



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA MODERNA**

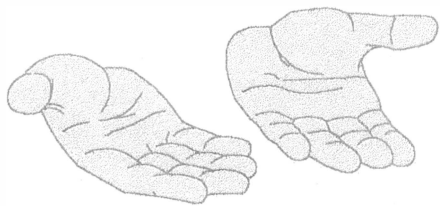
**(NOTAS)**

**ING. ALBERTO SÁNCHEZ MORENO**

# INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA MODERNA

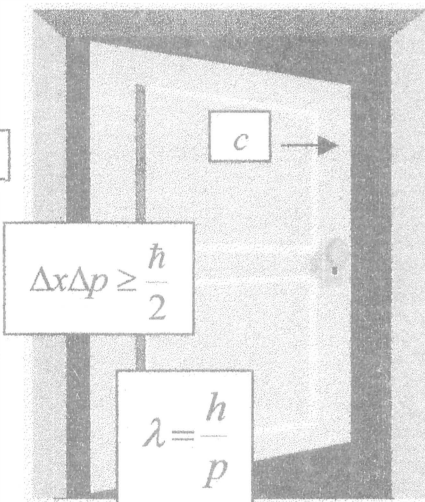
(NOTAS)

# I



$$E = h\nu$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$c \rightarrow$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$



## PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de la obra *Introducción a la física moderna*, vol. I, del profesor Alberto Sánchez Moreno.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo no se hubiera llevado a cabo sin la colaboración de muchas personas que me han ayudado, de una forma u otra, y es indispensable darles las gracias. En particular, al profesor Omar Jaimes Gómez, quien se dio a la tarea de revisar el manuscrito y dar muchas sugerencias valiosas para mejorarlo, además de ser un factor de motivación fundamental para que me embarcara en este trabajo.

También quisiera agradecer a los profesores Eglantina Jaimes Gómez y Manuel Jaimes Real, quienes realizaron la corrección de estilo de los apuntes.

Un reconocimiento especial al profesor Oscar San Román por revisar la versión final de estos apuntes y quien con sus atentas y detalladas críticas ayudó a que el trabajo tuviera la presentación y el nivel adecuado.

Finalmente quisiera agradecer a la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería y, en particular, al profesor Lanzier Efraín Torres, Jefe del Departamento de Física General y Química por la oportunidad que se me dio para realizar este trabajo.

Alberto Sánchez Moreno  
Ciudad Universitaria, Septiembre de 2000



FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTE  
83-A  
NOTAS  
1  
G.- 612190

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



\*612190\*

## Contenido

G- 612190

### Prólogo

iii

### Capítulo 1

#### Ecuaciones de Maxwell

1.1 Introducción	1
1.2 ¿Qué es el campo electromagnético?	3
1.3 Electromagnetismo	4
1.4 Líneas de fuerza de Faraday	7
1.5 Flujo y circulación del campo vectorial	8
1.6 Ecuaciones de Maxwell para el vacío	10
1.7 Ecuación de onda electromagnética	12
1.8 Potencial eléctrico y magnético	17
1.9 Un problema	20
Problemas propuestos	24
Examen sobre el capítulo	25

### Capítulo 2

#### Teoría Especial de la Relatividad

2.1 Introducción	27
2.2 Antecedentes	27
2.3 Relatividad clásica	28
2.4 Transformaciones de Galileo	29
2.5 Electromagnetismo y relatividad clásica	31
2.6 Experimento de Michelson y Morley	33
2.7 Postulados de la teoría especial de la relatividad	39
2.8 Transformaciones de Lorentz	40
Problemas propuestos	45
Examen sobre el capítulo	46

## Capítulo 3

### Mecánica Relativista

3.1 Introducción	49
3.2 Consecuencias directas de las transformaciones de Lorentz	49
3.3 Transformaciones de velocidades	54
3.4 Dinámica relativista	56
Problemas propuestos	70
Examen sobre el capítulo	72

## Capítulo 4

### Interacción Radiación - Materia

4.1 Introducción	75
4.2 Radiación	75
4.3 Espectros	77
4.4 Radiación de cuerpo negro	79
4.5 Efecto fotoeléctrico	92
4.6 Efecto Compton	99
4.7 Otras evidencias experimentales que confirman la teoría del fotón	104
Problemas propuestos	114
Examen sobre el capítulo	116

## Capítulo 5

### Naturaleza Ondulatoria de la Materia

5.1 Introducción	119
5.2 Hipótesis de De Broglie	120
5.3 Velocidad de onda de De Broglie	121
5.4 Principio de incertidumbre	124
5.5 Deducciones aproximadas del principio de incertidumbre	126
Problemas propuestos	134
Examen sobre el capítulo	135

## Prólogo

Estamos a finales del siglo XX y muy próximos al siglo XXI. Es claro, por lo menos para muchas de las personas que se dedican a la docencia en ciencia básica, que la interdisciplina es fundamental para el desarrollo científico y tecnológico. Las investigaciones en todas las áreas del conocimiento científico progresan con gran rapidez y es difícil encontrar algún profesional, investigador o docente que domine todas y cada una de ellas. Es por este motivo que, si se piensa en un desarrollo adecuado y a corto plazo, debemos tratar, en nuestra tarea docente, de formar alumnos con un panorama general en otras áreas del conocimiento que estén vinculadas con su tarea profesional, pensando en su futura interacción con profesionistas de otras áreas del conocimiento.

En el caso particular de la ingeniería, es necesario que en la formación del alumno se incluya no solamente la física clásica, que ya es tradicional, sino también los conceptos desarrollados en los últimos años, y éste será el objetivo principal del presente trabajo.

La física clásica es base fundamental de la ingeniería; es claro, y lo hacemos ver a cada momento en los cursos de ciencia básica que se imparten. Sin embargo, es palpable que mucha de la tecnología y del conocimiento al que tenemos acceso actualmente tiene mucho que ver con los conceptos desarrollados a finales del siglo pasado y en la primera mitad de este siglo, es decir, con lo que llamamos física moderna. Por lo tanto, tienen fundamental importancia los esfuerzos que se lleven a cabo para incorporar los conceptos de la física moderna a los cursos de ciencia básica en la ingeniería.

El objetivo de este trabajo es tener un primer antecedente en el área de la física moderna para estudiantes de ingeniería, pensando en la posible interacción que éstos tendrán con profesionistas en el área de la física. El trabajo está basado en el estudio y recopilación de los libros introductorios básicos más importantes sobre los temas de física moderna, y en la experiencia docente que se ha adquirido al impartir esta asignatura durante algunos semestres.

El trabajo consta de dos partes, de las cuales ésta es la primera. Esta parte está dividida, a su vez, en cinco capítulos. En el primero de ellos se presenta un repaso de la teoría electromagnética, haciendo énfasis en la ecuación de onda electromagnética, como preámbulo a la teoría especial de la relatividad. Los capítulos 2 y 3 están dedicados al estudio de los postulados de la relatividad especial, así como a sus consecuencias en la mecánica clásica. Finalmente, en los capítulos 4 y 5, se estudian los conceptos que permitieron la construcción de la nueva física denominada mecánica cuántica clásica; se presentan las ideas principales desarrolladas por grandes científicos como Planck, Compton, Einstein, etc.

Ninguno de los capítulos es demasiado profundo en el aspecto matemático, ya que esperamos que éste sea un primer antecedente para todos aquellos que nunca han tenido un curso de física teórica, como podría ser el caso de los alumnos de ingeniería, y no se desea que se pierda interés en los conceptos, por los desarrollos matemáticos complicados, que aunque son muy interesantes, se necesita de un poco de mayor experiencia para disfrutarlos. Sin embargo, se han incluido algunos cálculos explícitos para la mejor comprensión de algunos temas, pero tratando de que la herramienta matemática utilizada sea elemental.

Dado el carácter general de estas notas, es importante complementar cada uno de los capítulos aquí presentados con libros más especializados. Por este motivo, al final de las notas se recomienda una serie de libros sobre los temas tratados.

Al final de cada capítulo se propone un número de problemas, así como un repaso del capítulo puesto a manera de examen; esto con el único propósito de reafirmar lo leído en las notas.

Es obvio que de ninguna manera queremos hacer un libro. Acerca de estos temas se ha escrito mucho y muy bien por gente muy especializada; sólo queremos tener unas notas sobre los conceptos de la física moderna adaptadas al tipo de estudiantes con que cuenta la facultad de ingeniería, tomando en consideración sus antecedentes y preparación en física y matemáticas.

Espero que estos apuntes puedan servir como preámbulo para estudios más profundos y precisos sobre los temas que encierra la física moderna y que sirvan como motivación para el estudio de la ciencia básica.

Alberto Sánchez Moreno

Ciudad Universitaria, Agosto de 2000

# 1

## Ecuaciones de Maxwell

"No vayáis a creer que he sido un pensador profundo o un niño precoz.

Yo tenía una imaginación viva, tan dispuesta a creer en los cuentos de la mil una noches como en la enciclopedia británica. Pero los hechos tenían sobre todo importancia para mí y ello me ha salvado. Yo sabía ponerlos a prueba y comprobar las aseveraciones de los libros ..."

Miguel Faraday

" Cuando traduje a fórmulas matemáticas lo que consideré eran las ideas de Faraday, encontré que, en general, los resultados de los métodos coincidían, de modo que se describían los mismos fenómenos y se deducían las mismas leyes de acción, pero los métodos de Faraday parecían aquellos en que uno comienza con el conjunto y llega a las partes por el análisis, mientras que los métodos matemáticos ordinarios se basan en el principio de comenzar por las partes y construir el conjunto por síntesis "

James Clerk Maxwell



# NOTACIÓN

La notación y constantes físicas utilizadas en este trabajo serán las siguientes:

<p><b>LAS CANTIDADES VECTORIALES SE DENOTAN CON UNA FLECHA SOBRE LA LITERAL Y SU MAGNITUD SIN ELLA</b></p>	<p>Parcial con respecto a las coordenadas cartesianas <math>x, y, o z</math></p>	<p>Constante de Planck</p>
<p>Fuerza Eléctrica <math>F</math></p>	$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \text{ o } \frac{\partial}{\partial z}$	$h = 6.6249 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
<p>Campo Eléctrico <math>\vec{E}</math></p>	<p>Laplaciano en coordenadas cartesianas</p>	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
<p>Campo Magnético <math>B</math></p>	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	<p><b>ESCALARES</b></p>
<p>Velocidad <math>u</math> o <math>v</math> o <math>\vec{V}</math></p>	<p>D'Alambertiano</p>	<p>Potencial eléctrico <math>\Phi</math></p>
<p>Momento lineal <math>\vec{p} = m\vec{v}</math> o <math>\vec{p} = m\vec{u}</math></p>	$\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$	<p>Carga eléctrica <math>q</math></p>
<p>Elemento diferencial de superficie <math>d\vec{S}</math></p>	<p>Integral sobre una superficie cerrada <math>S</math></p> $\oint_S$	<p>Masa de la partícula <math>m</math></p>
<p>Densidad de corriente <math>J</math></p>	<p>Integral sobre la trayectoria cerrada <math>l</math></p> $\oint_l$	<p>Densidad volumétrica de carga <math>\rho</math></p>
<p>Elemento diferencial de línea <math>d\vec{l}</math></p>	<p><b>CONSTANTES FUNDAMENTALES</b></p>	<p>Flujo vectorial eléctrico <math>\Phi_{\vec{E}}</math></p>
<p>Potencial vectorial magnético <math>\vec{A}</math></p>	<p>Permitividad eléctrica para el vacío</p> $\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$	<p>Flujo vectorial magnético <math>\Phi_{\vec{B}}</math></p>
<p><b>LOS VECTORES UNITARIOS SE DENOTAN CON EL SÍMBOLO <math>\hat{\phantom{a}}</math> SOBRE LA LITERAL</b></p>	<p>Permeabilidad magnética</p>	<p>Frecuencia de onda <math>\nu</math></p>
<p>Vector unitario en la dirección <math>r</math> <math>\hat{r}</math></p>	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Teslas} \cdot \text{m}}{A}$	<p>Longitud de onda <math>\lambda</math></p>
<p>Vector unitario en la dirección <math>R</math> <math>\hat{R}</math></p>	<p>Velocidad de la luz</p>	<p>Frecuencia angular <math>\omega = 2\pi\nu</math></p>
<p><b>LOS OPERADORES</b></p>	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$	<p>Energía total <math>E</math></p>
<p>Gradiente de la función <math>\Phi</math> <math>\nabla\Phi</math></p>	<p>Constantes de Stefan - Boltzman</p>	<p>Energía cinética de la partícula <math>E_c</math></p>
<p>Divergencia <math>\nabla \cdot</math></p>	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{Watts}}{m^2 \text{ } ^\circ K}$	<p>Energía cinética del electrón <math>K^-</math></p>
<p>Rotacional <math>\nabla \times</math></p>	<p>Constante de Boltzman</p>	<p>Energía cinética del positrón <math>K^+</math></p>
<p>Parcial con respecto al tiempo <math>\frac{\partial}{\partial t}</math></p>	$K = 1.37 \times 10^{-23} \frac{\text{Joules}}{^\circ K}$	

# Capítulo 1

## ECUACIONES DE MAXWELL

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En 1873 se publicó una obra titulada *TRATADO DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO*; el autor, un escocés llamado James Clerk Maxwell (1831-1879). En este libro se presenta una síntesis de los conocimientos de estos temas y tal vez la más completa, maravillosa y bella teoría del siglo XIX.

Maxwell fue alumno de Faraday y posiblemente el más imaginativo de los físicos del siglo XIX. Formuló matemáticamente la ley de Faraday, generalizó la ley de Ampère y sintetizó los conocimientos de la electricidad y el magnetismo en términos de un conjunto de ecuaciones, conocidas hasta el día de hoy como las *ECUACIONES DE MAXWELL*, ecuaciones que tienen como fondo físico los descubrimientos de Ørsted, Ampère, Faraday y otros científicos que contribuyeron al desarrollo del electromagnetismo. La impresión que causó este trabajo de Maxwell se puede poner de manifiesto con los siguientes ejemplos:

El gran físico vienés Ludwig Boltzmann exclamó al leer las ecuaciones de Maxwell:

*“¿Fue Dios quien trazó estos signos?”*

Por su parte, J.R. Pierce (las Maravillosas ecuaciones de Maxwell) afirmó:

*“Para cualquier persona motivada por aspectos más allá de lo estrictamente práctico, resulta útil entender las ecuaciones de Maxwell, sólo por el bien de su alma”.*

Otra de las implicaciones importantes de las ecuaciones de Maxwell es que predicen que cada uno de los dos campos, eléctrico y magnético, deben satisfacer una ecuación que ¡resultó tener la misma forma matemática que la ecuación de onda! O sea, precisamente el tipo de ecuaciones que describen la propagación de ondas mecánicas, como la que se propaga en una cuerda, en un estanque, en el aire, etc. Esto significa que si en un instante el campo eléctrico tiene un valor determinado en un punto del espacio, en otro instante posterior, en otro punto del espacio, el campo eléctrico adquirirá el mismo valor. Lo mismo ocurre con el campo magnético. Por consiguiente, los campos eléctrico y magnético se propagan en el espacio y como no pueden existir separadamente, el campo electromagnético es el que se propaga realmente.

Maxwell encontró que sus ecuaciones predecían el valor de la velocidad con que se propaga el campo electromagnético: ¡resultó ser igual a la velocidad de la luz! Este resultado se obtiene de una combinación de valores de cantidades de origen eléctrico y magnético:  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ . Maxwell propuso que la onda electromagnética era precisamente una onda de luz, o como él mismo escribió:

*"Esta velocidad es tan similar a la de la luz, que parece que tenemos fuertes razones para concluir que la luz es una perturbación electromagnética en forma de ondas, que se propagan a través del campo electromagnético de acuerdo a las leyes del electromagnetismo."*

De esta manera Maxwell contestó una pregunta pendiente de muchos años atrás: ¿qué es la luz? La respuesta: una onda electromagnética. Una vez publicado el trabajo, la comunidad científica lo recibió con frialdad, esto se debió principalmente a:

- (a) La teoría tenía una presentación matemática muy complicada, que poca gente en su época podía entender.
- (b) La formulación de la teoría, en términos de campos, representa un cambio revolucionario de la interpretación que prevalecía entonces, en términos de acción a distancia de la teoría de Newton.

Lamentablemente para que se entendieran todas las implicaciones de esta teoría hubo que esperar 8 años después de la muerte de Maxwell, cuando se realizó la primera confirmación experimental de ondas electromagnéticas realizada por Heinrich Hertz (1857 - 1894).

El propósito de este capítulo es hacer un repaso general de la teoría electromagnética, ya que fue precisamente la no-invariancia<sup>1</sup> de las ecuaciones fundamentales de esta teoría, ante las transformaciones de Galileo, lo que dio origen a la relatividad especial de Einstein, teoría que representa parte fundamental de la Física moderna que nos proponemos estudiar en estas notas.

Desafortunadamente en este curso elemental carecemos de las matemáticas fundamentales que se necesitan para estudiar a fondo la teoría especial de la relatividad (me refiero a una clase de álgebra conocida como álgebra tensorial) para mostrar que las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell) son invariantes ante las transformaciones<sup>2</sup> que propone la relatividad especial (transformaciones de

---

<sup>1</sup> Invariante significa que las leyes de la física permanecen sin cambio, así por ejemplo, la segunda ley de Newton permanece sin cambio bajo las transformaciones de Galileo, se dice entonces, que la segunda ley de Newton es invariante ante las transformaciones de Galileo, como se mostrará en el siguiente capítulo (ver páginas 27 y 28 de estas notas)

<sup>2</sup> Transformación es una regla o conjunto de reglas matemáticas que nos permiten pasar de un sistema de referencia a otro, por ejemplo:  $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$  es una transformación que nos permite pasar de las coordenadas  $\theta, r$  a las  $x, y$

Lorentz) y no ante las transformaciones clásicas (transformaciones de Galileo), motivo por el cual hubo necesidad de construir la teoría especial de la relatividad. Podemos intentar convencernos de este problema, observando que una de las consecuencias fundamentales de la teoría electromagnética, la ecuación de onda, es invariante ante las transformaciones de Lorentz y no ante las transformaciones de Galileo. Para ello necesitamos dar un repaso a los siguientes conceptos: campo eléctrico, campo magnético, ecuaciones de Maxwell y ecuación de onda.

## 1.2 ¿QUÉ ES EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO?

Primeramente digamos algo de los campos eléctrico y magnético. Esto no es nuevo para nosotros, nuestros concienzudos maestros en algún curso de teoría electromagnética nos han intentado explicar durante horas interminables estos conceptos, y tal vez recordemos más con respeto que con placer estos imponentes procedimientos. Gracias a este pasado trataremos con desdén a cualquiera que se atreva a dudar de dichos conceptos. Pero este sentimiento de orgullosa certidumbre nos abandonaría tal vez de inmediato, si alguien nos preguntara: ¿cómo es en realidad el campo eléctrico y magnético?, ¿cómo puedo imaginar el campo eléctrico y magnético? O de forma más precisa: ¿cómo imagino el campo electromagnético? Y en el caso más interesante de la construcción de una onda electromagnética: ¿cómo son en realidad las ondas electromagnéticas? Las respuestas a todas estas preguntas no son fáciles. Es difícil tener una imagen del campo electromagnético que sea precisa de algún modo. Cuando se empieza a describir el movimiento del campo electromagnético se habla de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , y tal vez alguno de nuestros mejores profesores agitaría los brazos y nos imaginaríamos, posiblemente, que ven líneas serpenteando y un  $\vec{E}$  y un  $\vec{B}$  escritos sobre ellas en alguna forma, y además algunas de las líneas tendrían flechas. Cuando se habla de campos cortando el espacio, se tienen confusiones terribles entre los símbolos que se usan para describir el objeto y los objetos mismos. Realmente no se puede hacer una imagen siquiera parecida a las ondas verdaderas, aunque éstas sean la base de la interpretación. Así que, si tenemos dificultades para formarnos una imagen de los campos y las ondas electromagnéticas, no debemos pensar que es algo poco común.

Para entender la ciencia tenemos que utilizar a su máxima capacidad nuestra imaginación. El grado necesario de imaginación actualmente es mucho mayor que el que se requiere para muchas ideas antiguas. Las ideas modernas son mucho más difíciles de imaginar. Usamos ecuaciones y reglas matemáticas y construimos un montón de imágenes. Cuando se habla del campo electromagnético en el espacio, se piensa en una especie de superposición de todos los diagramas que siempre se han visto dibujados al respecto. No siempre se trata de ver los campos eléctricos y magnéticos, porque a veces se cree que se debería haber formado una imagen con el potencial vectorial y el potencial escalar, puesto que quizá sean ellos las cosas físicamente más significativas que serpentean, sin embargo quien sabe si esto es así.

Así que tal vez nuestra única salida para entender lo anterior, sea el punto de vista matemático; pero ¿qué es el punto de vista matemático? Considerar que hay un vector campo eléctrico y un vector campo magnético en cada punto del espacio; es decir, hay seis números asociados en cada punto. ¿Es posible imaginar seis números asociados en cada punto del espacio? Es muy difícil. ¿Se puede incluso imaginar un número asociado en cada

punto? También es difícil. Podemos pensar, tal vez, en cosas como la temperatura en cada punto del espacio, es decir, hay una frialdad y un calor que varían de un lugar a otro, pero, ¿qué es eso de un número en cada punto?

Así, pues, quizá se debería de preguntar: ¿podemos representar al campo electromagnético por algo parecido a la temperatura o como el desplazamiento de un pedazo de gelatina? Supongamos que empezáramos por imaginar que el mundo está lleno de una gelatina fina y que los campos representarían una distorsión (un estiramiento o una torcedura) de la gelatina. Entonces podríamos visualizar el campo. Después de "ver" cuál sería su aspecto, sacaríamos la gelatina por abstracción. Durante muchos años eso es lo que trataron de hacer Maxwell, Ampère, Faraday y otros, para entender el electromagnetismo. A veces ellos llamaron éter a esa gelatina. Pero resultó que la tentativa de imaginar al campo electromagnético de esa forma, fue incorrecta y la física moderna nos dice por qué. Desafortunadamente estamos limitados a la abstracción, a usar instrumentos para detectar el campo, a usar símbolos matemáticos para describir el campo, etc. Sin embargo, en cierto sentido los campos son reales, porque después de haber terminado de perder el tiempo con las ecuaciones matemáticas, haciendo o no imágenes y dibujos, o tratando o no de visualizar objetos, todavía podemos hacer que los instrumentos detecten las señales del Mariner II, hacer descubrimientos de galaxias a miles de millones de kilómetros de distancia, recibir nuestra señal favorita de radio y así sucesivamente, y esto es maravilloso. Así pues, pese a que no podemos formarnos una imagen precisa de todos estos conceptos, como he tratado de poner en evidencia en los párrafos anteriores, es posible, de alguna manera, manejarlos y obtener el placer de sus aplicaciones.

### 1.3 ELECTROMAGNETISMO

Hagamos, pues, un repaso de los conceptos conocidos de campo eléctrico y campo magnético.

Como sabemos, de la observación experimental, existe la fuerza eléctrica que (como en el caso de la fuerza gravitacional) decrece con el inverso del cuadrado de la distancia que separa las cargas.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.3.1)$$

Esta relación se llama Ley de Coulomb. Pero no es suficientemente precisa cuando las cargas están en movimiento. Cuando esto sucede, las fuerzas eléctricas dependen del movimiento de las cargas en forma complicada. Una parte de la fuerza entre cargas en movimiento se llama fuerza magnética. Es, en realidad, sólo un aspecto de un efecto eléctrico. Esta es la razón por la que se llama electromagnetismo a este tema.

Es un hecho experimental que la fuerza electromagnética, que actúa sobre una partícula cargada, depende únicamente de la posición de la carga, de su velocidad y del valor de dicha carga. Esta fuerza se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (1.3.2)$$

donde  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son lo que llamamos campo eléctrico y campo magnético en el punto donde se encuentra la carga. Algo muy importante es que las fuerzas eléctricas debidas a todas las otras cargas del universo pueden ser resumidas dando solamente estos dos vectores. Los valores dependen del lugar donde se encuentre la carga y pueden variar con el tiempo.

Además, si reemplazamos esta carga por otra, la fuerza sobre la nueva carga será proporcional a ella, en la medida que las otras cargas del universo no hayan cambiado su posición ni su estado de movimiento<sup>3</sup>.

Como sabemos, por medio de la mecánica podemos encontrar la trayectoria del movimiento de una partícula, si conocemos la fuerza que actúa sobre ella. Por tanto, la ecuación (1.3.2) se puede combinar con la ecuación de movimiento para dar

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (1.3.3)$$

y si conocemos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se puede encontrar el movimiento para la partícula cargada.

Uno de los principios fundamentales en esta teoría es el siguiente: supongamos que una distribución de carga se desplaza de una cierta manera produciendo un campo  $\vec{E}_1$  y que otra distribución de carga produce un campo  $\vec{E}_2$ . Si ambos sistemas de carga son considerados en el mismo instante (conservando las mismas posiciones y movimientos que cuando los consideramos separados), el campo producido es la suma

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Este hecho se conoce como **principio de superposición** de los campos y es también aplicable a los campos magnéticos.

Este principio implica que si conocemos la ley según la cual una carga única, moviéndose de manera arbitraria, produce los campos eléctricos y magnéticos, conocemos completamente todas las leyes de la electrodinámica. Si queremos conocer la fuerza que se ejerce sobre una carga  $q_1$ , debemos solamente calcular los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  producidos, por cada una de las cargas  $q_2, q_3, \dots$  y después de sumar los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  producidos por cada una de estas cargas, podremos encontrar los campos totales, y a partir de ellos las fuerzas actuantes sobre la carga  $q_1$ .

<sup>3</sup> En realidad, por supuesto, cada carga produce fuerzas sobre todas las vecinas y puede causar un movimiento de las mismas, y así, en ciertos casos, los campos pueden cambiar si cambiamos la carga dada por otra.

Ahora bien, debemos ampliar el conocimiento que tenemos de los campos eléctricos y magnéticos. Los hemos definido en función de la fuerza que experimenta una carga. Hablaremos ahora de los campos eléctricos y magnéticos en un punto cuando no hay carga en dicho punto. Lo que en realidad se está diciendo es que, como hay fuerzas actuando sobre la carga, quedará "algo" en dicho lugar cuando se retire la carga. Si una carga ubicada en el punto  $(x, y, z)$  en el tiempo  $t$  sufre la acción de una fuerza dada por la ecuación (1.3.2) asociaremos los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  con este punto del espacio, es decir, consideramos  $\vec{E}(x, y, z, t)$  y  $\vec{B}(x, y, z, t)$  como responsables de la fuerza que sufrirá, a un tiempo  $t$ , una carga situada en el punto  $(x, y, z)$ , con la condición de que al ubicar la carga en este punto, la misma no perturbe la posición ni el estado de movimiento de todas las otras cargas responsables de los campos.

Siguiendo esta idea, asociaremos con todo punto  $(x, y, z)$  del espacio dos vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , que pueden cambiar con el tiempo. Los campos eléctricos y magnéticos son ahora considerados como funciones vectoriales de  $x, y, z$  y  $t$ . Como un vector está caracterizado por sus componentes, cada uno de los campos  $\vec{E}(x, y, z, t)$  y  $\vec{B}(x, y, z, t)$  representa tres funciones matemáticas de  $x, y, z$  y  $t$ .

Como  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se pueden definir en todo punto del espacio, tenemos un campo. Un campo es toda cantidad física que toma una cantidad diferente en todo punto del espacio. La temperatura, por ejemplo, es un campo, pero escalar. Otro ejemplo es el campo de velocidades de un fluido en movimiento, el cual es un campo vectorial y la notación en ambos ejemplos es de la misma forma:  $T(x, y, z, t)$  y  $\vec{v}(x, y, z, t)$ .

Una característica importante de los campos electromagnéticos es que, aun cuando son producidos por las cargas de acuerdo a fórmulas muy complicadas, las relaciones entre los valores de los campos en un punto y los valores en un punto vecino son muy simples. Con solamente algunas de estas relaciones presentadas en forma de ecuaciones diferenciales, podemos describir completamente el campo. Y es bajo la forma de tales ecuaciones que las leyes de la electrodinámica se presentan de manera más simple. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell y serán objeto de estudio en las siguientes secciones.

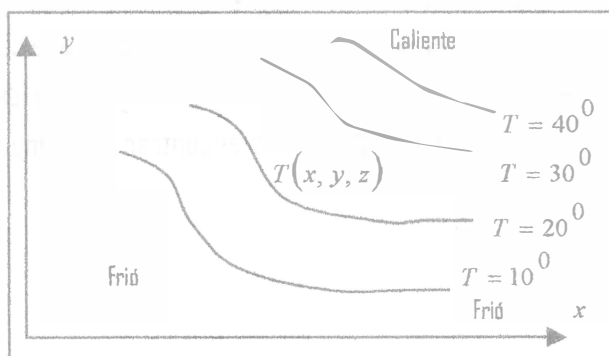


Figura 1.3.1

## 1.4 LÍNEAS DE FUERZA DE FARADAY

Con la finalidad de ayudar a visualizar el comportamiento de los campos, consideraremos simplemente a los campos como funciones matemáticas de la posición y del tiempo. Podremos así tratar de dar una imagen del campo asociando vectores a muchos puntos del espacio, y en forma tal que cada uno de ellos de la intensidad y la dirección en ese punto, como lo muestra la figura 1.4.1

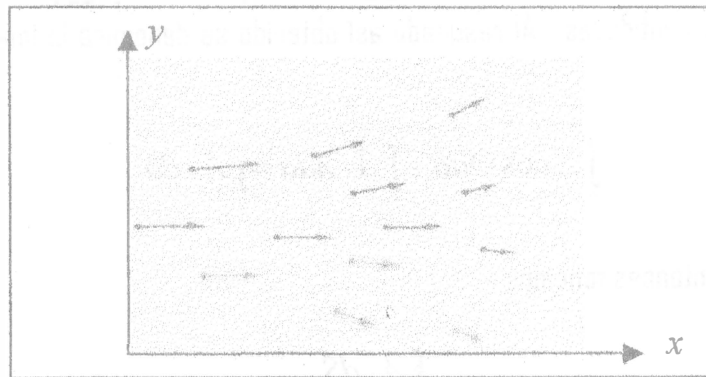


Figura 1.4.1

Podremos también trazar las líneas que en todo punto son tangentes a estos vectores y que siguen las flechas y dan la dirección del campo. Haciendo esto perdemos los módulos de los vectores, pero podremos tener una idea de la intensidad del campo dibujando las líneas más separadas, cuando el campo es débil, y más juntas cuando es fuerte. Se adopta la convención de que el número de líneas por unidad de área perpendicular a las líneas es proporcional a la intensidad del campo, una representación de esta idea se muestra en la figura 1.4.2.

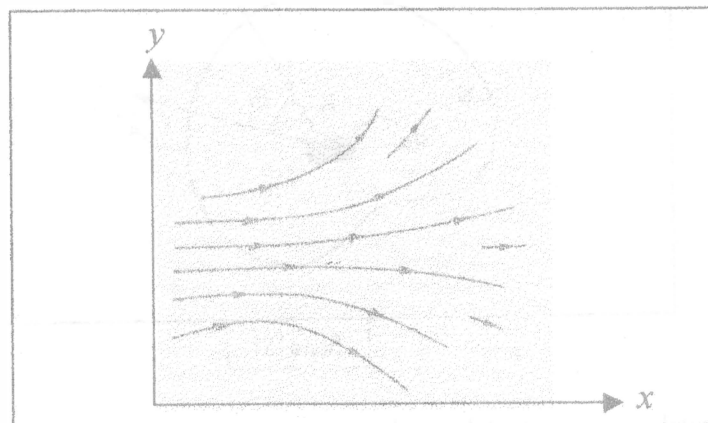


Figura 1.4.2

Estas líneas se conocen como líneas de fuerza de Faraday.



## 1.5 FLUJO Y CIRCULACIÓN DEL CAMPO VECTORIAL

Existen dos propiedades matemáticas importantes de los campos vectoriales que se utilizan en las leyes del electromagnetismo. La primera de ellas se refiere al flujo de campo vectorial a través de una superficie cerrada. Considérese una superficie  $S$ , como lo muestra la figura 1.5.1, se puede dividir a  $S$  en elementos de área  $d\vec{a}$ . Supóngase que existe un campo vectorial  $\vec{A}$  tal que su valor quede definido en todos los puntos de la superficie. Para cada elemento de área se evalúa  $\vec{A}$ , se multiplica su componente en la dirección de  $d\vec{a}$  por la magnitud de  $d\vec{a}$  y se suman todas esas cantidades. Al resultado así obtenido se denomina la integral de superficie de  $\vec{A}$  sobre  $S$ , y está dado por

$$\int_S A \cos \Theta da = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} da = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

Si la superficie es cerrada, entonces tenemos

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Si el campo vectorial es el campo vectorial eléctrico o magnético entonces hablaremos del flujo del campo vectorial eléctrico o magnético a través de la superficie cerrada  $S$

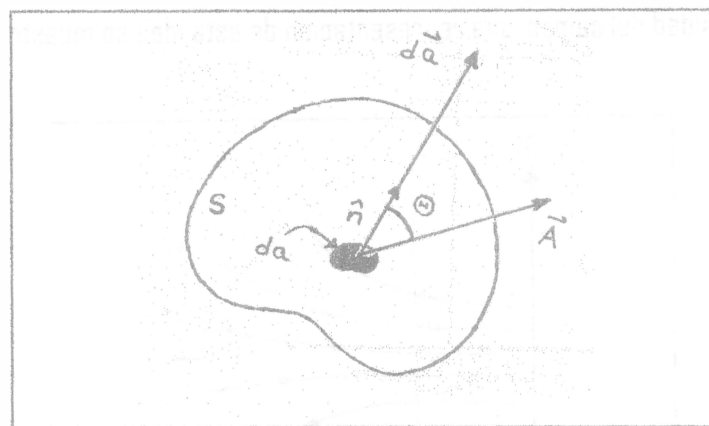


Figura 1.5.1

La segunda propiedad del campo vectorial se relaciona con una línea. Consideremos un punto inicialmente en  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ , que se desplaza hacia una posición final  $P_f(x_f, y_f, z_f)$  siguiendo una línea específica,  $C$ , ("línea" o "trayectoria"), como se muestra en la figura 1.5.2. Todo el recorrido a lo largo de esta trayectoria puede ser considerado como la suma vectorial de una sucesión de desplazamientos infinitesimales  $d\vec{l}$  a lo largo de  $C$ .

Supongamos también que existe un campo vectorial  $\vec{A}$  tal que su valor puede encontrarse para cada punto del recorrido. En cada punto intermedio se evalúa  $\vec{A}$ , se multiplica su componente en la dirección de  $d\vec{l}$  por la magnitud de  $d\vec{l}$  y se suman todas estas cantidades. El resultado así obtenido recibe el nombre de integral de línea de  $\vec{A}$  a lo largo de  $C$ , y está dada por

$$\int_{P_i}^{P_f} A \cos \Theta dl = \int_C A \cos \Theta dl = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

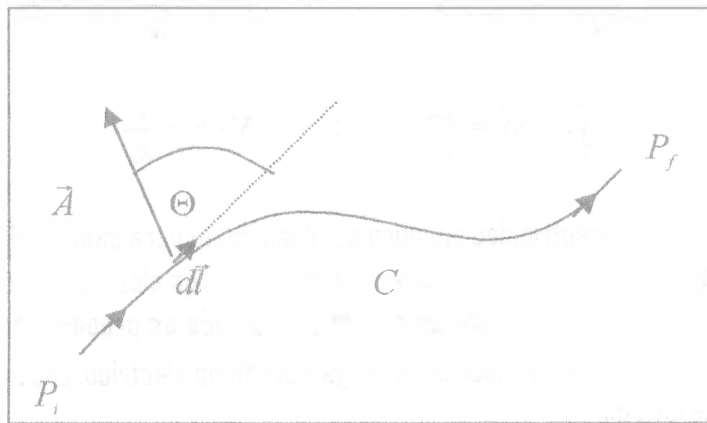


Figura 1.5.2

Si la trayectoria de integración siguiera una curva cerrada, por ejemplo un círculo, los puntos inicial y final coincidirían. En este caso la integral de línea se escribe así:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

y a esta integral se le llama circulación del campo vectorial  $\vec{A}$ . Si el campo vectorial es el campo vectorial eléctrico o magnético tenemos la circulación eléctrica o magnética.

Solamente con estas dos nociones, flujo y circulación, se pueden describir las leyes del electromagnetismo, como lo veremos a continuación.

## 1.6 ECUACIONES DE MAXWELL PARA EL VACÍO

A continuación se presentan las ecuaciones de Maxwell para vacío tanto en palabras como matemáticamente. Es la síntesis hecha por Maxwell de los trabajos de investigación de los fenómenos electromagnéticos hechos por Faraday y otros científicos y que han sido bases fundamentales para la física contemporánea.

(a) La primera de las ecuaciones es la **Ley de Gauss de la electricidad**. Sus expresiones matemáticas en forma diferencial e integral son:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.6.1)$$

La ley de Gauss de la electricidad siempre es válida, tanto para campos dinámicos como estáticos. Nos dice que la divergencia del campo eléctrico  $\vec{E}$  es la densidad de carga eléctrica dividida entre la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  y que el flujo de  $\vec{E}$  a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. En resumen: esta ley nos describe la carga y el campo eléctrico. Los hechos experimentales que llevaron a la deducción de esta ley son:

- (i) Cargas iguales se repelen, cargas desiguales se atraen inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y directamente proporcional al producto de las cargas.
- (ii) Una carga, en un conductor aislado, se mueve hacia su superficie externa.

(b) La segunda de las ecuaciones recibe el nombre de **Ley de Gauss del magnetismo**; su formulación matemática es la siguiente:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.6.2)$$

Nos dice que el flujo del campo magnético  $\vec{B}$ , a través de cualquier superficie cerrada, es siempre cero; este hecho es debido a la no existencia de monopolos magnéticos en la naturaleza.

(c) La tercera de las ecuaciones es la **Ley de Faraday**. Nos describe los efectos magnéticos de campos eléctricos variables. Las relaciones matemáticas que indican esto tienen la siguiente forma:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.6.3)$$

El hecho experimental que la estableció fue observar que un imán de barra que atraviesa una espira cerrada de alambre establecerá una corriente en la espira.

(d) La cuarta ecuación es la **Ley de Ampère con la generalización de Maxwell**. Describe el efecto magnético de campos eléctricos variables y de corrientes. Matemáticamente se expresa como

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.6.4)$$

Hasta los trabajos de Maxwell, esta última ecuación era conocida únicamente en la forma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.6.5)$$

Maxwell fue quien expresó por primera vez estas ecuaciones en forma de ecuaciones diferenciales, tal como se han presentado aquí. Aunque la notación  $\nabla$  no se había inventado, se debe principalmente a Maxwell el que la importancia de las combinaciones de derivadas, que hoy en día se conocen como divergencia y rotacional, se hicieran aparentes por primera vez. Maxwell se dio cuenta de que algo extraño sucedía con la ecuación (1.6.5). Si uno toma la divergencia de esta ecuación, el término del lado izquierdo será cero, porque la divergencia del rotacional siempre es cero, lo que implica que la divergencia del vector densidad de corriente también es cero; pero, si la divergencia de  $\vec{J}$  es cero, el flujo total de corriente que sale de cualquier superficie cerrada también es cero; esto violaría la ley fundamental de que la carga se conserva, porque cualquier flujo de carga debe venir de alguna fuente. Maxwell se dio cuenta de este problema y propuso que se agregara el término  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  al miembro derecho de la ecuación (1.6.5). Así se obtuvo la cuarta ecuación (1.6.4).

El trabajo de Maxwell fue tomado con escepticismo por la comunidad científica, dada la dificultad que se tenía para pensar en campos abstractos, el modelo<sup>4</sup> utilizado para obtenerlas y porque al principio no había justificación experimental. Sin embargo, actualmente sabemos que lo importante son las ecuaciones mismas y no el modelo utilizado para obtenerlas. Sólo se debe preguntar si las ecuaciones son verdaderas o falsas; esto se puede contestar mediante los experimentos y, afortunadamente, un sin número de experimentos han confirmado estas ecuaciones. Maxwell juntó todas las leyes del electromagnetismo e hizo una teoría completa y maravillosa.

<sup>4</sup> Un modelo en el cual el vacío era como un sólido elástico.

## 1.7 ECUACIÓN DE ONDA ELECTROMAGNÉTICA

En la sección anterior estudiamos las ecuaciones de Maxwell para vacío en su forma completa. Todo lo que hay que saber acerca de la teoría clásica de campos eléctricos y magnéticos se puede encontrar en esas cuatro ecuaciones. Lo interesante de esto es que, cuando ponemos todas estas ecuaciones juntas, un nuevo fenómeno sucede: campos producidos por las cargas en movimiento pueden abandonar las fuentes y viajar por el espacio.

En esta sección discutiremos, en forma general, el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos en el espacio vacío, lejos de la fuente; es decir, el comportamiento de los campos en una región donde no hay ni corrientes ni cargas.

La manera como se entendieron las ondas electromagnéticas fue a través del conocimiento de las ondas mecánicas, es por este motivo que antes de estudiar el fenómeno de las ondas electromagnéticas es necesario repasar lo que se entiende por ecuación de onda mecánica.

### 1.7.1 ECUACIÓN DE ONDA MECÁNICA

Construyamos la ecuación matemática que nos describe una onda mecánica. Consideremos una onda en dos dimensiones, como lo muestra la figura 1.7.1.

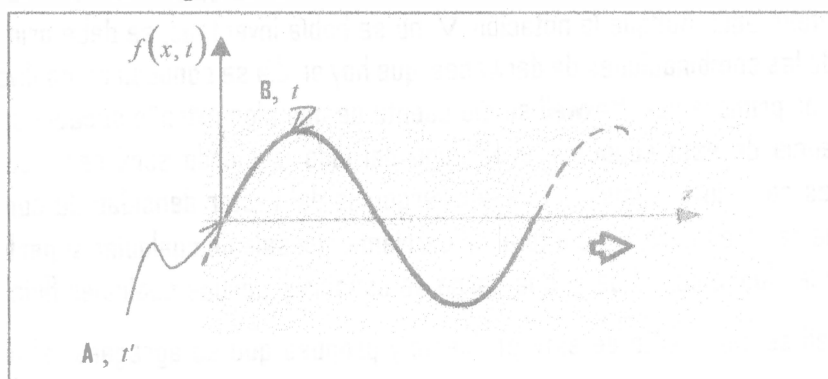


Figura 1.7.1

Propagándose hacia la derecha con velocidad  $u$ . Con  $f = f(x, t)$ , considerando que en el punto **A** se tiene el instante  $t' = t - \frac{x}{u}$ , entonces en **B** tenemos el instante

$$t = t' + \frac{x}{u} \quad (1.7.1)$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena a la función  $f(x,t)$ ; tenemos la relación

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (1.7.1.2)$$

de la ecuación (1.7.1.1) obtenemos

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{u} \quad (1.7.1.3)$$

Sustituyendo la ecuación (1.7.1.3) en la ecuación (1.7.1.2) tenemos

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = u \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \quad (1.7.1.4)$$

si derivamos la ecuación (1.7.1.4) con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \right] = u \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right] = u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right] \frac{\partial x}{\partial t} \quad (1.7.1.5)$$

pero  $\frac{\partial x}{\partial t} = u$ , por tanto la ecuación (1.7.1.5) se transforma en

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

la cual puede tomar la forma final

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.1.6)$$

La ecuación (1.7.1.6) es la ecuación de movimiento de la onda en dos dimensiones de la figura 1.7.1, es decir, es la ecuación que describe una onda propagándose con velocidad  $u$  hacia la derecha del sistema coordenado. Si la onda se propagara hacia la izquierda, la ecuación sería la misma pero con signo  $+$ . La generalización para una onda en tres dimensiones es la relación

$$\nabla^2 f(x, y, z, t) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.1.7)$$

la cual se puede presentar en forma abreviada utilizando el operador de D'Alambert

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

como

$$\square^2 f(x, y, z, t) = 0 \quad (1.7.1.8)$$

Una solución de la ecuación (1.7.1.6) <sup>5</sup> es la función  $f(x, t) = A \text{sen}[k(x - ut)]$ ; si se considera la periodicidad de esta ecuación puede adoptar la forma

$$f(x, t) = A \text{sen}[kx - \omega t] \quad (1.7.1.9)$$

donde  $k$  y  $\omega$  son el número de onda y la frecuencia angular respectivamente y están relacionados con la longitud ( $\lambda$ ) y frecuencia ( $\nu$ ) de onda por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad u = \lambda \nu \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi \nu$$

En general, se puede considerar una constante de fase  $\phi$  en la solución (1.7.1.9), y si esta constante toma el valor  $90^\circ$ , la solución puede tomar la forma

$$f(x, t) = A \text{sen}[kx - \omega t - \phi]$$

$$f(x, t) = A \cos[\omega t - kx] \quad (1.7.1.10)$$

Así, el fenómeno ondulatorio era perfectamente conocido, tanto desde el punto de vista físico como en el de su interpretación matemática, antes del desarrollo de la teoría electromagnética hecha por Maxwell. Podemos concluir que si tenemos un fenómeno ondulatorio, su descripción matemática tiene que estar dada por la ecuación (1.7.1.8), cuyas soluciones son funciones armónicas como el ejemplo bidimensional estudiado, ecuaciones (1.7.1.6) y (1.7.1.9).

<sup>5</sup> Estas soluciones también se pueden representar en términos de funciones coseno.

## 1.7.2 ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Una de las consecuencias más importantes del trabajo de Maxwell es la deducción de las ecuaciones de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio lineal, a partir de las ecuaciones que sintetizan la teoría electromagnética. En seguida se presenta una deducción un tanto informal pero igualmente válida

Consideremos las ecuaciones de Maxwell para vacío y con fuentes

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7.2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7.2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.7.2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.7.2.4)$$

Tomemos el rotacional de la ecuación (1.7.2.2)

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{E}] = -\nabla \times \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

Si consideramos la identidad vectorial  $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$  e intercambiamos el orden de las derivadas con respecto al tiempo y el espacio, obtenemos la relación

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (1.7.2.5)$$

sustituyendo la ecuación (1.7.2.4) en la ecuación (1.7.2.5) tenemos

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Ahora, utilizando la ley de Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  en esta ecuación

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



o bien

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.7.2.6)$$

Si se está en una región libre de cargas, la ecuación (1.7.2.1) toma la forma  $\nabla \vec{E} = 0$ , y si también está libre de corrientes  $\vec{J} = \vec{0}$  o  $\sigma = 0$ ; así que la ecuación (1.7.2.6) tiene la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.2.7)$$

Si ahora utilizamos el hecho experimental encontrado en el electromagnetismo de que  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ , la velocidad de la luz en vacío, denotada con la letra  $c$ . La ecuación (1.7.2.7) toma la forma final

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.2.8)$$

Hemos encontrado que el campo eléctrico lejos de la fuente, obedece a una ecuación de onda. Esta ecuación tiene por solución

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.7.2.9)$$

donde  $\omega$  y  $\vec{k}$  son la frecuencia angular y el número de onda respectivamente. Si procedemos de manera análoga, encontramos que el campo magnético también obedece a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7.2.10)$$

cuya solución es

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.7.2.11)$$

## 1.8 POTENCIAL ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

Uno de los aspectos más importantes dentro de la teoría electromagnética es el concepto de potencial. Este concepto tiene un carácter esencial dentro del electromagnetismo, tanto desde el punto de vista práctico como teórico (cálculo). Recordemos que en el caso eléctrico la función potencial nos permite calcular el campo eléctrico mediante una simple operación diferencial; además, es el potencial eléctrico (voltaje) el más significativo físicamente cuando trabajamos en un laboratorio. El caso magnético también tiene su análogo, conocido como potencial vectorial magnético mediante el cual podemos calcular el campo magnético. En la teoría electromagnética se puede construir un vector donde sus entradas coordenadas son las tres componentes del potencial vectorial magnético y el potencial escalar eléctrico,  $(A_x, A_y, A_z, \Phi)$ , y en términos del cual se puede estudiar esta teoría. A continuación haremos un breve repaso de estos conceptos.

### 1.8.1 POTENCIAL ELÉCTRICO

Consideremos una distribución de carga constituida por  $n$  partículas puntuales de cargas  $q_1, q_2, \dots$ . El campo eléctrico que genera esta distribución está dado por la expresión:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \quad (1.8.1.1)$$

donde  $\vec{R}_i$  es el vector que va de la  $i$ -ésima partícula al punto donde se quiere calcular el campo eléctrico. Calculemos ahora el rotacional a la expresión (1.8.1.1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \nabla \times \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \\ \nabla \times \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left[ \frac{1}{R_i^3} \nabla \times \vec{R}_i + \nabla \left( \frac{1}{R_i^3} \right) \times \vec{R}_i \right] \end{aligned} \quad (1.8.1.2)$$

pero sabemos del cálculo vectorial que  $\nabla \times \vec{R}_i = 0$  y  $\nabla \left( \frac{1}{R_i^3} \right) = -3 \frac{\vec{R}_i}{R_i^5}$ . Sustituyendo estas expresiones en (1.8.1.2)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \frac{1}{R_i^5} \vec{R}_i \times \vec{R}_i \right\} = 0 \quad (1.8.1.3)$$

así que el rotacional de campo vectorial eléctrico es cero. Este mismo procedimiento se lo podemos aplicar a todo campo eléctrico generado por una distribución de carga y el resultado sería el mismo; por tanto, podemos sacar la siguiente conclusión: el campo eléctrico es un campo conservativo y lo podemos escribir como el gradiente de una función escalar  $\Phi$ . El significado físico del potencial eléctrico tiene que ver con el trabajo en llevar una partícula de prueba de carga  $q_0$ , dentro del campo eléctrico, desde un punto de referencia (que regularmente es el infinito) hasta el punto donde queremos calcular el campo.

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad (1.8.14)$$

la función  $\Phi$  recibe el nombre de potencial eléctrico y el signo menos es por conveniencia.

Si ahora se utiliza la ley de Gauss de la electricidad junto con la ecuación (1.8.14), encontraremos una de las ecuaciones más importantes dentro del electromagnetismo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla\Phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \nabla^2\Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

La ecuación (1.8.15) recibe el nombre de ecuación de Poisson, y si la densidad de carga es cero tendremos la ecuación

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1.8.16)$$

que recibe el nombre de ecuación de Laplace.

El potencial escalar  $\Phi$  no queda determinado de forma única. Si hemos determinado  $\Phi$  para algún problema, siempre podemos encontrar otro potencial  $\Phi'$  que es igualmente bueno sumando una constante:

$$\Phi' = \Phi + C \quad (1.8.17)$$

Este nuevo potencial da los mismos campos eléctricos, puesto que el gradiente  $\nabla C$  es cero, esto quiere decir que  $\Phi'$  y  $\Phi$  representan la misma física.

## 1.8.2 POTENCIAL VECTORIAL MAGNÉTICO

Consideremos el hecho experimental de la no existencia de monopolos magnéticos, lo cual se expresa matemáticamente como:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

esto nos indica que podemos considerar la existencia de un campo vectorial, el cual denotaremos con  $\vec{A}$ , tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.8.2.1)$$

ya que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es siempre cero. Esto nos permite expresar las componentes de campo magnético como:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.8.2.2)$$

Análogamente, al potencial escalar eléctrico, podemos tener diferentes potenciales vectoriales  $\vec{A}$ , que den los mismos campos magnéticos. Aquí también, debido a que  $\vec{B}$  se obtiene de  $\vec{A}$  por derivación, sumando una constante a  $\vec{A}$ , no cambia nada físico. Pero hay aún más libertad para  $\vec{A}$ . Se puede sumar a  $\vec{A}$  cualquier campo que sea el gradiente de cierto campo escalar, sin cambiar lo físico. Para demostrar esto supongamos que tenemos un campo vectorial  $\vec{A}$  que da correctamente el campo magnético  $\vec{B}$  para alguna situación real y veamos en qué circunstancias algún otro campo vectorial, digamos  $\vec{A}'$ , dará el mismo campo  $\vec{B}$ , es decir,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times \vec{A}' - \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0$$

Esta relación nos dice que  $\vec{A}' - \vec{A}$  es el gradiente de algún campo escalar, digamos  $\Psi$ , así que

$$\vec{A}' - \vec{A} = \nabla \Psi$$

$\Rightarrow$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla \Psi \quad (1.8.2.3)$$

esto significa que si  $\vec{A}$  es un potencial vectorial satisfactorio para un problema, entonces, para cualquier  $\Psi$  el potencial  $\vec{A}'$  es igualmente satisfactorio y conduce al mismo campo  $\vec{B}$ .

## 1.9 UN PROBLEMA

En la teoría electromagnética es posible tener también la ecuación de onda electromagnética en términos de los potenciales antes mencionados. Se omitirá la deducción de éstas y sólo nos concretaremos a presentarlas, ya que esta representación nos permitirá presentar el problema al que se enfrentó la teoría electromagnética y que dio origen a la teoría especial de la relatividad. Las ecuaciones para las ondas electromagnéticas en términos de los potenciales tienen la forma

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.1)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.2)$$

Ahora bien, el estudio de los fenómenos naturales reveló un principio fundamental en la física. Este principio se conoce como principio de relatividad clásico de Galileo y nos dice que las leyes de la física son independientes de cualquier sistema de referencia inercial, es decir, (como veremos en el siguiente capítulo) las leyes de la física no deben cambiar ante un tipo de transformaciones conocidas como transformaciones de Galileo. Por lo menos esto es lo que se pensaba hasta principios de este siglo. Por tanto, a finales del siglo pasado se presentó el siguiente dilema: si el conjunto de ecuaciones (1.7.2.1)-(1.7.2.4) son las leyes fundamentales que describen los fenómenos electromagnéticos, éstas no deben cambiar<sup>6</sup> ante una transformación de Galileo, es decir, se debe mantener la forma de las mismas. Lamentablemente para demostrar si esto resultó cierto o no, necesitamos matemáticas que están fuera del alcance de estas notas, no obstante, podemos tratar de mostrar esto de una forma alternativa utilizando la ecuación de onda (1.9.2), ya que ésta se obtiene a partir de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell), el estudio debe ser equivalente. Veamos esto:

Consideremos la ecuación (1.9.2) en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.3)$$

Ahora bien, tomemos también las transformaciones de Galileo para dos sistemas de referencia que se mueven uno con respecto a otro en la dirección  $x$  con velocidad  $u$

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

<sup>6</sup> Normalmente se enuncia como: deben ser invariantes.

Si (1.9.3) no cambia bajo la transformación (1.6.4) se debe cumplir

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \quad (1.9.5)$$

Veamos si así ocurre aplicando (1.9.4) a (1.9.3). Dada la transformación tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + u \frac{\partial}{\partial x'} \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

Aplicando (1.9.6) a (1.9.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right) \Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right] - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \end{aligned}$$

Así que la ecuación de onda no mantiene su forma bajo las transformaciones de Galileo! Por lo tanto, los científicos de finales del siglo pasado tenían un serio problema: o las ecuaciones de Maxwell estaban mal o las transformaciones de Galileo tenían algún error. Estudiaremos en el siguiente capítulo que fueron las transformaciones de Galileo las que necesitaban modificación y que ésta llevó a una nueva transformación conocida como transformaciones de Lorentz y que es bajo éstas que las ecuaciones de Maxwell, y por ende la ecuación de onda electromagnética, se mantienen sin cambio.

Como ejercicio verifiquemos que la ecuación de onda (1.9.3) sí permanece sin cambio bajo las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz para dos sistemas inerciales que se mueven uno con respecto a otro en la dirección  $x$  con velocidad  $u$  tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{1.9.7}$$

y su deducción se dará en el próximo capítulo. Aplicando (1.9.7) a (1.9.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma u \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right) \end{aligned} \tag{1.9.8}$$

donde hemos definido

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

si ahora aplicamos (1.9.8) a (1.9.3) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 \left( \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \right)$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \right) \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \right) \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} + \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} - \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{\left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}$ . Por tanto

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2}$$

Como podemos ver, bajo las transformaciones de Lorentz la ecuación de onda electromagnética mantiene su forma. Esto mismo sucederá si aplicamos las transformaciones de Lorentz a las ecuaciones de Maxwell.



## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. - Considere una carga  $q$  distribuida en un anillo de radio  $a$ . Demuestre que un electrón confinado a lo largo del eje del anillo de carga tiene un movimiento armónico simple para oscilaciones pequeñas ( $x \ll a$ ), cuya frecuencia

es 
$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m_e a^3}}.$$

2. - Considere el movimiento de un protón que ingresa en una región donde existe un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{k}$  con una velocidad inicial  $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ .

(a) Describa el movimiento del protón

(b) Considere ahora que en la misma región existe también un campo eléctrico  $\vec{E} = E\hat{k}$ . Muestre que el protón se mueve con un movimiento uniformemente acelerado en la dirección  $z$ .

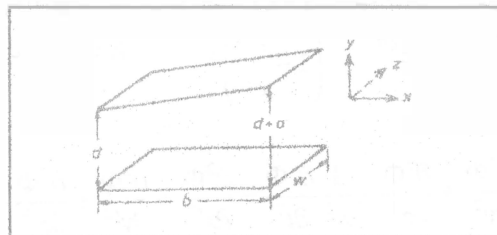
3. - Utilizando las ecuaciones de Maxwell, muestre que éstas conducen a la ecuación de conservación de la carga (ecuación de continuidad).

4. - Utilizando las ecuaciones de Maxwell, deduzca la ecuación (1.4.2.10) escriba su solución y compruébela para el caso de una dimensión espacial, por ejemplo  $x$ .

5. - Se tiene un capacitor de placas planas no paralelas como lo muestra la figura.

(a) Despreciando los efectos de borde y utilizando la ecuación de Laplace en las coordenadas adecuadas, calcule el potencial en todos los puntos que se encuentran entre las placas del capacitor.

(b) Si el espacio entre las placas del capacitor es llenado con un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , calcule la capacitancia del sistema



6. - Considerando la solución de onda plana más simple de las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético en una sola dimensión ( digamos  $x$  ), muestre que a cada instante la razón entre el campo eléctrico y el campo magnético de una onda electromagnética es igual a la velocidad de la luz.

## EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

1.- Para cada una de las siguientes proposiciones elija la opción que contiene la respuesta correcta

1. - El conjunto de ecuaciones que sintetiza la teoría electromagnética recibe el nombre de ( )  
 (a) Ecuaciones de Newton (b) Leyes de continuidad (c) Ecuaciones de Maxwell (d) Ecuaciones electrodinámicas

2. - Una de las implicaciones más importante de la teoría electromagnética es ( )  
 (a) Que la luz es el campo eléctrico y magnético (b) La luz es una partícula  
 (c) Que la luz es una onda mecánica (d) Que la luz es una onda electromagnética

3. - Una de las dificultades para entender la formulación de las ecuaciones de Maxwell fue ( )  
 (a) El desconocimiento de una ecuación de onda (b) Su formulación en términos de campos  
 (c) El valor de la velocidad de la luz (d) No conocer el valor de  $\epsilon_0$

4. - La fuerza electromagnética que actúa sobre una partícula de carga  $q$  en reposo tiene la forma ( )  
 (a)  $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$  (b)  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$  (c)  $\vec{F} = q\vec{E}$  (d)  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

5. - La ecuación de Poisson es ( )  
 (a)  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (b)  $\nabla^2 \Phi = 0$  (c)  $\vec{E} = -\nabla \Phi$  (d)  $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

6. - Si  $\vec{A}$  es un potencial vectorial magnético para un campo magnético  $\vec{B}$ , entonces  $\vec{A}'$  es un potencial vectorial que conduce al mismo campo magnético si ( )  
 (a)  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Psi$  (b)  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \cdot \Psi$  (c)  $\vec{A}' = \vec{A} + C$  (d)  $\vec{A}' = \vec{A} \cdot \nabla \Psi$

7. - Las ecuaciones de Maxwell ( )  
 (a) Son invariantes ante transformaciones de Galileo (b) Son invariantes ante transformaciones de Newton  
 (c) Son invariantes ante transformaciones de Lorentz (d) No cambian bajo transformaciones de Galileo

8. - Las ondas electromagnéticas viajan a través del espacio vacío con la velocidad ( )  
 (a)  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  (b)  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  (c)  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}}$  (d)  $c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

9. - Las magnitudes  $E$  y  $B$  en el espacio vacío se relacionan por medio de la ecuación ( )  
 (a)  $\frac{B}{E} = \frac{1}{c}$  (b)  $\frac{B}{E} = c$  (c)  $\frac{E}{B} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (d)  $\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

10. - Las implicaciones de las ecuaciones de Maxwell fueron entendidas cuando ( )  
 (a) Se realizó la primera confirmación experimental de ondas electromagnéticas  
 (b) Se entendieron los conceptos de rotacional y divergencia  
 (c) Se midió la velocidad de la luz  
 (d) Se aprendió cálculo vectorial

# 2

## Teoría Especial de la Relatividad

"Si se demuestra con éxito mi teoría de la relatividad, Alemania me reclamara como alemán y Francia declarará que soy ciudadano del mundo. Si mi teoría resulta ser falsa, Francia dirá que soy alemán y Alemania declarará que soy judío"

Albert Einstein

"No basta con enseñar a un hombre una especialidad. Aunque esto pueda convertirlo en una especie de máquina útil, no tendrá una personalidad armoniosamente desarrollada. Es esencial que el estudiante adquiera una comprensión de los valores y una profunda afinidad hacia ellos. Debe adquirir un vigoroso sentimiento de lo bello y de lo moralmente bueno. De otro modo, con la especialización de sus conocimientos más parecerá un perro bien adiestrado que una persona armoniosamente desarrollada. Debe aprender a comprender las motivaciones de los seres humanos, sus ilusiones y sus sufrimientos, para lograr una relación adecuada con su prójimo y con la comunidad."

Albert Einstein

# Capítulo 2

## TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

### 2.1 INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX se pensaba que se había llegado a conocer completamente el comportamiento de la Naturaleza. La teoría newtoniana, que había demostrado su validez absoluta durante más de 200 años y principalmente la teoría electromagnética, daba una fehaciente demostración de este pensamiento; sin embargo, un estudio más a fondo de todos estos fenómenos demostró la necesidad de construir una nueva teoría que resolviera las dificultades de las viejas teorías, encontradas a través del estudio más preciso de ellas.

Como sabemos actualmente, hubo necesidad de introducir un factor de corrección en las ecuaciones de Newton, ya que la masa de un cuerpo aumenta con su velocidad, como lo veremos en este capítulo. Además, las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica no parecían cumplir con el principio de relatividad, principio que se verificaba a través de las transformaciones de Galileo. En este capítulo se exponen los principios fundamentales de la teoría especial de la relatividad descubierta por Alberto Einstein en 1905.

### 2.2 ANTECEDENTES

Las ecuaciones de Maxwell establecieron el hecho de que la radiación electromagnética, y en particular la luz, se propagan en forma de ondas, como lo mencionamos en el capítulo anterior. Esto quedó confirmado con los experimentos realizados por Hertz, tiempo después, como ya lo vimos en el capítulo anterior. Sin embargo, estas investigaciones plantearon inmediatamente un nuevo problema. Para la mentalidad newtoniana de los científicos del siglo pasado, no era concebible que una onda se pudiera propagar sin un medio material que le sirviera de soporte. Por tanto, la pregunta que se desprendía automáticamente era: ¿cuál es el medio de soporte de las ondas electromagnéticas? Como, al parecer, no lo había<sup>\*\*</sup>, fue necesario inventarlo. Así hizo su aparición, en Física, el hipotético éter, un medio elástico, imponderable, de enorme rigidez, que llenaba todo el espacio y que no tenía otra función que no fuese la de servir de soporte a las ondas electromagnéticas.

Parecería que, ante tan contundente definición del éter, sería imposible detectarlo experimentalmente, pero en realidad no es así. Un poco de reflexión revela que si el éter existiera, tendría la propiedad de constituir un sistema de coordenadas absoluto, respecto del cual se podría determinar la velocidad de cualquier otro sistema y, por lo tanto, medir "velocidades absolutas".

---

<sup>\*\*</sup> Por ejemplo la luz procedente de las estrellas se propaga en el espacio interestelar, que es esencialmente vacío.

El experimento decisivo para demostrar la existencia del éter fue llevado a cabo por Albert A. Michelson en 1881 y repetido bajo diversas condiciones por Edward W. Morley en 1887, experimento diseñado para medir con gran precisión el movimiento de la Tierra a través del éter, y que describiremos en el presente capítulo; pero adelantaremos que el resultado de este experimento fue nulo, lo que contradecía la hipótesis del éter. Esto creó graves problemas de interpretación, que no se resolvieron satisfactoriamente hasta 1905, cuando Einstein formuló la teoría especial de la relatividad en su famoso trabajo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento"<sup>1</sup>.

## 2.3 RELATIVIDAD CLÁSICA

Todo movimiento debe referirse a algún sistema de referencia, que se escoge de forma tal que sea el más apropiado para describir los fenómenos que en él ocurren. Entre todos los sistemas de referencia, ocupan un lugar muy especial aquellos que poseen una velocidad rectilínea y uniforme, o, más precisamente, aquellos en los cuales no hay fuerzas inerciales<sup>2</sup>. Dichos sistemas se llaman sistemas inerciales de referencia. Una propiedad importante es que es imposible determinar por medio de experimentos mecánicos si un sistema inercial se mueve o no. Esta propiedad es un principio fundamental que Galileo Galilei enunció en el siglo XVII y se conoce como principio de relatividad de Galileo, el cual se enuncia de la siguiente manera:

*Las leyes de la Física son independientes de cualquier sistema inercial de referencia.*

El principio de relatividad de Galileo fue enunciado por Newton en sus corolarios de las leyes de movimiento de la siguiente forma:

*“Los movimientos de cuerpos en un mismo espacio dados son iguales entre sí, si este espacio está en reposo o si se mueve uniformemente sobre una línea recta.”*

Lo anterior significa, por ejemplo, que si un tren se desplaza con velocidad constante, todos los experimentos y fenómenos realizados en él aparecerán iguales a los observados si el tren no está en movimiento<sup>3</sup>. Este es el significado del principio de relatividad clásico o de Galileo. La idea parece bastante sencilla y lo único que se necesita es verificar si realmente es cierta, para ello estudiaremos primero este principio de forma matemática, conocido como las transformaciones de Galileo.

<sup>1</sup> *Annalen der Physik*, 17, p. 891, 1905

<sup>2</sup> Fuerzas ficticias, es decir, fuerzas que no resultan de la interacción con otros cuerpos, un ejemplo sería la fuerza que sentimos que nos arroja hacia delante cuando vamos en un vehículo y éste frena repentinamente.

<sup>3</sup> Suponiendo, claro está, que no se mira fuera del tren.

## 2.4 TRANSFORMACIONES DE GALILEO

Consideremos dos sistemas inerciales de referencia que se mueven uno con respecto a otro con una velocidad constante  $V$  en la dirección  $x$ . Además de un punto  $P$ , el cual ubicaremos desde ambos sistemas coordenados, como se muestra en la figura 2.4.1

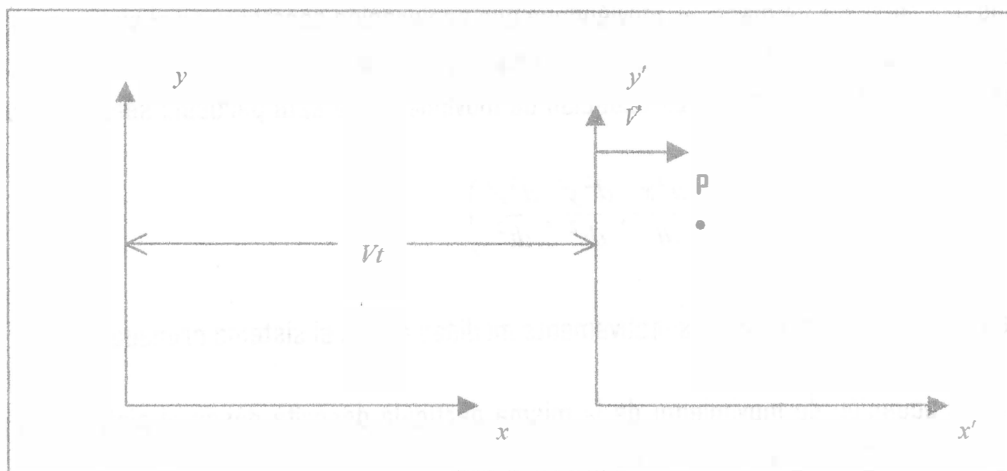


Figura 2.4.1

Ahora supongamos que al tiempo  $t = 0$  los dos sistemas de coordenadas coinciden. Después de un tiempo  $t$ , el origen de sistema primado se ha movido una distancia  $Vt$ . Las coordenadas del punto  $P$ , desde los sistemas no primado y primado son  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$ , respectivamente, y como podemos observar en la figura, estas coordenadas están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \Rightarrow x' = x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Solo faltaría saber cómo se relacionan los tiempos  $t$  y  $t'$  medidos en los dos sistemas. Si un reloj en el sistema no primado y otro en el sistema primado se sincronizan poniendo  $t = t' = 0$  en el momento que los dos sistemas de coordenadas coinciden, nuestro sentido común nos indica que ambos relojes marcarán siempre el mismo tiempo, es decir, el tiempo transcurrirá de la misma forma en cada uno de los sistemas inerciales. Esto nos lleva a proponer que en la teoría clásica el tiempo tiene el carácter de absoluto y por tanto tenemos la relación

$$t = t' \quad (2.4.2)$$

Las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) definen una transformación de coordenadas entre sistemas inerciales que se conocen como **Transformaciones de Galileo** y el principio de relatividad clásico nos dice que las leyes de la física son invariantes, es decir, no cambian de forma, ante estas transformaciones.

Como ejemplo investiguemos si la segunda ley de Newton cumple, con el principio de relatividad.

Consideremos una partícula de masa  $m$  moviéndose con aceleración constante en el sistema primado que se mueve con velocidad  $V$  con respecto al sistema no primado y escogemos los ejes  $x$  y  $x'$  a lo largo de la dirección de movimiento del sistema primado. La ecuación de movimiento de esta partícula será, de acuerdo con las leyes de movimiento de Newton

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}, \frac{d^2z'}{dt^2}\right) \quad (2.4.3)$$

Donde  $F'$  y  $a'$  son la fuerza y la aceleración respectivamente medidas desde el sistema primado.

Veamos ahora la ecuación de movimiento de la misma partícula descrita desde el sistema no primado. Desde el sistema no primado la partícula tiene coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

derivando las ecuaciones (2.4.4) con respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt} + V \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Si derivamos nuevamente las ecuaciones (2.4.5) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y'}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z'}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Por tanto, desde el sistema no primado la ecuación de movimiento tendrá la ecuación

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \quad (2.4.7.)$$

Y utilizando las ecuaciones (2.4.6) se demuestra que  $\vec{F} = \vec{F}'$ , es decir, las leyes de Newton son invariantes ante transformaciones de Galileo, esto quiere decir que las leyes de Newton tienen, las mismas formas en un sistema en movimiento que un sistema estático, y por esta razón es imposible poder decir por medio de experimentos mecánicos si el sistema se está moviendo o no.

Un comentario final sería que la primera ley de Newton, tal y como la conocemos actualmente, que afirma que todos los cuerpos permanecen en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme si no actúan agentes externos sobre ellos, es otra faceta del principio de relatividad de Galileo.

## 2.5 ELECTROMAGNETISMO Y RELATIVIDAD CLÁSICA

En el siglo pasado aumentó el interés en el principio de relatividad como resultado de las investigaciones de la electricidad, el magnetismo y la luz, investigaciones que culminaron, como ya lo hemos mencionado, en las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, las cuales describen la electricidad, el magnetismo y la luz en un único sistema uniforme. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell no parecían obedecer el principio de relatividad clásico. Es decir, si transformamos la ecuaciones de Maxwell por medio de las transformaciones (2.4.1), su forma no queda igual, esto implica que los fenómenos eléctricos y ópticos en un vehículo en movimiento deberían ser diferentes a los mismos en un vehículo en reposo. Se podrían, usar entonces estos fenómenos ópticos para determinar la velocidad del vehículo; en particular se podría determinar la velocidad absoluta del vehículo, efectuando mediciones ópticas y eléctricas adecuadas. Veamos estos con mayor detenimiento.

Una de las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell es que, si existe una perturbación en el campo electromagnético tal que genera luz, estas ondas electromagnéticas se alejan en todas direcciones en la misma forma y con la misma velocidad, cuyo valor es aproximadamente igual a  $c = 300,000 \frac{km}{seg}$ . Supongamos que nos encontramos en un automóvil que se mueve con velocidad  $u$  y que un rayo de luz proveniente de su parte trasera pasa por el automóvil con velocidad  $c$ . Considerando las transformaciones de Galileo

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u \quad (2.5.1)$$

lo que significa que según las transformaciones de Galileo, la velocidad aparente de la luz que pasa, medida en el automóvil es  $c - u$ . Por ejemplo, si el automóvil se mueve con una velocidad de  $200,000 \frac{km}{seg}$ , entonces la luz que



pasa por el automóvil debería desplazarse a  $100,000 \frac{km}{seg}$ . Por tanto, las transformaciones de Galileo nos dicen que midiendo la velocidad de la luz que pasa por el automóvil se puede determinar la velocidad del automóvil. Esto se trató de utilizar en numerosos experimentos sin obtener ningún resultado positivo, así que las ecuaciones de la física estaban fallando en este caso.

Por otra parte, sabemos que el campo magnético actúa sobre una partícula cargada si ésta se encuentra en movimiento. La fuerza ejercida es directamente proporcional a la velocidad y perpendicular a la dirección del movimiento. Ahora bien, consideremos un sistema inercial  $S$  en el que un alambre conductor, por el cual fluye una corriente, se encuentra en reposo<sup>4</sup>. Consideremos, además, una partícula con carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  paralelamente al alambre, como se muestra en la figura 2.5.1. Ahora, en el alambre fluye una corriente eléctrica que según la ley de Ampère<sup>5</sup> genera un campo magnético  $\vec{B}$ . Este campo magnético produce, a su vez, una fuerza  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  sobre la partícula cargada, esta fuerza es perpendicular al alambre y aparta a la partícula de su trayectoria rectilínea.

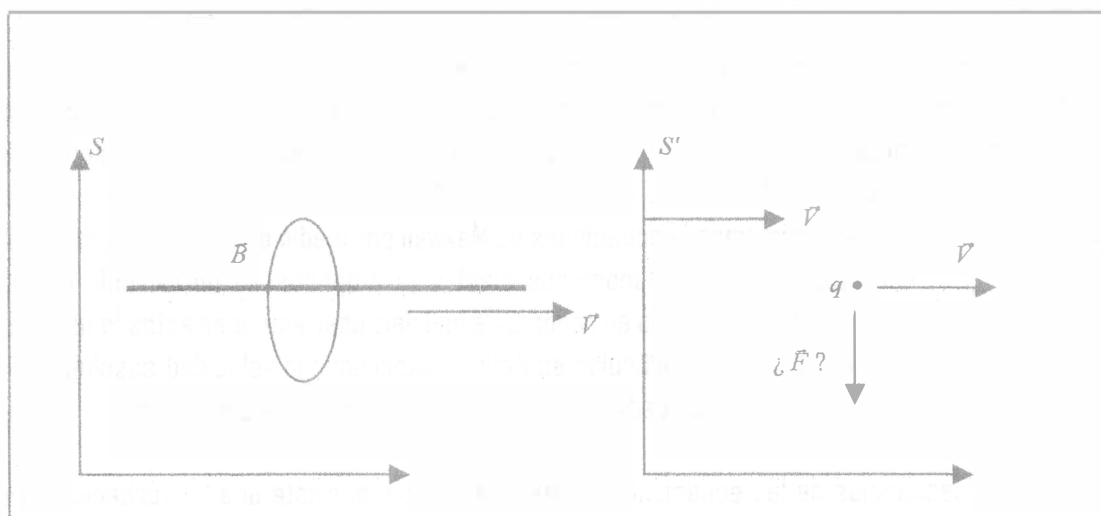


Figura 2.5.1

Veamos ahora el mismo experimento desde un sistema  $S'$  en el que la partícula cargada está en reposo. En este sistema se verá a los electrones del alambre en reposo y a los iones positivos en movimiento, por lo que también habrá una corriente eléctrica que genera un campo magnético. Pero ahora la partícula cargada tiene velocidad cero ( $\vec{v} = \vec{0}$ ), así que el campo magnético no produce ninguna fuerza sobre ella. Entonces aquí tenemos un problema, resulta que la partícula cargada en el sistema  $S$  es desviada de su trayectoria rectilínea, pero no lo es en el sistema  $S'$  y son sistemas inerciales, por lo tanto no cumplen con el principio de relatividad Galileano.

<sup>4</sup> Consideraremos que los iones positivos están fijos y los electrones se mueven con velocidad  $\vec{V}$ .

<sup>5</sup> Otra de las ecuaciones de Maxwell.

Entonces, algo pasaba, o las ecuaciones de Maxwell estaban mal o las transformaciones de Galileo tenían algún error. Lo primero que pensaron los científicos del siglo pasado era que la dificultad debía estar en las nuevas ecuaciones del electromagnetismo<sup>6</sup>, por tanto, había que modificarlas de tal manera que cumplieran con el principio de relatividad de Galileo, es decir, con las transformaciones de Galileo. Cuando se intentó esto, los resultados a los que conducían las transformaciones de Galileo con las nuevas modificaciones eran fenómenos electromagnéticos que nunca se pudieron verificar experimentalmente, así que hubo necesidad de abandonar esta posibilidad.

Sólo quedaba una posibilidad, aceptar que las ecuaciones de Maxwell eran correctas y que la solución al problema había que buscarla en la transformación de coordenadas, es decir, buscar una transformación de coordenadas parecida a la de Galileo, que mantenga invariantes las ecuaciones de Maxwell.

Este problema fue resuelto por H. A. Lorentz al descubrir las transformaciones que llevan su nombre, que dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell, y aunque para Lorentz su descubrimiento era sólo una curiosidad matemática, son la base fundamental de la relatividad especial.

## 2.6 EXPERIMENTO DE MICHELSON Y MORLEY

Como ya hemos mencionado, la teoría Electromagnética tiene la necesidad de postular la existencia del éter como sustento de las ondas electromagnéticas. Más aún, la velocidad de la luz debe de ser constante con respecto al éter en reposo, así que se puede idear algún experimento capaz de determinar la existencia del éter hipotético. El más famoso de estos experimentos fue el ideado por Albert Michelson y Edward Morley en 1887 y que a continuación explicaremos brevemente.

Si la luz tiene una velocidad bien definida con respecto al éter, entonces la velocidad debe variar según el movimiento de quien la mida. Como la Tierra gira alrededor del Sol, como lo muestra la figura 2.6.1, con una velocidad aproximada de 30 kilómetros por segundo, un rayo de luz emitido en el sentido del movimiento de la Tierra debe moverse, con respecto a la Tierra misma, con una velocidad menor que un rayo emitido en la dirección contraria, siendo la diferencia de velocidades entre los dos rayos luminosos de 60 kilómetros por segundo. Si se pudiera medir esta variación de la velocidad se confirmaría indirectamente la existencia del éter, o al menos la de un sistema de referencia absoluto.

Michelson y Morley inventaron un aparato conocido como interferómetro que permite medir distancias y velocidades con enorme precisión utilizando haces de luz en interacción. El experimento consistía en dividir un haz luminoso, por medio de un espejo semitransparente, en dos haces perpendiculares, que se reflejan en espejos para volver a unirse y producir un "patrón de interferencia", como lo muestra la figura 2.6.2. Luego se giraba el

---

<sup>6</sup> En esos tiempos apenas tenían 20 años de haber aparecido.

aparato: cualquier cambio en la velocidad de luz debería producir una interferencia distinta entre los dos haces luminosos que podía detectarse directamente. Veamos esto con mayor detalle.

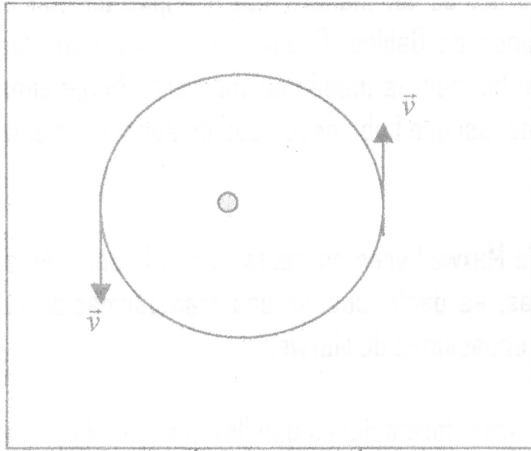


Figura 2.6.1

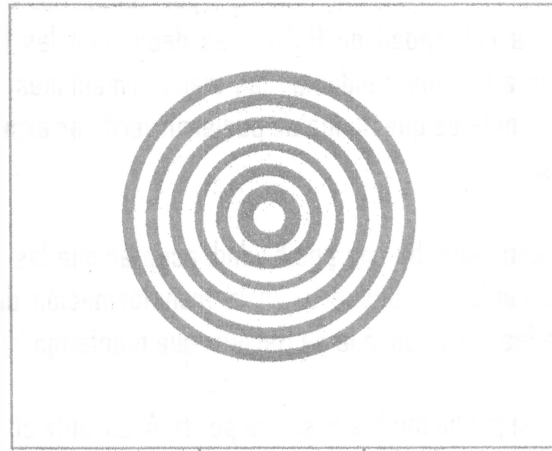


Figura 2.6.2

Para entender el experimento de Michelson y Morley, analicemos primero el siguiente problema cinemático: consideremos dos lanchas, **A** y **B**, en un río. La lancha **A** intentará atravesar directamente el río y regresar al punto de partida y la lancha **B** intentará recorrer, aguas abajo, una distancia **D** y a continuación regresar, como lo muestra la figura 2.6.3, el problema es calcular los tiempos de recorrido para ambas lanchas. La situación se ilustra en la siguiente figura:

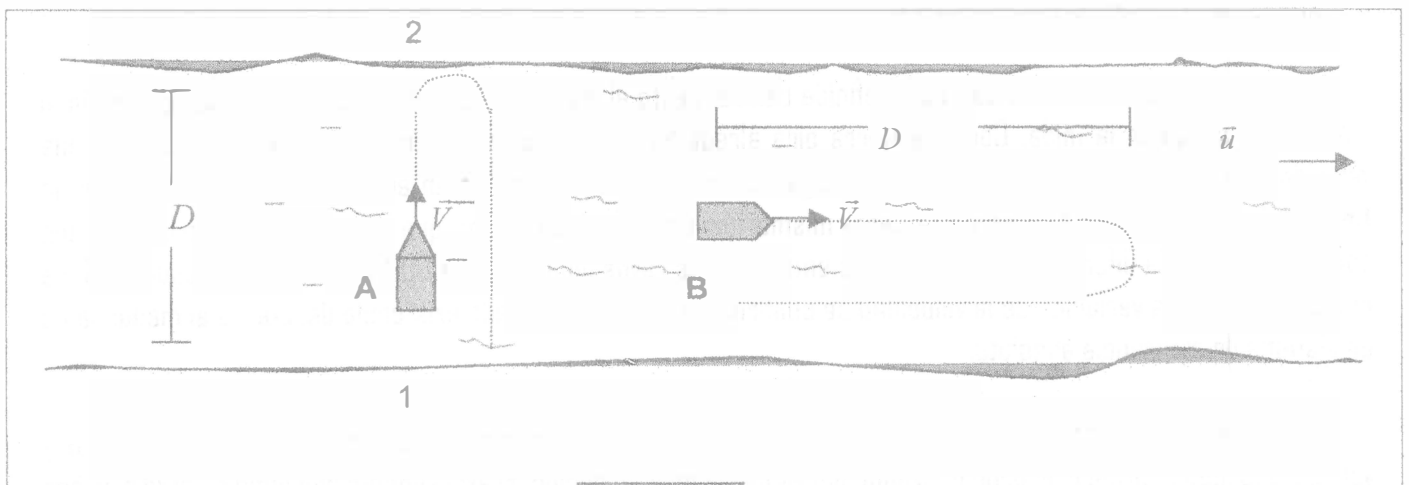


Figura 2.6.3

Donde  $\vec{u}$  es la velocidad de la corriente del río y  $\vec{v}$  la velocidad de las lanchas. Ahora bien, si queremos que la lancha **A** cruce del punto 1 al punto 2 que se encuentra exactamente al otro lado del río, ésta debe enfilar aguas arriba para compensar la corriente del río. El diagrama de velocidades para la lancha **A** se muestra en la figura 2.6.4

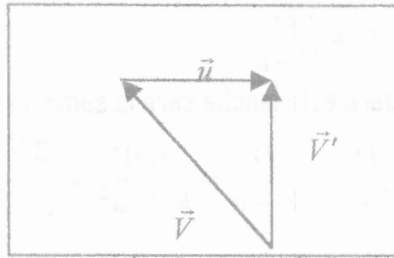


Figura 2.6.4

Calculemos los tiempos de recorrido para ambas lanchas. Para la lancha **A** las velocidades están relacionadas por la ecuación

$$\begin{aligned} V^2 &= V'^2 + u^2 \\ V' &= \sqrt{V^2 - u^2} \\ V' &= V \left[ 1 - \frac{u^2}{V^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Utilizando la relación (2.6.1) podemos calcular el tiempo que le llevó a la lancha **A** pasar al otro lado del río. Este será

$$t_1 = \frac{D}{V'} = \frac{D/V}{\left[ 1 - \frac{u^2}{V^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6.2)$$

que será el mismo ( $t_2$ ) que le llevará al regresar al punto de partida. Por tanto, el tiempo de recorrido para la lancha **A** será

$$T_A = t_1 + t_2 = \frac{2D/V}{\left[ 1 - \frac{u^2}{V^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6.3)$$

Para la lancha **B** tenemos que, cuando va aguas abajo, tomará un tiempo  $t_1$

$$t_1 = \frac{D}{V + u} \quad (2.6.4)$$

y el tiempo de regreso será

$$t_2 = \frac{D}{V - u} \quad (2.6.5)$$

por tanto, el tiempo total de recorrido para esta lancha será la suma de las ecuaciones (2.6.4) y (2.6.5)

$$T_B = \frac{D}{V + u} + \frac{D}{V - u} = \frac{2DV}{V^2 - u^2} = \frac{2D/V}{1 - \frac{u^2}{V^2}} \quad (2.6.6)$$

Si dividimos las ecuaciones (2.6.3) y (2.6.6) obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{V^2}} \quad (2.6.7)$$

Así que, si conocemos la velocidad común  $V$  y se mide la relación  $\frac{T_A}{T_B}$ , podemos conocer la velocidad  $u$  del río.

Michelson y Morley utilizaron una idea parecida a la de las lanchas. Ellos construyeron un aparato llamado interferómetro y cuyo esquema se muestra en la figura 2.6.5.

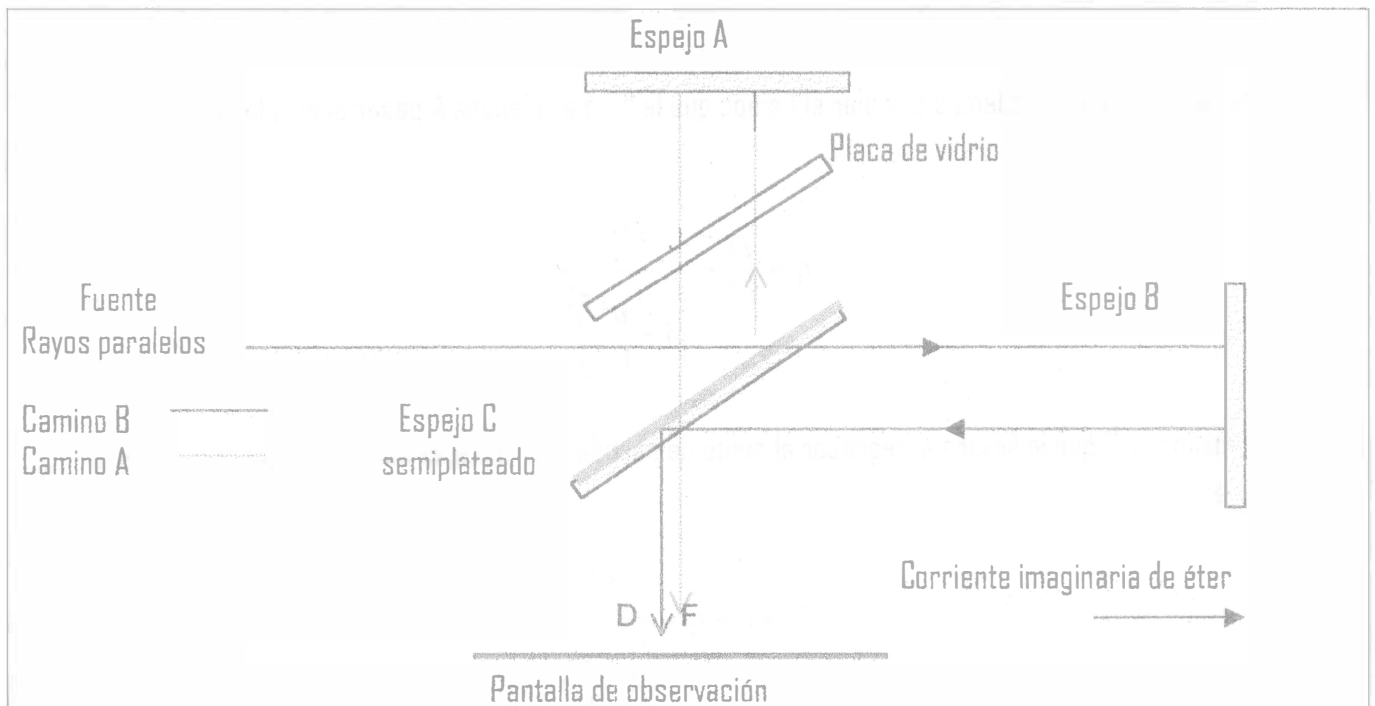


Figura 2.6.5

Este aparato consta esencialmente de una fuente luminosa, una placa de vidrio C parcialmente plateada, dos espejos A y B y una placa de vidrio para compensar la trayectoria de los rayos, todo montado sobre una base rígida. Los espejos están situados a la misma distancia  $L$  de C. La placa C divide el haz de luz incidente en dos haces, los cuales siguen direcciones perpendiculares entre sí hacia los espejos donde se refleja de vuelta hacia C. Al volver a C los dos haces se recombinan, formando los haces superpuestos D y F. Si el tiempo que emplea la luz en recorrer el camino B es el mismo que el tiempo que le lleva recorrer el camino A, entonces los haces D y F que emergen estarán en fase y se reforzarán mutuamente, pero si los dos tiempos difieren ligeramente, los haces estarán ligeramente fuera de fase y se obtendrá interferencia.

La hipótesis esencial en este experimento es que el espacio está lleno de éter, así que, si el aparato está en reposo en el éter, los tiempos deberán ser exactamente iguales, pero como el experimento está siendo llevado a cabo en la Tierra, entonces nos movemos a través del éter con una velocidad, por lo menos, igual a la de la rotación de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, que es de 30 kilómetros por segundo. Así, pues, situados en la Tierra, el éter se mueve con respecto al interferómetro o el aparato se mueve a través del éter. Así que tenemos una manera para demostrar indirectamente la existencia del éter si podemos calcular alguna interferencia. Para el cálculo explícito podemos considerar que en esencia tenemos el mismo problema de las lanchas estudiado anteriormente. El cálculo de los tiempos es análogo y la analogía se puede presentar de la siguiente manera:

Cambiamos rayos luminosos por lanchas, velocidad del éter en lugar de la velocidad del río y la velocidad de la luz en lugar de la velocidad de las lanchas; por tanto se tienen las mismas ecuaciones que para las lanchas. Así que estamos en condiciones de comparar los tiempos empleados por ambos haces de luz. En las ecuaciones (2.6.3) y (2.6.6) los numeradores son iguales y representan el tiempo que se emplearía si el aparato estuviera en reposo. Los denominadores representan las modificaciones en los tiempos causados por el movimiento del aparato y se observa, en la ecuación (2.6.7), que el tiempo  $T_A$  es un poco más pequeño que el tiempo  $T_B$ , a pesar de que los espejos están equidistantes de C; esto implica que los haces de luz no llegaron en fase a la pantalla de observación y habrá una interferencia. Aparecerán en la pantalla de observación franjas de interferencias claras y oscuras como las que se muestran en la figura 2.6.2. Entonces todo lo que se tenía que hacer para tener una evidencia experimental de la existencia del éter era medir esta diferencia con precisión. Para salvar el problema que se tendría al no poder conseguir que las longitudes de las trayectorias de los rayos fueran las mismas<sup>7</sup>, se procede a girar el aparato en  $90^\circ$ , tal que CA esté en la línea de movimiento y CB perpendicular al movimiento. Cualquier pequeña diferencia de la longitud no tiene entonces importancia y lo que se observará es un corrimiento de las franjas de interferencia cuando se gira el aparato. El cálculo explícito sería el siguiente: Calculamos la diferencia de tiempos  $\Delta T$

$$\Delta T = T_B - T_A = \frac{2D/V}{1 - \frac{u^2}{V^2}} - \frac{2D/V}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{V^2}}} \quad (2.6.8)$$

<sup>7</sup> Debemos recordar que una diferencia de fase en los rayos también se puede deber a las diferentes longitudes de trayectorias.

donde  $u = 3 \times 10^4 \frac{m}{s}$  y  $V = c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ , esto nos dice que  $u \ll V$ , así que podemos considerar la siguiente aproximación<sup>8</sup>:

$$\left[1 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{-1} \approx 1 + \frac{u^2}{c^2} \quad (2.6.9)$$

$$\left[1 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \quad (2.6.10)$$

sustituyendo (2.6.9) y (2.6.10) en (2.6.8) tenemos

$$\Delta T = \left(\frac{D}{c}\right) \left(\frac{u^2}{c^2}\right) \quad (2.6.11)$$

la diferencia de recorrido  $d$  correspondiente a esta diferencia de tiempo está dada por la relación

$$d = c\Delta T \quad (2.6.12)$$

Ahora  $d$  corresponde al desplazamiento de  $n$  franjas<sup>9</sup> y es proporcional a la longitud de onda  $\lambda$  de la luz

$$d = n\lambda \quad (2.6.13)$$

igualando (2.6.12) y (2.6.13) tenemos

$$n = \frac{c\Delta T}{\lambda} \quad (2.6.14)$$

sustituyendo (2.6.11) en (2.6.14)

$$n = \frac{Du^2}{\lambda c^2} \quad (2.6.15)$$

Michelson y Morley pudieron obtener una longitud de trayectoria óptica de  $D = 10m$  y utilizaron luz con una longitud de onda  $\lambda = 5 \times 10^{-7}m$ , así que esperaban obtener un desplazamiento de franja de

$$n = \frac{(10m) \left(3 \times 10^4 \frac{m}{s}\right)^2}{(5 \times 10^{-7}m) \left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^2} = 0.2 \text{ de franja}$$

<sup>8</sup> Estamos utilizando la relación  $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots$  si  $x \ll 1$  entonces  $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$

<sup>9</sup> Número de franjas que pasan por el retículo del telescopio de observación o en la pantalla de observación, a medida que el espectro se corre.

Como al girar el interferómetro se produjo una diferencia de tiempo del doble, el desplazamiento total será el doble, es decir, 0.4 de franja.

El aparato ideado por Michelson y Morley tenía la capacidad de detectar corrimientos tan pequeños como 0.01 de franja. Sin embargo, nunca pudieron detectar el corrimiento de franja esperado. Desde entonces se trataron de realizar diferentes experimentos bajo diferentes condiciones intentando rescatar al hipotético éter, pero los resultados siempre fueron negativos, nunca se ha detectado un corrimiento de franja. La conclusión inmediata es que es imposible detectar el movimiento de la tierra a través del éter. No obstante, existe una manera más interesante de interpretar el resultado negativo de este experimento y es concluir simplemente que la velocidad medida de la luz es la misma ( $c$ ) en todas direcciones para todo sistema inercial, pues con esto se obtiene  $n = 0$ . Sin embargo, esto contradice las transformaciones de Galileo y a los científicos de la época les parecía una solución inconcebible. En consecuencia, el terreno estaba listo para que entrara en acción Albert Einstein para dar solución al dilema que afrontaba la Física.

## 2.7 POSTULADOS DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

Los problemas a los que se enfrentaba la física, y que hemos mencionado en las secciones anteriores, fueron resueltos en 1905 por Albert Einstein al formular su teoría especial de la relatividad. Esta teoría se basa en dos postulados:

- a) Principio de relatividad: Las leyes de la física son las mismas en todo sistema inercial de referencia. No existe ningún sistema inercial privilegiado.
- b) La velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor  $c$  en todos los sistemas inerciales.

Estos postulados dan solución inmediata a los diferentes problemas planteados. El primer postulado elimina automáticamente al hipotético éter y a la posibilidad de medir velocidades absolutas; el segundo postulado está apoyado en la evidencia experimental. Estos resultados nos llevan a interesantes resultados y nuevos conceptos que estudiaremos en las secciones siguientes.

La interacción de las partículas materiales se describe, en mecánica clásica, mediante una función de las coordenadas de las partículas que interactúan, llamada también energía potencial. Pero esta manera de describir las interacciones supone una propagación instantánea de las mismas, ya que las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas, debidas a las restantes, en cada instante dependen únicamente de las posiciones de las mismas en este mismo instante. Un cambio en la posición de cualquiera de las partículas repercute inmediatamente sobre las otras partículas. Sin embargo, en realidad, si en uno de los cuerpos en interacción tiene lugar un cambio, éste influirá en otro cuerpo solamente una vez que haya pasado cierto intervalo de tiempo, y tan sólo pasado este tiempo comenzarán a manifestarse en el segundo cuerpo los procesos determinados por el



cambio inicial. Dividiendo la distancia entre dos cuerpos entre dicho intervalo de tiempo obtenemos la velocidad de propagación de la interacción.<sup>10</sup>

Ahora bien, los postulados de la teoría especial de la relatividad nos indican la existencia de una velocidad máxima de propagación, la velocidad de la luz en vacío, ya que es imposible tener en la naturaleza movimientos con una velocidad mayor que ésta. Así que podemos decir que la velocidad de propagación de las interacciones es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia; por tanto, la velocidad de propagación de las interacciones es una constante universal que tiene el valor numérico

$$c = 2.99793 \times 10^{10} \frac{cm}{seg}$$

Que la velocidad de la luz tenga este valor explica por qué la mecánica clásica es una buena aproximación en la mayoría de los casos, ya que las velocidades que se consideran son muy bajas en comparación a la velocidad de la luz; así que suponer que esta última es una velocidad infinita no afecta prácticamente la precisión de los resultados.

La combinación del principio de relatividad junto con la finitud de la velocidad de propagación de las interacciones recibe el nombre de **principio de relatividad de Einstein**, en contraposición al principio de relatividad de Galileo, que se basa en la propagación infinita de las interacciones.

## 2.8 TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En la teoría clásica el concepto de distancia es un concepto relativo, es decir, las relaciones espaciales entre sucesos diferentes dependen del sistema de referencia en que se describen<sup>11</sup>. El tiempo, en cambio, es absoluto. Esto quiere decir que las propiedades del tiempo no dependen del sistema de referencia, el tiempo es único en todos ellos. En general el intervalo de tiempo entre dos sucesos dados debe ser el mismo en todos los sistemas de referencia, sin embargo, esto está en contradicción con el principio de relatividad de Einstein, como ya lo hemos visto al tratar la composición de velocidades clásica, basada en las transformaciones de Galileo, la cual se utilizó en el experimento de Michelson y Morley con los resultados negativos ya estudiados. Además, también se tenía el problema de la incompatibilidad de las ecuaciones de Maxwell con las transformaciones de Galileo. Así que la teoría de la relatividad implica que las transformaciones de Galileo no son válidas y hay que buscar una transformación de coordenadas parecidas a las de Galileo que permitan la invarianza de las Ecuaciones de Maxwell y que permitan interpretar los resultados del experimento de Michelson y Morley. Estas transformaciones de coordenadas fueron descubiertas por H.A. Lorentz a finales del siglo XIX y se conocen con el nombre de

<sup>10</sup> Esta velocidad debería llamarse velocidad de propagación máxima de interacciones. Determina solamente el intervalo de tiempo transcurrido en el cual un cambio que ocurre en un cuerpo comienza a manifestarse en otro.

<sup>11</sup> Transformaciones de Galileo

**transformaciones de Lorentz**, y fue Einstein, siguiendo una sugerencia de Poincaré, quien propuso que todas las leyes de la física debían ser tales que permanecieran invariantes bajo una transformación de Lorentz.

A continuación se presenta una derivación de las transformaciones de Lorentz basada en los postulados de la teoría de la relatividad de Einstein.

Consideremos nuevamente dos sistemas inerciales de referencia que se mueven uno con respecto a otro con una velocidad constante  $V$  en la dirección  $x$

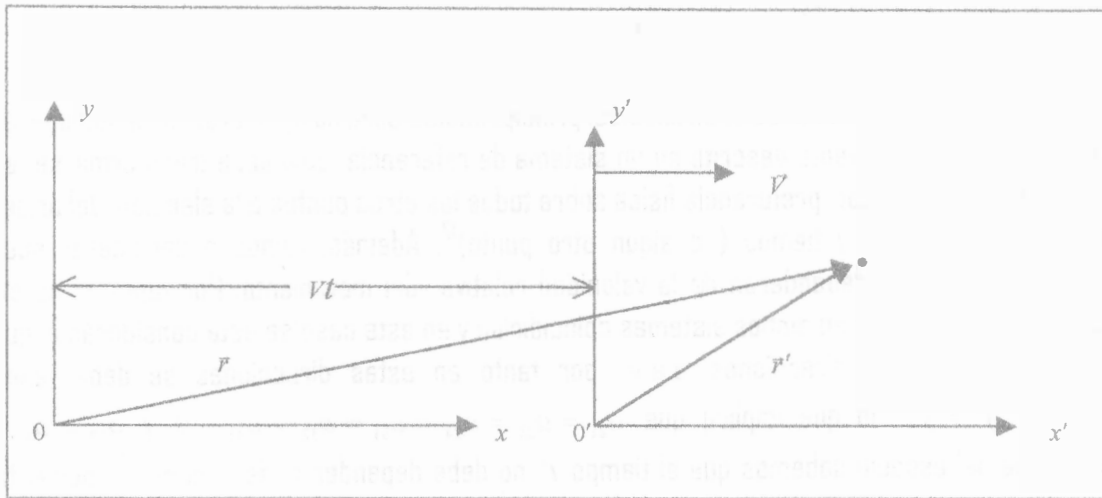


Figura 2.8.1

Consideremos que al tiempo  $t = t' = 0$  ambos sistemas coordenados coinciden y los relojes son perfectos y están sincronizados, además en ese mismo instante se emite un pulso de luz desde el origen común de ambos sistemas coordenados ( $S$  y  $S'$ ), y si el punto  $P$  es el punto hasta el que ha avanzado el haz de luz, el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad nos dice que

$$\begin{aligned} r &= ct \\ r' &= ct' \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

donde estamos aceptando que  $t \neq t'$ , es decir, el tiempo no es absoluto. Elevando al cuadrado y restando el sistema tenemos

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2(t'^2 - t^2) \tag{2.8.2}$$

pero  $y = y'$  y  $z = z'$ , así que tenemos la expresión

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2 \tag{2.8.3}$$

Ahora bien, busquemos ecuaciones que nos relacionen eventos vistos desde un sistema de referencia ( $S$ ) con los mismos eventos vistos desde otro sistema ( $S'$ ) que se mueve con velocidad relativa  $\vec{V}$  con respecto al primero, a esto lo que llamamos una transformación. Para este propósito postulamos que la transformación sea de la forma

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t\end{aligned}\tag{2.8.4}$$

Se propone que las transformaciones sean lineales, principalmente para no apartarse de la homogeneidad del espacio, es decir, para que un evento descrito en un sistema de referencia sólo deba transformarse en un evento en un segundo sistema y no dar preferencia física sobre todos los otros puntos a la elección del origen de nuestras coordenadas de espacio y tiempo (o algún otro punto)<sup>12</sup>. Además, vamos a considerar que los coeficientes de la transformación dependerán de la velocidad relativa del movimiento. Por tanto, si no existe movimiento relativo, las coordenadas en ambos sistemas coincidirían y en este caso se está considerando que no existe movimiento relativo en las direcciones  $z$  e  $y$ , por tanto en estas direcciones se debe tener la transformación  $z' = z, y' = y$ , lo que implica que  $a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$  y  $a_{22} = a_{33} = 1$ . También por la isotropía del espacio sabemos que el tiempo  $t'$  no debe depender ni de  $y$  ni de  $z$ <sup>13</sup>, por lo tanto tenemos que considerar que  $a_{42} = a_{43} = 0$ . Así que las transformaciones (2.8.4) toman la forma

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= a_{41}x + a_{44}t\end{aligned}\tag{2.8.5}$$

Finalmente para  $x' = 0$  se tiene que cumplir  $x = Vt$ , así que  $a_{12} = a_{13} = 0$  y

$$0 = a_{11}Vt + a_{14}t \quad \Rightarrow \quad a_{14} = -a_{11}V$$

<sup>12</sup> Ejemplo: Si la transformación fuera cuadrática, digamos la coordenada  $x' = a_{11}x^2$ , entonces la distancia entre dos puntos en el sistema primado sería  $x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$ . Si ahora consideramos una varilla de longitud unitaria que en el sistema no primado tuviera sus puntos extremos en  $x_2 = 2$  y  $x_1 = 1$ , entonces  $x'_2 - x'_1 = 3a_{11}$ . En cambio, si la misma varilla estuviera en  $x_2 = 5$  y  $x_1 = 4$ , se obtendría  $x'_2 - x'_1 = 9a_{11}$ . Es decir, la medición de la longitud de la varilla depende de su posición en el espacio.

<sup>13</sup> Si esto no fuera así, los relojes colocados simétricamente en el plano  $y - z$  junto al eje  $x$ , parecerían no concordar, vistos desde el sistema primado.

y las transformaciones toman la forma

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= a_{41}x + a_{44}t\end{aligned}\tag{2.8.6}$$

que se pueden poner en la forma

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \alpha(t - \beta x)\end{aligned}\tag{2.8.7}$$

donde hemos definido  $a_{11} = \gamma$ ,  $a_{44} = \alpha$  y  $\frac{a_{41}}{a_{44}} = -\beta$ . Ahora procedemos a calcular  $\gamma, \alpha$  y  $\beta$ . Sustituyendo (2.8.7) en (2.8.3) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\gamma^2 - \alpha^2 \beta^2 c^2 - 1 &= 0 \\ \alpha^2 \beta c^2 - \gamma^2 V &= 0 \\ \gamma^2 V^2 - \alpha^2 c^2 + c^2 &= 0\end{aligned}\tag{2.8.9}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\gamma = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad \beta = \frac{V}{c^2}\tag{2.8.10}$$

Finalmente, sustituyendo (2.8.10) en (2.8.7) tenemos

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{2.8.11}$$

El conjunto de ecuaciones (2.8.11) recibe el nombre de Transformaciones de Lorentz en honor del Físico Holandés H.A. Lorentz. Las transformaciones inversas serían

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
 \end{aligned}
 \tag{2.8.12}$$

Podemos observar inmediatamente que una consecuencia de estas transformaciones es que la velocidad de un sistema de referencia respecto a otro nunca puede ser mayor o igual que la velocidad de la luz en el espacio vacío, porque si así sucediera se perdería el significado físico y el sentido de las ecuaciones<sup>14</sup>. Así que las transformaciones de Lorentz nos llevan a concluir que la velocidad máxima que ocurre en la naturaleza es la velocidad de la luz, y como esta velocidad es muy grande pero finita, también se deduce que en la naturaleza no existe interacción instantánea. Otra consecuencia importante es que las coordenadas espaciales y temporales aparecen mezcladas en las ecuaciones, es decir, tienen propiedades similares, el tiempo tiene carácter coordinado a diferencia de la teoría clásica en la cual el tiempo juega el papel de parámetro en las ecuaciones de movimiento y por tanto no cambia al pasar de un sistema de coordenadas a otro. En otras palabras, en cada sistema inercial de referencia se mide un tiempo diferente del que se mide en otro sistema equivalente.

Un principio fundamental en física se conoce con el nombre de Principio de correspondencia. Este principio fue enunciado en 1923 por el físico Danés Niels Bohr y dice lo siguiente:

Cualquier teoría nueva en física debe reducirse a la bien establecida teoría clásica correspondiente, cuando la nueva teoría se aplica a la situación especial en que la teoría menos general se acepta como válida.

Las transformaciones de Lorentz cumplen con este principio, ya que para los casos en los que consideramos velocidades inferiores a la velocidad de la luz tenemos que  $\gamma \rightarrow 1$  y  $\beta \rightarrow 0$  y las transformaciones de Lorentz se reducen a las transformaciones de Galileo.

Las transformaciones de Lorentz nos indican que tendremos una nueva mecánica. Esta nueva mecánica se estudiará en el siguiente capítulo.

<sup>14</sup> Si  $V > c$  se tendrían números imaginarios, en tanto que deben ser reales, porque son los resultados de mediciones hechas con reglas y relojes y si  $V = c$  tendríamos una división entre cero!

**PROBLEMAS PROPUESTOS**

1. - Muestre que si  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  son las coordenadas del evento en  $S_1$  y del evento correspondiente en  $S_2$ , respectivamente, entonces la expresión:

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - c^2 dt_1^2$$

es invariante bajo una transformación de Lorentz.

2.- Utilizando las transformaciones de Galileo, muestre que el intervalo de tiempo existente entre dos intervalos de tiempo dados  $P$  y  $Q$ , es el mismo para dos observadores inerciales, y que la distancia o intervalo de espacio entre dos puntos,  $A$  y  $B$ , medidos en un instante dado, es el mismo para cada uno de los observadores.

3.- Sobre un tren que se mueve hacia el norte por una vía recta horizontal se monta un cañón. La velocidad de salida de los disparos realizados por el cañón es  $v$ . Si se coloca éste formando un ángulo  $\theta'$  con la dirección de la vía, ¿cuál será la dirección de la trayectoria de un proyectil disparado horizontalmente por el cañón?

4.- Del techo de un coche acelerado pende una pesa mediante un hilo. ¿Cuál será el ángulo de equilibrio de la pesa colgante?

a) De acuerdo con un observador que describe el movimiento respecto a la Tierra.

b) De acuerdo con un observador que se encuentra sentado en el coche.

5.- Se supone que un piloto navega hacia el Este de  $A$  a  $B$  y luego regresa a  $A$  desde el Oeste. La velocidad del avión en el aire es  $u'$  y la velocidad del aire con respecto a la Tierra es  $v$ . La distancia entre  $A$  y  $B$  es  $l$  y la velocidad  $u'$  del avión con respecto al aire es constante.

a) Si el aire está quieto, calcule el tiempo que toma el viaje redondo.

b) Supóngase que la velocidad del aire está en la dirección al Este. Calcule el tiempo para un viaje de ida y vuelta.

c) Suponga que la velocidad del aire está en dirección Norte. Calcule el tiempo para el viaje de ida y vuelta.

## EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

1.- Para cada una de las siguientes proposiciones elija la opción que contiene la respuesta correcta.

1. Los sistemas de referencia inerciales son sistemas en los cuales ( )  
 a) existen fuerzas inerciales      b) se deben utilizar las transformaciones de Galileo  
 c) no existen fuerzas inerciales      d) la segunda ley de Newton es válida

2. - El principio de relatividad de Galileo nos dice que para cualquier sistema inercial de referencia ( )  
 a) la velocidad de la luz es la misma      b) la leyes de la física se transforman  
 c) la velocidad de los sistemas es relativa      d) las leyes de la física no cambian

- 3.- En las transformaciones de Galileo se considera al tiempo como ( )  
 a) relativo a los sistemas inerciales      b) absoluto  
 c) una variable relacionada con las transformaciones      d) una coordenada

- 4.- Uno de los problemas fundamentales que la física clásica no pudo resolver y que dio inicio a una de las partes de la física moderna fue ( )  
 a) la búsqueda del éter      b) que la luz es una onda electromagnética  
 c) la velocidad de la luz      d) la invarianza de las ecuaciones de Maxwell

5. - El experimento de Michelson y Morley da como resultado que ( )  
 a) la física clásica es incorrecta      b) las transformaciones de Galileo son correctas  
 c) la invarianza de la velocidad de la luz para sistemas inerciales      d) la velocidad del éter

6. - Las transformaciones de Lorentz tienen la forma  $x' = \gamma(x - Vt)$  ,  $y' = y$  ,  $z' = z$  ,  $t' = a(t - bx)$  donde  $\gamma$  tiene el valor ( )

a)  $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$       b)  $\gamma = \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$       c)  $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$       d)  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

7. - y  $b$  el valor ( )

a)  $b = \frac{V^2}{c^2}$       b)  $b = \frac{V}{c}$       c)  $b = -\frac{V}{c^2}$       d)  $b = \frac{V}{c^2}$

8. - Si las transformaciones de Lorentz se consideran velocidades inferiores a la velocidad de la luz, recuperamos las transformaciones de Galileo, ya que ( )

- a)  $\gamma \rightarrow 0$  y  $\beta \rightarrow 0$                       b)  $\gamma \rightarrow 1$  y  $\beta \rightarrow 0$   
c)  $\frac{V^2}{c^2} \rightarrow 0$  y  $\beta \rightarrow 0$                       d)  $\gamma \rightarrow 0$  y  $\beta \rightarrow 1$

9.- Se postula que las transformaciones de Lorentz sean lineales para ( )

- a) no apartarse de la isotropía del espacio                      b) no apartarse de la homogeneidad del tiempo  
c) no apartarse de la homogeneidad del espacio                      d) que la velocidad de la luz sea  $c$

10.- El principio de correspondencia nos indica que ( )

- a) la velocidad de la luz es constante  
b) las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales  
c) las transformaciones de Lorentz tienen como caso particular a las transformaciones de Galileo  
d) las transformaciones de Galileo son falsas



# 3

## Mecánica Relativista

"Supongamos que corro a la misma velocidad de la luz. Supongamos que voy cabalgando en un rayo. En tal caso, para mí la luz estaría quieta. ¡Un rayo de luz quieto! ¿Cómo pudiera haber tal cosa?"

Albert Einstein

"Tuve la oportunidad de asistir muchas veces a las conferencias que Lorentz daba periódicamente a un pequeño círculo de jóvenes colegas cuando ya se había retirado de su cátedra. Todo lo que salía de aquella mente superior era tan lúcido y bello como una gran obra de arte y lo exponía con una facilidad y una sencillez que en nadie más he visto"

Albert Einstein

"A partir de entonces, el espacio y el tiempo se han desvanecido por sí mismos en meras sombras y sólo existe por derecho propio una especie de fusión de los dos"

Herman Minkowski

# Capítulo 3

## MECÁNICA RELATIVISTA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

La mecánica que parte del principio de la relatividad de Einstein se llama relativista. En el caso límite en el que las velocidades de los cuerpos en movimiento son pequeñas con respecto a la velocidad de la luz, se puede prescindir del efecto que el carácter finito de la velocidad de propagación de las interacciones tiene sobre el movimiento, y la mecánica relativista se reduce entonces a la mecánica ordinaria basada en la hipótesis de la propagación instantánea llamada mecánica clásica o newtoniana. El paso de la mecánica relativista a la mecánica clásica (principio de correspondencia) se puede conseguir formalmente determinando el límite para  $c \rightarrow \infty$  de las fórmulas de la mecánica relativista.

La dinámica clásica se desarrollo a lo largo de dos trayectoria conceptuales iluminadas por los principios fundamentales de la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía. Y así, encarando la necesidad de reformular la dinámica, Einstein se guió por estos mismos principios para construir la dinámica relativista, lo cual llevó a una de las revelaciones más notables de la teoría especial de la relatividad que es la conclusión de que la masa no es más que una forma de energía. Un trozo de materia, aun si se encuentra en reposo y no interactúa con ninguna otra cosa, tiene "energía en existencia".

En este capítulo se estudiarán las consecuencias de las transformaciones de Lorentz en la cinemática y dinámica clásicas, consecuencias que nos llevan directamente a los conceptos de la mecánica relativista.

### 3.2 CONSECUENCIAS DIRECTAS DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

De las transformaciones de Lorentz se obtienen algunas consecuencias interesantes para las mediciones de longitud y tiempo. Con respecto a la longitud de un cuerpo, se encuentra que ésta es mayor cuando el cuerpo está en reposo, con respecto al observador, que cuando se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  con relación al observador, es decir, su longitud se contrae en la dirección de su movimiento, mientras que no altera sus dimensiones perpendiculares a la dirección del movimiento. Un fenómeno similar sucede con el tiempo, donde se encuentra que un intervalo de tiempo es mayor que cualquier sistema de referencia que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , con respecto a un sistema de referencia en reposo, que en dicho sistema en reposo. Veamos lo dicho anteriormente con mayor detalle.

### 3.2.1 CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

Vamos a considerar una varilla en un sistema de referencia  $S'$  que se mueve con velocidad constante  $V$  en la dirección  $x$  con respecto a un sistema  $S$ , como lo muestra la figura 3.2.1.1. Los extremos de la varilla están en los puntos **A** y **B**; ahora medimos la longitud de la varilla desde ambos sistemas de referencia.

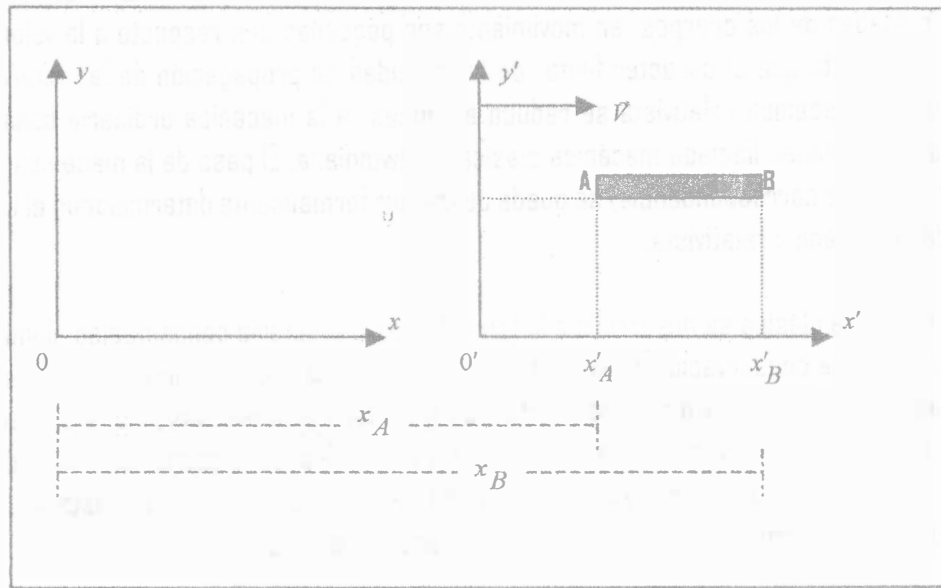


Figura 3.2.1.1

Desde el sistema de referencia  $S'$  la longitud de la varilla es

$$L' = x'_B - x'_A \quad (3.2.1.1)$$

y desde el sistema no primado  $S$  tenemos

$$L = x_B - x_A \quad (3.2.1.2)$$

utilizando las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} x'_A &= \frac{x_A - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x'_B &= \frac{x_B - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (3.2.1.3)$$

sustituyendo (3.2.1.3) en (3.2.1.1) obtenemos

$$L' = \frac{x_B - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_A - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

donde  $t$  es el instante en que medimos (simultáneamente) en el sistema no primado la longitud de la barra anotando las coordenadas de los puntos **A** y **B**, así que tenemos la relación final

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.2.1.4)$$

La ecuación (3.2.1.4) nos dice que la barra, observada desde cualquier sistema de referencia en movimiento, se contrae en un factor de  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . En otras palabras, la longitud de la varilla observada cuando la barra está en movimiento con respecto al observador es igual a la longitud observada cuando la varilla está en reposo con respecto al observador multiplicada por el factor  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . Como podemos verificar, cuando se tiene una velocidad relativamente pequeña (especialmente si  $V \rightarrow 0$ ) la longitud  $L$  se vuelve esencialmente igual a  $L'$ . Además, es importante recalcar que la contracción de la longitud ocurre sólo para medidas paralelas a la dirección del movimiento relativo y que la velocidad  $V$  deber ser siempre menor que la velocidad de la luz para evitar un valor imaginario.

Algo importante de hacer notar es que la contracción de los objetos en movimiento es la contracción del espacio. El espacio se contrae en una sola dirección: la del movimiento. Las longitudes cuya dirección es perpendicular a este movimiento son iguales en los dos marcos de referencia, de modo que si un objeto se desplaza en sentido horizontal no hay contracción alguna en sentido vertical, ver figura 3.2.1.2.

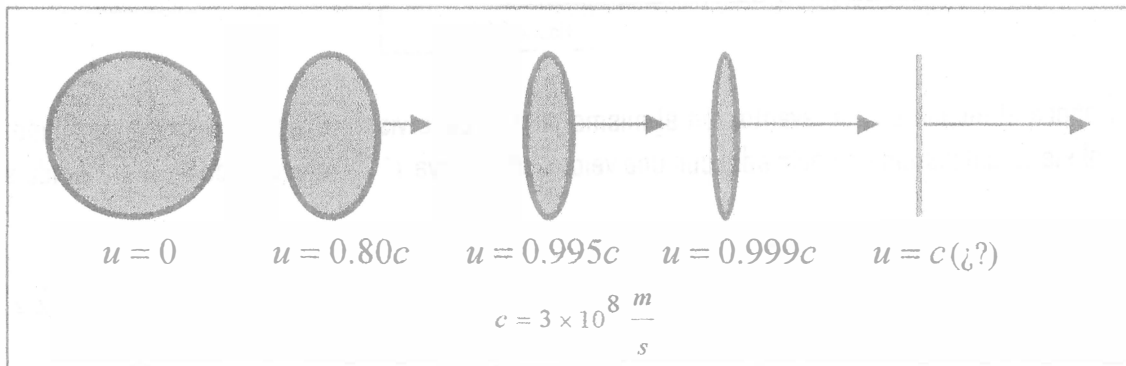


Figura 3.2.1.2

### 3.2.2 DILATACIÓN DEL TIEMPO

Consideremos el evento en el punto  $A(x_A, y_A, z_A)$  en el instante  $t_A$  y otro evento que tenga lugar en el mismo punto pero en un tiempo diferente  $t_B$ , ambos eventos registrados en el sistema primado  $S'$ . El intervalo de tiempo entre los eventos medido desde el sistema no primado es

$$T = t_B - t_A \tag{3.2.2.1}$$

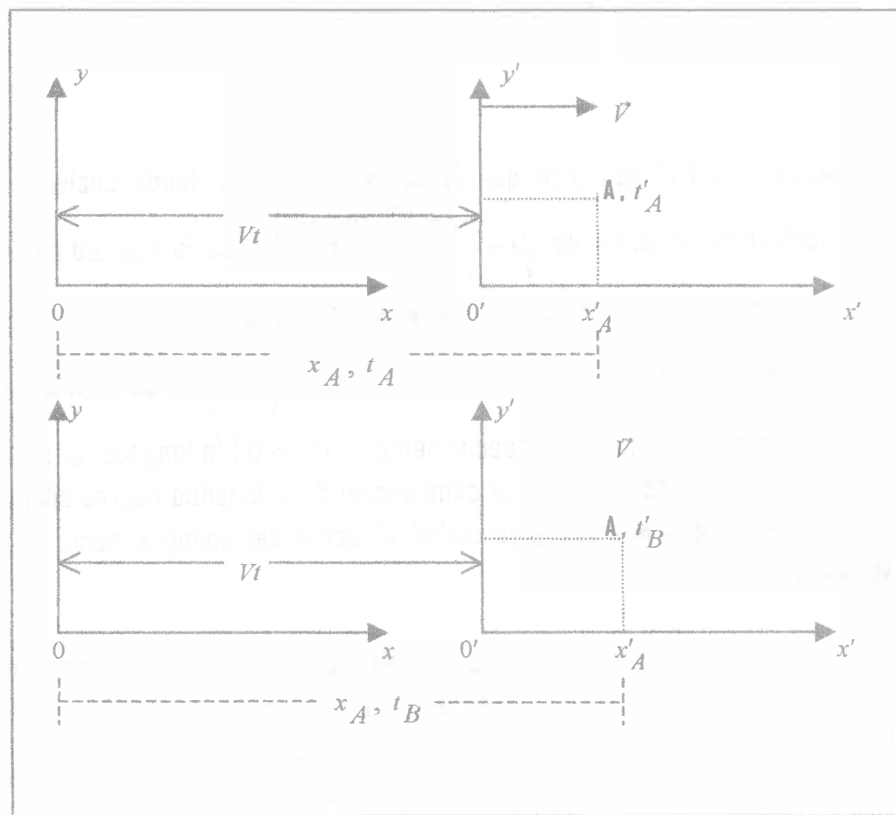


Figura 3.2.2.1

Consideremos ahora el mismo par de eventos en el mismo punto, pero vistos desde el sistema primado que se mueve paralelamente al eje  $x$  del sistema no primado con una velocidad relativa  $V$ , el intervalo de tiempo medido será

$$T' = t'_B - t'_A \tag{3.2.2.2}$$

Esto se ilustra en la figura 3.2.2.1. Si ahora consideramos las transformaciones de Lorentz para el tiempo

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.2.2.3)$$

$$t'_B = \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

y las sustituimos en la ecuación (3.2.2.2) obtenemos

$$t'_B - t'_A = \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.2.2.4)$$

Como el factor  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 1$  tenemos que el tiempo medido desde el sistema primado que se encuentra en

movimiento con velocidad relativa  $V$  es mayor que el medido en el sistema no primado, es decir, el intervalo de tiempo medido entre dos eventos que tienen lugar en un punto en movimiento con respecto al observador es mayor que el intervalo de tiempo medido entre dos eventos que tienen lugar en un punto en reposo con respecto al observador. En otras palabras, los relojes en movimiento marchan más despacio que los estacionarios.

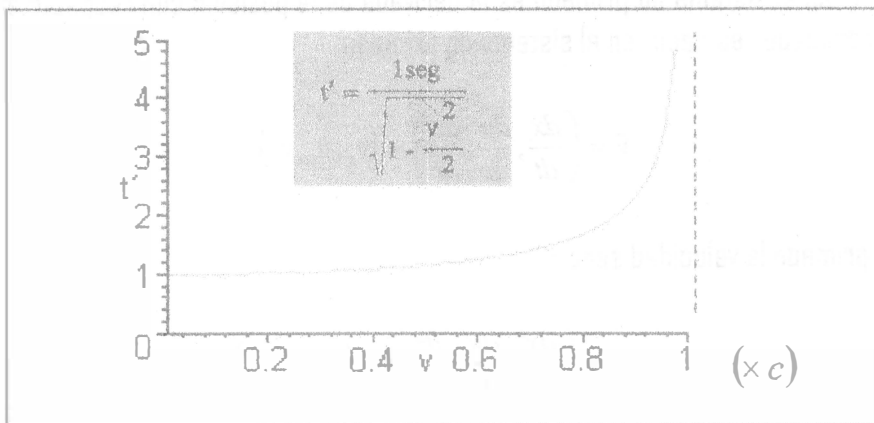


Figura 3.2.2.2

Como ejemplo en la figura 3.2.2.2 se muestra en una gráfica como se alarga un segundo de un reloj estacionario cuando se mide desde un reloj en movimiento. Observe que el alargamiento se hace significativo sólo cuando la rapidez se aproxima a la de la luz.

### 3.3 TRANSFORMACIONES DE VELOCIDADES

Es claro, por lo que hemos estudiado hasta el momento, que las velocidades no se transforman sumándose simplemente, como en mecánica clásica, así que veamos como se transforman las velocidades en relatividad. Para esto consideremos las transformaciones de Lorentz (2.8.11).

Diferenciando las transformaciones de Lorentz obtenemos

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - V\right)dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.3.1)$$

$$dy' = dy \quad (3.3.2)$$

$$dz' = dz \quad (3.3.3)$$

$$dt' = \frac{dt - \left(\frac{V}{c^2}\right)dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\left[1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right]dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.3.4)$$

Por definición, la velocidad  $\vec{v}$  en el sistema no primado es la derivada de la posición con respecto al tiempo, todo medido desde el sistema no primado, es decir, en el sistema no primado

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (v_x, v_y, v_z) \quad (3.3.5)$$

mientras que en el sistema primado la velocidad será  $\vec{v}'$

$$\vec{v}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) = (v'_x, v'_y, v'_z) \quad (3.3.6)$$

Así que la relación entre  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$  se obtiene a partir de las relaciones (3.3.1)-(3.3.4), de la siguiente manera:

(a) Para la componente en la dirección  $x'$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{\left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right)} = \frac{v_x - V}{\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.7)$$

(b) Para la dirección  $y'$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{\left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right) dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

pero  $dy' = dy$ , así que

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right)} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.8)$$

(c) Análogamente para la dirección  $z'$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{\left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right) dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

pero  $dz' = dz$ , así que

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{V}{c^2}\right)} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.9)$$

Aquí nuevamente podemos verificar que el principio de correspondencia se cumple. Si se trabaja con velocidades bajas comparadas con la velocidad de la luz, es decir, si en las ecuaciones anteriores tomamos los límites  $\frac{V}{c} \rightarrow 0$

y  $v_x \frac{V}{c^2} \rightarrow 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - V \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned}$$



que son la composición de velocidades de Galileo. Intercambiando las primas y reemplazando  $V$  por  $-V$ , obtenemos la transformación inversa de velocidades

$$v_x = \frac{v'_x + V}{\left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.10)$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.11)$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)} \quad (3.3.12)$$

### 3.4 DINÁMICA RELATIVISTA

Ahora investigaremos la forma más general que toman las leyes de la mecánica frente a una transformación de Lorentz. La segunda ley de Newton que se expresa por medio de la ecuación

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (3.4.1)$$

fue establecida con la hipótesis de que la masa  $m$  es una constante, sin embargo, como veremos en esta sección, esto no es cierto en la mecánica relativista, ya que se encuentra que la masa de un cuerpo aumenta con su velocidad. La funcionalidad de la masa con la velocidad se expresa mediante la relación

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.4.2)$$

Donde  $m$  es la masa de la partícula cuando se mueve con velocidad  $v$ , y  $m_0$  es una constante característica de la partícula igual a su masa en un sistema en reposo, es decir, cuando  $v = 0$ , y recibe el nombre de masa en reposo. La deducción de este resultado se realiza a partir de la conservación del momento lineal aplicada a una colisión elástica entre dos partículas. Esta predicción teórica ha sido verificada por muchos experimentos con un alto

grado de precisión al observar muchos tipos de partículas que se mueven con velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Sin embargo, debido a que este efecto normalmente es muy pequeño, fue descubierto teóricamente antes que experimentalmente.

### 3.4.1. MASA RELATIVISTA

Consideremos una colisión elástica entre dos partículas de igual masa que tiene lugar en un sistema de referencia inercial  $S'$  que se mueve con velocidad uniforme  $\vec{v}$  en la dirección  $x$  con respecto a otro sistema de referencia inercial  $S$ . Analicemos esta colisión desde  $S'$ , esta situación se ilustra en la figura 3.4.1.

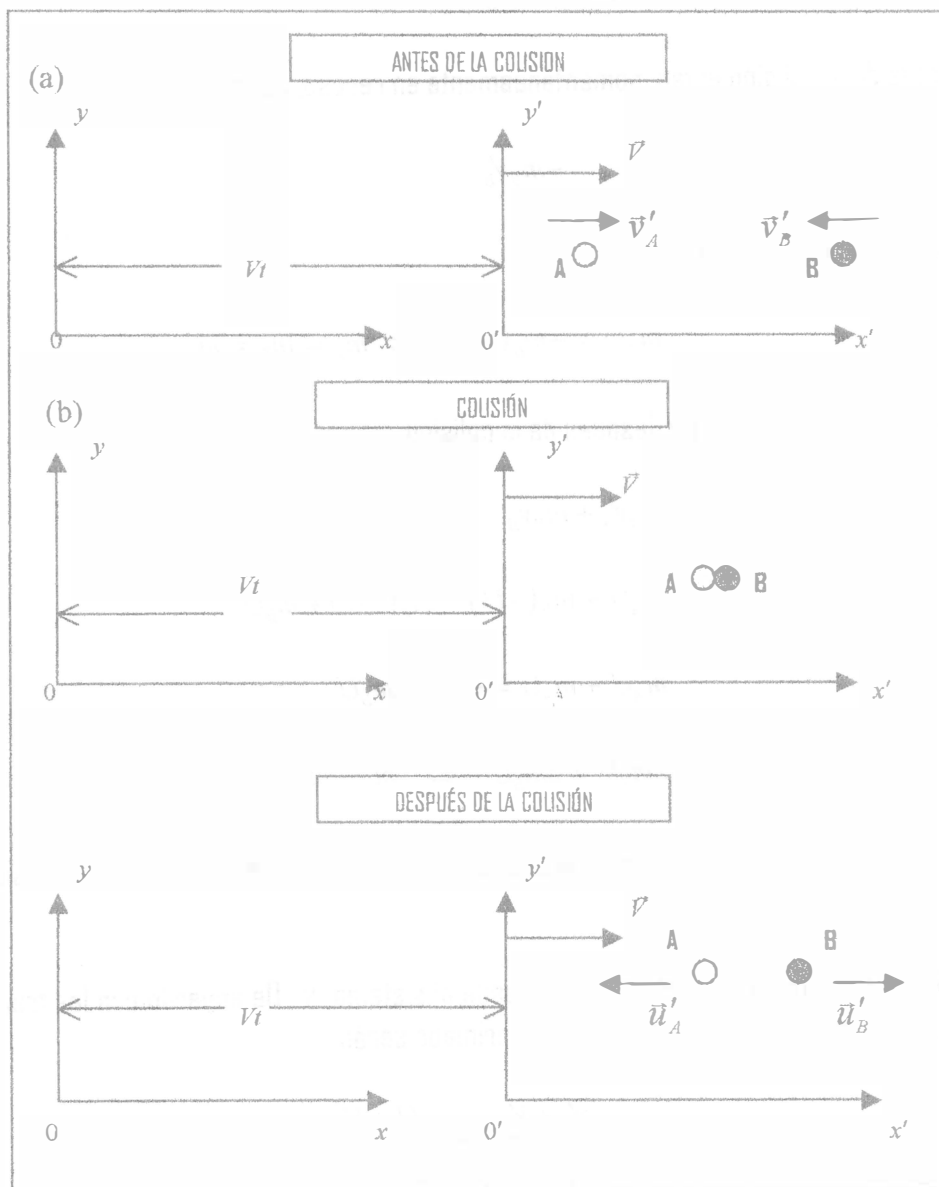


Figura 3.4.1

Ahora, como es una colisión elástica, las velocidades de las partículas antes del choque son iguales en magnitud a las velocidades después del choque, pero de sentidos opuestos, considerando

$$v'_A = U \quad ; \quad v'_B = -U \quad (3.4.1.1)$$

$$u'_A = -U \quad ; \quad u'_B = U \quad (3.4.1.2)$$

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento lineal para los instantes antes y en la colisión tenemos

$$m_A v'_A + m_B v'_B = 0 \quad (3.4.1.3)$$

ya que en el instante de la colisión están momentáneamente en reposo, así que

$$m_A v'_A = -m_B v'_B \quad (3.4.1.4)$$

utilizando la ecuación (3.4.1.1) en (3.4.1.4)

$$m_A U = -m_B (-U) \Rightarrow m_A = m_B = m_0$$

Análogamente, si consideramos antes y después de la colisión

$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A u'_A + m_B u'_B$$

$$m_A U + m_B (-U) = m_A (-U) + m_B U$$

$$m_A U + m_A U = m_B U + m_B U$$

$$2m_A U = 2m_B U \Rightarrow m_A = m_B = m_0$$

Así que desde el sistema  $S'$  la conservación de la cantidad de movimiento implica, para una colisión elástica, que la masa permanece inalterada.

Consideremos esta misma colisión pero desde el sistema  $S$ . De acuerdo con las transformaciones de Lorentz las velocidades medidas desde el sistema no primado serán

$$v_A = \frac{v'_A + V}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right)v'_A} = \frac{U + V}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)\frac{U}{c}} \quad (3.4.1.5)$$

$$v_B = \frac{v'_B + V}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right)v'_B} = \frac{-U + V}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)\frac{U}{c}} \quad (3.4.1.6)$$

Si la suma de las masas vista desde  $S$  es  $M$ , esta masa total permanecerá constante a través de toda la colisión y cuando chocan, así que la conservación del momento lineal aplicada para antes y en la colisión nos dice

$$m_A v_A + m_B v_B = MV \quad (3.4.1.7)$$

$$m_A + m_B = M \quad (3.4.1.8)$$

ya que en el momento de la colisión las dos masas están momentáneamente en reposo, vistas en el sistema primado, y vistas por el sistema no primado se van moviendo juntas con velocidad  $V$ . De las ecuaciones (3.4.1.7) y (3.4.1.8) tenemos

$$m_B(v_B - v_A) = M(V - v_A) \quad (3.4.1.9)$$

Análogamente encontramos

$$m_A(v_A - v_B) = M(V - v_B) \quad (3.4.1.10)$$

$$m_A \left[ \frac{U+V}{1 + \frac{V}{c^2}U} - \frac{(V-U)}{1 - \frac{V}{c^2}U} \right] = M \left[ V - \frac{(V-U)}{1 - \frac{V}{c^2}U} \right]$$

$$m_A \left[ \frac{2U - 2\frac{V^2}{c^2}U}{\left(1 + \frac{V}{c^2}U\right)} \right] = MU \left[ 1 - \frac{V^2}{c^2} \right]$$

$$M = \frac{2m_A}{\left(1 + \frac{V}{c^2}U\right)} \quad (3.4.1.11)$$

Análogamente sustituyendo ahora (3.4.1.5) y (3.4.1.6) en (3.4.1.9)

$$M = \frac{2m_B}{\left(1 - \frac{V}{c^2}U\right)} \quad (3.4.1.12)$$

dividiendo (3.4.1.11) y (3.4.1.12)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1 + \frac{V}{c^2}U}{1 - \frac{V}{c^2}U} \quad (3.4.1.13)$$

Ahora bien, de la ecuación (3.4.1.5) podemos construir la relación

$$1 - \frac{v_A^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{V}{c}\right)\left(\frac{U}{c}\right)\right]^2}$$

Esto se lleva a cabo dividiendo entre  $c$ , elevando al cuadrado, multiplicando por  $-1$  y sumando 1, y de esta última expresión obtenemos la relación

$$\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)\left(\frac{U}{c}\right)\right] = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (3.4.1.14)$$

Similarmente podemos obtener, a partir de (3.4.1.6), la relación

$$\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)\left(\frac{U}{c}\right)\right] = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}} \quad (3.4.1.15)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.4.1.14) y (3.4.1.15) en (3.4.1.13)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (3.4.1.16)$$

Así, la masa vista desde el sistema  $S$  no es  $m_0$  (masa en reposo), sino que es inversamente proporcional al factor  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Ahora obsérvese que  $\gamma$  es siempre mayor que 1, pero se aproxima a la unidad a medida que la velocidad de la masa es pequeña comparada con la velocidad de la luz  $c$ , así que podemos escribir

$$m_A \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = m_B \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} = m_0$$

o simplemente para una masa que se mueve con velocidad  $v$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.4.1.17)$$

con  $m_0$  la masa en reposo.

Podemos concluir que, en general, la masa de un cuerpo no es una constante ni la misma para todos los observadores, sino que es una cantidad que depende del sistema de referencia desde el cual es observado el cuerpo y es igual a  $m_0$  cuando el cuerpo está en reposo, en el marco de referencia desde el cual el cuerpo es observado. Si la velocidad se aproxima a  $c$ , la masa se vuelve muy grande y finalmente tiende a infinito.

### 3.4.2 MOMENTO LINEAL

En mecánica clásica se define el momento lineal de la siguiente forma

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

donde  $m$  es una constante en todos los sistemas inerciales. Ahora, como ya hemos visto, es necesario hacer una corrección en este término. De acuerdo con la última formulación de la masa, la expresión relativista para el momento lineal tiene la forma

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \quad (3.4.2.1)$$

y la conservación del momento lineal se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \vec{v}_i = \text{constante} \quad (3.4.2.2)$$

### 3.4.3 FUERZA RELATIVISTA

La diferencia entre la definición de la fuerza en mecánica clásica y la fuerza correspondiente en mecánica relativista radica tan sólo en el hecho de que la masa es una cantidad que cambia de acuerdo con la ecuación (3.4.1.17). De la mecánica clásica sabemos

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

Ahora tenemos que considerar  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , por tanto la relación para la fuerza en el caso relativista es

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (3.4.3.1)$$

Calculemos ahora la energía cinética relativista calculando el trabajo hecho para aumentar la velocidad de una partícula desde 0 hasta una velocidad final  $v$  de acuerdo con la expresión natural

$$E_c = \int_0^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.4.3.2)$$

considerando la relación (3.4.3.1), primeramente calculemos la derivada explícita de esta relación

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \vec{v} \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \vec{F} &= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 \vec{v}}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right)}{c^2} \right\}$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{c^2} \left[ \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) - (\vec{v} \cdot \vec{v}) \frac{d\vec{v}}{dt} \right] \right\} \quad (3.4.3.3)$$

utilizando la identidad vectorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} + (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C}$  con  $\vec{A} = \vec{v}$ ,  $\vec{B} = \vec{v}$  y  $\vec{C} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , obtenemos la relación

$$\vec{v} \times \left( \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 2 \left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{v}) \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v}) \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (3.4.3.4)$$

sustituyendo esta última ecuación en (3.4.3.3)

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.4.3.5)$$

utilizando (3.4.3.5) en (3.4.3.2) se obtiene

$$E_c = \int_0^r \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

o la ecuación equivalente

$$E_c = \int_0^v \frac{m_0}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad (3.4.3.6)$$



integrando mediante el cambio de variable

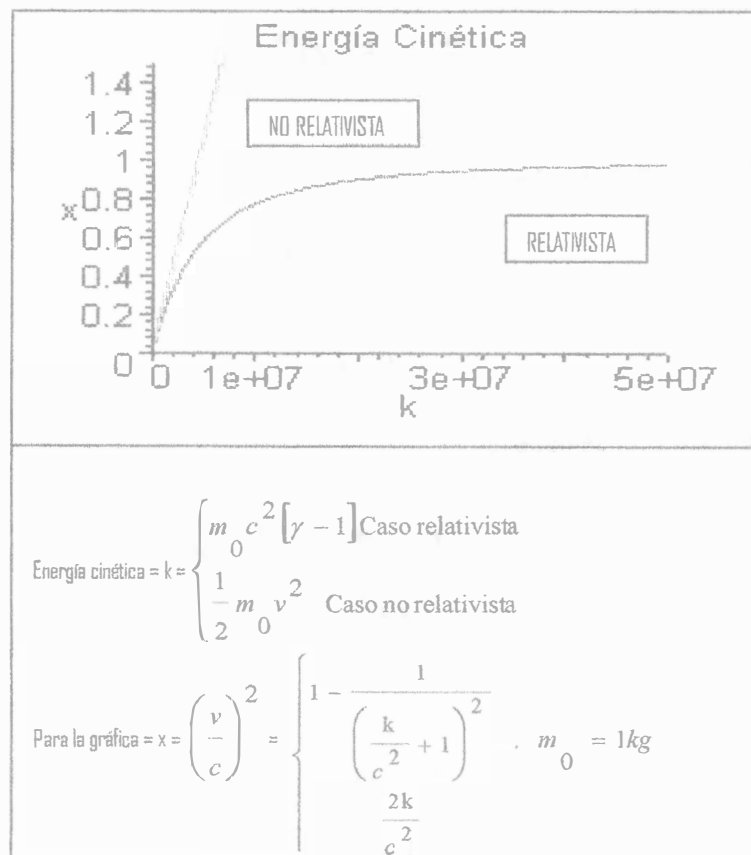
$$u = 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \quad du = -\frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

obtenemos la relación

$$E_c = \left[ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}} \right]_0^v$$

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 \quad (3.4.3.7)$$



$$\text{Energía cinética} = k = \begin{cases} m_0 c^2 [\gamma - 1] & \text{Caso relativista} \\ \frac{1}{2} m_0 v^2 & \text{Caso no relativista} \end{cases}$$

$$\text{Para la gráfica} = x = \left( \frac{v}{c} \right)^2 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\left( \frac{k}{c^2} + 1 \right)^2} \\ \frac{2k}{c^2} \end{cases} \cdot m_0 = 1 \text{kg}$$

Figura 3.4.3.1

cuando la velocidad de una partícula es cercana a la velocidad de la luz, la expresión para energía cinética clásica  $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$  debe de ser cambiada a la forma relativista (3.4.3.7), la cual se reduce al caso clásico cuando se consideran velocidades bajas comparadas con la velocidad de la luz<sup>1</sup>. La figura 3.4.3.1 muestra la comparación entre la energía cinética relativista y la energía cinética clásica, nótese que a bajas velocidades la energía cinética relativista y la energía cinética clásica coinciden.

### 3.4.4 ENERGÍA TOTAL

La energía total en relatividad especial se define como<sup>2</sup>

$$E = E_0 + E_c \quad (3.4.4.1)$$

donde  $E_0 = m_0 c^2$  se definen como la energía en reposo. Si sustituimos el valor explícito de la energía cinética

$$E = m_0 c^2 + (m - m_0) c^2$$

la energía total será

$$E = m c^2 \quad (3.4.4.2)$$

La ecuación (3.4.4.2) nos indica la equivalencia entre masa y energía y es una de las consecuencias, más importantes de la relatividad especial

Si consideramos el cambio en la energía cinética de un cuerpo que se mueve a la velocidad  $v_1$  y aumenta su velocidad a la cantidad  $v_2$ , este cambio será

$$\Delta E_c = (m_2 - m_0) c^2 - (m_1 - m_0) c^2 = (m_2 - m_1) c^2 = \Delta m c^2$$

Esto nos indica que un cambio en la velocidad producirá un cambio en la masa  $\Delta m$ .

<sup>1</sup> Si  $v \ll c$  podemos utilizar la expresión  $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 + \dots$  y tendremos

$$E_c = m_0 c^2 \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \approx m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

<sup>2</sup> No se incluye la energía potencial.

Se puede construir otra relación para la energía total partiendo de la relación para la masa

$$m_0 = m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$c^2 m_0 = c^2 m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$c^4 m_0^2 = c^4 m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$m^2 c^4 = c^4 m_0^2 + c^2 m^2 v^2$$

pero  $p = mv$  y  $E = mc^2$ ; así que obtenemos finalmente

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

$$E^2 = E_0^2 + c^2 p^2 \tag{3.4.4.3}$$

Ahora, derivando la ecuación (3.4.4.3) con respecto a  $p$

$$2E \frac{dE}{dp} = 2pc^2$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{p}{m}$$

pero  $v = \frac{p}{m}$ , por tanto

$$\frac{dE}{dp} = v \tag{3.4.4.4}$$

Un caso interesante es considerar que un cuerpo se mueve a la velocidad de la luz, en este caso  $v = c$  y la ecuación (3.4.4.4) toma la forma

$$dE = cdp \qquad E = cp + k$$

Ahora, para  $p = 0$   $E = E_0$ , así que el valor de la constante  $k$  es  $E_0$  y la relación final para este caso es

$$E = cp + E_0 \quad E - E_0 = pc \quad (3.4.4.5)$$

pero de la ecuación (3.4.4.3) también tenemos

$$E^2 - E_0^2 = p^2 c^2$$

$$(E - E_0)(E + E_0) = p^2 c^2 \quad (3.4.4.6)$$

dividiendo (3.4.4.6) y (3.4.4.5)

$$E + E_0 = pc \quad (3.4.4.7)$$

Si comparamos las ecuaciones (3.4.4.5) y (3.4.4.7), observamos que la única posibilidad para no tener contradicciones en este caso es que  $E_0 = 0$  o  $m_0 = 0$ . En otras palabras, si un cuerpo se está moviendo a la velocidad de la luz su masa en reposo debe de ser cero.

### 3.4.5 TRANSFORMACIONES PARA LA ENERGÍA Y EL MOMENTO

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales con velocidad relativa  $\vec{u}$  en la dirección  $x$ . Además de una masa con velocidad  $\vec{v}$  en la dirección  $x$  del sistema no primado, como muestra la figura 3.4.5.1

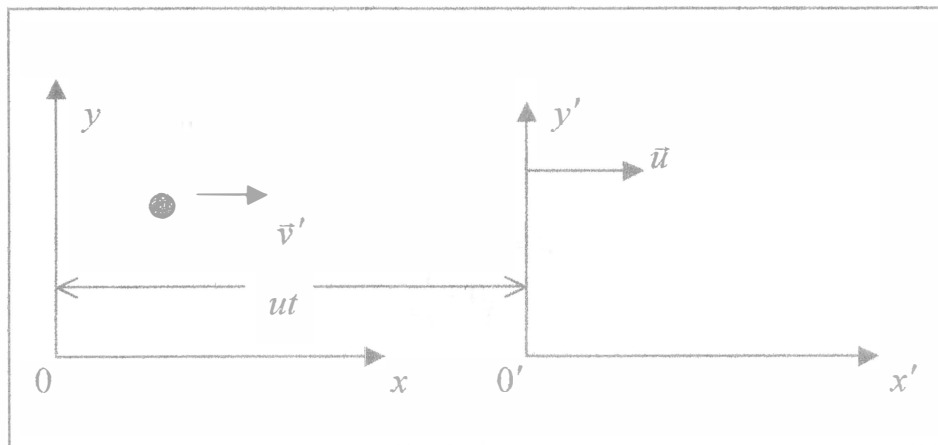


Figura 3.4.5.1

la transformación de velocidades nos dice

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}} \quad (3.4.5.1)$$

Calculemos primero la energía  $E'$  medida desde el sistema primado. Esta energía debe tener la forma

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.2)$$

a partir de la ecuación (3.4.5.1) se encuentra la relación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.3)$$

sustituyendo (3.4.5.3) en (3.4.5.2)

$$E' = \frac{m_0 c^2 \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

pero utilizando las relaciones

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

obtenemos la relación final

$$E' = \frac{E - p_x u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.4)$$

que es la forma como se transforma la energía. Obsérvese que tiene la misma forma que la transformación para el tiempo  $t'$ .

Calculando ahora la transformación para el momento  $p'_x$ <sup>3</sup>. De la relación del momento en el sistema no primado

$$p_x = mv = mc^2 \frac{v}{c^2} = E \frac{v}{c^2}$$

Con base en esto, desde el sistema primado esperamos tener

$$p'_x = E' \frac{v'}{c^2} \quad (3.4.5.5)$$

sustituyendo (3.4.5.1) y (3.4.5.4) en (3.4.5.5) y después de hacer un poco de álgebra obtenemos

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{E u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.6)$$

Relación de transformación para el momento. También podemos ver que tiene la forma de la transformación para la coordenada  $x'$ . Así que una manera de recordar la transformación para la energía y el momento es recordar la transformaciones de Lorentz y sustituir  $t$  por  $E$  y  $x$  por  $p_x c^2$ .

En general, podemos escribir un conjunto de ecuaciones de transformación para la energía y el momento para sistemas inerciales que se mueven con velocidad relativa  $\vec{u}$  en la dirección horizontal como

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{E}{c^2} u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.7)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

$$E' = \frac{E - p_x u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

<sup>3</sup> Es conveniente aclarar que sólo se calcula esta componente porque se tomó sólo dirección  $x$  para la velocidad.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Muestre que dos eventos que ocurren al mismo tiempo  $t_1$  (simultáneamente) en dos puntos diferentes  $A(x_{1A}, y_{1A})$  y  $B(x_{1B}, y_{1B})$  de un sistema inercial  $S_1$ , no son simultáneos en el sistema inercial  $S_2$ .
  
2. Una barra rígida de longitud  $L_2 = 1.5m$  está en reposo con respecto al sistema  $s_2$ . Si la barra ofrece un ángulo de  $\theta_2 = 45^\circ$  con respecto al eje  $x_2$ , ¿cuál es la longitud y la orientación de la barra con respecto a  $S_1$ , cuando la velocidad del sistema  $S_2$  es de  $0.98c$ ?
  
3. Entre las partículas de gran energía están los piones cargados, partículas de masa entre la del electrón y la del protón, y de carga electrónica positiva o negativa. Estas partículas se producen en un acelerador, donde se somete un blanco adecuado a un bombardeo con protones de gran energía, así se obtienen piones que salen del blanco a velocidades próximas a la de la luz. Se sabe que los piones son radiactivos y que, en reposo, su vida media es de  $1.77 \times 10^{-8} \text{ seg}$ . Es decir, la mitad de los piones que haya en un momento se habrá desintegrado después de  $1.77 \times 10^{-8} \text{ seg}$ . Experimentalmente se encontró que si un haz colimado de piones sale del blanco del acelerador a una velocidad de  $0.99c$ , entonces, al recorrer  $39m$ , su intensidad decae a la mitad.
  - a) ¿Concuerdan los resultados experimentales con los teóricos?
  - b) Muestre que la dilatación del tiempo explica la diferencia que hay entre las mediciones.
  - c) Muestre que la contracción de la longitud justifica las mediciones.
  
4. Cuando dos electrones salen de una muestra radiactiva en direcciones opuestas, cada uno a velocidad  $0.67c$  con respecto a la muestra, la velocidad de un electrón con respecto a otro es  $1.34c$ , de acuerdo con la física clásica. ¿Cuál es el resultado relativista?
  
5. Utilizando las ecuaciones de la dinámica relativista deduzca la relación
 
$$(K + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$
 Donde  $K$  y  $p$  son la energía cinética y la cantidad de movimiento de una partícula moviéndose rápidamente.
  
6. Calcular el radio, tanto clásico como relativista, de la trayectoria de un electrón de  $10\text{Mev}^4$  que se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme de  $2 \frac{\text{Weberst}}{m^2}$  de intensidad.

<sup>4</sup>  $1\text{ev} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

7. La salida de potencia del Sol es de  $3.8 \times 10^{26} \text{ W}$ . ¿Cuánta masa en reposo se convierte en energía cinética en el Sol cada segundo?
8. La velocidad de un electrón en un campo eléctrico uniforme cambia de  $v_1 = .98c$  a  $v_2 = .99c$ .
- Calcule el cambio en la masa.
  - Calcule el trabajo hecho sobre el electrón para cambiar su velocidad.
  - Calcule el potencial acelerador en volts.
9. Considerando que el cambio de la energía con el tiempo cumple la relación  $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  y que la energía de un cuerpo es siempre  $mc^2$ , deduzca la relación  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , donde  $m_0$  es la masa en reposo.



## EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

1.- Para cada una de las siguientes proposiciones elija la opción que contiene la respuesta correcta

1.- El fenómeno de dilatación del tiempo en relatividad especial nos dice que los relojes en movimiento

( )

- a) marchan más rápido que los estacionarios  
 b) marchan más despacio que los estacionarios  
 c) se detienen  
 d) no se pueden utilizar en mediciones

2.- La contracción de la longitud en relatividad especial nos dice que una barra observada desde cualquier sistema de referencia en movimiento

( )

- a) aumenta en un factor  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$   
 b) se contrae en un factor  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$   
 c) se contrae en un factor  $\sqrt{1 - \frac{c^2}{V^2}}$   
 d) se contrae en un factor  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

3.- La transformación para la velocidad en la dirección  $x$  está dada por la expresión

$v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - v_x \frac{V}{c^2}\right)}$ . Se recupera la transformación correspondiente de la mecánica clásica haciendo que

( )

- a)  $V = 0$       b)  $c \rightarrow \infty$       c)  $v_x \rightarrow 0$       d)  $V \rightarrow \infty$

4.- En relatividad especial se encuentra que la masa cumple con la relación

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , donde  $m_0$  es la masa en reposo y  $v$

( )

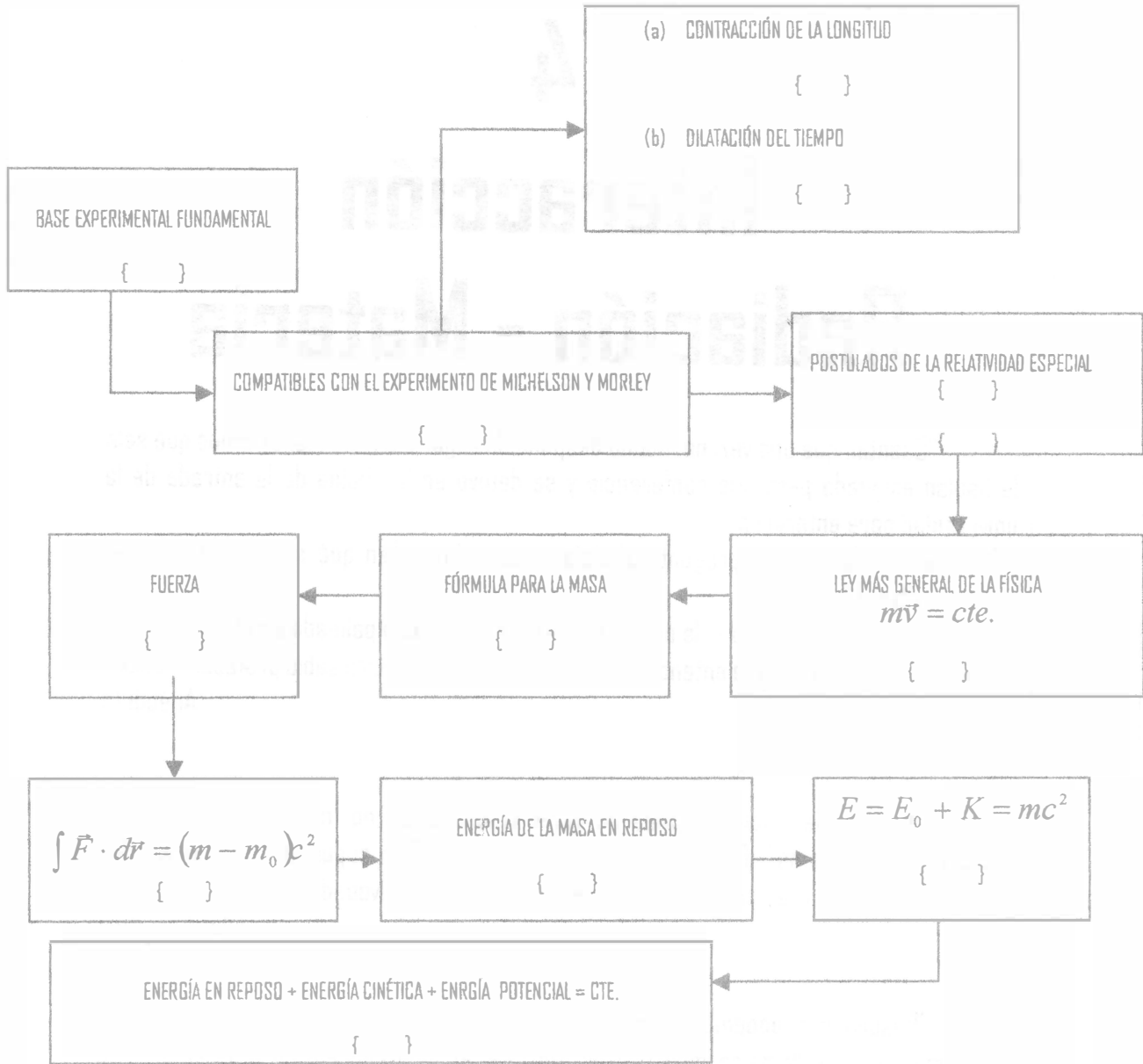
- a) la velocidad del sistema de referencia inercial  
 b) la velocidad del objeto de masa  $m$   
 c) la velocidad del objeto de masa  $m_0$   
 d) la velocidad del observador

5.- Si un cuerpo se llegara a mover a la velocidad de la luz, la implicación inmediata es

( )

- a) su masa está dada por la expresión  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$   
 b) su energía es  $E = \frac{1}{2}mv^2$   
 c) su masa en reposo es cero  
 d) su masa en reposo es constante

II.- Complete el siguiente esquema con los incisos que se muestran al final del mismo



- (a)  $m = \gamma m_0$  (b) Invarianza de las leyes físicas para observadores inerciales (c)  $E_0 = m_0 c^2$   
 (d) La velocidad de la luz es constante en los sistemas inerciales  
 (e) Conservación del momento lineal (f) Experimento Michelson y Morley (M-M) (g)  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$   
 (h) Transformaciones de Lorentz (i) Energía total (j)  $L = L_0 \gamma^{-1}$  (k)  $T = \gamma T_0$   
 (l) Principio de conservación de la masa y la energía (m) Energía cinética

# 4

## Interacción Radiación - Materia

"Cuentan que una vez, no mucho después de llegar a Berlín, Planck olvidó qué sala le habían asignado para una conferencia y se detuvo en la oficina de la entrada de la universidad para enterarse.

--Dígame, por favor -- le preguntó al viejo encargado -- ¿en qué sala hablará hoy el profesor Planck?

--No se meta allí, muchacho -- le contestó el viejo dándole una palmada en el hombro-- es usted demasiado joven para entender las conferencias de nuestro sabio profesor Planck."

Anécdota

"Un total de cincuenta años de seria especulación no me han acercado a la solución del problema": Qué son los cuantos de luz". Por supuesto que hoy en día, cualquier Tom y Bill cree conocer la respuesta, pero está equivocada"

Albert Einstein

"Resumiendo podemos decir que difícilmente habrá alguno entre los grandes problemas, en que la física moderna es tan rica, al que Einstein no haya hecho una contribución importante. No hay que tomar demasiado en cuenta que alguna vez no haya atinado como, por ejemplo, en su hipótesis del cuanto de luz, pues no es posible introducir ideas fundamentalmente nuevas, aun en las ciencias más exactas, sin que tarde o temprano se corra un riesgo"

Max Planck

# Capítulo 4

## INTERACCIÓN RADIACIÓN MATERIA

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán los experimentos que llevaron a la construcción de una nueva teoría que permite estudiar fenómenos que ocurren entre entes de masa muy pequeña y situados a distancias muy pequeñas. Son los inicios de una nueva rama de la física que recibe el nombre de **Mecánica Cuántica**, es el estudio del comportamiento de la materia y de la luz en todos sus detalles y la forma en que éstas interactúan. Algo sorprendente es que los acontecimientos a escala muy pequeña se comportan de forma muy diferente de lo que uno podría esperar o imaginar. No se comportan como ondas, ni como partículas, no se comportan como nubes o como pelotas, o como algo que se halla visto alguna vez.

Newton pensaba que la luz estaba compuesta de partículas, pero se descubrió tiempo después que ésta se comporta como onda y, como veremos en este capítulo, a principios del siglo veinte se descubrió que algunas veces se comporta verdaderamente como partícula. Lo mismo sucedió con el estudio del comportamiento del electrón: se creía que se comportaba como una partícula y tiempo después se descubrió que en algunos aspectos lo hacía como una onda. Pero en realidad, éste no se comporta como ninguna de ellas. Así que el estudio profundo de la naturaleza iniciado en este siglo nos llevó a una extraña pero útil conclusión de dualidad, conocida como la dualidad **í onda-partícula** ! Los estudios que llevaron al desarrollo de una nueva teoría que nos ayudara a entender y a explicar todos los descubrimientos hechos acerca del comportamiento de la materia a escala microscópica y de su interacción con la luz es el propósito de este capítulo.

### 4.2 RADIACIÓN

Uno de las palabras que utilizaremos con frecuencia es la de radiación, por tal motivo, en esta sección comenzaremos con el estudio de este concepto. El calor del Sol que atraviesa la atmósfera y calienta la superficie terrestre no pasa a través de la atmósfera por conducción, porque el aire es uno de los peores conductores, ni tampoco lo hace por convección pues ésta se inicia sólo después de que la Tierra se ha calentado. Se sabe también que ni la conducción ni la convección son posibles en el espacio vacío que separa a nuestra atmósfera del Sol . El calor del Sol se transmite por otro proceso, que se llama **Radiación**<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> No hay que confundir la radiación térmica con la radiación radiactiva que emiten los núcleos de los átomos radiactivos como el uranio y el radio.

Toda energía que se transmite por radiación, incluso el calor, se conoce como energía radiante. La energía radiante se presenta en forma de ondas electromagnéticas, y comprende las ondas de radio, las microondas, la radiación infrarroja, la luz visible, la radiación ultravioleta, los rayos X y los rayos gamma<sup>2</sup>. Todos los objetos emiten energía radiante con una mezcla de longitudes de onda. Los cuerpos cuya temperatura es baja emiten ondas largas, como las ondas en una cuerda cuando se agita con poca energía. Los objetos que se encuentran a temperaturas más altas emiten ondas cuya longitud de onda es menor. Los cuerpos que están a temperaturas ordinarias emiten ondas que corresponden principalmente al extremo de longitudes de onda larga de la región infrarroja, que es intermedia entre las ondas de radio y las de luz visible. La sensación de calor se debe a las ondas infrarrojas de longitud de onda más corta que absorbe nuestra piel. Así pues, cuando hablamos de radiación térmica nos referimos a la radiación infrarroja.

Cuando un objeto está suficientemente caliente, parte de la energía radiante que emite corresponde a la región de la luz visible. A una temperatura del alrededor de  $500^{\circ}C$  los objetos comienzan a emitir las ondas más largas que podemos ver, esto es, luz roja. A temperaturas mayores se emite una luz amarillenta. A unos  $1200^{\circ}C$  se emiten todas las longitudes de onda a las que el ojo es sensible y decimos que el objeto está "al rojo blanco".

Algunos objetos comunes que producen una sensación de color son las brasas ardientes, el filamento de una bombilla y el Sol. Todos estos objetos emite radiación infrarroja y luz visible. Cuando esta energía radiante incide en otros objetos, éstos absorben una parte de la energía y reflejan el resto. La porción que se absorbe incrementa la energía interna de los objetos.

Un buen absorbente de energía radiante refleja muy poca energía radiante. Por eso un buen absorbente se ve oscuro. Un absorbente perfecto no refleja energía radiante y se ve perfectamente negro. Algo interesante que aquí podemos mencionar y que ocuparemos más adelante es lo siguiente: Si se mira durante el día las ventanas o las puertas abiertas de casa que se encuentran a gran distancia de nosotros se verá que también se ven negras. Las aberturas se ven negras porque la energía radiante que entra por ellas se refleja muchas veces en las paredes interiores y se absorbe parcialmente en cada reflexión, hasta que queda muy poca o nada de ella, esto se ilustra en la figura 4.4.1. Por otra parte, un buen reflector es un mal absorbente.

Los buenos absorbentes son también buenos emisores. Así que cada objeto absorbe tanta energía como emite. Por tanto, un objeto oscuro que absorbe mucho debe emitir mucho también.

---

<sup>2</sup> La radiación infrarroja tiene longitudes de onda mayores que las de la luz visible. Las longitudes de onda visibles mayores corresponden a la luz roja y las más pequeñas a la luz violeta. La radiación ultravioleta tiene longitudes de onda aun más pequeñas. Para mayor información ver los **apuntes de Óptica** para la facultad de ingeniería

El hecho de que una superficie funcione como emisor neto o como absorbente neto depende si la temperatura es superior o inferior a la del entorno. Por ejemplo, si la superficie está más caliente que el entorno se comportará como un emisor neto y se enfriará. Si la superficie está más fría que el entorno será un absorbente neto y se calentará. Toda superficie, fría o caliente, absorbe y emite energía radiante.

### 4.3 ESPECTROS

A finales del siglo XIX, se desarrolló un cuerpo de conocimientos llamado espectroscopía, que permitió contar con un medio exacto de distinguir entre las especies atómicas. Las fórmulas que describen los comportamientos de los fenómenos espectroscópicos fueron encontradas en un principio de manera empírica y reflejan, con extraordinaria precisión, la estructura oculta del átomo. Tiempo después estas fórmulas fueron la prueba más poderosa de la moderna teoría atómica.

La espectroscopía se inició con Newton y sus experimentos con luz blanca y prismas, sin embargo, no se volvió una herramienta útil hasta el siglo XIX, cuando en 1853 A.J. Ångström usó un tubo de descarga lleno con varios gases para estudiar sus espectros.

Todos los elementos tienen un color característico. Si los átomos están lo bastante separados para que los átomos vecinos no interrumpen sus vibraciones, entonces emiten sus colores verdaderos. Esto sucede cuando hacemos brillar los átomos en estado gaseoso. Por ejemplo, el gas neón emite un resplandor de color rojo brillante; el vapor de mercurio produce luz de color violeta azulado y el helio emite un resplandor de color rosa. El resplandor de cada elemento es diferente de cualquier otro elemento. El instrumento que se utiliza para analizar la luz que emiten los elementos se llama **espectroscopio** y su base instrumental elemental consiste en una ranura delgada, lentes y un prisma, un esquema del mismo se muestra en la figura 4.3.1.

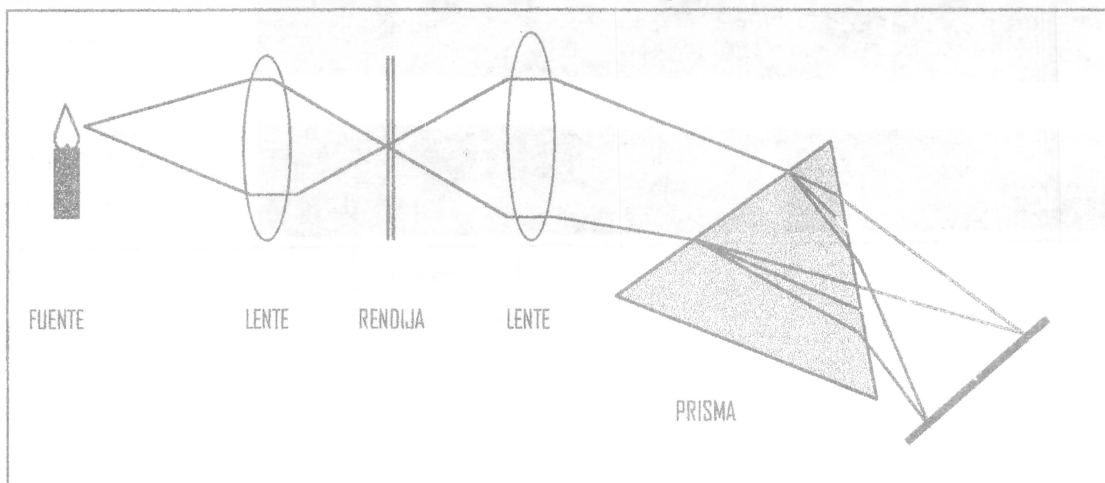


Figura 4.3.1

Cuando la luz que emite un elemento se analiza por medio de un espectroscopio, se ve que los colores son la combinación de diferentes frecuencias de luz, es decir separa el haz en sus bandas de colores componentes, esta separación se conoce como **líneas espectrales** o **simplemente espectro**. Cuando un gas es excitado, emite longitudes de onda específicas, y se ven líneas de colores contra un fondo negro. Esto se llama **espectro de emisión**. A la inversa, cuando la luz blanca pasa a través del mismo gas, los átomos absorben esas mismas longitudes de onda específicas, entonces tendremos un **espectro de absorción**, y se ven líneas negras sobre un fondo de colores brillantes que varía uniformemente, en la figura 4.3.1 se muestran algunos espectros. Esto se debe a que cada elemento tiene una configuración particular de electrones, y estos emiten frecuencias definidas de luz cuando cambian de un estado de energía a otro en el átomo. Las frecuencias de luz que emiten los átomos son las "huellas digitales" de los elementos. Gran parte de la información de que se dispone a cerca de la estructura atómica proviene del estudio de los espectros atómicos. La composición atómica de los materiales comunes, del Sol, y de las galaxias distantes se hace patente en los espectros de estas fuentes. El elemento helio, que es el segundo en abundancia en el universo, se descubrió por sus "huellas digitales" en la luz solar.

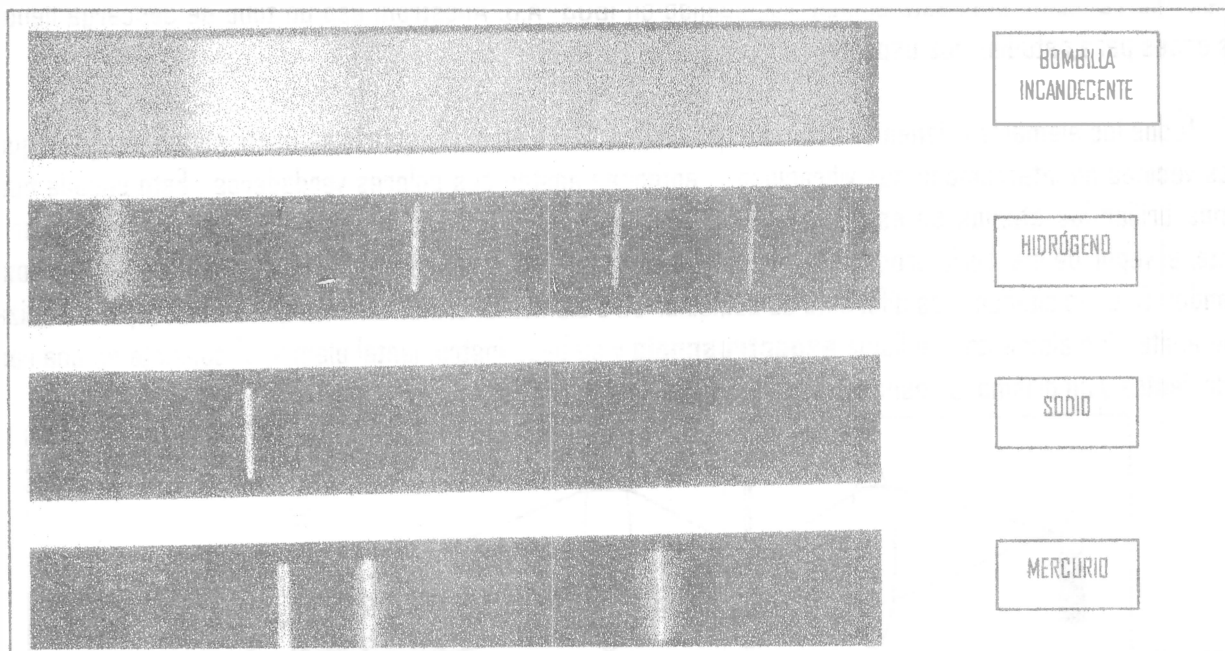


Figura 4.3.1



## 4.4 RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

La mecánica cuántica tuvo sus principios tentativos en la teoría de la radiación del cuerpo negro, que data de 1859. Ese año Darwin publicó *El origen de las especies*, y fue el mismo año en que Gustav Robert Kirchhoff propuso un desafío intelectual que revolucionaría la física.

Kirchhoff analizó la forma en que se comportan los cuerpos en equilibrio térmico, al intercambiar energía radiante. Esta radiación térmica es energía electromagnética que irradian todos los objetos, cuya fuente es su energía térmica, como ya explicamos en la sección 4.2. fue en este estudio que aparecieron los primeros indicios de que no todo andaba bien con la imagen clásica de la radiación electromagnética, la cual había funcionado muy bien explicando los experimentos de Young y Hertz, y que podía ser analizada precisamente con las ecuaciones de Maxwell, ya que la teoría ondulatoria no pudo explicar el espectro observado de la radiación térmica. Pronto siguieron otros experimentos, como el estudio de los electrones emitidos cuando la luz incide sobre la superficie de un metal y la dispersión de la luz por los electrones, en los cuales la teoría ondulatoria tampoco pudo explicar los resultados de estos experimentos. Estos dos experimentos se estudiarán en las siguientes secciones; aquí solo analizaremos la radiación térmica.

Desafortunadamente, la radiación que emiten los objetos ordinarios depende no solo de la temperatura, sino de otras propiedades también, tales como la forma del objeto, sus propiedades superficiales, el material del cual está compuesto y otras más. También depende si refleja o no la radiación que incide sobre él proveniente del medio ambiente (sección 4.2). Para eliminar algunas de estas dificultades se considera no un objeto arbitrario, sino uno cuya superficie esté completamente ennegrecida, llamamos a estos objetos **cuerpos negros**. Si un objeto es completamente negro, como explicamos en la sección 4.2, no reflejara la radiación que incide sobre él y las propiedades de su superficie no serán observables. Sin embargo, esta generalización aun no simplifica lo suficiente el problema como para poder calcular el espectro de radiación emitida; por lo tanto se generaliza todavía más y se considera un tipo especial de cuerpo negro. Éste será una cavidad, tal como el interior de una caja de metal, con una pequeña perforación en una pared. Es el agujero, y no la caja misma, el cuerpo negro. La radiación que venga de fuera y que incide en el agujero tiene una probabilidad despreciable de volver a salir por el orificio. La radiación es absorbida parcialmente en cada reflexión y absorbida completamente después de muchas reflexiones consecutivas sobre la cara interna de la cavidad. El proceso inverso, en el cual la radiación que sale del agujero se compone de contribuciones de la superficie interna, se conoce como radiación de cuerpo negro, ya que la radiación que emerge del orificio es sólo una muestra de la radiación que esta dentro de la caja, entender la naturaleza de la radiación dentro de la caja permite comprender la radiación que sale del orificio. La figura 4.4.1 ilustra el proceso explicado.

G- 612190



La mecánica clásica, tal y como se conocía, fue incapaz de explicar los resultados experimentales de la radiación de cuerpo negro, así que hubo necesidad de modificar la física conocida para resolver estos problemas.

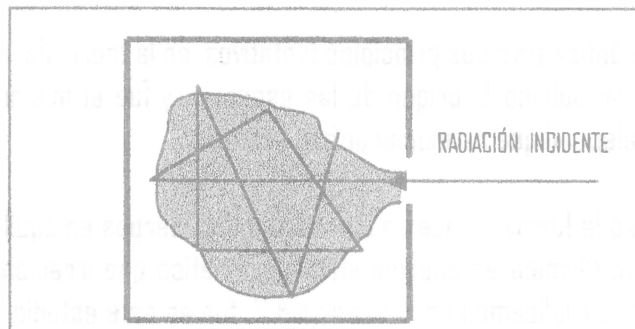


FIGURA 4.4.1

Para entender los resultados predichos por la teoría clásica estudiemos los resultados experimentales de la radiación de cuerpo negro. En la figura 4.4.2 se ve un dispositivo experimental simplificado. La energía radiante emitida por el objeto a temperatura  $T$  pasa por una rendija y llega a un prisma no absorbente. Las frecuencias (o longitudes) de onda presentes se dispersan y forman una banda continua, que es muestreada por el detector, de tal manera que las diferentes frecuencias (o longitudes) de onda aparezcan a diferentes ángulos  $\theta$ . Moviendo el detector de radiación a diferentes ángulos, se puede medir la intensidad de la radiación a una frecuencia (o longitud) de onda específica. Ya que el detector no es un punto geométrico, sino que subtende un pequeño intervalo de ángulos  $d\theta$ , lo que realmente se mide es la cantidad de radiación en alguna vecindad  $d\theta$  de  $\theta$ , o de manera equivalente, en algún intervalo  $d\nu$  de  $\nu$  (o  $d\lambda$  de  $\lambda$ ). A esta cantidad se le llama Intensidad radiante o radiancia espectral  $\mathfrak{R}_T(\nu)$

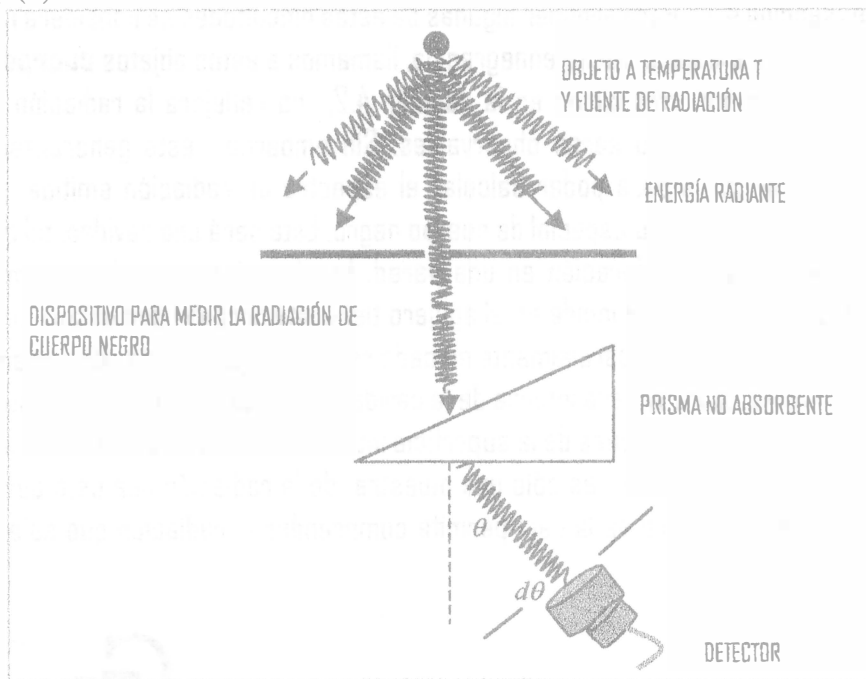


Figura 4.4.2

Los resultados experimentales se pueden interpretar mediante una gráfica de intensidad radiante o radiancia espectral contra frecuencia del cuerpo negro, donde la radiancia espectral  $\mathfrak{R}_T(\nu)$  se define de tal manera que la cantidad  $\mathfrak{R}_T(\nu) d\nu$  es la rapidez con que una superficie radia energía por unidad de área a temperatura absoluta  $T$ , para frecuencias en el intervalo  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . Así que si se integra la radiancia para todas las frecuencias  $\nu$  se obtiene la energía total emitida en la unidad de tiempo por la unidad de área en un cuerpo negro a temperatura  $T$ . A esta cantidad se le llama radiación de cuerpo negro y se mide en  $\frac{\text{watts}}{\text{m}^2}$ , y la denotaremos de la siguiente manera:

$$R_T = \int_0^{\infty} \mathfrak{R}_T(\nu) d\nu \quad (4.4.1)$$

Geoméricamente se puede interpretar como el área bajo la curva de la gráfica  $\mathfrak{R}_T(\nu)$  Vs  $\nu$ . En la figura 4.4.3 se muestra la intensidad radiante observada de un cuerpo negro, como función de la frecuencia de radiación, mostrada para tres temperaturas del cuerpo negro y se nota como la energía total emitida por unidad de tiempo por unidad de área, o sea el área bajo la curva, aumenta rápidamente con la temperatura.

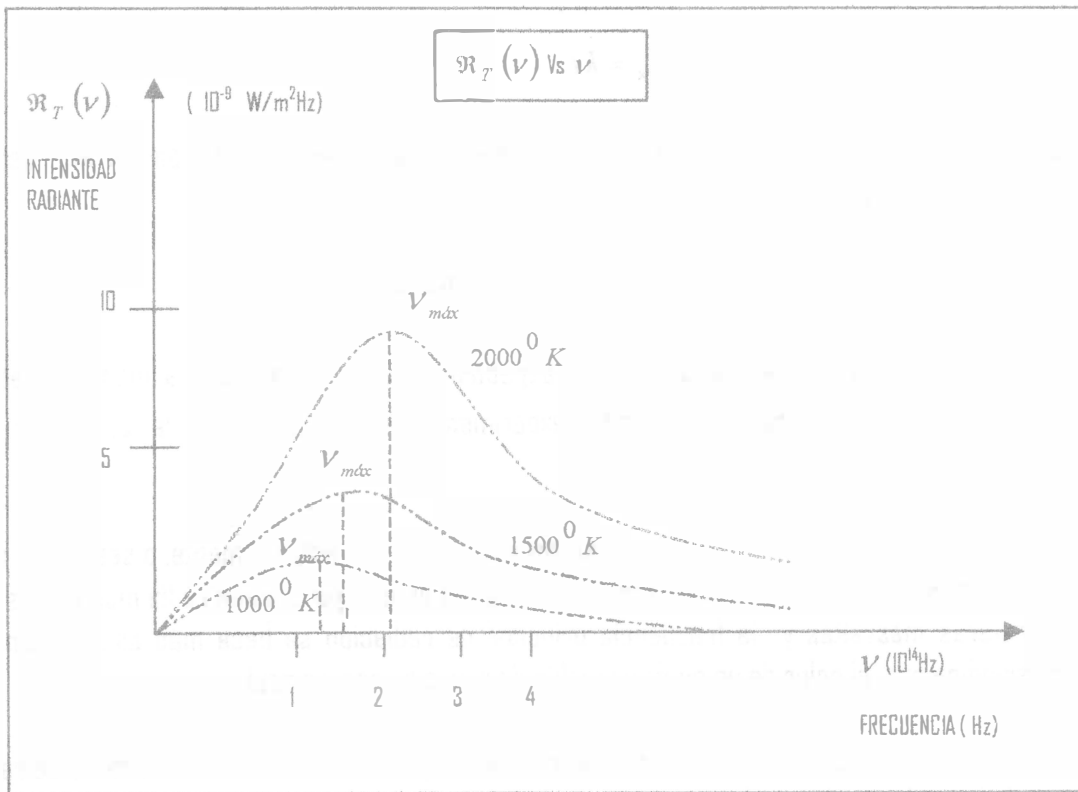


Figura 4.4.3

Las primeras conclusiones que se obtuvieron de este experimento son las siguientes:

(i) La energía total emitida por unidad de tiempo por unidad de área, es decir el área bajo la curva, aumenta rápidamente con la temperatura. La dependencia exacta de la radiación con la temperatura era conocida y está dada por la relación

$$R_T = \sigma T^4 \quad (4.4.2)$$

donde  $\sigma$  es una constante universal conocida como la constante de Stefan - Boltzman

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{watt}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}} \quad (4.4.3)$$

(ii) La frecuencia de radiancia espectral máxima (línea punteada) aumenta linealmente con la temperatura, es decir, al aumentar la temperatura el valor de la frecuencia máxima se desplaza hacia frecuencias más altas. Esto lo podemos expresar mediante la relación

$$\nu_{\text{máx}} = kT \quad (4.4.4)$$

Esta relación recibe el nombre de ley de desplazamiento de Wien. Si utilizamos la relación  $\lambda\nu = c$  esta ley se puede también expresar en la forma

$$\lambda_{\text{máx}} T = K' = \text{constante}$$

donde  $\lambda_{\text{máx}}$  es la longitud de onda para la cual la radiancia espectral tiene su máximo valor a una temperatura  $T$  y que corresponde a la frecuencia máxima. El valor experimental encontrado para la constante  $K'$  es  $2.898 \times 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$ .

Estas conclusiones concuerdan con las observaciones mencionadas anteriormente, o sea que la cantidad de radiación térmica aumenta rápidamente con la temperatura, pues un cuerpo caliente radia mucha más energía calorífica a temperaturas más altas y la frecuencia principal de radiación se hace más alta al aumentar la temperatura. Esto significa que, el color de un cuerpo cambia de rojo a blanco y a azul.

Por otra parte, aunque pudiera parecer que la teoría clásica podía entender este fenómeno de radiación, existía el problema de no poder explicar adecuadamente la forma de la curva de la energía radiada, a pesar de los intentos de notables físicos de aquel tiempo. Para comprender mejor veamos esto con mayor detalle.

Consideremos una cavidad con una abertura muy pequeña como un cuerpo negro<sup>3</sup>. A bajas temperaturas el agujero parece negro, pero elevamos la temperatura calentando uniformemente las paredes de la cavidad. Las paredes internas emiten radiación térmica en la cavidad y sólo una parte muy pequeña de ésta saldrá del interior a través del agujero. Puesto que el agujero se comporta como una superficie negra, el espectro de la radiación emitida por éste será el espectro característico de un cuerpo negro. El espectro emitido por el agujero en la cavidad cuyas paredes se encuentran a una temperatura  $T$ , puede describirse mediante la radiancia espectral  $\mathfrak{R}_T(\nu)$ . Pero el espectro de radiación del interior de la cavidad se describe más convenientemente mediante la densidad de energía  $\rho_T(\nu)$ , la cual da la energía en el intervalo de frecuencias  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  por unidad de volumen de la cavidad a temperatura  $T$ .

La explicación física de esta radiación fue dada por Lord Rayleigh y Sir James Jeans a principios de 1900, considerando que los electrones de las paredes metálicas se agitan térmicamente y emiten radiación electromagnética dentro de la cavidad. Demostraron que la radiación dentro de la cavidad de volumen  $V$  consta de ondas estacionarias con nodos en las paredes y obtuvieron que el número de éstas, para un intervalo de frecuencias, está dado por la expresión

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (4.4.5)$$

y la energía promedio por onda  $\bar{E}$  se determina a partir de la ley clásica de equipartición de la energía, la cual nos dice que la energía promedio es la misma para cada onda estacionaria de la cavidad, independientemente de su frecuencia ( la energía se distribuye uniformemente para todas las frecuencias), esto es

$$\bar{E} = KT \quad (4.4.6)$$

donde  $K = 1.37 \times 10^{-23} \frac{\text{Joule}}{^\circ\text{K}}$  se conoce como la constante de Boltzman. Con esto se calcula la densidad de energía  $\rho_T(\nu)$  en el intervalo de frecuencias  $\nu$  a  $\nu + d\nu$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{(\text{Número de ondas estacionarias del intervalo de frecuencia}) \times (\text{la energía promedio de cada onda})}{\text{volumen de la cavidad}}$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{\left(\frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu\right) \times (KT)}{V}$$

<sup>3</sup> La radiación exterior a la cavidad penetra a través de un agujero y hay una probabilidad muy baja de que ésta pueda volver a salir. Así que, para fines prácticos, podemos decir que el agujero absorbe toda la radiación incidente. Por tanto, se comporta exactamente como lo hace una superficie de un cuerpo negro, es decir, absorbe toda la radiación que incide sobre ella.

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 K T d\nu \quad (4.4.7)$$

La relación (4.4.7) se conoce como la fórmula de Rayleigh y Jeans para la radiación de cuerpo negro y es un intento de la teoría clásica para describir los resultados experimentales. Sin embargo, cuando se compararon los resultados experimentales con las predicciones teóricas, se observó una gran discrepancia, como lo podemos observar en la gráfica 4.4.4.

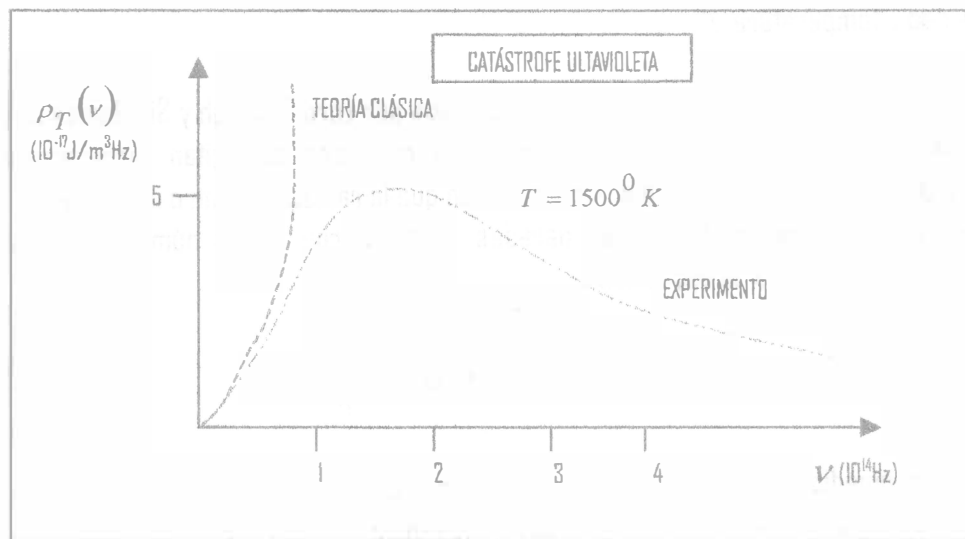


Figura 4.4.4

Como se puede observar en la gráfica, cuando la frecuencia tiende a cero, la predicción teórica se aproxima al resultado experimental. No obstante, para valores altos de la frecuencia, es decir, para la región ultravioleta del espectro, la predicción teórica difiere enormemente del resultado experimental. La teoría clásica predice una densidad de energía infinita cuando tendemos a valores altos de la frecuencia y el experimento muestra que, a frecuencias muy altas, la densidad de energía tiende a cero. Esta falla de la teoría clásica fue tan decepcionante que se le denominó **catástrofe ultravioleta**.

Eran evidente entonces que en el caso de la radiación de cuerpo negro las teorías clásicas, termodinámica y electromagnetismo, no eran adecuadas y que se necesitaba un nuevo tipo de teoría para resolver este problema. Fue el físico alemán Max Planck quien, en la primera década del siglo XX, dio solución a la catástrofe ultravioleta, postulando que la radiación de cuerpo negro era producida por los electrones que se agitan térmicamente y oscilan en las paredes de la cavidad, así que la radiación podía ser producida por osciladores electrónicos en las paredes de la cavidad, los cuales emiten energía en forma de chorros. Veamos esto con mayor detalle.

Planck estudió la curva de radiación y se dio cuenta que necesitaba una manera de hacer que la radiación tendiera a cero cuando la frecuencia tendiera a una frecuencia muy grande ( $\infty$ ). Planck dedujo que las reflexiones en las paredes de la cavidad resultaban de la radiación absorbida y rápidamente reemitida por los átomos de la pared; durante este tiempo los átomos oscilarían a una frecuencia igual a la frecuencia de radiación. Ya que la energía de un sistema en oscilación depende de su frecuencia, Planck trató de encontrar un modo de reducir el número de ondas estacionarias de alta frecuencia reduciendo el número de osciladores de alta frecuencia en las paredes de la cavidad, y así empíricamente encontró la solución al problema aproximando la curva observada con una función que se ajustaba perfectamente a los datos experimentales. Así tenía una fórmula empírica para la energía media de un oscilador en función de la frecuencia. En otras palabras, tenía la relación que debía sustituir por la fórmula  $\bar{E} = KT$ , sin embargo, Planck encontró que para derivar esta relación necesitaba una hipótesis muy extraña<sup>4</sup>. Esa hipótesis se basaba en que el oscilador armónico sólo podía emitir o adquirir energía  $\hbar\omega = h\nu$  (donde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , y  $\omega = 2\pi\nu$ ) en cada ocasión, y que la idea de que estos osciladores pudieran tener cualquier energía era falsa. Esto fue el principio del fin de la mecánica clásica.

Los postulados de Max Planck para dar solución a la catástrofe ultravioleta se pueden enunciar de la siguiente manera:

- i) La ley de equipartición de la energía es correcta para el límite cuando la frecuencia tiende a cero.
- ii) En el límite, cuando las frecuencias tienden al infinito, la energía promedio debe tender a cero.

Para que se cumplan estos postulados, la energía promedio debe ser dependiente de la frecuencia. Además

- iii) La energía promedio es una variable discontinua, es decir discreta, como el caso de la carga eléctrica<sup>5</sup>. La energía debería ser un múltiplo entero de cierta cantidad fundamental. Los osciladores emiten energía a chorros

$$\begin{aligned}
 E &= 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, 4\Delta E, \dots \\
 E_n &= n\Delta E
 \end{aligned}
 \tag{4.4.8}$$

<sup>4</sup> Esta hipótesis constituyó la piedra angular de una nueva teoría física llamada física cuántica

<sup>5</sup> La carga siempre es un múltiplo entero de la carga fundamental  $e$  y por tanto la carga es una cantidad no continua o discreta y se dice que la carga está cuantizada

donde  $\Delta E$  es un intervalo uniforme entre valores permitidos sucesivos de la energía y  $n$  toma valores únicamente enteros. Planck tomó la suposición más simple que se puede hacer para  $\Delta E$  y que le pudiera llevar al resultado esperado, esto es, que el delta de energía era proporcional a la frecuencia

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega \quad (4.4.9)$$

donde  $h$  es una constante de proporcionalidad. Sustituyendo la ecuación (4.4.9) en (4.4.8) tenemos los valores permitidos de la energía

$$E_n = nh\nu = \hbar\omega \quad (4.4.10)$$

Derivemos ahora la primera fórmula cuántica determinada correctamente. Nuestra derivación no es exactamente igual a la hecha por Planck, ya que él utilizó razonamientos mucho más complicados que los presentados aquí y tuvo que demostrar muchas de las cosas que nosotros tomaremos como un hecho, pero esto no nos priva del deleite de la deducción.

Supongamos que los niveles de energía permitidos en un oscilador armónico están igualmente espaciados a una distancia  $\hbar\omega$ , de modo que el oscilador sólo pueda tomar estas diversas energías. Esto se esquematiza en el diagrama de la figura 4.4.5, en donde  $N_i$  es el número de osciladores en el estado de energía  $E_i$  y  $P_i$  es la probabilidad de encontrarse en el nivel o estado de energía  $E_i$ .

$\underline{N_4}$	$E_4 = 4\hbar\omega$	$P_4 = \alpha \exp \left[ \frac{-4\hbar\omega}{KT} \right]$
$\underline{N_3}$	$E_3 = 3\hbar\omega$	$P_3 = \alpha \exp \left[ \frac{-3\hbar\omega}{KT} \right]$
$\underline{N_2}$	$E_2 = 2\hbar\omega$	$P_2 = \alpha \exp \left[ \frac{-2\hbar\omega}{KT} \right]$
$\underline{N_1}$	$E_1 = \hbar\omega$	$P_1 = \alpha \exp \left[ \frac{-\hbar\omega}{KT} \right]$
$\underline{N_0}$	$E_0 = 0$	$P_0 = \alpha$

Figura 4.4.5

Planck demostró que la probabilidad de ocupar un nivel de energía  $E$  es

$$P(E) = \alpha \exp\left[-\frac{E}{KT}\right] \quad (4.4.11)$$

Supongamos ahora que tenemos muchos osciladores, cada uno de ellos vibrando con una frecuencia  $\omega$ . Algunos de estos osciladores estarán en el estado cuántico más bajo, otros en el siguiente y así sucesivamente. Ahora bien, lo que queremos conocer es la energía media de todos estos osciladores. Para encontrarla calculemos la energía total de todos los osciladores y dividámosla por el número de osciladores

$$\langle E \rangle = \frac{E_{Total}}{N_{Total}} \quad (4.4.12)$$

La relación (4.4.12) es la energía media por oscilador en equilibrio térmico y será la energía que está en equilibrio con la radiación de cuerpo negro. El resultado explícito de esta energía será el valor que reemplace a la ley de equipartición de la energía en la ecuación (4.4.7).

Ahora bien, si  $N_0$  es el número de osciladores en el estado más bajo de energía  $E_0$ ;  $N_1$  es el número de osciladores en el estado de energía  $E_1$ ;  $N_2$  es el número de osciladores en el estado de energía  $E_2$ ; etc. De acuerdo con la probabilidad encontrada por Planck, el número  $N_1$  de los que están en el primer estado será el número  $N_0$  de los que están en el estado fundamental multiplicado por  $e^{\frac{-\hbar\omega}{KT}}$  y análogamente

$$\begin{aligned} N_2 &= N_0 e^{\frac{-2\hbar\omega}{KT}} \\ N_3 &= N_0 e^{\frac{-3\hbar\omega}{KT}} \\ N_4 &= N_0 e^{\frac{-4\hbar\omega}{KT}} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.4.13)$$



Ahora bien, si un oscilador está en el estado fundamental no hay energía. Si está en el primer estado, la energía es  $\hbar\omega$  y hay  $N_1$  de ellos. Por tanto, la energía que obtenemos de ellos es  $N_1 \hbar\omega$  y así, sucesivamente

$$\begin{aligned} E_0 &= 0 \\ E_1 &= N_1 \hbar\omega \\ E_2 &= N_2 2\hbar\omega \\ &\vdots \\ E_n &= N_n n\hbar\omega \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Ahora estamos listos para calcular. De la ecuación (4.4.12)

$$\langle E \rangle = \frac{E_{Total}}{N_{Total}} = \frac{E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_n}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n} \tag{4.4.15}$$

sustituyendo (4.4.13) y (4.4.14) en (4.4.15)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{N_1 \hbar\omega + N_2 2\hbar\omega + N_3 3\hbar\omega + \dots + N_n n\hbar\omega}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n} \\ \langle E \rangle &= \frac{N_0 e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} \hbar\omega + N_0 e^{-\frac{2\hbar\omega}{KT}} 2\hbar\omega + N_0 e^{-\frac{3\hbar\omega}{KT}} 3\hbar\omega + \dots}{N_0 + N_0 e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} + N_0 e^{-\frac{2\hbar\omega}{KT}} + \dots} \\ \langle E \rangle &= \frac{N_0 \hbar\omega \left( e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} + 2e^{-\frac{2\hbar\omega}{KT}} + 3e^{-\frac{3\hbar\omega}{KT}} + \dots \right)}{N_0 \left( 1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{KT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{KT}} \dots \right)} \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Hagamos ahora el siguiente cambio de variable:  $x = e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}}$  y apliquémoslo a la ecuación (4.4.16)

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{(1 + x + x^2 + x^3 \dots)} \tag{4.4.17}$$

Ahora utilicemos nuestro conocimiento de serie de potencias. Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{4.4.18}$$

derivando esta expresión tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{1-x} \right] &= \frac{d}{dx} [1 + x + x^2 + x^3 + \dots] \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

utilizando (4.4.18) y (4.4.19) en (4.4.17)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\hbar \omega x (1 + 2x + 3x^2 + \dots)}{(1 + x + x^2 + x^3 \dots)} \\ \langle E \rangle &= \frac{\hbar \omega x \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{(1-x)}} \\ \langle E \rangle &= \frac{\hbar \omega x}{(1-x)} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

regresando a nuestra variable original

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar \omega e^{-\frac{\hbar \omega}{KT}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{KT}}\right)} = \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{KT}} \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{KT}}\right)}$$

y finalmente obtenemos que la energía promedio es

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{KT}} - 1} \quad (4.4.21)$$

Esta fue la primera ecuación cuántica que se conoció. Aquí está la respuesta cuantitativa de lo que está bien en lugar de  $KT$ . Naturalmente esta expresión se debe aproximar a  $KT$  cuando  $\omega \rightarrow 0$  o cuando  $T \rightarrow \infty$ , y se puede verificar sin mayor dificultad. Sustituyendo la ecuación (4.4.21) en lugar de  $KT$  en la ecuación (4.4.7) tenemos

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{KT}} - 1} d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 \left( e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1 \right)} \quad \text{B} \quad (4.4.22)$$

o en forma equivalente

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)}$$

Esta es la famosa fórmula de Planck para la radiación de cuerpo negro. Verifiquemos que nos da los resultados experimentales:

i) Si  $h\nu \ll KT$

$$\begin{aligned} \rho_T(\nu)d\nu &= \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)} \approx \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3} \frac{1}{\left( 1 + \frac{h\nu}{KT} + \dots \right) - 1} \\ \rho_T(\nu)d\nu &\approx \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3} \frac{KT}{h\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} KT d\nu \end{aligned}$$

La fórmula de Rayleigh y Jeans para frecuencias bajas

(ii) Si  $h\nu \gg KT$  entonces  $\frac{h\nu}{KT} \gg 1$  lo que implica que  $e^{\frac{h\nu}{KT}} \gg 1$  así que

$$\begin{aligned} \rho_T(\nu)d\nu &= \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)} \approx \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}}} \\ \rho_T(\nu)d\nu &\approx \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{KT}} \end{aligned}$$

Así que cuando  $\nu \rightarrow \infty$  tenemos que  $\rho_T(\nu) \rightarrow 0$  como muestran los resultados experimentales.

<sup>B</sup> Dónde hemos utilizado  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  y  $d\nu = \frac{d\omega}{2\pi}$

En realidad, al principio Planck no estaba seguro de si su introducción de la constante  $h$  era únicamente un recurso matemático o un asunto de gran significado físico. El mismo llamó a su postulado un “**acto de desesperación**”.

“Sabía, decía, que el problema del equilibrio de la materia y la radiación es de suma importancia para la física; conocía la fórmula que reproduce la distribución de energía en el espectro normal; tenía que encontrar una interpretación teórica a cualquier precio, por alto que fuera”.

La relación encontrada por Planck también conduce al resultado correcto para la energía emitida por el cuerpo negro, es decir, el área bajo la curva experimental. Este resultado se obtiene integrando la fórmula de Planck a través de todas las frecuencias

$$R_T = \int_0^{\infty} \rho_T(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)}$$

$$\text{sea } p = \frac{h\nu}{KT} \Rightarrow \nu = \frac{KT}{h} p \quad ; \quad dp = \frac{h}{KT} d\nu \Rightarrow d\nu = \frac{KT}{h} dp$$

$$R_T = \frac{8\pi K^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{p^3 dp}{(e^p - 1)}$$

donde  $\int_0^{\infty} \frac{p^3 dp}{(e^p - 1)} = \frac{\pi^4}{15}$ , así que

$$R_T = \frac{8\pi^5 K^4}{15c^3 h^3} T^4$$

Si definimos la constante  $\sigma$  como

$$\sigma = \frac{8\pi^5 K^4}{15c^3 h^3} \tag{4.4.23}$$

obtenemos finalmente

$$R_T = \sigma T^4$$

Planck conocía el valor experimental de  $\sigma$ , así que de la relación (4.4.23) calculó el valor de  $h$  obteniendo el valor  $6.6249 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg}$ .

Cuando en 1900 Planck anunció sus resultados en una junta de la sociedad Alemana de Física, no hubo grandes manifestaciones de júbilo, ya que, como mencionamos anteriormente, aun Planck mismo no creía que había hecho algo más que encontrar una explicación, un tanto fortuita, para un solo fenómeno físico. Habrían de pasar otros cinco años hasta que un joven de nombre Albert Einstein, en un análisis de un experimento, conocido con el nombre de efecto fotoeléctrico, mostró que los resultados de Planck no eran solamente una curiosidad asociada a la radiación de la cavidad, sino que era, de hecho, una propiedad fundamental de las ondas electromagnéticas que llevó a una nueva e inesperada forma de ver el mundo físico.

## 4.5 EFECTO FOTOELÉCTRICO

A lo largo de los siglos hemos contado principalmente con dos modelos de la luz: el corpuscular y el ondulatorio, Isaac Newton era partidario del modelo corpuscular. Pensaba que la luz era una lluvia de partículas diminutas. Christian Huygens afirmaba que la luz era un fenómeno ondulatorio. El modelo ondulatorio se vio reforzada un siglo después cuando Tomas Young demostró el fenómeno de interferencia. Más tarde James Clerk Maxwell propuso que la luz es radiación electromagnética que forma parte de un espectro electromagnético más amplio. El modelo ondulatorio recibió un total apoyo cuando Heinrich Hertz generó ondas de radio que se comportaban como Maxwell había predicho. Esto parecía confirmar la naturaleza ondulatoria de la luz de una vez por todas. Pero el modelo ondulatorio electromagnético de Maxwell no habría de ser la última palabra sobre la naturaleza de la luz. En 1905, Albert Einstein resucitó la teoría corpuscular de la luz.

Einstein imaginó las partículas de luz como paquetes de energía electromagnética concentrada y amplió la idea de Max Planck. Planck pensaba que la luz existía en forma de ondas electromagnéticas continuas, tal como lo había propuesto Maxwell, pero que la emisión y la absorción se llevaba a cabo en porciones, como se estudió en la sección pasada, a las que llamó **cuantos**<sup>7</sup>. Einstein llevó esta idea aun más lejos y propuso que la luz misma se compone de cuantos, a los cuales llamo fotones. Para proponer su teoría cuántica de la luz Einstein se apoyó en un efecto que fue descubierto por Heinrich Hertz y conocido con el nombre de efecto fotoeléctrico. Esta sección la dedicaremos a estudiar con algún detalle el efecto fotoeléctrico y como la teoría ondulatoria de la luz no pudo explicar este fenómeno y la teoría fotónica de Einstein si, lo cual conduciría a desechar el concepto clásico de las ondas electromagnéticas

Albert Einstein, en 1905, inició un análisis novedoso de los resultados de Planck y les imprimió un carácter más general. Del estudio de diversas situaciones, Einstein concluyó que los cambios discretos de la energía de los osciladores materiales de Planck, son debidos a que el campo de radiación está constituido por parcelas de

<sup>7</sup> Un cuanto es una unidad elemental, esto es, la cantidad más pequeña posible de algo. Por ejemplo, el cuanto de la carga es la carga fundamental  $e$ , cuando una cantidad posee cuantos se dice que esta cuantizada.

energía, las que son absorbidas o emitidas por los átomos como un todo. Con esto, Einstein atribuye al campo electromagnético una componente discreta, corpuscular, lo que representaba una revisión del carácter predominantemente continuo que se tenía de la luz hasta ese momento. Posteriormente se llamó fotones a estos cuantos de campo de radiación, nombre que es hoy usual y que utilizaremos en adelante.

Einstein aplicó su concepción fotónica de la luz al estudio de varios problemas, en particular al problema del efecto fotoeléctrico, y demostró que con ayuda de la nueva teoría desaparecerían viejas y graves dificultades teóricas. Repasaremos la situación brevemente.

El efecto fotoeléctrico consiste en que la energía radiante (luz) de alta frecuencia, aun cuando proviniese de un fuente tenue, es capaz de desprender electrones de la superficie de un metal, en cambio, la luz de baja frecuencia, incluso una fuente muy intensa, no puede desprender electrones del metal, el experimento se muestra en la figura 4.5.1. La cantidad de emisión de electrones<sup>8</sup> se mide como una corriente eléctrica usando un amperímetro, y la energía cinética de los electrones se determina aplicando un potencial  $V$ . Este hecho fue descubierto durante los trabajos experimentales, realizados por H. Hertz en 1887, que condujeron a demostrar la existencia de ondas electromagnéticas. El estudio experimental de este fenómeno condujo a resultados paradójicos de acuerdo con los puntos de vista de la teoría clásica.

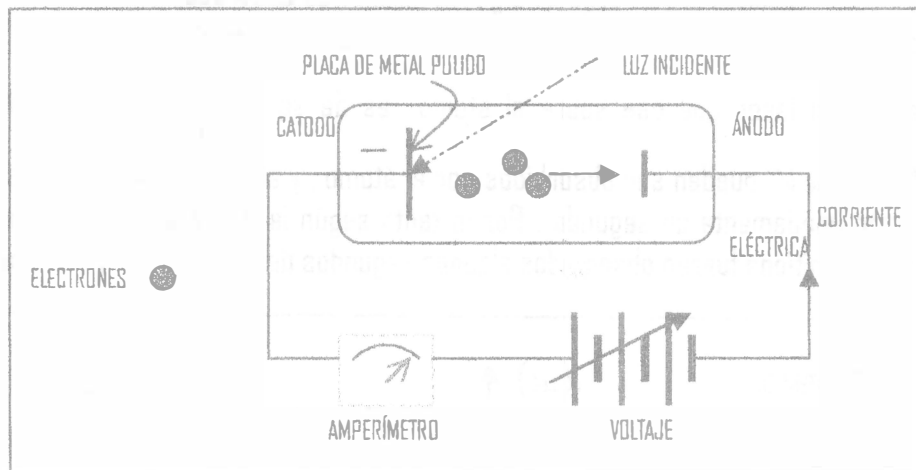


Figura 4.5.1

Clásicamente la teoría que describe el comportamiento de la luz es la teoría ondulatoria, ya que de los trabajos de Maxwell se sabía que la luz era una onda electromagnética, así que de acuerdo a esta teoría se deberían esperar los siguientes resultados del efecto fotoeléctrico :

- (i) La energía cinética de los electrones debe aumentar si el haz de luz se hace más intenso. Esto es debido a que en la teoría ondulatoria, un átomo absorberá energía de una onda electromagnética que

<sup>8</sup> A los electrones emitidos en este efecto también se les da el nombre de fotoelectrones

incide en forma proporcional al área que presenta dicha onda. Los electrones oscilaran en respuesta al campo eléctrico de esa onda, hasta que se absorba suficiente energía para liberar un electrón del átomo. Al aumentar la intensidad de la fuente de luz, aumenta la razón de absorción de energía, ya que el campo electromagnético aumenta y, por tanto, la energía cinética de los electrones debe aumentar.

(ii) De acuerdo con la teoría ondulatoria, el efecto fotoeléctrico debe ocurrir para cualquier frecuencia de luz, con la única condición de que la luz sea lo bastante intensa para proporcionar la energía necesaria para expulsar los electrones.

(iii) En la teoría clásica, la energía de la luz está distribuida uniformemente en el frente de onda. Así, si la luz es bastante débil, se puede calcular de manera aproximada, el tiempo necesario para que un átomo absorba suficiente energía para liberar un electrón, es decir, sería posible medir un tiempo de retardo entre el choque de la luz con la superficie y la emisión del electrón y durante este intervalo, el electrón debería estar absorbiendo energía de haz hasta que éste hubiera acumulado lo suficiente para escapar. Por ejemplo: Si se utiliza un láser helio-neón que puede dar una potencia de salida aproximada de  $10^{-3} W$ , distribuida sobre un área de algunos milímetros cuadrados ( $10^{-5}$ ). Un átomo típico tiene un diámetro del orden de  $10^{-10} m$  y por tanto un área aproximada de  $10^{-20} m^2$ . La fracción de la intensidad del láser que cae sobre el átomo es de sólo  $\frac{10^{-20}}{10^{-5}} = 10^{-15}$ . Entonces únicamente  $10^{-18} W = 6eV$  pueden ser absorbidos por el átomo, y absorber unos cuantos  $eV$  de energía le toma aproximadamente un segundo. Por lo tanto según la teoría ondulatoria, se esperaría que los electrones emitidos fueran observados algunos segundos después de haber encendido la fuente de luz

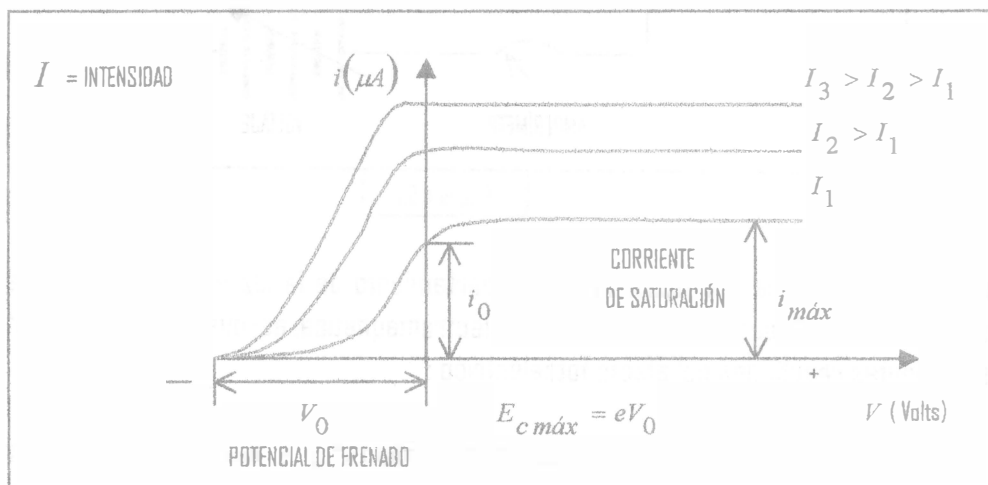


Figura 4.5.2

Sin embargo, los resultados experimentales eran contrarios a las predicciones teóricas. Del experimento se observan las siguientes características del efecto fotoeléctrico:

- i) Existe una energía cinética máxima  $E_{c\text{ máx}} = eV_0$ , la cual es independiente de la intensidad de la luz, estos resultados se pueden obtener de la interpretación de la gráfica 4.5.2 en la cual se analiza la corriente de electrones para diferentes intensidades de la luz de longitud de onda  $\lambda$  contra el potencial acelerador.
- ii) Existe, para cada superficie metálica, una frecuencia de umbral característica  $\nu_0$ . Para frecuencias menores que  $\nu_0$ , no sucede el efecto fotoeléctrico, independientemente de lo intensa que sea la iluminación, esto se obtiene graficando de nuevo la corriente eléctrica contra el potencial, pero para diferentes fuentes de frecuencia crecientes, como se ilustra en la figura 4.5.3.

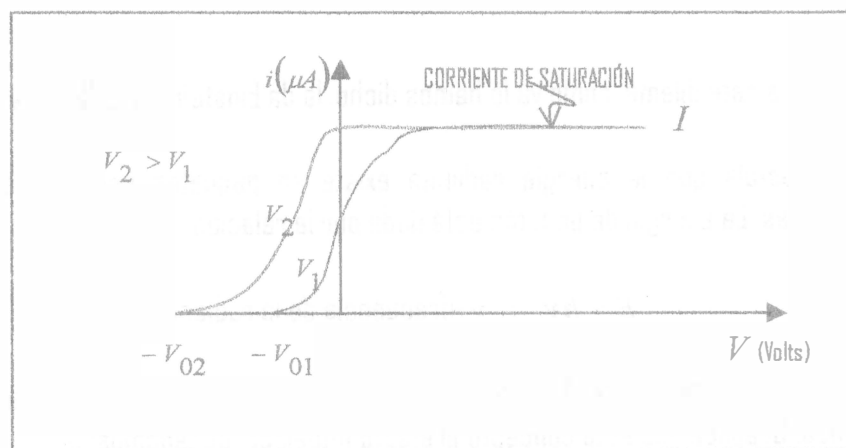


Figura 4.5.3

En la gráfica se nota que con la frecuencia creciente se requiere un potencial de frenado aun mayor para reducir la corriente eléctrica a cero. De esta gráfica se obtiene los datos para graficar  $K_{máx}$  contra la frecuencia incidente  $\nu$ , la cual se muestra en la figura 4.5.5., de donde se deduce lo mencionado al principio de este inciso.

- iii) No se detecta ningún tiempo de retardo para la expulsión de los electrones.



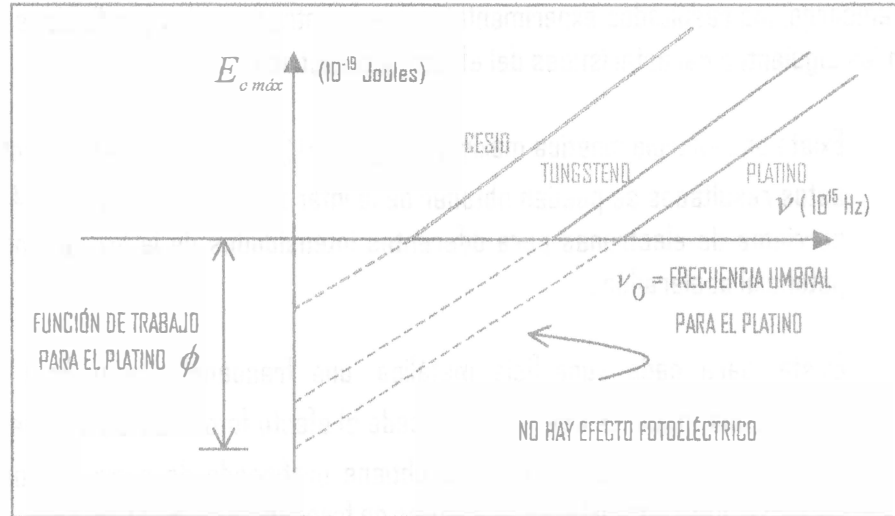


Figura 4.5.4

La solución a este dilema, como ya lo hemos dicho, la da Einstein en 1905 de la siguiente manera:

Einstein postula que la energía radiante existe en paquetes concentrados de energía, más tarde denominados fotones. La energía de un fotón está dada por la relación

$$E = h\nu \quad ; \quad \nu = \text{frecuencia de la radiación} \quad (4.5.1)$$

donde  $h$  es la constante de Planck. Así que, según Einstein, la energía radiante está distribuida en el espacio en forma discontinua. Si aplicamos este concepto al efecto fotoeléctrico tenemos:

Para Einstein toda la energía de un fotón se transfiere a un solo electrón del metal. Cuando un electrón se emite de la superficie del metal su energía cinética es

$$E_c = h\nu - w \quad (4.5.2)$$

donde  $h\nu$  es la energía del fotón absorbida por el electrón y  $w$  es el trabajo para sacar al electrón del metal. Este trabajo es necesario para contrarrestar los campos de atracción de los átomos de la superficie y la pérdida de la energía cinética causada por colisiones internas del electrón. Cuando la fuerza de enlace átomo - electrón es más débil y no hay pérdida interna de energía cinética, tendremos

$$E_{c \text{ máx}} = h\nu - w_0 \quad (4.5.3)$$

donde  $w_0$  es la energía característica del metal (función de trabajo), es la mínima energía necesaria para que un electrón pase a través de la superficie de un metal. Veamos cómo esta teoría está de acuerdo con los datos experimentales:

- a) Al doblarse la intensidad de la luz, se duplica el número de fotones, por tanto el número de electrones o la corriente fotoeléctrica aumenta al doble. Además tenemos una frecuencia de umbral, la cual corresponde cuando un fotón de frecuencia  $\nu_0$  apenas tiene suficiente energía para expulsar los fotoelectrones, es decir, el caso en el que  $E_{c\text{ máx}} = 0$ , como ejemplo tenemos al platino de la gráfica que se muestra en la figura 4.5.4.

$$\phi = w_0 = h\nu_0 \quad (4.5.4)$$

- b) Si la frecuencia disminuye por debajo de  $\nu_0$ , los fotones individuales, independientemente de cuantos haya, es decir, independientemente de lo intensa que sea la iluminación, no tendrán la energía suficiente, individualmente, para expulsar electrones. La gráfica en la figura 4.5.4 ilustra esta situación para 3 diferentes metales.
- c) La energía requerida se suministra en paquetes concentrados. Si hay cualquier iluminación, sea cual sea, incidente sobre el metal, habrá por lo menos un fotón que le pegue. Este fotón será absorbido inmediatamente por algún átomo, produciendo la emisión inmediata de un fotoelectrón, siempre y cuando tenga la frecuencia apropiada. Entonces no tenemos ningún tiempo de retardo para la emisión de electrones.
- d) El modelo matemático que describe el experimento se puede obtener de la gráfica 3

$$E_{c\text{ máx}} = h\nu - \phi \quad (4.5.5)$$

Sustituyendo el valor de la energía cinética máxima en términos del potencial de frenado

$$E_{c\text{ máx}} = eV_0$$

$$eV_0 = h\nu - \phi \quad (4.5.6)$$

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{\phi}{e}$$

por tanto tenemos una recta de pendiente  $\frac{h}{e}$  y considerando los puntos experimentales se puede encontrar un valor de

$$\frac{h}{e} = 3.9 \times 10^{-15} \text{ volts} \cdot \text{seg}$$

Como conocemos el valor de  $e = 1.6 \times 10^{-19} c$ , el efecto fotoeléctrico nos permite predecir el valor de la constante de Planck

$$h \approx 6.2 \times 10^{-34} \text{ joules} \cdot \text{seg}$$

Experimentos posteriores muy finos realizados por Millikan entre los años 1914 y 1916 permitieron demostrar la validez general de la teoría y confirmar que la constante de estas fórmulas coincide precisamente con la constante de Planck. En palabras de Millikan:

"El efecto fotoeléctrico ... proporciona una prueba que es completamente independiente de los hechos de la radiación de cuerpo negro de la certeza de la suposición fundamental de la teoría cuántica, a saber, la suposición de una emisión discontinua, explosiva, de la energía absorbida por los componentes electrónicos de los átomos provenientes de ... las ondas. Este materializa, por decirlo así, la cantidad  $h$  descubierta por Planck al estudiar la radiación de cuerpo negro, y nos da una confianza que no inspira ningún otro tipo de fenómeno, de que el concepto físico primario, que es base del trabajo de Planck, corresponde a la realidad".

En 1921 Einstein recibió el premio Nóbel por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico; y Millikan, en 1923, por la valoración experimental de dicho fenómeno.

## 4.6 EFECTO COMPTON

Otra prueba de la realidad de los fotones y del hecho de que se comportan como partículas de la energía y cantidad de movimiento bien definidas fueron aportadas por Arthur H. Compton. Hizo incidir rayos  $X^9$  sobre blancos de bajo número atómico, como el carbono. Éstos tienen muchos electrones débilmente enlazados que esencialmente están "libres" y dispersan la energía radiante en una forma característica. La teoría clásica se complica debido a varios factores, uno de los cuales es que los electrones rebotan en el choque, y así se introduce un desplazamiento Doppler en la radiación que emite. Sea como fuere, Compton informó en 1922 que los experimentos disponibles estaban en grave conflicto con la teoría clásica. En esta sección se analiza brevemente este fenómeno.

El arreglo experimental de Compton se muestra, de forma simplificada, en la figura 4.6.1. Rayos  $X$  de longitud de onda  $\lambda$  llegan a un dispersor de grafito. Las distribuciones de intensidad con respecto a la longitud de onda se miden, para los rayos  $X$  dispersos, a cualquier ángulo seleccionado  $\phi$ . Las longitudes de onda dispersas se miden mediante la observación de las reflexiones a través de un cristal (reflexiones de Bragg). Sus intensidades se miden mediante un detector

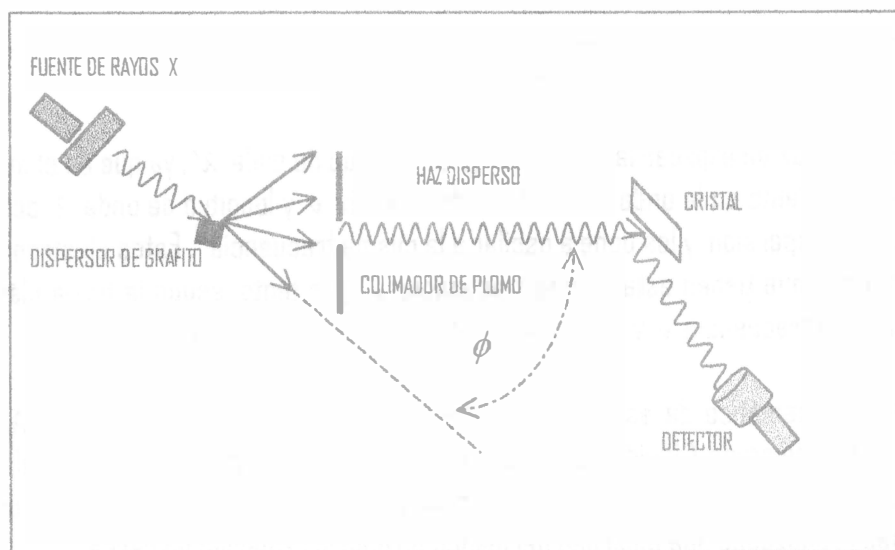


Figura 4.6.1

Cuando se hace incidir un haz de rayos  $X$ , de longitud de onda  $\lambda$  bien definida, sobre un blanco de grafito para varios ángulos de dispersión y se mide la intensidad de los rayos dispersos como función de su longitud de onda, se observa que aunque el haz incidente consta esencialmente de una sola longitud de onda  $\lambda$ , los rayos  $X$  dispersados tienen su máxima intensidad para dos longitudes de onda, la original  $\lambda$ , es decir la misma que la longitud de onda

<sup>9</sup> En la siguiente sección estudiaremos con detenimiento a los rayos  $X$ , por el momento, consideremos que son ondas electromagnéticas de frecuencias muy altas o longitudes de onda muy cortas.

incidente y una longitud de onda adicional  $\lambda'$  que es siempre mayor que  $\lambda$  por una cantidad  $\Delta\lambda$  y que depende del ángulo de dispersión y no del medio dispersor. En la figura 4.6.2 se muestran los resultados experimentales de Compton en una gráfica de la intensidad contra la longitud de onda,

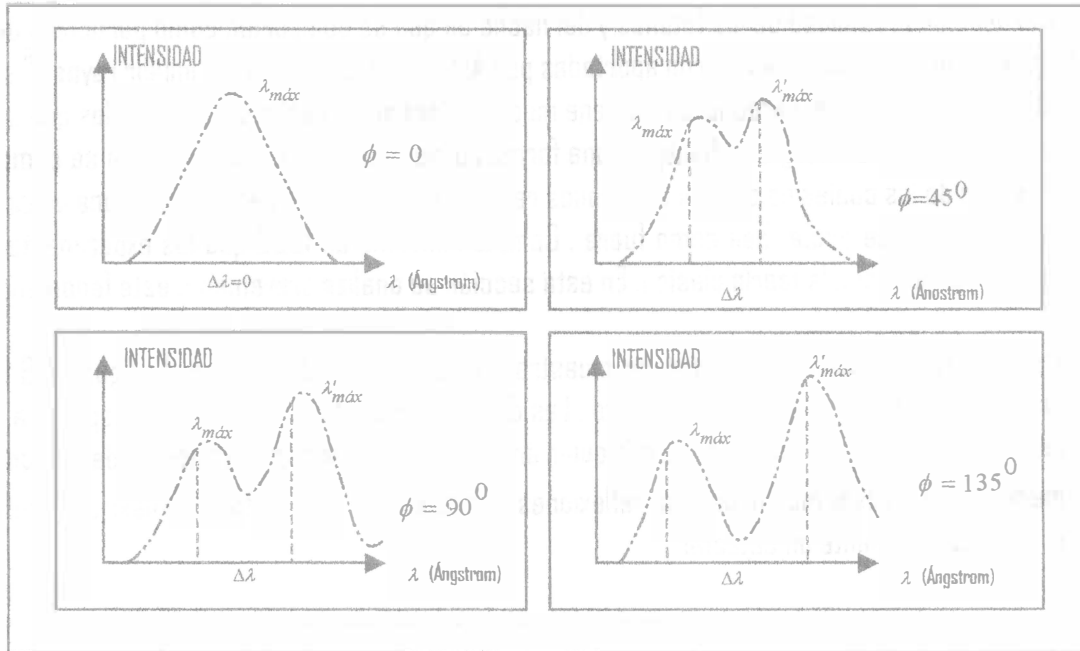


Figura 4.6.2

La teoría clásica es incapaz de explicar la presencia de la longitud de onda  $\lambda'$ , ya que en el modelo clásico el vector de campo eléctrico oscilante en la onda incidente de frecuencia  $\nu$  y longitud de onda  $\lambda$  actúa sobre los electrones libres del bloque de dispersión y los pone a oscilar a la misma frecuencia<sup>10</sup>. Estos electrones oscilantes radian ondas electromagnéticas que tienen esta misma frecuencia  $\nu$ , por tanto, según la física clásica, la onda dispersada debe tener la misma frecuencia  $\nu$  y la misma longitud de onda  $\lambda$  que la onda incidente.

Siguiendo un análisis matemático de esta situación hecho por G.E.M. JAUNCEY, en 1923 A.H. COMPTON propuso audazmente que el haz de rayos X incidente era un conjunto de fotones con momento lineal, en la misma forma en que lo tiene una partícula, y que el proceso dispersor era una colisión elástica entre un fotón y un electrón y que los electrones rechazados que emergen del blanco forman la radiación dispersa.

El fotón incidente transfiere parte de su energía al electrón con el cual choca, por tanto, el fotón dispersado debe tener una energía más baja, digamos  $E'$ , lo que implica una frecuencia más baja  $\nu' = \frac{E'}{h}$  y una longitud de onda mayor  $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$ . Hagamos el cálculo explícitamente, coloquemos nuestro sistema de referencia, para el análisis, como lo ilustra la figura 4.6.3.

<sup>10</sup> Como las cargas de una pequeña antena de un radiotransmisor.

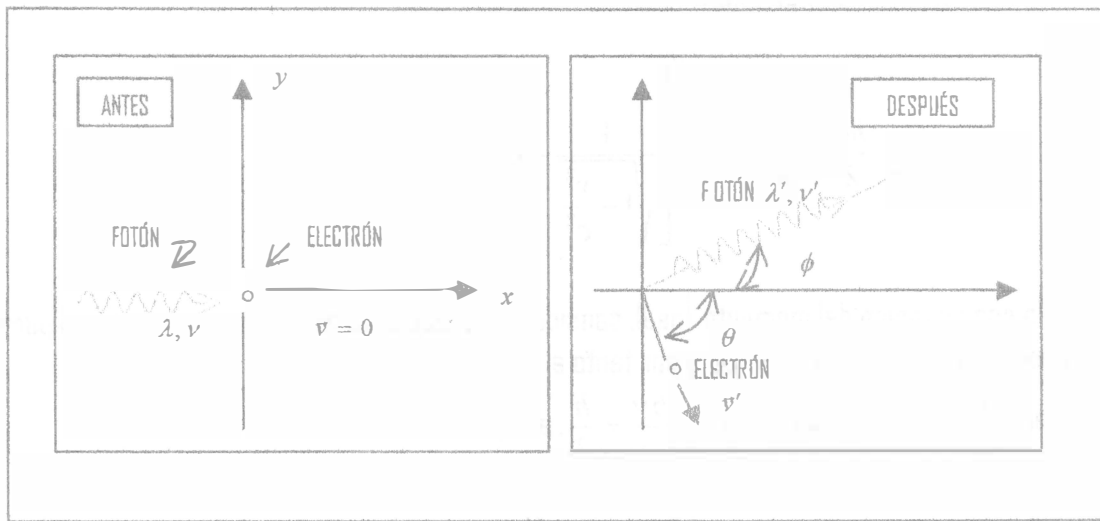


Figura 4.6.3

Aplicando la ley de conservación de masa y energía obtenemos

$$h\nu = h\nu' + (m - m_0)c^2 \quad (4.6.1)$$

donde :

$h\nu$  = Energía del fotón incidente.

$h\nu'$  = Energía del fotón rechazado.

$(m - m_0)c^2$  = Energía cinética adquirida por el electrón rechazado.

Considerando la transformación para la masa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.6.2)$$

y además

$$v = \frac{c}{\lambda} \quad (4.6.3)$$

$$v' = \frac{c}{\lambda'} \quad (4.6.4)$$

sustituyendo (4.6.2), (4.6.3) y (4.6.4) en (4.6.1)

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] \quad (4.6.5)$$

Ahora aplicamos la conservación del momento lineal, considerando que la cantidad de momento lineal para el fotón está dada por la expresión relativista  $E = pc$  y por tanto el

momento lineal para el fotón está dado por  $p_f = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ , así que

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e$$

$\vec{p}_f$  = momento del fotón antes de la colisión.

$\vec{p}'_f$  = momento del fotón después de la colisión.

$\vec{p}'_e$  = momento del electrón después de la colisión.

En la dirección  $x$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \phi + \gamma m_0 v \cos \theta \quad (4.6.6)$$

En la dirección  $y$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi - \gamma m_0 v \sin \theta \quad (4.6.7)$$

con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  de (4.6.5)

$$\frac{h}{m_0 c \lambda} = \frac{h}{m_0 c \lambda'} + \gamma - 1 \quad (4.6.8)$$

de (4.6.6) y (4.6.7)

$$\frac{h}{m_0 c \lambda} = \frac{h}{m_0 c \lambda'} \cos \phi + \frac{v}{c} \gamma \cos \theta \quad (4.6.9)$$

$$0 = \frac{h}{m_0 c \lambda'} \sin \phi - \frac{v}{c} \gamma \sin \theta \quad (4.6.10)$$

Ahora de (4.6.9) y (4.6.10)

$$\frac{h}{m_0 c \lambda} - \frac{h}{m_0 c \lambda'} \cos \phi = \frac{v}{c} \gamma \cos \theta \quad (4.6.11)$$

$$\frac{h}{m_0 c \lambda'} \sin \phi = \frac{v}{c} \gamma \sin \theta \quad (4.6.12)$$

Elevando al cuadrado (4.6.11) y (4.6.12) y sumando se obtiene la relación

$$\frac{h^2}{m_0^2 c^2 \lambda} - \frac{2h^2}{m_0^2 c^2 \lambda \lambda'} \cos \phi + \frac{h^2}{m_0^2 c^2 \lambda'^2} = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \quad (4.6.13)$$

de (4.6.8)

$$\frac{h}{m_0 c} \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right] + 1 = \gamma$$

y elevando al cuadrado

$$\frac{h^2}{m_0^2 c^2} \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right]^2 + \frac{2h}{m_0 c} \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right] + 1 = \gamma^2 \quad (4.5.14)$$

restando (4.6.13) y (4.6.14)

$$\frac{h}{m_0 c} \cos \phi - \frac{h}{m_0 c} + (\lambda' - \lambda) = 0$$

$$\frac{h}{m_0 c} [\cos \phi - 1] + (\lambda' - \lambda) = 0$$

$$(\lambda' - \lambda) = \frac{h}{m_0 c} [1 - \cos \phi]$$

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_0 c} [1 - \cos \phi] \quad (4.5.15)$$



Por lo cual la consideración de Compton permite obtener una relación teórica que está de acuerdo con los resultados experimentales, es decir, la predicción de  $\Delta\lambda$ . La relación  $\frac{h}{m_0c} = 0.024\text{\AA}$  se conoce como la longitud de onda Compton para el electrón, sin embargo, hay que recordar que no es una longitud de onda sino un cambio en la longitud de onda.

Compton escribió, en un artículo titulado "*Teoría cuántica de la dispersión de los rayos X*"

*"La presente teoría parte esencialmente de la suposición de que cada electrón útil en la dispersión, dispersa un cuanto completo. Incluye también la hipótesis de que los cuantos de radiación se reciben de direcciones definidas y se difunden en direcciones definidas. La confirmación experimental de la teoría indica, en forma muy convincente, que un cuanto de radiación lleva consigo cantidad de movimiento dirigida, así como energía."*

## 4.7 OTRAS EVIDENCIA EXPERIMENTALES QUE CONFIRMAN LA TEORÍA DE FOTÓN

Aunque los efectos Compton y fotoeléctrico suministraron la primeras evidencias experimentales en apoyo del fotón como el cuanto de la radiación electromagnética, hay otros experimentos que también pueden ser interpretados correctamente si se supone la cuantización ( comportamiento corpuscular) de la radiación electromagnética. En esta sección se estudiarán algunos de estos procesos, los cuales no pueden entenderse si se considera sólo la naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética.

### 4.7.1 RAYOS X

Los **rayos X** fueron descubiertos por el profesor Wilhelm Röntgen cuando diseñaba un experimento para estudiar los rayos catódicos.<sup>11</sup> Röntgen cubrió un tubo de descarga con una cartulina negra. Cuando oscureció el cuarto e hizo pasar una descarga a través del tubo. Röntgen observó un débil resplandor a través del cuarto, en la vecindad de una mesa de trabajo. Como sabía que los rayos catódicos sólo podían viajar unos cuantos centímetros en el aire, repitió el procedimiento encontrando el mismo resplandor. Encendió un cerillo y descubrió que la fuente del misterioso resplandor era la fluorescencia de una pequeña pantalla de platino-cianuro de Bario sobre la mesa. Se dio cuenta que estaba presenciando un nuevo fenómeno de radiación. Como no sabía su origen, lo denominó **rayos X**.

<sup>11</sup>El rayo catódico es un haz de electrones que, en una lámpara termoiónica o recinto sometido al vacío, son emitidos por el electrodo caliente (cátodo) y atraídos por el electrodo frío (ánodo).

Los **rayos X**, según la física clásica, son ondas electromagnéticas con longitud de onda en el intervalo de aproximadamente  $10^{-8} m$  a  $10^{-13} m$  (menor a  $1 \text{ \AA}$ )<sup>12</sup>. La fuente de rayos x es la desaceleración de los electrones de alta energía que bombardean un blanco metálico. Un esquema simplificado del dispositivo experimental que se utiliza para la producción de **rayos X** se muestra en la figura 4.7.1

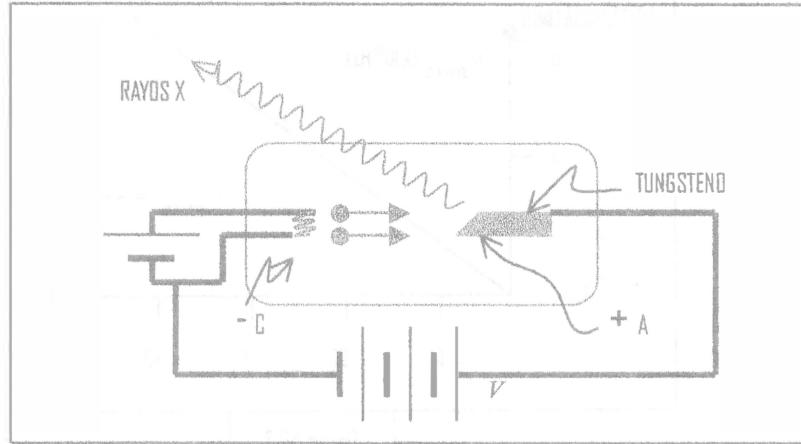


Figura 4.7.1

Los electrones son emitidos termoiónicamente por el filamento calentado del cátodo C y son acelerados hacia el ánodo A por un potencial aplicado  $V$ . Al chocar los electrones contra el ánodo, se emiten **rayos X**. Los resultados experimentales se muestran en la gráfica que se muestra en la figura 4.7.2, donde se ha graficado intensidad contra longitud de onda del espectro continuo de **rayos X** provenientes de un blanco de Tungsteno, para cuatro valores diferentes de energía (  $E$  en  $eV = 1 \times 10^{-19}$  Joules) de los electrones incidentes.

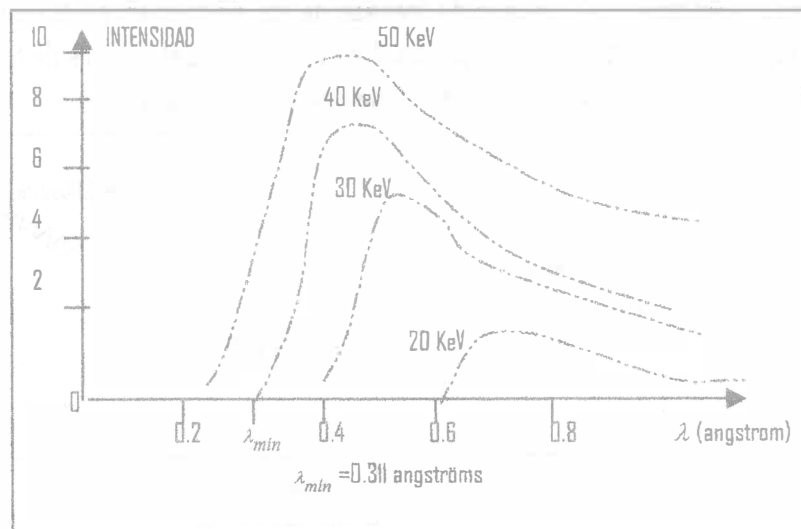


Figura 4.7.2

<sup>12</sup> 1 angström =  $10^{-10} m$

De acuerdo con la física clásica, la desaceleración de los electrones produce un espectro continuo de radiación electromagnética, sin embargo, no puede explicar la existencia de una longitud de onda mínima que sólo depende del potencial y no de los materiales blanco, pues no hay razón para que las ondas cuya longitud es menor que cierto valor crítico no emerjan del blanco. La gráfica de la frecuencia máxima que corresponde a la longitud de onda mínima contra el potencial acelerador se muestra en la figura 4.7.3.

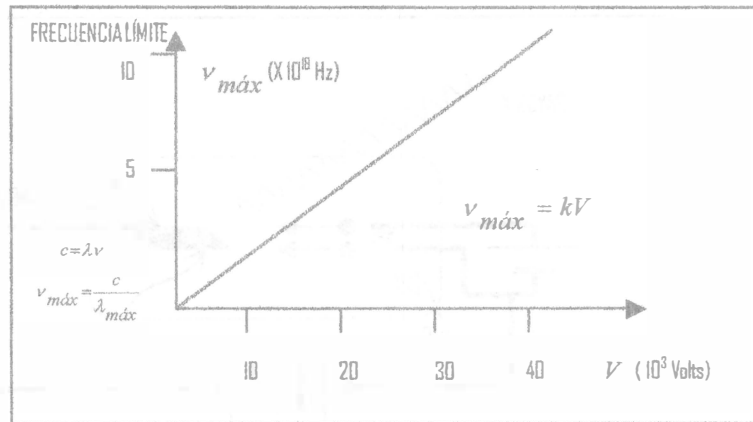


Figura 4.7.3

Lo que indica una dependencia lineal entre la longitud de onda mínima (o frecuencia máxima) y el potencial acelerador, relación que no se puede obtener de la teoría clásica.

La solución a este problema, es decir, la existencia de una longitud de onda mínima, es fácilmente explicable, si se considera a los rayos X, no como ondas, sino como fotones. Veamos esto.

Según la nueva concepción, el proceso de frenado de los electrones es el causante de la producción de **rayos X**, que serán fotones emitidos por este proceso. A éstos se les da el nombre de fotones de frenado o fotones Bremsstrahlung<sup>13</sup>, este proceso se muestra esquemáticamente en la figura 4.7.4.

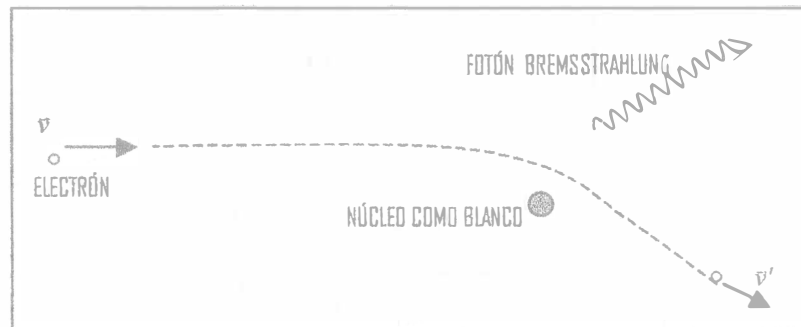


Figura 4.7.4

<sup>13</sup> Bremsstrahlung, del alemán Brems=frenado; Strahlung= radiación

Ahora, utilizando la conservación de la energía tenemos

$$\begin{aligned} E_c &= h\nu + E'_c \\ h\nu &= E_c - E'_c \end{aligned} \quad (4.7.1.1)$$

Donde  $E_c$  es la energía cinética inicial del electrón;  $E'_c$  es la energía cinética del electrón después del encuentro; y  $h\nu$  es la energía del fotón emitido. Utilizando la relación  $c = \lambda\nu$  en la relación (4.7.1.1)

$$\frac{hc}{\lambda} = E_c - E'_c \quad (4.7.1.2)$$

El fotón con longitud de onda más corta, que a su vez será el fotón con mayor energía ( $E = h\nu$ ) se emitirá cuando un electrón pierda toda su energía cinética en su proceso de desaceleración, en este caso  $E'_c = 0$  y tendremos

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (4.7.1.3)$$

Ahora, considerando el potencial acelerador tenemos

$$E_c = eV \quad (4.7.1.4)$$

$$\begin{aligned} eV &= \frac{hc}{\lambda_{\min}} \\ \lambda_{\min} &= \frac{hc}{eV} \Rightarrow \lambda_{\min} = \lambda_{\min}(V) \end{aligned}$$

o

$$v_{\max} = \frac{e}{h}V \Rightarrow v_{\max} = v_{\max}(V)$$

Por tanto, la interpretación fotónica de la luz permite predecir la longitud de onda mínima que la teoría clásica no puede obtener, sin embargo para el caso límite, donde  $h \rightarrow 0$  tenemos que  $\lambda_{\min} \rightarrow 0$ , es decir, no hay tal longitud de onda mínima como nos dice la teoría clásica.

Este fenómeno nos permite también dar una predicción del valor de la constante  $h$ , por ejemplo, para una de las curvas experimentales tenemos:  $\lambda_{\min} = 3.11 \times 10^{-11} m$  ;  $V = 4 \times 10^4 \text{ volts}$

$$h = \frac{eV\lambda_{\min}}{c} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} c)(4 \times 10^4 \text{ volts})(3.11 \times 10^{-11} m)}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} = 6.64 \times 10^{-34} J \cdot \text{seg}$$

Así que la existencia de una longitud de onda mínima en los **rayos X** es un fenómeno cuántico. Una observación interesante es si denotamos el proceso bremsstrahlung como:



Esto es justo el inverso del efecto fotoeléctrico, el cual es:



Sin embargo, ninguno de los dos procesos ocurrirá con electrones libres. En ambos casos debe existir un átomo pesado en la vecindad para absorber el impulso de retroceso.

## 4.7.2 PRODUCCIÓN Y ANIQUILACIÓN DE PAR

En un artículo publicado en 1928, Paul.A.M. Dirac (físico inglés) notó que había dos veces más soluciones para la ecuación relativista del electrón<sup>14</sup> que las esperadas. Declaró que la mitad de éstas deberían referirse a estados electrónicos con valores negativos de energía. Debido a que la teoría cuántica permite que tengan lugar transiciones discontinuas, los estados negativos de la energía no pueden ser ignorados como si fueran soluciones sin sentido. Dirac asoció la solución no "deseada" con un electrón de carga  $+e$  y lo denominó positrón.

En esta sección estudiaremos dos procesos que tiene que ver con el positrón de Dirac. El primero ocurre cuando los fotones se encuentran con átomos y pierden toda su energía y a cambio se crean un electrón y un positrón y el segundo es el proceso inverso cuando se encuentran un electrón y un positrón y se crean dos fotones a estos procesos se les conoce como La producción y aniquilación de par respectivamente y aunque el conocimiento exacto de estos fenómenos es bastante difícil, podemos dar una idea general del fenómeno utilizando los conocimientos aprendidos en las secciones previas.

---

<sup>14</sup>  $\square^2 \Psi = m^2 \Psi ; \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = m^2 \Psi$  Ecuación relativista para el electrón conocida como ecuación de Klein y es análoga a la ecuación clásica

de Schrödinger  $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$ , con  $\Psi$  la función de onda de Schrödinger que estudiaremos en la segunda parte de estas notas.

## PRODUCCIÓN DE PAR

Se llama producción de par a la creación de un electrón y un positrón por la interacción de un fotón de alta energía ( rayos  $\gamma$  ) con un núcleo masivo en reposo. La figura 4.7.2.1 esquematiza el proceso. La producción de un par también es buen ejemplo de la conversión de energía radiante en energía de masa en reposo, así como en cinética

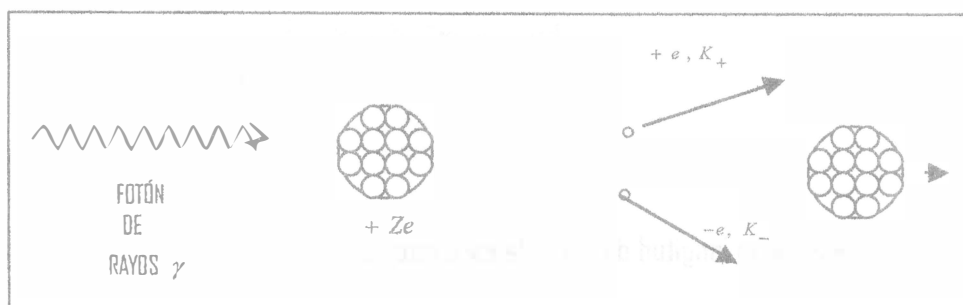


Figura 4.7.2.1

Experimentalmente el positrón fue observado accidentalmente por Carl David Anderson y Robert Millikan en 1932, cuando estudiaban rayos cósmicos. El experimento consistía en una cámara de nubes dentro de un intenso campo magnético. En muchas fotografías de la cámara de nubes, observaron rastros típicos de partículas cargadas tales como los electrones, sólo que la trayectoria se curvaba en la dirección no esperada en la presencia de un campo magnético. El electrón y el positrón tiene cargas de igual magnitud, pero la carga del positrón es positiva mientras que la del electrón es negativa. El positrón es la antipartícula del electrón, es un antielectrón. En la figura 4.7.2.2, se muestra un par electrón - positrón en la presencia de un campo magnético uniforme. En este caso, las partículas se mueven en trayectorias circulares opuestas de acuerdo al signo de su carga

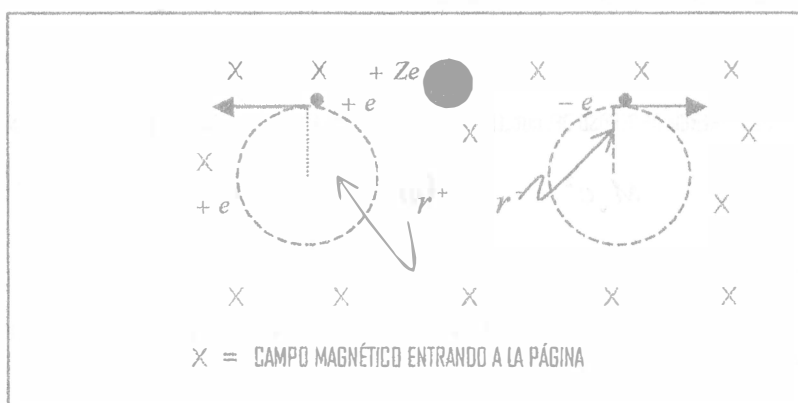


Figura 4.7.2.2

Calculemos la energía que se necesita para crear un par utilizando los conceptos de conservación de carga y momento lineal al considerar el fenómeno como una colisión entre partículas. En el proceso se ignorarán los detalles de la interacción misma, considerando únicamente la situación antes y después de la interacción, además se considera la energía cinética del núcleo como cero, ya que el núcleo es sumamente masivo y tiene una velocidad mucho menor que la de los ligeros electrón y positrón.

Por la conservación de la energía, la energía mínima del fotón incidente es

$$h\nu_{\min} = m^-_0c^2 + m^+_0c^2$$

$$\nu_{\min} = \frac{2m_0c^2}{h}$$

donde  $m^- = m^+ = m_0$ , así que la longitud de onda de este fotón es

$$\frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{2m_0c^2}{h}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{ch}{2m_0c^2} = \frac{h}{2m_0c}$$

Utilizando los valores numéricos de  $h$ ,  $c$  y  $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  obtenemos el valor para  $\lambda_{\max}$

$$\lambda_{\max} = 1.21 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Entonces, para la creación de un par tenemos que utilizar un fotón de rayos gamma. El balance de energía para este proceso será:

ENERGÍA DEL FOTÓN INCIDENTE + ENERGÍA DE REPOSO DEL NÚCLEO = ENERGÍA TOTAL DEL ELECTRÓN + ENERGÍA TOTAL DEL POSITRÓN + ENERGÍA TOTAL DEL NÚCLEO

$$h\nu + M_0c^2 = (m^-_0c^2 + K^-) + (m^+_0c^2 + K^+) + (M_0c^2 + K_n)$$

(4.7.2.1)

Considerando que el núcleo es sumamente masivo y tiene una velocidad mucho menor que la del positrón y el electrón, la ecuación (4.6.1) toma la forma

$$h\nu = (m^-_0c^2 + K^-) + (m^+_0c^2 + K^+) \tag{4.7.2.2}$$

Podemos calcular la energía total del positrón o electrón en este proceso, ya que la intensidad del campo magnético es conocida y el radio de las trayectorias circulares se puede medir. Por tanto, el momento de una de las partículas es

$$p = mv \quad (4.7.2.3)$$

la fuerza magnética que le provoca el movimiento está dada por la expresión

$$\vec{F} = e\vec{v} \times B \quad (4.7.2.4)$$

dada la trayectoria circular  $F = m \frac{v^2}{r}$ , así que

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{r} &= evB \\ mv &= erB \end{aligned} \quad (4.7.2.5)$$

sustituyendo (4.7.2.5) en (4.7.2.3)

$$p = erB \quad (4.7.2.6)$$

donde  $e$  es la carga del electrón o del positrón.

Por lo tanto, la energía total del positrón o el electrón se obtiene utilizando la expresión relativista

$$E = \sqrt{E_0 + p^2 c^2} \quad (4.7.2.7)$$

sustituyendo (4.6.6) en (4.6.7) obtenemos finalmente, para la energía de estas partículas, la expresión

$$E = \sqrt{E_0 + (erB)^2 c^2} \quad (4.7.2.8)$$

Este proceso, como la radiación de frenamiento, no ocurrirá a menos que haya un átomo cerca para suministrar el impulso de retroceso necesario, simbólicamente tenemos:

$$\text{FOTÓN} \Rightarrow \text{ELECTRÓN} + \text{POSITRÓN}$$



## ANIQUILACIÓN DE PAR

Al efecto inverso de la producción de par se le conoce como aniquilación de par. En la aniquilación de par, al interactuar una partícula y su antipartícula se unen y se anulan. La materia desaparece y en su lugar obtenemos energía de radiación. Cuando se tiene un par electrón-positrón tenemos una especie de átomo con un electrón. A este átomo se le llama positronio y existe hasta que el electrón y el positrón se aniquilan. La figura 4.7.2.3 ilustra esta interacción.

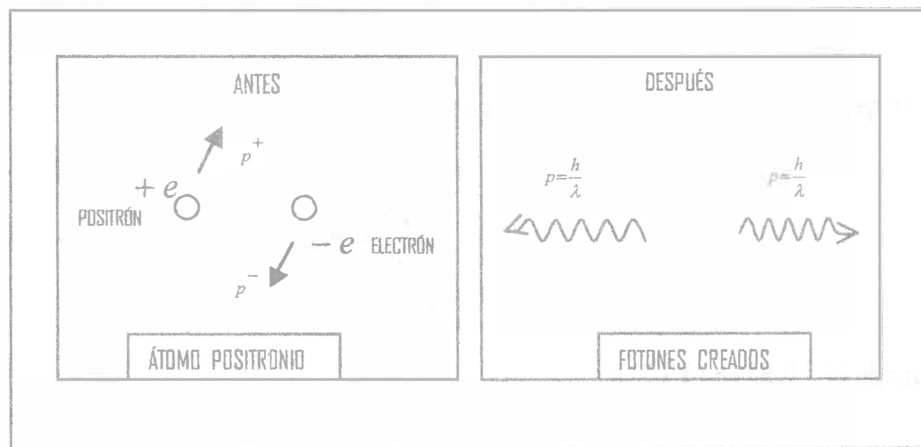


Figura 4.7.2.3

En el cálculo elemental podemos considerar que en el proceso el electrón y el positrón están esencialmente en reposo. Entonces, por conservación del momento lineal, se deben de crear dos fotones en el proceso, porque un solo fotón no puede tener cantidad de movimiento cero, esto es:

Momento antes de la interacción = Momento después de la interacción

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

donde  $\vec{p}_1$  = momento del fotón 1 y  $\vec{p}_2$  = momento del fotón 2. Por tanto

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_2}{c} \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \nu_2$$

El valor de la máxima longitud de onda de los fotones creados se obtiene del balance de energía

$$m_0^- c^2 + m_0^+ c^2 = h\nu_{min} + h\nu_{min} \quad (4.6.9)$$

donde hemos considerado que inicialmente el electrón y el positrón están en reposo y  $m_0^-$ ,  $m_0^+$  son las masas en reposo del electrón y el positrón respectivamente. Como  $m_0^- = m_0^+ = m_0$ , tenemos:

$$2m_0c^2 = 2h\nu_{\min}$$

$$\nu_{\min} = \frac{m_0c^2}{h} \Rightarrow \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{m_0c^2}{h} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{h}{m_0c}$$

sustituyendo los valores numéricos

$$\lambda_{\max} = \frac{6.64 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{\left(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}\right) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}$$

$$\lambda_{\max} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Así que los rayos creados en la aniquilación de par son rayos gamma. El balance general para esta interacción es

$$(m_0^-c^2 + k^-) + (m_0^+c^2 + k^+) = 2h\nu$$

donde  $k^+$  y  $k^-$  son las energías cinéticas de las partículas antes de la interacción. Simbólicamente este proceso se puede representar como:



## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. - Una hoja delgada de potasio se coloca a 3 metros de una fuente de luz débil cuya potencia es 1 watt. Suponga que un fotoelectrón expulsado puede tomar su energía de un área circular de una lámina delgada, cuyo radio es un radio atómico ( $r \approx 0.5 \times 10^{-10} m$ ). La energía requerida para sacar a un electrón a través de la superficie de potasio es de cerca de 1.8 eV. ¿Cuánto tiempo tardaría tal blanco para absorber esta misma cantidad de energía de dicha fuente de luz? Suponga que la energía de la luz está distribuida uniformemente en el frente de onda.

2.- Deduzca la función de trabajo para el sodio sabiendo que la frecuencia umbral para el sodio es  $\nu_0 = 4.39 \times 10^{14} \frac{1}{seg}$ .

3.- ¿A qué rapidez por unidad de área chocan los fotones del problema 1 con una placa metálica de 10 metros de lado? Considere que la luz es monocromática de  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ .

4.- Considere:

a) Un haz de rayos X, con  $\lambda = 1 \text{ \AA}$

b) Un haz de rayos gamma provenientes de una muestra de  $Cs^{137}$ , con  $\lambda = 1.88 \times 10^{-2} \text{ \AA}$

Si la radiación dispersada a partir de electrones libres se observa a  $90^\circ$  de haz incidente

- (i) ¿Cuál es el desplazamiento de longitud de onda de Compton en cada caso?
- (ii) ¿Qué energía cinética se cede en cada caso a un electrón que rebota?
- (iii) ¿Qué porcentaje de la energía del fotón incidente se pierde en cada caso en la colisión?

5.- El análisis de la fotografía de una cámara de burbujas revela la creación de un par electrón-positrón, cuando los fotones pasan a través de una lámina delgada de materia. Las huellas dejadas por el paso del electrón y el positrón tienen curvaturas opuestas en el campo magnético uniforme de  $0.20 \frac{\text{webers}}{m^2}$ , siendo sus radios de  $2.5 \times 10^{-2} m$ . ¿Cuál era la energía y longitud de onda del fotón que produjo el par?

6.- La figura representa el proceso de anulación en un sistema de referencia  $S$ , en que el par electrón - positrón está en reposo allí y los dos fotones de aniquilación se mueven a lo largo del eje  $x$ .

- Encuentre la longitud de onda de estos fotones en función de la masa en reposo del electrón.
- Ahora considere el mismo evento de aniquilación, como se observa en el sistema  $S'$ , que se mueve respecto a  $S$  con una velocidad  $v$  a la izquierda. ¿Qué longitud de onda registra este observador(en movimiento), para los fotones de anulación?



## EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

I.- Para cada una de las siguientes proposiciones elija la opción que contiene la respuesta correcta

1. Los resultados de la teoría electromagnética son que la luz ( )  
 (a) es un conjunto de corpúsculos llamados fotones (b) es una onda electromagnética  
 (c) es un fenómeno dual (d) es una onda y partícula a la vez
  
2. Los cuerpos negros son ( )  
 (a) cuerpos calientes que absorben parte de la radiación electromagnética que incide en ellos  
 (b) cuerpos calientes que emiten radiación electromagnética de longitud de onda corta  
 (c) cuerpos calientes que emiten radiación térmica con el mismo espectro a una temperatura dada  
 (d) cuerpos calientes que reflejan la radiación electromagnética que incide en ellos
  
3. En un cuerpo negro ( )  
 (a) toda la luz que incide sobre él de longitud mayor a  $1\text{Å}$  se absorbe y menor a  $1\text{Å}$  se refleja  
 (b) toda la luz que incide sobre él de longitud menor a  $1\text{Å}$  se absorbe y mayor a  $1\text{Å}$  se refleja  
 (c) toda luz incidente se absorbe si y sólo si tiene una frecuencia menor a  $10^{22}$  Hz  
 (d) toda la luz, de cualquier frecuencia que incide sobre él se absorbe
  
4. En el experimento de radiación de cuerpo negro se encuentra una frecuencia máxima para cada temperatura utilizada. Si se grafica esta frecuencia contra la temperatura, se encuentra una relación que se conoce como la ley de desplazamiento de Wien la cual tiene la forma ( )  
 (a)  $\lambda_{max} = kT, k = cte.$  (b)  $\lambda_{max} = kT^{-1}, k = cte.$   
 (c)  $\lambda_{max} = kT^2, k = cte.$  (d)  $\lambda_{max} = kT, k = \nu = frecuencia$
  
5. A la física clásica le fue imposible resolver el problema de la radiación del cuerpo negro. Esta falla se conoce como "catástrofe ultravioleta", porque la teoría no concuerda con el experimento a ( )  
 (a) longitudes de onda bajas (b) frecuencias menores a  $10^2$  Hz.  
 (c) energías altas (d) longitudes de onda del orden de  $10^7$  m
  
6. El error de la física clásica en el estudio de la radiación del cuerpo negro fue considerar que ( )  
 (a) los valores de la energía eran cantidades discretas de magnitud  $h\nu$   
 (b) la energía era emitida a chorros por osciladores en el interior de la cavidad de cuerpo negro  
 (c) la energía promedio de cada onda depende de la frecuencia  
 (d) la energía promedio es la misma para cada onda de la cavidad, independientemente de su frecuencia

7. Max Planck da solución al problema de radiación de cuerpo negro proponiendo que ( )  
 (a) la ley de equipartición de la energía es correcta para frecuencias bajas  
 (b) la energía promedio es proporcional a la temperatura absoluta  
 (c) la energía promedio es una variable discreta y depende de la frecuencia  
 (d) la energía es un continuo
8. Una característica del efecto fotoeléctrico que no se puede explicar en términos de la teoría ondulatoria es ( )  
 (a) la existencia de una frecuencia de umbral (b) la emisión de electrones por acción de la luz  
 (c) la intensidad de luz (d) la corriente fotoeléctrica
9. Einstein resuelve el problema del efecto fotoeléctrico proponiendo que ( )  
 (a) la energía de la luz, una vez emitida, se distribuye en el espacio como una onda  
 (b) la energía radiante existe en paquetes concentrados, más tarde denominados fotones  
 (c) la energía radiante es una onda electromagnética  
 (d) la energía se distribuye uniformemente en el espacio
10. Según la física Moderna, los rayos X son ( )  
 (a) radiación electromagnética de longitud de onda grande  
 (b) fotones que se emiten durante la colisión de electrones de alta velocidad sobre los átomos de algún material  
 (c) radiación electromagnética de frecuencia muy baja  
 (d) fotones producidos por la anulación de un par positrón - electrón
11. En el efecto Compton el fotón incidente transfiere parte de su energía al electrón con el cual choca, por tanto, el fotón dispersado debe tener una energía ( )  
 a) más grande (b) la mitad de la energía del fotón incidente  
 c) menor que la energía incidente (d) mucho más grande que la energía incidente
12. Las unidades de la constante de Planck son: ( )  
 (a) Joules (b) (Newton) (metro) (c) (Joules)(segundo) (d) Joules /segundo

# 5

## Naturaleza Ondulatoria de la Materia

"Quien origina un nuevo concepto... encuentra por regla general mucho más difícil averiguar por qué los demás no le entienden que descubrir las nuevas verdades."

Hermann von Helmholtz

"Si queremos hablar sobre el mundo, tenemos que contentarnos con imágenes y parábolas, casi como un lenguaje religioso"

Werner Heisenberg

"La naturaleza acepta nuestra penetración en sus misterios solamente bajo condiciones. Cuanto más aclaramos el secreto de la posición, más profundamente se esconde el secreto de la velocidad"

Werner Heisenberg

# Capítulo 5

## NATURALEZA ONDULATORIA DE LA MATERIA

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Einstein supuso que la radiación electromagnética consiste no en ondas, si no en corpúsculos que se mueven con la velocidad de la luz ( $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ) y por lo tanto, tienen masa nula y cada uno de ellos tiene una energía que está relacionada con la frecuencia de radiación  $\nu$ , de acuerdo a la relación

$$E = h\nu \quad (5.1.1)$$

Donde  $h = 6.624 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg}$  es la constante de Planck<sup>1</sup>. Los corpúsculos así definidos reciben el nombre de fotones. De esto se desprende un hecho de fundamental importancia para los inicios de la física moderna: la radiación electromagnética se puede considerar como un fenómeno ondulatorio o como un fenómeno corpuscular. Esto va a depender del tipo de fenómeno que se esté estudiando. Es importante aclarar que no se está diciendo que la radiación electromagnética sea las dos cosas, onda y partícula, lo que suena bastante extraño<sup>2</sup>. Lo que entendemos es que se comporta o bien como onda o bien como partícula, dependiendo de la situación experimental que se esté analizando, lo cual resulta también bastante misterioso, pero esto es un hecho al que nos conduce la teoría, como veremos en este capítulo.

En analogía con la radiación electromagnética se postuló que también el electrón se comportaba a veces como onda, en circunstancias experimentales adecuadas, haciendo así universal la idea de la dualidad onda-partícula.

Otro problema que se presentaba era el concepto de trayectoria. En mecánica clásica, para determinar la trayectoria de una partícula basta especificar su posición (coordenadas) y su velocidad (cantidad de movimiento) en un instante arbitrario dado y luego, utilizando la segunda ley de Newton, podemos calcular la posición de la partícula en cada instante de tiempo. Lo que se afirma con esto es que en mecánica clásica se puede medir con precisión ilimitada ambas cantidades, posición y velocidad, a la vez. Sin embargo, cuando se empezó a profundizar en el estudio atómico y al considerar la dualidad se encontró que si el electrón se comporta como una onda no tiene sentido asignarle una trayectoria. Por eso se llegó a la conclusión de que había que abandonar el concepto de trayectoria y considerar la posibilidad de que no se cumpliera la simultaneidad de la medida de la posición y velocidad de las partículas.

<sup>1</sup> El estudio de esta constante se trató en los capítulos anteriores.

<sup>2</sup> Es como decir que en casa tenemos un gato-perro.



Estas situaciones estaban fuera del alcance de la física clásica, donde se trata de ondas o de partículas, pero nunca de una extraña posición de dualidad onda-partícula. Esto condujo a buscar un nuevo marco teórico a estas situaciones.

En este capítulo trataremos esta clase de problemas y sus soluciones, las cuales constituyeron la base de una nueva teoría, conocida actualmente como mecánica cuántica.

## 5.2 HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

Mauricio De Broglie fue un físico experimental francés quien, desde el principio, había defendido el punto de vista de Compton de la naturaleza corpuscular de la radiación. Sus experimentos impresionaron tanto a su hermano Louis que éste cambió su carrera de historia por la de física. Fue Louis quien en su tesis doctoral de 1924 propuso la naturaleza ondulatoria de la materia.

De Broglie propuso su hipótesis en las siguientes palabra :

*“La dualidad aparente en el comportamiento de la radiación como ondas y como partículas, se aplica igualmente a la materia, es decir, un cuanto de radiación lleva asociado una onda que gobierna su movimiento y de manera análoga una cantidad de materia lleva asociada una onda que gobierna su movimiento.”*

Para De Broglie los aspectos ondulatorios de la materia están relacionados cuantitativamente con los aspectos de partícula, exactamente de la misma forma como se encontró para la radiación. De Broglie supuso que todas las partículas deben, en determinadas circunstancias, comportarse como ondas, cuya longitud de onda asociada satisface la relación

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.2.1)$$

donde  $p$  es la cantidad de movimiento de la partícula. Esta relación postulada por De Broglie es una ley de la naturaleza, la cual se verifica experimentalmente bajo condiciones adecuadas.

En abril de 1925, C.J. Davisson, estaba ocupado dispersando electrones de un blanco de níquel policristalino. Al colaborar con L. Germer, sucedió una explosión en el laboratorio, pero después de ordenar todo de nuevo, estaba claro que había sucedido algo muy extraño: los datos " cambiaron por completo". Sin saberlo, al limpiar el blanco calentándolo durante mucho tiempo, la muestra de níquel se había convertido en unos pocos cristales grandes. Cuando a continuación dirigieron un haz de electrones a la muestra, vieron una figura de difracción idéntica a la producida por los rayos X, aunque es imposible que un haz de partículas la produzca. Pasó un año más antes de que alguien se diera cuenta de que Davisson y Germer habían comprobado la hipótesis de De Broglie; la ecuación 5.2.1 coincidía con los datos en todos sus detalles, es decir, los electrones con cantidad de movimiento comparable a la de los cuantos de rayos X se difractan como si fueran con la misma longitud de onda que éstos.

### 5.3 VELOCIDAD DE ONDA DE DE BROGLIE

La representación de la onda de un cuerpo en movimiento, según la hipótesis de De Broglie, corresponde a un paquete de ondas o un grupo de ondas, cuyas ondas constituyentes tengan amplitudes que varíen con la probabilidad de detección del cuerpo.

Primero veamos que la suposición de que la onda de De Broglie se propaga con la velocidad de onda y no con la velocidad de grupo es incorrecta.

Sea  $u$  la velocidad de onda de De Broglie, entonces

$$u = \lambda \nu \quad (5.3.1)$$

donde  $\nu$  y  $\lambda$  son la frecuencia y longitud de la onda. La hipótesis de De Broglie nos dice

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu'} \quad (5.3.2)$$

donde  $u'$  es la velocidad de la partícula, además utilizando las relaciones también válidas para este caso  $E = h\nu$  y  $E = mc^2$  tenemos

$$\nu = \frac{mc^2}{h} \quad (5.3.3)$$

sustituyendo (5.3.2) y (5.3.3) en (5.3.1)

$$u = \frac{c^2}{u'} \quad (5.3.4)$$

puesto que  $u'$  no es mayor o igual que la velocidad de la luz, porque se supone que estamos tratando con partículas diferentes del fotón, hemos encontrado que bajo esta suposición la velocidad de onda de De Broglie es siempre mayor que  $c$ , sin embargo, esto no es posible de acuerdo con los resultados de la relatividad especial, como vimos en los capítulos anteriores. Así que la única posibilidad es intentar la interpretación a través del concepto de velocidad de grupo.

Se puede determinar la velocidad de una partícula a partir de la expresión para la energía cinética

$$E = \frac{p^2}{2m}, \text{ ya que}$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m}$$

y puesto que  $p = mu$

$$u = \frac{dE}{dp}$$

La teoría ondulatoria define la velocidad de grupo de un paquete de ondas como

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.3.5)$$

donde  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular y  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda. Calculando tenemos

$$u_g = \frac{d(2\pi\nu)}{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = -\frac{d\nu}{\frac{1}{\lambda^2}d\lambda} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (5.3.6)$$

También, de la hipótesis de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow d\lambda = -\frac{h}{p^2} dp \quad (5.3.7)$$

y de las relaciones de la relatividad especial

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \Rightarrow dE = \frac{c^2 p}{E} dp \quad (5.3.8)$$

$$E = h\nu \Rightarrow d\nu = \frac{dE}{h} \quad (5.3.9)$$

sustituyendo (5.3.8) en (5.3.9)

$$d\nu = \frac{c^2 p}{Eh} dp \quad (5.3.10)$$

Ahora (5.3.7) y (5.3.10) en (5.3.6)

$$u_g = \frac{\lambda^2 c^2 p^3}{Eh^2} \quad (5.3.11)$$

pero de la hipótesis de De Broglie, nuevamente

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{h^2} = \frac{1}{p^2} \quad (5.3.12)$$

sustituyendo (5.3.12) en (5.3.11)

$$u_g = \frac{pc^2}{E} \quad (5.3.13)$$

Finalmente, utilizando  $p = mu$  y  $E = mc^2$  en esta última relación, obtenemos

$$u_g = \frac{muc^2}{mc^2} = u \quad (5.3.14)$$

Por lo tanto, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de la partícula, es decir, la partícula se asocia no con una onda, si no, con un paquete de ondas de De Broglie, cuya velocidad de grupo es igual a la velocidad de la partícula.

## 5.4 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

“  
 Paseando por el parque de Foelldespark, una noche limpia y clara, de cielo estrellado, para respirar un poco de aire fresco antes de dormir, se me ocurrió la idea "obvia" de que debería de postularse que la naturaleza sólo permitiría aquellas situaciones experimentales que pudiesen describirse con el formalismo de la mecánica cuántica. Esto implicaría, como se deduce del formalismo matemático, que si  $A$  y  $B$  son dos variables que no conmutan entre sí, no pueden medirse simultáneamente.”

Werner Heisenberg

Retomemos el problema de encontrar la trayectoria de una partícula. Como ya hemos mencionado, en mecánica clásica basta utilizar las ecuaciones de Newton especificando sus coordenadas y momento en un tiempo arbitrario. Esto significa que podemos medir simultáneamente ambas cantidades a la vez, es decir, si llamamos  $\Delta x$  y  $\Delta p_x$  a los errores que se cometen al medir una coordenada y el momento lineal asociado a ella, respectivamente, entonces para cualquier instante  $t_0$

$$\Delta x|_{t=t_0} = \Delta p_x|_{t=t_0} = 0 \quad (5.4.1)$$

Sin embargo, en la nueva teoría física el concepto de trayectoria pierde su significado. Esto se comprueba teóricamente dentro del marco de la mecánica cuántica (teoría que no discutiremos a fondo en estas notas, pero que se tocará con bastante generalidad), donde la posición y el momento son dos variables que no conmutan entre sí y esto implica que no son mensurables simultáneamente, lo que nos dice que la nueva teoría introduce algún principio que impide satisfacer la relación (5.4.1). Este principio fue formulado por el físico alemán Werner Heisenberg y se conoce como **principio de incertidumbre de Heisenberg** y es la base de la nueva física conocida como mecánica cuántica.

El principio de incertidumbre nos dice que la imprecisión en la medición de la variable  $x$ , digamos  $\Delta x$ , multiplicada por la imprecisión en la medición simultánea de  $p_x$ , digamos  $\Delta p_x$  es necesariamente mayor o igual a  $\frac{h}{4\pi}$ , es decir:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.4.2)$$

donde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Las variables  $x$  y  $p_x$  se denominan variables canónicas conjugadas. Una relación análoga es aplicable a los pares de variables  $(y, p_y)$  y  $(z, p_z)$ . Se puede también establecer relaciones del mismo tipo entre los pares de variables canónicas ángulo y momento angular para los tres ejes y para el par energía y tiempo.

Es importante señalar que no deja de ser extraño que el principio de incertidumbre, base fundamental de la mecánica cuántica, es un principio que dice lo que no se puede hacer y no lo que se puede hacer.

La ecuación (5.4.2) establece que no se puede medir simultáneamente con infinita precisión las variables  $x$  y  $p_x$ , es decir, sin cometer error en ambas medidas. Porque, si se elige conocer con precisión la coordenada  $x$  de la partícula  $\Delta x = 0$ , en virtud del principio de incertidumbre,  $\Delta p_x$  se hace infinito, a fin de que el segundo miembro siga siendo una constante no nula. Recíprocamente, si se elige conocer con absoluta precisión el momento de la partícula, se pierde al mismo tiempo toda información con respecto a la posición. El principio de incertidumbre de Heisenberg excluye así, por completo, la posibilidad de definir la trayectoria de un objeto dentro de la nueva teoría (mecánica cuántica).

En los inicios de la nueva teoría, es decir, de la mecánica cuántica, el físico danés Niels Bohr jugó un papel fundamental y del cual nos ocuparemos en el siguiente capítulo. En lo que se refiere al principio de incertidumbre, cuando Niels Bohr vio el trabajo elegante y formal de Heisenberg expresó no sólo cierto escepticismo, sino descontento. Su objeción fundamental fue que Heisenberg no introducía el dualismo entre ondas y partículas. Después de varias semanas de discusiones, llegaron finalmente a la conclusión de que en realidad ambas posturas eran equivalentes y que las relaciones de incertidumbre son un caso particular de una dualidad onda - partícula, ahora conocida como el **principio de complementariedad**. Veamos esta idea con un poco más de detalle.

Para Bohr, los conceptos mismos de la física clásica son indispensables en la descripción de los sistemas cuánticos, conceptos como posición, ímpetu, tiempo y energía. De este modo, para extraer conclusiones precisas de mediciones experimentales se requiere que los experimentos mismos sean descriptibles por medio de la física clásica. Esto es, en cuanto concierne a los dispositivos de medición, los efectos de la constante  $h$  son o pueden ser despreciados. Si mediante un dispositivo experimental se quiere hacer una determinación precisa de un aspecto corpuscular, es imposible a partir de una medición simultánea con el mismo dispositivo, extraer un conocimiento preciso de un aspecto ondulatorio, a esto se le llamó principio de complementariedad. Este principio está íntimamente relacionado con el carácter de la descripción mecánico-cuántica de la naturaleza, lo cual implica que ciertos conceptos, indispensables para una descripción completa, son en cierto sentido contradictorios entre sí y la complementariedad expresa este tipo peculiar de contradicción. Esta postura resume lo que hoy en día se conoce como la escuela de Copenhague de la mecánica cuántica.

Finalmente es importante señalar que el principio de incertidumbre implica que, en la nueva teoría cuántica, el rigor con que se puede hacer una medición no depende sólo del observador. Resulta que siempre que se mide una propiedad de un sistema cuántico se cambia su estado y este cambio ocurre de una manera que no puede ser controlada por el observador. Así que el principio de incertidumbre nos proporciona un criterio para distinguir entre sistemas clásicos y los nuevos sistemas cuánticos: los sistemas cuánticos siempre serán perturbados por la medición de sus variables dinámicas.

Del principio de incertidumbre se desprende también que la descripción de un sistema cuántico es menos detallada que la que se puede dar de un sistema no cuántico, porque el conocimiento del sistema cuántico será necesariamente más incompleto.

## 5. 5 DEDUCCIONES APROXIMADAS DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

En esta sección trataremos de explicar, sin mayor detalle, algunas de las más comunes deducciones del principio de incertidumbre. En ninguna de ellas entraremos en detalle y omitiremos la deducción o demostración de algunas relaciones, por estar fuera del alcance de este trabajo.

### 5.5.1 EXPERIMENTO IMAGINARIO IDEADO POR NIELS BOHR

El problema es medir, tan precisamente como sea posible, la posición de una partícula puntual, digamos un electrón. Para mayor precisión, se utiliza un microscopio para observar al electrón, como lo muestra la figura 5.5.1.1.

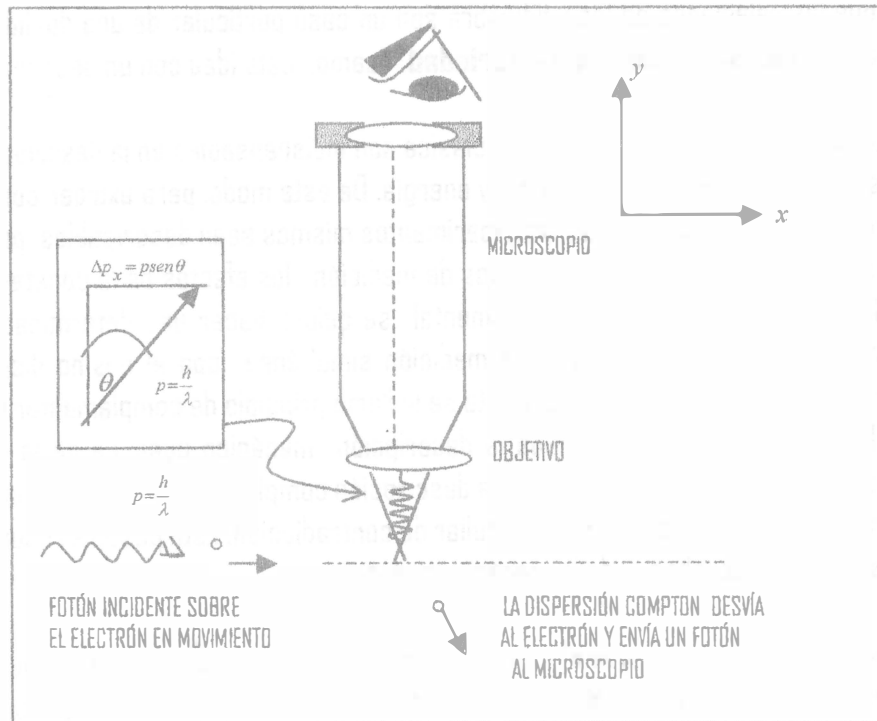


Figura 5.5.1.1

Pero para ver el electrón debemos iluminarlo. Entonces, son realmente los cuantos de luz dispersados por el electrón los que ve el observador. En este punto, aun antes de que se haga cualquier cálculo, podemos ver que surge el principio de incertidumbre. El solo hecho de observar al electrón lo perturba. Al momento que iluminamos al electrón, éste rebota por el efecto Compton, en una forma que no se puede determinar con todo detalle. Pero si no iluminamos al electrón, no lo vemos (detectamos). De aquí que el principio de incertidumbre se refiera al propio proceso de medición y exprese el hecho de que siempre hay una interacción indeterminada entre el observador y lo observado.

Ahora bien, de la óptica geométrica sabemos que el poder resolutivo del microscopio permite una incertidumbre en la medición de la posición de

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2 \text{sen } \theta} \quad (5.5.1.1)$$

Para poder ver al electrón, el fotón dispersado debe entrar al microscopio dentro del ángulo  $2\theta$ . Por tanto, la componente  $x$  de la cantidad de movimiento del fotón puede variar de  $+p \text{sen } \theta$  a  $-p \text{sen } \theta$ , así, de la figura 5.5.1.1 la incertidumbre en la medida es de

$$\Delta p_x \approx 2p \text{sen } \theta \quad (5.5.1.2)$$

donde  $p$  es la magnitud del momento lineal del fotón incidente y se expresa de la forma

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (5.5.1.3)$$

Ahora bien, el fotón dispersado de que se dispone se originó en "alguna parte", dentro de los límites del microscopio. Esto nos dice que la incertidumbre en la localización del electrón es  $\Delta x$ . Se debe hacer notar que, para reducir la incertidumbre  $\Delta x$ , debemos utilizar luz de longitud de onda más corta o un microscopio con un ángulo  $\theta$  mayor, esto se deduce de la ecuación (5.5.1.1).

Si multiplicamos las ecuaciones (5.5.1.1) y (5.5.1.2) tenemos

$$\Delta x \Delta p_x \approx \left( \frac{\lambda}{2 \text{sen } \theta} \right) (2p \text{sen } \theta)$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx \lambda p$$



utilizando (5.5.1.3)

$$\Delta x \Delta p_x \approx \lambda \frac{h}{\lambda}$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$

y como  $h \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$  podemos concluir

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.5.1.4)$$

Esta ecuación es el principio de incertidumbre de Heisenberg y nos indica que no podemos hacer  $\Delta p_x$  y  $\Delta x$  simultáneamente tan pequeños como queramos, ya que el procedimiento que reduce a una agranda a la otra.

## 5.5.2 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE CONSIDERANDO LAS VARIABLE ENERGÍA Y TIEMPO

Consideramos una partícula libre, digamos un electrón, que se mueve a lo largo del eje  $x$  y cuya energía cinética es  $E = \frac{p_x^2}{2m}$ . Si consideramos la incertidumbre de su momento lineal en la dirección  $x$  como  $\Delta p_x$ , entonces la incertidumbre en su energía se calcula como

$$\Delta E = \left( \frac{2p_x}{2m} \right) \Delta p_x$$

y considerando la relación para  $p_x$

$$p_x = mu_x$$

obtenemos

$$\Delta E = u_x \Delta p_x \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{\Delta E}{\Delta p_x} \quad (5.5.2.1)$$

Si se aplica esto para el caso del microscopio de Bohr de la sección anterior,  $u_x$  representa la velocidad de rechazo del electrón a lo largo del eje  $x$  cuando se iluminó. Si el intervalo de tiempo requerido para la observación del electrón es  $\Delta t$ , entonces la incertidumbre de su posición  $x$  es

$$\Delta x = u_x \Delta t$$

lo que nos permite obtener la relación

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5.5.2.2)$$

Así, igualando (5.5.2.1) y (5.5.2.2) obtenemos

$$\frac{\Delta E}{\Delta p_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p_x$$

pero de la sección anterior sabemos que  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ , lo que nos permite concluir que

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.5.2.3)$$

que es otra manera de representar el principio de incertidumbre en términos de las variables energía y tiempo.

### 5.5.3 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE CONSIDERANDO LA DIFRACCIÓN DE LA ONDA ASOCIADA AL ELECTRÓN

Consideremos un haz paralelo de electrones que pasan a través de una única ranura colocada en la trayectoria del haz; esto provocará un espectro de difracción formado sobre la pantalla, como muestra la figura 5.5.3.1.

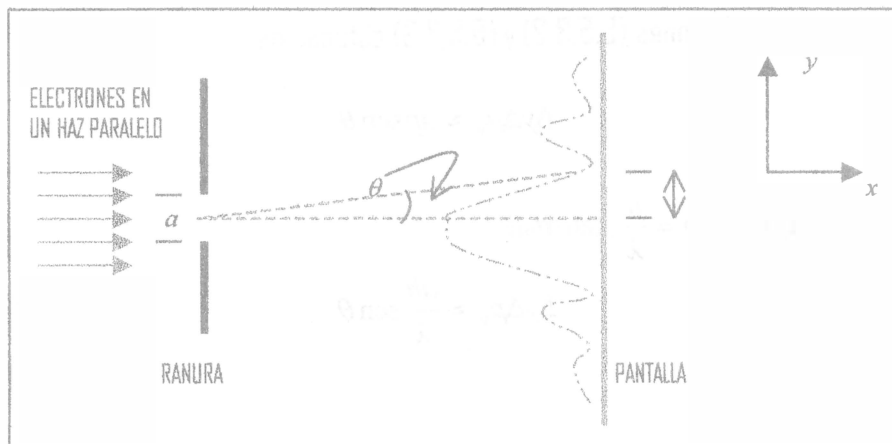


Figura 5.5.3.1

Desde el punto de vista ondulatorio, podemos considerar esto como el paso de una onda monocromática plana de longitud de onda  $\lambda$  a través de una sola ranura de anchura  $a$ . En la óptica geométrica sabemos que el ángulo  $\theta$  para el primer mínimo de difracción está dado por la relación

$$a \operatorname{sen} \theta = \lambda \quad (5.5.3.1)$$

Desde el punto de vista de la partícula, el espectro da la distribución estadística sobre la pantalla de un gran número de electrones de cantidad de movimiento incidente  $p$ , que pueden desviarse hacia arriba o hacia abajo al pasar a través de la ranura. Nuevamente aquí aparece la dualidad onda-partícula. Si se cuenta la llegada de los electrones individuales a la pantalla, aparece el aspecto de partícula. Si se observa la distribución total sobre la pantalla, esto es, el espectro de difracción, aparece el aspecto ondulatorio.

Por lo tanto, para un solo electrón que llega a la pantalla, no sabemos con exactitud dónde pasa a través de la ranura, sino sólo que pasa a través de la misma. Entonces, la incertidumbre, en la coordenada  $y$  de la ranura, es del orden del ancho de la misma; esto es:

$$\Delta y \approx a \quad (5.5.3.2)$$

En cuanto a la componente  $y$  de la cantidad de movimiento de un solo electrón de la ranura, no tenemos certeza de su valor, pero sabemos, por la existencia del espectro de difracción, que los electrones adquieren cantidad de movimiento vertical, al desviarse allí. Si consideramos que  $\theta$  es el ángulo de desviación promedio (no sabemos exactamente dónde pegará el electrón en la pantalla) entonces la incertidumbre  $\Delta p_y$  de la componente  $y$  de la cantidad de movimiento del electrón es del orden

$$\Delta p_y \approx p \operatorname{sen} \theta \quad (5.5.3.3)$$

por tanto, si multiplicamos las relaciones (5.5.3.2) y (5.5.3.3) obtenemos

$$\Delta y \Delta p_y \approx a p \operatorname{sen} \theta$$

utilizando la relación de De Broglie  $p = \frac{h}{\lambda}$ , tenemos

$$\Delta y \Delta p_y \approx \frac{ah}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad (5.5.3.4)$$

finalmente, sustituyendo (5.5.3.1) en (5.5.3.4)

$$\Delta y \Delta p_y \approx h$$

de donde, como  $h \geq \frac{\hbar}{2}$ , podemos concluir que

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.5.3.5)$$

La relación (5.5.3.5) se conoce como principio de **incertidumbre de Heisenberg**.

## 5.5.4 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE A PARTIR DEL CONCEPTO ONDULATORIO

El hecho de que un cuerpo en movimiento deba considerarse como un grupo de ondas de De Broglie, sugiere que existe un límite básico para la seguridad con que nosotros podemos medir sus propiedades corpusculares. En la representación ondulatoria de la partícula se puede considerar el centro de la onda como representante de la posición de la misma, sin embargo, no es fácil localizar el centro de una onda para situar a la partícula. Una posibilidad es considerar el grupo de ondas estrecho. Esto nos da mayor precisión para localizar el centro, pero, de acuerdo con la relación de De Broglie ( $\lambda = \frac{h}{p}$ ) se pierde precisión para determinar la longitud de onda.

Ahora bien, si el grupo es ancho se puede tener precisión en la longitud de onda, pero del centro no (posición de la partícula).

Ahora consideremos los grupos de ondas que se producen cuando se combinan las ondas de De Broglie. Sean  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  dos ondas que se combinan para formar un grupo de ondas, esto es

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A \cos(\omega t + kx) \\ \Psi_2 &= A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] \end{aligned}$$

donde  $\omega$  y  $k$  son la frecuencia angular y el número de onda respectivamente. Combinando estas relaciones

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 \\ \Psi &= 2A \cos(\omega t + kx) \cos\left[\frac{1}{2} \Delta\omega t - \frac{1}{2} \Delta kx\right] \end{aligned} \quad (5.5.4.1)$$

La representación esquemática de este grupo de ondas se muestra en la figura 5.5.4.1, donde el subíndice  $m$  indica modulación.

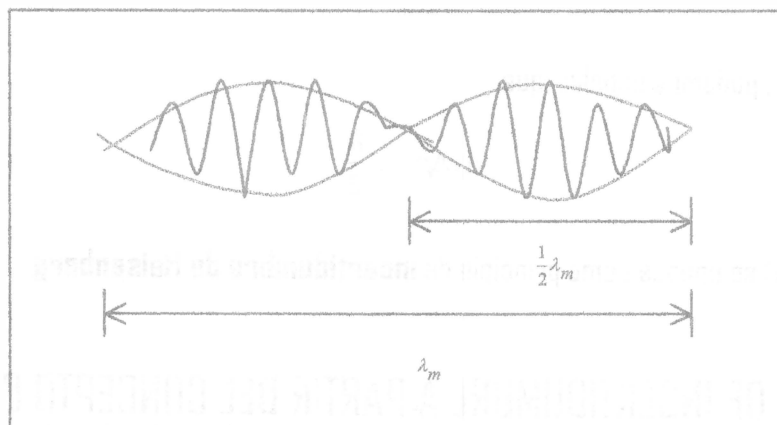


Figura 5.5.4.1

En consecuencia, es razonable proponer que la magnitud de indeterminación  $\Delta x$  es

$$\Delta x \approx \frac{1}{2} \lambda_m \quad (5.5.4.2)$$

donde

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} \quad (5.5.4.3)$$

pero, aplicando la ecuación (5.5.4.2), obtenemos que

$$k_m = \frac{\Delta k}{2} \quad (5.5.4.4)$$

ahora utilizando (5.5.4.4) y (5.5.4.3) en (5.5.4.2) obtenemos

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (5.5.4.5)$$

que es la indeterminación en la constante de propagación. Si a continuación utilizamos el postulado de De Broglie,  $\lambda = \frac{h}{p}$ , la constante de propagación correspondiente a esta longitud de onda es

$$k = \frac{2\pi p}{h}$$

lo que nos permite obtener la cantidad de movimiento

$$p = \frac{hk}{2\pi}$$

cuya incertidumbre sería

$$\Delta p = \frac{h\Delta k}{2\pi} \tag{5.5.4.6}$$

sustituyendo (5.5.4.5) en (5.5.4.6) tenemos

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x \Delta p = h$$

y nuevamente como  $h \geq \frac{\hbar}{2}$ , podemos concluir que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

otra vez el **principio de incertidumbre**.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una partícula de masa  $m$  está confinada en un tubo angosto de longitud  $L$ . Encuentre:
  - a) La longitud de onda de la onda de De Broglie que resonará en el tubo.
  - b) Los momentos en la resonancia.
  - c) Las energías correspondientes.
  - d) Calcule las energías para un electrón en un tubo con una longitud  $L = 0.5nm$
  
2. Se mide un valor de  $5 \times 10^3 \frac{m}{s}$  para la velocidad de un electrón hasta una precisión de 0.0030%. Encuentre la incertidumbre al determinar la posición de este electrón.
  
3. Suponga que la incertidumbre en la posición de una molécula de hidrógeno, cuya masa es de cerca de  $2 \times 10^{-27} kg$ , es del orden de su diámetro, alrededor de  $10^{-10} m$ . Muestre que el momento de esta molécula no puede ser especificado con una precisión mayor que el 170% de su valor original. Considere que esta molécula se está moviendo con una velocidad de  $2 \times 10^3 \frac{m}{s}$
  
4. En su modelo de átomo de hidrógeno, Thomson supuso que hay un electrón dentro de una región esférica de densidad de carga positiva uniforme  $\rho$ .
  - a) Demuestre que su movimiento será armónico simple.
  - b) Suponiendo que la carga positiva total es igual a la del electrón y que está distribuida en una región esférica de radio  $r = 1 \times 10^{-10} m$ , encuentre la frecuencia del movimiento del electrón
  
5. Suponga que un núcleo atómico tiene  $1 \times 10^{-14} m$  de diámetro, aplique el principio de incertidumbre para calcular la energía cinética de un electrón confinado en ese espacio. Compárela con el intervalo de energías de los rayos beta ( de 0.025 MeV a 3.2 MeV). Recuerde que la energía en reposo de un electrón es 0.511 MeV.

<sup>3</sup> Considere  $\Delta x \Delta p_x \geq h$

## EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

I.- Para cada una de las siguientes proposiciones elija la opción que contenga la respuesta correcta

1. La naturaleza ondulatoria de la materia ( )
  - a) se encuentra experimentalmente
  - b) se postula
  - c) se deduce de la teoría especial de la relatividad
  - d) es falsa
  
2. De acuerdo con el principio de incertidumbre, si ganamos precisión en la medida de la posición de una partícula: ( )
  - a) ganamos precisión en la medida de su energía
  - b) perdemos el concepto de cuanto
  - c) perdemos precisión en la medida de su velocidad
  - d) perdemos precisión en la medida de su masa
  
3. El principio de incertidumbre de Heisenberg se expresa matemáticamente por medio de la relación ( )
  - a)  $\Delta E \Delta t \geq h$
  - b)  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$
  - c)  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
  - d)  $\Delta x \Delta p_x \leq \frac{\hbar}{2}$
  
4. - El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que ( )
  - a) no se puede medir simultáneamente y con infinita precisión  $x$  y  $p_x$
  - b) los errores en las medidas de  $x$  y  $p_x$  son cero
  - c) los errores en las medidas de  $x$  y  $p_x$  son infinitos
  - d) se puede medir simultáneamente y con infinita precisión  $x$  y  $p_x$
  
5. - Con el principio de incertidumbre se pierde el concepto clásico de ( )
  - a) masa
  - b) velocidad
  - c) energía
  - d) trayectoria
  
6. - El principio de incertidumbre implica que ( )
  - a) los sistemas cuánticos no se perturban por la medición de sus variables dinámicas
  - b) los sistemas cuánticos se perturban por la medición de sus variables dinámicas
  - c) los sistemas cuánticos no se distinguen de los sistemas clásicos
  - d) los sistemas cuánticos son improbables



# BIBLIOGRAFÍA

Aguilar G. (Compilador) (1983) *La física contemporánea* (U.N.A.M.)

Andrade A. (1998) *El desarrollo de la tecnología* (Fondo de Cultura Económica)

Barrow J. D. y Silk J. (1998) *El lado izquierdo de la creación* (Fondo de Cultura Económica)

Brogie L. De y Fok V. A.(1987) *Examen de la mecánica cuántica* (U.N.A.M.)

Carmona G. et al. (1995) *Michael Faraday: Un genio de la física experimental* (Fondo de Cultura Económica)

Cline Lovett (1994) *Los creadores de la nueva física* (Fondo de Cultura Económica)

Close Frank (1983) *The Cosmic Onion* (Heinemann Educational Books )

Duncan R. y Weston-Smith M.(1977) *La enciclopedia de la ignorancia* (Fondo de Cultura Económica)

Einstein A (1989) *El mundo tal como yo lo veo* (Dante, S. A.)

Einstein A y Infeld L (1939) *La Física, aventura del pensamiento* (Losada)

Feynman R. y Weinberg S.(1991) *Las partículas elementales y las leyes de la física* (Gedisa)

Feynman R., Leighton R.B. y Sands M. (1972) *Física, Electromagnetismo y materia*( Addison-Wesley Iberoamericana)

García-Colín S L. Et al. (1986) *Niels Bohr: Científico, Filósofo, Humanista* (Fondo de Cultura Económica)

Hacyan Shahan (1995) *Relatividad especial para estudiantes de física* (Fondo de Cultura Económica)

Heisenberg W, Tiselius A. y Yukawa H (1987) *El humanismo en la filosofía de la ciencia* (U.N.A.M)

- Heisenberg W (1988) *Diálogos sobre la física atómica* (Universidad Autónoma de Puebla)
- Holton G. (1985) *La imaginación científica* (Fondo de Cultura Económica)
- Jiménez R. (compilador) *Schrödinger: Creador de la mecánica ondulatoria* (Fondo de Cultura Económica)
- Landau L.D.y Lifshitz E.M.(1965) *Teoría Clásica de Campos* (Reverté, S.A.)
- Lass Harry (1984) *Análisis Vectorial y Tensorial* (C.E.C.S.A.)
- Llano Manuel De (1996) *Mecánica Cuántica* (U.N.A.M.)
- Lorentz H.A., Einstein A., Minkowski H. and Weyl H.(1952) *The Principle of relativity* (Dover)
- Menchaca Rocha A. (1996) *El discreto encanto de las partículas elementales* (Fondo de Cultura Económica)
- Moshinsky M (1987) *Espacio, Tiempo y Paridad* (U.N.A.M.)
- Planck Max (1987) *Autobiografía Científica* (U.N.A.M)
- Reitz J.R., Milford F.J. y Christy R.W, *Fundamentos de la teoría electromagnética*, (Addison-Wesley Iberoamericana)
- Rodríguez R y Hojman S (compiladores) (1987) *Albert Einstein: Perfiles y Perspectivas* (Nueva imagen)
- Schrödinger Erwin (1998) *Ciencia y Humanismo* (Metatemas)
- Schutz Bernard (1984) *A first course in general relativity* (Cambridge University Press)
- Sazánov A.(1988) *El Universo tetradimensional de Minkowski* (Mir Moscú)
- Selleri F.(1986) *El debate de la teoría cuántica* (Alianza Editorial)
- Serway Raymond A (1997) *Física, Tomo II* (McGraw-Hill)
- Sokolnikoff I.S. (1982) *Análisis tensorial* (Limusa)

Tolman Richard C. (1987) *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Dover Publications, Inc)

Wald R. M. (1977) *Space, Time and Gravity* (The University of Chicago Press)

Weinberg Steven (1985) *Partículas subatómicas* (( Editorial labor)

Weinberg Steven (1977) *Los tres primeros minutos del universo* (Salvat)

---

Esta obra se terminó de imprimir  
en enero de 2001  
en el taller de imprenta del  
Departamento de Publicaciones  
de la Facultad de Ingeniería,  
Ciudad Universitaria, México, D.F.  
C.P. 04510

**Secretaría de Servicios Académicos**

El tiraje consta de 300 ejemplares  
más sobrantes de reposición.

---