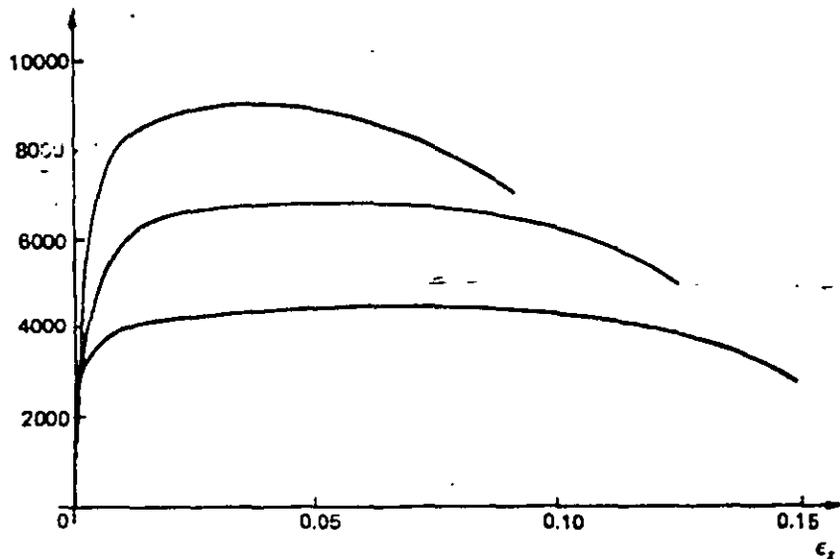


Figura 2.16 Curvas esfuerzo-deformación de acero trabajados en frío para barras de refuerzo de fabricación europea.

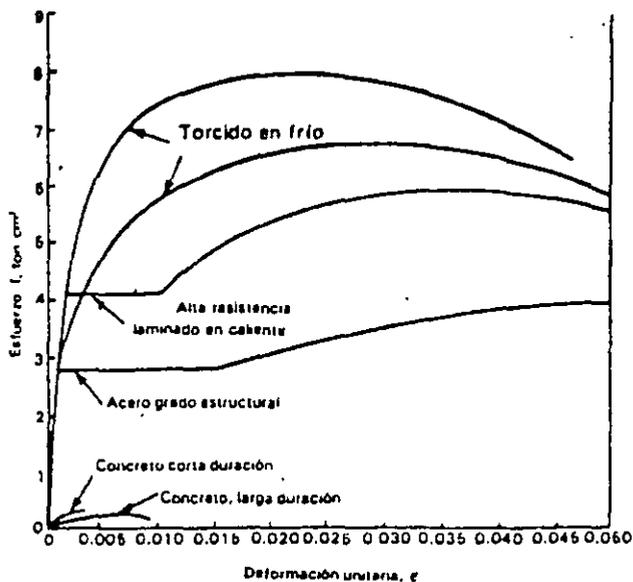


Figura 2.18 Curvas comparativas para acero y concreto  
 ración de las curvas del acero y del concreto, se puede inferir que si ambos trabajan en un

elemento de concreto reforzado sujeto a compresión axial, el colapso del conjunto estará regido por la deformación del concreto que, bajo cargas de larga duración, puede ser hasta de 0.010 ó 0.012. Para esta deformación, el acero tendría apenas una deformación del orden correspondiente a su límite de fluencia.

Las características de adherencia de los distintos aceros, y su influencia en el diseño, se presentarán en el capítulo de Adherencia. Para lograr el trabajo en conjunto debe tenerse una adherencia suficiente entre concreto y acero obtenida ya sea mecánicamente o por medio de la adhesión entre el concreto y el acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión es difícil de determinar en el caso de barras, debido a efectos de esbeltez.

## Referencias

- 2.1 Troxell, G. E., H. E. Davis y J. W. Kelly. *Composition and Properties of Concrete*, segunda edición. Nueva York, McGraw Hill, 1968.
- 2.2 Neville, A. M. *Properties of Concrete*, tercera edición. Londres, Pitman, 1981.
- 2.3 Orchard, D. F. *Concrete Technology* (3 volúmenes). Nueva York, Halsted Press. Vol. 1, 1973; Vol. 2; 1973, Vol. 3, 1976.
- 2.4 Hatano, T. y H. Tsutsumi. *Dynamical Compressive Deformation and Failure of Concrete under Earthquake Load*. Informe No. C 5904 del Laboratorio Técnico del Instituto Central de Investigaciones de la Industria Eléctrica, Tokio, septiembre 1968. Véase también el Informe No. C 5906, por T. Hatano, Tokio, marzo 1960.
- 2.5 Rüsçh, H. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, julio 1960.
- 2.6 Richart, F. E., A. Brandtzaeg y R. L. Brown. "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses". *Bulletin No. 185*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, noviembre 1928.
- 2.7 Lobo B. Carneiro, F. L. "Concrete Tensile Strength". *Buletín RILEM No. 13*, marzo 1953.
- 2.8 Akazawa, T. "Tension Test Method for Concrete". *Boletín RILEM No. 16*, noviembre 1953.
- 2.9 Timoshenko, S. P. y J. N. Goodier. *Teoría de la elasticidad*. Bilbao, URMO, 1968.
- 2.10 McHenry, D. y J. Karni. "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, abril 1958.
- 2.11 Bresler, B., y K. S. Pister. "Strength of Concrete under Combined Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, septiembre 1958.
- 2.12 Kupfer, H., H. K. Hillsdorf y H. Rüsçh. "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, agosto 1969.
- 2.13 Newman, K. y J. B. Newman. "Failure Theory and Design Criteria for Plain Concrete". En la Memoria del *International Conference of Structure, Solid Mechanics and Engineering Design and Civil Engineering Materials*. Southampton, 1969.
- 2.14 Jordá, R. *Resistencia del concreto a esfuerzos combinados*, tesis profesional. Puebla, México, Universidad Autónoma de Puebla, 1970.

- 2.15 \_\_\_\_\_. *Symposium on Creep of Concrete (SP-9)*. Detroit. American Concrete Institute, 1964.
- 2.16 Lloyd, J. P., J. L. Lott y C. E. Kesler. "Fatigue of Concrete", *Bulletin No. 499*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1968.
- 2.17 \_\_\_\_\_. *Standard Method of Test for Static Young's Modulus of Elasticity and Poissons Ratio in Compression of Cylindrical Concrete Specimens (ASTM C 469-65)*. Filadelfia, American Society for Testing and Materials, 1965.
- 2.18 Shah, S. P., editor. *Fatigue of Concrete Structures (SP 75)*. Detroit, American Concrete Institute, 1982.
- 2.19 Neville, A. M. *Tecnología del concreto (2 volúmenes)*. México, D. F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS CONCRETOS  
FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

# PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CONCRETOS FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL

Carlos Javier Mendoza Escobedo (I)

## RESUMEN

Se determinan las propiedades mecánicas de los concretos fabricados con agregados típicos del Distrito Federal y se establecen expresiones que permiten determinar las variaciones de las resistencias a compresión y tensión, del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson, del módulo de rigidez por cortante, de la contracción por secado y de la deformación diferida, a través del tiempo. Se dan recomendaciones para obtener concretos con un mejor comportamiento en cuanto a estas propiedades.

## INTRODUCCION

Los materiales pétreos empleados tradicionalmente en la ciudad de México para la fabricación de concreto, tienen características físicas que difieren de las especificadas en las normas relativas. Entre las discrepancias más notorias se pueden mencionar el peso específico, la absorción y el contenido de polvos. Lo anterior ha hecho que las propiedades de los concretos fabricados con estos agregados difieran de las alcanzadas en los concretos comunes.

Se ha observado que estos concretos, bajo condiciones de trabajo, presentan deformaciones y agrietamiento mayores que los usuales, haciéndose evidente, por estas y otras causas, la diferencia entre el comportamiento de los concretos característicos del Distrito Federal y los comunes.

## PROPIEDADES MECANICAS

Materiales componentes. En este trabajo se incluyen los resultados alcanzados con gravas y arenas andesíticas, comunes en el D.F. Se estudian dos tipos de arenas, cuya diferencia básica estriba en el contenido de polvos (material más fino que la malla 200).

Tanto las gravas como las arenas tienen peso específico bajo y absorción alta, lo que hace que los concretos fabricados con estos materiales sean muy deformables, a corto y a largo plazos.

En la fabricación de los concretos se empleó cemento Portland tipo I y no se usó aditivo alguno.

Concreto en estado fresco. Con los materiales antes descritos se hicieron proporcionamientos para resistencias nominales de 200, 300 y 400 kg/cm<sup>2</sup>. En todos los casos se usó un factor de sobrediseño de 50 kg/cm<sup>2</sup>. En las mezclas con resistencias nominales de 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> se buscó un revenimiento de 10 cm y para la de 400 kg/cm<sup>2</sup>, uno de 5 cm. Una de las mezclas de 300 kg/cm<sup>2</sup> tuvo revenimiento teórico de 12 cm, para cubrir los casos de concretos con características

adecuadas para ser transportado por medio de bombas.

Resistencia a compresión. Las edades de prueba fueron 7, 28, 90, 360 y 1825 días; cada resultado representa el promedio del ensaye de tres especímenes compactados. En la fig 1 se plantea la correlación que permite predecir la resistencia a compresión a cualquier edad en función de la alcanzada a los 28 días. Cabe mencionar que los incrementos de resistencia con la edad fueron mayores en aquellos concretos con menos polvo. La expresión sugerida resulta ser:

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ en kg/cm}^2$$

Resistencia a tensión. Se hicieron especímenes cilíndricos para ensayarlos a tensión por medio de la prueba indirecta, así como vigas para determinar el módulo de rotura. Las expresiones que correlacionan las resistencias a tensión y compresión resultan ser:

Tensión indirecta, fig 2 ; por flexión, fig 3

$$f_t = 1.47 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2 \quad f_f = 1.81 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad se obtuvo a partir de las gráficas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados a compresión. Se usó el criterio de módulo secante. Por cada mezcla de concreto estudiada se hicieron tres ensayos, siendo los valores reportados el promedio alcanzado en estas determinaciones. La expresión propuesta para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión es, fig 4

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Relación de Poisson. Esta se obtuvo del ensaye a 28 días de especímenes cilíndricos de concreto de diferentes resistencias. En la fig 5 se observa que la relación de Poisson varía con la resistencia y que se puede relacionar con ésta con la expresión

$$\mu = 0.22 + 0.00026 f'_c$$

habiendo alcanzado un valor medio de 0.30, superior al intervalo usual recomendado para el concreto (0.15 - 0.20).

Módulo de rigidez por cortante. Con los valores de módulos de elasticidad y relación de Poisson conocidos, se pueden estimar el módulo de rigidez por cortante. Para los concretos de agregados andesíticos resultó ser

$$G = 3300 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Deformación unitaria ( $\epsilon_0$ ) correspondiente al esfuerzo máximo. El valor de esta deformación también se ve afectado por el nivel de resistencia que se alcance en el concreto, por lo que se puede correlacionar con ella con la expresión siguiente, fig 6

$$\epsilon_0 = 0.003 + 2.8 \times 10^{-6} f'_c$$

Los resultados de los ensayos condujeron a un valor medio de esta deformación ( $\bar{\epsilon}_0$ )

igual a 0.0044.

La curva esfuerzo-deformación del concreto bajo cargas de compresión, puede representarse en forma adecuada con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c}{\epsilon_0 \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}, \text{ en kg/cm}^2$$

Contracción por secado. La rapidez con que se presenta la contracción de los concretos andesíticos, varía de acuerdo con el contenido de polvos que se tenga en los materiales componentes, sin embargo, la contracción última se puede estimar del mismo orden para los dos casos e igual  $(\epsilon_{cs})_u = 0.001$ , para los proporcionamientos usuales y las condiciones ambientes de la ciudad de México, fig 7. Las expresiones que permiten estimar el valor de la contracción para una edad cualquiera se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.001$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.001$$

en ambos casos t debe expresarse en días.

Deformación diferida. Esta deformación se estimó en función del coeficiente de deformación diferida ( $C_t$ ), el cual es igual  $C_t = \frac{\epsilon_t - \epsilon_i}{\epsilon_1}$ , siendo  $\epsilon_t$ , la deformación unitaria alcanzada en un tiempo t y  $\epsilon_i$ , la deformación unitaria inicial al aplicar el esfuerzo de compresión, igual a 40 por ciento del esfuerzo máximo.

El valor del coeficiente último ( $C_u$ ), estimado para un tiempo infinito, para los proporcionamientos usuales y para las condiciones ambientes de la ciudad de México, variarán de acuerdo con el contenido de polvos observados en los materiales componentes, fig 8. Las expresiones encontradas para calcular el valor de este coeficiente para un tiempo cualquiera t, en días, se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \times 4$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \times 2.5$$

Contracción por secado en condición estándar. Tomando en cuenta los coeficientes determinados con los resultados de los ensayos y las modificaciones en la contracción última para ponerla en condición estándar, se recomienda emplear las siguientes expresiones para la estimación de la contracción por secado a cualquier edad:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.0013$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.0013$$

En estas expresiones el valor de  $t$  se debe tomar como el número de días después de la suspensión del curado húmedo y el valor de la contracción determinada se debe afectar por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del concreto de que se trate y las condiciones del medio ambiente, fig 9.

Deformación diferida última en condición estándar. Entre las variables que mayor influencia tuvieron en los valores de los coeficientes de deformación diferida última están la edad a la que se aplica la carga, la humedad relativa, y el revenimiento, los cuales incrementaron los valores alcanzados en los ensayos.

El coeficiente de deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$c_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \cdot 5.65$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$c_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \cdot 3.12$$

Al igual que en la contracción por secado los coeficientes calculados para la deformación diferida, deberán ser afectados por los factores de corrección para tomar en cuenta las características particulares de los concretos empleados y las condiciones del medio ambiente en que se encuentran, fig 9.

#### CONCLUSIONES

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción, como los andesíticos, en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Dadas las discrepancias encontradas entre las expresiones usuales y las

determinadas en este estudio para estimar la resistencia del concreto así como sus deformaciones a corto y largo plazos, se requiere modificar los parámetros usados convencionalmente en los diseños estructurales para obtener mejor concordancia entre el comportamiento estimado en el diseño y el alcanzado en las estructuras reales.

3. La contracción por secado registrada fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas y al revenimiento de las mezclas utilizadas.
4. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida. Este coeficiente también aumentará en forma apreciable al incrementarse el revenimiento del concreto.

#### RECOMENDACIONES

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por secado, porque hay mayor restricción a estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conducirá a menores consumos de agua lo que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

La resistencia a tensión por flexión del concreto es usual valuarla como  $2\sqrt{f'_c}$  (ACI 318, RDF), sin embargo, los resultados de los ensayos efectuados con los concretos andesíticos dan resistencias a la tensión ligeramente menores, por lo que se sugiere tomar en cuenta esta discrepancia empleando la expresión propuesta.

En relación con el módulo de elasticidad estático, las expresiones propuestas por los diferentes reglamentos de construcción (ACI 318, RDF) sobrestiman los valores alcanzados con los concretos andesíticos, por lo que se recomienda emplear la expresión propuesta en este trabajo para predecir las deformaciones a corto plazo de las estructuras hechas con este material.

Al igual que los otros parámetros la relación de Poisson y el módulo de rigidez por cortante determinados para el concreto andesítico, difieren de los valores usualmente empleados, por lo que para estimar mejor el comportamiento de estos concretos conviene emplear los valores sugeridos.

La deformación correspondiente al esfuerzo máximo es usual considerarla igual a 0.003, sin embargo, el resultado de los ensayos indican que esta deformación alcanza un valor promedio de 0.0044.

En relación con las deformaciones a largo plazo, tanto las originadas por la contracción como por la deformación diferida, pueden estimarse con buena precisión con los coeficientes determinados de los resultados de los ensayos, sin requerirse de correcciones por características del material y medio ambiente del Distrito Federal, dado que los concretos empleados son característicos de los usuales en el área metropolitana de la ciudad de México, y las condiciones de curado representan también las usuales en esta área.

Cuando las características del concreto y las condiciones del medio ambiente varían, haciendo no aplicables directamente los resultados de los ensayos, se recomienda emplear los valores sugeridos para características y condiciones estándar y hacer todas las correcciones necesarias para adecuar los coeficientes a las circunstancias de cada caso en particular, de acuerdo con los factores de corrección indicados en la fig 9.

Como las deformaciones y agrietamientos alcanzados a largo plazo en los concretos característicos del D.F. son mucho mayores que los esperados usualmente, se deben tomar en el diseño las precauciones necesarias para restringir estos efectos con el acero de refuerzo u otros medios adecuados.

#### REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J. "Estudio de las propiedades a largo plazo de los concretos en el Distrito Federal" Informe elaborado para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano, enero 1984
2. Neville, A.M. "Properties of Concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
3. ACI Committee 209 "Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures", ACI Publication SP-27.

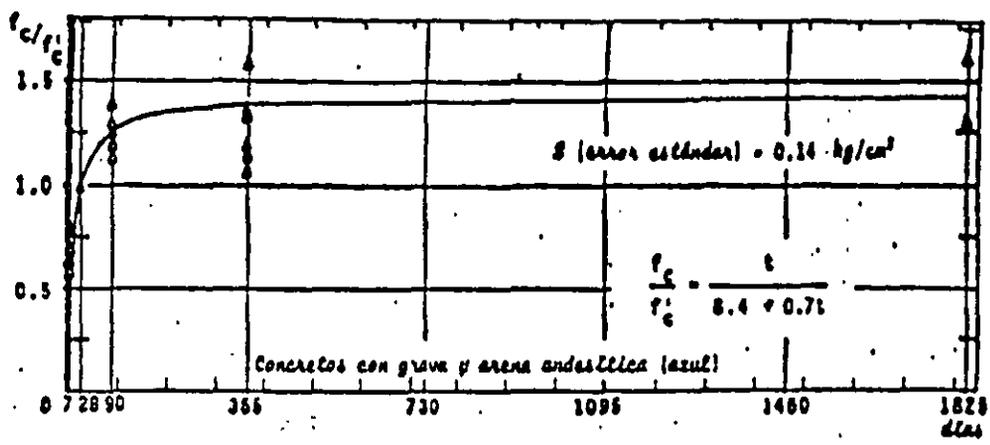


Fig 1 Variación de la resistencia a compresión con el tiempo

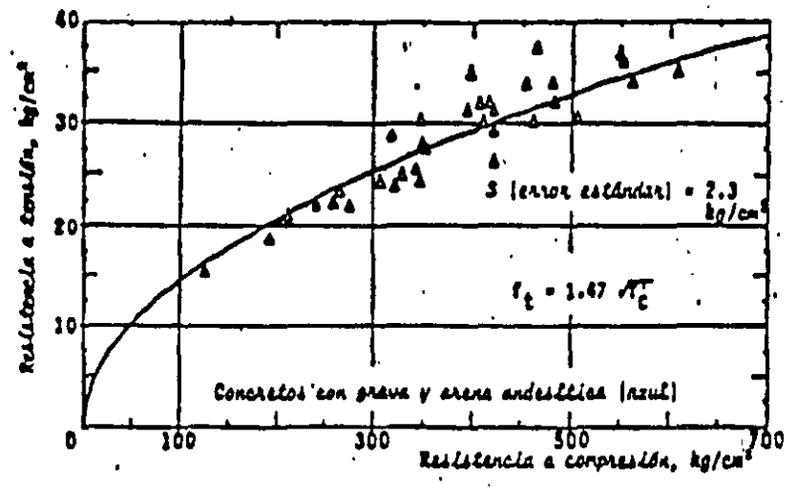


Fig 2 Resistencia a tensión por compresión diametral

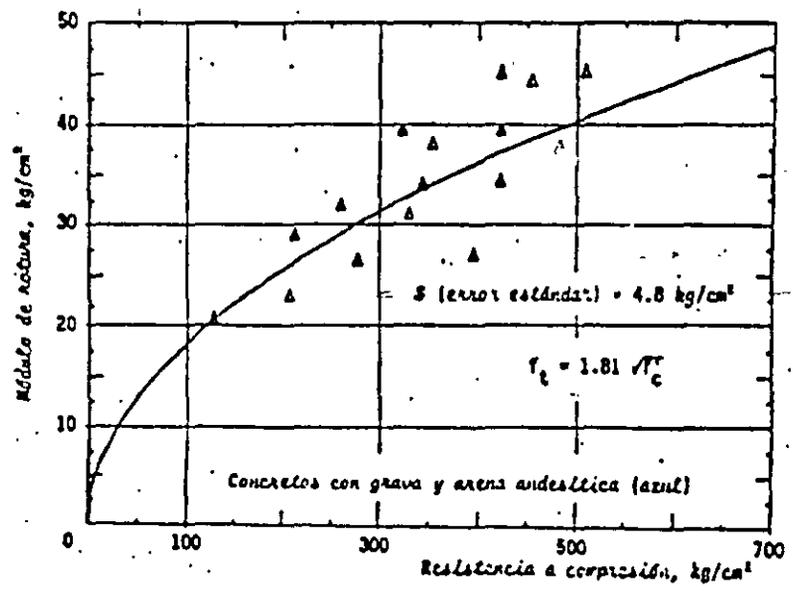


Fig 3 Resistencia a tensión por flexión

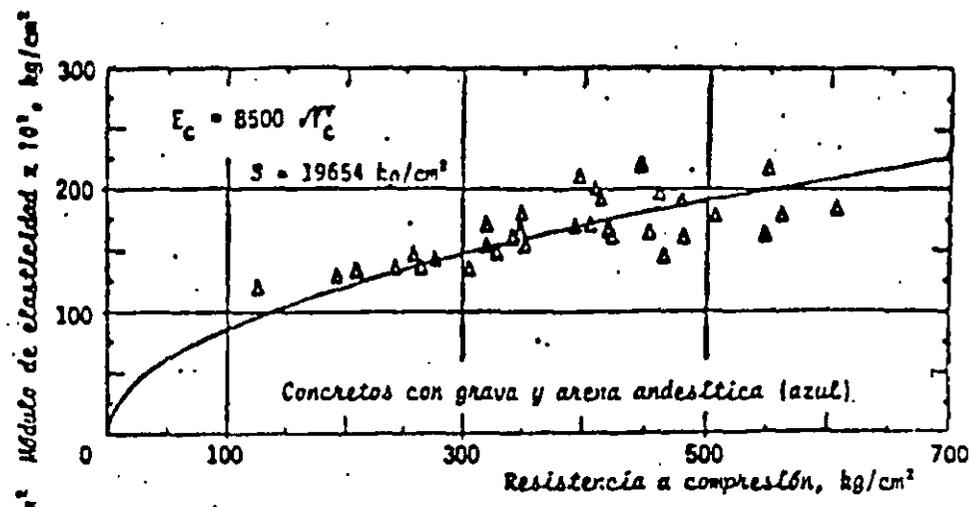


Fig 4 Módulo de elasticidad

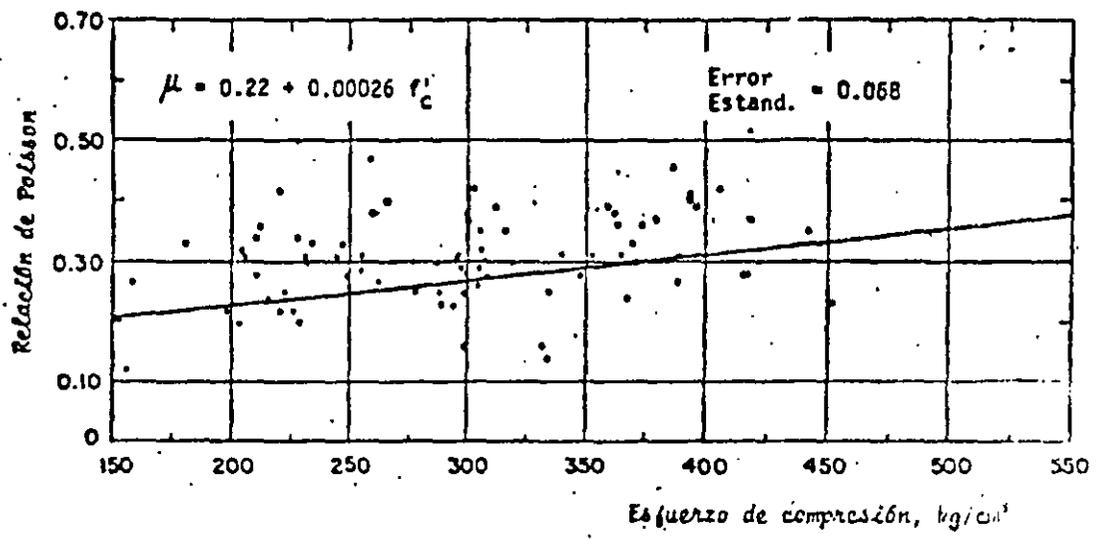
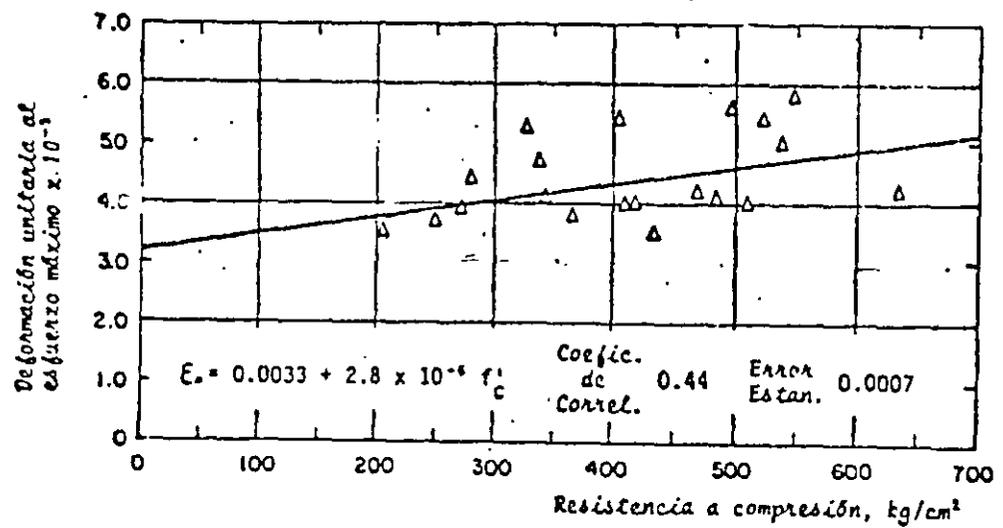
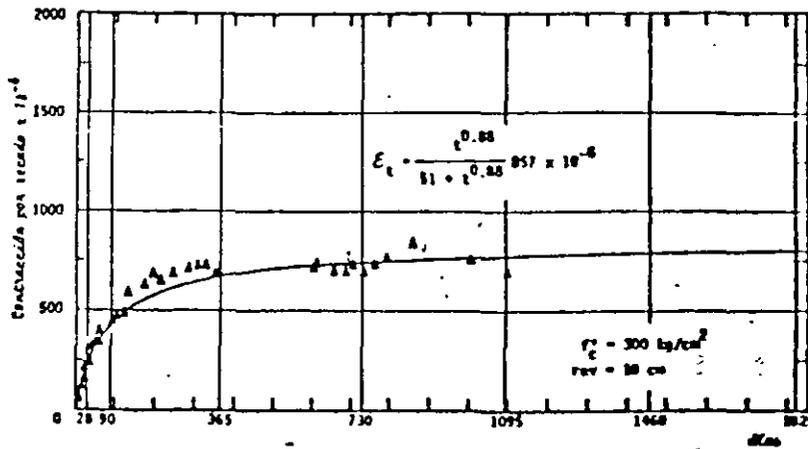


Fig 5 Relación de Poisson para concretos andesíticos

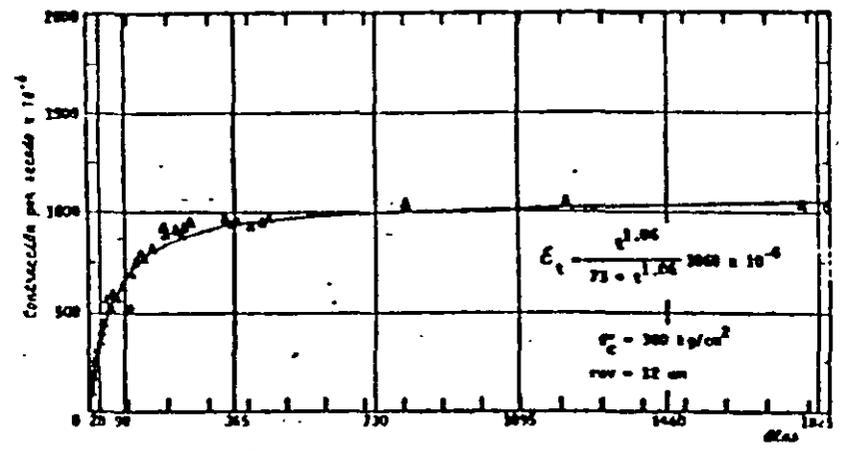


a) Concretos andesíticos

Fig 6 Relación entre deformación unitaria al esfuerzo máximo y resistencia a compresión

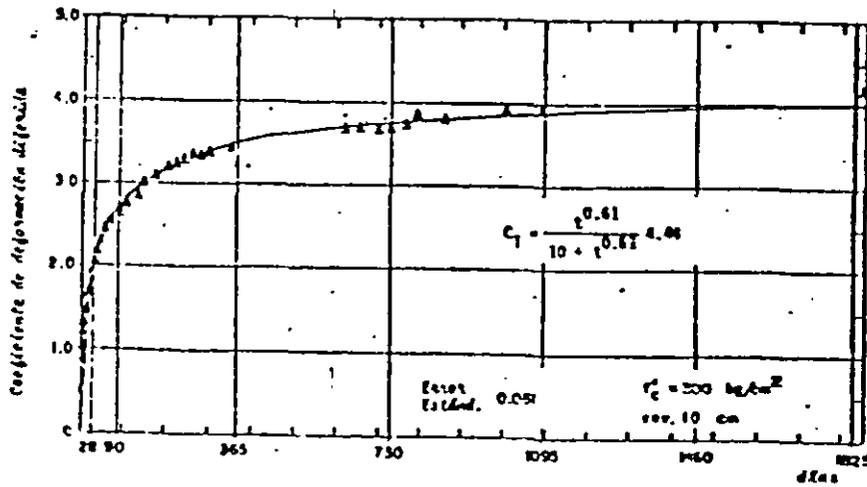


a) Concretos andesíticos con exceso de polvos

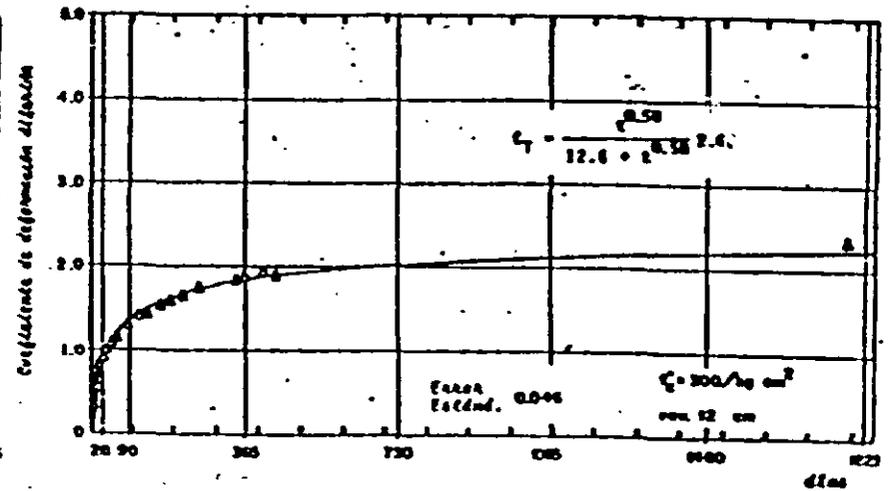


b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 7 Contracción por secado



a) Concretos andesíticos con exceso de polvos



b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 8 Deformación diferida

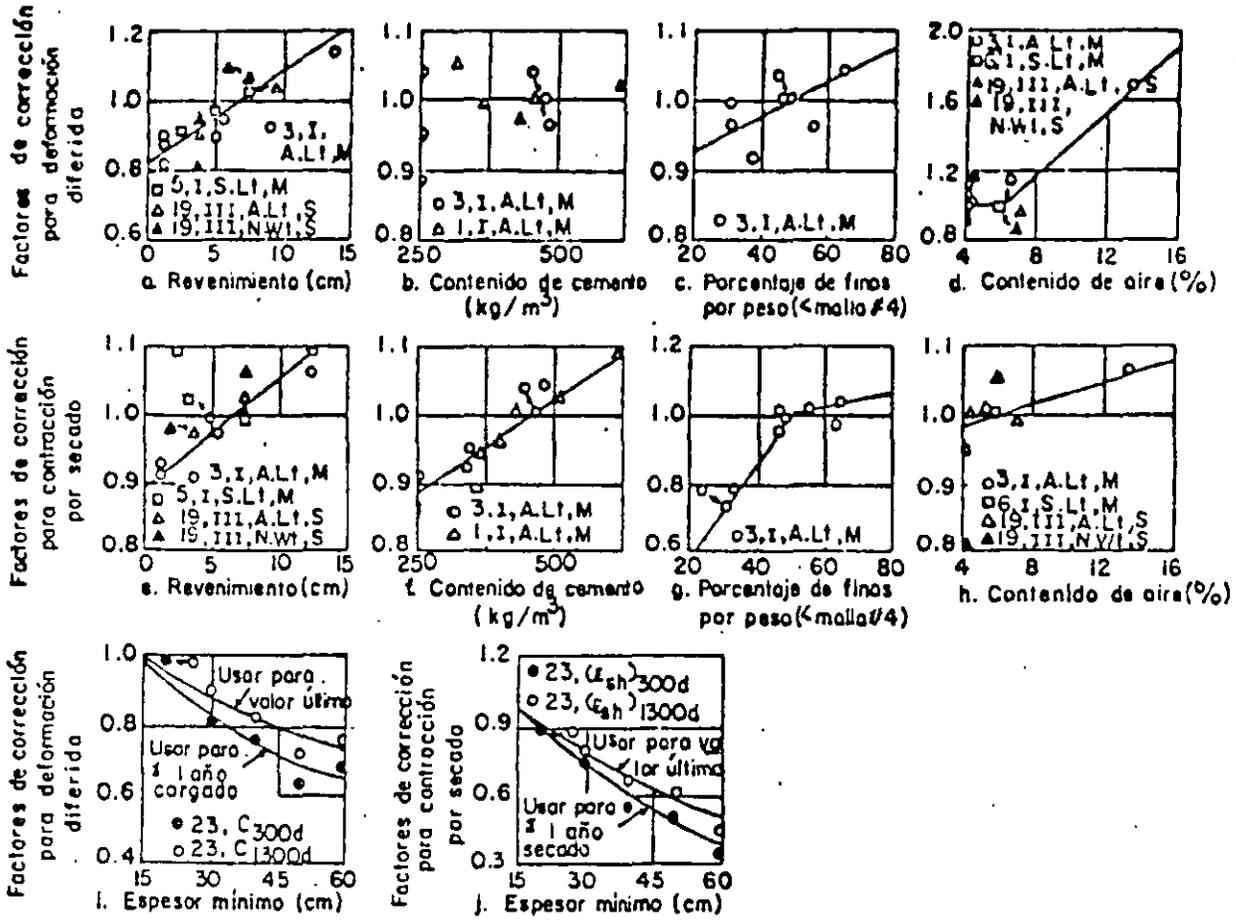


Fig 9 Factores de corrección nominales para deformación diferida y contracción por secado para los parametros mostrados. I, III - Tipo de cemento; N.Wt, S. Lt, A.Lt - peso del concreto; M, S - curado húmedo y a vapor (ref 3 )



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO III**

# **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

## **TEMA**

# **INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL DISTRITO FEDERAL**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

# INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL D.F.

---

Ing. Carlos Javier Mendoza\*  
Ing. Manuel Mena Ferrer\*\*

## RESUMEN

---

Se analiza el efecto que tienen las partículas más finas de las arenas andesíticas y las características intrínsecas de las gravas calizas y andesíticas, disponibles en la ciudad de México, sobre las propiedades de los concretos en los estados fresco y endurecido. Además, se dan recomendaciones para mejorar las propiedades de estos concretos.

## SUMMARY

---

The effects of the finest part of andesitic sands and of the intrinsic characteristics of limestones and andesitic gravels, available in Mexico City, in the properties of fresh and hardened concrete are analyzed. Also, recommendations for improving the properties of these concretes are given.

\* Subdirector, Instituto de Ingeniería, UNAM

\*\* Asesor en tecnología del concreto

## INTRODUCCIÓN

Los concretos utilizados comúnmente en la Ciudad de México presentan ciertas deficiencias, originadas en algunos casos por la calidad de los materiales componentes y en otros por las prácticas constructivas empleadas. Entre las deficiencias más notorias se pueden señalar las siguientes:

- a) La deficiente calidad de los agregados empleados propicia que los concretos tengan propiedades inadecuadas como bajo módulo de elasticidad, elevados cambios volumétricos por secado y excesivas deformaciones diferidas bajo cargas sostenidas (flujo plástico). Asimismo, la tendencia al empleo de mezclas demasiado fluidas ocasiona sangrado excesivo en el concreto recién colocado y produce mayor contracción por secado en el concreto endurecido. Por todo ello, las estructuras de concreto son propensas a presentar agrietamientos por elevados cambios volumétricos, excesivas deformaciones a corto y largo plazo y escasa rigidez ante cargas laterales.
- b) El empleo de cemento portland-puzolana en la fabricación de concreto propicia una adquisición de resistencia más lenta que la obtenida con otros tipos de cemento portland (I y III), lo cual es incompatible con la práctica usual de pronto descimbrado de las estructuras, en particular de los sistemas de pisos para edificios, y dar lugar a flechas excesivas y agrietamientos inaceptables.
- c) Las pruebas de control de calidad realizadas por diferentes laboratorios<sup>2</sup> indican que en relativa frecuencia los concretos no cumplen con los requisitos de calidad especificados y que la proporción de mezclas con resistencias inferiores a la especificada llega a cerca de un 30%, sobre todo para algunos valores de  $f_c$ . Lo anterior ocasiona que los factores de seguridad de un número importante de elementos estructurales sean inferiores a los considerados en los reglamentos.

Los problemas anteriores tienden a agudizarse con los llamados concretos "bombeables", cuando se usan mezclas

con contenidos excesivamente altos y proporciones excesivas de arena.

Por todo lo mencionado se opina que las características y propiedades del concreto que se ha utilizado normalmente en la Ciudad de México no son las más favorables para su empleo con fines estructurales, lo cual ha hecho pensar en la necesidad de introducir mejoras sustanciales, tanto en los materiales componentes como en el control de calidad y en las prácticas constructivas, sobre todo para aquellas aplicaciones con mayor requerimiento estructural.

Con el propósito de evaluar los efectos de ciertos cambios que en lo relativo a la calidad de los agregados pueden realizarse, se diseñó un programa

de ensayos en mezclas de concreto, que se llevó a cabo simultáneamente en tres diferentes laboratorios independientes de la Ciudad de México. En este trabajo se analizan los resultados obtenidos.

## MATERIALES EMPLEADOS

Para mejorar las propiedades de los concretos que se utilizan en las construcciones del Distrito Federal, se pueden considerar dos modificaciones principales en los agregados:

- a) Emplear gravas de mejor calidad que las actuales de andesita y basalto escoriáceo.
- b) Reducir el contenido de finos indeseables ( $< 74\mu$ ) en las arenas, y comprobar que los aceptados no tengan

TABLA 1. PROPIEDADES FISICAS DE LAS GRAVAS

GRAVAS CONCEPTOS	ANDESITICA		CALIZA TRITURADA		NORMA ASTM C-33
	5-10 mm	10-20 mm	5-10 mm	10-20 mm	
1. Material más fino que la malla No. 200,	1.60	0.40	0.67	0.75	1 máx.
2. Densidad	2.42	2.41	2.63	2.63	
3. Absorción,	4.54	4.19	0.82	0.68	
4. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en	9.8	14.7	8.0	7.4	12 máx.
5. Abrasión en Máquina Los Angeles, pérdida en	23.8	27.1	17.5	14.9	50 máx.
6. Coeficiente volumétrico:					
Por tamaños	0.34	0.37	0.13	0.22	
Grava total		0.36		0.19	
7. Pesos volumétricos:					
Suelto, $\text{kg/m}^3$	1256	1266	1366	1348	
Varillado, $\text{kg/m}^3$	1354	1370	1517	1528	

**TABLA 2. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LAS ARENAS**

CONCEPTOS	IDENTIFICACION (% FINOS)	ARENAS ANDESITICAS				ARENA DE RE- FEREN- CIA (1.1)	NORMA ASTM C-33
		(7.7)	(9.9)	(16.7)	(19.3)		
1. Módulo de finura	3.44	3.00	2.60	2.97	2.78	2.80	2.3-3.1
2. Material más fino que la malla No. 200, %	1.8	7.7	9.9	16.7	19.3	1.1	5 máx.
3. Densidad	2.40	2.28	2.40	2.37	2.30	2.31	
4. Absorción, %	5.85	5.87	4.38	4.94	7.93	5.12	
5. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en %	5.67	10.54				5.82	10 máx.
6. Pesos volumétricos:							
Suelto, kg/m <sup>3</sup>	1396	1392	1443	1440	1450	1386	
Varillado, kg/m <sup>3</sup>	1531	1590	1690	1635	1624	1524	
7. Materia orgánica, color respecto al límite	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	
8. Equivalente de arena, %	82.9	66.0	59.3	65.4	52.1	84.5	
9. Límites de consistencia:							
Límite líquido, %	17.2	23.1	19.0	21.1	22.3	15.6	
Límite plástico, %	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Índice plástico	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Contracción lineal, %	0.0	2.10	0.0	1.95	1.85	0.0	

\* Arena andesítica lavada

propiedades plásticas.

Para cuantificar qué tanto pueden influir estas modificaciones en las propiedades del concreto, se realizó un estudio comparativo que incluyó mezclas con dos tipos de grava (andesítica natural y caliza triturada), cinco arenas andesíticas con diferentes contenidos de finos y una arena de referencia, no andesítica, que cumplió con los requisitos físicos de la norma ASTM C33.<sup>3</sup>

En cuanto al cemento, se optó por emplear cemento portland tipo I como único material cementante y no usar aditivos en la preparación de las mezclas.

### Cemento

Las pruebas físicas y químicas efectuadas al cemento portland tipo I empleado indicaron que cumple ampliamente con los requisitos especificados en la norma ASTM C150<sup>4</sup>. Sin embargo, cabe señalar que resultó ser menos fino de lo que suelen ser los cementos del mismo tipo.

### Agregados

#### a) GRAVAS

Las gravas tanto andesíticas como calizas se dividieron en dos fracciones: de 5 a 10 mm y de 10 a 20 mm. Estas fracciones se combinaron en proporción de 35 y 65%, respectivamente, para integrar el agregado grueso

empleado.

Las propiedades físicas de estas gravas se presentan en la tabla 1. Los valores ahí mostrados son el promedio de las pruebas efectuadas en los tres laboratorios que participaron en el estudio.

Los resultados de las pruebas de densidad y absorción muestran una diferencia importante entre las gravas andesíticas y calizas, en favor de las segundas. Si se admite que estas propiedades pueden ser un buen índice del grado de deformabilidad de las rocas que las constituyen, debe esperarse que los concretos hechos

TABLA 3. MEZCLAS DE CONCRETO DE PRUEBA

Materiales	Mezclas No. (consumo promedio, kg/m <sup>3</sup> )								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cemento	300	296	297	297	303	300	295	294	298
Arena andesítica (finos <math><math>): 1.87.7 9.9 16.7 19.3	775	755	736	770	742	774	752	761	740
Arena de referencia									
Grava andesítica	952	938	940						
Grava caliza				1024	1044	1034	1018	1014	1027
Agua	179	187	190	183	176	183	193	194	177
Agua/cemento	0.60	0.63	0.65	0.62	0.58	0.61	0.63	0.68	0.59

con la grava caliza resulten mucho menos deformables.

**b) ARENAS**

Se utilizaron cinco arenas andesíticas cuyos contenidos de finos menores que la malla 200 variaron entre 1.8 y 19.3%. Cuatro de estas arenas procedieron de otros tantos bancos (depósitos piroclásticos) de la región. La arena andesítica con 1.8% de finos se obtuvo por lavado. A manera de referencia se empleó una arena no andesítica con un contenido de finos de 1.1%.

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas efectuadas a estas arenas. Conviene notar que, además de las pruebas físicas que son usuales, se efectuaron otras dos determinaciones: el equivalente de arena y los límites de consistencia. Esto se hizo con el fin de buscar un medio que permitiera evaluar las propiedades plásticas de los finos de estas arenas.

Las especificaciones de calidad para agregados por lo regular aceptan un máximo de 5% de partículas más finas que la malla 200 (74 $\mu$ ) en arenas para concretos de uso general, no expuestos a la abrasión. Todas las arenas andesíticas que se utilizan en los concretos del Distrito Federal ex-

ceden por mucho este límite, pues sus contenidos de finos suelen fluctuar entre cerca del 10 y algo más del 20%. Debido a las dificultades que existen para reducir estos finos a valores aceptables, se ha vuelto costumbre tolerarlos sin mayor trámite, aduciendo que se trata de finos inertes que no afectan la calidad del concreto; sin embargo, la experiencia ha demostrado que esto no siempre es así, pues hay arenas contaminadas con finos plásticos (limos y arcillas) que sí son dañinos para el concreto.

Como es usual, todas estas arenas andesíticas exhibieron densidades relativamente bajas y altas absorciones. Conviene observar que, en este aspecto, la arena de referencia no presentó mejores características.

**PROGRAMA DE PRUEBAS**

El programa incluyó nueve mezclas de concreto en las que se mantuvieron constantes las siguientes características:

- a) Cemento: portland tipo
- b) Tamaño máximo de grava: 20 mm
- c) Granulometría de la grava: 35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm
- d) Consumo de cemento: 300  $\pm$  5 kg/m<sup>3</sup>
- e) Proporción de arena en los agrega-

dos: 45% en volumen absoluto  
f) Revenimiento del concreto: 10  $\pm$  cm

Los consumos de materiales por metro cúbico de concreto, así como la relación agua/cemento de cada mezcla se presentan en la tabla 3.

**Pruebas realizadas**

A todas las mezclas de concreto se efectuaron las mismas pruebas. Los métodos de ensaye fueron preferentemente los de las normas oficiales mexicanas (NOM) y, en su defecto, los de ASTM. Las pruebas que se practicaron al concreto fresco fueron: revenimiento, peso volumétrico, contenido de agua (método gravimétrico) y agua de segregación. Al concreto endurecido se le hicieron las siguientes determinaciones: resistencia a compresión y módulo de elasticidad a 28 días, y contracción secado con 28 días en agua y 28 días al aire. Los resultados de estos ensayos se presentan en las tablas 4 y 5.

**CARACTERISTICAS DE LOS CONCRETOS**

El objetivo del estudio consistió en verificar la influencia que ejercen los contenidos de finos de las arenas y las características de las gravas sobre las propiedades de los concretos ensayados. Tomando en cuenta que en este estudio la cantidad de finos totales en el

reto resultó proporcional a los contenidos de las arenas, como se muestra en la figura 1, las referencias se hacen en función de los finos de las arenas para facilitar la identificación de las mezclas.

#### Concretos en estado fresco

En la tabla 4 se presentan los resultados promedio de los ensayos efectuados en los tres laboratorios a los concretos en estado fresco. Como se puede observar, las mezclas estudiadas tuvieron revenimientos que variaron entre 9 y 10.5 cm; todos ellos quedaron en el intervalo de  $10 \pm 1$  cm propuestos para el estudio.

Dado que el revenimiento se mantuvo constante, el parámetro que se puede considerar para juzgar la influen-

cia del contenido de finos resulta ser el consumo de agua por volumen unitario de concreto. A este respecto, en la figura 2 se observa que, independientemente del tipo de grava empleada, el consumo de agua se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta un 10%, y después de este valor, dicho consumo se incrementó en forma gradual hasta ser 8% mayor para contenidos de finos de 19% en la arena.

Por otro lado, si se comparan los 180 Kg de agua por metro cúbico de concreto requeridos en este caso, contra los 200 que estima el ACI 211.1<sup>3</sup> para un tamaño máximo de agregado de 20 mm, en mezclas sin aire incluido y revenimientos entre 8 y 10 cm, resulta que las mezclas en estudio necesitaron

10% menos de agua. Esta disminución se debió muy probablemente a la finura del cemento, que por ser más grueso de lo usual requirió menos agua para producir el revenimiento previsto.

En relación con el peso volumétrico de los concretos estudiados, en la tabla 4 y la figura 3 se observa que para contenidos de finos de hasta 10% el peso volumétrico se mantuvo constante y que éste disminuyó a medida que aumentaron los finos en las arenas más allá de ese valor. Asimismo se puede ver que existe una diferencia de alrededor de  $80 \text{ kg/m}^3$  entre los concretos fabricados con grava caliza y los hechos con andesita, a favor de la primera.

Dada la diferencia tan clara en cuanto a peso volumétrico de estos dos ti-

TABLA 4. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO FRESCO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Revenimiento, cm	10.5	9.5	10.0	9.5	9.0	10.5	10.0	9.0	9.5
Peso volumétrico, $\text{kg/m}^3$	2207	2176	2165	2274	2270	2291	2258	2263	2242
Vacíos,	0.6	1.1	1.3	1.3	0.3	0.5	0.9	0.7	1.7
Agua de sangrado,	3.3	2.4	1.7	3.0	1.8	3.1	1.7	1.3	3.0

TABLA 5. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO ENDURECIDO

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Resistencia a compresión a 28 días ( $f'_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	283	266	242	279	283	289	282	242	273
Módulo de elasticidad a 28 días ( $E_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	157318	140369	138284	282350	279042	286094	259474	254460	274566
Relación $E_c/f'_c$	9352	8607	8809	16904	16587	16829	15457	16357	16617
Constricción por secado, 28 días en agua y 28 días al aire, $10^{-6}$	533	733	759	337	443	332	403	448	308

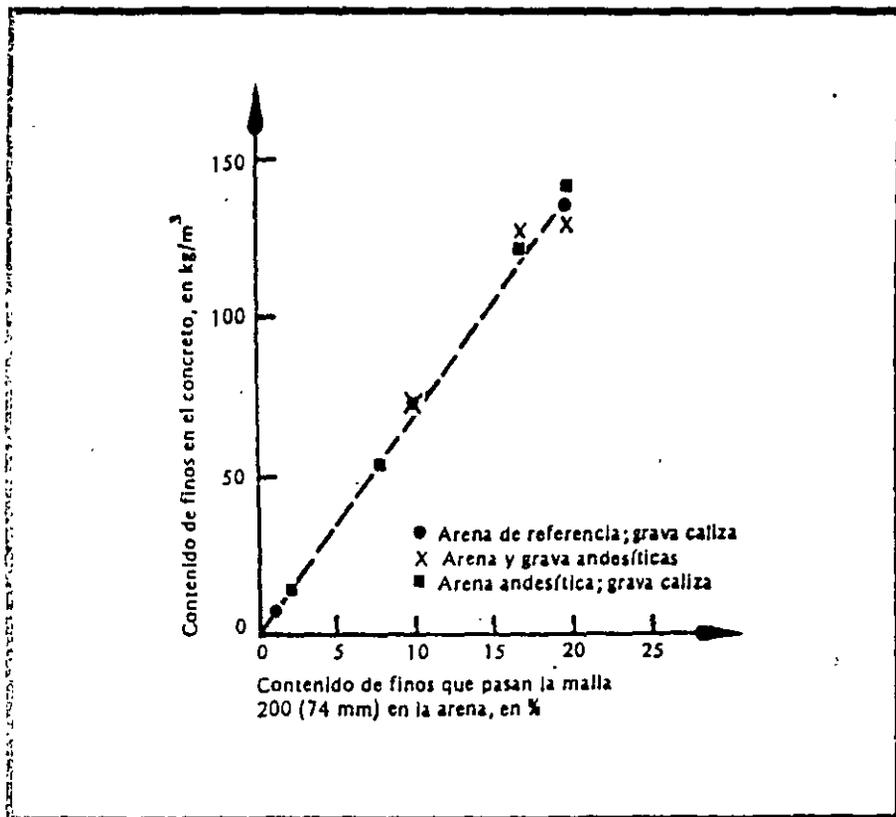


Fig. 1. Proporcionalidad entre los contenidos de finos de la arena y del concreto.

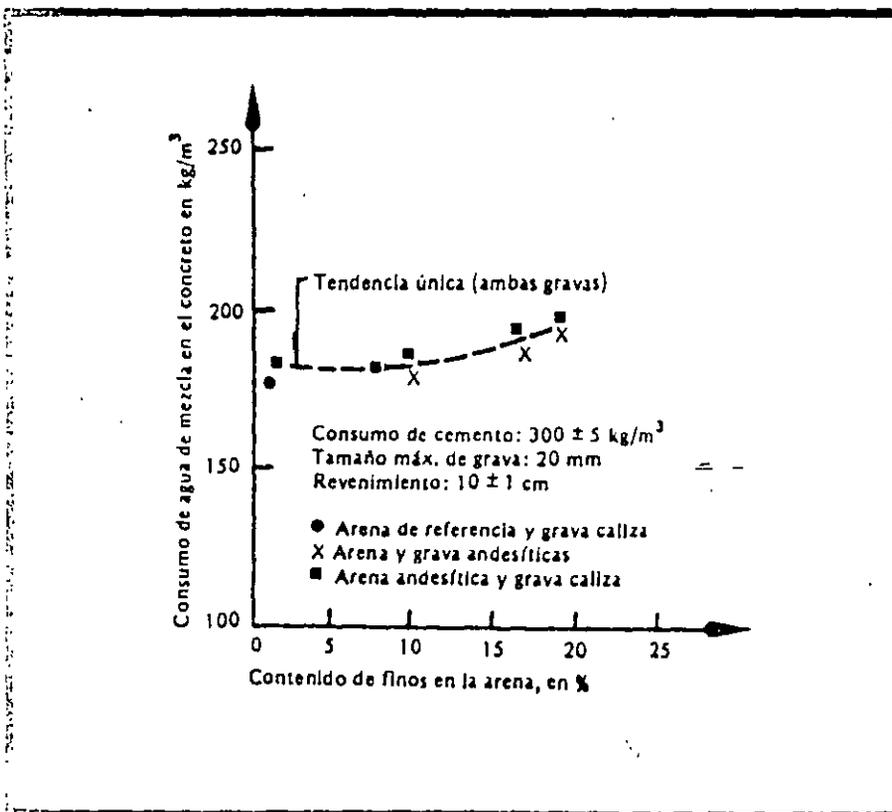


Fig. 2. Relación entre el contenido de finos de la arena y el consumo de agua de mezcla en el concreto.

pos de concreto y tomando en cuenta la simplicidad de la prueba, se puede sugerir su ejecución en obra como una primera medida para discriminar entre los dos tipos de concreto. Un valor razonable que se puede considerar como frontera entre los dos tipos de concreto es  $2250 \text{ kg/m}^3$ .

El contenido de vacíos de las mezclas estudiadas (figura 4), establecido en función de los volúmenes absolutos de los materiales componentes, parece tener un comportamiento independiente del tipo de agregado grueso y del contenido de finos en la arena. Los valores obtenidos resultan ser inferiores a los usualmente estimados para este tipo de mezclas (2%).

En relación con el agua de sangrado, en la figura 5 se puede observar que las mezclas estudiadas siguen una sola tendencia, independientemente del tipo de grava utilizada, y que para contenidos de finos de hasta 10% el sangrado resulta constante y cercano al 3%. Para contenidos finos en la arena mayores que 10% el sangrado disminuye a valores cercanos al 1.5% para porcentajes de finos de 19%.

Cabe señalar el comportamiento discrepante de la mezcla fabricada con arena con 7.7% de finos, la cual tuvo un sangrado de tan sólo 1.8%. Esta situación se atribuye a que, no obstante que la arena tiene relativamente pocos finos, parte de ellos tienen características plásticas, lo que les permite retener mejor el agua.

Los resultados anteriores representan una contradicción, ya que por una parte es deseable limitar el porcentaje de finos en la arena y por otra es conveniente al mismo tiempo tener el mínimo de sangrado posible. Aparentemente la consistencia de la mezcla (revenimiento) tiene una influencia más significativa e importante en cuanto al sangrado; pero dado que las mezclas estudiadas tuvieron un revenimiento poco variable (9 a 10.5 cm), la influencia del mismo no quedó totalmente definida. Sin embargo, en la figura 6 se muestra una relación entre el sangrado y el revenimiento. Aunque ésta varió en un intervalo muy reducido, la figura parece sugerir que sería adecuado limitar

El sangrado a valores inferiores al 3.5%.

Los resultados en estado endurecido de las propiedades determinadas a los concretos en estado endurecido se presentan en la tabla 5. Estas propiedades son las resistencia a la compresión y el módulo de elasticidad del concreto a 3 días de edad, y la contracción por secado después de 28 días de curado en agua a 23°C y 28 días de secado al aire a 23°C y 50% de humedad relativa.

En cuanto a la resistencia a la compresión, dado que los consumos de cemento y los revenimientos de todas las mezclas fueron prácticamente constantes, los resultados alcanzados se pueden comparar en forma directa; así, en la figura 7 se puede ver que los tipos de grava estudiadas y los diferentes contenidos de finos en la arena no tuvieron influencia en la resistencia a la compresión hasta para contenidos de finos del 10%, en tanto que para porcentajes mayores la resistencia a la compresión decreció hasta una reducción del orden del 15% para arenas con 9% de finos. Cabe hacer notar que el concreto fabricado con la arena considerada como de referencia siguió la misma tendencia general observada en los concretos con arenas andesíticas.

Otra forma de tomar en cuenta el efecto de los finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto es a través de la eficiencia del cemento, entendida ésta como la relación consumo de cemento/resistencia a la compresión (figura 8).

En esta figura se puede ver que para contenidos de finos en las arenas menores que el 10%, la relación antes mencionada se mantuvo constante en un valor de 1.06, en tanto que este valor se incrementó a 1.23 cuando los finos en la arena llegaron a ser del orden del 9%, lo que equivale a tener un incremento del 16% en el consumo de cemento para igualdad de resistencias.

En relación con el módulo de elasticidad, en la figura 9 se puede observar la gran influencia que tuvo el tipo de grava que se empleó en la fabricación del concreto. Se encontraron diferen-

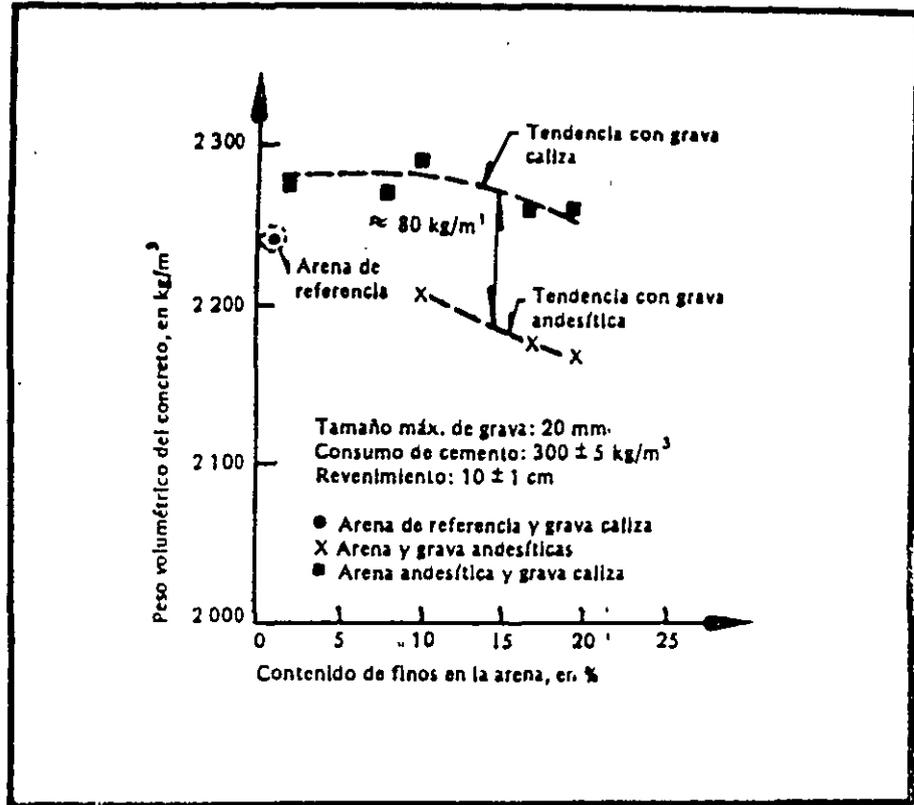


Fig. 3. Influencia del contenido de finos de la arena en el peso volumétrico del concreto.

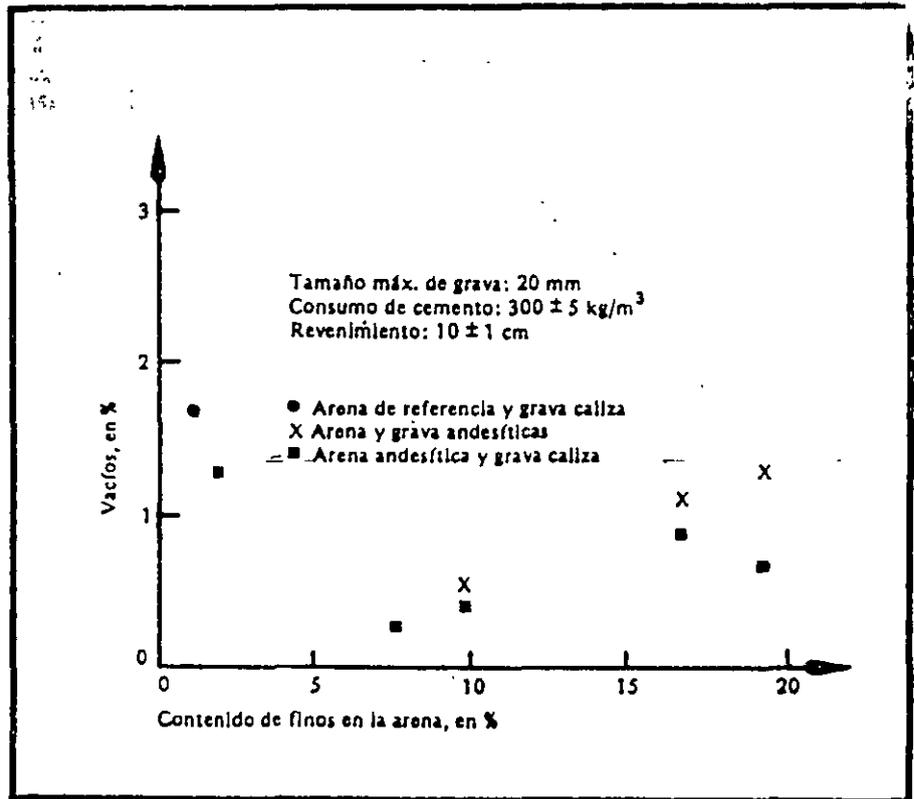


Fig. 4. Influencia de los finos de la arena en la cantidad de vacíos en las mezclas.

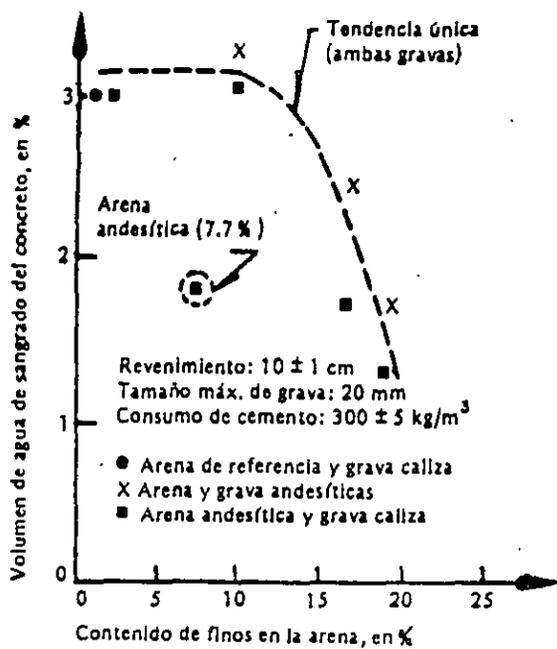


Fig. 5. Relación entre el contenido de finos de la arena y el agua de sangrado del concreto.

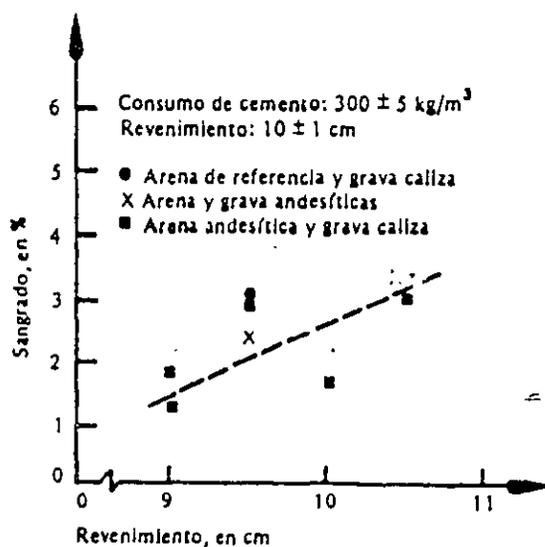


Fig. 6. Variación del sangrado en función del revenimiento.

... del orden de 120 000 kg/cm<sup>2</sup> entre los módulos de los concretos hechos con gravas andesíticas y los fabricados con gravas calizas, diferencia que corresponde a un incremento del orden del 80% en los valores alcanzados por estos últimos.

Por otra parte, los finos de las arenas influyeron en el módulo de elasticidad de los concretos de manera similar a como lo hicieron en la resistencia a la compresión. Para contenidos inferiores al 10% no existió variación apreciable en los valores alcanzados, en tanto que para contenidos de finos en la arena del 19% la disminución en el módulo de elasticidad fue del orden del 12% en relación con los valores alcanzados en los concretos hasta con 10% de finos.

Conviene señalar que, al igual que para la resistencia a la compresión, el empleo de la arena de referencia con 1.1% de finos no cambió el comportamiento del concreto en cuanto a módulo de elasticidad, el cual alcanzó valores similares a los obtenidos con la arena andesítica lavada.

En la figura 10 se presenta la relación que se manifestó entre el módulo de elasticidad del concreto y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión del mismo. Esta relación alcanzó un valor medio aproximado de 9 000 para los concretos de gravas andesíticas y de 16,500 para los de grava caliza. Conviene hacer notar que aunque el tamaño de la muestra es pequeño, la tendencia está bien definida y la totalidad de los resultados quedan localizados dentro de una dispersión de  $\pm 2$  o de la tendencia central.

En la contracción por secado, el tipo de grava empleada en el concreto tuvo también una influencia notoria; las contracciones de los concretos con grava caliza fueron del orden del 60% de las alcanzadas en los concretos con las gravas andesíticas. Asimismo, los finos de la arena, y en particular los finos con propiedades plásticas, influyeron también en forma considerable en las contracciones alcanzadas (figuras 11 y 12).

En los concretos con gravas andesíticas la contracción se incrementó des-

de un valor de  $533 \times 10^4$  con el uso de la arena con 10% de finos no plásticos hasta un valor de  $759 \times 10^4$  con arena de 19% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas.

En los concretos con gravas calizas el incremento de la contracción con el aumento de los finos en la arena no fue tan significativo; pasó de un valor de  $332 \times 10^4$  a  $448 \times 10^4$  al variar el contenido de finos del 10 al 19% respectivamente. Sin embargo, fue notorio el comportamiento del concreto fabricado con la arena con 7.7% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas. En este caso la contracción alcanzada resultó ser del mismo orden que la obtenida con la arena con 19% de finos. Conviene señalar que los finos de ambas arenas presentaron propiedades plásticas similares.

Los concretos fabricados con las arenas andesíticas lavadas y de referencia, que no tuvieron finos plásticos, presentaron contracciones similares a la alcanzada en el concreto con arena de 10% de finos, que tampoco tuvo finos plásticos.

En la figura 12 se puede observar la influencia que tuvo el contenido de finos plásticos, determinándose en función de la contracción lineal de los finos de la arena, en la contracción por secado del concreto. Como se observa la contracción por secado del concreto se incrementó al aumentar la contracción lineal de los finos de la arena, independientemente del tipo de grava utilizada, aunque este incremento fue mayor para los concretos con gravas andesíticas.

Las contracciones aquí registradas corresponden a las obtenidas después de un curado en agua de 28 días y secado al aire a una humedad relativa del 50% durante otros 28 días. De acuerdo con la literatura respectiva<sup>6</sup>, la contracción alcanzada en estas condiciones resulta ser del orden de la mitad de las contracciones últimas; por lo que si se extrapolaran los resultados en los concretos con las arenas hasta con 10% de finos no plásticos y gravas calizas, se llevarían valores de contracciones últimas comprendidas entre  $600$  y  $900 \times 10^4$ , congruentes con los valores encontrados.

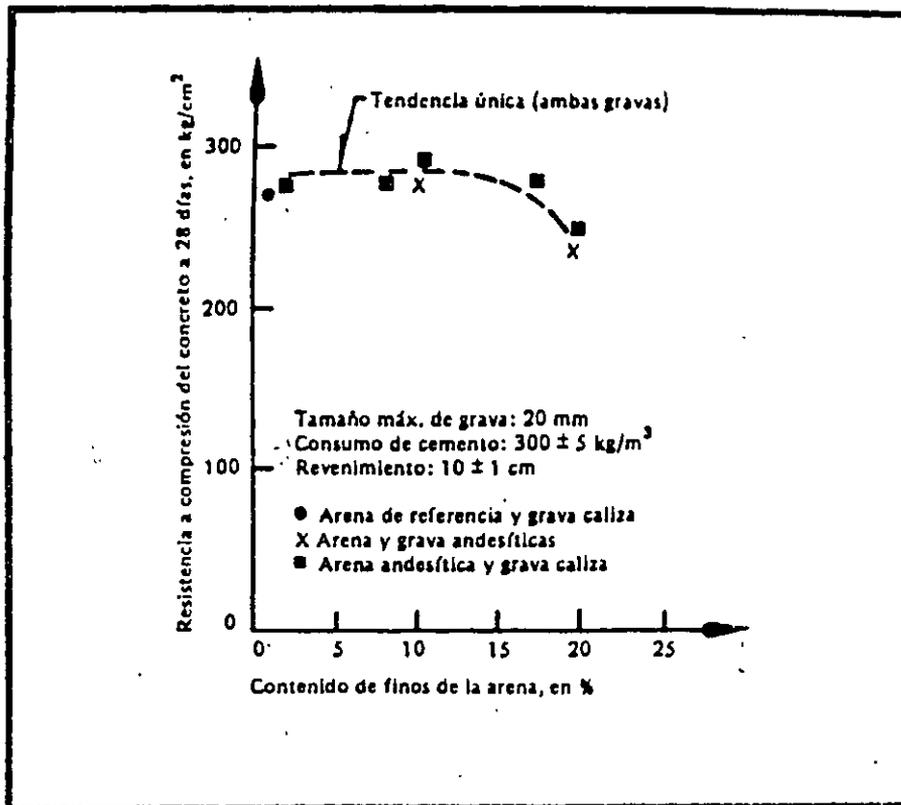


Fig. 7. Influencia del contenido de finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto.

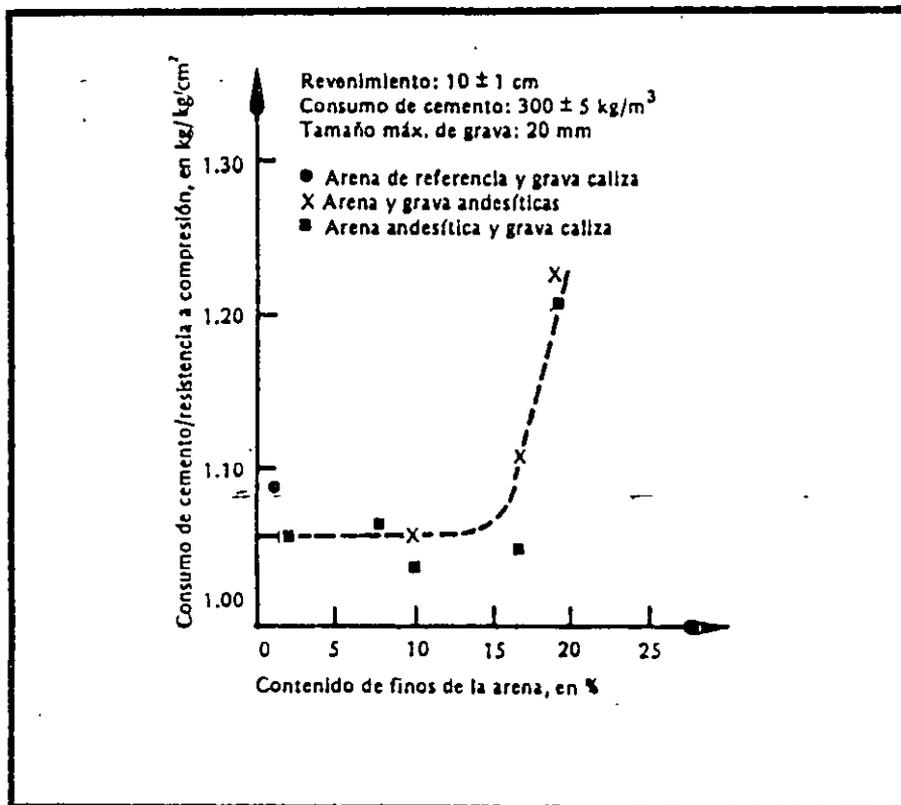


Fig. 8. Influencia del contenido de finos de arena en la eficacia del consumo de cemento.

dos en la literatura a que se refieren en esta referencia.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

Los resultados de los ensayos efectuados y las consideraciones hechas sobre el comportamiento de los concretos conducen a las siguientes conclusiones:

1. Para mejorar las propiedades mecánicas de los concretos que se utilizan en el Distrito Federal, es necesario emplear gravas más densas y con menos absorción de las que actualmente se emplean.
2. Las arenas andesíticas en uso resultan ser las únicas, desde el punto de vista económico, viables para la fabricación de los concretos en el D.F. Sin embargo, es necesario limitar la cantidad de finos y muy especialmente la de los finos plásticos que contienen.
3. El tipo de cemento empleado en las mezclas puede afectar algunas de las propiedades de los concretos. Las conclusiones a que se llega en este trabajo se refieren a concretos hechos con cemento portland tipo I.
4. Las gravas calizas empleadas tuvieron un comportamiento satisfactorio en cuanto a todas las propiedades mecánicas de los concretos estudiados.
5. El coeficiente volumétrico de las partículas de grava caliza triturada prácticamente igual a 0.20 con respecto a mezclas de concreto trabajables con contenidos de mortero usuales.
6. La proporción en la que se combinaron los tamaños de grava (35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm) se manifestó como una granulometría adecuada para estos materiales.
7. Desde el punto de vista de las propiedades mecánicas del concreto, para alcanzar los mejores resultados se requiere limitar los finos en la arena a un máximo de 10% y además la contracción lineal de estos finos debe ser nula.
8. Debido a que la proporción en que se mezclaron grava y arena se mantuvo constante en todo el estudio, la cantidad de finos totales en las mezclas de concreto resultó pro-

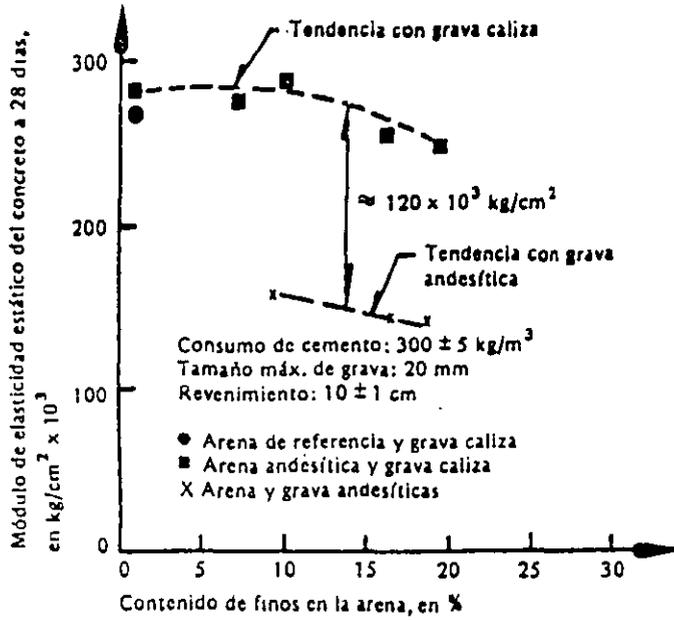


Fig. 9. Influencia del contenido de finos de la arena en el módulo de elasticidad del concreto.

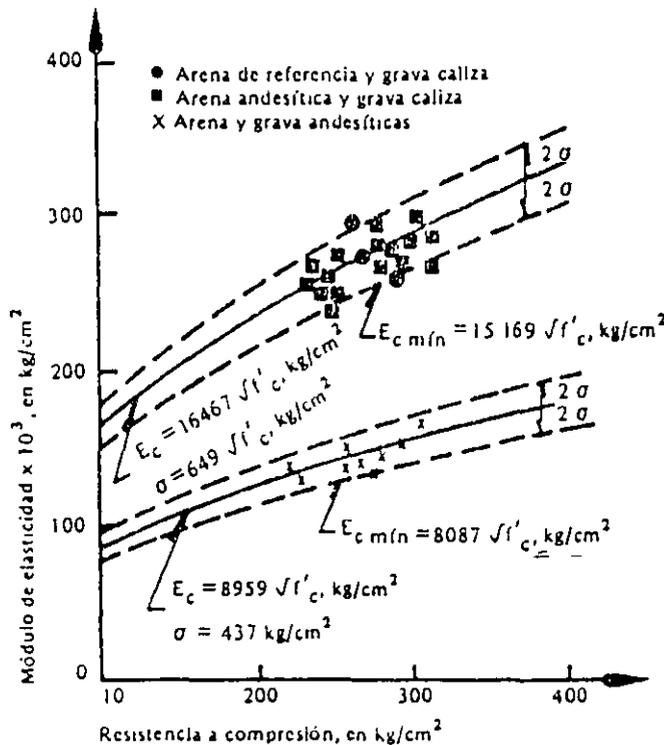


Fig. 10. Relación módulo de elasticidad - resistencia a la compresión de los concretos andesíticos y calizos.

porcional a la cantidad de finos en las arenas.

9. El requerimiento de agua de mezclado se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta 10%; para porcentajes mayores, la demanda de agua de mezclado se incrementó hasta en un 8% para contenidos de finos del orden del 19%.
10. Independientemente del contenido de finos en la arena, los concretos con grava caliza tuvieron un peso volumétrico mayor a  $2\ 250\ \text{Kg/m}^3$  mientras que en los concretos con gravas andesíticas el peso volumétrico fue siempre inferior a este valor.
11. La cantidad de vacíos en las mezclas de concreto resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado. Las mezclas fabricadas con arena andesítica lavada y con la arena de referencia tuvieron contenidos de aire cercanos al 2%; pero en las mezclas fabricadas con arenas con mayor contenido de finos los vacíos fueron siempre inferiores a esta cantidad.
12. El sangrado que presentaron las mezclas de concreto varió en forma inversamente proporcional al contenido de finos de las arenas y en proporción directa con el revestimiento de las mezclas. Para mezclas con arena de hasta 10% de finos, sería conveniente tener sangrados máximos del 3.5%.
13. La resistencia a la compresión resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado y de los finos de la arena, cuando el porcentaje de éstos fue inferior al 10%. Para arenas con mayor contenido de finos la resistencia decreció.
14. Los módulos de elasticidad de los concretos hechos con agregados gruesos calizos resultaron del orden del doble de los obtenidos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10% no tuvieron influencia en el módulo de elasticidad alcanzado. El valor medio de la relación entre el módulo de elasticidad y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión resultó ser 16 500 para los concretos con gravas calizas y 9 000 para los hechos con gravas andesíticas.

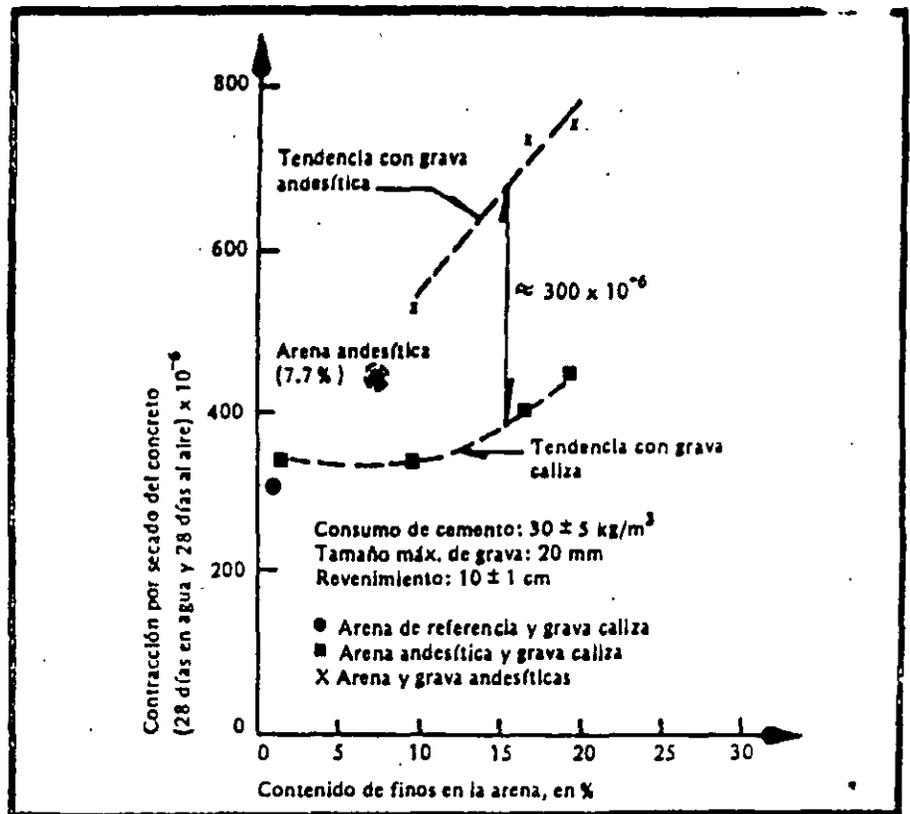


Fig. 11. Influencia del contenido de finos de la arena en la contracción por secado del concreto.

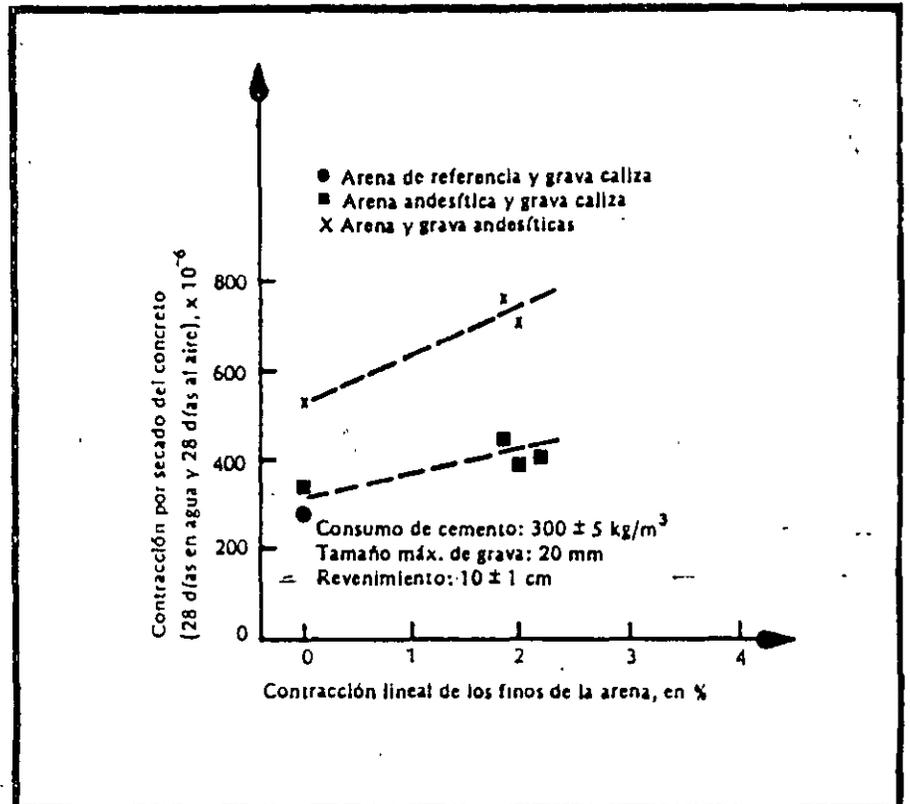


Fig. 12. Influencia de los finos plásticos de las arenas en la contracción por secado del concreto.

15. La contracción por secado de los concretos fabricados con grava caliza fue del orden del 60% de la obtenida en los concretos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas superiores al 10%, en especial el contenido de finos con propiedades plásticas, tuvieron una influencia determinante en la contracción del concreto, incrementándose ésta con el porcentaje y las propiedades plásticas de estos finos.

16. La contracción por secado, después de 28 días de curado húmedo y de otros 28 de secado al aire con una humedad relativa de 50%, en concretos con porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10%, resultó ser de  $332 \times 10^{-6}$  para los concretos con gravas calizas y de  $533 \times 10^{-6}$  para los de gravas andesíticas.

### Recomendaciones

La evaluación de los resultados de los ensayos conduce a plantear las siguientes recomendaciones:

Para obtener un concreto de calidad satisfactoria para fines estructurales, se requiere seleccionar con precaución las características de los materiales componentes.

En cuanto a los cementos portland se puede emplear cualquiera de los tipos usuales (I, II, III y V) con tal que sea congruente con los fines a los que se destina la estructura. Con respecto al cemento portland-puzolana, se halla en curso de revisión la norma NOM C-2 con objeto de incluir un tipo denominado PUZ-1, el cual se debe compor-

tar en su desarrollo de resistencia como el cemento portland tipo I.

Las gravas deben proceder de una roca sana, preferiblemente con densidad superior a 2.6 y absorción no mayor al 2%. Si las gravas se obtienen por un proceso de trituración conviene verificar que la forma de las partículas sea tal, que su coeficiente volumétrico resulte mayor a 0.20. Se obtiene una granulometría adecuada para fabricar concreto con tamaño máximo de 20 mm, cuando las gravas de 5 a 10 mm se mezclan con las de 10 a 20 mm en proporción de 35 a 65%, respectivamente.

Las arenas que se utilicen para la fabricación de los concretos pueden ser de naturaleza andesítica, pero se debe verificar que el porcentaje de los finos que contenga sea inferior al 10% y además que estos finos no tengan propiedades plásticas. Una forma de medir la plasticidad de los finos puede ser la prueba de contracción lineal, la cual debe conducir a valores de 0% cuando la arena está exenta de finos plásticos.

Dada la buena trabajabilidad que mostraron las mezclas con revenimientos de 10 cm, se sugiere emplear este valor como máximo nominal, con una tolerancia de  $\pm 2.5$  cm. En caso de requerir una mezcla más fluida se puede adicionar en obra un aditivo fluidificante que permita incrementar ese revenimiento. Como medida de control y aceptación del concreto en su estado fresco se recomienda realizar, adicionalmente a la prueba de revenimiento, la determinación del peso volumétrico, cuyo resultado permitirá distinguir si el concreto se fabricó con agregados den-

sos o ligeros. Un valor mínimo para esta característica en el concreto estructural puede ser de  $2\ 250\ \text{kg/m}^3$ .

Tomando en cuenta el comportamiento de los concretos con agregados gruesos calizos, se puede estimar que el módulo de elasticidad de los mismos a los 28 días tendrá un valor mínimo de  $14\ 500\ f_c$  y que la contracción por secado última será inferior a  $900 \times 10^{-6}$ .

### RECONOCIMIENTO

Este artículo es un resumen del informe "Ensayos para definir las características de los concretos estructurales en el D.F." preparado por el Instituto de Ingeniería para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano y se reproduce con la autorización de la mencionada comisión.

Los autores hacen patente su reconocimiento al personal del Grupo Tolteca, por su participación en la obtención y selección de los materiales empleados en el estudio; a los empleados de las empresas INSPECTEC, Laboratorios Liac y Laboratorio Nacional de la Construcción, quienes intervinieron en la realización de los ensayos; a la Comisión Federal de Electricidad por facilitar sus instalaciones y a todos los miembros del grupo de trabajo sobre control de calidad de los materiales de construcción. Se agradece en forma especial al Dr. Roberto Meli, por las sugerencias recibidas durante el desarrollo del estudio.



### REFERENCIAS

1. Mendoza, C. J., "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el D.F.", Informe 495. Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. Meli, R., "Estudio estadístico de propiedades de materiales y estructuras de concreto reforzado en el Distrito Federal", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, julio de 1985.
3. ASTM "Annual Book of Standards", Section 4, Volume 0.4.02 Concrete and Mineral Aggregates, 1983.
4. Rabot R., Coulon C. y Hamel J., "Contribution a l'amélioration de l'essai d'équivalent de sable", Bull. Liaison Labo. P. et Ch. 57, enero-febrero de 1972.
5. ACI Committee 211 "Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete (ACI 211.1-81)", ACI Manual of Concrete Practice, Parte 1, 1986.
6. ACI Committee 209 "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Publication SP-27, 1971.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS  
AGREGADOS EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

# INFLUENCIA DE LAS CARACTERISTICAS DE LOS AGREGADOS EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Carlos Javier Mendoza E.

## Introducción

En una mezcla de concreto los agregados constituyen cuando menos tres cuartas partes de su volumen total, por lo que la calidad de éstos tienen una importancia definitiva en la resistencia, durabilidad y comportamiento de las estructuras construidas con ellos.

Por otro lado, los agregados son más económicos que el cemento, por lo que resulta ventajoso usar la mayor cantidad posible de ellos, a parte de que el empleo de volúmenes importantes de agregados da al concreto mayor estabilidad volumétrica y durabilidad.

## Influencia de la forma y textura del agregado en la trabajabilidad y resistencia

La forma y textura superficial del agregado grueso tienen una influencia considerable en la resistencia del concreto, particularmente en la resistencia a flexión y son particularmente significativas en los concretos de alta resistencia.

La contribución de la forma y textura del agregado grueso en el desarrollo de la resistencia a compresión del concreto no se conoce, pero posiblemente una textura rugosa dé como resultado una fuerza de adhesión más grande entre las partículas y la matriz de cemento. De igual forma, una superficie de contacto más grande en los agregados angulosos significa que se puede desarrollar una mayor fuerza adhesiva. En la tabla 1 se hace una estimación cuantitativa de la manera en que la forma, la textura

superficial y el módulo de elasticidad del agregado afecta a las resistencias a flexión y compresión del concreto.

La forma y textura del agregado fino tiene un efecto significativo en el requerimiento de agua de mezclado, ya que estas propiedades se pueden expresar en forma indirecta en función del porcentaje de huecos que quedan en la arena en condición suelta. La influencia de los huecos entre las partículas del agregado grueso es menos definitiva en el consumo de agua, sin embargo, la forma del agregado grueso, y en particular el agregado grueso lajeado, tiene un efecto considerable en la trabajabilidad del concreto.

La influencia de las propiedades de los agregados en la trabajabilidad de crece con el consumo de cemento y posiblemente desaparece cuando la relación agregado/cemento es del orden de 2.5.

La influencia en la granulometría en la segregación es importante, pero esta depende mayormente del método de manejar y colocar el concreto. También el empleo de agregado grueso con peso específico muy diferente del que tiene el agregado fino aumenta la tendencia a la segregación.

Las propiedades físicas del agregado fino, especialmente el más pequeño que la malla #100 (150  $\mu$ m), puede afectar el sangrado del concreto.

La forma del agregado influye en la bombeabilidad de una mezcla, en general son preferibles arenas naturales y gravas redondeadas a los agregados triturados, pero puede hacerse una mezcla con características adecuadas para ser bombeada con una combinación apropiada de fracciones de agregados triturados.

Si la superficie del agregado es porosa los huecos internos pueden no estar totalmente saturados aún cuando estén completamente humedecidos. Cuando se aplica la presión en la línea, el aire en estos vacíos se contrae y el agua se introduce en los poros, dando como resultados que las mezclas sean más secas y poco manejables. Si se suspende el

bombeo y se libera la presión, se libera también el agua de los agregados; esta agua puede arrastrar materiales finos, formando un tapón cuando se reinicia el bombeo.

### Influencia de la resistencia del agregado en el comportamiento del concreto

La resistencia a compresión del concreto no puede exceder a la del agregado con el que se fabrica. Sin embargo, la resistencia a compresión del agregado tal como se encuentra es difícil de determinar y la información requerida tiene que obtenerse a través de pruebas indirectas: resistencia a compresión de muestras labradas de la roca, valor al aplastamiento del agregado grueso, o comportamiento del agregado en el concreto.

Lo anterior implica que se deben hacer algunos ensayos previamente con el agregado que se pretende usar y compararlos con la respuesta de otros concretos de calidad conocida. Si el agregado bajo ensayo conduce a una resistencia a compresión más baja que la del concreto de referencia, y en particular si numerosas partículas individuales de agregados aparecen fracturadas después de que el espécimen se ha ensayado, la resistencia del agregado es inferior a la de la mezcla de concreto a la cual se le incorporó, por tanto, tales agregados solo deben usarse en mezcla de baja resistencia.

Una resistencia inadecuada del agregado representa una limitación ya que las propiedades del agregado tiene cierta influencia en la resistencia del concreto, aún cuando sea suficientemente resistente para no fracturarse prematuramente. Si se comparan concretos hechos con diferentes agregados se puede observar que la influencia del agregado en la resistencia del concreto es cualitativamente la misma, independientemente del proporcionamiento de la mezcla y de que el concreto se ensaye en compresión o tensión. Es posible que la influencia del agregado sobre la resistencia del concreto se deba no solamente a la resistencia mecánica del agregado sino también, y en grado considerable, a sus características de

absorción y adherencia.

En general la resistencia y elasticidad del agregado depende de su composición, textura y estructura así, una baja resistencia se puede deber a una debilidad de los granos constituyentes, a que los granos, no obstante de ser suficientemente resistentes, no están bien ligados o cementados.

El módulo de elasticidad del agregado aunque se determina rara vez, no deja de tener importancia, ya que el módulo de elasticidad del concreto es más grande a medida que mayor es el módulo de elasticidad de los agregados constituyentes. El módulo de elasticidad del agregado afecta también la magnitud de la deformación diferida y de la contracción que puede presentarse en el concreto.

Por otro lado, el agrietamiento vertical de un espécimen sujeto a compresión uniaxial comienza bajo carga del orden de 50 a 75 por ciento de la carga última. El esfuerzo al que se forman las grietas depende en gran parte de las propiedades del agregado grueso: gravas lisas conducen al agrietamiento a esfuerzos más bajos que los requeridos con rocas trituradas, asperas y angulosas, debido probablemente a que la adherencia mecánica está influenciada por las propiedades de la superficie y, en cierta manera, por la forma del agregado grueso.

Las propiedades de los agregados afectan la carga de agrietamiento en compresión y la resistencia en flexión de la misma manera, por lo que la relación entre las dos cantidades es independiente del tipo del agregado usado, fig 1. Por otra parte la relación entre las resistencias a flexión y compresión depende del tipo de agregado grueso, ya que las propiedades del agregado, especialmente su textura superficial, afectan la resistencia última en compresión mucho menos que la resistencia en tensión o la carga de agrietamiento en compresión, fig 2, ref 1.

La influencia del tipo de agregado grueso en la resistencia del concreto varía en magnitud y depende de la relación agua/cemento de la mezcla.

Para relaciones agua/cemento inferiores a 0.4 el empleo de agregados triturados ha dado como resultado resistencias hasta 38 por ciento superiores que cuando se emplean gravas redondeadas. Con incremento en la relación agua/cemento la influencia del agregado disminuye, posiblemente debido a que la resistencia de la pasta misma es determinante, y a relaciones agua/cemento de 0.65 no se observa diferencias entre las resistencias alcanzadas con agregados triturados o gravas redondeadas.

La influencia del agregado en la resistencia a flexión parece depender también de la condición de humedad del concreto en el momento del ensaye.

#### Influencia de los agregados en el módulo de elasticidad del concreto

Las propiedades de los agregados también influyen en el módulo de elasticidad del concreto; mientras más alto sea el módulo de elasticidad del agregado, mayor será el módulo de elasticidad del concreto. La forma de las partículas de agregado y sus características superficiales pueden influir también en el valor del módulo de elasticidad del concreto y en la curvatura de la relación esfuerzo-deformación.

Es interesante hacer notar que los dos componentes del concreto, pasta de cemento y agregado, cuando están sujetos a esfuerzos en forma individual presentan una relación esfuerzo-deformación sensiblemente lineal. La razón para el comportamiento no lineal en el material compuesto (concreto) se debe a la presencia de interfases entre la pasta de cemento y el agregado y al desarrollo de microagrietamiento en esas interfases. Debido a que las grietas se desarrollan progresivamente en las interfases, hay un incremento progresivo en la intensidad del esfuerzo local y en la magnitud de la deformación, por lo que la deformación se incrementa más rápidamente que el esfuerzo promedio aplicado y la curva esfuerzo-deformación se hace cóncava hacia abajo con un comportamiento pseudo-plástico.

La relación entre módulo de elasticidad y resistencia depende también de la proporción de la mezcla (el agregado por lo general tiene un módulo

mayor que el de la pasta de cemento) y de la edad del concreto; a edades mayores (mayores resistencias) el módulo se incrementa más rápidamente que la resistencia. Esto se muestra en la fig 3, la cual también da resultados para concretos hechos con agregados de arcilla expandida. El módulo de elasticidad del concreto de agregado ligero no se incrementa con la resistencia en la misma proporción y su valor está entre 40 y 80 por ciento del módulo del concreto de agregado ordinario de la misma resistencia. Dado que el módulo del agregado ligero difiere poco del módulo de la pasta del cemento, la proporción con que se encuentra en la mezcla no afecta al módulo de elasticidad de los concretos de agregados ligeros.

### Influencia de los agregados en la contracción

Los agregados restringen la contracción que se puede presentar. El tamaño y granulometría del agregado por ellos mismos no influyen en la magnitud de la contracción, pero un agregado más grande permite el uso de mezclas más pobres y origina, por tanto, una contracción menor.

Similarmente, para una resistencia dada, el concreto de baja trabajabilidad contiene más agregado que uno de alta trabajabilidad hecho con agregados del mismo tamaño y, como consecuencia, la primera mezcla presentará una contracción más pequeña.

La influencia combinada de la relación agua-cemento y contenido de agregado puede presentarse en una gráfica; esto se hace en la fig 4 pero debe recordarse que los valores de contracción dados son solamente típicos para el secado en climas templados.

Las propiedades elásticas de los agregados determinan el grado de restricción ofrecido. Por ejemplo, los agregados de acero conducen a una contracción un tercio menor y los agregados de arcilla expandida un tercio mayor que la que permiten los agregados ordinarios. La presencia de arcilla en el agregado reduce su efecto restrictivo en la contracción, y dado que la arcilla misma está sujeta a contracción, la presencia de arcilla en el recubrimiento de los agregados puede incrementar la contracción hasta en 70 por ciento.

Dentro del intervalo de agregados normales hay una variación considerable en la contracción, fig 5. El agregado natural común no se contrae por si mismo, pero existen algunos agregados que presentan contracciones por secado de hasta  $900 \times 10^{-6}$ , similar a la contracción que presenta el concreto fabricado con agregados sin contracción. Las rocas que presentan contracciones usualmente tienen alta absorción y este hecho debe servir como advertencia para investigar sus propiedades en relación con la contracción.

El agregado ligero usualmente conduce a contracciones más grandes que el agregado de peso normal, debido principalmente a que el agregado, teniendo un módulo de elasticidad más bajo, presenta menos restricciones a la contracción potencial de la pasta de cemento. Los materiales ligeros que tienen una proporción importante de material más pequeño que la malla 200 (75  $\mu\text{m}$ ) tienen una contracción aun más grande, dado que la finura conduce a un contenido mayor de vacíos.

El contenido de agua de una mezcla de concreto afecta la contracción por que reduce el volumen de los agregados que la restringe, siguiendo la tendencia mostrada en la fig 6, pero el contenido de agua por si mismo se piensa que no es un factor determinante.

#### Efecto del agregado en la deformación diferida

En la mayor parte de los casos el agregado de peso normal no está sujeto a deformación diferida, por lo que es razonable suponer que el origen de la deformación diferida está en la pasta de cemento, pero los agregados influyen en la deformación diferida del concreto a través de un efecto de restricción, similar al que se presenta en el caso de la contracción y dependiente de algunas propiedades físicas de las rocas de las cuales provienen.

Debido a la gran variación de los agregados dentro cualquier tipo mineralógico y petrográfico, no es posible establecer de una manera general la magnitud de la deformación diferida del concreto hecho con agregados de

diferentes tipos. Sin embargo, los datos de la fig 7 son de importancia considerable; después de 20 años de conservados a una humedad relativa de 50 por ciento, el concreto hecho con areniscas presenta una deformación diferida más del doble de la obtenida con calizas. Una diferencia aún más grande entre la deformación diferida del concreto hecho con diferentes agregados fue encontrada por Rüsçh et al, después de 18 meses bajo carga a una humedad relativa de 65 por ciento, la máxima deformación diferida fue cinco veces el valor mínimo; los agregados en orden creciente de deformación diferida son: basalto y cuarzo; grava, marmol y granito; y arenisca.

El agregado ligero merece atención especial porque la opinión generalizada sugiere que su uso conduce a deformación diferida sustancialmente más alta que la alcanzada con agregado de peso normal. Trabajos recientes indican que no hay diferencia fundamental entre agregados normal y ligero en lo que se refiere a la deformación diferida y que la deformación diferida más alta de los concretos ligeros refleja solamente el módulo de elasticidad más bajo de los agregados. No hay diferencia en el comportamiento inherente al hecho de que los agregados estén o no cubiertos o a que sean obtenidos por procesos de manufactura diferente; esto no significa que todos los agregados conducen a la misma deformación diferida.

Como regla general se puede establecer que la deformación diferida del concreto de calidad estructural de agregado ligero es aproximadamente la misma que la del concreto hecho con agregado ordinario. (Es importante en cualquier comparación que el contenido de agregado no difiera mucho entre el concreto de agregado ligero y el concreto de agregado normal). Más aun, siendo la deformación elástica de los concretos con agregados ligeros mayor que la que tienen los concretos ordinarios, la relación deformación diferida a deformación elástica es más pequeña para los concretos de agregados ligeros.

4. Las expresiones que correlacionan la resistencia a tensión por flexión con la resistencia a compresión son las siguientes:

Concretos con grava y arena andesítica

$$f_f = 1.9 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica

$$f_f = 2.1 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

5. Las expresiones para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión son:

concretos con grava y arena andesítica

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica

$$E_c = 11000 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

6. La relación de Poisson para concretos andesíticos ensayados a 28 días de edad, varía de 0.25 para una resistencia de 100 kg/cm<sup>2</sup> a 0.35 para 500 kg/cm<sup>2</sup> de resistencia a compresión. Un valor medio de 0.30 se recomienda tomar para la mayor parte de las resistencias usuales.

7. El módulo de rigidez por cortante para concretos andesíticos se puede calcular con la expresión:

$$G = 3300 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

estando G y  $f'_c$  expresados en kg/cm<sup>2</sup>

Los concretos usualmente empleados en el Distrito Federal están fabricados con gravas y arenas de origen piroclástico (gravas y arenas andesíticas y basaltos escoriaáceos) las cuales son relativamente ligeras y muy absorbentes. Esta situación ha dado como consecuencia que las propiedades de estos concretos difieran en forma sustancial de las consideradas como comunes. En la tabla 2 se presentan los valores alcanzados en un estudio realizado al respecto y se comparan con aquellos considerados como comunes, ref 2. Como resultado de ese estudio se alcanzaron las siguientes conclusiones:

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Los concretos fabricados con grava de basalto escoriaáceo presentaron incrementos de resistencia más grandes respecto a la alcanzada a los 28 días en relación con los incrementos observados en los concretos fabricados con gravas andesíticas.

En cuanto a las arenas, los mayores incrementos se alcanzaron en los concretos fabricados con las arenas con menor contenido de polvos.

3. Las expresiones que correlacionan la resistencia a compresión a una edad cualquiera con la alcanzada a los 28 días se indican a continuación:

Concretos con grava y arena andesíticas

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c \quad , \text{ kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica

$$f_c = \frac{t}{9.3 + 0.67t} f'_c \quad , \text{ kg/cm}^2$$

8. La deformación unitaria correspondientes al esfuerzo máximo ( $\epsilon_0$ ) varía con el tipo de agregado grueso y con el nivel de resistencia del concreto. Valores representativos de este comportamiento, correspondientes a resistencias a compresión entre 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> pueden ser:

Concretos con agregado andesíticos

$$\epsilon_0 = 0.004$$

Concretos con agregado grueso de basalto escoriaéreo y arena andesítica

$$\epsilon_0 = 0.003$$

9. La curva esfuerzo-deformación se puede obtener con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c \epsilon}{\epsilon_0 \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}, \text{ kg/cm}^2$$

en la que los valores de  $f'_c$  y  $\epsilon_0$  se seleccionan de acuerdo con las características de los concretos

10. La contracción por secado registraba fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas. El tipo de agregado grueso también tuvo influencia, presentando menos contracción los concretos hechos con grava de basalto escoriaéreo.
11. La contracción por secado a cualquier edad se puede estimar con las siguientes expresiones:

Concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos.

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.93}}{10 + t^{0.93}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.71}}{10 + t^{0.71}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.84}}{16 + t^{0.84}} 1100 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.81}}{17 + t^{0.81}} 1000 \times 10^{-6}$$

Los valores determinados con estas expresiones habrán que afectarlos por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del material y las condiciones del medio ambiente.

12. La tendencia al agrietamiento, medida como la presencia o ausencia de grietas, depende no solamente de la contracción potencial sino también de la deformabilidad del concreto, su resistencia y el grado de restricción a la deformación, lo que puede conducir al agrietamiento.
13. El coeficiente de deformación diferida resulta mayor para los concretos más rígidos (mayor módulo de elasticidad), por lo que las deformaciones totales, incluyendo deformaciones instantáneas y a largo plazo, vienen a ser del mismo orden, independientemente del tipo de agregado grueso utilizado.
14. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos, incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida.

15. El coeficiente de la deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \quad 5.65$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \quad 3.12$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.80}}{46 + t^{0.80}} \quad 7.14$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.66}}{21 + t^{0.66}} \quad 3.88$$

16. La deformación diferida afecta las deformaciones y las deflexiones y en ocasiones la distribución de esfuerzos; sin embargo, afecta poco la resistencia última de los elementos estructurales y ayuda a la relevación de esfuerzo originados por contracciones, cambios de temperatura o movimiento de los apoyos.

#### Recomendaciones para los concretos estructurales futuros en el Distrito Federal

Conocidas las características y deficiencias de los concretos utilizados comúnmente en la ciudad de México es conveniente plantear algunas medidas correctivas a la práctica usual, sobre todo si se toma en cuenta el com-

portamiento poco favorable de algunas estructuras de concreto durante los recientes sismos.

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por seco, por restringir mejor estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto, se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conduciría, por una parte, a menores consumos de agua los que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

Para satisfacer estas recomendaciones se pueden sustituir las gravas andesíticas y las de basalto escoreáceo por otras trituradas de origen calizo o de basalto sano y denso. Estas pueden alcanzar densidades superiores a 2.6, en comparación con 2.3 que tienen las andesíticas o 2.0 los basaltos escoreáceos.

En cuanto a la arena andesítica es difícil sustituirla por otra de mejores características que se encuentre a distancias razonables de la ciudad de México, por lo que será necesario seguirlas empleando, limitando el contenido de polvos de las mismas. Un valor límite deseable en el contenido de polvo podría ser 5 por ciento.

En cuanto a la trabajabilidad de las mezclas se deberá limitar el revenimiento a 10 cm y las relaciones arena/agregados totales a valores no superiores 0.45, en volumen absoluto.

En pruebas realizadas con un agregado calizo y con una arena con densidad de 2.4 y 5 por ciento de polvos se obtuvieron los siguientes parámetros, ref 3:

Peso volumétrico	2260 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidad	14100 $\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup>
Contracción por secado última	900 X 10 <sup>-6</sup>
Coefficiente de deformación diferida última	2.4

Lo anterior indica que con estos materiales se pueden tener parámetros del comportamiento del concreto en las estructuras muy cercanos a aquellos considerados como comunes.

#### Referencias

1. Neville, A.M: "Properties of concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
2. C.J. Mendoza "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal" Informe 495, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.
3. C.J. Mendoza "Comportamiento a corto y largo plazo de vigas presforzadas de concreto" Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.

TABLA 1. VALORES RELATIVOS PROMEDIO DEL EFECTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS AGREGADOS EN LA RESISTENCIA DEL CONCRETO (KAPLAN)

Propiedades del concreto	Efecto relativo de las propiedades de los agregados, por ciento		
	Forma	Textura superficial	Módulo de elasticidad
Resistencia a flexión	31	26	-43
Resistencia a compresión	22	44	34

Los valores representan la relación de variancia debida a cada propiedad a la variancia total obtenida para las tres características de los agregados en pruebas realizadas sobre tres mezclas hechas con 13 agregados.

TABLA 2. COMPARACION ENTRE CARACTERISTICAS DE CONCRETOS COMUNES Y LOS QUE SON FACTIBLES DE FABRICAR EN EL DISTRITO FEDERAL

<u>Características</u>	<u>Comunes</u>	<u>Andésítica</u>	<u>Basalto Escoreáceo</u>	<u>Calizas</u>
Resistencia a tensión	$2.5 \sqrt{f'_c}$	$1.9 \sqrt{f'_c}$	$2.1 \sqrt{f'_c}$	—
Módulo de elasticidad	$14900 \sqrt{f'_c}$	$8500 \sqrt{f'_c}$	$11000 \sqrt{f'_c}$	$14000 \sqrt{f'_c}$
Relación de Poisson	0.15 - 0.20	0.30	—	—
Módulo de rigidez	$6500 \sqrt{f'_c}$	$3300 \sqrt{f'_c}$	—	—
Deformación unitaria al esfuerzo máximo	0.003	0.004	0.003	—
Contracción por secado última	$800 \times 10^{-6}$	$1300 \times 10^{-6}$	$1100 \times 10^{-6}$	$900 \times 10^{-6}$
Coefficiente de deformación diferida última	1.30 - 4.15	3.12 x 5.65	3.88 - 7.14	2.4

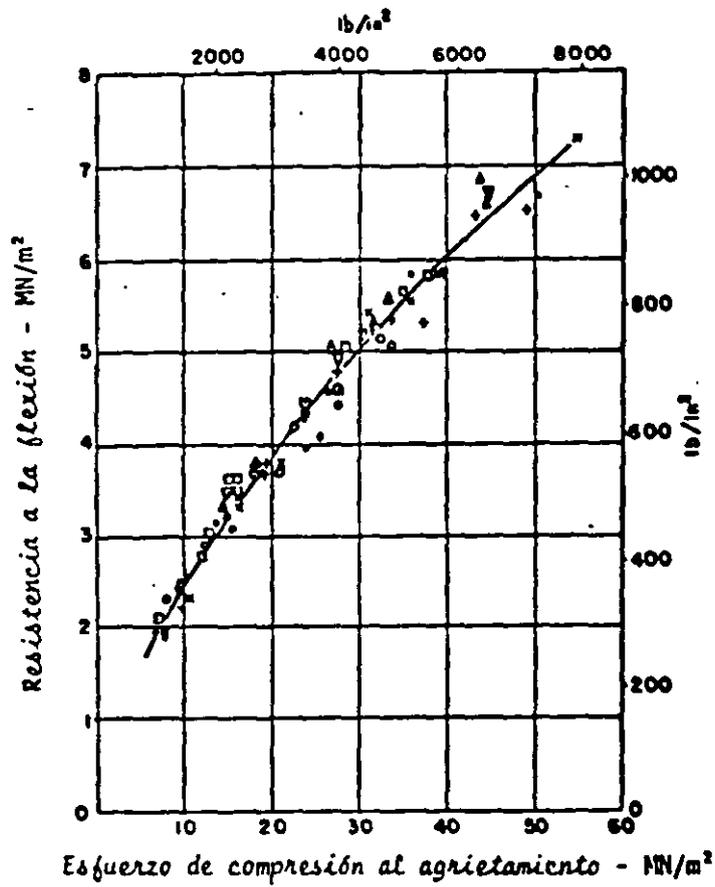


Fig 1. Relación entre resistencia a flexión y esfuerzo de compresión al agrietamiento para concretos hechos con diferentes agregados gruesos (ref 1)

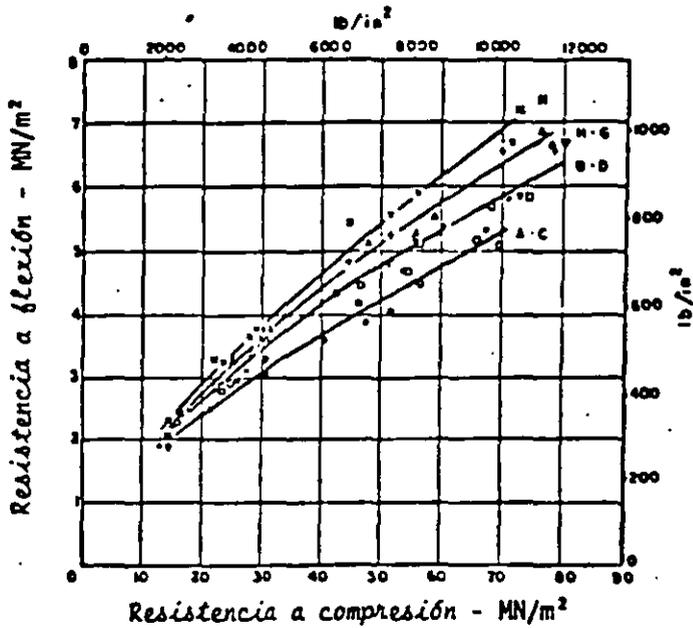


Fig 2. Relación entre resistencia a flexión y compresión para concretos hechos con diferentes agregados (ref 1)

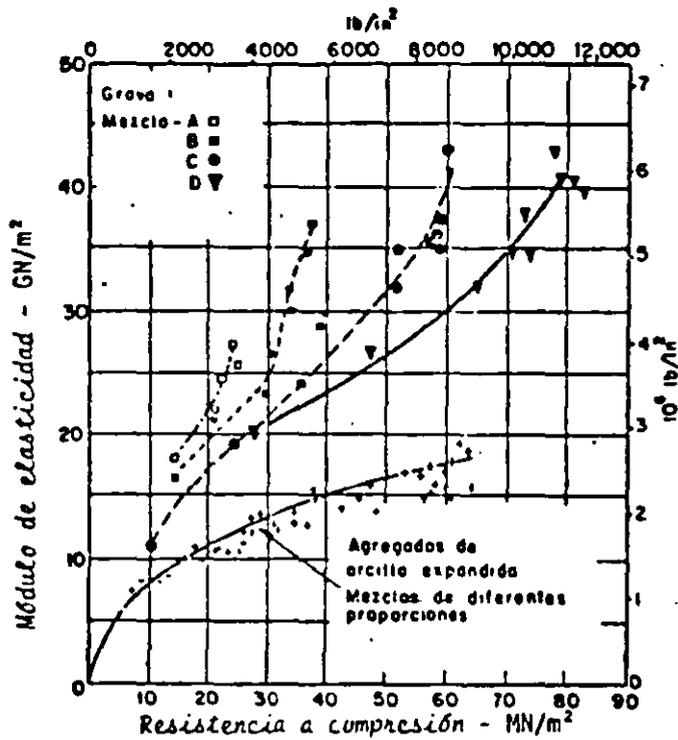


Fig 3. Módulo de elasticidad estático de concretos hechos con agregados gruesos de río y de arcilla expandida, y ensayados a diferentes edades hasta un año (ref 1)

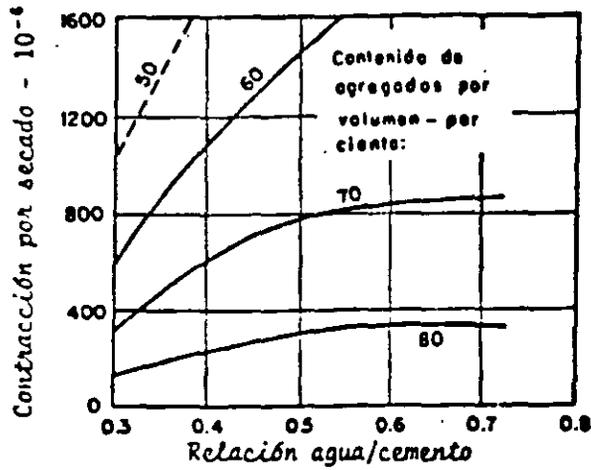


Fig 4. Influencia de la relación agua/cemento y del contenido de agregado en la contracción (ref 1)

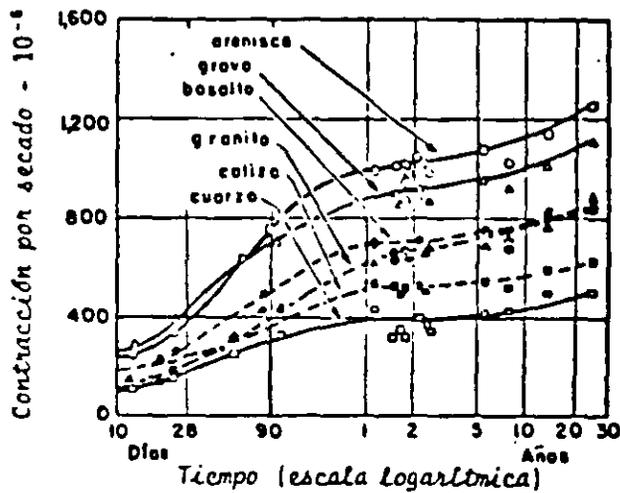


Fig 5. Contracción por secado de concretos hechos con las mismas proporciones en la mezcla, pero con diferentes agregados, almacenados al aire a 21° C y una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)

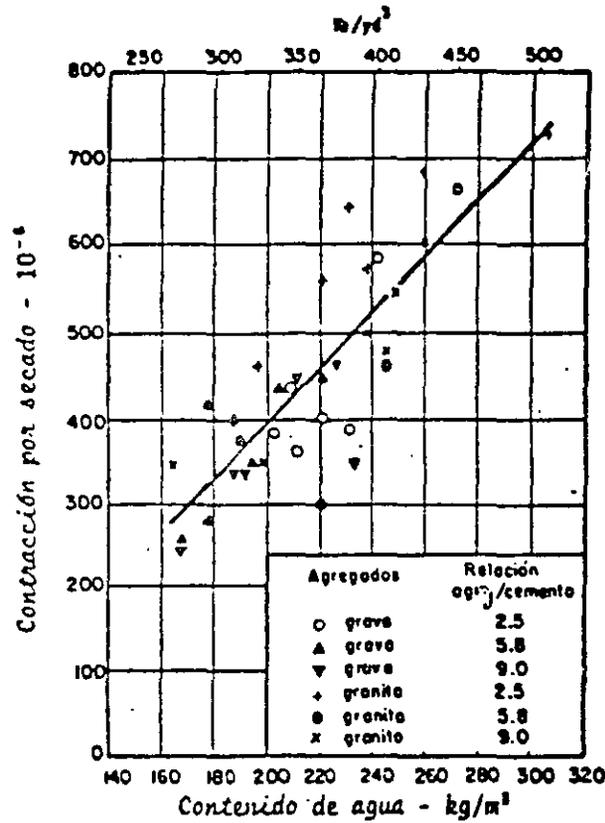


Fig 6. Relación entre el contenido de agua del concreto fresco y la contracción por secado (ref 1)

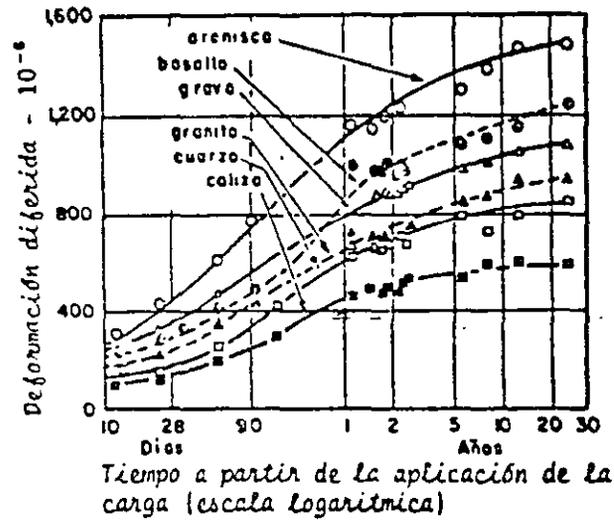


Fig 7. Deformación diferida de concretos de las mismas proporciones pero hechos con diferentes agregados, cargados a la edad de 28 días y almacenados en aire a  $21^{\circ}\text{C}$  y a una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

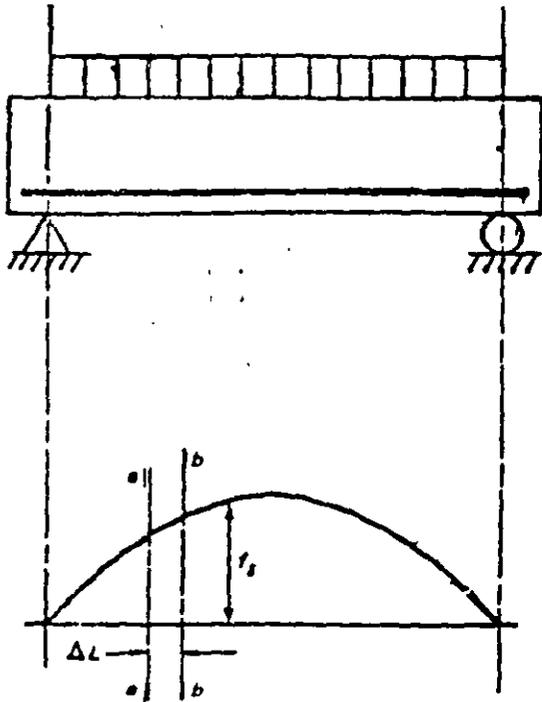
**TEMA**

**ADHERENCIA Y ANCLAJE**

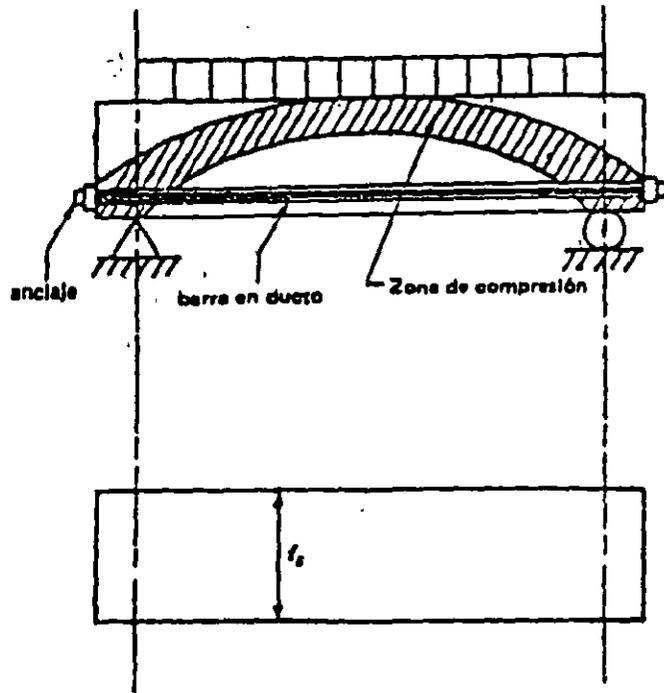
**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

# IV. ADHERENCIA Y ANCLAJE

## 1.- NATURALEZA



REFUERZO ADHERIDO



REFUERZO SIN ADHERENCIA

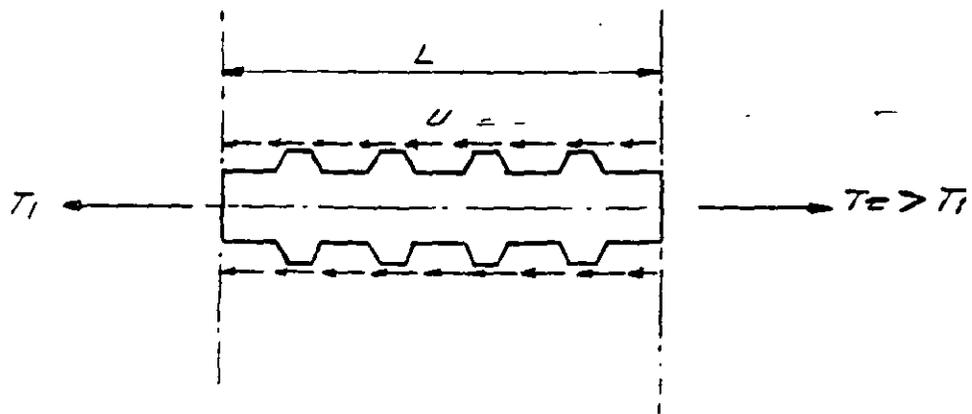


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN TRAMO DE BARRA ADHERIDA

## 1.1 ORIGEN DE LA ADHERENCIA O RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO

A) ADHESION DE ORIGEN QUIMICO

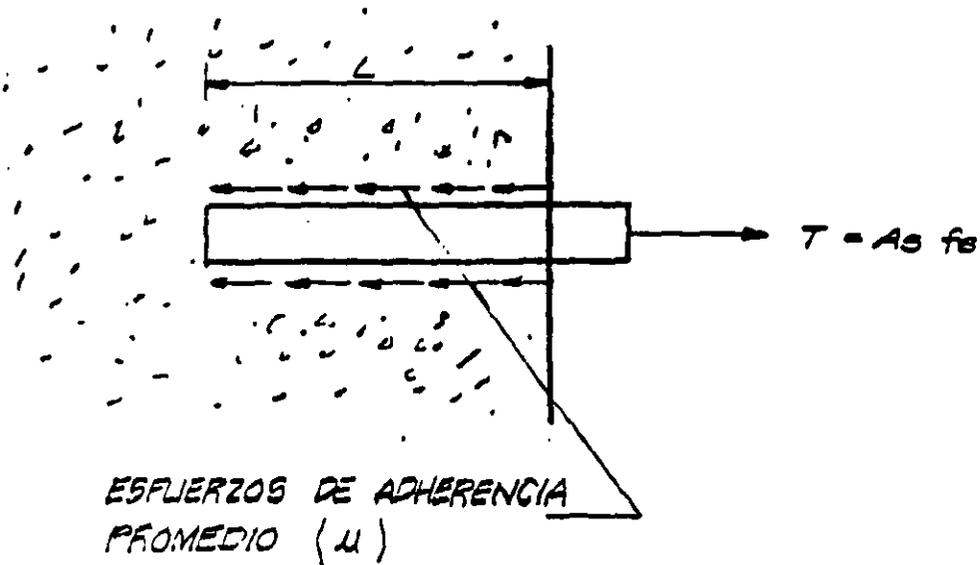
B) FRICCION ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO

C) APOYO DIRECTO DE LAS CORRUGACIONES

A) Y B) EN VARILLAS LISAS

A) B) Y C) EN VARILLAS CORRUGADAS

## 2.- ADHERENCIA POR ANCLAJE O DESARROLLO



POR EQUILIBRIO

$$\mu \Sigma 0 L = A_s f_s$$

$$\mu = \frac{A_s f_s}{\Sigma 0 L} = \frac{\frac{\pi d_b^2}{4} f_s}{\pi d_b L}$$

$$\mu = \frac{d_b f_s}{4L}$$

si  $f_s = f_y$

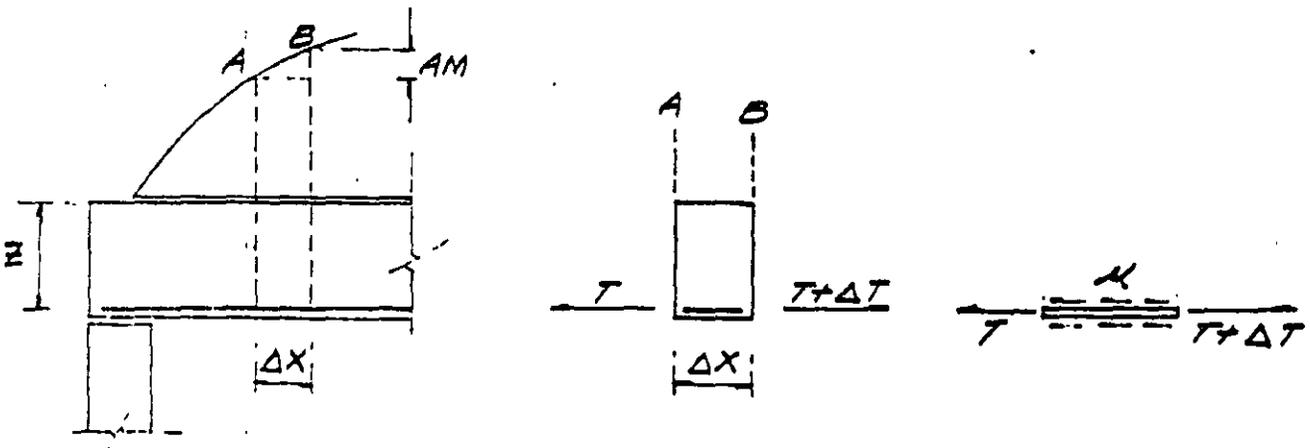
$\mu = \mu_u$

y  $L = l_d$

$$l_d = \frac{f_y d_b}{4 \mu_u}$$

### 3.- ADHERENCIA POR FLEXION

A) POR EFECTO DE UN INCREMENTO DE ESFUERZOS EN LAS VARRILLAS DEBIDO A UN CAMBIO EN EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.



$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z}$$

$$\Delta T = \mu (\Sigma O) \Delta x$$

$$\mu = \frac{\Delta M}{z \Sigma O \Delta x}$$

TOMANDO LIMITES CUANDO  $\Delta x \rightarrow 0$

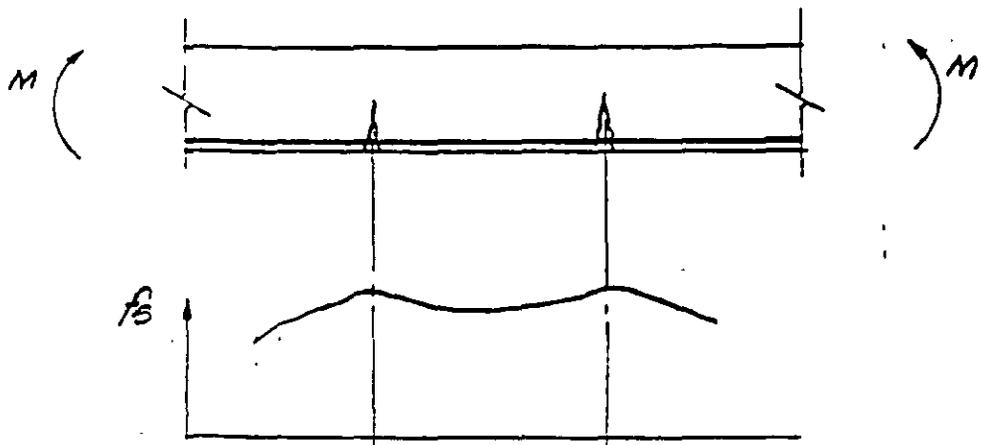
$$\mu = \frac{dM}{dx} \frac{1}{z \Sigma O}$$

PERO  $\frac{dM}{dx} = V$

$$\mu = \frac{V}{z \Sigma O}$$

b) CAMBIO EN LOS ESFUERZOS DE LAS VARILLAS  
POR AGRIETAMIENTO DEL ELEMENTO

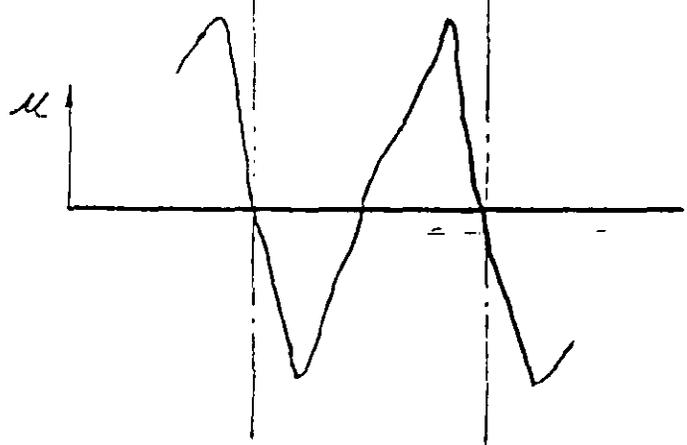
MOMENTO CONSTANTE



ESFUERZOS EN EL ACERO

$$\mu = \frac{T_2 - T_1}{L E_0} = \frac{\Delta T}{L E_0}$$

$$\mu = \frac{dT}{dL} L = \frac{df_s}{dL} \frac{\Delta s}{E_0}$$



ESFUERZOS DE ADHERENCIA

4.- VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL DESARROLLO DE LA ADHERENCIA.

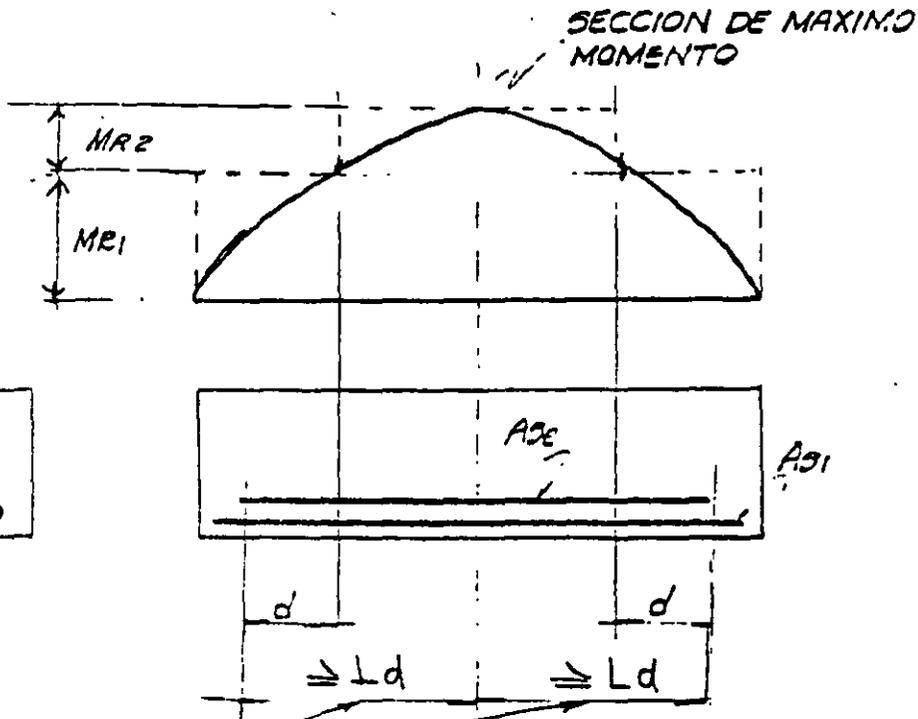
- A) RESISTENCIA A TENSION DEL CONCRETO, QUE ES PROPORCIONAL A  $\sqrt{F'c}$ .
- B) TIPO DE CORRUGACIONES Y DIAMETRO DEL REFUERZO.
- C) POSICION DEL REFUERZO.  
SE DESARROLLA MAYOR ADHERENCIA EN VARILLAS DE LECHO INFERIOR QUE EN LECHO SUPERIOR, Y MEJOR EN BARRAS VERTICALES QUE EN HORIZONTALES.
- D) RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE LAS VARILLAS.
- E) CONFINAMIENTO DEL CONCRETO POR ESTRIBOS CERRADOS.
- F) EN BARRAS A COMPRESION, LA INEXISTENCIA DE GRIETAS DE FLEXION, MEJORA LA ADHERENCIA.

5.- REVISION DE LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

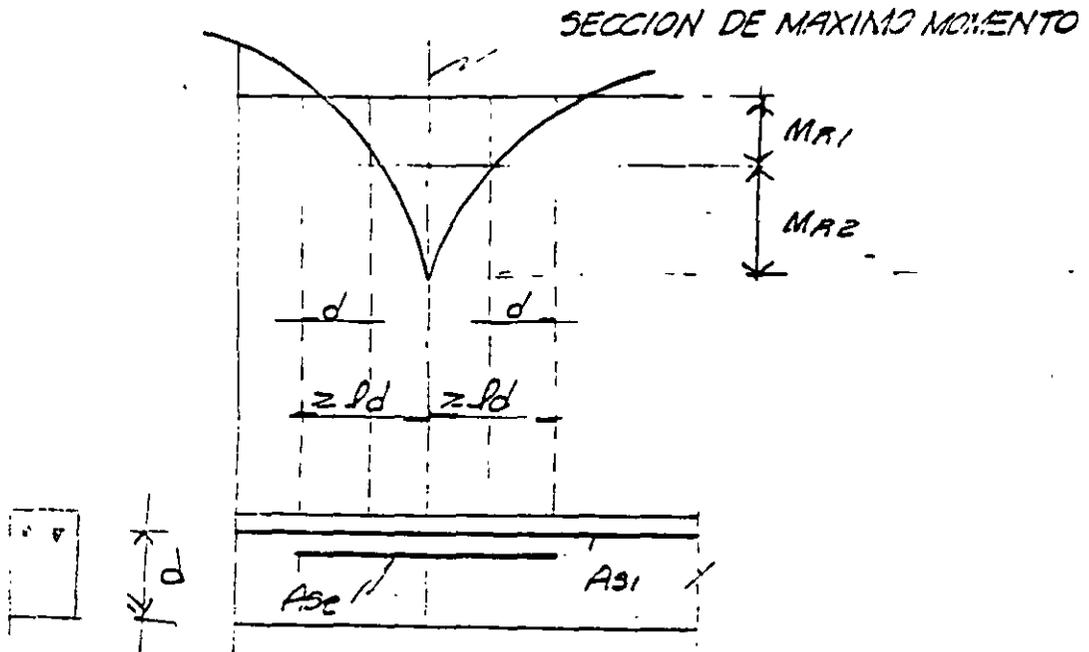
A CAMBIO DE CALCULAR LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA, LOS REGLAMENTOS ESPECIFICAN UNA LONGITUD DE ANCLAJE O DESARROLLO MINIMA QUE DEBE PROPORCIONARSE A CADA LADO DE LAS SECCIONES DONDE SE PRESENTEN ESFUERZOS MAXIMOS EN EL ACERO. ESTA LONGITUD DEPENDE BASICAMENTE DE LAS VARIABLES INDICADAS EN EL PUNTO 4.

6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:

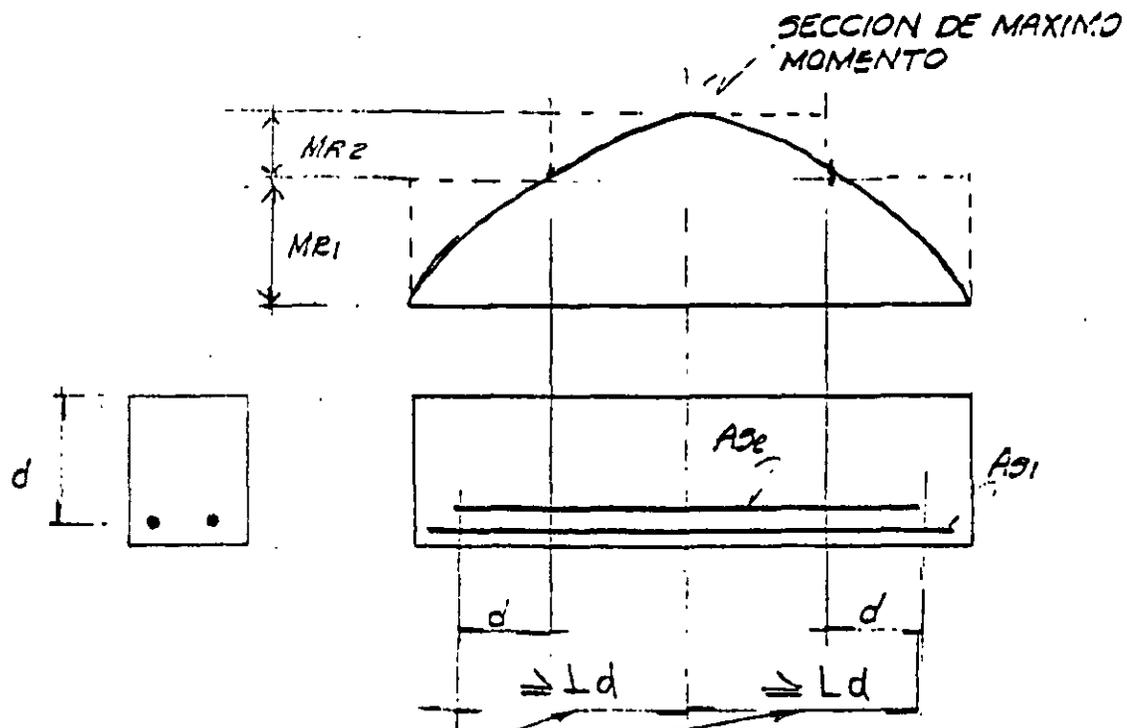


PARA QUE EL NÚMERO  
 $f_s$  SEA  $f_y'$

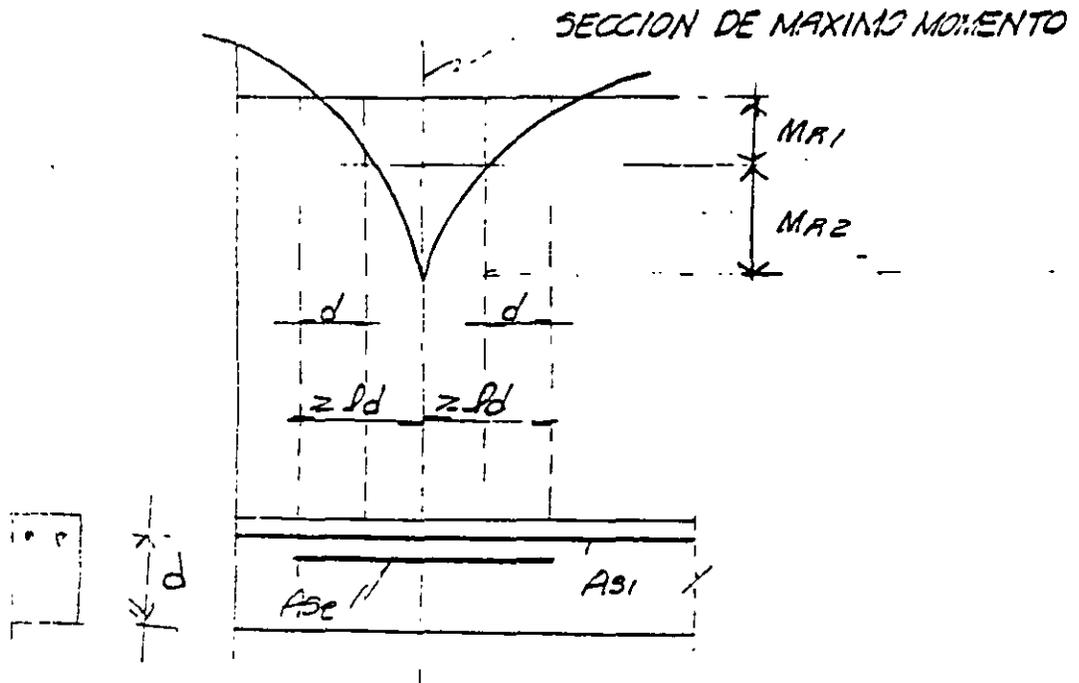


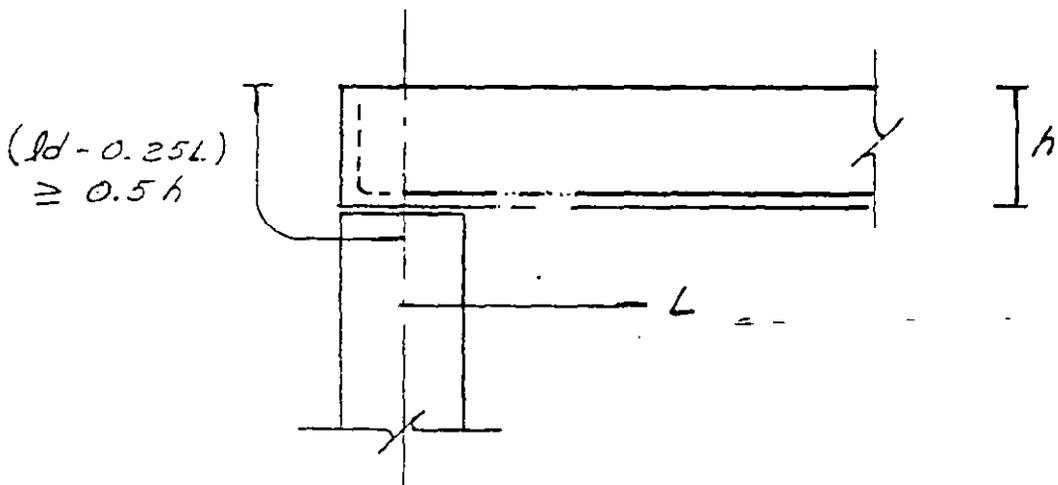
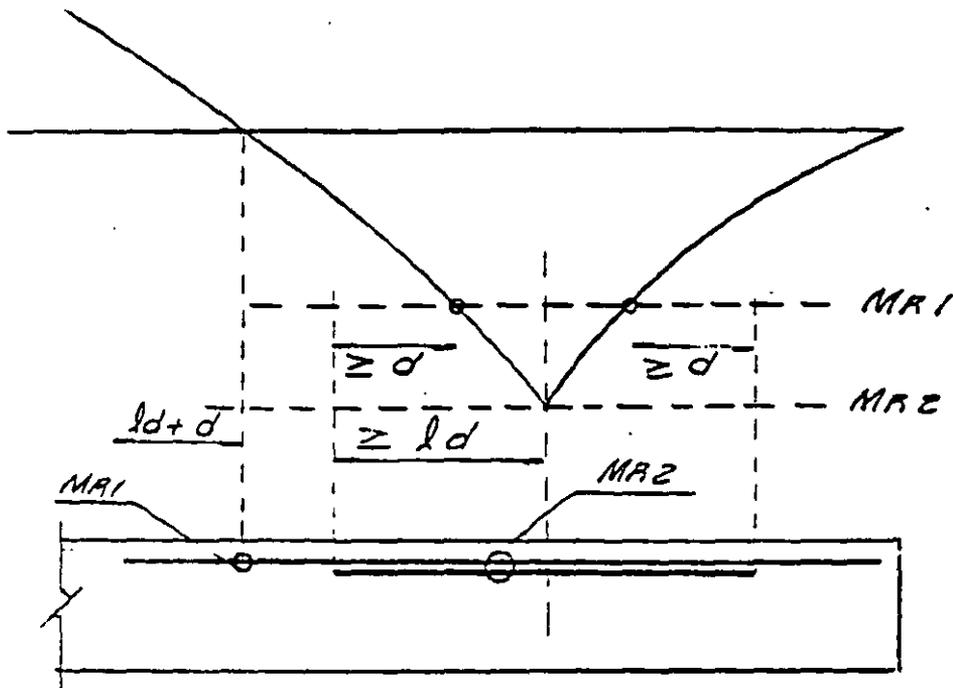
6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:



PARA QUE EN  $M_{max}$   
 $f_s$  SEA  $f_y$





LONGITUD BASICA DE DESARROLLO:

$$L_{db} = 0.06 \frac{as fy}{\sqrt{f'c}} \geq 0.006 dbfy$$

FACTORES PARA OBTENER LA LONGITUD DE DESARROLLO. (  $L_d$  )

$$L_d = \text{Factor } L_{db}$$

<u>CONDICION DEL REFUERZO</u>	<u>FACTOR</u>
BARRAS HORIZONTALES O INCLINADAS COLOCADAS DE MANERA QUE BAJO ELLAS SE CUELEN MAS DE 30 CM DE CONCRETO.	1.4
EN CONCRETO LIGERO	1.33
BARRAS CON $F_y$ MAYOR DE 4200 KG/CM <sup>2</sup> ( $F_y$ , EN KG/CM <sup>2</sup> ).	$2 - \frac{4200}{F_y}$
BARRAS TORCIDAS EN FRIO DE DIAMETRO - IGUAL O MAYOR QUE 19.1 MM (N°6).	1.2
MODOS LOS OTROS CASOS	1.0

EN NINGUN CASO  $L_d$  SERA MENOR DE 30 CM.

EN PAQUETES  $L_d$  SE INCREMENTA:



$$L_d = 1.2 L_{dc/b}$$



$$L_d = 1.00 L_{dc/b} \quad (\text{NO SE MODIFICA})$$

SI EL ESFUERZO EN EL ACERO ES MENOR QUE  $F_y$ :

$$L_d' = \frac{f_s}{f_y} L_d$$

DONDE  $f_s = \frac{M}{A_s Z}$

EN VARILLAS LISAS

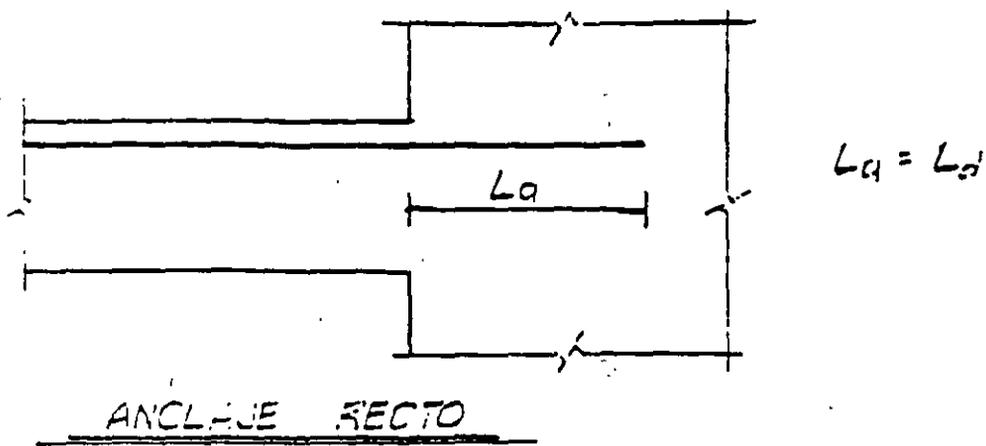
$$L_d' = 2 L_{d_{corr}}$$

ACERO EN COMPRESION.

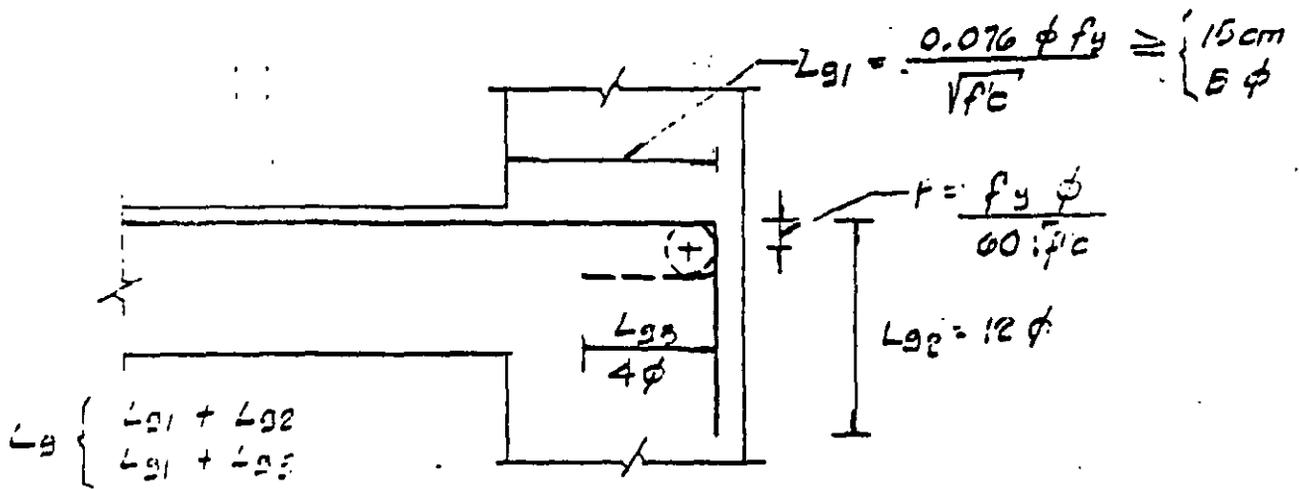
$$L_d = 0.6 L_d \text{ tensión}$$

$$L_d \geq 20 \text{ cm.}$$

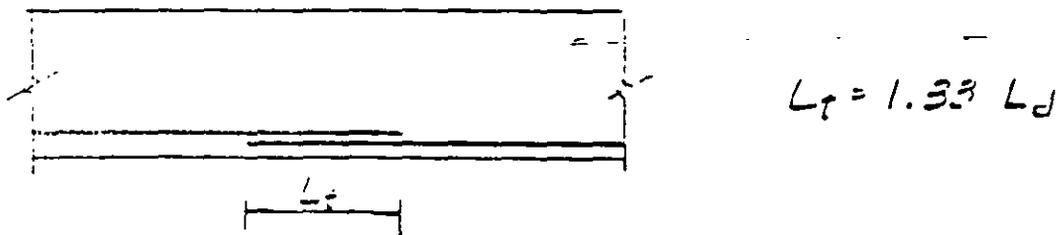
# ANCLAJES Y REFUERZO DEL CONCRETO



ANCLAJE RECTO

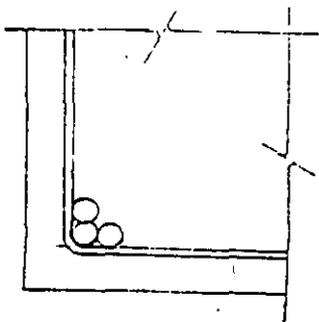
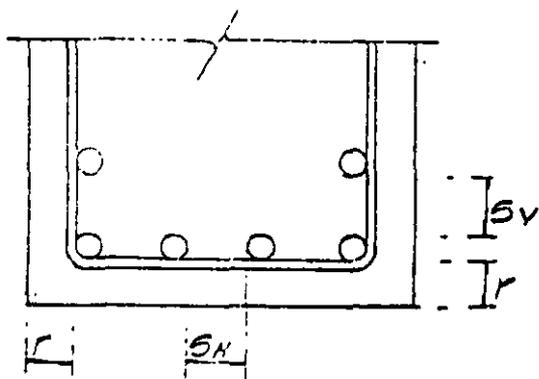
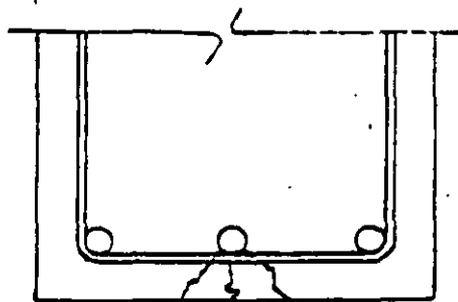
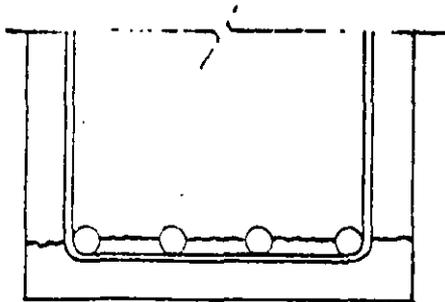


ANCLAJE EN ESCUADRA (L<sub>g</sub>)



LONGITUD DE TRASLAPE (L<sub>t</sub>)

# RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE VARILLAS



EN ELEMENTOS NO EXPUESTOS

$r$  SERÁ EL MENOR DE LOS DOS VALORES SIGUIENTES

$\phi$  MAX.  
2 cm.

EN ELEMENTOS COLADOS CONTRA EL SUELO

$r = \begin{cases} 5 \text{ cm. SIN PLANTILLA} \\ 3 \text{ cm. CON PLANTILLA} \end{cases}$

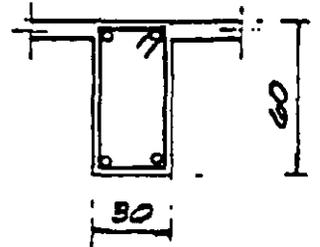
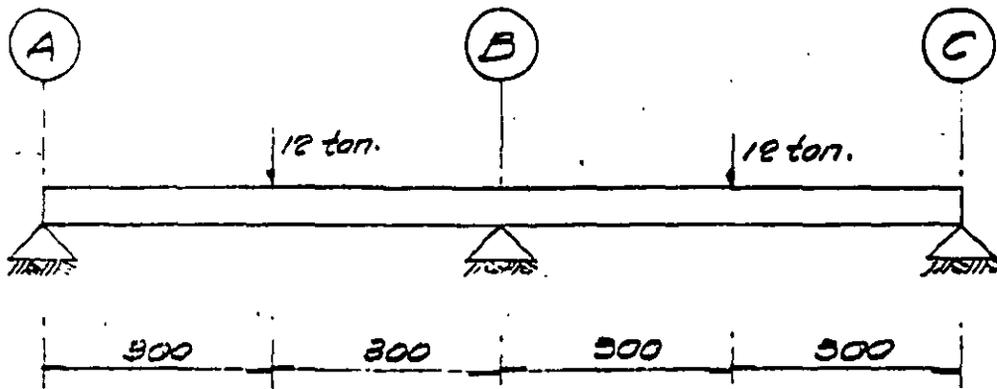
$S_H$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 1.5 T \text{ MÁX. AGR} \end{cases}$

$S_V$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 2 \text{ cm.} \end{cases}$

PAQUETES DE BARRAS A CONDICION QUE ESTEN EN UNA ESQUINA DE ESTRIBO

2 VARILLAS EN TRABES Y  
3 EN COLUMNAS (MAX)

# EJEMPLO



## DATOS

$$P = 12 \text{ ton.}$$

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$d = 55 \text{ cm.}$$

$$r = 5 \text{ cm.}$$

$$h = 60 \text{ cm.}$$

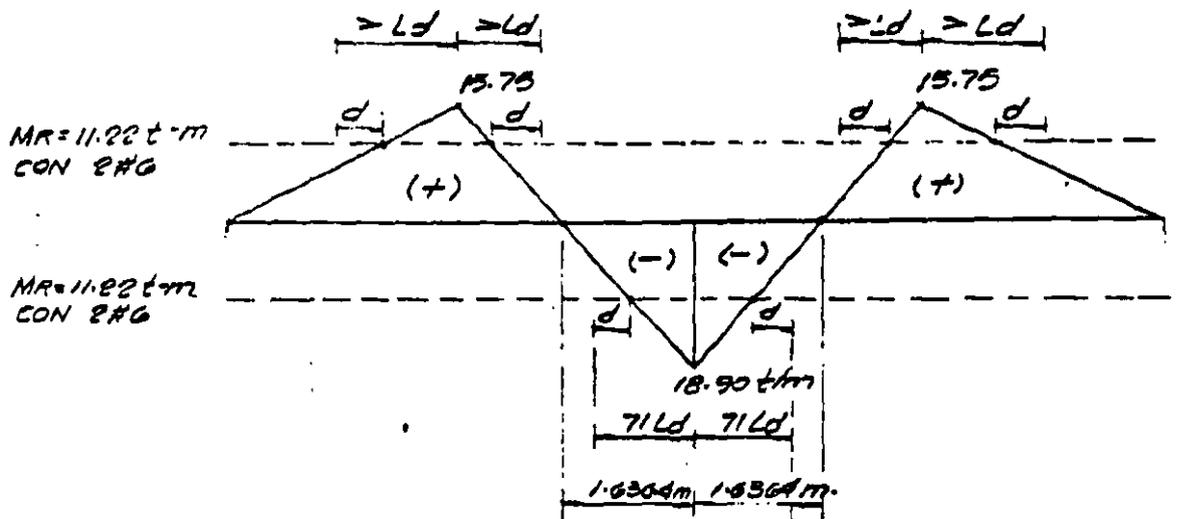
$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_u = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

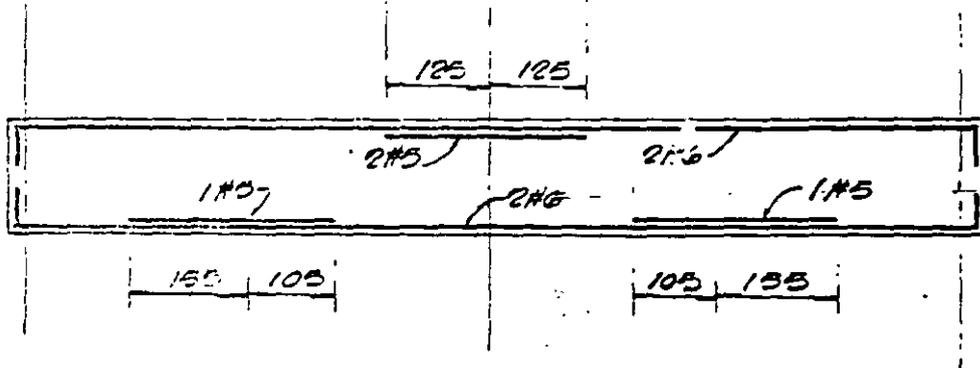
$$F_r = 0.9 \text{ (FLEXION)}$$

$$F_c = 1.4$$

# DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE



- $L\phi\#6 \begin{cases} l_s = 71 \\ l_i = 51 \end{cases}$
- $L\phi\#5 \begin{cases} l_s = 50 \\ l_i = 40 \end{cases}$





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

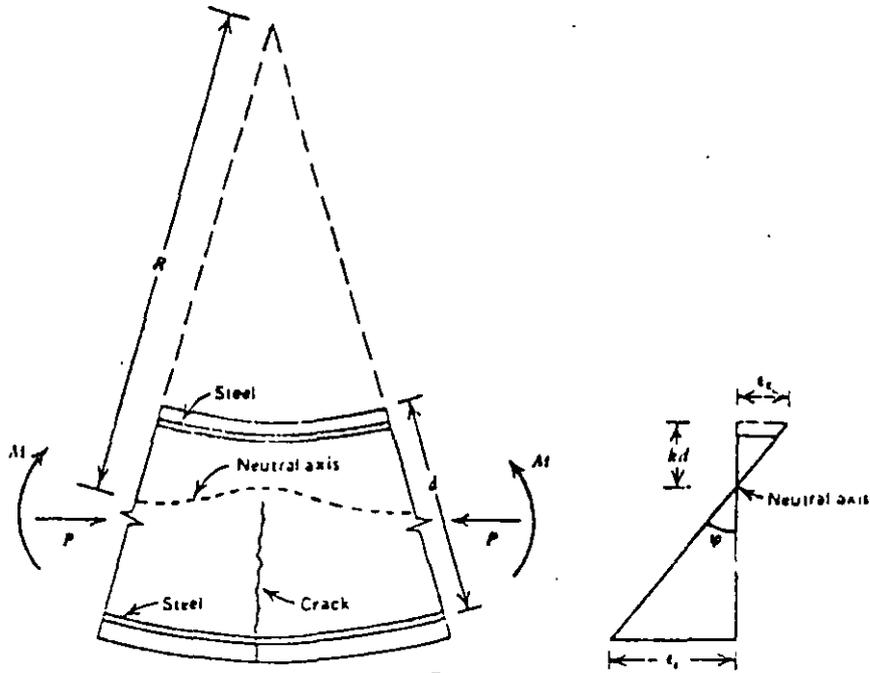
**FLEXIÓN**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

### III.- F L E X I O N

#### 1.- HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE LA RESISTENCIA.

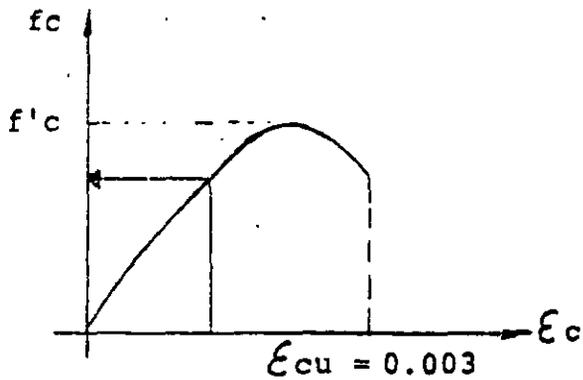
- A) EL CONCRETO NO RESISTE ESFUERZOS DE TENSION.
- B) LA DISTRIBUCION DE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES EN LA SECCION TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO - ES PLANA Y POR LO TANTO SE CONSIDERA QUE EXISTE ADHERENCIA PERFECTA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO.



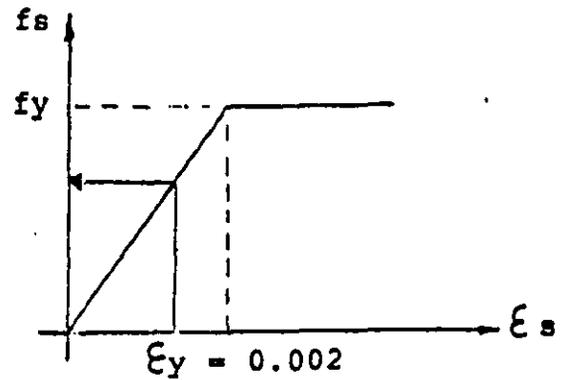
- C) LA DEFORMACION UNITARIA DEL CONCRETO A COMPRESION - CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA DE LA SECCION ES:

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

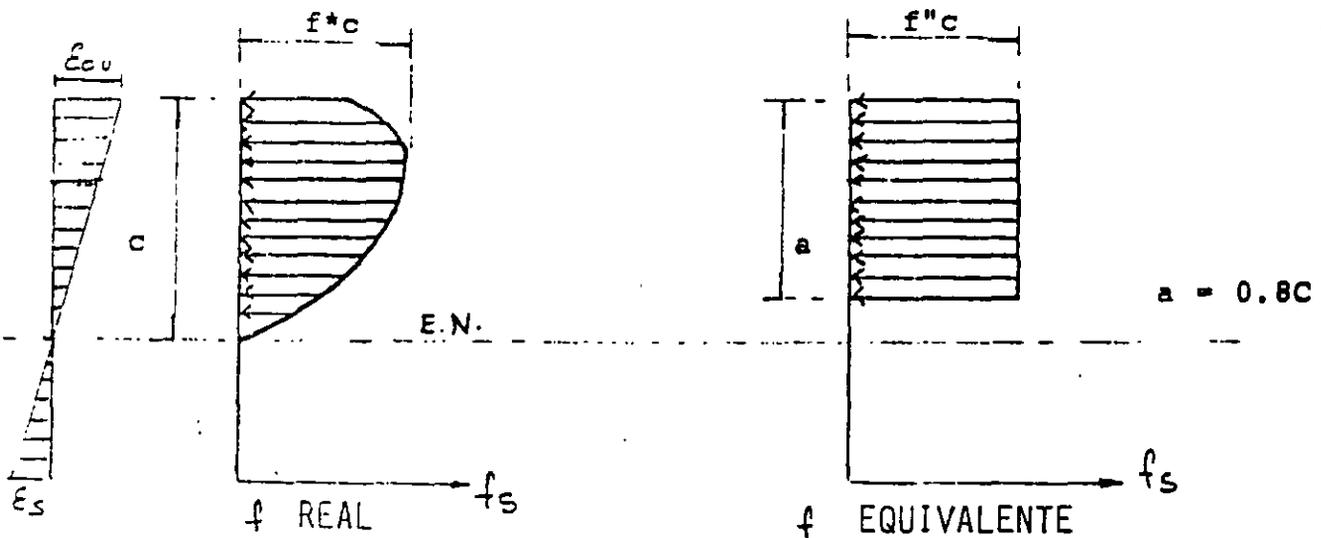
D) LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN EL CONCRETO Y EL ACERO CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA SE CONOCEN



CURVA TIPICA DEL CONCRETO EN COMPRESION.



CURVA TIPICA DEL ACERO EN TENSION.



$$f^*c = 0.8 f'c$$

$$f''c = 0.85 f^*c$$

$$\text{si } f^*c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f''c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c$$

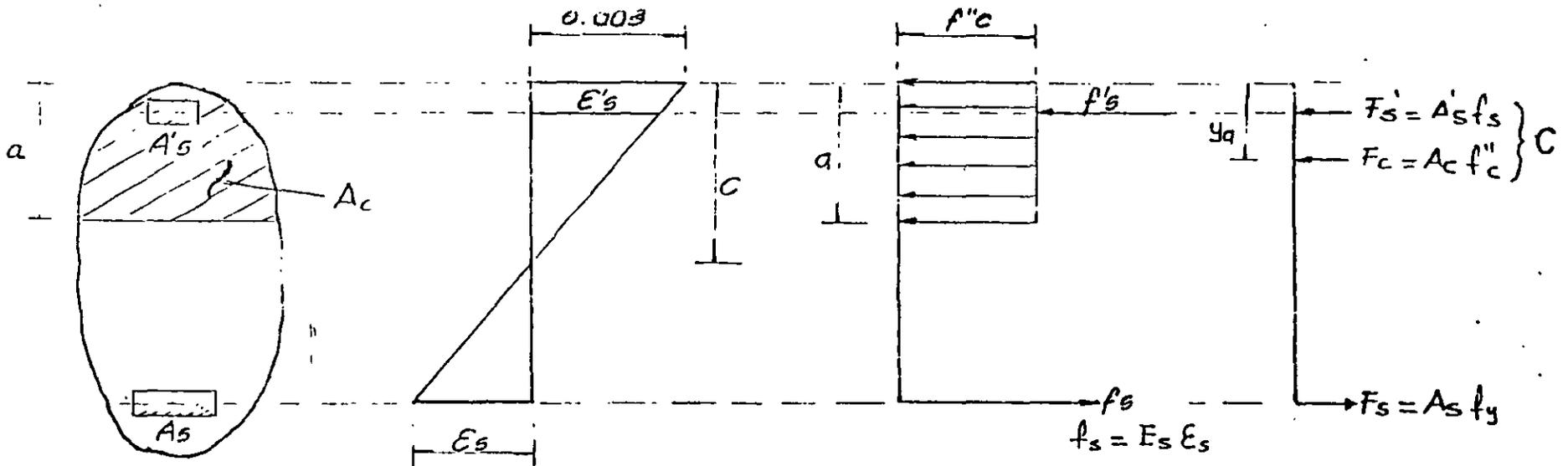
$$\text{si } f^*c > 250 \text{ Kg/cm}^2$$

SECCION DE  
FORMA  
CUALQUIERA

DEFORMACIONES  
UNITARIAS

DISTRIBUCION  
DE  
ESFUERZOS

FUERZAS

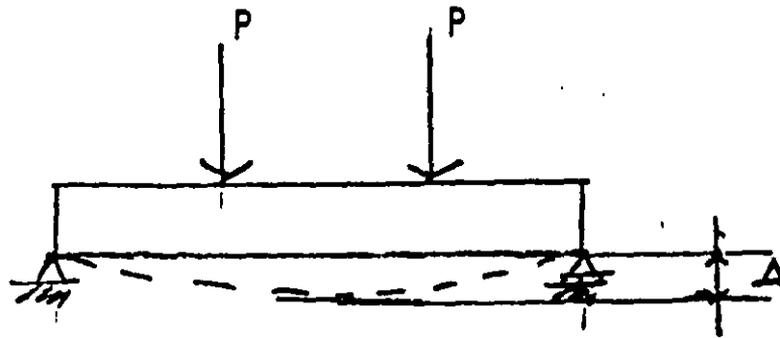


$$\sum F = 0 \Rightarrow C = T.$$

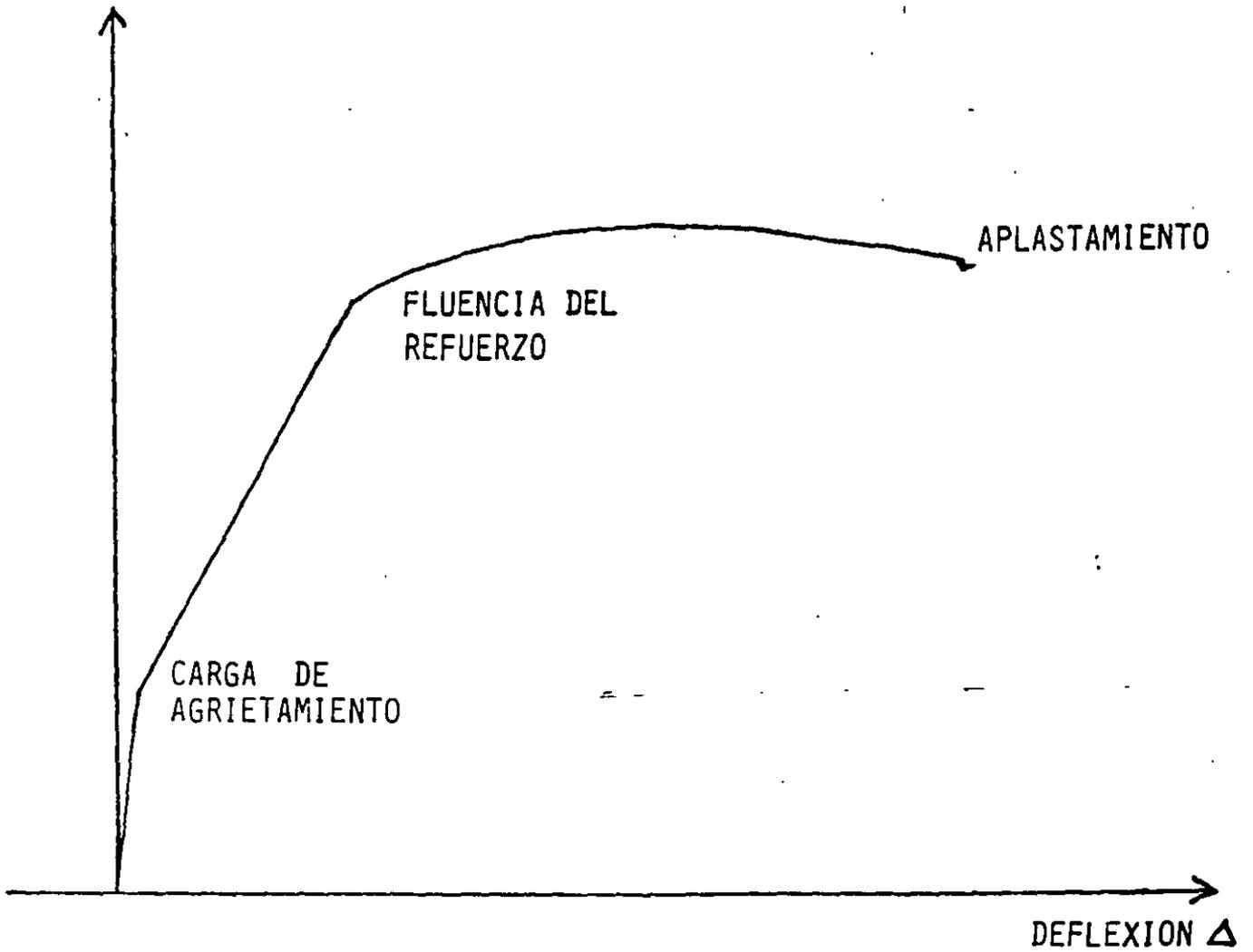
$$\sum M = M_R$$

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA CALCULAR LA RESISTENCIA  $M_R$

GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO  
CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE -  
REFUERZO.

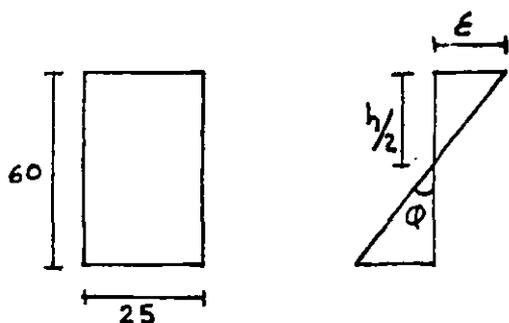


CARGA P



CALCULO DE RESISTENCIAS A FLEXION DE UNA SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO CON DIFERENTE PORCENTAJE DE REFUERZO (R.C.D.F. - 1987).

1) SECCION DE CONCRETO SIMPLE



$f'c = 200$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f^*c = 160$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f''c = 136$	Kg/cm <sup>2</sup>
* $\bar{f}_t = 19.80$	Kg/cm <sup>2</sup>
** $E = 113,137$	Kg/cm <sup>2</sup>
$E_s = 2 \times 10^6$	Kg/cm <sup>2</sup>

$$F_d = 0.9$$

$$* E = 8000 \sqrt{f'_c}$$

$$** \bar{f}_t = 1.4 \sqrt{f'_c}$$

A) CALCULO DE  $M_R$

$$\bar{f}_t = \frac{M_R}{I} C \quad M_R = \bar{f}_t \frac{I}{C} = \bar{f}_t S = \bar{f}_t \frac{bh^2}{6}$$

$$M_R = 19.80 \frac{(25 \times 60^2)}{6} = 297,000 \text{ Kg - cm}$$

$$M_R = 2.97 \text{ Ton - M}$$

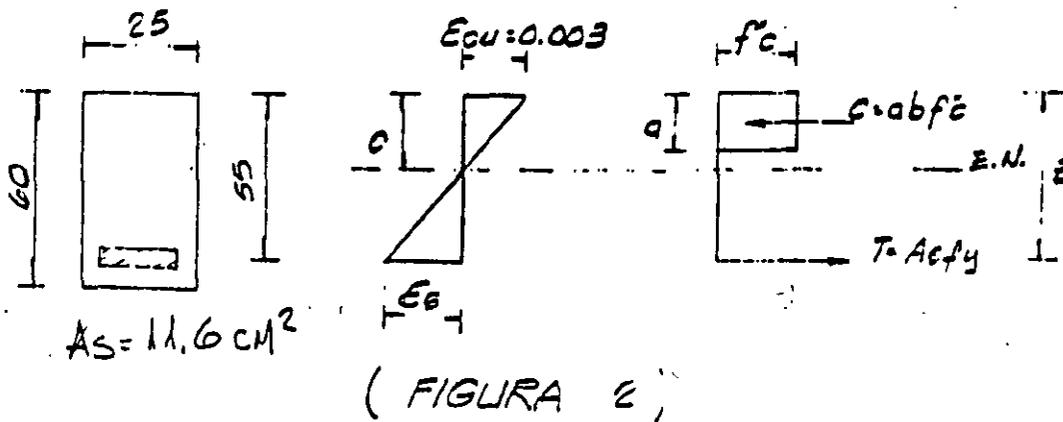
$$M_R = 2.97 \times 0.9 = 2.67 \text{ Ton-M (MOMENTO DE AGRIETAMIENTO)}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\epsilon = \frac{\bar{f}_t}{E} = \frac{19.80}{113,137} = 0.00018$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{C} = \frac{\epsilon}{h/2} = \frac{0.00018}{30} = 0.6 \times 10^{-5}$$

2) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



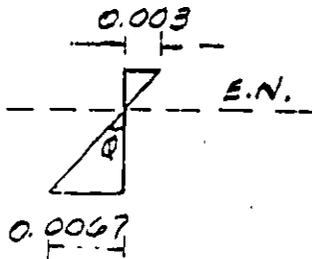
A) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c=17.00$

$$a = 0.8 \times 17 = 13.60$$

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \left( \frac{55}{17} \times 0.003 \right) - 0.003 = 0.0067$$

$$\epsilon_s = 0.0067 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



$$C = a b f'c = 13.60 \times 25 \times 136 = 46,240 \text{ Kg} = 46.24 \text{ Ton.}$$

$$T = A_s f_y = 11.60 \times 4000 = 46,400 \text{ Kg} \hat{=} C$$

$$M_R = T z = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 46,400 \left( \frac{55 - 13.60}{2} \right) = 2,236,480 \text{ Kg-cm.}$$

$$M_R = 22.36 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 22.36 \times 0.9 = \underline{20.12 \text{ Ton-m}}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.0030}{17} = \frac{17.65 \times 10^{-5}}{\text{cm}} \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

### 3) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SOBREREFORZADA)

#### A) CALCULO DE $M_R$

$$A_s = 30.00 \text{ cm}^2 \quad \text{SECCION } 25 \times 60$$

$$\text{SE SUPONES } c = 35.7$$

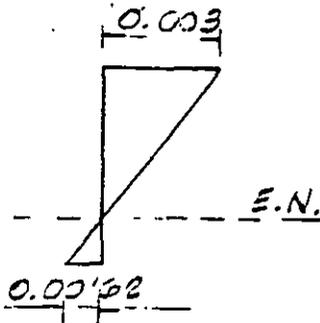
$$a = 0.8c = 0.8 \times 35.70 = 28.56 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = \left( \frac{d}{c} \epsilon_{cu} \right) - \epsilon_{cu} = \frac{55}{35.70} 0.003 - 0.003 = 0.0016 < \epsilon_y$$

NO FLUYE EL  
ACERO

$$f_s = E_s \epsilon_s$$

FALLA FRAGIL



$$C = abf''c = 28.56 \times 25 \times 136 = 97,104 \text{ Kg}$$

$$T = A_s E_s \epsilon_s = 30 \times 0.00162 \times 2 \times 10^6 = 97,200 \text{ Kg}$$

$$M_R = Tz = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 97,200 \left( 55 - \frac{28.56}{2} \right) = 3,957,964 \text{ Kg-cm}$$

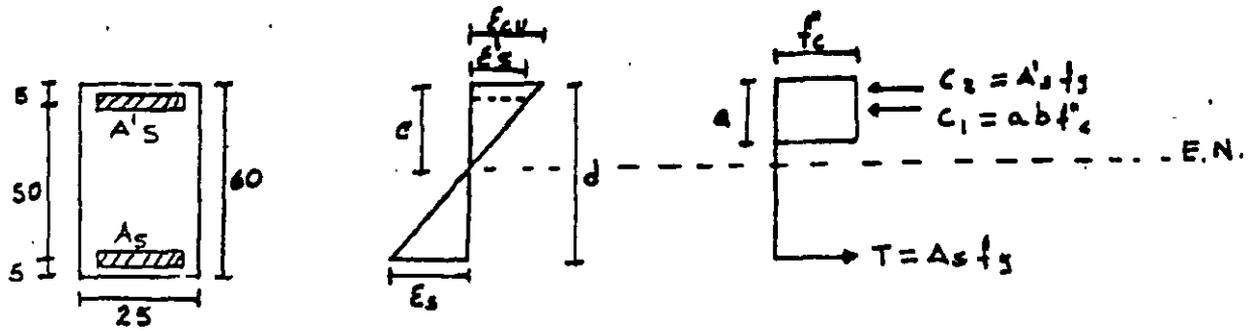
$$M_R = 39.58 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 39.58 \times 0.9 = \underline{35.62 \text{ Ton-m}}$$

#### B) CALCULO DE $\phi$ (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{35.70} = \underline{8.40 \times 10^{-5} \text{ rad/cm}}$$

4) SECCION DOBLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



DATOS:

$A_s = 30 \text{ cm}^2$

$A's = 10 \text{ cm}^2$

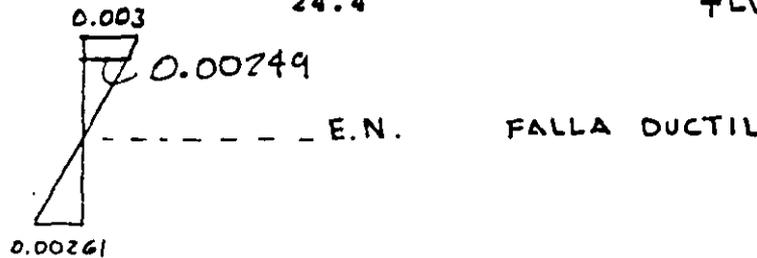
B) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c = 29.4$

$a = 0.8c = 23.52$

$\epsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \epsilon_{cu} = \frac{(29.4 - 5)}{29.4} 0.003 = 0.00249 > f_y = 0.002$   
 FLUYE EN COMPRESION

$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{29.4} 0.003 - 0.003 = 0.00261 > f_y = 0.002$   
 FLUYE EN TENSION



$C_1 = abf''c = 23.52 \times 25 \times 136 \cong 79\ 968 \text{ Kg}$

$C_2 = A'sf_y = 10 \times 4000 = 40000 \text{ Kg}$

$C = C_1 + C_2 = 79968 + 40000 = 119,968 \text{ Kg}$

$T = A_s f_y = 30 \times 4000 = 120\ 000 \text{ Kg} \cong C$

$$M_R = C_1 \left( d - \frac{a}{2} \right) + C_2 (d-d')$$

$$M_R = 79,968 \cdot (55 - \frac{23.52}{2}) + 40000 (55-5)$$

$$M_R = 5'457,816 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2$$

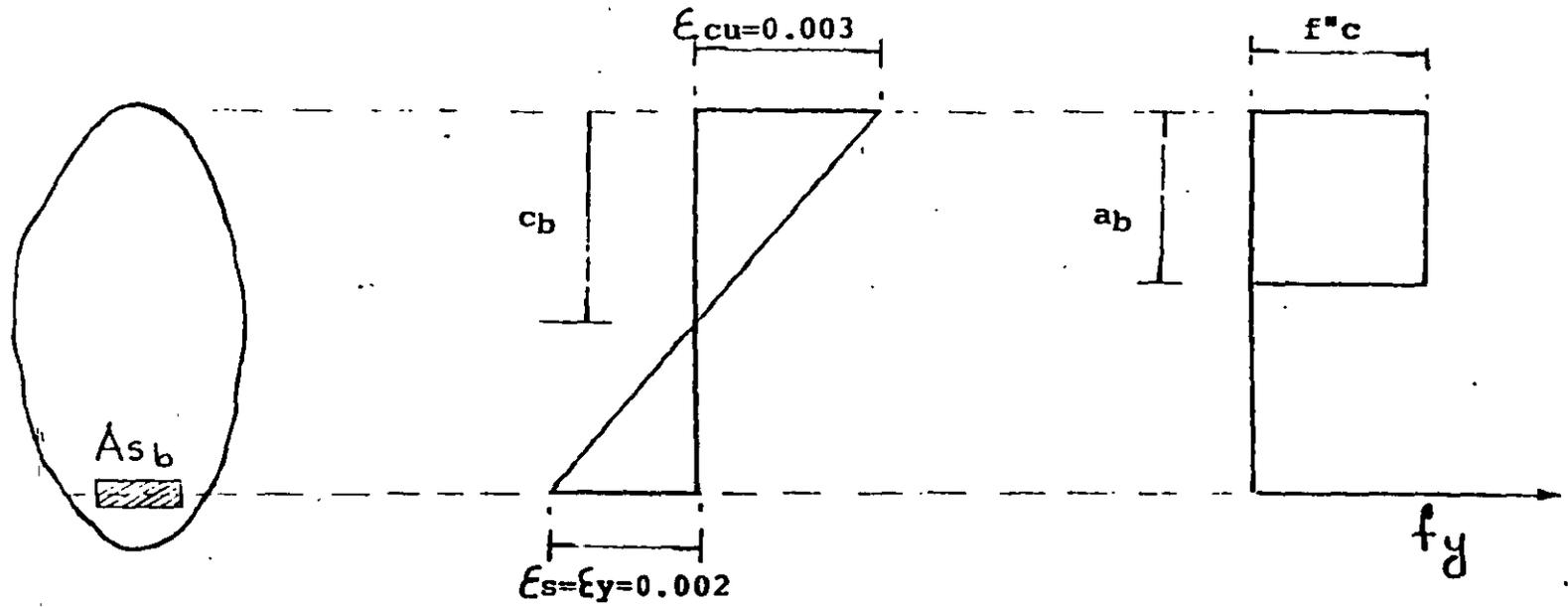
$$M_R = 54.57 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

$$M_R = 54.57 \times 0.9 = \underline{49.11 \text{ Ton} \cdot \text{m}}$$

B) CALCULO DE  $\phi$

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{29.40} = \frac{10.20 \times 10^{-5}}{29.40} \text{ rad/cm}$$

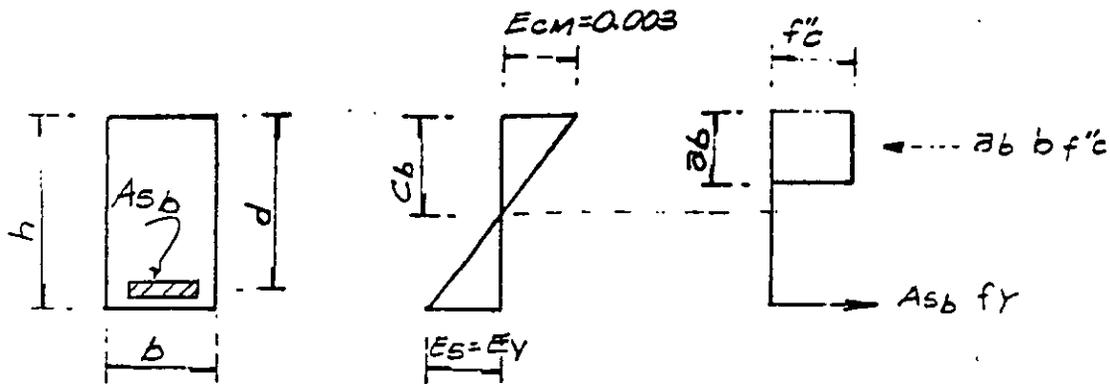
# FALLA BALANCEADA



SECCION SUBREFORZADA  $A_s < A_{sb}$

SECCION SOBREFORZADA  $A_s > A_{sb}$

# CALCULO DEL PORCENTAJE BALANCEADO EN SECCIONES RECTANGULARES



$$P_b = \frac{A_{sb}}{bd}$$

$$C = T$$

$$0.8 C_b b f''c = P_b b d f_y$$

$$C_b = \frac{P_b b d f_y}{0.8 b f''c} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f''c}$$

PERO  $\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{C_b}{d}$

$$\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f''c d}$$

$$P_b = \frac{0.8 f''c}{f_y} \frac{0.003}{E_y + 0.003}$$

MULTIPLICANDO POR  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

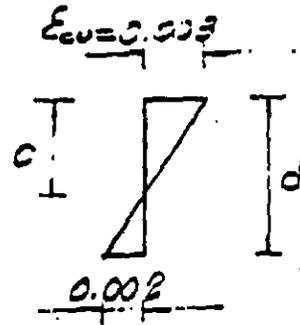
$$P_b = \frac{0.8 f''c}{f_y} \frac{6000}{f_y + 6000} \quad \left[ f_y = E_s E_y \right]$$

$$P_b = \frac{4800}{f_y + 6000} \frac{f''c}{f_y}$$

5) SECCION BALANCEADA

A) CALCULO DE MR

$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4000}{2 \times 10^6} = 0.002$$



DE LA FIGURA

$$\frac{c}{\epsilon_{cu}} = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad c = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \epsilon_{cu}$$

$$c = \frac{55 \times 0.003}{0.003 + 0.002} = 33.00 \text{ cm.}$$

$$a = 0.8c = 0.8 (33) = 26.40 \text{ cm}$$

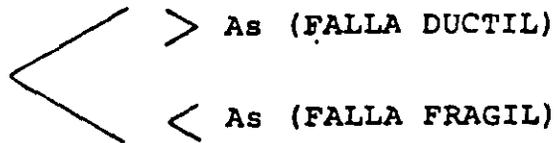
LA FUERZA DE COMPRESION ES

$$C = abf''c = 26.40 \times 25 \times 136 = 89,760 \text{ Kg}$$

POR EQUILIBRIO

$$T = C \Rightarrow A_s b f_y = 89,760$$

$$A_s b = \frac{89760}{4000} = \underline{\underline{22.44}} \text{ cm}^2$$



$$M_R = CZ = C \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_R = 89760 \left( 55 - \frac{26.40}{2} \right) = 3'751,968 \text{ Kg - cm}$$

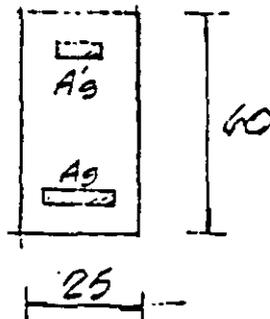
$$M_R = 37.52 \times 0.9 = \underline{\underline{33.77}} \text{ Ton-M}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

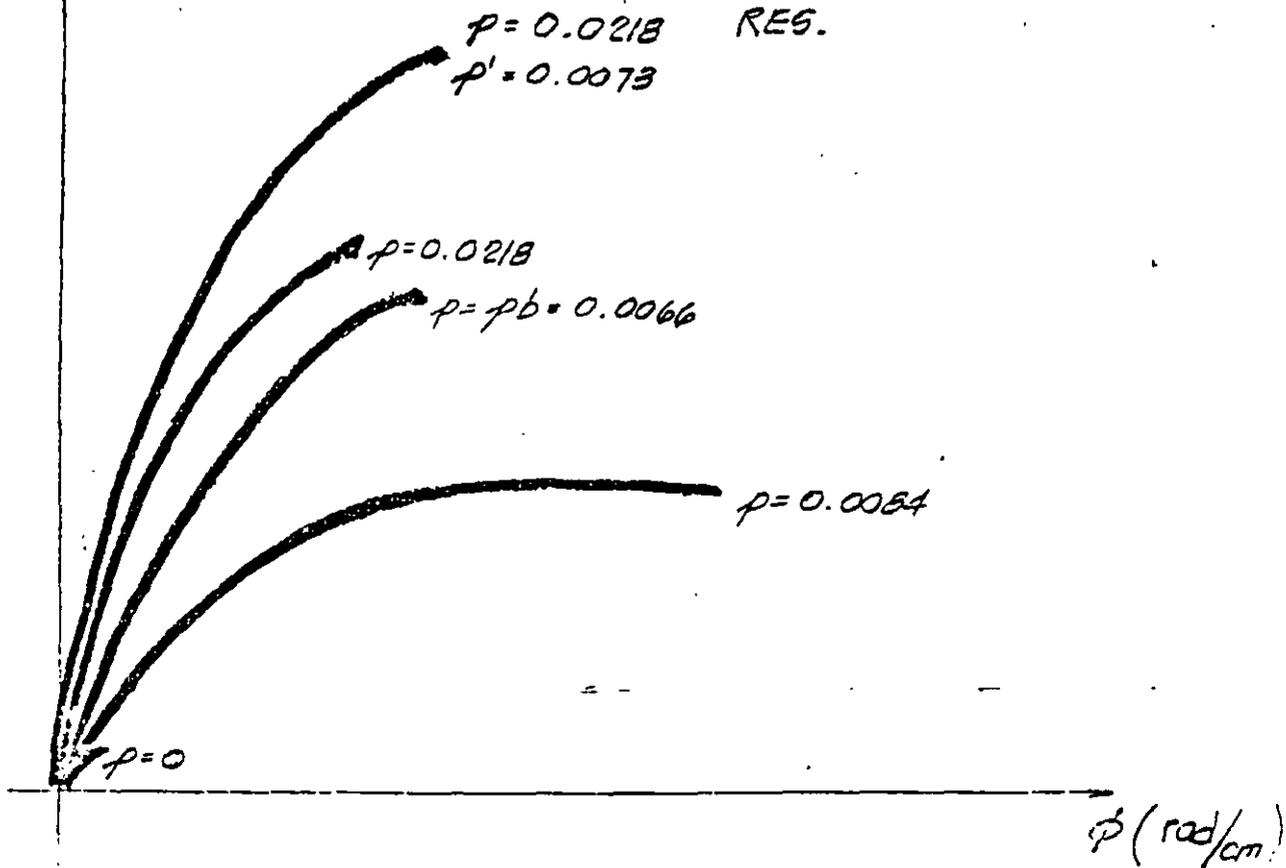
$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{33.00} = \underline{\underline{9.09 \times 10^{-5}}} \text{ rad/cm}$$

# GRAFICA MOMENTO-CURVATURA PARA DISTINTOS PORCENTAJES DE REFUERZO

$M$  (TON-m)



RESISTENCIA Y CURVATURAS OBTENIDAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES.



RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{MAX}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\min} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

2.1)  $A_{s\max} \begin{cases} A_{sb} & (\text{NO SISMO}) \\ 0.75 A_{sb} & (\text{SI SISMO}) \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{\text{MAX}}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

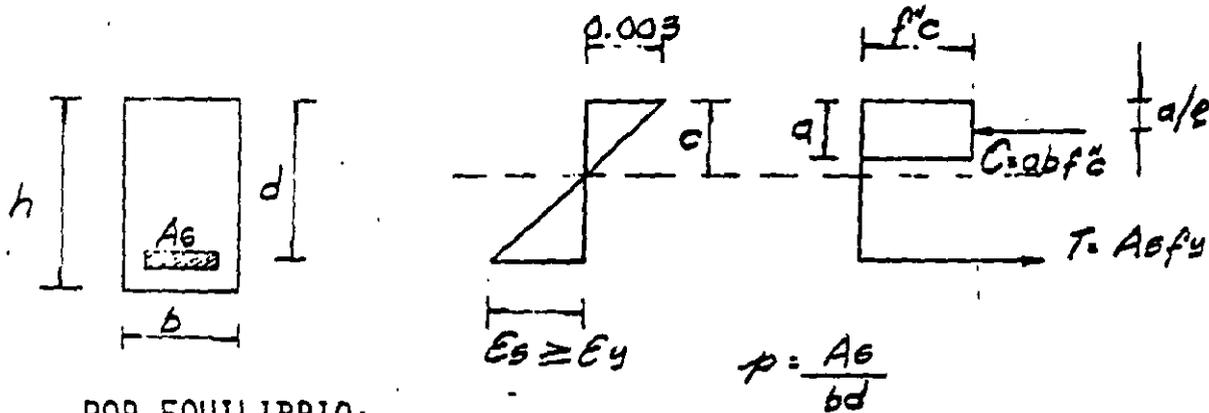
2.1)  $A_{\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & \text{(NO SISMO)} \\ 0.75 A_{sb} & \text{(SI SISMO)} \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

# FORMULAS PARA CALCULAR LAS RESISTENCIAS EN SECCIONES DE FORMA COMUN

A) SECCIONES RECTANGULARES SUBREFORZADAS SIN ACERO DE COMPRESION.



POR EQUILIBRIO:

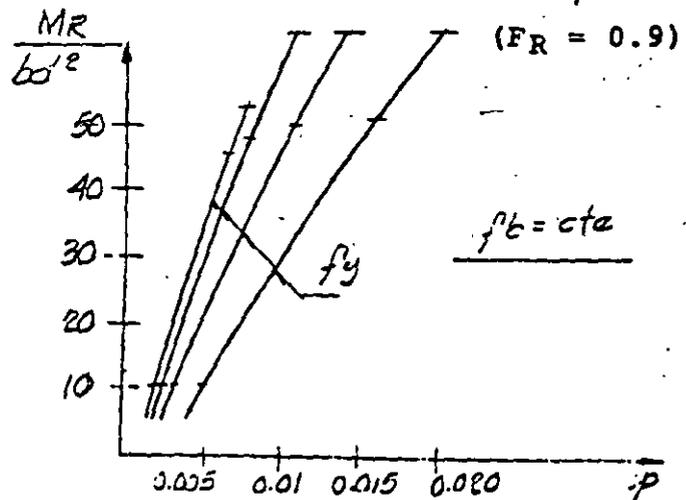
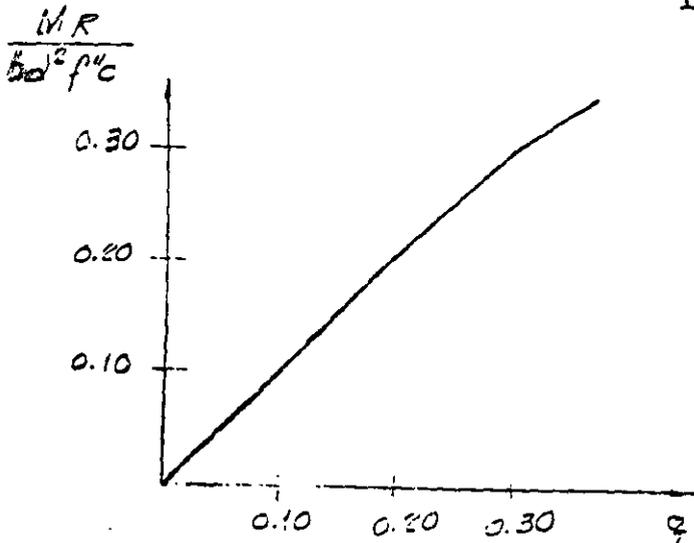
$$c = T$$

$$abf''c = Asfy$$

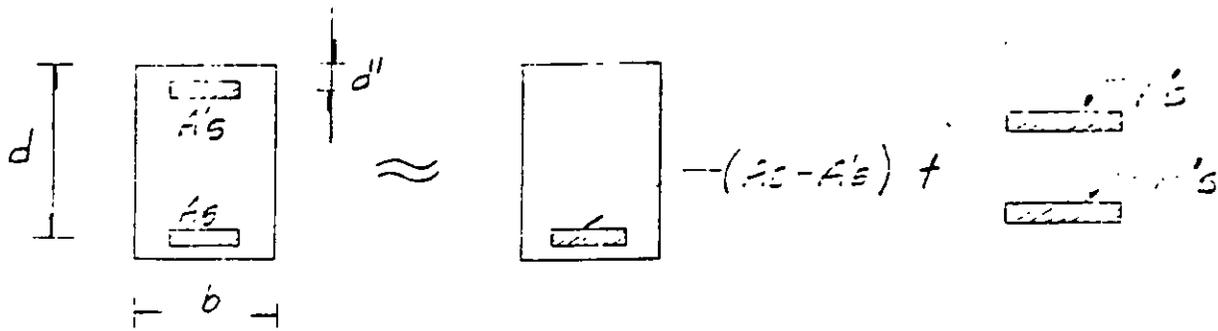
$$a = \frac{Asfy}{bf''c} = \frac{Pdfy}{f''c} \quad ; \quad q = \frac{P}{f''c} \frac{fy}{f''c}$$

$$M_R = c(d - \frac{a}{2}) = abf''c d(1 - \frac{a}{2d}) = \frac{pdfy}{f''c} bf''c d(1 - \frac{Pdfy}{2df''c})$$

$$M_R = F_R \left[ b d^2 f''c q (1 - 0.5q) \right]$$



E. SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M.R = F.R \left[ (A_s - A_s') f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right]$$

de  $C = T$

$$abf''c + A_s' f_y = A_s f_y$$

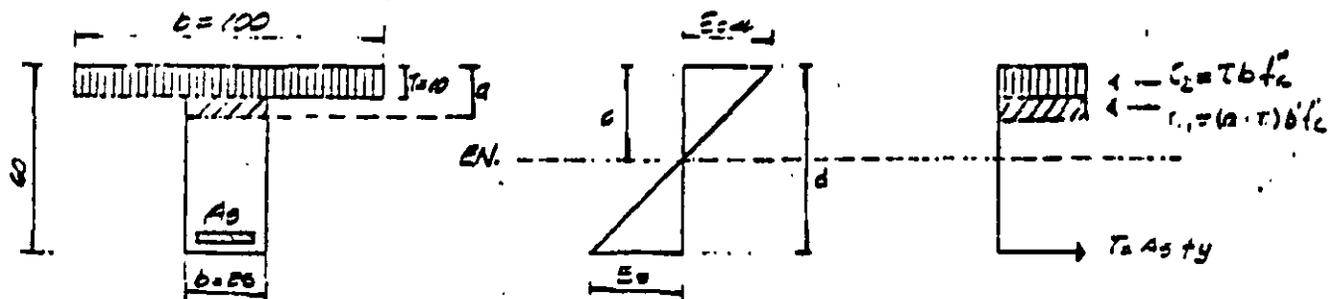
$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{bf''c}$$

SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

6-) SECCION T SIMPLEMENTE ARMADA  
(SUBREFORZADA)



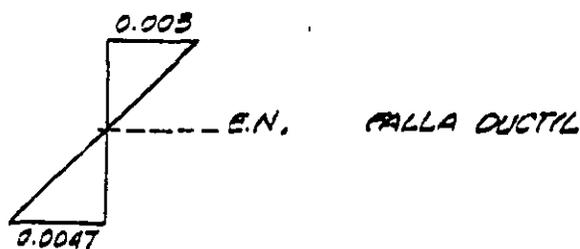
$$A_s = 40.00 \text{ CM}^2$$

A-) CALCULO DE  $M_r$ .

SE SUPONE  $c = 21.32 \text{ CM}$ .

$$a = 0.8 = 0.8 \times 21.32 = 17.06 \text{ CM}$$

$$\epsilon_s = \frac{c}{E} E_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{21.32} \times 0.003 = 0.0047 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



$$C_1 = (a - \tau) b' f_c' = (17.06 - 10) 25 \times 136 = 24,004 \text{ Kg}$$

$$C_2 = \tau b f_c' = 10 \times 100 \times 136 = 136,000 \text{ Kg}$$

$$C = 24,004 + 136,000 = 160,004 \text{ Kg}$$

$$T = A_s f_y = 40 \times 4000 = 160,000 \text{ Kg} = C$$

$$M_r = C_1 \left( d - a + \frac{a - \tau}{2} \right) + C_2 \left( d - \frac{\tau}{2} \right)$$

$$M_r = 2400 \left( 0.55 - 0.17 + \frac{0.17 - 0.1}{2} \right) + 136,00 \left( 0.55 - \frac{0.1}{2} \right) = 77.95 \text{ TON-M}$$

$$M_r = 77.95 \times 0.9 = 70.16 \text{ TON-M}$$

B-) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{c} = \frac{0.0047}{21.32} = 0.00022 \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

### EJEMPLO 9.1 Diseño de una viga rectangular simplemente armada

Obtener las dimensiones de una viga rectangular y la cantidad de acero As para resistir los siguientes momentos (en condiciones de servicio):  $M_D = 7.50$  ton-m y  $M_L = 5.00$  ton-m. El agrietamiento por flexión debe ser revisado con el refuerzo; suponga que la viga está expuesta a la intemperie.

Usar  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$Z = 145 \text{ (exposición al exterior)}$$

#### CALCULOS Y DISCUSION

referencias

10.3.3

1.- El procedimiento de diseño completo para secciones rectangulares simplemente armadas se presenta a partir de calcular un peralte mínimo, usando el porcentaje máximo que se permite para los miembros a flexión,  $0.75 P_b$

Paso 1. Cálculo del porcentaje máximo de acero\*

$$P_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.0283$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ (} f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2 \text{)}$$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b = 0.75 (0.0283) = 0.0212$$

10.3.3

Paso 2. Cálculo del  $b d^2$  necesario

Resistencia a la flexión necesaria:

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$M_u = 1.4 \times 7.50 + 1.7 \times 5.0$$

ec (9-1)

$$M_u = 19.00 \text{ ton-m}$$

\* Los valores de  $P_b$  y  $0.75 P_b$  se pueden obtener también directamente de la tabla 9.1

$$R_n = p f_y \left( 1 - 0.5 \frac{p f_y}{0.85 f_c'} \right)$$

$$= 0.0212 \times 4200 \left( 1 - \frac{0.5 \times 0.0212 \times 4200}{0.85 \times 280} \right)$$

$$R_n = 72.38 \text{ Kg/cm}^2$$

9.3.2.1

$$\phi = 0.90 \text{ (flexión)}$$

$$bd^2_{\text{nec.}} = \frac{M_u}{\phi R_n} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 \times 72.38} = 29,167 \text{ cm}^3$$

Paso 3. Dimensiones del elemento

$$bd^2_{\text{nec.}} \leq bd^2_{\text{disp.}}$$

Sea  $b = 25.0 \text{ cm}$  (ancho de columna)

$$d = \sqrt{\frac{29,167}{25}} = 34.16 \text{ cm}$$

Peralte mínimo total  $\hat{=} 34.16 + 6.25 = 40.4 \text{ cm}$

Para la resistencia a la flexión, resulta adecuada una viga de 25 cm x 40 cm. Sin embargo, debe observarse que el peralte total de 40 cm es un poco menor que el requerido según el criterio de esfuerzos admisibles. Debido a eso que las deflexiones pueden ser importantes en las vigas diseñadas con el criterio de resistencia última.

Paso 4. Con el peralte total de 40 cm, se calcula un valor revisado de  $p$ .

Como ilustración, se calcula el  $p$  con cuatro diferentes métodos

$$d \hat{=} 40 - 6.2 = 33.8 \text{ cm}$$

(1) por fórmula (método exacto):

$$R_n = \frac{M_u}{\phi (bd^2)_{disp}} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 (25 \times 33.8^2)} = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$p = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}} \right)$$

$$p = \frac{0.85 \times 0.28}{4.2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 73.9}{0.85 \times 280}} \right) = 0.0218 \doteq p_{m\acute{a}x}$$

(2) Con las curvas de resistencia como las de la fig. 9.1 para  $R_n = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$  (10511b/pulg<sup>2</sup>),  $p = 0.0214$

(3) Con las tablas de resistencia como la tabla 9.2:

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c bd^2} = \frac{19 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 25 \times 33.8^2} = 0.2640$$

$$w = 0.327$$

$$p = wf'_c / f_y = 0.327 \times 0.28 / 4.2 = 0.0218$$

(4) Con aproximación lineal:

$$p = (p_{original}) \frac{(R_n \text{ revisado})}{(R_n \text{ original})}$$

$$p = 0.0212 \times 73.92 / 72.38 = 0.0217$$

Paso 5. Cálculo de  $A_s$  necesaria

$$A_s = (p_{revisado}) (bd)_{disp.}$$

$$A_s = 0.0218 \times 25 \times 33.8 = 18.42 \text{ cm}^2$$

2.- Revisión de la corrección de los cálculos, por simple estática  
 (ver la siguiente figura):

$$T = \rho b d f_y = A_s f_y = 18.42 \times 4.2 = 77.36 \text{ ton}$$

$$a = \frac{C \phi T}{0.85 f'_c b} = \frac{77.36}{0.85 \times 0.28 \times 25} = 13 \text{ cm}$$

Resistencia de diseño a la flexión:

$$\phi M_n = [\phi A_s f_y (d - \frac{a}{2})] = [0.9 \times 77.36 (33.8 - 13.00/2)]$$

$$\phi M_n = 1900.74 \text{ ton-cm} \approx 19.01 \text{ ton-m}$$

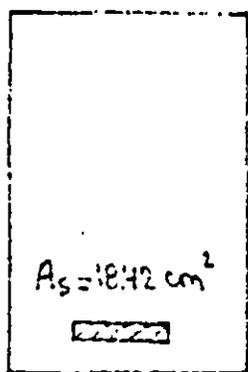
como (resistencia necesaria)  $\leq$  (resistencia disponible), o sea que

$$M_u \leq \phi M_n$$

$$19.00 \approx 19.01$$

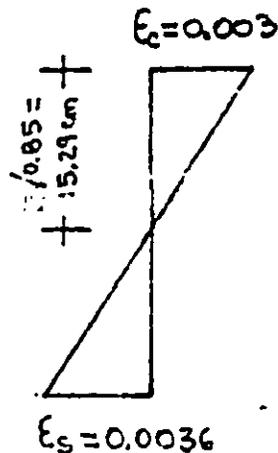
bien

+ 25 cm +



sección  
transversal

33.8 cm



deformaciones

238.0 kg/cm²

+ 13.00 cm +



$C = 77.36 \text{ Ton}$

27.3 cm

$f_y$

$T = 77.36 \text{ Ton}$

Bloque de  
esfuerzos

3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

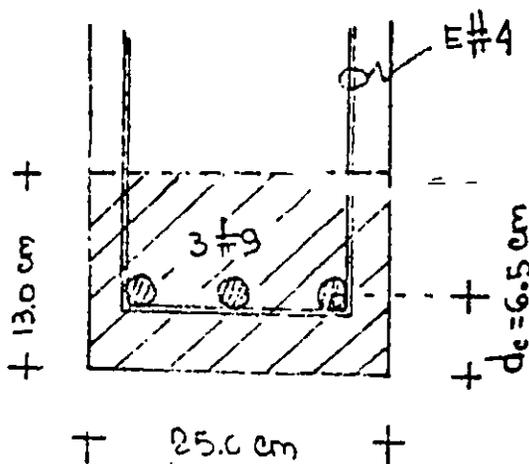
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \text{bien}$$



3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

10.6

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A}$$

cc(10.4)

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm}$$

10.0

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm})$$

7.7.1

(expuesta a la intemperie)

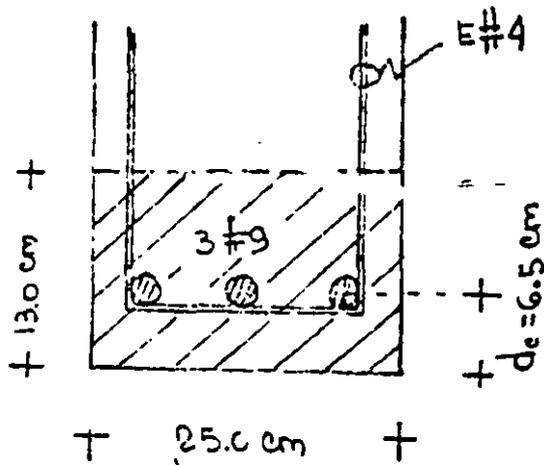
$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2$$

10.6.4

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \text{bien}$$



4. Revisión del ancho de viga

$$b_{\text{disp.}} \geq 2 \times (\text{recubrimiento}) + 3 \times 2.86 + 2 \times 2.86 = \quad 7.6.1$$

$$= 2 \times 5.07 + 14.30 = 24.4 < 25 \text{ cm (ancho disponible)} \quad 7.7.1$$

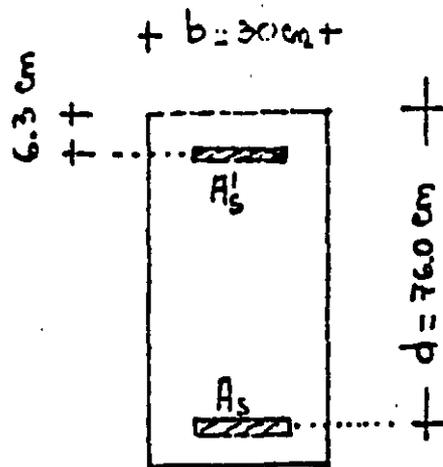
bien

Se tiene una sección transversal de una viga, con las dimensiones como se observa en la siguiente figura, y se pide calcular las cuantías de acero para resistir un momento factoral  $M_u = 124 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (exposición al exterior)



### CALCULOS Y DISCUSION

1. Revisión como simplemente armada (acero a tensión)

Cálculo del acero de refuerzo a tensión que se requiere, con la ayuda de la tabla 9.2:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{124 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 30 \times 76^2} = 0.2840$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.361$

Porcentaje de acero a tensión necesario:

$$p = w f'_c / f_y = 0.361 \times 0.28 / 4.2 = 0.241$$

Considerando solo refuerzo a tensión:

$$p_{\text{máx}} = 0.75 p_b$$

10.3.3

de la tabla 9.1, con  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$  (4000 lb/pulg<sup>2</sup>) y

113

$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  (60000 lb/pulg<sup>2</sup>):

$$p_{\text{máx}} = 0.0214$$

como  $0.0241 > 0.0214$  se necesita acero de compresión

## 2. Cálculo del acero necesario, $A_s$ y $A'_s$ :

La  $w$  máxima que se permite para vigas simplemente armadas (acero de tensión) es:

$$w \leq 0.75 p_b f_y / f'_c = 0.0214 \times 4.2 / 0.28 = 0.321; \text{ de la tabla}$$

9.2, con  $w = 0.321$ :

$$M_n / f'_c b d^2 = 0.2602$$

La resistencia máxima de diseño a la flexión como simplemente armada vale:

$$\begin{aligned} \phi M_n &= 0.9 (0.2602) (0.28 \times 30) (76^2) / 100 \\ &= 113.62 \text{ ton-m} \end{aligned}$$

y la resistencia necesaria tomada con el refuerzo a compresión:

$$M'_u = 124 - 113.62 = 10.38 \text{ ton-m}$$

Suponiendo que el acero a compresión fluye,  $f'_s = f_y$ :

$$p' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{M'_u}{\phi f_y (\bar{d} - d') bd}$$

$$p' = \frac{10.38 \times 100,000}{0.9 \times 4200 (76 - 6.3) 30 \times 76} = 0.00173$$

$$p = 0.75 p_b + p' = 0.0214 + 0.00173 = 0.0231$$

NOTA: para elementos doblemente armados, el porcentaje de  $p_b$  con que contribuye el refuerzo de compresión no se necesita reducir por el factor de 0.75

Ver la tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento

$$A'_s = p'bd = 0.00173 \times 30 \times 76 = 3.94 \text{ cm}^2$$

$$A_s = pbd = 0.0231 \times 30 \times 76 = 52.67 \text{ cm}^2$$

Revisión de que se cumpla que el acero de compresión esté fluyendo:

$$\frac{A_s - A'_s}{bd} \geq \frac{0.85 b_1 f'_c d'}{f_y d} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0231 - 0.00173 \geq \frac{0.85 \times 0.85 \times 0.28 \times 6.3}{4.2 \times 76} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0214 \geq 0.0133$$

∴ sí fluye el acero de compresión como se supuso, bien.

3. Se puede llevar a cabo una revisión de las correcciones a los cálculos, según las ecu. de resistencia que se dan en la sección 10.3 (A) (3) de los comentarios del Reglamento. Cuando el armado a compresión fluye:

$$\phi M_n = \phi [ (A_s - A'_s) f_y (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') ]$$

$$= 0.9 \left\{ (48.79 \times 4.2) \left( 76 - \frac{28.70}{2} \right) + 3.94 \times 4.2 (76 - 6.3) \right\} / 100$$

$$= 124.08 \text{ ton-m} \dots \dots \text{ bien}$$

$$\text{donde } a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{48.79 \times 4.2}{0.85 \times 0.28 \times 30} = 28.70$$

4. Distribución del acero para satisfacer el criterio de agrietamiento (por flexión) de la sección 10.6 para elementos colocados a la interna perie.

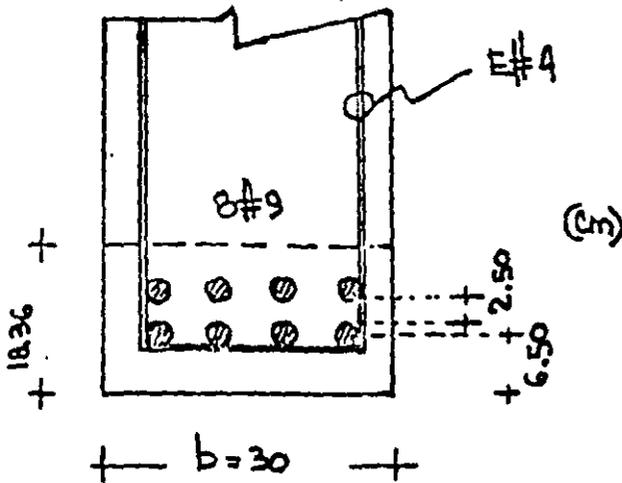
Refuerzo a tensión:

$$\text{sean 8 var. } \# 9 \quad (A_s = 51.28 \text{ cm}^2 \doteq 52.67 \text{ cm}^2)$$

(2% menos que lo necesario .... bien)

Acero a compresión:

sean 2 var. # 5 ( $A'_s = 3.96 \text{ cm}^2 \approx 3.94 \text{ cm}^2$ , bien)



$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{ec(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento}) + \frac{1}{2} \phi_{\text{longit.}} + \phi_{\text{estribo}} \quad 10.0$$

$$= 3.81 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm}$$

$$(\text{recubrimiento para var. \# 9} = 3.81 + 1.27 = 5.08 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

(expuesta a la intemperie)

$$A = 18.36 \times 30 / 8 = 68.85 \text{ cm}^2 / \text{varilla} \quad 10.0$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 68.85} = 108 < 145 \quad \text{--- bien}$$

5. Revisión del ancho de viga

$$b = 2 \times (\text{recubrimiento}) + 4 \times 2.86 + 3 \times 2.86$$

$$= 2 \times 5.08 + 11.44 + 8.58 = 30 \text{ cm} \quad \text{--- bien}$$

6. Para el momento de diseño de compresión se requiere por el momento de diseño se necesitan estribos con:

$$\text{sop. máx} \leq 16 \times 1.59 = 25.4 \text{ cm}$$

$$48 \times 1.27 = 60.9 \text{ cm}$$

7.10.5.2

$$\text{dimensión menor de la viga} = 30 \text{ cm}$$

usar E # 4 @ 25 cm

Resistencia a la compresión del patín:

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$= 0.85 \times 0.28 (75 - 25) 6.5 = 77.35 \text{ ton}$$

$A_{sf}$  necesario con que contribuye el patín:

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{77.35}{4.2} = 18.42 \text{ cm}^2$$

Contribución, a la resistencia, del patín:

$$\phi M_{nf} = \phi [A_{sf} f_y (d - 0.5 h_f)]$$

$$= 0.9 [18.42 \times 4.2 (49 - 0.5 \times 6.5)] / 100 = 31.85 \text{ t-m}$$

Momento que debe tomar el alma de la viga:

$$\phi M_{uw} = M_u - \phi M_{nf} = 55.0 - 31.85 = 23.15 \text{ ton-m}$$

3. Con la ayuda de la tabla 9.2 se calcula el área de acero  $A_{sw}$  necesario para absorber 23.15 t-m

$$\text{para } \frac{M_{uw}}{\phi f'_c b d^2} = \frac{23.15 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 25 \times 49^2} = 0.153$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.167$

$$A_w = 1.18 w d = 1.18 \times 0.167 \times 49 = 9.7 \text{ cm}$$

$$A_{sw} = \frac{0.85 f'_c b_w A_w}{f_y} = \frac{0.85 \times 0.28 \times 25 \times 9.7}{4.2} = 13.74 \text{ cm}^2$$

De igual modo,  $A_{sw}$  se puede calcular directamente de

$$A_{sw} = \frac{w f'_c b_w d}{f_y} = \frac{0.167 \times 0.28 \times 25 \times 49}{4.2} = 13.64 \text{ cm}^2$$

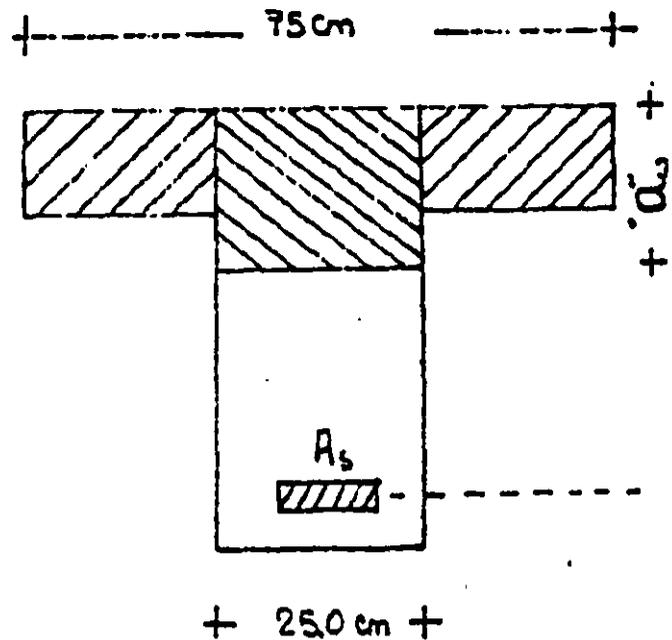
EJEMPLO 9.5 DISEÑO DE UNA SLABAS TIPO "T" SIMPLEMENTE ARMADA

Calcular el armado a tensión de una sección "T" que debe resistir un momento ya afectado por el factor de carga de  $M_u = 55 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (expuesta a la intemperie)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Con la ayuda de la tabla 9.2 se determina la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos,  $a$ , como sección rectangular

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{55 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 75 \times 49^2} = 0.121 \quad 9.3.2.1$$

de tabla 9.2,  $w = \rho f_y / f'_c = 0.132$

$$\begin{aligned} "a" &= 1.19 w d \\ &= 1.18 \times 0.132 \times 49 = 7.63 > 6.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Como el valor de "a" necesario, como si fuera sección rectangular, es mayor que el espesor del patín, entonces el diseño debe hacerse como sección "T".

2. Cálculo del armado necesario  $A_{sf}$  y de la resistencia  $\phi M_{nf}$  con que contribuye el patín de la viga.

4. Así, el refuerzo total necesario para tomar el  $M_u = 55 \text{ ton-m}$   
cs

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 18.42 + 13.74 = 32.16 \text{ cm}^2$$

10.3

5. Revisión del porcentaje máximo permitido según la sección 10.3.3. Ver la fig. 10.3.2 (c) y tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento:

(2) para secciones "T" simplemente armadas:

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{b_w}{b} (\bar{p}_b + p_f) \right]$$

$$p_f = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} (b - b_w) h_f / (b_w d)$$

$$= 0.85 \frac{0.28}{4.2} (75 - 25) 6.5 / (25 \times 49) = 0.0150$$

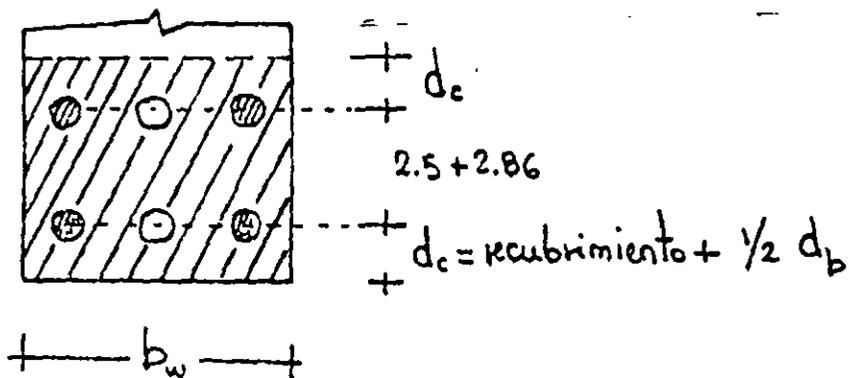
de la tabla 9.1,  $\bar{p}_b = 0.0285$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{25}{75} (0.0285 + 0.015) \right] = 0.0109$$

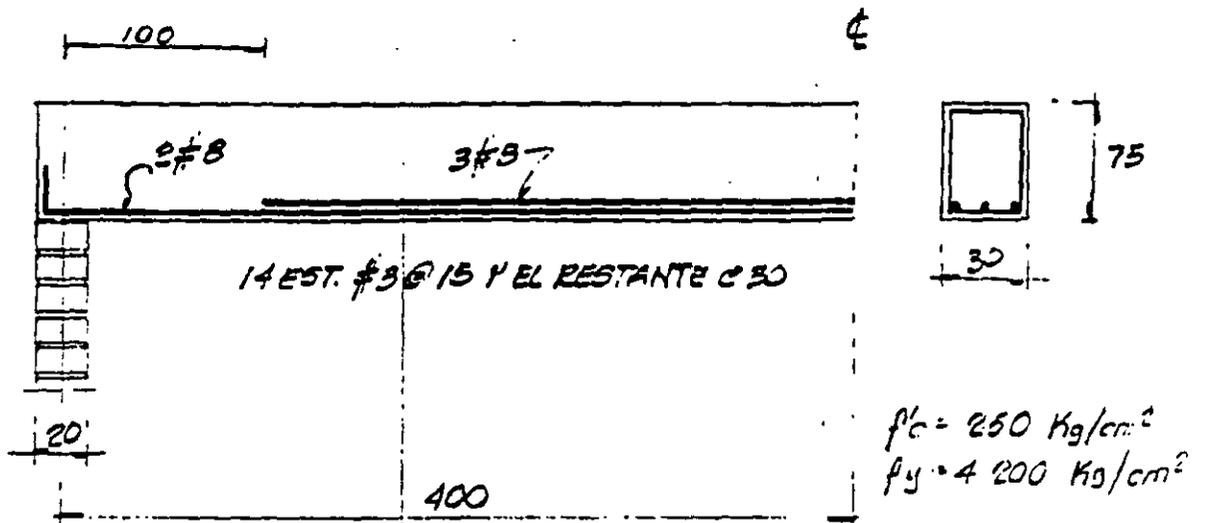
$$A_s \text{ máx} = 0.0109 \times 75 \times 49 = 40.06 \text{ cm}^2 > 32.16 \quad \underline{\text{bien}}$$

6. Selección del armado tal que satisfaga el criterio de control de agrietamiento para exposición a la intemperie ( $z = 145$ )

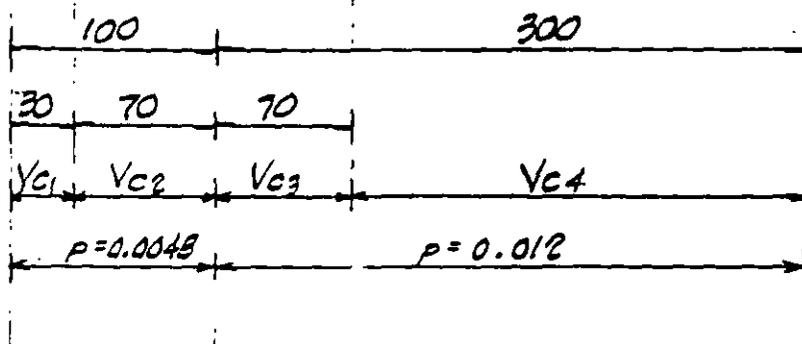
sean 4 var # 9 y 2 var # 7, ( $A_s = 33.40 \text{ cm}^2$ )



1.1.- REDUCCIÓN A CONSTANTE DE UNA VIGA RECTANGULAR



A).- CONTRIBUCION DE  $V_c$



(COMO  $h > 70$  REDUCIR EN UN 30% A  $V_c$  EN TODOS LOS CASOS)

- CALCULO DE  $V_c$ ,

COMO  $P = 0.0048 < 0.01$ ,

$$V_{c1} = V_{c2} = \left[ (0.2 + 30P) F_r b d \sqrt{f'_c} \right] 0.7$$

$$V_{c1} = \left[ (0.2 + 30 \cdot 0.0048) 0.8 \times 20 \times 70 \sqrt{250} \right] 0.70 = 5721.11$$

- CALCULO DE  $V_{c2}$

EN ESTE TIPO DE INTERCUMPLIMIENTOS MÁS DEL 33%

$$V_{c2} = V_{c1}, 0.7$$

$$d_c = 5.08 + 1.43 = 6.50 \text{ cm}$$

área efectiva de tensión del concreto:

$$A = (2d_c + 2.5 + 2.86) b_w / \text{No. equivalente de var } \# 9$$

$$= 18.36 \times 25 / (33.40 / 6.45) = 89.71 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.6) \sqrt[3]{d_c A} = 0.6 \times 4.2 \times 5.6 \sqrt[3]{6.5 \times 89.7}$$

$$= 118 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$

7. Revisión del ancho del alma necesario

$$b_w \text{ necesario} = 2 (\text{recubrimiento}) + 2d_{b1} + 2d_{b1}^* + d_{b2}$$

$$= 2 \times 5.08 + 4 \times 2.86 + 2.22$$

$$= 23.8 \text{ cm} < 25 \text{ cm} \quad \underline{\text{bien}}$$

\*La distancia libre entre dos varillas debe ser mayor que  $d_b$  ó 2.5 cm

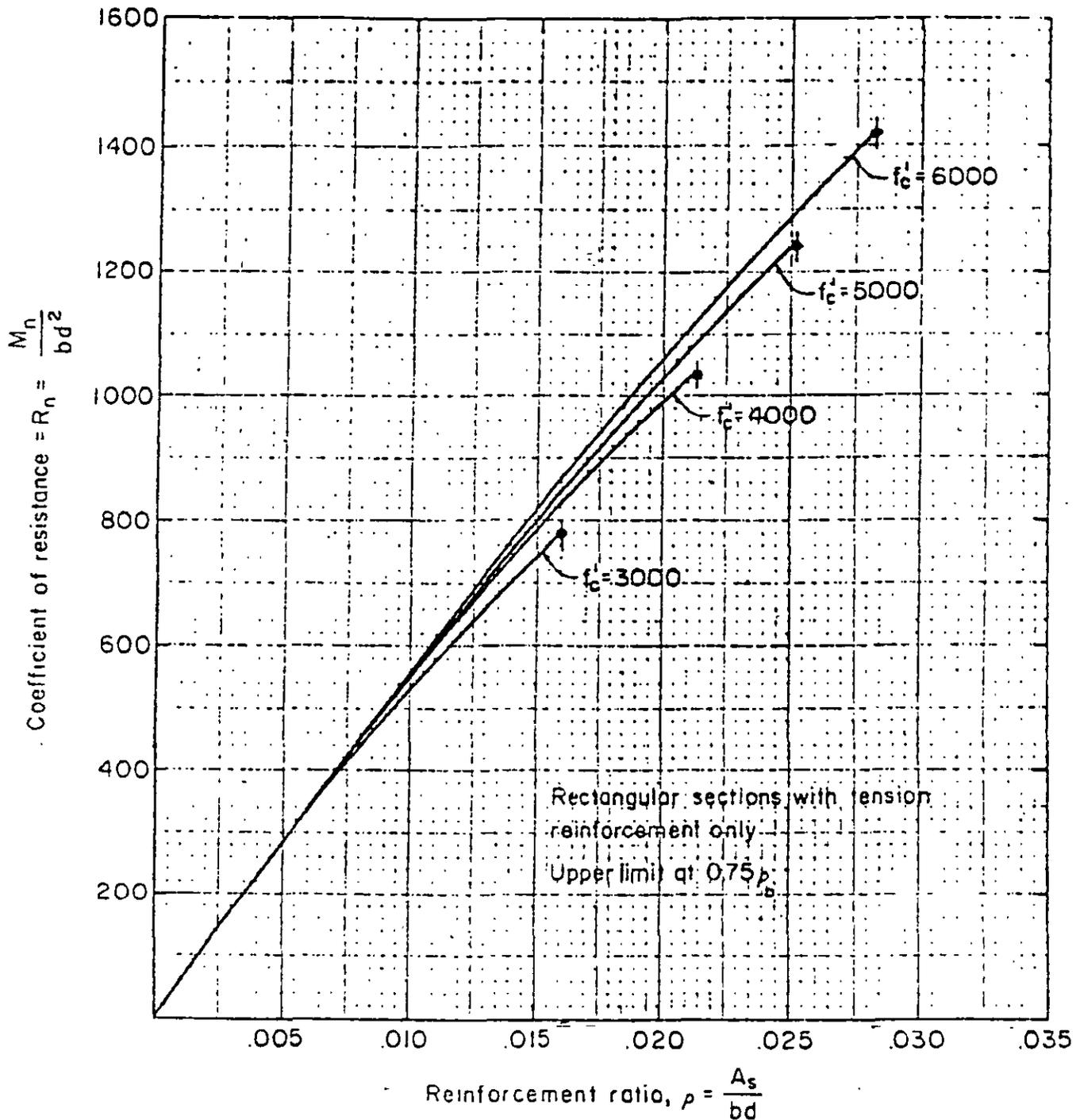


Fig. 9-1 - Strength Curves ( $R_n$  vs  $\rho$ ) for Grade 60 Reinforcement

TABLE 9-2. Moment Strength  $M_u/\phi f'_c b d^2$  or  $M_n/f'_c b d^2$  of Rectangular Sections with Tension Reinforcement Only\*

$\omega$	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
0.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
0.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
0.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
0.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0438	.0448	.0457	.0467	.0476
0.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
0.06	.0579	.0598	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
0.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0725	.0735	.0744	.0753
0.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
0.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
0.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
0.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
0.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
0.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
0.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
0.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
0.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1499	.1497	.1506	.1514	.1522
0.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
0.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
0.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
0.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
0.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
0.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
0.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
0.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
0.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
0.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
0.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
0.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
0.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
0.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
0.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
0.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
0.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
0.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
0.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
0.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
0.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
0.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
0.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051

\* $M_n/f'_c b d^2 = A_s f_y (d-a/2)/f'_c b d^2 = \omega(1-0.59\omega)$ , where  $\omega = \rho f_y/f'_c$   
 and  $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b$ .

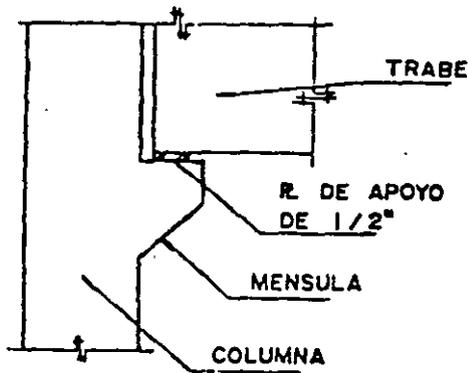
Design: Using factored moment  $M_u$  enter table with  $M_u/\phi f'_c b d^2$ ; find  $\omega$  and compute steel percentage  $\rho$  from  $\rho = \omega f'_c/f_y$ .

Investigation: Enter table with  $\omega$  from  $\omega = \rho f_y/f'_c$ ; find value of  $M_n/f'_c b d^2$  and solve for nominal moment strength,  $M_n$ .

Ejemplo:

Diseñar la ménsula mostrada en la figura con las mínimas dimensiones para soportar la trabe.

La ménsula se encuentra en una columna de 35 cm. Debido al efecto de contracción y flujo plástico restringidos se crea una fuerza de 9 ton. en el apoyo soldado.



$$f'c = 350 \text{ kg/cm}^2 \text{ (peso norm)}$$

$$fy = 4200 \text{ "}$$

Cargas

$$C.M. = 10.9 \text{ ton.}$$

$$C.V. = 17.0 \text{ ton.}$$

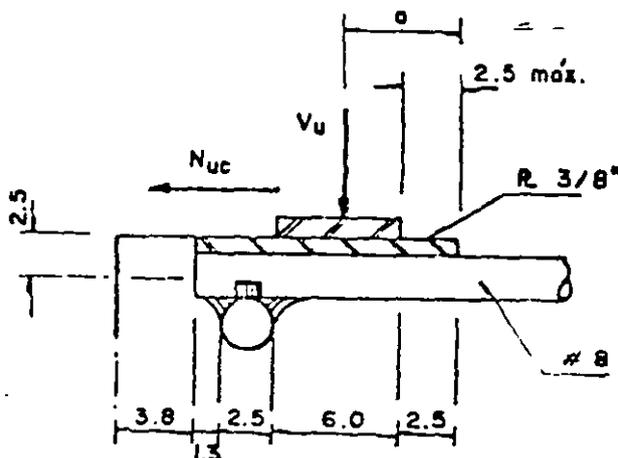
$$T = 9.1 \text{ ton.}$$

### Cálculo y Discusión

Referencia del  
Reglamento

- 1.- Dimensión del apoyo basado en la resistencia al aplastamiento de concreto de acuerdo a la sección 10.15.

El ancho del apoyo = 35 cm.



Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$Vu = 1.4 (10.9) + 1.7(17.0) = 44.2 \text{ tons.}$$

$$Vu \leq \psi Pnb = \psi (0.85 f'c A_c)$$

10.5

$$44200 = 0.70 (0.85) (350) A_c = 208.3 A_c$$

9.3.2.4

$$A_c = 44200 / 208.3 = 212.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Longitud de apoyo} = 212.2 / 35 = 6 \text{ cm.}$$

Usar un apoyo de 6 X 35 cm.

$$Nuc = 1.7 (9.1) = 15.5 \text{ ton. (como carga viva)}$$

11.9.3.4

2. Determinación de "a" con 2.54 cm. de holgura al final de la trabe. Considerando la reacción a un tercio de la placa de apoyo.

$$a = 2/3 (6.0) + 2.54 = 6.54 \text{ cm.}$$

Usar un a = 7 cm.

3. Determinación del peralte de la ménsula basándose en el diseño al límite por resistencia al cortante  $V_n$ .

$$\text{Para } f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2, V_n (\text{max}) = 56 \text{ bwd}$$

11.9.3.2.1

$$Vu \leq \psi V_n = \psi (56 \text{ bwd})$$

Se requiere un peralte:

$$"d" = 44200 / 0.85 (56) (35)$$

Cálculo y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$d = 26.5 \text{ cm.}$$

Suponiendo varillas #8 más la tolerancia

$$h = 26.5 + 2.54 = 29 \text{ cm.}$$

Usar h = 30 cm.

Para el diseño  $d=30-2.50=27.50 \text{ cm.}$

$$a/d = 0.26.$$

4. Determinación del refuerzo por corte-fricción  $A_{uf}$ .

$$A_{uf} = \frac{V_u}{\psi f_y \mu} = \frac{44200}{0.85(4200)(1.4)} = 8.8 \text{ cm.}$$

11.7.4.1

11.7.4.3

5. Determinación del refuerzo por momento  $A_f$ .

$$M_u = V_u a + N_u c \quad (h-d)$$

11.9.3.3

$$= 44200(6.54) + 15500(30 - 27.50) = 327,820 \text{ Kg.cm}$$

$$= 3.28 \text{ Ton. m.}$$

Utilizando un método ordinario de flexión para el cálculo de  $A_f$  o usando conservadoramente  $j d = 0.9 d$ .

$$A_f = \frac{327820}{0.85(4200)(0.9)(27.50)} = 3.71 \text{ cm}^2$$

Nota: Para todos los cálculos se ha utilizado  $\psi = 0.85$

11.9.3.1

Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

6. Determinación del refuerzo por tensión  
directa.

An

11.9.3.4

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} = \frac{15500}{0.85(4200)} = 4.34 \text{ cm}^2$$

7. Determinación del refuerzo por tensión  
primaria.

As

11.9.3.5

$$(2/3) A_{uf} = (2/3) 8.8 = 5.9 \text{ cm}^2$$

$$A_f = 3.71 \text{ cm}^2 < (2/3) A_{uf}$$

$$A_s = (2/3) A_{uf} + A_n = 5.9 + 4.34 = 10.24 \text{ cm}^2$$

Usar 2 # 8

11.9.5

Verificación del refuerzo mínimo As -

$$p_{min} = 0.04(f'_c/f_y) = 0.04(350/4200) = 0.003$$

$$A_{smin} = 0.003(35)(27.5) = 2.88 \text{ cm}^2 < 10.24$$

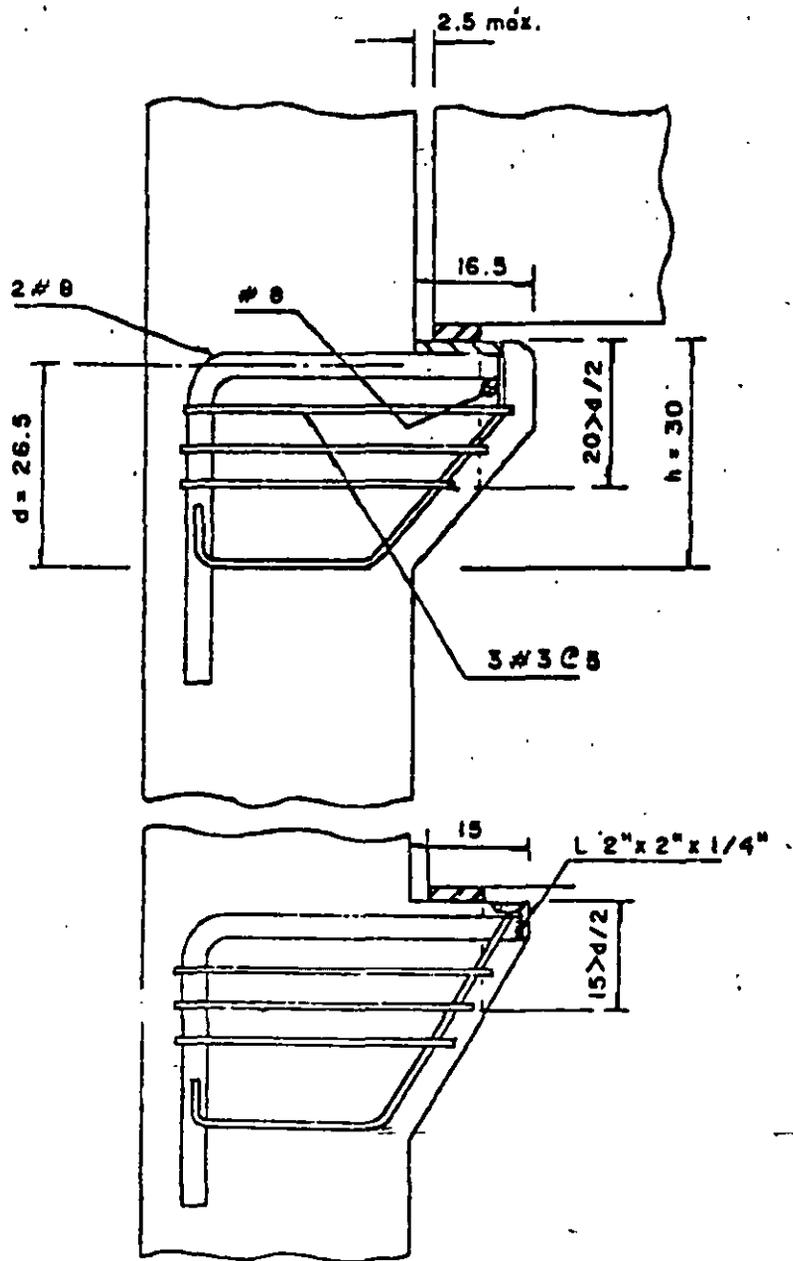
8. Determinación del refuerzo por cor--  
tante Ah

11.9.4

$$A_h = 0.5(A_s - A_n) = 0.5(10.24 - 4.34) = 2.95 \text{ cm}^2$$

Usar 3 Estribos # 3 (Ah=4.26 cm<sup>2</sup>)

Distribuir los estribos en 2/3 d adyacen  
tes a As.



### Ejemplo de muros.

Un muro de carga soporta un sistema de piso a base de vigas "T" pre fabricados separados 2.40 m.. El alma de la sección "T" es de 20 cm. y estan apoyadas por completo en el muro. La altura del muro es de 4.60 m. y se encuentra contraventeado lateralmente como se muestra en la figura.

#### Datos de Diseño

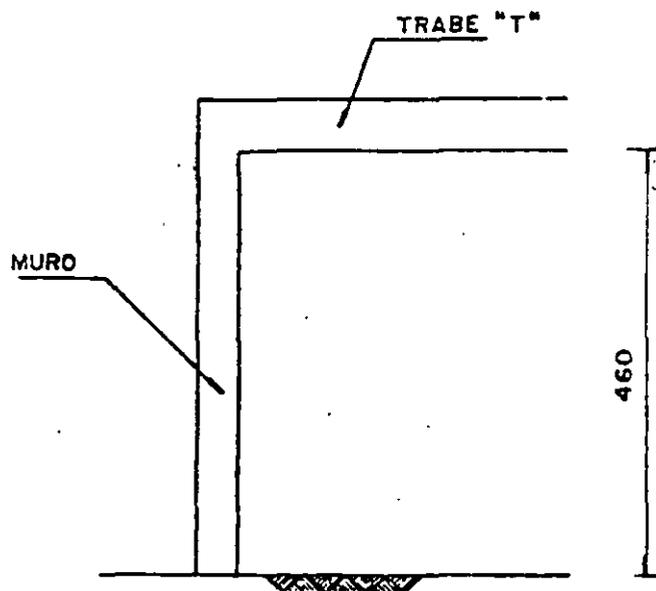
Reacciones:

$$P_{cM} = 12.7 \text{ ton.}$$

$$P_{cV} = 6.4 \text{ ton.}$$

$$f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



#### Cálculo y discusión

#### Referencia del Reglamento

El procedimiento general de diseño es de suponer un espesor del muro  $h$ , después comprobarlo con las condiciones de carga.

##### 1. Selecciones del espesor $h$

$$h > l_u/25 \text{ pero no menor de } 10 \text{ cm.}$$

14.5.3.1

$$> 4.6/25 = 0.18 \text{ m.}$$

Se probará con  $h = 19 \text{ cm.}$

## 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec. (9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

## 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Área cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \psi (0.85 f'_c A_c) &= 0.70(0.85)(280)(338.2) \\ &= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.} \end{aligned}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

## 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\begin{aligned} \psi P_{n\omega} &= 0.55 \psi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k l_c}{32h} \right)^2 \right] \\ &= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right] \\ &= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.} \end{aligned}$$

Ec. (14-1)

$$P_u < \psi P_{n\omega}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentri

## 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec. (9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

## 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Area cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \phi(0.85 f'_c A_c) &= 0.70(0.85)(280)(338.2) \\ &= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.} \end{aligned}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

## 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\begin{aligned} \phi P_{n_w} &= 0.55 \phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k l_c}{32h} \right)^2 \right] \\ &= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right] \\ &= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.} \end{aligned}$$

Ec. (14-1)

$$P_u < \phi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentri

acidad de carga.

5. Selección de refuerzo

Proporcionando refuerzo en una sola cara

Acero horizontal  $A_s = 0.0020 \times 19 \times 100 = 3.8 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.3

Acero vertical  $A_s = 0.0012 \times 19 \times 100 = 2.3 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.2

$S = 3h$ , pero no mayor a 45 cm. 7.6.5

$= 3 \times 19 = 57 > 45$  ( $S = 45 \text{ cm}$ )

horizontal  $A_s$  - usar # 4 @ 30 cm.

vertical  $A_s$  - usar # 4 @ 45 cm.

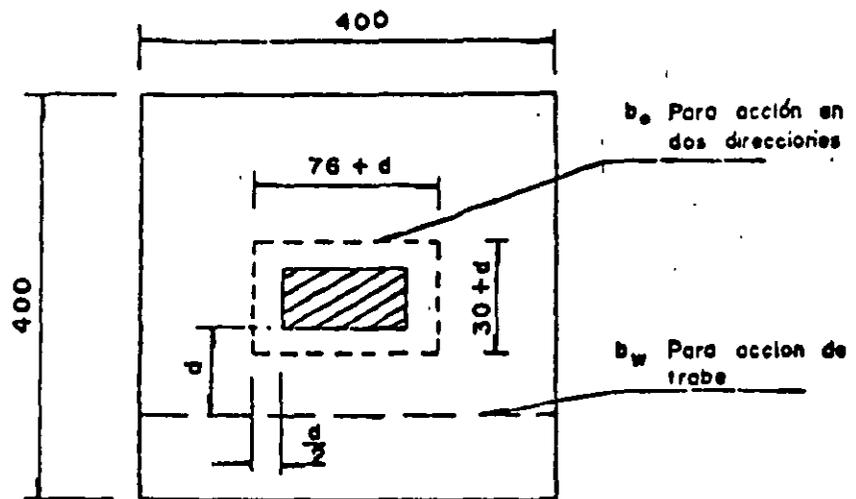
Ejemplo de Zapatas:

Determinar el espesor de la losa de la zapata que se muestra en la figura:

$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$Pu = 435 \text{ ton.}$$

$$qs = 27.9 \text{ ton/m}^2$$



Cálculo y Diseño

Referencia del reglamento

Determinar el peralte para resistir el cortante sin refuerzo. Debe investigarse la acción de viga y la acción en dos direcciones. Supondremos un espesor total de 84 cm.  $d = 70 \text{ cm.}$

11.11

1. Acción de trabe

11.11.1.1

$$Vu \leq \psi Vn$$

Ec (11-1)

$$Vu \leq \psi (0.53 \sqrt{f'c}) b_w d$$

Ec. (11-3)

$$Vn = 27.9 (4.0) (1.80 - 0.35) = 162 \text{ ton}$$

$$b_w = 4.0 \text{ m.}$$

$$Vu \leq 0.85 (0.53) \sqrt{210} (400) (70) = 345 \text{ ton}$$

## Cálculo y Discusión

Referencia de  
reglamento

162 < 345 ton

### 2. Acción en las dos direcciones

11.11.1.2

$$V_u \leq \psi V_n$$

Ec (11.1)

$$V_u \leq \psi (0.27) (2+4/\beta_c) \sqrt{f'_c} b_o d$$

Ec (11.36)

pero  $V_c$  no será mayor que  $1.1 \sqrt{f'_c} b_o d$

$$V_u = 27.90 (16.00 - 1.5 \times 1.0) = 405 \text{ ton}$$

$$b_o = 2(1.50) + 2(1.0) = 5 \text{ m.}$$

$$\beta_c = 75/30 = 2.5$$

$$V_u \leq 0.85 (0.27) (2+4/2.5) \sqrt{210} (500) (70)$$

$$405 \leq 419 \text{ ton.}$$

$$V_c \leq 1.1 \sqrt{210} (500) (70) = 558000 \text{ Kg}$$

Por lo tanto el peralte de 70 cm. es adecuado para resistir el cortante.

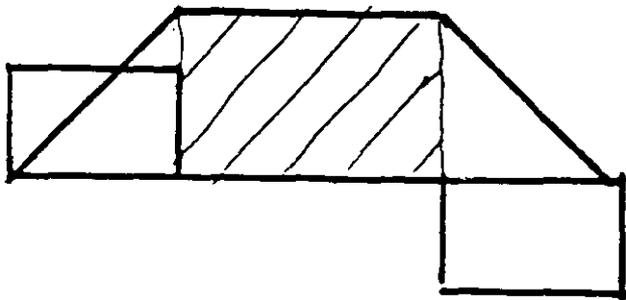
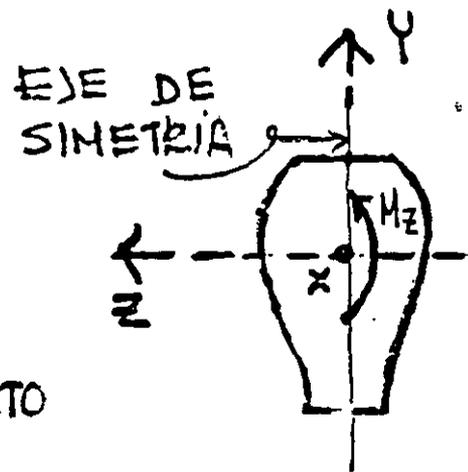
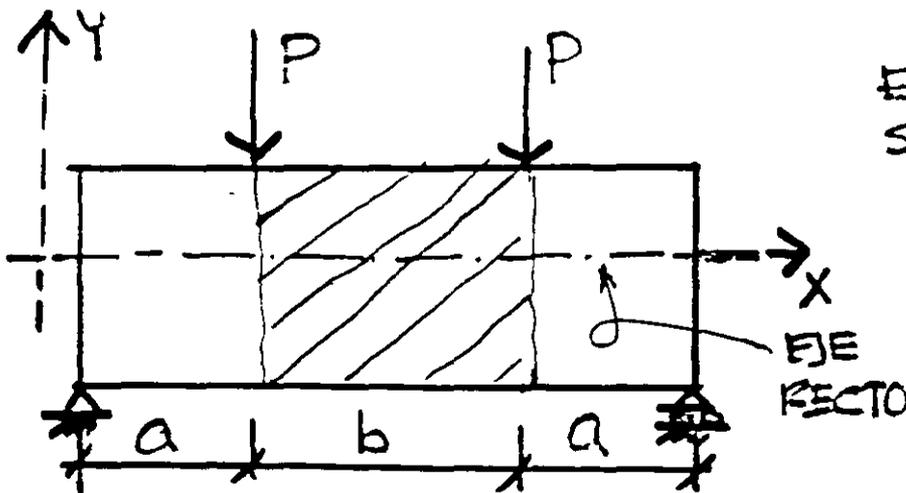
# 3.- FLEXION

## INTRODUCCION

### TEORIA CLASICA DE LA FLESION

#### LIMITACIONES.

1.- VIGAS DE EJE RECTO HORIZONTAL QUE PASA POR TODAS LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE LA VIGA.

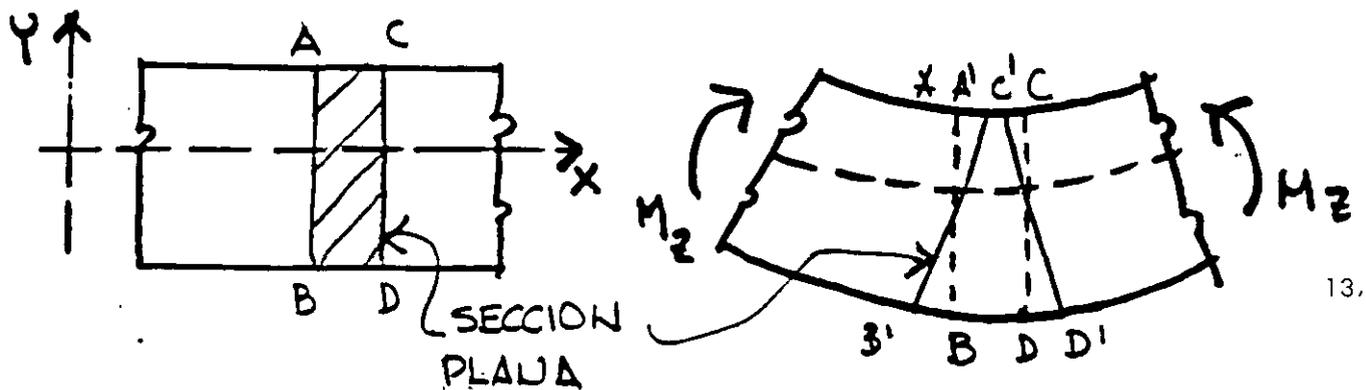


2.- LA SECCION TRANSVERSAL ES DE FORMA CUALQUIERA, PERO TIENE UN EJE VERTICAL DE SIMETRIA.

- 3.- SE CONSIDERA QUE EN LA SECCION QUE SE ANALIZA, SOLO EXISTE FLEXION.
- 4.- LA RELACION DE CLARO A ANCHO DE LA VIGA ES TAL QUE NO SE PRODUCE PUNDEO LATERAL.
- 5.- EL MOMENTO FLEXIONANTE  $M_z$ , ESTA EN EL MISMO PLANO DEL EJE DE SIMETRIA.
- 6.- EL MATERIAL DE LA VIGA ES HOMOGENEO.

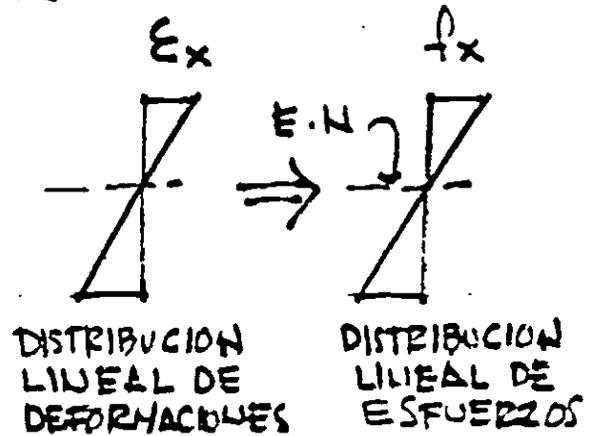
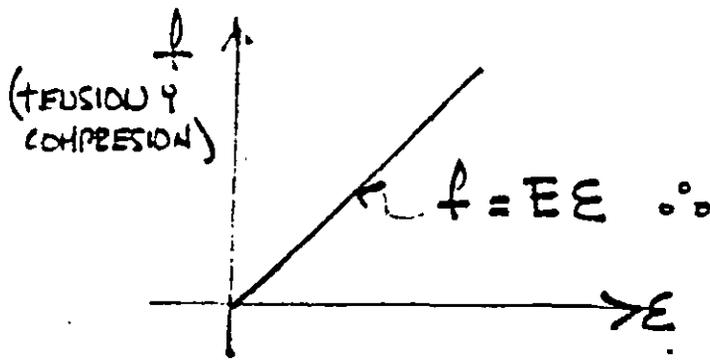
### HIPOTESIS BASICA

LAS SECCIONES PLANAS, NORMALES AL EJE DE LA VIGA, SIGUEN SIENDO PLANAS DESPUES DE APLICAR LA FLEXION (H. NAVIER).

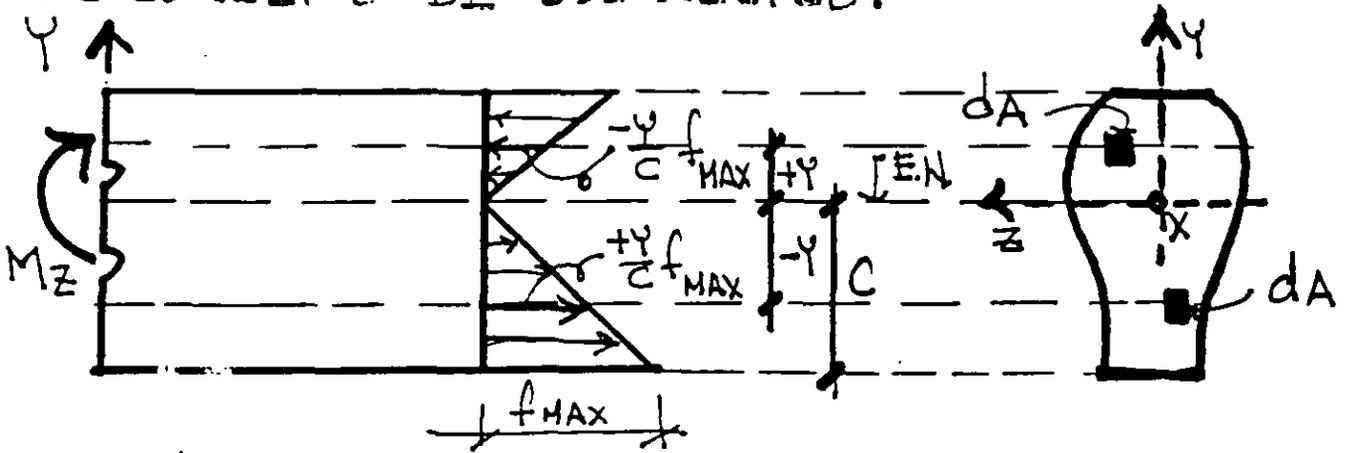


# FLEXION ELASTICA

SE CONSIDERA QUE EL MATERIAL TIENE UN COMPORTAMIENTO ELASTICO-LINEAL



LA CONDICION DE EQUILIBRIO  $\sum F_x = 0$  (C=T) ESTABLECE EL CONCEPTO DE EJE NEUTRO.



$$M_z = \int_A \underbrace{\left(-\frac{y}{c} f_{MAX}\right)}_{\text{ESFUERZO}} \underbrace{dA}_{\text{AREA}} \underbrace{y}_{\text{BRAZO}} = -\frac{f_{MAX}}{c} \int_A y^2 dA = -\frac{f_{MAX}}{c} I_z$$

FUERZA BRAZO

MOMENTO

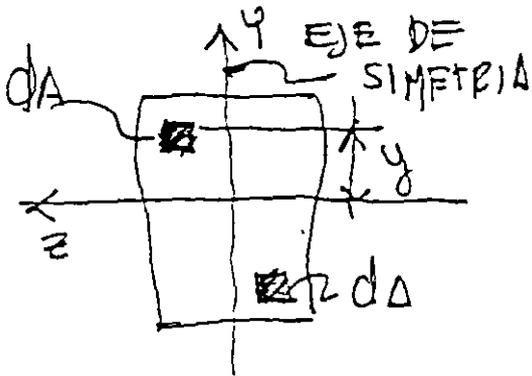
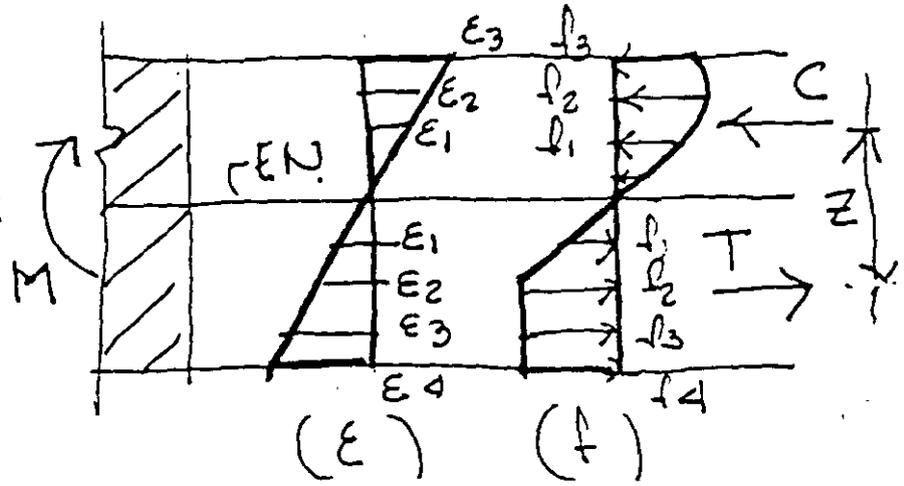
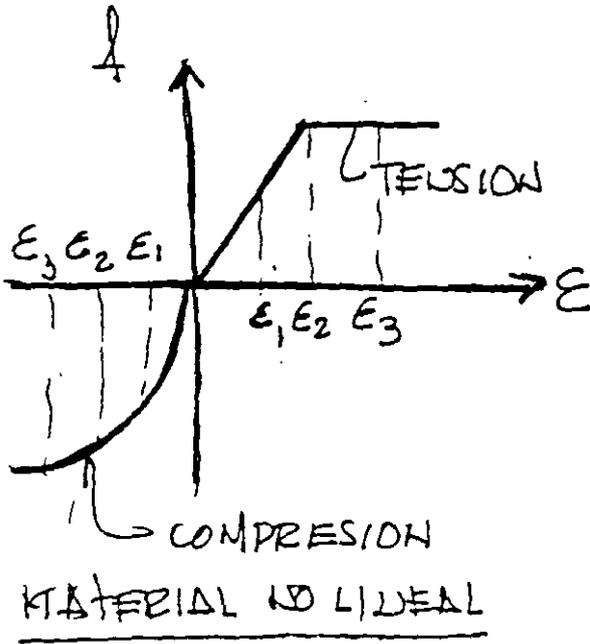
$$M_z = -\frac{f_{MAX}}{c} I_z \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{\tau_{y MAX}} = \frac{H E}{I_z} C$$

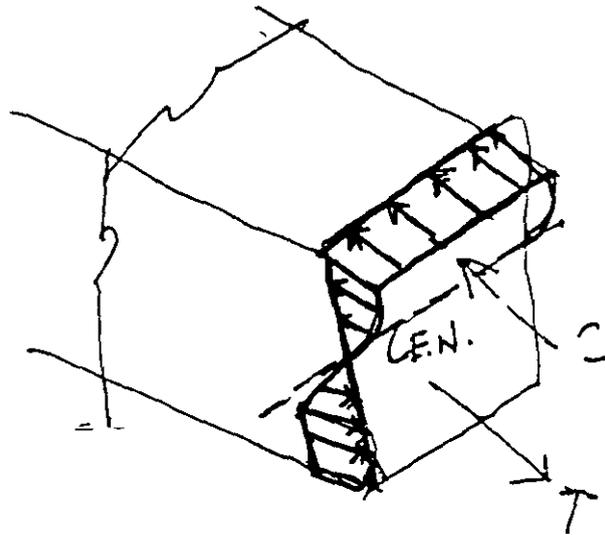
FORMULA DE LA FLEXION ELASTICA.

# FLEXION INELASTICA

SE CONSERVA LA HIPOTESIS BASICA DE SECCIONES PLANAS



SECCION DE FORMA CUALQUIERA



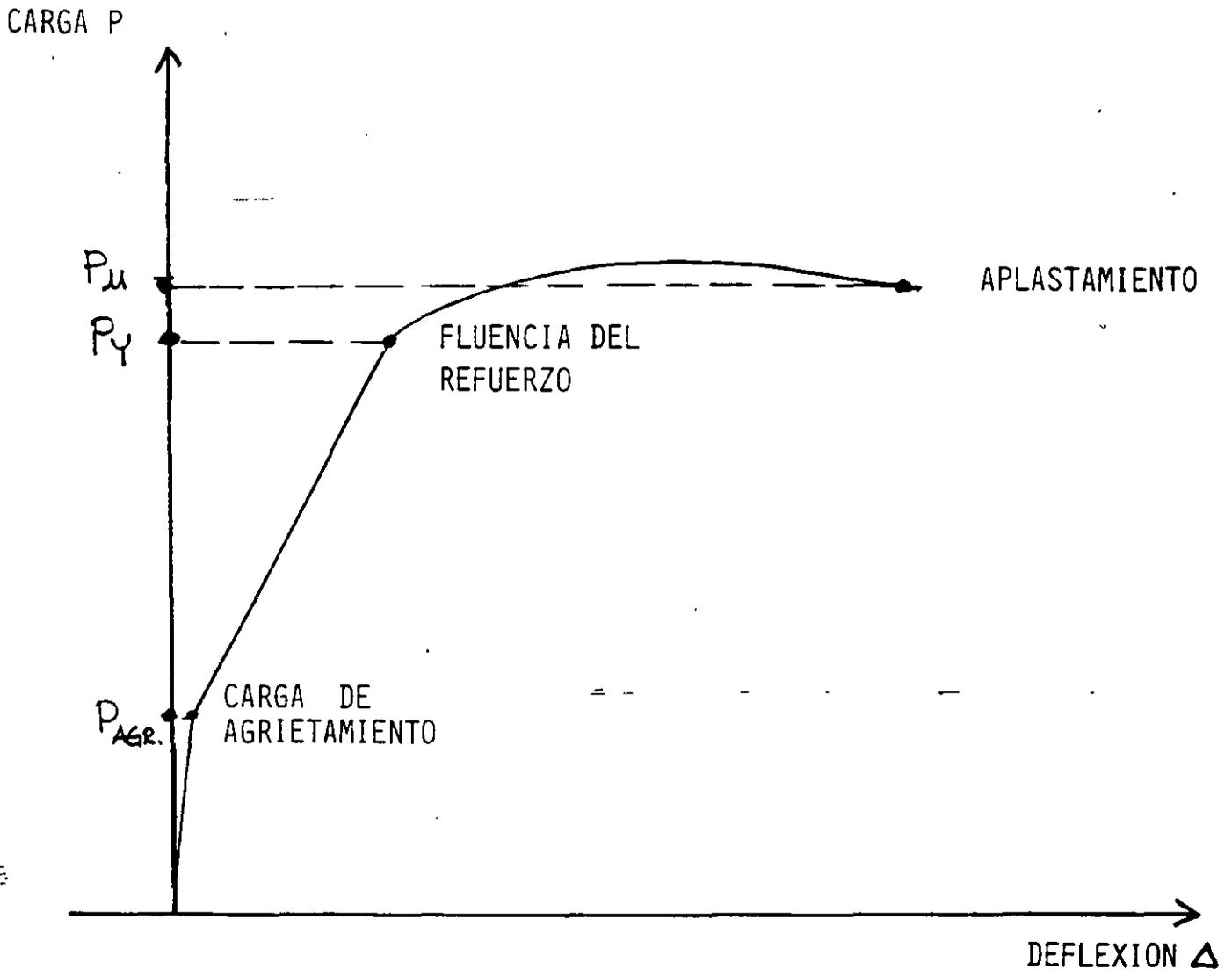
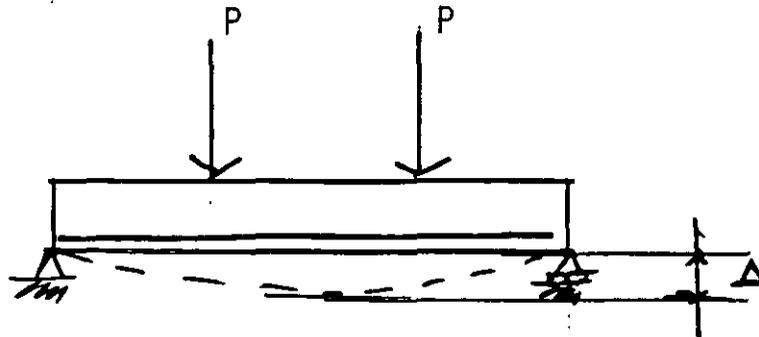
EQUILIBRIO:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A f_x dA = 0 \quad (C=T)$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A f_x y dA = M_R$$

# FLEXION EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE REFUERZO.





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**WALLS**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

## Example 19.1 (cont'd)      Calculations and Discussion

- Method 2—(using depth to tensile resultant)

@ mid-span:

$$d = 15.0 - 1.8 = 13.2 \text{ ft; assume } j_u = 0.9$$

$$A_s = \frac{1151}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 13.2} = 2.69 \text{ in.}^2$$

Use 6-#6 bars (3 each face;  $A_s = 2.64 \text{ in.}^2$ )

@ support:

$$d = 9.9 \text{ ft}$$

$$A_s = \frac{1988}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 9.9} = 6.20 \text{ in.}^2$$

Use 14-#6 bars (7 each face;  $A_s = 6.16 \text{ in.}^2$ )

Reinforcement determined by this method should be distributed in the total tensile area, approximately centered on the resultant tensile force.

- d. Determine minimum horizontal and vertical reinforcement in side faces of girder. The minimum "wall" type reinforcement will be used in addition to the primary tensile reinforcement. 10.7.4

Horizontal reinforcement:

$$A_{vh} = 0.0025b_w s_2 \quad 14.3.3$$

$$= 0.0025 \times 15 \times 12 = 0.45 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 11.8.10$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3}, 3b_w, \text{ or } 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 16 in. (each face),  $A_{vh} = 0.46 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Vertical reinforcement:

$$A_v = 0.0015b_w s \quad 14.3.2$$

$$= 0.0015 \times 15 \times 12 = 0.27 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 11.8.9$$

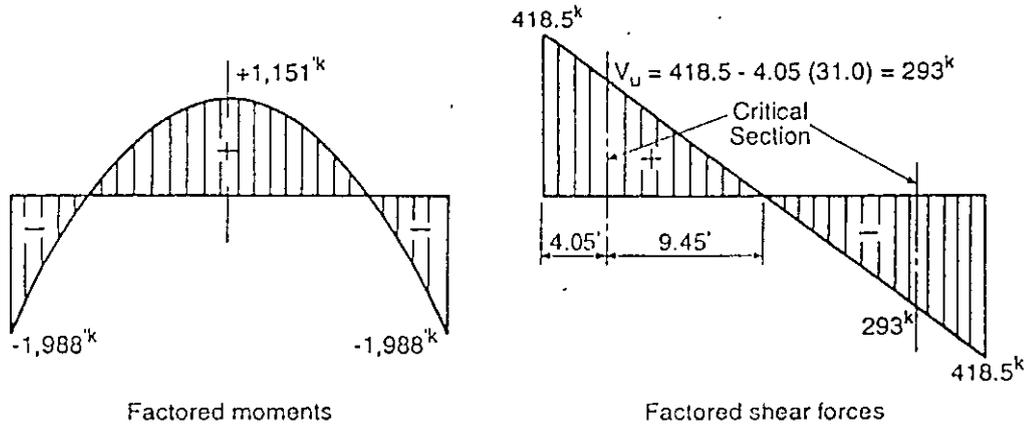
$$s \leq \frac{d}{5}, 3b_w, \text{ or } 18 \text{ in.}$$

Use #4 @ 18 in. (each face),  $A_v = 0.27 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$= \frac{31 \times 30^2 (1 - 0.1)(2 - 0.4)}{24} = 1988 \text{ ft-kips}$$

Critical section for shear =  $0.15 \times 27 = 4.05$  ft from face of support

Factored moment and shear diagrams are shown below.



- c. Determine flexural reinforcement.
- Method 1—(using full effective depth  $d$ )

$$d = 15.0 - \frac{3}{12} = 14.75 \text{ ft; assume } j_u = 0.9$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j_u d}$$

@ mid-span:

$$A_s = \frac{1151}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 14.75} = 2.41 \text{ in.}^2$$

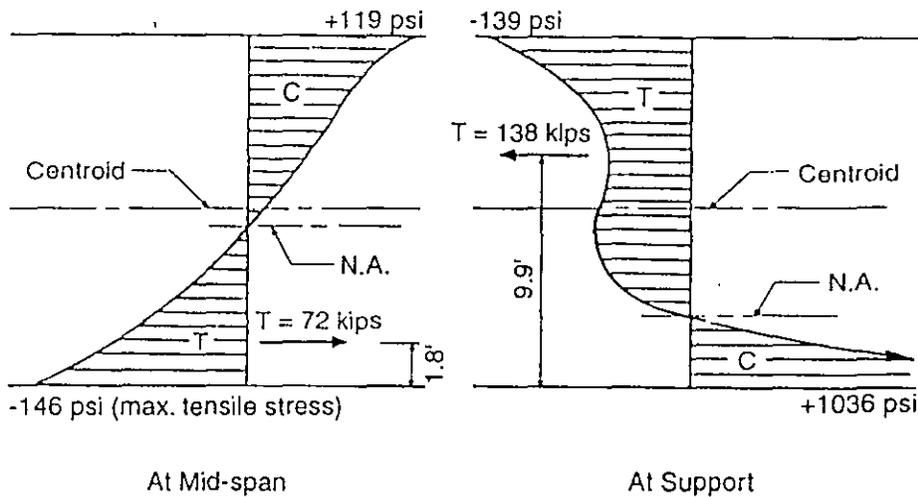
Use 4-#7 bars ( $A_s = 2.40 \text{ in.}^2$ )

@ support:

$$A_s = \frac{1988}{0.9 \times 40 \times 0.9 \times 14.75} = 4.16 \text{ in.}^2$$

Use 2-#10 and 2-#9 bars ( $A_s = 4.54 \text{ in.}^2$ )

Locate primary reinforcement  $A_s$  (top and bottom) as close to tension face as cover and other reinforcement allow.



The variation of the stresses with respect to the depth of the member, as shown in the figure, can be obtained with similar calculations.

To avoid cracking at service loads, tensile stresses should not exceed the modulus of rupture.

$$f_r = 7.5\sqrt{f'_c} = 7.5\sqrt{3000} = 411 \text{ psi} > 146 \text{ psi} \quad \text{O.K.}$$

Eq. (9-9)

Designers using the Alternate Design Method of Appendix A may proceed directly with the flexural design as outlined in Reference 19.2, calculating the required reinforcement from the tensile resultants (T) and distributing the reinforcement appropriately. The following procedure is in accordance with the Strength Design Method.

- b. Determine required moment strengths.

$$w_u = 1.4(10) + 1.7(10) = 31.0 \text{ kips/ft}$$

Eq. (9-1)

@ mid-span (Ref. 19.2):

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon^2)}{24} \\ &= \frac{31 \times 30^2 (1 - 0.1^2)}{24} = 1151 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

@ support (Ref. 19.2):

$$M_u = \frac{w_u L^2 (1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{24}$$

Refer to Reference 19.2 for design constants:

$$C = 3 \text{ ft}, L = 27 + 3 = 30 \text{ ft}$$

$$\epsilon = \frac{C}{L} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}, \quad \beta = \frac{H}{L} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$w = 10 + 10 = 20 \text{ kips/ft} = \frac{20,000}{12} = 1667 \text{ lbs/in.}$$

$$\frac{w}{b} = \frac{1667}{15} = 111.1 \text{ lbs}$$

$$wL = 20 \times 30 = 600 \text{ kips}$$

From Figs. 2, 3, 4, and 5 (Ref. 19.2), the service load stresses and the magnitude and location of the resultant  $T$  of the tensile stresses at mid-span and support are determined as follows (plus indicates compression and minus tension):

- Mid-span

$$\text{Stress} = \text{coefficients from Fig. 2} \times (w/b)$$

$$\text{Top stress} = +1.07 \times 111.1 = +119 \text{ psi}$$

$$\text{Bottom stress} = -1.31 \times 111.1 = -146 \text{ psi}$$

$$\text{Tensile force } T = \text{coefficient from Fig. 4} \times wL$$

$$= 0.12 \times 600 = 72 \text{ kips}$$

$$\text{Location of } T \text{ from bottom of girder} = \text{coefficient from Fig. 5} \times L$$

$$= 0.06 \times 30 = 1.8 \text{ ft}$$

- Support

$$\text{Stress} = \text{coefficients from Fig. 3} \times (w/b)$$

$$\text{Top stress} = -1.25 \times 111.1 = -139 \text{ psi}$$

$$\text{Bottom stress} = +9.32 \times 111.1 = +1036 \text{ psi}$$

$$\text{Tensile force } T = \text{coefficient from Fig. 4} \times wL$$

$$= 0.23 \times 600 = 138 \text{ kips}$$

$$\text{Location of } T \text{ from bottom of girder} = \text{coefficient from Fig. 5} \times L$$

$$= 0.33 \times 30 = 9.9 \text{ ft}$$

## Example 19.1—Design of Deep Flexural Members

This design example has been adapted from the PCA publication *Design of Deep Girders*<sup>19.2</sup> and modified in accordance with the ACI Code and the Strength Design Method. The publication may be used directly to design deep members by the Alternate Design Method, or it may be used to locate the tensile resultants and check cracking under the Strength Design Method.

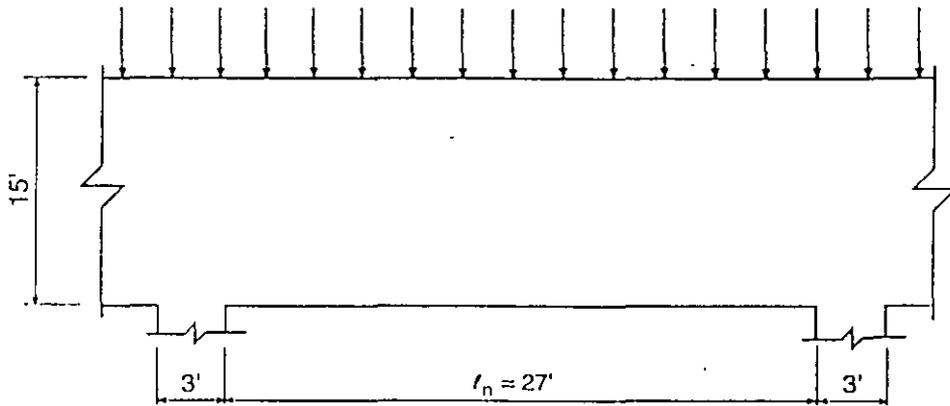
An interior span of a continuous deep girder is shown below.

Width of beam and support  $b_w = 15$  in.

Uniform loads: Live load = 10 kips/ft, Dead load = 10 kips/ft

$f'_c = 3000$  psi

$f_y = 40,000$  psi



### Calculations and Discussion

### Code Reference

1. Determine if deep beam provisions apply

$$\frac{\ell_n}{h} = \frac{27}{15} = 1.8$$

For flexure:  $\frac{\ell_n}{h} < 2.5$

10.7.1

For shear:  $\frac{\ell_n}{d} < 5$

11.8.1

Design for flexure and shear must satisfy deep beam provisions of 10.7 and 11.8.

2. Design for Flexure

10.7

- a. Determine moment stresses (at service loads).

Shear reinforcement may be varied along the length of span as for ordinary beams; however, a minimum area of both vertical and horizontal reinforcement,  $A_v$  and  $A_{vh}$ , in accordance with 11.8.9 and 11.8.10 must be provided throughout the full span length, irrespective of shear force conditions. Note that the spacing  $s$  of the vertical shear reinforcement  $A_v$  must not exceed  $d/5$  nor 18 in. (somewhat closer maximum spacing than that permitted for ordinary beams). Note also that the horizontal shear reinforcement  $A_{vh}$  does not contribute to the shear strength  $V_s$  for continuous deep members.

As for simply supported deep members, in continuous deep members, the shear strength  $V_n$  must not be taken greater than:

$$V_n = 8\sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c}b_wd \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5$$

## REFERENCES

- 19.1 *Tilt-Up Load-Bearing Walls—A Design Aid*, Portland Cement Association, Skokie, IL, EB074D, 1994, 28 pp. A "column model" (a panel considered hinged along loaded edges and free along vertical edges) is used to compute load capacities of reinforced concrete tilt-up wall panels with both one and two layers of reinforcement that rest on continuous footings. An approximate but rational means of evaluating the effects of isolated footings and sustained loads on the capacity of these slender walls is included, as well as load-moment interaction charts and tables and design applications.
- 19.2 *Design of Deep Girders*, Portland Cement Association, Skokie, IL, IS079D, 10 pp. Presents analysis of deep girders according to elastic theory of Franz Dischinger, including special studies and numerical examples. Data and procedures apply to design of deep wall-like members such as in bins, hoppers, and foundation walls.
- 19.3 Chow, Li., Conway, H., and Winter, G., "Stresses in Deep Beams," *Transactions*, ASCE, Vol. 118, 1953, pp. 686-708.
- 19.4 Park, R. and Paulay, T., *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

## Example 19.2 (cont'd)      Calculations and Discussion

$$\text{For } \frac{\ell_n}{d} = 3.35:$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{Eq. (11-27)}$$

$$V_n = \frac{2}{3} (10 + 3.35) \sqrt{4000} \times 20 \times \frac{43}{1000} = 484 \text{ kips}$$

$$\phi V_n = 0.85 (484) = 411 \text{ kips} > 352.5 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

5. Determine shear strength with minimum shear reinforcement. 11.8.9

Substituting minimum  $A_v$  and  $A_{vh}$  into Eq. (11-30): 11.8.10

$$\begin{aligned} \phi V_s &= \phi (0.029d - 0.001\ell_n) b_w f_y / 12 \\ &= 0.85 [(0.029 \times 43) - (0.001 \times 12 \times 12)] (20 \times 60) / 12 = 94 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$\phi (V_c + V_s) = 92.5 + 94 = 186.5 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

6. Determine shear strength  $\phi V_c$  using more complex Eq. (11-29) at critical section. 11.8.7

$$V_c = \left( 3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} \right) \left( 1.9 \sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad \text{Eq. (11-29)}$$

At critical section:

$$\frac{M_u}{V_u d} = \frac{352.5 \times 3}{352.5 \times 3.58} = 0.84$$

$$3.5 - 2.5 \frac{M_u}{V_u d} = 3.5 - (2.5 \times 0.84) = 1.4 < 2.5$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{14.0}{20 \times 43} = 0.0163$$

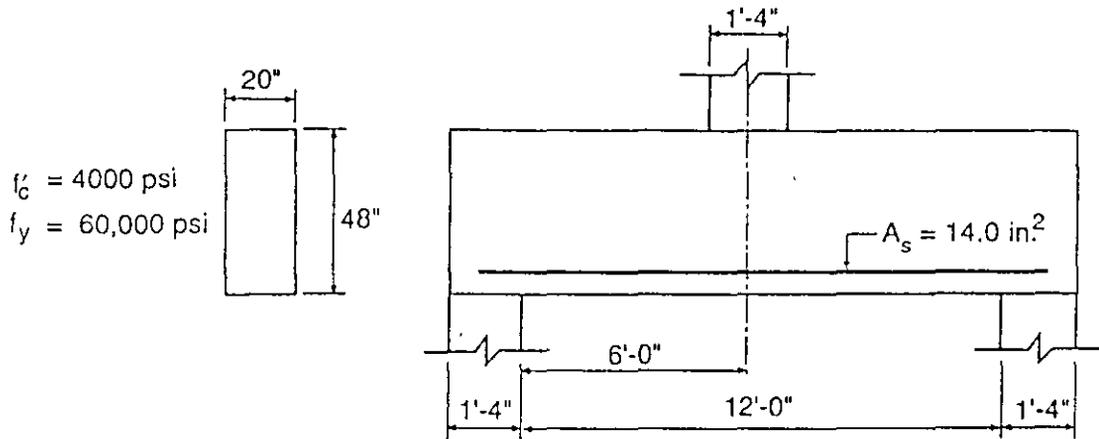
$$V_c = 1.4 \left[ 1.9 \sqrt{4000} + \frac{2500 (0.0163)}{0.84} \right] (20 \times 43) / 1000 = 203 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 0.85 (203) = 173 \text{ kips}$$

$$\phi V_c = 173 \text{ kips} < \phi (6 \sqrt{f'_c} b_w d) = 0.85 (6 \sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 277 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad \text{11.8.7}$$

## Example 19.2—Design of Deep Flexural Members

Determine the required shear reinforcement for the simply supported transfer girder supporting the single column shown below. Column loads: dead load = 200 kips, live load = 250 kips.



### Calculations and Discussion

Code  
Reference

- Determine if deep beam provisions apply.

$$d \approx 48 - 5 = 43 \text{ in.}$$

$$\frac{\ell_n}{d} = \frac{12 \times 12}{43} = 3.35 < 5, \text{ deep beam provisions apply}$$

11.8.1

- Determine critical section for shear (neglect uniform dead load since it is small compared to the concentrated loads).

11.8.5

$$0.5a = 0.5 \times 6 = 3 \text{ ft} < d = 3.58 \text{ ft}$$

- Determine shear strength without shear reinforcement.

11.8.6

$$\phi V_c = \phi (2\sqrt{f'_c} b_w d)$$

Eq. (11-28)

$$= 0.85 (2\sqrt{4000} \times 20 \times 43) / 1000 = 92.5 \text{ kips}$$

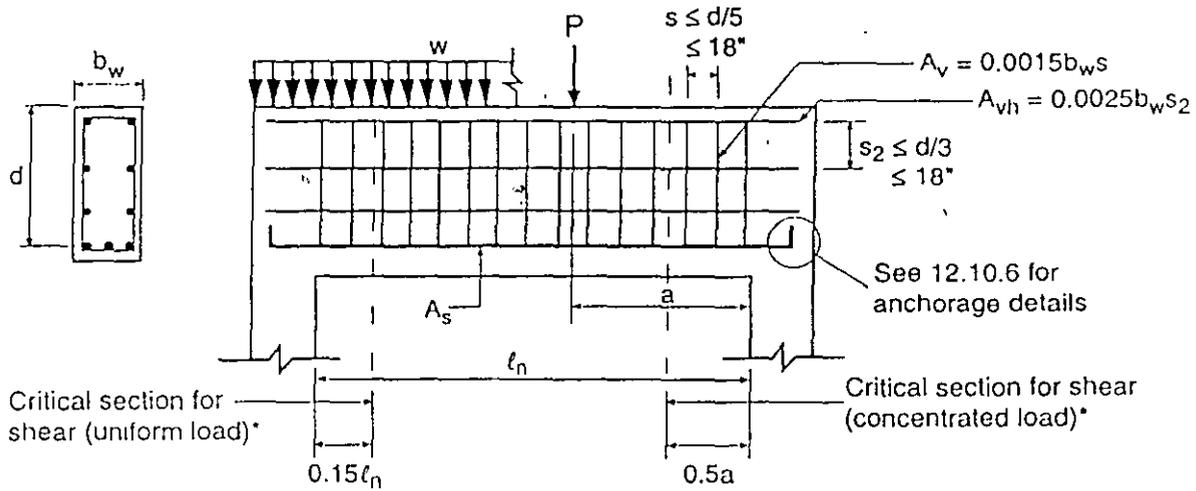
$$V_u = \frac{1.4(200) + 1.7(250)}{2} = 352.5 \text{ kips} > 92.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Shear strength provided by concrete  $\phi V_c$  is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ .

- Check maximum shear strength permitted.

11.8.4

14.



\* Use same shear reinforcement throughout span.

Figure 19-6 Design Details for Simply Supported Deep Beams ( $l_n/d < 5$ )

### 11.8.3 Continuous Deep Flexural Members

For shear design of continuous deep members, the design procedure is the same as for ordinary beams. The maximum factored shear force  $V_u$  is calculated at the critical section defined in 11.8.5. The factored shear force  $V_u$  must not exceed the shear strength provided by the section  $\phi(V_c + V_s)$ , where  $V_c$  may be computed from either the more complex Eq. (11-5), or the simpler Eq. (11-3),  $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_wd$ . Section 11.8.3 also specifies that the design of continuous deep flexural members must also satisfy 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Section 11.8.4 sets an upper limit to  $V_u$ . Sections 11.8.9 and 11.8.10 specify minimum vertical and horizontal shear reinforcement, respectively.

The first step in the design is to check if  $V_u$  is less than  $\phi V_c$ , with  $V_c$  equal to  $2\sqrt{f'_c}b_wd$ . If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ , calculate  $\phi V_s$  for minimum shear reinforcement and add to  $\phi V_c$ . Using the minimum shear reinforcement of 11.8.9 ( $A_v = 0.0015b_ws$ ), the shear strength Eq. (11-15) reduces to

$$\begin{aligned} V_s &= 0.0015f_yb_wd \\ &= 60 b_wd \text{ for Grade 40 bars} \\ &= 90 b_wd \text{ for Grade 60 bars} \end{aligned}$$

Note that the minimum shear reinforcement of 11.8.9 is greater than that required by Eq. (11-13). The shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi(2\sqrt{f'_c}b_wd + 0.0015f_yb_wd)$$

If the shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-5) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement  $A_v$  may be added to increase the shear strength of the section. Using Eq. (11-15), the required shear reinforcement is:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d}$$

increase the shear strength of the section. Shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span in all cases (11.8.11).

$$V_c = [3.5 - (2.5)(M_u/V_u d)] \times [1.9\sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u}] b_w d$$

Plotted for 3,000 psi concrete, simple span and uniform load.

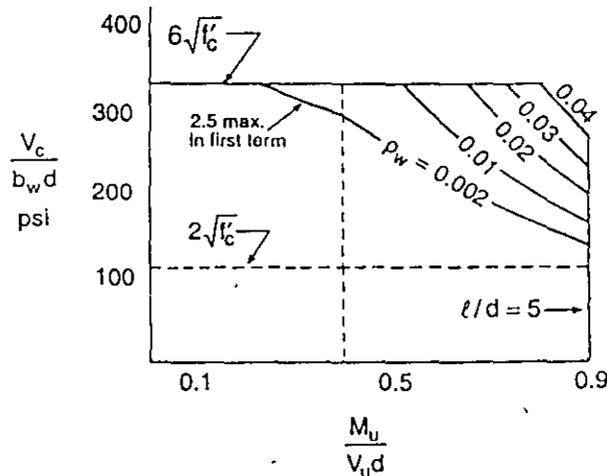


Figure 19-5 Shear Strength of Simply Supported Deep Flexural Members

For design convenience, the required area of shear reinforcement  $A_v$  and  $A_{vh}$  in terms of the factored shear force  $V_u$  can be computed using Eq. (11-30) as follows:

$$\frac{\phi V_s}{\phi f_y d} = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

The shear strength  $V_n = V_c + V_s$  must not be taken greater than:

$$V_n = 8\sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } \frac{\ell_n}{d} < 2 \quad 11.8.4$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left( 10 + \frac{\ell_n}{d} \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{for } 2 \leq \frac{\ell_n}{d} < 5 \quad 11.8.4$$

At the upper limit of  $\ell_n/d = 5$ ,  $V_n = 10\sqrt{f'_c} b_w d$  (the same as for ordinary beams).

A strict reading of 11.8.8 would appear to suggest that no shear reinforcement is needed in a simply supported deep beam unless  $V_u$  exceeds  $\phi V_c$ , which may be as high as  $\phi(6\sqrt{f'_c} b_w d)$ . However, a deep beam without shear reinforcement is not recommended. It would be more appropriate to conform with 11.8.9 and 11.8.10 for the design of simply supported deep beams.

Design details for simply supported deep members is illustrated in Fig. 19-6.

Example 19.2 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

7. Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30). 11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) \quad \text{Eq. (11-30)}$$

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement: 11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025 b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face),  $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.} \quad \text{Eq. (11-30)}$$

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face),  $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Example 19.2 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

$$\phi(V_c + V_s) = 173 + 94 = 267 \text{ kips} < 352.5 \text{ kips} \quad \text{N.G.}$$

Greater than the minimum shear reinforcement must be provided.

7. Determine required shear reinforcement using Eq. (11-30).

11.8.8

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right)$$

Eq. (11-30)

$$\frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} = \frac{352.5 - 173}{0.85 \times 60 \times 43} = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Use minimum horizontal reinforcement:

11.8.10

$$A_{vh} = 0.0025b_w s_2 = 0.0025 \times 20 \times 12 = 0.60 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s_2 \leq \frac{d}{3} = \frac{43}{3} = 14.3 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 12 in. (each face),  $A_{vh} = 0.62 \text{ in.}^2/\text{ft}$

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{12} = 0.0517 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0517 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Eq. (11-30)

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1349 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$$A_v = 0.1349 \times 12 = 1.619 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

$$s \leq \frac{d}{5} = \frac{43}{5} = 8.6 \text{ in.} < 18 \text{ in.}$$

Use #5 @ 4 1/2 in. (each face),  $A_v = 1.65 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Alternatively, decrease the spacing of the horizontal bars to #5 @ 9 in. (each face),

$$\frac{A_{vh}}{s_2} = \frac{2 \times 0.31}{9} = 0.0689 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

$$\frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) = 0.0819 \text{ in.}^2/\text{in.}$$

Solving for  $\frac{A_v}{s} = 0.1048 \text{ in.}^2/\text{in.}$

$A_v = 0.1048 \times 12 = 1.257 \text{ in.}^2/\text{ft}$

Use #5 @ 6 in. (each face),  $A_v = 1.24 \text{ in.}^2/\text{ft}$  O.K.

8. Check shear strength provided using #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

$$V_s = \left[ \frac{A_v}{s} \left( \frac{1 + \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) + \frac{A_{vh}}{s_2} \left( \frac{11 - \frac{\ell_n}{d}}{12} \right) \right] f_y d \quad \text{Eq. (11-30)}$$

$$= \left[ 0.1033 \left( \frac{1 + 3.35}{12} \right) + 0.0689 \left( \frac{11 - 3.35}{12} \right) \right] (60 \times 43) = 210.1 \text{ kips}$$

$$\phi V_s = 0.85 (210.1) = 178.6 \text{ kips}$$

$$\phi (V_c + V_s) = 173 + 178.6 = 351.6 \text{ kips} \approx 352.5 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

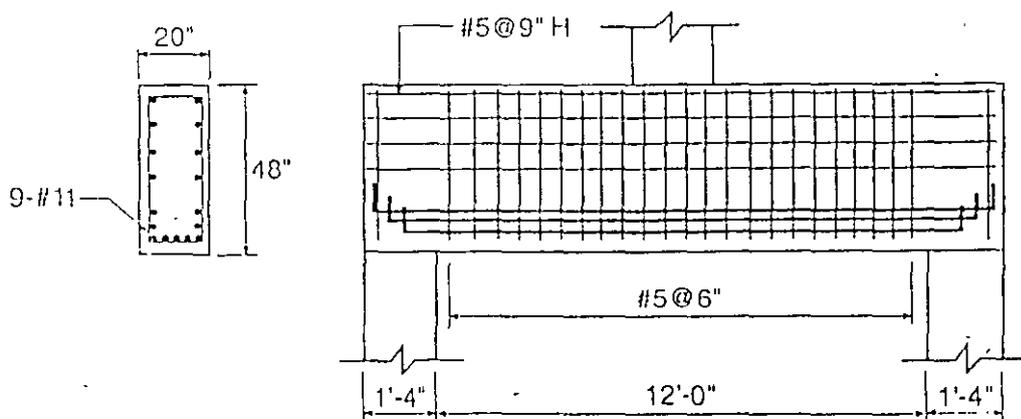
9. Both horizontal and vertical shear reinforcement required at the critical section must be provided throughout the span. See reinforcement details below.

11.8.11

Use #5 @ 9 in. (each face) for horizontal and #5 @ 6 in. (each face) for vertical shear reinforcement.

Note: The main flexural reinforcement must be anchored to develop the specified yield strength  $f_y$  in tension at the face of the support.

12.10.6  
12.11.4



Reinforcement Details

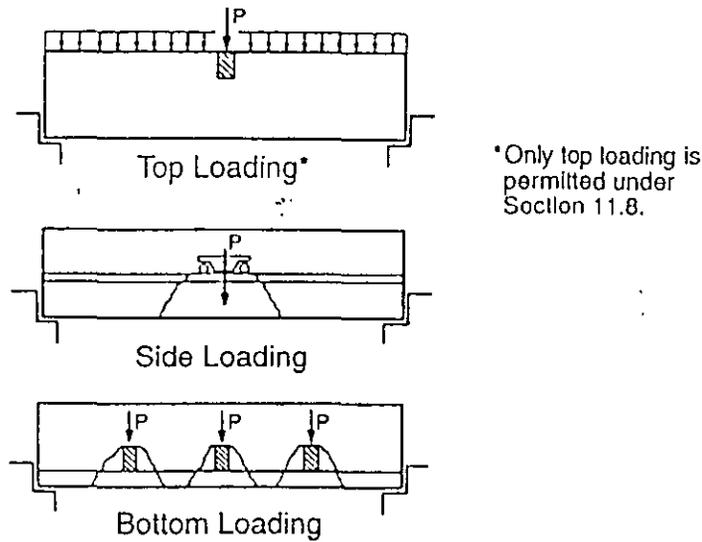


Figure 19-4 Loading of Deep Flexural Members

Different shear design procedures are prescribed for simply supported and continuous deep flexural members. Design of simply supported members for shear must be based on the special provisions of 11.8. Design of continuous members for shear must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 as well as 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. Also, when loads are applied through the sides or bottom of the member, simply supported or continuous, the shear design provisions of 11.1 through 11.5 must be used.

### 11.8.2 Simply Supported Deep Flexural Members

For shear design of simply supported deep members, the maximum factored shear force  $V_u$  is calculated at a distance from the face of the support defined as 0.15 times the clear span for uniformly loaded beams or 0.50 times the shear span  $a$  (distance between concentrated load and face of support) for beams with concentrated loads, but in no case greater than  $d$  from the face of the support (11.8.5).

The factored shear force  $V_u$  must not exceed the shear strength  $\phi V_n = \phi(V_c + V_s)$ , where  $V_c$  is the shear strength provided by the concrete and  $V_s$  is the shear strength provided by the shear reinforcement, both horizontal and vertical.  $V_c$  may be computed from either the more complex Eq. (11-29), which takes into account the effects of the tensile reinforcement and  $M_u/V_u d$  at the critical section, or may be determined from the simpler Eq. (11-28),  $V_c = 2\sqrt{f'_c} b_w d$ . Equation (11-29) is illustrated in Fig. 19-5.

The first step in the design is to check if  $V_u$  is less than  $\phi V_c$ , with  $V_c$  equal to  $2\sqrt{f'_c} b_w d$ . If the shear strength provided by the concrete is not adequate to carry the factored shear force  $V_u$ , calculate  $\phi V_s$  for minimum shear reinforcement and add to  $\phi V_c$ . Using the minimum shear reinforcement requirements of 11.8.9 ( $A_v = 0.0015b_w s$ ) and 11.8.10 ( $A_{vh} = 0.0025b_w s_2$ ), shear strength Eq. (11-30) reduces to

$$V_s = (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12$$

Substituting  $V_c$  from Eq. (11-28) and  $V_s$  from above, the shear strength with minimum shear reinforcement becomes

$$V_u \leq \phi \left[ 2\sqrt{f'_c} b_w d + (0.029d - 0.001 \ell_n) b_w f_y / 12 \right]$$

If shear strength with minimum shear reinforcement is still not adequate, the more complex Eq. (11-29) can be used to calculate a higher concrete shear strength, or additional shear reinforcement  $A_v$  and  $A_{vh}$  may be added to

depth and compressive stresses may be as high as 14 times those indicated by linear strain and stress distribution.<sup>19.2</sup> In these cases, reinforcing details require special consideration. If service load compressive stresses approach about  $0.45f'_c$ , it may be necessary to treat the compression area as an axially loaded member, using laterally tied reinforcement to carry the compressive forces as the moment strength is approached.

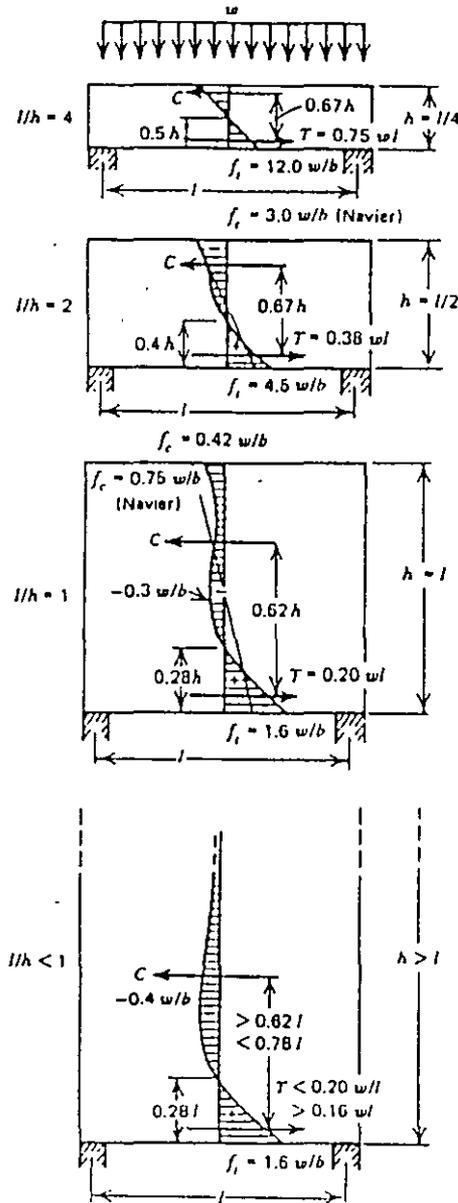


Figure 19-3 Distribution of Flexural Stresses in Homogeneous Simply Supported Beams (Ref. 19.4)

## 11.8 SHEAR STRENGTH OF DEEP FLEXURAL MEMBERS

The special shear strength provisions for deep flexural members apply only to members having a clear-span-to-effective-depth ratio ( $\ell_n/d$ ) less than 5. The deep members must be loaded at the top face as shown in Fig. 19-

Since the principal tensile forces in deep members are primarily horizontal (vertical cracking), horizontal shear reinforcement is effective in resisting the tensile forces. Truss bars are, therefore, not recommended as shear reinforcement in deep members.

Lateral buckling in a vertical direction (Fig. 19-2), particularly near concentrated loads and at supports, can be checked by the moment magnifier method for columns, or by numerical or energy methods. A simplified procedure for wall-like beams (tilt-up panels) is provided in Reference 19.1. If the height-to-thickness ratio of a member is limited to 25, buckling should not be a problem.

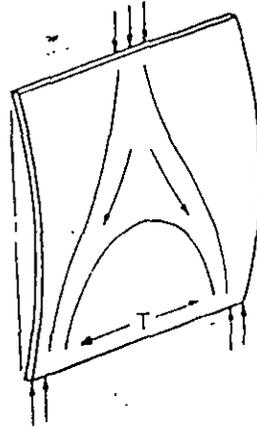


Figure 19-2 Lateral Buckling of Deep Flexural Members

The design of continuous deep flexural members for shear strength must be based on the regular beam design procedures of 11.1 through 11.5 with 11.8.5 substituted for 11.1.3, and must also satisfy the provisions of 11.8.4, 11.8.9 and 11.8.10. The special shear strength provisions of 11.8 are intended to apply only to simply supported deep beams. Recent tests of continuous deep beams have indicated that the special shear provisions of 11.8 are inadequate for continuous members. Section 11.8.3 directs the engineer to base shear strength of continuous members on the design provisions of 11.1 through 11.5. Section 11.8 is basically limited to simply supported deep beams.

## 10.7 DEEP FLEXURAL MEMBERS

The code requires that "nonlinear distribution of strain" be taken into account in flexural design of deep members. The elastic analyses by Dischinger and others (Refs. 19.2-19.4) have shown that the shape of the elastic stress curve can be quite different from the linear distribution usually assumed. At midspan, the neutral axis moves away from the loaded face of the member as the span-to-depth ratio decreases (see Fig. 19-3). Over the supports, the resultant elastic tensile forces can be within a third of the member depth from the top fiber.

Nonlinear distribution of strains and stresses assumes an uncracked, homogeneous cross-section and, therefore, does not apply to design at the ultimate moment strength (nominal moment strength  $M_n$  for design), since cracking usually occurs before the moment strength can be developed. This would imply that the tensile reinforcement required to develop the moment strength  $M_n$  could be placed near the extreme tensile fiber as is customary for ordinary flexural members. Reference 19.3, however, recommends that tensile reinforcement be distributed throughout the tensile area and centered at or near the resultant of the tensile forces, so that, when cracking occurs, there will not be a sudden shift in the location of the resultant tensile force. Both methods of sizing and placing reinforcement are illustrated in Example 19.1 and it is left to the judgment of the designer to choose the more appropriate method.

Development of horizontal tensile reinforcement in single-span simply-supported deep members requires special consideration. Since moments increase rapidly from zero at the face of the support, the reinforcement may not have sufficient anchorage length to develop the required moment strength near the support. Tensile bars may be anchored by development length (if available), standard hooks, or by special anchorage devices.

The most radical departure from a linear strain and stress distribution is in compression areas at or near supports of continuous members. Compressive forces may be confined to the bottom 5 or 10 percent of the member

## Deep Flexural Members

### UPDATE FOR THE '95 CODE

Two new sections, 12.11.4 and 12.12.4, have been added which affect the reinforcement detailing of deep flexural members. The new sections require that at interior supports of deep flexural members, positive moment tension reinforcement and negative moment tension reinforcement shall be continuous with that of adjacent spans to develop proper anchorage.

### GENERAL CONSIDERATIONS

The code gives two definitions for "deep" members. For flexure, members with overall depth-to-clear-span ratios greater than  $2/5$  for continuous spans or  $4/5$  for simple spans are defined as "deep" (10.7.1). For shear, a "deep" member is one with an effective depth-to-span ratio of  $1/5$  or greater (11.8.1).

Specific provisions for designing deep members for flexure are found in the code, but such members must be designed "taking into account nonlinear distribution of strain and lateral buckling" (10.7.1). Appropriate references for the design of deep beams for flexure are given in the Commentary and at the end of Part 19.

Information on lateral buckling is more difficult to find. Fortunately, most walls and beams receive lateral support from supported floor or roof members, so lateral buckling of the compression flange is rarely a problem (see Fig. 19-1(a)). Some form of lateral support is required at intervals not exceeding 50 times the least width of the compression flange (10.4.1), even if the member is free-standing (see Fig. 19-1(b)). For free-standing walls, a lateral stability check should be made and an adequate margin of safety against lateral buckling provided. As shown in Fig. 19-1(c), lateral bracing can also be achieved by providing flanges.

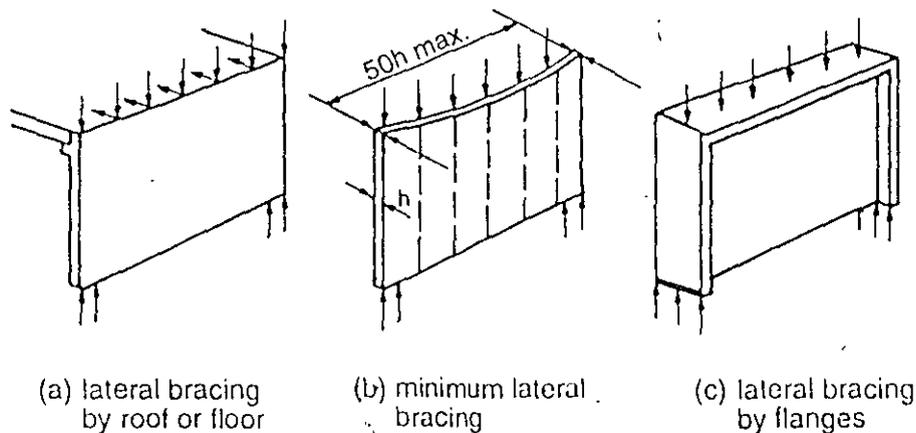


Figure 19-1 Lateral Support for Deep Flexural Members

Use 2-#4 @ 14 in.

4. Determine vertical shear reinforcement.

$$\begin{aligned} \rho_{II} &= 0.0025 + 0.5 \left( 2.5 - \frac{h_w}{\ell_w} \right) (\rho_{II} - 0.0025) && \text{Eq. (11-34)} \\ &= 0.0025 + 0.5 (2.5 - 1.5) (0.0036 - 0.0025) \\ &= 0.0031 \end{aligned}$$

$$\text{Maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{3} = \frac{8 \times 12}{3} = 32 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 11.10.9.5$$

Use 2-#4 @ 14 in.

5. Design for flexure.

$$M_{II} = V_{II} h_w = 200 \times 12 = 2400 \text{ ft-kips}$$

Using Table 10-1:

$$\frac{M_{II}}{\phi I_c' h d^2} = \frac{2400 \times 12}{0.9 \times 3 \times 8 \times 76.8^2} = 0.2261$$

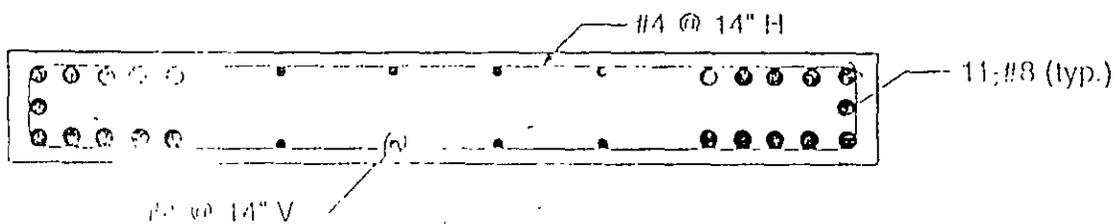
$$\text{where } d = 0.8 \ell_w = 0.8 \times 96 = 76.8 \text{ in.} \quad 11.10.4$$

(a larger value of d could be used if determined by a strain compatibility analysis)

From Table 10-1, read  $\omega = 0.269$

$$A_s = \rho h d = \frac{\omega \ell_c' h d}{l_s} = \frac{0.269 \times 3 \times 8 \times 76.8}{60} = 8.26 \text{ in.}^2$$

Use 11-#8 bars each side ( $A_s = 8.69 \text{ in.}^2$ )



$$= \left[ 0.6 \sqrt{3000} + \frac{96 (1.25 \sqrt{3000} + 0)}{96 - 48} \right] \left( \frac{8 \times 76.8}{1000} \right) = 104 \text{ kips (governs)}$$

where:  $M_u = (12 - 4) V_u = 8V_u \text{ ft kips} = 96V_u \text{ in. kips}$

$$V_u = 200 \text{ kips} > \phi V_c / 2 = 0.85 (104) / 2 = 44.2 \text{ kips} \quad 11.10.8$$

Shear reinforcement must be provided in accordance with 11.10.9.

3. Determine required horizontal shear reinforcement. 11.10.9.1

$$V_u \leq \phi V_n \quad \text{Eq. (11-1)}$$

$$\leq \phi (V_c + V_s) \quad \text{Eq. (11-2)}$$

$$\leq \phi V_c + \frac{\phi A_v f_y d}{s_2} \quad \text{Eq. (11-33)}$$

$$\frac{A_v}{2} = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_y d}$$

$$= \frac{|200 - (0.85 \times 104)|}{0.85 \times 60 \times 76.8} = 0.0285$$

$$\text{For 2-#3: } s_2 = \frac{2 \times 0.11}{0.0285} = 7.7 \text{ in.}$$

$$\text{2-#4: } s_2 = \frac{2 \times 0.20}{0.0285} = 14.0 \text{ in.}$$

$$\text{2-#5: } s_2 = \frac{2 \times 0.31}{0.0285} = 21.8 \text{ in.}$$

Try 2-#4 @ 14 in.

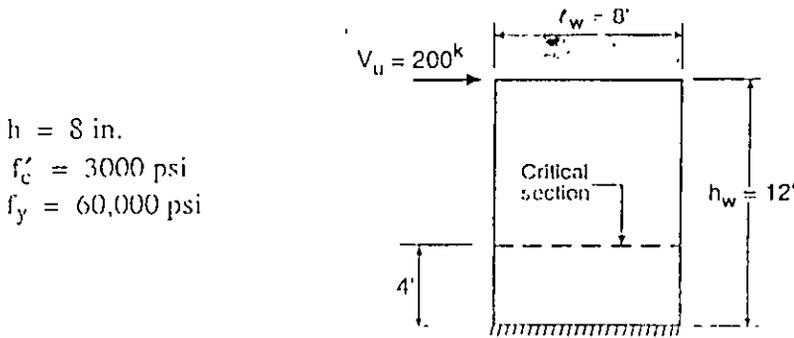
$$\rho_h = \frac{A_v}{A_g} = \frac{2 \times 0.20}{8 \times 14} = 0.0036 > 0.0025 \quad \text{O.K.} \quad 11.10.9.2$$

$$\text{maximum spacing} = \begin{cases} \frac{\ell_w}{5} = \frac{8 \times 12}{5} = 19.2 \text{ in.} \\ 3h = 3 \times 8 = 24.0 \text{ in.} \\ 18.0 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 11.10.9.3$$

19

### Example 23.4—Shear Design of Wall

Determine the shear and flexural reinforcement for the wall shown.



$h = 8 \text{ in.}$   
 $f'_c = 3000 \text{ psi}$   
 $f_y = 60,000 \text{ psi}$

#### Calculations and Discussion

Code Reference

1. Check maximum shear strength permitted.

$$V_u \leq \phi 10 \sqrt{f'_c} h d \quad 11.10.3$$

$$\leq 0.85 \times 10 \sqrt{3000} \times 8 (0.8 \times 96) / 1000 = 286 \text{ kips} > 200 \text{ kips} \quad \text{O.K.} \quad 11.10.4$$

2. Calculate shear strength provided by concrete  $V_c$ .

Critical section for shear: 11.10.7

$$\frac{t_w}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ ft (governs)}$$

$$\frac{h_w}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ft}$$

$$V_c = 3.3 \sqrt{f'_c} h d + \frac{N_u d}{4 t_w} \quad \text{Eq. (11-31)}$$

$$= 3.3 \sqrt{3000} (8) (76.8) + 0 = 111 \text{ kips}$$

or

$$V_c = \left[ 0.6 \sqrt{f'_c} + \frac{t_w \left( 1.25 \sqrt{f'_c} + \frac{0.2 N_u}{t_w h} \right)}{\frac{M_u}{V_u} + \frac{t_w}{2}} \right] h d \quad \text{Eq. (11-32)}$$

Example 23.3 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
-----------------------	-----------------------------	----------------

Bearing capacity =  $\phi(0.85f'_cA_1) = 0.70(0.85 \times 4 \times 52.5) = 125 \text{ kips} > 63 \text{ kips}$  O.K.

4. Calculate design strength of wall.

Effective horizontal length of wall per tee reaction =  $\begin{cases} 7 + 4(7.5) = 37 \text{ in. (governs)} \\ 8 \times 12 = 96 \text{ in.} \end{cases}$  14.2.4

$$\phi P_{nw} = 0.55\phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k\ell_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

$$= 0.55 \times 0.70 \times 4(37 \times 7.5) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 15 \times 12}{32 \times 7.5} \right)^2 \right]$$

$$= 273 \text{ kips} > 63 \text{ kips} \quad \text{O.K.}$$

The 7.5-in. wall is adequate, with sufficient margin for possible effect of load eccentricity.

5. Determine single layer of reinforcement.

Based on 1-ft width of wall and Grade 60 reinforcement (#5 and smaller):

$$\text{Vertical } A_s = 0.0012 \times 12 \times 7.5 = 0.108 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.2$$

$$\text{Horizontal } A_s = 0.0020 \times 12 \times 7.5 = 0.180 \text{ in.}^2/\text{ft} \quad 14.3.3$$

$$\text{Spacing} = \begin{cases} 3h = 3 \times 7.5 = 22.5 \text{ in.} \\ 18 \text{ in. (governs)} \end{cases} \quad 14.3.5$$

Vertical  $A_s$ : use #4 @ 18 in. on center ( $A_s = 0.13 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

Horizontal  $A_s$ : use #4 @ 12 in. on center ( $A_s = 0.20 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

Design aids such as Fig. 23-6 may be used to select reinforcement directly.

### Example 23.3—Design of Bearing Wall by Empirical Design Method (14.5)

A concrete bearing wall supports a floor system of precast single tees spaced at 8 ft on centers. The stem of each tee section is 8 in. wide. The tees have full bearing on the wall. The height of wall is 15 ft, and the wall is considered laterally restrained at top. Design of the wall is required.

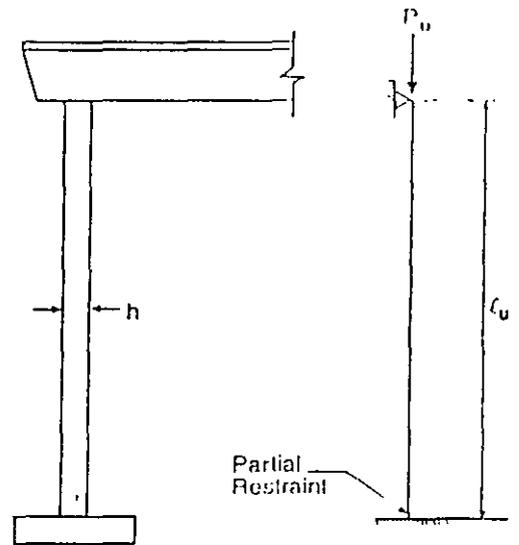
Design Data:

Floor beam reactions: dead load = 28 kips  
live load = 14 kips

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi}$$

Neglect self-weight of wall



#### Calculations and Discussion

#### Code Reference

The general design procedure is to select a trial wall thickness  $h$ , then check the trial wall for the applied loading conditions.

1. Select trial wall thickness  $h$ .

$$h > \frac{\ell_u}{25} \text{ but not less than 4 in.}$$

14.5.3.1

$$> \frac{15 \times 12}{25} = 7.2 \text{ in.}$$

Try  $h = 7.5 \text{ in.}$

2. Calculate factored loading.

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Eq. (9-1)

$$= 1.4(28) + 1.7(14)$$

$$= 39.2 + 23.8 = 63 \text{ kips}$$

3. Check bearing strength on concrete.

10.17

Assume width of stem for bearing equal to 7 in., to allow for beveled bottom edges.

$$\text{Loaded area } A_1 = 7 \times 7.5 = 52.5 \text{ in.}^2$$

163

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-2 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A6. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls \*  
 (h = 6 1/2" (165 mm) and q<sub>u</sub>h = 30 or 45 psf (1.4 or 2.2 kN/m<sup>2</sup>))

w = 150 psf (2400 kg/m<sup>2</sup>)  
 f' = 4000 psi (28 MPa)  
 f<sub>c</sub> = 60 ksi (400 MPa)

h = 6 1/2" (165 mm)

$P_u/h = (\text{coeff.}) b_1 h_1$

A > 100 P <sub>u</sub> < b <sub>1</sub> < h	End eccentricity, e, in. (mm)	q <sub>u</sub> h = 30 psf (1.4 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, λ <sub>e</sub> h <sub>1</sub> =				λ <sub>e</sub> h <sub>1</sub> † coeff † ≥ 0.001	q <sub>u</sub> h = 45 psf (2.2 kN/m <sup>2</sup> ) Slenderness ratio, λ <sub>e</sub> h <sub>1</sub> =				λ <sub>e</sub> h <sub>1</sub> † coeff † ≥ 0.001
		20	30	40	50		20	30	40	50	
		0.15	1.00 (25)	0.468	0.316		0.035	—	49	0.438	
	3.25 (85)	0.079	0.011	—	—	39	0.067	—	—	—	29
	6.75 (170)	0.016	0.005	—	—	39	0.014	—	—	—	29
0.25	1.00 (25)	0.468	0.316	0.151	0.030	**	0.438	0.301	0.065	—	49
	3.25 (85)	0.101	0.026	0.006	—	49	0.092	0.016	—	—	39
	6.75 (170)	0.024	0.014	0.004	—	49	0.023	0.009	—	—	39
0.50	1.00 (25)	0.483	0.316	0.151	0.040	**	0.453	0.301	0.070	0.010	**
	3.25 (85)	0.121	0.046	0.016	0.004	**	0.114	0.036	0.010	0.003	**
	6.75 (170)	0.042	0.020	0.013	0.003	**	0.040	0.024	0.009	0.002	**
0.75	1.00 (25)	0.498	0.316	0.151	0.050	**	0.468	0.301	0.070	0.020	**
	3.25 (85)	0.141	0.066	0.026	0.009	**	0.137	0.056	0.021	0.006	**
	6.75 (170)	0.061	0.042	0.023	0.007	**	0.059	0.039	0.020	0.005	**

\*Observe the direction of ultimate transverse loads (q<sub>u</sub>) and note the bonding moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4) A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

\*\*Walls with slenderness ratios, λ<sub>e</sub>h<sub>1</sub>, greater than 50 are not recommended.

†This column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity

Example 23.2 (cont'd)

Table 23-1 Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls

Table A5. Load Capacity Coefficients of Tilt-up Concrete Walls \*  
 (h = 6 1/2" (165 mm) and q<sub>u</sub>h = 0 or 15 psf (0 or 0.7 kN/m<sup>2</sup>))

$\rho = \frac{A_s \times 100}{b_s \times h}$		End eccentricity, e, in. (mm)	q <sub>u</sub> h = 0 psf (0 kN/m <sup>2</sup> ): Slenderness ratio, $\lambda_c h_i =$				$\lambda_c h_i$ @ coeff. † ≤ 0.001	q <sub>u</sub> h = 15 psf (0.7 kN/m <sup>2</sup> ): Slenderness ratio, $\lambda_c h_i =$				$\lambda_c h_i$ @ coeff. † ≤ 0.001
			20	30	40	50		20	30	40	50	
0.15	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.085	**	
	3.25 (85)	0.094	0.042	0.018	0.013	**	0.087	0.021	0.005	—	49	
	6.75 (170)	0.018	0.014	0.005	0.003	**	0.017	0.009	0.003	—	49	
0.25	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.468	0.331	0.191	0.090	**	
	3.25 (85)	0.110	0.050	0.026	0.018	**	0.105	0.037	0.011	0.003	**	
	6.75 (170)	0.029	0.022	0.010	0.006	**	0.025	0.015	0.006	0.002	**	
0.50	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.483	0.331	0.191	0.100	**	
	3.25 (85)	0.128	0.066	0.034	0.022	**	0.124	0.055	0.023	0.011	**	
	6.75 (170)	0.019	0.034	0.010	0.012	**	0.045	0.029	0.016	0.009	**	
0.75	1.00 (25)	0.498	0.347	0.227	0.155	**	0.498	0.331	0.191	0.110	**	
	3.25 (85)	0.146	0.082	0.042	0.026	**	0.142	0.073	0.035	0.019	**	
	6.75 (170)	0.069	0.046	0.030	0.018	**	0.065	0.044	0.026	0.016	**	

\*Observe the direction of ultimate transverse loads (q<sub>u</sub>) and note the bending moments due to transverse loads are additive to those caused by the axial loads (Sec. 2.4). A dash indicates that the wall panel cannot sustain any load.

\*\*Walls with slenderness ratios,  $\lambda_c h_i$ , greater than 50 are not recommended.

†This column gives the value to the slenderness ratios above which the walls have negligible load-carrying capacity.

---

## Example 23.2—Design of Tilt-up Wall of Example 23.1 Using Design Aid EB074D

---

### 1. Summary of factored loads

$$\begin{aligned}\text{Load case 1: } P_u &= 1.4(1.6) + 1.7(0.64) \\ &= 2.2 + 1.1 = 3.3 \text{ kips}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 2: } P_u &= 0.75(2.2 + 1.1) = 2.5 \text{ kips} \\ q_u &= 0.75(1.7 \times 20) = 25.5 \text{ psf}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Load case 3: } P_u &= 0.9 \times 1.6 = 1.4 \text{ kips} \\ q_u &= 1.3 \times 20 = 26.0 \text{ psf}\end{aligned}$$

From Ex. 23.1,  $\phi = 0.87$

### 2. Select trial section

Use same trial sections as in Example 23.1.

$$h = 6.5 \text{ in.}$$

$$\rho = 0.0025$$

$$\frac{k\ell_u}{h} = \frac{1.0 \times 16 \times 12}{6.5} = 29.5 \approx 30$$

### 3. Check strength using EB074D design aid

Load case 1: Required  $P_u/\phi = 3.8$  kips,  $q_u/\phi = 0$   
Use Table A5 (see Table 23-1) from EB074D  
For  $\rho = 0.0025$ ,  $k\ell_u/h = 30$ ,  $e = 6.75$  in., and  
 $q_u/\phi = 0$ , coefficient = 0.022  
 $P_n = 0.022 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 6.9$  kips  $> P_u/\phi$  O.K.

Load case 2: Required  $P_u/\phi = 2.9$  kips,  $q_u/\phi = 29.3$  psf, say 30 psf  
Use Table A6 (see Table 23-2) from EB074D  
For  $\rho = 0.0025$ ,  $k\ell_u/h = 30$ ,  $e = 6.75$  in., and  
 $q_u/\phi = 30$  psf, coefficient = 0.014  
 $P_n = 0.014 \times 12 \times 6.5 \times 4 = 4.4$  kips  $> P_u/\phi$  O.K.

By inspection, the strength requirements for load case 3 are satisfied.

Therefore, the 6.5-in. wall reinforced with #4 @ 12 in. is adequate for all of the load combinations investigated.

## Example 23.1 (cont'd)      Calculations and Discussion

$$\phi = 0.9 - \frac{0.2P_u}{0.1f'_c A_g} \geq 0.70$$

$$= 0.9 - \frac{0.2 \times 4.5}{0.1 \times 4 \times 12 \times 6.5} = 0.87$$

Although slight variations from this value will occur for different load cases, this single value is considered adequate.

Determine magnified moment  $M_c$  for each load case.

Load Case	$P_u$ (kips)	$M_u$ (in.-kips)	$\beta_d$	$\beta = 0.869 + 0.5\beta_d^2 \geq 1.0$	$EI = \frac{99 \times 10^6}{\beta}$ (lb-in. <sup>2</sup> )	$P_c = \frac{26.5}{\beta}$ (kips)	$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0$	$M_c = \delta_{ns} M_u$ (in.-kips)
1	4.5	22.4	0.76	1.16	$85 \times 10^6$	22.8	1.36	30.5
2	3.4	26.6	0.76	1.16	$85 \times 10^6$	22.8	1.25	33.3
3	2.2	19.7	1.00	1.37	$72 \times 10^6$	19.3	1.18	23.2

## 5. Check design strength vs. required strength

For each load case, the required nominal strength will be compared to the design strength using the load-moment interaction diagram in Fig. 23-4(h). The results are tabulated below, based on the moment strengths for the given axial loads.

Load Case	Required Nominal Strength		Design Strength $M_n$ (in.-kips)
	$P_n = P_u / \phi$ (kips)	$M_n = M_c / \phi$ (in.-kips)	
1	5.2	35.1	50.0
2	3.9	38.3	45.0
3	2.5	26.7	40.0

The wall is adequate with the #4 @ 12 in. since the design strength is greater than the required nominal strength for all three load cases.

Example 23.1 (cont'd)	Calculations and Discussion	Code Reference
	$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{P_u}{0.75P_c} \right)} \geq 1$	Eq. (10-10)
	$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2}$	Eq. (10-11)
	$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left( 0.5 - \frac{e}{h} \right) \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad \text{Eq. (I)}$ $\leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta}$	
	$\frac{e}{h} = \frac{6.75}{6.5} = 1.04$	
	$\text{Thus, } EI = 0.1 \left( \frac{E_c I_g}{\beta} \right)$	
	$E_c = 57,000 \sqrt{4000} = 3.605 \times 10^6 \text{ psi}$	8.5.1
	$I_g = \frac{12 \times 6.5^3}{12} = 274.6 \text{ in.}^4$	
	$\beta = 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12\rho \geq 1.0$ $= 0.9 + 0.5\beta_d^2 - 12(0.00256)$ $= 0.869 + 0.5\beta_d^2 \geq 1.0$	
	$EI = \frac{0.1 \times 3.605 \times 10^6 \times 274.6}{\beta} = \frac{99 \times 10^6}{\beta} \text{ lb-in.}^2$	
	$P_c = \frac{\pi^2 \times 99 \times 10^6}{\beta (16 \times 12)^2 \times 1000} = \frac{26.5}{\beta} \text{ kips}$	
	$C_m = 1.0$ for members with transverse loads between supports	
	Calculate $\phi$ factor for largest $P_u = 4.5$ kips	9.3.2.2(b)

b. Roof loading per foot of wall

$$\text{dead load} = 50 \times 20 \left( \frac{4}{2.5} \right) = 1600 \text{ lb/ft}$$

$$\text{live load} = 20 \times 20 \left( \frac{4}{2.5} \right) = 640 \text{ lb/ft}$$

$$\text{wall dead load at mid-height} = 150(8 + 2) \left( \frac{6.5}{12} \right) = 813 \text{ lb/ft}$$

Factored load combinations.

$$\text{Load case 1: } U = 1.4D + 1.7L \quad \text{Eq. (9-1)}$$

$$P_u = 1.4(1.6 + 0.81) + 1.7(0.64)$$

$$= 3.4 + 1.1 = 4.5 \text{ kips}$$

$$M_u = 1.4(1.6 \times 6.75) + 1.7(0.64 \times 6.75)$$

$$= 15.1 + 7.3 = 22.4 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 3.4/4.5 = 0.76$$

$$\text{Load case 2: } U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \quad \text{Eq. (9-2)}$$

$$P_u = 0.75(3.4 + 1.1 + 0)$$

$$= 2.6 + 0.8 = 3.4 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.75[15.1 + 7.3 + 1.7(0.02 \times 16^2 \times 12/8)]$$

$$= 11.3 + 5.5 + 9.8 = 26.6 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 2.6/3.4 = 0.76$$

$$\text{Load case 3: } U = 0.9D + 1.3W \quad \text{Eq. (9-3)}$$

$$P_u = 0.9(1.6 + 0.81) + 0 = 2.2 \text{ kips}$$

$$M_u = 0.9(1.6 \times 6.75) + 1.3(0.02 \times 16^2 \times 12/8)$$

$$= 9.7 + 10.0 = 19.7 \text{ in.-kips}$$

$$\beta_d = 2.4/2.4 = 1.0$$

3. Check wall slenderness:

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{1.0(16 \times 12)}{(0.3 \times 6.5)} = 98.5$$

< 100, approximate evaluation of slenderness effects by 10.11.1 may be used.

4. Calculate moment magnification

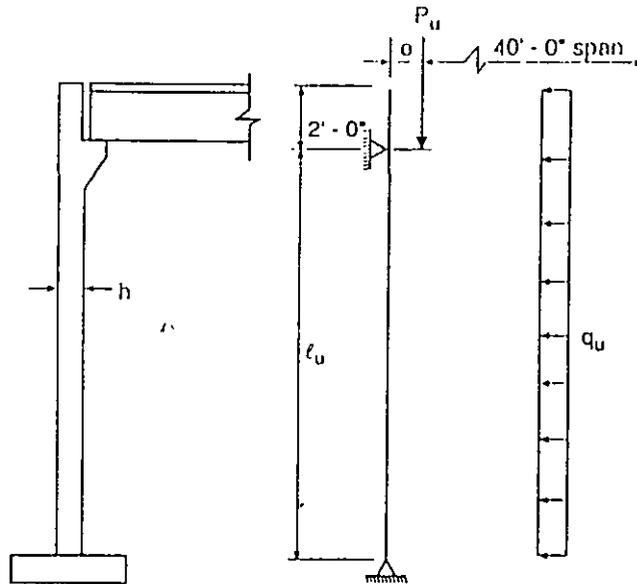
10.12

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$

Eq. (10-9)

## Example 23.1—Design of Tilt-up Wall Panel by Chapter 10 (14.4)

Design of the wall shown is required. The walls are spaced at 40 ft on center and restrained at the top edge. The roof load is supported through 4 in. tee stems spaced at 4 ft on center.



Design data:

Roof dead load = 50 psf

Roof live load = 20 psf

Wind load = 20 psf

Unsupported length of wall  $l_u = 16$  ft

Effective length factor  $k = 1.0$  (pinned-pinned end condition)

Concrete  $f'_c = 4000$  psi ( $w_c = 150$  pcf)

Steel  $f_y = 60,000$  psi

Assume non-sway condition.

### Calculations and Discussion

Code  
Reference

1. Trial wall selection (design for 1 ft wall section)

Try  $h = 6.5$  in. with assumed  $e = 6.75$  in.

Try #4 @ 12 in. ( $A_s = 0.20$  in.<sup>2</sup>/ft)

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{0.20}{(12 \times 6.5)} = 0.00256$$

2. a. Effective wall length for roof reaction

14.2.4

(i) bearing width + 4 (wall thickness) =  $4 + 4(6.5) = 30$  in. = 2.5 ft (governs)

(ii) center-to-center distance between stems = 4 ft

## REFERENCES

- 23.1 MacGregor, J.G., "Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Members," paper presented at International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium, Quebec, 1974.
- 23.2 *Tilt-Up Load Bearing Walls - A Design Aid*, Publication EB074D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1994.
- 23.3 Kripanaryanan, K.M., "Interesting Aspects of the Empirical Wall Design Equation," *ACI Journal*, Proceedings Vol. 74, No. 5, May 1977; pp. 204-207.
- 23.4 *PCI Design Handbook - Precast and Prestressed Concrete*, 4th Edition, Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL, 1994.

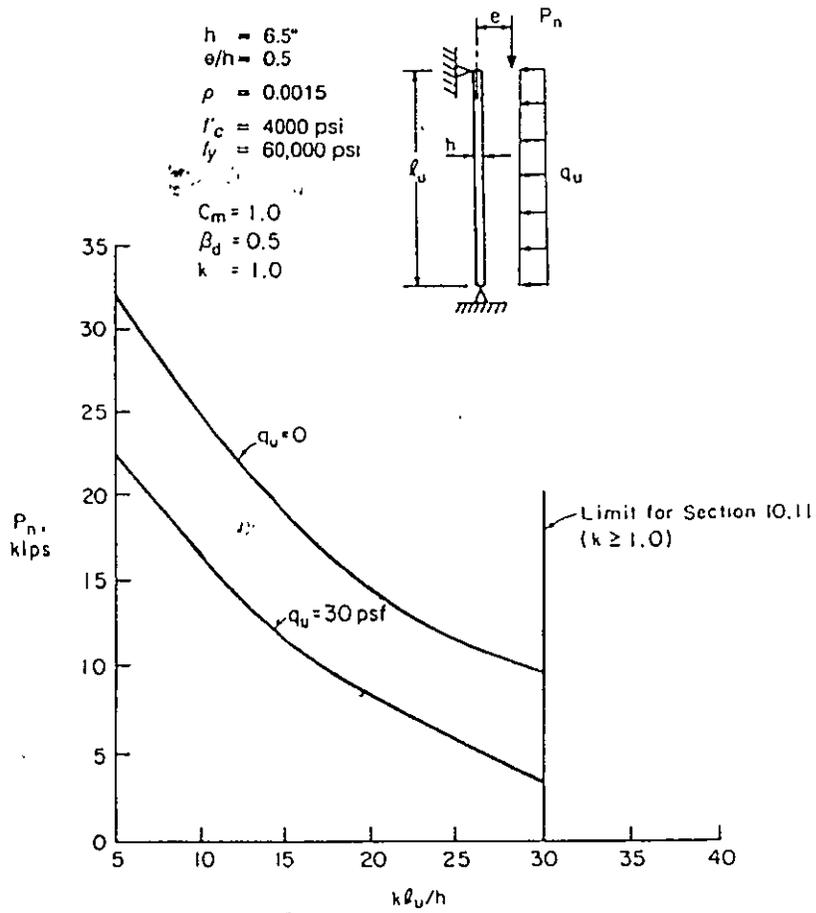


Figure 23-5 Design Chart for 6.5-in. Wall

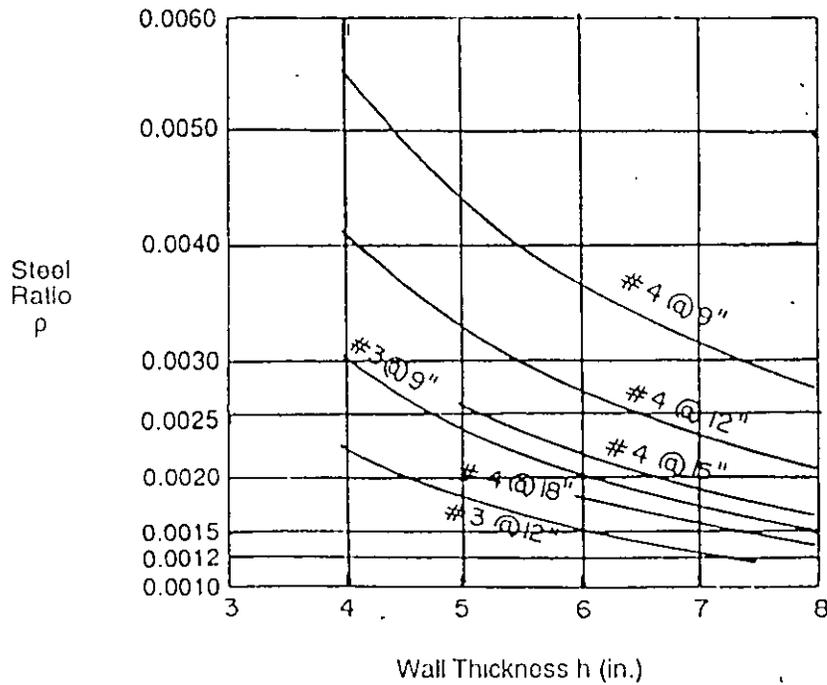
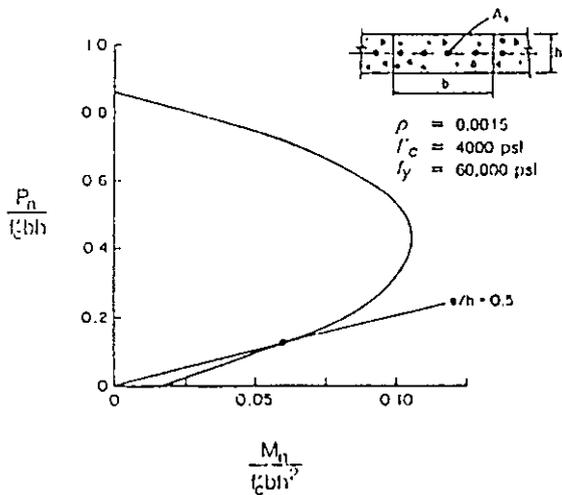
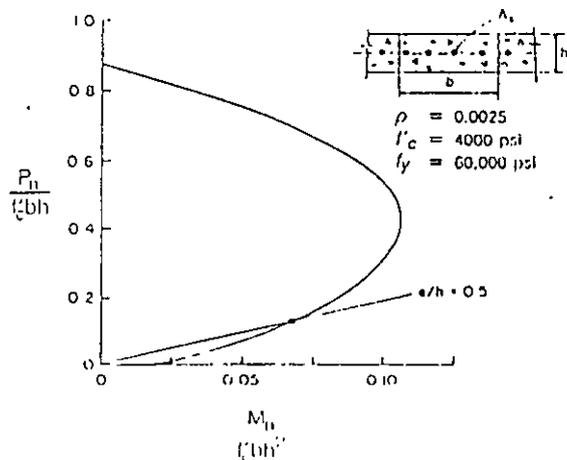
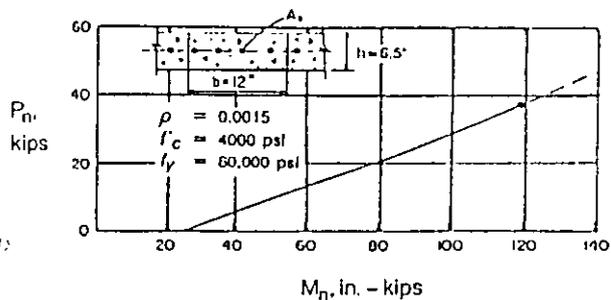


Figure 23-6 Design Aid for Wall Reinforcement

design aids to fit the range of conditions usually encountered in practice. For example, strength interaction diagrams such as those plotted in Fig. 23-4(a) ( $\rho = 0.0015$ ) and Fig. 23-4(b) ( $\rho = 0.0025$ ) can be helpful design aids for evaluation of wall strength. "Blow-ups" of the lower portions of the strength interaction diagrams are shown for specific walls ( $h = 6.5$  in.). Load charts, such as the one shown in Fig. 23-5 can also be developed for specific walls. Design aids such as the one shown in Fig. 23-6 may facilitate selection of wall reinforcement.



(a)



(b)

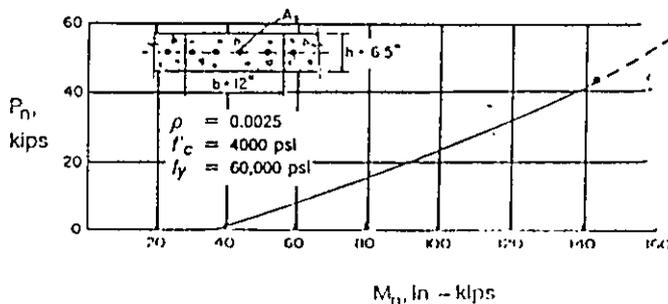


Figure 23-4 Load Moment Interaction Diagram for Wall with (a) Reinforcement  $\rho = 0.0015$ , and (b) Reinforcement  $\rho = 0.0025$

Prestressed walls are not covered specifically in Part 23. Prestressing of walls is advantageous for handling (precast panels) and for increased buckling resistance. For design of prestressed walls the designer should consult Ref. 23.4.

2. Walls must contain both horizontal and vertical reinforcement. The area of horizontal reinforcement must not be less than 0.0025 times the gross concrete area, and that of the vertical reinforcement not less than 0.0015 times the gross concrete area. These ratios may be reduced to 0.0020 and 0.0012 respectively, when #5 or smaller bars having  $f_y \geq 60,000$  psi, or welded wire fabric with W31 or D31 or smaller wires are used. In walls greater than 10 in. thick (except basement walls) the reinforcement in each direction must be placed in two layers (14.3).
3. Length of wall to be considered as effective for each beam reaction must not exceed center-to-center distance between reactions, nor width of bearing plus  $4h$  (14.2.4).
4. The wall must be anchored to the floors or to columns and other structural elements of the building (14.2.6).

Note that the minimum wall reinforcement required by 14.3.2 does not substantially increase the strength of a wall above that of a plain concrete wall. The minimum wall reinforcement required by 14.3 is provided primarily for control of cracking due to shrinkage and temperature stresses.

With the publication of ACI 318-83, the empirical wall design Eq. (14-1) was modified to reflect the general range of end conditions encountered in wall design, and to allow for a wider range of design applications. The wall strength equation in previous codes was based on the assumption that the top and bottom ends of the wall are restrained against lateral movement, and that rotation restraint exists at one end, so as to have an effective length factor between 0.8 and 0.9. Axial load strength values could be unconservative for pinned-pinned end conditions, which can exist in certain walls, particularly of precast tilt-up construction. Axial strength could also be overestimated where the top end of the wall is free and not braced against translation. In these cases, it is necessary to reflect the proper effective length in the design equation. Equation (14-1) allows the use of different effective length factors  $k$  to address this situation. The values of  $k$  have been specified in 14.5.2 for commonly occurring wall end conditions. Equation (14-1) will give the same results as the 1977 Code Eq. (14-1) for walls braced against translation of both ends and with reasonable base restraint against rotation.

Reasonable base restraint against rotation implies attachment to a member having a flexural stiffness  $EI/\ell$  at least equal to that of the wall. Selection of the proper  $k$  for a particular set of support end conditions is left to the judgment of the engineer.

Example 23.3 illustrates application of the Empirical Design Method to a bearing wall supporting precast floor beams. It should be noted that the reinforcement and minimum thickness requirements of 14.3 and 14.5.3 may be waived where structural analysis shows adequate strength and wall stability (14.2.7). This required condition may be satisfied by a design using the structural plain concrete provisions in Chapter 22.

## 11.10 SPECIAL SHEAR PROVISIONS FOR WALLS

For most low-rise buildings, horizontal shear forces acting in the plane of walls are small, and can usually be neglected in design. Such in-plane forces, however, become a design consideration in major structures where a limited number of walls resist the total lateral load, such as in high-rise buildings. Flexural strength must also be considered when in-plane loads are significant. Example 23.4 illustrates in-plane shear design of walls, including design for flexural strength.

### DESIGN SUMMARY

A trial procedure for wall design is suggested: first assume a wall thickness  $h$  and a reinforcement ratio  $\rho$ , then check the trial wall for the applied loading conditions.

It is not within the scope of Part 23 to include design aids for a broad range of wall and loading conditions. The intent is to present examples of design options and aids. The designer can, with reasonable effort, produce

only to walls of solid rectangular cross-section. The empirical method is a simple design procedure for these limited cases, requiring only a single strength calculation to determine the design axial load strength of a wall.

Primary application of the Empirical Design Method is for relatively short walls spanning vertically, and subject to vertical loads only, such as those resulting from floor or roof reactions. Application becomes extremely limited when lateral loads need to be considered, because the "effective" load eccentricity is limited to  $h/6$ . Walls not falling in this category must be designed as compression members for axial load and flexure by the provisions of Chapter 10 (14.4).

When the eccentricity  $e$  of the "effective" load does not exceed  $h/6$ , the design is performed considering  $P_u$  as a concentric load. The factored axial load  $P_u$  must be less than the design axial load strength  $\phi P_{nw}$  computed by Eq. (14-1):

$$P_u \leq \phi P_{nw} \leq 0.55\phi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{ke l_c}{32h} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. (14-1)}$$

The single strength equation for  $\phi P_{nw}$  considers both load eccentricity and slenderness effects. The eccentricity factor 0.55 was originally selected to give strengths comparable with those given by Chapter 10 for members with axial load applied at an eccentricity of  $h/6$ . Figure 23-3 shows typical load-moment strength curves for 8-, 10-, and 12-in. walls with  $f'_c = 4000$  psi and  $f_y = 60,000$  psi.<sup>23.3</sup> The curves yield eccentricity factors (ratios of strength under eccentric loading to that under concentric loading) of 0.562, 0.568, and 0.563 for the 8-, 10-, and 12-in. walls with  $e = h/6$  and  $\rho = 0.0015$ .

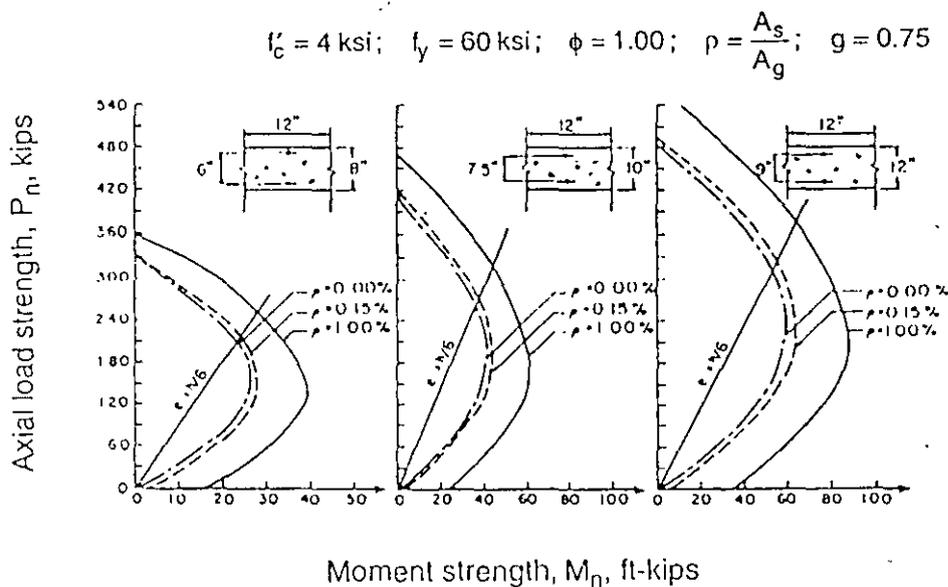


Figure 23-3 Typical Load-Moment Strength Curves for 8-, 10-, and 12-in. Walls

Use of Eq (14-1) is further limited to the following design conditions:

- 1 Wall thickness  $h$  must not be less than  $1/25$  times the supported length or height, whichever is shorter, nor less than 4 in. (14.5.3.1). Exterior basement walls and foundation walls must be at least 7-1/2 in. thick (14.5.3.2).

The ratio of  $EI/E_c I_g$  is plotted as a function of eccentricity  $e/h$  for several values of  $\beta_d$ , with the reinforcement ratio  $\rho$  constant at 0.0015. Note that Code Eq. (10-13) assumes  $EI$  to be independent of  $e/h$  and appears to overestimate wall stiffness for higher load eccentricity. For walls designed by Chapter 10 with slenderness evaluation by 10.11, Eq. (1) is recommended in lieu of Code Eq. (10-13) for determining wall stiffness. Example 23.1 illustrates application of 10.11, using Eq. (1) for wall stiffness.

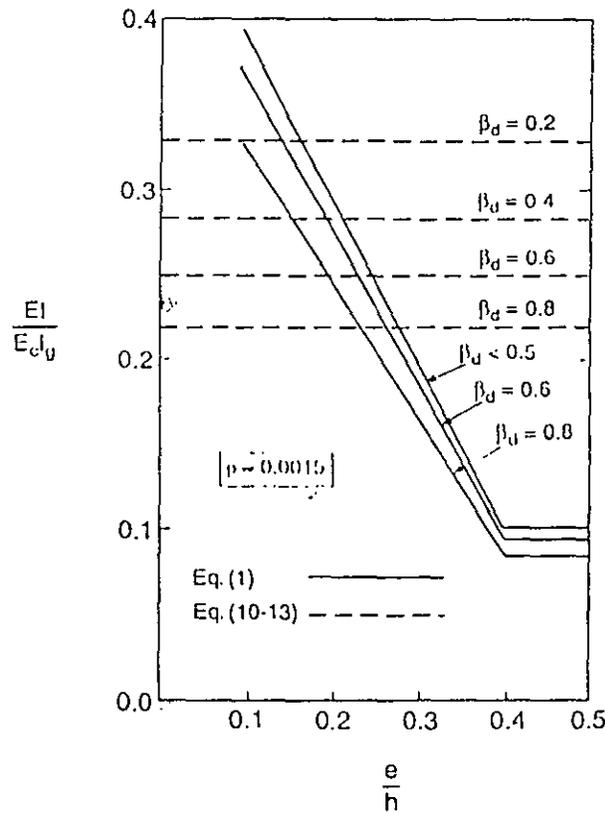


Figure 23-2 Stiffness  $EI$  of Walls

When wall slenderness exceeds the limit for application of the approximate slenderness evaluation method of 10.11 ( $k\ell_u/h \geq 30$ ), a more detailed evaluation of wall slenderness effects is required, as defined in 10.10.1. The slender load-bearing concrete wall panels currently used in some building systems, especially in tilt-up wall construction, fall in this high slenderness category. The more detailed slenderness analysis should account for the influence of variable wall stiffness, the effects of deflections on the moments and forces, and the effects of load duration. Such an analysis is presented in PCA design aid EB074D *Tilt-up Load-Bearing Walls*.<sup>23.2</sup> It presents load capacities of slender wall panels ( $20 \leq k\ell_u/h \leq 50$ ) with thicknesses varying from 5-1/2 to 9-1/2 in. and having single or double layers of reinforcement. The design process involves the use of load capacity coefficient tables, which are simple to use, requiring only a minimum amount of calculations. A detailed description of how the design tables were developed is included in the publication. Example 23.2 illustrates application of EB074D.

## 14.5 EMPIRICAL DESIGN METHOD

The Empirical Design Method may be used for design of load-bearing walls if the resultant of all applicable loads falls within the middle one-third of the wall thickness (eccentricity  $e \leq h/6$ ), and the thickness is at least the minimum prescribed in 14.5.3. Note that in addition to any eccentric axial loads, the effect of any lateral loads on the wall must be included to determine the "effective" eccentricity of the resultant load. The method applies

Shear forces must be considered in the design of walls. Section 14.2.3 requires the design for shear to be in accordance with 11.10, the special shear provisions for walls. The required shear reinforcement may exceed the minimum wall reinforcement given in 14.3.

The provisions of 15.8 specifically address force transfer between a wall and footing, with 15.8.2.2 requiring a minimum amount of reinforcement, not less than the minimum vertical reinforcement given in 14.3.2, to be provided across the interface between a wall and a supporting footing.

#### 14.4 WALLS DESIGNED AS COMPRESSION MEMBERS

Where wall geometry and loading conditions do not satisfy the limitations of 14.5 (usually where lateral loads are present), walls must be designed as compression members by the strength design provisions in Chapter 10 for flexure and axial loads. Minimum reinforcement requirements of 14.3 apply to walls designed by strength design provisions of Chapter 10. The vertical wall reinforcement need not be enclosed by lateral ties (as for columns) if the conditions of 14.3.6 are satisfied. All other code provisions for compression members apply to walls designed by Chapter 10.

As with columns, the design of walls is usually difficult without the use of design aids. Wall design is further complicated by the fact that slenderness is a consideration in practically all cases. Two methods for slenderness consideration are specified in the code. A second-order analysis, which takes into account variable wall stiffness, as well as the effects of member curvature and lateral drift, duration of the loads, shrinkage and creep, and interaction with the supporting foundation, is specified in 10.10.1. In lieu of that procedure, the approximate evaluation of slenderness effects prescribed in 10.11 may be used.

It is important to note that Eqs. (10-12) and (10-13) for  $EI$  in the approximate slenderness method were not originally derived for members with a single layer of reinforcement.

For members with a single layer of reinforcement, the following expression for  $EI$  has been suggested by MacGregor<sup>23.1</sup>

$$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left( 0.5 - \frac{e}{h} \right) \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad (1)$$

$$\leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta}$$

where  $\beta = 0.9 + (0.5\beta_d)^2 - 12\rho \geq 1.0$

$\beta_d$  = ratio of dead load to total load

$\rho$  = ratio of area of vertical reinforcement to gross concrete area

For ACI 318-95, the definition of the creep effect factor  $\beta_d$ , included with Eqs. (10-12) and (10-13) for  $EI$ , now depends on the lateral stiffness of the structure. Walls have considerable stiffness in their own planes. Additionally, they are connected by a roof and/or floor slab. The structure which is created by these walls, therefore, is laterally stiff, i.e., lateral sway is negligible. According to 10.0,  $\beta_d$  for non-sway frames is the ratio of the maximum factored axial dead load to the total factored axial load. For consistency, the same sustained load ratio seems appropriate for the  $EI$  expressions for walls in Eq. (1).

Figure 23-2 shows the comparison of flexural stiffness ( $EI$ ) by Code Eq. (10-13) and Eq. (1) in terms of  $E_c I_g$ .

# Walls

## UPDATE FOR THE '95 CODE

The code change affecting the design of walls is due to the revisions in the slenderness provisions of 10.10 to 10.13. Section 14.4 makes reference to these revised sections.

## GENERAL CONSIDERATIONS

Section 14.2.2 allows the designer two options in designing walls: (1) walls may be designed as compression members using the strength design provisions for flexure and axial loads of Chapter 10 (Fig. 23-1(a)) or (2) they may be designed by the Empirical Design Method of 14.5 (Fig. 23-1(b)). The provisions of 14.2 and 14.3 apply to walls designed by either method. No minimum wall thicknesses are prescribed for walls designed as compression members (14.4).

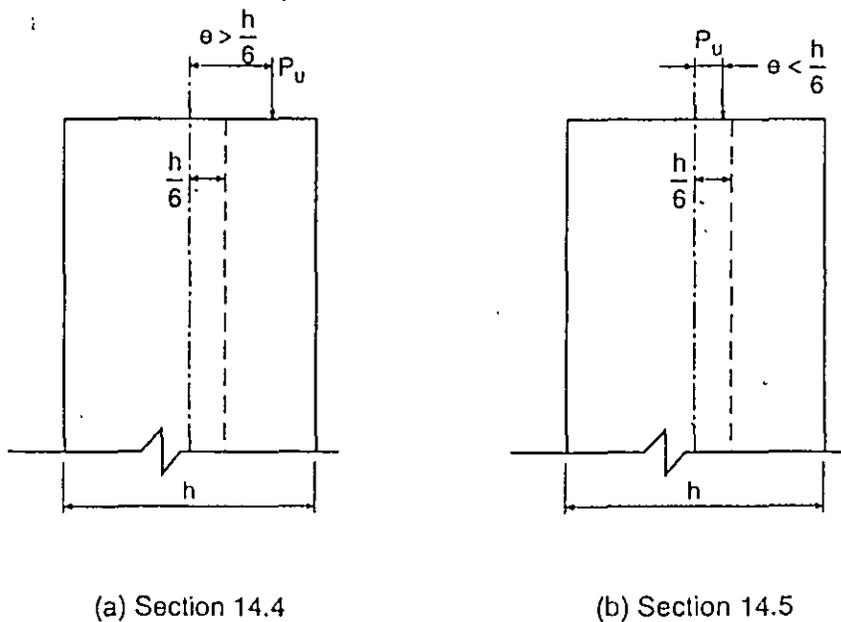


Figure 23-1 Design of Walls by ACI Code

Note that the Empirical Design Method applies to load bearing walls, and only to walls of solid rectangular cross-section. Minimum thicknesses are prescribed for walls designed by this method (14.5.3). Load bearing walls of nonrectangular cross-section, such as ribbed wall panels, must be designed by the provisions in 14.4. Cantilever retaining walls are designed by the flexural design provisions of Chapter 10 (see 14.1.2).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**TEORÍA DE FUERZA CORTANTE**

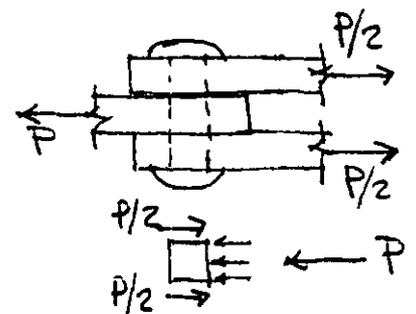
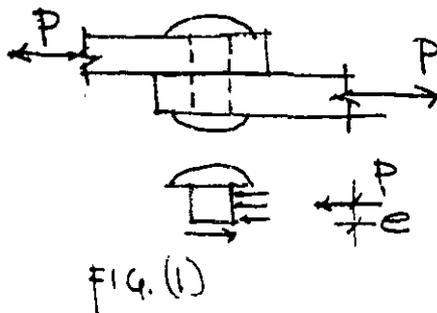
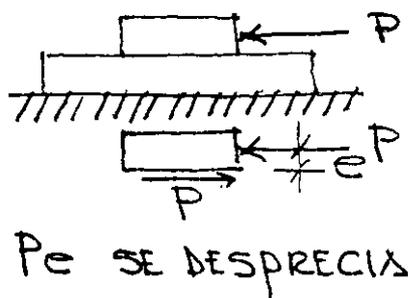
**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

# TEORIA DE FUERZA CORTANTE

## 1. - INTRODUCCION

SE ESTUDIA BASICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS. EN ESTOS ELEMENTOS, LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS POR LA FUERZA CORTANTE, LLAMADOS ESFUERZOS CORTANTES, SE PRESENTAN CASI SIEMPRE ACUMULADOS POR LOS ESFUERZOS NORMALES DE FLEXION. DICHA COMBINACION DE ESFUERZOS CAUSA CONDICIONES CRITICAS DE ESFUERZOS. EN ESTA SECCION SE ANALIZA UNICAMENTE EL EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE POR SEPARADO. EXISTEN ELEMENTOS ESTRUCTURALES (REMACHES, TORNILLOS, PERROS ETC.) EN LOS QUE ACTUAN UNICAMENTE ESFUERZOS CORTANTES O EN LOS QUE LOS ESFUERZOS NORMALES SE DESPRECIAN. ESTOS ESFUERZOS CORTANTES SE DENOMINAN "ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS".

## 2. - ESFUERZOS CORTANTES DIRECTOS



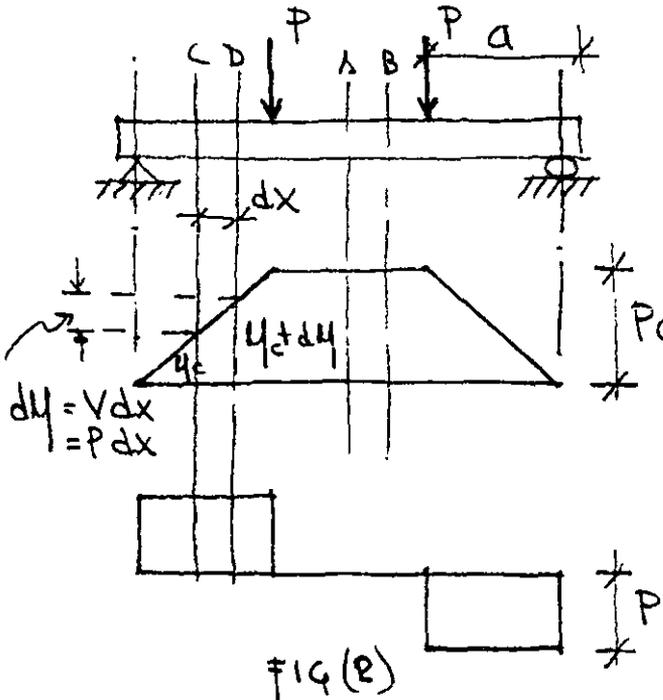
$$v = \frac{P}{A} \quad \text{--- (1)}$$

$v$  = ESFUERZO CORTANTE DIRECTO O ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO

$P$  = FUERZA TOTAL ACTUANTE

$A$  = AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL

### 3. - EFECTO DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS



Como

$$V = -\frac{dM}{dx} \dots \dots (2)$$

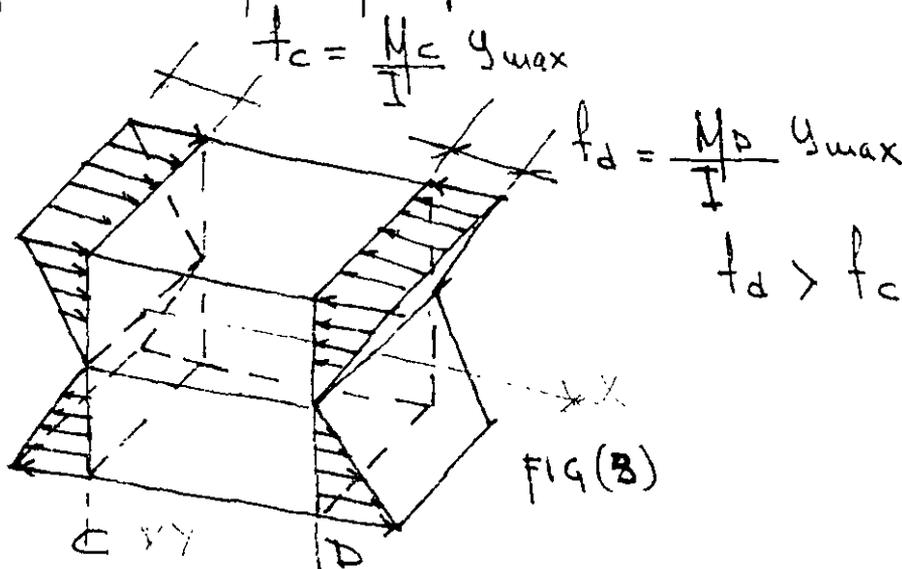
ENTRE LAS SECCIONES A y B COMO EL MOMENTO FLEXIONANTE ES CONSTANTE  $V = 0$

ENTRE LAS SECCIONES C y D DONDE VARIA EL MOMENTO FLEXIONANTE EXISTE UN VALOR DE LA FUERZA CORTANTE.

POR LO TANTO, ENTRE DOS SECCIONES ALEJADAS UNA DISTANCIA dx EN BOMBE EXISTE VARIACION DE MOMENTO:

$$dM = -V dx \dots \dots (3)$$

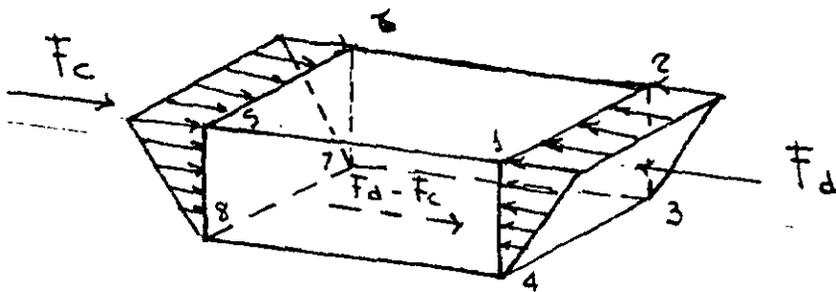
(CONSIDERANDO EL SEGMENTO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C y D Y SUPONIENDO QUE LA SECCION TRANSVERSAL ES RECTANGULAR, LOS ESFUERZOS NORMALES POR FLEXION EN EL RANGO ELASTICO SON:



$$f_c = \frac{M_c}{I} y_{max}$$

$$f_d = \frac{M_D}{I} y_{max}$$

$$f_d > f_c$$



$$F_d > F_c$$

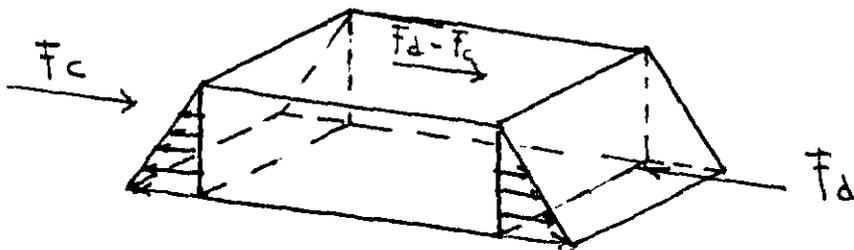


FIG. (4)

SI SE SEPARA LA PORCIÓN SITUADA ENCIMA DEL EJE NEUTRO DE LA DE ABAJO, SE DEBEN SATISFACER LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO EN CUALQUIERA DE LAS DOS PORCIONES.

HACIENDO  $\sum F_y = 0$  SE VE QUE LA FUERZA CORTANTE VERTICAL EN LAS DOS SECCIONES C Y D ES IGUAL.

HACIENDO  $\sum F_x = 0$ , TENEMOS:

COMO  $F_d > F_c$ , LA FUERZA  $F_d - F_c$  ESTARÁ ACTUANDO EN EL ÁREA  $\overline{3478}$

SI LAS DOS PORCIONES ESTÁN UNIDAS POR UN PERNO, ENTONCES LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL  $F_d - F_c$  ES RESISTIDA POR EL PERNO

#### 4. - FLUJO DE CORTANTE

SUPONGAMOS, QUE LA VIGA DE LA FIG. (2) SE ENCUENTRA FORMADA DE VARIAS PLACAS. PARA HACER QUE ESTAS PLACAS TRABAJEN EN CONJUNTO, SE UNEN POR MEDIO DE PERNOS, SEPARADOS A UNA DISTANCIA CONVENIENTE. (CONSIDERANDO EL TRAMO DE VIGA ENTRE LAS SECCIONES C y D y TOMANDO EN CUENTA QUE EN LA SECCION C ACTUA UN MOMENTO  $M_c$  y EN LA SECCION D UN MOMENTO  $M_D$ . LOS ESFUERZOS NORMALES (TENSION Y COMPRESION) PRODUCIDOS POR ESTOS MOMENTOS EN ~~UN PUNTO~~ UN PUNTO SITUADO A UNA DISTANCIA  $y$  DEL EJE NEUTRO VALDRAN RESPECTIVAMENTE  $\frac{M_c}{I} y$  Y  $\frac{M_D}{I} y$

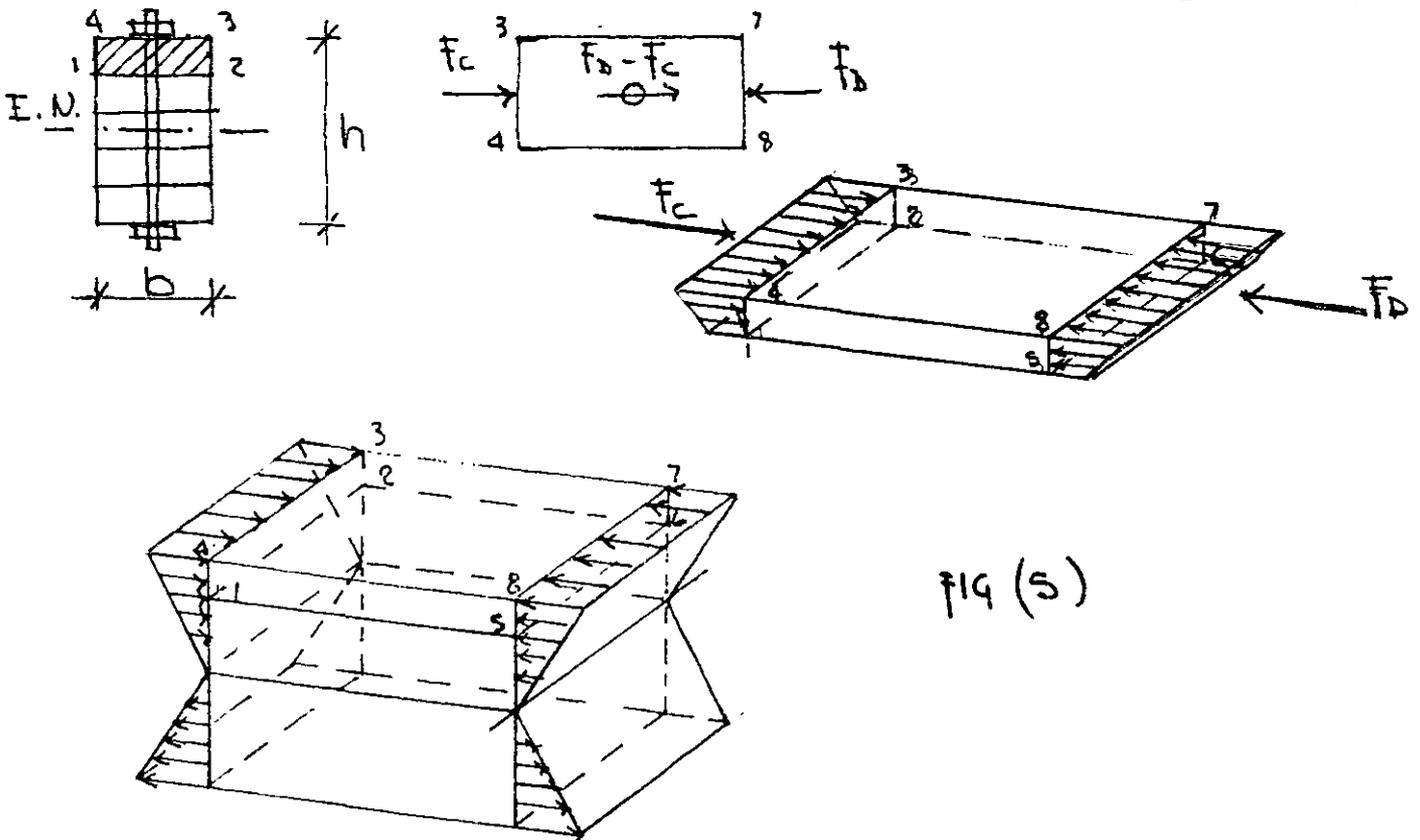


FIG (5)

SI SE TOMA LA PLACA SUPERIOR CUYAS FIBRAS MAS CERCANAS AL EJE NEUTRO ESTA A UNA DISTANCIA  $y_1$ , SE PUEDEN DETERMINAR LAS FUERZAS PERPENDICULARES QUE ACTUAN EN LAS SECCIONES C y D

LA FUERZA QUE ACTUA EN UN AREA DIFERENCIAL ( $dA$ ) SITUADA A UNA DISTANCIA  $y$  DEL EJE NEUTRO VALE:

EN LA SECCION C:

$$dF_c = \left( \frac{M_c}{I} y \right) dA \quad \dots \dots \dots (1)$$

LA FUERZA EN EL AREA  $\overline{1234}$  VALE

$$F_c = \int_{\text{AREA}} \left( \frac{M_c}{I} y \right) dA = \frac{M_c}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$Q = \int_{\text{AREA}} y dA =$  MOMENTO ESTADISTICO O DE PRIMER ORDEN DEL AREA  $\overline{1234}$  CON RESPECTO AL EJE NEUTRO.

$$F_c = \frac{M_c Q}{I} \quad \dots \dots \dots (2)$$

EN FORMA SEMEJANTE LA FUERZA EN EL AREA  $\overline{5678}$  EN LA SECCION D VALE:

$$F_D = \int_{\text{AREA}} \left( \frac{M_D}{I} y \right) dA = \frac{M_D}{I} \int_{\text{AREA}} y dA$$

$$F_D = \frac{M_D Q}{I} \quad \dots \dots \dots (3)$$

SI  $M_c = M_D$ , LAS FUERZAS  $F_c$  Y  $F_D$  SERIAN IGUALES

EN NUESTRO CASO, EL MOMENTO EN LA SECCION C VALE  $M_c$  Y EN LA SECCION D VALE  $M_c + dM$ . COMO LAS SECCIONES SE ENCUENTRAN SEPARADAS UNA DISTANCIA  $dx$ , ENTONCES LA FUERZA RESULTANTE  $(F_D - F_c)$  SERA TAMBIEN UNA FUERZA DIFERENCIAL

$$dF = F_D - F_c = \frac{M_D}{I} Q - \frac{M_c}{I} Q = \left( \frac{M_c + dM}{I} \right) Q - \frac{M_c}{I} Q$$

$$dF = \frac{dM}{I} Q \quad \dots \dots \dots (4)$$

LA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE ENCUENTRA DIVIDIENDO LA FUERZA  $dF$  ENTRE LA LONGITUD EN QUE ACTUA ( $dx$ ). DICHA FUERZA POR UNIDAD DE LONGITUD SE DESIGNA CON LA LETRA  $q$  Y SE LLAMA FLUJO DE CORTANTE

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} \quad \text{--- (5)}$$

COMO:  $\frac{dM}{dx} = V$

$$q = \frac{VQ}{I} \quad \text{--- (6)}$$

$V$  = FUERZA CORTANTE EN LA SECCION CONSIDERADA (TONS, KG. ETC.)

$Q$  = MOMENTO DE PRIMER ORDEN DE LA PARTE DE LA SECCION TRANSVERSAL SITUADA ENCIMA DEL NIVEL CONSIDERADO CON RESPECTO AL EJE NEUTRO. ( $m^3$ ,  $cm^3$  ETC.)

$I$  = MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO AL EJE NEUTRO ( $m^4$ ,  $cm^4$  ETC.)

$q$  = FLUJO DE CORTANTE (TONS./ML., KG./CM ETC.)

### 5. - ESFUERZO CORTANTE

SI SE DIVIDE EL VALOR DE LA FUERZA  $dF$  ENTRE EL AREA EN QUE ESTA ACTUANDO, SE OBTIENE EL VALOR DEL ESFUERZO CORTANTE EN EL PLANO HORIZONTAL.

$$\tau_{yx} = \frac{dF}{bdx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{Ib} = \frac{VQ}{Ib} \quad \text{--- (1)}$$

TAMBIEN  $\tau_{yx} = \frac{q}{b}$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS ESFUERZOS  $\tau_{yx}$  SIEMPRE ESTAN ACOMPAÑADOS DE ESFUERZOS CORTANTES VERTICALES  $\tau_{xy}$  Y QUE SON DE LA MISMA MAGNITUD

## 6. - CENTRO DE CORTANTE O CENTRO DE TORSION

COMO SE DIJO ANTERIORMENTE, SIEMPRE QUE EL MOMENTO FLEXIONANTE SEA VARIABLE, EXISTIRA ESFUERZO CORTANTE. ESTOS ESFUERZOS, AL ACTUAR SOBRE SUS AREAS RESPECTIVAS, DAN LUGAR A ~~UNA~~ FUERZAS CORTANTES INTERNAS O RESISTENTES CUYA RESULTANTE DEBERA SER IGUAL, COLINEAL Y OPUESTA CON LA FUERZA CORTANTE EXTERNA. SI ESTO NO OCURRE LA FUERZA CORTANTE INTERNA Y LA FUERZA CORTANTE EXTERNA PRODUCEN UN MOMENTO TORSIONANTE.

SE LLAMA CENTRO DE CORTANTE O CENTRO DE TORSION AL PUNTO POR DONDE TIENE QUE PASAR EL PLANO DE CARGAS EXTERIORES PARA QUE NO EXISTA TORSION.

PARA ILUSTRAR LA DETERMINACION DEL CENTRO DE CORTANTE, CONSIDERESE UNA VIGA DE SECCION CANAL. SE SUPONE QUE LAS PAREDES SON LO SUFICIENTEMENTE DELGADAS PARA QUE TODOS LOS CALCULOS PUEDAN BASARSE EN LA HIPOTESIS DE QUE EL AREA ESTA CONCENTRADA EN LA LINEA MEDIA DEL ESPESOR, SE SUPONE QUE ES APLICABLE LA FORMULA DE LAS ESCUADRIAS

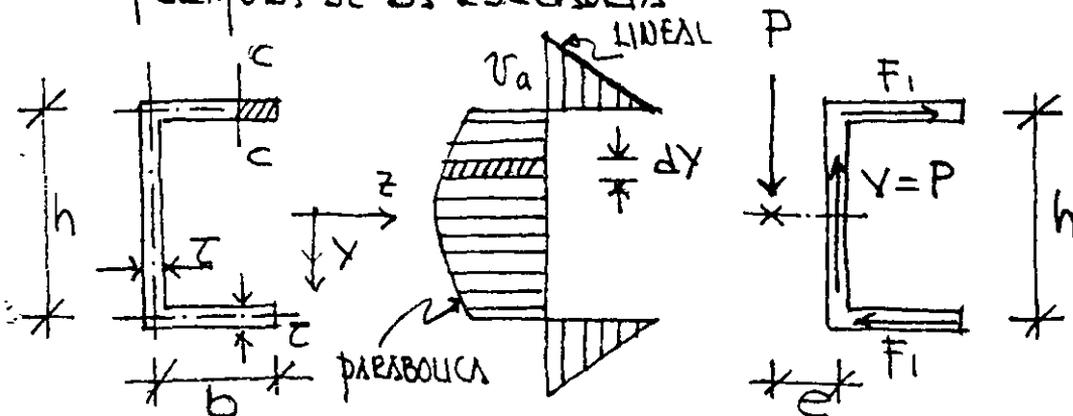


FIG (6)

EL ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO  $(\bar{v}/2)$  MULTIPLICADO POR EL AREA DEL PASTIL DA UNA FUERZA  $F_1 = (\bar{v}/2) b \tau$

DE IGUAL FORMA EN EL ALMA RESULTA LA FUERZA:

$$V = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dy$$

EN LA FIG. (6c) SE DIBUJAN LAS FUERZAS QUE RESULTAN. LA FUERZA  $F_1$  PRODUCE UN PAR QUE VALE  $(F_1)(h)$ , EL CUAL, TIENDE A TORCER LA SECCIÓN ALREDEDOR DE SU EJE LONGITUDINAL.

PARA EVITAR EL GIRO ES NECESARIO APLICAR LA CARGA  $P$  A UNA DISTANCIA  $e$  TAL QUE:

$$F_1 h = P e$$

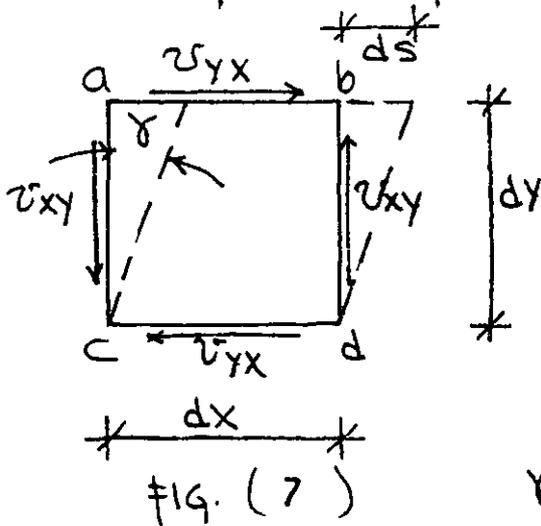
POR LO TANTO:

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{1/2 \bar{v} a b \tau h}{P} = \frac{b \tau h}{2P} \frac{VQ}{I \tau} = \frac{b \tau h}{2P} \frac{V b \tau (h/2)}{I \tau} = \frac{b^2 h^2 \tau}{4I}$$

EN FORMA SEMEJANTE, UNA INVESTIGACIÓN DE LA LOCALIZACIÓN DEL PLANO DONDE DEBEN ESTAR CONTENIDAS LAS FUERZAS HORIZONTALES PARA QUE NO EXISTA TORSIÓN INDICA QUE ESTE PLANO COINCIDE CON EL PLANO NEUTRO. LA INTERSECCIÓN DE LOS DOS PLANOS DE CARGA DEFINEN UN PUNTO LLAMADO CENTRO DE CARGA O CENTRO DE TORSIÓN

## 7. - DEFORMACIONES POR CORTANTE

LAS FUERZAS CORTANTES PRODUCEN UNA DEFORMACION TANGENCIAL O DISTORSION. UN ELEMENTO SUJETO A FUERZA CORTANTE NO VARIA LA LONGITUD DE SUS LADOS SINO QUE UNICAMENTE CAMBIA DE FORMA DE RECTANGULO A PARALELO GRAMO.



ANTES DE LA DEFORMACION EL ANGULO EN EL PUNTO C VALE  $\pi/2$ . DESPUES DE LA DEFORMACION SE REDUCE A  $\pi/2 - \gamma$ . EN EL PUNTO A EL ANGULO SE INCREMENTA A  $\pi/2 + \gamma$

$$\text{TANG } \gamma = \frac{ds}{dy}$$

$\gamma$  = DEFORMACION POR CORTANTE

COMO EL ANGULO  $\gamma$  ES SIEMPRE MUY PEQUEÑO:

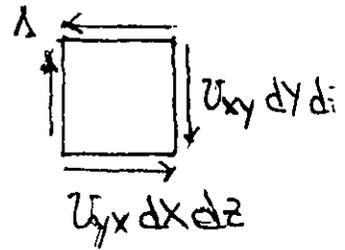
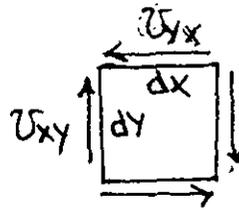
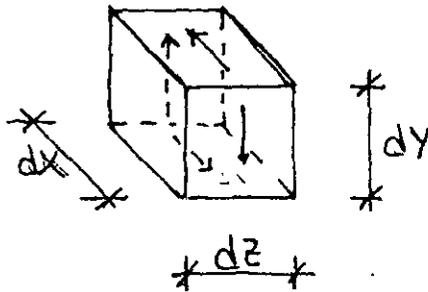
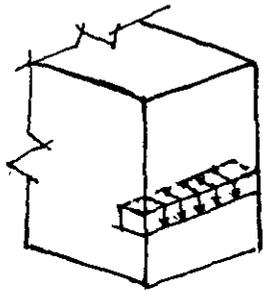
$$\gamma = \frac{ds}{dy}$$

SE REALIZAN ENSAYES PARA OBTENER LAS GRAFICAS ESFUERZO-DEFORMACION (EN ENSAYES A CORTANTE PURO) LAS CUALES SON SEMEJANTES A LAS DE TENSION. LOS EXPERIMENTOS, MUESTRAN QUE PARA METALES DUCTILES INCLUYENDO EL ACERO EL ESFUERZO DE FLUENCIA AL CORTANTE  $\tau_y$  VARIA ENTRE  $0.5 f_y$  Y  $0.6 f_y$ .

LA LEY DE HOOKE PARA CORTANTE ES:  $\tau_y = G \gamma$

$G$  = MODULO DE ELASTICIDAD AL ESFUERZO CORTANTE

\* DEMOSTRACIÓN DE QUE  $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

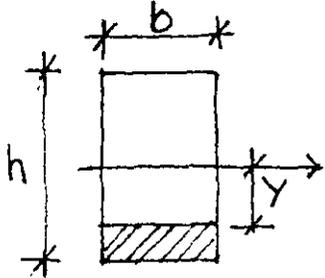


CONSIDERANDO UN ELEMENTO DE DIMENSIONES DIFERENCIALES. POR EQUILIBRIO HORIZONTAL EL ESFUERZO EN LA CARA SUPERIOR REQUIERE OTRO IGUAL Y DE SENTIDO CONTRARIO EN LA CARA INFERIOR. TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR A. SE TIENE:

$$(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0$$

$$\therefore \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

\* CALCULAR LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZO CORTANTE EN UNA SECC. RECTANGULAR



$$\tau = \frac{V Q}{I b}$$

$$Q = b(h/2 - y) \left[ \frac{y + (h/2 - y)/2}{(h/2 + y)/2} \right] = \frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2]$$

SUSTITUYENDO:

$$\tau = \frac{V \frac{b}{2} [(h/2)^2 - y^2]}{I b} = \frac{V [(h/2)^2 - y^2]}{2 I}$$

LA EC. ANTERIOR INDICA QUE LA MAGNITUD DE  $\tau$  VARIA EN FUNCIÓN DE  $y^2$  POR LO QUE LA VARIACION ES PARABOLICA. EL  $\tau_{max}$  SE OBTIENE PARA  $y = 0$ . DICHO VALOR ES:

$$\tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{2 I}$$

$$\text{COMO } I = \frac{bh^3}{12}; \quad \tau_{max} = \frac{V (h/2)^2}{b h^3 / 6} = \frac{3V}{2bh}$$

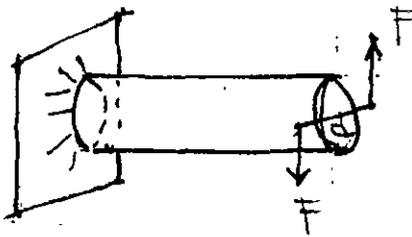
$$bh = A$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{prom.}$$

$$\tau_{prom.} = \frac{V}{A}$$

# TORSION

- MOENTO TORSIONANTE: ES LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS MOENTOS DE LOS PARES APLICADOS SITUADOS A LA DERECHA O A LA IZQUIERDA DE LA SECCION CONSIDERADA.



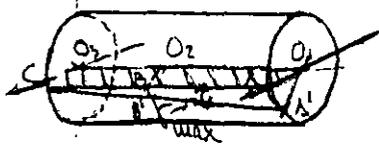
$$T = \text{MOENTO TORSIONANTE}$$
$$T = (d)(F)$$

## EFFECTOS DEL MOENTO TORSIONANTE

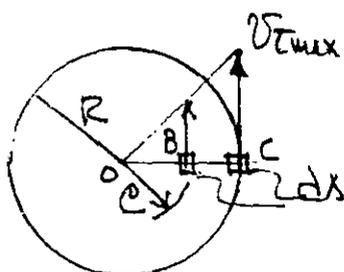
1. - PRODUCE UN DESPLAZAMIENTO ANGULAR DE UNA SECCION CON RESPECTO A OTRAS
2. - ORIGINA ESFUERZOS CORTANTES EN CUALQUIER SECCION DE LA BARRA

## HIPOTESIS BASICAS

1. - LAS SECCIONES TRANSVERSALES PLANAS PERPENDICULARES AL EJE DE LA BARRA (CIRCULAR) PERMANECEN PLANAS DESPUES DE LA APLICACION DE UN MOENTO TORSIONANTE.
2. - EN MIEMBROS DE SECCION TRANSVERSAL CIRCULAR QUE SE SOMETEN A TORSION SU DEFORMACION ANGULAR  $\gamma$ , VARIA LINEALMENTE DESDE SU EJE (LOS RADIOS PERMANECEN RECTOS)
3. - POR LO TANTO, SE DEDUCE QUE EL ESFUERZO CORTANTE ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DEFORMACION.



# - FORMULA DEL ESFUERZO POR TORSION MATERIAL ELASTICO-LINEAL



EN EL CASO ELASTICO, COMO EL ESFUERZO ES PROPORCIONAL A LA DEFORMACION, LOS ESFUERZOS VARIAN TAMBIEN LINEALMENTE DESDE EL EJE LONGITUDINAL. LOS ESFUERZOS INDUCIDOS SON ESFUERZOS CORTANTES Y ACTUAN EN UN PLANO

PARALELO A LA SECCION Y PERPENDICULAR AL EJE DE LA BARRA.

EL ESFUERZO EN UN PUNTO A UNA DISTANCIA ρ DEL CENTRO VALE:

$$\tau_{\rho} = \frac{\rho}{R} \tau_{max} \quad \text{--- (1)}$$

UNA VEZ ESTABLECIDA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN UNA SECCION, SE PUEDE DETERMINAR LA RESISTENCIA A MOMENTO TORSIONANTE EN FUNCION DEL ESFUERZO. POR LO TANTO, SE PUEDE FORMULAR LA SIGUIENTE ECUACION.

$$\int_A \underbrace{\frac{\rho}{R} \tau_{max}}_{\text{ESFUERZO}} \underbrace{dA}_{\text{AREA}} \underbrace{\rho}_{\text{BRAZO DE MOMENTO}} = T \quad \text{--- (2)}$$

MOMENTO TORSIONANTE

T = MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE

τ<sub>max</sub> y R SON CONSTANTES PARA UNA SECCION TRANSVERSAL DADA

$$\therefore T = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A \rho^2 dA \quad \text{--- (3)}$$

$$\int \rho^2 dA = J = \text{MOMENTO POLAR DE INERCIA}$$

PARA UNA SECCION CIRCULAR  $dA = 2\pi e de$

$$\therefore J = \int_A e^2 dA = \int_0^R 2\pi e^3 de = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

POR LO TANTO:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{TR}{J} \quad \text{--- (4)}$$

LA ECUACION (4) ES LA FORMULA DE LA TORSION PARA SECCIONES CIRCULARES.

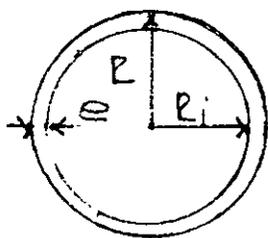
PARA CALCULAR EL ESFUERZO EN UN PUNTO CUAL QUIERA A UNA DISTANCIA  $\rho$  DEL CENTRO TENEMOS:

$$\tau_{\rho} = \frac{T\rho}{J} \quad \text{--- (5)}$$

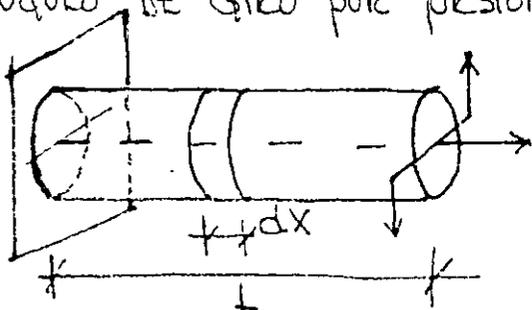
- LAS ECS. (4) Y (5) TAMBIEN SON APLICABLES A TUBOS DE SECCION CIRCULAR, PUESTO QUE SON APLICABLES LAS MISMAS HIPOTESIS Y UNICAMENTE ES NECESARIO CAMBIAR EL VALOR DE  $J$

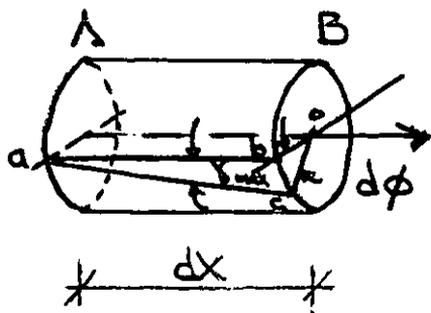
PARA ESTE CASO:

$$J = \int \rho^2 dA = \int_{r_i}^R 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} (R^4 - r_i^4)$$



- ANGULO DE GIRO POR TORSION EN MIEMBROS DE SECCION CIRCULAR





POR LA DEFINICION DE ANGULO

$$d\phi = \frac{bc}{R}$$

$$bc = R d\phi$$

EN ANGULOS MUY PEQUEÑOS LAS CUERVAS Y EL ARCO SE CONFUNDEN.

$$\therefore \text{TANG } \gamma_{\max} = \frac{bc}{dx} \approx \gamma$$

$$\gamma_{\max} = \frac{bc}{dx}$$

$$bc = \gamma_{\max} dx$$

$$\therefore R d\phi = \gamma_{\max} dx \quad \dots \dots \dots (6)$$

COMO EXISTE UNA RELACION LINEAL ENTRE EL ESFUERZO Y LA DEFORMACION

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} \quad \dots \dots \dots (7)$$

G = MODULO DE ELASTICIDAD AL ESFUERZO CORTANTE

TOYANDO EN CUENTA QUE  $\tau_{\max} = \frac{TR}{J}$

$$\frac{TR}{J} = G \gamma_{\max}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{TR}{GJ} \quad \dots \dots \dots (8)$$

SUSTITUYENDO EL VALOR DE  $\gamma_{\max}$  EN LA EC. (6)

$$R d\phi = \frac{TR}{GJ} dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx$$

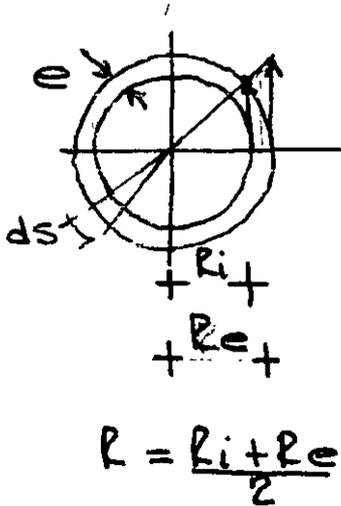
$$\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx = \frac{TL}{GJ}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad \dots \dots \dots (9)$$

### — MIEMBROS DE SECCION HUECA Y PARED DELGADA

LOS TUBOS DE PARED DELGADA DE CUALQUIER FORMA, SE PUEDEN ANALIZAR FACILMENTE PARA DETERMINAR LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS Y EL ANGULO PRODUCIDO POR UN MOMENTO TORSIONANTE APLICADO

- ESFUERZOS CORTANTES POR TORSION EN LA SECCION CIRCULAR HUECA.



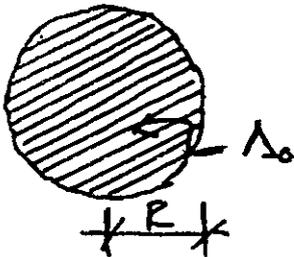
$$v_z = \frac{T e}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$J = \int R^2 dA = \int_0^R R^2 e ds = R^2 e (2\pi R)$$

$$J = 2R^3 e \pi$$

$$e = R$$



$$v_z = \frac{T R}{2\pi R^3 e} = \frac{T}{2\pi R e} = \frac{T}{2\lambda_0 e}$$

$$\boxed{v_z = \frac{T}{2\lambda_0 e}} \quad \text{--- (10)}$$

- ANGULO DE GIRO

$$\phi = \frac{T L}{G J}$$

$$\frac{v_z}{R} = \frac{T}{J}$$

$$\therefore \phi = \frac{v_z L}{R G}$$

MULTIPLICANDO POR  $\pi R$

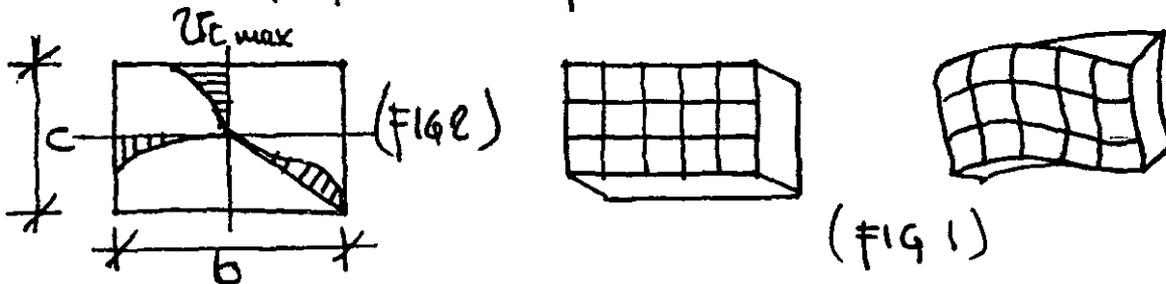
$$\phi = \frac{v_z L \pi R}{\pi R^2 G} = \frac{v_z L S}{2\lambda_0 G}$$

$$\phi = \frac{v_z L S}{2\lambda_0 G} \quad \text{--- (11)}$$

LAS ECS. (10) Y (11) SON APLICABLES A ~~TUBOS~~ SECCIONES HUECAS DE CUALQUIER FORMA.

- MIEMBROS DE SECCION YACIZA NO CIRCULAR

EL TRATAMIENTO ANALITICO MATEMATICAMENTE ES COMPLICADO. LAS PER-  
 UERAS DOS HIPOTESIS NO SON VALIDAS. LAS SECCIONES TRANSVERSALES  
 SI SE ALABEAN. LAS DISTORSIONES QUE OCURREN EN LA SECCION  
 RECTANGULAR PUEDEN VERSE EN LA FIG. (1). EN ESTA SECCION  
 LOS ELEMENTOS DE ESQUINA NO SE DISTORSIONAN EN LO ABSOLUTO.  
 LOS ESFUERZOS CORTANTES SON NULOS EN LOS VERTICES Y MAXIMOS EN LOS  
 PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE MAYOR LONGITUD. EN LA FIG (2) SE  
 MUESTRA LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS A LO LARGO DE TRES LINEAS RA-  
 DIALES QUE PARTEN DEL CENTRO



SE HAN DESARROLLADO SOLUCIONES ANALITICAS PARA LA TORSION DE  
 MIEMBROS ELASTICOS DE SECCION RECTANGULAR (TEORIA DE ELASTICIDAD).  
 AQUI SE PRESENTAN UNICAMENTE LOS RESULTADOS FINALES. PARA EL  
 ESFUERZO MAXIMO Y EL ANGULO DE GIRO, DICHS RESULTADOS SE PUEDEN  
 EXPRESAR COMO:

$$\tau_{c \max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \text{ --- --- --- (1)}$$

$$\phi = \frac{T L}{\beta b c^2 G} \text{ --- --- --- (2)}$$

$\alpha$  y  $\beta$  SON PARAMETROS QUE DEPENDEN DE LA RELACION  $b/c$ . VER  
 TABLA 1. CUANDO  $b$  ES MUCHO MAYOR QUE  $c$   $\alpha$  y  $\beta$  TIENDEN  
 A  $1/3$

TABLA 1

b/c	1.00	1.50	2.00	3.00	6.00	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.244	0.267	0.299	0.312	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

EXISTEN FORMULAS COMO LAS ANTERIORES PARA OTROS TIPOS DE SECCIONES TRANSVERSALES.

PARA LOS CASOS QUE NO SE PUEDEN RESOLVER MATEMATICAMENTE EN FORMA CONVENIENTE SE HA IDEADO UN METODO. RESULTA, QUE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL QUE DEBE RESOLVERSE EN EL PROBLEMA DE LA TORSION ELASTICA MATEMATICAMENTE ES IGUAL A LA ECUACION DE UNA MEMBRANA DELGADA, TAL COMO UNA PELICULA DE JABON, FORMADA Y LIGERAMENTE ESTIRADA SOBRE UN AGUJERO. ESTE, DEBE SER GEOMETRICAMENTE <sup>IGUAL</sup> A LA SECCION EN ESTUDIO. SE PUEDEN OBSERVAR LOS SIGUIENTES PUNTOS:

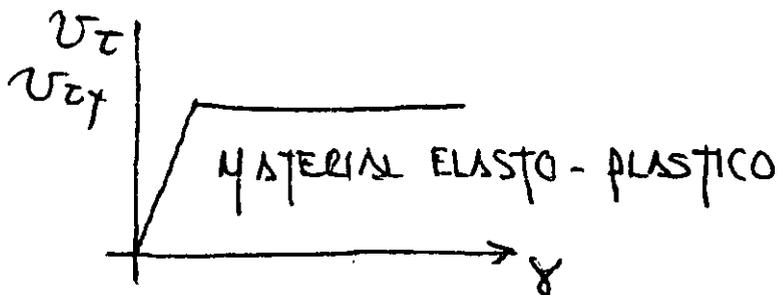
1. - EL ESFUERZO CORTANTE POR TORSION EN UN PUNTO ES PROPORCIONAL A LA PENDIENTE DE LA MEMBRANA EN EL MISMO PUNTO.
2. - LA DIRECCION DEL ESFUERZO EN UN PUNTO ES PERPENDICULAR A LA PENDIENTE EN EL MISMO PUNTO.
3. - EL DOBLE DEL VOLUMEN ENCERRADO POR LA MEMBRANA ES PROPORCIONAL AL MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE.

LA ANALOGIA ANTERIOR SE COLOCA COMO "ANALOGIA DE LA MEMBRANA"

## TORSION PURA EN EL INTERVALO INELASTICO

SI EN UNA SECCION TRANSVERSAL SE APLICA UN MOMENTO TORSIONANTE Y ESTE SE INCREMENTA EN FORMA GRADUAL, LLEGA UN INSTANTE EN QUE EN LOS PUNTOS DE ESFUERZO MAXIMO SE ALCANZA EL ESFUERZO DE FLUENCIA; SI EL MOMENTO CRECE TODAVIA MAS LAS ZONAS PLASTIFICADAS SE VAN EXTENDIENDO HASTA QUE EVENTUALMENTE ABRACAN TODA LA SECCION.

ES FACIL DETERMINAR LA MAGNITUD DEL MOMENTO TORSIONANTE QUE OCASIONA LA PLASTIFICACION TOTAL DE LA SECCION PERO EN CUALQUIER CASO, EL PROBLEMA DE LA DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS DURANTE LA ETAPA DE PLASTIFICACION ES MUY COMPLEJA. LA DETERMINACION DEL MOMENTO SE HACE POR UNA EXTENSION DE LA ANALOGIA DE LA MEMBRANA A LAS ZONAS DE COMPORTAMIENTO INELASTICO IDEALIZANDO EL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL AL DE UN MATERIAL ELASTO-PLASTICO. DICHA EXTENSION SE CONOCE COMO "ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA".



GRAFICA ESFUERZO - DEFORMACION

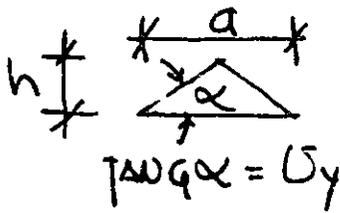
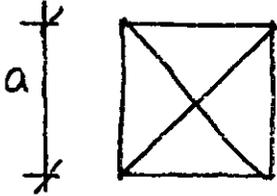
## - ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA

ESTA ANALOGIA HA SIDO DESARROLLADA PARA LA PRESION PLASTICA.

SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA QUE TENGA LA FORMA DE LA SECCION TRANSVERSAL, SE VIERTE ARENA SECA. LA SUPERFICIE DEL MONTON DE ARENA FORMADA, TIENE UNA PENDIENTE CONSTANTE. POR EJEMPLO, SOBRE UN DISCO CIRCULAR SE FORMA UN CONO Y SOBRE UNA BASE CUADRADA UNA PIRAMIDE CUADRANGULAR

EJEMPLO, EN UNA BARRA DE SECCION TRANSVERSAL CUADRADA

$$\begin{aligned} \text{VOLUMEN} &= \frac{1}{3} a^2 h \\ &= \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{a}{2}\right) \text{TAN } \alpha \\ &= \frac{a^3}{6} v_y \end{aligned}$$



$$T_p = 2 (\text{VOLUMEN})$$

$$T_p = \frac{a^3}{3} v_y$$

SI CONSIDERAMOS QUE  $v_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}}$

$$T_p = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} f_y = \frac{\sqrt{3}}{9} a^3 f_y$$

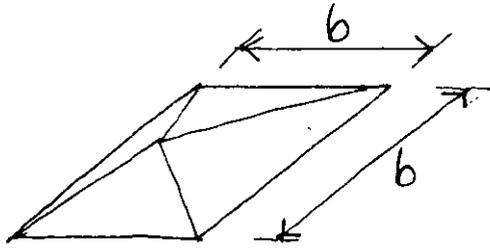
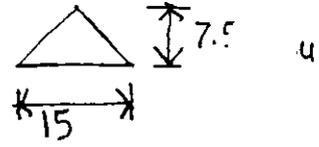
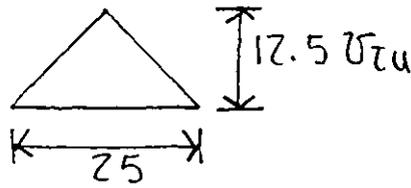
PARA UNA SECCION CIRCULAR DE RADIO R

$$T_p = \frac{2}{3} \pi R^2 (R \text{TAN } \alpha) = \frac{2}{3} \pi R^3 v_y$$

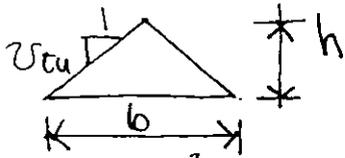
$$T_p = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi R^3 f_y = \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3 f_y$$

EJEMPLO 1: DEDUCIR LA ECUACION DEL ESFUERZO CORTANTE POR TORSION  $\tau_{cu}$  USANDO LA ANALOGIA DEL MONTON DE ARENAS.

SOLUCION



SOLUCION:



$$VOLUMEN = \frac{b^2 h}{3}$$

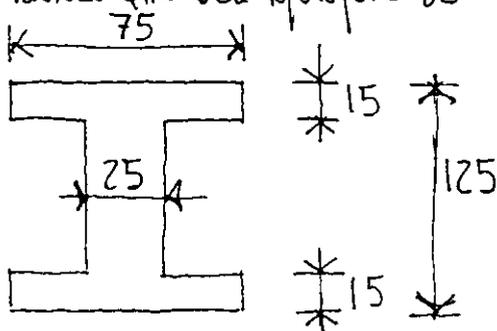
$$t_w = \frac{2b^2 h}{3}$$

$$h = \tau_{cu} \frac{b}{2}$$

$$t_w = \frac{2b^2}{3} \left( \tau_{cu} \frac{b}{2} \right) = \frac{b^3 \tau_{cu}}{3}$$

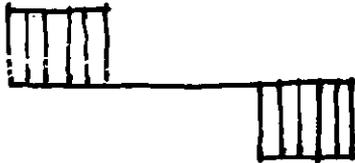
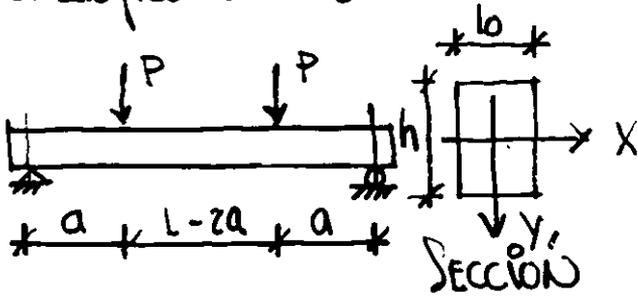
$$\tau_{cu} = \frac{3 t_w}{b^3}$$

EJEMPLO 2: DEDUCIR LA ECUACION DEL ESFUERZO CORTANTE POR PRESION  $\tau_{cu}$  USANDO LA ANALOGIA DEL MONTON DE ARENAS

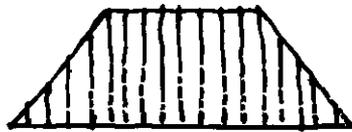


# ELEMENTOS SUJETOS A CORTANTE 2. Comportamiento y Modos de Falla

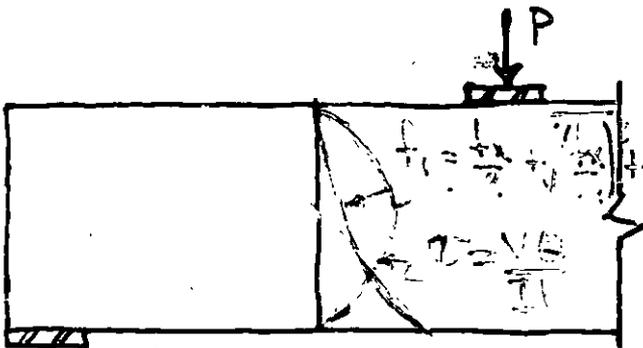
## 1. INTRODUCCIÓN



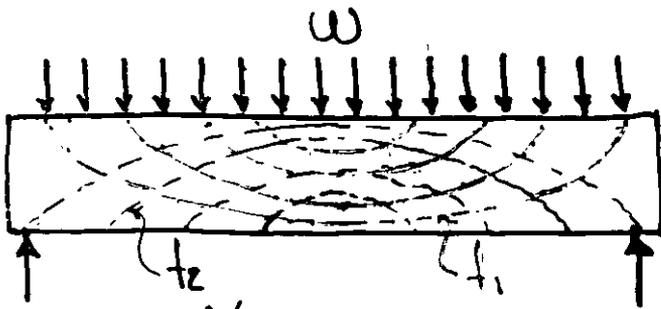
$$v = \frac{VA}{Ib}$$



$$f_x = \frac{M}{I} x y$$



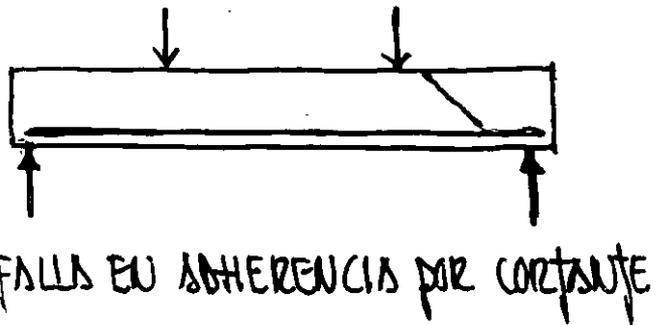
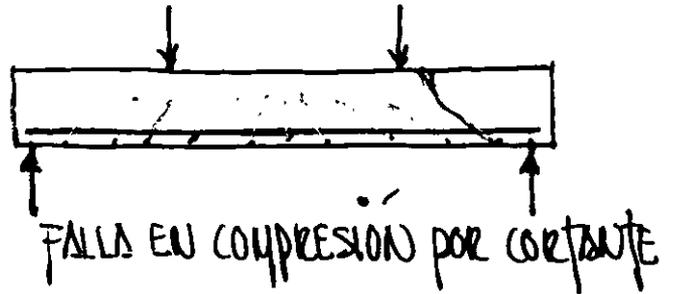
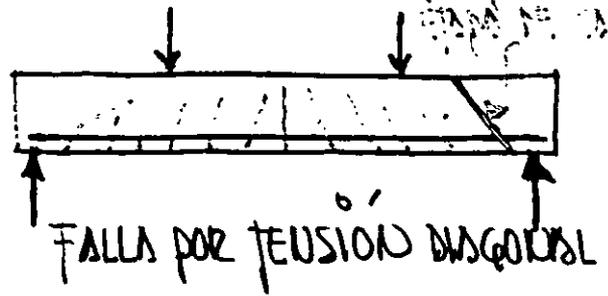
↑ R DISTRIB ESTRO EN UNA SECC



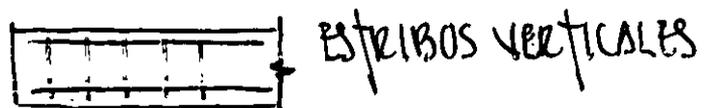
DISTRIBUCION DE ESFUERZOS PRINCIPALES

LES

$$\tan \alpha = 2v/f_x$$



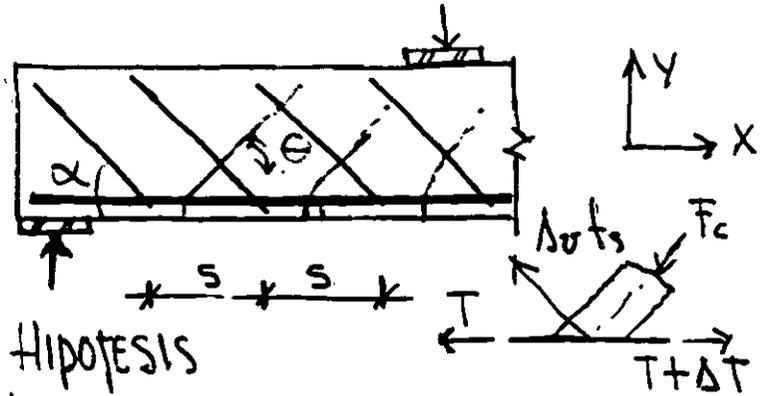
\* SECCIONES NO RECTANGULARES  
CIRCULARES, I, CAJON, ETC  
LAS SECC I PUEDEN FALLAR POR APLAS-  
TAMIENTO DEL ALA  
3. TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL



$$\frac{Vs}{z} = \Delta \sigma t_s \left[ \cos \alpha + \frac{SEU \alpha}{\tan \theta} \right]$$

$$V = \frac{\Delta \sigma t_s}{s} z \left[ \cos \alpha + \frac{SEU \alpha}{\tan \theta} \right]$$

## \* ANALOGIA DE LA ARMADURA (RITTER 1899)



HIPOTESIS

- LA ZONA COMPRESIONADA TIENE SOLO ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESION
- EL REFZO LONG TIENE SOLO ESFUERZOS NORMALES DE TENSION
- LAS TENSIONES DIAGONALES SON RESISTIVAS POR EL REFZO TRANSV
- LAS GRIETAS DIAGONALES SE DESARROLLAN DEL REFZO LONG AL CENTRO DE LAS ZONAS DE COMPRESION
- SE DESPRECIA EL PESO DE LA VIGA. EL INCREMENTO DEL MOMENTO EN UNA DISTANCIA S ES:

$$\Delta M = Vs$$

$$\sum F_y = 0 = \Delta \sigma t_s \text{SEU} \alpha - F_c \text{SEU} \theta = 0$$

$$\therefore F_c = \Delta \sigma t_s \text{SEU} \alpha / \text{SEU} \theta$$

$$\sum F_x = 0 = -T + T + \Delta T - \Delta \sigma t_s \cos \alpha - F_c \cos \theta = 0$$

$$\Delta T = \Delta \sigma t_s \cos \alpha + F_c \cos \theta$$

$$= \Delta \sigma t_s \left[ \cos \alpha + \frac{SEU \alpha}{\tan \theta} \right]$$

$$\Delta M = \Delta T(z) = Vs$$

# CORTANTE

## REGLA MEXICO ACI-83

$$V_u \leq \phi V_n \quad (11.1)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (11.2)$$

CUANDO LA REACCION INTRODUCE ESFUEROS DE COMPRESION EN EL EXTREMO DE UN MIEMBRO LA SECCION CRITICA SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA "d" DEL PUNTO INTERIOR DEL APOYO.

METODO SIMPLIFICADO

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d \quad (11.3)$$

METODO DETALLADO

$$V_c = \left( 0.5 \sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_u d}{\phi V} \right) b d \quad (11.6)$$

$$\frac{V_u d}{\phi V} \leq 1 \quad V_c \leq 0.93 \sqrt{f'_c} b w d$$

EN LOS DOS METODOS:

PARA ESTRIBOS INCLINADOS

$$V_s = \frac{A_s f_y d (s \sin \alpha + \cos \alpha)}{s}$$

PARA ESTRIBOS VERTICALES

$$V_s = \frac{A_s f_y d}{s}$$

$$f_y \leq 4200 \text{ KG/CM}^2$$

ESPECIFICACIONES:

$$s_{\min} = \frac{3.5 b s}{f_y}$$

$$s_{\max} = d/2$$

$$\text{CUANDO } V_s > 1.1 \sqrt{f'_c} b d \quad s_{\max} = d/4$$

$$V_s \leq 2.1 \sqrt{f'_c} b d$$

DEBE COLGARSE REFUERZO TRANSVERSAL EN TODAS LAS SECCIONES DONDE:

$$V_u > \phi V_c / 2$$

# ESPECIFICACIONES U.P.C.

2.1.5

a) Fza. cortante. ref. para el concreto (Vcr.)

Las expresiones de Vcr. son aplicables cuando:

$$h \leq 70 \text{ cm}; \quad h/b \leq 6$$

Para cada condición que no se cumpla, se debe reducir Vcr en 30%

I Vigas sin refzo. cuando  $L/h \geq 5$

$$\text{si } p < 0.01; \quad V_{cr} = f_{Rc} (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} (bd)$$

$$\text{" } p \geq 0.01; \quad V_{cr} = f_{Rc} bd (1.5 \sqrt{f_c^*})$$

$$V_u \leq 2.0 f_{Rc} bd \sqrt{f_c^*}$$

$$\text{Si } V_u > 1.5 f_{Rc} bd \sqrt{f_c^*}; \quad s_{\text{max}} = d/4$$

$$\text{Si } V_u < 1.5 f_{Rc} bd \sqrt{f_c^*}; \quad s_{\text{max}} = d/2$$

$$A_{s\text{mín}} = \frac{3.5 b s}{f_{Rt}}$$

II Elementos anchos (losas, espigas y yuros):

$$b \geq 4d; \quad \text{con } h = 60 \text{ cm} \quad \text{y } U/V_d \leq 2.0$$

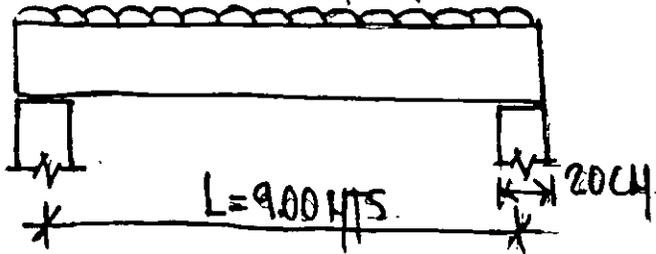
$$\therefore V_{cr} = 1.5 f_{Rc} b d \sqrt{f_c^*}$$

El refzo. por flexión debe cumplir con los requisitos de 3.1, es decir, debe estar adecuadamente anclado a unos largos de la secc. debe haber una posible grieta inclinada provocada por fza. cortante. En zapatas de secc. cte. basta con suministrar en los extremos anchos estándar.

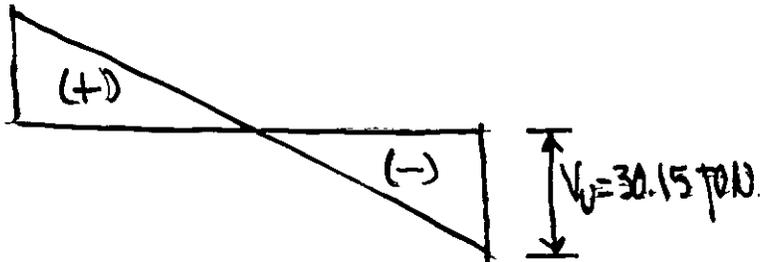
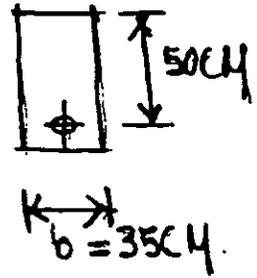
Si  $h = 60 \text{ cm}$  y/o  $U/V_d > 2.0$ , Vcr se calcula de nuevo con la secc. I. El anclaje del refzo. debe ser con gancho en los extremos.

REVISAR POR CORTANTE LA SIGUIENTE VIGA

$w_u = 6.7 \text{ TON/ML}$



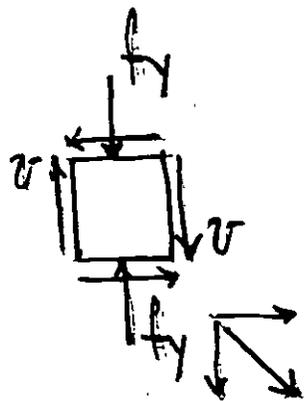
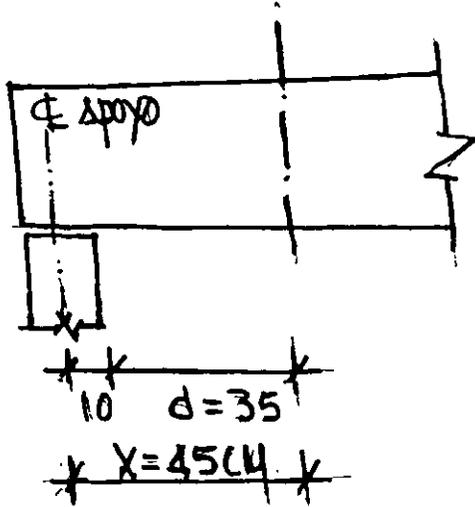
SECCION



MATERIALES:

$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$   
 $f_y = 2800 \text{ KG}$

SECCION CRITICA.



$$V_u = 30.15 \times \frac{4.05}{4.50} = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_u = 27.14 \text{ TON}$$

$$V_u \leq \phi V_n$$

PARA CORTANTE  $\phi = 0.85$

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b w d$$

$$V_c = 13.12 \text{ TON}$$

$$V_{s_{REQ}} = V_u / \phi - V_c$$

$$V_{s_{REQ}} = 18.81 \text{ TON}$$

$$S_{REQ} = \frac{A_s v_t y d}{V_s}$$

USANDO ESTRIBOS # 3

$$S = \frac{1.42 \times 2800 \times 50}{18810} = 10.57 \text{ CM}$$

ESPECIFICACIONES:

SEPARACIÓN MÁXIMA

$$S \leq d/2$$

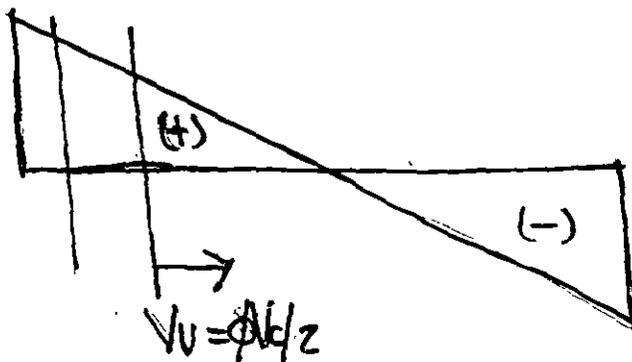
$$S \leq 25 \text{ CM} \leftarrow \text{RIGE}$$

ÁREA DE ACERO DE REFUERZO MÍNIMA

$$A_{s_{min}} = \frac{3.5 b w S}{f_y}$$

$$S_{max} = \frac{A_{s_{min}} f_y}{3.5 b w}$$

$$S_{max} = \frac{1.42 \times 2800}{3.5 \times 35} = 32 \text{ CM}$$



## 4.1.5 VIGAS DE SECCIÓN COMPUESTA

### a) CONCEPTOS GENERALES

— ES, LAS FORMADAS POR UN ELEMENTO PREFABRICADO Y CONCRETO COLADO EN SITIO. LAS PARTES INTEGRANTES DEBEN ESTAR CONECTADAS DE MANERA QUE ACTÚEN COMO UNA UNIDAD. EL ELEMENTO PREFABRICADO PUEDE SER DE CONCRETO O DE ACERO. (EN ESTE ÚLTIMO CASO VER LAS NORMAS DE ESTRUCTURAS METÁLICAS)

— SI LA  $f'_c$ ,  $\gamma_c$  U OTRAS PROPIEDADES DEL CONCRETO DE LOS ELEMENTOS SON DIFERENTES, ~~DEBEN~~ DEBEN TOMARSE EN CUENTA AL DISEÑAR O USAR LAS PROPIEDADES MÁS DESFAVORABLES.

— DEBERÁN TENERSE EN CUENTA LOS EFECTOS DEL APUNTALAMIENTO O FALTA DEL MISMO SOBRE LAS DEFLEXIONES Y EL AGRIETAMIENTO.

### b) EFECTOS DE LA FUERZA CORTANTE

I EL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL,  $\tau_h$  EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO ENTRE LOS ELEMENTOS QUE FORMAN LA VIGA PUEDE CALCULARSE CON LA EXPRESIÓN:

$$\tau_h = \frac{V_u}{f_r b_o d} \quad (4.1)$$

$V_u$  = FZS. CORTANTE DE DISEÑO

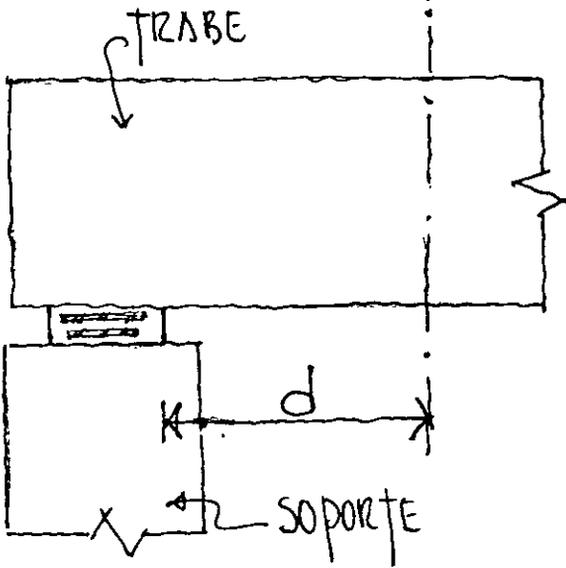
$b_o$  = ANCHO DEL ÁREA DE CONTACTO

$d$  = PERALTE EFECTIVO DE LA SECCIÓN COMPUESTA.

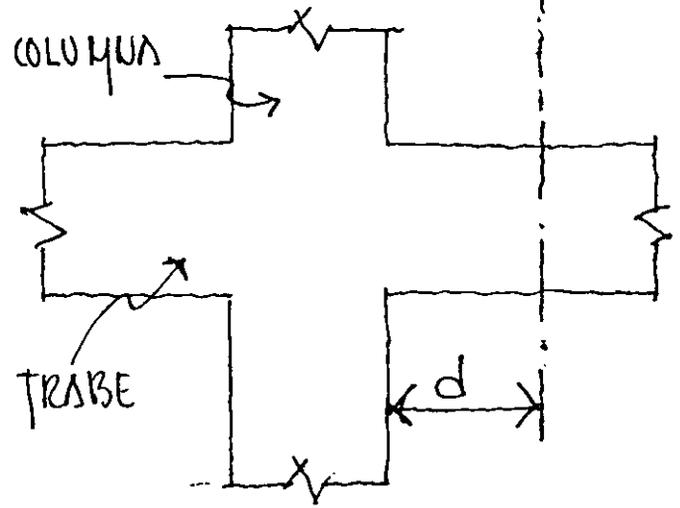
II DEBE ASEGURARSE QUE SE TRANSMITAN LOS ESFUERZOS CORTANTES ( $\tau_h$ ) QUE ACTÚAN EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO.

III PARA TRANSMITIR  $\tau_h$  SE ADMITEN LOS VALORES SIGUIENTES:

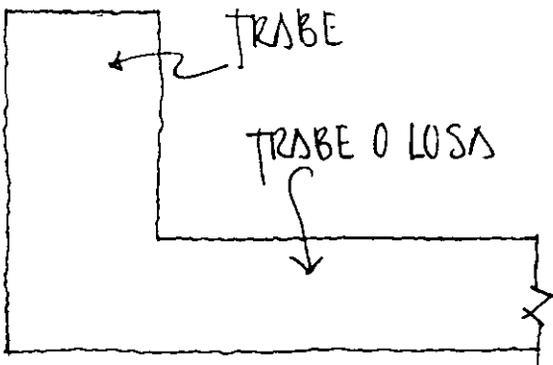
SECCIÓN CRÍTICA



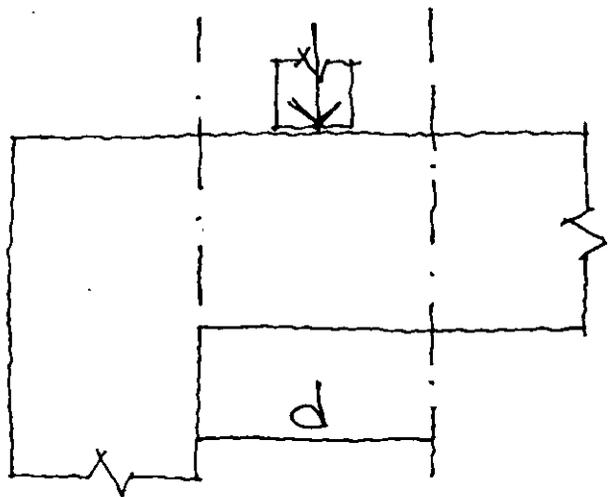
SECCIÓN CRÍTICA

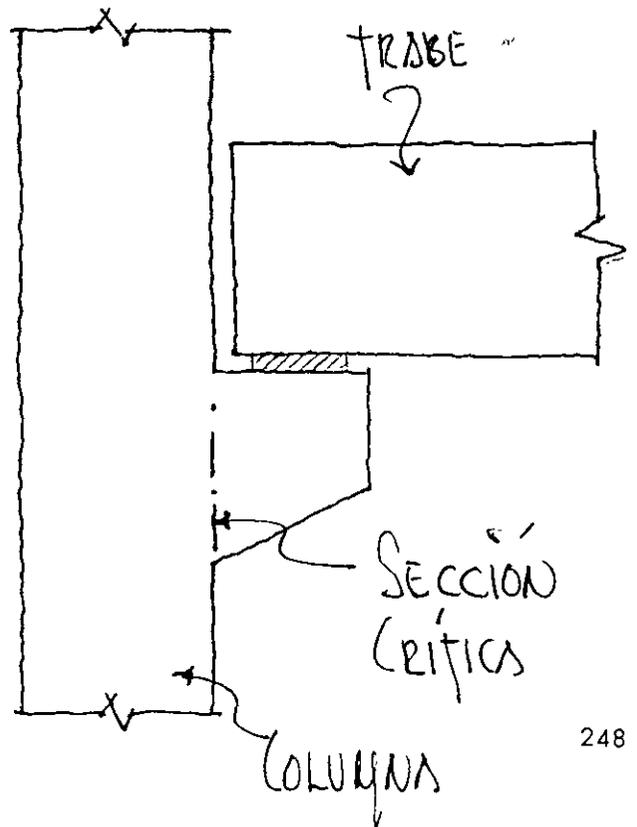
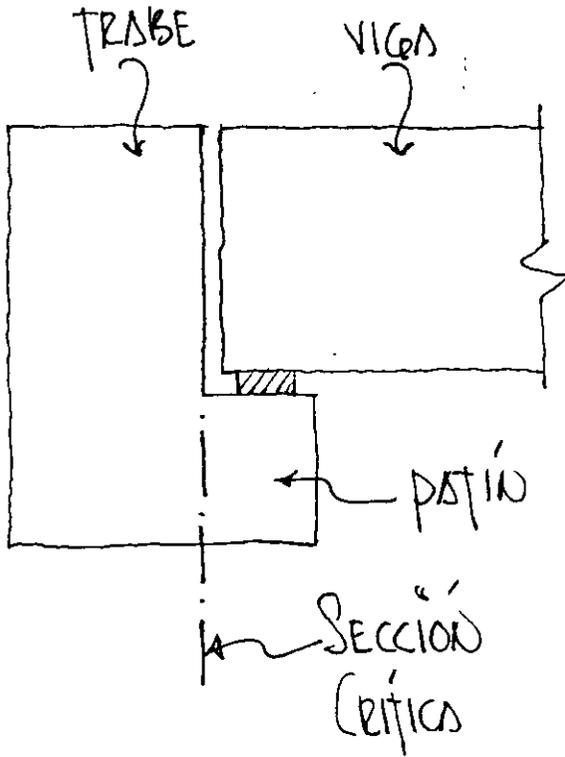
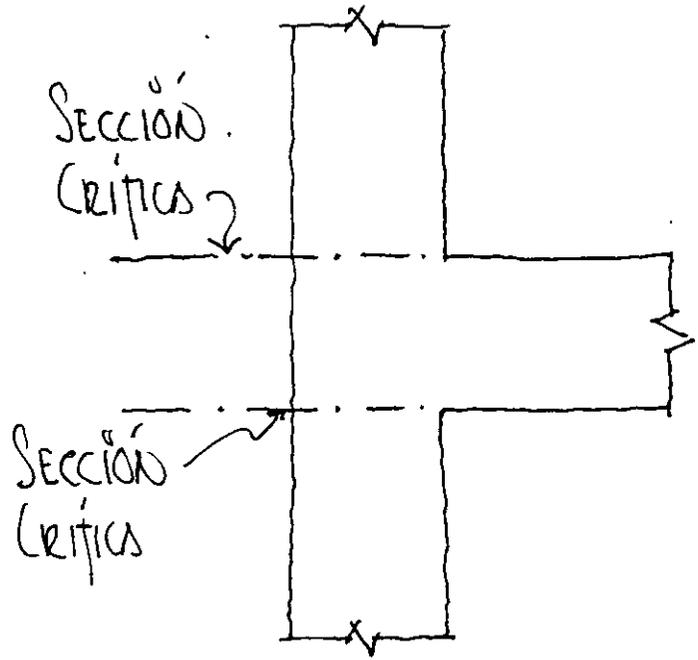
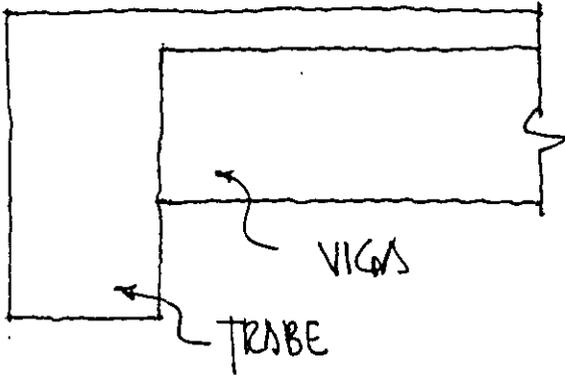


SECCIÓN CRÍTICA



SECCIÓN CRÍTICA





## EJEMPLO 2: DISEÑO POR CORTANTE CON TENSIÓN AXIAL

ACERO DE REFUERZO  $f_y = 4200 \frac{kg}{cm^2}$

CONCRETO (LIGERO CON ARENA)  $f'_c = 250 \frac{kg}{cm^2}$

$M_d =$

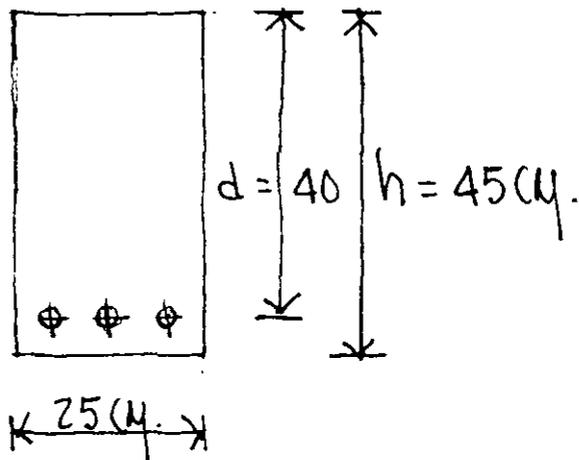
$M_l =$

$V_d = 5.82 \text{ ton}$

$V_l = 4.09 \text{ "}$

$N_d = -0.91 \text{ " (TENSIÓN)}$

$N_l = -6.91 \text{ " "}$



### CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

REFERENCIA  
AL CONGO

1. DETERMINAR LAS CARGAS FACTORIZADAS

$$V_u = 1.4 \times 5.82 + 1.7 \times 4.09 = 15.10 \text{ ton}$$

$$N_u = 1.4 \times (-0.91) + 1.7 \times (-6.91) = -13.02 \text{ "}$$

2. CALCULAR  $\phi V_c$

(COMO NO SE ESPECIFICA  $f_{ct}$ )

$$\phi V_c = \phi \left[ 1 + \frac{N_u}{35 \lambda_g} \right] (0.54 \times 0.85 \sqrt{f'_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left[ 1 + \frac{(-13020)}{35 \times 1125} \right] (0.54 \times 0.85 \sqrt{250}) 25 \times 40 = 4.13 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL ESPACIAMIENTO REQUERIDO DE ESTRIBOS

$$S_{req} = \phi \lambda_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

USANDO ESTRIBOS #3 DOS BRASOS  $\lambda_v = 1.42 \text{ cm.}$

$$S_{req} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times 40 / (15.1 - 4.13) = 18.5 \text{ cm.}$$

VERIFICAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO

$$S_{max} = d/2 = 40 \text{ cm. ; } S_{max} = \lambda_v f_y / 3.5 k_w = 68 \text{ cm.}$$

$\therefore$  USAR ESTRIBOS #3 @ 15 cm.

11.2.1.2

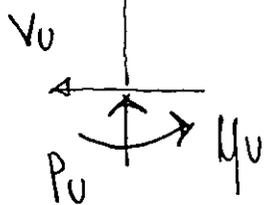
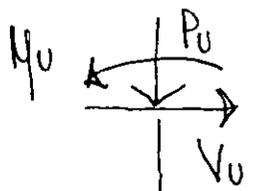
# EJEMPLO 3: DISEÑO DE UN MIEMBRO POR CORTEANTE CON COMPRESIÓN AXIAL.

CONDICIÓN DE CARGAS 1:

$$M_u = \quad \text{TON-M}$$

$$P_u = 72.72 \text{ TON.}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$



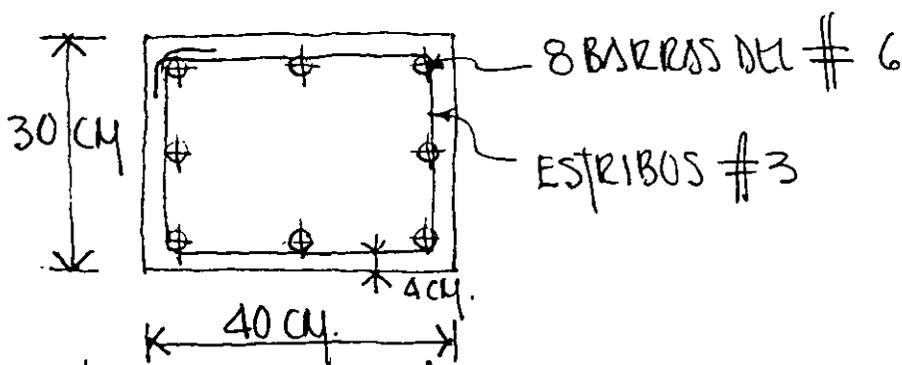
CONDICIÓN DE CARGAS 2:

$$M_u = \quad \text{TON-M}$$

$$P_u = 4.55 \text{ TON}$$

$$V_u = 9.09 \text{ "}$$

SECCIÓN TRANSVERSAL



ACERO DE REFUERZO:  $f_y = 4200 \text{ KG/CM}^2$   
 CONCRETO:  $f'_c = 210 \text{ "}$

## CÁLCULOS Y DISCUSIÓN

REFERENCIA AL CÓDIGO

CONDICIÓN 1:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTEANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $\phi V_c$

$$d = 40 - (4 + 1 + 1) = 34 \text{ CM.}$$

$$\phi V_c = \phi \left( 1 + \frac{N_u}{140 \text{ KG}} \right) (0.54 \sqrt{f'_c}) b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \left( 1 + \frac{72720}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 = 9.70 \text{ TON.} > V_u = 9.09 \text{ TON}$$

EC. (11-4)

CONDICIÓN 2:

1. DETERMINAR LA RESISTENCIA A CORTANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $\phi V_c$

$$\phi V_c = 0.85 \left( 1 + \frac{4550}{140 \times 1200} \right) (0.54 \sqrt{210}) 30 \times 34 =$$

EC. (11-4)

$$\phi V_c = 6.97 \text{ ton} < V_u$$

POR LO TANTO, SE REQUIERE COLOCAR ASEROS DE REFUERZO TRANSVERSAL

2. DETERMINAR EL ESPACIAMIENTO MÁXIMO PARA ESTRIBOS DEL #3.

$$S_{\max} = d/2 = 34/2 = 17 \text{ cm.}$$

11.5 4.1

3. VERIFIQUE LA RESISTENCIA A CORTANTE TOTAL

$$\phi V_s = \phi A_v f_y \frac{d}{s} = 0.85 \times 1.42 \times 4.2 \times \frac{34}{5} = \frac{172.36}{5}$$

PARA  $s = 15 \text{ cm.}$

$$\phi V_s = 11.49 \text{ ton.}$$

$$\phi V_c + \phi V_s = 18.46 \text{ ton} > V_u$$

1. No se usen anclajes metálicos y la superficie de contacto está rugosa y limpia. 3 kg/cm<sup>2</sup>
  2. Se cumplen los requisitos mínimos para los colectores del inciso IV y la superficie está limpia. 6 "
  3. Se cumplen los requisitos para colectores y la superficie de contacto está limpia y rugosa. 25 "
- (Cuando  $\sigma_h \geq 25 \text{ kg/cm}^2$  el diseño se hace con el criterio de cortante por fricción de 2.1.5 i)

IV Los colectores deben estar formados por barras o estribos normales a la superficie de contacto. El área mínima de este refuerzo será

$$A_{s \text{ mín}} = (3/f_y) (\text{ÁREA DE CONTACTO})$$

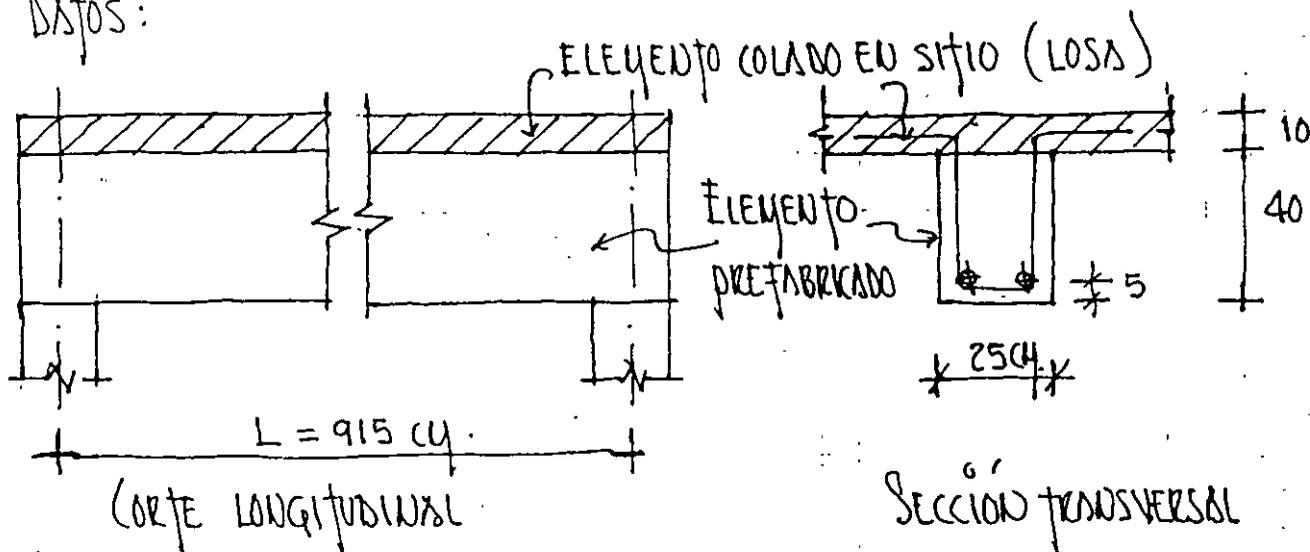
Su separación (s)  $s \leq 6$  (ESPESOR DEL ELEMENTO COLADO EN SITIO)  
 $s \leq 60 \text{ CM.}$

Los colectores deben estar anclados en ambos elementos de modo que en la superficie de contacto desarrollen al menos  $0.8 f_y$ .

V El refuerzo por tensión diagonal se dimensionará igual que para una viga monolítica de la misma forma.

EJEMPLO: DISEÑAR POR CORTANTE HORIZONTAL LAS VIGAS DE SECCIÓN COMPUESTAS SIGUIENTE:

DATOS:



CARGA MUERTA DE SERVICIO = 470 KG/M L

" VIVA " " = 350 "

$$f'_c = 200 \text{ KG/CM}^2$$

$$f_y = 4200 "$$

SOLUCIÓN

1. DETERMINAR  $V_u$  EN EL EXTREMO

$$W_u = 1.4(0.47 + 0.35) = 1.15 \text{ TON/M}$$

$$V_u = 1.15 \times 9.15 / 2 = 5.26 \text{ TON}$$

2. DETERMINAR LA MAGNITUD DEL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL ( $\tau_h$ )

$$\tau_h = \frac{5260}{0.8 \times 25 \times 45} = 5.85 \text{ KG/CM}^2$$

$$3 \text{ KG/CM}^2 < \tau_h < 6 \text{ KG/CM}^2$$

∴ SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA LOS CONECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA.

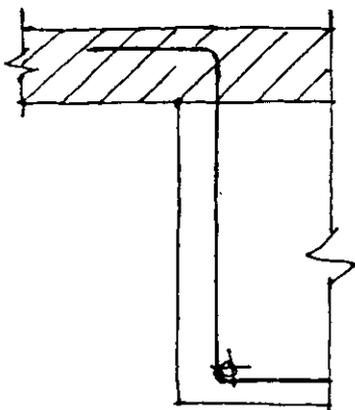
3. CALCULAR LA SEPARACIÓN Y EL AREA DE LOS COLECTORES

SEPARACIÓN  $S = 6(10) = 60 \text{ cm}$

$$\Delta v_{\text{mín}} = (3/4200)(25 \times 60) = 1.07 \text{ cm}^2$$

USANDO COLECTORES DEL # 3 DOS RAMAS  $\Delta v = 1.42 \text{ cm}^2 > \Delta v_{\text{mín}}$

4. CALCULAR LOS REQUISITOS DE ANCLAJE DE LOS COLECTORES.



AUMENTANDO LAS CARGAS:

CARGA MUERTA DE SERVICIO =  $470 \text{ kg/m}$

" VIVA " " =  $1500 \text{ "}$

SOLUCIÓN:

1. CALCULAR  $V_0$  EN EL EXTREMO

$$W_0 = 1.4(0.47 + 1.50) = 2.76 \text{ ton/m.}$$

$$V_0 = 2.76 \times 9.15 / 2 = 12.63 \text{ ton.}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE  $\sigma_h$

$$6 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_h = \frac{12630}{0.8 \times 25 \times 45} = 14 \text{ kg/cm}^2 < 25 \text{ kg/cm}^2$$

∴ SE DEBE CUMPLIR CON LOS REQUISITOS MÍNIMOS PARA COLECTORES Y LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIS Y RUGOSA.

INCREMENTANDO LAS CARGAS A:

CARGA MUERTA DE SERVICIO = 800 KG/ML

• VIVS " " = 3000 "

SOLUCIÓN

1. CALCULAR  $V_0$  EN EL EXTREMO

$$W_0 = 1.4 (0.80 + 3.00) = 5.32 \text{ ton/ML}$$

$$V_0 = 5.32 \times 9.15 / 2 = 24.34 \text{ ton}$$

2. CALCULAR LA MAGNITUD DE  $\sigma_h$

$$\sigma_h = \frac{24340}{0.8 \times 25 \times 45} = 27.14 \text{ kg/cm}^2 > 25 \text{ kg/cm}^2$$

∴ EL DISEÑO DEBE HACERSE CON EL CRITERIO DE CORTE POR FRICCIÓN

## 17.5 RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL

EL CORTANTE HORIZONTAL EN MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN SE CUBRE EN EL CAP 17 DEL CÓDIGO.

LAS FUERZAS DE CORTANTE HORIZONTAL ACTÚAN SOBRE LA SUPERFICIE DE UNIÓN ENTRE LOS ELEMENTOS DE LOS MIEMBROS COMPUESTOS SUJETOS A FLEXIÓN. ESTAS FUERZAS HORIZONTALES SON PRODUCIDAS POR EL GRADIENTE DE MOMENTO DEBIDO A LAS FUERZAS CORTANTES VERTICALES. EN LA SECCIÓN 17.5.1, SE REQUIERE QUE SE TRANSMITA EL TOTAL DE LAS FUERZAS CORTANTES HORIZONTALES, GENERADAS EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL CÓDIGO CONSIDERA QUE LA RESISTENCIA DE UN MIEMBRO COMPUESTO ES LA MISMA YA SEA QUE ESTÉ APUNTALADO O NO.

LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL SE DEBE INVESTIGAR EN TODOS LOS MIEMBROS COMPUESTOS. CUANDO  $V_u > \phi(35b_v d)$ , EL DISEÑO SE DEBE HACER SEGÚN 11.7.4 (CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN). ÉSTE LÍMITE SUPERIOR, SE INCREMENTÓ DE  $\phi(24.5b_v d)$  CORRESPONDIENTE A LAS EDICIONES ANTERIORES.

EL LÍMITE SUPERIOR DE LA RESISTENCIA A CORTANTE HORIZONTAL DEPENDE DE LAS CONDICIONES DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO. EL REQUISITO COMÚN DE TODOS LOS CASOS ES QUE LA SUPERFICIE DE CONTACTO DEBE ESTAR LIMPIA.  $V_{nh} < 5.6 b_v d$ , CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO SE DEJA INTENCIONALMENTE RUGOSA (17.5.2.1) O, CUANDO SE USA UN MÍNIMO DE CONECTORES (17.5.2.2).

CUANDO LA SUPERFICIE DE CONTACTO ESTÉ INTENCIONALMENTE RUGOSA Y SE PROPORCIONE EL REFUERZO MÍNIMO DE CONECTORES :

$$V_{nh} < (18.2 + 0.6 p_v f) b_v d$$
$$(18.2 + 0.6 p_v f) < 35 \text{kg/cm}^2$$
$$r_v = A_v / s_b$$

SI:  $V_u > \phi(35)bd$ , EL DISEÑO DE LA SECCION SE DEBE HACER USANDO EL CRITERIO DE CORTANTE POR FRICCIÓN (SECCION 11.7.4 DEL CODIGO)

$\mu = 1.0$ , PARA SUPERFICIE INTENCIONALMENTE RUGOSA

$\mu = 0.6$ , PARA SUPERFICIE LISA

LA SECCION 17.5.2.5, FUE INTRODUCIDA EN LA EDICION DE 1992,. DEFINE EL PERALTE EFECTIVO PARA DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL COMO LA DISTANCIA DE LA FIBRA EXTREMA A COMPRESION AL CENTROIDE DEL ACERO A TENSION, O 0.8 DEL PERALTE TOTA DE LA SECCION COMPUESTA. ESTO ACLARA LA DEFINICION DE  $d$  PARA SECCIONES COMPUESTAS, HACIÉNDOLO CONSISTENTE CON EL DISEÑO POR CORTANTE DEL RESTO DEL CODIGO. ESTA SECCION ES SIGNIFICATIVA PARA EL DISEÑO DE MIEMBROS PESFORZADOS EN LOS QUE EL PERALTE VARIA A LO LARGO DEL MIEMBRO. EL CODIGO TAMBIEN PRESENTA UN METODO ALTERNATIVO PARA EL DISEÑO POR CORTANTE HORIZONTAL EN LA SECCION 17.5.3. LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL QUE DEBE TRANSMITIRSE A TRAVES DE LA SUPERFICIE DE UNION DE LAS PARTES DEL ELEMENTO COMPUESTO SE TOMA COMO EL CAMBIO EN LA FUERZA DE TENSION O COMPRESION EN UN TRAMO DE VIGA. CUANDO SE USA ESTE METODO, LOS LIMITES DE 17.5.2.1 A 17.5.3.1, SE APLICAN.

SUSTITUYENDO  $A_c$  POR  $b_v d$  EN LA EXPRESION. LA SECCION 17.5.3. ITAMBIEN REQUIERE QUE EL ACERO ESTE DISTRIBUIDO PARA REFLEJAR EN FORMA APROXIMADA LA VARIACION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO. ESTE REQUISITO ENFATIZA LA DIFERENCIA ENTRE EL DISEÑO DE MIEMBROS COMPUESTOS SOBRE CONCRETO Y ACERO. EL DESLIZAMIENTO CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ENTRE UNA VIGA DE ACERO Y UNA LOSA QUE FORMAN SECCION COMPUESTA ES GRANDE, LO CUAL PERMITE LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL MIEMBRO. EN MIEMBROS DE CONCRETO QUE FORMAN SECCION COMPUETA CON LA LOSA, EL DESLIZAMIENTO CORESPONDIENTE A LA RESISTENCIA ES PEQUEÑO Y POR TANTO LA REDISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE A LO LARGO DEL ELEMENTO ES LIMITADA. POR TANTO, LA DISTRIBUCION DEL REFUEZO POR CORTANTE HORIZONTAL DEBE BASARSE EN LA DISTRIBUCION CALCULADA DEL CORTANTE HORIZONTAL FACTORIZADO, PARA EL CASO DE MIEMBROS COMPUESTOS DE CONCRETO.

## CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

DE ACUERDO CON 17.6.3, SE REQUIERE QUE LOS CONECTORES ESTEN TOTALMENTE ANCLADOS EN LOS ELEMENTOS INTERCONECTADOS CUMPLIENDO CON 12.13. LA FIGURA 1 MUESTRA ALGUNOS DETALLES QUE HAN USADOS CON EXITO TANTO EN ENSAYES COMO EN LA PRACTICA.

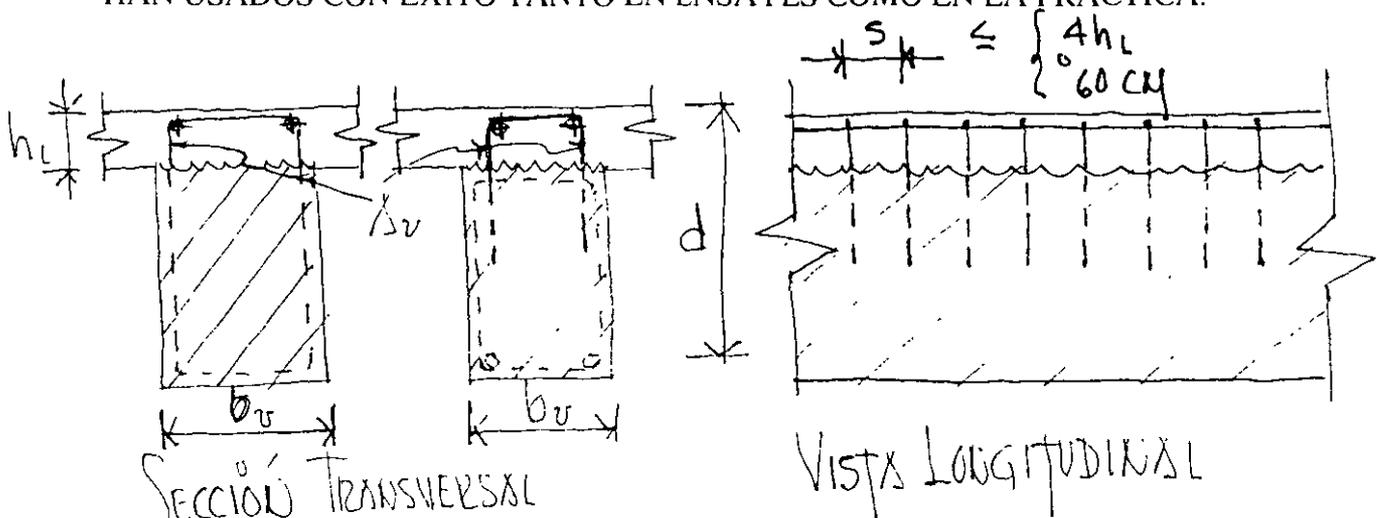


FIG. 1. CONECTORES PARA CORTANTE HORIZONTAL

$$p_v = \frac{\Delta v}{b_v s}$$

$$\Delta v_{\text{MIN}} = \frac{3.5 b_v s}{f_y}$$

## General Shear Design Method



by Michael P. Collins, Denis Mitchell, Perry Adebar, and Frank J. Vecchio

*A simple, unified method is presented for the shear design of both prestressed concrete members and nonprestressed concrete members. The method can treat members subjected to axial tension or axial compression and treats members with and without web reinforcement. The derivation of the method is summarized and the predictions of the method are compared with those of the current ACI Code.*

**Keywords:** aggregate interlock; axial loads; building codes; crack width and spacing; reinforced concrete; shear strength; structural design.

The shear design provisions of the 1995 ACI Code<sup>1</sup> consist of about 43 empirical equations for different types of members and different types of loading, some of which are illustrated in Fig. 1. In 1973, the ACI-ASCE Shear Committee<sup>2</sup> expressed the hope that these "design regulations for shear strength can be integrated, simplified, and given a physical significance." As shown by the growth in the number of ACI shear design equations (see Fig. 2), the code has not met this desirable goal. It is interesting to note that, prior to 1963, the ACI shear design procedure was so simple that only four equations were required.

Most of the shear design equations given in Fig. 1 were introduced in either the 1963 or 1971 edition of the ACI Code.<sup>3,4</sup> These design equations were developed in the period following the 1955 air-force warehouse shear failures<sup>5</sup> and rely on the traditional concept of adding a concrete contribution  $V_c$  to the shear reinforcement contribution  $V_s$  calculated on the basis of the 45 deg truss equation.

Since 1971 there has been an intensive research effort aimed at improving design methods for shear (see Fig. 3). The research has shown that, in general, the angle of inclination of the concrete compression is not 45 deg, and that equations based on a variable angle truss provide a more realistic basis for shear design. In addition, tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear<sup>6</sup> improved the understanding of the stress-strain characteristics of diagonally cracked concrete.

The stress-strain relationships made it possible to develop a physical model, called the modified compression field theory,<sup>7</sup> that proved capable of accurately predicting the response of reinforced concrete subjected to shear.

The objective of this paper is to present briefly a simple, general shear design method based on the modified compression field theory. This design method, recently introduced by Collins and Mitchell,<sup>7</sup> has been adopted by the Ontario Highway Bridge Design Code,<sup>8</sup> the Canadian Standards Association Concrete Design Code,<sup>9</sup> and the AASHTO LRFD specifications.<sup>10</sup> The method is summarized in Fig. 4.

### SHEAR RESPONSE OF CRACKED CONCRETE

Tests of reinforced concrete panels subjected to pure shear (see Fig. 4) demonstrated that even after cracking, tensile stresses exist in the concrete and that these stresses can significantly increase the ability of reinforced concrete to resist shear stresses.

Cracked reinforced concrete transmits load in a relatively complex manner involving opening or closing of pre-existing cracks, formation of new cracks, interface shear transfer at rough crack surfaces, and significant variation of the stresses in reinforcing bars due to bond, with the highest steel stresses occurring at crack locations. The modified compression field model attempts to capture the essential features of this behavior without considering all of the details. The crack pattern is idealized as a series of parallel cracks all occurring at angle  $\theta$  to the longitudinal direction. In lieu of following the complex stress variations in the cracked concrete, only the average stress state and the stress state at a crack are considered [see Fig. 4(b) and 4(c)]. As these two states of stress are statically equivalent, the loss of tensile stresses in the concrete at the crack must be replaced by increased steel stresses or, after yielding of some of the reinforcement at the crack, by shear stresses on the crack interface. The shear stress that can be transmitted across the crack will be a function of the crack width. Note that shear stress on the crack implies that the direction of principal stresses in the concrete changes at the crack location.

*ACI Structural Journal*, V. 93, No. 1, January-February 1996

Received June 17, 1994, and reviewed under Institute publication procedures. Copyright © 1995, American Concrete Institute. All rights reserved. Inclusion of this article in a collection of papers for a special issue of the journal requires the permission of the copyright proprietor. Terms of discussion will be published in the November-December 1996 *ACI Structural Journal* and received by July 1, 1996.

Michael P. Collins, F.A.C.I., is Bahen-Lunenbaum Professor of Civil Engineering at the University of Toronto, Toronto, Canada. He is a member of ACI Committee 458, Concrete Girders; the ACI Technical Activities Committee; subcommittee on High-Performance Concrete; and joint ACI-ASCE, Committee 445, Shear and Torsion. He is a member of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

Denis Mitchell, F.A.C.I., is a professor in the Department of Civil Engineering and Applied Mechanics at McGill University. He is a member of ACI Committee 408, Bond and Development of Reinforcement; and ACI-ASCE, Committee 445, Shear and Torsion. He is Chairman of the Canadian Standards Association Committee for the Design of Concrete Structures.

ACI member Perry Adebar is an associate professor in the Department of Civil Engineering at the University of British Columbia, Vancouver, Canada. He is Secretary of ACI Committee 441, Earthquake Resistant Concrete Bridges, and joint ACI-ASCE, computer-aided design of reinforced concrete.

ACI member Frank J. Vecchio is a professor in the Department of Civil Engineering at the University of Toronto. He is a member of ACI Committees 441, Reinforced Concrete Columns; and 447, Finite Element Analysis, and of the CEB Committee on Constitutive Modeling.

The average principal tensile strain  $\epsilon_1$  in the cracked concrete is used as a "damage indicator" that controls the average tensile stress  $f_1$  in the cracked concrete, the ability of the diagonally cracked concrete to carry compressive stresses  $f_2$ , and the shear stress  $v_{ci}$  that can be transmitted across a crack.

The principal compressive stress in the concrete  $f_2$  is related to both the principal compressive strain  $\epsilon_2$  and the principal tensile strain  $\epsilon_1$  in the following manner [see Fig. 5(a)]

$$f_2 = f_{2max} \left[ \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1'} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

where

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_1) \leq f_c' \quad (2)$$

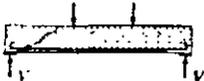
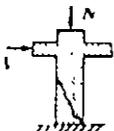
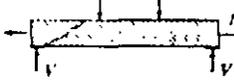
ACI Method		General Method
$V_n = V_c + V_s$		$V_n = V_c + V_s + V_p$
<b>Non-Prestressed Beams</b> 	$V_c = (1.9\sqrt{f_c'} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$ but $\frac{V_u d}{M_u} \leq 1.0$ $V_c \geq 3.5\sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = 2\sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s}$ $V_s \leq 8\sqrt{f_c'} b_w d$	$V_c = \beta\sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y}{s} d \cot\theta$ where $\beta$ and $\theta$ are functions of the strain, $\epsilon_s$ , shear stress, $v$ , and crack spacing, $s_x$ where $v = \frac{V_n - V_p}{b_w d}$ and $C_r = \frac{M_u/d_v + 0.5(N_u + V_u \cot\theta) - A_{ps} f_{ps}}{F_s A_s + F_p A_p}$
<b>Prestressed Beams</b> 	$V_c = (0.6\sqrt{f_c'} + 700 \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$ but $2\sqrt{f_c'} b_w d \leq V_c \leq 5\sqrt{f_c'} b_w d$ or $V_c = V_{ci} = 0.6\sqrt{f_c'} b_w d + V_d + \frac{V_i M_{cr}}{M_{max}}$ but $V_{ci} \geq 1.7\sqrt{f_c'} b_w d$ and $V_c \leq V_{cw} = (3.5\sqrt{f_c'} + 0.3f_{pc}) b_w d + V_p$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8\sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Axial Compression and Shear</b> 	$V_c = (1.9\sqrt{f_c'} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u - N_u (\frac{4h-d}{8})}) b_w d$ $V_c \leq 3.5\sqrt{f_c'} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500 A_g}}$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} < 8\sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Axial Tension and Shear</b> 	$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{500 A_g} \right) \sqrt{f_c'} b_w d$ $V_s = \frac{A_s f_y d}{s} \leq 8\sqrt{f_c'} b_w d$	
<b>Detailing Rules</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Reinforcement shall extend beyond the point at which it is no longer required to resist flexure for a distance equal to the effective depth of the member or <math>12d_s</math>, which is greater.</li> <li>Flexural reinforcement shall not be terminated in a tension zone unless                             <ul style="list-style-type: none"> <li>shear at cutoff <math>\leq 2/3</math> shear permitted, or</li> <li>stirrup area, <math>A_{sv}</math>, in excess of that required for shear and torsion, is provided                                     <ul style="list-style-type: none"> <li><math>A_{sv} \geq 60b_w s f_{sv}</math>, ... <math>s \leq d/8\beta_s</math>, or</li> </ul> </li> <li>for #11 bars or smaller shear at the cutoff <math>\leq 3/4</math> shear permitted and continuing reinforcement provides double the area required for flexure at the cutoff</li> </ul> </li> <li>At simple supports and points of inflection, the diameter of the positive moment tension reinforcement shall be limited so that                             <math display="block">l_d \leq \frac{M_u}{V_u} + l_a</math> </li> </ul>		<b>Detailing Rules</b> Longitudinal steel must be detailed so that $A_s f_y + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi d_s} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5V_s - V_p \right) \cot\theta$

Fig. 1--Comparison of ACI and proposed shear design approaches

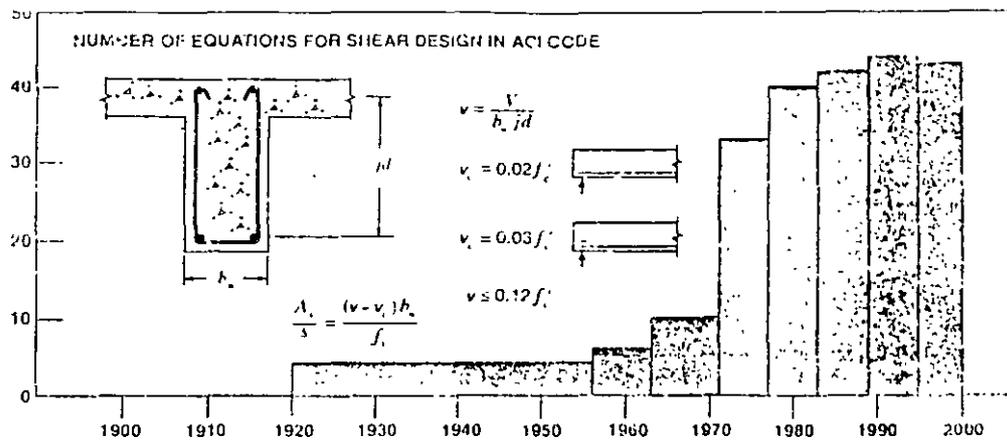


Fig. 2—Number of ACI shear design equations

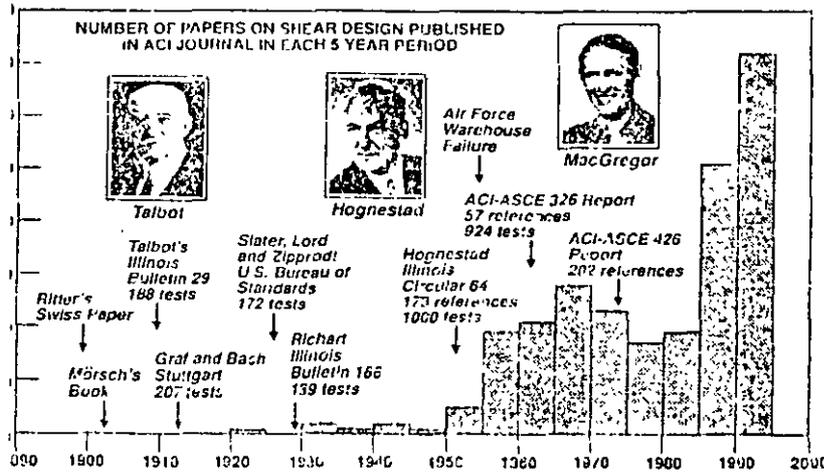


Fig. 3—Research into shear design methods

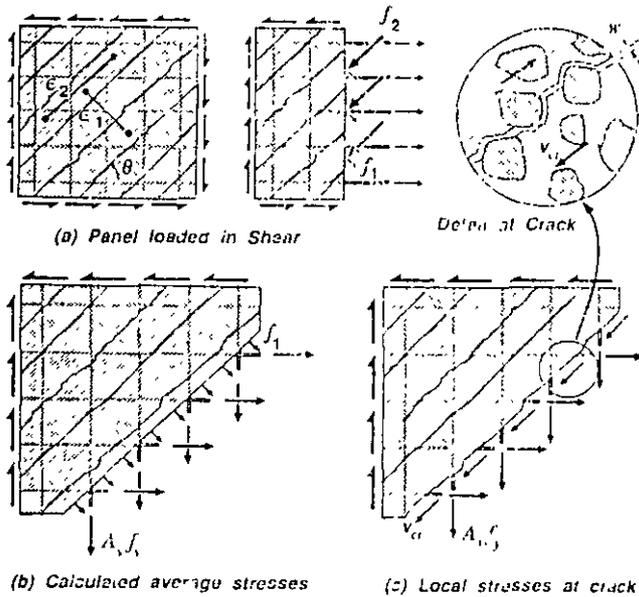


Fig. 4—Reinforced concrete panels subjected to shear

From Eq. (1), the principal compressive strain for the loading portion of the stress-strain relationship is

$$\epsilon_2 = -0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - f_2 / f_{2max}} \right) \quad (3)$$

where  $\epsilon_1'$  has been taken as  $-0.002$ .

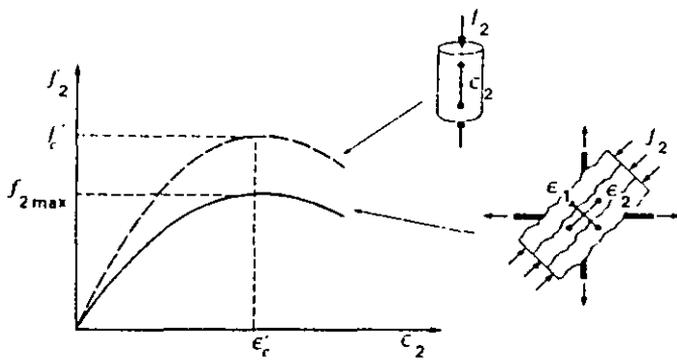
After cracking, the principal tensile stress in the concrete  $f_1$  is related to the principal tensile strain  $\epsilon_1$  as follows [see Fig. 5(b)]

$$f_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} \quad (4)$$

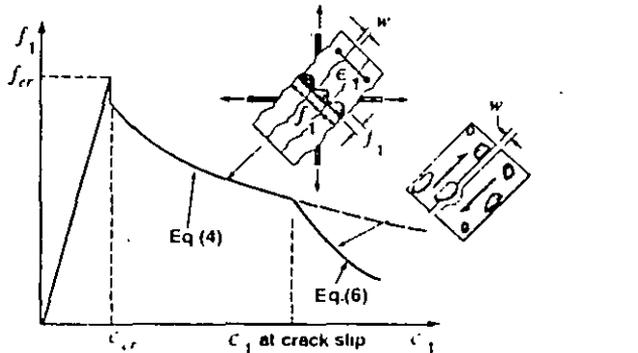
where the cracking stress  $f_{cr}$  can be taken as  $4\sqrt{f_c'}$  psi ( $0.33\sqrt{f_c'}$  MPa). For large values of  $\epsilon_1$ , the cracks will become wide and the magnitude of  $f_1$  will be controlled by the yielding of the reinforcement at the crack and by the ability to transmit shear stresses  $v_c$  across the cracked interface [see Fig. 5(b)]. The shear stress that can be transmitted across the crack is a function of the crack width  $w$  and the aggregate size  $a$  [see Fig. 4(c)], as given by

$$v_c = \frac{2.16\sqrt{f_c'}}{0.34 + \frac{24w}{a + 0.63}} \text{ psi and in.} \quad (5)$$

For MPa and mm units, replace the 2.16 by 0.18 and the 0.63 by 16.



(a) Softening of compressive stress-strain curve due to transverse tensile strain



(b) Average tensile stresses in cracked concrete as a function of  $\epsilon_1$

Fig. 5—Stress-strain relationships for cracked concrete

If the stirrups have reached their yield stress and the crack begins to slip, the average tensile stress in the concrete  $f_t$  is limited to

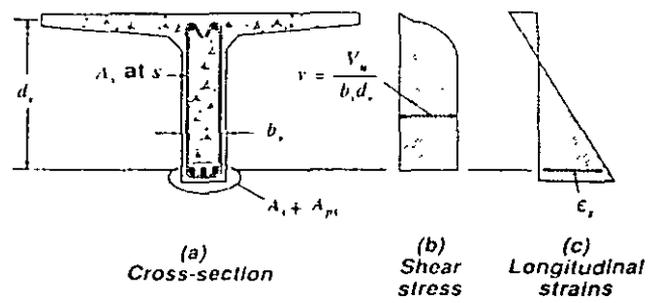
$$f_t = v_{cr} \tan \theta \quad (6)$$

The previous stress-strain relationships, together with equilibrium and compatibility, can be used to predict the load-deformation response of reinforced concrete beams subjected to shear.<sup>11</sup> In addition, these relationships can be used as the basis for nonlinear finite element formulations.<sup>12,13</sup>

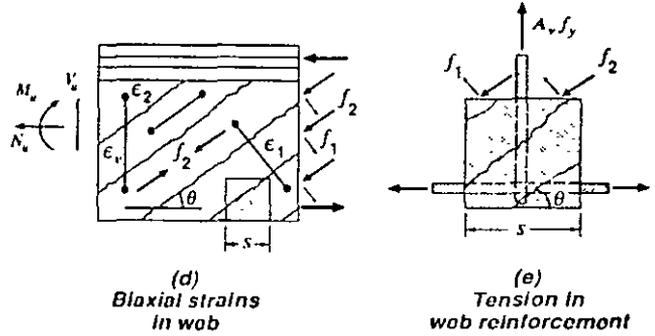
### DESIGN OF STIRRUPS FOR SHEAR

In applying the modified compression field theory to the design of beams, it is appropriate to make a number of simplifying assumptions. As illustrated in Fig. 6, the shear stresses are assumed to be uniform over the effective shear area  $b_v d_v$ . The highest longitudinal strain  $\epsilon_x$  occurring within the web is used to calculate the principal tensile strain  $\epsilon_1$ . For design,  $\epsilon_1$  can be approximated as the strain in the flexural tension reinforcement. The determination of  $\epsilon_x$  for a nonprestressed beam is illustrated in Fig. 7. For a prestressed concrete member, the concrete surrounding the reinforcement will remain in compression until the applied tension exceeds the prestress force  $V_p = f_{ps} A_{ps}$ , where  $f_{ps}$  is the stress in the tendon when the surrounding concrete is at zero stress. In lieu of more accurate calculations,  $f_{ps}$  can be taken as 1/10 times  $f_{ce}$ .

Hence, for design



(a) Cross-section (b) Shear stress (c) Longitudinal strains



(d) Biaxial strains in web (e) Tension in web reinforcement

Fig. 6—Beam subjected to shear, moment, and axial load

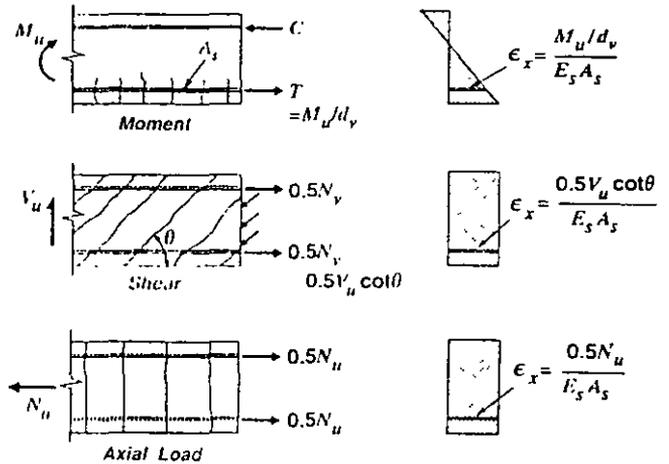


Fig. 7—Determination of strain  $\epsilon_x$  for nonprestressed beam

$$\epsilon_x = \frac{(M_u/d_v) + 0.5N_u + 0.5V_u \cot \theta - A_p f_{ps}}{E_s A_s + E_p A_{ps}} \geq 0 \quad (7)$$

ability, the principal tensile strain  $\epsilon_1$  can be related to the longitudinal strain  $\epsilon_x$ , the direction of the principal compressive stress  $\theta$ , and the magnitude of the principal compressive strain  $\epsilon_2$  in the following manner

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_2 - \epsilon_x) \cot^2 \theta \quad (8)$$

Hence, as the longitudinal strain  $\epsilon_x$  becomes larger and the inclination  $\theta$  of the principal compressive stresses becomes smaller, the "damage indicator"  $\epsilon_1$  becomes larger. The nominal shear strength  $V_n$  of a member can be expressed as

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_t b_v d_v \cot \theta + \frac{A_v f_s}{s} d_v \cot \theta + V_p$$

$$= \beta \sqrt{f'_c} b_v d_v + \frac{A_v f_y}{s} d_v \cot \theta + V_p \quad (9)$$

From the expressions for the average tensile stress in the cracked concrete [Eq. (4) and (6)], the tensile stress factor  $\beta$  can be determined as

$$\beta = \frac{4 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{2.16}{0.3 + \frac{24w}{a + 0.63}} \text{ psi and in} \quad (10)$$

For MPa and mm units, replace the 4 by 0.33, the 2.16 by 0.18, and the 0.63 by 16. The crack width  $w$  is taken as the crack spacing times the principal tensile strain  $\epsilon_1$ .

It can be seen from the previous expressions for  $\beta$  that as the tensile straining of the concrete increases (i.e.,  $\epsilon_1$  increases), the shear that can be resisted by tensile stresses in the concrete  $V_c$  decreases. The value of the principal tensile strain  $\epsilon_1$  will depend on the magnitudes of the longitudinal strain  $\epsilon_x$ , the principal compressive strain  $\epsilon_2$ , and the inclination  $\theta$  of the principal stresses [see Eq. (8)]. Strain  $\epsilon_2$  can be found from Eq. (3). In using this equation, the principal compressive stress  $f_2$  can be conservatively taken as

$$f_2 = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

where

$$v = \frac{V_u - V_p}{b_v d_v} \quad (12)$$

From Eq. (3), (8), and (11),  $\epsilon_1$  can be expressed as

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[ \epsilon_x + 0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v}{f'_c} (\tan \theta + \cot \theta) (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot^2 \theta \quad (13)$$

**Table 1—Values of  $\theta$  and  $\beta$  for members with web reinforcement**

$\frac{v}{f'_c}$		Longitudinal strain $\epsilon_1 \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 0.050$	$\theta$ deg	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	$\beta$	4.88	3.49	2.51	2.23	1.95	1.72
$\leq 0.075$	$\theta$ deg	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	$\beta$	4.88	3.01	2.47	2.16	1.90	1.65
$\leq 0.100$	$\theta$ deg	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	$\beta$	3.26	2.54	2.41	2.09	1.72	1.45
$\leq 0.150$	$\theta$ deg	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	$\beta$	2.55	2.45	2.28	1.93	1.50	1.21
0.200	$\theta$ deg	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	$\beta$	2.45	2.33	2.10	1.58	1.21	1.00
0.50	$\theta$ deg	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	$\beta$	2.30	2.01	1.64	1.40	1.30	1.25

Note: for  $\beta$  values in MPa units divide given values by 12.

To use Eq. (9) to determine the required stirrups, the designer needs to determine appropriate values of  $\theta$  and  $\beta$ . For this purpose, Table 1 gives suitable values of  $\theta$  and  $\beta$  as functions of the longitudinal strain  $\epsilon_1$  and the shear stress level  $v/f'_c$ . While the values in Table 1 were calculated assuming a diagonal crack spacing of 12 in. (305 mm) and a maximum aggregate size of 3/4 in. (19 mm), it is believed that these values are appropriate for the full range of beams containing stirrups.

The  $\theta$  values given in Table 1 have been chosen to insure that the stirrup strain  $\epsilon_s$  is at least equal to 0.002 and to insure that, for highly stressed members, the principal compressive stress  $f_2$  in the concrete does not exceed the crushing strength  $f_{2max}$ . Within the range of values of  $\theta$  that satisfy these requirements, the values given in Table 1 will result in close to the smallest amount of shear reinforcement.

While the values in Table 1 can be applied to a range of values of  $\epsilon_1$  and  $v/f'_c$  (e.g.,  $\theta = 36$  deg and  $\beta = 2.09$  can be used provided that  $\epsilon_1$  is not greater than  $1 \times 10^{-3}$  and  $v/f'_c$  is not greater than 0.10), they were calculated for the upper limits of the range. Linear interpolation between the values given in Table 1 could be used, but it is usually not worth the effort.

At a particular section of a member subjected to  $V_u$ ,  $M_u$ , and  $N_u$ , the required shear strength is determined from

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

where the strength reduction factor  $\phi$  can be taken as 0.85.

The amount of stirrups required at the section can then be found from Eq. (9) as

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c - V_p \quad (15)$$

While this calculation is performed for a particular section, a shear failure caused by yielding of the stirrups involves yielding the reinforcement over a length of beam about  $d_v \cot \theta$  long. Hence, the calculations for one section can be taken as representing a length of beam,  $d_v \cot \theta$  long, with the calculated section being in the middle of this length. Thus, near a support, the first section to be checked is the section  $0.5d_v \cot \theta$  from the face of the support. Near concentrated loads, sections closer than  $0.5d_v \cot \theta$  to the load need not be checked. As a simplification, the term  $0.5d_v \cot \theta$  may be taken as  $d_v$ . Since 1963, the ACI Code has required that at least a minimum area of stirrups be provided whenever  $V_u$  exceeds one-half of the shear strength provided by the concrete. For the design method presented in this paper, it is recommended that a minimum area of stirrups be provided if

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

where the minimum requirement is

$$\frac{A_s f_y}{b_v s} \geq 0.72 \sqrt{f'_c} \text{ psi}$$

For MPa units replace the 0.22 by 0.06

### DESIGN OF LONGITUDINAL REINFORCEMENT

Fig. 8 illustrates the influence of shear on the tensile forces in the longitudinal reinforcement. While the moment is zero at the simple support B, there still needs to be considerable tension in the longitudinal reinforcement near the support. The required tension in the bottom reinforcement at Support B can be determined from the free body diagram in Fig. 8(b) by taking moments about Point C and assuming that the aggregate interlock force in the crack that contributes to  $V_c$  has a negligible moment about Point C. For this nonprestressed beam, the tensile force required at the inner edge of the bearing area is

$$T = \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c \right) \cot \theta \quad (17)$$

Eq. (17) gives the additional tension due to shear. Hence, at a section subjected to a shear  $V_u$ , a moment  $M_u$ , and an axial force  $N_u$ , the longitudinal reinforcement on the flexural tension side of the member must satisfy

$$A_s f_s + A_{ps} f_{ps} \geq \frac{M_u}{\phi d_v} + 0.5 \frac{N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5V_c - V_p \right) \cot \theta \quad (18)$$

At maximum moment locations, the shear force changes sign and hence, the inclination of the diagonal compressive stresses changes. At direct supports and point loads, this change of inclination is associated with a fan-shaped pattern of compressive stresses radiating from the point load or the direct support, as shown in Fig. 8(a). This fanning of the diagonal stresses reduces the tension in the longitudinal reinforcement caused by the shear (i.e., angle  $\theta$  becomes steeper). Due to this effect, tension in the reinforcement does not exceed that due to the maximum moment alone.

### MEMBERS WITHOUT WEB REINFORCEMENT

In evaluating the  $\beta$  factors given in Table 1, it was assumed that the diagonal cracks in webs containing stirrups would be spaced about 12 in. (305 mm) apart. For members not containing web reinforcement, this assumption may be unconservative; hence, it is inappropriate to use the  $\beta$  factors in Table 1 to evaluate the shear strength of members without web reinforcement.

For members with stirrups, the ability of the cracked concrete to transmit shear is primarily governed by the width of the diagonal cracks [see Eq. (10)]. The crack width can be taken as the principal elastic strain  $\epsilon_t$  multiplied by the crack spacing. Hence, for a given value of  $\epsilon_t$ , the shear strength will be a function of the crack spacing, with more widely spaced cracks resulting in lower shear capacities.

Fig. 9 illustrates the assumptions made in this design method concerning the crack spacing. For members without stirrups, the diagonal cracks will become more widely spaced as  $\theta$  approaches zero. The crack spacing when  $\theta = 90$  deg is called  $s_{cr}$  and this spacing is primarily a function of the maximum distance between reinforcing bars or between reinforcing bars and the center of a compression zone.

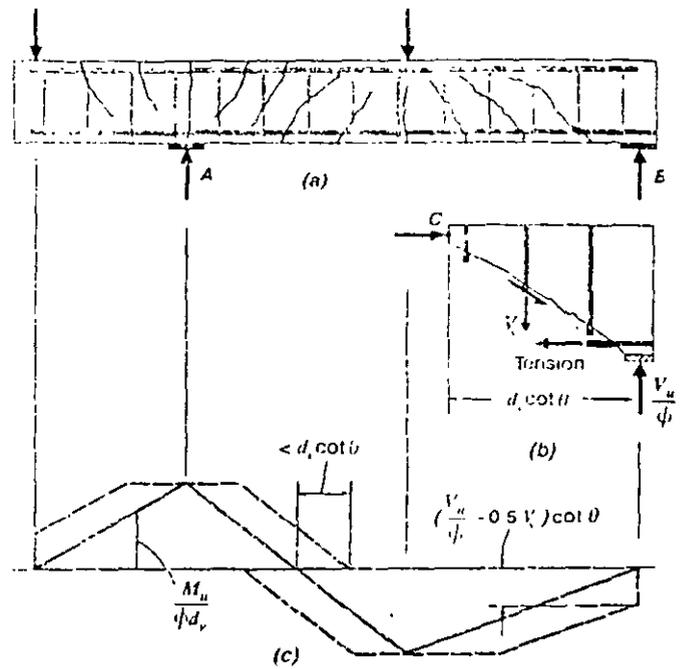


Fig. 8—Influence of shear on forces in longitudinal reinforcement

The factor  $\beta$ , which is the indicator of the ability of the cracked concrete to transmit shear, is a function of  $\theta$ ,  $\epsilon_t$ , and  $s_t$ . For given values of  $\epsilon_t$  and  $s_t$  and a chosen value of  $\theta$ , the factor  $\beta$  can be calculated from Eq. (9), (10), (12), and (13). Table 2 lists the values of  $\theta$  that will result in the highest  $\beta$  values for cracked concrete. The  $\beta$  values in Table 2 were derived assuming that the maximum aggregate size  $a$  was 3/4 in. (19 mm). However, the tabulated values can be used for other aggregate sizes by using an equivalent spacing parameter  $s_{cr}$  [see Eq. (10)] such that

$$s_{cr} = s_t \frac{1.38}{a + 0.63} \quad \text{in.} \quad (19)$$

For mm units, replace the 1.38 by 35 and the 0.63 by 16. For members without well-distributed crack control reinforcement, the crack spacing parameter  $s_t$  will increase as the member size increases. It is apparent from Table 2 that an increase in  $s_t$  results in a decrease in shear capacity.

Convincing evidence of the reduction in shear stress capacity that occurs as members become larger was provided by an extensive experimental program conducted in Japan by Shioya, et al.<sup>14,15</sup> In the program, lightly reinforced beams without stirrups and having effective depth  $d$  ranging from 4 to 118 in. (100 to 3000 mm) were uniformly loaded until failure. Fig. 10 compares the observed failure shear stresses for one series of these beams with the failure shears predicted by both the 1995 ACI Code expressions and the general method. It can be seen that the largest beam in this series failed at a shear stress less than one-half of the failure shear predicted by the 1995 ACI Code equations.

sion where the ACI equations can be very unconservative. On the other hand, for uniformly loaded members, members with inclined prestressing tendons, and members subjected to high axial tension, the ACI equations can be extremely conservative.

### CONCLUSIONS

It is believed that the method presented in this paper is "integrated," "simplified," and gives "a physical significance" to the parameters being calculated. For example, the shear carried by tensile stresses in the concrete  $V_t$  is made a function of the longitudinal straining in the web of the member  $\epsilon_1$ . As  $\epsilon_1$  increases,  $V_t$  decreases. Increasing the magnitude of the moment or applying axial tension increases  $\epsilon_1$  and hence, decreases  $V_t$ . Applying axial compression or prestress or increasing the area of longitudinal reinforcement decreases  $\epsilon_1$  and hence, increases  $V_t$ .

A key feature of the new procedures is that they explicitly consider the influence of shear upon the longitudinal reinforcement. It is believed that if engineers understand that shear causes tension in the longitudinal reinforcement, they will avoid some of the more serious detailing errors that are sometimes made in current practice.

### ACKNOWLEDGMENTS

The development of the modified compression field theory was made possible by a series of grants from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and by support from the Networks of Centers of Excellence Program funded by the Minister of State, Science, and Technology, Canada. The authors would like to express their gratitude to these organizations for their support. The challenge of developing practical and comprehensive shear design provisions for the National Cooperative Highway Research Program's project, "Development of Bridge Specifications" was the catalyst for the formulation of these proposals. The authors are also indebted to Dr. Khaldoun N. Rahal for his valuable assistance in performing the many calculations required to prepare Tables 1, 2, and 3.

### NOTATION

- $A_{ps}$  = area of prestressed longitudinal reinforcement on flexural tension side of member
- $A_s$  = area of longitudinal reinforcing bars on flexural tension side of member
- $A_v$  = area of shear reinforcement within distance  $s$
- $a$  = maximum aggregate size
- $b_v$  = effective web width taken as minimum web width within effective shear depth  $d_v$
- $d$  = distance from extreme compression fiber to centroid of longitudinal tension reinforcement
- $d_v$  = effective shear depth taken as flexural lever arm which need not be taken less than  $0.9d$ . For prestressed members,  $d_v$  need not be taken less than  $0.8h$  in determining  $d_v$
- $E_p$  = modulus of elasticity of prestressing tendons
- $E_s$  = modulus of elasticity of reinforcing bars
- $f_c'$  = specified compressive strength of concrete
- $f_{cr}$  = cracking strength of concrete
- $f_{ps}$  = stress in prestressed tendon when surrounding concrete is at zero stress
- $f_{pe}$  = effective stress in prestressed tendon after all losses
- $f_t$  = residual tensile stress in cracked concrete
- $f_2$  = principal compressive stress in concrete
- $f_{2max}$  = crushing strength of diagonally cracked concrete
- $h$  = overall height of member
- $M_u$  = factored moment taken as positive
- $N_u$  = factored axial load taken as positive for tension, negative for compression
- $v$  = spacing of shear reinforcement
- $v_c$  = crack spacing parameter for members without stirrups
- $v_e$  = equivalent value of  $v_c$  for beams where aggregate size is not  $\frac{1}{4}h$
- $V_t$  = shear strength provided by tensile stresses in cracked concrete

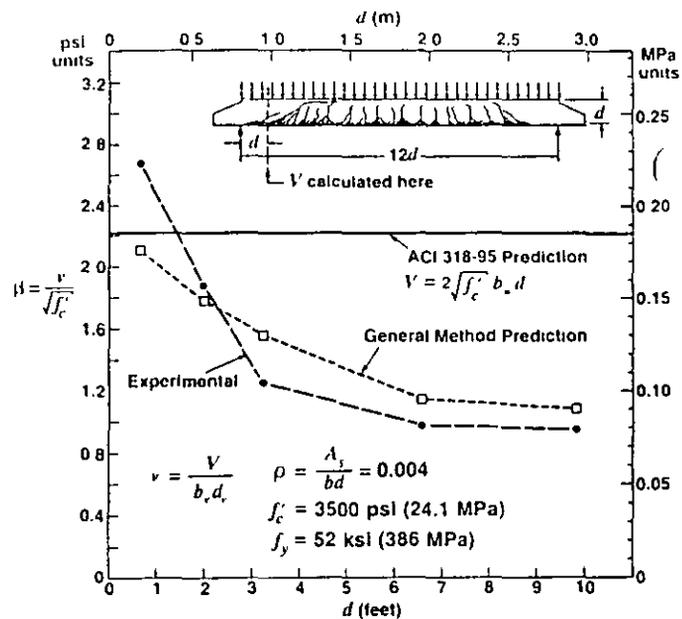


Fig. 10—Influence of member size and maximum aggregate size on shear stresses at failure

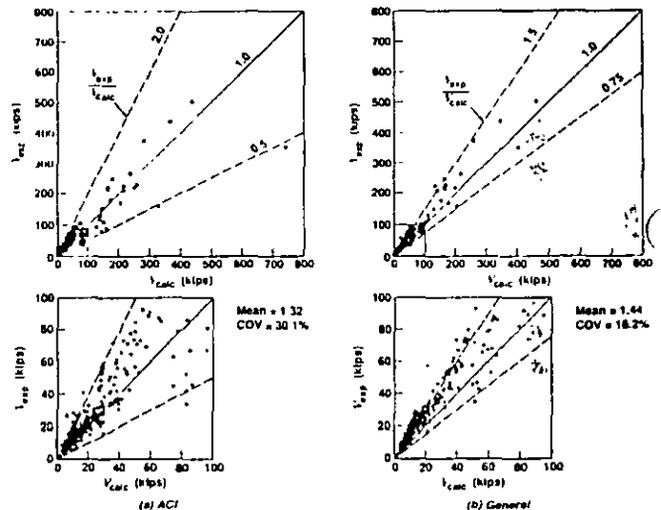


Fig. 11—Correlation of experimental and predicted failure shears for 528 tests

- $V_u$  = nominal shear strength
- $V_p$  = vertical component of prestressing
- $V_s$  = shear strength provided by stirrups
- $V_u$  = factored shear force taken as positive
- $\beta$  = tensile stress factor indicating ability of cracked concrete to transmit shear
- $\epsilon_1$  = principal tensile strain in cracked concrete
- $\epsilon_2$  = principal compressive strain in cracked concrete
- $\epsilon_1'$  = strain in concrete when  $f_c'$  reaches  $f_{cr}$
- $\theta$  = angle of inclination of principal compressive stress in cracked concrete with respect to longitudinal axis of member
- $\phi$  = strength reduction factor

### REFERENCES

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary ACI 318 R-95," American Concrete Institute, Detroit, 1995, 369 pp.
2. ACI/ASCE Committee 426, "Shear Strength of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V. 99, No. ST6, June 1973, pp. 1091-1187.
3. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced

## PROPOSED SHEAR DESIGN PROCEDURE

The general equations of the modified compression field theory, which are intended to account for the complex behavior of diagonally cracked concrete, are more suited for computer solutions (e.g., see program RESPONSE) than for hand calculations. With the  $\theta$  and  $\beta$  tables, the method becomes simple enough to solve by hand. For design, the steps are as follows:

Step 1—At the design section, calculate the shear stress  $v$  from Eq. (12).

Step 2—Calculate the longitudinal strain  $\epsilon_r$  from Eq. (7).

Step 3—For members with web reinforcement, choose the values of  $\theta$  and  $\beta$  from Table 1. For members without web reinforcement, choose the values of  $\theta$  and  $\beta$  from Table 2.

Step 4—For members without web reinforcement, use Eq. (9) to determine the nominal strength. For members with web reinforcement, use Eq. (9) to determine the required amount of web reinforcement.

Step 5—Use Eq. (18) to check the capacity of the longitudinal reinforcement.

## EXPERIMENTAL VERIFICATION

The ACI Code shear design expressions were obtained by first categorizing beams and columns into the following groups: nonprestressed members subjected to shear and flexure only; nonprestressed members subjected to axial compression; nonprestressed members subjected to axial tension; and prestressed members.

For each of the previous groups, an empirical equation was developed to provide a good fit to the available experimental data. Most of the equations were derived in the 1962 ACI/ASCE Shear Committee report<sup>16</sup> using the data available at that time:

In contrast, the shear design method in this paper was derived from the modified-compression field theory that is based on equilibrium, compatibility, and the stress-strain characteristics of cracked reinforced concrete. In this fundamental approach, no fitting factors were employed to match the predictions to available beam tests. Thus, it is of considerable interest to compare the accuracy of the equations resulting from this new method with the accuracy of the traditional ACI equations.

In Fig. 11 the experimentally determined failure shears from 528 tests were compared to the failure shears predicted by both the ACI equations and the method presented in this paper. These tests encompass a wide range of cross-sectional shapes, sizes, material properties, and types of loading, as summarized in Table 3. The specimens selected were those that failed primarily due to high shear stresses. Specimens with short shear spans were excluded because such members should be designed using either strut-and-tie models<sup>12,17,18</sup> or the ACI deep-beam equations,<sup>1</sup> rather than the sectional design approaches described in this paper.

As seen in Fig. 11, the proposed general method predicts the failure shears more accurately than the equations of the current ACI Code. Table 3 indicates situations where the ACI shear design method can be very inaccurate. These situations include large, lightly reinforced members and members subjected to high axial compression.

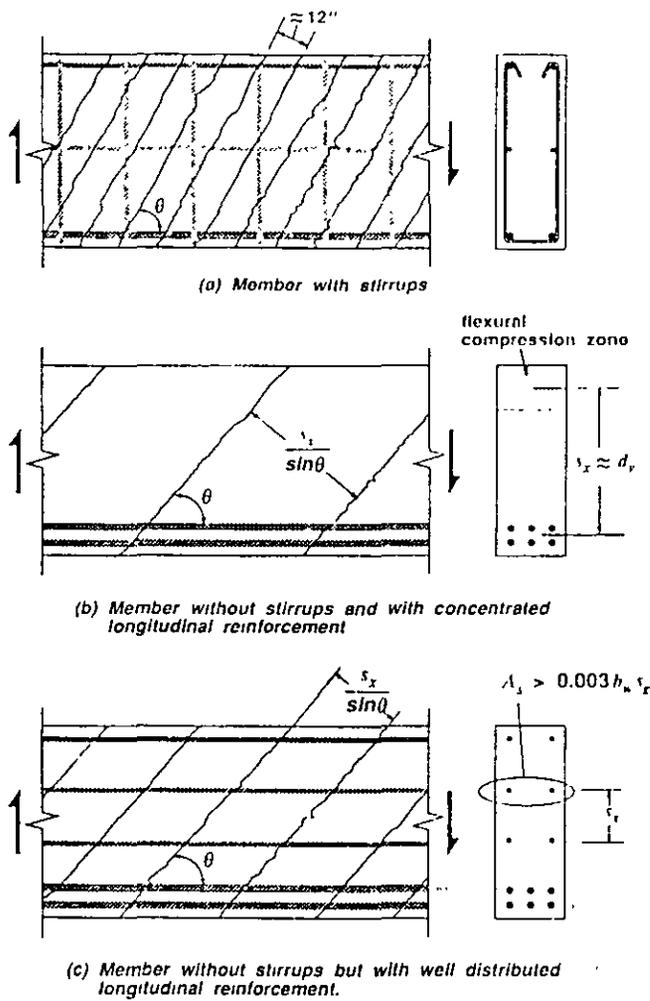


Fig. 9—Influence of reinforcement on spacing of diagonal cracks

Table 2—Values of  $\theta$  and  $\beta$  for members without web reinforcement

$s_x$		Longitudinal strain $\epsilon_r \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 5$ in.	$\theta$ deg	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0 deg	38.0 deg
	$\beta$	4.94	3.78	3.19	2.56	2.19	1.93
$\leq 10$ in.	$\theta$ deg	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0 deg
	$\beta$	4.65	3.45	2.83	2.19	1.87	1.65
$\leq 15$ in.	$\theta$ deg	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0 deg
	$\beta$	4.47	3.21	2.59	1.98	1.65	1.45
$\leq 25$ in.	$\theta$ deg	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0 deg
	$\beta$	4.19	2.85	2.26	1.69	1.40	1.18
$\leq 50$ in.	$\theta$ deg	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0 deg
	$\beta$	3.83	2.39	1.82	1.27	1.00	0.83
$\leq 100$ in.	$\theta$ deg	42.0	55.0	62.0	69.0	72.0	75.0 deg
	$\beta$	3.47	1.88	1.35	0.87	0.65	0.52

Note. For  $\beta$  values in MPa units divide given values by 12

Table 3—Experimental verification

Reference	Date	Number and specimen type	Loading	Depth, in.	Concrete, psi	Stirrups $\frac{A_s}{b_s s}$ , psi	Experiment/predicted				
							ACI		General		
							Mean	Coefficient of variation, percent	Mean	Coefficient of variation, percent	
Kash <sup>17</sup>	1979	58 rectangular beams	2 point loads on simple span	6 to 38	2230 to 5320	0	1.23	14.9	1.35	8.0	1
Kam <sup>19</sup>	1979	95 T-beams	2 point loads on simple span	12	2510 to 5550	0	1.60	11.5	1.63	10.1	2
Shioya <sup>15</sup>	1989	13 rectangular beams	Uniformly distributed load on simple span	5 to 124	2860 to 4130	0	0.86	42.9	0.98	25.1	3
Gupta <sup>20</sup>	1993	10 rectangular beams	End loads applying shear and compression	12	8700 to 9120	0 to 170	0.85	27.3	1.13	16.8	4
Adebar and Collins <sup>21</sup>	1996	7 rectangular columns	End loads applying shear and tension	12	6700 to 8500	0	2.75	51.4	0.90	12.8	5
Gregor and Collins <sup>22</sup>	1995	6 prestressed bridge girders	Uniformly distributed load on continuous span	36	6500 to 8400 psi	370 to 590	1.06	17.5	1.37	12.7	6
Collins and Vegh <sup>23</sup>	1993	14 rectangular beams	Point loads on continuous span	11 to 36	7250 to 13,500	0 to 120	0.84	18.2	1.07	15.9	7
Griezic, Cook, and Mitchell <sup>24</sup>	1993	4 T-beams	Uniformly distributed load on simple span	16	5800	225 to 150	1.34	12.2	1.33	12.6	8
Haddadin, Hong, and Mattock <sup>25</sup>	1971	59 T-beams	Point loads on beams with tension or compression	13.5	1950 to 6500	0 to 700	1.61	32.3	1.35	18.7	9
Elzanaty, Nilson, and Slate <sup>26</sup>	1986	33 prestressed I-beams	2 point loads on simple span	14 and 18	6000 to 11,400	0 to 700	1.07	11.6	1.35	9.5	10
Pasley, Gogoi, Darwin, and McCabe <sup>27</sup>	1990	13 T-beams	Point loads on continuous span	18	4500	0 to 82	0.99	12.6	1.27	7.0	11
Mattock <sup>28</sup>	1969	31 rectangular beams	Point loads on beams with tension or compression	12	2200 to 8000	0	1.56	24.7	1.35	11.0	12
Bennett and Balasooriya <sup>29</sup>	1971	20 prestressed I-beams	2 point loads on simple span	10 and 18	4100 to 6460	630 to 1990	1.71	19.4	1.46	18.2	13
Bennett and Debarkey <sup>29</sup>	1974	22 prestressed I-beams	Point load on simple span	13	6000 to 10,500	103 to 5600	1.15	9.9	1.54	10.9	14
Moody, Viest, Elstner, and Hognestad <sup>31</sup>	1954	12 rectangular beams	Point load on simple span	12	880 to 4600	0	1.27	14.2	1.27	13.5	15
MacGregor <sup>32</sup>	1960	33 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2400 to 7000	0 to 470	1.09	25.8	1.54	22.5	16
Oleson, Sozen, and Siess <sup>33</sup>	1967	27 prestressed I-beams	Point load on simple span	12	2450 to 6700	0 to 350	1.06	18.8	1.59	15.3	17
Roller and Russell <sup>31</sup>	1990	10 rectangular beams	Point load on simple span	25 to 34	10,500 to 18,170	0 to 1176	1.05	20.0	1.19	13.5	18
Shahawy, Robinson, and Batchelor <sup>35</sup>	1993	39 full-size prestressed bridge girders	Point load on simple span	44	6000	165 to 1670	1.09	19.5	1.13	15.8	19
Yoon, Cook, and Mitchell <sup>36</sup>	1996	12 rectangular beams	Point load on simple span	30	5220 to 12,615	0 to 145	1.14	13.8	1.07	10.3	20
		528 beams				Average	1.32	33.7	1.39	19.7	

Concrete," American Concrete Institute, Detroit, 1963, 144 pp.  
 18. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 pp.  
 19. Elstner, R. C., and Hognestad, E., "Laboratory Investigation of Rigid Frame Failure," ACI JOURNAL, Proceedings V. 53, No. 1, Jan.

1957, pp. 637-668.  
 20. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," ACI Structural Journal, V. 83, No. 2, Mar.-Apr. 1986, pp. 219-231.  
 21. Collins, M. P., and Mitchell, D., Prestressed Concrete Structures,

Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991, 766 pp

8. MTO, OHBDC Committee, *Ontario Highway Bridge Design Code*, 3rd Edition, Ontario Ministry of Transportation, Downsview, 1991, 370 pp

9. CSA Committee A23.3, "Design of Concrete Structures Structures (Design) - A National Standard of Canada - Canadian Standards Association Rexdale, Dec. 1994, 199 pp

10. "AASHTO LRFD Bridge Design Specifications and Commentary," First Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1994, 1091 pp

11. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory," *ACI Structural Journal*, V. 85, No. 3, May-June 1988, pp 258-268.

12. Cook, W. D., and Mitchell, D., "Studies of Disturbed Regions near Discontinuities in Reinforced Concrete Members," *ACI Structural Journal*, V 85, No. 2, Mar.-Apr. 1988, pp. 206-216.

13. Vecchio, F. J., "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes," *ACI Structural Journal*, V. 86, No. 1, Jan.-Feb 1989, pp 26-35

14. Shiota, T., Iguro, M., Nojiri, Y., Akiyama, H.; and Okada, T., "Shear Strength of Large Reinforced Concrete Beams," *Fracture Mechanics Application to Concrete*, SP-118, American Concrete Institute, Detroit, 1989, 309 pp.

15. Shiota, T., "Shear Properties of Large Reinforced Concrete Member," *Special Report of Institute of Technology, Shimizu Corporation*, No 25, Feb. 1989, 198 pp.

16. ACI-ASCE Committee 326, "Shear and Diagonal Tension," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 59, Jan., Feb., and Mar. 1962, pp. 1-30, 277-344, and 352-396

17. Collins, M. P., and Mitchell, D., "Rational Approach to Shear Design—The 1984 Canadian Code Provisions," *ACI Structural Journal*, V 83, No. 6, Nov.-Dec. 1986, pp. 925-933.

18. Schlaich, J.; Schäfer, K.; and Jennewein, M., "Towards a Consistent Design of Reinforced Concrete Structures," *PCI Journal*, V. 32, No. 3, May-June 1987, pp. 74-150.

19. Kani, M. W.; Huggins, M. W.; and Wittkopp, R. R., *Kani on Shear in Reinforced Concrete*, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, 1979, 225 pp.

20. Gupta, P., and Collins, M. P., "Behavior of Reinforced Concrete Members Subjected to Shear and Compression," MASC thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1993.

21. Adelbar, P., and Collins, M. P., "Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement," *Canadian Journal of Civil Engineering*, V. 23, No. 1, Feb. 1996, pp. 30-41.

22. Gregor, T., and Collins, M. P., "Tests of Large Partially Prestressed

Concrete Girders," *ACI Structural Journal* (submitted for publication).

23. Collins, M. P.; Mitchell, D., and MacGregor, J. G., "Structural Design Considerations for High-Strength Concrete," *Concrete International* May 1993, pp 27-34

24. Guezie, A.; Cook, W. D.; and Mitchell, D., "Tests to Determine Performance of Deformed Welded Wire Fabric Stirrups," *ACI Structural Journal*, V 91, No. 2, Mar.-Apr. 1994, pp. 211-220

25. Haddadin, M. J., Hong, S. T.; and Mattock, A. H., "Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 97, No. ST9, Sept. 1971, pp 2277-2297.

26. Elzanaty, A. H.; Nilson, A. H.; and Slate, F. O., "Shear Capacity of Prestressed Concrete Beams Using High-Strength Concrete," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 3, May-June 1986, pp. 359-368.

27. Pasley, G. P.; Gogoi, S.; Darwin, D.; and McCabe, S. L., "Shear Strength of Continuous Lightly Reinforced T-Beams," *SM Report No. 26*, University of Kansas, Dec. 1990, 151 pp.

28. Mattock, A. H., "Diagonal Tension Cracking in Concrete Beams with Axial Forces," *Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, V. 95, No. ST9, Sept. 1969, pp 1887-1990

29. Bennett, E. W., and Balasooriya, B. M. A., "Shear Strength of Prestressed Beams with Thin Webs Failing in Inclined Compression," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 68, No. 3, Mar. 1971, pp. 204-212.

30. Bennett, E. W., and Debaiky, S. Y., "High-Strength Steel as Shear Reinforcement in Prestressed Concrete Beams," *Shear in Reinforced Concrete*, SP-42, American Concrete Institute, 1974, pp. 231-248.

31. Moody, K. G.; Viest, M.; Elstner, R. C.; and Hognestad, E., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams: Part I—Tests of Simple Beams," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 26, No. 4, Dec. 1954, pp 317-332.

32. MacGregor, J. G., "Strength and Behavior of Prestressed Concrete Beams with Web Reinforcement," PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, 1960, 295 pp.

33. Oleson, S. Ø.; Sozen, M. A.; and Siess, C. P., "Investigation of Prestressed Reinforced Concrete for Highway Bridges: Part IV—Strength in Shear of Beams with Web Reinforcement," *Bulletin No. 493*, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, 1967

34. Roller, J. J., and Russell, H. G., "Shear Strength of High-Strength Concrete Beams with Web Reinforcement," *ACI Structural Journal*, V. 8, No. 2, Mar.-Apr. 1990, pp. 191-198.

35. Shahawy, M.; Robinson, B.; and Batchelor, B. deV., "Investigation of Shear Strength of Prestressed Concrete AASHTO Type II Girders," Structures Research Center, Florida Dept. of Transportation, Jan. 1993, 182 pp.

36. Yoon, Y. S.; Cook, W. D.; and Mitchell, D., "Minimum Shear Reinforcement in Normal, Medium, and High-Strength Concrete Beams," *ACI Structural Journal* (accepted for publication).

# UN MÉTODO GENERAL DE DISEÑO POR CORTANTE

LAS ESPECIFICACIONES PARA DISEÑO POR CORTANTE DEL CÓDIGO ACI 318-95 CONSISTEN DE ALREDEDOR DE 43 EC. EMPÍRICAS PARA DIFERENTES TIPOS DE MIEMBROS Y DE CARGAS, ALGUNAS SE ILUSTRAN EN LA FIG. 1.

EN 1973, EL COMITÉ DE CORTANTE ACI-ASCE EXPRESÓ LA ESPERANZA QUE ESAS "REGULACIONES DE DISEÑO PARA LA RESISTENCIA A CORTANTE PUERAN SER INTEGRADAS, SIMPLIFICADAS Y DADO UN SIGNIFICADO FÍSICO". COMO LO MUESTRA EL INCREMENTO EN EL NÚMERO DE EC. PARA DISEÑO POR CORTANTE DEL ACI (FIG. 2), EL CÓDIGO NO HA CUMPLIDO CON ESTA META. ES INTERESANTE NOTAR QUE, ANTES DE 1963 EL PROCEDIMIENTO DE DISEÑO POR CORTANTE DEL ACI FUE TAN SIMPLE QUE SOLO SE REQUERÍAN CINCO ECUACIONES.

LA MAYORÍA DE LAS EC. DADAS EN LA FIG. 1 FUERON INTRODUCIDAS EN LAS EDICIONES DEL CÓDIGO ACI DE 1963 Y 1971.

ESTAS EC. FUERON DESARROLLADAS EN EL PERÍODO SIGUIENTE A LA ACUMULACIÓN

DE FALLAS POR CORTANTE HECHAS POR LA FZA. ATRÁSA HASTA 1955, Y DEPENDIENDO DEL CONCEPTO TRADICIONAL DE SUMAR LA CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO  $V_c$  A LA CONTRIBUCIÓN DEL ACERO  $V_s$  CALCULADA SOBRE LA BASE DE LA EC. DE LA FIG. 1 PARA 45°.

DESDE 1971 SE HA REALIZADO UN INTENSO ESFUERZO DE INVESTIGACIÓN ENCAMINADO A PERFECCIONAR LOS MÉTODOS DE DISEÑO POR CORTANTE (FIG. 3). LA INVESTIGACIÓN MUESTRA QUE, EN GENERAL, EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA COMPRESIÓN EN EL CONCRETO NO ES A 45° Y QUE LAS EC. BASADAS SOBRE UN ÁNGULO ~~RELACIONADO~~ VARIABLE DE ALGUNAS PROPORCIONES UNAS BASES MÁS REALISTAS PARA DISEÑAR POR CORTANTE. ADEMÁS, LOS ENSAYES DE PRUEBAS DE CONCRETO SUJETOS A CORTANTE PUERON MEJORAR EL ENTENDIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS ESFUZO-DEF. DEL CONCRETO AGRIETADO DIAGNÓSTICAMENTE. ESTAS REVISIONES ESFUZO-DEF. HICIERON POSIBLE DESARROLLAR UN MODELO ANALÍTICO, LLAMADO LA TEORÍA DEL CAMPO DE COMPRESIÓN, QUE RESULTÓ

capaz de predecir con exactitud la respuesta del concreto reforzado sujeto a corte.

El objetivo de este artículo es presentar en forma breve un método general de diseño por corte basado en la teoría modificada del campo de presión. Este método de diseño, introducido recientemente por Collins y Mitchell, ha sido adoptado por el código de diseño de puente de autopistas en Ontario, el código de la Asociación Canadense de Diseño de Concreto y las especificaciones ~~LRFD~~ <sup>LRFD</sup> ~~AASHTO~~ <sup>AASHTO</sup>.

El método se resume en la Fig. 1.  
Respuesta a Corte del Concreto Agrietado.

Los ensayos de paneles de concreto sujetos a corte puro (Fig. 4) muestran que aun después del agrietamiento, existen <sup>esfuerzos</sup> ~~esfuerzos~~ de tensión en el concreto y que estos esfuerzos pueden incrementarse en forma significativa la capacidad del concreto reforzado para resistir esfuerzos cortantes.

El concreto reforzado transmite cargas en forma relativamente compleja incluyendo el cierre o la abertura de grietas pre-existentes, la formación de grietas nuevas, la transferencia de corte en las superficies de las grietas y la variación significativa de los esfuerzos en el refuerzo debido a la adherencia que ocurre siguiendo las secciones agrietadas. El modelo del campo de compresión modificado intenta capturar las características esenciales de este comportamiento sin considerar todos los detalles. El patrón de agrietamiento se idealiza como una serie de grietas paralelas todas formando un ángulo  $\theta$  con la dirección longitudinal. En lugar de considerar la variación de esfuerzos compleja en el concreto agrietado, solo se considera el estado de esfuerzo promedio y el estado de esfuerzo en una grieta (Fig. 4b y 4c). Como estos dos estados de esfuerzo son equivalentes estáticamente, la pérdida de esfuerzos de tensión en el

CONCRETO EN LA GRIETA DEBE SER SUSTITUIDO POR UN INCREMENTO EN LOS ESFUZOS. DE TENSIÓN EN EL ACERO O, DESPUES DE LA FURMIS DE ALGUN REFZO. EN LA GRIETA POR ESFUZOS. CORTANTES SOBRE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA. EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANSMITIR A TRAVES DE LA SERA FUNCION DEL ANCHO DE LA GRIETA. NOTAR QUE EL ESFUZO. CORTANTE SOBRE LA GRIETA IMPLICA QUE LA DIRECCION DE ESFUZOS. PRINCIPALES SOBRE LA GRIETA CAMBIA DE LOCALIZACION.

LA DEFORMACION UNITARIA <sup>promedio</sup> PRINCIPAL DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  EN EL CONCRETO SE USA COMO UN "INDICADOR DE DAÑO" QUE CONTROLA AL ESFUZO. PROMEDIO DE TENSIÓN  $f_1$  EN EL CONCRETO AGRIETADO, LA CAPACIDAD DEL CONCRETO, AGRIETADO DIAGONALMENTE PARA TOMAR ESFUZOS. DE COMPRESIÓN  $f_2$  Y ESFUZO. CORTANTE  $\tau_c$ ; QUE PUEDE TRANSMITIRSE A TRAVES DE UNA GRIETA

EL ESFUZO. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN EN EL CONCRETO  $f_2$  ESTA RELACIONADO A LA DEFORMACION PRINCIPAL DE COMPRESIÓN

$\epsilon_2$  Y A LA DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  EN LA FORMA SIGUIENTE (FIG. 5a):

$$f_2 = f_{2max} \left[ \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_c'} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_c'} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon_c') \leq f_c' \quad (2)$$

DE LA EC. (1), LA DEF. UNITARIA DE COMPRESIÓN PARA LA PORCION CARGADA DE LA REL. ESFUZO. - DEF. ES:

$$\epsilon_2 = -0.002 (1 - \sqrt{1 - f_2 / f_{2max}}) \quad (3)$$

DOnde SE TOMO  $\epsilon_c' = 0.002$   
 DESPUES DEL AGRIETAMIENTO, EL ESFUZO. PRINCIPAL DE TENSIÓN EN EL CONCRETO  $f_1$  ESTA RELACIONADO A LA DEF. PRINCIPAL DE TENSIÓN  $\epsilon_1$  (FIG. 5b) COMO SIGUE:

$$f_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} \quad (4)$$

EL ESFUZO. DE AGRIETAMIENTO PUEDE TOMARSE COMO  $1.5 \sqrt{f_c'}$  ( $0.33 \sqrt{f_c'}$  MPa). PARA VALORES GRANDES DE  $\epsilon_1$ , LAS GRIETAS SON ANCHAS Y LA MAGNITUD DE  $f_1$  ESTO CONTROLADA POR LA FRECUENCIA DEL ACERO EN LA GRIETA Y LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR ESFUZOS. CORTANTES  $\tau_c$ ; A TRAVES DE LA SUPERFICIE DE LA GRIETA (FIG. 5b). EL ESFUZO. CORTANTE QUE SE PUEDE TRANSMITIR

MITIR A TRAVÉS DE LA GRIETA ES FUNCIÓN DEL ANCHO  $w$  DE LA GRIETA Y DEL TAMAÑO  $a$  DEL AGREGADO (FIG 4c) DADO POR:

$$\sigma_{ci} = \frac{2.16 \sqrt{f_c'}}{0.3 + \frac{24w}{a + 0.63}}$$

PARA MPa Y MM, SUSTITUIR 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16.

SI LOS ESTRIBOS ALCANZAN SU ESFUZO DE FLUENCIA Y LA GRIETA SE DESLIZA, EL ESFUZO PROMEDIO DE TENSION EN EL CONCRETO  $f_1$  ESTÁ LIMITADO A:

$$f_1 = \sigma_{ci} \tan \theta$$

LAS RELACIONES ANTERIORES ESFUZO-DEF. JUNTO CON EL EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD, SE PUEDE USAR PARA PREDECIR LA RESPUESTA CARGA-DEF. DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A CORTANTE. ASÍ, ESTAS RELACIONES SE PUEDEN USAR COMO LA BASE PARA LA FORMULACIÓN NO LINEAL DE ELEMENTOS FINITOS.

DISEÑO POR CORTANTE DE LOS ESTRIBOS  
EN LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA MODIFICADA DEL CAMPO DE COMPRESIÓN AL DISEÑO DE VIGAS, ES APROPIADO HACER UN NÚ-

MERO DE SUPOSICIONES SIMPLIFICADORAS.

(5) COMO SE ILUSTRÓ EN LA FIG. 6, SE SUPONE QUE LOS ESFUZOS CORTANTES SON UNIFORMES SOBRE EL AREA EFECTIVA DE CORTANTE  $b_w d_w$  LA DEF. LONGITUDINAL MAYOR  $\epsilon_x$  QUE OCURRE

DENTRO DEL ALMA SE USA PARA CALCULAR LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon_1$ . PARA DISEÑO,  $\epsilon_x$  SE PUEDE APROXIMAR COMO LA DEF. EN EL ACERO DE TENSION POR FLEXION. LA DETERMINACION DE  $\epsilon_x$  PARA VIGAS NO PRESTAZADAS SE ILUSTRÓ EN LA FIG. 7; PARA UNA PRESTAZADA, EL CONCRETO QUE RODEA AL REFZO.

PERMANECE EN COMPRESION HASTA QUE LA TENSION APLICADA EXCEDE LA FZS. DE RESFZO,  $f_{psfpo}$ , DONDE  $f_{po}$  ES EL ESFUZO EN EL TENDON CUANDO EL ESFUZO EN EL CONCRETO QUE LO RODEA ES CERO. EN LUGAR DE UN CALCULO MAS EXACTO,  $f_{po}$  SE PUEDE TOMAR IGUAL A  $f_{ps}$ . ENTONCES, PARA DISEÑO:

$$\epsilon_x = \frac{(f_{ps}/E_s + \epsilon_{ps}) + 0.5 \sqrt{f_c'} \cot \theta}{E_s + E_p} \geq 0 \quad (7)$$

(CON BASE EN LA COMPATIBILIDAD, LA DEF. PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon_1$  PUEDE RELACIONARSE A LA DEF. LONG.  $\epsilon_x$ , LA DIRECCION DEL ESFUZO PRINCIPAL  $\theta$  Y LA MAGNITUD DE LA

DEF. PRINCIPAL DE COMPRESIÓN  $\epsilon_2$  COMO SIGUE:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_z) \cot^2 \theta \quad (8)$$

Por tanto, como  $\epsilon_x$  llega a ser grande y  $\theta$  pequeño, el "INDICADOR DE DAÑO"  $\epsilon_1$  llega a ser grande. La resistencia nominal a compresión  $V_n$  de un miembro se puede expresar como:

$$V_n = V_c + V_s + V_p = f_c b_w d_v \cot \theta + \frac{A_s f_y d_v}{s} \cot \theta + V_p = \beta (0.27 \sqrt{f_c'}) b_w d_v + \frac{A_s f_y d_v}{s} \cot \theta + V_p \quad (9)$$

DE LAS EXPRESIONES PARA EL ESFUERZO. CONSTANTE PROMEDIO EN EL CONCRETO AGRIETADO (EC. (4) Y (6)), EL FACTOR DE ESFUERZO DE TENSION  $\beta$  SE PUEDE DETERMINAR COMO:

$$\beta = \frac{0.33 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} \leq \frac{0.18}{0.3 + \frac{410}{0.16}} \quad (10)$$

PARA MPa Y MM, SUSTITUIR 4 POR 0.33, 2.16 POR 0.18 Y 0.63 POR 16. EL ANCHO DE GRIETA  $w$  SE TOMA COMO EL ESPACIAMIENTO ENTRE GRIETAS MULTIPLICADO POR  $\epsilon_1$ . SE PUEDE VER DE LAS EXPRESIONES

PARA  $\beta$  QUE A MEDIDA QUE LA DEF. POR TENSION CREE ( $\epsilon_1$  CREE), EL ESFUERZO

CONSTANTE QUE PUEDE SER RESISTIDO POR ESFUERZO DE TENSION EN EL CONCRETO  $V_c$  SE REDUCE. EL VALOR DE  $\epsilon_1$  DEPENDERÁ DE LAS MAGNITUDES DE  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_z$  Y  $\theta$  (FIG. 8). LA DEF. UNITARIA  $\epsilon_z$  SE PUEDE HALLAR DE LA EC. (3). USANDO ESTA EC., EL ESFUERZO PRINCIPAL DE COMPRESIÓN  $f_2$  SE PUEDE TALLAR CONSERVADORAMENTE COMO:

$$f_2 = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (11)$$

$$v = \frac{V_n - V_p}{b_w d_v} \quad (12)$$

DE LAS EC (3), (8) Y (11),  $\epsilon_1$  PUEDE EXPRESARSE COMO:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \left[ \epsilon_x + 0.002 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v (\tan \theta + \cot \theta)}{f_c} (0.8 + 170 \epsilon_1)} \right) \right] \cot^2 \theta \quad (13)$$

PARA DETERMINAR LOS ESTREBOS REQUERIDOS, EL DISEÑADOR NECESITA DETERMINAR LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  PARA CUMPLIR LA EC. (9). CON ESTE PROPOSITO, LA TABLA 1 DA LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  EN FUNCION DE  $\epsilon_x$  Y EL NIVEL DEL ESFUERZO CONSTANTE  $v/f_c$ . LOS VALORES DE LA TABLA 1 SE CALCULARON SUPONIENDO UN ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS DIAGONALES

DE 12" (30.5 cm) y tamaño máximo DE AGREGADO DE 3/4" (19 mm), SE CREE QUE ESTOS VALORES SON APROPIADOS PARA EL RANGO TOTAL DE VIGAS CON ESTRIBOS.

LOS VALORES DE  $\theta$  DADOS EN LA TABLA SE HAN SELECCIONADO PARA ASEGURAR QUE LA DEF. DEL ESTRIBO  $\epsilon_1$  ES AL MENOS IGUAL A 0.002 Y PARA ASEGURAR QUE <sup>PARA</sup> LOS MIEMBROS ACTUAMENTE ESFUERZADOS, EL ESFUZO PRINCIPAL DE COMPRESION  $f_2$  EN EL CONCRETO NO EXCEDE A LA RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO  $f_{2max}$ . DENTRO DEL RANGO DE VALORES DE  $\theta$  QUE SATISFACEN ESTOS REQUISITOS, LOS VALORES DADOS EN LA TABLA RESULTARÁN CERCANOS A LOS CORRESPONDIENTES A LA CANTIDAD MAS PEQUEÑA DE REFZO. POR CONSTANTE. MIENTRAS QUE LOS VALORES DE LA TABLA SE PUEDEN APLICAR A UN RANGO DE VALORES DE  $\epsilon_x$  Y  $\sigma/f_c$  (POR EJEMP.  $\theta = 36^\circ$  Y  $\beta = 2.09$ , PARA  $\epsilon_x \leq 1 \times 10^{-3}$  Y  $\sigma/f_c \leq 0.10$ ), FUERON CALCULADOS PARA EL LIMITE SUPERIOR DEL RANGO. SE ~~PODE~~ HACER UNA INTERPOLACION LINEAL ~~PARA~~

ENTRE LOS VALORES DE LA TABLA. SIN EMBARGO, NO SE JUSTIFICA DICHO <sup>ESFUERZO.</sup> ESFUZO. EN UNA SECCION PARTICULAR DE UN MIEMBRO SUJETO A  $V_u$ ,  $M_u$  Y  $N_u$ , EL REFZO. POR CONSTANTE SE DETERMINA DE:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (14)$$

$\phi = 0.85$

LA CANTIDAD DE ESTR. REQUERIDA EN UNA SECCION, SE DETERMINA DE:

$$V_s \geq \frac{V_u - V_c - V_p}{\phi} \quad (15)$$

MIENTRAS QUE ESTE CALCULO SE HACE PARA UNA SECCION EN PARTICULAR, UNA FALLA POR CONSTANTE CAUSADA POR LA FLUENCIA DE LOS ESTRIBOS INVOLUCRA FLUENCIA DEL REFZO. SOBRE UNA LONGITUD DE LA VIGA ALREDEDOR de  $d$  cote. ENTONCES, LOS VALORES PARA UNA SECCION PUEDEN TOMARSE COMO REPRESENTATIVOS DE UNA LONGITUD DE VIGA IGUAL A  $d$  cote, CONSIDERANDO QUE LA SECCION SE LOCALIZA A LA MITAD DE ESTA LONGITUD. ASI, CERCA DE UN APOYO, LA PRUEBA SECCION DE SE DEBE REVISAR SE LOCALIZA A  $0.5 d$  cote DE LA CARA DEL SOPORTE. (CERCA DE LAS

CARGAS CONCENTRADAS, LAS SECCIONES LONGITUDINALES CALIZADAS A MENOS DE 0.5 d<sub>o</sub> COTA DE LA CARGA, NO NECESITAN VERIFICARSE. COMO UNA SIMPLIFICACIÓN, 0.5 d<sub>o</sub> COTA PUEDE TOMARSE COMO d<sub>o</sub>. DESDE 1963, EL CÓDIGO ACI HA REQUERIDO QUE AL MENOS SE COLOQUE UN ÁREA MÍNIMA DE ESTIBOS CUANDO  $V_u > \phi V_c/2$ . PARA EL MÉTODO QUE AQUÍ SE PRESENTA, SE RECOMIENDA QUE SE COLOQUE UN ÁREA MÍNIMA DE ESTIBOS SI:

$$V_u > 0.5 \phi (V_c + V_p) \quad (16)$$

DONDE EL REQUISITO MÍNIMO ES:

$$\frac{A_o f_y}{b_w s} \geq 0.20 \sqrt{f_c}$$

PARA UNIDADES MPa SUSTITUIR 0.2 POR 0.06

### DISEÑO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

LA FIG. 8 ILUSTRAS LA INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FZAS. DE TENSIÓN EN EL REFZO. LONG. MIENTRAS QUE EL MOMENTO ES CERO EN EL APOYO B, ALLÍ TRANQUILAMENTE SE NECESITA TENSIÓN CONSIDERABLE EN EL REFZO. LONG. CERCA DEL APOYO. LA TENSIÓN REQUERIDA EN

EL REFZO. DEL q LECHO BAJO EN EL APOYO B, SE PUEDE DETERMINAR DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA FIG. 8b, TOMANDO MOMENTOS CON RESPECTO AL PUNTO C Y SUPONIENDO QUE LA FZA. DE TRAZAZÓN DEL AGREGADO EN LA GRIETA QUE CONTRIBUYE A V<sub>c</sub> TIENE UN MOMENTO DESPRECIABLE CON RESPECTO AL PUNTO C. PARA ESTAS VIGAS NO PRESTREZADAS, LA FZA. DE TENSIÓN REQUERIDA EN EL BORDE INTERIOR DEL ÁREA DE APOYO ES:

$$T = \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s \right) c o t \theta \quad (17)$$

LA EC. (17) DA LA TENSIÓN ADICIONAL DEBIDA AL CORTANTE. ENTONCES, EN UNA SECCIÓN SUJETA A CORTANTE V<sub>u</sub>, UN MOMENTO M<sub>u</sub> Y UNA FZA. AXIAL N<sub>u</sub>, EL REFZO. LONG. SOBRE LA CARA DE TENSIÓN POR FLEXIÓN DEBE CUMPLIR CON:

$$A_s f_y + A_p s f_p \geq \frac{M_u}{\phi d_v} + \frac{0.5 N_u}{\phi} + \left( \frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p \right) c o t \theta \quad (18)$$

EN LAS SECC. DE MOMENTO MÁX. EL CORTANTE CAMBIA DE SIGNO Y ENTONCES, LA INCLINACIÓN DE LA COMPRESIÓN DIAGONAL

TAMBIEN CAMBIA. EN LOS APOYOS DIRECTOS Y EN LOS PUNTOS DE CARGA, ESTE CAMBIO DE INCLINACION ESTA ASOCIADO CON UN PATRON ABANICADO DE ESFUZOS. DE COMPRESION RADIAL DESDE EL PUNTO DE CARGA O DEL APOYO DIRECTO, COMO SE MUESTRA EN LA FIG. 8a. ESTA FORMA ABANICADA DE LOS ESFUZOS. DIAGONALES REDUCE LA TENSION EN EL REFZO. LONGITUDINAL PRODUCIDA POR EL CORTANTE (POR EJEMP. EL ANGULO  $\theta$  DE LAS ASER ESCARPADO). DIBIDO A ESTE EFECTO, LA TENSION EN EL REFZO. NO EXCEDE DE LA PRODUCIDA UNICAMENTE POR EL MOMENTO MAXIMO.

### Miembros Sin Refzo. En El Alma.

EN LA EVALUACION DE LOS FACTORES  $\beta$  DADOS EN LA TABLA 1, SE ASUMIO QUE LAS GRIETAS DIAGONALES EN LAS ALMAS CON ESTRIBOS PUEDEN ESPACIARSE A 12 IN (305 MM). PARA MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALMA, ESTA SUPOSICION PUEDE NO SER CONSERVADORA; ENTONCES, PARA USAR  $\beta$  DE LA TABLA 1, ES NECE-

NO ES ADECUADO USAR  $\beta$  DE LA TABLA 1 PARA EVALUAR LA RESISTENCIA A CORTANTE DE MIEMBROS SIN REFZO. EN EL ALMA.

PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LA CAPACIDAD PARA TRANSMITIR CORTANTE DEL CONCRETO AGRIETADO ESTA GOBERNADA PRINCIPALMENTE POR EL ANCHO DE LAS GRIETAS DIAGONALES (EE. 10). EL ANCHO DE GRIETA SE PUEDE TOMAR COMO LA DEF. UNITARIA PRINCIPAL DE TENSION  $\epsilon$ , MULTIPLICADA POR EL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS. ENTONCES, PARA UN VALOR DADO DE  $\epsilon$ , LA RESISTENCIA A CORTANTE ES FUNCION DEL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS POR LO QUE PARA UN ESPACIAMIENTO GRANDE DE GRIETAS, LAS CAPACIDADES A FZO. CORTANTE SE REDUCEN. LA FIG. 9 ILUSTRAS LA SUPOSICION HECHA EN ESTE METODO DE DISEÑO CON RESPECTO AL ESPACIAMIENTO DE LAS GRIETAS. PARA MIEMBROS SIN ESTRIBOS, LAS GRIETAS DIAGONALES ESTARAN MAS ESPACIADAS A MEDIDA QUE  $\theta$  SE APROXIMA A CERO. LA SEPARACION DE GRIETAS CUANDO  $\theta = 90^\circ$  SE LLAMA  $s_{90}$  Y SU VALOR ES FUNCION PRINCIPALMENTE

DE LA SEPARACIÓN MÁXIMA ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. O ENTRE LAS BARRAS DE REFZO. LONG. Y LA ZONA DE COMPRESIÓN POR FLEXIÓN.

$\beta$  (INDICADOR DE LA CAPACIDAD DEL CONCRETO AGREGADO PARA RESISTIR CONTANTE) ES FUNCIÓN DE  $\theta$ ,  $\epsilon$ , Y  $S_x$ . POR LOS VALORES DADOS DE  $\epsilon_x$  Y  $S_x$  Y UN VALOR SELECCIONADO DE  $\theta$ , SE PUEDE CALCULAR  $\beta$  CON LOS EC. (9), (10), (12) Y (13). LA TABLA 7 ENLISTA LOS VALORES DE  $\theta$  QUE PRODUCEN VALORES ALTOS DE  $\beta$  PARA CONCRETO AGREGADO. LOS VALORES DE  $\beta$  DE LA TABLA SE DERIVARON SUPONIENDO EL TAMAÑO MÁX. DEL AGREGADO  $a = 3/4"$  (19 MM). SIN EMBARGO, SE PUEDEN USAR PARA OTROS TAMAÑOS USANDO UN PARÁMETRO EQUIVALENTE DE ESPACIAMIENTO  $S_{xe}$  (EC. 10) TAL QUE:

$$S_{xe} = \frac{1.38}{a + 0.63} (S_x) \quad (\text{IN}) \quad (19)$$

PARA MM., SUSTITUIR 1.38 POR 35 Y 0.63 POR 16. EN MIEMBROS SIN REFZO. BIEN DISTRIBUIDO PARA EL CONTROL DEL AGREGAMIENTO,  $S_x$  SE INCREMENTA

ASÍ MEDIDA QUE EL TAMAÑO DEL MIEMBRO SE INCREMENTA. EN LA TABLA 2 SE APRECIAN QUE UN INCREMENTO DE  $S_x$  RESULTA EN UNA REDUCCIÓN EN LA CAPACIDAD A CONTANTE.

UN EXTENSO PROGRAMA EXPERIMENTAL CONDUCIDO POR SHIOYA EN JAPÓN PROPORCIONÓ EVIDENCIA CONVINCENTE DE LA REDUCCIÓN DE LA CAPACIDAD A EFORTO CONTANTE QUE OCURRE A MEDIDA QUE LOS MIEMBROS CRECEN. EN EL PROGRAMA, VIGAS CON POCO REFZO, SIN ESTRIBOS, Y CON PERALTE EFECTIVO ENTRE 4 Y 118 IN (100 A 3000 MM.) SE CARGARON UNIFORMEMENTE HASTA LA FALLA. LA FIG 10 COMPARA LOS EFORTOS CONTANTES DE FALLA PARA UNA SERIE DE ESTAS VIGAS CONTRA LA FALLA ESTIMADA CON EL ACI 318 - 95 Y EL MÉTODO GENERAL.

SE PUEDE OBSERVAR QUE LAS VIGAS GRANDES FALLAN A UN EFORTO CONTANTE MENOR QUE LA MITAD DEL ESTIMADO CON LAS EES. DEL ACI. 318 - 95.

### PROCEDIMIENTO PROPUESTO PARA DISEÑO POR CONTANTE.

DE LA TEORÍA  
LOS EC. GENERALES DEL CAMPO DE COM

presión modificada, con la cuales se pretende obtener exactitud en el complejo comportamiento de concreto diagonalmente agrietado. Son más adecuados para un programa de computadora (por ejem. ver el programa RESPONSE) que para los cálculos a mano. Con las tablas de  $\theta$  y  $\beta$ , el método resulta bastante simple para resolverse a mano. En el diseño, los pasos son como sigue:

1. En la sección de diseño, calcular el esfuerzo cortante  $\tau$  con la ec. (12)
2. Calcular la def. unitaria longitudinal  $\epsilon_x$  con la ec. (7).
3. Para miembros con refzo. en el alma, seleccionar los valores de  $\theta$  y  $\beta$  de la tabla 1; Para miembros sin refzo. en el alma, usar la tabla 2.
4. En miembros sin refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la resistencia nominal. Para miembros con refzo. en el alma, usar la ec. (9) para determinar la capacidad de refzo. en el alma.

5. Usar la ec. (18) para verificar

las capacidades del refzo. LONG.

## VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Las expresiones para diseño por corte de la ACI, fueron obtenidas categorizando vigas y cols. en los siguientes grupos: miembros no prestos sujetos a corte y torsión; miembros no prestos sujetos a compresión axial; miembros no prestos sujetos a tensión axial y miembros prestos.

Para cada grupo, se desarrolló una ec. empírica para proporcionar una buena aproximación para los datos experimentales disponibles. La mayoría de las ecs. fueron derivadas en el informe del Comité de Corte de la ACI/ASCE de 1962, usando los datos disponibles en ese tiempo.

En contraste, el método de diseño por corte de este artículo se derivó de la teoría modificada del campo de compresión que está basada en el equilibrio, compatibilidad y las

CARACTERÍSTICAS ESFUZ. - DEF. DEL CONCRETO REFORZADO ARMADO. EN ESTE ENFOQUE FUNDAMENTAL, NO SE EMPLEARON FACTORES DE AJUSTE PARA HACER LAS PREDICCIONES CON LOS ENSAYES DISPONIBLES DE VIGAS. POR LO TANTO, ES DE CONSIDERABLE INTERÉS COMPARAR LA EXACTITUD DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LAS EES. DE ESTE MÉTODO NUEVO CONTRA LA EXACTITUD DE LOS EES. TRANSICIONALES DEL SCI. (FIG. 11). SE COMPARARON LAS FALLAS POR COMPRESIÓN DE TRAMIENAS EXPRESAMENTE EN 528 ENSAYES CON LAS PREDICHAS CON AMBOS MÉTODOS. ESTOS ENSAYES ABRANCON UN AMPLIO RANGO DE SECCIONES, TAMAÑOS, PROPIEDADES DE MATERIALES Y TIPOS DE CARGAS, COMO SE VE SUJETO EN LA TABLA 3. LOS ESPECIMENES SELECCIONADOS FUERON AQUELLOS QUE FALLARON PRINCIPALMENTE DEBIDO A ALTOS ESFUZOS. COMPRESIVOS. SE EXCLUYERON LOS ESPECIMENES CON CLAVOS DE COMPRESIÓN CORTOS, DEBIDO A QUE TALES MIEMBROS PUEDEN DISEÑARSE USANDO LOS MODELOS

PUNTAL - Y - TRAMIE, O LAS EES. PARA VIGAS DE GRAN PERALTE DEL SCI. COMO SE VE EN LA FIG. 11, EL MÉTODO GENERAL PROPOSTO PREDICE MÁS EXACTAMENTE LAS FALLAS POR COMPRESIÓN DE LAS EES DEL ACTUAL SCI. LA TABLA 3 INDICA SITUACIONES DONDE EL MÉTODO DEL SCI PUEDE SER MUY INEXACTO. ESTAS SITUACIONES INCLUYEN MIEMBROS GRANDES, MIEMBROS CON POCO ESFUZO. LONG. Y MIEMBROS SUJETOS A COMPRESIÓN AXIAL GRANDE, DONDE EL SCI PUEDE SER POCO CONSERVADOR. POR OTRO LADO, PARA MIEMBROS CON CLAVOS CORTOS FUERTEMENTE REPARTIDOS, MIEMBROS CON TRAMIE INCLINADOS Y MIEMBROS CON TENSIÓN AXIAL GRANDE, EL SCI PUEDE SER EXCELSAMENTE CONSERVADOR.

# CONCLUSIONES

SE CREE QUE EL MÉTODO PRESENTADO DE LOS ERRORES MÁS SERIOS DE DETALLE EN ESTE ARTICULO ESTA "INTEGRADO" QUE A VECES SE COMETEN EN LA PRÁCTICA "SIMPLIFICADO" Y DA "UN SIGNIFICADO ACTUAL. FISICO" A LOS PARÁMETROS QUE SE CALCULAN. POR EJEMPLO, EL COEFICIENTE TOYADO POR LOS ESFUERZOS DE TENSION EN EL CONCRETO  $V_c$  SE HACE FUNCIÓN DE LA DEFORMACIÓN UNITARIA LONGITUDINAL EN EL ACERO  $\epsilon_x$ . A MEDIDA QUE  $\epsilon_x$  CRECE,  $V_c$  DECRECE. INCREMENTANDO LA MAGNITUD DEL MOMENTO O APLICANDO TENSION AXIAL  $\epsilon_x$  CRECE, Y ENTONCES,  $V_c$  DECRECE. APLICANDO COMPRESION AXIAL, PRESFUERZO O AUMENTANDO EL AREA DEL REFUERZO LONGITUDINAL,  $\epsilon_x$  DECRECE Y ENTONCES,  $V_c$  CRECE.

UNA CARACTERISTICA CLAVE DE LOS PROCEDIMIENTOS NUEVOS ES QUE EXPLICITAMENTE CONSIDERAN LA INFLUENCIA DEL COEFICIENTE SOBRE EL REFUERZO LONGITUDINAL. SE CREE QUE SI LOS INGENIEROS ENTENDIERON QUE EL COEFICIENTE PRODUCE TENSION EN EL REFUERZO LONGITUDINAL, EVITARON UNO

ELEMENTO

MÉTODO DEL ACI

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_{ud}}{d}) b_w d; \frac{V_{ud}}{d} \leq 1.0$$

$$V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d \text{ o } V_c = 0.54\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = (0.16\sqrt{f'_c} + 50 \frac{V_{ud}}{d}) b_w d; 0.54\sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1.35\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c \leq V_{ci} = 0.16\sqrt{f'_c} b_w d + V_{ci} + \frac{V_{ci} V_{cr}}{V_{cr} + V_{ci}}; V_{ci} \geq 0.46\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c \leq V_{cw} = (0.95\sqrt{f'_c} + 0.3 f_{pc}) b_w d + V_p$$

$$V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = (0.51\sqrt{f'_c} + 175 \rho_w \frac{V_{ud}}{d_u - N_u(4h-d)}) b_w d$$

$$V_c \leq 0.95\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{\frac{1 - N_u}{35 \lambda g}}$$

$$V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = 0.54\sqrt{f'_c} (1 + N_u/35 \lambda g) b_w d$$

$$V_s = \frac{\Delta_r f_y d}{s} \leq 2.1\sqrt{f'_c} b_w d$$

MÉTODO GENERAL

$$V_n = V_c + V_s + V_p$$

$$V_c = \beta (0.27\sqrt{f'_c}) b_v d_v$$

$$V_s = \frac{\Delta_r f_y d_v}{s} \cot \theta$$

$\beta$  Y  $\theta$  SON FUNCIÓN DE:

LA DEFORMACIÓN UNITARIA

$\epsilon_x$ , ESFUZO. CONSTANTE  $\sigma$

Y DEL ESPACIAMIENTO DEL

ARMAZONAMIENTO  $s_x$

DOBLE:

$$\sigma = \frac{V_n - V_p}{b_v d_v}$$

$$\epsilon_x = \frac{d_v}{s_x} + 0.5(N_u + N_u \cot \theta) - \Delta_p s_p / (E_s \Delta_s + E_p \Delta_p)$$

REGLAS PARA DETALLAR:

SE DEBE EXTENDER EL REFINO. MAS ALLÁ DEL PUNTO DONDE YA NO SE REQUIERE UNA DISTANCIA  $\geq \lambda d$  O  $12d_b$

NO SE DEBE TERMINAR REFINO EN ZONAS DE TENSION A MENOS QUE:

EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE  $\leq 2/3$  DEL CORTANTE PERMITIDO, O

EL AREA DE ESTR.  $\Delta_r$  EN EXCESO DE LA REQ. POR CORTANTE Y TORSION

SE PROPORCIONA PARA  $\Delta_r \geq 3.5 b_w s / f_y$ ;  $s \leq d$  O  $8B_b$ , O

PARA BARRAS  $\leq \#11$ ; EL CORTANTE EN LA SECC. DE CORTE  $\leq 3/4$  DEL

CORTANTE PERMITIDO Y MULTIPLICANDO EL DOBLE DEL REFINO REQUERIDO

POR FLEXION, EN LA SECCION DE CORTE.

EN UN APOYO SIMPLE Y EN PUNTO DE INFLEXION, SE DEBE LLENAR

TAR EL DIAMETRO DEL REFINO POR MOMENTO POSITIVO EN FUERZAS

QUE:  $\lambda d \leq \frac{V_n}{V_u} + \lambda a$

REGLAS PARA DETALLAR:

EL REFINO LONGITUDINAL SE

DEBE DETALLAR PARA QUE:

$\Delta_r f_y + \Delta_p s_p \geq \frac{V_u}{\phi d} + 0.5 \frac{N_u}{\phi d} - \phi$

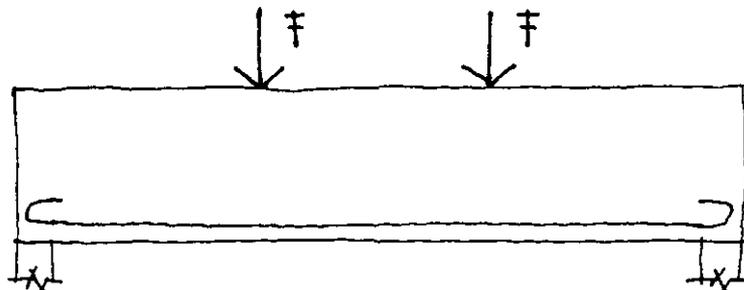
$+ (\frac{V_u}{\phi} - 0.5 V_s - V_p) \cot \theta$

280

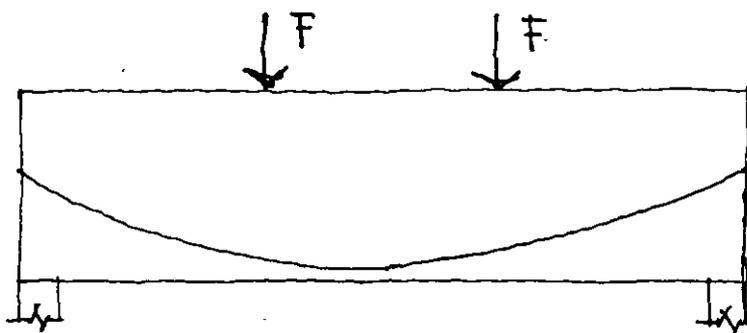
FIG.1. Comparación entre el Enfoque de Diseño Por Cortante Del ACI y El Propuesto.

# COMPLEMENTO DE LA FIGURA 1

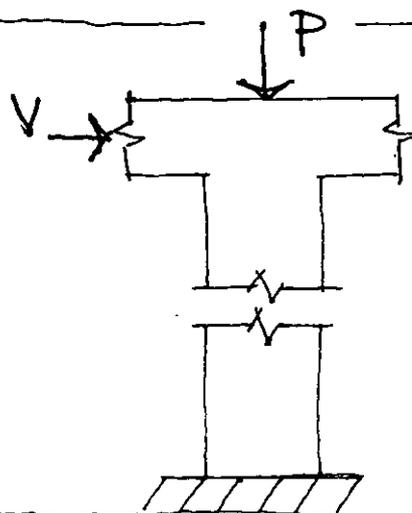
## 1. VIGAS DE CONCRETO REFORZADO



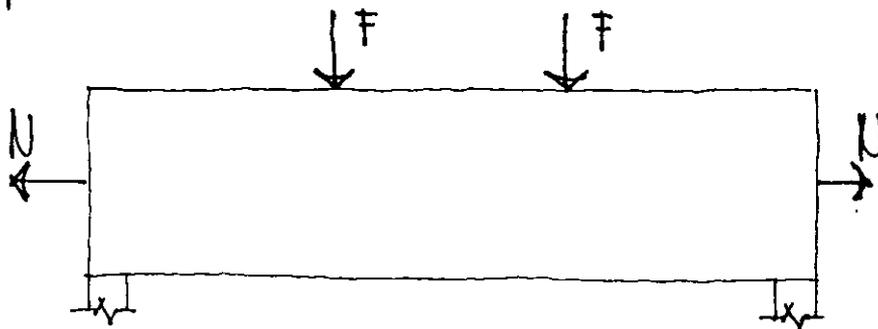
## 2. VIGAS DE CONCRETO PREFORZADO



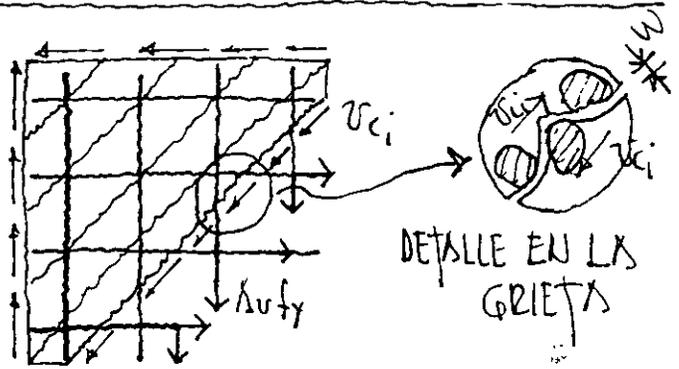
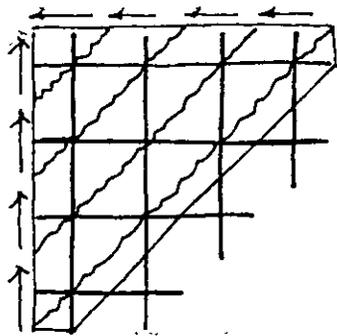
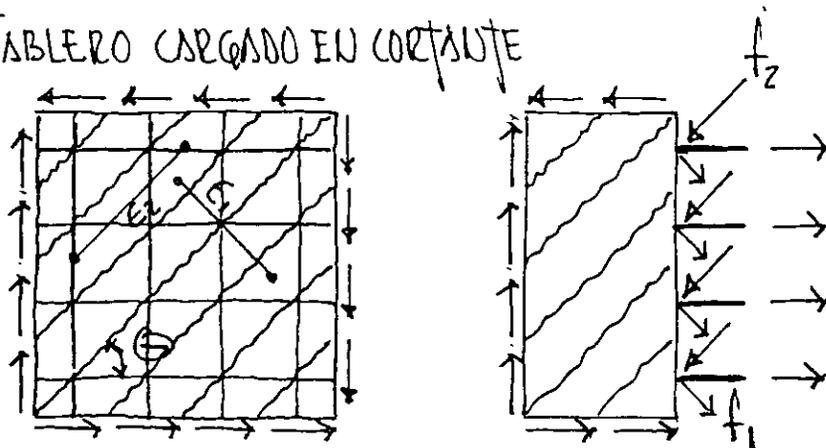
## 3. FLEXOCOMPRESIÓN Y CORTANTE



## 4. FLEXOTENSIÓN Y CORTANTE



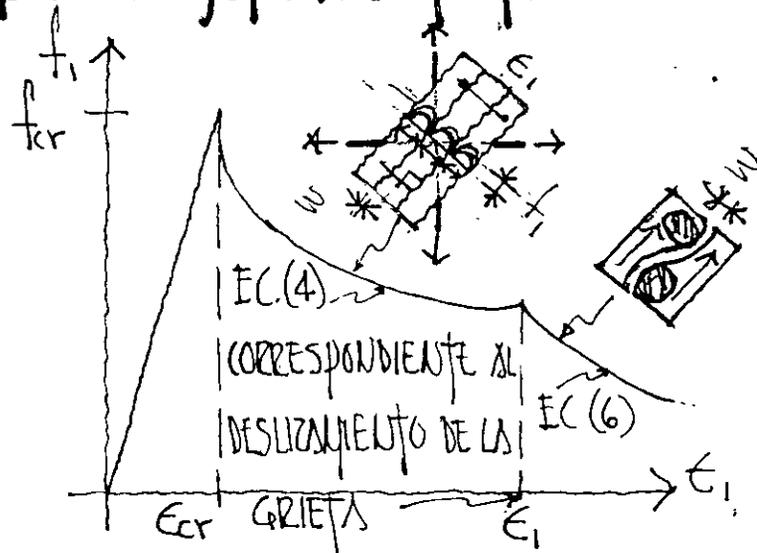
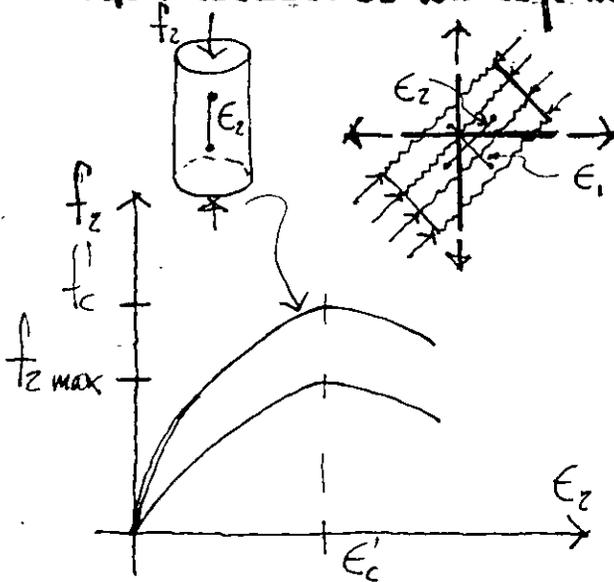
a) TABLERO CARGADO EN CORTANTE



DETALLE EN LA GRIETA

b) ESFUERZOS PROMEDIO CALCULADOS;  
**FIG. 4 PANELES DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A CORTANTE**

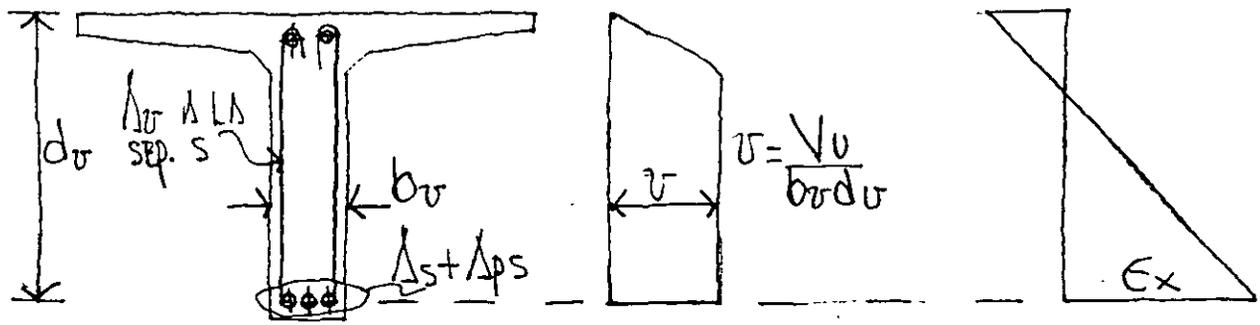
c) ESFUERZOS LOCALES EN LAS GRIETAS



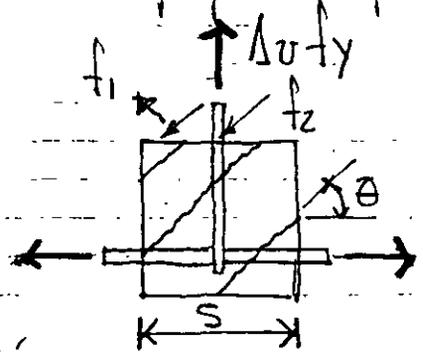
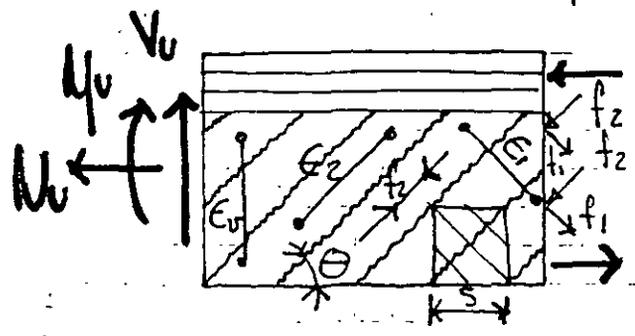
a) ABUNDAMIENTO DE LA CURVA ESFU.-DEF. A COMPRESIÓN DEBIDO A LA DEFORMACIÓN TRANSVERSAL DE TENSIÓN

b) ESFUERZOS PROMEDIO DE TENSIÓN EN CONCRETO AGRIETADO EN FUNCIÓN DE  $\epsilon_1$

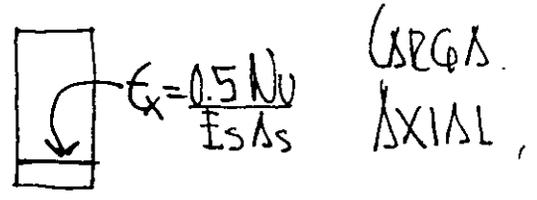
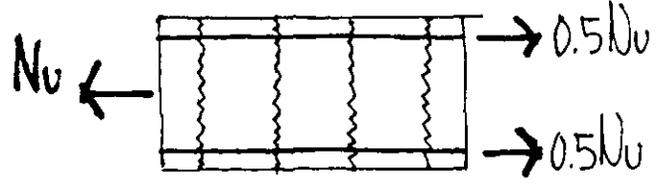
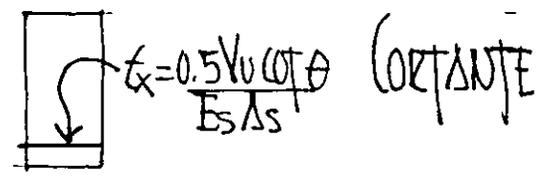
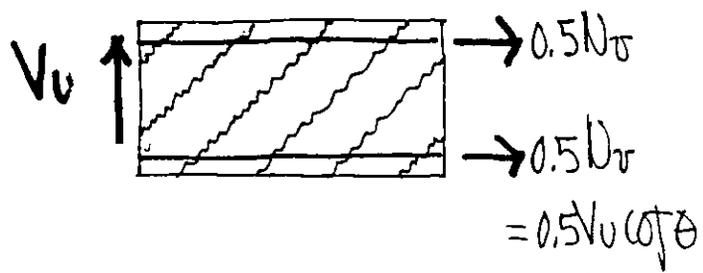
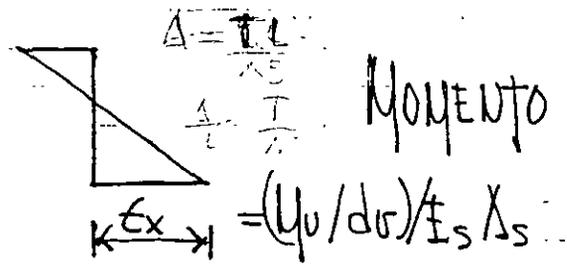
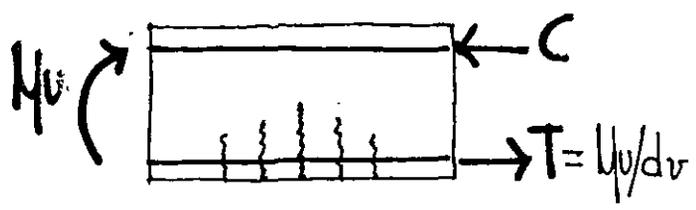
**FIG. 5 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA CONCRETO AGRIETADO**



a) SECCIÓN TRANSVERSAL      b) ESFUERZO CORTANTE      c) DEFORMACIONES LONGITUDINALES



d) ESTADO BIAXIAL DE DEF. EN EL ACUA      e) TENSION EN EL REFUERZO DEL ACUA  
**FIG. 6 VIGA SUJETA A CORTANTE, MOMENTO Y CARGA AXIAL**



**FIG. 7. DETERMINACIÓN DE  $\epsilon_x$  EN VIGAS NO PREFORZADAS**

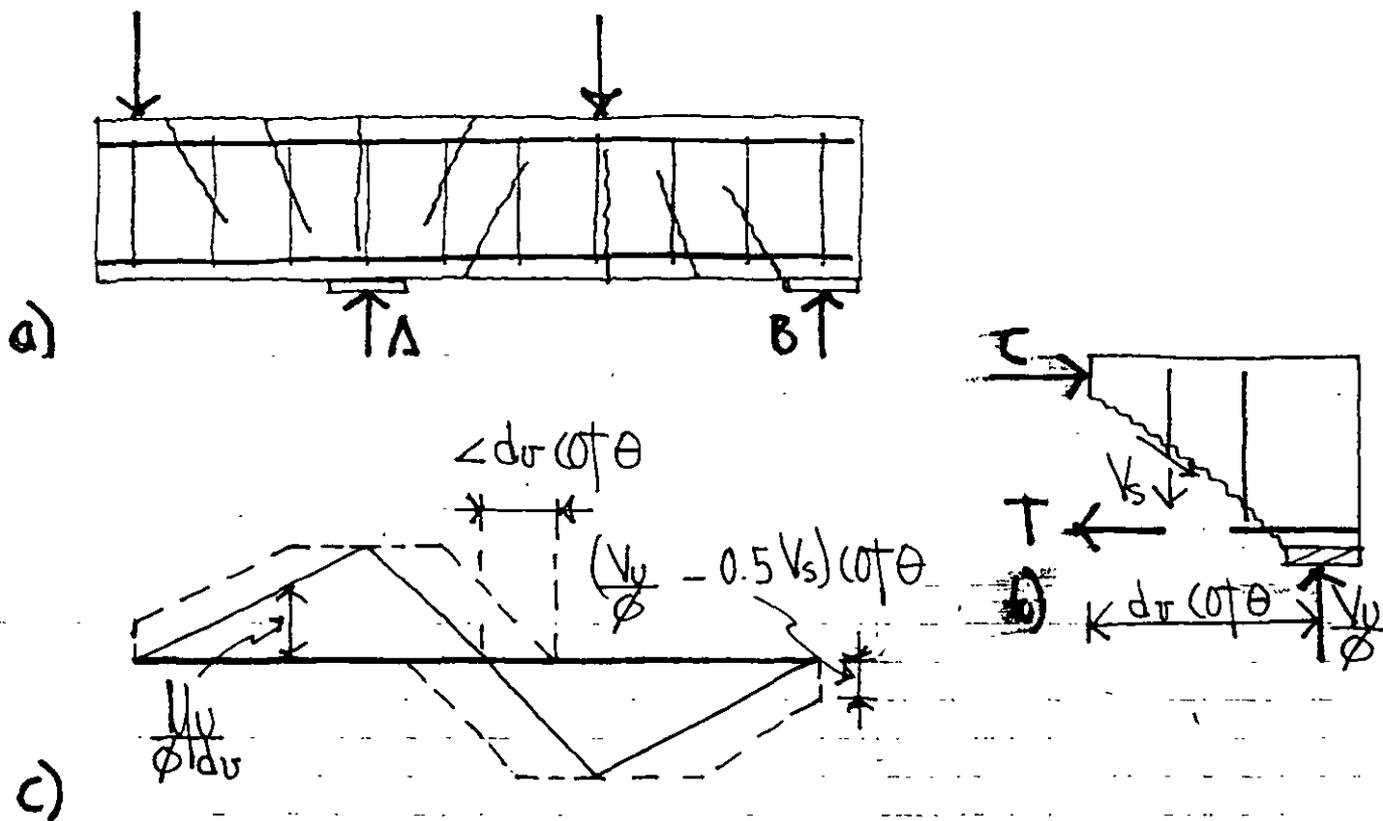


FIG. 8 INFLUENCIA DEL CORTANTE SOBRE LAS FUERZAS EN EL REFUERZO LONGITUDINAL

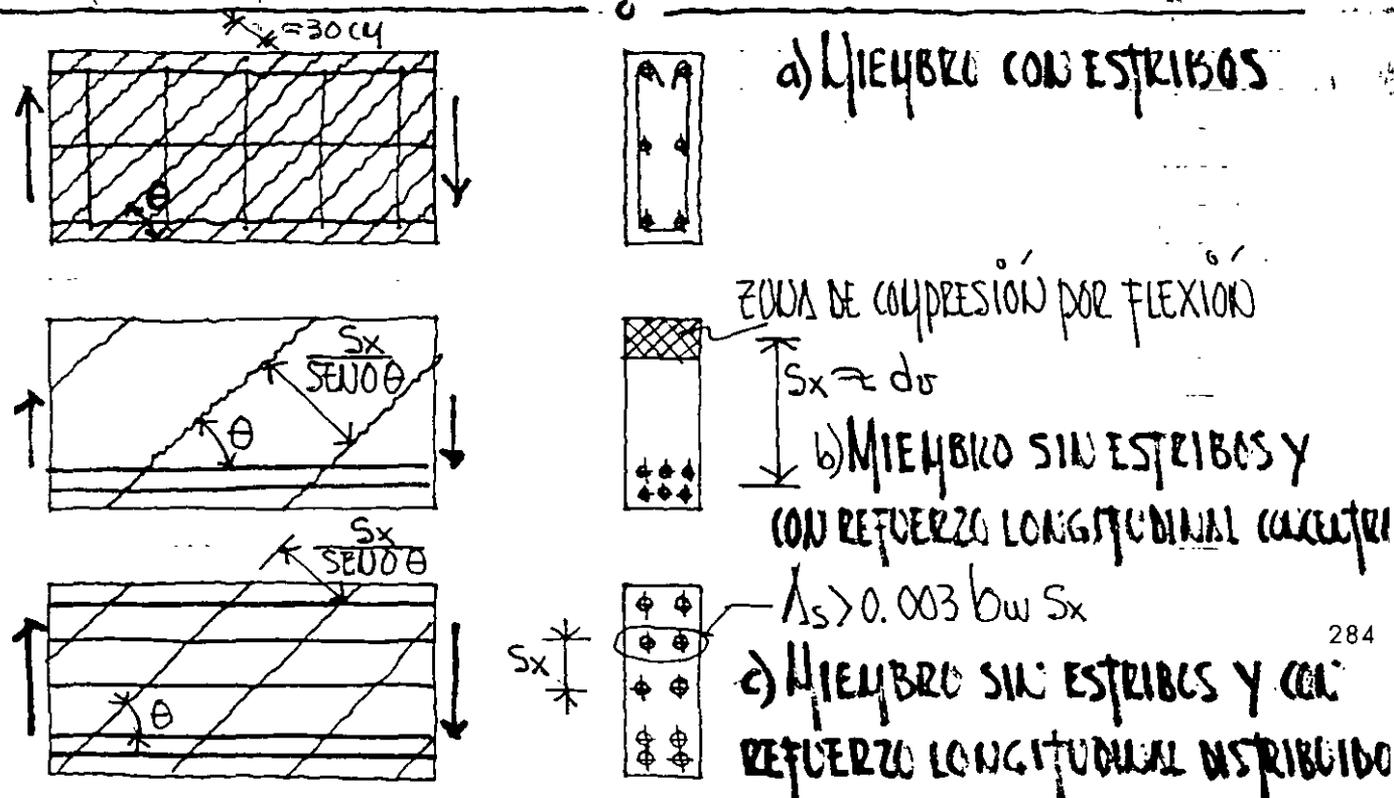


FIG. 9. INFLUENCIA DEL REFUERZO SOBRE EL ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

Tabla 1. VALORES DE  $\theta$  y  $\beta$  PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALMA.

$t_s/f_c$		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 0.05$	$\theta^\circ$	27.0	28.5	29.0	36.0	41.0	43.0
	$\beta$	4.32	0.94	0.68	0.60	0.53	0.46
$\leq 0.075$	$\theta^\circ$	27.0	27.5	30.0	36.0	40.0	42.0
	$\beta$	1.32	0.81	0.67	0.58	0.51	0.18
$\leq 0.10$	$\theta^\circ$	23.5	26.5	30.5	36.0	38.0	39.0
	$\beta$	0.88	0.69	0.65	0.56	0.46	0.39
$\leq 0.15$	$\theta^\circ$	25.0	29.0	32.0	36.0	36.5	37.0
	$\beta$	0.69	0.66	0.62	0.52	0.41	0.33
$\leq 0.20$	$\theta^\circ$	27.5	31.0	33.0	34.5	35.0	36.0
	$\beta$	0.66	0.63	0.57	0.43	0.33	0.27
$\leq 0.25$	$\theta^\circ$	30.0	32.0	33.0	35.5	38.5	41.5
	$\beta$	0.62	0.54	0.44	0.38	0.35	0.34

Tabla 2. VALORES DE  $\theta$  y  $\beta$  PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA.

C.V. $S_x$		DEFORMACION UNITARIA LONGITUDINAL $\epsilon_x \times 1000$					
		$\leq 0$	$\leq 0.25$	$\leq 0.50$	$\leq 1.00$	$\leq 1.50$	$\leq 2.00$
$\leq 12.5$	$\theta^\circ$	27.0	29.0	31.0	34.0	36.0	38.0
	$\beta$	1.33	1.02	0.86	0.69	0.59	0.52
$\leq 25$	$\theta^\circ$	30.0	34.0	37.0	40.0	43.0	45.0
	$\beta$	1.26	0.93	0.76	0.59	0.50	0.45
$\leq 37.5$	$\theta^\circ$	32.0	37.0	40.0	45.0	48.0	50.0
	$\beta$	1.21	0.87	0.70	0.53	0.45	0.39
$\leq 62.5$	$\theta^\circ$	35.0	41.0	45.0	51.0	54.0	57.0
	$\beta$	1.13	0.77	0.61	0.46	0.38	0.32
$\leq 125$	$\theta^\circ$	38.0	48.0	53.0	59.0	63.0	66.0
	$\beta$	1.03	0.65	0.49	0.34	0.27	0.22
$\leq 250$	$\theta^\circ$	42.00	55.0	62.0	69.60	72.0	75.0
	$\beta$	0.94	0.51	0.36	0.23	0.18	0.14

$S_x$  = ESPACIAMIENTO DE GRIETAS

# METODO GENERAL DE DISEÑO POR CORTANTE EN MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA

## RESISTENCIA A CORTANTE DEL CONCRETO ACRIETADO

$$f_2 = f_{2max} [2\epsilon/\epsilon_c' - (\epsilon_2/\epsilon_c')] \quad (1)$$

$$f_{2max} = f_c' / (0.8 + 170\epsilon) \leq f_c' \quad (2)$$

$$\epsilon_2 = -0.002 (1 - \sqrt{1 - f_2/f_{2max}}) \quad (3)$$

$$f_1 = f_{cr} / (1 + 500\epsilon_1) \quad (4)$$

$$f_{cr} = 4\sqrt{f_c'} \quad (5)$$

$$\tau_{ci} = 7.14\sqrt{f_c'} [0.3 + 24w/(a + 0.63)] \quad (6)$$

$$f_c = \tau_{ci} \tan \theta \quad (7)$$

## DISEÑO DE ESTRIBOS PARA CORTANTE

$$\epsilon_x = \frac{N_u/d_r + 0.5N_u + 0.5V_u \cot \theta - \Delta p_s p_s}{E_s A_s + E_p A_p} \geq 0 \quad (8)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_2) \cot^2 \theta \quad (9)$$

$$n = V_c + V_s + V_p = f_c b_r d_r \cot \theta + A_s f_y d_r \cot \theta + V_p \quad (10)$$

$$= \beta \sqrt{f_c'} b_r d_r + A_s f_y d_r \cot \theta + V_p \quad (11)$$

$$\beta = 4 \cot \theta / (1 + 1500\epsilon_1) \leq 7.14 [0.3 + 24w/(a + 0.63)] \quad (12)$$

$$f_2 = v (\tan \theta + \cot \theta) \quad (13)$$

$$v = (V_n - V_p) / (d_r \phi j d) \quad (14)$$

$$f_2 = f_c + f_c [2.00 \sqrt{1 - f_2/\epsilon_2} \tan \theta + \cot \theta (1 + 170\epsilon_2)] \cot \theta \quad (15)$$

$$V_u \leq \phi V_n \quad (16)$$

$$V_s \geq V_u / \phi - V_c - V_p \quad (17)$$

$$V_u > \phi 0.5 (V_c + V_p) \quad (18)$$

$$A_s f_y / d_w s \geq 0.72 \sqrt{f_c'} \quad (19)$$

$$T = (V_u / \phi - 0.5 V_s) \cot \theta \quad (20)$$

$$\phi A_s p_s \geq \frac{N_u + 0.5 N_u + (V_u - 0.5 V_s - V_p) \cot \theta}{\phi j d} \quad (21)$$

$$s_{xe} = s_x [1.38 / (a + 0.63)] \quad (19)$$

- (1) PROCEDIMIENTO DE DISEÑO POR CORTANTE
- (2) PROPUESTO
- (3) 1. EN LA SECCION CONSIDERADA CALCULAR  $\tau_{ci}$
- (4) EL ESFUERZO CORTANTE  $\tau$ , CON LA EC. (12)
- (5) 2. CALCULAR LA DEFORMACION UNIFORME LONGITUDINAL  $\epsilon_x$ , CON LA EC. (7)
- (6) 3. PARA MIEMBROS CON REFUERZO EN EL ALMA, SELECCIONAR LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  DE LA TABLA 1.
- (7) PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA SELECCIONAR LOS VALORES DE  $\theta$  Y  $\beta$  DE LA TABLA 2.
- (8) 4. PARA MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA, USAR LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA NOMINAL ( $V_n$ ).
- (9) PARA MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL, USAR LA EC. (9) PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE REFUERZO EN EL ALMA.
- (10) 5. USAR LA EC. (18) PARA VERIFICAR LA CAPACIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MÓDULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**FLEXO-COMPRESIÓN Y EFECTOS DE ESBELTEZ  
EN COLUMNAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. VÍCTOR MANUEL PAVÓN RODRÍGUEZ  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

**CURSO**  
**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

Flexo-Compresión y Efectos de Esbeltez en Columnas

Instructor: M. en I. Víctor M. Pavón R.

Septiembre del 2000

## **BIBLIOGRAFÍA PARA EL CURSO DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

1. Normas técnicas Complementarias al RC.D.F. Normas para la Construcción con Concreto.
2. Reglamento de Construcciones para el D.F.
3. Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural y Comentarios. ACI 318-95 y ACI 318R-95. Publicado por el IMCYC.
4. Diseño de Estructuras de Concreto Conforme al Reglamento ACI 318-89. Publicado por el IMCYC.
5. Notes on ACI-318-99. Building Code Requirements for Structural Concrete. Portland Cement Association, 2000.
6. James MacGregor. Reinforced Concrete. Mechanics and Design. Third Edition. Prentice Hall.

## CONSIDERACIONES GENERALES

Esencialmente el diseño de columnas consiste en seleccionar una sección transversal y un refuerzo adecuado para que la columna sea capaz de soportar una combinación requerida de la carga axial factorada  $P_u$  y un momento factorado (primario)  $M_u$ , además de tomar en consideración la esbeltez de la columna (momentos secundarios).

La esbeltez de la columna se expresa en términos de su relación de esbeltez

$$\frac{kl_u}{r}$$

en la que:

$k$  es un factor de la longitud efectiva, el cual depende de las restricciones laterales y rotacionales en los extremos de la columna,

$l_u$  es la longitud entre los apoyos de dicha columna, y,

$r$  es el radio de giro de la sección transversal de la misma columna.

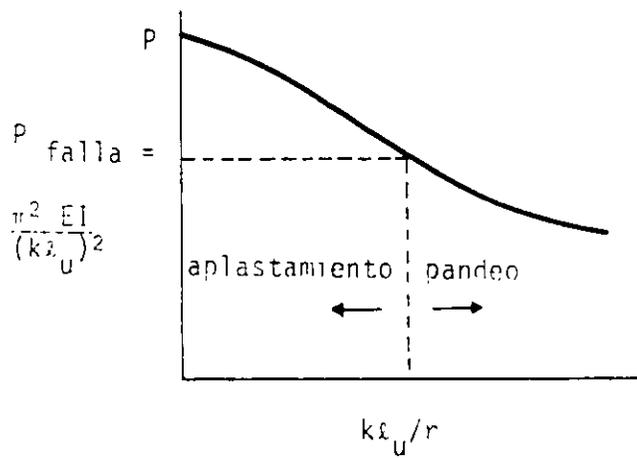
Para propósitos de diseño, el término columna corta se utiliza para designar una columna que tiene una resistencia igual a la calculada para su sección transversal, empleando las fuerzas y momentos obtenidos de un análisis para la combinación de flexión y carga axial.

La columna esbelta se define como la columna cuya resistencia se reduce a causa de las deformaciones de segundo orden (momentos secundarios).

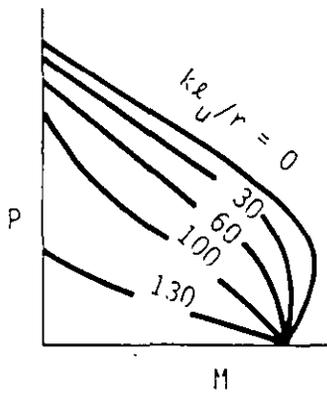
Mediante estas definiciones, puede considerarse que una columna con una relación de esbeltez dada, para un cierto conjunto de restricciones, puede diseñarse como columna corta, así como columna larga para otro tipo.

Mediante el uso de concretos y refuerzos con mayores resistencias, así como con los métodos de diseño más precisos, es posible obtener secciones transversales de menor tamaño, dando por resultado elementos estructurales más esbeltos.

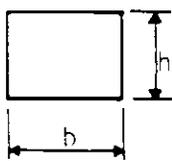
Por lo tanto, en el diseño de columnas, una consideración de gran importancia, es la de contar con procedimientos de diseño confiables y racionales para tomar en cuenta la esbeltez de estos elementos estructurales.



CURVA DE LA COLUMNA.

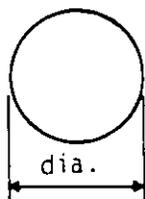


DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS ESBELTAS.

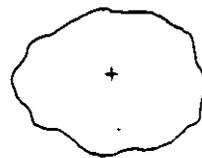


$$r = 0.3b$$

$$r = 0.3h$$

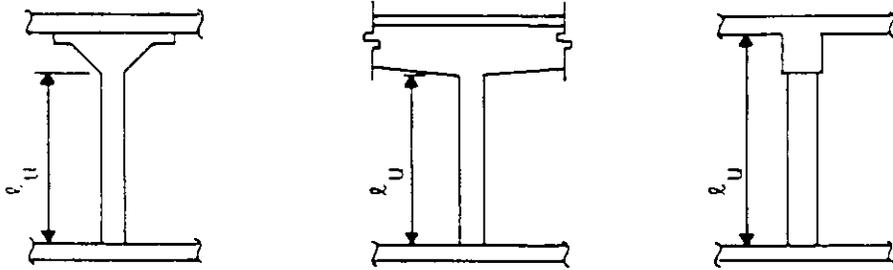


$$r = 0.25 \text{ dia.}$$



$$r = \sqrt{\frac{I_g}{A_g}}$$

RADIO DE GIRO (r)



LONGITUD NO SOPORTADA ( $l_u$ )

Ejemplo de aplicación del diseño de elementos cortos sujetos a flexo-compresión, en los cuales no es necesario tomar en consideración los efectos de esbeltez.

---

Diséñese una columna rectangular armada con estribos. Defínase el refuerzo vertical para una carga muerta de 160 ton y una carga viva de 110 ton. Los momentos de carga muerta y viva aplicados en el extremo superior de la columna tienen un valor de 13.00 y 10.00 ton-m, respectivamente, respecto al eje fuerte. Supóngase que los momentos en el extremo inferior son la mitad de los aplicados en el extremo superior. Respecto del eje débil los momentos son insignificantes.

La columna tiene una altura libre entre apoyos, de 2.30 m, en ambas direcciones, y respecto del eje fuerte se flexiona en curvatura doble, en tanto que respecto al eje débil lo hace en curvatura sencilla. Utilícese un concreto  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y un acero de refuerzo, con  $f_y = 4,000 \text{ kg/cm}^2$ . El marco del cual forma parte la columna se encuentra atiesado (no experimenta ladeo).

---

El proceso de diseño se desarrolla de conformidad con las N.T.C. para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, del Reglamento de Construcciones del D.F.

1. Las cargas para diseño valen:

$$P_u = 1.4(160 + 110) = 378.00 \text{ ton}$$

$$M_u = 1.4(13.00 + 10.00) = 32.2 \text{ ton-m}$$

R.C.D.F. Art. 194

2. Esbeltez de la columna. Sección de la misma

Verifíquese la esbeltez de la columna. Supóngase una columna con dimensiones de 35 por 60 cm.

La sección 1.3.2.b) de las NTC, establece que en miembros con extremos restringidos lateralmente (que no experimentan ladeo), pueden despreciarse los efectos de esbeltez cuando la relación entre la longitud efectiva y el radio de giro  $r$  de la sección

considerada, sea menor que  $34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$ . El cociente es negativo cuando el elemento

se flexiona en curvatura doble y positivo cuando lo hace en curvatura sencilla.  $M_1$  es el ~~menor~~ <sup>menor</sup> de los momentos y  $M_2$  es el ~~menor~~ <sup>mayor</sup> de los que actúan en los extremos de la columna.

El concepto de los efectos de esbeltez se tratará con mayor amplitud más adelante, en una sesión especial sobre el tema.

a. Esbeltez respecto al eje débil (35 cm)

$k = 1.0$  por tratarse de un elemento a compresión que no experimenta ladeo (ACI 10.12.1)

$$r = 0.30(35) = 10.5 \text{ cm}$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{10.5} = 21.90$$

Con momentos respecto al eje débil insignificantes, supóngase  $M_1/M_2 = 1.0$   
Para considerar la esbeltez:

$$\frac{kl_u}{r} < 34 - 12(1.0) = 22 \text{ en curvatura sencilla}$$

Por lo tanto: respecto al eje débil no es necesario tomar en cuenta la esbeltez

b. Esbeltez respecto al eje fuerte (60 cm)

$$k = 1.0$$

$$r = 0.30(60) = 18$$

$$M_1/M_2 = -0.5$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(230)}{18} = 12.78 < 34 - 12(-0.5) = 40$$

Por lo tanto: pueden despreciarse los efectos de esbeltez respecto al eje fuerte

### 3. Cálculo del acero de refuerzo

a. Porcentaje de refuerzo mínimo y máximo

En la sección 4.22 de las NTC para concreto, se establece que el porcentaje de refuerzo no debe ser menor a  $20/f_v$ , ni mayor al 6 por ciento. El número mínimo de varillas es de 6 en columnas circulares y de 4 en columnas cuadradas o rectangulares.

b. Esfuerzos y módulo de elasticidad de los materiales para el diseño

Para el diseño se utiliza:

$$f_c^* = 0.8 f_c$$

Ec. 1.7 de la sección 1.4.1.b de las NTC

Para usos estructurales, el concreto clase 1 deberá tener una resistencia mínima:

$$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

sección 1.4.1.b de las NTC

El módulo de elasticidad del concreto clase 1, se estipula igual a  $14,000\sqrt{f'_c}$  (1.4.1.d de las NTC), en tanto que el módulo de elasticidad del acero es casi siempre igual a:

$$E_s = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se emplea la resistencia del acero en su punto de fluencia:

$$f_s = 4,000 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{Sección 1.4.2 de las NTC})$$

c. Factores de reducción de la resistencia

De conformidad con la sección 1.6 de las NTC, los factores de reducción de la resistencia que se deben emplear, son:

- Para flexión:  $F_R = 0.9$
- Para cortante y torsión:  $F_R = 0.8$

Para flexocompresión, el factor de reducción de la resistencia vale 0.8, si el núcleo está confinado por un zuncho, y 0.7 si se colocan estribos y la falla de la columna es en compresión.

4. Utilización del diagrama de interacción del D.F.

Supóngase que se utilizan varillas del #10 (1.25 pulgadas)

a. Cálculo del parámetro  $d/h$ . Para el peralte de 60 cm.

$$d = \text{peralte total} - \text{recubrimiento libre} - \text{el diámetro del estribo} - \frac{1}{2} \text{ del diámetro de la varilla} = 60 - 1.5 - 0.95 - 1.59 = 55.96 \text{ cm}$$

El cociente  $d/h = 55.96/60 = 0.93$ . Se utiliza el diagrama de interacción para  $d/h = 0.95$

5. Diagrama de interacción

Hay varias formas de ingresar al diagrama de interacción. Una de ellas es la de calcular los valores de:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c}; \quad \text{y} \quad R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f'_c}$$

expresiones en las cuales  $b$  y  $h$  son los lados menor y mayor de la columna; para columnas con refuerzo transversal de estribos, el factor de reducción  $F_R = 0.7$ ; y

$$f'_c = 0.85(0.8)f'_c = 0.85(0.8)300 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

Reemplazando valores, se obtiene que  $K = 1.26$  y  $R = 0.18$ , en cuya intersección se encuentra  $q = 0.71$ .

Ahora,

$$q = p \frac{f_y}{f_c}; \text{ y } p = \frac{A_s}{bh};$$

donde  $A_s$  es el área de acero de la sección de concreto.

Reemplazando: si 
$$q = p \frac{f_y}{f_c} = 0.71$$

entonces: 
$$p = 0.71 \frac{204}{4,000} = 0.0362 = 3.62\%$$

Lo anterior significa que el área de acero necesaria es el 3.62% del área del concreto:

$$A_s = p(bh) = 0.0362(35)60 = 76.04 \text{ cm}^2$$

Ocho varillas del #10 (1¼ de pulgada) tienen un área de 63.52 cm<sup>2</sup>, en tanto que 10 varillas del No. 10, tienen un área de 79.40 cm<sup>2</sup>. Se requieren, por consiguiente, 10 varillas del #10.

Otro procedimiento para hacer uso del diagrama de interacción, es el de calcular el parámetro  $e/h$ , donde  $e$ , es la excentricidad de la aplicación de la carga, la cual se obtiene dividiendo el momento  $M_u$  entre la carga axial  $P_u$ . En efecto:

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u h} = \frac{34.2(10)^5}{378(10)^3 60} = 0.142$$

En la intersección de  $\frac{e}{h} = 0.14$  con  $K = 1.26$ , se lee nuevamente  $q = 0.71$ , y descendiendo hasta la abscisa  $R$  se encuentra el valor 0.18 de ésta, obteniéndose los mismo valores que ya se habían determinado previamente. Con este valor de  $R$ , puede calcularse  $M_u$  y compararlo con el propuesto para el diseño. En caso de que este valor calculado sea mayor que el momento último de diseño, se verifica que el área de acero calculada resulta correcta. De otra forma, habrá que incrementar la cantidad de acero o el tamaño de la sección de concreto, y efectuar una nueva secuencia de diseño con los nuevos valores.

## 6. Porcentaje de refuerzo

El porcentaje efectivo de acero suministrado, vale:

$$p = \frac{A_s}{bh} = \frac{79.4}{35(60)} = 3.79\% > 3.62\% \text{ requerido}$$

a. Refuerzo máximo y mínimo

El porcentaje mínimo admisible de refuerzo es:

$$p_{\min} = \frac{20}{f_y} = \frac{20}{4,000} = 0.005 = 0.5\% < 3.62\% \therefore \text{correcto}$$

Este último porcentaje resulta un tanto alto para los porcentajes de refuerzo que usualmente se utilizan en la práctica, pero aún así es menor al máximo permisible del 6%. El número de 10 varillas colocadas es, por supuesto, mayor al mínimo de 4 necesarias en una sección transversal cuadrada o rectangular.

b. Comportamiento de la columna según las cargas aplicadas y la sección dada

Por otro lado, de conformidad con la zona donde se ubica la intersección de  $K$  con los demás parámetros calculados, incluyendo  $R$ , es factible percatarse de que la falla de la columna tendría lugar en la zona de compresión, por lo cual, el valor de 0.7 adoptado para el factor de reducción  $F_R$ , es correcto.

## 7. Refuerzo transversal

a. Separación de los estribos

La sección 4.2.3. de las N.T.C. señala que la separación de los estribos no será mayor a:

- $\frac{850}{\sqrt{f_c}}$  veces el diámetro de la varilla longitudinal;
- 48 veces el diámetro de la varilla del estribo; ni
- la mitad de la menor dimensión de la columna

Efectuando operaciones:

$$\begin{aligned} \frac{850}{\sqrt{4,000}} &= 13.44; \times 3.81 \text{ cm} = 51.21 \text{ cm}; \\ 48 (0.95) &= 45.60 \text{ cm}; \\ 0.5(35) &= 17.5 \text{ cm} \quad \underline{\text{rige}} \end{aligned}$$

Deberá entonces colocarse estribos del #3 @ 17.5 cm de separación

b Separación en la zona de las juntas

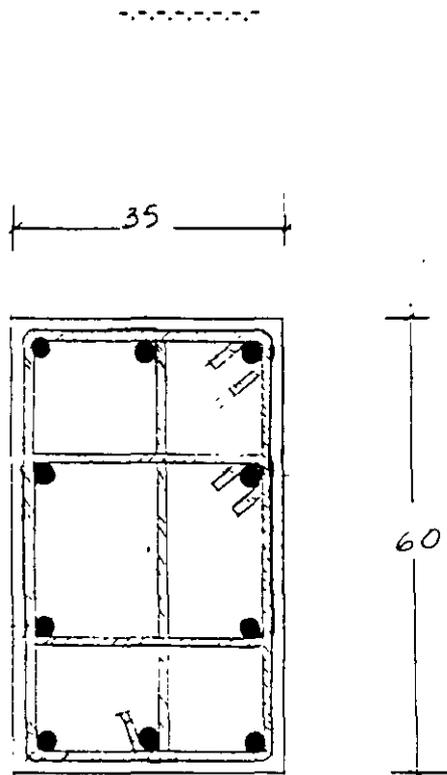
La separación máxima se debe reducir a la mitad de la antes indicada, en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de columna, 1/6 de la altura libre de ésta, ni que 60 cm, arriba y debajo de cada unión con traveses y losas, medida a partir del respectivo plano de intersección. En este caso:

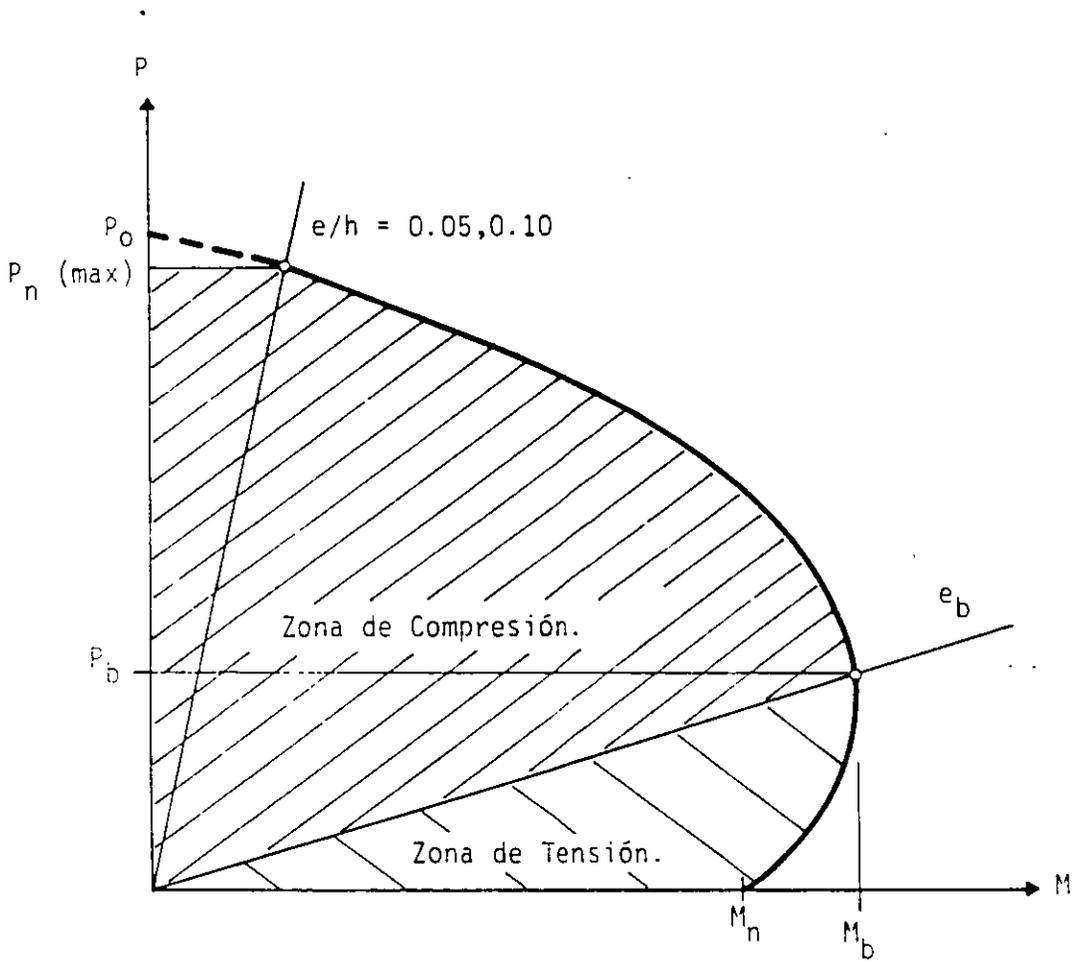
- La mayor longitud transversal de la columna es de 60 cm
- $1/6$  de la altura libre = 38 cm
- 60 cm

Por consiguiente, la dimensión que rige es la de 60 cm

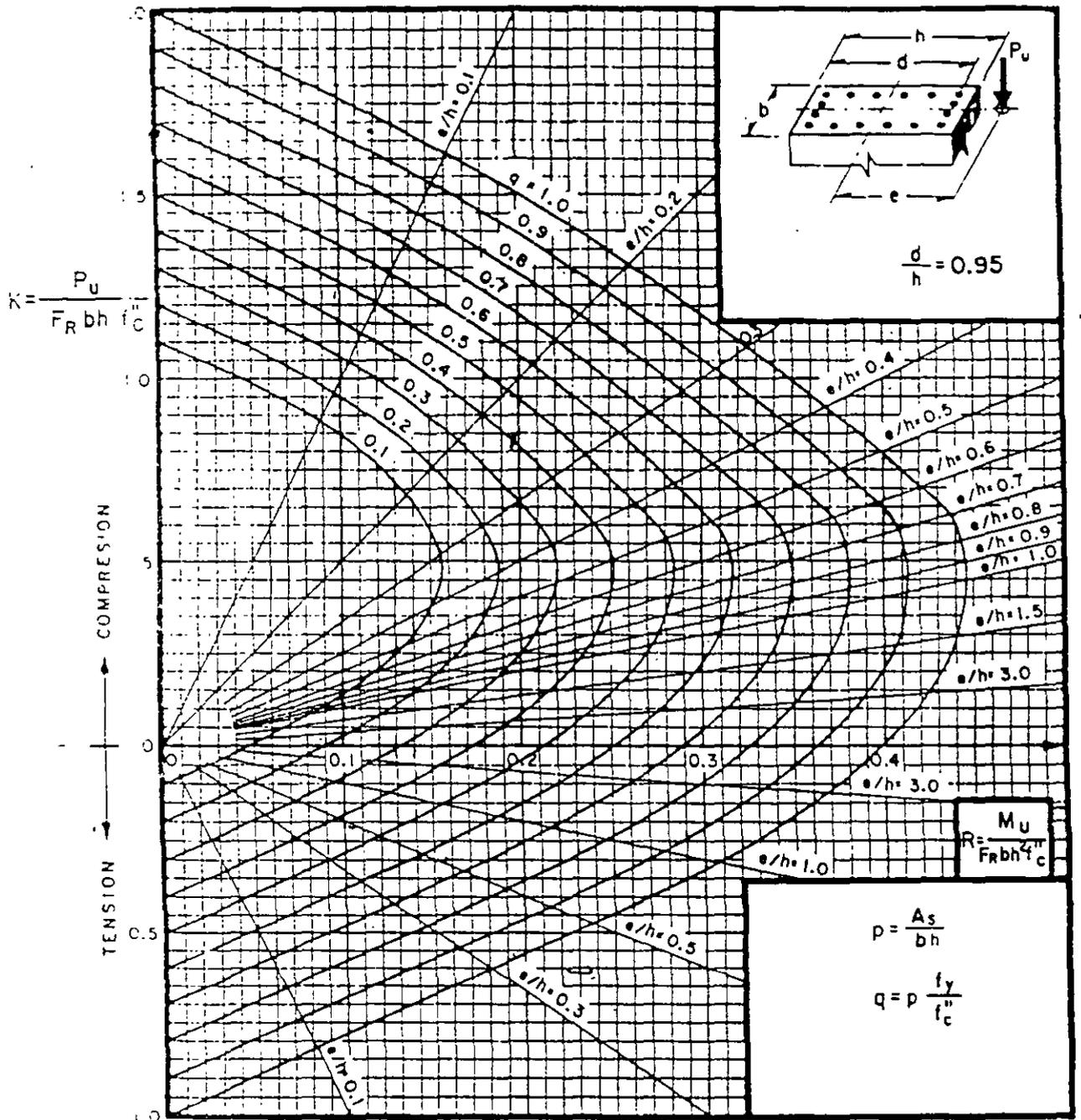
c. Detalle de la colocación de los estribos

Los estribos deben disponerse de tal manera que cada varilla longitudinal de esquina y una de cada dos consecutivas de la periferia tengan un soporte lateral suministrado por el dobléz de un estribo con un ángulo interno no mayor de 135 grados. Además, ninguna varilla sin soporte lateral debe distar más de 15 cm de una varilla soportada lateralmente.





FORMA GENERAL DE LA INTERACCION DE LA RESISTENCIA CARGA - MOMENTO.



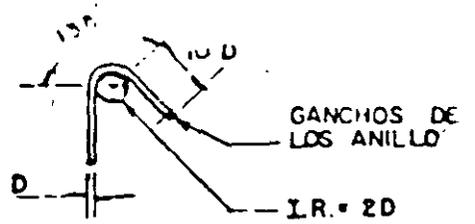
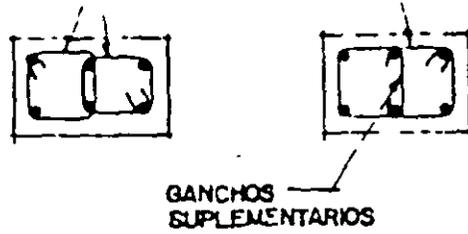
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f_c'' = 0.85 f_c^*$ ; si  $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250}\right) f_c^*$ ; si  $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

$M_U$  = Momento flexionante de diseño

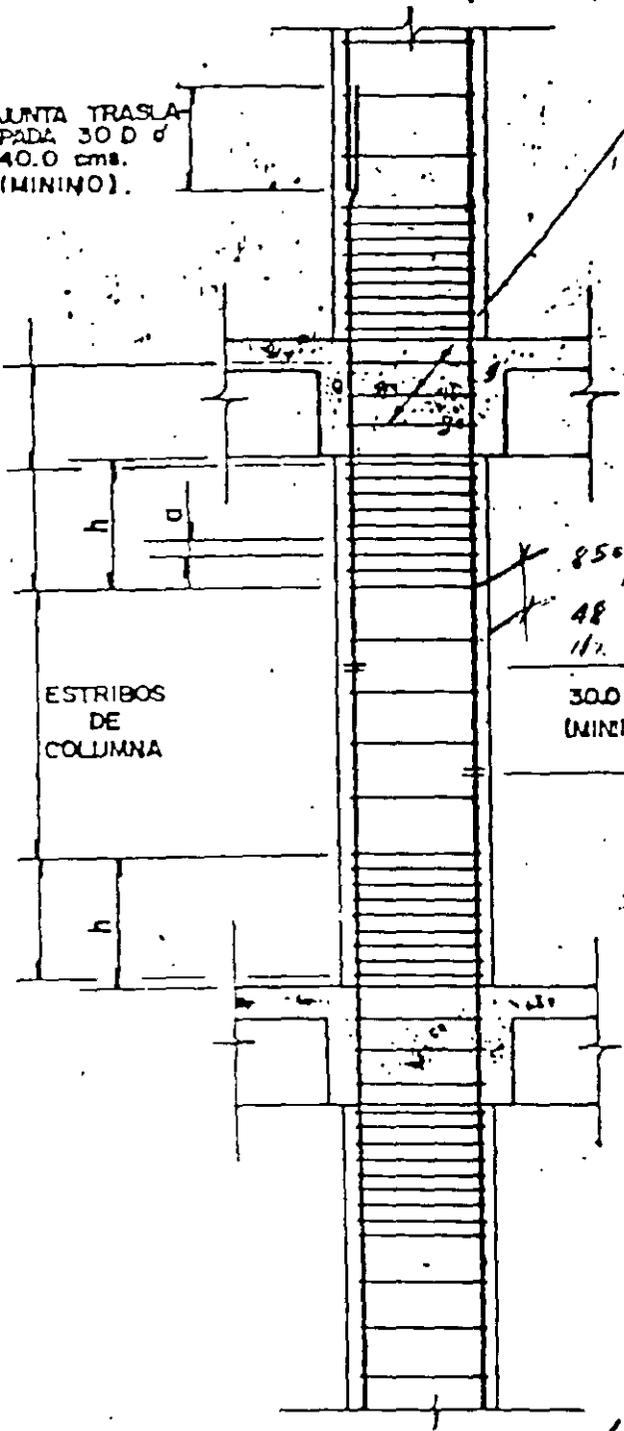
$P_U$  = Carga axial de diseño

Fig 8



JUNTA TRASLAPA  
 PADA 30 D  $\phi$   
 40.0 cms.  
 (MINIMO).

ANILLOS DE JUNTAS CON SEPARACION  
 "2a" CUANDO EXISTAN VIGAS EN LOS  
 4 LADOS DE LA COLUMNA. PARA OTRAS  
 CONDICIONES, PONER ANILLOS CON  
 SEPARACION "a".



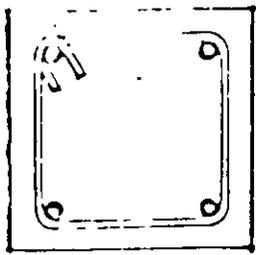
CUANDO LA CONTINUIDAD DE LA VAP  
 SE LOGRA MEDIANTE SOLDADURA O  
 POSITIVOS MECANICOS, DEBERA TRASLA-  
 PARSE A CUALQUIER NIVEL NO MAS DE  
 UN CUARTO DE LAS VARILLAS, Y LA  
 DISTANCIA ENTRE LOS NIVELES DE TRAS-  
 LAPE DE VARILLAS ADYACENTES, NO  
 DEBERA SER MENOR A 30.0 cms.

a = SEPARACION DE LOS ANILLOS Y GANCHOS SUPLEMENTARIOS

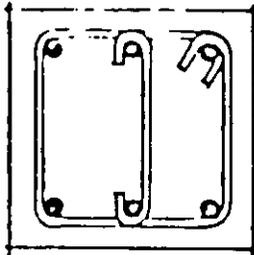
h = DIMENSION MAXIMA DE LA COLUMNA, PERO NO MENOR  
 A 50.0 cms. O UN SEXTO DE LA ALTURA LIBRE DE LA  
 COLUMNA.

60

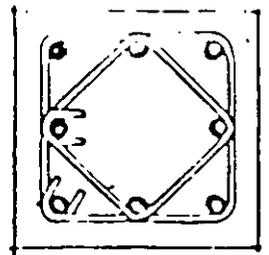
DETALLES TÍPICOS DE COLUMNAS RECTANGULARES DE  
ESTRIBOS PARA ESTRUCTURAS DUCTILES QUE RESISTEN  
MOMENTOS



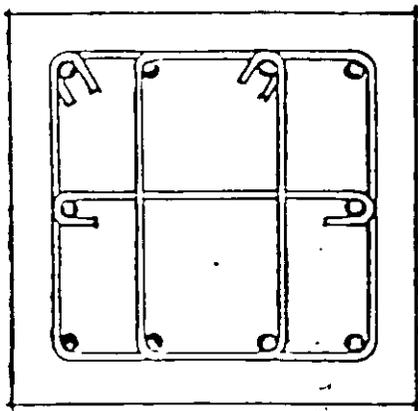
4 varillas



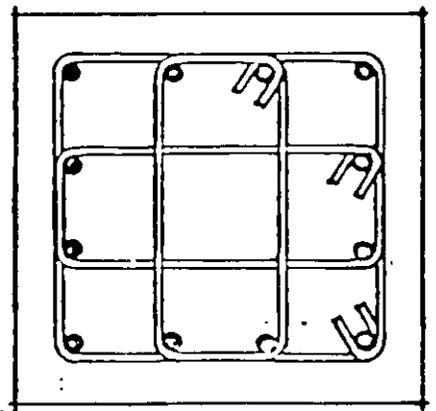
6 varillas



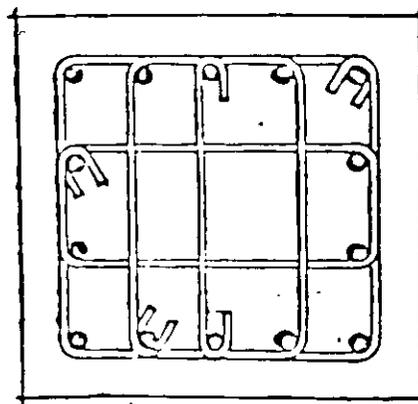
8 varillas



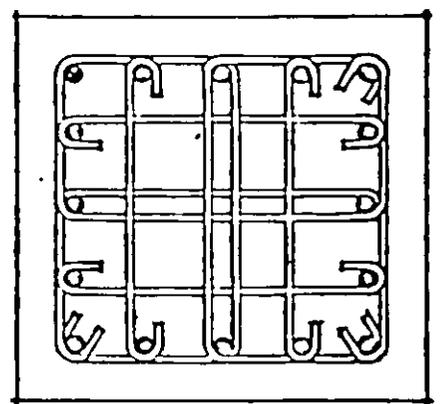
10 varillas



12 varillas



14 varillas



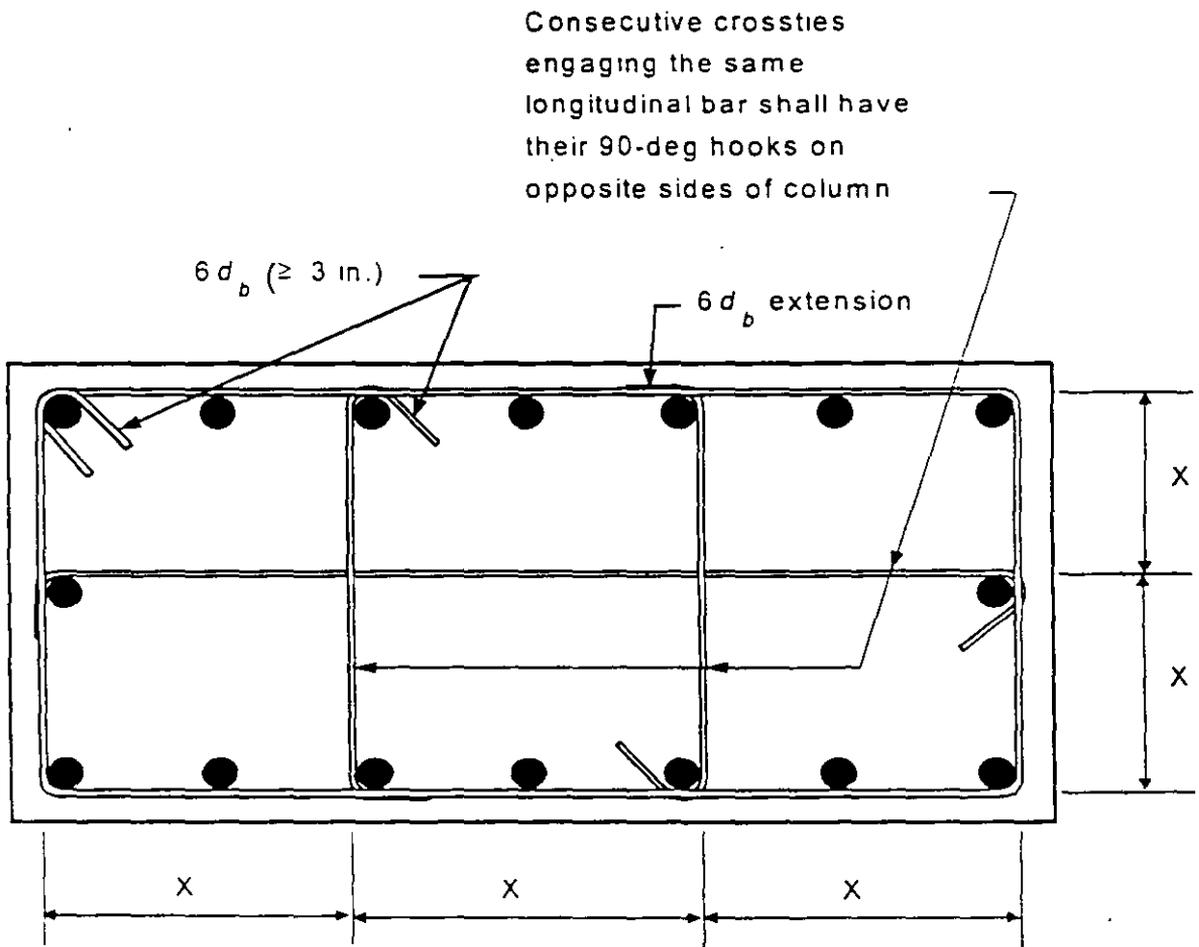
16 varillas

TODAS LAS VARILLAS DEBERAN LLEVAR ESTRIBOS O ANILLOS CUANDO MENOS DEL No. 2, PARA RESTRINGIR EL PANDEO.

DICHOS ESTRIBOS DEBERAN ESPACIARSE NO MAS DE  $16 \phi$  DE LA VARILLA LONGITUDINAL,  $48 \phi$  DE LA VARILLA DEL ESTRIBO, O LA MENOR DIMENSION DE LA COLUMNA. ADENAS LA DISPOSICION DE LOS ESTRIBOS SERA DE TAL FORMA QUE CADA VARILLA LONGITUDINAL TENGA UN SOPORTE LATERAL DADO POR EL DOBLEZ DE CUALQUIERA DE LOS ANILLOS CON UN ANGULO INTERNO MENOR O IGUAL A  $135^\circ$ . ESTAS SUGERENCIAS RIGEN TANTO PARA EL USO DE PAQUETES DE VARILLAS COMO PARA EL REFUERZO NORMAL.

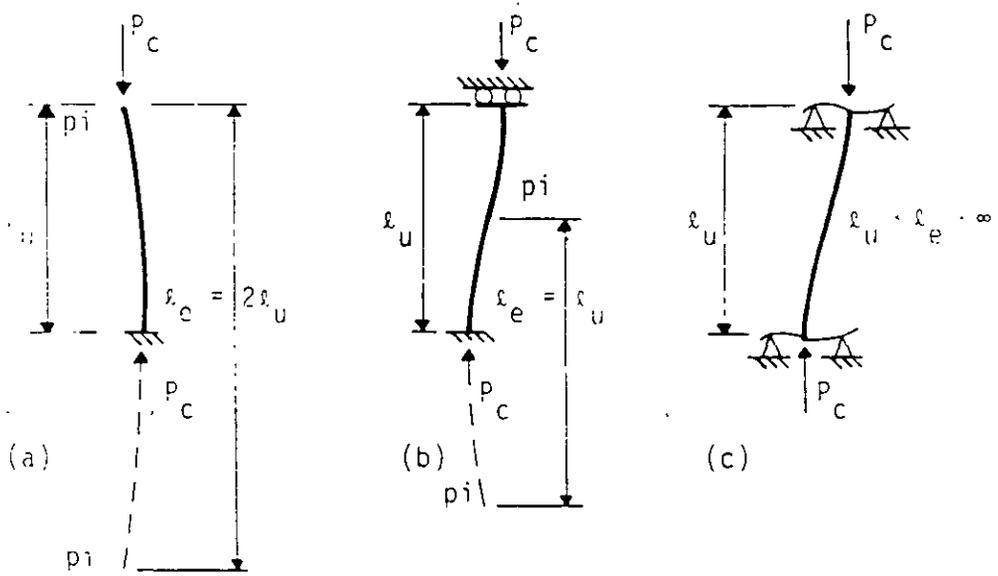
Fig. A-20

TIPOS DE REFUERZO TRANSVERSAL EN COLUMNAS

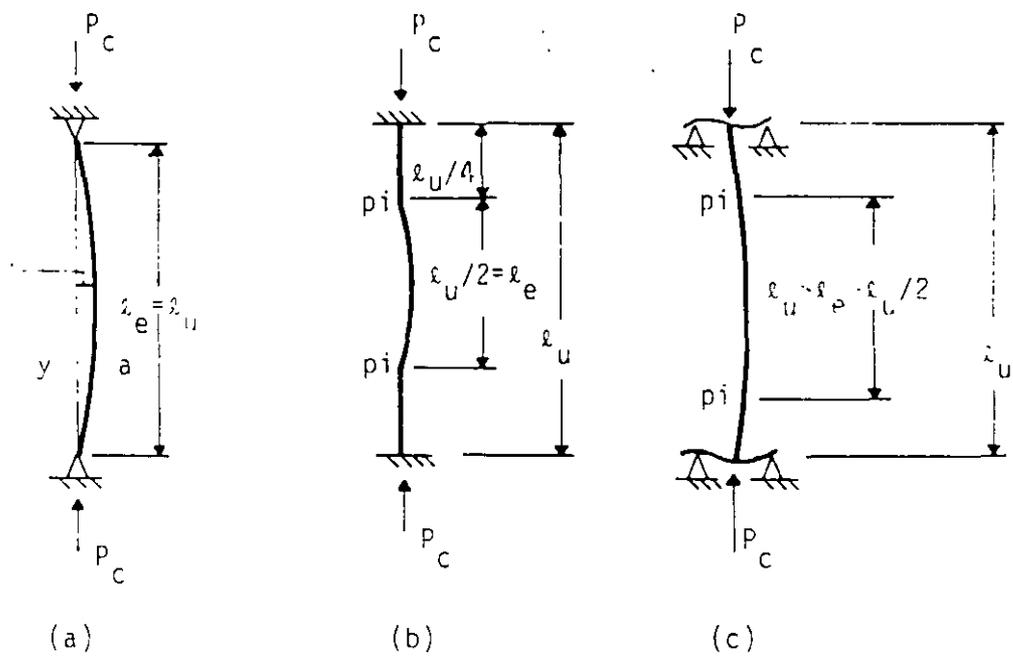


Note:  $X$  shall not exceed 14 inches  
 $h_x$  = maximum value of  $X$  on all column faces.

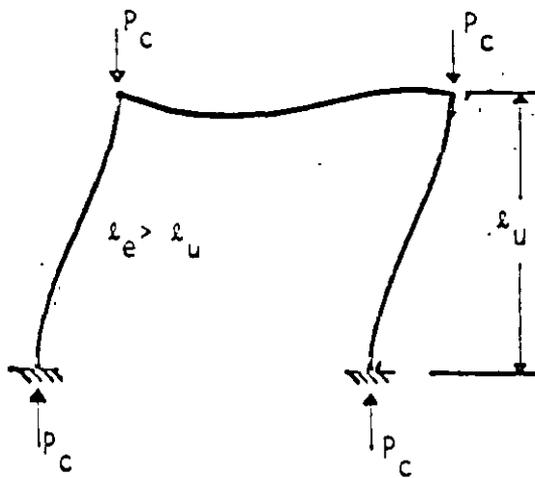
New Fig. R21.4.4 -- Example of transverse reinforcement in columns



LONGITUD EFECTIVA  $l_e$  (TRASLACION LATERAL PERMITIDA)



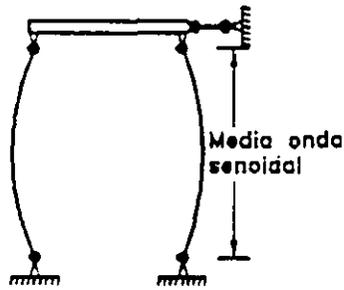
LONGITUD EFECTIVA,  $\lambda_e$  (TRASLACION LATERAL IMPEDIDA)



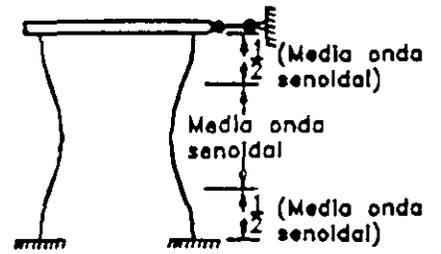
MARCO RIGIDO ( TRASLACION LATERAL PERMITIDA )

En resumen, se tiene que:

- a) En las columnas que están contraventeadas (sin ladeo), la longitud efectiva  $l_e$  se encuentra entre  $\frac{l_u}{2}$  y  $l_u$ , donde  $l_u$  es la longitud no soportada entre los apoyos de la columna;
- b) En las columnas que no están contraventeadas, la longitud efectiva  $l_e$  es siempre mayor que la longitud real de la columna  $l_u$ , y puede resultar  $2l_u$  o más. En tal caso, un valor de  $k$  menor que 1.2 **no** se considera razonable
- c) El uso de los nomogramas anexos, permite una determinación gráfica de los factores de longitud efectiva para los marcos atiesados (sin ladeo), o no atiesados (con ladeo), respectivamente
- d) Si ambos extremos están empotrados o casi, entonces  $\Psi = 0$ , y  $k = 0.5$ .
- e) Si ambos extremos de una columna no atiesada (con ladeo) tiene una mínima rigidez a la rotación, o se aproxima a  $\Psi = \infty$ , entonces  $k = \infty$ .
- f) Si ambos extremos se aproximan al empotramiento perfecto, entonces  $\Psi = 0$ , y  $k = 1$ .

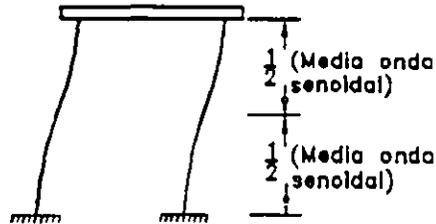


(a)  $n = 1, kl = l$

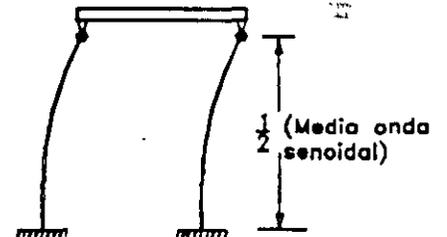


(b)  $n = 2, kl = \frac{1}{2}l$

Marcos contraventeados contra el lado



(c)  $n = 1, kl = l$

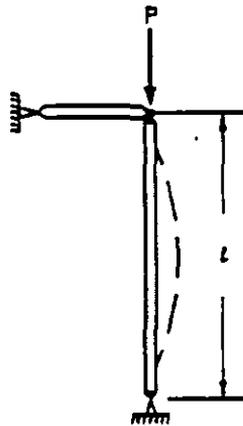
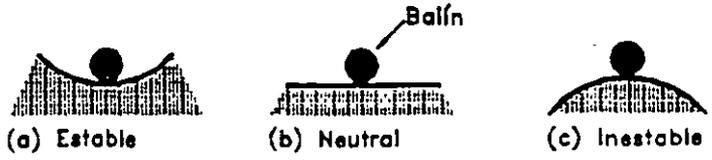


(d)  $n = \frac{1}{2}, kl = 2l$

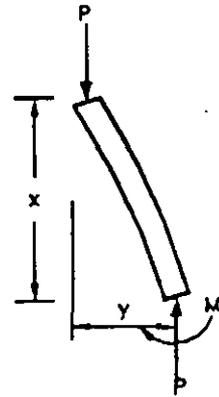
Longitudes efectivas de columnas idealizadas

Marcos con libertad para experimentar lado

Estados de equilibrio

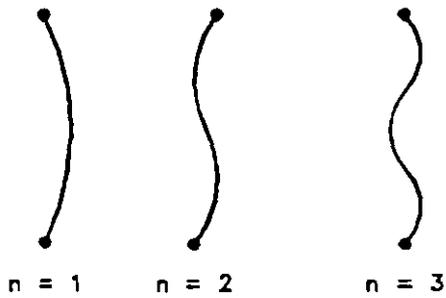


(a) Columna



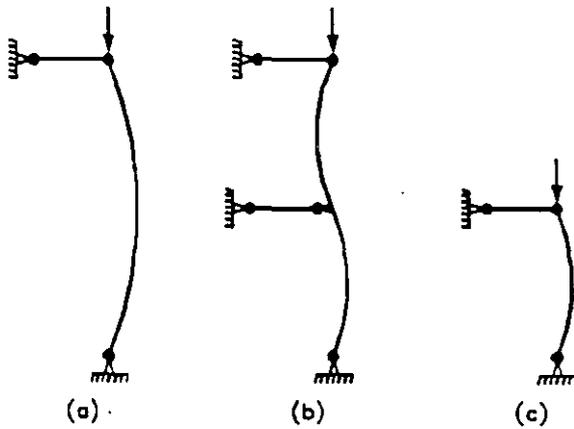
(b) Diagrama de Cuerpo Libre

Pandeo de una columna biarticulada

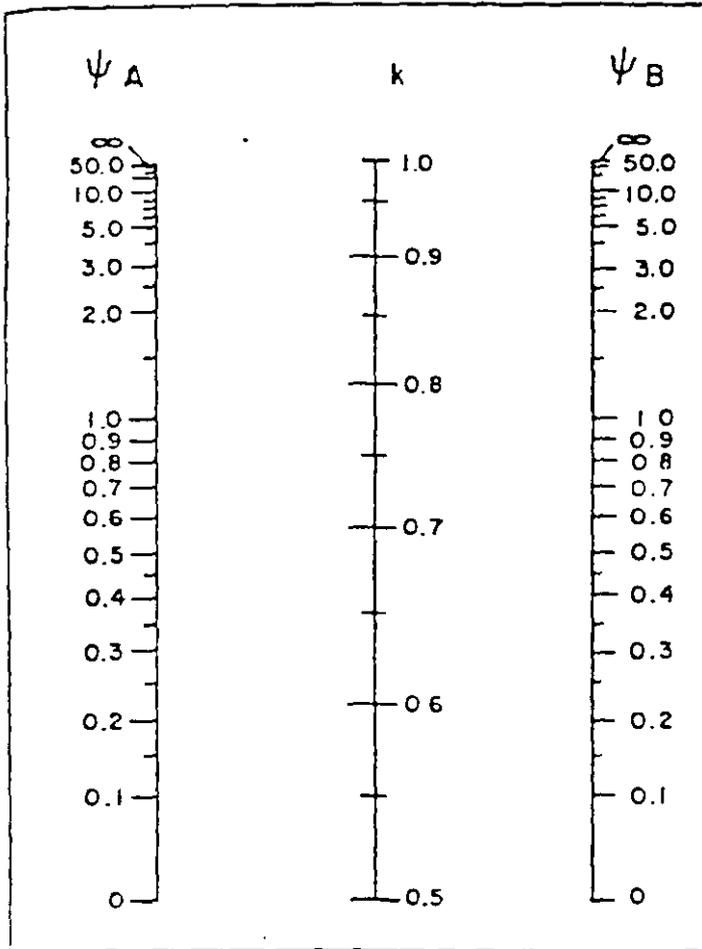


(c) Número de medias ondas senoidales

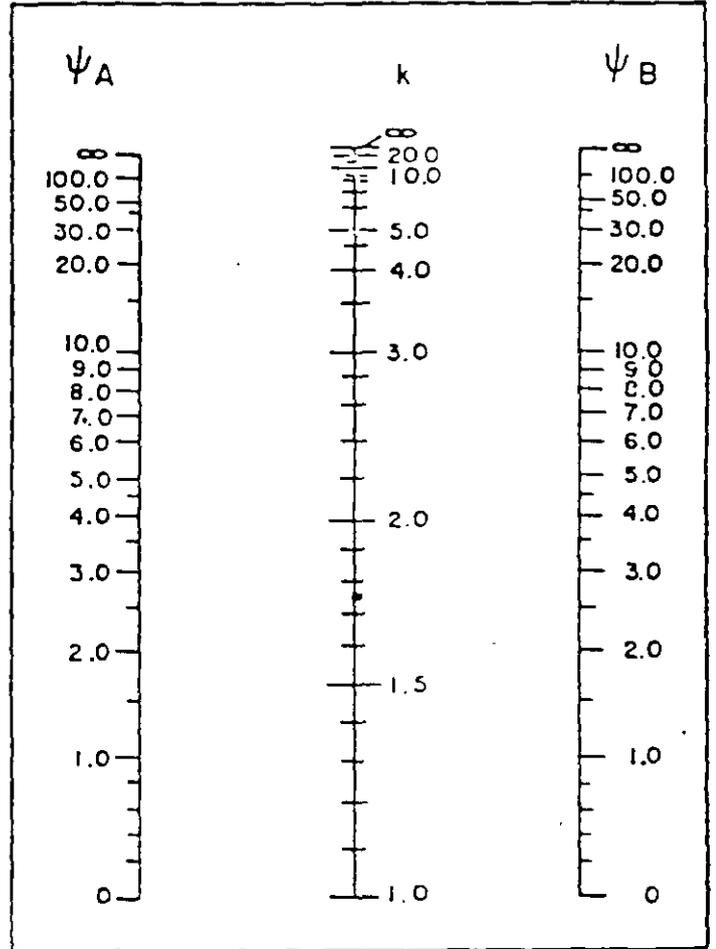
Longitud efectiva de columnas



(a)



(b)



$\psi$  = cociente de  $\sum(I/L)$  de las columnas, entre  $\sum(I/L)$  de los miembros de flexión que llegan a un extremo de una columna, en el plano considerado

$$H' = kH$$

A y B son los extremos de la columna

Fig 1.1. Nomogramas para determinar longitudes efectivas,  $H'$ ,  $kL_u$  (ACI) (DF) de miembros a flexocompresión

## EFECTOS DE ESBELTEZ EN COLUMNAS, DE CONFORMIDAD CON EL CAPÍTULO 10 DE ACI 318-99

### 10.10. Efectos de esbeltez en los elementos a compresión

En 1995, el reglamento se modificó para especificar que en lo sucesivo los efectos de esbeltez se tomen en consideración por medio de un análisis de 2o. orden (10.10.1). Si se toma en cuenta que los procedimientos de computación y muchos programas existentes son ahora capaces de realizar análisis de 2o. orden, se justifica esta disposición del ACI 318-95, la cual continúa vigente en 1999.

Como una alternativa a lo establecido en 10.10.1, tal y como ha ocurrido en versiones previas del reglamento, se permiten, en 10.12 y 10.13, los métodos aproximados que determinan un momento de diseño amplificado mediante un factor  $\delta$ , para tomar en cuenta la esbeltez del elemento en consideración.

En la presente revisión del reglamento, se establece en forma más explícita que en las versiones anteriores, la diferencia entre los marcos **no** contraventados, (que ahora se les llama "con ladeo"), de los contraventados, (que ahora se les llama "sin ladeo"). En ambos casos se especifican límites para los efectos de esbeltez.

Se establecen límites inferiores para la esbeltez, abajo de los cuales pueden despreciarse los momentos de segundo orden y sólo deberán considerarse las cargas axiales y los momentos de primer orden para el diseño como columnas "cortas."

Cuando se tienen relaciones de esbeltez moderadas, es permisible la determinación de los momentos amplificados mediante los procedimientos aproximados que se mencionan en 10.12 y 10.13.

En las columnas con relaciones de esbeltez altas, se requiere un análisis de segundo orden que resulte más preciso (sección 10.11.5) y que tome en cuenta la no linealidad del material y el agrietamiento, los efectos de la curvatura del elemento, la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, la contracción y la fluencia (flujo plástico), así como la interacción con la cimentación. Los límites que se establecen en 10.12.2 y 10.13.2 para marcos, sin ladeo y con ladeo, respectivamente, se resumen a continuación:

Marco con ladeo (sin contraventear)		Marco sin ladeo (contraventado)
si $kl_u/r < 22$ ⇒	Se desprecia la esbeltez	si $kl_u/r \leq 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $22 \leq kl_u/r \leq 100$ ⇒	Métodos aproximados	si $100 \geq kl_u/r > 34 - 12(M_1/M_2)$ ⇐
si $kl_u/r > 100$ ⇒	Análisis P-Δ	si $kl_u/r > 100$ ⇐

Donde:

$M_1$  y  $M_2$  son respectivamente, el menor y el mayor de los momentos factorados en los extremos de la columna.  $M_1$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura sencilla y negativo si lo hace en curvatura doble; en tanto que  $M_2$  siempre será positivo.

$k$ , es el factor que determina la longitud efectiva del elemento en flexo-compresión. El factor  $k$  se determina de conformidad con 10.12, calculando las expresiones que se presentan en R10.12, o por medio de los nomogramas de Jackson y Moreland, que permiten calcular dicho valor de  $k$ , para columnas de sección constante en un marco

$r$  es el radio de giro de la sección del elemento en flexo-compresión

$l_u$  es la longitud fuera de los apoyos, del elemento en flexo-compresión

10.10.1. Excepto con lo permitido en 10.10.2, el diseño de los elementos a compresión, las vigas de restricción y otros elementos de apoyo, se basará en las fuerzas y momentos factorados a partir de un análisis de segundo orden, considerando la no linealidad y el agrietamiento del material, así como los efectos de la curvatura del elemento y la distorsión lateral (*drift*), la duración de las cargas, contracción y flujo plástico, y la interacción con la cimentación. Las dimensiones de la sección transversal de cada elemento que se use en el análisis estarán dentro del 10 por ciento de las dimensiones de los elementos mostrados en los planos de diseño, o deberá repetirse el análisis proponiéndose nuevas secciones de los elementos.

Comentario: Las disposiciones de la sección 10.10.1 para los efectos de esbeltez en los elementos a compresión se revisaron en 1995, para reconocer el uso de los análisis de segundo orden y para mejorar la distinción entre los marcos con ladeo y sin ladeo.

Se aclara el uso de los marcos no contraventeados que experimentan ladeo y los marcos contraventeados que no experimentan ladeo.

### 10.11. Momentos amplificados

10.11.1 Las cargas axiales factoradas  $P_u$ , los momentos factorados  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos de las columnas y cuando se requieran, las deflexiones laterales relativas  $\Delta_o$  en el entrepiso, se calcularán utilizando un análisis elástico de primer orden donde las propiedades de las secciones se determinan tomando en cuenta la influencia de las cargas axiales, la presencia de las regiones agrietadas a lo largo del miembro, así como los efectos de la duración de las cargas. En forma alternativa se permitirá el uso de las siguientes propiedades para los elementos de la estructura:

a) El módulo de elasticidad	de la sección 8.5.1: para concreto de peso normal $E_c = 15000\sqrt{f_c}$
b) Momentos de inercia:	
Vigas	0.35 I <sub>g</sub>
Columnas	0.70 I <sub>g</sub>
Muros - sin agrietar	0.70 I <sub>g</sub>
agrietados	0.35 I <sub>g</sub>
Placas y losas planas	0.25 I <sub>g</sub>
c) Area	1.0 A <sub>g</sub>

Los momentos de inercia se dividirán por  $(1 + \beta_d)$ , donde  $\beta_d$ :

a) Para marcos sin ladeo:

$$\beta = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

b) Para marcos con ladeo, excepto a lo requerido en c):

$$\beta_d = \frac{\text{cortante sostenido máximo factorado en un entrepiso}}{\text{cortante máximo factorado en ese entrepiso}}$$

c) en la verificación de la estabilidad de marcos con ladeo llevado a cabo de conformidad con 10.13.6:

$$\beta_d = \frac{\text{carga sostenida axial máxima factorada}}{\text{carga axial máxima factorada}}$$

#### 10.11.4 Los marcos sin y con ladeo

En las estructuras reales no existen las condiciones perfectas "con ladeo" o "sin ladeo." Si mediante una inspección no es posible determinar con precisión si el marco está o no contraventeado, las secciones 10.11.4.1 y 10.11.4.2 proporcionan dos formas para determinar la condición del marco. De conformidad con 10.11.4.1, una columna que forma parte del marco se considera contraventeada (sin ladeo), si los momentos en los extremos de ella, debidos a los efectos de segundo orden, no sobrepasan el 5 por ciento de los correspondientes momentos de primer orden. De acuerdo con 10.11.4.2, se puede suponer que un entrepiso del marco no experimenta ladeo, si

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_u}{V_u l_c} \leq 0.05 \quad \text{Ec. (10-7)}$$

en la que.

$$\begin{aligned} Q &= \text{índice de estabilidad en un entrepiso} \\ \sum P_u &= \text{carga vertical factorada total en el entrepiso} \\ V_u &= \text{cortante total en el entrepiso} \end{aligned}$$

$\Delta_n$  = deflexión relativa de primer orden entre los extremos superior e inferior del entrepiso, debida a  $V_u$

$l_c$  = longitud de la columna, medida centro a centro entre las juntas del marco

10.12.2. En los marcos sin ladeo se permitirá despreciar los efectos de esbeltez para los elementos en compresión que satisfagan:

$$\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12(M_1/M_2) \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde el término  $[34 - 12(M_1/M_2)]$  no se tomará mayor a 40. El término  $M_1/M_2$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla, y negativo si se flexiona en curvatura doble.

10.12.3. Los elementos en compresión se diseñarán para la carga axial factorada  $P_u$  y el momento  $M_c$  amplificado por los efectos de la curvatura, como sigue:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-9)} \quad \therefore$$

en la que:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec. (10-10);} \quad \therefore$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec. (10-11)} \quad \ddagger$$

El se tomará igual a:

$$EI = \frac{(0.2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$\text{ó} \quad EI = \frac{0.4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-13)}$$

10.12.3.1. En los elementos sin cargas transversales entre los apoyos,  $C_m$  se tomará como

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad \text{Ec. (10-14)}$$

donde  $M_1/M_2$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura sencilla. En los miembros con cargas transversales entre los apoyos,  $C_m$  se tomará igual a 1.0.

10.12.3.2. El momento factorado  $M_2$  de la ec. (10-9) no se tomará menor a

$$M_{2,min} = P_u(0.6 + 0.012h) \quad \text{Ec. (10-15)}$$

separadamente alrededor de cada uno de los ejes, donde  $0.6$  y  $h$  están en centímetros. En los elementos en los que  $M_{2,\min}$  excede  $M_2$ , el valor de  $C_m$  de la ec. (10-14) se tomará, ya sea igual a 1.0, o se basará en el cociente de los momentos calculados  $M_1$  y  $M_2$ .

### 10.13. Amplificación de momentos — marcos con ladeo

El diseño por esbeltez de los elementos con ladeo se revisó en el Reglamento de 1995. El procedimiento revisado consiste de tres pasos:

1) Se calculan los momentos amplificados  $\delta_s M_s$ . Esto puede llevarse a cabo de tres maneras diferentes:

Primero, se podrá utilizar un análisis elástico de segundo orden del marco (10.13.4.1).

Segundo, podrá utilizarse una aproximación de dicho análisis (10.13.4.2).

La tercera alternativa es la de utilizar el amplificador de ladeo  $\delta_s$  de las ediciones anteriores del reglamento (10.3.4.3).

2) Los momentos amplificados de ladeo  $\delta_s M_s$  se suman al momento no amplificado sin ladeo  $M_{ns}$  en cada extremo de cada una de las columnas (10.13.3). Los momentos sin ladeo se podrán calcular utilizando un análisis elástico de primer orden.

10.13.1 En los elementos a compresión no contraventeados contra el ladeo, el factor  $k$  de longitud efectiva se determinará utilizando  $E$  e  $I$  de conformidad con 10.11.1 y será mayor que 1.0.

10.13.2 En los elementos a compresión que no estén contraventeados contra ladeo, los efectos de la esbeltez se despreciarán si  $kl_0/r$  es menor que 22.

10.13.3. Los momentos  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos del elemento en compresión se tomarán como:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec. (10-17)}$$

donde,  $\delta_s M_{1s}$  y  $\delta_s M_{2s}$  se calcularán de conformidad con 10.13.4.

10.13.4 Los momentos de ladeo amplificados  $\delta_s M_s$  se tomarán como los momentos en los extremos de la columna, calculados utilizando un análisis elástico de segundo orden, basado en la rigidez del miembro dada en 10.11.1.

10.13.4.2. En forma alternativa se permitirá calcular  $\delta_s M_s$  como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1-Q} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-18)}$$

Si  $\delta_s$  calculado de esta manera excede 1.5,  $\delta_s M_s$  se calculará utilizando 10.13.4.1 o 10.13.4.3. 316.

10.13.4.3. Alternativamente se permitirá calcular los momentos amplificados de ladoo  $\delta_s M_s$  como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-19)}$$

donde  $\sum P_u$  es la suma de todas las cargas verticales en el entrepiso y  $\sum P_c$  es la suma de todas las cargas de las columnas que resisten ladoo en el entrepiso.  $P_c$  se calcula utilizando la ecuación (10-11), donde  $k$  se obtiene con 10.13.1 y  $EI$  de la ecuación (10-12) o la (10-13).

10.13.5. Si en un elemento a compresión:

$$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}} \quad \text{Ec. (10-20)}$$

el momento máximo ocurrirá entre los extremos de las columnas y en ese caso,  $M_2$  se deberá amplificar mediante el amplificador para marcos sin ladoo de la ecuación (10-10), de la siguiente manera:

$$M_c = \delta_m M_2 = \left( \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \right) (M_m + \delta_s M_2) \quad \text{Ec. (10-9)}$$

Entonces, la columna se diseñará para la carga axial factorada  $P_u$  y el momento  $M_c$  calculado utilizando 10.12.3, en que  $M_1$  y  $M_2$  se calculan de conformidad con 10.13.3.  $\beta_d$  como se define para la combinación de carga en consideración, y  $k$  como se define en 10.12.1

Se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto, ante cargas gravitacionales, como sigue:

10.13.6. En adición a los casos de carga que comprenden cargas laterales, se considerará la resistencia y la estabilidad de la estructura en conjunto bajo cargas gravitacionales factoradas.

a) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.1, el cociente de las deflexiones laterales de segundo orden por las deflexiones laterales de primer orden, con 1.4 veces la carga muerta y 1.7 veces la carga viva, más la carga lateral aplicada a la estructura, no excederá de 2.5.

b) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.2, el valor de  $Q$  calculado utilizando  $\Sigma P_u$  con 1.4 veces la carga muerta más 1.7 veces la carga viva, no excederá de 0.60.

c) Cuando  $\delta_s M_s$  se calcula a partir de 10.13.4.3,  $\delta_s$  calculado utilizando  $\Sigma P_u$  y  $\Sigma P_c$  correspondiente a las cargas factoradas muerta y viva, será positiva y no excederá de 2.5.

En los casos a), b), y c),  $\beta_d$  se tomará como el cociente de la carga axial máxima factorada sostenida, por la carga axial máxima factorada.

10.13.7. En los marcos con ladeo, los elementos a flexión se diseñarán para los momentos totales amplificados en la junta, en los extremos de los elementos a compresión.

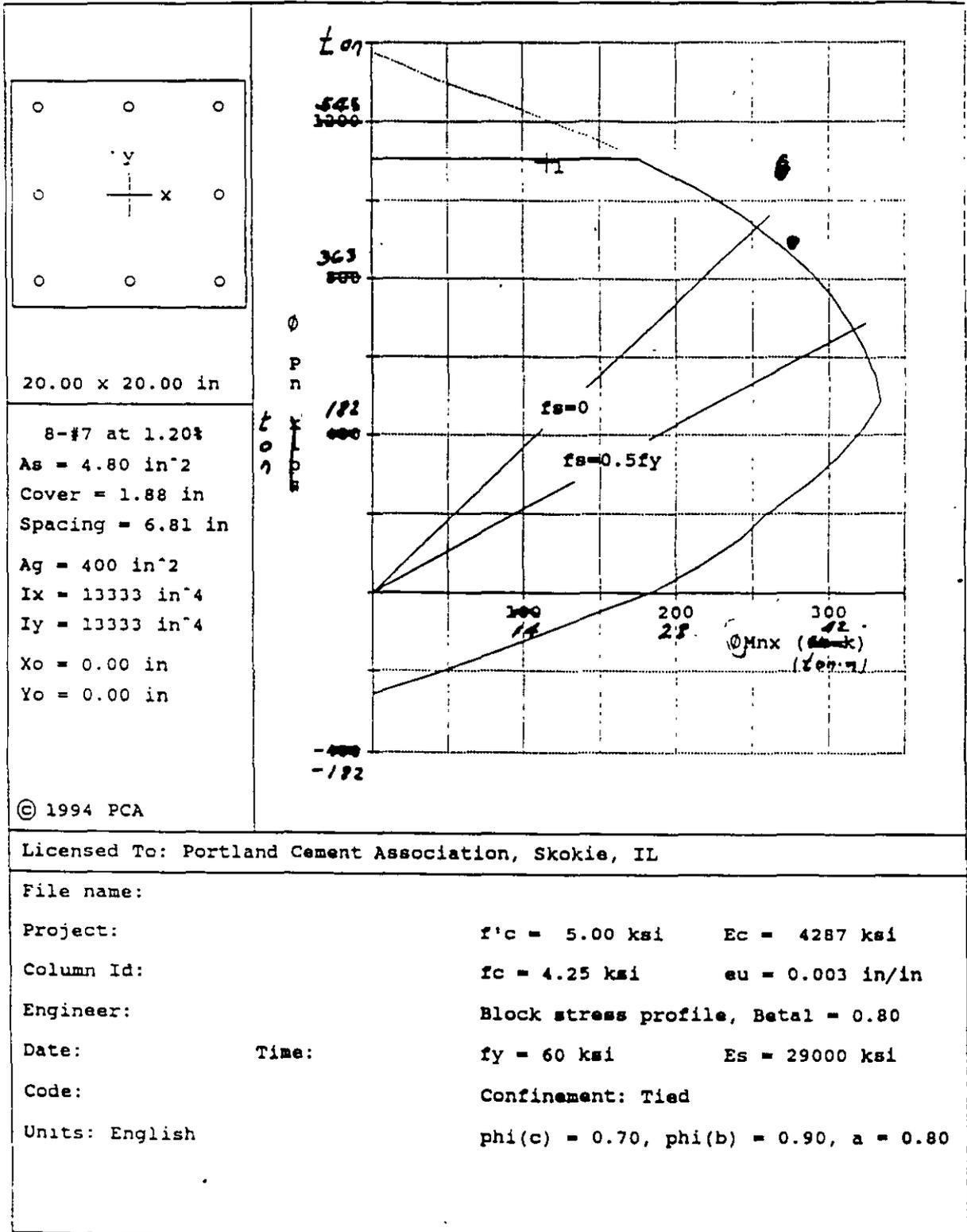


Figure 13-14 Design Strength Interaction Diagram for Column A3

Similarly, for column C3, use 24-#9 ( $p_g = 4.2\%$ ; see Fig. 13-15).

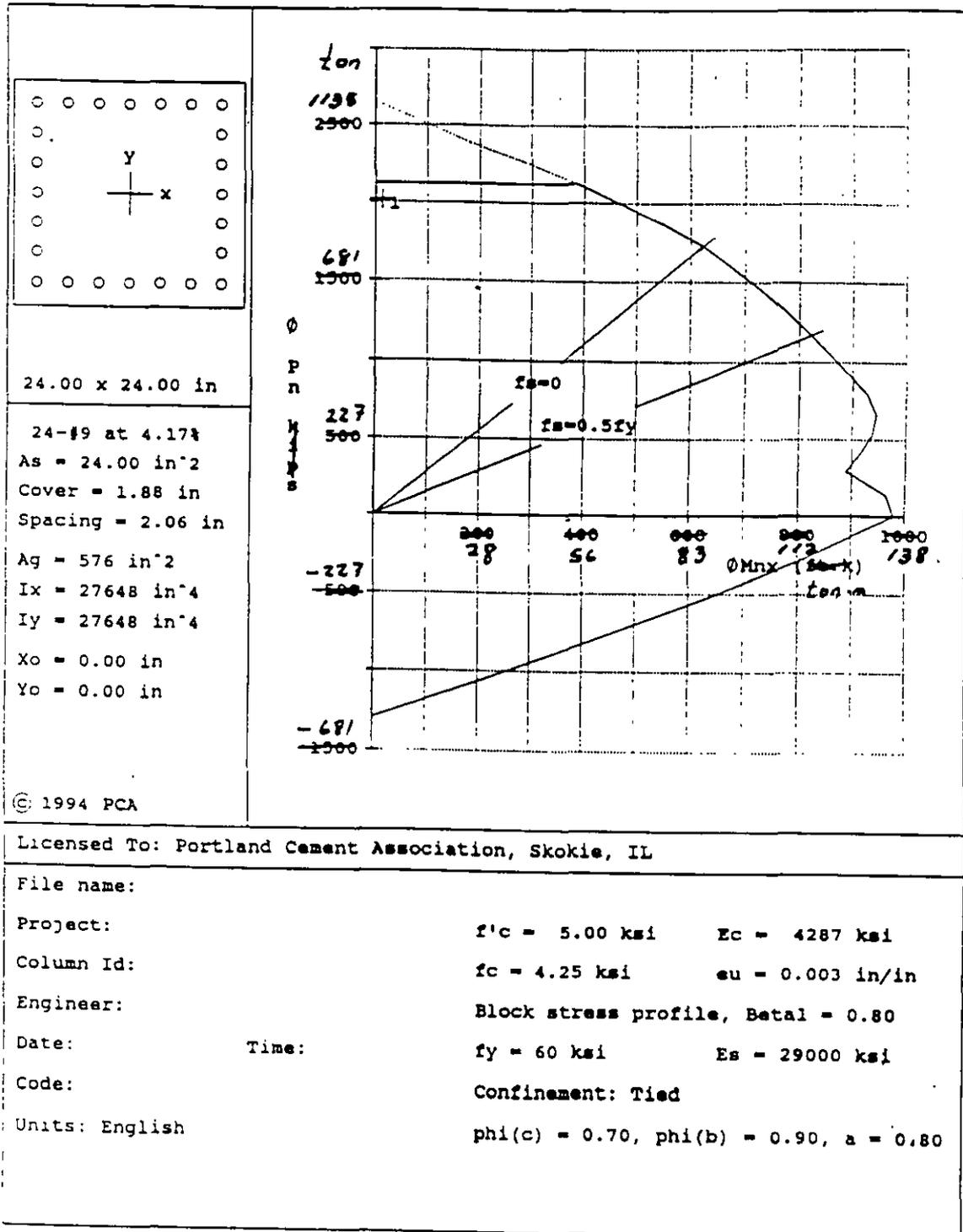


Figure 13-15 Design Strength Interaction Diagram for Column C3

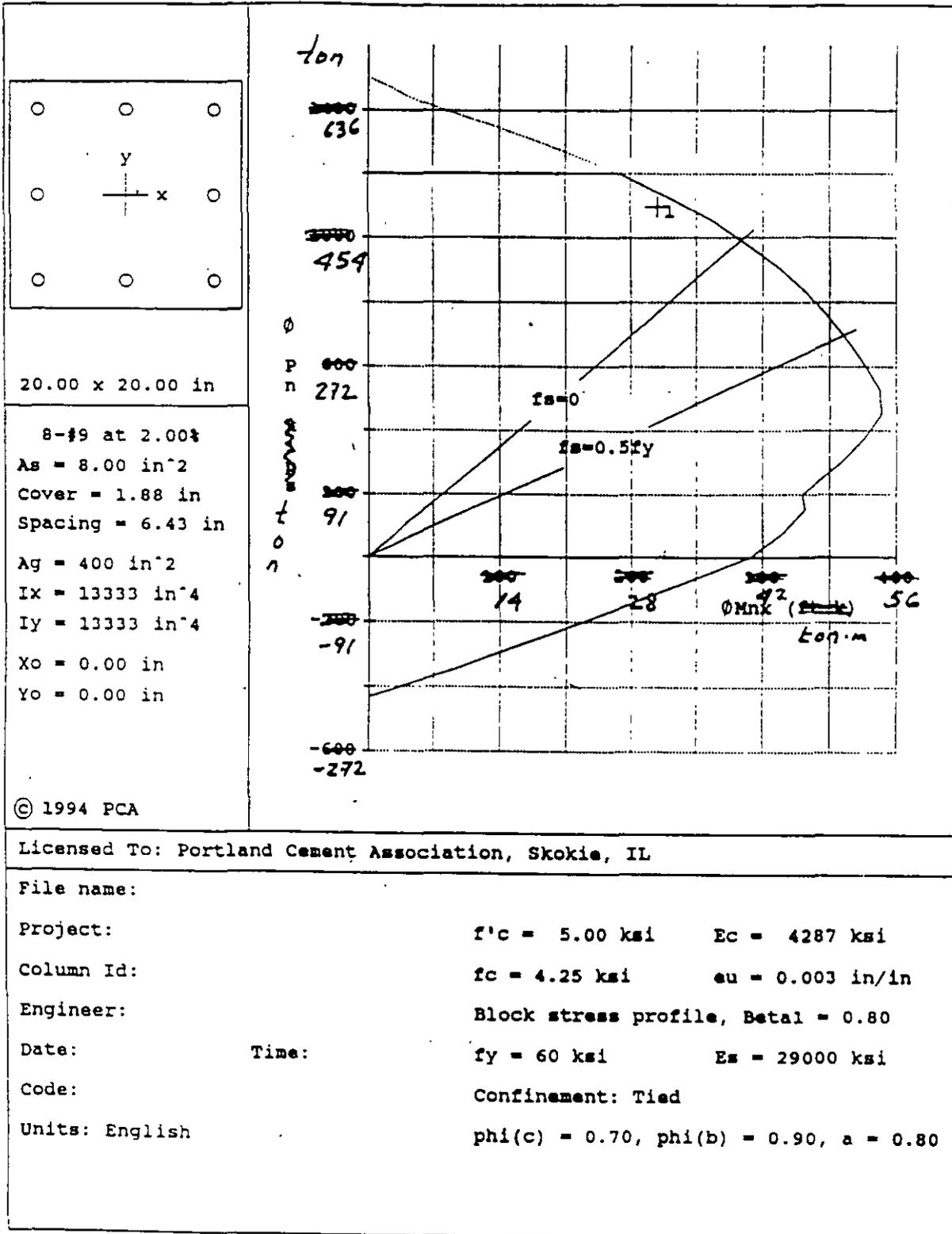
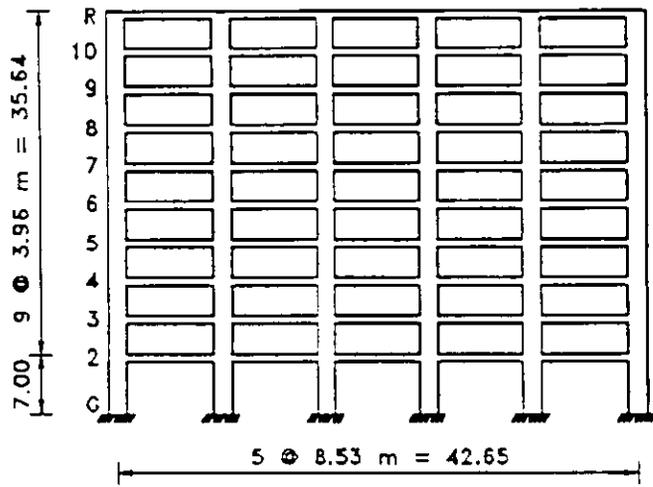
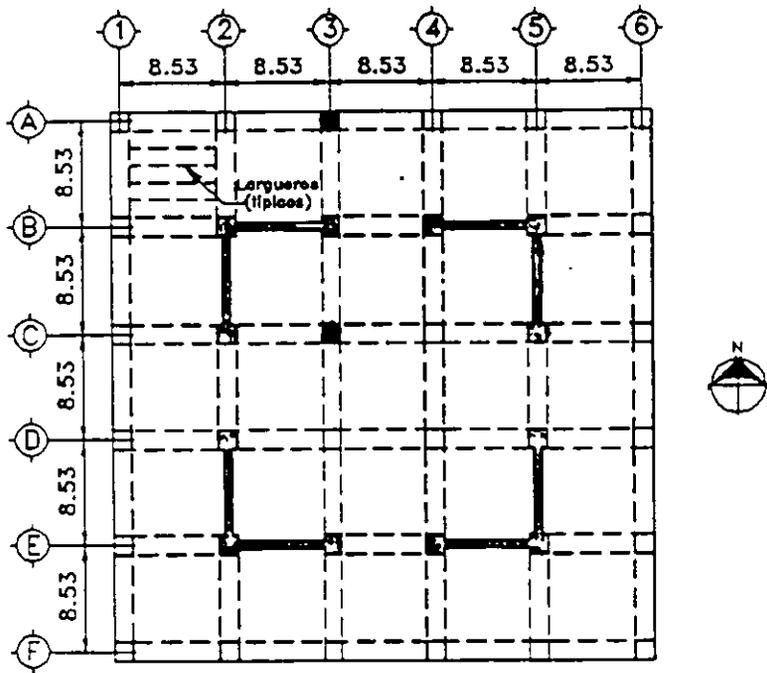


Figure 13-16 Design Strength Interaction Diagram for Column A3 (including magnified moment)



Ejemplo 13.1 — Efectos de esbeltez para columnas en un marco sin ladeo (Contraventado).

Diséñense las columnas A3 y C3 del primer entrepiso del edificio para oficinas con 10 entrepisos, que se muestra abajo. La altura libre de primer entrepiso es de 6.50 m, y de 3.45 m para los otros entrepisos. Supóngase que los efectos de las cargas laterales en el edificio son causadas por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedad de los materiales:

Concreto:  $f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo:  $f_s = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Muros de cortante: 30 cm

Peso de los largueros de piso: 420 kg/cm<sup>2</sup>

Carga muerta sobrepuesta: 156 kg/cm<sup>2</sup>

Carga viva: 244 kg/cm<sup>2</sup>

### 1. Cargas gravitacionales factoradas

Columna	Carga axial factorada ton	Momentos flexionantes factorados, ton-m			
		$M_{1e}$ extr. sup.	$M_{2e}$ extr. inferior	$M_1$	$M_2$
A3	498	16.08	8.21	8.21	16.08
C3	916	1.69	0.86	0.86	1.69

2. Determinese si el marco es con o sin ladeo

Secc. 10.11.4.2

Los resultados de un análisis elástico de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.1.1, se resumen en la tabla que sigue:

Nivel de piso	$\sum P_u$ ton	$\Delta_o$ cm	$V_u$ ton	$l_c$ cm	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u l_c}$
Az	1,803	0.036	10.90	396	0.015
10	3,661	0.036	32.19	396	0.010
9	5,518	0.038	53.07	396	0.010
8	7,375	0.038	73.46	396	0.010
7	9,232	0.036	93.25	396	0.009
6	11,090	0.036	112.46	396	0.009
5	12,947	0.036	131.02	396	0.009
4	14,804	0.028	148.96	396	0.007
3	16,662	0.025	165.80	396	0.006
2	18,631	0.028	187.68	675	0.004

El índice de estabilidad  $Q = \sum P_u \Delta_o / V_u l_c$  para cada entrepiso es menor que 0.05. Por consiguiente, toda la estructura se puede considerar como de *no ladeo* (contraventeada).

### 3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Para columnas con anillos, excluyendo efectos de esbeltez:

$$\phi P_{u,max} = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{sv}) + 4,200 A_{sv}] \quad \text{Ec (10-2)}$$

Para la columna A-3:

$$498 = 0.80(0.70)[0.85(350)(50^2 - A_{sv}) + 4,200 A_{sv}]$$

de donde:  $A_{sv} = 37.29 \text{ cm}^2$

Utilicense 8 varillas del #8 ( $A_{sv} = 40.56 \text{ cm}^2$ ;  $\rho_x = 1.6\%$ )

Utilicense PCACOL para determinar la capacidad nominal de la columna A3 con:

$$P_u = 498 \text{ ton.}$$

De la figura 13.14:

$$\phi M_u = 24.98 \text{ ton-m} > 16.08 \quad \text{CORRECTO}$$

En forma similar, de la figura 13.15, para la columna C3 utilice 24 vars. del #9:  $A_{sv} = 153.87 \text{ cm}^2$

$$\rho_x = \frac{153.87}{60 \times 60} = 0.0427 = 4.3\%$$

4. **Columna C3** — Diseño final, que incluye los efectos de esbeltez. Determinese si debieran considerarse los efectos de esbeltez. Utilícese un factor de longitud efectiva  $k = 1.0$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0(650)}{0.3(60)} = 36.11 \quad 10.12.1$$

Puesto que la columna se flexiona en doble curvatura:

$$34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) = 34 - 12 \left( \frac{-0.86}{1.69} \right) = 40.1 > 36.1$$

No requieren considerarse los efectos de esbeltez para la columna **C3** puesto

$$\text{que } kl_u/r < 34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \quad 10.12.2$$

Nótese que de conformidad con la disposición de 10.12.2 de ACI 318-99,  $34 - 12 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$  no debe tomarse mayor a 40.

En este caso no es necesario calcular un valor más preciso de  $k$ , ya que la columna no es esbelta para  $k = 1.0$ . Las 24 vars. del #9 resultán adecuadas.

5. **Columna A3** — Diseño final, incluyendo efectos de esbeltez

a) Determinése si es necesario considerar los efectos de esbeltez

Determinése  $k$  del nomograma en R.10.12

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 282,589 \text{ kg/cm}^2$$

Para la columna en la planta baja, de 6.75 m = 675 cm

$$\frac{E_c I}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{675} = 153 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

Para la columna en el segundo entrepiso, de 3.96 m = 396 cm

$$\frac{E_c I}{l_c} = \frac{282,589(364,583)}{396} = 260 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$I_{viga} = \frac{0.35(60 \times 50^3)}{12} = 218,750 \text{ cm}^4$$

Para la viga de 8.53 m

$$\frac{E_c I}{l} = \frac{282.589(218,750)}{853} = 72 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / l_c}{\sum E_c I / l} = \frac{(153 + 260)10^5}{72 \times 10^5} = 5.7$$

Supóngase que  $\Psi_u = 1.0$  (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma en R10.10.12.1 (a):  $k = 0.84$ .

Por consiguiente, para la columna A3 flexionada en doble curvatura:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left( \frac{8.21}{16.08} \right) = 28$$

$$\frac{kl_u}{r} = 36 < 34 - 12 \left( \frac{-8.21}{16.08} \right) = 40$$

para la columna A3 flexionada en curvatura sencilla:

$$\frac{kl_u}{r} = 36 > 34 - 12 \left( \frac{8.21}{16.04} \right) = 28$$

No es necesario considerar la esbeltez de la columna A3, si se flexiona en doble curvatura, la cual es la condición más común para las construcciones de concreto vaciado en sitio. Si embargo, con objeto de ilustrar el procedimiento de diseño, incluidos los efectos de esbeltez en las columnas sin lado, supóngase una curvatura sencilla.

b. Determinése el momento total  $M_c$  (incluidos los efectos de esbeltez) y la combinación de cargas para el diseño.

$$M_c = \delta_m M_2 \quad \text{Ec (10-9)}$$

donde:

$$\delta_m = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0 \quad \text{Ec (10-10)}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0.4 \quad \text{Ec (10-14)}$$

$$= 0.6 + 0.4 \left( \frac{8.21}{16.08} \right) = 0.8$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad \text{Ec (10-11)}$$

$$EI = \frac{0.2E_c I_x + E_s I_{ec}}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec (10-12)}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f_c} = 15,100 \sqrt{350} = 282,589 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.51}$$

$$I_x = \frac{50^4}{12} = 520,833 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Secc. 8.5.2}$$

$$I_{ec} = 2 \left[ (3 \times 5.07) \left( \frac{50}{2} - 1.11 - 1.91 - 3.81 \right)^2 \right] = 10,043 \text{ cm}^4$$

En la expresión anterior, el diámetro de la varilla del #7 dividido por 2 = 1.11 cm; el diámetro del estribo del #6 = 1.91 cm, y el recubrimiento de 1.5" = 3.81 cm

$$\beta_d = \frac{1.4 P_D}{1.4 P_D + 1.7 P_L} = 0.82$$

$$EI = \frac{0.2(282,589)520,833 + 2(10^6)10,043}{1 + 0.82} = 2.72(10)^{10} \text{ kg-cm}^2$$

De la Ec (10.-13):

$$EI = \frac{0.4 E_c I_x}{1 + \beta_d} = \frac{0.4(282,589)520,833}{1.82} = 3.23(10^{10})$$

Si se utiliza este último valor, la carga crítica  $P_c$  vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 (3.23)10^{10}}{(0.84 \times 650)^2} = 1,070,919 \text{ kg}$$

$$\delta_m = \frac{0.8}{1 - \frac{498,000}{0.75(1,071,000)}} = 2.11$$

Verifíquense los requisitos de momento mínimo:

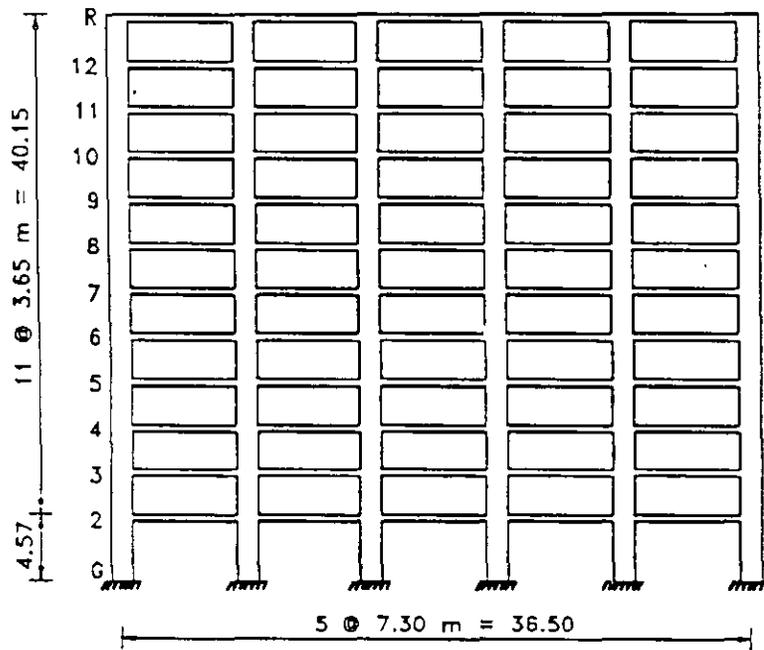
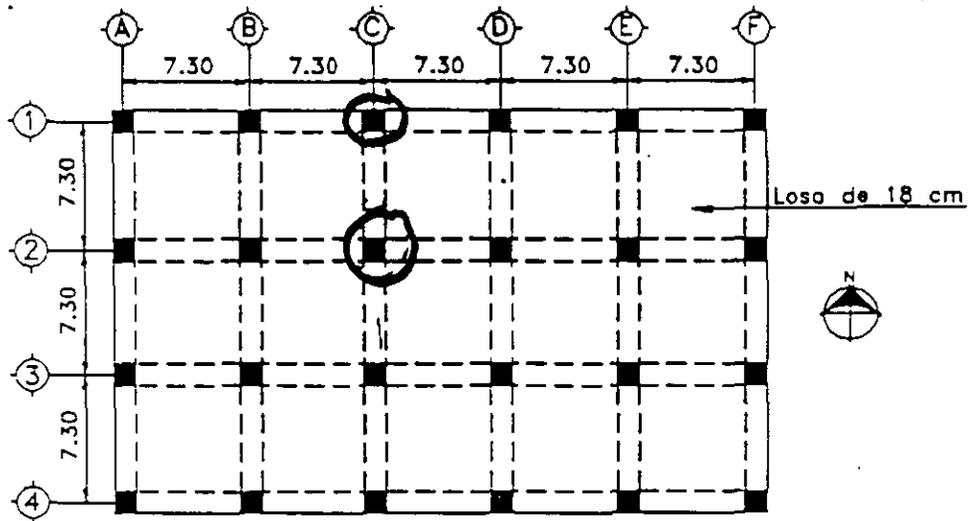
$$\begin{aligned}
 M_{2,max} &= P_u(0.6 + 0.03h) = 498,000(0.6 + 0.03 \times 50) && \text{Ec (10-15)} \\
 &= 1,045,800 \text{ kg-cm} = 10.45 < 16.08 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$M_c = 2.11(16.08) = 33.85 \text{ ton-m}$$

Si se utiliza la figura 13-14, resulta evidente que la columna de 50 x 50 cm reforzada con 8 varillas del #7 no es adecuada para la combinación de cargas  $P_u = 498 \text{ ton}$  y  $M_c = 33.85 \text{ ton-m}$ . En este caso se requieren 8 vars. del #9, las cuales representan un  $\rho_g = 2.0\%$ .

6. Para propósitos comparativos se realizó un análisis  $P-\Delta$  utilizando las propiedades que aparecen en la sección 10.11.1 del Reglamento. Los momentos totales que se obtuvieron de este análisis  $P-\Delta$  son esencialmente los mismos a los que se obtuvieron a partir de una análisis de primer orden. Lo anterior ilustra la economía total que se logra cuando para el diseño de los elementos se utiliza un análisis  $P-\Delta$ .



Ejemplo 13.2 — Efectos de esbeltez en las columnas de un marco con ladeo (no contraventado).

Diséñense las columnas C1 y C2 en el primer entrepiso del edificio para oficinas con 12 entrepisos, el cual se muestra abajo. La altura libre del primer entrepiso es de 4.05 m y de 3.15 m para todos los demás. Supóngase que los efectos laterales en el edificio son provocados por el viento actuando en la dirección N-S. Otros datos necesarios para el edificio son los siguientes:

Propiedades de los materiales:

Concreto  $f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$  para las columnas en los dos  
entrepisos inferiores

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  para todos los demás sitios  
( $w_c = 2,400 \text{ kg/m}^3$ )

Refuerzo  $f_s = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Vigas: 60 x 50 cm

Columnas exteriores: 50 x 50 cm

Columnas interiores: 60 x 60 cm

Carga muerta sobrepuesta = 208 kg/m<sup>2</sup>

Carga viva = 244 kg/m<sup>2</sup>

1. Combinaciones las cargas factoradas

Secc. 9.2

1.  $U = 1.4D + 1.7L$  Ec (9-1)

2.  $U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$  Ec (9-2)

3.  $U = 0.9D + 1.3W$  Ec (9-3)

2. Determinése si el marco es con ladeo o sin ladeo

Los resultados del análisis de primer orden utilizando las propiedades de la sección 10.11.1 se resumen en la tabla siguiente:

Col	Combinación de cargas	Carga axial facturada	Momentos flexionantes factorados (ton-m)											
			M <sub>u</sub> extremo superior			M <sub>u</sub> extremo inferior			M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>1,m</sub>	M <sub>2,m</sub>	M <sub>1,i</sub>	M <sub>2,i</sub>
			ns	s	total	ns	s	total						
C1	1	602	7.87	-	7.87	3.94	-	3.94	3.94	7.87	3.94	7.87	-	-
	2	478	5.91	2.26	8.16	2.95	21.73	24.68	8.16	24.68	5.91	2.95	2.26	21.73
	3	328	3.78	2.30	6.08	1.90	22.14	24.04	6.08	24.04	3.78	1.90	2.30	22.14
C2	1	1.060	0.14	-	0.14	0.07	-	0.07	0.07	0.14	0.07	0.14	-	-
	2	795	0.12	6.10	6.22	0.07	45.67	45.74	6.22	45.74	0.12	0.07	6.10	45.67
	3	514	0.1	6.23	6.33	0.04	46.50	46.54	6.33	46.54	0.10	0.04	6.23	46.50

Nivel de Piso	$\sum P_u^*$ (ton)	$\Delta_o$ (cm)	$V_u$ (ton)	$l_c$ (cm)	$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u l_c}$
Azotea	1,420	0.15	8.67	365	0.067
12	2,849	0.25	25.79	365	0.076
11	4,277	0.41	42.63	365	0.113
10	5,704	0.53	59.11	365	0.140
9	7,135	0.66	75.27	365	0.171
8	8,530	0.79	90.98	365	0.203
7	9,970	0.91	106.19	365	0.234
6	11,399	1.04	129.95	365	0.269
5	12,857	1.14	135.20	365	0.297
4	14,250	1.19	148.87	365	0.312
3	15,690	1.12	161.71	365	0.298
2	17,139	0.84	175.11	430	0.190

\* Incluye el peso del piso, las cargas muertas sobrepuestas y las cargas vivas reducidas. El factor de reducción de la carga viva se tomó igual a 0.08 (A-150).

El índice de estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u l_c}$$

es mayor a 0.05 en todos los niveles de piso. Por consiguiente, las columnas **no** están contraventeadas.

### 3. Elección preliminar del refuerzo de la columna

Utilice el programa PCACOL para determinar el área requerida del acero longitudinal, sin incluir los efectos de esbeltez.

Para la columna C1, utilice 8 vars. del # 8 ( $\rho_x = 1.6\%$ )

Para la columna C2, utilice 16 vars. del # 11 ( $\rho_x = 4.3\%$ )

4. Columna C1—Diseño definitivo, incluyendo efectos de esbeltez

a. Determine  $k$  del nomograma en R10.12.1

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{50^4}{12} \right) = 364,583 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

$$E_c = 15,100 \sqrt{f'_c} = 15,100 \sqrt{420} = 309,458 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 8.5.1}$$

Para la columna de 4.32 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364.583)}{430} = 262 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

Para la columna de 3.65 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(364.583)}{365} = 309 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

$$I_{viga} = 0.35 \left( \frac{60 \times 50^3}{12} \right) = 218,750 \text{ cm}^4 \quad 10.11.1$$

Para la viga de 7.30 m de longitud:

$$\frac{E_c I}{l} = \frac{309,458(218,750)}{732} = 92.5 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / l_c}{\sum E_c I / l} = \frac{262 + 309}{925} = 6.17$$

Supóngase que  $\Psi_B = 1.0$  (columna esencialmente empotrada en la base).

Del nomograma de la figura R.10.12.1(b),  $k = 1.76$ :

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.76(405)}{0.3(50)} = 48 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente: deberán considerarse los efectos de esbeltez

b. Determine el momento total  $M_2$  (incluidos los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño

$$M_2 = M_{2m} + \delta_1 M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis  $P - \Delta$  aproximado:

$$\delta_1 M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} > M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de las cargas de diseño, incluidos los efectos de esbeltez:

Combinación de cargas	$M_{2m}$ (ton-m)	$M_{2s}$ (ton-m)	Q	$\delta_s$	$\delta_s M_{2s}$	$M_2$ (ton-m)	$P_u$ (ton)
1	7.87	-	-	-	-	7.87	602
2	2.95	21.73	0.19	1.24	26.95	29.90	478
3	1.90	22.14	0.19	1.24	27.45	29.35	328

Utilizando las figura 13.17, es evidente que las tres combinaciones de carga caen dentro del diagrama de interacción. Por lo tanto, las 8 varillas del #8 son adecuadas cuando se toman en cuenta los efectos de esbeltez al utilizar un análisis  $P - \Delta$  aproximado.

Para propósitos de comparación, recalcúlese  $\delta_s M_{2s}$ , utilizando el método de amplificación de momentos dado en ediciones anteriores del Reglamento ACI.

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_{2s} \quad \text{Ec (10-19)}$$

La carga crítica  $P_c$  se calcula a partir de la Ec (10-11), utilizando  $k$  de 10.13.1 y  $EI$  de la Ec (10-12) o (10-13).

Para cada una de las doce columnas exteriores a lo largo de los ejes de columnas 1 y 4 (esto es: las columnas que reciben sólo 1 viga en la dirección del análisis),  $k$  se determinó en la parte 4(a) con un valor de 1.76. Utilizando la Ec (10-13), con  $\beta_{1i} = 0$ :

$$EI = 0.4(309,458) \left( \frac{50^4}{12} \right) = 6.45(10^{10})$$

La carga crítica vale:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45 (10)^{10}}{(1.76 \times 405)^2} = 1,257,922 \text{ kg} = 1,257 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las columnas de orilla A2, A3, F2 y F3 (esto es: las columnas que reciben a dos traves, una a cada lado, en la dirección del análisis):

$$\Psi_A = \frac{262 + 309}{2 \times 92.7} = 3.08$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma correspondiente,  $k = 1.58$ .

La carga crítica es:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 6.45(10)^{10}}{(1.58 \times 405)^2} = 1,554,659 \text{ kg} = 1,555 \text{ ton} \quad \text{Ec (10-11)}$$

Para cada una de las ocho columnas interiores:

$$I_{col} = 0.7 \left( \frac{60^4}{12} \right) = 756,000 \text{ cm}^4 \quad \text{Secc. 10.11.1}$$

Para la columna de 4.32m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(756,000)}{432} = 541 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

Para la columna de 3.65 m:  $\frac{E_c I}{l_c} = \frac{309,458(756,000)}{365} = 641 \times 10^6 \text{ kg-cm}$

$$\Psi_A = \frac{541 + 641}{(2 \times 92.7)} = 6.38$$

$$\Psi_B = 1.0$$

Del nomograma:  $k = 1.8$

$$EI = 0.4(309,458) \left( \frac{60^4}{12} \right) = 1.34 \times 10^{11} \quad \text{Ec (10-13)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.34 \times 10^{11}}{(1.8 \times 405)^2} = 2,488,568 \text{ kg} = 2,488 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_c = 12(1,257) + 4(1,555) + 8(2,488) = 41,208 \text{ ton}$$

$$\delta_c = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(41,208)}} = 2.24$$

Para la combinación 2, de cargas:

$$M_2 = 2.95 + 2.24(21.73) = 51.62 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3, de cargas:

$$M_2 = 1.90 + 2.24(22.14) = 51.49 \text{ ton-m}$$

De la figura 13.17, resulta claro que la combinación 2 de cargas cae fuera del diagrama de interacción. Por consiguiente, es necesario incrementar el refuerzo a 8 varillas del #9 ( $\rho_x = 2.0\%$ ), para tomar en cuenta los efectos de esbeltez, cuando se utiliza el método de la amplificación de momentos de reglamentos previos de ACI.

5. Columna C2. Diseño definitivo, para incluir los efectos de esbeltez.

a. Determinese si deben considerarse los efectos de esbeltez.

En la parte 4(b),  $k$  se determinó igual a 1.8 para las columnas interiores. Por consiguiente:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.8(405)}{0.3(60)} = 40.5 > 22 \quad 10.13.2$$

Por consiguiente, deben considerarse los efectos de esbeltez.

b) Determinese el momento total  $M_2$  (incluyendo los efectos de esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño.

$$M_2 = M_{2m} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec (10-17)}$$

Utilizando un análisis  $P - \Delta$  aproximado:

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - Q} \geq M_{2s} \quad \text{Ec (10-18)}$$

La siguiente tabla resume las combinaciones de cargas de diseño, incluyendo los efectos de esbeltez:

Combinación de carga	$M_{2m}$ (ton-m)	$M_{2s}$ (ton-m)	Q	$\delta_s$	$\delta_s M_{2s}$	$M_2$ (ton-m)	$P_u$ (ton)
1	0.14	-	-	-	-	0.14	1.060
2	0.07	45.67	0.19	1.24	56.63	56.70	795
3	0.04	46.50	0.19	1.24	57.66	57.70	514

De la figura 13.18 resulta evidente que las tres combinaciones de cargas ( $P_u, M_2$ ) caen dentro del diagrama de interacción. Por consiguiente, las 16

varillas del #11 son adecuadas cuando se incluyen los efectos de esbeltez, utilizando una análisis aproximado  $P - \Delta$ .

- Para propósitos de comparación, recalcúlese  $\delta$ ,  $M_2$ , utilizando el método de amplificación de momentos, el cual aparece en ediciones anteriores del Reglamento ACI. Utilizando los valores  $\sum P_u$ ,  $\sum P_c$  y  $\delta$ , calculados en la parte 4(b):

$$\delta_s = 2.24$$

Para la combinación 2 de cargas:

$$M_2 = 0.07 + 2.14(45.67) = 102.37 \text{ ton-m}$$

Para la combinación 3 de cargas:

$$M_2 = 0.04 + 2.14(46.50) = 104.20 \text{ ton-m}$$

Resulta evidente de la figura 13.18 que ambas combinaciones caen dentro del diagrama de interacción y por consiguiente, las 16 varillas del #11 son adecuadas cuando los efectos de esbeltez se determinan mediante este método.

6. Determinése si el momento máximo ocurre en el extremo del elemento. Ver la sección 10.13.5.

En la columna C1:

$$\frac{l_u}{r} = \frac{405}{0.3(50)} = 27 < \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{1,060,000}{420(60)^2}}} = 41.8 \quad \text{Ec (10-20)}$$

Por consiguiente, para cada una de las columnas C1 y C2 el momento máximo ocurre en uno de los dos extremos, y el momento total  $M_2$  no tiene porqué amplificarse mediante  $\delta_m$ .

7. Verifíquese la inestabilidad debida una deflexión lateral de la estructura (Secc. 10.13.6):

- a. Cuando se utiliza 10.13.4.2 para calcular  $\delta$ ,  $M_2$ , el valor de  $Q$  que se evalúa utilizando cargas gravitacionales factoradas, no deberá exceder de 0.60. Nótese que para verificar la estabilidad, todos los momentos de inercia se deberán dividir por  $(1 + \beta_d)$ , donde, para este piso (Secc. 10.11.1):

$$\beta_d = \frac{\sum 1.4 P_d}{\sum P_u} = 0.89; \quad 1 + \beta_d = 1.89$$

El dividir todos los momentos de inercia por  $(1 + \beta_d)$  es equivalente a incrementar las deflexiones, y consecuentemente  $Q$ , por  $(1 + \beta_d)$ .

Por lo tanto, en el 2o. nivel:

$$Q = 1.89 \times 0.19 = 0.36 < 0.60$$

Por lo tanto, la estructura es estable en este nivel. De hecho, si se calcula la  $Q$  modificada en cada piso, se muestra que la estructura es estable.

b. Al utilizar 10.13.4.3 para calcular  $\delta, M$ , el valor de  $\delta$ , calculado utilizando  $\sum P_u$  y  $\sum P_c$  correspondientes a las cargas muertas y vivas factoradas, será positiva y no excederá de 2.5. Para la verificación de la estabilidad, los valores de  $EI$  se deberán dividir por  $(1 + \beta_d)$ . Por consiguiente, los valores de  $P_c$  se deberán recalculer considerando los efectos de  $\beta_d$ .

En las columnas B1 a E1 y B4 a E4,  $\beta_d = 0.89$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,297}{1 + 0.89} = 686 \text{ ton}$$

En las columnas A1, F1, A4 y F4,  $\beta_d = 0.91$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,297}{1 + 0.91} = 679 \text{ ton}$$

En las columnas A2, A3, F2 y F3,  $\beta_d = 0.89$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{1,642}{1 + 0.89} = 869 \text{ ton}$$

En cada una de las columnas interiores,  $\beta_d = 0.88$ , y la carga crítica es:

$$P_c = \frac{2,590}{1 + 0.88} = 1,378 \text{ ton}$$

Por lo tanto:

$$\sum P_i = 8(686) + 4(679) + 4(869) + 8(1,378) = 22,704 \text{ ton}$$

y,

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{17,139}{0.75(22,704)}} < 0$$

La estructura es inestable cuando se utiliza el método de amplificación de momentos.

8. Para propósitos de comparación, se llevó a cabo un análisis  $P-\Delta$  utilizando las propiedades de la sección, dadas en 10.11.1. En la columna C1, el momento total  $M_2$  aumentó aproximadamente 26% y en la columna C2 aumentó aproximadamente 42%. En ambas columnas, la cantidad de refuerzo determinada en la etapa de diseño preliminar es adecuada para las combinaciones de cargas a partir del análisis de segundo orden. Nótese que en promedio, los momentos de las columnas en el primer nivel aumentaron aproximadamente 26%.

Para la revisión de la estabilidad según 10.13.6, los valores de  $I$  se dividieron por  $(1 + \beta_d)$ . En todos los niveles de piso, el cociente de las deflexiones laterales de 2o. orden respecto de las de 1er. orden, se determinó menor a 2.5, lo cual significa estabilidad de conjunto de la estructura.

9. Es importante hacer notar que también deben considerarse los efectos de las cargas de viento que actúan en la dirección S-N. Sin embargo, en aras de simplicidad, en este ejemplo no se consideran éstas.

10. Cuando las columnas están sujetas a flexión en las direcciones  $x$  y  $y$ , el análisis anterior deberá ejecutarse en cada una de las dos direcciones. La verificación del diseño final de la columna podrá llevarse a cabo utilizando el método de la carga recíproca:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{RO}}}$$

En la cual:

$P_R$  carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{RO}$  carga axial resistente de diseño, para las excentricidades  $e_x = e_y = 0$  338

$$P_{RO} = 0.80 \phi [0.85 f_c (A_g - A_v) + f_y A_v]$$

cuando se trate de columnas con refuerzo transversal con estribos. Cuando ese refuerzo transversal consista de espirales, el coeficiente 0.80 se reemplazará por 0.85.

- $P_{Rx}$  carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad  $e_x$ , en uno de los planos de simetría
- $P_{Ry}$  carga normal resistente de diseño, aplicada con una excentricidad  $e_y$ , en el otro plano de simetría

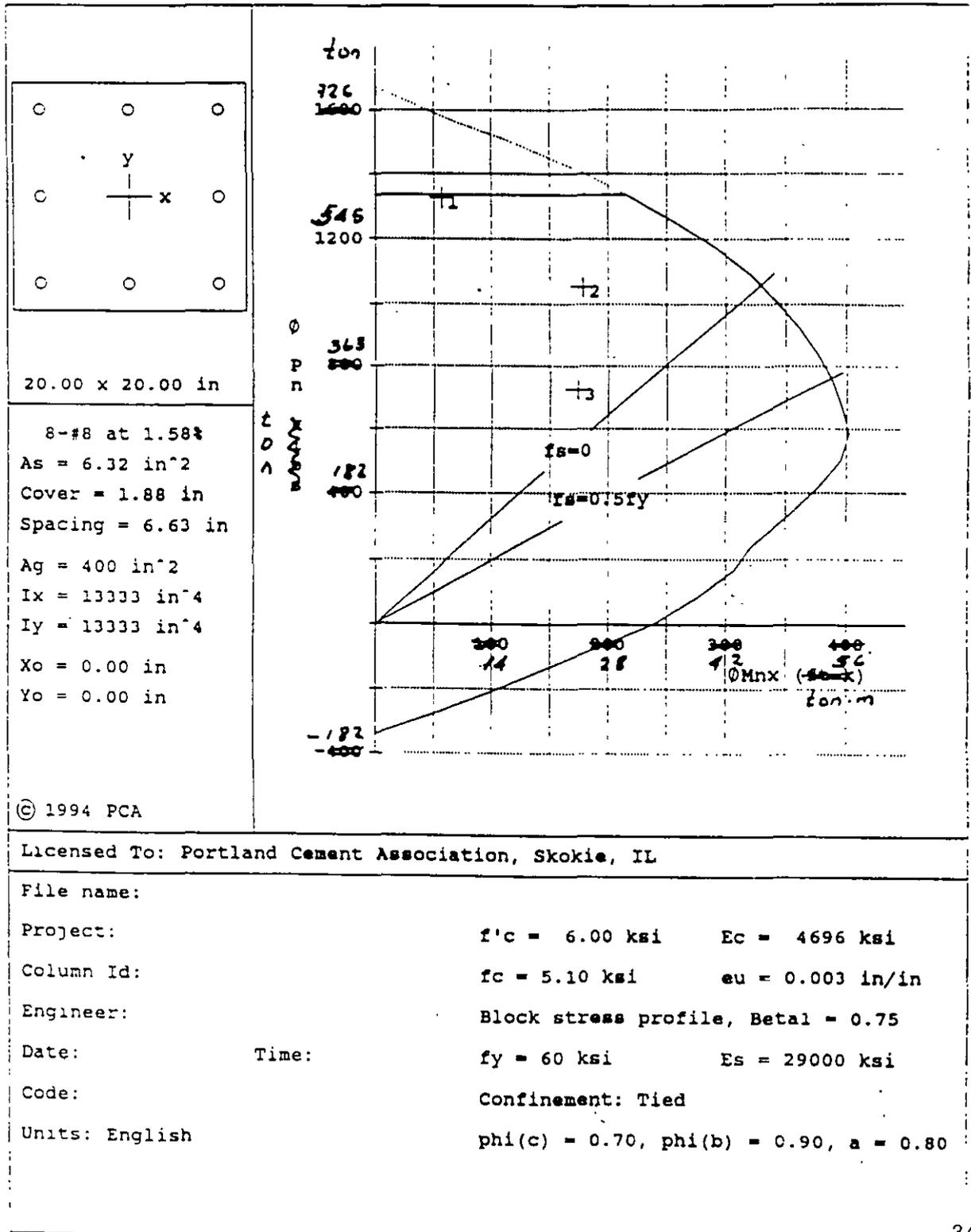


Figure 13-17 Design Strength Interaction Diagram for Column C1

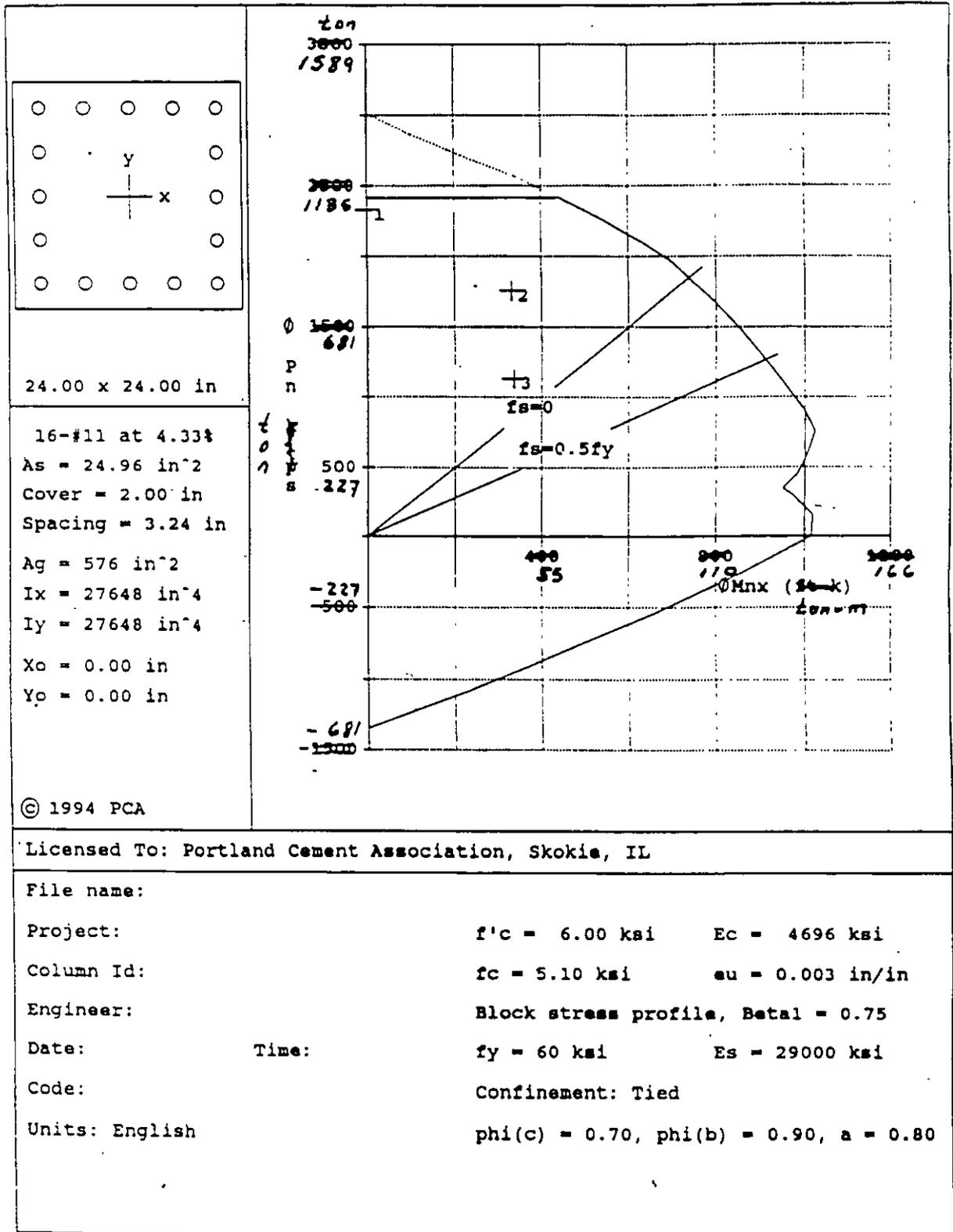


Figure 13-18 Design Strength Interaction Diagram for Column C2



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO III**

### **DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

#### **TEMA**

### **COMENTARIOS A LAS NORMAS TÉCNICAS PARA DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

## 5. MARCOS DUCTILES

### 5.1 Requisitos generales

Este capítulo es nuevo en las Normas; está basado esencialmente en el Apéndice A del Reglamento ACI de 1983 (ref ) y en algunos criterios de diseño neozelandeses (refs ). Se entiende por marco dúctil una estructura monolítica formada por columnas y vigas que bajo la acción del un sismo intenso puede soportar una serie de ciclos de comportamiento inelástico, sin menoscabo significativo de su capacidad de carga. Lo anterior se logra si en el marco puede formarse un mecanismo de falla en el que las zonas que funcionan como articulaciones plásticas poseen una considerable capacidad de giro ante acciones repetidas. La razón principal de usar estructuras dúctiles es que permiten ser diseñadas para resistencias menores que las que requerirían en un cierto sitio estructuras de comportamiento elástico. Esto ocurre así, entre otras razones, por la energía <sup>que</sup> durante un sismo disipa el marco dúctil en los ciclos histeréticos. Pero se debe estar consciente de que bajo sismos extraordinarios son de esperarse daños estructurales, principalmente en las vigas, que requerirán quizá de reparaciones de costo no despreciable; de manera que los responsables del proyecto y el propietario tienen que elegir entre usar el nivel de seguridad suministrado por el Reglamento y sus Normas Complementarias, o aumentar el costo inicial de la estructura para disminuir el riesgo de daños futuros.

La capacidad de giro <sup>en las articulaciones plásticas</sup> se logra suministrando confinamiento lateral al concreto por medio de estribos cerrados o zunchos suficientemente resistentes y próximos entre sí, y limitando la cuantía de refuerzo. El confinamiento lateral hace que aumente la capacidad de deformación longitudinal de compresión del concreto tanto directa como por flexión y, por tanto, que se incremente la capacidad de giro.

Las fallas no dúctiles, como las debidas a fuerza cortante o a menoscabo en la adherencia, se evitan mediante el uso de —>

acero con fluencia definida. Si el acero fluye bajo una cierta fuerza, quedan acotados los esfuerzos de adherencia y los momentos flexionantes; indirectamente también quedan acotadas las fuerzas cortantes. El obtener un comportamiento aceptablemente estable bajo cargas cíclicas como las que imponen los sismos se propicia manteniendo bajos los esfuerzos cortantes en los elementos del marco.

En general, los requisitos de este capítulo están encaminados a lograr, mediante requisitos de detalles de refuerzo y dimensiones, que el comportamiento del marco esté regido por el giro inelástico por flexión en las zonas que se consideran articulaciones plásticas sin que se presente antes otro tipo de falla, y que soporte ciclos de carga impuestos por sismos intensos.

De acuerdo con el criterio general adoptado en el artículo 207 del Reglamento y en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, a los edificios formados por marcos dúctiles les corresponde un factor de comportamiento sísmico,  $\Omega$ , igual a 4. También puede aplicarse este valor cuando se usan marcos y muros o contravientos, con tal que la fuerza sísmica resistida por los marcos <sup>en cada entrepiso</sup> sea por lo menos el 50 por ciento de la total. Se admite así porque, <sup>aunque</sup> el muro tiene menos capacidad que un marco para deformarse sin fallar, en una estructura formada por marcos dúctiles y muros, si llegan a fallar éstos, los marcos representan una segunda defensa que puede evitar el derrumbe de la construcción.

Para revisar el requisito de que en cada entrepiso los marcos sean capaces de resistir al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante, puede procederse en la forma siguiente:

a) Analícese la estructura y determinen las fuerzas cortantes que actúan en las columnas.

b) Si en cada entrepiso la suma de las fuerzas cortantes que actúan en las columnas que forman marcos al suponer que no existen los muros es al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante total de ese entrepiso, se acepta que se cumple el requisito.

Este proceder se justifica porque al dimensionar se suministrará a esos marcos por lo menos el 50 por ciento de la resistencia necesaria de entrepiso.

Si al aplicar el procedimiento anterior <sup>no</sup> se cumple <sup>con</sup> el requisito, puede recurrirse al criterio general que consiste en comprobar que los marcos solos, suponiendo que los muros han fallado, son capaces de resistir en cada entrepiso al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante. Para esto, se analizan los marcos sin los muros, bajo el 50 por ciento de las fuerzas laterales totales, y se diseñan para que lo resistan; o bien se diseña la estructura, incluyendo los muros, y después <sup>se</sup> revisa que la resistencia de los marcos solos cumpla con el requisito. Este último proceder es más laborioso.

En cuanto a la condición 3 para usar  $\Omega = 4$  que aparecen en las normas para diseño por sismo en el sentido de que el mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiera en más de 35 por ciento del promedio de dicho cociente para todos los entrepisos, puede suponerse que la resistencia de un entrepiso  $\longrightarrow$

corresponde al mecanismo que en él se forme con articulaciones plásticas en los extremos de las columnas y que la resistencia del muro es la que tiene a fuerza cortante en el entrepiso. Este *procedimiento* sobrestima la resistencia de entrepiso, particularmente en edificios esbeltos donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas y el muro de concreto falle por flexión en su base. Sin embargo, se justifica hacerlo así porque la intención del requisito es evitar que haya discontinuidades importantes en las resistencias de los entrepisos, y no interesa tanto el valor real de esas resistencias, sino sus valores relativos. No vale la pena

tratar de valuar la resistencia real de entrepiso, pues cuando no se forma un mecanismo en el entrepiso que se trata sino que el mecanismo de falla del edificio está definido por articulaciones en las vigas, el concepto de resistencia de entrepiso pierde un tanto su significado. Si se deseara calcularla debería ser la fuerza cortante que actúa en ese entrepiso cuando se forma el mecanismo de falla general del edificio; lo anterior se complica aún más cuando existen muros de concreto *para sísmo*.

Así pues, para fines de revisar el requisito que se trata, basta aplicar la expresión siguiente:

$$V_{RE} = \frac{\Sigma M_c}{h} + V_R \text{ muro}$$

donde  $V_{RE}$  es la resistencia ficticia del entrepiso,  $\Sigma M_c$  es la

suma de los momentos resistentes en los extremos de las columnas y  $V_{R \text{ muro}}$  la resistencia del muro a fuerza cortante. Para valuar  $M_c$  debe tomarse en cuenta la carga axial que actúa en la columna (pueden usarse los diagramas de interacción flexión-compresión). La resistencia del muro se determina de acuerdo con la sección 4.5.2c) de las Normas, considerando muro no esbelto; así se obtiene:

$$V_{R \text{ muro}} = 0.85 F_R \sqrt{f_c^*} tL + P_h (F_R f_y dt) \leq 2F_R L t \sqrt{f_c^*} .$$

Una de las características de un marco que influyen en su comportamiento y resistencia es la resistencia relativa entre columnas y vigas. La tendencia actual es propiciar que las columnas sean más resistentes en flexión que las vigas, a fin de evitar las fallas laterales de entrepiso por la formación de articulaciones plásticas en los extremos de las columnas; esto es, se llega a una estructura en que el mecanismo de falla ocurre por la formación de articulaciones inelásticas en las vigas y donde las columnas permanecen de hecho en la zona elástica excepto en sus bases. Bajo un cierto sismo, la demanda de giro en las articulaciones plásticas de una estructura cuyo mecanismo de falla está definido por articulaciones en las vigas es menor que el que se tiene en las articulaciones de un mecanismo de entrepiso;

*(con columnas más resistentes que las vigas)* Es decir, la estructura tiene más probabilidades de sobrevivir durante un sismo de

*por otra parte, a causa de la carga axial la capacidad de giro inelástico de las columnas es menor que la de las vigas.*

lateral que la que en realidad le corresponde.

Se pide que la resistencia especificada,  $f'_c$ , del concreto no sea menor de  $200 \text{ kg/cm}^2$  debido al efecto desfavorable que sobre la curvatura en la falla tiene el disminuir  $f'_c$ ; en una sección rectangular que tiene un cierto refuerzo, la profundidad del eje neutro en la falla es  $c = A_s f_y / b f'_c$ ; al disminuir  $f'_c$  aumenta  $c$  y la curvatura disminuye. 0.8

El uso de refuerzo longitudinal que no fluya francamente o que fluya bajo un esfuerzo considerablemente mayor que el aplicado al dimensionar puede conducir a fallas frágiles por fuerza cortante o por adherencia. Estos tipos de falla deben evitarse aunque ocurran bajo cargas mayores que las de diseño, de aquí el primer requisito que se pide para el refuerzo longitudinal de vigas y columnas. También es necesario que el esfuerzo real de fluencia del refuerzo de las vigas no exceda demasiado al de cálculo, para que efectivamente se mantenga la tendencia a que las articulaciones plásticas se formen en las vigas y no en las columnas.

El otro requisito relativo al acero de refuerzo pide que después de la fluencia el material tenga endurecimiento por deformación, de características tales que la resistencia real sea al menos 1.25 veces el esfuerzo real de fluencia. Considerando el caso extremo de que el acero fluyera y no tuviera endurecimiento por deformación, la fluencia ocurriría sólo en la

sección de momento máximo y de hecho no se formaría una zona que trabajara como articulación plástica, sino que la deformación del acero se concentraría en unos cuantos milímetros y rápidamente ocurriría su fractura, originando una falla frágil. Si el acero tiene endurecimiento por deformación, al llegar su deformación a la zona de endurecimiento el momento en la sección de momento máximo aumenta y también *lo hacen* los momentos en las secciones vecinas, con lo que la fluencia del acero se propaga y se forma una articulación plástica. El requisito de las normas tiende a asegurar que la fluencia ocurra en una cierta longitud, y lograr así una cierta capacidad de giro inelástico en esa zona.

## 5.2 Miembros a flexión

### 5.2.1 Requisitos geométricos

Se pide que la relación claro-peralte no sea menor que 4 porque hay evidencia experimental (ref ) de que bajo acciones repetidas el comportamiento de vigas peraltadas que no cumplan con el requisito es más desfavorable que el de vigas esbeltas.

Los requisitos que limitan las relaciones del ancho de una viga con la longitud no soportada lateralmente y con su peralte tienen la intención de evitar el pandeo lateral.

Los extremos de las vigas normalmente están bajo flexión negativa y la zona comprimida es rectangular. Bajo acciones repeti

tidas es probable que se desprenda el recubrimiento y sólo se cuente con el concreto contenido dentro de los estribos; por esta razón se requiere un ancho mínimo de 25 cm. Se pide que el ancho de la viga no sea mayor que el de la columna, para hacer lo más eficiente posible la transmisión de momento entre viga y columna.

La intención del último requisito geométrico para vigas es evitar momentos adicionales importantes en las columnas, causados por excentricidad de la carga vertical y que normalmente no se toman en cuenta en el análisis.

#### 5.2.2 Refuerzo longitudinal

El primer requerimiento va encaminado a no dejar alguna sección con posibilidad de falla frágil por flexión de uno o de otro signo; esto último en vista de las incertidumbres en el análisis,

la posible ocurrencia de hundimientos diferenciales de apoyos, o acortamientos diferenciales en columnas a corto o a largo plazo, todo lo cual usualmente no se considera en el análisis, y también en vista de la posibilidad <sup>de</sup> que el sismo sea más intenso que lo previsto y haga que cambien los signos de los momentos.

Como se dice en 2.1.2a), el refuerzo mínimo obliga a que el momento resistente de la sección agrietada sea al menos 1.5 veces mayor que el momento bajo el cual se agrieta la viga, con lo que se evita que ésta falle bruscamente al agrietarse. El requisito

de que sean por lo menos dos barras en cada lecho se refiere más bien a la necesidad de ellas por razones de construcción.

Se mantuvo el límite de  $0.75 A_{sb}$  para el acero a tensión. <sup>seguido</sup>

Aunque el concepto de falla balanceada no es ya en rigor <sup>T</sup> aplicable a una viga sujeta a acciones que le provocan deformaciones cíclicas. . . . inelásticas, la cuantía que tenga la sección con relación a la cuantía balanceada continúa siendo un índice de la ductilidad de la viga. Se sugiere que la cuantía no exceda de 0.025 a fin de evitar congestinamiento de las barras de refuerzo y de limitar, indirectamente, la fuerza cortante que puede generarse en la viga.

Se pide que en la unión con un nudo <sup>el</sup> momento resistente positivo de una viga sea por lo menos igual a la mitad del momento resistente negativo que se tenga en esa sección, para prever la posibilidad de que, aunque el análisis no lo indique, el momento positivo debido al sismo exceda al negativo causado por las cargas verticales. Esta situación puede verse propiciada por hundimientos diferenciales, o acortamientos diferenciales de las columnas. Además, el acero longitudinal en el lecho inferior tiene el efecto favorable de que bajo momento negativo ayuda al concreto a tomar las compresiones. El riesgo de que se invierta el signo del momento flexionante en los extremos de las vigas de un marco es mayor si los claros son pequeños.

Se pide que en las uniones por traslape se suministre refuerzo helicoidal o estribos cerrados, debido a la posible caída del recubrimiento lo que disminuiría la adherencia de las barras y debilita

ría la unión traslapada. Las uniones traslapadas no se permiten en zonas donde se prevén zonas que funcionen como articulaciones plásticas, pues no son confiables bajo deformaciones cíclicas inelásticas.

En un paquete de dos barras es pequeño el menoscabo en la adherencia con el concreto. Debe buscarse que los esfuerzos de adherencia sean pequeños, ya que su deterioro bajo acciones cíclicas es una de las causas de la pérdida de rigidez de elementos y nudos de concreto reforzado bajo cargas cíclicas.

De los requisitos que deben satisfacer las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, se hace hincapié en el que pide que resistan al menos 1.25 veces la fuerza de fluencia de las barras que unen.

Al definir el diámetro, la cantidad y la distribución del refuerzo longitudinal, debe tenerse presente la facilidad de construcción, en particular <sup>respecto a</sup> las barras que llegan a las uniones con las columnas.

### 5.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

El refuerzo que se pide es para confinar el concreto en las zonas de articulaciones plásticas, a fin de aumentar su capacidad de deformarse sin fallar y de resistir acciones cíclicas. También tiene la función de restringir lateralmente al acero longitudinal que pueda trabajar a compresión. El diámetro del refuerzo para confinar estará de acuerdo con el tamaño de la viga. Como guía, se sugiere usar barras No.2.5 en vigas con peralte de

hasta 50 ó 60 cm, No 3 con peraltes de hasta 80 ó 90 cm, y No 4 o más gruesas para peraltes mayores.

El requisito relativo a las barras longitudinales de la periferia en las zonas de articulaciones plásticas significa que las barras de esquina y una de cada dos consecutivas deben tener el soporte lateral como se indica en 4.2.3, y que ninguna barra no soportada lateralmente debe distar <sup>a cada lado,</sup> más de 15 cm de una barra sí soportada.

#### 5.2.4 Requisitos para fuerza cortante

La forma de obtener las fuerzas cortantes en una viga de un marco dúctil se ilustra en la fig 1. Para evitar que ocurra la falla por fuerza cortante antes que aparezcan las articulaciones, las fuerzas cortantes de diseño se calculan <sup>a partir del equilibrio de la viga,</sup> suponiendo que ya se formaron las articulaciones plásticas en sus extremos.

Los momentos de fluencia se calculan sin factor de reducción, porque así se tiene una condición más desfavorable ya que se obtienen fuerzas cortantes mayores. Además, se supone que las amplitudes de las rotaciones son tales que el acero puede llegar a tener endurecimiento por deformación, por lo que el momento se calcula con el esfuerzo en el acero igual a  $1.25 f_y$ .

La situación descrita en la fig - - puede ocurrir durante un sismo intenso: primero se forma la articulación en el extremo donde el momento del sismo se suma con el causado por las cargas de gravedad; después, al aumentar el efecto del sismo, se forma la articulación de momento positivo en el otro extremo.

En sistemas de piso viga-losa monolíticos, el momento resistente negativo de la viga aumenta con relación al teórico, a causa del refuerzo de la losa que trabaja a tensión junto con el refuerzo de la viga. Se recomienda tomar en cuenta esta incremento en vigas relativamente pequeñas (peralte menor de 50 cm, como guía) y también cuando la cuantía de refuerzo de la losa exceda de 0.006 ó 0.007 (ref.      ).

Con el procedimiento optativo se pretende obtener el mismo resultado que con el general, es decir, evitar que la viga falle por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones inelásticas en los extremos. El procedimiento optativo es más sencillo, aunque, como suele suceder en estos casos, puede conducir a un mayor consumo de acero en estribos.

### 5.3 Miembros a flexocompresión

Los miembros a flexocompresión con carga axial pequeña ( $P_u \leq A_g f'_c / 10$ ) se tratan como vigas.

Las razones para pedir un mínimo en la dimensión transversal de una columna son las siguientes: a) hacerlas menos vulnerables a errores constructivos, a impactos accidentales y a excentricidades accidentales de otra índole, y b) facilitar la colocación del refuerzo y del concreto, así como lograr cumplir con los recubrimientos necesarios sin disminuir demasiado la relación del área del núcleo al área transversal total.

La intención de que el área de la sección transversal sea al menos igual a  $P_u/0.5f'_c$  es garantizar una cierta capacidad de giro en zonas de la columna donde llegarán a formarse articulaciones plásticas. La capacidad de giro inelástico en una columna aumenta al disminuir la relación  $P_u/A_g f'_c$ .

Se pide que la relación entre la dimensión transversal mayor de la columna y la menor  $h_Q$  exceda de 2.5, para que el elemento siga siendo propiamente una columna y no pase a tener características de muro con el consiguiente problema del pandeo lateral.

Para evitar que los efectos de esbeltez lleguen a ser causa de una disminución significativa de la ductilidad general de la estructura, <sup>a</sup> las disposiciones de 1.3.2 se adiciona el requisito de que la relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no exceda de 15.

### 5.3.2 Resistencia mínima a flexión

En la sección 5.3.2 explícitamente se trata de disminuir las probabilidades de que se presente fluencia en las columnas y, por tanto, de que se forme un mecanismo de falla lateral en algún entrepiso. El requisito de la sección propicia la formación de un mecanismo de falla definido por articulaciones plásticas en las vigas y en la base de las columnas. (fig ).

354

Bajo un mismo sismo, la demanda de giro en las articulaciones del segundo mecanismo es menor que la demanda de giro de las

articulaciones de un mecanismo de falla de entrepiso, a causa de que en éste último la disipación de energía sólo ocurre en las articulaciones plásticas de los extremos de las columnas del entrepiso que falla, en tanto que en el otro se disipa en un número mayor de articulaciones distribuidas en todo el edificio.)

→ Por otra parte, la capacidad de giro de una articulación formada en una viga es mayor que la de aquella que se forma en una columna, a causa de la carga axial. Además, y en particular si la falla lateral de entrepiso ocurre en la zona baja de la estructura, aumenta la importancia de los momentos de segundo orden en las columnas del entrepiso dañado, con el consiguiente incremento en el riesgo de derrumbe brusco del edificio. Lo anterior significa que una estructura donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas tiene más probabilidades de sobrevivir bajo un sismo de intensidad extraordinaria que otra en donde la fluencia ocurra en las columnas de un entrepiso y en él se forme un mecanismo de falla lateral.

Debe hacerse hincapié en que la importancia de que no se formen articulaciones plásticas en las columnas es mayor en los primeros entrepisos de edificios altos. En edificios de uno o dos niveles o en los últimos pisos de edificios de más altura se puede ser menos estricto en este aspecto. Así mismo, en un cierto caso podría admitirse fluencia en algunas columnas de un entrepiso a condición de que las restantes del entrepiso

permanezcan elásticas e impidan la formación de un mecanismo de falla lateral.

En rigor, no es posible asegurar que no se formen zonas inelásticas en las columnas, por lo que se debe suministrar en sus extremos el refuerzo de confinamiento prescrito en 5.3.4. Entre otras, las razones que pueden provocar la fluencia de las columnas es la sobrerresistencia de las vigas a causa del endurecimiento por deformación del acero de refuerzo y por la contribución al momento resistente negativo de la viga del acero de la losa adyacente.

Se pide duplicar la carga axial debida al sismo para prever que la fuerza sísmica horizontal excede de la obtenida dividiendo el coeficiente sísmico entre el factor de comportamiento sísmico,  $Q$ , igual a 4. Una de las razones para dividir entre  $Q$  es el supuesto comportamiento plástico de la estructura, pero éste se ve afectado por la sobrerresistencia de las vigas, la presencia de muros y por la no simultaneidad en la formación de las articulaciones plásticas, todo lo cual conduce a que la fuerza lateral que toma el edificio sea creciente con la deformación lateral, y, por consiguiente, a que aumenten los momentos de volteo y las cargas axiales en las columnas, incremento que no se toma en cuenta en el análisis.

Con el procedimiento optativo ( $F_R = 0.6$ ) se pretende obtener resultados equivalentes, esto es, tender a evitar la formación

de mecanismos de falla lateral de entrepiso.

Si se llega a formar el mecanismo definido por articulaciones en las vigas y en las bases de las columnas, la falla de la estructura estará gobernada por la falla de las bases de las columnas, por lo que resulta esencial que esa zona cuente con el adecuado refuerzo transversal de confinamiento. El confinamiento aumentará la capacidad de giro de las bases de las columnas y permitirá que soporte más ciclos de acciones sísmicas sin perder su capacidad de carga vertical.

### 5.3.3 Refuerzo longitudinal

El límite inferior para la cuantía de refuerzo longitudinal tiene el propósito de evitar que dicho refuerzo fluya en compresión a causa del flujo plástico (creep) del concreto. Al deformarse el concreto con el tiempo, va transfiriendo su carga al acero de refuerzo el cual puede llegar a fluir en compresión si su cuantía es muy pequeña; la columna se iría acortando al paso del tiempo se crearía<sup>las</sup> esfuerzos y deformaciones no previstas en vigas y en otras columnas. Otra razón para establecer una <sup>A</sup> cuantía mínima de refuerzo longitudinal es suministrar una cierta resistencia a la flexión.

El límite superior para la cuantía de refuerzo longitudinal es en esencia para evitar que se congestione el refuerzo, particularmente en las intersecciones con las vigas. Si el refuerzo es excesivo, se dificultan su colocación y el colado del concreto.

Se limita a dos el número de barras por paquete a fin de disminuir el riesgo de fallas de adherencia en la columna y en especial en las intersecciones con las vigas. Por otra parte, se logra un mejor confinamiento del concreto del núcleo si las barras longitudinales están distribuidas en la periferia que si se concentran en paquetes. Esta disposición tiende a dejar fuera de uso la práctica anterior de concentrar la mayor parte del refuerzo longitudinal en las esquinas que, si bien aumenta la resistencia en flexión, propicia problemas de adherencia y de menoscabo en el confinamiento.

Al igual que en las vigas, las uniones de barras por traslape en columnas son vulnerables al desprendimiento del recubrimiento. Los traslapes sólo se permiten en la zona central de la columna donde es poco probable que se desprenda el recubrimiento. Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos no *presentan ese inconveniente y se permiten* en cualquier localización con tal que se cumpla con los requisitos que se incluyen sobre cantidad de uniones y separación entre ellas:

Se hace énfasis en la importancia de que se cumplan los requisitos de la sección 4.2 que no resulten modificados por el inciso 5.3.3.

#### 5.3.4 Refuerzo transversal

El refuerzo transversal de una columna tiene la función de suministrar la resistencia requerida a fuerza cortante y dar confinamiento adecuado al núcleo, así como restricción lateral al

refuerzo longitudinal. El confinamiento lateral <sup>hace</sup> que aumente considerablemente la capacidad del concreto para deformarse en la dirección longitudinal sin fallar, con lo cual se evita el comportamiento frágil de la columna. El refuerzo mínimo que se especifica en esta sección es el necesario para confinar el concreto del núcleo y restringir lateralmente las barras longitudinales; este refuerzo sólo se pide en las zonas donde es probable que ocurra comportamiento inelástico durante sismos intensos. No obstante la tendencia hacia evitar que las columnas sufran comportamiento inelástico, debe prevverse la posibilidad de que esto ocurra, según se indica en los comentarios a la sección 5.3.2, de aquí la necesidad de suministrar el refuerzo transversal para confinamiento.

En toda sección de una columna el refuerzo transversal debe satisfacer el requisito que sea más estricto entre el necesario para confinamiento y el necesario para fuerza cortante, teniendo en cuenta que el primero únicamente es necesario en las zonas indicadas.

Las zonas en que cabe esperar comportamiento inelástico durante sismos extraordinarios son las próximos a las intersecciones con las vigas, por ser en ellas máximos los momentos causados por las fuerzas laterales. Para tomar en cuenta que en las columnas de planta baja normalmente el punto de inflexión se encuentra más próximo a los nudos superiores, se pide que, además de cumplir con los requisitos generales que fijan la longitud confinada, ésta llegue por lo menos hasta media altura

de la columna; por otro lado, para dar continuidad a la columna dentro de su cimentación, a fin de evitar que allí el confinamiento deba depender de otros refuerzos, se especifica que el refuerzo para confinar se continúe en la cimentación.

*aparte*

La cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal,  $p_g$ , se define como el cociente del volumen de acero helicoidal entre el volumen del núcleo de concreto confinado por dicho acero

( $P_g = 4a_g / S D_c$ , donde  $D_c$  es el diámetro del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo helicoidal).

La primera fórmula del inciso a) se obtiene de obligar a que la resistencia a carga axial de la columna antes de perder el recubrimiento sea igual a la resistencia del núcleo confinado por la hélice, la cual se alcanza bajo deformaciones grandes de compresión cuando ya se desprendió el recubrimiento.

Durante un sismo violento, normalmente lo que va a incrementarse y quizá variar cíclicamente es la magnitud de los momentos flexionantes que actúan en las columnas y no tanto la magnitud de la carga axial (si el edificio es esbelto, los incrementos de carga axial en los primeros entresijos debidos al sismo sí pueden ser importantes); sin embargo, se ha mantenido el criterio del inciso a), en vista de que el confinamiento logrado también mejora la ductilidad de la columna aunque haya flexiones importantes adicionales a la carga axial (ref. ). El límite  $0.12 f'_c / f_y$  rige en secciones grandes; en ellas  $A_g / A_c$  tiende a 1.0 y la cuantía suministrada por la primera fórmula tiende a cero.

Se admite que el confinamiento suministrado por estribos cerrados rectangulares según se establece en el inciso b) es equivalente al que proporciona el zuncho en columnas circulares. Se sabe, sin embargo, que en realidad el confinamiento que da el estribo rectangular es menos eficiente debido a que la barra se flexiona y su acción sobre el núcleo disminuye al alejarse de las esquinas del estribo. Este inconveniente se pretende compensar usando más refuerzo transversal y también por medio del uso de grapas intermedias, así como limitando las dimensiones de los estribos. En efecto, la cuantía volumétrica de refuerzo transversal rectangular del inciso b) es aproximadamente un tercio mayor que la obtenida con las fórmulas del inciso a) para columnas con zuncho circular, y la mayor dimensión de un estribo rectangular no debe exceder <sup>de</sup> 45 cm. Se recomienda el uso abundante de las grapas complementarias descritas en las Normas. En la fig se presenta un ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento.

Los requisitos de separación máxima del refuerzo transversal y los relativos a la distancia entre ramas de estribos, entre éstas y grapas y de máxima dimensión de estribos sencillos que se establecen en esta sección, se refieren sólo al refuerzo para confinamiento.

#### 5.3.5 Requisitos para fuerza cortante

Estos requisitos tratan de evitar que las columnas fallen por

fuerza cortante antes que se formen articulaciones plásticas en las vigas, es decir, relacionan directamente la resistencia a fuerza cortante de las columnas con las articulaciones en las vigas y no con la formación de articulaciones en los extremos de la propia columna. Se optó por este procedimiento a fin de simplificar en cierto grado el diseño.

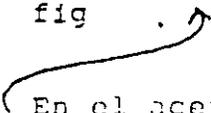
El valor de  $0.75 \Sigma M_g$  para el momento que actúa en un extremo de una columna al considerar su equilibrio proviene de suponer que se cumple la condición de 5.3.2, como igualdad, y que los momentos en las dos columnas que llegan a un nudo son iguales; tambien por sencillez, se admite que  $M_g$  es el valor de diseño, es decir, está valuado con  $f_y$  e incluye a  $F_R$ . Este proceder es algo más sencillo que las operaciones que habría que realizar al considerar en el equilibrio de las columnas sus momentos resistentes obtenidos con sus dimensiones y refuerzos reales, y con la carga axial que conduce a la máxima resistencia a flexión.

Existe una posibilidad desfavorable, que se presentaría cuando tanto las sumas de los momentos resistentes reales de las vigas y de las columnas fueran, cada una, mayores que  $1.5 M_g$ , (en las vigas a causa, por ejemplo, del refuerzo de la losa, y en las columnas porque rigiera el refuerzo mínimo). En tales condiciones, la falla se presentaría por fuerza cortante en las columnas. Esta circunstancia es poco probable, pero al diseñar debe tenerse en cuenta su posible ocurrencia y cuando

se juzgue que pueda *presentarse*, para obtener la fuerza cortante se debe plantear el equilibrio de la columna con sus momentos resistentes sin reducir, en lugar de con  $0.75 M_g$ ; se recomienda proceder así cuando rija el refuerzo longitudinal mínimo en la columnas.

## 5.4 Uniones viga-columna

### 5.4.1 Requisitos generales

Las condiciones de equilibrio horizontal de un nudo interior de una marco sujeto solo a carga lateral se muestran en la fig 

En el acero a tensión que llega al nudo se supone un esfuerzo de  $1.25f_y$  debido a que ensayos han demostrado que los giros inelásticos debidos a sismo en las caras del nudo implican deformaciones en el refuerzo de flexión considerablemente mayores que las correspondientes a la primera fluencia y que bien pueden llegar a los que corresponden a la resistencia máxima del acero supuesta de  $1.25 f_y$  (para acero de grado 42, la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo es del orden de 0.08 a 0.10). La fuerza cortante calculada a media altura del nudo resulta igual a  $A_{s2}(1.25f_y) + \bar{A}_{s1}(1.25f_y) - V$ .

Las uniones viga-columna son elementos críticos en un marco por lo que su diseño y detallado no debe descuidarse. Si un nudo se daña es muy difícil repararlo, y si pierde capacidad de carga vertical causa la falla de la columna que llega a él y quizá el derrumbe de la estructura; lo ideal es que la resis-

tencia del nudo sea mayor que la de los elementos que concurren en él.

Los principales problemas involucrados en el diseño de uniones viga-columna se refieren a su resistencia a fuerza cortante, al anclaje del refuerzo dentro de él, y al posible congestionamiento excesivo de refuerzo. La fuerza cortante causa que el nudo se agriete en diagonal según se muestra en la fig . Bajo las acciones cíclicas causadas por el sismo, el patrón de agrietamiento es en dos direcciones cruzadas (fig ). El anclaje en el nudo de las barras de vigas y columnas que llegan a él presenta el problema de que frecuentemente en una cara del nudo una cierta barra está a tensión y en la cara opuesta a compresión, *lo que*

*provoca*

que se incremente la longitud de anclaje necesaria con relación a la requerida si sólo actuara la tensión. También se tiene el inconveniente de que al formarse en una viga una articulación plástica adyacente al nudo, la fluencia de las barras tiende a penetrar en éste provocando cierto menoscabo en la adherencia. Tdo lo anterior se ve agravado por el efecto de las acciones <sup>o</sup> *cíclicas* impuestas por el sismo, *las cuales* tienden a ir deteriorando

la adherencia de las barras dentro del nudo. En buena medida se disminuyen los problemas de anclaje en los nudos evitando el uso de barras de diámetro grande. En el dimensionamiento y detallado del nudo debe buscarse un equilibrio entre su resistencia a fuerza cortante y el diámetro, la cantidad y la distribución de las barras que entran en él, a fin de evitar un congestionamiento excesivo del refuerzo que dificulte su habilitación y afecte la correcta colocación del concreto. A este

respecto, se recomienda tener en mente el detallado de los nudos desde que se dimensionan las columnas y vigas del marco. Generalmente da buen resultado mantener baja la cuantía de refuerzo longitudinal de las vigas. Elaborar dibujos amplios a escala de  $1/2$ . La disposición del refuerzo dentro de los nudos contribuye importantemente a evitar dificultades inesperadas en la obra.

Para el diseño de los nudos, en las Normas se optó por el criterio del Apéndice A del Reglamento ACI 318-83 (ref ); es un procedimiento sencillo que no origina congestionamientos excesivos de refuerzo y que tiene apoyo teórico y experimental (refs ).

El requisito de que las barras longitudinales de las vigas pasen dentro del núcleo de la columna obedece a que allí las condiciones para el anclaje son más favorables, a causa del confinamiento suministrado por el refuerzo transversal de la columna.

#### 5.4.2 Refuerzo transversal

El principal papel que desempeña el refuerzo transversal en un nudo es suministrar confinamiento al concreto del núcleo, a fin de aumentar su capacidad de deformarse y de resistir el efecto de acciones cíclicas, sin perder su capacidad de carga vertical. También tiene la función de contribuir a resistir la fuerza cortante que actúa en el nudo (fig ). <sup>Por otra parte, el</sup> confinamiento que da el refuerzo transversal mejora las condiciones de anclaje del refuerzo que allí llega. La fuerza cortante provoca tensiones principales inclinadas que causan agrietamiento diagonal en el nudo. El refuerzo transversal prescrito debe usarse siempre en todo el nudo,

aunque la fuerza cortante calculada resulte pequeña.

### 5.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Para revisar un nudo por fuerza cortante se admite prescindir del requisito de las Normas para Diseño por Sismo que pide cambiar la totalidad de los efectos de un componente del sismo con el 30 por ciento de los efectos del componente ortogonal; la revisión puede efectuarse en cada dirección principal en forma independiente. En la fig , la fuerza cortante horizontal calculada a media altura del nudo resulta igual a  $A_{s2}(1.25f_y) + A_{s1}(1.25f_y) - V$  (en la cara izquierda la suma de las compresiones en el concreto y en el acero es igual a la tensión en el acero inferior,  $A_{s2}(1.25f_y)$ , pues forman un par).

En la fig se ilustran las condiciones de trabajo de un nudo interior de un marco donde ampliamente predomina el efecto de las fuerzas laterales (se ha omitido la fuerza axial en la columna). La parte b) de la fig es el equilibrio de la porción de nudo limitada por la grieta diagonal inferior, y en ella se aprecia el papel que le empeñan el concreto y el refuerzo en la resistencia a fuerza cortante. El concreto trabaja a compresión formando básicamente un puntal en diagonal; el refuerzo horizontal y vertical trabaja a tensión y contribuye a mantener el equilibrio. En la fig se aprecia el efecto favorable de usar estribos transversales y también barras verticales intermedias en las columnas; sin estos refuerzos intermedios, aumentarían demasiado los esfuerzos de adherencia en las barras

longitudinales extremas de vigas y columnas que llegan al núcleo (así, el esfuerzo en las barras longitudinales inferiores de la viga tendría que pasar, en un pequeño tramo de anclaje, de la de fluencia en tensión, a la izquierda de la grieta, a uno de compresión,  $C_s/A_s$ , mientras que con la presencia de los estribos horizontales la fuerza en las barras inferiores en lugar de ser la de fluencia sería igual a  $T - \sum a_{si} f_{si}$ , donde  $a_{si}$  son las áreas transversales de los estribos y  $f_{si}$  los respectivos esfuerzos.

Como se mencionó antes, el procedimiento para diseñar las uniones por fuerza cortante es el del Reglamento ACI 318-83; éste a su vez está basado en un estudio realizado en la Universidad de Texas (ref ). En dicho trabajo se concluyó que la resistencia de una unión a fuerza cortante es función básicamente de tres variables: la presencia de vigas transversales que lleguen al nudo, el refuerzo transversal y la resistencia del concreto. Se encontró que la variación de la resistencia no era muy sensible a cambios en el refuerzo transversal, por lo que optaron por hacerla depender, para fines de diseño, sólo de las dimensiones del nudo, de la resistencia a compresión del concreto, y de las vigas transversales; en cuanto al refuerzo transversal, optaron por usar una cierta cantidad mínima obligatoria.

En el diseño de uniones viga-columna de marcos dúctiles existen discrepancias importantes en los criterios <sup>adoptados en distintos países</sup> e instituciones

Así, dentro del propio ACI el procedimiento propuesto por el Comité ACI-ASCE <sup>352</sup> (ref) lleva a una cantidad mayor de estribos que la obtenida de aplicar el apéndice A del Reglamento ACI 318-83. El procedimiento que se aplica en Nueva Zelanda es aún más conservador que el del Comité ACI-ASCE 352. En las Normas para el Distrito Federal se optó por el del Reglamento ACI 318-83, atendiendo a que tiene buen apoyo experimental, es sencillo y no conduce a congestionamientos excesivos de refuerzo. Para valorar el área del nudo, se <sup>no tr</sup> adoptó el criterio del Comité 352, que usa un ancho efectivo igual al promedio de los anchos de viga y columna.

Para el diseño por fuerza cortante de uniones debe usarse el valor de  $F_R$  general para cortante ( $F_R = 0.8$ ). Cuando la fuerza cortante de diseño exceda a la resistencia de diseño, el proyectista puede aumentar las dimensiones transversales de la columna, o aumentar el peralte de las vigas; con esto último disminuye el área de refuerzo longitudinal de las vigas y por consiguiente la fuerza cortante de diseño en el nudo.

En la fig. se ilustra la determinación del ancho efectivo,  $b_e$ . Al haber limitado la relación de dimensiones transversales de las columnas a un máximo de 2.5, en realidad ya no tiene aplicación el requisito según el cual el ancho efectivo no debe ser mayor que el ancho de la o las vigas más  $h$ , y podría omitirse.

#### 5.4.4 Anclaje del refuerzo

De hecho, el primer párrafo de esta sección se refiere a nudos de columnas de orilla. Se optó por exigir que las barras longitudinales de las vigas se prolonguen hasta el fondo del núcleo de la columna, a fin de hacer más definido el trabajo en el nudo en el sentido de que las barras sigan la tendencia de las tensiones principales y se defina claramente la formación del puntal a compresión en el concreto (fig ). Si las barras cumplen con los otros requisitos de anclaje, pero no se llevan hasta la cara opuesta del núcleo sino que se doblan antes, se provoca una distribución de esfuerzos irregular que puede acelerar el deterioro del núcleo ante acciones repetidas. Se juzgó conveniente considerar en forma explícita que bajo acciones repetidas el recubrimiento de una columna se deteriora y deja de ser eficaz para contribuir al anclaje de las barras de las vigas (ref ); por esta razón, se pide que la sección crítica para anclaje sea en el plano externo del núcleo de la columna. La influencia de este requisito es mayor en columnas de sección pequeña.

El anclaje de las barras de una viga en un nudo presenta la circunstancia favorable de que tiene lugar dentro de una zona confinada por estribos y también generalmente por vigas transversales que llegan al nudo; por otro lado, se tiene el efecto desfavorable de las acciones repetidas impuestas por el sismo, y la penetración de la fluencia de las barras de las vigas dentro del núcleo cuando en éstas se <sup>forman</sup> articulaciones plásticas adya

centes al nudo. Al respecto, se adoptó el criterio del Reglamento ACI-318-83 que estima que tiene cierto predominio el efecto favorable del confinamiento, por lo que se admite reducir la longitud de desarrollo al 90 por ciento de la requerida en 3.1.1c). Debe aclararse que esta reducción no se aplica a la longitud recta de 12 diámetros que sigue al dobléz.

Las barras de vigas y columnas que pasan a través de un nudo tienen la particularidad desfavorable de que pueden estar a tensión en una cara del nudo y a compresión en la cara opuesta, la <sup>cual</sup> aumenta los esfuerzos de adherencia dentro del nudo.

No obstante, existen algunas atenuante al problema: a) el ya mencionado confinamiento suministrado por los estribos del nudo y las vigas transversales; b) si las barras de una viga llegan a perder su adherencia en el nudo, quedan ancladas en la viga opuesta; esto causa que aumenten las compresiones en dicha viga opuesta, pero no implica peligro inminente de derrumbe; c. es mínimo el riesgo de que las barras de las columnas tengan que fluir en tensión y en compresión en las caras horizontales del nudo, pues la tendencia del diseño es que más bien fluya el refuerzo de las vigas; por otra parte, la carga axial de las columnas tiende a evitar que sus barras fluyan en tensión.

Se juzga que las relaciones entre dimensiones de nudo y y diámetros de barras que se prescriben, conducen a un comportamiento tolerable de los nudos en cuanto al anclaje de las barras que los cruzan. Sin embargo, se está consciente de que no se

evita totalmente la posibilidad de que la adherencia sufra menoscabo si la estructura se ve sujeta a varios sismos intensos durante su vida. Este es uno de los aspectos débiles que tienen los marcos destinados a resistir sismo.

### 11.3 Concreto

#### 11.3.1 Materiales componentes

La calidad y proporciones de los materiales componentes del concreto serán tales que se logren la resistencia, rigidez y durabilidad necesarias.

La calidad de todos los materiales componentes del concreto deberá verificarse antes del inicio de la obra y también cuando exista sospecha de cambio en las características de los mismos o haya cambio de las fuentes de suministro. Esta verificación de calidad se realizará a partir de muestras tomadas del sitio de suministro o del almacén del productor de concreto. El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, en lugar de esta verificación podrá admitir la garantía del fabricante del concreto de que los materiales fueron ensayados en un laboratorio autorizado por el Sistema Nacional de Acreditamiento de Laboratorios de Prueba (SINALP), y que cumplen con los requisitos establecidos en 1.4.1 y los que a continuación se indican; pero en este caso también podrá ordenar la verificación de la calidad de los materiales cuando lo juzgue procedente.

Los materiales pétreos, grava y arena, deberán cumplir con los requisitos de la norma NOM C-111, con las siguientes modificaciones y adiciones:

Propiedad	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Coefficiente volumétrico de la grava, mín	0.20	---
Material más fino que la malla F 0.075 (No. 200) en la arena, porcentaje máx. en peso (NOM C 084).	15	15
Contracción lineal de los finos (pasan la malla No 40) de la arena y la grava, en la proporción en que éstas intervienen en el concreto, a partir del límite líquido, porcentaje máx.	2	3

En adición a la frecuencia de verificación estipulada para todos los materiales componentes al principio de este inciso, los requisitos especiales precedentes deberán verificarse cuando menos una vez por mes para el concreto clase 1.

Los límites correspondientes a estos requisitos especiales pueden modificarse si el fabricante del concreto demuestra, con pruebas realizadas en un laboratorio acreditado por el SINALP, que con los nuevos valores se obtiene concreto que cumpla con el requisito de módulo de elasticidad establecido en 11.3.4. En tal caso, los nuevos límites serán los que se apliquen en la verificación de estos requisitos para los agregados específicamente considerados en dichas pruebas.

### 11.3.2 Elaboración del concreto

El concreto podrá ser dosificado en una planta central y transportado a la obra en camiones revolvedores, o dosificado y mezclado en una planta central y transportado a la obra en camiones agitadores, o bien podrá ser elaborado directamente en la obra; en todos los casos deberá cumplir con los requisitos de elaboración que aquí se indican.

El concreto clase 1, premezclado o hecho en obra, deberá ser elaborado en una planta de dosificación y mezclado de acuerdo con los requisitos de elaboración establecidos en la norma NOM C-155.

El concreto clase 2, si es premezclado, deberá satisfacer los requisitos de elaboración de la mencionada norma NOM C-155. Si es hecho en obra, podrá ser dosificado en peso o en volumen, pero deberá ser mezclado en una revolvedora mecánica ya que no se permitirá la mezcla manual de concreto estructural.

### 11.3.3 Requisitos y control del concreto fresco

Al concreto en estado fresco, antes de su colocación en las cimbras, se le harán pruebas para verificar que cumple con los requisitos de revenimiento y peso volumétrico. Estas pruebas se realizarán al concreto muestreado en obra, con la siguiente frecuencia como mínimo:

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Revenimiento (NOM C-156)	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada revoltura, si es hecho en obra.	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada 5 revolturas, si es hecho en obra.

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Peso volumétrico (NOM C-162)	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 20 m <sup>3</sup> de concreto.	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 40 m <sup>3</sup> .

El revenimiento será el mínimo requerido para que el concreto fluya a través de las barras de refuerzo y para que pueda bombearse en su caso, así como para lograr un aspecto satisfactorio. El revenimiento nominal de los concretos no será mayor de 12 cm. Para permitir la colocación del concreto en condiciones difíciles, o para que pueda ser bombeado, se autoriza aumentar el revenimiento nominal hasta un máximo de 18 cm, mediante el uso de aditivo superfluidificante, de manera que no se incremente el contenido unitario de agua; en tal caso, la verificación del revenimiento se realizará en la obra antes y después de incorporar el aditivo superfluidificante, comparando con los valores nominales de 12 y 18 cm respectivamente; las demás propiedades, incluyendo las del concreto endurecido, se determinarán en muestras que ya incluyan dicho aditivo.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, podrá autorizar la incorporación del aditivo superfluidificante en la planta de premezclado para cumplir con revenimientos nominales mayores de 12 cm.

Si el concreto es premezclado y se surte con un revenimiento

nominal mayor de 12 cm, deberá ser entregado con un comprobante de incorporación del aditivo en planta; en la obra se medirá el revenimiento para compararlo con el nominal máximo de 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de revenimiento, su valor determinado deberá concordar con el nominal especificado, con las siguientes tolerancias:

Revenimiento nominal, cm	Tolerancia, cm
menor de 5	$\pm 1.5$
de 5 a 10	$\pm 2.5$
mayor de 10	$\pm 3.5$

Estas tolerancias también se aplican a los valores nominales máximos de 12 y 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de peso volumétrico en estado fresco, su valor determinado deberá ser mayor de 2200 kg/m<sup>3</sup> para el concreto clase 1, y no menor de 1900 kg/m<sup>3</sup> para el concreto clase 2.

#### 11.3.4 Requisitos y control del concreto endurecido

La calidad del concreto endurecido se verificará mediante pruebas de resistencia a compresión en cilindros elaborados, curado y probados de acuerdo con las normas NOM C 160 y NOM C 83, en un laboratorio acreditado por el SINALP.

Cuando la mezcla de concreto se diseña para obtener la resistencia especificada a 14 días, las pruebas anteriores se efectuarán

a esta edad; de lo contrario, las pruebas deberán efectuarse a los 28 días de edad.

Para verificar la resistencia a compresión de concreto de las mismas características y nivel de resistencia, se tomará como mínimo una muestra por cada día de colado, pero al menos una por cada cuarenta metros cúbicos; sin embargo, si el concreto se emplea para el colado de columnas, se tomará por lo menos una muestra por cada diez metros cúbicos. De cada muestra se elaborarán y ensayarán al menos dos cilindros; se entenderá por resistencia de una muestra el promedio de las resistencias de los cilindros que se elaboren de ella.

Para el concreto clase 1, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada,  $f'_c$ , si ninguna muestra da una resistencia inferior a  $f'_c - 35 \text{ kg/cm}^2$ , y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que  $f'_c$ .

Para el concreto clase 2, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada,  $f'_c$ , si ninguna muestra da una resistencia inferior a  $f'_c - 50 \text{ kg/cm}^2$ , y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que  $f'_c - 17 \text{ kg/cm}^2$ .

Si sólo se cuenta con dos muestras, el promedio de las resistencias de ambas no será inferior a  $f'_c - 13 \text{ kg/cm}^2$  para concreto

clase 1, ni a  $f'_c - 28 \text{ kg/cm}^2$  para clase 2, además de cumplir con el respectivo requisito concerniente a las muestras tomadas una por una.

Cuando el concreto no cumpla con el requisito de resistencia, el Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, tomará las medidas conducentes a garantizar la seguridad de la estructura. Estas medidas estarán basadas principalmente en el buen criterio de los responsables mencionados; como factores de juicio deben considerarse, entre otros, el tipo de elemento en que no se alcanzó el nivel de resistencia especificado, el monto del déficit de resistencia y el número de muestras o grupos de ellas que no cumplieron. En ocasiones debe revisarse el proyecto estructural a fin de considerar la posibilidad de que la resistencia que se obtuvo sea suficiente.

Si subsiste la duda sobre la seguridad de la estructura se podrán extraer y ensayar corazones, de acuerdo con la norma NOM C 169, del concreto en la zona representada por los cilindros que no cumplieron. Se probarán tres corazones por cada incumplimiento con la calidad especificada. La humedad de los corazones al probarse debe ser representativa de la que tenga la estructura en condiciones de servicio.

El concreto representado por los corazones se considerará adecuado si el promedio de las resistencias de los tres corazones es mayor o igual que  $0.8 f'_c$  y si la resistencia de ningún corazón es

menor que  $0.7 f'_c$ . Para comprobar que los especímenes se extrajeron y ensayaron correctamente, se permite probar nuevos corazones de las zonas representadas por aquellos que hayan dado resistencias erráticas. Si la resistencia de los corazones ensayados no cumple con el criterio de aceptación que se ha descrito, el responsable en cuestión nuevamente debe decidir a su juicio y responsabilidad las medidas que han de tomarse. Puede optar por reforzar la estructura hasta lograr la resistencia necesaria, o recurrir a realizar pruebas de carga (artículos 239 y 240 del Reglamento) en elementos no destinados a resistir sismo, u ordenar la demolición de la zona de resistencia escasa, etc. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante en caso de que el concreto no cumpla con el requisito de resistencia.

El concreto debe cumplir además con el requisito de módulo de elasticidad especificado a continuación\*:

		Clase 1	Clase 2
Módulo de elasticidad a 28 días de edad, kg/cm <sup>2</sup> , mín.	Una muestra cualquiera	$12500\sqrt{f'_c}$	$7000\sqrt{f'_c}$
	además, promedio de todos los conjuntos de dos muestras consecutivas	$13200\sqrt{f'_c}$	— $7400\sqrt{f'_c}$

\* Debe cumplirse tanto el requisito relativo a una muestra cualquiera, como el que se refiere a los conjuntos de dos muestras consecutivas.

Para la verificación anterior, se tomará una muestra por cada 100 metros cúbicos, o fracción, de concreto, pero no menos de dos en una cierta obra. De cada muestra se fabricarán y ensayarán al menos tres especímenes. Se considerará como módulo de elasticidad de una muestra, el promedio de los módulos de los especímenes elaborados con ella.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, no estará obligado a exigir la verificación del módulo de elasticidad; sin embargo, si a su criterio las condiciones de la obra lo justifican, podrá requerir su verificación, o la garantía escrita del fabricante de que el concreto cumple con él. Cuando proceda, la verificación se realizará en un laboratorio acreditado por el SINALP. En caso que el concreto no cumpla con el requisito mencionado, el responsable de la obra evaluará las consecuencias de la falta de cumplimiento y determinará las medidas que deberán tomarse. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante por incumplimiento del requisito antedicho.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**COMPUTER METHODS IN STRUCTURAL ANALYSIS**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ LUIS TRIGOS SUÁREZ  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

***Computer Methods***  
***in***  
***Structural Analysis***

**H. B. HARRISON**

*School of Civil Engineering*  
*University of Sydney*

# Automatic Elastic-Plastic Analysis of Plane **10** Frameworks

## 10.1 Introduction

The rational design of rigid steel frameworks presupposes the availability of accurate methods for predicting the maximum strength of a frame and the deformations at working load. Linear-elastic methods of analysis are generally satisfactory in predicting working-load deflections, although the slender members that can be proportioned in high-strength steel may require that factors such as shear and axial strains be accounted for in addition to flexural strains. If working-load deflections are kept within reasonable limits, the influence of deformations upon the reliability of the linear-elastic procedures which predict the deflections is quite negligible, equilibrium equations being formulated for the unloaded frame geometry. No direct evidence of frame strength in a redundant steel structure is provided by studying the stress conditions at working load.

The simplest available theory for predicting the maximum load-carrying capacity of steel frames is the simple (or rigid) plastic theory (1), and test results on adequately stabilized beams and single-story rigid frames (2) have shown quite satisfactory agreement between observed and predicted maximum loads. As in linear-elastic analysis, simple plastic theory also presupposes that deformations have a negligible effect upon the equilibrium equations when formulated for the original unloaded shape of a structure. Heyman (3) has shown that the neglect of deformation moments in simple plastic theory can lead to an over estimation of frame strength, and Vickery (4) has demonstrated how the deformation effects in portal frames of mild steel are often compensated for by strain hardening. The agreement between observed and calculated collapse loads in tests on portal frames of mild steel has been attributed to the compensating action of strain hardening and deformation moments, both of

which are ignored in the simple plastic theory (5). The problem has been further studied by Horne and Medland (6) principally with reference to portal frames under vertical loading. General design guides for this class of frame have been produced, whereby it is possible to detect for a given frame whether strain-hardening effects are likely to cancel out the adverse effects of deformation.

Accepting, then, that the simple plastic theory for predicting the strength of steel frames has its limitations, the load factor for plastic failure ( $\lambda_p$ ) as determined by this theory is still an important frame parameter, and, for all but the simplest of structures, the manual methods for computing  $\lambda_p$  can be tedious and require, for a rapid solution, a considerable exercise of the analyst's intuition concerning the likely mode of failure. Once the generality of the matrix computer methods for linear-elastic frame analysis had been recognized, it was natural to expect that attention would be concentrated on the various types of nonlinear analysis that are feasible, using iterative techniques on a computer.

## 10.2 Elastic-Plastic Analysis

With regard to elastic-plastic analysis of plane steel frames, Wang (7) first described the basic principles of an effective computer program, and the scheme described in this chapter is a development of Wang's technique. To appreciate the advantages of Wang's automated system for detecting where a plastic hinge may form in a frame under increasing load, and for subsequently dealing with the modified structure that results, it is informative to consider at first the nature of simple or rigid plastic analysis.

The encastered beam shown in Fig. 10.1(a) is a useful example, and an elastic analysis, whether by hand or by computer using any of the programs already described, would produce the result shown in Fig. 10.1(b). The significant conclusion is that the maximum bending moment occurs at the left-hand support, provided the material everywhere remains elastic. A plastic analysis of such a beam is inherently simple and direct, as it would begin with the intuitive and correct assumption that, at failure, plastic hinges will form at both supports and under the applied load. This information about the mode of failure is combined with static principles in Fig. 10.1(c), and the load factor at failure is immediately found.

Characteristic then of simple plastic analysis is the determination of the collapse load of a steel framework by the combination of equilibrium equations with an intuitively assumed mechanism of failure which is verified or discarded in the process. In general, trial-and-error procedures are involved. For highly redundant frameworks, the correct failure mechanism is rarely obvious from inspection, but satisfactory solutions can often be achieved after several mechanisms are examined with judicious use of the maximum and minimum principles (8). The elimination of the need for an elastic analysis of highly redundant frames has often been regarded as an advantage of plastic analysis, but when designs in high-strength steel are contemplated, the deformations at working load levels will be an important consideration; so the designer may have to carry out both elastic and plastic analyses, the former to check

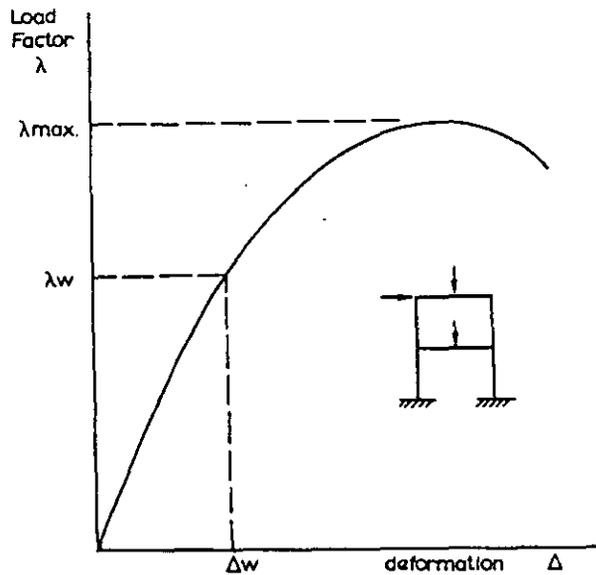
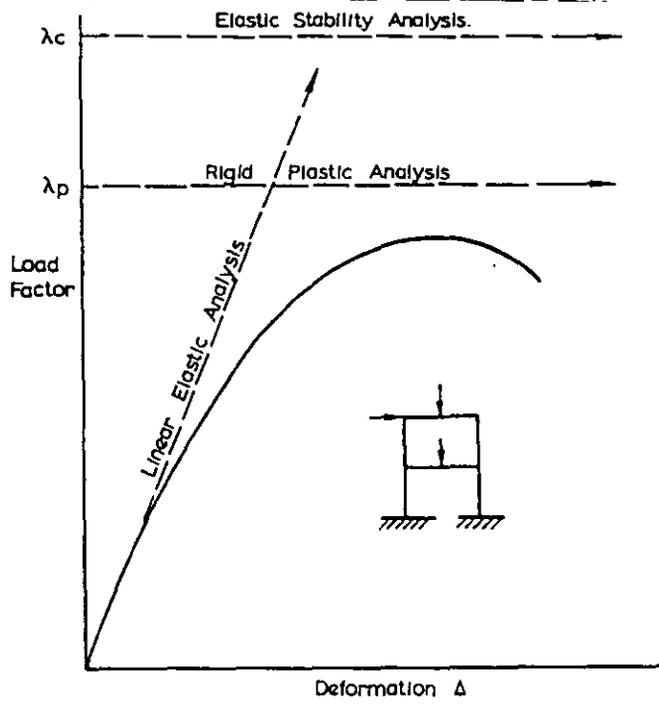
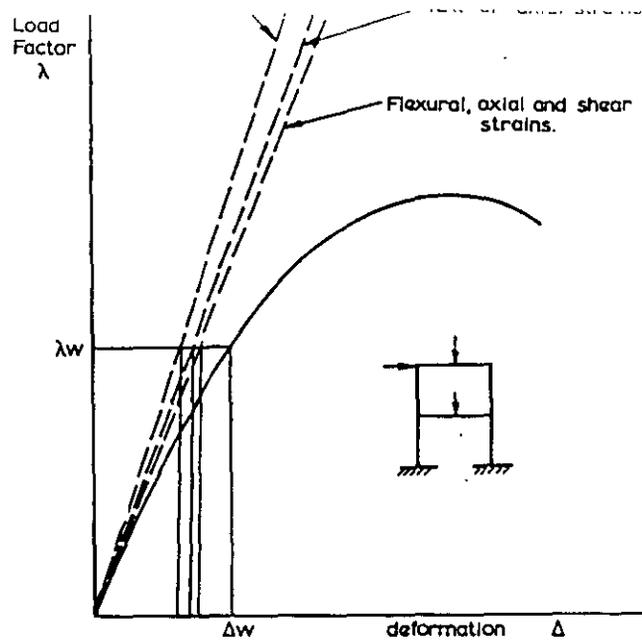
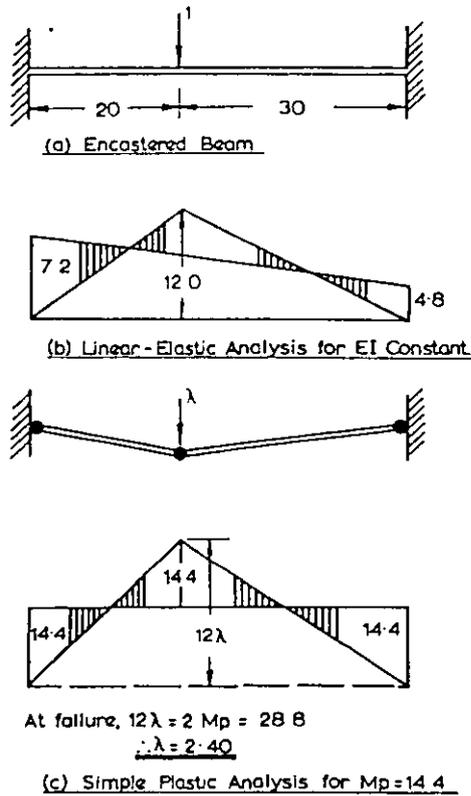


Fig. 10.1 Linear-elastic and simple plastic analyses

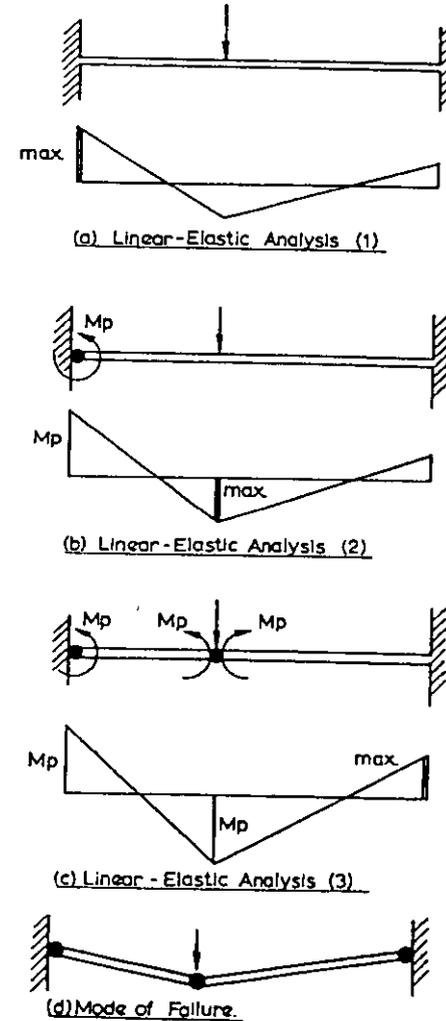


conditions at working load and the latter to give an estimate of overload strength. It is not easy to program a computer to make the intuitive judgments which help an experienced designer to achieve a satisfactory solution.

If the same encastered beam is studied again, as in Fig. 10.2, it can be seen that the failure load and mode could be determined from three successive linear-elastic analyses. The result of the first such analysis shown in Fig. 10.2(a) is the indication that the failure mode is very likely to involve a plastic hinge at the left-hand support. The second analysis in Fig. 10.2(b) is that of a cantilever propped at the left-hand support and loaded there with a constant anticlockwise end moment of value  $M_p$ , which is the full plastic value. This second analysis would indicate a peak moment under the load, so that a third elastic analysis could be made, as in Fig. 10.2(c). The

results of this final elastic analysis may be factored by the ratio of  $M_p$  to the computed moment value at the right-hand support, so that not only is the plastic failure load factor determined but also the deformations just to prior collapse.

Fig. 10.2 Elastic-plastic analysis



10.3 Automatic Elastic-Plastic Analysis

It is often the case that the form of an analysis carried out by hand would not be a desirable one to program for a computer. The procedure just described is a case in point, as it would be inefficient for a machine solution because of the necessity of providing, from the beginning, for the extra degrees of freedom and the corresponding new loading terms in the dimensioning of the various matrices affected by the degrees of freedom. If provision had to be made for an extra degree of freedom at every position where a plastic hinge was likely to form, a small frame would rapidly fill the available data-storage capacity of a computer.

The alternative system used by Wang does not involve the same difficulties and is illustrated by the encastered beam, shown again in Fig. 10.3. The beam is subjected to an elastic analysis under its working load, and the result is shown graphically and numerically in Fig. 10.3. The computed moment values at each joint, *A*, *B*, and *C* are

Fig. 10.3 Elastic-plastic analysis stage 1

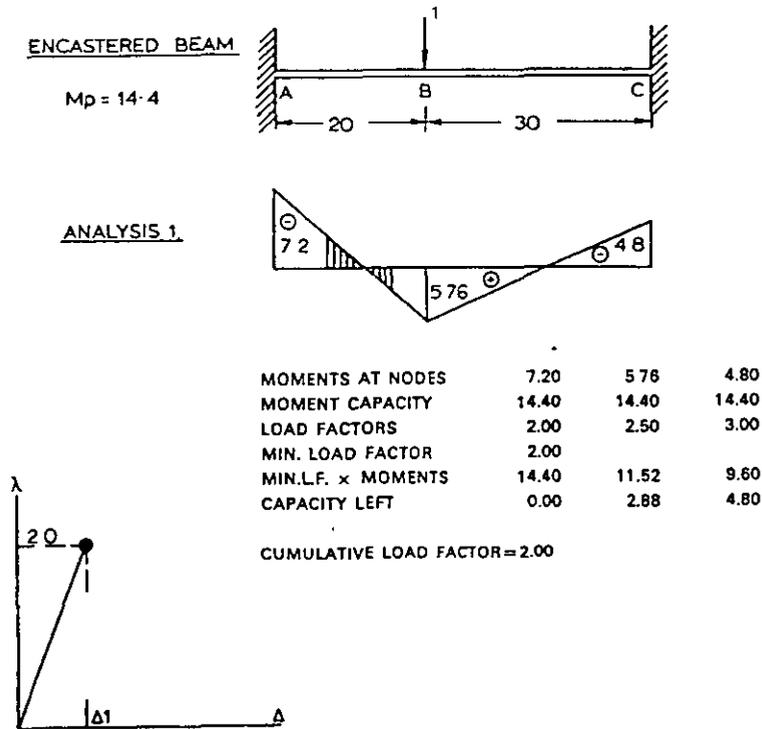
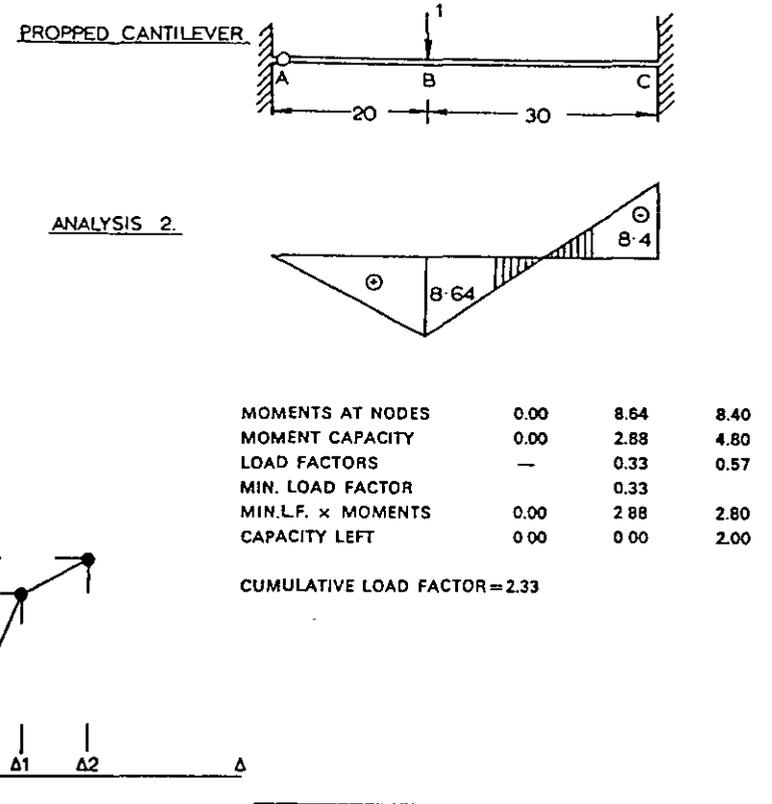


Fig. 10.4 Elastic-plastic analysis stage 2

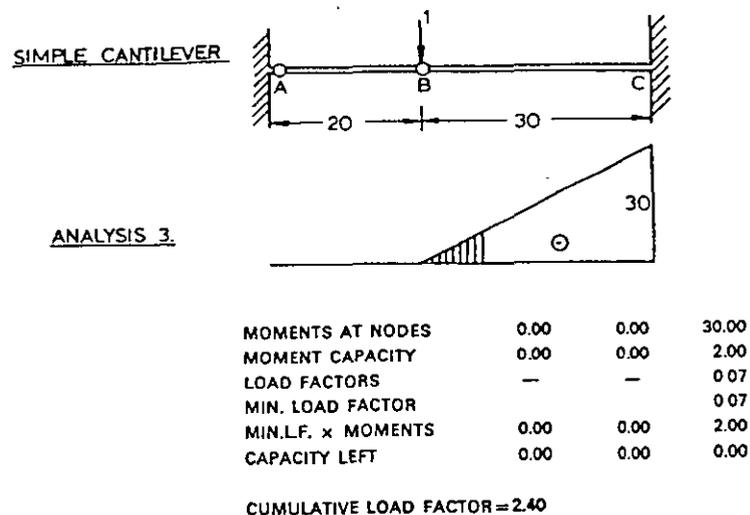


divided into the full plastic values to produce load factors of 2.0, 2.5, and 3.0, respectively. The position *A*, where the smallest of these factors is found, will be that where the first plastic hinge will be found if the working load is multiplied by the minimum load factor, which is 2.0. The computed deflections may be similarly factored so that the portion of the load-deflection curve shown in Fig. 10.3(c) is determined. At this stage, two separate operations are required. First, the moments at *A*, *B*, and *C* are factored by 2.0 and then subtracted from the full plastic values, which were 14.4, to give the residual capacities of 0, 2.88, and 4.80 shown in the figure. Second, the computer has to allow in its subsequent analyses for the existence of a free hinge at the end *A* of the member *AB*. This is a simple matter if the form of linear-elastic analysis being used is the displacement method, as explained for rigid plane frames in Chapters 7 and 8. Changes can be made to the member-stiffness matrix in

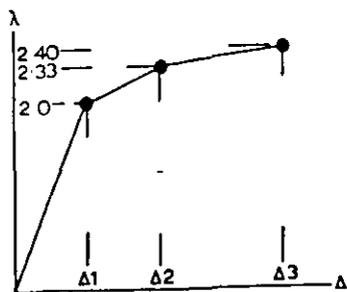
the manner shown in Figs. 7.19 and 7.20, where the treatment of an internal hinged connection was discussed. The degree of freedom of a frame as measured by the possible unrestrained movements of nodes is unaffected by this change in member stiffness, so that the statics matrix  $[A]$  will undergo no alterations in either size or in the values of its elements. The frame-stiffness matrix  $[K]$  will be of the same size but will have some elements altered, since it is generated by the operation  $[A]\cdot[S]\cdot[A]^T$ , and changes would have been made to the four elements of  $[S]$ , which reflect the flexural stiffness of member  $AB$ .

The stage is then set for the second linear-elastic analysis of the beam, as in Fig. 10.4. The computed moments at the member ends are divided into the available moment capacities and the minimum factor found after disallowing the division of zero

Fig. 10.5 Elastic-plastic analysis stage 3



CUMULATIVE LOAD FACTOR = 2.40



by zero at node  $A$ . The second plastic hinge is seen to form under the load when the additional load factor is 0.33 or the cumulative load factor is 2.33. If the sequence of operations is repeated, as in Fig. 10.5, the load factor of 2.40 for plastic failure is determined by what appears to be a large effort in comparison with the simple calculation shown in Fig. 10.1. However, the right solution was reached without the necessity for an intuitive guess as to the mechanism of failure and, further, the deformations at the onset of failure would have been evaluated in the process.

It can also be seen from Figs. 10.3 to 10.5 that the procedure is essentially cyclical. Deformations are calculated at each stage in the process, but these results have not been included in the tabulations. A collapse mechanism will have been reached in the analysis when the structure has been converted into a mechanism. The numerical indication of such a phenomenon can be in several forms. It may be that the coefficients in the stiffness equations would form a singular matrix so that zero division would be encountered in an attempted solution and would end the analysis. If this does not occur, the computed deformations would be very large, which would indicate that the load-deflection diagram has become horizontal. Wang (7) has explained the computer indications of frame failure, though some of his collapse criteria have been eliminated in the present program, for reasons which will be explained later.

### 10.4 Programming the Method of Elastic-Plastic Analysis

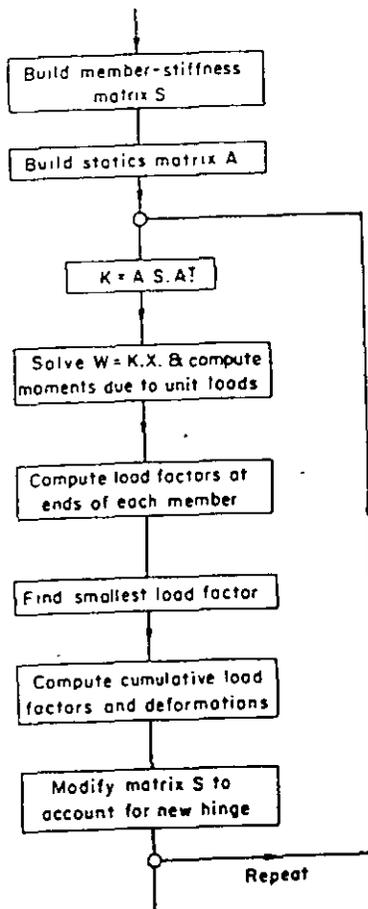
In Wang's original program, the statics and member-stiffness arrays  $[A]$  and  $[S]$  for the whole frame were prepared manually. In program *EPFO*, as listed in Appendix 10.1, all the required arrays are generated within the computer using elementary data in much the same form as that used by the linear-elastic programs *ELFO* and *ELFAS*, already described. To keep the program listing as short as possible, the member data have been confined to the barest minimum and comprises, for each member, the pair of connected joints, and the inertia, area and full plastic moment of the section. Members of the same material are presupposed, so that the elastic modulus is not included in the member data and, further, finite shear strains and the existence of initial internal hinges are not taken into account.

Either of the plane-frame linear analysis programs *ELFO* and *ELFAS* could have been modified to perform elastic-plastic analyses, but the former was preferred on the grounds of simplicity rather than efficiency since the statics matrix  $[A]$  for a complete framework could be generated only once and stored ready for use in all the successive linear analyses as each plastic hinge was located. The extra-storage requirement, in providing for both the array  $[A]$  and the frame-stiffness matrix, will decrease the maximum-sized frame that could otherwise be processed on any given machine. The essential alterations made to program *ELFO* in developing the elastic-plastic program *EPFO* are indicated on Fig. 10.6, and the blocks on this flow diagram may be identified in the listing given in Appendix 10.1. Flow diagrams are at best an easy substitute for the listing of a program and have not been included generally in this book.

An essential part of the program is that concerned with the search for the position at which a plastic hinge will form for the smallest increase in load factor. This part

of the program follows Wang's original scheme, except for one alteration. It was found that erroneous results were produced for some frames because the load factors were computed by dividing the residual moment capacity by the absolute value of the moments caused by the unit or working loads. Such a procedure is satisfactory, provided the unit-load moments at the critical positions are of the same sign in the successive analysis of the frames of deteriorated stiffness. It may well be the case that the moment at the position with the least reserve of strength may be decreasing under increasing load. A test has been incorporated in the section of the program concerned with the finding of the smallest-load factor to determine whether such is the case, and, if so, the position in question is not included in the search for the smallest-load factor.

Fig. 10.6 Elastic-plastic analysis



In his program, Wang incorporated four separate tests to determine whether the collapse load for a frame had been reached. These were (1) large deformations, (2) zero division, (3) full plastic moment exceeded, and (4) load factor too small. The above considerations dispense effectively with the need for (3). The fourth test involved the minimum-load factor, which, if too small, would indicate that the load-deflection curve for a frame was close to horizontal. However, it was found that this test would frequently terminate prematurely the analysis for any frame where two plastic hinges might form simultaneously. This test has been omitted from the present program, since it is considered that a deformation limitation will determine effectively whether or not the load-displacement curve might be horizontal.

Accordingly, only two of Wang's four tests have been retained. These are the tests for large deformations and zero division. The latter test outputs the message "division by zero in inversion," and it effectively determines the stage at which a diagonal element in the frame-stiffness matrix ( $K$ ) contains only a zero term. In theory, this is the only necessary test, but the other is required also because rounding off errors in the arithmetic could delay the program termination and invalidate the calculation of plastic-hinge rotations, if these were desired.

This facility has not been included in program *EPFO* in order to keep the listing as short as possible. The theory is quite straightforward, however. Knowing the stress resultants for each member at the development of the final plastic hinge, the member deformations  $\{x\}$  may be computed from purely elastic considerations. Since, in the displacement method,  $\{SR\} = [S] \cdot \{x\}$  and the member-stiffness matrix  $[S]$  is square, it follows that

$$\{x\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} \quad (10.1)$$

The array  $[S]$  is the initial, unmodified member-stiffness matrix. However, it must be remembered that compatibility between member end rotations and joint rotations will not have been maintained in the process of an elastic-plastic solution, and the transformation

$$\{x\} = [A]^T \cdot \{X\} \quad (10.2)$$

will produce only the elastic components of the member-end deformations. Therefore, the amount of plastic-hinge rotation at all hinge locations except for the last to form may be evaluated by the operation

$$\{x_p\} = [S]^{-1} \cdot \{SR\} - [A]^T \cdot \{X\} \quad (10.3)$$

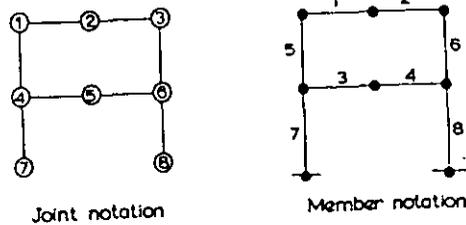
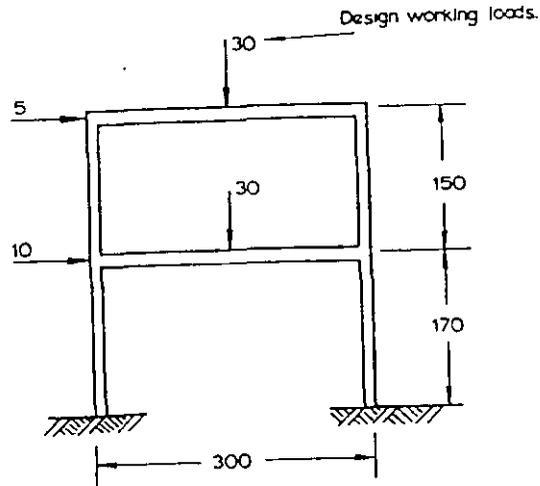
where the vectors  $\{SR\}$  and  $\{X\}$  are, respectively, the cumulative stress resultants and joint deformations when the last plastic hinge has formed. The vector  $\{x_p\}$ , as evaluated from equation (10.3), will have three elements per member comprising the extension and the rotation angles in radians at each end. The residual plastic extension should be zero, since this type of compatibility is not violated in the simple plastic theory. All the terms in  $\{x_p\}$  will be effectively zero except for those positions where plastic hinges formed early in the elastic-plastic analysis. The matter of the plastic-

hinge rotation capacity can be important when noncompact sections are used in a steel frame. These thin sections may have limited rotation capacity while resisting the full plastic value of an applied moment.

### 10.5 General Observations

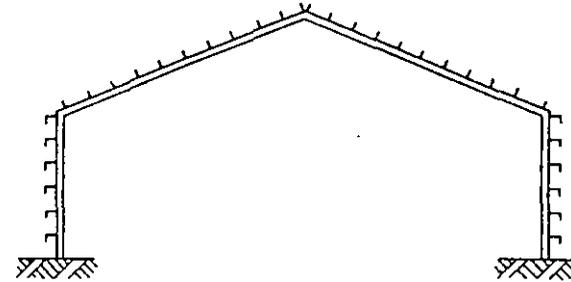
The application of the elastic-plastic program *EPFO* to a small but typical problem in plastic analysis has been demonstrated for the frame in Fig. 10.7 in Appendix 10.2. An important limitation of the scheme is the requirement that loads

Fig. 10.7 Rigid frame for elastic-plastic analysis



Properties of Sections } Beams:  $I = 1000$ ,  $A = 20$ ,  $M_p = 4500$ .  
 Columns:  $I = 500$ ,  $A = 25$ ,  $M_p = 4000$ .  
 Modulus  $E = 30,000$

Fig. 10.8 Industrial rigid frame



should act at joints only, so that distributed loading arrangements on frame members can present quite a problem if the "exact" location of a plastic hinge within such members is required. Industrial portal frames of the type shown in Fig. 10.8 are frequently designed on the basis of the simple plastic theory, and, if there are 10 purlin and girt spaces within each rafter and column, a computer of considerable size would be required by program *EPFO*, since the frame would need to be described as one of 40 members and 41 joints. Approximately 29,000 storage locations for real numbers would have to be declared. The necessary storage would be reduced to approximately 7,000 if each member were subdivided into 5 rather than 10 parts, and the errors involved would hardly be appreciable in any practical design. There are other ways of dealing with problems of this nature, and an effective scheme is to use interactive, time-sharing computers, which will be discussed in a later chapter.

One additional limiting factor should be mentioned. It can sometimes occur in steel frames that a plastic hinge which is formed early in the loading history may not be required in the collapse condition. The moment at such a section would decrease in magnitude, and a plastic hinge would not then exist. This phenomenon cannot be accounted for in the present program, as the process of free hinge insertion is irreversible. The calculated load factor for such a problem would err on the safe side, since the equilibrium and yield conditions would be satisfied but not the mechanism condition. The phenomenon has been mentioned by Finzi (9). The example of a two-span beam, which has been used by Neal (10) to demonstrate the problem, is shown in Fig. 10.9. For the loads shown in Fig. 10.9(a), an elastic analysis will produce a maximum moment at node 3, as can be seen in Fig. 10.9(b). However, a simple plastic analysis will predict a failure mechanism with plastic hinges at (2) and (4) but not at (3). This can be deduced from the moment diagram shown in Fig. 10.9(d). The results obtained from a computer analysis of this problem are in Appendix 10.3. It can be seen that the computer correctly detects the formation of the first hinge at node (3) and the second at (4) as shown in Fig. 10.9(c) but cannot account for the closing of the first formed hinge thereafter. Accordingly, it arrives at an invalid collapse mechanism.

Fig. 10.9 Neal-Finzi problem

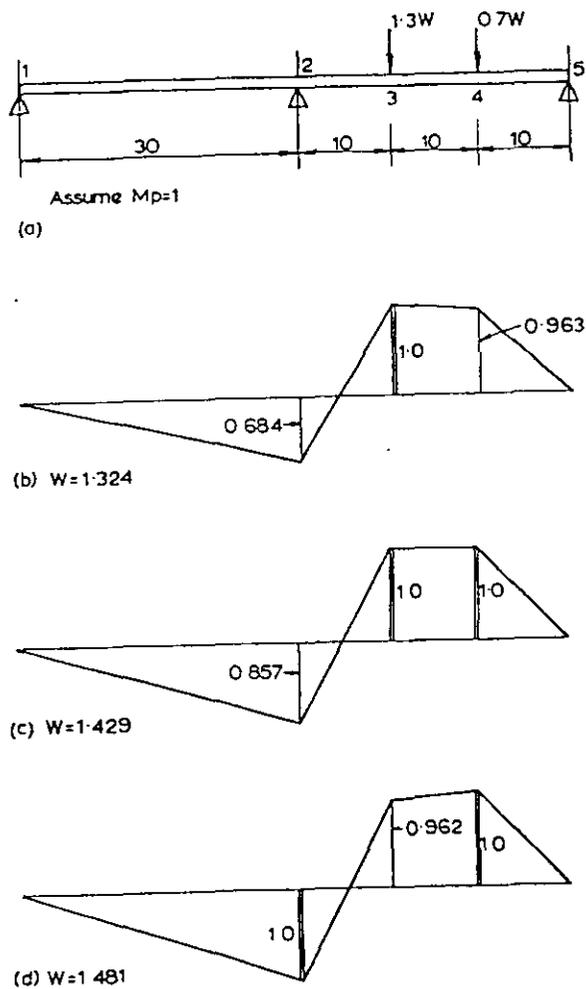
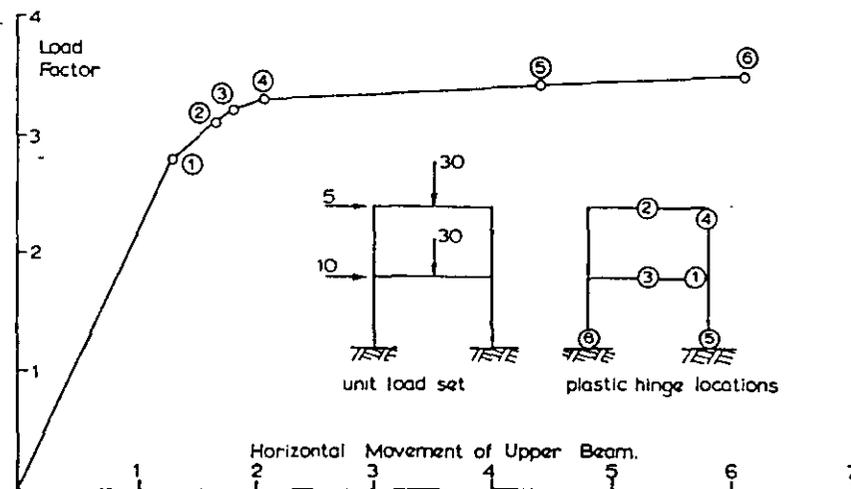


Fig. 10.10 Computed load-sway curve for rigid frame in Fig. 10.7



is quite as expected. Even if the mechanism is not a valid one, the results of the computer analysis should still be useful to a designer; he would have a statically admissible set of stress resultants with no moment greater than the full plastic value, so that, as a consequence of the limit theorems (8), the computed load factor would be low and hence on the safe side.

References

1. BAKER, J. F., HORNE, M. R. and HEYMAN, J. *Plastic Behaviour and Design*, The Steel Skeleton, Vol. II. London, Cambridge Univ. Press, 1956.
2. LAY, M. G. *The Experimental Bases for Plastic Design*. Lehigh Univ., Fritz Eng. Lab., Report No. 297.3, March 1963.
3. HEYMAN, J. "Plastic Design of Pitched Roof Portal Frames," *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 8, October 1957, 119-140.
4. VICKERY, B. J. "The Influence of Deformations and Strain Hardening on the Collapse Load of Rigid Frame Steel Structures," *Civil. Eng. Trans., I.E. Aust., CE3*, No. 2 (1961), 103-114.

ism with a load factor smaller than the correct one. Consequently, it is desirable in any frame analysis to check the collapse mechanism arrived at by the computer to see whether or not it is valid. That shown in Fig. 10.10 for the rectangular rigid frame

5. HORNE, M. R. "Instability and the Plastic Theory of Structures," *Trans. Eng. Inst. of Canada*, 4, No. 2 (1960), 31-43.
6. HORNE, M. R. and MEDLAND, I. C. "Collapse Loads of Steel Frameworks Allowing for the Effect of Strain Hardening," *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 33, March 1966, 381-402.
7. WANG, C. K. "General Computer Program for Limit Analysis," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs., J. Struct. Div.*, 89, No. ST6 (1963), 101-117.
8. GREENBERG, H. J. and PRAGER, W. "Limit Design of Beams and Frames," *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, 77, February 1951 (Separate No. 59), 12.
9. FINZI, L. "Unloading Processes in Elastic-Plastic Structures." *9th Int. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, 1957.
10. NEAL, B. G. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman & Hall, London, 1963.

#### Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO

##### General Notes

1. The arrays are dimensioned and the data input from a file *PADATA* by statement lines 1000-1140. The degree of freedom is computed by lines 1150-1180.
2. Loads are input and the load vector  $\{VL\}$  assembled in statement lines 1190-1340.
3. Counters, variables, and arrays are set to zero and the nonzero parts of the member-stiffness matrix, namely,  $\{SF\}$  and  $\{SA\}$ , established by statement lines 1350-1560.
4. The statics matrix  $[A]$  for the whole frame is generated by lines 1570-1970.
5. The frame-stiffness matrix  $[ASAT]$  is generated from  $[A]$  and  $\{SF\}$  and  $\{SA\}$  by statement lines 1980-2090.
6. The stiffness matrix is augmented by the load vector and the equations solved by Gauss-Jordan elimination in statement lines 2100-2360.
7. Deflections larger than 1000 will terminate the run in lines 2370-2400. (Zero division in the equation solver is detected by statement line 2270.)
8. Stress resultants are calculated by statement lines 2410-2500, and the plastic-hinge location  $NPH$  and corresponding smallest-load factor  $SALG$  are detected by lines 2520-2660.
9. Cumulative deformations and stress resultants are calculated by lines 2670-2770 and output by statement lines 2780-3210.
10. The member-stiffness matrix is modified according to the location of the plastic hinge by statement lines 3220-3320, and the program will proceed to find the next plastic hinge.

#### pendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

##### PROGRAM EPFO

```

1000 DIMENSION A(18,24),ASAT(18,19),CORO(9,2),JTYPE(9,3)
1010 + MCON(8,2),SMA(8),AREA(8),PM(8),OLEN(8),VL(18),
1020 + SF(16,2),SA(8),CSAT(24),SATX(24),ALG(16),CM(16),
1030 + CT(8),CX(18)
1040 $FILE PADATA
1050 10 READ(1),JFN
1060 IF(JFN)20,20,30
1070 20 STOP
1080 30 READ(1),JCT,NM,E
1090 PRINT 40,JFN
1100 40 FORMAT(///38H ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO.14//)
1110 DO 50 I=1,JCT
1120 50 READ(1),(CORD(I,J),J=1,2),(JTYPE(I,J),J=1,3)
1130 DO 60 I=1,NM
1140 60 READ(1),(MCON(I,J),J=1,2),SMA(I),AREA(I),PM(I)
1150 L=0
1160 DO 70 I=1,JCT
1170 DO 70 J=1,3
1180 70 L=L+JTYPE(I,J)
1190 READ(1),LN
1200 DO 72 I=1,L
1210 72 VL(I)=0.
1220 DO 77 I=1,LN
1230 READ(1),JN,(OLEN(J),J=1,3)
1240 LL=0
1250 LJ=JN-1
1260 IF(LJ)75,75,73
1270 73 DO 74 J=1,LJ
1280 DO 74 K=1,3
1290 74 LL=LL+JTYPE(J,K)
1300 75 DO 77 K=1,3
1310 IF(JTYPE(JN,K))77,77,76
1320 76 LL=LL+1
1330 VL(LL)=OLEN(K)
1340 77 CONTINUE
1350 NCYCL=0
1360 CLG=0.
1370 DO 90 I=1,L
1380 90 CX(I)=0.
1390 DO 270 I=1,NM
1400 J1=MCON(I,1)
1410 J2=MCON(I,2)
1420 X=CORD(J1,1)-CORD(J2,1)
1430 Y=CORD(J1,2)-CORD(J2,2)
1440 270 OLEN(I)=SQRT(X*X+Y*Y)
1450 DO 280 I=1,NM

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

1460 SF(2+1,2)=4*E*SMA(I)/OLEN(I)
1470 SF(2+1-1,1)=SF(2+1,2)
1480 SF(2+1,1)=0.5*SF(2+1,2)
1490 SF(2+1-1,2)=SF(2+1,1)
1500 280 SA(I)=E*AREA(I)/OLEN(I)
1510 M2=2*NM
1520 M3=3*NM
1530 DO 290 I=1,M2
1540 290 CM(I)=0.
1550 DO 291 I=1,NM
1560 291 CT(I)=0.
1570 NJ=0
1580 NK=0
1590 DO 295 I=1,L
1600 DO 295 J=1,M3
1610 295 A(I,J)=0.0
1620 DO 450 J=1,JCT
1630 DO 440 M=1,NM
1640 NA=NJ
1650 IF(J-MCON(M,1))340,330,340
1660 330 JF=MCON(M,2)
1670 MJ=2*M-1
1680 MF=MJ+1
1690 GO TO 360
1700 340 IF(J-MCON(M,2))440,350,440
1710 350 JF=MCON(M,1)
1720 MJ=2*M
1730 MF=MJ-1
1740 360 X=CORD(JF,1)-CORD(J,1)
1750 Y=CORD(JF,2)-CORD(J,2)
1760 D=SQRT(X*X+Y*Y)
1770 S=Y/D
1780 C=X/D
1790 NN=2*NM+M
1800 IF(JTYPE(J,1))380,380,370
1810 370 NA=NA+1
1820 A(NA,MJ)=S/D
1830 A(NA,MF)=A(NA,MJ)
1840 A(NA,NN)=-C
1850 380 IF(JTYPE(J,2))400,400,390
1860 390 NA=NA+1
1870 A(NA,MJ)=-C/D
1880 A(NA,MF)=A(NA,MJ)
1890 A(NA,NN)=-S
1900 400 IF(JTYPE(J,3))420,420,410
1910 410 NA=NA+1
1920 A(NA,MJ)=1.0
1930 420 IF(NA-NK)440,440,430

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

1940 430 NK=NA
1950 440 CONTINUE
1960 NJ=NK
1970 450 CONTINUE
1980 455 NCYCL=NCYCL+1
1990 DO 480 J=1,L
2000 DO 460 I=1,M2
2010 K=((I+1)/2)*2-1
2020 460 CSAT(I)=SF(I,1)*A(J,K)+SF(I,2)*A(J,K+1)
2030 DO 470 I=1,NM
2040 K=M2+I
2050 470 CSAT(K)=SA(I)*A(J,K)
2060 DO 480 I=1,L
2070 ASAT(I,J)=0.0
2080 DO 480 K=1,M3
2090 480 ASAT(I,J)=ASAT(I,J)+A(I,K)*CSAT(K)
2100 DO 490 I=1,L
2110 490 ASAT(I,L+1)=VL(I)
2120 KJ=L+1
2130 DO 610 I=1,L
2140 IP1=I+1
2150 TEMP=ABS(ASAT(I,I))
2160 K=I
2170 DO 520 J=1,L
2180 IF(ABS(ASAT(J,I))-TEMP)520,520,510
2190 510 K=J
2200 TEMP=ABS(ASAT(J,I))
2210 520 CONTINUE
2220 IF(K-I)530,550,530
2230 530 DO 540 J=1,KJ
2240 TEMP=ASAT(I,J)
2250 ASAT(I,J)=ASAT(K,J)
2260 540 ASAT(K,J)=TEMP
2270 550 IF(ASAT(I,I))570,1000,570
2280 570 TEMP=1.0/ASAT(I,I)
2290 DO 580 J=1,KJ
2300 580 ASAT(I,J)=ASAT(I,J)*TEMP
2310 DO 610 J=1,L
2320 IF(I-J)590,610,590
2330 590 TEMP=ASAT(J,I)
2340 DO 600 K=IP1,KJ
2350 600 ASAT(J,K)=ASAT(J,K)-TEMP*ASAT(I,K)
2360 610 CONTINUE
2370 XLMT=1000.
2380 DO 620 I=1,L
2390 IF(ABS(ASAT(I,KJ))-XLMT)620,620,1020
2400 620 CONTINUE
2410 DO 650 I=1,M3

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

2420 CSAT(I)=0.0
2430 DO 650 J=1,L
2440 650 CSAT(I)=CSAT(I)+A(J,I)*ASAT(J,L+1)
2450 DO 660 I=1,M2
2460 K=(I+1)/2*2-1
2470 660 SATX(I)=SF(I,1)*CSAT(K)+SF(I,2)*CSAT(K+1)
2480 DO 670 I=1,NM
2490 K=M2+I
2500 670 SATX(K)=SA(I)*CSAT(K)
2510 CONTINUE
2520 DO 720 I=1,M2
2530 K=(I+1)/2
2540 ZERO=0.001*PM(K)
2550 IF(ABS(SATX(I))-ZERO)700,700,710
2560 700 ALG(I)=1.E10
2570 GO TO 720
2580 710 ALG(I)=(PM(K)-ABS(CM(I)))/ABS(SATX(I))
2590 720 CONTINUE
2600 SALG=1.E10
2610 DO 750 I=1,M2
2620 TEST=CM(I)*SATX(I)
2630 IF(TEST)750,730,730
2640 730 IF(ALG(I)-SALG)740,750,750
2650 740 SALG=ALG(I)
2660 NPH=1
2670 750 CONTINUE
2680 DO 760 I=1,M3
2690 760 SATX(I)=SALG*SATX(I)
2700 CLG=CLG+SALG
2710 DO 770 I=1,M2
2720 770 CM(I)=CM(I)+SATX(I)
2730 DO 780 I=1,NM
2740 K=M2+I
2750 780 CT(I)=CT(I)+SATX(K)
2760 DO 790 I=1,L
2770 ASAT(I,KJ)=ASAT(I,KJ)*SALG
2780 790 CX(I)=CX(I)+ASAT(I,KJ)
2790 I=(NPH+1)/2
2800 K=(NPH/2)*2-NPH
2810 IF(K)792,793,793
2820 792 J=MCON(I,1)
2830 GO TO 799
2840 793 J=MCON(I,2)
2850 799 PRINT 800,NCYCLI,J
      800 FORMAT(///15H PLASTIC HINGE, I3,18H FORMED IN MEMBER,
      + I3,12H NEAR JOINT, I3)
2880 PRINT 810,CLG
2890 810 FORMAT(18H WHEN LOAD FACTOR=,F10.5)

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM *EPFO* (Contd.)

```

2900 CONTINUE
2910 PRINT 820
2920 820 FORMAT(//24H CUMULATIVE DEFORMATIONS/)
2930 PRINT 821
2940 821 FORMAT(42H JOINT X-MOVEMENT Y-MOVEMENT ROTATION/)
2950 LL=0
2960 DO 830 I=1,JCT
2970 DO 827 J=1,3
2980 IF(JTYPE(I,J))825,825,826
2990 825 CSAT(J)=0.
3000 GO TO 827
3010 826 LL=LL+1
3020 CSAT(J)=CX(LL)
3030 827 CONTINUE
3040 830 PRINT 840,I,(CSAT(J),J=1,3)
3050 840 FORMAT(I5,3F12.5)
3060 PRINT 850
3070 850 FORMAT(//19H CUMULATIVE MOMENTS/)
3080 PRINT 851
3090 851 FORMAT(61H MEMBER TERMINAL APPLIED MOMENTS NEAR
3100 + JOINTS PLASTIC VALUE/)
3110 DO 860 I=1,NM
3120 K=2*I-1
3130 860 PRINT 870,I,CM(K),CM(K+1),MCON(I,1),MCON(I,2),PM(I)
3140 870 FORMAT(I5,2X,2F13.4,I5,4H AND,I3,F14.4)
3150 PRINT 880
3160 880 FORMAT(//20H CUMULATIVE TENSIONS/)
3170 PRINT 885
3180 885 FORMAT(18H MEMBER TENSION/)
3190 DO 890 I=1,NM
3200 K=M2+I
3210 890 PRINT 900,I,CT(I)
3220 900 FORMAT(I5,F13.3)
3230 ITEST=((NPH/2)*2)-NPH
3240 IF(ITEST)910,920,920
3250 910 SF(NPH+1,2)=0.75*SF(NPH+1,2)
3260 SF(NPH+1,1)=0.0
3270 SF(NPH,1)=0.0
3280 SF(NPH,2)=0.0
3290 GO TO 455
3300 920 SF(NPH-1,1)=0.75*SF(NPH-1,1)
3310 SF(NPH-1,2)=0.0
3320 SF(NPH,1)=0.0
3330 SF(NPH,2)=0.0
3340 GO TO 455
3350 1000 PRINT↑"ZERO DIVISION IN EQUATION SOLUTION"
3360 GO TO 1040
3370 1020 PRINT 1030,XLMT,NCYCL

```

Appendix 10.1 FORTRAN LISTING OF PROGRAM EPFO (Contd.)

```

3380 1030 FORMAT(/25H DEFORMATIONS LARGER THAN,1X,F8.1,13H IN
3390 + CYCLE NO.,I4//)
3400 1040 PRINT 1050,JFN
3410 1050 FORMAT(/33H ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO.,I3//)
3420 GO TO 10
3430 END
    
```

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME IN FIG. 10.7 USING PROGRAM EPFO

Member and load data and the joint and member identification are all shown in Fig. 10.7. Program EPFO will analyze the frame if the data are held in a file PADATA in the following sequence.

7					Frame number, joints, members, elastic modulus
8	8	30000			Joint coordinates and type of restraint
0	320	1	1	1	
150	320	1	1	1	
300	320	1	1	1	
0	170	1	1	1	
150	170	1	1	1	
300	170	1	1	1	
0	0	0	0	0	
300	0	0	0	0	
1	2	1000	20	4500	Member data: connections, inertias, areas and full plastic moment values
2	3	1000	20	4500	
4	5	1000	20	4500	
5	6	1000	20	4500	
1	4	500	25	4000	
3	6	500	25	4000	
4	7	500	25	4000	
6	8	500	25	4000	
4					Number of loaded joints, joint number, and load details for each of 4 joints
1	5	0	0		
4	10	0	0		
2	0	-30	0		
5	0	-30	0		
-1					No additional frames

FRAME ANALYSIS BY PROGRAM EPFO

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 7

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 4 NEAR JOINT 6  
WHEN LOAD FACTOR=2.78839

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.29598	-.02253	.00572
2	1.28749	-.75690	-.00056
3	1.27899	-.03213	-.00328
4	.82326	-.01511	.00548
5	.83365	-.58992	-.00151
6	.83505	-.02282	.00071
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1526.6272	1 AND 2	4500.0000
2	4036.8123	2 AND 3	4500.0000
3	-820.0844	4 AND 5	4500.0000
4	3613.8424	5 AND 6	4500.0000
5	1526.6272	1 AND 4	4000.0000
6	-2947.5176	3 AND 6	4000.0000
7	-658.8142	4 AND 7	4000.0000
8	-2350.6935	6 AND 8	4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-33.979
2	-33.979
3	5.589
4	5.589
5	-37.090
6	-46.562
7	-66.649
8	-100.654

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 1 NEAR JOINT 2  
WHEN LOAD FACTOR=3.09097

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.65939	-.02499	.00685
2	1.65022	-.84846	-.00071
3	1.64106	-.03559	-.00358
4	1.03358	-.01692	.00700
5	1.03517	-.75181	-.00148
6	1.03676	-.02512	.00247
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1555.1385 -4500.0000	1 AND 2	4500.0000
2	4499.9999 3354.2146	2 AND 3	4500.0000
3	-875.3311 -4267.0109	4 AND 5	4500.0000
4	4267.0108 4500.0000	5 AND 6	4500.0000
5	1555.1385 1624.8157	1 AND 4	4000.0000
6	-3354.2146 -2143.9695	3 AND 6	4000.0000
7	-749.4846 -1984.1153	4 AND 7	4000.0000
8	-2356.0306 -2792.3476	6 AND 8	4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-36.655
2	-36.655
3	6.370
4	6.370
5	-40.368
6	-52.361
7	-74.650
8	-110.808

PLASTIC HINGE 3 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 5  
WHEN LOAD FACTOR=3.20326

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	1.80385	-0.2591	.00750
2	1.79407	-1.02136	-.00213
3	1.78429	-.03687	-.00418
4	1.11243	-0.1760	.00750
5	1.11455	-.80837	-.00147
6	1.11667	-.02596	.00330
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1732.9770 -4500.0000	1 AND 2	4500.0000
2	4499.9999 3681.6761	2 AND 3	4500.0000
3	-914.6529 -4500.0000	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999 4500.0000	5 AND 6	4500.0000
5	1732.9770 1732.8432	1 ANY 4	4000.0000
6	-3681.6762 -2186.5909	3 AND 6	4000.0000
7	-818.1903 -2141.2518	4 AND 7	4000.0000
8	313.4091 -2895.4643	6 AND 8	4000.0000

Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-39.122
2	-39.122
3	8.481
4	8.481
5	-41.553
6	-54.545
7	-77.651
8	-114.545

PLASTIC HINGE 4 FORMED IN MEMBER 6 NEAR JOINT 3  
WHEN LOAD FACTOR=3.28408

CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	2.07252	-0.2659	0.0812
2	2.06216	-1.12659	-.00309
3	2.05181	-.03778	-.00434
4	1.25119	-.01822	.00908
5	1.25362	-1.13720	-.00366
6	1.25605	-.02644	.00460
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-1778.3386 -4500.0000	1 AND 2	4500.0000
2	4500.0000 4000.0001	2 AND 3	4500.0000
3	-1278.3381 -4500.0000	4 AND 5	4500.0000
4	4499.9999 4500.0000	5 AND 6	4500.0000
5	1778.3383 1970.3188	1 AND 4	4000.0000
6	-4000.0000 -2211.7188	3 AND 6	4000.0000
7	-691.9806 -2294.2142	4 AND 7	4000.0000
8	-2288.2812 -3099.9290	6 AND 8	4000.0000

CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-41.411
2	-41.411
3	9.716
4	9.716
5	-41.856
6	-56.667
7	-80.378
8	-116.667

## Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

PLASTIC HINGE 5 FORMED IN MEMBER 8 NEAR JOINT 8  
WHEN LOAD FACTOR=3.42322

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	4.40574	-.02932	.02088
2	4.39440	-3.20008	-.01692
3	4.38306	-.03778	-.01817
4	2.01805	-.02011	.01801
5	2.02101	-2.63586	-.01365
6	2.02397	-.02644	.01305
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

## CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2404.4823	-4500.0000	1 AND 2 4500.0000
2	4500.0017	4000.0020	2 AND 3 4500.0000
3	-1904.4811	-4500.0000	4 AND 5 4500.0000
4	4499.9999	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	2404.4811	1831.1227	1 AND 4 4000.0000
6	-4000.0000	-2803.0290	3 AND 6 4000.0000
7	73.3582	-3105.6158	4 AND 7 4000.0000
8	-1696.9710	-4000.0000	6 AND 8 4000.0000

## CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-45.353
2	-45.354
3	11.842
4	11.842
5	-46.030
6	-56.667
7	-88.728
8	-116.667

PLASTIC HINGE 6 FORMED IN MEMBER 7 NEAR JOINT 7  
WHEN LOAD FACTOR=3.49593

## CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	6.12163	-.03074	.02890
2	6.10957	-4.48691	-.02549
3	6.09751	-.03778	-.02674
4	2.68143	-.02110	.02465
5	2.68574	-3.71442	-.02084

## Appendix 10.2 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

6	2.69006	-.02644	.01860
7	.00000	.00000	.00000
8	.00000	.00000	.00000

## CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	-2731.6916	-4500.0000	1 AND 2 4500.0000
2	4500.0020	4000.0024	2 AND 3 4500.0000
3	-2231.6903	-4500.0000	4 AND 5 4500.0000
4	4499.9999	4500.0000	5 AND 6 4500.0000
5	2731.6908	1881.2278	1 AND 4 4000.0000
6	-4000.0000	-3234.8830	3 AND 6 4000.0000
7	350.4624	-4000.0000	4 AND 7 4000.0000
8	-1265.1170	-4000.0000	6 AND 8 4000.0000

## CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	-48.232
2	-48.233
3	17.261
4	17.261
5	-48.211
6	-56.667
7	-93.089
8	-116.667

DEFORMATIONS LARGER THAN 1000.0 IN CYCLE NO. 7

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO. 7

### Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF THE NEAL-FINZI CONTINUOUS BEAM IN FIG. 10.9

The joint-numbering system begins from the left-hand support as does the member identification, so that the data would be prepared in the following sequence:

8					Frame number, joints, members, elastic modulus
5	4	30,000			
0	0	0	0	1	
300	0	1	0	1	
400	0	1	1	1	
500	0	1	1	1	
600	0	1	0	1	
1	2	100	10	100	
2	3	100	10	100	
3	4	100	10	100	
4	5	100	10	100	
2					Member data
3	0	-1.3	0		
4	0	-0.7	0		
-1					
					Load data

Note: The dimensions and beam properties have been factored by 100 in comparison with the data in Fig. 10.9.

#### NEAL-FINZI BEAM ANALYSIS BY PROGRAM EPFO

##### ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAME NO. 8

PLASTIC HINGE 1 FORMED IN MEMBER 2 NEAR JOINT 3  
WHEN LOAD FACTOR=1.32353

##### CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	.00000	.00000	-.00114
2	.00000	.00000	.00228
3	.00000	-.24837	.00175
4	.00000	-.25899	-.00152
5	.00000	.00000	-.00313

### Appendix 10.3 ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS etc. (Contd.)

#### CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	.0000	68.3824	1 AND 2 100.0000
2	-68.3824	-100.0000	2 AND 3 100.0000
3	100.0000	-96.3235	3 AND 4 100.0000
4	96.3235	-.0000	4 AND 5 100.0000

#### CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	.000
2	.000
3	.000
4	.000

PLASTIC HINGE 2 FORMED IN MEMBER 3 NEAR JOINT 4  
WHEN LOAD FACTOR=1.42857

#### CUMULATIVE DEFORMATIONS

JOINT	X-MOVEMENT	Y-MOVEMENT	ROTATION
1	.00000	.00000	-.00143
2	.00000	.00000	.00286
3	.00000	-.32540	.00143
4	.00000	-.30159	-.00190
5	.00000	.00000	-.00357

#### CUMULATIVE MOMENTS

MEMBER	TERMINAL APPLIED MOMENTS	NEAR JOINTS	PLASTIC VALUE
1	.0000	85.7143	1 AND 2 100.0000
2	-85.7143	-100.0000	2 AND 3 100.0000
3	100.0000	-100.0000	3 AND 4 100.0000
4	100.0000	-.0000	4 AND 5 100.0000

#### CUMULATIVE TENSIONS

MEMBER	TENSION
1	.000
2	.000
3	.000
4	.000

DEFORMATIONS LARGER THAN 1000.0 IN CYCLE NO. 3

ANALYSIS COMPLETED FOR FRAME NO. 8



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**MÉTODO INTERACTIVO**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA  
MÉTODO ITERATIVO

Agustin Deméneghi Colina\*

La interacción suelo-estructura se puede resolver mediante un método iterativo. Esto tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o un programa de computadora que sustituye al terreno de cimentación por "resortes", que representan el módulo de reacción de dicho terreno. Dado que no se conoce *a priori* la constante del resorte, pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un método iterativo, que consiste en suponer valores iniciales de las "constantes de los resortes", y con ellas computar por una parte las deformaciones de la estructura, y por otra las deformaciones del suelo; la diferencia entre deformaciones de estructura y suelo permite ajustar la "constante del resorte"; el procedimiento se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y terreno. Esta técnica tiene la ventaja de que converge rápidamente, de tal forma que usualmente a la tercera iteración se alcanzan resultados satisfactorios.

Las expresiones que se emplean son las siguientes:

a) En el terreno de cimentación se entra con las cargas (o reacciones)  $r_i$  y se determinan las deformaciones  $\delta_i$  con la matriz de flexibilidades del suelo (se puede iniciar con la reacción uniforme igual a la sumatoria de cargas verticales entre la longitud total de los cimientos); los módulos de reacción  $K_{vi}$  se obtienen

$$K_{vi} = \frac{r_i d_i}{\delta_i} \quad (1)$$

b) En la estructura se entra con las  $K_{vi}$  y se calculan las deformaciones  $\delta_i$ ; las reacciones  $r_i$  por unidad de longitud (en t/m) se obtienen

$$r_i = \frac{K_{vi} \delta_i}{d_i} \quad (2)$$

donde  $d_i$  es la longitud en que actúa  $r_i$ .

Con estos valores de  $r_i$  se entra nuevamente al suelo (inciso c), y el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y suelo.

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Ilustraremos el proceso anterior con el ejemplo del capítulo anterior. Cabe aclarar que no se obtendrán los mismos resultados, pues en este ejemplo en particular se supone que la reacción del terreno (a través de los "resortes") está concentrada en los nudos mientras que en el ejemplo anterior la reacción del suelo se tomaba como repartida. Si se usaran más "resortes" se alcanzaría una mayor coincidencia entre ambos métodos.

En el terreno de cimentación se había obtenido

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (3)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (4)$$

En la estructura la matriz de rigidez  $K$  no cambia. Los vectores de empotramiento y de cargas concentradas valen

$$P^e = \begin{bmatrix} -7.4 & -35 \\ -14.8 & -50 \\ -7.4 & -35 \\ 4.9333 \\ -4.9333 \end{bmatrix} \quad P^c = \begin{bmatrix} K_{v1} \delta_1 \\ K_{v2} \delta_2 \\ K_{v3} \delta_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la simetría  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $\theta_4 = -\theta_6$ , y aplicando la ecuación matricial

$$K \delta + P^e + P^c = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$(10\,939.1 + K_{v1}) \delta_1 - 10\,939.1 \delta_2 - 21\,878.2 \theta_4 - 42.4 = 0 \quad (5)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + (21\,878.2 + K_{v2}) \delta_2 + 43\,756.4 \theta_4 - 64.8 = 0 \quad (6)$$

$$-21\,878.2 \delta_1 + 21\,878.2 \delta_2 + 58\,341.9 \theta_4 + 4.9233 = 0 \quad (7)$$

1ra iteración

Iniciemos el proceso considerando una reacción uniforme

$$r = (35(2) + 50 + 3.7(8)) / 8 = 18.7 \text{ t/m}$$

Sean  $r_1 = r_2 = 18.7 \text{ t/m}$

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.015944	0.031743	2345.7	2356.4

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020700	0.022280	24.28	13.12

2da iteración

Terreno de cimentación. Con los  $r_1$  anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.020312	0.022979	2390.7	2283.8

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020587	0.022403	24.61	12.79

3ra iteración

Terreno de cimentación. Con los  $r_1$  anteriores determinados a partir del análisis estructural y aplicando las ecs 3, 4 y 1

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.020570	0.022461	2392.8	2277.7

Estructura. Con los  $K_{v1}$  anteriores y aplicando las ecs 5, 6, 7 y 2

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.020589	0.022422	24.63	12.77

Apreciamos que en la tercera iteración prácticamente coinciden las deformaciones de suelo y estructura.

### 3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

#### 3.6.1 Deformación vertical de un rectángulo cargado

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isótropo, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida  $q$ , está dado por la fórmula de Schleicher (Terzaghi 1943)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left( L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde  $B$  = ancho del rectángulo  
 $L$  = longitud del rectángulo  
 $E$  = módulo de elasticidad del medio  
 $\nu$  = relación de Poisson del medio

Si el cimiento es cuadrado, la ec 3.19 se convierte en

$$\delta = \frac{2 q B (1 - \nu^2) \ln (1 + \sqrt{2})}{\pi E} \quad (3.19')$$

$$\delta = \frac{1.763 q B (1 - \nu^2)}{\pi E} \quad (3.19'')$$

La rigidez lineal vertical se define como el cociente de la carga vertical concentrada  $Q_v$  entre el asentamiento vertical que produce dicha carga. En un cimiento de planta cuadrada de ancho  $B$ , la rigidez lineal vertical está dada por

$$K_v = \frac{0.891 E B}{1 - \nu^2} \quad (3.19''')$$

(En la ec 3.19''' el asentamiento se calcula bajo el centro del cuadrado.)

Cuando el medio elástico tiene un espesor  $H$ , el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme  $q$  está dado por la fórmula de Steinbrenner (Juárez Badillo y Rico 1980)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/\pi E] \left[ L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{L^2 + H^2}}{L (B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{B^2 + H^2}}{B (L + A)} \right] \\ + (q/2\pi E) (1-\nu-2\nu^2) H \operatorname{ang} \tan \frac{L B}{H A} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + H^2} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig 3.12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y  $\nu$ , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_z = (1/E) [ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) ] \quad (3.22)$$

donde  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y  $\epsilon_z$  es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por

$$\delta = \epsilon_z H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato.

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

### 3.6.2 Circulo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert 1973)

$$\delta_v = \frac{\pi (1 - \nu^2) R q}{2 E} \quad (3.24)$$

El desplazamiento horizontal de un círculo sometido a una carga horizontal  $Q_h$  está dado por (Richart et al 1970)

$$\delta_h = \frac{(7 - 8 \nu) Q_h}{32 (1 - \nu) G R} \quad (3.25)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale (Richart et al 1970)

$$\theta = [ 3 (1 - \nu) M ] / 8 G R^3 \quad (3.26)$$

en que  $G = E / 2 (1 + \nu)$  (3.26)

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal

vertical se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_v = Q_v / \delta_v = 2 E R / (1 - \nu^2) \quad (3.27)$$

La rigidez lineal horizontal se define como la carga horizontal entre el desplazamiento horizontal que produce:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} = \frac{32 (1 - \nu) G R}{7 - 8 \nu} \quad (3.28)$$

La rigidez angular o rigidez a la rotación se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_r = M / \theta = 8 G R^3 / 3 (1 - \nu) \quad (3.29)$$

### 3.6.3 Giro de un rectángulo sometido a momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento  $M$  (fig 3.13) se puede calcular determinando la carga de tipo trapecial (ecs 3.14 y 3.15) o triangular (ecs 3.17 y 3.18) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número  $n$  de cargas uniformes (fig 3.9) y se determinan los esfuerzos normales  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  con las ecs 3.6 a 3.9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ec 3.22) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec 3.23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig 3.9, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6.1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo  $I$  en el sentido que se está analizando, y se determina el radio equivalente a un círculo que tenga el mismo momento de inercia del rectángulo (Normas de Sismo 1987):

$$R = ( 4 I / \pi )^{1/4} \quad (3.30)$$

Con el radio equivalente  $R$  se emplea la ec 3.25 para determinar el giro de la cimentación de planta rectangular.

El criterio anterior es válido cuando la longitud del cimiento es similar al ancho del mismo. Para valores de la longitud mayores que

tres veces el ancho del cimiento, es conveniente usar la fórmula de Fröhlich para un cimiento continuo (de longitud infinita) de ancho B (Zeevaert 1973)

$$\theta = \text{ang tan} [16 (1 - \nu^2) \bar{M} / \pi E B^2] \quad (3.30)$$

donde  $\bar{M}$  es el momento por unidad de longitud del cimiento (t.m/m).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**CIMENTACIONES SOMERAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

## APUNTES DE CIMENTACIONES

### 5. CIMENTACIONES SOMERAS

Agustín Deméneghi Colina\*  
Héctor Sanginés García

En un cimiento somero, como en toda cimentación, se debe revisar su estabilidad tanto para los estados límite de falla como para los estados límite de servicio. Es decir, se debe verificar que se tenga una seguridad razonable para evitar que se presente una falla por resistencia al corte del terreno de cimentación, y que las deformaciones que sufra éste no afecten el comportamiento de los elementos de cimentación y de la propia estructura.

Cabe aclarar que en la revisión de una cimentación existen otros factores que deben tomarse en cuenta adicionalmente, pero la falla por resistencia al corte y las deformaciones del terreno de cimentación están entre los más importantes.

#### 5.1 Profundidad de desplante

En una cimentación somera el estrato de apoyo se encuentra a poca profundidad, por lo que la profundidad de desplante debe ser tal que el cimiento quede desplantado satisfactoriamente en dicho estrato de apoyo.

Cabe aclarar que en el estudio de mecánica de suelos se define el estrato de apoyo de la cimentación, por lo que todos los elementos de esta deberán quedar desplantados en él. Durante la construcción de los cimientos se deberá verificar que se cumpla con esta disposición, evitando que los cimientos queden sobre suelo con sustancia orgánica, basura o material en estado suelto. El proceso constructivo deberá ser tal que no se afecte el terreno de cimentación, es decir, no se deberán alterar ni la estructura ni la humedad originales del terreno e cimentación, salvo que el estudio de mecánica de suelos establezca otras especificaciones. En muchas ocasiones conviene colar una plantilla de concreto pobre de  $f'_c = 60 \text{ kg/cm}^2$  de 3 cm de espesor, inmediatamente después de llegar al fondo del corte.

La profundidad de desplante deberá ser tal que se cumpla con los requisitos de seguridad de la cimentación. En este sentido, se propone una profundidad de desplante y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad de la cimentación; el proceso se repite hasta determinar la profundidad de desplante que cumpla con lo anterior.

En general, es importante que los cimientos queden desplantados sobre un mismo estrato, ya que si se apoyan en materiales diferentes se

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

pueden presentar asentamientos diferenciales en la estructura de cimentación.

El desplante de los cimientos deberá quedar abajo del suelo sujeto a erosión superficial o interna. Por ejemplo, en puentes el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de la profundidad de socavación de los materiales del lecho del río. Además, en cualquier cimentación somera existen suelos especialmente susceptibles a la erosión por agua o por viento, como son las arenas o los limos no plásticos, los que deberán protegerse para evitar que se descubran los cimientos.

Cuando el terreno de cimentación es una arcilla de tipo expansivo, el desplante de los cimientos deberá quedar por abajo de esta arcilla, para evitar que los movimientos por cambios de volumen de ella dañen la estructura de cimentación. Si los cimientos quedan por arriba de la arcilla expansiva, deberán tomarse las precauciones correspondientes para que la estabilidad de la cimentación no resulte afectada.

No existe una profundidad mínima de desplante aceptada de manera general por los ingenieros de mecánica de suelos, pero a manera de ejemplo, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1966 dice que "los cimientos deberán desplantarse, por lo menos, 50 cm bajo la superficie del terreno (...) Se exceptúan de este requisito las construcciones cimentadas directamente sobre roca". Por otra parte, se puede considerar en una cimentación somera una profundidad de desplante máxima de 2.5 m, a partir de la cual se trataría ya de una cimentación intermedia o profunda.

## 5.2 Determinación del área de la cimentación

El área de un cimiento somero es aquella para la cual la cimentación cumple con los requisitos de seguridad correspondientes. Por lo tanto, en la práctica se supone una cierta área y se revisa que con ella se cumplan los requisitos de seguridad; se procede por tanteos, hasta hallar el área que haga que el cimiento cumpla con todos y cada uno de los requisitos de seguridad, al mínimo costo.

Con el propósito de reducir el número de tanteos, se puede estimar en forma aproximada la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación, y hallar un área preliminar para iniciar los cálculos.

La capacidad de carga admisible del terreno de cimentación es aquella presión vertical media de contacto entre la subestructura y el terreno, que garantiza un comportamiento adecuado de la cimentación. Se entiende por comportamiento adecuado que exista un factor de seguridad razonable contra una falla por resistencia al corte del suelo, y que el asentamiento del cimiento no produzca daños a la estructura, ni afecte su buen funcionamiento. Usualmente la capacidad de carga admisible se halla dividiendo la capacidad de carga última del suelo entre un cierto factor de seguridad. Sin embargo, se debe

verificar que la capacidad de carga admisible o presión media de contacto no produzca asentamientos excesivos del cimiento. En la tabla 4.1 se muestran valores de asentamientos permisibles para diferentes clases de cimientos someros.

Por lo anterior, la capacidad de carga admisible o presión media de contacto vale

$$q_a = \Sigma Q / A \quad (5.1)$$

donde  $\Sigma Q$  = sumatoria de cargas al nivel de desplante del cimiento  
 $A$  = área de contacto entre cimiento y suelo

Despejando  $A$  de la ec 5.1

$$A = \Sigma Q / q_a \quad (5.2)$$

Por otra parte, se define la capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión como la diferencia de la presión de contacto menos la presión total previamente existente al nivel de desplante de la subestructura, es decir

$$q_{an} = q_a - \gamma D_f \quad (5.3)$$

donde  $q_{an}$  = capacidad de carga admisible neta o incremento neto de presión  
 $q_a$  = presión de contacto o capacidad de carga admisible  
 $\gamma$  = peso volumétrico natural del suelo  
 $D_f$  = profundidad de desplante

En la tabla 5.1 se presentan valores aproximados de la capacidad de carga admisible neta del terreno, para diferentes tipos de suelo.

TABLA 5.1  
 CAPACIDAD DE CARGA ADMISIBLE NETA APROXIMADA DEL SUELO  
 $q_{an}$ , t/m<sup>2</sup>

<u>Tipo de suelo</u>	<u>Zapatas</u>	<u>Losa de cimentación</u>
Arcilla blanda, arena suelta	3.5-6.0	1.5-2.0
Arcilla de consistencia media	5.0-8.0	2.0-3.0
Arena medianamente compacta, arcilla firme	7.0-10.0	3.0-5.0
Arena compacta, toba cementada	9.0-13.0	5.0-7.0
Arena muy compacta, roca sana	12.0-20.0	8.0-12.0

Cabe aclarar que el área A no se puede calcular directamente de la ec 5.2, pues  $\Sigma Q$  no se conoce a priori, ya que depende del área del cimiento, por lo que para estimar en forma aproximada esta área se procede de la siguiente forma:

La resultante de cargas  $\Sigma Q = \Sigma Q' + W_{\text{cim}}$ , en que  $\Sigma Q'$  es la carga al nivel de la superficie del terreno o al nivel de piso terminado y  $W_{\text{cim}}$  es el peso del cimiento (incluyendo el peso del relleno que está sobre él),

$$\Sigma Q / A = \Sigma Q' / A + W_{\text{cim}} / A$$

pero  $W_{\text{cim}} / A \approx \gamma D_f$  y  $q_a = q_{\text{an}} + \gamma D_f = \Sigma Q / A$

$$\therefore q_{\text{an}} + \gamma D_f \approx \Sigma Q' / A + \gamma D_f \quad \frac{\Sigma Q}{A} = \frac{Q}{A} = \frac{\Sigma Q'}{A} + \frac{W_{\text{cim}}}{A}$$

$$\text{y} \quad q_{\text{an}} \approx \Sigma Q' / A$$

$$A \approx \Sigma Q' / q_{\text{an}}$$

$$\text{pero } q_{\text{an}} = \frac{Q'}{A} - \gamma D_f \quad \frac{Q'}{A} = q_{\text{an}} + \gamma D_f \quad (5.4)$$

La ec 5.4 permite estimar en forma aproximada el área del cimiento.

### 5.3 Zapatas corridas

#### 5.3.1 Mecánica de suelos

En ocasiones se tiene que utilizar una retícula a base de zapatas corridas, de tal forma que el peso total que se trasmite en un tablero al nivel de cimentación se reparte en las cuatro zapatas corridas que limitan al tablero. Para ilustrar esta situación, consideremos el tablero de la fig 5.1a y sea  $\Sigma Q$  la carga que trasmite la estructura al nivel de la cimentación. Se pueden calcular los semianchos  $b_1$  y  $b_2$  de las zapatas corridas de la fig 5.1b considerando que cada zapata toma una carga proporcional al área tributaria correspondiente del tablero. Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales, y llamando  $q_a$  a la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación y  $w$  al peso unitario de la estructura

$$w = \Sigma Q / a_1 a_2 \quad (5.5)$$

el ancho  $b_2$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación cuadrática

$$4a_2 q_a b_2^2 + [a_1^2 w - 4 a_1 a_2 q_a - a_1 w (2 a_2 - a_1)] b_2 + w a_1^2 (2 a_2 - a_1) = 0 \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Diseño estructural

Las alas de una zapata corrida se deben revisar por los siguientes conceptos: (a) tensión diagonal, (b) flexión, y (c) temperatura. A continuación se detalla la revisión de cada uno de ellos. Cabe aclarar que lo que rige en general en el diseño de una zapata de concreto es la tensión diagonal.

#### a) Tensión diagonal

En una zona cercana al paño de la columna o muro que llega a la zapata se puede presentar una falla por tensión diagonal, ocasionada esta a su vez por esfuerzo cortante (fig 5.5). Esta revisión se lleva a cabo verificando que la fuerza cortante última a una distancia "d" del paño de la columna o muro sea menor que la fuerza cortante resistente.

Para la fuerza cortante resistente, las Normas de Concreto establecen lo siguiente

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

donde

b = ancho del elemento

d = peralte efectivo del elemento

p = cuantía o porcentaje de acero

$f_c^* = 0.8 f'_c$

$F_R$  = factor de resistencia

En elementos anchos, como-losas, zapatas y muros, en los que el ancho b no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ( $b \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M / V d$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cR}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo.

#### b) Flexión

La sección crítica por flexión en el ala de la zapata depende del material que forme la columna o muro que llega a la zapata. En la fig 5.6 se presenta la sección crítica por flexión para tres diferentes tipos de material.

La revisión por flexión se realiza verificando que el momento último en la sección crítica sea menor que el momento resistente en dicha sección. A continuación se presenta un resumen de las expresiones necesarias para la revisión por flexión de las Normas de Concreto.

El momento resistente dado por las Normas de concreto es el siguiente:

$$M_R = F_R b d^2 f'_c q (1 - 0.5 q) \quad (5.7)$$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f'_c} / f_y \quad (5.8)$$

mientras que el máximo es  $0.75p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje balanceado que vale

$$p_b = (f''_c / f_y) [4800 / (f_y + 6000)] \quad (5.9)$$

donde

$$f''_c = 0.85 f^*_c \quad \text{si } f^*_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.10)$$

$$f''_c = (1.05 - f^*_c / 1250) f^*_c \quad \text{si } f^*_c > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.11)$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último,  $M_u$  está dado por las siguientes expresiones

$$c = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f''_c} \quad (5.12)$$

$$p = c f''_c / f_y \quad (5.13) \quad A_s = p b d \quad (5.14)$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde

$s$  = separación entre varillas

$a_s$  = área de la varilla que se emplea

$d$  = distancia para la que se requiere el área  $A_s$

$A_s$  = área de acero requerida

### c) Temperatura

El acero longitudinal en la zapata se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto):

$$A_s = 66000 (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.16)$$

en que  $A_s$  = área de acero requerida por temperatura, para un espesor  $h/2$  de la losa de la zapata, en  $\text{cm}^2/\text{m}$   
 $h/2$  = semiespesor de la losa de la zapata, en cm

Cuando el elemento estructural está en contacto con el suelo, se recomienda emplear por temperatura un área de acero igual a  $1.5 A_s$

Empleando  $1.5 A_s$  en vez de  $A_s$  en la ec 5.16, dado que los cimientos

están siempre en contacto con el terreno, obtenemos la siguiente expresión

$$A_c = 66000 (1.5) (h/2) / f_y (h/2 + 100) \quad (5.17)$$

### Ejemplo 5.3. Zapata corrida sometida a carga vertical

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.7. La longitud de la zapata  $L = 6$  m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga  $F_c = 1.4$ .

En el terreno de cimentación  $F_R = 0.45$

Solución

#### a) Mecánica de suelos

##### a.1) Estado límite de falla

En un suelo cohesivo, la revisión de la seguridad por resistencia al corte del suelo es satisfactoria cuando se cumple la desigualdad 2.1:

$$\Sigma Q F_c / A < c_u N_c F_R + p_v \quad (2.1)$$

$$\text{Sea } q_{cu} = \Sigma Q F_c / A \quad (2.2)$$

$$q_{Rc} = c_u N_c F_R + p_v \quad (2.3)$$

$$\text{Por lo tanto } q_{cu} < q_{Rc} \quad (2.4)$$

En las expresiones anteriores:

$\Sigma Q F_c$  = suma de las acciones verticales a tomar en cuenta en

la combinación considerada, afectada por su respectivo factor de carga,

$A$  = área del cimiento,  $m^2$

$p_v$  = presión vertical total a la profundidad de desplante por

peso propio del suelo,  $t/m^2$

$\gamma$  = peso volumétrico del suelo,  $t/m^3$

$c_u$  = cohesión aparente,  $t/m^2$ , determinada en ensaye triaxial UU

$B$  = ancho de la cimentación, m

$N_c$  es el coeficiente de capacidad de carga, dado por

$$N_c = 5.14 (1 + 0.25 D_f/B + 0.25 B/L) \quad (2.8)$$

para  $D_f/B < 2$  y  $B/L < 1$ , donde  $D_f$  es la profundidad de desplante en metros. En caso de que  $D_f/B$  y  $B/L$  no cumplan las desigualdades

anteriores, dichas relaciones se considerarán iguales a 2 y 1, respectivamente.

La desigualdad 2.2 se aplica al nivel de desplante del cimiento, por lo que hay que valorar el peso del relleno y de la zapata

$$W_r = (1.3-0.2)(0.4)(1.5) = 0.66 \text{ t}$$

$$W_z = [(1.3)(0.2)+(0.2)(0.4)](2.4) = 0.816 \text{ t}$$

La suma de cargas al nivel de desplante del cimiento vale  $0.66+0.816+10.4 = 11.876 \text{ t}$ , es decir,  $\Sigma Q_2 = 11.876 \text{ t}$  (por cada metro de longitud de zapata).  $A = 1.3(6) = 7.8 \text{ m}^2$ .

Sustituyendo en la ec 2.2  $q_{cu} = \Sigma Q F_c / A = 12.79 \text{ t/m}^2$

Sustituyendo en la ec 2.8, con  $B = 1.3 \text{ m}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $D_r = 0.6 \text{ m}$

$$N_c = 6.011$$

Sustituyendo en la ec 2.3  $q_{Rc} = c_u N_c F_R + p_v = 13.52 \text{ t/m}^2$

Se observa que  $q_{cu} < q_{Rc}$ , por lo tanto se cumple la desigualdad 2.4.

#### a.2) Estado limite de servicio

El asentamiento instantáneo de la zapata se puede calcular empleando la siguiente expresión, que proporciona el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo cargado apoyado sobre un medio semiinfinito

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left( L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

donde  $q =$  incremento neto de presión =  $8.18 \text{ t/m}^2$   
 $B =$  ancho del rectángulo =  $1.3/2 = 0.65 \text{ m}$   
 $L =$  longitud del rectángulo =  $6/2 = 3 \text{ m}$   
 $E =$  módulo de elasticidad del medio =  $1600 \text{ t/m}^2$   
 $\nu =$  relación de Poisson del medio =  $0.25$

Nótese que el área cargada se divide entre cuatro. Sustituyendo valores en la ec 3.19  $\delta = 0.0032 \text{ m}$

El asentamiento debido a toda el área se obtiene multiplicando por cuatro el calculado con la ec 3.19, por lo tanto

$$\delta_r = 4 \delta = 0.0128 \text{ m} = 1.28 \text{ cm}$$

que resulta menor que el asentamiento permisible de  $3 \text{ cm}$ .

#### b) Diseño estructural

##### b.1) Revisión por cortante (tensión diagonal)

La revisión por cortante se lleva a cabo a una distancia  $d$  del paño

del muro (fig 5.6). Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto.

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30 p) \sqrt{f_c^*} \quad (5.5)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (5.6)$$

donde  $f_c^* = 0.8 f_c'$

En elementos anchos, como losas, zapatas y muros, en los que el ancho  $b$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$  ( $b \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M / V d$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cR}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo.

Como trabajamos por metro de longitud de zapata  $b = 100$  cm. Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm; y dado que el diámetro de la varilla del No 4 es de 1.27 cm, su mitad vale 0.64 cm, por lo que el peralte efectivo del acero de la zapata es  $d = 20 - 3.6 = 16.4$  cm.

En este caso se cumple ampliamente que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo.  $M / V d = 0.645 / 3.341(0.164) = 1.177 < 2$ , por lo tanto cumple como elemento ancho. Sustituyendo en la ec 5.6 se obtiene  $V_{cR} = 8298$  kg.

Como se mencionó antes, el cortante último se halla a una distancia "d" del paño del muro (fig 5.8)

$$V = 8.66(0.386) = 3.34 \text{ t} \quad V_u = F_c V = 4.68 \text{ t} = 4680 \text{ kg}$$

Se observa que  $V_{cR} > V_u \quad \therefore$  Cumple

### b.2) Flexión

El momento flexionante en la sección crítica vale (fig 5.8)

$$M = q_n l^2 / 2 = 8.65 (0.55)^2 / 2 = 1.31 \text{ t.m}$$

y el momento último  $M_u = F_c M = (1.4) (1.31) = 1.83 \text{ t.m}$

El acero mínimo por flexión está dado por

$$P_{min} = 0.7 \sqrt{f_c'} / f_y \quad (5.8)$$

mientras que el máximo es  $0.75p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje lanceado que vale

$$p_b = (f_c'' / f_y) [4800 / (f_y + 6000)]$$

donde

$$f_c'' = 0.85 f_c^* \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = (1.05 - f_c^* / 1250) f_c^* \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

El porcentaje de acero necesario para resistir un momento último  $M_u$  está dado por las siguientes expresiones

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2 M_u / F_R b d^2 f_c''} \quad (5.12)$$

$$p = q f_c'' / f_y \quad (5.13) \quad A_s = p b d \quad (5.14)$$

Sustituyendo valores se obtienen los siguientes resultados

$$p_{\min} = 0.00236 \quad p_{\max} = 0.0114$$

$$p = 0.00186 \quad \therefore \text{rige } p_{\min} \quad A_s = p b d = 3.87 \text{ cm}^2$$

La separación de las varillas se determina con la expresión

$$s = a_s d / A_s \quad (5.15)$$

donde  $a_s$  = área de la varilla que se emplea  
 $d$  = distancia para la que se requiere el área  $A_s$   
 $A_s$  = área de acero requerida

Sustituyendo valores ( $a_s = 1.27 \text{ cm}^2$ , varilla No 4),  $s = 32 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se necesitan varillas del No 4 @ 32 cm.

El acero longitudinal se proporciona solo por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión

$$A_s = [66000 (h/e) / f_y (h/2 + 100)] (1.5) \quad (5.16)$$

en que  $A_s$  = área de acero requerida por temperatura, en  $\text{cm}^2 / \text{m}$   
 $h$  = espesor del elemento (dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo), en cm

Sustituyendo valores  $A_s = 2.14 \text{ cm}^2 / \text{m}$

Aplicando la ec 5.16, con varillas del No 3 ( $a_s = 0.71 \text{ cm}^2$ ),  $s = 33 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se requieren por temperatura, en la dirección longitudinal de la zapata, varillas del No 3 @ 33 cm.

En la fig 5.9 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

La reacción del suelo en una zapata corrida sometida a fuerza vertical y momento puede ser de tipo trapezoidal o de tipo triangular, tal como se indica en la fig 5.10 (en el inciso 3.5 se indica la forma de hallar estas reacciones). El cálculo del cortante y del momento en las secciones críticas se realiza con alguno de estos diagramas de reacción. Sin embargo, este procedimiento resulta laborioso, por lo que en ocasiones se sustituyen, para fines de

cálculo, los diagramas trapecial o triangular por una reacción uniforme equivalente, la cual se obtiene dividiendo la carga Q entre el ancho reducido B' (Meli 1985):

$$B' = B - 2e \quad (5.17) \quad e = M / Q \quad (5.18)$$

$$q'_a = Q / B' \quad (5.19)$$

En la fig 5.11 se muestra la reacción  $q'_a$ , la cual, repetimos, no corresponde a la reacción real del terreno, sino que únicamente se emplea para fines de cálculo. Con esta reacción  $q'_a$  se determinan el cortante y el momento en las secciones críticas correspondientes.

#### Ejemplo 5.4 Zapata corrida sometida a carga vertical y momento

Hacer el diseño por mecánica de suelos y el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la fig 5.12. La longitud de la zapata  $L = 8$  m.

Considerar en el concreto reforzado

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizar varillas del No 4. Considerar que se coló una plantilla de concreto pobre sobre el terreno de cimentación.

Tomar un factor de carga  $F_c = 1.1$ .

En el terreno de cimentación  $F_R = 0.45$

Giro permisible = 0.82 %

Asentamiento permisible = 5 cm

Solución

a) Mecánica de suelos

El ancho de la zapata se obtiene empleando la ec 5.4

$$A = \Sigma Q' / q_{an} \quad (5.4)$$

Cuando existe momento se tiene que trabajar con el ancho reducido B' (ec 2.15, inciso 2.2)

$$B' = B - 2e$$

donde B = ancho del cimiento

$$e = M / \Sigma Q$$

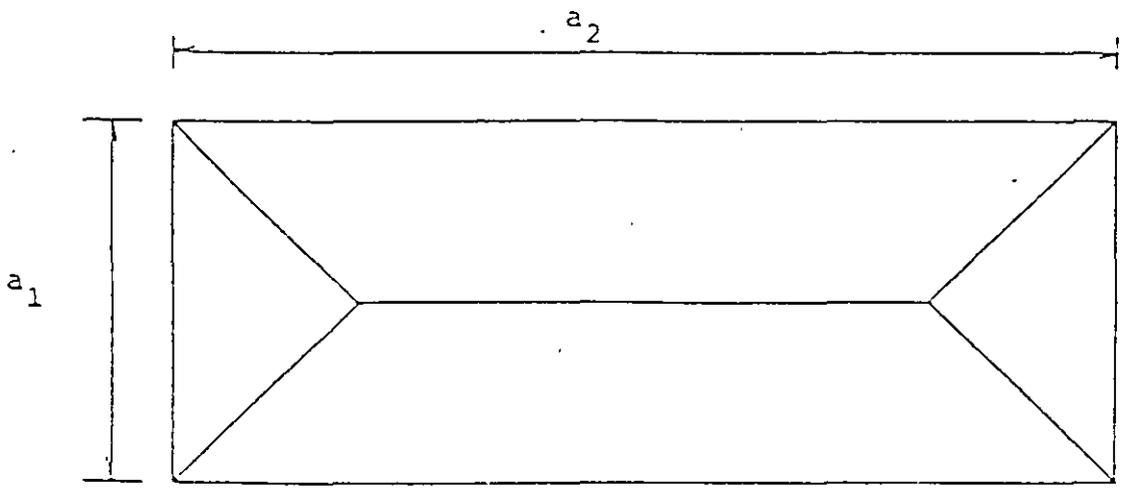
Consideremos inicialmente que no existe momento, entonces el ancho  $B' = B$ ; trabajando por unidad de longitud del cimiento  $A = B(1) = B$ ; de la ec 5.4

$$B' = \Sigma Q' / q_{an} = 15 / 13 = 1.15 \text{ m}$$

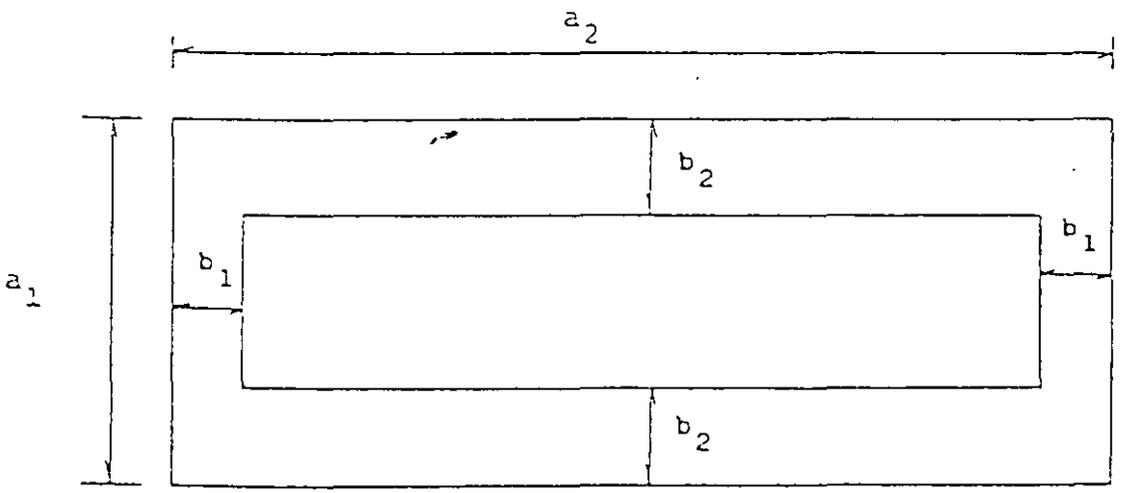
Si existe momento  $B = B' + 2e$

$$e = M / 1.1 (\Sigma Q') \quad (\text{considerando un 15 \% de incremento debido al peso del cimiento})$$

$$e = 0.30 \text{ m}$$



a) Tablero con áreas tributarias



b) Planta de las zapatas corridas

FIG 5.1 DETERMINACIÓN DE ANCHOS DE ZAPATAS CORRIDAS

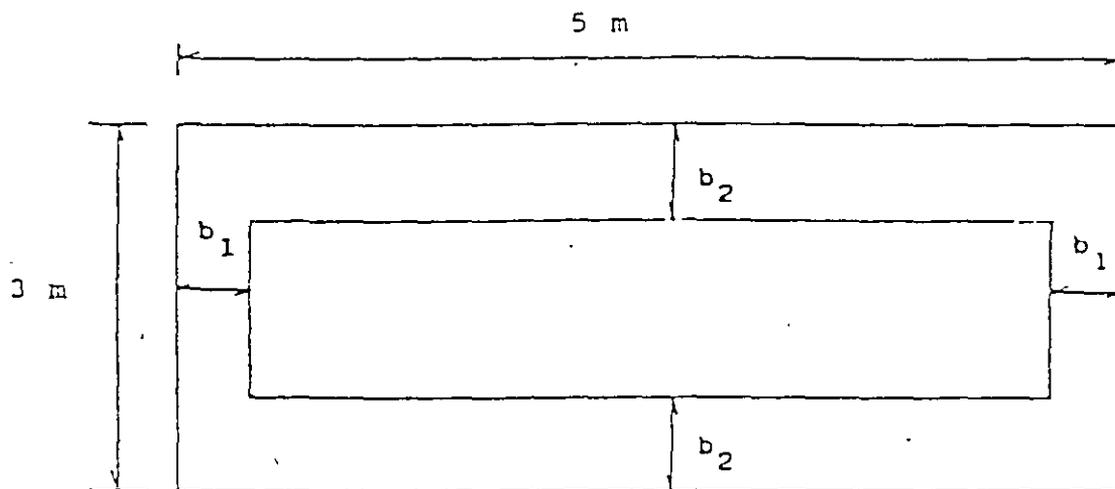


FIG 5.2 ZAPATAS DEL EJEMPLO 5.1

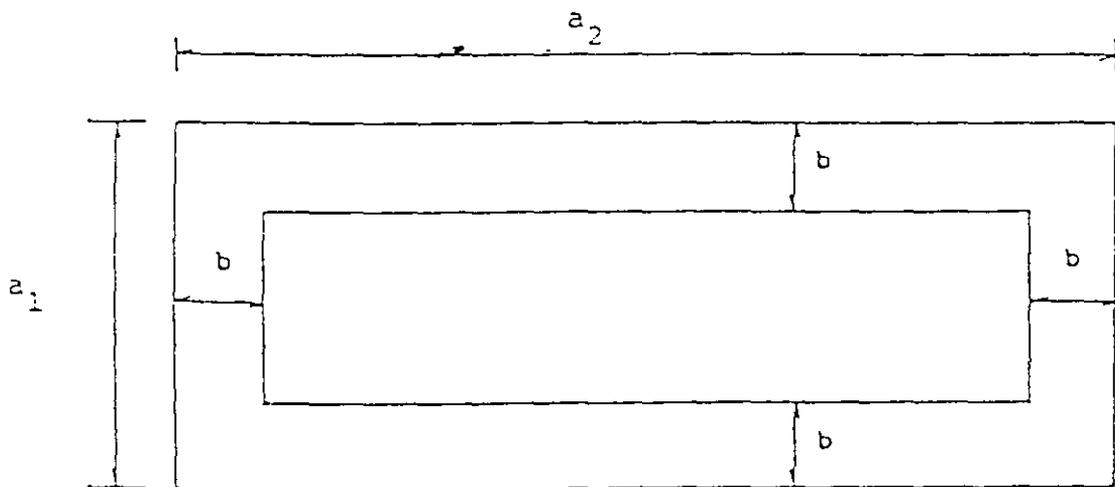


FIG 5.3 ZAPATAS CORRIDAS CON ANCHO ÚNICO

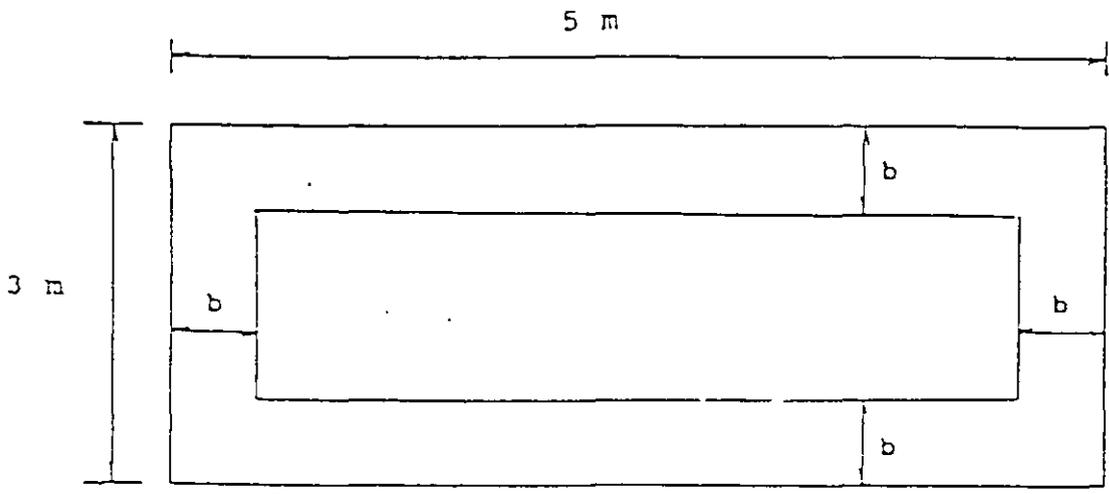


FIG 5.4 ZAPATAS CORRIDAS DEL EJEMPLO 5.2

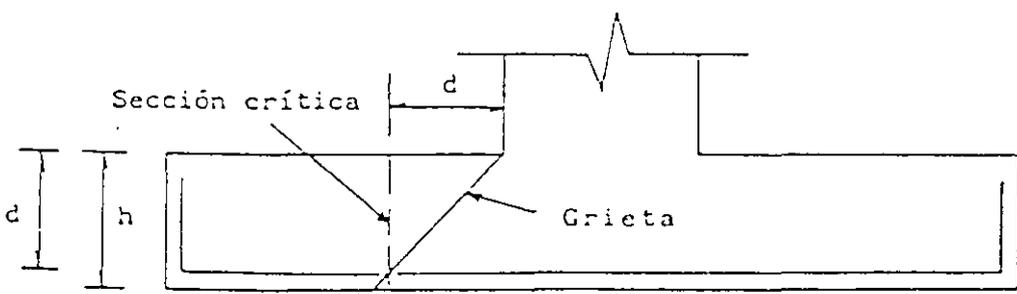
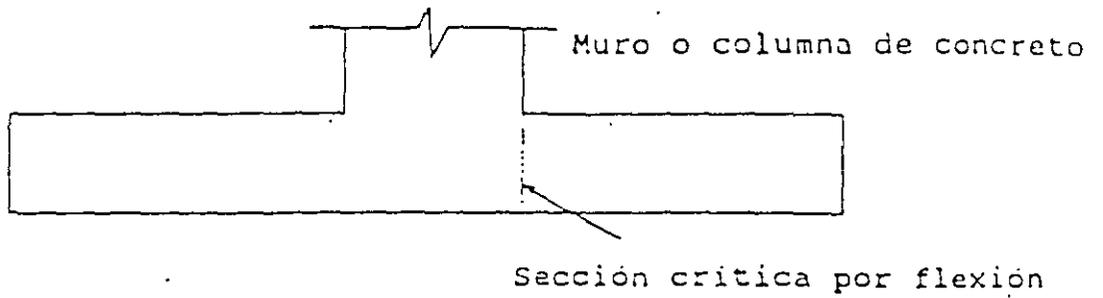
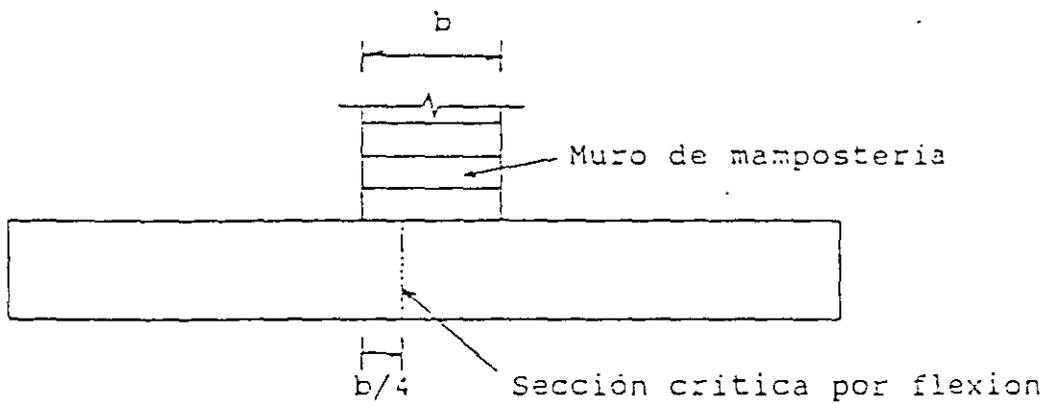


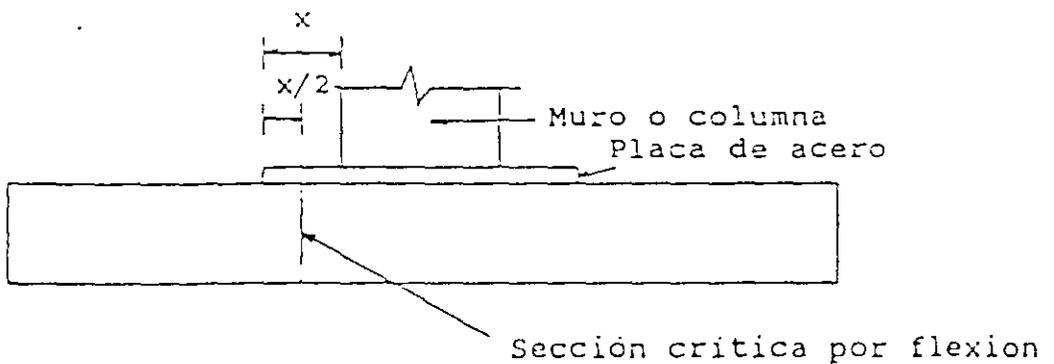
FIG 5.5 SECCION CRÍTICA POR CORTANTE



a) Muro o columna de concreto reforzado

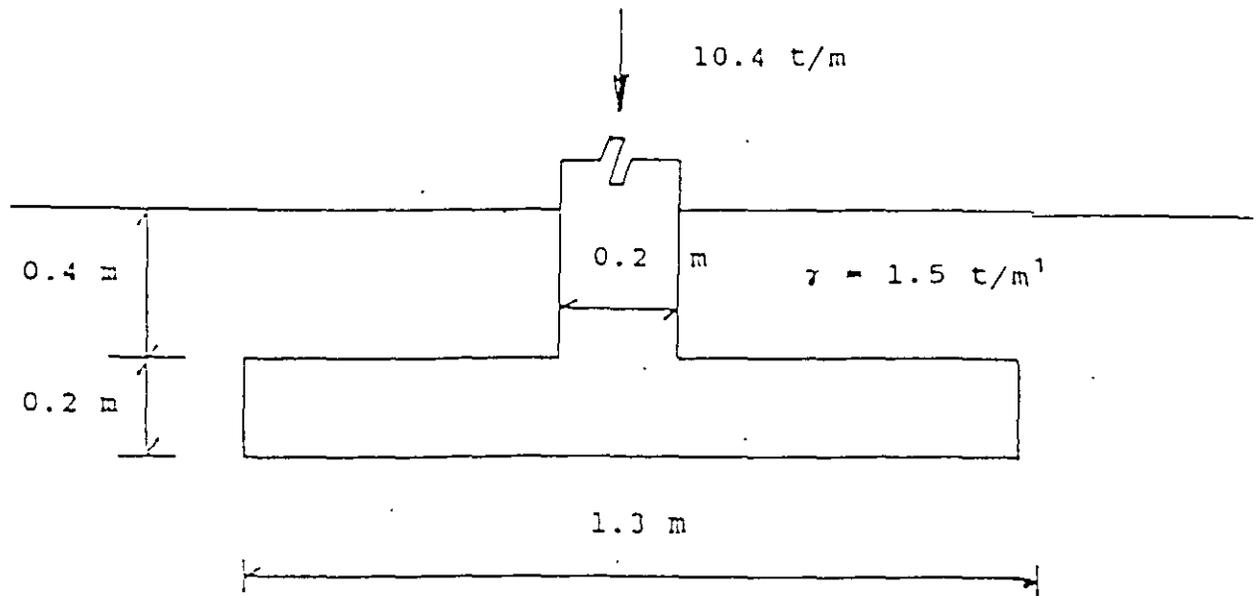


b) Muro de mamposteria



c) Muro o columna con pedestal de placa de acero

FIG 5.6 SECCIONES CRÍTICAS POR FLEXIÓN



$c = 6 \text{ t/m}^2$        $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$       Toba parcialmente cementada  
 $E_{ep} = 1600 \text{ t/m}^2$        $\nu = 0.25$

FIG 5.7 ZAPATA CORRIDA SOMETIDA A CARGA VERTICAL (EJEMPLO 5.3)

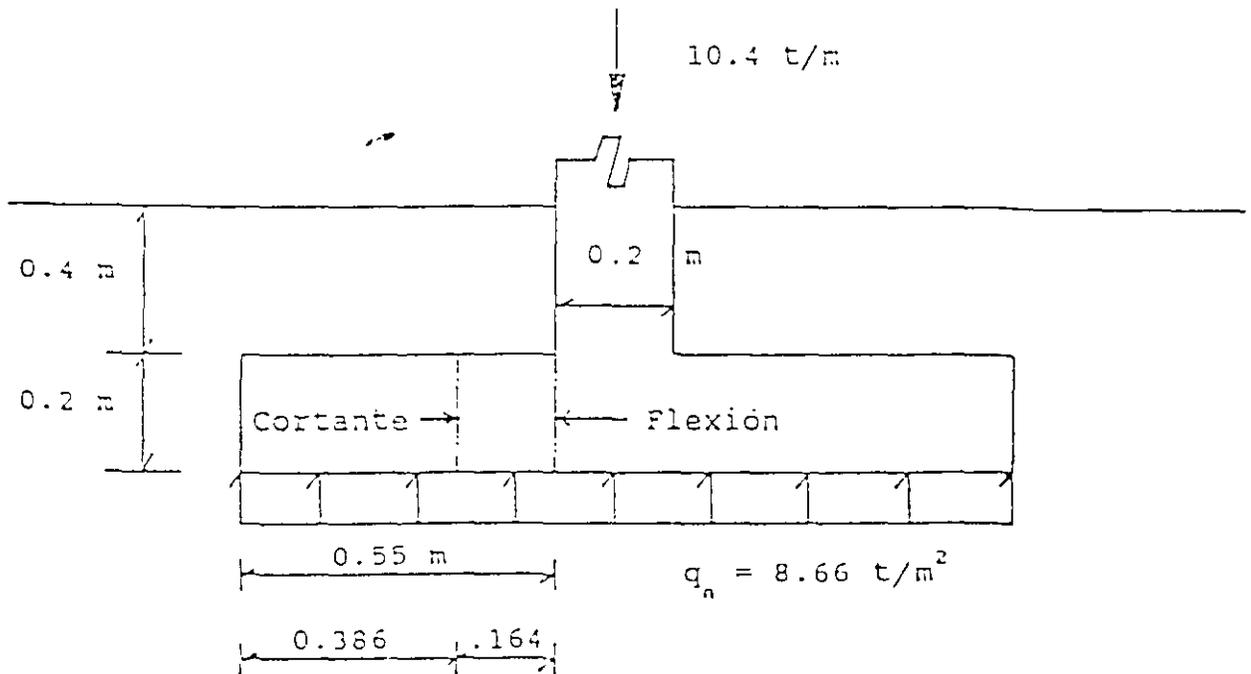


FIG 5.8 REACCIÓN DEL TERRENO Y SECCIONES CRITICAS POR CORTANTE Y POR FLEXIÓN (EJEMPLO 5.3)

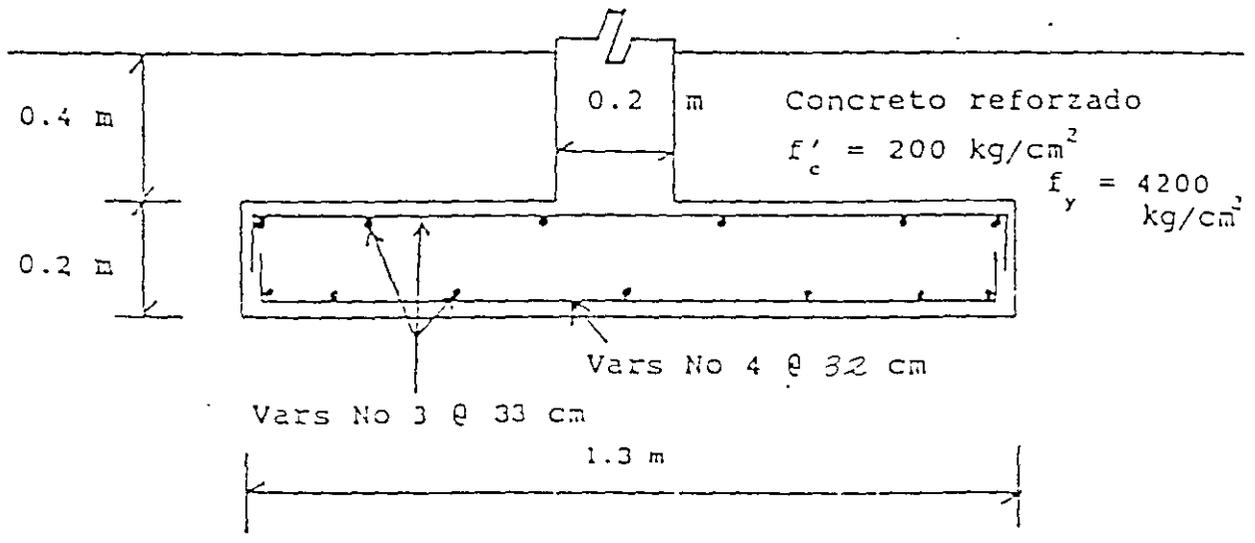
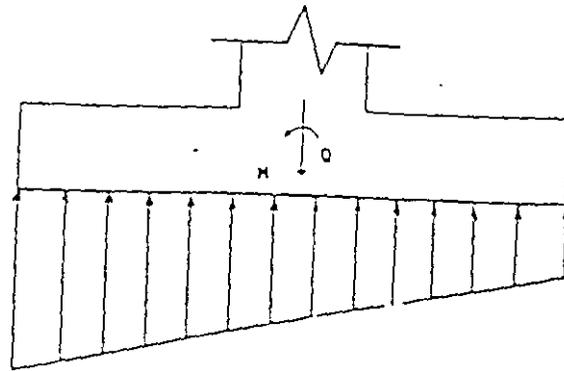
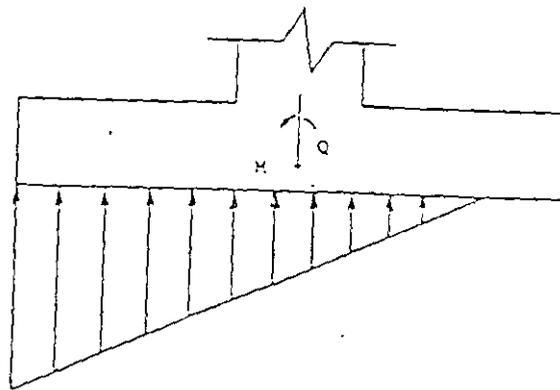


FIG 5.9 CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE LA ZAPATA (EJEMPLO 5.3)



a) Reacción trapecial



b) Reacción triangular

FIG 5.10 REACCIÓN DEL TERRENO TRAPEZIAL O TRIANGULAR

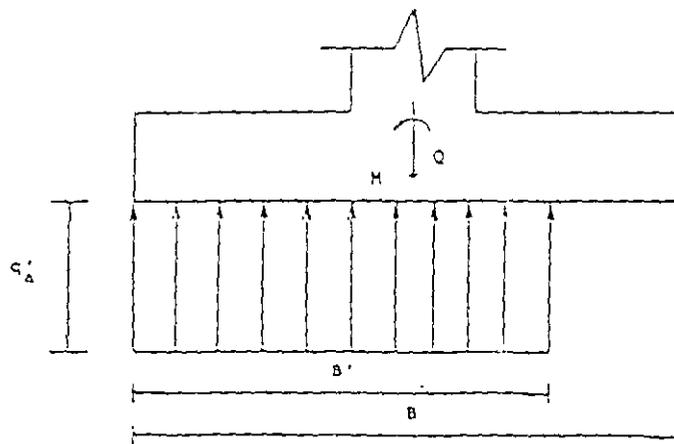


FIG 5.11 REACCIÓN DEL TERRENO RECTANGULAR

## EJEMPLO DE DISEÑO ESTRUCTURAL DE UNA ZAPATA RECTANGULAR

Hacer el diseño estructural de la zapata rectangular de concreto reforzado de la fig 1.

Columna de 25 por 30 cm Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm Profundidad de desplante = 60 cm Considerar en el concreto reforzado  $f_c' = 200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .  
 $\Sigma Q' = 26 \text{ t}$ ,  $M_y = 4.2 \text{ t}\cdot\text{m}$ ,  $M_x = 6.8 \text{ t}\cdot\text{m}$

### Solucion

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale

$$\Sigma Q = 26 + 1.7(2)(0.3)2.4 + 0.25(0.3)(0.3)(2.4) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(1.6) = 30.098 \text{ t}$$

$$e_x = M_y / \Sigma Q = 4.2 / 30.098 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / \Sigma Q = 6.8 / 30.098 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.421 \text{ m}, L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$$

La presión de contacto media entre cimiento y terreno vale

$$q = 30.098 / 1.7(2) = 8.852 \text{ t/m}^2$$

El incremento neto de presión en el contacto cimiento-terreno es

$$q_n = 8.852 - 1.6(0.6) = 7.892 \text{ t/m}^2$$

#### a) Penetración

De acuerdo con las Normas de Concreto, la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual a  $d/2$ , siendo  $d$  el peralte efectivo de la losa (fig 2)

Revisaremos la penetración de la columna en la dirección del eje  $y$

Cuando haya transferencia de momento se supondrá que una fracción de momento dada por

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} \quad (1)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{(0.3 - 0.264)/(0.25 + 0.264)}}$$

$$\alpha = 0.412$$

se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño  $v_u$  se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (fig 2), es decir

$$V_{AB} = V/A_c + \alpha M c_{AB} / J_c \quad (2)$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 - 2d) \quad (3)$$

$$A_c = 0.5692 \text{ m}^2$$

$$J_c = d(c_1 + d)^3/6 + (c_1 + d)d^3/6 + d(c_2 + d)(c_1 + d)^2/2 \quad (4)$$

$$J_c = 0.031206 \text{ m}^4$$

En columnas rectangulares  $c_1 = 0.3 \text{ m}$  es la dimensión paralela al momento transmitido y  $c_2 = 0.25 \text{ m}$  es la dimensión perpendicular a  $c_1$

En las expresiones anteriores,  $V$  es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta  $q_n$ , restando a la reacción del terreno las presiones debidas a peso propio de zapata y relleno

$$q_w = 8.852 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 7.652 \text{ t/m}^2$$

$$V = 7.652 [1.7(2) - (0.25 + 0.264)(0.3 + 0.264)] = 23.799 \text{ t}$$

$$c_{AB} = (0.3 - 0.264)/2 = 0.0282 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ec 2

$$V_{AB} = 23.799 / 0.5692$$

$$+ 0.412(6.8)(0.282) / 0.031206 = 67.13 \text{ t/m}^2$$

$$v_{ABu} = F_c v_{AB} = 1.4(67.13) = 93.98 \text{ t/m}^2$$

El esfuerzo cortante de diseño  $v_{ABu}$  (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores

$$v_{CR1} = F_R (0.5 - \gamma) \sqrt{f_c^*} \quad (5)$$

$$v_{CR1} = 0.8 (0.5 - 1.7/2) \sqrt{160} = 13.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{CR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (6)$$

$$v_{CR2} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = 0.8 f_c' \quad (7)$$

a menos que se suministre refuerzo  $\gamma = 1.7/2 = 0.85$  es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción

Se observa que

$$v_{ABu} = 9.40 \text{ kg/cm}^2 < v_{CR2} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 \therefore \text{Cumple}$$

#### b) Tensión diagonal

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia  $d$  del paño de la columna. Haremos la revisión en la dirección del eje  $y$ . Para esto se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto (fig 3).

Cálculo del cortante último

Las fuerzas se calculan con la reacción neta del terreno (tomando en cuenta el efecto de los dos momentos  $M_x$  y  $M_y$ ). La reacción vale

$$q' = \Sigma Q / B' L' = 30.098 / 1.421(1.5482) = 13.681 \text{ t/m}^2$$

$$\text{La reacción neta } q_n' = 13.681 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6)$$

$$= 12.481 \text{ t/m}^2$$

Hallamos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata,  $b = 1 \text{ m}$ )

$$V = 12.481(0.586) = 7.314 \text{ t}$$

$$M = 12.481(0.586)^2/2 = 2.143 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$V_u = 1.4(7.314) = 10.24 \text{ t}$$

La fuerza cortante que toma el concreto está dada por (Normas de Concreto)

$$\text{Si } p < 0.01 \quad V_{cR} = F_R b d (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*} \quad (8)$$

$$\text{Si } p \geq 0.01 \quad V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (9)$$

donde  $f_c^* = 0.8 f_c$

En elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho  $B$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$  ( $B \geq 4d$ ), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación  $M/Vd$  no exceda de 2.0, la fuerza resistente  $V_{cR}$  puede tomarse igual a  $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$ , independientemente de la cuantía de refuerzo (Normas de Concreto)

Como trabajamos por metro de ancho de zapata  $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ . Dado que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm, y puesto que el diámetro de la varilla del N° 4 es de 1.27 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es  $d = 30 - 3 - 0.6 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$

En este caso se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo

$$B > 4d, \quad B = 170 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/Vd = 1.11 < 2 \quad \therefore \text{cumple como elemento ancho}$$

$$V_{cR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} = 0.5(0.8)(100)(26.4) \sqrt{160}$$

$$V_{cR} = 13357 \text{ kg} > V_u = 10240 \text{ kg} \quad \therefore \text{Cumple}$$

### c) Flexión

Haremos el diseño por flexión en la dirección del eje  $y$

El momento flexionante en la sección crítica vale

$$M = 12.481(0.85)^2/2 = 4.509 \text{ t-m}$$

$$M_u = 1.4(4.509) = 6.312 \text{ t-m}$$

El acero mínimo por flexión es

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f_c^*} / f_y \quad (10)$$

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es 0.75  $p_b$ , donde  $p_b$  es el porcentaje balanceado

$$p_b = \frac{f_c^*}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} \quad (11)$$

donde

$$f_c^* = 0.85 f_c \quad \text{si } f_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = (1.05 - f_c^*/1250) f_c \quad \text{si } f_c > 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{\max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesario para soportar un momento resistente  $M_R$  está dada por la siguiente expresión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_R}{F_R b d^2 f_c^*}}$$

donde

$$p = q f_c^* / f_y \quad (12)$$

$$p = 0.002492$$

$$A_s = p b d \quad (13)$$

$$A_s = 6.578 \text{ cm}^2$$

Si hacemos  $M_u = M_R$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{F_R b d^2 f_c^*}} \quad (14)$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(6.312 \times 10^5)}{0.9(100)(26.4)(136)}} = 0.07695$$

La separación de varillas es

$$s = a_s d / A_s \quad (15)$$

donde

$a_s$  = área de la varilla que se emplea = 1.27 cm<sup>2</sup> (N° 4)

$d$  = distancia para la que se requiere el área de acero  $A_s$ ,  $d = 100 \text{ cm}$

$$A_s = \text{área de acero requerida} = 6.578 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo valores  $s = 19 \text{ cm}$ . En consecuencia, se necesitan varillas N° 4 a cada 19 cm en el lecho inferior. Procediendo en forma similar, se obtiene que se requieren varillas del N° 4 a cada 20 en la dirección del eje  $x$  (rige el porcentaje de acero mínimo por flexión).

### d) Temperatura

El acero del lecho superior se proporciona por temperatura, para lo que se emplea la siguiente expresión (Normas de Concreto)

$$A_s = \frac{66000(1.5)(h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (16)$$

en que

$A_s$  = área de acero necesaria por temperatura, en cm<sup>2</sup>/m, para el semiespesor de losa  $h/2$

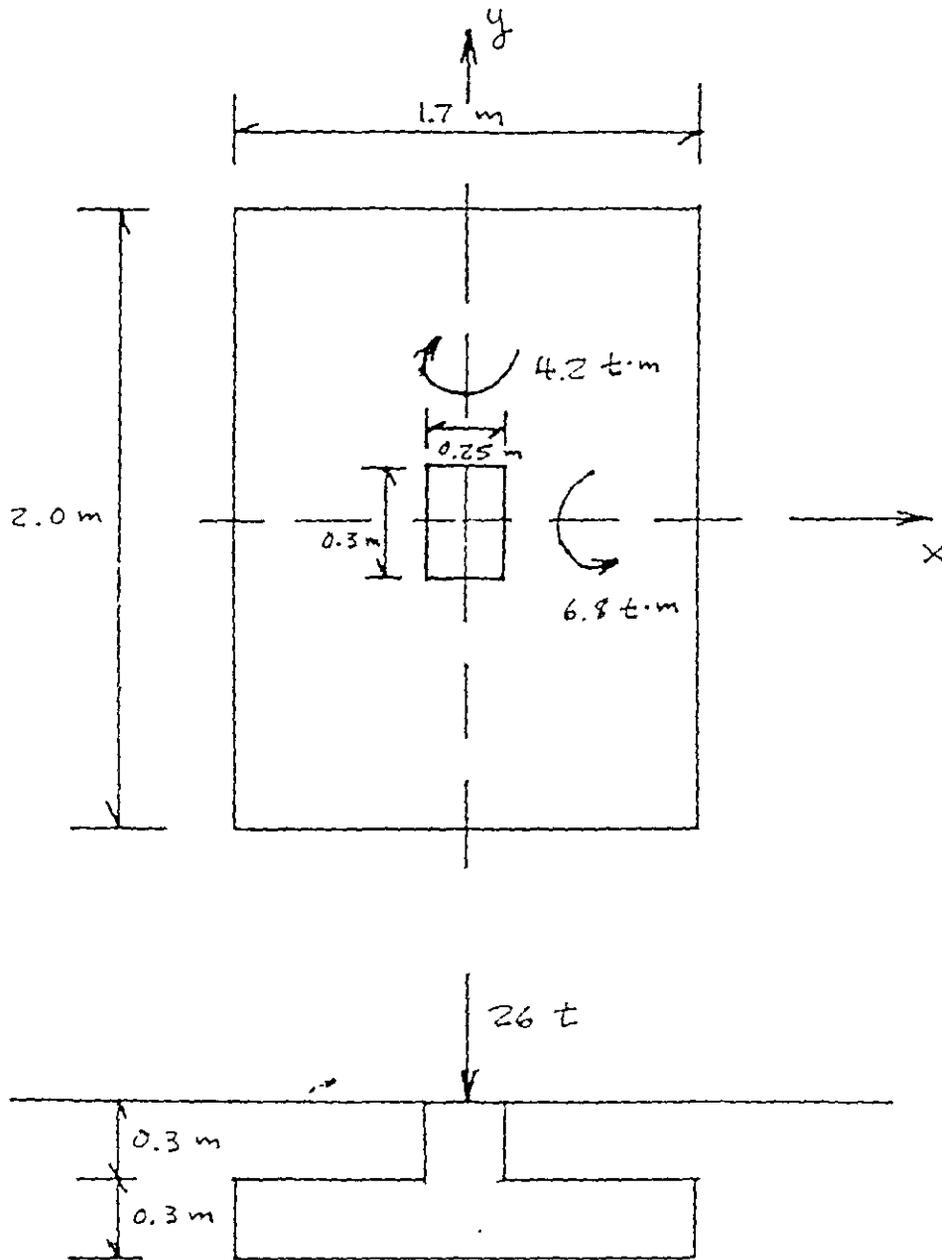
$h/2$  = semiespesor de la losa de la zapata = 30/2 = 15 cm

Sustituyendo valores  $A_s = 3.075 \text{ cm}^2$

Aplicando la ec 15, con varillas del N° 3 ( $a_s = 0.71 \text{ cm}^2$ ),  $s = 23 \text{ cm}$ . Por lo tanto, se necesitan por temperatura varillas del N° 3 a cada 23 cm en el lecho superior.

En la fig 4 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

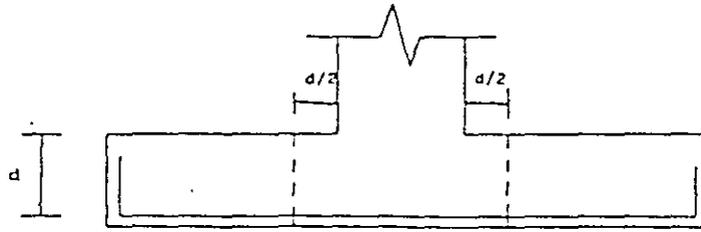
(ACDEZAP)



$D_r = 58\%$  ,  $\phi^* = 37^\circ$  ,  $\gamma_d = 1.6 \text{ t/m}^3$   
 Arena  $\epsilon_s = 2.6$

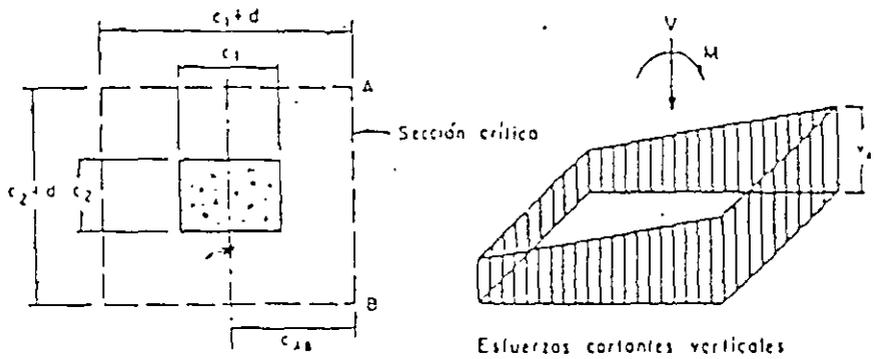
SUELO FRICCIONANTE

FIGURA 1



SECCIÓN CRÍTICA POR PENETRACIÓN

(a)



$$v_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{dMc_{AB}}{J_c}$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d)$$

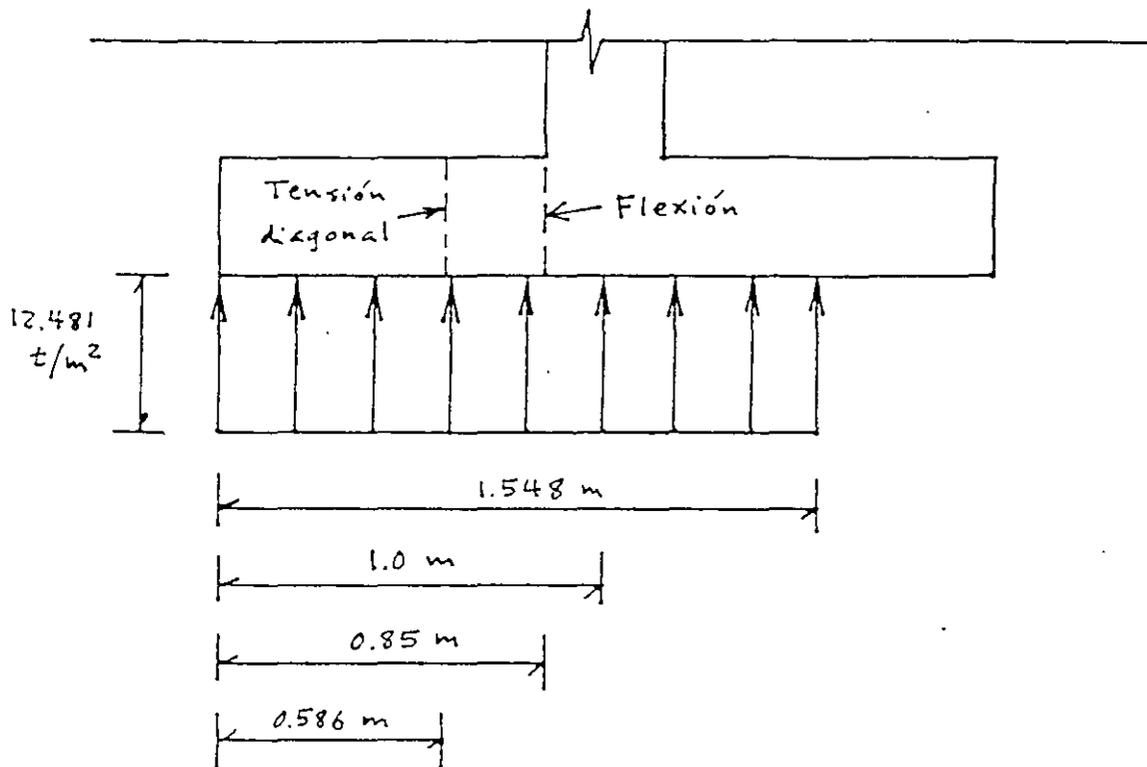
$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

rotación del elemento respecto a los ejes por los esfuerzos flectores

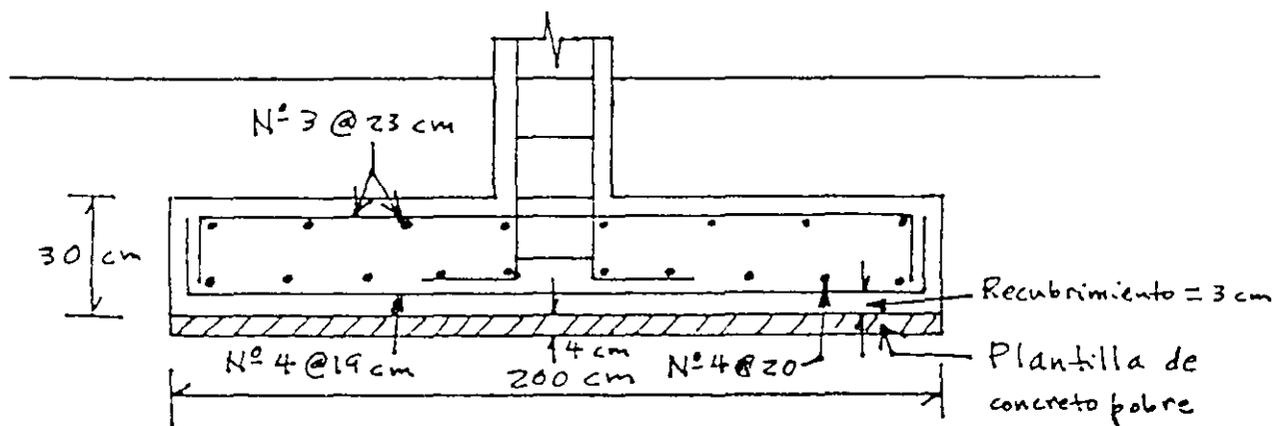
TRANSMISIÓN DE MOMENTO ENTRE COLUMNA Y ZAPATA  
(NORMAS DE CONCRETO 1967)

(b)

FIGURA 2



SECCIONES CRÍTICAS POR TENSION DIAGONAL  
Y POR FLEXIÓN  
FIGURA 3



CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES  
DE LA ZAPATA  
FIGURA 4

APUNTES DE CIMENTACIONES  
ZAPATAS DE COLINDANCIA

Agustín Deméneghi Colina\*

La zapata de colindancia que recibe un muro de carga exhibe un momento de desequilibrio debido a la falta de coincidencia entre la línea de acción de la carga del muro y del diagrama de reacción del terreno de cimentación.

Este momento de desequilibrio lo toma la estructura de la zapata mediante torsión a lo largo de la longitud de la zapata. Esta torsión ocurre en la zapata y en la trabe de enrase de la zapata.

Supongamos que los extremos de la zapata permanecen fijos. En el centro del claro el momento de torsión vale cero, por lo que la mitad de la zapata se puede considerar como empotrada en un extremo y libre en el otro. Una viga de longitud  $x$ , empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a un momento de torsión  $M_1$  en su extremo libre, sufre un giro que vale

$$\theta_c = (\sqrt{G I_t}) M_1$$

Llamando  $M'$  al momento de desequilibrio por unidad de longitud de la zapata (fig. 1), el momento en una distancia  $dx$  vale  $M' dx$ , y el giro debido a  $dM$  está dado por

$$d\theta = (x / G I_t) M' dx$$

El giro en el centro del claro vale

$$\theta_c = \int_0^{L/2} (M' x / G I_t) dx = M' L^2 / 8 G I_t \quad (1)$$

Sin embargo, debido al giro  $\theta_c$  el suelo reacciona con un momento que se puede valorar en forma aproximada haciendo la hipótesis que es igual a la mitad del dado por la fórmula de Fröhlich, es decir

$$M_1' = \frac{\pi E_c B^2 \theta_c}{32 (1 - \nu^2)}$$

Sea

$$K_{ra} = M_1' / \theta_c = \pi E_c B^2 / 32 (1 - \nu^2) \quad (2)$$

es decir

$$M_1' = K_{ra} \theta_c \quad (3)$$

El nuevo momento  $M'$  es igual al momento inicial  $M_0'$  menos  $M_1'$ . Con este nuevo valor se aplican repetidamente las ecs. 1, 2 y 3, hasta que la variación de  $M'$  sea despreciable.

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait *et al.* 1970)

$$I_t \cong (h b^3 / 3) \{ 1 - 0.63 b/h + 0.052 (b/h)^4 \} \quad h \geq b \quad (4)$$

\*Profesor del Departamento de Geotecnia, División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, Facultad de Ingeniería UNAM

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$   
 Longitud de la zapata 6 m  
 $F_c = 1.4$   
 Terreno de cimentación  
 Arena medianamente compacta  $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$

*Solución*

Cálculo del momento  $M_o'$  y de  $\Sigma Q$

$$M_o' = 0.923 \text{ t-m/m} \quad \Sigma Q = 5.134 \text{ t/m}$$

Consideremos únicamente el momento de inercia de la trabe. Empleando la ec 4:

$$I_t = 0.00102 \text{ m}^4$$

El módulo de rigidez del concreto está dado por

$$G = E/2(1+\nu) = 565.685 \text{ kg/cm}^2$$

El procedimiento iterativo para conocer el momento de torsión consiste en:

a) Aplicando la ec 1, con  $M' = M_o' = 0.923 \text{ t-m/m}$

$$\theta_c = 0.007208$$

b) De la ec 2

$$K_{\pi} = M_o' / \theta_c = \pi E_s B^2 / 32(1-\nu^2)$$

c) Sustituyendo valores  $K_{\pi} = 30.1593 \text{ t-m/m}$  De la ec 3

$$M_s' = K_{\pi} \theta_c = 0.2174 \text{ t-m/m}$$

El nuevo valor de  $M'$  vale  $0.923 - 0.2174 = 0.6826 \text{ t-m/m}$

Se repiten los pasos (a) a (c), hasta que la variación de  $M'$  sea despreciable. En cada iteración  $M'$  se obtiene restando a  $M_o' = 0.923 \text{ t-m/m}$  el valor calculado de  $M_s'$

A continuación presentamos los valores obtenidos en la última iteración

$$M' = 0.7471 \text{ t-m/m}, \theta_c = 0.005834, M_s' = 0.1759 \text{ t-m/m}$$

Cálculo del refuerzo por torsión

El momento de torsión a una distancia  $d$  del paño del eje donde termina la trabe vale

$$T = 0.7471(5.772)/2 = 2.156 \text{ t-m} \quad (d = 11.4 \text{ cm})$$

$$T_u = F_c T = 3.0184 \text{ t-m}$$

Como se trata de una trabe con apoyo de carga,  $V = 0$

Aplicando la ec 5  $T_{CR} = 136.610 \text{ kg-cm}$

Aplicando la ec 6  $T_{CR} = 34.153.6 \text{ kg-cm}$

Verificamos que se cumplan las condiciones dadas por las expresiones 7 y 8:

a)  $T_u = 301.840 \text{ t-m/m} > T_{CR} = 34.153 \text{ t-m/m}$

b)  $(T_u/T_{OR})^2 + (V_u/V_{CR})^2 = 4.88 \geq 1$

Se cumplen las condiciones (a) y (b) por lo que sí se requiere refuerzo por torsión

Cálculo del acero de refuerzo por torsión

Acero transversal

Aplicando las ecs 11 y 10

$$\Omega = 1.5 \quad A_{s\Omega} = 0.06278 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Empleando una separación  $s = 7.5 \text{ cm}$ ,  $A_s = 0.471 \text{ cm}^2$  Por lo tanto, se requieren estribos del No 2.5 a cada 7.5 cm ( $a_s = 0.495 \text{ cm}^2$ )

Acero longitudinal

Empleando la ec 12,  $A_{st} = 13.6 \text{ cm}^2$  Por lo tanto se requieren 4 varillas del No 5 más 2 varillas del No 6, como acero longitudinal por torsión

El momento de torsión se toma con respecto al centroide de la trabe. La sección crítica es a una distancia  $l$  del paño de la trabe de liga. Se emplean las siguientes expresiones (Normas de Concreto 1996)

$$T_{OR} = 0.6 F_R (\Sigma x^2 y) \sqrt{f'_c} \quad (5)$$

$$T_{cR} = 0.25 T_{OR} \quad (6)$$

$x$  = ancho de la trabe,  $y$  = peralte de la trabe

$T_{OR}$  = momento torsionante resistente de diseño de un miembro sin refuerzo para torsión, kg.cm

$T_{cR}$  = momento con que contribuye el concreto en un miembro reforzado por torsión, kg.cm

Para proporcionar refuerzo por torsión se deben cumplir simultáneamente las dos siguientes condiciones.

$$a) T_u > T_{cR} \quad (7)$$

$$b) (T_u/T_{OR})^2 + (V_u/V_{cR})^2 \geq 1 \quad (8)$$

Si no se cumple alguna de las dos condiciones anteriores los efectos de la torsión pueden despreciarse

Refuerzo por cortante

$$s = \frac{F_R A_c f_y d}{V_u - V_{cR}}$$

es decir

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_u - V_{cR}}{F_R f_y d} \quad (\text{cm}^2/\text{cm. dos ramas}) \quad (9)$$

Refuerzo por torsión

$$A_{tr} = \frac{s (T_u - T_{cR})}{F_R \Omega (x_1 y_1) f_y}$$

es decir

$$\frac{A_{tr}}{s} = \frac{T_u - T_{cR}}{F_R \Omega (x_1 y_1) f_y} \quad (\text{cm}^2/\text{cm. una rama}) \quad (10)$$

$$\Omega = 0.67 + 0.33 (y_1/x_1) \leq 1.5 \quad (11)$$

El refuerzo total es la suma del requerido por cortante y por torsión

La separación no debe ser mayor que el ancho de los estribos ni de la altura de los mismos, ni mayor que 30 cm

Acero longitudinal por torsión

$$A_{vl} = (2 A_{tr} / s) (x_1 + y_1) (l_n / l_t) \quad (12)$$

*Ejemplo*

Revisar la seguridad del terreno de cimentación y hacer el diseño estructural de la zapata de la fig. 2.

Concreto  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$E_c = 141\,421 \text{ kg/cm}^2$

### Diseño estructural de la losa de la zapata

El momento de desequilibrio en la zapata es de  $M_o' = 0.923 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ . La trabe por torsión toma  $M' = 0.7471 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ , mientras que el suelo toma  $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ . Por lo tanto, el momento sobre el suelo es  $M_s' = 0.1759 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$

$$e = M_s' / \Sigma Q = 0.1759 / 5.134 = 0.03426 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e = 0.5315 \text{ m} \quad q' = \Sigma Q / B' = 9.66 \text{ t}/\text{m}^2$$

En la fig 3 se exhiben la geometría y las fuerzas que actúan sobre la zapata

#### Diseño por flexión

$$d = 0.15 - 0.036 = 0.114 \text{ m}$$

$$M = 0.5288 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M_s = 0.7403 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$\rho = 0.00154$$

$$\rho_{\text{min}} = 0.00236$$

$$A_{s,\text{min}} = 2.687 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,\text{tem}} = 3.075 \text{ cm}^2/\text{m}, \text{ por lo tanto, rige armado por temperatura}$$

Se emplearán varillas del N° 3 a cada 23 cm. en el lecho inferior

#### Revisión por cortante

$$V = 2.006 \text{ t}/\text{m}$$

$$V_u = 2.809 \text{ t}/\text{m}$$

$$M = 0.2485 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M/Vd = 1.09 < 2 \text{ Cumple como elemento anclado}$$

$$V_{r2} = 5768 \text{ kg} > V_u = 2809 \text{ kg} \therefore \text{Cumple}$$

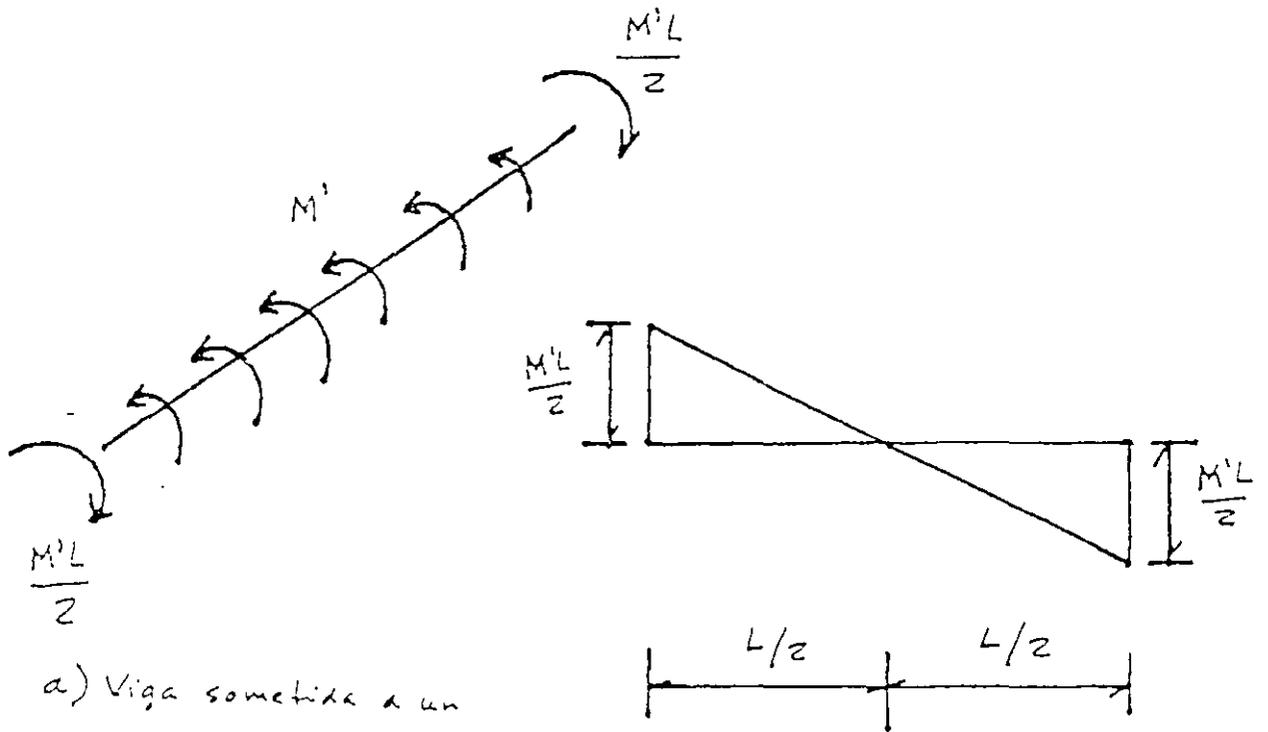
En la fig 4 se muestra el armado de la zapata

### Referencias

Beaufait, F. W., Rowan, W. H., Hoadley, P. G. y Hackett, R. M. *Computer Methods of Structural Analysis*. Prentice-Hall, 1970

Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Departamento del Distrito Federal, 1996

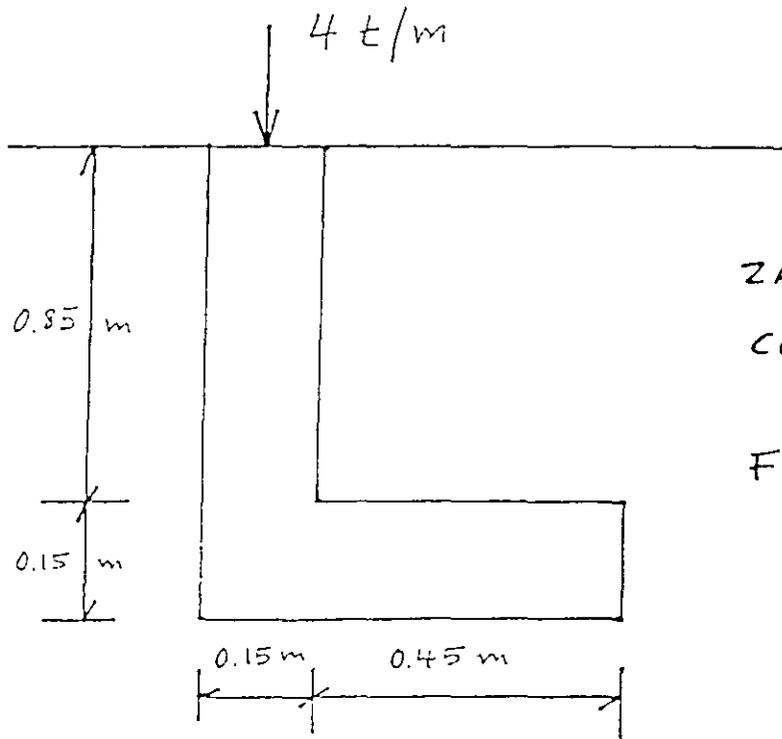
(ACZAPCOL)



a) Viga sometida a un momento de torsión  $M'$  por unidad de longitud

b) Variación del momento de torsión a lo largo de la viga

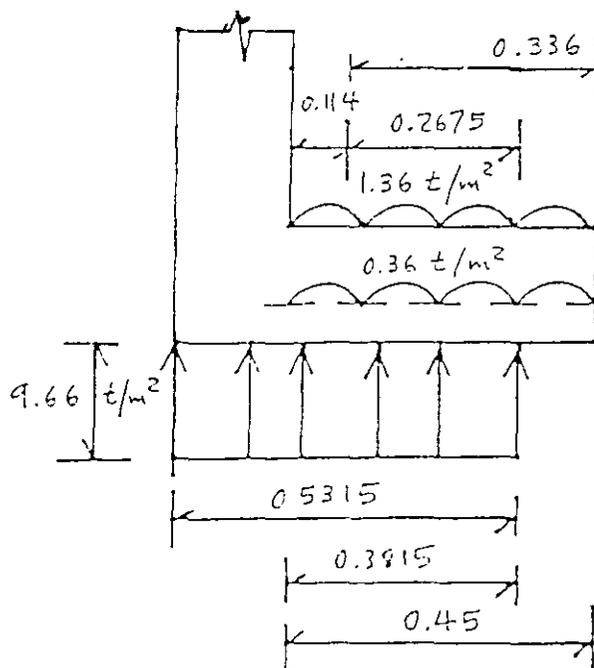
FIGURA 1



ZAPATA DE COLINDANCIA

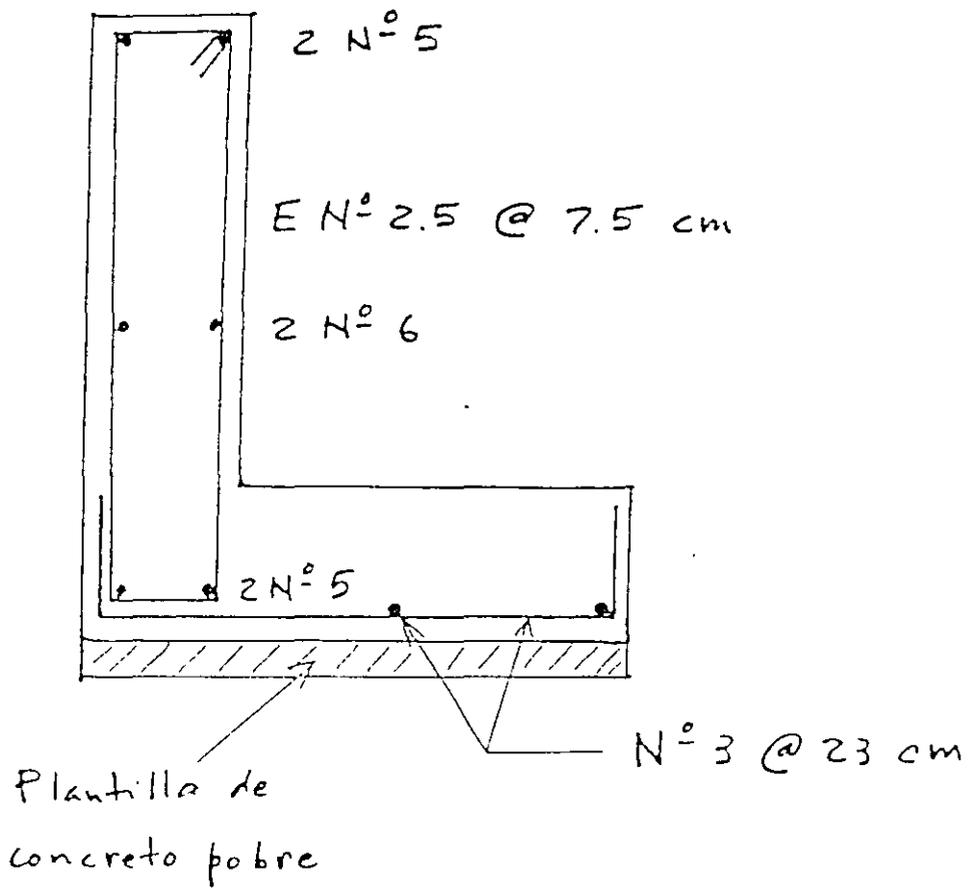
FIGURA 2

$$E_s = 800 \text{ t/m}^2, \nu = 0.25$$



FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA LOSA DE LA ZAPATA

FIGURA 3



ARMADO DE LA ZAPATA

FIGURA 4

## APUNTES DE CIMENTACIONES CIMENTOS DE MAMPOSTERÍA

El ancho de un cimiento de mampostería se obtiene de manera análoga a lo visto para cimientos de concreto reforzado. "En cimientos de piedra brasa la pendiente de las caras inclinadas, medida desde la arista de la dala o muro, no será menor que 1.5 (vertical) : 1 (horizontal).

"En cimientos de mampostería de forma trapezoidal con un talud vertical y el otro inclinado, tales como cimientos de lindero, deberá verificarse la estabilidad del cimiento a torsión. De no efectuarse esta verificación, deberán existir cimientos perpendiculares a ellos a separaciones no mayores de las que señala la siguiente tabla:

Presión de contacto con el terreno, $p$ , $t/m^2$	Claro máximo, en metros	
	Caso 1	Caso 2
$p \leq 2.0$	5.0	10.0
$2.0 < p \leq 2.5$	4.5	9.0
$2.5 < p \leq 3.0$	4.0	7.5
$3.0 < p \leq 4.0$	3.0	6.0
$4.0 < p \leq 5.0$	2.5	4.5

"En todo cimiento deberán colocarse dalas de concretos reforzado, tanto sobre los cimientos sujetos a momento de volteo como sobre los perpendiculares a ellos. Los castillos deben empotrarse en los cimientos no menos de 40 cm.

"En la tabla anterior, el claro máximo permisible se refiere a la distancia entre los ejes de los cimientos perpendiculares, menos el promedio de los anchos medios de éstos. Los casos 1 y 2 corresponden respectivamente a mampostería ligada con mortero de cal y con mortero de cemento. No deberán existir planos definidos de falla transversales al cimiento".

"Las piedras que se empleen en elementos estructurales deberán satisfacer los requisitos siguientes.

Resistencia mínima a compresión en dirección normal a los planos de formación	150 $kg/cm^2$
Resistencia mínima a compresión en dirección paralela a los planos de formación	100 $kg/cm^2$
Absorción máxima	4%
Resistencia al intemperismo, máxima pérdida de peso después de 5 ciclos en solución saturada de sulfato de sodio	10%

"Las piedras no deberán ser labradas, pero se evitará en lo posible el empleo de piedras de formas redondeadas y de cantos rodados. Por lo menos el 70% del volumen del elemento estará constituido por piedras con un peso mínimo de 30 kg cada una.

"Los morteros que se empleen para mampostería de piedras naturales deberán cumplir con los requisitos siguientes:

- a) La relación volumétrica entre la arena y la suma de cementantes se encontrará entre 2.25 y 5
- b) La resistencia mínima en compresión será de 15  $kg/cm^2$ .

“La mampostería se desplantará sobre una plantilla de mortero o concreto que permita obtener una superficie plana. En las primeras hiladas se colocarán las piedras de mayores dimensiones. Cuando las piedras sean de origen sedimentario se colocarán de manera que los lechos de estratificación queden normales a la dirección de las compresiones. Las piedras deberán humedecerse antes de colocarlas y se acomodarán de manera de llenar lo mejor posible el hueco formado por las otras piedras. Los vacíos se rellenarán completamente con piedra chica y mortero”.

(Normas de Mampostería, cap 6).



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**TORSIÓN**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

## TORSION

### 7.1 INTRODUCCION

En las construcciones monolíticas de concreto, la torsión ocurre principalmente cuando la carga actúa a cierta distancia del eje longitudinal del elemento estructural. Una viga en el extremo de un tablero de piso, una viga de borde que recibe la carga de un solo lado, una marquesina, o una cubierta para parada de autobuses que se proyecta de una viga monolítica apoyada en columnas, vigas periféricas que circundan la abertura en un piso, o una escalera helicoidal, son ejemplos de elementos estructurales sujetos a momentos de torsión. Ocasionalmente, estos momentos provocan esfuerzos cortantes excesivos. Como resultado, puede desarrollarse un severo agrietamiento superior a los límites de serviceabilidad admisibles, a menos que se dote de un refuerzo especial para torsión. Las fotos 40 y 41 ilustran la cuantía del agrietamiento en la falla de una viga sujeta a torsión. Muestran el plano curvilíneo de torsión provocado por los momentos torsionantes impuestos. En las vigas de borde de un sistema estructural, normalmente no es tan severa la magnitud del daño debida a la torsión como se aprecia en las fotos 42 y 43. Ello se debe a la redistribución de esfuerzos en la estructura. Sin embargo, deberá siempre evitarse la pérdida de integridad debida a los esfuerzos torsionantes, mediante un diseño apropiado del refuerzo necesario para torsión.

La introducción al tema de la distribución de los esfuerzos de torsión debe iniciarse con el comportamiento elástico básico de las secciones sencillas, tales como las circulares y las rectangulares. La mayoría de las vigas de concreto sujetas a torsión son componentes de rectángulos. Estas son normalmente, secciones con patines, tales como las vigas en T o en L. Aun cuando las secciones circulares rara vez se consideran en la construcción normal de concreto, un comentario breve respecto de estas secciones circulares constituye una buena introducción al comportamiento torsional de otros tipos de secciones.

En las secciones circulares, al nivel elástico, el esfuerzo cortante es igual a la deformación unitaria de cortante multiplicada por el módulo de cortante. Igual que en el caso de la flexión, el esfuerzo es proporcional a su distancia al eje neutro (esto es: el centro de la sección circular) y es máximo en las fibras extremas. Si  $r$  es el radio del elemento,  $J = \pi r^4/2$ , su momento polar de inercia, y  $v_{te}$  el esfuerzo cortante elástico debido a un momento de torsión elástico  $T_e$ ,

$$v_{te} = \frac{T_e r}{J} \quad (a)$$

Cuando tiene lugar la deformación en la barra circular, se supone que el eje del cilindro circular permanece recto. Todos los radios de una sección transversal también permanecen rectos (esto es: sin alabearse) y giran el mismo ángulo respecto al eje. Cuando el elemento circular empieza a tener un comportamiento plástico, el esfuerzo en el anillo plástico exterior se conserva constante, en tanto que el esfuerzo en el núcleo interior permanece elástico, como se muestra en la Fig. 7.1. Cuando toda la sección transversal se plastifica,  $b = 0$  y el esfuerzo cortante

$$v_{tf} = \frac{3 T_p r}{4 J} \tag{b}$$

donde  $v_{tf}$  es el esfuerzo cortante no lineal debido a un momento de torsión  $T_p$ , donde el índice f denota falla.

En las secciones rectangulares, el problema de la torsión es considerablemente más complicado. Las secciones planas originales experimentan un alabeo debido al momento torsionante aplicado. Este momento produce esfuerzos cortantes axiales así como circunferenciales, con valor cero en las esquinas de la sección y el centroide del rectángulo, y valores máximos en la periferia al centro de los lados, como se aprecia en la Fig. 7.2. El esfuerzo cortante torsional máximo ocurrirá en los puntos medios A y B de la mayor dimensión de la sección transversal. Estas complicaciones, además del hecho de que las secciones de concreto reforzado no son ni homogéneas ni isótropas, hacen difícil desarrollar formulaciones matemáticas exactas basadas en modelos físicos tales como las ecuaciones (a) y (b) para secciones circulares.

Por más de 60 años, el análisis torsional de los elementos de concreto se ha basado, en ya sea, (1) la teoría clásica de la elasticidad desarrollada a través de formulaciones matemáticas asociadas a las verificaciones de la analogía con la membrana (St. Venant), o (2) la teoría de la plasticidad representada por la analogía con el montón de arena (Nadai). Ambas teorías fueron esencialmente aplicadas al estado de torsión pura. Pero se descubrió experimentalmente que la teoría plástica no es enteramente satisfactoria para la predicción precisa del estado de esfuerzos del concreto en torsión pura. Se encontró que el comportamiento del concreto se representa mejor mediante el enfoque plástico. Consecuentemente, casi todos los desarrollos de la torsión aplicados al concreto y el concreto reforzado han tenido lugar en esta última dirección.

**7.2 TORSION PURA EN LOS ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE**

**7.2.1 Torsión en los Materiales Elásticos**

En 1853 St. Venant presentó su solución al problema torsional elástico con alabeo debido a la torsión pura que se desarrolla en las secciones no circulares. En 1903, Prandtl demostró el significado físico de las formulaciones matemáticas mediante su modelo de la analogía con la membrana. El modelo establece relaciones particulares entre la superficie deformada de la membrana cargada y la distribución de los esfuerzos torsionantes en una barra sujeta a momentos de torsión. La Fig. 7.3 muestra el comportamiento de la analogía con la membrana para formas rectangulares y en L.

Para pequeñas deformaciones, puede demostrarse que la ecuación diferencial de la superficie de la membrana deformada tiene la misma forma que la ecuación que determina la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la barra sujeta a esfuerzos de torsión. En forma similar, se puede demostrar que (1) la tangente a la línea de contorno en un punto cualquiera de la membrana deformada proporciona la dirección del esfuerzo cortante en la correspondiente sección transversal de la membrana real sujeta a torsión; (2) la pendiente máxima de la membrana en cualquier punto es proporcional a la magnitud del esfuerzo cortante en el punto correspondiente en el elemento real; (3) el momento de torsión al que está sujeto el miembro real es proporcional al doble del volumen bajo la membrana deformada.

Puede verse en las Figs. 7.2 y 7.3b que el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de contorno. Mientras más próximas entre sí se encuentren las líneas, mayor es el esfuerzo, llevando a la conclusión antes expresada que el esfuerzo máximo de torsión ocurre al centro del lado mayor del rectángulo. De la analogía con la membrana, el esfuerzo máximo tiene que ser proporcional a la pendiente más pronunciada de las tangentes en los puntos A y B.

Si  $\delta$  = desplazamiento máximo de la membrana a partir de la tangente en el punto A, entonces de los principios básicos de la mecánica de la teoría de St. Venant,

$$\delta = b^2 G \theta \tag{7.1a}$$

donde G es el módulo de cortante y  $\theta$  es el ángulo de torsión. Pero  $v_{t(max)}$  es proporcional a la pendiente de la tangente; por tanto:

$$v_{t(max)} = k_1 b G \theta \tag{7.1b}$$

donde las  $k$  son constantes. El correspondiente momento torsionante  $T_e$  es proporcional al doble del volumen bajo la membrana, o

$$T_e \propto 2(2/3 \delta bh) = k_2 \delta bh$$

o

$$T_e = k_3 b^3 h G \quad (7.1c)$$

De las Ecs. 7.1b y 7.1c,

$$v_{t(max)} = \frac{T_{eb}}{kb^3h} \approx \frac{T_{eb}}{J_1} \quad (7.1d)$$

El denominador  $kb^3h$  en la Ec. 7.1d representa el momento polar de inercia  $J$  de la sección. La comparación de la Ec. 7.1d con la Ec. (a) para la sección circular muestra la similitud de las dos expresiones, excepto que el factor  $k$  de la ecuación para la sección rectangular toma en cuenta las deformaciones unitarias debidas al alabeo. La ecuación 7.1d puede simplificarse más aún para quedar:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{kb^2h} \quad (7.2)$$

También puede establecerse para proporcionar el esfuerzo en los planos dentro de la sección, tal como un rectángulo concéntrico de dimensiones  $x$  y  $y$ , donde  $x$  es el lado más corto, de tal manera que:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{kx^2y} \quad (7.3)$$

Al usar el enfoque de la analogía con la membrana, es importante notar que el esfuerzo cortante torsionante cambia de un punto a otro a lo largo del mismo eje como AB en la Fig. 7.3, a causa de la pendiente cambiante de la membrana análoga, tornando largos los cálculos para el esfuerzo cortante torsional.

### 7.2.2 Torsión en los Materiales Plásticos

Como se ha indicado antes, la analogía plástica del montón de arena proporciona una mejor representación del comportamiento de los elementos frágiles, tales las vigas de concreto sujetas a torsión pura. El momento torsional es también proporcional al doble del volumen bajo el montón y el esfuerzo cortante torsional máximo es proporcional a la pendiente del montón de arena. La figura 7.4 es una ilustración bi y tridimensional del montón de arena. El momento torsionante  $T_p$  en la Fig. 7.4d es proporcional al doble del volumen del montón rectangular que se muestra en las partes (b) y (c). También puede reconocerse que la pendiente de los lados del montón de arena como una medida del esfuerzo cortante torsional es

constante en el enfoque de la analogía con el montón de arena, es tanto que es continuamente variable en el de la analogía con la membrana. Esta característica del montón de arena simplifica las soluciones considerablemente.

### 7.2.3. La Analogía del Montón de Arena Aplicada a las Vigas en L

La mayoría de los elementos de concreto sujetos a torsión son secciones con patines, más comúnmente las vigas en L que comprenden las vigas externas de un piso estructural. Se elige la viga en L de la Fig. 7.5 para aplicar el enfoque del montón de arena plástico para evaluar su capacidad al momento torsionante y los esfuerzos cortantes a los que está sujeta.

El montón de arena se reparte en tres volúmenes:

$V_1$  = La pirámide que representa una forma cuadrada de la sección transversal =  $y_1 b^2 w / 3$

$V_2$  = La porción en pabellón del alma que representa una forma rectangular de la sección transversal =  $y_1 b_w (h - b_w) / 2$

$V_3$  = El pabellón que representa el patín de la viga, transfiriendo la parte PDI a NQM =  $y_2 h_f (b - b_w) / 2$

El momento torsionante es proporcional al doble del volumen de los montones arena; por consiguiente:

$$T_p \approx 2 \left[ \frac{y_1 b^2 w}{3} + \frac{y_1 b_w (h - b_w)}{2} + \frac{y_2 h_f (b - b_w)}{2} \right] \quad (7.4)$$

También, el esfuerzo cortante torsional es proporcional a la pendiente de los montones de arena; por lo tanto:

$$y_1 = \frac{v_t b_w}{2} \quad (7.5a)$$

$$y_2 = \frac{v_t h_f}{2} \quad (7.5b)$$

Substituyendo  $y_1$  y  $y_2$  de las Ecs. 7.5a y 7.5b, en la Ec. 7.4, se obtiene:

$$v_{t(\max)} = \frac{T_p}{(b^2 w / 6) (3h - b_w) + (h_f^2 / 2) (b - b_w)} \quad (7.6)$$

Si tanto el numerador como el denominador de la Ec. 7.6 se dividen por  $(b_w h)^2$  y se arreglan los términos, se obtiene:

$$v_{t(max)} = \frac{T_p h (b_w h)^2}{[1/6(3 - b_w/h)] + \frac{1}{2}(h_f/b_w)2(b/h - b_w/h)} \quad (7.7a)$$

si se supone que  $C_t$  es el denominador en la Ec. 7.7a y  $J_E = C_t (b_w h)^2$ , la Ec. 7.7a se convierte en

$$v_{t(max)} = \frac{T_p h}{J_E} \quad (7.7b)$$

donde  $J_E$  es el momento polar de inercia equivalente y una función de la forma de la sección transversal de la viga. Nótese que la Ec. 7.7b es similar en forma a la Ec. 7.1d de la analogía con la membrana, excepto por los valores diferentes de los denominadores  $J$  y  $J_E$ . La ecuación puede de esa forma aplicarse a secciones rectangulares haciendo que  $h_f = 0$ .

También debe reconocerse que el concreto no es un material perfectamente plástico; por consiguiente, la resistencia real a la torsión de la sección de concreto simple tiene un valor que yace entre los valores de las analogías con la membrana y la del montón de arena.

La ecuación 7.7b puede establecerse de nuevo designando  $T_p = T_c$  como la resistencia nominal a la torsión del concreto simple y  $v_{t(max)} = v_{tc}$ , empleando la terminología del ACI, de tal manera que

$$T_c = k_2 b^2 h v_{tc} \quad (7.8a)$$

$$T_c = k_2 x^2 y v_{tc} \quad (7.8b)$$

donde  $x$  es la menor dimensión de la sección rectangular.

El extenso trabajo de Hsu y confirmado por otros, ha establecido que  $k_2$  se puede tomar igual a  $1/3$ . Este valor se originó en la investigación de la teoría de la flexión oblicua del concreto simple. También se estableció que  $1.59\sqrt{f'_c}$  se puede considerar como el valor límite de la resistencia a la torsión pura de un miembro sin refuerzo a la torsión. Utilizando un factor de reducción de 2.5 para la carga torsional en la primera grieta,  $v_{tc} = 0.64\sqrt{f'_c}$ , e introduciendo  $k_2 \approx 1/3$  en la Ec. 7.8, resulta

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} x^2 y \quad (7.9)$$

donde  $x$  es el lado más corto de la sección rectangular. El alto factor de reducción de 2.5 tiene por objeto compensar algún efecto de los momentos flexionantes que pudiese estar presente.

Si la sección transversal es en T o en L, el área se puede descomponer en rectángulos, como en la Fig. 7.6, tal que

$$T_c = 0.21\sqrt{f'_c} \Sigma x^2 y \quad (7.9b)$$

### 7.3 TORSION EN LOS LOS ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

En las estructuras de concreto rara vez ocurre la torsión sin estar acompañada por la flexión y el cortante. Los párrafos precedentes deberán proporcionar un antecedente suficiente de la contribución del concreto simple en la sección, en lo que concierne a que resistan parte de los esfuerzos combinados que resultan de las fuerzas; de torsión, axiales, de cortante, o de flexión. La capacidad del concreto simple para resistir la torsión cuando está combinada con otras cargas podría, en muchos casos, ser menor a cuando resiste sólo, los mismos momentos factorizados de torsión externa.

La inclusión de refuerzo longitudinal y transversal para resistir parte de los momentos torsionantes, introduce un nuevo elemento en el conjunto de fuerzas y momentos que actúan en la sección. Si

$T_n$  = la resistencia torsional nominal total requerida de la sección incluyendo el refuerzo

$T_c$  = la resistencia torsional nominal del concreto simple

$T_s$  = la resistencia torsional del refuerzo

Entonces

$$T_n = T_c + T_s \quad (7.10a)$$

o

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.10b)$$

Con objeto de estudiar la contribución de las varillas longitudinales de acero de tal manera que  $T_s$  pueda evaluarse, se tiene que analizar el sistema de fuerzas que actúan en las secciones transversales alabeadas del elemento estructural en el estado límite de falla. Básicamente, en la actualidad hay dos caminos aceptables:

1. La teoría de la flexión oblicua, que se basa en el enfoque de la deformación plana para las secciones planas sujetas a flexión y torsión.

2. La teoría de la analogía con la armadura y su extensión como teoría del campo de la compresión. Se aplica a los estribos para torsión, una analogía con la armadura modificada comparable a la utilizada en el diseño de los estribos para cortante.

### 7.3.1 La Teoría de la Flexión Oblicua

Esta teoría considera en detalle el desempeño de deformación interno de la serie de superficies transversalmente alabeadas a lo largo de la viga. Inicialmente propuesta por Lessig, ha tenido contribuciones subsecuentes de Collins, Hsu, Zia, Gesund, Mattock, y Elfgren, entre los diversos investigadores en este campo. T.T.C. Hsu hizo una contribución experimental importante para el desarrollo de la teoría de la flexión oblicua tal como se encuentra en la actualidad.

En su reciente libro (Ref. 7.12), Hsu detalla el desarrollo de la teoría de la torsión aplicada a las estructuras de concreto y de cómo la teoría de la flexión oblicua formó las bases de las actuales disposiciones para la torsión del reglamento ACI. La complejidad del problema torsional puede permitir en este libro de texto, tan sólo el siguiente breve comentario.

La superficie de falla de la sección transversal normal de una viga sujeta al momento flexionante  $M_u$ , permanece plana después de flexionarse, como se muestra en la Fig. 7.7a. Si el momento de torsión  $T_u$  se aplica también, excediendo la capacidad de la sección, se desarrollan grietas en los tres lados de la sección transversal de la viga y esfuerzos de compresión en porciones del cuarto lado a lo largo de la viga. Al continuar la carga torsional al estado límite en la falla, resulta una superficie oblicua de falla, debida a la combinación de los momentos; el torsionante  $T_u$  y el flexionante  $M_u$ . El eje neutro de la superficie oblicua y el área sombreada en la Fig. 7.7b que denota la zona de compresión, no continuarán rectos, sino que subtienden un ángulo  $\theta$  variable con el plano original de la sección transversal.

Antes del agrietamiento, ni las varillas longitudinales ni los estribos cerrados dan una contribución apreciable a la rigidez torsionante de la sección. En la etapa de carga posterior al agrietamiento se reduce la rigidez de la sección, pero se incrementa considerablemente su resistencia a la torsión, dependiendo de la cantidad y la distribución, tanto de las varillas longitudinales, como de los estribos cerrados. Debe subrayarse que sólo puede lograrse una poca resistencia torsional adicional a la capacidad del concreto simple en la viga, a menos que se empleen tanto varillas longitudinales, como estribos transversales.

La teoría de la flexión oblicua idealiza la zona de compresión considerándola de un peralte uniforme. Supone que las grietas en las restantes tres caras de la sección transversal están separadas uniformemente, con los estribos de acero en esas caras, soportando las fuerzas de tensión en las grietas y las varillas longitudinales resistiendo el cortante a través de acción de espiga con el concreto. La Fig. 7.8a muestra las fuerzas que actúan en el plano flexionado oblicuamente. El polígono de la Fig. 7.8b da la resistencia al cortante  $F_c$  del concreto, la fuerza  $T_1$  de las varillas de acero longitudinales activas en la zona de compresión, y el bloque de la fuerza normal de compresión  $C_c$ .

El momento torsionante  $T_c$  de la fuerza cortante resistente  $F_c$  generada por el área sombreada del bloque de compresión en la Fig. 7.8a, es por lo tanto:

$$T_C = \frac{F_C}{\cos 45^\circ} \times \text{su brazo respecto a las fuerzas } F_V \text{ en la Fig. 7.8a}$$

o

$$T_C = \sqrt{2} F_C (0.8x) \quad (7.11a)$$

en que  $x$  es el lado más corto de la viga. Pruebas extensas (Refs. 7.9 y 7.12) para evaluar  $F_C$  en términos del esfuerzo interno en el concreto,  $k_1 f'_c$ , y las constantes torsionales geométricas de la sección,  $k_2 x^2 y$ , llevaron a la expresión

$$T_C = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} \quad (7.11b)$$

Las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  se suponen proporcionales a las áreas de la sección transversal de estas varillas. Si se establece una relación entre la proporción de la resistencia dada por las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  y la resistencia torsional de las fuerzas  $F_C$  de los anillos, los momentos torsionantes serán las sumas

$$\Sigma F_V (\frac{1}{2} x_1), \quad \Sigma F_X (\frac{1}{2} y_0), \quad \Sigma F_Y (\frac{1}{2} x_0), \quad \Sigma T_1 (\frac{1}{2} x_0)$$

Las dimensiones  $x_1$  y  $y_1$  son, respectivamente, la menor y la mayor dimensión centro a centro de los estribos rectangulares cerrados, y las dimensiones  $x_0$  y  $y_0$  son las correspondientes dimensiones centro a centro de las varillas longitudinales en las esquinas de los estribos. La expresión resultante para la resistencia torsional,  $T_s$ , suministrada por los anillos y el acero longitudinal en la sección rectangular, es

$$T_s = \alpha_1 \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.12)$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33 y_1 / x_1$ , de tal manera que el momento torsionante nominal de resistencia, es  $T_n = T_C + T_s$ , o

$$T_n = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} + (0.66 + 0.33 \frac{y_1}{x_1}) \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \quad (7.13)$$

### 7.3.2 La Teoría de la Analogía con la Armadura en el Espacio

Esta teoría originalmente fue desarrollada por Ramsch y más tarde expandida por Lampert y Collins, con trabajo adicional de Hsu,

Thurliman, Elfgren, y otros. Un refinamiento posterior fue introducido por Collins y Mitchell (Ref. 7.11) como una teoría del campo de compresión. La analogía con la armadura en el espacio es una extensión del modelo usado en el diseño de los estribos que resisten cortante, en la que las grietas de tensión diagonal, una vez que empiezan a desarrollarse, son resistidas por los estribos. A causa de la forma no plana de las secciones transversales debida al momento de torsión, se utiliza como miembros a tensión diagonal, una armadura en el espacio compuesta por los estribos, y las fajas idealizadas de concreto a 45° entre las grietas se utilizan como los miembros a compresión, como se muestra en la Fig. 7.9.

En esta teoría se supone que la viga de concreto se comporta en torsión en forma similar a un cajón de paredes delgadas con un flujo de cortante constante en la sección transversal de la pared, produciendo un momento torsionante constante. El uso de secciones huecas en las paredes en vez de sólidas, demostró que se obtiene esencialmente el mismo momento torsionante último, siempre que las paredes no sean demasiado delgadas. Tal conclusión sale a relucir a partir de los ensayos que han mostrado que la resistencia a la torsión de las secciones sólidas está compuesta de la resistencia de la jaula de estribos cerrados, que consisten de barras longitudinales y estribos cerrados, y los idealizados puntales a compresión inclinados de concreto en el plano de las paredes de la jaula. Los puntales a compresión son las fajas inclinadas de concreto entre las grietas en la Fig. 7.9.

El reglamento CEB-FIP se basa en el modelo de la armadura en el espacio. En este código, el espesor efectivo de la viga hueca se toma como  $1/6 D_o$ , donde  $D_o$  es el diámetro del círculo inscrito en el rectángulo que conecta las varillas longitudinales de las esquinas, o sea,  $D_o = x_o$  en la Fig. 7.9. En resumen, la ausencia del núcleo no afecta la resistencia en torsión de tales miembros, de ahí la aceptación del enfoque de la analogía con la armadura espacial basada en secciones huecas.

Si el flujo de cortante en las paredes de la sección en cajón es  $\tau t$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante, y  $F$  es la fuerza de tensión en cada varilla longitudinal en las esquinas, la ecuación del equilibrio de fuerzas sería

$$4F = 2 \frac{\tau t x_o}{\tan \phi} + 2 \frac{\tau t y_o}{\tan \phi} \quad (7.14)$$

y los momentos debidos a las fuerzas del flujo de cortante serían

$$T_n = \tau t y_o x_o + \tau t x_o y_o \quad (7.15)$$

Si  $A_t$  es el área de la sección transversal del estribo, y  $f_y$  es la resistencia de fluencia del estribo con separación a una distancia  $s$ , entonces

$$A_t f_y = \tau t s \tan \phi \quad (7.16a)$$

También, si  $A_1$  es el área total de las cuatro varillas longitudinales en las esquinas,

$$F = \frac{1}{2} A_1 f_y \tag{7.16b}$$

Resolviendo las Ecs. (7.14), (7.15), y (7.16a), se llega a

$$T_n = 2x_o y_o \sqrt{\frac{A_1 f_y A_t f_y}{2s(x_o + y_o)}} \tag{7.17}$$

Para el caso de volúmenes iguales de acero longitudinal y estribos transversales (esto es:  $\phi = 45^\circ$ ) el momento torsionante de resistencia  $T_n$  en la falla, sería

$$T_n = 2 \frac{A_t f_y}{s} x_o y_o \tag{7.18}$$

Nótese la similitud de la forma de la Ec. 7.12 desarrollada para la teoría de la flexión oblicua, con la de Ec. 7.18, desarrollada por la teoría de la analogía con la armadura espacial.

#### 7.4 DESEMPEÑO DEL CONCRETO BAJO LA ACCION COMBINADA DE TORSION, CORTANTE Y FLEXION

##### 7.4.1 Torsión y Cortante Combinados

Hasta ahora, esta discusión ha presentado el mecanismo resistente interno y las fuerzas acompañantes, momentos y esfuerzos en el concreto simple y en el refuerzo, cuando un elemento estructural unidimensional está sujeto a momentos torsionantes. Cuando la torsión externa está acompañada por cortante externo, la misma sección está sujeta a mayores esfuerzos cortantes debido al efecto combinado de los dos tipos de cargas al interactuar una con otra. La resistencia de una viga a la torsión y cortante combinados es menor que su resistencia a alguno de estos dos parámetros actuando solos. Consecuentemente, se torna necesaria una relación de interacción en una manera similar a la desarrollada para la combinación de la flexión y la carga axial, discutida en el Capítulo 9. La figura 7.10 representa la siguiente expresión no dimensional de interacción que relaciona la torsión al cortante:

1. Miembro sin acero en el alma:

$$\left( \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{V_c}{V_{c0}} \right)^2 \leq 1.0 \tag{7.19a}$$

$T_c$  y  $V_c$  son la torsión y el cortante nominal externos cuando actúan simultáneamente.  $T_{c0}$  y  $V_{c0}$  son los valores nominales para la torsión y el cortante cuando cada uno actúa separadamente.

2. Miembros reforzados, para la combinación de torsión y cortante:

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} + \frac{V_n}{V_{n0}} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.19b)$$

$T_n$  y  $V_n$  representan las resistencias nominales de torsión y cortante para resistir  $T_u$  y  $V_u$  cuando actúan simultáneamente.  $T_{n0} = T_c + T_s$  representa la resistencia torsional nominal del alma reforzada cuando la torsión pura actúa sola en la sección;  $V_{n0} = V_c + V_s$  representa la resistencia nominal al cortante del alma reforzada cuando el cortante solo actúa en la sección. La ecuación 7.19a se puede anotar de nuevo utilizando el valor aproximado de  $T_c$  de la Ec. 7.11b y  $V_c$  de la Ec. 6.9 para el alma sin reforzar:

$$\left( \frac{T_c}{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_c}{0.5\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.20)$$

En el caso del alma reforzada sujeta a torsión y cortante combinados, tiene que establecerse un límite superior para  $T_{n0}$  y  $V_{n0}$  para asegurar que el refuerzo del alma fluya en el estado límite de falla. Con base en los resultados de ensayos,

$$T_{n0} \leq 3.2\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \quad \text{y} \quad V_{n0} \leq 2.7\sqrt{f'_c} b_w d$$

Consecuentemente, la Ec. 7.19b se transforma en

$$\left( \frac{T_n}{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_n}{2.7\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \quad (7.21)$$

Al comparar las Ecs. 7.20 y 7.21 puede verse que  $T_n = 5T_c$ . El Reglamento ACI simplifica el procedimiento al requerir que

$$T_s \leq 4T_c \quad (7.22)$$

pues de otra manera, la sección deberá incrementarse.

### 7.4.2 Torsión y Flexión Combinadas

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce drásticamente. Como resultado, el agrietamiento debido al esfuerzo cortante torsional se genera a niveles bajos de la carga. La figura 7.11c muestra el vector resultante  $R_u$  para los momentos de flexión y torsión combinados que provocan el alabeo de la sección, como se muestra en la Fig. 7.7b.

De manera similar al caso de la torsión y el cortante combinados, se establece una relación de interacción relacionando la torsión con la flexión cuando ambas actúan simultáneamente. Tiene que suponerse que la sección está reforzada con acero de compresión y de tensión.

Se pueden desarrollar dos casos para los cuales son aplicables las siguientes expresiones de interacción:

1. Cuando fluye el acero de tensión en la zona de tensión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{nO}} \right)^2 = r \left( 1 - \frac{M_n}{M_{nO}} \right) \quad (7.23a)$$

2. Cuando ocurre la fluencia de tensión en la zona de flexión de compresión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{nO}} \right)^2 = 1 + r \frac{M_n}{M_{nO}} \quad (7.23b)$$

donde  $T_n$  = momento nominal torsional resistente equivalente a  $T_u/\phi$   
 $T_{nO}$  = resistencia nominal torsional del alma reforzada cuando actúa sola la torsión pura  
 $M_n$  = momento nominal resistente a flexión  $M_u/\phi$   
 $M_{nO}$  = resistencia nominal a la flexión cuando ésta actúa sola  
 $r = \frac{A_s f_y}{A'_s f_y}$

### 7.4.3 Flexión, Cortante y Torsión Combinadas

Una combinación de estos tres parámetros resulta en una superficie tridimensional de interacción. El alcance del libro limita la posibilidad de una discusión profunda. La expresión aplicable resulta de la superposición del efecto de la torsión y el cortante combinados con el efecto de la flexión y la torsión combinadas a partir de los dos casos de interacción de las Secciones 7.4.1 y 7.4.2. El ACI requiere (1) el cálculo del acero transversal en el alma, para cortante; adicionándolo al acero transversal en el alma calculado para torsión; y (2) el cálculo de acero longitudinal para torsión, adicionándolo al acero de tensión para flexión, pero

distribuyéndolo simétricamente en todos los costados de la sección transversal.

## 7.5 DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A LA COMBINACION DE TORSION, FLEXION Y CORTANTE

### 7.5.1 Desempeño Torsional de las Estructuras

El momento de torsión que actúa en un cierto componente estructural tal como una viga de orilla se puede calcular utilizando los procedimientos normales del análisis estructural. El diseño de un componente en particular necesita basarse en el estado límite de falla. Por consiguiente, el comportamiento no lineal de un sistema estructural después del agrietamiento torsional se debe identificar en una de las dos siguientes condiciones: (1) no hay redistribución de los esfuerzos de torsión a otros miembros después del agrietamiento, y (2) la redistribución de los esfuerzos y momentos torsionantes después del agrietamiento para que tenga efecto la compatibilidad de deformación entre los miembros que se intersectan.

Las resultantes de esfuerzos debidas a la torsión en las vigas estáticamente determinadas se pueden evaluar de las solas condiciones de equilibrio. Tales condiciones requieren un diseño para el momento total factorizado exterior de torsión, ya que no es posible la redistribución de los esfuerzos torsionantes. Con frecuencia a este estado se le llama torsión de equilibrio. Una viga de orilla que soporta una marquesina en voladizo, como en la Fig. 7.13, es un ejemplo de ello.

La viga de orilla tiene que diseñarse para que resista la totalidad del momento externo factorizado de torsión debido a la losa en voladizo; de otra forma, la estructura experimentará un colapso. La falla sería ocasionada por la viga al no satisfacer las condiciones de equilibrio de las fuerzas y los momentos que resultan de la gran torsión exterior.

En los sistemas estáticamente indeterminados, las suposiciones relativas a las rigideces, la compatibilidad de las deformaciones en las uniones, y la redistribución de los esfuerzos pueden afectar los esfuerzos resultantes, llevando a una reducción de los esfuerzos resultantes de cortante torsional. Se permite una reducción en el valor del momento factorizado que se utiliza en el diseño del miembro, si parte de este momento se puede redistribuir a los miembros que se intersectan. El Reglamento ACI permite un momento torsional factorizado máximo en la sección crítica  $d$  a partir del paño de los apoyos:

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right) \quad (7.24)$$

El hacer caso omiso del efecto total de la torsión externa total en este caso, no conduce de hecho, a la falla de la estructura, pero puede tener por resultado un agrietamiento excesivo si  $\phi(\sqrt{f'_c} \sum x^2 y / 3)$  es de un valor considerablemente menor al momento real factorizado de torsión. En la Fig. 7.14 puede verse un ejemplo de la torsión de compatibilidad.

Las vigas  $B_2$  aplican momentos de torsión  $T_u$  en las secciones 1 y 2 de la viga de orilla AB en la Fig. 7.14b. Las magnitudes de las rigideces relativas de la viga AB y las transversales  $B_2$  determinan las magnitudes de la rotación en las juntas de intersección 1 y 2. A causa de la continuidad y la acción en dos direcciones, los momentos extremos de las vigas  $B_2$  en sus intersecciones con la viga de orilla AB, no se transmitirán totalmente como momentos de torsión a las columnas de apoyo A y B. Se reducirán en forma importante ya que las redistribuciones de momentos resultan en una transferencia de la mayor parte de los momentos flexionantes de los extremos 1 y 2 a 3 y 4, así como al centro de los claros de las vigas  $B_2$ .  $T_u$  en cada uno de los apoyos A y B de las vigas de orilla y en la sección crítica a una distancia  $d$  de estos apoyos se determina a partir de la Ec. 7.24.

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right)$$

Si el momento torsionante factorizado real debido a las vigas  $B_2$  es menor que el dado por la Ec. 7.24, la viga se tiene que diseñar para un valor torsional menor. Sin embargo, los momentos de torsión se desprecian, si

$$T_u < \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) \quad (7.25)$$

Cuando el momento torsionante factorizado  $T_u$  excede  $\phi(0.13 \sqrt{f'_c})$ , el Reglamento ACI requiere que el alma de concreto simple se diseñe en secciones para

$$V_c = \frac{0.6 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u / V_u)]^2}} \quad (7.26a)$$

y

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}} \quad (7.26b)$$

Las ecuaciones 7.26a y 7.26b se derivan de la Ec. 7.20 suponiendo que el cociente del momento torsionante respecto a la fuerza cortante permanece constante a través de la historia de carga. Cuando se toma en cuenta la contribución del refuerzo para torsión, el ACI limita la fuerza de torsión  $T_s$  resistida por el acero a un valor que no exceda  $4T_c$ , como se ve en la Ec. 7.22.

### 7.5.2 Refuerzo en el Alma para Torsión

Como se indica en la Sección 7.3.1, sólo se puede lograr una importante resistencia adicional a la torsión debida al refuerzo para torsión, si se emplean tanto estribos como varillas longitudinales. En forma ideal, deberán colocarse volúmenes iguales de acero tanto de estribos cerrados como de varillas longitudinales, de tal manera que ambos participen por igual para resistir los momentos de torsión. Este principio es la base de las expresiones de ACI para diseñar el acero torsional en el alma. Si  $s$  es la separación de los estribos,  $A_1$  es el área total del acero de las varillas longitudinales de la sección transversal, y  $A_t$  es la sección transversal de una rama del estribo, donde las dimensiones del estribo son  $x_1$  en la dirección corta y  $y_1$  en la dirección larga, entonces:

$$2A_t(x_1 + y_1) = A_1s \quad (7.27a)$$

de tal manera que

$$2A_t = \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.27b)$$

Por tanto, el acero torsional total en el alma, incluyendo tanto los estribos cerrados como las varillas longitudinales de las Ecs. 7.27a y 7.27b, se convierte en

$$A_{total} = 2A_t + \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.28a)$$

Pero, de la Ec. 7.12

$$A_t = \frac{T_s s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_1} \quad (7.28b)$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33y_1/x_1 \leq 1.5$  y  $T_s$  es el momento torsionante resistente del acero torsionante del alma. Si  $T_c$  es la resistencia torsional nominal del concreto simple en el alma,

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.29)$$

De la Ec. 7.27b, y empleando la expresión de ACI para  $A_t$  para la torsión y el cortante combinados, donde

$$2A_t = \frac{14 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t}$$

el refuerzo torsional longitudinal se puede expresar como

$$A_l = \left( \frac{28 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 X y_1}{s} \quad (7.30)$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . El término  $2A_t$  en la Ec. 7.30 no puede ser menor que  $3.5b_w s / f_y$ , puesto que este valor es el mínimo  $2A_t$  para que los estribos torsionales sean efectivos. En la ref. 7.12 se presenta una discusión completa y una derivación detallada de la Ec. 7.30.

Puede compensarse una reducción en los estribos mediante un incremento en el acero longitudinal siempre que el volumen del acero torsional total se mantenga el mismo. Si la separación  $s$  de los estribos es pequeña, de tal manera que  $2A_t$  sea considerablemente mayor que el valor mínimo  $3.5b_w s / f_y$ , no es poco común que  $A_l$  de la Ec. 7.30 dé un valor negativo, de tal manera que se invoque  $A_l$  mínimo de la Ec. 7.27a para volúmenes iguales de estribos y varillas longitudinales; esto es:

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} \quad (7.31)$$

El área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para la torsión y cortante combinados se convierte en

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5b_w s}{f_y} \quad (7.32)$$

### 7.5.3 Procedimiento de diseño para la Torsión y Cortante Combinados

Lo que sigue es un resumen de la secuencia recomendada de los pasos para el diseño. En la Fig. 7.15 se muestra un diagrama de flujo que describe la secuencia de las operaciones en forma gráfica.

1. Clasifique si la torsión aplicada es torsión de equilibrio o de compatibilidad. Determine la sección crítica y calcule el momento torsionante factorizado  $T_u$ . La sección crítica se toma a una distancia  $d$  del paño del apoyo. Si  $T_u$  es menor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2 y)$ , se pueden despreciar los efectos de la torsión.
2. Calcule la resistencia nominal torsional  $T_c$  del alma de concreto simple:

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2}}$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . Los miembros sujetos a una tensión axial importante se pueden diseñar para un valor de  $T_c$

que se multiplica por  $(1 + N_u/35 A_g)$ , en que  $N_u$  es negativa para tensión.

Verifique si  $T_u$  excede  $\phi T_c$ . Si no es así, desprecie el efecto torsionante. Si así ocurre, calcule el valor  $T_s$  de esa porción del momento torsionante que será resistida por el refuerzo de acero. Para torsión de equilibrio

$$T_s = T_n - T_c$$

Para torsión de compatibilidad

$$T_s = \frac{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{3} - T_c \quad \text{ó} \quad T_s = T_n - T_c$$

la que sea menor. El valor de  $T_n$  tiene que ser al menos equivalente a  $T_u/\phi$ . Si  $T_s > 4T_c$ , incremente el tamaño de la sección.

Seleccione los estribos cerrados que se emplearán como refuerzo transversal. Puede emplearse una varilla del No. 3 como mínimo (9.5 mm. de diámetro). Si  $s$  es una separación constante de los estribos, calcule el área de una rama del estribo para torsión, para la separación unitaria:

$$A_t = \frac{T_s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_y}$$

3. Calcule el refuerzo  $A_v$  requerido para cortante por unidad de espaciamiento en una sección transversal.  $V_u$  es la fuerza cortante exterior factorizada en la sección crítica,  $V_c$  es la resistencia nominal al cortante del concreto en el ama, y  $V_s$  es la fuerza cortante que resisten los estribos:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{y d}$$

donde  $V_s = V_n - V_c$ , y

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}}$$

4. El valor de  $V_n$  tiene que ser cuando menos igual a  $V_u/\phi$ . Obtenga el área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para torsión y cortante, y diseñe los estribos de tal manera que

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5 b_w s}{f_y}$$

5. Calcule el área  $A_l$  del refuerzo longitudinal requerida para torsión, donde

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s}$$

o

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

la que sea mayor.  $A_l$  calculada empleando la segunda expresión no necesita ser mayor a

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - \frac{3.5b_w s}{f_y} \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

6. Arregle el refuerzo utilizando las siguientes directrices:

- La separación  $s$  de los estribos cerrados deberá ser menor a  $(x_1 + y_1)/4$  o 30 cm
- Las varillas longitudinales deberán quedar a separaciones iguales alrededor del perímetro de los estribos cerrados. La distancia entre las varillas deberá ser menor a 30 cm. y cuando menos una varilla longitudinal deberá colocarse en cada esquina.
- La resistencia a la fluencia del refuerzo para torsión no excederá de  $4,200 \text{ kg/cm}^2$ .
- Los estribos que se usen para refuerzo de torsión deberán anclarse a través de una distancia  $d$  desde las fibras extremas en compresión. Los anillos cerrados con ganchos en los estribos logran este efecto.
- El refuerzo para torsión se suministrará al menos una distancia  $(d + b)$  más allá del punto requerido teóricamente, con objeto de cubrir cualesquier esfuerzos cortantes excesivos potenciales.

#### 7.5.4 Ejemplo 7.1: Diseño del Refuerzo en el Alma para la Torsión y el Cortante Combinados en una sección en T

Una viga de sección en T tiene las dimensiones geométricas que se muestran en la Fig. 7.16. En la sección crítica actúa una fuerza cortante externa factorizada, que tiene un valor de  $V_u = 6,800 \text{ kg}$ . Está sujeta a los siguientes momentos de torsión:

- momento exterior torsionante factorizado de equilibrio  
 $T_u = 570,000 \text{ kg.cm}$ ;
- de compatibilidad factorizado,  $T_u = 86,200 \text{ kg.cm}$ ;
- y (c) de compatibilidad factorizado,  $T_u = 345,000 \text{ kg.cm}$ .

Dados:

$$\begin{aligned} \text{Refuerzo para flexión } A_s &= 23.4 \text{ cm}^2 \\ f'_c &= 280 \text{ kg/cm}^2, \text{ concreto de peso normal} \\ f_y &= 4,200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Diseño del refuerzo en el alma necesario para esta sección.

**Solución**

(a) Torsión de equilibrio:

*Momento torsional factorizado (Paso 1)*

Dado el momento torsional de equilibrio = 570,000 kg-cm. La totalidad del momento de torsión debe tomarse en cuenta para el diseño. De la Fig. 7.16:

$$\begin{aligned} \sum x^2 y &= 35^2 \times 65 + 2(10^2 \times 30) = 79,500 \text{ cm}^3 \\ \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) &= \\ &= 0.85 \times 0.13 \times 280 \times 79,500 = 146,997 \text{ kg-cm} < T_u \end{aligned}$$

Por consiguiente, se deben colocar estribos

*Diseño de estribos cerrados para torsión. (Paso 2)*

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{570,000}{0.85} = 670,588 \text{ kg-cm}$$

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}$$

Supóngase un recubrimiento efectivo de 5.0 cm, y  $d = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$

$$C_t = \frac{b_w d}{\sum x^2 y} = \frac{35 \times 55}{79,500} = 0.024$$

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{280} (79,500)}{\sqrt{1 + \left( \frac{0.4 (6,800)}{0.024 (570,000)} \right)^2}} = 274,089 \text{ kg-cm}$$

Suponga también que tanto  $T_c$  como  $V_c$  son constantes para todos los propósitos prácticos al centro del claro de la viga.

$$T_s = T_n - T_c = 670,588 - 274,089 \text{ kg-cm}$$

Supóngase un recubrimiento libre de 2.5 cm y estribos cerrados del #4.

$$x_1 = 35 - 2(2.5 + 0.64) = 28.73 \text{ cm}$$

$$y_1 = 60 - 2(2.5 + 0.64) = 53.72 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 0.66 + 0.33(53.72/28.73) = 1.28 < 1.5$$

Emplée  $\alpha_1 = 1.28$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{396,499}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.048 \text{ cm}^2/\text{cm}/1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5 \sqrt{280}(35)55}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)570,000/6,800]^2}}$$

$$= 3,141 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{6,800}{0.85} - 3,141 = 4,859 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{s} = \frac{4,859}{4,200(55)} = 0.021 \text{ cm}^2/\text{cm}/\text{dos ramas}$$

Estribos cerrados para torsión y cortante combinados (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.048) + 0.021 = 0.117 \text{ cm}^2/\text{cm}/ 2 \text{ ramas}$$

Pruébese con estribos cerrados del No. 3 (9.5 mm de diámetro). El área para las dos ramas =  $1.42 \text{ cm}^2$ .

$$s = \frac{\text{área de la sección transversal del estribo}}{A_{vt}/s \text{ requerida}} = \frac{1.42}{0.117} =$$

$$= 12.1 \text{ cm}$$

$$\text{separación máxima permisible, } s_{\max} = \frac{x_1 + y_1}{4} = \frac{28.73 + 53.72}{4} =$$

$$= 20.6 \text{ cm} > 12.1 \text{ cm}$$

Utilice estribos cerrados del # 3 @ 12 cm c. a c.

$$\begin{aligned} \text{Area mínima de estribos requerida} = A_v + 2A_t &= \frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)12}{4,200} = \\ &= 0.35 \text{ cm}^2 < 1.42 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Area proporcionada} = 1.42 > 0.35 \text{ cm}^2$$

Diseño del acero longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.048)(28.73 + 53.720) = 7.92 \text{ cm}^2$$

También:

$$A_1 = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

(O substituyendo  $3.5b_w s/f_y$  por  $2A_t$ , aquella que controle):

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = 0.35 \text{ cm}^2 < 2A_t = 2(0.048)12 = 1.15 \text{ cm}^2$$

Use  $2A_t = 1.15 \text{ cm}^2$ . Por consiguiente:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left( \frac{28(35)12}{4,200} \frac{570,000}{570,000 + \frac{6,800}{3(0.024)}} - 1.15 \right) \frac{28.73 + 53.72}{12} = \\ &= 8.12 \text{ cm}^2 > 7.92 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, colóquese  $A_1 = 8.12 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales de torsión

El área del refuerzo longitudinal a distribuir es  $8.12 \text{ cm}^2$ . Supóngase que  $\frac{1}{4} A_1$  se coloca en las esquinas superiores. Otro tanto en las esquinas inferiores, adicional a las varillas para flexión. El área requerida en cada esquina es  $= 8.12/4 = 2.03 \text{ cm}^2$ . El área requerida en cada costado vertical es también  $\frac{1}{4} A_1 = 2.03 \text{ cm}^2$ , a una separación no mayor de 30 cm. c a c. Colóquense 2 varillas del No. 4 en cada zona.

$$\text{Al centro del claro } \sum A_s = \frac{A_1}{4} + A_s = 2.03 + 23.4 = 25.43 \text{ cm}^2$$

Colóquense 5 vars. del #8 en la zona de tensión;  $A_s = 25.35 \text{ cm}^2$   
La figura muestra la geometría de la sección transversal.

### Solución

(b) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado  $T_u = 86,200$  kg-cm. Si se utilizan los resultados del caso (a), se tiene:

$$\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y) = 0.85(0.13)\sqrt{280}(79,500) = 146,997 \text{ kg-cm} \\ > T_u = 86,200 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, pueden despreciarse los efectos de torsión.

### Solución

(c) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado que  $T_u = 345,000$  kg-cm es mayor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y)$ , se deben suministrar estribos. Puesto que esta es una torsión de compatibilidad, la sección se puede diseñar para un momento torsionante de  $\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3)$  si la torsión exterior excede este valor.

$$\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3) = 0.85(280)79,500/3 = 376,915 > 345,000 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la sección se diseñará para  $T_u = 345,000$  kg-cm

Diseño de los estribos cerrados para torsión (Paso 2)

Utilizando la Ec. 7.26b,

$$T_c = \frac{0.21(\sqrt{280})79,500}{\sqrt{1 + \left[\frac{0.4(6,800)}{0.024(345,000)}\right]^2}} = 265,407 \text{ kg-cm}$$

$$T_s = T_n - T_c = 345,000/0.85 - 265,407 = 140,475 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y\alpha_1x_1y_1} = \frac{140,475}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.017 \text{ cm}^2/\text{cm}/ 1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (Paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 f'_c b_w d}{\sqrt{1 + [2.5C_t(T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5\sqrt{280} 35(55)}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)(345,000/6,800)]^2}} \\ = 5,026 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = 6,800/0.85 - 5,026 = 2,974 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{2,974}{4,200(55)} = 0.013 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Estribos cerrados combinados para torsión y cortante (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.017) + 0.013 = 0.047 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Coloque estribos del #3 con un área de  $2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$  (9.5 mm. de diámetro), y se tiene:

$$s = \frac{\text{área del estribo } A_s}{\text{área requerida } A_{vt}/s} = 1.42 / 0.047 = 30 \text{ cm}$$

separación máxima permisible  $s_{\max} = (x_1 + y_1)/4 = 20 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

Por consiguiente, suministre estribos cerrados del #3 @ 20 cm c. a c.

$$\text{área mínima de estribos requerida} = 3.5(35)20/4,200 = 0.58 \text{ cm}^2$$

$$\text{área suministrada} = 1.42 > 0.58 \text{ cm}^2$$

Diseño del refuerzo longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.017) (28.73 + 53.72) = 2.80 \text{ cm}^2$$

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)20}{4,200} = 0.583 < 2A_t s = 2(0.017)20 = 0.68 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente:

$$A_l = \left( \frac{28(35)20}{4,200} - \frac{345,000}{6,800} - 0.68 \right) \frac{28.73 + 53.72}{20} = 7.10 \text{ cm}^2 > 2.8 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente  $A_l$  que se debe suministrar es igual a  $7.10 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales. Considérese el mismo criterio que se siguió en (a).

REFERENCIAS SELECTAS

7.1 Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part II: Advanced Theory*, D. Van Nostrand, New York, 1952, 501 págs.

7.2 Nadai, A., *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, McGraw Hill, New York, 1931, 349 págs.

7.3 Cowan, H.J., "Design of Beams Subject to Torsion Related to the Australian Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 56, January 1960, págs. 591-618.

7.4 Gesund, H., Schnette, F.J., Buchanan, G.R., and Gray, G.A., "Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Both Longitudinal and Transverse Reinforcement," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 61, December 1964, págs. 1509-1521.

7.5 Lessig, N.N., "Determination of Carrying Capacity of Reinforced Concrete Elements with Rectangular Cross-section Subjected to Flexure with Torsion," *Zhelezobeton*, 1959, págs. 5-28.

7.6 Zia, P., "Tension Theories for Concrete Members," *Special Publication SP 18-4*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, págs. 103-132.

7.7 Hsu, T.T.C., "Ultimate Torque of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST2, February 1968, págs. 485-510.

7.8 Rangan, B.V., and Hall, A.J., "Strength of Rectangular Prestressed Concrete Beams in Combined Torsion, Bending and Shear," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 70, April 1973, págs. 270-279.

7.9 Wang, C.K., and Salmon, C.G., *Reinforced Concrete Design*, 3rd ed., Harper & Row, New York, 1979, 918 págs.

7.10 Thurliman, B., "Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach, U.S. and European Practices," *Special Publication*, American Concrete Institute, Detroit, 1979, págs. 117-143.

7.11 Collins, M.P., and Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-prestressed Concrete Beams," *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc. Vol. 25, No. 5, September-October 1980, págs. 32-100.

7.12 Hsu, T.C.C., *Torsion of Reinforced Concrete*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983, 510 págs.

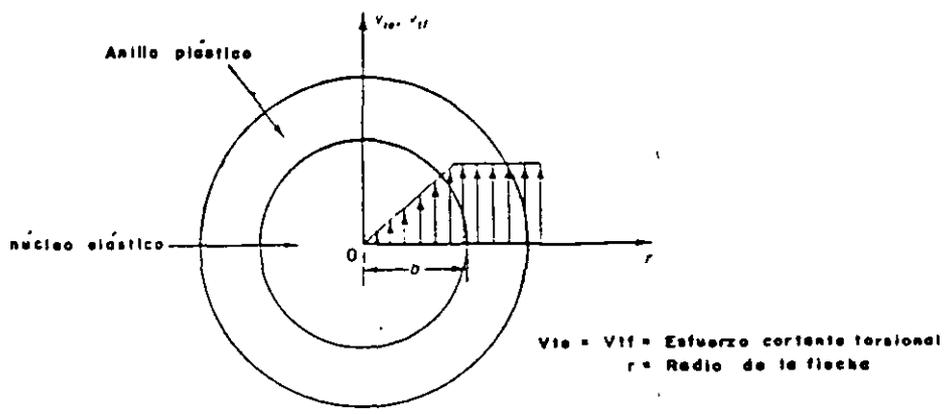


Fig.7.1 Distribución de esfuerzos torsionales en una sección circular

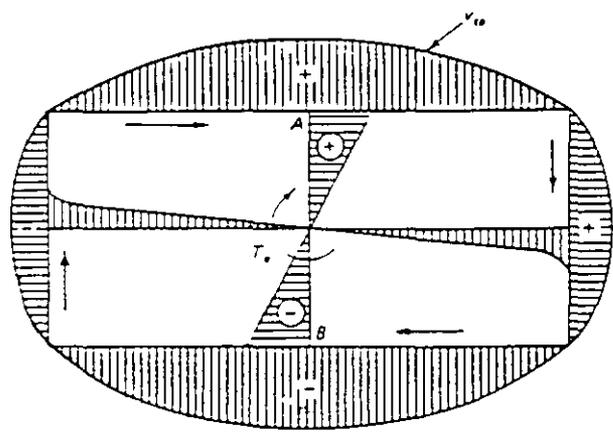


Fig.7.2 Distribución de esfuerzos de torsión para en una sección rectangular.

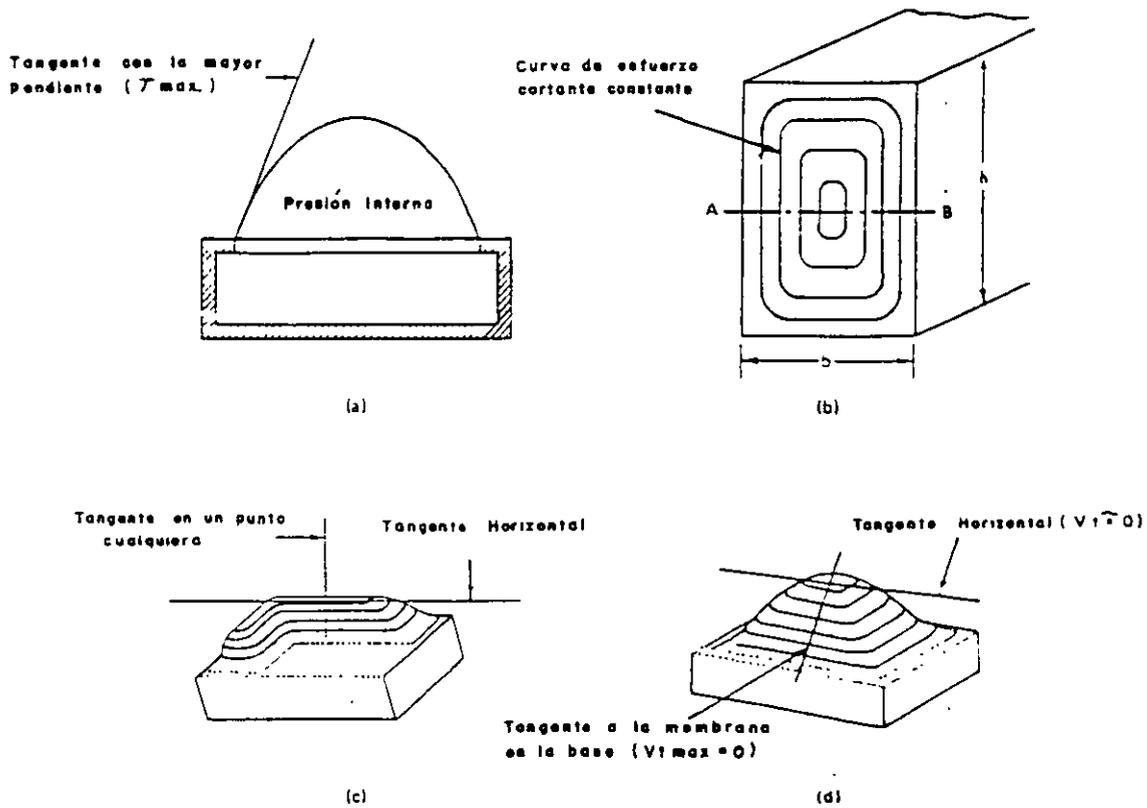


Fig. 7.3 Analogía con la membrana en la torsión pura elástica. (a) Membrana bajo presión; (b) Curvas en una viga real o en una membrana; (c) Sección L; (d) Sección rectangular.

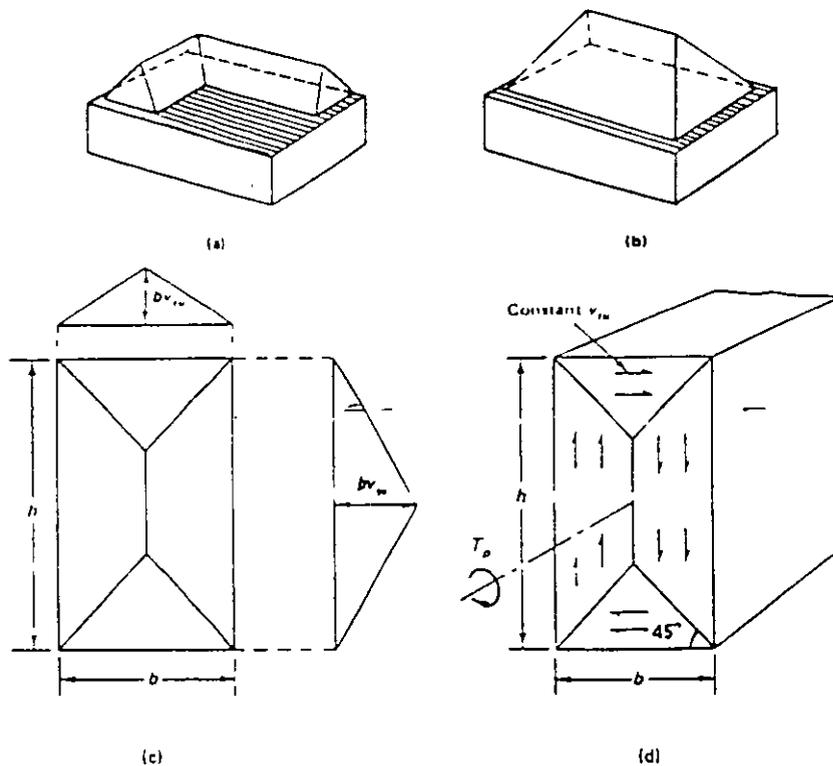


Fig. 7.4 Analogía con el montón de arena en torsión plástica pura. (a) Sección en L del montón de arena; (b) Sección rectangular del montón de arena; (c) Planta de la sección rectangular; (d) Esfuerzo cortante torsional.

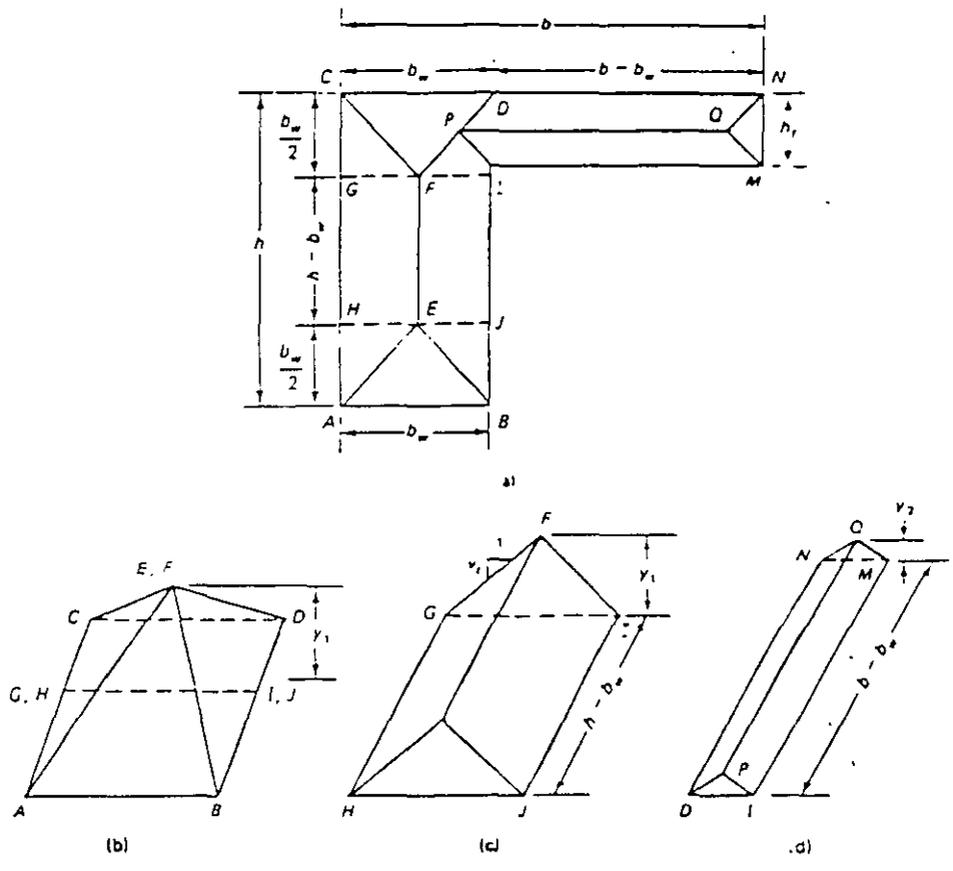


Fig. 7.5 Analogía con el montón de arena de la sección con patín  
 (a) Montón de arena de la sección transversal en L; (b) Pirámide compuesta a partir del alma ( $V_1$ ); (c) Segmento en pabellón a partir del alma ( $V_1$ ); (d) Pabellón transformado del patín de la viga ( $V_2$ )

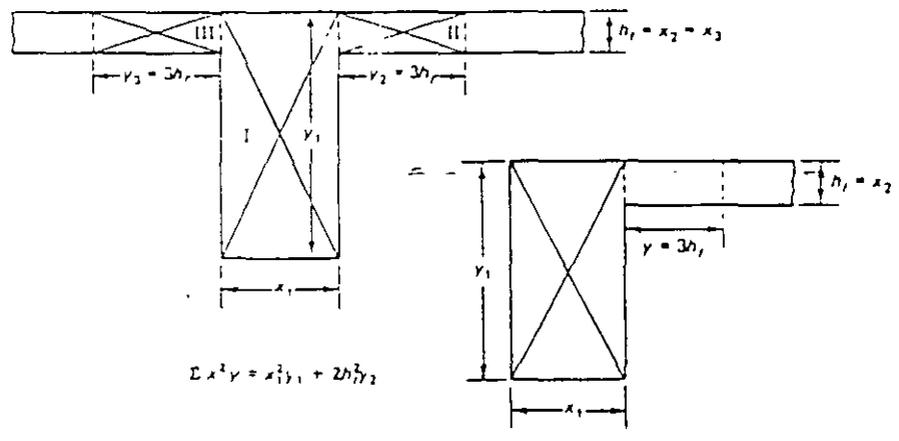


Fig. 7.6 Rectángulos compuestos para el cálculo de  $T_c$ .

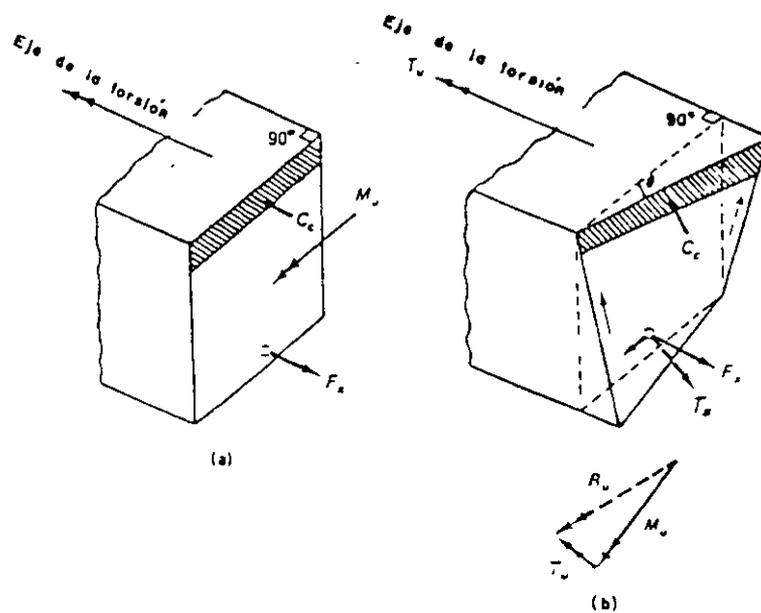


Fig. 7.7 Flexión oblicua debida a la torsión  
(a) Flexión antes de la torsión; (b) Flexión y torsión

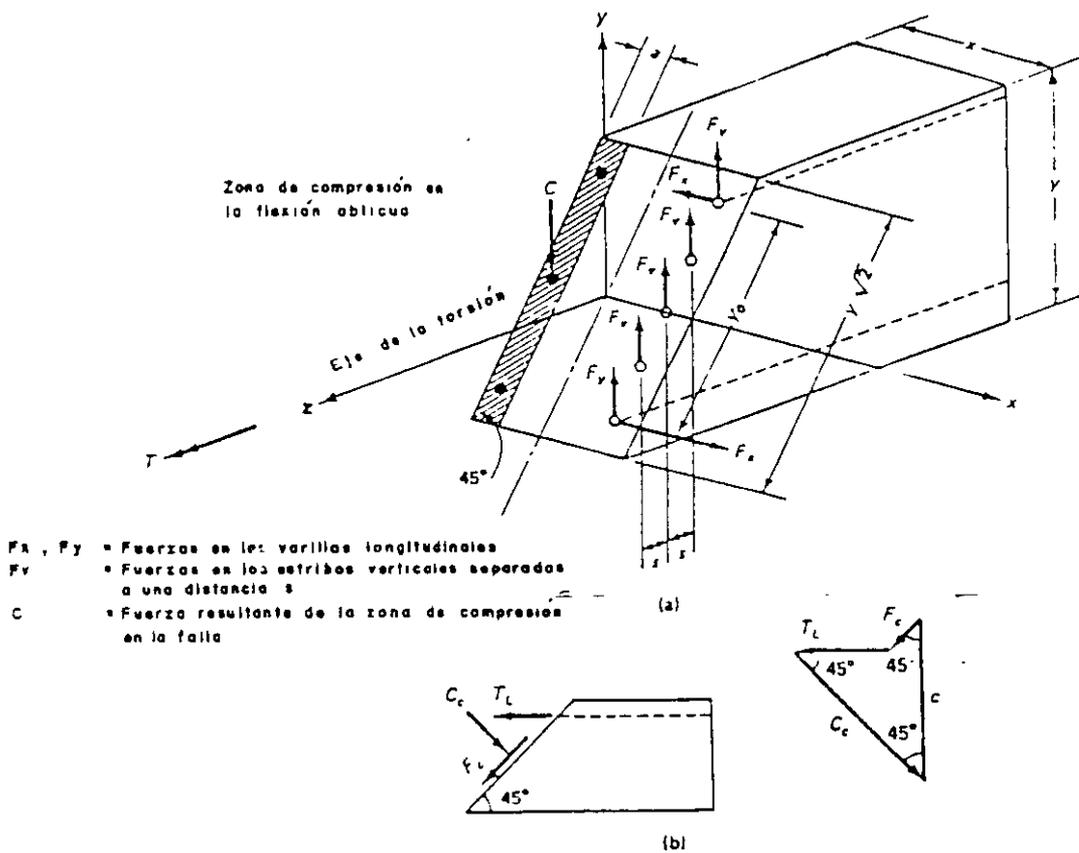
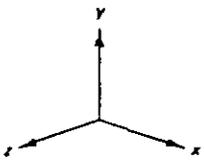
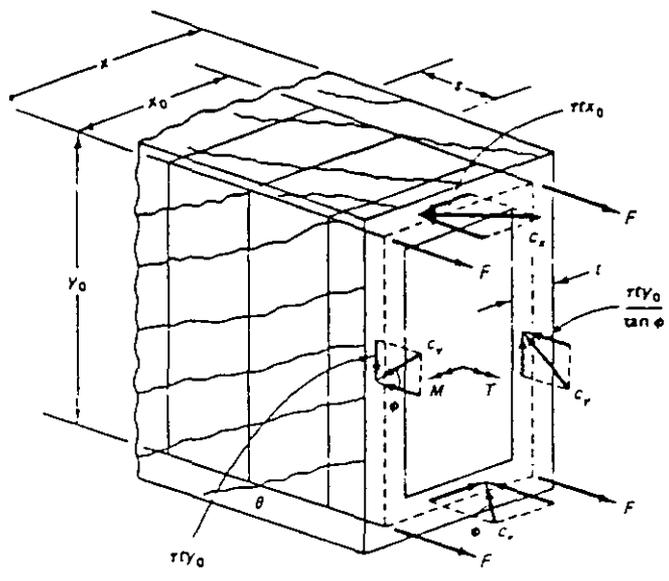


Fig. 7.8 Fuerza en los planos flexionados oblicuamente  
(a) Todas las fuerzas actúan en un plano oblicuo en la falla, (b) Fuerza vectoriales en la zona de compresión.



F = Fuerza de tensión en cada una de las varillas longitudinales  
 Cx = Fuerza inclinada de compresión en la cara horizontal  
 Cy = Fuerza inclinada de compresión en la cara vertical  
 T = Fuerza de flujo de cortante por unidad de longitud de muro

Fig. 7.9 Fuerzas en la superficie del cajón hueco de concreto mediante la analogía con la armadura

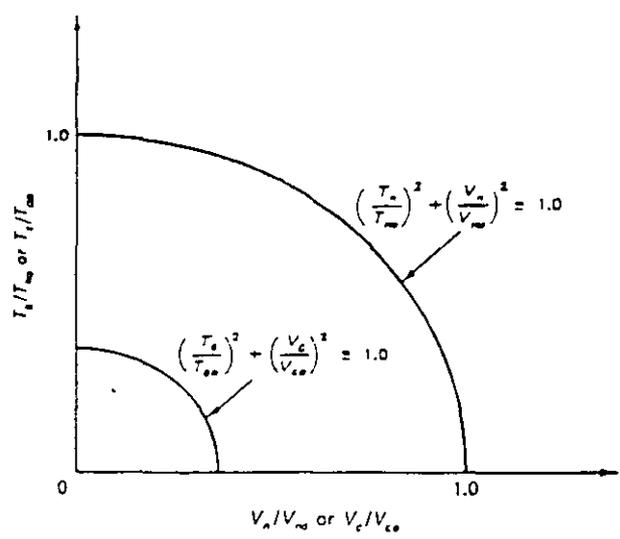


Fig. 7.10 Diagramas de interacción para la combinación de torsión y cortante

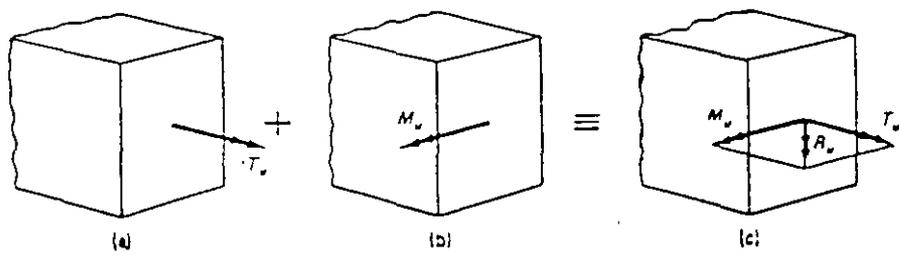


Fig. 7.11 Representación vectorial esquemática de la combinación de torsión con flexión: (a) Flexión; (b) Torsión; (c) Flexión y Torsión combinados

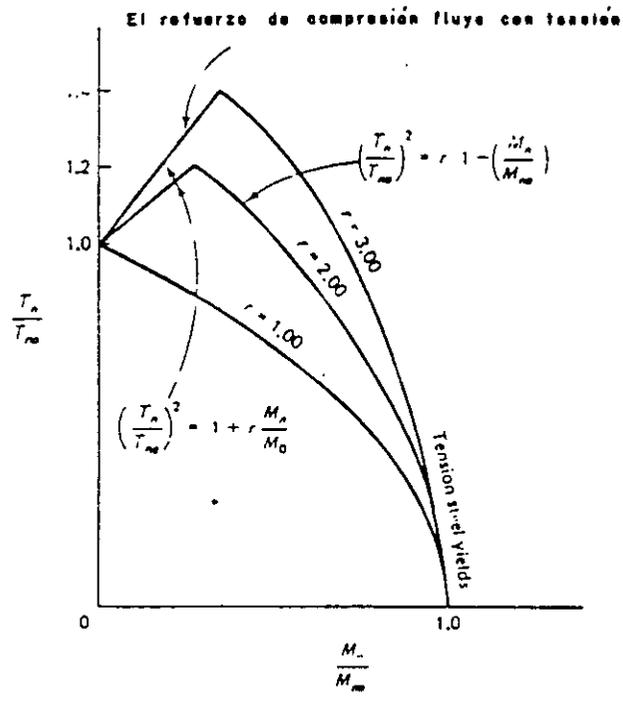


Fig. 7.12 Diagrama de interacción para combinación de torsión y flexión

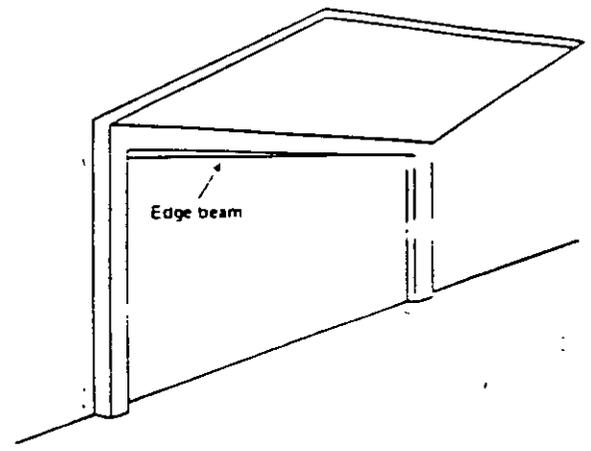
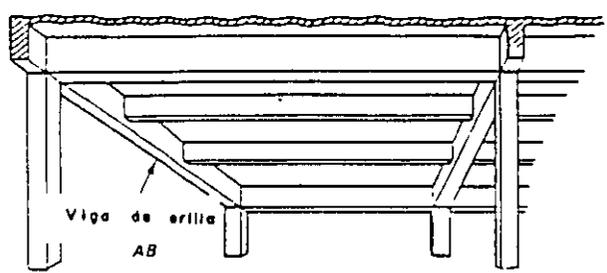
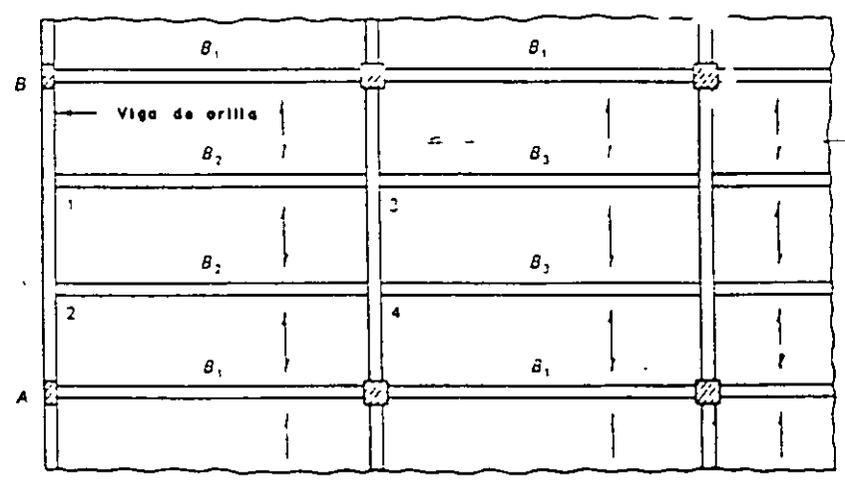


Fig. 7.13 No hay redistribución de la torsión (Torsión de equilibrio)



(a)



(b)

Fig. 7.14 Redistribución de la torsión (compatibilidad): (a) vista isométrica de un tablero de extremo; (b) Planta de un sistema en un sentido.

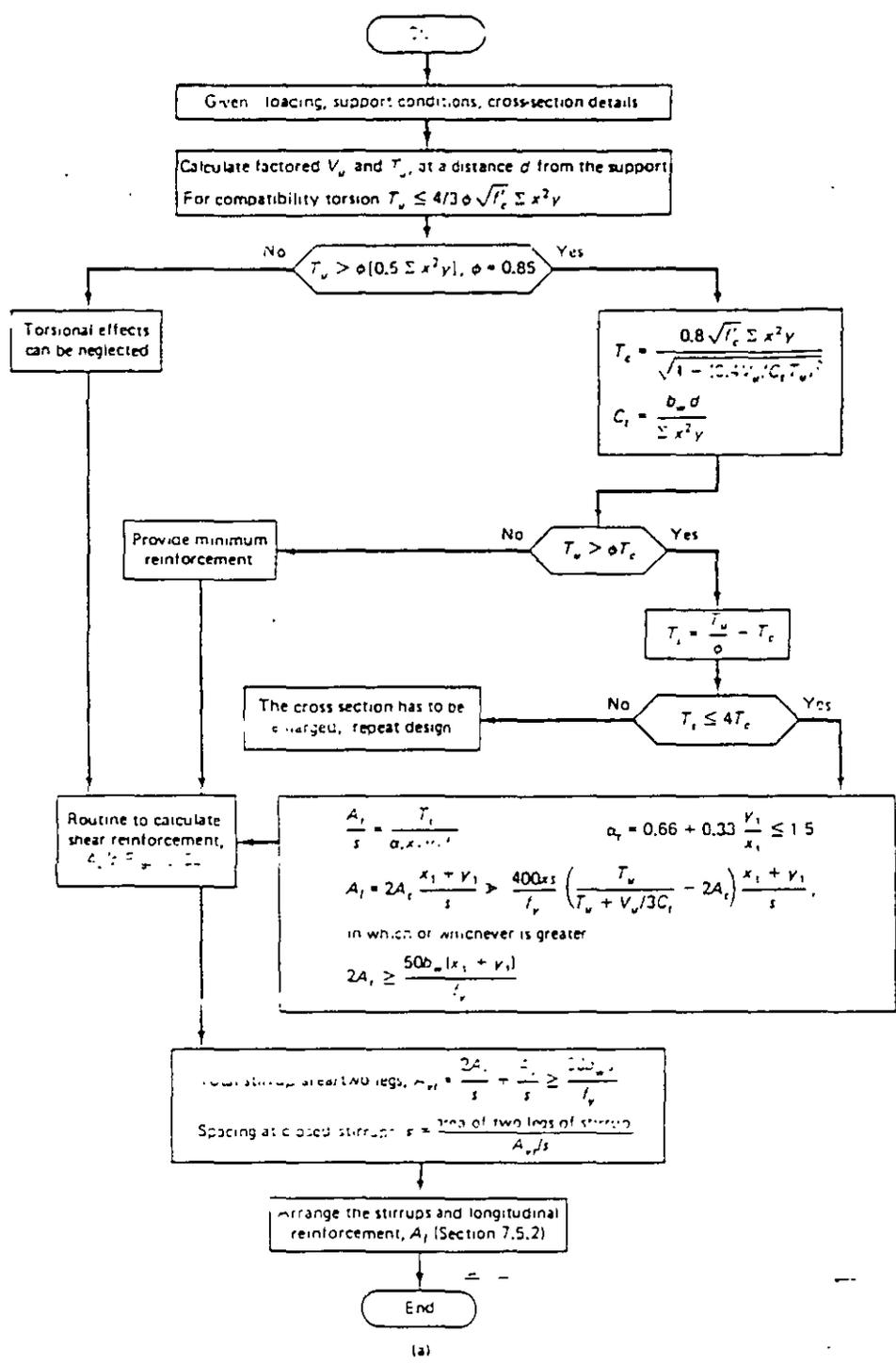


Fig. 7.15 Diagrama de flujo para diseñar el refuerzo para la combinación de cortante y torsión: (a) Acero torsional en el alma; (b) Acero para cortante en el alma.

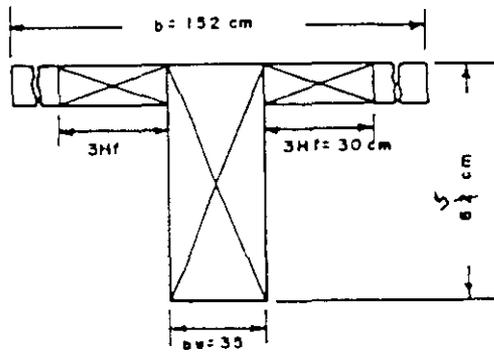
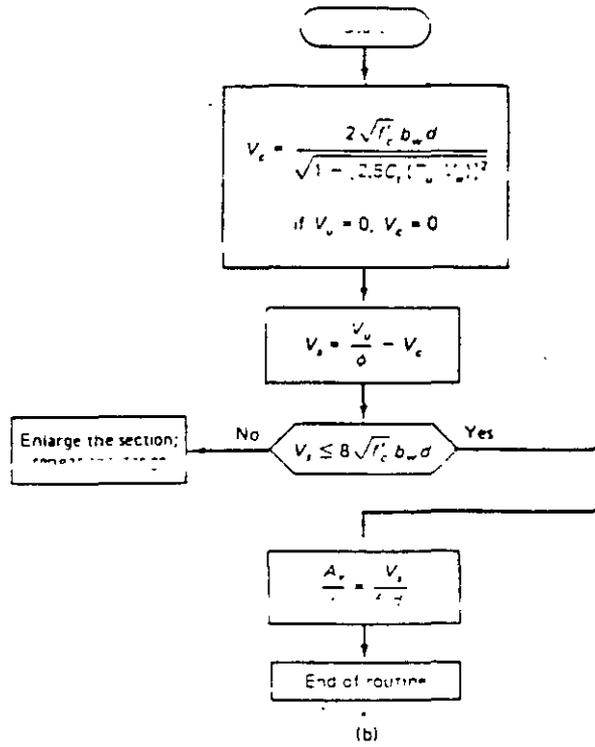


Fig. 7.16 Rectángulos componentes de una viga T.

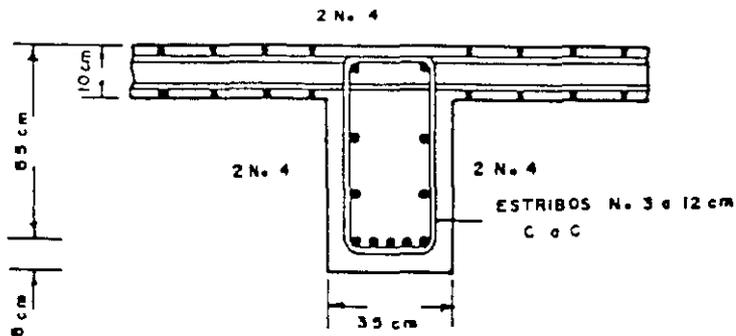


Fig. 7.17 Detalles del refuerzo en el alma, Ejemplo 7.1(a)



Photo 37 Simply supported beam prior to developing diagonal tension crack (load stage 11) (Test by Nally et al.)

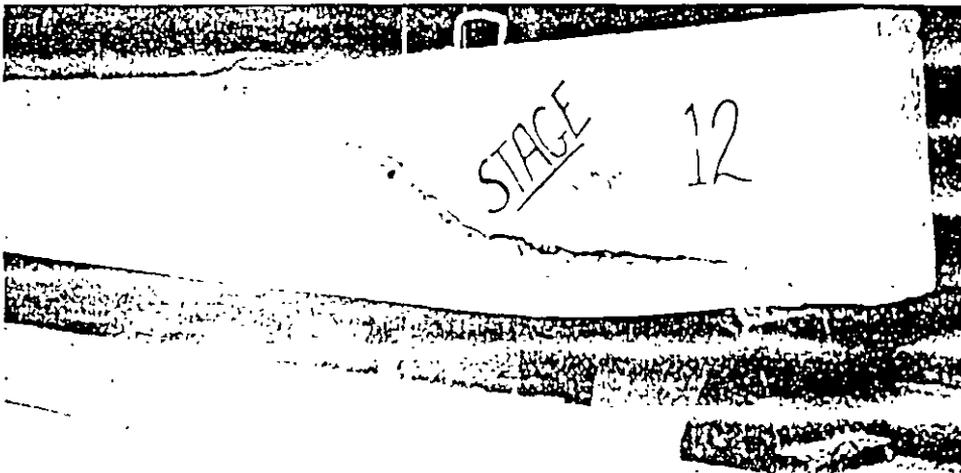


Photo 38 Principal diagonal tension crack at failure of beam in the preceding photograph (load stage 12).

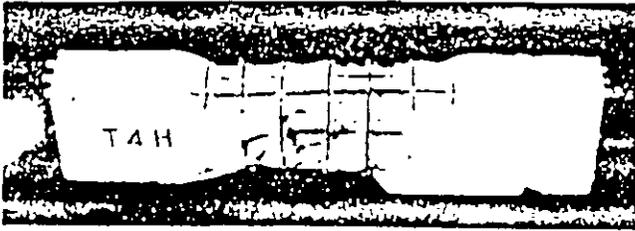


FOTO No. 40 Viga de yeso reforzada en la falla de torsión pura

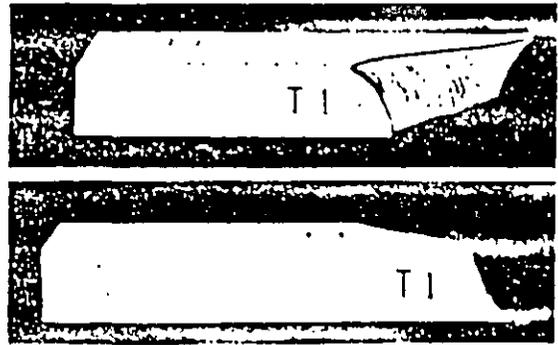


FOTO No. 41 Viga de mortero simple en torsión para (a) Vista superior; (b) Vista inferior

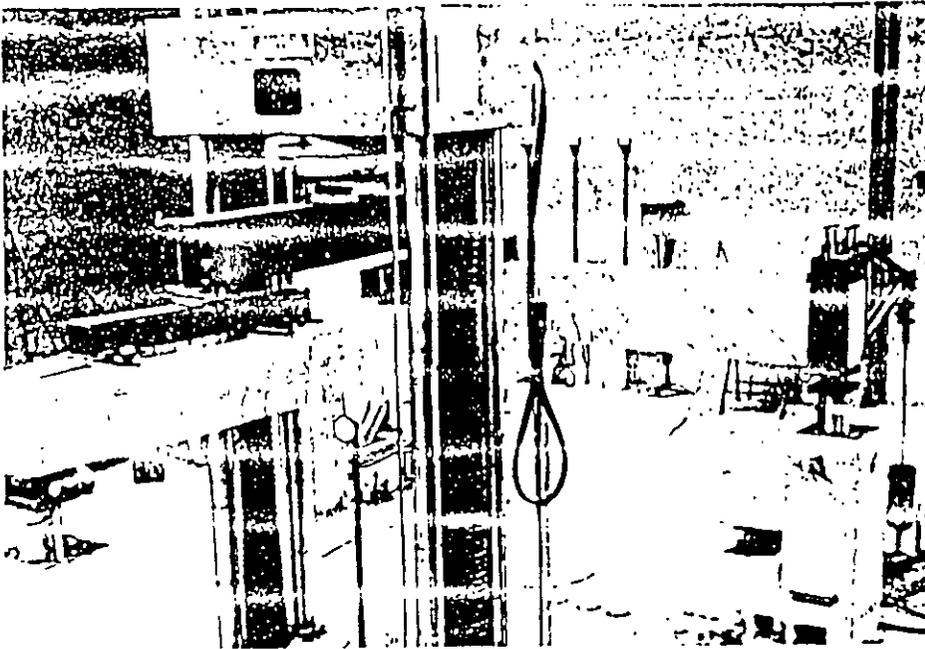


FOTO No. 42 Viga de concreto reforzado en torsión pura. Disposición para el ensayo



FOTO No. 43 Acercamiento del agrietamiento por torsión de las vigas de la fotografía anterior

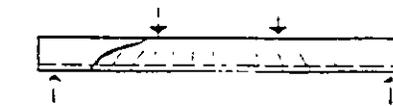
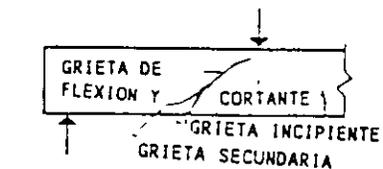
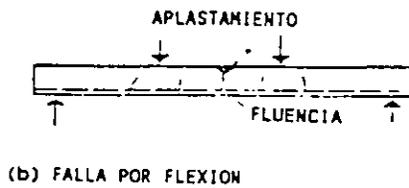
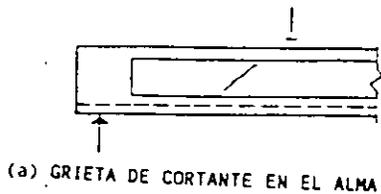


FIG. 3.1

Fig. 3.2

Tipos de Grietas Inclinadas Fallas de Vigas Esbeltas

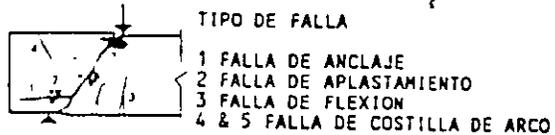
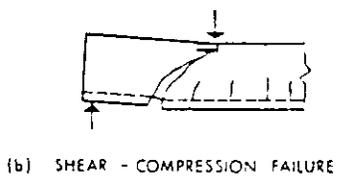
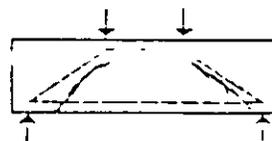
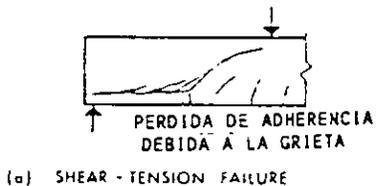


Fig. 3.3  
Fallas Típicas de Cortante en las Vigas Cortas

Fig. 3.4  
Modelos de Falla de Vigas de Gran Peralte

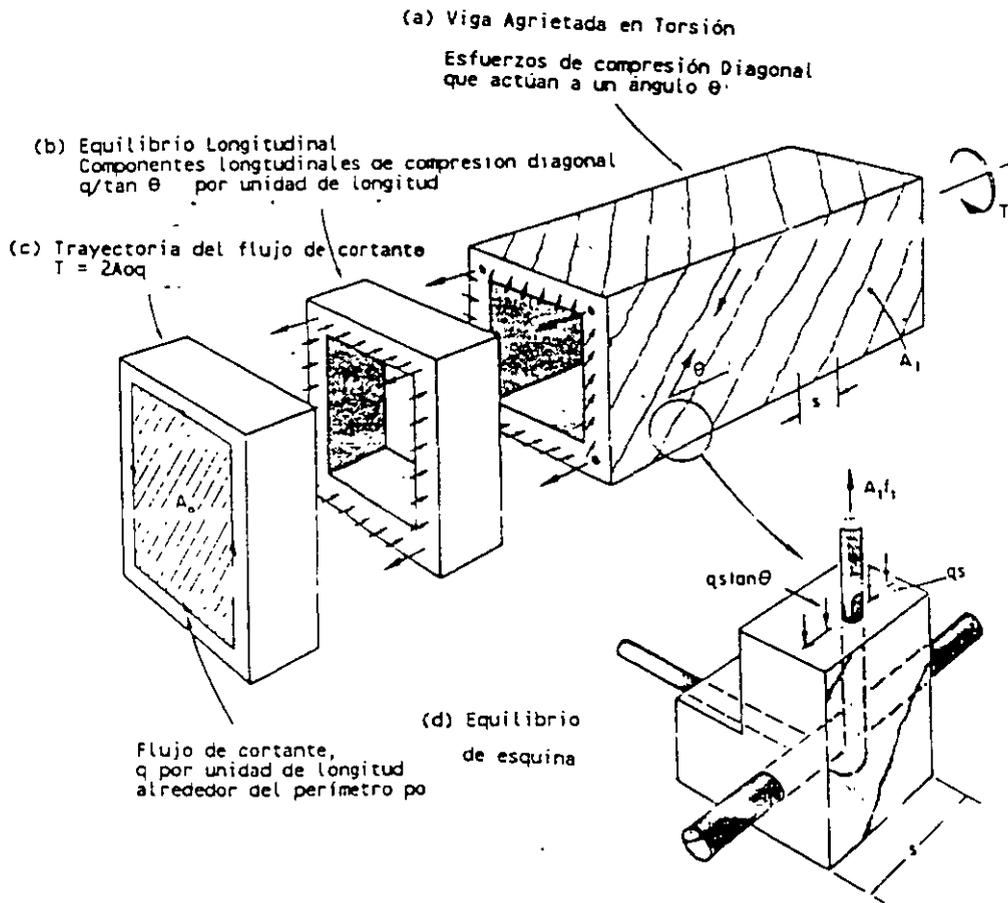
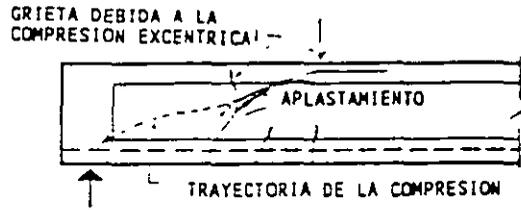
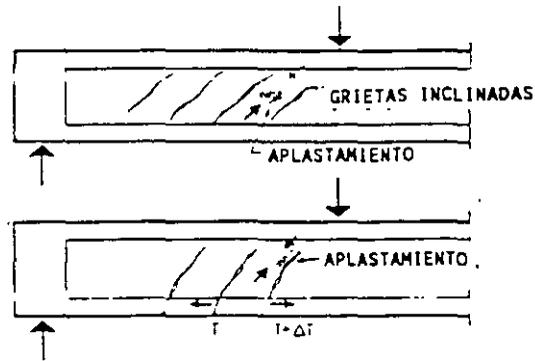


Fig. 3. Modelo de Armadura para Torsión que muestra las fuerzas que actúan en el elemento.



(a) ARCH - RIB FAILURE



(b) WEB - CRUSHING FAILURE

FIG. 3.5 Falla Típica de Cortante en las vigas I

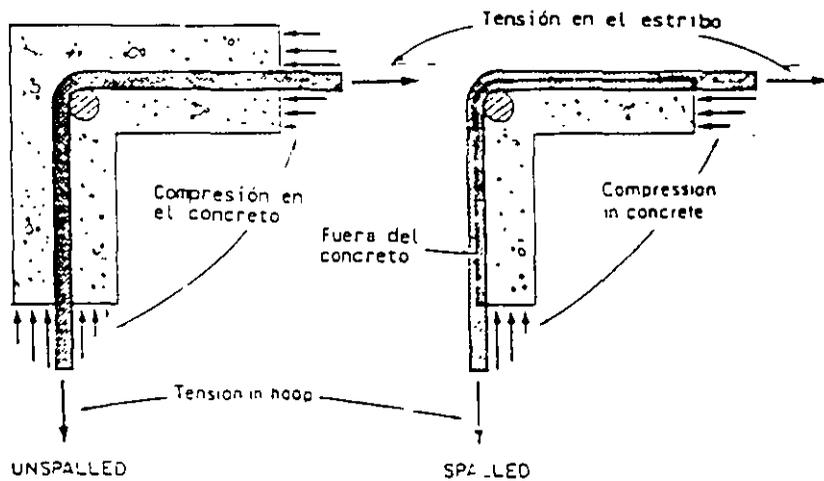


Fig. 4. Descascaramiento del recubrimiento del concreto debido a la torsión.

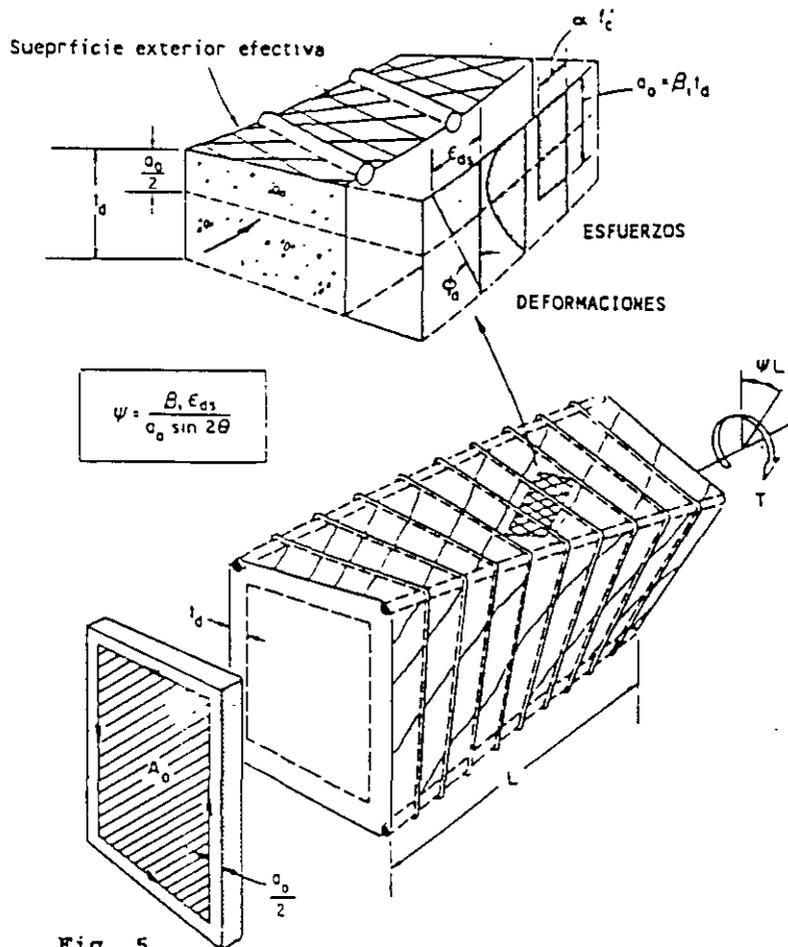


Fig. 5. Espesor efectivo de la pared de un miembro en torsión.

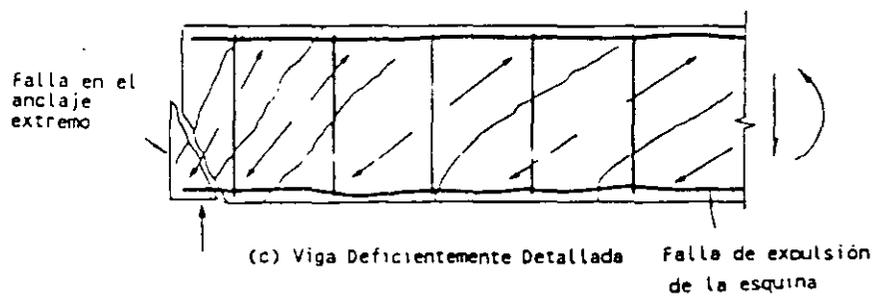
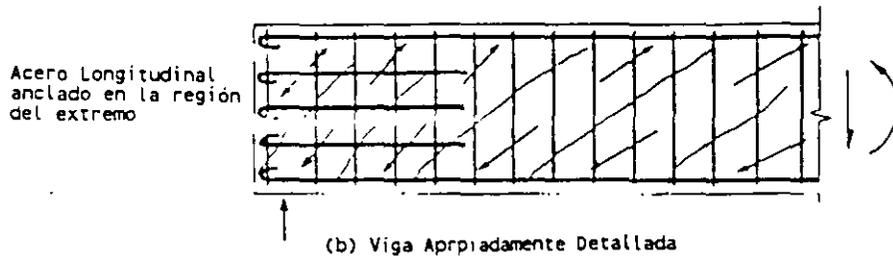
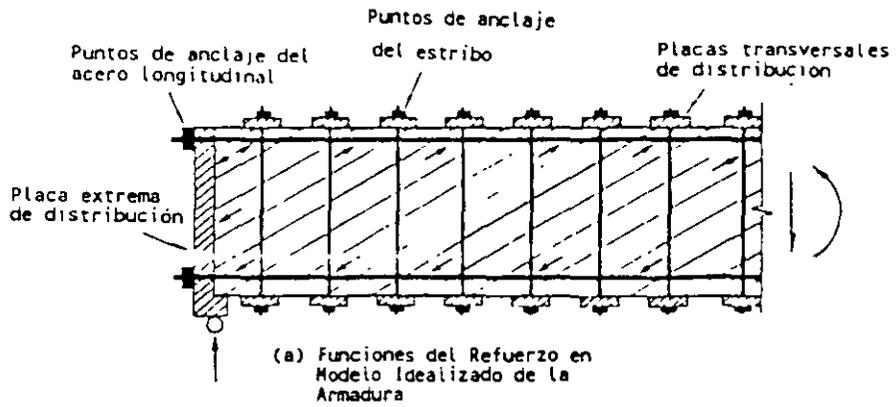


Fig. 18. Consideraciones de detallado para una viga sujeta a cortante y/o torsión.

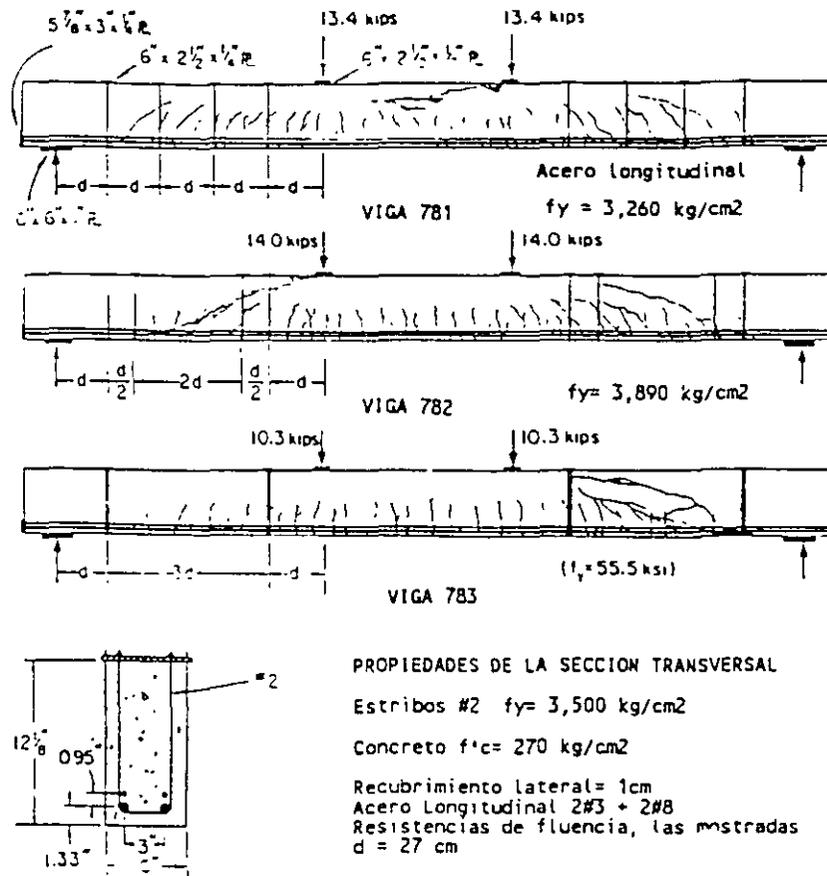


Fig. 20.  
Tres vigas con separaciones grandes de los estribos.

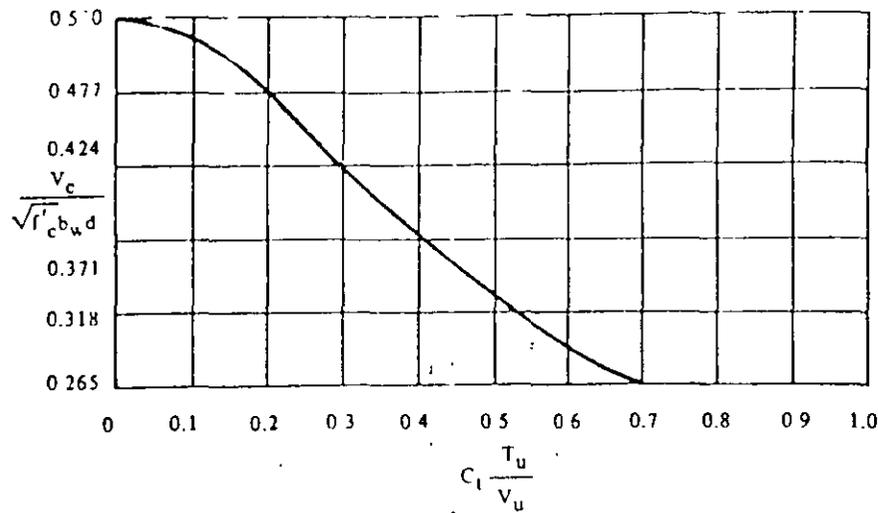


Fig. 13.6 Variación de  $V_c / \sqrt{f'_c} b_w d$  con la relación  $C_i T_u / V_u$ , según la ecuación 11.5.

En la figura 13.7 se ilustran diversos tipos de distribución del refuerzo por cortante, de acuerdo con las secciones 11.5.1.1 y 11.5.1.2.

11.5.5 Refuerzo mínimo por cortante

En general, todos los elementos de concreto sujetos a flexión deben tener una cantidad mínima de refuerzo por cortante, excepto para losas y zapatas, nervaduras y vigas anchas de poco peralte (sección 11.5.5.1) Para elementos no presforzados se calcula el refuerzo mínimo por cortante requerido a partir de:

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} \quad \text{ecuación 11.14}$$

La esencia de la ecuación 11.14 consiste en que, cuando se utiliza el refuerzo mínimo por cortante, la resistencia total al cortante de una sección es  $V_c + 3.5 b_w d$ .

EJEMPLO 13.1 Diseño por cortante: Elementos sometidos solamente a cortante y flexión

Determinar el tamaño y la separación de los estribos verticales en U, para una viga simplemente apoyada, con un claro de 9.14 m.

$$b_w = 33 \text{ cm}$$

$$f_c = 211 \text{ kg/cm}^2$$

$$w_u = 6.7 \text{ t/m}$$

$$d = 51 \text{ cm}$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

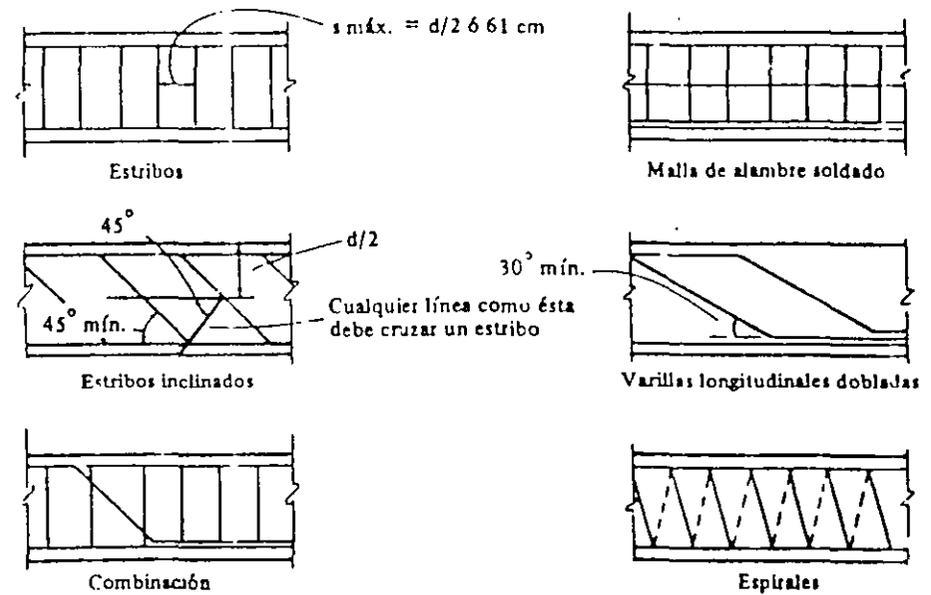


Fig. 13.7 Tipos y distribución del refuerzo por cortante.

Cálculo y análisis

Referencia en el Reglamento

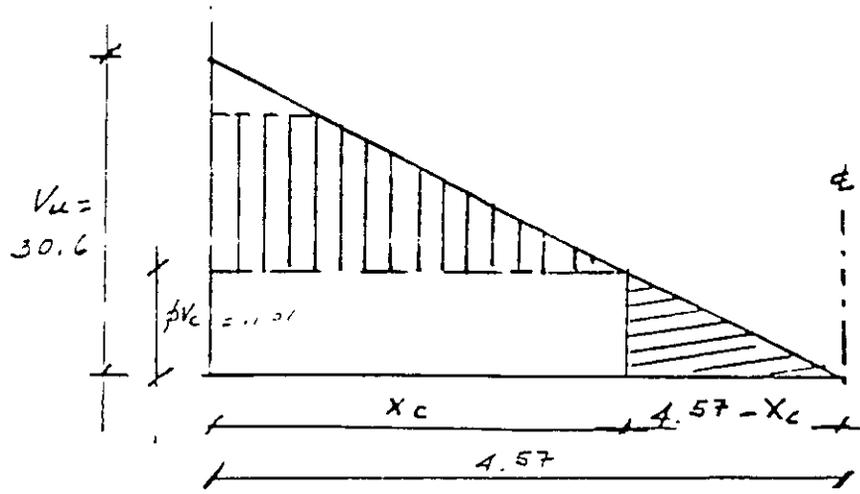
Para este ejemplo, se supone que la carga viva está fija, de tal modo que el cortante de diseño en el centro del claro es igual a cero. (Se obtiene un cortante de diseño mayor que cero si se considera una carga viva parcial sobre el claro.)

1. Determinar las fuerzas cortantes factorizadas @ apoyo:  $V_u = 6.7 \times 4.57 = 30.6$  ton. @ distancia  $d$  del apoyo:  $V_u = 30.6 - 6.7 \times 0.51 = 27.2$  ton. 11.1.2.1

2. Determinar la resistencia al cortante proporcionada por el concreto.

$$\phi V_c = \phi 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{ecuación 11.13}$$

$$= 0.85 \times 0.53 \sqrt{211} \times 33 \times 51 = 11.013 = 11.01$$



Por comparación de  $\Delta$ s semejantes:

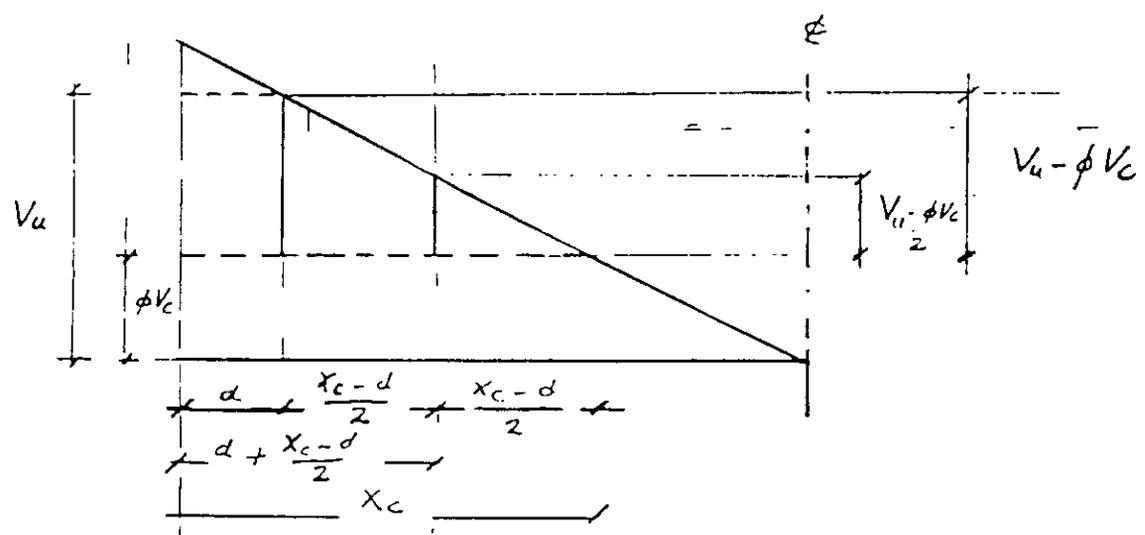
$$\frac{4.57 - X_c}{4.57} = \frac{\phi V_c}{V_u}$$

$$4.57 - X_c = 4.57 \left( \frac{\phi V_c}{V_u} \right); \quad 4.57 \left( 1 - \frac{\phi V_c}{V_u} \right) = X_c$$

$$X_c = 4.57 \left( 1 - \frac{11.01}{30.6} \right) = 2.93 \text{ m}$$

En la misma forma se puede determinar  $X_m$

$$X_m = 4.57 \left( 1 - \frac{\phi V_c / 2}{V_u} \right) = 4.57 \left( 1 - \frac{5.50}{30.6} \right) = 3.75 \text{ m}$$

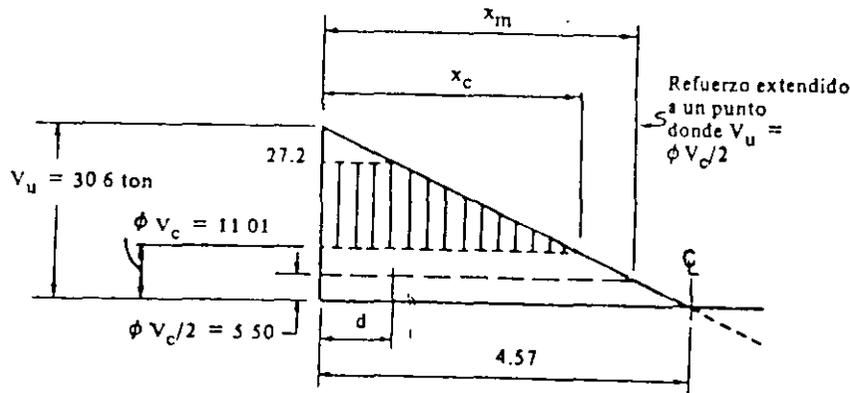


3. Determinar la distancia  $x_c$  desde el apoyo, más allá de la cual el concreto puede soportar el cortante total.

Del dibujo  $(4.57 - x_c)/4.57 = \phi V_c/V_u$  en el apoyo  
 $\therefore x_c = 4.57 [1 - (\phi V_c/V_u)] = 4.57 [1 - (11.01/30.6)] = 2.93 \text{ m}$

4. Determinar la distancia  $x_m$  desde el apoyo hasta donde sea preciso proporcionar refuerzo mínimo por cortante (es decir, hasta  $V_u = \phi V_c/2$ ). 11.5.5.1

$$x_m = 4.57 [(30.6 - 5.50)/30.6] = 3.75 \text{ m}$$



5. Determinar la separación requerida de los estribos en U.

$$s \text{ (requerida)} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c) \quad \text{Comentarios sección 11.5.6}$$

Suponiendo estribos en U del # 4 ( $A_v = 2.58 \text{ cm}^2$ ) apéndice F @ distancia  $d$  del apoyo:

$$s \text{ (requerida)} = 0.85 (2.58) 2.8 (51) / (27.2 - 11.01) = 19.4 \text{ cm}$$

Puesto que  $(V_u - \phi V_c)$  varía linealmente entre  $x = d$ ,  $x = x_c$  y la separación requerida varía inversamente con  $(V_u - \phi V_c)$ , la separación requerida en cualquier sección entre esos dos puntos se puede obtener directamente del valor  $s$  (requerido), correspondiente a  $x = d$ . Por ejemplo, en la sección:

$$x = d + [(x_c - d)/2] = 1.72 \text{ m del apoyo}$$

$$s \text{ (requerida)} = 19.4/0.5 = 38.8 \text{ cm}$$

6. Verificar la separación máxima permisible de los estribos.

$$s \text{ (máx)} \text{ de los estribos verticales} \leq d/2 = 25.5 \text{ cm} \quad 11.5.4.1$$

$$\text{o también } \leq 61 \text{ cm}$$

$s$  (máx) de los estribos en U del # 4 correspondiente a los requerimientos mínimos de áreas de refuerzo

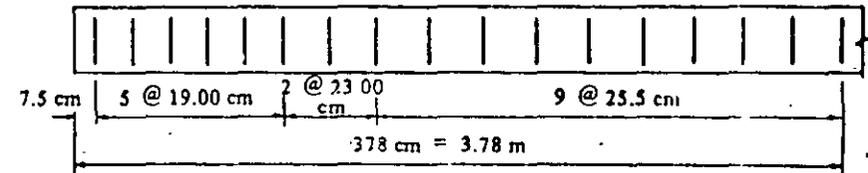
$$s \text{ (máx)} = A_v f_y / 3.5 b_w = 2.58 (2810) / 3.5 \times 33 \quad \text{ecuación 11.14}$$

$$= 63 \text{ cm}$$

$$\therefore s \text{ (máx)} = 25.5 \text{ cm}$$

Resumen

Separación de los estribos utilizando estribos en U del # 4:



6 estribos @ 19.00 cm

2 estribos @ 23.00 cm

9 estribos @ 25.5 cm

EJEMPLO 13.2 Diseño por cortante con tensión axial

Determinar la separación que se requiere para estribos verticales en U, para una viga sometida a tensión axial.

$$f'_c \neq 253 \text{ kg/cm}^2 \text{ (concreto ligero con arena; no se especifica } f'_c)$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_d = 6.01 \text{ ton-m}$$

$$M_g = 4.42 \text{ ton-m}$$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**REQUISITOS DE DUCTIBILIDAD PARA  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

$$\Sigma A_v \geq 0.3 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$$\Sigma A_v \geq 0.19 \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$\Sigma A_v$  = suma de áreas de todas las ramas de estribos en la dirección considerada

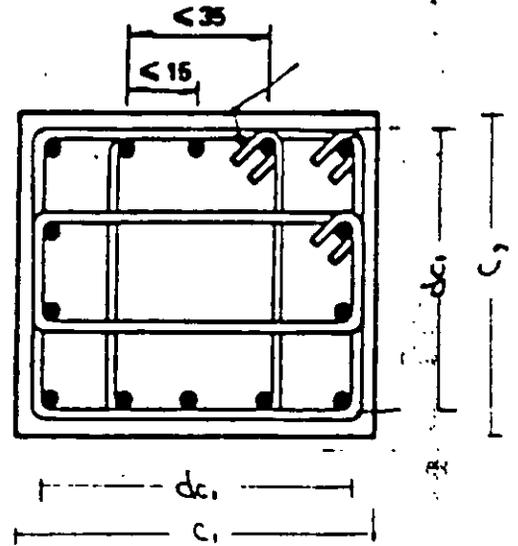
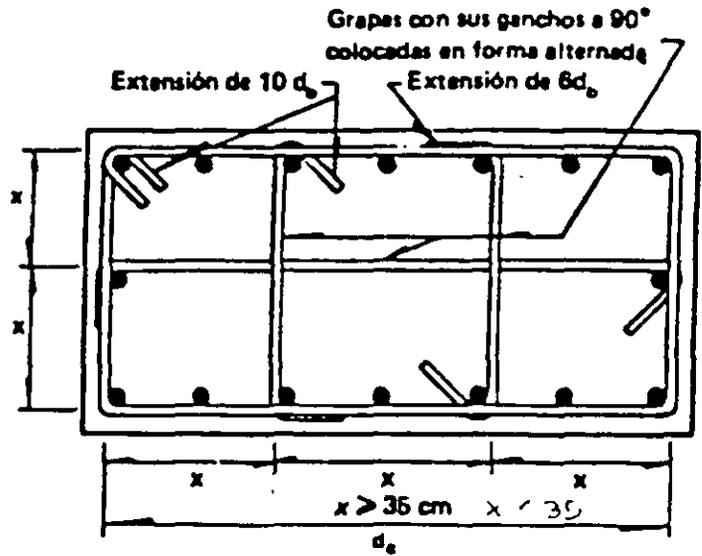
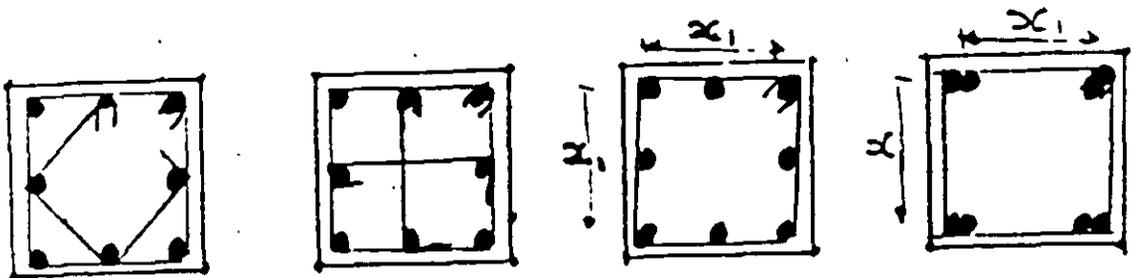


Fig. 10.10 Requisitos de distribución de refuerzo en columnas de estribos.



10  
 Figura 9.9 Combinaciones de estribos y grapas admisibles para confinamiento de columnas, según el Reglamento ACI 83.



No son aconsejables  
 Admisibles si  $x_1 \leq 30$

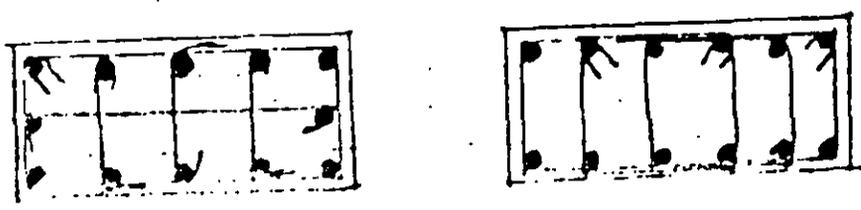
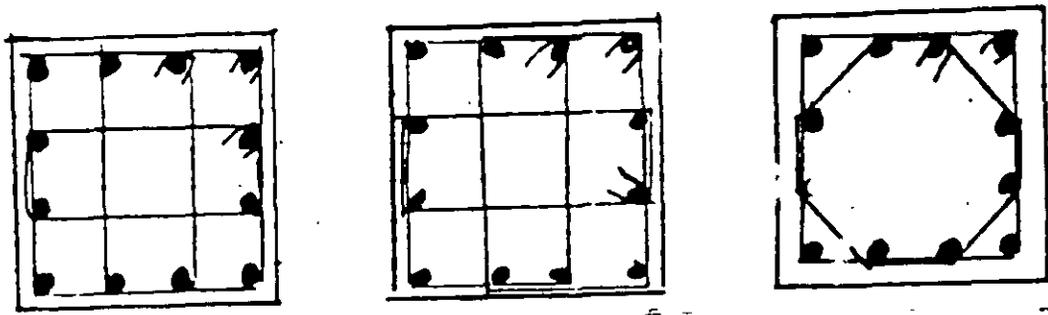
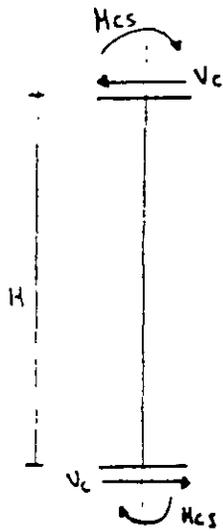


Fig. 9.10 - Arreglos admisibles de refuerzo en columnas de concreto confinadas con estribos de concreto

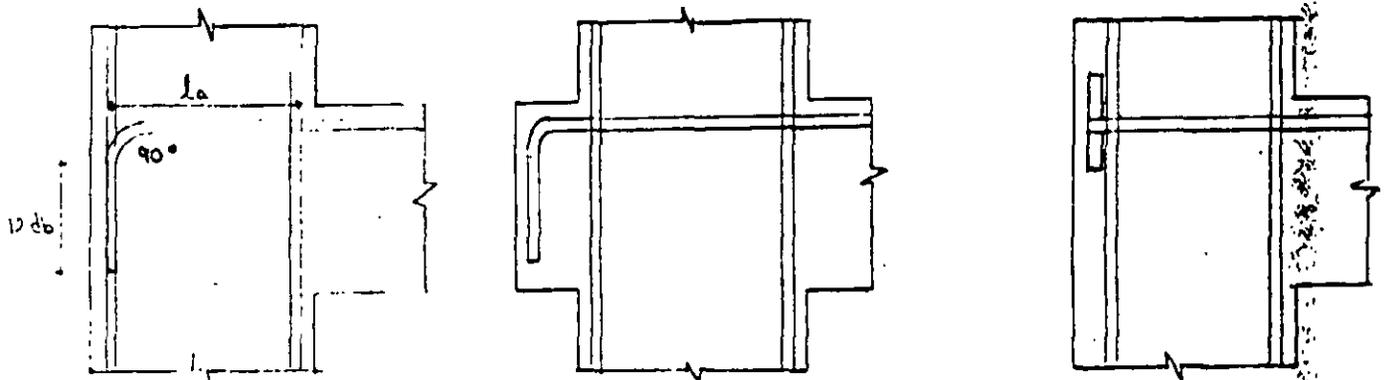


$$V_c = \frac{M_{cs} + M_{cs}}{H}$$

$$M_c \geq 1.5(\Sigma M_u)$$

- En el extremo inferior de columnas de planta baja, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente.
- En el extremo superior de columnas del último entrepiso se usará  $1.5 \Sigma M_u$ .

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por cortante de las columnas de marcos dúctiles.



$$l_d \geq \begin{cases} \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}} \\ 15 \text{ cm} \\ 8 d_b \end{cases}$$

NOTA: 30% menor en concreto ligero

a) Anclaje con gancho extremo

b) Viga con saliente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria

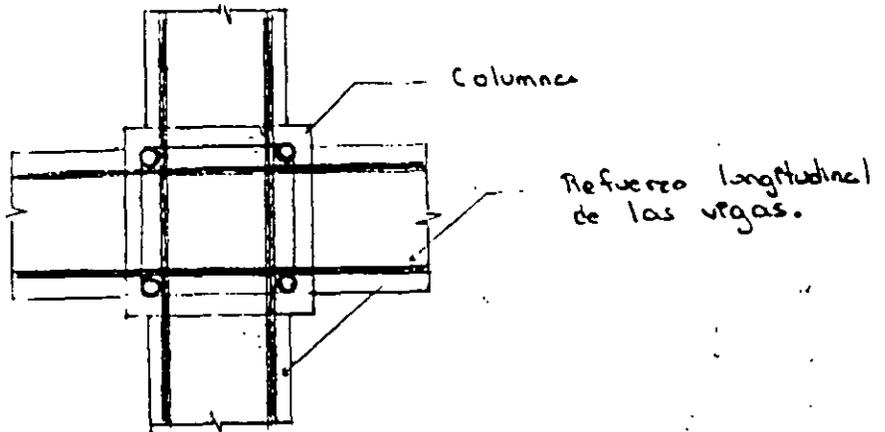
c) Anclaje mecánico

Fig. 10.15 Anclaje del refuerzo longitudinal en Vigas extremas de marcos dúctiles.

# UNION VIGA-COLUMNA

## Marcos Dúctiles

### 1) Requisitos generales

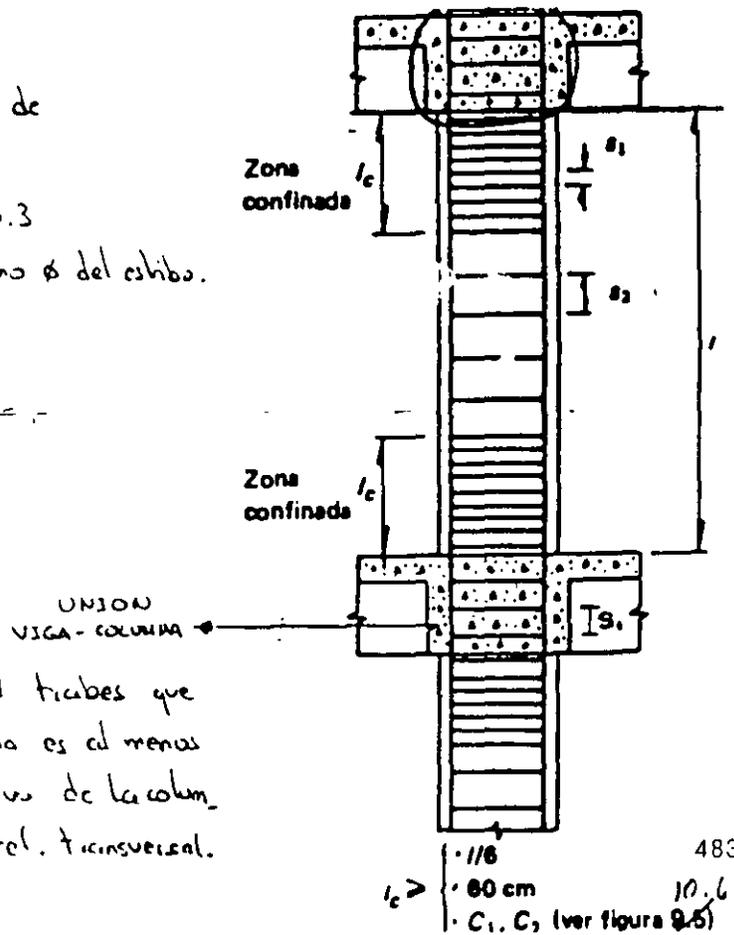


El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

### 1b) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el #2
- Las espigas deben ser una vez de  $\phi \geq \text{No. 3}$
- Puede sustituirse con grupos del mismo  $\phi$  del estibo.

$$s_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\text{min}} \\ 10 \text{ cm.} \end{cases}$$

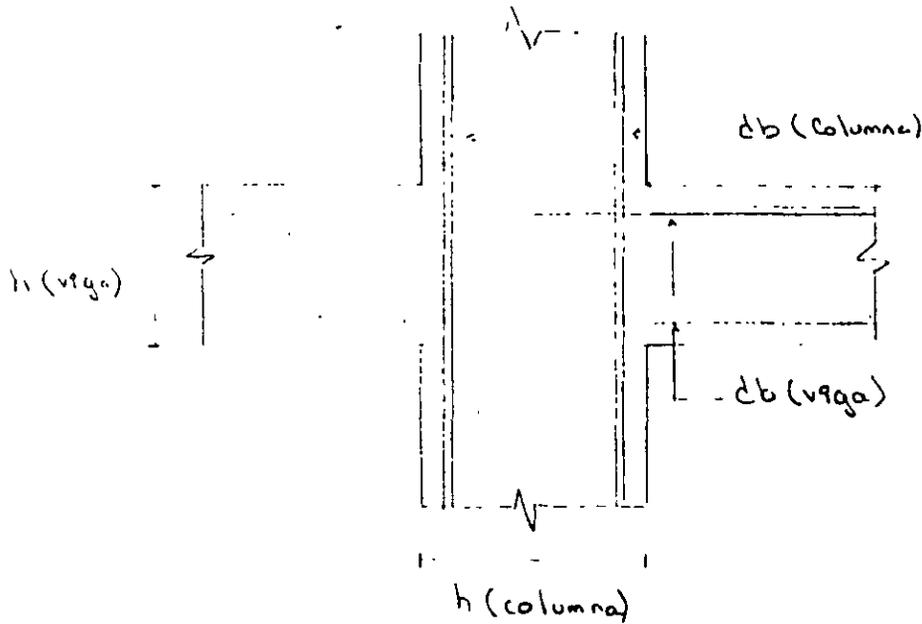


Si el núcleo está confinado por 4 tiras que lleguen a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del ref. transversal.

$$\frac{P_u}{A_g f'_c} \geq 0.3$$

Entonces:  $h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

NOTA: También esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.



#### GENERALES.

Como de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que los usados en la columna en las secciones próximas a dicha sección, Si igual que en la zona de confinamiento).

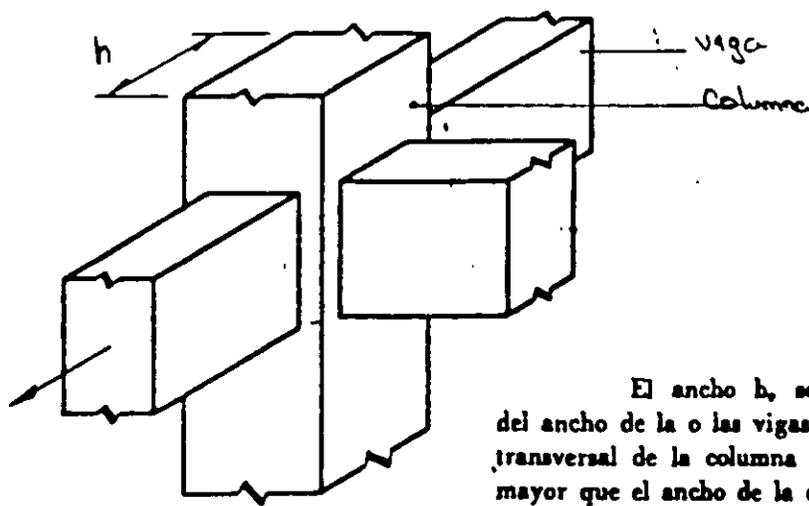
Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torsiones causados por la excentricidad.

c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

$$V_u = 0.5 F_u \sqrt{F_c^2} b_e h$$

$$V_u = 0.5 F_u \sqrt{F_c^2} b_e h$$



El ancho  $b_e$  se tomará igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero no mayor que el ancho de la o las vigas más  $h$ .

d) Ancho del refuerzo

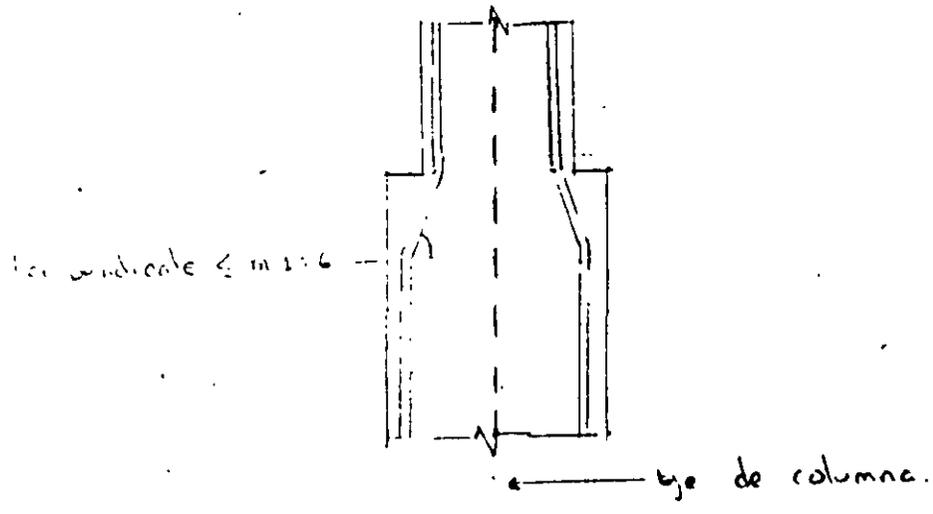
Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen verticales a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

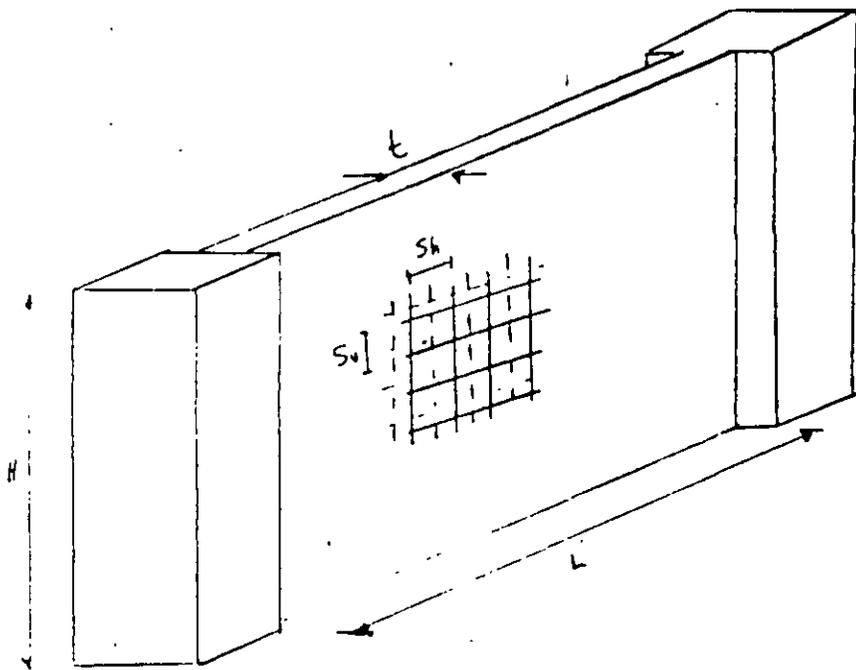
$$h(\text{col})/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 20$$

$h(\text{col.})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas.

Es en la columna superior del nudo cumple:





Limitaciones geométricas

$$L/t \leq 70$$

$$t \geq \begin{cases} 13 \text{ cms.} \\ 0.06 H \text{ (a Hacia no restrin} \\ \text{gida lateralmente).} \end{cases}$$

Refuerzo mínimo

$$P_v, P_h \geq 0.0025$$

$$S_v, S_h \leq 35 \text{ cm.}$$

$$P_h = \frac{A_{sh}}{t S_v}$$

$$P_v = \frac{A_{sv}}{t S_h}$$

Fig. 10.18 Requisitos geométricos y de refuerzo en muros de concreto

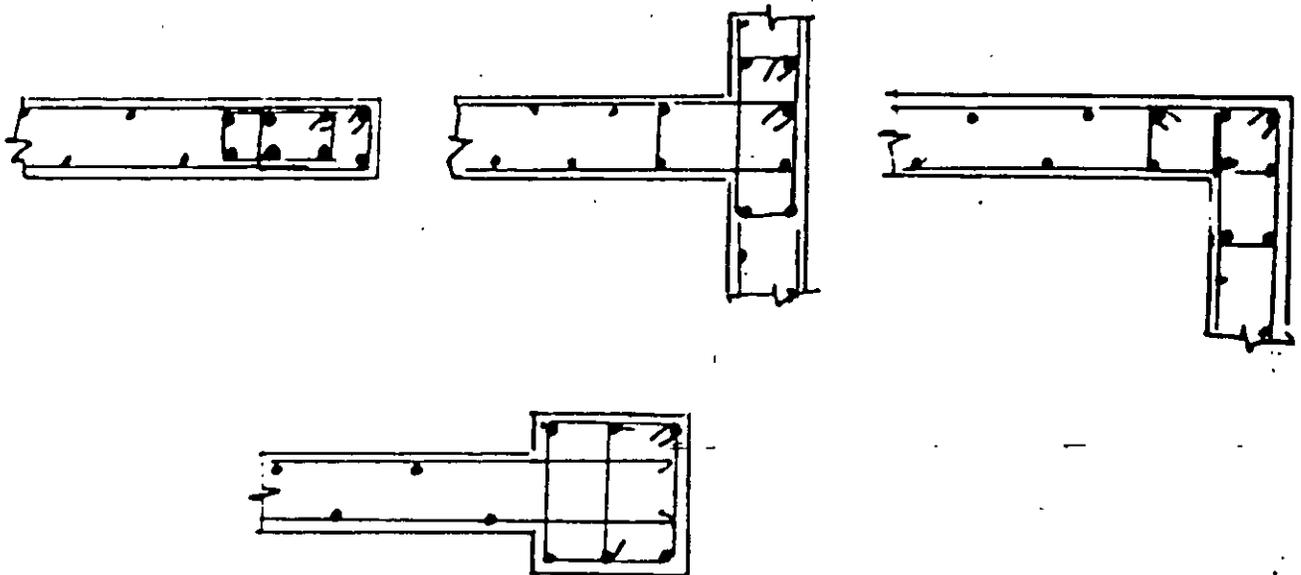
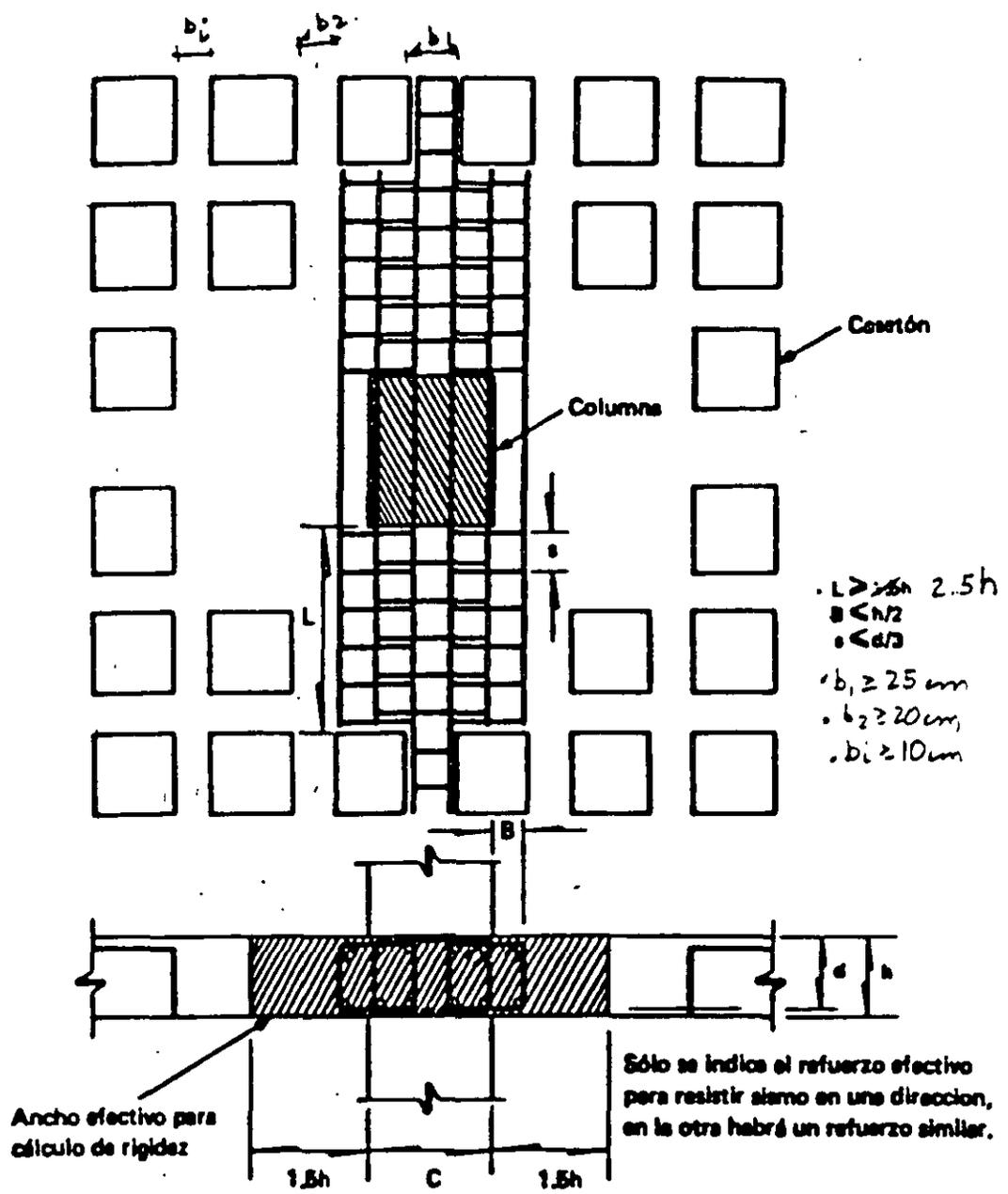


Fig. 10.14 Refuerzo en los extremos de muros



$n(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20$      $h(\text{columna}) = e$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.  
 $h(\text{losa})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losa-plano-columna

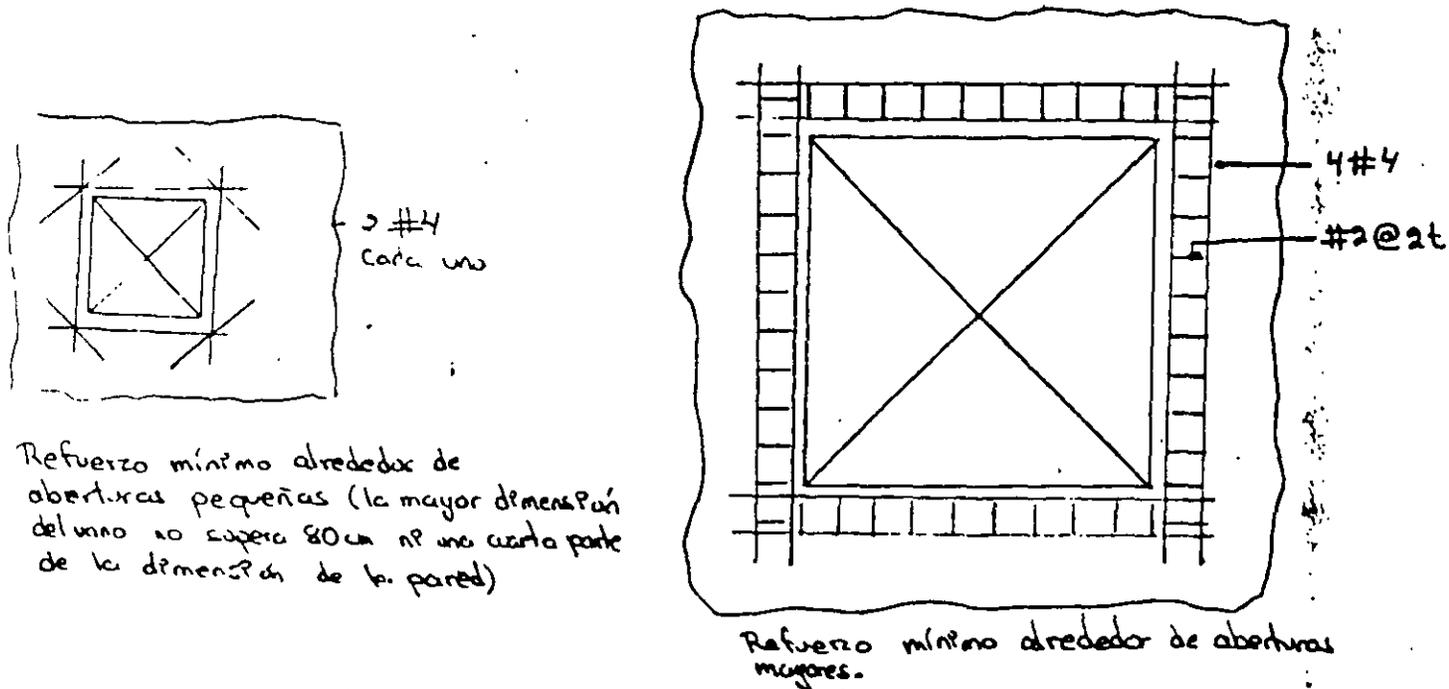


Fig. 10.20 Detalles recomendados de refuerzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

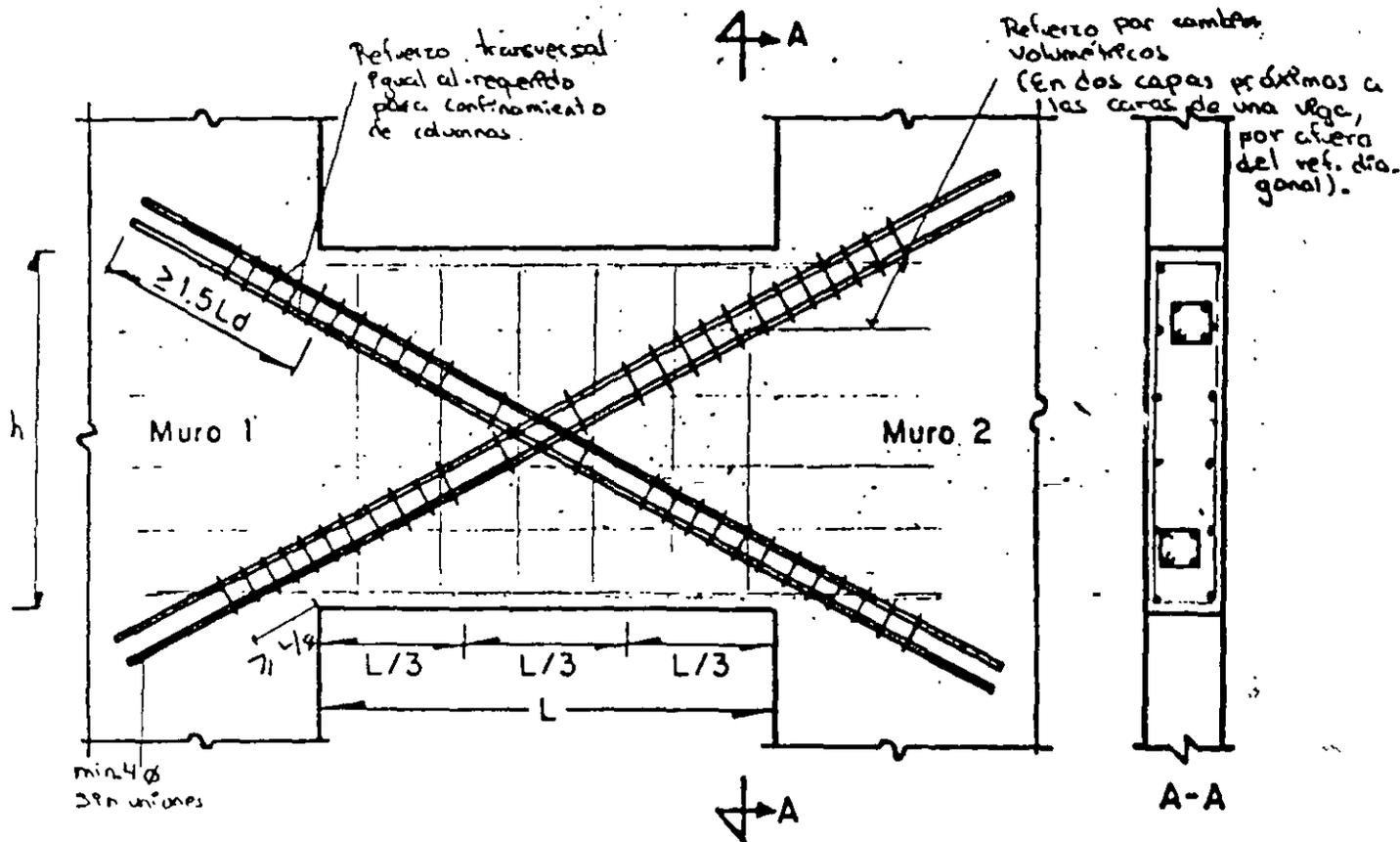
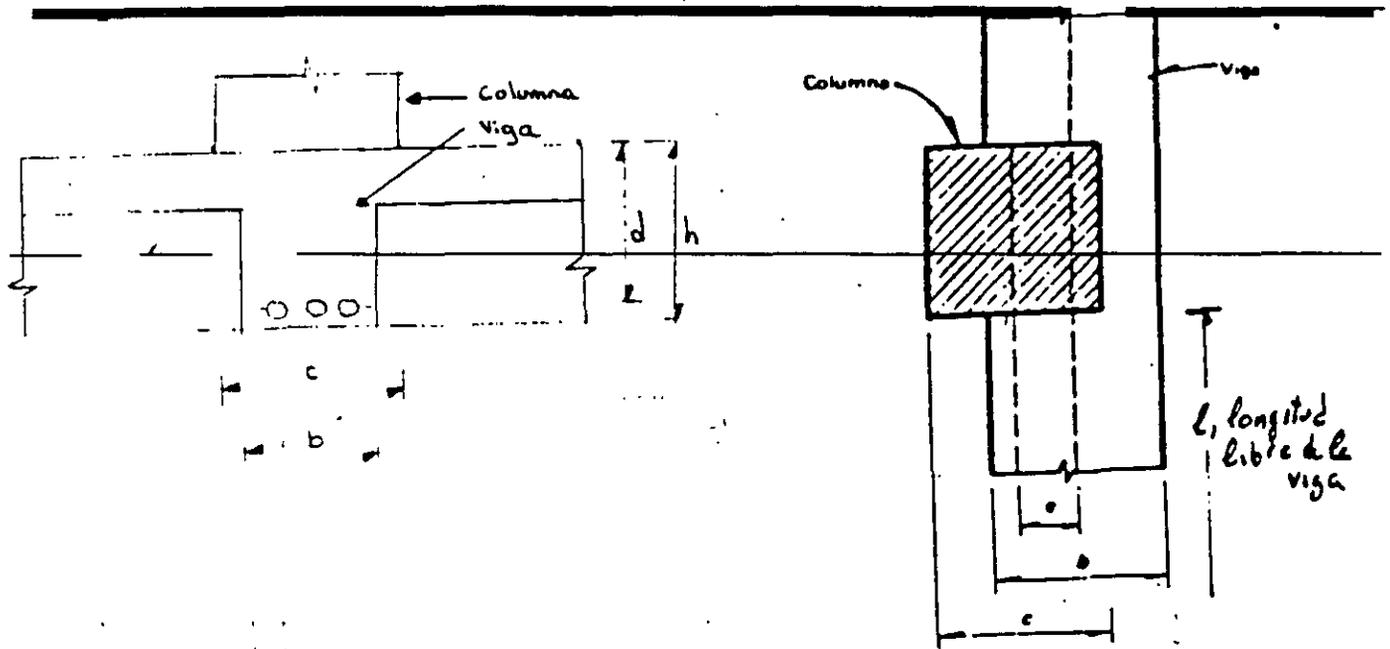


Fig. 10.21 Refuerzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto (para  $L/h \leq 2$ )



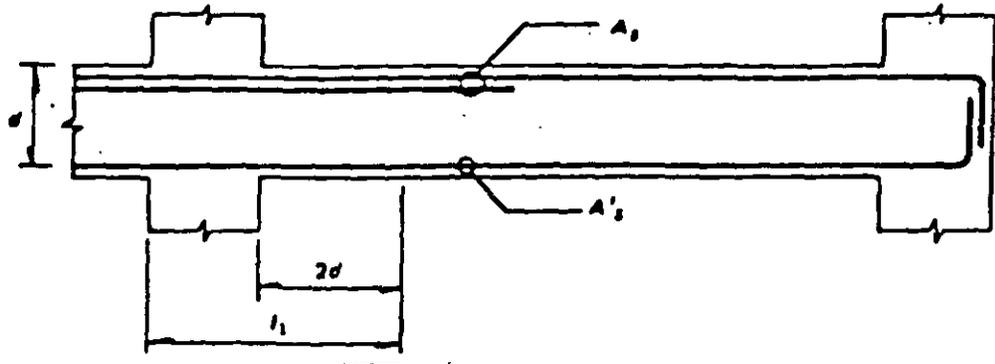
a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$\begin{array}{lll}
 b \geq 25 \text{ cm} & b \leq c & h/b \leq 3 \\
 e \leq 0.1c & l/b \leq 30 & l/d \geq 4
 \end{array}$$

Requisitos generales = para vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

$A_s$  y  $A'_s \geq 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd$  , en zonas donde aparezcan tensiones

$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb}$  (área de refuerzo correspondiente a falla balanceada)

b) Requisitos para marcos dúctiles

$A_s, A'_s \geq 0.7(\sqrt{f'_c}/f_y)bd$ , en toda la longitud de la viga

$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb}$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambos lechos

No se admiten paquetes de más de dos barras

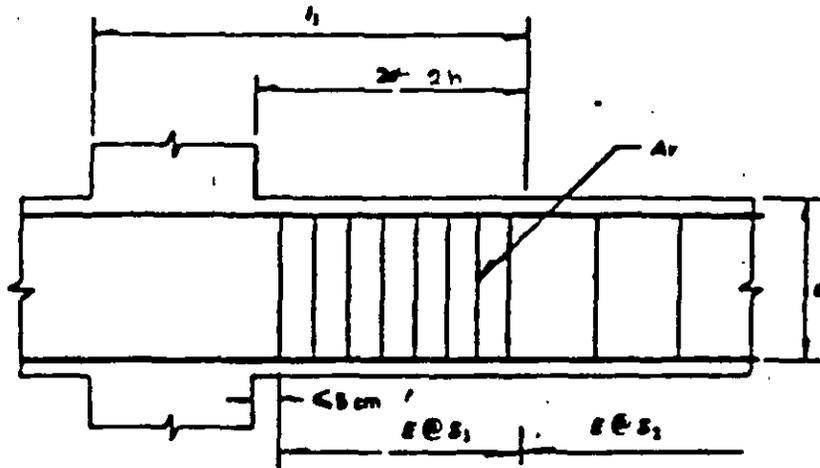
El momento resistente positivo en  $L_1$  no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en  $L_1$

Todo el refuerzo de tensión,  $A_s$ , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de marcos de concreto.



### a) Requisitos generales

No se tendrá en cuenta estribos:

- que formen un ángulo con el eje de la pieza  $< 45^\circ$
- Ni barras dobladas en que dicho ángulo sea  $< 30^\circ$

Suministrar refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando

si  $V_u < V_{cr}$ ,  $\phi \geq \#2$  @  $0.5d$  (Se colocará a partir de toda unión de viga con columna o muro hasta  $0.25$  del dero correspondiente).

si  $V_u > V_{cr}$ , 
$$s = \frac{F_r A_s f_y d (\text{Sen} \theta + \text{Cos} \theta)}{V_u - V_{cr}} \leq \frac{F_r A_s f_y}{3.5 b}$$

NOTA: en secciones circulares se cambia  $d$  por el diámetro.

$$s \geq 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} V_{cr} \leq V_u \leq 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} & - s \leq 0.6d \\ 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} < V_u & s \leq 0.25d \end{aligned}$$

En ningún caso se permitirá que  $V_u > 2 F_r b d \sqrt{f_c'}$

Cuando el refuerzo conste de 1 solo estribo o grupo de barras paralelas dobladas en una misma sección, su área se calculará

$$A_s = \frac{V_u - V_{cr}}{F_r f_y \text{Sen} \theta}, \text{ en este caso no se admitirá } V_u > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$$

## b) Requisitos para marcas dúctiles

### 1) Refuerzo Transversal para confinamiento

Estribos # 2.5 ó mayores

En la zona  $L_d$  los estribos deberán ser cerrados y con remate a  $135^\circ$  se indica en la fig. 10.4. La separación no deberá exceder de:

$$S_1 \leq \begin{cases} 8 \text{ diámetros de la barra longitudinal mayor} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ 30 \text{ cm.} \\ d/4 \end{cases}$$

Además al menos una de cada dos barras longitudinales de la periferia deberá estar abrazada por la esquina de un estribo.

### 2) Requisitos por cortante.

Fuera de  $L_d$  habrá estribos a una separación  $S_2 \leq d/2$   
Estribos verticales cerrados de una pieza.

$$\phi_s \geq 2.5$$

$$V_{oismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.3 Requisitos para refuerzo transversal de vigas de marcas de concreto

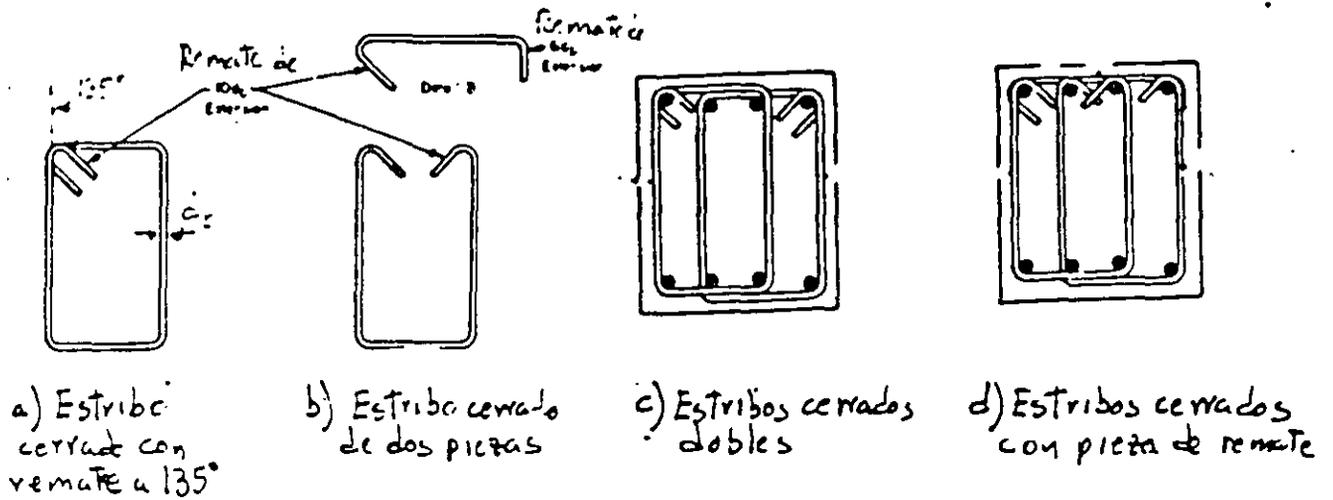


Fig 10.4 Estribos para confinamiento (de código ACI)

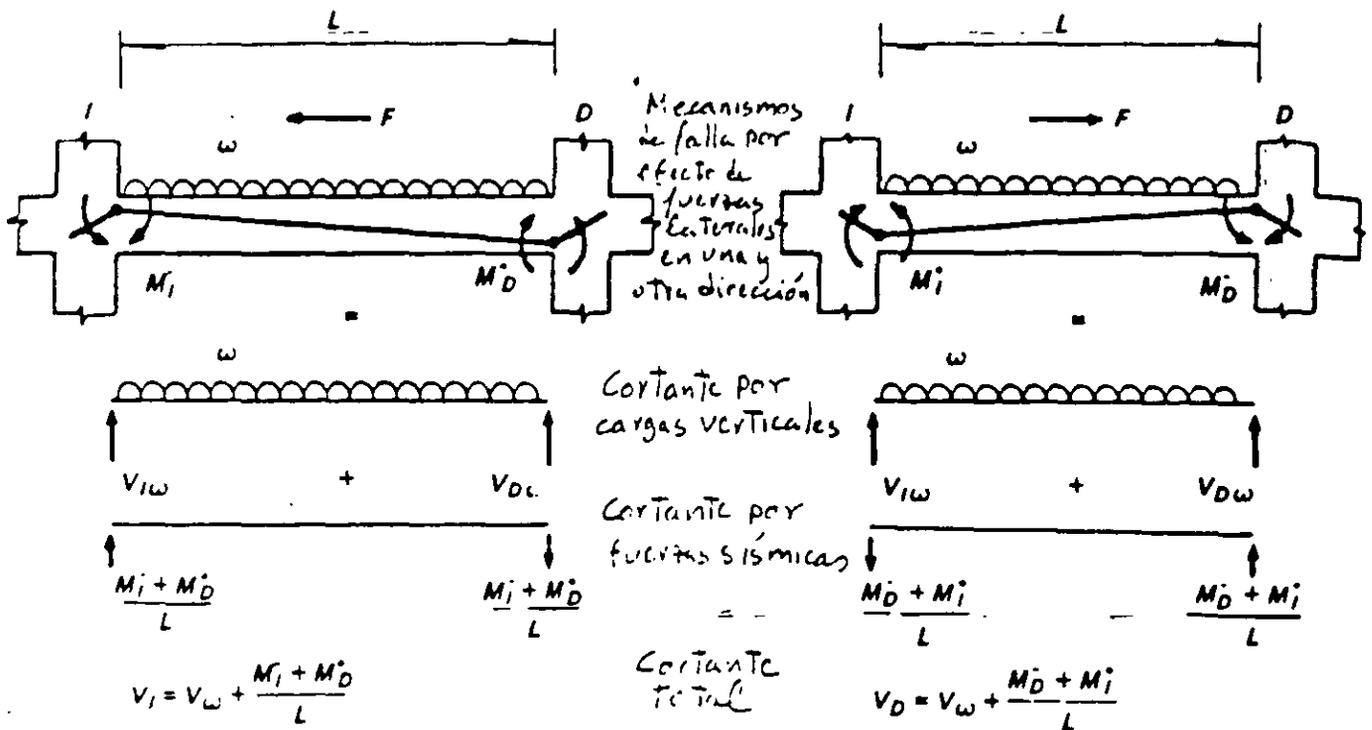
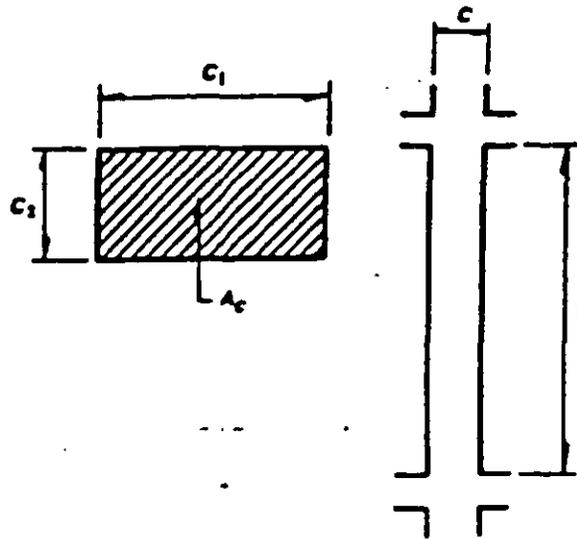


Fig 10.5 Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos dúctiles de concreto



Requisitos generales

$$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$$

$$c_1/c_2 \leq 4$$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f'_c}$$

$$c_1/c_2 \leq 2.5$$

$$l/c \leq 15$$

Fig 10.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

## II. REFUERZO LONGITUDINAL

En la parte inferior de la columna que alcanza la unión con la viga debe colocarse el mismo ref. transversal que en la. Si el nudo está confinado

a) Requisitos generales

por cuatro tralces que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

$$\frac{20}{f_y} \leq \rho \leq 0.06$$

Mínimo 4 barras en columnas rectangulares y 6 en circulares

b) Requisitos para marcos de detalles

$$0.01 \leq \rho \leq 0.04$$

Paquetes de no más de dos barras  
Traslapes solo en la mitad central de la altura libre de la columna

## III. REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso.

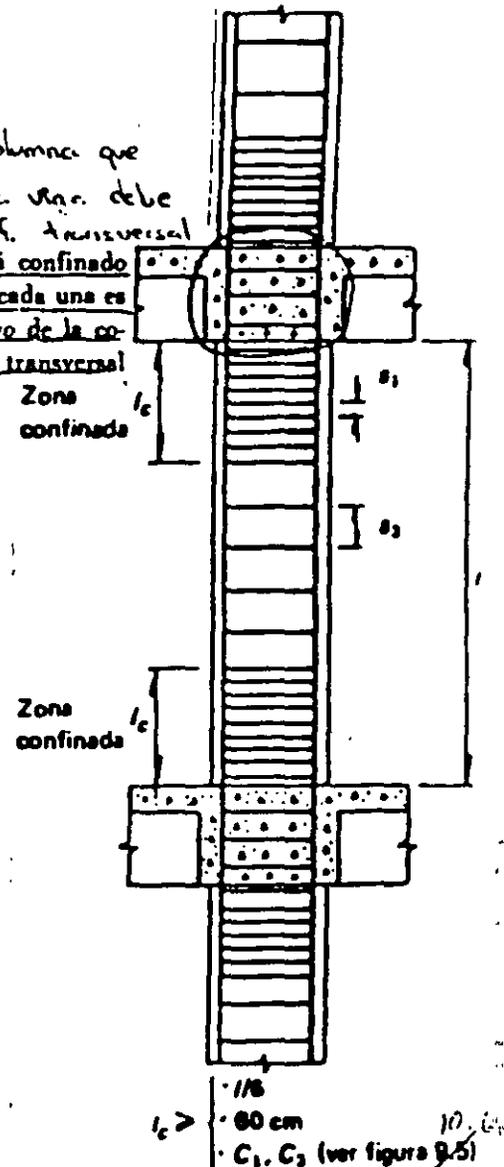
a) Requisitos generales

$$S_2 \leq \begin{cases} \frac{250 d_t}{\sqrt{f_y}} & d_t - \text{más delgado} \\ 48 d_u & d_u - \text{el estribo} \\ c_1/2, c_2/2 \end{cases}$$

$S_1 \leq$  la mitad de los límites para  $S_2$

b) Requisitos para marcos de detalles

y confinamientos



En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, debe continuarse dentro de la cimentación al menos una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra más gruesa

El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que 42.

$$d_v \geq \#3$$

Refuerzo Transversal mínimo:

$$S_1 \leq \begin{cases} 10 \text{ cm.} \\ \frac{C_{\text{menor}}}{4} \end{cases}$$

$S_1$  - Mismos límites que para el caso general.

$S_2$  - Igual que para requisitos generales

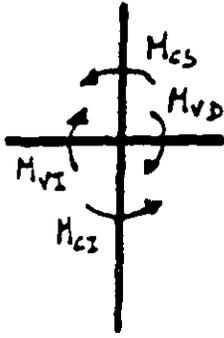
2) Fuerza cortante.

$$S: P_u < \frac{A_g f'_c}{20} \quad (\text{Incluyendo efectos sismo})$$

$$V_{\text{sismo}} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.7 Requisitos de refuerzo para columnas de marcos de concreto.

$$\Sigma M_c \geq 1.5(\Sigma M_v)$$

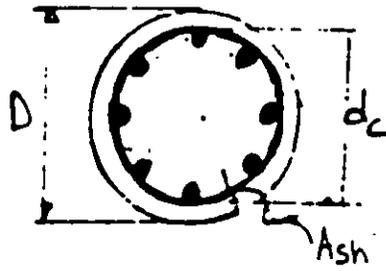


$\Sigma M_v = M_{vD} + M_{vI}$ , es la suma de los momentos flexionantes resistentes (negativo de un lado y positivo del otro) de los extremos de las vigas que llegan a un nudo

$\Sigma M_c = M_{cS} + M_{cI}$ , es la suma de los momentos flexionantes que deben ser capaces de resistir los extremos de las columnas (superior e inferior) que llegan a dicho nudo

El momento resistente de la columna se calculará para la carga axial que le corresponde a la columna por efecto de carga vertical más el doble de la que se genera por efecto de las fuerzas sísmicas actuando en la dirección correspondiente al signo de los momentos flexionantes considerados

Fig. 10.7 Procedimiento para la revisión de la capacidad en flexocompresión de columnas de marcos dúctiles de concreto



Mínimo 6 barras longitudinales  
 Ref. Transversal  $\phi \geq 10.3$   
 El acero de la hélice  $\leq$  grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} d_c S$$

$$l_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_2 \leq 7 \text{ cm} \text{ y } \geq 1.5 \text{ tamaño agregado}$$

Los hastajes tendrán 1.5 vueltas

Las hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

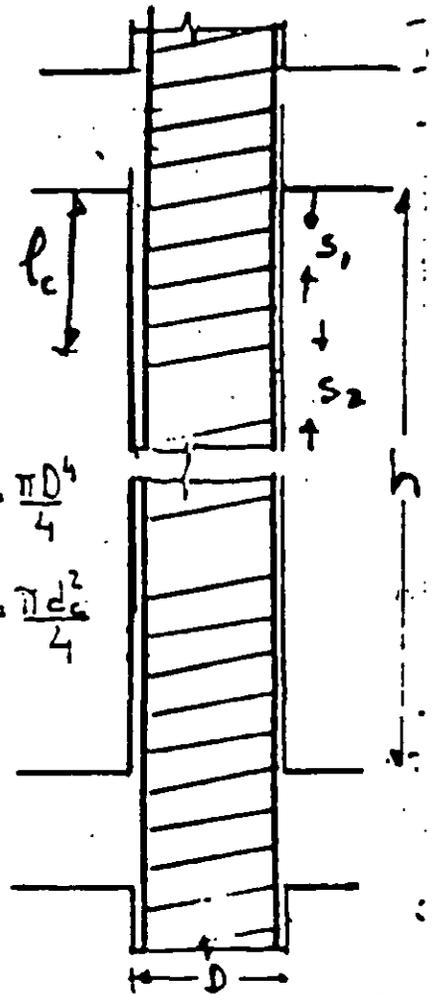


Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

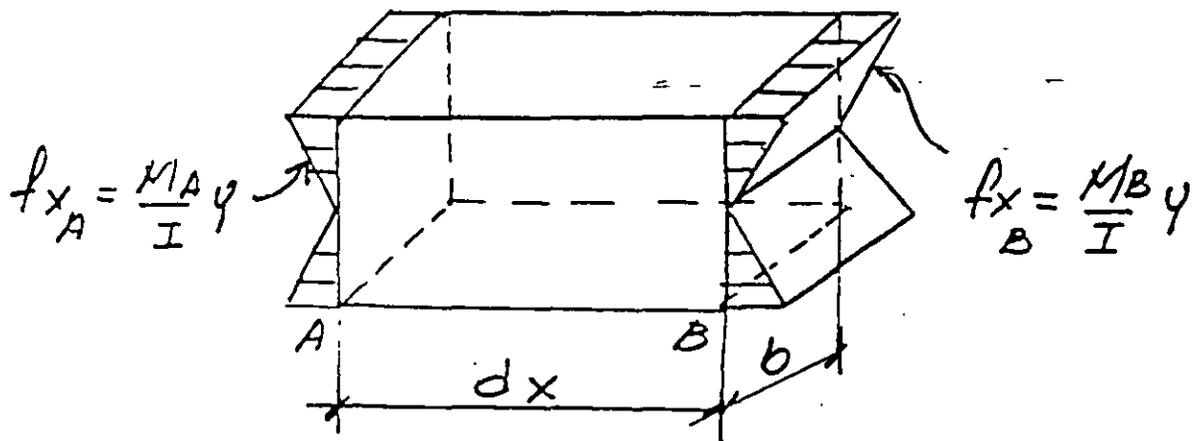
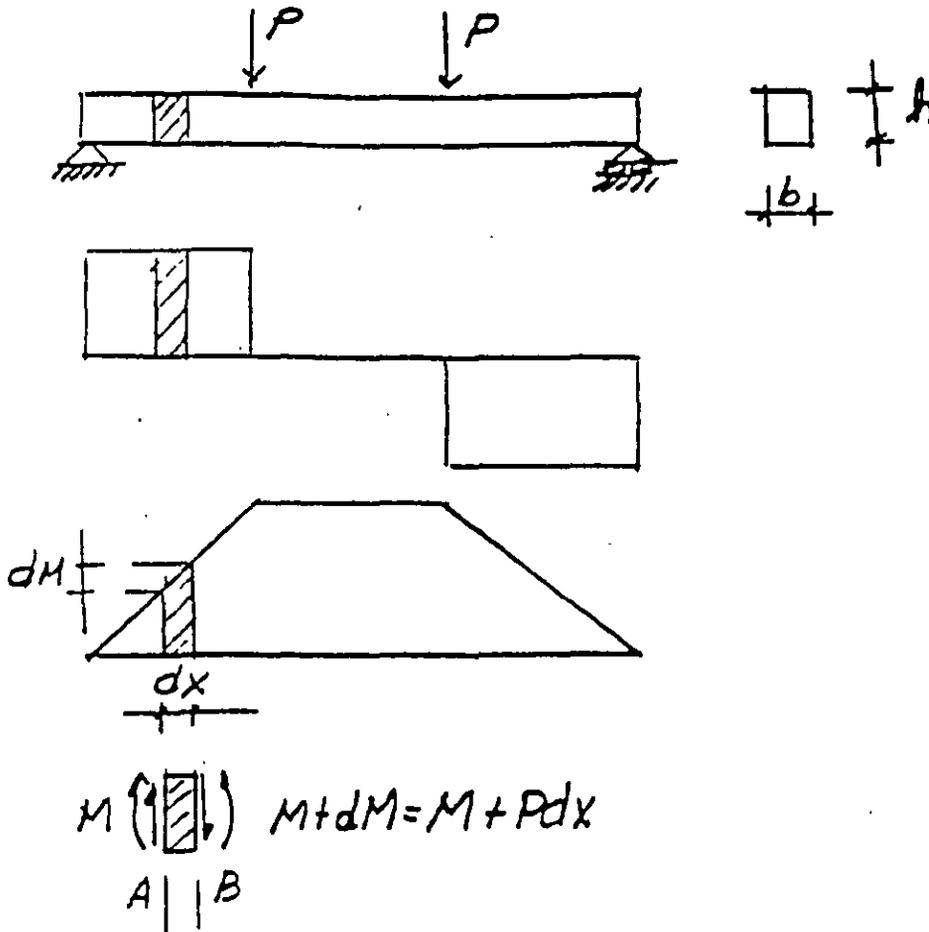
**TEMA**

**CORTANTE**

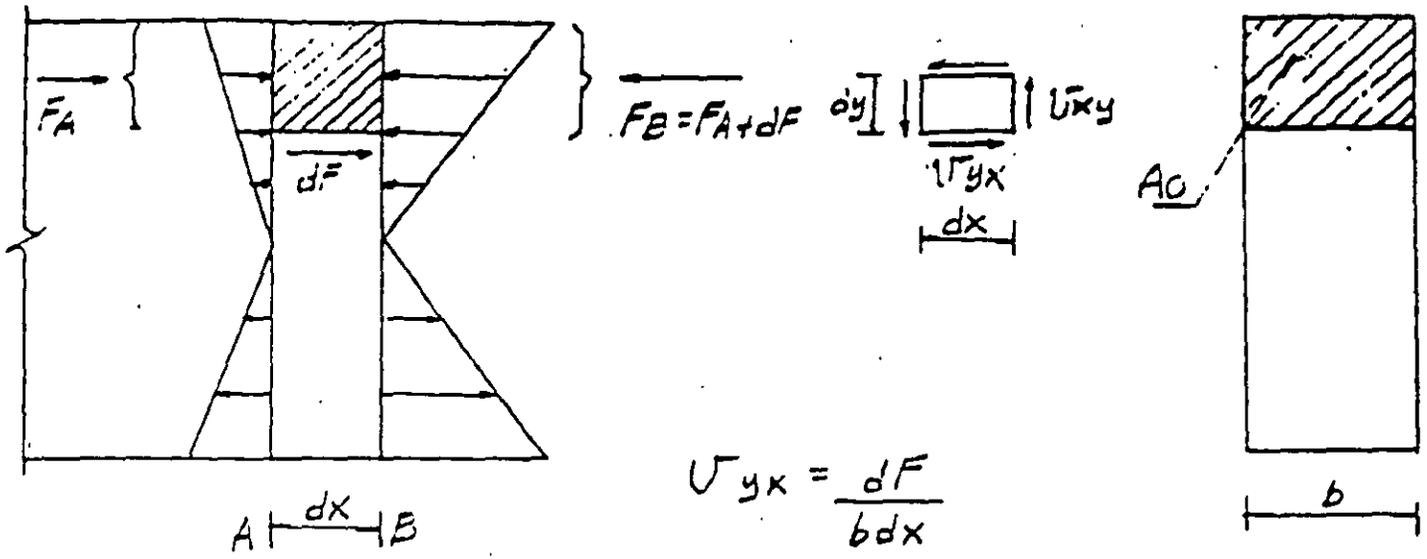
**EXPOSITOR: ING. JOSÉ GAYA PRADO  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

V.- CORTANTE .

1.- COMPORTAMIENTO ELASTICO



$$F_E = F_B \Rightarrow F_E = F_B$$



$$F_A = \int_{A_0} f_x dA = \int_{A_0} \frac{M_A}{I} y dA = \frac{M_A}{I} \int_{A_0} y dA = \frac{M_A Q}{I}$$

$$\text{si } M_B = M_A + dM$$

$$F_B = \frac{M_A + dM}{I} Q$$

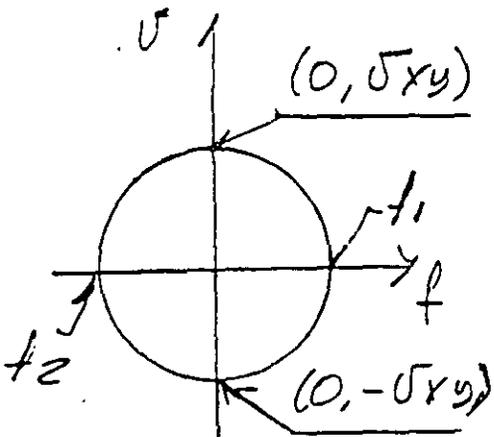
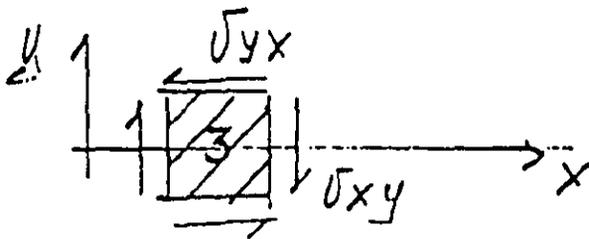
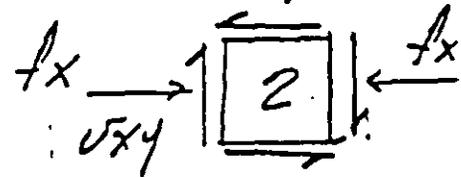
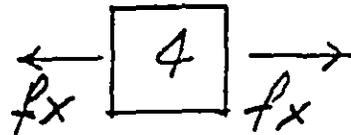
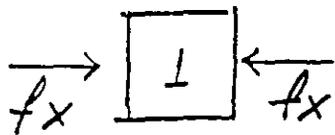
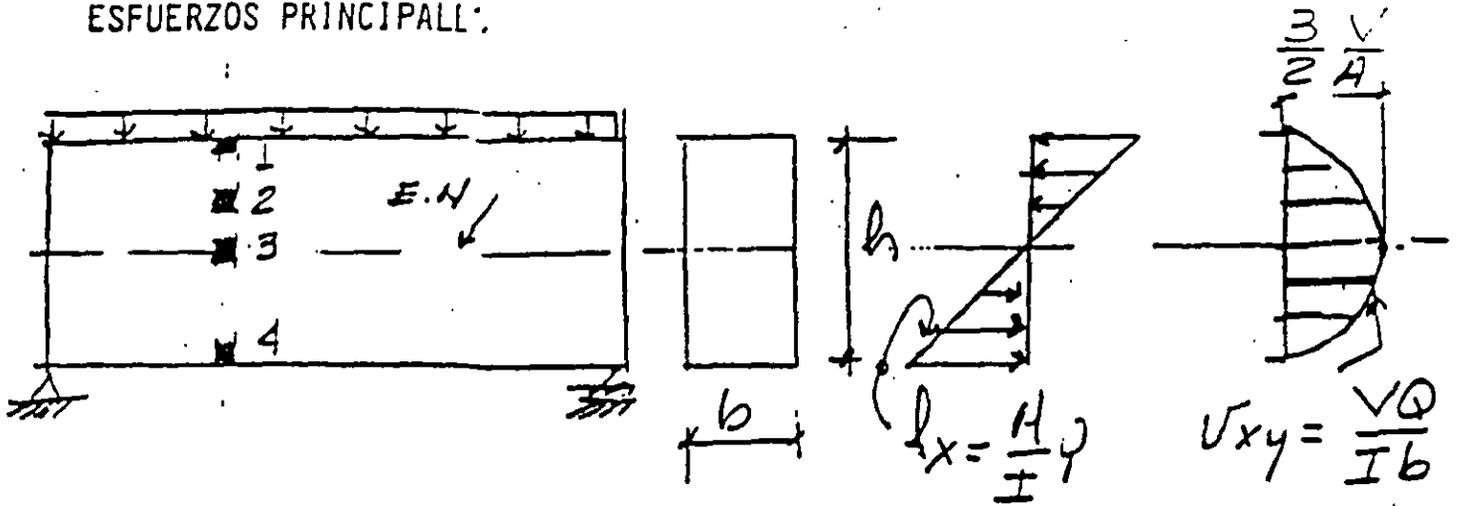
$$dF = F_B - F_A = \frac{M_A + dM}{I} Q - \frac{M_A}{I} Q = \frac{dM}{I} Q$$

$$U_{yx} = \frac{dF}{bdx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{Ib}$$

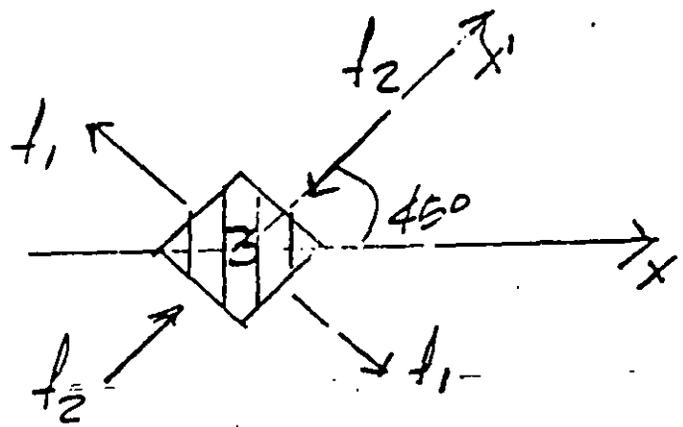
$$\text{PERO } \frac{dM}{dx} = V$$

$$U_{yx} = U_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

ESFUERZOS PRINCIPALL:

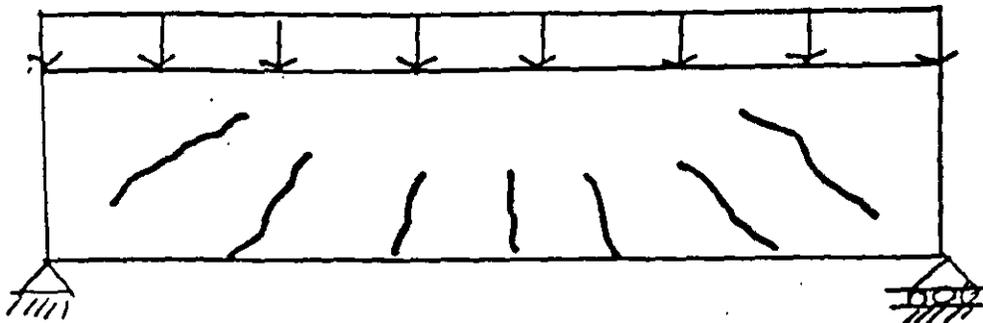
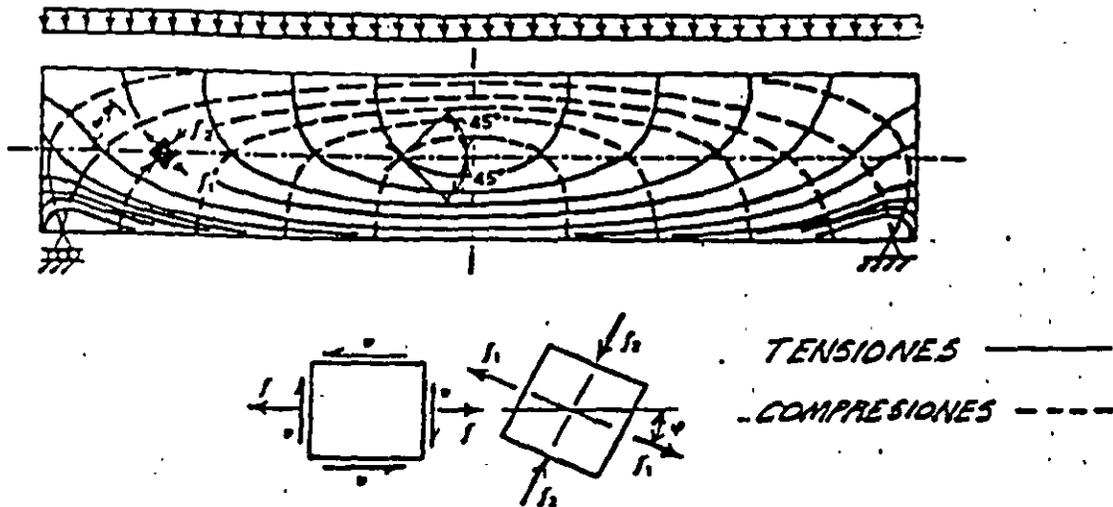


CIRCULO DE MOHR



$f_1$  .- TENSION MAXIMA (DIAGONAL)

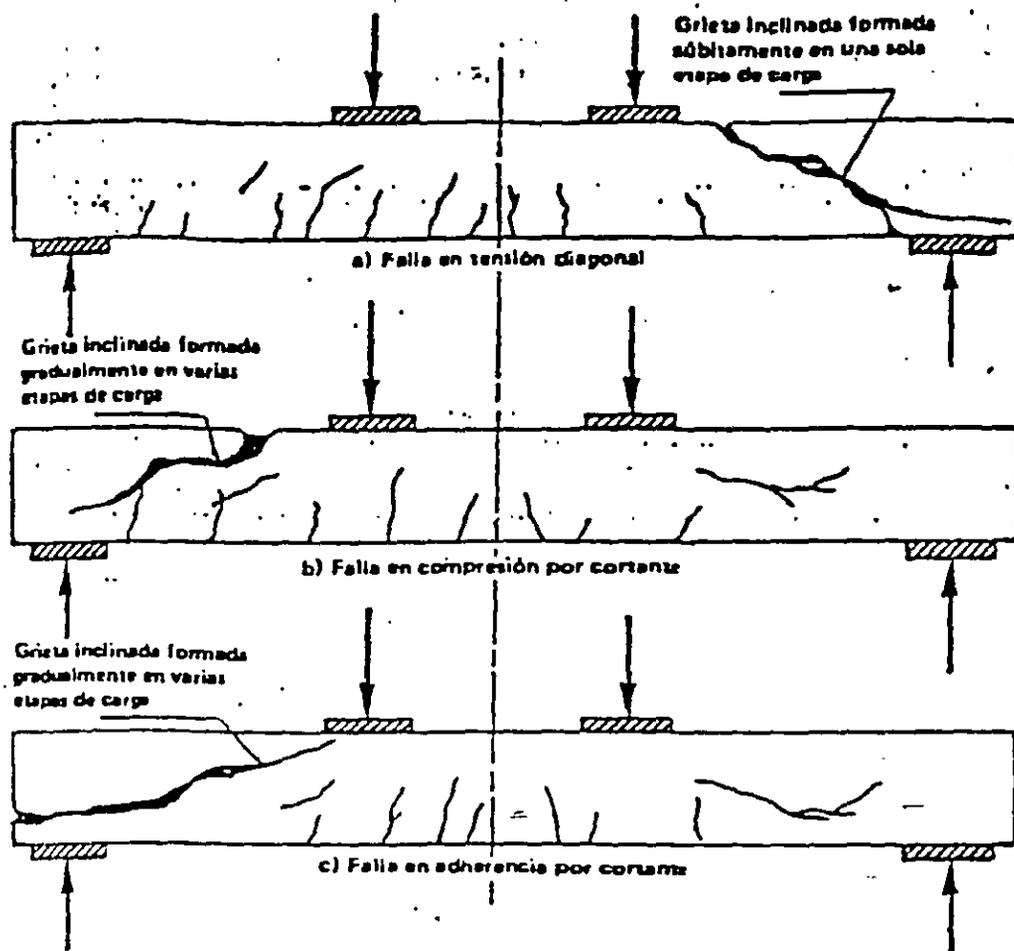
## TRAYECTORIAS DE ESFUERZOS PRINCIPALES



VIGA DE CONCRETO SIMPLE

LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CAMBIA APRECIABLEMENTE SI SE EXCEDEN LAS TENSIONES QUE PUEDE SOPORTAR EL CONCRETO Y APARECEN LAS PRIMERAS GRIETAS. POR LO TANTO, A PARTIR DE ESTE MOMENTO NO ES POSIBLE PREDECIR SU COMPORTAMIENTO BAJO LAS HIPOTESIS DE MATERIAL ELASTICO Y HOMOGENEO.

## 2.- MODOS DE FALLA EN TRABES SIN REFUERZO TRANSVERSAL



## EFFECTOS DE LA GRIETA DIAGONAL.

- A) REDUCE LA ZONA DISPOBIBLE PARA TOMAR COMPRESIONES PARA FLEXION.
- B) AUMENTA SUBITAMENTE LA TENSION EN EL REFUERZO.
- C) REDUCE EL AREA DISPONIBLE PARA TOMAR CORTANTE.

## 3.- MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL.

- A) ANTES DEL AGRIETAMIENTO DIAGONAL, EL COMPORTAMIENTO ES PRACTICAMENTE EL MISMO CON O SIN REFUERZO TRANSVERSAL.
- B) AL APARECER LAS GRIETAS, EL REFUERZO TRANSVERSAL SE DEFORMA HASTA ALCANZAR SU LIMITE DE FLUENCIA, PARA EVITAR ANCHOS EXCESIVOS DE GRIETAS LOS REGLAMENOTS LIMITAN EL  $F_y$  DEL REFUERZO A 42 JO  $Kg/cm^2$ .
- C) SI LOS ESTRIBOS SON VERTICALES Y CERRADOS, EL CONFINAMIENTO DEL CONCRETO MEJORA LA DUCTILIDAD DEL ELEMENTO Y LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

#### 4.- CALCULO DE LA RESISTENCIA.

##### A) CONTRIBUCION DEL CONCRETO ( $V_c$ ).

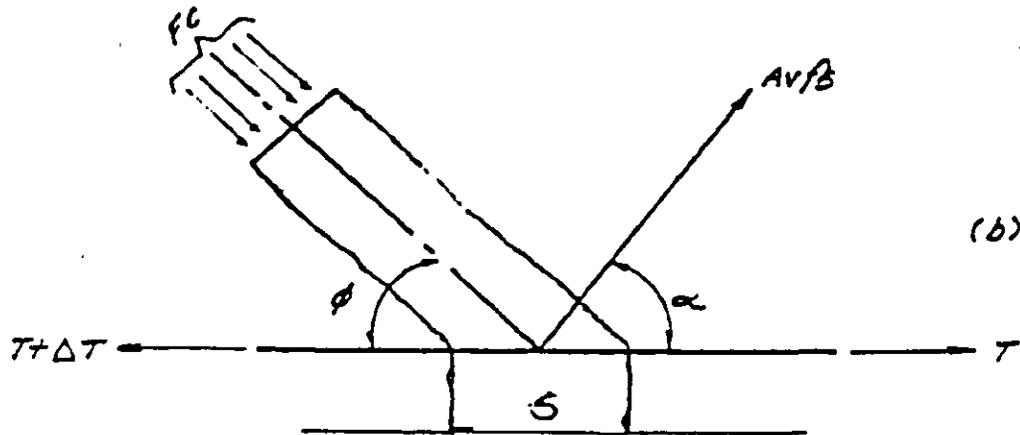
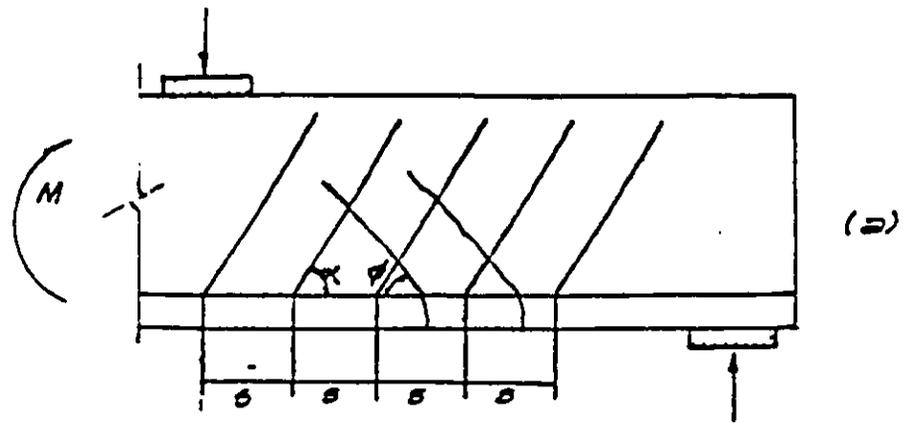
SE CONSIDERA QUE LA FUERZA CORTANTE QUE RESISTE -  
EL CONCRETO ES IGUAL A LA CARGA DE AGRIETAMIENTO-  
INCLINADO; Y ESTA ES FUNCION DE LA RESISTENCIA EN  
TENSION DEL CONCRETO, QUE A SU VEZ ES PROPORCIO-  
NAL A LA RAIZ CUADRADA DE SU RESISTENCIA EN COM-  
PRESION.

POR TANTO:

$$V_c = K \cdot \sqrt{F'_c}$$

E) CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSALEL. ( $V_c$ )

ANALOGIA DE LA ARMADURA



$$\sum F_H = 0; AV/s \cos \alpha = FC \sin \phi;$$

$$FC = \frac{AV/s \sin \alpha}{\sin \phi}$$

$$\sum F_V = 0; \Delta T = AV/s \cos \alpha + FC \cos \phi$$

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{l} = \frac{Vs}{l}$$

$$\Delta M = \frac{V \Delta x}{s}$$

$$\frac{Vs}{l} = AV/s \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right)$$

$$V = \frac{AV/s l}{s} \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right) \text{ si } \phi = 45^\circ$$

$$V = \frac{AV/s l}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha) \text{ si } f_s = f_y$$

$$V_s = \frac{AV f_y d}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad \text{si } l = d$$

5.- REGLAMENTO . D. F. 1987.  
REVISION DEL ESTADO LIMITE DE FALLA POR CORTANTE

$$V_R \geq V_C + V_S$$

$$V_R \geq V_U$$

5.1 FUERZA CORTANTE ULTIMA ACTUANTE  $V_U$ .

A) FACTORES DE CARGA

$$V_U = F.C. V$$

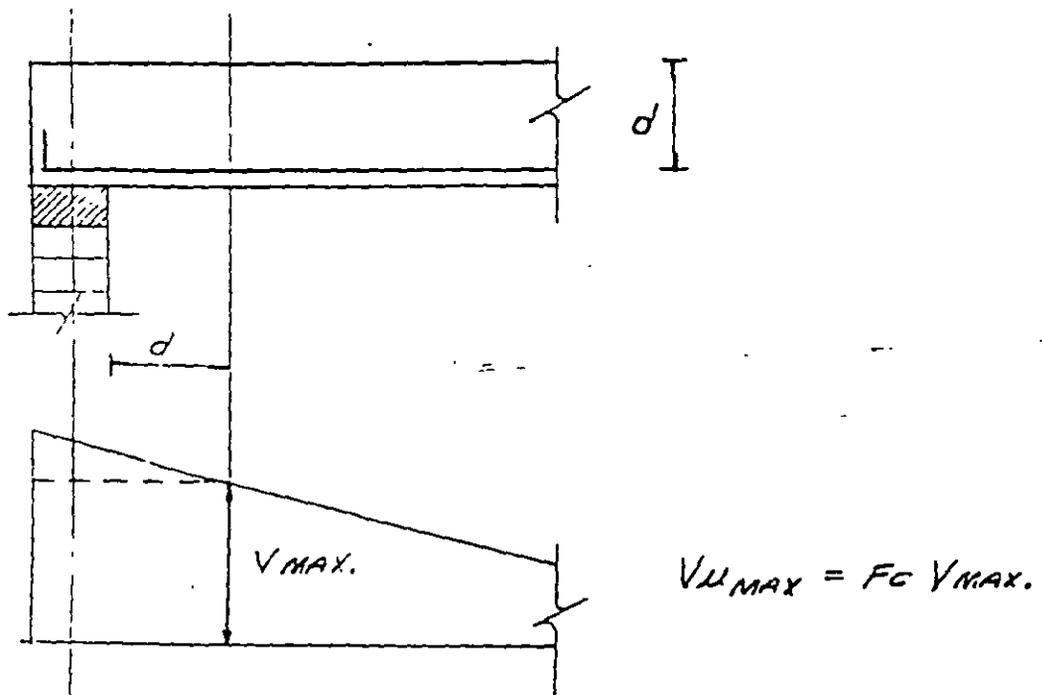
$$V_U = 1.4 (V_{CM} + V_{CV})$$

$$V_U = 1.5 (V_{CM} + V_{CV}) \longrightarrow \text{GRUPO A}$$

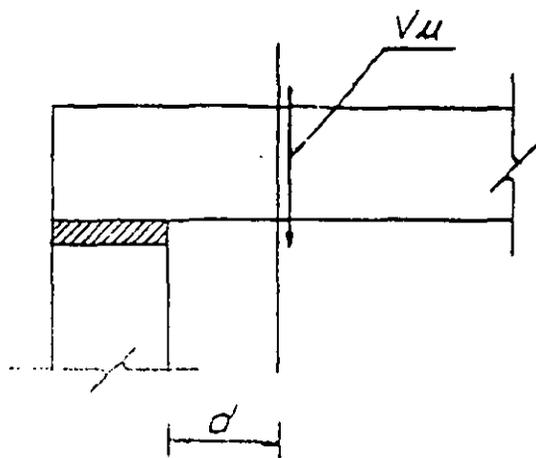
$$V_U = 1.1 (V_{CM} + V_{CV} + V_{CA})$$

B) FUERZA CORTANTE MAXIMA.

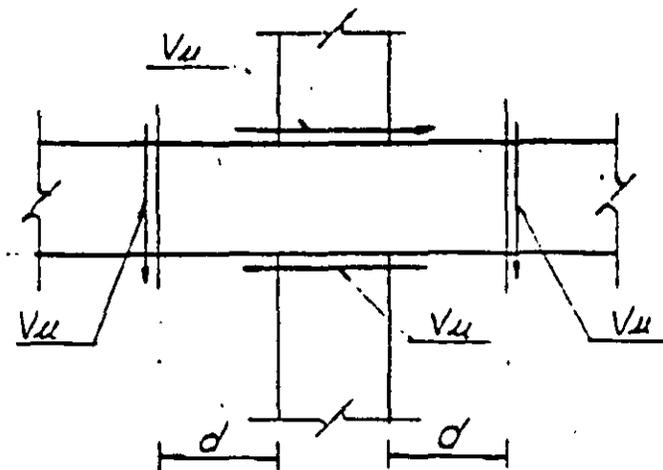
DETERMINACION DE  $V_{U \text{ MAX.}}$



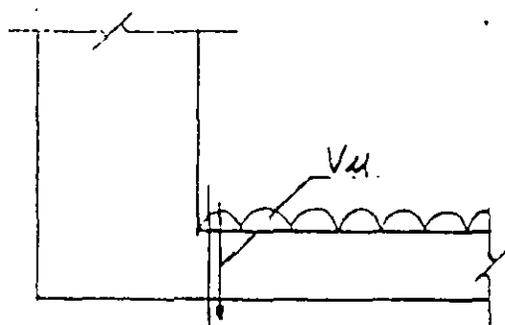
SOLO SI LAS CARGAS COMPAENEN DIRECTAMENTE  
A LA VIGA



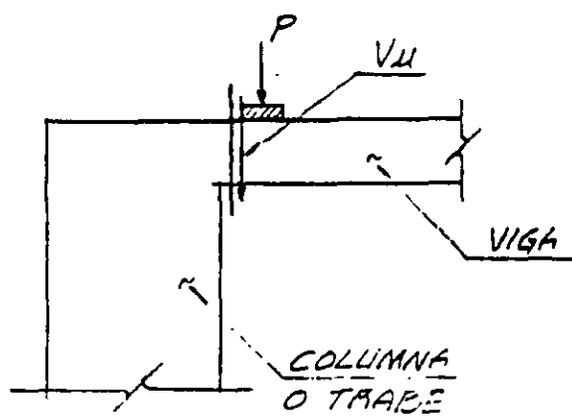
APOYO SIMPLE



NUDO MONOLITICO



LOSA APOYADA EN LECHO  
BAJO DE TRASE



CARGA CONCENTRADA

## 5.2 DETERMINACION DE $V_c$ .

A) SON APLICABLES LAS DISPOSICIONES PARA VIGAS EN QUE PREDOMINA LA FLEXION SI  $L/h > 5$ .

EN ESTE CASO:

$$V_c = V_{CR} \begin{cases} F_R (0.2 + 30 p) \sqrt{f^*c} \, bd & (\text{si } p \leq 0.01) \\ F_R (0.5) \sqrt{f^*c} \, bd & (\text{si } p > 0.01) \end{cases}$$

DONDE:  $p = \frac{A_s}{bd}$

$$\text{Y } F_R = \begin{cases} 0.8 & (Q \leq 2) \\ 0.6 & (Q > 2) \end{cases}$$

B) RELACION PERALTE/ANCHO.

$$\text{si } \begin{cases} h/b \leq 6 \\ h \leq 70 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow V_c = V_{CR}$$

$$\text{Si } h/b > 6 \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{Si } h > 70 \text{ cm} \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{si } \begin{cases} h/b > 6 \\ h > 70 \text{ cm} \end{cases} \quad V_c = 0.49 V_{CR}$$

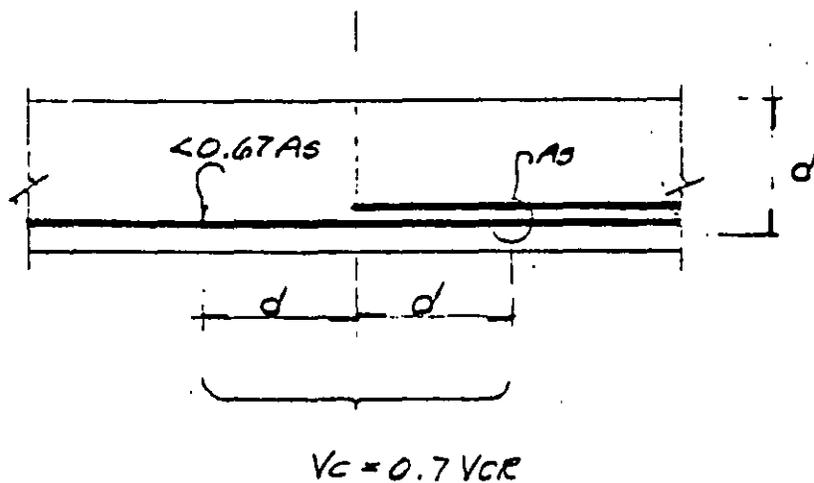
C) CONSIDERACION DE LA RELACION M/V

Si  $L/h < 4$

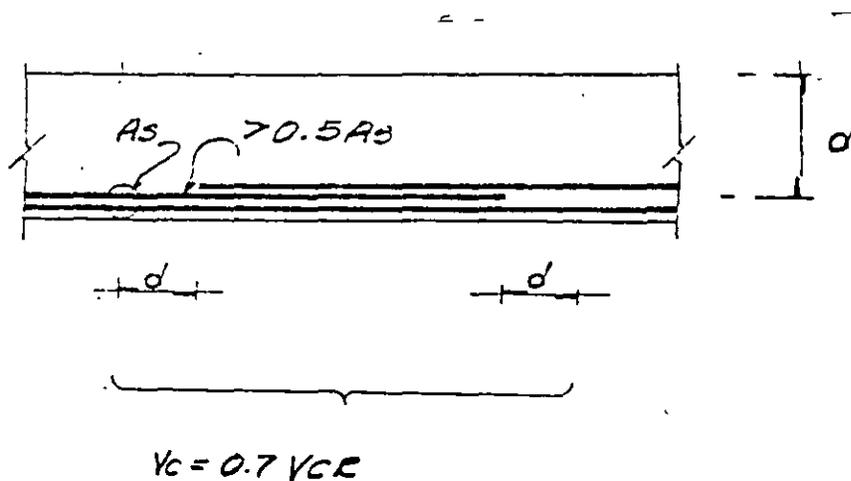
$$V_c = (3.5 - 2.5 \frac{M}{Vd}) V_{CR}$$

PERO NO MAYOR QUE  $1.5 F_{Rbd} \sqrt{f^*c}$

D) INTERRUPCION DEL REFUERZO LONGITUDINAL



E) TRASLAPES DEL REFUERZO LONGITUDINAL



F) CORTANTE Y CARGA AXIAL

$$V_c = K V_{CR}$$

DONDE

$$K = 1 + 0.007 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{COMPRESION}$$

$$K = 1 - 0.03 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{TENSION}$$

G) ELEMENTOS ANCHOS

LOSAS, ZAPATAS Y MUROS

$$\text{SI } \left\{ \begin{array}{l} b \geq 4d \\ \frac{M}{vd} < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow V_c = 0.5 FRbd \sqrt{f^*c}$$

INDEPENDIENTEMENTE DE P

EN CASO QUE NO SE CUMPLA ALGUNA DE LAS DOS CONDICIONES.

$$V_c = V_{CR}$$

### 5.3 CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSAL

Si  $V_u > V_c$

#### A) ESTRIBOS VERTICALES

$$V_B = \frac{F_R A_v f_y d}{S}$$

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5b}$$

#### B) ESTRIBOS INCLINADOS

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} (\sin \alpha + \cos \alpha) \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

#### C) VALOR MAXIMO DE $V_u$ ,

$$V_u \leq 2 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

#### D) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE $V_u$ .

$$\text{Si } V_u > V_c \quad \text{PERO } < 1.5 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.5 d$$

$$\text{Si } V_u > 1.5 F_R b d \sqrt{f^* c} \quad \text{PERO } < 2 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.25d$$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

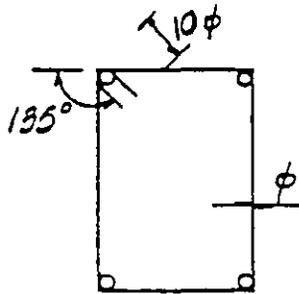
$$s = 0.25 d \quad \text{si} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{si} \quad (Q \leq 2)$$

F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

- $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$
- $\phi \text{ m\u00edn} = 6.3 \text{ mm} (1/4" \text{ o } \#2)$
- ANCLADOS  $10 \phi$  DESPUES DE UN DOBLEZ A  $135^\circ$  SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



ESTRIBOS INCLINADOS  $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS  $\alpha \geq 30^\circ$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

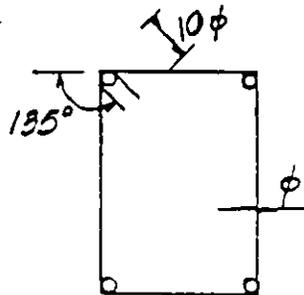
$$s = 0.25 d \quad \text{si} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{si} \quad (Q \leq 2)$$

F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

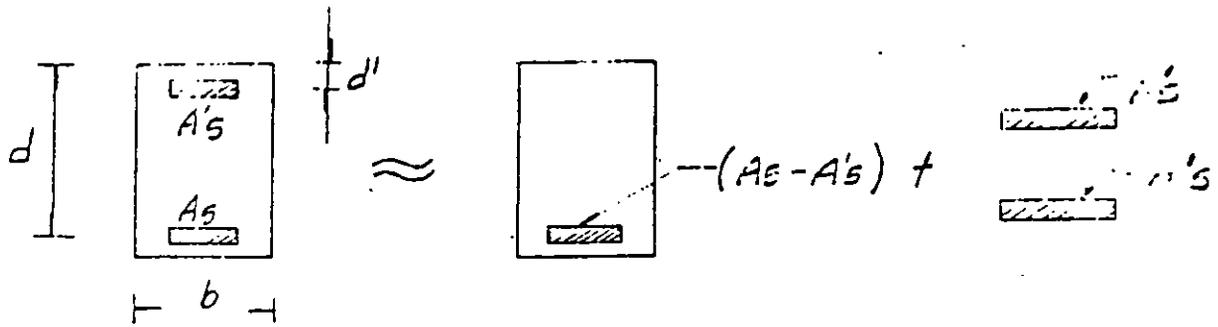
- $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$
- $\phi \text{ m\u00edn} = 6.3 \text{ mm} (1/4" \text{ o } \#2)$
- ANCLADOS  $10 \phi$  DESPUES DE UN DOBLEZ A  $135^\circ$  SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



ESTRIBOS INCLINADOS  $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS  $\alpha \geq 30^\circ$

E.) SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[ (A_s - A's) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A's f_y (d - d') \right]$$

de  $C = T$

$$ab f''c + A's f_y = A_s f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A's) f_y}{b f''c}$$

SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

$$V_{c2} = 5721.11 \times 0.7 = 4004.78 \text{ Kg}$$

### CÁLCULO DE $V_{c3}$

COMO  $P = 0.012 > 0.01$  ADEMÁS SE INTERRUMPE EL ACERO EN MÁS DEL 85 %

$$V_{c3} = V_{cr} 0.7 = (0.5 F_R b d \sqrt{f'_c}) 70\% \times 70\%$$

$$V_{c3} = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.7 \times 0.7 = 5820.91$$

### CÁLCULO DE $V_{c4}$

COMO  $P = 0.012 > 0.01$

$$V_{c4} = V_{cr} 70\% = (0.5 F_R b d \sqrt{f'_c}) 0.70$$

$$V_{c4} = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.70 = 8315.58$$

### 3).- CONTRIBUCION DE LOS ESTRIBOS

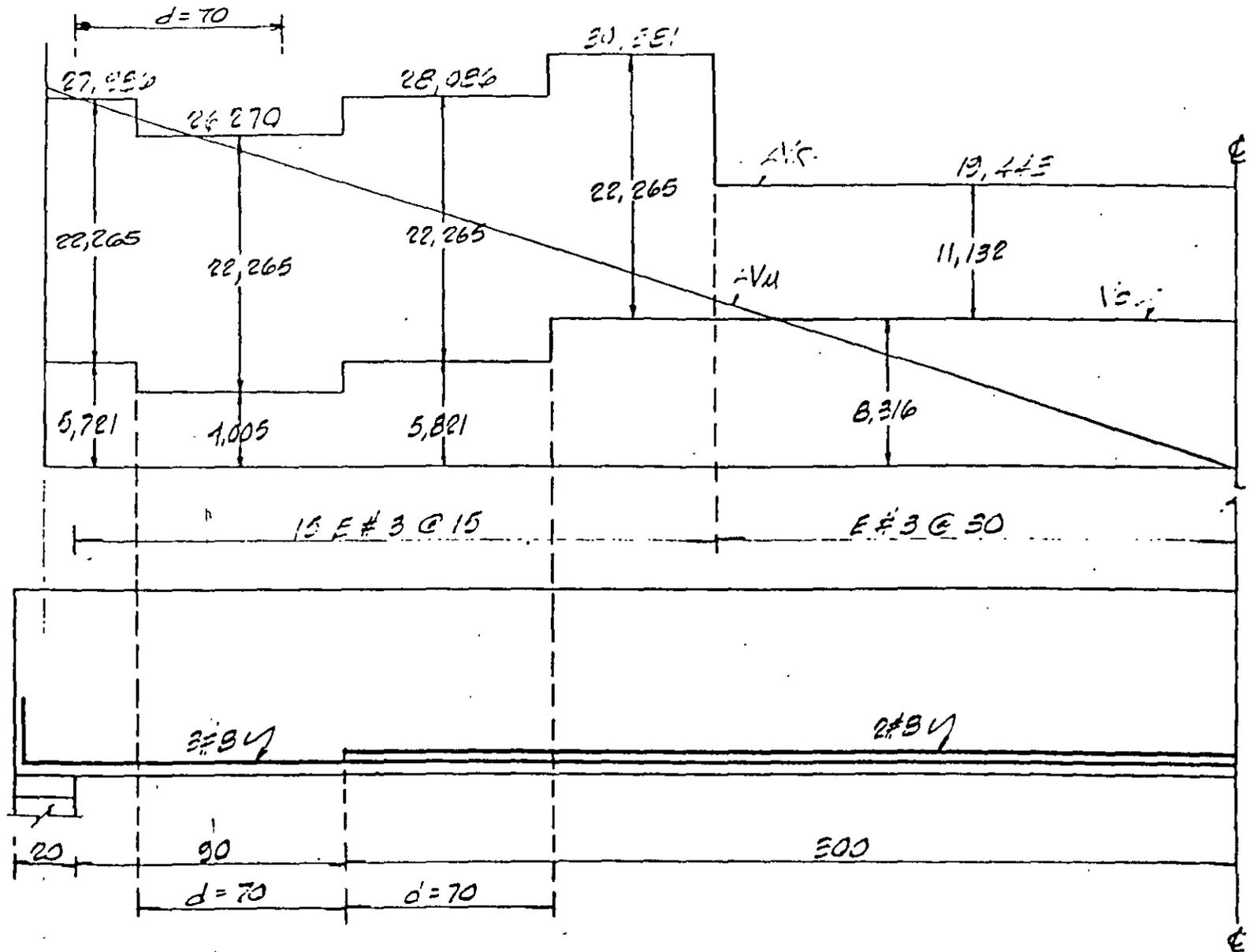
$$V' = \frac{F_R A_v f_y d}{S} ; A_v = 2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$$

### CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 15 cm.

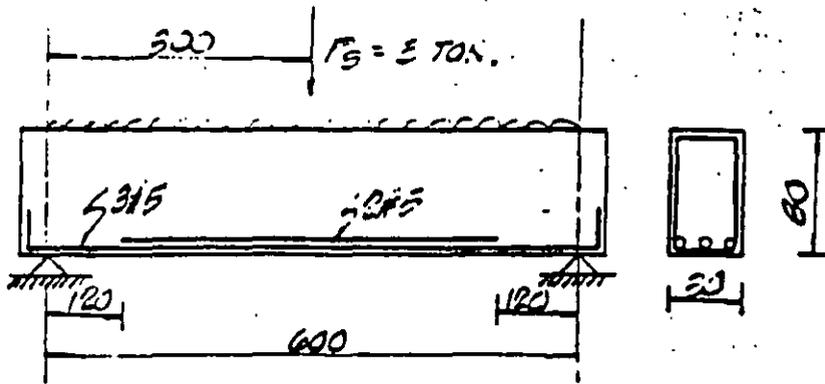
$$V_{s15} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{15} = 22,265.60 \text{ Kg}$$

### CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 30 cm.

$$V_{s30} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{30} = 11,132.80 \text{ Kg}$$



## 2.- DISEÑO FCF CORTANTE



$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f'_c = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

### A: CONDICIONES

$$h = 80 \text{ cm} > 70 \text{ cm}$$

$$h = 80 \text{ cm} < 6b = 6(30) = 180$$

POR LO QUE  $V_{CR}$  SE REDUCIRA EN UN 30%

### B: CALCULO DE $V_{CR}$

COMO

$$\frac{L}{h} = \frac{600}{80} = 7.5 > 5$$

$$(3\#5) \rightarrow \rho = 0.00264 < 0.01$$

$$V_{CR} = (0.2 + 30\rho) F_r b d' \sqrt{f'_c}$$

$$V_{CR} = [(0.2 + 30(0.00264))] 0.8 \times 30 \times 75 \sqrt{200} = 7,107 \text{ Kg}$$

$$V_{CR} = V_{CR} 70\% = 7,107 \times 0.7 = 4,975 \text{ Kg POR TAMAÑO (h > 70)}$$

FOR INTERRUPCION DE VARILLA

$$V_c = 0.7 \times 4.98 = 3.49 \text{ TON.}$$

$$(5\#5) \rightarrow \rho = 0.0044 < 0.01$$

$$V_{CR} = 0.8 (0.2 + 30 \times 0.0044) \sqrt{200} \times 50 \times 75 = 8.45 \text{ TON.}$$

$$\text{FOR TAMAÑO } V_c = 0.7 \times 8.45 = 5.91 \text{ T.}$$

$$\text{FOR CORTE DE VARILLAS } V_c = 0.7 \times 5.91 = 4.14 \text{ T.}$$

## C.- CALCULO DEL DEFLECCION

$$S = \frac{FR Au f_y d'}{V_u - V_c}$$

$$S = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 75}{8120 - 3490}$$

$$DEF = 77 \text{ cm}$$

DEF. MAXIMA

$$1) \leq \sqrt{f_c'} b d FR = 50.9$$

$$\therefore S_{MAX} = 0.5 d = 27 \text{ cm}$$

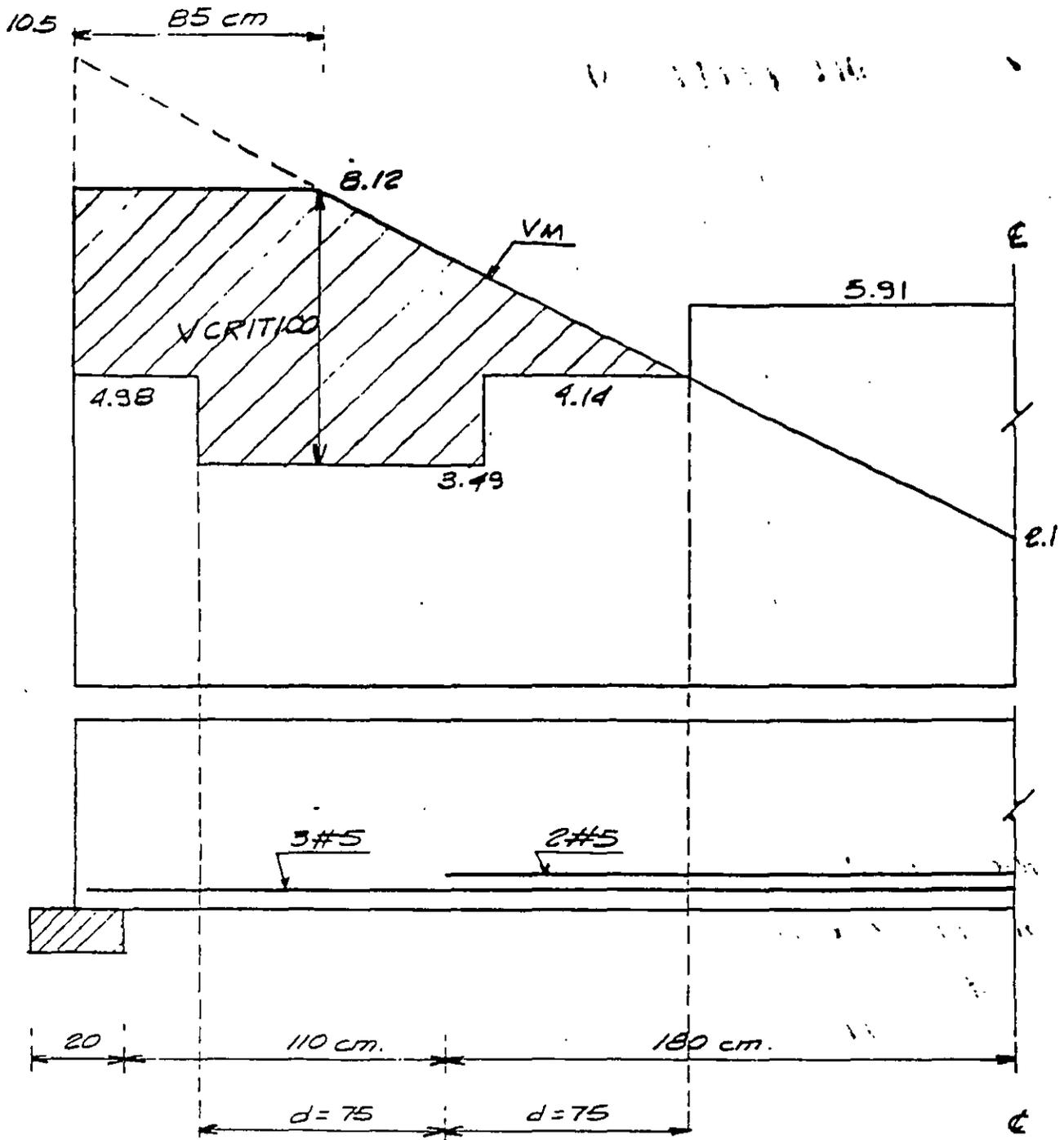
$$c) \frac{FR Au f_y}{3.5 b} = 45 \text{ cm}$$

$$RIGE DEF MAX. = 27 \text{ cm}$$

SE ARMARA CON

E # 3 @ 55

EN TODO EL CLARO



¿Qué es concreto presforzado?

Una manera sencilla de entender el concreto presforzado es a través de su comparación con el concreto simple y con el concreto reforzado como pasos sucesivos de un proceso.

Si tenemos una viga de concreto simple como la mostrada en la figura (fig 1), esta tendrá una cierta capacidad de carga, mientras los esfuerzos normales de tensión en el concreto no sean mayores a la capacidad del concreto a la tensión ( $f't = 2 \sqrt{f'c}$ ) que aunque pequeña, tiene un rango de existencia.

Durante este rango podemos suponer un comportamiento lineal del concreto y por lo tanto a partir de:

$$f = \frac{M}{I} y \quad M_{ag} = \frac{I}{y_i} f_t = 2 \sqrt{f'c} \frac{I}{y_i}$$

para una sección rectangular:

$$M_{ag} = \frac{bh^2}{3} \sqrt{f'c} \quad \text{si } M = Pa$$

$$P = \frac{bh^2}{3a} \sqrt{f'c}$$

Si ahora armamos la viga anterior con acero de refuerzo en la zona de tensión, aumentaremos su capacidad con respecto al momento de agrietamiento-fig. ( ).

Si tomamos como base las consideraciones básicas del R.D.D.F., obtendremos una carga de servicio del orden de 4.5 veces mayor que la correspondiente a la viga de concreto simple.

En las figuras ( ) y ( ) se muestran los diagramas correspondientes para ambos casos.

Como siguiente paso del mismo proceso, demos ahora a la misma viga un estado de deformaciones contrario al producido por las pzas. P, de tal suerte que las tensiones en el concreto desaparezcan.

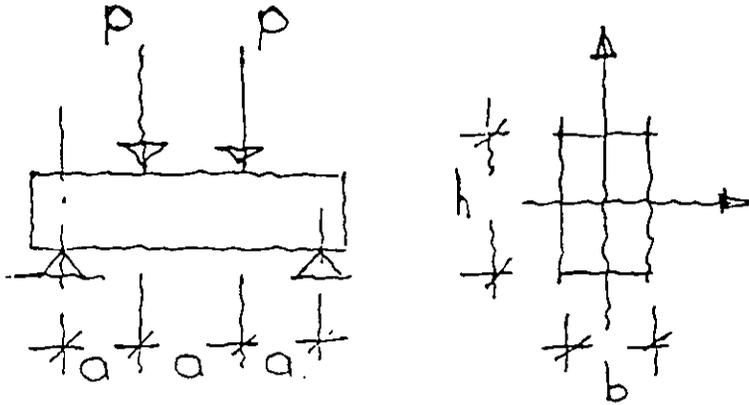
De esta manera, lograríamos una carga de servicio del orden de 7 veces mayor a la del concreto simple.

Es decir, si comparamos la misma sección, a través de concreto reforzado y presforzado, logramos con el segundo una capacidad mayor respecto al primero del orden de 1.55 veces.

Podemos ejemplificar lo anterior a través de un ejemplo sencillo.

v.g.

Si suponemos la siguiente viga:



$$b = 30 \text{ cm.}$$
$$h = 40 \text{ cm.}$$

La viga es de concreto simple con  $f'_c = 400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

Si el valor de la carga  $P$  es de 10 tons.;

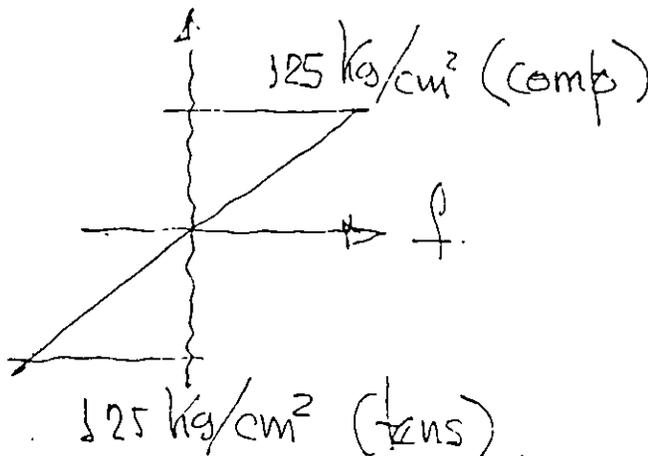
Entonces  $M = Pa = 10 \text{ Tm.}$

y los esfuerzos:

$$f = \frac{M}{S} = \frac{10 \ 00000}{8000} = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}.$$

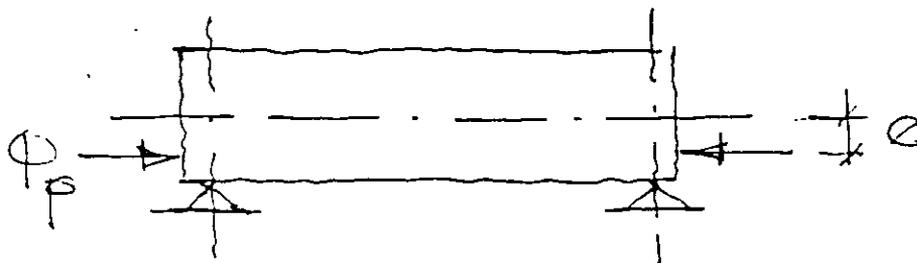
$$f = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

El diagrama de esfuerzos correspondiente es:



Es evidente que la viga fallaría puesto que las tensiones son excesivas.

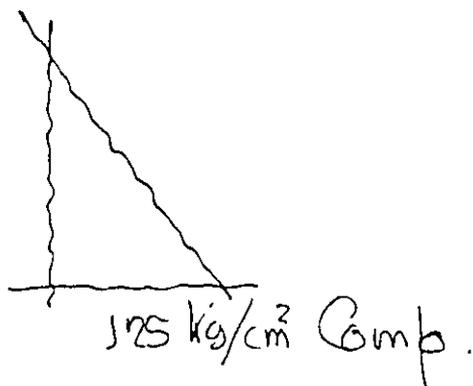
Sin embargo, si a la misma viga, a través de un medio mecánico le aplicamos la siguiente carga:



Siendo  $P_p = 75000$  Kgs.

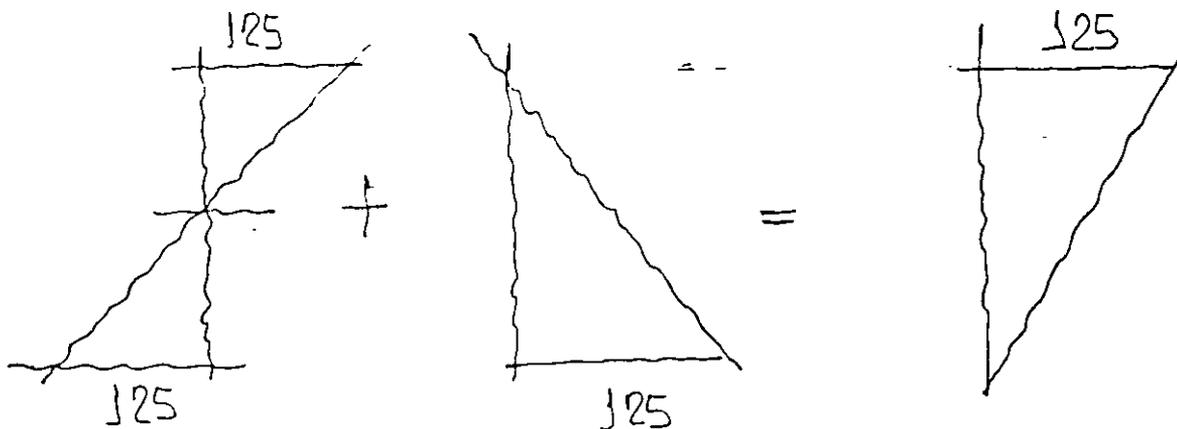
$e = 6.67$  cm.

de tal suerte que produzca el siguiente estado de esfuerzos



$125 \text{ Kg/cm}^2$  comp.

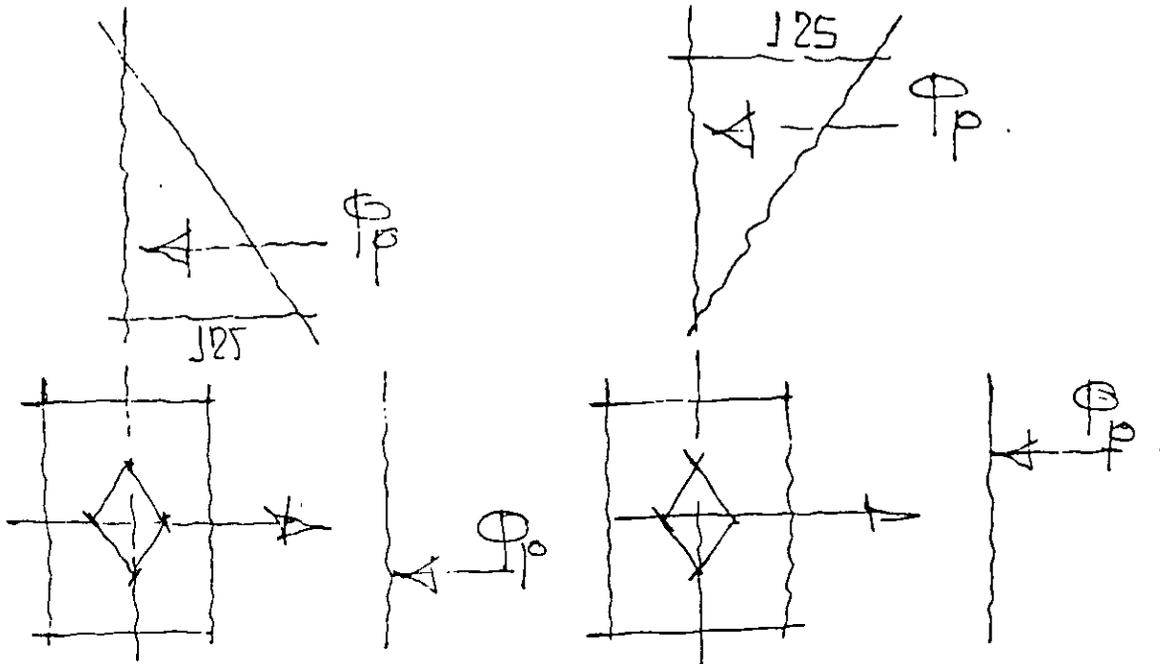
y sumamos ambos efectos tendremos la siguiente combinación de esfuerzos.



ahora es claro que el estado de esfuerzos es aceptable puesto que tan sólo hay compresiones y de una magnitud tal que son aceptables para el concreto.

Para este ejemplo hemos supuesto que el concreto no tiene capacidad alguna a la tensión.

Si analizamos los diagramas correspondientes al efecto mecánico externo - de la carga  $P_p$  y al estado final:

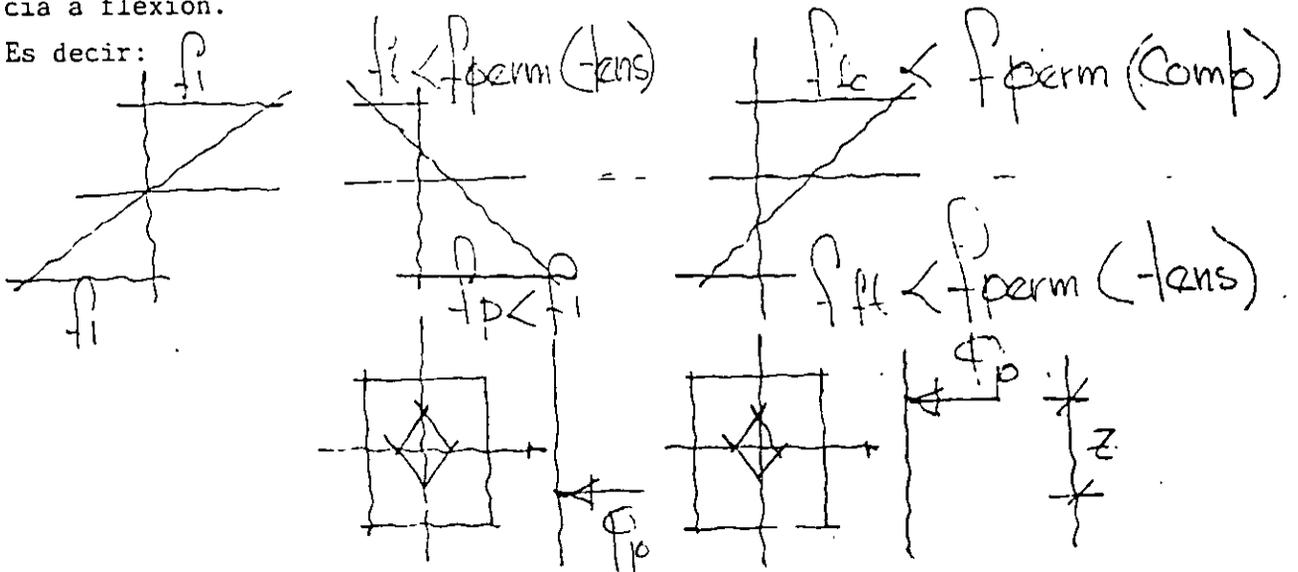


Vemos que la pza.  $P_p$  viajó del borde inferior del núcleo central, al superior.

Por lo tanto aquella sección con los bordes del núcleo central mas alejados será una sección mas eficiente desde el punto de vista de flexión.

Si ahora permitiésemos trabajar al concreto con tensiones, aún cuando menores a ciertos límites (controlados por el agrietamiento), tendríamos un mayor rango para el recorrido de  $P_p(z)$  y por lo tanto una mayor eficiencia a flexión.

Es decir:



Estos esfuerzos permisibles estan reglamentados.

El efecto externo, de hecho de flexo compresión, constituye precisamente el presfuerzo. Es decir esfuerzos anteriores a los esfuerzos de trabajo.

Existen varias modalidades para el presfuerzo, siendo las mas comunes:

a) pretensado

b) postensado

El "pre" y el "post" se refieren a si el tensado del acero es anterior o posterior al colado y fraguado del elemento.

El hecho de trabajar con esfuerzos iguales o menores a los esfuerzos permisibles nos situa dentro del rango lineal y elástico y por lo tanto es válida la fórmula de la escuadría.

Diferencias básicas y rangos de utilización entre concreto pretensado y postensado.

Ventajas y desventajas:

Materiales:

Concreto.

Acero.

Perdidas de presfuerzo

Etapas de trabajo.

\*\*\*\*\*  
 \* DISEÑO DE ELEMENTOS PRESFORZADOS \*  
 \*\*\*\*\*

LOS DATOS SON EN KGS. Y EN CMS. FECHA: 18-Abr-89  
 \* NOMBRE DE LA PIEZA ? \* =LOSA TT 247.5/60 H. VAZQUEZ

\*\*\* CONCRETOS \*\*\*      \*\*\* ACEROS \*\*\*

f'c PRES.=	350 Kq./cm <sup>2</sup> .	fou PRES.=	17500 Kq./cm <sup>2</sup> .
f'c REF. =	200 Kq./cm <sup>2</sup> .	Es PRES. =	2000000 Kq./cm <sup>2</sup> .
f'ci DET.=	250 Kq./cm <sup>2</sup> .	as PRES. =	0.55 cm <sup>2</sup> .
		C. PERD. =	0.80
		C. TENS. =	0.75

\*\*\* ETAPAS DE CARGA \*\*\*

CUANTAS ETAPAS SON = 4

SECCION SIMPLE =	1	SECCION COMPUESTA=	2
ETAPA	SECCION	S/C	W
1	1		613.8 KG./ML.
2	1		420.8 KG./ML.
3	2		742.5 KG./ML.
4	2		400.0 KG./ML.

\*\*\* PROPIEDADES GEOMETRICAS \*\*\* UNIDADES=cm<sup>2</sup>  
 LAS AREAS SE DEBEN DAR DE ABAJO PROPIEDADES GEOMETRICAS  
 HACIA ARRIBA

++++ SECCION SIMPLE ++++      AREA= 2557.50 cm<sup>2</sup>.

CUANTAS AREAS SON= 2      I TOTAL= 818766.30 cm<sup>2</sup>.

BASE	BASE	ALTURA	Y INF=	43.30 cm.
INFERIOR	SUPERIOR		Y SUP=	16.80 cm.
cm.	cm.	cm.	S INF=	18953.40 cm <sup>2</sup> .
1	18.00	30.00	S SUP=	48732.97 cm <sup>2</sup> .
2	247.50	247.50		
		5.00		

++++ SECCION COMPUESTA ++++      AREA= 3492.96 cm<sup>2</sup>

CUANTAS AREAS SON= 1      I TOTAL= 1075874.22 cm<sup>2</sup>

BASE	BASE	ALTURA	Y INF=	48.37 cm
INFERIOR	SUPERIOR		Y SUP=	16.63 cm.
cm.	cm.	cm.	S INF=	22243.51 cm <sup>2</sup>
	247.50	247.50	S SUP=	64682.05 cm <sup>2</sup> .
		5.00		

\*\*\* CABLES DE PRESFUERZO. NUMERO, POSICION Y CLARO \*\*\*

NUMERO DE CABLES = 6.0 CLARO (MTS.) = 10.81

CENTROIDE, (cm.) = 6.5

\*\*\* REVISION DE ESFUERZOS PERMISIBLES \*\*\*

LOS ESFUERZOS SON: PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	18.40 Kq./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	-47.30 Kq./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	12.61 Kq./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	-32.43 Kq./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	11.73 Kq./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-48.76 Kq./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	6.32 Kq./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-26.27 Kq./cm <sup>2</sup> .

LOS TOTALES FS T = 49.05 Kg./cm<sup>2</sup>. FI T = -154.74 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PRESFUERZO FS P = -16.73 Kg./cm<sup>2</sup>. FI P = 107.52 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm<sup>2</sup>. ET= -10.12  
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm<sup>2</sup>. ET= -59.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	1.67 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	60.77 Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	14.28 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	77.79 Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	26.01 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-70.97 Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	32.33 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-47.74 Kg./cm <sup>2</sup> .

\*\*\* REVISION DE FLECHAS \*\*\*

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.210 cm.  
 LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.617 cm.  
 \* \* \* LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.662 cm.  
 PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.712 cm.	CD =	-0.904 cm.
2	D =	0.438 cm.	CD =	-0.416 cm.
3	D =	0.656 cm.	CD =	0.740 cm.
4	D =	0.353 cm.	CD =	0.593 cm.

\*\*\* REVISION A LA RUPTURA \*\*\*

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 7.84 cm<sup>2</sup>.  
 ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4200.00 Kg./cm<sup>2</sup>  
 CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm.

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 FLUYE EL ACERO DE REFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 EL MOMENTO RESISTENTE : 46.037 Ton.-m  
 EL MOMENTO ACTUANTE : 31.800 Ton.-m  
 EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.448  
 EL VALOR DE A= 2.642 cm

\*\*\*\*\*  
 \* DISEÑO DE ELEMENTOS PRESFORZADOS \*  
 \*\*\*\*\*

LOS DATOS SON EN KGS. Y EN CMS. FECHA: 18-Abr-85

\* NOMBRE DE LA PIEZA ? \* = T. PORTANTE "L" H. VA7011 7

\*\*\* CONCRETOS \*\*\*                      \*\*\* ACEROS \*\*\*

f'c PRES. =	350 Kg./cm <sup>2</sup> .	f <sub>pu</sub> PRES. =	17500 Kg./cm <sup>2</sup> .
f'c REF. =	200 Kg./cm <sup>2</sup> .	Es PRES. =	200000 Kg./cm <sup>2</sup> .
f'c1 DET. =	250 Kg./cm <sup>2</sup> .	as PRES. =	0.85 cm <sup>2</sup> .
		C. PERD. =	0.80
		C. TENS. =	0.75

\*\*\* ETAPAS DE CARGA \*\*\*

CUANTAS ETAPAS SON = 4

SECCION SIMPLE =	1	SECCION COMPUESTA =	2
ETAPA	SECCION	W	
1	1	822.0	KG./MI.
2	1	2072.0	KG./MI.
3	1	1318.0	KG./MI.
4	2	1550.0	KG./MI.

\*\*\* PROPIEDADES GEOMETRICAS \*\*\*                      UNIDADES=cm<sup>2</sup>

LAS AREAS SE DEBEN DAR DE ABAJO                      PROPIEDADES GEOMETRICAS

HACIA ARRIBA

++++ SECCION SIMPLE ++++

CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	3425.00 cm <sup>2</sup> .
I TOTAL=	2120547.83 cm <sup>4</sup> .
Y INF=	38.80 cm.
Y SUP=	46.11 cm.
S INF=	54531.22 cm <sup>3</sup> .
S SUP=	45925.76 cm <sup>3</sup> .

BASE	BASE	ALTURA	
INFERIOR	SUPERIOR		
cm.	cm.	cm.	
1	50.00	50.00	30.00
2	35.00	35.00	55.00

++++ SECCION COMPUESTA ++++

CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	3840.76 cm <sup>2</sup> .
I TOTAL=	3127047.42 cm <sup>4</sup> .
Y INF=	44.52 cm.
Y SUP=	50.48 cm.
S INF=	70241.92 cm <sup>3</sup> .
S SUP=	61944.12 cm <sup>3</sup> .

BASE	BASE	ALTURA	
INFERIOR	SUPERIOR		
cm.	cm.	cm.	
1	35.00	35.00	5.00
2	75.00	75.00	5.00

\*\*\* CABLES DE PRESFUERZO. NUMERO. POSICION Y CLARO \*\*\*

NUMERO DE CABLES = 10.0                      CLARO (MTS.) = 10.40

CENTROIDE, (cm.) = 10.0

\*\*\* REVISION DE ESFUERZOS PERMISIBLES \*\*\*

LOS ESFUERZOS SON: PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	24.17 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	-20.38 Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	60.92 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	-51.27 Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	38.75 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-32.48 Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	27.13 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-29.83 Kg./cm <sup>2</sup> .

LOS TOTALES FS T = 150.96 Kg./cm<sup>2</sup>. FI T = -134.26 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PRESFUERZO FS P = -34.95 Kg./cm<sup>2</sup>. FI P = 85.47 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -10.12  
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -59.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	-10.78	Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	65.04	Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	50.14	Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	13.66	Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	88.89	Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-19.01	Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	116.02	Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-48.85	Kg./cm <sup>2</sup> .

\*\*\* REVISION DE FLECHAS \*\*\*

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.021 cm.  
 LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.023 cm.  
 \* \* \* LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.580 cm.  
 PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.316	cm.	CD =	-0.709	cm.
2	D =	0.796	cm.	CD =	0.088	cm.
3	D =	0.506	cm.	CD =	0.594	cm.
4	D =	0.404	cm.	CD =	0.998	cm.

\*\*\* REVISION A LA RUPTURA \*\*\*

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 3.96 cm<sup>2</sup>.  
 ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4200.00 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 FLUYE EL ACERO DE REFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 EL MOMENTO RESISTENTE : 123.119 Ton -m.  
 EL MOMENTO ACTUANTE : 77.902 Ton -m.  
 EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.590  
 EL VALOR DE A= 24.065 cm

Deduct deflection caused by weight of member:

$$\Delta \downarrow = \frac{5 w l^4}{384 E_{ci} I}$$

$$= \frac{5 \left( \frac{0.418}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (3587) (20,985)} = 3.00 \text{ in.} \downarrow$$

$$\text{Net camber at release} = 4.41 \uparrow - 3.00 \downarrow$$

$$= 1.41 \text{ in.} \uparrow$$

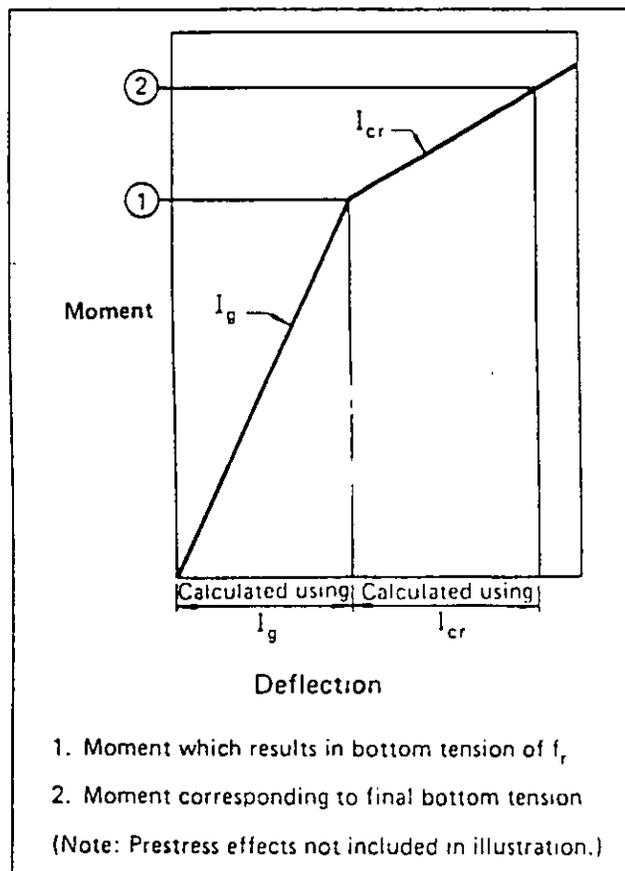
### 3.4.2 Elastic Deflections

Calculation of instantaneous deflections caused by superimposed service loads follow classical methods of mechanics. Design equations for various load conditions are given in Chapter 8 of this Handbook. If the bottom tension in a simple span member does not exceed the modulus of rupture, the deflection is calculated using the uncracked moment of inertia of the section. The modulus of rupture of concrete is defined in Chapter 9 of the Code as:

$$f_r = 7.5 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (\text{Eq. 3.4-1})$$

(See Sect. 3.3.2 for definition of  $\lambda$ )

Fig. 3.4.1 Bilinear moment-deflection relationship



### 3.4.2.1 Bilinear Behavior

Section 18.4.2 of the Code requires that "bilinear moment-deflection relationships" be used to calculate instantaneous deflections when the bottom tension exceeds  $6 \sqrt{f'_c}$ . This means that the deflection before the member has cracked is calculated using the gross (uncracked) moment of inertia ( $I_g$ ) and the *additional* deflection after cracking is calculated using the moment of inertia of the cracked section. This is illustrated graphically in Fig. 3.4.1.

In lieu of a more exact analysis, the empirical relationship:

$$I_{cr} = n A_{ps} d^2 (1 - \sqrt{\rho_p}) \quad (\text{Eq. 3.4-2})^*$$

may be used to determine the cracked moment of inertia. Table 3.9.19 gives coefficients for use in solving this equation.

**Example 3.4.2 — Deflection calculation using bilinear moment-deflection relationships**

*Given:*

8DT24 of Examples 3.2.8 and 3.4.1

*Problem:*

Determine the total instantaneous deflection caused by the specified uniform live load.

*Solution:*

$$\text{Determine } f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi}$$

From Example 3.2.8, the final tensile stress is 782 psi, which is more than 530 psi, so the bilinear behavior must be considered.

Determine  $I_{cr}$  from Table 3.9.19

$$A_{ps} = 2.142 \text{ sq in. (See Ex. 3.2.8)}$$

$$d \text{ at midspan} = e_c + y_t = 13.65 + 6.85$$

$$= 20.5 \text{ in.}^1$$

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd} = \frac{2.142}{(96)(20.5)} = 0.00109$$

$$C = 0.0067$$

$$I_{cr} = Cbd^3 = 0.0067 (96)(20.5)^3$$

$$= 5541 \text{ in.}^4$$

\*"Allowable Tensile Stresses for Prestressed Concrete," *PCI Journal*, Feb, 1970.

<sup>1</sup>It is within the precision of the calculation method and observe behavior to use midspan  $d$  and to calculate the deflection at midspan, although the maximum tensile stress in this case is assumed at  $0.4 \ell$ .

Determine the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi.  
 $782 - 530 = 252$  psi

The tension caused by live load alone is 1614 psi, therefore, the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi is:

$$\frac{1614 - 252}{1614} (0.280) = 0.236 \text{ kips/ft}$$

and

$$\Delta_g = \frac{5 w l^4}{384 E_c I_g} = \frac{5 \left( \frac{0.236}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(20,985)}$$

$$= 1.42 \text{ in.}$$

$$\Delta_{cr} = \frac{5 \left( \frac{0.044}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(5541)} = 1.00 \text{ in.}$$

Total deflection =  $1.42 + 1.00 = 2.42$  in.

### 3.4.2.2 Effective Moment of Inertia

The Code allows an alternative to the method of calculation described in the previous section. An effective moment of inertia,  $I_e$ , can be determined and the deflection then calculated by substituting  $I_e$  for  $I_g$  in the deflection calculation.

The equation for effective moment of inertia is:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (\text{Eq. 3.4-3})$$

The difference between the bilinear method and the  $I_e$  method is illustrated in Fig. 3.4.2.

The use of  $I_e$  with prestressed concrete members is described in a paper by Branson.\* The value of  $M_{cr}/M_a$  for use in determining live load deflections can be expressed as:

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left( \frac{f_{t\ell} - f_r}{f_\ell} \right) \quad (\text{Eq. 3.4-4})$$

where  $f_{t\ell}$  = final calculated total stress in the member

$f_\ell$  = calculated stress due to live load

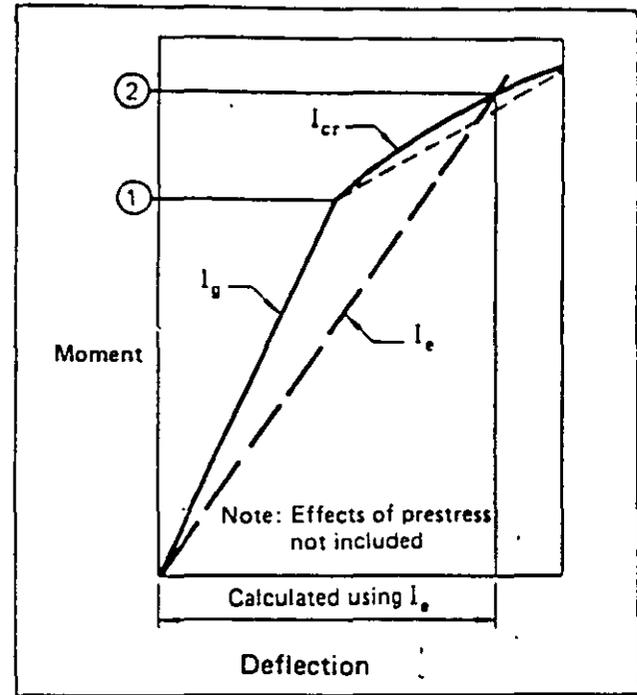
Example 3.4.3 – Deflection calculation using effective moment of inertia

Given:

Same section and loading conditions of Example 3.4.2

\*Branson, D. E., "The Deformation of Noncomposite and Composite Prestressed Concrete Members" *Deflections of Concrete Structures*, SP-43, American Concrete Institute

Fig. 3.4.2 Effective moment of inertia



Problem:

Determine the deflection caused by live load using the  $I_e$  method.

Solution:

From the table of stresses in Example 3.2.8:

$$f_{t\ell} = 782 \text{ psi (tension)}$$

$$f_\ell = 1614 \text{ psi (tension)}$$

$$f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi (tension)}$$

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left( \frac{782 - 530}{1614} \right) = 0.844$$

$$\left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = (0.844)^3 = 0.601$$

$$1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = 1 - 0.601 = 0.399$$

$$I_e = 0.601 (20,985) + 0.399 (5541) = 14,823 \text{ in.}^4$$

$I_e$  can also be found using Fig. 3.9.20

$$f_e = 782 - 530 = 252 \text{ psi}$$

$$\frac{f_e}{f_\ell} = \frac{252}{1614} = 0.16$$

$$\frac{I_{cr}}{I_g} = \frac{5541}{20,985} = 0.26$$

Follow arrows on the chart

$$\frac{I_e}{I_g} = 0.70$$

$$I_e = 0.70 (20,985) = 14,690 \text{ in.}^4$$

$$\Delta l = \frac{5 w l^4}{384 E_c I_e} = \frac{5 \left( \frac{0.280}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287) (14,823)} = 2.38 \text{ in.}$$

### 3.4.3 Long-Time Camber/Deflection

ACI 318-77 provides a convenient equation for estimating the additional long-time deflection of non-prestressed reinforced concrete members (Section 9.5.2.5):

$$[2 - 1.2 (A'_s/A_s)] \geq 0.6, \text{ where}$$

$A'_s$  is the compressive reinforcement and  $A_s$  is the tensile reinforcement. No such convenient guide is given for prestressed concrete.

The determination of long-time cambers and deflections in precast, prestressed members is somewhat more complex because of (1) the effect of prestress and the loss of prestress over time, (2) the strength gain of concrete after release of prestress, and because (3) the camber or deflection is important not only at the "initial" and "final" stages, but also at erection, which occurs at some intermediate stage, usually from 30 to 60 days after casting.

It has been customary in the design of precast, prestressed concrete to estimate the camber of a member after a period of time by multiplying the initial calculated camber by some factor, usually

based on the experience of the designer. To properly use these "multipliers," the upward and downward components of the initial calculated camber should be separated in order to take into account the effects of loss of prestress, which only affect the upward component.

Table 3.4.1 provides suggested multipliers which can be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members, i.e., those members which are within the span-depth ratios recommended in this Handbook. Derivation of these multipliers is contained in a paper by Martin.\*

Long-time effects can be substantially reduced by adding non-prestressed reinforcement near the level of the prestressing steel. The reduction effects proposed by Shaikh and Branson<sup>†</sup> can be applied to the approximate multipliers of Table 3.4.1 as follows:

$$C_2 = \frac{C_1 + A_s/A_{ps}}{1 + A_s/A_{ps}}$$

- where  $C_1$  = multiplier from Table 3.4.1  
 $C_2$  = revised multiplier  
 $A_s$  = area of non-prestressed reinforcement  
 $A_{ps}$  = area of prestressed steel

\*Martin, L. D. "A Rational Method for Estimating Camber and Deflection of Precast, Prestressed Concrete Members" *PCI Journal*, Jan-Feb, 1977.

†Shaikh, A. F., and Branson, D. E., "Non-Tensioned Steel in Prestressed Concrete Beams," *PCI Journal*, Feb, 1970.

**Table 3.4.1 Suggested multipliers to be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members**

	Without Composite Topping	With Composite Topping
<i>At erection:</i>		
(1) Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	1.85	1.85
(2) Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	1.80	1.80
<i>Final:</i>		
(3) Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	2.70	2.40
(4) Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	2.45	2.20
(5) Deflection (downward) — apply to elastic deflection due to superimposed dead load only	3.00	3.00
(6) Deflection (downward) — apply to elastic deflection caused by the composite topping	—	2.30

Alternately using Table 5.20.4, for  $b = 16$  in. and  $A_{vf} + A_n = 4 - \#6$ , read:

$$A_{sh} = 0.37 \text{ sq in.}$$

Note: Table 5.20.4 will usually be more conservative because it assumes  $A_{vf}$  to be the steel provided rather than the steel required.

### 5.9 Dapped-End Connections (Recessed or Dapped)

Design of connections which are recessed, or dapped into the end of the member, requires the investigation of several potential failure modes. These are illustrated in Fig. 5.9.1 and listed below with the reinforcement required for each consideration.

- 1) Flexure (cantilever bending) and axial tension in the extended end. Provide flexural reinforcement,  $A_s$ , plus axial tension reinforcement,  $A_n$ .
- 2) Direct shear at the junction of the dap and the main body of the member. Provide shear-friction reinforcement composed of  $A_s$  and  $A_{vh}$ , plus axial tension reinforcement,  $A_n$ .
- 3) Diagonal tension emanating from the reentrant corner. Provide shear reinforcement,  $A_{sh}$ .
- 4) Diagonal tension in the extended end. Provide shear reinforcement composed of  $A_{vh}$  and  $A_v$ .
- 5) Bearing on the extended end. If plain concrete bearing strength is exceeded, use  $A_s$  as shear-friction reinforcement.

Each of these potential failure modes should be investigated separately. The reinforcement requirements are not cumulative, that is,  $A_s$  is the greater of that required by 1, 2 or 5, not the sum.  $A_{vh}$  is the greater of that required by 2 or 4.

#### 5.9.1 Flexure and Axial Tension in the Extended End

The flexural and axial tension horizontal reinforcement can be determined by:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ \frac{V_u a + N_u (h - d)}{d} + N_u \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1})$$

where:

$$\phi = 0.85^*$$

$$a = \text{shear span, in. (can be assumed} = 3/4 \ell_p)$$

$$\ell_p = \text{dap projection, in.}$$

$h$  = depth of the member above the dap, in.

$d$  = distance from top to center of the reinforcement,  $A_s$ , in.

$f_y$  = yield strength of the flexural reinforcement, psi

For design convenience, Eq. 5.9-1 can be rearranged as follows:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ V_u \left( \frac{a}{d} \right) + N_u \left( \frac{h}{d} \right) \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1a})$$

Table 5.20.5 may be used to determine the steel requirements.

#### 5.9.2 Direct Shear

The potential vertical crack shown in Fig. 5.9.1 is resisted by a combination of  $(A_s + A_n)$  and  $A_{vh}$ . This reinforcement can be calculated by Eqs. 5.9.2 through 5.9.4:

$$A_s = \frac{2V_u}{3\phi f_y \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-2})$$

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-3})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u}{3\phi f_{yv} \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-4})$$

where

$$\phi = 0.85$$

$f_y$  = yield strength of  $A_s$  and  $A_n$ , psi

$f_{yv}$  = yield strength of  $A_{vh}$ , psi

$$\mu_e = \frac{1000 \lambda^2 b h \mu}{V_u} \quad (\text{Eq. 5.9-5})$$

(See Sect. 5.6 for definition of  $\lambda$ )

The recommended minimum reinforcement requirements are:

$$A_s (\text{min}) = \frac{80 b h}{f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-6})$$

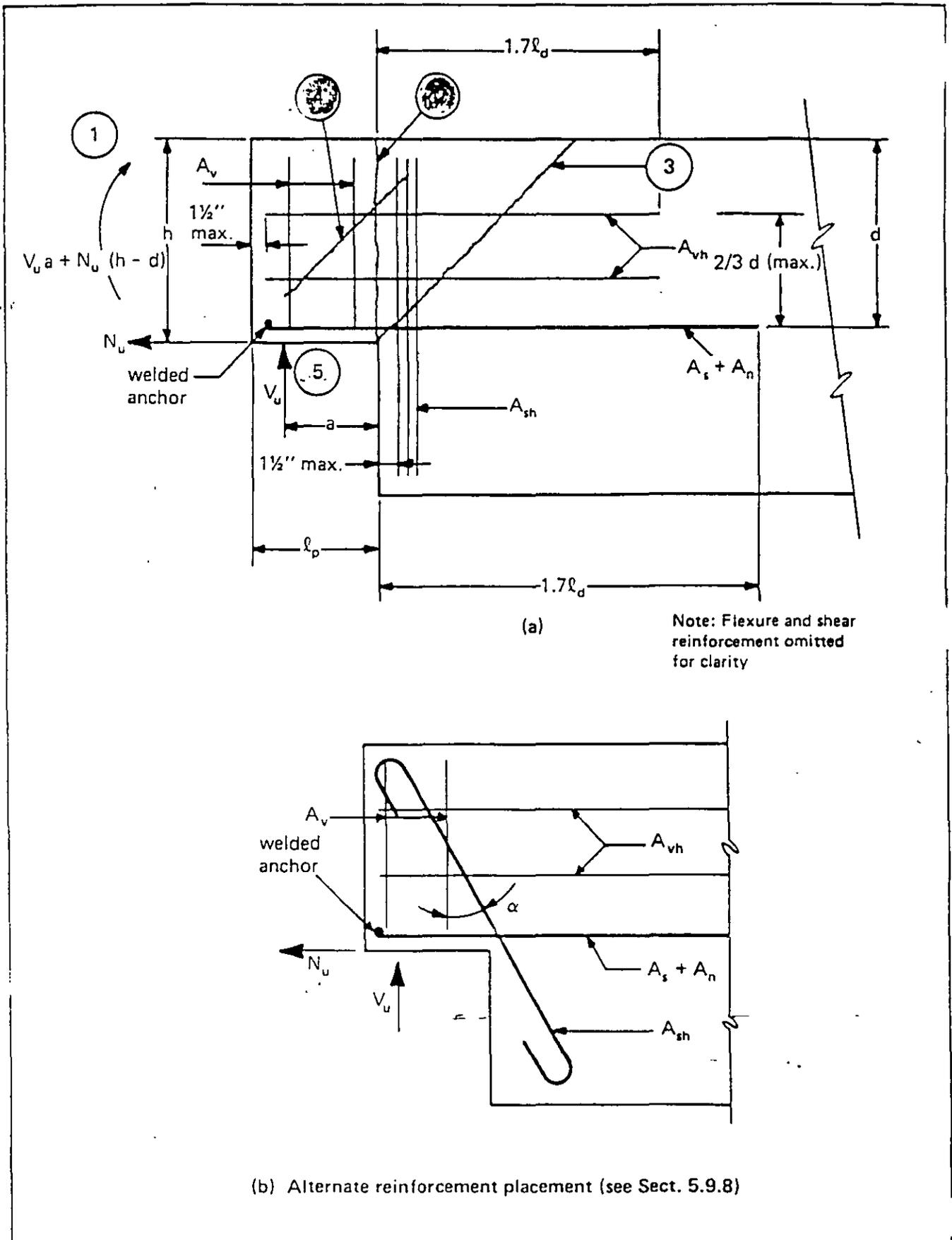
$$A_{vh} (\text{min}) = \frac{40 b h}{f_{yv}} \quad (\text{Eq. 5.9-7})$$

unless one-third more than that required by either Eq. 5.9-2 or 5.9-4 is provided.

Reinforcement  $A_{vh}$  should be uniformly distributed within  $2/3 d$  of reinforcement  $A_s + A_n$ .

\* To be theoretically correct, Eq. 5.9-1 should have  $j_u d$  in the denominator. The use of  $\phi = 0.85$  instead of 0.90 (flexure) compensates for this approximation.

Fig. 5.9.1 Required reinforcement in dapped-end connections



For design convenience, Eq. 5.9-5 can be combined with Eqs. 5.9-2 and 5.9-4 to yield:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 bh} \quad (\text{Eq. 5.9-2a})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 bh} \quad (\text{Eq. 5.9-4a})$$

where

$$\mu = 1.4$$

$V_u$  is in kips

$f_y$  and  $f_{yv}$  are in ksi

### 5.9.3 Diagonal Tension at Reentrant Corner

The reinforcement required to resist diagonal tension cracking starting from the reentrant corner can be calculated from:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys}} \quad (\text{Eq. 5.9-8})$$

where

$$\phi = 0.85$$

$V_u$  = applied factored load, lb

$A_{sh}$  = vertical or diagonal bars across potential diagonal tension crack, sq in.

$f_{ys}$  = yield strength of  $A_{sh}$ , psi

$V_u/\phi bd$  should not exceed  $8\lambda\sqrt{f'_c}$ .

### 5.9.4 Diagonal Tension in the Extended End

Additional reinforcement is required in the extended end, as shown in Fig. 5.9.1, such that:

$$\phi V_n = \phi (A_v f_v + A_{vh} f_{yv} + 2 \lambda bd \sqrt{f'_c}) \quad (\text{Eq. 5.9-9})$$

where

$f_v$  = yield strength of  $A_v$

Tests on dapped-end beams\* indicate that at least one half of the reinforcement required in this area should be placed vertically. Thus:

$$\min A_v = \frac{1}{2 f_v} \left( \frac{V_u}{\phi} - 2 \lambda bd \sqrt{f'_c} \right) \quad (\text{Eq. 5.9-10})$$

### 5.9.5 Bearing on the Extended End

The bearing on the extended end should be checked against the plain concrete bearing limita-

tion of Eq. 5.7.1. If the limits are exceeded, then the capacity should be checked for reinforced concrete bearing as described in Sect. 5.8:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left( \frac{V_u \cos \theta}{\mu_e} + N_u \right) \quad (\text{Eq. 5.9-11})$$

$$A_{sh} f_{ys} + A_v f_v = \frac{A_s f_y}{\mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-12})$$

### 5.9.6 Anchorage of Reinforcement

Horizontal bars  $A_s + A_n$  should be extended a minimum of  $1.7\ell_d$  past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by welding to cross bars, angles or plates. Horizontal bars  $A_{vh}$  should be extended a minimum of  $1.7\ell_d$  past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by hooks or other suitable means. Vertical or diagonal bars  $A_{sh}$  and  $A_v$  should be properly anchored by hooks as required by ACI 318-77. Welded wire fabric may be used for reinforcement, and should be anchored in accordance with ACI 318-77.

### 5.9.7 Detailing Considerations

Experience has shown that the depth of the extended end should not be less than one-half the depth of the beam, unless the beam is significantly deeper than necessary for architectural reasons:

Diagonal tension reinforcement,  $A_{sh}$ , should be placed as closely as practical to the reentrant corner. This reinforcement requirement is not additive to other shear reinforcement requirements.

Reinforcement requirements may be met with welded headed studs, deformed bar anchors or welded wire fabric.

If the flexural stress, calculated for the full depth of section using factored loads and gross section properties, exceeds  $6\sqrt{f'_c}$  immediately beyond the dap, longitudinal reinforcement should be placed in the beam to develop the required flexural strength.

### 5.9.8 Alternate Placement of Reinforcement

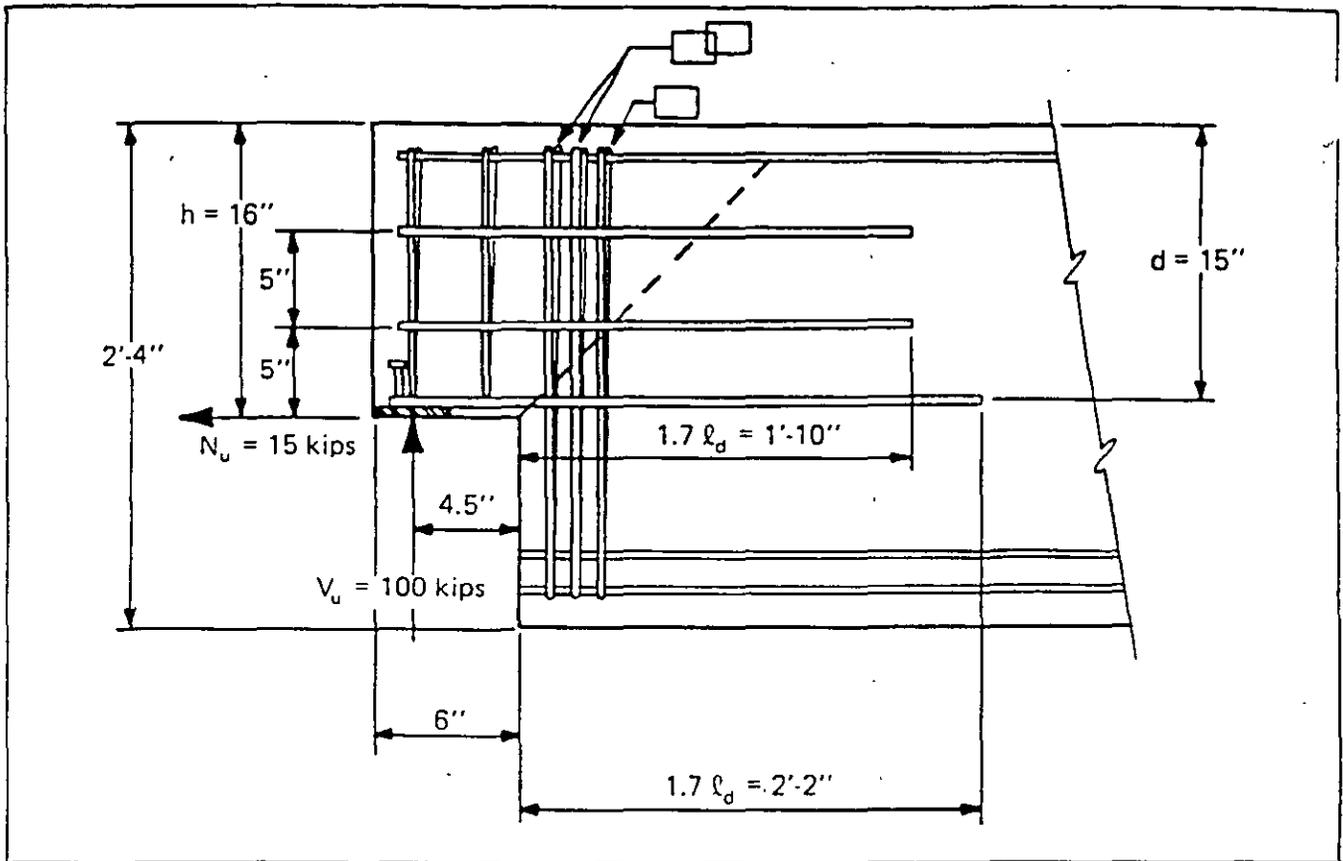
As an alternate to placing reinforcement as shown in Fig. 5.9.1a, diagonal bars can be placed as shown in Fig. 5.9.1b. The requirements for reinforcement placed in this manner can be determined by:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys} \cos \alpha} \approx \frac{V_u \sqrt{a^2 + d^2}}{\phi f_{ys} d} \quad (\text{Eq. 5.9-13})$$

$$A_s + A_n = \frac{N_u h}{\phi f_y d} \quad (\text{Eq. 5.9-14})$$

\* Test performed by Rath, Rath and Johnson, Hinsdale, IL (results unpublished)

Fig. 5.9.2 Dapped-end beam of Example 5.9.1



but not less than that determined in sections 5.9.2 or 5.9.5.

If the diagonal bars can be adequately anchored into the extended end, they may also be used as at least partial replacement for  $A_v$  and  $A_{vn}$  requirements shown in Sect. 5.9.4.

**Example 5.9.1 Reinforcement for dapped-end beam**

*Given:* The 16RB28 beam with a dapped end as shown in Fig. 5.9.2.

- $V_u = 100$  kips (includes all load factors)
- $N_u = 15$  kips
- $f'_c = 5000$  psi (normal weight)
- $f_y$  for all reinforcement = 60 ksi (weldable)

*Problem:* Determine the requirements for reinforcement  $A_s + A_n$ ,  $A_{vn}$ ,  $A_{vh}$ , and  $A_v$  shown in Fig. 5.9.1.

*Solution:*

- Assume: Shear span,  $a = 3/4 (6) = 4.5$  in.
- $d = 15$  in.

1) Flexure in extended end:

By Eq. 5.9-1a:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ V_u \left( \frac{a}{d} \right) + N_u \left( \frac{h}{d} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{0.85 \times 60} \left[ 100 \left( \frac{4.5}{15} \right) + 15 \left( \frac{16}{15} \right) \right] = 0.90 \text{ sq in.}$$

Use 3 - #5,  $A_s = 0.93$  sq in.

This could also be obtained from Table 5.20.5

2) Direct shear:

By Eq. 5.9-2a:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 b h} = \frac{(100)^2}{1.78 (60) (1) (16) (16)}$$

$$= 0.37 \text{ sq in.}$$

By Eq. 5.9-6:

$$A_s (\text{min}) = \frac{80 b h}{f_y} = \frac{80 (16) (16)}{60,000}$$

$$= 0.34 \text{ sq in.} < 0.37$$

By Eq. 5.9-3:

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} = \frac{15,000}{(0.85)(60,000)} = 0.29 \text{ sq in.}$$

$$A_s + A_n = 0.37 + 0.29 = 0.66 \text{ sq in.} < 0.93$$

Therefore, flexure governs.

By Eq. 5.9-4a:

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 bh}$$

$$= \frac{(100)^2}{3.57 (60)(1)(16)(16)} = 0.18 \text{ sq in.}$$

From Eq. 5.9-7:

$$A_{vh} (\text{min}) = \frac{40 bh}{f_y} = \frac{40 (16)(16)}{60,000}$$

$$= 0.17 \text{ sq in.} < 0.18 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #3 U-bars,  $A_{vh} = 0.44 \text{ sq in.}$

3) Diagonal tension at reentrant corner:

By Eq. 5.9-8:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_y} = \frac{100}{0.85(60)} = 1.96 \text{ sq in.}$$

Use 5 - #4 closed ties = 2.00 sq in.

$$\text{Check } V_u / \phi bd = 100 / (0.85 \times 16 \times 15)$$

$$= 0.490 \text{ ksi} < 8 \sqrt{f'_c} = 0.566 \text{ ksi OK}$$

4) Diagonal tension in the extended end:

$$\text{Concrete capacity} = 2\lambda \sqrt{f'_c} bd$$

$$= 2 (1) \sqrt{5000} (16)(15) / 1000 = 33.9 \text{ kips}$$

By Eq. 5.9-10:

$$A_v = \frac{1}{2 f_v} \left( \frac{V_u}{\phi} - 2\lambda \sqrt{f'_c} bd \right)$$

$$= \frac{1}{2 (60)} \left( \frac{100}{0.85} - 33.9 \right) = 0.70 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #4 = 0.80 sq in.

Check Eq. 5.9-9

$$\phi V_n = \phi (A_v f_v + A_{vh} f_{yv} + 2\lambda \sqrt{f'_c} bd)$$

$$= 0.85 [0.80 (60) + 0.44 (60) + 33.9]$$

$$= 92.1 \text{ kips} < 100$$

Change  $A_{vh}$  to 2 - #4

$$\phi V_n = 110.4 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

5) Check concrete bearing by Eq. 5.7-1

$$w = 4.5 \text{ in.}$$

$$s = 4.5/2 \text{ (worst case)}$$

$$sw = 4.5 (4.5/2) = 10.1, \text{ use 9 max}$$

$$s/w = 0.5$$

$$C_r = \left( \frac{sw}{200} \right)^{N_u/V_u} = (9/200)^{0.15} = 0.63$$

$$\phi V_n = \phi C_r 70 \lambda \sqrt{f'_c} (s/w)^{1/3} bw$$

$$\phi V_n = 0.7 (0.63)(70)(1) \sqrt{5000} (0.5)^{1/3}$$

$$(16)(4.5)/1000 = 124.7 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

Reinforcement is not required for bearing  
(Could also be determined from Table 5.20.1)

6) Check anchorage requirements:

$A_s + A_n$  bars:

From Table 8.2.7:

$$f_y = 60,000 \text{ psi, } f'_c = 5000 \text{ psi, #5 bars}$$

$$1.7\ell_d = 26 \text{ in. beyond dap}$$

$A_{vh}$  bars:

From Table 8.2.7, for #4 bars,

$$1.7\ell_d = 20 \text{ in. beyond dap}$$

## 5.10 Beam Ledges

The design shear strength of continuous beam ledges supporting concentrated loads, as illustrated in Fig. 5.10.1, can be determined by the lesser of Eq. 5.10-1 and 5.10-2:

for  $s > b + h$

$$\phi V_n = 3 \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h) \quad (\text{Eq. 5.10-1})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + 2d_p) \quad (\text{Eq. 5.10-2})$$

for  $s < b + h$ , and equal concentrated loads, use the lesser of Eqs. 5.10-1a, 5.10-2a or 5.10-3

$$\phi V_n = 1.5 \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + s) \quad (\text{Eq. 5.10-1a})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} \left( \ell_p + \frac{b+h}{2} + d_e + s \right) \quad (\text{Eq. 5.10-2a})$$

where:

$h$  = depth of the beam ledge, in.

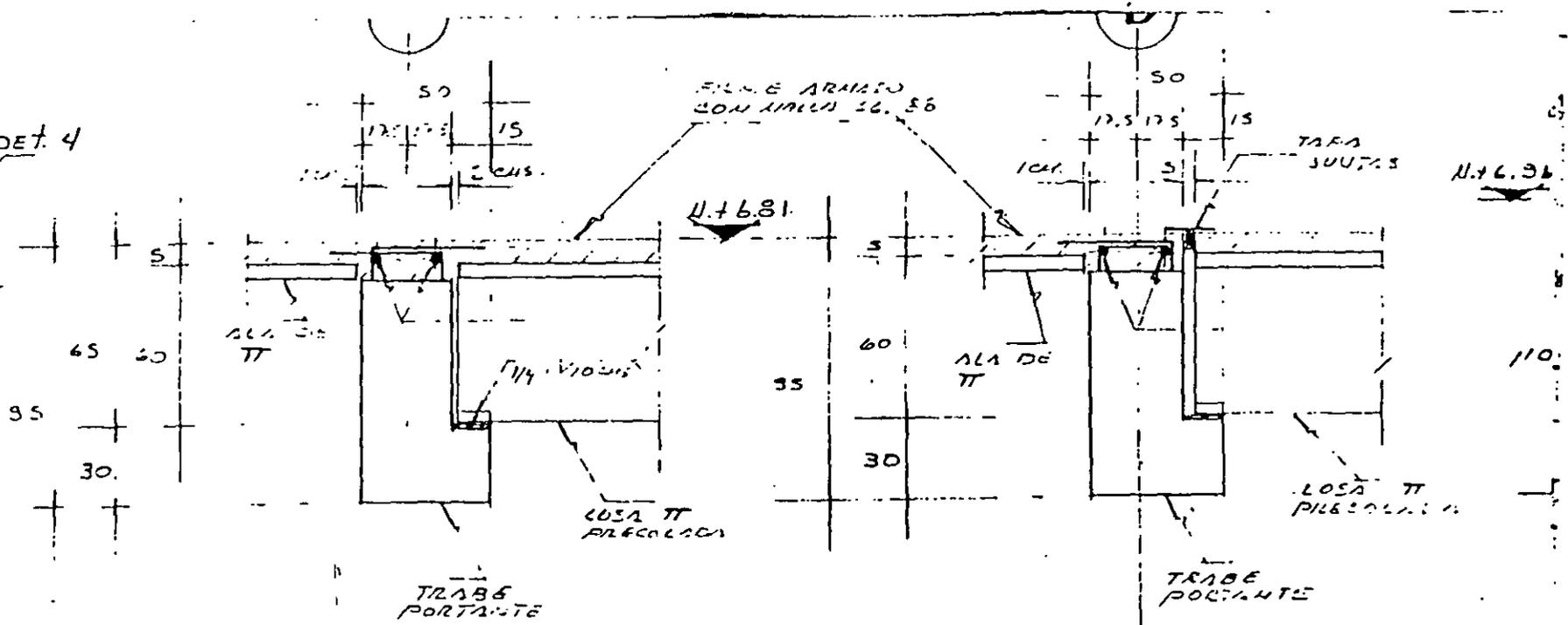
$\ell_p$  = ledge projection, in.

$b$  = width of bearing area, in.

$s$  = spacing of concentrated loads, in.

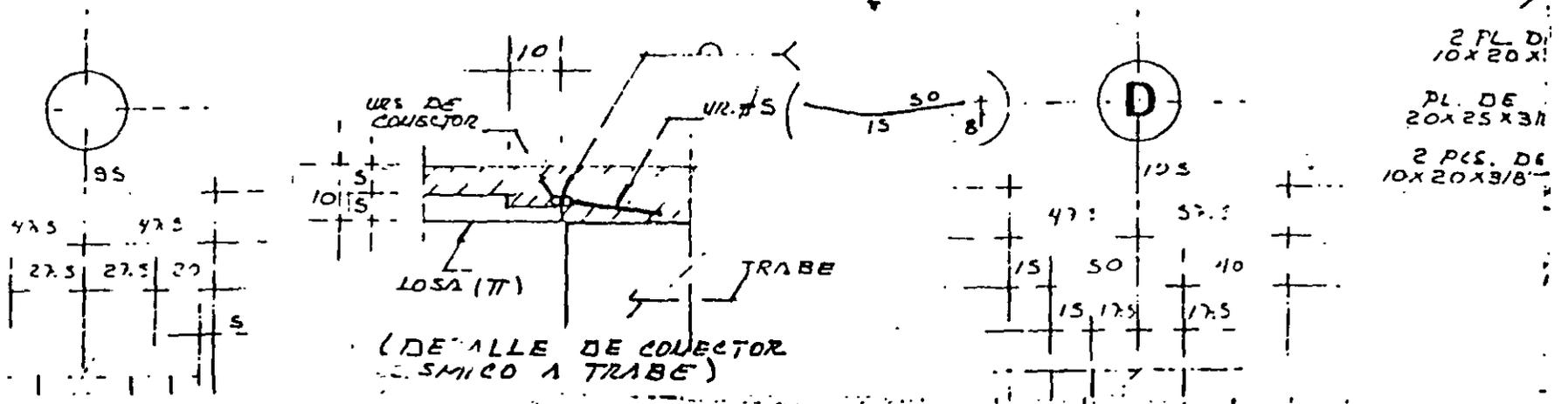
$d_e$  = distance from center of load to the end of the beam, in.

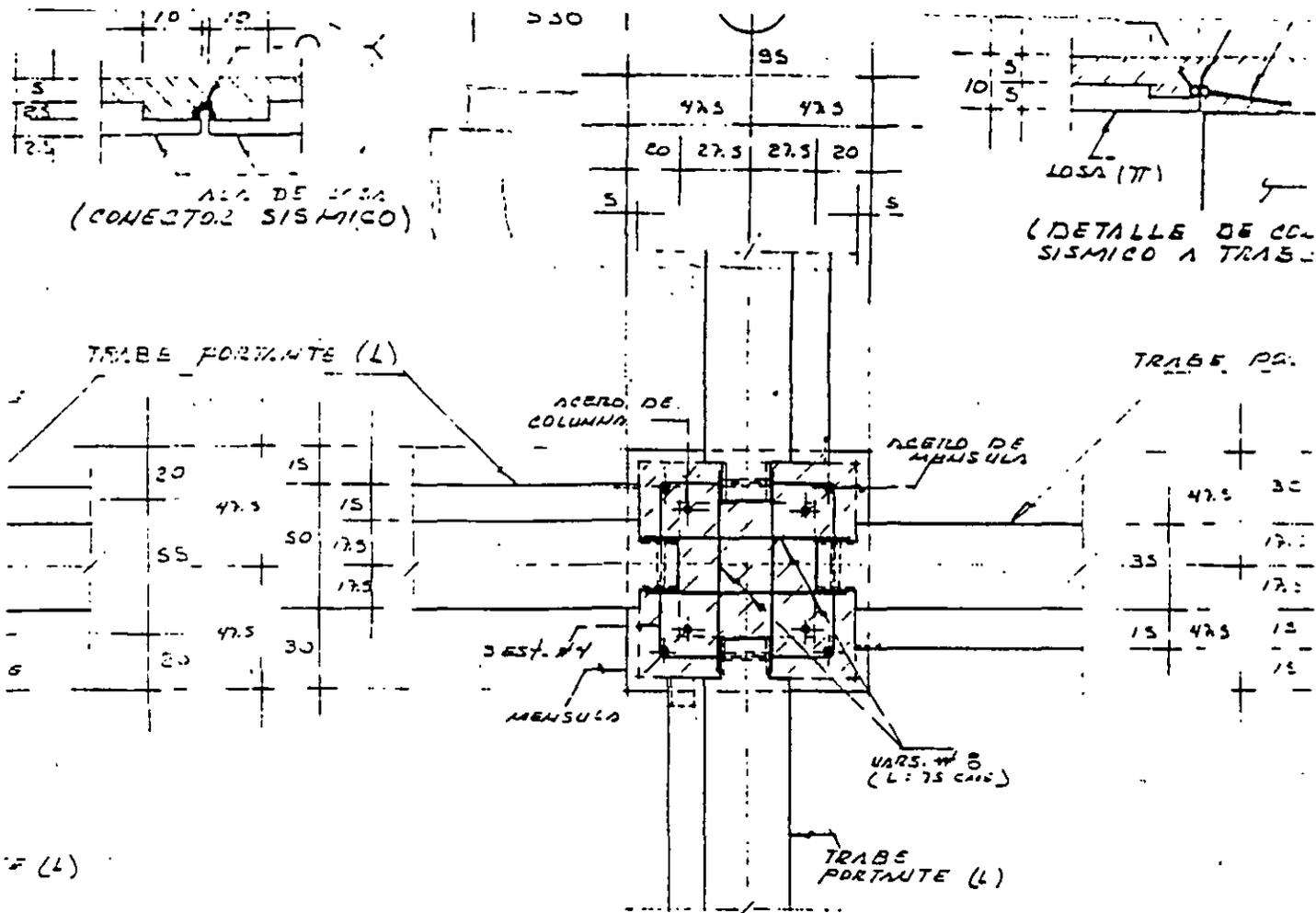
DET. 4



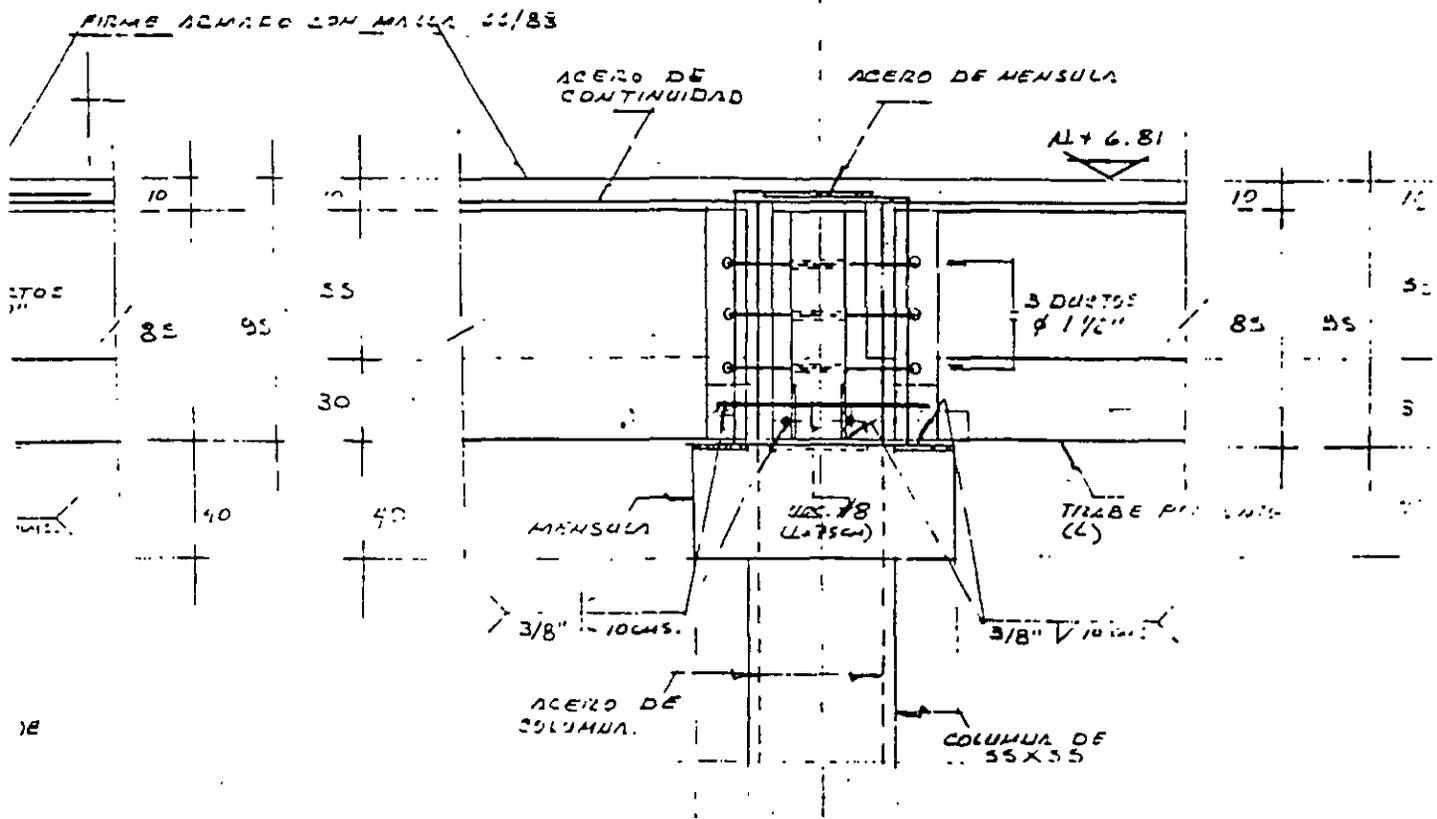
CORTE AA

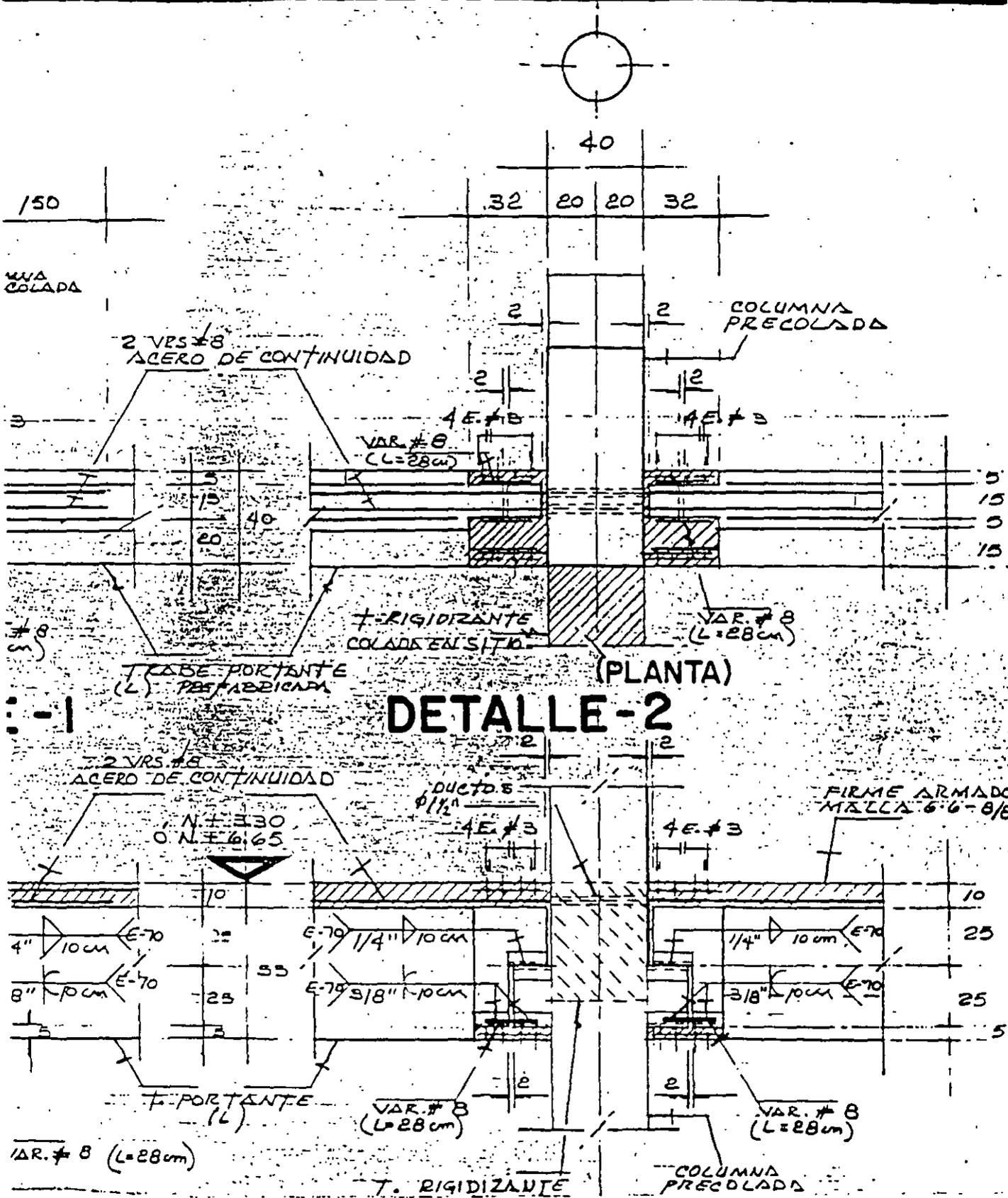
CORTE BB





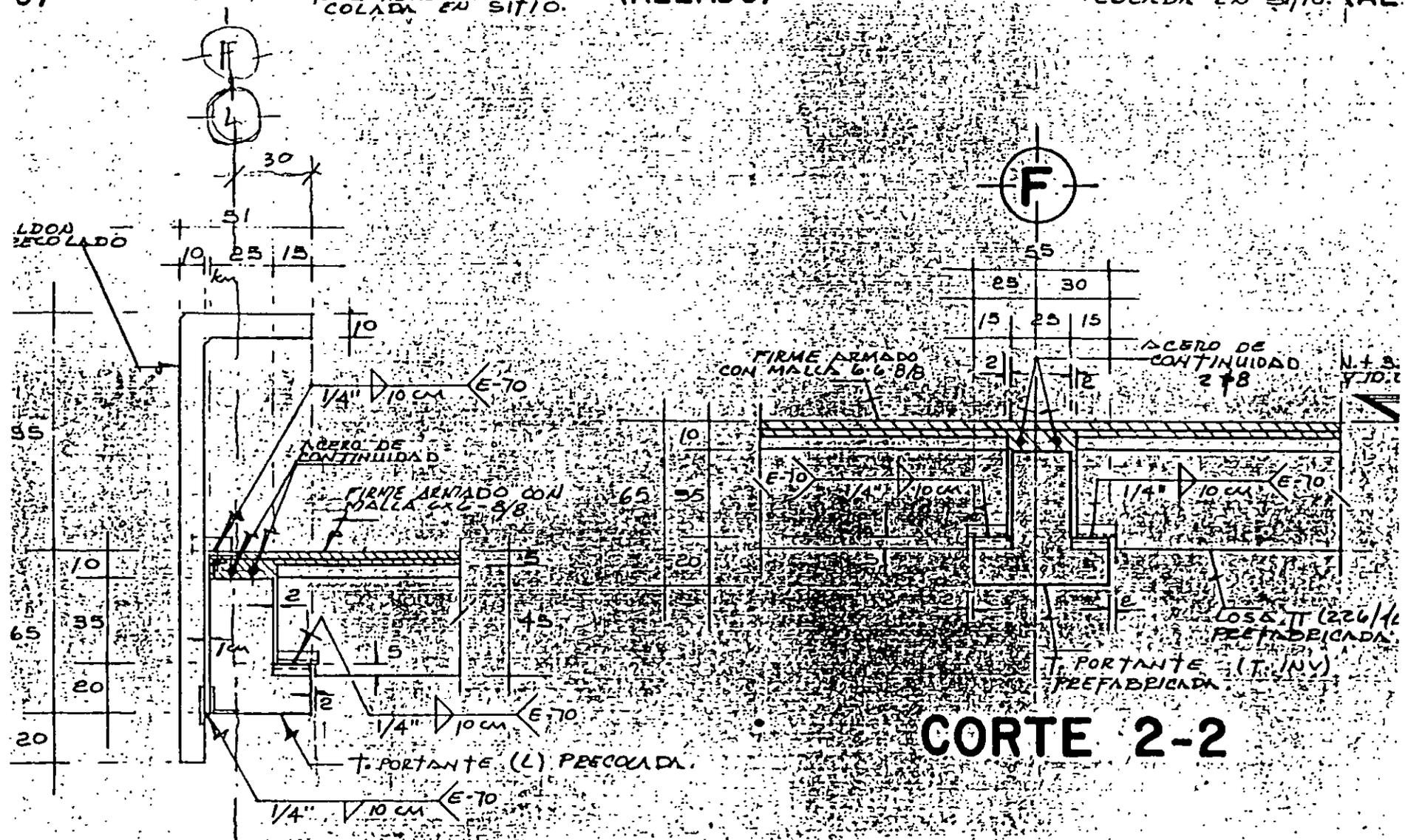
PLANTA





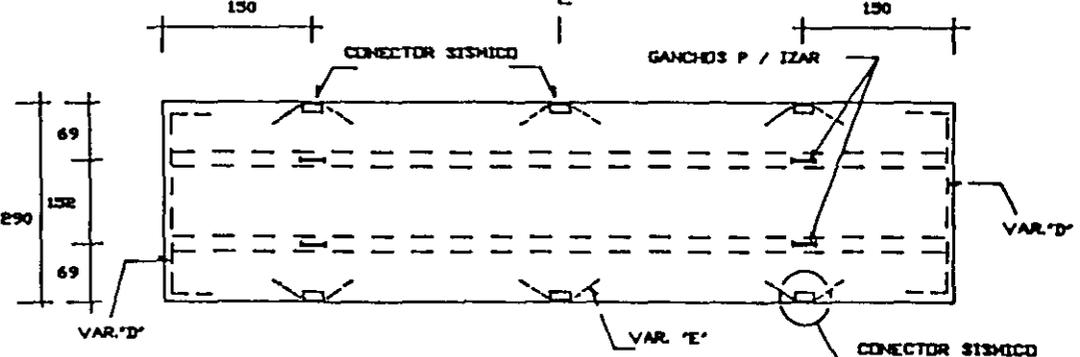
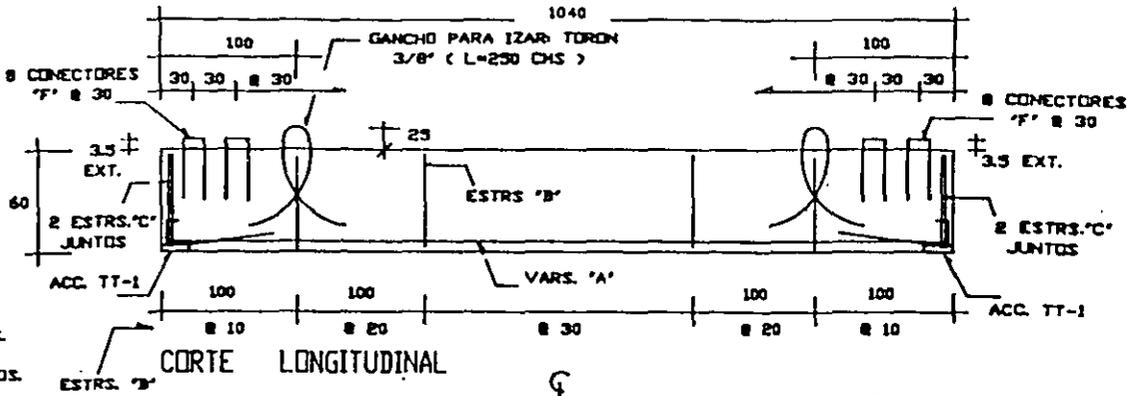
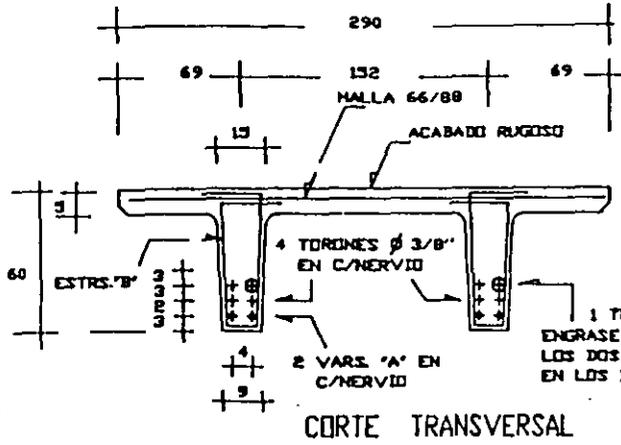
01) T. RIGIDIZANTE COLADA EN SITIO. (ALZADO) 32 || 40 || 17 |

T. RIGIDIZANTE COLADA EN SITIO. (ALZADO) 17 | 40 |



CORTE-1-1

CORTE 2-2



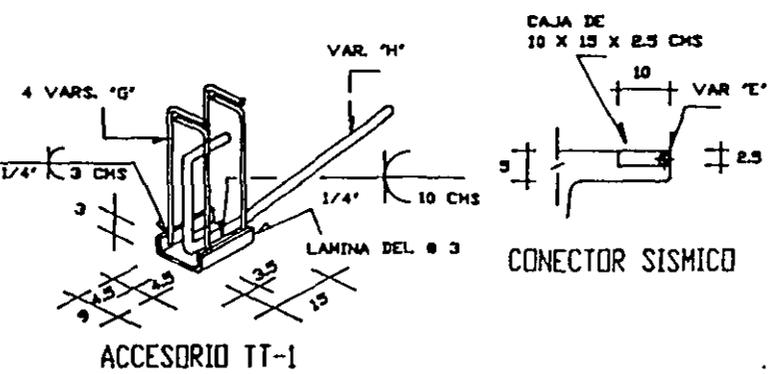
VAR.	#	LONG. CHS.	CANT. PZAS.	PESO KGS.	CRUQUIS EN CHS.
A	3	1037	4	23.8	1037
B	2	179.5	100	44.9	55 32
C	2	140.5	8	2.8	55 7 11
D	3	335	2	3.6	290 25 25
E	5	135	6	12.6	60 15 60
F	3	90	32	16.1	35 20 35
G	3	64	16	5.7	32 12
H	5	109	4	6.8	25 12 60 10

NOTA : LAS COTAS DE LOS CRUQUIS SON A CARAS INTERIORES DE VARILLA.

VISTA SUPERIOR  
( SIN CONSIDERAR CONECTORES 'F' )

NOTAS :

- COTAS Y MEDIDAS EN CHS. SALVO INDICACION.
- CONCRETO :  $f'c = 350$  KG/CHS.
- ACERO : PREFUERZO :  $f_{pu} = 18,900$  KG/CHS.
- ACERO : REFUERZO :  $f_y = 4,200$  KG/CHS.
- MALLA :  $f_y = 3,000$  KG/CHS.
- TAMAÑO MÁXIMO DEL AGREGADO =  $3/4'$



OBRA : CIA. HNOS. VAZQUEZ		PLANO	
FABRICA		F-22	
PREZA TIPO TT-22	CANT. PZAS. 2	VOL. / PZA. 2.9 M <sup>3</sup>	PESO / PREZA 6.9 TON.
CALCULO DIEST	SONIDO AVILLECOS	APROBADO J. GAYA	FECHA FEB / 89



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MÓDULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA**

**MUROS**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO DEL 2002**

## 4.5 MUROS

### 4.5.1 SUJETOS A CARGAS VERTICALES AXIALES O EXCÉNTRICAS

DEBEN DIMENSIONARSE COMO COLUMNAS CON LAS DISPOSICIONES COMPLEMENTARIAS SIGUIENTES:

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES TENGAN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \text{LONG. EFECTIVA DE PANDEO} = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ (1.3 - 0.85H/L)H & ; \text{ Si } 0.35 < H/L < 0.80 \\ L/2 & ; \text{ Si } H/L \geq 0.8 \end{cases}$$

- TABLEROS CUYOS BORDES VERTICALES NO TIENEN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

$$H' = \begin{cases} H & ; \text{ Si } H/L \leq 0.35 \\ 0.215(H/L + 4.3)H \leq 2H & ; \text{ Si } H/L > 0.35 \end{cases}$$

- CARGAS CONCENTRADAS:  $b_{\text{efectivo}} = b_{\text{contacto}} + 4b_{\text{muro}} \leq \text{DISTANCIA E A D E CARGAS}$

- REFUERZO MÍNIMO

SI LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO Y SU MAGNITUD  $\leq 0.25 f_c A_g$ :

EL REFUERZO MÍNIMO VERTICAL  $A_{s \text{ min}} = \frac{66000 b_y}{f_y (b_y + 100)}$  SIN NECESIDAD DE RESTRINGIRLO CONTRA EL PANDEO

EN USC CONTRARIO  $A_{s \text{ min}} = (20/f_y) A_g$  Y DEBERÁ RESTRINGIRSE CONTRA EL PANDEO CON GRASAS

EN AMBOS CASOS, EL REFUERZO MÍNIMO HORIZONTAL SERÁ:

$$A_{sh \text{ min}} = \frac{66000 b_y}{f_y (b_y + 100)} \text{ cm}^2/4. \text{ (EN MUROS EXPUESTOS)}$$

A LA INTERFERIE O EN CONTACTO DIRECTO CON EL SUELO  $A_{sh} = 1.5 A_{sh \text{ min}}$

$S \leq \text{EL MEJOR DE } \begin{cases} 50 \text{ cm.} \\ 3.5 b_y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } b_y \leq 15 \text{ EL ACERO SE PUEDE COLOCAR} \\ \text{EN UNA SOLA CAPA} \end{array} \right.$

## 4.5.2 MUROS SUJETOS A FUERZAS HORIZONTALES EN SU PLANO

- PARA CARGA VERTICAL DESPRECIABLE  $L/t \leq 70$
- PARA CARGA VERTICAL NO DESPRECIABLE  $L/t \leq 40$  Y SE APLICAN 4.5.1 Y 2.1.3
- $t \geq 13 \text{ cm} \geq 0.06 H$  A MENOS QUE SE HAGA UN ANALISIS DE MUDEO LATERAL DE LOS ~~MUROS~~ BORDES O SE LES SUPLINISTRE RESTRICCION LATERAL. EN CONSTRUCCIONES DE NO MAS DE DOS NIVELES CON  $H \leq 3 \text{ m}$ , PUEDE SER  $t = 10 \text{ cm}$ .
- CUANDO LOS MUROS RESISTAN EL TOTAL DE LAS FZS. LATERALES DE SISMO  $\Omega = 3.0$
- CUANDO LOS MUROS NO CUMPLAN CON EL INCISO b);  $\Omega = 2.0$
- CUANDO PARTE DE LAS FZS. LATERALES SEAN RESISTIDAS POR OTRAS FORMAS ESTRUCTURALES (MARCOS RIGIDOS O LOSAS PLANAS)  $\Omega =$  EL DEFINIDO EN EL CAPITULO CORRESPONDIENTE DE ESTAS NORMAS.

### a) FLEXION Y FLEXOCOMPRESION

$$\text{SI } P_u \leq 0.2 f_r (t L) f_c \text{ Y } \Delta_s / t d \leq 0.008$$

$$M_e = f_r \Delta_s f_y z$$

$$z = \begin{cases} 0.8L; & \text{SI } H/L \geq 1.0 \\ 0.4(1+H/L)L; & \text{SI } 0.5 < H/L < 1.0 \\ 1.2H; & \text{SI } H/L \leq 0.5 \end{cases}$$

$H =$  ALTURA TOTAL DEL MURO ;  $L =$  LONGITUD TOTAL DEL MURO

$$\Delta_{s \text{ m\u00edn}} = (0.7 \sqrt{f_c} / f_y) t d \quad (2.1.2a)$$

- CUANDO  $H/L \leq 1.2$  EL REFZO. CALCULADO EN LAS SECC. DE  $M_{\text{m\u00e1x}}$  SE PROLONGAR\u00c1 EN TODA LA ALTURA DEL MURO, DISTRIBUIDO EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO  $= (0.25 - 0.1 \frac{H}{L}) L$  MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE,  $\leq 0.4 H$
- CUANDO  $H/L > 1.2$  EL REFZO. PARA FLEXION O FLEXOCOMPRESION SE COLOCAR\u00c1 EN LOS EXTREMOS EN UN ANCHO  $= 0.15L$  MEDIDO DESDE EL BORDE CORRESPONDIENTE

- ARriba del nivel 1.2L este refzo. se puede hacer variar, respetando 3.10
- Cuando se necesiten los elementos extremos del inciso b), el refzo. por flexión se colocará en ellos independientemente de la relación  $H/L$
  - El refzo. cuyo trabajo a compresión se jone en cta. en la resistencia debe restringirse contra el pandeo con estribos o gomas según 4.2.3

### b) Elementos extremos en muros y diafragmas

- Deben suministrarse donde  $f_{comp. máx} > 0.2 f'_c$  (bajo cargas de diseño)
- También en los bordes de aberturas donde se exceda el límite superior.
- Pueden interrumpirse donde  $f_{comp} < 0.15 f'_c$
- Los elementos extremos contarán a todo lo largo, con el refzo. transv. de 5.3.4 para elementos a flexocompresión.
- Un elemento extremo de muro, se diseñará como col. corta para que resista como carga axial la carga que le corresponda, calculada en la base del muro, para el momento máximo de volteo.
- El refzo. transversal del muro debe incluirse en los núcleos confinados de los elementos extremos de manera que puedan alcanzar su  $f_y$

### c) Fuerza cortante

- Si  $H/L \leq 1.5$   $V_{cr} = 0.85 f_r \sqrt{f'_c} \tau L$
- Si  $H/L \geq 2.0$ , se aplican las ec. 2.17 o 2.18 con  $b_0 = \tau$  y  $d = 0.8L$
- Si  $1.5 < H/L < 2.0$  hacer una interpolación lineal
- En muros con aberturas para valor  $V_{cr}$  en los segmentos verticales entre aberturas, se tomará la rel. mayor  $H/L$  entre la del muro completo y la del segmento considerado.

$$p_h = \frac{V_v - V_{ce}}{f_r f_y d t} \quad (4.6)$$

$$p_v = 0.0025 + 0.5(2.5 - H/L)(p_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

DONDE  $p_h = \frac{\Delta s_h}{s_h t}$ ;  $p_v = \frac{\Delta s_v}{s_v t}$

$s_h$  = SEPARACIÓN DEL REFZO. HORIZONTAL

$s_v$  = " " " VERTICAL

$\Delta s_h$  = ÁREAS DEL REFZO. HORIZONTAL COMPRENDIDAS EN UNA DISTANCIA  $s_h$

$\Delta s_v$  = " " " VERTICAL " " " " "  $s_v$

$H$  = ALTURA TOTAL DEL MURO;  $L$  = LONGITUD HORIZONTAL DEL MURO

- NO ES NECESARIO QUE  $p_v > p_h$

- SI  $H/L \leq 2.0$ ;  $p_v \geq p_h$

- LAS BARRAS VERTICALES DEBEN ESTAR ANCLADAS EN LA BASE DEL MURO DE MANERA QUE DESARROLLEN SU  $f_y$ .

- REFUERZO MÍNIMO

$$p_{v \text{ min}} = p_{h \text{ min}} = 0.0025$$

- EL REFZO. SE COLOCARÁ UNIFORMEMENTE REPARTIDO CON  $s \leq 35 \text{ cm}$

- CUANDO  $t > 15 \text{ cm}$  O EL REFZO. CORRIENTE MEDIO DEBIDO A LAS CARGAS HORIZONTALES DE DISEÑO  $> 0.6 \sqrt{f_c}$ , SE COLOCARÁ EN DOS CAPAS. EN CASO CONTRARIO SE PUEDE COLOCAR EN UNA SOLA CAPA A MEDIO ESPESOR.

$$V_u \leq 2 f_r (L t) \sqrt{f_c}$$

d) ABERTURAS

SE PROPORCIONARÁ REFZO EN LAS PERIFERIAS PARA RESISTIR LAS TENSIONES QUE PUEDAN PRESENTARSE. COMO MÍNIMO DEBEN COLOCARSE  $2\#4$  O SU EQUIVALENTE

DICHO REFZO. SE PROLONGARÁ UNA DISTANCIA  $\geq L_d$ , DESDE LAS ESQUINAS.

- SI  $f_{comp}$  EN UN BORDE ES  $> 0.2 f'_c$ , SE SUMINISTRARÁ UN ELEMENTO DE BORDE
- LAS ABERTURAS DEBEN TOMARSE EN CTA. AL CALCULAR LA RIGIDEZ Y RESISTENCIA.

e) ELEMENTOS DE UNIÓN ENTRE MUROS.

LAS VIGAS DIAFRAGMAS QUE UNEN MUROS SE DISEÑARÁN SEGÚN 4.1.4 e)

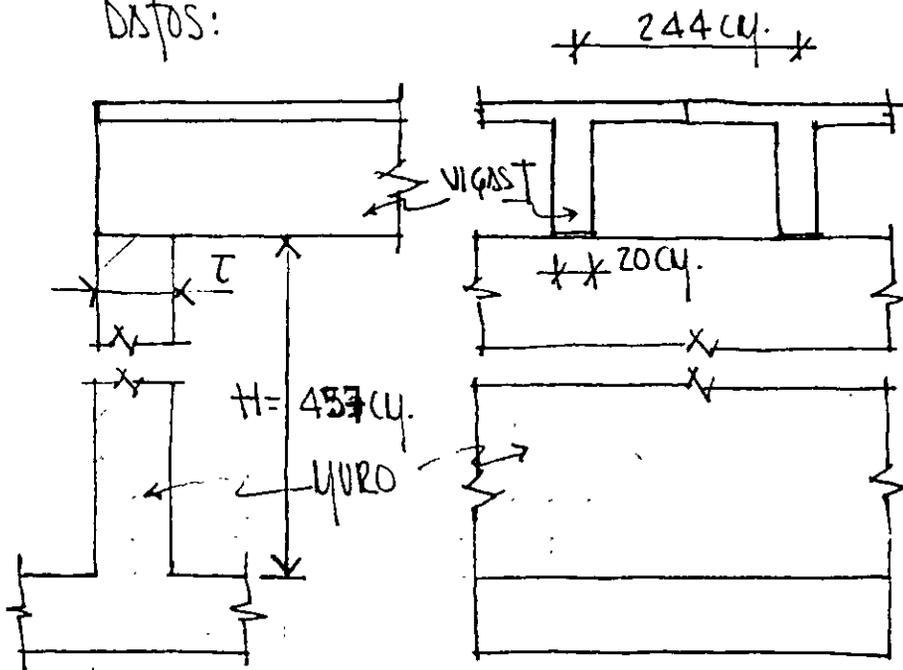
#### 4.6 DIAFRAGMAS Y ELEMENTOS A COMPRESIÓN DE CONTRAVENTEOS.

ESTOS REQUISITOS SE APLICAN A DIAFRAGMAS, COMO SISTEMAS DE PISO O TECHO, A PONTALES Y DIAGONALES A COMPRESIÓN DE SISTEMAS QUE TRANSMITAN FZAS. INDUCIDAS POR SISMOS.

EN PISOS PREFABRICADOS, PUEDE FUNCIONAR COMO DIAFRAGMA UN FIRME COLADO SOBRE LOS PRECOLADOS. PARA  $L < 64$ ,  $t \geq 3 \text{ cm}$ ; PARA  $L \geq 64$ ,  $t \geq 6 \text{ cm}$ .

- LOS DIAFRAGMAS SE DIMENSIONARÁN COMO VIGAS (COMUNES O DIAFRAGMAS)
- EL REFZO. MÍNIMO POR CORTANTE SEGÚN 4.5.2c) PARA MUROS CON CARGA EN SU PLANO
- SE APLICA 4.5.2 EN LO QUE SE REFIERE AL USO DE ELEMENTOS DE REFZO. EN BORNES Y ABERTURAS.
- LOS ELEMENTOS EXTREMOS DE DIAFRAGMAS SE DIMENSIONARÁN PARA LA SUMA DE LA COMPRESIÓN DIRECTA Y LA DEBIDA AL MOMENTO QUE ACTÚA EN LA SECCIÓN, LA CUAL PUEDE OBTENERSE DIVIDIENDO EL MOMENTO ENTRE LA DISTANCIA A EJES DE LOS ELEMENTOS EXTREMOS.
- DEBE COMPROBARSE LA TRANSMISIÓN DE LAS FZAS. SÍSMICAS ENTRE EL DIAFRAGMA Y LOS ELEMENTOS VERTICALES DESTINADOS A RESISTIR FZAS. LATERALES.
- LOS ELEMENTOS CON  $f_{maxc} > 0.2 f'_c$  TENDRÁN EL REFZO. TRANSV. DE 5.3.4 Y SE PUEDE INTERRUPTIR DONDE  $f_{maxc} < 0.15 f'_c$ . USANDO PARA CALCULAR  $f_{maxc}$  LA SECCIÓN BRUTA.

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES  
 DATOS:



EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

DESCARGAS POR VIGAS T  
 CARGA MUERTA = 12.70 TON.

" : VIVA = 6.35 "

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 "$

SOLUCIÓN

I. SELECCIONAR EL ESPESOR  $\tau$  DEL MURO

a) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

1) - SI  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m}$ .

SE PUEDEN DESPRECIAR LOS EFECTOS DE ESBELTEZ CUANDO:

$$H'/r < 34 - 12 k_1/k_2$$

COMO  $k_1 = k_2 = 0$ ;  $k_1/k_2 = 1.0 \therefore H'/r < 22$

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ  $\tau > 457/0.3 \times 22 = 69 \text{ cm}$ .

2) - SI  $0.35 < H/L < 0.8$  ( $5.71 < L < 13.06 \text{ m}$ );

CON  $L = 6 \text{ m}$ .  $H^0/L = 457/600 = 0.76$ ;  $H' = (1.3 - 0.85 \times 0.76) 457 = 299 \text{ cm}$ .

PARA NO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ  $\tau > 299/0.3 \times 22 = 45 \text{ cm}$ .

3) - SI  $H/L > 0.80$  ( $L < 5.71 \text{ m}$ )  $H' = L/2$

PARA  $L = 5.70 \text{ m}$ .  $H' = 570/2 = 285 \text{ cm}$ ;  $\tau > 43 \text{ cm}$ .

b) BORDES VERTICALES SIN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

1) - SI  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m}$ ;  $\tau > 69 \text{ cm}$

2) - SI  $H/L > 0.35$  ( $L < 13.06 \text{ m}$ )

PARA  $L = 12.70 \text{ m}$ ;  $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(H/L + 4.3)H = 0.215(0.36 + 4.30)4.57 = 4.58 \text{ m} < 2H = 9.14 \text{ m}.$$

$$\tau > 458 / 0.3 \times 22 = 69 \text{ cm}.$$

PARA  $L = 5.70 \text{ m}$ ;  $H' = 5.01 \text{ m}$ ;  $\tau > 501 / 0.3 \times 22 = 76 \text{ cm}$ .

II CARGAS ÚLTIMAS.

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ ton}.$$

III VERIFICAR EL APLASTAMIENTO

PARA EL CASO 3) DE a) CON  $\tau = 45 \text{ cm}$ .

$$ÁREA CARGADA = A_1 = (b)(\tau) = 20 \times 45 = 900 \text{ cm}^2$$

$$\text{RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO} = (F_R f_c^*) (A_1) = 0.7 \times 224 \times 900 = 141 \text{ ton} > P_u$$

IV LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO

$$b_{\text{efectivo}} = b_{\text{contacto}} + 4\tau = 20 + 4 \times 45 = 200 \text{ cm} < 244 \text{ cm}.$$

$$\therefore A_{s \text{ m\u00edn}} \text{ SEG\u00daN 3.10 } (0.25 f_c' A_g = 0.25 \times 280 \times 9000 = 630 \text{ ton} > P_u)$$

$$A_s = \frac{66000 \tau}{f_y (\tau + 100)} = \frac{66000 \times 45}{4200 (45 + 100)} = 4.88 \text{ cm}^2 / \text{m}.$$

$$A_{s \text{ m\u00edn}} = 1.5 A_s = 7.32 \text{ cm}^2 / \text{m}. \leftarrow \text{VAR. \# 3 @ } 20 \text{ cm. EN AMBOS CASOS}$$

VI RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN

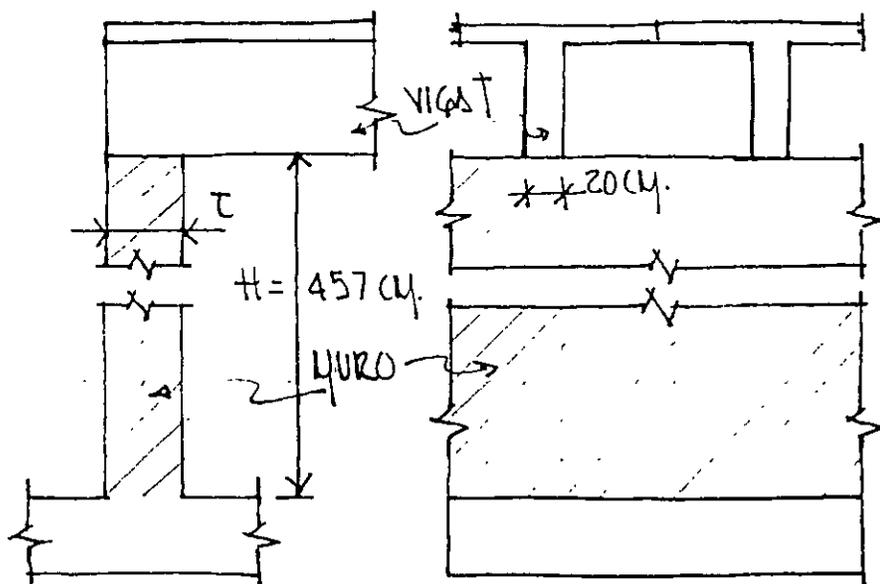
$$e_{\text{m\u00edn}} = 0.05 \tau > 2 \text{ cm}.$$

$$e_{\text{m\u00edn}} = 2.25 \text{ cm}.$$

EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO SUJETO ÚNICAMENTE A CARGAS GRAVITACIONALES.

DATOS:

$$+ 244 \text{ cm.} +$$



- EL MURO ESTÁ RESTRINGIDO LATERALMENTE EN SU EXTREMO SUPERIOR.

- DESCARGAS POR VIGAS T  
CARGAS MUERTAS = 12.70 TON.

" VIVAS = 6.35 "

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

SOLUCIÓN

I SELECCIONAR EL ESPESOR  $t$  DEL MURO

SUPONIENDO  $t = 20 \text{ cm.}$

II CARGAS ÚLTIMAS

$$P_u = 1.4(12.70 + 6.35) = 26.67 \text{ TON.}$$

III. VERIFICAR EL APLASTAMIENTO

$$\Delta_1 = (b)(t) = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

$$\text{RESISTENCIA AL APLASTAMIENTO} = (\phi R_{n1}^*) (\Delta_1) = 0.7 \times 224 \times 400 = 62.72 \text{ TON.}$$

$> P_u$

IV RELACIÓN DE ESBELTEZ

1) BORDES VERTICALES CON SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06 \text{ m}$ );  $H' = H = 4.57 \text{ m.}$

$$H'/r = 457/6 = \underline{76} > \underline{22} \quad \therefore \text{ES NECESARIO CALCULAR EFECTOS DE ESBELTEZ}$$

b) Si  $0.35 < H/L < 0.8$  ( $5.71 < L < 13.06$  m)

$$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H$$

PARA  $L = 6$  m.  $H' = (1.30 - 0.85 \times 0.76) 457 = 298$  cm.

$$H'/r = 298/6 = \underline{50} > 22$$

c) Si  $H/L > 0.80$  ( $L < 5.71$  m.)  $H' = L/2$

PARA  $L = 5.70$  m.  $H' = 285$  cm.  $H'/r = 285/6 = \underline{47.5} > 22$

2) BORDES VERTICALES SIN SUFICIENTE RESTRICCIÓN LATERAL

a) Si  $H/L \leq 0.35$  ( $L \geq 13.06$  m.);  $H' = H$ ;  $\underline{H'/r = 76} > 22$

b) Si  $H/L > 0.35$  ( $L < 13.06$  m.);  $H' = 0.215(H/L + 4.3)H \leq 2H$

PARA  $L = 12.70$  m.  $H/L = 0.36$

$$H' = 0.215(0.36 + 4.3) 4.57 = 4.58$$
 m.  $< 9.14$  m.

$$\underline{H'/r = 76.3} > 22$$

VI LA RESULTANTE DE CARGAS QUEDA DENTRO DEL TERCIO MEDIO

$$\text{DEFECTIVO} = b_{\text{conjunto}} + 4T = 20 + 4 \times 20 = 100 \text{ cm.} < 244 \text{ cm.}$$

$$0.25 f_c A_g = 0.25 \times 280 \times 2000 = 140 \text{ TON.} > P_u$$

$$\therefore I_s \text{ min} = \frac{66000 T}{f_y (\tau + 100)} \text{ (cm}^2/\text{m)} \quad (\text{SEGÚN 3.10})$$

$$I_s \text{ min} = \frac{66000 \times 20}{4200 \times 120} = 2.62 \text{ cm}^2$$

$$I_s \text{ min} = 1.5 \times 2.62 = 3.93 \text{ cm}^2/\text{m} \leftarrow 6 \# 3 \quad A_s = 4.26 \text{ cm}^2$$

COMO  $\tau > 15$  cm., COLOCAR DOS LECHOS

$\therefore$  CU EL LECHO MÍNIMO QUEDA  $\# 3$  e 30 cm. EN AMBOS LECHOS

$$S_{\text{max}} = 3.5 \tau = 70 \text{ cm} \leq 50 \text{ cm} \quad \therefore \underline{S_{\text{max}} = 50 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$$

## VI EFECTOS DE ESBELTEZ

Como  $H/r = 76 < 100$ , ES APLICABLE EL PROCEDIMIENTO DE SIMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS (FACTOR DE SIMPLIFICACIÓN 1.3.2c)

SE DEBE DIMENSIONAR PARA  $P_u$  Y  $M_c$

$$\text{DONDE } M_c = \bar{F}_{ab} M_{zbo} + \bar{F}_{as} M_{zso} \quad (1.1)$$

$$\text{COMO } M_{zso} = 0; \quad M_c = \bar{F}_{ab} M_{zbo}$$

$$\bar{F}_{ab} = \frac{C_m}{1 - P_u/P_c} \geq 1.0 \quad (1.2)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2 \geq 0.4 \quad (1.3)$$

$$P_c = \frac{FR \pi^2 EI}{(H)^2} \quad (1.4)$$

$$EI = 0.4 E_c I_g / (1 + \nu) \quad (1.5)$$

$$\text{COMO } M_1 = M_2 = 0; \quad M_1/M_2 = 1 \quad \therefore C_m = 1.0 > 0.4$$

$$M_{zbo} = P_u (e_{\min}) = 26.67 \times 0.0225 = \underline{0.60 \text{ TON-M}}$$

$$\nu = 0.67$$

$$E_c = 14000 \sqrt{f'_c} = 2.34 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2; \quad I_g = 100 \times 20^3 / 12 = 6.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$EI = \frac{0.4 \times 2.34 \times 6.7 \times 10^9}{1.67} = 3.74 \times 10^9$$

SUPONIENDO  $FR = 0.70$

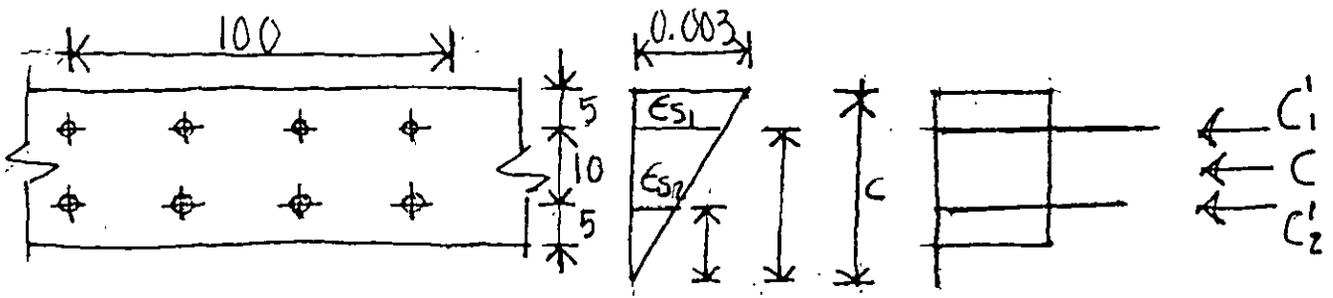
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (3.74 \times 10^9) \times 0.7}{(4.57)^2} = 124 \text{ TON.}$$

$$\bar{F}_{ab} = \frac{1}{1 - 26.67/124} = 1.27$$

$$M_c = 1.27 \times 0.6 = 0.76 \text{ TON-M.}$$

$$e = \underline{2.85 \text{ cm.}}$$

## VII RESISTENCIA A FLEXOCOMPRESIÓN



PARA  $c = 25 \text{ cm}$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ .

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 20 / 25 = 2.4 \times 10^{-3} > \epsilon_y; f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 10 / 25 = \dots < \epsilon_y \quad f_{s2} = 2530 \quad "$$

$$C_1' = 2.13 \times 4200 = 8.95 \text{ TON}$$

$$C = 100 \times 20 \times 190 = 380.00 \quad "$$

$$C_2' = 2.13 \times 2530 = \frac{5.39 \quad "}{P_n = 394.34 \quad "}$$

$$M_n = 0.05(3.56) = 0.178 \text{ TON-M. } e = \dots$$

$c = 20 \text{ cm}$      $a = 16 \text{ cm}$

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \times 15 / 20 = 2.25 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 5 / 20 = 7.50 \times 10^{-4} \therefore f_{s2} = 1575 \quad "$$

$$C_1' = 2.13 \times 1.575 = 8.95 \text{ TON}$$

$$C = 1.6 \times 190 = 304.00 \quad "$$

$$C_2' = \quad P_n = \frac{3.35 \quad "}{316.30 \quad "} \quad M_n = 0.05(5.6) + 304 \times 0.02 = 6.36 \text{ TON-M. } e = \dots$$

$$c = 19 \text{ cm}; a = 15.2 \text{ cm}; \quad \epsilon_{s1} = 0.003 \times 14 / 19 = 2.21 \times 10^{-3} > \epsilon_y \therefore f_{s1} = f_y$$

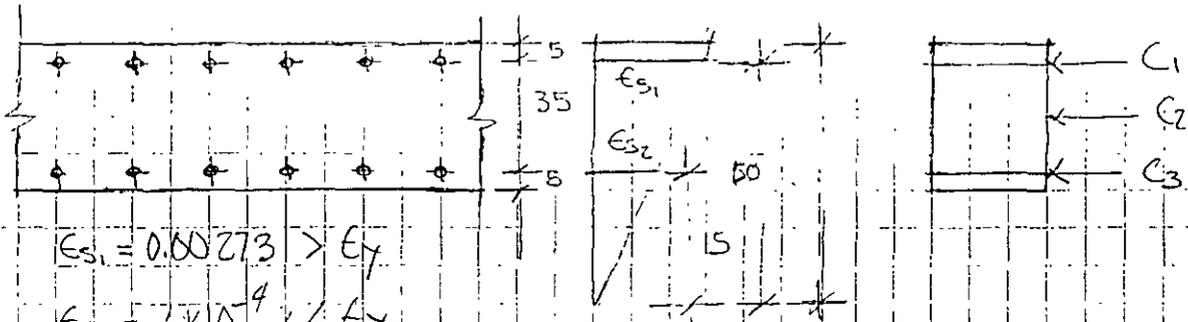
$$\epsilon_{s2} = 0.003 \times 4 / 19 = 6.3 \times 10^{-4} < \epsilon_y \therefore f_{s2} = 1330 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_1' = \quad = 8.95 \text{ TON}$$

$$C_2' = 2.13 \times 1.33 = 2.83 \quad "$$

$$C = 1.52 \times 190 \quad P_n = \frac{288.80 \quad "}{300.58 \quad "} \quad M_n = 0.05 \times 6.12 + 0.04 \times 288.8 = 7.24 \text{ TON-M.}$$

$$e = 7.7 \text{ cm}, \quad e = 2.40 \text{ cm}, \quad 2.85$$



$$\epsilon_{s1} = 0.00273 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s1} = 6 \times 10^{-4} < \epsilon_y$$

$$f_{s2} = 1760 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_1 = 7.1 \times 4200 = 29820 = 29.82$$

$$C_2 = 200 \times 40 \times 1.90 = 152000 = 1520.0$$

$$C_3 = 7.1 \times 1760 = 12496 = 12.496$$

$$\eta_n = 0.175(29.82 - 12.496) + 0.025(1520) = 38 + 1558.77 = 1596.77$$

$$e = 7.67 \approx 7.25$$

$$P_e = 0.17 \times 1596.77 = 1091 \text{ TON} > 7720.67 \text{ TON}$$

EJEMPLO: DISEÑO POR CORTANTE

DATOS:

$$t = 20 \text{ cm.}$$

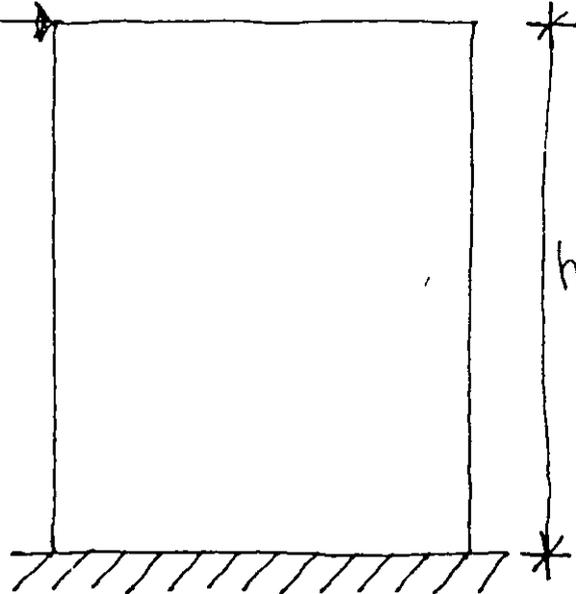
$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

$$FR = 0.80$$

$$V_u = 90 \text{ ton.}$$

$$L = 244 \text{ cm.}$$



SOLUCIÓN

1. DETERMINACIÓN DEL LIMITE SUPERIOR DE  $V_u$

$$V_u \leq FR (L t) (2 \sqrt{f'_c})$$

$$0.8 \times 244 \times 20 \times 2 \times \sqrt{160} = 98.76 \text{ ton.}$$

$$V_u = 90 \text{ ton} < 98.76 \text{ ton.}$$

$\therefore$  EL ESPESOR DEL MURO (20 cm) ES ADECUADO

2. CALCULAR LA RESISTENCIA PROPORCIONADA POR EL CONCRETO  $V_{cr}$

$$h/L = 3.66 / 2.44 = 1.5 \quad \therefore V_{cr} = 0.85 FR \sqrt{f'_c} (L t)$$

$$V_{cr} = 0.80 \times 0.85 \times 244 \times 20 \times \sqrt{160} = 42 \text{ ton.}$$

3. CALCULAR EL REFUERZO HORIZONTAL REQUERIDO POR CORTANTE

$$P_h = \frac{V_u - V_{cr}}{FR f_y d t} \quad (4.6)$$

$$P_h = \frac{A_s h}{S_n t}$$

$$S_h = \frac{A_{sh} f_y d \# r}{\sqrt{u} - \sqrt{v_c}}$$

USANDO # 3 DOS VARIAS

$$S_h = \frac{1.42 \times 4.2 \times 1.95 \times 0.8}{90 - 42} = 19 \text{ cm.}$$

4. CALCULAR EL REFORZ. VERTICAL REQUERIDO POR CONTRANTE

$$P_v = 0.0025 + 0.5(2.5 - h/L)(P_h - 0.0025) \quad (4.7)$$

$$P_h = 0.0037$$

$$P_v = 0.0025 + (0.5(2.5 - 1.5)(0.0037 - 0.0025))$$

$$P_v = 0.0031$$

$$P_v = \frac{A_{sv}}{S_v \tau}$$

$$S_v = \frac{A_{sv}}{P_v(\tau)}$$

PARA  $A_{sv} = 1.42 \text{ cm}^2$  (# 3 DOS VARIAS)

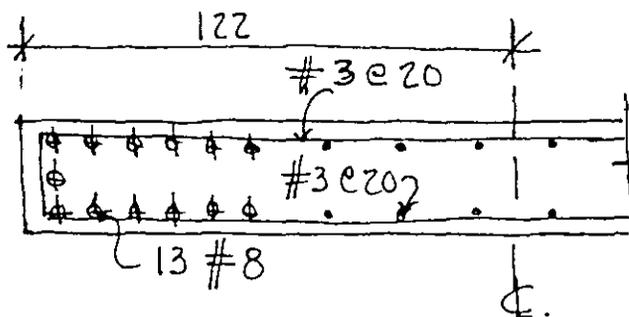
$$S_v = \frac{1.42}{0.0031 \times 20} = 23 \text{ cm.}$$

5. DIMENSIONAMIENTO POR FLEXIÓN

SUPONIENDO  $\rho \leq 0.008$

COMO  $L/h = 0.67$        $Z = 0.6L = 146.4 \text{ cm.}$

$$A_{s \text{ req}} = \frac{M_u}{f_r Z f_y} = \frac{329.4}{0.8 \times 1.46 \times 4.2} = 67 \text{ cm}^2 \leftarrow 13 \# 8$$





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

## **CURSOS ABIERTOS**

### **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN RESTAURACIÓN DE SUELOS CONTAMINADOS**

#### **MODULO III CA 110**

#### **CASOS DE ESTUDIO, APLICACIONES PRÁCTICAS DE METODOLOGÍA DE RESTAURACIÓN DE SUELOS CONTAMINADOS**

#### **TEMA**

#### **UBICACIÓN Y FACTORES AMBIENTALES DEL SITIO**

**EXPOSITOR: M. EN I. MARIA ROCHA JIMÉNEZ  
PALACIO DE MINERÍA  
JULIO DEL 2002**

Man. 1 para la descripción y evaluación ecológica de suelos en el campo. Christina Siebe, Reinhold Jahn, Karl Stahr. Sociedad Mexicana de la Ciencia del Suelo, A.C. Publicación Especial 4.

4

## Prólogo

El presente manual para la descripción y evaluación ecológica de suelos en el campo deriva del Capítulo 3: "Descripción e interpretación del perfil de suelo en el campo", del libro "Bodenkundliches Praktikum" (Práctica Edafológica) de E. Schlichting y H.-P. Blume (1966), recientemente reeditado por H.-P. Blume y K. Stahr (Schlichting *et al.*, 1995). En dicho libro el Prof. Dr. Ernst Schlichting, en colaboración con su entonces alumno y ayudante científico H.-P. Blume, introdujo gran parte de sus conceptos integrales, cuyo fundamento consiste en la apreciación de las características morfológicas de los suelos en un paisaje determinado para a partir de ellas, derivar los procesos pedogenéticos ocurridos, así como reconocer las características edafológicas del sitio. A través de este procedimiento queda explícita al lector la inseparable vinculación de los aspectos genéticos y ecológicos de cada suelo y, al mismo tiempo, proporciona a biólogos, agrónomos, forestales, geógrafos y geólogos una herramienta útil para obtener en poco tiempo (2 a 3 horas por perfil), con métodos simples y de fácil aplicación, una amplia información acerca de la formación y las características ecológicas de los suelos existentes en un sitio o paisaje determinado.

La versión que aquí se presenta es el resultado de las modificaciones hechas por varios asistentes de investigación del Prof. Schlichting (Dr. V. Schweikle, Dr. H.-P. Hauffe y Dr. Reinhold Jahn) y de su sucesor (Prof. Dr. Karl Stahr) a través de la aplicación del instructivo contenido en la "Descripción e Interpretación del perfil de suelo en el campo" durante las diversas prácticas que se ofrecen en el "Institut für Bodenkunde und Standortlehre" (Instituto de Edafología) de la Universidad de Hohenheim, Alemania. Siguiendo la filosofía original, se incluyeron estimaciones de campo publicadas por otros autores, por ejemplo, la estimación del contenido de materia orgánica por Renger *et al.* (1987) y la erosionabilidad del suelo por Wischmeier *et al.* (1971). Para la versión en español de uso en México, se adoptó la terminología y parámetros descriptivos usados en el Soil Survey Manual (1993), al igual que la nomenclatura de horizontes de la FAO, utilizada por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) en la elaboración de los mapas edafológicos del país. También se consideró en esta versión del manual la evaluación de las características amortiguadoras con respecto a contaminantes y la capacidad filtro de los suelos; así se amplió el enfoque predominantemente agrícola y forestal del manual original a una interpretación también ambientalista, que reconoce entre las funciones del suelo no sólo la de ser soporte y abastecedor de nutrimentos para la vegetación y los cultivos, sino también la de actuar como filtro para los acuíferos.

La versión en español fue revisada por el Prof. Dr. Norbert Peinemann de la Universidad Nacional del Sur, Argentina, el M.C. Jorge Gama y la Dra. Klaudia Oleschko del Instituto de Geología y por el Dr. José Luis Palacio Prieto del de Geografía de la UNAM, respectivamente, a quienes los autores agradecen observaciones importantes y correcciones de lenguaje.

5

## 1. Introducción

La descripción de perfiles de suelos en campo es la base para el levantamiento de suelos y se realiza con el fin de reconocer las unidades y asociaciones de los suelos en el paisaje. Los suelos de características iguales se agrupan en unidades cartográficas y su distribución se representa en una carta edafológica.

Las cartas edafológicas son de utilidad en las siguientes áreas:

- investigación: distribución, génesis, clasificación de suelos;
- enseñanza y capacitación: entendimiento de las funciones de los suelos en el paisaje;
- agronomía y silvicultura: el suelo como factor de producción, evaluación de tierras agrícolas y forestales, protección ambiental;
- infraestructura: arquitectura paisajista.

De manera general, también son de utilidad para:

- geólogos y geomorfólogos,
- ingenieros civiles (análisis de terrenos de construcción- mecánica y comportamiento-),
- hidrólogos (cálculos de renovación de acuíferos),
- botánicos (estudio de asociaciones de vegetación).

Este manual pretende proporcionar a estudiantes y técnicos las herramientas básicas para la descripción detallada de un perfil de suelo en el campo, así como para la evaluación rápida, con métodos de fácil aplicación, de las características ecológicas del mismo. Por características edafológicas se entienden aquellas que contribuyen a la satisfacción de las funciones que el suelo cumple en los ecosistemas, como lo son el ser soporte y hábitat de vegetación, al igual que el fungir como filtro y amortiguador de contaminantes en la recarga de los acuíferos.

Como se muestra en la Figura 1, este manual instruye al usuario para que describa la localidad, reconozca los factores pedogenéticos particulares de la misma, delimite los horizontes y estratos que componen al suelo y defina sus características. A partir de esa descripción detallada del perfil del suelo, podrá denominar a cada uno de los horizontes y reconocer los procesos pedogenéticos que llevaron a su actual expresión morfológica, como también clasificar de manera preliminar al suelo de acuerdo con la clasificación de la FAO (1988). Paralelamente, podrá definir las características ecológicas, primero de cada horizonte y después del perfil completo del suelo, para, a partir de ellas, hacer la interpretación edafológica del sitio. Las interpretaciones pedogenéticas y ecológicas del sitio son el fundamento para la posterior evaluación del uso y manejo del suelo.

## 2. Ubicación y factores ambientales del sitio

La ubicación del perfil debe hacerse con mucho cuidado, ya que una descripción detallada de una inclusión o de un suelo atípico es de poco beneficio y significa un desperdicio de recursos. Una vez ubicado un lugar que sea típico del suelo a describir, se le verifica por medio de barrenaciones antes de proceder a la excavación del perfil.

La descripción del perfil se realiza en hojas de campo, de las cuales se muestra un ejemplo en el Anexo 1.

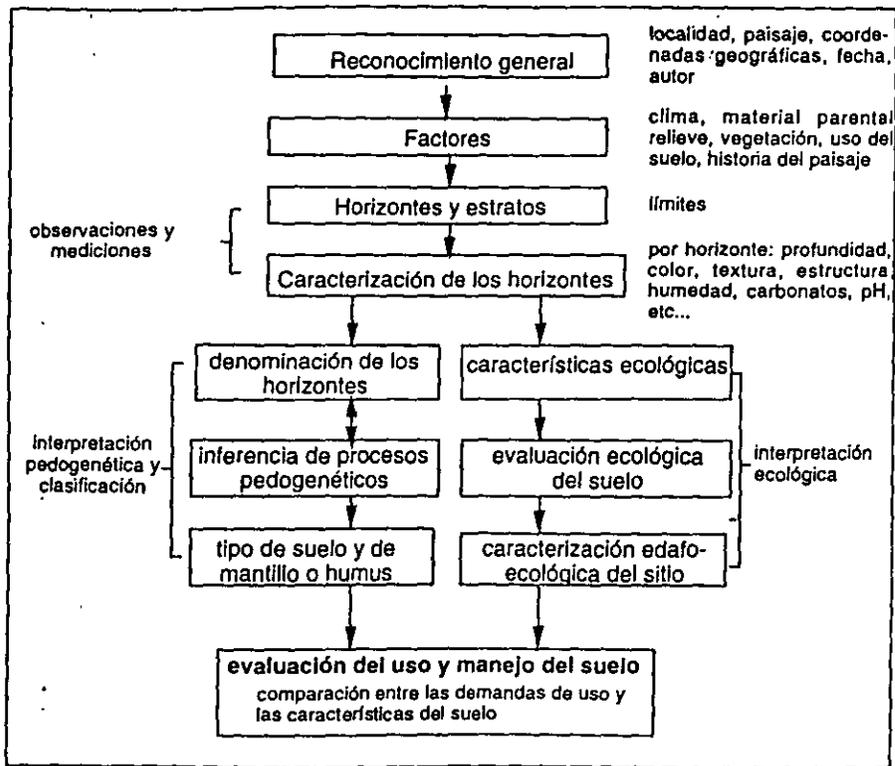


Figura 1. Diagrama de flujo del procedimiento a seguir para un levantamiento de suelos.

## Localidad

Cada descripción de perfil debe comprender los siguientes datos sobre el lugar, los cuales son necesarios para su catalogación inconfundible:

- sitio: estado, municipio, descripción del abarcamiento del lugar;
- número del perfil, el cual se anota en el mapa base (solo es de relevancia local, pero facilita la coordinación de descripciones y datos de laboratorio);
- número del mapa topográfico o fotografía aérea utilizada y escala de la misma;
- coordenadas del sitio;
- altitud;
- fecha;
- nombre del autor de la descripción.

## Clima y estado del tiempo

La calidad ecológica de un sitio es determinada, entre otros factores, por el clima que prevalece localmente. Los conocimientos climáticos además facilitan la interpretación de los procesos pedogenéticos. En caso de referirse a datos correspondientes a estaciones meteorológicas cercanas al sitio, se deberá especificar la distancia de dicha estación al sitio, al igual que la diferencia en altitud.

El estado del tiempo influye sobre la calidad de la descripción.

Se reportan los siguientes datos:

- tipo climático;
- temperatura media anual, y máxima y mínima anuales;
- precipitación media anual;
- duración en meses de la época seca;
- duración y frecuencia de los períodos de humedad excesiva, según lo siguiente (Soil Survey Manual, 1993):

<b>Frecuencia:</b>		<b>Clase</b>
ninguna (n)	no hay posibilidad razonable para que ocurra	F0
rara (r)	1 a 5 ocasiones en 100 años	F1
ocasional (o)	5 a 50 ocasiones en 100 años	F2
frecuente (f)	más de 50 ocasiones en 100 años	F3
<b>Duración:</b>		<b>D</b>
extremadamente corta	<4 horas	D1
muy corta	4 a 48 horas	D2
corta	2 a 7 días	D3
larga	7 días a 1 mes	D4
muy larga	1 mes	D5
<b>duración anual cumulativa:</b>		<b>DAC</b>
ausente	no observada	DAC0
muy transitoria	presente < 1 mes	DAC1
transitoria	presente 1 a 3 meses	DAC2
común	presente 3 a 6 meses	DAC3
persistente	presente 6 a 12 meses	DAC4
permanente	presente continuamente	DAC5

El estado del tiempo se registra según lo indicado en la siguiente tabla (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982):

#### Estado del tiempo:

sin precipitación en los últimos 30 días  
sin precipitación en los últimos 7 días  
sin precipitación en las últimas 24 horas  
lluvioso con precipitación ligera (<25 mm/h)  
lluvia fuerte hace varios días (>25 mm/h)  
lluvia extremadamente fuerte (>75 mm/h)

#### Clave:

ET 1  
ET 2  
ET 3  
ET 4  
ET 5  
ET 6

iluminación deficiente

neblina

temperatura ambiental baja (<12 C)

viento fuerte

lluvia

I  
N  
T  
V  
LL

#### Uso del suelo y vegetación

Referir datos sobre:

- uso del suelo (por ejemplo: agrícola, forestal)
- prácticas de manejo (por ejemplo: subsoleo, drenaje, encalado, rotaciones, riego, fertilización)
- tipo de cultivo o tipo de vegetación, cobertura y especies dominantes en caso de vegetación natural.

Tipo de vegetación (CNA, 1989):

M	manglar	SAS	selva alta subperennifolia
P	popal	SMS	selva mediana subperennifolia
T	tular	SMC	selva mediana caducifolia
P	pastizal	SBS	selva baja subperennifolia
Z	zacatonal	SBC	selva baja caducifolia
MDM	matorral desértico micrófilo	BC	bosque caducifolio
MDR	matorral desértico rosetófilo	BCE	bosque de cedro y tascate
MC	matorral crasicaule	BE	bosque de encino
MS	matorral submontano	BPE	bosque de pino-encino
C	chaparral	BP	bosque de pino
MZ	mezquital	BO	bosque de oyamel
SAP	selva alta perennifolia	Otra	(especificar)

#### Exposición

Determinar la exposición del perfil por medio de una brújula y referir la orientación: N, NE, E, SE, S, SO, O, NO (este dato se omite en caso de que el sitio sea plano).

#### Pendiente

Referir la longitud aproximada de la pendiente en metros y determinar el gradiente por medio de un clinómetro o midiendo la distancia entre las curvas de nivel en el mapa topográfico (en caso de microrelieve pronunciado este último método estará sujeto a error).

Pendiente		Relieve		Clave
[porcentaje]	[grados]	Pendiente sencilla (S)*	Pendiente compleja (C)*	
0-2	0-0.5	casí plano	casí plano	0
2-4	0.5-2	ligeramente inclinado	ligeramente ondulado	1
4-9	2-5	moderadamente inclinado	moderadamente ondulado	2
9-18	5-10	fuertemente inclinado	fuertemente ondulado	3
18-27	10-15	escarpado moderado	escarpado moderado	4
27-36	15-20	escarpado	escarpado	5
>36	>20	muy escarpado	muy escarpado	6

\* Las pendientes sencillas son aquellas en que la inclinación del terreno va en un solo sentido; las pendientes complejas son aquellas en las que la inclinación del terreno va en varios sentidos.

#### Forma del terreno

Para comprender la situación espacial de un perfil es necesario hacer una breve descripción de la geomorfología local y referir su posición fisiográfica, así como la forma del terreno que lo rodea. El gradiente de la pendiente, su forma y longitud, son determinantes de los procesos pedogenéticos y de modelación del terreno, lo cual se ejemplifica en la Figura 2. En la cartografía de suelos las formas del relieve son criterios importantes para la delimitación de unidades de suelo.

La posición fisiográfica puede referirse en la descripción del perfil según lo siguiente:

- 1) posición plana: planicie, llanura
- 2) posición en el punto de culminación de una elevación: meseta, cima, cresta
- 3) posición en ladera: ladera cóncava, convexa, extendida, compleja, ondulada y posición en la ladera superior, media, inferior o en el pie de ladera.
- 4) posición en fondo de valle o depresión (relieve negativo)

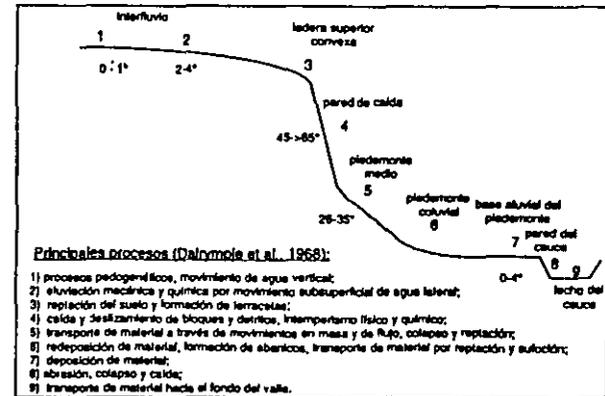


Figura 2: Ejemplo de un modelo de unidades del relieve y los principales procesos que ocurren en cada una de ellas según Dalrymple et al., 1968.

También se menciona la geoforma en la que se encuentra el perfil:

Morfología general: sierra, montaña, volcán, cerro, lomerío, altiplanicie, planicie, meseta, valle intermontano, valle, planicie costera, isla

Geoforma local: abanico aluvial, ciénaga, cráter, duna, llanura de inundación, meandro, montículo, loma, pie de monte, pie de loma, terraza fluvial, lacustre o marina.

En caso de la presencia de un microrelieve (diferencias en altitud de la superficie del terreno a distancias de pocos metros) también se anotan las características del mismo, por ejemplo: cárcavas, hormigueros y termiteros, relieve "gilgai" por presencia de arcillas expandibles, etc...

### Evidencias de erosión

Si se observan evidencias de erosión acelerada o deposición de materiales como resultado de procesos erosivos en el área inmediata al perfil estudiado, esto debe reportarse de acuerdo con lo siguiente:

1. Se deberá distinguir entre erosión (o deposición) hídrica o eólica.
2. En caso de erosión hídrica, deberá referirse si la erosión es laminar, en canales, en cárcavas ó en túneles.

El grado de la erosión ocurrida podrá estimarse a través de la comparación de sitios pertenecientes a la misma unidad de suelo carentes de evidencias de erosión con aquéllos que sí las presentan; se utilizan los siguientes criterios para su clasificación (Soil Survey Manual, 1993).

**Clase 1:** Pérdida <25% del espesor original del horizonte A o E, o de los primeros 20 cm en caso de que los horizontes A o E tengan un espesor menor que 20 cm. En la mayor parte del área, el espesor del horizonte superficial se encuentra dentro del intervalo normal de variabilidad de sitios no erosionados y sólo algunas zonas (<20%) muestran diferencias apreciables en espesor.

**Clase 2:** Pérdida de 25 a 75% del espesor original del horizonte A o E, o de los primeros 20 cm en caso de que los horizontes A o E tengan un espesor menor que 20 cm. El horizonte superficial consiste de una mezcla del horizonte A o E original y los materiales subyacentes.

**Clase 3:** Pérdida >75% del espesor original del horizonte A o E, o de los primeros 20 cm en caso de que los horizontes A o E tengan un espesor menor que 20 cm. En la mayor parte del área ha quedado expuesto el material subyacente a los horizontes A o E originales o, en caso de que los horizontes A o E hayan sido de gran espesor, el horizonte superficial consiste de una mezcla del horizonte A o E original y los materiales subyacentes.

**Clase 4:** Pérdida total de los horizontes A o E originales, o de los primeros 20 cm del suelo, en caso de que los horizontes A o E tengan un espesor menor que 20 cm, y afectación de parte de los horizontes subyacentes. La mayor parte del área muestra un sistema de cárcavas muy desarrolladas.

### Material parental

Todos los materiales expuestos en la superficie terrestre se intemperizan en función de las condiciones climáticas prevalecientes, generándose así los procesos pedogenéticos. Estos se diferenciarán en su tipogénesis en función de la morfología y composición mineralógica del material parental. Su conocimiento es de importancia para la interpretación

pedogenética del suelo, al igual que para la evaluación de la liberación de nutrimentos a largo plazo.

La información que debe incluirse en la descripción del perfil es la siguiente:

- origen del material parental, residual, coluvial, aluvial, marino, lacustre, glacial, eólico;
- tipo de rocas.

La identificación de las principales rocas a través de sus características macroscópicas se presenta en la siguiente clave (según Pape, 1971, simplificado):

Características macroscópicas		Continuar en el No.	Tipo de roca
1	a. Granular grueso, tamaño dominante > 1mm, matriz fina faltante o solo presente en el espacio poroso.	2	
	b. Granular fino, sólo tamaños < 1mm, compactación media, rompe en superficies accidentadas, con el cuchillo puede destruirse la unión de los granos.	15	
	c. Uniformemente compacto o vítreo, rompe en astillas o concoidalmente, a veces poroso, los poros pueden estar vacíos o rellenos de sustancia mineral de colores claros.	8	
	d. Porfírico (gran porcentaje de masa basal fina con incrustaciones gruesas que generalmente no tienen contacto unas con otras. Las incrustaciones generalmente son cristales individuales, a veces idiomorfos).	11	
2	a. Totalmente cristalina, compacta, cristales de tamaños muy similares, sin componentes de origen orgánico.	3	
	b. Consiste de granos y componentes gruesos, presenta rasgos de tensión mecánica o actividad de organismos, generalmente estratificada.	14	
3	a. Consiste de una sola clase de minerales	6	
	b. Se distinguen varios tipos de componentes principales.	4	
4	a. El ordenamiento de los componentes granulares no presenta dirección.	5	
	b. El ordenamiento de los componentes es en bandas con tendencia claramente paralela.	12	
5	a. Claro, obviamente cuarzo, componentes principales: cuarzo, feldespato potásico; componentes secundarios: biotita, muscovita.		Granito
	b. Oscuro, sin cuarzo, componentes principales: plagioclasa; componentes secundarios: olivino, augita, hornblenda.		Gabro Yeso Cuarcita
6	a. Puede rallarse con la uña.		
	b. No puede rallarse con un cuchillo, o resulta difícil		
	c. Puede rasguñarse con un cuchillo, pero no con la uña.	7	
7	a. Se reconocen claramente minerales individuales, efervesce fuertemente con HCl 10%		Mármol
	b. No se reconocen minerales individuales, efervesce fuertemente con HCl 10%.		Caliza

Características macroscópicas	Continuar en el No.	Tipo de roca
c. Minerales individuales reconocibles, el polvo solo efervesce débilmente con HCl.		
8 a. Muy porosa, color claro y ligera.		Dolomita
b. Poco porosa o sin poros.		Pómez
9 a. Puede rallarse con el cuchillo	9	
b. No o casi no es posible rallar con el cuchillo.	7	
10 a. Color gris a negro, similar a concreciones, su superficie es globosa.	10	
b. Color negro a rojo oscuro, brillo vítreo, rompe en lascas.		Pederal
c. Muy oscura y compacta, vértices no translucientes, a veces presenta burbujas.		Obsidiana
11 a. Masa basal muy oscura, inclusiones de olivino o augita.		Basalto
b. Masa basal clara, generalmente un poco rojiza; inclusiones predominantemente de cuarzo.		Basalto
12 a. Pizarroso, generalmente de grano fino, en parte exfoliable.		Granodiorita
b. Pizarroso, compacto, granular, no exfoliable, componentes principales: cuarzo, feldespato, micas.	13	
13 a. Alto contenido de micas macroscópicas.		Gneis
b. Brillo acerado, textura grasosa.		Micacita
c. No tiene minerales visibles, brillo opaco.		Filita
14 a. Muchos componentes gruesos, angulares y redondeados, minerales idiomorfos, magmáticos reconocibles.		Pizarra arcillosa
b. Muchos componentes gruesos (mm-cm) redondeados.		Toba volcánica
c. Muchos componentes gruesos angulares (mm-cm).		Conglomerado
d. Tamaños de partículas muy diversos, los componentes finos son margas (15e), los componentes gruesos son fragmentos de roca (líticos).		Brecha
e. Tamaños de partículas muy diversos, los componentes finos son limos, los componentes gruesos son fragmentos de roca (líticos).		Margas glaciares
f. Componentes casi exclusivamente < 2 mm.		Limonita glaciar
15 a. Granos de diámetro predominantemente de 1 mm	15	
b. Granos de diámetro predominantemente de 0.1 mm.		Arenisca gruesa
c. Granos predominantemente de diámetro < 0.1mm, granos individuales perceptibles.		Arenisca fina
d. Generalmente contiene carbonatos.		Limonita
e. Granos individuales no perceptibles, diámetro < 0.1 mm.		Loess
f. Granos de tamaño < 0.1 mm, granos individuales no perceptibles, contiene carbonatos.		Lutita
		Marga

### Profundidad del manto freático

Donde es posible se refiere la profundidad del manto freático en el momento de la descripción al igual que la profundidad media anual con una estimación de la fluctuación máxima y mínima. El nivel máximo puede inferirse en algunos suelos a partir de cambios en el color del perfil.

### 3. Características y espesor de los horizontes

El estado de desarrollo de cada suelo se reconoce a través de capas de diferentes características, aproximadamente paralelas a la superficie, producidas por los procesos pedogenéticos. Estas capas se llaman horizontes, la intensidad de su desarrollo y las combinaciones en las que están presentes son la base de la clasificación de los suelos.

#### Profundidad y espesor

Los límites de los horizontes minerales (es decir zonas con predominancia de materia mineral) se señalan en cm; la cinta métrica se coloca de manera tal que el cero quede en el límite entre el suelo mineral y el mantillo (horizontes orgánicos). De esta manera, los horizontes orgánicos tienen valores positivos, mientras que los horizontes minerales tienen valores negativos.

Paralelamente, se mencionan los espesores de cada horizonte en dm, por ejemplo:

Tipo de horizonte:	Profundidad [cm]:	Espesor [dm]:
1. Orgánico	de + 10 hasta +3	0.7
2. Orgánico	de +3 hasta 0	0.3
1. Mineral	de 0 hasta - 15	1.5
2. Mineral	de -15 hasta -35	2.0
3. Mineral	de -35 hasta -74	3.9

#### Textura

La composición mecánica de un suelo, es decir, la distribución de los tamaños de las partículas que lo constituyen, se denomina textura. Es una de las características más importantes de un suelo y puede inferirse en campo a través de la "prueba al tacto". Para realizarla se humedece una pequeña muestra de la fracción fina del suelo (< 2mm) tomada del horizonte a caracterizar. No debe presentar exceso de humedad en el momento de presionarla; la muestra se encuentra entonces a "capacidad de campo". Posteriormente, se observan las características de moldeado, consistencia y granulosis de la muestra, presionándola y palpándola entre los dedos y formando esferas y rollos. La tabla que a continuación se presenta contiene una clave para la designación de la clase textural. A partir del diagrama de texturas puede determinarse el porcentaje de arena, limo y arcilla que corresponde a cada clase textural.

En general las tres fracciones principales (arena, limo, arcilla) presentan las siguientes características en la prueba de tacto:

arena: no es moldeable, no deja material fino en las palmas de las manos, los granos son claramente palpables;

limo: poco moldeable, se siente harinoso, la superficie, al palparlo entre los dedos índice y pulgar, es áspera, se agrieta al presionarlo.

arcilla: es moldeable, deja material fino en las palmas de las manos, la superficie, al palparlo entre los dedos índice y pulgar, es lisa y brillante.



La pedregosidad se evalúa con base en los criterios presentados en la siguiente tabla (Soil Survey Manual, 1993, modificado):

Vol%	Caracterización	Clase
< 2	ninguna limitación para la labranza	0
2-10	es posible realizar labranza en surcos	1
10-25	la labranza de cosechas escardadas es impracticable, pero pueden cultivarse pastos mejorados, vegetación arbustiva y árboles	2
25-50	impedimento a todo uso de maquinaria, excepto la muy liviana; uso para pastoreo o silvicultura	3
50-75	impedimento total al uso de maquinaria, uso para pastos pobres y silvicultura	4
> 75	pastos naturales y silvicultura	5

(Fuente: Soil Survey Manual, 1993, modificado)

### Color

El tono y la intensidad de los colores de los horizontes permiten hacer inferencias en relación con algunas características edáficas y procesos pedogenéticos. El color de un horizonte está determinado principalmente por los ácidos húmicos y fúlvicos y compuestos de hierro y, en menor medida, de manganeso (óxidos, hidróxidos, sulfuros). Por lo tanto refleja el contenido de materia orgánica, al igual que la existencia de procesos de oxidación o reducción en los suelos.

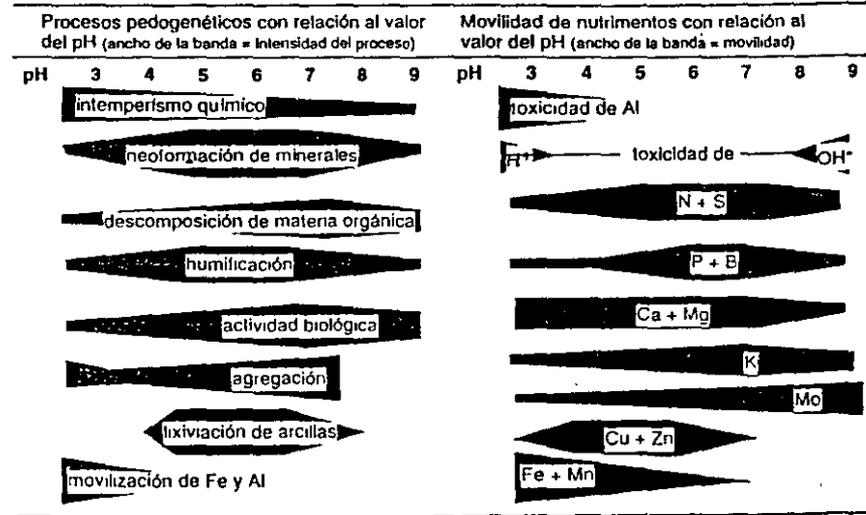
Su determinación en campo se realiza por medio de tablas de color (Standard Soil Color Charts). Para ello la muestra deberá humedecerse, para permitir la comparación de un horizonte con otro. La notación de las tablas de color es una designación sistemática con letras y números de las tres propiedades del color: matiz, pureza (de oscuro a claro) e intensidad, por ejemplo: 5YR 4/2: 5YR = matiz; 4 = pureza, 2 = intensidad.

En caso de presentar 2 o más colores en un horizonte, deberá reportarse cada color, y además deberán notificarse los respectivos porcentajes de cubrimiento. Se anotarán las siguientes características:

- Forma:**
- a) manchas o moteado
  - b) bandas
  - c) venas
  - d) nubes.
- Contraste:**
- a) tenue: sólo se distinguen tras un examen detallado, los matices e intensidades de la matriz y del moteado son muy similares.
  - b) claro: el moteado es claramente perceptible, las diferencias entre la matriz y la mancha varían en uno o dos puntos de matiz y varias unidades en pureza o intensidad.
  - c) prominente: las motas son perceptibles obviamente. Matiz, pureza e intensidad entre matriz y manchas difieren en varias unidades.
- Abundancia:**
- a) escasas: < 2% de la superficie.
  - b) comunes: 2 a 20% de la superficie.
  - c) frecuentes: > 20% de la superficie.
- Tamaño:**
- a) finas: < 5 mm.
  - b) medias: 5 a 15 mm.
  - c) gruesas: > 15 mm.
- Límite:**
- a) bien definido o abrupto: transición de color en menos de 1 mm.
  - b) claro: transición de color en menos de 2 mm.
  - c) difuso: transición de color en más de 2 mm.

### Valor del pH o reacción del suelo

El valor del pH permite hacer inferencias con relación a la disponibilidad relativa de nutrientes y también controla importantes procesos pedogenéticos (Schroeder, 1969):



(Fuente: Schroeder, 1969)

En el campo, el pH se mide generalmente con papel indicador o con un potenciómetro de campo. Para ello se le agregan a unos gramos de muestra de suelo aprox. el doble (relación suelo- solución 1:2.5) de agua destilada o de solución CaCl<sub>2</sub> 0.01 M. La determinación se realiza después de agitar la muestra y esperar por lo menos 15 minutos.

El valor pH se evalúa según el siguiente cuadro:

pH	3.0	4.0	5.0	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	
evaluación:	extre- mada- mente ácido	muy fuerte- mente ácido	fuerte- mente ácido	mode- rada- mente ácido	ligeramente ácido	muy ligeramente ácido	muy ligeramente alcalino	ligeramente alcalino	modera- damente alcalino	fuerte- mente alcalino

## Presencia de salinidad o sodicidad

La clasificación exacta de condiciones salinas, sódicas o salino-sódicas deberá efectuarse en el laboratorio. Sin embargo, es posible distinguir en el campo la presencia de sales mediante la observación del desarrollo de los cultivos, la identificación de especies herbáceas halófitas, el reconocimiento de eflorescencias de sales en la superficie o la observación de una costra superficial agrietada y de consistencia boba.

En caso de contar con un conductímetro de campo, puede determinarse la conductividad eléctrica en el sobrenadante de una suspensión de 1 parte de suelo y 2.5 partes de agua destilada ( $EC_{(1:2.5)}$ ). A partir de esta determinación puede estimarse la conductividad eléctrica en el extracto de saturación ( $EC_{pF1.8}$ ) mediante la siguiente fórmula:

$$EC_{pF1.8} \text{ [dS/m]} = EC_{(1:2.5)} \text{ [dS/m]} \times 250 \times \text{densidad aparente [g/cm}^3\text{] / CC [Vol\%]}$$

donde  $EC_{pF1.8}$ : conductividad eléctrica en el extracto de saturación.

$EC_{(1:2.5)}$ : conductividad eléctrica de la suspensión 1:2.5 de suelo en agua destilada.

La densidad aparente se estima según la tabla presentada en la pág. 25 y

CC equivale al contenido de humedad a capacidad de campo, mismo que se estima con ayuda de la tabla en la página 34.

De acuerdo con el desarrollo de los cultivos o a la conductividad eléctrica en el extracto de saturación pueden distinguirse las siguientes clases de salinidad:

Clase	Descripción	C.E. <sup>1)</sup> [dS/m]	Clasificación FAO (1988)
0	Los suelos no muestran exceso de sales en forma de eflorescencias en la superficie del suelo o sobre los agregados. Prácticamente ningún cultivo muestra inhibición en su desarrollo o daños producidos por el exceso de sales.	0 - 4	
1	Suelos ligeramente afectados por salinidad o sodicidad. Los cultivos sensibles muestran inhibición en su desarrollo, mientras que los tolerantes no.	4 - 8	Fase salina
2	Suelos moderadamente afectados por salinidad o sodicidad. El desarrollo de los cultivos se inhibe y ningún cultivo crece bien.	8 - 16	
3	Suelos fuertemente afectados por salinidad o sodicidad. Sólo plantas halófitas sobreviven	>16	Propiedades sálicas

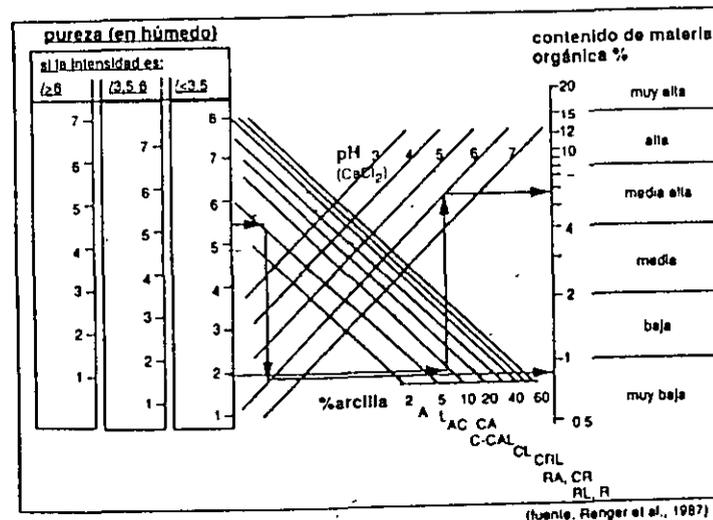
<sup>1)</sup>C.E.: conductividad eléctrica en el extracto de saturación

La presencia de **sodicidad** (un porcentaje de sodio intercambiable mayor que 15 indica propiedades sódicas, según la clasificación FAO, 1988), puede inferirse en campo a través del valor del pH del suelo, el cual generalmente es mayor que 8.5 en caso de existir propiedades sódicas. También la presencia de una estructura débil o incluso falta de la misma, al igual que una baja conductividad hidráulica del suelo (ver pág. 37) son indicadoras en campo de la presencia de sodicidad.

## Contenido de materia orgánica

El contenido de materia orgánica en horizontes superficiales puede estimarse aproximadamente considerando las siguientes variables: a) textura, b) pH y c) color (en húmedo). El color de un horizonte se origina, en gran parte, de la mezcla de sustancias húmicas (negras o pardo oscuro) y minerales de colores más claros. La acumulación de materia orgánica es mayor en condiciones ácidas que en condiciones neutras. Por lo tanto, la estimación del contenido de materia orgánica de los horizontes superficiales, puede hacerse con ayuda del siguiente nomograma, tomando en cuenta las siguientes aclaraciones:

1. No debe realizarse la estimación en horizontes subsuperficiales con bajos contenidos de materia orgánica, ya que esto llevará a resultados erróneos.
2. Si el material parental es de color oscuro (por ejemplo, basalto), la estimación llevará a una sobreestimación del contenido de materia orgánica.
3. Si el horizonte contiene cantidades significativas de pirita (FeS), también se sobreestimará el contenido de materia orgánica. La presencia de pirita puede comprobarse al adicionar a la muestra unas gotas de ácido clorhídrico al 10%. Si se trata de pirita se percibirá un olor a huevos podridos (H<sub>2</sub>S).



(Fuente: Renger et al., 1987)

Los contenidos de materia orgánica se evalúan de la siguiente manera:

% M.O.	<1	2	4	8	15	30
Clave	(h)	h*	h	h	h	h
Evaluación	muy baja	baja	media	media alta	alta	muy alta
						extremadamente alta
						(tubo)

## Contenido de carbonatos

En campo, el contenido de carbonatos se estima observando la efervescencia de la muestra al adicionar ácido clorhídrico (HCl) al 10%. La cuantificación solo es aproximada, ya que la intensidad de la reacción dependerá de varios factores, como textura, porosidad, distribución de los poros, humedad de la muestra, distribución de los carbonatos en la muestra (grancs, recubrimientos, pseudomicelios) y tipo de carbonatos (calcita pura (CaCO<sub>3</sub>), dolomita CaMg(CO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> o una mezcla de ambas).

En campo se le agregan unas gotas de HCl al 10% a una muestra de suelo humedecida (para no confundir la emisión de burbujas de aire con una efervescencia), y el contenido de carbonatos se estima evaluando la efervescencia de la siguiente manera (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982):

Efervescencia	Evaluación	CaCO <sub>3</sub> (%)
reacción invisible e inaudible	libre de carbonatos	0
reacción audible, pero invisible	muy bajo (k')	0 a 0.5
reacción ligera, apenas visible	bajo (k')	0.5 a 2
efervescencia fuerte, pero breve	medio (k)	2 a 10
efervescencia fuerte y prolongada	alto (k')	10 a 25
	muy alto (kk)	25 a 50
	extremadamente alto (K)	>50

## Humedad actual

La humedad actual representa el grado de saturación con agua (también referible como fuerza de succión) del suelo en el momento de hacer la descripción. Se puede estimar de acuerdo con la siguiente relación:

Oprimir la muestra	Formar una esfera	Humedecerla	Frotarla entre las palmas de las manos	Designación	-pF
se forma polvo	no se puede	se oscurece mucho	no se aclara	muy seca	5
no se forma polvo	no se puede	se oscurece un poco	se aclara muy poco	seca	4
no se forma polvo	moldeable (menos arenas)	no se oscurece	se aclara	fresca	3
adhesiva	al exprimirla brilla un poco	no se oscurece	se aclara mucho	húmeda	2
tiene agua libre	fluye	no se oscurece	se aclara mucho	mojada	1

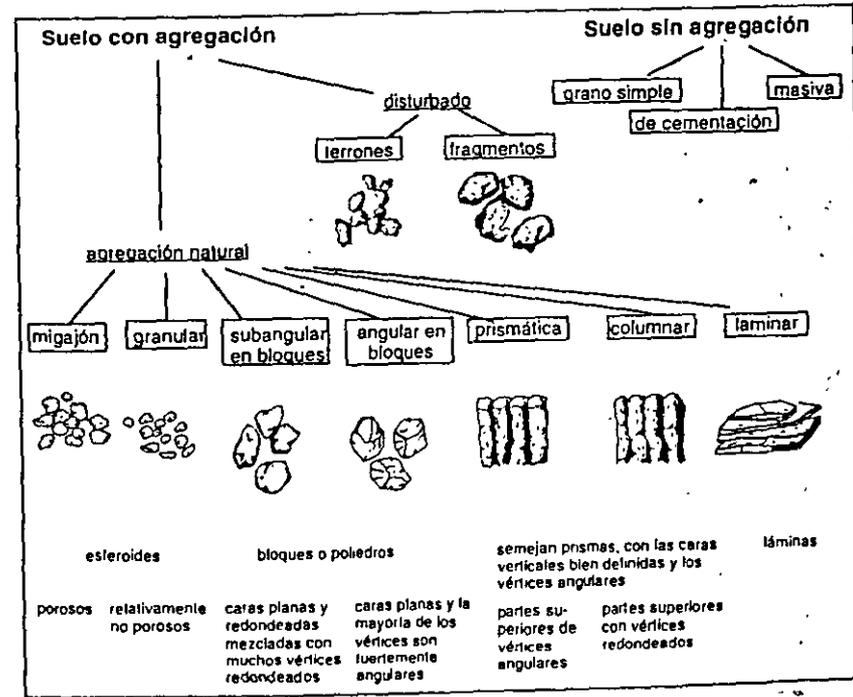
## Estructura

Estructura del suelo es un término que se refiere a la agregación de las partículas primarias en partículas compuestas. La estructura influye determinadamente en el balance hídrico y térmico, al igual que en la aireación de un suelo e, indirectamente, en la actividad biológica, el potencial de rendimiento y la erosionabilidad. Un agregado natural (o ped) es producto de las interacciones de los procesos físicos, químicos y biológicos que ocurren en los suelos, en contraste con un terrón, que es

producto de un disturbio (por ejemplo, labranza), o un fragmento, que se forma por la ruptura de la masa del suelo a través de superficies naturales lábiles (por ejemplo por efecto de procesos de congelamiento y deshielo). También difiere de una concreción o nódulo, debido a que estos últimos son producto de la concentración local de compuestos que cementan irreversiblemente un conjunto de granos.

En el campo sólo es posible describir la macroestructura. La microestructura se analiza en láminas delgadas a través del análisis microscópico en el laboratorio.

Al describir la estructura en campo se hace referencia a la morfología y distribución mutua (tipo) de los agregados, su tamaño (clase) y su grado de desarrollo o agregación. En el diagrama adjunto se esquematizan y describen los tipos de estructura:



Los tamaños de los agregados (en mm) se refieren según las siguientes clases (ver también las láminas en el Anexo 3):

Clase	Laminar	Prismática	Columnar	Angular en bloques	Subangular en bloques	Granular	Migajón
	[mm]						
muy fina	<1	<10	<10	<5	<5	<1	<1
fina	1-2	10-20	10-20	5-10	5-10	1-2	1-2
media	2-5	20-50	20-50	10-20	10-20	2-5	2-5
guesa	5-10	50-100	50-100	20-50	20-50	5-10	5-10
muy gruesa	>10	>100	>100	>50	>50	>10	>10

Los términos usados para definir el grado de la estructura son los siguientes:

- 0: **sin agregación:** no se observa agregación u ordenamiento alguno. Se dice masiva, cuando es coherente, y de grano simple, cuando no es coherente.
- 1: **débil:** pedrs vagamente formados, difíciles de distinguir. Cuando se disturba este material, se obtiene una mezcla de pedrs enteros con mucho material no agregado. Este grado puede subdividirse en muy débil y moderadamente débil.
- 2: **moderado:** pedrs bien formados y nítidos, pero moderadamente durables. Cuando se disturba este material, se obtienen numerosos pedrs enteros, algunos quebrados y poco material no agregado.
- 3: **fuerte:** pedrs bien formados y durables. Cuando se disturba este material, se obtienen principalmente pedrs enteros, pocos quebrados y ningún material no agregado. Este grado puede subdividirse en moderadamente fuerte y muy fuerte.

## Rasgos pedológicos

En este rubro se describen todo tipo de rasgos observables, ya sea en las superficies de los agregados, en grietas, poros o canales, por ejemplo: cubiertas sobre agregados (revestimientos o cutanes), nódulos o concreciones, superficies de deslizamiento o facetas de fricción - presión (slickensides), cementación, afloramientos de sales, evidencias de actividad biológica (por ejemplo, crotovinas, excrementos), artefactos, etc... Se recomienda hacer mención de la cantidad, grosor, tipo y localización (en el caso de revestimientos), y del tamaño y material (nódulos), siguiendo las siguientes indicaciones:

### a) Revestimientos (o cutanes)

**Cantidad:** en manchas o zonas definidas, quebrados (en muchos pero no en todos los agregados), continuos (en todos los agregados).

**Grosor:** delgados, moderados, gruesos

**Tipo:** pura arcilla (raros), arcillas con óxidos de Fe, arcillas con materia orgánica, sesquióxidos, óxidos e hidróxidos de manganeso, sales solubles (carbonatos, sulfatos, cloruros), sílice.

**Localización:** en caras horizontales y verticales de agregados, formando puentes entre granos o agregados, en poros o en canales de raíces.

Ejemplo de una descripción de revestimientos: revestimientos continuos, moderadamente gruesos, probablemente de arcillas con materia orgánica, en caras verticales y horizontales de agregados.

### b) Cementación

Este término se usa para describir la cementación del suelo por materiales que no sean arcillas (por ejemplo: carbonato de calcio, sílice, óxidos e hidróxidos de Fe y Al, yeso). La cementación generalmente persiste al humedecimiento, por lo menos si este no es prolongado. Se diferencian tres grados de cementación:

**cementado débil:** la masa cementada es frágil y dura, pero puede quebrarse con las manos.

**cementado fuerte:** la masa cementada es frágil y no puede quebrarse con las manos, pero sí con un martillo.

**andurecido:** frágil, no se suaviza con humedecimiento prolongado, es tan extremadamente duro que sólo puede quebrarse con un golpe muy fuerte con un martillo.

### c) Nódulos (o concreciones)

Los nódulos son acumulaciones locales de ciertos compuestos químicos, endurecidas, que forman granos o nódulos de diferentes tamaños, formas y colores. Ejemplos: acumulaciones locales de calcita (carbonatos de calcio) y de óxidos de hierro y manganeso. La descripción deberá incluir información sobre abundancia, tamaño, dureza, forma, color y naturaleza, según las siguientes especificaciones:

abundancia:	muy pocos (< 5% vol.)	tamaño:	pequeños (<1mm de diámetro)
	pocos (5 - 15% vol.)		grandes (> 1 mm de diámetro)
	frecuentes (15-40% vol.)	dureza:	suaves (se quiebran con la uña)
	muy frecuentes (40-80% vol.)		duros (no se quiebran)
	dominantes (> 80% vol.)	forma:	esférica, irregular, angular
color:	negro, rojo, blanco	naturaleza:	Fe-Mn, calcita, gibsita, etc.

### d) Afloramientos de sales (o eflorescencias)

Se describe su tipo y su forma:

Tipo: carbonato de calcio, yeso, cloruro de sodio, etc...

Forma: películas sobre agregados, pseudomicelios, costras, venas finas, nódulos, nidos.

### e) Evidencia de óxido-reducción (o hidromorfismo)

En caso de presencia de manchas o motas resultantes de condiciones alteras de reducción y oxidación se describirá su ubicación (exterior o interior de los agregados, paredes de canales de raíces o poros gruesos), su forma, contraste en color, abundancia, tamaño y límite (ver lo especificado para la descripción del color del suelo).

Procesos de reducción intensos (para la adjudicación de propiedades gleyicas o stagnicas, según la clasificación FAO, 1988); pueden reconocerse en campo al adicionar unas gotas de las siguientes sustancias sobre la cara de un agregado tomado de la cara del perfil recientemente quebrado y observar la siguiente reacción:

aparición de un color azul oscuro sólido al adicionar una solución acuosa de ferrocianuro de potasio ( $K_3Fe(III)(CN)_6$ ) al 1%, o

aparición de un color rojo fuerte al adicionar una solución de  $\alpha, \alpha$  dipiridilo al 0.2% en ácido acético.

### f) Presencia de superficies de deslizamiento (o facetas de fricción-presión)

Se les llama superficies de desliz o facetas de fricción-presión a las superficies brillosas de los agregados producto del alineamiento de las arcillas de la masa basal de los agregados en el proceso de expansión y contracción de las mismas, al humedecerse y desecarse el suelo.

### g) Presencia de aluminio "activo"

Se denomina aluminio activo a aquél proveniente de minerales secundarios de bajo orden estructural (alofano, imogolita) y de óxidos e hidróxidos amorfos de aluminio, todos ellos neoformaciones características de suelos desarrollados a partir de materiales volcánicos (ricos en vidrio y otros minerales fácilmente intemperables), predominante-mente bajo climas húmedos. La presencia de aluminio activo es indicadora para la determinación de propiedades ándicas, característica de los Andisoles (FAO, 1988). Se puede evaluar cualitativamente en campo al depositar un poco de material de suelo sobre un pedazo de papel filtro y añadirle, primero, unas gotas de indicador de fenoltaleína al 1% y, después, unas gotas de fluoruro de sodio (NaF) 1 N (Fieldes y Perrott, 1966). El fluoruro tiene una gran afinidad al Al activo y reemplazará a los grupos OH asociados a éste, de manera que el pH ascenderá a valores mayores de 8.2. Si hay Al activo en cantidades importantes, la muestra se tornará de color guinda.

### Estabilidad de agregados

La estabilidad de los agregados determina, por un lado, la penetrabilidad de las raíces y, por otro, la resistencia a la destrucción y, consecuentemente, a su erosionabilidad por viento o agua.

En el campo se evalúa depositando aprox. 10 agregados de diámetro entre 1 a 3 mm en una cápsula de porcelana y saturándolos con agua. Tras hacer rotar suavemente durante 30 segundos la cápsula en la palma de la mano, se evalúa el grado de descomposición de los agregados, según la siguiente relación (Schlichting y Blume, 1966):

Grado de descomposición	Evaluación
No hay descomposición o solo fragmentos grandes	Muy alta
Dominan los fragmentos grandes sobre los pequeños	Alta
Igual número de fragmentos grandes y pequeños	Mediana
Dominan los fragmentos pequeños sobre los grandes	Moderada
Sólo fragmentos pequeños y turbidez notable del agua	Baja
Descomposición total y alta turbidez del agua	Muy baja

### Poros

Este rubro incluye todo tipo de poros, grietas, canales de lombrices y raíces etc. Todos ellos son de importancia para el drenaje interno y la aireación del suelo. Debe describirse su abundancia, tamaño dominante, distribución y forma, para lo cual se utiliza una lupa:

#### Abundancia:

pocos:	1 a 50 por dm <sup>2</sup>
comunes:	51 a 200 por dm <sup>2</sup>
muchos:	más de 200 por dm <sup>2</sup>

#### Tamaño:

micro:	< 0.075 mm
muy finos	0.075 a 1 mm
finos:	1 a 2 mm
medianos:	2 a 5 mm
gruesos:	> 5 mm

#### Distribución:

dentro de agregados: la mayoría de los poros está dentro de los agregados (inped).  
fuera de los agregados: la mayoría de los poros está entre las caras de los agregados, por ejemplo, entre las interfaces entre agregados (exped).

#### Forma:

vesiculares: aprox. esféricos, no elongados  
intersticiales: de formas irregulares  
tubulares: aprox. cilíndricos

### Densidad aparente

La densidad aparente es un criterio importante para la evaluación del balance hídrico y de nutrientes de un suelo, y determinante con relación a la permeabilidad y profundidad fisiológica.

La densidad aparente es la medida en peso del suelo secado a 105 C por unidad de volumen (g/cm<sup>3</sup>). Difiere de la densidad real en el sentido de que incluye al espacio poroso.

Su determinación se realiza al tomar muestras sin perturbar con pequeños cilindros de 100 mL y secarlas a 105 C en el laboratorio. En campo se puede sacar un monolito de un volumen determinado y llenar el espacio creado con agua, después de haberlo recubierto con una bolsa de plástico. El volumen se determina vaciando el agua en una probeta y midiéndola. El suelo removido se pesa en una báscula de campo y una alícuota del mismo se lleva al laboratorio para la determinación de humedad.

En caso de no contar con la posibilidad de secado de muestras, la densidad aparente sólo puede determinarse semi-cuantitativamente en la pared del perfil, según la siguiente tabla:

Característica: (válido para suelos secos)	densidad aparente [g/cm <sup>3</sup> ]			evaluación
	arenas y limos	arcillosos		
El cuchillo sólo se puede introducir bajo fuerzas mayores, la muestra casi no se desmorona.	>1.9	>1.8	>1.6	alta
El cuchillo sólo se introduce con dificultad 1 a 2 cm en el suelo, la muestra se desmorona en pocos fragmentos que sólo se pueden partir con dificultad.	1.8	1.6	1.4	mediana
El cuchillo se puede introducir en el suelo con poco esfuerzo, la muestra se desmorona en pocos fragmentos, los cuales pueden partirse en fragmentos más pequeños con la mano.	1.6	1.4	1.2	
Al presionar suavemente, el suelo se desmorona en muchos fragmentos.	1.4	1.2	1.0	baja
La muestra se desmorona totalmente al tomarla, se ven muchos poros gruesos y muy gruesos.	1.2	<1.0		

- Notas: 1) En caso de que el contenido de materia orgánica sea mayor que 2%, la densidad aparente estimada deberá reducirse en 0.03 g/cm<sup>3</sup> por cada punto porcentual de materia orgánica.  
2) En caso de presencia de aluminio activo, consistencia grasosa del suelo y tixotropía (desintegración súbita del agregado al presionarlo entre los dedos pulgar e índice), la densidad aparente deberá reducirse entre 0.2 y 0.5 g/cm<sup>3</sup>, según la intensidad a la reacción al aluminio activo.

## Profundidad y densidad de raíces

La profundidad de raíces se reporta en  $\text{dm}^2$  y se incluyen todos los horizontes en los cuales se observen más de 1 raíz fina (diámetro  $< 2 \text{ mm}$ ) por  $\text{dm}^2$ . La intensidad de raíces se evalúa contando las raíces finas en un área representativa dentro de un horizonte de  $1 \text{ dm}^2$ :

Raíces finas / $\text{dm}^2$	Clasificación
$<1$	nula
1-2	muy baja
3-5	baja
6-10	mediana
11-20	alta
21-50	muy alta
$>50$	extremadamente alta

## Límite entre horizontes

Los límites de los horizontes se describen en cuanto a su claridad y de acuerdo con la topografía que presentan:

<b>claridad:</b>	abrupto ( $< 2 \text{ mm}$ )	<b>topografía:</b>	uniforme
	claro (2-5 mm)		ondulado
	gradual (5-12 mm)		irregular
	difuso ( $> 12 \text{ mm}$ )		quebrado

## 4. Nomenclatura y designación internacional de horizontes

La nomenclatura que se presenta a continuación se basa en la propuesta por FAO (1988) y se agregaron algunos sufijos propuestos por el Soil Survey Manual (1993) y otros por los autores.

Los horizontes principales se designan con letras mayúsculas:

- H** Horizonte orgánico, producto de la acumulación de materia orgánica depositada en la superficie bajo condiciones de saturación de agua durante períodos largos (a menos que el sitio se encuentre drenado artificialmente); contiene más de 30% de materia orgánica, si sus contenidos de arcilla en la fracción mineral son mayores que 60%, o, 20% de materia orgánica, si la fracción mineral no contiene arcilla, o contenidos intermedios de materia orgánica en caso de contenidos de arcilla intermedios a los mencionados.
- O** Horizonte orgánico, producto de la acumulación de materiales orgánicos depositados en la superficie, que no se encuentra saturado con agua por períodos mayores a pocos días por año y que contiene más de 35% de materia orgánica.
- A** Horizonte mineral de superficie que muestra acumulación de materia orgánica humificada, o cuya morfología es producto de pedogénesis, pero sin las características de los horizontes E o B.
- E** Horizonte mineral que muestra una acumulación de partículas de las fracciones de limo y arena ricas en minerales resistentes, es el resultado de una eluviación de arcillas, hierro y aluminio o una combinación de éstas.
- B** Horizonte mineral que carece de estructura rocosa (o por lo menos no es evidente) y que se caracteriza por una o más de las siguientes propiedades:
  - a) muestra una iluviación de arcillas, hierro, aluminio o humus, sola o en combinaciones;
  - b) tiene una concentración residual de sesquióxidos con relación al material parental;
  - c) muestra una alteración de las condiciones originales del material parental con respecto a que presenta neoformación de arcillas y óxidos de Fe y Al, además de formación de estructura granular, en bloques o prismática.
- C** Horizonte o capa mineral no consolidado, a expensas del cual se forman los horizontes A y B, y que carece de propiedades características de los demás horizontes principales.
- R** Roca consolidada subyacente.

Los horizontes transicionales, es decir, aquéllos que muestran características propias de dos horizontes principales, se designan con la combinación de dos mayúsculas, por ejemplo, AE, AB, BE, BC, AC, donde la primera letra señala al horizonte cuyas características dominan.

Las subdivisiones de los horizontes principales se designan con letras minúsculas utilizadas como subíndices y que hacen alusión a la naturaleza esencial. Estos sufijos pueden combinarse para indicar propiedades que ocurren conjuntamente en un horizonte, pero normalmente no exceden de dos. En los horizontes transicionales no se usan sufijos característicos de una sola de las letras mayúsculas, pero si se puede indicar en caso de que un sufijo sea característico para las dos mayúsculas (BcK, ABg).

- a Acumulación de materia orgánica bajo condiciones temporales de saturación de agua, pero durante períodos más cortos que los necesarios para el desarrollo de un horizonte H (por ejemplo: Aa = Anmoor).
- b Horizonte enterrado o fósil (por ejemplo: Btb).
- c Acumulación de concreciones, generalmente se usa en combinación con otro sufijo, que indique la naturaleza de las concreciones.
- e Horizonte que muestra eluviación moderada (menos que E) de arcillas, compuestos orgánicos, hierro y aluminio (por ejemplo: Ae).
- f Fermentación de la materia orgánica (por ejemplo: Of).
- g Horizonte moleado, que indica diferencias en condiciones de óxido-reducción (por ejemplo: Bg, Btg, Cg).
- h Acumulación de materia orgánica en horizontes minerales (por ejemplo: Ah, Bh). Solo se usa si el horizonte no presenta disturbios por uso de arado, pastoreo u otra actividad antrópica (por lo tanto los sufijos h y p (ver abajo) son excluyentes mutuamente).
- j Presencia de jarosita (por ejemplo, en un horizonte sulfúrico).
- k Acumulación de carbonatos de calcio.
- m Horizonte fuertemente cementado, consolidado, endurecido. Este sufijo generalmente se usa en combinación con otro que indique la naturaleza del material cementante (por ejemplo. Cmk = horizonte petrocálcico dentro de un horizonte C; Bms: horizonte plácico, es decir espódico endurecido).
- n Acumulación de sodio (por ejemplo: Bln = horizonte nátrico).
- o Alteración *in situ* muy avanzada, dominancia de la fracción de arcilla y de arena rica en cuarzo; la arcilla mineral dominante es la caolinita. Igualmente dominan los sesquióxidos de hierro y aluminio (por ejemplo, la gibsita y hematita).
- p Horizonte disturbado por arado u otras labranzas (por ejemplo, Ap).
- q Acumulación de sílice (Cmq).
- r Fuerte reducción como resultado de condiciones anóxicas prolongadas (por ejemplo, por agua freática (Cr)).
- s Acumulación de sesquióxidos (por ejemplo: Bs = horizonte espódico).
- t Acumulación de arcillas por iluviación (por ejemplo, Bt = horizonte árgico).
- u No especificado.
- v Horizonte con fuerte carácter vértico (resultado de la presencia de arcillas expandibles. Muestra facetas de fricción-presión).
- w Alteración *in situ* reflejada en mayores contenidos de arcilla, color más rojizo y presencia de estructura, en comparación con el horizonte subyacente (por ejemplo: Bw).
- x Ocurrencia de un fragipan (por ejemplo. Btx).
- y Acumulación de yeso (por ejemplo. Cy).
- z Acumulación de sales de mayor solubilidad que el yeso (Az, Ahz).

Los sufijos pueden usarse para describir horizontes diagnósticos, pero se hace énfasis en que el uso de alguna designación de horizonte en una descripción de perfil no necesariamente asume la presencia de un horizonte diagnóstico, ya que los símbolos simplemente reflejan una estimación cualitativa.

Horizontes designados con una misma combinación de letras pueden subdividirse verticalmente con sufijos numéricos, comenzando de la superficie (por ejemplo: B11, B12, B13).

Cuando es necesario distinguir entre discontinuidades litológicas, los números se usan como prefijos (por ejemplo, cuando el horizonte C es de material diferente que el del cual se formaron los horizontes sobreyacentes, la secuencia podría ser: A, B, 2C, 3C).

### Ejemplos de secuencias de horizontes de algunas de las principales unidades de suelo

Fluvisol eutrícico	Ah-C1-Ab-C2-C3
Fluvisol calcárico	Ap-Ck1-Ab-Ck2- C3
Gleysol eutrícico	Ah-Bg1-Bg2-Cg
Regosol distrícico	Ap-C1-C2
Leptosol réndzico	Ah-mCk
Andosol mólico	Ah-Bw-Cw-C
Vertisol eutrícico	Ap-A-AC-C1-C2
Cambisol calcárico	Ah-AB-Bwk-Cw-C
Gypsisol eutrícico	Ah-AB-Bty-Cy
Feozem calcárico	Ap- Ahk1-Ahk2-C
Luvisol albico	Ap-E-Bt1-Bt2-C1
Planosol mólico	Ah-E-Btg1-Btg2-Cg
Podzol háplico	Ah-E-Bhs-Bs-C-C

## 5. Principales tipos de mantillo en suelos forestales

Las manifestaciones morfológicas típicas del humus de los suelos y su distribución a profundidad se conocen como tipos de mantillo. A través de su descripción con métodos sencillos de campo pueden hacerse importantes inferencias acerca del balance de nutrientes en el sitio así como su dinámica. Para cada tipo de mantillo se distinguen horizontes orgánicos de material depositado en la superficie (horizontes L y O) y un horizonte mineral rico en materia orgánica (horizonte Ah).

Los diferentes tipos de mantillo se distinguen por la actividad biológica que presentan, la dinámica de la descomposición de la hojarasca, el tipo de sustancias húmicas que los componen y la secuencia, espesor y estructura de sus horizontes. Los mantillos típicos son Mull, Mor y Moder, presentándose diversas transiciones entre éstos dependiendo de las condiciones específicas en cada sitio. Modalidades distintas a las típicas se encuentran especialmente bajo condiciones semi-terrestres o en sitios con drenaje deficiente. En estos casos el horizonte Oh generalmente se encuentra más desarrollado. Bajo condiciones de saturación de agua se presentan transiciones hacia las turberas (horizontes hísticos).

### Mull:

Secuencia de horizontes: L - (Of) - Ah Los horizontes orgánicos sobre la superficie son de espesores muy pequeños o incluso están ausentes en ciertos periodos, en caso de que la descomposición biológica sea muy eficiente. Si falta el horizonte Of, el espesor del horizonte Ah es generalmente mayor de 8 cm, si está presente un horizonte Of, el horizonte Ah generalmente presenta espesores menores a 10 cm (a menudo de 5 a 7 cm). La estructura del horizonte Ah es generalmente de migajón o granular, su contenido de materia orgánica es alto y la densidad de raíces es muy alta. Generalmente se presenta una alta actividad biológica y su balance de nutrientes se considera eutrófico con una reacción ligeramente ácida a neutra y una relación C/N menor a 18.

### Mor:

Secuencia de horizontes: L - Of - Oh - Ah. Los horizontes orgánicos sobre la superficie son varios y están presentes en todo el año, su espesor varía entre 2 y 8 cm. El espesor de los horizontes orgánicos generalmente es menor que el del horizonte Ah. Los límites entre horizontes son generalmente difusos, es difícil separar claramente al horizonte Ah del horizonte orgánico sobreyacente. En el horizonte Of los restos vegetales disminuyen con la profundidad mientras que las sustancias humificadas aumentan y presenta una laminación tenue. El horizonte Oh muestra una alta densidad de raíces muy finas. La actividad de la meso y macrofauna es moderada y la descomposición de la hojarasca es lenta. El balance de nutrientes se considera mesotrófico, la reacción es ácida y la relación C/N está entre 18 y 29.

### Moder:

Secuencia de horizontes: L - Of - Oh - (Ah) ó (Ae). Los horizontes orgánicos sobre la superficie son varios y están presentes en todo el año, su espesor es generalmente mayor que el del horizonte Ah, los límites entre horizontes son claros y los horizontes son fácilmente separables. El horizonte Oh se deja partir en fragmentos angulosos y presenta laminación muy fina. Muestra una mayor densidad de raíces gruesas que mantillos de tipo mor. La meso y macrofauna está casi ausente. La descomposición de la hojarasca es muy lenta y ocurre principalmente en los horizontes superficiales. Se favorece la formación de sustancias húmicas móviles que pueden ser translocadas con el agua que se infiltra en el

perfil. El balance de nutrientes se considera como oligotrófico, la reacción es fuertemente ácida, los contenidos de P, N y Ca son bajos y la relación C/N es mayor a 29.

En el siguiente cuadro se presenta un resumen de las principales características de los tres tipos de mantillo:

tipo de mantillo	Mull	Mor	Moder
secuencia de horizontes	L - (Oh) - Ah	L - (Of) - Oh - Ah	L - Of - Oh - (Ah)
requisitos para su formación	hojarasca de descomposición rápida	hojarasca de descomposición lenta o baja actividad de organismos que mezclen	hojarasca de descomposición lenta, alta humedad
descomposición de la hojarasca	++	+	-
mineralización	+		-
espesor de los horizontes orgánicos	muy bajo, muchas veces ausentes	2 a 8 cm, < Ah	> Ah
morfología de los horizontes O	generalmente ausentes	coherentes, límites difusos	angulosos, fragmentables, límites claros
reacción	neutra	ácida	fuertemente ácida
relación C/N	10 - 17	18 - 29	> 29
balance de nutrientes	+		-

## 6. Evaluación edafológica del sitio

A continuación se presenta una serie de tablas y nomogramas a partir de los cuales se pueden estimar parámetros físicos y químicos relacionados con balance hídrico, de aireación y de nutrientes de los suelos, al igual que una serie de tablas para la evaluación de su capacidad filtro y amortiguadora. La evaluación de cada parámetro se realiza de una forma general, con el fin de crear un marco de comparación para suelos desarrollados a partir de diferentes materiales parentales y en condiciones climáticas y topográficas distintas, al igual que con diferentes usos de suelo. Para fines de planeación y de evaluación de tierras para usos específicos (agrícola, forestal, etc...) la evaluación deberá hacerse bajo consideración de las demandas particulares de cada cultivo o uso del suelo.

### Profundidad de desarrollo

La profundidad de desarrollo señala al espesor del suelo sobre el material parental no intemperizado. También se conoce por el nombre de solum. Los horizontes A y B forman parte del solum, mas no los horizontes R. Los horizontes Cw pueden formar parte del solum, si las raíces pueden llegar a desarrollarse en ellos, es decir, si no están compactados ni cementados y si su contenido de piedras es menor que 70%.

### Profundidad fisiológica

La profundidad fisiológica señala al espesor del suelo en el que pueden penetrar y desarrollarse potencialmente las raíces. Puede abarcar como máximo al espesor de la profundidad de desarrollo, pero puede estar restringida, además del lecho rocoso, por:

- cambios abruptos de propiedades químicas de un horizonte a otro: por ejemplo, pH, presencia o ausencia de carbonatos, cambios drásticos en el contenido de nutrientes, etc.)
- horizontes bajo condiciones de reducción;
- horizontes con capacidades de aireación y agua aprovechable muy bajas;
- horizontes compactados o cementados;
- pedregosidad de 70% o más;
- estructura desfavorable (por ejemplo: laminar, columnar y prismática, en ese orden).

La profundidad fisiológica se evalúa de la siguiente manera (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982):

Profundidad	<20	40	80	>130
Evaluación	muy somero	somero	profundo	muy profundo

[cm]

### Penetrabilidad de raíces

La penetrabilidad de raíces denota las posibilidades reales que tienen las raíces de desarrollarse en un horizonte. Limitativas de la misma son pedregosidades y densidades aparentes altas, la escasez de poros gruesos y la presencia de estructura desfavorable (laminar, columnar y prismática, en ese orden). La evaluación se basa en la descripción de la densidad de raíces (ver pág. 26) según la siguiente tabla:

Evaluación	Limitaciones
Muy buena	No hay.
Buena	Pedregosidad baja y densidad aparente mediana.
Mediana	Estructura desfavorable (prismática o angular en bloques gruesa y fuerte) o pedregosidad mediana.
Deficiente	Presencia de varias limitaciones.
Ausente	Límite de la profundidad fisiológica.

*fl acuos  
عسالى*

### Porosidad y retención de agua

Los suelos, como también los sedimentos y la mayoría de las rocas, contienen diferente número de poros de diámetros variados, dependiendo de su textura, densidad aparente estructura y contenido de materia orgánica. Los poros se encuentran ya sea llenos de aire o agua, según su diámetro y el balance hídrico del sitio. La retención de agua en los suelos se comporta según las leyes de capilaridad y de adsorción a superficies fijas, de manera que cuanto más estrecho sea un capilar, más alto subirá el agua dentro de él y más grande será la fuerza con la que el agua sea retenida. Para que la planta pueda tomar agua del suelo, deberá aplicar fuerzas de succión mayores a las fuerzas de retención con las que el agua se encuentra adsorbida al suelo.

Si la totalidad del espacio poroso (VPT) se encuentra saturada de agua, el suelo se encuentra a capacidad máxima de retención de agua. Los poros gruesos (de un diámetro equivalente a más de 50µm se drenan por gravedad en tiempo muy breve (mientras el suelo no se encuentre bajo influencia del manto freático) y el espacio relativo que ellos ocupan se denomina "capacidad de aireación" (CA). La cantidad de agua restante en los poros de diámetros menores a 50µm es retenida con tensiones equivalentes a pF 1.8 y se denomina capacidad de campo (CC).

El pF se refiere al logaritmo sobre base 10 de la presión medida en cm de columna de agua, donde p = potencial y F = energía libre del agua.

La cantidad de agua que el suelo puede proporcionar a las plantas se denomina agua disponible (dCC) o rango de humedad aprovechable. Esta se encuentra en poros de diámetros entre 50 y 0.2µm. El agua retenida en poros menores a 0.2 µm no puede ser absorbida por la mayoría de las plantas y se denomina "agua muerta" o punto de marchitez permanente (PMP). En estos poros el agua es retenida a pF de 4.2.

Por lo tanto:

$$VPT = CA + dCC + PMP$$

$$CC = VPT - CA \text{ o } dCC + PMP$$

$$dCC = CC - PMP$$

### Distribución de poros y funciones:

Diámetro [m]	Tensión [pF]	Tipo de poros	Función	Denominación
> 50	< 1.8	Gruesos	Drenaje rápido	Capacidad de aireación (CA)
50-10	1.8-2.5	Medianos	Drenaje lento	Capacidad de agua disponible (dCC)
10 - 0.2	2.5 - 4.2	Finos	Agua disponible para las plantas	Capacidad de campo (CC)
< 0.2	> 4.2	Muy finos	Agua muerta (PMP)	Capacidad del espacio poroso (VPT)

### Determinación del balance hídrico y de la distribución de los poros

Los valores correspondientes a VPT, CC, dCC y CA pueden inferirse a partir de la textura de cada horizonte con las tablas que se presentan a continuación (Krahmer *et al.*, 1995). Ya que el contenido de materia orgánica y la densidad aparente también influyen sobre la distribución de los poros, deben hacerse correcciones correspondientes. Los valores de corrección para contenidos altos de materia orgánica se leen en la segunda tabla.

textura <sup>1)</sup>	VPT [Vol%] densidad aparente			CA [Vol%] densidad aparente			dCC [Vol%] densidad aparente			CC [Vol%] densidad aparente		
	b	m	a	b	m	a	b	m	a	b	m	a
Ag	44	38		24	19		17	16		20	19	
Am	42	36		28	25		9	8		14	11	
Af	44	34		18	10		22	20		26	24	
A	46	38	34	24	22	19	16	11	11	22	16	15
AC	46	39	33	18	16	12	20	16	14	28	23	21
CA	45	38	32	11	9	7	24	20	17	34	29	25
L	49	42		8	5		28	26		41	37	
CL	50	41	36	9	7	4	27	24	21	41	34	32
C	48	40	33	8	7	5	20	15	13	40	33	28
CRA	49	41	34	4	3	3	15	12	10	45	37	31
CRL	49	42	36	7	6	4	20	16	14	42	36	32
CR	50	42	36	5	4	3	16	12	9	45	38	33
R	57	45		3	3		18	12		54	42	
RA	50	42	35	5	4	3	16	12	9	45	38	32
RL	52	43	37	4	4	3	15	11	7	48	39	34

VPT: volumen total de poros CA: capacidad de aireación dCC: capacidad de agua disponible  
 CC: Capacidad de campo  
 Densidad aparente: b: baja m: media a: alta  
 Textura arenosa: g: gruesa (2-0.63 mm) m: mediana (0.63-0.2 mm) f: fina (0.2-0.06 mm)  
<sup>1)</sup> Claves de texturas de la pág. 15.

### Factores de corrección para contenidos altos de materia orgánica (Krahmer *et al.*, 1995):

Arcl-lla [%]	M.o. [%]	VPT	CA [Vol%]	dCC	CC	Arcl-lla [%]	M.o. [%]	VPT	CA [Vol%]	dCC	CC
<5	h2	0	-1.5	+0.5	+1.5	h2	+3.0	+0.5	+0.5	+0.5	+2.5
	h3	+2.5	-1	+1	+3.5	h3	+5.5	+1.5	+1.5	+1.5	+4
	h4	+6.5	-1	+3	+7.5	h4	+13	+3	+4	+10	
	h5	+10	0	+3.5	+10	h5	+19	+5	+7	+14	
5-12	h2	+1.5	0	+0.5	+1.5	h2	+3	+0.5	+1	+2.5	
	h3	+4.5	+1	+1.0	+3.5	h3	+6.5	+1.5	+2.5	+5	
	h4	+10	+2	+3.0	+8	h4	+13.5	+2.5	+5.5	+11	
	h5	+14.5	+2.5	+4.0	+12	h5	+19.5	+4.5	+10	+15	
12-17	h2	+2	+0.5	+0.5	+1.5	h2	+3.5	0	+2	+3.5	
	h3	+5	+1.5	+1	+3.5	h3	+7.5	0	+5	+7.5	
	h4	+11.5	+2.5	+3.5	+9	h4	+14	+1	+11	+13	
	h5	+17.5	+5.5	+4.5	+12	h5	+20	+2	+16	+18	

VPT: volumen total de poros CA: capacidad de aireación dCC: capacidad de agua disponible  
 CC: Capacidad de campo  
 M.o.: materia orgánica

Para la evaluación las lecturas obtenidas en porcentajes de volumen (%Voi) deben transformarse a L/m<sup>2</sup> de suelo. Para ello primeramente deben relacionarse al suelo fino, libre de gravas y piedras, multiplicando el valor obtenido de las tablas con el factor (100 - %Vol. piedras)/ 100

ya que las gravas y piedras reducen el espacio poroso. Posteriormente, los valores obtenidos para cada horizonte deberán multiplicarse con el respectivo espesor del horizonte (en dm) para obtener L/m<sup>2</sup>. Por lo tanto:

$$dCC [L/m^2] = dCC [Vol\%] \times (100 - \text{piedras} [Vol\%]) / 100 \times \text{espesor} [dm]$$

### Evaluación del espacio poroso total (VPT)

La aptitud de un suelo de ser cultivado y labrado está relacionada directamente con su espacio poroso. La evaluación se realiza por horizontes de acuerdo con la siguiente tabla:

VPT (Vol%)	<30	40	50	60>
Evaluación	muy bajo	bajo	mediano	alto muy alto

### Evaluación de la capacidad de aireación (CA)

Capacidades de aireación muy bajas a bajas representan serias restricciones en relación con la profundidad fisiológica de un suelo. En presencia de agua freática o agua estancada, la capacidad de aireación se convierte también en capacidad adicional de retención de agua. Capacidades de aireación altas indican lenta elevación de agua capilar, pero alto drenaje de agua pluvial. Suelos ricos en nutrimentos requieren de una alta capacidad de aireación, ya que de no tenerla, la descomposición de los residuos orgánicos será incompleta. La evaluación de la capacidad de aireación se realiza también por horizontes según la siguiente tabla:

CA (Vol%)	<3	7	12	18>
Evaluación	muy baja	baja	mediana	alta muy alta
Ejemplos	horizontes Cg, Bg	horizontes Cw, Rt	horizontes Bw	horizontes Ah Ap

### Evaluación de la capacidad de agua disponible (dCC)

La capacidad de agua disponible (o rango de humedad aprovechable) de un suelo representa a la cantidad de agua retenida que puede ser absorbida por las plantas. La capacidad de agua disponible se determina en el espacio radicular efectivo. Este último se define con base en la profundidad máxima de la que las raíces llegan a absorber agua en años secos (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982). En caso de que el suelo se encuentre bajo influencia del manto freático, la capacidad de agua disponible se ve renovada constantemente. En el inciso "Evaluación del balance hídrico en suelos influenciados por mantos freáticos cercanos a la superficie" se describe como debe considerarse el aporte de agua por ascenso capilar del manto freático.

El espacio radicular efectivo se puede inferir si se considera la textura, según la siguiente tabla:

Textura <sup>1)</sup>	Espacio radicular efectivo
A	5 dm
AC	7 dm
CA	8 dm
L, CAL, C, CR, RA, RL, R	10 dm
CRL	11 dm

Nota: En caso de densidades aparentes altas, los valores disminuyen entre 1 y 2 dm.

<sup>1)</sup> Claves de textura en la pág. 15.

La evaluación de la capacidad de agua disponible en el espacio radicular efectivo se realiza mediante la siguiente tabla:

dCC (L/m <sup>2</sup> )	<50	90	140	200<
evaluación	muy baja	baja	mediana	alta
				muy alta

### Evaluación de la capacidad de campo

La capacidad de campo (CC) representa a la cantidad de agua que puede ser retenida en un suelo contra la fuerza de gravedad. En esta agua igualmente se pueden encontrar sustancias en solución, que no pueden ser absorbidas por las partículas sólidas (por ejemplo, nitratos). Por lo tanto, la capacidad de campo también representa una medida de la capacidad de retención de estas sustancias que evita que sean lixiviadas al subsuelo y contaminen a los acuíferos. La capacidad de campo también es importante para el balance térmico de los suelos. Mientras más húmedo está un suelo, necesitará más calor para subir la temperatura 1 grado, lo cual repercute en que en zonas templadas húmedas el ciclo vegetativo comience más tarde en el año, si los suelos presentan CC altas. Por el otro lado, la temperatura almacenada puede ser retenida durante mayor tiempo bajo CC altas, lo cual se refleja en menor vulnerabilidad a heladas tempranas en estos sitios durante el otoño. La CC se determina convencionalmente hasta profundidades de 1 m y, en caso de presentarse la roca madre a profundidades menores de 1 m, en toda la profundidad de desarrollo. Se evalúa por medio de la siguiente tabla:

CC (L/m <sup>2</sup> )	<130	260	390	520<
Evaluación	muy baja	baja	mediana	alta
				muy alta

### Evaluación del balance hídrico en suelos influenciados por mantos freáticos cercanos a la superficie

En caso de que el manto freático se encuentre cercano a la superficie, el balance hídrico del suelo se verá complementado por la ascensión capilar de agua, lo cual deberá considerarse en la evaluación. Los valores correspondientes a la ascensión capilar en mm diarios se encuentran desglosados en la siguiente tabla, según la distancia del manto freático y considerando la textura del suelo (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982):

Textura <sup>1)</sup>	Profundidad del manto freático en dm												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	17	20
	Ascenso capilar [mm/día]												
A gruesa	>5.0	5.0	1.5	0.5	0.2	0.1	-	-	-	-	-	-	-
A media	>5.0	>5.0	>5.0	3.0	1.2	0.5	0.2	<0.1	-	-	-	-	-
A fina	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	3.0	1.5	0.7	0.3	0.2	<0.1	-	-	-
AC	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	5.0	3.5	2.0	1.5	0.8	0.3	0.1	<0.1	-
CA	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	5.0	3.0	2.0	1.0	0.5	0.2	-
CRA	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	3.0	2.0	1.0	0.7	0.4	0.2	<0.1	-	-
L, CL	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	5.0	3.5	2.0	1.0	0.5	0.2
C	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	>0.5	4.5	3.0	2.5	1.5	0.7	0.3	0.1
CAL	>5.0	>5.0	5.0	3.5	2.0	1.3	0.8	0.5	0.3	0.2	<0.1	-	-
CRL	>5.0	>5.0	>5.0	>5.0	4.5	3.5	2.5	2.0	1.5	0.8	0.4	0.2	<0.1
CR, RA	>5.0	5.0	2.5	1.2	0.7	0.5	0.3	0.2	0.2	<0.1	-	-	-
RL	4.0	2.0	1.1	0.7	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	<0.1

<sup>1)</sup> Claves de textura de la pág. 15

### Evaluación de la conductividad hidráulica en condiciones de saturación

La conductividad hidráulica del suelo es una propiedad física que describe su capacidad para transmitir agua. Es un parámetro importante tanto para el uso agrícola de un suelo, como para la evaluación ecológica del sitio. Se puede medir cuantitativamente en términos de velocidad de paso de agua a través de una unidad de sección transversal de suelo saturado en una unidad de tiempo bajo condiciones hidráulicas y de temperatura específicas (conductividad hidráulica bajo condiciones de saturación). Sin embargo, debe considerarse que para la evaluación del comportamiento de un suelo frente a eventos pluviales, la conductividad hidráulica solo es uno de los parámetros a considerar, junto con el escurrimiento superficial y la permeabilidad bajo condiciones insaturadas, como también la infiltración (ver el siguiente inciso: "drenaje natural").

La conductividad hidráulica de un suelo en condiciones de saturación puede estimarse bajo consideración de la textura y la densidad aparente, según la siguiente tabla (Arbeitsgemeinschaft Bodenkunde, 1982):

Textura <sup>1)</sup>	Densidad aparente	
	Baja	Alta
	Conductividad hidráulica (Kf) [cm/día]	
Arena gruesa	>300	>300
Arena media	>100	>100
Arena fina	100-300	40-100
CA	40-100	10-40
AC, CRA	100-300	40-100
L, CAL, CL	40-100	10-40
C	100-300	10-100
CRL	40-100	10-40
CR, RA, RL, R	40-300	10-40

<sup>1)</sup> Claves de textura en la pág. 15

La evaluación de la conductividad hidráulica se realiza según los criterios establecidos en la siguiente tabla:

Kf [cm/día]	<1	10	40	100	300 >
Evaluación	Muy baja	Baja	Mediana	Alta	Muy alta
					Extremadamente alta

### Drenaje natural

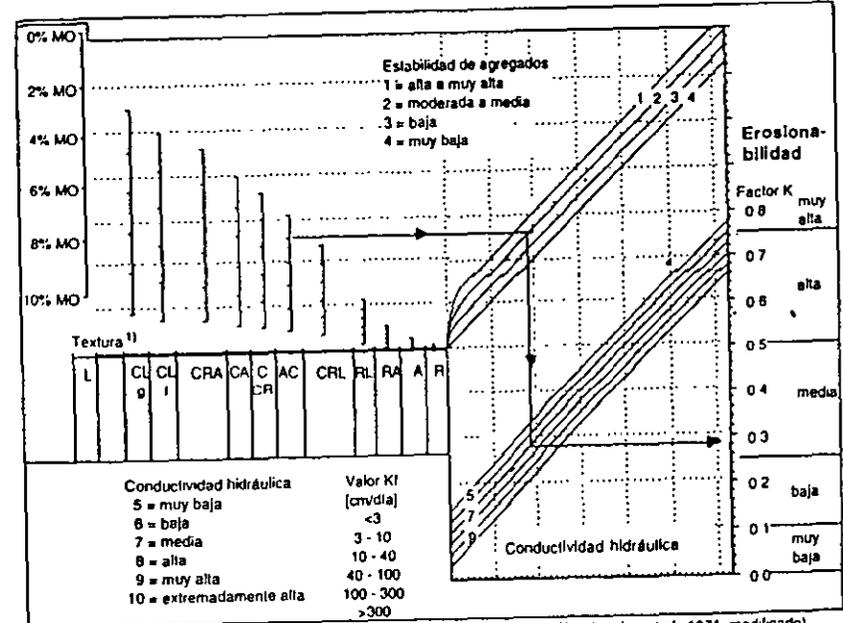
El drenaje natural se refiere a la frecuencia y duración de períodos húmedos en el sitio o localidad a estudiar. No se consideran alteraciones del régimen de humedad inducidos por el hombre, como serían el drenar o irrigar una parcela, a menos que estas acciones hayan modificado determinadamente la morfología del suelo.

Se evalúa la clase de drenaje correspondiente para el sitio de acuerdo a la siguiente tabla (Soil Survey Manual, 1993):

<b>Drenaje excesivo</b>	El agua se infiltra con rapidez, en raras ocasiones se encuentra agua interna libre, o sólo a gran profundidad. Los suelos generalmente son de texturas gruesas, tienen una alta conductividad hidráulica o son muy someros.
<b>Drenaje bueno</b>	El agua se infiltra bien, pero no con rapidez, se encuentra agua interna libre a profundidad sin especificar la duración, el agua es aprovechable para las plantas durante la mayor parte del ciclo vegetativo en regiones húmedas. La humedad no inhibe significativamente el crecimiento de las raíces durante el ciclo vegetativo. Los suelos carecen de características redoximorfias relacionadas con exceso de humedad.
<b>Drenaje moderado</b>	La infiltración del agua ocurre con lentitud en algunos periodos del año, se encuentra agua interna libre a profundidades medianas y su duración es de transitoria a permanente. Durante el ciclo vegetativo, el principal espacio radicular permanece mojado sólo durante lapsos cortos, pero lo suficiente para perjudicar a la mayor parte de las especies mesofíticas. Los suelos generalmente tienen una conductividad hidráulica mediana a baja en algún horizonte dentro de los primeros 100 cm del perfil o se encuentran en sitios con eventos periódicos de precipitación alta.
<b>Drenaje deficiente</b>	El agua se infiltra con lentitud y el suelo se encuentra periódicamente mojado a poca profundidad durante el ciclo vegetativo. Comúnmente se encuentra agua interna libre a poca profundidad durante lapsos de lo suficientemente largos para que la mayoría de las plantas mesofíticas no puedan desarrollarse, a menos que el suelo se drene artificialmente; sin embargo, el suelo no se encuentra mojado continuamente en zonas inmediatas a la profundidad del arado. La conductividad hidráulica de estos suelos generalmente es baja a muy baja o el sitio recibe precipitación de manera continua.
<b>Drenaje muy deficiente</b>	El agua se infiltra con lentitud y durante la mayor parte del ciclo vegetativo se encuentra agua interna libre en la superficie o a poca profundidad. El agua interna libre es persistente a permanente. Los suelos se encuentran en sitios planos o en depresiones. Pueden estar en pendientes suaves en caso de que la precipitación sea alta o continua.

### Estimación de la erosionabilidad

La erosionabilidad de un suelo, el riesgo de erosión hídrica del mismo o factor "K" en la "Ecuación Universal de la Pérdida del Suelo" (Wischmeier, 1971), puede estimarse si se considera la textura, el contenido de materia orgánica, la estabilidad de los agregados y la permeabilidad, con el siguiente nomograma (la erosionabilidad sólo se estima en el horizonte más superficial):



El factor K obtenido del nomograma se ajusta de acuerdo con la pedregosidad del horizonte superficial, multiplicándolo con un factor de ajuste de acuerdo con la siguiente tabla (National Soils Handbook USDA-SCS, 1983):

Pedregosidad [Vol%]	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Factor de ajuste	0.90	0.77	0.68	0.61	0.54	0.48	0.43	0.38	0.34	0.30
Pedregosidad [Vol%]	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Factor de ajuste	0.26	0.22	0.19	0.16	0.13	0.10	0.08	0.06	0.04	0.03

La evaluación de la erosionabilidad se presenta en el margen derecho del nomograma anterior.

### Evaluación del balance de nutrimentos

El abastecimiento de nutrimentos en un sitio estará determinado por la reserva de los mismos (la cual será disponible a largo plazo) y los nutrimentos disponibles inmediatamente y a corto plazo (por ejemplo, en el transcurso de un ciclo agrícola). La reserva solo puede estimarse muy aproximadamente en el campo. Ella aumenta principalmente con la presencia de minerales interperizables. Las reservas más importantes son: calcita (Ca), dolomita (Ca, Mg), feldespatos (Ca, K), forsterita (Mg), apatita (P) y micas e illitas (K). La magnitud de la reserva está en función de los contenidos originales en la roca y las ganancias o pérdidas relativas que resultan de la formación de suelo.

La disponibilidad está en función de las propiedades químicas y biológicas actuales del suelo (pH, humedad, contenido de materia orgánica, tipo de los sitios de intercambio orgánicos e inorgánicos). Puede lograrse una caracterización aproximada del contenido de nutrimentos disponibles, si se considera la capacidad de intercambio catiónico, el contenido de materia orgánica y el pH del suelo.

### Capacidad de Intercambio Catiónico (CIC)

Los coloides del suelo, principalmente las arcillas y la materia orgánica, muestran en su superficie cargas negativas, por lo que pueden adsorberse a ellas cationes (ya sean nutrimentos o contaminantes). Estos cationes pueden ser intercambiados por cantidades equivalentes de otros cationes. La suma de todos los cationes intercambiables equivale a la capacidad de intercambio catiónico (CIC) y se reporta en meq/kg o mmol<sub>c</sub>/kg (c = carga), antiguamente se refería en meq/100 g de suelo. La CIC depende básicamente de los tipos de arcilla y sus respectivas cantidades presentes en un suelo, como también del contenido de materia orgánica. En caso de tratarse de arcillas de carga variable, es decir dependiente de la reacción del suelo, también se deberá considerar el valor de pH. Las diferentes arcillas tienen CIC entre <100 y >1500 meq/kg. En los suelos, generalmente se encuentran mezclas de diferentes tipos de arcillas. A continuación se presenta una tabla en la cual, a partir de la textura y el tipo de arcilla dominante en un suelo, inferido según el material parental y las condiciones climáticas prevalecientes en el sitio, puede estimarse la CIC de la fase mineral del suelo. A esta debe sumarse la CIC de la fase orgánica, la cual se estima a partir de los contenidos de materia orgánica y el pH del suelo (puesto que la materia orgánica también posee carga variable). Los valores correspondientes se encuentran en la parte inferior de la siguiente tabla (Blume, 1990):

Material parental (ejemplos)	Tipo de arcilla mineral dominante (mmol/kg)						
	Mezcla illita	Caolinita	Smectita	Alofano			
	granito	areniscas, superficies relicicas (Terciario)	aluviones, vulcanitas bajo cimas áridos o con épocas pronunciadas de sequía	materiales volcánicos bajo cimas húmedas			
ejem-pros de suelos	Fluvi- y Cambi- suelos	Cambi- y Luvi- suelos	Acrisoles, Nitisoles, Ferralisoles	Vertisoles, subgrupos ándicos	Ando- suelos		
Textura <sup>1)</sup>					pH 7.5	pH 6.5	pH 5.5
A	20	20	6	50	100	80	60
AC	45	45	14	115	225	180	135
CA, CAL	60	70	20	180	350	280	210
L	90	100	30	250	500	400	300
C	100	120	36	300	600	480	360
CL	120	130	40	325	750	600	450
CRL	150	160	48	400	800	640	480
CR	180	200	60	500	1000	800	600
RA	180	240	72	600	1200	960	720
RL	240	260	78	650	1300	1040	780
R	320	350	105	875	1750	1400	1050
Humus	pH <sup>2)</sup>						
[%]	7.5	6.5	5.5	4.5	3.5	2.5	
1-2	+30	+24	+18	+12	+8	+5	
2-4	+70	+60	+40	+30	+20	+10	
4-8	+150	+120	+90	+60	+40	+20	
8-15	+250	+200	+150	+100	+60	+40	
15-30	+500	+400	+300	+200	+125	+75	
>30	+2000	+1600	+1200	+800	+500	+300	

<sup>1)</sup> Claves de texturas de la pág. 15

<sup>2)</sup> determinado en CaCl<sub>2</sub> 0.01 M

La evaluación de la capacidad de intercambio catiónico se realiza según la siguiente tabla:

CIC (meq/kg)	<50	100	200	400	800 >	
Evaluación	muy baja	baja	regular	mediana	alta	muy alta

### Bases Intercambiables

La porción ocupada por los cationes Ca, Mg, K y Na (también llamados bases intercambiables = BI) de la CIC total (compuesta principalmente por los cationes mencionados además de H y Al) se denomina saturación de bases. El contenido de bases intercambiables en meq/kg de un suelo depende directamente de la acidez del mismo (presencia de H y Al), por lo que puede inferirse a partir de la capacidad de intercambio catiónico total (CIC) al multiplicarla con un factor determinado principalmente por el pH del suelo, pero también influido por el contenido de materia orgánica y la textura, quienes son

los principales agentes de la capacidad amortiguadora de los suelos. El factor correspondiente puede leerse en la siguiente tabla:

Textura <sup>1)</sup>	M.O.	pH <sup>2)</sup>	<3	4	5	6	7>
A, AC, CA	<2%	0.15	0.20	0.40	0.70	0.85	1.00
	2-4%	0.10	0.15	0.35	0.60	0.80	1.00
	>4%	0.05	0.10	0.30	0.50	0.75	1.00
CL, C, CRL, CRA, RA	<2%	0.15	0.25	0.45	0.75	0.85	1.00
	2-4%	0.12	0.20	0.40	0.70	0.80	1.00
	>4%	0.10	0.15	0.35	0.60	0.75	1.00
CR, RL, R	<4%	0.20	0.30	0.50	0.75	0.85	1.00
	4-8%	0.15	0.25	0.45	0.70	0.80	1.00
	>8%	0.10	0.20	0.40	0.60	0.75	1.00

<sup>1)</sup> Claves de texturas de la pág 15

<sup>2)</sup> en CaCl<sub>2</sub> 0.01 M

La transformación de meq/kg (unidad de masa) a eq/m<sup>2</sup> en el espacio radicular efectivo (unidad de volumen) se hace multiplicando por la densidad aparente, el factor (100 - % piedras)/100) el espesor en dm de cada horizonte y el factor 0.1 para obtener eq/m<sup>2</sup>:

$$BI [eq/m^2] = BI [meq/kg] \times d.a. [g/cm^3] \times (100 - \% \text{ piedras}/100) \times \text{espesor [dm]} \times 0.1$$

donde: BI = bases intercambiables y d.a. = densidad aparente

Ya que en los horizontes superficiales generalmente la densidad de raíces es mayor que en los horizontes profundos, las plantas por lo tanto se abastecen principalmente de los primeros. los horizontes superficiales son multiplicados por el factor 1, mientras que los subsuperficiales se multiplican por 0.5 (el factor también puede derivarse de la densidad de raíces observada en el perfil). La evaluación se realiza para el espacio radicular efectivo, por lo que se suman los valores hasta la profundidad correspondiente a este último.

La evaluación se hace según la siguiente tabla:

Bases intercambiables (eq/m <sup>2</sup> )	<5	10	25	50	100	200>
evaluación	muy baja	baja	regular	mediana	mediana alta	muy alta
				mente alta		

### Abastecimiento de nitrógeno

La reserva de nitrógeno puede estimarse a partir del contenido de materia orgánica, que es casi la única fuente de N en el suelo, y la clase de mantillo (tipos de humus) que presente el suelo, la cual implica diferencias en la relación C/N.

Para la estimación, primeramente deberá calcularse la cantidad de humus presente en un m<sup>2</sup> de suelo dentro del espacio radicular efectivo, lo cual se hace al multiplicar el contenido de materia orgánica en porcentaje por la densidad aparente (d.a. en g/cm<sup>3</sup> = kg/dm<sup>3</sup>) por el factor corrector de piedras (100-%piedras/100) y por el espesor del horizonte en dm:

$$\text{Cantidad de humus [kg/m}^2] = \% \text{m.o.} \times d.a. [kg/dm^3] \times (100 - \% \text{ piedras}/100) \times \text{espesor [dm]}$$

Después se calcula la reserva y la disponibilidad de nitrógeno por medio de la siguiente tabla:

tipo de mantillo <sup>1)</sup>	N <sub>t</sub> [kg/m <sup>2</sup> ]	N <sub>d</sub> [g/m <sup>2</sup> ]
mull (C/N = 10:1):	= humus (kg/m <sup>2</sup> ) x 0.050	= humus (kg/m <sup>2</sup> ) x 0.25
moder (C/N = 20:1):	" x 0.025	" x 0.08
mor (C/N = 30:1):	" x 0.015	" x 0.03

<sup>1)</sup> ver pág 30

Evaluación de la reserva de nitrógeno:

N <sub>t</sub> (kg/m <sup>2</sup> )	<0.25	0.50	1>
Evaluación	baja	mediana	alta muy alta

## 7. Evaluación de la capacidad filtro y amortiguadora

Los suelos poseen la capacidad de filtrar y amortiguar el efecto de sustancias contaminantes que se encuentran suspendidas o disueltas en la solución del suelo. De esta manera se evita que dichas sustancias sean absorbidas por las plantas, o que tengan algún efecto negativo sobre la actividad de la biota y el desarrollo de las raíces, como también que sean translocadas a los acuíferos o cuerpos de agua cercanos. La filtración puede ser puramente mecánica en el sistema poroso de los suelos. También puede ser fisicoquímica, si las sustancias son adsorbidas sobre las superficies activas de las partículas más finas del suelo (principalmente arcilla y humus), o química si se forman precipitados insolubles en agua. La filtración fisicoquímica y química de un suelo también se conoce como capacidad de amortiguamiento. Las suspensiones pueden diferenciarse, según el tamaño de las partículas que las conforman, en suspensiones dispersas gruesas (diámetro > 100 nm), suspensiones coloidales (diámetro 1 - 100 nm) y suspensiones moleculares o soluciones verdaderas.

La filtración de partículas suspendidas gruesas sólo puede efectuarse en poros equivalentemente gruesos, que garanticen la retención y a la vez impidan la removilización de las partículas. Suelos con una alta capacidad filtro para partículas suspendidas gruesas son, por lo tanto, aquellos que poseen una gran proporción de poros de diámetros entre 100 y 1 m. La estimación del porcentaje en volumen de dichos poros en un suelo puede basarse a manera de primera aproximación en la suma de su capacidad de agua disponible (dCC) y la tercera parte de su capacidad de aireación (CA) (Blume, 1990). La estimación de éstas, a partir de datos de campo, se describió en capítulos anteriores (pág. 34). La capacidad filtro se estima considerando los primeros 3 dm del suelo, ya que éstos representan el principal espacio radicular y en ellos se desarrollan la mayor parte de los organismos edáficos. Su evaluación se presenta en la siguiente tabla (Blume, 1990):

dCC + 1/3 CA [Vol%]	<15	15-20	20-25	25-30	30-40	>40
Evaluación	Muy baja	Baja	Media	Alta	Muy alta	Extremadamente alta

La capacidad amortiguadora de partículas coloidales o moléculas en solución de un suelo por adsorción sobre las superficies activas de sus partículas finas puede evaluarse de manera general, a través de la determinación de la superficie total de los mismos (ST). Esta puede determinarse en el laboratorio o bien estimarse a partir de las superficies específicas (SE) de las partículas finas (arcilla y humus) que lo componen y que se presentan en la siguiente tabla (Blume, 1990):

	Caolinita	Ilita	Smectita	Alofano	Compuestos húmicos
Superficie específica (SE) [m <sup>2</sup> /g]	30	130	700	900	800-1000

La ST puede calcularse considerando la SE del tipo de arcilla dominante en el suelo a evaluar (el cual puede deducirse a partir del material parental, ver tabla en la pág. 40), y la estimación del contenido de arcilla (R, prueba al tacto, pág. 14) y de materia orgánica (MO, pág. 19), las cuales al multiplicarse por la densidad aparente, se relacionan con el volumen del suelo; la superficie total (ST) en [m<sup>2</sup>/cm<sup>3</sup>] se obtiene según la siguiente fórmula:

$$ST [m^2/cm^3] = ((\%R/100 \times SE \text{ (arcilla dominante)}) [g/m^2]) + (\% MO \cdot 900 [g/m^2]) \times d.a. [g/cm^3]$$

La evaluación general de la capacidad amortiguadora de un suelo se presenta en la siguiente tabla (Blume, 1990):

Superficie total (ST) [m <sup>2</sup> /cm <sup>3</sup> ]	<10	10-50	50-100	100-200	200-300	>300
Evaluación	muy baja	baja	media	alta	muy alta	extremadamente alta

El volumen de poros medios y gruesos (dCC + 1/3 CA) y la superficie total permiten evaluar la capacidad filtro y amortiguadora de los suelos en forma muy general. Ya que los diversos contaminantes tienen un comportamiento específico en los suelos, distintas características edáficas son responsables de realizar el amortiguamiento de cada uno de ellos. A continuación se presenta, a manera de ejemplo, la evaluación de la capacidad de los suelos de amortiguar una contaminación por diversos metales pesados, introducidos a los suelos a través del riego con aguas negras o la aplicación de lodos residuales o compostas de basura. Las tablas de evaluación fueron tomadas de Blume y Brümmer (1987), quienes las elaboraron a partir de experimentos de laboratorio en condiciones controladas y las calibraron después con experimentos de campo en condiciones diversas.

La movilidad de los metales depende de manera determinante de la acidez del suelo. El valor de pH a partir del cual se registra un incremento notable de la movilidad es diferente para cada metal y se denomina valor pH crítico. Una vez que el suelo muestra un valor pH menor al crítico, la concentración de metales pesados en la solución del suelo dependerá de la inmovilización o retención de los mismos por adsorción sobre compuestos húmicos o arcillas minerales, formación de complejos con la materia orgánica o oclusión en sesquióxidos de hierro y aluminio. Para evaluar una posible afectación de los organismos edáficos y absorción de metales por las plantas se considera la capacidad de retención o inmovilización de metales en los primeros 30 cm del suelo, que es el espacio en el que se desarrollan la mayoría de los organismos y raíces. En ellos se determina el pH con un potenciómetro de campo o con papel indicador (ver pág. 17). Después se lee en la siguiente tabla la fuerza de enlace para cada metal correspondiente al valor de pH determinado para suelos de texturas arenosas:

Metal	pH (CaCl <sub>2</sub> )									
	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
	[Fuerza de enlace] <sup>1)</sup>									
Cd	0	0-1	1	1-2	2	3	3-4	4	4-5	5
Mn	0	1	1-2	2	2	3	3-4	4	4-5	5
Ni	0	1	1-2	2	2	3	3-4	4	4-5	5
Co	0	1	1-2	2	2	3	3-4	4	4-5	5
Zn	0	1	1-2	2	3	3-4	4	4-5	5	5
Al	1	1-2	2	3	4	4-5	5	5	5	5
Cu	1	1-2	2	3	4	4-5	5	5	5	5
Cr(III)	1	1-2	2	3	4	4-5	5	5	5	5
Pb	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
Hg	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
Fe(III)	1-2	2-3	3-4	5	5	5	5	5	5	5

<sup>1)</sup> Ponderación: 0 = ninguna; 1 = muy baja; 2 = baja; 3 = media; 4 = alta; 5 = muy alta

El efecto del contenido de materia orgánica y arcillas minerales sobre la fuerza de enlace para cada metal se considera al sumar al valor obtenido de la tabla anterior, los valores que se presentan en la siguiente tabla, de acuerdo con el contenido de materia orgánica de los primeros 30 cm en el suelo a evaluar (determinado según el nomograma en la pág. 19) y al contenido de arcilla (determinando la textura a través de la prueba del tacto (pág. 14), y leyendo el contenido de arcilla aproximado en el triángulo de texturas (pág. 15)).

	Zn, Mn	Co	Ni	Cd	Al, Cu, Cr(III), Pb, Hg, Fe
<b>Materia orgánica</b>					
0 - 2 %	0	0	0	0	0
2 - 8 %	0	0-1	0-1	0-1	1
8 - 15 %	0-1	0-1	1	1	1-2
>15%	0-1	1	1	1-2	2

	Cd, Ni, Co	Mn, Zn, Cu	Al, Cr(III), Pb, Hg	Fe
<b>textura<sup>1)</sup></b>				
A	0	0	0	0
AC, CA, L	0	0	0-1	0-1
CL, C, CRL, RA	0-1	0-1	0-1	1
PL, CRA, CR	0-1	0-1	1	1-2
R	0-1	1	1-2	2

<sup>1)</sup> Claves de texturas de la pág. 15

**Nota:** En caso de que la materia orgánica del suelo consista predominantemente de material poco humificado (por ejemplo, turbas), los valores deberán disminuirse en un punto.

El efecto de contenidos altos de sequioxidos en los suelos sobre la fuerza de enlace de metales de un suelo puede diagnosticarse a través de la presencia de colores rojizos o café rojizos intensos, al sumar los siguientes valores a los obtenidos a partir de las dos tablas pasadas, en caso de que el color del suelo muestre un matiz menor o igual a 7.5 YR y según el cociente intensidad/pureza:

Metal	Matiz ( 7.5 YR y intensidad/pureza:		
	<1	1 - 1.5	>1.5
Cd, Mn, Ni, Co, Zn	0	0-1	1
Al, Cu	0	1	1-2
Cr(III), Pb, Hg	0	1-2	2

En caso de presentarse exceso de humedad (y respectivamente condiciones anaerobias), y materiales sulfídicos en el suelo, evidentes por colores negros y el desprendimiento de H<sub>2</sub>S al adicionar unas gotas de ácido clorhídrico a 10 % al suelo, los metales Cd, Ni, Co, Zn, Cu, Pb y Fe probablemente se encontrarán precipitados en forma de sulfatos y estarán prácticamente inmóviles. En cambio, en caso de presencia repetida de un exceso de humedad temporal, al igual que en caso de presentarse motas en un suelo, es de esperarse una movilidad alta del Fe y Mn.

La evaluación de la fuerza de enlace de metales pesados por los suelos y, por lo tanto de su capacidad de amortiguar efectos nocivos para los organismos edáficos y la absorción de metales por los cultivos, se realiza con base en la siguiente tabla:

Fuerza de enlace	0	1	2	3	4	5
Evaluación	nula	muy baja	baja	media	alta	muy alta

Nota: la evaluación se refiere a suelos que no han sido contaminados previamente. En caso de tratarse de suelos ya contaminados, su capacidad de amortiguamiento puede ser muy inferior, por lo que deberá establecerse el contenido de metales totales y fácilmente movilizables en el laboratorio. La evaluación tampoco considera posibles efectos antagonísticos y sinérgicos entre metales.

## 8. Ejemplo de una descripción completa de perfil

La descripción referida a continuación pretende ilustrar los métodos descritos en las páginas anteriores.

### A Información acerca de la localidad

- Número del perfil: 12
- Nombre del sitio: Rancho Cuixmala
- Clasificación del suelo:  
FAO: Cambisol Luvi-Crómico  
USDA:
- Fecha de la descripción: 25 de julio de 1994.
- Autor: Patricia Balvanera
- Localización: a 1.5 km de la carretera Manzanillo - Puerto Vallarta, por la entrada principal al Rancho Cuixmala, Mpo. de Chamela, Jal.  
Coordenadas: 36 44 S y 21 32 E.
- Altitud: 55 m
- Forma del terreno:  
posición fisiográfica: ladera convexa, ligeramente inclinada, cerca de la cima  
forma del terreno circundante: ondulado, lomeríos bajos de mesetas disectadas  
microrelieve: ninguno
- Pendiente: moderadamente inclinado (5%); exposición: E.
- Uso del suelo o vegetación: selva baja caducifolia. Altura aprox. del dosel: 10 m. Aparentemente vegetación primaria, ya que no hay indicios de alteraciones recientes expresadas en presencia de especies secundarias.
- Clima. Awg x'; el más cálido de los subhúmedos con sequía intraestival. Precipitación media anual: 782 mm con oscilaciones fuertes (hasta de 2 000 mm). El 80% de las lluvias se presenta en invierno. La temperatura media anual es de 25 C y la diferencia entre verano e invierno es menor de 5 C. La evapotranspiración potencial es de 1283 mm. (Datos provenientes de la estación meteorológica de la Estación de Biología de la UNAM a 32 km de distancia).

### B Información general acerca del suelo

- Material parental: el suelo se desarrolló aparentemente "in situ" a partir de rocas graníticas metamorizadas y saprolitizadas.
- Drenaje natural: clase 2 = bien drenado.
- Condiciones de humedad en el perfil: seco (corte de carretera con exposición E)
- Profundidad al manto freático: desconocida, pero probablemente mayor a 5 m, no influye al perfil.
- Presencia de rocas superficiales: no.
- Evidencia de erosión: no.
- Presencia de sales o soda: ninguna.
- Influencia humana: corte de carretera, en la vegetación no hay indicios.

### C Descripción breve del perfil

Perfil profundo, bien drenado de color café-rojizo oscuro, uniforme en apariencia, especialmente si está húmedo, pedregoso (50%). Desarrollo de estructura débil, con agregados de tamaño medio a fino. Todo el perfil es friable, poroso y permeable. El examen cuidadoso permite reconocer en el horizonte B cámbico a algunos cutanes

quebrados e incipientes. La distribución de raíces es normal con mayor densidad en los primeros 40 cm.

### D Descripción del perfil

Ah	0-13 cm	Color café rojizo en húmedo (7.5 YR 3/4), textura arena franca, contenido medio de materia orgánica (4%), ligeramente ácido (pH 6.0 en agua), estructura subangular en bloques, moderada, fina; pedregosidad de 10%, muchos poros interestriciales finos y medios, densidad alta de raíces, límite claro y uniforme.
Bw	13-40 cm	Color café rojizo en húmedo (7.5 YR 4/4), textura franco-arcillo-arenosa, contenido medio de materia orgánica (2%), ligeramente ácido (pH 6.0 en agua), estructura subangular en bloques, moderada, media a fina, pedregosidad de 50%, muchos poros interestriciales finos, alta densidad de raíces finas, límite claro y uniforme.
BC	40-83 cm	Color rojizo café oscuro en húmedo (5 YR 4/4), textura arcilla arenosa, ligeramente ácido (pH 6.0 en agua), estructura subangular en bloques, moderada, media a fina, con cutanes delgados y quebrados probablemente de arcillas y óxidos de hierro sobre algunos agregados y en algunos poros, pedregosidad de 75%, muchos poros finos interestriciales, densidad media de raíces finas, límite ondulado y abrupto.
Cw	>83 cm	Similar al anterior pero con pedregosidad de 90%, densidad de raíces muy baja.

### E Interpretación de las características del suelo

#### Procesos pedogenéticos dominantes:

El material parental granítico se encuentra saprolitizado, muestra evidencias de intemperismo profundo. Los primeros dos horizontes muestran acumulación de materia orgánica, el tipo de humus es mull. El pH ligeramente ácido pone en evidencia una ligera pérdida de bases por lixiviación y el color rojizo una formación de óxidos de Fe (y probablemente de Al) *in situ*. Los horizontes B tienen texturas más finas que el Cw, producto principalmente de una formación de arcillas minerales *in situ*, pero también de una incipiente iluviación de arcillas en el horizonte BC, la cual se manifiesta en la presencia de cutanes delgados y quebrados sobre algunos agregados y en algunos poros. La clasificación como Cambisol Luvi-Crómico se basó principalmente en el color, la textura y la estructura, al igual que en la presencia de los cutanes incipientes.

#### Características edafológicas ecológicas del sitio:

El suelo tiene una alta conductividad hidráulica y el sitio en general presenta buenas condiciones de drenaje. La alta pedregosidad limita el desarrollo de raíces a profundidad y también restringe la cantidad de nutrientes por m<sup>2</sup>. Otro factor limitativo para el desarrollo de la vegetación es su baja capacidad de agua disponible y de retención de agua. Esto último limita su uso potencial para fines agrícolas a la época de lluvias y, dada la irregularidad de la precipitación durante la misma, condiciona el aseguramiento de buenos rendimientos a la disponibilidad de agua para riego.

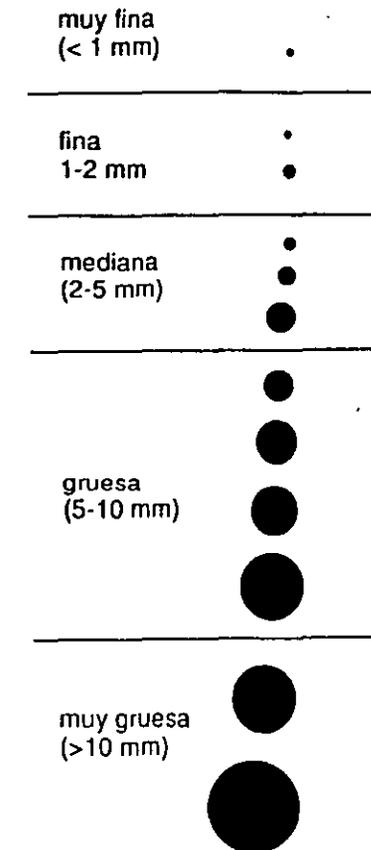




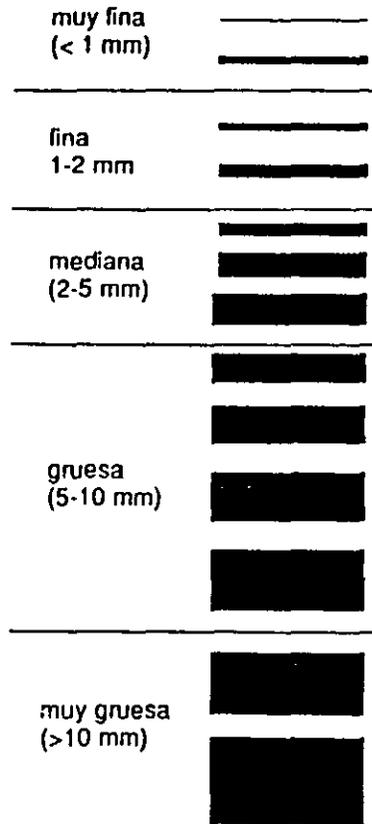
Anexo 3: Láminas comparativas para la estimación del tamaño de la estructura.  
**estructura angular y subangular en bloques**



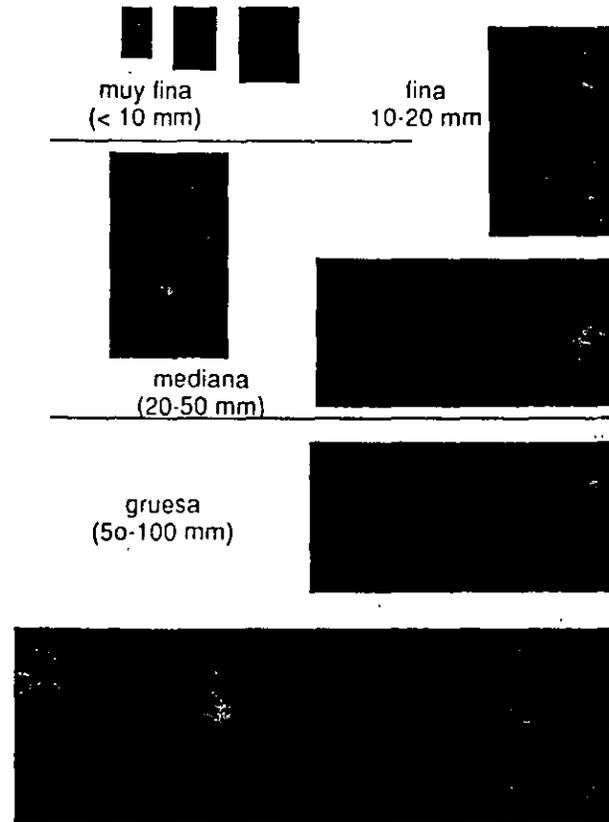
**estructura granular y migajosa**



**estructura laminar**



**estructura prismática y columnar**





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN ANÁLISIS Y DISEÑO DE  
ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO III  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
REFORZADO**

**TEMA  
AGRIETAMIENTOS Y DEFLEXIONES**

**EXPOSITOR: ING. JOSÉ MANUEL SALINAS SANDOVAL  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO DEL 2002**

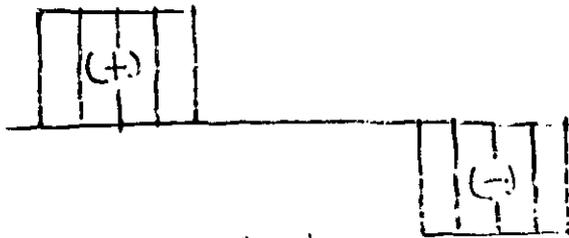
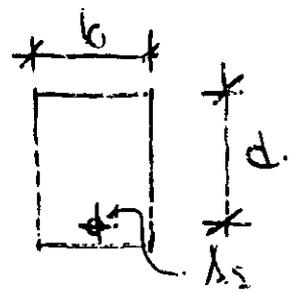
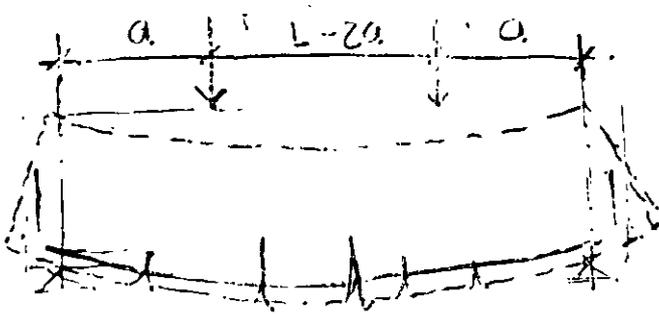


DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES.

$$V = P$$

$$V = -P$$

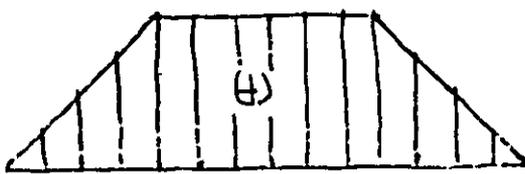


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES

$$M_{max} = Pa$$

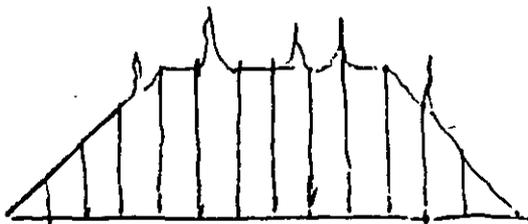
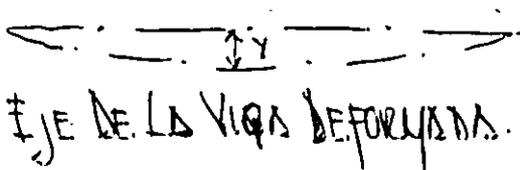


DIAGRAMA DE CURVATURAS

$$\phi = \frac{M}{EI}$$



EJE DE LA VIGA DEFORMADA.

$$\Delta = Y$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{CR} + \Delta_{LD}$$

DEFLEXIONES

- CALCULAR LA MAGNITUD DE LAS DEFLEXIONES.
- CRITERIOS SOBRE LÍMITES ACEPTABLES

PRINCIPALES VARIABLES

- RESISTENCIA A LA TENSION DEL CONCRETO; MÓDULO DE ELASTICIDAD  $E_c$ , PORCENTAJE DE ACERO LONGITUDINAL DE REFZO. POR TENSION, AGREGADO

MEJORA DE CALIDAD

MEJORA DE CALIDAD... SERVICIO DE EXPRESIONES PARA MATERIALES ELASTICOS...

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{u}{EI}$$

$$\Delta_{CR} = y = \int \int \frac{u}{EI}$$

LOS MEJORES DIFEREN FUNDAMENTALMENTE, EN LA FORMA DE CALCULO...

MEJORA DEL  $\Delta_{CI}$

$$E = E_c = 15000 \sqrt{f_c}$$

$$I = I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g$$

$$M_{cr} = f_r (I_g / Y_c)$$

PARA CONCRETO DE RESO NORMAL  $f_r = 2 \sqrt{f_c}$

" " " " LIGERO  $f_r = f_r (f_{cr}/f_c = \sqrt{f_c})$

(CUANDO NO SE ESPECIFICA  $f_{cr}$ ; TODO LIGERO  $f_r = 0.75 f_r$

LIGERO CON ALCENA  $f_r = 0.75 f_r$

EN ELEMENTOS CONTINUOS  $I_e = I_{e\text{primo}}$

A VEZES QUE SE HAGA UN ANALISIS MAS EXACTO

$$\Delta_{LD} = \lambda \cdot \Delta_{CR} \text{ (debida a cargas sistematicas)}$$

$$\lambda = \frac{\sum S}{1 + 50 \phi} ; \phi \text{ AL } \underline{d}$$

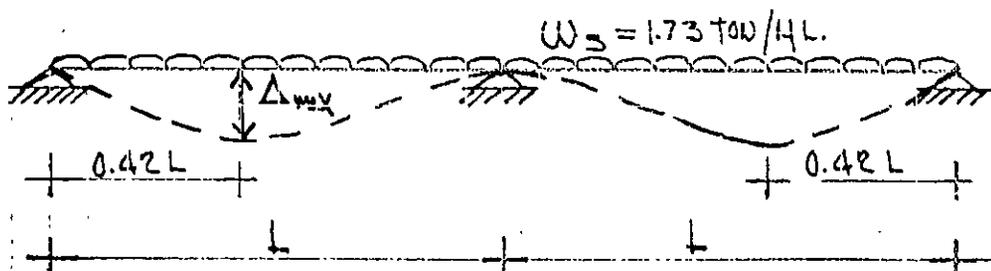
	$\sum S$
5 AÑOS O MAS	2.0
12 MESES	1.4
6 "	1.7
3 "	1.0

PLANO  
PROYECTO  
CONSTRUCCION  
REFERENCIAL

## EJEMPLO # 3

CALCULAR LA DEFLEXION MAXIMA DEL EJEMPLO ANTERIOR Y COMPARARLA CON LAS PERMISIBLES SEGUN CRITERIO A CI-77

LA DEFORMACION INSTANTANEA SE OBTIENE A PARTIR DE EXPRESIONES DERIVADAS SEGUN LA TEORIA ELASTICA (COMPORTAMIENTO ELASTICO-LINEAL)



$$\Delta_{max} = \frac{wL^4}{185EI} \quad (\text{TEORIA ELASTICA})$$

SEGUN A CI-77

$$\Delta_{inst} = \frac{w_s L^4}{185 E_c I_{ef}}$$

$$I_{ef} = \left( \frac{M_{ag}}{M_{max}} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{ag}}{M_{max}} \right)^3 \right] I_{ag} \leq I_g$$

COMO ES UNA VIGA CONTINUA:  $I_{ef} = \frac{I_{ef(-)} + I_{ef(+)}}{2}$

EN EL APOYO:

1. - MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION GRUESA

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 40^3}{12} = 106667 \text{ CM}^4$$

2. - MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION AGRIETADA

$$\text{RELACION MODULAR } n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.1 \times 10^6}{2.6 \times 10^5} = 8.08$$

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} = 15000 \sqrt{300} = 2.6 \times 10^5$$

## 2.2 ESTADOS LIMITE DE SERVICIO

### 2.2.1 ESFUERZOS BAJO CARGAS DE SERVICIO

SE DEBE USAR LAS HIPOTESIS ELASTICAS

SI  $M_{AQ} > M_{ACONCRETE}$  USAR  $I_G$

"  $M_{AQ} < "$  " "  $I_{AQ}$

PARA CALCULAR  $M_{AQ}$  USAR  $f = \begin{cases} 2\sqrt{f_c'} & (\text{CONCRETO CLASE 1}) \\ 1.4\sqrt{f_c'} & (\text{" " " 2}) \end{cases}$

EN CASOS CONTINUOS  $I = (I_1 + I_2 + 2I_3)/4$

DEFLEXIONES DIFERIDAS

$$\Delta_{LD} = X (\Delta_{CD})$$

$$X = 2 / (1 + 50 p')$$
 (CLASE 1)

$$X = 4 / (1 + 50 p')$$
 (" 2)

ELEMENTOS NO CONTINUOS  $p' = A_s' / bd$

" "  $(p' = p_1' + p_2' + 2p_3')/4$

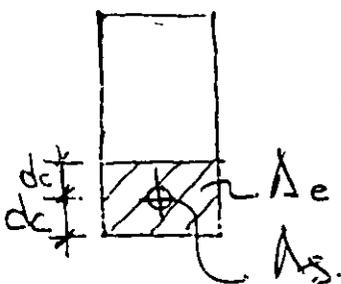
### 2.2.3 AGRIETAMIENTO

CUANDO  $f_y > 3000 \text{ kg/cm}^2$

$$f_s \geq \sqrt[3]{d_c \lambda} \quad (2.38)$$

$$\leq 40000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 4 / 0.9 d \lambda_s$$



$$\lambda = \lambda_e / n$$

$n = \text{núm. de var.}$

AGRIETAMIENTO A.C.T. ( $f_y \geq 3000 \text{ kg/cm}^2$ )

$$f_s = f_s \sqrt[3]{d_c \lambda}$$

$$f_s \leq 31250 \text{ kg/cm}^2 \text{ exposición interna}$$

$$f_s \leq 25895 \text{ " " " externa}$$